გ. პაპიტაშვილი

უმაღლესი მათემატიკის პრაქტიკუმი

II ნაწილი

ინტეგრალური აღრიცხვა და დიფერენციალური განტოლებანი

უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისა და დაუსწრებელი ინსტიტუტებისათვის

სახელმწიფო ტფილისი სამეც. ლიტერატურის
გამომცემლობა 1935 სექტორი

51
პ. — 91 — უ.

სტილისტი: ე გ ნ ა ტ ა შ ვ ი ლ ი
კორექტორი: გ. ო გ ა ნ ა ზ ო ვ ი
გადაეცა წარმოებას: 15/XII—34 წ.
ხელმოწერილია დასაბ. 26/XII—34 წ.
სტ. ქალ. 62×94. წ. ზ. $6^1/_2 \times 10^1/_2$
მთავლიტის რწმ. № ა — 2130
ტირაჟი 3000. შეკვ. № 768

სახელგამის 1-ლი სტამბა, პლეხ. პრ. № 91

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი პირველი ნაწილის (ზღვართა თეორია და დიფერენციალური აღრიცხვა) გაგრძელებას წარმოადგენს. ამიტომ ამ წიგნსაც ძირეულად იგივე მიზნები აქვს დასახული, რაც პირველს (იხილე პირველი წიგნის წინასიტყვაობა).

როგორც თავის დროზე პირველი წიგნის შესახებაც იყო ნათქვამი, „პრაქტიკუმი" არ წარმოადგენს ჩვეულებრივი ტიპის ამოცანათა კრებულის მსგავს წიგნს. ეს არის, ასე ვთქვათ, ამოცანათა ამოხსნის ხერხების ანუ მეთოდების კრებული, რომელმაც ერთგვარი ხელმძღვანელის სამსახური უნდა გაუწიოს, უმთავრესად, იმ მკითხველს, რომელსაც საშუალება არა აქვს ცოცხალი სიტყვა მოუსმინოს მასწავლებელს.

ვფიქრობთ, ამ პრაქტიკუმის შემდეგ მკითხველი ადვილად შესძლებს დამოუკიდებელი მუშაობა აწარმოოს უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა ჩვეულებრივ კრებულებზე.

წიგნის მთელ მანძილზე მომარჯვებულია, უმთავრესად, პრაქტიკული მეთოდები — ის მეთოდები, რომლებსაც ფართო გამოყენება აქვს საინჟინერო-სატექნიკო პრაქტიკაში. ამ მხრივ წიგნში საკმაო რაოდენობით არის ნაჩვენები პრაქტიკული მითითებანი, რომელთა მიზანი სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ მკითხველს უნდა ასწავლოს არა მარტო ინტეგრალის გამოთვლა, არამედ გამოთვლა მოკლედ და მოხდენილად მინიმალური დროისა და ენერგიის დახარჯვით.

ამ მიზნით, $\int f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$ სახის ინტეგრალის გამოთვლის დროს ეილერის ჩასმას მეორეხარისხოვანი მნიშვნელობა ენიჭება, რადგანაც ამ ჩასმას ხსენებული ინტეგრალისთვის უფრო თეორიული ხასიათი აქვს, ვიდრე პრაქტიკული ღირებულება. პრაქტიკულად მიზანშეწონილია აღნიშნული სახის ინტეგრალი დაყვანილ იქნას $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$ ინტეგრალზე.

ნაკლები ყურადღება აქვს აგრეთვე დათმობილი $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=z$ უნივერსალურ ტრიგონომეტრიულ ჩასმას. სამაგიეროდ, საპატიო ადგილი უჭირავს

მოკლე და გამარტივებულ მეთოდებს. მაგალითად, $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$

ინტეგრალი აღნიშნული ჩასმით საკმაოდ რთულ სახეს ღებულობს:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}=2\int \frac{dz}{(1+z^2)\left[\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2+4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(1+z^2)\,dz}{z^4-z^2+1}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის ბოლომდე დაყვანა კიდევ რთულ კომბინაციებს მოითხოვს. მოცემული ინტეგრალი პრაქტიკულად ადვილად გამოითვლება, თუ მრიცხველსა და მნიშვნელს $\cos^2 x$-ზე გავყოფთ:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+4}=\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x+4}.$$

აღვნიშნოთ $\operatorname{tg} x=z$, გვექნება:

$$\int \frac{dz}{z^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}+C.$$

აგრეთვე $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^7 x}$ ინტეგრალისთვის ხსენებულ ჩასმას აზრი არა აქვს. მართლაც,

$$\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^7 x}=\int \frac{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\cdot\frac{2dz}{1+z^2}}{\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7}=64\int \frac{z^5(1+z^2)dz}{(1-z^2)^7}.$$

პრაქტიკულად ინტეგრალი ასე გამოითვლება:

$$\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^7 x}=\int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^5 x\,d\operatorname{tg} x.$$

აღვნიშნოთ $\operatorname{tg} x=z$, გვექნება:

$$\int z^5\,dz=\frac{z^6}{6}=\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}+C.$$

$$\int \sin^6 x \cos x \, dx = \int \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^6 \frac{1-z^2}{1+z^2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = 512 \int \frac{z(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)^{10}}$$

პრაქტიკულად:

$$\int \sin^6 x \cos x \, dx = \int \sin^8 x \, d \sin x = \int z^8 \, dz = \frac{z^9}{9} = \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

ამ მაგალითებით მკითხველი ადვილად მიხვდება, რომ საერთო მეთოდების გამოყენება მაშინ არის მიზანშეწონილი, როდესაც პრაქტიკული ხერხებით ინტეგრალის გამოთვლა მოუხერხებელია.

იმ მოსაზრებით, რომ წიგნი ზედმეტად არ დატვირთულიყო, მიზანშეწონილად ვცანი ისეთი საკითხების გამოტოვება, რომლებსაც საინჟენერო პრაქტიკაში ნაკლები გამოყენება აქვს.

განუსაზღვრელი ინტეგრალების სავარჯიშოებში პასუხები განზრახ არ არის ნაჩვენები, რადგანაც გაწარმოების საშუალებით მკითხველს თვითონ შეუძლიან დარწმუნდეს მათს სისწორეში. ეს მოსაზრება იმ მხრივაც უნდა ჩაითვალოს მიზანშეწონილად, რომ მკითხველს საშუალება ეძლევა ინტეგრალებთან ერთად ერთხელ კიდევ გაიხსენოს გაწარმოების წესები. რა თქმა უნდა, ეს მოსაზრება მკითხველმა ისე არ უნდა გაიგოს, თითქოს ყოველი ინტეგრალის გამოთვლის შემდეგ სავალდებულო იყოს პასუხის შემოწმება. ასეთი შემოწმება, საერთოდ, სავალდებულო არ არის.

სანიმუშოდ გარჩეულ ინტეგრალებში მკითხველს ზოგიერთ შემთხვევაში დავალების სახით ეძლევა პასუხების შემოწმება.

წიგნის შედგენის დროს, უმთავრესად, შემდეგი წყაროებით ვსარგებლობდი:

Мордухай-Болтовской. Систематический сборник упражнений по дифференц. и интегральному исчислению, часть II.

Штрайхман. Сборник упражнений и задач по высшей математике.

Четыре автора. Сборник задач по высшей математике.

Вера Шифф. Сборник упражнений и задач по дифференц. и интегральному исчислению.

Берг и Фридолин. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Филипс. Интегральное исчисление.

Смирнов. Курс высшей математики.

Выгодский. Основы исчисления бесконечно-малых.

Билибин. Курс математического анализа.

Орленко. Высшая математика.

Рабочая книга по математике под редакцией проф. Хинчина.

Фихтенгольц. Математика для инженеров, ч. II.

წინამდებარე წიგნში სულ ათასამდე ამოცანა და სავარჯიშოა, აქედან, დაახლოვებით, ოცდაათი ამოცანა და სავარჯიშო აღნიშნული წყაროებიდან შევიტანე (ნაწილი უცვლელად და ნაწილი გადმოკეთებული სახით), ხოლო დანარჩენები კი ორიგინალურია.

ავტორი.

თავი პირველი

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

წინასწარი შენიშვნა. ინტეგრალური აღრიცხვა დიფერენციალური აღრიცხვის შებრუნებული ოპერაციაა, ე. ი., თუ დიფერენციალურ აღრიცხვაში მოცემულია ფუნქცია და უნდა მოვძებნოთ მისი წარმოებული, ინტეგრალურ აღრიცხვაში შებრუნებით — მოცემულია წარმოებული და უნდა მოიძებნოს პირველყოფილი ფუნქცია.

ამრიგად, ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა ასეთია: *მოცემულია ფუნქციის წარმოებული (ან, სულერთია, დიფერენციალი) და უნდა ვიპოვოთ თვით ეს ფუნქცია.*

ასეთი გზით მოძებნილ ფუნქციას მოცემული დიფერენციალის ინტეგრალი ანუ ანტიდიფერენციალი ეწოდება, ხოლო თვით ინტეგრალის მოძებნის პროცესს—ინტეგრობა ანუ ინტეგრაცია. ამ ოპერაციის აღსანიშნავად შემოღებულია $\int$ სიმბოლო*, რომელიც მოცემული დიფერენციალის წინ იწერება ყოველთვის. ასე, მაგალითად, თუ $3x^2\,dx$ დიფერენციალის მიხედვით გვინდა მოვძებნოთ მისი პირველყოფილი ფუნქცია, დავწერთ: $\int 3x^2\,dx = x^3$.

მართლაც, დაწერილი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიფერენციალი ნამდვილად არის $3x^2\,dx$. მაგრამ საქმე ისაა, რომ x^3+5, $x^3-\frac{2}{5}$, $x^3+0{,}2$ და ასე შემდეგ ფუნქციათა დიფერენციალებიც აგრეთვე არის $3x^2\,dx$. მაშასადამე, როდესაც $3x^2\,dx$ დიფერენციალის მიხედვით გვინდა პირველყოფილი ფუნქცია ვიპოვოთ, უნდა კარგად გვახსოვდეს, რომ ასეთი ფუნქცია მხოლოდ ერთი კი არ არსებობს, არამედ მრავალი. ყველა ეს ფუნ-

* ეს ნიშანი წარმოადგენს დეფორმაციაქმნილ S ასოს, „Summa“-ს პირველ ასოს. საქმე ისაა, რომ იმის მაგივრად, რომ ინტეგრალი განვსაზღვროთ როგორც დიფერენციალური აღრიცხვის შებრუნებული მოქმედება, ჩვენ შეგვიძლიან ის განვსაზღვროთ როგორც „შეჯამების პროცესი“.

უნდა შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკულად ინტეგრალის გამოთვლა უფრო მარჯვე და მოხერხებული პირველი განმარტების საფუძველზე.

ქცია ჩვენ შეგვიძლიან დავწეროთ ასეთი x^3+C ორწევრის სახით, სადაც C არის ნებითი მუდმივი სიდიდე „Constante“ (C შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი).

სწორედ იმის გამო, რომ დაყენებულ საკითხს ერთი გარკვეული პასუხი კი არა აქვს, არამედ უამრავი (ყველა ესენი ერთმანეთისაგან მუდმივი სიდიდით განსხვავდებიან), — ინტეგრალს განუსაზღვრელი ეწოდება.

ამრიგად, განუსაზღვრელ ინტეგრალს ყოველთვის თან ერთვის ნებითი მუდმივი სიდიდე. ამ სიდიდის არსებობა არის დამახასიათებელი განუსაზღვრელი ინტეგრალისთვის. ზოგადად ეს გარემოება ასე იწერება:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

ამ ტოლობის როგორც მარჯვენა მხარე, ისე მარცხენა წარმოადგენს განუსაზღვრელ ინტეგრალს.

ზემოთ ვთქვით, რომ ინტეგრალური აღრიცხვა დიფერენციალური აღრიცხვის შებრუნებული ოპერაციაა. მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ ორი ოპერაციის ბუნება არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან. იმ დროს, როდესაც ყოველი ელემენტარული ფუნქციის (ალგებრული, ტრიგონომეტრიული, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული) გადიფერენციების რეზულტატი ელემენტარულსავე ფუნქციას წარმოადგენს, ინტეგრაციის შედეგი ყოველთვის როდი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

ამრიგად, არსებობს მთელი რიგი ინტეგრალები, რომლებიც ელემენტარულ ფუნქციათა საშუალებით არ გამოისახება. ესენი შეადგენენ ეგრეთწოდებულ უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა კლასს.

ასე, ამგვარად, ინტეგრალური აღრიცხვა, ერთის მხრივ, პირველყოფილი ფუნქციის მოძებნის მეთოდებს განიხილავს, ხოლო, მეორე მხრივ, უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა თვისებებსა და მათს კლასიფიკაციას შეისწავლის.

შემდეგში ჩვენ საქმე გვექნება პირველყოფილი ფუნქციის მოძებნის მეთოდებთან.

უნდა კარგად გვახსოვდეს, რომ ინტეგრალის გამოთვლა (პირველყოფილი ფუნქციის მოძებნა) დიფერენციალის მოძებნასთან შედარებით, საერთოდ, ძნელსა და რთულ საქმეს წარმოადგენს. სირთულეს აქ ის გარემოება ქმნის, რომ არ არსებობს ერთი საერთო მეთოდი, რომლის მიხედვითაც შეიძლებოდეს ინტეგრალის გამოთვლა. გრენვილი ამის შესახებ სამართლიანად შენიშნავს: „интегрирование, в сущности, есть процесс целесообразно направленных гаданий и попыток“.

მაშასადამე, მკითხველს მოეთხოვება მოფიქრებული და თანდათანობითი მუშაობა, რომ გადალახულ იქნას ის მთავარი სიძნელენი, რომლებიც ინტეგრალის გამოთვლას ახასიათებს.

I. უშუალო ინტეგრაცია

როდესაც ინტეგრალის გამოთვლა შესაძლებელია უშუალოდ იმ წესების მიხედვით, რომლებიც დიფ. აღრიცხვაშია განხილული, გამოთვლის ასეთ მეთოდს *უშუალო ინტეგრაცია* ეწოდება.

უშუალო ინტეგრაციის (ანუ უმარტივესი ინტეგრალები) ფორმულები ასეთია:

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

შენიშვნა: პირველი ფორმულა სამართლიანია m-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (მთელი, წილადი, დადებითი, უარყოფითი, გარდა, როდესაც $m = -1$. ამ შემთხვევაში გვაქვს მეორე ფორმულა).

შემოწმება: თითოეული ფორმულის (ტოლობის) მარჯვენა მხარე, რომ გავადიფერენციოთ, მივიღებთ ინტეგრალქვეშ მდგომ გამოსახულებას. საერთოდ, უნდა გვახსოვდეს, რომ, როდესაც გვინდა გავიგოთ, სწორად არის ინტეგრალი გამოთვლილი თუ არა, ამისათვის საკმარისია მარჯვენა მხარე გავადიფერენციოთ და თუ ინტეგრალქვეშ მდგომ გამოსახულებას მივიღებთ, მაშინ ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულ ინტეგრალზე უშუალოდ არ გამოიყენება არც ერთი ზემოთ მოყვანილი ფორმულა, მაშინ საჭიროა წინასწარი გარდაქმნა. უმარტივესი გარდაქმნა ასეთია:

a) მუდმივი მამრავლი ინტეგრალის ნიშნით გარეთ გამოიტანება, ე. ი.

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

b) ჯამის ინტეგრალი, ინტეგრალთა ჯამის ტოლია:

$$\int (u+v-w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx - \int w\, dx\ .$$

შენიშვნა: მართალია, $\int (x^2+2x-4)\,dx$ ინტეგრალის გამოთვლის დროს საჭიროა ამ უკანასკნელის სამი ინტეგრალის ალგებრული ჯამის სახით წარმოდგენა, მაგრამ შესაძლებელია მისი პირდაპირ გამოთვლაც. ასეთი გამოთვლა შემდეგ მოსაზრებაზეა დამყარებული.

რადგან ინტეგრალქვეშ მდგომი ფუნქცია მეორე ხარისხის მთელი ალგებრული ფუნქციაა, ამიტომ მარჯვენა მხარეზე მესამე ხარისხის მთელი ალგებრული ფუნქცია გვექნება, ე. ი.

$$\int (x^2+2x-4)\,dx = Ax^3+Bx^2+Dx+C \qquad (\text{ა})$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე, გვექნება;

$$x^3+2x-4=3Ax^2+2Bx+D.$$

ეს არის იგივობა, ამიტომ ორივე მხარეზე მდგომი ტოლი ხარისხების კოეფიციენტები ტოლია, ე. ი.:

$$3A=1,\ 2B=2,\ D=-4.$$

აქედან: $A=\frac{1}{3},\ B=1,\ D=-4.$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში:

$$\int (x^2+2x-4)\,dx=\underline{\frac{x^3}{3}+x^2-4x+C.}$$

დავალება: გამოთვალეთ ანალოგიურად

$$\int (2x^3-x^2+3x-1)\,dx\,;\quad \int (3x^4-5x^2-6x+2)\,dx.$$

1. $\int 3x^5\,dx=3\int x^5\,dx=\frac{3x^6}{6}=\underline{\frac{x^6}{2}+C}$

2. $\int 4x^{-3}\,dx=4\int x^{-3}\,dx=\frac{4x^{-2}}{-2}=\underline{-2x^{-2}+C}$

3. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}=\underline{\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\underline{2x^{-\frac{1}{2}}+C}$

5. $$\int (x^3+3x-2)\,dx=\int x^3dx+3\int x\,dx-2\int dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2-2x+C$$

6. $$\int (x-3)^2\,dx=\int (x^2-6x+9)\,dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+9x+C$$

სავარჯიშო

7. $\int x^8\,dx$ 8. $\int x^{-6}\,dx$ 9. $\int \frac{3dx}{x^2}$

10. $\int 5\sqrt[4]{x^3}\,dx$ 11. $\int \frac{ab\,dx}{\sqrt[5]{x^2}}$

12. $\int (3x^4-2x-x^{-2}-1)\,dx$ 13. $\int (2x-1)^2\,dx$

14. $\int (3x^2+2)^2\,dx$ 15. $\int (x+3)^3\,dx$

16. $\int \left(a-\frac{2}{x}\right)^2 dx$ 17. $\int \frac{x^2-1}{x}\,dx$

18. $\int \frac{2^{x+3}}{4}\,dx$ 19. $\int \frac{a^{x+1}}{2}\,dx$

20. $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ 21. $\int \frac{1-\cos^2 x+\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

22. $\int \frac{1-\sin^2 x+\cos^3 x}{\cos^4 x}\,dx$ 23. $\int \frac{2+x^2}{1+x^2}\,dx$

24. $\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 25. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$; 26. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

II. ჩასმის ხერხი

ამ ხერხის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ჩასმის ანუ ახალი ცვლადის შემოყვანის საშუალებით მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრაციის ცნობილ ფორმულაზე.

1. $\int \cos 5x \; dx$

აღვნიშნოთ აქ $5x=z$, აქედან $dx=\frac{dz}{5}$

$$\int \cos 5x \, dx = \int \cos z \; \frac{dz}{5} = \frac{1}{5}\int \cos z \, dz = \frac{1}{5} \sin z =$$

$$= \underline{\frac{1}{5} \sin 5x + C}$$

დასკვნა: $$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + C,$$

$$\int \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx + C$$

აგრეთვე

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\int a^{mx} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx}}{\log a} + C$$

შეამოწმეთ დაწერილი პასუხების სისწორე.

2. $\int \frac{x \, dx}{x+3}$

აღვნიშნოთ $x+3=z$, აქედან $dx=dz$, $x=z-3$.

$$\int \frac{x \, dx}{x+3} = \int \frac{(z-3)dz}{z} = \int dz - 3\int \frac{dz}{z} = z - 3\log z =$$

$$= x+3-3\log(x+3) = \underline{x-3\log(x+3)+C}^{*}$$

მეორე ხერხი:

$$\int \frac{x \, dx}{x+3} = \int \frac{x+3-3}{x+3} dx = \int \frac{x+3}{x+3} dx - 3\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} = \underline{x-3\log(x+3)+C}$$

საერთო მითითება: მრიცხველში ემატება და აკლდება ყოველთვის მნიშვნელში მდგომი თავისუფალი წევრი (როცა ინტეგრალი აღნიშნული სახისაა).

---

* შესაკრები 3 შეყვანილია C-ში.

მესამე ხერხი: გავყოთ მრიცხველი მნიშვნელზე, გვექნება:

$$\int \frac{x\,dx}{x+3} = \int \left(1 - \frac{3}{x+3}\right) dx = \underline{x - 3\log(x+3) + C}$$

3. $$\int \frac{x^2\,dx}{x+5}$$

მრიცხველში მივუმატოთ და გამოვაკლოთ მნიშვნელში მდგომი თავისუფალი წევრის კვადრატი.

$$\int \frac{x^2 - 25 + 25}{x+5}\,dx = \int \frac{x^2 - 25}{x+5}\,dx + 25\int \frac{dx}{x+5} =$$

$$= \int (x-5)\,dx + 25\int \frac{dx}{x+5} = \underline{\frac{x^2}{2} - 5x + 25\log(x+5) + C}$$

დავალება: გამოთვალეთ იგივე ინტეგრალი ჩასმის საშუალებით, ე. ი. $x+5=z$, აგრეთვე გამოთვალეთ მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით.

4. $$\int \frac{2x\,dx}{x^2+6}$$

აღვნიშნოთ $x^2+6=z$, $2xdx=dz$

$$\int \frac{2xdx}{x^2+6} = \int \frac{dz}{z} = \log z = \underline{\log(x^2+6) + C}$$

მექანიკური წესი: როდესაც მრიცხველი წარმოადგენს მნიშვნელის დიფერენციალს, მაშინ პირდაპირ შეგვიძლიან დავწეროთ მნიშვნელის ლოგარითმი. ასე, მაგალითად,

a) $$\int \frac{3x\,dx}{x^2-1} = \underline{\frac{3}{2}\log(x^2-1) + C};$$

b) $$\int \frac{5x\,dx}{1+3x^2} = \frac{5}{6}\int \frac{6x\,dx}{1+3x^2} = \underline{\frac{5}{6}\log(1+3x^2) + C};$$

c) $$\int \frac{x^2\,dx}{2-x^3} = \underline{-\frac{1}{3}\log(2-x^3) + C};$$

d) $$\int \frac{8x^4\,dx}{x^5-a} = \underline{\frac{8}{5}\log(x^5-a) + C};$$

e) $$\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3+x^2-4x+1}\,dx = \underline{\log(x^3+x^2-4x+1) + C};$$

5. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$

ავღნიშნოთ $\sin x = z$, $\cos x\,dx = dz$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = \log z = \underline{\log(\sin x) + C}$$

დავალება: ანალოგიურად გამოთვალეთ $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

პასუხი: $\underline{-\log(\cos x) + C}$.

6. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+5}}$

ავღნიშნოთ $\sqrt{x^3+5} = z$; $\quad x^3+5 = z^2$; $\quad x^2\,dx = \frac{2}{3} z\,dz$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+5}} = \frac{2}{3}\int \frac{z\,dz}{z} = \frac{2}{3} z = \underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3+5} + C}$$

7. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

ავღნიშნოთ $\frac{x}{a} = z$; $\quad$ აქედან $dx = a\,dz$

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} z = \underline{\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C}.$$

შენიშვნა: შემდეგში მიღებული შედეგით უნდა ვისარგებლოთ, როგორც ფორმულით.

მაგალითად,

a) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + C$;

b) $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$;

c) $\int \frac{dx}{4x^2+36} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{12} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + C$;

d) $\int \frac{dx}{9x^2+2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x}{\sqrt{2}} + C.$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z =$$

$$= \underline{\arcsin \frac{x}{a} + C};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

ავღნიშნოთ $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\Big[\log(x-a) - \log(x+a)\Big] = \underline{\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C.}$$

აგრეთვე:

a) $\int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{2\cdot 5} \log \frac{x-5}{x+5} + C;$

b) $\int \frac{dx}{x^2-7} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \log \frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}} + C.$

10. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{-1} = \underline{\frac{1}{2a} \log \frac{x+a}{x-a} + C.}$$

11. $$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

აღვნიშნოთ $x+1=z$,

აქედან

$$dx=dz$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \text{arc tg } z = \underline{\text{arc tg}(x+1)+C.}$$

12. $$\int \frac{x\,dx}{x^2-6x+13}$$

მითითება: წინა ინტეგრალის ანალოგიურად, მნიშვნელი უნდა წარმოვადგინოთ ოთხი წევრის სახით. ამისთვის შუა წევრის კოეფიციენტი (6) უნდა გავყოთ ორზე (ყოველთვის ორზე უნდა გაიყოს) და ნაწილადის კვადრატი ჩამოვაცალოთ თავისუფალ წევრს (13-ს). ამ შემთხვევაში შუა წევრის კოეფიციენტის ნახევრის კვადრატი არის 9, რომელიც უნდა ჩამოვაცალოთ 13-ს.

გვექნება:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{x\,dx}{x^2-6x+9+4} = \int \frac{x\,dx}{(x-3)^2+4}$$

აღვნიშნოთ $x-3=z$,

აქედან

$$dx=dz, \quad x=z+3$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x-3)^2+4} = \int \frac{(z+3)\,dz}{z^2+4} = \int \frac{z\,dz}{z^2+4} + 3\int \frac{dz}{z^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(z^2+4) + \frac{3}{2}\text{arc tg}\,\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\log[(x-3)^2+4] +$$

$$+ \frac{3}{2}\text{arc tg}\,\frac{x-3}{2} = \underline{\frac{1}{2}\log(x^2-6x+13) + \frac{3}{2}\text{arc tg}\,\frac{x-3}{2} + C}$$

13. $$\int \frac{dx}{x^2-4x-5} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4-9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-9} =$$

$$= \int \frac{dz}{z^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\log\frac{z-3}{z+3} = \underline{\frac{1}{6}\log\frac{x-5}{x+1}} + C$$

14. $$\int \frac{dx}{x^2+3x+1}=\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{9}{4}-1\,\frac{1}{4}}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\int \frac{dz}{z^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{z-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z+\frac{\sqrt{5}}{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}+C}$$

15. $$\int \frac{2dx}{3x^2-2x-1}$$

მითითება: მართალია, მნიშვნელში ფრჩხილებს გარეთ (აგრეთვე ინტეგრალს გარეთაც) 3 გამოიტანება, მაგრამ ასეთი გარდაქმნა საკითხს გაართულებს. ასეთ შემთხვევაში ჩვეულებრივ მრიცხველი და მნიშვნელი უნდა გამრავლდეს მნიშვნელის პირველი წევრის (უმაღლესი წევრის) გაოთხკეცებულ კოეფიციენტზე, ე. ი. 12-ზე. ამით იმას მივაღწევთ, რომ მნიშვნელის პირველი წევრი გარდაიქცევა სრულ კვადრატად.

$$\int \frac{2dx}{3x^2-2x+1}=\int \frac{24dx}{36x^2-24x+12}=24\int \frac{dx}{(6x-2)^2+8}$$

აღვნიშნოთ $6x-2=z$, აქედან $dx=\frac{dz}{6}$

$$24\int \frac{dx}{(6x-2)^2+8}=24\int \frac{\frac{dz}{6}}{z^2+8}=\frac{4}{\sqrt{8}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{8}}=$$

$$=\underline{\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-1}{\sqrt{2}}+C}$$

შენიშვნა: მნიშვნელის პირველი წევრი სხვადასხვა გზით შეგვიძლიან ვაქციოთ სრულ კვადრატად, მაგრამ უპირატესობა იმ გზას უნდა მიეცეს, რომელიც წილადებისგან გვანთავისუფლებს. მაგალითად, $\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{2}{4x^2-6x+2}=\frac{2}{\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$

მეორე მხრივ, $\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{8}{16x^2-24x+8}=\frac{8}{(4x-3)^2-1}$

ცხადია, აქედან უკანასკნელი გზა (პირველი წევრის გაოთხკეცებულ კოეფიციენტზე გამრავლება) უმჯობესია.

16. $$\int \frac{\log^2 x}{x} dx = \int \log^2 x \cdot \frac{dx}{x} = \int \log^2 x \cdot d(\log x)$$

აღნიშნეთ $\log x = z$.

17. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

მნიშვნელი ასე გარდავქმნათ:

$$ax^2+bx+c = \frac{4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-b^2}{4a} = \frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a}$$

აღვნიშნოთ $2ax+b=z$, აქედან $dx = \frac{dz}{2a}$

ამრიგად, $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = 2\int \frac{dx}{z^2+(4ac-b^2)}$$

აქ უნდა გავარჩიოთ სამი შემთხვევა:

a) $b^2-4ac>0$ ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლიან აღვნიშნოთ $b^2-4ac=k^2$ მე-9 მაგალითის თანახმად

$$2\int \frac{dz}{z^2-k^2} = \frac{1}{k}\log\frac{z-k}{z+k} = \underline{\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C}$$

b) $b^2-4ac<0$. შეგვიძლიან აღვნიშნოთ $b^2-4ac=-d^2$ მე-7 მაგალითის თანახმად

$$2\int \frac{dz}{z^2+d^2} = \frac{2}{d}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{d} = \underline{\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C}$$

c) $b^2-4ac=0$, მაშინ

$$2\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{2}{z} = -\frac{2}{2ax+b}+C$$

მიღებული ფორმულების თანახმად შეგვიძლიან პირდაპირ ამოვხსნათ რიცხვითი მაგალითები.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$ ამ მაგალითში $a=1$; $b=2$; $c=2$;

$$b^2-4ac=-4<0$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \operatorname{arc\,tg}(x+1)+C$$

ამოხსენით ანალოგიურად:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-2}; \qquad \int \frac{dx}{3x^2-2x-6}$$

18. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx} = \int \frac{dx}{\frac{4a^2x^2+4abx+b^2-b^2}{4a}} = \int \frac{4a\,dx}{(2ax+b)^2-b^2}$$

თუ ავღნიშნავთ $2ax+b=z$, გვექნება:

$$2\int \frac{dz}{z^2-b^2} = \frac{1}{b}\log\frac{z-b}{z+b} = \underline{\frac{1}{b}\log\frac{ax}{ax+b}+C}$$

ამოხსენით:

$$\int \frac{dx}{3x^2+2x}; \qquad \int \frac{dx}{5x^2-4x}$$

სავარჯიშო

19. $\int \frac{x\,dx}{x+1}$

20. $\int \frac{3x\,dx}{x-2}$

21. $\int \frac{5x\,dx}{x-a}$

22. $\int \frac{x^2\,dx}{x+2}$

23. $\int \frac{5x^2\,dx}{x-a}$

24. $\int \frac{4x\,dx}{x^2+1}$

25. $\int \frac{ax\,dx}{3x^2+1}$

26. $\int \frac{2bx\,dx}{5x^2-3}$

27. $\int \frac{a^2x\,dx}{1-x^2}$

28. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+4}$

29. $\int \frac{3x^4\,dx}{x^5+a}$

30. $\int \frac{2a\,dx}{x^2+16}$

31. $\int \frac{8a\,dx}{x^2+10}$

32. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

33. $\int \frac{3dx}{16+25x^2}$

34. $\int \frac{dx}{4+36x^2}$

35. $\int \frac{8dx}{x^2-64}$

36. $\int \frac{5dx}{x^2-3}$

37. $\int \frac{4dx}{9x^2-4}$

38. $\int \frac{2dx}{25x^2-9}$

39. $\int \frac{dx}{(x+3)^5}$

40. $\int \frac{3dx}{(x-2)^m}$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

42. $\int \frac{4dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

43. $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{36-64x^2}}$

44. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

45. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x^2}}$

46. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$

47. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{5+x^3}}$

48. $\int \frac{8x^4dx}{\sqrt{a-x^5}}$

49. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

მითითება: აღნიშნეთ $x-1=z$

50. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

მითითება: აღნიშნეთ $x+2=z$

51. $\int \frac{6x\,dx}{1+x^4}$

მითითება: აღნიშნეთ $x^2=z$

52. $\int \frac{x^2dx}{x^2+3}$

53. $\int \frac{2x^2\,dx}{x^2-16}$

54. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

55. $\int \frac{2x\,dx}{x^2-6x+18}$

56. $\int \frac{dx}{x^2-2x-5}$

57. $\int \frac{x\,dx}{x^2+6x-27}$

58. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-4x-12}$

59. $\int \frac{dx}{x\log^2 x}$

60. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$

61. $\int \frac{dx}{x(\log^2 x-1)}$

62. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$

63. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$

64. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

65. $\int \frac{5x^3\,dx}{9+x^6}$

მითითება: აღნიშნეთ $x^4=z$

66. $\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+1}$

67. $\int \frac{x^9+2x^4}{x^{10}+4x^5+5}\,dx$

მითითება: აღნიშნეთ $x^5=z$

68. $\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x}\,dx$

მითითება: მრიცხველი და მნიშვნელი წინასწარ გაამრავლეთ 2-ზე და აღნიშნეთ $x^4+2x=z$.

69. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$

მითითება: $e^x=z$

70. $\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$

მითითება: $\sqrt{x}=z$

71. $\int \frac{1-\sin x}{\sqrt{\cos x+x}}\,dx$

$\cos x+x=z$

72. $\int e^{\operatorname{ctg} x}\ \frac{dx}{\sin^3 x}$

$\operatorname{ctg} x=z$

73. $\int \frac{(6x^2-5)\,dx}{(2x^3-5x+4)^3}$

მითითება: $2x^3-5x+4=z$

74. $\int \frac{12x^3-2x}{(3x^4-x^2+4)^6}\,dx$

75. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-1}}\,dx$

მითითება: აღნიშნეთ
$\sqrt{x^2+3x-1}=z$

76. $\int \frac{8x^3-15x^2+6}{\sqrt[3]{2x^4-5x^3+6x}}\,dx$

აღნიშნეთ $\sqrt[3]{2x^4-5x^3+6x}=z$

77. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+3}$

78. $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{5x^2+3x+2}$

79. $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^4}\,dx$ მითითება: აღნიშნეთ $x-2=z$

80. $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x+25)^6}\,dx$ მითითება: აღნიშნეთ $x+3=z$

81. $\displaystyle\int \frac{3x^3+2x+1}{x^4+2x^2+3x+x\log x}\,dx$

მითითება: მრიცხველი და მნიშვნელი გაყავით x-ზე.

82. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ აღნიშნეთ: $1+x^2=z$

83. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{2x-5}\,dx$ აღნიშნეთ $x=\frac{z+5}{2}$

84. $\displaystyle\int xe^{x^3}\,dx$ აღნიშნეთ $e^{x^2}=z$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$

მითითება: მოც. ინტეგრ. ასე წარმოადგინეთ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}} \quad \text{აღნიშნეთ } x-3=z$$

86. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+2x+1}}$

მითითება: ასე წარმოადგინეთ:

$$\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$$

აღნიშნეთ $x+\frac{1}{x}=z$

III. ნაწილობითი ინტეგრაცია

ნაწილობითი ინტეგრაციის დროს უნდა ვისარგებლოთ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \text{ (ან, სულ ერთია,}$$

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv) \text{ ფორმულით}$$

ამ ფორმულის გამოყენება შემდეგნაირად წარმოებს: ინტეგრალქვეშ მდგომ გამოსახულებაში ყველა მამრავლი (dx-ის ჩათვლით) უნდა დანაწილდეს ორ ჯგუფად. ერთი ჯგუფი აღინიშნება u-თი, ხოლო მეორე dv-თი. შემდეგ პირველი ჯგუფი უნდა გავადიფერენციოთ, მეორე—გავაინტეგროთ და მიღებული შედეგები ჩავსვათ ზემოთ აღნიშნულ ნაწილობითი ინტეგრაციის ფორმულაში. მამრავლთა დაჯგუფების დროს dx შეყვანილი უნდა იქნას იმ ჯგუფში, რომლის ინტეგრობაცაა საჭირო.

შენიშვნა: ნაწილობითი ინტეგრაციის წესს ჩვეულებრივ მაშინ მიმართავენ, როდესაც ჩასმის ხერხის გამოყენება მოუხერხებელია. უნდა კარგად გვახსოვდეს, რომ ამ წესის მომარჯვების დროს მოცემული ინტეგრალი დაყვანილი უნდა იქნას ისეთ ინტეგრალზე, რომელიც მოცემულთან შედარებით უფრო მარტივია და ადვილად გამოსათვლელი. თუ ამას ვერ მივაღწიეთ, ე. ი. თუ ნაწილობითი ინტეგრაცია უფრო რთულ ინტეგრალთან მიგვიყვანს, ვიდრე მოცემული ინტეგრალია, მაშინ ამ ხერხის გამოყენებას აზრი არა აქვს და ინტეგრალი სხვა გზით უნდა იქნას გამოთვლილი.

1. $\int x\cos x\,dx$

$$u = x; \quad \cos x\,dx = dv$$

პირველი გავადიფერენციოთ, მეორე—გავაინტეგროთ:

$$du = dx; \quad \int dv = \int \cos x\,dx \text{ აქედან } v = \sin x$$

ამრიგად, $u = x$, $v = \sin x$, $du = dx$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ ფორმულაში,

გვექნება:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = \underline{x\sin x + \cos x + C}$$

2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,dx-\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\int \frac{dx}{1+x^2}-\int x\cdot \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

პირველი ინტეგრალი უშუალოდ გამოითვლება. გამოვთვალოთ ნაწილობით მეორე ინტეგრალი, ამისთვის

$$u=x,\quad dv=\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

პირველი გავადიფერენციოთ, მეორე გავაინტეგროთ:

$$du=dx,\quad \int dv=\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

აღვნიშნოთ $1+x^2=z$, აქედან $x\,dx=\frac{dz}{2}$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{2}z^{-1}=-\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

ამრიგად,

$$u=x,\quad v=-\frac{1}{2(1+x^2)},\ du=dx$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი ფორმულაში:

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2},$$

მასასადამე:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int \frac{dx}{1+x^2}-\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}=\int \frac{dx}{1+x^2}+\frac{x}{2(1+x^2)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}=\underline{\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C}$$

შენიშვნა: ინტეგრაცია ასეც შეგვიძლიან:

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-2}\,d(1+x^2)=\frac{1}{2}\int z^{-2}\,dz=-\frac{1}{2}z^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}=v.$$

სავარჯიშო

3. $\int \log x\,dx$

4. $\int \log^2 x\,dx$

5. $\int x\sin x\,dx$

6. $\int x e^x\,dx$

7. $\int x^2\cos x\,dx$

8. $\int x^2\sin x\,dx$

9. $\int x\log x\,dx$

10. $\int x^3\cos x\,dx$

11. $\int x^2 e^{2x}\,dx$

12. $\int x^2 a^x\,dx$

1 $\int e^x\cos x\,dx$

14. $\int e^{2x}\sin x\,dx$

15. $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx$

16. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$

კითხვა: მე-6 ამოცანაში მიზანშეწონილია თუ არა მივიღოთ აღნიშვნა:

$$u=e^x,\ dv=x\,dx?$$

17. გამოვთვალოთ ასეთი ინტეგრალი

$$\int \cos^2 x\,dx$$

აღვნიშნოთ $u=\cos x$, $dv=\cos x\,dx$, აქედან $v=\sin x$, $du=\sin x\,dx$.

$$\int \cos^2 x\,dx=\sin x\cos x+\int \sin^2 x\,dx=\sin x\cos x+\int (1-\cos^2 x)\,dx=$$

$$=\sin x\cos x+x-\int \cos^2 x\,dx.$$

მარჯვენა მხარეზე მივიღეთ მოცემული ინტეგრალი. ამას „რესტავრაცია“ ანუ აღდგენა ეწოდება. თუ მარჯვენა მხარეზე მდგომ ინტეგრალს გადავიტანთ მარცხნივ, გვექნება:

$$2\int \cos^2 x\,dx=x+\sin x\cos x,$$

აქედან

$$\int \cos^2 x\,dx=\frac{x+\sin x\cos x}{2}+C.$$

მეორე ხერხი: ივივე ინტეგრალი უფრო მარტივად გამოითვლება, თუ მოვიხმართ ტრიგონომეტრიიდან ცნობილ ჯერადი კუთხის ფორმულას, ე. ი.

$$\int \cos^2 x\,dx=\int \frac{1+\cos^2 x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

შენიშვნა: მიღებული პასუხი გარეგანი გამოსახვით პირველ პასუხთან შედარებით ზუსტად ერთნაირი არ არის. ამ გარემოებას არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს. მთავარი აქ ის არის, რომ ორივე პასუხის გადიფერენციება გვაძლევს ინტეგრალქვეშ მდგომ გამოსახულებას, ე. ი. $\cos^2 x\,dx$.

მეორე მხრივ, გარდაქმნის საშუალებით შეგვიძლიან დავრწმუნდეთ, რომ

$$\frac{x+\sin x\cos x}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

ნამდვილად არის იგივობა. ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს $\sin^2 x$ და $-\frac{\cos^2 x}{2}$-სთვის. მათი გაწარმოება ერთდაიმავე შედეგს გვაძლევს,

ე. ი. $(\sin^2 x)'=\sin 2x$ და $\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)'=\sin 2x$.

ამრიგად, სხვადასხვა მეთოდით გამოთვლილი ინტეგრალის შედეგი გარეგანი გამოსახვით შეიძლება ერთნაირი არ იყოს, მაგრამ ამ გარემოებამ ეჭვი არ უნდა დაბადოს პასუხის სისწორეში.

18. წინა ინტეგრალის ანალოგიურად გამოთვალეთ

$$\int \sin^2 x\, dx$$

19. $\int \frac{(x-1)\, e^x\, dx}{x^2}$

მითითება: წინასწარ წარმოადგინეთ ორი ინტეგრალის ჯამის სახით.

20. განვიხილოთ ეხლა ასეთი ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

ამ ინტეგრალის გამოთვლა სწარმოებს ხარისხის მაჩვენებლის (n-ის) თანდათანობითი დაწევის საშუალებით. ამისთვის მრიცხველი და მნიშვნელი a^2-ზე უნდა გავამრავლოთ და შემდეგ მრიცხველში a^2-ს მივუმატოთ x^2-x^2, გვექნება:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\, dx=\frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int x\cdot\frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^n}\right].$$

თუ მეორე ინტეგრალს ნაწილობით გამოვთვლით, გვექნება:

$$\frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

ანუ საბოლოოდ:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

უკანასკნელ ინტეგრალს ისევე უნდა მოვექცეთ, როგორც მოცემულ ინტეგრალს და ეს პროცესი იქამდე უნდა ვაწარმოოთ, ვიდრე ხარისხის მაჩვენებელი (n) ერთამდე არ იქნება დაყვანილი.

ინტეგრალების გამოთვლის დროს ზევით მიღებული შედეგით უნდა ვისარგებლოთ, როგორც ფორმულით.

მაგალითად,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\right]$$

ანალოგიურად

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x\right).$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x\right)\right] + C.$$

გამოთვალეთ ანალოგიურად:

a) $\int \frac{dx}{(x^2+3)^3}$; b) $\int \frac{dx}{(x^2+2)^4}$

c) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^5}$; d) $\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2}$

მითითება: აღნიშნეთ $x+3=z$

e) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+20)^3}$.

მითითება: $x-4=z$.

რაციონალური წილადის ინტეგრაცია

რაციონალური წილადის ზოგადი სახე ასეთია: $\frac{F(x)}{P(x)}$, სადაც მრიცხველი და მნიშვნელი პოლინომებია ნამდვილი კოეფიციენტებით, ე. ი.

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \qquad + A_{n-1} x + A_n$$
$$P(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \qquad + B_{m-1} x + B_m$$

რაციონალური წილადის ინტეგრაციის დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ შემდეგი:

a) მოცემული რაც. წილადი წესიერია, ე. ი. $n<m$;

b) რაც. წილადი უკვეცია, ე. ი. მრიცხველსა და მნიშვნელს საერთო მამრავლები არა აქვს.

როდესაც მრიცხველის ხარისხის მაჩვენებელი მეტია მნიშვნელის მაჩვენებელზე ან ტოლია ($n>m$ ან $n=m$), მაშინ რაციონალური წილადიდან

უნდა გამოიყოს მთელი ნაწილი. ასეთი გამოყოფა წარმოებს მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის საშუალებით.

ამრიგად,

$$\int \frac{F(x)}{P(x)}dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx\,,$$

სადაც $Q(x)$ მთელი ნაწილია, ხოლო $\frac{R(x)}{P(x)}$ წილადი, რომელიც a და b პირობებს აკმაყოფილებს.

$\int Q(x)\,dx$ ინტეგრალის გამოთვლა ჩვენთვის ცნობილია, მაშასადამე, ჩვენს მიზანს შეადგენს

$$\int \frac{R(x)}{P(x)}dx$$

ინტეგრალის შესწავლა.

ამ ინტეგრალის გამოთვლისთვის საჭიროა წილადის მარტივ ელემენტებად დაშლა, ე. ი. მოცემული რაც. წილადი უნდა წარმოვადგინოთ ისეთი მარტივი რაციონალური წილადების ჯამის სახით, რომელთა ინტეგრაცია ჩვენთვის შესაძლებელია. ამისთვის კი საჭიროა $P(x)$-ს მარტივ მამრავლებად დაშლა ანუ $P(x)=0$ განტოლების ფესვების ცოდნა.

ჩვენ უნდა გავარჩიოთ ოთხი შემთხვევა:

I. მნიშვნელი შეიცავს პირველი ხარისხის მამრავლებს, რომელთაგან არც ერთი არ მეორდება.

II. მნიშვნელი შეიცავს პირველი ხარისხის მამრავლებს, რომელთაგან ზოგიერთი მეორდება.

III. მნიშვნელი შეიცავს მეორე ხარისხის მამრავლებს, რომელთაგან არც ერთი არ მეორდება.

IV. მნიშვნელი შეიცავს მეორე ხარისხის მამრავლებს, რომელთაგან ზოგიერთი მეორდება.

შენიშვნა: რა თქმა უნდა, ისეთი შემთხვევაც არის შესაძლებელი, რომელიც აღნიშნული შემთხვევების კომბინაციას წარმოადგენს.

თუ რაციონალური წილადის მნიშვნელი მხოლოდ ნამდვილ ფესვებს შეიცავს, მაშინ ასეთი წილადის ინტეგრალი წარმოადგენს ალგებრულ და ლოგარითმულ ფუნქციათა ჯამს (ფუნქციათა რიცხვი სასრულოა).

საერთოდ კი, რაციონალური წილადის ინტეგრალი წარმოადგენს ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ (log და arc tg) ფუნქციათა ჯამს.

1. $\int \frac{2x-4}{(x+2)(x-5)}\,dx$

თანახმად უმაღლესა ალგებრისა, შეგვიძლიან დავწეროთ ასეთი ტოლობა:

$$\frac{2x-4}{(x+2)(x-5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-5} \qquad (\text{ა})$$

სადაც A და B ჯერჯერობით განუსაზღვრელი სიდიდეებია.

დაწერილ ტოლობას სხვანაირად რაციონალური წილადის მარტივ ელემენტებად დაშლა ეწოდება და ჩვენი მიზანი იმაში მდგომარეობს, რომ განსაზღვრულ უნდა იქნას A და B სიდიდეები. ამისათვის აღნიშნული ტოლობა ასე დავწეროთ:

$$2x-4=A(x-5)+B(x+2) \qquad (\text{ბ})$$

ეს არის იგივობა, რომელიც სამართლიანია x-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის. ჩავსვათ აქ $x=5$ (ეს ის მნიშვნელობაა, რომელიც $x-5$ ორწევრს ნოლად აქცევს).

$$2\cdot 5-4=A(5-5)+B(5+2);$$

აქედან

$$B=\frac{6}{7}.$$

ჩავსვათ ახლა (ბ)-ში $x=-2$ (ეს ის მნიშვნელობაა, რომელიც $x+2$ ორწევრს ნოლად აქცევს).

$$2\cdot -2-4=A(-2-5)+B(-2+2).$$

აქედან

$$A=\frac{8}{7}.$$

ჩავსვათ $A=\frac{8}{7}$ და $B=\frac{6}{7}$ მნიშვნელობანი (ა)-ში

$$\frac{2x-4}{(x+2)(x-5)}=\frac{\frac{8}{7}}{x+2}+\frac{\frac{6}{7}}{x-5}.$$

ამრიგად

$$\int\frac{2x-4}{(x+2)(x-5)}dx=\int\frac{A}{x+2}dx+\int\frac{B}{x+5}dx=\frac{8}{7}\int\frac{dx}{x+2}+$$

$$+\frac{6}{7}\int\frac{dx}{x-5}=\frac{8}{7}\log(x+2)+\frac{6}{7}\log(x-5)=$$

$$=\frac{2}{7}\log\left[(x+2)^4\cdot(x-5)^3\right]+C$$

დავალება: შეამოწმეთ, სწორად არის გამოთვლილი ინტეგრალი თუ არა.

იგივე კოეფიციენტები ასეც შეგვიძლიან განვსაზღვროთ. (ბ) ტოლობა ასე დავწეროთ:

$$2x-4=Ax-5A+Bx+2B$$

რადგან ეს იგივობაა, ამიტომ ორივე მხარეზე მდგომი ტოლი ხარისხების კოეფიციენტები ტოლია, თავისუფალი წევრებიც აგრეთვე ტოლია, ე. ი.

$$A+B=2$$

და

$$-5A+2B=-4$$

მივიღეთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნაც მოგვცემს:

$$A=\frac{8}{7}, \quad B=\frac{6}{7}.$$

კოეფიციენტების განსაზღვრის ასეთ მეთოდს **განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი** ეწოდება.

2. $$\int \frac{x^3+2x-6}{x^2-5x+6}\,dx$$

გავყოთ მრიცხველი მნიშვნელზე, გვექნება:

$$x+5+\frac{21x-36}{x^2-5x+6}$$

$$\int \frac{x^3+2x-6}{x^2-5x+6}\,dx=\int x\,dx+5\int dx+\int \frac{21x-36}{x^2-5x+6}\,dx$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოითვლება წინა ინტეგრალის მსგავსად

$$\frac{21x-36}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3};$$

აქედან

$$21x-36=A(x-3)+B(x-2)$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში ჯერ

$$x=2, \text{ შემდეგ } x=3;$$

გვექნება:

$$A=-6, \; B=27.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{21x-36}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x-3}\,dx =$$

$$= -6\log(x-2) + 27\log(x-3) = 3\log\frac{(x-3)^9}{(x-2)^2} + C$$

ამრიგად,

$$\int \frac{x^3+3x-6}{x^2-5x+6}\,dx = \underline{\frac{x^2}{2} + 5x + 3\log\frac{(x-3)^9}{(x-2)^2} + C}$$

3. $$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+4)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+4}$$

აქედან

$$1 = A(x-1)(x+4) + Bx(x+4) + Dx(x-1)$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში

$$x=0,\ x=1,\ x=-4,$$

გვექნება:

$$A = -\frac{1}{4},\quad B = \frac{1}{5},\quad D = \frac{1}{20}.$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+4)} = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx + \int \frac{D}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\log x + \frac{1}{5}\log(x-1) + \frac{1}{20}\log(x+4) =$$

$$= \underline{\frac{1}{20}\log\left[\frac{(x-1)^4\cdot(x+4)}{x^5}\right] + C}$$

აქამდე ისეთ შემთხვევებს ვიხილავდით, როდესაც მნიშვნელის მამრავლები ყველა პირველი ხარისხისაა და არც ერთი მათგანი არ მეორდება. განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც მნიშვნელის მამრავლები ყველა პირველი ხარისხისაა და ზოგი მათგანი მეორდება.

4. $$\int \frac{2x+1}{x^2(x-1)^2}\,dx$$

$$\frac{2x+1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1},$$

აქედან

$$2x+1=A(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx^2+Dx^2(x-1)$$

ანუ

$$2x+1=Ax^2-2Ax+A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2+Dx^3-Dx^2;$$

$$B+D=0,\quad A-2B+C-D=0$$

$$-2A+B=2,\quad A=1$$

ამ სისტემის ამოხსნა მოგვცემს:

$$A=1;\quad B=4,\quad D=-4,\quad C=3.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{2x+1}{x^2(x-1)^2}\,dx=\int\frac{A}{x^2}\,dx+\int\frac{B}{x}\,dx+\int\frac{C}{(x-1)^2}\,dx+$$

$$+\int\frac{D}{x-1}\,dx=\int\frac{dx}{x^2}+4\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}-4\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{3}{x-1}+4\log\left(\frac{x}{x-1}\right)+C.$$

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც მნიშვნელი მეორე ხარისხის მამრავლებს შეიცავს, რომელთაგან არც ერთი არ მეორდება. მაგალითად,

5. $$\int\frac{dx}{x(x^2+2x+2)}$$

ასეთ შემთხვევაში მოცემული წილადი ასე უნდა დავშალოთ მარტივ ელემენტებად:

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2},$$

აქედან

$$1=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x;$$

$$1=Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+Cx;$$

$$A+B=0,\quad 2A+C=0,\quad 2A=1.$$

ამრიგად,

$$A=\frac{1}{2},\qquad B=-\frac{1}{2},\qquad C=-1\quad \text{და}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+2)} = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-\frac{1}{2}\,x-1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+2} -$$

$$-\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

ორი უკანასკნელი ინტეგრალი, როგორც ვიცით, ასე გამოითვლება:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{x\,dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{(z-1)\,dz}{z^2+1} = \int \frac{z\,dz}{z^2+1} -$$

$$-\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\log(z^2+1) - \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) -$$

$$-\operatorname{arc\,tg}(x+1).$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg}(x+1)$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+2)} = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}\log(x^2+2x+2) +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1) - \operatorname{arc\,tg}(x+1) =$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

6. $\displaystyle\int \frac{2x^2+4}{x^2(x^2-1)}\,dx$

$$\frac{2x^2+4}{x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2-1},$$

აქედან:

$$2x^2+4 = A(x^2-1) + Bx(x^2-1) + (Cx+D)\,x^2;$$

$$2x^2+4=Ax^2-A+Bx^3-Bx+Cx^3+Dx^2.$$

$$B+C=0, \quad A+D=2, \quad -B=0, \quad -A=4.$$

ამრიგად,

$$A=-4, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=6$$

და

$$\int \frac{2x^2+4}{x^2(x^2-1)}\,dx=\int \frac{A}{x^2}\,dx+\int \frac{B}{x}\,dx+\int \frac{Cx+D}{x^2-1}\,dx=$$

$$=-4\int \frac{dx}{x^2}+6\int \frac{dx}{x^2-1}=\underline{\frac{4}{x}+3\log\frac{x-1}{x+1}+C}$$

შენიშვნა: მოცემული რაციონალური წილადი ასეთი გზითაც შეგვიძლიან დავშალოთ მარტივ ელემენტებად:

$$\frac{2x^2+4}{x^2(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1};$$

პასუხს ერთსა და იმავეს მივიღებთ.

დავალება: გამოთვალეთ

$$\int \frac{x^2-3}{(x^2-2)(x^2+5)}\,dx;$$

$$\int \frac{4x+1}{(2x+3)(x^2+1)(x^2-3)}\,dx$$

მითითება:

$$\frac{x^2-3}{(x^2-2)(x^2+5)}=\frac{Ax+B}{x^2-2}+\frac{Cx+D}{x^2+5}$$

და

$$\frac{4x+1}{(2x+3)(x^2+1)(x^2-3)}=\frac{A}{2x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2-3}.$$

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც მნიშვნელში შემავალი მეორე ხარისხის მამრავლები მეორდება.

7. $$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

მოცემული წილადი ასე დაიშლება:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1},$$

აქედან

$$1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x;$$

$$1=Ax^4+2Ax^2+A+Bx^2+Cx+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Ex$$

$$A+D=0,\ E=0,\ 2A+B+D=0;$$

$$C+E=0,\quad A=1.$$

ამრიგად,

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=-1,\ E=0$$

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{Dx+E}{x^2+1}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=$$

$$=\underline{\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}+C}$$

დავალება: შეამოწმეთ სწორად არის გამოთვლილი ინტეგრალი თუ არა.

როდესაც რაციონალური წილადის მრიცხველი ერთს ეტოლება, ხოლო მნიშვნელი კი შესდგება $(x\pm a)^m(x\pm b)^n$ სახის ხაზოვანი მამრავლებისგან, მაშინ წილადის მარტივ ელემენტებად დაშლის მაგიერ უფრო მიზანშეწონილია (განსაკუთრებით, როდესაც m და n დიდი რიცხვებია)

$$\frac{x\pm a}{x\pm b}=z\quad \text{სახის ჩასმა.}$$

8. მაგალითად, $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$

ალვნიშნოთ

$$\frac{x-1}{x-2}=z,$$

აქედან

$$x=\frac{1-2z}{1-z},\quad dx=-\frac{dz}{(1-z)^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}=\int\frac{-\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2(x-2)^2\cdot(x-2)^3}=-\int\frac{\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2(x-2)^5},$$

მაგრამ

მაშასადამე
$$x-2=\frac{1-2z}{1-z}-2=-\frac{1}{1-z},$$

$$-\int\frac{\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2(x-2)^5}=-\int\frac{\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2\cdot\left(-\frac{1}{1-z}\right)^5}=\int\frac{(1-z)^3\,dz}{z^2}=$$

$$=-\frac{1}{z}-3\log z+3z-\frac{z^2}{2}=-\frac{1}{\frac{x-1}{x-2}}-3\log\frac{x-1}{x-2}+3\frac{x-1}{x-2}-\frac{(x-1)^2}{2(x-2)^2}=$$

$$=\underline{-\frac{x-2}{x-1}-3\log\frac{x-1}{x-2}+3\frac{x-1}{x-2}-\frac{(x-1)^2}{2(x-2)^2}+C}$$

დავალება: შეამოწმეთ, სწორად არის გამოთვლილი ინტეგრალი თუ არა.

9. $$\int\frac{dx}{(x+1)^3(x-4)^2}$$

მითითება: ეს ინტეგრალი გამოითვლება წინა ინტეგრალის მსგავსად. საჭიროა ასეთი ჩასმა:

$$\frac{x+1}{x-4}=z$$

10. $$\int\frac{dx}{(x+3)^2(x+2)^4}$$

მითითება: საჭიროა $\frac{x+3}{x+2}=z$ ჩასმა.

ინტეგრალის ხელოვნური მეთოდით გამოთვლა

11. $$\int\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{x-1+x}{(x-1)(x+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}+\frac{x}{(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{x+2-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}-\frac{2}{(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x+2-(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}-$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}-$$

$$-\frac{2}{3(x-1)}+\frac{2}{3(x+2)}=\frac{5}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx=\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\log\left[(x+2)^5\cdot(x-1)\right]+C$$

დავალება: მოცემული ინტეგრალი ხელოვნური წესით არის გამოთვლილი. გამოთვალეთ იგივე ინტეგრალი განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით (რაც. წილადის მარტივ ელემენტებად დაშლა) და შეადარეთ, რომელია მოკლე და მარჯვე გზა.

12. გამოთვალეთ ხელოვნური წესით:

$$\int\frac{x+2}{(x+3)(x-4)}\,dx\,; \qquad \int\frac{4x\,dx}{(x-5)(x+2)}\,.$$

ალგებრული ნაწილის გამოყოფა

რაციონალური წილადის ინტეგრაცია შესაძლებელია სხვა გზითაც. მაგალითად,

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\,dx=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\,.$$

სადაც

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad \text{და} \quad \frac{P(x)}{Q(x)}$$

აგრეთვე რაციონალური წილადებია.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\text{-ს}$$

ეწოდება ინტეგრალის ალგებრული ნაწილი. $\psi(x)$ წარმოადგენს $F(x)$ და $F'(x)$-ს უდიდეს საერთო გამყოფს, ხოლო $Q(x)$ კი არის ნაწილადი, რომელიც მიღებულია $F(x)$ ის $\psi(x)$-ზე გაყოფით. $\varphi(x)$ და $P(x)$-ს ხარისხის მაჩვენებლები ერთი-ერთეულით ნაკლებია $\psi(x)$ და $Q(x)$-ს მაჩვენებლებზე. ავიღოთ ასეთი ინტეგრალი:

13. $$\int\frac{x+2}{(x+1)\,(x-3)^2}\,dx\,.$$

ამ შემთხვევაში:

$$F(x)=(x+1)\,(x-3)^2\,;$$

$$F'(x)=(x-3)^3+2\,(x+1)\,(x-3);\;\;\psi(x)=x-3;\;\;Q(x)=(x+1)\,(x-3).$$

ამრიგად,

$$\int \frac{x+2}{(x+1)\,(x-3)^2}\,dx = \frac{A}{x-3} + \int \frac{Bx+C}{(x+1)\,(x-3)}\,dx\,.$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$\frac{x+2}{(x+1)\,(x-3)^2} = -\frac{A}{(x-3)^2} + \frac{Bx+C}{(x+1)\,(x-3)}\,,$$

აქედან, თუ გავაერთმნიშვნელოვანებთ და ორივე მხარეზე მდგომ ტოლი ხარისხების კოეფიციენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ:

$$B=O;\ C-A-3B=1;\ -A-3C=O;\ A=-\frac{3}{4};\ B=O;\quad C=\frac{1}{4}\,.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{x+2}{(x+1)\,(x-3)^2}\,dx = -\frac{3}{4(x-3)} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)\,(x-3)}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოითვლება მარტივ ელემენტებად დაშლის საშუალებით, ე. ი.

$$\frac{1}{(x+1)\,(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\,,$$

აქედან

$$A=-\frac{1}{4}\,;\qquad B=\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\,(x-3)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{4}\log\frac{x-3}{x+1}\,.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{x+2}{(x+1)\,(x-3)^2}\,dx = \underline{-\frac{3}{4(x-3)} + \frac{1}{16}\log\frac{x-3}{x+1} + C.}$$

14. $$\int \frac{4x\,dx}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+5} + \int \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}\,dx$$

გავადიფერენციოთ:

$$4x = A\,(x^2-4x+5) - (Ax+B)\,(2x-4) + (Cx+D)\cdot(x^2-4x+5);$$

აქედან

$$A=4;\ B=-10;\ C=0;\ D=4.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{4x\,dx}{(x^2-4x+5)^2}=\frac{4x-10}{x^2-4x+5}+4\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოსათვლელად მიიღეთ $x-2=z$ აღნიშვნა და დაიყვანეთ ბოლომდე.

15. $$\int \frac{x-2}{(x-1)\,(x^2+1)^2}\,dx=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int \frac{Cx^2+Dx+K}{(x-1)\,(x^2+1)}\,dx$$

გავადიფერენციოთ:

$$x-2=A\,(x-1)\,(x^2+1)-2x\,(x-1)\,(Ax+B)+(Cx^2+Dx+K)\,(x^2+1),$$

აქედან

$$A=\frac{3}{4};\ B=-\frac{1}{4};\ C=0;\ D=\frac{3}{4};\ K=-1\frac{1}{4}$$

ამრიგად,

$$\int \frac{x-2}{(x-1)\,(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+1}+\int \frac{\frac{3}{4}x-1\frac{1}{4}}{(x-1)\,(x^2+1)}\,dx$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოითვლება მარტივ ელემენტებად დაშლის საშუალებით, ე. ი.

$$\frac{3x-5}{(x-1)\,(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

დაიყვანეთ ბოლომდე.

დავალება: შემდეგი ინტეგრალები გამოთვალეთ ალგებრული ნაწილის გამოყოფით:

a) $\int \frac{x-5}{x^2\,(x-2)}\,dx;$ b) $\int \frac{2x+3}{(x-5)\,(x+1)^2}\,dx$

c $\int \frac{2x+1}{(x^2-2x+10)^2}\,dx;$ d) $\int \frac{3x\,dx}{x^2\,(x^2+9)^2}$

სავარჯიშო

16. $\int \frac{dx}{x^2-4x}$ 17. $\int \frac{x-5}{x^2+3x}\,dx$

18. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+5)}$ 19. $\int \frac{x+2}{(x-4)\,(x+6)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+4x+3}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2-7x+10}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x(x^2-4)}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{3x+4}{(x+2)(x^2-9)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{x(x^2-1)}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{5dx}{x^2(2x+3)}$

26. $\displaystyle\int \frac{x-6}{x(x-3)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4}{x^3+2x^2+x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+8}{x^2(x-1)^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{3x^2-1}{x^2(x^2+6x+9)}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3}{x^3(2x+1)}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{x^3-x^2-x+1}$

33. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4+5x^3+6x^2}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x-6}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x^2-1)^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{(x^2+3x+2)^2}$

37. $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x-1}{(x^2-1)^2}\,dx$

მითითება: მრიცხველი დაშალეთ მამრავლებად და მოახდინეთ შეკვეცა.

39. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

მითითება: მოახდინეთ შეკვეცა.

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$

41. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+9)}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^2(x^2+1)}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2+2x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

45. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

47. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

მითითება: $x^4+1=x^4+2x^2+$
$+1-2x^2$

48. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

49. $\int \frac{dx}{x^4+x^2-2}$

მითითება: $x^4+x^2-2=x^4+$
$+2x^2-x^2-2$

50. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

მითითება: $x^4+x^2+1=x^4+$
$+2x^2+1-x^2$

51. $\int \frac{2x+1}{x^4-x^2+1}\, dx$

მითითება: $x^4-x^2+1=x^4+$
$+2x^2+1-3x^2$

52. $\int \frac{2x-4}{(x^2+4x+5)^2}\, dx$

53. $\int \frac{x+5}{x(x^2-6x+13)^2}\, dx$

V. ირაციონალური ალგებრული ფუნქციის ინტეგრაცია (რაციონალიზაცია)

როგორც ზემოთაც ვნახეთ (ჩასმის ხერხის განხილვის დროს), როდესაც გვაქვს ირაციონალური ალგებრული ფუნქცია, ე. ი. ისეთი ფუნქცია, რომელიც რადიკალებს შეიცავს *, მაშინ აღნიშნული ჩასმის საშუალებით (ახალი ცვლადის შემოყვანა) შესაძლებელია მოცემულ ფუნქციას რაციონალური სახე მივსცეთ. (რა თქმა უნდა, ასეთი სახის მიცემა ყოველთვის არ არის შესაძლებელი).

ამრიგად, ახალი ცვლადის შემოყვანით ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია ირაციონალური ფუნქცია რაციონალურად გარდავქმნათ. ინტეგრალის გამოთვლის ასეთ წესს **რაციონალიზაცია** ეწოდება.

1. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

აღვნიშნოთ

$$x=z^6,$$

აქედან

$$dx=6z^5\, dz$$

* რადიკალქვეშ ცვლადია ნაგულისხმევი

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{\sqrt{z^6}+\sqrt[3]{z^6}}{\sqrt{z^6}}\cdot 6z^5\,dz=\int \frac{z^3+z^2}{z^3}\cdot 6z^5\,dz=$$

$$=z^6+\frac{6}{5}z^5=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6+\frac{6}{5}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^5=\underline{x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C}$$

შენიშვნა: $x=z^6$ ჩასმაში z-ის ხარისხის მაჩვენებელი მოცემული რადიკლების მაჩვენებელთა უმცირეს ჯერადს წარმოადგენს.

2. $$\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}}\,dx$$

ალვნიშნოთ $$x=z^{12},$$

აქედან

$$dx=12z^{11}\,dz$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}}\,dx=\int \frac{(z^{12})^{\frac{1}{4}}-(z^{12})^{\frac{1}{3}}}{(z^{12})^{\frac{3}{2}}+(z^{12})^{\frac{4}{3}}}\cdot 12z^{11}\,dz=12\int \frac{z^3-z^4}{z^{18}+z^{16}}\cdot z^{11}\,dz=$$

$$=12\int \frac{1-z}{z^2(1+z^2)}\,dz$$

დაიყვანეთ ბოლომდე ეს ინტეგრალი.
მითითება: z-დან x-ზე გადასასვლელად გვაქვს

$$z=x^{\frac{1}{12}}$$

3. $$\int x\sqrt{2-\sqrt{3x-5}}\,dx$$

ალვნიშნოთ

$$\sqrt{2-\sqrt{3x-5}}=z,$$

აქედან

$$x=\frac{z^4-4z^2+9}{3},\qquad dx=\frac{4}{3}(z^3-2z)\,dz$$

$$\int x\sqrt{2-\sqrt{3x-5}}\,dx=\frac{4}{9}\int z(z^4-4z^2+9)(z^3-2z)\,dz$$

დაიყვანეთ ბოლომდე.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

მივიღოთ ასეთი აღნიშვნა:

$$x+\sqrt{x^2+a}=z,$$

აქედან

$$x=\frac{z^2-a}{2z}, \qquad dx=\frac{z^2+a}{2z^2}dz, \quad \sqrt{x^2+a}=\frac{z^3+a}{2z}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int \frac{\frac{z^2+a}{2z^2}dz}{\frac{z^2+a}{2z}}=\int \frac{dz}{z}=\log z=\underline{\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C}$$

ასევე გვექნება:

$$\underline{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C.}$$

ივივე ინტეგრალი ასეც შეგვიძლიან გამოვთვალოთ:

$$\sqrt{x^2+a}=z, \; x^2+a=z^2, \; x\,dx=z\,dz$$

უკანასკნელი ტოლობიდან დავწეროთ პროპორციას:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}.$$

აქედან პროპორციის თვისების ძალით

$$\frac{dx}{z}=\frac{dx+dz}{x+z}=\frac{d(x+z)}{x+z}.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int \frac{dx}{z}=\int \frac{d(x+z)}{x+z}=\log(x+z)=$$

$$=\underline{\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C.}$$

მიღებული შედეგით უნდა ვისარგებლოთ, როგორც ფორმულით, მაგალითად:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} =$$

$$= \log\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) = \log\left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right) =$$

$$= \underline{\log\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)+C.}$$

აგრეთვე,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{(3x)^2+5}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+5}} =$$

$$= \frac{1}{3}\log\left(z+\sqrt{z^2+5}\right) = \underline{\frac{1}{3}\log\left(3x+\sqrt{9x^2+5}\right)+C.}$$

დავალება: გამოთვალეთ ანალოგიურად

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-3}}$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

მივიღოთ აღნიშვნა:

$$x+\sqrt{x^2+a^2} = z,$$

აქედან

$$x = \frac{z^2-a^2}{2z}, \quad dx = \frac{z^2+a^2}{2z^2}dz, \quad \sqrt{x^2+a^2} = \frac{z^2+a^2}{2z}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{z^2+a^2}{2z}\cdot\frac{z^2+a^2}{2z^2}dz = \frac{1}{4}\int \frac{(z^2+a^2)^2\,dz}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{8}z^2 + \frac{a^2}{2}\log z - \frac{a^4}{8}z^{-2} = \frac{z^4-a^4}{8z^2} + \frac{a^2}{2}\log z =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3+a^2}{2z}\cdot\frac{z^2-a^2}{2z} + \frac{a^2}{2}\log z = \underline{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+}$$

$$\underline{+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.}$$

6. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულ სიდიდეზე

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}=-x+\sqrt{x^2+1}$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\int x\,dx+\int \sqrt{x^2+1}\,dx=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\int \sqrt{x^2+1}\,dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოთვალეთ წინა ამოცანის თანახმად.

როდესაც წილადის მრიცხველში მხოლოდ $x\,dx$ გვაქვს და მნიშვნელს აქვს $(x^2+a)\sqrt{Ax^2+C}$ სახე, მაშინ მიზანშეწონილია ასეთი აღნიშვნა:

$$x^2=y,$$

მაგალითად,

7. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2-6}}$

აღვნიშნოთ

$$x^2=y,$$

აქედან

$$x\,dx=\frac{dy}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2-6}}=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{(y+3)\sqrt{y-6}}$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$\sqrt{y-6}=z,$$

აქედან

$$dy=2z\,dz, \quad y+3=z^2+9,$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{(y+3)\sqrt{y-6}}=\frac{1}{2}\int\frac{2z\,dz}{(z^2+9)\,z}=\int\frac{dz}{z^2+9}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{3}=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{y-6}}{3}=\underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2-6}}{3}+C}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მრიცხველი მხოლოდ dx შეიცავს, ხოლო მნიშვნელს კი აქვს

$$(x^2+a)\sqrt{Ax^2+C}$$

სახე, მაშინ მიზანშეწონილია უარყოფითი მაჩვენებლის შემოყვანა, მაგალითად,

8. $$\int\frac{dx}{(x^2-15)\sqrt{x^2+1}}$$

მოცემული წილადი ასე გარდავქმნათ:

$$\frac{1}{(x^2-15)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x^2\left(1-\frac{15}{x^2}\right)x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x^{-3}}{(1-15x^{-2})\sqrt{1+x^{-2}}}$$

ავღნიშნოთ

$$x^{-2}=y,$$

აქედან

$$x^{-3}\,dx=-\frac{dy}{2}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-15)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{x^{-3}\,dx}{(1-15x^{-2})\sqrt{1+x^{-2}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{(1-15y)\sqrt{1+y}}$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$\sqrt{1+y}=z,$$

აქედან

$$dy=2z\,dz,\ \ y=z^2-1.$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{(1-15y)\sqrt{1+y}}=-\frac{1}{2}\int\frac{2z\,dz}{[1-15(z^2-1)]\,z}=\int\frac{dx}{15z^2-16}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე, ამისთვის გაიხსენეთ, როგორ გამოითვლება

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} \text{ ინტეგრალი.}$$

ეილერის (Euler) ჩასმა

ეილერის ჩასმით შესაძლებელია, საერთოდ,

$$\int f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$$

სახის ინტეგრალის გამოთვლა (სადაც f რაციონალური ფუნქციის ნიშანია), მაგრამ ხშირად ასეთი ჩასმის შედეგად რთულსა და მოსაწყენ კომბინაციებთან გვაქვს საქმე, რის გამოც ინტეგრალის გამოთვლა სხვა უფრო მარჯვე და მოხდენილი ხერხებით წარმოებს. როგორც წინასიტყვაობაშიც აღვნიშნეთ, ეილერის ჩასმა უფრო მაშინ არის მოხერხებული, როდესაც მრიცხველში dx გვაქვს და მნიშვნელში $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ სახის რადიკალი.

I. როდესაც $A>0$, მაშინ

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = z + x\sqrt{A}\,^{*} \quad \text{პირველი ჩასმა.}$$

აქედან

$$Ax^2+Bx+C=(z+x\sqrt{A})^2;$$

$$Bx+C=z^2+2zx\sqrt{A} \qquad (\text{ა})$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$Bdx=2z\,dz+2z\sqrt{A}\,dx+2x\sqrt{A}\,dz;$$

აქედან

$$\frac{dx}{z+x\sqrt{A}}=\frac{2dz}{B-2z\sqrt{A}}$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{dx}{z+x\sqrt{A}} = 2\int \frac{dz}{B-2z\sqrt{A}}$$

შენიშვნა: x-ის მნიშვნელობა მოიძებნება (ა)-დან

$$x=\frac{z^2-C}{B+2z\sqrt{A}}$$

---

* შეიძლება აგრეთვე $z - x\sqrt{A}$

II. როდესაც $C>0$, მაშინ

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}=zx+\sqrt{C} \quad \text{მეორე ჩასმა.}$$

აქედან

$$Ax^2+Bx+C=(zx+\sqrt{C})^2;$$

$$Ax+B=z^2x+2z\sqrt{C} \tag{ბ}$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$A\,dx=z^2\,dx+2zx\,dz+2\sqrt{C}\,dz;$$

აქედან

$$\frac{dx}{zx+\sqrt{C}}=\frac{2dz}{A-z^2}.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}=\int\frac{dx}{zx+\sqrt{C}}=2\int\frac{dz}{A-z^2}$$

შენიშვნა: (ბ)-დან მოვძებნით

$$x=\frac{2z\sqrt{C}-B}{A-z^2}$$

III. როდესაც ერთდროულად $A<0$ და $C<0$, მაშინ

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=z\,(x-\alpha)$$

ან, სულ ერთია, $z\,(x-\beta)$. მესამე ჩასმა.
აქედან

$$A\,(x-\alpha)\,(x-\beta)=z^2\,(x-\alpha)^2;$$

$$A\,(x-\beta)=z^2\,(x-\alpha) \tag{გ}$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$A\,dx=2\,zx\,dz+z^2\,dx-2z\,\alpha\,d$$

აქედან

$$\frac{dx}{z\,(x-\alpha)}=\frac{2\,dz}{A-z^2}$$

ამრიგად,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}=\int\frac{dx}{z\,(x-\alpha)}=2\int\frac{dx}{A-z^2}$$

შენიშვნა: (გ)-დან გვაქვს საჭირო შემთხვევისთვის

$$x=\frac{A\beta-\zeta^2\alpha}{A-\zeta^2}$$

საერთო შენიშვნა: როდესაც ერთდროულად $A>0$ და $C>0$, მაშინ I ან II ჩასმის შერჩევა ჩვენზეა დამოკიდებული (ამ ორი ჩასმიდან ჩვენი ნებით შეგვიძლიან ერთერთი ავირჩიოთ). ასეთ შემთხვევაში სხვადასხვა ჩასმით მიღებული პასუხები ხშირად გარეგანი გამოსახვით ერთნაირი არ არის, მაგრამ, როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, საკმარისია ეს ორი სხვადასხვა შედეგი გავაწარმოოთ, რომ ერთიდაიმავე ინტეგრალქვეშ მდგომი ფუნქცია მივიღოთ.

მესამე ჩასმა მხოლოდ მაშინ არის საჭირო, როდესაც ერთდროულად $A<0$ და $C<0$, ოღონდ ამ შემთხვევაში რადიკალქვეშ მდგომი კვადრატული სამწევრი უსათუოდ უნდა ნამდვილ მამრავლებად იშლებოდეს, ე. ი.

$$Ax^2+Bx+C=0$$

განტოლებას ორი ნამდვილი და სხვადასხვა ფესვი უნდა ჰქონდეს.

მესამე ჩასმა გამოიყენება მაშინაც, როდესაც $A>0$ ან $C>0$ (პირველი ორი შემთხვევა), თუ რადიკალქვეშ მდგომი კვადრატული სამწევრი ნამდვილ მამრავლებად იშლება. (ზოგიერთ სახელმძღვანელოში მესამე ჩასმას მეორე ეწოდება და შებრუნებით. ამას არსებითი მნიშვნელობა არ აქვს).

9. $$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+3x+4}}$$

აქ ერთდროულად

$$A=9>0$$

და

$$C=4>0.$$

მოვიმარჯვოთ ჯერ პირველი ჩასმა.

$$\sqrt{9x^2+3x+4}=\zeta+x\sqrt{9}=\zeta+3x \qquad (\text{ა})$$

აქედან:

$$9x^2+3x+4=\zeta^2+6\zeta x+9x^2;$$

$$3x+4=\zeta^2+6\zeta x \qquad (\text{ბ})$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$3\,dx=2\zeta\,d\zeta+6\zeta\,dx+6x\,d\zeta,$$

აქედან

$$\frac{dx}{\zeta+3x}=\frac{2\,d\zeta}{3-6\zeta}.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3x+4}} = \int \frac{dx}{z+3x} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{1-2z} = -\frac{1}{3}\log(1-2z) =$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-2\sqrt{9x^2+3x+4}+6x)+C.$$

(z-ის მნიშვნელობა ჩასმულია (ა)-დან).

იგივე ინტეგრალი საერთო წესით ასე გამოითვლება: (ბ)-დან დავსწერთ:

$$x = \frac{z^2-4}{3-6z},$$

აქედან

$$dx = \frac{-2z^2+2z-8}{3(1-2z)^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3x+4}} = \int \frac{\frac{-2z^2+2z-8}{3(1-2z)^2}\,dz}{z+3x} = \int \frac{\frac{-2z^2+2z-8}{3(1-2z)^2}\,dz}{z+3\cdot\frac{z^2-4}{3-6z}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{1-2z}.$$

მოცემული ინტეგრალისთვის მოვიხმაროთ ახლა მეორე ჩასმა:

$$\sqrt{9x^2+3x+4} = zx+\sqrt{4} = zx+2$$

$$9x^2+3x+4 = (zx+2)^2 = z^2x^2+4zx+4;$$

$$9x+3 = z^2x+4z$$

გავადიფერენციოთ:

$$9dx = 2zx\,dz + z^2\,dx + 4dz,$$

აქედან

$$\frac{dx}{zx+2} = \frac{2\,dz}{9-z^2}.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3x+4}} = \int \frac{dx}{zx+2} = 2\int \frac{dz}{9-z^2} = \frac{1}{3}\log\frac{z+3}{z-3} =$$

$$= \frac{1}{3}\log\left(\frac{\sqrt{9x^2+3x+4}-2+3x}{\sqrt{9x^2+3x+4}-2-3x}\right)+C$$

დავალება: შეამოწმეთ ორივე შემთხვევაში ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი თუ არა.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$

აქ საჭიროა მესამე ჩასმა:

$$\sqrt{-x^2+5x-6}=\sqrt{-(x-2)(x-3)}=z(x-2),$$

აქედან

$$-(x-2)(x-3)=z^2(x-2)^2;$$

$$-x+3=z^2x-2z^2$$

გავადიფერენციოთ

$$-dx=z^2dx+2zx\,dz-4z\,dz,$$

აქედან

$$\frac{dx}{z(x-2)}=-\frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}=\int\frac{dx}{z(x-2)}=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=-2\operatorname{arc\,tg} z=$$

$$=-2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-(x-2)(x-3)}}{x-2}=\underline{-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}+C}$$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$

მოვიხმაროთ პირველი ჩასმა:

$$\sqrt{x^2-3x}=z+x;\qquad x^2-3x=z^2+2zx+x^2;$$

$$-3x=z^2+2zx,$$

გავადიფერენციოთ

$$-3dx=2z\,dz+2z\,dx+2x\,dz,$$

აქედან

$$\frac{dx}{z+x}=-\frac{2dz}{3+2z}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}=\int\frac{dx}{z+x}=-2\int\frac{dz}{3+2z}=-\log(3+2z)=$$

$$=\underline{-\log\left(3+2\sqrt{x^2-3x}-2x\right)+C}$$

იგივე ინტეგრალი გამოვთვალოთ მესამე ჩასმით.

$$\sqrt{x(x-3)}=z(x-3),$$

აქედან

$$x(x-3)=z^2(x-3);$$

$$x=z^2 x-3z^2;$$

$$dx=z^2 dx+2z x dz-6z dz,$$

აქედან

$$\frac{dx}{z(x-3)}=\frac{2dz}{1-z^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}=\int\frac{dx}{z(x-3)}=2\int\frac{dz}{1-z^2}=\log\frac{z+1}{z-1}=$$

$$=\log\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{x-3}}+1}{\sqrt{\frac{x}{x-3}}-1}\right)+C.$$

დავალება: იგივე ინტეგრალი გამოთვალეთ მესამე ჩასმით, ოღონდ მიიღეთ აღნიშვნა:

$$\sqrt{x(x-3)}=z x.$$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}}$

აღვნიშნოთ

$$x=\frac{1}{z},$$

აქედან

$$dx=-\frac{dz}{z^2}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}}=\int\frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-4z+1}}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე და მიღებულ შედეგში ჩასვით $z=\dfrac{1}{x}$.

რედუქციის მეთოდი

13. $\displaystyle\int\frac{x^2-6x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}}\,dx$

ეს ინტეგრალი რედუქციის მეთოდით (ამ მეთოდს სხვანაირად ალგებრული ნაწილის გამოყოფა ეწოდება) ასე გამოითვლება: შედგენილ უნდა იქნას ასეთი ტოლობა:

$$\int \frac{x^2-6x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x+8}+D\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}} \qquad (\text{ა})$$

მარჯვენა მხარეზე რადიკალთან მდგომი მამრავლის უმაღლესი წევრის ხარისხის მაჩვენებელი ერთით ნაკლებია, ვიდრე მოცემული წილადის მრიცხველის უმაღლესი წევრის ხარისხის მაჩვენებელი. (მრიცხველში რომ

$$3x^4-2x^2+1$$

გვქონოდა, მაშინ ეს ნამრავლი ასე დაიწერებოდა:

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D).$$

გავადიფერენციოთ ახლა (ა) იგივობის ორივე მხარე:

$$\frac{x^2-6x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}}=(Ax+B)\cdot\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+8}}+A\sqrt{x^2-2x+8}+$$

$$+\frac{D}{\sqrt{x^2-2x+8}}$$

აქედან გაერთმნიშვნელოვანების შემდეგ გვექნება:

$$x^2-6x+2=(Ax+B)\ (x-1)+A\ (x^2-2x+8)+D$$

ანუ

$$x^2-6x+2=2Ax^2-3Ax+Bx+8A-B+D$$

რადგან ჩვენ იგივობა გვაქვს, ამიტომ კოეფიციენტების შედარების თანახმად:

$$2A=1,\ -3A+B=-6,\ 8A-B+D=2,$$

აქედან

$$A=\frac{1}{2},\quad B=-4\frac{1}{2},\quad D=-6\frac{1}{2}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში

$$\int \frac{x^2-6x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}}\,dx=\left(\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-2x+8}-6\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოთვალეთ ეილერის ერთ-ერთი (I ან II) ჩასმით.

მოცემული ინტეგრალი გამოვთვალოთ ახლა ზოგადი მეთოდით. ეილერის პირველი ჩასმის თანახმად:

$$\sqrt{x^2-2x+8}=z-x,$$

აქედან

$$x=\frac{z^2-8}{2z-2}; \qquad dx=\frac{z^2-2z+8}{2(z-1)^2}\,dz.$$

$$\int\frac{x^2-6x+2}{\sqrt{x^2-2x+8}}\,dx=\int\frac{\left(\frac{z^2-8}{2z-2}\right)^2-\frac{6(z^2-8)}{2z-2}+2}{z-\frac{z^2-8}{2z-2}}\cdot\frac{z^2-2z+8}{2(z-1)^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{z^4-12z^3+4z^2+80z-24}{(z-1)^3}\,dz.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

დავალება: გამოთვალეთ რედუქციის მეთოდით:

a) $\displaystyle\int\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx$; b) $\displaystyle\int\frac{2x^2\,dx}{\sqrt{x^2-x-3}}$

c) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; d) $\displaystyle\int\frac{2x^3-x-4}{\sqrt{x^2+3x-2}}\,dx$

მითითება: მესამე ინტეგრალის მრიცხველის (x-ის) ხარისხის მაჩვენებელი ერთს ეტოლება, ამიტომ მარჯვენა მხარეზე რადიკალთან მდგომი მამრავლი მხოლოდ A იქნება.

შენიშვნა: მესამე ინტეგრალი ხელოვნური წესით ასე გამოითვლება:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-5x-2}}=\frac{2x-5+5}{2\sqrt{x^2-5x-2}}=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x-2}}+\frac{5}{2\sqrt{x^2-5x-2}}$$

ამრიგად,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-5x-2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x-2}}\,dx+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x-2}}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოითვლება ეილერის ჩასმით, ხოლო

$$\int\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x-2}}\,dx=\int(x^2-5x-2)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2-5x-2)=\int z^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=2z^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x^2-5x-2},$$

აქედან მოცემული ინტეგრალის ბოლომდე დაყვანა უკვე ადვილია.

დავალება: გამოთვალეთ ინტეგრალები:

a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3x-5}}$; b) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-x-6}}$

c) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$; d) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-x-1}}$

მითითება: პირველი ორი ინტეგრალისთვის მიიღეთ

$x=\frac{1}{z}$ აღნიშვნა, მესამისთვის $x-3=\frac{1}{z}$ და მეოთხისთვის $x+1=\frac{1}{z}$.

14. $\int \frac{dx}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+3x-10}}$

დავშალოთ მარტივ ელემენტებად:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

აქედან

$$1=A(x-3)+B(x-2);\ A=-1 \text{ და } B=1$$

მაშასადამე, $\int \frac{dx}{(x^2-5+6)\sqrt{x^2+3x-10}}=\int \frac{A\,dx}{(x-2)\sqrt{x^2+3x-10}}+$

$$+\int \frac{B\,dx}{(x-3)\sqrt{x^2+3x-10}}=-\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+3x-10}}+$$

$$+\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+3x-10}}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალები გამოითვლება წინა დავალების ანალოგიურად.

მიიღებთ $\int \frac{dz}{\sqrt{7z+1}}$ და $-\int \frac{dz}{\sqrt{8z^2+9z+1}}$ ინტეგრალებს, რომლებიც ადვილად დაიყვანება ბოლომდე.

15. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}$

რადიკალთან მდგომი კვ. სამწევრი არ იშლება ნამდვილ მამრავლებად. ამიტომ აქ საჭიროა ასეთი ჩასმა:

$$x=\frac{az+b}{z+1}$$

სადაც a და b ჯერჯერობით განუსაზღვრელი სიდიდეებია. ამ ჩასმის საშუალებით მოცემული წილადის მნიშვნელი ისეთ მნიშვნელზე მიიყვანება, რომელიც არ შეიცავს პირველი ხარისხის ცვლადს. (ამ ჩასმის საშუალებით შესაძლებელია აგრეთვე წინა სახის ინტეგრალის გამოთვლა).

$$dx=\frac{a-b}{(z+1)^2}\,dz,$$

$$x^2+x+1=\frac{(a^2+a+1)z^2+(2ab+a+b+2)z+b^2+b+1}{(1+z)^2}$$

$$x^2+1=\frac{(a^2+1)z^2+(2ab+2)z+b^2+1}{(1+z)^2}$$

გავუტოლოთ ახლა z-ის კოეფიციენტები ნულს:

$$2ab+a+b+2=0 \text{ და } 2ab+2=0$$

აქედან, თუ ამ ორ განტოლებას შეთავსებით ამოვხსნით, გვექნება:

$$a=-1,\ b=1.$$

მაშასადამე,

$$x^2+x+1=\frac{z^2+3}{(1+z)^2};\quad x^2+1=\frac{2z^2+2}{(1+z)^2}\quad \text{და}\quad dx=-\frac{2dz}{(1+z)^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{2dz}{(1+z)^2}}{\frac{z^2+3}{(1+z)^2}\sqrt{\frac{2z^2+2}{(1+z)^2}}}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\int\frac{(z+1)\,dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლა ჩვენთვის უკვე ცნობილია. დაიყვანეთ ბოლომდე თანახმად 7 და 8 ამოცანებისა.

დავალება: გამოთვალეთ ანალოგიურად

$$\int\frac{(2x-3)\,dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{4x^2+4x+13}}$$

16. $\int\sqrt{x^2+2x-2}\,dx$

---

* მართალია, მოცემული ინტეგრალი ეილერის ჩასმითაც შეიძლება გამოითვალოს, მაგრამ მაშინ რთული გარდაქმნების წარმოება დაგვჭირდება.

ეილერის პირველი ჩასმის თანახმად,

$$\sqrt{x^2+2x-2}=z-x,$$

აქედან

$$x=\frac{z^2+2}{2+2z} \qquad dx=\frac{z^2+2z-2}{2(1+z)^2}\,dz; \qquad \sqrt{x^2+2x-2}=\frac{z^2+2z-2}{2+2z}.$$

ჩავსვით ეს მნიშვნელობანი და დაიყვანეთ ბოლომდე.

მეორე ხერხი: ირაციონალობა ჩავიტანოთ მნიშვნელში, რისთვისაც მოცემული რადიკალი უნდა გავამრავლოთ და გავყოთ ამავე რადიკალზე, გვექნება:

$$\int\sqrt{x^2+2x-2}\,dx=\int\frac{x^2+2x-2}{\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე მე-13 ამოცანის ანალოგიურად.

აბელის (Abel) ჩასმა

მართალია, აბელის ჩასმით შესაძლებელია, საერთოდ,

$$\int f\left(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$$

სახის ინტეგრალის გამოთვლა, მაგრამ პრაქტიკაში ამ ჩასმით ჩვეულებრივ

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)^{2k+1}}$$

სახის ინტეგრალი გამოითვლება. აღვნიშნოთ

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}=y \tag{ა}$$

გვექნება:

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)^{2k+1}}=\int\frac{dx}{y^{2k+1}}=\int y^{-2k}\cdot\frac{dx}{y} \tag{ბ}$$

გავაწარმოოთ (ა):

$$2Ax+B=2yy'$$

აღვნიშნოთ

$$y'=\frac{dy}{dx}=z,$$

გვექნება:

$$2Ax+B=2yz.$$

მიღებული განტოლება გავადიფერენციოთ:

$$Adx=y\,dz+z\,dy$$

ანუ, რადგან

$$dy=z\,dx,$$

დავწერთ

$$Adx=y\,dz+z^2\,dx,$$

აქედან

$$\frac{dx}{y}=\frac{dz}{A-z^2} \qquad (გ)$$

ახლა y^{-2k} გამოვსახოთ z-ის საშუალებით, ამისთვის ავიღოთ ორი განტოლება;

$$Ax^2+Bx+C=y^2 \quad \text{და} \quad 2Ax+B=2yz$$

პირველი $4A$-ზე გავამრავლოთ, მეორე კვადრატში ავიყვანოთ და პირველს მეორე გამოვაკლოთ, გვექნება:

$$4AC-B^2=4y^2(A-z^2);$$

აქედან

$$y^2=\frac{4AC-B^2}{4(A-z^2)} \text{ და } y^{-2k}=\left[\frac{4AC-B^2}{4(A-z^2)}\right]^{-k}=\left(\frac{AC-\frac{1}{4}B^2}{A-z^2}\right)^{-k}=$$

$$=(A-z^2)^k\cdot\left(AC-\frac{1}{4}B^2\right)^{-k} \qquad (დ)$$

(გ) და (დ) მნიშვნელობანი ჩავსვარ (ბ)-ში

$$\int y^{-2k}\cdot\frac{dx}{y}=\left(AC-\frac{1}{4}B^2\right)^{-k}\int(A-z^2)^k\cdot\frac{dz}{A-z^2}=$$

$$\left(AC-\frac{1}{4}B^2\right)^{-k}\int(A-z^2)^{k-1}\,dz\,.$$

მივიღეთ აბელის ფორმულა. ამ ფორმულით სარგებლობის დროს z-ის მნიშვნელობა მოიძებნება:

$$z=y'$$

ანუ

$$z=(\sqrt{Ax^2+Bx+C})'=\frac{2Ax+B}{2\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

17. $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sqrt{x^2+2x-2})^3}$

$$\text{აქ } 2k+1=3, \text{ აქედან}$$

$$k=1;\ A=1;\ B=2;\ C=-2.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი აბელის ფორმულაში:

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x^2+2x-2})^3}=\left(1\cdot-2-\frac{1}{4}\cdot 2^2\right)^{-1}\int(1-z^2)^{1-1}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{3}\int dz=-\frac{1}{3}z=-\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+2x-2})'=$$

$$=-\frac{x+1}{3\sqrt{x^2+2x-2}}+C$$

დავალება: შეამოწმეთ, სწორად არის გამოთვლილი ინტეგრალი თუ არა.

18. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-2x+4)^2\sqrt{x^2-2x+4}}$

მართალია, ეს ინტეგრალი გამოითვლება

$$x=\frac{az+b}{z+1}$$

ჩასმის საშუალებით (მე-15 ამოცანის ანალოგიურად), მაგრამ უფრო მიზანშეწონილია აქ აბელის ჩასმა, ვინაიდან მოცემული ინტეგრალი ასე შეგვიძლიან წარმოვადგინოთ:

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x^2-2x+4})^5}$$

მოცემულ შემთხვევაში

$$2k+1=5,$$

აქედან

$$k=2.$$

$$A=1,\ B=-2,\ C=4.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი აბელის ფორმულაში

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^5}=\left[1\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot(-2)^2\right]^{-2}\int (1-z^2)^{2-1}\,dz=$$

$$=3^{-2}\int (1-z^2)\,dz=\frac{1}{9}z-\frac{1}{27}z^3=\frac{1}{27}(3z-z^3)=$$

$$=\frac{1}{27}\left[3\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)'-\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)'^3\right]=\underline{\frac{2x^3-6x^2+15x-11}{27\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^3}+C}$$

დავალება: შეამოწმეთ, ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი თუ არა.

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)^3}$

მართალია, ამ ინტეგრალისთვის გამოსადეგია აბელის ჩასმა, მაგრამ უფრო მარტივად გამოითვლება იგი, თუ მივიღებთ $x+1=z$ აღნიშნავს.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)^3}=\int \frac{dz}{\left[\sqrt{(z-1)^2+2(z-1)+5}\right]^3}=\int \frac{dz}{\left(\sqrt{z^2+4}\right)^3}=$$

$$\int \frac{dz}{z^3\left(\sqrt{1+4z^{-2}}\right)^3}=\int \frac{z^{-3}\,dz}{\left(\sqrt{1+4z^{-2}}\right)^3}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე, თანახმად მე-8 ამოცანისა.

შენიშვნა: ანალოგიურად შეიძლება მე-17 ინტეგრალის გამოთვლაც, სადაც უნდა მივიღოთ $x+1=z$ აღნიშვნა ($x-1=z$ აღნიშვნა უვარგისია. რატომ?).

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x^2-6x-1\ \sqrt{x^2-2x-2}}$

მართალია, ამ ინტეგრალის გამოთვლა შესაძლებელია აბელის ჩასმით, აგრეთვე, მე-14 ან მე-15 ამოცანების ანალოგიურად, მაგრამ უფრო მარტივად გამოითვლება, თუ მივიღებთ $x-1=z$ აღნიშვნას.

$$\int \frac{dx}{(3x^2-6x-1)\sqrt{x^2-2x-2}}=$$

$$=\int \frac{dx}{[3(z+1)^2-6(z+1)-1]\sqrt{(z+1)^2-2(z+1)-2}}=\int \frac{dz}{(3z^2-4)\sqrt{z^2-3}}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე, თანახმად მე-8 ამოცანისა.

სავარჯიშო

21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}}$

22. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

23. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

24. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

25. $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{4\sqrt[3]{x}}\,dx$

26. $\int \frac{1+\sqrt{x+3}}{2-\sqrt[3]{x+3}}\,dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{x+5}}$

28. $\int \frac{3-\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

29. $\int \frac{5+\sqrt[3]{x-3}}{(x-3)\sqrt{x-3}}\,dx$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$

33. $\int \sqrt{x^2+6}\,dx$

34. $\int \sqrt{\frac{x+2}{2-x}}\,dx$

35. $\int \sqrt{\frac{x+10}{10-x}}\,dx$

36. $\int \sqrt{\frac{x-4}{x+4}}\,dx$

37. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+3}}$

38. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-5}}$

39. $\int \frac{2x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+3}}$

40. $\int \frac{5x\,dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2-1}}$

41. $\int \frac{ax\,dx}{(2x^2+5)\sqrt{3x^2-4}}$

42. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}}$

43. $\int \frac{3\,dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2+6}}$

44. $\int \frac{dx}{(2x^2-1)\sqrt{3x^2+1}}$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}}$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+1}}$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+9}}$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x}}$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+8x-15}}$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+7x-10}}$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-4}}$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+3)^2\sqrt{x^2-3x+5}}$

61. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-x-6}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-3x+1}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+2}{\sqrt{2x^2+x-1}}\,dx$

64. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-4}{\sqrt{x^2-5x-2}}\,dx$

65. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x-1}\,dx$

66. $\displaystyle\int x\sqrt{3x^2-x-9}\,dx$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+7x+12)\sqrt{x^2-2x-3}}$

68. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+1)\sqrt{x^2+6}}$

69. $\int \frac{dx}{(2x^2+4x+5)\sqrt{x^2+2x-3}}$

70. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+8)\sqrt{3x^2-6x+2}}$

71. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2+2x-6})^3}$

72. $\int \frac{dx}{(\sqrt{2x^2-4x+3})^5}$

73. $\int \frac{dx}{(5x^2+6)\sqrt{2x^2-x+3}}$

74. $\int \frac{x^2+4x}{(4x^2-x+2)\sqrt{5x^2-x+2}}\, dx$

75. $\int \frac{x^2\, dx}{1+x^3+\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}$

მითითება: ასე წარმოადგინეთ:

$$\int \frac{x^2\, dx}{(1+x^3)(1+\sqrt[3]{1+x^3})}; \qquad \sqrt[3]{1+x^3}=z$$

VI. დიფერენციალური ბინომები

$x^m(a+bx^n)^p$ სახის გამოსახულებას ეწოდება დიფერენციალური ბინომი, სადაც a და b ნებითი მუდმივი სიდიდეებია, ხოლო m, n და p რაციონალური რიცხვებია (მთელი ან წილადი, დადებითი ან უარყოფითი).

$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx$ სახის ინტეგრალის გამოთვლის დროს მთავარი მნიშვნელობა m, n და p მაჩვენებლებს აქვს, რომლებიც, როგორც ვთქვით, უსათუოდ რაციონალური რიცხვები უნდა იყოს. თუ ეს მაჩვენებლები (ერთი მათგანი ან ყველა) ირაციონალურია, მაშინ ინტეგრალი უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციას წარმოადგენს და მისი გამოთვლა ელემენტარულ ფუნქციათა საშუალებით შეუძლებელია.

ამრიგად, დიფერენციალური ბინომის ინტეგრაცია ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. მათი ინტეგრაცია შესაძლებელია მხოლოდ გარკვეულ პირობებში. ეს პირობები ასეთია:

I. როდესაც p მთელი რიცხვია, მაშინ შესაძლებელია ყოველთვის დიფ. ბინომის ინტეგრაცია, რადგან ასეთ შემთხვევაში ბინომი ადვილად გაიშლება ნიუტონის ფორმულის საშუალებით. მაგალითად,

$$x^2(2+x^3)^5$$

ბინომის ინტეგრაცია სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ჩვენ უმთავრესად ის შემთხვევაში გვაინტერესებს, როდესაც p წილადია, ე. $p=\frac{\alpha}{\beta}$, სადაც α და β მთელი რიცხვებია.

II. თუ $\frac{m+1}{n}$ უდრის მთელ რიცხვს (დადებითს ან უარყოფითს) ან ნოლს, მაშინ ბინომის ინტეგრაცია ყოველთვის არის შესაძლებელი. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა $a+bx^n=z^\beta$ ჩასმა.

> **შენიშვნა:** როდესაც $m=-1$, ეს პირობა ყოველთვის არის შესრულებული.

III. თუ $\frac{m+1}{n}+p$ უდრის მთელ რიცხვს ან ნოლს, მაშინ ინტეგრაცია შესაძლებელია და საჭიროა $a+bx^n=x^n z^\beta$ ჩასმა.

განხილულ პირობებს ჩებიშევის (Чебышев) პირობები ეწოდება. როდესაც ეს პირობები შესრულებული არ არის, ინტეგრალი უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციას წარმოადგენს.

1. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int x^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$m=-1,\ \ n=2,\ \ p=-\frac{1}{2}\quad(\alpha=-1,\ \beta=2)$$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

მე-II პირობა შესრულებულია, მაშასადამე,

$$1-x^2=z^2,$$

აქედან

$$x^2=1-z^2,\ \ x=(1-z^2)^{\frac{1}{2}},\qquad dx=-(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}z\,dz$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$\int x^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int\left[(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}(z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot-(1-z^2)^{\frac{1}{2}}z\,dz=$$

$$=\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\log\frac{z-1}{z+1}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right)+C$$

დავალება: შეამოწმეთ, ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი თუ არა.

2. $$\int x^{-2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$m=-2,\quad n=2,\quad p=-\frac{3}{2}\quad(\alpha=-3,\quad\beta=2)$$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$$

მე-II პირობა შესრულებული არ არის.

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}-\frac{3}{2}=-2$$

მე-III პირობა შესრულებულია, მაშასადამე,

$$1-x^2=x^2z^2,$$

აქედან:

$$x=(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dx=-(1+z^2)^{-\frac{3}{2}}z\,dz$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$\int x^{-2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\int\left[(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}(x^2z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot-(1+z^2)^{-\frac{3}{2}}z\,dz=$$

$$=-\int(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}z^{-2}dz=-\int(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}(1+z^2)^{\frac{3}{2}}z^{-2}dz=$$

$$=-\int(1+z^2)z^{-2}dz=\frac{1}{z}-z=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

დავალება: შეამოწმეთ, ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი თუ არა.

3. $\int x^{-\frac{1}{2}}\left(3+4x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2};\quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1.$$

ავნიშნოთ

$$3+4x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}z^2,$$

აქედან

$$x=27\,(z^2-4)^{-3}\quad \text{და}\quad dx=-162\,(z^2-4)^{-4}\,z\,dz$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(3+4x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=-18\int\frac{dz}{(z^2-4)^2}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე

4. $\int\frac{6x\,dx}{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$

მოვახდინოთ ასეთი გარდაქმნა:

$$\frac{6x\,dx}{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}=\frac{3d\,(1+x^2)}{(1+x^2)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

ავნიშნოთ $1+x^2=y$, გვექნება:

$$\frac{3d\,(1+x^2)}{(1+x^2)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{3dy}{y\,(1+\sqrt{y})}=3y^{-1}\left(1+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}dy.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{6x\,dx}{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}=3\int y^{-1}\left(1+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}dy$$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{\frac{1}{2}}=0.$$ შესრულებულია II პირობა.

მაშასადამე, საჭიროა

$1+y^{\frac{1}{2}}=z$ აღნიშვნა. დაიყვანეთ ბოლომდე.

5. $\int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

6. $\int x^{-1}(2-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

7. $\int x^2(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$

8. $\int x\sqrt{3+x^2}\,dx$

9. $\int x^3\sqrt{5-x}\,dx$

10. $\int x^{-2}(1+x)^{\frac{2}{3}}\,dx$

11. $\int x^{-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

12. $\int x^2\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

13. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$

14. $\int x^2(2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

15. $\int x^{-3}(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

16. $\int x^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

17. $\int x^{-\frac{1}{3}}(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}\,dx$

18. $\int x^{-\frac{1}{3}}(9+\sqrt{x^3})^{\frac{2}{3}}\,dx$

19. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3+(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}$

20. $\int \sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[6]{1+x\sqrt{x}}\,dx$

21. $\int \sqrt{x}\,\sqrt{a+x\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

VII. ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ინტეგრაცია

წინასწარი შენიშვნა: ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ინტეგრაცია მეტწილად ნაწილობითი ინტეგრაციის წესით წარმოებს.

მართალია, $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ სახის ინტეგრალისთვის არსებობს ეგრეთწოდებული უნივერსალური ჩასმა:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z,$$

რის შედეგადაც აღნიშნული სახის ინტეგრალი დაიყვანება რაციონალური სახის ინტეგრალზე, აგრეთვე $\sin x = y$ ჩასმის საშუალებით ტრიგონომეტრიული ფუნქციები დაიყვანება დიფერენციალურ ბინომებზე, მაგრამ ამ ხერხებს რთულ გარდაქმნებსა და კომბინაციებთან მივყევართ, რის გამოც ინტეგრალის გამოთვლა ხშირად ჭიანურდება და მოსაწყენი ხდება. ამიტომ ამ ხერხებს უფრო სარეზერვო ხასიათი აქვს და პრაქტიკულად ინტეგრალის გამოთვლა შედარებით ადვილი და მოხდენილი ხერხებით წარმოებს.

მიზანშეწონილია შემდეგი ტრიგონომეტრიული ფორმულების გახსენება.

1. $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$; $\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

2. $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ ანუ, თუ აღვნიშნავთ $\operatorname{tg} x = z$,

გვექნება:

$$\sin 2x = \frac{2z}{1+z^2}$$

აგრეთვე, $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$.

3. $$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2} \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z\right).$$

4. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ (ჯერადი რკალის ფორმულები)

A. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ინტეგრალები

პირველი ტიპი: $\int \sin^m x\,dx$ და $\int \cos^m x\,dx$

აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა:

a) ხარისხის მაჩვენებელი კენტია, ე. ი. $m=2k+1$

b) ხარისხის მაჩვენებელი ლუწია, ე. ი. $m=2k$

1. $$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x.$$

ავღნიშნოთ $\sin x = z$, გვექნება:

$$\int (1-z^2)\,dz = z - \frac{z^3}{3} = \underline{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C}$$

დავალება: გამოთვალეთ ანალოგიურად $\int \sin^3 x\, dx$.

შენიშვნა: უკანასკნელი ინტეგრალი ასეც გამოითვლება:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, აქედან

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \underline{\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C}$$

შენიშვნა: როდესაც ხარისხის მაჩვენებელი მაღალია, მაშინ მომარჯვებული უნდა იქნას ნიუტონის ბინომის ფორმულა.

მეორე ტიპი: $\int \frac{dx}{\sin^m x}$ და $\int \frac{dx}{\cos^m x}$

a) $m = 2k+1$ და b) $m = 2k$

3. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{dz}{1-z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log \frac{z-1}{z+1} = \underline{\frac{1}{2}\log\left(\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right) + C}$$

ასეც შეიძლება: მრიცხველი გავამრავლოთ ტრიგონომეტრიულ ერთეულზე.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}\, dx +$$

$$+ \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}\, dx = -\int \frac{d\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \int \frac{d\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} =$$

$$= -\log\cos \frac{x}{2} + \log\sin \frac{x}{2} = \underline{\log\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C}$$

შენიშვნა: პირველი და მეორე შედეგი გარეგნად ზუსტად ერთნაირი არ არის, მაგრამ თუ ორივეს გავაწარმოებთ, მივიღებთ ერთსადაიმავე ფუნქციას.

დავალება: მოცემული ინტეგრალი გამოთვალეთ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ ჩასმით.

4. $$\int\frac{dx}{\cos x}$$

მითითება: აღნიშნეთ $x=\frac{\pi}{2}-z$; პასუხი: $\log\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

დავალება: მოცემული ინტეგრალი გამოთვალეთ $\operatorname{tg}\frac{x}{4}=z$ ჩასმით.

5. $$\int\frac{dx}{\cos^3 x}$$

მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ $\cos x$-ზე

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x}=\int\frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)^2}$$

აღვნიშნოთ $\sin x=z$, გვექნება:

$$\int\frac{dz}{(1-z^2)^2}$$

დაიყვანეთ ბოლომდე უკანასკნელი ინტეგრალი, თანახმად რაციონალური წილადის ინტეგრაციისა.

მოცემული ინტეგრალი უკეთესია ასე გამოითვალოს:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx+\int\frac{dx}{\cos x}$$

პირველი ინტეგრალი გამოითვლება ნაწილობით:

$$\sin x=u,\quad \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}=dv,\ \text{აქედან}\ \cos x\,dx=du$$

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos^3 x}=v;\ -\int\frac{dz}{z^3}=-\int z^{-3}\,dz=v;$$

$$\frac{z^{-2}}{2}=v;\qquad \frac{\cos^{-2} x}{2}=v$$

ამრიგად, $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x \cos^{-2} x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos^{-2} x \cos x \, dx =$

$$= \frac{\sin x \cos^{-2} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \text{აქედან}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x \cos^{-2} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x \cos^{-2} x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \underline{\frac{\sin x \cos^{-2} x}{2} + \frac{1}{2} \log \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C}$$

მოცემული ინტეგრალი ასეც შეიძლება გამოითვალოს: ავნიშნოთ

$$\cos x = z,$$

აქედან

$$x = \arccos z; \quad dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ამრიგად $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = - \int \frac{dz}{z^3 \sqrt{1-z^2}}$

მიღებული ინტეგრალი გამოითვლება დიფერენციალური ბინომის საფუძველზე.

შენიშვნა: განხილული ინტეგრალისთვის უნივერსალური ჩასმა მიზანშეწონილი არ არის.

6. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, d \operatorname{tg} x =$

$$= \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, d \operatorname{tg} x = \int (z^2 + 1) \, dz = \frac{z^3}{3} + z =$$

$$= \underline{\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C}$$

მეხამე ტიპი: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

a) $m = n$ (განურჩევლად იმისა, კენტია თუ წყვილი მაჩვენებლები)

b) m წყვილია, ხოლო n-კენტი (ან შებრუნებით)

7. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \underline{-\frac{\cos 2x}{4} + C}$

ასეც შეიძლება: $\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d \sin x = \int z \, dz =$

$$= \frac{z^2}{2} = \underline{\frac{\sin^2 x}{2} + C}$$

8. $$\int 5 \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \frac{5}{8} \int (\sin 2x)^3 \, dx = \frac{5}{16} \int (\sin 2x)^3 \, d(2x);$$

აღვნიშნოთ $2x = z$, გვექნება:

$\frac{5}{16} \int \sin^3 z \, dz$. დაიყვანეთ ბოლომდე, თანახმად პირველი ტიპისა.

9. $$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d \sin x = \int z^2 \, dz =$$

$$= \frac{z^3}{3} = \underline{\frac{\sin^3 x}{3} + C}$$

მეოთხე ტიპი: $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$; $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$

a) $m = n$; b) მრიცხველის მაჩვენებელი კენტია; c) მრიცხველის მაჩვენებელი წყვილია (მნიშვნელის მაჩვენებელს მნიშვნელობა არა აქვს).

10. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \operatorname{tg}^3 x = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \operatorname{tg} x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \int z \, dz - \int \operatorname{tg} x \, dx = \frac{z^2}{2} + \log \cos x = \underline{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \log \cos x + C}$$

შენიშვნა: $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$ სახის ინტეგრალი ყოველთვის ასე უნდა წარმოვადგინოთ:

$$\int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx.$$

ინტეგრალის ბოლომდე დაყვანას შესაძლებელია ასეთი გარდაქმნა რამდენჯერმე დასჭირდეს იმის მიხედვით, n დიდი რიცხვია, თუ პატარა.

დავალება: გამოთვალეთ $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$; $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$

11. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)\,d\cos x}{\cos x} =$$

$$= -\int \frac{(1-z^3)\,dz}{z}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე

12. $$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x\,dx.$$

დაიყვანეთ ბოლომდე.

შენიშვნა: მეოთხე ტიპის ინტეგრალი, როდესაც m წყვილია, ყოველთვის იშლება პირველი და მეორე ტიპის ინტეგრალებად. მაგალითად,

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} - 2\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x\,dx$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მნიშვნელის მაჩვენებელი ორი ერთეულით აღემატება მრიცხველის მაჩვენებელს, მაშინ ინტეგრალის გამოთვლა საგრძნობლად მარტივდება.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^3 x\,d(\operatorname{tg} x) = \int z^3\,dz =$$

$$= \frac{z^4}{4} = \underline{\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C}$$

მეხუთე ტიპი: $$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$$

როდესაც m და n მთელი და დადებითი რიცხვებია, მაშინ მიზანშეწონილია მრიცხველი გამრავლდეს ტრიგონომეტრიულ ერთეულზე, ხოლო როდესაც $m+n=2k$ (წყვილია) უმჯობესია მრიცხველი და მნიშვნელი გაიყოს $\cos^{m+n} x$-ზე

13. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin x}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე

14. $$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

$m=3$, $n=1$. რადგან $m+n=4$ (წყვილია), ამიტომ მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ $\cos^4 x$-ზე

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^4 x}}{\operatorname{tg}^3 x}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^3 x}=\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x}=$$

$$=\int \frac{(1+z^2)\,dz}{z^3}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

15. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}}=\int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}=$$

$$=\int \frac{dz}{z}=\log z=\underline{\log(\operatorname{tg} x)+C}$$

ახეც გამოითვლება: $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x \cos x}\,dx.$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

დავალება: გამოთვალეთ ანალოგიურად $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

მეექვსე ტიპი: $\int \sin a x \sin b x\,dx$;

$$\int \cos a x \cos b x\,dx; \quad \int \sin a x \cos b x\,dx$$

ასეთი სახის ინტეგრალები გამოითვლება ცნობილი ტრიგონომეტრიული ფორმულების საშუალებით:

$$\sin a\cdot\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \qquad (ა)$$

$$\cos a\cdot\cos b=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad (ბ)$$

$$\sin a\cdot\cos b=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \qquad (გ)$$

16. $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

გვაქვს $a=3$ და $b=2$, მაშასადამე, თანახმად (გ) ფორმულისა, დავწერთ:

$$\int \sin 3x \cos 2x\, dx = \int \frac{\sin 5x + \sin x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \sin x\, dx = \underline{-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C}$$

17. $\int \sin 7x \sin 4x\, dx$

$a=7,\ b=4$. თანახმად (ა) ფორმულისა,

$$\int \sin 7x \sin 4x\, dx = \int \frac{\cos 3x - \cos 11x}{2}\, dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos 3x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 11x\, dx = \underline{\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{22}\sin 11x + C}$$

18. $\int \cos 8x \cos 5x\, dx$

გამოთვალეთ, თანახმად (ბ) ფორმულისა.

19. $\int \sin (6x+5) \cos (2x-3)\, dx$

$$a=6x+5, \quad b=2x-3$$

(გ) ფორმულის თანახმად დავწერთ:

$$\int \sin (6x+5) \cos (2x-3)\, dx = \int \frac{\sin (8x+2) + \sin (4x-8)}{2}\, dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin (8x+2)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin (4x+8)\, dx = \underline{-\frac{1}{16}\cos (8x+2) -}$$

$$\underline{-\frac{1}{8}\cos (4x+8) + C}$$

20. $\int \sin 3x \cos 2x \cdot \sin 4x\, dx$

$$\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x);$$

$$\sin 3x \cos 2x \sin 4x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x) \sin 4x =$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 5x \sin 4x + \sin x \sin 4x) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x - \cos 9x}{2} + \frac{\cos 3x - \cos 5x}{2}\right).$$

ამრიგად,

$$\int \sin 3x \cos 2x \sin 4x\,dx=\frac{1}{4}\int(\cos x-\cos 9x+\cos 3x-\cos 5x)\,dx$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

21. გამოთვალეთ ანალოგიურად $\int \sin 2x \cos x \sin 3x \cos 6x\,dx$

ტრიგონომეტრიული ჩასმები

22. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

აღვნიშნოთ $x=a\sin z$, აქედან $dx=a\cos z\,dz$;

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}\cdot a\cos z\,dz=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\,dz=$$

$$=a^2\int\cos^2 z\,dz=a^2\int\frac{1+\cos 2z}{2}\,dz=\frac{a^2}{4}z+\frac{a^2}{4}\sin 2z$$

ჩავსვათ ახლა z-ის მნიშვნელობა: რადგან $x=a\sin z$, აქედან

$$z=\arcsin\frac{x}{a},$$ აგრეთვე,

$$\sin 2z=2\sin z\cos z=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

ამრიგად, $\int\sqrt{a^2-x^3}\,dx=\frac{a^2}{2}z+\frac{a^2}{4}\sin 2z=$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$$

23. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

აღვნიშნოთ $x=a\,\mathrm{tg}\,z$, აქედან $dx=\frac{a\,dz}{\cos^2 z}$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\int\frac{\frac{a\,dz}{\cos^2 z}}{(a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2 z)^2}=\frac{1}{a^3}\int\frac{\frac{dz}{\cos^2 z}}{(1+\mathrm{tg}^2 z)^2}=\frac{1}{a^3}\int\frac{\frac{dz}{\cos^2 z}}{\sec^4 z}=$$

$$=\frac{1}{a^6}\int\cos^2 z\,dz=\frac{1}{2a^3}z+\frac{1}{4a^3}\sin 2z.$$

ჩავსვათ z-ის მნიშვნელობა: რადგან $x = a \operatorname{tg} z$,

აქედან $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$. აგრეთვე $\sin 2z = \frac{2\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg}^2 z} = \frac{2a\,x}{a^2+x^2}$

ამრიგად, $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \underline{\frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C}$

დავალება: ანალოგიურად გამოთვალეთ $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

ამ ინტეგრალის პასუხი წინა პასუხიდანაც შეგვიძლიან პირდაპირ დავწეროთ, თუ $a=1$ ჩავსვამთ.

24. $\int \frac{dx}{(3+x^2)^2}$

მითითება: აღნიშნეთ $x=\sqrt{3}\operatorname{tg} z$.

25. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^3}$

მითითება: აღნიშნეთ $x = a \sin z$.

26. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$; $\qquad x = a \operatorname{tg} z$

27. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$; $\qquad x = a \sec z$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$; $\qquad x=\sqrt{5}\ \mathrm{g}\, z$

29. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}}$

აღვნიშნოთ $x=\sqrt{3}\operatorname{tg} z$, აქედან $dx = \frac{\sqrt{3}\,dx}{\cos^2 z}$;

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}\,dz}{\cos^2 z}}{3\operatorname{tg}^2 z\sqrt{3+3\operatorname{tg}^2 z}}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე..

30. ანალოგიურად გამოთვალეთ: $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}}$;

$$\int x(4+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$$

31. $\int \frac{\cos x\, dx}{9+\sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{9+\sin^2 x}$. დაიყვანეთ ბოლომდე.

32. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$

აღვნიშნოთ $x=u$; $\frac{dx}{\cos^2 x}=dv$, აქედან $dx=du$; $\operatorname{tg} x=v$.

$$\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

33. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{4-2\sin^2 x} = -\int \frac{\sin^2 x\, d\cos x}{4-2(1-\cos^2 x)}$. დაიყვანეთ ბოლომდე.

34. $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

35. $$\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^3 x\,(1+\sin^2 x)} =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)\, d\sin x}{\sin^3 x\,(1+\sin^2 x)}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

36. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

აღვნიშნოთ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, აქედან $x = 2 \operatorname{arc\,tg} z$,

$$dx = \frac{2\, dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2};$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2\, dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

დავალება: გამოთვალეთ ანალოგიურად $\int \frac{dx}{1+\sin x}$; $\int \frac{dx}{5-\sin x}$

37. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$

აღვნიშნოთ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, აქედან $x=2\operatorname{arc\,tg} z$,

$$dx=\frac{2\,dx}{1+z^3}, \quad \sin x=\frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}=\int \frac{\frac{2\,dx}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}+1}.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

38. $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$

მართალია, ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოსადეგია $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ ჩასმა, მაგრამ უფრო მოხდენილი და მიზანშეწონილია დამხმარე კუთხის შემოყვანა

$$\frac{1}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{a\left(\sin x+\frac{b}{a}\cos x\right)};$$ აღვნიშნოთ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$;

გვექნება:

$$\frac{1}{a(\sin x+\operatorname{tg}\varphi\cos x)}=\frac{\cos\varphi}{a(\sin x\cos\varphi+\sin\varphi\cos x)}=\frac{\cos\varphi}{a\sin(x+\varphi)}$$

ამრიგად, $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{\cos\varphi}{a}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)}=$

$$=\frac{\cos\varphi}{a}\int\frac{d(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)};$$ აღვნიშნოთ $x+\varphi=z$;

გვექნება:

$$\frac{\cos\varphi}{a}\int\frac{dz}{\sin z}=\frac{\cos}{a}\log\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{\cos\varphi}{a}\log\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}$$

ახლა, რადგან $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$,

აქედან

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\underline{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x+\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}{2}\right)\right]+C}$$

39. $\int\frac{dx}{3\sin^2x+\cos^2x}$

აღვნიშნოთ $\operatorname{tg}^2x=z$, აქედან

$$dx=\frac{dz}{2\sqrt{z}(1+z)};$$

$$\sin^2x=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{z}{1+z};\qquad \cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+z}$$

$$\int\frac{dx}{3\sin^2x+\cos^2x}=\int\frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}(1+z)}}{\frac{3z}{1+z}+\frac{1}{1+z}}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

ახეც შეიძლება: მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ $\cos^2x$-ზე.

$$\int\frac{dx}{3\sin^2x+\cos^2x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{3\operatorname{tg}^2x+1}=\int\frac{d\operatorname{tg}x}{3\operatorname{tg}^2x+1}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

40. $\int\cos^3(\sin x)\cdot\cos x\,dx$

აღვნიშნოთ $\sin x=z$, გვექნება:

$$\int\cos^3(\sin x)\,d\sin x=\int\cos^3z\,dz.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

41. $$\int\frac{dx}{\cos 2x(1+\operatorname{tg}^2x)}=\int\frac{dx}{(\cos^2x-\sin^2x)(1+\operatorname{tg}^2x)}=$$

$$=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1+\operatorname{tg}^2x)}=\int\frac{d\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^4x}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

42. $$\int \cos^2 2x \cos 4x\, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} \cdot \cos 4x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos^2 4x\, dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx$$

დაიყვანეთ ბოლომდე.

43. $$\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}}\, dx = \int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} \cdot d\operatorname{tg} x$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

44. $$\int \frac{\sqrt{\cos 2x} \cdot \sin x}{\sin^2 2x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \sin x}{4\sin^2 x \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{4}\int \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1} \cdot d\operatorname{tg} x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}\, d\operatorname{tg} x\,;$$

თუ აღვნიშნავთ $\operatorname{tg} x = z$, მივიღებთ

$$\frac{1}{4}\int z^{-1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\, dz$$

დიფერენციალურ ბინომს. დაიყვანეთ ბოლომდე.

45. $$\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}$$

აღვნიშნოთ $\cos x = z^6$, აქედან

$$-\sin x\, dx = 6z^5\, dz$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x})} = -6\int \frac{dz}{z^3(z-1)}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

46. $\int \arcsin 5x\, dx$

აღვნიშნოთ $u = \arcsin 5x$, $dv = dx$.

აქედან

$$du = \frac{5\, dx}{\sqrt{1-25x^2}}; \qquad v = x.$$

ნაწილობითი ინტეგრაციის თანახმად,

$$\int \arcsin 5x\, dx = x \arcsin 5x - 5 \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-25x^2}}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

47. $\int \operatorname{arc\,tg} 3x\, dx$

$$u = \operatorname{arc\,tg} 3x; \qquad dv = dx.$$

$$du = \frac{3\, dx}{1+9x^2}; \qquad v = x.$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} 3x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} 3x - 3 \int \frac{x\, dx}{1+9x^2}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი დაიყვანეთ ბოლომდე.

48. $\int (\arcsin x)^2\, dx$

მითითება: საჭიროა ნაწილობითი ინტეგრაცია, ოღონდ უნდა შევნიშნოთ, რომ $2 \int \arcsin x \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2 \int \arcsin x \cdot d\left(-\sqrt{1-x^2}\right)$ აგრეთვე ნაწილობით უნდა გამოითვალოს.

49. $$\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^4+2x^2+1}}\, dx = \int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int (\operatorname{arc\,tg} x)^{\frac{1}{2}}\, d(\operatorname{arc\,tg} x).$$

აღნიშნეთ $\operatorname{arc\,tg} x = z$ და დაიყვანეთ ბოლომდე.

C. ლოგარითმული ფუნქციების ინტეგრალები

50. $\int x \log (x+1)\, dx$

$$\log (x+1)=u\,; \qquad x\, dx=dv$$

$$\frac{dx}{1+x}=du\,; \qquad \frac{x^2}{2}=v$$

$$\int x \log (x+1)\, dx = \frac{x^2 \log (x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{1+x}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

51. $$\int \frac{dx}{x \log 2x} = \int \frac{1}{\log 2+\log x}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{d\,(\log x)}{\log 2+\log x}$$

აღნიშნეთ $\log x = z$ და დაიყვანეთ ბოლომდე

პას. $\underline{\log (\log 2x)+C}$

52. $\int \frac{\log x\, dx}{(a-x)^2}$

$$\log x=u\,; \qquad \frac{dx}{(a-x)^2}=dv$$

$$\frac{dx}{x}=du\,; \quad \frac{1}{a-x}=v$$

$$\int \frac{\log x\, dx}{(a-x)^2} = \frac{\log x}{a-x} - \int \frac{dx}{x\,(a-x)}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

D. მაჩვენებლიანი ფუნქციების ინტეგრალები

როგორც ზემოთაც ვთქვით, ასეთი სახის ინტეგრალების გამოთვლა მეტწილად ნაწილობით ინტეგრაციის საშუალებით წარმოებს. ფორმულის გამოყენების დროს ჩვეულებრივ ტრანსცენდენტული ნაწილი dv-თი აღინიშნება, ხოლო ალგებრული u-თი

53. $\int (x^2+1)\, e^x\, dx$

$$x^2+1=u\,; \qquad e^x\, dx=dv$$

$$2x\, dx=du\,; \qquad e^x=v$$

$$\int (x^2+1)\, e^x\, dx = e^x\,(x^2+1)-2\int x\, e^x\, dx$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოთვალეთ აგრეთვე ნაწილობით:

$$x=u\ ;\ e^x\,dx=dv$$

54. $\int e^{3x}(\sin x-\cos x)\,dx$

$$\sin x-\cos x=u\ ;\quad e^{3x}\,dx=dv$$

$$(\cos x+\sin x)\,dx=du\ ;\quad \frac{e^{3x}}{3}=v$$

$$\int e^{3x}(\sin x-\cos x)\,dx=\frac{e^{3x}(\sin x-\cos x)}{3}-\frac{1}{3}\int e^{3x}(\cos x+\sin x)\,dx$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ აგრეთვე ნაწილობით:

$$\int e^{3x}(\cos x+\sin x)\,dx=\frac{e^{3x}(\cos x+\sin x)}{3}+\frac{1}{3}\int e^{3x}(\sin x-\cos x)\,dx$$

ამრიგად,

$$\int e^{3x}(\sin x-\cos x)\,dx=\frac{e^{3x}(\sin x-\cos x)}{3}-\frac{e^{3x}(\cos x+\sin x)}{9}-$$

$$-\frac{1}{9}\int e^{3x}(\sin x-\cos x)\,dx$$

„რესტავრაციის“ წესის მიხედვით:

$$\int e^{3x}(\sin x-\cos x)\,dx=\underline{\frac{1}{5}e^{3x}(\sin x-2\cos x)+C}$$

შენიშვნა: მოცემული ინტეგრალი ასეც შეიძლება გამოვთვალოთ: გავხსნათ ფრჩხილები და ორი ინტეგრალის სხვაობის სახით წარმოვადგინოთ. შემდეგ თითოეული გამოვთვალოთ ნაწილობით.

55. $\int \frac{dx}{1+e^{2x}}$

გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი e^{2x}-ზე:

$$\int \frac{dx}{1+e^{2x}}=\int \frac{\frac{dx}{e^{2x}}}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}=\int \frac{e^{-2x}\,dx}{1+e^{-2x}}$$

ალვნიშნოთ

$$e^{-2x}=z,$$

აქედან

$$e^{-2x}\,dx=-\frac{dz}{2}$$

$$\int\frac{e^{-2x}\,dx}{1+e^{-2x}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

56. $$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$$

ალნიშნეთ $e^x=z$ და დაიყვანეთ ბოლომდე

57. $$\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx=\int d\left(e^{\sin x}\right)$$

58. $$\int e^{ax}\cos b\,x\,dx$$

ალვნიშნოთ $u=\cos bx$; $e^{ax}\,dx=dv$

აქედან

$$du=-b\sin bx\,dx\,;\qquad\frac{e^{ax}}{a}=v$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx \tag{ა}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ აგრეთვე ნაწილობით:

$$u=\sin bx\,;\quad e^{ax}\,dx=dv.$$

$$du=b\cos bx\,dx;\quad\frac{e^{ax}}{a}=v.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b\,e^{ax}\sin bx}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

„რესტევრაციის“ მიხედვით:

$$\int e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

ანალოგიურად გვექნება:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C_1.$$

დავალება: გამოყვანილი ფორმულების მიხედვით პირდაპირ გამოთვალეთ.

$$\int e^{4x}\cos 3x\,dx; \qquad \int e^{2x}\sin 5x\,dx$$

მითითება: პირველი ინტეგრალისთვის $a=4$, $b=3$; მეორისთვის $a=2$, $b=5$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი ზემოთმიღებულ ფორმულებში:

სავარჯიშო

59. $\int \sin^5 x\,dx$

60. $\int \cos^5 x\,dx$

61. $\int \cos^6 x\,dx$

62. $\int (1+\sin^2 x)^2\,dx$

63. $\int (3+\cos^2 x)^3\,dx$

64. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

65. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

66. $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$

67. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

მითითება: ისარგებლეთ ჯერადი კუთხის ფორმულებით.

68. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$

69. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

70. $\int \cos^5 x\sin^2 x\,dx$

71. $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx$

72. $\int \mathrm{tg}^6 x\,dx$

73. $\int \mathrm{ctg}^3 x\,dx$

74. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

75. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

76. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$

77. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$

78. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, dx$

79. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$

80. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\, dx$

81. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

82. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$

83. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

84. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

85. $\int (x^2+5) \cos x \, dx$

86. $\int (x^2-3x-1) \sin 2x \, dx$

87. $\int \sin 2x \cos x \, dx$

88. $\int \sin 4x \cos 2x \, dx$

89. $\int \sin 6x \cos 5x \, dx$

90. $\int \sin 2x \cos 7x \sin 4x \, dx$

91. $\int \sin 8x \sin 2x \cos 5x \, dx$

92. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$

93. $\int \frac{dx}{5\sin x - 2\cos x}$

94. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$

95. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 2}$

96. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x + 1}$

97. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 2x}$

98. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos x}$

99. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

მითითება: გაყავით მრიცხველი და მნიშვნელი $\cos^2 x$-ზე.

100. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\sin 2x}\, dx$

101. $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos 2x}\, dx$

102. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,(2+\operatorname{tg} x)}$

103. $\int \frac{\sec x \, dx}{\cos^2 x \sqrt{\cos 2x + \sin^2 x}}$

104. $\int \sqrt{\frac{\cos x}{\sin^5 x}}\, dx$

105. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$

106. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+2\operatorname{ctg}^2 x}}$

107. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos 2x+\sin^2 x}\,dx$

108. $\displaystyle\int \arccos x\,dx$

109. $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,dx$

110. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

111. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{(\arccos x)^2}{1-x^2}}\,dx$

112. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}}\,dx$

113. $\displaystyle\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

114. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,tg} 3x}{1+9x^2}\,dx$

მითითება: აღნიშნეთ

$$\operatorname{arc\,tg} 3x=z;$$

მოძებნეთ dz და ჩასვით მნიშვნ.

115. $\displaystyle\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

მითითება: აღნიშნეთ

$$\arccos 2x=z$$

116. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25-\log^2 x}}$

117. $\displaystyle\int \frac{(3+2\log x)^2}{x}\,dx$

118. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log(ax^2)}$

119. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(5+\log x)^{-2}}$

120. $\displaystyle\int \frac{1+\log^2 x}{x-x\log^2 x}\,dx$

121. $\displaystyle\int x^{-1}(1-\log x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

122. $\displaystyle\int \frac{[\log(\operatorname{arc\,tg} x)]^2}{1+x^2}\,dx$

მითითება: აღნიშნეთ

$$\operatorname{arc\,tg} x=z$$

123. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\log(\cos x)\,dx$

მითითება: $\log(\cos x)=z$

124. $\displaystyle\int \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx$

125. $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

მითითება: ნაწილობით:

$\sin(\log x)=u$ და $dx=dv$

126. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{1+\log(\cos x)}}$

მითითება: აღნიშნეთ

$\log(\cos x)=z$; აქედან $\operatorname{tg} x\,dx=dz$

127. $\int \frac{[\log(\arcsin x)]^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

მითითება: $\arcsin x = z$

128. $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt{1-[\log(\cos x)]^2}}$

129. $\int \frac{\log^2 x\, dx}{4x \log^3 x + x}$

130. $\int x^2 e^{-3x} dx$

131. $\int (x+4) e^{x+3} dx$

132. $\int (x^2-2x) e^{-2x} dx$

133. $\int (2x^3-x^2-4) e^{2x} dx$

134. $\int \frac{dx}{1-e^{-x}}$

135. $\int \frac{dx}{4+e^{-3x}}$

136. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$

137. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-e^{3x}}}$

მითითება: აღნიშნეთ $e^{3x} = z$

138. $\int \frac{dx}{5-e^{2x+1}}$

მითითება: აღნიშნეთ $e^{2x+1} = z$

139. $\int \frac{x e^x dx}{(2+e^x)^3}$

მითითება: გამოთვალეთ ნაწილობით:

$$= u\,; \qquad \frac{dx}{(2+e^x)^3} = dv$$

140. $\int e^{8x} \sin 6x\, dx$

141. $\int e^{6x} \cos 5x\, dx$

142. $\int e^{\cos x} \cdot \sin 2x\, dx$

მითითება: $e^{\cos x} \sin 2x\, dx =$

$$= e^{\cos x} \cdot 2 \sin x \cos x\, dx =$$

$$= -2 \cos x\, d\,(e^{\cos x})$$

143. $\int e^{\operatorname{tg} x+2} \cdot \sec^2 x\, dx$

მითითება: $\sec^2 x\, dx = d\,(\operatorname{tg} x)$

144. $\int e^{\sec^2 x} \cdot \cos^{-2} x\, dx$

განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი

1. ავიღოთ, მაგალითად, $\int (x^2-2) \sin 3x\, dx$ ამ მეთოდის მიხედვით უნდა დავწეროთ:

$$\int (x^2-2) \sin 3x\, dx = (Ax^2+Bx+C) \sin 3x + (A_1x^2+B_1x+C_1) \cos x + K \quad (ა$$

გავადიფერენციოთ ტოლობის ორივე მხარე:

$$(x^2-2) \sin 3x = (2Ax+B) \sin 3x + 3\,(Ax^2+Bx+C) \cos 3x +$$
$$+ (2A_1x+B_1) \cos 3x - 3\,(A_1 x^2+B_1 x+C_1) \sin 3x$$

გავუტოლოთ ეხლა ერთმანეთს სინუსებთან და კოსინუსებთან მდგომი ორივე ნაწილის (x-ის) ტოლი ხარისხების კოეფიციენტები:

$1=-3A_1$ $2A-3B_1=0$ $-2=B-3C_1$	სინუსებთან მდგომი x-ის კოეფიციენტები	$3A=0$ $3B+2A_1=0$ $3C+B_1=0$	კოსინუსებთან მდგომი კოეფიციენტები

აქედან

$$A=0,\quad A_1=-\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{9},\ B_1=0,\quad C=0,\ C_1=\frac{20}{27}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში:

$$\int (x^2-2)\sin 3x\,dx=\underline{\frac{2}{9}\,x\sin 3x+\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{20}{27}\right)\cos 3x+K.}$$

დავალება: შეამოწმეთ, ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი თუ არა. აგრეთვე აღნიშნული მეთოდით გამოთვალეთ: $\int(x+5)\cos 2x\,dx$;

$$\int(x^2+5x)\sin 4x\,dx\,;\qquad \int(x^2-3x-1)\sin 3x\,dx$$

2. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ *

დავწეროთ ტოლობა:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}(A\sin bx+B\cos bx)+C \qquad (ა)$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$e^{ax}\sin bx=ae^{ax}(A\sin bx+B\cos bx)+e^{ax}(A\,b\cos bx-B\,b\sin bx)$$

ანუ

$$\sin bx=A\,a\sin bx+B\,a\cos bx+A\,b\cos bx-B\,b\sin bx$$

აქედან

$$Aa-Bb=1;\qquad Ba+Ab=0$$

ამ სისტემის გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$A=\frac{a}{a^2+b^2}\,;\qquad B=-\frac{b}{a^2+b^2}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში

* ეს ინტეგრალი ზემოთ სხვა გზითა გვაქვს გამოთვლილი.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C \qquad (ბ)$$

დავალება: ანალოგიურად გამოთვალეთ $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

3. $\int e^{5x}\sin 4x\,dx$

დავწეროთ:

$$\int e^{5x}\sin 4x\,dx=e^{5x}(A\sin 4x+B\cos 4x)+C$$

გავადიფერენციოთ:

$$e^{5x}\sin 4x=5e^{5x}(A\sin 4x+B\cos 4x)+e^{5x}(4A\sin 4x-4B\cos 4x)$$

ანუ

$$\sin 4x=5A\sin 4x+5B\cos 4x+4A\sin 4x-4B\cos 4x$$

აქედან

$$5A+4B=1; \quad 5B+4A=0$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ:

$$A=\frac{5}{41}; \qquad B=-\frac{4}{41}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$\int e^{5x}\sin 4x\,dx=\frac{e^{5x}(5\sin 4x-4\cos 4x)}{41}+C.$$

შენიშვნა: მოცემული ინტეგრალი უშუალოდაც გამოითვლება (ბ)-დან, თუ მოვახდენთ $a=5$, $b=4$ ჩასმას.

4. $\int e^{3x}(x-2)\cos 5x\,dx$

დავწეროთ ტოლობა:

$$\int e^{3x}(x-2)\cos 5x\,dx=e^{3x}[(Ax+B)\sin 5x+(A_1x+B_1)\cos 5x]+C \quad (ა)$$

გავადიფერენციოთ:

$$e^{3x}(x-2)\cos 5x=3e^{3x}[Ax+B)\sin 5x+(A_1x+B_1)\cos 5x]+$$
$$+e^{3x}[A\sin 5x+5(Ax+B)\cos 5x+A_1\cos 5x-5(A_1x+B_1)\sin 5x]$$

ანუ

$$(x-2)\cos 5x=3(Ax+B)\sin 5x+3(A_1x+B_1)\cos 5x+A\sin 5x+$$
$$+5(Ax+B)\cos 5x+A_1\cos 5x-5(A_1x+B_1)\sin 5x$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს ორივე ნაწილის კოეფიციენტები:

$$\left.\begin{aligned}3A-5A_1&=0\\3B+A-5B_1&=0\end{aligned}\right\}\text{ სინუსებთან მდგომი კოეფიციენტები}$$

$$\left.\begin{aligned}3A_1+5A&=1\\3B_1+5B+A_1&=-2\end{aligned}\right\}\text{ კოსინუსებთან მდგომი } x\text{-ის კოეფიციენტები}$$

აქედან

$$A=\frac{5}{34};\quad B=-\frac{185}{578};\quad A_1=\frac{3}{34};\quad B_1=-\frac{47}{289}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში

$$\int e^{3x}(x-2)\cos 5x\,dx=e^{3x}\left[\left(\frac{5}{34}x-\frac{185}{578}\right)\sin 5x+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{34}x-\frac{47}{289}\right)\cos 5x\right]+C$$

დავალება: შეამოწმეთ, ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი თუ არა. აგრეთვე ანალოგიურად გამოთვალეთ:

$$\int e^{2x}(2x+1)\sin 3x\,dx;\qquad \int e^{4x}(x^2-1)\cos 2x\,dx$$

კომპლექსური რიცხვების მეთოდი ანუ ინტეგრალის გამოთვლა კომპლექსური რიცხვების საშუალებით

ამ მეთოდით სარგებლობის დროს უნდა გვახსოვდეს, რომ

$$a)\quad [e^{(a+ib)x}]'=(a+ib)\,e^{(a+ib)x}$$

$$b)\quad \int e^{(a+ib)x}\,dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}+C$$

გამოვთვალოთ $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ და $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

დავწეროთ:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx+i\int e^{ax}\sin bx\,dx=\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)\,dx=$$

$$=\int e^{ax}\cdot e^{bix}\,dx=\int e^{(a+ib)x}\,dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}=\frac{e^{ax}\cdot e^{ibx}}{a+ib}=$$

$$=\frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)}{a+ib}=\frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)(a-ib)}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{e^{ax}[a\cos bx+b\sin bx+i(a\sin bx-b\cos bx)]}{a^2+b^2}$$

ამრიგად,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx+i\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+$$

$$+i\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

მაგრამ კომპლექსური რიცხვები თუ ტოლია, მაშინ მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ტოლია, ე. ი.:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C$$

და

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C_1$$

დავალება: ანალოგიურად გამოთვალეთ

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx \quad \text{და} \quad \int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

ამ შემთხვევაში $a=2$ და $b=3$.

გამოთვლა ისევე უნდა აწარმოოთ, როგორც წინა შემთხვევაში, ე. ი. უნდა აწარმოოთ მოქმედება $\int e^{2x}\cos 3x\,dx+i\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ გამოსახულებაზე.

თავი მეორე

განსაზღვრული ინტეგრალები

თუ ცნობილია $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ განუსაზღვრელი ინტეგრალი, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალს, სადაც a და b ინტეგრალის საზღვრებია: a—ქვედა და b—ზედა საზღვარი.

ამრიგად, განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა რომ ვიპოვოთ, ამისთვის განუსაზღვრელ ინტეგრალში ცვლადის მაგივრად უნდა ჯერ ზედა საზღვარი ჩავსვათ, შემდეგ — ქვედა და პირველ რეზულტატს მეორე გამოვაკლოთ. ამ გამოკლების დროს C მუდმივი ისპობა. ვინაიდან

$$\Big[F(x) + C\Big]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

განსაზღვრულ ინტეგრალზე ვრცელდება ყველა ის ძირითადი წესი, რომლებიც განუსაზღვრელი ინტეგრალებისთვის იყო განხილული, მაგალითად:

a) მუდმივი მამრავლი ინტეგრალის ნიშნის გარეთ გამოიტანება.
b) ჯამის ინტეგრალი ინტეგრალთა ჯამის ტოლია.
c) ნაწილობითი ინტეგრაცია:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

აღნიშნულ თვისებათა გარდა, განსაზღვრული ინტეგრალისთვის სამართლიანია:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

ე. ი. ინტეგრალის ნიშნის შეცვლით შესაძლებელია საზღვრების გადანაცვლება — ქვედა საზღვარი ზევითის მაგივრად და შებრუნებით.

აგრეთვე

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

ე. ი. როგორიც უნდა იყოს „c" განსაზღვრული ინტეგრალი a და b საზღვრებში ყოველთვის შეგვიძლიან წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამის სახით a-დან c-დე და c-დან b-დე. c შეიძლება მდებარეობდეს როგორც (a, b) შუალედში, ისე მის გარეთ. რა თქმა უნდა, შესაძლებელია თითოეული ინტეგრალი თავის მხრივ კიდევ წარმოდგენილ იქნას ორი ინტეგრალის ჯამის სახით და ასე შემდეგ.

1. $$\int_3^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_3^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{3^2}{2} = 8 - 4\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

2. $$\int_1^3 (x+5)^2\,dx = \int_1^3 (x^2+10x+25)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx +$$

$$+\int_1^3 10x\,dx + \int_1^3 25\,dx = \int_1^3 x^2\,dx + 10\int_1^3 x\,dx + 25\int_1^3 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + 10\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 25x\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} + 5\cdot(9-1) + 25(3-1) = 98\frac{2}{3}$$

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{\cos 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\cos 0}{2}\right] =$$

$$= -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

4. $$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

გამოვთვალოთ ნაწილობით:

$$x = u\,; \qquad \cos x\,dx = dv\,;$$

აქედან

$$dx = du\,; \qquad \sin x = v.$$

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\cos x\Big|_0^{\pi} = \pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos\pi - \cos 0 = -2$$

სავარჯიშო

5. $\int_0^1 x^2\,dx$

6. $\int_0^4 x^2\,dx$

7. $\int_1^2 (x-1)^2\,dx$

8. $\int_2^4 \frac{dx}{x}$

9. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

10. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+3)^2}$

11. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-9}$

12. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+25}$

13. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$

14. $\int_1^4 \frac{dx}{x(x+3)}$

15. $\int_1^2 e^{-(2x+3)}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}}$

17. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx$

18. $\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

21. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log x\,dx$

22. $\int_1^2 x\log x\,dx$

23. $\int_0^1 \arcsin x\,dx$

24. $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$

საზღვრების შეცვლა ახალი ცვლადის შემოყვანის დროს

როდესაც ინტეგრალის გამოთვლას ვაწარმოებთ ჩასმის საშუალებით, ე. ი. ახალი ცვლადის შემოყვანით, ჩვენ შეგვიძლიან საბოლოო შედეგის მისაღებად პირვანდელ ცვლადს აღარ დავუბრუნდეთ და ინტეგრალი ახალი ცვლადით დავიყვანოთ ბოლომდე. ამისთვის საჭიროა მხოლოდ ინტეგრალის ძველი საზღვრების შეცვლა ახალი ცვლადის შესაბამი საზღვრებით.

მაგალითად,

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

აღვნიშნოთ

$$\sqrt{x}=z,$$

აქედან

$$x=z^2; \quad dx=2z\,dz.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი, გვექნება:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2z\,dz}{1+z}=2z-2\log(1+z).$$

მიღებულ შედეგში ან უნდა z შევცვალოთ პირვანდელი ცვლადით და მოვახდინოთ ჩასმა 0-დან 9-მდე, ან პირდაპირ მოვახდინოთ z-ის შესაფერი საზღვრების ჩასმა. ეს საზღვრები გამოითვლება $\sqrt{x}=z$ განტოლებიდან. ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ, როდესაც $x=0$, მაშინ $z=0$, ხოლო, როდესაც $x=9$, მაშინ $z=3$.

ამრიგად, პირველი გზა:

$$2z-2\log(1+z)=\Big[2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x})\Big]_0^9=6-2\log 4=\underline{6-4\log 2}$$

მეორე გზა:

$$\Big[2z-2\log(1+z)\Big]_0^3=\underline{6-4\log 2.}$$

შენიშვნა: ქვემოთ განხილულ მაგალითებში ახალი ცვლადის შემოყვანასთან ერთად ძველი საზღვრებიც მაშინვე შეიცვლება შესაფერი საზღვრებით.

2. $\displaystyle\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\,dx$

აღვნიშნოთ $\sqrt{x}=z$, აქედან

$$x=z^4; \qquad dx=4z^3\,dz;$$

$$\int_1^{16}\frac{\sqrt[4]{x}+2}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{2}\frac{z+2}{z^2}\,4z^3\,dz=\left[\frac{4z^3}{3}+4z^2\right]_1^2=21\frac{1}{3}$$

3. $$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{a^2-x^2}$$

$$x=a\sin z,$$

აქედან

$$dx=a\cos z\,dz$$

z-ის შესაფერი საზღვრების მოსაძებნად ჩავსვათ

$$x=a\sin z$$

განტოლებაში x-ის მაგიერ ჯერ 0, შემდეგ $\frac{a}{2}$. გვექნება: 0 და $\frac{\pi}{6}$. ამრიგად:

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{a^2-x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\cos z\,dz}{a^2-a^2\sin^2 z}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos z\,dz}{1-\sin^2 z}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dz}{\cos z}=$$

$$=\frac{1}{a}\log\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\log 3}{2a}$$

შენიშვნა: იმ შემთხვევაში, როდესაც ძველსა და ახალ ცვლადს შორის დამოკიდებულება მრავალმნიშვნელოვანი ფუნქციის სახით არის გამოსახული, მაშინ ინტეგრალის გამოთვლა ყოველთვის არ არის მოსახერხებელი. ასე, მაგალითად, $\int_{-3}^{+3}dx$ ინტეგრალისთვის უვარგისია $x=\sqrt{z}$ ჩასმა. მართლაც, თუ z-ის შესაფერ საზღვრებს გამოვთვლით, გვექნება:

$$-3=\sqrt{z}\,,\ \text{აქედან}\ z=9;$$

$$+3=\sqrt{z}\,,$$

აქედან $z=9$. ამრიგად მივიღებთ ინტეგრალს, რომლის ქვედა და ზედა საზღვარი არის $+9$ და $+9$, რასაც აზრი არა აქვს.* ამისი მიზეზი სწორედ ის არის, რომ $x=\sqrt{z}$ გამოსახვაში x არის z-ის მრავალსახა (ორსახა) ფუნქცია.

კითხვა: შეიძლება თუ არა

$$\int_{3}^{2} dx\,; \qquad \int_{0}^{1} x^2\,dx\,; \qquad \int_{-a}^{+a} dx$$

ინტეგრალებში მოვახდინოთ $x=\sqrt{z}$ ჩასმა.

სავარჯიშო

4. $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; $\qquad \sqrt[3]{x}=z$. $\qquad$ პას. $3\log 3$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}\,dx$; $\qquad \sqrt[6]{x}=z$ $\qquad$ პას. $\dfrac{3}{4}$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\qquad \sqrt{a^2-x^2}=z$ $\qquad$ პას. $a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; $\qquad x=a\sin z$ $\qquad$ პას. $\dfrac{\pi a^2}{4}$

8. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\qquad x=az$ $\qquad$ პას. $\log\left(1+\sqrt{2}\right)$

9. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2+x^2}\,dx$; $\qquad x=a\operatorname{tg} z$ $\qquad$ პას. $\dfrac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}+\log\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}\right)$

10. $\displaystyle\int^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; $\qquad x=\operatorname{tg} z$ $\qquad$ პას. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$

11. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{b}} \frac{dx}{(b+x^2)^2}$; $\qquad x=\sqrt{b}\operatorname{tg} z$ $\qquad$ პას. $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{b}}{8b^2}$

* ასეთ შემთხვევაში ინტეგრალი ნოლს ეტოლება.

12. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^3}$; $\quad x=3\operatorname{tg} z \quad$ პას. $\frac{1}{243}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)$

13. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2x-x^2}}$; $\quad x=a^2\sin^2 z \quad$ პას. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}$

14. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; $\quad x=4\sin^2 z \quad$ პას. $\frac{\pi}{3}$

15. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-c^{-x}}\,dx$; $\quad e^x=z \quad$ პას. $\log(e+1)-\frac{1}{2}$

16. $\int_\pi^{2\pi} \cos 2x\,(\cos x+\sin x)^3\,dx$; $\quad \sin x+\cos x=z$. პას. 0.

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,(\cos x-\sin x)\,dx$; $\quad \sin x+\cos x=z$. პას. $-1\,\frac{1}{3}$

მითითება: $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$

18. გადაწყვიტეთ მე-7 ამოცანა, როდესაც საზღვრები არის

$-a$ და $+a$. $\quad$ პას. $\frac{\pi a^2}{2}$

მითითება: როდესაც $x=a\sin z$ განტოლებაში ჩავსვამთ ინტეგრალის საზღვრებს, მივიღებთ:

$$a=a\sin z,$$

აქედან

$$z=\frac{\pi}{2}\ \text{—ზედა საზღვარი და}$$

$$-a=a\sin z,$$

აქედან

$z=-\frac{\pi}{2}$ — ქვედა საზღვარი. მართალია, $\sin\frac{3\pi}{2}$ აგრეთვე $=-1$, მაგრამ ქვედა საზღვრად მოუხერხებელია, რადგანაც მაშინ გვექნება:

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,dz=-\frac{\pi a^2}{2}$$

19. გადაწყვიტეთ მე-9 ამოცანა, როდესაც საზღვრები არის $-a$ და $+a$.

პას. $\frac{a^2}{2}\log\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}}\right)+a^2\sqrt{2}$

20. გადაწყვიტეთ მე-10 ამოცანა, როდესაც საზღვრები არის -1 და $+1$.

პას. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

21. განვიხილოთ ახლა ასეთი ინტეგრალი

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{+a} f(x)\,dx$$

მარჯვენა ნაწილის პირველ ინტეგრალში მოვახდინოთ $x=-z$ ჩასმა, გვექნება:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{a}^{0} f(-z)\,dz=\int_{0}^{a} f(-z)\,dz$$

ანუ, რადგან განსაზღვრული ინტეგრალი მხოლოდ თავისი საზღვრების ფუნქციაა, ამიტომ

$$\int_{0}^{a} f(-z)\,dz=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

ამრიგად,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx+\int^{a} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]\,dx$$

თუ $f(x)$ წყვილი ფუნქციაა*, მაშინ

* $f(x)$ წყვილი ეწოდება, თუ $f(-x)=f(x)$ (ე. ი. ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის, განურჩევლად იმისა, არგუმენტი დადებითი იქნება თუ უარყოფითი). თუ $f(-x)=-f(x)$, მაშინ ფუნქცია კენტია. ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან cos და sec წყვილი ფუნქციებია, დანარჩენი კენტი. ნამრავლი ორი ფუნქციისა, რომელთაგან ორივე წყვილია ან ორივე კენტი, არის წყვილი ფუნქცია, ხოლო კენტი და წყვილი ფუნქციის ნამრავლი კენტი ფუნქციაა.

$$f(-x)+f(x)=2f(x),$$

ხოლო, თუ კენტია

$$f(-x)+f(x)=0.$$

მაშასადამე,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

თუ $f(x)$ წყვილია და

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx=0,$$

თუ $f(x)$ კენტია.

22. $\int_{-2}^{+2} x^2\,dx=2\int_{0}^{2} x^2\,dx=5\frac{1}{3}$

23. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

24. $\int_{-1}^{+1} (x^4-2x^3+2x+3)\,dx=2\int_{0}^{1} (x^4+3)\,dx$

25. $\int_{-a}^{+a} \sin x \cos x\,dx=0$

26. შეიძლება თუ არა 22, 23, 24 ინტეგრალები პირდაპირ გამოვთვალოთ მოცემულ საზღვრებში?

სავარჯიშო.

27. $\int_{-1}^{+1} (x^5+x^2-2)\,dx$

28. $\int_{-3}^{+3} (x \cos x+x^2-\operatorname{tg} x)\,dx.$

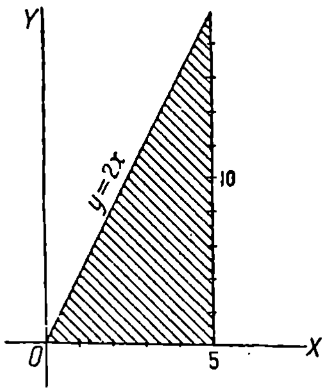
29. $\int_{-\pi}^{+\pi} (\cos x-\sin^2 x)\,dx$

30. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg} x + \sin^2 x\right) dx$

31. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 3x + \sin x - \sin^{-2} x + \cos x \operatorname{tg} x)\, dx$

ფართობების გამოთვლა

1. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2x$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორდინატით, რომლის შესაფერი აბსცისი არის 5.



ნახ. 1

როგორც ვიცით, ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა ასეთია:

$$S=\int_a^b y\,dx.$$

საძიებელი ფართობი ასე დაიწერება:

$$S=\int_0^5 2x\,dx.$$

დაიყვანეთ ბოლომდე. პასუხი 25.

შენიშვნა: მიღებული შედეგი შეგვიძლიან შევამოწმოთ ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით: სწორკუთხიანი სამკუთხედის ფართობი უდრის კატეტების ნამრავლის ნახევარს, ე. ი.

$$\frac{10 \cdot 5}{2}=25$$

2. წინა ამოცანის ანალოგიურად იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=3x+6$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორდინატით, რომლის შესაფერი აბსცისი არის 3.

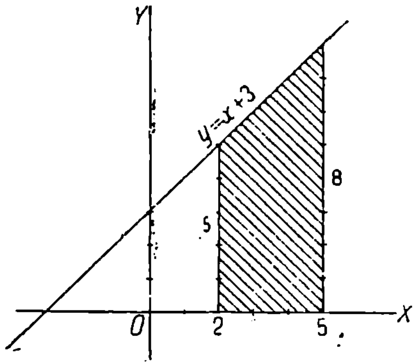
პას. $31\frac{1}{2}$.

3. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x+3$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა შესაფერი აბსცისები არის 2 და 5 (ნახ. 2).

$$S=\int_2^5 (x+3)\,dx$$ დაიყვანეთ ბოლომდე. პას. $19\frac{1}{2}$

აღნიშნული ფართობი ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით ასე მოიძებნება: დაშტრიხული ტრაპეციის ფართობი უდრის ფუძეების ჯამის ნახევრისა და სიმაღლის ნამრავლს, ე. ი.

$$S=\frac{5+8}{2}\;3=19\frac{1}{2}\,.$$



ნახ. 2

4. ანალოგიურად იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2x-4$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა შესაფერი აბსცისები არის 3 და 6. შეამოწმეთ ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით. პას. 15

5. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=3x$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა შესაფერი აბსცისები არის -3 და 4 (ნახ. 3).

ვინაიდან OBC ფართობი აბსცისთა ღერძის ქვევით არის მოთავსებული, ამიტომ გამოთვლა ასე უნდა ვაწარმოოთ:

$$S=-\int_{-3}^{0}3x\,dx+\int_{0}^{4}3x\,dx=37\frac{1}{2}\,.$$

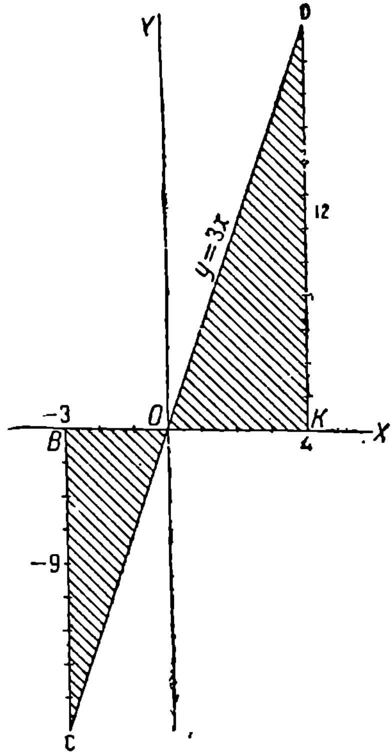
თუ შეცდომით ასე გამოვთვლით $\int_{-3}^{4}3x\,dx$,

ვღებულობთ

$$S=10\frac{1}{2}.$$

შევამოწმოთ შედეგი ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით:

$$ფ\ OBC=\frac{3\cdot 9}{2}=13\frac{1}{2}; \qquad ფ\ ODK=\frac{4\cdot 12}{2}=24.$$



ნახ. 3

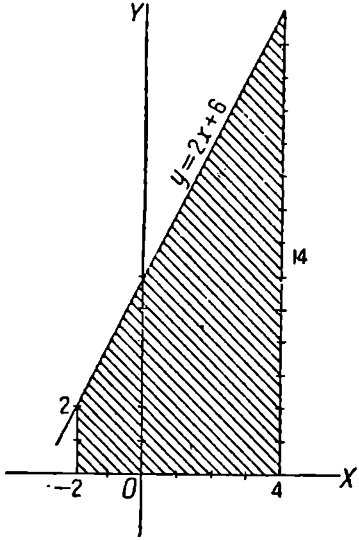
აქედან

$$ფ\ CBOKD=13\frac{1}{2}+24=37\frac{1}{2}.$$

6. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2x+6$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა შესაფერი აბსცისები არის -2 და 4 (ნახ. 4).

ეინაიდან ფართობი მთლიანად აბსცისთა ღერძის ზევით არის მოთავსებული, ამიტომ შესაძლებელია ინტეგრალი პირდაპირ გამოვთვალოთ მოცემულ საზღვრებში (აქ საჭირო არ არის ორი ინტეგრალი, როგორც ეს წინა ამოცანაში დაგვჭირდა), ე. ი.:

$$S=\int_{-2}^{4}(2x+6)\,dx$$ დაიყვანეთ ბოლომდე. პას. 48.



ნახ. 4

7. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x+3$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა აბსცისები არის -5 და 4 (ნახ. 5).

ფართობი გამოითვლება მე-5 ამოცანის ანალოგიურად, ე. ი.

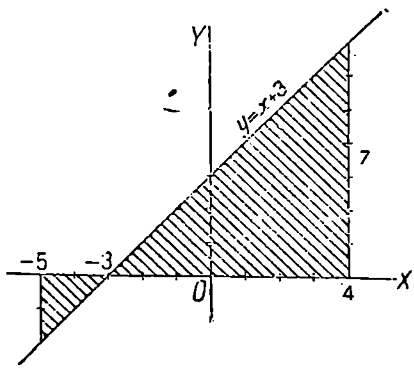
$$S=-\int_{-5}^{-3}(x+3)\,dx+\int_{-3}^{4}(x+3)\,dx=26\frac{1}{2}$$

შეამოწმეთ მიღებული შედეგი ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით.

ამრიგად, ფართობის გამოთვლის დროს მნიშვნელობა აქვს იმას, თუ სად მდებარეობს ეს ფართობი: აბსცისთა ღერძის ზევით, თუ ქვევით. თუ ქვევით მდებარეობს, ინტეგრალი პირდაპირ გამოითვლება მოცემულ საზღ-

ავში, ოღონდ ინტეგრალის წინ მინუსი უნდა დავწეროთ. იმ შემთხვევაში კი, როდესაც ერთი ნაწილი ფართობისა OX ღერძის ზევით არის, მეორე—ქვევით, მაშინ საჭიროა შუალედის ორ შუალედად წარმოდგენა და თითოეულ მათგანში ფართობის ცალცალკე გამოთვლა. მოცემული შუალედი იმ წერტილზე უნდა გაიყოს, რომლისთვისაც y ნოლს ეტოლება.

შენიშვნა: მოცემული განტოლებისა და საზღვრების მიხედვით ჩვენ შეგვიძლიან წინასწარ შევიტყოთ (ნახაზის აუგებლად) ფართობის მდებარეობა. ამისთვის მოცემულ განტოლებაში x-ის მაგივრად უნდა ჩავსვათ თითოეული საზღვარი და გამოვარკვიოთ y-ის ნიშანი. თუ ორივე საზღვრისთვის y დადებითია, მაშინ ფართობი მთლია-



ნახ. 5

ნად აბსცისთა ღერძის ზევით არის მოთავსებული, ხოლო თუ y უარყოფითია,—ფართობი მთლიანად ხსენებული ღერძის ქვევით არის. ფართობი ქვევით არის აგრეთვე, როდესაც y ერთი საზღვრისთვის უარყოფითია და მეორისთვის ნოლის ტოლი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც y ერთი საზღვარისთვის დადებითია მეორესთვის—უარყოფითი, მაშინ ერთი ნაწილი ფართობისა OX ღერძის ზევით დევს და მეორე კი—ქვევით.

მაგალითად, თუ გამოსათვლელია $y=-x+5$ სწორი ხაზით შემოსაზღვრული ფართობი (2,8) შუალედში, ასე უნდა მოვიქცეთ: y ქვედა საზღვრისთვის დადებითია, ზედა საზღვრისთვის—უარყოფითი. გარდა ამისა, y ნოლს ეტოლება, როდესაც $x=5$, მაშასადამე, ინტეგრალი (2,5) შუალედში ჩვეულებრივ გამოითვლება, რადგანაც ფართობი OX ღერძის ზევით მდებარეობს, ხოლო (5,8) შუალედში კი ცალკე უნდა გამოითვალოს და ინტეგრალის წინ მინუსი დაიწეროს, ვინაიდან ამ შუალედისთვის ფართობი OX ღერძის ქვევით არის მო-

თავსებული. თუ ინტეგრალის წინ მინუსს არ დავწერთ, მაშინ აბსოლუტური მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ.

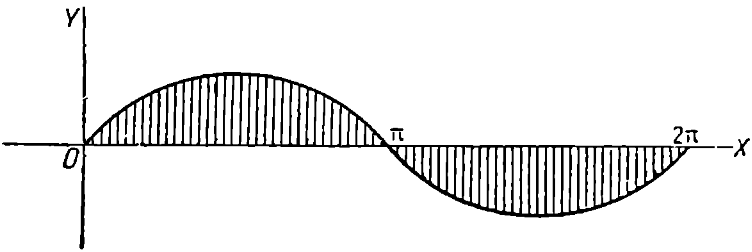
ააგეთ სათანადო ნახაზი და დარწმუნდით მსჯელობის სისწორეში.

8. იპოვეთ ფართობი და გამოარკვიეთ, საჭიროა თუ არა შუალედის დანაწილება:

a) შემოსაზღვრულია $y=\smile x+4$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა აბსცისები არის -1 და 3.

b) $y=2x+3$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა აბსცისები არის -2 და 1.

c) $y=x+2$ სწორი ხაზით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა აბსცისები არის -4 და 2.



ნახ. 6

9. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ მრუდით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორდინატით, რომლის აბსცისი არის 3. (აბსცისთა ღერძის ნაკვეთი სათავიდან უნდა ჩასთვალოთ).

10. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+3$ მრუდით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა შესაფერი აბსცისები არის 3 და 5.

11. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2-4$ მრუდით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა აბსცისები არის 1 და 4.

მითითება: საჭიროა შუალედის დანაწილება.

12. ვიპოვოთ წრის ფართობი, როდესაც ცენტრი სათავეშია მოთავსებული.

სიმარტივისათვის გამოვთვალოთ ერთი მეოთხედი და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ ოთხზე.

$x^2+y^2=R^2$ წრეხაზის განტოლებიდან y-ის მნიშვნელობა ჩავსვათ ფართობის ფორმულაში, გვექნება:

$$\frac{S}{4}=\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot dx=\frac{\pi R^2}{4},$$

აქედან $\underline{S=\pi R^2}$

13. ანალოგიურად იპოვეთ ელიპსის ფართობი.

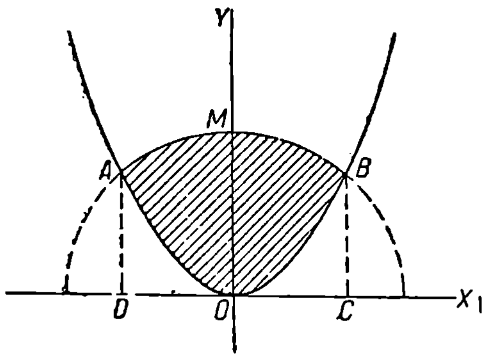
პას. $\underline{\pi a b}$

14. იპოვეთ $y=\sin x$ სინუსოიდის ერთი შტოს ფართობი (ნახ. 6).

პას. $\underline{4}$

15. იპოვეთ $y=\cos x$ კოსინუსოიდის ფართობი $(0, \pi)$ შუალედში.

პას. $\underline{2}$



ნახ. 7

16. იპოვეთ $y=x$ ბისექტრისსა და $y=x^2$ პარაბოლს შორის ფართობი.

პას. $\underline{\frac{1}{6}}$

17. იპოვეთ $y=x$ ბისექტრისსა და $x^2+y^2=R^2$ წრეხაზს შორის მოთავსებული ფართობი პირველ მეოთხედში.

პას. $\underline{\frac{\pi R^2}{8}}$

18. იპოვეთ $y=x^2$ და $x=y^2$ შორის მოთავსებული ფართობი.

პას. $\underline{\frac{1}{3}}$

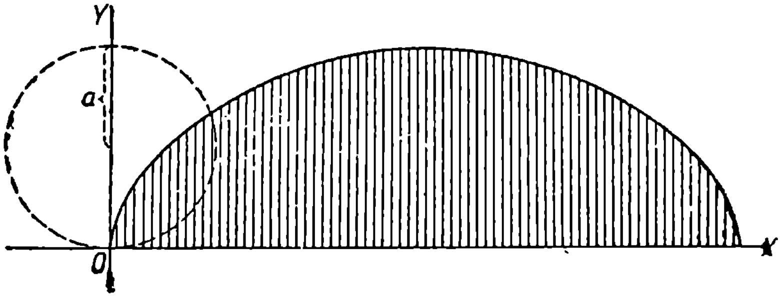
19. ვიპოვოთ $x^2+y^2=2$ წრეხაზსა და $y=x^2$ პარაბოლს შორის მოთავსებული ფართობი (ნახ. 7).

პარაბოლი და წრეხაზი გადაიკვეთება $A(-1, 1)$ და $B(1, 1)$ წერტილებში. საძიებელი ფართობი$=$ფ $DAMBC-$ფ $DAOBC=$

$$=\int_{-1}^{+1}\sqrt{2-x^2}\,dx-\int_{-1}^{+1}x^2\,dx$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

20. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი შტოთი.

როგორც ვიცით, როდესაც OX ღერძზე გორავს წრე, რომლის რადიუსი არის a (ნახაზზე ეს წრე პუნქტირით არის ნაჩვენები), მაშინ მისი



ნახ. 8

რომელიმე წერტილი აღწერს სიბრტყეზე მრუდს, რომელსაც ციკლოიდი ეწოდება. როდესაც X იცვლება O-დან $2\pi a$-მდე, მაშინ t იცვლება O-დან 2π-მდე, მაშასადამე:

$$S=\int_0^{2\pi}y\,dx=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=3\pi a^2$$

ამრიგად მიღებული შედეგი წარმოადგენს მგორავი წრის გასამკეცებულ ფართობს.

21. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ განტოლება პარამეტრული სახით არის მოცემული: $x=R\cos t$; $y=R\sin t$.

$$\frac{S}{4}=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

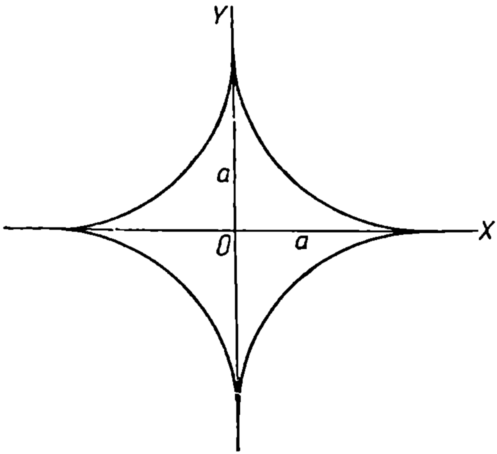
მითითება: თუ X იცვლება O-დან R-დე t იცვლება $\frac{\pi}{2}$-დან O-დე.

22. იპოვეთ ანალოგიურად ელიპსის ფართობი, თუ მისი განტოლება პარამეტრული სახით არის მოცემული: $x=a\cos t$; $y=a\sin t$.

23. იპოვეთ $x=a\sin^3 t$; $=a\cos^3 t$ ჰიპოციკლოიდის ფართობი (ნახ. 9).

პას. $\frac{3}{8}\pi a^2$

მითითება: სიმარტივისთვის გამოთვალეთ ერთი მეოთხედი (O-დან a-დე) და გაამრავლეთ ოთხზე. როდესაც X იცვლება O-დან a-დე, t იცვლება O-დან $\frac{\pi}{2}$-დე.



ნახ. 9

ფართობის გამოთვლა პოლარ (კიდურ) კოორდინატებში

ასეთ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ ძირითადი ფორმულით:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\rho^2\,d\varphi,$$

სადაც ρ — რადიუს-ვექტორია, φ — პოლარი კუთხე.

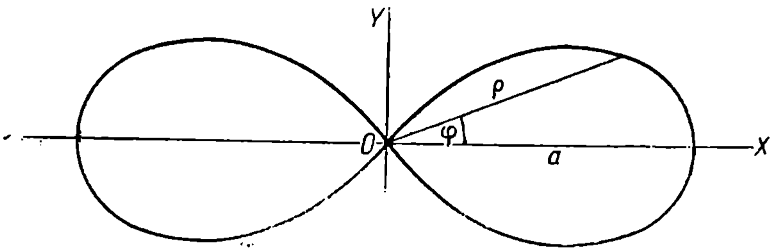
24. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატით.

ვინაიდან საძიებელი ფართობი ოთხი სიმეტრული ნაწილისგან შესდგება, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ მხოლოდ ერთი მეოთხედი (პირველი მეოთხედი).

ინტეგრალის საზღვრები ასე გამოირკვევა: თუ ρ იცვლება a-დან O-დე, მაშინ φ იცვლება O-დან $\frac{\pi}{4}$-დე.

ამრიგად,

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi=\frac{a^2}{4},$$

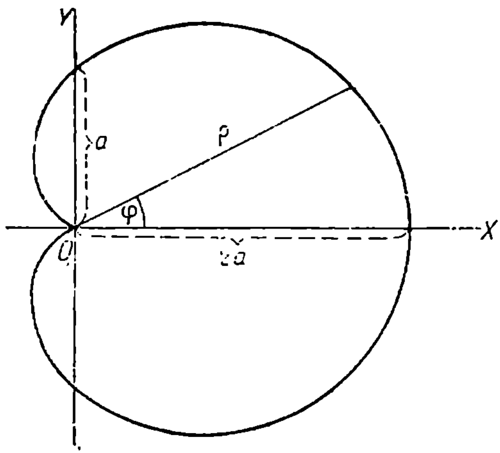


ნახ. 10

აქედან

$$S=a^2,$$

ე. ი. საძიებელი ფართობი უდრის იმ კვადრატის ფართობს, რომლის გვერდი არის a.



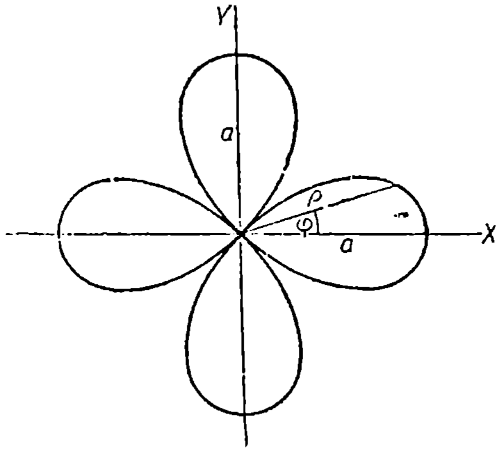
ნახ. 11

25. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ წრეხაზის განტოლებანი ასეთია:

a) $\rho=R$; b) $\rho=2R\cos\varphi$; c) $\rho=2R\sin\varphi$; d) $\rho=R\cos\varphi$;
e) $\rho=R\sin\varphi$.

მითითება: a) წრის ცენტრი სათავეშია; b) ცენტრი OX ღერძზე დევს და ეხება OY ღერძს; c) ცენტრი OY ღერძზე დევს და ეხება OX ღერძს; d) ცენტრი OX ღერძზე დევს და დაშორებულია სათავეს $\frac{R}{2}$ მანძილით; e) ცენტრი OY ღერძზე დევს და დაშორებულია სათავეს $\frac{R}{2}$-ით.

26. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდით (ნახ. 11).



ნახ. 12

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

პას. $S=\frac{3}{2}\pi a^2$

27. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შესოსაზღვრულია $\rho=a\cos 2\varphi$ ოთხფოთლიანი ყვავილით (ნახ. 12).

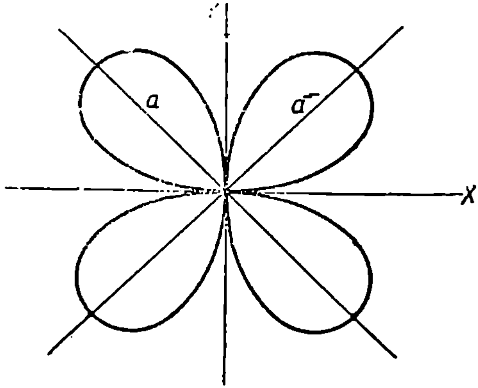
ვინაიდან რვა სიმეტრული ნაწილი გვაქვს, ამიტომ საკმარისია გამოითვალოს ერთი მერვედი:

$$\frac{S}{8}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi\,d\varphi.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

პას. $S=\frac{\pi a^2}{2}$

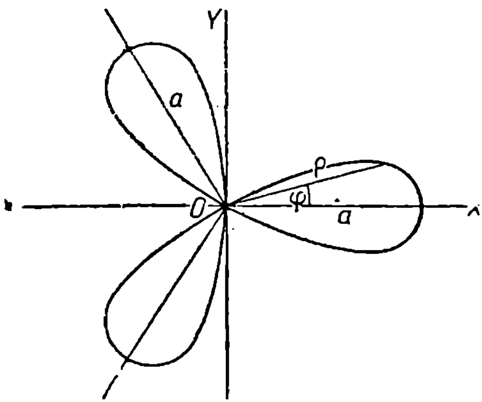
28. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\rho=a\sin 2\varphi$ მრუდით (ნახ. 13).

პას. $S=\frac{\pi a^2}{2}$



ნახ. 13

29. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\rho=a\cos 3\varphi$ სამფოთლიანი ყვავილით (ნახ. 14).



ნახ. 14

ვინაიდან ექვსი სიმეტრული ნაწილი გვაქვს, ამიტომ უნდა გამოითვალოს ერთი მეექვსედი.

პას. $\frac{\pi a^2}{4}$

30. იპოვეთ ელიპსის ფართობი, თუ მისი განტოლება ასეთი სახით არის მოცემული.

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}\,{}^*$$

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2\,d\varphi}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}=\frac{a^2b^2}{2a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\frac{b^2}{a^2}+\operatorname{tg}^2\varphi}=$$

$$=\frac{b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\frac{b^2}{a^2}+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{b^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\frac{b^2}{a^2}+z^2}=\frac{b^2}{2\cdot\frac{b}{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\frac{b}{a}}=$$

$$=\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{az}{b}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi ab}{4}$$

აქედან

$$S=\pi\,ab.$$

მბრუნავი სხეულების მოცულობა და პირეული

უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

(როდესაც სხეული ბრუნავს OX ღერძის ირგვლივ).

$$V=\pi\int_c^d x^2\,dy$$

(OY ღერძის ირგვლივ).

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

---

* ეს განტოლება მიიღება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

განტოლებიდან, თუ ჩავსვამთ: $x=\rho\cos\varphi$ და $y=\rho\sin\varphi$.

$$S=2\pi\int_c^d x\,ds=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

1. ვიპოვოთ მოცულობა და პირველი იმ სხეულისა, რომელსაც

$$x^2+y^2=R^2$$

წრეხაზის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ (სფეროს მოცულობა და პირეული).

მოცემული წრეხაზის განტოლებიდან გამოვსახოთ y-ის მნიშვნელობა და ჩავსვათ მოცულობის შესაფერ ფორმულაში. რადგან წრის მეოთხედის ბრუნვა ნახევარ სფეროს გვაძლევს, ამიტომ დავწერთ:

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx\,,$$

აქედან

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

პირეულის მოსაძებნად საჭიროა წრეხაზის განტოლებიდან ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული და ჩავსვათ პირეულის ფორმულაში, გვექნება:

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_0^R y\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx$$

თუ რადიკალის ქვეშ მოვახდენთ გაერთმნიშვნელოვანებას და x^2+y^2 შევცვლით მისი ტოლი R^2-ით, მივიღებთ:

$$\frac{S}{2}=2\pi R\int_0^R dx\,,$$

აქედან

$$S=4\pi R^2.$$

2. ანალოგიურად იპოვეთ მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიპსის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ.

პას. $\frac{4}{3}\pi a b^2$

კითხვა: როგორ მიიღება აქედან სფეროს მოცულობა?

3. იპოვეთ მოცულობა და პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც BD-ს ბრუნვა გვაძლევს (წრეხაზის რკალი) OX ღერძის ირგვლივ. $CD=\frac{R}{2}$ (ნახ. 15).

პას. $V=\frac{5\pi R^3}{24}$; $S=\pi R^2$.

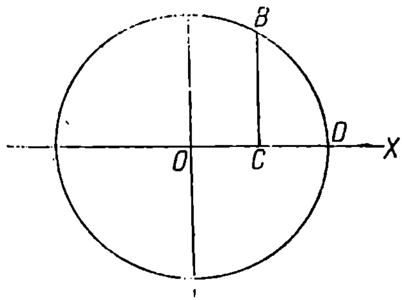
4. სწორი ხაზი (4, 3) წერტილს კოორდინატთა სათავესთან აერთებს. ვიპოვოთ მოცულობა და პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც ამ სწორის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ.

მითითება: განტოლება სწორი ხაზისა, რომელიც სათავესა და (4, 3) წერტილზე გაივლის, ასე დაიწერება:

$$y=\frac{3}{4}x$$

ჩასვით ეს მნიშვნელობა შესაფერ ფორმულებში. ცხადია ინტეგრალი გამოითვლება O-დან 4-დე.

პას. $V=12\pi$; $S=15\pi$.



ნახ. 15

დავალება: შეამოწმეთ მიღებული პასუხები ელემენტარული გეომეტრიის საშუალებით, თუ ხსენებული სწორის ბრუნვა გვაძლევს კონუსს, რომლის რადიუსი$=3$ და სიმაღლე$=4$.

5. ანალოგიურად იპოვეთ მოცულობა და პირეული, თუ სწორი ხაზი (3, 6) წერტილს სათავესთან აერთებს.

პას. $V=36\pi$; $S=18\sqrt{5}\,\pi$.

6. ანალოგიურად იპოვეთ მოცულობა და პირეული, თუ სწორი ხაზი (a, b) წერტილს სათავესთან აერთებს.

პას. $V=\frac{ab^2\pi}{3}$; $S=\pi b\sqrt{a^2+b^2}$

7. წინა ორი ამოცანა გადაწყვიტეთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც სწორი ხაზი OY ღერძის ირგვლივ ბრუნავს.

პას. $V=18\pi$; $S=9\sqrt{5}\,\pi$ და $V=\frac{a^2b\pi}{3}$; $S=\pi a\sqrt{a^2+b^2}$

8. იპოვეთ მოცულობა და პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც $y=2x^2$ პარაბოლის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ სათავიდან $x=5$-დე.

პას. $V=2500\,\pi$.

9. იპოვეთ მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც $y=\sin x$ სინუსოიდის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ O-დან π-დე.

პას. $\frac{\pi^2}{2}$

10. ანალოგიურად მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც $y=\cos x$ კოსინუსოიდის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ O-დან $\frac{\pi}{2}$-დე.

პას. $\frac{\pi^2}{4}$.

11. იპოვეთ მოცულობა და პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

მრუდის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ O-დან 1-დე.

პას. $V=\frac{\pi}{8}(e^2-e^{-2})+\frac{\pi}{2}$; $\quad S=\frac{\pi}{4}(e^2-e^{-2})+\pi$.

12. ვიპოვოთ სფეროს მოცულობა და პირეული, თუ წრეხაზი OX ღერძის ირგვლივ ბრუნავს და მისი განტოლება პარამეტრული სახით არის მოცემული:

$$x=R\cos t\,; \quad y=R\sin t\,.$$

$$\frac{V}{2}=\pi\int_a^b y^2\,dx=-\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,d\cos t.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

13. ანალოგიურად მოცულობა $x=a\cos t$; $y=b\sin t$ ელიპსისთვის.

14. იპოვეთ მოცულობა და პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც

$$x=a\,(t-\sin t)\,; \quad y=a\,(1-\cos t)$$

ციკლოიდის ერთი შტოს ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ.

პას. $V=5a^3\pi^2$; $\quad S=\frac{64}{3}a^2\,\pi$.

მითითება: იხილე ამოცანა № 20 (ფართობის გამოთვლა).

15. იგივე OY ღერძის ირგვლივ.

პას. $V=6a^3\pi^3$; $S=\frac{32}{3}a^2\pi$.

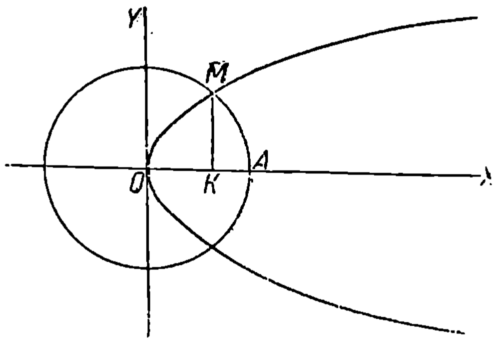
16. იპოვეთ მოცულობა და პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც $x=a\sin^3 t$; $y=a\cos^3 t$ მრუდის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ.

პას. $V=\frac{32}{105}a^3\pi$; $S=12a^2\pi$.

მითითება: იხილე ამოცანა № 23 (ფართობის გამოთვლა).

17. იპოვეთ მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც გვაძლევს $x^2+y^2=1$ წრეხაზისა და $x=y^2$ პარაბოლის ურთიერთ გადაკვეთის ბრუნვა OX ღერძის ირგვლივ (ნახ. 16).

მითითება: საძიებელი მოცულობა მიღებულია OM და MA-ს ბრუნვით. ცხადია, უნდა გამოითვალოს ორი ინტეგრალი: O-დან K-დე და K-დან



ნახ. 16

A-დე. K-ს მოსაძებნად უნდა შეთავსებულად ამოვხსნათ წრეხაზისა და პარაბოლის განტოლება, გვექნება:

$$V=\pi\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} x\,dx+\pi\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{1}(1-x^2)\,dx$$

დაიყვანეთ ბოლომდე.

18. ვიპოვოთ პირეული იმ სხეულისა, რომელსაც

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ელიპსის ბრუნვა გვაძლევს OX ღერძის ირგვლივ.

ვიპოვოთ ელიპსის განტოლებიდან წარმოებული:

$$y'=-\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

აქედან

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_0^a y\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx=$$

$$=\frac{2\pi}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}\,dx=\frac{2\pi}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+b^4x^2}\,dx=$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}\,dx=\frac{2\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-c^2x^2}\,dx=$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a\sqrt{\frac{a^4}{c^2}-x^2}\,dx$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$x=\frac{a^2}{c}\sin z,$$

აქედან

$$dx=\frac{a^2}{c}\cos z\,dz.$$

$$\frac{S}{2}=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^{\arcsin\frac{c}{a}}\sqrt{\frac{a^4}{c^2}-\frac{a^4}{c^2}\sin^2 z}\cdot\frac{a^2}{c}\cos z\,dz=$$

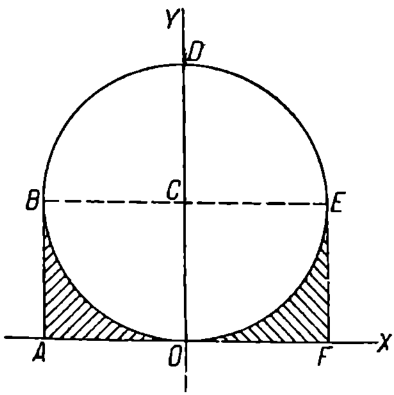
$$=\frac{2\pi a^2b}{c}\int_0^{\arcsin\frac{c}{a}}\cos^2 z\,dz=\frac{2\pi a^2b}{c}\left[\frac{z}{2}+\frac{\sin 2z}{4}\right]_0^{\arcsin\frac{c}{a}}=$$

$$=\frac{2\pi a^2 b}{c}\left(\frac{\arcsin\frac{c}{a}}{2}+\frac{\sin 2\arcsin\frac{c}{a}}{4}\right)^{*}=\frac{2\pi a^2 b}{c}\left(\frac{\arcsin\frac{c}{a}}{2}+\frac{bc}{2a^2}\right),$$

აქედან

$$\underline{S=\frac{2\pi a^2 b}{c}\arcsin\frac{c}{a}+2\pi b^2}$$

19. ვიპოვოთ მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც გვაძლევს წრის ბრუნვა აბსცისთა ღერძის ირგვლივ. (წრის ცენტრი ორდინატთა ღერძზე დევს და თვით წრე ეხება აბსცისთა ღერძს) (ნახ. 17).



ნახ. 17

---

* აღვნიშნოთ

$$\arcsin\frac{c}{a}=t,$$

მაშინ

$$\sin 2\arcsin\frac{c}{a}=\sin 2t.$$

თუ

$$\arcsin\frac{c}{a}=t,$$

აქედან

$$\sin t=\frac{c}{a}\quad \text{და}\quad \cos t=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b}{a},$$

მაშასადამე,

$$\sin 2\arcsin\frac{c}{a}=\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{2bc}{a^2}$$

მოცემული წრეხაზის განტოლება ასეთია:

$$x^2+(y-b)^2=R^2 \quad (b-\text{ცენტრის ორდინატია})$$

საძიებელი მოცულობა წარმოადგენს ორი მოცულობის სხვაობას, რომლებიც მიღებულია შესაბამად $ABDEF$ და $ABOEF$-ით.

ავღნიშნოთ y_1 და y_2 ორდინატები წრეხაზის იმ წერტილებისა, რომლებსაც საერთო აბსცისი აქვს. ახლა წრეხაზის განტოლებიდან შეგვიძლიან დავწეროთ:

$$y_1=R+\sqrt{R^2-x^2} \quad \text{და} \quad y_2=R-\sqrt{R^2-x^2}$$

თუ საძიებელ მოცულობას აღვნიშნავთ V-თი, დავწერთ:

$$V=\pi\int_{-R}^{+R} y_1^2\,dx-\pi\int_{-R}^{+R} y_2^2\,dx$$

ანუ

$$V=\pi\int_{-R}^{+R}(y_1^2-y_2^2)\,dx=\pi\int_{-R}^{+R}(y_1+y_2)(y_1-y_2)\,dx=$$

$$=4\pi R\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

(y_1 და y_2 მაგივრად ჩასმულია ზემოთ აღნიშნული მნიშვნელობანი).

მიღებული ინტეგრალი გამოითვლება $x=R\sin z$ ჩასმის საშუალებით.

საბოლოოდ გვექნება:

$$4\pi R\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4\pi R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,dz=$$

$$=8\pi R^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,dz=\underline{\pi R^2\cdot 2\pi R}$$

ამრიგად, საძიებელი მოცულობა უდრის წრის ფართობისა და წრეხაზის ნამრავლს.

დავალება: როგორ დაიწერება მიღებული შედეგი, როდესაც წრის ცენტრი ორდინატთა ღერძზე დევს და დაშორებულია სათავეს H მანძილით? $(H>R)$.

20. ვიპოვოთ მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც გვაძლევს წრიული სეგმენტის ბრუნვა თავისი ქორდის ირგვლივ (ნახ. 18).

ვთქვათ სეგმენტის რკალის განტოლება არის: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (a და b ცენტრის კოორდინატებია).

ხსენებული ქორდა დამთხვეულია აბსცისთა ღერძზე;

აღვნიშნოთ საძიებელი მოცულობა V-თი, მოცულობა, რომელსაც $PMNE$ ბრუნვა გვაძლევს, V_1-თი და მოცულობა, რომელსაც KNE გვაძლევს V_2-თი.

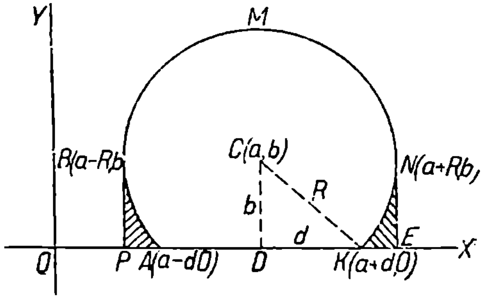
$$(PBA=KNE)$$

მაშინ დავწერთ:

$$V=V_1-2V_2.$$

ვიპოვოთ ჯერ V_1, რისთვისაც უნდა მოვიმარჯოთ

$$\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx \text{ მოცულობის ფორმულა.}$$



ნახ. 18

$$V_1=\pi\int_{a-R}^{a+R}\left[b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right]^2 dx=$$

$$=\pi(b^2+R^2)\int_{a-R}^{a+R} dx-\pi\int_{a-R}^{a+R}(x-a)^2\,dx+2\pi b\int_{-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)}\,dx$$

აქედან პირველი ორი ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება, მესამე ინტეგრალისთვის საჭიროა ჩასმა $x-a=z$, რის შემდეგაც იგი ასე დაიწერება:

$$\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-z^2}\,dz.$$

ახლა საჭიროა ტრიგონომეტრიული ჩასმა $z=R\sin t$, გვექნება:

$$\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-z^2}\,dz=R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi R^2}{2}$$

ამრიგად,

$$V_1=2\pi R(b^2+R^2)-\frac{2}{3}\pi R^3+b\pi^2 R^2=$$

$$=2\pi R b^2+\frac{4}{3}\pi R^3+b\pi^2 R^2$$

გამოვთვალოთ ახლა V_2, რისთვისაც უნდა ავიღოთ

$$y=b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}.$$

დავწეროთ:

$$V_2=\pi\int_{a+d}^{a+R}\left[b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right]^2 dx=\pi\int_{a+d}^{a+R}(b^2+R^2)\,dx-$$

$$-\pi\int_{a+d}^{a+R}(x-a)^2\,dx-2\pi b\int_{a+d}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)}\,dx \quad *$$

როგორც წინა შემთხვევაში, პირველი ორი ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება, მესამე ინტეგრალისთვის საჭიროა $x-a=z$ (ოღონდ ამ შემთხვევაში უმჯობესია საზღვრები არ შევცვალოთ და გამოთვლის დროს ძველ ცვლადს დავუბრუნდეთ).

$$\int_{a+d}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\,dx=\left[\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{R}+\frac{x-a}{2}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right]_{a+d}^{a+R}=$$

$$=\frac{R^2}{2}\arcsin 1-\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{d}{R}-\frac{d}{2}\sqrt{R^2-d^2}= \qquad (R^2-d^2=b^2)$$

$$=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{d}{R}-\frac{db}{2}$$

მაშ, საბოლოოდ გვექნება:

$$V_2=\pi b^2 R+\pi R^3-\pi d R^2-\pi d b^2-\frac{\pi R^3}{3}+\frac{\pi d^3}{3}-\frac{\pi^2 R^2 b}{2}+$$

$$+\pi R^2 b\arcsin\frac{d}{R}+\pi d b^2=\pi(R^2-d^2)R+\frac{2}{3}\pi R^3-\pi d R^2+$$

$$+\frac{\pi d^3}{3}-\frac{\pi^2 R^2 b}{2}+\pi R^2 b\arcsin\frac{d}{R}=$$

---

* აღებულია KNE მრუდხაზოვანი სამკუთხედი. ერთნაირად შესაძლებელია PBA სამკუთხედის აღებაც.

(პირველ წევრში b^2 შევცვალეთ R^2-d^2-ით).

$$=\frac{5}{3}\pi R^3-\pi d^2 R-\pi d R^2-\frac{\pi^2 R^2 b}{2}+\frac{\pi d^3}{3}+\pi R^2 b \arcsin\frac{d}{R}$$

აქედან

$$V=V_1-2V_2=\underline{2\pi R b^2}+\underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}}+\pi^2 R^2 b-\underline{\underline{\frac{10}{3}\pi R^3}}+\underline{2\pi d^2 R}+2\pi d R^2+$$

$$+\pi^2 R^2 b-\frac{2\pi d^3}{3}-2\pi b R^2 \arcsin\frac{d}{R}=2\pi R\overbrace{(b^2+d^2)}^{R^2}-2\pi R^3+$$

$$+2\pi^2 R^2 b+2\pi d R^2-\frac{2}{3}\pi d^3-2\pi b R^2 \arcsin\frac{d}{R}.$$

$$\underline{V=2\pi\left(\pi b R^2+d R^2-\frac{d^3}{3}-b R^2 \arcsin\frac{d}{R}\right)}.$$

დავალება: როგორ დაიწერება მიღებული შედეგი, როდესაც $b=R$ და $b=0$? როგორი მდებარეობა აქვს ამ შემთხვევაში წრეს?

მრუდის სიგრძე

მრუდის სიგრძის მოძებნის დროს უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$S=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

ზოგჯერ უფრო მოხერხებულია დამოუკიდებელ ცვლადად მივიღოთ y, მაშინ ასეთი ფორმულა გვაქვს:

$$S=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy.$$

1. ვიპოვოთ $y=3x^2$ პარაბოლის რკალის სიგრძე სათავიდან ორდინატის შეხვედრამდე, რომლის აბსცისი არის $x=5$.

მოცემული განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{dy}{dx}=6x,$$

აქედან

$$S=\int_0^5 \sqrt{1+(6x)^2}\,dx$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

2. ვიპოვოთ $x^2+y^2=R^2$ წრეხაზის სიგრძე.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

აქედან

$$\frac{S}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}dx=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y}=$$

$$=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

აქედან

$$\underline{S=2\pi R}$$

3. ვიპოვოთ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ მრუდის სიგრძე 0-დან 1-დე.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$S=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_0^1 \sqrt{\frac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx=$$

$$=\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{e-e^{-1}}{2}$$

4. ანალოგიურად იპოვეთ

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

მრუდის სიგრძე 0-დან x-დე.

პას. $S=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$

5. ვიპოვოთ წრეხაზის სიგრძე, თუ მისი განტოლება პარამეტრული სახით არის მოცემული:

$$x=R\cos t; \quad y=R\sin t.$$

$$\frac{S}{4}=\int^{b} \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(R^2\cos^2 t+R^2\sin^3 t)\,dt^2}=$$

$$=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi R}{2},$$

აქედან

$$\underline{S=2\pi R}$$

6. ანალოგიურად იპოვეთ ციკლოიდის ერთი შტოს სიგრძე:

$$x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t)$$

<u>პას. $8a$</u>

7. ვიპოვოთ მთელი

$$x=a\sin^3 t;\quad y=a\cos^3 t$$

ჰიპოციკლოიდის სიგრძე.

ვიპოვოთ ჯერ ერთი მეოთხედი:

$$\frac{S}{4}=\int^{b}\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3a\sin^2 t\cos t\,dt)^2+(-3a\cos^2 t\sin t\,dt)^2}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt^2}=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\frac{3a}{2}$$

აქედან

$$\underline{S=6a}$$

8. იპოვეთ $x=a(\cos t+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$ რკალის სიგრძე.

$$t=0;\ t=2\pi.$$

<u>პას. $2\pi^2 a$</u>

თუ გვინდა მრუდის სიგრძე ვიპოვოთ პოლარ კოორდინატებში, ამისთვის უნდა ვისარგებლოდ ფორმულით:

$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

9. ვიპოვოთ $\rho=R$ წრეხაზის სიგრძე.

ვიპოვოთ ჯერ ერთი მეოთხედი:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=0, \qquad \frac{S}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2)^{\frac{1}{2}} \; d\varphi = \frac{\pi R}{2},$$

აქედან

$$\underline{S=2\pi R.}$$

10. იპოვეთ წრეხაზის სიგრძე, თუ მისი განტოლებანი ასეთია:

a) $\rho=R\cos 2\varphi$; b) $\rho=R\sin 2\varphi$;

c) $\rho=R\cos\varphi$; d) $\rho=R\sin\varphi$.

11. იპოვეთ $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდს სიგრძე.

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\pi} \left[a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \; d\varphi=4a,$$

აქედან

$$\underline{S=8a}$$

12. ელიფსის რკალის სიგრძე.

ავიღოთ ელიფსის განტოლება ასეთი სახით:

$$x=a\sin\varphi\,; \qquad y=b\cos\varphi$$

აქედან

$$dx=a\cos\varphi\, d\varphi, \qquad dy=-b\sin\varphi\, d\varphi.$$

$$S=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int\sqrt{a^2(1-\sin^2\varphi)+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

მაგრამ

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}=e^2,$$

მაშასადამე,

$$S=a\int\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

თუ ახლა მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=z$$

აღნიშვნას, ასეთი ჩასმის შედეგად რადიკალქვეშ მდგომი გამოსახულება მიიყვანება მეოთხე ხარისხის მრავალწევრზე. ასეთი სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციათა საშუალებით არ გამოითვლება. მიღებულ ინტეგრალს „ელიფსური“ ინტეგრალი ეწოდება და გამოითვლება მიახლოებითი ანგარიშობის ფორმულებით. (ეს ფორმულები ქვემოთ იქნება განხილული).

ანალოგიური შემთხვევა გვაქვს ლემნისკატის რკალის სიგრძის გამოანგარიშების დროს. ლემნისკატის განტოლება პოლარ კოორდინატებში ასეთია:

$$\rho^2=a^2\cos 2\varphi,$$

აქედან

$$2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}=-2a^2\sin 2\varphi\,;$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-\frac{a^2\sin 2\varphi}{\rho}=-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი

$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi \text{ ფორმულაში:}$$

$$S=\int\left(a^2\cos 2\varphi+\frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi=a\int\left(\frac{1}{\cos 2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi=$$

$$=a\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}}=a\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$$

მიღებული ინტეგრალი, როგორც წინა შემთხვევაში, ბოლომდე არ დაიყვანება.

ამრიგად, ელიფსისა და ლემნისკატის რკალის სიგრძე ელემენტარული ფუნქციებით არ გამოისახება. მათი გამოსახვა შესაძლებელია „ელიფსური“ ინტეგრალების საშუალებით.

ბრტყელი ფიგურის სტატიკური მომენტები და სიმძიმის ცენტრი

მატერიალური წერტილის სტატიკური მომენტი რომელიმე ღერძის მიმართ არის მისი მასისა და ღერძამდე მანძილის ნამრავლი.

თუ აღვნიშნავთ სტატიკურ მომენტს M-ით, მასას m და მანძილს ღერძამდე r-ით, გვექნება:

$$M = m\,r$$

თუ მოცემულია n წერტილი მასებით:

$$m_1,\ m_2,\ m_3 \ldots m_n \quad \text{და} \quad r_1,\ r_2\ r_3 \ldots r_n$$

მანძილებით, მაშინ

$$M = \sum m\,r.$$

შენიშვნა: წერტილები და შესაფერი ღერძი ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული.

როდესაც ბრტყელი ფიგურის სტატიკურ მომენტზეა ლაპარაკი ნაგულისხმევია, რომ ფიგურის ყოველი ნაწილის მასა იზომება ფართობით, ე. ი. ყოველი ნაწილის მასა იმავე რიცხვით გამოისახება, რითაც მისი ფართობი.

სტატიკური მომენტები კოორდინატთა ღერძების მიმართ ასეთი ფორმულებით მოიძებნება:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx\,; \qquad M_y = \int_a^b xy\,dx$$

შენიშვნა: ინტეგრაციამდე y გამოსახული უნდა იქნას x-ის საშუალებით შესაფერი განტოლებიდან. სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები α და β ასეთი ფორმულებით გამოისახება:

$$\alpha = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S}\,; \qquad \beta = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S},$$

სადაც S არის მოცემული ბრტყელი ფიგურის ფართობი.

ამრიგად, რომელიმე ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოისახება ამ ფიგურის სტატიკური მომენტისა და ფართობის შეფარდებით.

უკანასკნელი ფორმულა ასე გადმოიწერება:

$$2S\beta = \int_a^b y^2\,dx$$

ნუ, თუ ორივე მხარეს π-ზე გავამრავლებთ:

$$2\pi\beta \cdot S=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

მაგრამ მარჯვენა მხარე წარმოადგენს მოცულობას იმ სხეულისა, რომელიც მიღებულია მოცემული ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით აბსცისთა ღერძის ირგვლივ. მარცხენა მხარე წარმოადგენს ნამრავლს მოცემული ფიგურის ფართობისა და იმ წრეხაზისა, რომელიც შემოწერილია სიმძიმის ცენტრით. აქედან გამომდინარეობს გიულდენის (Guldin) თეორემა:

მოცულობა იმ სხეულისა, რომელიც მიღებულია ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით უკვეთი ღერძის ირგვლივ (ღერძი, რომელიც ფიგურას არ ჰკვეთს), უდრის ამ ფიგურის ფართობისა და სიმძიმის წენტრით შემოწერილი წრეხაზის ნამრავლს, ე. ი.

$$V=2\pi\beta\cdot S \tag{I}$$

1. ვიპოვოთ სიმძიმის ცენტრი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ მრუდით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორდინატით, რომლის შესაფერი აბსცისი არის x*.

ვიპოვოთ ჯერ სტატიკური მომენტები:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^x x^4\,dx=\frac{x^5}{10}$$

$$M_y=\int_a^b xy\,dx=\int_0^x x\cdot x^2\,dx=\frac{x^4}{4}$$

მოცემული ფიგურის ფართობი ასე გამოისახება:

$$S=\int_0^x x^2\,dx=\frac{x^3}{3} \tag{ა}$$

აქედან:

$$\alpha=\frac{M_y}{S}=\frac{\frac{x^4}{4}}{\frac{x^3}{3}}=\frac{3x}{4}$$

$$\beta=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{x^5}{10}}{\frac{x^3}{3}}=\frac{3x^2}{10}$$

* აბსცისათა ღერძის ნაკვეთი სათავიდან ითვლება.

ამრიგად, სიმძიმის ცენტრი ასეთია: $c\left(\frac{3x}{4}, \frac{3x^2}{10}\right)$.

აღნიშნული სიმძიმის ცენტრის ორდინატი ჩვენ შეგვიძლიან ვიპოვოთ გიულდენის თეორემის საშუალებითაც.

მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც მოცემული ბრტყელი ფიგურის ბრუნვა გვაძლევს აბსცისთა ღერძის ირგვლივ, ასე მოიძებნება:

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^x x^4\,dx=\frac{\pi x^5}{5}$$

მიღებული მნიშვნელობა და (ა) ჩავსვათ (I)-ში.

$$\frac{\pi x^5}{5}=2\pi\beta\cdot\frac{x^3}{3}$$

აქედან

$$\beta=\frac{3x^2}{10}$$

2. ვიპოვოთ სიმძიმის ცენტრი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ სინუსოიდით და აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით O-დან π-დე.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$$

$$M_y=\int_0^\pi x\sin x\,dx=\pi$$

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=2$$

აქედან:

$$\alpha=\frac{M_y}{S}=\frac{\pi}{2}\,; \qquad \beta=\frac{M_x}{S}=\frac{\pi}{8}$$

ვიპოვოთ ახლა β-ს მნიშვნელობა გიულდენის თეორემის საშუალებით.

მოცულობა იმ სხეულისა, რომელსაც სინუსოიდის ბრუნვა გვაძლევს აბსცისთა ღერძის ირგვლივ (O-დან π-დე), ასე გამოისახება:

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$$

აქედან: (I)-ის თანახმად დავწერთ:

$$\frac{\pi^2}{2}=2\pi\beta\cdot 2\,; \quad \beta=\frac{\pi}{8}$$

3. ვიპოვოთ $x^2+y^2=a^2$ წრის პირველი კვადრანტის სიმძიმის ცენტრი.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\frac{a^3}{3}$$

$$M_y=\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^3}{2}$$

$$S=\frac{\pi a^2}{4}\,,$$

აქედან

$$\alpha=\frac{M_y}{S}=\frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}}=\frac{4a}{3\pi}$$

$$\beta=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}}=\frac{4a}{3\pi}$$

დავალება: იპოვეთ β გიულდენის თეორემის საშუალებით.

4. ანალოგიურად იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის პირველი კვადრანტის სიმძიმის ცენტრი.

პას. $\alpha=\frac{4a}{3\pi}$; $\beta=\frac{4b}{3\pi}$

5. იპოვეთ სიმძიმის ცენტრი ნახევარ წრისთვის (რომელიც აბსცისთა ღერძის ზევით არის მოთავსებული), თუ განტოლება ასეთია:

$$x^2+y^2=R^2\,*$$

პას. $\alpha=0$ (რადგანაც $\int_{-R}^{+R} x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=0$); $\beta=\frac{4R}{3\pi}$

---

* თუ ფიგურას სიმეტრიის ღერძი აქვს, მაშინ სიმძიმის ცენტრი ამ ღერძზე მდებარეობს.

6. როგორ მოიძებნება მთელი ელიფსისა და წრის სიმძიმის ცენტრი 4 და 5 ამოცანებში?

7. იპოვეთ სწორკუთხიანი სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი, თუ a და b კათეტები აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებზე დამთხვეული.

მითითება: y უნდა გამოსახოთ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ჰიპოტენუზის განტოლებიდან.

პას. $\alpha=\frac{a}{3}$; $\beta=\frac{b}{3}$

8. იპოვეთ სიმძიმის ცენტრი ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+2$ მრუდით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორდინატით, რომლის შესაფერი აბსცისი არის 3.

პას. $\alpha=1{,}95$; $\beta=3{,}22$

დავალება: იპოვეთ β გიულდენის თეორემის საშუალებით.

9. იპოვეთ სიმძიმის ცენტრი ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\cos x$ კოსინუსოიდით და აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით O-დან $\frac{\pi}{2}$ - დე. მოძებნეთ აგრეთვე β გიულდენის თეორემის საშუალებით.

პას. $\alpha=\frac{\pi}{2}-1$; $\beta=\frac{\pi}{8}$

10. იპოვეთ წრის პირველი კვადრატის სიმძიმის ცენტრი, თუ განტოლება პარამეტრული სახით არის მოცემული:

$$x=R\cos t; \qquad y=R\sin t.$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2 t\cdot R\sin t\,dt=\frac{R^3}{3}$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

11. ანალოგიურად იპოვეთ სიმძიმის ცენტრი ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი შტოთი და აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით.

პას. $\alpha=a\pi$; $\beta=\frac{5a}{6}$

ინერციის მომენტი

მატერიალური წერტილის ინერციის მომენტი რომელიმე ღერძის მიმართ არის მისი მასისა და ღერძამდე მანძილის კვადრატის ნამრავლი.

თუ აღვნიშნავთ ინერციის მომენტს I-ით, მასას m და მანძილს ღერძამდე r-ით, დავწერთ $I=m r^2$.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი ასე დაიწერება:

$$I=\sum m r^2$$

სტატიკური მომენტის მსგავსად, როდესაც მასები ცალკეულ წერტილებში კი არ არის თავმოყრილი, არამედ მთლიანად ავსებს ამა თუ იმ ფიგურას, მაშინ ინერციის მომენტი გამოისახება ინტეგრალით.

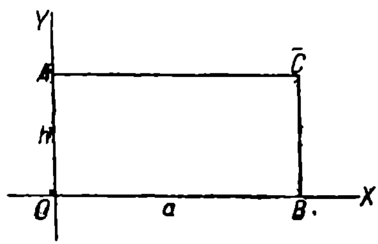
ბრტყელი ფიგურის ინერციის მომენტს (ნაგულისხმევია, რომ ფიგურა და ღერძი ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული) დიდი გამოყენება აქვს ღუნვის თეორიაში. ამ თეორიაში ინერციის მომენტის გამოთვლის დროს, ჩვეულებრივ, ფართობის ერთ ერთეულზე ნავარაუდევია მასის ერთი ერთეული, რის გამოც მასის ნაცვლად ყველგან ფართობები გვევლინება.

ინერციის მომენტის მოსაძებნად OX ღერძის მიმართ უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$I_x=\int_c^d (x_2-x_1)\, y^2\, dy$$

შენიშვნა: ინტეგრაციამდე ჩასმული უნდა იქნას x_2-x_1 მნიშვნელობა, რომელიც მოიძებნება შესაფერი განტოლებიდან.

1. ვიპოვოთ $AOBC$ სწორკუთხედის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ (ნახ. 19).



ნახ. 19

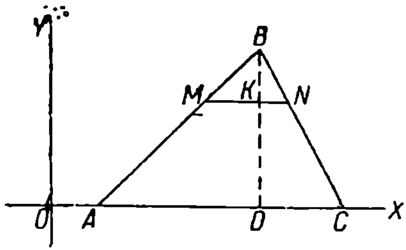
აღვნიშნოთ სწორკუთხედის ფუძე a-თი, ხოლო სიმაღლე h-ით, ცხადია, აქ

$$x_2-x_1=OB=a\,;$$

$$I_x=\int_0^h a y^2\, dy=\frac{a\, h^3}{3}$$

ანალოგიურად OY ღერძის მიმართ, $I_y=\frac{h\,a^3}{3}$

2. ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ (ნახ. 20).



ნახ. 20

$x_2-x_1=MN$, სადაც $MN \parallel AC$. თუ აღვნიშნავთ მოცემული სამკუთხედის ფუძეს a-თი, სიმაღლეს h-ით ($BD=h$) და $DK=y$, მაშინ ABC და MBN მსგავსი სამკუთხედებიდან დავწერთ:

$$\frac{MN}{AC}=\frac{BK}{h} \quad \text{ანუ} \quad MN=\frac{a}{h}(h-y),$$

აქედან

$$I_x=\int_0^h \frac{a}{h}(h-y)\,y^2\,dy=\frac{a\,h^3}{12}$$

დავალება: ანალოგიურად იპოვეთ სწორკუთხიანი სამკუთხედის ინერციის მომენტი, თუ a და b კათეტები აბსცისთა და ორდინატთა ღერძზეა დამთხვეული.

მითითება: $MN=a-\frac{a}{b}y$.

პას. $I_x=\frac{a\,b^3}{12}$ $\quad I_y=\frac{a^3\,b}{12}$

3. ვიპოვოთ ელიპსის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ.

გადავწყვიტოთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის განტოლება x-ის მიმართ:

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

ანუ $x_2=+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$; $x_1=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$,

აქედან

$$x_2-x_1=\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

$$I_x=\int_{-b}^{+b}\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\ y^2\,dy=4\frac{a}{b}\int_0^b\sqrt{b^2-y^2}\ y^2\,dy=\frac{ab^3\pi}{4}$$

ანალოგიურად ინერციის მომენტი OY ღერძის მიმართ.

$$I_y=\frac{a^3b\pi}{4}.$$

კერძოდ, როდესაც $a=b$, ე. ი. წრის ინერციის მომენტი (როდესაც წრის ცენტრი სათავეშია მოთავსებული)

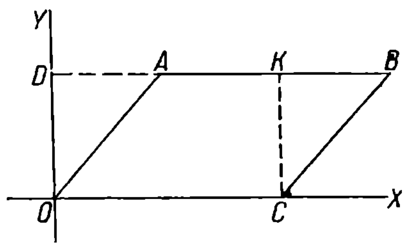
$$I_x=I_y=\frac{\pi R^4}{4}$$

ინერციის მომენტი მარტივად გამოითვლება, თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ ორ დებულებას:

a) ინერციის მომენტი არ იცვლება, როდესაც მასა გადინაცვლება იმ ღერძის პარალელად, რომლის მიმართაც ინერციის მომენტი უნდა გამოითვალოს. (ცხადია, ასეთ შემთხვევაში არ იცვლება არც თვით მასა და არც მისი მანძილი ღერძამდე).

b) თუ მოცემული ფიგურა რამდენიმე ნაწილისგან შესდგება, მაშინ ინერციის მომენტი რომელიმე ღერძის მიმართ ტოლია ფიგურის შემადგენელი ნაწილების ინერციის მომენტების ჯამისა ამავე ღერძის მიმართ.

4. ვიპოვოთ $OABC$ პარალელოგრამის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ (ნახ. 21).

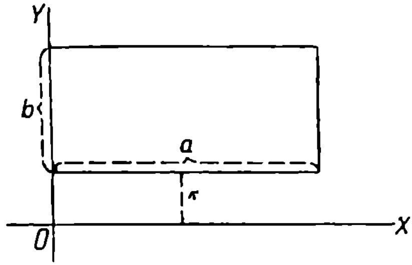


ნახ. 21

წინა დებულების ძალით CKB სამკუთხედი შეგვიძლიან გადავიტანოთ OAD მდებარეობაში (ცხადია, გადატანა წარმოებს აბსცისთა ღერძის პარალელად).

ასეთი გადატანის შედეგად პარალელოგრამი შეიცვლება $ODKC$ სწორკუთხედით, რომლის ინერციის მომენტის გამოთვლა ჩვენთვის უკვე ცნობილია.

5. ვიპოვოთ სწორკუთხედის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ, თუ a ფუძე ღერძის პარალელია და დაშორებულია მისგან k მანძილით (ნახ. 22).



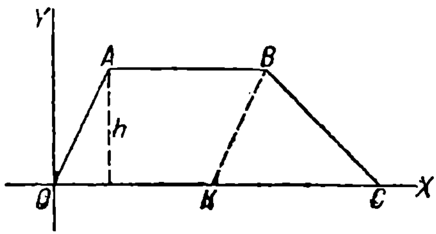
ნახ. 22

$$I_x = a\int_k^{k+b} y^2\,dy = \frac{a\,b}{3}(3k^2 + 3k\,b + b^2)$$

ამავე სწორკუთხედის ინერციის მომენტი ორდინატთა ღერძის მიმართ.

$$I_y = b\int_0^a x^2\,dx = \frac{b\,a^3}{3}$$

6. ვიპოვოთ $OABC$ ტრაპეციის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ (ნახ. 23).



ნახ. 23

ზევით განხილული დებულების ძალით, $OABC$ ტრაპეციის ინერციის მომენტი ტოლია $OABK$ პარალელოგრამისა და BKC სამკუთხედის ინერციის მომენტების ჯამისა.

პარალელოგრამის ინ. მომენტი$=\frac{OK \cdot h^3}{3}$

სამკუთხედის ინ. მომენტი$=\frac{KC \cdot h^3}{12}$

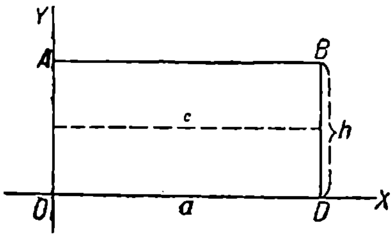
აქედან

ტრაპეციის ინ. მომენტი$=\frac{OK \cdot h^3}{3}+\frac{KC \cdot h^3}{12}=\frac{h^3(4OK+KC)}{12}$

ანუ, რადგან $KC=OC-KO$, ამიტომ

$$I_x=\frac{h^3(3AB+OC)}{12}.$$

ღუნვის თეორიაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება ბრტყელ ფიგურათა ინერციის მომენტს იმ ღერძის მიმართ, რომელიც სიმძიმის ცენტრზე გაივლის.



ნახ. 24

ასეთი მომენტების მოძებნა დამყარებულია შემდეგ დებულებაზე:

ბრტყელი ფიგურის I ინერციის მომენტი რომელიმე ღერძის მიმართ უდრის ამავე ფიგურის ინერციის მომენტს იმ ღერძის მიმართ, რომელიც მის სიმძიმის ცენტრზე გაივლის პირველი ღერძის პარალელად, პლიუს ფიგურის ფართობისა და ხსენებულ ღერძებს შორის მანძილის კვადრატის ნამრავლი.

თუ სიმძიმის ცენტრზე და პირველი ღერძის პარალელად გამავალ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს ავღნიშნავთ I_c, ფიგურის ფართობს S და ღერძებს შორის მანძილს d-თი, მაშინ

$$I=I_c+S \cdot d^2,$$

აქედან

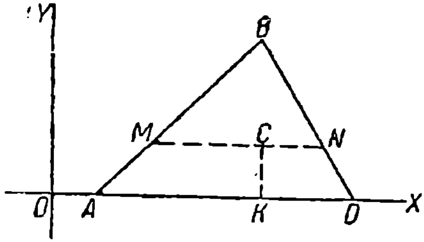
$$I_c=I-Sd^2$$

შენიშვნა: ფიგურის ინერციის მომენტებიდან ის მომენტია უმცირესი, რომელიც სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის აღებული.

7. ვიპოვოთ $OABD$ სწორკუთხედის ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ (ნახ. 24).

$$I_c = I_x - Sd^2 = \frac{ah^3}{3} - ah \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{ah^3}{12}$$

8. ვიპოვოთ ABD სამკუთხედის ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ (ნახ. 25).



ნახ. 25

C სიმძიმის ცენტრია, MN სიმძიმის ცენტრზე გამავალი და OX-ის პარალელი ღერძი. როგორც ვიცით, $CK = \frac{h}{3}$, სადაც h სამკუთხედის სიმაღლეა. აქედან:

$$I_c = I_x - S\,d^2 = \frac{AD \cdot h^3}{12} - \frac{AD \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{AD}{36} h^3$$

წყლის ამოქაჩვა რეზერვუარიდან

უნდა გამოვთვალოთ ის მუშაობა, რომელიც საჭიროა ცილინდრული რეზერვუარიდან წყლის ამოსაქაჩავად. რეზერვუარის სიმაღლე $H = 10$ მ და ფუძის რადიუსი $R = 4$ მ.

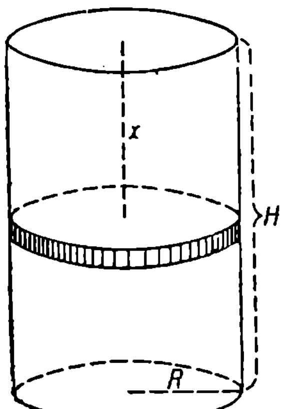
მუშაობა, რომელიც საჭიროა რომელიმე ტვირთის ასაწევად, გამოისახება ტვირთის სიმძიმისა და ასაწევი სიმაღლის გამომსახველ რიცხვთა ნამრავლით. მაგრამ მოცემულ ამოცანაში საკითხს ცოტა ის გარემოება ართულებს, რომ წყლის სხვადასხვა ფენა სხვადასხვა სიმაღლეზეა რეზერვუარში და, მაშასადამე, მათი ასაწევი სიმაღლე სხვადასხვა არის. ასეთ შემთხვევაში ასე უნდა მოვიქცეთ:

წყლის მთელი მასიდან გამოვყოთ უსასრულოდმცირე სისქის ჰორიზონტალური ფენა. ამ ფენის წყლის მასა ერთდაიმავე სიღრმეზე იქნება. (ნახ. 26). აღვნიშნოთ ეს სიღრმე x-ით. ფენის სიმღლე Δx-ით გამოისახება, აქედან ფენის მოცულობა ასე დაიწერება: $\pi R^2 \Delta x$. ამ მოცულობის სიმძიმე კილო-

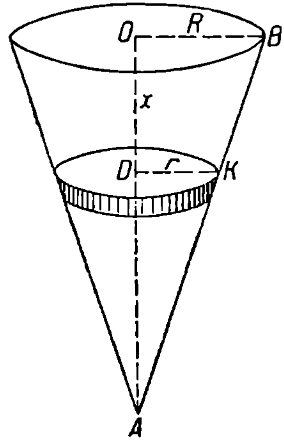
გრამებში იქნება $1000\pi R^2\,\Delta x$. ეს სიმძიმე ჩვენ უნდა ავწიოთ x სიმაღლეზე, მაშასადამე, მუშაობა, რომელიც ასაწევად არის საჭირო (კილოგრამომეტრებში) ასე გამოისახება: $1000\,\pi R^2\,x\Delta x$, ხოლო მთელი წყლის ასაწევი მუშაობისთვის კი გვექნება:

$$\int_0^H 1000\,\pi\,R^2\,x\,dx = 1000\,\pi\,4^2\int_0^{10} x\,dx = 2512000 \text{ კგმ.}$$

ანალოგიურად ამოვქაჩოთ წყალი კონუსური რეზერვუარიდან, რომელსაც კონუსის წვერო ქვემოთ არის მიმართული. კონუსის სიმაღლე $H=8$ და $R=3$ მ (ნახ. 27).



ნახ. 26



ნახ. 27

როგორც წინა ამოცანაში, ერთი ფენის მოცულობა ასე დაიწერება: $\pi r^2\Delta x$. ამ მოცულობის სიმძიმე იქნება $1000\,\pi r^2\Delta x$, ხოლო მუშაობა, რომელიც ამ სიმძიმის ასაწევად არის საჭირო, ასე გამოისახება:

$$1000\,\pi\,r^2\,x\Delta x,$$

აქედან მთელი მუშაობისთვის გვექნება:

$$\int_0^8 1000\,\pi r^2\,x\,dx \qquad (ა)$$

ახლა საჭიროა r გამოვსახოთ x-ის საშუალებით. AOB და ADK სამკუთხედებიდან გვაქვს:

$$\frac{DK}{AD}=\frac{OB}{OA}$$

ანუ

$$\frac{r}{H-x}=\frac{R}{H}; \qquad \frac{r}{8-x}=\frac{3}{8},$$

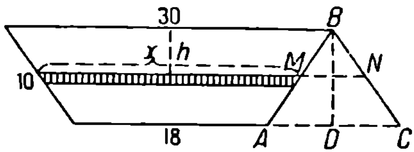
აქედან

$$r=\frac{3}{8}(8-x).$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში:

$$\int_0^8 1000\,\pi\cdot\frac{9}{64}(8-x)^2\,x\,dx.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

გამოვთვალოთ წყლის დაწოლა საგუბარზე, თუ მას ტოლფერდა ტრაპეციის ფორმა აქვს, რომლის ზედა ფუძე $=30$ მტრ, ქვედა ფუძე $=18$ მ, ხოლო ფერდი $=10$ მ (ნახ. 28).



ნახ. 28

საგუბრის ზედაპირი (ტრაპეცია) დავანაწილოთ უსასრულო ჰორიზონტალურ ზოლებად. (ნახაზზე ერთი ასეთი ზოლი დაშტრიხულია). აღვნიშნოთ ამ ზოლის სიღრმე h-ით, სიგრძე x-ით, ხოლო სიგანე Δh-ით. ზოლის ფართობი ასე დაიწერება: $x\,\Delta h$.

თუ ახლა ზოლის სიღრმეს არ შევცვლით (ე. ი. h დავტოვებთ უცვლელად) და ავაბრუნებთ მას (ზოლს) ჰორიზონტალურად, მაშინ დაწოლა ამ ზოლზე გამოისახება წყლის იმ ნაწილს სიმძიმით, რომელსაც ფუძედ აღნიშნული ზოლი აქვს და სიმაღლედ h. წყლის ამ ნაწილის მოცულობა იქნება $xh\,\Delta h$, ხოლო სიმძიმე ამავე რიცხვით გამოისახება.

რადგან ხსენებულ სიღრმეზე დაწოლა თანაბარია ყოველი მიმართულებით, ამიტომ საგუბრის ზოლზე დაწოლა ამავე $xh\,\Delta h$-ით გამოისახება, აქედან დაწოლა მთელ საგუბარზე ასეთია: $\int_0^H xh\,dh$, სადაც H არის ტრაპეციის სიმაღლე.

ვიპოვოთ ახლა H და გამოვსახოთ x-სი h-ის საშუალებით. ABD სწორკუთხიან სამკუთხედში $AB=10$ და $AD=6$, აქედან $BD=H=8$.

MBN სამკუთხედში $MN=30-x$, სიმაღლედ კი h აქვს.

რადგან

$$\triangle ABC \backsim \triangle MBN,$$

ამიტომ

$$\frac{MN}{AC}=\frac{h}{H}$$

ანუ

$$\frac{30-x}{12}=\frac{h}{8},$$

აქედან

$$x=\frac{60-3h}{2}$$

ამრიგად,

$$\int_0^H xh\,dh = \int_0^8 \frac{60-3h}{2}\,h\,dh=704.$$

უსასრულო საზღვრები

როდესაც ინტეგრალის ერთერთი საზღვარი ან ორივე ერთად უსასრულობას წარმოადგენს, მაშინ ასეთი ფორმულებით უნდა ვისარგებლოთ:

$$\text{I.}\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{II.}\qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\text{III.}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+b} f(x)\,dx$$

როდესაც უსასრულო საზღვრებიან ინტეგრალს არა აქვს სასრულო მნიშვნელობა, მაშინ ინტეგრალი განშლადია, ე. ი. ინტეგრალს აზრი არა აქვს.

$$1.\qquad \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{0} e^x\,dx=\lim_{a\to\infty} e^x\Big|_{-a}^{0}=$$

$$=\lim_{a\to\infty}(1-e^{-a})=1-0=1.$$

მოცემული ინტეგრალი გამოსახავს ფართობს, რომელიც ზევიდან $y=e^x$ მრუდით არის შემოსაზღვრული, ქვევიდან აბსცისთა ღერძის უარყოფითი

უსასრულო ნაწილით და მარჯვნივ OY ღერძის იმ ნაკვეთით, რომელიც ერთის ტოლია.

2. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}\Big|_1^b = \frac{1}{2}.$$

ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ სასრული პასუხი, მაშასადამე, ინტეგრალს აზრი აქვს.

3. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \log x\Big|_1^b = \infty$$

ინტეგრალს აზრი არა აქვს ანუ მოცემულ საზღვრებში ინტეგრალი არ არსებობს.

4. $$\int_0^\infty \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty} (-\cos x)\Big|_0^b = -\cos\infty + 1$$

ინტეგრალს აზრი არა აქვს.

5. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}.$$

6. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x\Big|_{-a}^{+a} = \pi.$$

გამოარკვიეთ, აქვს თუ არა აზრი შემდეგ ინტეგრალებს:

7. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$$

10. $$\int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{1+e^x}$$

8. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

11. $$\int_0^\infty e^{-x}\, dx$$

9. $$\int_0^\infty \cos x\, dx$$

12. $$\int_0^\infty \frac{a^3\, dx}{a^2+x^2}$$

13. $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dx$$

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც ინტეგრალქვეშ მდგომი ფუნქცია წყვეტას განიცდის. აქ უნდა გავარჩიოთ სამი შემთხვევა:

I. როდესაც ინტეგრალქვეშ მდგომი ფუნქცია წყვეტას განიცდის ცვლადის იმ მნიშვნელობისთვის, რომელიც ინტეგრალის ქვედა საზღვარს ეტოლება, და დანარჩენ შემთხვევაში ფუნქცია უწყვეტია ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისთვის მოცემულ საზღვრებში.

ასეთ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

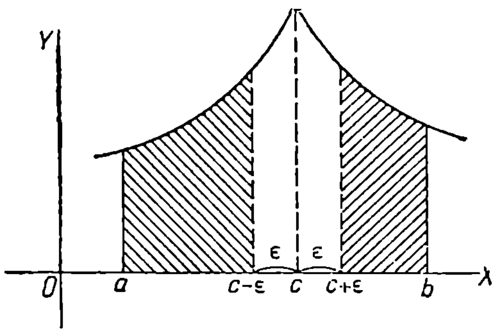
II. ფუნქცია წყვეტას განიცდის ცვლადის იმ მნიშვნელობისთვის, რომელიც ზედა საზღვარს ეტოლება. დანარჩენ შემთხვევაში უწყვეტია მოცემულ საზღვრებში.

ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

III. ფუნქცია წყვეტას განიცდის ცვლადის იმ მნიშვნელობისთვის, რომელიც მოცემულ a და b საზღვრებს შორის არის მოთავსებული, ე. ი. თუ ცვლადის ამ მნიშვნელობას აღვნიშნავთ c-თი, დავწერთ:

$$a<c<b$$



ნახ. 29

ამ შემთხვევაში

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c \to \varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

მესამე შემთხვევის გეომეტრიული გამოსახვა ასეთია (ნახ. 29).

$$1. \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

გვაქვს პირველი შემთხვევა, მაშასადამე,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \log x \Big|_\varepsilon^1 = \infty$$

როგორც ვხედავთ, არ არსებობს ზღვარი და, ამიტომ, ინტეგრალსაც არავითარი აზრი არა აქვს.

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

გვაქვს მეორე შემთხვევა, მაშასადამე,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin 0 \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2}$

გვაქვს მესამე შემთხვევა, ამიტომ

$$\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^{-\varepsilon} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{x} \Big|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{-\varepsilon} + \frac{1}{-2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty$$

თუ პირდაპირ გამოვთვლით ინტეგრალს, გვექნება:

$$\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^{+2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{-2} = -1$$

ცხადია, მიღებულ პასუხს აზრი არა აქვს, რადგან მოცემულ ინტეგრალს ქვეშ მდგომ ფუნქციას დადებითი მნიშვნელობა აქვს.

4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$

5. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-9}$

6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$

7. $\displaystyle\int_0^{3a} \frac{dx}{(x-a)^3}$

8. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$

9. $\displaystyle\int_{-5}^2 \frac{dx}{x+3}$

10. $\displaystyle\int_{-2a}^{a} \frac{dx}{(x+a)^2}$

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

განვიხილოთ ახლა ასეთი ინტეგრალი:

13. $$\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{\varepsilon}^{8} = 9,$$

გამოვთვალოთ იგივე ინტეგრალი ჩვეულებრივი წესით:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{8} = 9.$$

მივიღეთ იგივე პასუხი. ეს აიხსნება იმით, რომ, მართალია, ინტეგრალქვეშ მდგომი $\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის $x=0$ მნიშვნელობისთვის, მაგრამ მისი პირველყოფილი $3x^{\frac{1}{3}}$ ფუნქცია ამავე $x=0$ მნიშვნელობისთვის წყვეტას არ განიცდის. თუ ავიღებთ $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2}$ ინტეგრალს, აქ პირდაპირ

ვერ გამოვთვლით, რადგან, როგორც ინტეგრალქვეშ მდგომი, ისე მისი პირველყოფილი ფუნქცია ორივე წყვეტას განიცდის $x=0$ მნიშვნელობისთვის.

როგორ გამოითვლება ქვემოთ ჩამოთვლილი ინტეგრალები?

14. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}}$

15. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$

16. $\int_{0}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$

17. $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x^4}$

18. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

19. $\int_{a}^{3a} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2a}}$

თავი მესამე

დიფერენციალური განტოლებანი

წინასწარი შენიშვნა: განტოლებას დიფერენციალური ეწოდება, თუ ის წარმოებულებს ან დიფერენციალებს შეიცავს.

დიფერენციალურ განტოლებას ჩვეულებრივი ეწოდება, თუ ის შეიცავს მხოლოდ ერთ დამოუკიდებელ ცვლადს.

თუ განტოლება კერძო წარმოებულებს შეიცავს, მაშინ განტოლებას კერძო წარმოებულიანი ეწოდება.

დიფერენციალური განტოლების რიგი ხასიათდება მასში შემავალი უმაღლესი რიგის წარმოებულით (ან, სულერთია, დიფერენციალით). ასე, მაგალითად, თუ განტოლებაში შემავალი უმაღლესი წარმოებული მესამე რიგისაა, მაშინ განტოლებაც მესამე რიგისაა. $\frac{d^3 y}{d x^3}+2\frac{dy}{dx}=4x$ მესამე რიგის განტოლებაა.

დიფერენციალური განტოლების ხარისხი ხასიათდება მასში შემავალი უმაღლესი ხარისხის წარმოებულით (ან დიფერენციალით), როდესაც განტოლება განთავისუფლებულია რადიკალებისა და წილადებისგან. მაგალითად,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x=0$ მეოთხე ხარისხის განტოლელებაა.

$\frac{d^2 y}{dx^2}+4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-5xy=0$ მეორე რიგისა და მესამე ხარისხის განტოლებაა.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ნიშნავს ისეთი ფუნქციის მოძებნას, რომლის წარმოებული (ან, სულერთია, დიფერენციალი) მოცემულ განტოლებას დააკმაყოფილებს. ამ ფუნქციის მოძებნა წარმოებს ინტეგრაციის საშუალებით, ამიტომ ამონახსენს სხვანაირად ინტეგრალი ეწოდება.

ეს ამონახსენი (ინტეგრალი) გეომეტრიული თვალსაზრისით შეიძლება წარმოადგენდეს მრუდს ან ფართეულს.

მაგალითად,

$$x y''-y'-2=0$$

განტოლების ამონახსენი არის

$$y=x^2-2x$$

ეს უკანასკნელი კი პარაბოლს წარმოადგენს.

შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას $y=x^2-2x$, რისთვისაც უკანასკნელი განტოლებიდან უნდა მოძებნოთ პირველი და მეორე წარმოებული და ჩასვათ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში.

ამონახსენში შემავალ ნებით მუდმივს ინტეგრაციის მუდმივი ეწოდება. ამონახსენს, რომელშიც ნებითი მუდმივი შედის, ზოგადი ეწოდება. ამონახსენში ყოველთვის იმდენი მუდმივი შედის, რამდენ ერთეულსაც განტოლების რიგი შეიცავს. მაგალითად, მეოთხე რიგის განტოლების ამონახსენი ოთხ მუდმივს შეიცავს.

თუ ამონახსენში შემავალ მუდმივებს (ყველას ან ზოგიერთს) მივაკუთნებთ რაიმე კერძო მნიშვნელობას, მივიღებთ კერძო ამონახსენს.

დიფერენციალური განტოლების საშუალებით ამოცანათა გადაწყვეტის დროს მეტწილად საჭიროა კერძო ამონახსენის მოძებნა. ჩვეულებრივ, ამ კერძო ამონახსენს ღებულობენ ზოგადი ამონახსენიდან ამოცანაში შემავალი ამათუიმ დამხმარე პირობების საშუალებით.

პირველი რიგისა და პირველი ხარისხის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგისა და პირველი ხარისხის დიფერენციალური განტოლება ზოგადად ასე იწერება:

$$M\,dx+N\,dy=0,$$

სადაც M და N არის x და y-ის ფუნქციები. ასეთი სახის განტოლებანი შეიძლება დაიყოს რამდენიმე ტიპად.

I ტიპი. ცვლადთა განცალება.

თუ ზემოთ აღნიშნული სახის განტოლებამ ამათუიმ მათემატიკური ოპერაციის საშუალებით მიიღო ასეთი სახე:

$$f(x)\,dx+F(y)\,dy=0,$$

სადაც $f(x)$ მხოლოდ x-ის ფუნქციაა და $F(y)$ მხოლოდ y-ის ფუნქცია, მაშინ განტოლებაში მოხდენილია ცვლადთა განცალება.

1. მაგალითად, $y\,dx-x\,dy=0$. გავყოთ ორივე მხარე xy-ზე, გვექნება:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0.$$

მიღებულ განტოლებაში ცვლადნი განცალებულია, თუ გავაინტეგრებთ, გვექნება:

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}=c,$$

აქედან

$$\log x-\log y=c,$$

ანუ მარჯვენა მხარეზე c-ს მაგიერ დავწეროთ $\log C$ (ე. ი. ნებითს მუდმივს მივსცეთ სხვა სახე. ეს შესაძლებელია, რადგანაც, თუ c არის მუდმივი, $\log C$ აგრეთვე მუდმივია). ამრიგად, დავწერთ

$$\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log C,$$

აქედან

$$\frac{x}{y}=C.$$

2. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2-4}{x+2}$$

$$\frac{dy}{y^2-4}+\frac{dx}{x+2}=0\,; \qquad \int\frac{dy}{y^2-4}+\int\frac{dx}{x+2}=c;$$

$$\frac{1}{4}\log\frac{y-2}{y+2}+\log(x+2)=\log C\,;$$

$$\log\left[\left(\frac{y-2}{y+2}\right)^{\frac{1}{4}}(x+2)\right]=\log C\,; \quad \left(\frac{y-2}{y+2}\right)^{\frac{1}{4}}(x+2)=C.$$

უკანასკნელი განტოლების ორივე მხარე ავიყვანოთ მეოთხე ხარისხში:

$$\frac{(y-2)\,(x+2)^4}{y+2}=K \quad (C^4=K)$$

3. $$\frac{dy}{dx}-3\,(y+2)\,x^2=0$$

$$\frac{dy}{y+2}-3x^2\,dx=0\,; \qquad \int\frac{dy}{y+2}-3\int x^2\,dx=c\,;$$

$$\log(y+2)-x^3=c\,; \qquad \log(y+2)=x^3+c\,,$$

აქედან

$$y+2=e^{x^3+c}=e^c\cdot e^{x^3}=C\,e^{x^3}$$

ამრიგად

$$\underline{y+2=C\,e^{x^3}}.$$

4. $\sec x\,dy-\operatorname{tg} y\,dx=0.$

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y}-\frac{dx}{\sec x}=0; \qquad \int\operatorname{ctg} y\,dy-\int\cos x\,dx=c\,;$$

$$\log(\sin y)-\sin x=c\,; \qquad \sin y=e^{c+\sin x};$$

$$\underline{\sin y=C\,e^{\sin x}}.$$

სავარჯიშო

5. $(x+3)\,dy+(y-2)\,dx=0$ — პას. $(y-2)\,(x+3)=C$

6. $(x^2+1)\,dy-(y+3)\,dx=0$ — პას. $y+3=C\,e^{\operatorname{arc\,tg} x}$

7. $(x+4)\,y^2\,dx+(2+y)\,x\,dy=0$ — პას. $x^4\,y=C\,e^{-x+2y^{-1}}$

8. $(x+1)\,y^3\,dx+(x^2-1)\,dy=0$ — პას. $\log(x-1)-\frac{y^{-2}}{2}=C$

9. $(y^2+x^2\,y^2)\,\frac{dy}{dx}+xy=0$ — პას. $y^2+\log(1+x^2)=C$

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+xy}{1+x^2}$ — პას. $y+2=C\,(1+x^2)^{\frac{1}{5}}$

11. $dy+x\operatorname{cosec} y\,dx=0$ — პას. $\frac{x^2}{2}-\cos y=C$

12. $\cos^2 x\,dy+\sin^2 y\,dx=0$ — პას. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} y=C$

13. $\sin^2 x\operatorname{ctg} y\,dy+\cos^2 y\operatorname{tg} x\,dx=0$ — პას. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=C$

14. $\operatorname{ctg}^2 x\sec^2 y\,dy+\operatorname{tg}^2 y\,dx=0$ — პას. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} y-x=C$

15. $e^{-2x}\frac{dy}{dx}=(y^2+1)\,e^{3x}$ — პას. $\operatorname{arc\,tg} y-\frac{e^{5x}}{5}=C$

ვთქვათ გვაქვს ასეთი განტოლება:

$$d\,(x^2+y^2-x+1)=0$$

როგორც ვხედავთ, მარცხენა მხარე წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, ამიტომ

$$\int d\,(x^2+y^2-x+1)=C\,,$$

აქედან

$$\underline{x^2+y^2-x+1=C}$$

მაგრამ შესაძლებელია განტოლების მარცხენა მხარე ისეთი სახით იყოს დაწერილი, რომ ერთი შეხედვით ძნელი იყოს ამოცნობა, არის ის სრული დიფერენციალი თუ არა. ამის გამოსარკვევად არსებობს გარკვეული წესი. $M\,dx+N\,dy=0$ განტოლების მარცხენა მხარე რომ სრული დიფერენციალი იყოს, ამისთვის შესრულებული უნდა იქნეს პირობა:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ $M\,dx+N\,dy$ ნამდვილად არის სრული დიფერენციალი, ე. ი.

$$M\,dx+N\,dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,.$$

ცხადია, აქედან

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \quad \text{და} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N$$

პირველიდან დავწერთ:

$$u=\int M\,dx+C^*$$

(y ამ დროს იგულისხმება, როგორც მუდმივი). C მუდმივად ითვლება იმდენად, რამდენადაც y მუდმივია. ახლა, რადგან C-ს შეუძლიან ცვლა y-თან ერთად, ამიტომ C უნდა განვიხილოთ როგორც y-ის ფუნქცია. ამ მოსაზრების გამო წინა განტოლება ასე დაიწერება:

$$u=\int M^*\,dx+\varphi\,(y)$$

---

* u შეიძლება გამოვსახოთ აგრეთვე $\frac{\partial u}{\partial y}=N$-დან. არჩევა ჩვენ ნებაზეა.

ჩვენი მორიგი მიზანი იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა ვიპოვოთ $\varphi(y)$. გავარკვიოთ ნათქვამი მაგალითზე.

1. $2xy\,dx+(x^2+1)\,dy=0$

გვაქვს:

$$M=2xy \quad \text{და} \quad N=x^2+1\,; \quad \frac{\partial M}{\partial y}=2x \quad \text{და} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x\,.$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული დიფერენციალური განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს. ამის გამო შეგვიძლიან დავწეროთ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy \quad \text{და} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+1 \tag{ა}$$

პირველიდან გვაქვს:

$$u=2\int xy\,dx+C$$

ანუ

$$u=x^2y+\varphi(y) \tag{ბ}$$

აქედან

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\varphi'(y)$$

თუ მიღებულ შედეგს შევადარებთ (ა)-ს, დავწერთ:

$$x^2+1=x^2+\varphi'(y)$$

ანუ

$$\varphi'(y)=1,$$

აქედან

$$\varphi(y)=y+C.$$

მიღებული C უკვე ნამდვილი მუდმივია (მის ქვეშ y აღარ იგულისხმება). ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ბ)-ში:

$$u=x^2y+y+C.$$

თუ ახლა u-ს ნებითს მუდმივს გავუტოლებთ, მივიღებთ ზოგად ამონახსენს:

$$\underline{x^2y+y=C_1}$$

შემოწმება: თუ $x^2y+y=C_1$-დან მოვძებნით $\dfrac{dy}{dx}$ და ჩავსვამთ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, უკანასკნელი დაკმაყოფილდება.

სავარჯიშო

2. $(x+y^2)\,dx+2\,xy\,dy=0$ პას. $\frac{x^2}{2}+xy^2=C_1$

3. $(x^2+2xy)\,dx+(y+x^2)\,dy=0$ პას. $\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}=C_1$

4. $\left(\frac{y}{x}+x^2\right)dx+(\log x+y)\;dy=0$ პას. $y\log x+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=C_1$

ან $6y\log x+2x^3+3y^2=C_1$

5. $\sin 2y\,dx+2x\cos 2y\,dy=0$ პას. $x\sin 2y=C_1$

6. $(\sin x+\cos y)\,dx-(x\sin y+y^2)\,dy=0$ პას. $3x\cos y-3\cos x-y^3=C_1$

7. $(2x+\sin^2 y)\,dx+(x\sin 2y+2y)\,dy=0$ პას. $x^2+y^2+x\sin^2 y=C_1$

8. $(x+e^{2y})\,dx+\frac{2x}{e^{-2y}}\,dy=0$ პას. $x^2+2xe^{2y}=C_1$

საინტეგრალო მამრავლი

თუ $M\,dx+N\,dy=0$ დიფერენციალური განტოლების მარცხენა მხარე არ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, მაშინ განტოლების ორივე მხარე უნდა გამრავლდეს წინასწარ შერჩეულ მამრავლზე. ასეთი გამრავლების შედეგად განტოლების მარცხენა მხარე გადაიქცევა სრულ დიფერენციალად. აღნიშნულ მამრავლს დიფერენციალური განტოლების საინტეგრალო მამრავლი ეწოდება და აღინიშნება P-თი. ეს მამრავლი შემდეგი ფორმულებით გამოიხატება:

a) $$\frac{dP}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx$$ თუ მარჯვენა მხარე მხოლოდ x-ის ფუნქციაა ან მუდმივს ეტოლება.

b) $$\frac{dP}{P}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy$$ თუ მარჯვენა მხარე მხოლოდ y-ის ფუნქცია ან მუდმივს ეტოლება.

1. ავიღოთ ასეთი განტოლება:

$$-y\,dx+x\,dy=0$$

მარცხენა მხარე არ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, რადგან

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1 \quad \text{და} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

გავამრავლოთ ორივე მხარე $\frac{1}{x^2}$-ზე:

$$-\frac{y\,dx}{x^2}+\frac{dy}{x}=0$$

ანუ

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

როგორც ვხედავთ, გამრავლების შემდეგ მარცხენა მხარე უკვე სრულ დიფერენციალს წარმოადგენს. აქედან ზოგადი ამონახსენი იქნება:

$$\underline{\frac{y}{x}=C}$$

შენიშვნა: მოცემული განტოლების ორივე მხარე ჩვენ შეგვიძლიან გავამრავლოთ აგრეთვე $\frac{1}{y^2}$ და $\frac{1}{xy}$-ზე. $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$; $\frac{1}{xy}$ საინტეგრალო მამრავლებია.

ზემოთ განხილული $\frac{1}{x^2}$ მამრავლი ჩვენ ზეპირად შევარჩიეთ. მოვძებნოთ ახლა ეს მამრავლი ფორმულის საშუალებით. მოცემული განტოლებისთვის გვაქვს:

$$\frac{dP}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx=\frac{-1-1}{x}\,dx=-\frac{2\,dx}{x},$$

აქედან (როგორც ვხედავთ, მარჯვენა მხარე y-ს არ შეიცავს).

$$\int\frac{dP}{P}+2\int\frac{dx}{x}=C; \qquad \log P+2\log x=\log c;$$

$$Px^2=1; \quad P=\frac{1}{x^2}$$

2. ავიღოთ კიდევ მაგალითი:

$$(x+y^2)\,dx+xy\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y; \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=y,$$

მაშასადამე, განტოლების მარცხენა მხარე არ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს.

მოვძებნოთ საინტეგრალო მამრავლი:

$$\frac{dP}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx=\frac{2y-y}{xy}dx=\frac{dx}{x}$$

თუ

$$\frac{dP}{P}=\frac{dx}{x},$$

აქედან

$$P=x.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ x-ზე

$$(x^2+xy^2)\,dx+x^2y\,dy=0$$

მიღებული განტოლების მარცხენა მხარე უკვე სრული დიფერენციალია.. ამის გამო დავწერთ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+xy^2 \qquad \text{და} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2y \tag{ა}$$

პირველიდან გვაქვს:

$$u=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y) \tag{ბ}$$

გავაწარმოოთ y-ის შესახებ

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)$$

მარჯვენა მხარე შევადაროთ (ა)-ს:

$$x^2y+\varphi'(y)=x^2y$$

ანუ

$$\varphi'(y)=0$$

აქედან

$$\varphi(y)=C.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ბ)-ში:

$$u=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+C,$$

თუ გავუტოლებთ მუდმივს, დავწერთ:

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}=C_1$$

ანუ

$$\underline{2x^3+3x^2y^2=C_1}$$

3. $xy\,dx+(yx^2-y)\,dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x\,; \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy$$

განტოლების მარცხენა მხარე არ არის სრული დიფერენციალი. საინტეგრალო მამრავლის მოსაძებნად პირველი ფორმულა არ გამოდგება, რადგანაც გვექნება:

$$\frac{dP}{P}=\frac{x-2xy}{yx^2-y}$$

მოვიმარჯვოთ მეორე ფორმულა.

$$\frac{dP}{P}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy=\frac{2y-1}{y}\,dy$$

$$\int\frac{dP}{P}=2\int dy-\int\frac{dy}{y}\,,$$

აქედან

$$P=\frac{e^{2y}}{y}\,.$$

გავამრავლოთ მოცემული განტოლება მიღებულ მამრავლზე

$$x\,e^{2y}\,dx+(x^2e^{2y}-e^{2y})\,dy=0$$

მიღებული განტოლების მარცხენა მხარე სრული დიფერენციალია; ამიტომ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xe^{2y} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=(x^2-1)\,e^{2y}$$

პირველიდან დავწერთ:

$$u=\frac{x^2}{2}\,e^{2y}+\varphi(y); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{2y}+\varphi'(y).$$

აქედან

$$x^2e^{2y}+\varphi'(y)=(x^2-1)\,e^{2y}.$$

ანუ

$$\varphi'(y)=-e^{2y}\,;$$

$$\varphi(y) = -\int e^{2y}\,dy + C = -\frac{e^{2y}}{2} + C.$$

ამრიგად,

$$u = \frac{x^2 e^{2y}}{2} - \frac{e^{2y}}{2} + C,$$

აქედან

$$\frac{(x^2-1)\,e^{2y}}{2} = C_1$$

ანუ, სულერთია,

$$\underline{(x^2-1)e^{2y} = C_1}$$

სავარჯიშო

4. $xy\,dx + (x-1)\,dy = 0$ — პას. $(x-1)\,ye^x = C_1$

5. $(xy^3 + x)\,dx + x^2y^2\,dy = 0$ — პას. $x^3\,(y^3+1) = C_1$

6. $2\sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0$ — პას. $x^2\sin y = C_1$

7. $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$ — პას. $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C_1$

8. $(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$ — პას. $x^2 + \dfrac{2x}{y} = C_1$

9. $y\,(2xy - 1)\,dx + (x + y + y^2)\,dy = 0$ — პას. $x^2 - \dfrac{x}{y} + y + \log y = C_1$

10. $y\sin 2x\,dx - 2\cos^2 x\,dy = 0$ — პას. $y^2\cos^2 x = C_1$

III ტიპი. ერთგვაროვანი განტოლებანი

ერთგვაროვანი განტოლების ამოსახსნელად მეტწილად ასეთი ჩასმა არის მიღებული:

$$y = zx,$$

სადაც z ახალი ცვლადია. ამ ჩასმის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით ვღებულობთ ისეთ დიფერენციალურ განტოლებას z და x-ის შესახებ, სადაც შესაძლებელია ცვლადთა განცალება. მაგალითად,

1. $y\,dx - (x+y)\,dy = 0$

აღვნიშნოთ,

$$y = zx,$$

აქედან

$$dy = z\,dx + x\,dz$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში:

$$zx\,dx - (x + zx)(z\,dx + x\,dz) = 0$$

ანუ

$$z^2\,dx + x(1+z)\,dz = 0\,;$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1+z}{z^2}\,dz = c\,; \qquad \log(zx) = \frac{1}{z} + c,$$

აქედან

$$z\,x = C\,e^{\frac{1}{z}}:$$

ჩავსვათ z-ის მნიშვნელობა:

$$\underline{y = C\,e^{\frac{x}{y}}}$$

2. $x^2\,dy + (x^2 + y^2)\,dx = 0$

$$y = z\,x\,,$$

აქედან

$$z\,dx + x\,dz$$

$$x^2(z\,dx + x\,dz) + (x^2 + z^2\,x^2)\,dx = 0$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + z + 1} + \int \frac{dx}{x} = C; \qquad \underline{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2y + x}{x\sqrt{3}} + \log x = C.}$$

3. $$y^2 \sin\frac{y}{x}\sin\left(2\frac{y}{x}\right) = 2x^2\cos\frac{y}{x}\cdot\left(1 - \cos^2\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$y = z\,x\,, \qquad dy = z\,dx + x\,dz$$

$$z^2\,x^2 \sin z \cdot \sin 2z = 2x^2\cos z \cdot (1 - \cos^2 z)\cdot\frac{z\,dx + x\,dz}{dx}$$

აქედან

$$z^2\,dx = x\,dz + z\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{z(z-1)} = c\,; \qquad \frac{xz}{z-1} = C$$

ანუ

$$\underline{y\,x = C\,(y - x)}$$

4. $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$ პას. $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=Ce^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$

5. $y^2\,dx+(x^2-yx)\,dy=0$ პას. $\log y-\frac{y}{x}=C$

6. $(x^2+y^2)\,dy+2xy\,dx=0$ პას. $y^3+3x^2y=C$

7. $(y^2-3x^2)\,dy+2xy\,dx=0$ პას. $y^3=C(y^2-x^2)$

8. $x(x+2y)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0$ პას. $x^3+3x^2y-y^3=C$

9. $(x^2+xy+y^2)\,dx+x^2\,dy=0$ პას. $\log x-\frac{x}{x+y}=C$

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$ პას. $\arcsin\frac{y}{x}-\log x=C$

11. $\left(x\cos\frac{y}{x}-y\sin\frac{y}{x}\right)dx+x\sin\frac{y}{x}\,dy=0$ პას. $y=x\arccos\frac{x}{c}$

---

12. $y'=(x+y)^2+2$ მითითება: $x+y=z$

13. $y'=\cos^2(x+y)-1$ მითითება: $x+y=z$

14. $y^2\,dx+(xy-1)\,dy=0$ მითითება: $xy-1=z$

განტოლებანი, რომელნიც ჩასმის საშუალებით ერთგვაროვანზე დაიყვანება

15. $(x+y+4)\,dx+(x-y+2)\,dy=0$

მივიღოთ ასეთი აღნიშვნა:

$$x=u+a$$

და

$$y=v+b,$$

სადაც u და v ახალი ცვლადებია, ხოლო a და b მუდმივები. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში:

$$(u+v+a+b+4)\,du+(u-v+a-b+2)\,dv=0$$

მივიღოთ ახლა დამატებით პირობად, რომ

$$a+b+4=0$$

და

$$a-b+2=0,$$

აქედან შეთავსებული ამოხსნა მოგვცემს:

$$a=-3; \quad b=-1 \qquad (ა)$$

ამ დამატებითი პირობის ძალით უკანასკნელი განტოლება ასე დაიწერება:

$$(u+v)\,du+(u-v)\,dv=0$$

ეს კი არის ერთგვაროვანი განტოლება. აღვნიშნოთ

$$u=zv^*; \qquad du=z\,dv+v\,dz,$$

გვექნება:

$$(zv+v)(z\,dv+v\,dz)+(zv-v)\,dv=0$$

ანუ

$$z^2\,v\,dv+vz\,dv+z\,v^2\,dz+v^2\,dz+zv\,dv-v\,dv=0$$

$$\int\frac{(z+1)\,dz}{z^2+2z-1}+\int\frac{dv}{v}=c;$$

$$\frac{1}{2}\log(z^2+2z-1)+\log v=\log C,$$

აქედან

$$(z^2+2z-1)^{\frac{1}{2}}\;v=C$$

ანუ, რადგან

$$z=\frac{u}{v},$$

გვექნება

$$u^2+2uv-v^2=C \qquad (ბ)$$

მაგრამ

$$u=x-a \quad \text{და} \quad v=y-b$$

ანუ, თანახმად (ა)-სი,

$$u=x+3$$

და

$$v=y+1.$$

---

* აღნიშვნა ასეც შეიძლება: $v=zu$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ბ)-ში:

$$(x+3)^2+2(x+3)(y+1)-(y+1)^2=C$$

ანუ, თუ ფრჩხილებს გავხსნით და მუდმივებს ყველას C_1-თი აღვნიშნავთ:

$$\underline{x^2+2xy+8x-y^2+4y=C_1.}$$

მეორე ხერხი: მოცემული განტოლება უფრო მარტივად ასე ამოიხსნება: ვინაიდან განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

ამიტომ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x-y+2 \qquad (გ)$$

$$u=\frac{x^2}{2}+xy+4x+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y).$$

მიღებული შედეგი შევადაროთ (გ)-ს, დავწერთ:

$$x+\varphi'(y)=x-y+2$$

აქედან

$$\varphi'(y)=-y+2$$

$$\varphi(y)=-\frac{y^2}{2}+2y+C.$$

ამრიგად,

$$u=\frac{x^2}{2}+xy+4x-\frac{y^2}{2}+2y+C$$

ანუ

$$\frac{x^2}{2}+xy+4x-\frac{y^2}{2}+2y=C_1$$

ან, სულ ერთია

$$\underline{x^2+2xy+8x-y^2+4y=C_1}$$

განხილული წესი მაშინ არის გამოსაყენებელი, როდესაც განტოლებაში შემავალი x და y-ის კოეფიციენტები პროპორციული არ არის. თუ ეს კოეფიციენტები პროპორციულია, ე. ი. თუ

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}$$

მაშინ საჭიროა

$$mx+ny=z \text{ ჩასმა.}$$

მაგალითად,

16. $(2x+y-1)\,dx+(4x+2y-3)\,dy=0$

განტოლებაში x და y-ის კოეფიციენტები პროპორციულია:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ამისთვის აღვნიშნოთ

$$2x+y=z$$

აქედან

$$y=z-2x; \quad dy=dz-2\,dx.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში:

$$(z-1)\,dx+(2z-3)\,(dz-2\,dx)=0$$

$$(-3z+5)\,dx+(2z-3)\,dz=0$$

$$\int\frac{2z-3}{-3z+5}\,dz+\int dx=c$$

აქედან

$$-\frac{2}{3}z-\frac{1}{9}\log\,(3z-5)+x=\log C$$

ანუ, თუ z-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ

$$(6x+3y-5)^{\frac{1}{9}}C=e^{-\frac{x+2y}{3}}$$

სავარჯიშო

17. $(x+y+2)\,dx+(x-y)\,dy=0$ პას. $x^2+2xy-y^2+4x=C$

18. $(x-y-3)\,dx+(x+y-4)\,dy=0$ პას. $\frac{1}{2}\log\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]-\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-7}{2y-1}=C$

19. $(6x+4y-1)\,dx+(4x+y-2)\,dy=0$ პას. $6x^2+8xy+y^2-2x-$
$-4y=C$

20. $(7x-3y+3)\,dx+(3x-7y+7)\,dy=0$ პას. $(x+y-1)^5\,(x-y+$
$+1)^2=C$

21. $(x-y-1)\,dx+(x+2y)\,dy=0$

პას. $\frac{1}{2}\log\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)+2\left(y+\frac{1}{3}\right)^2\right]-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-2}{\sqrt{2}(3y+1)}=C$

22. $(x-y+1)\,dx-(y-x)\,dy=0$ პას. $2x-2y+1=Ce^{-2(x+y)}$

23. $(x-3y+1)\,dx-(2x-6y-3)\,dy=0$ პას. $3x-6y-15\log(x-3y+$
$+6)=C$

24. $(y-x-5)\,dx+(2x-2y-1)\,dy=0$ პას. $e^{2y-x}=C(y-x+6)^{11}$

IV ტიპი. პირველი რიგის ხაზოვანი განტოლებანი

ხაზოვანი ისეთ განტოლებას ეწოდება, რომელიც პირველი ხარისხისაა დამოკიდებული ცვლადისა და მისი წარმოებულის (ან, სულერთია, დიფერენციალის) შესახებ და, გარდა ამისა, ფუნქცია და მისი წარმოებული არ უნდა მრავლდებოდეს ერთმანეთზე.

ხაზოვანი განტოლების ზოგადი სახე ასეთია:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

სადაც P და Q მხოლოდ x-ის ფუნქციებია ან მუდმივები (const). კერძოდ, როდესაც $Q=0$, გვაქვს

$$\frac{dy}{dx}+Py=0.$$

ხაზოვანი განტოლების ამოხსნა წარმოებს ან ჩასმის საშუალებით, ან ნებითი მუდმივის ვარიაციით.

A. ჩასმის ხერხი. (ეს ხერხი ეილერ - ბერნულის Euler-Bernoulli ეკუთვნის)

$$1.\quad \frac{dy}{dx}-2xy=x^2e^{x^2}$$

აღვნიშნოთ

$$y=uv\,^{*}$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-2x\,u\,v=x^2\,e^{x^2}$$

ვინაიდან u და v ნებითი ფუნქციებია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლიან ერთ-ერთი მათგანი ისე შევარჩიოთ, რომ მეორესთან მდგომი კოეფიციენტი ნოლს გაუტოლდეს. ამისთვის საჭიროა აღნიშნულ განტოლებაში u ფრჩხილებს გარეთ გამოვიტანოთ (იმ წევრებიდან, რომელშიც ის შედის) და, ამრიგად, მიღებული ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება გავუტოლოთ ნოლს. (შეიძლება ასევე მოვიქცეთ v-ს შესახებ,—არჩევა ჩვენს ნებაზეა). გვექნება:

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2x\,v\right)+v\frac{du}{dx}=x^2\,e^{x^2} \qquad (ა)$$

$$\frac{dv}{dx}-2x\,v=0$$

აქედან

$$\int\frac{dv}{v}-2\int x\,dx=c$$

$$v=C\,e^{x^2} \qquad (ბ)$$

(ა) განტოლებიდან გადმოვწეროთ დარჩენილი წევრები:

$$v\frac{du}{dx}=x^2\,e^{x^2}.$$

ჩავსვათ აქ v-ს მნიშვნელობა (ბ)-დან:

$$C\,e^{x^2}\frac{du}{dx}=x^2\,e^{x^2} \qquad C\,du=x^2\,dx$$

$$u=\frac{\frac{x^3}{3}+C_1}{C} \qquad (გ)$$

* u და v არის x-ის ფუნქციები

ჩავსვათ ახლა $y=uv$-ში (ბ) და (გ) მნიშვნელობანი:

$$y=\frac{\frac{x^3}{3}+C_1}{C}\cdot C e^{x^2}=\underline{\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)e^{x^2}}$$

B. ნებითი მუდმივის ვარიაცია (ლაგრანჟის Lagrange ხერხი).

ამ ხერხის თანახმად, განტოლების მარცხენა მხარეზე დატოვებულ უნდა იქნას მხოლოდ ის წევრები, რომლებიც y და dy შეიცავს. დანარჩენი წევრები დროებით მოცილებულ უნდა იქნას. ასე; მაგალითად, წინა

$$\frac{dy}{dx}-2xy=x^2 e^{x^2}$$

განტოლებიდან გვექნება:

$$dy-2xy\,dx=0\,; \qquad \int\frac{dy}{y}-2\int x\,dx=c\,,$$

აქედან

$$y=C e^{x^2} \qquad \text{(ა)}$$

მიღებული განტოლება გავადიფერენციოთ. C ამ დროს უნდა ჩაითვალოს x-ის ფუნქციად. (აქედან წარმოდგება სახელწოდება: მუდმივის ვარიაცია, ე. ი. მუდმივს უნდა მივაკუთვნოთ ცვლადის ხასიათი).

$$dy=e^{x^2}\,dC+2x\,Ce^{x^2}dx \qquad \text{(ბ)}$$

(ა) და (ბ) მნიშვნელობანი ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში:

$$e^{x^2}\,dC+2x\,C\,e^{x^2}\,dx-2x\,C\,e^{x^2}\,dx=x^2\,e^{x^2}\,dx$$

ანუ

$$dC=x^2\,dx\,; \qquad C=\frac{x^3}{3}+C_1\,.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში:

$$y=\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)e^{x^2}$$

მიიღეთ იგივე პასუხი.

ავიღოთ კიდევ მაგალითი.

$$2. \quad dy+y\sin x\,dx=2x\,e^{\cos x}\,dx$$

$$y=uv\,, \quad dy=u\,dv+v\,du$$

$$u\,dv+v\,du+uv\sin x\,dx=2x\,e^{\cos x}\,dx \qquad (ა).$$

$$dv+v\sin x\,dx=0$$

აქედან

$$\int\frac{dv}{v}+\int\sin x\,dx=c$$

$$v=C\,e^{\cos x}$$

გადმოვწეროთ (ა) განტოლების დანარჩენი წევრები:

$$v\,du=2x\,e^{\cos x}\,dx$$

ანუ

$$C\,e^{\cos x}\,du=2x\,e^{\cos x}\,dx$$

$$C\,du=2x\,dx$$

აქედან

$$u=\frac{x^2+C_1}{C}$$

$$y=uv=\frac{x^2+C_1}{C}C\,e^{\cos x}=\underline{(x^2+C_1)\,e^{\cos x}}$$

ამოვხსნათ იგივე განტოლება ნებითი მუდმივის ვარიაციით

$$dy+y\sin x\,dx=0;\qquad\int\frac{dy}{y}+\int\sin x\,dx=c$$

აქედან

$y=C\,e^{\cos x}$ (ბ) გავადიფერენციოთ:

$$dy=e^{\cos x}\,dC-C\sin x\,e^{\cos x}\,dx \qquad (გ).$$

(ბ) და (გ) მნიშვნელობანი ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში:

$$e^{\cos x}\,dC-C\sin x\,e^{\cos x}\,dx+C\sin x\,e^{\cos x}\,dx=2x\,e^{\cos x}\,dx$$

ანუ

$$dC=2x\,dx\,;\qquad C=x^2+C_1.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ბ)-ში:

$$\underline{y=(x^2+C_1)\,e^{\cos x}}$$

3. ამოვხსნათ ახლა ასეთი განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}+2xy=0.$$

აღვნიშნოთ

$$y=uv,$$

აქედა

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx};$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+2x\,uv=0; \quad \frac{dv}{dx}+2xv=0$$

აქედან

$$v=Ce^{-x^2}; \qquad Ce^{-x^2}\frac{du}{dx}=0; \qquad u=C_1,$$

მაშასადამე,

$$y=uv=CC_1e^{-x^2}=C_2e^{-x^2} \qquad (CC_1=C_2).$$

სავარჯიშო

4. $\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}$ პას. $y=(x+C_1)e^{x^2}$

5. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$ პას. $y=(x+C_1)x$

6. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=4x^2$ პას. $y=\frac{x^4+C_1}{x}$

7. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x+1}=\frac{x+1}{x}$ პას. $y=(\log x+C_1)(x+1)$

8. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x+2}=2(x+2)^2$ პას. $y=(x^2+4x+C_1)(x+2)$

9. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{2}{x^3}$ პას. $y=\frac{2\log x+C_1}{x^2}$

10. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x+1}=(x+1)^3$ პას. $y=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+C_1\right)(x+1)$

11. $\frac{dy}{dx}-y=2xe^x$ პას. $y=(x^2+C_1)e^x$

12. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$ პას. $y=Cx$

13. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$ პას. $y=C(x+1)^2$

14. $\frac{dy}{dx}+y\sin x=0$ პას. $y=Ce^{\cos x}$

15. $dy+\frac{xy}{x+1}dx=\frac{x+1}{e^x}dx$ პას. $y=(x+C_1)(x+1)e^{-x}$

16. $dy+y\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$ პას. $y=\sin x-1+C_1e^{-\sin x}$

17. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{x^2-3x+2}=\frac{2(x-1)}{x-2}$ პას. $y=\frac{(x^2-4x+C_1)(x-1)}{(x-2)^2}$

18. $\frac{dy}{dx}-y\cos x=4x^3e^{\sin x}$ პას. $y=(x^4+C_1)e^{\sin x}$

19. $\frac{dy}{dx}+2y\sin 2x=e^{x+\cos 2x}$ პას. $y=(e^x+C_1)e^{\cos 2x}$

20. $\frac{dy}{dx}+y\,\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{ctg}\,x$ პას. $y=\frac{\sin x+C_1}{\sin x}$

21. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\cos^2 x}=\frac{2e^{2x}}{e^{-\mathrm{tg}\,x}}$ პას. $y=(e^{2x}+C_1)e^{\mathrm{tg}\,x}$

22. $\sec x\frac{dy}{dx}+y\,\mathrm{tg}\,x=2e^{2x+\cos x}\cdot\sec x$ პას. $y=(e^{2x}+C_1)e^{\cos x}$

23. $\mathrm{tg}\,x\frac{dy}{dx}+y\sin x=\mathrm{tg}\,x\cdot e^{-\sin x}$ პას. $y=(x+C_1)e^{-\sin x}$

24. $dy-y\cos x\,dx=e^{x+\sin x}dx$ პას. $y=(e^x+C_1)e^{\sin x}$

25. $dy-ye^x\,dx=e^{\sin x+e^x}\cdot dx$ პას. $y=(e^x+C_1)e^{e^x}$

განტოლებანი, რომლებიც ხაზოვანზე მიიყვანება (ბერნულის — BERNOULLI განტოლება)

საერთო სახე იმ განტოლებათა, რომლებიც ხაზოვანზე დაიყვანება, ასეთია:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q\,y^{n},$$

სადაც P და Q მხოლოდ x-ის ფუნქციებია ან მუდმივები და n ერთს ან ნოლს არ უნდა ეტოლებოდეს. (ერთს ან ნოლს რომ ეტოლებოდეს, მაშინ წმინდა ხაზოვანი განტოლება გვექნება).

ამოვხსნათ ეს განტოლება ზოგადად. ამისთვის ორივე მხარე გავყოთ y^{n}-ზე:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q \qquad (ა)$$

აღვნიშნოთ

$$y^{1-n}=z$$

აქედან

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში:

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+Pz=Q\,.$$

მივიღეთ ხაზოვანი განტოლება, რომლის ამოხსნაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია.

შენიშვნა: ბერნულის განტოლების ინტეგრაცია შესაძლებელია $y=uv$ ჩასმითაც.

$$1.\qquad \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x\,y^{2}$$

გავყოთ ორივე მხარე y^{2}-ზე.

$$y^{-2}\,\frac{dy}{dx}+\frac{y^{-1}}{x}=x\,;$$

აღვნიშნოთ

$$y^{-1}=z\,,$$

აქედან

$$y^{-2}\,\frac{dy}{dx}=-\,\frac{dz}{dx}\,,$$

გვექნება:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=-x.$$

მივიღეთ ხაზოვანი განტოლება. თუ აღვნიშნავთ $z=uv$ და ამოვხსნით, გვექნება:

$$z=-x^2+C_1 x.$$

ეხლა, რადგან

$$z=\frac{1}{y},$$

ამიტომ

$$y=-\frac{1}{x^2-C_1 x}$$

დავალება: შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა მიღებული ფუნქცია მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას. ამისთვის უნდა გააწარმოოთ უკანასკნელი ფუნქცია და ჩასვათ განტოლებაში.

სავარჯიშო

2. $\frac{dy}{dx}-y=y^3 e^{-2x}$ პას. $y=e^x(-2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}$

3. $y'-\frac{y}{x+1}=(x+1)^3\sqrt{y^5}$ პას. $y^3=(x+1)^3\left[-\frac{3}{11}\left(x+1\right)^{\frac{11}{2}}+C_1\right]^{-2}$

4. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=2(x+1)^4 y^4$ პას. $y=\frac{1}{(-3x^2-6x+C_1)^{\frac{1}{3}}(x+1)}$

5. $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=y^2\sec x$ პას. $y=-\frac{1}{\sin x+C_1\cos x}$

6. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^5 e^{4\sin x}$ პას. $y=(-4x+C_1)^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-\sin x}$

პირველი რიგის უმაღლესი ხარისხის დიფერენციალური განტოლებანი

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ზოგიერთი სპეციალური სახის უმაღლესი ხარისხის განტოლებებს.

A. ტიპი. $$F(x,\ y,\ y')=0$$

ეს ისეთი სახის განტოლებაა, რომელიც ამოხსნილი არ არის y'-ის შესახებ. მაგალითად,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4xy\frac{dy}{dx}-5x^2y^2=0$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{dy}{dx}=t,$$

გვექნება:

$$t^2-4xyt-5x^2y^2=0$$

ამოვხსნათ t-ს შესახებ:

$$t=2xy\pm\sqrt{4x^2y^2+5x^2y^2};$$

$$t=2xy\pm 3xy; \qquad t_1=5xy; \qquad t_2=-xy$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=5xy$$

და

$$\frac{dy}{dx}=-xy,$$

აქედან

$$\frac{dy}{y}=5x\,dx$$

და

$$\frac{dy}{y}=-x\,dx;$$

$$\log y=\frac{5x^2}{2}+c \qquad \log y=-\frac{x^2}{2}+c_1;$$

$$y=C'e^{\frac{5x^2}{2}} \qquad y=C_1e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ანუ

$$y-Ce^{\frac{5x^2}{2}}=0 \quad \text{და} \quad y-C_1e^{-\frac{x^2}{2}}=0,$$

აქედან ზოგადი ამონახსენი:

$$\underline{\left(y-Ce^{\frac{5}{2}x^2}\right)\left(y-C_1e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=0}$$

ამოხსენით:

$$3x^2 y'^2 - xyy' - 4y^2 = 0$$

$$2x^2 y'^2 + 3xyy' - 2y^2 = 0$$

B. ტიპი. $$F(x, y') = 0$$

(ამ განტოლებაში y არ შედის)

1. $x = y' - y'^2$.

ალვნიშნოთ

$$y' = p,$$

აქედან

$$x = p - p^2;$$

ჩვენი აღნიშვნის თანახმად:

$$\frac{dy}{dx} = p; \qquad \int dy = \int$$

თუ მარჯვენა მხარეზე მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრაციას, გვექნება:

$$y = px - \int x\,dp = p\,(p - p^2) - \int (p - p^2)\,dp$$

ანუ

$$y = \frac{p^2}{2} - \frac{2}{3}p^3 + C.$$

ამრიგად,

$$x = p - p^2$$

და

$$y = \frac{p^2}{2} - \frac{2}{3}p^3 + C$$

სისტემა წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსენს პარამეტრული სახით.

შენიშვნა: როდესაც ამონახსენი პარამეტრული სახით არის მოცემული, შესაძლებელია პარამეტრი გამორიცხულ იქნას, თუ ასეთი გამორიცხვა ადვილად მოხერხდება და რთულ შედეგზე არ მიგვიყვანს. მოცემულ შემთხვევაში პარამეტრის გამორიცხვა რთულ ოპერაციას მოითხოვს, ამიტომ უმჯობესია ამონახსენი პარამეტრული სახით დარჩეს.

ამოხსენით: 2. $x=y'+3y'^2$ 5. $x=y'^2-y'^3$

3. $x=2y'-y'^3$ 6. $x=y'-2y'^2-y'^3-3y'^5$

4. $x=3y'-y'^4$

C. ტიპი. $$F(y,\ y')=0$$

(ამ განტოლებაში x არ შედის)

1. $y=y'-y'^3$.

აღვნიშნოთ

$$y'=p,$$

გვექნება:

$$y=p-p^3$$

ჩვენი აღნიშვნის თანახმად,

$$\frac{dy}{dx}=p,$$

აქედან

$$dx=\frac{dy}{p};$$

$$x=\int\frac{dy}{p}$$

მარჯვენა მხარეზე მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრაცია:

$$x=\frac{y}{p}+\int\frac{y\,dp}{p^2}=\frac{p-p^3}{p}+\int\frac{(p-p^3)\,dp}{p}=$$

$$=1-p^2+p-\frac{p^3}{3}+C.$$

ამრიგად,

$$x=1-p^2+p-\frac{p^3}{3}+C$$

და

$$y=p-p^3$$

სისტემა წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსენს პარამეტრული სახით. (არც აქ არის მიზანშეწონილი პარამეტრის გამორიცხვა).

ამოხსენით: 2. $y=y'^2-y'^3$ 4. $y=3y'^3+2y'^4$

3. $y=2y'+y'^4$ 5. $y=y'-2y'^2+y'^3-4y'^5$

ლაგრანჟის განტოლება ზოგადად ასე იწერება:

$$y = xF(y') + f(y')$$

აღვნიშნოთ

$$y' = p\,,$$

გვექნება

$$y = xF(p) + f(p)\,.$$

გავაწარმოთ ეს განტოლება x-ის შესახებ:

$$\frac{dy}{dx} = F(p) + xF'_p(p)\frac{dp}{dx} + f_p'(p)\frac{dp}{dx}$$

ანუ, ვინაიდან

$$\frac{dy}{dx} = p\,,$$

გვექნება

$$F(p) - p + xF_p'(p)\frac{dp}{dx} + f_p'(p)\frac{dp}{dx} = 0\,.$$

მივიღოთ აქ p დამოუკიდებელ ცვლადად და ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{dx}{dp}$-ზე:

$$[F(p) - p]\frac{dx}{dp} + xF_p'(p) + f_p'(p) = 0\,.$$

მივიღეთ ხაზოვანი განტოლება, სადაც p არის დამოუკიდებელი ცვლადი და x მისი ფუნქცია.

მაგალითად, ავიღოთ ასეთი განტოლება:

$$y = 2xy' + y'^2$$

აღვნიშნოთ

$$y' = p\,,$$

გვექნება:

$$y = 2xp + p^2.$$

გავაწარმოოთ x-ის შესახებ.

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}\,,$$

ანუ, თუ $\frac{dx}{dp}$-ზე გავამრავლებთ

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}=-2\,.$$

მივიღეთ ხაზოვანი განტოლება. თუ აღვნიშნავთ $x=uv$, გვექნება:

$$x=\left(-\frac{2}{3}p^3+C_1\right)p^{-2},$$

აქედან

$$x=\left(-\frac{2}{3}p^3+C_1\right)p^{-2}$$

და

$$y=2xp+p^2$$

სისტემა წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსენს პარამეტრული სახით.

კლეროს (CLAIRAUT) განტოლება

კლეროს განტოლება ზოგადად ასე იწერება:

$$y=xy'+f(y')$$

როგორც ვხედავთ, კლეროს განტოლება ლაგრანჟის განტოლების კერძო სახეს წარმოადგენს.

აღვნიშნოთ

$$y'=p,$$

გვექნება

$$y=xp+f(p) \qquad (ა)$$

გავაწარმოოთ x-ის შესახებ

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f_p'(p)\frac{dp}{dx}$$

ანუ

$$[x+f_p'(p)]\frac{dp}{dx}=0,$$

აქედან

$$\frac{dp}{dx}=0$$

და

$$x+f_p'(p)=0$$

პირველიდან გვაქვს $p=C$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში:

$$y=Cx+f(C).$$

მივიღეთ კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსენი. ეს ამონახსენი გეომეტრიული თვალსაზრისით წარმოადგენს სწორ ხაზთა ოჯახს, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტები დამოკიდებულია C-ზე.

თუ ახლა $x+f'(p)=0$ და $y=xp+f(p)$ სისტემიდან გამოვრიცხავთ p-ს, მივიღებთ

$$F(x, \ y)=0$$

განტოლებას, რომელიც გეომეტრიულად მრუდს გამოსახავს და რომელსაც განსაკუთრებული ამონახსენი ეწოდება.

შენიშვნა: საერთოდ, დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსენი ისეთი ამონახსენია, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსენიდან ნებითი მუდმივის არც ერთი კერძო მნიშვნელობისთვის.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, კლეროს განტოლება იმ მხრივ არის მნიშვნელოვანი, რომ ამ განტოლებიდან პირდაპირ მიიღება ზოგადი ამონახსენი, თუ მასში შემავალ y'-ს შევცვლით C ნებითი მუდმივით.

მაგალითად,

$$y=xy'-y'^2$$

განტოლების ზოგადი ამონახსენი არის

$$y=Cx-C^2 \qquad (ბ)$$

ეს არის სწორ ხაზთა ოჯახი.

გავაწარმოოთ ახლა $y=xp-p^2$ განტოლება x-ის შესახებ.

$$p=p+xp'-2pp',$$

აქედან

$$x-2p=0.$$

განსაკუთრებული ამონახსენისთვის უნდა ავიღოთ

$$x-2p=0; \quad y=xp-p^2$$

სისტემა, ან, თუ p-ს გამოვრიცხავთ, გვექნება: პირველიდან $p=\frac{x}{2}$, ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა სისტემის მეორე განტოლებაში: $y=\frac{x^2}{2}$. მივიღეთ პარაბოლი.

განსაკუთრებული ამონახსენი ასეც შეგვიძლიან მივიღოთ: გავაწარმოოთ

$$y=Cx-C^2$$

განტოლება C-ს შესახებ.

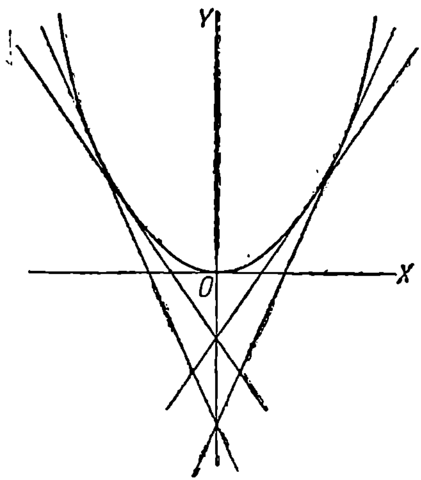
$$x-2C=0\,,$$

აქედან

$$C=\frac{x}{2}\,,$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ბ)-ში

$$y=\frac{x^2}{2}\,.$$



ნახ. 30

ნახაზზე ნაჩვენებია სწორხაზთა ოჯახი (შემხებები) და შესაფერი მრუდი (პარაბოლი).

უმაღლესი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახე ასეთია:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0\,.$$

თუ ამ განტოლებას 'გადავწყვეტთ y''-ის შესახებ (რა თქმა უნდა, თუ გადაწყვეტა შესაძლებელია), დავწერთ:

$$y''=\varphi(x,\ y,\ y')\ \left[\text{ან, სულერთია}\ \ \frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x,\ y,\ y')\right]$$

ჩვენ განვიხილავთ ამ განტოლების რამდენიმე კერძო სახეს. სახელდობრ, იმ სპეციალურ ტიპებს, რომლებიც გვხდება გამოყენებით დარგებში. ეს ტიპები ასეთია:

A. $y''=\varphi(x)$ C. $y''=\varphi(y')$

B. $y''=\varphi(y)$ D. $y''=\varphi(x, y')$

E. $y''=\varphi(y, y')$

ამ ტიპების ამოხსნა წარმოებს ერთი საერთო მეთოდით — ახალი ცვლადის შემოყვანით. ამ ახალი ცვლადის საშუალებით შესაძლებელია მოცემული დიფერენციალური განტოლების რიგის დაწევა, ამიტომ ამ მეთოდს სხვანაირად რიგის დაწევის მეთოდი ეწოდება.

მივიღოთ ასეთი აღნიშვნა:

$$\frac{dy}{dx}=z,$$

აქედან

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$$

ან კიდევ სხვანაირად:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}z.$$

ამ აღნიშვნების გამო ზემოთ განხილული ტიპები ასე დაიწერება:

A. $\frac{dz}{dx}=\varphi(x)$ ანუ $dz=\varphi(x)\,dx$

B. $z\frac{dz}{dy}=\varphi(y)$ ანუ $z\,dz=\varphi(y)\,dy$

C. $\frac{dz}{dx}=\varphi(z)$ ანუ $\frac{dz}{\varphi(z)}=dx$

D. $\frac{dz}{dx}=\varphi(x, z)$ ანუ $dz=\varphi(x, z)\,dx$

E. $z\frac{dz}{dy}=\varphi(y, z)$ ანუ $z\,dz=\varphi(y, z)\,dy$

მაგალითები:

A. ტიპი. ავიღოთ ასეთი განტოლება:

1. $$\frac{d^2 y}{dx^2}=x^2-2x+4$$

ზემოთ მიღებული აღნიშვნის თანახმად, დავწერთ:

$$\frac{dz}{dx}=x^2-2x+4$$

ანუ

$$dz=(x^2-2x+4)\,dx\,;$$

$$\int dz=\int (x^2-2x+4)\,dx+C_1,$$

აქედან

$$z=\frac{x^3}{3}-x^2+4x+C_1$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{3}-x^2+4x+C_1\,;$$

$$\int dy=\int\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x+C_1\right)dx$$

აქედან

$$\underline{y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C_1x+C_2}$$

მოცემული განტოლება ასეც შეგვიძლიან ამოვხსნათ:

$$y''=x^2-2x+4\,;\quad \int y''\,dx=\int (x^2-2x+4)\,dx\,;$$

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2+4x+C_1\,;\quad \int y'\,dx=\int\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x+C_1\right)dx$$

აქედან

$$\underline{y=\frac{x^3}{12}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C_1\,x+C_2}$$

2. $y'''=\sin x+e^{2x}+x^3+4$

$$\int y'''\,dx=\int(\sin x+e^{2x}+x^3+4)\,dx\,; \qquad y''=-\cos x+\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x^4}{4}+4x+C_1$$

$$\int y''\,dx=\int\left(-\cos x+\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x^4}{4}+4x+C_1\right)dx\,;$$

$$y'=-\sin x+\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x^5}{20}+2x^2+C_1x+C_2$$

$$\int y'\,dx=\int\left(-\sin x+\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x^5}{20}+2x^2+C_1x+C_2\right)dx\,;$$

აქედან

$$\underline{y=\cos x+\frac{e^{2x}}{8}+\frac{x^6}{120}+\frac{2}{3}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3}$$

სავარჯიშო

3. $y''=2\cos 2x-x^2-3$
4. $y''=e^{3x}+2x^2+5$
5. $y''=x\log x+\cos^2 x-1$
6. $y'''=x\,e^x+\sin^2 x-4x^2$
7. $y'''=x\,e^{2x}-\cos^2 2x-x^{-2}+3$
8. $y^{(\mathrm{IV})}=\log x+e^{4x}+\cos^2 x-x$

B. ტიპი.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y+1$$

ჩვენი აღნიშვნის თანახმად:

$$z\frac{dz}{dy}=y+1;$$

$$\int z\,dz=\int(y+1)\,dy+C\,; \qquad \frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+y+C$$

ანუ

$$z^2=y^2+2y+2C; \quad z=\sqrt{y^2+2y+C_1} \quad (2C=C_1)$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2+2y+C_1}; \qquad \int\frac{dy}{\sqrt{y^2+2y+C_1}}=\int dx;$$

$$\underline{x=-\log\left(1+y-\sqrt{y^2+2y+C_1}\right)+C_2}$$

ამოხსენით: $\qquad y''=2y; \qquad y''=2y-3.$

C. ტიპი.

$$1. \ \frac{d^2y}{dx^2}=5a\frac{dy}{dx}; \qquad \frac{dz}{dx}=5az;$$

$$\int\frac{dz}{z}=5a\int dx+C_1; \quad \log z=5ax+C_1$$

აქედან

$$z=e^{5ax+C_1}$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=e^{5ax+C_1}; \quad \int dy=\int e^{5ax+C_1}dx;$$

$$\underline{y=\frac{e^{5ax+C_1}}{5a}+C_2}$$

$$2. \ y''-y'^2=4$$

თანახმად $y'=z$ აღნიშვნისა, დავწერთ:

$$\frac{dz}{dx}-z^2=4; \quad \int\frac{dz}{z^2+4}=\int dx+C_1;$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2}=x+C_1$$

ანუ

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2}=2(x+C_1),$$

აქედან
$$\frac{z}{2}=\operatorname{tg} 2(x+C_1); \qquad z=2 \operatorname{tg} 2(x+C_1)$$

ანუ
$$\frac{dy}{dx}=2 \operatorname{tg} 2(x+C_1); \qquad \int dy=\int 2 \operatorname{tg} 2(x+C_1)\,dx=$$

$$=\int \operatorname{tg} 2(x+C_1)\, d\, 2(x+C_1); \quad \underline{y=-\log\left[\cos 2(x+C_1)\right]+C_2}$$

ამოხსენით: $y''=2y'$; $\qquad y''-y'^2=0$;

$$y''+y'^2=0; \qquad y''-y'^2=1;$$

$$y'+y'^2=25$$

D. ტიპი.

$$1.\ \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{4}{x}\frac{dy}{dx}=0; \qquad \frac{dz}{dx}-\frac{4z}{x}=0;$$

$$\int\frac{dz}{z}-4\int\frac{dx}{x}=c; \quad \log z-4\log x=\log C_1$$

აქედან
$$z=C_1x^4$$

ანუ
$$\frac{dy}{dx}=C_1x^4; \qquad \int dy=C_1\int x^4\,dx+C_1$$

$$\underline{y=\frac{C_1x^5}{5}+C_1}$$

$$2.\quad (1+x^2)\,y''+y'^2+1=0$$

ჩავსვათ y'-ის ნაცვლად z, გვექნება:
$$(1+x^2)\,z'+z^2+1=0$$

ანუ
$$(1+x^2)\frac{dz}{dx}+z^2+1=0;$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=c,$$

აქედან

$$\operatorname{arc\,tg} z+\operatorname{arc\,tg} x=c.$$

მიღებული შედეგი ჩვენ შეგვიძლიან სხვანაირად წარმოვადგინოთ. ამისთვის აღვნიშნოთ:

$$\operatorname{arc\,tg} z=u, \quad \operatorname{arc\,tg} x=v,$$

აქედან

$$z=\operatorname{tg} u, \quad x=\operatorname{tg} v.$$

წინა შედეგი ასე დაიწერება:

$$u=c-v,$$

აქედან

$$\operatorname{tg} u=\operatorname{tg}(c-v)=\frac{\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} c\cdot\operatorname{tg} v}=\frac{c_1-x}{1+c_1 x} \qquad (\operatorname{tg} c=c_1)$$

ანუ

$$z=\frac{c_1-x}{1+c_1 x}; \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{c_1-x}{1+c_1 x},$$

აქედან

$$\int dy=\int\frac{c_1-x}{1+c_1 x}\,dx+c_2;$$

$$\underline{y=-\frac{x}{c_1}+\frac{c_1^2+1}{c_1^2}\log(1+c_1 x)+c_2}$$

ამოხსენით:

$$y''-\frac{y'}{x}=0; \qquad y''+y'\operatorname{tg} x=0;$$

$$y\ -y'\cos x=0; \quad y''-y'\operatorname{ctg} x=0; \quad y''-2xy'^2=0$$

E. ტიპი.

$$1. \quad \frac{d^2y}{dx^2}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

ზემოთ მიღებული აღნიშვნის თანახმად, დავწერთ:

$$z\frac{dz}{dy}-2yz=0; \quad dz-2y\,dy=0; \quad z=y^2+c_1$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=y^2+c_1; \qquad \int\frac{dy}{y^2+c_1}=\int dx+c_2;$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}}\,\text{crc tg}\,\frac{y}{\sqrt{c_1}}=x+c_2; \quad \text{arc tg}\,\frac{y}{\sqrt{c_1}}=\sqrt{c_1}(x+c_2),$$

აქედან

$$\underline{y=\sqrt{c_1}\,\text{tg}\left[\sqrt{c_1}\,(x+c_2)\right]}$$

$$2. \quad yy''+y'^2+1=0$$

ეს განტოლება ასე დაიწერება:

$$yz\frac{dz}{dy}+z^2+1=0;$$

$$\int\frac{z\,dz}{1+z^2}+\int\frac{dy}{y}=c; \qquad \frac{1}{2}\log(1+z^2)+\log y=\log c_1;$$

$$y(1+z^2)^{\frac{1}{2}}=c_1$$

ანუ

$$y^2(1+z^2)=c_1^2,$$

აქედან

$$z=\frac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y}; \qquad \int\frac{y\,dy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}=\int dx+c_2;$$

$$-\sqrt{c_1^2-y^2}=x+c_2$$

ანუ

$$\underline{c_1^2-y^2=(x+c_2)^2}$$

მუდმივ კოეფიციენტებიანი ხაზოვანი განტოლებანი

ამ განტოლების ზოგადი სახე ასეთია:

A. $y^{(n)}+P_1 y^{(n-1)}+P_2 y^{(n-2)}+\ldots+P_n y=0$ ეს არის

ერთგვაროვანი განტოლება, სადაც $P_1, P_2, \ldots P_n$ მუდმივი კოეფიციენტებია.

B. $y^{(n)}+P_1 y^{(n-1)}+P_2 y^{(n-2)}+\ldots+P_n y=Q$

არა ერთგვაროვანი განტოლება, სადაც Q მხოლოდ x-ის ფუნქციაა, ან მუდმივი (const).

ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნის დროს ოთხი შემთხვევა უნდა გავარჩიოთ.

I შემთხვევა. $r^n+P_1 r^{n-1}+P_2 r^{n-2}+\ldots+P_n=0$

მახასიათებელი განტოლების ფესვები ყველა ნამდვილია და სხვადასხვა. ასეთ შემთხვევაში ზოგადი ამონახსენი ასე იწერება:

$$y=C_1 e^{r_1 x}+C_2 e^{r_2 x}+C_3 e^{r_3 x}+\ldots+C_n e^{r_n x}$$

II შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნამდვილი და ჯერადი ფესვები (ტოლი ფესვები).

ზოგადი ამონახსენი ასეთია:

$$y=C_1 e^{rx}+C_2 x e^{rx}+C_3 x^2 e^{rx}+\ldots+C_n x^{n-1} e^{rx}$$

III შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი წყვილი კომპლექსური ფესვები:

$$r_1=a+ib$$

და

$$r_2=a-ib$$

ზოგადი ამონახსენი ასეთია:

$$y=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx).$$

როდესაც გვაქვს შეუღლებული კომპლექსური ფესვების რამდენიმე სხვადასხვა წყვილი, ე. ი.

$$a_1+ib_1;\quad a_1-ib_1.$$
$$a_2+ib_2;\quad a_2-ib_2.$$

$$a_n+ib_n;\quad a_n-ib_n$$

ზოგადი ამონახსენი ასე იწერება:

$$y=e^{a_1 x}(A_1\cos b_1 x+B_1\sin b_1 x)+e^{a_2 x}(A_2\cos b_2 x+B_2\sin b_2 x)+$$

$$+\cdot\quad\cdot+e^{a_n x}(A_n\cos b_n x+B_n\sin b_n x).$$

IV შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს შეუღლებული კომპლექსური ფესვების რამდენიმე ტოლი წყვილი.

ზოგადი ამონახსენი ასეთია:

$$y=e^{ax}[(A_1+A_2 x+A_3x^2+\cdot\quad\cdot+A_n x^{n-1})\cos bx+$$

$$+(B_1+B_2 x+B_3 x^2+\cdot\quad\cdot+B_n x^{n-1})\sin bx]$$

სადაც $A_1, A_2,\cdot\cdot\cdot A_n$ და $B_1, B_2,\cdot\quad\cdot B_n$ ნებითი მუდმივი რიცხვებია

ამოვხსნათ ახლა ასეთი განტოლება:

$$1.\quad y''-5y'+6y=0\,.$$

ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლება არის

$$r^2-5r+6=0\,,$$

აქედან

$$r_1=2\quad \text{და}\quad r_2=3\,.$$

ზოგადი ამონახსენი იქნება:

$$\underline{y=C_1 e^{2x}+C_2 e^{3x}}$$

$$2.\quad y''-6y'+9=0$$

მახასიათებელი განტოლება

$$r^2-6r+9=0\,,$$

აქედან

$$r_1=r_2=3\,.$$

ზოგადი ამონახსენი:

$$\underline{y=C_1 e^{3x}+C_2\, x\, e^{3x}}\,.$$

შენიშვნა: $y'''-y''=0$

სახასიათო განტოლება:

$$r^3-r^2=0$$

აქედან

$$r_1=0\,;\quad r_2=0\,;\quad r_3=1$$

$$\underline{y=C+C_1x+C_2e^x}$$

მოცემული განტოლება ასეც შეგვიძლიან ამოვხსნათ: აღვნიშნოთ

$$y''=z\,,$$

გვექნება პირველი რიგის ხაზობრივი განტოლება:

$$z'-z=0$$

აქედან

$$z=C_2e^x$$

ანუ

$$y''=C_2e^x$$

აქედან

$$y'=C_2e^x+C_1$$

და

$$\underline{y=C_2e^x+C_1x+C}$$

$$3.\quad y''+25y=0$$

მახასიათებელი განტოლება:

$$r^2+25=0\,,$$

აქედან

$$r_1=+5i\,,\quad r_2=-5i\,.$$

ზოგადი ამონახსენი:

$$y=e^0(A\cos 5x+B\sin 5x)=\underline{A\cos 5x+B\sin 5x}$$

$$4.\quad y''-6y'+13y=0$$

მახასიათებელი განტოლება:

$$r^2-6r+13=0\,,$$

აქედან

$$r_1=3+2i, \quad r_2=3-2i.$$

ზოგადი ამონახსენი:

$$\underline{y=e^{3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)}$$

5. $y'''-8y=0$

მახასიათებელი განტოლება:

$$r^3-8=0,$$

აქედან

$$r_1=2; \quad r_2=-1+\sqrt{-3}; \quad r_3=-1-\sqrt{-3}$$

$$\underline{y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x)}$$

6. $y^{(IV)}+4y''+3y=0$

მახასიათებელი განტოლება

$$r^4+4r^2+3=0,$$

აქედან ფესვები:

$$+i, \ -i; \quad +i\sqrt{3}, \ -i\sqrt{3}$$

$$\underline{y=A_1\cos x+B_1\sin x+A_2\cos\sqrt{3}\,x+B_2\sin\sqrt{3}\,x}$$

7. $y^{(IV)}-4y'''-2y''-30y'+125y=0$

მახასიათებელი განტოლება

$$r^4-4r^3-2r^2-30r+125=0$$

ანუ

$$(r^2-8r+25)(r^2+4r+5)=0,$$

აქედან ფესვები:

$$4\pm3i; \quad -2\pm i$$

$$\underline{y=e^{4x}(A_1\cos 3x+B_1\sin 3x)+e^{-2x}(A_2\cos x+B_2\sin x)}$$

8. $y^{(IV)}-8y'''+96y''-320y'+1600=0$

მახასიათებელი განტოლება

$$r^4-8r^3+96r^2-320r+1600=0$$

ანუ

$$(r^2-4r+40)^2=0,$$

ფესვები:

$$2\pm 6i; \quad 2\pm 6i$$

$$\underline{y=e^{2x}\left[(A_1+A_2\,x)\cos 6x+(B_1+B_2\,x)\sin 6x\right]}$$

$$9. \quad y'''-9y''+40y'-100y=0$$

$$r^3-9r^2+40r-100=0,$$

აქედან ფესვები:

$$r_1=5; \quad r_2=2+4i; \quad r_3=2-4i$$

$$\underline{y=C_1\,e^{5x}+e^{2x}\,(C_2\cos 4x+C_3\sin 4x)}$$

სავარჯიშო

10. $y''-16y=0$ — პას. $y=C_1\,e^{4x}+C_2\,e^{-4x}$

11. $y''-y=0$ — პას. $y=C_1\,e^{x}+C_2\,e^{-x}$

12. $y''+7y'+10y=0$ — პას. $y=C_1\,e^{-2x}+C_2\,e^{-5x}$

13. $y'''-9y'=0$ — პას. $y=C_1+C_2\,e^{3x}+C_3\,e^{-3x}$

14. $y^{(IV)}-9y''=0$ — პას. $y=C+C_1\,x+C_2\,e^{3x}+C_3\,e^{-3x}$

15. $y'''-7y'+6y=0$ — პას. $y=C_1\,e^{x}+C_2\,e^{2x}+C_3\,e^{-3x}$

16. $y''+6y'+9y=0$ — პას. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{-3x}$

17. $y''-10y'+25y=0$ — პას. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{5x}$

18. $y'''+3y''+3y'+y=0$ — პას. $y=(C_1+C_2\,x+C_3\,x^2)\,e^{-x}$

19. $y''+36y=0$ — პას. $y=A\cos 6x+B\sin 6x$

20. $y''-8y'+25y=0$ — პას. $y=e^{4x}\,(A\cos 3x+B\sin 3x)$

21. $2y''-3y'-2y=0$ — პას. $y=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{-\frac{1}{2}x}$

22. $y''+4y'+20y=0$ — პას. $y=e^{-2x}\,(A\cos 4x+B\sin 4x)$

23. $y^{(IV)}-10y''+9y=0$ — პას. $y=C_1\,e^{3x}+C_2\,e^{-3x}+C_3\,e^{x}+C_4\,e^{-x}$

24. $y^{(IV)}-6y''+5y=0$ პას. $y=C_1 e^x+C_2 e^{-x}+C_3 e^{\sqrt{5}}+ +C_4 e^{-\sqrt{5}}$

25. $y^{(IV)}+3y'''+3y''+y'=0$ პას. $y=C_1+(C_2+C_3 x+C_4 x^2) e^{-x}$

26. $y^{(IV)}+5y''+4y=0$ პას. $y=A_1 \cos x+B_1 \sin x+A_2 \cos 2x+ +B_2 \sin 2x$

27. $y^{(IV)}+17y''+16y=0$ პას. $y=A_1 \cos x+B_1 \sin x+A_2 \cos 4x+ +B_2 \sin 4x$

28. $y^{(IV)}+4y''+4y=0$ პას. $y=(A_1+A_2 x) \cos 2x+(B_1+ +B_2 x) \sin 2x$

29. $y^{(IV)}+6y''+9y=0$ პას. $y=(A_1+A_2 x) \cos \sqrt{3}\, x+(B_1+ +B_2 x) \sin \sqrt{3}\, x$

30. $y^{(VI)}-6y'''+4y''+54y'-117y=0$

მითითება: მახასიათებელი განტოლების ერთერთი ფესვი არის 3 ანუ

$$(r^2-6r+13)(r^2-9)=0$$

პას. $y=C_1 e^{3x}+C_2 e^{-3x}+e^{3x}(C_3 \cos 2x+C_4 \sin 2x)$

31. $y^{(VI)}+2y'''+10y''-6y'+65y=0$

მითითება: მახასიათებელი განტოლება ასე დაიწერება:

$$(r^2-2r+5)(r^2+4r+13)=0$$

$$y=e^x(A_1 \cos 2x+B_1 \sin 2x)+e^{-2x}(A_2 \cos 3x+B_2 \sin 3x)$$

32. $y^{(IV)}-4y'''+14y''-20y'+25y=0$

მითითება: მახასიათებელი განტოლება ასე დაიწერება:

$$(r^2-2r+5)^2=0$$

$$y=e^x[(A_1+A_2 x) \cos 2x+(B_1+B_2 x) \sin 2x]$$

განვიხილოთ ახლა არაერთგვაროვანი განტოლება, ე. ი. როდესაც მარჯვენა მხარეზე გვაქვს $Q(x)$.

უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთი განტოლების ამოხსნა, საერთოდ, რთულსა და ძნელ საქმეს წარმოადგენს. ჩვენ, უმთავრესად, ისეთ სახეებს გავარჩევთ, რომლებსაც მნიშვნელობა აქვს გამოყენებითს დარგებში.

არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსენი ასეთი სახით იწერება:

$$y=u+v,$$

სადაც v-ს მოცემული განტოლების კერძო ამონახსენი ანუ ინტეგრალი ეწოდება, ხოლო u-ს დამატებითი ანუ დამხმარე ნაწილი (u-ს სხვანაირად ერთგვაროვანის ზოგადი ამონახსენი ეწოდება).

ამრიგად, არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენისთვის საჭიროა დამხმარე ნაწილისა და კერძო ამონახსენის ცალ-ცალკე მოძებნა, მაგრამ, ვინაიდან პირველი ოპერაცია ჩვენთვის უკვე ცნობილია (u არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი), ამიტომ არსებითად აქ კერძო ამონახსენის მოძებნას ენიჭება აქტუალური მნიშვნელობა.

კერძო ამონახსენის მოძებნა ჩვეულებრივ განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით წარმოებს. ამ მეთოდის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ კერძო ამონახსენი წინასწარ უნდა იქნას შერჩეული იმის მიხედვით, თუ როგორი სახე აქვს განტოლების თავისუფალ წევრს, ე. ი. $Q(x)$-ს. განვიხილოთ რამდენიმე ტიპი.

A ტიპი. მარჯვენა მხარეზე გვაქვს m ხარისხის მთელი ალგებრული ფუნქცია ანუ პოლინომი:

$$Q(x)=a_0 x^m+a_1 x^{m-1}+\cdot \quad \cdot+a_{m-1} x+\alpha_m$$

აქ უნდა ორი შემთხვევა გავარჩიოთ:

I შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ისეთი ფესვი, რომელიც ნოლს ეტოლება. ასეთ შემთხვევაში კერძო ამონახსენი ასე იწერება:

$$v=a_0 x^m+a_1 x^{m-1}+\cdot \quad \cdot+a_{m-1} x+a_m$$

II შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს k ჯერადი ფესვი, რომელიც ნოლის ტოლია. კერძო ამონახსენი ასეთი სახით იწერება:

$$v=x^k(a_0 x^m+a_1 x^{m-1}+\cdot \quad \cdot+a_m)$$

გავარჩიოთ ნათქვამი კერძო მაგალითზე.

$$1. \quad y''-7y'+12y=6x+3$$

კერძო ამონახსენი აქ ასეთი სახით დაიწერება:

$$v=ax+b$$

(ასეთი სახე აქვს განტოლების მარჯვენა ნაწილს — $Q(x)$-ს. მარჯვენა მხარეზე რომ ყოფილიყო $2x^3+x-4$, მაშინ დავწერდით:

$$v=ax^3+bx^2+cx+d),$$

აქედან

$$v'=a\,; \qquad v''=0\,.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში წარმოებულების მაგივრად:

$$-7a+12ax+12b=6x+3\,;$$

აქედან

$$12a=6 \quad \text{და} \quad -7a+12b=3\,;$$

$$a=\frac{1}{2}\,; \qquad b=\frac{13}{24}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი კერძო ამონახსენში:

$$v=\frac{1}{2}x+\frac{13}{24}$$

მოვძებნოთ ახლა დამხმარე ნაწილი. ამისთვის მოცემული განტოლების მარცხენა მხარე უნდა გავუტოლოთ ნოლს და ამოვხსნათ, როგორც ერთგვაროვანი განტოლება, გვექნება:

$$u=C_1\,e^{3x}+C_2\,e^{4x}$$

აქედან ზოგადი ამონახსენი:

$$y=u+v=\underline{C_1\,e^{3x}+C_2\,e^{4x}+\frac{1}{2}x+\frac{13}{24}}$$

2. $y^{(\mathrm{VI})}+4y''=8x^2-2$

მახასიათებელი განტოლების ფესვები არის:

$$r_1=0\,; \quad r_2=0\,; \quad r_3=+2i\,; \quad r_4=-2i$$

როგორც ვხედავთ, მახასიათებელი განტოლების ორი ფესვი ნოლს ეტოლება, მაშასადამე, კერძო ამონახსენი ასე დაიწერება:

$$v=x^2\,(ax^2+bx+c) \tag{ა}$$

[მახასიათებელი განტოლების სამი ფესვი რომ ყოფილიყო ნოლის ტოლი, მაშინ კერძო ამონახსენი ასე დაიწერებოდა:

$$v=x^3\,(ax^2+bx+c)].$$

საერთოდ, უნდა გვახსოვდეს, რომ მახასიათებელ განტოლებას იმდენი ფესვი აქვს ნოლის ტოლი, რამდენი წევრიც მოცემულ დიფერენციალურ

განტოლებას აკლია ბოლოდან დაწყებული. ასე, მაგალითად, მოცემულ განტოლებას ბოლოდან აკლია y და y' (ორი წევრი. y'' არ ითვლება).

გავაწარმოოთ (ა).

$$v'=4ax^3+3bx^2+2cx\,; \qquad v''=12ax^2+6bx+2c\,;$$

$$v'''=24ax+6b\,; \quad v^{(IV)}=24a.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში:

$$24a+4\,(12ax^2+6bx+2c)=8x^2-2$$

აქედან

$$48a=8\,; \qquad 24b=0\,; \qquad 24a+8C=-2.$$

$$a=\frac{1}{6}\,; \quad b=0; \quad C=-\frac{3}{4}$$

მაშასადამე

$$v=\frac{1}{6}\,x^4-\frac{3}{4}x^2\,; \qquad u=C_1+C_2\,x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\,.$$

$$y=u+v=\underline{C_1+C_2\,x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+\frac{1}{6}\,x^4-\frac{3}{4}\,x^2}$$

სავარჯიშო

3. $y''-36y=5x-1$
4. $y''+y=x^2+3$
5. $y''-8y'+16y=2x^2-x+1$
6. $y''-y'=x+2$ **მითითება:** $v=x\,(ax+b)$
7. $y'''-y'=x^2-4$ **მითითება:** $v=x\,(ax^2+bx+c)$
8. $y^{(IV)}+y'''=2x+1$ **მითითება:** $v=x^3\,(ax+b)$
9. $y'''-y''=5$ **მითითება:** $v=ax^2$
10. $y'''+y=3$ **მითითება:** $v=a$
11. $y''-ay=2x+3$
12. $y'''+7a^2\,y'+6a^3\,y=x^2$

მითითება: მე-11 ამოცანაში კერძო ამონახსენი ასეთი სახით უნდა დაიწეროს:

$$v=bx+c.$$

ასეთ აღნიშვნას $v=ax+b$ აზრი არა აქვს. აგრეთვე მე-12 ამოცანაში კერძო ამონახსენი ასე უნდა აღინიშნოს:

$$v=bx^2+cx+d$$

B ტიპი. მარჯვენა მხარეზე გვაქვს

$$Q(x)=P\,e^{ax}.$$

აქაც ორი შემთხვევა უნდა გავარჩიოთ:

I შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ფესვი, რომელიც a-ს ეტოლება. ასეთ შემთხვევაში კერძო ამონახსენი ასე იწერება:

$$v=M\,e^{ax}.$$

II შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს k ჯერადი ფესვი, რომელიც a-ს ეტოლება. კერძო ამონახსენი ასეთია:

$$v=M\,x^k\,e^{ax}.$$

$$1.\quad y''-36y=8e^{2x}$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვები არის:

$$r_1=+6:\quad r_2=-6,$$

მაშასადამე, არც ერთი ფესვი არ ეტოლება 2-ს. კერძო ამონახსენი

$$v=M\,e^{2x}.$$

$$v'=2M\,e^{2x};\quad v''=4M\,e^{2x}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში.

$$4M\,e^{2x}-36M\,e^{2x}=8e^{2x};\quad -32M\,e^{2x}=8e^{2x},$$

აქედან

$$M=-\frac{1}{4}.$$

მაშასადამე,

$$v=-\frac{1}{4}\,e^{2x}.$$

$$u=C_1 e^{6x}+C_2 e^{-6x}.$$

ამრიგად

$$\underline{y=C_1 e^{6x}+C_2 e^{-6x}-\frac{1}{4} e^{2x}}$$

$$2. \quad y''-9y=4e^{3x}$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვები:

$$r_1=3\,; \quad r_2=-3\,.$$

როგორც ვხედავთ, ერთ-ერთი ფესვი ეტოლება ხარისხის მაჩვენებელში მდგომ x-ის კოეფიციენტს. კერძო ამონახსენი იქნება:

$$v=Mxe^{3x}.$$

$$v'=3Mxe^{3x}+Me^{3x}\,; \quad v''=9Mxe^{3x}+6Me^{3x}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$9Mxe^{3x}+6Me^{3x}-9Mxe^{3x}=4e^{3x}$$

აქედან

$$M=\frac{2}{3}$$

მაშასადამე

$$v=\frac{2}{3}xe^{3x}\,; \qquad u=C_1 e^{3x}+C_2 e^{-3x},$$

აქედან

$$\underline{y=C_1 e^{3x}+C_2 e^{-3x}+\frac{2}{3}xe^{3x}}$$

სავარჯიშო

3. $y''+3y'+2y=6e^{x}$
4. $y''-2y'+y=4e^{2x}$
5. $y'''+4y''+4y'=2e^{6x}$
6. $y'''+y''+y'+y=2e^{4x}$
7. $y''+16y=2e^{4x}$

მითითება: აქ საჭიროა ჩვეულებრივი აღნიშვნა:

$$v=Me^{4x}$$

8. $y''-2y'=e^{5x}$ **მითითება:** $v=Me^{5x}$

პას. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{15}e^{5x}$

9. $y'''-3y''=6e^{3x}$

მითითება: $v=Mxe^{3x}$. მართალია, მარცხენა მხარეს წევრები აკლია, მაგრამ B ტიპისთვის ამას მნიშვნელობა არა აქვს.

პას. $y=C_1+C_2x+C_3e^{3x}+\frac{2}{3}xe^{3x}$

10. $y'''-2y'-4y=3e^{2x}$

11. $y''-10y'+25y=2e^{6x}$

მითითება: $v=Mx^2e^{6x}$ პას. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{5x}$

12. $y'''-3y''+3y'-y=3e^{x}$

მითითება: $v=Mx^3e^{x}$

C ტიპი. მარჯვენა მხარეზე გვაქვს:

$$Q(x)=M\sin bx+N\cos bx.$$

I შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას ან არა აქვს კომპლექსური ფესვები ან აქვს, მაგრამ წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიც. განტოლების მარჯვენა ნაწილის ფუნქციის არგუმენტში შემავალ კოეფიციენტს არ ემთხვევა. კერძო ამონახსენი ასეთია:

$$v=A\sin bx+B\cos bx$$

(ან, სულ ერთია $v=A\cos bx+B\sin bx$)

$$1.\quad y''-9y'+20y=2\sin 3x$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვები არის:

$$r_1=4;\qquad r_2=5.$$

კერძო ამონახსენს ასე დავწერთ:

$$v=A\sin 3x+B\cos 3x\,;\qquad v'=3A\cos 3x-3B\sin 3x\,;$$

$$v''=-9A\sin 3x-9B\cos 3x\,.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$-9A\sin 3x-9B\cos 3x-27A\cos 3x+27B\sin 3x+$$
$$+20A\sin 3x+20B\cos 3x=2\sin 3x$$

აქედან

$$11A+27B=2; \qquad 11B-27A=0; \qquad A=\frac{11}{425}; \qquad B=\frac{27}{425}$$

მაშასადამე

$$v=\frac{11}{425}\sin 3x+\frac{27}{425}\cos 3x \quad u=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}$$

ამრიგად

$$\underline{y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}+\frac{11}{425}\sin 3x+\frac{27}{425}\cos 3x}$$

II შემთხვევა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს k ჯერადი კომპლექსური ფესვი და კომპლექსური ფესვის წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი განტოლების მარჯვენა მხარეზე მდგომი ფუნქციის არგუმენტში შემავალი კოეფიციენტის ტოლია, მაშინ კერძო ამონახსენი ასე იწერება:

$$v=x^k(A\sin bx+B\cos bx)$$

2. მაგალითად

$$y''+4y=6\sin 2x$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვები არის:

$$r_1=+2i; \qquad r_2=-2i.$$

როგორც ვხედავთ, წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი (2) სინუსის ქვეშ შემავალი არგუმენტის კოეფიციენტის ტოლია. ამიტომ კერძო ამონახსენს ასე დავწერთ:

$$v=x(A\sin 2x+B\cos 2x)$$

ჯერადობა აქ ერთის ტოლია, ე. ი.

$$k=1.$$

თუ წინა ამოცანის ანალოგიურად მოვიქცევით, მივიღებთ ზოგად ამონახსენს.

$$\underline{y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{3}{2}x\cos 2x}$$

$$3. \quad y''+9y=\cos 2x.$$

მითითება: წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი (3) კოსინუსის ქვეშ შემავალი 2-ის ტოლი არ არის, ამიტომ კერძო ამონახსენი ჩვეულებრივი წესით დაიწერება:

$$v=A\sin 2x+B\cos 2x$$

პას. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{5}\cos 2x$

$$4. \quad y''-16y=8\cos 4x$$

მითითება: კერძო ამონახსენი აქაც ჩვეულებრივი წესით იწერება:

$$v=A\sin 4x+B\cos 4x$$

პას. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{4}\cos 4x$

$$5. \quad y''-2y'=13\sin 3x$$

მითითება: $v=A\sin 3x+B\cos 3x$

პას. $y=C_1+C_2e^{2x}-\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x$

$$6. \quad y''+9y'=\sin 3x$$

მითითება: $v=A\sin 3x+B\cos 3x$

პას. $y=C_1+C_2e^{-9x}-\frac{1}{90}\sin 3x-\frac{1}{30}\cos 3x$

შენიშვნა: როდესაც განტოლების მარჯვენა მხარეზე სინუსი ან კოსინუსია, მაშინ კერძო ამონახსენი ასე შეიძლება შევარჩიოთ: თუ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში მხოლოდ წყვილი რიგის წარმოებულები შედის, მაშინ კერძო ამონახსენში შეგვიძლიან დავტოვოთ მხოლოდ ერთი ფუნქცია, სახელდობრ, ის, რომელიც განტოლების მარჯვენა მხარეზეა მოცემული. მაგალითად,

$$y''-y=\cos x$$

განტოლებისთვის კერძო ამონახსენი ასე დაიწერება:

$$v=A\cos x \quad (v=A\sin x+B\cos x \text{ ნაცვლად}).$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც დიფერენციალური განტოლება მხოლოდ კენტი რიგის წარმოებულებს შეიცავს, მაშინ კერძო ამონახსენში შეგვიძლიან აგრეთვე მხოლოდ ერთი ფუნქცია დავტოვოთ. ეს ფუნქცია მარჯვენა მხარეზე მდგომი ფუნქციის მოწინაალმდეგე უნდა იყოს. მაგალითად,

$$y''' - y = \sin x$$

განტოლებისთვის კერძო ამონახსენი ასე დაიწერება:

$$v = A \cos x.$$

7. $y''' - y' = \cos x$ პას. $y = C + C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$

8. $y'' + y = 2 \sin x + \cos x$ **მითითება:** $v = x\,(A \sin x + B \cos x)$

9. $y^{(IV)} - y'' = \sin x$ პას. $y = C + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$

10. $y'' - 6y' + 13y = 3\sin 2x - 2\cos 2x$ **მითითება:** $v = A \sin 2x + B \cos 2x$

11. $y'' + 4y' + 5y = 4 \sin 5x - 3 \cos 5x$ **მითითება:** $v = A \sin 5x + B \cos 5x$

12. $y''' - 2y'' + y' = 2 \sin 4x - 3 \cos 4x$

13. $y^{(IV)} - 6y''' + 13y'' = \sin 2x$

14. $y^{(IV)} - y''' + y'' - y' = \sin 2x - \cos 2x$

D ტიპი. მარჯვენა მხარეზე გვაქვს:

$$Q(x) = \text{განხილულ ფუნქციათა ჯამს.}$$

ასეთ შემთხვევაში კერძო ამონახსენი იწერება მოცემულ ფუნქციათა შესაფერ კერძო ამონახსენთა ჯამის სახით.

1. მაგალითად

$$y'' + 3y = 4x - e^{2x}$$

კერძო ამონახსენი იქნება:

$$v = \underline{ax + b} + \underline{M e^{2x}}; \qquad v' = a + 2M e^{2x};$$

$$v'' = 4M e^{2x}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$4M e^{2x} + 3\,(ax + b) + 3M e^{2x} = 4x - e^{2x}$$

აქედან

$$3a=4;\quad 3b=0;\qquad 7M=-1.$$

$$a=\frac{4}{3};\ \ b=0;\quad M=-\frac{1}{7}$$

მაშასადამე

$$v=\frac{4}{3}x-\frac{1}{7}e^{2x};\qquad u=C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x.$$

$$\underline{y=C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x+\frac{4}{3}x-\frac{1}{7}e^{2x}}$$

დავალება: შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა მიღებული ფუნქცია მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას.

განხილულ ამოცანაში კერძო ამონახსენი ასეც შეგვიძლიან შევარჩიოთ:

$$v=v_1+v_2$$

$$v_1=Ax+B$$

$$v_1'=A;\quad v_1''=0.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი დიფერენციალურ განტოლებაში:

$$y''+3y=4x$$

გვექნება

$$A=\frac{4}{3};\quad B=0$$

მაშასადამე

$$v_1=\frac{4}{3}x$$

ახლა ავიღოთ

$$v_2=Me^{2x}$$

$$v_2'=2Me^{2x};\quad v_2''=4Me^{2x}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი განტოლებაში:

$$y''+3y=-e^{2x}\ *$$

---

* განტოლების მარჯვენა მხარეზე გამოტოვებულია $4x$, როგორც პირველ შემთხვევაში გამოვტოვეთ $-e^{2x}$.

გვექნება

$$M=-\frac{1}{7}; \qquad v_2=-\frac{1}{7}e^{2x}$$

ამრიგად

$$v=v_1+v_2=\frac{4}{3}x-\frac{1}{7}e^{2x}$$

მივიღეთ იგივე პასუხი.

2. $y''+3y'+2y=2x+e^x$

3. $y''+4y'-5y=3x^2-2\sin 3x$

4. $y''-2y'=x+e^{3x}$

მითითება: $v=x(ax+b)+Me^{3x}$

პას. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}$

5. $y'''-8y=2x^2+4\sin 2x$

6. $y''-16y=8x+2e^{4x}$

მითითება: $v=ax+b+Mxe^{4x}$

პას. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{2}x$

7. $y'''+2y''+y'=x^2-\sin 4x$

8. $y''-5y'=2x+e^{5x}$

მითითება: $v=x(ax+b)+Mxe^{5x}$

პას. $y=C_1+C_2e^{5x}+\frac{1}{5}xe^{5x}-\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{25}x$

9. $y''-6y'+9y=3x-4e^{3x}$

მითითება: $v=ax+b+Mx^2e^{3x}$

პას. $y=(C_1+C_2x-2x^2)e^{3x}+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$

10. $y''-y=10\sin 2x+2e^{3x}$

მითითება: $v=A\sin 2x+B\cos 2x+Me^{3x}$

პას. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2\sin 2x+\frac{1}{4}e^{3x}$

11. $y''+4y'+4y=x^2+\cos x$

12. $y'''+y''-2y=x^2-\cos 5x$

13. $y^{(VI)}+4y'''+8y''+16y'+16y=2e^{-2x}-\sin 2x$

მითითება: მახასიათებელი განტოლება ასე შეგვიძლიან წარმოვადგინოთ:

$$(r^2+4)(r^2+4r+4)=0$$

აქედან ფესვები:

$$+2i; \quad -2i; \quad -2; \quad -2.$$

$$v=Mx^2 e^{-2x}+x(A\sin 2x+B\cos 2x)$$

პას. $y=C_1\cos 2x+\left(C_2+\frac{1}{32}x\right)\sin 2x+\left(C_3+C_4x+\frac{1}{8}x^2\right)e^{-2x}$

დიფერენციალურ განტოლებათა შედგენა

1. გასესხებულია A თანხა 5% (რთულ პროცენტად). რამდენი წლის შემდეგ გაორკეცდება თანხა.

ავღნიშნოთ Δt-თი დროის ნაზრდი, ხოლო ΔA თანხის ნაზრდი ამ დროის განმავლობაში. რთული პროცენტების ფორმულის მიხედვით დავწეროთ:

$$A+\Delta A=A\left(1+\frac{5}{100}\right)^{\Delta t}$$

ანუ

$$A+\Delta A=A\left[1+\Delta t\cdot\frac{5}{100}+\frac{\Delta t(\Delta t-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{5}{100}\right)^2+\cdot \quad \right]$$

ან მიახლოებით

$$A+\Delta A\approx A\left(1+\Delta t\cdot\frac{5}{100}\right)$$

თუ ახლა, ამ ფორმულაში ΔA და Δt შევცვლით dA და dt-თი, გვექნება:

$$A+dA=A\left(1+dt\cdot\frac{5}{100}\right)$$

ანუ

$$dA=\frac{1}{20}A\,dt$$

აქედან

$$\int \frac{dA}{A} = \frac{1}{20}\int dt + C$$

$$\log A = \frac{1}{20}t + C \qquad (ა)$$

აღვნიშნოთ ახლა t_1-თი დრო, რომლის განმავლობაში თანხა გაორკეცდება, გვექნება:

$$\log 2A = \frac{1}{20}t_1 + C \qquad (ბ)$$

ცხადია, ახლა, როდესაც $t=0$, მაშინ (ა) მოგვცემს

$$\log A = C.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ბ)-ში:

$$\log 2A = \frac{1}{20}t_1 + \log A$$

აქედან

$$t_1 = 20 \log\left(\frac{2A}{A}\right) = 20 \log 2$$

მაგრამ $\log 2 = 0{,}30103$ (ათობით სისტემაში).

თუ გვინდა, ახლა ნატურალურ სისტემაზე გადავიდეთ, ამისთვის 0,30103 უნდა გავამრავლოთ 2,30259-ზე, გვექნება:

$$t_1 = 20 \cdot 0{,}30103 \cdot 2{,}30259 = 13{,}862$$

ანუ დამრგვალებით

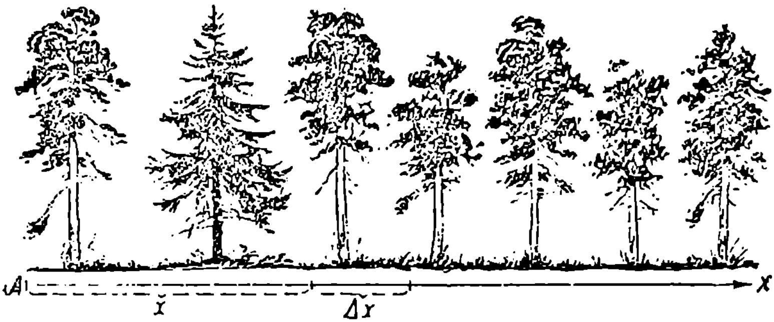
$$\underline{t_1 = 13{,}9 \text{ წელიწადი}}$$

ქარის ძრაობა ტყეში

2. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ის განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს ქარის ძრაობას ტყეში. როგორც ცნობილია, ტყეში მოძრავი ქარი, როდესაც ის ზომის ერთეულის ტოლ მანძილს გაივლის, ჰკარგავს თავისი სიჩქარის $\frac{1}{n}$ ნაწილს (ნახ. 31).

ვთქვათ ქარის ძრაობა ტყეში წარმოებს X-ის მიმართულებით. ეს მიმართულება იწყება ტყის პირიდან (A) და შედის ტყის სიღრმეში. აღვნიშნოთ v_0-თი ქარის სიჩქარე ტყის პირამდე, v-თი ამავე ქარის სიჩქარე ტყეში, ხოლო t-თი, დრო რომლის განმავლობაშიც ქარის ძრაობა წარმოებს (დაწყებული ტყისპირიდან).

თუ ქარს x მანძილზე (დაწყებული A-დან) აქვს v სიჩქარე, მაშინ Δx მანძილის გავლის შემდეგ, თანახმად ზემოთ აღნიშნული განმარტებისა, ეს სიჩქარე შემცირდება $\frac{v\Delta x}{n}$-ით, ე. ი.



ნახ. 31

$$\Delta v = -\frac{v\Delta x}{n},$$

აქედან

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -\frac{v}{n}$$

ანუ (როდესაც $\Delta x \to 0$)

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{n}; \qquad \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{n}\int dx + C;$$

$$\log v = -\frac{x}{n} + C \tag{ა}$$

ახლა, თუ გვინდა C განვსაზღვროთ, ამისთვის დამატებით პირობად უნდა მივიღოთ

$$x = 0$$

აქედან ცხადია

$$v = v_0$$

შაშასადამე, (ა) ასედ აიწერება:

$$\log v_0 = C$$

მაშ

$$\log v = -\frac{x}{n} + \log v_0$$

ანუ

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{x}{n}$$

აქედან

$$v = v_0 e^{-\frac{x}{n}}$$

მაგრამ, როგორც ცნობილია, სიჩქარე არის მანძილის წარმოებული დროის მიხედვით, ე. ი.

$$v = \frac{dx}{dt},$$

ამის გამო

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{x}{n}}; \qquad \int e^{\frac{x}{n}} dx = \int v_0 dt + C_1;$$

$$n e^{\frac{x}{n}} = v_0 t + C_1 \tag{ბ}$$

განვსაზღვროთ C_1. ამისთვის მივიღოთ

$$t = 0$$

ცხადია, აგრეთვე

$$x = 0$$

ამის გამო (ბ) ასე დაიწერება:

$$n = C_1.$$

მაშასადამე

$$n e^{\frac{x}{n}} = v_0 t + n$$

აქედან

$$\frac{x}{n} = \log\left(\frac{v_0 t + n}{n}\right)$$

ანუ

$$\underline{x = \log\left(1 + \frac{v_0 t}{n}\right)^n}$$

ამ განტოლებით განისაზღვრება ქარის ძრაობა ტყეში.

3. ვიპოვოთ (0, 3) წერტილზე გამავალი მრუდი, რომლის დახრილობა ყოველ წერტილში ამავე წერტილის ორდინატის ტოლია.

მრუდის დახრილობა—ეს კუთხის ტანგენსია, ე. ი. $\frac{dy}{dx}$. პირობის თანახმად, $\frac{dy}{dx}=y$. მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა მოგვცემს: $y=Ce^x$ ზოგადი ამონახსენი. ახლა რადგან მრუდი გადის (0, 3) წერტილზე, ამიტომ ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი:

$$3=Ce^0 \quad \text{ანუ} \quad C=3$$

მაშასადამე

$$\underline{y=3e^x}$$

4. ანალოგიურად ამოხსენით, როდესაც მრუდი გადის (1, 4) წერტილზე.

პას. $\underline{y=4e^{x-1}}$

5. ვიპოვოთ (2, 4) წერტილზე გამავალი მრუდი, რომლის ქვეშემხები სამჯერ მეტია შეხების წერტილის აბსცისზე.

თუ x შეხების წერტილის აბსცისია, პირობის ძალით $3x$ იქნება ქვეშემხები. მაგრამ ქვეშემხების სიგრძე გამოისახება $y\frac{dx}{dy}$ ფორმულით. მაშასადამე,

$$y\frac{dx}{dy}=3x\,.$$

თუ ამოვხსნით ამ დიფერენციალურ განტოლებას, გვექნება:

$$y^3=Cx \text{ ზოგადი ამონახსენი.}$$

დამატებითი პირობა: მრუდი (2, 4) წერტილზე გადის.

$$4^3=C\cdot 2\,; \quad \underline{C=32}$$

$$\underline{y^3=32x} \text{ მრუდის განტოლება.}$$

6. ანალოგიურად ამოხსენით, როდესაც მრუდი (3, 2) წერტილზე გადის, რომლის ქვეშემხები ორჯერ მეტია შეხების წერტილის აბსცისზე.

პას. $\underline{y^2=\frac{4}{3}x}$

7. ანალოგიურად ამოხსენით, როდესაც მრუდი (3, 1) წერტილზე გადის, რომლის ქვენორმალი ორჯერ ნაკლებია შეხების წერტილის აბსცისზე.

პას. $y^2 = \dfrac{x^2 - 7}{2}$

8. ვიპოვოთ სათავეზე გამავალი მრუდი, რომლის ყოველი წერტილის ქვენორმალი$=2$.

პირობის ძალით

$$y\frac{dy}{dx} = 2\,.$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას და დამატებით პირობად მივიღებთ, რომ მრუდი სათავეზე გადის, გვექნება:

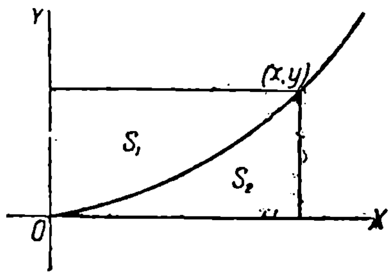
$$\underline{y^2 = 4x}$$

9. ანალოგიურად ამოხსენით, როდესაც მრუდი (0, 1) წერტილზე გადის და ქვეშემხები$=1$.

პას. $y = e^x$

10. მრუდი სათავეზე გადის და იმ წერტილზე, რომლის აბსცისი$=2$, დახრილია აბსცისთა ღერძზე 30°-ით. მრუდის მიმდინარე კოორდინატებზე (x, y) რომ სწორკუთხედი ავაგოთ, მაშინ მრუდი ამ სწორკუთხედს გაჰყოფს $2:1$ შეფარდებით, სადაც ფართობის უდიდესი ნაწილი OY ღერძისკენ არის მოქცეული. ვიპოვოთ მრუდი.

ავღნიშნოთ ფართობის უდიდესი ნაწილი S_1, ხოლო უმცირესი S_2-ით. პირობის ძალით (ნახ. 32).



ნახ. 32

$$S_1 : S_2 = 2:1$$

აქედან

$$S_2 = \frac{1}{2}\,S_1\,.$$

აგრეთვე

$$S_1+S_2=xy\,,$$

ანუ

$$S_1+\frac{1}{2}S_1=xy$$

აქედან

$$S_1=\frac{2}{3}xy\,.$$

მეორე მხრივ

$$S_1=\int_0^y x\,dy\,*$$

მაშასადამე

$$\int_0^y x\,dy=\frac{2}{3}xy\,.$$

გავადიფერენციოთ ორივე მხარე:

$$x\,dy=\frac{2}{3}(x\,dy+y\,dx).$$

თუ ამოვხსნით ამ დიფერენციალურ განტოლებას, გვექნება:

$y=Cx^2$ ზოგადი მონახსენი.

განვსაზღვროთ ახლა C. პირობის თანახმად,

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

მეორე მხრივ, თუ

$$y=Cx^2$$

განტოლებას გავაწარმოებთ, დავწერთ:

$$\frac{dy}{dx}=2Cx$$

მაშასადამე

$$2Cx=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

---

* როგორც ვიცით, ფართობი, საერთოდ ასე გამოისახება:

$$S=\int_a^b y\,dx \quad \text{ან} \quad S=\int_c^d x\,dy$$

პირობის ძალით $x=2$, ამიტომ

$$C=\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

ამრიგად, მრუდის განტოლება საბოლოოდ ასე დაიწერება:

$$\underline{y=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2} \quad \text{(პარაბოლი)}$$

შენიშვნა: ასეც შეგვიძლიან:

$$S_1=2S_2; \quad S_1+S_2=xy; \quad 2S_2+S_2=xy; \quad 3S_2=xy;$$

$$S_2=\frac{1}{3}xy.$$

მეორე მხრივ

$$S_2=\int_0^x y\,dx$$

მაშასადამე

$$\int_0^x y\,dx=\frac{1}{3}xy.$$

გავადიფერენციოთ

$$y\,dx=\frac{1}{3}(x\,dy+y\,dx).$$

თუ ამოვხსნით, მივიღებთ იმავე შედეგს:

$$y=Cx^2.$$

11. მრუდის მიმდინარე წერტილი შუაზე ყოფს ნორმალის იმ ნაკვეთს, რომელიც ღერძებს შორის არის მოთავსებული. მრუდი იმ წერტილზე, რომლის აბსცისი$=2$, დახრილია OX ღერძზე $60°$-ით. ვიპოვოთ მრუდი.

როგორც ვიცით, ნორმალის განტოლება ასეთია:

$$Y-y=-\frac{dx}{dy}(X-x).$$

ვიპოვოთ აბსცისები იმ წერტილებისა, რომლებშიც ნორმალი ჰკვეთს ღერძებს. იმ წერტილის აბსცისი, სადაც ნორმალი OY ღერძს ჰკვეთს, ეტოლება ნოლს, ხოლო სადაც OX ღერძს ჰკვეთს—ამისთვის უნდა შეთავსებულად ამოვხსნათ ნორმალისა და $Y=0$ აბსცისთა ღერძის განტოლება.

გვექნება

$$-y=-\frac{dx}{dy}(X-x)$$

აქედან

$$X=x+y\frac{dy}{dx}.$$

პირობის ძალით, მიმდინარე წერტილმა ღერძთა შორის მოთავსებული ნორმალის ნაკვეთი შუაზე უნდა გაყოს, ე. ი.

$$x=\frac{0+X}{2}=\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{2}$$

ანუ

$$y\frac{dy}{dx}=x$$

აქედან

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C$$

ანუ

$$y^2-x^2=C_1 \text{ ზოგადი ამონახსენი.}$$

დამხმარე პირობა:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

მეორე მხრივ, თუ $y^2-x^2=C_1$ გავაწარმოებთ, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}=\frac{x}{\sqrt{x^2+C_1}}$$

ანუ, რადგან პირობის ძალით $x=2$, დავწერთ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{4+C_1}}.$$

ამის გამო, გვაქვს:

$$\frac{2}{\sqrt{4+C_1}}=\sqrt{3}$$

აქედან

$$C_1=-2\frac{2}{3}.$$

ამრიგად, მრუდის განტოლება საბოლოოდ ასე დაიწერება:

$$\underline{y^2-x^2=-2\frac{2}{3}}$$

12. მრუდის მიმდინარე წერტილი შუაზე ყოფს შემხების იმ ნაკვეთს, რომელიც ღერძებს შორის არის მოთავსებული. მრუდი (4,2) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდის განტოლება.

შემხების განტოლება არის

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x).$$

ვიპოვოთ აბსცისები წინა ამოცანის მსგავსად. აბსცისი იმ წერტილისა, რომელსაც შემხების გადაკვეთა გვაძლევს OY ღერძთან, ეტოლება ნოლს, ხოლო სადაც OX ღერძს ჰკვეთს—ამისთვის შეთავსებულად უნდა ამოვხსნათ შემხებისა და $Y=0$ აბსცისთა ღერძის განტოლება, გვექნება:

$$X=x-y\frac{dx}{dy}.$$

ვინაიდან მიმდინარე წერტილმა ღერძთა შორის მოთავსებული შემხების ნაკვეთი შუაზე უნდა გაყოს, ამიტომ ამ შუა წერტილის აბსცისი არის

$$x=\frac{0+X}{2}=\frac{x-y\frac{dx}{dy}}{2}.$$

თუ ამოვხსნით ამ დიფერენციალურ განტოლებას, მივიღებთ

$xy=C$ ზოგადი ამონახსენი

დამხმარე პირობა: მრუდი (4, 2) წერტილზე გადის, მაშასადამე,

$$4\cdot 2=C$$

აქედან

$$\underline{xy=8}$$

13. მრუდის ყოველი წერტილისთვის რადიუს-ვექტორი შემხების სიგრძის ტოლია. მრუდი (4, 3) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდის განტოლება.

ვინაიდან

$$OM=MP$$

ამიტომ OMP სამკუთხედი ტოლფერდაა და ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია (ნახ. 33).

$$\beta=\pi-\alpha\,;\quad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\,.$$

მეორე მხრივ

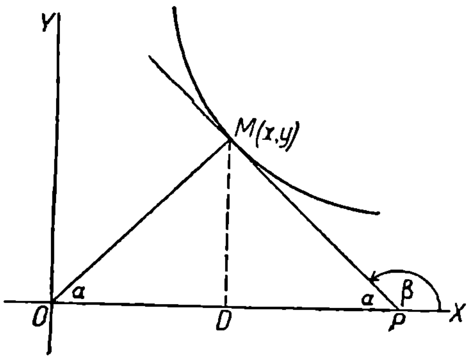
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{dy}{dx}$$

მაშასადამე

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg}\alpha\,.$$

მაგრამ MDP სწორკუთხიანი სამკუთხედიდან

$$MD=DP\operatorname{tg}\alpha$$



ნახ. 33

ანუ

$$y=x\operatorname{tg}\alpha\,;\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}\,.$$

მაშ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

თუ ამოვხსნით, მივიღებთ:

$yx=C$ ზოგადი ამონახსენი.

დამხმარე პირობა: მრუდი (4, 3) წერტილზე გადის. აქედან

$4\cdot3=C$; $\underline{yx=12}$ საძიებელი მრუდის განტოლება.

ახლაც შეიძლება: რადიუს-ვექტორი ასე გამოისახება: $\sqrt{x^2+y^2}$;

შემხების სიგრძე: $y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

მაშასადამე

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

აქედან

$$y\frac{dx}{dy}=\pm x.$$

ავიღოთ ჯერ დადებითი ნიშანი.

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+c; \qquad y=Cx.$$

დამხმარე პირობა: მრუდი (4, 3) წერტილზე გადის.

$$4=3C; \quad C=\frac{4}{3}$$

მაშ $y=\frac{4}{3}x$ მივიღეთ სწორი ხაზის განტოლება. ცხადია, დადებითი ნიშნის აღებას აზრი არა აქვს.

ავიღოთ ახლა x-ის წინ უარყოფითი ნიშანი, გვექნება:

$$\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=c; \qquad yx=C; \qquad 4\cdot 3=C$$

აქედან

$$C=12$$

და

$$\underline{yx=12}$$

შემოწმება: გვაქვს

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (ა)$$

გავაწარმოოთ $\qquad yx=12$

$$\left(\text{ან, სულ ერთია,} \quad y=\frac{12}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{12}{x^2}$$

აქედან

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{x^4}{144}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში:

$$y\sqrt{1+\frac{x^4}{144}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

ახლა, ვინაიდან მრუდი (4, 3) წერტილზე გადის, ეს იმას ნიშნავს, რომ უკანასკნელ ტოლობაში x და y-ის მაგიერ შეგვიძლიან ჩავსვათ 4 და 3, გვექნება

$$3\sqrt{1+\frac{4^4}{144}}=\sqrt{16+9}$$

ანუ

$$\underline{5=5}$$

14. მრუდის ყოველი წერტილისთვის რადიუს-ვექტორი ნორმალის სიგრძის ტოლია. მრუდი (6, 2) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდის განტოლება.

მითითება: ეს ამოცანა უნდა გადაწყდეს წინა ამოცანის ანალოგიურად. დასახეთ ორივე ვარიანტი.

პას. a) $\underline{x^2-y^2=32}$; b) $\underline{x^2+y^2=40}$

15. მრუდის ნებითი წერტილის შემხები რადიუს-ვექტორის პერპენდიკულარია. მრუდი (0, 3) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

შემხების საკუთხო კოეფიციენტი არის $\frac{dy}{dx}$, ხოლო რადიუს-ვექტორისა კი $\frac{y}{x}$ (ტანგენსი იმ კუთხისა, რომელსაც რადიუს-ვექტორი ქმნის აბსცისთა ღერძთან ასე გამოისახება: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$, აქედან $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$).

თუ შემხები და რადიუს-ვექტორი ურთიერთ პერპენდიკულარია, მაშინ მათი საკუთხო კოეფიციენტების ნამრავლი $=-1$, ე. ი.

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=-1,$$

აქედან

$$\int y\,dy+\int x\,dx=C; \quad y^2+x^2=C_1$$

დამხმარე პირობა: მრუდი (0, 3) წერტილზე გადის, მაშასადამე,

$$3^2+0=C_1; \quad C_1=9$$

აქედან საძიებელი მრუდი ასეთია:

$$\underline{y^2+x^2=9} \quad (\text{წრეხაზი}).$$

16. ვიპოვოთ მრუდი, რომლის ნორმალისა და ქვენორმალის სიგრძეთა ჯამი უდრის შეხების წერტილის ორდინატის კვადრატს. მრუდი (0, 4) წერტილზე გადის.

პირობის ძალით დავწერთ:

$$y\frac{dy}{dx}+y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=y^2$$

აქედან

$$(y^2-1)\,dx-2y\,dy=0$$

თუ ამოვხსნით ამ დიფერენციალურ განტოლებას, გვექნება:

$$y^2-1=C\,e^x \text{ ზოგადი ამონახსენი.}$$

დამხმარე პირობა: მრუდი (0, 4) წერტილზე გადის, მაშასადამე,

$$4^2-1=C\,e^0; \quad C=15.$$

საძიებელი მრუდი ასეთია:

$$\underline{y^2-1=15\,e^x}$$

17. ვიპოვოთ მრუდი, თუ მისი ნორმალი აბსცისთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც შეხების წერტილის გასამკეცებულ აბსცისს ეტოლება. მრუდი (2, 5) წერტილზე გადის.

თუ გვინდა მოვძებნოთ ნაკვეთი, რომელსაც ნორმალი ჩამოაჭრის აბსცისთა ღერძს, ამისთვის შეთავსებულად უნდა ამოვხსნათ აბსცისთა ღერძისა და ნორმალის განტოლება, ე. ი.

$$Y=0 \quad \text{და} \quad Y-y=-\frac{dx}{dy}(X-x).$$

გვექნება

$$-y=-\frac{dx}{dy}(X-x)$$

აქედან

$$X=x+y\frac{dy}{dx} \quad \text{(ნაკვეთი)}.$$

პირობის ძალით

$$x+y\frac{dy}{dx}=3x\,.$$

თუ ამოვხსნით ამ დიფერენციალურ განტოლებას, გვექნება:

$$y^2-2x^2=C\,.$$

დამხმარე პირობა: მრუდი (2, 5) წერტილზე გადის, მაშასადამე,

$$5^2-2\cdot 2^2=C\,; \quad C=17\,.$$

საძიებელი მრუდი:

$$\underline{y^2-2x^2=17}$$

18. ვიპოვოთ მრუდი, თუ მისი ნორმალი ორდინატთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც შეხების წერტილის ორდინატის გაორკეცებულ კუბს ეტოლება. მრუდი (2, 1) წერტილზე გადის.

მითითება: ამოხსენით შეთავსებულად ორდინატთა ღერძისა და ნორმალის განტოლება. მიიღებთ

$$Y=y+x\frac{dx}{dy}\,.$$

პირობის ძალით:

$$y+x\frac{dx}{dy}=2y^3.$$

პას. $\underline{y^4-y^2-x^2+4=0}$

19. მრუდის შემხები რადიუს-ვექტორთან და პოლარ ღერძთან ქმნის კუთხეებს, რომელთა ჯამი$=\pi$. მრუდი

$$\left(\rho=2\,; \quad \theta=\frac{2\pi}{3}\right)$$

წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდის განტოლება.

აღნიშნული კუთხეები აღვნიშნოთ α და φ თი. პირობის ძალით,

$$\alpha+\varphi=\pi$$

ანუ

$$\varphi=\pi-\alpha.$$

მეორე მხრივ, ცნობილია, რომ

$$\varphi=\alpha+\theta$$

(სადაც θ პოლარი კუთხეა). მაშასადამე,

$$\pi-\alpha=\alpha+\theta$$

აქედან

$$\alpha=\frac{\pi-\theta}{2}; \quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

მაგრამ კუთხე შემხებსა და რადიუს-ვექტორ შორის

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\rho}{\dfrac{d\rho}{d\theta}}$ ფორმულით გამოისახება. მაშ, $\dfrac{\rho}{\dfrac{d\rho}{d\theta}}=\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}$

აქედან

$$\int\frac{d\theta}{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}=\int\frac{d\rho}{\rho}+C; \qquad \rho=\frac{C_1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$ ზოგადი ამონახსენი.

დახმარე პირობა:

$$\rho=2; \quad \theta=\frac{2\pi}{3}$$

მაშასადამე

$$2=\frac{C_1}{\cos^2\frac{2\pi}{3\cdot 2}}=\frac{C_1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}$$

აქედან

$$C_1=\frac{1}{2}; \qquad \rho=\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

მივიღეთ პარაბოლის განტოლება.

შემდეგი ამოცანებიდან შედგენილი იქნება ერთგვაროვანი, ხაზოვანი და ბერნულის განტოლებანი.

20. მრუდის ყოველი წერტილის ქვეშემხები ამ წერტილის კოორდინატთა ჯამს ეტოლება. მრუდი (0, 2) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

პირობის ძალით:

$$y\frac{dx}{dy}=x+y$$

აქედან

$$y\,dx=(x+y)\,dy$$

მივიღეთ ერთგვაროვანი განტოლება, რომლის ამოხსნა მოგვცემს:

$$y=Ce^{\frac{x}{y}}$$

დამხმარე პირობა: მრუდი (0, 2) წერტილზე გადის, მაშასადამე,

$$C=2;\quad \underline{y=2e^{\frac{x}{y}}}$$

21. შემხები აბსცისთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც შეხების წერტილის კოორდინატთა სხვაობის ნახევარს ეტოლება. მრუდი (2, 4) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

მითითება: ნაკვეთის მოსაძებნად, რომელსაც შემხები ჩამოაჭრის აბსცისთა ღერძს, უნდა ამოვხსნათ შეთავსებულად $Y=0$ აბსცისთა ღერძისა და

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

შემხების განტოლება. გვექნება:

$$X=x-y\frac{dx}{dy}.$$

პირობის ძალით,

$$x-y\frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{2}$$

ანუ

$$2y\,dx-(x+y)\,dy=0$$

მივიღეთ ერთგვაროვანი განტოლება.

22. ნორმალი აბსცისთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც ნორმალის სიგრძის ტოლია. მრუდი (4, 2) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

მითითება: ნაკვეთის მოსაძებნად, რომელსაც ნორმალი ჩამოაჭრის აბსცისთა ღერძს, უნდა ამოვხსნათ შეთავსებულად $Y=0$ აბსცისთა ღერძისა და

$$Y-y=-\frac{dx}{dy}(X-x)$$

ნორმალის განტოლებანი. გვექნება:

$$X=x+y\frac{dy}{dx}.$$

პირობის ძალით:

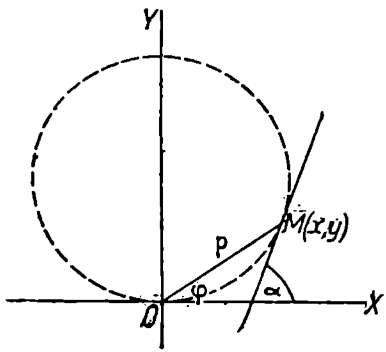
$$x+y\frac{dy}{dx}=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

აქედან

$$2xy\,dy=(y^2-x^2)\,dx$$

მივიღეთ ერთგვაროვანი განტოლება.

23. მრუდის ყოველ წერტილში შემხების მიერ შედგენილი კუთხე აბსცისთა ღერძთან ორჯერ მეტია იმ კუთხეზე, რომელიც შედგენილია შეხების წერტილზე გამავალი რადიუს-ვექტორით. ვიპოვოთ მრუდი (ნახ. 34).



ნახ. 34

პირობის ძალით

$$\alpha=2\varphi\,;\quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$$

მაგრამ

$$x=\rho\cos\varphi \quad \text{და} \quad y=\rho\sin\varphi$$

აქედან

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$$

მაშასადამე

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}};$$

$$(x^2-y^2)\,dy-2xy\,dx$$

თუ ამოვხსნით ამ ერთგვაროვან განტოლებას, მივიღებთ:

$$\underline{C(x^2+y^2)-y=0}$$

მიღებული მრუდი არის წრეხაზი, რომლის ცენტრი OY ღერძზე დევს და ეხება აბსცისთა ღერძს.

24. ნორმალი აბსცისთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც შეხების წერტილზე გამავალი რადიუს-ვექტორის ტოლია. მრუდი (1, 2) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

მითითება: ნაკვეთის მოსაძებნად, რომელსაც ნორმალი ჩამოაჭრის აბსცისთა ღერძს, უნდა ამოვხსნათ შეთავსებულად $Y=0$ აბსცისთა ღერძისა და

$$Y-y=-\frac{dx}{dy}(X-x)$$

ნორმალის განტოლებანი. გვექნება:

$$X=x+y\frac{dy}{dx}.$$

პირობის ძალით:

$$x+y\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(ერთგვაროვ. განტ.)}$$

25. მრუდის ქვენორმალი ტოლია შეხების წერტილის კოორდინატთა სხვაობისა და ორდინატის ნამრავლისა. მრუდი (1, 4) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

მითითება: პირობის ძალით:

$$y\frac{dy}{dx}=(x-y)\,y$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}+y=x \quad \text{(ხაზოვანი განტოლება).}$$

26. სწორკუთხედს ფუძედ ის ნაკვეთი აქვს, რომელსაც შემხები ჩამოაჭრის ორდინატთა ღერძს. სიმაღლე შეხების წერტილის აბსცისის ტოლია. სწორკუთხედის ფართობი$=6$. მრუდი $(2, -3)$ წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

მითითება: ნაკვეთის სიგრძე ასე გამოისახება:

$$Y=y-x\frac{dy}{dx}$$

აქედან სწორკუთხედის ფართობი:

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)x$$

პირობის ძალით

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)x=6$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-\frac{6}{x^2} \quad \text{(ხაზოვანი განტ.)}$$

27. მრუდის შემხები ორდინატთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც შეხების წერტილის აბსცისის კუბის ტოლია. მრუდი იმ წერტილზე, რომლის აბსცისი$=4$, დახრილია OX ღერძზე 60°-ით. ვიპოვოთ მრუდი.

ნაკვეთის სიგრძე ასე გამოისახება:

$$Y=y-x\frac{dy}{dx}$$

(ამ სიგრძეს გვაძლევს ორდინატთა ღერძისა და შემხების განტოლების შეთავსებული ამოხსნა).

პირობის ძალით:

$$y-x\frac{dy}{dx}=x^3,$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-x^2.$$

ამ ხაზოვანი განტოლების ამოხსნა მოგვცემს:

$$y=-\frac{x^3}{2}+Cx \qquad (ა)$$

დამხმარე პირობა:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

მეორე მხრივ, თუ (ა)-ს გავაწარმოებთ, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+C$$

მაშასადამე

$$-\frac{3}{2}x^2+C=\sqrt{3}$$

ანუ, რადგან პირობის თანახმად

$$x=4$$

დავწერთ

$$C=24+\sqrt{3}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში.

$$\underline{y=-\frac{x^3}{2}+(24+\sqrt{3})x}$$

28. შემხები ორდინატთა ღერძს ჩამოაჭრის ნაკვეთს, რომელიც შეხების წერტილის ორდინატის კუბის ტოლია. მრუდი (2, 1) წერტილზე გადის. ვიპოვოთ მრუდი.

მითითება:

$$Y=y-x\frac{dy}{dx} \text{ ნაკვეთის სიგრძე.}$$

პირობის ძალით

$$y-x\frac{dy}{dx}=y^3$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-\frac{y^3}{x} \text{ (ბერნულის განტოლება).}$$

მუდმივ-კოეფიციენტებიანი ხაზოვანი განტოლების შედგენა

განვიხილოთ პერიოდული პროცესები ანუ ამოცანები, რომლებიც ტექნიკასთან არის დაკავშირებული.

წინასწარი შენიშვნა:

A. თუ რომელიმე მასის მატერიალურ ნაწილაკზე მოქმედებს F ცენტრალური ძალა, რომელიც პროპორციულია x ნაწილაკის დაშორებისა O მიმზიდველობის ცენტრიდან, მაშინ ასეთ ძალას ეწოდება ა ღ მ დ გ ე ნ ი ძალა და აღინიშნება:

$$F=-ax$$

სადაც

$$a=k^2 m$$

აქედან

$$k^2=\frac{a}{m}$$

ეწოდება ა ღ დ გ ე ნ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი.

B. თუ ნაწილაკი ისეთ გარემოში ძრაობს, სადაც არსებობს F_1 წინაღობა, რომელიც v სიჩქარის პროპორციულია, მაშინ F_1-ს ეწოდება წ ი ნ ა ღ ო ბ ი ს ძ ა ლ ა და აღინიშნება:

$$F_1=-bv$$

სადაც

$$b=2\,lm$$

აქედან

$$l=\frac{b}{2\,m}$$

ეწოდება წ ი ნ ა ღ ო ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

29. ვიპოვოთ m მასის მატერიალური ნაწილაკის ძრაობის კანონი, თუ მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც ცენტრისკენაა მიმართული (ცენტრალური ძალა) და პროპორციულია x ნაწილაკის დაშორებისა O მიმზიდველობის ცენტრიდან.

როგორც ვიცით, აღმდგენი ძალა ასე გამოისახება:

$$F=-ax.$$

დინამიკის მეორე პრინციპის თანახმად,

$$F=m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

აქედან

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = -ax$$

ანუ

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{a}{m} x = 0.$$

ახლა, რადგან

$$\frac{a}{m} = k^2$$

დავწერთ

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + k^2 x = 0$$

მივიღეთ მუდმივ-კოეფიციენტებიანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა მოგვცემს:

$$x = A \sin kt + B \cos kt$$

ანუ

$$x = A \left(\sin kt + \frac{B}{A} \cos kt\right).$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \varphi$$

გვექნება

$$x = A (\sin kt + \operatorname{tg} \varphi \cos kt) = \frac{A}{\cos \varphi} \sin (kt + \varphi).$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{A}{\cos \varphi} = M \quad \text{და} \quad k = \frac{2\pi}{T}$$

მაშინ

$$x = M \sin \left(\frac{2\pi\, t}{T} + \varphi\right).$$

მივიღეთ ეგრეთწოდებული **ჰარმონიული რყევის კანონი**, სადაც M არის ამპლიტუდი; t — დრო; T — პერიოდი; φ — საწყისი ფაზა; $\frac{2\pi\, t}{T} + \varphi$ — ფაზა.

30. ამოვხსნათ წინა ამოცანა იმ შემთხვევისთვის, როდესაც მატერიალური ნაწილაკი ირყევა ისეთ გარემოში, სადაც არსებობს წინაღობა, რო-

მელიც ძრაობის v სიჩქარის პროპორციულია (სხვანაირად, ნაწილაკზე მოქმედებს აღმდგენი და წინაღობის ძალა).

როგორც ვიცით, წინაღობის ძალა ასეთია:

$$F_1 = -bv.$$

აღმდგენი და წინაღობის ძალის ტოლქმედი აღვნიშნოთ R-ით, მაშინ

$$R = F + F_1.$$

დინამიკის მეორე პრინციპის თანახმად დავწერთ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax - b\frac{dx}{dt}$$

ანუ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}x + \frac{b}{m}\ \frac{dx}{dt} = 0$$

ახლა, რადგან

$$\frac{a}{m} = k^2 \quad \text{და} \quad \frac{b}{m} = 2l$$

ამიტომ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2l\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$

მივიღეთ მუდმივ-კოეფიციენტებიანი ხაზოვანი განტოლება. მახასიათებელი განტოლება ასეთია:

$$r^2 + 2lr + k^2 = 0$$

აქედან

$$r = -l \pm \sqrt{l^2 - k^2}$$

აქ უნდა გავარჩიოთ სამი შემთხვევა:

$$\text{I.} \quad l^2 - k^2 < 0$$

$$\text{II.} \quad l^2 - k^2 > 0$$

$$\text{III.} \quad l^2 - k^2 = 0$$

პირველ შემთხვევაში აღვნიშნოთ

$$l^2 - k^2 = -p^2$$

გვექნება

$$r = -l \pm \sqrt{-p^2} = -l \pm pi$$

აქედან ზოგადი ამონახსენი ასე დაიწერება:

$$x=e^{-lt}(A\sin pt+B\cos pt)=A\,e^{-lt}\left(\sin pt+\frac{B}{A}\cos pt\right)=$$

$$=A\,e^{-lt}(\sin pt+\operatorname{tg}\varphi\cos pt)$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{A}{\cos\varphi}=M$$

დავწერთ

$$x=M\,e^{-lt}\sin(pt+\varphi).$$

ახლა, თუ

$$p=\frac{2\pi}{T}$$

საბოლოოდ გვექნება

$$x=M\,e^{-lt}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

მივიღეთ ეგრეთწოდებული მ ლ ე ვ ი რ ყ ე ვ ი ს კ ა ნ ო ნ ი (затухающее колебание), სადაც M საწყისი ამპლიტუდაა; T— პერიოდი; φ—საწყისი ფაზა, ხოლო e^{-lt} კი გამოსახავს მლევადობის სიჩქარეს (быстрота затухания).

მეორე შემთხვევაში აღვნიშნოთ

$$l^2-k^2=q^2$$

გვექნება

$$r=-l\pm\sqrt{q^2}=-l\pm q$$

აქედან ზოგადი ამონახსენი

$$x=C_1\,e^{(-l+q)t}+C_2\,e^{(-l-q)t}$$

ანუ

$$x=C_1\,e^{-(l-q)t}+C_2\,e^{-(l+q)t}$$

მივიღეთ ა პ ე რ ი ო დ უ ლ ი ძ რ ა ო ბ ი ს კ ა ნ ო ნ ი.

დავალება: მიღებული ფორმულა როგორ სახეს მიიღებს, როდესაც $t\longrightarrow 0$? როდესაც $t\longrightarrow\infty$?

მესამე შემთხვევაში, ე. ი., როდესაც

$$l^2-k^2=0$$

გვაქვს

$$r_1=r_2=-l.$$

ზოგადი ამონახსენი ასე დაიწერება:

$$x=C_1 e^{-lt}+C_2 t e^{-lt}=e^{-lt}(C_1+C_2 t).$$

მივიღეთ აპერიოდული ძრაობის სპეციალური შემთხვევა.

შენიშვნა: ორ უკანასკნელ ფორმულას შორის ის განსხვავებაა, რომ პირველ შემთხვევაში ნაწილაკი ძრაობის დაწყებიდანვე მუდამ ცენტრისკენ ისწრაფის, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი x (ნაწილაკს) აქვს ერთგვარი მაქსიმუმი (მიმზიდველობის ცენტრიდან დაშორების უდიდესი მანძილი), რომლის შემდეგაც ის იწყებს კლებას და ცენტრისკენ მისწრაფებას.

დავალება: მოძებნეთ ხსენებული მაქსიმუმი, რისთვისაც უნდა გააწარმოოთ უკანასკნელი განტოლება t-ს შესახებ და გაუტოლოთ ნოლს. მივიღებთ

$$t=\frac{C_2-C_1 t}{C_2 l}$$

31. ამოვხსნათ წინა ამოცანა იმ შემთხვევისთვის, როდესაც აღმდგენისა და წინაღობის ძალის გარდა ნაწილაკზე მოქმედებს აგრეთვე გარეგანი ძალა, რომელიც დროის უბრალო ჰარმონიულ ფუნქციას წარმოადგენს, ე. ი.

$$F_2=C\sin(qt+\varphi_0)$$

$F=-ax$ აღმდგენი ძალა

$F_1=-bv$ წინაღობის ძალა

$F_2=C\sin(qt+\varphi_0)$ გარეგანი ძალა

თუ ამ ძალების ტოლქმედს აღვნიშნავთ R-ით, გვექნება:

$$R=F+F_1+F_2$$

დინამიკის მეორე პრინციპის თანახმად, დავწერთ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+ax=C\sin(qt+\varphi_0)$$

ანუ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2l\frac{dx}{dt}+k^2x=C\sin(qt+\varphi_0) \qquad (ა)$$

მივიღეთ მუდმივ-კოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. მარცხენა ნაწილის ამონახსენი ანუ დამხმარე ფუნქცია, თანახმად წინა ამოცანისა, ასე დაიწერება:

$$u=Me^{-lt}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

მოვძებნოთ ახლა კერძო ამონახსენი.

$$v=C_1 \sin(qt+\varphi_0)+C_2 \cos(qt+\varphi_0)$$

$$v'=C_1 q \cos(qt+\varphi_0)-C_2 q \sin(qt+\varphi_0)$$

$$v''=-C_1 q^2 \sin(qt+\varphi_0)-C_2 q^2 \cos(qt+\varphi_0)$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში:

$$-C_1 q^2 \sin(qt+\varphi_0)-C_2 q^2 \cos(qt+\varphi_0)+2C_1 ql \cos(qt+\varphi_0)-$$
$$-2C_2 ql \sin(qt+\varphi_0)+C_1 k^2 \sin(qt+\varphi_0)+C_2 k^2 \cos(qt+\varphi_0)=$$
$$=C \sin(qt+\varphi_0)$$

ანუ

$$(k^2 C_1-2C_2 ql-C_1 q^2) \sin(qt+\varphi_0)+$$
$$+(k^2 C_2+2C_1 ql-C_2 q^2) \cos(qt+\varphi_0)=C \sin(qt+\varphi_0)$$

აქედან

$$k^2 C_1-2C_2 ql-C_1 q^2=C$$

$$k^2 C_2+2C_1 ql-C_2 q^2=0$$

პირველიდან გამოვსახოთ C_2 და ჩავსვათ მეორეში, ვიპოვით C_1-ს. ასევე ვიპოვით C_2-ს. ამრიგად,

$$C_1=\frac{C(k^2-q^2)}{4l^2 q^2+(k^2-q^2)^2}; \quad C_2=-\frac{2Cql}{4l^2 q^2+(k^2-q^2)^2}$$

მაშასადამე, კერძო ამონახსენი ასე დაიწერება

$$v=\frac{C(k^2-q^2)}{4l^2 q^2+(k^2-q^2)^2} \sin(qt+\varphi_0)-\frac{2Cql}{4l^2 q^2+(k-q^2)^2} \cos(qt+\varphi_0)$$

ხოლო ზოგადი ამონახსენისთვის გვექნება

$$x=u+v$$

ე. ი.

$$x=Me^{-lt} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)+\frac{C(k^2-q^2)}{4l^2 q^2+(k^2-q^2)^2} \sin(qt+\varphi_0)-$$
$$-\frac{2Cql}{4l^2 q^2+(k^2-q^2)^2} \cos(qt+\varphi_0)=Me^{-lt} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)+$$
$$+\frac{C(k^2-q^2)}{4l^2 q^2+(k^2-q^2)^2}\left[\sin(qt+\varphi_0)-\frac{2lq}{k^2-q^2} \cos(qt+\varphi_0)\right]$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{2lq}{k^2-q^2}=\operatorname{tg}\varphi_1$$

და

$$\frac{C(k^2-q^2)}{[4l^2q^2+(k^2-q^2)^2]\cos\varphi_1}=N$$

გვექნება

$$x=Me^{-lt}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)+N[\sin(qt+\varphi_0)\cos\varphi_1-\sin\varphi_1\cos(qt+\varphi_0)]=$$

$$=Me^{-lt}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)+N\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1)$$

მივიღეთ რყევითი ძრაობის ფორმულა, რომელიც ორი ნაწილისგან შესდგება:

$$x_1=Me^{-lt}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right) \text{ საკუთარი რყევა,}$$

$$x_2=N\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1) \text{ იძულებითი რყევა.}$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

აქამდე ჩვენ ისეთ განტოლებებთან გვქონდა საქმე, სადაც მოსაძებნი იყო ერთი ფუნქცია ერთ ცვლადზე დამოკიდებული. როგორც ვნახეთ, ერთი ფუნქციის მოსაძებნად სრულიად საკმარისია ერთი დიფერენციალრი განტოლება. თუ საჭიროა n ფუნქციის მოძებნა ერთსადაიმავე ცვლადზე დამოკიდებული, მაშინ მოცემული უნდა იყოს n დიფერენციალური განტოლება ანუ განტოლებათა სისტემა *.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია ორი დიფერენციალური განტოლება:

$$1.\quad \frac{dy}{dt}=x+y \quad \text{და} \quad \frac{dx}{dt}=5x-4y$$

ამ სისტემაში t დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო x და y ორი უცნობი ფუნქცია. მოცემული სისტემის ამოხსნა იმ პრინციპზეა დამყარებული, რომ თითოეული ფუნქცია მოძებნილ უნდა იქნას ერთი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებიდან, რომელშიც მხოლოდ საძიებელი ფუნქცია შედის და დამოუკიდებელი t ცვლადი.

---

* ჩვენ იმ შემთხვევებთან გვექნება საქმე, როდესაც განტოლებათა რიცხვი უცნობ ფუნქციათა რიცხვის ტოლია.

გადავწყვიტოთ სისტემის პირველი განტოლება x-ის შესახებ:

$$x=\frac{dy}{dt}-y \qquad (\text{ა})$$

აქედან

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი სისტემის მეორე განტოლებაში:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=5\left(\frac{dy}{d}-y\right)-4y$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+9y=0.$$

მახასიათებელი განტოლება არის

$$r^2-6r+9=0$$

აქედან ზოგადი ამონახსენი:

$$y=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში:

$$x=\frac{d(C_1e^{3t}+C_2te^{3t})}{dt}-C_1e^{3t}-C_2te^{3t}=(2C_1+C_2+2C_2t)e^{3t}$$

ამრიგად

$$\underline{x=(2C_1+C_2+2C_2t)e^{3t}}$$

და

$$\underline{y=(C_1+C_2t)e^{3t}}$$

შემოწმება: ორი უკანასკნელი განტოლება გააწარმოეთ t-ს შესახებ და მიღებული მნიშვნელობანი ჩასვით მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში. ჩასმის შედეგად უკანასკნელი დაკმაყოფილდება.

შენიშვნა: ჩვენ შეგვიძლიან გადავწყვიტოთ სისტემის მეორე განტოლება y-ის შესახებ, გავაწარმოოთ და მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ პირველ განტოლებაში.

მოცემული სისტემა ასეც შეგვიძლიან ამოვხსნათ: გავაწარმოოთ სისტემის პირველი განტოლება:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$$

ჩავსვათ აქ $\frac{dx}{dt}$ და $\frac{dy}{dt}$ მნიშვნელობანი მოცემული სისტემიდან:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=5x-4y+x+y=6x-3y.$$

ჩავსვათ $x=\frac{dy}{dt}-y$ მნიშვნელობა:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=6\left(\frac{dy}{dt}-y\right)-3y$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+9y=0.$$

მივიღეთ იგივე შედეგი.

სავარჯიშო

2. $\frac{dy}{dt}=x-y$; $\quad \frac{dx}{dt}=x+3y$

3. $\frac{dy}{dt}=x-y$; $\quad \frac{dx}{dt}=x-5y$

4. $\frac{dy}{dt}=x-2y$; $\quad \frac{dx}{dt}=5x-12y$

5. $\frac{dx}{dt}=3x+y$; $\quad \frac{dy}{dt}=y-x$

6. $\frac{dx}{dt}=4x-2y$; $\quad \frac{dy}{dt}=4y$

7. $\frac{dx}{dt}=y+1$; $\quad \frac{dy}{dt}=x-2$

8. $\frac{dx}{dt}=x+y-t$; $\quad \frac{dy}{dt}=2y+t$

9. $\frac{dy}{dt}=x+2t$; $\quad \frac{dx}{dt}=y-t+2$

10. $\frac{dy}{dt}=x+y+3$; $\quad \frac{dx}{dt}=x+y-t+1$

11. $\frac{dy}{dt}=x-y+2t+4$; $\quad \frac{dx}{dt}=2x-y-t+3$

12. $\frac{dx}{dt}+2e^{3t}-y=0$; $\quad \frac{dy}{dt}=x+6e^{3t}+2t$

13. $\frac{dx}{dt}-y+\sin 5x=0$; $\quad \frac{dy}{dt}=4x+5\cos 5x+e^{2t}$

14. $\frac{dx}{dt}+e^{t}=y$; $\quad \frac{dy}{dt}+2e^{t}-4x=0$

15. $\frac{dx}{dt}-y=\sin 2t$; $\quad \frac{dy}{dt}+\cos 2t+9x=0$

16. $\frac{dx}{dt}+e^{2t}=y$; $\quad \frac{dy}{dt}=25x+e^{2t}+2t$

17. $\frac{dy}{dt}+\cos 3t-x=0$; $\quad \frac{dx}{dt}=2\sin 3t-t$.

მითითება: №№ 7, 8, 9, 10, 11 .. სისტემათა ამოხსნის დროს საქმე გვაქვს მუდმივ-კოეფიციენტებიან არაერთგვაროვან ხაზოვან სისტემასთან.

შესაძლებელია აგრეთვე სისტემის ამოხსნა სხვადასხვა კომბინაციითაც, მაგალითად:

18. $\frac{dy}{dt}=3y+x$; $\quad \frac{dx}{dt}=3x+y$

შევკრიბოთ და გამოვაკლოთ ერთმანეთს მოცემული განტოლებანი:

$$\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}=4(x+y)$$

ანუ

$$\frac{d(y+x)}{dt}=4(y+x)$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}=2(y-x)$$

ანუ

$$\frac{d(y-x)}{dt}=2(y-x)$$

აქედან

$$\int \frac{d\,(y+x)}{y+x} = 4 \int dt + C; \qquad y+x = C_1\, e^{4t} \qquad \text{ა)}$$

$$\int \frac{d\,(y-x)}{y-x} = 2 \int dt + C_2; \qquad y-x = C_3\, e^{2t} \qquad \text{(ბ)}$$

(ა) და (ბ) განტოლებანი წარმოადგენს მოცემული სისტემის ინტეგრალებს.

ჩვენ შეგვიძლიან x და y ფუნქციები გამოვსახოთ ცალცალკე, ამისთვის უნდა ამოვხსნათ (ა) და (ბ):

$$y = \frac{C_1}{2}\, e^{4t} + \frac{C_3}{2}\, e^{2t}; \qquad x = \frac{C_1}{2}\, e^{4t} - \frac{C_3}{2}\, e^{2t}$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{C_1}{2} = A \quad \text{და} \quad \frac{C_3}{2} = B$$

გვექნება

$$\underline{y = A\, e^{4t} + B\, e^{2t}}; \quad \underline{x = A\, e^{4t} - B\, e^{2t}}.$$

სავარჯიშო

19. $\dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \qquad \dfrac{dx}{dt} = x + 3y$

20. $\dfrac{dy}{dt} = 5x - y; \qquad \dfrac{dx}{dt} = 5y - x$

21. $\dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y; \qquad \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y$

22. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y; \qquad \dfrac{dy}{dt} = 4y - 5x$

23. $\dfrac{dx}{dt} = 3\,(x + 2y); \qquad \dfrac{dy}{dt} = 3\,(2x + y)$

24. $\dfrac{dy}{dt} = ax + by; \qquad \dfrac{dx}{dt} = bx + ay$

განვიხილოთ ახლა ასეთი სისტემა:

25. $\dfrac{dy}{dt}=3x+2y\,;\qquad\qquad \dfrac{dx}{dt}=x+2y$

შეკრება მოგვცემს:

$$\frac{d\,(y+x)}{dt}=4\,(y+x)$$

აქედან

$$y=C\,e^{4t}-x \qquad\qquad (\text{ა})$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა მოცემული სისტემის ერთერთ განტოლებაში, მაგალითად, მეორეში:

$$\frac{dx}{dt}+x=2C\,e^{4t}$$

მივიღეთ პირველი რიგის ხაზოვანი განტოლება, სადაც t დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო x მისი ფუნქცია.

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას, გვექნება:

$$x=\frac{2}{5}\,C\,e^{4t}+C_2\,e^{-t}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ა)-ში:

$$y=\frac{3}{5}\;C\,e^{4t}-C_2\,e^{-t}$$

ნუ, [illegible] ნავთ

$$\frac{C}{5}=C_1$$

დავწერთ:

$$\underline{x=2C_1\,e^{4t}+C_2\,e^{-t}\,;}\qquad\qquad \underline{y=3C_1\,e^{4t}-C_2\,e^{-t}.}$$

დავალება: შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა მიღებული ფუნქციები მოცემულ სისტემას.

სავარჯიშო

26. $\dfrac{dy}{dt}=2x+4y\,;\qquad\qquad \dfrac{dx}{dt}=3x+y$

27. $\dfrac{dy}{dt}=3y-x\,;\qquad\qquad \dfrac{dx}{dt}=2\,(x-y)$

28. $\dfrac{dx}{dt}=4x+3y$; $\qquad \dfrac{dy}{dt}=2y+x$

29. $\dfrac{dx}{dt}=2y-x$; $\qquad \dfrac{dy}{dt}=y-2x$

30. $\dfrac{dy}{dt}=6y+4x$; $\qquad \dfrac{dx}{dt}=5y+3x$

31. $\dfrac{dy}{dt}=3x-2y$; $\qquad \dfrac{dx}{dt}=x-3y$

32. ავიღოთ ასეთი სისტემა:

$$\frac{dx}{dt}=y-x+z; \quad \frac{dy}{dt}=x-y+z; \quad \frac{dz}{dt}=x+y+z \tag{1}$$

გავაწარმოოთ პირველი განტოლება:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dt}=3x-y+z \tag{2}$$

გავაწარმოოთ მეორედ:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=3z+5y-3x \tag{3}$$

(1) და (2)-დან გვაქვს:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=2x+2z; \qquad \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=4x-2y$$

აქედან

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+2x \tag{4}$$

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}\right)-x \tag{5}$$

ჩავსვათ (4) და (5) მნიშვნელობანი მე(3)-ში:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-4x=0$$

აქედან $\qquad r^3+r^2-4r-4=0; \quad r_1=-1; \quad r_2=2; \quad r_3=-2$

$$\underline{x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+C_3e^{-2t}}$$

გავაწარმოოთ ორჯერ მიღებული გამოსახულება და მიღებული x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ მნიშვნელობანი ჩავსვათ მე-(4) და (5)-ში გვექნება:

$$\underline{y=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}-C_3e^{-2t}}$$

$$\underline{z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}}$$

33. $\frac{d^3x}{dt^3}+y=0$; $\frac{dy}{dt}+x=0$

გავაწარმოოთ პირველი:

$$\frac{d^4x}{dt^4}+\frac{dy}{dt}=0.$$

ჩავსვათ აქ $\frac{dy}{dt}$ მნიშვნელობა:

$$\frac{d^4x}{dt^4}-x=0$$

აქედან

$$r^4-1=0; \qquad x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\sin t+C_4\cos t$$

გავაწარმოოთ უკანასკნელი გამოსახულება სამჯერ:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=C_1e^t-C_2e^{-t}-C_3\cos t+C_4\sin t$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა სისტემის პირველ განტოლებაში:

$$\underline{y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t-C_4\sin t}$$

დიფერენციალური განტოლება ცვლადი კოეფიციენტებით

განტოლება ცვლადი კოეფიციენტებით მეტწილად ჩასმის საშუალებით ამოიხსნება.

1. $(x-3)^2y''-3(x-3)y'-6x=12$

აღვნიშნოთ

$$x-3=e^t.$$

აქედან:

$$x=e^t+3 \qquad (ა)$$

გავაწარმოოთ y-ის მიმართ

$$\frac{dx}{dy}=e^t \cdot \frac{dt}{dy}$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-e^{-t} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}+e^{-t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \qquad (ბ)$$

გავაწარმოოთ (ა) x-ის მიმართ:

$$1=e^t \cdot \frac{dt}{dx}$$

აქედან

$$\frac{dt}{dx}=e^{-t}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (ბ)-ში:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-e^{-2t} \cdot \frac{dy}{dt}+e^{-2t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}=\left(\frac{d^2 y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

ჩავსვათ ახლა y' და y'' მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში:

$$\frac{d^2 y}{dt^2}-4\frac{dy}{d}=6e^t+30$$

აქედან

$$y=C_1+C_2 e^{4t}-2e^t-\frac{15}{2}t$$

მითითება: კერძო ამონახსენი ასე უნდა შევარჩიოთ:

$$v=Ae^t+Bt$$

ჩავსვათ ახლა მიღებულ ამონახსენში $t=\log(x+3)$ მნიშვნელობა:

$$v=C_1+C_2 e^{4\log(x-3)}-2e^{\log(x-3)}-\frac{15}{2}\log(x-3)$$

ან ასე

$$y=C_1+C_2(x-3)^4-2(x-3)-\frac{15}{2}\log(x-3)=$$

$$\underline{=C_2(x-3)^4-\frac{15}{2}\log(x-3)-2x+C}$$

$$2.\quad x^3y'''+3x^2y''+2xy'=30x^2+5$$

აღვნიშნოთ

$$x=e^t$$

$$\frac{dx}{dy}=e^t\cdot\frac{dt}{dy}$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-e^{-t}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt}+e^{-t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

ანუ, რადგან

$$\frac{dt}{dx}=e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

აგრეთვე

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში:

$$\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{dy}{dt}=30\,e^{2t}+5$$

აქედან:

$$y=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+3e^{2t}+5t$$

ჩავსვათ აქ $t=\log x$ მნიშვნელობა:

$$y=C_1+C_2\cos(\log x)+C_3\sin(\log x)+3\,e^{2\log x}+5\log x$$

ან

$$\underline{y=C_1+C_2\cos(\log x)+C_3\sin(\log x)+3x^2+5\log x}$$

მითითება: აღვნიშნოთ

$$e^{2\log x}=N.$$

აქედან

$$2\log x=\log N;\quad x^2=N.$$

მაშასადამე

$$3e^{2\log x}=3x^2$$

$$3.\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x$$

აღვნიშნოთ

$$x=e^t$$

აქედან

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

მოცემული განტოლებიდან გვექნება:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=e^t$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

პას. $y=C_1x^2+C_2x^{-1}-\frac{1}{2}x$

ინტეგრალური განტოლება

$$1.\qquad \int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\sqrt{x}+y$$

გავაწარმოოთ მოცემული განტოლება x-ის მიმართ:

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}+y'$$

ავიყვანოთ ორივე მხარე კვადრატში:

$$1=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

აქედან

$$dy=\frac{x-1}{2x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$y=\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\underline{y=\frac{1}{3}\,x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}$$

$$2.\qquad \frac{ax}{a+x}\int_0^x y\,dx=\int_0^x xy\,dx$$

გავაწარმოოთ ორივე მხარე x-ის მიმართ:

$$\frac{ax}{a+x}\left(\int_0^x y\,dx\right)'+\left(\frac{ax}{a+x}\right)'\int_0^x y\,dx=xy$$

$$\frac{ax}{a+x}\cdot y+\frac{a^2}{(a+x)^2}\cdot\int_0^x y\,dx=xy \qquad\qquad (ა)$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$\int_0^x y\,dx=z$$

აქედან

$$y=\frac{dz}{dx}\,.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ა)-ში:

$$\frac{ax}{a+x}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{a^2}{(a+x)^2}\cdot z=x\,\frac{dz}{dx}$$

აქედან

$$\frac{dz}{z}=\frac{a^2\,dx}{x^2\,(x+a)}$$

$$\int\frac{dz}{z}=a^2\int\frac{dx}{x^2\,(x+a)}+C$$

$$\log z = -\frac{a}{x} - \log x + \log (x+a) + c;$$

$$zx = (x+a)\, C \cdot e^{-\frac{a}{x}}$$

ანუ

$$\int_0^x y dx = \frac{(x+a)\, C \cdot e^{-\frac{a}{x}}}{x};$$

გავაწარმოოთ ორივე მხარე x-ის მიმართ

$$y = \frac{a^2}{x^3} \cdot C e^{-\frac{a}{x}}; \quad yx^3 = C_1 e^{-\frac{a}{x}}$$

თ ა ვ ი მ ე ო თ ხ ე

ორჯერადი ინტეგრალები

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$ ორჯერადი ინტეგრალი წარმოადგენს ორმაგი ინტეგრაციის შედეგს. $\int_c^d$ ინტეგრალს შინაგანი ინტეგრალი ეწოდება, ხოლო $\int_a^b$ — გარეგანი.

აღნიშნული ორმაგი ინტეგრაცია ასე წარმოებს: ჯერ უნდა გამოვთვალოთ შინაგანი ინტეგრალი (x ამ დროს მუდმივის როლს ასრულებს), შემდეგ მიღებული შედეგი უნდა გავაინტეგროთ x-ის შესახებ a და b საზღვრებს შორის.

შესაძლებელია ორმაგი ინტეგრაცია შებრუნებულად ვაწარმოოთ, ე. ი. ჯერ x-ის შესახებ a და b საზღვრებში და შემდეგ y-ის შესახებ c და d საზღვრებში. ეს შეთანხმების საქმეა, ოღონდ ცვლადთა საზღვრები სწორად უნდა იქნას შერჩეული.

1. $$\int_0^2 \int_0^3 xy^2\, dy\, dx$$

გამოვთვალოთ ჯერ შინაგანი ინტეგრალი *

$$\int_0^3 xy^2\, dy = \frac{xy^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{x \cdot 3^3}{3} = 9x$$

(x-სი, როგორც ზემოთაც ვთქვით, ამ დროს მუდმივად ითვლება).

---

* ორჯერადი ინტეგრალების გამოთვლის დროს ჩვენ ისეთ წესს ვიცავთ, რომ პირველი დიფერენციალი (მარცხნიდან მარჯვნივ) შინაგან ინტეგრალს ეკუთვნის და უკანასკნელი — გარეგანს.

ავიღოთ ახლა

$$\int_0^2 9x\,dx = \frac{9x^2}{2}\Big|_0^2 = 18$$

ამრიგად

$$\int_0^2 \int_0^3 xy^2\,dy\,dx = 18$$

$$2. \qquad \int_0^4 \int_2^5 x^2 y^3\,dy\,dx$$

$$\int_2^5 x^2 y^3\,dy = \frac{x^2 y^4}{4}\Big|_2^5 = \frac{x^2 5^4}{4} - \frac{x^2 2^4}{4} = 152\frac{1}{4}x^2$$

$$\int_0^4 152\frac{1}{4}x^2\,dx = 152\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 3248$$

ამრიგად

$$\int_0^4 \int_2^5 x^2 y^3\,dy\,dx = 3248$$

გამოვთვალოთ ახლა შებრუნებულად, ე. ი. ჯერ x-ის შესახებ (y ამ დროს მუდმივი იქნება) და შემდეგ y-ის შესახებ.

$$\int_0^4 y^3 x^2\,dx = \frac{y^3 x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{64}{3}y^3.$$

$$\int_2^5 \frac{64}{3}y^3\,dy = \frac{64}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_2^5 = 3248$$

მივიღეთ იგივე პასუხი.

$$3. \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \cos x \sin y\,dy\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos x \sin y\,dy = -\cos x \cos y\Big|_0^{\pi} = 2\cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

ამრიგად

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \cos x \sin y\,dy\,dx = 2.$$

სავარჯიშო

4. $\int_0^3\int_0^1 4xy\,dy\,dx$

5. $\int_0^5\int_0^2 3x^2y^4\,dy\,dx$

6. $\int_1^2\int_2^4 5xy^2\,dy\,dx$

7. $\int_2^3\int_1^3 (x+6)y\,dy\,dx$

8. $\int_0^3\int_1^2 x^2(y^2-5)\,dy\,dx$

9. $\int_1^2\int_0^4 \sqrt{x}\,(3y+\sqrt{2})\,dy\,dx$

10. $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 5y\,dy\,dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\pi} \cos 2x \operatorname{ctg} y\,dy\,dx$

12. $\int_0^1\int_1^2 e^{2x}a^y\,dy\,dx$

13. $\int_1^3\int_0^1 \log 3x\, e^{y+2}\,dy\,dx$

14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x+\operatorname{tg} y)\,dy\,dx$

15. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც (35 ნახაზზე) დაშტრიხულია.

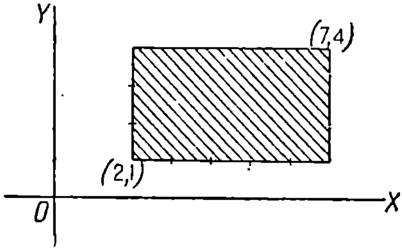
პას. 15

მითითება: ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S=\int_a^b\int_c^d dy\,dx$

16. ვიპოვოთ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით, $y=x$ სწორი ხაზით და ორდინატით, რომლის შესაფერი აბსცისი არის 5 (ნახ. 36).

მითითება: ვერტიკალური ზოლის ელემენტების შეჯამება წარმოებს O-დან x-დე, ხოლო თვით ზოლების შეჯამება კი O-დან 5-დე.

პას. 12,5

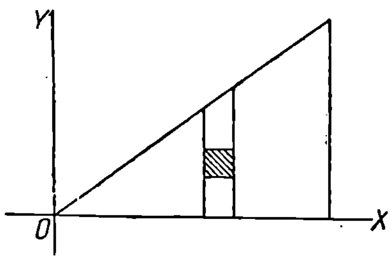


ნახ. 35

17. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ მრუდით, აბსცისთა ღერძის ნაკვეთით და ორი ორდინატით, რომელთა შესაფერი აბსცისები არის 3 და 5.

მითითება: y-ის საზღვრები არის O და x^2.

პას. $32\frac{2}{3}$



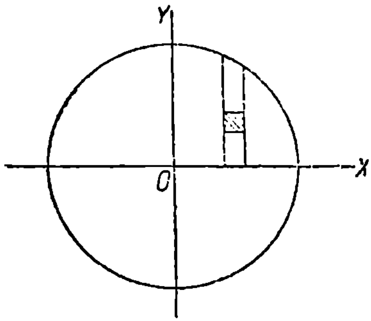
ნახ. 36

18. ვიპოვოთ ფართობი წინა ამოცანის ანალოგიურად, თუ მრუდი ასეთია: $y=x^2+3$ და ორდინატების შესაფერი აბსცისები 2; 4.

პას. $24\frac{2}{3}$

19. ვიპოვოთ წრის ფართობი, როდესაც ცენტრი სათავეშია მოთავსებული (ნახ. 37).

მითითება: საკმარისია გამოვთვალოთ ერთი მეოთხედი და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 4-ზე. ვერტიკალური ზოლის ელემენტების შეჯამება წარმოებს O დან y-დე (ანუ $\sqrt{R^2-x^2}$-დე), ხოლო თვით ზოლების შეჯამება O-დან R-დე.

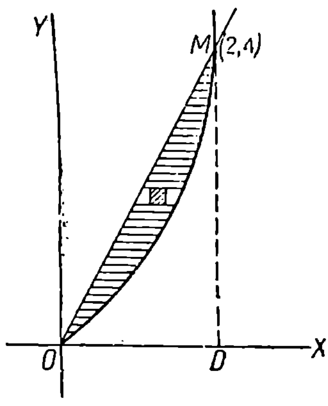


ნახ. 37

20. ანალოგიურად იპოვეთ ელიფსის ფართობი.

პას. πab

21. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ურთიერთ გადამკვეთი $y=x^2$ მრუდითა და $y=2x$ სწორი ხაზით (ნახ. 38).



ნახ. 38

საძიებელი ფართობი შეგვიძლიან განვიხილოთ, როგორც ორი ფართობის სხვაობა:

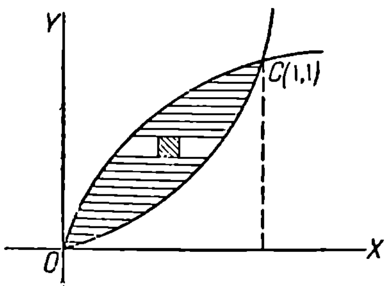
$$S = ფ\triangle OMD - ფ\, OPMD = 4 - \int_0^2 \int_0^{x^2} dy\, dx = 1\frac{1}{3}.$$

ხსენებული ფართობი უშუალოდაც შეგვიძლიან გამოვთვალოთ, ამისთვის ჰორიზონტალური ზოლის ელემენტები უნდა შევაჯამოთ $\frac{y}{2}$ - დან $\sqrt{y}$ -დე, ე. ი. ჯერ უნდა გამოვთვალოთ $\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dx$ და მიღებული შედეგი გავაინტეგროთ y-ის შესახებ 0 და 4 შორის. მივიღებთ იმავე პასუხს.

22. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი ურთიერთ გადამკვეთი პარაბოლით:

$$y = x^2 \quad და \quad x = y^2$$

საძიებელი ფართობი შეგვიძლიან განვიხილოთ, როგორც ორი ფართობის სხვაობა (ნახ. 39).

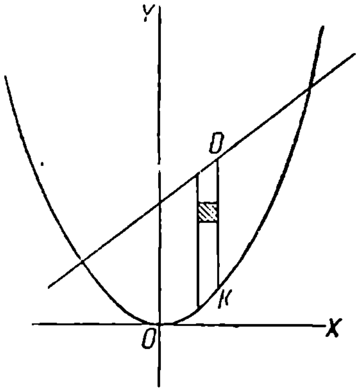


ნახ. 39

$$S = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx - \int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx = \frac{1}{3}$$

ხსენებული ფართობი უშუალოდაც გამოითვლება; ამისთვის ჰორიზონტალური ზოლის ელემენტები უნდა შევაჯამოთ y^2-დან $\sqrt{y}$-დე, ე. ი. ჯერ უნდა გამოვთვალოთ $\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx$ და მიღებული შედეგი გავაინტეგროთ y-ის შესახებ O და 1 შორის.

23. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ მრუდითა და $y=x+2$ სწორი ხაზით (ნახ. 40).



ნახ. 40

x-ის საზღვრები გამოითვლება, თუ შეთავსებულად ამოვხსნით სწორი ხაზისა და მრუდის განტოლებას:

$$x_1=2; \quad x=-1$$

თუ ახლა OY ღერძის პარალელ ზოლებს გავიყვანთ, მაშინ ერთ-ერთი ზოლის ელემენტები უნდა შევაჯამოთ K-დან D-დე, ე. ი. x^2-დან $x+2$-დე.

ამრიგად

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=4{,}5.$$

24. ანალოგიურად იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2-4$ მრუდითა და $y=x-2$ სწორი ხაზით.

პას. 4,5

25. ვიპოვოთ წრის ინერციის მომენტი, როდესაც ცენტრი სათავეშია.

$$\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,dy\,dx=\int_0^R\frac{\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3}{3}\,dx=\frac{\pi R^4}{4}$$

26. ანალოგიურად იპოვეთ ელიფსის ინერციის მომენტი.

პას. $\frac{\pi ab}{8}(a^2+b^2)$

27. იპოვეთ ინერციის მომენტი ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია სწორი ხაზებით:

$$y=x; \quad x=5; \quad y=0$$

პას. $52\frac{1}{12}$

28. ვიპოვოთ სფეროს მოცულობა, რომლის ცენტრი სათავეშია. სფეროს მოცულობის მერვედი ასე გამოისახება:

$$\frac{V}{8}=\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} z\,dy\,dx$$

თუ ახლა z-ის მნიშვნელობას გამოვსახავთ სფეროს პირეულის $x^2+y^2+z^2=R^2$ განტოლებიდან და ჩავსვამთ წინა ტოლობაში, გვექნება:

$$\frac{V}{8}=\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\,dx.$$

შინაგანი ინტეგრალის გამოსათვლელად უნდა მივიღოთ

$$R^2-x^2=p^2 \quad \text{ჩასმა,}$$

გვექნება:

$$\int_0^p\sqrt{p^2-y^2}\,dy=\frac{\pi\,(R^2-x^2)}{4},$$

აქედან

$$\frac{V}{8}=\int_0^R\frac{\pi\,(R^2-x^2)}{4}\,dx=\frac{\pi R^3}{6};$$

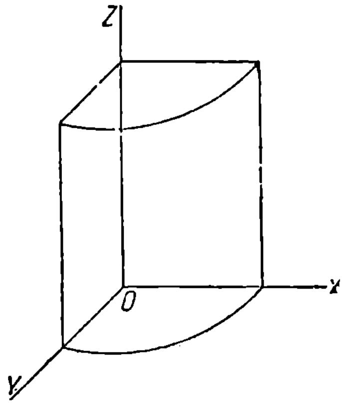
$$\underline{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

29. ანალოგიურად იპოვეთ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდის მოცულობა.

პას. $\frac{4}{3}\pi abc$

30. ვიპოვოთ ცილინდრის მოცულობა, რომელიც $z=a$ სიბრტყით არის გადაკვეთილი და რომლის ფუძის ცენტრი სათავეშია მოთავსებული (ნახ. 41).



ნახ. 41

$$\frac{V}{4}=\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} a\,dy\,dx=\frac{\pi R^2 a}{4},$$

აქედან

$$\underline{V=\pi R^2 a}$$

31. ანალოგიურად იპოვეთ მოცულობა ცილინდრისა, როდესაც გადაკვეთილია $z-x-y-1=0$ სიბრტყით და კონტური არის $x^2+y^2=1$.

$$V=4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y+1)\,dy\,dx.$$ დაიყვანეთ ბოლომდე

32. ვიპოვოთ წრის ფართობი პოლარ კოორდინატებში, როდესაც ცენტრი სათავეშია (ნახ. 42).

მითითება: წრეხაზის განტოლება ასე დაიწერება: $\rho=R$

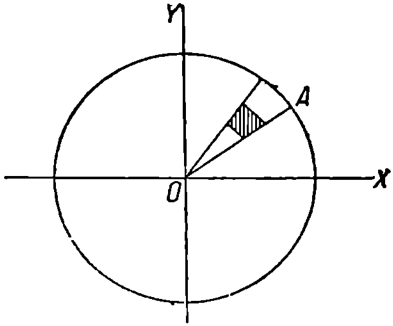
ზოლის ელემენტები უნდა შევაჯამოთ O-დან A-დე, ე. ი. O-დან R-დე, ხოლო თვით ზოლები კი O-დან $\frac{\pi}{2}$-დე.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho\,d\rho\,d\varphi$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

33. ანალოგიურად იპოვეთ $\rho=2\,R\cos\varphi$ წრის ფართობი.

მითითება: წრეს ისეთი მდებარეობა აქვს, რომ ცენტრი OX ღერძზე დევს და ეხება OY ღერძს. საძიებელი ფართობი ასე გამოისახება:

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2R\cos\varphi}\rho\,d\rho\,d\varphi\,.$$



ნახ. 42

34. იპოვეთ $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატის ფართობი.

მითითება:

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho\,d\varphi=a^2$$

35. იპოვეთ $\rho=a\,(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის ფართობი.

მითითება:

$$S=2\int_0^{\pi}\int_0^{a\,(1+\cos\varphi)}\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{3}{2}\,\pi\,a^2$$

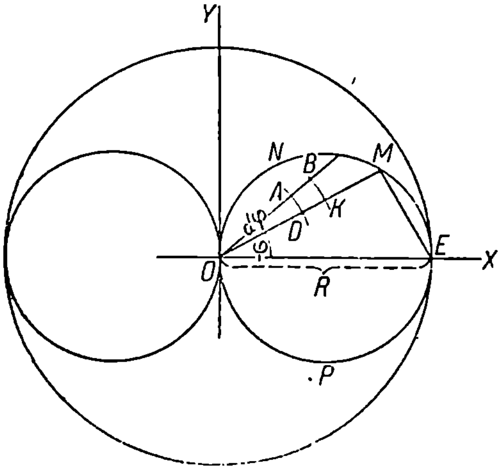
36. იპოვეთ $\rho=a\cos 2\varphi$ ოთხფოთლიანი ყვავილის ფართობი.

პას. $S=\dfrac{\pi\,a^2}{2}$

37. იპოვეთ $\rho=a\cos 3\varphi$ სამფოთლიანი ყვავილის ფართობი.

პას. $S=\dfrac{\pi\,a^2}{4}$

38. ვიპოვოთ სფეროს იმ ნაწილის მოცულობა, რომელსაც ამოსჭრის მასში გამავალი (თავიდან ბოლომდე) ორი თანასწორი წრიული ცილინდრი, რომლებიც ერთმანეთს ეხება სფეროს დიამეტრზე და თითოეული მათგანის ფუძის რადიუსი სფეროს რადიუსის ნახევარს ეტოლება (ნახ. 43).



ნახ. 43

მივიღოთ სფეროს ცენტრი სწორკუთხიანი სისტემის სათავედ. დიამეტრი, რომელიც ორივე ცილინდრის საერთო მსახველს წარმოადგენს, ჩავთვალოთ OZ ღერძად, ხოლო სფეროს დიდი წრე კი, რომელიც ამ ღერძის პერპენდიკულარია—XOY სიბრტყედ (ნახაზი მთლიანად ამ სიბრტყეზეა მოთავსებული). OX ღერძი ცილინდრების კვეთის ცენტრებზე გადის (ნახაზზე ცილინდრების კვეთა — წრეებია), ხოლო OY ღერძი კი ამ ორი კვეთის (წრის) საერთო შემხებია.

განვიხილოთ მოცულობა იმ სხეულისა, რომელიც შემოსაზღვრულია: 1) XOY სიბრტყით; 2) XOZ სიბრტყით; 3) ცილინდრული პირეულის მეოთხედით (მოცემული ცილინდრის პირეულის მეოთხედით) და 4) სფეროს პირეულის ნაწილით.

ცხადია, აქედან რვა ასეთი სხეულის მოცულობა წარმოადგენს საძიებელ მოცულობას, ე. ი.

$$V=8\,V_1 .$$

ვიპოვოთ ახლა V_1. ამისთვის V_1 მოცულობა დავანაწილოთ ელემენტარულ მოცულობებად (პრიზმებად). თითოეული მათგანის სიმაღლე არის

$$z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$$

(მიღებულია სფეროს განტოლებიდან: $x^2+y^2+z^2=R^2$), ხოლო ფუძე კი $ABKD$ სწორკუთხედი.

სიმარტივისათვის გამოვსახოთ ამ სწორკუთხედის ფართობი პოლარ კოორდინატებში:

$$\text{ფ}\,ABKD=BK\cdot DK$$

ანუ რადგან

$$\overset{\frown}{BK}=\rho\,d\varphi;\quad (\rho=OM)\quad \text{და}\quad DK=d\rho$$

ამიტომ

$$\text{ფ}\,ABKD=\rho\,d\varphi\cdot d\rho$$

მაშასადამე, ელემენტარული მოცულობა$=z\cdot\rho\,d\rho\cdot d\varphi$. აქედან ამ ელემენტარულ მოცულობათა შეჯამება მოგვცემს მთელ V_1 მოცულობას, რაც, როგორც ვიცით, გამოისახება ინტეგრალის საშუალებით.

ახლა საჭიროა გამოვარკვიოთ: რომელ საზღვრებში უნდა იქნას გამოთვლილი ინტეგრალი. ცხადია, φ კუთხე იცვლება ნოლიდან $\frac{\pi}{2}$-დე, ხოლო ერთიდაიმავე კუთხისთვის კი ρ იცვლება ნოლიდან შესაფერი ქორდის სიგრძემდე (როგორც, მაგალითად, OM). მაგრამ OME სწორკუთხიანი სამკუთხედიდან

$$OM=R\cos\varphi,$$

მაშ ρ იცვლება ნოლიდან $R\cos\varphi$-დე.

როგორც ვხედავთ, შეჯამება ორჯერ უნდა მოვახდინოთ. მაშასადამე, საძიებელი მოცულობა გამოისახება ორჯერადი ინტეგრალით:

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi} z\,\rho\,d\rho\cdot d\varphi$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა z გამოვსახოთ ρ საშუალებით, ამისთვის

$$z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$$

განტოლებაში ჩავსვათ $x^2+y^2=\rho^2$ მნიშვნელობა, გვექნება

$$z=\sqrt{R^2-\rho^2}$$

ამრიგად

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{\pi R^3}{6}-\frac{4R^3}{9}.$$

აქედან

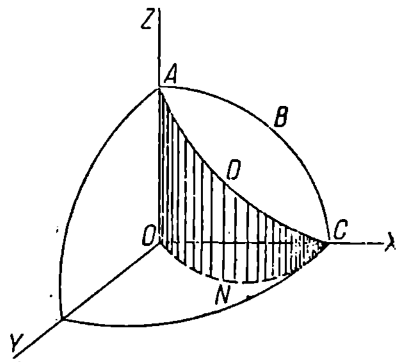
$$V=8\left(\frac{\pi R^3}{6}-\frac{4R^3}{9}\right)$$

დავალება: როგორ გამოისახება სფეროსი და მოძებნილი მოცულობის სხვაობა?

39. წინა ამოცანასთან დაკავშირებით ვიპოვოთ სფეროს პირეულის ის ნაწილი, რომელიც ამოჭრილია ერთერთი ცილინდრის მიერ (ორივე თავიდან).

წინა ნახაზზე საძიებელი პირეული არა ჩანს, გვაქვს მხოლოდ მისი პროექცია — $ONMP$ წრე.

ვინაიდან XOY და XOZ სიბრტყეებით ცილინდრი ოთხ სიმეტრულ ნაწილად იყოფა, ამიტომ განვიხილოთ ერთი ასეთი ნაწილი (ნახ. 44).



ნახ. 44

$ABCD$ საძიებელი პირეულის ერთი მეოთხედია, ხოლო ONC ნახევარწრე მისი პროექცია.

ავიღოთ ამ პროექციაზე ელემენტარული ფართობი და აღვნიშნოთ dw-თი. როგორც ვიცით, დასაგეგმი პირეულის ელემენტი ასე გამოისახება:

$\frac{dw}{\cos\gamma}$, სადაც

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

აქედან ამ ელემენტების შეჯამება მოგვცემს მთელ $ABCD$ პირეულს. სიმარტივისთვის ინტეგრალი გამოვთვალოთ პოლარ კოორდინატებში.

$$dw = \rho \, d\rho \cdot d\varphi .$$

გამოვსახოთ ახლა $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

რადიკალქვეშ შემავალი კერძო წარმოებულები ρ და φ-ის საშუალებით. ამისთვის ავიღოთ სფეროს განტოლება

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

აქედან

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

და

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{y}{z}\right)^2} = \frac{R}{z} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \qquad (\text{რადგანაც } \rho^2 = x^2+y^2).$$

თუ საძიებელ პირეულს აღვნიშნავთ S-თი, გვექნება:

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} \frac{R\,\rho\, d\rho \cdot d\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

ახუ

$$S = 4R\int^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int^{R\cos\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \underline{2\pi R^2 - 4R^2}.$$

ამრიგად, საძიებელი პირეული უდრის სფეროს პირეულის ნახევარს, გამოაკლდეს დიამეტრზე აგებული კვადრატის ფართობი.

ინერციის მომენტი პოლარ კოორდინატებში

ინერციის მომენტის მოსაძებნად პოლარ კოორდინატებში უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$I=\iint_S \rho^3\,d\theta\,d\rho$$

1. ვიპოვოთ $\rho=R$ წრის ინერციის მომენტი სათავის მიმართ.

ინტეგრაციის საზღვრები ისეთივე წესით აიღება, როგორც ფართობის მოძებნის დროს, ე. ი. პირველ მეოთხედში θ იცვლება O-დან $\frac{\pi}{2}$-დე და ρ იცვლება O-დან R-დე.

ამრიგად

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \rho^3\,d\theta\,d\rho=\frac{\pi R^4}{2}$$

ამავე წრის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ ასე მოიძებნება:

$$I_x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \rho^3\sin^2\theta\,d\theta\,d\rho=\frac{\pi R^4}{4}$$

მითითება: $y^2=\rho^2\sin^2\theta$.

2. ვიპოვოთ $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ ლემნისკატის ინერციის მომენტი სათავის მიმართ.

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^3\,d\theta\,d\rho=\frac{\pi a^4}{8}$$

ამავე ლემნისკატის ინერციის მომენტი აბსცისთა ღერძის მიმართ:

$$I_x=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^3\sin^2\theta\,d\theta\,d\rho$$ დაიყვანეთ ბოლომდე.

3. ვიპოვოთ $\rho=a(1-\cos\theta)$ კარდიოიდის ინერციის მომენტი სათავის მიმართ.

$$I=2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1-\cos\theta)} \rho^3\,d\theta\,d\rho=\frac{35a^4\pi}{16}$$

თ ა ვ ი მ ე ხ უ თ ე

ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

როგორც თავის დროზედაც იყო აღნიშნული, ინტეგრალი ყოველთვის არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციათა საშუალებით (ე. ი. ალგებრულ, ტრიგონომეტრიულ, ლოგარითმულ და მაჩვენებლიან ფუნქციათა საშუალებით). ასე, მაგალითად, ქვემოთ ჩამოთვლილი ინტეგრალები ელემენტარულ ფუნქციებში არ გამოისახება:

1. $\int \frac{\sin x \, dx}{x}$ „ინტეგრალური სინუსი“.

2. $\int \frac{\cos x \, dx}{x}$ „ინტეგრალური კოსინუსი“.

3. $\int \frac{dx}{\log x}$ „ინტეგრალური ლოგარითმი“.

4. $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$

5. $\int e^{-x^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm x^3}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm x^4}}$

$\left.\right\}$ „ელიფსური ინტეგრალები“.

8. $$\int \frac{\sin ax \cdot \cos bx}{x} dx$$

9. $$\int \sin (x^2)\, dx$$ „ფრენელის ინტეგრალი"

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

და სხვა ასეთი.

ასეთი ინტეგრალების გამოთვლა ჩვეულებრივი მეთოდებით არ ხერხდება. მათი გამოთვლა წარმოებს მიახლოებით.

მიახლოებითი გამოთვლა მაშინაც არის მიზანშეწონილი, როდესაც ინტეგრალი, მართალია, ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით გამოისახება, მაგრამ იგი იმდენად რთული სახისაა, რომ გამოთვლა დიდ სიძნელეს წარმოადგენს.

ჩვენ ვისარგებლეთ მიახლოებითი გამოანგარიშების სამი ფორმულით:

I. $$\int_a^b y\, dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0+y_1+y_2+\cdot \quad \cdot+y_{n-1})$$ ნაკლებობით

და

$$\int_a^b y\, dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0+y_1+y_2+\cdot \quad \cdot+y_n)$$ მეტობით.

ამ ფორმულებს სწორკუთხედების ფორმულები ეწოდება. n არის იმ ნაწილების (ქვეშუალედების) რიცხვი, რომლებზედაც დაყოფილია მოცემული (a, b) შუალედი. (სიმარტივის თვალსაზრისით, ტოლი ქვეშუალედებია აღებული).

$y_0, y_1, y_2 \cdot$ არის ფუნქციის მნიშვნელობანი, რომლებიც a, $a+\Delta x$, $a+2\Delta x \cdot$ წერტილებს შეეფერება.

Δx-ით აღნიშნულია ზემოთ ნათქვამი ქვეშუალედი, ე. ი.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

შენიშვნა: სწორკუთხედების ფორმულას ის ნაკლი ახასიათებს, რომ საკმაო ზუსტი შედეგის მისაღებად n (ქვეშუალედების რიცხვი) ძალიან დიდი უნდა იყოს.

II. $$\int_0^b y\, dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+ \qquad +y_{n-1}\right)$$

ამ ფორმულას ტრაპეციის ფორმულა ეწოდება.

y_0 და y_n ფუნქციის მნიშვნელობანია, რომელნიც $x_0=a$ და $x_n=b$ წერტილებს შეეფერება, ხოლო $y_1, y_2, y_3, \cdot \quad \cdot y_{n-1}$ იმავე ფუნქციის მნიშვნელობანი, რომელნიც $x_1=a+\Delta x, \quad x_2=a+2\Delta x, \cdot \cdot \quad x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x$ წერტილებს შეესაბამება.

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

$$\text{III.} \quad \int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2)$$

ეს არის სიმპსონის (Simpson) ელემენტარული ფორმულა, სადაც y_0, y_1, y_2 ფუნქციის მნიშვნელობანია

$$x_0=a, \quad x_1=\frac{a+b}{2}, \quad x_2=b \quad \text{წერტილებისთვის.}$$

$$\int_a^b y\,dx=\frac{b-a}{3n}[y_0+y_n+2(y_2+y_4+\cdot \quad \cdot)+4(y_1+y_3+y_5+\cdot \cdot \cdot)]$$

სიმპსონის ზოგადი ფორმულა, სადაც y_0 და y_n ფუნქციის მნიშვნელობანია $x_0=a$ და $x_n=b$ წერტილებისთვის, ხოლო $y_1, y_2, y_3 \cdot \quad \cdot$ იმავე ფუნქციის მნიშვნელობანი

$$x_1=a+\Delta x, \quad x_2=a+2\Delta x, \quad x_3=a+3\Delta x \cdot \quad \cdot \text{ წერტილებისთვის}$$

$$\Delta x=\frac{a-b}{n}.$$

შენიშვნა: ერთიდაიმავე n-სთვის სიმპსონის ფორმულით მიღებული შედეგი უფრო ზუსტია, ვიდრე ტრაპეციის ფორმულით.

1. გამოვთვალოთ ასეთი ინტეგრალი $\int_0^1 x^2\,dx; \quad n=5.$

ამ შემთხვევაში სწორკუთხედების ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int^1 x^2\,dx \approx \frac{1-0}{5}(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4).$$

თუ ახლა (0, 1) შუალედს ხუთ თანასწორ ნაწილად გავყოფთ, გვექნება: $0; \ \frac{1}{5}; \ \frac{2}{5}; \ \frac{3}{5}; \ \frac{4}{5}$ წერტილები. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი x^2-ში, მივიღებთ ფუნქციის შესაფერ მნიშვნელობებს:

$$y_0=0;\quad y_1=\frac{1}{25};\quad y_2=\frac{4}{25};\quad y_3=\frac{9}{25};\quad y_4=\frac{16}{25}$$

აქედან

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{5}\left(0+\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)=\frac{6}{25}.$$

მოცემული ინტეგრალი გამოვთვალოთ ახლა ჩვეულებრივი წესით:

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

განსხვავება (ცდომილება)$=\frac{7}{75}$. რაოდენადაც n დიდი იქნება, იმდენად ეს ცდომილება მცირეა.

$$2.\quad \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};\qquad n=4,$$

გავყოთ (2, 5) შუალედი ოთხ თანასწორ ნაწილად. ერთი ასეთი ნაწილი არის $\frac{3}{4}$, მაშასადამე, გვაქვს წერტილები: 2; $2\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{4}$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$-ში, მივიღებთ:

$$y_0=\frac{1}{3};\quad y_1=\frac{8}{\sqrt{1395}};\quad y_2=\frac{4}{\sqrt{702}};\quad y_3=\frac{8}{\sqrt{4977}}$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{5-2}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{\sqrt{1395}}+\frac{4}{\sqrt{702}}+\frac{8}{\sqrt{4977}}\right).$$

დაიყვანეთ ბოლომდე, რისთვისაც უნდა ამოიღოთ მიახლოებითი ფესვები 0,01-ის სიზუსტით და შეაჯამოთ.

$$3.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx;\qquad n=6.$$

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედის ერთი მეექვსედი არის 15°, აქედან:

0°; 15°; 30°; 45°; 60°; 75°.

ვიპოვოთ ახლა ფუნქციის მნიშვნელობანი:

$$y_0=\sin 0°=0 \qquad y_3=\sin 45°=0{,}71$$

$$y_1=\sin 15°=0{,}26 \qquad y_4=\sin 60°=0{,}87$$

$$y_2=\sin 30°=0{,}50 \qquad y_5=\sin 75°=0{,}97$$

სწორკუთხედების ფორმულის მიხედვით:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{12}(0+0{,}26+0{,}50+0{,}71+0{,}87+0{,}97)=$$

$$=\frac{3{,}14}{12}\cdot 3{,}31=0{,}86.$$

გამოვთვალოთ იგივე ინტეგრალი ჩვეულებრივი წესით:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1. \text{ განსხვავება}=0{,}14.$$

4. გამოვთვალოთ ახლა $\int_0^1 x^2\,dx$ ტრაპეციის ფორმულით. $n=5$.

როგორც ზემოთ გამოვარკვიეთ:

$$y_0=0;\quad y_1=\frac{1}{25};\quad y_2=\frac{4}{25};\quad y_3=\frac{9}{25};\quad y_4=\frac{16}{25};\quad y_5=1$$

ტრაპეციის ფორმულის მიხედვით:

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{0+1}{2}+\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)=\frac{17}{50}$$

ჩვეულებრივი წესით თუ გამოვთვლით:

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

განსხვავება $\frac{1}{150}$. ეს განსხვავება შემცირდება, თუ n-ს გავადიდებთ.

$$5. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx; \quad n=6.$$

თანახმად მე-3 მაგალითისა:

$y_0=0$: $y_1=0{,}26$; $y_2=0{,}50$; $y_3=0{,}71$; $y_4=0{,}87$; $y_5=0{,}97$; $y_6=1$.

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი ტრაპეციის ფორმულაში:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{12}\left(\frac{0+1}{2}+0{,}26+0{,}50+0{,}71+0{,}87+0{,}97\right)=0{,}99$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

(თითოეული ინტეგრალი გამოთვალეთ სწორკუთხედებისა და ტრაპეციის ფორმულით)

1. $\int_0^2 x^3\, dx$; $\quad n=4$

2. $\int_2^3 \frac{dx}{x}$; $\quad n=5$

3. $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$; $\quad n=8$

4. $\int_1^4 \frac{dx}{1+x^2}$; $\quad n=6$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\quad n=4$

6. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-1}$; $\quad n=5$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; $\quad n=4$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$; $\quad n=10$

9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$; $\quad n=10$

10. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; $\quad n=6$

ზემოთ განხილული $\int_0^1 x^2\, dx$ ინტეგრალი გამოვთვალოთ სიმპსონის ფორმულით.

მოცემულ შემთხვევაში $y_0=0$; $\quad y_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$; $\quad y_2=1^2=1$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი სიმპსონის ელემენტარულ ფორმულაში:

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1-0}{6}\left(0+4\cdot\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{3}$$

ჩვეულებრივი წესით თუ გამოვთვლით ინტეგრალს, მივიღებთ აგრეთვე $\frac{1}{3}$.

განხილული მაგალითიდან ჩანს, რომ სიმპსონის ფორმულა უფრო ზუსტ პასუხს გვაძლევს, ვიდრე სწორკუთხედებისა და ტრაპეციის ფორმულა.

$$2.\quad \int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

გვაქვს

$$y_0=e^0=1\,;\quad y_1=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{\frac{1}{4}}\,;\quad y_2=e.$$

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left(1+4e^{\frac{1}{4}}+e\right)$$

$$3.\quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\quad y_1=\frac{4}{\sqrt{70}}\,;\quad y_2=\frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+4\cdot\frac{4}{\sqrt{70}}+\frac{1}{3}\right).$$

ამოიღეთ ფესვები 0,01 სიზუსტით და შეაჯამეთ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება.

$$4.\quad \int_0^2 \frac{dx}{1+x}$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი ჯერ ჩვეულებრივი წესით:

$$\log\,(1+x)\Big|_0^2=\log 3=1{,}09 \qquad (ა)$$

(ლოგარითმი ნატურალური ფუძით არის გამოთვლილი).

აღნიშნული ინტეგრალი გამოვთვალოთ ახლა სიმპსონის ელემენტარული ფორმულით:

$$y_0=1; \quad y_1=\frac{1}{2}; \quad y_2=\frac{1}{3}.$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{3}\left(1+4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1,11 \qquad (ბ)$$

თუ გვინდა მოცემული ინტეგრალი შედარებით ზუსტად გამოვთვალოთ, ამისთვის ინტეგრალი უნდა დავანაწილოთ ორ ან რამდენიმე ინტეგრალად, მაგალითად

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}+\int_0^2 \frac{dx}{1+x}$$

გამოვთვალოთ თითოეული ინტეგრალი ცალცალკე სიმპსონის ფორმულით:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{6}\left(1+4\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{36}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+4\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{73}{180}$$

ამრიგად

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{25}{36}+\frac{73}{180}=1, \qquad (გ)$$

(ა)-ს შევადაროთ (ბ) და (გ). მეორე შედეგი, ე. ი. 1,10 უფრო დაახლოებულია (ა)-სთან, ვიდრე (ბ).

ამრიგად, ინტეგრალის შუალედის ორ შუალედად განაწილებით შედარებით უფრო ზუსტ შედეგს ვღებულობთ. თუ შუალედს სამ შუალედად დავანაწილებთ, უფრო ზუსტ შედეგს მივიღებთ და ასე შემდეგ.

მაგალითად,

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x}=\int^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{1+x}+\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{1+x}+\int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{dx}{1+x}$$

უფრო ზუსტ შედეგს მოგვცემს, ვიდრე წინა შემთხვევა.

5. გამოვთვალოთ $\int_1^7 \frac{dx}{x+2}$ სიმპსონის ზოგადი ფორმულით. $n=6$.

თუ (1, 7) შუალედს გავყობთ 6 თანასწორ ნაწილად, გვექნება:

0 1 2 3 4 5 6 7

$$y_0=\frac{1}{3}; \quad y_1=\frac{1}{4}; \quad y_2=\frac{1}{5}; \quad y_3=\frac{1}{6}; \quad y_4=\frac{1}{7}; \quad y_5=\frac{1}{8}; \quad y_6=\frac{1}{9}$$

$$\int_1^7 \frac{dx}{x+2} \approx \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]=\frac{2077}{1890}.$$

4. $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x}$; $\qquad n=6$

გავყოთ (2, 5) შუალედი 6 თანასწორ ნაწილად. ერთი ასეთი ნაწილი არის $\frac{1}{2}$. გვექნება.

0 2 $2\frac{1}{2}$ 3 $3\frac{1}{2}$ 4 $4\frac{1}{2}$ 5

$$y_0=\frac{1}{2}; \quad y_1=\frac{2}{5}; \quad y_2=\frac{1}{3}; \quad y_3=\frac{2}{7}; \quad y_4=\frac{1}{4}; \quad y_5=\frac{2}{9}; \quad y_6=\frac{1}{5}$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\right)\right]=\frac{866}{945}$$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$; $\qquad =4$

გავყოთ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ოთხ თანასწორ ნაწილად. ერთი ასეთი ნაწილი არის $11^\circ 15'$, აქედან

$$y_0=\operatorname{tg} 0=0; \quad y_1=\operatorname{tg} 11^\circ 15'=0{,}199; \quad y_2=\operatorname{tg} 22^\circ 30'=0{,}414;$$

$$y_3=\operatorname{tg} 33^\circ 45'=0{,}669; \quad y_4=\operatorname{tg} 45^\circ=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx \approx \frac{\pi}{48}[0+1+2\cdot 0{,}414+4(0{,}199+0{,}669)]=$$

$$=\frac{3{,}141\cdot 5{,}3}{48}.$$

სავარჯიშო

(სადაც n არ არის მოცემული, გამოთვალეთ ელემენტარული ფორმულით).

8. $\int_0^2 x^4\,dx$

9. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$

10. $\int_1^4 \frac{dx}{x+3}$

11. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

12. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

13. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

14. $\int^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx$

16. $\int_0^4 x^2\,dx \qquad n=3$

17. $\int^6 \frac{dx}{x}; \qquad n=4$

18. $\int_0^3 x\,dx; \qquad n=6$

19. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-1}; \qquad n=5$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx; \qquad n=6$

ინტეგრალის გამოთვლა მწკრივების საშუალებით

ინტეგრალის გამოთვლის დროს ზოგჯერ ტრაპეციისა და სიმპსონის ფორმულის ნაცვლად ხელსაყრელია ფუნქციის მწკრივად გაშლა და შემდეგ წევრობრივი ინტეგრაცია.

შენიშვნა: ნაგულისხმევია, რომ მოსამარჯვებელი მწკრივი კრებადია.

გამოთვალეთ ასეთი $\int_0^1 \frac{\sin x\,dx}{x}$ ინტეგრალი როგორც ვიცით, (მაკლორენის მწკრივის მიხედვით).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdot$$

აქედან

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdot$$

$$\int_0^1\frac{\sin x\,dx}{x}=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{x^2\,dx}{3!}+\int_0^1\frac{x^4\,dx}{5!}-\int_0^1\frac{x^6\,dx}{7!}+\cdot\quad\cdot=$$

$$=1-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{7}+\cdot$$

თუ თავიდან რამდენიმე წევრს ავიღებთ, მაშინ მათი ჯამი წარმოადგენს ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობას.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\int_1^2\frac{\cos x\,dx}{x};\qquad\int_1^2\frac{e^x\,dx}{x};\qquad\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

დამატება

ფუნქციათა გაშლა ტრიგონომეტრიულ მწკრივებად. ფურიეს (FOURIER) მწკრივი

ჰარმონიული რყევის კანონი ასეთი ფორმულით გამოისახება:

$$S=A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

სადაც, როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ (იხილე დიფერენციალურ განტოლებათა შედგენა), A არის რყევის ამპლიტუდი, T—პერიოდი (დროის მონაკვეთი, რომლის განმავლობაში ესათუის მოვლენა მეორდება),

$$\frac{2\pi}{T}=\omega.$$

რყევის სიხშირე. $\omega t+\varphi$ ეწოდება რყევის ფაზისი, ხოლო φ— საწყისი ფაზისი.

ავიღოთ ახლა ფუნქცია

$$y=P\sin(\omega x+\alpha)$$

და მარჯვენა მხარე ასე წარმოვადგინოთ:

$$P\sin\omega x\cdot\cos\alpha+P\sin\alpha\cdot\cos\omega x$$

აღვნიშნოთ

$$P\sin\alpha=a;\quad P\cos\alpha=b$$

გვექნება

$$y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$$

მიღებულ ფუნქციას ჰარმონიკი ეწოდება და მისი პერიოდი არის

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

ტექნიკაში რთულ პერიოდულ მოვლენათა შესწავლისა და კვლევის დროს საჭირო ხდება რამდენიმე ჰარმონიკის ერთად განხილვა ანუ მათი შეჯამება.

თუ ჩვენ შევაჯამებთ ჰარმონიკებს (რომელთა სიხშირე შესაბამად არის: ω, 2ω, $3\omega \cdot \quad \cdot n\omega$), მივიღებთ ასეთი სახის პერიოდულ ფუნქციას:

$$S(x) = a_0 + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) +$$

$$+ \cdot \quad \cdot + (a_n \cos n \omega x + b_n \sin n \omega x)\,*$$

მიღებული პერიოდული ფუნქცია დავწეროთ ახლა უსასრულო მწკრივის სახით:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) +$$

$$+ \cdot \quad \cdot + (a_n \cos n \omega x + b_n \sin n \omega x) + \cdot \qquad (ა)$$

ამ მწკრივს ფურიეს (Fourier) მწკრივი ეწოდება, სადაც a_0, a_1, $b_1 \cdot$ a_n, b_n მუდმივი კოეფიციენტებია.

უკანასკნელი მწკრივი საშუალებას გვაძლევს ნებითი პერიოდული ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემადგენელი ჰარმონიკების ჯამის სახით, რომელთა პერიოდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \cdot \quad \cdot$, ხოლო სიხშირენი კი $1 : 2 : 3 \cdot$

ამრიგად, Fourier-ის მწკრივის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ რთული პერიოდული მოვლენის კანონი [რომელიც ხასიათდება $f(x)$ ფუნქციით] მიიყვანება ჰარმონიული რყევის მარტივ კანონებზე. ეს მარტივი კანონები მოქმედებენ ცალკეულად, ერთმანეთისგან სრულიად დამოუკიდებლად, მაგრამ მათი მოქმედება შემდეგ ერთიანდება და, ამგვარად, ვღებულობთ ერთ მთლიან ჰარმონიულ შედეგს.

მაგალითად, მრავალ შემთხვევაში ტექნიკის საკითხების კვლევის დროს ესათუის რთული პერიოდული ძალა უნდა დაიშალოს შემადგენელ ჰარმონიკებად. ცალკე გათვალისწინებულ უნდა იქნას მათი მოქმედებანი და შემდეგ მოხდეს ამ მოქმედებათა შეჯამება.

შენიშვნა: პრაქტიკაში თითქმის არას დროს არა გვაქვს საქმე ზემოთ დაწერილ უსასრულო მწკრივთან. ჩვეულებრივ კმაყოფილდებიან რამდენიმე წევრით (დაწყებული თავიდან). გარდა ამისა გამოყენებითს დარგებში ხშირად საჭიროა ფუნქციის ისეთ მწკრივად გალშა, რომელიც ან მხოლოდ სინუსებს შეიცავს, ან მარტო კოსინუსებს.

---

* მართალია, მარჯვენა მხარეზე მიმატებულია a_0, მაგრამ ასეთი მიმატება გავლენას არ ახდენს პერიოდობაზე, არსებითად a_0 არის ნულოვანი რიგის ჰარმონიკი.

მოცემული ფუნქციის გაშლა Fourier მწკრივად წარმოადგენს ეგრეთ-წოდებული „ჰარმონიული ანალიზის“ შინაარსს. აღნიშნული მწკრივით სარგებლობის დროს აქტუალური მნიშვნელობა ენიჭება a_0, a_n, b_n კოე-ფიციენტების მოძებნას. მათი მოძებნა დამყარებულია შემდეგ ინტეგრა-ლებზე:

$$\int_0^T \sin n\,\omega x\,dx=0\,; \qquad \int_0^T \cos n\,\omega x\,dx=0 \qquad (1)$$

$$\int_0^T \cos m\,\omega x \quad \cos n\,\omega x\,dx= \begin{cases} 0, & \text{თუ } m\neq n \\ \dfrac{T}{2}, & \text{თუ } m=n \end{cases} \qquad (2)$$

$$\int_0^T \sin m\,\omega\,x \cdot \sin n\,\omega\,x\,dx= \begin{cases} 0, & \text{თუ } m\neq n \\ \dfrac{T}{2}, & \text{თუ } m=n \end{cases} \qquad (3)$$

$$\int_0^T \cos m\,\omega\,x \cdot \sin n\,\omega\,x\,dx=0 \qquad (4)$$

შეამოწმეთ ამ ინტეგრალების სამართლიანობა. ჩასმის დროს მხედვე-ლობაში მიიღეთ $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

a_0-ს გამოსათვლელად ასე უნდა მოვიქცეთ: გავაინტეგროთ (ა)-ს ყოველი წევრი O-დან T-დე. მარცხენა მხარეზე გვექნება $\int_0^T f(x)\,dx$, ხოლო მარჯვენა მხარზე კი $\int_0^T a_0\,dx$, დანარჩენი წევრები ყველა მოისპობა თანახმად (1)-სა.

ამრიგად,

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_0^T a_0\,dx=a_0\;T$$

აქედან

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \qquad (5)$$

a_n-ის მოსაძებნად გავამრავლოთ (ა)-ს ორივე მხარე $\cos n\,\omega\,x$ და გა-ვაინტეგროთ ყოველი წევრი O-დან T-დე. მარჯვენა მხარეზე ინტეგრა-ლები ყველა მოისპობა, გარდა $a_n\int_0^T \cos^2 n\,\omega\,x\,dx$, თანახმად (2) და (4)-სა.

ამრიგად, მივიღებთ:

$$\int_0^T f(x)\cos n\,\omega\,x\,dx = a_n\int_0^T \cos^2 n\,\omega\,x\,dx = \frac{a_n T}{2},$$

აქედან

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos n\,\omega\,x\,dx \tag{6}$$

ანალოგიურად მოიძებნება b_n. ამისთვის (ა)-ს ორივე მხარე გავამრავლოთ $\sin n\,\omega\,x$ და გავაინტეგროთ ყოველი წევრი 0-დან T-დე. მარჯვენა მხარეზე ინტეგრალები ყველა მოისპობა, გარდა $b_n\int_0^T \sin^2 n\,\omega\,x\,dx$, თანახმად (3) და (4)-სა.

ამრიგად, გვაქვს:

$$\int_0^T f(x)\sin n\,\omega\,x\,dx = b_n\int_0^T \sin^2 n\,\omega\,x\,dx = \frac{b_n T}{2},$$

აქედან

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin n\,\omega\,x\,dx \tag{7}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\omega = 1$ (ანუ $T = 2\pi$), მაშინ Fourier მწკრივი ასეთ სახეს ღებულობს:

$$f(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) +$$

$$+ (a_3\cos 3x + b_3\sin 3x) + \tag{ბ}$$

(5), (6) და (7) ფორმულები კი დაიწერება:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n\,x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x)\sin n\,x\,dx$$

როდესაც $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი არის 2π, უკანასკნელი ფორმულები ასეც შეიძლება დაიწეროს:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos n\,x\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin n\,x\,dx$$

1. გავშალოთ მწკრივად $f(x)=\frac{x}{4}$ ფუნქცია $(-\pi,\ +\pi)$ შუალედში, თუ პერიოდი არის 2π.

რადგან ფუნქციის პერიოდი არის 2π, ამიტომ შეგვიძლიან გამოვიყენოთ უკანასკნელი ფორმულები:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x}{4}\,dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x}{4}\cos n\,x\,dx=0$$

რადგან

$$a_0=0 \text{ და } a_n=0,$$

ამიტომ საძიებელი მწკრივი კოსინუსებს არ შეიცავს.

ვიპოვოთ ახლა

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x}{4}\sin n\,x\,dx$$

გამოვთვალოთ ნაწილობრივ:

$$x=u \text{ და } \sin n\,x\,dx=dv,$$

აქედან

$$b_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin n\,x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\,n}\quad x\cos n\,x\Big|_{-\pi}^{+\pi}+\frac{1}{4\pi\,n}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos n\,x\,dx\,.$$

მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალი ნულის ტოლია, მაშასადამე,

$$b_n = -\frac{1}{4n}\left[\cos n\pi + \cos(-n\pi)\right] = -\frac{1}{2n}\cos n\pi.$$

როდესაც n კენტია, გვაქვს:

$$b_1 = \frac{1}{2}; \quad b_3 = \frac{1}{6}; \quad b_5 = \frac{1}{10} \cdot \cdot$$

როდესაც n წყვილია:

$$b_2 = -\frac{1}{4}; \quad b_4 = -\frac{1}{8}; \quad b_6 = -\frac{1}{12}.$$

აღნიშნულის გამო მოცემული ფუნქცია ასე გაიშლება:

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{8}\sin 4x + \cdot$$

დავალება: ანალოგიურად გაშალეთ მწკრივებად $\frac{x}{3}$ და $\frac{\pi}{2}$ ფუნქციები $(-\pi, +\pi)$ შუალედში. პერიოდი 2π.

2. გავშალოთ ახლა მწკრივად $\frac{x^2}{8}$ ფუნქცია $(-\pi, +\pi)$ შუალედში. პერიოდი 2π.

მართალია, ამ ფუნქციის გაშლის დროს კოეფიციენტები საერთო წესით გამოითვლება, მაგრამ უფრო მიზანშეწონილია აქ ასე მოვიქცეთ.

ავიღოთ $\frac{x}{4}$ ფუნქციის გაშლა:

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin 3x \cdot$$

გავაინტეგროთ ორივე მხარე. ინტეგრობის დროს მიღებული მუდმივ ავღნიშნოთ a_0-თი. გვექნება:

$$\int \frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,dx + \frac{1}{6}\int \sin 3x\,dx \cdot$$

აქედან

$$\frac{x^2}{8} = a_0 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{18}\cos 3x + \cdot \tag{I}$$

განვსაზღვროთ ახლა a_0, ამისთვის გავაინტეგროთ უკანასკნელი ტოლობა $-\pi$-დან $+\pi$-დე.

მარჯვენა მხარეზე ინტეგრალები ყველა მოისპობა, გარდა პირველი ინტეგრალისა. მაშასადამე,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2}{8}\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx$$

აქედან

$$a_0 = \frac{\pi^2}{24}$$

ჩავსვათ მიღებული a_0-ს მნიშვნელობა (I)-ში:

$$\frac{x^2}{8} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{18}\cos 3x + \cdot$$

დავალება: გაშალეთ x და $\frac{x}{5}$ ფუნქციები. შემდეგ წინა მაგალითის ანალოგიურად იპოვეთ $\frac{x^2}{2}$ და $\frac{x^2}{10}$. [შუალედი არის $(-\pi, +\pi)$, პერიოდი 2π].

3. გაშალეთ π, e^x, $\cos x$ ფუნქციები $(-\pi, +\pi)$ შუალედში.

Fourier-ს მწკრივის კოეფიციენტების გამოთვლა ასეც წარმოებს:

როგორც ვიცით,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx,$$

როდესაც $f(x)$ ფუნქცია წყვილია, და

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = 0,$$

როდესაც $f(x)$ კენტია. (იხილე შენიშვნა გვ. 102)

ამის გამო გვაქვს:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx\,; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos n x\, dx\,; \quad b_n = 0 \qquad (\mathrm{I}_1)$$

როდესაც $f(x)$ წყვილია,

და

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin n x\, dx \qquad (\mathrm{II}_1)$$

როდესაც $f(x)$ კენტია,

როდესაც ნებითი $f(x)$ ფუნქციაა მოცემული, მაშინ შესაძლებელია მისი გაშლა $(0, \pi)$ შუალედში ისეთ მწკრივად, რომელიც მარტო სინუსებს შეიცავს და ისეთ მწკრივადაც, რომელიც მარტო კოსინუსებს შეიცავს. პირველ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ (II_2) ფორმულით, ხოლო მეორე შემთხვევაში (I_1) ფორმულით.

4. პირველ მაგალითში ჩვენ $\frac{x}{4}$ გავშალეთ სინუსებად $(-\pi, +\pi)$ შუალედში. გავშალოთ ახლა იგივე ფუნქცია კოსინუსებად $(0, \pi)$ შუალედში. კოეფიციენტების მოსაძებნად ვისარგებლოთ (I_1) ფორმულით:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{4}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{4}\cos n x\,dx = \frac{1}{2\pi n^2}(\cos n\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ თუ } n \text{ წყვილია და} \\ -\dfrac{1}{\pi n^2}, \text{ თუ } n \text{ კენტია} \end{cases}$$

აქედან მოცემული ფუნქცია ასე გაიშლება:

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\cos x - \frac{1}{3\pi}\cos 3x \cdot$$

ანუ

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \cdot \quad \cdot\right)$$

5. გაშალეთ $\frac{x^2}{2}$ სინუსებად $(0, \pi)$ შუალედში.

მითითება: ისარგებლეთ (II_2) ფორმულით.

შენიშვნა: იმ შემთხვევაში, როდესაც ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების ზუსტი გამოთვლა მოუხერხებელია ან შეუძლებელი, მაშინ უნდა მივმართოთ ინტეგრალების მიახლოებითი გამოანგარიშების ერთ-ერთ ფორმულას.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

თ ა ვ ი პ ი რ ვ ე ლ ი

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

თ ა ვ ი მ ე ო რ ე

განსაზღვრული ინტეგრალები

თავი მესამე

დიფერენციალური განტოლებანი

თავი მეოთხე

ორჯერადი ინტეგრალები

თავი მეხუთე

ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

დამატება

მკითხველის საყურადღებოდ!

სანამ წიგნის კითხვას დაიწყებდეთ გაუგებრობის თავიდან ასაცდენად წინასწარ გაასწორეთ კორექტურული შეცდომები.

შეცდომები უმთავრესად იმით არის გამოწვეული, რომ ბეჭდვის დროს მანქანაზე ამოცვივდა ნიშნები.

შემჩნეული შეცდომები

გვ.	სტრიქ.	სწერია	უნდა იყოს
4	5 ქვევ.	dx	dz
9	№ 6	$\int \sin x\,dx = \cos x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
10	1 ქვევ.	$2x^{-\frac{1}{2}} + C$	$2x^{\frac{1}{2}} + C$
11	1 „	ფორმულაზე	სახეზე
16	8 ზევ.	(6)	(−6)
18	7 „	dx	dz
25	1 ქვევ.	$du = \sin x\,dx$	$du = -\sin x\,dx$
26	11 ზევ.	$\int \frac{1+\cos^2 x}{2}dx$	$\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx$
26	1 ქვევ.	$-\frac{\cos^2 x}{2}$	$-\frac{\cos 2x}{2}$
27	8 ზევ.	ჯამის	სხვაობის
28	2 ზევ.	$3\int \frac{x}{(x^2+1)^2}$	$3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$
30	3 ქვევ.	$\int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x+5}dx$	$\int \frac{A}{x+2}dx + \int \frac{B}{x-5}dx$
38	1 ქვევ.	$(x-3)^3$	$(x-3)^2$
63	ამოც. 56	$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-4}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x+4}}$
70	2 ქვევ.	co x	$\cos^2\frac{x}{2}$
71	7 ზევ.	$\operatorname{tg}\frac{x}{4} = z$	$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$

გვ. სტრიქ.	ხწერია	უნდა იყოს
75 10 ზევ.	$\int \sin ax \sin bx dx$;	$\int \sin(\alpha x+\beta)\sin(\alpha_1 x+\beta_1)\,dx$
	$\int \cos ax \cos bx dx$;	$\int \cos(\alpha x+\beta)\cos(\alpha_1 x+\beta_1)\,dx$
	$\int \sin ax \cos bx\, dx$	$\int \sin(\alpha x+\beta)\cos(\alpha_1 x+\beta_1)\,dx$
75 1 ქვ.	$a=3$ და $b=2$	$a=3x$ და $b=2x$
76 4 ზევ.	$a=7, \quad b=4$	$a=7x, \quad b=4x$
77 6 ქვ.	$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx+\frac{a^2}{2}z+\frac{a^2}{4}\sin 2z$;	$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx=\frac{a^2}{2}z+\frac{a^2}{4}\sin 2z$
83 5 ქვ.	$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
89 ამოც. 109	$\int (\arcsin x)^2\, dx$	$\int (\arccos x)^2\, dx$
90 ამოც. 139	$\frac{dx}{(2+e^x)^3}=dv$	$\frac{e^x\,dx}{(2+e^x)^3}=dv$
90 4 ქვ.	$\cos x$	$\cos 3x$
92 7 და 8 ზევ.	$4A\sin 4x-4B\cos 4x$;	$4A\cos 4x-4B\sin 4x$
92 10 ზევ.	$5A+4B=1$	$5A-4B=1$
123 2 ზევ.	$x^2+(y-b)^2=R^2$	$x^2+(y-R)^2=R^2$
124 7 ქვ.	$\sqrt{R^2-(x-a)}\,dx$	$\sqrt{R^2-(x-a)^2}\,dx$
144 7 ქვ.	$\int_{-a}^{+b} f(x)\,dx$	$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$
146 3 ქვ.	$\int_a^{c\to\varepsilon}$	$\int_a^{c-\varepsilon}$
159 4 ქვ.	$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^2y+\varphi(y)$;	$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{2y}+\varphi'(y)$
173 ამოც. 4	$2(x+$	$2(x+1)^4y^4$
175 11 ზევ.	$\int dy=\int$	$\int dy=\int p\,dx$
182 1 ქვ.	$y=\frac{x^3}{12}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C_1x+C_1$	$y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C_1x+C_1$

გვ.	სტრიქ.	სწერია	უნდა იყოს
185	6 და 7 ქვ.	$\int x^4\,dx+C_1;\ y=\frac{C_1x^5}{5}+C_1;$	$\int x^4\,dx+C_2;\quad y=\frac{C_1x^5}{5}+C_2$
186	4 ქვ.	$y-y'\cos x=0$	$y''-y'\cos x=0$
189	6 ქვ.	$y''-7y'+9=0$	$y''-6y'+9y=0$
193	ამოც. 30 და 31	$y^{(VI)}$	$y^{(IV)}$
195	11 ქვ.	$y^{(VI)}$	$y^{(IV)}$
205	ამოც. 13.	$y^{(VI)}$	$y^{(IV)}$
209	1 ზევ.	დახრიბალო	დახრილობა
243	3 ქვ.	$\frac{ax}{a+x}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{a^2}{(a+x)^2}\cdot\frac{dz}{dx};$	$\frac{ax}{a+x}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{a^2}{(a+x)^2}z=x\frac{dz}{dx}$
258	4 ქვ.	$\int^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int^{R\cos\varphi}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}$
262	4 ქვ.	$\int^1 x^2\,dx$	$\int_0^1 x^2\,dx;$
267	6 ზევ.	$\int_0^2=\int_0^1+\int_0^2$	$\int_0^2=\int_0^1+\int_1^2$
„	10 ქვ.	1,	1, 10
268	7 ქვ.	$=4$	$n=4$
269	ამოც. 14 და 17	$\int^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx;\int^6\frac{dx}{x}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx;\int_1^6\frac{dx}{x}$

წიგნის აწყობაზე მუშაობდენ
ინჟინერ გ. ობანეზოვის ხელმძღვანელობით
ასოთ-ამწყობნი
გიორგი დონაძე
გედევან ჭიჭინაძე

გამომშვები ა. ჯალაღანია