ა. ხარაზიშვილი

სიმრავლეთა თეორიის საწყისები

I
ნაწილი

ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი, 2008

ანოტაცია

წიგნში მოცემულია სიმრავლეთა თეორიის მოკლე კურსის შინაარსი და იგი შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო უნივერსიტეტების მათემატიკური პროფილის სტუდენტებისათვის. მასში თავმოყრილი მასალა ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის დონის სტუდენტებს საშუალებას აძლევს თანმიმდევრულად გაეცნონ აღნიშნული თეორიის ძირითად ფაქტებსა და დებულებებს, აქსიომატური მეთოდის უმნიშვნელოვანეს ასპექტებს (სინტაქსსა და სემანტიკას), სიმრავლურ-თეორიულ მსჯელობებსა და კონსტრუქციებს, მათ გამოყენებას მათემატიკის მომიჯნავე დარგებში.

განსაკუთრებული ყურადღება დათმობილი აქვს იმ თემებსა და საკითხებს, რომლებიც დღემდე არ იყო სათანადოდ გაშუქებული ქართულენოვან მათემატიკურ ლიტერატურაში: სიმრავლურ-თეორიულ პარადოქსებს, სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკას, ამორჩევის აქსიომასა და მის სხვადასხვა ფორმას, ორდინალებს ფონ ნეიმანის აზრით, რეგულარობის (ფუნდირების) აქსიომას და ფონ ნეიმანის უნივერსუმს, ულტრანამრავლების ტექნიკას და ფორმალური მათემატიკური თეორიების არასტანდარტულ მოდელებს, სასრული კომბინატორიკის ელემენტებს სიმრავლურ-თეორიული თვალსაზრისით და სხვ.

რედაქტორი: პროფ. თ. ჯანგველაძე

რეცენზენტები: პროფ. გ. ფანცულაია,

პროფ. ს. მუხიგულაშვილი

ISBN 978-9941-9035-3-3

§0. შესავალი

სიმრავლეთა თეორია თანამედროვე მათემატიკის მყარ ლოგიკურ ბაზას (ანუ მათემატიკის ლოგიკურ ფუნდამენტს) წარმოადგენს და მისი ელემენტების ცოდნა სრულიად აუცილებელია ყველა განათლებული მათემატიკოსისათვის. უფრო მეტიც, ნებისმიერი პროფესიონალი მათემატიკოსი საკმაოდ კარგად უნდა ერკვეოდეს სხვადასხვა ტიპის სიმრავლურ-თეორიულ მსჯელობებსა თუ კონსტრუქციებში. მას უნდა ჰქონდეს მკაფიო წარმოდგენა იმის შესახებ, რა გზით და რა საშუალებებით აიგება, სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებიდან გამომდინარე, მთელი თანამედროვე მათემატიკა. თუ ზემოთ ნათქვამს იმასაც დავუმატებთ, რომ სიმრავლეთა თეორია თავად არის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მათემატიკური დარგი და მისი მეთოდების უშუალო გამოყენებებით თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა დისციპლინაში საინტერესო და თვისებრივად ახალი კონკრეტული შედეგები მიიღება, მაშინ სავსებით ბუნებრივია იმის მოთხოვნა, რომ ჩვენი უნივერსიტეტების მათემატიკური პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტები (ისე, როგორც ეს მსოფლიოს წამყვან უნივერსიტეტებშია მიღებული) ამ თეორიის მეტ-ნაკლებად სერიოზულ კურსს უნდა გადიოდნენ ბაკალავრიატის ან მაგისტრატურის დონეზე.

სიმრავლეთა თეორიას დიდმა გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა (Georg Cantor) ჩაუყარა საფუძველი. ეს მე-19 საუკუნის 70-80-იან წლებში მოხდა. თავდაპირველად კანტორის შრომები კლასიკური მათემატიკური ანალიზის კონკრეტულ საკითხებს (სახელდობრ, ნამდვილი რიცხვის ცნების დაფუძნებასა და უსასრულო ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობასთან დაკავშირებულ ღრმა პრობლემებს) შეეხებოდა. სწორედ აღნიშნულ კონკრეტულ საკითხებში წარმოქმნილმა სიძნელეებმა მიიყვანა კანტორი

მანამდე არსებულზე გაცილებით უფრო აბსტრაქტული ცნებებისა და მეთოდების შემოტანის აუცილებლობამდე. მოგვიანებით ნათელი გახდა, რომ ამ ცნებებისა და მეთოდების შემოღებამ ძირფესვიანად შეცვალა მათემატიკა, დანერგა მათემატიკური აზროვნების სრულიად ახალი სტილი, ყურადღება გაამახვილა მათემატიკის ფილოსოფიურ საკითხებზე და, კერძოდ, ერთმანეთისაგან მკვეთრად გამიჯნა პოტენციალური და აქტუალური უსასრულობების კონცეფციები. კანტორის დაძაბული მოღვაწეობის ზოგიერთი დეტალი და საინტერესო მომენტები კარგადაა გაშუქებული ნ. ბურბაკის ცნობილ ისტორიულ ნარკვევში, რომელიც სიმრავლეთა თეორიის წარმოშობასა და განვითარებას ეხება (იხ. ფრანგულიდან ნათარგმნი მონოგრაფია: Н. Бурбаки, Теория множеств, Изд. Мир, Москва, 1965).

კანტორის გარდა სიმრავლეთა თეორიის განვითარებისა და ჩამოყალიბების პროცესში დიდი როლი შეასრულეს ისეთმა ცნობილმა მათემატიკოსებმა, როგორებიცაა: ე. ბორელი, (E. Borel) რ. ბერი (R. Baire), ა. ლებეგი (H. Lebesgue), ფ. ჰაუსდორფი (F. Hausdorff), ფ. ბერნშტეინი (F. Bernstein), ე. ცერმელო (E. Zermelo), ა. ფრენკელი (A. Fraenkel) ნ. ლუზინი (N. Luzin), მ. სუსლინი (M. Suslin), პ. ალექსანდროვი (P. Alexandrov), პ. ნოვიკოვი (P. Novikov), ვ. სერპინსკი (W. Sierpinski), ს. ბანახი (S. Banach), კ. კურატოვსკი (K. Kuratowski), ა. ტარსკი (A. Tarski), ს. ულამი (S. Ulam), ე. მარჩევსკი (E. Marczewski), ა. მოსტოვსკი (A. Mostowski), ჯ. ფონ ნეიმანი (J. von Neumann), პ. ბერნაისი (P. Bernays) პ. ერდოში (P. Erdös), კ. გიოდელი (K. Gödel), პ. კოჰენი (P. Cohen), რ. სოლოვეი (R. Solovay), დ. სკოტი (D. Scott), დ. მარტინი (D. Martin), ს. შელაჰი (S. Shelah), კ. კიუნენი (K. Kunen), თ. იეხი (T. Jech) და სხვები.

ჩამოთვლილი მათემატიკოსების ინტენსიური მოღვაწეობის შედეგად სიმრავლეთა თეორია და მასთან ორგანულად დაკავშირებული მათემატიკური ლოგიკა რამდენიმე მიმართულებით ვითარდებოდა. ამ მიმართულებებს შორის განსაკუთრებით გვინდა გამოვყოთ შემდეგი ხუთი:

(ა) სიმრავლეთა აქსიომატური თეორია, რაც გულისხმობს აქსიომების ლოგიკურ ანალიზს და, კერძოდ, სათანადო მოდელების აგების მეშვეობით სხვადასხვა ტიპის დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული დებულებების (ანუ ჰიპოთეზების) თავსებადობის დადგენას;

(ბ) წერტილოვან სიმრავლეთა თეორია, რომელიც ითვალისწინებს წერტილოვანი სიმრავლეების შინაგანი სტრუქტურის კვლევას მათემატიკური ანალიზის, ზომის თეორიისა და ზოგადი ტოპოლოგიის თვალსაზრისით;

(გ) ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეთა თეორია ორდინალურ (ანუ რიგობრივ) რიცხვთა თეორიის ჩათვლით;

(დ) უსასრულო სიმრავლეთა კომბინატორიკა, რომელიც სასრული და უსასრულო კარდინალური რიცხვებისათვის ავლენს კომბინატორული ხასიათის ღრმა კავშირებსა და დამოკიდებულებებს, ადგენს უსასრულო კარდინალების იერარქიის კანონზომიერებებს და ა.შ.;

(ე) სიმრავლურ-თეორიული მეთოდების გამოყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში: მათემატიკურ ანალიზში, ტოპოლოგიაში, ალგებრასა და ლოგიკაში, ალბათობის თეორიაში და სხვ. ასევე, ბოლო ხანებში ინტენსიურად განვითარდა ე.წ. არამკაფიო სიმრავლეთა თეორია, რომელმაც ჰუმანიტარულ დარგებშიც კი საკმაოდ არატრივიალური გამოყენებები პოვა.

აღნიშნული ხუთივე მიმართულებით დღეისათვის მიღებულია ბევრი ძალზე მნიშვნელოვანი და შთამბეჭდავი შედეგი. ზოგიერთი მათგანი საინტერესოა არა მხოლოდ წმინდა მათემატიკური, არამედ ზოგადი, ფილოსოფიური თვალთაზრისითაც და ადამიანის ინტელექტუალური მოღვაწეობის ბრწყინვალე ნიმუშს წარმოადგენს.

ქართული მათემატიკური სკოლის წარმომადგენლებს შორის ყოველთვის შეიმჩნეოდა გარკვეული ყურადღება და ინტერესი სიმრავლეთა თეორიის პრობლემატიკის მიმართ. უფრო მეტიც, ქართველ მათემატიკოსებში თავიდანვე იყო სასწავლო პროცესში ამ თეორიის იდეოლოგიისა და მეთოდების დანერგვისაკენ ერთგვარი სწრაფვა. გავიხსენოთ, თუნდაც, პროფესორ ლევან გოკიელის შრომები, მიძღვნილი

სიმრავლურ-თეორიული პარადოქსებისადმი, პროფესორ შ. ფხაკაძის გამოკვლევები, რომლებიც კლასიკური ლებეგის ზომის თეორიის ღრმა სიმრავლურ-თეორიულ ასპექტებს ეხება, და უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის განკუთვნილი პროფესორ ვლადიმერ ჭელიძის ფუნდამენტური სახელმძღვანელო "ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია", რომელშიც საკმაოდ დიდი ადგილი სწორედ სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს ეთმობა.

მიუხედავად ამისა, შეიძლება ითქვას, რომ ქართულ ენაზე ჯერჯერობით არ არსებობს სახელმძღვანელო (ან დამხმარე სახელმძღვანელო), რომელშიც ამა თუ იმ დოზით წარმოდგენილია სიმრავლეთა თეორიის, როგორც დამოუკიდებელი დისციპლინის, ძირითადი დებულებები, აღწერილია ამ დისციპლინის მეთოდები და მოყვანილია მათემატიკის სხვადასხვა დარგში მისი კონკრეტული გამოყენებები. წინამდებარე წიგნი პირველ რიგში ემსახურება იმ მიზანს, რომ სტუდენტებს (ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის დონეზე) გააცნოს ამ თეორიის საწყისები, ამასთანავე დაანახოს მკითხველს სიმრავლურ-თეორიული მეთოდების სიმძლავრე და მათი გამოყენებების ეფექტური შესაძლებლობები (რაც, ზოგ შემთხვევაში, ძალზე მოულოდნელი და პარადოქსალურია). გარდა ამისა, ხაზგასასმელია ის გარემოება, რომ სიმრავლურ-თეორიული მეთოდები არსებითად გამოიყენება აბსტრაქტული მათემატიკური სტრუქტურების ძალიან ფართო სპექტრის მიმართ, რომელიც მოიცავს ალგებრულ სტრუქტურებს, ტოპოლოგიურ სტრუქტურებს, ნაწილობრივი დალაგების სტრუქტურებს და ა.შ. შესაბამისად, წიგნში გარკვეული ადგილი დათმობილი აქვს ასეთი სტრუქტურების მატარებელი მოდელების განხილვასაც, ღრმა კავშირების გამოვლენას სტრუქტურების ფორმალურ (ანუ სინტაქსურ) აღწერასა და მათი სხვადასხვა ტიპის რეალიზაციების მათემატიკურ (ან სემანტიკურ) თვისებებს შორის.

შეგნებულად წიგნში ნაკლებად ვეხებით სიმრავლეთა თეორიის წმინდა ფორმალურ, ლოგიკურ და აქსიომატურ ასპექტებს – აქ სიმრავლეები და მათი თვისებები ძირითადად

ინტუიციურ დონეზე (ე.ი. შინაარსობრივად, არაფორმალურად) განიხილება. ჩვენი აზრით, ამგვარი მიდგომა გაუადვილებს სტუდენტს ფაქტობრივი მასალის შესწავლასა და ათვისებას. იმ მკითხველისათვის კი, რომელიც მოინდომებს უფრო ღრმად ჩაიხედოს თეორიის საფუძვლებში, გზადაგზა სათანადო კომენტარებს ვიძლევით (ისინი წიგნის ბოლოშია თავმოყრილი). აღნიშნული კომენტარების საშუალებით დაინტერესებული მკითხველი მიიღებს მისთვის სასარგებლო დამატებით ინფორმაციას განსახილველი საკითხების გარშემო. ხოლო მკითხველის სურვილის შემთხვევაში, წიგნში მითითებული სპეციალური ლიტერატურა კიდევ უფრო დაწვრილებით გააცნობს მას ამა თუ იმ მასალასთან მჭიდროდ დაკავშირებულ საკითხთა წრეს.

უცხო ენებზე არსებობს სიმრავლეთა თეორიისადმი მიძღვნილი მონოგრაფიებისა და სახელმძღვანელოების საკმაო რაოდენობა. მაგალითად, ამ მხრივ არ შეიძლება არ მოვიხსენიოთ ფ. ჰაუსდორფის (F. Hausdorff) კლასიკური მონოგრაფია: Grundzüge der Mengenlehre, Veit und Co., Leipzig, 1914; ვ. სერპინსკის (W. Sierpinski) შესანიშნავი წიგნი: Cardinal and Ordinal Numbers, PWN, Warszawa, 1958; კ. კურატოვსკისა და ა. მოსტოვსკის (K. Kuratowski, A. Mostowski) სახელმძღვანელო: Set Theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967; კ. კიუნენის (K. Kunen) დამხმარე სახელმძღვანელო: Set Theory, North-Holland Publ. Co., 1980; თ. იეხის (T. Jech) თანამედროვე კაპიტალური ტრაქტატი: Set Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002; ნ. ბურბაკის ზემოთ მითითებული მონოგრაფია და მრავალი სხვა. ყველა ჩამოთვლილი წიგნი დაწერილია მაღალ მეცნიერულ და პედაგოგიურ დონეზე, შეიცავს დიდ ფაქტობრივ მასალას, რომლის ასათვისებლად მკითხველს სერიოზული მუშაობა დასჭირდება. ეს წიგნები ძირითადად იმ სტუდენტებზეა ორიენტირებული, რომლებიც შემდგომში სიმრავლეთა თეორიას ან მათემატიკურ ლოგიკას თავის სპეციალობად აირჩევენ. ჩვენი წიგნი კი პირველ რიგში ისეთი მკითხველისთვისაა განკუთვნილი, ვისაც სურს რაც შეიძლება უფრო ოპტიმალური გზით გაეცნოს ამ თეორიის

ფუნდამენტურ იდეებსა და ძირითად მეთოდებს, მათემატიკის სხვადასხვა დარგში მათი გამოყენების შესაძლებლობების თვალსაზრისით.

წიგნის შესავალშივე გვინდა მოვიყვანოთ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომათა სრული სია (ნუსხა). ეს აქსიომები მეტად ბუნებრივი დებულებებია და ადვილი მისაღებია ინტუიციისათვის, თუმცა მათში კონცენტრირებულია ისეთი ღრმა იდეები და კონცეფციები, რომლებიც საფუძვლად დაედო მთელ თანამედროვე მათემატიკას. უცნაურია, რომ ლაკონურად ჩამოყალიბებული ამ აქსიომების საშუალებით შესაძლებელი ხდება მთელი მათემატიკის გრანდიოზული შენობის აგება. ირკვევა, რომ მათემატიკის თითოეული კონცეფცია (კერძოდ, ნატურალური რიცხვის ცნება, ფუნქციის ცნება, გეომეტრიული ფიგურის ცნება და სხვ.) ზუსტად განისაზღვრება სწორედ სიმრავლეთა თეორიის ტერმინოლოგიისა და აქსიომების საფუძველზე. ასევე, თანამედროვე მათემატიკის ნებისმიერი დარგის ყოველი მართებული დებულება შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც სიმრავლეთა თეორიის თეორემა. ეს არის სიმრავლის კონცეფციისა და სიმრავლურ-თეორიული მეთოდების უნივერსალობის მთავარი მაჩვენებელი და გარკვეული ახსნა იმ გარემოებისა, რატომაა ასეთი ეფექტური სიმრავლურ-თეორიული მეთოდების გამოყენება მათემატიკის სხვადასხვა დისციპლინაში.

ნაკლებად გამოცდილ მკითხველს შეუძლია გამოტოვოს სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკისადმი მიძღვნილი შესავლის მომდევნო ნაწილი და უშუალოდ გადავიდეს მისი შემდგომი ტექსტის კითხვაზე. თუმცა ასეთი მკითხველისათვის მეტად სასარგებლო იქნება დროდადრო დაუბრუნდეს სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკას და გაანალიზოს იგი, რათა უფრო ღრმად ჩაიხედოს ამ თეორიის აქსიომების შინაარსში და დაინახოს მათ შორის ღრმა ურთიერთკავშირები.

ამჟამად მიღებული თვალსაზრისით, სიმრავლეთა თეორია არის პირველი რიგის ლოგიკური თეორია, რომლის ალფაბეტში გვაქვს სულ ორი ორადგილიანი რელაციური

ნიშანი: = (ტოლობა) და ∈ (კუთვნილება). ტოლობის შესაბამისი აქსიომები ყველასათვის ცნობილია, ამიტომ მათზე აქ არ შევჩერდებით. ასევე, არ ვისაუბრებთ ჩვეულებრივი ლოგიკური ნიშნების (კერძოდ, ∃ და ∀ კვანტორული ნიშნების) შესახებ. უფრო დეტალური ინფორმაცია ლოგიკური, ეგალიტარული და კვანტორული თეორიების ირგვლივ იხ. I-ელ კომენტარში, რომელიც ამ წიგნის ძირითადი ტექსტის ბოლოსაა მოცემული.

ქვემოთ მოგვყავს ცერმელო-ფრენკელის ფორმალური სისტემის აქსიომათა სრული ნუსხა (უფრო სწორად, მისი ერთ-ერთი ვარიანტი).

1. ექსტენსიონალობის აქსიომა:

$$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow (x = y)).$$

ეს აქსიომა ფაქტობრივად გვეუბნება, რომ ნებისმიერი სიმრავლე ცალსახად განისაზღვრება მისი ყველა ელემენტის საშუალებით.

2. ცარიელი სიმრავლის არსებობის აქსიომა:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x).$$

ამ აქსიომის თანახმად, არსებობს სიმრავლე, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს. შევნიშნოთ, რომ ექსტენსიონალობის აქსიომის გამო, ასეთი სიმრავლე ერთადერთია. მას ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და იგი $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

3. სიმრავლის ბულეანის არსებობის აქსიომა:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \subset x).$$

ეს აქსიომა გვეუბნება, რომ ყოველი x სიმრავლისათვის არსებობს მისი ყველა შესაძლო ნაწილთა სიმრავლე. ამ ახალ სიმრავლეს x-ის ბულეანი ჰქვია და იგი P(x) სიმბოლოთი აღინიშნება.

4. სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანების აქსიომა:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (\exists t)(t\in x \ \&\ z\in t)).$$

ეს აქსიომა ფაქტობრივად გვეუბნება, რომ სიმრავლეთა ნებისმიერი $\{E_i \ \ i\in I\}$ ოჯახისათვის არსებობს $\cup\{E_i \ \ i\in I\}$ სიმრავლე (ამ ოჯახის გაერთიანება), რომელიც შეიცავს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომლებიც ოჯახის ერთ სიმრავლეს მაინც ეკუთვნიან.

5. უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომა:

$$(\exists X)(\varnothing\in X \ \&(\forall x)(x\in X \Rightarrow \ (\exists y)(y\in X \ \&\ (\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (z\in x \vee z = x))))).$$

ამ აქსიომის ერთ-ერთ ეკვივალენტურ ფორმას მივიღებთ, თუ ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის არსებობას დავუშვებთ.

ცხადია, თავიდანვე შეგვეძლო აქსიომა 2 (ე.ი. ცარიელი სიმრავლის არსებობის აქსიომა) ჩაგვერთო უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომის ჩამოყალიბებაში. სახელდობრ, ახლახან მოყვანილ ფორმულირებაში $\varnothing\in X$ დამოკიდებულების მაგივრად შეგვეძლო დაგვეწერა $(\exists t)(t\in X \ \&\ (\forall u)(u\notin t))$ დამოკიდებულება. მაგრამ ტრადიციულად ამ ორ აქსიომას ცალ-ცალკე აყალიბებენ.

6. ამორჩევის აქსიომა (ცერმელოს აქსიომა):

არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი $\{E_i \ \ i\in I\}$ ოჯახისათვის არსებობს ამ ოჯახის სელექტორი, ე.ი. თუ $(\forall i\in I)(E_i \neq \varnothing)$,

მაშინ არსებობს $\{e_i \quad i\in I\}$ ელემენტთა ისეთი ოჯახი, რომ $(\forall i\in I)(e_i\in E_i)$.

ამორჩევის აქსიომას მრავალი სხვა ფორმაც აქვს (მაგალითად, ცორნის ლემა ან კურატოვსკი-ჰაუსდორფის მაქსიმალობის პრინციპი, რომლებზეც §7-ში გვექნება საუბარი). ცხადია, ყველა ეს ფორმა ლოგიკურად ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მაგრამ მათემატიკაში საკმაოდ ხშირად განიხილება ამორჩევის აქსიომის უფრო სუსტი ფორმებიც. ზოგიერთ მათგანს შემდგომში გავეცნობით.

7. ჩანაცვლების აქსიომა (ანუ, უფრო ზუსტად, ფუნქციონალური დამოკიდებულების მიმართ სიმრავლის ანასახის არსებობის აქსიომათა სქემა):

ვთქვათ, მოცემული $S(x,y)$ ბინარული დამოკიდებულება ფუნქციონალურია y საგნობრივი ცვლადის მიმართ, ე.ი. ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს ერთადერთი y ელემენტი, რომლისთვისაც $S(x,y)$ ჭეშმარიტია (ეს გამონათქვამი $(\forall x)(\exists ! y)S(x,y)$ ფორმულის სახით ჩაიწერება). მაშინ ნებისმიერი X სიმრავლისათვის არსებობს Y სიმრავლე ისეთი, რომ

$$(\forall y)(y\in Y \Leftrightarrow (\exists x)(x\in X \ \& \ S(x,y))).$$

ამით ამოიწურება ცერმელო-ფრენკელის აქსიომათა სრული ნუსხა. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი პირველი ექვსი აქსიომა ფაქტობრივად შემოტანილი იყო თავად ე. ცერმელოს მიერ, ხოლო ბოლო მე-7 აქსიომათა სქემა შემოიტანა ა. ფრენკელმა. როგორც ვხედავთ, ეს სქემა აქსიომათა უსასრულო რაოდენობას შეიცავს, რადგან ყოველ $S(x,y)$ დამოკიდებულებას, ფუნქციონალურს y ცვლადის მიმართ, თავისი კონკრეტული აქსიომა შეესაბამება.

სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკის აგების პროცესში ყველაზე ცხარე დებატები და მრავალრიცხოვანი დისკუსიები

გაიმართა ცერმელოს აქსიომის ირგვლივ და მის პარადოქსალურ ლოგიკურ შედეგებთან დაკავშირებით. ამიტომ ცერმელოს აქსიომას სრულიად განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს აქსიომათა ზემოთ მოყვანილ ჩამონათვალში.

როგორც წესი, ცერმელო-ფრენკელის ფორმალურ სისტემას, რომლიდანაც ამოღებულია ამორჩევის აქსიომა, სიმბოლურად **ZF**-ით აღნიშნავენ (Zermelo-Fraenkel), ხოლო ამორჩევის აქსიომის დამატებით მიღებული სისტემა, ჩვეულებრივ, **ZFC** სიმბოლოთი აღინიშნება (Zermelo-Fraenkel & Choice).

რასაკვირველია, არსებობენ სიმრავლეთა თეორიის სხვა ტიპის აქსიომატიზაციებიც. მაგალითად, ერთ-ერთი ასეთია ბერნაისისა და გიოდელის აქსიომათა სისტემა, რომელშიც სიმრავლეთა გარდა სხვა, უფრო დიდი, ერთობლიობებიც მონაწილეობენ (სიმრავლეთა ე.წ. საკუთრივი კლასები). უფრო მეტიც, არსებობს თვით ცერმელო-ფრენკელის სისტემის ერთგვარი ვარიაციებიც. მაგალითად, ნ. ბურბაკის სისტემა ძირითადად იმით განსხვავდება ცერმელო-ფრენკელის სისტემისაგან, რომ მასში ზოგადობისა და არსებობის ჩვეულებრივი კვანტორების ნაცვლად ე.წ. ჰილბერტის ლოგიკური ოპერატორი მონაწილეობს, რომელიც გარკვეული აზრით ამორჩევის აქსიომის გლობალურ ფორმას გამოხატავს და იმდენად ძლიერია, რომ მისი საშუალებით ზოგადობისა და არსებობის კვანტორების შემოღებაც კია შესაძლებელი.

სიმრავლეთა თეორიის ყოველ, ამჟამად მიღებულ, აქსიომატურ სისტემას აქვს თავისი უპირატესობებიც და ნაკლოვანებანიც. მაგალითად, ბერნაის-გიოდელის ტიპის სისტემების ერთ-ერთი უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი სასრულ რაოდენობა აქსიომებზე დაიყვანება, რაც შეუძლებელია ცერმელო-ფრენკელის ტიპის სისტემებისათვის. მეორე მხრივ, ცერმელო-ფრენკელის სისტემაში მონაწილე აქსიომები უფრო კარგად ასახავენ ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენებს სიმრავლეთა ბუნების შესახებ, რასაც ვერ ვიტყვით ბერნაის-გიოდელის სისტემის აქსიომებზე. გარდა ამისა, მათემატიკურ გამოკვლევებში სიმრავლეთა საკუთრივი

კლასები თითქმის არ გვხვდება და ამიტომ კლასის ცნების როლი გაცილებით ნაკლებია იმ როლზე, რომელსაც სიმრავლის ცნება თამაშობს მათემატიკაში.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, აქ არ ვაპირებთ სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა ტიპის აქსიომატიკებთან და მათ ფორმალიზაციასთან დაკავშირებული ნიუანსების განხილვას (ზოგი ნიუანსი და დეტალი ნაწილობრივ წიგნის ბოლოს მოცემულ კომენტარებშია გაშუქებული). კიდევ ერთხელ გავიმეორებთ, რომ ამ წიგნის მთავარი მიზანი სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი იდეებისა და დებულებების გადმოცემა და მათემატიკის მომიჯნავე დარგებში მათი გამოყენების დემონსტრირებაა.

წიგნი ორი ნაწილისგან შედგება. პირველ ნაწილში უფრო ზოგადი ხასიათის საკითხებია შეტანილი, ხოლო მეორე ნაწილი სიმრავლეთა თეორიის სპეციალურ თემებს ეძღვნება. ყოველი პარაგრაფის ბოლოს მოყვანილი სავარჯიშოები თავიანთი შინაარსით საკმაოდ მჭიდროდ უკავშირდება პარაგრაფის ძირითად თემას და ამ თემის გარშემო არსებით დამატებით ინფორმაციას იძლევიან. შედარებით ძნელი სავარჯიშოები ვარსკვლავითაა მონიშნული.

წიგნში თაემოყრილი მასალა სიმრავლეთა თეორიის ირგვლივ ლექციების იმ მოკლე კურსის შინაარსს ასახავს, რომელსაც ავტორი თავის დროზე ქ. ვროცლავისა და ქ. ლოძის უნივერსიტეტებში (პოლონეთი) კითხულობდა. აქვე დავუმატებთ, რომ ამ თეორიის უფრო სპეციფიკური საკითხები წლების მანძილზე სისტემატურად ირჩეოდა თსუ აკადემიკოს ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დისკრეტული მათემატიკის განყოფილების სამეცნიერო სემინარებზე.

§1. სიმრავლე და მისი ელემენტები. სიმრავლის მოცემის ხერხები

თანამედროვე მათემატიკის ძირითადი (ანუ ამოსავალი) კონცეფტებია: სიმრავლის ცნება და მისი ელემენტის ცნება. ეს ფუნდამენტური ცნებები რომელიმე სხვა, უფრო მარტივი კონცეფტის საშუალებით არ (ვერ) განიმარტება. მართლაც, ამ ეტაპზე ძნელი წარმოსადგენია, რომ ვინმემ შეძლოს მოიფიქროს და შემოიღოს სიმრავლეზე და მის ელემენტებზე ინტუიციურად უფრო გასაგები ან გონებისათვის უფრო ადვილად აღსაქმელი აბსტრაქტული ცნება. სხვადასხვა ტიპის სიმრავლეები ჩვენს ყოველდღიურ ცხოვრებაში პერმანენტულად (მუდმივად) გვხვდება, რა სფეროსაც არ უნდა შევეხოთ.

მაგალითად, შეგვიძლია ვისაუბროთ ქართული ასოების სიმრავლეზე, რომელიმე ბიბლიოთეკის საცავში მოთავსებული წიგნების სიმრავლეზე, კონკრეტული ფირმის თანამშრომლების სიმრავლეზე, ჩვენი ქალაქის ტერიტორიაზე მდებარე სუპერმარკეტების სიმრავლეზე, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტში 2008 წელს ჩარიცხულ აბიტურიენტთა სიმრავლეზე, ყველა მარტივ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, ევკლიდურ სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრფის სიმრავლეზე და ა.შ.

მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, რომ, ფაქტობრივად, ყოველი ზემოთ განხილული სიმრავლე წარმოადგენს გარკვეული ობიექტების ერთობლიობას (კლასს, კრებულს, სისტემას, ანსამბლს, კონგლომერატს და ა.შ.). ეს ობიექტები რაღაც საერთო ნიშნითაა გაერთიანებული და მათ მოცემული სიმრავლის ელემენტებს უწოდებენ.

ის ფაქტი, რომ a ობიექტი არის A სიმრავლის ელემენტი, შემდეგი სახით ჩაიწერება: $a \in A$. ამასთანავე, $\in$ სიმბოლოს კუთვნილების ნიშანი ეწოდება. როგორც ახლახან ვთქვით, $a \in A$ ჩანაწერი იმ გარემოებას ასახავს, რომ a არის A სიმრავლის ელემენტი (ანუ, როგორც ჩვეულებრივად ამბობენ, a ეკუთვნის A-ს). თუ a ობიექტი არ არის A სიმრავლის

ელემენტი (ანუ, თუ a არ ეკუთვნის A-ს), მაშინ წერენ $a \notin A$. კუთვნილების ნიშანი არის ძირითადი სიმბოლო მთელი მათემატიკისათვის, რადგან მათემატიკურ ობიექტთა შორის ყველანაირი დამოკიდებულება (მიმართება, თანაფარდობა) და მათ შორის ყოველგვარი ურთიერთკავშირი, საბოლოოდ, სწორედ რომ კუთვნილების დამოკიდებულებაზე დაიყვანება (ამ გარემოების უფრო დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებისათვის იხ. კომენტარი 1).

ზემოთ მოყვანილ პირველ მაგალითში სიმრავლის ელემენტებია ქართული ანბანის ასოები, მეორეში — წიგნები, მესამეში — ადამიანები, მეოთხეში — სუპერმარკეტები და ა.შ.

მათემატიკაში მიღებულია, რომ ნებისმიერი სიმრავლე სავსებით და ცალსახად განისაზღვრება მისი ყველა ელემენტით (იხ. კომენტარი 2).

მაშასადამე, სიმრავლე მოცემულად ითვლება, თუ დასახელებულია მისი ყველა ელემენტი ან აღწერილია რაღაც კონკრეტული თვისება (წესი, განმარტება), რომელიც ამ სიმრავლის ყველა ელემენტის ზუსტ განსაზღვრას იძლევა (იხ. კომენტარი 3).

სიმრავლის მოცემის პირველ ხერხს ჩამოთვლის ხერხი ჰქვია, ხოლო მეორეს — დახასიათების ხერხს უწოდებენ. სიმრავლის ჩასაწერად მისი ელემენტების მეშვეობით, ფიგურულ ფრჩხილებს იყენებენ. მაგალითად, ჩამოთვლის ხერხითაა მოცემული შემდეგი ხუთელემენტიანი სიმრავლე:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 9\},$$

რადგან ამ შემთხვევაში სახეზე გვაქვს A-ს ელემენტთა სრული ნუსხა.

დახასიათების ხერხით სიმრავლის მოცემისას (აღწერისას) ფიგურულ ფრჩხილებში სიმრავლის “ზოგადი ელემენტის“ მითითების შემდეგ, როგორც წესი, ორ წერტილს (:) დასვამენ ხოლმე და “ზოგადი ელემენტის” დახასიათებას წერენ, ე.ი.

გამოყოფენ იმ თვისებას, რომლის მიხედვითაც ცალსახად განისაზღვრება, რომელი ობიექტი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს და რომელი – არ ეკუთვნის. ჩვენ შეგვიძლია ეს დამახასიათებელი თვისება $S(\cdot)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ, ხოლო სიმრავლის "ზოგადი ელემენტი" – x ასოთი. მაშინ დახასიათების ხერხით მოცემული სიმრავლის სქემატური ჩანაწერი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\{x : S(x)\} \text{ ან } \{x : x \text{ აკმაყოფილებს } S(\cdot)\text{-ს}\}.$$

ამრიგად, გვაქვს:

„ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომელთათვისაც ჭეშმარიტია $S(x)$ გამონათქვამი".

მაგალითად, დახასიათების ხერხითაა მოცემული შემდეგი სიმრავლე:

$$B = \{ x : \ x^2 - 1 = 0 \} .$$

დავაზუსტოდ, რომ აქ B არის ყველა იმ x ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც სრულდება $x^2 - 1 = 0$ ტოლობა. ცხადია, რომ ეს B სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ორ ელემენტს: ესენია -1 და 1. ამიტომ შეგვეძლო ასეც დაგვეწერა:

$$B = \{ -1, 1 \}.$$

ამ შემთხვევაში კარგად ჩანს სიმრავლის მოცემის ორ აღნიშნულ ხერხს შორის მჭიდრო კავშირი.

არის ერთგვარი სახიფათო მომენტი, როცა ცდილობენ ესა თუ ის სიმრავლე მისი ელემენტების რაიმე დამახასიათებელი თვისებით განსაზღვრონ. ამ ძალზე არსებით მომენტს 1903 წელს პირველად ცნობილმა ინგლისელმა მათემატიკოსმა და ფილოსოფოსმა ბერტრან რასელმა (B. Russell) მიაქცია ყურადღება.

მაგალითი 1 (რასელის პარადოქსი). განვიხილოთ შემდეგი $S(x)$ თვისება: $x \notin x$. დავუშვათ, რომ არსებობს $X = \{x \;\; x \notin x\}$ სიმრავლე. მაშინ ბუნებრივად გაჩნდება კითხვა იმის შესახებ, სრულდება თუ არა იგივე $S(\cdot)$ თვისება მიღებული X სიმრავლისათვის, ე.ი. მართებულია თუ არა $X \notin X$ დამოკიდებულება. ვთქვათ, ეს დამოკიდებულება მართებულია. მაშინ, X-ის განსაზღვრის თანახმად, უნდა იყოს $X \in X$, რაც აშკარა წინააღმდეგობას იძლევა. მეორე მხრივ, თუკი $X \in X$, მაშინ იმავე განსაზღვრის თანახმად, უნდა იყოს $X \notin X$. ამრიგად, ორივე შესაძლებელ შემთხვევაში მივდივართ წინააღმდეგობამდე, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ თავად X სიმრავლის განსაზღვრა არ არის კორექტული.

ამ ძალიან მარტივი და კონკრეტული მაგალითით რასელმა ფაქტობრივად დაადგინა, რომ სიმრავლის დამახასიათებელი თვისება არ შეიძლება იყოს მთლად ნებისმიერი. შემდგომში, მათემატიკური ლოგიკის აპარატის მეშვეობით, მეტ-ნაკლებად დაზუსტდა, რომელი თვისებებია დასაშვები სიმრავლეების კორექტული განსაზღვრისათვის (ე.ი. ისინი არ იწვევენ პარადოქსებს). თუმცა მთლად ბოლომდე ეს საკითხი დღეისათვისაც არ არის ამოწურული. აქ არა გვაქვს ამ საკითხის უფრო ღრმად გაშუქების საშუალება. გვინდა მხოლოდ მოკლედ ვაუწყოთ მკითხველს, რომ რასელის პარადოქსი და მისი მსგავსი ანტინომიები არ წარმოიქმნება, თუ რაიმე ახალი Y სიმრავლე შემდეგი სქემით განისაზღვრება:

$$Y = \{x : S(x) \;\&\; x \in E\},$$

სადაც $S(x)$ არის ნებისმიერი თვისება, ხოლო E – უკვე შემოღებული და კორექტულად განსაზღვრული რომელიმე სიმრავლე (იხ. კომენტარი 4). ამ შემთხვევაში ხშირად წერენ ხოლმე

$$Y = \{x \in E : S(x)\}.$$

ზოგჯერ საჭირო მაინც ხდება $\{x : S(x)\}$ სახის ერთობლიობის განხილვაც, მიუხედავად იმისა, წარმოადგენს ეს ერთობლიობა სიმრავლეს თუ არა. ასეთი სახის ერთობლიობას ყველა იმ x სიმრავლეთა კლასი ეწოდება, რომლებისთვისაც $S(x)$ დამოკიდებულება ჭეშმარიტია. ფაქტობრივად კი ეს კლასი განიხილება როგორც $S(x)$ დამოკიდებულების სინონიმი.

მკითხველს შეიძლება დაებადოს ბუნებრივი კითხვები: რა განსხვავებაა სიმრავლეებსა და ელემენტებს შორის? არიან თუ არა ისინი არსებითად განსხვავებული ტიპის ობიექტები?

პასუხი ამ კითხვებზე შემდეგია: სიმრავლეები და ელემენტები ერთი და იგივე ტიპის ობიექტებია და მათემატიკურ ტექსტებში უბრალოდ ხელსაყრელია ხან ერთი ტერმინი ვიხმაროთ, ხან მეორე (როგორც წესი, ამას შესაბამისი კონტექსტი გვიკარნახებს). უფრო ზუსტად, თანამედროვე სიმრავლეთა თეორიაში მიღებულია, რომ ყოველი განსახილველი ობიექტი წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელიც არის რაღაც ელემენტების კორექტულად განსაზღვრული ერთობლიობა. მეორე მხრივ, სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლისათვის არსებობს $\{A,B\}$ სიმრავლე (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 13). იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $A = B$, ვღებულობთ, რომ არსებობს $\{A\}$ სიმრავლეც, რომლის ერთადერთი ელემენტია A. ამრიგად, ყოველი სიმრავლე შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც გარკვეული სიმრავლის ელემენტი, რაც აშკარად მიუთითებს იმაზე, რომ ეს ორი ტერმინი (სიმრავლე და ელემენტი) ერთმანეთის სინონიმებია და, ამ გარემოების გამო, შეიძლება ერთმანეთს ჩაენაცვლონ საჭიროების მიხედვით. პრაქტიკაში ასეთი ჩანაცვლება ძალზე ხშირად ხდება.

მათემატიკის სასკოლო კურსში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება რიცხვით სიმრავლეებს, ე.ი. ისეთ სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტები რიცხვებს წარმოადგენენ

(მაგალითად, ასეთია ზემოთ მოყვანილი $B = \{-1,1\}$ სიმრავლე). ბუნებრივია, მათემატიკაში სხვადასხვა ტიპის რიცხვით სიმრავლეებს განიხილავენ.

მაგალითი 2. ყველა ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების აღსანიშნავად შესაბამისად **N**, **Z**, **Q**, **I** და **R** სიმბოლოებს იყენებენ. ამასთან დაკავშირებით გავიხსენოთ, რომ მათემატიკის სასკოლო კურსში რაციონალურ რიცხვთა **Q** სიმრავლე განისაზღვრება როგორც ყველა შესაძლო უსასრულო პერიოდიულ ათწილადთა სიმრავლე, ხოლო ირაციონალურ რიცხვთა **I** სიმრავლე განისაზღვრება როგორც ყველა შესაძლო უსასრულო არაპერიოდიულ ათწილადთა სიმრავლე (ეს განსაზღვრებები მთლად ზუსტი არ არის, მაგრამ ამაზე აქ არ შევჩერდებით). აგრეთვე კარგადაა ცნობილი, რომ **R** ამოიწურება რაციონალური და ირაციონალური რიცხვებით, ე.ი. **R**-ის ნებისმიერი ელემენტი ან **Q**-ს ეკუთვნის, ან **I**-ს.

გარდა ამისა, ცნობილია, რომ თუ უკვე მკაცრადაა განსაზღვრული ყველა ნატურალურ რიცხვთა **N** სიმრავლე, მაშინ, ამ სიმრავლიდან გამომდინარე, სავსებით კონკრეტული და ზუსტი პროცედურებით აიგება **Z**, **Q**, **I**, **R** სიმრავლეებიც. მოგვიანებით დავინახავთ, როგორ განისაზღვრება სიმრავლეთა თეორიის ჩარჩოებში **N** სიმრავლე (იხ. §6) და, მაშასადამე, ყველა დანარჩენი ზემოთ მითითებული რიცხვითი სიმრავლეც.

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ჩამოთვლის ხერხით მხოლოდ ისეთი სიმრავლეების მოცემა შეიძლება, რომელთა ელემენტების რაოდენობა ნატურალური რიცხვით გამოისახება (მათ მოკლედ სასრულ სიმრავლეებს უწოდებენ; ამ სიმრავლეების ზუსტი განსაზღვრა მოყვანილია §6-ში). იმავე ჩამოთვლის ხერხით მოცემული უსასრულო სიმრავლეების (ე.ი. ისეთი სიმრავლეებისა, რომლებიც არაა სასრული) ბუნებრივ მაგალითებად გამოდგება **N** და **Z** სიმრავლეები:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

$$Z = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი უსასრულო სიმრავლე:

$$M = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}.$$

ასეთი ტიპის ჩანაწერებში სამი წერტილი იმაზე მიუთითებს, რომ სიმრავლის ელემენტების ამოწერისას დაცულია გარკვეული კანონზომიერება (წესი). კერძოდ, M სიმრავლის შემთხვევაში მრავალწერტილი მიგვანიშნებს იმაზე, რომ საქმე გვაქვს 4-ის ჯერად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესთან. მთელ რიგ შემთხვევებში ჩამოთვლის ხერხით კონკრეტული სიმრავლის მოცემა ძალიან რთულია და პრაქტიკულად განუხორციელებელიც კი. ასეთ შემთხვევებში სიმრავლე მოიცემა დახასიათების ხერხით.

სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და იგი $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება (იხ. კომენტარი 5).

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს იმ ფაქტს, რომ ცარიელი სიმრავლე ერთადერთია (ე.ი. არ არსებობს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცარიელი სიმრავლე). რაიმე A სიმრავლეს არაცარიელი ეწოდება, თუ იგი განსხვავებულია ცარიელი სიმრავლისაგან, ანუ თუ არსებობს ერთი მაინც ელემენტი, რომელიც A-ს ეკუთვნის. აქ მნიშვნელოვანია იმ გარემოების ხაზგასმა, რომ ზოგჯერ რაღაც ინფორმაციის წყალობით შესაძლებელია მოცემული A სიმრავლის არაცარიელობის ჩვენება, მაგრამ ამავე დროს არ არის არანაირი შესაძლებლობა, გამოიყოს ან დასახელდეს A-ს რომელიმე კონკრეტული ელემენტი (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 8).

ცარიელი სიმრაველის როლი უნიკალურია მთელი მათემატიკისათვის. სწორედ რომ ამ ტრივიალური სიმრაველიდან გამომდინარე, აიგება მთელი მათემატიკური სამყარო (ანუ მათემატიკური უნივერსუმი). ამას ჩვენ შემდგომში ნათლად დავინახავთ ე.წ. ჯონ ფონ ნეიმანის უნივერსუმის მაგალითზე (იხ. §6).

მაგალითი 3. კარგადაა ცნობილი, რომ პლანიმეტრიის სასკოლო კურსში ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურები და მათი თვისებები შეისწავლება. ეს ფიგურები მოთავსებულია E ევკლიდურ სიბრტყეში, რომელიც პლანიმეტრიისათვის, გარკვეული გაგებით, უნივერსუმს წარმოადგენს. ნებისმიერი ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურა შეიძლება განისაზღვროს მასში შემავალი წერტილების დამახასიათებელი თვისებით, ე.ი. გვაქვს

$$F = \{x : x \in E \ \& \ S(x)\},$$

სადაც F — მოცემული გეომეტრიული ფიგურა, ხოლო S(x) მისი წერტილებისათვის დამახასიათებელი თვისებაა.

როცა პლანიმეტრიაში განიხილავენ ამა თუ იმ ამოცანას წერტილთა რაიმე გეომეტრიული ადგილის პოვნაზე, მაშინ ფაქტობრივად სწორედ იმ ფიგურის პოვნას გულისხმობენ, რომელიც აღიწერება მოცემული გეომეტრიული პირობით (თვისებით).

შევნიშნოთ, რომ თვალსაჩინოების მიზნით ძალზე ხშირად ზოგადი ბუნების სიმრავლეებსაც გამოსახავენ, როგორც ევკლიდური სიბრტყის გარკვეულ ფიგურებს. სიმრავლეების ასეთ წარმოდგენას ლ. ეილერისა (L. Euler) და ჯ. ვენის (J. Venn) დიაგრამას უწოდებენ. ამ ტიპის თვალსაჩინო დიაგრამებს ქვემოთ უფრო დაწვრილებით შევეხებით და გამოვიკვლევთ, რომელი გეომეტრიული ფიგურებით არის შესაძლებელი სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული სისტემის გამოსახვა ევკლიდურ სიბრტყეში. კერძოდ, დავრწმუნდებით,

რომ ამ მიზნისათვის მხოლოდ წრეებისა და უფრო ზოგადი ამოზნექილი ფიგურების გამოყენება არ არის საკმარისი.

§1-ის სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ ცარიელი სიმრავლის ერთადერთობა.

2. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს საყოველთაოდ უნივერსალური სიმრავლე, ე.ი. ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტები ყველა შესაძლო სიმრავლეებია. (გამოიყენეთ რასელის პარადოქსი და გამოყოფის აქსიომა.)

აქვე შევნიშნოთ, რომ ამავე დროს არსებობს ყველა სიმრავლეთა კლასი, ე.ი. $\{x : x = x\}$ ერთობლიობა.

წინა სავარჯიშოსთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 6.

3*. აჩვენეთ, რომ არსებობს ორი მაინც ერთმანეთისაგან განსხვავებული სიმრავლე. (გამოიყენეთ უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომა, რომელიც §0-შია ჩამოყალიბებული.) გარდა ამისა, აჩვენეთ, რომ არსებობს $\{0,1\}$ სიმრავლე.

4. გამოსახეთ თქვენთვის ცნობილი გეომეტრიული ფიგურები (მაგალითად, წრფე, წრეწირი, სამკუთხედი და ა.შ.), როგორც წერტილოვანი სიმრავლეები, განსაზღვრული შესაბამისი დამახასიათებელი პირობებით (თვისებებით).

5*. ევკლიდურ E სიბრტყეზე მოცემულია წერტილთა სასრული X სიმრავლე. ამ სიმრავლის შესახებ ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი წრფე ან არ შეიცავს X-ის არც ერთ წერტილს, ან შეიცავს X-ის მხოლოდ ერთ წერტილს, ან შეიცავს X-ის სამ წერტილს მაინც.

დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლის ყველა წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს.

ეს ამოცანა თავის დროზე ცნობილი ინგლისელი მათემატიკოსის ჯ. სილვესტრის (J. Sylvester) მიერ იყო დასმული.

6*. მთელ რიცხვთა რაიმე G სიმრავლეს ეწოდება ჯგუფი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(ა) G არ არის ცარიელი;

(ბ) თუ $x \in G$ და $y \in G$, მაშინ $x + y \in G$;

(გ) თუ $x \in G$, მაშინ $-x \in G$.

აჩვენეთ, რომ მთელ რიცხვთა ყოველი მოცემული G ჯგუფისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული არაუარყოფითი მთელი $k = k(G)$ რიცხვი, ისეთი, რომ G-ს აქვს შემდეგი სახე:

$$G = \{0, k, -k, 2k, -2k, 3k, -3k, \ldots\}.$$

აქედან გამომდინარე, დაამტკიცეთ, რომ თუ მოცემულია $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ნატურალური რიცხვები, რომელთა უდიდესი საერთო გამყოფია d, მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$d = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n ,$$

სადაც $z_1, z_2, \ldots, z_n$ მთელი რიცხვებია.

ამ უკანასკნელი შედეგის გათვალისწინებით კი, აჩვენეთ ნაშთების შესახებ ე.წ. ჩინური თეორემის მართებულობა:

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ნატურალური რიცხვები და წყვილ-წყვილად თანამარტივი $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ნატურალური რიცხვები; მაშინ მოიძებნება ისეთი c ნატურალური რიცხვი, რომ $c - a_i$ იყოფა b_i-ზე ყოველი i ინდექსისათვის $\{1, 2, \ldots, n\}$ სიმრავლიდან.

7*. ევკლიდურ E სიბრტყეში მდებარე ფიგურას ვუწოდოთ დიოფანტური, თუ ამ ფიგურის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი მთელ რიცხვს წარმოადგენს.

აჩვენეთ, რომ ყოველი ნატურალური $n > 2$ რიცხვისათვის E სიბრტყეში არსებობს დიოფანტური ფიგურა, რომელიც ზუსტად n წერტილს შეიცავს და რომლის არც ერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ ძევს.

დაამტკიცეთ აგრეთვე, რომ სიბრტყეში მდებარე ყოველი უსასრულო დიოფანტური ფიგურა მთლიანადაა განლაგებული რომელიღაც წრფეზე. აქედან გამომდინარე, მიიღეთ ყველა უსასრულო ბრტყელი დიოფანტური ფიგურის დახასიათება.

ამ სავარჯიშოსთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ დღემდე არ არის ცნობილი ყველა სასრული ბრტყელი დიოფანტური ფიგურის დახასიათება.

8*. თანამედროვე სიმრავლეთა თეორიაში შეიძლება მოვიყვანოთ სავსებით კონკრეტული წინადადებები, რომლებიც თავადაც ვერ დამტკიცდება და რომელთა უარყოფაც ვერ დამტკიცდება ამჟამად მიღებული აქსიომატიკის ჩარჩოებში. მაგალითად, ასეთია კანტორის ცნობილი კონტინუუმის ჰიპოთეზა, რომელზედაც საუბარი წიგნის მომდევნო პარაგრაფებში გვექნება. ამ ტიპის წინადადებების მეორე (გაცილებით უფრო მარტივი) მაგალითი არის ე.წ. რეგულარობის აქსიომა, რომელსაც §6-ში გავეცნობით და აგრეთვე ვაჩვენებთ, რომ იგი მართლაც დამოუკიდებელია **ZFC** თეორიის აქსიომებისაგან.

ვთქვათ, T აღნიშნავს ერთ-ერთ კონკრეტულ წინადადებას, რომელიც დამოუკიდებელია სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებისაგან. განვსაზღვროთ შემდეგი ბინარული თანაფარდობა $S(x,y)$:

$$(T \;\&\; x = 0 \;\&\; y = x) \vee ((\neg T) \;\&\; x = 1 \;\&\; y = x) \vee (x \neq 0 \;\&\; x \neq 1 \;\&\; y = x).$$

შეამოწმეთ, რომ S(x,y) ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ. ფრენკელის აქსიომათა სქემის თანახმად (იხ. §0), არსებობს

$$Y = \{y : (\exists x)(x \in \{0,1\} \ \&\ S(x,y))\}$$

სიმრავლე.

აჩვენეთ, რომ ეს სიმრავლე არის ერთელემენტიანი და, მაშასადამე, არაცარიელია. აგრეთვე დაასაბუთეთ, რომ **ZFC** თეორიის ყოველი t ტერმისათვის $t \in Y$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $t \in \{0,1\}$ დამოკიდებულება. ამავე დროს, $0 \in Y$ და $1 \in Y$ დამოკიდებულებებიდან არც ერთი არ არის ამ თეორიის თეორემა.

ამრიგად, აღნიშნული არაცარიელი Y სიმრავლისათვის პრინციპულად შეუძლებელია (**ZFC** თეორიის ჩარჩოებში) Y-ის რომელიმე კონკრეტული ელემენტის მითითება (შესაძლებელია მხოლოდ იმის მტკიცება, რომ ან $0 \in Y$, ან $1 \in Y$).

9. დაამტკიცეთ, რომ თუ მოცემული X სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის ეს სიმრავლე n ცალ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ელემენტს შეიცავს. (დაუშვით საწინააღმდეგო და განიხილეთ ისეთი უმცირესი ნატურალური n რიცხვი, რომლისთვისაც X სიმრავლეში არ არსებობს n ცალი წყვილ-წყვილად განსხვავებული ელემენტი.)

10*. დაამტკიცეთ, რომ მარტივ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა (ევკლიდეს თეორემა). უფრო ზუსტად, აჩვენეთ, რომ თუ მოცემულია n ცალი მარტივი რიცხვი, მაშინ მოიძებნება ყველა მოცემულთაგან განსხვავებული მარტივი რიცხვი. აღწერეთ კონკრეტული პროცედურა, რომლის მეშვეობითაც მიიღება ეს ახალი მარტივი რიცხვი.

ამავე საკითხს მიუდექით ცოტა სხვანაირად. სახელდობრ, მიუთითეთ ნატურალურ რიცხვთა ისეთი კონკრეტული უსასრულო სიმრავლე, რომ ამ სიმრავლეში შემავალი

ნებისმიერი ორი რიცხვი იყოს თანამარტივი. (განიხილეთ ე.წ. ფერმას რიცხვები.) გამოიყვანეთ აქედან ("დირიხლეს პრინციპის" ან, რაც იგივეა, "კურდღლების პრინციპის" გამოყენებით), რომ უკვე ამ გარემოების გამო მარტივ რიცხვთა სიმრავლე ვერ იქნება სასრული.

11. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ნამდვილი ცვლადის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ნულზე მეტია, რომლის ყველა კოეფიციენტი **Z**-ს ეკუთვნის და რომლის მნიშვნელობები **N**-ის წერტილებში მთელ მარტივ რიცხვებს წარმოადგენენ.

წინა სავარჯიშოსთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ არსებობს რამდენიმე ნამდვილი ცვლადის მრავალწევრი, რომლის ყველა კოეფიციენტი **Z**-ს ეკუთვნის და რომლის მნიშვნელობები **N**-ის წერტილებში ყველა მარტივ რიცხვს და მხოლოდ მათ იძლევა. ასეთი მრავალწევრის მაგალითი პირველად ცნობილმა რუსმა მათემატიკოსმა ი. მატიასევიჩმა (Yu. Matiyasevich) მოიყვანა.

ოდითგანვე დაისვა ამოცანა ყველა მარტივი რიცხვის ზოგადი ფორმულის პოვნის შესახებ. ამ მიმართულებით სხვადასხვა მათემატიკოსის მიერ ბევრი ცდა იყო განხორციელებული, მაგრამ დამაკმაყოფილებელი შედეგი მაინც არ ჩანდა. მიღებულ შედეგთა შორის ყველაზე მიმზიდველად სწორედ ი. მატიასევიჩის ზემოთ აღნიშნული მრავალწევრი გამოიყურება, რომელიც პირობითად შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ყველა მარტივი რიცხვის გამომსახველი ფორმულა.

12*. ვთქვათ, T(x) არის x ზოგადი ელემენტის (ანუ x საგნობრივი ცვლადის) რომელიმე თვისება. **ZF** თეორიის ჩარჩოებში (იხ. §0) დაამტკიცეთ, რომ ყოველი E სიმრავლისათვის არსებობს

$$Y = \{x : x \in E \ \& \ T(x)\}$$

სიმრავლე. ამისათვის განიხილეთ ორი შემთხვევა.

(ა) E-ს არც ერთ ელემენტს არა აქვს $T(\cdot)$ თვისება.

ამ შემთხვევაში აჩვენეთ, რომ $Y = \varnothing$.

(ბ) E-ს რომელიღაც e ელემენტს აქვს $T(\cdot)$ თვისება.

ამ შემთხვევაში განიხილეთ შემდეგი ბინარული დამოკიდებულება $S(x,y)$:

$$(T(x) \,\&\, y = x) \vee ((\neg T(x)) \,\&\, y = e).$$

შეამოწმეთ, რომ $S(x,y)$ ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ, და ფრენკელის აქსიომათა სქემის გამოყენებით (იხ. §0) აჩვენეთ, რომ $Y = \{y : (\exists x)(x{\in}E \,\&\, S(x,y))\}$ საძიებელი სიმრავლეა.

13*. გამოიყენეთ უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომა (იხ. §0) და **ZF** თეორიაში დაადგინეთ, რომ არსებობს X სიმრავლე, რომლის ელემენტები $\varnothing$ და $\{\varnothing\}$ სიმრავლეებია, თანაც ეს ბოლო ორი სიმრავლე ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (იხ. ზემოთ მოყვანილი სავარჯიშო 3).

ახლა აიღეთ ნებისმიერი ორი a და b სიმრავლე და განსაზღვრეთ შემდეგი ბინარული დამოკიდებულება $S(x,y)$:

$$(x = \varnothing \,\&\, y = a) \vee (x \neq \varnothing \,\&\, y = b).$$

შეამოწმეთ, რომ ეს დამოკიდებულება ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ. ისევ ფრენკელის აქსიომათა სქემის საშუალებით გააკეთეთ დასკვნა, რომ არსებობს

$$Y = \{y : (\exists x)(x{\in}X \,\&\, S(x,y))\}$$

სიმრავლე და იგი $\{a,b\}$ სიმრავლეს ემთხვევა.

მაშასადამე, ყოველი ორი a და b სიმრავლისათვის არსებობს $\{a,b\}$ სიმრავლე. კერძოდ, ნებისმიერი a სიმრავლისათვის არსებობს $\{a\}$ ერთელემენტიანი სიმრავლე.

§2. ქვესიმრავლეები. სიმრავლის ბულეანი. ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი. ბინარული მიმართებები

წინა პარაგრაფში უკვე აღვნიშნეთ, რომ ყველა მათემატიკური ობიექტი სიმრავლის ცნებაზე დაიყვანება, ხოლო ამ ობიექტთა შორის ყველანაირი დამოკიდებულება (თანაფარდობა, მიმართება) არსებითად ზემოხსენებულ $\in$ კუთვნილების დამოკიდებულებაზე დადის.

თანამედროვე სიმრავლეთა თეორია სიმრავლეებისა და მათ შორის დამოკიდებულებების ყველაზე ზოგად (უპირველეს ყოვლისა, რაოდენობრივ) თვისებებს შეისწავლის. სიმრავლეთა თეორიიდან გამომდინარე, იგება და ყალიბდება დანარჩენი მათემატიკური დისციპლინები (ალგებრა, გეომეტრია, ტოპოლოგია, მათემატიკური ანალიზი, ალბათობის თეორია და ა.შ.), რომლებიც უფრო სპეციფიკური ტიპის სიმრავლეებსა და მათ შორის სპეციალური ხასიათის დამოკიდებულებებს შეისწავლიან (იხ. კომენტარი 7).

პრაქტიკამ აჩვენა, რომ სიმრავლურ-თეორიული სიმბოლიკა (რომელიც თავის დროზე შემუშავებული იყო იტალიელი მათემატიკოსის ჯ. პეანოს (G. Peano), გერმანელი მათემატიკოსის ე. შრიოდერის (E. Schröder) და სხვების მიერ) ძალზე კომპაქტური, მარტივი და მოსახერხებელია. მისი დახმარებით მოკლედ და ზუსტად ჩაიწერება ფორმულები, გამონათქვამები (წინადადებები) და, კერძოდ, თეორემები.

ბუნებრივია, სხვადასხვა ტიპის სიმბოლოებს შორის ზოგიერთი ძირეულ როლს თამაშობს. ასეთი სიმბოლოები შეიძლება ჩავთვალოთ ამა თუ იმ კონკრეტული მათე-მატიკური თეორიის შესაბამისი ალფაბეტის (ანბანის) ამოსავალ სიმბოლოებად. ზოგიერთი მათგანი კარგადაა ცნობილი საშუალო სკოლის მოსწავლეებისთვისაც. მაგალითისათვის საკმარისია გამოვყოთ თუნდაც წმინდა ლოგიკური სიმბოლოები, რომლებიც ნებისმიერ მათემატიკურ (და არა მხოლოდ მათემატიკურ) თეორიაში გამოიყენება:

$$\vee,\ \&,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow.$$

ასევე კარგად გვახსოვს წმინდა მათემატიკური სიმბოლოებიც:

$$=,\ \geq,\ <,\ \infty,\ +,\ -.$$

გავიხსენოთ აგრეთვე კიდევ ორი, მეტად მნიშვნელოვანი, ლოგიკური სიმბოლო, რომლებსაც ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები ეწოდება. ეს სიმბოლოები მათემატიკაში შემოტანილი იყო გერმანელი ლოგიკოსის გ. ფრეგესა (G. Frege) და ამერიკელი ლოგიკოსის ჩ. პირსის (Ch. Peirce) მიერ.

ზოგადობის კვანტორის შესაბამისი სიმბოლოა $\forall$ და იგი ნიშნავს – „ყოველი", „ნებისმიერი".

მაგალითად, წინადადება

„ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი არანაკლებია ნულზე"

ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$(\forall n)(n \in N \Rightarrow n \geq 0)$ ან, უფრო მოკლედ, $(\forall n \in N)(n \geq 0)$.

არსებობის კვანტორის შესაბამისი სიმბოლოა $\exists$ და იგი ნიშნავს – „მოიძებნება", „არსებობს".

მაგალითად, წინადადება

„მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომელიც მეტია 2008-ზე"

ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$(\exists n)(n \in N \ \&\ n > 2008)$ ან, უფრო მოკლედ, $(\exists n \in N)(n > 2008)$.

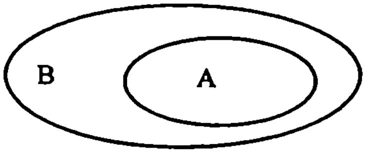
ზოგადობის კვანტორის უშუალო გამოყენებით შეგვიძლება მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლის ცნება განვსაზღვროთ.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლის ელემენტიც არის, მაშინ A სიმრავლეს B სიმრავლის ნაწილი (ანუ ქვესიმრავლე) ეწოდება და ეს გარემოება $A \subset B$ ან $B \supset A$ ჩანაწერით აღინიშნება.

ამ შემთხვევაში აგრეთვე ამბობენ, რომ „A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში“, ან „A სიმრავლე ჩართულია B სიმრავლეში“, ან „B სიმრავლე მოიცავს A სიმრავლეს“. უფრო დეტალურად, სიმბოლოებში, ეს შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

სიმრავლურ-თეორიულ $\subset$ ნიშანს ჩართვის ნიშანი ეწოდება. იმ გარემოებას, რომ ადგილი აქვს $A \subset B$ ჩართვის დამოკიდებულებას, ეილერ-ვენის დიაგრამის მეშვეობით ასე გამოსახავენ:



შევნიშნოთ, რომ ცარიელი სიმრავლე შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ნებისმიერი სიმრავლის ნაწილი და ნებისმიერი სიმრავლე არის თავისი თავის ნაწილი (დაასაბუთეთ ეს ორივე გამონათქვამი).

ადვილად მოწმდება აგრეთვე ჩართვის ნიშნის (ჩართვის დამოკიდებულების) ე.წ. ტრანზიტულობის თვისება:

თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$.

ახლა დავაფიქსიროთ რომელიმე B სიმრავლე და განვიხილოთ ამ სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე. ბუნებრივად იბადება კითხვა: ქმნის თუ არა აღნიშნულ ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა რაიმე ახალ სიმრავლეს? ეს კითხვა არ არის ტრივიალური, რადგან, როგორც უკვე ვიცით, ზოგიერთი დამახასიათებელი $S(\cdot)$ თვისება შეიძლება

კორექტულად ვერანაირ სიმრავლეს ვერ განსაზღვრავდეს (იხ. წინა პარაგრაფში მოყვანილი ბ. რასელის პარადოქსი). ჩვენ შემთხვევაში დამახასიათებელი თვისების როლს თამაშობს კონკრეტული თვისება S(A):

$$A \subset B.$$

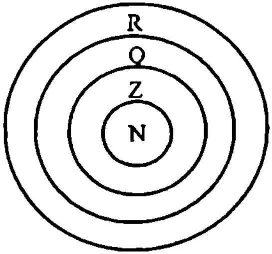
სიმრავლეთა თეორიის თანამედროვე აქსიომატიკაში მიღებულია აქსიომა (იხ. §0), რომლის თანახმადაც ყოველი B სიმრავლისათვის არსებობს მისი ყველა შესაძლო ნაწილების სიმრავლე (ცხადია, იგი უნდა იყოს ერთადერთი). ამ უკანასკნელს B სიმრავლის ბულეანი ეწოდება. როგორც წესი, იგი P(B) სიმბოლოთი აღინიშნება (იხ. კომენტარი 8).

ყოველი სიმრავლისათვის მისი ბულეანის არსებობა ძალზე მნიშვნელოვანია სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით. შემდგომში დავინახავთ, რომ სწორედ ამ აქსიომის წყალობით ხდება შესაძლებელი სულ უფრო და უფრო მაღალი რიგის უსასრულობების აგება. აღნიშნული აქსიომის გარეშე სიმრავლეთა თეორიაში ვერ იარსებებს ისეთი კანონიკური და ყველასათვის კარგად ნაცნობი ობიექტი, როგორიცაა **R** რიცხვითი კონტინუუმი, ანუ ჩვეულებრივი გეომეტრიული წრფე. გარდა ამისა, სწორედ **N** სიმრავლის ბულეანის არსებობასთან უშუალოდაა დაკავშირებული კანტორის სახელგანთქმული კონტინუუმის ჰიპოთეზა (იხ. §5).

ადვილი დასანახია, რომ ჩვენთვის ცნობილი რიცხვითი **N**, **Z**, **Q**, **R** სიმრავლეებისათვის სამართლიანია თანაფარდობა

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},$$

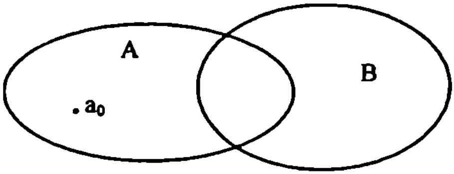
რასაც ეილერ-ვენის დიაგრამით ასე გამოსახავენ:



ზოგადად მოცემული A და B სიმრავლეებისათვის $A \not\subset B$ ჩანაწერი ნიშნავს, რომ A არ არის B-ს ქვესიმრავლე, ე.ი. A-ში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ელემენტი, ვთქვათ a_0, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს. მაშასადამე, მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists a \in A)(a \notin B),$$

და ეილერ-ვენის შესაბამის დიაგრამაზე გვაქვს:



სადაც წერტილით გამოყოფილია A სიმრავლის სწორედ ისეთი a_0 ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნის.

მაგალითი 1. განვიხილოთ რომელიმე სამელემენტიანი A={a,b,c} სიმრავლე. ამ სიმრავლის ქვესიმრავლეებია:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$$

და მათგან განსხვავებული ნაწილი A სიმრავლეს არ გააჩნია. მაშასადამე, A-ს ყველა შესაძლო ნაწილთა რაოდენობა 8-ის ტოლია. შევნიშნოთ, რომ $8 = 2^3$, ე.ი. აქ ხარისხის მაჩვენებელი უდრის A-ს ელემენტების რაოდენობას. ეს ფაქტი შემთხვევითი არ არის (ამასთან დაკავშირებით იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 1).

წინა პარაგრაფში უკვე ხაზგასმით აღვნიშნეთ, რომ ნებისმიერი სიმრავლე ცალსახად განისაზღვრება მისი ყველა ელემენტის მეშვეობით. ახლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია ამ ფუნდამენტური თეზისის ზუსტად ჩამოყალიბება.

ამბობენ, რომ A და B სიმრავლეები ტოლია, თუ ისინი შედგება ერთი და იგივე ელემენტებისაგან (A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს და, პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A-ს).

ბუნებრივია, სიმრავლეთა ტოლობისათვის გამოიყენება ჩვეულებრივი ჩანაწერი: A = B. მაშასადამე, მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \ \& \ B \subset A).$$

ამ ფორმულას ხშირად ექსტენსიონალობის აქსიომასაც უწოდებენ (იხ. §0 და კომენტარი 9).

მაგალითი 2. განვიხილოთ $\varnothing$ ცარიელი სიმრაველით წარმოქმნილი შემდეგი ორელემენტიანი სიმრავლე:

$$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი არის იმავდროულად ამ სიმრაველის ქვესიმრავლეც. ასეთი თვისების მქონე სიმრავლეებს ტრანზიტული სიმრაელეები ჰქვია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ტრანზიტული

სიმრავლე, რომელიც ზუსტად n ელემენტს შეიცავს (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 4). ტრანზიტულ სიმრავლეებსა და სიმრავლეთა ტრანზიტულ კლასებს დიდი მნიშვნელობა ენიჭებათ თანამედროვე აქსიომატურ სიმრავლეთა თეორიაში (ამასთან დაკავშირებით იხ. §6 და კომენტარი 10).

შემოვიღოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი განმარტება. ვთქვათ, მოცემულია a და b ორი სიმრავლე. მათ მიერ წარმოქმნილი დალაგებული (a,b) წყვილი (ან, უფრო მოკლედ, (a,b) წყვილი) შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

ექსტენსიონალობის აქსიომის საფუძველზე ადვილად მოწმდება ასეთი ფორმულის მართებულობა:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \ \& \ b = d).$$

ამ ფაქტის შემოწმების მარტივ პროცედურას მკითხველს სასარგებლო სავარჯიშოდ ვუტოვებთ. თავის მხრივ, აღნიშნული ფაქტი უშუალოდ გვაძლევს, რომ (a,b) = (b,a) ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a = b.

თუ მოცემულია (a,b) წყვილი, მაშინ a-ს ეწოდება ამ წყვილის პირველი კომპონენტი (პირველი პროექცია), ხოლო b-ს — ამ წყვილის მეორე კომპონენტი (მეორე პროექცია).

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი A და B ორი სიმრავლე და განვიხილოთ ყველა შესაძლო (a,b) წყვილთა ერთობლიობა, სადაც $a \in A$ და $b \in B$. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომების ერთ-ერთი შედეგის თანახმად, ასეთი ტიპის წყვილთა ერთობლიობა ქმნის ახალ სიმრავლეს, რომელსაც აღებული A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება (იხ. მომდევნო §3-ის სავარჯიშო 15). ეს დეკარტული ნამრავლი ჩვეულებრივ აღინიშნება $A \times B$ სიმბოლოთი. როცა $A = B$, მაშინ გვაქვს $A \times A$ ნამრავლი, რომელსაც A სიმრავლის

დეკარტული კვადრატი ჰქვია. იგი ხშირად A^2 სიმბოლოთიც აღინიშნება.

მაგალითად, ევკლიდური სიბრტყე წარმოადგენს R ნამდვილი რიცხვითი ღერძის დეკარტულ კვადრატს. ანალოგიურად, ყველა კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლე შეიძლება გაიგივებულ იქნეს R-ის დეკარტულ კვადრატთან.

$A \times B$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ S ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული დამოკიდებულება (ბინარული მიმართება, ბინარული პრედიკატი) A-სა და B-ს შორის (უფრო ზუსტად კი, ამ ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის). თუ $(a,b)\in S$, მაშინ ამბობენ, რომ a და b ელემენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია S მიმართებით (S მიმართების მეშვეობით) ან ამბობენ, რომ a და b ელემენტები ერთმანეთთან S მიმართებაში არიან.

ყოველი ბინარული S მიმართებისათვის ბუნებრივად განისაზღვრება მისი შებრუნებული S^{-1} ბინარული მიმართება:

$$S^{-1} = \{(b,a) : (a,b)\in S\}.$$

როცა $A = B$, მაშინ საუბრობენ A სიმრავლეზე (ან A სიმრავლეში) მოცემულ S ბინარულ მიმართებაზე.

მაგალითი 3. ყოველ A სიმრავლეში გვაქვს სამი ბუნებრივი (კანონიკური) ბინარული მიმართება. პირველი მათგანი არის ე.წ. ცარიელი მიმართება, რომელიც არც ერთ წყვილს არ შეიცავს. მეორე მათგანი ემთხვევა მთელ $A \times A$ დეკარტულ კვადრატს. მას სრული ბინარული მიმართება ჰქვია (A-ში). მესამე მიმართება შედგება ყველა შესაძლო (a,a) სახის წყვილებისაგან, სადაც $a\in A$. ამ ბოლო მიმართებას $A \times A$ დეკარტული კვადრატის დიაგონალი ეწოდება და $\Delta(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ S ბინარული დამოკიდებულებაა A-სა და B-ს შორის, $A'\subset A$ და $B'\subset B$, მაშინ

$$S' = \{(a,b) \in S : a \in A' \ \& \ b \in B'\}$$

არის ბინარული დამოკიდებულება A'-სა და B'-ს შორის. ჩვეულებრივ, ამ S'-ს უწოდებენ S-ით ინდუცირებულ ბინარულ დამოკიდებულებას A'-სა და B'-ს შორის, ანუ S-ის შევიწროებას $A' \times B'$ დეკარტულ ნამრავლზე. კერძოდ, თუ $B = A$, მაშინ A-ზე მოცემული ყოველი S ბინარული დამოკიდებულება ცალსახად წარმოქმნის (ინდუცირებს) შესაბამის S' ბინარულ დამოკიდებულებას A-ს ნებისმიერ A' ქვესიმრავლეზე, რადგან ამ შემთხვევაში გვაქვს $S' \subset A' \times A'$.

ახლა მოვიყვანოთ ბინარული დამოკიდებულების ძალზე მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, რომელიც საკმაოდ ხშირად გვხდება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

განვიხილოთ ნებისმიერი A სიმრავლე და მასზე მოცემული S ბინარული მიმართება. ამბობენ, რომ S არის ეკვივალენტობის მიმართება A-ზე (A-ში), თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

(რ) S მიმართება არის რეფლექსური, ე.ი. ყოველი a ელემენტისათვის A-დან, გვაქვს $(a,a) \in S$;

(ს) S მიმართება არის სიმეტრიული, ე.ი. ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის A-დან, თუ $(a,b) \in S$, მაშინ $(b,a) \in S$;

(ტ) S მიმართება არის ტრანზიტული, ე.ი. ყოველი სამი a, b, c ელემენტისათვის A-დან, თუ $(a,b) \in S$ და $(b,c) \in S$, მაშინ $(a,c) \in S$.

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ ჩანს, რომ თავად $A \times A$ და მისი $\Delta(A)$ დიაგონალი წარმოადგენენ ეკვივალენტობის დამოკიდებულებებს A სიმრავლეში.

ძნელი არ არის სხვადასხვა ტიპის ეკვივალენტობის მიმართების მაგალითების მოყვანა მათემატიკის სასკოლო

კურსიდანაც. კერძოდ, დავაფიქსიროთ ნატურალური რიცხვი $n > 0$ და განვიხილოთ შემდეგი სიმრაველე:

$$S = \{(a,b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : a - b \text{ იყოფა } n\text{-ზე}\}.$$

ადვილად მოწმდება, რომ S არის ეკვივალენტობის მიმართება **Z**-ზე.

აგრეთვე, E ევკლიდურ სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრფის სიმრავლეში ბუნებრივად განისაზღვრება S ეკვივალენტობის მიმართება: ორი წრფე S მიმართებაშია, თუ ისინი ურთიერთპარალელურნი არიან (აქ, ცხადია, იგულისხმება, რომ ნებისმიერი წრფე თავისი თავის პარალელურია).

ბინარული დამოკიდებულების მეორე, ასევე ძალზე მნიშვნელოვანი მაგალითი არის ე.წ. ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულება.

კვლავ განვიხილოთ ნებისმიერი A სიმრავლე და მასზე მოცემული S ბინარული დამოკიდებულება. ამბობენ, რომ S არის ნაწილობრივი დალაგების მიმართება A-ზე (A-ში), თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

(რ) S მიმართება არის რეფლექსური;

(ას) S მიმართება არის ანტისიმეტრიული, ე.ი. A სიმრავლის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის, თუ $(a,b) \in S$ და $(b,a) \in S$, მაშინ $a = b$;

(ტ) S მიმართება არის ტრანზიტული.

თუ S – ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულება A-ზე და $(a,b) \in S$, მაშინ წერენ ხოლმე: $a \le b$ (ან $b \ge a$). ამით ხაზს უსვამენ იმ გარემოებასაც, რომ ნამდვილ რიცხვთა შორის ჩვეულებრივი დალაგების დამოკიდებულება $\le$ (ან $\ge$) წარმოადგენს ნაწილობრივი დალაგების კერძო, მაგრამ მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევას, რომლიდანაც წარმოიშვა შესაბამისი მათემატიკური სტრუქტურის ზოგადი თეორია.

თუ $a \leq b$ ან $b \leq a$, მაშინ ამბობენ, რომ a და b ელემენტები სადარია მოცემული S ნაწილობრივი დალაგების მიმართ.

თუ ყოველი ორი ელემენტი A-დან სადარია S-ის მიმართ, მაშინ ასეთ S ნაწილობრივ დალაგებას A-ს წრფივი დალაგება ეწოდება, ხოლო თვით A სიმრავლეს – წრფივად დალაგებული ამ S-ის მიმართ (წრფივად დალაგებული სიმრავლის სტანდარტული მაგალითებია: **N, Z, Q** და **R**).

თუ $a \leq b$ და a არ უდრის b-ს, მაშინ ამბობენ, რომ a ნაკლებია (ზოგჯერ ამბობენ, რომ a მკაცრად ნაკლებია) b-ზე. ანალოგიურად, თუ $b \leq a$ და a არ უდრის b-ს, მაშინ ამბობენ, რომ a მეტია (ზოგჯერ ამბობენ, რომ a მკაცრად მეტია) b-ზე.

ადვილად მოწმდება, რომ მოცემული S ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულება ინდუცირებს ასევე ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულებას A სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრაველეზე.

ვთქვათ, B არის A-ს რომელიმე ქვესიმრაველე.

ამბობენ, რომ $a \in A$ ელემენტი არის B-ს მაჟორანტი (შესაბამისად, მინორანტი), თუ $b \leq a$ (შესაბამისად, $a \leq b$) ყოველი $b \in B$ ელემენტისათვის.

თუ a არის მთელი A-ს მაჟორანტი (შესაბამისად, მთელი A-ს მინორანტი), მაშინ a-ს ეწოდება A-ს უდიდესი (შესაბამისად, უმცირესი) ელემენტი.

B ქვესიმრავლეს ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული, თუ მისი მაჟორანტების (მინორანტების) სიმრავლე არაცარიელია.

B ქვესიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი ერთდროულად შემოსაზღვრულია ზემოდანაც და ქვემოდანაც.

B ქვესიმრაველის ყველა მაჟორანტის სიმრავლეში უმცირეს ელემენტს (თუ იგი არსებობს) ეწოდება B ქვესიმრავლის სუპრემუმი და იგი sup(B) სიმბოლოთი აღინიშნება. ანალოგიურად, B ქვესიმრავლის ყველა მინორანტის სიმრავლეში უდიდეს ელემენტს (თუ იგი არსებობს) ეწოდება B ქვესიმრავლის ინფიმუმი და იგი inf(B) სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია, არ არის აუცილებელი, რომ sup(B) ან

inf(B) მაინცდამაინც B-ს ეკუთვნოდეს. თუ B არაცარიელია და ორივე ელემენტი inf(B) და sup(B) არსებობს, მაშინ გვაქვს $\inf(B) \le \sup(B)$ თანაფარდობა.

$a \in A$ ელემენტს ეწოდება მაქსიმალური (შესაბამისად, მინიმალური), თუ ყოველი $b \in A \setminus \{a\}$ ელემენტი ან არასადარია a-სთან, ან მკაცრად ნაკლებია a-ზე (შესაბამისად, ან არასადარია a-სთან, ან მკაცრად მეტია a-ზე).

შევნიშნოთ, რომ თუ A-ში არსებობს უდიდესი (უმცირესი) ელემენტი, მაშინ იგი იქნება ერთადერთი მაქსიმალური (მინიმალური) ელემენტი იმავე A-ში. შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, არ არის მართებული; მოიყვანეთ სათანადო მაგალითები და გაიაზრეთ არსებითი განსხვავება მაქსიმალურ (მინიმალურ) და უდიდეს (უმცირეს) ელემენტებს შორის.

მაგალითი 4. ადვილად მოწმდება, რომ P(A) ბულეანში ჩართვის დამოკიდებულება A-ს ქვესიმრავლეებს შორის არის ნაწილობრივი დალაგების მიმართება P(A)-ში. აქ უდიდესი ელემენტია A, ხოლო უმცირესი ელემენტი – ცარიელი სიმრავლე. გარდა ამისა, ჩართვის დამოკიდებულება ინდუცირებს ნაწილობრივ დალაგებას P(A) ბულეანის ნებისმიერ ქვესიმრავლეზე. კერძოდ, თუ A სიმრავლე ორ ელემენტს მაინც შეიცავს და მისი ბულეანიდან ამოვაგდებთ ცარიელ სიმრავლეს, მაშინ მივიღებთ ისეთ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეს, რომელშიც არ არსებობს უმცირესი ელემენტი, ხოლო A-ს ყოველი ერთელემენტიანი ქვესიმრავლე იქნება მიღებული ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლის მინიმალური ელემენტი.

მოვიყვანოთ ნაწილობრივი დალაგების მიმართების სხვა მაგალითი, რომელიც ელემენტარული მათემატიკიდანაა ცნობილი.

მაგალითი 5. განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლე:

$$S = \{(a,b)\in\{1,2,3, \ldots\}\times\{1,2,3, \ldots\} : b \text{ იყოფა } a\text{-ზე}\}.$$

მკითხველს ვაძლევთ იმ ფაქტის შემოწმების შესაძლებლობას, რომ S წარმოადგენს ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულებას $A = \{1,2,3,\ldots\}$ სიმრავლეში. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს იმასაც, რომ უმცირესი ელემენტი S ნაწილობრივი დალაგების მიმართ არის 1, ხოლო მაქსიმალური ელემენტი ამ შემთხვევაში არ არსებობს.

მაგალითი 6. რაიმე ნაწილობრივად დალაგებულ $(E,\leq)$ სიმრავლეს მესერი ეწოდება, თუ E-ს ყოველ ორელემენტიან ქვესიმრავლეს აქვს სუპრემუმიც და ინფიმუმიც. $(E,\leq)$ მესერს დისტრიბუტიული ეწოდება, თუ ნებისმიერი სამი x, y, z ელემენტისათვის E-დან გვაქვს

$$\sup(x, \inf(y,z)) = \inf(\sup(x,y), \sup(x,z)).$$

რთული არ არის იმის ჩვენება, რომ ეს უკანასკნელი პირობა

$$\inf(x, \sup(y,z)) = \sup(\inf(x,y), \inf(x,z))$$

პირობის ეკვივალენტურია (ცხადია, კვლავ ნებისმიერი სამი x, y, z ელემენტისათვის E-დან).

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს იმ ფაქტსაც, რომ ყოველი წრფივად დალაგებული სიმრავლე დისტრიბუტიულ მესერს წარმოადგენს.

დავუშვათ, რომ $(E,\leq)$ დისტრიბუტიულ მესერს აქვს უმცირესი და უდიდესი ელემენტები, რომლებსაც შესაბამისად 0 და 1 სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. გარდა ამისა, ვთქვათ, მოცემულია ამავე $(E,\leq)$ მესერის რომელიმე ორი x და x′ ელემენტი. ამ ელემენტებს ვუწოდოთ ურთიერთდამატებითი, თუ

$$\inf(x,x') = 0 \ \& \ \sup(x,x') = 1.$$

მარტივად მოწმდება, რომ ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის შეიძლება არსებობდეს არაუმეტეს ერთი დამატებითი x' ელემენტი.

აქვე შევნიშნოთ, რომ მე-5 მაგალითში მოყვანილი ნაწილობრივად დალაგებული $(\{1,2,3,...\},S)$ სიმრავლე არის დისტრიბუტიული მესერი. სახელდობრ, $\{1,2,3,...\}$ სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი ორი რიცხვის ინფიმუმი მათი უდიდესი საერთო გამყოფია, ხოლო ამავე ორი რიცხვის სუპრემუმი – მათი უმცირესი საერთო ჯერადი.

ამბობენ, რომ $(E,\leq)$ არის ბულის ალგებრა, თუ იგი წარმოადგენს დისტრიბუტიულ მესერს, რომელშიც არსებობს უმცირესი და უდიდესი ელემენტები და რომელშიაც ყოველ x ელემენტს დამატებითი x' ელემენტი გააჩნია.

ბულის ალგებრების თეორიას აქვს უამრავი გამოყენება თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, განსაკუთრებით კი მათემატიკურ ლოგიკაში, სიმრავლეთა თეორიაში, ზოგად ტოპოლოგიაში, ფუნქციონალურ ანალიზსა და ალბათობის თეორიაში.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ მხოლოდ ბინარული მიმართებები (დამოკიდებულებები) და მოვიყვანეთ ასეთი მიმართებების რამდენიმე მნიშვნელოვანი მაგალითი. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მოცემული

$$A_1,\ A_2,\qquad ,\ A_n$$

სიმრავლეებისათვის შეიძლება შემოტანილ იქნეს n-ადგილიანი მიმართების (დამოკიდებულების, პრედიკატის) ცნება. კერძოდ, თუ $n = 3$ და მოცემულია რომელიმე სამი A, B, C სიმრავლე, მაშინ 3-ადგილიანი ანუ ტერნარული მიმართება ამ სიმრავლეებს შორის (ან მათ ელემენტებს შორის) განისაზღვრება როგორც $(A\times B)\times C$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე. იგივე ნამრავლის ნებისმიერ $((a,b),c)$

ელემენტს დალაგებული სამეული ეწოდება და იგი, ჩვეულებრივ, უფრო მოკლე (a,b,c) სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსაკუთრებით გამოვყოთ $n=1$ შემთხვევა. ამ შემთხვევაში მოცემული გვექნება $A = A_1$ სიმრავლის გარკვეული ქვესიმრავლე, რომელიც A-ს ზოგადი a ელემენტის გარკვეულ S(a) თვისებასთან შეიძლება გავაიგივოთ. ასეთ სიტუაციაში ამბობენ ხოლმე, რომ A-ში განსაზღვრულია S(a) უნარული მიმართება.

§2-ის სავარჯიშოები

1. ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის დაამტკიცეთ, რომ n ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლის ბულეანი შეიცავს ზუსტად 2^n ელემენტს; სხვა სიტყვებით, ყოველ n-ელემენტიან სიმრავლეს ზუსტად 2^n ნაწილი აქვს. (გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი n-ის მიმართ.)

2. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული n-ელემენტიანი X სიმრავლის ყველა ნაწილი შეიძლება განვალაგოთ წრიულად ისე, რომ ყოველი ორი მეზობლად მყოფი ნაწილი მხოლოდ ერთი ელემენტით განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. სხვა სიტყვებით, თუ $A\subset X$ და $B\subset X$ ერთმანეთის მეზობელი ნაწილებია, მაშინ ან A მიიღება B-საგან ერთი ელემენტის დამატებით, ან, პირიქით, B მიიღება A-საგან ერთი ელემენტის დამატებით.

3. მოცემულია A და B ორი სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ

$$A\subset B \Rightarrow P(A)\subset P(B).$$

აჩვენეთ აგრეთვე, რომ, პირიქითაც, $P(A)\subset P(B)$ დამოკიდებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს $A\subset B$

დამოკიდებულება. მაშასადამე, $P(A) = P(B)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $A = B$ ტოლობაც.

4. აჩვენეთ, რომ ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ტრანზიტული სიმრავლე, რომელიც ზუსტად n ელემენტს შეიცავს. (ამ ფაქტთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 11).

5. ვთქვათ, მოცემულია A და B ორი არაცარიელი სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ $A \times B = B \times A$ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = B$. მართებულია თუ არა ეს დასკვნა იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთი ამ სიმრავლეებიდან ცარიელია?

6. განვიხილოთ ნებისმიერი ორი ბინარული $S \subset A \times B$ და $T \subset C \times D$ მიმართება. ამ ორი მიმართების $T \circ S$ კომპოზიცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$T \circ S = \{(a,d) : (\exists z)((a,z) \in S \ \& \ (z,d) \in T)\}.$$

ცხადია, ეს კომპოზიცია არ არის დამოკიდებული A, B, C, D სიმრავლეების შერჩევაზე და წარმოადგენს რომელიღაც ბინარულ მიმართებას A და D სიმრაველთა ელემენტებს შორის.

ვთქვათ, მოცემულია კიდევ ერთი $R \subset E \times F$ ბინარული მიმართება. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$R \circ (T \circ S) = (R \circ T) \circ S.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ბინარულ მიმართებათა კომპოზიციისათვის სრულდება ასოციატიურობის პირობა.

ახლა დავუშვათ, რომ S არის ბინარული მიმართება რაიმე A სიმრავლეზე, ე.ი. $S \subset A \times A$. შეამოწმეთ, რომ:

S რეფლექსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\Delta(A)$ დიაგონალი ჩართულია S-ში;

S სიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $S = S^{-1}$;

S ანტისიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ელემენტი, რომელიც ერთდროულად S-სა და S^{-1}-ს ეკუთვნის, არის $\Delta(A)$-ს ელემენტიც;

S ტრანზიტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $S \circ S \subset S$.

7. ვთქვათ, მოცემულია სასრული ნაწილობრივად დალაგებული $(A, \leq)$ სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ A-ს ყოველი a ელემენტისათვის მოიძებნება A-ს მაქსიმალური ელემენტი, რომელიც a-ს მაჟორირებს, და მოიძებნება A-ს მინიმალური ელემენტი, რომელიც a-ს მინორირებს. (გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი A-ს ელემენტების რაოდენობის მიმართ.)

8. აჩვენეთ, რომ:

(ა) ჩვეულებრივ ევკლიდურ სიბრტყეზე მდებარე ყველა მრავალკუთხედთა სიმრავლე წარმოადგენს მესერს ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ (მრავალკუთხედები შეიძლება იყოს გადაგვარებულიც; გარდა ამისა, ცარიელი სიმრავლე ასევე მრავალკუთხედად იგულისხმება);

(ბ) ევკლიდურ სიბრტყეზე მდებარე ყველა ამოზნექილ მრავალკუთხედთა სიმრავლე წარმოადგენს მესერს ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ.

დაადგინეთ აგრეთვე, რა სახე აქვს მეორე მესერში ნებისმიერი ორი ელემენტის სუპრემუმს.

9. დაამტკიცეთ ამ პარაგრაფის მე-6 მაგალითში წარმოდგენილი ორი პირობის ეკვივალენტურობა, რომლებიც მესერის დისტრიბუტიულობას გამოხატავენ.

10. ვთქვათ, T(x) არის x საგნობრივი ცვლადის რაიმე თვისება, რომელიც სავსებით კორექტულად განსაზღვრავს

$\{x \quad T(x)\}$ სიმრავლეს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $T(x)$ თვისება არის მაკოლექტივიზირებელი x ცვლადის მიმართ.

ექსტენსიონალობის აქსიომის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $\{x : T(x)\}$ სიმრავლე ერთადერთია.

კერძოდ, ყოველი სიმრავლე ცალსახად განსაზღვრავს მის ბულეანს.

11. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე X სიმრავლე და $S(x,y)$ დამოკიდებულება ისეთი, რომ

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists ! y) S(x,y)),$$

ანუ $S(x,y)$ დამოკიდებულება ფუნქციონალურია y-ის მიმართ ყველა $x \in X$ ელემენტისათვის.

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისათვის არსებობს B სიმრავლე ისეთი, რომ

$$B = \{b : (\exists a)(a \in A \ \& \ S(a,b))\}.$$

ამისათვის განიხილეთ ახალი დამოკიდებულება $S'(x,y)$:

$$(x \in X \ \& \ S(x,y)) \vee (x \notin X \ \& \ y = x).$$

შეამოწმეთ, რომ $S'(x,y)$ ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ (უკვე ყველა x-სათვის). ამიტომ, ფრენკელის აქსიომათა სქემის თანახმად (იხ. §0), არსებობს შემდეგი სიმრავლე:

$$B' = \{b : (\exists a)(a \in A \ \& \ S'(a,b))\}.$$

აჩვენეთ, რომ საძიებელი B სიმრავლე ემთხვევა B' სიმრავლეს.

§3. ნაწილობრივი ფუნქციები. ფუნქციები. სიმრავლეთა ოჯახები და ძირითადი ოპერაციები მათზე

წინა პარაგრაფის მასალის საფუძველზე გავეცანით ბინარული მიმართების ცნებას და გამოვყავით ამ ცნების ორი კერძო, მაგრამ ძალიან მნიშვნელოვანი შემთხვევა – ეკვივალენტობის მიმართება და ნაწილობრივი დალაგების მიმართება. ამ პარაგრაფში კი განვიხილავთ ბინარული დამოკიდებულების კიდევ ერთ, უაღრესად მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას – ფუნქციის ცნებას და შევეხებით მასთან დაკავშირებულ რამდენიმე ძირითად საკითხს.

ვთქვათ, მოცემულია G სიმრავლე. ამბობენ, რომ G არის გრაფიკი, თუ მისი ყოველი z ელემენტი წარმოადგენს წყვილს, ე.ი. $z = (x,y)$, სადაც x და y რაიმე სიმრავლეებია. G გრაფიკთან კანონიკურად ასოცირდება შემდეგი ორი სიმრავლე:

$$pr_1(G) = \{x : (\exists y)((x,y)\in G)\}, \qquad pr_2(G) = \{y : (\exists x)((x,y)\in G)\}.$$

პირველ სიმრავლეს ჰქვია მოცემული G გრაფიკის პირველი პროექცია (ანუ ამ გრაფიკის განსაზღვრის არე, რომელიც ხშირად dom(G) სიმბოლოთიც აღინიშნება), ხოლო მეორე სიმრავლეს – მოცემული გრაფიკის მეორე პროექცია (ანუ ამ გრაფიკის მნიშვნელობათა არე, რომელიც ხშირად ran(G) სიმბოლოთიც აღინიშნება). ადვილად მტკიცდება შემდეგი ჩართვის დამოკიდებულება:

$$G \subset pr_1(G) \times pr_2(G).$$

ეს ჩართვა მიუთითებს იმ გარემოებაზე, რომ, ფაქტობრივად, გრაფიკის ცნება დაიყვანება ბინარული მიმართების ცნებაზე და, მაშასადამე, აქ პრინციპულად ახალი მომენტები არ ჩნდება (იხ. კომენტარი 12, სადაც განხილულია ამ ორ ცნებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ნიუანსი).

ვთქვათ, მოცემულია G გრაფიკი და X და Y ორი სიმრავლე. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$G(X) = \{y : (\exists x)(x \in X \;\&\; (x,y) \in G)\},$$

$$G^{-1}(Y) = \{x : (\exists y)(y \in Y \;\&\; (x,y) \in G)\}.$$

$G(X)$ სიმრავლეს ჰქვია X-ის სახე G გრაფიკის მიმართ, ხოლო $G^{-1}(Y)$ სიმრავლეს – Y-ის წინარე სახე იმავე G გრაფიკის მიმართ.

ამბობენ, რომ G გრაფიკი არის ფუნქციონალური, თუ იგი არ შეიცავს ორ სხვადასხვა წყვილს, რომლებსაც ერთი და იგივე პირველი კომპონენტი აქვთ. ფორმალურად ეს პირობა ასე ჩაიწერება:

$$((x,y) \in G \;\&\; (x,y') \in G) \Rightarrow (y = y').$$

ფუნქციონალური გრაფიკის ახლახან შემოტანილი ცნების მეშვეობით განისაზღვრება ნაწილობრივი ფუნქციის ცნება.

სამეულს $g = (G,A,B)$ ეწოდება ნაწილობრივი ფუნქცია (ანუ ნაწილობრივი ასახვა, ნაწილობრივი გადასახვა), თუ G არის ფუნქციონალური გრაფიკი, რომლის განსაზღვრის არე შედის A-ში, ხოლო მნიშვნელობათა არე შედის B-ში. ამ შემთხვევაში აგრეთვე ამბობენ, რომ g ნაწილობრივი ფუნქცია მოქმედებს A-დან B-ში. $pr_1(G)$ და $pr_2(G)$ სიმრავლეებს შესაბამისად ეწოდება g ნაწილობრივი ფუნქციის განსაზღვრის არე (აღინიშნება $dom(g)$ სიმბოლოთი) და ამავე ფუნქციის მნიშვნელობათა არე (აღინიშნება $ran(g)$ სიმბოლოთი). თუკი g ნაწილობრივი ფუნქციის განსაზღვრის არე ემთხვევა A სიმრავლეს, მაშინ ამბობენ, რომ g არის ფუნქცია (ასახვა, გადასახვა) A სიმრავლიდან B სიმრავლეში.

როგორც წესი, g ნაწილობრივ ფუნქციას აღნიშნავენ $g : A \rightarrow B$ სიმბოლოთი. ნებისმიერი $x \in dom(g)$ ელემენტისათვის $g(x)$ სიმბოლო აღნიშნავს იმ ერთადერთ y ელემენტს,

რომლისთვისაც $(x,y)\in G$. ამ ელემენტს ჰქვია g ნაწილობრივი ფუნქციის მნიშვნელობა x ელემენტზე.

ძალზე ხშირად g ნაწილობრივი ფუნქცია მოიცემა x და y თავისუფალი ცვლადების შემცველი ფორმულით, რომელიც y-ის მიმართ გარკვეულ ფუნქციონალობის პირობას აკმაყოფილებს. ასეთ სიტუაციაში ამბობენ, რომ ეს g ნაწილობრივი ფუნქცია განსაზღვრულია ფორმულის საშუალებით და პრაქტიკულად სწორედ იმ ფორმულას აიგივებენ g-სთან. კერძოდ, განვიხილოთ $y = t(x)$ სახის ფორმულა, სადაც $t(x)$ არის x თავისუფალი ცვლადის შემცველი ტერმი. თუ x იცვლება რაიმე ფიქსირებულ სიმრავლეში, მაშინ ცხადია, რომ საქმე გვაქვს ნაწილობრივ ფუნქციასთან. ამ ნაწილობრივი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $t(x)$ ტერმი კორექტულად არის განმარტებული შესაბამის ფორმალურ თეორიაში (იხ. ოდნავ ქვემოთ მაგალითი 1).

ზოგჯერ კონტექსტიდან სავსებით გასაგებია, რომელ A და B სიმრავლეებთან გვაქვს საქმე g ნაწილობრივი ფუნქციის განსაზღვრის დროს. უფრო მეტიც, ისეც ხდება ხოლმე, რომ ეს ორი სიმრავლე ჩვენი განხილვის ან მსჯელობის პროცესში არ იცვლება. ამ შემთხვევაში აღნიშნულ სიმრავლეებს საერთოდ არ მიუთითებენ და იმ g ნაწილობრივ ფუნქციებს, რომლებიც A-დან B-ში მოქმედებენ, შესაბამის G გრაფიკებთან აიგივებენ.

მაგალითი 1. დავუშვათ, საქმე გვაქვს მხოლოდ ისეთ ნაწილობრივ ფუნქციებთან, რომელთა განსაზღვრის არე შედის **R**-ში და მნიშვნელობათა არეც ასევე შედის **R**-ში, ანუ ვიხილავთ მხოლოდ $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ სახის ნაწილობრივ ფუნქციებს, რომლებსაც ნამდვილი ცვლადის ნამდვილმნიშვნელობიან ნაწილობრივ ფუნქციებს უწოდებენ. ასეთი ნაწილობრივი ფუნქციების სტრუქტურა და მათი თვისებები ძირითადად მათემატიკური ანალიზის ან ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის საუნივერსიტეტო კურსში შეისწავლება. ამ ნაწილობრივ ფუნქციათა შორის შეგვიძლია დავასახელოთ

ისეთი ნაწილობრივი ფუნქციები, რომლებიც მოიცემა ყველასათვის ნაცნობი ფორმულებით:

$$y = x^n,\ y = a^x,\ y = \sin(x),\ y = \cos(x),\ y = \arcsin(x),\ y = \ln(x).$$

აქ მოყვანილი ზოგიერთი ნაწილობრივი ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ $\mathbf{R}$ რიცხვით ღერძზე და, მაშასადამე, ისინი ფუნქციებს წარმოადგენენ. ბუნებრივად იბადება შემდეგი კითხვა: არის თუ არა შესაძლებელი ნებისმიერი ნაწილობრივი $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ სახის ფუნქციისათვის მოინახოს მისი განმსაზღვრელი ფორმულა? ეს კითხვა საკმაოდ საინტერესო და არატრივიალურია. იმისათვის, რომ მასზე პასუხი გაეცეს, საჭიროა დაზუსტდეს, რას ვგულისხმობთ ფორმულის ქვეშ. აღმოჩნდა, რომ ფორმულის ფართო გაგების დროსაც კი პასუხი დასმულ კითხვაზე უარყოფითია (ამასთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 13).

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე A სიმრავლე.

$f : A \to A$ ტიპის ნებისმიერ ნაწილობრივ ფუნქციას (შესაბამისად, ფუნქციას) ეწოდება ნაწილობრივი უნარული ოპერაცია (შესაბამისად, უნარული ოპერაცია) A-ში.

$h : A \times A \to A$ ტიპის ნებისმიერ ნაწილობრივ ფუნქციას (შესაბამისად, ფუნქციას) ეწოდება ნაწილობრივი ბინარული ოპერაცია (შესაბამისად, ბინარული ოპერაცია) A-ში.

საზოგადოდ, ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის ანალოგიურად განისაზღვრება n-არული ნაწილობრივი ოპერაცია (შესაბამისად, n-არული ოპერაცია), რომელიც მოქმედებს $A \times A \times \quad \times A$ ნამრავლიდან (სადაც A სიმრავლე n-ჯერ მრავლდება თავისთავზე) A-ში.

ვთქვათ, მოცემულია A და B ორი სიმრავლე და $g : A \to B$ ნაწილობრივი ფუნქცია. განსაზღვრის თანახმად, ამ ნაწილობრივი ფუნქციის G გრაფიკი შედის A და B სიმრავლეების დეკარტულ ნამრავლში. ახლა ავიღოთ $A' \subset A$ და $B' \subset B$ სიმრავლეები და აღვნიშნოთ G'-ით G-ს მიერ

ინდუცირებული გრაფიკი A' და B' სიმრავლეების დეკარტულ ნამრავლზე (იხ. §2). მაშინ $g' = (G', A', B')$ ნაწილობრივ ფუნქციას ეწოდება მოცემული g ნაწილობრივი ფუნქციის შევიწროება (A', B') წყვილზე, ხოლო თვით g-ს ეწოდება g'-ის გაგრძელება (A, B) წყვილზე. პრაქტიკაში უფრო ხშირად განიხილება ის სიტუაცია, როცა $A' \subset A$ და $B' = B$. ამ შემთხვევაში მოკლედ ამბობენ, რომ g' არის g-ს შევიწროება A'-ზე, ხოლო g არის g'-ის გაგრძელება A-ზე. g-ს შევიწროებას A'-ზე ხშირად $g|A'$ სიმბოლოთიც აღნიშნავენ.

აქვე შევნიშნოთ, რომ A-ზე მოცემული უნარული ოპერაციის შევიწროება A-ს რომელიმე A' ქვესიმრავლეზე, საზოგადოდ, არ იქნება უნარული ოპერაცია A'-ზე. ამ ასპექტში უნარული პრედიკატები და უნარული ოპერაციები ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავდებიან.

g $A \to B$ ნაწილობრივ ფუნქციას ინიექცია ეწოდება, თუ მისი G გრაფიკის შებრუნებული (ე.ი. G^{-1}) აგრეთვე ფუნქციონალური გრაფიკია. ამ შემთხვევაში (G^{-1}, B, A) სამეული წარმოადგენს ნაწილობრივ ფუნქციას, რომელსაც g-ს შებრუნებული ჰქვია და იგი g^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

$g : A \to B$ ნაწილობრივ ფუნქციას სიურიექცია ეწოდება, თუ $\mathrm{ran}(g)$ ემთხვევა B-ს.

$g : A \to B$ ნაწილობრივ ფუნქციას ბიექცია ეწოდება, თუ იგი ერთდროულად არის ფუნქცია, ინიექცია და სიურიექცია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ g ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას A-სა და B-ს შორის.

მაგალითად, თუ $A = B$ და $g : A \to B$ ფუნქცია ისეთია, რომ $g(a) = a$ ყოველი a ელემენტისათვის A-დან, მაშინ g არის A სიმრავლის ბიექცია თავისთავზე. ამ ბიექციას A-ს იგივური გარდაქმნა ეწოდება და ხშირად Id_A (ან I_A) სიმბოლოთი აღინიშნება. იგი არის A-ზე უნარული ოპერაციის კერძო სახე.

$g: A \to B$ ფუნქციას ეწოდება სასრული (უსასრულო) მიმდევრობა, თუ A არის N-ის სასრული (უსასრულო) ქვესიმრავლე.

როგორც წესი, მიმდევრობების განხილვის დროს A-ს როლში მონაწილეობს ან {1, 2, ..., n} ტიპის სასრული სიმრავლე, სადაც n ნატურალური რიცხვია, ან მთელი N სიმრავლე.

მაგალითი 2. მათემატიკური ანალიზის სტანდარტულ კურსებში ხშირად განიხილავენ $\{r_0, r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ სახის უსასრულო მიმდევრობებს, სადაც $r_n \in R$ $(n \in N)$. ასეთ მიმდევრობებს რიცხვითი მიმდევრობები ეწოდებათ. ყველა შესაძლო რიცხვით მიმდევრობათა სიმრავლე R^N სიმბოლოთი აღინიშნება. შემოღებული აღნიშვნის რელევანტურობასა და მოხერხებულობას უფრო მოგვიანებით დავინახავთ (იხ. მომდევნო §4).

ვთქვათ, მოცემულია $g: I \to Y$ ფუნქცია. პრაქტიკაში საკმაოდ ხშირად ამ ფუნქციას შემდეგი სახით წერენ: $\{g(i): i \in I\}$ ან $\{g_i: i \in I\}$. ასეთი ჩაწერის დროს ლაპარაკობენ $g(i)$ $(i \in I)$ ელემენტთა ოჯახზე, რომლის ინდექსთა სიმრავლეა I. რადგან ტერმინები „ელემენტი" და „სიმრავლე" მათემატიკაში სინონიმებია, ჩვენ შეგვიძლია აგრეთვე ვილაპარაკოთ $g(i)$ $(i \in I)$ სიმრავლეთა ოჯახზე, რომლის ინდექსთა სიმრავლეა I. ამ დროს უფრო იყენებენ $\{E_i: i \in I\}$ ტიპის აღნიშვნებს. სიმრაელეთა ოჯახებისათვის შემოაქვთ რამდენიმე ძირითადი ოპერაცია.

$\{E_i: i \in I\}$ ოჯახის $\cup\{E_i: i \in I\}$ გაერთიანება განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$x \in \cup\{E_i : i \in I\} \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \ \& \ x \in E_i).$$

ამრიგად, $\cup\{E_i : i\in I\}$ გაერთიანება შეიცავს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომლებიც ერთ მაინც E_i სიმრავლეს ეკუთვნიან. **ZFC** თეორიის კონკრეტული აქსიომის თანახმად (იხ. §0), სიმრავლეთა ყოველი ოჯახისათვის არსებობს მისი გაერთიანება. კერძოდ, როცა I არის ორელემენტიანი სიმრავლე $\{i,j\}$ და $E_i = A$, ხოლო $E_j = B$, ვღებულობთ A და B ორი სიმრავლის $A\cup B$ გაერთიანებას. ეს გაერთიანება არის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთს მაინც ეკუთვნიან.

მაგალითად, კარგადაა ცნობილი, რომ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისა და ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანება.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე E სიმრავლე. სიმრავლეთა $\{E_i : i\in I\}$ ოჯახს ეწოდება E-ს დაფარვა, თუ $E \subset \cup\{E_i : i\in I\}$.

მაგალითად, თუ განვიხილავთ E სიმრავლის ყველა ერთელემენტიანი ნაწილისაგან შედგენილ ოჯახს, მაშინ მივიღებთ E-ს ერთ-ერთ დაფარვას.

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს $\{E_i : i\in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახი, რომლის ინდექსთა სიმრავლე არ არის ცარიელი. ამ ოჯახის $\cap\{E_i \; i\in I\}$ თანაკვეთა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

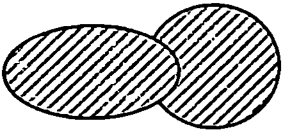
$$x\in\cap\{E_i : i\in I\} \Leftrightarrow (\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in E_i).$$

ამრიგად, $\cap\{E_i \; i\in I\}$ თანაკვეთა შეიცავს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომლებიც ყველა E_i სიმრავლეს ეკუთვნიან. კერძოდ, როცა I არის ორელემენტიანი სიმრავლე $\{i,j\}$ და $E_i = A$, ხოლო $E_j = B$, ვღებულობთ A და B ორი სიმრავლის $A\cap B$ თანაკვეთას. ეს თანაკვეთა არის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ორივე A და B სიმრავლეს ეკუთვნიან.

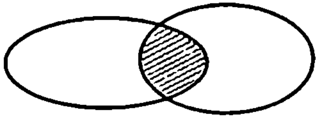
მაგალითად, თუ A არის ყველა ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო B – ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 3-ზე იყოფა, მაშინ $A\cap B$

თანაკვეთა წარმოადგენს ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც 6-ზე იყოფა.

ქვემოთ მოყვანილ ეილერ-ვენის ორ დიაგრამაზე დაშტრიხული ნაწილებით გამოსახულია შესაბამისად A და B სიმრავლეთა გაერთიანება და თანაკვეთა.



$A\cup B$



$A\cap B$

A და B ორ სიმრავლეს არაგადამკვეთი (თანაუკვეთი, დიზიუნქტური) ეწოდება, თუ ადგილი აქვს $A\cap B=\varnothing$ ტოლობას.

ეილერ-ვენის დიაგრამით არაგადამკვეთი სიმრავლეები ასე წარმოიდგინება:

უფრო ზოგადად, ამბობენ, რომ $\{E_i \;\; i\in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახი დიზიუნქტურია, თუ $E_i\cap E_j=\varnothing$ ტოლობა მართებულია I სიმრავლის ყოველი ორი (ერთმანეთისაგან განსხვავებული) i და j ინდექსისათვის.

მოვიყვანოთ ორი ძალზე მარტივი ფორმულა, რომელიც ერთმანეთს მჭიდროდ უკავშირებს სიმრავლეთა ოჯახების გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციებს. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი ორი $\{E_i \;\; i\in I\}$ და $\{F_j : j\in J\}$ ოჯახი. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$(\cup\{E_i : i\in I\}) \cap (\cup\{F_j : j\in J\}) = \cup\{E_i \cap F_j : (i,j)\in I \times J\},$$

$$(\cap\{E_i : i\in I\}) \cup (\cap\{F_j : j\in J\}) = \cap\{E_i \cup F_j : (i,j)\in I \times J\}.$$

ამ ტოლობების დამტკიცება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს და მკითხველი თავად მოახერხებს მათი მართებულობის დასაბუთებას. აქვე შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ბევრი ანალოგიური ფორმულის მოყვანა, რომლებიც გამოხატავენ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების სხვადასხვა ტიპის ურთიერთკავშირებს.

ახლა განვიხილოთ კიდევ ერთი მეტად მნიშვნელოვანი სიმრავლურ-თეორიული ოპერაცია.

მოცემული A და B სიმრავლეების სხვაობა ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც შედგება A სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც B-ს არ ეკუთვნიან.

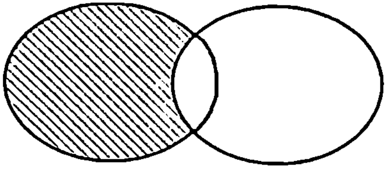
მაგალითად, თუ A არის ყველა ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო B – ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 3-ზე იყოფა, მაშინ A და B სიმრავლეების სხვაობა წარმოადგენს ყველა იმ ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც 6-ზე არ იყოფა.

საყოველთაოდ მიღებული შეთანხმების მიხედვით, ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლის სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$ სიმბოლოთი. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$A \setminus B = \{x : x\in A \ \& \ x\notin B\}.$$

ცხადია, რომ $A\subset B$ ჩართვა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \setminus B = \emptyset$.

ქვემოთ მოყვანილ ეილერ-ვენის დიაგრამაზე მოცემული A და B სიმრავლეებისათვის დაშტრიხული ნაწილით გამოსახულია მათი $A \setminus B$ სხვაობა.



ხშირად იყენებენ აგრეთვე A და B ორი სიმრავლის $A \Delta B$ სიმეტრიულ სხვაობას, რომელიც შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება:

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

მკითხველს ვთავაზობთ, თავად ააგოს შესაბამისი ეილერ-ვენის დიაგრამა და გაიაზროს, რატომაა ბუნებრივი $A \Delta B$ სიმრავლეს ვუწოდოთ მოცემული A და B სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა.

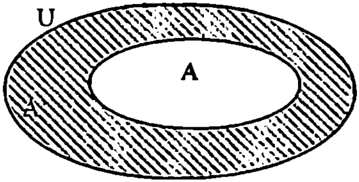
როგორც წესი, ამა თუ იმ საკითხის (საკითხთა წრის) კვლევისა თუ შესწავლის დროს საქმე გვაქვს ობიექტთა გარკვეულ ოჯახთან, რომლებიც ეკუთვნიან რაღაც ფიქსირებულ სიმრავლეს ან მოთავსებულნი არიან ამ ფიქსირებულ სიმრავლეში. ასეთ სიმრავლეს ჰქვია საბაზისო (ბაზური) სიმრავლე საკითხთა მოცემული წრისათვის.

მაგალითი 3. ელემენტარულ რიცხვთა თეორიაში შეისწავლება მთელი რიცხვები და ამ რიცხვების სხვადასხვა ტიპის თვისებები (რიცხვთა გაყოფადობა, მათი მარტივ მამრავლებად დაშლა, ევკლიდეს ალგორითმი, დიოფანტური განტოლებების ამოხსნის მეთოდები და ა.შ.). ამ შემთხვევაში საკვლევ ობიექტთა საბაზისო სიმრავლედ გვევლინება მთელ რიცხვთა **Z** სიმრავლე მასზე განსაზღვრული ჩვეულებრივი დალაგების მიმართებითა და სტანდარტული არითმეტიკული ოპერაციებით.

მაგალითი 4. ანალოგიურად, პლანიმეტრიის (შესაბამისად, სტერეომეტრიის) სასკოლო კურსის გავლისას საქმე გვაქვს ევკლიდურ სიბრტყეში (შესაბამისად, სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში) მდებარე გეომეტრიულ ფიგურებთან და ვსწავლობთ ამ ფიგურების სხვადასხვა ტიპის გეომეტრიულ თვისებებს. აქ საბაზისო სიმრავლის როლში გამოდის ევკლიდური სიბრტყე (შესაბამისად, სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცე).

თუ ჩვენს მიერ ჩატარებული განხილვა ან მსჯელობა ეხება მხოლოდ რაიმე U საბაზისო სიმრავლის ელემენტებს ან მის ქვესიმრავლეებს, მაშინ U სიმრავლეს უნივერსალურ სიმრავლესაც უწოდებენ (მიმდინარე განხილვის ან მსჯელობის თვალსაზრისით). თუ A არის უნივერსალური U სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, მაშინ $U \setminus A$ სხვაობას ეწოდება A სიმრავლის დამატება (U-ში). ჩვეულებრივ, იგი A' სიმბოლოთი აღინიშნება.

ქვემოთ მოყვანილი შესაბამისი ეილერ-ვენის დიაგრამა იძლევა მოცემულ U უნივერსალურ სიმრავლეში ჩართული ნებისმიერი A სიმრავლის დამატების ცნების თვალსაჩინო ილუსტრაციას.



ცხადია, U სიმრავლის ყოველი A ქვესიმრავლისათვის გვაქვს $(A')' = A$ ტოლობა.

გარდა ამისა, მართებულია დე მორგანის (A. De Morgan) ფორმულები:

$$(\cup\{A_i : i\in I\})' = \cap\{A_i' : i\in I\}, \qquad (\cap\{A_i : i\in I\})' = \cup\{A_i' : i\in I\},$$

სადაც $\{A_i \ \ i\in I\}$ მოცემული U უნივერსალური სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახია. ამ ფორმულების მარტივი დასაბუთება მკითხველისთვის მიგვინდვია. მკითხველი ასევე ადვილად შეამჩნევს, რომ საკმარისია ამ ორი ფორმულიდან მხოლოდ ერთ-ერთის დამტკიცება, რადგან მეორე მისგან ტრივიალურად მიიღება.

აქვე გვინდა ხაზი გავუსვათ იმ მეტად მნიშვნელოვან გარემოებას, რომ რაიმე U უნივერსალურ სიმრავლესთან თანახებისას, ავტომატურად ვეხებით მის P(U) ბულეანსაც, რომელიც, როგორც ადვილი დასანახია, არის ჩაკეტილი უნივერსუმი ყველა ზემოთ შემოღებული სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციის მიმართ (იგულისხმება სიმრავლეთა ოჯახის გაერთიანება, სიმრავლეთა ოჯახის თანაკვეთა, ორი სიმრავლის სხვაობა, ორი სიმრავლის სიმეტრიული სხვაობა და სიმრავლის დამატება).

U უნივერსალური სიმრავლის ქვესიმრავლეთა არაცარიელ ოჯახს ალგებრა ეწოდება, თუ მისი ნებისმიერი ორი ელემენტის გაერთიანება კვლავ მას ეკუთვნის და მისი ნებისმიერი ელემენტის დამატებაც ისევ მას ეკუთვნის.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე G გრაფიკი და $\{E_i : i\in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახი. ადვილად მოწმდება შემდეგი ფორმულების მართებულობა:

$$G(\cup\{E_i : i\in I\}) = \cup\{G(E_i) : i\in I\},$$

$$G^{-1}(\cup\{E_i : i\in I\}) = \cup\{G^{-1}(E_i) : i\in I\},$$

$$G(\cap\{E_i : i\in I\}) \subset \cap\{G(E_i) : i\in I\},$$

$$G^{-1}(\cap\{E_i : i\in I\}) \subset \cap\{G^{-1}(E_i) : i\in I\}.$$

თუ C და D ნებისმიერი ორი სიმრავლეა, მაშინ გვაქვს

$$G(C) \setminus G(D) \subset G(C \setminus D), \qquad G^{-1}(C) \setminus G^{-1}(D) \subset G^{-1}(C \setminus D).$$

ახლა ვთქვათ, მოცემულია $g = (G,A,B)$ ნაწილობრივი ფუნქცია. უკვე ვიცით, რომ ყოველი C სიმრავლისათვის განსაზღვრულია ამ ნაწილობრივი ფუნქციის G გრაფიკთან ასოცირებული შემდეგი ორი სიმრავლე:

$$g(C) = \{b : (\exists c)(c \in C \;\&\; (c,b) \in G)\},$$

$$g^{-1}(C) = \{a : (\exists c)(c \in C \;\&\; (a,c) \in G)\}.$$

ბუნებრივია, პირველ სიმრავლეს ვუწოდოთ C-ს სახე g ნაწილობრივი ფუნქციის მიმართ, ხოლო მეორე სიმრავლეს – C-ს წინარე სახე ამავე ნაწილობრივი ფუნქციის მიმართ.

ვთქვათ, კვლავ მოცემულია სიმრავლეთა რაიმე $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახი. ადვილად მოწმდება შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

$$g(\cup\{E_i : i \in I\}) = \cup\{g(E_i) : i \in I\},$$

$$g^{-1}(\cup\{E_i : i \in I\}) = \cup\{g^{-1}(E_i) : i \in I\},$$

$$g^{-1}(\cap\{E_i : i \in I\}) = \cap\{g^{-1}(E_i) : i \in I\},$$

$$g^{-1}(C \setminus D) = g^{-1}(C) \setminus g^{-1}(D).$$

აქვე გვინდა შევნიშნოთ, რომ ამოწერილი ოთხი ტოლობიდან პირველი საზოგადოდ ძალას კარგავს, თუ გაერთიანების ნიშანს თანაკვეთის ნიშნით შევცვლით, ხოლო მეოთხე ტოლობა საზოგადოდ ძალას კარგავს, თუ g^{-1}-ს g-თი შევცვლით. მკითხველს ვურჩევთ, თავად მოიფიქროს შესაბამისი კონტრმაგალითები (ამ ფაქტებთან დაკავშირებით იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 3).

§3-ის სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, მოცემულია G გრაფიკი. დაადგინეთ რამდენიმე აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ეს G გრაფიკი წარმოადგენდეს ორი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლს. კერძოდ, განიხილეთ ის შემთხვევა, როცა G სასრულია, და ჩამოაყალიბეთ კონსტრუქციული წესი (ანუ ალგორითმი), რომლის მეშვეობითაც ცალსახად დგინდება, წარმოადგენს თუ არა G ორი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლს.

2. ნებისმიერი G გრაფიკისათვის დაამტკიცეთ dom(G) და ran(G) სიმრავლეების არსებობა. (გამოიყენეთ ფრენკელის აქსიომათა სქემა.) აქედან გამომდინარე, ყოველი ორი X და Y სიმრავლისათვის აჩვენეთ G(X) და $G^{-1}(Y)$ სიმრავლეების არსებობა.

განვსაზღვროთ ორი $pr_1 : G \to dom(G)$ და $pr_2 : G \to ran(G)$ ფუნქცია შემდეგი ფორმულების მეშვეობით:

$$pr_1((x,y)) = x, \quad pr_2((x,y)) = y \qquad ((x,y)\in G).$$

შეამოწმეთ, რომ ეს ფუნქციები (რომლებსაც, შესაბამისად, პირველ და მეორე პროექციებს უწოდებენ) სიურიექციებს წარმოადგენენ.

3. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ნაწილობრივი ფუნქცია შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ტერნარული მიმართება, რომელსაც გარკვეული დამატებითი თვისება აქვს.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $f \quad A \to B$ და $g \quad B \to C$ ნაწილობრივი ფუნქცია. მათი კომპოზიცია $g \circ f \quad A \to C$ განისაზღვრება როგორც ნაწილობრივი ფუნქცია, რომლის გრაფიკია მოცემული ნაწილობრივი ფუნქციების გრაფიკების $G \circ F$ კომპოზიცია (იხ. წინა პარაგრაფის სავარჯიშო 6).

შეამოწმეთ, რომ:

(ა) ორი ინიექციის კომპოზიცია ისევ ინიექციაა;

(ბ) ორი სიურიექციის კომპოზიცია ისევ სიურიექციაა;

(გ) თუ $g : A \rightarrow B$ არის ბიექცია, მაშინ g^{-1} $B \rightarrow A$ აგრეთვე ბიექციაა.

ამ ფაქტებიდან გამომდინარე, აჩვენეთ, რომ მოცემული E სიმრავლის თავის თავზე ყველა შესაძლო ბიექციათა Sym(E) სიმრავლე კომპოზიციის ოპერაციის მიმართ ქმნის ჯგუფს (ე.ი. ყოველი ორი ბიექციის კომპოზიცია ისევ ბიექციაა და ბიექციის შებრუნებულიც კვლავ ბიექციაა). Sym(E) ჯგუფის ნებისმიერ არაცარიელ H ქვესიმრავლეს, რომელიც ანალოგიურ თვისებას ატარებს (ე.ი. H-ის ყოველი ორი ელემენტის კომპოზიცია კვლავ H-ს ეკუთვნის და H-ის ყოველი ელემენტის შებრუნებულიც კვლავ H-ის ელემენტია), მოცემული E სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფი ეწოდება.

გარდაქმნათა ჯგუფები და მათთან დაკავშირებული ინვარიანტები (ე.ი. გარდაქმნების დროს უცვლელი ობიექტები და სიდიდეები) მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

ვთქვათ, f არის ინიექცია, $\{E_i \quad i\in I\}$ არის სიმრავლეთა ოჯახი, რომლის ინდექსთა სიმრავლე არაცარიელია, X და Y კი ნებისმიერი სიმრავლეებია. აჩვენეთ, რომ:

$$f(\cap\{E_i : i\in I\}) = \cap\{f(E_i) : i\in I\}, \qquad f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y).$$

4*. ვთქვათ, მოცემულია $\{f_0, f_1, f_2, \quad . , f_n, \quad .\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელთაგან თითოეული მოქმედებს N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლიდან B სიმრავლეში, სადაც B ორ ელემენტს მაინც შეიცავს. განსაზღვრეთ $f \quad N \rightarrow B$ ფუნქცია, რომელიც განსხვავდება ყველა მოცემული f_n $(n\in N)$ ფუნქციისაგან. აღწერეთ f-ის აგების რაიმე კონსტრუქციული პროცედურა (ალგორითმი). დაადგინეთ ანალოგიური ფაქტი ნაწილობრივი ფუნქციებისათვის, რომლებიც N-დან B-ში მოქმედებენ, ამასთან გააკეთეთ ეს უფრო ზოგად პირობებში, სახელდობრ, მხოლოდ იმ დაშვებით, რომ B სიმრავლე არაცარიელია.

ახლახან მოყვანილი შედეგი უშუალოდ უკავშირდება ამ პარაგრაფის 1-ელ მაგალითში დასმულ საკითხსა და გ. კანტორის ე.წ. დიაგონალურ მეთოდს, რომლის შესახებ მომავალში გვექნება უფრო ვრცელი საუბარი (იხ. §5-ის თეორემა 4-ის მეორენაირი დამტკიცება).

5. ნამდვილ რიცხვთა **R** ღერძზე ავიღოთ რომელიმე ღია ინტერვალი

$$]a,b[= \{x: \ x \in \mathbf{R} \ \& \ a < x < b\},$$

სადაც $a < b$. გეომეტრიული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, **ZF** თეორიის ჩარჩოებში სცადეთ დაამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა ამ ინტერვალსა და მთელ **R** ღერძს შორის. იგივე გააკეთეთ

$$]a,b] = \{x: \ x \in \mathbf{R} \ \& \ a < x \le b\}, \qquad [a,b[= \{x: \ x \in \mathbf{R} \ \& \ a \le x < b\}$$

ტიპის ნახევრადღია ინტერვალებისათვის და

$$[a,b] = \{x: \ x \in \mathbf{R} \ \& \ a \le x \le b\}$$

სეგმენტისთვისაც (სადაც ისევ $a < b$). აქედან დაასკვენით, რომ **R** ღერძზე მდებარე ნებისმიერ ორ არაგადაგვარებულ (ე.ი. არაცარიელ და არაერთელემენტიან) შუალედს შორის ყოველთვის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა თანადობა.

6. სიმრავლეთა ოჯახის თანაკვეთის ცნების შემოტანისას მოითხოვება, რომ ოჯახის ინდექსთა სიმრავლე არ იყოს ცარიელი. რატომ არის ეს მოთხოვნა აუცილებელი? კორექტულად განსაზღვრეთ მოცემული U უნივერსალური

სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ოჯახის თანაკვეთა აღნიშნული მოთხოვნის გარეშე.

7*. ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო A და B სიმრავლეებს თითქმის დიზიუნქტური ეწოდება, თუ $A \cap B$ სასრული სიმრავლეა. N-ის უსასრულო ქვესიმრავლეთა $\{C_i \quad i \in I\}$ ოჯახს თითქმის დიზიუნქტური ეწოდება, თუ C_i და C_j სიმრავლეები თითქმის დიზიუნქტურია I-დან აღებული ნებისმიერი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული i და j ინდექსისათვის (ეს ცნება შემოტანილი იყო ცნობილი პოლონელი მათემატიკოსის ვ. სერპინსკის მიერ).

ვთქვათ, მოცემულია N-ის ქვესიმრავლეთა $\{C_0, C_1, C_2, \quad .\}$ თითქმის დიზიუნქტური მიმდევრობა. **ZF** თეორიაში დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა ისეთი უსასრულო C სიმრავლე, რომლისთვისაც $\{C_0, C_1, C_2, \ldots\} \cup \{C\}$ გაფართოებული ოჯახი კვლავ თითქმის დიზიუნქტური იქნება.

8*. დაამტკიცეთ (**ZF** თეორიის ჩარჩოებში), რომ სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცე წარმოიდგინება წრეწირთა გარკვეული დიზიუნქტური ოჯახის გაერთიანების სახით (აქ იგულისხმება მხოლოდ არანულოვანი რადიუსის მქონე წრეწირები). აჩვენეთ აგრეთვე, რომ ევკლიდური სიბრტყისათვის ანალოგიური წარმოდგენა შეუძლებელია. (გამოიყენეთ სიბრტყის სისრულე.)

მომდევნო რამდენიმე სავარჯიშო მიძღვნილია ეილერ-ვენის დიაგრამებისადმი. ეს დიაგრამები ინტუიციურ დონეზე სკოლაშიც შეისწავლება და, ერთი შეხედვით, მათთან დაკავშირებული რაიმე ღრმა ან საინტერესო საკითხების არსებობა ძნელი მოსალოდნელია. მაგრამ, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, სინამდვილეში ადგილი აქვს სულ სხვაგვარ სიტუაციას.

9*. მოცემულია U უნივერსალური სიმრავლე და მისი $A_1, A_2,$ $, A_n$ ქვესიმრავლეები, ევკლიდურ $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში მდებარე D

ფიგურა და D-ში მოთავსებული $D_1, D_2, \quad , D_n$ ფიგურები. ყოველი $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ინდექსისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A_j(0) = A_j, \quad A_j(1) = U \setminus A_j; \qquad D_j(0) = D_j, \quad D_j(1) = D \setminus D_j .$$

ვიტყვით, რომ ფიგურათა $\{D_1, D_2, \quad , D_n\}$ სისტემა არის $\{A_1, A_2, \quad , A_n\}$ სიმრავლეთა ოჯახის ეილერ-ვენის დიაგრამა ((U,D) წყვილის მიმართ), თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

ყოველი $J \subset \{1,2,\ldots,n\}$ სიმრავლისათვის და ყოველი $t : J \to \{0,1\}$ ფუნქციისათვის $\cap\{A_j(t(j)) \quad j \in J\} \neq \varnothing$ დამოკიდებულებას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\cap\{D_j(t(j)) : j \in J\} \neq \varnothing$.

აჩვენეთ, რომ ფიგურათა $\{D_1, D_2, \quad , D_n\}$ სისტემა არის $\{A_1, A_2, . \quad , A_n\}$ სიმრავლეთა ოჯახის ეილერ-ვენის დიაგრამა იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყოველი

$$t : \{1,2, \ldots, n\} \to \{0,1\}$$

ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\cap\{A_j(t(j)) : j \in \{1,2,\ldots,n\}\} \neq \varnothing \iff \cap\{D_j(t(j)) : j \in \{1,2,\ldots,n\}\} \neq \varnothing.$$

მოცემულ $A_1, A_2, \qquad A_n$ სიმრავლეებს ვუწოდოთ ერთობლივად დამოუკიდებელი, თუ ყველა $B_1 \cap B_2 \cap \quad . \cap B_n$ სახის თანაკვეთა არაცარიელია, სადაც $B_j = A_j$ ან $B_j = U \setminus A_j$ ყოველი $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ინდექსისათვის.

ამ შემთხვევაში ყველა ასეთი თანაკვეთებით მიღებული სიმრავლეების რაოდენობა ზუსტად 2^n-ის ტოლია.

აღნიშნული გარემოების გათვალისწინებით, იპოვეთ იმ სიმრავლეების მაქსიმალური შესაძლო რაოდენობა, რომლებიც მიიღება მოცემული $A_1, A_2, . . \quad , A_n$ სიმრავლეებიდან, თუკი ამ საწყის სიმრავლეებზე ნებისმიერი რიგით გამოვიყენებთ გაერთიანების, თანაკვეთისა და დამატების ოპერაციებს.

ავიღოთ ახლა U-ს როლში თავად R^2 ევკლიდური სიბრტყე და დავაფიქსიროთ ამ სიბრტყეზე მდებარე რომელიმე სამი **a**, b, c წერტილი. განვიხილოთ ეს წერტილები როგორც A, B, C წრეების ცენტრები, თანაც ვიგულისხმოთ, რომ ამ წრეებს აქვთ ერთი და იგივე $r > 0$ რადიუსი.

დაამტკიცეთ, რომ:

(ა) თუ a, b, c წერტილები მახვილკუთხა სამკუთხედის წვეროებია, მაშინ r-ის გარკვეული მკაცრად დადებითი მნიშვნელობისათვის აუცილებლად მივიღებთ ერთობლივად დამოუკიდებელ A, B, C წრეებს;

(ბ) თუ a, b, c წერტილები ერთ წრფეზეა განლაგებული, მაშინ r-ის არც ერთი დადებითი მნიშვნელობისათვის A, B, C წრეები არ არიან ერთობლივად დამოუკიდებელი (უფრო მეტიც, ამ შემთხვევაში სიბრტყეზე არ არსებობს სამი ერთობლივად დამოუკიდებელი წრე, რომელთა ცენტრები შესაბამისად a, b, c წერტილებს ემთხვევა).

გავიხსენოთ, რომ სიბრტყის ქვესიმრავლეს ამოზნექილი ეწოდება, თუ მის ყოველ ორ წერტილთან ერთად იგი მთლიანად შეიცავს ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთსაც (მაგალითად, ნებისმიერი წრე ამოზნექილი სიმრავლეა).

აჩვენეთ, რომ უკვე ოთხი A_1, A_2, A_3, A_4 სიმრავლისათვის შეიძლება არ არსებობდეს მათი შესაბამისი ეილერ-ვენის დიაგრამა, რომლის ფიგურები ამოზნექილ სიმრავლეებს წარმოადგენენ.

10. ევკლიდურ სიბრტყეზე მოცემულია $n \geq 1$ წრეწირი. ამ წრეწირების მეშვეობით მთელი სიბრტყე დაიშლება ურთიერთარაგადამფარავ არეებად, რომელთაგანაც ერთი (და მხოლოდ ერთი) შემოუსაზღვრელი სიმრავლეა.

იპოვეთ აღნიშნული არეების უდიდესი შესაძლო რაოდენობა (რომელიც მხოლოდ n-ზეა დამოკიდებული). მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის საშუალებით გამოიყვანეთ ამ უდიდესი რაოდენობის გამომსახველი ფორმულა.

კერძოდ, შეამოწმეთ, რომ $n = 4$ შემთხვევაში აღნიშნული არეების უდიდესი შესაძლო რაოდენობა 14-ის ტოლია.

11*. გამოიყენეთ სავარჯიშო 10-ის შედეგი და დაამტკიცეთ, რომ ევკლიდურ სიბრტყეზე არ არსებობს ოთხი ერთობლივად დამოუკიდებელი წრე.

წინა სავარჯიშოების შედეგები ნათლად გვიჩვენებს, რომ უკვე ოთხი სიმრავლის შემთხვევაში ეილერ-ვენის დიაგრამების ასაგებად მხოლოდ წრეები ან უფრო ზოგადი ამოზნექილი სიმრავლეები (მაგალითად, ელიფსები, ნახევარსიბრტყეები და სხვ.) არ არის საკმარისი. ამ გარემოებასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 14.

12*. ყოველი a, b, u, v ნამდვილი რიცხვებისათვის

$$\{(x,y) : a \leq x < b \ \& \ u \leq y < v\}$$

სიმრავლეს ვუწოდოთ ევკლიდური სიბრტყის საკოორდინატო (ნახევრადღია) მართკუთხედი. იმავე სიბრტყეზე მდებარე ფიგურას ვუწოდოთ ელემენტარული ფიგურა, თუ იგი წარმოიდგინება საკოორდინატო მართკუთხედების სასრული ოჯახის გაერთიანების სახით.

დააფიქსირეთ სიბრტყის რომელიმე არაცარიელი საკოორდინატო D მართკუთხედი და შეამოწმეთ, რომ D-ში მოთავსებულ ყველა ელემენტარულ ფიგურათა ოჯახი წარმოადგენს D-ს ქვესიმრავლეთა ალგებრას. დაამტკიცეთ, რომ U უნივერსალური სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახი შეიძლება გამოსახულ იქნეს შესაბამისი ეილერ-ვენის დიაგრამით ((U,D) წყვილის მიმართ), რომელიც ელემენტარული ფიგურებისაგან შედგება. (გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი.)

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია m > 2 წერტილი, რომელთაგან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ჩაკეტილი ტეხილი, რომელიც თავის თავს არ კვეთს და რომლის წვეროთა სიმრავლე მოცემულ წერტილთა სიმრავლეს ემთხვევა. (განიხილეთ ყველა შესაძლო ჩაკეტილი ტეხილი, რომელთა წვეროების

სიმრავლე მოცემულ m-წერტილიან სიმრავლეს ემთხვევა, და ამ ტეხილებს შორის შეარჩიეთ უმცირესი სიგრძის მქონე.)

წინა ფაქტიდან გამომდინარე, აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის ევკლიდურ სიბრტყეში მოიძებნება ზუსტად n ცალი მარტივი მრავალკუთხედი, რომლებიც ერთობლივად დამოუკიდებელ ოჯახს ქმნიან. (აქაც გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი n-ის მიმართ.) შეეცადეთ მიიღოთ ანალოგიური შედეგი ამოზნექილი მრავალკუთხედებისათვისაც.

დაბოლოს, გამოიკვლიეთ, სიბრტყეში არსებობს თუ არა 5 სამკუთხედი, რომლებიც ერთობლივად დამოუკიდებელ ოჯახს ქმნიან.

13. მოცემული E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\{E_i \quad i\in I\}$ ოჯახს E-ს დაყოფა ეწოდება, თუ ეს ოჯახი დიზიუნქტურია, ყველა E_i $(i\in I)$ ქვესიმრავლე არაცარიელია და მათი გაერთიანება E-ს ემთხვევა. ამრიგად, E სიმრავლის დაყოფა წარმოადგენს E-ს დაფარვის კერძო შემთხვევას.

აჩვენეთ, რომ:

(ა) თუ $S(x,y)$ არის ეკვივალენტობის დამოკიდებულება E-ზე, მაშინ იგი წარმოქმნის E-ს სრულიად გარკვეულ დაყოფას: ეს დაყოფა შედგება ყველა $\{y \quad S(x,y)\}$ ტიპის სიმრავლისაგან, სადაც x მთელ E სიმრავლეს გაირბენს;

(ბ) პირუკუ, თუ მოცემულია E სიმრავლის რაიმე $\{E_i \quad i\in I\}$ დაყოფა, მაშინ

$$S(x,y) \Leftrightarrow (\exists i)(i\in I \ \& \ x\in E_i \ \& \ y\in E_i)$$

ფორმულით ცალსახად განისაზღვრება $S(x,y)$ ეკვივალენტობის დამოკიდებულება E-ზე, რომელიც წარმოქმნის იმავე $\{E_i \quad i\in I\}$ დაყოფას.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ არსებობს კანონიკური ურთიერთცალსახა თანადობა E-ზე მოცემულ ეკვივალენტობის დამოკიდებულებებსა და E-ს დაყოფებს შორის.

თუ $S(x,y)$ არის E-ზე მოცემული ეკვივალენტობის დამოკიდებულება, მაშინ მისი შესაბამისი დაყოფის ელემენტების სიმრავლეს ეწოდება E-ს ფაქტორ-სიმრავლე ($S(x,y)$ დამოკიდებულების მიმართ). ეს ფაქტორ-სიმრავლე E/S სიმბოლოთი აღინიშნება, E/S ელემენტებს კი ხშირად $S(x,y)$-ის მიმართ ეკვივალენტობის კლასებს უწოდებენ.

ვთქვათ, E-ზე მოცემულია ნაწილობრივი კვაზიდალაგების დამოკიდებულება $R(x,y)$ (ე.ი. $R(x,y)$ არის რეფლექსური და ტრანზიტული). აღვნიშნოთ $S(x,y)$-ით ($R(x,y)$ & $R(y,x)$) კონიუნქცია. შეამოწმეთ, რომ $S(x,y)$ არის ეკვივალენტობის დამოკიდებულება იმავე E-ზე. E/S ფაქტორ-სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ბინარული მიმართება $R'(A,B)$:

$$(\exists x \in A)(\exists y \in B)R(x,y).$$

აჩვენეთ, რომ $R'(A,B)$ არის ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულება E/S-ზე.

ვთქვათ, მოცემულია E სიმრავლის გარდაქმნათა რაიმე H ჯგუფი (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 3). განვსაზღვროთ შემდეგი ბინარული მიმართება $S(x,y)$:

$$x \in E \ \& \ y \in E \ \& \ (\exists h)(h \in H \ \& \ h(x) = y).$$

შეამოწმეთ, რომ $S(x,y)$ წარმოადგენს ეკვივალენტობის დამოკიდებულებას E-ში. ამბობენ, რომ ეს ეკვივალენტობის დამოკიდებულება ასოცირებულია H გარდაქმნათა ჯგუფთან. ამ შემთხვევაში ეკვივალენტობის კლასებს H-ორბიტები ეწოდება.

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერ H-ორბიტას აქვს სახე $\{h(x) : h \in H\}$, სადაც x რომელიღაც ელემენტია E-დან.

14. არაორიენტირებული გრაფი ეწოდება (V,E) სახის წყვილს, სადაც V საბაზისო სიმრავლეა, ხოლო E არის ამ სიმრავლის ორელემენტიან ნაწილთა რაიმე სიმრავლე. V-ს ელემენტები განიხილება როგორც ამ გრაფის წვეროები

(vertices), ხოლო E-ს ელემენტები განიხილება როგორც ამ გრაფის წიბოები (edges). ეს ტერმინოლოგია ესადაგება სასრული არაორიენტირებული გრაფების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას, როცა ამ გრაფის წვეროების როლში გამოდის ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის წერტილები, მისი წიბოების როლში კი – ამ წერტილების შემაერთებელი უწყვეტი წირები (ცხადია, ეს წირები აერთებენ წერტილთა გარკვეულ წყვილებს და არა აუცილებლად ყველა მათგანს).

არაორიენტირებული გრაფი შეიძლება აგრეთვე განისაზღვროს როგორც (V,G) სახის წყვილი, სადაც V საბაზისო სიმრავლეა, ხოლო G – ამ სიმრავლეზე მოცემული სიმეტრიული ბინარული მიმართება.

თუ ამ ბოლო განსაზღვრას მოვაცილებთ G მიმართების სიმეტრიულობის პირობას, მაშინ მივიღებთ ორიენტირებული გრაფის განსაზღვრას.

სიმრავლეთა $\{X_u \quad u\in V\}$ ოჯახს მოცემული (V,E) არაორიენტირებული გრაფის სიმრავლურ-თეორიული რეალიზაცია (ანუ სიმრავლურ-თეორიული ინტერპრეტაცია) ეწოდება, თუ ყოველი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული u და v წვეროსათვის გვაქვს:

$\{u,v\}\in E$ დამოკიდებულება მართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X_u \cap X_v$ სიმრავლე არაცარიელია.

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი გრაფისათვის არსებობს მისი სიმრავლურ-თეორიული რეალიზაცია (ეს შედეგი პოლონელ მათემატიკოს ე. მარჩევსკის ეკუთვნის).

15. ვთქვათ, A და B ნებისმიერი ორი სიმრავლეა. დაამტკიცეთ (ZF თეორიის შიგნით), რომ არსებობს ამ სიმრავლეების A×B დეკარტული ნამრავლი.

მსჯელობა ჩაატარეთ ორ ეტაპად. პირველ რიგში, ყოველი ფიქსირებული $a\in A$ ელემენტისათვის განიხილეთ x და y ცვლადებს შორის ბინარული დამოკიდებულება S(a,x,y):

$$y = (a,x).$$

შეამოწმეთ, რომ იგი ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ. ფრენკელის აქსიომათა სქემის საშუალებით (იხ. §0) აქედან გააკეთეთ დასკვნა, რომ არსებობს

$$Z(a) = \{z : (\exists b)(b \in B \;\&\; z = (a,b))\}$$

სიმრავლე. შემდეგ, იმავე სქემის კიდევ ერთი გამოყენებით, მიიღეთ $\{Z(a) \quad a \in A\}$ სიმრავლეთა ოჯახის არსებობა. მერე აჩვენეთ, რომ $A \times B = \cup\{Z(a) : a \in A\}$, და შენიშნეთ, რომ ბოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი სიმრავლე არსებობს **ZF** თეორიის მე-4 აქსიომის გამო (იხ. §0).

16. ამ სავარჯიშოში მოყვანილია ბულის ალგებრების სხვანაირი განსაზღვრა (შეადარეთ ის §2-ში მოცემულ განსაზღვრას, რომელიც მესერთა თეორიის ტერმინებშია ჩამოყალიბებული).

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე B სიმრავლე, რომელშიც დაფიქსირებულია **0** და **1** ელემენტები და რომელზედაც გვაქვს ერთი უნარული ოპერაცია $'$ და ორი ბინარული ოპერაცია $\vee$ და $\wedge$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ ყველა a, b, c ელემენტისათვის B-დან ეს ოპერაციები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a;$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$$

$$(a \wedge b) \vee b = b, \quad (a \vee b) \wedge b = b;$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$a \wedge a' = 0, \quad a \vee a' = 1, \quad 0 \vee a = a, \quad 1 \wedge a = a.$$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $(B, 0, 1, ', \vee, \wedge)$ არის ბულის ალგებრა. ამ ალგებრის ნებისმიერი a ელემენტისათვის a' ელემენტს ეწოდება a-ს დამატება B-ში.

როგორც ვხედავთ, მოყვანილ განსაზღვრაში საერთოდ არა გვაქვს ნაწილობრივი დალაგების სტრუქტურა. ასეთი სტრუქტურის შემოტანა შემდეგნაირად ხდება: ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის B-დან განვსაზღვროთ $a \leq b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \vee b = b$ (ან, ეკვივალენტურად, როცა $a \wedge b = a$).

აჩვენეთ, რომ ამ გზით შემოტანილი $\leq$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართებისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

(ა) $(B,\leq)$ არის დისტრიბუტიული მესერი;

(ბ) ყოველი ორი $a \in B$ და $b \in B$ ელემენტისათვის გვაქვს

$$\sup\{a,b\} = a \vee b, \quad \inf\{a,b\} = a \wedge b;$$

(გ) 0 არის B მესერის უმცირესი ელემენტი, 1 არის მისი უდიდესი ელემენტი და ამ მესერის ყოველ a ელემენტს აქვს ერთადერთი დამატებითი a' ელემენტი.

მაშასადამე, ბულის ალგებრების ორი მოყვანილი განსაზღვრა ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

17. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი $(E,\leq)$ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე. მასთან დაკავშირებით განვიხილოთ $(P(E),\subset)$ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეც.

დაამტკიცეთ ($\mathbf{ZF}$ თეორიის ჩარჩოებში), რომ არსებობს $P(E)$ ბულეანის ისეთი K ქვესიმრავლე, რომ $(E,\leq)$ და $(K,\subset)$ სტრუქტურები ერთმანეთის იზომორფულია, ე.ი. შეიძლება დამყარდეს $f : (E,\leq) \rightarrow (K,\subset)$ ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია), რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subset f(y) \quad (x \in E, y \in E).$$

§4. სიმრავლეთა ოჯახის ნამრავლი. ამორჩევის აქსიომა. მულტი-ფუნქციები და სელექტორები

იმ ძირითად სიმრავლურ-თეორიულ ოპერაციებთან ერთად, რომლებზეც წინა პარაგრაფში ვისაუბრეთ, მათემატიკაში უმნიშვნელოვანესი ადგილი უკავია სიმრავლეთა ოჯახის ნამრავლის ოპერაციას. ფაქტობრივად, ამ ოპერაციის ერთ კერძო სახეს ჩვენ უკვე შევეხეთ, როცა განვმარტეთ ნებისმიერად აღებული ორი A და B სიმრავლის $A \times B$ დეკარტული ნამრავლი.

ახლა განვიხილოთ სიმრავლეთა ნებისმიერი $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახი. ამ ოჯახის ნამრავლი (ანუ განზოგადებული დეკარტული ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ $f : I \to \cup\{E_i : i \in I\}$ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$(\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) \in E_i)$$

დამოკიდებულებას. ეს ნამრავლი, ჩვეულებრივ, $\Pi\{E_i \quad i \in I\}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, მის ელემენტებს კი ხშირად მოცემული $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახის სელექტორებს უწოდებენ.

როცა ყველა E_i $(i \in I)$ სიმრავლე ფიქსირებულ E სიმრავლეს ემთხვევა, მაშინ $\Pi\{E_i : i \in I\}$ ნამრავლი მოკლედ E^I სიმბოლოთი აღინიშნება და, ფაქტობრივად, წარმოადგენს I-დან E-ში ყველა შესაძლო გადასახვათა სიმრავლეს. მაგალითად, როგორც უკვე ვიცით წინა პარაგრაფიდან, $\mathbf{R}^N$ არის ყველა უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობის სიმრავლე.

კვლავ დავუბრუნდეთ ნებისმიერი $\{E_i \quad i \in I\}$ ოჯახის შემთხვევას. ყოველი $j \in I$ ინდექსისათვის გვაქვს კანონიკური

$$pr_j : \Pi\{E_i : i \in I\} \to E_j$$

გადასახვა, რომელიც განსაზღვრულია

$$pr_j(f) = f(j) \qquad (f \in \Pi\{E_i : i \in I\})$$

ფორმულით და რომელსაც j-ურ პროექციას უწოდებენ.

ცხადია, რომ თუ ერთი მაინც E_i სიმრავლე ცარიელია, მაშინ ამ ოჯახის ნამრავლიც ცარიელია, რადგან $f(i)\in\varnothing$ დამოკიდებულება წინააღმდეგობრივია. მეორე მხრივ, თუ ყველა E_i $(i\in I)$ არაცარიელია, მაშინ თითქოსდა უნდა არსებობდეს ერთი მაინც f ფუნქცია, რომელიც $\{E_i : i\in I\}$ ოჯახის სელექტორს წარმოადგენს. მართლაც, ავირჩიოთ თითოეულ არაცარიელ E_i $(i\in I)$ სიმრავლეში რომელიმე e_i ელემენტი და I-ზე განვსაზღვროთ f ფუნქცია $f(i) = e_i$ $(i\in I)$ ფორმულით. ეს ფუნქცია, მისი განსაზღვრის თანახმად, ეკუთვნის სიმრავლეთა მოცემული ოჯახის ნამრავლს. მაგრამ ახლახან ჩატარებული (და, ერთი შეხედვით, სავსებით კორექტული) მსჯელობა გარკვეულ ეჭვებს ბადებს უფრო ღრმა ანალიზისა და მიდგომის საფუძველზე. ცხადია, მოყვანილ მსჯელობაში ვაკეთებთ დაშვებას იმის შესახებ, რომ შესაძლებელია არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის ამ ოჯახის წევრების სათანადო ელემენტების (ანუ, როგორც ხშირად ამბობენ, წარმომადგენლების) ერთდროულად შერჩევა და მათგან სიმრავლის შედგენა. ეს დაშვება კი, ფაქტობრივად, ნიშნავს ახალი აქსიომის შემოტანას. ამ აქსიომას ამორჩევის აქსიომა ეწოდება. ძალზე ხშირად იგივე აქსიომას ცერმელოს აქსიომის სახელწოდებითაც მოიხსენიებენ (ამასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 15).

შევაჯამოთ ზემოთ ნათქვამი. ამორჩევის აქსიომა შემდეგი წინადადების სახით შეიძლება იქნეს ჩამოყალიბებული:

არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის ნამრავლი არაცარიელია.

ამ წინადადებას ამორჩევის აქსიომის მულტიპლიკატიური ფორმა ეწოდება (იგი ბ. რასელს ეკუთვნის). უფრო მიღებულია ამორჩევის აქსიომის სტანდარტული ფორმა:

თუ მოცემულია არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი დიზიუნქტური ოჯახი, მაშინ არსებობს სიმრავლე, რომელსაც ამ ოჯახის თითოეულ წევრთან ერთი და მხოლოდ ერთი საერთო ელემენტი აქვს.

სწორედ ამ სახით ჩამოაყალიბა ცერმელომ ამორჩევის აქსიომა და გამოიყენა იგი თავისი ცნობილი თეორემის დასამტკიცებლად, რომელიც ადგენს, რომ ყოველი სიმრავლე შეიძლება სავსებით დალაგდეს (იხ. §7).

ასევე ძალზე ხშირად გამოიყენება ამორჩევის აქსიომის შემდეგი ეკვივალენტური ფორმა:

ყოველი E სიმრავლისათვის არსებობს $f : P(E) \setminus \{\varnothing\} \to E$ ამორჩევის ფუნქცია, ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს E-ს არაცარიელი X ქვესიმრავლე, გვაქვს $f(X) \in X$.

როგორც წესი, ამორჩევის აქსიომას აღნიშნავენ ხოლმე **AC** სიმბოლოთი (Axiom of Choice). §0-ში ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ სიმრავლეთა თეორიის ყველა აქსიომის ნუსხა, ამორჩევის აქსიომის გამოკლებით, **ZF** სიმბოლოთი აღინიშნება (Zermelo-Fraenkel). სიმრავლეთა თეორიის ყველა აქსიომის ნუსხას კი, ჩვეულებრივ, **ZFC** სიმბოლოთი აღნიშნავენ (Zermelo-Fraenkel & Choice). ამრიგად, ვხედავთ, რომ ამ ბოლო აღნიშვნაში ამორჩევის აქსიომა სპეციალურადაა გამოყოფილი დანარჩენი აქსიომებიდან. ეს არ არის შემთხვევითი. ღრმა ლოგიკური გამოკვლევების შედეგად გამოირკვა, რომ ცერმელოს აქსიომას განსაკუთრებული ადგილი უკავია სიმრავლურ-თეორიულ აქსიომატიკაში. გარდა ამისა, მან ფუნდამენტური როლი შეასრულა თანამედროვე მათემატიკის ბევრ დარგში. აღმოჩნდა, რომ მის გარეშე არ შეიძლება დამტკიცდეს მთელი რიგი მნიშვნელოვანი დებულებებისა თვით სიმრავლეთა თეორიიდან, მათემატიკური ლოგიკიდან, ალგებრიდან, ტოპოლოგიიდან, ფუნქციონალური ანალიზიდან და ა.შ.

მაგალითი 1. ჩვენ უკვე ვიცით $\leq$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართების ზოგადი განსაზღვრა (იხ. §2). გავიხსენოთ, რომ ნაწილობრივად დალაგებულ $(E,\leq)$ სიმრავლეს წრფივად დალაგებული ეწოდება, თუ ყოველი ორი $x \in E$ და $y \in E$ ელემენტისათვის გვაქვს $x \leq y$ ან $y \leq x$ (სხვა სიტყვებით, E-ს ყოველი ორი ელემენტი ერთმანეთთან სადარია). ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით მტკიცდება, რომ E-ზე მოცემული ნებისმიერი ნაწილობრივი დალაგება შეიძლება ჩართულ იქნას ამავე სიმრავლეზე მოცემულ რომელიღაც წრფივ დალაგებაში. ეს მნიშვნელოვანი შედეგი გამოჩენილ პოლონელ მათემატიკოს ე. მარჩევსკის ეკუთვნის.

მაგალითი 2. იმავე ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით მტკიცდება, რომ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ევკლიდურ სიბრტყეში არსებობს წერტილოვანი M სიმრავლე, რომელიც ამ სიბრტყეზე მდებარე ყოველ წრფეს ზუსტად ორ წერტილში კვეთს. ასეთი უცნაური თვისების მქონე M სიმრავლე პირველად აგებულ იქნა ცნობილი პოლონელი მათემატიკოსის ს. მაზურკევიჩის (S. Mazurkiewicz) მიერ.

მაგალითი 3. ამორჩევის აქსიომის ყველაზე მოულოდნელ და უცნაურ ლოგიკურ შედეგად ითვლება ე.წ. ბანახ-ტარსკის პარადოქსი. ამ პარადოქსის თანახმად, რაგინდ დიდი დადებითი r რიცხვისათვის, ერთეულოვანი რადიუსის მქონე სამგანზომილებიანი ბირთვი შეიძლება დაიყოს სასრული რაოდენობის ნაწილებად ისე, რომ ამ ნაწილების სივრცეში სათანადო მოძრაობებით (გადაადგილებებით) სრულიად შეივსება (ისე, რომ არც ერთი წერტილი არ გამორჩება!) r-რადიუსიანი სამგანზომილებიანი ბირთვი.

ბანახ-ტარსკის პარადოქსს ბევრი საინტერესო ნაშრომი და გამოკვლევა მიეძღვნა (მაგალითად, იხ. [65]).

ცერმელოს აქსიომის მნიშვნელობა ცხადად ჩანს უკვე კლასიკური მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებებისა და ფაქტების განხილვის დროს. გავიხსენოთ, თუნდაც, რაიმე $f \quad R \to R$ ფუნქციის R-ის ფიქსირებულ წერტილში უწყვეტობის ცნება. ანალიზში ფართოდ გამოიყენება ფუნქციის უწყვეტობის ორი განსაზღვრა. პირველი მათგანი ეკუთვნის ო. კოშის (A. Cauchy), ხოლო მეორე – ჰ. ჰაინეს (H. Heine).

კოშის განსაზღვრა. ამბობენ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია ფიქსირებულ $x \in R$ წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც მართებულია

$$(\forall y)((y \in R \ \& \ |y - x| < \delta) \Rightarrow (|f(y) - f(x)| < \varepsilon))$$

დამოკიდებულება.

ჰაინეს განსაზღვრა. ამბობენ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია ფიქსირებულ $x \in R$ წერტილში, თუ R-ის წერტილთა ყოველი $\{x_n \quad n \in N\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც არის x-საკენ კრებადი, წერტილთა შესაბამისი $\{f(x_n) \quad n \in N\}$ მიმდევრობა f(x)-საკენ კრებადია.

ანალიზის სხვადასხვა კურსში ხაზგასმითაა ნათქვამი, რომ უწყვეტობის ორივე მოყვანილი განსაზღვრა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მართლაც, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს იმის დასაბუთება, რომ თუ $f : R \to R$ ფუნქცია უწყვეტია $x \in R$ წერტილში, კოშის აზრით, მაშინ იგი უწყვეტი იქნება იმავე წერტილში ჰაინეს აზრითაც. ამ იმპლიკაციის დამტკიცება არ მოითხოვს ცერმელოს აქსიომისადმი აპელირებას (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 4). მაგრამ შებრუნებული იმპლიკაცია, ე.ი. ის გარემოება, რომ მოცემულ $x \in R$ წერტილში f ფუნქციის უწყვეტობა ჰაინეს აზრით იწვევს f-ის იმავე x წერტილში უწყვეტობას კოშის

აზრითაც, არსებითად ეყრდნობა ცერმელოს აქსიომას. მოვიყვანოთ ამ შებრუნებული იმპლიკაციის დეტალური დამტკიცება ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით.

ვთქვათ, f უწყვეტია $x \in \mathbf{R}$ წერტილში ჰაინეს აზრით. უნდა ვაჩვენოთ, რომ f უწყვეტია იმავე წერტილში კოშის აზრითაც. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $\delta > 0$ რიცხვი, მისთვის მოიძებნება ერთი მაინც $y \in \mathbf{R}$ წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია

$$|y - x| < \delta \ \& \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

დამოკიდებულება, ანუ

$$Y(\delta) = \{y : y \in \mathbf{R} \ \& \ |y - x| < \delta \ \& \ |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

სიმრავლე არ არის ცარიელი. ახლა δ-ს თანმიმდევრულად მივანიჭოთ 1, 1/2, 1/3, მნიშვნელობები და განვიხილოთ

$$\{Y(1/n) : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$$

არაცარიელ სიმრავლეთა ოჯახი (ფაქტობრივად, არაცარიელ რიცხვით სიმრავლეთა მიმდევრობა). ამორჩევის აქსიომის თანახმად, ამ ოჯახისათვის არსებობს სელექტორი, ე.ი. გვაქვს $\{y_n : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ წერტილთა მიმდევრობა ისეთი, რომ $y_n \in Y(1/n)$ ყველა $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ ინდექსისათვის. ანუ გვაქვს

$$|y_n - x| < 1/n \ \& \ |f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}).$$

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ აღნიშნული $\{y_n \ \ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ მიმდევრობა კრებადია x-საკენ, მაგრამ მისი შესაბამისი $\{f(y_n) \ \ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ მიმდევრობა არ არის კრებადი $f(x)$-საკენ, რაც ეწინააღმდეგება ჰაინეს განსაზღვრაში მონაწილე პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა მიუთითებს იმაზე, რომ

ჩვენი თავდაპირველი დაშვება არ იყო სწორი და, მაშასადამე, ამით მკაცრად დადგინდა, რომ ჰაინეს განსაზღვრიდან გამომდინარეობს კოშის განსაზღვრა.

გარდა ამისა, მოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, რომ აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ამორჩევის აქსიომის საკმაოდ სუსტი ფორმა. სახელდობრ, ამ მსჯელობაში ჩვენს მიერ მხოლოდ ის იყო ნაგულისხმევი, რომ:

არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი მიმდევრობის ნამრავლი აგრეთვე არაცარიელია.

თუ საქმე გვაქვს არაცარიელ სიმრავლეთა სასრულ მიმდევრობასთან, მაშინ ცერმელოს აქსიომა არ არის საჭირო (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 1). მაგრამ თუ საქმე ეხება არაცარიელ სიმრავლეთა უსასრულო მიმდევრობებს, მაშინ მთელ რიგ შემთხვევებში ცერმელოს აქსიომას ვერ გავექცევით და იძულებულნი ვიქნებით არსებითად გამოვიყენოთ იგი. ზოგჯერ საკმარისია ამ აქსიომის შემდეგი გაცილებით უფრო სუსტი ფორმის გამოყენება:

არაცარიელ სასრულ სიმრავლეთა ნებისმიერი მიმდევრობის ნამრავლი კვლავ არაცარიელი სიმრავლეა.

ამორჩევის აქსიომის სხვადასხვა ტიპის ფორმებთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 16. აქ გვინდა საგანგებოდ გამოვყოთ ამ აქსიომის კიდევ ერთი ფორმა, რომელიც საყოველთაოდაა მიღებული სიმრავლეთა თეორიაში მომუშავე სპეციალისტების მიერ, რადგან იგი მეტად სასარგებლო გამოდგა ზოგიერთი სიმრავლურ-თეორიული მოდელის განხილვის პროცესში. აღნიშნული ფორმა პირველად შემოღებული იყო გერმანელი მათემატიკოსის პ. ბერნაისის მიერ, რომელმაც მას დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი (Principle of Dependent Choice) უწოდა. ეს პრინციპი **DC** სიმბოლოთი აღინიშნება და შემდეგნაირად ყალიბდება:

ვთქვათ, არაცარიელ X სიმრავლეზე მოცემულია ბინარული $S(x,y)$ მიმართება ისეთი, რომ

$$(\forall x \in X)(\exists y \in X)S(x,y).$$

მაშინ არსებობს ამ სიმრავლის ელემენტთა $\{x_n \quad n \in N\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$(\forall n \in N)S(x_n, x_{n+1}).$$

ბერნაისის DC პრინციპი ინტუიციურად თითქმის ცხადია და ZF-ის ფარგლებში ლოგიკურად გამომდინარეობს ცერმელოს აქსიომიდან. მართლაც, ცერმელოს აქსიომის ძალით, X სიმრავლისათვის შეგვიძლია დავაფიქსიროთ რაიმე ამორჩევის ფუნქცია

$$g : P(X) \setminus \{\varnothing\} \rightarrow X,$$

ე.ი. ისეთი g ფუნქცია, რომელიც X-ის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეს უთანადებს ამ ქვესიმრავლის გარკვეულ ელემენტს. რადგან $X \neq \varnothing$, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $x_0 = g(X)$. ამის შემდეგ მსჯელობას ვაწარმოებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. თუ $x_n \in X$ ელემენტი უკვე განსაზღვრულია, ვიხილავთ

$$Y(n) = \{y : y \in X \ \& \ S(x_n, y)\}$$

სიმრავლეს, რომელიც, პირობის თანახმად, არაცარიელია. მაშასადამე, შეგვიძლია ავიღოთ $x_{n+1} = g(Y(n))$. ამ პროცესით ცალსახად აიგება X სიმრავლის ელემენტთა ჩვენთვის სასურველი $\{x_n : n \in N\}$ მიმდევრობა.

შემდეგ პარაგრაფებშიც არაერთხელ გვექნება საქმე DC დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპთან და მის ზოგიერთ

გამოყენებასთან. ამჟამად ცნობილია, რომ DC პრინციპი ლოგიკურად უფრო სუსტია, ვიდრე ამორჩევის აქსიომა.

ახლა დავუბრუნდეთ სიმრავლეთა ოჯახებს და ვისაუბროთ მათ ოდნავ განსხვავებულ ინტერპრეტაციაზე.

ვთქვათ, მოცემულია $\{E_i \quad i \in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახი. როგორც ვიცით, ეს არის გარკვეული ფუნქცია, რომელიც მოქმედებს I ინდექსთა სიმრავლიდან და ყოველ $i \in I$ ინდექსს უთანადებს E_i მნიშვნელობას. ზოგჯერ უფრო ხელსაყრელია იგივე ოჯახი განხილულ იქნეს როგორც მრავალსახა ფუნქცია (მულტი-ფუნქცია), რომელიც მოქმედებს იმავე I ინდექსთა სიმრავლიდან, მაგრამ ყოველ $i \in I$ ინდექსს შეუსაბამებს E_i სიმრავლის ყველა ელემენტს (აქედან სახელწოდება – მულტი-ფუნქცია). ფაქტობრივად, ჩვენ არაფერს ახალს არ ვამბობთ, რადგან იგივე მულტი-ფუნქცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$G = \cup\{\{i\} \times E_i : i \in I\}$$

გრაფიკის მეშვეობით, რომელსაც ამ მულტი-ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება (საზოგადოდ, იგი არ არის ფუნქციონალური), ხოლო ამოსავალი $\{E_i \quad i \in I\}$ ოჯახის ნამრავლის ელემენტებს ძალზე ხშირად ამ მულტი-ფუნქციის სელექტორებს უწოდებენ.

როცა ყველა E_i $(i \in I)$ სიმრავლე ერთელემენტიანია, მაშინ მულტი-ფუნქცია შეიძლება გაიგივებულ იქნეს შესაბამის ჩვეულებრივ ფუნქციასთან (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 7). მულტი-ფუნქციები ხელსაყრელია იმ გარემოების გამოც, რომ აქ არ გვჭირდება ნაწილობრივი მულტი-ფუნქციის ცნების შემოტანა. მართლაც, ყოველთვის შეგვეიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული მულტი-ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ I-ზე და პირობითად ჩავთვალოთ, რომ ის $i \in I$ ელემენტები, რომლებისთვისაც გვაქვს $E_i = \varnothing$, არიან განსაკუთრებული (ანუ ჩავთვალოთ, რომ სწორედ ამ ელემენტებზე მოცემული მულტი-ფუნქცია არ არის "განსაზღვრული").

თანამედროვე მათემატიკაში დიდი როლი ენიჭება შემდეგი ტიპის საკითხებს: მოცემულია რაღაც "კარგი" თვისების მქონე მულტი-ფუნქცია; არსებობს თუ არა ანალოგიური "კარგი" თვისების მქონე მისი სელექტორი? ამ თვალსაზრისით, ამორჩევის აქსიომა არის პირველი (და, ერთი შეხედვით, ყველაზე ტრივიალური) ნაბიჯი დასმული საკითხის გადაწყვეტის მიმართულებით. მართლაც, ეს აქსიომა გვეუბნება, რომ თუ ყველა E_i ($i \in I$) არაცარიელია, მაშინ არსებობს ერთი მაინც სელექტორი და, მაშასადამე, აზრი აქვს "კარგი" სელექტორების ძებნასაც. აქ ტერმინი "კარგი" უშუალოდაა დაკავშირებული იმ მათემატიკურ სტრუქტურასთან, რომლის ირგვლივაც მიმდინარეობს განხილვები და მსჯელობები კონკრეტულ სიტუაციაში (მეტი დეტალიზაციისათვის იხ. კომენტარი 17).

§4-ის სავარჯიშოები

1. ცერმელოს აქსიომაზე დაყრდნობის გარეშე (ე.ი. ZF თეორიის ჩარჩოებში) დაამტკიცეთ, რომ არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის ნამრავლი აგრეთვე არაცარიელია. (გამოიყენეთ მათემატიკური ინდუქცია ოჯახის ინდექსთა რაოდენობის მიმართ.)

ამრიგად, ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ ამორჩევის აქსიომა არ არის საჭირო, როცა საქმე გვაქვს არაცარიელ სიმრავლეთა სასრულ ოჯახებთან.

2. შეამოწმეთ, რომ ZF თეორიის შიგნით ამორჩევის აქსიომის რასელისეული (ე.ი. მულტიპლიკატიური) ფორმა და ამავე აქსიომის სტანდარტული ფორმა ლოგიკურად ერთმანეთის ეკვივალენტური დებულებებია.

3. მოცემული $\{E_i : i\in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახის ნაწილობრივი სელექტორი ეწოდება ნებისმიერ ისეთ $f \quad I \to \cup\{E_i \quad i\in I\}$ ნაწილობრივ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$(\forall i)(i\in dom(f) \Rightarrow f(i)\in E_i)$$

პირობას.

დაამტკიცეთ, რომ **ZF** თეორიაში შემდეგი სამი დებულება ლოგიკურად ეკვივალენტურია:

(ა) ცერმელოს აქსიომის სტანდარტული ფორმა;

(ბ) თუ $\{E_i \quad i\in I\}$ არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახია, მაშინ მისი ყოველი ნაწილობრივი სელექტორი გაგრძელებადია მის რომელიღაც სელექტორამდე;

(გ) ყოველი E სიმრავლისათვის არსებობს $f: P(E)\backslash\{\emptyset\} \to E$ ამორჩევის ფუნქცია, ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს E-ს არაცარიელი **X** ქვესიმრავლე, გვაქვს $f(X) \in X$.

4. ცერმელოს აქსიომის გამოყენების გარეშე (ე.ი. **ZF** თეორიის შიგნით) აჩვენეთ, რომ თუ მოცემული $f \quad \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ფუნქცია უწყვეტია ფიქსირებულ $x\in\mathbf{R}$ წერტილში კოშის აზრით, მაშინ იგი უწყვეტია იმავე წერტილში ჰაინეს აზრითაც.

5. დაამტკიცეთ, რომ **ZF** თეორიაში **DC** დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპიდან გამომდინარეობს ცერმელოს აქსიომის შემდეგი ფორმა:

არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი მიმდევრობის ნამრავლი არაცარიელი სიმრავლეა.

6. ვთქვათ, რაიმე არაცარიელ **X** სიმრავლეზე მოცემულია $S(x,y)$ ბინარული მიმართება, რომელიც აკმაყოფილებს

$$(\forall x\in X)(\exists y\in X)S(x,y)$$

პირობას (ისევე, როგორც DC პრინციპის ფორმულირებაში).

ZF თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ ყოველი $n > 1$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს X-ის ელემენტთა $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$S(x_1,x_2),\ S(x_2,x_3),\qquad ,\ S(x_{n-1},x_n).$$

7. შეამოწმეთ, რომ ფუნქციები (ჩვეულებრივი გაგებით) შეიძლება აგრეთვე განხილულ იქნეს როგორც გარკვეული ტიპის მულტი-ფუნქციები. დაახასიათეთ ასეთი მულტი-ფუნქციები.

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი მულტი-ფუნქცია შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც

$$H : X \to P(Y)$$

სახის ჩვეულებრივი ფუნქცია, სადაც X და Y შესაბამისი სიმრავლეებია.

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი $f \quad X \to Y$ ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ ამ ფუნქციასთან კანონიკურად ასოცირდება გარკვეული მულტი-ფუნქცია $F : Y \to P(X)$, რომლის მიხედვითაც შესაძლებელია f-ის სრული აღდგენა.

8. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც მოქმედებს **R**-დან **R**-ში და რომელსაც აქვს შემდეგი ორი თვისება:

(ა) ეს ფუნქცია ყველა რაციონალურ წერტილში ღებულობს მხოლოდ ირაციონალურ მნიშვნელობებს;

(ბ) ეს ფუნქცია ყველა ირაციონალურ წერტილში ღებულობს მხოლოდ რაციონალურ მნიშვნელობებს.

გამოიკვლიეთ აგრეთვე საკითხი იმის შესახებ, არსებობს თუ არა უწყვეტი $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ფუნქცია და **R**-ის $\{A,B\}$ დაყოფა ორ ქვესიმრავლედ, რომელთათვისაც სრულდება $f(A) = B$ და $f(B) = A$ ტოლობები.

9. დავაფიქსიროთ **ZF** თეორიის რაიმე კონკრეტული **T** დებულება, რომელიც არ არის დამტკიცებადი ამ თეორიის ჩარჩოებში, მაგრამ მტკიცდება **ZF & DC** თეორიაში (მაგალითად, T-ს როლში გამოდგება ნებისმიერი $\mathbf{f : R \to R}$ ფუნქციისათვის **R**-ის ფიქსირებულ წერტილში უწყვეტობის კოშისა და ჰაინეს განსაზღვრებების ეკვივალენტობის გამომსახველი წინადადება). T დებულებიდან გამომდინარე, განვიხილოთ შემდეგი ბინარული თანაფარდობა S(x,y):

$$(T \mathbin{\&} x = 0 \mathbin{\&} y = x) \vee ((\neg T) \mathbin{\&} x = 1 \mathbin{\&} y = x) \vee (x \neq 0 \mathbin{\&} x \neq 1 \mathbin{\&} y = x).$$

შეამოწმეთ, რომ S(x,y) ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ. ფრენკელის აქსიომათა სქემის თანახმად (იხ. §0), არსებობს

$$Y = \{y : (\exists x)(x \in \{0,1\} \mathbin{\&} S(x,y))\}$$

სიმრავლე, თანაც ამ სიმრავლის არსებობა დგინდება **ZF** თეორიის შიგნით. იმავე თეორიაში აჩვენეთ, რომ Y სიმრავლე არის ერთელემენტიანი და, მაშასადამე, არაცარიელი. დაბოლოს, დაასაბუთეთ, რომ **ZF** თეორიის ყოველი t ტერმისათვის $t \in Y$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $t \in \{0,1\}$ დამოკიდებულება. მეორე მხრივ, $0 \in Y$ და $1 \in Y$ დამოკიდებულებებიდან არც ერთი არ არის ამ თეორიის თეორემა.

ამრიგად, აღნიშნული არაცარიელი Y სიმრავლისათვის პრინციპულად შეუძლებელია (**ZF** თეორიის ფარგლებში) Y-ის რომელიმე კონკრეტული ელემენტის მითითება. აქ შესაძლებელია მხოლოდ იმის მტკიცება, რომ ან $0 \in Y$, ან $1 \in Y$.

ამავე დროს, $0 \in Y$ დამოკიდებულება მართებულია **ZF & DC** თეორიაში.

შეადარეთ ბოლო სავარჯიშო §1-ის მე-8 სავარჯიშოს.

§5. სიმრავლის სიმძლავრე. ელემენტარული ფაქტები სიმრავლეთა სიმძლავრეების შესახებ

ამ პარაგრაფში ვიწყებთ სიმრავლეთა რაოდენობრივ შედარებასთან დაკავშირებული საკითხების განხილვას. ვთქვათ, გვაქვს ნებისმიერი ორი სასრული სიმრავლე. მაშინ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ პირველი სიმრავლე უფრო "მდიდარია" მეორეზე, თუ იგი მეტი რაოდენობის ელემენტებს შეიცავს. ასევე ბუნებრივი ჩანს ის მოსაზრება, რომ ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე უფრო "მდიდარია" ნებისმიერ სასრულ სიმრავლეზე. რასაკვირველია, ამგვარი მარტივი ინტუიციური მოსაზრებები მოითხოვს გარკვეულ დაზუსტებასა და შესაბამის მკაცრ ფორმულირებას.

განვიხილოთ რომელიმე A და B ორი სიმრავლე. ამბობენ, რომ ეს სიმრავლეები ეკვივალენტურია (და სიმბოლურად აღენიშნავენ $A \sim B$), თუ A-სა და B-ს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა (ანუ არსებობს ბიექცია A-დან B-ზე). ადვილად მოწმდება შემდეგი დამოკიდებულებები:

(1) $A \sim A$ (რეფლექსურობა);
(2) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$ (სიმეტრიულობა);
(3) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$ (ტრანზიტულობა).

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ აქ მართლაც საქმე გვაქვს ეკვივალენტობის მიმართების დამახასიათებელ სამ თვისებასთან (იხ. §2).

ორი ეკვივალენტური A და B სიმრავლის შესახებ აგრეთვე ამბობენ, რომ მათ აქვთ ერთი და იგივე სიმძლავრე (ან მათი სიმძლავრეები ერთმანეთის ტოლია). წინამდებარე პარაგრაფში ჯერჯერობით არ შევუდგებით სიმრავლის სიმძლავრის ცნების დაზუსტებას. ამას შემდგომში გავაკეთებთ და ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი A სიმრავლის სიმძლავრე წარმოადგენს A-ს ეკვივალენტურ ერთ-ერთ (სავსებით კონკრეტულ) სიმრავლეს (იხ. §6 და §7).

რაიმე A სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ იგი N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის რომელიმე ნაწილის ეკვივალენტურია. წინააღმდეგ შემთხვევაში A-ს შესახებ ამბობენ, რომ იგი არათვლადია.

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თვლადი სიმრავლის ნებისმიერი ნაწილი თვლადია და რომ ყოველი სასრული სიმრავლეც თვლადია (იხ. კომენტარი 18).

რაიმე სიმრავლეს ეწოდება კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე, თუ იგი R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

შემდგომში დამტკიცებული იქნება, რომ კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე ნებისმიერი სიმრავლე არათვლადია (იხ. ქვემოთ თეორემა 4).

მაგალითი 1. უკვე ვიცით, რომ ნახევრად ღია]0,1] ინტერვალი და R რიცხვითი ღერძი ერთმანეთის ეკვივალენტური სიმრავლეებია (იხ. §3-ის სავარჯიშო 5). ამავე დროს კარგადაა ცნობილი, რომ]0,1]-ში შემავალი ნებისმიერი რიცხვი წარმოიდგინება უსასრულო ორწილადის სახით (უსასრულო ათწილადის სახით ჩვეულებრივი წარმოდგენის მსგავსად). უსასრულო ორწილადების გამოყენებით საკმაოდ მარტივად მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა]0,1]-სა და P(N)-ს შორის. უფრო დეტალურად ასეთი თანადობის კონსტრუქციის შესახებ იხ. ამ პარაგრაფის 1-ელ სავარჯიშოში. ზემონათქვამის გათვალისწინებით უშუალოდ ვასკვნით, რომ P(N) ბულეანი კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე სიმრავლეა.

ვთქვათ, მოცემულია A და B ორი სიმრავლე. ამბობენ, რომ A-ს სიმძლავრე არ აღემატება B-ს სიმძლავრეს, თუ არსებობს ერთი მაინც ინიექციური ფუნქცია A-დან B-ში.

ადგილი დასანახია, რომ ლოგიკურად შესაძლებელია მხოლოდ ოთხი შემთხვევა:

(ა) არსებობს ინიექციური ფუნქცია A-დან B-ში და არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია B-დან A-ში;

(ბ) არსებობს ინიექციური ფუნქცია B-დან A-ში და არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია A-დან B-ში;

(გ) არსებობს ინიექციური ფუნქცია A-დან B-ში და, ამავე დროს, არსებობს ინიექციური ფუნქცია B-დან A-ში;

(დ) არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია A-დან B-ში და არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია B-დან A-ში.

(ა) შემთხვევის დროს ამბობენ ხოლმე, რომ A-ს სიმძლავრე (მკაცრად) ნაკლებია B-ს სიმძლავრეზე; ამავე შემთხვევაში აგრეთვე ამბობენ, რომ B-ს სიმძლავრე (მკაცრად) მეტია A-ს სიმძლავრეზე.

ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით მტკიცდება, რომ (დ) შემთხვევას არასოდეს არა აქვს ადგილი. ამ მნიშვნელოვანი ფაქტის დამტკიცებას ჩვენ შემდგომში მოვიყვანთ, როცა სავსებით დალაგებულ სიმრავლეებს შევეხებით და მათ ძირითად თვისებებს შევისწავლით (იხ. §6 და §7). წინამდებარე პარაგრაფში კი ჩვენი უპირველესი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ (გ) შემთხვევის დროს A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

ქვემოთ მოყვანილი თეორემა I-ის დამტკიცება სიმრავლურ-თეორიული მსჯელობის ბრწყინვალე ნიმუშს წარმოადგენს. თამამად შეიძლება ითქვას, რომ ეს არის სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი შედევრი, როცა მინიმალური საშუალებებით მაქსიმალური შედეგი მიიღწევა.

თეორემა 1 (ბანახი). ვთქვათ, მოცემულია ისეთი A და B ორი სიმრავლე, რომელთათვისაც არსებობს ორი ინიექციური ფუნქცია $f\colon A \to B$ და $g\colon B \to A$. მაშინ არსებობს A', A'', B', B'' სიმრავლეები ისეთი, რომ:

$$A' \cup A'' = A, \qquad A' \cap A'' = \varnothing, \qquad B' \cup B'' = B, \qquad B' \cap B'' = \varnothing,$$

$$f(A') = B', \qquad g(B'') = A''.$$

მაშასადამე, არსებობს ბიექცია $h \quad A \to B$, რომელიც A'-ზე ემთხვევა f-ს, ხოლო A''-ზე ემთხვევა g-ს შებრუნებულს.

დამტკიცება. ვთქვათ, F არის f ფუნქციის გრაფიკი, ხოლო G არის g ფუნქციის გრაფიკი. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$Y = B \setminus f(A), \qquad j = f \circ g$$

და განვსაზღვროთ B' სიმრავლე შემდეგი ფორმულით:

$$B' = \cap\{Z \quad Z \subset B \ \& \ Y \cup j(Z) \subset Z\}.$$

ადვილად მოწმდება, რომ

$$B' = Y \cup j(B'),$$

ე.ი. ამ ტოლობის მარცხენა მხარეს მდგომი სიმრავლე შედის მარჯვენა მხარეს მდგომ სიმრავლეში და პირუკუ. აღვნიშნოთ

$$A' = g(B'), \quad A'' = A \setminus A', \quad B'' = B \setminus B'.$$

ვაჩვენოთ, რომ $f(A'') = B''$. მართლაც, f-ის ინიექციურობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$f(A'') = f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A') = (B \setminus Y) \setminus f(A') = (B \setminus Y) \setminus f(g(B')) =$$

$$B \setminus (Y \cup j(B')) = B \setminus B' = B''.$$

ამრიგად, ვასკვნით, რომ

$$H = (F \cap (A' \times B)) \cup (G^{-1} \cap (A'' \times B))$$

არის ფუნქციონალური გრაფიკი, რომელიც ამყარებს A-სა და B-ს შორის $h = (H,A,B)$ ურთიერთცალსახა თანადობას.

თეორემა დამტკიცებულია. ამ თეორემასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 19.

თეორემა 2. ვთქვათ, A და B ნებისმიერი ორი სიმრავლეა. თუ A არაცარიელია და არსებობს $f\colon A \to B$ ინიექციური ფუნქცია, მაშინ არსებობს $g\colon B \to A$ სიურიექციული ფუნქცია ისეთი, რომ $g(f(a)) = a$ ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f\colon A \to B$ არის ინიექციური ფუნქცია, რომლის გრაფიკია F. რადგან A არაცარიელია, მოიძებნება ერთი მაინც ელემენტი $a_0 \in A$. განვსაზღვროთ g $B \to A$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკია

$$G = F^{-1} \cup ((B \setminus f(A)) \times \{a_0\}).$$

ადვილად მოწმდება, რომ g არის სიურიექცია და $g(f(a)) = a$ ნებისმიერი a ელემენტისათვის A-დან. ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებასაც, მაგრამ მის დასამტკიცებლად უკვე ამორჩევის აქსიომა გვჭირდება (უფრო ზუსტად, ეს დებულება თავისთავად ამორჩევის აქსიომის ერთ-ერთ ეკვივალენტს წარმოადგენს).

თეორემა 3. ვთქვათ, g $B \to A$ არის სიურიექცია. მაშინ არსებობს f $A \to B$ ინიექციური ფუნქცია, ისეთი, რომ $g(f(a)) = a$ ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\{g^{-1}(a) \quad a \in A\}$ სიმრავლეთა ოჯახი. რადგან g არის სიურიექცია, ამიტომ ამ ოჯახის ყველა წევრი არაცარიელი სიმრავლეა. ამორჩევის აქსიომის

ძალით, გვექნება $\{f(a) \quad a \in A\}$ ოჯახი, სადაც $f(a) \in g^{-1}(a)$ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისათვის. მაშასადამე, მივიღეთ

$$F = \{(a, f(a)) \quad a \in A\}$$

ფუნქციონალური გრაფიკი (შეამოწმეთ) და $f = (F, A, B)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც, მისი განსაზღვრის თანახმად, სრულდება

$$g(f(a)) = a \quad (a \in A)$$

დამოკიდებულება. ამ დამოკიდებულებიდან კი უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ f არის ინიექცია. მართლაც, თუ $f(a) = f(a')$, მაშინ $a = g(f(a)) = g(f(a')) = a'$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა დავამტკიცოთ გ. კანტორის შემდეგი კლასიკური თეორემა (რომელიც არ საჭიროებს ცერმელოს აქსიომის გამოყენებას, ე.ი. წარმოადგენს ZF თეორიის ჭეშმარიტ დებულებას).

თეორემა 4 (კანტორი). ყოველი X სიმრავლისათვის $P(X)$ ბულეანის სიმძლავრე X-ის სიმძლავრეზე მეტია.

დამტკიცება. ცხადია, არსებობს f ინიექციური ფუნქცია X-დან $P(X)$-ში. მაგალითად, ასეთი f ფუნქცია შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$f(x) = \{x\} \qquad (x \in X).$$

მაშასადამე, რჩება მხოლოდ იმის ჩვენება, რომ არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია $P(X)$-დან X-ში. თეორემა 2-ის ძალით, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს სიურიექციული ფუნქცია X-დან $P(X)$-ზე. დავუშვათ საწინააღმდეგო და

ვთქვათ, $g : X \to P(X)$ არის ერთ-ერთი ასეთი სიურიექციული ფუნქცია. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$Z = \{x \quad x \in X \;\&\; x \notin g(x)\}.$$

რადგან, ჩვენი დაშვების თანახმად, g არის სიურიექცია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $z \in X$, რომ $Z = g(z)$. ახლა დავსვათ კითხვა: ეკუთვნის თუ არა z ელემენტი Z სიმრავლეს? რასელის პარადოქსის მსგავსად (იხ. §1), მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ $z \in Z$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $z \notin Z$, ანუ ვღებულობთ წინააღმდეგობას, რაც ამტკიცებს კანტორის დებულების მართებულობას.

ზემოთ მოყვანილ მსჯელობაში ფაქტობრივად ჩამალულია კანტორის ე.წ. დიაგონალური მეთოდი. ეს გარემოება რომ უფრო კარგად გააზრებული იქნეს, იგივე თეორემა დავამტკიცოთ ცოტა სხვანაირად – X-ზე მოცემული ორმნიშვნელობიანი ფუნქციების ტერმინებში. წინასწარ შემოვიტანოთ ერთი მეტად სასარგებლო ცნება. განვიხილოთ X სიმრავლის ნებისმიერი Y ქვესიმრავლე. განვსაზღვროთ

$$f_Y : X \to \{0,1\}$$

ფუნქცია შემდეგი ფორმულის მეშვეობით: $f_Y(x) = 1$, თუ $x \in Y$ და $f_Y(x) = 0$, თუ $x \in X \setminus Y$. აღნიშნულ f_Y ფუნქციას Y ქვესიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია ეწოდება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა X-ის ბულეანსა და $\{0,1\}^X$ სიმრავლეს შორის. ამ თანადობის დროს X-ის ყოველ ნაწილს შეესაბამება მისი მახასიათებელი ფუნქცია. მაშასადამე, კანტორის თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია იმის ჩვენება, რომ ნებისმიერი X-სათვის

$$\{f_x : x \in X\} \subset \{0,1\}^X$$

ფუნქციათა ოჯახი ვერ ამოწურავს მთელ $\{0,1\}^X$ სიმრავლეს. ამ ფაქტის დამტკიცება კი არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს, თუ გამოვიყენებთ კანტორის უკვე ხსენებულ დიაგონალურ მეთოდს. სახელდობრ, $f\ X \to \{0,1\}$ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით:

$$f(x) = 1 - f_x(x) \qquad (x \in X).$$

ვაჩვენოთ, რომ f განსხვავებულია ყველა f_x $(x \in X)$ ფუნქციისაგან. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ რომელიღაც $x \in X$ ელემენტისათვის გვექნება $f = f_x$. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$1 - f_x(x) = f(x) = f_x(x), \quad f_x(x) = 1/2,$$

რაც აშკარა წინააღმდეგობას იძლევა.

შევნიშნოთ, რომ ახლახან მოყვანილი მსჯელობის ერთ-ერთი ტრივიალური დასკვნა შემდეგი წინადადებაა: **R**-დან **R**-ში ყველა მოქმედ ფუნქციათა სიმრავლის სიმძლავრე **R**-ის სიმძლავრეზე მეტია.

კანტორის თეორემას დიდი მნიშვნელობა აქვს მთელი სიმრავლეთა თეორიისათვის. იგი გვიჩვენებს, რომ ყოველი X სიმრავლისათვის არსებობს სიმრავლე, რომლის სიმძლავრე X-ის სიმძლავრეზე მეტია. ამრიგად, ვხედავთ, რომ სიმრავლეების სიმძლავრეების იერარქია უსასრულოდ იზრდება. ამ იერარქიის ზრდის ხარისხზე უფრო ნათელი წარმოდგენა შემდგომ პარაგრაფებში შეგვექმნება. აქ კი გვინდა მხოლოდ იმ ფაქტის დაფიქსირება, რომ კანტორის თეორემისა და ზემოთ მოყვანილი 1-ლი მაგალითის უშუალო შედეგია კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე ნებისმიერი სიმრავლის არათვლადობა (შეამოწმეთ).

მაგალითი 2. ზოგჯერ კონტინუუმის არათვლადობა დგინდება სხვა (უფრო გეომეტრიული ხასიათის) მსჯელობით.

გავიხსენოთ R რიცხვითი ღერძის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისება, სახელდობრ, მისი სისრულე. უკანასკნელი შეიძლება ჩამოყალიბდეს კანტორის ე.წ. ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპის სახით. ამ პრინციპის მიხედვით, თუ R ღერძზე მოცემულია სეგმენტთა კლებადი (სიმრავლურ-თეორიული ჩართვის თვალსაზრისით) მიმდევრობა, მაშინ არსებობს ერთი მაინც წერტილი, რომელიც ყველა ამ სეგმენტს ეკუთვნის. კანტორის პრინციპიდან გამომდინარე, R-ის არათვლადობა ძალზე მარტივად მტკიცდება. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, $\{t_i \quad i \in N\}$ არის R-ის ყველა წერტილის ნუმერაცია. R-ზე ავიღოთ ნებისმიერი არაგადაგვარებული T_0 სეგმენტი, რომელსაც t_0 წერტილი არ ეკუთვნის, და გავყოთ იგი სამ კონგრუენტულ ქვესეგმენტად. ცხადია, t_1 წერტილი არ ეკუთვნის რომელიღაც ქვესეგმენტს (ან ორ ქვესეგმენტს, ან სამივე ქვესეგმენტს). აღვნიშნოთ T_1 სიმბოლოთი ყველაზე მარცხენა ასეთი ქვესეგმენტი. შემდეგ T_1 სეგმენტი გავყოთ სამ კონგრუენტულ ქვესეგმენტად და ანალოგიური გზით განვსაზღვროთ T_2 ქვესეგმენტი, რომელსაც t_2 წერტილი არ ეკუთვნის. ეს პროცესი გავაგრძელოთ იმავე სქემით (ფაქტობრივად, მათემატიკური რეკურსიის მეთოდის გამოყენებით). საბოლოოდ ავაგებთ $\{T_i \quad i \in N\}$ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას, რომელთა თანაკვეთა არ არის ცარიელი. ახლა, თუ t ასოთი აღვნიშნავთ იმ წერტილს, რომელიც ყველა აგებულ სეგმენტს ეკუთვნის, მაშინ ჩატარებული პროცედურის ძალით, t უნდა განსხვავდებოდეს ყველა t_i $(i \in N)$ წერტილისაგან, რაც აშკარა წინააღმდეგობას იძლევა, რადგან, ჩვენი დაშვების თანახმად, $\{t_i \quad i \in N\}$ მიმდევრობა ამოწურავს რიცხვითი ღერძის ყველა წერტილს. მიღებული წინააღმდეგობა R-ის არათვლადობას სრულიად ასაბუთებს. აქვე გვინდა ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებასაც, რომ მოყვანილი მსჯელობა ეფექტურია, ე.ი. არ ეყრდნობა ამორჩევის აქსიომას.

უსასრულო სიმრავლეებს შორის უმცირესი სიმძლავრე აქვს N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. კანტორს აგრეთვე

ეკუთვნის იმის მიგნება, რომ $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ დეკარტულ ნამრავლს აქვს იგივე სიმძლავრე, რაც $\mathbf{N}$-ს. მართლაც, განვსაზღვროთ

$$\mathbf{f} : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

ფუნქცია შემდეგი ფორმულის მეშვეობით:

$$f(k,r) = 2^k(2r + 1) \qquad ((k,r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}).$$

ეს ფუნქცია ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ დეკარტულ ნამრავლსა და $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ სიმრავლეს შორის. თეორემა 1-ის გათვალისწინებით აქედან იოლად ვღებულობთ, რომ აღნიშნულ დეკარტულ ნამრავლსა და $\mathbf{N}$-ს აქვთ ერთი და იგივე სიმძლავრე (ანუ, რაც ფაქტობრივად იგივეა, $\mathbf{N} \sim \mathbf{Q}$). ამ გარემოების აღმოჩენის შემდეგ კანტორმა გადადგა შემდეგი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი. სახელდობრ, $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$ თანაფარდობიდან გამომდინარე, მან დაამტკიცა, რომ $\mathbf{P}(\mathbf{N}) \sim \mathbf{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$. მაშასადამე, თუ მხედველობაში ვიქონიებთ იმ გარემოებებსაც, რომ $\mathbf{P}(\mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$ და

$$\mathbf{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \sim (\mathbf{P}(\mathbf{N}))^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}^{\mathbf{N}},$$

მივიღებთ $\mathbf{R}$ რიცხვითი ღერძისა და $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სიმრავლის ეკვივალენტურობას. აქედან კი, იგივე თეორემა 1-ის გამოყენებით, ადვილად ვღებულობთ, რომ ყველა

$$\mathbf{R},\ \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}, \ldots$$

სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია, ე.ი. ყოველ მათგანს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე. კერძოდ, მივიღეთ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$. ამ ბოლო გარემოების აღმოჩენა თვით კანტორისთვისაც საკმაოდ მოულოდნელი იყო. ერთ-ერთ თავის წერილში რ. დედეკინდისადმი (R. Dedekind) იგი წერდა:

“მე ამ ფაქტს ნათლად ვხედავ, მაგრამ მაინც არ მჯერა”.

შემდგომში მოვლენები უფრო საინტერესოდ განვითარდა. დაამტკიცა რა კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე სიმრავლის არათვლადობა, კანტორმა დასვა მეტად ბუნებრივი კითხვა: არსებობს თუ არა "შუალედური" სიმძლავრის მქონე სიმრავლეები, ე.ი. არსებობს თუ არა **R** რიცხვით ღერძზე მდებარე თუნდაც ერთი წერტილოვანი სიმრავლე, რომელიც არათვლადია და, ამავე დროს, არ არის **R** ღერძის ეკვივალენტური? კანტორი ვარაუდობდა, რომ პასუხი დასმულ კითხვაზე უარყოფითია და მთელი თავისი ენერგია მოახმარა წარმოქმნილი ჰიპოთეზის დასაბუთებას. მაგრამ ამ მიმართულებით მისი მრავალი მცდელობა უშედეგო გამოდგა (და, როგორც მერე გაირკვა, ეს გარემოება კანონზომიერი იყო). კანტორის ჰიპოთეზას, რომ აღნიშნული კითხვა უარყოფითად წყდება, შემდგომში კონტინუუმის ჰიპოთეზა შეარქვეს და მას უამრავი გამოკვლევა და შრომა მიეძღვნა. საბოლოოდ, კონტინუუმის ჰიპოთეზამ შეასრულა განსაკუთრებული და უაღრესად მნიშვნელოვანი როლი სიმრავლეთა თეორიის, მათემატიკური ლოგიკისა და, საზოგადოდ, მთელი მათემატიკის განვითარების პროცესში (იხ. კომენტარი 20).

§5-ის სავარჯიშოები

1. განვიხილოთ $D = (N\setminus\{0\})^{N\setminus\{0\}}$ სიმრავლე და ამ სიმრავლის ყოველ $d = (n_1, n_2, n_3, \quad)$ ელემენტს შევუსაბამოთ $f(d) \in]0,1]$ ნამდვილი რიცხვი შემდეგი ფორმულის მეშვეობით:

$$f(d) = 2^{-n_1} + 2^{-n_1-n_2} + 2^{-n_1-n_2-n_3} + \dots$$

აჩვენეთ, რომ f ფუნქცია ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას D-სა და]0,1] ნახევრადღია ინტერვალს შორის. $N \times N \sim N$ დამოკიდებულებაზე დაყრდნობით და ამ პარაგრაფში მოყვანილი ბანახის თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $N^N \sim P(N)$ და, მაშასადამე,

$$R \sim]0,1] \sim N^N \sim P(N).$$

გარდა ამისა, მხედველობაში მიიღეთ

$$N = \{0,2,4,\dots\} \cup \{1,3,5,\dots\}$$

ტოლობა და უშუალოდ დაამტკიცეთ, რომ:

(ა) $P(N)$ და $P((N\times\{0\})\cup(N\times\{1\}))$ ბულეანებს ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ;

(ბ) $P((N\times\{0\})\cup(N\times\{1\}))$ და $P(N)\times P(N)$ სიმრავლეებსაც ტოლი სიმძლავრეები აქვთ;

(გ) $P(N)$ და $P(N) \times P(N)$ სიმრაველეებიც ეკვივალენტურია და, მაშასადამე, რიცხვითი ღერძი და ევკლიდური სიბრტყე ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

მიაქციეთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ სავარჯიშოში ჩამოთვლილი ყველა ფაქტი **ZF** თეორიის შიგნით დგინდება.

2. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ისეთი A სიმრავლე, რომ $((A\times\{0\}) \cup (A\times\{1\})) \sim A$. დაამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევაში $P(A)\times P(A) \sim P(A)$. გამოიყვანეთ აქედან (ამორჩევის აქსიომაზე დაყრდნობის გარეშე), რომ თუ A სიმრავლე ორ ელემენტს მაინც შეიცავს და $A\times A \sim A$, მაშინ $P(A)\times P(A) \sim P(A)$.

3*. მოცემულია R-ის დაყოფა A და B ორ ქვესიმრავლედ. დაამტკიცეთ, რომ ამ სიმრავლეებიდან ერთ-ერთი მაინც კონტინუუმის სიმძლავრის მქონეა. (გამოიყენეთ ამორჩევის აქსიომა და ის ფაქტი, რომ $R\times R \sim R$.) დაადგინეთ გაცილებით უფრო ძლიერი ფაქტის მართებულობაც, სახელდობრ, თუ $R = \cup\{A_i \;\; i\in N\}$, მაშინ ერთი მაინც A_i სიმრავლე არის კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე.

4. ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს N-ის ეკვივალენტურ ქვესიმრავლეს. უფრო ზუსტად, ZF თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ თუ მართებულია DC დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი (იხ. წინა პარაგრაფი), მაშინ ყოველი უსასრულო სიმრავლე N-ის ეკვივალენტურ ქვესიმრავლეს შეიცავს.

ეს გარემოება იმის მაჩვენებელია, რომ ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე მართლაც არის უმცირესი უსასრულო სიმძლავრე. გარდა ამისა, აჩვენეთ, რომ ZF & DC თეორიაში შემდეგი ორი წინადადება მოცემული X სიმრავლის შესახებ ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

(ა) არსებობს X-ის ბიექცია მის რომელიღაც საკუთრივ ნაწილზე (ე.ი. ისეთ ნაწილზე, რომელიც X-საგან განსხვავდება);

(ბ) X სიმრავლე უსასრულოა (ე.ი. არ არის სასრული).

აქვე შევნიშნოთ, რომ იმ X სიმრავლეებს, რომლებიც (ა) პირობას აკმაყოფილებენ, დედეკინდის აზრით უსასრულო სიმრავლეებს უწოდებენ. ამრიგად, ZF & DC თეორიაში ნებისმიერი მოცემული სიმრავლე უსასრულოა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი უსასრულოა დედეკინდის აზრით. აღსანიშნავია, რომ იმავე დასკვნის გაკეთება შეუძლებელია ZF თეორიის ჩარჩოებში.

5. ცერმელოს აქსიომის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ თვლად სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანება ისევ თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს. უფრო მეტიც, აჩვენეთ, რომ ამ ფაქტის დამტკიცებისათვის საკმარისია ცერმელოს აქსიომის შემდეგი სუსტი ფორმა:

არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი თვლადი ოჯახისათვის არსებობს ერთი მაინც სელექტორი.

ამ ფორმით კლასიკურ მათემატიკურ ანალიზში ხშირად სარგებლობენ (იხ., მაგალითად, §4), მაგრამ თანამედროვე ფუნქციონალური ანალიზის მთელი რიგი საკითხებისათვის

საჭიროა ამორჩევის აქსიომის გაცილებით უფრო ძლიერი (არათვლადი) ფორმები.

6. ცერმელოს აქსიომის გამოყენების გარეშე (ე.ი. **ZF** თეორიაში) დაამტკიცეთ შემდეგი დებულება, რომელიც ამ პარაგრაფის მე-2 მაგალითს აძლიერებს: არ არსებობს **R** რიცხვითი ღერძის წარმოდგენა სასრული სიმრავლეების თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით.

წინა ორ ამოცანასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 21.

7*. ევკლიდურ სიბრტყეზე მდებარე ფიგურას ვუწოდოთ ტრიოდი, თუ იგი არის ისეთი სამი არაგადაგვარებული მონაკვეთის გაერთიანება, რომლებსაც აქვთ ერთი საერთო ბოლო, მაგრამ ამ ბოლოს გარდა წყვილ-წყვილად საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.

დაამტკიცეთ, რომ ტრიოდების ნებისმიერი დიზიუნქტური ოჯახი თვლადია.

8. ვთქვათ, მოცემულია კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე E სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ:

(ა) Sym(E) ჯგუფის სიმძლავრე ტოლია P(E) ბულეანის სიმძლავრისა;

(ბ) E სიმრავლეზე მოცემულ ყველა ეკვივალენტობის მიმართებათა სიმრავლის სიმძლავრე ტოლია P(E) ბულეანის სიმძლავრისა;

(გ) E სიმრავლეზე მოცემულ ყველა წრფივი დალაგების მიმართებათა სიმრაველის სიმძლავრე ტოლია P(E) ბულეანის სიმძლავრისა.

9*. **R** რიცხვით ღერძზე (ან მის რომელიმე შუალედზე) მოცემულია ნამდვილმნიშვნელობიანი f ფუნქცია. ცერმელოს აქსიომის გამოყენების გარეშე დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) f უწყვეტია კოშის აზრით (მთელ მის განსაზღვრის არეზე);

(ბ) f უწყვეტია ჰაინეს აზრით (მთელ მის განსაზღვრის არეზე).

ცერმელოს აქსიომის გამოყენების გარეშე დაამტკიცეთ აგრეთვე, რომ თუ f უწყვეტია რომელიმე სეგმენტზე, მაშინ f თანაბრად უწყვეტიცაა ამავე სეგმენტზე და მასზე თავის ინფიმუმსა და სუპრემუმს აღწევს. (ისარგებლეთ იმ ფაქტით, რომ რაციონალურ რიცხვთა **Q** სიმრავლე თვლადია და ყველგან მკვრივი **R**-ში.)

10*. დაამტკიცეთ, რომ (**Q**,≤) წრფივად დალაგებული სიმრავლე უნივერსალურია ყველა თვლადი წრფივად დალაგებული სიმრავლისათვის. სხვა სიტყვებით, აჩვენეთ (ცერმელოს აქსიომის გამოყენების გარეშე, ანუ **ZF** თეორიის ფარგლებში), რომ ნებისმიერი (E,≤) თვლადი წრფივად დალაგებული სიმრავლისათვის არსებობს $f : (E,\leq) \rightarrow (\mathbf{Q},\leq)$ ინიექციური ფუნქცია, რომელიც დალაგების მიმართებას ინარჩუნებს, ე.ი.

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (x \in E,\ y \in E).$$

ამისათვის გამოიყენეთ (**Q**,≤) სიმრავლის ზემოდან და ქვემოდან შემოუსაზღვრელობა და მისი მკვრივობა (რაც იმაში გამოიხატება, რომ მის ყოველ ორ ელემენტს შორის მესამე ელემენტიც არსებობს).

დამატებით აჩვენეთ, რომ თუ არაცარიელი თვლადი წრფივად დალაგებული (E,≤) სიმრავლე მკვრივია და მას არა აქვს არც უმცირესი და არც უდიდესი ელემენტი, მაშინ (E,≤) იზომორფულია (**Q**,≤)-სი.

ეს მნიშვნელოვანი შედეგი ასევე კანტორს ეკუთვნის.

11. **ZF** თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ თუ A სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, B სიმრავლე კი – თვლადი, მაშინ ორივე $A \cup B$ და $A \setminus B$ სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

12*. მოცემულ ნამდვილ რიცხვს ალგებრული რიცხვი ეწოდება, თუ არსებობს ერთი მაინც მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომელიც იგივურად ნულის ტოლი არ არის და მისი ერთ-ერთი ფესვი ეს რიცხვია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემულ ნამდვილ რიცხვს ტრანსცენდენტული რიცხვი ეწოდება.

ZF თეორიის შიგნით აჩვენეთ, რომ ყველა ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია. გამოიყვანეთ აქედან, რომ ყველა ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა (ეს კლასიკური შედეგი აგრეთვე კანტორს ეკუთვნის).

ამ სავარჯიშოსთან დაკავშირებით აღვნიშნოთ, რომ ზოგჯერ სრულიად კონკრეტული ნამდვილი რიცხვებისათვის ძალიან ძნელია იმის დადგენა, არიან თუ არა ისინი ტრანსცენდენტული. მაგალითად, მხოლოდ 1873 წელს ფრანგი მათემატიკოსის შ. ერმიტის (Ch. Hermite) მიერ იყო ნაჩვენები **e** ნეპერის რიცხვის ტრანსცენდენტულობა, ხოლო 1882 წელს გერმანელმა მათემატიკოსმა ფ. ლინდემანმა (F. Lindemann) აჩვენა, რომ π რიცხვიც ტრანსცენდენტულია, რითაც მან ამოხსნა მრავალსაუკუნოვანი გეომეტრიული ამოცანა წრის კვადრატურის შესახებ.

13. დაამტკიცეთ (**ZF** თეორიის ფარგლებში), რომ ამორჩევის აქსიომა და ამ პარაგრაფის თეორემა 3-ის დებულება ერთმანეთის ეკვივალენტური წინადადებებია.

§6. სავსებით დალაგებული სიმრავლეები. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპი და ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდი

მოცემულ ნაწილობრივად დალაგებულ $(E,\leq)$ სიმრავლეს სავსებით დალაგებული ეწოდება, თუ მის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეში (რომელიც აგრეთვე ნაწილობრივად დალაგებულია ინდუცირებული დალაგებით) არსებობს უმცირესი ელემენტი, ე.ი. ელემენტი, რომელიც ნაკლებია ქვესიმრავლის ნებისმიერ სხვა ელემენტზე.

მოყვანილი განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სავსებით დალაგებული სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე აგრეთვე სავსებით დალაგებულია. გარდა ამისა, ყოველი სავსებით დალაგებული სიმრავლე არის წრფივად დალაგებული (მართლაც, ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია განვიხილოთ მოცემული სავსებით დალაგებული სიმრავლის ნებისმიერი ორელემენტიანი ქვესიმრავლე). შებრუნებულ დებულებას ადგილი არა აქვს, როგორც გვიჩვენებს თუნდაც **Q**-სა და **R**-ის მაგალითები. ამავე დროს, ადვილად მტკიცდება, რომ ნებისმიერი სასრული წრფივად დალაგებული სიმრავლე სავსებით დალაგებულია (იხ. წინამდებარე პარაგრაფის სავარჯიშო 2).

უსასრულო სავსებით დალაგებული სიმრავლის კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს **N** ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე მისი ბუნებრივი დალაგებით. ცხადია, **N**-ს არა აქვს უდიდესი ელემენტი. მაგრამ შეგვიძლია მოვახდინოთ ამ სიმრავლის მცირე გაფართოება უდიდესი **a** ელემენტის დამატებით (რომელიც, რასაკვირველია, არ უნდა ეკუთვნოდეს **N**-ს). მაშინ აგრეთვე მივიღებთ სავსებით დალაგებულ $\mathbf{N}\cup\{a\}$ სიმრავლეს.

ვთქვათ, x ნაწილობრივად დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლის რაიმე ელემენტია. მაშინ იგი განსაზღვრავს

$$E(x) = \{y : y\in E \ \&\ y < x\}$$

ქვესიმრავლეს, რომელსაც x-ის შესაბამის საწყის ინტერვალს უწოდებენ (E სიმრავლეში).

ლემა 1. თუ f არის (E,≤) სავსებით დალაგებული სიმრავლის ზრდადი ინიექციური გადასახვა თავისთავში, მაშინ $x \leq f(x)$ უტოლობა მართებულია ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის.

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ:

(ა) არც ერთი სავსებით დალაგებული სიმრავლე არ არის თავისი საწყისი ინტერვალის იზომორფული;

(ბ) ნებისმიერი სავსებით დალაგებული სიმრავლისათვის არსებობს ერთადერთი იზომორფიზმი თავისთავზე – მისი იგივური გარდაქმნა.

დამტკიცება. განვიხილოთ D სიმრავლე ყველა იმ x-ისა E-დან, რომელთათვისაც $f(x) < x$. დავუშვათ, რომ D არ არის ცარიელი, და z-ით აღვნიშნოთ ამ სიმრავლის უმცირესი ელემენტი. განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს $f(z) < z$. რადგან f ზრდადია და ინიექციური, აგრეთვე გვაქვს $f(f(z)) < f(z) < z$, ე. ი. f(z) ეკუთვნის D-ს და z-ზე მკაცრად ნაკლებია. ამრიგად, მივიღეთ წინააღმდეგობა z-ის განსაზღვრასთან, რაც ამტკიცებს ლემის პირველ დებულებას. (ა) და (ბ) წინადადებები კი ლემის პირველი დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს.

ლემა 2. თუ (A,≤) და (B,≤) ნებისმიერი ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლეა, მაშინ ისინი ან ერთმანეთის იზომორფულია, ან ერთ-ერთი მათგანი მეორის რომელიღაც საწყისი ინტერვალის იზომორფულია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$G = \{(a,b) : a \in A$ & $b \in B$ & A(a) საწყისი ინტერვალი B(b) საწყისი ინტერვალის იზომორფულია$\}$.

ლემა 1-ის გათვალისწინებით ადვილად ვასკვნით, რომ G-ც და G^{-1}-იც ფუნქციონალური გრაფიკებია და $G(a) = b$ ფუნქცია ამყარებს იზომორფიზმს $pr_1(G)$ და $pr_2(G)$ სავსებით დალაგებულ სიმრავლეებს შორის. იმავე ლემის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ თუ $a \in pr_1(G)$ და $a' < a$, მაშინ $a' \in pr_1(G)$. ანალოგიურად, თუ $b \in pr_2(G)$ და $b' < b$, მაშინ $b' \in pr_2(G)$. ამრიგად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$pr_1(G) = A \ \vee \ pr_2(G) = B.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ ორივე $A \setminus pr_1(G)$ და $B \setminus pr_2(G)$ სიმრავლე არაცარიელია. a^*-ით აღვნიშნოთ პირველი სიმრავლის უმცირესი ელემენტი, ხოლო b^*-ით – მეორე სიმრავლის უმცირესი ელემენტი. ცხადია, გვაქვს

$$A(a^*) = pr_1(G),\ B(b^*) = pr_2(G),\ A(a^*) \text{ იზომორფულია } B(b^*)\text{-სი}.$$

ამიტომ $(a^*, b^*) \in G$ და მივიღეთ აშკარა წინააღმდეგობა a^* და b^* ელემენტების განსაზღვრასთან. ეს წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება არ იყო სწორი. ამით ლემა 2 მთლიანადაა დამტკიცებული.

ეს დამხმარე დებულება (რომელიც კანტორს ეკუთვნის) არსებითად დაგვჭირდება შემდეგ პარაგრაფში, სადაც განვიხილავთ და დავამტკიცებთ ცერმელოს თეორემას იმის შესახებ, რომ ყოველი სიმრავლე შეიძლება სავსებით დალაგდეს. კერძოდ, ამ თეორემის საშუალებით ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი ორი სიმრავლის სიმძლავრეები ერთმანეთთან სადარია. აქვე შევნიშნოთ, რომ ლემა 1 და ლემა 2 მტკიცდება **ZF** თეორიის შიგნით, ე.ი. მათი დამტკიცების პროცესში ამორჩევის აქსიომას არ ვიყენებთ.

ახლა შევეხოთ ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპს (მეთოდს), რომელიც განაზოგადებს მათემატიკური ინდუქციის კარგად ცნობილ პრინციპს (მეთოდს). ეს ბოლო პრინციპი

ელემენტარული მათემატიკის კურსშიც კი შედის. მოვიყვანოთ ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის სტანდარტული ფორმულირება.

ვთქვათ, მოცემულია სავსებით დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლე და x ცვლადის რაიმე $S(\cdot)$ თვისება. დავუშვათ, რომ $S(\cdot)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

როგორიც არ უნდა იყოს $x \in E$, თუ $S(\cdot)$ სრულდება ყველა $y < x$ ელემენტისათვის, მაშინ $S(\cdot)$ სრულდება x-სთვისაც.

ასეთ შემთხვევაში $S(\cdot)$ თვისება ჭეშმარიტია ყველა $x \in E$ ელემენტისათვის.

ამ პრინციპის დასაბუთება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, დავუშვათ, რომ აღნიშნული $S(\cdot)$ თვისება არ არის ჭეშმარიტი E-ს ზოგიერთი ელემენტისათვის. ასეთ ელემენტთა შორის ავიღოთ უმცირესი და ავღნიშნოთ იგი x-ით. მაშინ ნებისმიერი $y < x$ ელემენტისათვის $S(y)$ ჭეშმარიტია. პირობის თანახმად, $S(x)$-ც უნდა იყოს ჭეშმარიტი, რაც წინააღმდეგობრივია x-ის განსაზღვრასთან. ამრიგად, ჩვენი დაშვება არ არის სწორი და, მაშასადამე, $S(\cdot)$ თვისება სრულდება E სიმრავლის ყველა ელემენტისათვის.

ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპს (მეთოდს) უშუალოდ უკავშირდება ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდი. ამ ბოლო მეთოდის საშუალებით აგებენ სხვადასხვა ტიპის რთულ მათემატიკურ ობიექტებს (უფრო მარტივი სტრუქტურის მქონე ობიექტებიდან გამომდინარე და მათი გამოყენებით). ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდს უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება მათემატიკურ ლოგიკასა და სიმრავლეთა თეორიაში, ზოგად ტოპოლოგიასა და ალგებრაში, თანამედროვე ფუნქციონალურ ანალიზში და მრავალ სხვა მათემატიკურ დარგში.

ვთქვათ, მოცემულია $(E,\leq)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლე და $T(u)$ ტერმი. მაშინ არსებობს E სიმრავლეზე განსაზღვრული ერთადერთი f სიურიექცია, რომელიც ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს

$$f(x) = T(f|E(x))$$

ტოლობას, სადაც $f|E(x)$ სიმბოლო აღნიშნავს f-ის შევიწროებას $E(x)$ საწყის ინტერვალზე.

დავასაბუთოთ ახლახან ჩამოყალიბებული დებულება. ჯერ დავამტკიცოთ ასეთი f ფუნქციის ერთადერთობა. ავიღოთ E-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი ორი f და f' სიურიექცია, რომელთათვისაც შესრულებულია

$$f(x) = T(f|E(x)), \quad f'(x) = T(f'|E(x)) \qquad (x \in E)$$

ტოლობები, და ვაჩვენოთ, რომ $f(x) = f'(x)$ ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის. ამისათვის გამოვიყენოთ ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპი. ცხადია, რომ თუ $x \in E$ და $f(y) = f'(y)$ ტოლობა სამართლიანია ყველა $y < x$ ელემენტისათვის E-დან, მაშინ

$$f|E(x) = f'|E(x), \;\; f(x) = T(f|E(x)) = T(f'|E(x)) = f'(x),$$

ე.ი. შესაბამისი ტოლობა სამართლიანია x-სთვისაც. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, ასეთ ვითარებაში f და f' ერთმანეთს ემთხვევა. ახლა ვაჩვენოთ f ფუნქციის არსებობა. ამისათვის განვიხილოთ ყველა იმ $x \in E$ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთათვისაც არსებობს $E(x)$-ზე განსაზღვრული ერთი მაინც f_x სიურიექცია ისეთი, რომ

$$f_x(y) = T(f_x|E(y)) \quad (y < x).$$

უკვე დამტკიცებული ერთადერთობის გამო, ყოველი ორი ასეთი ფუნქცია ერთმანეთს დაემთხვევა მათი განსაზღვრის არეების საერთო ნაწილზე. გარდა ამისა, თუ $x \in E$ და ფუნქციათა $\{f_y \quad y < x\}$ ოჯახი არსებობს, მაშინ ამ ოჯახის ყველა ფუნქციის გრაფიკების გაერთიანება აგრეთვე წარმოადგენს ფუნქციონალურ გრაფიკს და იგი შეესაბამება გარკვეულ h სიურიექციას. თუ x ელემენტს უშუალო წინამორბედი არა აქვს (ე.ი. ყოველი $y < x$ ელემენტისათვის $]y,x[$ ღია ინტერვალი არაცარიელია), მაშინ $dom(h) = E(x)$ და h აკმაყოფილებს

$$h(y) = T(h|E(y)) \qquad (y < x)$$

ფორმულას, ე.ი. h შეგვიძლია ავიღოთ f_x-ის როლში. თუ x-ის უშუალო წინამორბედია z, მაშინ $dom(h) = E(z)$ და h ცალსახად გრძელდება $dom(h) \cup \{z\} = E(x)$ სიმრავლეზე

$$h(z) = T(h|E(z))$$

ტოლობის მეშვეობით. ამ შემთხვევაში f_x-ის როლში შეგვიძლია ასეთნაირად გაგრძელებული h ფუნქცია ავიღოთ.

ამრიგად, ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის გვექნება $E(x)$-ზე განსაზღვრული და საჭირო თვისების მქონე ერთადერთი f_x სიურიექცია. ახლა კი ჩვენთვის სასურველი f ფუნქცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$f(x) = T(f_x) \qquad (x \in E)$$

ფორმულით. ამ ფორმულიდან სრულიად ცხადია, რომ f ფუნქცია აკმაყოფილებს მისდამი წამოყენებულ მოთხოვნებს.

როგორც უკვე ვთქვით, ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდი წამყვან როლს თამაშობს სიმრავლურ-თეორიულ მსჯელობებსა და კონსტრუქციებში. ამას შემდგომში მრავალ

მაგალითზე დავინახავთ. აქ კი დავიწყებთ აღნიშნული მეთოდის დემონსტრირებას იმით, რომ ავაგებთ ე.წ. ორდინალურ რიცხვებს (ანუ ორდინალებს) ცნობილი ამერიკელი მეცნიერის ჯ. ფონ ნეიმანის მიერ შემოთავაზებული სქემის მიხედვით. ამისათვის კვლავ დავაფიქსიროთ რაიმე სავსებით დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლე და ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდით განვსაზღვროთ

$$o(x) = \{o(y) : y < x\}$$

სიმრავლე (აქ $T(u)$-ს როლში აღებულია $\mathrm{ran}(u)$). ნათლად ჩანს, რომ $o(x)$ სიმრავლეები ფაქტობრივად არ არიან დამოკიდებული სავსებით დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლის შერჩევაზე. ეს ნიშნავს შემდეგს: ვთქვათ, მოცემულია მეორე სავსებით დალაგებული $(E',\leq)$ სიმრავლე; როგორც ვიცით, ლემა 2-ის თანახმად, ან $(E,\leq)$ იზომორფულია $(E',\leq)$-ისა, ან ამ ორი სიმრავლიდან ერთ-ერთი იზომორფულია მეორე სიმრავლის რომელიღაც საწყისი ინტერვალისა. გარკვეულობისათვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $u \quad E \to E'$ ამყარებს იზომორფიზმს E სიმრავლესა და E' სიმრავლის რომელიღაც საწყის ინტერვალს შორის. მაშინ ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მართებულია

$$o(x) = o(u(x)) \quad (x \in E)$$

ფორმულა, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ $o(x)$ ტიპის სიმრავლეები არ არიან დამოკიდებული $(E,\leq)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლის სპეციფიკაზე.

$o(x)$ ტიპის სიმრავლეებს ეწოდება ორდინალური რიცხვები ან, უფრო მოკლედ, ორდინალები (ფონ ნეიმანის აზრით).

ამრიგად, შემოტანილი განსაზღვრის თანახმად,

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

სიმრავლეები წარმოადგენენ პირველ ორდინალურ რიცხვებს (ორდინალებს). ამ ორდინალებისათვის იყენებენ ჩვეულებრივ აღნიშვნებს:

$$0 = \varnothing\,,\ 1 = \{\varnothing\},\ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\,,\ 3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots .$$

კერძოდ, ნული (ნულოვანი ორდინალი) გაიგივებულია ცარიელ სიმრავლესთან, ერთიანი გაიგივებულია იმ სიმრავლესთან, რომლის ერთადერთი ელემენტია ცარიელი სიმრავლე, და ა.შ. (იხ. კომენტარი 22).

საზოგადოდ, თუ o არის ორდინალური რიცხვი, მაშინ ზემოთ მოცემული განსაზღვრის ძალით $o \cup \{o\}$ აგრეთვე არის ორდინალური რიცხვი (მას o-ს უშუალოდ მომდევნო ორდინალური რიცხვი ეწოდება და იგი ხშირად $o + 1$ სიმბოლოთი აღინიშნება).

ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით მარტივად (და ერთდროულად) დგინდება, რომ:

$$o(x) \neq o(x') \quad (x \in E, x' \in E, x \neq x'),$$

$$o(x) \notin o(x) \quad (x \in E).$$

გარდა ამისა, ყოველი $o(x)$ ორდინალური რიცხვი სავსებით დალაგებულია ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ, ე.ი. $(o(x), \subset)$ წყვილი სავსებით დალაგებულ სიმრავლეს წარმოადგენს, რომელიც $(E, \leq)$ სიმრავლის $(E(x), \leq)$ საწყისი ინტერვალის იზომორფულია. ამ თვისების გათვალისწინებით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ o ორდინალი (მკაცრად) ნაკლებია o' ორდინალზე (და დავწეროთ $o < o'$), თუკი $o \subset o'$ და $o \neq o'$.

ადვილად მოწმდება, რომ $o < o'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $o \in o'$.

ამბობენ, რომ o' ორდინალს აქვს უშუალო წინამორბედი, თუ o' რომელიღაც o ორდინალის უშუალოდ მომდევნო ორდინალია, ე.ი. თუ $o' = o \cup \{o\}$. ცხადია, ამ შემთხვევაში აგრეთვე გვაქვს $o < o'$ და არ არსებობს არც ერთი ორდინალი, რომელიც მკაცრად მეტია o-ზე და იმავდროულად მკაცრად ნაკლებია o'-ზე. მაშასადამე, o' ორდინალის o უშუალო წინამორბედი ერთადერთია.

ამბობენ, რომ არანულოვანი o ორდინალი არის ზღვარითი, თუ მას არა აქვს უშუალო წინამორბედი.

ჩამოვთვალოთ ორდინალური რიცხვების რამდენიმე სხვა თვისება, რომლებიც საკმაოდ მარტივად დგინდება ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის მეშვეობით. ამ თვისებების შემოწმებას მკითხველს ვუტოვებთ.

(ა) ყოველი ორდინალური რიცხვი არის ტრანზიტული სიმრავლე;

(ბ) ორდინალურ რიცხვთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება კვლავ ორდინალურ რიცხვს წარმოადგენს;

(გ) ყოველი სავსებით დალაგებული სიმრავლისათვის არსებობს (და ამავე დროს ერთადერთი) მისი იზომორფული ორდინალური რიცხვი.

მათემატიკურ ლიტერატურაში ორდინალები, როგორც წესი, ბერძნული ანბანის პატარა ასოებით აღინიშნება:

$$\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta,$$

ამბობენ, რომ n ორდინალი არის ნატურალური რიცხვი, თუ ყოველ არანულოვან $o \leq n$ ორდინალს უშუალო წინამორბედი გააჩნია.

ამ განსაზღვრიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ თუ n არის ნატურალური რიცხვი და m ორდინალი ნაკლებია n-ზე, მაშინ m-იც არის ნატურალური რიცხვი. გარდა ამისა, თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ $n + 1$ ისევ ნატურალური რიცხვია.

A სიმრავლეს სასრული ეწოდება, თუ იგი რომელიმე ნატურალური რიცხვის ეკვივალენტურია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A უსასრულო სიმრავლეა.

აქ ეკვივალენტობა, რა თქმა უნდა, ურთიერთცალსახა თანადობის არსებობის თვალსაზრისით იგულისხმება (იხ. §5).

როგორც შესავალში იყო ნათქვამი, სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი აქსიომა უსასრულო სიმრავლის არსებობას იძლევა. წმინდა ლოგიკური თვალსაზრისით კი ეს იგივეა, რომ ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის არსებობა მივიღოთ. უკანასკნელი სიმრავლე ყველა სასრულ ორდინალთა სიმრავლეა და, მაშასადამე, ასევე ორდინალურ რიცხვს (ორდინალს) წარმოადგენს. როგორც ვიცით, იგი ჩვეულებრივ, **N** სიმბოლოთი აღინიშნება (უნდა ითქვას, რომ თანამედროვე სიმრავლურ-თეორიულ ლიტერატურაში იგივე სიმრავლეს ხშირად ω სიმბოლოთიც აღნიშნავენ). ადვილად მტკიცდება, რომ **N** მართლაც არ არის სასრული სიმრავლე, ე.ი. წარმოადგენს უსასრულო სიმრაველის მაგალითს (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 3). გარდა ამისა, **N** არის უმცირესი ზღვარითი ორდინალი.

მათემატიკური ინდუქციის საყოველთაოდ ცნობილი პრინციპი, რომელიც **N**-ის ელემენტების მიმართ გამოიყენება, შეიძლება განვიხილოთ როგორც ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის კერძო (მაგრამ ძალზე მნიშვნელოვანი) შემთხვევა. უადგილო არ იქნება გავიხსენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის ზუსტი ფორმულირება.

ვთქვათ, მოცემულია ნატურალური რიცხვების რაიმე $S(\cdot)$ თვისება, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$S(0)$ ჭეშმარიტია და, როგორიც არ უნდა იყოს $n \in N$, თუ $S(n)$ შესრულებულია, მაშინ $S(n+1)$-ც შესრულებულია.

ასეთ შემთხვევაში $S(\cdot)$ თვისება ჭეშმარიტია ყველა n ნატურალური რიცხვისათვის.

გამოვიყვანოთ ეს პრინციპი ტრანსფინიტური ინდუქციის ზემოთ მოყვანილი პრინციპიდან. ფაქტობრივად, უნდა ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნულ პირობებში ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი $S'(n)$ წინადადება:

$$(\forall k \leq n)S(k).$$

სრულიად ცხადია, რომ $S'(n+1)$ წინადადება ეკვივალენტურია $S'(n)$ & $S(n+1)$ წინადადებისა. ადვილად შეიძლება შემოწმდეს ისიც, რომ $S'(\cdot)$ წინადადებისათვის შესრულებულია ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის წანამძღვრები. მართლაც, აქ $(E,\leq)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლის როლში გამოდის N სიმრავლე. $S'(0)$ წინადადება ჭეშმარიტია, რადგან იგი ემთხვევა $S(0)$-ს, რომელიც ჭეშმარიტია პირობის თანახმად. ახლა დავუშვათ, რომ $n \in N$ და $S'(m)$ ჭეშმარიტია ყველა $m < n$ ნატურალური რიცხვისათვის. დავრწმუნდეთ, რომ მაშინ $S'(n)$ აგრეთვე ჭეშმარიტია. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა n არ უდრის 0-ს. ამ შემთხვევაში გვაქვს $n = m + 1$ და $S'(m)$ ჭეშმარიტია. კერძოდ, მართებულია $S(m)$ და, პირობის თანახმად, მასთან ერთად სრულდება $S(m + 1)$. თავის მხრივ, ეს იმას ნიშნავს, რომ შესრულებულია $S'(m + 1)$ ანუ $S'(n)$. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $S'(n)$ (და, მაშასადამე, $S(n)$) მართებულია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის.

შესაბამისად, ჩვენ შეგვეიძლია ჩამოვაყალიბოთ ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლისათვის, ე.წ. ჩვეულებრივი მათემატიკური რეკურსიის მეთოდი (უფრო სწორად კი — მათემატიკური რეკურსიის მეთოდის ერთ-ერთი ფორმა).

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს u საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული T(u) ტერმი და ფიქსირებულია რაიმე d ელემენტი. მაშინ არსებობს ერთადერთი D სიმრავლე და ერთადერთი h $N \to D$ სიურიექცია ისეთი, რომ $h(0) = d$ და $h(n+1) = T(h(n))$ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის.

მათემატიკური რეკურსიის ახლახან ჩამოყალიბებული მეთოდის საფუძველზე შეიძლება გამოვიყვანოთ ამ მეთოდის სხვა ფორმებიც. მაგალითად, ოდნავ სხვანაირი (პრაქტიკაში უფრო მიღებული) მათემატიკური რეკურსიის ფორმა მოყვანილია წინამდებარე პარაგრაფის სავარჯიშო 4-ში.

შემდეგ პარაგრაფში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ცერმელოს თეორემას ნებისმიერი სიმრავლის სავსებით დალაგების შესაძლებლობის შესახებ. ამ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ფ. ჰარტოგსის (F. Hartogs) ერთი მეტად საყურადღებო დებულება, რომელიც **ZF** თეორიის ფარგლებში დგინდება.

ლემა 3 (ჰარტოგსი). ყოველი A სიმრავლისათვის მოიძებნება o ორდინალი ისეთი, რომ არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია o-დან A-ში.

დამტკიცება. განვიხილოთ ყველა იმ $(B,\leq)$ წყვილთა T(A) სიმრავლე, რომელთათვისაც $B \subset A$ და $\leq$ წარმოადგენს B-ზე მოცემულ სავსებით დალაგების დამოკიდებულებას. ადვილად

მოწმდება, რომ T(A) სიმრავლე არსებობს **ZF** თეორიის ჩარჩოებში (შეამოწმეთ).

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ყოველი $(B,\leq) \in T(A)$ წყვილი რომელიღაც ორდინალის იზომორფულია, თანაც ეს ორდინალი ერთადერთია. ფრენკელის აქსიომათა სქემიდან (იხ. §0) გამომდინარეობს, რომ არსებობს ყველა იმ ორდინალურ რიცხვთა O(A) სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული ერთი მაინც $(B,\leq)$ სახის წყვილის იზომორფულია, როცა $(B,\leq)$ გაირბენს მთელ T(A) სიმრავლეს. ამასთან ცხადია, თუ რომელიმე ორდინალი O(A)-ს ეკუთვნის, მაშინ მასზე ნაკლები ყველა ორდინალიც O(A)-ს ეკუთვნის, რაც იმას ნიშნავს, რომ თავად O(A) სიმრავლე ორდინალს წარმოადგენს. სიმარტივისათვის ეს ბოლო ორდინალი o სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ახლა დავუშვათ, რომ o ორდინალი რაიმე f ინიექციური ფუნქციის მეშვეობით A-ში გადაისახება. მაშინ მივიღებთ

$$B = \{f(o') : o' \in o\} \subset A$$

სიმრავლეს მასზე მოცემული $\leq$ სავსებით დალაგების დამოკიდებულებით, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით:

$$f(o') \leq f(o'') \Leftrightarrow o' \subset o'' \qquad (o' \in o, o'' \in o).$$

ამ განსაზღვრის თანახმად, მიღებული $(B,\leq)$ წყვილი o ორდინალური რიცხვის იზომორფულია. მაშასადამე, o ეკუთვნის O(A)-ს, ანუ $o \in o$, რაც წინააღმდეგობას იძლევა (ორდინალთა ზემოთ მითითებული ერთ-ერთი თვისების გამო). ამიტომ ჩვენი დაშვება არასწორია და, ამრიგად, o საძიებელი ორდინალია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ახლახან განხილულ O(A) ორდინალურ რიცხვს A სიმრავლის შესაბამისი ჰარტოგსის ორდინალი ეწოდება. ლემა 3-ის ძალით შეგვიძლია

დავასკვნათ, რომ O(A) არის უმცირესი ორდინალური რიცხვი, რომელიც ინიექციურად ვერ გადაისახება მოცემულ A სიმრავლეში. კერძოდ, O(N) ჰარტოგსის ორდინალი არათვლად სიმრავლეს წარმოადგენს.

ამ პარაგრაფის ბოლო ნაწილში გვინდა მკითხველს გავაცნოთ ფონ ნეიმანის მიერ ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდით აგებული სიმრავლეთა V ერთობლიობა (უფრო სწორად, სიმრავლეთა V კლასი, რომელიც თავად არ წარმოადგენს სიმრავლეს). ამ კლასს ჰქვია ფონ ნეიმანის უნივერსუმი, ხოლო მის ელემენტებს ძალზე ხშირად კარგად დაფუძნებულ სიმრავლეებს (well-founded sets) უწოდებენ. შემდგომში დავინახავთ, რომ V სავსებით შეიძლება გამოდგეს **ZFC** თეორიის ერთ-ერთ ბუნებრივ მოდელად (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 9).

ფონ ნეიმანის უნივერსუმის აგების სქემა ძალზე გონებამახვილურია. სახელდობრ, იგი შემდეგნაირად გამოიყურება. ტრანსფინიტური რეკურსიით თანმიმდევრულად ვსაზღვრავთ V_α სიმრავლეებს, სადაც α ნებისმიერი ორდინალია.

პირველ რიგში, გვაქვს:

$$V_0 = \varnothing,$$

ე.ი. საწყის საფეხურზე ვიღებთ ცარიელ სიმრავლეს.

შემდეგ გვაქვს:

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha),$$

სადაც $P(V_\alpha)$ აღნიშნავს უკვე აგებული V_α სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს.

აგრეთვე გვაქვს:

$$V_\alpha = \cup\{V_\beta \quad \beta < \alpha\},$$

სადაც α ნებისმიერი ზღვარითი ორდინალია.

სრულიად ცხადია, რომ ჩამოთვლილი პირობები (ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის მეშვეობით) ყოველი α ორდინალური რიცხვისათვის კორექტულად და ცალსახად განსაზღვრავს შესაბამის V_α სიმრავლეს.

დაბოლოს, შემოგვაქვს სიმბოლური აღნიშვნა:

$$V = \cup\{V_\alpha \quad \alpha \text{ ორდინალია}\}.$$

ეს აღნიშვნა სიმბოლურია სწორედ იმიტომ, რომ ყველა ორდინალთა ერთობლიობა არ არის სიმრავლე (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 7) და, მაშასადამე, აქ არ შეიძლება ლაპარაკი სიმრავლეთა ოჯახის გაერთიანებაზე. მომავალში ჩვენ უბრალოდ ვიგულისხმებთ, რომ რაიმე სიმრავლე ეკუთვნის V კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი რომელიმე V_α სიმრავლეს ეკუთვნის.

ყოველი $x \in V$ სიმრავლისათვის განისაზღვრება მისი $r(x)$ რანგი ამ V უნივერსუმში. სახელდობრ, $r(x)$ არის უმცირესი α ისეთი, რომ $x \in V_{\alpha+1}$. ამით ფონ ნეიმანის უნივერსუმის ელემენტებს შორის შემოტანილია გარკვეული იერარქია (მათი რანგების მიხედვით). თავის მხრივ, ეს იერარქია გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავადგინოთ V უნივერსუმში შემავალი ელემენტების მთელი რიგი მნიშვნელოვანი თვისებებისა (იხ. ქვემოთ ამ პარაგრაფის სავარჯიშოები).

თანამედროვე სიმრავლეთა აქსიომატურ თეორიაში, ფონ ნეიმანის უნივერსუმიდან გამომდინარე, აგებენ მის კონკრეტულ ქვეუნივერსუმებს იმ მიზნით, რომ დაამტკიცონ სხვადასხვა ტიპის სიმრავლურ-თეორიული ჰიპოთეზების არაწინააღმდეგობრიობა ან დამოუკიდებლობა. ასეთი ქვეუნივერსუმის კლასიკურ მაგალითს ე.წ. გიოდელის უნივერსუმი წარმოადგენს, რომელშიც სამართლიანია განზოგადებული კონტინუუმის ჰიპოთეზა. ამრიგად, გიოდელის უნივერსუმი გვევლინება როგორც ერთ-ერთი მოდელი ამ ჰიპოთეზისათვის (იხ. კომენტარი 23).

პარაგრაფის ბოლოს კიდევ ერთხელ გვინდა ხაზი გავუსვათ შემდეგ მნიშვნელოვან გარემოებას: აქ მოყვანილი მსჯელობები და კონსტრუქციები ეფექტურია იმ თვალსაზრისით, რომ ისინი არ ეყრდნობიან ამორჩევის აქსიომას (ან მის რომელიმე ლოგიკურ ეკვივალენტს ZF თეორიის შიგნით). სულ სხვა სურათი გვექნება შემდეგ პარაგრაფში, სადაც ცერმელოს აქსიომა ან მისი ეკვივალენტები არსებითად იქნება გამოყენებული შესაბამის სიმრავლურ-თეორიულ მსჯელობებსა და კონსტრუქციებში. მკითხველი ნათლად დაინახავს, რომ ამის ხარჯზე შესაძლებელი ხდება გაცილებით უფრო ძლიერი შედეგების მიღება.

§6-ის სავარჯიშოები

1. განვიხილოთ ორდინალთა ნებისმიერი O სიმრავლე და მასში განვსაზღვროთ S(o,o′):

$$o \in O \;\&\; o' \in O \;\&\; (o = o' \;\vee\; o \in o')$$

ბინარული დამოკიდებულება. შეამოწმეთ, რომ S(o,o′) დამოკიდებულება O-ს სავსებით დალაგებულ სიმრავლედ გადააქცევს (რომელსაც აქვს (O,⊂) წყვილის სახე).

გამოიყვანეთ ამ ფაქტიდან, რომ ორდინალთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება კვლავ ორდინალს წარმოადგენს.

2. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი სასრული წრფივად დალაგებული (E,≤) სიმრავლე იზომორფულია {1,2,...,n} ტიპის სიმრავლისა (რომელიღაც ნატურალური n-სათვის) და, მაშასადამე, (E,≤) სავსებით დალაგებულია.

DC პრინციპის გამოყენებით აჩვენეთ აგრეთვე, რომ წრფივად დალაგებული (E,≤) სიმრავლისათვის შემდეგი ორი დებულება ლოგიკურად ეკვივალენტურია:

(ა) $(E, \leq)$ სიმრავლე არ არის სავსებით დალაგებული;

(ბ) $(E,\leq)$ სიმრავლეში არსებობს ელემენტთა მკაცრად კლებადი უსასრულო მიმდევრობა.

3. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ორი ნატურალური რიცხვი ერთმანეთის ეკვივალენტურია (მათი სიმძლავრის თვალსაზრისით) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ერთმანეთის ტოლია. აქედან გამომდინარე აჩვენეთ, რომ N სიმრავლე უსასრულოა. (გამოიყენეთ ბანახის თეორემა ორი ინიექციის შესახებ და ის ფაქტი, რომ თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ $n + 1$ აგრეთვე ნატურალური რიცხვია.)

4. დაასაბუთეთ ჩვეულებრივი მათემატიკური რეკურსიის მეთოდის იმ ფორმის მართებულობა, რომელიც წინამდებარე პარაგრაფშია მოყვანილი.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე A სიმრავლე, მისი a ელემენტი და $g : N \times A \to A$ გადასახვა. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს და თანაც ერთადერთი $f \quad N \to A$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $f(0) = a$ და რომელიც ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის აკმაყოფილებს

$$f(n + 1) = g(n,f(n))$$

ტოლობას (ეს არის მათემატიკური რეკურსიის კერძო, მაგრამ საკმაოდ გავრცელებული ფორმა).

5. შეამოწმეთ, რომ ნებისმიერი o ორდინალისათვის შემდეგი ორი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) o არის თვლადი სიმრავლე;

(ბ) $o \in O(N)$.

6. ამბობენ, რომ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე აკმაყოფილებს მინიმალობის პირობას, თუ მისი ყოველი

არაცარიელი ქვესიმრავლე შეიცავს ერთ მინიმალურ ელემენტს მაინც.

აჩვენეთ, რომ შესაძლებელია ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპისა და ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის ბუნებრივი განზოგადება ყველა იმ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეებისათვის, რომლებიც მინიმალობის პირობას აკმაყოფილებენ.

7. ჰარტოგსის ლემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ყველა ორდინალთა სიმრავლე.

ამ ფაქტთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 24.

8*. **ZF** თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ არსებობს **R** ნამდვილი ღერძის $\{L_i \quad i \in I\}$ დაყოფა, რომლის ინდექსთა I სიმრავლე O(**N**) ორდინალის ეკვივალენტურია. (გამოიყენეთ კანტორის თეორემა იმის შესახებ, რომ **Q** რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე უნივერსალურია ყველა თვლად წრფივად დალაგებულ სიმრავლეთა კლასისათვის.) აღნიშნული დაყოფის არსებობიდან გამომდინარე, აჩვენეთ

$$\mathrm{card}(P(O(\mathbf{N}))) \leq \mathrm{card}(P(\mathbf{R}))$$

უტოლობის სამართლიანობა (იმავე **ZF** თეორიის შიგნით).

გარდა ამისა, კვლავ **ZF** თეორიის ფარგლებში დაამტკიცეთ, რომ **R** რიცხვითი ღერძის ბულეანი არ წარმოიდგინება როგორც თვლადი სიმრავლეების თვლადი ოჯახის გაერთიანება. შეადარეთ ეს ფაქტი **ZF** თეორიის სხვა ფაქტს, რომლის თანახმადაც **R** არ წარმოიდგინება სასრული სიმრაველეების თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით (იხ. §5-ის სავარჯიშო 6 და კომენტარი 21).

მე-8 სავარჯიშოსთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 25.

9*. ყოველი α ორდინალისათვის აჩვენეთ, რომ იგი ეკუთვნის ფონ ნეიმანის V უნივერსუმს და

$$r(\alpha) = \alpha,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha \in V_{\alpha+1}, \quad \alpha \subset V_{\alpha}.$$

აჩვენეთ აგრეთვე, რომ ყველა V_{α} სიმრავლე ტრანზიტულია და $V_{\alpha} \subset V_{\beta}$, როცა $\alpha < \beta$. აქედან გააკეთეთ დასკვნა, რომ ფონ ნეიმანის V უნივერსუმი არის სიმრავლეთა ტრანზიტული კლასი.

ვთქვათ, x ნებისმიერი ელემენტია ფონ ნეიმანის V უნივერსუმიდან. დაამტკიცეთ, რომ

$$r(x) = \sup\{r(y) + 1 : y \in x\}.$$

კერძოდ, თუ $y \in x$, მაშინ $r(y) < r(x)$. დაადგინეთ, რომ ყოველი α ორდინალისათვის მართებულია

$$V_{\alpha} = \{x \in V : r(x) < \alpha\}$$

ტოლობა.

თანმიმდევრულად შეამოწმეთ, რომ იმავე V უნივერსუმში შესრულებულია **ZFC** თეორიის ყველა აქსიომა (იხ. §0) და, მაშასადამე, $\langle V, \in \rangle$ წარმოადგენს აღნიშნული თეორიის ერთ-ერთ მოდელს (აქ კუთვნილების $\in$ დამოკიდებულება განიხილება მხოლოდ V-ს ელემენტებს შორის).

10*. ნებისმიერი X სიმრავლისათვის რეკურსიის მეთოდით განვსაზღვროთ სიმრავლეთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$X_0 = X, \quad X_{n+1} = \cup\{Y : Y \in X_n\}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$tr(X) = \cup\{X_n : n \in N\}.$$

აჩვენეთ, რომ $tr(X)$ არის უმცირესი (ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ) ტრანზიტული სიმრავლე, რომელიც X-ს შეიცავს. ამის გამო, $tr(X)$ სიმრავლეს ხშირად X-ის ტრანზიტულ ჩაკეტვას უწოდებენ.

რეგულარობის (ანუ ფუნდირების) აქსიომა არის სიმრავლეთა თეორიის შემდეგი წინადადება:

$$(\forall X)(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists Y \in X)(X \cap Y = \varnothing)).$$

იგი შემოტანილი იყო ფონ ნეიმანის მიერ და ჩვეულებრივ **AF** სიმბოლოთი აღინიშნება (Axiom of Foundation).

ZF & DC თეორიის შიგნით დაამტკიცეთ, რომ ეკვივალენტურია შემდეგი ორი წინადადება:

(ა) რეგულარობის აქსიომა;

(ბ) არ არსებობს სიმრავლეთა $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ უსასრულო მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$X_2 \in X_1, X_3 \in X_2, \ldots, X_{n+1} \in X_n, \ldots$$

დამოკიდებულებებს.

კერძოდ, **AF** აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი X სიმრავლისათვის მართებულია $X \notin X$ დამოკიდებულება (ამასთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 6).

დავუშვათ, რომ **AF** შესრულებულია და განვიხილოთ სიმრავლეთა ნებისმიერი არაცარიელი D კლასი. აჩვენეთ, რომ არსებობს D-ს ერთი მაინც d ელემენტი, რომლისთვისაც $d \cap D = \varnothing$.

ამისათვის დააფიქსირეთ $z \in D$. თუ $z \cap D = \varnothing$, მაშინ აიღეთ $d = z$. თუ $z \cap D$ სიმრავლე არაცარიელია, განიხილეთ $x = tr(z) \cap D$ სიმრავლე, რომელიც აგრეთვე არაცარიელია. **AF**-ის თანახმად, მოიძებნება ისეთი $y \in x$, რომ $y \cap x = \varnothing$. ცხადია, $y \in D$. აღნიშნეთ $d = y$ და შეამოწმეთ, რომ $d \cap D = \varnothing$.

ვთქვათ, $\dot{T}$ არის სიმრავლეთა რაიმე კლასი. ამბობენ, რომ ამ კლასისათვის მართებულია $\in$-ინდუქციის პრინციპი, თუ **x** საგნობრივი ცვლადის შემცველი ნებისმიერი $S(x)$ ფორმულისათვის გვაქვს:

$$\text{თუ } (\forall x \in T)((\forall y)(y \in x \Rightarrow S(y)) \Rightarrow S(x)), \text{ მაშინ } (\forall x \in T)S(x).$$

შეამოწმეთ, რომ $\in$-ინდუქციის პრინციპი მართებულია ფონ ნეიმანის უნივერსუმისათვის.

უფრო ზუსტად, **ZF** თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ ერთმანეთის ეკვივალენტურია შემდეგი სამი წინადადება:

(i) რეგულარობის აქსიომა;

(ii) $\in$-ინდუქციის პრინციპი მართებულია სიმრავლეთა ნებისმიერი ტრანზიტული კლასისათვის;

(iii) ყოველი სიმრავლე ეკუთვნის ფონ ნეიმანის უნივერსუმს.

(i) $\Rightarrow$ (ii) იმპლიკაციის დასამტკიცებლად დაუშვით **AF**-ის სამართლიანობა და განიხილეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი ტრანზიტული T კლასი, რომლისთვისაც

$$(\forall x \in T)((\forall y)(y \in x \Rightarrow S(y)) \Rightarrow S(x)).$$

შემოიღეთ $D = \{x : x \in T \; \& \; \neg S(x)\}$ კლასი და აჩვენეთ, რომ იგი ცარიელია. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოიძებნება ისეთი $d \in D$ ელემენტი, რომლისთვისაც $d \cap D = \varnothing$. შეამოწმეთ, რომ სრულდება $(\forall y \in d)S(y)$. მაშასადამე, უნდა იყოს მართებული $S(d)$-ც, რაც $d \in D$ დამოკიდებულებასთან აშკარა წინააღმდეგობას იძლევა.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) იმპლიკაციის დასამტკიცებლად დაუშვით $\in$-ინდუქციის პრინციპის მართებულობა ყველა სიმრავლეთა კლასისათვის (რომელიც ავტომატურად ტრანზიტულია) და S(x)-ის როლში აიღეთ $x \in V$ ფორმულა, სადაც V ფონ ნეიმანის უნივერსუმია.

დაბოლოს, (iii) $\Rightarrow$ (i) იმპლიკაციის დასამტკიცებლად დაუშვით, რომ ყოველი სიმრაველე ეკუთვნის ფონ ნეიმანის V უნივერსუმს და განიხილეთ ნებისმიერი არაცარიელი x სიმრაველე. ამ x სიმრავლის ელემენტებს შორის შეარჩიეთ ისეთი y ელემენტი, რომლის რანგი უმცირესია. შეამოწმეთ, რომ $x \cap y = \varnothing$.

11. განვიხილოთ ფონ ნეიმანის უნივერსუმის ყველა ის ელემენტი, რომლის რანგი სასრული ორდინალია, ე.ი. განვიხილოთ V_ω სიმრავლის ელემენტები.

შეამოწმეთ, რომ $(V_\omega, \in)$ ქვეუნივერსუმისათვის სრულდება **ZFC** თეორიის ყველა აქსიომა, გარდა უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომისა.

აქედან გააკეთეთ დასკვნა, რომ უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომა ლოგიკურად არ გამომდინარეობს **ZFC** თეორიის დანარჩენი აქსიომებიდან.

12. ვთქვათ, x არის V ფონ ნეიმანის უნივერსუმის რომელიმე ელემენტი. $\in$-ინდუქციის პრინციპზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი წინადადება x-ის შესახებ ეკვივალენტურია:

(ა) x წარმოადგენს ორდინალს ფონ ნეიმანის აზრით;

(ბ) x არის ტრანზიტული სიმრავლე და მისი ყოველი ელემენტი აგრეთვე ტრანზიტული სიმრავლეა.

ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ ფონ ნეიმანის უნივერსუმის ჩარჩოებში ორდინალები შეიძლება განვსაზღვროთ სავსებით დალაგებული სიმრავლის ცნების გამოყენების გარეშე.

13. ∈-ინდუქციის პრინციპიდან გამომდინარე ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ ∈-რეკურსიის პრინციპი.

14. დავუშვათ, რომ შესრულებულია **AF**. განვიხილოთ სიმრავლეთა ორი ტრანზიტული კლასი: $\langle T,\in\rangle$ და $\langle U,\in\rangle$. ვთქვათ, მათ შორის არსებობს ∈-იზომორფიზმი, ე.ი. არსებობს ისეთი F "ბიექცია" T-სი U-ზე, რომ

$$x\in y \Leftrightarrow F(x) \in F(y) \qquad (x\in T,\, y\in T).$$

∈-ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ F არის იგივური "გარდაქმნა", ე.ი. $F(x) = x$ ყოველი $x\in T$ ელემენტისათვის და, მაშასადამე, $T = U$.

კერძოდ, აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი ფაქტი: რეგულარობის აქსიომის დაშვებით, თუ გვაქვს სიმრავლეთა თეორიის (ან მისი რომელიმე ფრაგმენტის) ნებისმიერი ორი ტრანზიტული მოდელი $\langle T,\in\rangle$ და $\langle U,\in\rangle$, სადაც $T \neq U$, მაშინ ეს მოდელები არ არის ერთმანეთის ∈-იზომორფული.

§7. ცერმელოს თეორემა და ცორნის ლემა. მათი ზოგიერთი გამოყენება

ამ პარაგრაფში გავაგრძელებთ დისკუსიას სავსებით დალაგებული სიმრავლეების შესახებ და დავამტკიცებთ ცერმელოს ცნობილ თეორემას, რომლის თანახმად ყოველი სიმრავლე შეიძლება სავსებით იქნეს დალაგებული. როგორც უკვე ითქვა, ამ თეორემას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკის განვითარების ისტორიაში, რადგან მისი დამტკიცების შემდეგ ნათელი გახდა, რომ შესაძლებელია ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპისა და ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის (იხ. წინა პარაგრაფი) გამოყენება ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლისადმი.

თეორემა 1 (ცერმელო). ყოველი X სიმრავლისათვის არსებობს მისი ბიექცია სავსებით დალაგებულ სიმრავლეზე. მაშასადამე, X შეიძლება აგრეთვე განხილულ იქნეს როგორც სავსებით დალაგებული სიმრავლე.

დამტკიცება. ჰარტოგსის ლემის თანახმად (იხ. §6), მოცემული X სიმრავლისათვის მოიძებნება $O(X)$ ორდინალი, რომელიც ვერ გადაისახება X-ში რაიმე ინიექციური ფუნქციის მეშვეობით. შემდეგ, როგორც ვიცით, $O(X)$ ორდინალი არის სავსებით დალაგებული სიმრაელე (ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ). ამიტომ შეგვიძლია ეს ორდინალი ჩავწეროთ $(O(X),\leq)$ წყვილის სახით, სადაც $\leq$ სიმბოლო $O(X)$-ის სავსებით დალაგებას აღნიშნავს. ცერმელოს აქსიომის ძალით, არსებობს g $P(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ ამორჩევის ფუნქცია, ე.ი. გვაქვს $g(Y)\in Y$ ყოველი არაცარიელი $Y\subset X$ სიმრაელისათვის. დავუშვათ, რომ თეორემაში გამოთქმული წინადადება მცდარია, ანუ არ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა X-სა და რაიმე სავსებით დალაგებულ სიმრავლეს შორის. მაშინ ტრანსფინიტური

რეკურსიის მეთოდის მეშვეობით (იხ. §6) განისაზღვრება $f: O(X) \to X$ ინიექციური ფუნქცია, რომელიც

$$f(o) = g(X \setminus \{f(o') : o' < o\}) \quad (o \in O(X))$$

ფორმულით მოიცემა. შევნიშნოთ, რომ f-ის მოყვანილი განსაზღვრა სრულიად კორექტულია, ვინაიდან, ჩვენი დაშვების თანახმად, $\{f(o') \quad o' < o\}$ სიმრავლე არასოდეს არ დაემთხვევა მთელ X-ს. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ წინააღმდეგობას ჰარტოგსის ლემის დებულებასთან, რადგან, როგორც ვიცით, f ინიექციური ფუნქციის არსებობა შეუძლებელია O(X) და X სიმრავლეებისათვის. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ცერმელოს თეორემას.

ფაქტობრივად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ნებისმიერი X სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ $X = \{x(o) \quad o \in O\}$ ინიექციური ოჯახის საშუალებით, სადაც O გარკვეული ორდინალური რიცხვია, რომელიც O(X) ჰარტოგსის ორდინალზე მკაცრად ნაკლებია. სხვა სიტყვებით, X-ის ყველა ელემენტი შეიძლება ურთიერთცალსახად გადავნომროთ იმ ორდინალთა მეშვეობით, რომლებიც გარკვეულ ორდინალზე ნაკლებია (ამასთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 26). ძალზე ხშირად X სიმრავლის ასეთ წარმოდგენას X-ის ყველა ელემენტისაგან შედგენილი ტრანსფინიტური მიმდევრობა ეწოდება.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა **R** სიმრავლე. ახლახან დამტკიცებული თეორემის ძალით, არსებობს ამ სიმრავლის საესებით დალაგება, რომელიც, რასაკვირველია, განსხვავდება **R**-ის ბუნებრივი წრფივი დალაგებისაგან. თავის დროზე (სახელდობრ, 1900 წელს) დიდმა გერმანელმა მათემატიკოსმა დავით ჰილბერტმა (D. Hilbert) დასვა ოცზე მეტი მათემატიკური პრობლემა, რომლებიც უაღრესად მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა მეოცე საუკუნის მათემატიკის განვითარებისათვის. ჰილბერტის პირველი პრობლემა

უშუალოდ ეხებოდა კონტინუუმის ჰიპოთეზასა და R რიცხვითი ღერძის სავსებით დალაგების შესაძლებლობას. როგორც ვხედავთ, ცერმელომ 1904 წელს ამ პრობლემის მეორე ნაწილის ამოხსნა მოგვცა. მაგრამ ეს ამოხსნა არ იყო მთლად დამაკმაყოფილებელი, რადგან შესაბამისი დებულება წარმოადგენდა წმინდა არსებობის თეორემას, რომელიც არ იძლეოდა არავითარ ინფორმაციას R-ის სავსებით დალაგების სტრუქტურის შესახებ. იმდროინდელ მათემატიკოსებში მაშინვე გაჩნდა კითხვა – არის თუ არა შესაძლებელი იგივე რიცხვითი ღერძი (ანუ კონტინუუმი) სავსებით დალაგდეს რაიმე მეტ-ნაკლებად კონსტრუქციული ხერხით. ამ კითხვის უფრო ზუსტი ფორმა შემდეგია: შეიძლება თუ არა ZF თეორიის ჩარჩოებში კონტინუუმის რაიმე სავსებით დალაგების განსაზღვრა? პასუხი დასმულ კითხვაზე უარყოფითია. უფრო მეტიც, ცნობილი ამერიკელი მათემატიკოსის რ. სოლოვეის ერთი შედეგიდან (1970) გამომდინარეობს, რომ შეუძლებელია R-ის სავსებით დალაგება ZF & DC თეორიაშიც. სახელდობრ, სოლოვეიმ ააგო ამ თეორიის ისეთი მოდელი, რომელშიც R-ის ყველა ქვესიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია (წერტილოვანი სიმრავლეების ზომადობის შესახებ უფრო დაწვრილებით წიგნის მეორე ნაწილში გვექნება საუბარი). ვ. სერპინსკის ერთ-ერთი ძველი შედეგის თანახმად, იმავე თეორიაში სამართლიანია შემდეგი იმპლიკაცია: თუ არსებობს კონტინუუმის სავსებით დალაგება, მაშინ არსებობს ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლეც. მაშასადამე, ამ ორი შესანიშნავი შედეგის კომბინაცია გვაძლევს, რომ ZF & DC თეორიის ფარგლებში შეუძლებელია კონტინუუმის სავსებით დალაგება. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს დასკვნა, რომ, მითუმეტეს უიმედოა R კონტინუუმის სავსებით დალაგების რაიმე ცდა მხოლოდ კონსტრუქციული მეთოდების გამოყენებით.

თეორემა 2 (კურატოვსკი-ჰაუსდორფი). ყოველ $(E,\leq)$ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში არსებობს

მაქსიმალური (ჩართვის დამოკიდებულების თვალსაზრისით) წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე.

დამტკიცება. ცერმელოს თეორემის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E-ს ყველა ელემენტი გადანომრილია რომელიღაც O ორდინალის ელემენტების მეშვეობით, ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ $E = \{e(o) \quad o\in O\}$. ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის გამოყენებით განვსაზღვროთ E-ს წრფივად დალაგებულ ქვესიმრაელეთა $\{X(o) : o\in O\}$ ზრდადი (ჩართვის მიმართ) ოჯახი. ვთქვათ, უკვე განსაზღვრული გვაქვს $\{X(o) \quad o\in o'\}$ ნაწილობრივი ოჯახი, სადაც $o'\in O$. განვიხილოთ $X = \cup\{X(o) \quad o\in o'\}$ სიმრავლე და $e(o')$ ელემენტი. შესაძლებელია მხოლოდ ორი შემთხვევა.

(ა) $e(o')$ ელემენტი სადარია X-ის ყველა ელემენტთან. ამ შემთხვევაში ავიღოთ $X(o') = X \cup \{e(o')\}$.

(ბ) $e(o')$ ელემენტი არ არის სადარი X-ის რომელიღაც ელემენტთან. ამ შემთხვევაში ავიღოთ $X(o') = X$.

ამ პროცესით ჩვენ მივიღებთ E-ს წრფივად დალაგებულ ქვესიმრაელეთა ზრდად $\{X(o) \quad o\in O\}$ ოჯახს. საბოლოოდ აღვნიშნოთ $Y = \cup\{X(o) \quad o\in O\}$ და დავრწმუნდეთ იმაში, რომ Y არის E-ს მაქსიმალური წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე. ის ფაქტი, რომ Y წრფივად დალაგებულია პირდაპირ გამომდინარეობს იმ გარემოებიდან, რომ ეს სიმრავლე წრფივად დალაგებულ სიმრავლეთა ზრდადი ოჯახის გაერთიანებას წარმოადგენს. თუკი დავუშვებთ, რომ იგივე Y არ არის მაქსიმალური, მაშინ მოიძებნება $e(o')\in E$ ელემენტი, რომელიც Y-ს არ ეკუთვნის და რომელიც სადარია Y-ის ყველა ელემენტთან. მით უმეტეს $e(o')$ სადარი იქნება $X = \cup\{X(o) \quad o\in o'\}$ სიმრავლის ყველა ელემენტთან. მაგრამ ჩვენი კონსტრუქციის (ა) პუნქტის მიხედვით გამოდის, რომ მაშინ $e(o')$ უნდა ეკუთვნოდეს $X(o')$-ს, საიდანაც ვღებულობთ $e(o')\in Y$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

ამრიგად, მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს კურატოვსკი-ჰაუსდორფის თეორემას.

ნაწილობრივად დალაგებულ $(E,\leq)$ სიმრავლეს ინდუქციური ეწოდება, თუ მისი ყოველი წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე ზემოდანაა შემოსაზღვრული, ე.ი. ყოველ ასეთ ქვესიმრავლეს აქვს ერთი მაინც მაჟორანტი.

ინდუქციური სიმრავლეების შესახებ ცნობილია შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება, რომელსაც ცორნის ლემა ეწოდება.

თეორემა 3 (ცორნი). ნებისმიერ ინდუქციურ $(E,\leq)$ სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც მაქსიმალური ელემენტი, ე.ი. ისეთი e ელემენტი, რომ $e < x$ დამოკიდებულება მცდარია ყველა $x \in E$ ელემენტისათვის.

დამტკიცება. ეს დებულება უშუალოდ მიიღება თეორემა 2-დან. მართლაც, აღნიშნული თეორემის ძალით, მოცემულ $(E,\leq)$ სიმრავლეში არსებობს მაქსიმალური წრფივად დალაგებული Y ქვესიმრავლე. პირობის თანახმად, Y-ს აქვს e მაჟორანტი. ვაჩვენოთ, რომ სწორედ e არის E-ს მაქსიმალური ელემენტი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. მოიძებნება $x \in E$, რომლისთვისაც $e < x$. მაშინ ყოველი $y \in Y$ ელემენტისათვის გვექნება $y \leq e < x$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ x არ ეკუთვნის Y-ს და x სადარია Y-ის ყველა ელემენტთან. მაშასადამე, $Y \cup \{x\}$ არის E-ს წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე, რომელიც საკუთრივ შეიცავს Y-ს. ეს კი ეწინააღმდეგება Y-ის მაქსიმალობის თვისებას. ამით ცორნის ლემა დამტკიცებულია.

სინამდვილეში ამორჩევის აქსიომა, ცერმელოს თეორემა, კურატოვსკი-ჰაუსდორფის თეორემა და ცორნის ლემა, **ZF** თეორიის თვალსაზრისით, ერთმანეთის ეკვივალენტური დებულებებია (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 1). არსებობს

კიდევ მრავალი სხვა სიმრავლურ-თეორიული წინადადება, რომელიც ამორჩევის აქსიომის ეკვივალენტურია (იმავე ZF თეორიის შიგნით).

ცერმელოს თეორემა საშუალებას გვაძლევს ერთმანეთს რაოდენობრივად შევადაროთ ნებისმიერი ორი სიმრავლე. უფრო ზუსტად, ეს თეორემა გამორიცხავს A და B ორი ისეთი სიმრავლის არსებობას, რომელთაგან ვერც ერთი ვერ გადაისახება მეორეში რაიმე ინიექციური ფუნქციის საშუალებით. მართლაც, ცერმელოს თეორემის ძალით, A და B შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სავსებით დალაგებული სიმრავლეები. მაგრამ ჩვენ ვიცით (იხ. §6), რომ მაშინ ადგილი აქვს შემდეგი სამი წინადადებიდან ერთ-ერთს მაინც:

(ა) A იზომორფულია B-სი;

(ბ) A იზომორფულია B-ს რომელიღაც საწყისი ინტერვალის;

(გ) B იზომორფულია A-ს რომელიღაც საწყისი ინტერვალის.

მაშასადამე, ან A~B, ან A ინიექციური ფუნქციით გადაისახება B-ში, ან B ინიექციური ფუნქციით გადაისახება A-ში.

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულების მართებულობა:

თეორემა 4. ნებისმიერი ორი სიმრავლე შედარებადია მათი სიმძლავრეების თვალსაზრისით.

საინტერესოა იმის აღნიშვნაც, რომ თეორემა 4-ში გამოთქმული წინადადება თავად წარმოადგენს ამორჩევის აქსიომის ერთ-ერთ ეკვივალენტს (რასაკვირველია, ZF თეორიის ჩარჩოებში).

წინა პარაგრაფებში ჩვენ ვსაუბრობდით სიმრავლის სიმძლავრის ცნებაზე, მაგრამ არ მოგვიყვანია ამ ცნების ზუსტი განმარტება (განსაზღვრა). ახლა უკვე შეგვიძლია ამის

გაკეთება, თანაც ყოველგვარი სირთულის გარეშე. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე A სიმრავლე. ცერმელოს თეორემის თანახმად, მოიძებნება ორდინალური რიცხვი, რომელიც ამ A სიმრავლის ეკვივალენტურია. მაგრამ, საზოგადოდ, ასეთი ორდინალური რიცხვი ბევრია. ჰარტოგსის ლემიდან გამომდინარეობს, რომ ისინი ქმნიან სიმრავლეს. ამ არაცარიელ სიმრავლეში არსებობს უმცირესი ორდინალი (რადგან, როგორც ვიცით, ორდინალთა ნებისმიერ სიმრავლეზე გვაქვს კანონიკური სავსებით დალაგება). ამრიგად, ყოველ A სიმრავლეს შეგვიძლია ცალსახად შევუსაბამოთ აღნიშნული უმცირესი ორდინალი, რომელსაც A-ს სიმძლავრე ეწოდება. ძალიან ხშირად იგივე ორდინალს A-ს კარდინალურ რიცხვს (ანუ, მოკლედ, A-ს კარდინალს) უწოდებენ. იგი card(A) სიმბოლოთი აღინიშნება. ამ კარდინალის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მისი ყოველი საწყისი ქვეინტერვალის სიმძლავრე მკაცრად ნაკლებია A-ს სიმძლავრეზე.

კონტინუუმის სიმძლავრე აღინიშნება **c** სიმბოლოთი, ე.ი. გვაქვს $\mathbf{c} = \mathrm{card}(\mathbf{R})$ ტოლობა.

ვინაიდან ორდინალთა ნებისმიერი სიმრავლე სავსებით დალაგებულია ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ, ვღებულობთ, რომ კარდინალურ რიცხვთა ნებისმიერი სიმრავლე აგრეთვე სავსებით დალაგებულია ინდუცირებული დალაგების დამოკიდებულების მიმართ.

თუ **a** და **b** ორი კარდინალია, მაშინ განვსაზღვროთ მათი $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ჯამი როგორც $(\mathbf{a} \times \{0\}) \cup (\mathbf{b} \times \{1\})$ სიმრავლის კარდინალი, ხოლო მათი **ab** ნამრავლი განვსაზღვროთ როგორც $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ დეკარტული ნამრავლის კარდინალი. ადვილად მოწმდება შემდეგი ტოლობები:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \quad \mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

კარდინალური რიცხვების არითმეტიკის საკითხებს მოგვიანებით უფრო დეტალურად შევისწავლით (იხ. ოდნავ ქვემოთ თეორემა 5 და ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 9).

მაგალითი 2. განვიხილოთ ყველა ნატურალურ რიცხვთა **N** სიმრავლე. თავად ეს სიმრავლე უსასრულოა, მაგრამ მისი ყოველი საწყისი ინტერვალი სასრულია. აქედან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ **N**-ის სიმძლავრე თვით **N**-ს ემთხვევა. მას ხშირად ω (ან ω_0) სიმბოლოთიც აღნიშნავენ.

ახლა განვიხილოთ O(**N**) სიმრავლე (ანუ **N**-ის შესაბამისი ჰარტოგსის ორდინალური რიცხვი). ეს არის არათვლადი ორდინალი, რომლის ყოველი საწყისი ინტერვალი თვლადია (იხ. §6). აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ O(**N**)-ის სიმძლავრე თავად O(**N**)-ია. მას ω_1 სიმბოლოთიც აღნიშნავენ.

მაგალითი 3. გამოვიყენოთ თეორემა 4 იმ კერძო შემთხვევაში, როცა მოცემულია **R** და O(**N**) სიმრავლეები. ამ თეორემის თანახმად, გვაქვს

$$\mathrm{card}(\mathbf{R}) \le \mathrm{card}(O(\mathbf{N})) \quad \text{ან} \quad \mathrm{card}(O(\mathbf{N})) \le \mathrm{card}(\mathbf{R}).$$

როგორც უკვე ვთქვით, O(**N**) ორდინალის ძირითადი თვისების გამო, მისი ნებისმიერი საწყისი ინტერვალი თვლადია. ამიტომ შეუძლებელია სამართლიანი იყოს $\mathrm{card}(\mathbf{R}) < \mathrm{card}(O(\mathbf{N}))$ უტოლობა, რადგან კანტორის თეორემის ძალით **R** სიმრავლე არათვლადია. მაშასადამე, რჩება

$$\mathrm{card}(O(\mathbf{N})) \le \mathrm{card}(\mathbf{R})$$

უტოლობა. დიდი ხნის განმავლობაში ცდილობდნენ ამ უტოლობის დადგენას მხოლოდ **ZF & DC** თეორიის ჩარჩოებში. მაგრამ ყველა ცდა ამ მიმართულებით უშედეგოდ დამთავრდა. საბოლოოდ, ს. შელახმა და ჟ. რაიზონიერმა (J. Raisonnier) 1984 წელს აჩვენეს, რომ იმავე **ZF & DC** თეორიის ფარგლებში ზემოთ აღნიშნული უტოლობიდან

გამომდინარეობს ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლის არსებობა. თუ გავითვალისწინებთ სოლოვეის უკვე მოხსენიებულ შედეგს (იხ. მაგალითი 1), მაშინ ადვილად გავაკეთებთ დასკვნას, რომ $\mathrm{card}(\mathrm{O}(\mathbf{N})) \le \mathrm{card}(\mathbf{R})$ უტოლობა **ZF & DC** თეორიაში ვერ დამტკიცდება. აქვე შევნიშნოთ, რომ განხილული უტოლობის შესაბამისი

$$\mathrm{card}(\mathrm{O}(\mathbf{N})) = \mathrm{card}(\mathbf{R})$$

ტოლობა, ფაქტობრივად, კანტორის მიერ დასმული კონტინუუმის ჰიპოთეზის ერთ-ერთ ფორმას წარმოადგენს. კონტინუუმის ჰიპოთეზისა და მისი ზოგიერთი ეკვივალენტის შესახებ უფრო დაწვრილებით შემდგომში ვისაუბრებთ.

ახლა უკვე შეგვიძლია დავამტკიცოთ გ. ჰესენბერგის (G. Hessenberg) შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება, რომელიც განაზოგადებს კანტორის კლასიკურ თეორემას რიცხვითი ღერძისა და ევკლიდური სიბრტყის ტოლსიმძლავრიანობის შესახებ.

თეორემა 5. ყოველი A უსასრულო სიმრავლისათვის მართებულია $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A \times A)$ ტოლობა.

დამტკიცება. როგორც ვიცით, A უსასრულო სიმრავლე შეიცავს **N**-ის ეკვივალენტურ ქვესიმრავლეს და $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ დეკარტული ნამრავლი ეკვივალენტურია **N**-ის. ამრიგად, შეგვიძლია განვიხილოთ არაცარიელი ნაწილობრივად დალაგებული $(E,\le)$ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია (X,f) წყვილები, სადაც X არის A-ს უსასრულო ქვესიმრავლე, ხოლო f — რაიმე ბიექცია X-დან $X \times X$ დეკარტულ ნამრავლზე. გარდა ამისა, $\le$ ნაწილობრივი დალაგება შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$(X,f) \le (Y,g)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \subset Y$ და g აგრძელებს f-ს.

ადვილად მოწმდება, რომ ეს ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე ინდუქციურია. ცორნის ლემის თანახმად, მას (B,h) მაქსიმალური ელემენტი აქვს. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\mathrm{card}(A) = a$ და $\mathrm{card}(B) = b$. რადგან (B,h) არის E-ს ელემენტი, გვაქვს $b^2 = b$ ტოლობა. ამიტომ საკმარისია დავადგინოთ, რომ $b = a$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. $b < a$. ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$b \leq 2b \leq 3b \leq b^2 = b$$

დამოკიდებულებები, რომლებიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$b = 2b = 3b = b^2.$$

გარდა ამისა, მართებულია $\mathrm{card}(A \setminus B) > b$ უტოლობა, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა

$$a = \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}((A \setminus B) \cup B) = \mathrm{card}(A \setminus B) + \mathrm{card}(B) \leq 2b = b,$$

ჩვენ კი დაშვებული გვაქვს, რომ $b < a$. ამრიგად, შეგვიძლია შევარჩიოთ $C \subset A \setminus B$ სიმრავლე, რომლის სიმძლავრეა იგივე b. ახლა განვიხილოთ $Z = B \cup C$ სიმრავლე. გვაქვს

$$Z \times Z = (B \times B) \cup (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C),$$

საიდანაც ადვილად ვღებულობთ, რომ

$$\mathrm{card}((B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)) = 3b^2 = 3b = b.$$

აღვნიშნოთ h' სიმბოლოთი რომელიმე ბიექცია C სიმრავლიდან $(B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)$ სიმრავლეზე (ასეთი ბიექცია არსებობს, რადგან ამ სიმრავლეთა სიმძლავრეები ერთმანეთის ტოლია). განვიხილოთ h^* ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია Z-ზე და წარმოადგენს h და h' ფუნქციების საერთო გაგრძელებას.

ცხადია, h^* არის ბიექცია Z-სა და $Z \times Z$ შორის და $(B,h) < (Z,h^*)$, ეს კი ეწინააღმდეგება (B,h) წყვილის მაქსიმალობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს მოყვანილ თეორემას.

§7-ის სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ **ZF** თეორიის ჩარჩოებში შემდეგი ოთხი დებულება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:
(ა) ამორჩევის აქსიომა;
(ბ) ნებისმიერი სიმრავლე შეიძლება სავსებით დალაგდეს;
(გ) ყოველ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში არსებობს მაქსიმალური (ჩართვის თვალსაზრისით) წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე;
(დ) ყოველ ინდუქციურ სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც მაქსიმალური ელემენტი.

2. ნაწილობრივად დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლის X ქვესიმრავლეს E-ს კოფინალური ქვესიმრავლე ეწოდება, თუ E-ს ყოველი e ელემენტისათვის მოიძებნება X-ის x ელემენტი ისეთი, რომ $e \leq x$.

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $(E,\leq)$ წრფივად დალაგებული სიმრავლისათვის არსებობს მისი კოფინალური სავსებით დალაგებული ქვესიმრავლე.

გამოიყვანეთ აქედან ცორნის ლემის შემდეგი გაძლიერებული ვერსია: თუ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში ყოველ სავსებით დალაგებულ ქვესიმრავლეს აქვს მაჟორანტი, მაშინ ამ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეს ერთი მაინც მაქსიმალური ელემენტი გააჩნია.

3. მოცემულ $S(\cdot)$ თვისებას სასრული ხასიათის თვისება ეწოდება, თუ ნებისმიერი X სიმრავლისათვის $S(X)$ სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $S(Y)$ სამართლიანია X-ის ყოველი სასრული Y ნაწილისათვის.

შეამოწმეთ, რომ შემდეგი თვისება $S(X)$:

"X არის წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე მოცემულ (E,≤) ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში"

სასრული ხასიათის თვისების ერთ-ერთი მაგალითია. მოიყვანეთ ამ ტიპის სხვა მაგალითებიც.

დაამტკიცეთ აგრეთვე, რომ **ZF** თეორიის ფარგლებში შემდეგი ორი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) ამორჩევის აქსიომა;

(ბ) თუ A არის ნებისმიერი სიმრავლე, S(·) — სასრული ხასიათის თვისება და K(A,S(·)) არის A სიმრავლის S(·) თვისების მქონე ყველა ნაწილის ოჯახი, მაშინ K(A,S(·))-ში არსებობს S(·) თვისების მქონე A-ს მაქსიმალური (ჩართვის თვალსაზრისით) ნაწილი.

4. არაორიენტირებულ გრაფს ბმული ეწოდება, თუ მისი ყოველი ორი წვერო შეერთებულია წიბოებისაგან შედგენილი რომელიმე სასრული ჯაჭვით. ბმულ გრაფს ხე ეწოდება, თუ იგი არ შეიცავს წიბოებისაგან შედგენილ სასრულ კონტურს (ე.ი. ჩაკეტილ ტეხილს).

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ბმული გრაფი შეიცავს მაქსიმალურ (ჩართვის თვალსაზრისით) ხეს. ასეთ ხეს გრაფის ჩონჩხი ეწოდება.

5. დაამტკიცეთ, რომ **ZF** თეორიაში ეკვივალენტურია შემდეგი ორი წინადადება:

(ა) card(O(N)) ≤ card(R);

(ბ) არსებობს R-ის ყველა თელად ნაწილთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ყოველ ასეთ D ნაწილს უთანადებს R\D სიმრავლის გარკვეულ ელემენტს.

6. ჰარტოგსის ლემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ **ZF** თეორიაში ეკვივალენტურია შემდეგი ორი წინადადება:

(ა) ამორჩევის აქსიომა;

(ბ) როგორიც არ უნდა იყოს A და B ორი სიმრავლე, ან A ინიექციური ფუნქციით გადაისახება B-ში, ან B ინიექციური ფუნქციით გადაისახება A-ში.

7. მოცემულია არაცარიელი X სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს მაქსიმალურ (ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ) ელემენტებს. **ZF** თეორიის ფარგლებში აჩვენეთ, რომ X უსასრულო სიმრავლეა. (გამოიყენეთ §2-ის სავარჯიშო 7.)

ამ ფაქტიდან გამომდინარე, დაამტკიცეთ, რომ **ZF** თეორიაში შემდეგი ორი დებულება ეკვივალენტურია:

(ა) Y სიმრავლე უსასრულოა;

(ბ) Y-ის ყველა სასრულ ქვესიმრავლეთა სიმრავლეში (რომელიც ნაწილობრივად დალაგებულია იმავე ჩართვის დამოკიდებულებით) არ არსებობს მაქსიმალური ელემენტი.

8*. **ZF** თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) ამორჩევის აქსიომა;

(ბ) როგორიც არ უნდა იყოს უსასრულო A სიმრავლე, ადგილი აქვს $A \sim (A \times A)$ დამოკიდებულებას.

თეორემა 5-ის ძალით, აქ დამტკიცებას საჭიროებს მხოლოდ (ბ) $\Rightarrow$ (ა) იმპლიკაცია. დაუშვით (ბ) წინადადების მართებულობა, აიღეთ ნებისმიერი უსასრულო A სიმრავლე და განიხილეთ $B = (A \times \{0\}) \cup (O(A) \times \{1\})$ სიმრავლე, რომელიც, ცხადია, აგრეთვე უსასრულოა. ამ უსასრულო B სიმრავლისათვის გამოიყენეთ $B \sim (B \times B)$ დამოკიდებულება. მარტივი მსჯელობის მეშვეობით აქედან მიიღეთ, რომ $B \sim A \times O(A)$ და რომ A ინიექციური ფუნქციით გადაისახება $O(A)$-ში, რაც უშუალოდ (ა)-ს მართებულობას იძლევა.

წინა სავარჯიშოსთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 27.

9. დაამტკიცეთ, რომ თუ a უსასრულო სიმრავლის სიმძლავრეა, ხოლო n — არანულოვანი ნატურალური რიცხვი, მაშინ ადგილი აქვს $a^n = a$ ტოლობას. (გამოიყენეთ ამ

პარაგრაფის თეორემა 5 და მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი n-ის მიმართ). მიიღეთ აქედან, რომ a-ს ელემენტების ყველა სასრულ მიმდევრობათა სიმრავლეს აქვს იგივე a სიმძლავრე, და ისიც, რომ a-ს ყველა სასრულ ნაწილთა სიმრავლის სიმძლავრე იმავე a-ს უდრის.

დაამტკიცეთ $a^a = 2^a$ ტოლობა. გარდა ამისა, აჩვენეთ, რომ §5-ის სავარჯიშო 8-ში მოყვანილი შედეგები ძალაში რჩება ნებისმიერი უსასრულო E სიმრავლისათვის.

შეამოწმეთ, რომ თუ a და b ორი არანულოვანი კარდინალური რიცხვია, რომელთაგან ერთი მაინც უსასრულოა, მაშინ $a + b = ab = \max(a,b)$.

10*. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს $\mathbf{R}^3$ ევკლიდური სიერცის დაფარვა სიბრტყეებით, რომელთა რაოდენობა კონტინუუმის სიმძლავრეზე ნაკლებია.

მოცემულია დადებით რიცხვთა $\{r_i \quad i\in I\}$ ოჯახი, სადაც I კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე სიმრავლეა. წინა ფაქტზე დაყრდნობით და ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის გამოყენებით ააგეთ $\mathbf{R}^3$ სივრცის $\{C_i \quad i\in I\}$ დაყოფა წრეწირებად ისე, რომ ყოველი C_i $(i\in I)$ წრეწირის რადიუსი ტოლი იყოს შესაბამისი r_i რიცხვის.

ცალკე განიხილეთ ის შემთხვევა, როცა ყველა r_i $(i\in I)$ რიცხვი ერთმანეთის ტოლია, და დაასკვენით, რომ არსებობს $\mathbf{R}^3$ სივრცის დაყოფა წყვილ-წყვილად კონგრუენტულ წრეწირებად.

შეადარეთ ეს სავარჯიშო §3-ის სავარჯიშო 8-ში მოყვანილ შედეგს.

§8. ფილტრები და იდეალები სიმრავლის ბულეანში. ულტრაფილტრები და ულტრაიდეალები. სტოუნის თეორემა

ამ პარაგრაფში შევეხებით მოცემული არაცარიელი U საბაზისო სიმრავლის ნაწილთა გარკვეულ ოჯახებს, რომლებსაც არსებითი გამოყენება აქვთ მათემატიკის სხვადასხვა დარგში. უპირველეს ყოვლისა, აქ იგულისხმება იდეალისა და ფილტრის ცნებები, რომლებსაც შემდეგ პარაგრაფებშიც შევხვდებით და უფრო კარგად დავინახავთ მათ მნიშვნელობას.

ვთქვათ, მოცემულია U-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე I ოჯახი. ამბობენ, რომ ეს ოჯახი არის იდეალი P(U) ბულეანში (ან, უბრალოდ, U-ში), თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) $\varnothing$ ეკუთვნის I-ს და U არ ეკუთვნის I-ს;

(ბ) თუ $A \in I$ და $B \in I$, მაშინ $A \cup B \in I$;

(გ) თუ $A \in I$ და $B \subset A$, მაშინ $B \in I$.

ვთქვათ, მოცემულია U-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე F ოჯახი. ამბობენ, რომ ეს ოჯახი არის ფილტრი P(U) ბულეანში (ან, უბრალოდ, U-ში), თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) U ეკუთვნის F-ს და $\varnothing$ არ ეკუთვნის F-ს;

(ბ) თუ $A \in F$ და $B \in F$, მაშინ $A \cap B \in F$;

(გ) თუ $A \in F$ და $A \subset B \subset U$, მაშინ $B \in F$.

ამ განსაზღვრებიდან უშუალოდ ჩანს, რომ იდეალის ცნება ასახავს U-ში მოთავსებული მცირე (პატარა) სიმრავლეების კონცეფციას, ხოლო ფილტრის ცნება, პირიქით, ასახავს U-ს ისეთი ქვესიმრავლეების კონცეფციას, რომელთა დამატებები მცირეა. მართლაც, მარტივად მოწმდება, რომ $I \subset P(U)$ არის იდეალი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$F = \{A : A \subset U \ \& \ U \setminus A \in I\}$$

წარმოადგენს ფილტრს P(U)-ში. თუ I იდეალი და F ფილტრი დაკავშირებულია ერთმანეთთან ამ ბოლო ფორმულის მეშვეობით, მაშინ ამბობენ, რომ I და F ერთმანეთის მიმართ დუალური ობიექტებია (ბულის ალგებრების თეორიის თვალსაზრისით).

განსაზღვრებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ P(U)-ში იდეალთა (ფილტრთა) ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა აგრეთვე არის იდეალი (ფილტრი).

მაგალითი 1. თუ U საბაზისო სიმრავლე სასრულია, მაშინ მისი ბულეანის ყველა იდეალი და ფილტრი მარტივად აღიწერება (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 1). გაცილებით უფრო საინტერესო სიტუაციები შეიმჩნევა, როცა საქმე გვაქვს უსასრულო U სიმრავლესთან. ამ შემთხვევაში U-ს ყველა სასრულ ნაწილთა სიმრავლე იდეალს წარმოადგენს, ხოლო მისი დუალური ობიექტი წარმოადგენს ფილტრს, რომელსაც, ჩვეულებრივ, ფრეშეს ფილტრი ეწოდება (U-ში ან მის ბულეანში).

ლემა 1. ვთქვათ, F არის ფილტრი U-ში, ხოლო X არის U-ს ნაწილი. იმისათვის რომ არსებობდეს უმცირესი (ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ) ფილტრი F′, რომელიც $F \cup \{X\}$ სიმრავლეთა ოჯახს შეიცავს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $Y \in F$ სიმრავლისათვის $X \cap Y$ თანაკვეთა იყოს არაცარიელი. ამ შემთხვევაში, F′-ს აქვს სახე

$$F' = \{Z : Z \subset U \ \& \ (\exists Y)(Y \in F \ \& \ X \cap Y \subset Z)\}.$$

ეს ლემა თითქმის ტრივიალურია, მისი დამტკიცება უბრალო შემოწმებაზე დადის.

ასევე ადვილად დგინდება შემდეგი ფაქტი: U-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე ოჯახი წარმოქმნის ფილტრს (ანუ, რაც იგივეა, ჩართულია ფილტრში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა ამ ოჯახის ყოველი სასრული ქვეოჯახის თანაკვეთა არაცარიელი სიმრავლეა.

ამ ფაქტზე დაყრდნობით უშუალოდ მოწმდება, რომ თუ P(U)-ში გვაქვს ფილტრთა რაიმე წრფივად დალაგებული ოჯახი (ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ), მაშინ არსებობს ფილტრი, რომელიც ამ ოჯახის ყველა წევრს მოიცავს. ეს ნიშნავს (იხ. წინა პარაგრაფი), რომ P(U)-ში ყველა შესაძლო ფილტრთა ოჯახი, დალაგებული ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ, არის ინდუქციური სიმრავლე. ცორნის ლემის თანახმად, აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ძალზე მნიშვნელოვანი დებულება, რომელსაც ხშირად ა. კარტანის (H. Cartan) ლემას უწოდებენ:

ყოველი ფილტრი P(U)-ში ჩართულია რომელიღაც მაქსიმალურ ფილტრში.

ანალოგიურ (დუალურ) დებულებას ადგილი აქვს იდეალებისათვისაც. მაქსიმალურ ფილტრებს (იდეალებს) ეწოდება ულტრაფილტრები (ულტრაიდეალები).

მაგალითი 2. U საბაზისო სიმრავლეში განვიხილოთ ნებისმიერი არაცარიელი A ქვესიმრავლე. ცხადია, რომ U-ს ყველა იმ ნაწილთა ოჯახი, რომლებიც A-ს შეიცავენ, ფილტრია. თუკი A ერთელემენტიანი სიმრავლეა, მაშინ აღნიშნული ფილტრი ულტრაფილტრს წარმოადგენს. ასეთ ულტრაფილტრს ტრივიალური ულტრაფილტრი ეწოდება.

მოვიყვანოთ დამხმარე დებულება, რომელიც იძლევა ულტრაფილტრების ერთ-ერთ დახასიათებას (ანალოგიურად ხასიათდება ულტრაიდეალებიც).

ლემა 2. ვთქვათ, F არის ფილტრი U-ში. ZF თეორიაში შემდეგი სამი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) F ულტრაფილტრია U-ში;

(ბ) U-ს ყოველი ორი A და B ნაწილისათვის თუ $A \cup B \in F$, მაშინ $A \in F$ ან $B \in F$;

(გ) U-ს ყოველი A ნაწილისათვის ან $A \in F$, ან $U \setminus A \in F$.

დამტკიცება. (ა) $\Rightarrow$ (ბ). ვთქვათ, შესრულებულია (ა). განვიხილოთ U-ს ნებისმიერი ორი A და B ნაწილი, ისეთი, რომ $A \cup B \in F$. დავუშვათ, რომ არც A და არც B არ ეკუთვნიან F ულტრაფილტრს. მაშინ, ლემა 1-ის თანახმად, მოიძებნება ორი $X \in F$ და $Y \in F$ სიმრავლე, რომელთათვისაც მართებულია $A \cap X = \varnothing$ და $B \cap Y = \varnothing$ ტოლობები. აქედან ვღებულობთ

$$X \cap Y \in F, \ A \cup B \in F, \ \varnothing = ((X \cap Y) \cap (A \cup B)) \in F,$$

რაც წინააღმდეგობას იძლევა. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (ა) $\Rightarrow$ (ბ) იმპლიკაციას.

(ბ) $\Rightarrow$ (გ). ეს იმპლიკაცია ტრივიალურია.

(გ) $\Rightarrow$ (ა). ვთქვათ, მართებულია (გ) და ამავე დროს F ფილტრი არ არის მაქსიმალური. ეს იმას ნიშნავს, რომ P(U)-ში არსებობს F' ფილტრი, რომელიც საკუთრივად მოიცავს F-ს. ავიღოთ ნებისმიერი სიმრავლე $A \in F' \setminus F$. რადგან A არ ეკუთვნის F-ს, აუცილებლად შესრულებული უნდა იყოს $U \setminus A \in F \subset F'$ დამოკიდებულება და, მაშასადამე,

$$\varnothing = ((U \setminus A) \cap A) \in F',$$

რაც აშკარად წინააღმდეგობრივია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (გ) $\Rightarrow$ (ა) იმპლიკაციას. ამით ლემა 2 მთლიანადაა დამტკიცებული.

მაგალითი 3. როგორც უკვე ითქვა (იხ. მაგალითი 2), ყოველი არაცარიელი $A \subset U$ სიმრავლე ბუნებრივად წარმოქმნის $F(A) = \{X \quad A \subset X \subset U\}$ ფილტრს U-ში. აქედან

გამომდინარეობს, რომ A არის რომელიღაც ულტრაფილტრის ელემენტი. უფრო მეტიც, ადვილია იმის ჩვენება, რომ A-ს შემცველ ყველა ულტრაფილტრთა ოჯახის თანაკვეთა ზუსტად F(A) ფილტრს ემთხვევა. მართლაც, ავიღოთ U-ს ნებისმიერი X ქვესიმრავლე, რომლისთვისაც A\X სხვაობა არაცარიელია. მაშინ (A\X)-ის შემცველი ულტრაფილტრი შეიცავს A-ს და არ შეიცავს X-ს. ეს ფაქტი აგრეთვე მიუთითებს იმაზე, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა U-ს არაცარიელ ნაწილთა და ამ ნაწილების შემცველ ყველა ულტრაფილტრთა ოჯახებს შორის.

მაგალითი 4. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე და მასში F ფრეშეს ფილტრი (იხ. მაგალითი 1). განსაზღვრის თანახმად, F შედგება N-ის ყველა იმ ნაწილთაგან, რომელთა დამატება არის სასრული (ასეთ ნაწილებს ხშირად კოფინიტურს უწოდებენ). როგორც ვიცით, კარტანის ლემის ძალით, N-ში არსებობს F-ის შემცველი F′ ულტრაფილტრი. ცხადია, F′ არ არის ტრივიალური ულტრაფილტრი. ბუნებრივად იბადება კითხვა: შეიძლება თუ არა N-ში ერთი მაინც არატრივიალური ულტრაფილტრის არსებობის დამტკიცება ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე? ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია. უფრო მეტიც, დადგენილია, რომ ZF & DC თეორიის შიგნითაც კი შეუძლებელია N სიმრავლეში (რომელსაც, როგორც ვიცით, აქვს უმცირესი უსასრულო სიმძლავრე) არატრივიალური ულტრაფილტრის არსებობის დამტკიცება. აღნიშნულ ფაქტთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 28.

მაგალითი 5. ფილტრის ცნება არსებითად გამოიყენება ზოგად ტოპოლოგიასა და მათემატიკურ ანალიზში. ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე შეიძლება განისაზღვროს როგორც T საბაზისო სიმრავლე, რომლის ყოველ წერტილს შეესაბამება ამ სიმრავლის ნაწილთა გარკვეული ოჯახი (აღნიშნულ ოჯახს წერტილის მიდამოთა სისტემა ეწოდება). ტოპოლოგიის აქსიომები პირველ რიგში მოითხოვენ, რომ ეს

ოჯახი იყოს ფილტრი და, გარდა ამისა, წერტილების მიდამოთა სისტემები უნდა აკმაყოფილებდნენ რამდენიმე ბუნებრივ პირობას, რომლებიც ასახავენ კრებადობის ზოგადი ცნების ძირითად შინაარსს.

რაიმე F ფილტრს T სივრცეში კრებადი ეწოდება, თუ იგი მთლიანად შეიცავს T-ს რომელიმე t წერტილის მიდამოთა სისტემას (ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ F კრებადია t-სკენ).

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კვაზიკომპაქტური, თუ ნებისმიერი ულტრაფილტრი ამ სივრცეში არის კრებადი. კვაზიკომპაქტური სივრცეები ძალზე მნიშვნელოვანია ტოპოლოგიისა და ფუნქციონალური ანალიზის მთელი რიგი საკითხებისათვის (იხ. კომენტარი 29).

ლემა 3. ვთქვათ, მოცემულია $(E,\leq)$ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე და A მისი ნებისმიერი სასრული ქვესიმრავლეა. მაშინ არსებობს ამ ნაწილობრივი დალაგების $\leq'$ გაგრძელება (გაფართოება), რომელიც A სიმრავლეზე წრფივ დალაგებას ინდუცირებს.

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა A არის E-ს ორელემენტიანი ქვესიმრავლე (მართლაც, ზოგადი შემთხვევა ადვილად დადის ამ კერძო შემთხვევაზე, თუკი A-ს სიმძლავრის მიმართ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს გამოვიყენებთ). ამრიგად, ავიღოთ

$$A = \{a,b\} \subset E$$

და ვიგულისხმოთ, რომ a და b არასადარი ელემენტებია E-ში. აღვნიშნოთ G სიმბოლოთი მოცემული ნაწილობრივი დალაგების გრაფიკი (ფაქტობრივად, G ემთხვევა $\leq$-ს). საძიებელი ნაწილობრივი დალაგება $\leq'$ (ან მისი გრაფიკი G') განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\leq' = G' = G \cup \{(x,y) : x \leq a \ \& \ b \leq y\}.$$

ადვილად მოწმდება, რომ G' მართლაც არის ნაწილობრივი დალაგება E-ზე, რომელიც აგრძელებს ამოსავალ $\leq$ მიმართებას და რომლისთვისაც გვაქვს $(a,b) \in G'$. ამით ლემა 3 დამტკიცებულია.

ჩვენ უკვე ვახსენეთ ე. მარჩევსკის შედეგი, რომლის თანახმად E-ზე მოცემული ყოველი ნაწილობრივი დალაგება გაგრძელებადია E-ს წრფივ დალაგებამდე (იხ. §4-ის მაგალითი 1). იქვე იყო ნათქვამი, რომ ეს შედეგი დგინდება ცერმელოს აქსიომის გამოყენებით. აქ ჩვენ ვაჩვენებთ უფრო ზუსტი წინადადების მართებულობას, სახელდობრ, დავამტკიცებთ, რომ უკვე კარტანის ლემა იძლევა მარჩევსკის ზემოხსენებული შედეგის მიღების საშუალებას.

თეორემა 1 (მარჩევსკი). **ZF** თეორიაში სრულდება შემდეგი იმპლიკაცია: თუ ნებისმიერი ფილტრი გაგრძელებადია ულტრაფილტრამდე, მაშინ ნებისმიერი ნაწილობრივი დალაგება გაგრძელებადია წრფივ დალაგებამდე.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ კარტანის ლემა შესრულებულია და განვიხილოთ ნებისმიერი ნაწილობრივად დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლე. U საბაზისო სიმრავლის როლში ავიღოთ E-ს ყველა იმ P ნაწილობრივ დალაგებათა სიმრავლე, რომლებიც მოცემული $\leq$ მიმართების გაგრძელებებს წარმოადგენენ. შემდეგ, E-ს ყოველი სასრული A ნაწილისათვის $U(A)$-თი აღვნიშნოთ U-ს ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც A-ზე წრფივ დალაგებას ინდუცირებენ. წინა ლემის თანახმად,

$$F = \{U(A) : A \subset E \;\&\; A \text{ არის სასრული}\}$$

წარმოადგენს ფილტრს U-ში. ეს ფილტრი გაგრძელებადია რომელიღაც F' ულტრაფილტრამდე. ახლა E სიმრავლეზე

განვსაზღვროთ ახალი $S(x,y)$ ბინარული მიმართება შემდეგი ფორმულის მეშვეობით:

$(x,y) \in S$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა U-ს ყველა იმ P ელემენტთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც სრულდება $(x,y) \in P$ დამოკიდებულება, ეკუთვნის F' ულტრაფილტრს.

მარტივად მოწმდება, რომ $S(x,y)$ არის წრფივი დალაგება E-ზე, რომელიც აგრძელებს ამოსავალ $\leq$ ნაწილობრივ დალაგებას. ამით თეორემა 1 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 1-ის ერთ-ერთი უშუალო შედეგია შემდეგი ფაქტი:

"ყოველი სიმრავლე შეიძლება წრფივად დალაგდეს".

ამრიგად, ვხედავთ, რომ კარტანის ლემიდან ლოგიკურად (ე.ი. ZF თეორიის ჩარჩოებში) გამომდინარეობს ნებისმიერი სიმრავლის წრფივად დალაგების შესაძლებლობა. აქვე გვინდა აღვნიშნოთ, რომ თავის დროზე დადგენილი იყო შემდეგი ფაქტიც: ZF თეორიაში კარტანის ლემის გამოყენებით შეუძლებელია ცერმელოს თეორემის დამტკიცება, ე.ი. შეუძლებელია მხოლოდ ამ ლემის მეშვეობით ნებისმიერი სიმრავლის სავსებით დალაგება. სხვა სიტყვებით, კარტანის ლემა ლოგიკურად უფრო სუსტია, ვიდრე ცორნის ლემა (რომელიც ამორჩევის აქსიომის ეკვივალენტურია). მიუხედავად ამისა, კარტანის ლემა არის საკმაოდ მძლავრი იარაღი სხვადასხვა ტიპის მნიშვნელოვანი დებულებების დასამტკიცებლად, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ მათემატიკის მთელ რიგ დარგებსა და საკითხებში (იხ., მაგალითად, მომდევნო §9).

ახლა განვიხილოთ ფილტრებისა და იდეალების გარკვეული განზოგადება ბულის ალგებრის ტერმინებში. გავიხსენოთ, რომ ბულის ალგებრა განისაზღვრება როგორც უმცირესი და უდიდესი ელემენტების მქონე დისტრიბუტიული

მესერი, რომელშიაც ყოველ ელემენტს დამატებითი ელემენტი გააჩნია (იხ. §2). მაშასადამე, ბულის ალგებრა არის ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს გარკვეულ აქსიომებს. ეს აქსიომები კოპირებენ იმ სტანდარტულ თვისებებს, რომლებსაც სიმრავლეთა ალგებრები ფლობენ. ამიტომ ბუნებრივად იბადება კითხვა, ხომ არ შეიძლება ყოველი ბულის ალგებრა წარმოვადგინოთ როგორც შესაბამისი საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა გარკვეული ალგებრა. ამ კითხვაზე დადებით პასუხს იძლევა მ. სტოუნის (M. Stone) თეორემა, რომელსაც ქვემოთ დავამტკიცებთ.

ფაქტობრივად, უკვე ხელთა გვაქვს ყველა საჭირო იარაღი ამ მეტად ღრმა და ძალზე მნიშვნელოვანი დებულების დასამტკიცებლად. მხოლოდ უნდა შემოვიტანოთ იდეალისა და ფილტრის ცნებები ნებისმიერი ბულის ალგებრისათვის (ისევე, როგორც ეს ნებისმიერი სიმრავლის ბულეანისათვის იყო გაკეთებული).

ვთქვათ, მოცემულია $(B, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ', \vee, \wedge, \leq)$ ბულის ალგებრა და მისი რაიმე I ქვესიმრავლე. ამბობენ, რომ ეს ქვესიმრავლე არის იდეალი B-ში, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) $\mathbf{0}$ ეკუთვნის I-ს და $\mathbf{1}$ არ ეკუთვნის I-ს;

(ბ) თუ $a \in I$ და $b \in I$, მაშინ $a \vee b \in I$;

(გ) თუ $a \in I$ და $b \leq a$, მაშინ $b \in I$.

ვთქვათ, კვლავ მოცემულია $(B, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \quad \vee, \wedge, \leq)$ ბულის ალგებრა და მისი რაიმე F ქვესიმრავლე. ამბობენ, რომ ეს ქვესიმრავლე არის ფილტრი B-ში, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) $\mathbf{1}$ ეკუთვნის F-ს და $\mathbf{0}$ არ ეკუთვნის F-ს;

(ბ) თუ $a \in F$ და $b \in F$, მაშინ $a \wedge b \in F$;

(გ) თუ $a \in F$ და $a \leq b$, მაშინ $b \in F$.

მარტივად მოწმდება, რომ ეს ორი ცნება არის ერთმანეთის დუალური (ორადული), ე.ი. $I \subset B$ წარმოადგენს

იდეალს B-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $F = \{a' : a \in I\}$ წარმოადგენს ფილტრს იმავე B-ში.

მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ ამ პარაგრაფის ლემა 1 და ლემა 2 ძალას ინარჩუნებენ ბულის ალგებრების ტერმინებშიც. აგრეთვე, ცორნის ლემის გამოყენებით მტკიცდება კარტანის ლემის უშუალო განზოგადება ბულის ალგებრებისათვის. სახელდობრ, მართებულია ის ფაქტი, რომ ყოველი იდეალი (ფილტრი) B-ში ჩართულია რომელიღაც მაქსიმალურ იდეალში (ფილტრში). მათ, შესაბამისად, ულტრაიდეალი და ულტრაფილტრი ჰქვიათ.

კერძოდ, ვღებულობთ, რომ B-ს ყოველი არანულოვანი ელემენტი რომელიღაც ულტრაფილტრს ეკუთვნის (შეადარეთ ზემოთ მოყვანილ მაგალით 3-ს).

ახლა, ყოველი $b \in B$ ელემენტისათვის განვსაზღვროთ

$$U(b) = \{F : F \text{ არის ულტრაფილტრი } B\text{-ში } \& \ b \in F\}.$$

ამ განსაზღვრის თანახმად, $U(0) = \varnothing$ და $U(1)$ ემთხვევა B-ში ყველა ულტრაფილტრთა სიმრავლეს, რომელიც U-თი აღვნიშნოთ. გარდა ამისა, ადვილად დგინდება, რომ ნებისმიერი $a \in B$ და $b \in B$ ელემენტებისათვის სრულდება შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$U(a) \cup U(b) = U(a \vee b), \quad U(a) \cap U(b) = U(a \wedge b), \quad U(a') = U \setminus U(a),$$

$$U(a) = U(b) \Rightarrow a = b.$$

ამრიგად, ვხედავთ, რომ

$$b \to U(b) \quad (b \in B)$$

თანადობა ურთიერთცალსახაა და ინარჩუნებს შესაბამის ალგებრულ ოპერაციებს (ე.ი. ბულის ალგებრის ოპერაციები შესაბამისად გადადიან სიმრავლურ-თეორიულ ოპერაციებში).

მაშასადამე, ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას.

თეორემა 2 (სტოუნი). ყოველი B ბულის ალგებრისათვის არსებობს მისი იზომორფული სიმრავლეთა ალგებრა U-ში.

ამ დებულებას ეწოდება ძირითადი თეორემა ბულის ალგებრების სიმრავლურ-თეორიული წარმოდგენის (ანუ სიმრავლურ-თეორიული რეალიზაციის) შესახებ.

როგორც უკვე დავინახეთ, სტოუნის ზემოთ მოყვანილი თეორემის დამტკიცება ეყრდნობა კარტანის ლემის პირდაპირ ანალოგს ბულის ალგებრების ტერმინებში. ამ კონტექსტში აღსანიშნავია აგრეთვე შემდეგი ფაქტი: ZF თეორიის ფარგლებში კარტანის ლემის ანალოგიდან ბულის ალგებრებისათვის გამომდინარეობს ფუნქციონალური ანალიზის ისეთი ფუნდამენტური დებულება, როგორიცაა ჰ. ჰანისა (H. Hahn) და ს. ბანახის თეორემა უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალის გაგრძელების შესახებ (იხ. [34], [35]).

§8-ის სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, U სასრული სიმრავლეა. დაახასიათეთ U-ს ბულეანის ყველა შესაძლო იდეალი და ფილტრი. აჩვენეთ, რომ U სასრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მასში ყველა ულტრაფილტრი ტრივიალურია.

2*. მარჩევსკის თეორემის თანახმად, E-ს ყოველი ნაწილობრივი დალაგება გრძელდება E-ს წრფივ დალაგებამდე. გააძლიერეთ ეს დებულება და აჩვენეთ, რომ E-ს ამოსავალი ნაწილობრივი დალაგება ემთხვევა ყველა იმ წრფივ დალაგებათა ოჯახის თანაკვეთას, რომლებიც მას აგრძელებენ. გამოიყვანეთ აქედან, რომ ნებისმიერი ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე იზომორფულია წრფივად დალაგებული სიმრავლეების სათანადო ოჯახის ნამრავლის რომელიღაც ქვესიმრავლისა. ამისათვის ჯერ განსაზღვრეთ

ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეთა ოჯახის ნამრავლი, როგორც ამ ოჯახის სიმრავლეთა ნამრავლი, აღჭურვილი იმ უდიდესი (ჩართვის თვალსაზრისით) ნაწილობრივი დალაგებით, რომლის დროსაც ყოველი პროექცია წარმოადგენს ჰომომორფიზმს (ანუ ზრდად ასახვას).

აგრეთვე აჩვენეთ, რომ U საბაზისო სიმრავლეში მოცემული ნებისმიერი F ფილტრი ემთხვევა F-ის შემცველ ყველა ულტრაფილტრთა ოჯახის თანაკვეთას.

3. განვიხილოთ შემდეგი ორი წინადადება:

(ა) ყოველი სიმრავლე შეიძლება წრფივად დალაგდეს;

(ბ) არაცარიელ სასრულ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის არსებობს ერთი მაინც სელექტორი.

ცერმელოს აქსიომაზე დაყრდნობის გარეშე (ე.ი. **ZF** თეორიის ჩარჩოებში) დაამტკიცეთ, რომ (ა) წინადადებიდან გამომდინარეობს (ბ) წინადადება.

4*. მათემატიკურ ლოგიკაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს კ. გიოდელის თეორემა სისრულის შესახებ, რომლის თანახმად ყოველ არაწინააღმდეგობრივ თეორიას აქვს მოდელი (იხ. კომენტარი 30). ამ თეორემის დამტკიცების დროს არსებითად გამოიყენება ერთი დამხმარე დებულება, რომლის ძალით ნებისმიერი არაწინააღმდეგობრივი L თეორია გაფართოებადია მაქსიმალურ არაწინააღმდეგობრივ L' თეორიამდე, ე.ი. L' თეორიის შემდგომი გაფართოება ერთი მაინც ახალი აქსიომის დამატებით (რომელიც, ცხადია, არ უნდა იყოს L'-ის თეორემა) უკვე იწვევს ლოგიკური წინააღმდეგობის წარმოქმნას. ანუ, სხვა სიტყვებით, ნებისმიერი არაწინააღმდეგობრივი L თეორია გაფართოებადია არაწინააღმდეგობრივ სრულ L' თეორიამდე.

აღნიშნულ დამხმარე დებულებას ხშირად ა. ლინდენბაუმის (A. Lindenbaum) ლემას უწოდებენ.

აჩვენეთ, რომ ლინდენბაუმის ლემა ეფექტურად (ე.ი. **ZF** თეორიის შიგნით) გამომდინარეობს ბულის ალგებრებისათვის კარტანის ლემის ანალოგიდან.

გიოდელის თეორემა სისრულის შესახებ მათემატიკის მრავალ დარგში გამოიყენება. მაგრამ გამოყენების თვალსაზრისით ხშირად უფრო სასარგებლოა ამ თეორემის სხვანაირი ვერსიები. ერთ-ერთი უაღრესად მნიშვნელოვანი ვერსია შემდეგნაირად ყალიბდება:

თუ მათემატიკური თეორიის ფორმულების მოცემული ერთობლიობა ისეთია, რომ ამ ერთობლიობის ყოველ სასრულ ქვეერთობლიობას აქვს მოდელი, მაშინ ფორმულების მოცემულ ერთობლიობასაც აქვს მოდელი.

შემდგომში ამ ვერსიას უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ და მოვიყვანთ მის ზოგიერთ გამოყენებას (მას, ჩვეულებრივ, გიოდელ-მალცევის კომპაქტურობის თეორემას უწოდებენ).

5*. აჩვენეთ, რომ **N** ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში არატრივიალური ულტრაფილტრის არსებობიდან **ZF & DC** თეორიაში გამომდინარეობს ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლის არსებობა. ამისათვის გააიგივეთ აღნიშნული ულტრაფილტრი კანტორის დისკონტინუუმის (ე.ი. $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ ტოპოლოგიური სივრცის) გარკვეულ ქვესიმრავლესთან და შეამოწმეთ, რომ სწორედ ის ქვესიმრავლე იქნება არაზომადი ამ სივრცეზე მოცემული ალბათური ზომის მიმართ, რომელიც [0,1] სეგმენტზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის იზომორფულია.

ახლახან მოყვანილი შედეგი ვ. სერპინსკის ეკუთვნის.

6*. ტოპოლოგიურ სივრცეს კომპაქტური ეწოდება, თუ იგი ერთდროულად არის განცალებადი და კვაზიკომპაქტური. ის ფაქტი, რომ კომპაქტური სივრცეების ტოპოლოგიური ნამრავლი ისევ კომპაქტურია, წარმოადგენს ტიხონოვის თეორემის უშუალო შედეგს. ამავე დროს ცნობილია, რომ **ZF** თეორიაში აღნიშნული ფაქტი არ არის ამორჩევის აქსიომის ეკვივალენტური (ტიხონოვის თეორემისაგან განსხვავებით).

მეორე მხრივ, დაასაბუთეთ, რომ ამ ფაქტის დამტკიცება შეუძლებელია **ZF & DC** თეორიის ჩარჩოებში. (დაადგინეთ ეს ბოლო გარემოება იმის ჩვენებით, რომ აღნიშნული ფაქტიდან

ZF & DC თეორიის შიგნით გამომდინარეობს ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლის არსებობა.)

ეს შედეგიც ვ. სერპინსკის მიერ იყო მიღებული.

7*. ამ პარაგრაფში მოყვანილი სტოუნის თეორემა მისმა ავტორმა უფრო ზუსტ ტერმინებში დაამტკიცა. სახელდობრ, სტოუნის მიერ იყო ნაჩვენები, რომ ყოველი ბულის ალგებრა რეალიზებადია გარკვეული კომპაქტური სავსებით არაბმული სივრცის ერთდროულად ჩაკეტილი და ღია ქვესიმრავლეების ალგებრის სახით. ეს სივრცე ცალსახად (ჰომეომორფიზმამდე სიზუსტით) განისაზღვრება ამოსავალი ბულის ალგებრით და მას ამ ბულის ალგებრის სტოუნის სივრცე ჰქვია. ორი ბულის ალგებრა იზომორფულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი სტოუნის სივრცეები ჰომეომორფულია.

შეეცადეთ დაამტკიცოთ სტოუნის თეორემის ეს ტოპოლოგიური ვერსია. ამისათვის ულტრაფილტრების შესაბამის სიმრავლეში შემოიტანეთ კომპაქტური სივრცის ტოპოლოგია და განიხილეთ მისი თვისებები.

8*. ვთქვათ, მოცემულია $(G,\cdot)$ ჯგუფი, რომელიც ამავე დროს ნაწილობრივად დალაგებულია რაიმე $\leq$ მიმართებით. ამბობენ, რომ $\leq$ დალაგების მიმართება შეთანხმებულია (ან თავსებადია) ჯგუფის ოპერაციასთან, თუ ყოველი სამი x, y, z ელემენტისათვის G-დან გვაქვს შემდეგი იმპლიკაციები:

$$x \leq y \Rightarrow z\cdot x \leq z\cdot y, \qquad x \leq y \Rightarrow x\cdot z \leq y\cdot z.$$

კომუტატიური $(G,\cdot)$ ჯგუფის შემთხვევაში მოყვანილ განსაზღვრაში საკმარისია ამ ორი იმპლიკაციიდან მხოლოდ ერთის შესრულების მოთხოვნა.

შეამოწმეთ, რომ $\mathbf{R}$ რიცხვით ღერძზე სტანდარტული შეკრების ოპერაცია და წრფივი დალაგების მიმართება ერთმანეთთან შეთანხმებულია. მეორე მხრივ, აჩვენეთ, რომ თუ ჯგუფი შეიცავს არატრივიალურ სასრულ ციკლურ ქვეჯგუფს,

მაშინ არ არსებობს ამ ჯგუფის წრფივი დალაგება, რომელიც თავსებადია მის ოპერაციასთან.

დაამტკიცეთ, რომ თუ მოცემული ჯგუფი ისეთია, რომ მისი ყოველი სასრულად წარმოქმნილი ქვეჯგუფი წრფივად დალაგებადია (ამ ქვეჯგუფის ოპერაციასთან ზემოთ მითითებული ბუნებრივი შეთანხმებით), მაშინ მთელი ეს ჯგუფიც წრფივად დალაგებადია მის ოპერაციასთან შეთანხმებით. (გამოიყენეთ ამ პარაგრაფის თეორემა 1-ის დამტკიცების ანალოგიური მსჯელობა.)

9. ვთქვათ, $\mathfrak{a}$ არის უსასრულო კარდინალური რიცხვი, U კი – საბაზისო სიმრავლე, რომელშიც მოცემულია რაიმე ფილტრი. ამბობენ, რომ ეს ფილტრი არის $\mathfrak{a}$-რეგულარული, თუ მოიძებნება მისი ელემენტების ისეთი $\{X_t \ \ t\in T\}$ ოჯახი, რომლის ინდექსთა T სიმრავლეს აქვს $\mathfrak{a}$ სიმძლავრე და, გარდა ამისა, U-ს ყოველი ელემენტი ამ ოჯახის მხოლოდ სასრული რაოდენობის სიმრავლეებს ეკუთვნის.

დაამტკიცეთ, რომ თუ $\mathrm{card}(U) = \mathfrak{a}$, მაშინ U სიმრავლეში არსებობს $\mathfrak{a}$-რეგულარული ულტრაფილტრი. ამისათვის განიხილეთ U-ს ყველა სასრულ ნაწილთა U' სიმრავლე. როგორც ვიცით (იხ. §7-ის სავარჯიშო 9), ადგილი აქვს $\mathrm{card}(U') = \mathrm{card}(U)$ ტოლობას. ამიტომ სავსებით საკმარისია $\mathfrak{a}$-რეგულარული ულტრაფილტრი აიგოს U' სიმრაელეში. ყოველი $u\in U$ ელემენტისათვის შემოიღეთ აღნიშვნა $J(u) = \{A\in U' \ \ u\in A\}$ და განიხილეთ $\{J(u) \ \ u\in U\}$ სიმრავლეთა ოჯახი. შეამოწმეთ, რომ სწორედ ეს ოჯახი წარმოქმნის საძიებელ $\mathfrak{a}$-რეგულარულ ულტრაფილტრს U'-ში.

§9. ფორმალური არითმეტიკის არასტანდარტული მოდელები. ალგებრული სისტემები და მათი ულტრანამრავლები. ლოსის თეორემა

ამ პარაგრაფში გადმოცემულია ულტრაფილტრების ტექნიკის ელემენტები და მისი ზოგიერთი გამოყენება ე.წ. არასტანდარტული მოდელების კონსტრუქციებში. ასეთი მიდგომა თავის დროზე შემოთავაზებული იყო პოლონელი მათემატიკოსის ი. ლოსის (J. Los) მიერ (იხ. [33]) და იგი მეტად ნაყოფიერი გამოდგა მოდელების ზოგადი თვისებების შემდგომი კვლევისათვის.

როცა საქმე გვაქვს რაიმე კონკრეტულ აქსიომატურ თეორიასთან, მაშინ ყოველთვის წარმოიშობა საკითხი ამ თეორიის შესაძლო ინტერპრეტაციების (ანუ რეალიზაციების, მოდელების) შესახებ. სხვა სიტყვებით, მათემატიკური კვლევის პროცესში უშუალოდ ვეხებით განსახილველი თეორიის ორ ძირითად ასპექტს: მის სინტაქსსა და მის სემანტიკას.

სინტაქსი გულისხმობს აქსიომატური თეორიის მკაცრ ჩამოყალიბებას: მისი ალფაბეტის აღწერას, ფორმულებისა და ტერმების აგების ალგორითმული პროცედურის დადგენას, აქსიომების ჩამოთვლასა და თეორემების გამოყვანის წესების დაფიქსირებას. ამის შემდეგ ხდება აგებული თეორიის ჭეშმარიტი ფორმულების (ე.ი. თეორემების) მოძებნა და, თუ ეს შესაძლებელია, ყველა ასეთი ფორმულის დახასიათება.

სემანტიკა გულისხმობს მოცემული ფორმალური თეორიის ინტერპრეტაციების (მოდელების) დაზუსტებასა და აღწერას, მათ კვლევას და მათ შორის ურთიერთკავშირების მოძებნას. აქ განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა იმ ინტერპრეტაციების გამოყოფას, რომლებიც ყველაზე ბუნებრივად ესადაგებიან მოცემულ თეორიას (ასეთ ინტერპრეტაციებს სტანდარტული ანუ კანონიკური ეწოდებათ). სწორედ ისინი აქვთ ხოლმე მხედველობაში, როცა თეორიის აგებასა და ფორმალიზაციას ცდილობენ. იმ

მოდელებს კი, რომლებიც გარკვეული აზრით სცილდებიან თავდაპირველ ჩანაფიქრს და შემოაქვთ რაღაც სიახლე, არასტანდარტულ მოდელებს უწოდებენ.

ამ პარაგრაფის ძირითად მიზანს წარმოადგენს იმის ჩვენება, რომ ულტრაფილტრების ტექნიკა (იხ. წინა პარაგრაფი) საკმაოდ ეფექტურად გამოიყენება სხვადასხვა ტიპის ფორმალური თეორიების არასტანდარტული მოდელების აგების საკითხებში. აღნიშნულ ტექნიკას განსაკუთრებული როლი ენიჭება ზოგად ალგებრულ სისტემათა თეორიაში. მკითხველს შევახსენებთ, რომ ზოგადი ალგებრული სისტემა წარმოადგენს საბაზისო სიმრავლეს, აღჭურვილს გარკვეული ალგებრული ოპერაციებითა და მიმართებებით (რელაციებით). ამ კონტექსტში ბულის ალგებრები, ჯგუფები, ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეები, ნამდვილ რიცხვთა ღერძი და მრავალი სხვა მათემატიკური ობიექტი შეიძლება გააზრებულ იქნან როგორც ალგებრული სისტემების მაგალითები (იხ. [6], [37]).

გავიხსენოთ პირველი რიგის ტიპიური მათემატიკური თეორიის ფორმალიზაციის ძირითადი საფეხურები. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, აღიწერება ამ თეორიის ალფაბეტი, რომელიც შედგება შემდეგი სიმბოლოებისაგან:

1. საგნობრივი ცვლადები (როგორც წესი, ლათინური ასოები); შესაძლოა, რომ ზოგიერთი მათგანი ინდექსირებული იყოს სხვადასხვა ნატურალური რიცხვით; მაშასადამე, საგნობრივი ცვლადების რაოდენობა ყოველთვის თვლადია;
2. ლოგიკური სიმბოლოები (დიზიუნქცია, კონიუნქცია, იმპლიკაცია, უარყოფა, ეკვივალენტობა, ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები);
3. ტოლობის ნიშანი = (ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი ფორმალური თეორია ეგალიტარულ თეორიათა რიცხვს მიეკუთვნება);

4. თეორიის სპეციალური ნიშნები თავიანთი წონებით; მათ შორის დასაშვებია როგორც რელაციური ნიშნები (მაგალითად, ორადგილიანი ∈ კუთვნილების ნიშანი სიმრავლეთა თეორიაში), ისე ფუნქციონალური ნიშნები (მაგალითად, კომპოზიციის ოპერაციის ნიშანი ჯგუფთა თეორიაში); ნულადგილიან ფუნქციონალურ ნიშნებს თეორიის კონსტანტები ეწოდება.

შემდეგ ჩვეულებრივი გზით განისაზღვრება აღნიშნული თეორიის ფორმულები და ტერმები. შესაბამისი განსაზღვრა შემოაქვთ მათემატიკური რეკურსიის მეთოდის საშუალებით: უმარტივესი ფორმულებიდან და ტერმებიდან გამომდინარე, აგებენ სულ უფრო და უფრო რთულ ფორმულებსა და ტერმებს (იხ. [4], [6], [37], [46], [55]).

თეორიის აგების კულმინაციურ მომენტს წარმოადგენს მისი აქსიომების სიის დადგენა და თეორემების გამოყვანის წესების ჩამოყალიბება. ამის საფუძველზე უკვე შესაძლებელი ხდება ფორმალური დამტკიცების განმარტება. სახელდობრ,

$$S_1,\ S_2,\qquad ,\ S_n$$

ფორმულათა სასრულ მიმდევრობას დამტკიცება ეწოდება (მოცემულ თეორიაში), თუ ყოველი S_i ფორმულა ან აქსიომაა, ან მიიღება წინა ფორმულებიდან ერთ-ერთი გამოყვანის წესის გამოყენებით. ფორმულას ეწოდება თეორიის ჭეშმარიტი დებულება (მართებული დებულება, ანუ თეორემა), თუ იგი რომელიღაც დამტკიცების ერთ-ერთი წევრია.

აქვე უნდა გავაკეთოთ არსებითი შენიშვნა იმის თაობაზე, რომ ფორმალური თეორიების სემანტიკური ასპექტის განხილვის დროს ხშირად განასხვავებენ დამტკიცებად დებულებებს ჭეშმარიტი დებულებებისაგან. სახელდობრ, მოცემული დებულების ჭეშმარიტობას უკავშირებენ კონკრეტულ მოდელს (ან მოდელთა რაიმე კლასს), რომელშიც ხდება ამ დებულების სათანადო ინტერპრეტაცია. ეს ინტერპრეტაცია ისევ რეკურსიის მეთოდის მეშვეობით განისაზღვრება: უპირველეს ყოვლისა თეორიის უმარტივესი

(ე.წ. ატომური) ფორმულების ინტერპრეტირებას ახდენენ, ხოლო შემდეგ უფრო რთული ფორმულების ინტერპრეტაციას რეკურსიულად განმარტავენ. მოკლედ რომ ვთქვათ, ფორმულის ინტერპრეტაციის განსაზღვრისას რეკურსიას აწარმოებენ ამ ფორმულაში შემავალი ლოგიკური ნიშნების საერთო რაოდენობის მიხედვით. ეს სტანდარტული პროცედურა დეტალურად აღწერილია ზემოთ მითითებულ ლიტერატურაში (იხ. განსაკუთრებით [6], [37] და [55]).

მაგალითი 1. განვიხილოთ ფორმალური ეგალიტარული თეორია, რომელსაც აქვს ერთი ნულარული ფუნქციონალური ნიშანი 0 (ან, რაც იგივეა, საგნობრივი კონსტანტა 0), ერთი უნარული ფუნქციონალური ნიშანი $'$ და ორი ბინარული ფუნქციონალური ნიშანი + და

ჩამოვთვალოთ ამ თეორიის აქსიომები:

(ა) $(\forall x)(x' \neq 0)$;

(ბ) $(\forall x)(\forall y)(x' = y' \Rightarrow x = y)$;

(გ) $(\forall x)(x + 0 = x)$;

(დ) $(\forall x)(\forall y)(x + y' = (x + y)')$;

(ე) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$;

(ვ) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y' = x \cdot y + x)$;

(ზ) ყოველი $S(x)$ ფორმულისათვის გვაქვს

$$(S(0) \,\&\, (\forall y)(S(y) \Rightarrow S(y'))) \Rightarrow (\forall x)S(x).$$

პირველი (ა) აქსიომა გვეუბნება, რომ 0 არასოდეს მიიღება $'$ ოპერაციის გამოყენების შედეგად.

მეორე (ბ) აქსიომა ამბობს, რომ $'$ ოპერაცია ინიექციურია.

შემდეგი ოთხი აქსიომა აღწერს + და ოპერაციების ძირითად თვისებებს და, ფაქტობრივად, რეკურსიულად განსაზღვრავს ამ ოპერაციებს უნარული $'$ ოპერაციის მეშვეობით.

ბოლო (ზ) აქსიომა (სინამდვილეში – აქსიომათა სქემა) მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გარკვეულ ვერსიას წარმოადგენს.

ამრიგად, სავსებით ბუნებრივია, ახლახან აღწერილი თეორია განვიხილოთ, როგორც პეანოს ფორმალური არითმეტიკა, 0 – როგორც ჩვეულებრივი ნული ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში და ′ ოპერაცია – როგორც მომდევნო ნატურალური რიცხვის აღების ოპერაცია. კერძოდ, გვაქვს

$$0' = 1,\ 1' = 2,\ 2' = 3,$$

ზემოთ უკვე ვთქვით, რომ ოპერაციიდან გამომდინარე, შეგვიძლია რეკურსიულად შემოვიტანოთ ნატურალური რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები, მაგრამ ამ ბოლო ორი ოპერაციის ასეთი რეკურსიული განსაზღვრის კორექტულობის დასაბუთება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის მართებულობას ეყრდნობა (იხ. §6), ე.ი. მოითხოვს სიმრავლეთა თეორიის გარკვეულ ფრაგმენტს. ამიტომ, თუკი გვინდა პეანოს ფორმალური არითმეტიკის ჩამოყალიბება სიმრავლეთა თეორიისაგან დამოუკიდებლად, მაშინ შესაბამის აქსიომებში უნდა ავსახოთ ნატურალურ რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების ძირითადი თეისებები. სხვათაშორის, ეს არსებითი გარემოება გამორჩა როგორც თავად პეანოს, ასევე მის ზოგიერთ მიმდევარსაც (დედეკინდს, ლანდაუსა და სხვებს). როცა ისინი აყალიბებდნენ ფორმალურ არითმეტიკას, მოითხოვდნენ მხოლოდ (ა), (ბ), (ზ) აქსიომებს და შენიღბულად, ინტუიციურ დონეზე, სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს იყენებდნენ.

შეკრების ოპერაციის მეშვეობით შეიძლება აგრეთვე შემოტანილ იქნეს $\leq$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართება. სახელდობრ, $x \leq y$ დამოკიდებულება ჩაითვლება მართებულად მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\exists z)(y = x + z).$$

ადვილად მოწმდება, რომ ეს ორადგილიანი პრედიკატი ≤ წრფივი დალაგების მიმართებაა. ამის შემდეგ, მიღებულ თეორიაში ჩვეულებრივად იკვლევენ მისი ობიექტების თვისებებს და ამტკიცებენ მათ შესახებ თეორემებს.

რა მოდელები აქვს ამ თეორიას? რასაკვირველია, პირველ რიგში $(N,0,',+,\cdot)$ ხუთეული (ან, უფრო მოკლედ, $(N,0,')$ სამეული), სადაც N ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა. ეს ხუთეული (სამეული) წარმოადგენს ალგებრული სისტემის ძალიან კერძო შემთხვევას და სწორედ იგია მიჩნეული პეანოს ფორმალური არითმეტიკის სტანდარტულ მოდელად. ქვემოთ დავინახავთ, როგორ შეიძლება აიგოს ამავე თეორიის არასტანდარტული მოდელებიც.

განვიხილოთ $\{N_i \ i\in N\}$ თვლადი ოჯახი, სადაც ყოველი $i\in N$ ინდექსისათვის $N_i = N$. დავაფიქსიროთ N სიმრავლეში რომელიმე F ფილტრი (მაგალითად, N-ის ყველა კოფინიტურ ნაწილთა ოჯახი). ვთქვათ, მოცემულია $\Pi\{N_i : i\in N\}$ ნამრავლის $\{n_i \ i\in N\}$ და $\{m_i \ i\in N\}$ ორი ელემენტი. ვიტყვით, რომ ეს ელემენტები ეკვივალენტურია (და, შესაბამისად, დავწერთ $\{n_i : i\in N\} \approx \{m_i : i\in N\}$), თუ

$$\{i\in N :\ n_i = m_i\} \in F.$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ ≈ მართლაც წარმოადგენს ეკვივალენტობის დამოკიდებულებას $\Pi\{N_i \ i\in N\}$ ნამრავლში. ამიტომ შეგვიძლია გადავიდეთ ეკვივალენტობის კლასების შესაბამის სიმრავლეზე (ანუ, სხვა სიტყვებით, ფაქტორ-სიმრავლეზე), რომელსაც მომავალში

$$U = (\Pi\{N_i : i\in N\})/F$$

სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. ამ სიმრავლეს ეწოდება მოცემული $\{N_i \ i\in N\}$ ოჯახის ნამრავლი F ფილტრის მოდულით (ანუ,

მოკლედ, F-ფილტრირებული ნამრავლი). როცა F ულტრაფილტრია, მაშინ U სიმრავლეს მოცემული $\{N_i \; i\in N\}$ ოჯახის ულტრანამრავლს უწოდებენ (F ულტრაფილტრის მოდულით).

მიღებული U სიმრავლის ნებისმიერი u ელემენტისათვის ხელსაყრელია ასეთი აღნიშვნა: $u = [\{n_i : i\in N\}]$, სადაც $\{n_i : i\in N\}$ მიმდევრობა u-ს რომელიმე წარმომადგენელია. სხვა სიტყვებით, თუ გვაქვს ორი ელემენტი $u = [\{n_i \; i\in N\}]$ და $v = [\{m_i \; i\in N\}]$, მაშინ $u = v$ ტოლობა მართებულია იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\{n_i : i\in N\} \approx \{m_i : i\in N\}$.

პირველ რიგში იბადება შემდეგი კითხვა: რა სიმძლავრე აქვს $U = (\Pi\{N_i : i\in N\})/F$ სიმრავლეს? ამ ტიპის საკითხები ხშირად წარმოიშობა ულტრანამრავლების განხილვის დროს (იხ. კომენტარი 31). ჩვენი შემდგომი მიზნებისათვის სავსებით საკმარისია იმის ჩვენება, რომ გარკვეულ სიტუაციებში U შესაძლოა არათვლადიც იყოს.

ლემა 1. თუ F ფილტრი შეიცავს ფრეშეს ფილტრს, მაშინ

$$U = (\Pi\{N_i : i\in N\})/F$$

სიმრავლე არათვლადია.

დამტკიცება. ახლახან ჩამოყალიბებული დებულება დამტკიცებული იქნება, თუკი ვაჩვენებთ, რომ აღნიშნული U სიმრავლის ელემენტთა ყოველი თვლადი ოჯახისათვის მოიძებნება იმავე U სიმრავლის ელემენტი, რომელიც ამ თვლად ოჯახს არ ეკუთვნის. ფაქტობრივად, უნდა ვაჩვენოთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $\Pi\{N_i \; i\in N\}$ ჩვეულებრივი ნამრავლის ელემენტთა $\{\{n_{ij} \; i\in N\} \; j\in N\}$ მიმდევრობა, არსებობს იმავე ნამრავლის $\{n_i \; i\in N\}$ ელემენტი, რომელიც არ არის ამ მიმდევრობის არც ერთი წევრის ≈-ეკვივალენტური. ასეთი $\{n_i \; i\in N\}$ ელემენტის აგება კი

არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს, თუკი კანტორის დიაგონალური მეთოდის მსგავს მსჯელობას გამოვიყენებთ. სახელდობრ, ნებისმიერი $i \in N$ ინდექსისათვის განვსაზღვროთ

$$n_i = \max\{n_{ij} : j < i\} + 1.$$

მაშინ $\{n_i \quad i \in N\}$ აკმაყოფილებს მისდამი წაყენებულ მოთხოვნას. მართლაც, დავაფიქსიროთ $j \in N$ და განვიხილოთ $\{n_{ij} \quad i \in N\}$ ელემენტი. ჩვენი განსაზღვრის თანახმად, გვექნება $n_{ij} < n_i$ ნებისმიერი $i > j$ ნატურალური ინდექსისათვის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\{i \in N \quad n_{ij} = n_i\}$ სიმრავლე არის სასრული და, მაშასადამე, $\{i \in N : n_{ij} = n_i\} \in F$ დამოკიდებულება მცდარია, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა ავიღოთ $U = (\Pi\{N_i \quad i \in N\})/F$ სიმრავლის ნებისმიერი $u = [\{n_i \quad i \in N\}]$ ელემენტი და განვსაზღვროთ u' ელემენტი შემდეგი ტოლობის მეშვეობით:

$$u' = [\{n_i' : i \in N\}].$$

მარტივად მოწმდება, რომ ეს განსაზღვრა კორექტულია, ე.ი. დამოკიდებულია მხოლოდ u-ზე (და არა u-ს რომელიმე წარმომადგენელზე). ამრიგად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მთელ U-ზე განმარტებულია გარკვეული ′ უნარული ოპერაცია. ანალოგიურად U-ზე განისაზღვრება + და ოპერაციები. ბოლოს, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathbf{0} = [(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)]$$

და განვიხილოთ $(U, \mathbf{0}, ', +, \cdot)$ ხუთეული. ჩვენს უახლოეს მიზანს წარმოადგენს იმის ჩვენება, რომ თუ ამოსავალი F ფილტრი მაქსიმალურია (ე.ი. ულტრაფილტრია), მაშინ პეანოს არითმეტიკის ყველა ჭეშმარიტი ფორმულა სრულდება $(U, \mathbf{0}, ', +, \cdot)$ ალგებრული სისტემისთვისაც.

ფაქტობრივად, ოდნავ ქვემოთ დავადგენთ, რომ მართებულია შემდეგი დებულება.

ლემა 2. ვთქვათ, S არის პეანოს არითმეტიკის რაიმე წინადადება (ე.ი. S – ფორმულა, რომელიც თავისუფალ საგნობრივ ცვლადებს არ შეიცავს). მაშინ ეს წინადადება ჭეშმარიტია $(U,0,',+,\cdot)$ ალგებრული სისტემისათვის იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყველა $i\in N$ ინდექსთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც S ჭეშმარიტია $(N_i,\ 0_i,\ ',\ +,\ \cdot)$ ალგებრული სისტემისათვის, ეკუთვნის F ულტრაფილტრს.

უფრო ზუსტ ტერმინებში, $S([\{n_i \quad i\in N\}])$ სრულდება $(U,0,',+,\cdot)$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $i\in N$ ინდექსთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $S(n_i)$ სრულდება $(N_i,\ 0_i,\ ',\ +,\ \cdot)$-ში, ეკუთვნის F-ს.

დამტკიცება. ეს დებულება დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით. ინდუქცია ვაწარმოოთ S ფორმულაში შემავალი ¬, &, ∃ ლოგიკური ნიშნების საერთო რაოდენობის მიმართ.

თუ S-ს აქვს ორი ტერმის ტოლობის სახე (ე.ი. $u = v$ ან $u' = v$, ან $u + v = w$ და ა.შ.), მაშინ დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს $(U,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$ ალგებრული სისტემის განსაზღვრიდან.

დავუშვათ, რომ დებულების მართებულობა დადგენილია S-სათვის და განვიხილოთ S-ის უარყოფა. ინდუქციური დაშვების თანახმად, S შესრულებულია $(U,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იმ $i\in N$ ინდექსების სიმრავლე, რომლებისთვისაც S შესრულებულია $(N_i,\ 0_i,\ ',\ +,\ \cdot)$-ში, ეკუთვნის F ულტრაფილტრს. ეს გვაძლევს, რომ S არ სრულდება $(U,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$-ში (ანუ, ეკვივალენტურად, S-ის უარყოფა სრულდება $(U,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$-ში) იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ინდექსთა აღნიშნული სიმრავლე არ ეკუთვნის F-ს. ულტრაფილტრის ერთ-ერთი ძირითადი

თვისების თანახმად, ეს იმას ნიშნავს, რომ S-ის უარყოფა ჭეშმარიტია $(U, 0, ', +, \cdot)$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგივე უარყოფა ჭეშმარიტია ყველა იმ $(N_i, 0_i, ', +, \cdot)$-სათვის, რომელთა შესაბამისი $i \in N$ ინდექსების სიმრავლე F-ს ეკუთვნის.

ახლა ვთქვათ, S ფორმულას აქვს ორი ფორმულის კონიუნქციის სახე: $S_1 \& S_2$. ინდუქციური დაშვების თანახმად, S_k $(k = 1,2)$ სრულდება $(U, 0, ', +, \cdot)$-ში იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა I_k სიმრავლე ისეთი $i \in N$ ინდექსებისა, რომლებისთვისაც S_k სრულდება $(N_i, 0_i, ', +, \cdot)$-ში, ეკუთვნის F ულტრაფილტრს. აქედან ვღებულობთ, რომ $S_1 \& S_2$ ჭეშმარიტია $(U, 0, ', +, \cdot)$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $I_1 \cap I_2$ თანაკვეთა ეკუთვნის F-ს, ანუ როცა სიმრავლე იმ $i \in N$ ინდექსებისა, რომლებისთვისაც S ჭეშმარიტია $(N_i, 0_i, ', +, \cdot)$-ში, ეკუთვნის F-ს.

დაბოლოს, ვთქვათ, S ფორმულა იწყება არსებობის კვანტორით, ე.ი. მას აქვს შემდეგი სახე: $(\exists x)T(x)$. ცხადია, რომ $(\exists x)T(x)$ სრულდება $(U,0,',+,\cdot)$-ში იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს ისეთი $u \in U$ ელემენტი, რომ $T(u)$ სრულდება იმავე $(U,0,',+,\cdot)$-ში. შეგვიძლია დავწეროთ $u = [\{m_i \quad i \in N\}]$ და, ინდუქციური დაშვების თანახმად, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ სიმრავლე იმ $i \in N$ ინდექსებისა, რომელთათვისაც $T(m_i)$ ჭეშმარიტია $(N_i, 0_i, ', +, \cdot)$-ში, ეკუთვნის F ულტრაფილტრს. მაშასადამე, სიმრავლე იმ $i \in N$ ინდექსებისა, რომელთათვისაც მოცემული S ფორმულა სრულდება $(N_i, 0_i, ', +, \cdot)$-ში, ეკუთვნის F-ს.

ამით ლემა 2 მთლიანად დამტკიცებულია.

ცხადია, პეანოს არითმეტიკის ნებისმიერი ჭეშმარიტი წინადადება სრულდება მის სტანდარტულ $(N, 0, ', +, \cdot)$ მოდელში. ახლახან დამტკიცებული ლემის ძალით, პეანოს არითმეტიკის ყველა ჭეშმარიტი წინადადება სრულდება

$(U, 0, ', +, \cdot)$ ალგებრულ სისტემაშიც. ამრიგად, ეს ალგებრული სისტემა ფორმალური არითმეტიკის ერთ-ერთ მოდელს წარმოადგენს. ლემა 1-ის თანახმად, თუ F არატრივიალური ულტრაფილტრია, მაშინ U არათვლადი სიმრავლეა. ამიტომ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. ყოველი არატრივიალური F ულტრაფილტრის შემთხვევაში შესაბამისი $(U, 0, ', +, \cdot)$ ალგებრული სისტემა არის პეანოს არითმეტიკის არასტანდარტული მოდელი.

ბუნებრივია, ამ არასტანდარტულ მოდელში შეიმჩნევა ისეთი ფაქტებიც, რომლებიც არა გვაქვს $(N, 0, \ \ +, \cdot)$-ში. მივიყვანოთ ერთი ტიპიური მაგალითი.

მაგალითი 2. $(U, 0, ', +, \cdot)$ ალგებრულ სისტემაში კანონიკურად შეიძლება შემოტანილ იქნეს $\leq$ წრფივი დალაგების დამოკიდებულება. სახელდობრ,

$$[\{n_i : i\in N\}] \leq [\{m_i : i\in N\}]$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\{i\in N \ \ n_i \leq m_i\} \in F$ (იგივე წრფივი დალაგება U სიმრავლეში მიიღება შესაბამისი + ოპერაციის მეშვეობითაც). თურმე $(U,\leq)$ წრფივად დალაგებული სიმრავლე არ არის სავსებით დალაგებული. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ყოველი $k\in N$ ინდექსისათვის განვსაზღვროთ

$$u_k = [(0,0,0,\ldots,1,2,3,\ldots,n,\ldots)]$$

ელემენტი, სადაც 1 დგას $(k + 1)$-ე ადგილზე, და განვიხილოთ ამ ელემენტთა მიმდევრობა. ცხადია, გვაქვს

$$u_0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_k > \ldots,$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ U სიმრავლე არ არის სავსებით დალაგებული აღნიშნული ≤ მიმართებით.

მიუხედავად ამისა, მართებულია შემდეგი წინადადება.

თეორემა 2. ვთქვათ, T(x) არის პეანოს არითმეტიკის რაიმე ფორმულა (x თავისუფალი საგნობრივი ცვლადის შემცველი). მაშინ (U, 0, ′, +, ·) არასტანდარტულ მოდელში მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$(\exists x)T(x) \Rightarrow (\exists y)(T(y) \,\&\, (\forall z)(T(z) \Rightarrow y \leq z)).$$

დამტკიცება. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. $(\exists x)T(x)$ და $(\forall y)(T(y) \Rightarrow (\exists z)(T(z) \,\&\, z < y))$. განვიხილოთ შემდეგი ფორმულა $T^*(x)$:

$$(\forall y)(y \leq x \Rightarrow \neg T(y)).$$

პეანოს არითმეტიკის (ზ) აქსიომის უშუალო გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ $(\forall x)T^*(x)$, საიდანაც კერძოდ გამომდინარეობს, რომ $(\forall x)\neg T(x)$, რაც ეწინააღმდეგება $(\exists x)T(x)$ დაშვებას. ამრიგად,

$$(\exists x)T(x) \Rightarrow (\exists y)(T(y) \,\&\, (\forall z)(T(z) \Rightarrow y \leq z))$$

ფორმულა არის პეანოს არითმეტიკის თეორემა. დაბოლოს, რადგან (U, 0, ′, +, ·) წარმოადგენს პეანოს არითმეტიკის მოდელს, იგივე ფორმულა მართებულია (U, 0, ′, +, ·)-შიც.

ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ ≤ წრფივი დალაგების მიმართება (U, 0, ′, +, ·) ულტრანამრავლში თავისი თვისებებით მაინც საკმაოდ ახლოს არის სავსებით დალაგების მიმართებასთან. მართლაც, თუკი შევიზღუდებით U საბაზისო სიმრავლის მხოლოდ იმ არაცარიელი ქვესიმრავლეების

განხილვით, რომლებიც გარკვეული გაგებით პეანოს არითმეტიკის ფორმულებს შეესაბამებიან, მაშინ ყოველ ასეთ ქვესიმრავლეში აუცილებლად იქნება უმცირესი ელემენტი ≤ დალაგების მიმართ.

აქვე გავაკეთოთ ისტორიული ხასიათის შენიშვნა იმის თაობაზე, რომ ფორმალური არითმეტიკის არასტანდარტული მოდელი 1934 წელს პირველად ააგო ნორვეგიელმა მათემატიკოსმა თ. სკოლემმა (T. Skolem). მეოცე საუკუნის 60-იან წლებში ამერიკელმა მათემატიკოსმა ა. რობინსონმა (A. Robinson) განავითარა ე.წ. არასტანდარტული ანალიზი, რომელზედაც ამ წიგნის მეორე ნაწილში გვექნება საუბარი.

§9-ის სავარჯიშოები

1. ძალზე ხშირად მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის (როგორც პეანოს არითმეტიკის აქსიომათა სქემის) სანაცვლოდ პოსტულირებას უკეთებენ იმ ფაქტს, რომ ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე სავსებით დალაგებულია ჩვეულებრივი დალაგების დამოკიდებულებით. ელემენტარული მათემატიკის ზოგიერთ სახელმძღვანელოში კიდევაც "ამტკიცებენ" მათემატიკური ინდუქციის პრინციპისა და აღნიშნული პოსტულატის ეკვივალენტურობას. მეორე მხრივ, უკვე დაეინახეთ, რომ პეანოს არითმეტიკის ზოგიერთ მოდელში სავსებით დალაგების პოსტულატს ადგილი არა აქვს. შეეცადეთ ახსნათ ეს მოჩვენებითი პარადოქსი (ანტინომია).

2*. გაავრცელეთ ამ პარაგრაფში მოყვანილი მსჯელობა ნებისმიერი (მაგრამ ფიქსირებული) ტიპის ალგებრულ სისტემებზე, განსაზღვრეთ ასეთი ალგებრული სისტემების ოჯახის ნამრავლი, ულტრანამრავლი და დაამტკიცეთ ლოსის ზოგადი თეორემა იმის შესახებ, რომ ყოველი წინადადება მართებულია ულტრანამრავლში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იმ ინდექსების სიმრავლე, რომლებისთვისაც ეს

წინადადება მართებულია შესაბამის ალგებრულ სისტემაში, ამოსავალ ულტრაფილტრს ეკუთვნის.

ამ სავარჯიშოსთან დაკავშირებით გავაკეთოთ რამდენიმე არსებითი შენიშვნა.

ვთქვათ, გვაქვს L პირველი რიგის მათემატიკური თეორია. ამ თეორიის ორ მოდელს ელემენტარულად ეკვივალენტური ეწოდება, თუ L-ის ნებისმიერი წინადადება ჭეშმარიტია პირველ მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ჭეშმარიტია მეორე მოდელში. ლოსის თეორემა გვიჩვენებს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს L-ის მოდელი, იგი ელემენტარულად ეკვივალენტურია თავისი ნებისმიერი ულტრახარისხისა. ცნობილმა მათემატიკოსმა და ლოგიკოსმა ს. შელახმა დაამტკიცა საკმაოდ ღრმა (გარკვეული გაგებით, შებრუნებული) თეორემა, რომელიც ამბობს, რომ თუ L-ის ორი მოდელი ელემენტარულად ეკვივალენტურია, მაშინ აუცილებლად მოიძებნება მათი ულტრახარისხები, რომლებიც ერთმანეთის იზომორფულია (იხ. [52]).

3*. მოცემულ (არაწინააღმდეგობრივ) ფორმალურ თეორიას კატეგორიული ეწოდება, თუ მისი ყველა შესაძლო მოდელი ერთმანეთის იზომორფულია.

ამ პარაგრაფში აღწერილი ულტრაფილტრების ტექნიკის მეშვეობით და ლემა 1-ის დამტკიცების მსგავსი მსჯელობით აჩვენეთ, რომ თუ L პირველი რიგის თეორიას ერთი მაინც M უსასრულო მოდელი გააჩნია, მაშინ იგივე L-ს აქვს M′ მოდელიც, რომლის სიმძლავრე მკაცრად მეტია, ვიდრე M-ის სიმძლავრე. მაშასადამე, ასეთი L თეორია აპრიორი ვერ იქნება კატეგორიული (ამასთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 32).

4*. ულტრაფილტრების ტექნიკის გამოყენებით დაამტკიცეთ მათემატიკური ლოგიკის ერთ-ერთი ძირითადი დებულება, ე.წ. კომპაქტურობის თეორემა, რომელიც კ. გიოდელსა და ა. მალცევს ეკუთვნის:

თუ მოცემული პირველი რიგის თეორიის წინადადებათა L ერთობლიობის ყოველ სასრულ ქვეერთობლიობას აქვს მოდელი, მაშინ მთელ L ერთობლიობასაც აქვს მოდელი.

მსჯელობა ჩაატარეთ შემდეგი სქემის მიხედვით. ვთქვათ, $L = \{S_j : j \in J\}$ და Fin(J) აღნიშნავს J სიმრავლის ყველა სასრულ ნაწილთა სიმრავლეს. განიხილეთ $\{M_A \quad A \in \mathrm{Fin}(J)\}$ ოჯახი, სადაც M_A არის $\{S_j : j \in A\}$ ფორმულათა სასრული სიმრავლის მოდელი. ყოველი $A \in \mathrm{Fin}(J)$ სიმრავლისათვის შემოიღეთ აღნიშვნა

$$Z(A) = \{B \in \mathrm{Fin}(J) : A \subset B\}$$

და აჩვენეთ, რომ $\{Z(A) \quad A \in \mathrm{Fin}(J)\}$ სიმრავლეთა ოჯახი წარმოქმნის ფილტრს Fin(J) სიმრავლეში. გააფართოვეთ ეს ფილტრი ულტრაფილტრამდე, განიხილეთ $\{M_A : A \in \mathrm{Fin}(J)\}$ ოჯახის შესაბამისი ულტრანამრავლი და სწორედ ამ ულტრანამრავლისათვის გამოიყენეთ ლოსის ზოგადი თეორემა.

წინა სავარჯიშოსთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 33.

5*. კარგადაა ცნობილი, რომ ჯგუფთა პირველი რიგის თეორია (ანალოგიურად, კომუტატიურ ჯგუფთა თეორია, ველთა თეორია და ა.შ.) მოიცემა სასრული რაოდენობა აქსიომებით (გაიხსენეთ ის აქსიომები). მეორე მხრივ, კომპაქტურობის თეორემიდან გამომდინარე, დაასაბუთეთ, რომ არ არსებობს ჯგუფთა პირველი რიგის თეორიის გაფართოება, რომელიც ზუსტად სასრულ ჯგუფთა პირველი რიგის თეორიას წარმოადგენს. იგივე აჩვენეთ ულტრანამრავლების ტექნიკის უშუალო გამოყენებით.

6*. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ჯგუფი, რომელშიც გვაქვს რაგინდ მაღალი რიგის ელემენტები, ელემენტარულად ეკვივალენტურია გარკვეული ჯგუფისა, რომელშიც არსებობს უსასრულო რიგის ელემენტი.

7. ვთქვათ, $\mathbf{a}$ არის რაიმე კარდინალური რიცხვი. ამბობენ, რომ მოცემული პირველი რიგის თეორია $\mathbf{a}$-კატეგორიულია, თუ ამ თეორიისათვის არსებობს $\mathbf{a}$ სიმძლავრის მქონე მოდელი და, გარდა ამისა, თეორიის ნებისმიერი ორი მოდელი, რომელთა სიმძლავრეები $\mathbf{a}$-ს უდრის, ერთმანეთის იზომორფულია.

აჩვენეთ, რომ ყოველი სასრული $\mathbf{a}$ კარდინალისათვის არსებობს $\mathbf{a}$-კატეგორიული პირველი რიგის თეორია. იგივე აჩვენეთ იმ შემთხვევაშიც, როცა $\mathbf{a} = \mathrm{card}(N)$. (განიხილეთ სასრული წრფივად დალაგებული სიმრავლეები და, აგრეთვე, გამოიყენეთ §5-ის სავარჯიშო 10).

წარმოდგენილ შედეგთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 34.

8*. ვთქვათ, მოცემულია L პირველი რიგის თეორია, რომლისთვისაც $\mathrm{card}(L) = \mathbf{a}$, სადაც $\mathbf{a}$ უსასრულო კარდინალური რიცხვია. დავუშვათ, რომ L-ს აქვს შემდეგი ორი თვისება:

(ა) არსებობს ერთი მაინც $\mathbf{b}$ კარდინალი ისეთი, რომ $\mathbf{b} \geq \mathbf{a}$ და L თეორიის $\mathbf{b}$ სიმძლავრის მქონე ნებისმიერი ორი მოდელი ელემენტარულად ეკვივალენტურია (მაგალითად, ეს პირობა ავტომატურად შესრულებულია, როცა L თეორია არის $\mathbf{b}$-კატეგორიული);

(ბ) L-ს არ გააჩნია სასრული მოდელები.

დაამტკიცეთ, რომ მაშინ L თეორია არის სრული, რაც ნიშნავს, რომ ამ თეორიის ნებისმიერი წინადადება ან თავად არის მართებული, ან მართებულია მისი უარყოფა.

მოყვანილი შედეგი ეკუთვნის რ. ვოოტს (R. Vaught).

9. პეანოს არითმეტიკის (U, 0, +, ·) არასტანდარტულ მოდელში განვიხილოთ

$$z = [(0,1,2,\ldots,n,\ldots)]$$

ელემენტი. შეამოწმეთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $k \in N$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$[(k,k,k,\ldots,k,\ldots)] < z\,.$$

შეამოწმეთ აგრეთვე, რომ

$$e(k) = [(k,k,k,\ldots,k,\ldots)]$$

ფორმულით მოცემული $e \quad N \to U$ გადასახვა წარმოადგენს ინიექციურ ჰომომორფიზმს $(N,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$ სტანდარტული მოდელიდან $(U,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$ არასტანდარტულ მოდელში. მაშასადამე, ეს ბოლო მოდელი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სტანდარტული მოდელის გარკვეული (ცხადია, საკუთრივი) გაფართოება. ამბობენ, რომ e მონომორფიზმი არის პირველი მოდელის ელემენტარული ჩადგმა (elementary embedding) მეორე მოდელში. როგორც წესი, N და $e(N)$ სიმრავლეებს ერთმანეთთან აიგივებენ, ხოლო z ელემენტს, ჩვეულებრივ, განიხილავენ როგორც ერთ-ერთ "უსასრულოდ დიდ ნატურალურ რიცხვს".

აჩვენეთ, რომ პეანოს არითმეტიკის ამ პარაგრაფში მოყვანილ არასტანდარტულ მოდელში "უსასრულოდ დიდ ნატურალურ რიცხვთა" სიმრაველე არათვლადია.

საზოგადოდ, პეანოს არითმეტიკის რაიმე მოდელის z ელემენტს არასტანდარტული (ან უსასრულოდ დიდი) ეწოდება, თუ მისთვის სრულდება

$$z \neq 0,\ z \neq 1,\ z \neq 2,\ \ldots,\ z \neq n,\ \ldots$$

ფორმულები (აღნიშნულ მოდელში).

ამ სავარჯიშოსთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე კომენტარი 35.

10*. აჩვენეთ, რომ თუ რაიმე M მოდელი არის სასრული, მაშინ მის ნებისმიერ ულტრახარისხს (ულტრაფილტრის შერჩევის მიუხედავად) აქვს იგივე სიმძლავრე, რაც M-ს. (გამოიყენეთ ლოსის თეორემა იმ ფორმულისადმი, რომელიც მოდელის სასრულ სიმძლავრეს გამოხატავს.)

მეორე მხრივ, ვთქვათ, მოცემულია არაცარიელ სასრულ სიმრავლეთა $\{M_i\ \ i\in N\}$ მიმდევრობა და დავუშვათ, რომ ყოველი k ნატურალური რიცხვისათვის ამ მიმდევრობაში გვაქვს მხოლოდ სასრული რაოდენობა ისეთი სიმრავლეებისა, რომელთა სიმძლაერე k-ს არ აღემატება. გარდა ამისა, ვთქვათ, F არის N-ის ფრეშეს ფილტრის შემცველი რომელიმე ფილტრი N-ში. განვიხილოთ $U = (\Pi\{M_i : i\in N\})/F$ ნამრავლი F ფილტრის მოდულით.

დაამტკიცეთ, რომ U სიმრავლის სიმძლაერე კონტინუუმის სიმძლავრის ტოლია.

ეს შედეგი ეკუთვნის პ. ჰალმოშსა (P. Halmos) და ს. კოჩენს (S. Kochen).

გამოიყვანეთ აქედან, რომ:

(ა) თუ $N_i = N$ ყოველი i ნატურალური ინდექსისათვის, მაშინ $(\Pi\{N_i\ \ i\in N\})/F$ სიმრაელის სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრის ტოლია;

(ბ) თუ მოცემულ თეორიას აქვს რაგინდ დიდი სასრული სიმძლავრის მქონე მოდელი, მაშინ მას აქვს ისეთი მოდელიც, რომლის სიმძლაერე კონტინუუმის სიმძლავრეს უდრის (კერძოდ, ამ თეორიას აქვს უსასრულო მოდელი).

ZF თეორიის ჩარჩოებში დაამტკიცეთ, რომ არსებობს N-ის ქვესიმრავლეთა თითქმის დიზიუნქტური ოჯახი, რომლის სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრის ტოლია (ვ. სერპინსკის შედეგი).

11*. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე X უსასრულო სიმრავლე და $\{X_i\ \ i\in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახი, სადაც ინდექსთა I სიმრავლე აგრეთვე უსასრულოა და $X_i = X$ ყოველი $i\in I$ ინდექსისათვის. შემოვიღოთ აღნიშვნა: a = card(I). როგორც ვიცით, I

სიმრავლის ბულეანში არსებობს a-რეგულარული F ფილტრი (იხ. §8-ის სავარჯიშო 9).

დაამტკიცეთ, რომ

$$\mathrm{card}((\Pi\{X_i : i\in I\})/F) = (\mathrm{card}(X))^{a}.$$

მსჯელობა ჩაატარეთ შემდეგი სქემის მიხედვით.

პირველ რიგში, აღნიშნეთ Y სიმბოლოთი X სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა სასრულ მიმდევრობათა სიმრავლე და გაიხსენეთ, რომ card(Y) = card(X) (იხ. §7-ის სავარჯიშო 9). ამიტომ სასურველი შედეგის მისაღებად საკმარისია აგებულ იქნეს ერთი მაინც

$$H : X^{D} \rightarrow (\Pi\{Y_i : i\in I\})/F$$

ინიექციური ფუნქცია, სადაც $Y_i = Y$ ყოველი $i\in I$ ინდექსისათვის, F არის a-რეგულარული ფილტრი I-ში, ხოლო D არის F ფილტრის a სიმძლავრის მქონე ნაწილი, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ I-ს ყოველი ელემენტი ეკუთვნის D-დან აღებულ სიმრავლეთა მხოლოდ სასრულ რაოდენობას.

ახლა D-ზე დააფიქსირეთ რაიმე ≤ წრფივი დალაგება და განიხილეთ ნებისმიერი $g : D \rightarrow X$ გადასახვა. თქვენი მიზანია ააგოთ გარკვეული $g' : I \rightarrow Y$ ფუნქცია, რომელიც უშუალოდაა დაკავშირებული g-სთან. ამისათვის აიღეთ ნებისმიერი $i\in I$ ელემენტი და ყველა ის

$$P_1 < P_2 < \ldots < P_k$$

სიმრავლე D-დან, რომლებიც ამ i ელემენტს შეიცავენ. განსაზღვრეთ $g'(i)$ მნიშვნელობა შემდეგი ფორმულით:

$$g'(i) = (g(P_1), g(P_2), \ldots, g(P_k)) \in Y.$$

მაშასადამე, i-ს ნებისმიერობის გამო, g' ფუნქცია მოცემული იქნება მთელ I სიმრავლეზე. დაბოლოს, შეამოწმეთ, რომ თუ $f: D \to X$ და $g \neq f$, მაშინ $[g'] \neq [f']$.

ამრიგად, H ფუნქცია, განსაზღვრული $H(g) = [g']$ ფორმულით, არის ინიექცია, რაც პირდაპირ იძლევა სასურველ შედეგს.

ზემონათქვამის გათვალისწინებით გააკეთეთ დასკვნა, რომ ყოველ უსასრულო მოდელს აქვს რაგინდ დიდი სიმძლავრის მქონე ულტრახარისხები.

გამოიყვანეთ აქედან, რომ თუ L პირველი რიგის თეორიას ერთი მაინც M უსასრულო მოდელი აქვს, მაშინ იმავე თეორიისათვის არსებობს რაგინდ დიდი სიმძლავრის მქონე M' მოდელიც, თანაც M'-ის როლში შეიძლება აღებულ იქნეს M-ის გარკვეული ელემენტარული გაფართოება (ცხადია, ეს შედეგი საგრძნობლად აძლიერებს ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 3-ში მოყვანილ შედეგს).

ბოლო ორ სავარჯიშოში განხილული საკითხები ფაქტობრივად მიეკუთვნება უსასრულო კომბინატორიკის ერთ-ერთ ძალზე მნიშვნელოვან თემატიკას, რომელიც უსასრულო სიმრავლეებში სხვადასხვა ტიპის ფილტრების (ან იდეალების) შინაგანი სტრუქტურის შესწავლას გულისხმობს. ასეთ საკითხებს ჩვენ მომავალშიც დავუბრუნდებით, თანაც იმ გაცილებით უფრო საინტერესო სიტუაციებში, როცა ამოსავალ არატრივიალურ F ულტრაფილტრს გარკვეული დამატებითი თვისებები აქვს (იხ. ამ წიგნის მეორე ნაწილი).

§10. კომბინატორიკის ზოგიერთი ფაქტი. ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულა. ჰოლის თეორემა. დილუორსის თეორემა. კიონიგის ლემა. ბერნსაიდის ლემა

ამ პარაგრაფში გვინდა განვიხილოთ სასრული და უსასრულო კომბინატორიკის რამდენიმე ძირითადი დებულება და ვაჩვენოთ მათი გამოყენება პრაქტიკული ხასიათის ამოცანებში. როგორც უკვე ითქვა, კომბინატორიკის საკითხებს (განსაკუთრებით კი, უსასრულო კომბინატორიკის თემატიკას) ამ წიგნის მეორე ნაწილშიც შევეხებით და დავინახავთ, რომ მათ ძალზე ხშირად გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვთ ამა თუ იმ საკმაოდ რთული მათემატიკური პრობლემის გადაჭრაში.

დავიწყოთ ყველაზე მარტივი ცნებებით სასრული კომბინატორიკიდან. ვთქვათ, m და n მოცემული ნატურალური რიცხვებია. მაშინ ცხადია, რომ ფიქსირებული m-ელემენტიანი სიმრავლის ფიქსირებულ n-ელემენტიან სიმრავლეში ყველა შესაძლო გადასახვათა რაოდენობა უდრის n^m-ს. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $m \le n$. ფართოდაა ცნობილი შემდეგი კომბინატორული სიდიდეები:

A_n^m – ფიქსირებული m-ელემენტიანი სიმრავლის ფიქსირებულ n-ელემენტიან სიმრავლეში ყველა შესაძლო ინიექციურ ფუნქციათა სიმრავლის სიმძლავრე;

P_n – ფიქსირებული n-ელემენტიანი სიმრავლის თავისთავზე ყველა შესაძლო ბიექციათა (ე.ი. გადანაცვლებათა) სიმრავლის სიმძლავრე (სრულიად ნათელია, რომ $P_n = A_n^n$);

C_n^m – ფიქსირებული n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m-ელემენტიან ნაწილთა სიმრავლის სიმძლავრე.

ადვილი დასანახია, რომ ამ განსაზღვრებებით მოცემული სიდიდეები არ არის დამოკიდებული m-ელემენტიანი და n-ელემენტიანი სიმრავლეების შერჩევაზე. აქვე შევნიშნოთ, რომ A_n^m სიდიდე შეიძლება ეკვივალენტურად განვსაზღვროთ როგორც ფიქსირებული m-ელემენტიანი წრფივად დალაგებული სიმრავლის ფიქსირებულ n-ელემენტიან წრფივად დალაგებულ სიმრავლეში ყველა შესაძლო მონომორფიზმების სიმრავლის სიმძლავრე.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ A_n^m და C_n^m სიდიდეების განსაზღვრაში შეგვიძლია არ მოვითხოვოთ $m \leq n$ უტოლობის შესრულება. როცა $m > n$, მაშინ ცხადია, რომ $A_n^m = C_n^m = 0$.

მოვიყვანოთ ზემოთ ჩამოთვლილ სიდიდეებთან დაკავშირებული ზოგიერთი მარტივი ფორმულა. პირველ რიგში გავიხსენოთ, რომ $n!$ სიმბოლო აღნიშნავს $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ ნამრავლს. კერძოდ,

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120,$$

თეორემა 1. ყოველი ორი m და n ნატურალური რიცხვისათვის, სადაც $m \leq n$, ადგილი აქვს $A_n^m = n!/(n-m)!$ ტოლობას.

დამტკიცება. მსჯელობა ჩავატაროთ ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. ის შემთხვევა, როცა $n = 0$, ტრივიალურია. ვთქვათ, n არის ნატურალური რიცხვი და დავუშვათ, რომ ფორმულირებული დებულება სამართლიანია ყველა $m \leq n$ ნატურალური რიცხვისათვის. ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-სათვის და ყველა $m \leq n+1$ ნატურალური რიცხვისათვის. ამისათვის ინდუქცია ვაწარმოოთ უკვე m-ის მიმართ. როცა $m = 0$, დასამტკიცებელ ტოლობას აქვს სახე $1 = 1$. ახლა დავუშვათ, რომ $A_{n+1}^m = (n+1)!/((n+1)-m)!$ და

$m + 1 \leq n + 1$. ცხადია, ბოლო უტოლობა ეკვივალენტურია $m \leq n$ უტოლობისა. განვიხილოთ რომელიმე $(m + 1)$-ელემენტიანი X სიმრავლე და რომელიმე $(n+1)$-ელემენტიანი Y სიმრავლე. დავაფიქსიროთ X სიმრავლის რაიმე x ელემენტი. ვინაიდან ყოველი f ინიექციური ფუნქცია X-დან Y-ში სავსებით განისაზღვრება $f(x)$ ელემენტითა და რომელიღაც ინიექციური ფუნქციით $X \setminus \{x\}$ სიმრავლიდან $Y \setminus \{f(x)\}$ სიმრავლეში, ამიტომ გვექნება

$$A_{n+1}^{m+1} = (n+1) A_n^m = (n+1)!/((n+1)-(m+1))!,$$

რაც ამტკიცებს თეორემა 1-ს.

გაცილებით უფრო ძნელ ამოცანას წარმოადგენს ფიქსირებული n-ელემენტიანი სიმრავლის ფიქსირებულ m-ელემენტიან სიმრავლეზე ყველა შესაძლო სიურიექციულ ფუნქციათა რაოდენობის დადგენა (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 4).

ახლახან დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 2. ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის გვაქვს $P_n = n!$ ტოლობა. ამრიგად, n-ელემენტიანი X სიმრავლის Sym(X) სიმეტრიული ჯგუფის სიმძლავრეა $n!$.

დამტკიცება. მართლაც, საკმარისია თეორემა 1-ში გამოვყოთ ის შემთხვევა, როცა $m = n$.

თეორემა 3. ყოველი ორი m და n ნატურალური რიცხვისათვის, სადაც $m \leq n$, ადგილი აქვს $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$ ტოლობას.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ რომელიმე X და Y ორი ისეთი სიმრავლე, რომ card(X) = m და card(Y) = n. აღვნიშნოთ In(X,Y) სიმბოლოთი X-დან Y-ში ყველა შესაძლო ინიექციურ ფუნქციათა სიმრავლე. ამ სიმრავლეში განვიხილოთ ≈ ეკვივალენტობის დამოკიდებულება: f ≈ g მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა გვაქვს ran(f) = ran(g) ტოლობა. ადვილად მოწმდება, რომ წარმოქმნილი ეკვივალენტობის კლასების რაოდენობა ზუსტად C_n^m სიდიდის ტოლია, ხოლო თითოეული ასეთი კლასის სიმძლავრე არის P_m. თეორემა 1-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\mathrm{card}(\mathrm{In}(X,Y)) = A_n^m = C_n^m P_m,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C_n^m = A_n^m / P_m = n!/(m!(n-m)!)$. ამით თეორემა 3 დამტკიცებულია.

წინა თეორემის უშუალო შედეგის სახით გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m$$

თუმცა აქვე უნდა ითქვას, რომ ამ ფორმულების გამოყვანა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს C_n^m სიდიდეების გამოთვლის გარეშეც, უბრალოდ წმინდა კომბინატორული მოსაზრებებიდან გამომდინარე. ასევე არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ ფიქსირებული n-სათვის C_n^m სიდიდეებს შორის ($m = 0, 1, \quad , n$) უდიდესი მნიშვნელობა აქვს C_n^k-ს, სადაც $k = [n/2]$ (ე.ი. k არის n/2 რიცხვის მთელი ნაწილი).

ზემოთ მოყვანილ მარტივ კომბინატორულ შედეგებთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 36.

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა რაიმე F ოჯახი, რომელიც ჩაკეტილია თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციების მიმართ. გარდა ამისა, ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $h : F \to R$ გადასახვა. ვიტყვით, რომ h არის ადიტიური ფუნქცია, თუ

$$h(A \cap B) + h(A \cup B) = h(A) + h(B)$$

ყოველი ორი A და B სიმრავლისათვის F-დან.

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ მოცემული F ოჯახის ყველა წევრი სასრული სიმრავლეა, და განვსაზღვროთ h ფუნქცია შემდეგი ფორმულით:

$$h(A) = \mathrm{card}(A) \quad (A \in F).$$

ამით მივიღებთ ადიტიურ h ფუნქციას. ცხადია, ეს მაგალითი წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ხასიათისაა. ელემენტარული გეომეტრია აგრეთვე გვაძლევს ადიტიური ფუნქციების მნიშვნელოვან მაგალითებს. კერძოდ, თუ F აღნიშნავს ევკლიდურ სიბრტყეზე მდებარე ყველა მრავალკუთხედთა ოჯახს და ყოველი $M \in F$ მრავალკუთხედისათვის s(M) არის M-ის ფართობი, მაშინ აგრეთვე ვღებულობთ s ადიტიურ ფუნქციას.

ადიტიური ფუნქციები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ მათემატიკის სხვადასხვა დარგში. კომბინატორიკის საკითხებში კი ადიტიურ ფუნქციებთან დაკავშირებით პირველ რიგში ხაზი უნდა გაესვას ე.წ. ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის დიდ მნიშვნელობას. სანამ ამ ფორმულას მოვიყვანთ და დავამტკიცებთ, შევთანხმდეთ ზოგიერთ აღნიშვნაზე.

ვთქვათ, მოცემულია $\{A_1, A_2, \quad , A_n\}$ სიმრავლეთა სასრული ოჯახი. ყოველი $k > 0$ ნატურალური რიცხვისათვის,

რომელიც n-ს არ აღემატება, S_k იყოს ამ ოჯახის ყველა შესაძლო k-ელემენტიან ქვეოჯახთა თანაკვეთების სიმრავლე.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 4. ვთქვათ, h $F \to \mathbf{R}$ არის ნებისმიერი ადიტიური ფუნქცია და $\{A_1, A_2, \quad , A_n\} \subset F$. მაშინ ადგილი აქვს ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულას:

$$h(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\{h(X) : X \in S_1\} - \sum\{h(X) : X \in S_2\} +$$

$$\sum\{h(X) : X \in S_3) - \sum\{h(X) : X \in S_4) +$$

დამტკიცება. მსჯელობა ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით (n-ის მიმართ). როცა n = 0,1,2, მაშინ ფორმულის მართებულობა ცხადია. ახლა დავუშვათ მისი მართებულობა n-სათვის და დავამტკიცოთ იგი (n + 1)-სათვის. განვიხილოთ $\{A_1, A_2, \ldots \quad , A_n, A_{n+1}\} \subset F$ სიმრავლეთა ოჯახი და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

მოცემული h ფუნქციის ადიტიურობის გამო, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$h(B \cup A_{n+1}) = h(B) + h(A_{n+1}) - h(B \cap A_{n+1}).$$

ბოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეს გვაქვს

$$h(B) = h(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

და, ამავე დროს,

$$h(B \cap A_{n+1}) = h((A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})).$$

გამოვიყენოთ ინდუქციური დაშვება

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\},$$

$$\{A_1 \cap A_{n+1}, A_2 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}\}$$

სიმრავლეთა ორი n-ელემენტიანი ოჯახის მიმართ. მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის სამართლიანობას (n+1)-სთვისაც. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2. ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის განვიხილოთ მასზე ნაკლები ყველა ის ნატურალური რიცხვი, რომელიც n-თან თანამარტივია. ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვღებულობთ, რომ ასეთი რიცხვების φ(n) რაოდენობა

$$n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\ldots(1 - 1/p_k)$$

ნამრავლის ტოლია, სადაც $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული, n-ის გამყოფი ყველა მარტივი რიცხვია. თუ n თავადაა მარტივი, მაშინ აღნიშნული რაოდენობა (n − 1)-ის ტოლია, რაც ისედაც ცხადია.

რიცხვთა კლასიკურ თეორიაში φ ფუნქციას ეილერის ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითი 3. განვიხილოთ n-ელემენტიანი X სიმრავლის ყველა ის f გადანაცვლება, რომელიც X-ის არც ერთ ელემენტს უძრავად არ ტოვებს, ე.ი. $f(x) \neq x$ $(x \in X)$. აღვნიშნოთ ასეთი f გადანაცვლებების რაოდენობა I_n სიმბოლოთი. იმავე ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის მეშვეობით ვღებულობთ, რომ

$$I_n = n!(1/0! - 1/1! + 1/2! - \ldots + (-1)^n/n!).$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეს ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულების ზღვარი, როცა n მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, უდრის (1/e)-ს, სადაც e ნეპერის რიცხვია. ამიტომ, საკმარისად დიდი ნატურალური n რიცხვებისათვის I_n გამოსახულება იმავე რიგის სიდიდეა, რაც $n!/e$ გამოსახულება.

ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის უამრავი სხვა გამოყენებაც არსებობს (იხ. კომენტარი 37).

ახლა დავამტკიცოთ ძალზე მნიშვნელოვანი თეორემა სიმრავლეთა წარმომადგენლების შესახებ, რომელიც ინგლისელ მათემატიკოს ფ. ჰოლს (Ph. Hall) ეკუთვნის. ეს თეორემა მულტი-ფუნქციების ტერმინებში ჩამოვაყალიბოთ (იხ. §4).

თეორემა 5 (ჰოლი). ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი ორი სასრული X და Y სიმრავლე და $H : X \to P(Y)$ მულტი-ფუნქცია. შემდეგი ორი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) არსებობს $h : X \to Y$ ინიექციური ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის $h(x) \in H(x)$ (ანუ h ფუნქცია არის H მულტი-ფუნქციის ინიექციური სელექტორი);

(ბ) როგორიც არ უნდა იყოს X-ის X' ქვესიმრავლე, ადგილი აქვს $\mathrm{card}(X') \le \mathrm{card}(\cup\{H(x) : x \in X'\})$ უტოლობას.

დამტკიცება. ნათლად ჩანს, რომ (ა) წინადადებიდან გამომდინარეობს (ბ) წინადადება. ამიტომ საკმარისია მხოლოდ იმის ჩვენება, რომ (ბ) წინადადებიდან გამომდინარეობს (ა) წინადადება. აღვნიშნოთ Gr(H)-ით H მულტი-ფუნქციის გრაფიკი და მსჯელობა წარვმართოთ ინდუქციის მეთოდით Gr(H)-ის სიმძლავრის მიმართ. დავუშვათ, რომ მოცემული H-სათვის (ბ) წინადადება შესრულებულია. თუ ყველა $x \in X$ ელემენტისათვის გვაქვს $\mathrm{card}(H(x)) = 1$, მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია, რადგან ამ შემთხვევაში უშუალოდ ვღებულობთ სასურველ h ინიექციურ

ფუნქციას X-დან Y-ში. ამიტომ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა არსებობს ერთი მაინც $a \in X$, რომლისთვისაც $\mathrm{card}(H(a)) > 1$, ანუ მოიძებნება Y სიმრავლის ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული y' და y'' ისეთი ელემენტი, რომ $y' \in H(a)$ და $y'' \in H(a)$. ამის შემდეგ განვსაზღვროთ ორი ახალი

$$H' : X \to P(Y), \quad H'' : X \to P(Y)$$

მულტი-ფუნქცია შემდეგი ფორმულების მეშვეობით:

$$H'(x) = H(x), \text{ თუ } x \neq a \text{ და } H'(x) = H(x) \setminus \{y'\}, \text{ თუ } x = a;$$

$$H''(x) = H(x), \text{ თუ } x \neq a \text{ და } H''(x) = H(x) \setminus \{y''\}, \text{ თუ } x = a.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ორი ახალი მულტი-ფუნქციიდან ერთი მაინც აკმაყოფილებს (ბ) პირობის შესაბამის ანალოგს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ არსებობს $X \setminus \{a\}$ სიმრავლის ორი X' და X'' ქვესიმრავლე, რომლებისთვისაც გვექნება უტოლობები:

$$\mathrm{card}(H'(\{a\} \cup X')) < \mathrm{card}(X') + 1,$$

$$\mathrm{card}(H''(\{a\} \cup X'')) < \mathrm{card}(X'') + 1,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\mathrm{card}(H'(\{a\} \cup X')) \leq \mathrm{card}(X'),$$

$$\mathrm{card}(H''(\{a\} \cup X'')) \leq \mathrm{card}(X'').$$

ადვილად მოწმდება, რომ

$$H(\{a\} \cup X' \cup X'') = H'(\{a\} \cup X') \cup H''(\{a\} \cup X''),$$

$$H(X'\cap X'') \subset H'(\{a\}\cup X') \cap H''(\{a\}\cup X'').$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$1 + \mathrm{card}(X'\cup X'') + \mathrm{card}(X'\cap X'') \le \mathrm{card}(H(\{a\}\cup X'\cup X''))$$

$$+ \mathrm{card}(H(X'\cap X'')) \le \mathrm{card}(H'(\{a\}\cup X') \cup H''(\{a\}\cup X'')) +$$

$$\mathrm{card}(H'(\{a\}\cup X') \cap H''(\{a\}\cup X'')) =$$

$$\mathrm{card}(H'(\{a\}\cup X')) + \mathrm{card}(H''(\{a\}\cup X'')) \le \mathrm{card}(X') + \mathrm{card}(X''),$$

რაც, $\mathrm{card}(X'\cup X'') + \mathrm{card}(X'\cap X'') = \mathrm{card}(X') + \mathrm{card}(X'')$ ტოლობის გამო (ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის უმარტივესი შემთხვევა!), აშკარა წინააღმდეგობას იძლევა. ამრიგად, ან H', ან H'' აკმაყოფილებს (ბ) პირობის შესაბამის ანალოგს და შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინდუქციური დაშვება, ვინაიდან

$$\mathrm{card}(Gr(H')) < \mathrm{card}(Gr(H)), \quad \mathrm{card}(Gr(H'')) < \mathrm{card}(Gr(H)).$$

საბოლოოდ ცხადია, რომ ჩვენი ინდუქციური დაშვებით გარანტირებული $h \quad X \to Y$ ინიექციური ფუნქცია დააკმაყოფილებს (ა) პირობას საწყისი H მულტი-ფუნქციისათვის. ამით ჰოლის თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ჰოლის თეორემას აქვს გარკვეული უსასრულო ანალოგიც (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 9).

ვთქვათ, მოცემულია ნაწილობრივად დალაგებული $(E,\le)$ სიმრავლე. ამ სიმრავლის ყოველ წრფივად დალაგებულ ქვესიმრავლეს ეწოდება E-ს ქვეჯაჭვი, ხოლო იმავე E სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს, რომლის ყველა

ელემენტი წყვილ-წყვილად არასადარია, ეწოდება E-ს თავისუფალი ქვესიმრავლე.

ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან დებულებას, რომელიც რ. დილუორსს (R. Dilworth) ეკუთვნის და რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ფ. ჰოლის თეორემასთან (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო 12).

თეორემა 6 (დილუორსი). ვთქვათ, k ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. ნებისმიერი სასრული ნაწილობრივად დალაგებული (E,≤) სიმრავლისათვის, რომლის ყოველი თავისუფალი ქვესიმრავლის სიმძლავრე k-ს არ აღემატება, არსებობს E-ს დაყოფა k რაოდენობის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვეჯაჭვებად.

დამტკიცება. მოყვანილი დებულება დავამტკიცოთ ინდუქციით k-ს მიმართ. დავუშვათ, რომ იგი მართებულია ყველა ნატურალური რიცხვისათვის, რომლებიც k-ზე მკაცრად ნაკლებია, და ვაჩვენოთ მისი ჭეშმარიტობა k-სთვისაც. ამ საფეხურზე კი მსჯელობა ჩავატაროთ ინდუქციით card(E)-ს მიმართ, ე.ი. დავუშვათ, რომ დებულება მართებულია ყველა ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლისათვის, რომელთა სიმძლავრე ნაკლებია card(E)-ზე და დავამტკიცოთ იგი card(E)-სათვის.

აღვნიშნოთ S სიმბოლოთი E-ს ყველა მაქსიმალურ ელემენტთა სიმრავლე, ხოლო I სიმბოლოთი – E-ს ყველა მინიმალურ ელემენტთა სიმრავლე. ცხადია, ორივე ეს სიმრავლე თავისუფალია E-ში. განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა.

(ა) E სიმრაელის ნებისმიერი მაქსიმალური თავისუფალი ქვესიმრავლე ან შეიცავს S-ს, ან შეიცავს I-ს.

ამ შემთხვევაში ავიღოთ E-ს რომელიმე მინიმალური a ელემენტი და E-ს რომელიმე მაქსიმალური b ელემენტი ისე, რომ შესრულდეს a ≤ b დამოკიდებულება. ადვილი სანახავია, რომ ნაწილობრივად დალაგებულ E\{a,b} სიმრავლეში ყოველი

თავისუფალი ქვესიმრავლე არაუმეტეს $k-1$ ელემენტს შეიცავს. ინდუქციური დაშვების თანახმად, ეს ბოლო სიმრავლე დაიშლება $k-1$ რაოდენობა ქვეჯაჭვებად. ამ ქვეჯაჭვებს თუკი ორელემენტიან $\{a,b\}$ ჯაჭვსაც დავუმატებთ, მივიღებთ E-ს სასურველ დაყოფას ქვეჯაჭვებად.

(ბ) არსებობს E-ს ერთი მაინც მაქსიმალური თავისუფალი ქვესიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს არც S-ს და არც I-ს.

აღვნიშნოთ E-ს ასეთი მაქსიმალური თავისუფალი ქვესიმრავლე D სიმბოლოთი და შემოვიღოთ შემდეგი ორი სიმრავლე:

$$E' = \{e \in E : (\exists d \in D)(d \le e)\},$$

$$E'' = \{e \in E : (\exists d \in D)(e \le d)\}.$$

მარტივად მოწმდება, რომ

$$E = E' \cup E'', \quad D = E' \cap E'',$$

$$\mathrm{card}(E') < \mathrm{card}(E), \quad \mathrm{card}(E'') < \mathrm{card}(E).$$

ინდუქციური დაშვების გამოყენებით ვღებულობთ, რომ თითოეული E' და E'' სიმრავლე დაიშლება k რაოდენობის ქვეჯაჭვებად, თანაც E'-ში შემავალი ნებისმიერი ასეთი ჯაჭვის უმცირესი ელემენტი ეკუთვნის D-ს და E''-ში შემავალი ნებისმიერი ასეთი ჯაჭვის უდიდესი ელემენტი ეკუთვნის D-ს. აღნიშნული ჯაჭვების სათანადო შეერთებით ვღებულობთ ამოსავალი E სიმრავლის საძიებელ დაყოფას იმავე k რაოდენობის ქვეჯაჭვებად. ამით დილუორსის თეორემა დამტკიცებულია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ამ თეორემის გავრცელება უსასრულო ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეებზეც (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 11).

მომდევნო დებულება შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც დილუორსის თეორემის ორადული (დუალური) წინადადება. აღსანიშნავია, რომ მისი დამტკიცება გაცილებით უფრო მარტივად მიიღება, ვიდრე დილუორსის თეორემის ზემოთ მოყვანილი დამტკიცება.

თეორემა 7. სასრულ ნაწილობრივად დალაგებულ $(E,\leq)$ სიმრავლეში ქვეჯაჭვების სიმძლავრეთა მაქსიმუმი უდრის ამ სიმრაელის თავისუფალ ქვესიმრავლეებად დაყოფების სიმძლავრეთა მინიმუმს.

დამტკიცება. ცხადია, რომ აღნიშნული მინიმუმი მეტია (ან ტოლი) აღნიშნულ მაქსიმუმზე. ამიტომ საკმარისია დადგინდეს მხოლოდ შებრუნებული უტოლობა.

ვთქვათ, n არის E-ს ქვეჯაჭვების სიმძლავრეთა მაქსიმუმი. ნებისმიერი $e\in E$ ელემენტისათვის აღვნიშნოთ $k(e)$ სიმბოლოთი E-ს იმ ქვეჯაჭვის სიმძლავრე, რომელიც მაქსიმალურ რაოდენობა ელემენტებს შეიცავს და რომლის უმცირესი ელემენტია e. ადვილად მოწმდება, რომ თუ $k(e) = k(e')$, მაშინ e და e' ელემენტები არასადარია $\leq$ ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულების მიმართ. ახლა ყოველი $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ ნატურალური რიცხვისათვის განვსაზღვროთ შემდეგი სიმრავლე:

$$E(i) = \{e\in E : k(e) = i\}.$$

ზემოთ ნათქვამის გათვალისწინებით უშუალოდ ვღებულობთ, რომ $\{E(i) \;\; i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$ ოჯახი წარმოადგენს E სიმრავლის დაყოფას მის თავისუფალ ქვესიმრავლეებად. ამით თეორემა 7 დამტკიცებულია.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით სასრული კომბინატორიკის ფაქტებს. ახლა დავადგინოთ დ. კიონიგის (D. König) ლემის მართებულობა, რომელიც, შეიძლება ითქვას, პირველ ხიდს

წარმოადგენს სასრულ და უსასრულო კომბინატორიკას შორის. განსაკუთრებით გვინდა აღვნიშნოთ ის ფაქტი, რომ კიონიგის ლემას უამრავი გამოყენება აქვს მათემატიკის სხვადასხვა დარგში (იხ. კომენტარი 38).

არაორიენტირებულ გრაფს (იხ. §3-ის სავარჯიშო 14) ეწოდება უსასრულო, თუ მისი წვეროების სიმრავლე უსასრულოა. გრაფს ეწოდება ლოკალურად სასრული, თუ მისი ყოველი წვეროდან წიბოების მხოლოდ სასრული რაოდენობა გამოდის. გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ გრაფს ეწოდება ბმული, თუ მისი ყოველი ორი წვერო შეიძლება შეერთდეს წიბოებისაგან შედგენილი სასრული ჯაჭვით.

თეორემა **8** (კიონიგი). ვთქვათ, მოცემულია უსასრულო, ლოკალურად სასრული, ბმული (V,E) გრაფი. მაშინ ამ გრაფის ნებისმიერი წვეროდან გამოდის მისი რომელიღაც წიბოებისაგან შედგენილი უსასრულო ჯაჭვი.

დამტკიცება. ავიღოთ (V,E) გრაფის ნებისმიერი v წვერო და ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის განვსაზღვროთ V(n) როგორც გრაფის ყველა იმ u წვეროთა სიმრავლე, რომლებიც შეერთებადია v-სთან წიბოების n სიგრძის მქონე უმოკლესი ჯაჭვით. თეორემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ V(n) სიმრავლეები სასრულია, წყვილ-წყვილად არ თანაიკვეთებიან და მათი გაერთიანება გვაძლევს მთელ V-ს. ამასთან ერთად, გვაქვს $V(0) = \{v\}$. ახლა E(n) სიმბოლოთი აღვნიშნოთ უმოკლესი სიგრძის მქონე ჯაჭვების სიმრავლე, რომლებიც $v = v(0)$ წვეროს V(n) სიმრავლის წვეროებთან აერთებენ. ცხადია, E(n) სიმრავლეებიც სასრულია. ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $e(1)\in E(1)$ წიბო, რომელიც შედის v(0)-დან გამომავალი რაგინდ დიდი სიგრძის მქონე ჯაჭვებში. აღვნიშნოთ $v(1)\in V(1)$ სიმბოლოთი e(1) წიბოს წვერო. შემდეგ ავიღოთ $e(2)\in E(2)$ წიბო, რომელიც შედის v(1)-დან გამომავალი რაგინდ დიდი სიგრძის მქონე ჯაჭვებში. ამ

პროცესის ინდუქციური გზით გაგრძელების შედეგად მივიღებთ v-დან გამომავალ

$$(e(1), e(2), e(3), \ldots, e(n), \ldots)$$

უსასრულო ჯაჭვს, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

მკითხველს ვურჩევთ, კიდევ ერთხელ გაანალიზოს ეს დამტკიცება და დაადგინოს, ამორჩევის აქსიომის რომელი ფორმა იყო გამოყენებული მოყვანილ მსჯელობაში.

ვთქვათ, მოცემულია X სიმრავლე და მისი გარდაქმნების რაიმე G ჯგუფი. ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის შეგვიძლია განვიხილოთ G ჯგუფის ის ქვესიმრავლე, რომელიც ამ x-ს უძრავად ტოვებს, ე.ი. შემოგვაქვს აღნიშვნა

$$St(x) = \{g \in G : g(x) = x\}.$$

ამ ქვესიმრავლეს x ელემენტის სტაბილიზატორი ჰქვია (მოცემულ G ჯგუფში) და, ცხადია, იგი G ჯგუფის გარკვეულ ქვეჯგუფს წარმოადგენს. მეორე მხრივ, შეგვიძლია განვიხილოთ დუალური ცნებაც, ე.ი G ჯგუფის ყოველი g ელემენტისათვის თავად X სიმრავლეში გამოვყოთ იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც უძრავად რჩებიან g გარდაქმნის დროს. სხვა სიტყვებით, შემოგვაქვს აღნიშვნა

$$Inv(g) = \{x \in X : g(x) = x\}.$$

მიღებულ აღნიშვნებში სამართლიანია შემდეგი დებულება, რომელიც ინგლისელ ალგებრაისტს უ. ბერნსაიდს (W. Burnside) ეკუთვნის და მათემატიკურ ლიტერატურაში ბერნსაიდის ლემის სახელითაა ცნობილი (იხ. კომენტარი 39).

თეორემა 9 (ბერნსაიდი). დავუშვათ, მოცემულია X სასრული სიმრავლე და მისი გარდაქმნების რაიმე G ჯგუფი.

Orb(G) სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ყველა G-ორბიტების სიმრავლე. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\mathrm{card}(\mathrm{Orb}(G)) = (1/\mathrm{card}(G)) \sum\{\mathrm{card}(\mathrm{Inv}(g)) : g\in G\}.$$

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ რაიმე A სელექტორი Orb(G) ოჯახისათვის და განვიხილოთ ყველა შესაძლო (g,x) წყვილთა სიმრავლე, სადაც g(x) = x. დავთვალოთ ამ წყვილების რაოდენობა ორი სხვადასხვა ხერხით. ერთი მხრივ ცხადია, რომ ეს რაოდენობა იგივეა, რაც $\sum\{\mathrm{card}(\mathrm{Inv}(g)) : g\in G\}$. მეორე მხრივ, ეს რაოდენობა უდრის $\sum\{\mathrm{card}(\mathrm{St}(x))\quad x\in X\}$ გამოსახულებას. თუ x და x′ ერთ G-ორბიტას ეკუთვნიან, მაშინ გვექნება

$$\mathrm{card}(\mathrm{St}(x)) = \mathrm{card}(\mathrm{St}(x'))$$

ტოლობა (გაიაზრეთ). მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum\{\mathrm{card}(\mathrm{St}(x)) : x\in X\} = \sum\{\mathrm{card}(\mathrm{St}(x))\mathrm{card}(G(x)) : x\in A\}.$$

გარდა ამისა, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\mathrm{card}(\mathrm{St}(x))\mathrm{card}(G(x)) = \mathrm{card}(G)$$

ყოველი x∈X ელემენტისათვის. რადგან A სიმრავლე წარმოადგენს G-ორბიტების ოჯახის სელექტორს, ამიტომ გვაქვს card(A) = card(Orb(G)). საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\mathrm{card}(G)\mathrm{card}(\mathrm{Orb}(G)) = \sum\{\mathrm{card}(\mathrm{Inv}(g)) : g\in G\},$$

რისი დადგენაც გვინდოდა.

ზემოთ დამტკიცებული ბერნსაიდის ლემის ერთ-ერთი უმარტივესი შედეგი შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს.

თეორემა 10. თუ სასრული X სიმრავლის გარდაქმნათა G ჯგუფში მხოლოდ იგივურ გარდაქმნას აქვს უძრავი წერტილი, მაშინ card(G) რიცხვი წარმოადგენს card(X) რიცხვის გამყოფს. კერძოდ, არაცარიელი X-სათვის გვექნება card(G) ≤ card(X). ეს უტოლობა გადაიქცევა ტოლობად, მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როცა G არის X-ის რომელიმე ციკლური ძერით წარმოქმნილი ჯგუფი.

დამტკიცება. პირობის თანახმად, თუ $g \in G$ არ არის X-ის იგივური გარდაქმნა, მაშინ $\mathrm{Inv}(g) = \varnothing$, ხოლო თუ g იმავე X-ის იგივური გარდაქმნაა, მაშინ, ცხადია, გვაქვს $\mathrm{Inv}(g) = X$. აქედან, ბერნსაიდის ფორმულის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\mathrm{card}(\mathrm{Orb}(G)) = \mathrm{card}(X)/\mathrm{card}(G),$$

რაც უშუალოდ იძლევა სასურველ შედეგს.

ბოლო თეორემის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ჟ. ლ. ლაგრანჟის (J. L. Lagrange) ცნობილი თეორემა ჯგუფთა თეორიიდან, რომლის თანახმად მოცემული სასრული ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფის სიმძლავრე ამ ჯგუფის სიმძლავრის ერთ-ერთი გამყოფია.

§10-ის სავარჯიშოები

1. შეამოწმეთ, რომ ნებისმიერი ნამდვილმნიშვნელობიანი მუდმივი ფუნქცია, განსაზღვრული სიმრავლეთა F ოჯახზე, არის ადიტიური (ამ პარაგრაფში მოყვანილი განმარტების მიხედვით). ახლა დავუშვათ, რომ F წარმოადგენს სიმრავლეთა ალგებრას (უფრო ზოგადად, სიმრავლეთა რგოლს, რაც ნიშნავს, რომ F არაცარიელია და ჩაკეტილი გაერთიანებისა და სხვაობის ოპერაციების მიმართ). აჩვენეთ, რომ F-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი ნამდვილმნიშვნელობიანი h ფუნქციისათვის შემდეგი თვისებები ეკვივალენტურია:

(ა) h არის ადიტიური და $h(\varnothing) = 0$;

(ბ) $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$ ყოველი ორი დიზიუნქტური A და B სიმრავლისათვის F-დან.

2. შეავსეთ ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულის დამტკიცების დეტალები და ჩაატარეთ დაწვრილებითი მსჯელობა ამ პარაგრაფში მოყვანილი მაგალითი 2-სათვის და მაგალითი 3-სათვის.

3*. მოცემული ნატურალური n-სათვის დავაფიქსიროთ რომელიმე n-ელემენტიანი X სიმრავლე და E_n სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X სიმრავლის ყველა შესაძლო დაყოფათა სიმრავლის სიმძლავრე (ანუ, რაც იგივეა, E_n აღნიშნავს X-ში მოცემულ ყველა შესაძლო ეკვივალენტობის მიმართებების რაოდენობას). აჩვენეთ შემდეგი რეკურენტული (რეკურსიული) ფორმულის სამართლიანობა:

$$E_{n+1} = C_n^0 E_n + C_n^1 E_{n-1} + C_n^2 E_{n-2} + \qquad + C_n^n E_0.$$

უსასრულო ხარისხოვანი მწკრივების გამოყენებით, აქედან გააკეთეთ დასკვნა, რომ

$$e^x - 1 = \ln(E_0/0! + E_1x/1! + E_2x^2/2! + \ldots + E_nx^n/n! + \ldots),$$

სადაც e ნეპერის რიცხვია.

4*. მოცემული $n > 0$ და $m > 0$ ორი ნატურალური რიცხვისათვის $S_{n,m}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ფიქსირებული n-ელემენტიანი სიმრავლის ფიქსირებულ m-ელემენტიან სიმრავლეზე ყველა შესაძლო სიურიექციულ ფუნქციათა რაოდენობა.

აჩვენეთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$S_{n,m} = m(S_{n-1,m} + S_{n-1,m-1}).$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარე, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ($n+m$ ჯამის მიმართ) დაადგინეთ, რომ

$$S_{n,m} = C_m^0 m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n - \ldots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}$$

5. მოცემულია m-ელემენტიანი A სიმრავლე და $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ნატურალური რიცხვები, სადაც

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m.$$

განვიხილოთ ამ სიმრავლის ნაწილთა ყველა შესაძლო დიზიუნქტური ოჯახი $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ ისეთი, რომ

$$\mathrm{card}(A_i) = m_i \quad (i = 1,2,\ldots,k).$$

დაამტკიცეთ, რომ ასეთი ოჯახების რაოდენობაა

$$m!/(m_1!m_2!\ldots m_k!).$$

ამ ფაქტზე უშუალო დაყრდნობით გამოიყვანეთ შემდეგი პოლინომიალური ფორმულა:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^m = \sum (m!/(m_1!m_2!\ldots m_k!))\, a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k},$$

სადაც ჯამის ნიშანი ვრცელდება ნატურალურ რიცხვთა ყველა შესაძლო $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ კორტეჟზე, რომელთათვისაც

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m.$$

განიხილეთ კერძო შემთხვევა, როცა $k = 2$, და პოლინომიალური ფორმულიდან უშუალოდ მიიღეთ ნიუტონის ბინომიალური ფორმულა:

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}b + \qquad + C_m^{m-1} ab^{m-1} + C_m^m b^m.$$

ბინომიალური ფორმულიდან გამომდინარე, ხელახლა აჩვენეთ, რომ მოცემული m-ელემენტიანი A სიმრავლის ყველა შესაძლო ნაწილთა რაოდენობა 2^m-ის ტოლია (შეადარეთ §2-ის სავარჯიშო 1-ს).

შეამოწმეთ აგრეთვე, რომ

$$C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \qquad = 0.$$

გამოარკვიეთ ამ ბოლო ტოლობის კომბინატორული შინაარსი. ანალოგიური კომბინატორული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, დაამტკიცეთ, რომ

$$C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \qquad + C_m^k C_n^0 .$$

კერძოდ, როცა $m = n = k$, გვაქვს

$$C_{2m}^m = (C_m^0)^2 + (C_m^1)^2 + \qquad + (C_m^m)^2.$$

დაბოლოს, პოლინომიალური (ან ბინომიალური) ფორმულის გამოყენებით დაამტკიცეთ ფერმას მცირე თეორემა: თუ p მარტივი რიცხვია, ხოლო k — ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, მაშინ $k^p - k$ სხვაობა იყოფა p-ზე.

6*. დავუშვათ, რომ ჰოლის თეორემაში მონაწილე H მულტი-ფუნქცია აკმაყოფილებს (ბ) პირობას და შემდეგ დამატებით პირობასაც:

$$n \le \mathrm{card}(H(x)) \quad (x \in X),$$

სადაც n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია.

დაამტკიცეთ, რომ:

(*) თუ $n \le \mathrm{card}(X)$, მაშინ H მულტი-ფუნქციის h ინიექციური სელექტორების რაოდენობა n! რიცხვზე არანაკლებია;

(**) თუ $n > \mathrm{card}(X)$, მაშინ იმავე H მულტი-ფუნქციის h ინიექციური სელექტორების რაოდენობა $n!/(n - \mathrm{card}(X))!$ რიცხვზე არანაკლებია.

მსჯელობა ჩაატარეთ ინდუქციით card(X)-ის მიმართ. ცალ-ცალკე განიხილეთ ორი შემთხვევა.

(i) X-ის ყოველი არაცარიელი საკუთრივი X′ ნაწილისათვის მართებულია

$$\mathrm{card}(\cup\{H(x) : x \in X'\}) > \mathrm{card}(X')$$

უტოლობა.

ამ შემთხვევაში დააფიქსირეთ $a \in X$. აიღეთ ნებისმიერი $b \in H(a)$ და განიხილეთ $\{H(x)\setminus\{b\} : x \in X\setminus\{a\}\}$ სიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც აგრეთვე აკმაყოფილებს (ბ) პირობის ანალოგს. თუ $n \le \mathrm{card}(X)$, მაშინ $n - 1 \le \mathrm{card}(X) - 1$ და, ინდუქციური დაშვების თანახმად, $\{H(x)\setminus\{b\} : x \in X\setminus\{a\}\}$ მულტი-ფუნქციას აქვს $(n - 1)!$-ზე არანაკლები ინიექციური სელექტორების რაოდენობა. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $n \le \mathrm{card}(H(a))$, და b ელემენტის ვარირების ხარჯზე, მიიღება საწყისი H მულტი-ფუნქციის ინიექციური h სელექტორების რაოდენობის სასურველი შეფასება. თუ $n > \mathrm{card}(X)$, მაშინ $n - 1 > \mathrm{card}(X) - 1$ და, იმავე ინდუქციური დაშვების ძალით, $\{H(x)\setminus\{b\} : x \in X\setminus\{a\}\}$ ოჯახს აქვს $(n - 1)!/(n - \mathrm{card}(X))!$ რიცხვზე არანაკლები ინიექციური სელექტორების რაოდენობა, რაც (კვლავ b ელემენტის ვარირების ხარჯზე) იძლევა არანაკლებ $n!/(n - \mathrm{card}(X))!$ რაოდენობის h ინიექციურ სელექტორს ამოსავალი H მულტი-ფუნქციისათვის.

(ii) არსებობს X-ის არაცარიელი საკუთრივი X′ ნაწილი, რომლისთვისაც მართებულია

$$\mathrm{card}(\cup\{H(x) : x \in X'\}) = \mathrm{card}(X')$$

ტოლობა.

ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ $n \leq \mathrm{card}(X') \leq \mathrm{card}(X) - 1$ და, ინდუქციური დაშვების გამო, $\{H(x) \quad x \in X'\}$ სიმრავლეთა ოჯახისათვის მოიძებნება ინიექციური სელექტორების $n!$ რაოდენობა. გარდა ამისა, შეამოწმეთ, რომ $\{H(x) \quad x \in X \setminus X'\}$ სიმრავლეთა ოჯახი აგრეთვე აკმაყოფილებს (ბ) პირობის შესაბამის ანალოგს და, მაშასადამე, ინდუქციური დაშვების ძალით, ამ ოჯახს გააჩნია ერთი მაინც ინიექციური სელექტორი. აქედან გააკეთეთ დასკვნა, რომ თავიდან მოცემული H მულტი-ფუნქციისათვისაც არსებობს h ინიექციური სელექტორების $n!$-ზე არანაკლები რაოდენობა.

ცხადია, ამ სავარჯიშოს შედეგი არის ჰოლის თეორემის არსებითი გაძლიერება, ვინაიდან $n = 0$ შემთხვევაში დამატებითი პირობა ავტომატურად სრულდება $(0! = 1 > 0)$ და უშუალოდ ვღებულობთ ჰოლის თეორემას.

7. ვთქვათ, $n > 0$ მოცემული ნატურალური რიცხვია. n-ური რიგის ლათინური კვადრატი ეწოდება $n \times n$ მატრიცას (ცხრილს), რომლის თითოეულ სტრიქონსა და სვეტში $\{1, 2, 3, \quad , n\}$ სიმრავლის ყველა ელემენტი მონაწილეობს. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$a(i,j) = (i + j - 1)$ რიცხვის n-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი, თუ ეს რიცხვი არ უდრის n-ს,

$a(i,j) = n$, თუ $i + j - 1 = n$,

სადაც $i \in \{1,2,3\ldots,n\}$ და $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$. შეამოწმეთ, რომ

$$\{a(i,j) : \ i \in \{1,2,3,\ldots,n\}, \ j \in \{1,2,3,\ldots,n\}\}$$

მატრიცა წარმოადგენს n-ური რიგის ლათინურ კვადრატს.

L_n სიმბოლოთი აღვნიშნოთ n-ური რიგის ყველა ლათინურ კვადრატთა რაოდენობა. სავარჯიშო 6-ის გამოყენებით აჩვენეთ

$$1! \quad 2! \quad 3! \qquad (n-1)! \cdot n! \leq L_n$$

უტოლობის სამართლიანობა.

8*. სიმრავლეთა რაიმე ოჯახს შპერნერის სისტემა ეწოდება, თუ ამ ოჯახის არც ერთი წევრი არ შედის არც ერთ მეორე წევრში (ანუ, რაც იგივეა, თუ ამ ოჯახის წევრები წყვილ-წყვილად არასადარია ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ).

ვთქვათ, მოცემულია n-ელემენტიანი A სიმრავლე და მის ნაწილთა შპერნერის რომელიმე $\{A_1, A_2, \quad , A_k\}$ სისტემა. ყოველი ნატურალური $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ ინდექსისათვის p_i სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მოცემული A სიმრავლის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, რომელთა სიმძლავრეები A_i სიმრავლის სიმძლავრის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$1/p_1 + 1/p_2 + \ldots + 1/p_k \leq 1.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარე, აჩვენეთ, რომ $k \leq C_n^m$, სადაც $m = [n/2]$.

9*. დაამტკიცეთ ჰოლის თეორემის შემდეგი უსასრულო ვერსია.

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი ორი X და Y სიმრავლე და ისეთი $H \quad X \to P(Y)$ მულტი-ფუნქცია, რომ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის $H(x)$ სიმრავლე სასრულია. მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ეკვივალენტურია:

(ა) არსებობს $h : X \to Y$ ისეთი ინიექციური ფუნქცია, რომ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის $h(x) \in H(x)$ (ანუ h ფუნქცია არის მოცემული H მულტი-ფუნქციის ინიექციური სელექტორი);

(ბ) როგორიც არ უნდა იყოს X-ის X′ სასრული ქვესიმრავლე, ადგილი აქვს $\mathrm{card}(X') \leq \mathrm{card}(\cup\{H(x) \quad x \in X'\})$ უტოლობას.

ამ ორი წინადადების ეკვივალენტობის დასამტკიცებლად გამოიყენეთ ჰოლის თეორემის სასრული ვერსია და ულტრაფილტრების ტექნიკა (ან ტიხონოვის თეორემა კვაზიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეების ნებისმიერი ოჯახის ნამრავლის კვაზიკომპაქტურობის შესახებ).

10*. წრფივი ალგებრის საუნივერსიტეტო კურსებში, როგორც წესი, მოჰყავთ თეორემა იმის შესახებ, რომ ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცის ყველა ბაზისი ერთი და იგივე სასრული სიმძლავრისაა. ეს ფაქტი ჩვეულებრივ მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

ჰოლის თეორემის უსასრულო ვერსიაზე დაყრდნობით (იხ. წინა სავარჯიშო) დაადგინეთ ანალოგიური დებულების სამართლიანობა უსასრულოგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეებისთვისაც, ე.ი. ფაქტობრივად დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ვექტორულ სივრცეში ყველა ბაზისის სიმძლავრე ერთი და იგივეა. ამ შედეგის მისაღებად წინასწარ აჩვენეთ (ცორნის ლემის გამოყენებით), რომ ყოველ ვექტორულ სივრცეს აქვს ერთი ბაზისი მაინც, ე.ი. აქვს ჩართვის მიმართ მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესიმრავლე.

11*. დაამტკიცეთ, რომ ამ პარაგრაფში მოყვანილი დილუორსის თეორემა ძალაში რჩება უსასრულო ნაწილობრივად დალაგებული $(E,\leq)$ სიმრავლეებისათვისაც. (აქაც გამოიყენეთ ცორნის ლემა.)

12. შეეცადეთ დილუორსის თეორემიდან გამომდინარე, უშუალოდ მიიღოთ ჰოლის თეორემა.

13. ვთქვათ, მოცემულია m და n ორი ნატურალური რიცხვი და წრფეზე მდებარე $mn + 1$ მონაკვეთი. დილუორსის თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი წინადადებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია:

(ა) მოცემულ მონაკვეთთა შორის მოიძებნება $m + 1$ მონაკვეთი, რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო წერტილი არა აქვთ;

(ბ) მოცემულ მონაკვეთთა შორის მოიძებნება $n + 1$ მონაკვეთი, რომლებსაც საერთო წერტილი აქვთ.

14. ვთქვათ, მოცემულია ნატურალური m რიცხვი და წრფეზე მდებარე მონაკვეთთა სასრული სისტემა. დავუშვათ, რომ ეს სისტემა არ შეიცავს $m + 1$ წყვილ-წყვილად დიზიუნქტურ მონაკვეთს. დილუორსის თეორემის ორადული (დუალური) დებულების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ მაშინ წრფეზე არსებობს არაუმეტეს m-წერტილიანი სიმრავლე, რომელიც თანაიკვეთება მოცემული სისტემიდან აღებულ ნებისმიერ მონაკვეთთან.

15. გაუკეთეთ დეტალური ანალიზი კიონიგის ლემის იმ დამტკიცებას, რომელიც მოყვანილია წინამდებარე პარაგრაფში. ასეთი ანალიზის შედეგად დაადგინეთ ცერმელოს აქსიომის ის ზუსტი ფორმა, რომელიც კიონიგის ლემის ეკვივალენტურია.

16. დავუშვათ, რომ ქართველი ერი მუდამ იარსებებს. დაამტკიცეთ, რომ მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც ქართველი მამაკაცი, რომელსაც ეყოლება (ან უკვე ჰყავს) ვაჟიშვილი, ამ ვაჟიშვილს ეყოლება ვაჟიშვილი და ა.შ., უსასრულოდ.

ამ შედეგიდან გააკეთეთ დასკვნა, რომ ამჟამად არსებული ქართული გვარებიდან ერთი მაინც ყოველთვის წარმოდგენილი იქნება ჩვენს ერში (ცხადია, აქ იგულისხმება, რომ შვილები მამის გვარს ატარებენ და რომ ეს ტრადიცია მომავალშიც მუდამ დაცული იქნება ქართველების მიერ).

17. მოცემულ (V,E) გრაფს პლანარული ეწოდება, თუ ევკლიდურ სიბრტყეში არსებობს (V,E)-ს იზომორფული გრაფი, რომლის წიბოებს (ე.ი. სათანადო წვეროების შემაერთებელ ბრტყელ წირებს) წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო წერტილები, გარდა მათი საერთო წვეროებისა.

ვთქვათ, მოცემულია თვლადი (V,E) გრაფი, რომლის ყველა სასრული ქვეგრაფი არის პლანარული. დაამტკიცეთ, რომ მაშინ (V,E) გრაფიც არის პლანარული. (გამოიყენეთ კიონიგის ლემა.)

18. ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში მოცემულია კუბი. ამ კუბის ყველა წახნაგი უნდა ურთიერთცალსახად დაინომროს $\{1,2,3,4,5,6\}$ სიმრავლიდან აღებული რიცხვებით. ჩავთვალოთ, რომ წახნაგების ორი ასეთი ნუმერაცია ერთმანეთის ეკვივალენტურია, თუ არსებობს კუბის მობრუნება მისი ცენტრის გარშემო, რომელიც პირველ ნუმერაციას დაამთხვევს მეორეს. გამოთვალეთ მიღებული ეკვივალენტობის კლასების რაოდენობა.

ჩამოაყალიბეთ და ამოხსენით ანალოგიური ამოცანა სხვა ტიპის სამგანზომილებიანი წესიერი მრავალწახნაგებისათვის (ე.ი. ტეტრაედრისათვის, ოქტაედრისათვის, დოდეკაედრისა და იკოსაედრისათვის).

19. გამოიყვანეთ ფერმას მცირე თეორემა (იხ. ამ პარაგრაფის სავარჯიშო 5) ლაგრანჟის თეორემიდან, რომლის თანახმადაც სასრული G ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფის სიმძლავრე G-ს სიმძლავრის ერთ-ერთ გამყოფს წარმოადგენს.

ამისათვის დააფიქსირეთ p მარტივი რიცხვი და $G_p = \{1, 2, \quad, p-1\}$ სიმრავლეში შემდეგნაირად განსაზღვრეთ θ ბინარული ოპერაცია: $\theta(m,n) = mn$ ნამრავლის ნაშთი p-ზე გაყოფისას (სადაც $m \in G_p$, $n \in G_p$). შეამოწმეთ, რომ θ ოპერაციის მიმართ G_p არის კომუტატიური ჯგუფი. აიღეთ ნებისმიერი $m \in G_p$ ელემენტი და განიხილეთ m-ით წარმოქმნილი G_p-ს ქვეჯგუფი. ამ ქვეჯგუფისადმი გამოიყენეთ ლაგრანჟის ზემოხსენებული თეორემა.

მსგავსი არგუმენტით დაადგინეთ ჯ. ვილსონის (J. Wilson) შემდეგი კლასიკური დებულების სამართლიანობა: $(p-1)! + 1$ რიცხვი ყოველთვის იყოფა p-ზე.

ბოლო სავარჯიშოსთან დაკავშირებით იხ. კომენტარი 40.

კომენტარები

1. წიგნის შესავალში უკვე ნათქვამი იყო იმის შესახებ, რომ სიმრავლეთა თეორია არის ეგალიტარული თეორიის გარკვეული გაფართოება, რომელიც მიიღება ერთადერთი სიმბოლოს – კუთვნილების ნიშნის – დამატებით და სათანადო აქსიომების შემოტანით (იხ. §0). სისრულისათვის აქვე მოვიყვანთ ტოლობის ნიშანთან (=) დაკავშირებულ აქსიომებს, რომლებითაც ხასიათდებიან ეგალიტარული თეორიები. მაგრამ ამისათვის ჯერ აუცილებლად უნდა გავიხსენოთ ლოგიკური და კვანტორული თეორიების ცნებები (იხ. [4]).

ნებისმიერი ფორმალური მათემატიკური თეორია შეიცავს ამოსავალ ლოგიკურ ნიშნებს, მაგალითად, $\neg$ (უარყოფას) და $\vee$ (დიზიუნქციას), ან $\neg$ და & (კონიუნქციას). სხვა ტიპის ლოგიკური ნიშნები, მაგალითად, $\Rightarrow$ (იმპლიკაცია) და $\Leftrightarrow$ (ეკვივალენტობა) განისაზღვრება ამოსავალი ლოგიკური ნიშნების ტერმინებში და, ფაქტობრივად, თამაშობენ ე.წ. შემამოკლებელი სიმბოლოების როლს. კერძოდ, $S \Rightarrow T$ ფორმულა წარმოადგენს $(\neg S) \vee T$ ფორმულის უბრალო შემოკლებას.

ფორმალურ მათემატიკურ თეორიას ლოგიკური თეორია ეწოდება, თუ მასში გვაქვს აქსიომათა შემდეგი ოთხი სქემა:

$$(S \vee S) \Rightarrow S,$$

$$S \Rightarrow (S \vee T),$$

$$(S \vee T) \Rightarrow (T \vee S),$$

$$(S \Rightarrow T) \Rightarrow ((R \vee S) \Rightarrow (R \vee T)),$$

სადაც S, T და R ჩვენი თეორიის ნებისმიერი ფორმულებია.

ამოწერილი სქემები ასახავს ლოგიკის ფუნდამენტურ კანონებს და თავისთავად წარმოადგენენ კლასიკური პროპოზიციული აღრიცხვის აქსიომათა ნუსხის ერთ-ერთ ვარიანტს (რომელიც ჯერ კიდევ დ. ჰილბერტის მიერ იყო შემოთავაზებული).

ლოგიკურ თეორიებში გვაქვს შემდეგი გამოყვანის წესი, რომელსაც მოდუს პონენსი (modus ponens) ჰქვია:

თუ S და $S \Rightarrow R$, მაშინ R.

ლოგიკურ თეორიას კვანტორული თეორია ეწოდება, თუ მის ალფაბეტში მონაწილეობს $\forall$ ზოგადობის კვანტორის ნიშანი და მასთან დაკავშირებით შემოტანილია აქსიომათა შემდეგი სქემა:

$$(\forall x)S(x) \Rightarrow S(y),$$

სადაც $S(z)$ არის ჩვენი თეორიის ნებისმიერი ფორმულა (z საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული).

კვანტორულ თეორიებში, მოდუს პონენსის გარდა, გვაქვს შემდეგი გამოყვანის წესიც, რომელსაც $\forall$-წესი ეწოდება:

თუ $S \Rightarrow R(x)$, სადაც S ფორმულა არ შეიცავს x საგნობრივ ცვლადს, მაშინ $S \Rightarrow (\forall x)R(x)$.

არსებობის კვანტორის ნიშანი (ე.ი. $\exists$ სიმბოლო) განსახილავ თეორიაში შეიძლება შემოტანილ იქნეს $\forall$ ზოგადობის კვანტორის ნიშნის მეშვეობით. სახელდობრ, განსაზღვრის თანახმად, $(\exists x)T(x)$ ფორმულა წარმოადგენს მხოლოდ და მხოლოდ შემამოკლებელ აღნიშვნას $\neg(\forall x)\neg T(x)$ ფორმულისათვის.

პირუკუ, კვანტორული თეორია შეიძლება განიმარტოს $\exists$ არსებობის კვანტორის ნიშნის და მისი შესაბამისი აქსიომისა და გამოყვანის წესის ტერმინებში. ამ შემთხვევაში გვაქვს აქსიომათა შემდეგი სქემა:

$$S(y) \Rightarrow (\exists x)S(x),$$

სადაც $S(z)$ არის ჩვენი თეორიის ნებისმიერი ფორმულა (z საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული).

გარდა ამისა, გვაქვს შემდეგი გამოყვანის წესიც, რომელსაც $\exists$-წესი ეწოდება:

თუ $S(x) \Rightarrow R$, სადაც R ფორმულა არ შეიცავს x საგნობრივ ცვლადს, მაშინ $(\exists x)S(x) \Rightarrow R$.

ასეთი მიდგომის დროს ზოგადობის კვანტორი შემოაქვთ არსებობის კვანტორის მეშვეობით და $(\forall x)T(x)$ ფორმულა არის მხოლოდ და მხოლოდ შემამოკლებელი აღნიშვნა $\neg(\exists x)\neg T(x)$ ფორმულისათვის.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები გარკვეული გაგებით ერთმანეთის მიმართ დუალურ (ორადულ) ობიექტებს წარმოადგენენ.

ახლა უკვე შეგვიძლია განვიხილოთ ეგალიტარული თეორიები.

კვანტორულ თეორიას ეგალიტარული თეორია ეწოდება, თუ მის ალფაბეტში მონაწილეობს ორადგილიანი რელაციული (პრედიკატული) ნიშანი $=$ და ამ ნიშანთან დაკავშირებით შემოტანილია შემდეგი ორი აქსიომა (ფაქტობრივად, აქსიომათა სქემები).

პირველი აქსიომა:

$$x = x,$$

სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია.

მეორე აქსიომა:

$$(x = y) \Rightarrow (S(x) \Rightarrow S(y)),$$

სადაც x და y ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია, ხოლო $S(z)$ – თეორიის ნებისმიერი ფორმულა (მესამე z თავისუფალ საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული და, შესაძლოა, სხვა თავისუფალი საგნობრივი ცვლადების შემცველი).

მოყვანილი აქსიომების ინტუიციური შინაარსი სავსებით გასაგებია. პირველი აქსიომა ამბობს, რომ ყოველი ობიექტი

თავისი თავის ტოლია, ხოლო მეორე აქსიომა ამბობს, რომ ტოლი ობიექტები ერთმანეთის მიმართ ჩანაცვლებადია.

ამ აქსიომებიდან ადვილად მიიღება ტოლობის ყველა ბუნებრივი თვისება (მაგალითად, ის ცნობილი ფაქტი, რომ ტოლობას აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები). გარდა ამისა, გვაქვს

$$(x = y) \Rightarrow (t(x) = t(y)),$$

სადაც x და y ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია, ხოლო t(z) – თეორიის ნებისმიერი ტერმი (მესამე z თავისუფალ საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული).

როგორც უკვე ვთქვით, სიმრავლეთა თეორია ეგალიტარული თეორიის შემდგომი გაფართოებაა. მას კუთვნილების ორადგილიანი რელაციური $\in$ ნიშანი შემოაქვს და, გარკვეული აქსიომების მეშვეობით, $\in$ და $=$ ნიშნებს ერთმანეთს უკავშირებს. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკა მოყვანილია §0-ში. ამ თეორიაზე დაყრდნობით იგება ყველა დანარჩენი მათემატიკური დისციპლინა (ანალიზი, ტოპოლოგია, ალგებრა, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორია, ალბათობის თეორია და ა.შ.).

2. ის ფაქტი, რომ ნებისმიერი სიმრავლე სავსებით და ცალსახად განისაზღვრება ყველა თავისი ელემენტით, სიმრავლეთა ფორმალურ თეორიაში ე.წ. ექსტენსიონალობის აქსიომის მეშვეობით გამოისახება (იხ. §0 და §2).

3. ურთულესი პრობლემები წარმოიშვება იმასთან დაკავშირებით, რა უნდა ვიგულისხმოთ "კონკრეტული წესის" ან "ზუსტი განსაზღვრის" ქვეშ. ამჟამად ერთადერთი გამოსავალი წარმოქმნილი სიძნელეების გადასალახად არის განსახილავი თეორიის სრული ფორმალიზაცია: მისი ენის აღწერა, ფორმულებისა და ტერმების აგების პროცედურის დადგენა, ფორმულათა შორის აქსიომების გამოყოფა და გამოყვანის წესების ჩამოყალიბება. ამის შემდეგ დგინდება ამ

(უკვე ფორმალური) თეორიის დამტკიცების ცნება და ის ფორმულები, რომლებიც მონაწილეობენ ერთ დამტკიცებაში მაინც, ცხადდება თეორემებად (ანუ მართებულ, სამართლიან, ჭეშმარიტ ფორმულებად). მაშასადამე, ასეთი თეორიის ჩარჩოებში ლაპარაკი შეიძლება მხოლოდ იმ S(·) თვისებებით აღწერილ სიმრავლეებზე, რომლებიც შეიძლება ჩამოყალიბებულ იქნენ ფორმალიზებული თეორიის შიგნით. ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ დასაშვები თვისებების აშკარა შეზღუდულობას ფორმალური თეორიის ჩარჩოებით. ეს კი, თავის მხრივ, იწვევს ე.წ. ლიოვენჰეიმ-სკოლემის პარადოქსს და თეორიის არასტანდარტული მოდელების არსებობას (არასტანდარტული მოდელების შესახებ იხ. §9).

4. აღნიშნულ სქემას გამოყოფის აქსიომათა სქემა ეწოდება (separation axioms). იგი ზოგჯერ პირდაპირ შეაქვთ თანამედროვე სიმრავლეთა თეორიის აქსიომათა ნუსხაში. მაგრამ ეს არ არის საჭირო, რადგან მისი გამოყვანა დანარჩენი აქსიომებიდან, რომლებიც წარმოდგენილია წიგნის შესავალში, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს (იხ. §1-ის სავარჯიშო 12).

5. აუცილებელია ერთი მაინც სიმრავლის არსებობის პოსტულირება, თუკი გვინდა, რომ შესასწავლ ობიექტთა უნივერსუმი არ იყოს ცარიელი და აზრი ჰქონდეს მის განხილვას. მაგრამ, როგორც კი მიღებულია რაიმე X სიმრავლის არსებობა, გამოყოფის აქსიომის გამოყენებით მყისვე ჩნდება ცარიელი სიმრავლეც:

$$\varnothing = \{x : x \in X \ \&\ x \neq x\}.$$

ამიტომ ბევრ შემთხვევაში ხელსაყრელია თავიდანვე გამოცხადდეს ცარიელი სიმრავლის არსებობა, თანაც მისი მეშვეობით უფრო მარტივად ყალიბდება უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომაც (იხ. §0).

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ლოგიკის კანონებიდან გამომდინარე, ცარიელი სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს

აქვს ნებისმიერი თვისება (ეს იმიტომ, რომ ამავე სიმრავლეში არ არსებობს არც ერთი ელემენტი, რომლისთვისაც რაიმე თვისება არ სრულდება).

6. სიმრავლეთა თეორიის შემსწავლელებს პირველსავე საფეხურზე უჩნდებათ კითხვა, შეიძლება თუ არა რომელიმე სიმრავლე იყოს თავისი თავის ელემენტი. ეს კითხვა საკმაოდ არატრივიალურია. ერთი მხრივ, არ არსებობს "ბუნებრივი" მაგალითი კორექტულად განსაზღვრული სიმრავლისა, რომელიც თავის თავს ეკუთვნის. მეორე მხრივ, ასეთი სიმრავლის არსებობა არ ეწინააღმდეგება ZFC თეორიის აქსიომატიკას. მართლაც, ფონ ნეიმანის $\langle V,\in\rangle$ უნივერსუმი წარმოადგენს ამ თეორიის ერთ-ერთ მოდელს (იხ. §6). განვიხილოთ V კლასის F "ბიექცია" თავის თავზე ისეთი, რომ $F(0) = 1$, $F(1) = 0$ და $F(z) = z$ ყველა დანარჩენი $z\in V$ ელემენტისათვის. განვსაზღვროთ ახალი $\in'$ კუთვნილების დამოკიდებულება შემდეგნაირად: $x \in' y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \in F(y)$. ადვილად მოწმდება, რომ $\langle V,\in'\rangle$ აგრეთვე წარმოადგენს ZFC თეორიის მოდელს, ე.ი. ამ წყვილისათვის შესრულებულია სიმრავლეთა თეორიის ყველა აქსიომა. ამავე დროს გვაქვს $0 \in' 0$. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ახალ მოდელში ცარიელი სიმრავლის როლს თამაშობს 1.

მოყვანილი მსჯელობის გათვალისწინებით ადვილად მიიღება ის ფაქტიც, რომ ე.წ. რეგულარობის აქსიომა (იხ. §6-ის სავარჯიშო 10) დამოუკიდებელია ZFC თეორიის აქსიომებისაგან.

7. თანამედროვე მათემატიკა შეისწავლის სხვადასხვა ტიპის (გვარის) სტრუქტურებს, რომელთა საერთო სახელწოდებაა მათემატიკური სტრუქტურები (მაგალითად, ალგებრული სტრუქტურები, ტოპოლოგიური სტრუქტურები, ნაწილობრივი დალაგების სტრუქტურები და ა.შ.). ამა თუ იმ კონკრეტული გვარის სტრუქტურის თეორია წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის შემდგომ გაფართოებას, რომელშიც სიმრავლურ-თეორიულ აქსიომებს ემატება განსახილველი

სტრუქტურის დამახასიათებელი აქსიომები. ამრიგად, სიმრავლეთა თეორია გვევლინება როგორც თანამედროვე მათემატიკის საკმაოდ მყარი ფუნდამენტი და, ამავე დროს, იგი მთელ მათემატიკას აძლევს უნივერსალურ ენასა და სიმბოლიკას, რომლებიც წარმატებით გამოიყენება ამ მეცნიერების სხვადასხვა დარგში.

8. ბულეანის სახელწოდება დაკავშირებულია ცნობილ ინგლისელ მათემატიკოს ჯ. ბულთან (G. Boole). მან პირველმა მოახდინა ლოგიკის კანონების მათემატიკური ანალიზი და საფუძველი ჩაუყარა თანამედროვე მათემატიკურ ლოგიკას. მან ფაქტობრივად დაინახა, რომ ლოგიკური ოპერაციები (მაგალითად, კონიუნქცია და დიზიუნქცია) ძალიან ჰგვანან ჩვეულებრივ ალგებრულ ოპერაციებს რიცხვით სიმრავლეებში და ექვემდებარებიან ანალოგიურ კანონებს: მაგალითად, კომუტატიურობას, ასოციატიურობას, დისტრიბუტიულობას. ამავე დროს, არის გარკვეული განსხვავებებიც: მაგალითად, ლოგიკის ალგებრაში ან, უფრო ზოგადად, ე.წ. ბულის ალგებრებში, ადგილი აქვს იდემპოტენტურობის კანონსაც.

ბულის ალგებრის სტანდარტულ მოდელს წარმოადგენს მოცემული სიმრავლის ბულეანი, რომელშიც განიხილება ჩვეულებრივი სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციები: ორი ქვესიმრავლის თანაკვეთის ოპერაცია, ორი ქვესიმრავლის გაერთიანების ოპერაცია და ქვესიმრავლის დამატების ოპერაცია.

9. როგორც უკვე იყო ნათქვამი, სიმრაველეთა თეორია წარმოადგენს ეგალიტარული თეორიის ერთ-ერთ მაგალითს. ეგალიტარულ თეორიაში მონაწილე ძირითად = ნიშანს ახლავს მისი შესაბამისი აქსიომები (იხ. კომენტარი 1). სიმრავლეთა თეორიას ტოლობის ნიშნის გარდა შემოაქვს ახალი რელაციური ნიშანი $\in$. ექსტენსიონალობის აქსიომა კი ამყარებს მჭიდრო კავშირს ამ ორ ნიშანს შორის. ეს კავშირი სავსებით ესადაგება ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენებს სიმრავლეებისა და მათი ელემენტების შესახებ.

ექსტენსიონალობის აქსიომასთან დაკავშირებით საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ჯერ კიდევ გ. ვ. ლაიბნიცმა (G.W. Leibniz) ჩამოაყალიბა ერთი პოსტულატი, რომელიც გარკვეული გაგებით ამ აქსიომის დუალურ ფორმას წარმოადგენს. სახელდობრ, თანამედროვე სიმბოლიკის მეშვეობით ეს პოსტულატი ასე ჩაიწერება:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall X)(A \in X \Leftrightarrow B \in X).$$

იგი **ZF** თეორიის აქსიომებიდან ადვილად გამომდინარეობს.

10. ტრანზიტული სიმრავლეების (და ტრანზიტული კლასების) როლი განპირობებულია შემდეგი ბუნებრივი გარემოებით: დავუშვათ, გვინდა ჩვენი სიმრავლეთა თეორიის სემანტიკის (ანუ მოდელების) განხილვა; მაშინ ცხადია, რომ ეს მოდელები გარკვეული გაგებით უნდა იყვნენ ჩაკეტილი ყველა შესაძლო სიმრავლურ-თეორიული ცნებებისა და დამოკიდებულებების მიმართ. რადგან ყველა ასეთი ცნება და დამოკიდებულება ყალიბდება კუთვნილების ნიშნის ტერმინებში, ამიტომ აუცილებელია, რომ მოდელის ჩაკეტილობა იყოს $\in$ დამოკიდებულების მიმართ. ანუ, უნივერსუმის გამომსახველი მოდელის ელემენტების ელემენტები კვლავ მოდელს უნდა ეკუთვნოდნენ. ეს არის ამოსავალი პუნქტი სიმრავლურ-თეორიული მოდელების აგებისათვის. მაგალითად, სწორედ ასეთია ფონ ნეიმანის $\langle V, \in \rangle$ უნივერსუმი, რომელიც ამ წიგნის §6-ში განიხილება.

11. ფონ ნეიმანის მიდგომით, ყველა ნატურალურ რიცხვთა **N** სიმრავლე განისაზღვრება ისეთნაირად, რომ მისი ყოველი ელემენტი არის ტრანზიტული სიმრავლე და თავად იგიც ტრანზიტულია (იხ. §6). თანაც ნებისმიერი $n \in \mathbf{N}$ რიცხვი ზუსტად n ელემენტს შეიცავს. უფრო მეტიც, ეს ფაქტი ვრცელდება ყველა ორდინალურ რიცხვზე (ფონ ნეიმანის აზრით) და აქედან გამომდინარეობს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს წინასწარ მოცემული სიმძლავრე (სიმრავლეთა

შინაარსობრივ თეორიაში), არსებობს ამ სიმძლავრის მქონე ტრანზიტული სიმრავლე.

12. როგორც ვიცით, ყოველი $S \subset A \times B$ ბინარული დამოკიდებულება მჭიდროდაა დაკავშირებული ამოსავალ A და B სიმრავლეებთან, რომელთა ელემენტებს შორის მყარდება ეს ბინარული დამოკიდებულება. ანუ, აქ მნიშვნელოვანია სწორედ ის გარემოება, რომ გარკვეულ $a \in A$ ელემენტებს შეესაბამება ასევე გარკვეული $b \in B$ ელემენტები, რომლებისთვისაც სამართლიანია $S(a,b)$ ფორმულა. სხვა სიტყვებით, ხდება აღნიშნული $a \in A$ ელემენტების S-ით "გადამუშავება" ზოგიერთ $b \in B$ ელემენტში (თანაც არ არის გამორიცხული ის შემთხვევაც, როცა ერთი და იგივე $a \in A$ ელემენტი გადამუშავდება რამდენიმე $b \in B$ ელემენტში). მათემატიკურ კიბერნეტიკაში ასეთი სიტუაციების განხილვისას ამბობენ, რომ A არის შესავალ ობიექტთა სიმრავლე (inputs), B – გამოსავალ ობიექტთა სიმრავლე (outputs), ხოლო S არის ე.წ. "შავი ყუთი" (black box), რომლის მეშვეობითაც შესავალი ობიექტები გარდაიქმნება გამოსავალ ობიექტებად.

გრაფიკის ცნების შემოტანა ხდება ყოველგვარი დამხმარე სიმრავლეების გარეშე. მთელ რიგ საკითხებში გრაფიკის შინაგანი სტრუქტურა შეიძლება გამოვიკვლიოთ ისე, რომ საერთოდ არ შევეხოთ მისი განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეების თვისებებს.

13. დასმული საკითხის ინტუიციურ დონეზე უარყოფითი "ამოხსნა", უხეშად რომ ვთქვათ, ისევ და ისევ იმითაა გამოწვეული, რომ ჩვენი თეორიის ალფაბეტის სიმძლავრე არ შეიძლება იყოს კონტინუუმის სიმძლავრეზე მეტი (პრაქტიკული თვალსაზრისით, ალფაბეტის სიმბოლოები ბრტყელი უწყვეტი წირებით ან მათი სასრული კომბინაციებით გამოისახება). ამის გამო, თეორიულად შესაძლებელია ფორმულების მხოლოდ კონტინუუმ რაოდენობის დაწერა. ამდენად, ფორმულების შესაბამისი

ფუნქციების რაოდენობაც ვერ იქნება კონტინუუმის სიმძლავრეზე მეტი. მაგრამ სიმრავლეთა თეორიაში მტკიცდება, რომ **R**-დან **R**-ში მოქმედ ფუნქციათა სიმრავლის სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრეზე მკაცრად მეტია. ფაქტობრივად, ეს არის კანტორის კლასიკური თეორემის კერძო შემთხვევა (იხ. §5). ამრიგად, ვხედავთ, რომ წმინდა "ტექნიკური" თვალსაზრისითაც თეორიის რესურსები ვერ იძლევა ყველა ფუნქციის გამოსახვის საშუალებას, რომლებიც **R**-დან **R**-ში მოქმედებენ.

ამასთან დაკავშირებით უფრო მეტის თქმაც შეიძლება. როგორც წესი, ფორმალური მათემატიკური თეორიის ალფაბეტი თვლადი სიმრავლეა და, მაშასადამე, ასეთი თეორიის ყველა ფორმულათა სიმრავლეც თვლადია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ ტიპის თეორიას ძალუძს მხოლოდ თვლადი რაოდენობის ფუნქციების აღწერა მისი ფორმულების მეშვეობით. კერძოდ, კანტორის იმავე თეორემის თანახმად, ყოველთვის გვექნება ისეთი ნამდვილი რიცხვები, რომლებიც ვერ მოიცემა ვერანაირი ფორმულის საშუალებით. ამრიგად, **R**-დან **R**-ში მოქმედი ყველა მუდმივი ფუნქციისთვისაც კი არ არსებობს შესაბამისი გამომსახველი ფორმულები (აღნიშნულ თვლად თეორიაში).

14. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს k ნატურალური რიცხვი, ეილერ-ვენის დიაგრამები საზოგადოდ ვერ აიგება მხოლოდ იმ ფიგურების მეშვეობით, რომელთა საზღვრები k (ან ნაკლები) რიგის ალგებრულ წირებს წარმოადგენენ. მკითხველს ვთავაზობთ, თავად გაიაზროს ეს ფაქტი და შეადაროს იგი §3-ის მომდევნო სავარჯიშოში მოყვანილ შედეგს.

15. ამორჩევის აქსიომას ცერმელომდე გაცილებით უფრო ადრე (სახელდობრ, 1890 წელს) ცნობილმა იტალიელმა მათემატიკოსმა ჯ. პეანომ (G. Peano) მიაქცია ყურადღება. კანტორის მსგავსად, ისიც მათემატიკური ანალიზის კონკრეტულ საკითხს იკვლევდა, კერძოდ, ცდილობდა იმის დამტკიცებას, რომ პირველი რიგის ჩვეულებრივ

დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის მარჯვენა მხარე ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციაა, აქვს ლოკალური ამონახსნი ამ ფუნქციის განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობისათვის. პეანომ დაადგინა აღნიშნული ფაქტის მართებულობა და შეამჩნია, რომ დამტკიცების პროცესში მას რამდენჯერმე მოუხდა ამორჩევის პრინციპის გამოყენება. მანვე გამოთქვა თავისი უარყოფითი დამოკიდებულება ამ პრინციპისადმი და შეძლო ისეთი მსჯელობის მოყვანა, რომელიც იმავე ფაქტის ჭეშმარიტობას ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე ადგენდა.

16. ამორჩევის აქსიომის ერთ-ერთი სუსტი ფორმა შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს:

თუ მოცემულია ორელემენტიან სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახი, მაშინ ამ ოჯახს აქვს ერთი სელექტორი მაინც.

აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ამორჩევის აქსიომის ეს ფორმაც კი მათემატიკაში უცნაური თვისებების მქონე წერტილოვანი სიმრავლეების არსებობას იძლევა, კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა **R** ღერძზე ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის არსებობას, რაც თავის დროზე ნაჩვენები იყო ვ. სერპინსკის მიერ. ამ ფაქტისა და მისი მსგავსი რამდენიმე დებულების დეტალური დამტკიცება იხ., მაგალითად, [26] და [27] წიგნებში.

ყოველი $m > 1$ ნატურალური რიცხვისათვის $AC(m)$-ით აღვნიშნოთ შემდეგი წინადადება:

თუ მოცემულია m-ელემენტიან სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახი, მაშინ მას აქვს ერთი სელექტორი მაინც.

საინტერესო გამოკვლევები იყო ჩატარებული იმ მიმართულებით, რომ დაედგინათ, რომელი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის $AC(m)$ წინადადებიდან გამომდინარეობს $AC(n)$ წინადადება (რასაკვირველია, **ZF** თეორიის ჩარჩოებში). აღმოჩნდა, რომ ეს საკითხი მჭიდროდაა დაკავშირებული m და n რიცხვების ერთობლივ არითმეტიკულ თვისებებთან (უფრო დაწვრილებით ამის შესახებ იხ. ვ. სერპინსკის მონოგრაფია [59]).

17. დამატებითი თვისებების მქონე სელექტორების არსებობა საჭიროა არაერთი მათემატიკური ამოცანის გადასაწყვეტად. ზოგად ტოპოლოგიაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება უწყვეტი სელექტორების არსებობის თეორემებს, როცა მოცემული მულტი-ფუნქცია გარკვეულ უწყვეტობის (უფრო ზუსტად კი, ნახევრად უწყვეტობის) პირობებს აკმაყოფილებს. ალბათობის თეორიის, ფუნქციონალური ანალიზისა და ოპტიმიზაციის თეორიის ბევრ საკითხში აუცილებელი ხდება ზომადი სელექტორების არსებობის თეორემების დადგენა იმ პირობებში, როცა მოცემული მულტი-ფუნქცია გარკვეული გაგებით ზომადია (სახელდობრ, სუსტად ზომადია). თანამედროვე მათემატიკაში ამგვარი მაგალითების მოყვანა მრავლად შეიძლება.

გარდა ამისა, დიდი მნიშვნელობა აქვს მულტი-ფუნქციებთან დაკავშირებულ ე.წ. უძრავი წერტილების არსებობის თეორემებს. თუ F მულტი-ფუნქცია გადასახავს X სიმრავლეს მისსავე ბულეანში, მაშინ $x \in X$ წერტილს ეწოდება უძრავი ამ მულტი-ფუნქციის მიმართ, თუ $x \in F(x)$. სხვადასხვა ტიპის უძრავი წერტილების არსებობის საფუძველზე მიიღება ღრმა შედეგები დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში, ფუნქციონალურ ანალიზში, ტოპოლოგიაში, თამაშთა თეორიაში და ა.შ.

18. თვლადობის ცნებასთან დაკავშირებით ადრე გამოიყენებოდა ოდნავ სხვანაირი ტერმინოლოგია, რომელიც ზოგიერთ სახელმძღვანელოში დღესაც კი არის შემორჩენილი. სახელდობრ, თვლადი სიმრავლის ქვეშ იგულისხმებოდა ნებისმიერი ისეთი სიმრავლე, რომელიც $\mathbf{N}$-ის ეკვივალენტურია. ხოლო ნებისმიერ სიმრავლეს, რომელიც ან სასრულია, ან $\mathbf{N}$-ის ეკვივალენტური, არაუმეტეს თვლადი სიმრავლე ეწოდებოდა. ცხადია, ასეთი ტერმინოლოგიის დროს, სასრული სიმრავლე არ შეიძლება იყოს თვლადი.

19. მკითხველი ალბათ შეამჩნევს, რომ ბანახის თეორემის დამტკიცება არა მხოლოდ ამორჩევის აქსიომას არ ეყრდნობა,

არამედ უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომასაც კი არ იყენებს. უფრო მეტიც, ბანახის თეორემაში აგებული h ფუნქცია, შეიძლება ითქვას, საკმაოდ კარგადაა "შეწებებული" ამოსავალი f და g ფუნქციების საშუალებით. ამიტომ, თუ ამოსავალი ფუნქციები გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს, მაშინ ეს პირობები შენარჩუნდება h ფუნქციისათვისაც. მაგალითად, თუ f და g უბან-უბან იზომეტრიებს წარმოადგენენ, მაშინ h-იც უბან-უბან იზომეტრია იქნება (სწორედ ეს ფაქტი გამოიყენება ბანახ-ტარსკის ცნობილი პარადოქსის დადგენისას). ანალოგიურად, თუ f და g ბორელის იზომორფიზმებია (ე.წ. პოლონურ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ბორელის ქვესიმრავლეებს შორის), მაშინ h ფუნქციაც წარმოადგენს ბორელის იზომორფიზმს.

20. კ. გიოდელისა და პ. კოჰენის შესანიშნავი შედეგების თანახმად, კონტინუუმის ჰიპოთეზა არის ისეთი წინადადება, რომელიც დამოუკიდებელია ZFC თეორიისაგან, ე.ი. ამ თეორიაში ვერ მტკიცდება ვერც ეს ჰიპოთეზა, ვერც მისი უარყოფა. უფრო ზუსტად, გიოდელმა დაადგინა კონტინუუმის ჰიპოთეზის თავსებადობა ZFC-სთან, ხოლო კოჰენმა იმავე ZFC-სთან ამ ჰიპოთეზის უარყოფის თავსებადობაც აჩვენა.

შევნიშნოთ, რომ კონტინუუმის ჰიპოთეზას აქვს უამრავი ეკვივალენტური ფორმა, რომელიც მოულოდნელად ჩნდება ხოლმე მათემატიკის სხვადასხვა დარგში. მაგალითად, ევკლიდური სივრცის გეომეტრიის ჩარჩოებშიც კი შეიძლება ჩამოყალიბდეს ამ ჰიპოთეზის ერთ-ერთი ეკვივალენტი (იხ. სერპინსკის ზემოთ მითითებული მონოგრაფია). ასეთი ტიპის ეკვივალენტები ან მათი ოდნავ უფრო სუსტი ფორმები გამოიყენება შესაბამის მათემატიკურ დარგში სასურველი შედეგის მისაღებად იმ დროს, როცა თავად ZFC თეორია ვერ იძლევა ამავე შედეგის მიღების საშუალებას. აქვე უნდა ითქვას, რომ თანამედროვე სიმრავლურ-თეორიულ მსჯელობებსა და კონსტრუქციებში ძალიან ხშირად კონტინუუმის ჰიპოთეზის მაგივრად ე.წ. მარტინის აქსიომა გამოიყენება (იხ. [7], [30], [56]), რომელიც კონტინუუმის

ჰიპოთეზაზე გაცილებით უფრო სუსტია, რადგან არანაირად არ ზღუდავს ზემოდან R-ის სიმძლავრეს (ZFC თეორიის ფარგლებში). მაგრამ მარტინის აქსიომას არა აქვს ისეთი თვალსაჩინო ფორმა, როგორიც აქვს კონტინუუმის ჰიპოთეზას, ამიტომ ეს აქსიომა თავისი ფორმულირებით ნაკლებად ბუნებრივი ჩანს.

21. ნაჩვენები იყო, რომ არსებობს ZF თეორიის ისეთი მოდელები, რომლებშიც R ღერძი წარმოიდგინება როგორც თვლადი სიმრავლეების თვლადი ოჯახის გაერთიანება (ა. ლევის (A. Levy) შედეგი). ეს მნიშვნელოვანი გარემოება კიდევ ერთხელ მიუთითებს იმაზე, რომ კლასიკური მათემატიკური ანალიზისათვის აუცილებელია ამორჩევის აქსიომის რაიმე ფორმის მიღება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვერ დავამტკიცებთ ანალიზისა და წერტილოვანი სიმრავლეების ელემენტარული თეორიის ზოგიერთ ძირითად ფაქტსაც კი.

22. ფონ ნეიმანის აზრით ორდინალები სავსებით კონკრეტული სიმრავლეებია, რომლებიც გარკვეული კონსტრუქციული (მაგრამ ტრანსფინიტური) სქემის საშუალებით აიგება. საკმაოდ ხშირად ორდინალური რიცხვები განისაზღვრება სხვანაირად, როგორც სავსებით დალაგებულ სიმრავლეთა ორდინალური ტიპები. მაგრამ ასეთი განსაზღვრის დროს შესაბამის თეორიაში უნდა იყოს დამატებითი აქსიომა, რომელიც უზრუნველყოფს წყვილ-წყვილად იზომორფული ბინარული დამოკიდებულებების ტიპის არსებობას. ეს აქსიომა ზედმეტია, მაგალითად, ნ. ბურბაკის ფორმალურ სისტემაში, სადაც გვაქვს გლობალური ამორჩევის ოპერატორი, რომელიც ერთმანეთის იზომორფულ ბინარულ დამოკიდებულებათა კლასიდან ირჩევს წარმომადგენელს – ამ ბინარულ დამოკიდებულებათა ტიპს.

23. როგორც უკვე ვიცით, ფონ ნეიმანის უნივერსუმი არის სიმრავლეთა თეორიის ტრანზიტული მოდელი, რომელიც

ყველა ორდინალს შეიცავს. გიოდელის უნივერსუმი კი მოკლედ შეიძლება განისაზღვროს, როგორც სიმრავლეთა თეორიის უმცირესი (ჩართვის დამოკიდებულების თვალსაზრისით) ტრანზიტული მოდელი, რომელიც ყველა ორდინალს შეიცავს. მაშასადამე, გიოდელის უნივერსუმი შედის ფონ ნეიმანის უნივერსუმში. აქვე საინტერესოა აღინიშნოს, რომ გიოდელის უნივერსუმში სრულდება ამორჩევის აქსიომა, რითაც დგინდება მისი თავსებადობა სიმრავლეთა თეორიის დანარჩენ აქსიომებთან. ამასთან დაკავშირებით უფრო მეტის თქმა შეიძლება. გიოდელის უნივერსუმი აგრეთვე წარმოადგენს განზოგადებული კონტინუუმის ჰიპოთეზის მოდელს. ეს განზოგადებული ჰიპოთეზა შემდეგნაირად ფორმულირდება:

როგორიც არ უნდა იყოს A უსასრულო სიმრავლე, არ არსებობს სიმრავლე, რომლის სიმძლავრე მეტია card(A)-ზე და ნაკლებია card(P(A))-ზე.

სერპინსკიმ ფაქიზი მსჯელობით დაამტკიცა (ZF თეორიის ფარგლებში), რომ განზოგადებული კონტინუუმის ჰიპოთეზიდან გამომდინარეობს ამორჩევის აქსიომა (იხ. [32] ან [59]). ამიტომ ეს აქსიომა ავტომატურად მართებულია გიოდელის უნივერსუმში. მაგრამ გიოდელის უნივერსუმისათვის ადგილი აქვს უფრო ძლიერ ფაქტსაც, სახელდობრ, ამ უნივერსუმში სრულდება ცერმელოს აქსიომის გლობალური ფორმაც, ე.ი. უნივერსუმში ეფექტურად განისაზღვრება ოპერატორი, რომელიც ყოველ არაცარიელ სიმრავლეს (ყოველ არაცარიელ კლასსაც კი) უთანადებს მის რომელიღაც ელემენტს. სხვა სიტყვებით, გიოდელის უნივერსუმი "სავსებით დალაგებულია გარკვეული დალაგების დამოკიდებულების" მიმართ.

24. თავის დროზე ყველა ორდინალურ რიცხვთა "სიმრავლის" განხილვამ გამოიწვია მათემატიკოსების შეშფოთება, რადგან ამ "სიმრავლის" არსებობა აშკარა წინააღმდეგობას იძლეოდა (ე.წ. ბურალი-ფორტის პარადოქსი, 1897). რამდენიმე წლის შემდეგ კი რასელმა გამოაქვეყნა თავისი გაცილებით უფრო მარტივი პარადოქსი და, ამრიგად,

უკვე სერიოზულად დაისვა საკითხი სიმრავლეთა თეორიის ლოგიკური დაფუძნების აუცილებლობის შესახებ.

25. ნამდვილ რიცხვთა **R** სიმრავლის აღნიშნული $\{L_i : i\in I\}$ დაყოფა (**ZF** თეორიის ჩარჩოებში) პირველად ცნობილმა ფრანგმა მათემატიკოსმა ა. ლებეგმა ააგო. ამ შედეგს დიდ მნიშვნელობას ანიჭებდა ნ. ლუზინი, რადგან შემდგომში მან ძალზე არსებითი როლი შეასრულა სიმრავლეთა ე.წ. დესკრიფციული თეორიის განვითარების პროცესში.

26. ცერმელოს თეორემას, უდავოდ, უაღრესად პრინციპული მნიშვნელობა აქვს. მართლაც, კარგადაა ცნობილი, რომ ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს წერტილთა უსასრულო დისკრეტულ მიმდევრობას, რომელიც ნულით იწყება და თანდათანობით, ფიქსირებული სიგრძის ბიჯების მეშვეობით მონოტონურად იზრდება (ყოველი რიცხვიდან უშუალოდ მომდევნოზე გადასვლით). ძნელი წარმოსადგენია, რომ ანალოგიური ბუნების დისკრეტული პროცესი შესაძლებელი იყოს თუნდაც ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყველა წერტილისათვის. მაგრამ ცერმელოს თეორემა ამის ერთგვარ შესაძლებლობას იძლევა (ცხადია, მხოლოდ თეორიულად). ამრიგად, გარკვეული გაგებით ეს თეორემა შლის განსხვავებას უწყვეტსა და დისკრეტულს შორის და ნებისმიერ სიმრავლეს განიხილავს როგორც აგებულს დისკრეტული (მაგრამ ტრანსფინიტური) სქემის საშუალებით.

27. სავარჯიშოში მოყვანილი შედეგი ეკუთვნის ცნობილ პოლონელ მათემატიკოსსა და ლოგიკოს ა. ტარსკის (რომელიც მეტწილად აშშ-ში მოღვაწეობდა და იქ შექმნა ძლიერი სკოლა მათემატიკურ ლოგიკაში, მოდელების თეორიასა და სიმრავლეთა თეორიაში). აღნიშნული შედეგის ფონზე ბუნებრივად ჩნდება კითხვა, არის თუ არა ამორჩევის აქსიომა შემდეგი წინადადების ეკვივალენტური:

ყოველი უსასრულო **A** სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$((A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})) \sim A$$

დამოკიდებულებას.

ალმოჩნდა, რომ პასუხი ამ კითხვაზე უარყოფითია.

აქვე მოვიყვანთ ტარსკის კიდევ ერთ დებულებას, რომელიც **ZF** თეორიის ჩარჩოებში მტკიცდება. სახელდობრ, თუ მოცემულია ნატურალური $n > 0$ რიცხვი და ორი A და B სიმრავლე, რომლებისთვისაც გვაქვს

$$(A \times \{1\}) \cup (A \times \{2\}) \cup ... \cup (A \times \{n\}) \sim (B \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}) \cup ... \cup (B \times \{n\}),$$

მაშინ $A \sim B$. ამ დებულების დამტკიცება საკმაოდ რთულია (იხ. ვ. სერპინსკის მონოგრაფია [59] და მასში მითითებული შესაბამისი ლიტერატურა).

28. ვ. სერპინსკიმ დაამტკიცა, რომ **N**-ში არატრივიალური ულტრაფილტრის არსებობიდან გამომდინარეობს (**ZF & DC** თეორიის ჩარჩოებში) ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლის არსებობა. ფაქტობრივად, **N**-ში ყოველი არატრივიალური ულტრაფილტრი შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ე.წ. კანტორის დისკონტინუუმის გარკვეული ქვესიმრავლე. კანტორის დისკონტინუუმზე გვაქვს კანონიკური ალბათური ზომა-ნამრავლი, რომლის გასრულება [0,1] სეგმენტზე მოცემული ლებეგის ზომის იზომორფულია. სერპინსკიმ აჩვენა, რომ ულტრაფილტრის შესაბამისი სიმრავლე არის არაზომადი აღნიშნული ალბათური ზომა-ნამრავლის გასრულების მიმართ.

29. ზოგადი ტოპოლოგიის ერთ-ერთი მთავარი დებულება არის ტიხონოვის თეორემა, რომლის თანახმადაც კვაზიკომპაქტურ სივრცეთა ნებისმიერი ოჯახის ტოპოლოგიური ნამრავლი კვლავ კვაზიკომპაქტური სივრცეა. ეს თეორემა საკმაოდ მარტივად მტკიცდება ულტრაფილტრების ტექნიკის გამოყენებით. ამერიკელმა მათემატიკოსმა ჯ. კელიმ (J. Kelley) აჩვენა, რომ **ZF** თეორიაში

ტიხონოვის თეორემა ამორჩევის აქსიომის ეკვივალენტური დებულებაა (იხ. [24]).

30. გიოდელის თეორემამ სისრულის შესახებ უაღრესად დიდი როლი შეასრულა მოდელების თანამედროვე თეორიის ჩამოყალიბებაში (იხ., მაგალითად, [6]). გიოდელის თეორემის შემდგომი დაზუსტება არის ლიოვენჰეიმ-სკოლემ-ტარსკის თეორემა (იხ. ოდნავ ქვემოთ კომენტარი 32).

31. ფაქტობრივად, დასმული საკითხი და მისი მსგავსი ამოცანები უსასრულო კომბინატორიკის თემატიკას მიეკუთვნებიან. საუბარს უსასრულო კომბინატორიკის შესახებ წიგნის მეორე ნაწილში გავაგრძელებთ. კერძოდ, იქ განხილული იქნება სხვადასხვა ტიპის უსასრულო ხეები, ე.წ. დიდი კარდინალები (კერძოდ, ზომადი კარდინალები), სიმრავლეთა თითქმის დიზიუნქტური ოჯახები და ინგლისელი ლოგიკოსის ფ. რამსეის (F. Ramsey) თეორიის ელემენტები.

32. გიოდელის თეორემის თანახმად, თუ პირველი რიგის L თეორია ლოგიკურად არაწინააღმდეგობრივია, მაშინ მას აქვს ერთი M მოდელი მაინც. ამ თეორემის დამტკიცების ანალიზიდან აგრეთვე გამომდინარეობს M-ის ისეთი შერჩევის შესაძლებლობა, რომ მისი სიმძლავრე (card(L) + card(N))-ს არ აღემატებოდეს. ლიოვენჰეიმ-სკოლემ-ტარსკის თეორემა კი შემდეგნაირად ფორმულირდება:

თუ პირველი რიგის ლოგიკურად არაწინააღმდეგობრივ L თეორიას არ გააჩნია სასრული მოდელები, მაშინ ყოველი $a \geq$ card(L) + card(N) კარდინალური რიცხვისათვის L-ს აქვს a სიმძლავრის მქონე მოდელი.

აქედან სხვა გზით მიიღება არასტანდარტული მოდელების კონსტრუქციები (მაგალითად, ფორმალური არითმეტიკის არათვლადი მოდელის არსებობის დამტკიცება და სიმრავლეთა **ZFC** თეორიის თვლადი მოდელების არსებობა).

გარდა ამისა, მსგავსი ტიპის საკითხები ორგანულ კავშირშია გიოდელ-მალცევის კომპაქტურობის თეორემასთან.

აქვე გვინდა საგანგებოდ შევჩერდეთ ZFC-ს თვლადი მოდელების არსებობის ფაქტზე. ვთქვათ, M არის ერთ-ერთი ასეთი მოდელი. რასაკვირველია, M-ის შიგნით გვაქვს როგორც თვლადი, ისევე არათვლადი სიმრავლეები (თუნდაც კანტორის კლასიკური თეორემის გამო). თუ X არის რომელიმე თვლადი სიმრავლე M-ში და Y არის რომელიმე არათვლადი სიმრავლე M-ში, მაშინ M-ის შიგნით არ არსებობს X-სა და Y-ს შორის არანაირი f ბიექცია. მაგრამ ეს გარემოება სრულებითაც არ გამორიცხავს იმ შესაძლებლობას, რომ შინაარსობრივი სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით (რომლის ტერმინებშიაც განიხილება M მოდელი და მასთან ასოცირებული კუთვნილების მიმართება) X და Y სიმრავლეები იყვნენ ერთმანეთის ეკვივალენტური. ანუ, ჩვენ ვხედავთ, რომ ადგილი აქვს სიმრავლეთა თეორიის ე.წ. ფარდობითობის (რელატიურობის) ფენომენს.

33. გიოდელ-მალცევის კომპაქტურობის თეორემა (უფრო სწორედ, კომპაქტურობის მეტათეორემა) ეხება ფორმალური თეორიების სემანტიკურ ასპექტებს, რადგან მასში ლაპარაკია L თეორიისა და მისი სასრული ფრაგმენტების მოდელებზე. ამ კონტექსტში უპრიანია აღვნიშნოთ, რომ კომპაქტურობის თეორემას აქვს წმინდა სინტაქსური ანალოგი, რომელიც შემდეგნაირად ყალიბდება:

თუ მოცემული L თეორია ლოგიკურად წინააღმდეგობრივია, მაშინ მისი რომელიღაც სასრული ფრაგმენტიც ლოგიკურად წინააღმდეგობრივია.

კომპაქტურობის თეორემისაგან განსხვავებით, ეს სინტაქსური ვარიანტი თითქმის ტრივიალურია. მართლაც, თუ L თეორიაში მიიღება ლოგიკური წინააღმდეგობა, მაშინ იგივე წინააღმდეგობა მიიღება L-ის სასრული ფრაგმენტიდანაც (რადგან ნებისმიერი ფორმალური დამტკიცება მხოლოდ სასრულ რაოდენობა ფორმულებს შეიცავს).

34. card(N)-კატეგორიული თეორიის კლასიკური მაგალითია წრფივად და მკვრივად დალაგებული უსასრულო სიმრაელის პირველი რიგის თეორია (აქ იგულისხმება, რომ ამ სიმრავლეს არა აქვს არც უდიდესი, და არც უმცირესი ელემენტი). თუ ასეთი სიმრავლე თვლადია, მაშინ იგი ყველა რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლის იზომორფულია (იხ. §5-ის სავარჯიშო 10). შეიძლება დამტკიცდეს, რომ აღნიშნული თეორია არ არის $\mathbf{a}$-კატეგორიული არც ერთი არათვლადი $\mathbf{a}$ კარდინალისათვის (შეეცადეთ ეს ფაქტი დაასაბუთოთ).

საერთოდ, არათვლადი კარდინალებისათვის შესაბამისი კატეგორიული თეორიების განხილვა მოულოდნელ და საინტერესო ფენომენთანაა დაკავშირებული. სახელდობრ, ამ მიმართულებით განსაკუთრებით აღსანიშნავია ამერიკელი მათემატიკოსის მ. მორლის (M. Morley) მიერ 1965 წელს დამტკიცებული შემდეგი ზოგადი მეტაწინადადება:

თუ მოცემული თვლადი სრული თეორია არის კატეგორიული რომელიმე არათვლადი კარდინალისათვის, მაშინ იგი კატეგორიულია ნებისმიერი არათვლადი კარდინალისათვის.

დამტკიცება იხ. [39]-ში, ხოლო განზოგადებული ვერსია – ს. შელახის [51] და [53] შრომებში. ამ შესანიშნავ შედეგთან დაკავშირებით უპრიანია მოვიყვანოთ ერთი ტიპიური მაგალითი.

განვიხილოთ Q რაციონალურ რიცხვთა ველზე განსაზღვრულ ვექტორულ სივრცეთა თეორია. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ნებისმიერი ორი ასეთი არათვლადი ვექტორული სივრცე იზომორფულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ აქვთ ერთიდაიგივე სიმძლავრე. ამრიგად, ეს თეორია არის კატეგორიული ყოველი არათვლადი კარდინალისათვის. ამავე დროს, ეს თეორია არ არის კატეგორიული card(N)-ის მიმართ, რადგან Q ველისათვის არსებობს თვლადი ვექტორული სივრცეების უსასრულო რაოდენობა, რომლებიც წყვილ-წყვილად არაიზომორფულია.

აქვე უნდა ითქვას, რომ მორლის ზემოთ მოყვანილი მეტაწინადადების მსგავსი ზოგადი შედეგების გარდა,

მოდელების თეორიაში მიღებულია ისეთი შედეგები, რომლებიც არაერთ კონკრეტულ მათემატიკურ საკითხში გამოიყენება. მაგალითად, მოდელების თეორიის მეთოდების მეშვეობით იხსნება ჰილბერტის ცნობილი მე-17 პრობლემა ველთა თეორიიდან და თანამედროვე ალგებრული გეომეტრიის რამდენიმე ღრმა ამოცანა.

35. საზოგადოდ, ადვილია იმის ჩვენება, რომ ყოველი ალგებრული სისტემა კანონიკურად ჩაიდგმება მის ნებისმიერ ულტრახარისხში. ამ თითქოსდა მარტივ ფაქტს არსებითი მნიშვნელობა აქვს მოდელებისა და ალგებრული სისტემების თანამედროვე თეორიის ბევრი საკითხისათვის.

36. ხაზგასმით უნდა ითქვას, რომ სასრული კომბინატორიკის ზოგიერთი არატრივიალური ფორმულა უკვე შუა საუკუნეებში იყო ცნობილი (და კიდევ უფრო ადრეც). მაგრამ ინტერესი კომბინატორიკის საკითხებისადმი მკვეთრად გაიზარდა ალბათობის თეორიის ელემენტარული ამოცანების დასმის შემდეგ. ამას ხელი შეუწყო ბ. პასკალის (B. Pascal), პ. ფერმასა (P. Fermat) და ი. ბერნულის (J. Bernoulli) შრომებმა. ამ მიმართულებით დიდი დამსახურება მიუძღვის გ.ვ. ლაიბნიცსაც, რომლის ერთ-ერთ ადრინდელ ნაშრომს ჰქვია: "დისერტაცია კომბინატორიკის ხელოვნების შესახებ" (Dissertatio de Arte Combinatoria, 1666). სხვათაშორის, ამ ნაშრომში ლაიბნიცმა წამოაყენა მრავალი ორიგინალური იდეა, რომლებმაც შემდგომში მნიშვნელოვანი როლი შეასრულეს მათემატიკური ლოგიკის განვითარებასა და ჩამოყალიბებაში. კერძოდ, თვით ტერმინი "მოდელი" (ამჟამად საყოველთაოდ მიღებული) სწორედ ლაიბნიცის მიერ იქნა შემოტანილი.

37. ჩართვისა და გამორიცხვის ფორმულა წარმატებით გამოიყენება ალბათობის თეორიის ისეთ ღრმა საკითხებში, რომლებიც ალბათური ზომების ე.წ. სუსტ კრებადობას ეხებიან (ამასთან დაკავშირებით იხ. [2]).

38. კიონიგის ლემის არატრივიალურ გამოყენებებს შეიძლება წავაწყდეთ თავად კომბინატორიკასა და გრაფთა თეორიაში, ზოგად ტოპოლოგიაში, ზომის თეორიაში, თამაშთა თეორიასა და უამრავ სხვა მათემატიკურ დარგში. ეს ლემა ამორჩევის აქსიომის გარკვეული ფორმის ეკვივალენტურია (არაცარიელი სასრული სიმრავლეების თვლადი ოჯახებისათვის). აქსიომატური სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით უფრო აქტუალურია კიონიგის ლემის არათვლადი ვერსიების ლოგიკური ანალიზი, რომლის შედეგად ხშირად დგინდება ამ ვერსიების მჭიდრო კავშირი დიდი კარდინალების არსებობასთან.

39. ბერნსაიდის ლემა წამყვან როლს თამაშობს უნგრელი მათემატიკოსის ჯ. პოლიას (G. Polya) ე.წ. გადათვლის თეორიაში, რომელიც სასრული კომბინატორიკის ძალზე მნიშვნელოვან თავს წარმოადგენს და პრაქტიკული ხასიათის მრავალ საკითხში გამოიყენება.

40. საკმაოდ მარტივი მსჯელობით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ G_p ჯგუფი ციკლურია. G_p-ს ამ თვისებიდან გამომდინარე დგინდება, რომ ყოველი $n > 0$ ნატურალური რიცხვისათვის $x^n - 1 = 0$ სახის ალგებრული განტოლება ამოხსნადია რადიკალებში, თანაც შესაბამისი რადიკალების მაჩვენებლები მკაცრად ნაკლებია n-ზე. ეს ბოლო გარემოება საფუძვლად უდევს იმ ფუნდამენტური ფაქტის დამტკიცებას, რომ არსებობს მეხუთე ხარისხის კონკრეტული ალგებრული განტოლებები (მაგალითად, $x^5 - 4x - 2 = 0$), რომლებიც არ არიან ამოხსნადი რადიკალებში. აქედან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ ზოგიერთ ალგებრულ რიცხვს ვერასოდეს ვერ მივიღებთ, თუკი ამოსავალ ობიექტებად რაციონალურ რიცხვებს განვიხილავთ და მათზე სტანდარტულ არითმეტიკულ ოპერაციებსა და ფესვის ამოღების ოპერაციას ვაწარმოებთ.

ლიტერატურა

1. S. Banach, A. Tarski, Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. Math., v. 6, 1924, pp. 244-277.

2. P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

3. G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., v. 25, 1948.

4. Н. Бурбаки (N. Bourbaki), Теория Множеств, Изд. Мир, Москва, 1965, (пер. с франц.).

5. G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin, 1932.

6. C.C. Chang, H.J. Keisler, Model Theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

7. K. Ciesielski, Set Theory for the Working Mathematician, London Math. Soc. Student Texts, v. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

8. P.J. Cohen, Set Theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin, New York, 1966.

9. R.P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. (2), v. 51, 1950, pp. 161-166.

10. H.B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, New York-London, 1972.

11. H.B. Enderton, Elements of Set Theory, Academic Press, New York-London, 1977.

12. P. Erdös, R. Rado, A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc., v. 62, 1956, pp. 427-489.

13. A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math. Anal., v. 86, 1922, pp. 230-237.

14. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, Foundations of Set Theory, 2-nd edition, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

15. K. Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis, Ann. of Math. Studies, n. 3, Princeton University Press, Princeton, 1940.

16. Ph. Hall, On representatives of subsets, Journal of London Mathematical Society, v. 10, 1935, pp. 26-30.

17. P.R. Halmos, Lectures on Boolean Algebras, Princeton University Press, Princeton, 1963.

18. F. Hartogs, Über das Problem der Wohlordnung, Math. Ann., v. 76, 1915, pp. 442-443.

19. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit und Co., Leipzig, 1914.

20. G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, Gottingen, 1906.

21. P. Howard, Consequences of the Axiom of Choice, Amer. Math. Soc., 1998.

22. T. Jech, The Axiom of Choice, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

23. T. Jech, Set Theory, Academic Press, New York-London, 1978.

24. J.L. Kelley, The Tychonoff product theorem implies the Axiom of Choice, Fund. Math., v. 37, 1950, pp. 75-76.

25. J.L. Kelley, General Topology, D. Van Nostrand, New York, 1955.

26. A.B. Kharazishvili, Applications of Point Set Theory in Real Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

27. A.B. Kharazishvili, Nonmeasurable Sets and Functions, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, 2004.

28. D. König, Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, Acta Litt. Acad. Sci. Hung. Fran. Josep., v. 3, 1927, pp. 121-130.

29. K. Kunen, Combinatorics, in: Handbook of Mathematical Logic, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

30. K. Kunen, Set Theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.

31. K. Kuratowski, Une methode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathematiques, Fund. Math., v. 3, 1922, pp. 76-108.

32. K. Kuratowski, A. Mostowski, Set Theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967.

33. J. Los, Quelques remarques theoremes et problemes sur les classes definissables d'algebres, in: Mathematical Interpretations of Formal Systems, Amsterdam, 1955.

34. J. Los, C. Ryll-Nardzewski, On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs, Fund. Math., v. 38, 1951, pp. 233-237.

35. J. Los, C. Ryll-Nardzewski, Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras, Fund. Math., v. 41, 1954, pp. 49-56.

36. Н.Н. Лузин (N.N. Luzin), Собрание сочинений, тт. 1-3, Издательство Академии наук СССР, Москва, 1953-1959.

37. А. И. Мальцев, Алгебраические системы, Издательство Наука, Москва, 1970.

38. J.C. Morgan II, Point Set Theory, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1990.

39. M. Morley, Categoricity in power, Trans. Amer. Math. Soc., v. 114, 1965, pp. 514-538.

40. J. von Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. de Crelle, v. 154, 1925, pp. 219-240.

41. J.C. Oxtoby, Measure and Category, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

42. H. Poincare, La Valeur de la Science, Flammarion, Paris, 1905.

43. H. Poincare, Science et Hypothese, Flammarion, Paris, 1906.

44. H. Poincare, Science et Methode, Flammarion, Paris, 1920.

45. F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. (2), v. 30, 1930, pp. 264-286.

46. H. Rasiowa, R. Sikorski, Mathematics of Metamathematics, Monografie Matematyczne, v. 41, PAN, Warsaw, 1963.

47. H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.

48. B. Russell, A.N. Whitehead, Principia Mathematica, v. 1-3, Cambridge, 1910-1913.

49. К.А. Рыбников (K.A. Rybnikov), Введение в комбинаторный анализ, Издательство МГУ, Москва, 1985.

50. D.S. Scott, A proof of the independence of the continuum hypothesis, Math. Syst. Theory, v. 1, 1967, pp. 89-111.

51. S. Shelah, A note on Hanf numbers, Pacific Journal of Mathematics, v. 34, 1971, pp. 539-544.

52. S. Shelah, Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers, Israel Journal of Mathematics, v. 10, 1972, pp. 224-233.

53. S. Shelah, Categoricity of uncountable theories, Proc. of Tarski's Symp., Symp. Pure Math., v. 25, 1974, pp. 187-204.

54. S. Shelah, Can you take Solovay's inaccessible away?, Israel Journal of Mathematics, v. 48, n. 1, 1984, pp. 1-47.

55. J.R. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.

56. J.R. Shoenfield, Martin's Axiom, Amer. Math. Monthly, v. 82, 1975, pp. 610-617.

57. W. Sierpinski, L'axiome de M. Zermelo et son role dans la theorie des ensembles et l'analyse, Bull. Acad. Cracovie, 1918, pp. 97-152.

58. W. Sierpinski, Hypothese du Continu, Monografie Matematyczne, v. 4, Warsaw-Lwow, 1934.

59. W. Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, PWN, Warszawa, 1958.

60. R. Sikorski, Boolean Algebras, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1964.

61. R.M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math., v. 92, 1970, pp. 1-56.

62. E. Szpilrajn (E. Marczewski), Sur l'expansion de l'ordre partiel, Fund. Math., v. 16, 1930, pp. 386-389.

63. R. Vaught, Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability, Indag. Math., v. 16, 1954, pp. 467-472.

64. G. Vitali, Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna, Italy, 1905.

65. S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

66. E. Zermelo, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Anal., v. 59, 1904, pp. 514-516.

67. E. Zermelo, Untersuchung uber die Grundlagen der Mengenlehre, *I*, Math. Anal., v. 65, 1908, pp. 261-281.

68. M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. Math. Soc., v. 41, 1935, pp. 667-670.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ქაქუცა ჩოლოყაშვილის 3/5, თბილისი, 0179, საქართველო

Ilia Chavchavadze State University Publishing
3/5 Cholokashvili Ave. Tbilisi, 0179, Georgia