

ბ. ა. ჭილაშვილი

ორი და სამი ნაწილაკის კვანტური მექანიკა



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი — 1973

530 . 1
530 . 145
ჯ 461

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1973

2-3-2
M-008

ა ვ ტ ო რ ი ს ა ბ ა ნ

წინამდებარე ნაშრომი ეხება თანამედროვე თეორიული ფიზიკის, განსაკუთრებით კი თეორიული ბირთვული ფიზიკის, მნიშვნელოვან საკითხებს. წიგნი დახმარებას გაუწევს ფიზიკის ფაკულტეტის მალალი კურსის სტუდენტებს. ყოველდღიური პრაქტიკული საქმიანობის დროს იგი შესაძლოა მეტად სასარგებლო აღმოჩნდეს თეორიულ ფიზიკაში მომუშავე ასპირანტთა და მეცნიერ მუშაკათათვის.

წიგნის წერის დროს დიდ სტიმულს მძლევედა ის ინტერესი და ზრუნვა, რომელსაც სისტემატურად იჩენდნენ ვ. მამასახლისოვი, ი. ვაშაყიძე, ა. თავხელიძე და თ. კობალეიშვილი.

დიდი დახმარება გამიწიეს გ. ალექსანდრიამ, გ. ჯანაშიამ, ა. ხელაშვილმა, ვ. ტუსკიამ, ნ. ამალლობელმა და რ. სალუქვაძემ, რომლებმაც წაიკითხეს წიგნის სხვადასხვა თავები და საყურადღებო შენიშვნები მომცეს.

მადლობას მოვახსენებ აკად. ნ. ნ. ბოგოლიუბოვსა და პროფ. ვ. სოლოვიოვს, რომელთაც ყურადღება მიმაქცევიენეს სამი სხეულის ამოცანისადმი და, ამასთან, ყოველდღიურ დახმარებას მიწვედნენ ღებნაში მუშაობის დროს.

მადლობას ვუხდი პროფესორებს ლ. დ. ფადეევს, ა. გ. სიტენკოს და ვ. ფ. ხარჩენკოს. ისინი სისტემატურად მიგზავნიდნენ სამი ნაწილაკის ამოცანასთან დაკავშირებულ თავის შრომებს, რომელთაც წიგნში ფართოდ ვიყენებ.

მონოგრაფია ენობრივად დახვეწა ს. ჩოხელმა, ტექნიკურ გაფორმებაში დიდი დახმარება გამიწია მ. ჩიჩუამ, ხოლო მითითებული ლიტერატურა სისტემაში მოიყვანეს ა. კანდელაკმა და მ. დულაშვილმა, რისთვისაც მათ უღრმეს მადლობას ვუძღენი.

ეს წიგნი თანამედროვე თეორიული ფიზიკის სა-
კითხებზე მონოგრაფიული ნაშრომის პირველი ცდაა
ქართულ ენაზე, ამიტომ, ბუნებრივია, იგი დაზღვეული
არ იქნება შეცდომებისა და უზუსტობებისაგან, ავტორი
ყველა "შენიშვნას" სიაზოვნებით მიიღებს და გაითვალ-
ისწინებს შემდგომ მუშაობაში.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

წინამდებარე მონოგრაფია გათვალისწინებულია ფიზიკოს-თეორეტიკოსისათვის; ნაშრომი წარმოადგენს ქართულ ენაზე გამოცემული „კვანტური მექანიკის“ სახელმძღვანელოს ერთგვარ დამატებას, ამიტომ ვითვალისწინებთ, რომ აღნიშნულ სახელმძღვანელოში განხილული საკითხები მკითხველისათვის ცნობილია.

წიგნში განხილულია ორი და სამი ნაწილაკის არარელატივისტური კვანტური მექანიკის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი საკითხი. ამასთან, შერჩეულია ის ამოცანები, რომლებიც უპირატესად თანამედროვე თეორიული ატომბირთვის ფიზიკაში განიხილება და რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია ბოლომდე. საკმაოდ დიდი ადგილი ეთმობა სამი ნაწილაკის ამოცანას. როგორც ცნობილია, ეს ამოცანა, ზოგად შემთხვევაში, გადაწყვეტილი არ არის არც კლასიკურ და არც კვანტურ მექანიკაში. კლასიკურისაგან განსხვავებით, კვანტურ მექანიკაში ამ უკანასკნელ დრომდე გაფანტვის ამოცანისათვის კორექტული ინტეგრალური განტოლებაც კი არ იყო დაწერილი. სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანის შესაბამის ლიპმან-შვინგერის განტოლებას აღმოაჩნდა მთელი რიგი ნაკლოვანებანი, რაც ამ განტოლების პრაქტიკულ ღირებულებას საგრძნობლად ამცირებს. 1960 წელს ლ. დ. ფადეევის მიერ პირველად იქნა გამოყვანილი სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანის კორექტული ინტეგრალური განტოლებები. ამით დასაბამი მიეცა სამი სხეულის კვანტურ-მექანიკური ამოცანის საფუძვლიან შესწავლას. მართალია, ფადეევის განტოლებების ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში, რამდენადმე გონივრული პოტენციალებისათვის, თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკისთვისაც კი მიუღწეველია, მაგრამ კვანტურ მექანიკაში დამუშავდა მეთოდები, რომელთა საშუალებით ფადეევის განტოლებები შესაძლოა დაყვანილ იქნეს სწრაფადმთვლელი ელექტრონული მანქანებისათვის ხელმისაწვდომ ფორმაზე.

ფადეევის განტოლებებზე დაყრდნობით შესწავლილ იქნა მრავალი საინტერესო ამოცანა. ეს განტოლებები გამოყენებული იყო როგორც მცირე ნუკლონიანი სისტემებისათვის (როგორცაა: ტრიტონი, ჰელიუმი, ჰიპერტრიტონი და სხვა), ისე მსუბუქი ატომგულლებისთვისაც კლასტერულ მოდელზე დაყრდნობით.

ყოველი კონკრეტული სამნაწილაკობრივი ამოცანის გადაწყვეტა მანქანურ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, ამიტომ წიგნში მათი განხილვა მიზანშეწონილად არ ჩავთვალეთ და დავკმაყოფილდით მხოლოდ სათანადო ლიტერატურის მითითებით.

ფადევეის განტოლებები ჩაწერილია ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცების საშუალებით, რის გამოც ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცის თვისებები საკმაოდ დაწვრილებით განვიხილეთ. ფადევეის განტოლებების აღნიშნული სტრუქტურა ხელსაყრელია სამნაწილაკობრივი გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებების შესასწავლად. ამ მიმართულებით მრავალი მეცნიერის დაძაბულ შრომას ჯერჯერობით არსებითი შედეგი არ მოჰყოლია. სწორედ ამან განაპირობა, რომ ამ საკითხისადმი მიძღვნილი შრომების განხილვისაგან ჩვენც თავი შევიკავეთ.

სამი ნაწილაკის ამოცანის თავისებურებათა გამოკვლევაში დიდი დახმარება გაგვიწია არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების განხილვამ. რამდენადაც სამი სხეულის ამოცანის ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები ასე თუ ისე ეყრდნობა პოტენციალების (გაფანტვის მატრიცის) ფაქტორიზებად მწკრივებად გაშლას, წიგნში საკმარისად დაწვრილებითაა განხილული მათი თვისებები.

ფადევეის განტოლებებში შესაძლებელია სპინის ჩართვაც, მაგრამ ამ შემთხვევაში განტოლებები იმდენად რთულ გარეგნულ სახეს იღებენ, რომ წიგნში მათი ჩაწერა მოუხერხებელი აღმოჩნდა [114, 139].

ფადევეის განტოლებების გამოქვეყნების შემდეგ სამი ნაწილაკის ამოცანის შესასწავლად მრავალი სხვა საინტერესო მეთოდი იყო შემოთავაზებული, მაგრამ მათ წინამდებარე წიგნში არ ვეხებით [131—134].

ჩვენ ვცდილობდით, სადაც კი ეს შესაძლებელი იყო, მკაცრი მათემატიკური მსჯელობა შეგვეცვალა სწორი, მაგრამ ფორმალური მიდგომით. ასევე, წიგნში ციტირებული ლიტერატურა არ წარმოადგენს ბიბლიოგრაფიას; ჩვენ შევეცადეთ მხოლოდ იმ შრომათა ციტირებას, რომელთაც თვითონ გააჩნდათ რამდენადმე სრულად მითითებული ლიტერატურის სია.

ნაშრომში ვექტორების აღსანიშნავად გამოყენებულია შავი ასოები, ხოლო ოპერატორებს თავზე „ქელი ახურავთ“.

კვანტური მექანიკის ძირითადი სიდიდეები და მათი შენახვის კანონები

კვანტური მექანიკის აღწერის რამდენიმე გზა არსებობს, კერძოდ, შრედინგერის, ჰაიზენბერგისა და დირაკისა. წინამდებარე თავში განხილულია აღწერის სამივე მეთოდი და მათი ურთიერთკავშირი. გარდა ამისა, განხილულია ძირითადი ფიზიკური სიდიდეები: ენერგია, იმპულსი, იმპულსის მომენტი და ლუწობა. ნაჩვენებია, რომ ეს სიდიდეები ინახება იზოლირებული სისტემისათვის და მათი არსებობა დაკავშირებულია სივრცისა და დროის ფუნდამენტურ თვისებებთან. განსაკუთრებით დაწვრილებითაა შესწავლილი მომენტების თვისებები და მომენტთა შეკრებასთან დაკავშირებული ვექტორული შეკრების და რაკას კოეფიციენტები. ამ თავში არ ვეხებით კვანტური მექანიკის იმ მნიშვნელოვან საკითხებს, რომლებიც დაწვრილებითაა შესწავლილი სახელმძღვანელოში [3].

§ 1. კვანტური მექანიკის აღწერის სხვადასხვა ფორმალიზმი

კვანტური მექანიკა, ისევე როგორც კლასიკური მექანიკა, იმის მიხედვით, თუ რომელ მათემატიკურ აპარატს ვიყენებთ, შეგვიძლია სხვადასხვა გზით ჩამოვაყალიბოთ. კლასიკური მექანიკის მსგავსად, კვანტურშიც ყველა ეს მეთოდი ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ბოლო დროს კვანტურ მექანიკაში, კერძოდ ველის კვანტური თეორიისა და ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში, განსაკუთრებული პოპულარობა მოიპოვა კვანტური მექანიკის დირაკის ფორმალიზმმა [1]. გარეგნული სირთულის მიუხედავად, დირაკის მეთოდი გაცილებით უფრო ნათელი შინაარსისაა და ამასთან ფორმალური ოპერირების მეტად დიდ შესაძლებლობას იძლევა. სანამ დირაკის მეთოდს განვიხილავდეთ, მოკლედ გავიხსენოთ შრედინგერისა და ჰაიზენბერგის მეთოდები.

შრედინგერის მეთოდი. შრედინგერის თეორიაში გამოიყენება ოპერატორული მეთოდი. ყოველ დინამიკურ ფიზიკურ სიდიდეს შეესაბამება წრფივი ერმიტული ოპერატორი. ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები კი ცდაზე გაზომილი ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობებია. მოძრაობის განტოლება არის შრედინგერის განტოლება

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1,1)$$

სადაც \hat{H} -ჰამილტონიანია. დეკარტის კოორდინატებში ერთი ნაწილაკისათვის მას-შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}, t), \quad (1,2)$$

პირველი წევრი კინეტიკური ენერჯიის ოპერატორია, ხოლო მეორე — პოტენციალური ენერჯია. როცა ეს უკანასკნელი დროს ცხადად არ შეიცავს, მაშინ, ნაცვლად (1,1) განტოლებისა, გვექნება შრედინგერის სტაციონარული მდგომარეობების განტოლება

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad (1,3)$$

სადაც E -სრული ენერჯიაა. $\psi(\mathbf{r}, t)$ -ს ეწოდება ტალღური ფუნქცია. მისი აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატი გამრავლებული მოცულობის ელემენტზე

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} \quad (1,4)$$

გამოხატავს დროის t -მომენტში ნაწილაკის მოხვედრის ალბათობას სივრცის $d\mathbf{r}$ მოცულობაში (შემდგომში მოცულობის ელემენტს ყოველთვის აღვნიშნავთ შემდეგნაირად $d\mathbf{r} = dx dy dz$).

როგორც ცნობილია, როცა მოცემულია ტალღური ფუნქცია, მაშინ განსაზღვრულია კვანტური მდგომარეობა. ამასთან, ამ მდგომარეობაში გასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულს ადგენენ ფიზიკური სიდიდეები, რომელთა შესაბამისი ოპერატორებისათვის $\psi(\mathbf{r}, t)$ არის საერთო საკუთარი ფუნქცია, რაც ნიშნავს, რომ აღნიშნული ოპერატორები კომუტატორნი იქნებიან ჰამილტონიანთან. აღსანიშნავია, რომ სტაციონარულ მდგომარეობაში ყველა ეს სიდიდე ენერჯიასთან ერთად ინახება და ტალღური ფუნქცია კოორდინატების გარდა დამოკიდებული იქნება ამ სიდიდეებზე, ან მათ შესაბამის კვანტურ რიცხვებზე.

ფიზიკური სიდიდე, რომელსაც შეესაბამება წრფივი ერმიტული \hat{A} -ოპერატორი, განისაზღვრება საკუთარი ფუნქციებისა და საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებიდან

$$\hat{A} \varphi_n(\mathbf{r}) = a_n \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (1,5)$$

განსაზღვრულობისათვის ვგულისხმობთ, რომ სპექტრი დისკრეტულია. ახლათუ მდგომარეობის $\psi(\mathbf{r}, t)$ ფუნქციას გავშლით (1,5) განტოლების საკუთარი φ_n ფუნქციების ფურიე-შეწყობად

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}), \quad (1,6)$$

სადაც ფურიე-კოეფიციენტი $b_n(t)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$b_n(t) = \int \psi(\mathbf{r}, t) \varphi_n^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1,7)$$

მაშინ სიდიდე

$$|b_n(t)|^2 \quad (1,8)$$

გამოხატავს a_n -ფიზიკური სიდიდის დაკვირვების ალბათობას ღროის t -მომენტში.. ან სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $s_n(t)$ ყოფილა ტალღური ფუნქცია \hat{A} -ოპერატორის წარმოდგენაში.

როცა \hat{A} -ოპერატორი არაა კომუტატორი ჰამილტონიანთან, მაშინ $\psi(r, t)$ ფუნქციით დახასიათებულ მდგომარეობაში შეგვიძლია ვიპოვოთ მხოლოდ სიდიდე:

$$\bar{A} = \int \psi^*(r, t) \hat{A} \psi(r, t) dr, \quad (1,9)$$

რომელსაც a -სიდიდის კვანტურ-მექანიკურ საშუალო მნიშვნელობას უწოდებენ.

ჰაიზენბერგის მეთოდი. ეს მეთოდი წინ უსწრებდა და შემდეგ პარალელურად ვითარდებოდა შრედინგერის თეორიასთან ერთად. ჰაიზენბერგის ფორმალიზმში გამოიყენება მატრიცული აღრიცხვა. ჰაიზენბერგის მიხედვით ყოველ დინამიურ ცვლადს ერმიტული მატრიცა შეესაბამება. რადგან კარგადაა ცნობილი, რომ ოპერატორი და მატრიცა ერთი და იმავე სიდიდის ორი სხვადასხვა წარმოდგენაა, ამიტომ წინასწარ ამკარაა, რომ ჰაიზენბერგისა და შრედინგერის მეთოდები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. თავდაპირველად ჰაიზენბერგმა მატრიცული მექანიკა შრედინგერის ტალღური განტოლების გარეშე ჩამოაყალიბა, ამიტომ იგი იძულებული იყო დაკვანტვის დამატებითი პირობები შემოეღო. ახლა ცხადია, ამის საჭიროება აღარ არსებობს, რის გამოც ჰაიზენბერგის მეთოდს შრედინგერის განტოლებაზე დაყრდნობით განვიხილავთ.

ავიღოთ რაიმე წრფივი ერმიტული ოპერატორი \hat{L} და დაეუშვათ, რომ განსაზღვრულობისათვის მას აქვს დისკრეტული სპექტრი

$$\hat{L}\chi_n(r) = \lambda_n \chi_n(r). \quad (1,10)$$

შრედინგერის (1,1) განტოლების ამონახსნი გავშალოთ \hat{L} -ოპერატორის საკუთარი ფუნქციების ფურიე-მწკრივად

$$\psi(r, t) = \sum_k \phi_k(t) \chi_k(r), \quad (1,11)$$

სადაც ფურიე-კოეფიციენტი¹

$$\phi_k(t) = \int \chi_k^*(r) \psi(r, t) dr. \quad (1,12)$$

შევიტანოთ (1,11) გამოსახლება შრედინგერის (1,1) განტოლებაში და მარცხნიდან $\chi_n^*(r)$ ფუნქციაზე გამრავლების შემდეგ ავიღოთ ინტეგრალი მთელ სივრცეზე, მივიღებთ:

$$i\hbar \frac{d\phi_n(t)}{dt} = \sum_k H_{nk}(t) \phi_k(t), \quad (1,13)$$

სადაც

$$H_{nk}(t) = \int \chi_n^*(r) \hat{H} \chi_k(r) dr \quad (1,14)$$

წარმოადგენს ჰამილტონის ოპერატორის მატრიცულ ელემენტს. ამ ელემენტების ერთობლიობა განსაზღვრავს კვადრატულ მატრიცას. (1,13) განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც შრედინგერის განტოლება მატრიცული სახით:

¹ როცა $\psi(r, t)$ ფუნქცია ღროს ცხადად არ შეიცავს, მაშინ ϕ_k ფურიე-კოეფიციენტები მუდმივი რიცხვებია.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_\infty(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1\infty} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2\infty} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{\infty 1} & H_{\infty 2} & \dots & H_{\infty \infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_\infty(t) \end{pmatrix} \quad (1,15)$$

როგორც ვხედავთ, პიზენბერგის მეთოდში ტალღური ფუნქციაც წარმოადგენს მატრიცას, რომელსაც მხოლოდ ერთი სვეტი აქვს

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_\infty(t) \end{pmatrix}. \quad (1,16)$$

გარდა ამისა, იხილავენ ერმიტულად შეუღლებულ ფუნქციასაც $\psi^+(t)$, რომელიც ასევე წარმოადგენს მატრიცას ერთი სტრიქონით

$$\psi^+(t) = (\phi_1^* \phi_2^* \dots \phi_\infty^*). \quad (1,17)$$

ცხადია,

$$\psi^+ \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^* \phi_i, \quad (1,18)$$

ხოლო ψ -ფუნქციების ორთო-ნორმირების პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\phi_\alpha^* \phi_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i\alpha}^* \phi_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1,19)$$

ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობანი აგრეთვე მატრიცული განტოლებით განისაზღვრება. მართლაც, ნაცვლად (1,10) განტოლებისა, თუ $\lambda_n(r)$ ფუნქციას გავშლით რაიმე წრფივი ერმიტული ოპერატორის საკუთარ $\psi_\alpha(r)$ ფუნქციებზე, ე. ი.

$$\lambda_n(r) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{n\alpha} \psi_\alpha, \quad (1,20)$$

მაშინ (1,10) მიიღებს გამოხატულებას

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} L_{\alpha\beta} a_{n\beta} = \lambda_n a_{n\alpha}, \quad (1,21)$$

რომელსაც მართლაც მატრიცული სახე აქვს

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1\infty} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2\infty} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\infty 1} & L_{\infty 2} & \dots & L_{\infty \infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n\infty} \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n\infty} \end{pmatrix} \quad (1,22)$$

თანხმად (1,9) და (1,11) გამოსახულებებისა, ფიზიკური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$\bar{A} = \psi^+ A \psi, \quad (1,23)$$

სადაც ψ^+ და ψ მატრიცული ტალღური ფუნქციებია.

დირაკის მეთოდი [1]. დირაკის ფორმალიზმში გამოყენებულია უსასრულო განზომილების აბსტრაქტული ვექტორული სივრცის მეთოდი. ამასთან, ამ სივრცეში ვექტორები საზოგადოდ კომპლექსურებია. ამ სივრცეში შემოვიღოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ($\psi|\varphi$), რომელიც შეგვიძლია შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(r) \varphi(r) dr. \quad (1,24)$$

ცხადია, ამ სკალარულ ნამრავლს ექნება შემდეგი თვისებები:

$$\langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\psi\rangle, \quad (1,25)$$

ასევე

$$\langle\psi|\varphi_1 + \varphi_2\rangle = \langle\psi|\varphi_1\rangle + \langle\psi|\varphi_2\rangle \quad (1,26)$$

თუ c —არის მუდმივი, მაშინ

$$\langle c\psi|\varphi\rangle = c^* \langle\psi|\varphi\rangle \quad (1,27)$$

და

$$\langle\psi|c\varphi\rangle = c \langle\psi|\varphi\rangle. \quad (1,28)$$

სიდიდეს $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ უწოდებენ ნორმას, ამასთან ნულთან ტოლობა გვექნება მაშინ, როცა ψ იგივერად ნულია. თუ შესაძლებელია, რომ ნორმა გაუხადოთ ერთის ტოლი, მაშინ ψ ფუნქციებს ნორმირებული ეწოდებათ:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (1,29)$$

ორთო-ნორმირების პირობას კი ექნება ასეთი სახე:

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}. \quad (1,30)$$

როგორც ვხედავთ, ამ სიდიდეების ალგებრა არ განსხვავდება ჩვეულებრივი ვექტორების ალგებრისაგან (გარდა იმისა, რომ დირაკის აბსტრაქტულ სივრცეში ვექტორები კომპლექსურებიც შეიძლება იყოს). ახლა გავარკვიოთ მინც რა ვექტორებთან გვაქვს საქმე ჩვენ მიერ ზემოთ შემოღებულ აბსტრაქტულ სივრცეში. ავიღოთ ($\psi|\varphi$) სკალარული ნამრავლი და გაყოთ იგი ორ შემადგენელ ნაწილად: ($\psi|\varphi$) და $|\varphi\rangle$. პირველს დირაკის მიხედვით ეწოდება „ბრა-ვექტორი“, მეორეს კი — „კეტ-ვექტორი“. ასეთი სახელწოდებანი წარმოდგება ინგლისური სიტყვის „ფრჩხილების“ — bracket-ის შუაზე გაყოფით. ამასთან, თანახმად (1,25) თვისებისა, გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$\langle\psi|^* = |\psi\rangle \quad (1,31)$$

ე. ი. ბრა-ვექტორის შეუღლებული იძლევა კეტ-ვექტორს და პირიქით.

თუ ყურადღებით დავაკვირდებით სკალარული ნამრავლის თვისებებს, დაინახავთ, რომ ამ აბსტრაქტულ ვექტორებს ჩვეულებრივი ვექტორების (ოლონდ კომპლექსური) ყველა თვისება გააჩნიათ; მაგალითად, (1,26)-დან ნათელია, რომ ვექტორები იკრიბება შემდეგი წესით:

$$|\psi_1 + \psi_2\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \quad (1,32)$$

და სხვა. ცხადია, $|\psi\rangle$ ვექტორზე წრფივი ოპერატორების მოქმედებით კვლავ კეტ-ვექტორს მივიღებთ:

$$\hat{L}|\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (1,33)$$

გარდა ამისა, ღირაქის აბსტრაქტულ ვექტორებს დამატებით ორი მეტად მნიშვნელოვანი თვისება აქვს. ერთ-ერთი მათ შორის არის ბრა და კეტ-ვექტორების ოპერატორული ნამრავლი

$$\hat{L} = |\psi\rangle\langle\varphi| \quad (1,34)$$

ეს ნამრავლი წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს. მართლაც, თუ მარჯვნიდან ვიმოქმედებთ რაიმე $|\gamma\rangle$ კეტ-ვექტორით, მივიღებთ

$$\hat{L}|\gamma\rangle = |\psi\rangle\langle\varphi|\gamma\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad (1,35)$$

სადაც $\lambda = \langle\varphi|\gamma\rangle$ მუდმივი სიდიდეა. (1,35) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ \hat{L} -ოპერატორის კეტ-ვექტორზე მოქმედებით კვლავ მიიღება კეტ-ვექტორი.

შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება ღირაქის ვექტორებისა არის ის, რომ მათი საშუალებით შეგვიძლია შევადგინოთ ერთზე გამრავლების ოპერატორი. მართლაც, თუ $|\chi_n\rangle$ -ვექტორები სრულ სისტემას ადგენენ, ე. ი. თუ

$$\langle\chi_n|\chi_m\rangle = \delta_{mn} \quad (1,36)$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$\sum_n |\chi_n\rangle\langle\chi_n| = 1. \quad (1,37)$$

დამტკიცების მიზნით ეს ტოლობა მარცხნიდან გავამრავლოთ $\langle\chi_m|$ ბრა-ვექტორზე, მარჯვნიდან კი $|\chi_v\rangle$ -ზე, მივიღებთ:

$$\sum_n \langle\chi_m|\chi_n\rangle\langle\chi_n|\chi_v\rangle = \langle\chi_m|\chi_v\rangle; \quad (1,38)$$

თუ გავითვალისწინებთ (1,36) ფორმულას, ამ უკანასკნელიდან მივიღებთ იგივეობას. როცა უწყვეტი სპექტრი გვაქვს, მაშინ

$$\langle\chi_{p'}|\chi_p\rangle = \delta(p' - p) \quad (1,39)$$

და სრულიად ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\int dp |\chi_p\rangle\langle\chi_p| = 1, \quad (1,40)$$

სადაც p -რალაც პარამეტრია.

ბრა და კეტ-ვექტორების (1,37) და (1,40) თვისებები დიდ შესაძლებლობებს იძლევა ამ ვექტორებზე ფორმალური ოპერაციების ჩატარებისა, რამდენადაც ოპერატორებს შორის ყოველთვის შეგვიძლია ამ ტოლობებით განსაზღვრული ერთიანების ჩასმა. ასე მაგალითად, თუ გვაქვს სკალარული ნამრავლი $\langle\psi|\varphi\rangle$, იგი შეიძლება ასეც შევცვალოთ:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \sum_n \langle\psi|\chi_n\rangle\langle\chi_n|\varphi\rangle. \quad (1,41)$$

გასაგებია, რომ ღირაქის მეთოდში ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება დისკრეტული სპექტრის შემთხვევაში შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\hat{Q}|\phi_n\rangle = \omega_n|\phi_n\rangle, \quad (1,42)$$

ამასთან (Φ_n) -ს ეწოდება ოპერატორის საკუთარი ვექტორი. როცა \hat{M} ერმიტულია, მაშინ საკუთარ ვექტორთა სისტემა ორთოგონალური იქნება:

$$(\Phi_m | \Phi_n) = \delta_{mn}; \quad (1,43)$$

უწყვეტი სპექტრის შემთხვევაში საკუთარი ვექტორები ორთო-ნორმირებული იქნებიან ღირაკის დელტა ფუნქციაზე.

ცხადია, რომ \hat{r} -ოპერატორისათვის გვექნება საკუთარი მნიშვნელობების შემდეგი განტოლება:

$$\hat{r} | r \rangle = r | r \rangle; \quad (1,44)$$

საკუთარი $| r \rangle$ -ვექტორები აკმაყოფილებენ ორთო-ნორმირების პირობას

$$\langle r | r' \rangle = \delta(r - r'), \quad (1,45)$$

სადაც $\delta(r - r')$ ღირაკის ფუნქციაა. სხვათა შორის, (1,44) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\langle r' | \hat{r} | r \rangle = r \delta(r - r'), \quad (1,46)$$

ე. ი. თავის საკუთარ წარმოდგენაში r -დიაგონალურია. (1,45) პირობიდან ნათელია, რომ ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ მეტად მნიშვნელოვანი ერთეულოვანი ოპერატორი

$$\int d r | r \rangle \langle r | = 1. \quad (1,47)$$

ამ ოპერატორის დახმარებით $\langle \psi | \varphi \rangle$ სკალარული ნამრავლი ასე გადაიწერება:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int d r \langle \psi | r \rangle \langle r | \varphi \rangle. \quad (1,48)$$

ამ უკანასკნელის (1,24) განმარტებასთან შედარებით მივიღებთ:

$$\langle \psi | r \rangle = \psi^*(r), \quad \langle r | \psi \rangle = \psi(r). \quad (1,49)$$

თუ გავიხსენებთ ჩვეულებრივ ვექტორულ სივრცეში ორტის განმარტებას, სახელდობრ, რომ $(A e_i) = A_i$, მაშინ ანალოგიით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ღირაკის ვექტორების რაიმე წარმოდგენაში ჩასაწერად საჭიროა შევარჩიოთ ორთოგონალური ბაზისი და შემდეგ ვიპოვოთ სკალარული ნამრავლი ღირაკის ვექტორისა ბაზისის ვექტორებთან.

თუ ბაზისად ავიღებთ იმპულსებს:

$$\langle p | p' \rangle = \delta(p - p'), \quad (1,50)$$

ე. ი.

$$\int d p | p \rangle \langle p | = 1, \quad (1,51)$$

მაშინ $\langle p | \psi \rangle$ სკალარული ნამრავლი მოგვცემს ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში:

$$\psi(p) = \langle p | \psi \rangle. \quad (1,52)$$

ზემოაღნიშნულიდან ცხადია, რომ (1, 24) განმარტებაში ინტეგრალში შეგვიძლია ვივულისხმოთ ნებისმიერი ორთო-ნორმირებული ცვლადი და არა მანც-დამანც კოორდინატები.

აბსტრაქტულ ვექტორთა ალგებრაზე დაყრდნობით ღირაკმა მოახდინა კვანტური მექანიკის ახალი ფორმულირება, ცხადია, ამ ფორმალიზმში მოძრაობის

განტოლება კვლავ შრედინგერის განტოლება იქნება, რომელსაც დირაკის აბსტრაქტულ სივრცეში ექნება გამოხატულება

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (1,53)$$

მდგომარეობა აღიწერება აბსტრაქტული $|\psi(t)\rangle$ და მისი კომპლექსურად შეუღლებული $\langle\psi(t)|$ ვექტორით. ღინამიკურ ცვლადებს შეესაბამებათ წრფივი ერმიტული ოპერატორები \hat{r} , \hat{p} და მათი ფუნქციები: $\hat{L} = \hat{L}(\hat{r}, \hat{p})$.

სტაციონარულ მდგომარეობაში ჰამილტონიანი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, ამიტომ შრედინგერის (1,53) განტოლება გადაიქცევა ენერჯის ოპერატორის საკუთარი ვექტორებისა და საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებად

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (1,54)$$

რაიმე ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობები შეგვიძლია ვიპოვოთ (1,42) ტიპის განტოლებიდან, სადაც \hat{Q} იქნება ამ ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი წრფივი ერმიტული ოპერატორი. a_n ფიზიკური სიდიდის დაკვირვების ალბათობის საპონენლად $|\psi(t)\rangle$ ვექტორით დახასიათებულ მდგომარეობაში, დროის t -მომენტში, საჭიროა ეს ვექტორი გავშალოთ $|\Phi_n\rangle$ ვექტორების სრული სისტემის ფურიემწკრივად:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) |\Phi_n\rangle, \quad (1,55)$$

სადაც ფურიე-კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატია

$$|C_n(t)|^2 = |\langle\Phi_n|\psi(t)\rangle|^2 \quad (1,56)$$

განსაზღვრავს საძიებელ ალბათობას.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მდგომარეობის ვექტორიდან ტალღურ ფუნქციაზე გადასასვლელად საჭიროა მისი გამრავლება წარმოდგენის ბაზისზე, სახელდობრ კოორდინატულ წარმოდგენაში

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \langle\mathbf{r}|\psi(t)\rangle, \quad (1,57)$$

ხოლო იმპულსურ წარმოდგენაში—

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \langle\mathbf{p}|\psi(t)\rangle. \quad (1,58)$$

ახლა ავიღოთ (1, 47) ერთეულოვანი ოპერატორი და იგი მარცხნიდან გავამრავლოთ $\langle\mathbf{p}|$ -ზე, მარჯვნიდან კი $|\psi\rangle$ -ზე, მივიღებთ

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{r} \langle\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \psi(\mathbf{r}, t). \quad (1,59)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ტალღურ ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში, ამიტომ, ცხადია, რომ

$$\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (1,60)$$

არის ბრტყელი ტალღა, რომელიც შეესაბამება $\mathbf{p}\hbar$ იმპულსს.

დავამჯაროთ კავშირი ერთი მხრივ დირაკის ფორმალისმსა და მეორე მხრივ შრედინგერისა და ჰაიზენბერგის მეთოდებს შორის. შრედინგერის მეთოდთან კავშირის დასამყარებლად საკმარისია, მაგალითად, ვაჩვენოთ, რომ (1, 42) საკუთა-

რი ვექტორების განტოლება დაიყენება საკუთარი ფუნქციების განტოლებაზე. გავიხსენოთ, რომ \hat{M} ოპერატორი დამოკიდებულია \hat{r} და \hat{p} სიდიდეებზე: $\hat{M} = \hat{M}(\hat{r}, \hat{p})$. (1,42) განტოლება გავამრავლოთ მარცხნიდან $\langle r | -$ ზე და $|\varphi_n\rangle$ -ის წინ ორივე მხარეში ჩავსვათ (1,47) ოპერატორი, გვექნება

$$\int \langle r | \Omega(r, \hat{p}) | r' \rangle \varphi_n(r') dr' = \omega_n \varphi_n(r) \quad (1,61)$$

ცხადია, რომ

$$\langle r | \Omega(r, -i\hbar\nabla) | r' \rangle = \hat{M}(r, -i\hbar\nabla) \delta(r-r'), \quad (1,62)$$

რომლის ჩასმა (1,61)-ში მოგვცემს შრეინგერის ოპერატორულ განტოლებას

$$\hat{M} \varphi_n(r) = \omega_n \varphi_n(r). \quad (1,63)$$

ინტერესმოკლებული არ იქნება აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $V(r)$ ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\langle r | V | r' \rangle = V(r) \delta(r-r'). \quad (1,64)$$

ასევე ადვილად დავინახავთ, რომ ჰაიზენბერგის მატრიცული ელემენტი Ω_{mn} ტოლი იქნება

$$\Omega_{mn} = \langle \psi_m | \Omega | \psi_n \rangle = \int \langle \psi_m | r \rangle \langle r | \Omega(r, \hat{p}) | r' \rangle \langle r' | \psi_n \rangle dr dr'; \quad (1,65)$$

თუ გამოვიყენებთ (1,62) ფორმულას, მივიღებთ

$$\Omega_{mn} = \langle \psi_m | \Omega | \psi_n \rangle = \int \psi_m^*(r) \hat{M} \psi_n(r) dr, \quad (1,66)$$

რაც მართლაც ემთხვევა ჰაიზენბერგის მატრიცული ელემენტის განმარტებას. შევნიშნოთ, რომ როგორც თავის დროზე შრეინგერმა და ეკარტმა ცხადყვეს, (1,66) ფორმულა გამოხატავს კავშირს შრეინგერის ტალღურ ფუნქციასა და ჰაიზენბერგის მატრიცულ ელემენტებს შორის და, მაშასადამე, ამ ფორმულიდან ჩანს სამივე ზემოაღნიშნული ფორმალიზმის ეკვივალენტობა.

წერის გამარტივების მიზნით, ნაცვლად $|\psi\rangle$ -ვექტორისა, სარგებლობენ აღნიშვნით $|\alpha\rangle$, სადაც α -მიუთითებს ვასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულს, რომლებიც კვანტურ მდგომარეობას ახასიათებენ, ე. ი. იმ ფიზიკურ სიდიდეებს (ან მათ შესაბამის კვანტურ რიცხვებს), რომლებიც ψ ფუნქციით დახასიათებულ მდგომარეობაში ერთდროულად და ზუსტად იზომებიან; მაგალითად, თუ კვანტური მდგომარეობა ხასიათდება $\psi_\alpha(r)$ ფუნქციით, სადაც $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ სრულ კრებულს გამოხატავს, შემოაქვთ აღნიშვნა

$$\psi(r) = \langle r | \alpha \rangle, \quad \psi_\alpha^*(r) = \langle \alpha | r \rangle. \quad (1,67)$$

(შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ასეთი აღნიშვნა ფაქტიურად უკვე გამოვიყენეთ, როცა ბრტყელი ტალღა აღვნიშნეთ $\langle r | p \rangle$ -თი და არა $\langle r | \psi_p \rangle$ -თი). მაგალითად, წყალბადისეებური ატომის ტალღური ფუნქცია $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, სადაც $\alpha = (n, l, m)$, ჩაიწერება ასე:

$$\psi_{nlm}(r) = \langle r | nlm \rangle = \langle r | \theta | \psi_{nlm} \rangle, \quad (1,68)$$

ხოლო სფერული ფუნქცია

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | lm \rangle = \langle \theta, \varphi | Y_{lm} \rangle. \quad (1,69)$$

ასევე, მატრიცული ელემენტი $\langle \psi_m | L | \psi_n \rangle$ აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$\langle m | L | n \rangle = \int \psi_m^*(r) \hat{L} \psi_n(r) dr. \quad (1,70)$$

ღირაკის ალგებრის გამოყენებით ადვილად ვიპოვით ორი მატრიცის ნამრავლის ფორმულას. ამისათვის საკმარისია $\langle m | AB | n \rangle$ გამოსახულებაში A და B ოპერატორებს შორის ჩავსვათ რაიმე ერთეულოვანი ოპერატორი

$$\sum_{k=1}^{\infty} |k\rangle \langle k| = 1. \quad (1,71)$$

შედევად მივიღებთ:

$$\langle m | AB | n \rangle = \sum_h \langle m | A | h \rangle \langle h | B | n \rangle. \quad (1,72)$$

ეს კი ორი მატრიცის გამრავლების ცნობილი ფორმულაა. თუ გვინდა ვიპოვოთ მატრიცათა გამრავლების ფორმულა უფრო მეტი რიცხვის მატრიცების შემთხვევაში, საჭირო იქნება ყოველ ორ მატრიცას შორის ჩავსვათ (1,71) ოპერატორი. ასე მაგალითად, სამი მატრიცის შემთხვევაში გვექნება

$$\langle m | ABC | n \rangle = \sum_k \sum_l \langle m | A | k \rangle \langle k | B | l \rangle \langle l | C | n \rangle \quad (1,73)$$

და ა. შ.

ცენტრალურ ველში ხშირად დაგვიკვირდება შემდეგი ერთეულოვანი ოპერატორი:

$$\int_0^{\infty} r^2 dr |r\rangle \langle r| = 1, \quad (1,74)$$

რომლის სამართლიანობის დამტკიცება არ არის ძნელი; ამისათვის გავიხსენოთ ღირაკის დელტა ფუნქციის შემდეგი თვისება:

$$\delta(r-r') = \frac{\delta(r-r')}{rr'} \delta(\bar{r}-\bar{r}') = \frac{\delta(r-r')}{rr'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}'), \quad (1,75)$$

სადაც ერთეულოვანი ვექტორისათვის შემოვიღეთ აღნიშვნა $\bar{A} = \frac{A}{A}$. (1,75) ტოლობა შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$\langle r | r' \rangle = \langle r | r' \rangle \langle \bar{r} | \bar{r}' \rangle, \quad (1,76)$$

სადაც

$$\langle r | r' \rangle = \frac{\delta(r-r')}{rr'}, \quad (1,77)$$

ხოლო

$$\langle \bar{r} | \bar{r}' \rangle = \delta(\bar{r}-\bar{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}') \quad (1,78)$$

გამოვიყენოთ (1,47) ოპერატორი და მისი საშუალებით დავწეროთ შემდეგი იგივეობა:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dr (r' | r) (r | r'') = \delta(r'-r''). \quad (1,79)$$

გავითვალისწინოთ (1,76) ტოლობა და (1,79) გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int r^2 dr \langle r' | r \rangle \langle r | r'' \rangle \int d\Omega_r \langle \bar{r}' | \bar{r} \rangle \langle \bar{r} | r'' \rangle = \langle r' | r'' \rangle \langle \bar{r}' | \bar{r}'' \rangle. \quad (1,80)$$

შემოვიღოთ ერთეულოვანი ოპერატორი

$$\int d\Omega_r | \bar{r} \rangle \langle \bar{r} | = 1. \quad (d\Omega_r = \sin \theta d\theta d\varphi) \quad (1,81)$$

სხვათა შორის აღვნიშნოთ, რომ ამ ოპერატორის გამრავლებით ($l m_l$ და $| l' m' \rangle$) ვექტორებზე მივიღებთ სფერული ფუნქციების ორთო-ნორმირების პირობას

$$\int Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{l'm'}(\bar{r}) d\Omega_r = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (1,82)$$

(1,81) ტოლობის გათვალისწინებით (1,80)-დან მივიღებთ

$$\int r^2 dr \langle r' | r \rangle \langle r | r'' \rangle = \langle r' | r'' \rangle, \quad (1,83)$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი (1,74) ტოლობა.

სრულიად ანალოგიურად იმპულსთა სივრცეში გვექნება

$$\int_0^\infty p^2 dp | p \rangle \langle p | = 1 \quad (1,84)$$

და

$$\int d\Omega_p | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | = 1, \quad (1,85)$$

სადაც $\bar{p} = \frac{\mathbf{p}}{p}$ ერთეულოვანი ვექტორია იმპულსის მიმართულებით.

ღირაკის ფორმალიზმით აღვიღოთ შრედინგერის განტოლების ჩაწერა სხვადასხვა წარმოდგენაში. განვიხილოთ სტაციონარული მდგომარეობის განტოლება ღირაკის აბსტრაქტულ სივრცეში

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E \right) | \psi \rangle = V | \psi \rangle. \quad (1,86)$$

ეს განტოლება ჯერ ჩავეწეროთ კოორდინატულ წარმოდგენაში. ამისათვის იგი გავამრავლოთ მარცხნიდან სკალარულად $\langle r' |$ ვექტორზე და $|\psi\rangle$ -ს წინ ორივე მხარეში ჩავსვათ (1,47) ოპერატორი; გვექნება

$$\int \langle r' | \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E \right) | r \rangle \langle r | \psi \rangle dr = \int \langle r' | V | r \rangle \langle r | \psi \rangle dr; \quad (1,87)$$

თუ გავიხსენებთ (1,62) და (1,64) ფორმულებს, მარტივად მივიღებთ შრედინგერის განტოლებას კოორდინატულ წარმოდგენაში. უფრო საინტერესოა (1,86) განტოლების ჩაწერა იმპულსურ წარმოდგენაში. ამ მიზნით იგი გავამრავლოთ $\langle p' |$ ვექტორზე და $|\psi\rangle$ ვექტორის წინ ჩავსვათ (1,51) ერთეულოვანი ოპერატორი; მივიღებთ

$$\int d\mathbf{p} \langle p' | \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E \right) | p \rangle \langle p | \psi \rangle = \int \langle p' | V | p \rangle \langle p | \psi \rangle d\mathbf{p}; \quad (1,88)$$

ბეზნიშნოთ, რომ

$$\langle p' | \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E | p \rangle = \int dr dr' \langle p' | r' \rangle \langle r' | \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E | r \rangle \langle r | p \rangle =$$

$$\int dr \langle p' | r \rangle \left[\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E \right] \langle r | p \rangle, \quad (1,89)$$

სადაც გამოვიყენეთ (1,62) ფორმულა. ახლა გავიხსენოთ, რომ $\langle r | p \rangle$ ბრტყელი ტალღაა და დავწეროთ

$$\langle p' | \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E | p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip'r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + E \right) e^{ipr} dr =$$

$$\left(E - \frac{\hbar^2 p'^2}{2m} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(p-p' \cdot r)} dr = \left(E - \frac{p'^2 \hbar^2}{2m} \right) \delta(p-p'). \quad (1,90)$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება

$$\left(E - \frac{\hbar^2 p'^2}{2m} \right) \psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p | V | p' \rangle \psi(p') dp', \quad (1,91)$$

სადაც

$$\langle p | V | p' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip'r} V(r) e^{ip'r} dr \quad (1,92)$$

პოტენციალური ენერჯიის მატრიცული ელემენტია ბრტყელი ტალღების მიხედვით. ლოკალური პოტენციალებისათვის $\langle p | V | p' \rangle$ გამოხატულება ფუნქციაა მხოლოდ $p-p'$ სხვაობისა, ე. ი.

$$\langle p | V | p' \rangle = V(p-p'). \quad (1,93)$$

როგორც ვხედავთ, კოორდინატული წარმოდგენისაგან განსხვავებით, შრედინგერის (1,91) განტოლებას იმპულსურ წარმოდგენაში ინტეგრალური განტოლების სახე აქვს, ხოლო ინტეგრალური განტოლების გული განისაზღვრება (1,92) ფორმულით.

საინტერესოა შრედინგერის რადიალური განტოლების ჩაწერა დირაკის აბსტრაქტულ სივრცეში. ვთქვათ, პოტენციალურ ენერჯიას ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს. მაშინ $|\psi\rangle$ ვექტორი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$|\psi\rangle = |R_{kl}\rangle |lm\rangle, \quad (1,94)$$

სადაც $\langle r | lm\rangle$ მომენტის კვადრატისა და მისი z -პროექციის საკუთარი ფუნქციაა

$$\Delta_{\theta,\phi} |lm\rangle = -l(l+1) |lm\rangle, \quad (-l \leq m \leq +l; l=0, 1, 2, \dots) \quad (1,95)$$

სადაც $\Delta_{\theta,\phi}$ ლეჟანდრის ოპერატორია. შრედინგერის (1,86) განტოლებას ცენტრალური ველისათვის ექნება გამოსახულება

$$(\Delta + k^2) |R_{kl}\rangle |lm\rangle = U |R_{kl}\rangle |lm\rangle \quad (1,96)$$

U -თი აღვნიშნეთ $\frac{2m}{\hbar^2} V$ -სიდიდე. თუ გავიხსენებთ ლაპლასის ოპერატორის გამოხატულებას სფერულ კოორდინატებში, მივიღებთ:

$$\langle lm | \Delta | lm \rangle = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (1,97)$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] |R_{kl}\rangle = U' |R_{kl}\rangle. \quad (1,98)$$

დასასრულ აღნიშნოთ, რომ შედგომში სხვადასხვა ამოცანების განხილვის დროს სამივე მეთოდს გამოვიყენებთ თანაბრად, იმის მიხედვით, თუ რომელი მეთოდი უფრო ხელსაყრელი აღმოჩნდება.

§ 2. მომენტები და მათი ძირითადი თვისებები

მომენტების თვისებათა შესწავლას ერთ-ერთი ცენტრალური ადგილი უჭირავს. კვანტურ მექანიკაში მომენტები კინემატიკური სიდიდეებია და მათი მოძებნა შრედინგერის განტოლების ამოხსნასთან არ არის დაკავშირებული. ამიტომ მომენტების თვისებათა დადგენა შესაძლებელია კონკრეტული დინამიკური ამოცანის გადაწყვეტის გარეშე.

ელემენტარული ნაწილაკების და მათგან შედგენილი მექანიკური სისტემების თვისებათა ღრმად შესწავლამ დაგვანახვა, რომ გარდა ორბიტალური მოძრაობის მომენტისა, რომლის ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით

$$\hat{l} = [\hat{r} \times \hat{p}], \quad (2,1)$$

ეს ნაწილაკები ხასიათდებიან საკუთარი მექანიკური მომენტითაც, რომელსაც სპინი ეწოდება. სპინის წარმოშობის ბუნება დღესაც სრულად არ არის გარკვეული. თუ (2,1) მომენტი შეიძლება შემოვიღოთ კლასიკური მექანიკის ახალოგიით, სპინს ასეთი ანალოგია არ გააჩნია. სპინის მნიშვნელობა ცალკეული ნაწილაკისა და სისტემისათვის შეიძლება სხვადასხვა იყოს. ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ სპინის მნიშვნელობა ან მთელია, ან კენტი რიცხვის ნახევარი. მაგალითად, ელექტრონის, პოზიტრონის, პროტონის, ნეიტრონის, μ^- მეზონის სპინი ნახევრის ტოლია, L_z -ატომბირთვისა კი $3/2$ -ისა. ასევე α -ნაწილაკის სპინი ნულის ტოლია, ხოლო L_z^2 ატომბირთვისა 1-ისა და a_z შ.

ბუნებრივია, რომ აუცილებელი ხდება ე. წ. სრული მექანიკური მომენტის შემოღებაც, რომელიც წარმოადგენს შემდეგ ჯამს:

$$j = l + s, \quad (2,2)$$

სადაც s აღნიშნავს ნაწილაკის სპინის ვექტორს. როცა საქმე გვაქვს ნაწილაკთა სისტემასთან, მაშინ შეგვიძლია შემოვიღოთ სისტემის ორბიტალური მომენტი, რომელიც ცალკეული ნაწილაკის ორბიტალური მომენტების ჯამის ტოლია

$$L = \sum_{i=1}^N l_i, \quad (2,3)$$

სადაც N -სისტემის შემადგენელ ნაწილაკთა რიცხვია. ასევე შეგვიძლია შემოვიღოთ სისტემის სპინი, რომელიც წარმოადგენს ნაწილაკთა სპინების ჯამს

$$S = \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2,4)$$

სისტემის ორბიტალური და სპინური მომენტების შეკრებით კი მივიღებთ სისტემის სრულ მომენტს

$$J = L + S = \sum_{i=1}^N j_i. \quad (2,5)$$

აქ შემოღებულ ყველა მომენტს ერთნაირი კომუტაციის თვისებები აქვთ, ასევე ერთნაირია მათი შეკრების წესებიც. ამიტომ როდესაც ქვემოთ ლაპარაკი გვექნება მომენტზე, იგი თანაბრად შეეხება ყველა ტიპის მომენტს: სპინს, ორბიტალურ მომენტს ან მათ ნებისმიერ ჯამს.

კვანტურ მექანიკაში მომენტი ეწოდება ისეთ აქსიალურ A ვექტორს, რომლის შესაბამისი ოპერატორის მდგენელები აკმაყოფილებენ კომუტაციის შემდეგ პირობებს:

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_k] = -\hat{\epsilon}_{ikl} \hat{A}_l, \quad (2,6)$$

სადაც $i, k, l = 1, 2, 3$, ხოლო $\hat{\epsilon}_{ikl}$ სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ერთეულოვანი ტენზორია.

აღვივალ შევამოწმებთ, რომ \hat{A}^2 ოპერატორი კომუტატორია ნებისმიერ A_α მდგენელთან

$$[\hat{A}^2, A_\alpha] = 0, \quad (2,7)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ \hat{A}^2 და მის რომელიმე ერთ პროექციას (შემდეგში ამ პროექციაში x -პროექციას ვივლით) საერთო საკუთარი ფუნქცია ექნებათ და A^2 და A_x ერთდროულად და ზუსტად გაიზომებიან, მაშასადამე,

$$\hat{A}^2 \chi_{\alpha m_\alpha} = A^2 \chi_{\alpha m_\alpha}, \quad (2,8)$$

$$\hat{A}_z \chi_{\alpha m_\alpha} = A_z \chi_{\alpha m_\alpha};$$

α -ს უწოდებენ A -მომენტის კვანტურ რიცხვს, ხოლო m_α -ს მაგნიტურ კვანტურ რიცხვს. მათ შესაძლო მნიშვნელობებზე ქვემოთ გვექნება საუბარი.

რამდენადაც \hat{A}^2 და \hat{A}_z ერთიტული ოპერატორებია, $\chi_{\alpha m_\alpha}$ საკუთარი ფუნქციები ორთო-ნორმირებული იქნება

$$(\chi_{\alpha' m'_\alpha} | \chi_{\alpha m_\alpha}) = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{m_\alpha m'_\alpha}. \quad (2,9)$$

მატრიცათა ენაზე (2,7) კომუტაციის პირობა ნიშნავს, რომ A^2 და A_z მატრიცები შეიძლება ერთდროულად დავიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე.

ვიპოვოთ A_x , A_y , A_z მატრიცების ცხადი სახე იმ წარმოდგენაში, სადაც A_z დიაგონალური მატრიცაა, ე. ო. როცა

$$(A_z)_{m_\alpha m'_\alpha} = \hbar m_\alpha \delta_{m_\alpha m'_\alpha}. \quad (2,10)$$

მაშასადამე, A_z -ის საკუთარი მნიშვნელობა ტოლია

$$A_z = m_\alpha \hbar. \quad (2,11)$$

შემოვიღოთ შემდეგი დამხმარე ოპერატორები:

$$A^+ = A_x + i A_y, \quad A^- = A_x - i A_y, \quad A_z = A_z. \quad (2,12)$$

ამ ოპერატორების საშუალებით ადვილად ვიპოვით (AB) სკალარულ ნამრავლს

$$(AB) = \frac{1}{2} (A^+ B^- + A^- B^+) + A_z B_z, \quad (2,13)$$

ხოლო კერძო შემთხვევაში

$$\hat{A}^2 = \frac{1}{2} (A^+ A^- + A^- A^+) + A_z^2. \quad (2,14)$$

ჩვენ ვიცით, რომ (2,6) და (2,10) საკმარისია, რათა ვიპოვოთ A^\pm , A_z ოპერატორების მატრიცული ელემენტები. ამ ელემენტთათვის სამართლიანია ფორმულები [3]

$$\langle am_a \pm 1 | A^\pm | am_a \rangle = \hbar [(a \mp m_a)(a \pm m_a + 1)]^{1/2} \quad (2,15)$$

$$\langle am_a | A_z | am_a \rangle = \hbar m_a;$$

როგორც ვხედავთ, მომენტის პროექციების მატრიცები დიაგონალურია a -კვანტური რიცხვის მიმართ, m_a კვანტური რიცხვის მიმართ კი გვაქვს შერჩევის წესი

$$m'_a = m_a \pm 1. \quad (2,16)$$

ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები მოთავსებულია დიაგონალის მეზობლად. როგორც (2,15) ფორმულიდან ჩანს, $|m_a| \leq a$. თუ გამოვიყენებთ (2,15) ფორმულებს, მაშინ (2,14) გამოსახულების დახმარებით ადვილად ვიპოვით, რომ

$$A_{m_a m_a}^2 = \hbar^2 a(a+1); \quad (2,17)$$

მაშასადამე, მომენტის კვადრატისა და მისი პროექციისათვის ჩვენ გვექნება შემდეგი საკუთარი მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} A^2 &= \hbar^2 a(a+1), \\ A_z &= \hbar m_a, \\ -a &\leq m_a \leq +a; \end{aligned} \quad (2,18)$$

ამასთან, ცხადია, a წარმოადგენს მომენტის პროექციის მაქსიმალურ მნიშვნელობას \hbar -ერთეულებში: $(A_z)_{max} = a\hbar$. მომენტი სივრცეში იღებს $(2a+1)$ ორიენტაციას, მაგნიტური კვანტური რიცხვის $(2a+1)$ შესაძლო მნიშვნელობის გამო. როცა მომენტის კვანტური a -რიცხვი მთელია, m_a იღებს მნიშვნელობებს $-a$ -დან $+a$ -მდე ნულის გავლით თითოს გამოკლებით, ხოლო როცა a კენტი რიცხვის ნახევარია, m_a ისევე $-a$ -დან $+a$ -მდე იცვლება, ოღონდ ნულს აღარ გაივლის. შევნიშნათ, რომ a დადებითი რიცხვია. როგორც ვხედავთ, როცა მოცემულია a რიცხვი, მაშინ მომენტი საესებით განსაზღვრულია; მაშასადამე, მომენტის განსაზღვრა ეკვივალენტურია a -კვანტური რიცხვის განსაზღვრისა. ამიტომ, როდესაც შემდეგში ვიტყვით—„მოცემულია მომენტის ესა თუ ის მნიშვნელობა“, ვიგულისხმებთ, რომ განსაზღვრული გვაქვს a -სიდიდე.

ცხადია, (2,15) ფორმულიდან, რომ

$$\begin{aligned} A^\pm \chi_{am_a} &= \hbar [(a \mp m_a)(a \pm m_a + 1)]^{1/2} \chi_{a, m_a \pm 1} \\ A^+ \chi_{aa} &= 0, \quad A^- \chi_{a, -a} = 0, \end{aligned} \quad (2,19)$$

როცა A მომენტი ემთხვევა ნაწილაკის ორბიტალურ მომენტს, მაშინ χ_{am_a} ფუნქციები ემთხვევა ლაპლასის სფერულ ფუნქციებს $Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$, სადაც $a=l$ აზიმუტალური კვანტური რიცხვია, ხოლო $-l \leq m_l \leq +l$ წარმოადგენს მაგნიტურ კვანტურ რიცხვს.

ობრბიტალური მომენტისათვის (2,19) ფორმულები ასე დაიწერება:

$$(\hat{l}_x \pm i \hat{l}_y) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l, m \pm 1}(\theta, \varphi), \quad (2,20)$$

ხოლო

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \pm \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \hat{l}_z = -\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2,21)$$

რაც შეეხება l^2 ოპერატორს, იგი ტოლია შემდეგი გამოსახულებისა:

$$l^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}, \quad (2,22)$$

სადაც $\Delta_{\theta, \varphi}$ — ლეჟანდრის ოპერატორია.

როცა A ემთხვევა ნაწილაკის სპინის S ოპერატორს, მაშინ χ_{sm_s} -ს სპინური ფუნქცია ეწოდება. კერძოდ, როცა ნაწილაკის სპინი $a = s = 1/2$, გვექნება

$$\chi_{1/2, 1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{1/2, -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2,23)$$

ამასთან, პირველ ფუნქციას, რომელიც მიუთითებს, რომ სპინის პროექცია x -ის გასწვრივია, α -თი აღნიშნავენ, ხოლო მეორე ფუნქციას, რომელიც უარყოფით პროექციას განსაზღვრავს, — β -თი:

$$\alpha = \chi_{1/2, 1/2}, \quad \beta = \chi_{1/2, -1/2}. \quad (2,24)$$

საქიროა აღინიშნოს, რომ, როცა a კენტი რიცხვის ნახევარია, მომენტის მატრიცული ელემენტების ინდექსები წილადი რიცხვებითაა გადანომრილი. $a = \frac{1}{2}$

შემთხვევაში $m_a = \pm \frac{1}{2}$ და (2,15) ფორმულები მოგვეცემენ

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma, \quad (2,25)$$

სადაც σ ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) პაულის მატრიცებია:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2,26)$$

ამ მატრიცების თვისებები კარგად არის ცნობილი. ისინი ერმიტულებიცაა და უნიტარულებიც და მათი საკუთარი მნიშვნელობები ± 1 -ის ტოლია.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ხშირად მომენტებს ზომავენ იმ ერთეულებით, რომელიც მიიღება $\hbar = 1$ დაშვებით. ასეთი ერთეულებით განსაკუთრებით სარგებლობენ ბირთვის ფიზიკაში.

§ 3. მომენტთა შეპარების წახსნი

ვთქვათ, მოცემულია ორი მომენტი A და B , მაშინ ორივე მომენტისათვის გვექნება ფორმულები:

$$\begin{aligned} A^2 &= \hbar^2 a(a+1), & B^2 &= \hbar^2 b(b+1), \\ A_z &= \hbar m_a, & B_z &= \hbar m_b, \\ -a &\leq m_a \leq +a, & -b &\leq m_b \leq +b. \end{aligned} \quad (3,1)$$

შემოვიღოთ ამ ორი მომენტის ვექტორული ჯამი

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad (3,2)$$

და მას A და B მომენტების საჯამო ოპერატორი ეუწოდოთ. ამასთან, ვიგულისხმობთ, რომ A_x და B_x მდგენელები ურთიერთკომუტატორია. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ, ისევე როგორც A და B ოპერატორები, C ოპერატორიც აკმაყოფილებს კომუტაციის პირობას

$$[\hat{C}_\alpha, \hat{C}_\beta] = -\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{C}_\gamma, \quad (3,3)$$

ამიტომ მისთვისაც სამართლიანი იქნება (2,15) ფორმულები; ამასთან (3,2) ტოლობიდან ნათელია, რომ \hat{C}_z მატრიცა დიაგონალური იქნება A_z და B_z მატრიცების დიაგონალურობის გამო. მაშასადამე, C -მომენტისათვის გვექნება ფორმულები:

$$\begin{aligned} C^2 &= \hbar^2 c(c+1), \\ C_z &= \hbar m_c, \\ -c &\leq m_c \leq +c, \end{aligned} \quad (3,4)$$

სადაც c არის C მომენტის კვანტური რიცხვი. მომენტთა შეკრება ნიშნავს a და b კვანტური რიცხვების საშუალებით ვიპოვოთ c -კვანტური რიცხვების მნიშვნელობა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად გავიხსენოთ, რომ, თანახმად (3,2) ფორმულისა, C_z პროექციის საკუთარი მნიშვნელობები მარტივად მოიძებნება m_a და m_b კვანტური რიცხვების საშუალებით, რადგან აქ საკმე გვექნება რიცხვების ჩეულეზური შეკრებასთან. სახელდობრ, $C_z = \hbar(m_a + m_b)$ და, ამგვარად,

$$m_c = m_a + m_b. \quad (3,5)$$

გავითვალისწინოთ, რომ $m_a = a, a-1, a-2, \dots, -(a-1), -a$; ხოლო $m_b = b, b-1, b-2, \dots, -(b-1), -b$, მაშინ (3,5)-დან მივიღებთ m_c -ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს. პროექციების ამ მნიშვნელობებიდან ადვილად დავადგენთ, რომ ასეთი პროექციები შეიძლება ჰქონდეს მომენტებს, რომელთა კვანტური რიცხვებია დაწყებული $(a+b)$ -დან თითოს დაკლებით $|a-b|$ -მდე. მაშასადამე, მივიღეთ მომენტთა შეკრების შემდეგი ფორმულა [3]:

$$|a-b| \leq c \leq a+b, \quad (3,6)$$

რომელსაც გასაგები მიზეზის გამო სამკუთხედის წესს უწოდებენ და აღნიშნავენ $\Delta(a, b, c)$ -თი. ადვილად განზოგადდება შეკრების ეს წესი მომენტთა უფრო დიდი რიცხვის შემთხვევაში. ამისათვის საკმარისია ჯერ შევკრიბოთ ორი მომენტი, შემდეგ მიღებული შედეგი შევკრიბოთ მესამესთან და ა. შ.

ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ (2,13) და (2,15) ფორმულების გამოყენებით ადვილად ვიპოვიან $(A \cdot B)$ ნამრავლის საკუთარ მნიშვნელობებს. სახელდობრ, გვექნება:

$$(A \cdot B) = \frac{\hbar^2}{2} [c(c+1) - a(a+1) - b(b+1)], \quad (3,7)$$

სადაც $C = A + B$ და იგულისხმება, რომ A, B და C ოპერატორები ერთმანეთთან კომუტატორებია.

§ 4. ორი მომენტის ჯამის კვადრატისა და პროპაციის
საკუთარი ფუნქციები. კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტები

ვთქვათ, გვაქვს კვანტურ-მექანიკური სისტემა, რომელიც ორი ქვესისტემისაგან შედგება. ქვესისტემის მომენტები იყოს A და B . ამასთან, \hat{A}_α და \hat{B}_α მღვენელები ურთიერთკომუტატორია $[\hat{A}_\alpha, \hat{B}_\beta] = 0$. შემოვიღოთ საჯამო მომენტი

$$C = A + B. \quad (4,1)$$

ვთქვათ, A^2, A_z და B^2, B_z ოპერატორების საკუთარი ფუნქციები შესაბამისად არის χ_{am_a} და χ_{bm_b} . ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ C^2, C_z საჯამო მომენტისა და პროექციის საერთო საკუთარი ფუნქციები. C^2, C_z საკუთარი ფუნქციებისათვის ნაცვლად χ_{cm_c} აღნიშვნისა, შემოვიღოთ აღნიშვნა $\chi_{ab}^{cm_c}$, საიდანაც ჩანს, რომ საჯამო მომენტის c -კვანტური რიცხვი მიღებულია a და b კვანტური რიცხვების შეკრებით.

ცხადია, რომ $\hat{C}_z = \hat{A}_z + \hat{B}_z$; ოპერატორს დააკმაყოფილებს ფუნქციითა ნამრავლი $\chi_{am_a}(1)\chi_{bm_b}(2)$, სადაც არგუმენტები მიუთითებენ, თუ რომელ ქვესისტემას ეკუთვნის აღებული ფუნქცია. აღებული ნამრავლი არ იქნება საერთო საკუთარი ფუნქცია $\hat{C}^2 = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + 2(\hat{A} \cdot \hat{B})$ ოპერატორისა, რადგან $(\hat{A} \cdot \hat{B})$ სკალარული ნამრავლი ამაში ხელს გეშლის. ჩვენ კი გვინდა სწორედ ისეთი ფუნქციის პოვნა, რომელიც ერთდროულად დააკმაყოფილებს ორივე ოპერატორს \hat{C}^2 და \hat{C}_z . მართალია, $\chi_{am_a}\chi_{bm_b}$ ნამრავლი \hat{C}^2 ოპერატორის საკუთარი ფუნქცია არ არის, მაგრამ საკუთარი ფუნქცია შეიძლება იყოს ამ ნამრავლის შემდეგი წრფივი კომბინაცია:

$$\chi_{a,b}^{cm_c}(1, 2) = \sum_{m_a=-a}^{+a} \sum_{m_b=-b}^{+b} \langle ab m_a m_b | cm_c \rangle \chi_{am_a}(1) \chi_{bm_b}(2). \quad (4,2)$$

მუდმივ რიცხვებს

$$\langle ab m_a m_b | cm_c \rangle \quad (4,3)$$

ვიგვირის ვექტორული შეკრების კოეფიციენტებს, ან კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტებს უწოდებენ. ტალღური ფუნქციის ფაზური მამრავლი ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ ეს კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვები იყოს. კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტი ნულის ტოლი იქნება, თუ $m_c \neq m_a + m_b$. გარდა ამისა, a, b, c კვანტური რიცხვები ერთმანეთთან შებმული არიან მომენტთა შეკრების წესით, ამიტომ თუ დაცული არ არის $\Delta(a, b, c)$ სამკუთხედის წესი, მაშინ კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტი ნულის ტოლი იქნება. ამიტომ (4,2) ფორმულაში ფაქტიურად ერთმაგი ჯამი მონაწილეობს. კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტები ისე შეგვიძლია ვვარჩიოთ, რომ (4,2) ფუნქცია საერთო საკუთარი ფუნქცია იყოს \hat{C}^2 და \hat{C}_z ოპერატორებისა. ცხადია, (4,2) ფუნქცია საკუთარი ფუნქცია იქნება აგრეთვე A^2 და B^2 ოპერატორებისაც საკუთარი მნიშვნელობებით: $A^2 = \hbar^2 a(a+1)$, $B^2 = \hbar^2 b(b+1)$ შესაბამისად.

კვანტური მექანიკის აღწერის მეთოდის მიხედვით კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტის კვადრატის წარმოადგენს a და b მომენტებით განსაზღვრული საჯამო c -მომენტის მდგომარეობის განხორციელების ალბათობას.

კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულა ჯგუფთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ნაპოვნი იყო ე. ვინგერის მიერ [147].

$$\langle abm_a m_b | cm_c \rangle = \delta_{m_c} m_a + m_b.$$

$$\left[\frac{(c+a-b)!(c-a+b)!(a+b-c)!(c+m_c)!(c-m_c)!(2c+1)}{(c+a+b+1)!(a-m_a)!(b-m_b)!(a+m_a)!(b+m_b)!} \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\sum_k \frac{(-1)^{k+b+m_b} (c+b+m_a-k)!(a-m_a-k)!}{k!(c+m_c-k)!(c-a+b-k)!(k+a-b-m_c)!}$$

ჯამი აღება k -ს ისეთი მნიშვნელობებით, სანამ ფაქტორიული უარყოფითი ვაზდებოდაც.

$\mathcal{Y}_{a,b}^{cm_c}$ ფუნქციები, რადგან ისინი ერმიტული ოპერატორების საკუთარი ფუნქციებია, ორთო-ნორმირებული იქნებიან

$$\langle \mathcal{Y}_{ab}^{c'm'_c} | \mathcal{Y}_{ab}^{cm_c} \rangle = \delta_{c'c} \delta_{m'_c m_c}. \quad (4.5)$$

ამ ფორმულაში (4,2) ფუნქციის შეტანით ადვილად ვიპოვით კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების პირობას:

$$\sum_{m_a m_b} \langle abm_a m_b | cm_c \rangle \langle abm'_a m'_b | c'm'_c \rangle = \delta_{c'c} \delta_{m'_c m_c}. \quad (4.6)$$

სრულიად ანალოგიურად,

$$\sum_{c'=|a-b|}^{a+b} \sum_{m'_c=-c'}^{+c'} \langle abm_a m_b | cm_c \rangle \langle abm'_a m'_b | c'm'_c \rangle = \delta_{m'_c m_c} \delta_{m'_b m_b} \quad (4.7)$$

ასევე:

$$\sum_{m_a m_b} \langle abm_a m_b | cm_c \rangle \langle ab' m'_a m'_b | c'm'_c \rangle = \frac{2c+1}{2b'+1} \delta_{b'b} \delta_{m_b m'_b} \quad (4.8)$$

და

$$\sum_{m_b m_c} \langle abm_a m_b | cm_c \rangle \langle a' b m'_a m_b | c'm'_c \rangle = \frac{2c+1}{2a'+1} \delta_{a'a} \delta_{m_a m'_a}. \quad (4.9)$$

თანამად (4,4) ფორმულისა, კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტებს ექნებათ სიმეტრიის შემდეგი თვისებები [4]:

$$\langle abm_a m_b | cm_c \rangle = \langle ba-m_b -m_a | c-m_c \rangle = \quad (4.10)$$

$$= (-1)^{c-a-b} \langle bam_b m_a | cm_c \rangle \quad (4.11)$$

$$= (-1)^{a+b-c} \langle ab-m_a -m_b | c-m_c \rangle \quad (4.12)$$

$$= (-1)^{a-m_a} \left(\frac{2c+1}{2b+1} \right)^{1/2} \langle cm_a -m_c | b-m_b \rangle \quad (4.12')$$

$$= (-1)^{b+m_b} \left(\frac{2c+1}{2a+1} \right)^{1/2} \langle cb-m_c m_b | a-m_a \rangle. \quad (4.12'')$$

ადვილად ვიპოვი, რომ კერძო შემთხვევაში:

$$\langle a0m_a0 | am_a \rangle = 1, \quad (4,13)$$

$$\langle ab | ab | a+b | a+b \rangle = 1. \quad (4,13')$$

ასევე.

$$\langle abm - m | 00 \rangle = (-1)^{b-m} \frac{\delta_{ab}}{\sqrt{2b+1}}. \quad (4,14)$$

როცა a და b ლებულობს მთელ მნიშვნელობებს, მაშინ (4,12) თვისების თანახმად $\langle ab | 00 | c0 \rangle = 0$, თუ $a+b+c$ რიცხვი ლუწი არ არის.

კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების (4,7) პირობის გამოყენებით შეგვიძლია შევადრუნოთ (4,2) გაშლა. მართლაც, გავამრავლოთ იგი $\langle abm_a m_b | cm_c \rangle$ კოეფიციენტზე და მოვახდინოთ აჯამვა c და m_c -თი, შედეგად მივიღებთ:

$$\gamma_{am_a}(1) \gamma_{bm_b}(2) = \sum_{c=|a-b|}^{a+b} \sum_{m_c=-c}^{+c} \langle abm_a m_b | cm_c \rangle \mathcal{Y}_{ab}^{cm_c}(1,2). \quad (4,15)$$

ღანვიხილოთ ორი ნახევარსპინიანი იგივეური ნაწილაკი. იმის გამო, რომ $a=b=\frac{1}{2}$ შემთხვევაში კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტები ტოლია შემდეგი რიცხვებისა:

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} | 1 \pm 1 \rangle &= 1, \quad \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} | 10 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} | 00 \rangle &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4,16)$$

(4,2) ფორმულის გამოყენებით ნორმირებული და საჭირო სიმეტრიის მქონე სპინორი ფუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{1/2, 1/2}^{11}(1,2) &= \alpha(1) \alpha(2), \\ \mathcal{Y}_{1/2, 1/2}^{1-1}(1,2) &= \beta(1) \beta(2), \\ \mathcal{Y}_{1/2, 1/2}^{10}(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \alpha(1) \beta(2) + \alpha(2) \beta(1) \}, \\ \mathcal{Y}_{1/2, 1/2}^{00}(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \alpha(1) \beta(2) - \alpha(2) \beta(1) \}. \end{aligned} \quad (4,17)$$

როგორც ვხედავთ, გვაქვს ოთხი სპინორი ფუნქცია. ამასთან პირველი სამი შეესაბამება $S=1$ საჯამო სპინს, ხოლო მეოთხე $S=0$. $S=1$ მდგომარეობას ტრიპლეთურ მდგომარეობას უწოდებენ, ხოლო $S=0$ — სინგლეთურს. ტრიპლეთური მდგომარეობა ხორციელდება სამი ფუნქციით, ამიტომ ამ მდგომარეობის წონა იქნება $3/4$, ხოლო სინგლეთური მდგომარეობისა — $1/4$.

ახლა ვიპოვოთ სპინური მდგომარეობის წონები ორი იგივეური ნაწილაკის სისტემისათვის ზოგად შემთხვევაში, როცა თითოეული ნაწილაკის სპინი s -ის ტოლია, სრული სპინი $S=s+s$. მაშასადამე, S -ილებს მნიშვნელობებს 0 -დან $2s$ -მდე, ე. ი. $0 \leq S \leq 2s$.

ჰამლერი სპინის მოცემულ მნიშვნელობას ექნება $2S+1$ პროექცია, ამიტომ, ცხადია, პროექციათა საერთო რიცხვი იქნება

$$\sum_{s=0}^{2s} (2S+1) = (2s+1)(2s+1). \quad (4,18)$$

დავუბრუნოთ, (4,2) გამოსახულებაში $s=a=b$, მაშინ

$$\mathcal{P}_{ss}^{SM_s}(1, 2) = \sum_{m=-s}^{+s} \sum_{m'=-s}^{+s} (ssmm' | SM_s) \chi_{sm}(1) \chi_{sm'}(2). \quad (4,19)$$

მოვხდნით ნაწილაკთა გადასმა. გავიხსენოთ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტის (4,11) თვისება

$$(ssmm' | SM_s) = (-1)^{S-2s} (ssm'm | SM_s). \quad (4,20)$$

შედევად მივიღებთ, რომ იგივეური ნაწილაკებისათვის

$$\mathcal{P}_{ss}^{SM_s}(2, 1) = (-1)^{S-2s} \mathcal{P}_{ss}^{SM_s}(1, 2). \quad (4,21)$$

მაშასადამე, სპინური ფუნქციის სიმეტრიას განსაზღვრავს $(-1)^{S-2s}$ მაშრავლი, ამასთან როცა s -მთელია, სიმეტრიულობა განისაზღვრება $(-1)^{S-ით}$, ხოლო როცა s -კენტი რიცხვის ნახევარია $-(-1)^{S-ით}$.

სრული ტალღური ფუნქცია წარმოდგინება შემდეგი ნაშრავლით:

$$\Psi_{SM_s}(1, 2) = \psi_{SM_s}(1, 2) \mathcal{P}_{ss}^{SM_s}(1, 2), \quad (4,22)$$

სადაც ψ_{SM_s} კოორდინატული ტალღური ფუნქციაა. მისი სიმეტრიის თვისება დამოკიდებული იქნება სისტემის სრულ სპინზე და მის პროექციაზე, ამიტომაც მივეუწერეთ ამ ფუნქციას ინდექსები. როგორც ცნობილია, იგივეურ ნაწილაკთა სრული ფუნქცია ნაწილაკთა გადასმის მიმართ სიმეტრიულია, თუ ნაწილაკის სპინი კენტი რიცხვის ნახევარია, ე. ი.

$$\Psi_{SM_s}(2, 1) = (-1)^{2s} \Psi_{SM_s}(1, 2), \quad (4,23)$$

საიდანაც ჩანს, რომ კოორდინატული ფუნქციის სიმეტრიულობა განისაზღვრება პირობით

$$\psi_{SM_s}(2, 1) = (-1)^s \psi_{SM_s}(1, 2). \quad (4,24)$$

ამგვარად, როცა სრული სპინი ლუწია, კოორდინატული ფუნქცია სიმეტრიულია, ხოლო როცა S -კენტია, კოორდინატული ფუნქცია ანტისიმეტრიულია.

გამოვთვალოთ სპინური მდგომარეობის წონები, ლუწი და კენტი სრული სპინის მნიშვნელობებისათვის პირობით, რომ ყველა სპინური მდგომარეობა თანაბარალობათა.

s -სპინის მქონე ორი იგივეური ნაწილაკისათვის გვექნება $(2s+1)^2$ განსხვავებული მდგომარეობა. როცა s მთელია, მაშინ S -ის $(2s+1)$ მნიშვნელობიდან $(s+1)$ შეესაბამება ლუწ S -ს, ხოლო s —კენტს. ლუწი S -ებისათვის მდგომარეობათა რიცხვი იქნება შემდეგი:

$$\sum_{s=0,2,\dots,2s} (2S+1) = (2s+1)(s+1), \quad (4,25)$$

კენტი S -ის მდგომარეობათა რიცხვი კი, ცხადია, ტოლი იქნება

$$(2s+1)^2 - (2s+1)(s+1) = s(2s+1). \quad (4,26)$$

ამის შემდეგ უკვე ადვილია სათანადო წონების გამოთვლა. ლუწი და კენტი სრული სპინის შესაბამისი მდგომარეობების წონები სათანადოდ აღვნიშნოთ N_+ და N_- -ით. მაშინ ცხადია, რომ მთელი s -ისათვის გვექნება

$$N_+ = \frac{(2s+1)(s+1)}{(2s+1)^2} = \frac{s+1}{2s+1}, \quad N_- = \frac{s(2s+1)}{(2s+1)^2} = \frac{s}{2s+1}. \quad (4,27)$$

$$(s=n, n=0, 1, 2, \dots)$$

სრულიად ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ კენტი რიცხვის ნახევრის ტოლი სპინისათვის გვექნება

$$N_+ = \frac{s}{2s+1}, \quad N_- = \frac{s+1}{2s+1} \cdot \left(s = \frac{2n+1}{2}, n=0, 1, 2, \dots \right) \quad (4,28)$$

კერძოდ, ნახევრის ტოლი სპინისათვის $s=1/2$ გვექნება $N_+=1/2$, $N_-=3/4$, რაც ზემოთ მიღებულ მნიშვნელობებს ემთხვევა.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ (4,2) ფორმულას სხვა შინაარსიც შეგვიძლია მივცეთ. ასე მაგალითად, შეგვიძლია შემოვიღოთ ერთი ნაწილაკის ψ_{ls}^{jm} ფუნქცია, რომელიც საერთო საკუთარი ფუნქცია იქნება j^2 და j_z ოპერატორებისა, სადაც $j=I+s$ და ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$j^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad j_z = m_j \hbar, \quad -j \leq m_j \leq +j. \quad (4,29)$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\psi_{ls}^{jm} = \sum_{m_l=-l}^{-l} \sum_{m_s=-s}^{+s} \langle lsm_l m_s | jm_j \rangle Y_{lm_l}(\bar{r}) \chi_{sm_s}, \quad \left(\bar{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (4,30)$$

სადაც χ_{sm_s} -სპინური ფუნქციაა. ამ გამოსახულების შებრუნებით ვიპოვით ფორმულას

$$Y_{lm_l}(\bar{r}) \chi_{sm_s} = \sum_{j=|l-s|}^{l+s} \sum_{m_j=-j}^j \langle lsm_l m_s | jm_j \rangle \psi_{ls}^{jm_j} \quad (4,31)$$

$\psi_{ls}^{jm_j}$ ფუნქციას $s = \frac{1}{2}$ სპინის შემთხვევაში უწოდებენ სფერულ ფუნქციას სპინით-

§ სამი მომენტის ჯამის კვადრატისა და პროექციის
საკუთარი ფუნქციები. რაბას კოეფიციენტები

განვიხილოთ სამი ქვესისტემისაგან შედგენილი სისტემა. ქვესისტემების მომენტები იყოს A , B და C , ამასთან, ამ სიდიდეებში იგულისხმება ნებისმიერი მომენტი: სპინი, ორბიტალური მომენტი, მათი ჯამი და სხვა. შემოვიღოთ სამი მომენტის საჯამო მომენტი, რომელიც D -თი აღვნიშნოთ

$$D = A + B + C; \quad (5,1)$$

იგულისხმება, რომ $\hat{A}_z, \hat{B}_z, \hat{C}_z$ კომპონენტები ერთმანეთთან კომუტატორია. ცხადია, D ვექტორსაც მომენტის ყველა თვისება ექნება, ამასთან D^2 კომუტატორი იქნება D_z ოპერატორთან. D მომენტის კვანტური რიცხვი მიიღება a, b და c კვანტური რიცხვებიდან მომენტთა შეკრების სამკუთხედის წესის გამოყენებით. ამასთან, D -მომენტთა შეკრება შეიძლება განვხორციელოთ შემდეგი ორი გზით:

$$D = E + C, \quad E = A + B \quad (5,2)$$

და

$$D = A + F, \quad F = B + C. \quad (5,3)$$

ცხადია, მომენტთა ნებისმიერი დაჯგუფებით ყოველთვის მივიღებთ სიდიდეს, რომელსაც მომენტის ყველა თვისება ექნება და მათთვის სამართლიანი იქნება (2,15) ფორმულები. თუ E მომენტის კვანტურ რიცხვს აღვნიშნავთ e -თი, მაშინ D მომენტის კვანტური d რიცხვის მისაღებად საჭიროა სამკუთხედის წესით ჯერ ვიპოვოთ e , ხოლო შემდეგ მიღებული შედეგი შევკრიბოთ e -სთან. ე. ი.

$$|a-b| \leq e \leq a+b, \quad \text{ე. ი. } \Delta(a, b, e) \quad (5,4)$$

და

$$|e-c| \leq d \leq e+c, \quad \text{ე. ი. } \Delta(e, c, d). \quad (5,4')$$

ვთქვათ, $(\hat{A}^2, \hat{A}_z), (\hat{B}^2, \hat{B}_z)$ და (\hat{C}^2, \hat{C}_z) ოპერატორებს აქვთ შესაბამისად საკუთარი ფუნქციები

$$\chi_{am_a}, \chi_{bm_b}, \chi_{cm_c}. \quad (5,5)$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც საერთო საკუთარი ფუნქცია იქნება D^2 და D_z ოპერატორებისა [4,5]. ამ ფუნქციის მოსაძებნად კვლავ ვიმოქმედოთ ორ ეტაპად, როგორც ამას ვაკეთებდით სამი მომენტის შეკრებისას. ჯერ ვიპოვოთ ორი რომელიმე ოპერატორის, მაგალითად A და B ოპერატორების, ჯამის კვადრატისა— \hat{E}^2 და \hat{E}_z პროექციის საკუთარი ფუნქციები. თანახმად (4,2) ფორმული-სა, გვექნება

$$\mathcal{R}_{ab}^{cm_e} = \sum_{m_a} \sum_{m_b} (abm_a m_b | em_e) \chi_{am_a} \chi_{bm_b}. \quad (5,6)$$

ამის შემდეგ (5,6) ფორმულით განსაზღვრული ფუნქცია ჩავთვალოთ ერთი ქვესისტემის ფუნქციად და D^2 და D_z ოპერატორების საერთო საკუთარი ფუნქციების დასაწერად კვლავ გამოვიყენოთ (4,2) ფორმულა. მივიღებთ:

$$\mathcal{D}_{(ab)c}^{dm_d} = \sum_{m_c=-e}^{+e} \sum_{m_c=-c}^{+c} (ecm_c m_c | dm_d) \mathcal{R}_{ab}^{em_e} \chi_{cm_c}. \quad (5,7)$$

ახლა თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ (5,6) მნიშვნელობას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\varphi_{(ab)ec}^{d_m d} = \sum_{m_a m_b} \sum_{m_c m} \langle ab m_a m_b | e m_c \rangle \langle e c m_c m_c | d m_d \rangle \chi_{a m_a} \chi_{b m_b} \chi_{c m_c} \quad (5,8)$$

(a, b) ინდექსი მიუთითებს, რომ d მომენტი მიღებულია ჯერ a და b -შეკრებით, ხოლო შემდეგ ამ ჯამზე c მომენტის დამატებით.

როგორც აღვნიშნეთ, არსებობს მომენტთა შეკრების მეორე გზაც. საჩელოდობრ, ჩვენ შეგვიძლია ჯერ შევკრიბოთ b და c , შემდეგ კი მას დაეუმატოთ a -შედეგად საკუთარი ფუნქციებისათვის მივიღებთ:

$$\varphi_{a(bc)f}^{d_m d} = \sum_{m_a m_b} \sum_{m_c m_f} \langle b c m_b m_c | f m_f \rangle \langle a f m_a m_f | d m_d \rangle \chi_{a m_a} \chi_{b m_b} \chi_{c m_c}, \quad (5,9)$$

სადაც f არის $F = B + C$ მომენტის კვანტური რიცხვი. ცხადია, როგორც (5,8), ისე (5,9) ფუნქცია საერთო საკუთარი ფუნქცია იქნება D_z^d, D_z^d ოპერატორებისა ერთი და იმავე საკუთარი მნიშვნელობებით:

$$D^2 = \mathbb{1}^2 d(d+1), \quad D_z = \mathbb{1} m_d, \quad -d \leq m_d \leq +d, \quad (5,10)$$

ამიტომ აღნიშნული ფუნქციები ერთმანეთთან დაკავშირებული იქნება უნიტარული გარდაქმნებით

$$\varphi_{(ab)ec}^{d_m d} = \sum_{f; b-c}^{b+c} \langle (ab)ecd | a(bc)fd \rangle \varphi_{a(bc)f}^{d_m d}. \quad (5,11)$$

ვიპოვოთ უნიტარული გარდაქმნის მატრიცა $\langle (ab)ecd | a(bc)fd \rangle$. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ D_z^d, D_z^d ოპერატორების ერმიტულობის გამო მათი საკუთარი ფუნქციები ორთო-ნორმირებული იქნებიან. (5,11) გამოსახულება სკალარულად გაგამრავლოთ $\varphi_{a(bc)f}^{d_m d}$ ფუნქციაზე. შედეგად მივიღებთ

$$\langle (ab)ecd | a(bc)fd \rangle = \langle \varphi_{a(bc)f}^{d_m d} | \varphi_{(ab)ec}^{d_m d} \rangle. \quad (5,12)$$

ამ სკალარულ ნამრავლში შევიტანოთ (5,11) და (5,12) ფუნქციები და გავითვა-ლისწინოთ (5,5) ფუნქციათა ორთო-ნორმირების პირობები, გვექნება

$$\begin{aligned} \langle (ab)ecd | a(bc)fd \rangle &= \sum_{m_a} \sum_{m_b} \sum_{m_c} \sum_{m_e m_f} \langle a b m_a m_b | e m_c \rangle \langle e c m_c m_c | d m_d \rangle \\ &\langle b c m_b m_c | f m_f \rangle \langle a f m_a m_f | d m_d \rangle. \end{aligned} \quad (5,13)$$

როგორც ვხედავთ, უნიტარული გარდაქმნის მატრიცა გამოიხატა ოთხი კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტის ჯამით. ამასთან, მომენტთა პროექციების შეკრების კანონის გამო ხუთმაგი ჯამი შეგვიძლია დაეიყვანოთ ჯამზე m_a და m_b -თი. რ დგან კლემშ-ჟორდანის კოეფიციენტები ნამდვილი სიდიდეება, ამიტომ უნიტარული მატრიცაც ნამდვილი იქნება.

კვანტური მექანიკის სხვადასხვა ამოცანებში, ნაცვლად (5,13) მატრიცული ელემენტისა, შემოპყავთ მისი პროპორციული სიდიდე:

$$W(abcd; ef) = \frac{\langle (ab)ecd | a(bc)fd \rangle}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}}, \quad (5,14)$$

რომელსაც რაკას კოეფიციენტს უწოდებენ. ამგვარად, თანახმად (5,13)-ისა, რაკას-კოეფიციენტი განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$\sqrt{(2e+1)(2f+1)} W(abcd; ef) = \sum_{m_a m_b m_c m_d} \langle abm_a m_b | cm_c \rangle \langle ecm_c m_c | dm_d \rangle \langle bcm_b m_c | fm_f \rangle \langle afm_a m_f | dm_d \rangle. \quad (5,15)$$

იმის გამო, რომ უნიტარული გარდაქმნის კოეფიციენტი ნამდვილია, მისთვის საპართლიანი იქნება ფორმულა

$$\sum_c \langle (ab)ecd | a(bc)fd \rangle \langle (ab)cfd | a(bc)e'd \rangle = \delta_{ff'}. \quad (5,15)$$

რაც (5,14) განმარტების ძალით რაკას კოეფიციენტებისათვის მოგვეცემს შემდეგი ორთოგონალობის პირობას:

$$\sum_c (2e+1)(2f+1) W(abcd; ef) W(abcd; e'f) = \delta_{ff'}. \quad (5,16)$$

კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტებისთვის თვისებით რაკას კოეფიციენტები, თანახმად (5,14) განმარტებისა და (5,13) ფორმულისა, ნულისაგან განსხვავებული იქნებიან, როცა დატულია სამკუთხედის წესები:

$$\Delta(a,b,c), \Delta(c,e,d), \Delta(b,c,f), \Delta(a,f,d). \quad (5,16')$$

რაკას კოეფიციენტების სიმეტრიის თვისებებს ადვილად დავადგენთ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების სიმეტრიის თვისებებიდან. კერძოდ, გვექნება შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულები:

$$\begin{aligned} W(abcd; ef) &= W(badc; ef) = W(cdab; ef) = W(dcba; ef) = \\ &= W(cadb; fe) = W(bdac; fe) = W(dbeca; fe) = W(acbd; fe). \end{aligned} \quad (5,16)$$

ასევე:

$$W(abcd; ef) = (-1)^{e+f-b-c} W(aefd; bc) = (-1)^{e+f-a-d} W(befc; ad). \quad (5,16')$$

გავამრავლოთ (5,16) ფორმულა $\langle bcm_b m_c | fm_f \rangle \langle afm_a m_f | dm_d \rangle$ კოეფიციენტებზე და ავჯამოთ f -ით. კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\langle abm_a m_b | em_a + m_b \rangle \langle edm_a + m_b m_d | dm_a + m_b + m_d \rangle = \\ &\sum_f \sqrt{(2e+1)(2f+1)} \langle bdm_b m_d | fm_b + m_d \rangle \langle afm_a m_b + m_d | cm_a + m_b + m_d \rangle \cdot \\ &W(abcd; ef) \end{aligned} \quad (5,17)$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (5,15) განმარტება ეკვივალენტურია ფორმულისა

$$\begin{aligned} &\sum_{m_b m_c} \langle abm_a m_b | em_c \rangle \langle ecm_c m_c | dm_d \rangle \langle bcm_b m_c | fm_f \rangle = \\ &\sqrt{(2e+1)(2f+1)} \langle afm_a m_f | dm_d \rangle W(abcd; ef). \end{aligned} \quad (5,18)$$

მართლაც, ამ გამოსახულების ორივე მხარის გამრავლებით $\langle afm_a m_f | dm_d \rangle$ კოეფიციენტზე, აჯამვით m_a და m_f რიცხვებით და (4,6) ორთო-ნორმირების პირობის გამოყენებით მივიღებთ (5,15) ფორმულას.

თუ კერძო შემთხვევაში, ექვსი მომენტიდან, რომელიც შედის რაკას კოეფიციენტის განმარტებაში რომელიმე უღრის ნულს, ვთქვათ, მაგალითად $e=0$, მაშინ (5,15) განმარტებიდან, კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების თვისებების გამოყენებით ადვილად ვიპოვი, რომ

$$W(abcd; af) = (-1)^{b+c-f} \frac{\delta_{ab} \delta_{cd}}{\sqrt{(2a+1)(2c+1)}}. \quad (5,19)$$

ასევე, როცა $d=0$, გვექნება

$$W(abcd; cf) = \frac{\delta_{bf} \delta_{ce}}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}}. \quad (5,20)$$

რაკას კოეფიციენტების მნიშვნელობებს სხვა მომენტების ნულთან ტოლობის შემთხვევაში ადვილად დავეკავშირებთ (5,19) და (5,20) შემთხვევას, თუ გამოვიყენებთ სიმეტრიის თვისებებს.

§ 6. შენახვის კანონები

კვანტურ მექანიკაში, ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში, გვაქვს რამდენიმე შენახვის კანონი, რომელთაც ფუნდამენტური მნიშვნელობა ენიჭებათ.

კლასიკური მექანიკიდან ცნობილია, რომ იზოლირებული მექანიკური სისტემისათვის მთელი რიგი ფუნქციები კონსერვაციებისა და სიჩქარეებისა მოძრაობის ინტეგრალებს წარმოადგენს. მათი რიცხვი $(2n-1)$ -ის ტოლია, სადაც n სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვია. ასევე ცნობილია, რომ მოძრაობის ყველა ინტეგრალს ერთნაირი მნიშვნელობა არა აქვს. განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭებათ ე. წ. შენახვის კანონებს. რომლებიც გამოხატავენ ენერჯის, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის მუდმივობას მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში. დასახელებული შვიდი მოძრაობის ინტეგრალის განსაკუთრებული მნიშვნელობა მექანიკაში შედეგი აღმოჩნდა მათი მჭიდრო კავშირის გამო სივრცისა და დროის ფუნდამენტურ თვისებებთან. სახელდობრ, გამოიკვია, რომ ენერჯის შენახვის კანონი შედეგი ყოფილა დროის ერთგვაროვნების თვისებისა, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის შენახვის კანონები კი შესაბამისად დაკავშირებული ყოფილა სივრცის ერთგვაროვნებისა და იზოტროპულობის თვისებებთან.

კვანტურ მექანიკაშიც იზოლირებული სისტემისათვის სამართლიანია იგივე მუდმივობის კანონები. ოღონდ, იმის გამო, რომ მდგომარეობის კვანტური აღწერა განსხვავდება კლასიკურისაგან, კვანტურში შენახვის კანონებს თავისებური ინტერპრეტაცია გააჩნია. კვანტურ მექანიკაში ზოგი სიდიდე, კლასიკური შემთხვევისაგან განსხვავებით, „სრულად“ არ ინახება. მაგალითად, თუ კლასიკურში ინახება იმპულსის მომენტის ვექტორი, კვანტურში, იმის გამო, რომ მომენტის ოპერატორის პროექციები ერთმანეთთან კომუტატურნი არ არიან, ინახება მხოლოდ ორი სიდიდე: მომენტის სიგრძე და მისი რომელიმე ერთი პროექცია. დანარჩენი ორი პროექცია კი ინახება მხოლოდ კვანტურ-მექანიკური საშუალო მნიშვნელობების აზრით.

გარდა ამისა, კვანტურ მექანიკაში დამატებით გვაქვს ლუწობის შენახვის კანონიც, რომელიც ნაკლებად უნივერსალურია, მაგრამ არანაკლებ ფუნდამენტური, ვიდრე დანარჩენი შენახვის კანონები.

აღსანიშნავია, რომ კვანტური მექანიკის მუდმივობის კანონებიც (ენერჯის, იმპულსისა და მომენტისა) დაკავშირებულია დროისა და სივრცის ერთგვაროვნე-

ბისა ჯა იზოტროპულობის თვისებებთან, ხოლო ლუწობის შენახვის კანონი შედეგი აღმოჩნდა სივრცის ინვერსიის თვისებისა. ეს კი მათემატიკურ ენაზე ნიშნავს, რომ სისტემის ჰამილტონის ოპერატორის აბსიათებს ინვარიანტობის თვისებები დროისა და კოორდინატების გარდაქმნების მიმართ. ამიტომ ჰამილტონიანის თვისებების შესწავლას სხვადასხვა ტიპის გარდაქმნების დროს ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს. ამ მიზნით შემოვიღოთ ოპერატორები, რომლებიც განახორციელებენ კოორდინატთა სხვადასხვა გარდაქმნებს.

განვიხილოთ რადიუსვექტორის $r \rightarrow r'$ გარდაქმნა, სადაც r' რადიუსვექტორის ახალი მნიშვნელობაა. იგი შეიძლება გამოხატავდეს რადიუსვექტორის წანაცვლებას რაიმე p ვექტორზე, შემობრუნებას გარკვეულ კუთხეზე, სარკისებურ არეკვლას და სხვა. ეს გარდაქმნები შეიძლება დავაკავშიროთ გარკვეულ \hat{O} ოპერატორთან [5,6]:

$$r' = \hat{O}r. \quad (6,1)$$

შეიძლება ეიპოვოთ შებრუნებული გარდაქმნაც

$$r = \hat{O}^{-1}r'. \quad (6,2)$$

ახლა გამოვარკვიოთ, როგორ გარდაიქმნება ტალღური $\psi(r)$ ფუნქცია რადიუსვექტორზე \hat{O} ოპერაციის ჩატარების დროს. წინასწარ მივუთითოთ, რომ შესრულებულია აშკარა ტოლობა:

$$\psi'(r') = \psi(r). \quad (6,3)$$

მეორე მხრივ, რაიმე ოპერატორის $\psi(r')$ ფუნქციაზე მოქმედებით უნდა მივიღოთ იგივე აოგუშენტის ახალი ფუნქცია, ამიტომ

$$\psi'(r') = \hat{R}(\hat{O})\psi(r') \quad (6,4)$$

წინა ნორმულისთან შედარება მოგვცემს

$$\hat{R}(\hat{O})\psi(r') = \psi(r) = \psi(\hat{O}^{-1}r'). \quad (6,5)$$

მაშასადამე, როცა კოორდინატები გარდაიქმნებიან \hat{O} ოპერატორით, მაშინ ტალღური ფუნქციებისათვის გვაქვს შემდეგი გარდაქმნის კანონი:

$$\hat{R}(\hat{O})\psi(r) = \psi(\hat{O}^{-1}r). \quad (6,6)$$

როგორც წესი, ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც დაიყვანება დროისა და კოორდინატების წანაცვლებაზე რაიმე λ -პარამეტრით. ამ შემთხვევაში ხელსაყრელია ე. წ. გარდაქმნის გენერატორის შემოღება, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\hat{G} = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{R}(\lambda) \right]_{\lambda=0} \quad (6,7)$$

კვანტური მექანიკის ენაზე „ფიზიკური სიდიდე მაშინ ინახება, როცა მისი შესაბამისი ერმიტული \mathcal{A} ოპერატორი კომუტატორია სისტემის ჰამილტონიანთან

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{H}, \hat{A}] = 0. \quad (6,8)$$

ამასთან იგულისხმება, რომ დინამიკური ფიზიკური სიდიდე, როცა სისტემ: იზო-
ლირებულია, დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული.

გასაზომ ფიზიკურ სიდიდეთა სრული კრებულის შესაბამისი ოპერატორები-
ჰ ფუნქციით განსაზღვრულ კვანტურ მდგომარეობაში, კომუტატორი იქნება
როგორც \hat{H} -თან, ისე ერთმანეთთანაც.

ახლა გამოვარკვეოთ რას ნიშნავს ჰამილტონიანის ინვარიანტობა \hat{R} -ოპერა-
ტორით განხორციელებული კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ და რა ფიზიკური
შინაარსი აქვს ამ ინვარიანტობას. \hat{H} -ოპერატორის ინვარიანტობა \hat{R} -გარდაქმნების
მიმართ ნიშნავს იმას, რომ $\hat{R}(\hat{H}\psi)$ ოპერაცია ეკვივალენტურია $\hat{H}(\hat{R}\psi)$ ოპერაცი-
ისა. ასეთი ოპერაციის დროს შრედინგერის განტოლება ინვარიანტული დარჩება,
მართლაც, \hat{R} -ის შრედინგერის განტოლებაზე მოქმედებით გვექნება:

$$\hat{R}(\hat{H}\psi) = E(\hat{R}\psi) \quad (6,9)$$

თუ გადავსვამთ \hat{H} და \hat{H} -ს, მივიღებთ:

$$\hat{H}\psi' = E\psi'; \quad \psi' = \hat{R}\psi. \quad (6,10)$$

ამგვარად, ჰამილტონიანის ინვარიანტობა \hat{R} გარდაქმნების მიმართ ეკვივალენტუ-
რია მათი კომუტატორობისა, ე. ი.

$$[\hat{H}, \hat{R}] = 0. \quad (6,11)$$

(6,7) განმარტების გათვალისწინებით შეიძლება დაეწეროს:

$$[\hat{H}, \hat{I}] = 0. \quad (6,12)$$

ახლა კი განვიხილოთ შენახვის კანონები ცალ-ცალკე და დავაკავშიროთ ისი-
ნი სივრცისა და დროის თვისებებთან.

ენერგიის შენახვის კანონი. ენერგიის შენახვის კანონი ერთ-ერთი ძირითადი
კანონია ბუნებისა, იგი სამართლიანია როგორც მაკროსისტემებისათვის, ისე მიკ-
როსამყაროსათვისაც. შენახვის ამ კანონის განსაკუთრებულ მნიშვნელობას აპირო-
ბებს ის გარემოება, რომ ენერგია როგორც ფიზიკური სიდიდე, სხვა ფიზიკურ
სიდიდეებთან შედარებით, სისტემის უფრო ზოგად და ფუნდამენტურ თვისებებს
შოიკავს. თვით შრედინგერის განტოლება, რომელიც მიკროსამყაროს მობრბობის
განტოლებაა, წარმოადგენს ენერგიის ოპერატორის საკუთარი ფუნქციების გან-
ტოლებას.

როგორც ვიცით, თუ კვანტური სისტემა იზოლირებულია, ან მასზე მოქმე-
დებს დროის მიხედვით უცვლელი გარეშე ველები, მაშინ ჰამილტონის ოპერატო-
რი დროზე ცხადად დამოკიდებული არ არის, ე. ი. $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$.

დროს ახსიათებს ერთგვაროვნების თვისება, ამიტომ სისტემის წანაცვლება-
დროში ჰამილტონიანს არ შეცვლის, მაშინ, თანახმად (6,8) ტოლობისა, გვექნება:

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = 0, \quad (6,13)$$

რაც შეესაბამება სრული ენერგიის შენახვის კანონს; $E = \text{const.}$

ახლა შემოვიღოთ დროში წანაცვლების ოპერატორი $\hat{T}(\tau)$, რომელსაც აქვს თვისება $\hat{T}(\tau)t = t + \tau$, სადაც დროის მონაკვეთია. ცხადია, (6,6) ფორმულის ანალოგიით, რომ

$$\hat{T}(\tau)\psi(t) = \psi(t - \tau). \quad (6,14)$$

გარდაქმნის გენერატორის მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ (6,7) ფორმულას. გვექნება:

$$\Gamma_\tau(t)\psi(t) = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{T}(\tau)\psi(t) \right]_{\tau=0} = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \psi(t - \tau) \right]_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t} \psi(t); \quad (6,15)$$

მაშასადამე, გენერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{\Gamma}_\tau(t) = -\frac{\partial}{\partial t}. \quad (6,16)$$

ენერგიის შენახვის კანონი შედეგია გენერატორის კომუტაციისა ჰამილტონიანთან. ოპერატორს

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = i\hbar \hat{\Gamma}_\tau(t) \quad (6,17)$$

ენერგიის ოპერატორს უწოდებენ. იგი საშუალებას გვაძლევს შრედინგერის $\hat{H}\psi = E\psi$ სტაციონარული განტოლებიდან ფორმალურად გადავიღოთ არასტაციონარულ განტოლებაზე.

იმპულსის შენახვის კანონი. განვიხილოთ იზოლირებული სისტემა. მოვახდინოთ ამ სისტემის როგორც მყარი სხეულის წანაცვლება რაიმე მუდმივ ρ ვექტორზე. შესაბამისად შეიცვლება ტალღური ფუნქციაც. მეტი სიცხადის მიზნით განვიხილოთ ერთი იზოლირებული ნაწილაკი. მაშინ ტალღური ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი გარდაქმნის კანონი:

$$\hat{R}(\rho)\psi(r) = \psi(r - \rho); \quad (6,18)$$

მარჯვენა მხარე გაუშალოთ მწკრივად ρ -ს ხარისხების მიხედვით. გვექნება:

$$\begin{aligned} \hat{R}(\rho)\psi(r) &= \psi(r) - (\rho \nabla)\psi + \frac{1}{2!}(\rho \nabla)^2\psi + \dots = \\ &= \left[1 - (\rho \nabla) + \frac{1}{2}(\rho \nabla)^2 - \dots \right] \psi(r), \end{aligned} \quad (6,19)$$

რომელიც ასეც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$\hat{R}(\rho)\psi(r) = e^{-(\rho \nabla)}\psi(r); \quad (6,20)$$

მაშასადამე, ρ ვექტორზე სისტემის წანაცვლების ოპერატორს ექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$\hat{R}(\rho) = e^{-(\rho \nabla)}. \quad (6,21)$$

სიერცეში წანაცვლების გენერატორისათვის კი, თანახმად (6,7) ფორმულია, გვექნება:

$$\hat{\Gamma}_\rho = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} e^{-(\rho \nabla)} \right]_{\rho=0} = -\nabla. \quad (6,22)$$

რადგან იმპულსის ოპერატორი ტოლია $\hat{p} = -i\hbar \nabla$, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\hat{\Gamma}_p = -\frac{i}{\hbar} \hat{p} \cdot \hat{R}(p) = e^{-\frac{i}{\hbar}(p \cdot \hat{p})} = e^{(p \cdot \hat{\Gamma}_p)} \quad (6,23)$$

$\hat{R}(p)$ ოპერატორის ტრანსლაციის ოპერატორს უწოდებენ. ცხადია, იგი უნიტარული ოპერატორია. რაც შეეხება $\hat{\Gamma}_p$ -ოპერატორს, იგი ანტიერმიტულია:

$$\hat{\Gamma}_p^+ = -\hat{\Gamma}_p.$$

შენიშნოთ, რომ (6,23) ფორმულის თანახმად, სისტემის უსასრულოდ მცირე წანაცვლება ε ვექტორზე აიწერება ოპერატორით:

$$\hat{R}(\varepsilon) = 1 - \frac{i}{\hbar} (\varepsilon \cdot \hat{p}) = 1 + (\varepsilon \cdot \hat{\Gamma}_\varepsilon); \quad (6,24)$$

ამასთან ნათელია, რომ ნებისმიერი სასრული წანაცვლება შეგვიძლია განვახორციელოთ უსასრულოდ მცირე წანაცვლებების თანმიმდევრული გამოყენებით.

თავისუფალი ნაწილაკის ჰამილტონიანი შეიცავს მხოლოდ კინეტიკური ენერჯიის ოპერატორს, ამიტომ იგი კომუტატური იქნება $\hat{R}(p)$ ოპერატორთან. ე. ი. სივრცის ერთგვაროვნების გამო ნაწილაკის ჰამილტონიანი არ შეიცვლება p -ვექტორზე წანაცვლებისას, ეს კი ეკვივალენტურია თავისუფალი ნაწილაკის იმპულსის შენახვის კანონისა. როცა გვაქვს იზოლირებული სისტემა, მაშინ (6,23) ფორმულაში ნაწილაკის იმპულსი სისტემის იმპულსით შეიცვლება. რამდენადაც იზოლირებული სისტემის i და k ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია დამოკიდებულია $r_i - r_k$ ფარდობით მანძილზე, ამიტომ პოტენციალური ენერჯია ინვარიანტული იქნება ტრანსლაციის ოპერაციის მიმართ:

$$\hat{R}(p) U(r_i - r_k) = U(|r_i - p| - |r_k - p|) = U(r_i - r_k).$$

მაშასადამე, ჰამილტონიანიც ინვარიანტული იქნება $\hat{R}(p)$ ტრანსლაციის მიმართ, რაც სრული იმპულსის შენახვის ეკვივალენტურია.

იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი. ახლა ვიპოვოთ ოპერატორი, რომელიც გამოხატავს ნაწილაკთა სისტემის მობრუნებას რაიმე კუთხეზე და ვაჩვენოთ, რომ სივრცის იზოტროპულობის გამო ასეთი გარდაქმნის მიმართ სისტემის ჰამილტონიანი ინვარიანტულია. სისტემა, როგორც მყარი სხეული, მოვებრუნოთ უსასრულოდ მცირე $\delta\varphi$ კუთხეზე. ამასთან, $\delta\varphi$ ვექტორის სიდიდე ტოლია მობრუნების კუთხისა, ხოლო მიმართულებით მობრუნების ღერძს ემთხვევა (ბურღის წესის დაცვით). თუ ბრუნვის ღერძის ორტს აღვნიშნავთ n -ით, მაშინ $\delta\varphi = \delta\varphi \cdot n$ ყოველი წერტილის რადიუსევექტორი შეიცვლება კანონით:

$$r' = r + [\delta\varphi \times r]; \quad (6,25)$$

მაშასადამე,

$$\hat{R}(\delta\varphi) \psi(r) = \psi(r - [\delta\varphi \times n]). \quad (6,26)$$

მარჯვენა მხარე გავშალოთ მწკრივად და შემოვიასახლოვოთ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდით. შედეგად მივიღებთ:

$$\hat{R}(\delta\varphi) \psi(r) = [1 - (\delta\varphi | r \times \nabla) + \dots +] \psi, \quad (6,27)$$

საიდანაც გვექნება:

$$\hat{R}(\partial\varphi) = 1 - \partial\varphi(n | r \times \nabla |). \quad (6,28)$$

ან, თუ შემოვიღებთ იმპულსის მომენტის ოპერატორს $\hat{L} = [r \quad p]$, მივიღებთ:

$$\hat{R}(\partial\varphi) = 1 - \frac{i}{\hbar} (n | \hat{L} |) \partial\varphi. \quad (6,29)$$

იგივე ოპერატორი n მიმართულების ლერძის მიმართ სასრულ φ კუთხეზე მობრუნებისათვის მიიღებს სახეს

$$\hat{R}(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} (n | \hat{L} |) \varphi}; \quad (6,30)$$

გენერატორისათვის კი გვექნება ფორმულა

$$\hat{I}_\varphi = -\frac{i}{\hbar} (n, \hat{L}). \quad (6,31)$$

აღენიშნოთ, რომ \hat{R}_φ უნიტარულია, \hat{I}_φ კი — ანტიერმიტული.

სივრცის იზოტროპულობის თვისების გამო იზოლირებული სისტემის ჰამილტონიანი ინვარიანტული იქნება რაიმე ლერძის ირგვლივ სისტემის შემობრუნებისას, რაც ეკვივალენტურია სისტემის იმპულსის მომენტის შენახვისა. ასევე ნათელია, რომ მომენტი შეინახება ნებისმიერ ცენტრალურ ველში. ამასთან, უნდა გვახსოვდეს, რომ რამდენადაც მომენტი აქვს კომუტაციის შემდეგი თვისებები [3]:

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma, \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_\alpha] = 0, \quad (6,32)$$

ამიტომ ერთდროულად შეინახება მხოლოდ \hat{L}^2 და ერთ-ერთი პროექცია, მაგალითად \hat{L}_z . მაშასადამე, კლასიკურისაგან განსხვავებით, კვანტურ მექანიკაში მომენტის ვექტორი კი არ ინახება, არამედ მხოლოდ მისი სიგრძე და ერთი პროექცია. აქედან გამომდინარე, კვანტურ მექანიკაში მომენტის შენახვის კანონი არ გამოირჩევა მომენტის პრეცესიას \hat{L}_z -ის ირგვლივ.

ლუწობის შენახვის კანონი. ლუწობის შენახვის კანონი წმინდა კვანტურ-მექანიკური კანონია. მას ანალოგი არა აქვს კლასიკურ მექანიკაში. შენახვის ეს კანონი პირველად აღმოაჩინა ე. ვიენერმა. ლუწობის შენახვის კანონიც დაკავშირებულია სივრცის თვისებებთან, კერძოდ, სივრცის ინვერსიის თვისებასთან. თუ ზემოთ განხილული ტრანსლაციისა და მობრუნების ოპერატორები უწყვეტ გარდაქმნებს გამოხატავენ, სამაგიეროდ ინვერსიის გარდაქმნა დისკრეტულია და იგი აღნიშნავს ყველა კოორდინატის ნიშნის ერთდროულად შეცვლას საწინააღმდეგოთი, ე. ი. ოპერაციას:

$$r \rightarrow -r. \quad (6,33)$$

თუ ინვერსიის ოპერატორს აღენიშნავთ \hat{I} -თი, მაშინ

$$\hat{I}r = -r. \quad (6,34)$$

ინვერსიის დროს მარცხენა კოორდინატთა სისტემა მარჯვენაში გადავა და პირიქით. რადგან შრედინგერის განტოლება ინვარიანტულია მარცხენა და მარჯვენა სისტემების მიმართ, ამიტომ $\hat{H} \hat{I} = \hat{I} \hat{H}$, რაც ნიშნავს, რომ ინვერსიის ოპერა-

ტორის საკუთარი მნიშვნელობა ინახება $I = \text{const.}$ ავიღოთ შრედინგერის განტოლების ამონახსნი და მასზე ჩავატაროთ ინვერსია. განმარტებით

$$\hat{I}\psi(r) = \psi(-r), \quad (6,35)$$

ამიტომ, ცხადია,

$$\hat{I}^2 \psi(r) = \hat{I} \psi(-r) = \psi(r); \quad (6,36)$$

თუ დავწერთ ინვერსიას ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას

$$\hat{I}\psi(r) = I\psi(r), \quad (6,37)$$

მაშინ ნათელი იქნება, რომ $I^2 = 1$ და $I = \pm 1$, მაშასადამე,

$$\hat{I}\psi(r) = \pm \psi(r). \quad (6,38)$$

აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: კვანტურ მექანიკაში იზოლირებულ სისტემის ტალღური ფუნქცია ან კენტია, ან ლუწი; ამასთან, ლუწობა მთელი დროის განმავლობაში ინახება; ამგვარად, იზოლირებული სისტემის ჰამილტონიანის ინვარიანტობა ინვერსიის ოპერაციის მიმართ აპირობებს ლუწობის შენახვის კანონს.

ჩვენ მიერ ზემოთ განხილულ ნერგის, იმპულსისა და მომენტის შენახვის კანონებს უნივერსალური ხასიათი აქვთ. რაც შეეხება ლუწობის შენახვის კანონს, იგი დამოკიდებული აღმოჩნდა ურთიერთქმედების ხასიათზე. ასე მაგალითად, ელექტრომაგნიტური და ბირთვული ურთიერთქმედების დროს ლუწობის შენახვის კანონი დაცულია. რაც შეეხება სუსტ ურთიერთქმედებებს, როგორცაა ბირთვული β -დაშლა, μ -და π -მეზონების, κ -მეზონებისა და ჰიპერონების დაშლა, ლუწობის შენახვის კანონი ამ შემთხვევაში დარღვეულია. 1956 წელს ლომ და იანგმა იწინასწარმეტყველეს, რომ აღნიშნულ პროცესებში მარცხენა-მარჯვენა სიმეტრიას შესაძლოა ადგილი არ ჰქონოდა. მართლაც, სულ მალე ვუმ ექსპერიმენტით დაამტკიცა, რომ ბირთვების β -დაშლის დროს ლუწობის შენახვის კანონი დარღვეულია¹. ექსპერიმენტის იდეა საკმარისად მარტივია. ავიღოთ β -აქტიური ნივთიერება და ვიმოქმედოთ მასზე მაგნიტური ველით. შედეგად მოხდება ბირთვების პოლარიზაცია, ე. ი. ბირთვების მომენტები დალაგდება მაგნიტური ველის დაძაბულობის გასწვრივ. დავაკვირდეთ β -დაშლისას მიღებულ ელექტრონის იმპულსს მაგნიტური ველის მიმართულების მიმართ რაიმე π -კუთხეზე. ახლა მოვხდინოთ „ექსპერიმენტის“ სარკისებური ინვერსია. ექსპერიმენტში ორი გამოყოფილი მიმართულება გვაქვს: ბირთვის მომენტი J და ელექტრონის იმპულსი P_e .

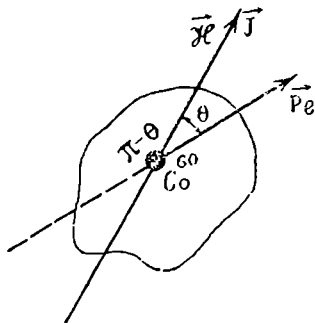
რამდენადაც არეკელისას J -არის აქსიალური ვექტორი, იგი ადგილზე დარჩება, ხოლო P_e პოლარული ვექტორი მიმართულებას შეიცვლის საწინააღმდეგოთი, თუ ლუწობის კანონი სამართლიანია, ამოტყორცნილ ელექტრონთა რიცხვი θ და $\pi - \theta$ მიმართულებით ერთი და იგივე უნდა იყოს.

აღმოჩნდა, რომ ამ ორი მიმართულებით ელექტრონთა რიცხვი სხვადასხვაა და, მაშასადამე, ლუწობის შენახვის კანონი β -დაშლის დროს დარღვეულია. ამ ექსპერიმენტში მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ განხილული ვექტორებიდან ერთ-

¹ C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, R. P. Hudson, Phys. Rev., 105, 1413, 1957. ამ ნაშრომში შესწავლილი იყო Co^{60} დაპოლარებული ბირთვების β -დაშლა.

თი აქსიალურია, მეორე კი—პოლარული. ორივე ვექტორი რომ პოლარული აგველო, არეკვლისას ორივე ნიშანს შეიცვლიდა და ყველაფერი დაიყვანებოდა სისტემის მობრუნებაზე π -კუთხეზე, რაც სისტემის იზოტროპულობის თვისების შესწავლის ეკვივალენტური იქნებოდა და ჩვენთვის საინტერესო ინვერსიის თვისებებზე ვეღარაფერს ვიტყოდით. ორივე აქსიალური ვექტორის შერჩევაც არაფერს მოგვცემდა, რადგან არეკვლისას სურათი ძველად უცვლელი დარჩებოდა.

ლუწობის შენახვის კანონის დარღვევის აღმოჩენა უდიდესი მოვლენა იყო, რომელმაც დიდი გავლენა იქონია სივრცისა და დროის თვისებების შემდგომ შესწავლაზე. წარმოვიდგინოთ, რომ ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედების დროს ლუწობის კანონი დაირღვა, მაშინ ჩვენს ორეულს ბრტყელ სარკეში თუ „მისასალმებლად“ მარჯვენა ხელს გავუწოდებდით, იგი მარჯვენასვე გამოგვიწოდებდა. ასეთი საოცარი და ჩვენთვის უჩვეულო მოვლენის გამო, ცხადია, ვქვეყნებ დადგებოდა სივრცის ფუნდამენტურ თვისებებზე დამყარებული შეხედულებების სამართლიანობის საკითხი. სწორედ ასეთი სიტუაცია შეიქმნა, როცა მიკროსამყაროში ზოგიერთი ურთიერთქმედების დროს ლუწობის შენახვის კანონი დარღვეული აღმოჩნდა.



ნახ. 1

მოდრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში

კლასიკური მექანიკის მსგავსად, კვანტურ მექანიკაშიც ცენტრალური სიმეტრიის ველის ამოცანა ერთ-ერთი ფუნდამენტური ამოცანაა. ცენტრალური სიმეტრიის პოტენციალური ენერგია ნაწილაკთა შორის გავლებული რადიუსექტორის მხოლოდ სიდიდეზეა დამოკიდებული. მაშასადამე, ერთსა და იმავე მანძილზე ველს ყველა მიმართულებით ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს. ცენტრალური სიმეტრიის ველში ადგილი აქვს მომენტის შენახვის კანონს, ამიტომ მდგომარეობის დასახასიათებლად ერთ-ერთ სიდიდედ შეგვიძლია შევარჩიოთ მომენტის კვადრატი და მისი ერთი პროექცია. ამასთან, მომენტთან დაკავშირებული კინემატიკური სიდიდეები ერთნაირად განისაზღვრება ცენტრალური ველის ყველა ამოცანისათვის. და იგი შრედინგერის დინამიკური განტოლების ამონხნის გარეშეც შეგვიძლია ვიპოვოთ.

ცენტრალური ველის ამოცანა იმდენადაა მნიშვნელოვანი, რამდენადაც დღეისათვის ცნობილი პოტენციალები როგორც ატომის, ისევე ბირთვის ფიზიკაში მთლიანად თუ არა, ძირითადად მინც ცენტრალურ ხასიათს ატარებს.

§ 7. შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლება

ცენტრალური სიმეტრიის ველი ურთიერთქმედების მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევას წარმოადგენს. ამ დროს პოტენციალური ენერგია ნაწილაკებს შორის გავლებული რადიუსექტორის მხოლოდ აბსოლუტურ სიდიდეზეა დამოკიდებული. თუ ორი m_1 და m_2 მასების მქონე ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია ცენტრალურია, მაშინ შესაძლებელია ამ ამოცანის ერთი ნაწილაკის ამოცანაზე დაყვანა, ჩვენ შეგვიძლია ვივულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს ერთ ფიქტიურ ნაწილაკთან, რომლის მასაა μ . სისტემის დაყვანილი მასა:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7,1)$$

და რომელიც მოძრაობს პოტენციალური ენერგიით განსაზღვრულ ველში. ერთი ნაწილაკის მოძრაობაზე გადასვლა ხდება იაკობის კოორდინატების შემოღებით [7]:

$$r = r_1 - r_2, \quad (7,2)$$

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2};$$

ამასთან, r ფარდობითი მოძრაობის შესაბამის რადიუსვექტორია, R -კი—სიმძიმის ცენტრისა. შევნიშნოთ, რომ იაკობის კოორდინატები ორთოგონალური კოორდინატებია და ცვლადთა გარდაქმნის იაკობიანი ერთის ტოლია

$$\frac{D(r, \mathbf{R})}{D(r_1, r_2)} = 1. \quad (7,3)$$

როგორც ვიცით, ორი ნაწილაკის სისტემის ტალღური ფუნქცია სტაციონარულ მდგომარეობაში განისაზღვრება ფორმულით

$$\Psi(r, \mathbf{R}) = \varphi(\mathbf{R}) \psi(r), \quad (7,4)$$

სადაც

$$\varphi(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \quad (7,5)$$

აღწერს სიმძიმის ცენტრის თავისუფალ მოძრაობას \mathbf{hP} იმპულსით. შევნიშნოთ, რომ შემდგომში, ხელსაყრელობის მიზნით იმპულსების ნაცვლად ვისარგებლებთ ტალღური ვექტორებით, რომელთაც \mathbf{p} , \mathbf{k} , \mathbf{q} და \mathbf{a} . შ. აღვნიშნავთ, იმპულსებზე გადასასვლელად კი, როგორც ვიცით, საკმარისია ამ სიდიდეების \mathbf{h} -ზე გამრავლება. (7,5) ფორმულაში $\psi(r)$ აღწერს სისტემის ფარდობით მოძრაობას. იგი განისაზღვრება შრედინგერის განტოლებიდან

$$\Delta\psi(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] \psi(r) = 0. \quad (7,6)$$

ამ განტოლებაში Δ -არის ლაპლასიანი ფარდობითი კოორდინატების მიმართ. ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობისას ფარდობითი მოძრაობის ტალღური ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\psi(r) = R_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (7,7)$$

სადაც $R_l(r)$ მხოლოდ r -ის ფუნქციაა, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ კი წარმოადგენს იმპულსის მონენტის კვადრატისა და მისი z -მდგენელის საერთო საკუთარ ფუნქციას. l და m წარმოადგენენ რადიუს-ვექტორის პოლარ-კუთხეებს z -ღერძის მიმართ. შემდგომში იმის მისათითებლად, თუ რომელ ვექტორს ეკუთვნის ეს კუთხეები, l და m -ს ნაცვლად არაგუმენტად ჩავწერთ ვექტორის ორტს. ასე მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში $Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\bar{r})$, სადაც $\bar{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. ამის შემდეგ ერთეულოვან ვექტორებს აღვნიშნავთ სიდიდეებით, რომელთაც ექნებათ თავზე ხაზი.

რადიალური ფუნქცია აკმაყოფილებს შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლებას

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R_l(r) = 0. \quad (7,8)$$

რადგან $Y_{lm}(\bar{r})$ ფუნქცია ნებისმიერი ცენტრალური ველის ამოცანისათვის ერთი და იგივეა, ამიტომ მნიშვნელოვანია მხოლოდ (7,8) განტოლების შესწავლა. რადიალური ფუნქციების განტოლება პარამეტრების სახით შეიცავს E ენერჯიას და l მონენტს, ამიტომ $R_l(r)$ ფუნქცია, როგორც წესი, პარამეტრების სახით დამოკიდებული იქნება E -ზე და l -ზე. განტოლება არ შეიცავს მაგნიტურ კვანტურ m -რიცხვს, ამიტომ ცხადია, ნებისმიერ ცენტრალურ ველში ადგილი ექნება m -გადავარებას.

ხფერული ფუნქციები ორთო-ნორმირებული ფუნქციებია

$$\int Y_{l'm'}^*(r) Y_{lm}(r) d\Omega_r = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (7,9)$$

ამიტომ რადიალური ფუნქციებისათვის შეიძლება ავიღოთ შემდეგი ნორმირება:

$$\int_0^{\infty} |R_{lE}(r)|^2 r^2 dr = 1, \quad (7,10)$$

როცა სპექტრი დისკრეტულია ($E < 0$ შემთხვევა). და, მაგალითად,

$$\int_0^{\infty} R_{lE}^*(r) R_{lE'}(r) r^2 dr = \delta(E - E'), \quad (7,11)$$

როცა საქმე გვაქვს უწყვეტ სპექტრთან.

რადიალური ფუნქციების განტოლება შეგვიძლია გავამარტივოთ და მასში პირველი რიგის წარმოებული ამოვადლოთ. ამისათვის საკმარისია შემოვიღოთ ახალი დამხმარე ფუნქცია $\chi_l(r)$, რომელსაც შემდეგნაირად განვმარტავთ:

$$\chi_l(r) = r R_l(r), \quad (7,12)$$

მაშინ (7,8) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_l = 0 \quad (7,13)$$

$\chi_l(r)$ ფუნქციის ნორმირების პირობისათვის გვექნება ფორმულა:

$$\int_0^{\infty} |\chi_l(r)|^2 dr = 1, \quad (E < 0) \quad (7,14)$$

და

$$\int_0^{\infty} \chi_{lE}^*(r) \chi_{lE'}(r) dr = \delta(E - E'), \quad (E > 0) \quad (7,15)$$

ამასთან, უწყვეტი სპექტრის დროს ერთ რომელიმე სიდიდეზე ნორმირებული ფუნქციებიდან მარტივად შეგვიძლია გადავიღეთ სხვა სკალაზე ნორმირებულ ფუნქციებზე.

რადიალური ფუნქციების (7,13) განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთგანზომილებიანი ბოძრაობის განტოლება ეფექტური პოტენციალური ენერჯით:

$$u_l(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \quad (7,16)$$

ოდონდ მოძრაობა შემოსაზღვრულია მხოლოდ $0 \leq r \leq \infty$ არით.

რადიალური ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა. ფიზიკაში ძალიან ხშირად გვხვდება ისეთი პოტენციალური ენერჯიები, რომლებიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 V(r) = 0, \quad (7,17)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) = 0. \quad (7,18)$$

განვიხილოთ პოტენციალური ენერგიები, რომლებიც ამ ორ პირობას აკმაყოფილებენ, და შევიწყალოთ რადიალური ტალღური ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა დიდი და მცირე მანძილებისათვის. ჯერ განვიხილოთ ასიმპტოტური ყოფაქცევა დიდი r -ებისათვის. ცხადია, ასიმპტოტური ყოფაქცევა დამოკიდებული იქნება სრული ენერგიის ნიშანზე. როცა სრული ენერგია უარყოფითია, ე. ი. როცა $E < 0$, დიდი r -ებისათვის, თანახმად (7,18) პირობისა, შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[-\mathcal{E} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_l = 0, \quad (7,19)$$

სადაც $\mathcal{E} = -|E|$. ეს განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [-\alpha^2 r^2 - l(l+1)] \chi_l = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\mu \mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad (7,20)$$

რომელიც წარმოადგენს ბესელის განზოგადებულ განტოლებას პარამეტრებით $a=0$, $b=-l(l+1)$, $c=-\alpha^2$ და $m=2$. ამონახსნი, რომელიც უსასრულობაში სწრაფად ისპობა, იქნება მაკდონალდის სფერული ფუნქცია

$$R_l(r) = A_l k_l(c, r). \quad (7,21)$$

მეორე კერძო ამონახსნი, რომელიც (7,21)-თან ერთად ზოგად ამონახსნს შეადგენს. არ გამოდგება, რადგან უსასრულობაში განშლადია. თუ გავიხსენებთ $k_l(\alpha r)$ ფუნქციის ასიმპტოტურ მნიშვნელობას, შეგვიძლია დავწეროთ¹

$$R_l(r) = A \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}. \quad (\alpha r \gg 1) \quad (7,22)$$

როცა $E > 0$, მაშინ რადიალური ფუნქციების განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [k^2 r^2 - l(l+1)] \chi_l = 0, \quad (kr \gg 1) \quad (7,23)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \quad (7,24)$$

რადგან, ამ შემთხვევაში, $c=k^2$, $m=2$, $b=-l(l+1)$, ამიტომ ზოგადი ამონახსნი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$R_l(r) = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr), \quad (7,25)$$

სადაც $j_l(kr)$ ბესელის სფერული ფუნქციაა, $n_l(kr)$ -კი—ნეიმანის. a_l და b_l ნებისმიერი მუდმივები ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ (7,25) ამონახსნი დაყვანილ იქნეს პანკელის პირველი და მეორე გვარის სფერულ ფუნქციებზე:

$$R_l^{(+)}(r) = B_l^{(+)} h_l^{(1)}(kr), \quad (7,26)$$

$$R_l^{(-)}(r) = B_l^{(-)} h_l^{(2)}(kr). \quad (7,27)$$

¹ ასეთი ასიმპტოტური ამონახსნი შეესაბამება პოტენციალს, რომელიც $r \rightarrow \infty$ დროს ნულიაკენ პიისწრაფის როგორც $r^{-\gamma}$, სადაც $\gamma < 2$.

რადგან პანკელის ფუნქციების ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი არგუმენტებისათვის განისაზღვრება ფორმულით:

$$h_1^{(1)}(kr) = h_1^{(2)*}(kr) = \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{kr}, \quad (7,28)$$

ამიტომ, თანახმად (7,26) და (7,27) ფორმულებისა, გვექნება შემდეგი ასიმპტოტური ფუნქციები:

$$R_1^{(+)}(r) = (-i)^l B_1^{(+)} \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (kr \rightarrow \infty) \quad (7,29)$$

$$R_1^{(-)}(r) = i^l B_1^{(-)} \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad (kr \rightarrow \infty) \quad (7,30)$$

ნათელია, რომ $R_1^{(+)}(r)$ შეესაბამება განშლად სფერულ ტალღას, $R_1^{(-)}(r)$ კი — კრებადს. დადებითი ენერგიის შესაბამისი ტალღური ფუნქციები გამოიყენება გაფანტვის თეორიაში. სადაც მნიშვნელოვანია, რომ რადიალურ ტალღურ ფუნქციას უსასრულობაში ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$R_{lh}(r) = \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right). \quad (7,31)$$

აქ δ_l გარკვეული მუდმივია, რომელიც გვიჩვენებს, თუ ურთიერთქმედების შედეგად რამდენად შეიცვალა თავისუფალი ნაწილაკის ტალღური ფუნქციის

$$\frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (kr \gg 1) \quad (7,32)$$

ფაზა.

მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ამ მიზნით (7,25) ამონახსნში საკმარისია a_l და b_l ნებისმიერი მუდმივების შემდეგნაირი შერჩევა:

$$R_l(r) = \cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr). \quad (7,33)$$

მართლაც, რადგან

$$j_l(kr) = \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right), \quad n_l(kr) = -\frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \quad kr \gg 1 \quad (7,34)$$

(7,33)-ის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დაემთხვევა (7,31) გამოსახულებას.

ახლა განვიხილოთ მცირე r -ების შემთხვევა. როცა $r \rightarrow 0$, მაშინ (7,18) პირობის თანახმად განტოლებაში შეგვიძლია გადავადლოთ E და V შედარებით $l(l+1)r^{-2}$ წვერთან; გვექნება

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} - l(l+1) \chi_l = 0; \quad (7,35)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამოხსნა გამოიხატება ფორმულით:

$$\chi_l(r) = A r^{l+1} + \frac{B}{r^l}, \quad (7,36)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ სათავეში სასრული ამოხსნა ასეთი იქნება:

$$R_l(r) = \text{const } r^l \quad (7,37)$$

ამის გამო ბუნებრივია, რომ შრედინგერის განტოლების ამოხსნა $F < 0$ დროს ნებისმიერი მანძილებისათვის ვეძებთ ასეთი სახით:

$$R_l(r) = r^l f(r) e^{-\alpha r}, \quad (7,38)$$

სადაც $f(r)$ უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს: $f(0)$ უნდა იყოს მუდმივი, ხოლო როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ $f(r)e^{-\alpha r}$ ნულისაკენ მიისწრაფოდეს საკმარისად სწრაფად; მაშასადამე, $f(r)$ ფუნქცია პოლინომს უნდა წარმოადგენდეს.

როცა საქმე გვაქვს უწყვეტ სპექტრთან ($E > 0$), შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლების ამოხსნა უნდა ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$I_l^{\pm}(r) = r^l f(r) e^{\pm ikr}. \quad (7,39)$$

ამასთან, $f(r)$ ფუნქცია სათავეში უნდა იყოს მუდმივი.

§ 8. უწყვეტი სპექტრის ტალღური ფუნქციების ნორმირება

როგორც ვნახეთ, ცენტრალური სიმეტრიის ველში, ფაქტიურად, ერთგანზომილებიან მოძრაობასთან გვაქვს საქმე. ამ შემთხვევაში მარტივად შეიძლება შევისწავლოთ უწყვეტი სპექტრის ფუნქციების ნორმირების საკითხი.

ვამოვარკვეოთ როგორი უნდა იყოს რადიალური ფუნქცია $R_{lk}(r)$, რომ ადგილი ჰქონდეს ნორმირების შემდეგ პირობას:

$$\int_0^{\infty} R_{lk}^*(r) R_{l'k'}(r) r^2 dr = \frac{\delta(k-k')}{kk'}. \quad (8,1)$$

დაწვეროთ შრედინგერის რადიალური ფუნქციების (7,13) განტოლება ენერჯის ორი სხვადასხვა E და E' მნიშვნელობისათვის:

$$\frac{d^2 \chi_{lk}}{dr^2} + \left[k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_{lk}(r) = 0, \quad (8,2)$$

$$\frac{d^2 \chi_{l'k'}}{dr^2} + \left[k'^2 - U(r) - \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right] \chi_{l'k'}(r) = 0, \quad (8,3)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad k'^2 = \frac{2\mu E'}{\hbar^2}, \quad U(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}. \quad (8,4)$$

გადავამრავლოთ (8,2) განტოლება $\chi_{l'k'}^*(r)$, ხოლო (8,3) — $\chi_{lk}(r)$ და ერთმანეთს გამოვავლოთ. შემდეგ ავიღოთ ინტეგრალი 0-დან r -მდე:

$$\int_0^r \left(\chi_{l'k'}^* \frac{d^2 \chi_{lk}}{dr^2} - \chi_{lk} \frac{d^2 \chi_{l'k'}^*}{dr^2} \right) dr + (k^2 - k'^2) \int_0^r \chi_{lk}(r) \chi_{l'k'}^*(r) dr = 0. \quad (8,5)$$

პირველ წევრში ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ:

$$\left(\chi_{lk} \frac{d\chi_{l'k'}^*}{dr} - \chi_{l'k'}^* \frac{d\chi_{lk}}{dr} \right) \Big|_0^r = (k^2 - k'^2) \int_0^r \chi_{lk}(r) \chi_{l'k'}^*(r) dr. \quad (8,6)$$

ახლა შევისწავლოთ გამოსახულება

$$B(k, k'; r) = \chi_{lk}(r) \frac{d\chi_{l'k'}^*(r)}{dr} - \chi_{l'k'}^*(r) \frac{d\chi_{lk}(r)}{dr} \quad (8,7)$$

$r = \infty$ და $r = 0$ წერტილებზე.

დიდი r -ებისათვის $\chi_{ih}(r)$ ფუნქციისათვის ვისარგებლოთ (7,31) ასიმპტოტურ-ბი გამოსახულებით, რომელიც გავამრავლოთ რაიმე C -მულტიპლიკაციით

$$\chi_{ih}(r) = \frac{C}{k} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) \right); \quad (8,8)$$

მაშინ, რადგან ჩვენს მიზანს არ წარმოადგენს რადიალური ფუნქციების ორთოგონალობის საკითხის გარკვევა სხვადასხვა k -თვის, ამიტომ ვივულისებთ, რომ k და k' რაენდ ახლოს არიან ერთმანეთთან და დავუშვებთ $\delta_l(k) = \delta_l(k')$, მაშინ

$$B(k, k'; \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \cos \left(k'r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) - \frac{1}{k'} \sin \left(k'r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \right] C^2. \quad (8,9)$$

სინუსები და კოსინუსები ოსცილირებადი ფუნქციებია, ამიტომ როცა $r \rightarrow \infty$, ისინი საშუალოდ ისპობიან, გარდა $k = k'$ წერტილისა. ამგვარად, $k = k'$ -ისთვის მივიღებთ:

$$B(k, k'; \infty) \simeq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin [(k' - k)r]}{(k' - k)} (k'^2 - k^2) \frac{C^2}{2k^2}; \quad (8,10)$$

თუ გავიხსენებთ ღირაკის დელტა-ფუნქციის ერთ-ერთ განსაზღვრას

$$\delta(k - k') = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin [(k' - k)r]}{\pi(k' - k)}, \quad (8,11)$$

მაშინ მივიღებთ

$$B(k, k'; \infty) = \frac{\pi C^2}{2k^2} \delta(k - k') (k'^2 - k^2). \quad (8,12)$$

ხოლო რაც შეეხება $B(k, k'; 0)$ გამოსახულებას, იგი ნულის ტოლია, რადგანდაც სათავეში რეგულარულ ამოხსნას წინა პარაგრაფში განხილული პოტენციალთა კლასისათვის ექნება r^{l+1} სახე. ამგვარად, თუ (8,6) გამოსახულებაში გადავალთ ზღვარზე როცა $r \rightarrow \infty$, გვექნება

$$\frac{2}{\pi C^2} \int_0^\infty \chi_{ik'}^*(r) \chi_{ih}(r) dr = \frac{\delta(k - k')}{kk'}; \quad (8,13)$$

მაშასადამე, თუ გვინდა რადიალური ფუნქციებისათვის ადგილი ჰქონდეს (8,1) პირობას, ამისათვის საჭიროა

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (8,14)$$

ამგვარად, ტალღური ვექტორის სიდიდეზე ნორმირებულ (7,33) ფუნქცია, რომელიც უსასრულობაში წარმოადგენს კრებადი და განშლადი სფერული ტალღების ჯამს, ასეთი იქნება:

$$R_{ih}(r) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \{ \cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr) \}. \quad (8,15)$$

მაშასადამე, თუ უწყვეტი სპექტრის შესაბამისი რადიალური ფუნქცია უსასრულობაში წარმოადგენს განშლადი და კრებადი სფერული ტალღების ჯამს,

ე. ი. აქვს (7,31) სახე, მაშინ მისი (8,14) სიდიდეზე გამრავლებით მივიღებთ: $\frac{1}{k^2} \delta(k-k')$ -ზე ნორმირებულ ფუნქციას [8]. სხვა სიდიდეებზე ნორმირებულ ტალღურ ფუნქციებს მივიღებთ ცნობილი წესით: ასე მაგალითად, ენერგიაზე ნორმირებული რადიალური ტალღური ფუნქცია შემდეგი სახით წარმოვკვიდგება:

$$R_{lE}(r) = \left(\frac{dk}{dE} \right)^{1/2} R_{lk}(r), \quad (8,16)$$

სადაც, თანახმად (8,4) ფორმულისა,

$$\frac{dk}{dE} = \frac{\mu}{k\hbar^2}. \quad (8,17)$$

დაბოლოს შევნიშნათ, რომ, რადგან ღირაკის ფუნქცია ტალღური ვექტორიდან $\delta(k-k')$ ტოლია ორი ღირაკის ფუნქციის ნამრავლისა

$$\delta(k-k') = \frac{\delta(k-k')}{kk'} \delta(\overline{k-k'}), \quad (8,18)$$

ამიტომ რადიალური ფუნქციების ნორმირება ხელსაყრელია $\frac{1}{kk'}$ $\delta(k-k')$ ფუნქციაზე და არა $\delta(k-k')$ -ზე. ამ მიზნით ავირჩიეთ (8,1) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში $\frac{1}{k^2}$ მამრავლი.

§ 9. თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა

განვიხილოთ თავისუფალი ნაწილაკი. თავისუფალი ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლია და შრედინგერის განტოლება ამგვარი იქნება:

$$\hat{H}_0 \psi(r) = E \psi(r), \quad (9,1)$$

სადაც $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta$ კინეტიკური ენერგიის ოპერატორია.

თავისუფალი ნაწილაკის შემთხვევაში გასაზომ სიდიდეთა სრული კრებული სხვადასხვანაირად შეგვიძლია შევარჩიოთ [3]. მაგალითად, შეგვიძლია ავიღოთ იმპულსები $\hbar k$ და ენერგია E . ამასთან, ამ ოთხი სკალარული სიდიდიდან დამოუკიდებელი იქნება სამი, რამდენადაც ამ სიდიდეებს შორის არსებობს ცნობილი კავშირი

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}. \quad (9,2)$$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს თავისუფალი ნაწილაკი განსაზღვრული იმპულსით. შესაბამისი კვანტური მდგომარეობა ხასიათდება ბრტყელი ტალღით

$$\psi_k(r) = (2\pi)^{-3/2} e^{ikr}. \quad (9,3)$$

განსაზღვრულობისათვის ბრტყელი ტალღა ავიღეთ $\delta(k-k')$ ფუნქციაზე ნორმირებული.

არანაკლებ საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა გასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულს შეადგენენ: ენერგია, მომენტის კვადრატი და მისი x -პროექცია, ამავე მდგომარეობაში შეგვიძლია განვსაზღვროთ $I = (-1)^l$ ლუწობაც.

ვიპოვოთ ტალღური ფუნქცია, რომელიც საერთო საკუთარი ფუნქცია იქნება H_0 , I_2 და I_2 ოპერატორებისა. ამ შემთხვევაში თავისუფალი ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია აღწერს მდგომარეობას განსაზღვრული მომენტით, იმ დროს როცა (9,3) ფუნქცია განსაზღვრული იმპულსის მდგომარეობას შეესაბამება.

შრედინგერის (9,1) განტოლებაში გადავიღეთ სფერულ კოორდინატებზე და ტალღური $\psi(r)$ ფუნქცია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\psi_{lm}(r) = R_{lm}(r) Y_{lm}(\bar{r}), \quad (9,4)$$

მაშინ შრედინგერის განტოლება მოგვეცემს

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{lm} = 0, \quad (9,5)$$

რომელიც წარმოადგენს ბესელის განზოგადოებულ განტოლებას. სათავეში სასრული ამონახსნი არის ბესელის $j_l(kr)$ სფერული ფუნქცია; ასე რომ

$$R_{lm}(r) = A_l j_l(kr), \quad (9,6)$$

სადაც A_l -ნორმირების მუდმივია. $R_{lm}(r)$ ფუნქციის ნორმირება შეგვიძლია მოვახდინოთ (8,1) პირობით

$$\int_0^{\infty} R_l(k', r) R_l(kr) r^2 dr = \frac{\delta(k-k')}{kk'}; \quad (9,7)$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ (9,6) ფუნქციას და გამოვიყენებთ ბესელის ფუნქციების ნორმირების (E,50) პირობას

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_l(k'r) j_l(kr) r^2 dr = \frac{\delta(k-k')}{kk'}, \quad (9,8)$$

მაშინ ადვილად მივიღებთ, რომ

$$A_l = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \quad (9,9)$$

და, მაშასადამე, ნორმირებულ რადიალურ ფუნქციას ექნება ასეთი სახე:

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr). \quad (9,10)$$

შევნიშნოთ, რომ თავისუფალი ნაწილაკის ნორმირებული რადიალური ფუნქცია დირაკის აღნიშვნებში მიიღებს ასეთ ფორმას:

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle r | kl \rangle, \quad (9,11)$$

სადაც $\langle r | kl \rangle = j_l(kr)$.

თანახმად (9,4) ფორმულისა, თავისუფალი ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია განსაზღვრული მომენტით ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$\psi_{lm}(k, r, \bar{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr) Y_{lm}(\bar{r}). \quad (9,12)$$

ანლა გავშალოთ თავისუფალი ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია განსაზღვრული რეჰულსით მოცემული მომენტის მქონე თავისუფალი ნაწილაკის ტალღურ ფუნქციებად. ზოგად შემთხვევაში ბრტყელი ტალღა $\phi_k(r)$ დამოკიდებულია ორ

მიმართულეებაზე: $\vec{k} = \frac{k}{k}$ და $\vec{r} = \frac{r}{r}$, ამიტომ გვექნება

$$\phi_k(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l R_l(kr) Y_{lm}(\vec{r}) Y_{lm}^*(\vec{k}), \quad (9,13)$$

ამასთან უნდა აღვნიშნოთ, რომ $i^l = \exp\left(\frac{i\pi l}{2}\right)$ მამრაველი შემოვიღეთ ხელსაყრელობის მიზნით. მარცხენა მხარე აკმაყოფილებს შრედინგერის განტოლებას. იმისათვის, რომ მარჯვენა მხარეც აკმაყოფილებდეს იმავე განტოლებას, საჭიროა $R_l(k, r)$ ფუნქციას ჰქონდეს (9,10) სახე; მაშასადამე,

$$\phi_k(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_{lm}(\vec{r}) Y_{lm}^*(\vec{k}), \quad (9,14)$$

ამასთან, ეს ფუნქცია ავტომატურად ნორმირებულია $\delta(k-k')$ ფუნქციაზე. (9.3) ფორმულის თანახმად, (9,14) ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$e^{ikr} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_{lm}(\vec{r}) Y_{lm}^*(\vec{k}). \quad (9,15)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ბრტყელი ტალღის კარგად ცნობილ გაშლას სფერულ ფუნქციებად. როგორც ვხედავთ, ბრტყელი ტალღა მოცემული მომენტის შესაბამისი ტალღური ფუნქციების უსასრულო სუპერპოზიციად.

ჩამდენადაც ადგილი აქვს სფერული ფუნქციების შეკრების ფორმულას:

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vec{r}) Y_{lm}^*(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l0}(\theta), \quad (9,16)$$

სადაც θ არის კუთხე \vec{r} და \vec{k} ვექტორებს შორის, ამიტომ. თუ ვიგულისხმებთ, რომ \vec{k} ვექტორი ემთხვევა z -ის მიმართულეებას, ე. ი. ბრტყელი ტალღა z -ღერძის გასწვრივ ვრცელდება, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\theta). \quad (9,17)$$

თუ ანლა გავიხსენებთ, რომ $Y_{l0}(\theta)$ სფერული ფუნქცია ლეჟანდრის $P_l(\cos \theta)$ პოლინომთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$(2l+1) P_l(\cos \theta) = \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\theta), \quad (9,18)$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ ბრტყელი ტალღის გაშლის კიდევ ერთი სახე:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (9,19)$$

გაფანტვის თეორიაში მნიშვნელოვანია (9,15) ფუნქციის ასიმპტოტური სახის. ცოლნა დიდი მანძილებისათვის. ამისათვის საკმარისია გავიხსენოთ, რომ

$$j_l(kr) = \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr}, \quad kr \rightarrow \infty \quad (9,20).$$

შედგად მივიღებთ:

$$e^{ikr} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2il} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} - (-1)^l \frac{e^{-ikr}}{r} \right\} Y_{lm}(\bar{r}) Y_{lm}^*(\bar{k}). \quad (9,21).$$

მაშასადამე, უსასრულობაში ბრტყელი ტალღა შეიცავს განშლად და კრებად სფერულ ტალღებს. ბრტყელი ტალღის გაშლაში \bar{k} -მამარაული სწორედ იმიტომ შემოვიღეთ, რომ განშლად ტალღას ერთეულოვანი ამპლიტუდა ჰქონოდა.

ღირაკის $\delta(x)$ ფუნქციითა თეორიიდან ცნობილია, რომ

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) = 2\delta(1-\cos \theta). \quad (9,22)$$

ამ ფორმულის დახმარებით ბრტყელი ტალღის ასიმპტოტური გამოსახულება მნიშვნელოვნად გამარტივდება

$$e^{ikz} = \frac{e^{ikr}}{ikr} \delta(1-\cos \theta) - \frac{e^{-ikr}}{ikr} \delta(1+\cos \theta). \quad (9,23)$$

ბრტყელი ტალღის აქ მიღებულ ფორმულებს დიდი გამოყენება აქვთ კვანტური მექანიკის რიგ ამოცანებში.

§ 10. ცენტრალური სიმეტრიის ველის შესაბამისი ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში

ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრავი ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია (7,7) ფორმულით განისაზღვრება. ამ ფუნქციით შეგვიძლია ვიპოვოთ ნაწილაკის მდებარეობის ალბათობა. მთელ რიგ ამოცანებში საჭიროა ვიცოდეთ ნაწილაკის განაწილების ალბათობა იმპულსების მიხედვით, ამიტომ მეტად მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ, თუ რა სახე ექნება ცენტრალური სიმეტრიის ველის შესაბამის ტალღურ ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში. ამისათვის, როგორც ცნობილია, საჭიროა (7,7) ფუნქციის ფურიე-კომპონენტის მონახვა. გვექნება:

$$N(k) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r) e^{-ikr} dr, \quad (10,1)$$

$\hbar k$ -იმპულსია, $\psi(r)$ -ი წარმოდგენს ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობის კოორდინატულ ფუნქციას:

$$\psi(r) = R_l(r) Y_{lm}(\bar{r}). \quad (10,2)$$

$\psi(r)$ -ის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (10,1) განმარტებაში, მივიღებთ:

$$N(k) = (2\pi)^{-3/2} \int_0^{\infty} R_l(r) r^2 dr \int Y_{lm}(\bar{r}) e^{-ikr} d\Omega_r, \quad (10,3)$$

ახლა გამოვიყენოთ ბრტყელი ტალღის სფერულ ფუნქციებად გაშლის (9,15) ფორმულა

$$N(k) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{+\nu} (-i)^{\nu} \times$$

$$\left[\int_0^{\infty} R_l(r) j_{\nu}(kr) r^2 dr \int Y_{lm}(\vec{r}) Y_{\nu\mu}^*(\vec{r}) d\Omega_r \right] Y_{\nu\mu}(\vec{k}). \quad (10,4)$$

სფერული ფუნქციების ორთო-ნორმირების პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$N(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^{\infty} R_l(r) j_l(kr) r^2 dr \right) Y_{lm}(\vec{k}). \quad (10,5)$$

ეს ფორმულა ასეც შეიძლება გადაიწეროს:

$$N_{lm}(k) = \Omega_l(k) Y_{lm}(\vec{k}), \quad (10,6)$$

სადაც

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} R_l(r) j_l(kr) r^2 dr. \quad (10,7)$$

ეს უკანასკნელი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც იმპულსური წარმოდგენის რადიალური ფუნქცია. ჩვენ ვხედავთ, რომ როცა კოორდინატული ფუნქცია ცენტრალური სიმეტრიისაა, მაშინ იმპულსურ ფუნქციასაც იგივე სიმეტრია ახასიათებს. კერძო შემთხვევაში, როცა გვაქვს თავისუფალი ნაწილაკი, მაშინ რადიალურ ფუნქციას გააჩნია (9,10) სახე. ამ ფუნქციის (10,7) ფორმულაში შეტანით და (9,8) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \frac{\delta(k-k')}{k^2}, \quad (10,8)$$

რომელიც წარმოდგენს თავისუფალი ნაწილაკის რადიალურ ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში.

აღვილია ჩვენება, რომ ნორმირებული კოორდინატული რადიალური ფუნქციების შემთხვევაში იმპულსური ფუნქციებიც ნორმირებული იქნება. მართლაც, თანახმად (10,7) ფორმულისა, გვექნება

$$\int_0^{\infty} |\Omega_l(k)|^2 k^2 dk = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_l^*(r) R_l(r') r^2 dr r'^2 dr' \int_0^{\infty} j_l(kr) j_l(kr') k^2 dk \quad (10,9)$$

ბესელის სფერული ფუნქციების ორთო-ნორმირების პირობის ძალით გვექნება

$$\int_0^{\infty} |\Omega_l(k)|^2 k^2 dk = \int_0^{\infty} |R_l(r)|^2 r^2 dr. \quad (10,10)$$

კერძოდ, დისკრეტული სპექტრის შემთხვევაში, როგორც წესი, რადიალური ფუნქციები ერთზე ნორმირდებიან, ამიტომ იმპულსური რადიალური ფუნქციებიც ერთზე იქნებიან ნორმირებული.

აღბათობა იმისა, რომ ტალღური ვექტორის სიდიდე მოთავსებული იქნება k და $k+dk$: შუალედში, ხასიათდება გამოსახულებით

$$r_l(k) dk = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\infty} R_l(r) j_l(kr) r^2 dr \right|^2 k^2 dk. \quad (10,11)$$

ამგვარად, ცენტრალური სიმეტრიის ველში იმპულსურ წარმოდგენაზე გადასვლისას საკმარისია გამოითვალოს გარკვეული ინტეგრალი რადიალურა ფუნქციებიდან.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ იმპულსური წარმოდგენის ფუნქციის მოსაძებნად (10,7) ფორმულის გამოყენება უფრო ძნელი იყოს, ვიდრე თვით შრედინგერის განტოლების ამოხსნა იმპულსურ წარმოდგენაში. ამისათვის ქვემოთ შევეცდებით შრედინგერის განტოლება ჩაეწეროს იმპულსურ წარმოდგენაში ცენტრალური ურთიერთქმედების დროს. როგორც ვიცით, იმპულსურ წარმოდგენაში შრედინგერის განტოლებას აქვს ინტეგრალური განტოლების სახე

$$\left(E - \frac{\hbar^2 p^2}{2\mu} \right) \psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(p-p') \psi(p') dp', \quad (10,12)$$

სადაც ინტეგრალური განტოლების გული წარმოადგენს $p-p'$ სხვაობის ფუნქციას

$$V(p-p') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} v(r) e^{i(p-p') \cdot r} dr, \quad (10,13)$$

აქ $v(r)$ არის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია კოორდინატულ წარმოდგენაში. შევნიშნოთ, რომ, როცა $v(r)$ ცენტრალური სიმეტრიის ხასიათისაა, ე. ი. როცა პოტენციალური ენერგია დამოკიდებულია $r=|r|$ -ზე, მაშინ, (10,13) ფორმულის თანახმად,

$$V(p-p') = \frac{1}{2\pi^2 |p-p'|} \int_0^{\infty} v(r) \sin(|p-p'|r) r dr, \quad (10,14)$$

საიდანაც ჩანს, რომ $V(p-p')$ დამოკიდებულია მხოლოდ $|p-p'|$ სხვაობის სიდიდეზე. ასე რომ ცენტრალურ ველში მოძრაობის დროს შრედინგერის (10,12) განტოლების გული დამოკიდებული იქნება $|p-p'|$ -ზე. ამასთან, თანახმად (10,13) ფორმულისა, ცხადია, როცა $v(r)$ ნამდვილი ფუნქციაა, მაშინ

$$V(p) = V^*(-p), \quad (10,15)$$

აქედან კი ჩანს, რომ, როცა ველი ცენტრალურია, მაშინ $V(p)$ ნამდვილი ფუნქციაა. ცენტრალურ ველში მოძრაობისას (10,12) განტოლება ფაქტიურად ერთგანზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებაზე დაიყვანება. ამისათვის, $\psi(p)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ (10,6) სახით

$$\psi(p) = \psi_l(p) Y_{lm}(\bar{p}), \quad (10,16)$$

ხოლო პოტენციალური ენერგია გავშალოთ მწკრივად

$$V(|p-p'|) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} K_l(p, p') Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'). \quad (10,17)$$

ამ გამოსახულებების (10,12)-ში შეტანით და კუთხვებით ინტეგრაციის შედეგად მივიღებთ შემდეგ ერთგანზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\left(E - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu}\right) \psi_1(p) = 4\pi \int_0^\infty K_1(p, p') \psi_1(p') p'^2 dp'. \quad (10,18)$$

(10,17)-დან ადვილად ვიპოვიტ $K_1(p, p')$ გულის გამოხატულებას [9], რისთვისაც გამოვიყენოთ (9,16) და (9,18) ფორმულები და (10,17) გავამრავლოთ $P_1(\cos \theta) \sin \theta / \theta$ (სადაც θ კუთხეა p და p' ვექტორებს შორის), რის შემდეგაც მოვახდინოთ ინტეგრაცია $(0, \pi)$ -შუალედში. ლეჟანდრის პოლინომების ორთონორმირების პირობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$K_1(p, p') = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{|p^2 + p'^2 - 2pp'x|} P_1(x) dx. \quad (10,19)$$

ცხადია, რომ $K_1(p, p') = K_1(p', p)$, ე. ი. სიმეტრიულია p და p' -ის გადასმის მიმართ.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა და (10,18) შრედინგერის განტოლება დავწეროთ კულონური ურთიერთქმედებისათვის

$$v(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (10,20)$$

თანახმად (10,14) ფორმულისა, გვექნება:

$$V(|p-p'|) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi^2} \frac{1}{|p-p'|^2}. \quad (10,21)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ (10,19)-ში, ინტეგრალური განტოლების გულისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$K_1(p, p') = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi^2} \frac{1}{pp'} Q_1\left(\frac{p^2 + p'^2}{2pp'}\right), \quad (10,22)$$

სადაც $Q_1(x)$ წარმოადგენს მეორე გვარის ლეჟანდრის ფუნქციას, რომელიც შემდეგი ფორმულით განიმარტება:

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_1(x) dx}{x-x}. \quad (10,23)$$

თუ (10,22) ფორმულით განსაზღვრულ გულს შევიტანთ (10,18) ინტეგრალურ განტოლებაში, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\left(E - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu}\right) \psi_1(p) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\pi p} \int_0^\infty Q_1\left(\frac{p^2 + p'^2}{2pp'}\right) \psi_1(p') p' dp'. \quad (10,24)$$

ეს განტოლება ამოხსნილი იყო ფოკის მიერ.

შრედინგერის განტოლების ამოხსნა ზოგიერთი მარტივი ამოცანისათვის

ამ თავში შევხებით შრედინგერის სტაციონარული მდგომარეობების განტოლების ამოხსნებს ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანისათვის. განსაკუთრებით დაწვრილებით შევისწავლით ე. წ. პოტენციალურ ორმოს ამოცანას, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა ენიჭება სხვადასხვა ფიზიკური შემთხვევების განხილვის დროს. ეს ამოცანა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ატომგულის თვისებების შესწავლისას. ვინაიდან ჯერ კიდევ უცნობია ატომგულურ ნაწილაკთა ურთიერთქმედების პოტენციალი, ამ ურთიერთქმედებას ცვლიან სხვადასხვა ტიპის პოტენციალური ორმოთი. მიღებული შედეგების ცდასთან შედარებით ადგენენ პოტენციალური ორმოს დამახასიათებელ პარამეტრებს, მაგალითად. მის სიგანესა და სიღრმეს. ერთი ტიპის ამოცანებში დადგენილ ამ პარამეტრებთან პოტენციალურ ორმოს შემდგომ იყენებენ სხვა ტიპის ამოცანების ასახსნელად.

პოტენციალურ ორმოებს შევისწავლით როგორც ბმული მდგომარეობების შემთხვევაში, ისე უწყვეტი სპექტრის დროს. ამ უკანასკნელს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს გაფანტვის თეორიაში.

§ 11. უსასრულო კედლებიანი სწორკუთხა პოტენციალური ორმო

უსასრულო კედლებიანი სწორკუთხა პოტენციალური ორმო განისაზღვრება ფორმულით

$$V(r) = 0, \quad \text{როცა } r < r_0 \tag{11,1}$$

$$V(r) = \infty, \quad \text{როცა } r \geq r_0.$$

რადგან ორმო ცენტრალური სიმეტრიისაა, ამიტომ ტალღურ ფუნქციას, რომელიც საერთო საკუთარი ფუნქციაა ენერგიის, მომენტის კვადრატისა და მისი x -პროექციისა, ექნება (7,7) სახე. საკმარისია ვიპოვოთ შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლების

$$\frac{d^2 \chi_l(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_l(r) = 0, \tag{11,2}$$

ამოხსნა (11,1) პოტენციალური ენერგიის შემთხვევაში. ამოცანის ხასიათიდან ნათელია, რომ ამოხსნა უნდა მოეძებნოთ სასაზღვრო პირობით

$$R_l(r_0) = 0. \tag{11,3}$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ენერგეტული დონეები ორმოში და მისი შესაბამისი ტალღური ფუნქციები. (11,1)-ის თანახმად, შრედინგერის განტოლება შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [k^2 r^2 - l(l+1)] \chi_l(r) = 0, \quad (11,4)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \quad (11,5)$$

(11,4)-წარმოადგენს ბესელის განზოგადებულ განტოლებას. მისი ამონახსნი, რომელიც სათავეში სასრულია, იქნება ბესელის სფერული ფუნქცია

$$R_l(r) = C_l j_l(kr), \quad (11,6)$$

სადაც C_l ნებისმიერი მუდმივია. სასაზღვრო მნიშვნელობა $r = r_0$ წერტილზე მოგვეცემს საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას

$$j_l(kr_0) = 0. \quad (11,7)$$

ამ განტოლების ფესვები განსაზღვრავენ ენერგიის მნიშვნელობებს. (11,7)-ს აქვს ფესვების დისკრეტული მიმდევრობა, ამიტომ უსასრულო კედლებიან პოტენციალურ ორმოში აგრეთვე გვექნება ენერგეტული დონეების დისკრეტული მიმდევრობა. ამჟამად, რომ ფესვების მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორია ნაწილაკის l -მომენტი. l -ის შესაბამისი ფესვი აღვნიშნოთ t_{lnr} , სადაც n_r მიუთითებს l -ის შესაბამისი ფესვის ნომერს. მაშინ $kr_0 = t_{lnr}$ და, თუ გავითვალისწინებთ (11,5) ფორმულას, ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$E_{lnr} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} t_{lnr}^2. \quad (11,8)$$

თუ ვისარგებლებთ დამატებაში მოცემული $j_l(x)$ ფუნქციის ფესვების ცხრილით, შეგვიძლია ვიპოვოთ ენერგეტული დონის რიცხვითი მნიშვნელობანი $l=0, 1, 2, \dots$ -სთვის. შევნიშნოთ, რომ რადგან ცენტრალურ ველში მოძრაობა ფაქტიურად ერთგანზომილებიანია, იმიტომ მთავარი კვანტური რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით

$$n = n_r + l + 1. \quad (11,9)$$

ახლა მოვახდინოთ (11,6) ფორმულის ნორმირება. თანახმად (7,10) პირობისა

$$C_l^2 \int_0^{r_0} j_l^2(kr) r^2 dr = 1. \quad (11,10)$$

გამოვიყენოთ (E , 97) ფორმულა და გავითვალისწინოთ, რომ $j_l(kr_0) = 0$; გვექნება:

$$-C_l^2 \frac{r_0^2}{2} j_{l-1}(kr_0) j_{l+1}(kr_0) = 1, \quad (11,11)$$

საიდანაც ნორმირების მუდმივისათვის გვექნება მნიშვნელობა

$$C_l^2 = -\frac{2}{r_0^2 j_{l-1}(kr_0) j_{l+1}(kr_0)}; \quad (11,12)$$

აღვარად, მივიღო შემდეგი შედეგი: უსასრულო კედლებიან ორმოში ნაწილაკის ტალღურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$\psi_{lm}(r) = R_l(kr) Y_{lm}(\bar{r}), \quad (11,13)$$

სადაც

$$R_l(kr) = C_l j_l \left(t_{ln}, \frac{r}{r_0} \right), \quad (11,14)$$

ხოლო

$$C_l^2(kr_0) = -2 |r_0^3 j_{l-1}(kr_0) j_{l+1}(kr_0)|^{-1}. \quad (11,15)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა ნაწილაკი მოძრაობს ნულოვანი მომენტით $l=0$, ტალღურ ფუნქციას ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$\psi_{00}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} R_0(kr) \quad (11,16)$$

$$R_0(kr) = C_0 \frac{\sin kr}{kr}; \quad (11,17)$$

ენერგეტული დონეები განისაზღვრებიან განტოლებით

$$\sin kr_0 = 0, \quad (11,18)$$

რომელიც მიიღება (11,7)-დან $l=0$ შემთხვევაში. C_0 -მუდმივი, თანახმად (11,15) ფორმულისა, (11,18)-ის გათვალისწინებით, ტოლი იქნება შემდეგი სიდიდისა:

$$C_0 = k \sqrt{\frac{2}{r_0}}; \quad (11,19)$$

მაშასადამე, ნორმირებულ რადიალურ ფუნქციას ექნება სახე

$$R_0(kr) = \sqrt{\frac{2}{r_0}} \frac{\sin kr}{r}. \quad (11,20)$$

სრული ტალღური ფუნქციის მისაღებად ეს გამოსახულება უნდა გავამრავლოთ $Y_{00}(\theta, \varphi) = (4\pi)^{-1/2}$ -ზე.

§ 12. სასრულკედლებიანი კოტენსიალური ორმო.

კოტენსიალური ჯგუხირი

ვინაიდან ნამდვილ ურთიერთქმედებას უსასრულო სიღრმე არ გააჩნია, ბუნებრივია, რომ უფრო მნიშვნელოვანი იქნება ისეთი პოტენციალური ორმოს განხილვა, რომელსაც აქვს სასრული სიღრმე. ამიტომ განვიხილოთ r_0 სიგანისა და V_0 -სიღრმის ცენტრალური სიმეტრიის პოტენციალური ორმო

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0, & \text{როცა } r < r_0 \\ V(r) &= 0, & \text{როცა } r > r_0. \end{aligned} \quad (12,1)$$

კვლავ განვიხილოთ ნებისმიერი მომენტით მოძრაობის შემთხვევა. ამასთან, მოძრაობა შეიძლება ხდებოდეს როგორც დადებითი სრული ენერგიით $E > 0$, ისე $E < 0$ -ით. პირველ შემთხვევაში გვექნება უწყვეტი სპექტრი (ნაწილაკი ორმოს ზემოთ მოძრაობს და ამ მოძრაობის ხასიათი ინფინიტურია), ხოლო მეორე შემ-

თხვევაში ნაწილაკი ორმოშია—მისი სპექტრი იქნება დისკრეტული. შევისწავლოთ ორივე შემთხვევა ცალ-ცალკე.

დისკრეტული სპექტრი. განვიხილოთ, მაშასადამე, ბმული მდგომარეობა. $\mathfrak{E} = -|E|$ -ს ვუწოდოთ ნაწილაკის ბმის ენერგია ორმოში. პოტენციალური ენერგიის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობის გამო შესაბამისად გვექნება შრედიონკერის რადიალური ფუნქციების ორი განტოლება:

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[-\mathfrak{E} + V_0 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_l = 0 \quad r < r_0 \quad (12,2)$$

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[-\mathfrak{E} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_l = 0 \quad r > r_0 \quad (12,3)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\alpha^2 = \frac{2\mu \mathfrak{E}}{\hbar^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\mu (V_0 - \mathfrak{E})}{\hbar^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \quad (12,4)$$

ამ აღნიშვნებში შრედიონკერის (12,2) და (12,3) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [-l(l+1) + \beta^2 r^2] \chi_l = 0 \quad r < r_0 \quad (12,5)$$

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [-l(l+1) - \alpha^2 r^2] \chi_l(r) = 0 \quad r > r_0 \quad (12,6)$$

რადიალური ტალღური ფუნქცია R_l ყველგან უნდა იყოს უწყვეტი და ჰქონდეს უწყვეტი პირველი რიგის წარმოებული, მათ შორის, ცხადია, $V(r)$ პოტენციალური ენერგიის წყვეტის $r=r_0$ წერტილზეც. გასაგებია, რომ $r < r_0$ არის ფუნქცია სასრული უნდა იყოს სათავეში (ან $\chi_l(0)$ უნდა იყოს ნული). (12,5) განტოლების ამონახსნი, რომელიც სათავეში სასრულია, წარმოადგენს ბესელის სფერულ $j_l(\beta r)$ ფუნქციას.

რაც შეეხება $r > r_0$ არეს, აქ უნდა ვიპოვოთ ისეთი ამოხსნა, რომელიც უსასრულობაში ექსპონენციალურად ისპობა. (12,6) განტოლების ასეთ ამონახსნს წარმოადგენს $k_l(\alpha r)$ ფუნქცია. ასე რომ (12,5) და (12,6) განტოლებების სასურველი ამონახსნები შემდეგი სახისაა:

$$R_l(r) = A_l j_l(\beta r), \quad r < r_0 \quad (12,7)$$

$$R_l(r) = B_l k_l(\alpha r). \quad r > r_0 \quad (12,8)$$

სადაც A_l და B_l განუსაზღვრელი მუდმივებია. R_l ფუნქციისა და მისი პირველი რიგის წარმოებულის $r=r_0$ წერტილზე უწყვეტობისათვის, საჭიროა მიღებული ამონახსნების შეკერვა; ფუნქციათა ტოლობა $r=r_0$ წერტილზე გვაძლევს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$B_l = A_l \frac{j_l(\beta r_0)}{k_l(\alpha r_0)}; \quad (12,9)$$

ამგვარად:

$$R_l(r) = A_l j_l(\beta r), \quad r < r_0 \quad (12,10)$$

$$R_l(r) = A_l \frac{j_l(\beta r_0)}{k_l(\alpha r_0)} k_l(\alpha r). \quad r > r_0$$

ახლა წარმოებულები ერთმანეთს გავუტოლოთ $r=r_0$ წერტილში

$$A_l \left[\frac{dj_l(kr)}{dr} \right]_{r=r_0} = A_l \frac{j_l(\beta r_0)}{k_l(\alpha r_0)} \left[\frac{dk_l(\alpha r)}{dr} \right]_{r=r_0} \quad (12,11)$$

გავიხსენოთ, რომ ადგილი აქვთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\frac{dj_l(\beta r)}{dr} = \beta j_{l-1}(\beta r) - \frac{l+1}{r} j_l(\beta r), \quad (12,12)$$

$$\frac{dk_l(\alpha r)}{dr} = -\alpha k_{l-1}(\alpha r) - \frac{l+1}{r} k_l(\alpha r). \quad (12,13)$$

მაშინ (12,11)-დან მივიღებთ შემდეგ ტრანსცენდენტულ განტოლებას:

$$\frac{\beta j_{l-1}(\beta r_0)}{j_l(\beta r_0)} = -\frac{\alpha k_{l-1}(\alpha r_0)}{k_l(\alpha r_0)}. \quad (12,14)$$

მოცემული r_0 და V_0 -ისათვის, თანახმად (12,4) ფორმულებისა, (12,14) გამოსახულება წარმოადგენს განტოლებას ბმის ენერჯისათვის. ზოგად შემთხვევაში მისი ამოხსნა შეუძლებელია. ჩვენ შეგვიძლია (12,14) განტოლების ფესვები ვიპოვოთ გრაფიკული, ან სხვა რომელიმე მიახლოებითი მეთოდით.

განსასაზღვრი დავერჩია ერთადერთი მუდმივი A_l , რომელსაც ადვილად ვიპოვიით (7,10) ნორმირების პირობით, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ასე დაიწერება:

$$A_l^2 \left\{ \int_0^{r_0} j_l^2(\beta r) r^2 dr + \frac{j_l^2(\beta r_0)}{k_l^2(\alpha r_0)} \int_{r_0}^{\infty} k_l^2(\alpha r) r^2 dr \right\} = 1. \quad (12,15)$$

ვისარკებლოთ (E, 97) და (E, 98) ფორმულებით; გვექნება

$$\frac{A_l^2 r_0^2}{2} \left\{ j_l^2(\beta r_0) - j_{l-1}(\beta r_0) j_{l+1}(\beta r_0) - \frac{j_l^2(\beta r_0)}{k_l^2(\alpha r_0)} [k_l^2(\alpha r_0) - k_{l-1}(\alpha r_0) k_{l+1}(\alpha r_0)] \right\} = 1, \quad (12,16)$$

საიდანაც

$$-\frac{A_l^2 r_0^2}{2} \left\{ j_{l-1}(\beta r_0) j_{l+1}(\beta r_0) - \frac{j_l^2(\beta r_0) k_{l-1}^2(\alpha r_0) k_{l+1}(\alpha r_0)}{k_l^2(\alpha r_0)} \right\} = 1; \quad (12,17)$$

ვინიდან

$$k_{l+1}(\alpha r_0) = k_{l-1}(\alpha r_0) + \frac{2l+1}{\alpha r_0} k_l(\alpha r_0), \quad (12,18)$$

ამიტომ

$$-\frac{A_l^2 r_0^2}{2} \left\{ j_{l-1}(\beta r_0) j_{l+1}(\beta r_0) - j_l^2(\beta r_0) \frac{k_{l-1}^2(\alpha r_0)}{k_l^2(\alpha r_0)} - \frac{2l+1}{\alpha r_0} j_l^2(\beta r_0) \frac{k_{l-1}(\alpha r_0)}{k_l(\alpha r_0)} \right\} = 1. \quad (12,19)$$

ვისარკებლოთ საკუთარი მნიშვნელობების (12,14) განტოლებით და (12,19)-დან გამოვირიცხოთ $k_l(\alpha r_0)$ ფუნქცია. მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$-\frac{A_l^2 r_0^2}{2} \left\{ j_{l-1}(\beta r_0) j_{l+1}(\beta r_0) + \frac{\beta^2}{\alpha^2} j_{l-1}(\beta r_0) \left[\frac{2l+1}{\beta r_0} j_l(\beta r_0) - j_{l-1}(\beta r_0) \right] \right\} = 0, \quad (12,20)$$

საიდანაც, თუ გავიხსენებთ (E, 35) რეკურენტულ ფორმულას

$$j_{l+1}(\beta r_0) = \frac{2l+1}{\beta r_0} j_l(\beta r_0) - j_{l-1}(\beta r_0), \quad (12,21)$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$A_l^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} C_l^2(\beta r_0), \quad (12,22)$$

სადაც

$$C_l^2(\beta r_0) = \frac{-z}{r_0^2 j_{l-1}(\beta r_0) j_{l+1}(\beta r_0)}. \quad (12,23)$$

შენიშნოთ, რომ (12,23) გამოსახულება ემთხვევა ნორმირების კოეფიციენტს უსასრულო კედლებიანი ორმოს შემთხვევაში.

ამგვარად, სასრულკედლებიანი პოტენციალური ორმოსათვის მივიღეთ შემდეგი ტალღური ფუნქცია:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_l(r) Y_{lm}(\bar{r}), \quad (12,24)$$

სადაც

$$R_l(r) = A_l j_l(\beta r), \quad r < r_0 \quad (12,25)$$

$$R_l(r) = A_l \frac{j_l(\beta r_0)}{k_l(\alpha r_0)} k_l(\alpha r) \quad r > r_0$$

და

$$A_l^2 = -\frac{2\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2) r_0^2 j_{l-1}(\beta r_0) j_{l+1}(\beta r_0)}. \quad (12,26)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $l=0$. თუ გავიხსენებთ $j_0(\beta r)$ და $k_0(\alpha r)$ ფუნქციების გამოსახულებებს, მარტივად ვაჩვენებთ, რომ:

$$R_0(r) = A_0 \frac{\sin \beta r}{\beta r}, \quad r < r_0 \quad (12,27)$$

$$R_0(r) = A_0 \frac{\sin \beta r_0}{\beta} \frac{e^{-\alpha(r-r_0)}}{r}; \quad r > r_0$$

და

$$\beta \operatorname{ctg} \beta r_0 = -\alpha. \quad (12,28)$$

ნორმირების A_0 კოეფიციენტისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$A_0 = \beta \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha r_0} \right)^{1/2} \quad (12,29)$$

ასე რომ ნორმირებული ტალღური ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ფორმულები:

$$R_0(r) = \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha r_0} \right)^{1/2} \frac{\sin \beta r}{r}, \quad r < r_0 \quad (12,30)$$

$$R_0(r) = \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha r_0} \right)^{1/2} \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \frac{e^{-\alpha(r-r_0)}}{r}; \quad r > r_0$$

$l=0$ შემთხვევაში ენერჯიის საკუთარი მნიშვნელობები განისაზღვრება (12,28) ფორმულით, რომელიც შემდგენიარად გადავწეროთ:

$$x \operatorname{ctg} x = -y, \quad x = \beta r_0, \quad y = \alpha r_0. \quad (12,31)$$

ეს განტოლება შეიძლება ამოხსნათ გრაფიკულად. ამისათვის xOy სიბრტყეზე დაეხატოთ ორი მრუდი, ერთი: $y = -x \operatorname{ctg} x$, ხოლო მეორე წრეწირი

$$x^2 + y^2 = (sr_0)^2. \quad (12,32)$$

ამ ორი მრუდის გადაკვეთის წერტილები მოგვეძებნოთ x_n და y_n -ს, საიდანაც ვიპოვოთ ენერჯიის. რადგან x და y დადებითია, ამიტომ ამოხსნები შესაძლებელია მხოლოდ ისეთი x -ებისათვის, რომელთათვისაც $\operatorname{ctg} x < 0$,

ე. ი. ინტერვალში $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

და ა. შ. თუ წრეწირის რადიუსი $sr_0 < \frac{\pi}{2}$,

მაშინ გადაკვეთას $y = -x \operatorname{ctg} x$ მრუდთან ადგილი არა აქვს და, მაშასადამე, სისტემას ბმული მდგომარეობა არ ახასიათებს. თუ გავიხსენებთ, რომ $l^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}$, მაშინ დავასკვნით:

ორმოში ბმული მდგომარეობა არა გვაქვს, როცა შესრულებულია პირობა

$$V_0 r_0^2 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}; \quad (12,33)$$

როცა გვაქვს ყველაზე დაბალი ენერგეტიკული ღონე $\mathcal{E}=0$, მაშინ $\operatorname{ctg} \beta r_0 = 0$ და ამ განტოლების პირველი ფესვია $\beta r_0 = \frac{\pi}{2}$. ასე რომ

$$V_0 r_0^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}. \quad (12,34)$$

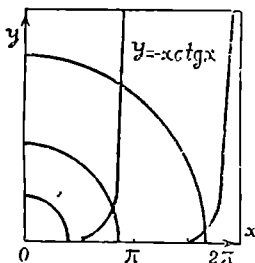
ამგვარად, იმისათვის, რომ ორმოში გვექნოდეს ენერგეტიკული ღონე, $V_0 r_0^2$ სიღიდე გარკვეულ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს. როცა $\frac{\pi}{2} \leq \beta r_0 < \frac{3}{2}\pi$, მაშინ ორ-

მოში გვექნება ერთი ენერგეტიკული ღონე, რადგან წრეწირი $y = -x \operatorname{ctg} x$ მრუდს გადაკვეთს ერთ წერტილში; მაშასადამე, ორმოში ერთი ღონის არსებობისათვის საჭიროა დაცული იყოს, პირობა:

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} \leq V_0 r_0^2 < \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8\mu}. \quad (12,35)$$

მეორე ღონე კი გაჩნდება მაშინ, როცა $\beta r_0 \geq \frac{3}{2}\pi$ და ნაკლები იქნება 2π -ზე და ა. შ. ცხადია, ენერჯია y_n გადაკვეთის წერტილზე დამოკიდებული იქნება ფორმულით:

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} y_n^2, \quad n=1, 2, \dots \quad (12,36)$$



ნახ. 2

$y = -x \operatorname{ctg} x$ და $x^2 + y^2 = b^2 r_0^2$ განტოლებების გრაფიკული ამოხსნა

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ერთგანზომილებიან ორმოში ენერგეტული ღონე ყოველთვის არსებობს, ცენტრალური სიმეტრიის ორმოში კი ღონის არსებობა დამოკიდებულია გარკვეულ პირობებზე, რომელიც ორმოს „გეომეტრიას“ — $V_0 r_0^2$ სიდიდეს ედება.

უწყვეტი სპექტრის შემთხვევა. არანაკლებ საინტერესო შემთხვევას წარმოადგენს ნაწილაკის მოძრაობა ორმოში დადებითი სრული ენერგიით. ამ დროს ნაწილაკი ფაქტიურად ორმოს ზემოდან იმყოფება და ამიტომ მისი მოძრაობა ინფინიტურია. (12,1) ორმოში დისკრეტული ენერგეტიკული ღონეების ნაცვლად გვექნება უწყვეტი სპექტრი. კვლავ განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა ნებისმიერი ორბიტალური მომენტით. ამ შემთხვევაშიც საჭიროა დაიწეროს შრედინგერის ორი განტოლება შესაბამისად ორი $(0, r_0)$ და (r_0, ∞) არსისა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad a^2 = \frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2}, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}, \quad a^2 = k^2 + b^2, \quad (12,37)$$

მაშინ მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [a^2 r^2 - l(l+1)] \chi_l(r) = 0, \quad r < r_0 \quad (12,38)$$

$$r^2 \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + [k^2 r^2 - l(l+1)] \chi_l(r) = 0, \quad r > r_0 \quad (12,39)$$

ბუნებრივია, რომ ამ განტოლებების ამონახსნებს განსხვავებული სასაზღვრო პირობები მოეთხოვებათ. უწყვეტი სპექტრის ფუნქციები გამოიყენებიან გაფანტვის ამოცანებში, ამიტომ ამ ამონახსნებს მოეთხოვოთ გაფანტვისათვის დამახასიათებელი სასაზღვრო პირობები. სახელდობრ, (12,38)-ის ამონახსნი სათავეში უნდა იყოს ნული (მაშასადამე რადიალური ფუნქცია $R_l = \frac{\chi_l(r)}{r}$ სასრული). გარე არის ფუნქცია

კი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ მისი ასიმპტოტური გამოსახულება ღიდი r -ებისათვის წარმოადგენდეს განშლადი და კრებადი სფერული ტალღების ჯამს, ე. ი. ჰქონდეს (7,33) სახე.

რადგან (12,38) განტოლების კერძო ამონახსნებიდან სათავეში სასრულობის პირობას მხოლოდ $j_l(kr)$ ბესელის ფუნქცია აკმაყოფილებს, ამიტომ გვექნება შემდეგი ამონახსნები:

$$R_l(r) = D_l j_l(ar), \quad r < r_0 \quad (12,40)$$

$$R_l(r) = \cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr); \quad r > r_0 \quad (12,41)$$

სადაც D_l და δ_l ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $n_l(kr)$ ნეიმანის სფერული ფუნქციაა. δ_l მუდმივი განისაზღვრება $r=r_0$ წერტილზე ამ ამონახსნების შეკერვის პირობიდან. გაუტოლოთ ერთმანეთს ფუნქციები და მათი წარმოებულები $r=r_0$ წერტილზე. თუ გამოვიყენებთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების გაწარმოების (E, 33) ფორმულებს, ადვილად მივიღებთ:

$$D_l j_l(ar_0) = \cos \delta_l j_l(kr_0) - \sin \delta_l n_l(kr_0). \quad (12,42)$$

$$D_l a j_{l-1}(ar_0) = k [\cos \delta_l j_{l-1}(kr_0) - \sin \delta_l n_{l-1}(kr_0)]. \quad (12,43)$$

ამ სისტემიდან ადვილად ვიპოვით $\cos \delta_l$ და $\sin \delta_l$. მართლაც, გავიხსენოთ, რომ სისტემის დეტერმინანტი ემთხვევა ერონსკიანს, რომელიც ტოლია შემდეგი სიდიდისა [იხ. (E, 91)]:

$$\begin{vmatrix} j_l(kr_0) & -n_l(kr_0) \\ j_{l-1}(kr_0) & -n_{l-1}(kr_0) \end{vmatrix} = -\frac{1}{(kr_0)^2}. \quad (12,44)$$

გვექნება:

$$\cos \delta_l = D_l \{kr_0 j_l(ar_0) n_{l-1}(kr_0) - ar_0 j_{l-1}(ar_0) n_l(kr_0)\} / kr_0 \quad (12,45)$$

$$\sin \delta_l = D_l \{kr_0 j_l(ar_0) j_{l-1}(kr_0) - ar_0 j_{l-1}(ar_0) j_l(kr_0)\} / kr_0. \quad (12,46)$$

ამ ორი ტოლობიდან მარტივად განისაზღვრება D_l კოეფიციენტი; სახელდობრ,

$$D_l^2 = (kr_0)^2 \{ [kr_0 j_l(ar_0) n_{l-1}(kr_0) - ar_0 j_{l-1}(ar_0) n_l(kr_0)]^2 + [kr_0 j_l(ar_0) j_{l-1}(kr_0) - ar_0 j_{l-1}(ar_0) j_l(kr_0)]^2 \}. \quad (12,47)$$

შევნიშნოთ, რომ გაფანტვის თეორიაში, ხშირად გარე არის შესაბამის აზონანსს შემდეგი სახითაც წარმოადგენენ ხოლმე:

$$R_l(r) = j_l(kr) - \text{ctg } \delta_l n_l(kr) \quad r > r_0 \quad (12,48)$$

ამ გამოსახულების ასიმპტოტური სახე დიდი r -ებისათვის იქნება შემდეგი:

$$\frac{1}{\cos \delta_l} \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right). \quad (12,49)$$

ცხადია ამ შემთხვევაში (12,42) და (12,43) პირობები შეიცვლება შემდეგით:

$$D_l j_l(ar_0) = j_l(kr_0) - \text{ctg } \delta_l n_l(kr_0), \quad (12,50)$$

$$a D_l j_{l-1}(ar_0) = k [j_{l-1}(kr_0) - \text{ctg } \delta_l n_{l-1}(kr_0)], \quad (12,51)$$

საიდანაც განისაზღვრება როგორც $\text{ctg } \delta_l$, ისე D_l მუდმივები. ასე მაგალითად,

$$\text{ctg } \delta_l = \frac{j_l(kr_0) [f_l(ar_0) - f_l(kr_0)]}{f_l(ar_0) n_l(kr_0) - k n_{l-1}(kr_0)}, \quad (12,52)$$

სადაც

$$f_l(\rho r_0) = \rho \frac{j_{l-1}(\rho r_0)}{j_l(\rho r_0)}. \quad (12,53)$$

(12,52) გამოსახულებიდან შეგვიძლია ვიპოვოთ δ_l მუდმივი როგორც ენერჯის ფუნქცია. გაფანტვის თეორიის განხილვისას დაინახავთ, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს $\delta_l(J)$ სიდიდის მოძებნას.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $l=0$, მაშინ, თუ ვისარგებლებთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების გამობატულელებით, მივიღებთ:

$$\text{ctg } \delta_0 = \frac{k - a \text{ctg } ar_0 \text{ctg } kr_0}{a \text{ctg } ar_0 - k \text{ctg } kr_0}. \quad (12,54)$$

მცირე ენერჯიებზე, როცა $kr_0 \rightarrow 0$, მაშინ $a^2 \approx b^2$ და გვექნება

$$k \text{ctg } \delta_0 \approx \frac{b \text{ctg } br_0}{1 - br_0 \text{ctg } br_0}. \quad (12,55)$$

მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია მხოლოდ ორმოს პარამეტრებზე. ამ გამოსახულებას ჩვენ შემდგომში გამოვიყენებთ.

პოტენციალური ჯებირი. საინტერესოა აგრეთვე პოტენციალური ჯებირის ამოცანის განხილვა. სასრულკედლებიანი პოტენციალური ჯებირი განისაზღვრება ფორმულით

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0, & \text{როცა } r < r_0 \\ V(r) &= 0, & \text{როცა } r > r_0 \end{aligned} \quad (12,56)$$

V_0 -ს ეწოდება ჯებირის სიმაღლე, r_0 -ს კი — მისი სიგანე. ცხადია, ამ დროს საინტერესოა ისეთი ამონახსნების მოძებნა, რომლებიც აკმაყოფილებენ გაფანტვის ამოცანის სასაზღვრო პირობებს. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ნაწილაკის სრული ენერგია $E > V_0$, ე. ი. როცა ნაწილაკი ჯებირის თავზე მოძრაობს. მაშინ (12,37) აღნიშვნები ასე შეიცვლება

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad a^2 = \frac{2\mu(E - V_0)}{\hbar^2}, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}, \quad a^2 = k^2 - b^2. \quad (12,57)$$

როცა $E > V_0$, მაშინ a კვლავ ნამდვილია და ჩვენ მიერ ორმოსათვის მიღებული შედეგები უწყვეტი სპექტრისათვის უცვლელი დარჩება; სახელდობრ, კვლავ საზარტოიანი იქნება (12,52) ფორმულა.

როცა $V_0 \rightarrow \infty$, მაშინ ჯებირის გაუმჭვირვალე პოტენციალურ სფეროს ეწოდებენ. ამ შემთხვევაში (12,52), ზღვარში, როცა $a \rightarrow \infty$, მოგვეცემს

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}, \quad (12,58)$$

თუ გამოვიყენებთ ბესელის ფუნქციების ასიმპტოტურ გამოსახულებებს, (12,58) ფორმულა მცირე ენერგიებზე მოგვეცემს:

$$\operatorname{tg} \delta_l = - \frac{(kr_0)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}, \quad kr_0 \ll 1 \quad (12,59)$$

როცა $l=0$, (12,58)-დან მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \delta_0 = - \operatorname{tg} kr_0, \quad (12,60)$$

საიდანაც გაუმჭვირვალე სფეროსათვის გვექნება

$$\delta_0 = -kr_0. \quad (12,61)$$

ახლა, თუ განვიხილავთ დიდ ენერგიებს ($E, 49$) და ($E, 59$) ასიმპტოტური ფორმულების გამოყენებით, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \delta_l = - \operatorname{tg} \left(kr_0 - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (12,62)$$

საიდანაც

$$\delta_l = -kr_0 + \frac{l\pi}{2}. \quad (12,63)$$

აღსანიშნავია, რომ, როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ $\delta_l(k) \rightarrow \infty$.

პოტენციალურ ორგოს, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$V(r) = -V_0 e^{-r/r_0}, \quad (13,1)$$

'სადაც $V_0 = -V(0)$ წარმოადგენს ორგოს სიმაღლეს, r_0 კი-რადიუსს, ექსპონენციალურ ორგოს უწოდებენ. ამგვარი ტიპის ორგოსაც დიდი გამოყენება აქვს სხვადასხვა პრაქტიკულ ამოცანებში [11].

განვიხილოთ ნაწილაკი, რომელიც $l=0$ მომენტით მოძრაობს ექსპონენციალურ პოტენციალურ ორგოში. ჯერ შევისწავლოთ ბმული მდგომარეობის შემთხვევა. ეს ნაწილაკი ბმის ენერგიას კვლავ \mathcal{E} -ით აღვნიშნავთ, მაშინ შრედინგერის განტოლება (13,1) პოტენციალური ენერგიისათვის შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\frac{d^2 \chi_0}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ -\mathcal{E} + V_0 e^{-r/r_0} \right\} \chi_0 = 0. \quad (13,2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$a^2 = \frac{2\mu \mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}, \quad x = 2br_0 e^{-r/r_0}. \quad (13,3)$$

ამ აღნიშვნებში შრედინგერის განტოლება დაიყვანება ბესელის განზოგადებულ განტოლებაზე

$$x^2 \frac{d^2 \chi_0(x)}{dx^2} + x \frac{d\chi_0(x)}{dx} + [x^2 - (2ar_0)^2] \chi_0(x) = 0. \quad (13,4)$$

ამ განტოლების სათავეში რეგულარული ამონახსნი (E,25) ფორმულის თანახმად იქნება ბესელის შემდეგი ფუნქცია:

$$\chi_0(x) = J_{2ar_0}(x). \quad (13,5)$$

ამგვარად, (13,3) აღნიშვნას თუ გავიხსენებთ, შრედინგერის განტოლების ამონახსნს ექნება სახე

$$\chi_0(r) = J_{2ar_0} \left(2br_0 e^{-r/r_0} \right) \quad (13,6)$$

საკლთარი მნიშვნელობები შეგვიძლია ვიპოვოთ სასაზღვრო პირობით $r=0$ -წერტილზე. როცა $r=0$, მაშინ $\chi_0(0)=0$, რაც მოგვცემს საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას:

$$J_{2ar_0}(2br_0) = 0. \quad (13,7)$$

ეს პირობა რომ დაცული იყოს, ამისათვის საჭიროა $2br_0$ სიდიდემ მიიღოს $y=2ar_0$ რიგის ბესელის ფუნქციის ფესვების მნიშვნელობები; რაც ნიშნავს, რომ $V_0 r_0^2$ სიდიდე ისევე როგორც სწორკუთხა ორგოს შემთხვევაში, შეზღუდულია გარკვეული პირობით. როცა $y=2ar_0=0$, ე. ი. როცა $\mathcal{E}=0$ ($r_0 \neq 0$), მაშინ ბესელის $J_0(2br_0)$ ფუნქციის პირველი ფესვი 2,4048-ის ტოლია, ასე რომ

$$\frac{\sqrt{2\mu V_0}}{\hbar} 2r_0 = 2,4048. \quad (13,8)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ ორმოში მდგრადი მდგომარეობა გვექნება მაშინ, როცა შესრულებული იქნება პირობა

$$V_{0r_0}^2 > 1,4457 \frac{\hbar^2}{2\mu}. \quad (13,9)$$

როცა $r \gg r_0$, მაშინ (13,6)-ში ბესელის ფუნქციის არგუმენტი სწრაფად მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ $\chi_0(r)$ -ის ყოფაქცევას დიდი r -ებისათვის ფაქტურად განსაზღვრავს ბესელის ფუნქციის მწკრივად გაშლის პირველი წევრი.

თანახმად ($E, 7$) განმარტებისა, გვექნება

$$\chi_0(r) = \frac{1}{2^{2\alpha r_0} \Gamma(1 + 2\alpha r_0)} \left(2br_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \right)^{2\alpha r_0}, \quad r \gg r_0 \quad (13,10)$$

ეს გამოსახულება ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\chi_0(r) = Ae^{-\alpha r}, \quad r \gg r_0 \quad (13,11)$$

სადაც A მუდმივი ვანისაზღვრება ფორმულით

$$A = \frac{(br_0)^{2\alpha r_0}}{\Gamma(1 + 2\alpha r_0)}. \quad (13,12)$$

(13,11) გამოსახულება მუდმივის სიზუსტით ემთხვევა სწორკუთხა პოტენციალური ორმოს ტალღურ ფუნქციას $l=0$ შემთხვევაში.

უწვევით სპექტრის შემთხვევა. ახლა განვიხილოთ $l=0$ მომენტის ნაწილაკის მოძრაობა ექსპონენციალურ ორმოში დადებითი ენერჯიის შემთხვევაში. ამ დროს შრედინგერის (13,4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ვანისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\chi_0(r) = A_1 J_{i\omega}(x) + B_1 J_{-i\omega}(x), \quad (13,13)$$

სადაც

$$\omega = 2kr_0, \quad k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \quad (13,14)$$

მოვითხოვთ, რომ შესრულდეს სასაზღვრო პირობა $\chi_0(0) = 0$, მაშინ

$$A_1 J_{i\omega}(2br_0) + B_1 J_{-i\omega}(2br_0) = 0, \quad (13,15)$$

საიდანაც შეგვიძლია გამოვირიცხოთ B_1 მუდმივი; გვექნება:

$$\chi_0(r) = A \{ J_{-i\omega}(2br_0) J_{i\omega}(x) - J_{i\omega}(2br_0) J_{-i\omega}(x) \}. \quad (13,16)$$

ვიპოვოთ ასიმპტოტური სახე, როცა $r \rightarrow \infty$. ცხადია, რომ, როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ $x \rightarrow 0$. ამიტომ

$$J_{\pm i\omega}(x) \simeq \frac{x^{\pm i\omega}}{2^{\pm i\omega} \Gamma(1 \pm i\omega)} = \frac{(br_0)^{\pm i\omega}}{\Gamma(1 \pm i\omega)} e^{\mp ikr}. \quad (13,17)$$

მაშასადამე, დიდი r -ებისათვის ამონახსნს ექნება შემდეგი ასიმპტოტური სახე:

$$\chi_0(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{=} A \frac{J_{-i\omega}(2br_0)(br_0)^{i\omega}}{\Gamma(1 + i\omega)} \left\{ e^{-ikr} - \left[(br_0)^{-i\omega} \frac{J_{i\omega}(2br_0)}{J_{-i\omega}(2br_0)} \frac{\Gamma(1 + i\omega)}{\Gamma(1 - i\omega)} \right] e^{ikr} \right\}. \quad (13,18)$$

ომისათვის, რომ უწყვეტი სპექტრის ფუნქციის ნორმირებას ჰქონდეს გაფანტვის ამოცანისათვის დამახასიათებელი შინაარსი (იხ. § 7 და § 8), საჭიროა ავიღოთ:

$$A \frac{J_{-i\omega}(2br_0)(br_0)^{i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\delta_0}}{2i}, \quad (13,19)$$

$$e^{2i\delta_0(k)} = (br_0)^{-2i\omega} \frac{J_{i\omega}(2br_0)}{J_{-i\omega}(2br_0)} \frac{\Gamma(1+i\omega)}{\Gamma(1-i\omega)}. \quad (13,20)$$

ამ ფორმულებს გამოვიყენებთ გაფანტვის თეორიის განხილვის დროს.

§ 14. ნულოვანი კმედების რადიუსის პოტენციალური ორგო

ნულოვანი კმედების რადიუსის პოტენციალური ორგო ხშირად გამოიყენება ატომბირთვის ფიზიკაში [12]. ორგოს ეკვებტურობა, როგორც ადრე დავინახეთ, არაა დამოკიდებული მხოლოდ მის სიღრმეზე; იგი განისაზღვრება $V_0 r_0^2$ ნამრავლით, რომელიც მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ კმედების r_0 რადიუსი მიიწვრავს ნულისაკენ, მაშინ, სამაგიეროდ, ორგოს V_0 სიღრმე, როგორც $\frac{1}{r_0^2}$ სიდიდე, უნდა მიიწვრავდეს უსასრულობისაკენ. როცა ნაწილაკები ურთიერთკმედებზე ნულოვანი კმედების რადიუსის ძალებით, მაშინ ურთიერთკმედება ხდება მხოლოდ $r=0$ წერტილში, ამიტომ ცენტრგამშორი პოტენციალური ენერგია $\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} l(l+1)$.

უსასრულოდ დიდია ნულისაგან განსხვავებული მომენტისათვის. სასრული ენერგიის ნაწილაკები ასეთ პოტენციალურ ჯებირს ვერ გადალახავენ და ერთმანეთს სამოკმედოდ ვერ მიუახლოვდებიან. ამიტომ ნულოვანი კმედების რადიუსის პოტენციალის შემთხვევაში მნიშვნელოვანი იქნება ურთიერთკმედება მხოლოდ $l=0$ მდგომარეობაში.

ჯერ განვიხილოთ შემდეგი ტიპის კონტაქტური პოტენციალი:

$$V(r) = -V_0 \delta(r-r_0), \quad (14,1)$$

სადაც პოტენციალის სიღრმე V_0 -ით განისაზღვრება (შეენიშნოთ, რომ ენერგიის განზომილება ექნება $V_0 r_0$ ნამრავლს). თანახმად (14.1) ფორმულისა, ურთიერთკმედება ხდება მაშინ, როცა ნაწილაკი იძყოფება ცენტრიდან r_0 რადიუსიან სფეროზე, ამასთან, ეს ურთიერთკმედება უსასრულოდ დიდია, მაშინ როცა სფეროს არც შიგნით და არც გარეთ ურთიერთკმედება არა გვაქვს. როცა (14.1) პოტენციალში ავიღებთ $r=0$ ზღვრულ მნიშვნელობას, მივიღებთ ნულოვანი კმედების რადიუსის პოტენციალს. ვიგულისხმობთ, რომ r_0 ძალიან მცირე სიდიდეა და ზემოთქმულის ძალით შემოვისაზღვროთ $l=0$ მომენტით. პოტენციალის ხასიათის მიხედვით საჭიროა დაიწეროს სამი არის შესაბამისი შრეღინგერის განტოლება. პირველი არე იქნება $r < r_0 - \eta$, სადაც η უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. ამ არეში დირაკის დელტა ფუნქცია ნულის ტოლი იქნება. იგივე სახე ექნება განტოლებას. $r > r_0 + \eta$ არ სთვითაც. კონკრეტულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ $E = -\mathcal{E} < 0$, მაშინ გვექნება:

$$\frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} - a^2 \chi(r) = 0, \quad r < r_0 - \eta, \quad r > r_0 + \eta. \quad (14,2)$$

$$a^2 = \frac{2\mu g}{\hbar^2} \quad (14,3)$$

რაც შეეხება $r_0 - \eta < r < r_0 + \eta$ არეს, ამ არეში, პირიქით, ღირაკის დელტა ფუნქციის შემცველი წვერი დიდია, რის გამოც ენერგია შეგვიძლია უგულებელვყოთ. გვექნება:

$$\frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + b^2 \delta(r - r_0) \chi(r) = 0, \quad (r_0 - \eta < r < r_0 + \eta) \quad (14,4)$$

ამასთან ჩვენ შემოვიღეთ სტანდარტული აღნიშვნა:

$$b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \quad (14,5)$$

უკანასკნელი განტოლება კვივალენტურია სასაზღვრო პირობისა, რომელიც ედება $\chi(r)$ ფუნქციის ლოგარიტმულ წარმოებულს. მართლაც, ეს განტოლება გავინტეგრალთ $(r_0 - \eta, r_0 + \eta)$ შუალედში და გავითვალისწინოთ ღირაკის ფუნქციის ფილტრაციის თვისება; გვექნება:

$$\left[\frac{d\chi(r)}{dr} \right]_{r_0 - \eta}^{r_0 + \eta} = -b^2 \chi(r_0) \quad (14,6)$$

რადგან $\chi(r)$ ფუნქცია უწყვეტი უნდა იყოს $r = r_0$ წერტილზე, ე. ი.,

$$\chi(r_0 + \eta) = \chi(r_0 - \eta) = \chi(r_0) \quad (14,7)$$

ამიტომ (14,6) ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\left[\frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dr} \right]_{r_0 + \eta} - \left[\frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dr} \right]_{r_0 - \eta} = -b^2 \quad (14,8)$$

მაშასადამე, ლოგარიტმულ წარმოებულებს ექნებათ სასრული ნახტომი $r = r_0$ წერტილზე.

ახლა განვიხილოთ შრედინგერის (14,2) განტოლების ამონახსნები. ცხადია, ამ ამონახსნებს ექნებათ გამოხატულებანი

$$\chi(r) = A e^{ar}, \quad r < r_0 \quad (14,9)$$

$$\chi(r) = B e^{-ar}, \quad r > r_0 \quad (14,10)$$

A და B კოეფიციენტები განესაზღვროთ $\chi(r)$ ფუნქციის უწყვეტობისა და ნორმირების პირობების გამოყენებით. უწყვეტობა $r = r_0$ წერტილზე მოგვცემს:

$$B = A e^{2ar_0} \quad (14,11)$$

ნორმირების პირობას ექნება გამოხატულება:

$$\int_0^{r_0} |\chi|^2 dr + \int_{r_0}^{\infty} |\chi|^2 dr = 1, \quad (14,12)$$

რაც (14,9) და (14,11) იკორმულების გამოყენებით მოგვცემს:

$$A = \left(\frac{2a}{2i a r_0 - 1} \right)^{1/2} \quad (14,13)$$

მაშასადამე, ნორმირებული ტალღური ფუნქციისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$\chi(r) = \left(\frac{2\alpha}{2e^{2\alpha r_0} - 1} \right)^{1/2} e^{\alpha r}, \quad r \leq r_0 \quad (14,14)$$

$$\chi(r) = \left(\frac{2\alpha}{2e^{2\alpha r_0} - 1} \right)^{1/2} e^{3\alpha r_0} e^{-\alpha r}, \quad r \geq r_0 \quad (14,15)$$

განსასაზღვრი დაგვრჩა ბმის ენერგია, ამავე დროს გვაქვს ერთი გამოუყენებული (14,8) პირობაც. ამ პირობაში ამონახსნების შეტანით მივიღებთ:

$$2\alpha = b^2, \quad (14,16)$$

საიდანაც (14,5) და (14,3) აღნიშვნების გამოყენებით გვექნება:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu V_0^2}{2\hbar^2}. \quad (14,17)$$

როცა $r_0 \rightarrow 0$, მაშინ გვექნება ერთი ფუნქცია

$$\chi(r) = \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha r}, \quad (r \geq 0) \quad (14,18)$$

რამდენადაც $\psi(r) = R(r)Y_{00}(\bar{r})$, ამიტომ სრული ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$\psi(r) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r}}{r}. \quad (14,19)$$

ეს ფუნქცია ხშირად გამოიყენება ნულოვანი კმედების რადიუსის ძალებით ნაწილაკთა ურთიერთქმედების შემთხვევაში.

ახლა განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა პოტენციალის კონკრეტული სახე არ გვაინტერესებს, თონონ იგი აკმაყოფილებდეს პირობას, რომ დაფიქსირებული ბმის ენერგიისათვის $\mathcal{E}/V_0 \rightarrow 0$. ეს შესაძლებელია მაშინ, როცა ორმოს სიმალლე $V_0 \rightarrow \infty$, ამასთან, ორმოს სიგანე $r_0 \rightarrow 0$ -საკენ ისე, რომ $V_0 r_0^2$ მუდმივი დარჩეს.

რადგან ორმოს გარეთ ამონახსნს ექნება $e^{-\alpha r}$ სახე, ამიტომ უწყვეტობის პირობით ორმოს საზღვარზე გვექნება ტოლობა:

$$\left[\frac{1}{\chi(r)} \frac{d\chi(r)}{dr} \right]_{r=r_0} = -\alpha. \quad (14,20)$$

როცა $r_0 \rightarrow 0$, მაშინ V_0 -ის დიდი მნიშვნელობის გამო ენერგია უმნიშვნელოდ შეიცვლება, ამიტომ E ენერგიის \mathcal{E} -ბმის ენერგიით შეცვლით შიგა არის ტალღური ფუნქცია არსებითად არ შეიცვლება; მაშასადამე, არ შეიცვლება (14,20) სასაზღვრო პირობაც. ამგვარად, $r=0$ წერტილზე გვექნება:

$$\left[\frac{d}{dr} \ln \chi(r) \right]_{r=0} = -\alpha. \quad (14,21)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ წერტილოვანი ურთიერთქმედება შეიძლება აიწეროს მხოლოდ ერთი პარამეტრით—ტალღური ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებულით სათავეში. მაშასადამე, წერტილოვანი ურთიერთქმედება ეკვივალენტურია სასაზღვრო პირობისა.

წერტილოვანი ურთიერთქმედების პოტენციალისათვის აღვიღალ შევისწავლით უწყვეტი სპექტრის ამოცანასაც.

სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება დიდ როლს ასრულებს ატომის ფიზიკაში. როგორც ვიცით, იგი აპირობებს სპექტრის მულტიპლეტურ სტრუქტურას. აღსანიშნავია, რომ სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება ატომის გულშიც საკმარისად მძლავრ ეფექტებს იწვევს. ეს ურთიერთქმედება საფუძვლად დაედო ატომგულის ე. წ. ვარსული მოდელის დასაბუთებას. ატომგულის ძალების პოტენციალი უცნობია, ამიტომ ამ ურთიერთქმედებას ცვლიან ფიქტიური ურთიერთქმედებით, რომელიც ხშირად პოტენციალური ორმოს სახით აიღება. ამიტომ მნიშვნელოვანია ამოიხსნას პოტენციალური ორმოს ამოცანა სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების მხედველობაში მიღებით [13].

სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების პოტენციალი, როცა ნაწილაკი მოძრაობს $V(r)$ ცენტრალურ ველში, შემდგენიარად განისაზღვრება:

$$U_{sl}(r) = \frac{1}{2\mu^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} (\hat{s} \cdot \hat{l}), \quad (15,1)$$

სადაც μ დაყვანილი მასაა, s -ნუკლონის სპინი, \hat{l} -ორბიტალური მომენტი, ხოლო c -სინათლის სიჩქარე. რადგან $(\hat{s} \cdot \hat{l})$ სკალარული ნამრაველი კომუტატურია \hat{J}^2 , \hat{l}^2 და \hat{s}^2 -თან, ამიტომ $(\hat{s} \cdot \hat{l})$ -ის საკუთარი მნიშვნელობები განისაზღვრება ფორმულით

$$(s \cdot l) = \frac{\hbar^2}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \}. \quad (15,2)$$

რადგან ნუკლონის სპინი ნახევრის ტოლია, ამიტომ $s = 1/2$, ხოლო სრული მენტი j -მომენტი აზიმუტალურ l -კვანტურ რიცხვთან დაკავშირებულია $j = |l \pm 1/2|$ ფორმულით. ასე რომ $(s \cdot l)$ გამოსახულება დებულობს ორ მნიშვნელობას:

$$(s \cdot l) = -\frac{\hbar^2 l}{2}, \quad \text{როცა } j = l + 1/2 \quad (15,3)$$

$$(s \cdot l) = -\frac{\hbar^2(l+1)}{2}, \quad \text{როცა } j = |l - 1/2|.$$

აშკარაა, რომ სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება სისტემის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობაზე არ მოქმედებს, ამიტომ შრედინგერის განტოლებაში $(s \cdot l)$ წევრი შევა როგორც გარკვეული მუდმივი.

სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების გათვალისწინებით შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E - V(r) - \frac{a_l}{r} \frac{dV(r)}{dr} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right\} \chi_l(r) = 0, \quad (15,4)$$

სადაც

$$a_l = \left(\frac{\hbar}{2\mu c} \right)^2 \begin{cases} l, & \text{როცა } j = l + 1/2, \\ -(l+1), & \text{როცა } j = |l - 1/2|. \end{cases} \quad (15,5)$$

ახლა, ვთქვათ, $V(r)$ წარმოადგენს შემდეგ პოტენციალურ ორმოს:

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0, & \text{როცა } r < r_0 \\ V(r) &= 0, & \text{როცა } r > r_0 \end{aligned} \quad (15,6)$$

ჩაღვან ორმოსათვის პოტენციალური ენერგია მუდმივია როგორც $r < r_0$, ისე $r > r_0$ -სათვის, ამიტომ ამ არეში $\frac{dV}{dr} = 0$. $r = r_0$ წერტილში კი პოტენციალურ ენერ-

გიას აქვს სასრული V_0 ნახტომი, ამიტომ წარმოებული ამ წერტილში უსასრულოდის ტოლია. ასე რომ ორმოს შემთხვევაში სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება დაიყვანება ღირაკის დელტა ფუნქციაზე

$$\frac{a_1}{r} \frac{dV(r)}{dr} = a_1 V_0 \frac{\delta(r-r_0)}{r}; \quad (15,7)$$

ამგვარად, სპინ-ორბიტალურ პოტენციალს ორმოსათვის მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ $r=r_0$ წერტილზე, ამიტომ, ნაცვლად ორი არისა, რომელიც გვექონდა (15,6) ორმოს განხილვისას, გვექნება მოძრაობის მესამე არეც, რომელიც ვრცელდება r_0 წერტილის უშუალო მახლობლობაში $r_0 - \eta \leq r \leq r_0 + \eta$, სადაც η უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. ამ სამი არისათვის გვექნება შრედინგერის სამი განტოლება:

$$\frac{d^2 \chi_i^I}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ -\mathcal{E} + V_0 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right\} \chi_i^I(r) = 0, \quad r \leq r_0 - \eta \quad (15,8)$$

$$\frac{d^2 \chi_i^I}{dr^2} - k^2 a_1 \frac{\delta(r-r_0)}{r} \chi_i^I(r) = 0, \quad r_0 - \eta \leq r \leq r_0 + \eta \quad (15,9)$$

$$\frac{d^2 \chi_i^a}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ -\mathcal{E} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right\} \chi_i^a(r) = 0, \quad r \geq r_0 + \eta \quad (15,10)$$

ამ განტოლებებს აზრს აქვთ ზღვარში, როცა $\eta \rightarrow 0$, \mathcal{E} -ბმის ენერგიაა, ხოლო $b^2 = 2\mu V_0 \hbar^{-2}$. i მიუთითებს შიგა არის ფუნქციას, ხოლო a -გარე არისას. ამ განტოლებების ამოხსნები უწყვეტი უნდა იყოს მთელ სივრცეში, კერძოდ $r=r_0$ წერტილზეც.

როგორც ვხედავთ, (15,8) და (15,10) განტოლებებს ისეთივე ამონახსნები ექნებათ, რაც გვექონდა ორმოსათვის; სახელობრ:

$$\chi_i^I(r) = A_i r^j j_l(\beta r), \quad r < r_0 \quad (15,11)$$

$$\chi_i^a(r) = A_i \frac{j_l(\beta r_0)}{k_l(\alpha r_0)} r k_l(\alpha r), \quad r > r_0 \quad (15,12)$$

ვაპოვით (15,9) განტოლების ამონახსნი. მოვახდინოთ ამ განტოლების ინტეგრაცია r_0 წერტილის უშუალო მახლობლობაში, გვექნება:

$$\left(\frac{d\chi_i^a}{dr} \right)_{r_0} - \left(\frac{d\chi_i^I}{dr} \right)_{r_0} = \frac{b^2 a_1}{r_0} \chi_i(r_0), \quad (15,13)$$

ჩაღვან $\chi_i^I(r_0) = \chi_i^a(r_0) = \chi_i(r_0)$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\frac{1}{\chi_i^a(r_0)} \left(\frac{d\chi_i^a}{dr} \right)_{r_0} - \frac{1}{\chi_i^I(r_0)} \left(\frac{d\chi_i^I}{dr} \right)_{r_0} = \frac{b^2 a_1}{r_0}. \quad (15,14)$$

თუ გამოვიყენებთ (15,11) და (15,12) ამონახსნებს, (15,14) პირობა მოგვცემს საკუთარი მნიშვნელობების შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\beta_{j_{l-1}}(\beta r_0)}{j_l(\beta r_0)} = -\frac{\alpha_{k_{l-1}}(\alpha r_0)}{k_l(\alpha r_0)} - \frac{b^2 \alpha_l}{r_0} \quad (15,15)$$

როცა სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება არა გვაქვს, მაშინ $\alpha_l = 0$ და (15,15) განტოლება დაემთხვევა (12,14) განტოლებას. ასევე არ შეიცვლება ენერგია $l=0$ მდგომარეობაში, რადგან ამ შემთხვევაშიც, როგორც მოსალოდნელი იყო, $\alpha_l = 0$. სხვა დანარჩენ შემთხვევებში α_l -ს ექნება ორი მნიშვნელობა, იმის მიხედვით, $j = l + 1/2$, თუ $j = |l - 1/2|$. მაშასადამე, j -ს ამ ორი შესაძლო მნიშვნელობის მიხედვით (15,15) განტოლება ორად გაიყოფა. ამიტომ ენერგიის მნიშვნელობა $j = l + 1/2$ შემთხვევაში განსხვავებული იქნება $j = |l - 1/2|$ -ის შესაბამისი ენერგისაგან. მაშასადამე, სრული მექანიკური მომენტის ორი მნიშვნელობის მიხედვით ორმოში თითოეული ენერგეტული დონე ორად იქნება გახლეჩილი. ტალღური ფუნქციები კი ისეთივენი იქნებიან, რაც ორმოს შემთხვევაში სპინ ორბიტალური ურთიერთქმედების გარეშე, ე. ი. (15,11) და (15,12) ფუნქციები.

საკუთარი მნიშვნელობების (15,15) განტოლების ამოხსნა შეიძლება მიახლოებითი მეთოდებით. ეს განტოლება ამოვწეროთ კერძო შემთხვევაში, როცა $l=1$; (E,39) და (E,83) ფორმულების გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{(\beta r_0)^2}{1 - \beta r_0 \operatorname{ctg} \beta r_0} = -\frac{(\alpha r_0)^2}{1 + \alpha r_0} - \frac{V_0}{2\mu c^2}, \quad j = \frac{3}{2} \quad (15,16)$$

$$\frac{(\beta r_0)^2}{1 - \beta r_0 \operatorname{ctg} \beta r_0} = -\frac{(\alpha r_0)^2}{1 + \alpha r_0} + \frac{V_0}{\mu c^2}, \quad j = \frac{1}{2} \quad (15,17)$$

ამ განტოლებების ამოხსნა შეიძლება, მაგალითად, გრაფიკული მეთოდით.

§ 18. ჰულტენის პოტენციალი

განვიხილოთ კიდევ ერთი პოტენციალი. რომლისთვისაც $l=0$ მდგომარეობაში შრედინგერის განტოლება ზუსტად იხსნება. ეს არის ე. წ. ჰულტენის პოტენციალი

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{1 - e^{-\frac{r}{r_0}}} \quad (16,1)$$

ნუკლონ-ნუკლონის ურთიერთქმედებას ხშირად ამ პოტენციალის სახით იხილავენ. V_0 მუდმივი პოტენციალური ენერგიის სიღრმის როლს ასრულებს, r_0 -კი—ურთიერთქმედების რადიუსისას. (16,1) პოტენციალი დიდ მანძილებზე ($r \gg r_0$) ექსპონენციალური პოტენციალის სახით იცვლება, მცირე მანძილებზე კი $\frac{1}{r}$ ტიპის ურთიერთქმედებას აღწერს. იმ დროს, როცა იუკავას პოტენციალისათვის შრედინგერის განტოლება ზუსტად არ იხსნება l -ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის, (16,1) პოტენ-

(კალის შემთხვევაში $l=0$ -სათვის შრედინგერის განტოლება ზუსტად იწინება. [14,15].

ჯერ განვიხილოთ ბმული მდგომარეობა. შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლებას $l=0$ -სათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[-\alpha^2 + b^2 \frac{e^{-r/r_0}}{1 - e^{-r/r_0}} \right] \chi(r) = 0, \quad (16,1)$$

სადაც

$$\alpha^2 = \frac{2\mu\epsilon^2}{\hbar^2}, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (16,2)$$

(16,1) განტოლების ამონახსნი უსასრულობაში სწრაფად უნდა მისწრაფოდეს ნულისაკენ, ამიტომ, ბუნებრივია, ეს ამონახსნა წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\chi(r) = f(r)e^{-\alpha r} \quad (16,3)$$

ამ გამოსახულების (16,1) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ განტოლებას, რომელსაც $f(r)$ უნდა აკმაყოფილებდეს. სახელდობრ, გვექნება:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - 2\alpha \frac{df}{dr} + b^2 \frac{e^{-r/r_0}}{1 - e^{-r/r_0}} f(r) = 0. \quad (16,4)$$

ამ უკანასკნელში ახალი

$$x = e^{-r/r_0} \quad (16,5)$$

ცვლადის შემოღებით მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$x(1-x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + [1 + 2\alpha r_0 - (1 + 2\alpha r_0)x] \frac{df(x)}{dx} + (br_0)^2 f(x) = 0, \quad (16,6)$$

რომელიც წარმოადგენს ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების განტოლებას; მის ამონახსნას ექნება ასეთი სახე

$$f(r) = F(A, B, C, e^{-r/r_0}), \quad (16,7)$$

სადაც

$$C = 1 + 2\alpha r_0,$$

$$A + B = 2\alpha r_0, \quad (16,8)$$

$$AB = -(br_0)^2.$$

ამ ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$A = \alpha r_0 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} \right], \quad (16,9)$$

$$B = \alpha r_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} \right], \quad C = 1 + A + B.$$

როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ $x \rightarrow 0$ და $F(A, B, C, 0) = 1$; ასე რომ სასაზღვრო პირობა უსასრულობაში დაცული იქნება; მოვითხოვთ, რომ დაცული იყოს სასაზღვრო პირობა სათავეში. კერძოდ, როცა $r=0$, მაშინ საჭიროა $\chi(0)=0$. ეს უკანასკნელი მოითხოვს

$$F(A, B, C, 1) = 0, \quad (16,10)$$

ჩვენ კი ვიცით, რომ [იხ. ფორმულა (J), 60)]

$$F(A, B, C, 1) = \frac{\Gamma(C) \Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A) \Gamma(C-B)}. \quad (16,11)$$

(16,9) ფორმულების თანახმად $\Gamma(C-A-B) = \Gamma(1) = 1$, ხოლო რადგან $C-A = 1+B$ და $C-B = 1+A$, ამიტომ გვექნება

$$F(A, B, C; 1) = \frac{\Gamma(1+A+B)}{\Gamma(1+B) \Gamma(1+A)} = \frac{(A+B) \Gamma(A+B)}{AB \Gamma(A) \Gamma(B)}. \quad (16,12)$$

თუ გავიხსენებთ ეილერის $B(\alpha, \beta)$ ინტეგრალის შემდეგ ფორმულას:

$$B(\alpha, \beta) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{n(\alpha + \beta + n)}{(\alpha + n)(\beta + n)}, \quad (16,13)$$

მაშინ მარტივად მივიღებთ, რომ

$$F(A, B, C; 1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(A+n)(B+n)}{n(A+B+n)} = 0. \quad (16,14)$$

(16,9) ფორმულების გამოყენებით ამ გამოსახულებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(br_0)^2}{n(n+2\alpha r_0)} \right] = 0, \quad (16,15)$$

საიდანაც

$$1 - \frac{(br_0)^2}{n(n+2\alpha r_0)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16,16)$$

რაც მოგვცემს:

$$\alpha_n = \frac{(br_0)^2 - n^2}{2r_0 n} = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 r_0}{n} - \frac{n}{r_0} \right). \quad (16,17)$$

ამასთან, ცხადია, შესრულებული უნდა იყოს პირობა $(br_0)^2 > n^2$, ე. ი. n რიცხვი შემოსაზღვრულია ზემოდან

$$n \leq br_0 = \frac{\sqrt{2\mu V_0} r_0}{h} \equiv N; \quad (16,18)$$

მაშასადამე, (16,2)-ის გათვალისწინებით (16,17)-დან ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$\mathfrak{E}_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{(br_0)^2 - n^2}{2r_0 n} \right]^2; \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (16,19)$$

როცა $r_0 \rightarrow \infty$, მაშინ, ცხადია, $b^2 r_0$ სასრული სიდიდეა და

$$\alpha_n = \frac{b^2 r_0}{2n} \quad (16,20)$$

ყოველთვის დადებითია, ხოლო ენერგიისათვის, ისევე როგორც კულონურ ველში, ბმული მდგომარეობების უსასრულოდ ბევრი რაოდენობა გვექნება.

ახლა ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციის ცხადი სახე ძირითად მდგომარეობაში, როცა $n=1$.

თანახმად (16,3) ფორმულისა, (16,7) გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\chi(r) = e^{-ar} \left\{ 1 + \frac{AB}{C!} e^{-r/r_0} + \frac{A(A+1)B(B+1)}{C(C+1)2!} e^{-2r/r_0} + \dots + \right\}. \quad (16,21)$$

გავითვალისწინოთ (16,16) პირობა, რომელიც (16,8) გამოსახულებების მხედველობაში მიღებით ასე გადაიწერება:

$$AB = -n(n+A+B). \quad (16,22)$$

ამ პირობის გამოყენებით

$$(A+1)(B+1) = -n(n+A+B) + C. \quad (16,23)$$

ორი უკანასკნელი ფორმულის გამოყენებით, რადგან $A+B+1=C$, $n=1$ -სათვის (16,21) გამოსახულება მოგვცემს:

$$\chi(r) = A_0 e^{-ar} (1 - e^{-r/r_0}). \quad (16,24)$$

შევვიძლია მოვახდინოთ ამ ფუნქციის ნორმირება. თანახმად (7,14) ნორმირების პირობისა, გვექნება

$$A_0 = \sqrt{2\alpha(1+\alpha r_0)(1+2\alpha r_0)}. \quad (16,25)$$

მაშასადამე, პულტენის ფუნქციას ძირითადი მდგომარეობისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$R_{10}(r) = A_0 \frac{e^{-ar} - e^{-br}}{r}, \quad (16,26)$$

სადაც ნორმირების A_0 მუდმივი განისაზღვრება (16,25) ფორმულით, ხოლო

$$\beta = \alpha + \frac{1}{r_0}. \quad (16,27)$$

$\psi_{100}(r)$ ფუნქციის მისაღებად საჭიროა (16,26) ფუნქცია გავამრავლოთ $(4\pi)^{-1/2}$ მამრავლზე; ასე რომ

$$\psi_{100}(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi} (1+\alpha r_0)(1+2\alpha r_0)} \frac{e^{-ar} - e^{-br}}{r}. \quad (16,28)$$

სათავეში ეს ფუნქცია მუდმივი რიცხვის ტოლი იქნება $\psi_{100}(0) = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi}}$.

ახლა განვიხილოთ უწყვეტი სპექტრის შემთხვევა. ტალღური ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\chi(r) = e^{-ikr} g(r), \quad (16,29)$$

მაშინ $g(r)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს (16,6) განტოლებას, სადაც α უნდა შეიცვალოს $+ik$ სიდიდით. ამ განტოლების ამონახსნი იქნება:

$$g(r) = F(A, B, C; e^{-r/r_0}), \quad (16,30)$$

სადაც F —ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა შემდეგი პარამეტრებით:

$$A = ikr_0 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}} \right], \quad (16,31)$$

$$B = ikr_0 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}} \right], \quad (16,32)$$

$$C = 1 + 2ikr_0. \quad (16,33)$$

შეგნიშნოთ, რომ ღიდ მანძილებზე, როცა $r \rightarrow \infty$ გვექნება: $g(r)=1$; მაშასადამე,

$$\chi(r) = e^{-ikr}. \quad (16,34)$$

ამ ამონახსნებს შემდგომში გამოვიყენებთ იოსტის ფუნქციების განხილვის დროს.

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ, როცა ტალღური ფუნქცია წარმოიღვინება

$$\chi(r) = e^{ikr} g(r) \quad (16,35)$$

სახით, მაშინ $g(r)$ ფუნქცია გამოხატული იქნება კვლავ (16,30) ფორმულით, თლონდ ამ შემთხვევაში პარამეტრებს ექნებათ სახე:

$$A = -ikr_0 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}} \right], \quad (16,36)$$

$$B = -ikr_0 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}} \right], \quad (16,37)$$

$$C = 1 - 2ikr_0. \quad (16,38)$$

ღიდ მანძილებზე, როცა $r \rightarrow \infty$ კვლავ გვექნება $g(r)=1$, მაშასადამე. $\chi(r)$ -ს ექნება e^{ikr} ასიმპტოტური გამოხატულება.

§ 17. პოტენციალური ორმოს ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში

ვიპოვოთ პოტენციალური ორმოს ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში. როგორც ვიცით, იმპულსური წარმოდგენის ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$N_{lm}(k) = \Omega_l(k) Y_{lm}(\bar{k}), \quad (17,1)$$

სადაც

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty R_l(r) j_l(kr) r^2 dr. \quad (17,2)$$

ეს ფორმულები გამოვიყენოთ და უპირველესად ვიპოვოთ უსასრულო კედლების მქონე პოტენციალური ორმოს იმპულსური წარმოდგენის ფუნქციები. ასეთი ორმოს კოორდინატული ტალღური ფუნქცია განისაზღვრება (11,14) ფორმულით, ამიტომ (17,2) გამოსახულება მოგვეცემს:

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_l \int_0^{r_0} j_l \left(t_{lnr} \frac{r}{r_0} \right) j_l(kr) r^2 dr. \quad (17,3)$$

ინტეგრალი გავრცელებულია მხოლოდ (0, r_0) არეზე, რადგან $r > r_0$ -სათვის ტალღური ფუნქცია ნულის ტოლია. C_l ნორმირების კოეფიციენტია. (17,3)-ში შემავალი ინტეგრალი მარტივად აიღება (E , 99) ფორმულის გამოყენებით; შედეგად მივიღებთ:

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_l r_0^3 \frac{k j_l(d_{lnr}, r_0) j_{l-1}(kr_0) - d_{lnr} j_{l-1}(d_{lnr}, r_0) j_l(kr_0)}{d_{lnr}^2 - k^2}, \quad (17,4)$$

სადაც $d_{l n_r} = t_{l n_r} / r_0$. საკუთარი მნიშვნელობების (11,7) განტოლების ძალით $j_l(d_{l n_r}, r_0) = j_l(t_{l n_r}) = 0$, ამიტომ

$$\Omega_l(k) = -(-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} r_0^2 C_l \frac{d_{l n_r} j_{l-1}(t_{l n_r}) j_l(k r_0)}{d_{l n_r}^2 - k^2}, \quad (17,5)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\gamma_l = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_l r_0^2 d_{l n_r} j_{l-1}(t_{l n_r}), \quad (17,6)$$

მაშინ იმპულსური წარმოდგენის ტალღური ფუნქცია ასე წარმოგვიდგება:

$$\Omega_l(k) = \gamma_l \frac{j_l(k r_0)}{k^2 - d_{l n_r}^2}. \quad (17,7)$$

ამ გამოსახულების აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატი განსაზღვრავს იმპულსის სიდიდის განაწილების ალბათობის სიმკვრივეს უსასრულო კედლებიან პოტენციალურ ორბოში

$$w_l(k) = |\gamma_l|^2 \frac{j_l^2(k r_0)}{(k^2 - d_{l n_r}^2)^2}. \quad (17,8)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები: 1) როცა $k r_0 \ll 1$, მაშინ

$$j_l(k r_0) \approx \frac{l!}{(2l+1)!} (2k r_0)^l; \quad k r_0 \ll 1 \quad (17,9)$$

გარდა ამისა, რადგან ბესელის ფუნქციის ყველა ფესვი $t_{l n_r} > 1$, ამიტომ $k^2 \ll d_{l n_r}^2$ და (17,8) გამოსახულების მნიშვნელში შეგვიძლია k^2 უგულებელვყოთ. მაშინ მივიღებთ, რომ ალბათობის სიმკვრივე პროპორციული იქნება k^{2l} -ისა, ე. ი.

$$w_l(k) \sim k^{2l}. \quad (17,10)$$

2) როცა $k r_0 \gg 1$ და, ამავე დროს, $k > d_{l n_r}$, მივიღებთ

$$w_l(k) \sim \frac{\sin^2\left(k r_0 - \frac{l\pi}{2}\right)}{k^2 (k^2 - d_{l n_r}^2)^2}. \quad (k r_0 < t_{l n_r} > 1) \quad (17,11)$$

3) განვიხილოთ არსებითი შემთხვევა, როცა $k r_0$ მნიშვნელობა ემთხვევა $j_l(k r_0)$ ფუნქციის ფესვებს. როცა $k = d_{l n_r}$, მაშინ (17,8) გამოსახულების მრიცხველი და მნიშვნელიც ნულის ტოლია. გავხსნათ განუზღვრელობა ლოპიტალის წესით. რადგან

$$\frac{d j_l(k r_0)}{d k} = r_0 j_{l-1}(k r_0) - \frac{l+1}{k} j_l(k r_0) \quad (17,12)$$

და $j_l(d_{l n_r}, r_0) = 0$, ამიტომ

$$\left[\frac{d j_l(k r_0)}{d k} \right]_{k=d_{l n_r}} = r_0 j_{l-1}(d_{l n_r}, r_0). \quad (17,13)$$

ამგვარად, „რეზონანსის წერტილში“, ე. ი. როცა $k = d_{inr}$ ალბათობისათვის მივიღებთ:

$$w_l(k) = |\gamma_l|^2 r_0^2 \frac{j_{l-1}(k r_0)}{4 d_{inr}^2} \quad (17,14)$$

ამ შემთხვევაში ალბათობის განაწილებას აქვს „რეზონანსული“ მაქსიმუმი. ეს იმას ნიშნავს, რომ უსასრულო კედლებიან ორმოში მოძრავი ნაწილაკის $E_h = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$

კინეტიკური ენერჯის გაზომვისას ყველაზე სააღბათო იქნება $E_{inr} = \frac{\hbar^2 d_{inr}^2}{2\mu r_0^2}$ მნიშვნელობა, რომელიც ემთხვევა ორმოს ენერჯის საკუთარ მნიშვნელობებს.

ახლა ვიპოვოთ სასრული სიმაღლის კედლების მქონე პოტენციალური ორმოს ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში. (12,10) ფორმულების გამოყენებით (17,2) მოგვეცემს:

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_l \left\{ \int_0^{r_0} j_l(\beta r) j_l(kr) r^2 dr + \frac{j_l(\beta r_0)}{k_l(\alpha r_0)} \int_{r_0}^{\infty} k_l(\alpha r) j_l(kr) r^2 dr \right\}. \quad (17,15)$$

თუ ვისარგებლებთ (E, 99) და (E, 100) ფორმულებით, გვექნება:

$$\Omega_l(k) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_l \left\{ \frac{k r_0^2 j_l(\beta r_0) j_{l-1}(k r_0) - \beta r_0^2 j_l(k r_0) j_{l-1}(\beta r_0)}{\beta^2 - k^2} - \frac{j_l(\beta r_0) \alpha r_0^2 j_l(k r_0) k_{l-1}(\alpha r_0) - k r_0^2 j_{l-1}(k r_0) k_l(\alpha r_0)}{\alpha^2 + k^2} \right\} \quad (17,16)$$

გამოვიყენოთ საკუთარი მნიშვნელობების (12,14) განტოლება $k_l(\alpha r_0)$ და $k_{l-1}(\alpha r_0)$ ფუნქციების გამოსარიცხავად; მივიღებთ:

$$\Omega_l(k) = M_l \left[\frac{1}{\beta^2 - k^2} - \frac{1}{\alpha^2 + k^2} \right] \Gamma_l(k, \beta | r_0), \quad (17,17)$$

$$\text{სადაც} \quad \Gamma_l(k, \beta | r_0) = k j_l(\beta r_0) j_{l-1}(k r_0) - \beta j_{l-1}(\beta r_0) j_l(k r_0), \quad (17,18)$$

$$\text{ხოლო} \quad M_l = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} r_0^2 A_l. \quad (17,19)$$

$$\text{ამჟამად, რომ} \quad \Gamma_l(k, \beta | r_0) = -\Gamma_l(\beta, k | r_0) \quad (17,20)$$

რეზონანსის $k = \beta$ წერტილში გვაქვს

$$\Gamma_l(\beta, \beta | r_0) = 0. \quad (17,21)$$

ტალღური ფუნქციის საპოვნელად $k = \beta$ წერტილში კვლავ გამოვიყენოთ ლობი-ტალის წესი:

$$\lim_{k \rightarrow \beta} \Omega_l(k) = \frac{M_l}{-2\beta} \left(\frac{d\Gamma_l}{dk} \right)_{k=\beta} \quad (17,22)$$

ამჟამად, რომ

$$\left(\frac{d\Gamma_l}{dk} \right)_{\beta} = j_l(\beta r_0) j_{l-1}(\beta r_0) + \beta j_l(\beta r_0) \left[\frac{dj_{l-1}(k r_0)}{dk} \right]_{\beta} - \beta j_{l-1}(\beta r_0) \left[\frac{dj_l(k r_0)}{dk} \right]_{\beta}, \quad (17,23)$$

(E, 33) რეკურენტული ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left[\frac{dI_l}{dk} \right]_{\beta} = 2j_l(\beta r_0) j_{l-1}(\beta r_0) + \beta r_0 [j_l(\beta r_0) j_{l-2}(\beta r_0) - j_{l-1}^2(\beta r_0)]. \quad (17,24)$$

ასე რომ:

$$\lim_{k \rightarrow \beta} Q_l(k) = -\frac{MI_l}{2\beta} [2j_l(\beta r_0) j_{l-1}(\beta r_0) + \beta r_0 [j_l(\beta r_0) j_{l-2}(\beta r_0) - j_{l-1}^2(\beta r_0)]]. \quad (17,25)$$

აღბათობის სიმკვრივე კი რეზონანსის წერტილში განისაზღვრება ამ გამოსახულების აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატით.

სასრულეკვლეებიანი პოტენციალური ორმოს ჩვენ მიერ გამოყვანილი (17,17) იმპულსური წარმოდგენის ტალღური ფუნქციები ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტის დროს.

§ 18. სივრცითი იზოტროპული ოსცილატორი

ოსცილატორის ამოცანას ცენტრალური ადგილი უკავია ყველა სხვა ამოცანათა შორის. განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს სივრცით იზოტროპულ ოსცილატორს, რომელიც დიდ გამოყენებას პოულობს ატომგულის გარსულ მოდელსა და სხვა ამოცანებში.

იზოტროპული ოსცილატორის პოტენციალური ენერგია შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება

$$V(r) = \frac{\mu \omega^2}{2} r^2, \quad (18,1)$$

სადაც μ ოსცილატორის მასაა, ხოლო ω — სიხშირე. პოტენციალურ ენერგიას ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს, ამიტომ ტალღურ ფუნქციას ეწეება სახე

$$\psi(r) = R_l(r) Y_{lm}(\bar{r}). \quad (18,2)$$

რადიალური ფუნქცია განისაზღვრება შრედინგერის განტოლებიდან

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \frac{\mu \omega^2 r^2}{2} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R_l(r) = 0, \quad (18,3)$$

სადაც E არის ოსცილატორის სრული ენერგია.

გასაგებია, რომ, გარდა ენერგიისა, ოსცილატორის გასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულში შევა მომენტის კვადრატი l^2 , ძისი პროექცია l_z და ლუწობა I_0 . ამ სიდიდეთა შესაბამისი ოპერატორებისათვის $Y_{lm}(\bar{r})$ ფუნქცია იქნება საერთო საკუთარი ფუნქცია, ხოლო საკუთარი მნიშვნელობები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$l^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad l_z = m\hbar, \quad I_0 = (-1)^l, \quad (18,4)$$

სადაც $l = 0, 1, 2, \dots$, $-l \leq m \leq +l$. ამასთან აშკარაა, რომ I_0 დამოუკიდებელი ინტეგრალი არ არის.

ამგვარად, იზოტროპული ოსცილატორის ამოცანის ამოხსნა დაიყვანა შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლების ამოხსნაზე. საჭიროა ამ განტოლების ისეთი ამონახსნების მოძებნა, რომლებიც სტანდარტულ პირობებს აკმაყოფილებენ. რადგან ოსცილატორი სასრულ არეში ირხევა, ამიტომ უნდა მოვითხოვოთ, რომ

$$R(\infty) = 0. \quad (18,5)$$

შრედინგერის განტოლებაში შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$x = ar^2, \quad a = \frac{\mu\omega}{\hbar}, \quad (18,6)$$

შედგად მივიღებთ განტოლებას

$$x \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{3}{2} \frac{dR(x)}{dx} + \left[\frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l(l+1)}{4x} - \frac{x}{4} \right] R(x) = 0. \quad (18,7)$$

ჯერ ვიპოვოთ ამ განტოლების ამონახსნები დიდი და მცირე x -ებისათვის.

როცა $x \rightarrow \infty$ ჩვენ შეგვიძლია უგულებელვყოთ ყველა წევრი, რომელიც x -ს არ შეიცავს, გვექნება:

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} - \frac{1}{4} R(x) = 0. \quad (18,8)$$

ამ განტოლების ამონახსნი, რომელიც (18,5) სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს, იქნება გამოსახულება

$$R(r) = \text{const } e^{-\frac{x}{2}} \quad (18,9)$$

მცირე x -ებისათვის კი მივიღებთ ასიმპტოტურ განტოლებას:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{3}{2x} \frac{dR}{dx} - \frac{l(l+1)}{4x^2} R = 0. \quad (18,10)$$

ამ განტოლების ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$R(x) = \text{const } x^n. \quad (18,11)$$

ამ გამოსახულების (18,10) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ მახასიათებელ განტოლებას

$$n(n-1) + \frac{3}{2}n - \frac{l(l+1)}{4} = 0, \quad (18,12)$$

რომლის ორი ფესვიდან $n_1 = -\frac{l+1}{2}$ და $n_2 = \frac{1}{2}l$ უნდა ავირჩიოთ მეორე, რადგან პირველი ფესვის შესაბამისი ფუნქცია $x=0$ წერტილში სასაზღვრო პირობას არ დააკმაყოფილებს. ამგვარად, მცირე x -ებისათვის ამონახსნს ექნება შემდეგი გამონახტულება:

$$R(x) = \text{const } x^{l/2}. \quad (18,13)$$

ნებისმიერი მანძილებისათვის კი (18,7) განტოლების ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$R(x) = x^{l/2} f(x) e^{-\frac{x}{2}} \quad (18,14)$$

სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებს მიზნით $f(x)$ ფუნქცია სათავეში სასრული უნდა იყოს, უსასრულობაში კი არ უნდა მიისწრაფოდეს უსასრულობისაკენ უფრო ჩქარა, ვიდრე x -ის სასრული ხარისხი, ე. ი. იგი უნდა წარმოადგენდეს პოლინომს.

თუ (18,14) ფუნქციას შევიტანთ (18,7) განტოლებაში, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას $f(x)$ ფუნქციისათვის. ეს განტოლება ასეთი იქნება:

$$x \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left(l + \frac{3}{2} - x \right) \frac{df(x)}{dx} - \left[\frac{l}{2} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} \right] f(x) = 0. \quad (18,15)$$

ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის დიფერენციალურ განტოლებას და მისი ამოხსნა განისაზღვრება ფორმულით:

$$f(x) = F\left(-\frac{E}{2\hbar\omega} + \frac{l}{2} + \frac{3}{4}, l + \frac{3}{2}, x\right). \quad (18,16)$$

ეს მწკრივი პოლინომად გადაიქცევა, როცა დაცული იქნება პირობა

$$-\frac{E}{2\hbar\omega} + \frac{l}{2} + \frac{3}{4} = -s, \quad (18,17)$$

სადაც s არის მთელი დადებითი რიცხვი $s=0, 1, 2, \dots$, აქედან

$$E = \hbar\omega \left(l + 2s + \frac{3}{2} \right). \quad (18,18)$$

შეპოვილთ აღნიშვნა

$$n = l + 2s, \quad (18,19)$$

სადაც $n=0, 1, 2, \dots$ მაშინ ენერჯიისათვის მივიღებთ:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right); \quad (18,20)$$

ამგვარად, იზოტროპული ოსცილატორის ენერჯია იკვანტება, ამასთან ენერგეტული დონეები ერთმანეთზე ტოლი ინტერვალებით არიან დაშორებულინი.

მაშასადამე, იზოტროპული ოსცილატორის რადიალურ ტალღურ ფუნქციას ეწეება სახე;

$$R_{sl}(x) = C_{sl} x^{l/2} e^{-\frac{x}{2}} F\left(-s, l + 3/2, x\right). \quad (18,21)$$

საქიჩოა C_{sl} მუდმივების განსაზღვრა. გამოვიყენოთ ნორმირების პირობა:

$$\int_0^{\infty} R_{sl}^2(r) r^2 dr = 1, \quad (18,22)$$

რომელიც (18,6) აღნიშვნის გამოყენებით მოგვცემს:

$$C_{sl}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{\mu\omega} \right)^{3/2} J_{sl} = 1, \quad (18,23)$$

სადაც

$$J_{sl} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{l+1/2} F^2\left(-s, l + \frac{3}{2}, x\right) dx. \quad (18,24)$$

ასეთი ტიპის ინტეგრალი ამოხსნილი გვაქვს დამატებაში [იხ. ფორმულა (D,94)] ჩვენს შემთხვევაში $k=1$, $\nu = l+3/2$, $s=n$, $\gamma = l+3/2$; ასე რომ

$$J_{sl} = \frac{\Gamma(l+3/2) s!}{(l+3/2)(l+5/2)\dots(l+s+1/2)}, \quad s=1, 2, \dots \quad (18,25)$$

რაც შეეხება $s=0$ შემთხვევას, ამ დროს $F'(0, u, x) = 1$ და (18,24) გვაძლევს $J_{0l} = \Gamma(l+3/2)$.

ამგვარად, თუ დაუბრუნდებით r -ცვლადს, ნორმირებული რადიალური ფუნქციისათვის გვექნება:

$$R_{sl}(r) = \sqrt{2} \alpha^{\frac{2l+3}{4}} \left[\frac{(l+3/2)(l+5/2)\dots(l+s+1/2)}{\Gamma(l+3/2) s!} \right]^{1/2} \cdot r^l e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} F(-s, l+3/2, \alpha r^2) \quad (18,26)$$

სრული ტალღური ფუნქციის მისაღებად ეს ფუნქცია უნდა გამრავლდეს სფერულ ფუნქციასზე.

იზოტროპული ოსცილატორის ენერგია აღმოჩნდა ფუნქცია მხოლოდ ერთი n -კვანტური რიცხვისა, ტალღური ფუნქცია კი n -ის გარდა დამოკიდებულია l და m კვანტურ რიცხვებზეც; ეს კი ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს გადაგვარებას ადვილად დავადგენთ, რომ გადაგვარების ჯერადობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}; \quad (18,27)$$

ამასთან, როგორც ყოველთვის, ძირითადი დონე გადაუგვარებელია.

ძირითად მდგომარეობაში $n=0$, ე. ი. $l=s=0$, რადგან $Y_{00}(\bar{r}) = (4\pi)^{-1/2}$, ამიტომ სრულ ტალღურ ფუნქციას ექნება სახე:

$$\psi_{000}(r) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}. \quad (18,28)$$

ახლა ვიპოვოთ რადიალური ფუნქციის ყოფაქცევა დიდი r -ებისათვის. რადგან გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია $F(-s, l+3/2, \alpha r^2)$ არის s რიგის პოლინომი, ამიტომ (18,26)-დან მივიღებთ

$$R_{sl}(r) \sim r^l e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \quad r \rightarrow \infty. \quad (18,29)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ ერთი და იმავე ენერგეტული დონის შესაბამისი ყველა რადიალური ფუნქციის ასიმპტოტური სახე დიდი r -ებისათვის ერთი და იგივეა.

§ 19. წყალბადისებური ატომის ამოცანა სფერულ კოორდინატებში

წყალბადისებური ატომის ამოცანა კვანტური მექანიკის ერთ-ერთი ცენტრალური ამოცანაა. წყალბადისებურ ატომში Ze დადებითი მუხტის ატომბირთვის კულონურ ველში მოძრაობს ერთი ელექტრონი. თუ ჩავთვლით, რომ ატომგული წერტილოვანია, მაშინ ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერგიას ექნება სახე:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (19,1)$$

პოტენციალურ ენერჯიას ახასიათებს ცენტრალური სიმეტრია, ამიტომ ტალღურ ფუნქციას, რომელიც, გარდა ენერჯიის ოპერატორისა, საერთო საკუთარი ფუნქცია უნდა იყოს მომენტის კვადრატისა, მისი x -მდგენელისა და ლუწობისა, ექნება შემდეგი ფორმა:

$$\psi = R_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (19,2)$$

სადაც $R_l(r)$ წარმოადგენს ელექტრონისა და ატომბირთვის ფარდობითი მოძრაობის რადიალურ ტალღურ ფუნქციას და განისაზღვრება განტოლებით:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{Z e^2}{r} \right] R_l(r) = 0, \quad (19,3)$$

აქ μ -წარმოადგენს სისტემის დაყვანილ მასას; თუ m -ით აღვნიშნავთ ელექტრონის მასას, M -ით კი—ატომგულისას, მაშინ

$$\mu = \frac{mM}{m+M}. \quad (19,4)$$

როცა პოტენციალს (19,1) სახე აქვს, მაშინ შესაძლებელია როგორც ფინიტური, ისე ინფინიტური მოძრაობა. ინფინიტური მოძრაობის განხილვას ჩვენ გაფანტვის ამოცანების შესწავლის დროს დავებრუნდებით, ახლა კი შემოვიხილოთ ბმული მდგომარეობის შესწავლით. მაშასადამე, დავუშვათ, რომ სრული ენერჯია უარყოფითია $E < 0$ და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\alpha^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad B = \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2}. \quad (19,5)$$

ამ აღნიშვნებში შრედინგერის განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) + \left[-\alpha^2 + \frac{B}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0. \quad (19,6)$$

საქიროა ვიპოვოთ ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც სათავეში სასრული იქნება, უსასრულობაში კი სწრაფად მოისპობა. ასეთი ამონახსნი უნდა განისაზღვრებოდეს (7,38) ფორმულით

$$R_l(r) = r^l f_l(r) e^{-\alpha r}, \quad (19,7)$$

სადაც $f_l(r)$ ფუნქცია პოლინომს უნდა წარმოადგენდეს. (19,6) განტოლებაში (19,7) ფუნქციის შეტანით $f_l(r)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$r \frac{d^2 f_l}{dr^2} + (2l+2-2\alpha r) \frac{df_l}{dr} + (B-2\alpha l-2\alpha^2) f_l = 0, \quad (19,8)$$

რომელსაც ადვილად დავიყვანთ ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების განტოლებაზე. მართლაც, უგანზომილებო

$$x = 2\alpha r \quad (19,9)$$

ცვლადის შემოღებით, გვექნება:

$$x \frac{d^2 f_l(x)}{dx^2} + (2l+2-x) \frac{df_l(x)}{dx} + \left(\frac{B}{2\alpha} - l - 1 \right) f_l(x) = 0. \quad (19,10)$$

ამ განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს შემდეგი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია:

$$f_l(x) = F(-B/2\alpha + l + 1, 2l + 2, x). \quad (19,11)$$

ეს მწკრივი, თანახმად ($D, 77$) ფორმულისა, როცა $r \rightarrow \infty \exp(2\alpha r)$ სახით მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. მაშასადამე, $r \rightarrow \infty$ დროს (19,7) ფუნქცია უსასრულობა გახდება და სასაზღვრო პირობას ვერ დაეკმაყოფილებთ. მაშასადამე, საჭიროა (19,11) ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის ჩამოკრა და მისი პოლინომად გადაქცევა. ეს კი ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების თვისებებით მაშინ შეიძლება, როცა

$$-\frac{B}{2\alpha} + l + 1 = -n_r, \quad (19,12)$$

n_r მთელი რიცხვია, რომელიც იღებს მნიშვნელობებს: $n_r = 0, 1, 2, \dots \infty$. უკანასკნელი ფორმულა ასე გადავწეროთ:

$$\frac{B}{2\alpha} = n, \quad (19,13)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$n = n_r + l + 1. \quad (19,14)$$

n -ს მთავარი კვანტური რიცხვი ეწოდება, ხოლო n_r -ს — რადიალური. (19,5) აღნიშვნების ძალით ვკოულობთ წყალბადისებური ატომის ენერჯიის შემდეგ ფორმულას:

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2n^2 \hbar^2}. \quad (19,15)$$

როგორც ვხედავთ, ენერჯიის სპექტრი დისკრეტულია; ატომში გვაქვს ერთმანეთისაგან გარკვეული წესით დაცილებული ენერგეტული დონეები. ენერჯია განისაზღვრება მთავარი კვანტური რიცხვით, რომელიც ლებულობს მნიშვნელობებს: $n = 1, 2, \dots \infty$.

ცხადია, (19,12) პირობის ძალით (19,11) მწკრივი გადაიქცევა n_r რიგის პოლინომად. ამიტომ n_r — რადიალური კვანტური რიცხვი განსაზღვრავს პოლინომის რიგს და, მაშასადამე, ტალღური ფუნქციის კვანძებს. ძირითად მდგომარეობაში $n = 1$, $n_r = 0$ ტალღურ ფუნქციას კვანძი არ გააჩნია.

დავუბრუნდეთ პირვანდელ ცვლადებს და გავითვალისწინოთ, რომ $\alpha = B/2n$, მაშინ (19,7) და (19,11) ფორმულების მიხედვით, რადიალური ტალღური ფუნქციებისათვის გვექნება

$$R_{n_l}(r) = C_{n_l} \left(\frac{Br}{n}\right)^l e^{-\frac{Br}{2n}} F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{Br}{n}\right), \quad (19,16)$$

სადაც C_{n_l} ნორმირების კოეფიციენტია. იგი განისაზღვრება შემდეგი პირობით:

$$\int_0^\infty R_{n_l}^2(r) r^2 dr = 1, \quad (19,17)$$

რომელიც (19,16) ფუნქციის შეტანით მოგვცემს:

$$C_{nl}^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{Br}{n}\right)^{2l} r^2 e^{-\frac{Br}{n}} F^2\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{Br}{n}\right) dr = 1. \quad (19,18)$$

ინტეგრალში შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $x = \frac{B}{n} r$, მივიღებთ:

$$C_{nl}^2 \left(\frac{n}{B}\right)^3 J_{nl} = 1, \quad (19,19)$$

სადაც

$$J_{nl} = \int_0^{\infty} x^{2l+2} e^{-x} F^2(-n+l+1, 2l+2, x) dx. \quad (19,20)$$

ეს ინტეგრალი ემთხვევა დამატებაში ამოხსნილ ($D, 91$) ინტეგრალს. ჩვენს შემთხვევაში $k=1$, $c=2l+2$, $\nu=2l+3$, ამიტომ გვექნება:

$$J_{nl} = \frac{2n[(2l+1)!]^2 (n-l-1)!}{(n+l)!}. \quad (19,21)$$

ინტეგრალის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (19,19) ფორმულაში და განვსაზღვროთ C_{nl} ნორმირების კოეფიციენტი:

$$C_{nl} = \frac{B}{n^2(2l+1)!} \left(\frac{B}{2}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}}; \quad (19,22)$$

ამგვარად, ნორმირებულ რადიალურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$R_{nl}(r) = \frac{B \left(\frac{B}{2}\right)^{1/2}}{n^2(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} \left(\frac{Br}{n}\right)^l \times \\ e^{-\frac{Br}{n}} F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{Br}{n}\right). \quad (19,23)$$

ამასთან, აშკარაა, რომ $\frac{B}{2n}$ -სიდიდე დაკავშირებულია ბორის პირველი ორბიტის

$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ რადიუსთან. მართლაც,

$$\alpha = \frac{B}{2n} = \frac{Z}{na_0}. \quad (19,24)$$

მოვიტანოთ რადიალური ფუნქციების გამოსახულება $n=1, 2$ მნიშვნელობებისათვის; გვექნება:

$$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Z}{a_0} r}, \quad (19,25)$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{Z}{2a_0} r\right] e^{-\frac{Z}{2a_0} r}, \quad (19,26)$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} r e^{-\frac{Z}{2a_0} r}. \quad (19,27)$$

როგორც (19,15) ფორმულიდან ჩანს, ენერგია წყალბადისებურ ატომში დამოკიდებულია მხოლოდ n -კვანტურ რიცხვზე, ტალღური ფუნქცია კი—როგორც n -ზე, ისე l და m კვანტურ რიცხვებზე. ამიტომ ადგილი ექნება გადავარებას. გადავარების წერადობა გამოითვლება ფორმულით:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{+l} (1) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \quad (19,28)$$

შენიშნათ, რომ რადიალური ტალღური ფუნქცია მარტივად შეგვიძლია გამოვხატოთ ლაგერის განზოგადებული პოლინომების საშუალებითაც. ამისათვის გამოვიყენოთ (D, 68) ფორმულა. ამ ფორმულაში საკმარისია დავუშვათ $m = 2l+1$, $n \rightarrow n+1$, მივიღებთ:

$$F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{Br}{n}\right) = -\frac{(2l+1)!(n-l-1)!}{[(n+l)!]^2} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{Br}{n}\right). \quad (19,29)$$

მაშასადამე, (19,23) ფუნქციას ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$R_{nl}(r) = -\frac{B}{n^2} (B/2)^{1/2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^2}} \left(\frac{Br}{n}\right)^l e^{-\frac{Br}{2n}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{Br}{n}\right). \quad (19,30)$$

ვიპოვოთ (19,23) ფუნქციის ასიმპტოტური სახე დიდი და მცირე r -ებისათვის. რადგან ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის მაქსიმალური ხარისხის მქონე წევრია $(Br/n)^{n-l-1}$, ამიტომ დიდი მანძილებისათვის გვექნება

$$R_{nl}(r) \simeq \frac{(-1)^{n-l-1}}{n^n \sqrt{(n+l)!(n-l-1)!}} \left(\frac{B}{n}\right)^n \left(\frac{B}{2}\right)^{1/2} r^{n-1} e^{-\frac{Br}{2n}}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (19,31)$$

ხოლო მცირე r -ებისათვის—ფორმულა

$$R_{nl}(r) \simeq \frac{(B/2)^{1/2}}{n(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} \left(\frac{B}{n}\right)^{l+1} r^l. \quad (r \ll 1) \quad (19,32)$$

მთელ რიგ ამოცანებში მნიშვნელოვანია რადიუსის სხვადასხვა ხარისხების კვანტურ-მექანიკური საშუალოს ცოდნა, საშუალო მნიშვნელობა კი ადვილად მოიძებნება ცნობილი ფორმულით

$$\bar{r}^s = \int_0^{\infty} R_{nl}^2(r) r^{s+2} dr. \quad (19,33)$$

თუ გამოვიყენებთ (D, 91) ფორმულას, ადვილად ვიპოვით ამ ინტეგრალის მნიშვნელობას; კერძოდ, მივიღებთ:

$$\frac{\bar{r}}{a_0} = \frac{1}{2Z} [3n^2 - l(l+1)], \quad (19,34)$$

$$\frac{\bar{r}^2}{a_0^2} = \frac{n^2}{2Z^2} [5n^2 + 1 - 3l(l+1)], \quad (19,35)$$

$$\frac{r^{-1}}{a_0^2} = \frac{n^2}{8Z^3} [35n^2(n^2-1) - 30n^2(l+2)(l-1) + 3(l+2)(l+1)l(l-1)], \quad (19,36)$$

$$\left(\frac{a_0}{r}\right) = \frac{Z}{n^2}, \quad (19,37)$$

$$\left(\frac{a_0^2}{r^2}\right) = \frac{2Z^2}{n^3(2l+1)}, \quad (19,38)$$

$$\left(\frac{a_0^3}{r^3}\right) = \frac{2Z^3}{n^3 l(l+1)(2l+1)}. \quad (19,39)$$

ლაბოლოს შეენიშნოთ, რომ გამოთვლების გამარტივების მიზნით, ხშირად სარგებლობენ პარტრის ატომური ერთეულებით. ამ ერთეულებზე გადასასვლელად საკმარისია ჩვენ მიერ მიღებულ ფორმულებში დაეუშვათ: $\mu = e = \hbar = 1$.

§ 20. წყალბადისებური ატომის ამოცანა პარაბოლურ კოორდინატებში

წინა პარაგრაფში წყალბადისებური ატომის ამოცანა ამოხსენით სფერულ კოორდინატებში. მაგრამ წყალბადისებურ ატომში, იმის გამო რომ ადგილი აქვს გადავარებას, ცვლადთა განცალკეება შესაძლებელია სხვადასხვა გზით. კერძოდ, ამ პარაგრაფში ვაჩვენებთ, რომ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია პარაბოლურ კოორდინატებშიც. პარაბოლურ კოორდინატებში კულონური ურთიერთქმედების ამოცანის ამოხსნა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მაშინ, როცა სივრცეში გამოყოფილი გვაქვს რაიმე მიმართულება. ასეთია, მაგალითად, მაგნიტური ან ელექტრული ველის მიმართულებანი სხვადასხვა ეფექტების განხილვისას, ან დაცემის მიმართულება გაფანტვის ამოცანებში. ამ ამოცანების დიდი მნიშვნელობის გამო დაწერილებით შევისწავლით შრედინგერის განტოლების ამოხსნას პარაბოლურ კოორდინატებში [2, 8].

პარაბოლური კოორდინატები ξ , ζ , φ დეკარტის x , y , z კოორდინატებთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$x = \sqrt{\xi\zeta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\zeta} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} (\xi - \zeta) \quad (20,1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} (\xi + \zeta).$$

ხოლო სფერულთან შემდგენიარად:

$$\begin{aligned} \xi &= r - z = r(1 - \cos \theta), & (0 \leq \xi \leq \infty) \\ \zeta &= r + z = r(1 + \cos \theta), & (0 \leq \zeta \leq \infty) \\ \varphi &= \varphi. & (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (20,2)$$

$\zeta = \text{const}$. ზედაპირები წარმოადგენენ კონფოკალურ ბრუნვით პარაბოლოიდებს, რომელთა ფოკუსი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ბრუნვის ღერძად აქვთ z ღერძი და ღია არიან $z > 0$, ე. ი. $\theta = 0$ მიმართულებით. $\xi = \text{const}$ წარმოადგენენ ანალოგიურ პარაბოლოიდებს, გახსნილს $z < 0$, ე. ი. $\theta = \pi$ მიმართულებით.

$\varphi = \text{const}$ ზედაპირები კი, ისევე როგორც სფერულ კოორდინატებში, გამოხატავენ პოლარულ ღერძზე გამავალ სიბრტყეებს. კოორდინატთა ეს სისტემა ორთოგონალურია. ლაპლასის ოპერატორი პარაბოლურ კოორდინატებში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\Delta = \frac{4}{\xi + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad (20,3)$$

მოცულობის ელემენტი კი გამოიხატება შემდეგნაირად:

$$dV = \frac{1}{4} (\xi + \zeta) d\xi d\zeta d\varphi. \quad (20,4)$$

ახლა ვანვიხილოთ წყალბადისებური ატომის ბმული მდგომარეობის ამოცანა. რადგან პარაბოლურ კოორდინატებში $r = 1/2 (\xi + \zeta)$, ამიტომ მიზიდვის კულონურ ენერჯიას ექნება გამოხატულება:

$$V(\xi, \zeta) = -\frac{2Ze^2}{\xi + \zeta}, \quad (20,5)$$

ხოლო შრედინგერის განტოლება პარაბოლურ კოორდინატებში ასე დაიწერება:

$$\frac{4}{\xi + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + \frac{2Ze^2}{\xi + \zeta} \right] \psi = 0. \quad (20,6)$$

განვიხილოთ $E < 0$ შემთხვევა. ცვლადის განცალკეება მოვახდინოთ ფურიეს მეთოდით. ამონახსნი ვეძებთ საში ფუნქციის ნამრავლის სახით:

$$\psi(\xi, \zeta, \varphi) = \psi_1(\xi) \psi_2(\zeta) \Phi(\varphi). \quad (20,7)$$

ეს ფუნქცია შევითანოთ შრედინგერის განტოლებაში და შედეგი გავყოთ ამავე ფუნქციასზე:

$$\begin{aligned} & \frac{4\xi\zeta}{\xi + \zeta} \left[\frac{1}{\psi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) + \frac{1}{\psi_2} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right) \right] + \\ & + \frac{4\mu Ze^2}{\hbar^2 (\xi + \zeta)} \xi \zeta - \frac{2\mu |E|}{\hbar^2} \xi \zeta + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0. \end{aligned} \quad (20,8)$$

როგორც ვხედავთ, ბოლო წევრი მხოლოდ φ -ს ფუნქციაა, იმ დროს როცა დანარჩენი წევრები მხოლოდ ξ და ζ ცვლადების ფუნქციებია. მათი φ -ში ნული მაშინ იქნება, როცა ისინი ერთსა და იმავე მუდმივს უდრიან სხვადასხვა ნიშნით. რადგან პარაბოლურ კოორდინატებშიც მომენტის φ -პროექცია ტოლია გამოსახულებისა:

$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (20,9)$$

ამიტომ, ბუნებრივია, მოვითხოვოთ, რომ აღნიშნული მუდმივი m^2 -ის ტოლი იყოს, სადაც $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, მაგნიტური კვანტური რიცხვია, მაშასადამე:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (20,10)$$

$$\frac{4\xi\zeta}{\xi+\zeta} \left[\frac{1}{\psi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) + \frac{1}{\psi_2} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right) \right] + \frac{4\mu Z e^2 \xi \zeta}{\hbar^2} - \frac{2|\mu| E}{\hbar^2} \xi \zeta - m^2 = 0. \quad (20,11)$$

ცხადია, (20,10) განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ფუნქციით

$$\varphi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (20,12)$$

(20,11) განტოლებაში კვლავ შეგვიძლია ცვლადების განცალკება, ამისათვის იგი შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\left[\frac{1}{\psi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{\alpha^2}{4\xi} \right] + \left[\frac{1}{\psi_2} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right) - \frac{m^2}{4\zeta} - \frac{\alpha^2}{4\zeta} \right] + \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2} = 0, \quad (20,13)$$

სადაც α — განისაზღვრება (19,5) სტანდარტული აღნიშვნით. თითოეულ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება უნდა უდრიდეს მუდმივს, ამიტომ მივიღებთ შემდეგ ორ განტოლებას:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) - \left(\frac{m^2}{4\xi} + \frac{\alpha^2}{4} \xi + a \right) \psi_1(\xi) = 0, \quad (20,14)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right) - \left(\frac{m^2}{4\zeta} + \frac{\alpha^2}{4} \zeta + b \right) \psi_2(\zeta) = 0. \quad (20,14')$$

a და b მუდმივები განისაზღვრებიან ტოლობით

$$a + b = \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2}. \quad (20,15)$$

როგორც ვხედავთ, (20,14) განტოლებები ერთმანეთისაგან მხოლოდ აღნიშვნებით განსხვავდებიან. ამიტომ შეგვიძლია ამოვხსნათ ერთ-ერთი, მეორის ამოსხნა კი პირდაპირ დაეწერათ. განვიხილოთ, მაგალითად, პირველი განტოლება. ჯერ ვიპოვოთ მისი ასიმპტოტური ამონახსნები მცირე და დიდი მანძილებისათვის. როცა $\xi \rightarrow \infty$ განტოლება მიიღებს სახეს

$$\xi \frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} - \frac{\alpha^2}{4} \xi \psi_1 = 0. \quad (\xi \rightarrow \infty) \quad (20,16)$$

ამ განტოლების ორი ამონახსნიდან $\psi_1(\xi) = \exp\left(\pm \frac{1}{2} \alpha \xi\right)$, რადგან მოძრაობა

ფინიტურია, უნდა ავიღოთ $\psi_1(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha \xi\right)$. მცირე ξ -სთვის გვექნება განტოლება:

$$\frac{d\psi_1}{d\xi} + \xi \frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} - \frac{m^2}{4\xi} \psi_1 = 0. \quad (\xi \rightarrow 0) \quad (20,17)$$

ამონახსნი ვეძებთ $\psi_1(\xi) = \xi^s$ სახით. თუ ამ გამოსახულებას განტოლებაში შევიტანთ s -ისათვის, მივიღებთ $s = \pm m/2$. ამ ორი მნიშვნელობიდან, რათა ფუნქცია სათავეში სასრული იყოს, უნდა ავირჩიოთ $s = \left| \frac{m}{2} \right|$. მაშასადამე, (20,14)-ის პირველი განტოლების ამონახსნი ნებისმიერი ξ -სათვის შეგვიძლია ვეძებოთ შემდეგი ფორმულით:

$$\psi_1(\xi) = \xi^{\frac{|m|}{2}} e^{-\alpha \xi} A(\xi). \quad (20,18)$$

ვიპოვოთ წარმოებულები და შევიტანოთ ისინი (20,14) განტოლებაში; $A(\xi)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\xi \frac{d^2 A}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \alpha \xi) \frac{dA}{d\xi} + \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} (|m| + 1) \right) A(\xi) = 0, \quad (20,19)$$

რომელიც

$$x = \alpha \xi \quad (20,20)$$

აღნიშვნით მარტივად მიიყვანება ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების განტოლებაზე:

$$x \frac{d^2 A}{dx^2} + (|m| + 1 - x) \frac{dA}{dx} + \left[\rho_1 - \frac{1}{2} (|m| + 1) \right] A = 0, \quad (20,21)$$

სადაც ρ_1 -თი აღნიშნეთ შემდეგი სიდიდე:

$$\rho_1 = \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu Z e^2}{\hbar^2} - b \right). \quad (20,22)$$

ამონახსნი (20,21) განტოლებისა იქნება შემდეგი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია:

$$A(x) = F \left(\frac{|m| + 1}{2} - \rho_1, |m| + 1, x \right). \quad (20,23)$$

როგორც წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, საჭიროა ამ მწკრივის პოლინომად გადაქცევა. ამისათვის კი აუცილებელია

$$\frac{1}{2} (|m| + 1) - \rho_1 = -n_\xi, \quad (20,24)$$

სადაც n_ξ ან მთელი დადებითი რიცხვია, ან—ნული.

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ (20,14') განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\psi_2(\zeta) = \zeta^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{\alpha \zeta}{2}} B(\zeta), \quad (20,25)$$

სადაც

$$B(\zeta) = F \left(\frac{|m| + 1}{2} - \rho_2, |m| + 1, y \right) \quad (20,26)$$

$$y = \alpha \zeta, \quad \rho_2 = \frac{b}{\alpha}. \quad (20,27)$$

და

$$\frac{1}{2} (|m| + 1) - \rho_2 = -n_\zeta, \quad (20,28)$$

n_ζ -ც მთელი დადებითი რიცხვია, ან—ნული.

ცხადია,

$$\rho_1 + \rho_2 = n_\xi + n_\zeta + |m| + 1. \quad (20,29)$$

თუ შემოვიღებთ ახალ აღნიშვნას

$$n = n_\xi + n_\zeta + |m| + 1, \quad (20,30)$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია (20,15) ფორმულისა და (20,22) აღნიშვნის გათვალისწინებით წყალბადისებური ატომის ენერჯისათვის მივიღებთ ცნობილ ფორმულას

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2n^2 \hbar^2}. \quad (20,31)$$

რადგან (20,30) ფორმულით n კვანტური რიცხვის ერთი და იგივე მნიშვნელობა n_ξ , n_ζ და $|m|$ რიცხვების მიხედვით სხვადასხვა გზით შეიძლება მივიღოთ, ამიტომ ადგილი ექნება გადაგვარებას. ნათელია, რომ გადაგვარების ჭერადობა კვლავ n^2 -ის ტოლი იქნება. აღვნიშნოთ, რომ n_ξ და n_ζ რიცხვებს პარაბოლურ კვანტურ რიცხვებს უწოდებენ.

პარაბოლურ კოორდინატებში წყალბადისებური ატომის ტალღურ ფუნქციას ექნება სახე:

$$\psi_{n_\xi n_\zeta m}(\xi, \zeta, \varphi) = C e^{-\frac{Z}{2}(\xi+\zeta)} (\xi\zeta)^{\frac{|m|}{2}} F(-n_\xi, |m|+1, \alpha\xi) F(-n_\zeta, |m|+1, \alpha\zeta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (20,32)$$

C -კოეფიციენტს ვიპოვით ნორმირების პირობიდან

$$\int_V |\psi_{n_\xi n_\zeta m}|^2 dV = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\psi_{n_\xi n_\zeta m}|^2 (\xi+\zeta) d\xi d\zeta d\varphi = 1. \quad (20,33)$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ (20,32) ფუნქციას და შემოვიღებთ აღნიშვნებს $x = \alpha\xi$ და $y = \alpha\zeta$, გვექნება:

$$\frac{C^2}{4\alpha^{2|m|+3}} \left\{ \int_0^\infty x^{|m|+1} e^{-x} F^2(-n_\xi, |m|+1, x) dx \int_0^\infty y^{|m|} e^{-y} F^2(-n_\zeta, |m|+1, y) dy + \int_0^\infty x^{|m|} e^{-x} F^2(-n_\xi, |m|+1, x) dx \int_0^\infty y^{|m|+1} e^{-y} F^2(-n_\zeta, |m|+1, y) dy \right\} = 1; \quad (20,34)$$

ამასთან, ჯამის მეორე წევრი პირველისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ n_ξ კვანტური რიცხვი შეცვლილია n_ζ -ით. თუ გამოვიყენებთ (D, 91) ფორმულას, მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int_0^\infty x^{|m|+1} e^{-x} F^2(-n_\xi, |m|+1, x) dx = \frac{[|m|]!^2 n_\xi! (|m|+1+2n_\xi)}{(|m|+n_\xi)!} \quad (20,35)$$

$$\int_0^\infty y^{|m|} e^{-y} F^2(-n_\zeta, |m|+1, y) dy = \frac{[|m|]!^2 n_\zeta!}{(|m|+n_\zeta)!}. \quad (20,36)$$

დანარჩენი ორი ინტეგრალის პასუხს მივიღებთ n_z -ის შეცვლის შედეგად n_z -თი ამრიგად, ნორმირების კოეფიციენტისათვის გვექნება ფორმულა:

$$C = \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^{1/2} \frac{\alpha^{|m|+1}}{(|m|!)^2} \left[\frac{(|m+n_z)! (|m+n_z|)!}{n_z! n_z!} \right]^{1/2} \quad (20,37)$$

ასე რომ ნორმირებულ ტალღურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$\psi_{n_z n_z m}(\xi, \zeta, \varphi) = \left(\frac{\alpha_n}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{\alpha^{|m|+1}}{(|m|!)^2} \left[\frac{(|m+n_z)! (|m+n_z|)!}{n_z! n_z!} \right]^{1/2} e^{-\frac{\alpha_n}{2}(\xi+\zeta)} \cdot \\ (\xi \zeta)^{\frac{1}{2}|m|} F(-n_z, |m|+1, \alpha_n \xi) F(-n_z, |m|+1, \alpha_n \zeta) e^{im\varphi}, \quad (20,38)$$

სადაც

$$\alpha_n = \frac{\mu Z e^2}{n \hbar^2}. \quad (20,39)$$

როგორც ვიცი, სფერულ კოორდინატებში წყალბადისებური ატომის ტალღური ფუნქციები სიმეტრიულია $x=0$ სიბრტყის მიმართ, პარაბოლურ კოორდინატებში კი ამ სიმეტრიას ადგილი აღარა აქვს. როცა $n_z > n_z - n_z$ -ზე, ელექტრონის მოხვედრის ალბათობა $x > 0$ მხარეს მეტია, ვიდრე $x < 0$ არეში, ხოლო როცა $n_z < n_z - n_z$ -ზე, სურათი შებრუნებულია.

ვიპოვოთ წყალბადისებური ატომის ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია. ძირითად მდგომარეობაში $n_z = n_z = m = 0$ და (20,38)-დან გვექნება:

$$\psi_{000}(\xi, \zeta, \varphi) = \left(\frac{\alpha_n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha_n}{2}(\xi+\zeta)} \quad (20,40)$$

რაც, თუ გავიხსენებთ, რომ $r = (\xi + \zeta)/2$, ემთხვევა $\psi_{100}(r, \theta, \varphi)$ ტალღურ ფუნქციას სფერულ კოორდინატებში.

§ 21. ნუკლონების ურთიერთქმედების კოტენციალი

ატომბირთვის ნაწილაკებს—ნეიტრონებსა და პროტონებს ნუკლონებს უწოდებენ. ნეიტრონებსა და პროტონებს დაახლოებით ტოლი მასები აქვთ. რადგან მათი სპინი ნახევრის ტოლია, ამიტომ ისინი ფერმიონებს წარმოადგენენ. ორივე ამ ნაწილაკს ანომალური მაგნიტური მომენტები გააჩნიათ, რომლის ბუნება ჭერ კიდევ არ არის გარკვეული. შემდგომ ორ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია დავადგინოთ ორ ნუკლონს შორის მოქმედი ბირთვული პოტენციალის ზოგადი სახე და შევისწავლოთ ნუკლონთა უმარტივესი ბმული სისტემა-დეიტრონი.

დეიტრონი ეწოდება სისტემას, რომელიც შედგება ერთი ნეიტრონისა და ერთი პროტონისაგან. დეიტრონის ამოცანას ისეთივე მნიშვნელობა აქვს ატომგულის ფიზიკაში, როგორიც წყალბადის ატომს ატომის ფიზიკაში. წყალბადის ატომის შემთხვევაში მდგომარეობა გაცილებით უკეთესია, რამდენადაც ატომშივა ურთიერთქმედება კულონურია და იგი კარგადაა ცნობილი. დეიტრონში კი მოქმედებენ ატომგულური ძალები, რომელთა გამოხატვა პოტენციალის სახით დღესაც კი ცნობილი არ არის. შესაძლოა ატომბირთვული ძალების პოტენციალით გამოხატვა საკმარისად უხეში მიახლოებაა და საჭიროა ატომბირთვული ძალების

აღწერის სხვა, ჩვენთვის ჯერჯერობით უცნობი მეთოდი. მაგრამ ამ საკითხის გადასაწყვეტად ამჟამად საკმარისი ინფორმაცია არ გავაჩვენია.

ატომგულური ძალების შესახებ ჩვენ ვიცით შემდეგი: ისინი არიან ჰონეოპოლარული ტიპის ძალები. ე. ი. ახსიათებთ ახლოს მოქმედება (ფერმის რიგის მანძილებზე, $1\text{ფ} = 10^{-12}$ სმ), ნაჯერობა და გაცვლა. ატომგულური ძალები ფერმის რიგის მანძილებზე შეუღარებლად ძლიერია, ვიდრე დღემდე ცნობილი ძალები: ელექტრული, გრავიტაციული და სხვა; ამ მანძილის გარეთ კი სწრაფად ისაზიან.

ასევე არსებობს მონაცემები, რომლებიც ამტკიცებს, რომ ატომგულური ძალები მუხტურად სიმეტრიულია (ე. ი. ძალები ნეიტრონებს, პროტონებსა და პროტონ-ნეიტრონს შორის ტოლია).

დავუშვათ, რომ ნუკლონების ურთიერთქმედება შეიძლება გამოიხატოს პოტენციალით. რადგან მისი სახე ჩვენთვის უცნობია, ამიტომ საკეროა მისი დადგენა ექსპერიმენტთან შედარების გზით. ამ მიზნით აუცილებელია განხილულ იქნეს ნუკლონთა გაფანტვის ექსპერიმენტები და მათი ბმული მდგომარეობანი. ცნობილია, რომ დეიტრონის ბმის ენერგია მცირეა, იგი ტოლია $2,23\text{Mev}$, ამიტომ დეიტრონში ატომბირთვული ძალები ნაწილობრივ „იხარკება“. ამის გამო დეიტრონი არ იძლევა საკმარის ინფორმაციას ატომგულური ძალების ნამდვილი ბუნების შესახებ. დამატებითი ცნობები უნდა მივიღოთ გაფანტვის ექსპერიმენტებიდან. და შესაძლოა უფრო რთული ბირთვებიდან. გაფანტვის ხასიათი დიდადა დამოკიდებულია ენერგიაზე. დიდ ენერგიაზე ნუკლონთა ურთიერთქმედების ხასიათი უნდა შეიცვალოს იცვლება, რადგან ამ დროს რელატიური ეფექტების გარდა ამოცანას ართულებს მეზონების წარმოქმნაც. ენერგიების მიხედვით ურთიერთქმედების ხასიათი იმდენად მნიშვნელოვნად იცვლება, რომ ნუკლონთა ფიზიკა ორ, თითქმის დამოუკიდებელ, დარგად იყოფა. იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ნუკლონთა ურთიერთქმედებას იმ ენერგიებზე, რომლებიც მეტია, ვიდრე π -მეზონის უძრაობის ენერგია, მაღალი ენერგიების ფიზიკას უწოდებენ, ხოლო თუ ენერგია ნაკლებია, ვიდრე π -მეზონის უძრაობის ენერგია, მაშინ საქმე გვაქვს დაბალი ენერგიების ფიზიკასთან ან ბირთვის ფიზიკასთან.

ჩვენ შემოვისაზღვრებით ენერგიებით, როცა მნიშვნელოვანია მხოლოდ π -მდგომარეობის განხილვა. ასეთი მდგომარეობა გვაქვს მაშინ, როცა ურთიერთქმედება ხდება $E \leq 10\text{ Mev}$ ენერგიებზე. მცირე ენერგიების დროს ურთიერთქმედება ფაქტურად პოტენციალის დეტალურ სახეზე დამოკიდებული არ არის. ერთი და იგივე შედეგები შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა პოტენციალების გამოყენებით. ერთი მხრივ ეს კარგია, რადგან შეგვიძლია თეორიულად ავსხნათ ექსპერიმენტული მონაცემები, მაგრამ მეორე მხრივ—ცუდი, რადგან იგი არ გვაძლევს საშუალებას რომელიმე ერთი უპირატესი პოტენციალის შერჩევას. ნუკლონთა ურთიერთქმედების პოტენციალმა უნდა ახსნას არა მხოლოდ ორი სხეულის ამოცანა, არამედ მათი გამოყენებით უნდა ახსნას მძიმე ატომბირთვების თვისებებიც, როგორც არის, მაგალითად, ატომბირთვის ნაჯერობის ცნობილი თვისება. როგორც ირკვევა, ეს შეუძლებელია განხორციელდეს ერთი რომელიმე ტიპის ძალით, ამიტომ, როგორც წესი, იხილავენ სხვადასხვა ტიპის ძალების გარკვეულ კომბინაციებს.

ცდა გვიჩვენებს, რომ ნუკლონ-ნუკლონური პოტენციალი ძირითადად ცენტრალურია, ე. ი. იგი დამოკიდებულია ნუკლონთა შორის მანძილის სიდიდეზე: $r = |r_1 - r_2|$. მაგრამ ექსპერიმენტიდან ასევე გამოდინარეობს, რომ დეიტრონში ცენტრალურის გარდა უნდა მოქმედებდნენ არაკენტრალური ძალებიც. ეს კერ-

ძირე გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ დეიტრონს გააჩნია, მართალია ძალიან მცირე, მაგრამ საესეებით გარკვეული ელექტრული კვადრუპოლური მომენტი $Q=2,74 \cdot 10^{-27}$ სმ². კვადრუპოლური მომენტის არსებობა კი მაჩვენებელია იმისა, რომ დეიტრონში მუხტი სუერულად არ არის განაწილებული, ე. ი. დეიტრონში არ ხორციელდება სუფთა δ -მდგომარეობა; კვადრუპოლური მომენტის ასახსნელად კი დეიტრონში აუცილებელია განხორციელდეს სულ მცირე $l=2$ მდგომარეობა მიანც. გარდა ამისა, დეიტრონი რომ წმინდა s მდგომარეობაში იყოს, მაშინ მისი მაგნიტური მომენტი დაემთხვეოდა პროტონისა და ნეიტრონის მაგნიტური მომენტების ჯამს. სინამდვილეში კი $\mu_d - (\mu_p + \mu_n) = -0,02\mu_0$, სადაც $\mu_0 := \frac{e\hbar}{2M_p c}$ ატომბირთვეული მაგნეტონია, ხოლო M_p —პროტონის მასა. აქედან

ჩანს, რომ დეიტრონის მაგნიტურ მომენტში მცირე, მაგრამ გარკვეული წვლილი შეაქვთ ნულისაგან განსხვავებულ ორბიტალურ მოძრაობებს.

იზოლირებული ნუკლონების ურთიერთქმედების დროს ადგილი აქვს სრული მომენტის კვადრატისა და პროექციის შენახვას. ბირთველი ურთიერთქმედებისას ინახება ლუწობაც. მაშასადამე, ნუკლონთა ურთიერთქმედების პოტენციალი უნდა იყოს ნამდვილი სკალარული ფუნქცია, ე. ი. იგი არ უნდა იცვლებოდეს მოძრუნებისა და სივრცის ინვერსიის ოპერაციების დროს. პოტენციალური ენერგია შეიძლება დამოკიდებული იყოს ფარდობით მანძილზე და ნუკლონთა სპინურ ცვლადებზე. ამასთან, ნუკლონის სპინი განისაზღვრება ფორმულით $s = \frac{\hbar}{2} \sigma$, სადაც $\sigma(\sigma_x$

$\sigma_y, \sigma_z)$ პაულის მატრიცებია. იმის მიხედვით, თუ რომელ ნუკლონს ეკუთვნის სპინური ოპერატორი, ინდექსს მივეწერთ ერთიანს ან ორიანს. ამასთან, სხვადასხვა ნუკლონის შესაბამის პაულის მატრიცებს ერთმანეთთან კომუტატურად ჩავთვლით. ბირთვის ფიზიკაში სპინს, ჩვეულებრივ, \hbar ერთეულებში ზომავენ, ამიტომ წერენ $s = \frac{1}{2} \sigma$.

ამგვარად, ნუკლონ-ნუკლონ პოტენციალი შეიძლება დამოკიდებული იყოს სამ ვექტორზე r, σ_1 , და σ_2 . შევადგინოთ ჯერ სპინებზე დამოკიდებული ცენტრალური პოტენციალი. σ_1, σ_2 სკალარული ნამრავლი იქნება ერთადერთი ნამდვილი სკალარი, რამდენადაც ამ გამოსახულების ნებისმიერი მთელი ხარისხის კვლავ σ_1, σ_2 ზე დაიყვანება. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ გამოვიყენებთ ცნობილ ფორმულას [3]

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (21,1)$$

მართლაც, მარტივად მივიღებთ:

$$(\sigma_1 \sigma_2)^2 = 3 - 2(\sigma_1 \cdot \sigma_2). \quad (21,2)$$

ამის შემდეგ ადვილია $\sigma_1 \sigma_2$ -ის უფრო მაღალი ხარისხების გამოხატვა $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ -ით.

მაშასადამე, სპინებზე დამოკიდებული ცენტრალური პოტენციალის უზოგადესი სახე შემდეგი იქნება:

$$V(r; \sigma_1 \sigma_2) = A(r) + B(r) (\sigma_1 \cdot \sigma_2), \quad (22,3)$$

სადაც $A(r)$ და $B(r)$ გარკვეული ფუნქციებია.

თუ შემოვიღებთ ორი ნუკლონის სრულ სპინს

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2), \quad (21,4)$$

მაშინ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$(\sigma_1 \sigma_2) = 2S^2 - 3 = 2S(S+1) - 3, \quad (21,5)$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\sigma_1 \sigma_2$ სკალარულ ნამრავლს ექნება ორი საკუთარი მნიშვნელობა საჯამო სპინის ორი შესაძლო მნიშვნელობის $S=0$ და $S=1$ შესაბამისად:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= -3, & \text{როცა } S=0 & \text{(სინგლეტური მდგომარეობა)} \\ \sigma_1 \sigma_2 &= +1, & \text{როცა } S=1 & \text{(ტრიპლეტური მდგომარეობა)} \end{aligned} \quad (21,6)$$

მაშასადამე, (21,3) პოტენციალი შემდეგი ორი პოტენციალის ეკვივალენტურია:

$$V_s(r) = A(r) - 3B(r), \quad (S=0) \quad (21,7)$$

$$V_t(r) = A(r) + B(r). \quad (S=1) \quad (21,8)$$

ხშირად ხელსაყრელია ე. წ. სპინის პროექციის ოპერატორების შემოღება. ეს ოპერატორები მოცემული პოტენციალიდან გამოყოფენ წმინდა სინგლეტურ და ტრიპლეტურ ნაწილებს. ამ ოპერატორებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$P_s = \frac{1}{4} [1 - (\sigma_1 \sigma_2)], \quad P_t = \frac{1}{4} [3 + (\sigma_1 \sigma_2)]. \quad (21,9)$$

ნათელია, რომ $S=0$ -სათვის $P_s=1$ და $P_t=0$, ხოლო, როცა $S=1$, მაშინ $P_t=1$ და $P_s=0$. ამგვარად, სპინზე დამოკიდებული ცენტრალური პოტენციალი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$V(r) = V_s(r)P_s + V_t(r)P_t. \quad (21,10)$$

აღვნიშნოთ, რომ ამჟამად არ არსებობს $V_s(r)$ და $V_t(r)$ კოორდინატული ფუნქციების (პოტენციალების) ცალსახა შერჩევის კრიტერიუმი.

როგორც აღვნიშნეთ, ატომგულურ ბალეს შესაძლებელია არაცენტრალური ხასიათი ჰქონდეთ. დავწეროთ უზოგადესი სახე არაცენტრალური ურთიერთქმედებისა, რომელიც ინვარიანტული იქნება სივრცის ინვერსიისა და მობრუნების მიმართ. მაშასადამე, საჭიროა კვლავ შევადგინოთ ისეთი სკალარული ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებული იქნება r ვექტორის ორიენტაციაზე. როგორც აღვნიშნეთ,

ორ ნუკლონს სულ ახასიათებს სამი ვექტორი: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, σ_1 და σ_2 . სადაც $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

ამასთან, \mathbf{n} პოლარული ვექტორია, σ_1 და σ_2 კი — აქსიალური; აქედან გამომდინარე, $(\sigma_1 \mathbf{n})$ და $(\sigma_2 \mathbf{n})$ არ იქნებიან სკალარები არეკვლის მიმართ, რადგან არეკვლის დროს ადგილი ექნება გარდაქმნას $(\sigma \mathbf{n}) \rightarrow -(\sigma \mathbf{n})$. თუ გამოკიყვნებთ ფორმულას [3]

$$(\sigma \mathbf{A})(\sigma \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \mathbf{B}) + i(\sigma \mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (21,11)$$

მაშინ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $(\sigma \mathbf{n})^2 = 1$ და $(\sigma \mathbf{n})^3 = (\sigma \mathbf{n})$. ასე რომ $(\sigma \mathbf{n})$ სკალარული ნამრავლის ხარისხები კვლავ σ ს მიმართ წრფივ გამოსახულებებზე დაიყვანება და, მაშასადამე, არეკვლისას ნიშნა შიშვლის. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ ორი ნამდვილი სკალარი: $(\sigma_1 \mathbf{n})(\sigma_2 \mathbf{n})$ და $([\sigma_1 \times \mathbf{n}][\sigma_2 \times \mathbf{n}])$. მაგრამ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ მეორე გამოსახულება დაიყვანება პირველზე და $(\sigma_1 \sigma_2)$ -ის სხვაობაზე. მართლაც [7],

$$\begin{aligned} ((\sigma_1 \times \mathbf{n}) (\sigma_2 \times \mathbf{n})) &= \delta_{i_1 i_2} \sigma_{1 i_1} \sigma_{2 i_2} \delta_{i_1 i_2} n_{i_1} n_{i_2} = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 - (\sigma_1 \mathbf{n})(\sigma_2 \mathbf{n})). \end{aligned} \quad (21,12)$$

ამიტომ ერთადერთი დამოუკიდებელი ნა... სკალარი იქნება $(\sigma_1 \mathbf{n})(\sigma_2 \mathbf{n})$ გამო-
სახულება. ამ სიდიდის ნაცვლად, ხელ... სიდიდის "შეაოლცა. რომ-

ლის საშუალო n მიმართულების მიმართ ნულის ტოლი იქნება. რადგან $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$, სადაც ხაზი აღნიშნავს გასაშუალებას, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება გამოსახულება:

$$S_{12}(n) = 3(\sigma_1 n)(\sigma_2 n) - (\sigma_1 \sigma_2). \quad n = \frac{r}{r}. \quad (21,13)$$

თუ (21,4) გამოსახულებას გავამრავლებთ n ორტვე და ავიყვანთ კვადრატში, (21,5) ფორმულის გათვალისწინებით (21,13)-ისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$S_{12}(n) = 6(Sn)^2 - 2S^2. \quad (21,14)$$

ამ უქანასკნელიდან ჩანს, რომ, როცა საჯამო სპინი $S=0$, მაშინ $S_{12}=0$, ე. ი. სინგლეტურ მდგომარეობაში S_{12} ოპერატორი ნულის ტოლია. ეს გასაგებია, რამდენადაც, როცა $S=0$, მაშინ r ვექტორის ორიენტაციის დასაფიქსირებლად სიერცეში გამოყოფილი მიმართულება აღარა გვაქვს.

აღვნიშნოთ, რომ S_{12} -ოპერატორის ხარისხები კვლავ S_{12} და $(\sigma_1 \sigma_2)$ -ის წრფივი კომბინაციებით გამოიხატება. ასე მაგალითად, თუ გამოვიყენებთ (21,1) და (21,2) ფორმულებს, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\hat{S}_{12}^2 = 6 + 2(\sigma_1 \cdot \sigma_2) - 2\hat{S}_{12}, \quad (21,15)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\hat{S}_{12}^2 = 4\hat{S}^2 - 2\hat{S}_{12}; \quad (21,16)$$

მაშასადამე, ერთადერთი ოპერატორი, რომელიც არაკენტრალურობას აღწერს ორი ნახევარსპინიანი ნუკლონის შექმნევაში, იქნება \hat{S}_{12} .

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ S_{12} ოპერატორი მიღებულია ორი ტენზორის: $q_{jp} = n_j n_p$ და $q_{ik} = \sigma_i \sigma_k$ გადამრავლებით და ორჯერ დაქვეითებით. ამიტომ S_{12} ოპერატორს ხშირად ტენზორულ ოპერატორსაც უწოდებენ.

ამგვარად, ლოკალური ნუკლონ-ნუკლონური ურთიერთქმედების პოტენციალის უზოგადესი სახე, რომელიც შეიცავს ცენტრალურ და არაკენტრალურ ძალებს, შეედგება:

$$V(r) = A(r) + B(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + C(r)\hat{S}_{12}(n), \quad (21,17)$$

სადაც $A(r)$, $B(r)$ და $C(r)$ სკალარული ფუნქციებია. ბოლო წევრს, ზემო თქმულის ძალით, ტენზორულ წევრს უწოდებენ, ამასთან ტენზორული ძალები მოქმედებენ მხოლოდ ტრიპლეტურ მდგომარეობაში, ე. ი. როცა $S=1$.

აღვნიშნოთ, რომ (21,17) გამოსახულება სკალარული გამოსახულებაა, რის გამოც სრული მომენტის კვადრატი J^2 და პროექცია J_z მოძრაობის ინტეგრალები იქნებიან. (21,14) გამოსახულების თანახმად, სრული სპინის კვადრატი S^2 კომუტატურია \hat{S}_{12} -თან, ხოლო (21,5) ფორმულის თანახმად, S^2 კომუტატურია $(\sigma_1 \sigma_2)$ -თანაც:

$$[\hat{S}_{12}, \hat{S}^2] = 0, \quad [\hat{S}^2, (\sigma_1 \cdot \sigma_2)] = 0. \quad (21,18)$$

რაც ნიშნავს, რომ \hat{S}^2 კომუტატურია (21,17) პოტენციალთან, მაშასადამე, ადგილი აქვს S^2 -ის შენახვასაც.

ამგვარად, ტენზორული (არაკენტრალური) ძალების მოქმედების შემთხვევაში ინახება: J^2 , J_z , S^2 და I . რაც შეეეება სრულ ორბიტალურ L მომენტს, იგი არაკენტრალური ურთიერთქმედების დროს, საზოგადოდ, არ ინახება.

ახლა განვსაზღვროთ რა მდგომარეობები ხორციელდება ორი ნუკლონის ჩისტემაში. სრული სპინის შესაძლო მნიშვნელობებია $S=0$ და $S=1$. სრული

ცხრილი № 1

	S=0		S=1	
	I=1	I=-1	I=1	I=-1
J=0	1S_0	—	—	3P_0
J=1	—	1P_1	$^3S_1, ^3D_1$	3P_1
J=2	1D_2	—	3D_2	$^3P_2, ^3F_2$

მომენტი $J=L+S$. ამიტომ, როცა $J=0$, მაშინ $J=0$ და $J=1$, ე. ი. $^{2s+1}L_J$ მულტიპლეტურ აღნიშვნებში მივიღებთ თერმებს: 1S_0 და 3S_1 . ხოლო, როცა $L=1$ — $^1P_1, ^3P_2, ^3P_1$, და 3P_0 და ა. შ. გვექნება № 1 ცხრილში მოცემული მდგომარეობანი.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ბირთვის თვისებების განხილვის დროს შემოჰყავთ სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალებიც. ამ ძალების მეტად საინტერესო კერძო შემთხვევას წარმოადგენს სპინ-ორბიტალური ძალები, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ ბირთვის გარსულ მოდელში. მაგალითად, ცენტრალური ურთიერთქმედების შესაბამის სპინ-ორბიტალურ პოტენციალს აქვს სახე:

$$V_{LS}(r) = D(r) (L S); \quad (21,19)$$

სადაც $D(r)$ სკალარული ფუნქციაა. ბირთვის ფიზიკაში ხშირად იხილავენ უფრო რთულ სიჩქარეზე დამოკიდებულ პოტენციალებსაც.

ჩვენ მიერ შემოღებულ (21,17) პოტენციალს კიდევ უფრო ზოგადი სახე მიეცემა, თუ მასში შევიტანთ ჩვეულებრივი და სპინური ცვლადების გაცვლის ოპერატორებსაც.

§ 22. დეიტრონის ამოცანა

წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები გამოვიყენოთ დეიტრონის ამოცანის გადასაწყვეტად. ექსპერიმენტიდან ცნობილია, რომ დეიტრონის ძირითადი მდგომარეობა ხასიათდება კვანტური რიცხვებით: $S=1, J=1$ და $I=1$. ამიტომ № 1 ცხრილში მოცემული მდგომარეობებიდან დეიტრონში შესაძლებელია მხოლოდ ორი $^3S_1 + ^3D_1$. ამასთან, 3D_1 -ტალის არსებობა საჭიროა დეიტრონის ელექტრული კვადრუპოლური და მენტიური დიპოლური მომენტების ასახსნელად.

შემოვიღოთ (J^2, J_z) ოპერატორების საერთო საკუთარი ფუნქციები; როგორც ვიცით, იგი შეგვიძლია გამოვხატოთ \hat{L}^2, \hat{L}_z და \hat{S}^2, \hat{S}_z საკუთარი $Y_{LM_L}(n)$ და χ_{SM_S} ფუნქციების ნამრავლის წრფივი კომბინაციით:

$$\Phi_{LS}^{JM} = \sum_{M_L=-L}^{+L} \sum_{M_S=-S}^{+S} \langle LS M_L M_S | JM \rangle Y_{LM_L}(n) \chi_{SM_S}. \quad (22,1)$$

დეიტრონში ჩვენ საქმე გვექნება Φ_{01}^{1M} და Φ_{11}^{1M} ფუნქციებთან. ქვემოთ დაგვეკვირდება $S_{12}(n)$ ტენზორული ოპერატორის მოქმედება ამ ფუნქციებზე, ამიტომ წინასწარ ვიპოვოთ სათანადო გამოსახულებები. დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულები [16]:

$$\hat{S}_{12}(n) \Phi_{01}^{1M} = \sqrt{8} \Phi_{11}^{1M}, \quad (22,2)$$

$$\hat{S}_{12}(n) \Phi_{11}^{1M} = \sqrt{8} \Phi_{01}^{1M} - 2\Phi_{11}^{1M}; \quad (22,3)$$

ამასთან, რადგან \hat{S}_{12} -ოპერატორი ერმიტულია, ამიტომ

$$\langle \Phi_{11}^{1M} | \hat{S}_{12} | \Phi_{01}^{1M} \rangle = \langle \Phi_{01}^{1M} | \hat{S}_{12} | \Phi_{11}^{1M} \rangle. \quad (22,4)$$

ცხადია, S_{12} ოპერატორის 3S_1 მდგომარეობის ϕ_{01}^{1M} ფუნქციაზე მოქმედებით მივიღებთ ისევ 3S_1 და 3P_1 მდგომარეობათა ფუნქციების წრფივ კომბინაციას

$$\hat{S}_{12}\phi_{01}^{1M} = a\phi_{01}^{1M} + b\phi_{21}^{1M}, \quad (22,5)$$

სადაც ϕ_{01}^{1M} -ფუნქცია შეესაბამება $L=0$ მდგომარეობას, ე. ი. $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$ მიმართულებაზე არ იქნება დამოკიდებული; ამიტომ $\hat{S}_{12}\phi_{01}^{1M}$ გამოსახულების გასაშუალება \mathbf{n} მიმართულებების მისდევით მოგვეცემს ნულს $\overline{S_{12}\phi_{01}^{1M}}=0$. ამის გამო (22,5) ტოლობაში მარჯვნივ არ შეიძლება გვექონდეს ფუნქცია, რომელიც \mathbf{n} -მიმართულებაზე არ არის დამოკიდებული. ამიტომ უნდა ავიღოთ $a=0$, დაგვჩვენება:

$$\hat{S}_{12}\phi_{01}^{1M} = b\phi_{21}^{1M}, \quad (22,6)$$

ეს გამოსახულება გამოეთვალეთ კერძო შემთხვევაში, როცა $M=1$, ამისათვის ვიპოვოთ

$$\phi_{01}^{1M} = \sum \langle 010 M_s | 1 M \rangle Y_{00}(\mathbf{n}) \chi_{1Ms} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \chi_{1M} \quad (22,7)$$

ავიღოთ x -ღერძი \mathbf{n} -ის გასწვრივ, მაშინ

$$\hat{S}_{12} = 6\hat{S}_z^2 - 2S^2, \quad (22,8)$$

საიდანაც

$$\hat{S}_{12}\phi_{01}^{1M} = (6\hat{S}_z^2 - 2S^2) \frac{\chi_{1M}}{\sqrt{4\pi}} = [6M^2 - 2S(S+1)] \frac{\chi_{1M}}{\sqrt{4\pi}}; \quad (22,9)$$

მაშასადამე,

$$\hat{S}_{12}\phi_{01}^{1M} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \chi_{11}. \quad (22,10)$$

ახლა ვიპოვოთ (22,6) გამოსახულების მარჯვენა მხარე, (22,10) კუთხეებზე დამოკიდებული არ არის, ამიტომ მარჯვენა მხარეში შეგვიძლია განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა x ღერძი ემთხვევა \mathbf{n} ს, ე. ი. როცა $\theta=0$. ϕ_{21}^{1M} -ჩაეწეროთ ცხადი სახით:

$$\phi_{21}^{1M} = \langle 2101 | 11 \rangle Y_{20}(\mathbf{n})\chi_{11} + \langle 2110 | 11 \rangle Y_{21}(\mathbf{n})\chi_{10} + \langle 212-1 | 11 \rangle Y_{22}(\mathbf{n})\chi_{1,-1}, \quad (22,11)$$

რადგან $Y_{21}(0) = Y_{22}(0)$, ამიტომ

$$\phi_{21}^{1M}(0) = \langle 2101 | 11 \rangle Y_{20}(0)\chi_{11}. \quad (22,12)$$

კლებე-ეორდანის კოეფიციენტი $\frac{1}{\sqrt{10}}$ -ის ტოლია, ხოლო $Y_{20}(0) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$. ამგვარად,

$$\phi_{21}^{1M}(0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \chi_{11}. \quad (22,13)$$

თუ (22,13) და (22,10) ფორმულებს შევითანთ (22,6) გამოსახულებაში, მივიღებთ $b = \sqrt{8}$, რაც ამტკიცებს (22,2) ტოლობას.

ახლა დავამტკიცოთ (22,3) ფორმულის სამართლიანობა, ამისათვის კვლავ დავწეროთ:

$$\hat{S}_{12}\phi_{21}^{1M} = b\phi_{01}^{1M} + c\phi_{21}^{1M}. \quad (22,14)$$

ამასთან, δ ისევე $\sqrt{8}$ -ის ტოლია, რამდენადაც ადგილი უნდა ჰქონდეს (22,4) ტოლობას. ამგვარად:

$$\hat{S}_{12} \phi_{01}^M = \sqrt{8} \phi_{01}^M + c \phi_{21}^M. \quad (22,15)$$

ამ ტოლობაზე ვიმოქმედოთ \hat{S}_{12} ოპერატორით.

$$\hat{S}_{12}^2 \phi_{01}^M = \sqrt{8} \hat{S}_{12} \phi_{01}^M + c \hat{S}_{12} \phi_{21}^M, \quad (22,16)$$

საიდანაც, რადგან სამართლიანია (21,16) ფორმულა, მივიღებთ:

$$\hat{S}_{12}^2 \phi_{01}^M = \frac{1}{\sqrt{8}} [4\hat{S}^2 - 2\hat{S}_{12} - c \hat{S}_{12}] \phi_{01}^M. \quad (22,17)$$

თანხმად (22,2) ფორმულისა, ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ტოლი უნდა იყოს 8-ისა. რადგან $4S^2 = 4S(S+1) = 8$, როცა $S=1$, ამიტომ საჭიროა $c = -2$. ამგვარად, (22,3) ტოლობაც დამტკიცდა.

ადვილად ვიპოვით \hat{S}_{12} ოპერატორის მატრიცულ ელემენტებსაც $J=S=1$ მდგომარეობაში ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ (22,2) და (22,3) ფორმულები და ϕ_{L1}^M ფუნქციების ორთო ნორმირების პირობა. მარტივად ვიპოვით, რომ:

$$\langle \phi_{01}^M | \hat{S}_{12} | \phi_{01}^M \rangle = \sqrt{8} \langle \phi_{01}^M | \phi_{21}^M \rangle = 0, \quad (22,18)$$

$$\langle \phi_{01}^M | \hat{S}_{12} | \phi_{21}^M \rangle = \sqrt{8} \langle \phi_{01}^M | \phi_{01}^M \rangle - 2 \langle \phi_{01}^M | \phi_{21}^M \rangle = 2\sqrt{2}, \quad (22,19)$$

$$\langle \phi_{21}^M | \hat{S}_{12} | \phi_{21}^M \rangle = \sqrt{8} \langle \phi_{21}^M | \phi_{01}^M \rangle - 2 \langle \phi_{21}^M | \phi_{21}^M \rangle = -2. \quad (22,20)$$

ახლა დავეწეროთ შრედინგერის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება ორი ნუკლონისათვის (21,17) ურთიერთქმედების პოტენციალის შემთხვევაში. რადგან ტენზორული ძალები მოქმედებენ მხოლოდ $S=1$ მდგომარეობაში, ამ დროს კი $(\sigma_1 \sigma_2) = 1$, ამიტომ პოტენციალს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$V(r) = V_C(r) + V_T(r) \hat{S}_{12}, \quad (22,21)$$

სადაც $V_C(r)$ და $V_T(r)$ ცენტრალური პოტენციალებია.

შრედინგერის განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში ექნება გამოსახულება

$$\Delta \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V_C(r) - V_T(r) \hat{S}_{12}(n)] \psi = 0. \quad (22,22)$$

$\psi(r)$ ფუნქცია გავეშალოთ ϕ_{LS}^M ფუნქციების მწყობრად დაფიქსირებული სპინის $S=1$ და სრული მომენტის $J=1$ შემთხვევაში

$$\psi_{JM}(r) = \sum_L \frac{\chi_L(r)}{r} \phi_{LS}^M. \quad (J=1, S=1) \quad (22,23)$$

ლუწობის შენახვის გამო ჩაბში ან გვექნება ერთი წევრი $L=J$. ან ორი $L=J-1$, $L=J+1$ მომენტების შესაბამისად. დეიტრონის შემთხვევაში ვიხილავთ $L=0$ და $L=2$ მდგომარეობას (ე. ი. $L=J-1$ და $L=J+1$) ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია შეიძლება ვანორმიროთ ერთზე

$$\int |\psi_{JM}|^2 dr = \sum_{L'} \int \chi_{L'}(r) \phi_{L'S}^M \chi_L(r) \phi_{LS}^M dr d\Omega = 1. \quad (22,24)$$

რადგან Φ_{LS}^M ფუნქციები ნორმირებულია პირობით

$$\int \Phi_{LS}^{M*} \Phi_{LS}^M d\Omega = \delta_{L,L}, \quad (22,25)$$

ამიტომ $\chi_L(r)$ ფუნქციისათვის გვექნება ნორმირება:

$$\sum_L \int \chi_L^*(r) \chi_L(r) dr = 1. \quad (22,26)$$

შრედინგერის განტოლებაში გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე, შევიტანოთ მასში (22,23) ვაშლა, გადავამრავლოთ Φ_{LS}^{M*} ფუნქციაზე და ავიღოთ ინტეგრალი სხეულოვანი კუთხით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ Φ_{LS}^M ფუნქცია ამავე დროს საკუთარი ფუნქციაა L^2 ოპერატორისა, საკუთარი მნიშვნელობებით $\hbar^2 L(L+1)$, მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi_L(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E - V_C(r) - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} \right\} \chi_L(r) - \\ \frac{2\mu V_T(r)}{\hbar^2} \sum_{L'} \langle \Phi_{LS}^{M*} | \hat{S}_{12} | \Phi_{L'S}^M \rangle \chi_{L'}(r) = 0. \end{aligned} \quad (22,27)$$

სადაც

$$\langle \Phi_{LS}^{M*} | \hat{S}_{12} | \Phi_{L'S}^M \rangle = \int \Phi_{LS}^{M*} \hat{S}_{12} \Phi_{L'S}^M d\Omega. \quad (22,28)$$

სიმეტრიის გამო ეს მატრიცული ელემენტი დამოკიდებული არ არის M -ზე, ამასთან, ინტეგრალში იგულისხმება აჯამვა სპინური ცვლადებითაც.

დეიტრონის შემთხვევაში გვაქვს ${}^3S_1 + {}^3D_1$ მდგომარეობა. თუ (22,27) განტოლებაში ავიღებთ $L=0$ და $L=2$, ამასთან, გავითვალისწინებთ ზემოთ გამოყვანილი მატრიცული ელემენტების მნიშვნელობებს, გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - [\alpha^2 + v_C(r)] u(r) - 2\sqrt{2} v_T(r) w(r) = 0, \quad (22,29)$$

$$\frac{d^2 w(r)}{dr^2} - \left[\alpha^2 + v_C(r) + \frac{6}{r^2} - 2v_T(r) \right] w(r) - 2\sqrt{2} v_T(r) u(r) = 0;$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები $\chi_0 = u(r)$, $\chi_2 = w(r)$, ასევე:

$$\alpha^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad v_C(r) = \frac{2\mu V_C(r)}{\hbar^2}, \quad v_T(r) = \frac{2\mu V_T(r)}{\hbar^2}; \quad (22,30)$$

$\mathcal{E} = -|E|$ დეიტრონის ბმის ენერგიაა, ხოლო $2\mu \simeq M_p$ პროტონის მასაა.

დეიტრონის სრული ტალღური ფუნქცია ტოლი იქნება გამოსახულებისა:

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r} \Phi_{01}^M + \frac{w(r)}{r} \Phi_{21}^M. \quad (22,31)$$

თუ გამოვიყენებთ (22,2) და (22,7) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{u(r)}{r} + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12} \frac{w(r)}{r} \right\} \chi_{1M}. \quad (22,32)$$

თანახმად (22,26) ფორმულისა, დეიტრონის ტალღური ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი ნორმირების პირობა:

$$\int_0^{\infty} (|u(r)|^2 + |w(r)|^2) dr = 1, \quad (22,33)$$

საიდანაც ჩანს, რომ 3D_1 მდგომარეობის წონა განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$P_D = \int_0^{\infty} |w(r)|^2 dr. \quad (22,34)$$

ახლა დავაკვიროთ დეიტრონის კვადრუპოლური მომენტი (22,29) სისტემის ამონახსნებთან. გავისენოთ, რომ ერთეულოვანი მუხტის შესაბამისი კვადრუპოლური მომენტი ეწოდება კვადრუპოლური ტენზორის Q_{iz} კომპონენტს, რომელიც შეესაბამება მომენტის მაქსიმალურ პროექციას $M=J$ და განიმარტება შემდეგნაირად [16]:

$$Q = \int \psi_{JJ}^* (3z^2 - \rho^2) \psi_{JJ} dr, \quad (22,35)$$

სადაც ψ_{JJ} წარმოადგენს დეიტრონის (22,32) ფუნქციას $M=J$ მაქსიმალური პროექციისათვის; ρ -რადიუსვექტორი გავლებულია დეიტრონის სიმძიმის ცენტრიდან პროტონამდე. რადგან ტოლი მასების შემთხვევაში $\rho = \frac{1}{2} r$, სადაც r დეიტრონის ფარდობითი რადიუსვექტორია, ამიტომ (22,35) ასეც შეგვიძლია გადაწეროთ

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int \psi_{JJ}^*(r) [r^2 Y_{20}(r)] \psi_{JJ}(r) dr. \quad (22,36)$$

დეიტრონის შემთხვევაში $J=1$ და უნდა ვისარგებლოთ (22,31) ფორმულით. Φ_{11}^+ და Φ_{11}^- ფუნქციებისათვის (22,1) გამოსახულების გამოყენებით კვადრუპოლური მომენტის გამოთვლა დაიყვანება ორი და სამი სფერული ფუნქციიდან ინტეგრირების აღებაზე და კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების კერძო მნიშვნელობების მოძებნაზე. ამ მარტივი ოპერაციის ჩატარების შემდეგ საბოლოოდ გვექნება:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^{\infty} r^2 \left(uw - \frac{1}{2\sqrt{2}} w^2 \right) dr. \quad (22,37)$$

კვადრუპოლური მომენტის ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ იგი დადებითი შეიძლება იყოს მხოლოდ u და w ფუნქციების ერთნაირი ნიშნის დროს. ეს კი, როგორც (22,29) სისტემიდან ჩანს, მაშინ შეიძლება, როცა (22,21) პოტენციალში ტენზორული წევრის წინ უარყოფითი ნიშანი ზის.

შევნიშნოთ, რომ (22,29) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მარტივი პოტენციალებისთვისაც კი რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ამიტომ კვადრუპოლური მომენტის ზუსტი გამოთვლაც ძნელია. ამის გამო მიმართავენ მიახლოებით მეთოდებს. ამგვარი მეთოდებით დადგინო იქნა, რომ დეიტრონში 3D_1 მდგომარეობის წონა მართლაც მცირეა და იგი ტოლია $P_D = 0,04$.

შევნიშნოთ, რომ ატომგულური ძალების ქმედების რადიუსის გარეთ (22,29) სისტემაში ყველა პოტენციალი ნულის ტოლია, რის გამოც დიდ მანძილებზე სისტემის ამონახსნები ასეთი იქნება:

$$u(r) = A r k_0(\alpha r), \quad (r \rightarrow \infty) \quad (22,38)$$

$$w(r) = Brk_1(\alpha r), \quad (r \rightarrow \infty) \quad (22.39)$$

სადაც $k_0(\alpha r)$ და $k_1(\alpha r)$ მაკრონალდის სფერული ფუნქციებია. განვიხილოთ დეიტრონის ამოცანა მხოლოდ ცენტრალური ძალების მოქმედების შემთხვევაში. რაღვან ძირითად მდგომარეობაში $I_z = 0$, ამიტომ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - [\alpha^2 + r c(r)] u(r) = 0. \quad (r) I_z(r) = u(r) \quad (22.40)$$

როგორც აღვნიშნეთ, $v_c(r)$ პოტენციალის სახე ზუსტად არ ვიცით, ამიტომ საკმარისა იგი ისეთნაირად შევარჩიოთ, რომ თანხმობა მივიღოთ ექსპერიმენტულ მონაცემებთან. ჩვენ ვიცით, რომ (22,40) განტოლება ზუსტად ამოიხსნება სულ რამდენიმე პოტენციალისათვის. კერძოდ იგი ზუსტად ამოიხსნება: სფერული და ექსპონენციალური პოტენციალური ორმოსათვის, კონტაქტური და პულტენის პოტენციალებისათვის და სხვა. ყველა ამ ამოცანის ამონახსნები შეგვიძლია ჩავთვალოთ დეიტრონის ტალღურ ფუნქციებად. განვიხილოთ, მავალითად, V_0 -სიღრმის და r_0 სიგანის პოტენციალური ორმო. ამონახსნებს ექნებათ (12,30) სახე:

$$R_0(r) = \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha r_0} \right)^{1/2} \frac{\sin \beta r}{r}, \quad r < r_0 \quad (22.41)$$

$$R_0(r) = \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha r_0} \right)^{1/2} \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \frac{e^{-\alpha(r-r_0)}}{r}, \quad r > r_0 \quad (22.42)$$

სადაც α , β პარამეტრები განიპარტება (12,4) ფორმულებით:

$$\alpha^2 = \frac{2\mu \mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\mu(V_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \nu^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}, \quad (22.43)$$

საკუთარი მნიშვნელობები კი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\beta \operatorname{ctg} \beta r_0 = -\alpha. \quad (22.44)$$

როგორც ექსპერიმენტიდანაა ცნობილი, დეიტრონი მდგრად მდგომარეობას ადგენს, როცა სრული სპინი $S=1$ და აქვს ერთადერთი ენერგეტიული ღონე $\mathcal{E} = 2,23 \text{ Mev}$.

ჩვენ კი ვიცით, რომ იმისათვის, რათა ცენტრალური სიმეტრიის ორმოში გვექონდეს ერთი ღონე, საჭიროა დაცული იყოს პირობა

$$\frac{9\pi^2}{4M} > V_0 r_0^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}. \quad (S=1) \quad (22.45)$$

სინგლეტურ მდგომარეობაში კი დეიტრონს ბმული მდგომარეობა არა აქვს, ამიტომ

$$V_0 r_0^2 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}. \quad (S=0) \quad (22.46)$$

როგორც ვხედავთ, დეიტრონის ბმის ენერჯიის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ მხოლოდ $V_0 r_0^2$ ნამრავლი. ამიტომ ჩვენ დამატებით უნდა ვიცოდეთ ატომგულური ძალების ურთიერთქმედების რადიუსი, რომ შევძლოთ პოტენციალური ორმოს სიღრმის განსაზღვრა. თუ (22,45) პირობაში ავიღებთ, რომ ტრიპლეტური ურთიერთქმედების რადიუსი $r_{ot} = 1,7 \Phi$, მაშინ ორმოში პირველი ღონე წარმოიქმნება იმ შემთხვევაში, როცა $V_0 r_0^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M r_{ot}^2} \simeq 35 \text{ Mev}$.

გარე არეს (22,42) ფუნქციის გამოსახულებიდან ნათელია, რომ დეიტრონის ეფექტური რადიუსი $r_{\text{eff}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{M\mathcal{E}}}$ განისაზღვრება მხოლოდ და მხოლოდ

ბმის ენერგიით. რადგან ბმის ენერგია მცირეა, ამიტომ ეფექტური რადიუსი საკმარისად დილია $r_{\text{eff}} \approx 4,31 \cdot 10^{-10}$ მ. ტომგულური ძალების რადიუსი კი ამ სიდიდეზე სულ მცირე ორჯერ მინც ნაკლებია, რაც ნიშნავს, რომ ნეიტრონი და პროტონი სუსტად ბმულ სისტემას ადგენენ და დეიტრონში ისინი ძირითადად ატომგულური ურთიერთქმედების გარეთ იმყოფებიან. ამის გამო, საკმარისად კარგი მიახლოებით ჩვენ უფლება გვაქვს დეიტრონის ტალღურ ფუნქციად ჩავთვალოთ (22,42) ფუნქცია, რომლის არც შეგვიძლია ნულამდე გავაერთელოთ. თუ მოვახდენთ ამ ფუნქციის ერთზე ნორმირებას, გვექნება:

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r} \Big|_{r=0}^{\infty} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}. \quad (22,47)$$

ეს ფუნქცია სათავეში სანახევრო პირობას არ აკმაყოფილებს. (22,47) ტალღური ფუნქციით შეგვიძლია გამოვთვალოთ დეიტრონის საშუალო რადიუსი

$$\bar{r}_d = \int \psi^* r \psi dr = \frac{1}{2\alpha}. \quad (22,48)$$

მაშასადამე, დეიტრონის საშუალო რადიუსი ეფექტური რადიუსის ნახევრის ტოლია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ დეიტრონს აღზნებული მდგომარეობები არა აქვს—მისი აღზნებული მდგომარეობები უწყვეტ სპექტრში იმყოფება. მართლაც, ცენტრალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში, $L=0$ მდგომარეობის ენერგიას დამატება ცენტრგამშორი პოტენციალური ენერგია $\frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2}$, რომლის შეფასება ეფექტური რადიუსის მანძილზე $r_{\text{eff}} = \alpha^{-1}$, მოგვცემს

$$\Delta E = \mathcal{E} L(L+1). \quad (22,49)$$

მაშინაც კი, როცა $L=1$. გვექნება $\Delta E = 2\mathcal{E}$, ე. ი. P -მდგომარეობის ენერგია \mathcal{E} უწყვეტ სპექტრში იმყოფება. მით უმეტეს უწყვეტ სპექტრში იქნებიან $L=2,3$ და ა. შ. შესაბამისი ენერგიები.

ჰულტენის პოტენციალის შემთხვევაში დეიტრონის ტალღურ ფუნქციას, თანხმად (16,28) გამოსახულებისა, ექნება ფორმა:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{1}{r} (1 + \alpha r_0)(1 + 2\alpha r_0)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}{r}, \quad (22,50)$$

სადაც α იგივე ფორმულით განისაზღვრება, β კი ტოლია სიდიდისა $\beta = \alpha + \frac{1}{r_0}$.

(22,50) ფუნქცია (22,47) ფუნქციისაგან განსხვავდება იმით, რომ იგი სათავეში სასრული სიდიდეა. როცა $r=0$, მაშინ $\beta = \infty$ და ჰულტენის ფუნქცია დაემთხვევა (22,47) ფუნქციას.

სამწუხაროდ, დეიტრონის თვისებების ასახსნელად ყველა პოტენციალი „კარგია“. მცირე ენერგიებზე ნუკლონების ურთიერთქმედების ექსპერიმენტებიდან საშუალება არა გვაქვს პოტენციალებს შორის რომელიმე ერთის ამორჩევისა.

დრეკადი გაფანტვის კვანტური თეორია

კვანტურ მექანიკას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს გაფანტვის ამოცანებში. ამასთან, გაფანტვის თეორია გადაწყვეტია ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ხასიათისა და მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მახასიათებლების დადგენისათვის. გაფანტვის თანამედროვე თეორიამ მკაცრად ჩამოყალიბებული სახე მიიღო. იგი ეყრდნობა მძლავრ მათემატიკურ აპარატს, კარგადაა დამუშავებული გაფანტვის თეორიის პრინციპული საკითხები.

გაფანტვის თეორიაში იხილავენ ორ მეთოდს—სტაციონარულსა და არასტაციონარულს. ცხადია, ორივე ეს მეთოდი ერთი და იმავე შედეგებს იძლევა. ჩვენ განვიხილავთ სტაციონარულ თეორიას, როგორც უფრო მარტივსა და, ამავე დროს, უფრო ნათელი შინაარსის მქონეს.

გაფანტვის თეორიაში ძირითადად შემოვისახდურებით ცენტრალური ურთიერთქმედებით, რამდენადაც ყველა პრინციპული საკითხი შეგვიძლია განვიხილოთ ამ ველის მაგალითზე და, გარდა ამისა, როგორც ირკვევა, ყველა ასე თუ ისე საინტერესო შემთხვევა ურთიერთქმედებისა, მთლიანად თუ არა ძირითადად მინც, ცენტრალურ ხასიათს ატარებს.

გაფანტვის ამოცანების განხილვისას ვიგულისხმებთ, რომ საქმე გვაქვს დრეკად დაჯანებასთან, ე. ი. ისეთ ურთიერთქმედებასთან, როცა დაცემული ნაწილაკის იმპულსის სიდიდე არ იცვლება ან, სხვათაშორის რომ ვთქვათ, როცა არ ხდება ნაწილაკთა შინაგანი მდგომარეობების ცვლილება, ანდა ახალი ნაწილაკების გაჩენა.

გაფანტვის კვანტური თეორიის ის ნაწილი, რომელიც კინემატიკას ეხება და შედეგია შენახვის კანონებისა, ისეთივეა, როგორიც კლასიკურ მექანიკაში. რადგან ეს საკითხები დაწერილებით განხილული გვაქვს „თეორიული ფიზიკის“ კურსის პირველ ნაწილში, ამიტომ დამატებით აქ აღარ განვიხილავთ.

§ 23. გაფანტვა ცენტრალური ველით

განვიხილოთ ორი m_1 და m_2 მასების მქონე ნაწილაკების ურთიერთგაფანტვა სტაციონარულ მდგომარეობაში ნაწილაკებს შორის ცენტრალური ურთიერთქმედების დროს. როგორც ვიცით, ეს ამოცანა ეკვივალენტურია ერთი $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

დაყვანილი მასის მქონე ფიქტიური ნაწილაკის გაფანტვისა $V(r)$ გარეშე ველით. შრედინგერის სათანადო განტოლებას, სიმძიმის ცენტრის გამოყოფის შემდეგ, ექნება ასეთი სახე:

$$(\Delta + k^2) \psi_k(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \psi_k(r), \quad (23,1)$$

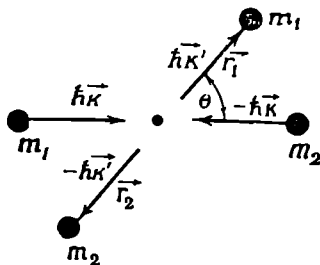
სადაც $r = r_1 - r_2$ ფარდობითი მოძრაობის რადიუსვექტორია, μ ფარდობითი იმპულსი, ხოლო

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (23,2)$$

ფარდობითი ენერგია. შემდგომში $V(r)$ პოტენციალური ენერგიის ნაცვლალ ხშირად ვისარგებლებთ მისი პროპორციული სიდიდით

$$U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r). \quad (23,3)$$

როცა საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, გაფანტვას ყოველთვის განვიხილავთ C -სისტემაში, ე. ი. სისტემაში, რომელშიც ნაწილაკთა სრული იმპულსი, როგორც



ნახ. 3.

დაჯახებამდე, ისე დაჯახების შემდეგ ნულის ტოლია. ამ სისტემაში გაფანტვის სურათი ისეთი იქნება, როგორც მე-3 ნახაზზე წარმოდგენილი. ცხადია, საბოლოო იმპულსის მიმართულება ემთხვევა $r = r_1 - r_2$ ვექტორის მიმართულებას, ე. ი.

$$r = k'. \quad (23,4)$$

გაფანტვის თეორიაში საჭიროა მოიძებნოს (23,1) შრედინგერის განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელსაც დიდ მანძილებზე ექნება შემდეგი ასიმპტოტური სახე:

$$\psi_k(r) = \psi_k(r) + F(k', k) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,5)$$

სადაც

$$\psi_k(r) = e^{ikr} \quad (23,6)$$

წარმოადგენს დაცემულ ბრტყელ ტალღას, რომელიც აკმაყოფილებს შრედინგერის (23,1) განტოლებას თავისუფალი მოძრაობისათვის, ე. ი. როცა $V(r) = 0$. (23,6) დაცემული ბრტყელი ტალღა ისეა ნორმირებული, რომ დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადი $J = v |\psi_k|^2 = v$ სიდიდით ფარდობითი სიჩქარის ტოლი იყოს.

ჩვეულებრივ, გაფანტვის მიმართულებად z -ღერძს ირჩევენ, ამიტომ (23,5)-ში იღებენ $\Phi_k = \exp(ikz)$ გამოსახულებას.

$F(k', k)$ ფუნქციას გაფანტვის ამპლიტუდა ეწოდება. იგი ფუნქცია იქნება ფარდობითი ენერგიისა და კუთხისა საწყის $\hbar k$ და საბოლოო $\hbar k'$ იმპულსებს შორის. ამ კუთხეს გაფანტვის კუთხე ეწოდება და მას θ -თი აღნიშნავენ.

როგორც (23,5) გამოსახულებიდან ვხედავთ, გაფანტვის ამოცანის შესაბამისი ტალღური ფუნქცია გაფანტვის ცენტრიდან უსასრულოდ შორს უნდა წარ-

მოდგენდეს დაცემული ბრტყელი ტალღისა და განშლადი სფერული ტალღების ჯამს. ეს გასაგებია, რადგან უსასრულობაში უნდა შეგვხედდეს როგორც გაუფანტავი, ისე ცენტრიდან ყველა მიმართულებით გაფანტული ნაწილაკები. შემდგომში (23,5) პირობას გაფანტვის ამოცანის სასაზღვრო პირობას ვუწოდებთ.

ამგვარად, გაფანტვის სასაზღვრო პირობა მოითხოვს, რომ გაფანტვის ამოცანის შესაბამისი ამონახსნის ასიმპტოტური სახე ორ წვერს შეიცავდეს. ერთს დაცემულ ბრტყელ ტალღას, მეორეს კი—გაფანტულ სფერულ ტალღას

$$\varphi(r) = F(k', k) \frac{e^{ikr}}{r}; \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,7)$$

თუ გამოვიყენებთ ალბათობის დენის ვექტორის ფორმულას

$$J = \frac{\hbar \mu}{2\mu} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \quad (23,8)$$

მაშინ დაცემული და გაფანტული ნაწილაკების ნაკადი, შესაბამისად, ტოლი იქნება:

$$J_{\text{დაც}} = \frac{\hbar k}{\mu}, \quad J_{\text{გაფ}} = \frac{\hbar k'}{2\mu r^2} |F(k', k)|^2. \quad (23,9)$$

ბუნებრივია, გაფანტვა დაგახასიათოთ სიდიდით, რომელიც განსაზღვრული იქნება ერთ სეკუნდში, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ სხეულოვან კუთხეში გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვის ფარდობით დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადთან. ამ სიდიდეს, როგორც ვეცით, გაფანტვის ეფექტურ დიფერენციალურ განიგვეთს უწოდებენ. გვექნება

$$d\sigma = \frac{|J_{\text{გაფ}}|}{|J_{\text{დაც}}|} d\Omega, \quad (23,10)$$

სადაც $d\sigma$ არის იმ სფეროს ფართის ელემენტი, რომლის რადიუსია რადკან სხეულოვანი კუთხე $d\Omega = \frac{d\Omega}{r^2}$, ამიტომ დიფერენციალური განიგვეთისათვის საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$d\sigma = |F(k', k)|^2 d\Omega. \quad (23,11)$$

დიფერენციალური განიგვეთი დამოკიდებული იქნება ენერგიასა და გაფანტვის θ კუთხეზე. $V(r)$ პოტენციალური ენერგიის ცენტრალური სიმეტრიის გამო, გაფანტვის ამპლიტუდა და, მაშასადამე, განიგვეთი აზიმუტალურ კუთხეზე დამოკიდებული არ არის.

როგორც ვხედავთ, გაფანტვის დიფერენციალური განიგვეთის მოძებნა ეკვივალენტურია ერთი $F(E, \cos \theta)$ ფუნქციის მოძებნისა. ამ ფუნქციის მოსაძებნად, კონკრეტული სახის ურთიერთქმედების შემთხვევაში, საჭიროა სათანადო შრეღინგერის განტოლების ამოხსნა (23,5) სასაზღვრო პირობით. ამონახსნის ასიმპტოტურ გამოსახულებაში, დიდი r -ებისათვის, განშლადი ტალღის კოეფიციენტი იქნება სწორედ გაფანტვის ამპლიტუდა.

იმის გამო, რომ ცენტრალურ ველში ინახება იმპულსის მომენტი, ნაცვლად $F(k', k)$ -ისა, ხელსაყრელია პარციალური ამპლიტუდის შემოღება, ე. ი. ამპლი-

ტუნდსა, რომელიც გარკვეულ მომენტს შეესაბამება. $F(k', k)$ ამპლიტუდა გვეზღოთ სფერულ ფუნქციებად¹.

$$F(k', k) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} F_l(k) Y_{lm}(\bar{k}) Y_{lm}^*(\bar{k}') \quad (23,12)$$

$F_l(k)$ -ს უწოდებენ პარციალურ ამპლიტუდას.

ახლა გავიხსენოთ ბრტყელი ტალღის (9,21) ასიმპტოტური წარმოდგენა დიდი მანძილებისათვის:

$$\psi_k(r) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l \left[\frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2ikr} - \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2ikr} \right] Y_{lm}(\bar{r}) Y_{lm}^*(\bar{k}); \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,13)$$

როცა ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება არ არის, მაშინ უსასრულობაში განშლადი და კრებადი ტალღების ამპლიტუდები სწორედ ამ გამოსახულებით იქნება განსაზღვრული, ხოლო როცა ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ, მაშინ მათი შესაბამისი ტალღური $\psi_k(r)$ ფუნქციის ასიმპტოტურ სახეში განშლად ტალღასთან დაგვიკვება განსხვავებული ამპლიტუდა. სწორედ ის, რითაც $\psi_k(r)$ ამონახსნის ასიმპტოტიკაში განშლადი ტალღა განსხვავდება შესაბამისი ბრტყელი ტალღის ასიმპტოტიკის განშლადი სფერული ტალღის ამპლიტუდისაგან, განსაზღვრავს გაფანტვის ამპლიტუდას.

გაფანტვის ამოცანის ამონახსნიც გავშლოთ სფერულ ფუნქციებად:

$$\psi_k(r) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l \frac{\chi_l(kr)}{kr} Y_{lm}(\bar{k}) Y_{lm}^*(\bar{r}) \quad (23,14)$$

შეზიგებები გაშლაში შემოვიღეთ ხელსაყრლობის მიზნით.

თუ (23,5) გამოსახულებაში შევიტანთ (23,14), (23,13) და (23,12) ფორმულას, გავითვალისწინებთ (23,4) ტოლობას და მოვახდენთ ინტეგრაციას კუთხეებით, სათანადო სფერულ ფუნქციებზე გადამრავლების შემდეგ, რადიალური ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური გამოსახულებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{\chi_l(kr)}{kr} = [1 + 2ik F_l(k)] \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2ikr} - \frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2ikr}; \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,15)$$

არაგორც ვხედავთ, ბრტყელი ტალღის ასიმპტოტური გამოსახულებისაგან განსხვავებით, განშლად სფერულ ტალღას გაუჩნდა მამრაველი

$$S_l(k) = 1 + 2ik F_l(k); \quad (23,16)$$

¹ გაფანტვის ამოცანის ცენტრალურ ველში ღერძული სიმეტრია ასახავთებს, რის გამოც პარციალური ამპლიტუდა დამოკიდებული არ არის m -ზე. ამიტომ უფრო ფიზიკურია $F(k', k)$ ფუნქციის გაშლა ლეანდრის პოლინომებად. (23,12) ფორმულაში აჯამება შეგვიძლია მოვახდინოთ m -ით (9,34) ფორმულის თანახმად. მაგრამ მოშეაღწიოთ ყოველთვის გამოვიყენებთ (20,12) ტიპის გაშლას, რადგან გარკვეული აზრით სფერული ფუნქციებით სარგებლობა უფრო ხელსაყრელია, ვიდრე ლეანდრის პოლინომებით.

მაშასადამე, (23,15) მიიღებს სახეს:

$$\frac{\chi_l(kr)}{kr} = \frac{i}{2kr} \left[e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l(k) e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right]. \quad (23,17)$$

დრეკადი გაფანტვისათვის $S_l(k)$ სიდიდეს შემდეგნაირად აღნიშნავენ:

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} \quad (23,18)$$

$S_l(k)$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც დიაგონალური უნიტარული მატრიცა¹. მას უწოდებენ S-მატრიცას ცენტრალურ ველში გაფანტვისათვის. $\delta_l(k)$ სიდიდეს კი გაფანტვის ფაზას უწოდებენ. რადგან ექსპონენტი პერიოდული ფუნქციაა, ამიტომ გაფანტვის ფაზა ცალსახად არ იქნება განსაზღვრული. თუ მოვითხოვთ, რომ, როცა პოტენციალური ენერგია $V(r) \rightarrow 0$, მაშინ $S_l(k) = 1$ ფაზის მნიშვნელობანი შეგვიძლია ავარჩიოთ $(0, \pi)$ ინტერვალში.

რადგან (23,16) ფორმულიდან

$$F_l(k) = \frac{S_l(k) - 1}{2ik} = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik}, \quad (23,19)$$

ამიტომ გაფანტვის (23,12) ამპლიტუდა ასეც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$F(k', k) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{S_l(k) - 1}{2ik} Y_{lm}(\bar{k}) Y_{lm}^*(\bar{k}'). \quad (23,20)$$

ცხადია, (G, 34) ფორმულის გამოყენებით ამპლიტუდას შეიძლება მივცეთ ჩვეულებრივი ფორმაც. გვექნება

$$F(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (23,21)$$

როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდა განსაზღვრულია $\delta_l(k)$ პარციალური ფაზების საშუალებით.

შევნიშნოთ, რომ (23,17) ასიმპტოტური ფუნქცია შეგვიძლია შემდეგი სახითაც წარმოვადგინოთ:

$$\chi_l(kr) = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) + \frac{S_l(k) - 1}{2i} e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,22)$$

ან, რაც იგივეა:

$$\chi_l(kr) = e^{i\delta_l} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right). \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,23)$$

როცა $\delta_l = 0$, მაშინ ეს ფუნქცია ემთხვევა თავისუფალი მოძრაობის $kr j_l(kr)$ ფუნქციის ასიმპტოტურ გამოსახულებას. $\delta_l(k)$ წარმოადგენს სწორედ ურთიერთქმედების შედეგად თავისუფალი მოძრაობის შესაბამისი $kr - l\pi/2$ ფაზის წანაცვლებას.

¹ S-მატრიცა პირველად შემოღებული იყო ჰაიზენბერგისა და უილერის მიერ. იხ. შრომები: W. Heisenberg, Zs. f. Phys., 120, 513, 673, 1943. J. A. Wheeler, Phys. Rev., 52, 1107, 1937.

ზოგჯერ, ნაცვლად (23,22) ასიმპტოტური ფორმისა, ხელსაყრელია შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულების განხილვა:

$$\chi_1(kr) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \text{ctg } \delta_l \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right); \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,24).$$

ცხადია, ეს უქანასკნელი ეკვივალენტურია ფუნქციისა

$$\chi_1(kr) = \frac{1}{\cos \delta_l} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \quad (23,25).$$

(23,24) გამოსახულების გარდა შეგვიძლია ვისარგებლოთ ასიმპტოტიკით:

$$\chi_1(kr) = \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \text{ctg } \delta_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right), \quad (r \rightarrow \infty) \quad (23,26)$$

ან მისი ტოლფასი გამოსახულებით

$$\chi_1(kr) = \frac{1}{\sin \delta_l} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \quad (23,27).$$

ცხადია, ყველა ზემომოტანილი სასაზღვრო პირობა ერთსა და იმავე ფიზიკურ შედეგებს მოგვცემს.

შევნიშნოთ, რომ (23,22) ფუნქციისაგან განსხვავებით, (23,24) და (23,26) ფუნქციები ნამდვილია, ამიტომ მათი $e^{-i\omega t}$ მამრავლზე გამრავლებით მივიღებთ ტალღას, რომლის კვანძები სივრცეში უძრავად არიან განლაგებული, რაც ნიშნავს, რომ ეს ასიმპტოტური მნიშვნელობები შეესაბამება მდგარ ტალღას.

(23,19) ფორმულიდან ჩანს, რომ პარციალური ამპლიტუდა ფაზასთან შემდგენიარად არის დაკავშირებული:

$$F_l(k) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l(k) = \frac{1}{k \text{ctg } \delta_l - ik}. \quad (23,28).$$

როგორც ვხედავთ, ცენტრალურ ველში დრეკადი გაფანტვის დროს ამპლიტუდა ან, რაც იგივეა, განივეყვით, ერთი ნამდვილი, ენერგიაზე და მომენტზე დამოკიდებული $\delta_l(E)$ სიდიდით განისაზღვრება.

ამპლიტუდის განმარტებიდან ნათელია, რომ იგი არ იცვლება, თუ მასში მოვახდენთ გარდაქმნას $k' \rightarrow -k$ და $k \rightarrow -k'$, ე. ი. ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$F(k', k) = F(-k, -k'), \quad (23,29)$$

რომელიც გამოხატავს ე. წ. თანადობის თეორემის ერთ-ერთ სპეციალურ შემთხვევას. ეს დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ k -დან k' მდგომარეობაში გაფანტვის ამპლიტუდა ტოლია დროში შებრუნებული მიმდევრობის შესაბამისი გაფანტვის ამპლიტუდისა, $-k'$ -დან $-k$ მდგომარეობაში. შევნიშნოთ, რომ ამ დებულებას, რომელსაც ტრივიალური გამოყვანა აქვს ცენტრალური ველის შემთხვევაში, დაცულია ზოგადი სახის ურთიერთქმედებისთვისაც და შედეგია გაფანტვის ამპლიტუდის ინვარიანტობისა დროის ინვერსიის მიმართ.

ასევე ადვილად დაინახავთ, რომ ცენტრალურ ველში ადგილი ექნება შემდეგ თანაფარდობასაც:

$$F(k', k) = F(-k', -k). \quad (23,30)$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი შედეგია პოტენციალური ენერჯიის ინვარიანტობისა ჰიერცის ინვერსიის მიმართ. (23,29) და (23,30) ტოლობების შედარებით მივიღებთ:

$$F'(k', k) = F(k, k'); \quad (23,31)$$

მაშასადამე, გაფანტვის ამპლიტუდა სიმეტრიული ყოფილა k და k' ტალღური ვექტორების მიმართ.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ S -მატრიცა, რომელიც შემოვიღეთ და დიაგონალურია ცენტრალურ ველში, ზოგადი ურთიერთქმედების დროს დიაგონალური აღარ არის. მისი სახე, ცხადია, დამოკიდებული იქნება პოტენციალურ ენერჯიაზე. $S(k)$ -მატრიცა სავსებით ახასიათებს გაფანტვის ამოცანას, და არა მარტო გაფანტვას, არამედ, როგორც შემდგომში დაინახავთ, მისი საშუალებით შეიძლება ბმული მდგომარეობების მოქებნაც.

გაფანტვის თეორიაში, გარდა S -მატრიცისა, იხილავენ სხვა მატრიცებსაც, რომლებიც დაკავშირებულია S -მატრიცასთან. მათგან ჩვენ განვიხილავთ გაფანტვის K და T -მატრიცებს.

§ 24. გაფანტვის ინტეგრალური განივკვეთი. ოპტიკური თეორემა. ფაზური ანალიზი

გაფანტვის ინტეგრალური განივკვეთი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma(E) = \int |F(k', k)|^2 d\Omega_{k'}. \quad (24,1)$$

შევიტანოთ ამპლიტუდის (23.20) გამოსახულება და მოვახდინოთ ინტეგრაცია. მივიღებთ:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi^2}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} |S_l(E) - 1|^2 \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\bar{k}) Y_{lm}^*(\bar{k}); \quad (24,2)$$

რადგან, როცა $\bar{k} = \bar{k}'$, (G, 34) ფორმულა მოგვეცემს

$$4\pi \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\bar{k}) Y_{lm}^*(\bar{k}) = 2l + 1, \quad (24,3)$$

ამიტომ ინტეგრალური განივკვეთისათვის გვექნება:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) |S_l(E) - 1|^2. \quad (24,4)$$

ან, თუ გავიხსენებთ S_l -მატრიცის (23,18) გამოხატულებას, მივიღებთ სრული განივკვეთის ფორმულას, განსაზღვრულს ფაზის საშუალებით:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(E). \quad (24,5)$$

როგორც ვხედავთ, გაფანტვა მაქსიმალურია, როცა $\sin^2 \delta_l = 1$. როცა $\delta_l = 0$, მაშინ გაფანტვის მატრიცა $S_l = 1$ და განიკვეთი, ისევე როგორც ამპლიტუდური ნულის ტოლია.

ცხადია, რადგან $P_l(0) = 1$, ამიტომ (23,21) და (23,28) ფორმულების გამოყენებით $\theta = 0$ კუთხეზე გაფანტვისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$Im F(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k), \quad (24,6)$$

რომლის (24,5) ფორმულასთან შედარებით მივიღებთ მნიშვნელოვან თანდარობას

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} Im F(0), \quad (24,7)$$

რომელსაც ოპტიკურ თეორემას უწოდებენ [17].

საინტერესოა ვაჩვენოთ, რომ ოპტიკური თეორემა შედეგია S_l -მატრიცის უნიტარობის თვისებისა. მართლაც, გამოვიყენოთ ოპტიკური თეორემა ისე, რომ არ გამოვიყენოთ S_l -მატრიცის წარმოდგენა ფაზის საშუალებით. მაშინ (23,21) ფორმულიდან გვექნება:

$$F(0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (i - iS_l), \quad (24,8)$$

საიდანაც

$$Im F(0) = \frac{1}{4k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (2 - S_l - S_l^*), \quad (24,9)$$

რადგან

$$|S_l - 1|^2 = 1 + S_l S_l^* - S_l - S_l^*; \quad (24,10)$$

ამიტომ (24,9) და (24,4) ფორმულებიდან (24,7) ოპტიკურ თეორემას მაშინ მივიღებთ, როცა $S_l^* S_l = 1$, ე. ი. როცა S_l -მატრიცა უნიტარულია. (რადგან S_l -მატრიცა ცენტრალურ ველში დიაგონალურია, ამიტომ ამ შემთხვევაში $S_l S_l^*$ ემთხვევა $S_l S_l^*$ -ს).

ფაზური ანალიზი. თანახმად (23,21) ფორმულისა, დიფერენციალური განიკვეთი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\cos \theta$ -ს ხარისხების მწკრივად, მართლაც, ცხადია [19],

$$d\sigma = |F(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{ll'} (2l+1) (2l'+1) \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}).$$

$$P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d\Omega, \quad (24,11)$$

თუ გამოვიყენებთ ცნობილ ფორმულას:

$$P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} |(ll' 00 | L0)|^2 P_L(\cos \theta), \quad (24.12)$$

სადაც $(ll' mm' | LLM)$ კლებშ-ჯორდანის კოეფიციენტია, მარტივად მივიღებთ:

$$d\sigma = \frac{1}{k^2} \sum_L A_L P_L(\cos \theta) d\Omega \quad (24.13)$$

A_L -მუდმივი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$A_L = \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) |(ll' 00 | L0)|^2 \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}); \quad (24.14)$$

(24,13) ფორმულიდან, ცხადია, ინტეგრალურ განიკვეთს ექნება სახე:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} A_0; \quad (24.15)$$

A_0 -ის საპოვნელად (24,14)-ში გავითვალისწინოთ, რომ

$$(ll' 00 | 00)^2 = \frac{\delta_{ll'}}{2l+1}. \quad (24.16)$$

გვექნება:

$$A_0 = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (24.17)$$

ხშირად (24,13) განიკვეთის თეორიული მნიშვნელობის ექსპერიმენტულთან შედარებით შესაძლოა განისაზღვროს A_L -კოეფიციენტები. ექსპერიმენტით ნაპოვნი A_L მნიშვნელობების გამოყენებით (24,14) და (24,17) ფორმულების საშუალებით შესაძლებელია δ_l გაფანტვის ფაზების განსაზღვრა. გაფანტვის განიკვეთის ექსპერიმენტული მნიშვნელობიდან ფაზების აღდგენის მეთოდს ფაზურ ანალიზს უწოდებენ. ცხადია, ფაზური ანალიზი ეფექტური იქნება მაშინ, როცა გაფანტვაში ფაზების სასრული რიცხვი მონაწილეობს.

ამასთან, აღვნიშნოთ, რომ გაფანტვის ექსპერიმენტული მონაცემებიდან ფაზების აღდგენის მეთოდი ცალსახა არ არის. საკმარისია ითქვას, მაგალითად, რომ განიკვეთის იგივე მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ ყველა ფაზას ნიშანს შევეცვლით საწინააღმდეგოთი.

§ 25. იზიზურ ნაწილაკთა გაფანტვის აპკლიტუდა

როგორც ცნობილია, კვანტური მექანიკის იგივეობის პრინციპი მოითხოვს სრული ტალღური ფუნქცია იყოს სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული იმის მიხედვით, თუ როგორია იგივეურ ნაწილაკთა სისტემაში შემავალი ნაწილაკის სპინი. ამიტომ შრედინგერის განტოლების ამონახსნი იგივეური ნაწილაკებისათვის უნდა გავხადოთ სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული ნაწილაკთა გადასმის მიმართ. ამასთან, ცხადია, ორი ნაწილაკის გადასმა ეკვივალენტურია მათი შემავრთებელი რადიუსეექტორის ნიშნის ცვლილებისა: $r \rightarrow -r$. C -სისტემაში ეს ნიშნავს, რომ რად-

იუსვექტორის სიდიდე ნაწილაკთა გადასმისას არ იცვლება: $\nu \rightarrow \nu$, ხოლო θ -კუთხე იცვლება ($\pi - \theta$)-ით. შესაბამისად $(\vec{k} \cdot \vec{k}') = \cos \theta$ იცვლება $-\cos \theta$ და, მაშასადამე, $\nu = \nu \cos \theta$ იცვლება $-\nu$ -ით. აქედან გამომდინარე, გაფანტვის ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა, თანახმად (23,5) გამოსახულებისა, შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\psi = e^{ikz} \pm e^{-ikz} \div \frac{e^{ikr}}{r} [F(\theta) \pm F(\pi - \theta)]. \quad (25,1)$$

ამასთან, „ \pm “ აიღება სიმეტრიული კოორდინატული მდგომარეობისათვის, ე. ი. როცა ორი ნაწილაკის საჯამო სპინი ლუწია, „ $-$ “ კი — ანტისიმეტრიული კოორდინატული მდგომარეობისათვის, ე. ი. როცა საჯამო სპინი კენტია.

იგივეობის ძალით ჩვენ არ შეგვიძლია იმის დადგენა, თუ რომელი ნაწილაკთა გამფანტავი და რომელი გასაფანტავი. C -სისტემაში ერთმანეთს ეცემა ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართული ორი ბრტყელი ტალღა, განშლადი სფერული ტალღა კი ითვალისწინებს ორივე ნაწილაკის გაფანტვას.

რადგან დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადი კვლავ ფარდობითი სიჩქარით განისაზღვრება, ამიტომ დიფერენციალური განივკვეთი პროცესისა, რომელიც შეესაბამება რომელიმე ნაწილაკის გაფანტვას $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში, ტოლია შემდეგი გამოსახულებისა:

$$d\sigma_{\pm} = |F(\theta) \pm F(\pi - \theta)|^2 d\Omega \quad (25,2)$$

პლუს ნიშანი აიღება ლუწი საჯამო სპინისათვის, ხოლო მინუსი — კენტისათვის.

განივკვეთის ზემოთ მიღებულ ფორმულაში იგულისხმება, რომ ნაწილაკთა სრული სპინი გარკვეული მნიშვნელობისაა. ექსპერიმენტზე ამას ხშირად ადგილი არა აქვს. ამიტომ განივკვეთში გარკვეული წონებით გვხვდება როგორც $d\sigma_{+}$, ისე $d\sigma_{-}$. სპინური მდგომარეობის წონები გამოვთვალეთ §4-ში. თუ გამოვიყენებთ ამ ფორმულებს, მთელის ნახევარი სპინის შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ

$$d\sigma = \frac{s}{2s+1} d\sigma_{+} + \frac{s+1}{2s+1} d\sigma_{-}, \quad s = \frac{2n+1}{2}; \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (25,3)$$

ხოლო მთელი s -სპინისათვის გვექნება:

$$d\sigma = \frac{s+1}{2s+1} d\sigma_{+} + \frac{s}{2s+1} d\sigma_{-}, \quad s=n; \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (25,4)$$

ამ გამოსახულებებში (25,2) ფორმულების შეტანით მივიღებთ:

$$d\sigma = \left\{ |F(\theta)|^2 + |F(\pi - \theta)|^2 \mp \frac{1}{2s+1} [F(\theta)F^{*}(\pi - \theta) + F^{*}(\theta)F(\pi - \theta)] \right\} d\Omega; \quad (25,5)$$

ამასთან „ $-$ “ ნიშანი აიღება, როცა ნაწილაკის სპინი კენტი რიცხვის ნახევარია, „ $+$ “ კი — როცა სპინი მთელია.

მიღებული ფორმულიდან ჩანს, რომ განივკვეთის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მოვახდენთ θ -კუთხის შეცვლას ($\pi - \theta$)-ით. ეს კი ნიშნავს, რომ C -სისტემაში იგივეურ ნაწილაკთა გაფანტვის დიფერენციალური განივკვეთი სიმეტრიულ

ლია $\theta = \frac{\pi}{2}$ კუთხის მიმართ, როგორც მოსალოდნელი იყო, განივკვეთში გაჩნდა ინტერფერენციული წვერები, რომლებიც დაკავშირებულია გაცვლით ურთიერთქმედებასთან.

§ 26. ბრინის ფუნქცია

ცენტრალურ ველში მოძრაობის შრედინგერის განტოლება გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$(E - \hat{H}_0)\psi(r) = V(r)\psi(r), \quad (26,1)$$

სადაც

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \quad (26,2)$$

ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯის ოპერატორია ან, როგორც ხშირად ამბობენ, თავისუფალი მოძრაობის ჰამილტონიანია. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\hat{L} = E - \hat{H}_0, \quad A(r) = V(r)\psi(r), \quad (26,3)$$

მაშინ შრედინგერის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\hat{L}\psi(r) = A(r), \quad (26,4)$$

სადაც ფორმალურად ჩავთვლით, რომ $A(r)$ მოცემული ფუნქციაა. ჩვენი მიზანია ამ განტოლების ამოხსნა გაფანტვის ამოცანისათვის. ამისათვის (26,4) გადაწეროთ ინტეგრალური განტოლების სახით, რომელშიც ავტომატურად იქნება გათვალისწინებული გაფანტვის სასაზღვრო პირობა, რომლის მიხედვით $r \rightarrow \infty$ -თვის $\psi(r)$ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს (23,5) სახე. (26,4) განტოლება გადაწეროთ იგივერად

$$\hat{L}\psi(r) = \int \delta(r - r') A(r') dr', \quad (26,5)$$

საიდანაც ფორმალურად შეგვიძლია ვიპოვოთ $\psi(r)$ ფუნქცია

$$\psi(r) = \int \hat{L}^{-1} \delta(r - r') A(r') dr'; \quad (26,6)$$

ეს უკანასკნელი შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\psi(r) = \int G_0(r, r') A(r') dr', \quad (26,7)$$

სადაც

$$G_0(r, r') = \hat{L}^{-1} \delta(r - r'). \quad (26,8)$$

$G_0(r, r')$ -ს უწოდებენ თავისუფალი მოძრაობის ბრინის ფუნქციას. ცხადია, რომ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\hat{L}G_0(r, r') = \delta(r - r'); \quad (26,9)$$

თუ დელტა-ფუნქციას წარმოვადგენთ ფურიეს ინტეგრალად და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\hat{L}^{-1} e^{ikr} = (E - \hat{H}_0)^{-1} e^{ikr} = \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right)^{-1} e^{ikr}, \quad (26,10)$$

(26,8) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} d\mathbf{k}'}{E - E(\mathbf{k}')}, \quad E(\mathbf{k}') = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2\mu} \quad (26,11)$$

როცა ურთიერთქმედება არა გვაქვს, ე. ი. როცა $V(\mathbf{r})=0$ და, მაშასადამე, $A(\mathbf{r})=0$, მაშინ (26,7) გამოსახულებას უნდა დაემატოს (26,4) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში წარმოადგენს ბრტყელ ტალღას. ავირჩიოთ ბრტყელი ტალღა განსაზღვრული იმპულსით- $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. როგორც ვიცით, იგი წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს:

$$\hat{L}\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0; \quad (26,12)$$

ამგვარად, გვექნება:

$$\psi(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (26,13)$$

მაგრამ ეს განტოლება ჯერ კიდევ არაა ინტეგრალური, რამდენადაც მასში ჯერ არ არის გათვალისწინებული (23,5) სასაზღვრო პირობა. (26,13) განტოლებაში $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ -ის ქვეშ ყოველთვის შეგვიძლია ვივლისხმით, რომ იგი წარმოადგენს დაცემულ ბრტყელ ტალღას, მაშინ მეორე წევრი უნდა იყოს განშლადი სფერული ტალღა. ამისათვის კი აუცილებელია გრინის ფუნქციის სათანადოდ განსაზღვრა; კერძოდ, საჭიროა გრინის (26,11) ფუნქციაში შემავალი ინტეგრალის განმარტება.

(26,11) გამოსახულება ასე გადავწეროთ:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{R}} d\mathbf{k}'}{k^2 - k'^2}, \quad (26,14)$$

სადაც

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (26,15)$$

კუთხებით ინტეგრაციის შემდეგ მარტივად მივიღებთ:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{2\pi^2 \hbar^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k' \sin k' R dk'}{k^2 - k'^2}. \quad (26,16)$$

სასაზღვრო პირობის ნათლად წარმოდგენისათვის ხელსაყრელია ამ ინტეგრალის ამოხსნა ნაშთთა თეორიით [2]. k' ნამდვილი ცვლადის ნაცვლად გადავიღეთ z კომპლექსურ სიბრტყეზე და ჩვენი ინტეგრალი ამ სიბრტყეში კონტურული ინტეგრალის სახით წარმოვიდგინოთ. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $z = k'R$, მაშინ

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-\mu}{2\pi^2 \hbar^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \sin z dz}{z^2 - z_0^2}, \quad (26,17)$$

სადაც $z_0 = kR$ დადებითი რიცხვია.

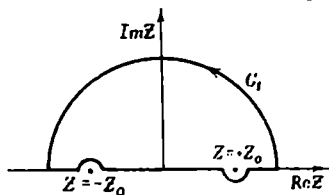
წინასწარ ნათელია, რომ იმისათვის, რათა (26,13) აკმაყოფილებდეს (23,5) გაფანტვის სასაზღვრო პირობას, გრინის ფუნქციას უნდა ჰქონდეს $\frac{1}{R} e^{i\mathbf{k}R}$ სახე. ეს კი ნიშნავს, რომ (26,17) ინტეგრალი პროპორციული უნდა იყოს $e^{i z_0}$ -ისა. ამიტომ, როცა ამ ინტეგრალს კომპლექსურ სიბრტყეზე განვიხილავთ, როგორც

კონტურულ ინტეგრალს, $z = \pm z_0$ პოლუსების შემოვლის წესი ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ ინტეგრალი მართლაც e^{iz_0} -ის პროპორციული გამოვიდეს.

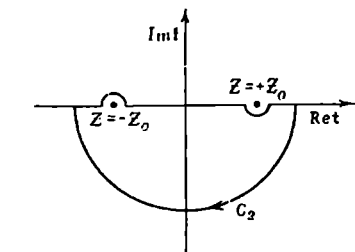
ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას ნამდვილ ლერძზე აქვს ორი პოლუსი $z = z_0$ და $z = -z_0$. ქვემოთ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ინტეგრალის დამოკიდებულება z_0 -ზე განისაზღვრება კონტურის შერჩევით პოლუსების უშუალო მახლობლობაში. ვთქვათ, კონტური ისეა შერჩეული, რომ კონტური $z = -z_0$ პოლუსს უვლის ზევიდან, ხოლო $z = z_0$ პოლუსს — ქვემოდან (ნახ. 4 და 5). საძიებელი ინტეგრალი შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \sin z dz}{z^2 - z_0^2} = \frac{1}{2i} \left(\int_{C_1} \frac{z e^{iz} dz}{z^2 - z_0^2} - \int_{C_2} \frac{z e^{-iz} dz}{z^2 - z_0^2} \right). \quad (26,18)$$

პირველი ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ, თუ კონტურს ჩავეკეტო ზედა ნახევარსიბრტყეში უსასრულო რადიუსის ნახევარწრით (ნახაზზე C_1 კონტური), ხოლო მეორე ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა კონტურის ჩავეკეტა ქვედა ნახევარსიბრტყეში. ეს იმიტომ, რომ ჟორდანის ლემა პირველი ინტეგრალისათვის კმაყოფილდება z -ის დადებითი ვითარის ნაწილის შემთხვევაში (ზედა ნახევარსიბრტყე), მეორისათვის კი — უარყოფითი ვითარის ნაწილისათვის (ქვედა ნახევარსიბრტყე). C_1 კონტურის შიგნით მოთავსებულია მხოლოდ $z = z_0$ პოლუსი, ამიტომ პირველი ინტეგრალი ტოლია $2\pi i r_1$, სადაც r_1 არის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ნაშთი $z = z_0$ წერტილში.



ნახ. 4.



ნახ. 5.

ამგვარად, პირველი ინტეგრალი ტოლი იქნება $\pi i e^{iz_0}$ -ისა. მეორე ინტეგრალის საინტეგრაციო C_2 კონტურის შიგნით გაქვს აგრეთვე ერთი $z = -z_0$ პოლუსი, ამიტომ, რადგან შემოვლის დროს კონტური ხელმარჯვნივ რჩება, მეორე ინტეგრალი ტოლი იქნება $-2\pi i r_2$ -ისა.

r_2 არის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ნაშთი $z = -z_0$ პოლუსში. ინტეგრალი კი ტოლი იქნება $-\pi i e^{iz_0}$ -ისა. ასე რომ (26,18) ინტეგრალი πe^{iz_0} -ის ტოლი აღმოჩნდა. ამგვარად, გრინის ფუნქცია ექნება გამოსახულება

$$G_0^{(+)}(r, r') = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |r - r'| \quad (26,19)$$

გრინის ეს ფუნქცია კი, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, უზრუნველყოფს გაფანტვის სასაზღვრო პირობას. ამგვარად, გაფანტვის სასაზღვრო პირობის დასაკმაყოფილებლად (26,14) ინტეგრალი ისე უნდა განვმარტოთ, რომ კონტური მარცხენა პოლუსს უვლიდეს ზემოდან, ხოლო მარჯვენას — ქვემოდან.

თუ საინტეგრაციო კონტურს ისე შევარჩევთ, რომ იგი, პირიქით, მარცხენა პოლუსს ქვევოდან უვლიდეს, მარჯვენას კი ზემოდან, სრულიად ანალოგიური მსჯელობით, გრინის ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$G_0^{(-)}(r, r') = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}, \quad R = |r - r'| \quad (26,20)$$

ადვილად შემოწმდება, რომ გრინის ასეთი ფუნქცია (26,13) განტოლებაში უზრუნველყოფს გაფანტული ტალღის ასიმპტოტიკას—ბრტყელი ტალღა პლუს კრებადი სფერული ტალღა. გრინის ამ ორი ტიპის ფუნქციას განსხვავებული ფიზიკური შინაარსის გამო სხვადასხვა ნიშნები მიეწერება: „+“ და „-“. შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$G_0^{(+)}(r, r') = G_0^{(-)*}(r, r'). \quad (26,20')$$

როგორც ვხედავთ, გრინის ფუნქცია დამოკიდებულია ფარდობითი მოძრაობის ენერგიაზე $E = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2\mu}$ კერძო შემთხვევაში, როცა $E = 0$, გვექნება

$$G_0^{(\pm)}(r, r') = -\frac{\mu}{2\pi \hbar^2} \frac{1}{R}. \quad (26,21)$$

ახლა, თუ (26,19) გრინის ფუნქციას შევიტანთ (26,13) განტოლებაში, მივიღებთ გაფანტვის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\psi_k^{(+)}(r) = \Phi_k(r) - \frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \psi_k^{(+)}(r') dr', \quad (26,22)$$

რომელიც წარმოადგენს შრედინგერის განტოლებას გაფანტვის ამოცანისათვის, სადაც გათვალისწინებულია (23,5) სასაზღვრო პირობა; ასეთი სასაზღვრო პირობის შესაბამისი ტალღური ფუნქცია $\psi_k^{(+)}(r)$ -ით აღვნიშნეთ.

ვიპოვოთ (26,22)-ის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი r -ებისათვის (კერძოდ $r \gg r'$ -სათვის). ცხადია,

$$|r - r'| \simeq r - r' \cos \theta, \quad (26,23)$$

სადაც θ არის კუთხე r და r' ვექტორებს შორის, ამასთან r ვექტორის მიმართულება ემთხვევა გაფანტული ტალღის \mathbf{k}' -ტალღური ვექტორის მიმართულებას,

ე. ი. $\mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{r}}{r}$; ამგვარად,

$$kR = kr - kr' \cos \theta = kr - (k'r). \quad (26,23')$$

ამ ფორმულის გამოყენებით z ღერძის მიმართულებით დაცემული ტალღის გაფანტვისათვის მივიღებთ შემდეგ ასიმპტოტურ მნიშვნელობას:

$$\psi_k^{(+)}(r) = e^{ikz} - \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int e^{-ik'r'} V(r') \psi_k^{(+)}(r') dr' \right), \quad (26,24)$$

საიდანაც გაფანტვის ამპლიტუდისათვის მივიღებთ

$$F(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi \hbar^2} \int e^{-ik'r} V(r) \psi_k^{(+)}(r) dr; \quad (26,25)$$

რადგან

$$\phi_{k'}(r) = e^{ik'r}$$

არის ბრტყელი ტალღა (ნორმირებული ისეთნაირად, რომ ნაკადი სიდიდით ფარდობითი სიჩქარის ტოლია), ამიტომ (26,25) ფორმულა შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$F(k', k) = -\frac{i}{2\pi\hbar^2} (\phi_{k'} | V | \phi_k^*), \quad (26,26)$$

სადაც $\phi_k^{(*)}(r)$ წარმოადგენს (26,21) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს.

§ 27. გრინის ფუნქციის განსაზღვრა კოლუმნებზე მცირე წარმოსახვითი ნაწილის დამატებით და მისი ფორმალური განმარტება

როგორც წინა პარაგრაფში დაინახეთ, გრინის ფუნქციის განმარტება დამოკიდებულია პოლუსების შემოვლის წესზე. იმისათვის, რომ შემდგომში ინტეგრალის აღების დროს ყოველთვის არ დაგვიკირღეს პოლუსების შემოვლის წესის მითითება, ხელსაყრელია პოლუსებს დავუმატოთ მცირე $\pm i\epsilon$ კომპლექსური ნაწილები, სადაც ϵ უსასრულოდ მცირე სიდიდეა და ამით პოლუსები არის ღერძიდან ზედა და ქვედა ნახევარსიბრტყეებზე გადაიტანოთ. რადგან ამ შემთხვევაში $x_0 \pm i\epsilon$ პოლუსები ღერძზე აღარ იმყოფებიან, ამიტომ პოლუსის მითითება (ე. ი. ავიღებთ $x_0 + i\epsilon$ თუ $x_0 - i\epsilon$) ავტომატურად განსაზღვრავს შემოვლის წესს. ამასთან, ნაშთები უნდა ავიღოთ $x_0 \pm i\epsilon$ პოლუსებში და შემდეგ პასუხში გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $\epsilon \rightarrow 0$ [17].

კვლავ განვიხილოთ გრინის ფუნქციაში შემავალი ინტეგრალი და ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მნიშვნელს დავუმატოთ მცირე $i\epsilon$ სიდიდე: ეს ინტეგრალი $J^{(+)}(x_0)$ -თი აღვნიშნოთ, ე. ი.

$$J^{(+)}(x_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x_0^2 - x^2 + i\epsilon}. \quad (27,1)$$

ცხადია, ეს ინტეგრალი შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$J^{(+)}(x_0) = \frac{1}{2i} \left(\int \frac{x e^{ix} dx}{[x - (x_0 + i\epsilon)][x + (x_0 + i\epsilon)]} - \int \frac{x e^{-ix} dx}{[x - (x_0 + i\epsilon)][x + (x_0 + i\epsilon)]} \right). \quad (27,2)$$

აშკარაა, რომ პირველი ინტეგრალის საინტეგრაციო კონტური უნდა ჩაიკეტოს ზედა ნახევარსიბრტყეში, მეორე კი ქვედაში. შედეგად მივიღებთ (ϵ -ის ნულთან მისწრაფების შემდეგ)

$$J^{(+)}(x_0) = \pi e^{ix_0}. \quad (27,3)$$

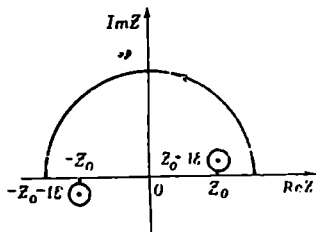
ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი

$$J^{(-)}(x_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x_0^2 - x^2 - i\epsilon}. \quad (27,4)$$

ეს უკანასკნელი წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$J^{(-)}(z_0) = \frac{1}{2i} \left(\int \frac{z e^{iz} dz}{[z - (z_0 - i\epsilon)][z + (z_0 - i\epsilon)]} - \int \frac{z e^{-iz} dz}{[z - (z_0 - i\epsilon)][z + (z_0 - i\epsilon)]} \right). \quad (27,5)$$

პირველი ინტეგრალი უნდა ჩაიკეთოს ზედა ნახევარსიბრტყეში, სადაც პოლუსი ტოლია $z = -z_0 + i\epsilon$ -ისა, მეორე კი — ქვედა ნახევარსიბრტყეში, სადაც პოლუსი $z = z_0 - i\epsilon$ -ის ტოლია.



ნახ. 6

შემდეგ აღ მივიღებთ:

$$J^{(-)}(z_0) = \pi e^{-iz_0}. \quad (27,6)$$

ამგვარად, თუ განვიხილავთ (26,11) გრინის ფუნქციის შემდეგი სახით

$$G_{\pm}^{(i)}(r, r') = \frac{2i}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-ik'r'} e^{ik'r} dk'}{k'^2 - k^2 \mp i\epsilon}, \quad (27,7)$$

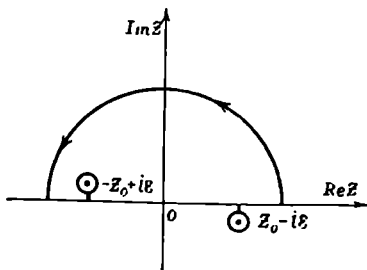
მაშინ k^2 -ზე $i\epsilon$ -ის დამატება, ე. ი. $G_{+}^{(i)}(r, r')$ გრინის ფუნქცია შეესაბამება განშლად

სფერულ ტალღას, ხოლო $-i\epsilon$ -ის დამატება ე. ი. $G_{-}^{(i)}(r, r')$ გრინის ფუნქცია შეესაბამება კრებად სფერულ ტალღას.

გრინის ფუნქციის (27,7) სახით ჩაწერის უპირატესობა აშკარაა, რადგან ამ შემთხვევაში ცალსახად არის განსაზღვრული საინტეგრაციო კონტურის შერჩევის საკითხი.

ამგვარად, გაფანტვის ამოცანის შესაბამისი ინტეგრალური განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\psi_{\pm}^{(i)}(r) = \Phi_{\pm}(r) + \int G_{\pm}^{(i)}(r, r') \nabla(r') \psi_{\pm}^{(i)}(r') dr'; \quad (27,8)$$



ნახ. 7

ამასთან, $\psi_{\pm}^{(i)}(r)$ წარმოადგენს გაფანტვის ამოცანის ტალღურ ფუნქციას, რომლის ასიმპტოტური სახე დიდი r -ებისათვის გამოხატავს დაცემულ ბრტყელ ტალღას დამატებული კრებადი სფერული ტალღა.

შეგნიშნოთ, რომ ხშირად იხილავენ გრინის ფუნქციასაც, რომელიც შეესაბამება შემდეგ კომბინაციას:

$$J(z_0) = \frac{1}{2} [J^{(+)}(z_0) + J^{(-)}(z_0)] = \pi \cos z_0. \quad (27,8')$$

შესაბამისი გრინის ფუნქცია, რომელსაც ჩვენ $g(r, r')$ -ით აღვნიშნავთ, იქნება ასეთი:

$$\psi(r, r') = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{\cos kR}{4\pi R}. \quad (27,9)$$

შეიძლება ჩვენება, რომ ეს გრინის ფუნქცია შეესაბამება სასაზღვრო პირობას, როცა გაფანტვის ამოცანის ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა ემთხვევა მდგარ ტალღას.

დაბოლოს მივუთითოთ, რომ თანახმად (26,20') ფორმულისა, (27,8) ინტეგრალური განტოლებიდან ადვილად დავამტკიცებთ. რომ $\psi^{(+)}(-k, r)$ და $\psi^{(-)}(k, r)$ ფუნქციებს შორის გვაქვს დამოკიდებულება:

$$\psi^{(+)}(-k, r) = \psi^{(-)*}(k, r), \quad (27,10)$$

ამასთან დამტკიცების დროს გამოვიყენეთ, რომ გრინის ფუნქცია დამოკიდებულია ენერგიაზე, ე. ი. k^2 -ზე, ამიტომ k -ს შეცვლით $-k$ -თი არ იცვლება.

ახლა გავიხსენოთ (26,26) ფორმულა და გამოვიყენოთ თანადობის თეორემა ამპლიტუდისათვის

$$F(k', k) = F(-k, -k'). \quad (27,11)$$

გვექნება:

$$F(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{-k} | V | \psi_{-k}^{(+)} \rangle; \quad (27,12)$$

მაშასადამე, თანახმად (27,10) ფორმულისა, გაფანტვის ამპლიტუდა $\psi_{-k}^{(-)}(r)$ ფუნქციით განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_{-k}^{(-)} | V | \Phi_k \rangle; \quad (27,13)$$

ამასთან, ჩვენ დავამტკიცებთ მნიშვნელოვანი ტოლობა

$$\langle \Phi_{k'} | V | \psi_{k'}^{(+)} \rangle = \langle \psi_{k'}^{(-)} | V | \Phi_{k'} \rangle, \quad (27,14)$$

რომლითაც შემდგომში არაერთხელ ვისარგებლებთ.

განვიხილოთ შრედინგერის განტოლება გაფანტვის ამოცანისათვის დირაკის სივრცეში

$$(E - \hat{H}_0) | \psi_k \rangle = V(r) | \psi_k \rangle. \quad (27,15)$$

ამ განტოლებიდან ფორმალურად განვსაზღვროთ $| \psi_k \rangle$ ვექტორი. ამისათვის (27,15) მარცხნიდან გავამრავლოთ $(E - \hat{H}_0)^{-1}$ ოპერატორზე; გვექნება

$$| \psi_k \rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0} V(r) | \psi_k \rangle; \quad (27,16)$$

მაგრამ (27,12)-ს უნდა დაემატოს ერთგვაროვანი განტოლების

$$(E - \hat{H}_0) | \Phi_k \rangle = 0 \quad (27,17)$$

ამონახსნიც. ამგვარად,

$$| \psi_k \rangle = | \Phi_k \rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0} V | \psi_k \rangle. \quad (27,18)$$

$G_0(E)$ -თი აღვნიშნოთ ოპერატორი

$$G_0(E) = (E - \hat{H}_0)^{-1}, \quad (27,19)$$

მაშინ (27,18) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$| \psi_k \rangle = | \Phi_k \rangle + G_0(E) V | \psi_k \rangle. \quad (27,20)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს გაფანტვის ინტეგრალურ განტოლებას. დასარწმუნებლად (27,20) მარცხნიდან სკალარულად გავამრავლოთ $(r|$ -ბრა ვექტორზე, მარჯვენა მხარის მეორე წევრში კი ჩავსვათ ერთზე გამრავლების ოპერატორი

$$\int dr |r\rangle \langle r'| = 1, \quad (27,21)$$

მაშინ გვქვია:

$$\langle r | \psi_k \rangle = \langle r | \Phi_k \rangle + \int \langle r | G_0(E) | r' \rangle \langle r' | V | r'' \rangle \langle r'' | \psi_k \rangle dr' dr''. \quad (27,22)$$

რადგან პოტენციალური ენერგია ლოკალურია, ამიტომ

$$\langle r' | V | r'' \rangle = V(r') \delta(r' - r''), \quad (27,23)$$

რაც მოგვცემს

$$\psi_k(r) = \Phi_k(r) + \int \langle r | G_0(E) | r' \rangle V(r') \psi_k(r') dr'. \quad (27,24)$$

განვიხილოთ $\langle r | G_0(E) | r' \rangle$ გამოსახულება. წარმოვადგინოთ იგი შემდეგი სახით:

$$\langle r | G_0(E) | r' \rangle = \int \langle r | k' \rangle \langle k' | G_0(E) | k \rangle \langle k | r' \rangle dk' dk; \quad (27,25)$$

რადგან სამართლიანია (27,17) განტოლება, ამიტომ

$$\langle k' | G_0(E) | k \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ik'r} \frac{1}{E - \hat{H}_0} e^{ikr} dr, \quad (27,26)$$

საიდანაც

$$\langle k' | G_0(E) | k \rangle = \frac{\delta(k' - k)}{E - E(k)}; \quad E(k) = \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu}. \quad (27,27)$$

მაშასადამე,

$$\langle r | G_0(E) | r' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle r | q \rangle \langle q | r' \rangle dq}{E - E(q)}. \quad (27,28)$$

აქედან კი შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$G_0(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|q\rangle \langle q|}{E - E(q)} dq. \quad (27,29)$$

ამგვარად, თუ (27,20) გამოსახულებას შევადარებთ (26,11)-ს, დავინახავთ, რომ

$$G_0(r, r') = \langle r | G_0(E) | r' \rangle, \quad (27,30)$$

რაც იმის დამაშტკიცებელია, რომ (27,25) და, მაშასადამე, (27,18) გამოსახულება-მართლაც წარმოადგენს გაფანტვის ინტეგრალურ განტოლებას, ხოლო (27,19) ყოფილა თავისუფალი მოძრაობის შესაბამისი გრინის ფუნქცია.

რაც შეეხება გაფანტვის სასაზღვრო პირობას, როგორც წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, მისი გათვალისწინება შეიძლება გრინის ფუნქციაში ენერგიაზე $\pm i\varepsilon$ სიდიდის დამატებით; გარდა ამისა, უნდა ვიგულისხმოთ, რომ საბოლოო შედეგებში საჭიროა ზღვარზე გადასვლა, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ამასთან კვლავ გავიხსენოთ, რომ $i\varepsilon$ -ის დამატება შეესაბამება ასიმპტოტიკას: ბრტყელ ტალღას დამატებული განშლადი სფერული ტალღა, $-i\varepsilon$ -კი ბრტყელ ტალღას პლუს კრებადი სფერული ტალღა.

ამგვარად, გაფანტვის ინტეგრალური განტოლება, კოორდინატულ წარმოდგენაში, შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$\psi_k^{(\pm)}(r) = \Phi_k(r) + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} V \psi_k^{(\pm)}(r), \quad (27,31)$$

სადაც

$$G_0^{(\pm)}(E) = (E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon)^{-1} \quad (27,32)$$

გრინის თავისუფალი მოძრაობის შესაბამისი ფუნქციაა. გრინის ფუნქციის სწორად ასეც ჩაწერთ ხოლმე:

$$G_0(z) = G_0^{(\pm)}(E) = (z - \hat{H}_0)^{-1}, \quad (27,33)$$

სადაც

$$z = E \pm i\epsilon. \quad (27,34)$$

გრინის ფუნქციის კომპლექსური ენერგიით, სწორად, რეზოლვენტასაც უწოდებენ¹. (27,32) განტოლებას უწოდებენ ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალურ განტოლებას ტალღური ფუნქციისათვის [20].

შევნიშნოთ, რომ (27,18) განტოლება ასევე მარტივად ჩაიწერება სხვა ნებისმიერ წარმოდგენაშიც. მაგალითად, ჩაწერთ იგი იმპულსურ წარმოდგენაში. მართლაც, (27,18) განტოლება გავამრავლოთ სკალარულად $\langle p |$ -ზე ვექტორზე და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\langle p | \Phi_k \rangle \equiv \langle p | k \rangle = \delta(p - k). \quad (27,35)$$

გარდა ამისა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (27,28) ფორმულას, საბოლოოდ გვექნება

$$\psi_k^{(\pm)}(p) = \delta(p - k) + \frac{1}{E - E(p) \pm i\epsilon} \int \langle p | V | p' \rangle \psi_k^{(\pm)}(p') dp', \quad (27,36)$$

სადაც

$$\langle p | V | p' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip'r} V(r) e^{ip'r} dr. \quad (27,37)$$

როგორც ვიცი, ლოკალური ურთიერთქმედებების $\langle p | V | p' \rangle$ მატრიცული ელემენტი მხოლოდ $p - p'$ სხვაობის ფუნქციაა.

§ 28. გრინის ფუნქციის გაშლა სფერულ ფუნქციებად

ცენტრალურ ველში ხელსაყრელია სფერულ კოორდინატებზე გადასვლა. ამ მიზნით გავშალოთ თავისუფალი მოძრაობის გრინის ფუნქცია სფერული ფუნქციების მიხედვით. (27,7) გამოსახულებაში მოვახდინოთ ბრტყელი ტალღების გაშლა სფერულ ფუნქციებად.

რადგან

$$e^{ikr} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(k) Y_{lm}(\bar{r}), \quad (28,1)$$

¹ რადგან ჰამილტონიანს ნამდვილი საკუთარი მნიშვნელობები აქვს, ამიტომ ნაკლები E -სათვის $E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon$ ოპერატორი ყოველთვის ნულისაგან განსხვავდება და ამიტომ მისი შებრუნებული ოპერატორი $G_0(z)$ სასრული იქნება.

ამიტომ სფერული ფუნქციების ორთო-ნორმირების ძალით გვექნება

$$G_0^{(\pm)}(r, r') = -\frac{2}{\pi} \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}') \int_0^\infty \frac{j_l(qr) j_l(qr') q^2 dq}{E(q) - E \mp i\epsilon}. \quad (28,2)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{G_0^{(\pm)}(r, r')}{rr'} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{j_l(qr) j_l(qr') q^2 dq}{E(q) - E \mp i\epsilon}, \quad (28,3)$$

მაშინ გრინის ფუნქციის გაშლას ექნება შემდეგი სახე:

$$G_0^{(\pm)}(r, r') = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} \frac{G_{lm}^{(\pm)}(r, r')}{rr'} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}'). \quad (28,4)$$

$G_{lm}^{(\pm)}(r, r')$ ეუწოდოთ თავისუფალი მოძრაობის გრინის პარციალური ფუნქცია. ვიპოვოთ მისი ცხადი სახე, განსაზღვრულობისათვის ჯერ განვიხილოთ $G_{lm}^{(+)}(r, r')$ ფუნქცია. რადგან, როცა $x \rightarrow -x$ გვაქვს ტოლობა

$$j_l(-x) = (-1)^l j_l(x), \quad (28,5)$$

სადაც l მთელი რიცხვია, ამიტომ (28,3) გამოსახულებაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია, რაც საშუალებას გვაძლევს გრინის პარციალური ფუნქციის შემდეგი სახით წარმოდგენისა:

$$\frac{G_{lm}^{(+)}(r, r')}{rr'} = -\frac{2\mu}{\pi \hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j_l(qr) j_l(qr') q^2 dq}{q^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (28,6)$$

ამ ინტეგრალის ამოსახსნელად გადავიდეთ x -კომპლექსურ სიბრტყეზე და საინტეგრაციო გზად ავირჩიოთ რაიმე კონტური ამ სიბრტყეზე. ერთ-ერთი $j_l(x)$ ბესელის სფერული ფუნქცია წინასწარ წარმოვადგინოთ ჰანკელის სფერული ფუნქციების სახით:

$$j_l(qr) = \frac{1}{2} [h_l^{(1)}(qr) + h_l^{(2)}(qr)]; \quad (28,7)$$

გვექნება:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2 j_l(zr) j_l(zr') dz}{z^2 - k^2 - i\epsilon} = \int_{C_1} \frac{z^2 h_l^{(1)}(zr) j_l(zr') dz}{[z - (k + i\epsilon)][z + (k + i\epsilon)]} + \int_{C_2} \frac{z^2 h_l^{(2)}(zr) j_l(zr') dz}{[z - (k + i\epsilon)][z + (k + i\epsilon)]}; \quad (28,8)$$

თუ გავხსენებთ ბესელისა და ჰანკელის ფუნქციების ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს, ავიღოთ ვარჯებთ, რომ დიდი x -ებისათვის გვექნება:

$$z^2 h_l^{(1)}(zr) j_l(zr') \rightarrow \frac{1}{2rr'} \{e^{iz(r-r')} - (-1)^l e^{iz(r+r')}\}, \quad (28,9)$$

ხოლო

$$z^2 h_l^{(2)}(zr) j_l(zr') \rightarrow \frac{1}{2rr'} \{e^{-iz(r-r')} - (-1)^l e^{-iz(r+r')}\}. \quad (28,10)$$

საიდანაც ჩანს, რომ, როცა $r > r'$, მაშინ, თუ პირველ ინტეგრალს ჩავკეტავთ ზედა ნახევარსიბრტყეში, მეორეს კი — ქვედაში, ეორდანის ლემა დაკმაყოფილდება და უფლება გვექნება ნაშთთა თეორიის გამოყენებისა. პირველი ინტეგრალისათვის მივიღებთ:

$$i\pi k h_1^{(1)}(kr) j_1(kr'); \quad r > r' \quad (28,11)$$

რადგან მეორე ინტეგრალში კონტურის შემოვლისას არე რჩება ხელმარჯვნივ, ამიტომ გვექნება:

$$i\pi k h_1^{(2)}(-kr) j_1(-kr'). \quad (28,12)$$

თუ გავითვალისწინებთ (28,5) ფორმულას და აგრეთვე ტოლობას

$$h_1^{(2)}(-z) = (-1)^l h_1^{(1)}(z), \quad (28,13)$$

მეორე ინტეგრალისათვის საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ პასუხს:

$$i\pi k h_1^{(1)}(kr) j_1(kr'). \quad r > r' \quad (28,14)$$

მაშასადამე, (28,8) ინტეგრალი ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულებისა:

$$\int \frac{z^2 j_1(zr) j_1(zr') dz}{z^2 - k^2 - iz} = i\pi k h_1^{(1)}(kr) j_1(kr'); \quad r > r' \quad (28,15)$$

როცა $r < r'$, მაშინ პანკელის ფუნქციებად წარმოიედგენდით არა $j_1(zr)$ -ს, არამედ $j_1(zr')$ ფუნქციას და (28,15) ინტეგრალის პასუხი იქნებოდა

$$i\pi k h_1^{(1)}(kr') j_1(kr). \quad r' > r \quad (28,16)$$

ასე რომ გრინის პარციალური ფუნქციისათვის საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{G_{0l}^{(+)}(r, r')}{rr'} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} ik j_1(kr_{>}) h_1^{(1)}(kr_{<}), \quad (28,17)$$

სადაც $r_{<}$ აღნიშნავს r და r' -ს შორის უმცირესს, ხოლო $r_{>}$ — უდიდესს. გრინის (28,17) ფუნქციას დიდი მანძილებისათვის ექნება შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$G_{0l}^{(+)}(r, r') = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \sin\left(kr_{<} - \frac{l\pi}{2}\right) e^{i(kr_{>} - \frac{l\pi}{2})} \quad (28,17')$$

თანახმად (28,4) ფორმულისა, (26,19) გამოხატულების გათვალისწინებით მივიღებთ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას

$$\frac{e^{iKR}}{ikR} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} h_1^{(1)}(kr_{>}) j_1(kr_{<}) Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}'); \quad (28,18)$$

ამასთან საჭიროა გავიხსენოთ, რომ

$$R = |r - r'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}, \quad (28,19)$$

სადაც θ -არის კუთხე r და r' ვექტორებს შორის.

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta), \quad (28,20)$$

მაშინ (28,18) ფორმულა ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{e^{ikR}}{ikR} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{>}) j_l(kr_{<}) P_l(\cos \theta). \quad (28,21)$$

ცხადია, $G_{el}^{(-)}(r, r')$ მიიღება (28,17) გამოსახულებაში კომპლექსურად შუიულღე-ბაზე გადასვლით. ასევე ცხადია. რომ

$$\frac{e^{-ikR}}{ikR} = - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l^{(2)}(kr_{>}) j_l(kr_{<}) P_l(\cos \theta) \quad (28,22)$$

(28,20) და (28,21) ფორმულების კომბინაციით ადვილად მივიღებთ გამოსახულღე-ბებს, რომლებიც დიდ როლს ასრულებენ სხვადასხვა ამოცანების გადაწყვეტის დროს. ასე მაგალითად, ცხადია, რომ:

$$\frac{\sin kR}{kR} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(kr) j_l(kr') P_l(\cos \theta) \quad (28,23)$$

ღა

$$\frac{\cos kR}{kR} = - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(kr_{<}) n_l(kr_{>}) P_l(\cos \theta). \quad (28,24)$$

თუ გავითვალისწინებთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების ასიმტრო-ტურ სახეს მცირე არგუმენტებისათვის, მაშინ (28,24) გამოსახულებიდან შეგვიძი-ღია მივიღოთ ცნობილი ფორმულა:

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (28,25)$$

ღაბოლოს დავწეროთ განტოლება, რომლის ამონახსნსაც წარმოადგენს გრი-ნის $G_{el}(r, r')$ ფუნქცია. ამ მიზნით (26,9) ფორმულაში შევიტანოთ (28,4) გაშლა, გავითვალისწინოთ ლაპლასიანის გამოხატულება სფერულ კოორდინატებში:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\Delta_{\theta, \varphi}}{r^2}, \quad (28,26)$$

სღაც $\Delta_{\theta, \varphi}$ ლეჟანდრის ოპერატორია; აგრეთვე გავითვალისწინოთ, რომ $\Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}$ და ღირაკის $\delta(r-r')$ ფუნქციაც წარმოვადგინოთ მწკრივად

$$\delta(r-r') = \frac{\delta(r-r')}{rr'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\bar{r}) Y_{lm}^*(\bar{r}'). \quad (28,27)$$

შეღევად მივიღებთ:

$$\left\{ E + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} G_{el}(r, r') = \delta(r-r'), \quad (28,28)$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით სათანადო სასაზღვრო პირობებში ვიპოვოთ გრინის პარციალურ ფუნქციას. ახლა ვიპოვოთ (27,9) გრინის ფუნქციის შესაბამის პარციალური გრინის ფუნქცია. ამისათვის მოვახდინოთ შემღევი გაშლა:

$$g(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{g_l(r, r')}{rr'} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}') \quad (28,29)$$

და შევიტანოთ იგი (27,9) გამოსახულებაში; გარდა ამისა. თუ გამოვიყენებთ (28,24) ფორმულას, კუთხეებით ინტეგრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{g_l(r, r')}{rr'} = \frac{2\mu}{\hbar^2} j_l(kr_<) y_l(kr_>). \quad (28,30)$$

$g_l(r, r')$ წარმოადგენს პარციალურ გრინის ფუნქციას, რომელიც შეესაბამება სასაზღვრო პირობას, როცა რადიალური ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა $r \rightarrow \infty$ -სათვის გამოხატავს მდგარ ტალღას.

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ განმარტებულ გრინის ფუნქციებში ყველგან შემოვიდა $\frac{2\mu}{\hbar^2}$ მამრავლი. იმის გამო, რომ გრინის ფუნქციები ინტეგრალში პოტენციალურ ენერჯიასთან ერთად გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია გრინის ფუნქცია ავიღოთ ამ მამრავლის გარეშე. სამაგიეროდ ვიგულისხმობთ, რომ პოტენციალური ენერჯიის ნაცვლად აღებულია $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)$ ფუნქცია.

§ 20. გაფანტვის ინტეგრალური განტოლება რადიალური ფუნქციებისათვის

საინტერესოა გამოვარკვეოთ, თუ როგორ დაიწერება გაფანტვის (27,8) ინტეგრალური განტოლება რადიალური ტალღური ფუნქციებისათვის. ამისათვის გამოვიყენოთ ტალღური ფუნქციის (23,14) გაშლა სფერულ ფუნქციებად:

$$\psi_k^{(\pm)}(r) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l \frac{\chi_l^{(\pm)}(kr)}{kr} Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{k}). \quad (29,1)$$

ბრტყელი ტალღისა და გრინის ფუნქციისათვის ვისარგებლოთ (28,1) და (28,4) ფორმულებით. (27,8) განტოლებაში კუთხეებით ინტეგრაციის ჩატარება შედეგად მოგვცემს გაფანტვის ინტეგრალურ განტოლებას რადიალური ფუნქციებისათვის

$$\chi_l^{(+)}(r) = kr j_l(kr) + \int_0^{\infty} G_{ll}^{(+)}(r, r') V(r') \chi_l^{(+)}(r') dr'. \quad (29,2)$$

გაფანტვის ფაზა შეგვიძლია დაეკავშიროთ ამ განტოლების $\chi_l^{(+)}(r)$ ამონახსნთან. მართლაც, (29,2) დაწვეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \chi_l^{(+)}(r) &= kr j_l(kr) + \int_0^r G_{ll}(r, r') V(r') \chi_l^{(+)}(r') dr' + \\ &+ \int_r^{\infty} G_{ll}(r, r') V(r') \chi_l^{(+)}(r') dr'. \end{aligned} \quad (29,3)$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ გრინის ფუნქციის მნიშვნელობა (28,17) ფორმულად; გვექნება:

$$\chi_i^{(+)}(r) = kr j_i(kr) - \frac{2\mu}{\hbar^2} ikr \left(h_i^{(1)}(kr) \int_0^r r' j_i(kr') V(r') \chi_i^{(+)}(r') dr' + \right. \\ \left. j_i(kr) \int_r^\infty r' h_i^{(1)}(kr') V(r') \chi_i^{(+)}(r') dr' \right); \quad (29,3')$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $r \rightarrow \infty$ და გავითვალისწინებთ $j_i(kr)$ და $h_i^{(1)}(kr)$ ფუნქციების ასიმპტოტურ გამობატულებებს დიდი r -ებისათვის, მივიღებთ:

$$\chi_i^{(+)}(r) = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) + e^{i\delta_l} \left(-\frac{2\mu}{\hbar^2} (-i)^l \int_0^\infty r j_i(kr) V(r) \chi_i^{(+)}(r) dr \right). \quad (29,4)$$

ამ გამოსახულების შედარება (23,22) ასიმპტოტურ მნიშვნელობასთან მოგვცემს:

$$\frac{S_l(k) - 1}{2i} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty r j_i(kr) V(r) \chi_i^{(+)}(r) dr. \quad (29,5)$$

ამგვარად, გაფანტვის პარციალური $S_l(k)$ მატრიცა დაეკავშირეთ გაფანტვის რადიალურ ტალღურ ფუნქციასთან. თუ გავითვალისწინებთ, რომ გაფანტვის ფაზა $S_l(k)$ მატრიცასთან დაკავშირებულია (23,18) ფორმულით, მივიღებთ:

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty r j_i(kr) V(r) \chi_i^{(+)}(r) dr. \quad (29,6)$$

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია δ_l ფაზა ვიპოვოთ $\chi_i^{(+)}(r)$ ფუნქციის საშუალებით.

ახლა დავწეროთ (29,2) ინტეგრალური განტოლება იმ შემთხვევაში, როცა რადიალურ ფუნქციას აქვს (23,24) ასიმპტოტური სახე. ამ შემთხვევას შეესაბამება გრინის (28,30) ფუნქცია. თუ გრინის ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (29,2) ინტეგრალურ განტოლებაში და გადავალთ ზღვარზე, როცა $r \rightarrow \infty$, მივიღებთ:

$$\bar{\chi}_l(r) = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) - \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty r j_l(kr) V(r) \bar{\chi}_l(r) dr \right) \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (29,7)$$

ამ გამოსახულებაში გაითვალისწინებულება, რომ ნეიმანის ფუნქციის ასიმპტოტური სახე დიდი r -ებისათვის განისაზღვრება ფორმულით:

$$n_l(r) = -\frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (r \rightarrow \infty) \quad (29,8)$$

თუ (29,7) გამოსახულებას შევადარებთ (23,24) ფორმულას, გაფანტვის ფაზისათვის მივიღებთ:

$$\tan \delta_l = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty r j_l(kr) V(r) \bar{\chi}_l(r) dr, \quad (29,9)$$

სადაც $\bar{\chi}_l(r)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\bar{\chi}_l(r) = k r j_l(kr) + \int_0^{\infty} g_l(r, r') V(r') \bar{\chi}_l(r') dr'. \quad (29,10)$$

გრინის ფუნქციებისა და ტალღური ფუნქციების ყოფაცევა ენერჯის ნულოვანი მნიშვნელობისათვის. ადვილად ვიპოვით გრინის პარციალური ფუნქციების მნიშვნელობას $E=0$ -სთვის, თუ გავიხსენებთ ბესელის, ნეიმანის და ჰანკელის სფერული ფუნქციების ასიმპტოტურ ფორმულებს მცირე არგუმენტების შემთხვევაში.

რადგან

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad (29,11)$$

$$h_l^{(1)}(x) = h_l^{(2)*}(x) = -i \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad (29,12)$$

ამიტომ (28,17) და (28,30) ფორმულებიდან ადვილად ვიპოვით, რომ $E=0$ შემთხვევაში

$$\frac{G_{0l}^{(\pm)}(r, r')}{rr'} = \frac{g_l(r, r')}{rr'} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}}. \quad (E=0) \quad (29,13)$$

მაშინ (29,2) ინტეგრალური განტოლებიდან, რადგან გრინის ფუნქცია $E=0$ დროს ენერჯიაზე დამოკიდებული არ არის, რადიალური ტალღური ფუნქციის ენერჯიაზე დამოკიდებულებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$\chi_l^{(\pm)}(k, r) \sim k^{l+1}; \quad (k \rightarrow 0) \quad (29,14)$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით კი (29,5) ფორმულიდან ვიპოვით გაფანტვის მატრიცის დამოკიდებულებას ენერჯიაზე:

$$\frac{S_l(k)-1}{2i} \sim k^{2l+1} a_l, \quad (k \rightarrow 0) \quad (29,15)$$

სადაც იგულისხმება, რომ საქმე გვაქვს ისეთ პოტენციალთან, რომლისთვისაც

$$a_l \sim \int_0^{\infty} r^{2l+2} V(r) dr \quad (29,16)$$

განზღადა არ არის.

ცხადია, $g_l(r, r')$ გრინის ფუნქციის შესაბამისი ტალღური ფუნქციის დამოკიდებულება ენერჯიაზე იმავე (29,14) ფორმულით განისაზღვრება.

ასევე აშკარაა (29,6) ფორმულიდან, რომ მცირე ენერჯიებზე

$$e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) \sim k^{2l+1} a_l; \quad (k \rightarrow 0) \quad (29,17)$$

ამასთან, მცირე ენერჯიებზე ფაზა მცირე სიდიდეს წარმოადგენს და ამიტომ მარტხენა მხარე უბრალოდ $\delta_l(k)$ -თი შეგვიძლია შევცვალოთ.

§ 10. ბორნის მიახლოება

გაფანტვის კვანტურ თეორიაში ბორნის მიახლოება არსებით როლს ასრულებს, ამიტომ მნიშვნელოვანია მისი ცალკე განხილვა. როგორც ვაჩვენეთ, გაფანტვის ამპლიტუდა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$F(k, k') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{k'} | V | \psi_k^{(+)} \rangle, \quad (30,1)$$

სადაც $\Phi_{k'}$ საბოლოო მდგომარეობის ბრტყელი ტალღა ისეა ნორმირებული, რომ შესაბამებოდეს ფარდობითი სიჩქარის ტოლ ნაკადს; $\psi_k^{(+)}$ ფუნქცია კი წარმოადგენს გაფანტვის ამოცანის ტალღურ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$|\psi_k^{(+)}\rangle = |\Phi_k\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\epsilon} V |\psi_k^{(+)}\rangle, \quad (30,2)$$

ამ განტოლების ამოხსნა ნებისმიერი პოტენციალისათვის არ ხერხდება, ამიტომ ზოგად შემთხვევაში არც (30,1) ამპლიტუდის მოძებნაა შესაძლებელი; ამიტომ, ბუნებრივია, (30,2) განტოლების ამოხსნის მიზნით მივიმართოთ მიახლოებით მეთოდებს. ყველაზე პირდაპირი მეთოდი მიახლოებითი ამოხსნისა არის იტერაციის მეთოდი ან, როგორც მას ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში უწოდებენ, ნეიმანის მწკრივად გაშლის მეთოდი.

(30,2) განტოლება გადავწეროთ ისეთი სახით, სადაც წერის გამარტივების მიზნით ჩამოვეშვათ ზოგიერთი ნიშნაკი და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$K = \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\epsilon} V = G_0(E) V. \quad (30,3)$$

ბეჭეტიანა:

$$|\psi_k\rangle = |\Phi_k\rangle + K |\psi_k\rangle. \quad (30,4)$$

ნეიმანის მწკრივს ექნება შემდეგი სახე:

$$|\psi_k\rangle = (1 + K + K^2 + \dots + K^n + \dots) |\Phi_k\rangle, \quad (30,4')$$

საიდანაც (30,1) ამპლიტუდისათვის მივიღებთ

$$F(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \{ \langle \Phi_{k'} | V | \Phi_k \rangle + \langle \Phi_{k'} | V K | \Phi_k \rangle + \dots + \langle \Phi_{k'} | V K^n | \Phi_k \rangle + \dots + \} \quad (30,5)$$

მაშასადამე, ტალღური ფუნქციის ნეიმანის მწკრივად გაშლის შესაბამისად ამპლიტუდაც მწკრივად გაიშალა. ვასაგებია, რომ ეს გაშლა მოხდა პოტენციალური ენერჯიის მიხედვით. ამპლიტუდის n -ური მიახლოება, ცხადია, განისაზღვრება ფორმულით:

$$F^{(n)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{k'} | V K^{n-1} | \Phi_k \rangle; \quad (30,6)$$

როცა $n=1$, მივიღებთ პირველ მიახლოებას, როცა $n=2$ —მეორეს და ა. შ. ამასთან, პირველი მიახლოება ემთხვევა (30,1)-ს, სადაც ψ_k ტალღური ფუნქცია შეცვლილია ბრტყელი ტალღით. ჩაეწერთ n -ური მიახლოების ამპლიტუდა ცხადი სახით:

$$F^{(n)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \langle \Phi_{k'} | r \rangle \langle r | V | r_1 \rangle \langle r_1 | K | r_2 \rangle \dots \cdot \langle r_{n-1} | K | r_n \rangle \langle r_n | \Phi_k \rangle dr dr_1 \dots dr_n, \quad (30,7)$$

ამასთან

$$\langle r | K | r' \rangle = \int G_0(r, r'') V(r'', r') dr''. \quad (30,8)$$

ლოკალური პოტენციალის შემთხვევაში

$$V(r'', r') = V(r') \delta(r'' - r'); \quad (30,9)$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\langle r | K | r' \rangle = G_0(r, r') V(r'). \quad (30,10)$$

როცა $n=1$, ნეიმანის მწკრივში ვისახლვრებით პირველი წევრით, ე. ი. ბრტყელ ტალღით; ამ შემთხვევაში მიახლოებას ბორნის პირველ მიახლოებას ან, უბრალოდ, ბორნის მიახლოებას უწოდებენ. ამ დროს ამპლიტუდა ტოლია

$$F^{(1)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{k'} | V | \Phi_k \rangle; \quad (30,11)$$

ან ცხადი სახით

$$F^{(1)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik'r} V(r) e^{ikr} dr. \quad (30,12)$$

ბორნის შემდეგი მიახლოება განსახლვრული იქნება ფორმულით

$$F^{(2)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{k'} | V K | \Phi_k \rangle, \quad (30,13)$$

რომელიც ცხადი სახით ასე გამოიყურება:

$$F^{(2)}(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik'r} V(r') G_0(r', r'') V(r'') e^{ikr''} dr' dr''; \quad (30,14)$$

ამასთან, თავისუფალი მოძრაობის გრინის ფუნქცია განისახლვრება (26,19) ფორმულით. შევისწავლოთ ამპლიტუდა ბორნის პირველ მიახლოებაში. შემდგომი მიახლოებები მათემატიკურად ისე რთულდება, რომ პრაქტიკულად ყოველთვის პირველი მიახლოებით კმაყოფილდებიან.

როცა პოტენციალური ენერჯია არ შეიცავს ოპერატორებს, მაშინ ბრტყელი ტალღის გადასმა შესაძლებელია და ამ დროს (30,12) ამპლიტუდა იღებს ასეთ სახეს:

$$F^{(1)}(q) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqr} V(r) dr, \quad (30,15)$$

სადაც

$$q = k - k' \quad (30,16)$$

ე. წ. დაჯახების ვექტორია, ღრეკადი გაფანტვისას $|k| = |k'|$, ამიტომ

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \quad (30,17)$$

სადაც θ -არის გაფანტვის კუთხე C -სისტემაში,

როცა პოტენციალურ ენერგიას ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს, მაშინ (30,15) გამოსახულებასში შეგვიძლია ჩავატაროთ ინტეგრაცია კუთხეებით

$$F^{(1)}(q) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} 2\pi \int_0^{\infty} V(r) r^2 dr \int_{-1}^{+1} e^{iqrx} dx; \quad (30,18)$$

შედეგად მივიღებთ

$$F^{(1)}(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} V(r) \frac{\sin qr}{qr} r^2 dr; \quad (30,19)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები; ეტყათ, $kr \ll 1$, მაშინ ასეთი მცირე სიჩქარეებისათვის $\exp(iqr)$ შეგვიძლია შევცვალოთ ერთიანით (შესაბამისად $\frac{\sin qr}{qr} \sim 1$). გვექნება

$$F^{(1)}(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} V(r) r^2 dr. \quad (30,20)$$

მაშასადამე, თუ ინტეგრალი განშლადი არ არის, მაშინ გაფანტვა იზოტროპული იქნება და ამავე დროს სიჩქარეზე არ იქნება დამოკიდებული.

როცა, პირიქით, საქმე გვაქვს დიდ სიჩქარეებთან და არც ისე მცირე გაფანტვის კუთხეებთან, მაშინ $\frac{\sin qr}{qr}$ ოსცილირებადი ფუნქციაა. ხოლო პოტენციალებში, როგორც წესი, ნელა იცვლებიან; ამიტომ გვექნება

$$F^{(1)}(q) \rightarrow 0. \quad (30,21)$$

დიდ ენერგიებზე გაფანტვა მცირე კუთხეებზე ხდება, ამიტომ $q \simeq k\theta$, რის გამოც ინტეგრალურ განივკვეთს დიდ ენერგიებზე ექნება შემდეგი ფორმა:

$$\sigma(E) = 2\pi \int_0^{\pi} \theta d\theta |F^{(1)}(k\theta)|^2. \quad (30,22)$$

ინტეგრალი კუთხეების მიხედვით ძალიან სწრაფად იკრებება, ამიტომ ზედა საზღვარი შეგვიძლია ახ-მდე გავაყვრელოთ. თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადს $x = k\theta$, მივიღებთ

$$\sigma(E) = \frac{A}{E}, \quad (30,23)$$

სადაც A მუდმივი ენერგიაზე დამოკიდებული არ არის

$$A = \frac{\pi\hbar^2}{\mu} \int_0^{\infty} x |F^{(1)}(x)|^2 dx. \quad (30,24)$$

როგორც ვხედავთ, ბორნის მიახლოებაში დიდ ენერგიებზე ინტეგრალური განივკვეთი ენერგიის უკუპროპორციულია.

ბორნის მიახლოების გამოყენების საზღვრები. ახლა გამოვარკვეოთ როდის-საა სამართლიანი ბორნის მიახლოება. საზოგადოდ ეს საკითხი მეტად რთულია.

და არ არსებობს უნივერსალური კრიტერიუმი ამ მიახლოების გამოყენებისა. ყოველი პოტენციალი ცალკე შესწავლას მოითხოვს. ჩვეულებრივ, როცა ლაპარაკობენ ბორნის მიახლოების გამოყენებაზე, იგულისხმება პირობა, რომლის მიხედვით ნეიმანის მწკრივში მეორე წევრი პირველზე გაცილებით მცირეა. ქვემოთ ჩვენც ამ მეთოდს გამოვიყენებთ.

გათანტვის ტალღური ფუნქცია პოტენციალური ენერჯის მიხედვით (30,4) მწკრივად იშლება, რომელიც ასე წარმოდგინება:

$$\psi_k(r) = \psi_k^{(1)} + \psi_k^{(2)} + \psi_k^{(3)} + \dots +, \quad (30,25)$$

სადაც $\psi_k^{(1)} = \phi_k$ წარმოადგენს ბრტყელ ტალღას, ხოლო (30,10) გამოსახულების თანახმად დანარჩენი მიახლოებებისათვის გვექნება:

$$\psi_k^{(2)}(r) = \int G_0(r, r') V(r') \phi_k(r') dr', \quad (30,26)$$

$$\psi_k^{(3)}(r) = \int G_0(r, r') V(r') G_0(r', r'') V(r'') \phi_k(r'') dr' dr'' \quad (30,27)$$

და ა. შ.

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფუნქციის (26,19) გამოსახულებას, მაგალითად $\psi_k^{(2)}$ მიახლოებისათვის, შეგვიძლია დაეწეროთ

$$\psi_k^{(2)}(r) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \phi_k(r') \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') dr' \quad (30,28)$$

ჩვენ ჩავთვლით, რომ ბორნის მიახლოება სამართლიანია, როცა (30,25) მწკრივში მეორე წევრი პირველთან შედარებით გაცილებით ნაკლებია აბსოლუტური მნიშვნელობით. რადგან პირველი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ერთის ტოლია, ამიტომ ბორნის მიახლოების სამართლიანობისათვის აუცილებელია დაეცულოს იქნეს პირობა

$$|\psi_k^{(2)}(r)| \ll 1. \quad (30,29)$$

ამ პირობის ცხადი სახით ჩასაწერად შევაფასოთ (30,28) ინტეგრალი. როგორც წესი, პოტენციალებს მაქსიმუმი აქვთ სათავეში, ამიტომ ასეთი პოტენციალებისათვის (30,29) პირობა შეგვიძლია შევცვალოთ $|\psi_k^{(2)}(0)| \ll 1$ პირობით. (30,28) ზორბულიდან გვექნება

$$\psi_k^{(2)}(0) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{ik'r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r') dr'. \quad (30,30)$$

საინტერესოა ცენტრალური პოტენციალების განხილვა. მაშინ (30,30) გამოსახულებაში შეგვიძლია ჩავატაროთ კუთხეებით ინტეგრაცია. მივიღებთ

$$\psi_k^{(2)}(0) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2 k'} 2\pi \int_0^\infty V(r) e^{ikr} (e^{ik'r} - e^{-ik'r}) dr. \quad (30,31)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $k = k'$, მაშინ ბორნის მიახლოების სამართლიანობისათვის გვექნება შემდეგი პირობა:

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty V(r) (e^{2ikr} - 1) dr \right| \ll 1. \quad (30,32)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $kr \ll 1$, ე. ი. როცა გაფანტვა ხდება მცირე სიჩქარეებზე, ვთქვათ, R არის იმ არის ხაზოვანი ზომა, სადაც პოტენციალი შესამჩნევად განსხვავებულია ნულისაგან. რადგან $kr \ll 1$, ამიტომ ექსპონენტი შეგვიძლია გავშალოთ მწკრივად და შევინარჩუნოთ პირველი ორი წევრი; გვექნება

$$\frac{\mu}{\hbar^2} \left| \int_0^R V(r)r dr \right| \ll 1, \quad (30,33)$$

საიდანაც, თუ პოტენციალური ენერჯიის საშუალო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ V -თი, გვექნება შემდეგი პირობა:

$$|V| \ll \frac{\hbar^2}{\mu R^2}. \quad (kR \ll 1) \quad (30,34)$$

რაც შეეხება დიდ ენერჯიებს, ამ შემთხვევაში $kr \gg 1$ და (30,32) პირობაში ექსპონენტი სწრაფი ოსცილაციის გამო ნულის ტოლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ; მაშინ ინტეგრალის შეფასება მოგვცემს შემდეგ პირობას

$$|V| \ll \frac{\hbar v}{R}. \quad (kR \gg 1) \quad (30,35)$$

ბორნის მიახლოების გამოყენების ორივე პირობას ნათელი ფიზიკური შინაარსი აქვს. (30,34) პირობის მარჯვენა მხარეში ზის კინეტიკური ენერჯია, რომელიც ექნებოდა ნაწილაკს, რომელიც იმყოფება R განზომილების მოცულობაში. მაშასადამე, მცირე ენერჯიებზე საჭიროა, რომ ნაწილაკის აღნიშნულ არეში საშუალო პოტენციალური ენერჯია გაცილებით ნაკლები იყოს ამავე არეში ნაწილაკის კინეტიკურ ენერჯიაზე.

ახლა, ვთქვათ, იმ არეში, სადაც პოტენციალური ენერჯია შესამჩნევად განსხვავებულია ნულისაგან, მოძრაობის პერიოდი T -ს უდრის, ცხადია, სიდიდის რიგით იგი $\frac{\hbar}{|V|}$ -ს ტოლი იქნება, მეორე მხრივ, დრო, რომელსაც დაეცემული

ნაწილაკი ანდომებს R მანძილის გავლას, ტოლი იქნება $\tau \sim \frac{R}{v}$ სიდიდისა, სადაც

v ნაწილაკთა ფარდობითი სიჩქარეა. ფიზიკური მოსაზრებით ნათელია, რომ ბორნის მიახლოება დიდ ენერჯიებზე სამართლიანი იქნება, როცა $\tau \ll T$, ე. ი. როცა ნაწილაკები ისე სწრაფად ჩაუვლიან ერთმანეთს, რომ „პოტენციალური ენერჯია ვერ ასწრებს ურთიერთქმედებას“ და ბრტყელი ტალღის შესამჩნევად შეშფოთებას. ადვილად დავინახავთ, რომ $\tau \ll T$ ეკვივალენტურია (30,35) პირობისა.

განვიხილოთ მაგალითები.

გაფანტვა კულონური ველით. ვთქვათ, ვიხილავთ დამუხტული ნაწილაკების გაფანტვას. ურთიერთქმედების პოტენციალს აქვს ასეთი სახე:

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (30,36)$$

უმჯობესია განვიხილოთ ზოგადი პოტენციალი

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-r/r_0}}{r}, \quad (V_0 = \text{const}, r_0 = \text{const}) \quad (30,37)$$

რომელიც, როცა $V_0 = Z_1 Z_2 e^2$, იძლევა ატომურ ფიზიკაში კარგად ცნობილ ეკრანირებულ კულონურ პოტენციალს, ხოლო, როცა პარამეტრი $r_0 = \infty$ — წმინდა კულონურ ურთიერთქმედებას. ბირთვის ფიზიკაში (30,37) პოტენციალს იუკავას პოტენციალი ეწოდება. (30,19) ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვიპოვით ამპლიტუდას ბორნის მიახლოებაში

$$F^{(1)}(q) = -\frac{2\mu A}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{q^2 + \frac{1}{r_0^2}} \quad (30,38)$$

როცა $r_0 = \infty$, მაშინ მივიღებთ წმინდა კულონურ შემთხვევას

$$F_e^{(1)}(q) = \frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{(\hbar q)^2}, \quad (30,39)$$

რაც, თუ გავიხსენებთ დაჭახების ვექტორის (30,17) განმარტებას, დრეკადი გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთისათვის მოგვცემს რეზერფორდის ფორმულას ინერციის ცენტრის სისტემაში

$$d\sigma_c = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_c} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta_c}{2}}, \quad (30,40)$$

სადაც E_c ნაწილაკთა ფარდობითი მოძრაობის ენერგიაა.

შემდგომში ვაჩვენებთ, რომ ზუსტი კვანტური თეორიაც დამუხტული ნაწილაკების გაფანტვისათვის აგრეთვე იძლევა რეზერფორდის კლასიკურ ფორმულას.

დიდ ენერგიებზე ბორნის მიახლოება, თანახმად (30,35) ფორმულისა, სამართლიანი იქნება პირობით

$$Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v} \ll 1; \quad (30,41)$$

$\xi = \frac{e^2}{\hbar v}$ -ს ბორნის პარამეტრს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ რამდენადაც ბორნის პირველი მიახლოება დამუხტულ ნაწილაკთა გაფანტვისათვის ზუსტ შედეგებს იძლევა, ამიტომ რალაც გაურკვეველი მიზეზის გამო ბორნის შემდგომი მიახლოებების ჯამი გვაძლევს ნულოვან ეფექტს.

გაფანტვა გაუხის პოტენციალით. განვიხილოთ გაუსის პოტენციალი

$$V(r) = -V_0 e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}}. \quad (30,42)$$

აღსანიშნავია, რომ ეს პოტენციალი, რამდენადაც მას კარგი მათემატიკური თვისებები გააჩნია, ძალიან ხშირად გამოიყენება ბირთვის ფიზიკაში; მაგრამ შრედინგერის განტოლების ზუსტი ამოხსნა ამ პოტენციალისათვის შეუძლებელია. ამიტომ საინტერესოა ვიპოვოთ გაფანტვის ამპლიტუდა ბორნის მიახლოებაში, გვექნება

$$F^{(1)}(q) = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r \sin qr e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} dr, \quad (30,43)$$

საიდანაც ადვილად ვიპოვით

$$F^{(1)}(q) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu V_0 r_0^3}{\hbar^2} \right) e^{-\frac{1}{2} r_0^2 q^2} \quad (30,44)$$

მაშასადამე, ამპლიტუდა მონოტონურად მცირდება გაფანტვის კუთხის ზრდასთან ერთად $\left(q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \right)$.

ასევე მარტივად გამოითვლება გაფანტვის ამპლიტუდები ბორნის მიახლოებაში სხვა პოტენციალებისთვისაც. ამასთან, როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდის მოძებნა დაიყვანება მხოლოდ ინტეგრირების აღებაზე.

გაფანტვის ფაზა ბორნის მიახლოებაში. ადვილად შეგვიძლია ვიპოვოთ გაფანტვის ფაზა ბორნის მიახლოებაში. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ, რამდენადაც ბორნის მიახლოება სამართლიანია დიდი ენერგიების დროს, ფაზა მცირე სიდიდე იქნება. თუმცა აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ, მაგალითად, r_0 რადიუსის უსასრულო განმზიდავი ბირთვის შემთხვევაში $\delta_0 = -kr_0$ და ეს მტკიცება არ არის სწორი.

განვიხილოთ ცენტრალური ურთიერთქმედება. (23,21) ამპლიტუდაში გაფანტვის ფაზის შემცველი ამპლიტუდა გავშალოთ მჭკრივად და შევინარჩუნოთ პირველი ორი წევრი. გვექნება

$$F(l) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \delta_l. \quad (30,45)$$

მეორე მხრივ, გამოვიყენოთ (28,23) ფორმულა და (30,19) ამპლიტუდა წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$F^{(1)}(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \int_0^{\infty} V(r) j_l^2(kr) r^2 dr. \quad (30,46)$$

უკანასკნელი ორი ფორმულის შედარება მოგვცემს ფაზის ფორმულას ბორნის მიახლოებაში

$$\delta_l(k) = -\frac{2\mu k}{\hbar^2} \int_0^{\infty} V(r) j_l^2(kr) r^2 dr. \quad (30,47)$$

ამ ფორმულას მარტივად მივიღებთ (29,6) ფორმულიდანაც, თუ მასში, ბორნის მიახლოების შესაბამისად, ზუსტ $\frac{1}{kr} \chi_k^{(+)}(r)$ ტალღურ ფუნქციას შევცვლით თავისუფალი ნაწილაკის $j_l(kr)$ ტალღური ფუნქციით.

ფაზის (30,47) ფორმულიდან ჩანს, რომ მიზიდვის ველისათვის ფაზა დადებითია, განზიდვის შემთხვევაში კი—უარყოფითი.

§ 31. მშვიტური რადიუსის მიახლოება

ნუკლონების გაფანტვის აღსაწერად მცირე ენერგიებზე ხშირად გამოიყენება შესანაშნავი მიახლოება, რომელსაც ეფექტური რადიუსის მიახლოებას უწოდებენ. მცირე ენერგიებზე ძირითად როლს ასრულებს $l=0$ პარციალური მომენტის მდგომ-

მარეობა; მართლაც, განვიხილოთ კვაზიკლასიკური შემთხვევა. იმპულსის მომენტის სიდიდე შეგვიძლია დავაკავშიროთ დაჯახების ρ პარამეტრთან

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \rho p = \hbar n. \quad (31,1)$$

საიდანაც

$$l = \frac{\rho}{\lambda}. \quad (31,2)$$

ურთიერთქმედება მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა დაჯახების პარამეტრი ნაკლებია ბირთვული ძალების ურთიერთქმედების რადიუსზე: $\rho \ll r_0$, ე. ი.

$$l \ll \frac{r_0}{\lambda}. \quad (31,3)$$

როცა $r_0 = \lambda$, მაშინ $l = 1$. ამ მდგომარეობის შესაბამისი ენერგია ლაბორატორიულ სისტემაში ნუკლონებისათვის ტოლი იქნება

$$E = 2E_c = \frac{2\hbar^2}{Mr_0^2}, \quad (31,4)$$

სადაც M -პროტონის მასაა. თუ ბირთვული ურთიერთქმედების რადიუსის მნიშვნელობად ავიღებთ $r_0 = 2,8\text{ფ}$, მაშინ ეს ენერგია ტოლია

$$E = 2E_c = 10 \text{ Mev}; \quad (31,5)$$

მაშასადამე, როცა ნუკლონის ენერგია ლაბორატორიულ სისტემაში ნაკლებია $E = 10 \text{ Mev}$ -ზე, მაშინ ურთიერთქმედებაში მნიშვნელოვანი იქნება მხოლოდ $l = 0$ მომენტი. ამ შემთხვევაში გაფანტვის ამპლიტუდისათვის გვექნება

$$F_0(k) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1), \quad (31,6)$$

ბოლო დიფერენციალურ განიკვეთს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}; \quad (31,7)$$

ამგვარად, როცა დაცემული ნუკლონის ენერგია $E < 10 \text{ Mev}$, მაშინ გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთი დამოკიდებული არ არის გაფანტვის მიმართულებაზე, ე. ი. მას სფერული სიმეტრია ახასიათებს. ეს გარემოება მჭიდროდაა დაკავშირებული იმ ფაქტთან, რომ ბირთვული ძალები ახლო მოქმედებისანი არიან.

ეფექტური რადიუსის მიახლოებაში ერთი δ_0 გაფანტვის ფაზის ნაცვლად შემოჰყავთ ორი პარამეტრი: ეფექტური რადიუსი r_e და გაფანტვის სიგრძე a . ამ სიდიდეებისათვის გამოიყენება ფორმულები, რომლებიც დამოკიდებული არაა პოტენციალის ფორმაზე [14, 19].

განვიხილოთ დაუმუხტავი ნაწილაკების ურთიერთქმედება მცირე ენერგიებზე. შემოვისაზღვრით $l = 0$ მდგომარეობით. შრედინგერის განტოლება s -მდგომარეობაში, ნაწილაკთა შორის $V(r)$ ურთიერთქმედების დროს, დადებითი ენერგიის შემთხვევაში იქნება

$$\frac{d^2 \chi_k(r)}{dr^2} + k^2 \chi_k(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \chi_k(r). \quad (31,8)$$

აქ და ქვემოთ $l=0$ ინდექსს აღარ მივუთითებთ. μ -დაყვანილი მასაა. ამ განტოლების ამონახსნი, ცხადია, დაკმაყოფილებს პირობას

$$\chi_h(0) = 0, \quad (31,9)$$

უსასრულობაში კი

$$\chi_h(r) = C \sin(kr + \delta), \quad (31,10)$$

სიდაც $\delta(k)$ გაფანტვის N -ფაზას წარმოადგენს.

განვიხილოთ შრედინგერის განტოლება $k^2=0$ შემთხვევისთვისაც

$$\frac{d^2 \chi_0(r)}{dr^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \chi_0(r). \quad (31,11)$$

გევამრავლოთ (31,8) განტოლება $\chi_0(r)$ ფუნქციაზე, (31,11) კი $\chi_h(r)$ -ზე და პირველს გამოვაკლოთ მეორე; მივიღებთ

$$\frac{d}{dr} \left[\chi_h(r) \frac{d\chi_0(r)}{dr} - \chi_0(r) \frac{d\chi_h(r)}{dr} \right] = k^2 \chi_h(r) \chi_0(r); \quad (31,12)$$

თუ გავიხსენებთ ვრონსკიანის განმარტებას

$$W[f(r), \varphi(r)] = f(r) \frac{d\varphi(r)}{dr} - \varphi(r) \frac{df(r)}{dr}, \quad (31,13)$$

მაშინ (31,12) გამოსახულებას ასე გადავწერთ:

$$\frac{d}{dr} W[\chi_h(r), \chi_0(r)] = k^2 \chi_h(r) \chi_0(r) \quad (31,14)$$

როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ შრედინგერის (31,8) განტოლება ბირთვული ურთიერთქმედების $V(r)$ პოტენციალის მცირე ქმედების რადიუსის გამო თავისუფალი ნაწილაკის განტოლებას დაემთხვევა. შესაბამის ფუნქციას თუ აღვნიშნავთ $U_h(r)$ -ით, მაშინ

$$U_h(r) = \frac{1}{\sin \delta} \sin(kr + \delta) = \chi_h(r). \quad (31,15)$$

ამ გამოსახულებაში $C^{-1} = \sin \delta$ მუდმივი ისეა შერჩეული, რომ გვექონდეს ტოლობა

$$U_h(0) = 1. \quad (31,16)$$

მაშასადამე, $U_h(r)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{d^2 U_h(r)}{dr^2} + k^2 U_h(r) = 0; \quad (31,17)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (31,14) ფორმულის ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ

$$\frac{d}{dr} W[U_h(r), U_0(r)] = k^2 U_h(r) U_0(r). \quad (31,18)$$

ამ ფორმულას წვერ-წვერად გამოვაკლოთ (31,14) ფორმულა და ავიღოთ ინტეგრალი $(0, \infty)$ საზღვრებში; გვექნება

$$W[U_h(r), U_0(r)]_0^\infty - W[\chi_h(r), \chi_0(r)]_0^\infty = \frac{\hbar^2}{2} L(k^2), \quad (31,19)$$

$$L(k^2) = 2 \int_0^{\infty} [U_k(r) U_0(r) - \chi_k(r) \chi_0(r)] dr. \quad (31,20)$$

რადგან $r = \infty$ -ში $\chi_k(r)$ ფუნქცია ემთხვევა $U_k(r)$ ფუნქციას, ამიტომ ამ წერტილში (31,19) ტოლობის მარცხენა მხარე ნულს გაუტოლდება. რადგან თანახმად (31,9) სასაზღვრო პირობისა $\chi_k(0) = 0$, ამიტომ ნულს გაუტოლდება $W[\chi_k, \chi_0]$ წვერიც. გამოსათვლელი დაგვრჩება ვრონსკიანი $r=0$ წერტილში

$$W[U_k(r), U_0(r)] = U_k(r) U_0'(r) - U_0(r) U_k'(r). \quad (31,21)$$

თანახმად (31,15) გამოსახულებისა,

$$U_0(r) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin [kr + \delta(k)]}{\sin \delta(k)} = \lim_{k \rightarrow 0} [\sin kr \operatorname{ctg} \delta(k) + \cos kr]. \quad (31,22)$$

შემოვიღოთ განმარტება

$$- \frac{1}{a} = \lim_{k \rightarrow 0} [k \operatorname{ctg} \delta(k)]. \quad (31,23)$$

a -ს, რომელსაც სიგრძის განზომილება ექნება, გაფანტვის სიგრძეს უწოდებენ. იგი დიდ როლს ასრულებს გაფანტვის თეორიაში.

აღვილად დავინახეთ, რომ (31,23) განმარტების შედეგად მარტივად მივიღებთ

$$U_0(r) = 1 - \frac{r}{a}; \quad (31,24)$$

მაშასადამე, (31,21) ვრონსკიანისათვის $r=0$ წერტილში გვექნება

$$W[U_k(r), U_0(r)]_0 = -\frac{1}{a} - k \operatorname{ctg} \delta(k), \quad (31,25)$$

რაც (31,19) ფორმულაში შეტანით მოგვცემს

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 L(k^2). \quad (31,26)$$

ეს განტოლება ჯერჯერობით ზუსტია. მისგან ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მეტად მნიშვნელოვანი მიახლოება, რომელიც ხშირად გამოიყენება მცირე ენერგიებზე ნუკლონთა გაფანტვის აღსაწერად. მიახლოება მდგომარეობს $L(k^2)$ ფუნქციის მწკრივად გაშლაში k^2 ხარისხების მიხედვით. შემოვისაზღვროთ მწკრივად გაშლის პირველი წვერით. მაშინ (31,26) გამოსახულება k^2 წვერების სიზუსტით მოგვცემს ფორმულას

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2, \quad (31,27)$$

სადაც r_e -თი აღვნიშნეთ სიგრძის განზომილების ენერგიაზე დამოკიდებული გამოსახულება

$$r_e = L(0) = 2 \int_0^{\infty} [U_0^2(r) - \chi_0^2(r)] dr. \quad (31,28)$$

რე-უწოდებენ ატომგულური ძალების ქმედების ეფექტურ რადიუსს, ხოლო (31,27) ფორმულას—ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორმულას. როგორც ვხედავთ, ეს მიახლოება არაა დამოკიდებული პოტენციალური ენერჯიის კონკრეტულ ფორმაზე.

აღნიშნოთ, რომ (31,27) ფორმულა ხელსაყრელია მცირე ენერჯიებზე გაფანტვის ფაზური ანალიზის ჩასატარებლად. ამ მიზნით $k \text{ctg } \delta(k)$ -ს ექსპერიმენტულ მნიშვნელობას აღარაქონს ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ (31,27) თეორიულ მრუდს. აქედან განისაზღვრება გაფანტვის სიგრძე და ეფექტური რადიუსი.

რადგან $l=0$ მდგომარეობაში ინტეგრალური განიკვეთი ტოლია

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{k^2 (1 + \text{ctg}^2 \delta)}, \quad (31,29)$$

ამიტომ, ცხადია,

$$\sigma(0) = 4\pi a^2. \quad (31,30)$$

როგორც ვხედავთ, გაფანტვის სიგრძე განსაზღვრავს სრული განიკვეთის მნიშვნელობას ნულოვან ენერჯიაზე. ასევე ცხადია, რომ გაფანტვის სიგრძე $a = -F(0)$, სადაც $F(0)$ არის გაფანტვის ამპლიტუდის მნიშვნელობა ნულოვან ენერჯიაზე.

ვამოვიყენოთ ფაზის გამოსათულებელი (29,6) ფორმულა

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l(k) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty r j_l(kr) V(r) \chi_{lk}(r) dr, \quad (31,31)$$

სადაც $\chi_{lk}(r)$ გაფანტვის ინტეგრალური განტოლების ამონახსნია.

$l=0$ -მდგომარეობისათვის, თანახმად (23,28) ფორმულისა და (31,23) განმარტებისა, $k \rightarrow 0$ -სათვის მივიღებთ:

$$a = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V(r) \left[\frac{\chi(k, r)}{kr} \right]_{k \rightarrow 0} dr. \quad (31,32)$$

ცხადია, გაფანტვის სიგრძის ნიშანს განსაზღვრავს პოტენციალური ენერჯიის ნიშანი. ის გარემოება, რომ (31,27) ფორმულის მარჯვენა მხარე k -ს პირველ ხარისხს არ შეიცავს, მიგვითითებს იმაზე, რომ ფაზა ტალღური რიცხვის კენტი ფუნქციაა

$$\delta(-k) = -\delta(k). \quad (31,33)$$

შედარებით მაღალი ენერჯიების შემთხვევაში (31,26) ფორმულაში საჭიროა გვითვალისწინოთ k^2 -ის უფრო მაღალი ხარისხებიც. ამისათვის საჭიროა $L(k^2)$ ფუნქციის მწკრივად გაშლაში $L(0)$ წევრის გარდა შევინარჩუნოთ შემდგომი წევრებიც

$$L(k^2) = L(0) + k^2 \left(\frac{dL(k^2)}{dk^2} \right)_{k^2=0} + \dots + \quad (31,34)$$

ამ მწკრივს თავის მხრივ ავაგებთ (31,20) გამოსახულებაში შემავალი $U_k(r)$ და $\chi_{lk}(r)$ ფუნქციების მწკრივად გაშლით k^2 -ის ხარისხების მიხედვით. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ

$$k \text{ctg } \delta(k) = -\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{2} r_c \right) k^2 - (P r_c^3) k^4 + (Q r_c^5) k^6 + \dots +, \quad (31,35)$$

სადაც (Pr_0^2) -ით აღნიშნულია შემდეგი გამოსახულება:

$$-(Pr_0^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{dL(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=0} \quad (31,36)$$

და ა. შ.

გაფანტვის სივრძე და ეფექტური რადიუსი შეგვიძლია დავაკავშიროთ ორი ნაწილაკის ც-ბმის ენერგიასთან. შემოვიღოთ $\alpha^2 = \frac{2\mu \mathcal{E}}{\hbar^2}$ პარამეტრი.

გაფანტვის ტალღური ფუნქცია $l=0$ მდგომარეობაში განისაზღვრება ფორმულით

$$\chi_k(r) = C(e^{-ikr} - S(k)e^{ikr}), \quad (31,37)$$

სადაც $S(k)$ გაფანტვის მატრიცაა. ბმული მდგომარეობის ფუნქცია კი $\chi(r) = e^{-\alpha r}$ ტოლია. ამიტომ გაფანტვის (31,37) ტალღური ფუნქციიდან ბმული მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას მაშინ მივიღებთ, როცა $k = -i\alpha$ -სათვის გაფანტვის $S(k)$ მატრიცას ნულს გავუტოლებთ. რადგან [19]

$$S(k) = e^{i\delta} = \frac{\text{ctg } \delta + i}{\text{ctg } \delta - i}, \quad (31,38)$$

ამიტომ გვექნება

$$\text{ctg } \delta = -i. \quad (31,39)$$

ამ გამოსახულების (31,27) ფორმულაში შეტანით $k = -i\alpha$ -სათვის მივიღებთ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას

$$\alpha = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \alpha^2 r_e. \quad (31,40)$$

ამ ფორმულიდან განვსაზღვროთ $\frac{1}{a}$ და შევიტანოთ იგი (31,27) ფორმულაში, გვექნება

$$k \text{ ctg } \delta = -\alpha + \frac{1}{2} (\alpha^2 + k^2) r_e. \quad (31,41)$$

ინტეგრალური განივკვეთის მოსაძებნად საკმარისია ამ უკანასკნელიდან განვსაზღვროთ $\sin^2 \delta$. ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\frac{\sin^2 \delta}{k^2} = \left[k^2 + \left(\alpha - \frac{\alpha^2 + k^2}{2} r_e \right)^2 \right]^{-1} \quad (31,42)$$

მაშასადამე, ინტეგრალური განივკვეთი ტოლი იქნება

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \left[\alpha - \frac{\alpha^2 + k^2}{2} r_e \right]^2} = \frac{4\pi}{k^2 + \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2} k^2 r_e^2 \right]^2}. \quad (31,43)$$

ამგვარად, ინტეგრალური განივკვეთი მცირე ენერგიებზე შეიძლება განისაზღვროს გაფანტვის სივრძითა და ეფექტური რადიუსით, ან ბმის ენერგიითა და ეფექტური რადიუსით.

საინტერესოა გამოვთვალოთ ეფექტური რადიუსი ცხადი სახით პოტენციალური ორბოს შემთხვევაში. ამისათვის გამოვიყენოთ (31,28) ფორმულა. ამ ფორმულაში $U_0(r)$ განისაზღვრება (31,24) გამოსახულებით, $\chi_0(r)$ კი იქნება პოტენ-

ციალური ორმოს ამონახსნი $l=0$ მდგომარეობაში და $k=0$ შემთხვევაში. (12,40) და (12,41) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\chi_h(r) = D \sin ar, \quad r < r_0 \quad (31,44)$$

$$\chi_h(r) = C \sin (kr + \delta); \quad r > r_0 \quad (31,45)$$

როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ $\chi_h(r)$ ფუნქცია უნდა დამთხვეს $U_h(r)$ ფუნქციას, ამიტომ C ავარჩიოთ შემდეგნაირად $C^{-1} = \sin \delta$, მაშინ ზღვარში, როცა $k \rightarrow 0$, მივიღებთ:

$$\chi_0(r) = D \sin br, \quad r < r_0 \quad (31,46)$$

$$\chi_0(r) = 1 - \frac{r}{a}, \quad r > r_0 \quad (31,47)$$

სადაც

$$b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}, \quad (31,48)$$

ხოლო V_0 -პოტენციალური ორმოს სიღრმეა. D -მუდმივი განისაზღვრება ფუნქციითა ტოლობით $r=r_0$ წერტილზე. გვექნება

$$D = \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) \sin br_0. \quad (31,49)$$

ამგვარად, ეფექტური რადიუსი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{1}{2} r_e = \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 dr - D^2 \int_0^{r_0} \sin^2 br dr, \quad (31,50)$$

საიდანაც საბოლოოდ ვიპოვით

$$r_e = 2r_0 \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) + \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 \left(\frac{\text{ctg } br_0}{b} - \frac{r_0}{\sin^2 br_0}\right). \quad (31,51)$$

როცა $br_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, სადაც $n=0, 1, 2, \dots$ ($n+1$ გამონაკათეს ენერგეტული დონეების რიცხვს ორმოში), მაშინ $a = \pm \infty$ და $r_e = r_0$, ე. ი. ეფექტური რადიუსი ორმოს რადიუსს ემთხვევა. (31,32) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია ვიპოვოთ გაფანტვის სიგრძე. როგორც გაფანტვის სიგრძე, ასევე ეფექტური რადიუსიც განისაზღვრება მხოლოდ და მხოლოდ ორმოს გეომეტრიული თვისებებით.

ნეიტრონების გაფანტვა თავისუფალ პროტონებზე. მიღებული ფორმულები გამოვიყენოთ ნეიტრონების გაფანტვის შესასწავლად თავისუფალ პროტონებზე დაბალ ენერგიებზე. ვიგულისხმობთ, რომ დაცემული ნეიტრონების ენერგია $E \leq 10$ Mev. ამ შემთხვევაში გაფანტვა მნიშვნელოვანი იქნება $l=0$ მდგომარეობაში. (n, p) გაფანტვისას მნიშვნელოვანია, თუ როგორია სისტემის საერთო სპინი, გაფანტვა $S=1$ (ტრიპლეტურ) და $S=0$ (სინგლეტურ) მდგომარეობაში სხვადასხვაა. ამიტომ გაფანტვისათვის დამახასიათებელ სიდიდეებს სათანადოდ გავუყვითოთ t - და s -ნიშნაკები. ტრიპლეტური და სინგლეტური გაფანტვისათვის სათანადოდ გვექნება ეფექტური რადიუსის მიხსლოების შემდეგი ფორმულები:

$$k \text{ ctg } \delta_t = -\frac{1}{a_t} + \frac{1}{2} r_{et} k^2, \quad (31,52)$$

$$k \operatorname{ctg} \delta_s = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2} r_{es} k^2. \quad (31,53)$$

ამასთან, რადგან გაფანტვა ხდება მცირე ენერგიებზე, ამიტომ შემოვიხსნათ ორ-ორი წევრით. ტრიპლეტურ მდგომარეობაში (n, p) სისტემა ქმნის დეიტრონის ბმულ მდგომარეობას, ამიტომ გაფანტვის ამოცანაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ ეს ფაქტი, კერძოდ, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, (31,52) ფორმულიდან შეგვიძლია გამოვირიცხოთ ერთი პარამეტრი დეიტრონის ბმის ენერგიის საშუალებით.

გაფანტვის ინტეგრალურ განიკვეთებს ტრიპლეტურ და სინგლეტურ მდგომარეობაში, თანახმად (31,43) ფორმულისა, ექნებათ სახე:

$$\sigma_t(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{a_t} - \frac{1}{2} k^2 r_{ct}\right)^2}, \quad \sigma_s(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{a_s} - \frac{1}{2} k^2 r_{es}\right)^2}. \quad (31,54)$$

როცა ექსპერიმენტზე დაცემულ ნეიტრონებს სპინების გამოყოფილი მიმართულება არა აქვთ, მაშინ საერთო განიკვეთი წარმოადგენს (31,54) განიკვეთების ჯამს ტრიპლეტური და სინგლეტური მდგომარეობების შესაბამისი წონებით, ე. ი.

$$\sigma(k) = \frac{3}{4} \sigma_t(k) + \frac{1}{4} \sigma_s(k). \quad (31,55)$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\sigma(k) = \frac{3\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{a_t} - \frac{1}{2} k^2 r_{ct}\right)^2} + \frac{\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{a_s} - \frac{1}{2} k^2 r_{es}\right)^2}. \quad (31,56)$$

ეს გამოსახულება შეიცავს ოთხ უცნობს: a_t , a_s , r_{ct} და r_{es} . მაგრამ (31,40) ფორმულის თანახმად, ერთი პარამეტრი შეგვიძლია გამოვირიცხოთ დეიტრონის ბმის ენერგიის საშუალებით. ასე რომ განიკვეთში ფაქტორად სამი უცნობი შედის. ექსპერიმენტული მონაცემების (31,56) თეორიულ ფორმულასთან შედარებით შეიძლება განისაზღვროს ეს პარამეტრები.

ზღვარში ნულოვან ენერგიაზე გვექნება განიკვეთის შემდეგი მნიშვნელობა:

$$\sigma(0) = 3\pi a_t^2 + \pi a_s^2. \quad (31,57)$$

ბირთვული ფიზიკის განვითარების ადრეულ პერიოდში (n, p) გაფანტვის დროს სინგლეტურ მდგომარეობას არ ითვალისწინებდნენ, ამიტომ განიკვეთის მნიშვნელობად ნულოვან ენერგიაზე იღებდნენ πa_t^2 მნიშვნელობას. ნულოვანი რადიუსის

მიახლოებაში $a_t = \frac{1}{\alpha}$ და, რადგან $\alpha^2 = \frac{M \mathcal{E}}{\hbar^2}$, სადაც $\mathcal{E} = 2,23 \text{ Mev}$ დეიტრონის

ბმის ენერგიაა, განიკვეთისათვის მიიღებოდა $3,6310 \cdot 10^{-24} \text{ სმ}^2$ სიდიდე, რაც გატოლებით ნაკლებია ექსპერიმენტულ მნიშვნელობაზე — $\sigma_{\text{exp}}(0) = 20,5 \cdot 10^{-24} \text{ სმ}^2$.

პირველად ე. ვიგნერის მოერ იყო ნაჩვენები, რომ გაფანტვაში მნიშვნელოვანია სინგლეტური მდგომარეობის გათვალისწინება და რომ ეს გაფანტვა ხდება \mathcal{E}_s ვირტუალურ დონეზე. ეს დონე ცდასთან თანხმობის მისაღწევად ტოლი უნდა იყოს $\mathcal{E}_s = 0,0664 \text{ Mev}$ (ვირტუალური დონეების შესახებ ლაპარაკი გვექნება § 50-ში).

აღვნიშნოთ, რომ (n, p) ურთიერთქმედების შემთხვევაში ზემოთ განხილული პარამეტრებისათვის სადღისოდ დადგენილია შემდეგი მნიშვნელობები:

$$a_1 = 5,38 \text{ ფ}, \quad a_2 = -23,69 \text{ ფ}, \quad r_{21} = 1,72 \text{ ფ}, \quad r_{22} = 2,7 \text{ ფ}. \quad (31,58)$$

დაპოლოს შევნიშნოთ, რომ ეფექტური რადიუსის მიახლოება საკმაოდ კარგად აღწერს ექსპერიმენტულ მონაცემებს. ეს გარემოება, ერთი მხრივ, კარგია, მაგრამ მეორე მხრივ — ცუდი, რამდენადაც ეფექტური რადიუსის მიახლოება არ გვაძლევს საშუალებას რამდენიმე პოტენციალიდან ავირჩიოთ ერთი რომელიმე; დაბალ ენერგიებზე (n, p) გაფანტვის ექსპერიმენტები შეიძლება აიხსნას პოტენციალის ფორმაზე დამოკიდებლად.

გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა

გაფანტვის ამოცანა შეგვიძლია შევისწავლოთ გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცის ფორმალიზმით. ეს მატრიცა აკმაყოფილებს გაფანტვის ლიპმან-შეინკერის ინტეგრალურ განტოლებას და დაკავშირებულია გაფანტვის $S(E)$ -მატრიცასთან. გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა, კერძო შემთხვევაში, ენერგეტულ ზედაპირზე ემთხვევა გაფანტვის ამპლიტუდას. ამ მატრიცას საინტერესო ანალიზური თვისებები გააჩნია, რომელთა დადგენას მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს არა მხოლოდ ორი სხეულის ამოცანის, არამედ მრავალი ნაწილაკის ამოცანისთვისაც. ცნობილია, მაგალითად, რომ სამი სხეულის ამოცანის შესაბამისი ინტეგრალურ განტოლებათა გულები შეიძლება გამოიხატოს ორნაწილაკობრივი გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცის საშუალებით.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ გაფანტვის მატრიცის ზოგად თვისებებს, ბოლო შემდეგში $T(E)$ -მატრიცის გამოსახულებებს კონკრეტული ამოცანებისათვის.

§ 22. გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა

როგორც ჩვენთვის ცნობილია, გაფანტვის ტალღური ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიპმან-შეინკერის განტოლებას

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} V \psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (32,1)$$

ხოლო გაფანტვის ამპლიტუდა განიმარტება შემდეგნაირად:

$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \phi_{\mathbf{k}'} | V | \psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{(-)} | V | \phi_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (32,2)$$

სადაც $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ არის ბრტყელი ტალღა $\hbar\mathbf{k}$ იმპულსით

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (32,3)$$

$\psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\mathbf{r})$ კი (32,1) განტოლების ამონახსნებია. გაფანტვის თეორიაში ხელსაყრელი აღმოჩნდა ამპლიტუდის ისეთნაირი განმარტება, როცა (32,2) გამოსახულებაში მხოლოდ ბრტყელი ტალღები მონაწილეობენ. ცხადია, სამაგიეროდ პოტენცია-

ლური ენერჯიის ნაცვლად გაჩნდება სხვა რაღაც უფრო რთული თპერატორია. მაშასადამე, ვთქვათ, არსებობს ისეთი ოპერატორი, რომელიც ასეა განმარტებული [6]:

$$\langle k' | T^{(+)}(E) | k \rangle = \langle \Phi_{k'} | V | \psi_k^{(+)} \rangle \quad (32,4)$$

და

$$\langle k' | T^{(-)}(E) | k \rangle = \langle \psi_k^{(-)} | V | \Phi_{k'} \rangle. \quad (32,4')$$

ასე რომ, მაგალითად, $T^{(+)}(E)$ -ოპერატორისათვის გვექნება განმარტება

$$V \psi_k^{(+)} = T^{(+)}(E) \Phi_{k'}. \quad (32,5)$$

რადგან $\psi_k^{(\pm)}$ ენერჯიაზეა დამოკიდებული, ამიტომ $T^{(\pm)}(E)$ შესაბამისად დამოკიდებული იქნება $(E \pm i\varepsilon)$ -ზე. შემდგომში T -ოპერატორს (\pm) -ს აღარ გვეუქმეთებ, საშავიეროდ, არგუმენტად დაეუწერთ $z = E \pm i\varepsilon$. (32,4) ფორმულის გამოყენებით ამპლიტუდისათვის გვექნება

$$F(k', k) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle k' | T^{(+)}(E) | k \rangle. \quad (32,6)$$

$\langle k' | T(z) | k \rangle$ გამოსახულებას უწოდებენ გაფანტვის მატრიცას თავისუფალი მოძრაობის $\langle k' |$ და $| k \rangle$ ვექტორების მიხედვით.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ყველგან ვსარგებლობთ ღირაკის ვექტორებით, რომლებიც ნორმირებული გვაქვს პირობით

$$\langle k' | k \rangle = \delta(k - k'), \quad (32,7)$$

ამიტომ გაფანტვის $T(z)$ -მატრიცაშიც ხელსაყრელია ნაცვლად (32,3) ბრტყელი ტალღისა (რომელიც ნორმირებულია პირობით $\langle k' | k \rangle = (2\pi)^3 \delta(k - k')$) (32,7) პირობით ნორმირებული ბრტყელი ტალღის აღება, ე. ი.

$$\langle r | k \rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{ikr}. \quad (32,8)$$

მაშინ (32,6) ფორმულას გადაეწერთ შემდეგნაირად:

$$F(k', k) = -\frac{4\pi^2\mu}{\hbar^2} \langle k' | T^{(+)}(E) | k \rangle; \quad (32,9)$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ $T(E)$ -მატრიცა დამოკიდებულია ერთ ენერჯიაზე

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2\mu} = \frac{k'^2\hbar^2}{2\mu}. \quad (32,10)$$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $T(E)$ -მატრიცა განმარტებულია ენერჯეტულ ზედაპირზე, რაც ფიზიკურად შეესაბამება ენერჯიის შენახვას. ჩვენ შეგვიძლია $T(E)$ -მატრიცა განმარტოთ უფრო ზოგად შემთხვევაშიც, მაგალითად, როცა

$\langle k' | T(E) | k \rangle$ გამოსახულებაში E ემთხვევა ერთ-ერთ $\frac{1}{2\mu} k^2\hbar^2$ ან $\frac{1}{2\mu} k'^2\hbar^2$ სიდი-

დეს. ყველაზე უფრო ზოგადი შემთხვევა გვექნება მაშინ, როცა ამ სამი ენერჯიიდან არც ერთი არ არის ერთმანეთს ტოლი

$$E \neq \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \neq \frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu}. \quad (32,11)$$

ერთ E -ენერგიაზე დამოკიდებული $T(E)$ -მატრიცისაგან განსხვავებით, უკანასკნელ ორ შემთხვევაზე ამბობენ, რომ გაფანტვის მატრიცა განმარტებულია ენერგეტული ზედაპირის გარეთ¹. ცხადია, $T(E)$ -მატრიცას ენერგეტული ზედაპირის გარეთ ფიზიკური შინაარსი არა აქვს. ფიზიკური შინაარსის გასარკვევად ყოველთვის საჭიროა დაეუბრუნდეთ ენერგეტულ ზედაპირს. კერძოდ, გაფანტვის ამპლიტუდა, ენერგეტული ზედაპირის გარეთ განმარტებული $T(E)$ -მატრიციდან, (32,9) ფორმულის თანახმად, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F(k', k) = -\frac{4\pi^2\mu}{\hbar^2} (k' | T(z) | k)_{k^2 \hbar^2 = k'^2 \hbar^2 = 2\mu E} \quad (32,12)$$

აღვიღალ ვიპოვით ინტეგრალურ განტოლებას, რომელსაც აკმაყოფილებს გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა ენერგეტული ზედაპირის გარეთ. ამისათვის (32,1) განტოლება გაგმარავლოთ V -ზე და გავითვალისწინოთ (32,5) განმარტება; მივიღებთ

$$T(z) = V + V \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm iz} T(z). \quad (32,13)$$

თუ გავიხსენებთ თავისუფალი მოძრაობის გრინის ფუნქციის განმარტებას, ეს განტოლება ასეც შეიძლება გადაწეროთ:

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z). \quad (32,14)$$

ეს ინტეგრალური განტოლება ჩაეწეროთ ცხადი სახით. ამისათვის გავითვალისწინოთ (27,29) ფორმულა

$$G_0(z) = \int \frac{|q\rangle\langle q| dq}{E - E(q) \pm iz} \quad (32,15)$$

და (32,14) განტოლება სკალარულად გაგმარავლოთ მარცხნიდან $\langle p |$ ვექტორზე, მარჯვნიდან კი $| p' \rangle$ -ზე, გვექნება:

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = \langle p | V | p' \rangle + \int \frac{\langle p | V | q \rangle \langle q | T(z) | p' \rangle}{E - E(q) \pm iz} dq, \quad (32,16)$$

სადაც

$$\langle p | V | p' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip'r} V(r) e^{ip'r} dr \quad (32,17)$$

და

$$E(q) = \frac{q^2 \hbar^2}{2\mu}. \quad (32,17')$$

მაშასადამე, $\langle p | V | p' \rangle$ წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯის მატრიცულ ელემენტს ბრტყელი ტალღების მდგომარეობებით.

მიღებული (32,16) განტოლება არის ინტეგრალური განტოლება $\langle p | T(E) | p' \rangle$ მატრიცისათვის ენერგეტული ზედაპირის გარეთ. ამ განტოლებას უწოდებენ ლიპმან-შვინგერის განტოლებას $T(E)$ -მატრიცისათვის. (32,16) განტოლების ამონახს-

¹ ამასთან, როცა E -ენერგია ემთხვევა ერთ-ერთს, ე. ი. $\frac{k^2 \hbar^2}{2\mu}$ ან $\frac{k'^2 \hbar^2}{2\mu}$, ამბობენ, რომ

$T(E)$ -მატრიცა ნახევრად ენერგეტულ ზედაპირზე იმყოფება.

ნის მნიშვნელობა ენერგეტულ ზედაპირზე, (32,12) ფორმულის თანახმად, განსაზღვრავს გაფანტვის ამპლიტუდას.

ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალური განტოლების ამოსახსნელად იმის მიხედვით, თუ როგორია ინტეგრალური განტოლების გული ან, რაც იგივეა, პოტენციალური ენერგია, შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვადასხვა მეთოდი, კერძოდ, იტერაციის მეთოდიც. ამ მეთოდის ნულოვანი მიახლოება

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = \langle p | V | p' \rangle, \quad (32,18)$$

როგორც ეს (30,11) ფორმულიდან ჩანს, შეესაბამება ბორნის მიახლოებას.

შეგვიწმინთ, რომ სავალდებულო არ არის გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა განვიხილოთ ბრტყელი ტალღების მდგომარეობებს შორის განსაზღვრული იმპულსით — $\langle p | T(E) | p' \rangle$. ჩვენ შეგვიძლია იგი განვმარტოთ თავისუფალი მოძრაობის \hat{H}_0 -პამილტონიანის შესაბამისი ნებისმიერი საკუთარი ვექტორების მიხედვით. მაგალითად, შესაძლებელია განვიხილოთ ისეთი მდგომარეობა, რომელიც ხასიათდება ენერგიით E - და a -სიდიდეების ერთობლიობით, რომლებიც გასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულს აღგვენ. ასეთი საკუთარი ვექტორები შეიძლება აღვნიშნოთ $|\Phi_a(E)\rangle$ -თი. ცხადია, მათთვის გვექნება ორთო-ნორმირების პირობა

$$\langle \Phi_b(E') | \Phi_a(E) \rangle = \delta(E - E') \delta_{ab}. \quad (32,19)$$

თუ a და b სიდიდეებიც უწყვეტია, მაშინ δ_{ab} უნდა შეიცვალოს დირაკის $\delta(a-b)$ ფუნქციით. (32,15) ფორმულის ნაცვლად, გვექნება გრინის შემდეგი ფუნქცია:

$$G_0(z) = \sum_c \int \frac{|\Phi_c(E_c)\rangle \langle \Phi_c(E_c)|}{E - E_c \pm iz} dE_c, \quad (32,20)$$

ლიპმან-შეინგერის განტოლება კი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\langle a | T^{(\pm)}(E) | b \rangle = \langle a | V | b \rangle + \sum_c \int dE_c \frac{\langle a | V | c \rangle \langle c | T^{(\pm)}(E) | b \rangle}{E - E_c \pm iz}. \quad (32,21)$$

ამ განტოლებაში $\langle a | T^{(\pm)}(E) | b \rangle$ აღნიშნავს გაფანტვის მატრიცის მატრიცულ ელემენტს თავისუფალი მოძრაობის a და b მდგომარეობებს შორის.

შეგვიწმინთ, რომ a კვანტური რიცხვების ერთობლიობა შეიძლება იყოს მომენტის კვადრატისა და პროექციის კვანტური რიცხვები l და m . მაშინ გასაზომ სიდიდეთა სრული კრებული იქნება (E, l, m) . თავისუფალი ნაწილაკისათვის ამ შემთხვევაში გვექნება სამი ურთიერთკომუტატორი ოპერატორი \hat{H}_0 , \hat{L}^2 და \hat{L}_z . ამ ოპერატორების საერთო საკუთარი ფუნქციები კი, თანახმად (9,12) ფორმულით, ტოლი იქნება

$$\Phi_a(E, r, \vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr) Y_{lm}(\vec{r}), \quad (a \equiv l, m) \quad (32,22)$$

ა5 დირაკის აბსტრაქტულ სივრცეში

$$|\Phi_a(E)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} |kl\rangle |lm\rangle. \quad (32,23)$$

ეს ვექტორი ნორმირებული იქნება პირობით

$$(\Phi_{l'm'}(k') | \Phi_{lm}(k)) = \frac{\delta(k' - k)}{kk'} \delta_{l'l'} \delta_{m'm'}; \quad (32,24)$$

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ გავიხსენებთ სფერული ფუნქციებისა და ბესელის სფერული ფუნქციების ორთო-ნორპირების პირობებს.

დაბოლოს საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ხშირად შემოპყავთ სხვა Ω -ოპერატორიც, რომელიც შემდეგნაირად არის განმარტებული:

$$T = V\Omega. \quad (32,25)$$

გავამრავლოთ (32,13) განტოლება V^{-1} -ზე და გავითვალისწინოთ (32,25) აღნიშვნა. $\Omega(x)$ ოპერატორისათვის მივიღებთ

$$\Omega(x) = 1 + G_0(x) V\Omega(x). \quad (32,26)$$

ეს განტოლება არის ინტეგრალური განტოლება $\Omega(x)$ -ის მიმართ. მისი გადაწერა ზელსაყრელია სხვა სახითაც. ამისათვის (32,26) მარცხნიდან გავამრავლოთ $(x - \hat{H}_0)$ -ოპერატორზე; მივიღებთ

$$(x - \hat{H}_0 - V)\Omega(x) = x - \hat{H}_0. \quad (32,27)$$

აღსანიშნავია, რომ ამ განტოლების ერთგვაროვანი ნაწილი ემთხვევა შრედინგერის განტოლებას.

დასასრულ ვაჩვენოთ, რომ გაფანტვის ტალღურ ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\psi_k^{(\pm)}(p) = \delta(k - p) + \frac{\langle p | T(x) | k \rangle}{z - E(p)}. \quad (32,28)$$

ამის დამტკიცება საკმარისად ადვილია, თუ გავიხსენებთ (32,5) ფორმულას, რომელსაც ასე გადავწერთ:

$$\langle p | T(x) | k \rangle = \int \langle p | V | p' \rangle \langle p' | \psi_k^{(\pm)} \rangle dp'. \quad (32,29)$$

თუ ამ უკანასკნელში (32,28) ფორმულიდან შევიტანთ $\psi_k^{(\pm)}(p)$ ფუნქციას, მივიღებთ ლიპმან-შვინგერის განტოლებას.

§ 33. სიმძიმის ცენტრის გამოყოფა

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით ერთი ნაწილაკის გაფანტვას გარეშე ველით. ასეთ ამოცანაზე ჩვენ დავიყვანეთ ორი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანა სიმძიმის ცენტრის გამოყოფით. გარდა იმისა, რომ ამოცანა მარტივდება, სიმძიმის ცენტრის გამოყოფას სხვა პრინციპული მნიშვნელობაც გააჩნია, ამიტომ ლიპმან-შვინგერის განტოლებაში სიმძიმის ცენტრის გამოყოფას ხელახლა ჩავატარებთ. განვიხილოთ ორი ნაწილაკის გაფანტვა. გამოვიღეთ ლიპმან-შვინგერის ოპერატორული განტოლებიდან

$$T(z) = V + VG_0(z) T(z). \quad (33,1)$$

ვიგულისხმობთ, რომ პოტენციალური ენერგია მხოლოდ პირველი და მეორე ნაწილაკის რადიუსვექტორების r_1-r_2 სხვაობის ფუნქციაა. ორი ნაწილაკის თავისუფალი მოძრაობის გრინის ფუნქციას ექნება

$$G_0^{-1}(z) = z - \frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 \quad (33,2)$$

სახე; სადაც

$$z = W \pm i\epsilon; \quad (33,3)$$

\mathcal{H} არის სისტემის სრული ენერგია. თუ შემოვიღებთ იაკობის კოორდინატებს:

$$r = r_1 - r_2, \quad R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, \quad (33,4)$$

მაშინ გრინის ფუნქცია მიიღებს ასეთ გამოსახულებას:

$$G_0^{-1}(z) = z - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R, \quad (33,5)$$

სადაც μ -სისტემის დაყვანილი მასაა, ხოლო $M = m_1 + m_2$ — სრული მასა, Δ_r არის ლაპლასის ოპერატორი ფარდობითი კოორდინატების მიხედვით, Δ_R -კი ლაპლასიანი სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების მიმართ.

შემოვიღოთ მდგომარეობის დამახასიათებელი ორნაწილაკობრივი ბრა- $\langle p_1, p_2 |$ და კეტ- $| p_1, p_2 \rangle$ ვექტორები. მოვითხოვოთ შემდეგი ნორმირების პირობა:

$$\langle p_1, p_2 | p'_1, p'_2 \rangle = \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2). \quad (33,6)$$

ცხადია, (33,1) განტოლება მატრიცულად ასე ჩაიწერება:

$$\langle p_1, p_2 | T(z) | p'_1, p'_2 \rangle = \langle p_1, p_2 | V | p'_1, p'_2 \rangle +$$

$$\int \langle p_1, p_2 | V | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | G_0(z) | q'_1, q'_2 \rangle \langle q'_1, q'_2 | T(z) | p'_1, p'_2 \rangle dq'_1 dq'_2 dq_1 dq_2 \quad (33,7)$$

შევსწავლოთ ამ ინტეგრალური განტოლების გული. ამისათვის განვიხილოთ ჯერ პოტენციალური ენერგიის მატრიცული ელემენტი

$$\langle p_1, p_2 | V | p'_1, p'_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{-i(p_1 r_1 + p_2 r_2)} V(r_1 - r_2) e^{i(p'_1 r_1 + p'_2 r_2)} dr_1 dr_2 \quad (33,8)$$

გადავიღოთ ინტეგრალში ახალ r და R ცვლადებზე, რომელთაც, (33,4) ფორმულების თანახმად, ექნებათ ასეთი სახე:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r + R, \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r + R. \quad (33,9)$$

მატრივად მივიღებთ, რომ

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 = p r + P R, \quad (33,10)$$

სადაც

$$p = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2}, \quad P = p_1 + p_2. \quad (33,11)$$

p ფარდობითი მოძრაობის იმპულსია, ხოლო P — სისტემის სრული იმპულსი. ახალ ცვლადებში (33,8) მატრიცული ელემენტი მიიღებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\langle p_1, p_2 | V | p'_1, p'_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{-i p r} V(r) e^{i p' r} dr \int e^{i (P - P') R} dR, \quad (33,12)$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება

$$\langle p_1, p_2 | V | p'_1, p'_2 \rangle = \langle p | V | p' \rangle \delta(P' - P). \quad (33,13)$$

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვიტ, რომ

$$\langle p_1, p_2 | G_0^{(\pm)}(E) | p'_1, p'_2 \rangle = \frac{\delta(p - p') \delta(P - P')}{11' - \frac{P^2 \hbar^2}{2M} - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \pm i\varepsilon}. \quad (33,14)$$

შეენიშნოთ, რომ

$$E = W - \frac{P^2 \hbar^2}{2M} \quad (33,15)$$

წარმოადგენს სისტემის ფარდობითი მოძრაობის ენერჯიას. როგორც ვხედავთ, (33,7) ინტეგრალური განტოლების $V G_0(z)$ გული შეიცავს დირაკის დელტა ფუნქციებს. მართლაც, (33,13) და (33,14) ფორმულების თანახმად,

$$\langle p_1, p_2 | V G_0(z) | p'_1, p'_2 \rangle = \frac{\langle p | V | p' \rangle \delta(P - P')}{1V - \frac{P^2 \hbar^2}{2M} - \frac{\hbar^2 p^2}{2\mu} \pm i\varepsilon}; \quad (33,16)$$

მაგრამ გული, რომელიც დელტა ფუნქციას შეიცავს, არ შეიძლება იყოს სრულიად უწყვეტი, ამიტომ იქმნება ისეთი შთაბეჭდილება, თითქოს ლიპმან-შვინგერის განტოლების გამოყენება ორი ნაწილაკის ამოცანისათვის აწყდება მათემატიკურ სიძნელეებს. ამასთან, როცა ორი ნაწილაკისაგან შედგენილ სისტემას ბმული მდგომარეობაც ახასიათებს, (33,15) ფორმულის თანახმად, დაფიქსირებული სრული ენერჯია შეგვიძლია მივიღოთ ბმის ენერჯიისა და სიმძიმის ცენტრის კინეტიკური ენერჯიის ურთიერთგადანაწილებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ ლიპმან-შვინგერის ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას ექნება ამოხსნები; ეს კი იმაზე მიგვითითებს, რომ არაერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნები ცალსახა აღარ შეიძლება იყოს.

შეენიშნოთ, რომ ორი ნაწილაკის შემთხვევაში ეს წინააღმდეგობები ადვილი ასაცილებელია. მართლაც, რადგან პოტენციალური ენერჯია დამოკიდებულია მხოლოდ $r = |r_1 - r_2|$ სხვაობაზე, ამიტომ მას და, მაშასადამე, სრულ ჰამილტონიანსაც ტრანსილაციური ინვარიანტობა ახასიათებს. მათემატიკურად ეს ნიშნავს, რომ სრული იმპულსის ოპერატორი კომუტატურია \hat{H} ოპერატორთან

$$[\hat{H}, \hat{P}] = 0;$$

ეს უკანასკნელი კი იმპულსის შენახვის კანონს გამოხატავს. მაშასადამე, ზემოვანხილულ გამოსახულებებში დელტა ფუნქციის გაჩენა სრული იმპულსის შენახვის შედეგია. რადგან (33,7) განტოლებაში ყველა წევრი შეიცავს დირაკის $\delta(P - P')$ ფუნქციას, ამიტომ იგი უბრალოდ შეიკვეცება. (33,13) და (33,16) გამოსახულებები შევითანოთ (33,7) განტოლებაში; დირაკის დელტა ფუნქციებით ინტეგრაციის შემდეგ დაგვრჩება

$$\langle p_1, p_2 | T(z) | p'_1, p'_2 \rangle = -\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \left\{ \langle p | V | p' \rangle + \int \frac{\langle p | V | q \rangle \langle q | T(z) | p' \rangle d\mathbf{q}}{E - E(q) \pm i\epsilon} \right\}. \quad (33,17)$$

ჩვენ აქ ვივლინებთ, რომ $T(z)$ -მატრიცასაც ისეთივე კონსტრუქცია აქვს, როგორც პოტენციალურ ენერგიას. ამაში აღვიღად დავრწმუნდებით, მაგალითად, იტერაციის მეთოდით. (33,17)-დან ვხედავთ, რომ

$$\langle p_1, p_2 | T^{(\pm)}(W) | p'_1, p'_2 \rangle = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \langle p | T^{(\pm)} \left(W - \frac{P^2 \hbar^2}{2M} \right) | p' \rangle, \quad (33,18)$$

სადაც $\langle p | T^{(\pm)}(E) | p' \rangle$ ფარდობითი მოძრაობის T მატრიცა აკმაყოფილებს ჩვენთვის უკვე კარგად ცნობილ განტოლებას

$$\langle p | T^{(\pm)}(E) | p' \rangle = \langle p | V | p' \rangle + \int \frac{\langle p | V | q \rangle \langle q | T^{(\pm)}(E) | p' \rangle d\mathbf{q}}{E - \frac{q^2 \hbar^2}{2\mu} \pm i\epsilon}. \quad (33,19)$$

თუ გადავალთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ $\mathbf{P} = 0$ და სრული და ფარდობითი ენერგიები ერთმანეთს დაემთხვევა, მაშასადამე, ზემოაღნიშნული წინააღმდეგობები მოიხსნება.

აქვე შევნიშნოთ, რომ, როცა საჭმე გვაქვს ორზე მეტ ნაწილაკთან, მაშინ ინტეგრალურ განტოლებაში გვექნება რამდენიმე წევრი, რომლებიც დამოკიდებულია სხვადასხვა არგუმენტების მქონე დელტა ფუნქციებზე, ამიტომ აღნიშნული წინააღმდეგობა ისე მარტივად აღარ ისპობა, როგორც ორი ნაწილაკის შემთხვევაში, როცა დელტა ფუნქცია მარტივად იკვეცება. ამ საკითხს კვლავ დავუბრუნდებით სამი სხეულის ამოცანის განხილვის დროს.

§ 34. გრინის სრული ფუნქცია

ჩვენ შემოვიღეთ თავისუფალი მოძრაობის შესაბამისი გრინის ფუნქცია, რომელიც ასე იყო განმარტებული:

$$G_0(z) = (z - \hat{H}_0)^{-1}, \quad (z = E \pm i\epsilon) \quad (34,1)$$

სადაც \hat{H}_0 თავისუფალი მოძრაობის ჰამილტონიანია. მისი საკუთარი ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$(\hat{H}_0 - E) \phi(r) = 0. \quad (34,2)$$

ცხადია, $G_0(z)$ დააკმაყოფილებს შემდეგ ოპერატორულ განტოლებას:

$$(z - \hat{H}_0) G_0(z) = 1. \quad (34,3)$$

დავუშვათ, რომ ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ $V(r)$ პოტენციალური ენერგიით და დავწეროთ სათანადო შრედინგერის განტოლება

$$(\hat{H} - E) \psi(r) = 0, \quad (34,4)$$

სადაც სრული \hat{H} ჰამილტონიანი განისაზღვრება ფორმულით

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V. \quad (34,5)$$

როგორც ვიცით, შრედინგერის (34,4) განტოლება გაფანტვის ამოცანისათვის ლიპმან-შეინგერის განტოლების ეკვივალენტურია

$$\psi_k^{(+)} = \phi_k + G_0(z) V \psi_k^{(+)}. \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (34,6)$$

ახლა ვიპოვოთ ინტეგრალური განტოლება გრინის სრული ფუნქციისათვის. გრინის სრული ფუნქცია განიშარტება შემდეგი ფორმულით:

$$G(z) = (z - \hat{H})^{-1}, \quad (34,7)$$

ადვილია ამ ფუნქციის დაკეშირება გრინის თავისუფალ ფუნქციასთან. ამისათვის გამოვიყენოთ ოპერატორული იგივეობა:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} (B - A) \frac{1}{B} = \frac{1}{B} (B - A) \frac{1}{A}. \quad (34,8)$$

თუ ამ იგივეობაში შევიტანთ $A = z - \hat{H}$ და $B = z - \hat{H}_0$ ოპერატორებს და გავითვალისწინებთ (34,7) და (34,1) აღნიშვნებს, მივიღებთ:

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z) \quad (34,9)$$

და

$$G(z) = G_0(z) + G(z) V G_0(z). \quad (34,10)$$

ჩვენ მიერ მიღებულ (34,10) განტოლებას უწოდებენ ლიპმან-შეინგერის განტოლებას გრინის ფუნქციისათვის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ გრინის სრული ფუნქციის დახმარებით გაფანტვის ფუნქცია შეგვიძლია ვიპოვოთ (34,2) შრედინგერის თავისუფალი მოძრაობის შესაბამისი ტალღური ფუნქციის საშუალებით.

ამისათვის (34,9) განტოლება მარჯვნიდან გავამრავლოთ $i\varepsilon \phi_k$ ფუნქციაზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$; გვექნება

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(z) \phi_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(z) \phi_k + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(z) V G(z) \phi_k. \quad (34,11)$$

რამდენადაც ϕ_k ფუნქცია \hat{H}_0 ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა $E = \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu}$ საკუთარი მნიშვნელობით, ამიტომ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(z) \phi_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i\varepsilon}{E - \hat{H}_0 + i\varepsilon} \phi_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i\varepsilon}{E - (E - i\varepsilon)} \phi_k = \phi_k; \quad (34,12)$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (34,11) მოგვექმს

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(z) \phi_k = \phi_k + G_0(E + i0) V \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(z) \phi_k. \quad (34,13)$$

ერთმანეთს შევადაროთ (34,13) და (34,6) ფორმულები. ადვილად დავინახავთ, რომ

$$\psi_k^{(+)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(E + i\varepsilon) \phi_k. \quad (34,14)$$

მივიღოთ მნიშვნელოვანი ფორმულა, რომლის საშუალებით შეიძლება ეიპოვოთ გაფანტვის ტალღური ფუნქცია.

გავამრავლოთ (34,10) გამოსახულება $i\epsilon\phi_k$ -ზე და გადავიღოთ $\epsilon \rightarrow 0$ ზღვარზე, გავითვალისწინოთ (34,12) და (34,14) განმარტება, შედეგად მივიღებთ:

$$\psi^{(+)} = \phi + \frac{1}{E-H+i\epsilon} V\phi, \quad (34,15)$$

ან

$$\psi^{(+)} = \phi + G(\epsilon) V\phi. \quad (34,16)$$

განსხვავებით (34,6) განტოლებისაგან, ამ განტოლებაში გრინის სრული ფუნქცია მონაწილეობს.

გრინის ფუნქციის ინტეგრალური განტოლებიდან ადვილად გამოვიყვანოთ ლიპმან-შეინგერის განტოლებას $T(\epsilon)$ -გაფანტვის მატრიცისათვის. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$VG(\epsilon) = T(\epsilon) G_0(\epsilon); \quad (34,17)$$

მაშინ (34,9) განტოლების მარცხნიდან V -ზე გამრავლებით და $G_0(\epsilon)$ ფუნქციაზე შეკვეციტ მივიღებთ

$$T(\epsilon) = V + VG_0(\epsilon)T(\epsilon). \quad (34,18)$$

სრულიად ანალოგიურად (34,10) გამოსახულებიდან მივიღებთ ეკვივალენტურ განტოლებას

$$T(\epsilon) = V + T(\epsilon)G_0(\epsilon)V. \quad (34,19)$$

გაფანტვის $T(\epsilon)$ -მატრიცა შეიძლება განიმარტოს გრინის სრული ფუნქციითაც. ამისათვის (34,10) განტოლება გავამრავლოთ V -ზე და კვლავ გამოვიყენოთ (34,17) განმარტება; გვექნება შემდეგი ინტეგრალური განტოლება:

$$T(\epsilon) = V + VG(\epsilon)V. \quad (34,20)$$

ახლა, თუ (34,17) ოპერატორით ვიმოქმედებთ $i\epsilon\phi$ ფუნქციაზე, გადავალთ ზღვარზე $\epsilon \rightarrow 0$ და გავითვალისწინებთ (34,12) და (34,14) ფორმულებს, მივიღებთ ჩვენთვის უკვე ცნობილ დამოკიდებულებას

$$V\psi = T\phi. \quad (34,21)$$

რადგან V ნამდვილია, ამიტომ (34,19) განტოლებიდან აშკარაა, რომ $T^{(+)}(\epsilon) = T(\epsilon^*)$, ე. ი. $[T(E \pm i\epsilon)]^+ = T(E \mp i\epsilon)$, რაც ნიშნავს, რომ გაფანტვის $T(\epsilon)$ -მატრიცა ერმიტული არ არის.

§ 35. გაფანტვის პარციალური $T_l(E)$ -მატრიცა

ცენტრალური სიმეტრიის ველში, მსგავსად პარციალური გაფანტვის ამპლიტუდისა, ხელსაყრელია გაფანტვის პარციალური მატრიცის შემოღება.

პოტენციალური ენერჯიის $(p|V|p')$ მატრიცული ელემენტი გავშალოთ სფერულ ფუნქციებად. ამ მიზნით გავიხსენოთ ბრტყელი ტალღის გაშლის ფორმულა სფერულ ფუნქციებად და გამოვიყენოთ (32,17) გამოსახულება. გვექნება

$$(p|V|p') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \langle p|V_l|p' \rangle Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'), \quad (35,1)$$

სადაც ჩვენ შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\langle p | V_l | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_l(pr) v(r) j_l(p'r) r^2 dr. \quad (35,2)$$

სრულიად ანალოგიურად გავშალოთ $T(z)$ -მატრიცაც

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} \langle p | T_l(z) | p' \rangle Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'), \quad (35,3)$$

ამასთან,

$$\langle p | T_l(z) | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_l(pr) T_l(z) j_l(p'r) r^2 dr. \quad (35,4)$$

ამ გამოსახულებას გაფანტვის პარციალურ მატრიცას უწოდებენ და ხშირად $T_l(p, p'; z)$ -ითაც აღნიშნავენ.

ახლა გავიხსენოთ ღირაკის $\delta(p - p')$ ფუნქციის წარმოდგენა სფერულ ფუნქციებად

$$\delta(p - p') = \frac{\delta(p - p')}{pp'} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'). \quad (35,5)$$

მაშინ, (27,29) ფორმულის თანახმად, გრინის ფუნქციისათვის გვექნება გაშლა

$$\langle p | G_0(z) | p' \rangle = \frac{\delta(p - p')}{pp' \left(z - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \right)} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'); \quad (35,6)$$

ეს გამოსახულება შევადართოთ გრინის ფუნქციის შემდეგ ფორმულას:

$$\langle p | G_0(z) | p' \rangle = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} \langle p | G_{0l}(z) | p' \rangle Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'); \quad (35,7)$$

შედევად თავისუფალი მოძრაობის გრინის პარციალური ფუნქციისათვის გვექნება გამოსახულება

$$\langle p | G_{0l}(z) | p' \rangle = \frac{1}{z - E(p)} \frac{\delta(p - p')}{pp'}; \quad E(p) = \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu}. \quad (35,8)$$

ახლა, თუ (35,1) და (35,6) ფორმულებს შევითანთ (32,16) განტოლებაში, მივიღებთ ლიმპან-შეინგერის განტოლებას გაფანტვის პარციალური მატრიცისათვის

$$\langle p | T_l(z) | p' \rangle = \langle p | V_l | p' \rangle + 4\pi \int_0^\infty \frac{\langle p | V_l | q \rangle \langle q | T_l(z) | p' \rangle q^2 dq}{z - E(q)}. \quad (35,9)$$

სრულიად ანალოგიურად, (34,19) განტოლების გამოყენებით, გვექნებოდა

$$\langle p | T_l(z) | p' \rangle = \langle p | V_l | p' \rangle + 4\pi \int_0^\infty \frac{\langle p | T_l(z) | q \rangle \langle q | V_l | p' \rangle q^2 dq}{z - E(q)}. \quad (35,9')$$

ამ ორი ფორმულის შედარებით დაეინახავთ, რომ, რადგან $V_l(p, p')$ ნამდვილია, ამიტომ

$$T_l(p, p'; z) = T_l(p', p; z). \quad (35,10)$$

ასევე ცხადია, რომ

$$T_l(p, p'; z) = [T_l(p, p'; z^*)]^*. \quad (35,10')$$

თუ გავითვალისწინებთ (1,84) ფორმულას, შეგვიძლია (35,9) განტოლება ასე დავწეროთ:

$$T_l(z) = V_l + 4\pi V_l G_0(z) T_l'(z). \quad (35,11)$$

გამოვარკვეით როგორი სახე ექნება (32,5) ტოლობას რადიალურ ფუნქციებში. თუ ამ ტოლობაში შევიტანთ $\psi_{l\pm}^{(+)}(r)$ გაფანტვის ფუნქციისა და ბრტყელი ტალღის გაშლას სფერულ ფუნქციებად, მარტივად მივიღებთ

$$V \frac{\chi_l^{(+)}(kr)}{kr} = T_l^{'+}(E) j_l(kr). \quad (35,12)$$

შენიშნოთ, რომ ამ უკანასკნელი პარობის გამოყენებით (35,9) განტოლების მიღება მარტივად შეიძლება (29,2) ინტეგრალური განტოლებიდან გრინის (35,8) ფუნქციის გამოყენებით.

გავამრავლოთ (35,12) განტოლება $j_l(pr) r^2$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი r -ით. (35.4) განმარტების შესაბამისად მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$\langle p | T_l(E \pm iz) | k \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_l(pr) V(r) \frac{\chi_l^{'+}(kr)}{kr} r^2 dr, \quad (35,12')$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}.$$

ახლა დავამყაროთ კვანძის გაფანტვის პარციალურ ამპლიტუდასა და გაფანტვის პარციალურ მატრიცას შორის. ამისათვის გამოვიყენოთ (32,12) განმარტება, რომლის ორივე მხარე გავშალოთ სფერულ ფუნქციებად; სახელობრ, ამპლიტუდისათვის გვექნება გაშლა

$$F(k', k) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} F_l(k) Y_{lm}^*(\bar{k}) Y_{lm}(\bar{k}'). \quad (35,13)$$

სადაც პარციალური ამპლიტუდა ტოლია

$$F_l(k) = \frac{S_l(k) - 1}{2ik} = \frac{1}{k} e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k). \quad (35,14)$$

$S_l(k)$ -წარმოადგენს პარციალურ S -მატრიცას, $\delta_l(k)$ კი გაფანტვის ფაზაა. (35,3) და (35,13) გამოსახულებების (32,12) ფორმულაში შეტანითა და კუთხეების ინტეგრაციით, მივიღებთ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას

$$T_l'(E) = -\frac{4\pi^2\mu}{\hbar^2} \langle k' | T_l(E) | k \rangle, \quad \left(k^2 = k'^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \right). \quad (35,15)$$

ენერგეტულ ზედაპირზე გაფანტვის პარციალური $T_l(k, k; E)$ მატრიცა მხოლოდ ერთ ენერგიაზეა დამოკიდებული, ამიტომ მას შემდგომში უბრალოდ $T_l(E)$ -

თი აღენიშნაეთ. ამგვარად, გაფანტვის ამპლიტუდასა და გაფანტვის პარციალურ მატრიცას შორის ენერგეტულ ზედაპირზე გვაქვს კავშირი

$$F_l(E) = - \frac{4\pi^2 \mu}{\hbar^2} T_l(E). \quad (35,16)$$

თანახმად (35,14) ფორმულისა კი გაფანტვის $S_l(E)$ -და $T_l(E)$ -მატრიცებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$S_l(E) = 1 - 2i\nu(E) T_l(E), \quad (35,17)$$

სადაც გამოსახულება

$$\nu(E) = \frac{4\pi^2 \mu k}{\hbar^2} \quad (35,18)$$

ენერგიაზე დამოკიდებული მამრავლია, რომელიც ნორმირების სათანადო შერჩევით შეიძლება ერთის ტოლი გავხადოთ.

ასევე მარტივადაა დაკავშირებული გაფანტვის ფაზა $T_l(E)$ -მატრიცასთან; სახელიობრ, (35,15)-დან ცხადია, რომ

$$e^{i\delta_l(E)} \sin \delta_l(E) = -\nu(E) T_l(E). \quad (35,19)$$

თანახმად (35,12') ფორმულისა, გაფანტვის $T_l(E)$ -მატრიცა $\chi_l^{(+)}(kr)$ -რადიალურ ფუნქციით შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$T_l(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 j_l(kr) V(r) \frac{\chi_l^{(+)}(kr)}{kr} dr. \quad (35,20)$$

დაბოლოს $T_l(E)$ -მატრიცით შეგვიძლია განვსაზღვროთ ინტეგრალური განიკვეთი. თანახმად (35,16) ფორმულისა, ინტეგრალური განიკვეთი ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\nu(E) T_l(E)|^2. \quad (35,21)$$

ზშირად არჩევენ ბრტყელი ტალღის ისეთ ნორმირებას, რომ (35,17) ფორმულაში და მისგან გამომდინარე ყველა შედეგში $\nu(E)$ -კოეფიციენტი ერთის ტოლად გადაიქცეს. ამისათვის ცხადია, (32,8) გამოსახულების ნაცვლად საჭიროა ავიღოთ შემდეგნაირად ნორმირებული ბრტყელი ტალღა:

$$\phi_k(r) = \left(\frac{\mu k}{2\pi \hbar^2} \right)^{1/2} e^{ikr}. \quad (35,22)$$

ნორმირების კოეფიციენტი ტოლია $(2\pi)^{-3/2} \nu^{1/2}(k)$. ბრტყელი ტალღის ასეთი ნორმირების დროს ნაკადი ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$J = \frac{\hbar \hbar}{\mu} |\phi_k|^2 = \frac{k^2}{2\pi \hbar}. \quad (35,23)$$

გაფანტვის მატრიცა (35,22) სახით ნორმირებული ბრტყელი ტალღების მდგომარეობის მიხედვით აღენიშნოს, $\mathcal{F}_l(E)$ -თი, მაშინ, ცხადია,

$$\mathcal{F}_l(E) = \nu(E) T_l(E). \quad (35,24)$$

ასევე გასაგებია, რომ $\mathcal{F}_l(E)$ -მატრიცა ნორმირებული იქნება შემდეგნაირად:

$$\mathcal{F}_l(E) = -e^{i\delta_l(E)} \sin \delta_l(E). \quad (35,25)$$

თანხმად (35,20) ფორმულისა, $\mathcal{F}_l(E)$ -გაფანტვის მატრიცა $\gamma_l^{(+)}(kr)$ -ფუნქციასთან დაკავშირებული იქნება გამოსახულებით

$$\mathcal{F}_l(E) = \frac{2\mu k}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 j_l(kr) V(r) \frac{\gamma_l^{(+)}(kr)}{kr} dr, \quad (35,26)$$

ხოლო $\mathcal{F}_l(E)$ -და $S_l(E)$ -გაფანტვის პარციალურ მატრიცებს შორის იარსებებს კავშირი

$$S_l(E) = 1 - 2i \mathcal{F}_l(E). \quad (35,27)$$

ასევე მარტივად განისაზღვრება გაფანტვის ინტეგრალური განივკვეთი $\sigma_l(E)$ -მატრიცის საშუალებით; სახელდობრ,

$$\sigma_l(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\mathcal{F}_l(E)|^2, \quad (35,28)$$

რომელიც (34,26) ფორმულის გათვალისწინებით დაემთხვევა (24,5) გამოსახულებას.

ახლა დაუბრუნდეთ გაფანტვის პარციალური $T_l(E)$ -მატრიცის (35,9) ინტეგრალურ განტოლებას და გადაწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$T_l(p, p'; z) = V_l(p, p') + \int_0^\infty K_l(p, q; z) T_l(q, p'; z) dq, \quad (35,29)$$

სადაც ინტეგრალური განტოლების გული განისაზღვრება გამოსახულებით

$$K_l(p, q; z) = 4\pi \frac{q^2(p|V_l|q)}{z - E(q)}, \quad E(q) = \frac{q^2 \hbar^2}{2\mu}. \quad (35,30)$$

როგორც ვხედავთ, გული სინგულარული ხდება ნამდვილი დადებითი z -ისათვის, ამიტომ ამ შემთხვევაში გაფანტვის (35,29) განტოლება ფრედჰოლმის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება იქნება. ნაჩვენები იყო, რომ (35,29) განტოლების ამონახსნის ცალსახობისათვის, როცა z -კომპლექსურია ან ნამდვილი უარყოფითი სიდიდეა, ხოლო გული არასინგულარულია, საკმარისია შესრულდეს პირობა [144]:

$$\int_0^\infty |K_l(p, q; z)|^2 dp dq < \infty \quad (35,31)$$

ამასთან, ინტეგრალები:

$$\int_0^\infty |K_l(p, q; z)|^2 dq, \quad \int_0^\infty |K_l(p, q; z)|^2 dp \quad (35,32)$$

შემოსაზღვრული ფუნქციები უნდა იყვნენ შესაბამისად p და q ცვლადებისა. ცხადია, ეს პირობა დატყული იქნება კვადრატულად ინტეგრებადი პოტენციალური ენერგიებისათვის.

იგივე ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის ცალსახობის საკითხი ნამდვილი დადებითი ენერგიებისათვის შესწავლილი იყო შრომებში [93—96].

ფრედჰოლმის (35,29) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მარტივი პოტენციალების შემთხვევაშიც კი საკმარისად ძნელ ამოცანას წარმოადგენს. ამის გამო, როცა გვინტერესებს არა გაფანტვის პარციალური მატრიცის ზოგადი გამოსახულება ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ, არამედ მხოლოდ გაფანტვის ამპლიტუდა, უფრო ხელსაყრელია (35,9) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის ნაცვლად ამოვხსნათ განტოლება, რომელიც შეესაბამება ნახევრად ენერგეტულ ზედაპირზე განსაზღვრულ პარციალურ მატრიცას, ე. ი. როცა $T_1(p, p'; z)$ მატრიცაში $p' = k = \frac{\sqrt{2|\varepsilon}}{\hbar}$. ცხადია, ასეთი მატრიცა დაკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებას

$$T_1(p, k; z) = v_1(p, k) + 4\pi \int_0^\infty \frac{v_1(p, q)T_1(q, k; z)}{z - E(q)} q^2 dq. \quad (35,33)$$

შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია

$$z_1(p, k) = \frac{T_1(p, k; E + iz)}{T_1(k, k; E + iz)}; \quad \left(k^2 = \frac{2|\varepsilon E'}{\hbar^2} \right), \quad (35,34)$$

მაშინ (35,33) განტოლება შემდეგნაირად გადაწერება:

$$T_1(k, k; E + iz)z_1(p, k) = v_1(p, k) + 4\pi T_1(k, k; E + iz) \int_0^\infty \frac{v_1(p, q)z_1(q, k)}{z - E(q)} q^2 dq \quad (35,35)$$

ამ უკანასკნელიდან, რამდენადაც $z_1(k, k) = 1$, გვექნება

$$T_1(k, k; E + iz) = \frac{v_1(k, k)}{1 - 4\pi \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{z - E(q)} v_1(k, q)z_1(q, k)}. \quad (35,36)$$

მიღებული გამოსახულების გათვალისწინებით (35,35) გამოსახულება დაიყვანება შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებაზე [21—24]:

$$z_1(p, k) = \frac{v_1(p, k)}{v_1(k, k)} + \int_0^\infty \Lambda_1(p, q; z) z_1(q, k) dq. \quad (35,37)$$

ამ ინტეგრალური განტოლების გული განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$\Lambda_1(p, q; z) = \frac{4\pi q^2}{z - E(q)} \left[v_1(p, q) - \frac{v_1(p, k)v_1(k, q)}{v_1(k, k)} \right]. \quad (35,38)$$

როცა $k = q$, მაშინ, მართალია, $z - E(q) = 0$, მაგრამ სამავიეროდ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული სხვაობაც უდრის ნულს. ასე რომ (35,37) განტოლებაში სინგულარობა აღარა გვაქვს. ამის გამო, ენერგიაზე iz მცირე სიდიდის დამატება საჭირო აღარ არის. iz სიდიდის გარეშე კი $\Lambda_1(p, q; E)$ ნამდვილი სიდიდეა, რის გამოც ნამდვილი იქნება $z_1(p, k)$ ფუნქციაც. ეს კი $z_1(p, k)$ ფუნქციის (35,34) განმარტებიდან ნიშნავს, რომ $T_1(p, k; E + iz)$ და $T_1(k, k; E + iz)$ გამოსახულებებს ერთი და იგივე ფაზა ექნებათ.

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ შესაძლებელი იყოს ინტეგრალური განტოლების დაწერა უშუალოდ ამპლიტუდისათვის ან, რაც იგივეა, გაფანტვის მატრიცისათვის

ენერგეტულ ზედაპირზე, მაგრამ, როგორც (35,36) ფორმულიდან ჩანს, ეს შეუძლებელია. $T_1(k, k; E+i\epsilon)$ მატრიცის საპოვნელად, რომელიც ნორმირების მანრავლის სიზუსტით ამპლიტუდას ემთხვევა, საჭიროა (35,37) განტოლების ამონახსნის ცოდნა.

§ 16. მთავარი მნიშვნელობის გამოყოფა გრინის ფუნქციებიდან

ჩვენ შემოვიღეთ გრინის ორი ფუნქცია: ერთი, რომელიც შეესაბამება თავისუფალ მოძრაობას და განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$G_{\pm}^{\pm}(E) = (E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon)^{-1}, \quad (36,1)$$

სადაც \hat{H}_0 -კინეტიკური ენერჯის ოპერატორია, და მეორე, რომელსაც აქვს სახე

$$G^{\pm}(E) = (E - \hat{H}_0 - V \pm i\epsilon)^{-1}. \quad (36,2)$$

ამ უკანასკნელს გრინის სრულ ფუნქციას უწოდებენ. ამ ფუნქციებიდან გამოვყოთ მთავარი მნიშვნელობანი. ამისათვის წინასწარ გავიხსენოთ, რომ მთავარი მნიშვნელობა, კომის აზრით, ასე განიშარტება:

$$\frac{1}{2} \lim \left(\frac{1}{x-y+i\epsilon} + \frac{1}{x-y-i\epsilon} \right) = \mathcal{P} \frac{1}{x-y}, \quad (36,3)$$

სადაც \mathcal{P} -მიუთითებს მთავარი მნიშვნელობის აღებას. ამიტომ, ცხადია,

$$\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G_{\pm}^{(+)}(E) + G_{\pm}^{(-)}(E)] = \mathcal{P} \frac{1}{E - \hat{H}_0} \quad (36,4)$$

წარმოადგენს გრინის თავისუფალი ფუნქციის მთავარ მნიშვნელობას, აღვნიშნოთ იგი $g_0(E)$ -თი. ასე რომ

$$g_0(E) = \mathcal{P} \frac{1}{E - \hat{H}_0}. \quad (36,5)$$

სავსებით ანალოგიურად ვიპოვით გრინის სრული ფუნქციის მთავარ მნიშვნელობასაც. სახელდობრ,

$$g(E) = \frac{\mathcal{P}}{E - H_0 - V}. \quad (36,6)$$

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ, (27,9) ფორმულის თანახმად, (36,5) გრინის ფუნქცია ფიზიკური შინაარსით შეესაბამება მდგარი ტალღის სასაზღვრო პირობას.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-y \pm i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x-y}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \mp \frac{i\epsilon}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \right]. \quad (36,7)$$

ამ გამოსახულების პირველი წევრი გვაძლევს მთავარ მნიშვნელობას, მეორე კი, თანახმად ცნობილი ფორმულისა,

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}, \quad (36,8)$$

მოგვეცემს $\pi i \delta(x-y)$ -ს; ამგვარად,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(x-y) \pm i\varepsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x-y} \mp i\pi \delta(x-y); \quad (36,9)$$

შენიშნოთ, რომ ეს ფორმალური ჩაწერა გულისხმობს შემდეგ ოპერაციას:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x-y \pm i\varepsilon} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x-y} \mp i\pi f(y). \quad (36,10)$$

გამოვიყენოთ (36,9) დამოკიდებულება გრინის ფუნქციებისათვის. მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულებს:

$$G_0^\pm(E) = g_0(E) \mp i\pi \delta(E - \hat{H}_0), \quad (36,11)$$

$$G^\pm(E) = g(E) \mp i\pi \delta(E - \hat{H}); \quad (36,12)$$

ამასთან, მაგალითად, $\delta(E - \hat{H}_0)$ ოპერატორში უნდა გავიგოთ შემდეგი განმარტება:

$$\delta(E - \hat{H}_0) \Phi = \delta(E - E_0) \Phi, \quad (36,13)$$

სადაც Φ -არის \hat{H}_0 ოპერატორის საკუთარი ფუნქცია E_0 საკუთარი მნიშვნელობით, ე. ი.

$$\hat{H}_0 \Phi = E_0 \Phi. \quad (36,14)$$

ადვილი დასაანახია, რომ გრინის სრული ფუნქციის $g(E)$ მთავარი მნიშვნელობა აღარ ემორჩილება ლიპმან-შეინგერის განტოლებას.

§ 37. გაფანტვის ერპიტული მატრიცა, K -მატრიცა

გაფანტვის ტალღური $\psi^{(+)}(r)$ და $\psi^{(-)}(r)$ ფუნქციების ანალოგიურად შემოვიღოთ გაფანტვის $\psi^{(p)}$ (r) ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$|\psi_p^{(p)}(E)\rangle = |\phi_p\rangle + g_0(E) V |\psi_p^{(p)}(E)\rangle, \quad (37,1)$$

სადაც $|\phi_p\rangle$ თავისუფალი ჰამილტონიანის საკუთარი ვექტორია, ხოლო $g_0(E)$ თავისუფალი გრინის ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობა. ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ ამ ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის ფიზიკური შინაარსი.

დაეწეროთ აგრეთვე ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალური განტოლება $|\psi_p^{(+)}(E)\rangle$ ვექტორისათვის

$$|\psi_p^{(+)}(E)\rangle = |\phi_p\rangle + G_0^{(+)}(E) V |\psi_p^{(+)}(E)\rangle. \quad (37,2)$$

ღრობით შემოვიღოთ ვექტორი $|\mathcal{Q}_p(E)\rangle$, რომელიც ტოლია

$$|\mathcal{Q}_p(E)\rangle = |\psi_p^{(p)}(E)\rangle - |\psi_p^{(+)}(E)\rangle \quad (37,3)$$

გამოსახულებისა. თუ (37,1)-ს განვავაკლებთ წვერ-წვერად (37,2)-ს, მივიღებთ

$$|\mathcal{Q}_p(E)\rangle = g_0(E) V |\psi_p^{(p)}(E)\rangle - G_0^{(+)}(E) V |\psi_p^{(+)}(E)\rangle, \quad (37,4)$$

ახლა შევცვალოთ $G_{\rho}^{(+)}(E)$ გრინის ფუნქცია (36,11) ფორმულიდან; გვექნება

$$[1 - g_0(E)V] | Q_{\rho}(E) \rangle = i\pi\delta(E - \hat{H}_0)V | \psi_{\rho}^{(+)}(E) \rangle. \quad (37,5)$$

გაგნალოთ ღირაკის ფუნქცია \hat{H}_0 ოპერატორების საკუთარ ვექტორებად. გამოვიღეთ ერთეულოვანი ოპერატორიდან

$$1 = \int d\mathbf{q} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle \langle \Phi_{\mathbf{q}} |, \quad (37,6)$$

რომელზეც ვიმოქმედოთ $\delta(E - \hat{H}_0)$ ფუნქციით. გვექნება

$$\delta(E - \hat{H}_0) = \int d\mathbf{q} \delta(E - \hat{H}_0) | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle \langle \Phi_{\mathbf{q}} |, \quad (37,7)$$

რადგან $\hat{H}_0 | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle = \frac{q^2 \hbar^2}{2\mu} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle$, ამიტომ

$$\delta(E - \hat{H}_0) = \int_0^{\infty} q^2 dq \delta\left(E - \frac{q^2 \hbar^2}{2\mu}\right) \int d\Omega_{\mathbf{q}} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle \langle \Phi_{\mathbf{q}} |; \quad (37,8)$$

თუ ენერჯიის მიხედვით მოვახდენთ ინტეგრაციას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\delta(E - \hat{H}_0) = \frac{\mu k}{\hbar^2} \int d\Omega_{\mathbf{q}} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle \langle \Phi_{\mathbf{q}} |. \quad (37,9)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულის გამოყენებით (37,5) განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$| Q_{\rho}(E) \rangle = i\pi [1 - g_0(E)V]^{-1} \frac{\mu k}{\hbar^2} \int d\Omega_{\mathbf{q}} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle \langle \Phi_{\mathbf{q}} | V | \psi_{\rho}^{(+)}(E) \rangle. \quad (37,10)$$

თუ გაიხსენებთ გაფანტვის $T(E)$ მატრიცის განმარტებას და (37,1) განტოლებიდან $[1 - g_0(E)V]^{-1} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle$ გამოსახულებას შევცვლით $|\psi_{\rho}^{(+)}(E)\rangle$ ვექტორით, გვექნება

$$| Q_{\rho}(E) \rangle = \frac{i\pi\mu k}{\hbar^2} \int d\Omega_{\mathbf{q}} | \psi_{\mathbf{q}}^{(+)}(E) \rangle \langle \mathbf{q} | T(E) | \rho' \rangle, \quad (37,11)$$

ან, (37,3) აღნიშვნის ძალით, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$| \psi_{\rho}^{(+)}(E) \rangle = | \psi_{\rho}^{(+)}(E) \rangle - \frac{i\pi\mu k}{\hbar^2} \int | \psi_{\mathbf{q}}^{(+)}(E) \rangle \langle \mathbf{q} | T(E) | \rho' \rangle. \quad (37,12)$$

ეს ფორმულა ამყარებს კავშირს $\psi^{(+)}$ და $\psi^{(s)}$ ფუნქციებს შორის.

ახლა შემოვიღოთ გაფანტვის ე. წ. $K(E)$ -მატრიცა შემდეგი ფორმულით:

$$\langle \rho | K(E) | \rho' \rangle = \langle \rho | V | \psi_{\rho'}^{(+)} \rangle. \quad (37,13)$$

გაეპარავლოთ (37,12) განტოლება მარცხნიდან $\langle \rho' | V$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\langle \rho | T(E) | \rho' \rangle = \langle \rho | K(E) | \rho' \rangle - \frac{i\pi\mu k}{\hbar^2} \int d\Omega_{\mathbf{q}} \langle \rho | K(E) | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | T(E) | \rho' \rangle. \quad (37,14)$$

ეს უკანასკნელი განტოლება ამყარებს კავშირს გაფანტვის $T(E)$ - და $K(E)$ -მატრიცებს შორის. ცენტრალური სიმეტრიის ველის დროს, ენერგეტულ ზედაპირზე

$2\mu E = \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2$, შევვიძლია მოვხადინოთ შემდეგი გამლა სფერულ ფუნქციებაჲ:

$$\langle \mathbf{p} | T(E) | \mathbf{p}' \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} T_l(E) Y_{lm}(\mathbf{p}) Y_{lm}^*(\mathbf{p}') \quad (37,15)$$

$$\langle \mathbf{p} | K(E) | \mathbf{p}' \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} K_l(E) Y_{lm}(\mathbf{p}) Y_{lm}^*(\mathbf{p}') \quad (37,16)$$

თუ ანუ გამოსახულებებს შევიტანთ (37,14) განტოლებაში და ჩვეულებრივი წესით გავთავისუფლებით სფერული ფუნქციებისაგან, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$T_l(E) = K_l(E) - i\nu(E)K_l(E)T_l(E), \quad (37,17)$$

სადაც $l=0, 1, 2, \dots$, ხოლო $\nu(E)$ -განისაზღვრება (35,18) ფორმულით. ამ განტოლებიდან ადვილად ვიპოვიოთ, რომ

$$T_l(E) = \frac{K_l(E)}{1 + i\nu(E)K_l(E)}, \quad (37,18)$$

ხოლო (35,17) ფორმულის გამოყენებით დავეყარებთ კავშირს $S_l(E)$ -და $K_l(E)$ -მატრიცებს შორის. გვექნება

$$S_l(E) = \frac{1 - i\nu(E)K_l(E)}{1 + i\nu(E)K_l(E)}, \quad (37,19)$$

რადგან დრეკადი გაფანტვისათვის $S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$, ამიტომ მივიღებთ, რომ $K_l(E)$ მატრიცა გაფანტვის $\delta_l(E)$ -ფაზასთან ასე ყოფილა დაკავშირებული:

$$K_l(E) = -\frac{1}{\nu(E)} \operatorname{tg} \delta_l(E). \quad (37,20)$$

ცხადია, რომ $K(E)$ მატრიცა ერმიტულია, ე. ი.

$$K^+(E) = K(E), \quad (37,21)$$

მაშასადამე, $K(E)$ -მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები ნამდვილი იქნება.

თუ გავითვალისწინებთ (37,18) გამოსახულებას, თანახმად (35,21) ფორმულისა, ინტეგრალური განიკვეთი ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{[\nu K_l(E)]^2}{[1 + \nu^2 K_l^2(E)]}. \quad (37,22)$$

ასლა (37,1) ინტეგრალური განტოლება სკალარულად გავამრავლოთ $\langle \mathbf{p} | V -$
ზე, მივიღებთ

$$\langle \mathbf{p} | K(E) | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle + \int \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | \frac{1}{E - \hat{H}_0} | \mathbf{q}' \rangle \cdot \langle \mathbf{q}' | K(E) | \mathbf{p}' \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{q}', \quad (37,22')$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\langle \mathbf{q} | \frac{1}{E - \hat{H}_0} | \mathbf{q}' \rangle = \frac{\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{E - E(\mathbf{q})}, \quad (37,23)$$

$K(E)$ -მატრიცისათვის საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\langle p | K(E) | p' \rangle = \langle p | V | p' \rangle + \mathcal{P} \int \frac{\langle p | V | q \rangle \langle q | K(E) | p' \rangle dq}{E - E(q)}, \quad (37,24)$$

ამ განტოლების ამოხსნა მოგვცემს $K(E)$ -მატრიცას არაენერგეტულ ზედაპირზე-არაერთარ სიძნელეს არ წარმოადგენს ამ ინტეგრალური განტოლების ჩაწერა ცენტრალურ ველში გაფანტვის პარციალური $K_1(E)$ -მატრიცისათვის. ამისათვის საკმარისია გავიხსენოთ (35,9) განტოლების გამოყენება. შედეგად მივიღებთ;

$$\langle p | K_1(E) | p' \rangle = \langle p | V_1 | p' \rangle + \frac{2\mu}{\hbar^2} 4\pi \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\langle p | V_1 | q \rangle \langle q | K_1(E) | p' \rangle q^2 dq}{k^2 - q^2}, \quad (37,25)$$

სადაც მატრიცული ელემენტები განისაზღვრებიან (35,2)–(35,4)-ის ანალოგიური ფორმულებით.

შევნიშნოთ, რომ თავისუფალი გრინის ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობა ემთხვევა გრინის (28,30) ფუნქციას, რომელიც შეესაბამება მდგარი ტალღის სასაზღვრო პირობას. ეს კი ნიშნავს, რომ (29,7) ასიმპტოტური მნიშვნელობის თანახმად, ჩვენ მიერ განხილული $\chi_l(r)$ ფუნქცია ყოფილა $\chi_l^{(p)}(r)$, რომელიც წარმოადგენს (37,1) ინტეგრალური განტოლების შესაბამისი რადიალური განტოლების ამონახსნს. ცხადია, ამ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\chi_l^{(p)}(r) = kr j_l(kr) + \int_0^\infty y_{0l}(r, r') V(r') \chi_l^{(p)}(kr') dr', \quad (37,26)$$

სადაც $y_{0l}(r, r')$ განისაზღვრება (28,30) ფორმულით.

ახლა, თუ გავიხსენებთ (29,9) და (37,20) ფორმულებს, მივიღებთ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას

$$K_1(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 j_l(kr) V(r) \frac{\chi_l^{(p)}(r)}{kr} dr, \quad (37,27)$$

სადაც $\chi_l^{(p)}(r)$ იქნება ამონახსნი (37,26) ინტეგრალური განტოლებისა.

შევნიშნოთ, რომ $\chi_l^{(p)}(r)$ ფუნქცია ნამდვილია, ამიტომ მისი $e^{-i\omega t}$ სიდიდეზე გამრავლებით მივიღებთ ტალღას, რომლის კვანძები სივრცეში უძრავია, რაც ნიშნავს, რომ $\chi_l^{(p)}(kr)$ შეესაბამება მდგარ ტალღას.

§ 38. გრინის ფუნქციებისა და გაფანტვის მატრიცის სპეცტრალური წარმოდგენის ფორმულები

სიმარტივის მიზნით ჯერ განვიხილოთ გრინის თავისუფალი ფუნქცია

$$(\hat{p}_0^{\pm})_0(E) = (E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon)^{-1} \quad (38,1)$$

და წარმოვადგინოთ იგი შრედინგერის თავისუფალი მოძრაობის

$$\hat{H}_0 | \Phi \rangle = E | \Phi \rangle \quad (38,2)$$

განტოლების საკუთარი ვექტორების მიხედვით. (38,2) განტოლებას მხოლოდ უწყვეტი სპექტრი აქვს. განვიხილოთ საკუთარი ვექტორები განსაზღვრული იმპულ-

სით $|\phi_p\rangle \equiv |p\rangle$, სადაც $\mathbf{H}p$ იმპულსის საკუთარი მნიშვნელობაა. ცხადია, ეს ვექტორები აღგენენ სრულ სისტემას, რაც ნიშნავს, რომ შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ერთეულოვანი ოპერატორი:

$$1 = \int d\mathbf{p} |p\rangle \langle p|. \quad (38,3)$$

თუ ამ ოპერატორზე ვიმოქმედებთ გრინის $G_0^{(\pm)}(E)$ ფუნქციით, მივიღებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ წარმოდგენას

$$G_0^{(\pm)}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|p\rangle \langle p|}{E - E(p) \pm i\epsilon} d\mathbf{p}; \quad E(p) = \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \quad (38,4)$$

თავისუფალი ნაწილაკის მდგომარეობა იმპულსის ნაცვლად შეგვიძლია დავახასიათოთ E ენერგიით და რაიმე a -დისკრეტული სიდიდებით, ისე რომ (E, a) ადგენდეს გასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულს (a -შეიძლება იყოს, მაგალითად, მომენტი და მისი ϵ -პროექცია ან, რაც ეკვივალენტურია, l და m კვანტური რიცხვები) ამ შემთხვევაში ერთეულოვან ოპერატორს ექნება სახე:

$$1 = \sum_a \int dE' |\Phi_{E'a}\rangle \langle \Phi_{E'a}|, \quad (38,5)$$

სადაც $|\Phi_{E'a}\rangle$ ვექტორი, რომელიც წარმოადგენს (38,2) განტოლების ამონახსნს, ორთონორმირებულია პირობით

$$\langle \Phi_{E'a} | \Phi_{E'b} \rangle = \delta(E - E') \delta_{ab}. \quad (38,6)$$

თანხმად (38,5) ფორმულისა, გრინის თავისუფალი ფუნქციისათვის გვექნება წარმოდგენა

$$G_0(z) = \sum_a \int dE' \frac{|\Phi_{E'a}\rangle \langle \Phi_{E'a}|}{z - E'}. \quad (z = E \pm i\epsilon) \quad (38,7)$$

ახლა ვიპოვოთ ანალოგიური წარმოდგენის ფორმულები გრინის სრული ფუნქციისთვისაც

$$G(z) = (E - \hat{H} \pm i\epsilon)^{-1}. \quad (38,8)$$

განვიხილოთ შრედინგერის განტოლება ურთიერთქმედების შემთხვევაში

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (38,9)$$

ამ განტოლებას ზოგად შემთხვევაში ექნება როგორც უწყვეტი, ისე წყვეტილი სპექტრი, ამიტომ საზოგადოდ მხოლოდ უწყვეტი სპექტრის ფუნქციები არ აღგენენ სრულ სისტემას. სრული სისტემა შედგენილი იქნება ორივე სპექტრის შესაბამისი ფუნქციებით. დისკრეტული სპექტრის შესაბამისი ვექტორები აღვნიშნოთ $|\psi_n\rangle$ -ით, სადაც n -კვანტური რიცხვების ერთობლიობაა, რომლებიც განსაზღვრავენ მდგომარეობას; უწყვეტი სპექტრი კი დავახასიათოთ $|\psi_q^{(\pm)}\rangle$ ვექტორით, სადაც q -იმპულსია. განსაზღვრულობის მიზნით ვივლისხმვით, რომ ეს ვექტორები შეესაბამებიან განშლადი ტალღის სასაზღვრო პირობას. ზემოთქმულის თანახმად, შეგვიძლია შევადგინოთ ერთზე გამრავლების ოპერატორი

$$1 = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + \int dq |\psi_q^{(+)}\rangle \langle \psi_q^{(+)}|; \quad (38,10)$$

თუ ამ ოპერატორზე ვიმოქმედებთ გრინის სრული ფუნქციით, მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან სპექტრალურ წარმოდგენას:

$$G(z) = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{z-E_n} + \int dq \frac{|\psi_q^{(+)}\rangle\langle\psi_q^{(+)}|}{z-E(q)}, \quad (38,11)$$

სადაც $E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu}$ ასევე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ გრინის სრული ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობაც

$$g(E) = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{E-E_n} + \int dq \frac{|\psi_q^{(+)}\rangle\langle\psi_q^{(+)}|}{E-E(q)}. \quad (38,12)$$

შევნიშნოთ, რომ (38,11) სპექტრალური წარმოდგენის გამოყენებით ადვილად დავწერთ $\langle p | G(z) | p' \rangle$ მატრიცულ ელემენტსაც. მართლაც, გვექნება

$$\langle p | G(z) | p' \rangle = \sum_n \frac{\psi_n(p) \psi_n^*(p')}{z-E_n} + \int dq \frac{\psi_q(p) \psi_q^*(p')}{z-E(q)}, \quad (38,13)$$

სადაც $\psi_n(p)$ და $\psi_q(p)$ სათანადოდ წყვეტილი და უწყვეტი სპექტრის ფუნქციებია იმპულსურ წარმოდგენაში.

როცა უწყვეტი სპექტრი ხასიათდება E ენერგიით და დისკრეტული სიდიდეების ერთობლიობით, მაშინ ერთეულოვანი ოპერატორი წარმოიდგინება ფორმულით

$$1 = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| + \sum_a \int dE' |\psi_{E'a}^{(+)}\rangle\langle\psi_{E'a}^{(+)}|. \quad (38,14)$$

ხოლო გრინის ფუნქციით წარმოდგენა იქნება ასეთი:

$$G(z) = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{z-E_n} + \sum_a \int dE' \frac{|\psi_{E'a}^{(+)}\rangle\langle\psi_{E'a}^{(+)}|}{z-E'}. \quad (38,15)$$

ახლა გამოვიყენოთ სპექტრალური წარმოდგენის ფორმულა გაფანტვის $T(z)$ -მატრიცისათვის, რომელიც (34,20) ფორმულის თანახმად ასე წარმოვიდგება:

$$T(z) = V + V G(z) V. \quad (38,16)$$

ავიღოთ მატრიცული ელემენტი საწყის p და საბოლოო p' იმპულსების მდგომარეობათა მიხედვით და $G(z)$ ფუნქციისათვის გამოვიყენოთ (38,11) სპექტრალური წარმოდგენა; მივიღებთ

$$\begin{aligned} \langle p | T^{(+)}(E) | p' \rangle &= \langle p | V | p' \rangle + \sum_n \frac{\langle p | V | \psi_n \rangle \langle \psi_n | V | p' \rangle}{E-E_n+i\varepsilon} \\ &+ \int dq \frac{\langle p | V | \psi_q^{(+)}(E_q) \rangle \langle \psi_q^{(+)}(E_q) | V | p' \rangle}{E-E(q)+i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (38,17)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\langle p | V | \psi_n \rangle = \int \langle p | V | q \rangle \psi_n(q) dq \equiv g_n(p); \quad (38,18)$$

გარდა ამისა, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\langle p | V | \psi_q^{(+)} \rangle = \langle p | T^{(+)}(E) | q \rangle, \quad (38,19)$$

გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცისათვის მივიღებთ შემდეგ სპექტრალურ წარმოდგენას:

$$\langle p | T^{(+)}(E) | p' \rangle = \langle p | V | p' \rangle + \sum_n \frac{g_n(p) g_n^*(p')}{E - E_n + i\epsilon} + \int dq \frac{\langle p | T^{(+)}(E_q) | q \rangle \langle p' | T^{(+)}(E_q) | q \rangle}{E - E(q) + i\epsilon}. \quad (38,20)$$

ახლა დავწეროთ იგივე წარმოდგენის ფორმულა პარციალური გაფანტვის მატრიცისთვისაც. ამისათვის გამოვიყენოთ (35,1) და (35,3) გაშლის ფორმულები, შემდეგად მივიღებთ [93]:

$$\langle p | T_i^{(+)}(E) | p' \rangle = \langle p | V_i | p' \rangle + 4\pi \sum_n \frac{g_{ni}(p) g_{ni}^*(p')}{E - E_n + i\epsilon} + 4\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{\langle p | T_i^{(+)}(E_q) | q \rangle \langle p' | T_i^{(+)}(E_q) | q \rangle^*}{E - E_q + i\epsilon}, \quad (38,21)$$

სადაც $g_{ni}(p)$ ფუნქციას უწოდებენ ფორმფაქტორს და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$g_{ni}(p) = \int_0^\infty \langle p | V_i | q \rangle \psi_{ni}(q) q^2 dq. \quad (38,22)$$

მნიშვნელოვანია კიდევ ერთი წარმოდგენის ფორმულის გამოყენა პარციალური გაფანტვის მატრიცისათვის [23 — 25].

გავითვალისწინოთ, რომ: $v_i(p, p') = v_i(p', p)$, $T_i(p, p'; z) = T_i(p', p; z)$ და (35,29) განტოლება ნახევრად ენერგეტულ ზედაპირზე განმარტებული $T_i(q, k; z)$ მატრიცისათვის შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$T_i(q, k; z) = v_i(q, k) + 4\pi \int_0^\infty \frac{p'^2 dp'}{z - E(p')} v_i(k, p') T_i(p', q; z), \quad (38,23)$$

სადაც

$$z = \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu} + i\epsilon.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$W_i(p, q) = \frac{v_i(p, q)}{v_i(k, k)} \quad (38,24)$$

და (38,23) განტოლება გავამრავლოთ $W_i(p, k)$ -ზე, მივიღებთ

$$W_i(p, k) T_i(q, k; z) = W_i(p, k) v_i(k, q) + 4\pi \int_0^\infty \frac{p'^2 dp'}{z - E(p')} W_i(p, k) v_i(k, p') T_i(p', q; z). \quad (38,25)$$

თუ გავითვალისწინებთ (35,34) აღნიშვნას, გვქვამება

$$0 = W_i(p, k) r_i(q, k) T_i(k, k; z) - W_i(p, k) v_i(k, q) - 4\pi \int_0^\infty \frac{p'^2 dp'}{z - E(p')} W_i(p, k) r_i(k, p') T_i(p', q; z). \quad (38,26)$$

ეს განტოლება წვერ-წვერად შევეკრიბოთ (35,9) განტოლებასთან, მივიღებთ

$$T_l(p, q; z) = W_l(p, k)z_l(q, k)T_l(k, k; z) + [v_l(p, q) - W_l(p, k)v_l(k, q)] - \\ 4\pi \int_0^{\infty} \frac{p'^2 dp'}{z - k(p')} [v_l(p, p') - W_l(p, k)v_l(k, p')]T_l(p', q; z). \quad (38,27)$$

თუ გავიხსენებთ (35,38) აღნიშვნას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$T_l(p, q; z) = W_l(p, k)z_l(q, k)T_l(k, k; z) + \frac{E - E(q)}{4\pi q^2} \Lambda_l(p, q; z) + \\ \int \Lambda_l(p, p'; z)T_l(p', p; z)dp'. \quad (38,28)$$

როგორც ვიცი, $z_l(p, k)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (35,37) განტოლებას

$$z_l(p, k) = W_l(p, k) + \int_0^{\infty} \Lambda_l(p, q; z)z_l(q, k) dq. \quad (38,29)$$

ამ ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, როგორც ცნობილია, შეგვიძლია ჩავწეროთ $I_l(p, q; z)$ რეზოლვენტის საშუალებით

$$z_l(p, k) = W_l(p, k) + \int_0^{\infty} I_l(p, q; z)W_l(q, k) dq, \quad (38,30)$$

სადაც რეზოლვენტა აკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებას

$$I_l(p, q; z) = \Lambda_l(p, q; z) + \int_0^{\infty} R_l(p, p'; z)\Lambda_l(p', q; z) dp' \\ = \Lambda_l(p, q; z) + \int_0^{\infty} \Lambda_l(p, p'; z)R_l(p', q; z) dp'. \quad (38,31)$$

თუ გამოვიყენებთ (38,30) განტოლებას და $\Lambda_l(p, q; z)$ ფუნქციის განმარტებას, (38,28) ტოლობას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$T_l(p, q; z) = z_l(p, k)T_l(k, k; z)z_l(q, k) + \\ [z_l(p, q) - z_l(p, k)W_l(q, k)]v_l(k, k), \quad (38,32)$$

სადაც $z_l(p, q)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$z_l(p, q) = W_l(p, q) + \int_0^{\infty} R_l(p, p'; z)W_l(p', q) dp'. \quad (38,33)$$

აღვიღად ვაჩვენებთ, რომ

$$[z_l(p, q) - z_l(p, k)W_l(q, k)]v_l(k, k) = \frac{E - E(q)}{4\pi q^2} R_l(p, q; z). \quad (38,34)$$

ამ ტოლობის სამართლიანობის დასამტკიცებლად საკმარისია $I_l(p, q; z)$ ფუნქციის მნიშვნელობა შევითანოთ (38,31) განტოლებიდან და გამოვიყენოთ $\Lambda_l(p, q; z)$

ფუნქციის განმარტება. $v_1(k, k)$ ფუნქციაზე გაყოფის შემდეგ (38.34) გამოსახულებების მარჯვენა მხარისათვის მივიღებთ

$$W_1(p, q) - W_1(p, k)W_1(q, k) - W_1(q, k) \int_0^{\infty} R_1(p, p'; z)W_1(p', k)dp' + \int_0^{\infty} R_1(p, p'; z)W_1(p', q)dp'. \quad (38,35)$$

წევრების დაჯგუფებისა და (38,30) და (38,33) ინტეგრალური განტოლებების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ამგვარად, (38,34) ტოლობის საფუძველზე (38,32) გამოსახულებიდან მივიღებთ $T_1(z)$ -მატრიცის კიდევ ერთ წარმოდგენას

$$T_1(p, q; z) = z_1(p, k)T_1(k, k; z)z_1(q, k) + \frac{E(k) - E(q)}{4\pi q^2} R_1(p, q; z). \quad (38,36)$$

ეს წარმოდგენა სამართლიანია ნებისმიერი p, q და z -სათვის; ამასთან, როგორც ეხედავთ, პირველ წევრს აქვს ფაქტორიზებადი ფორმა. ამგვარად, $T_1(p, q; z)$ პარციალური მატრიცა გამოიხატა $z_1(p, k)$ ფუნქციით, ე. ი. (38,29) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნითა და $R_1(p, q; z)$ რუზოლვენტით.

როცა p ან q ტოლია k -სი, ე. ი. $\sqrt{2\mu E/\hbar}$ -ის, მაშინ $\Lambda_1(p, q; z)$ და მასადასე, $R_1(p, q; z)$ ნულის ტოლი იქნება. ამ შემთხვევაში (38,36) წარმოდგენის ფორმულაში დაგვრჩება მხოლოდ ფაქტორიზებადი წევრი.

გრინის ფუნქციის ანალიზური თვისებები. როგორც (38,13) ფორმულიდან ჩანს, გრინის სრულ ფუნქციას აქვს მარტივი პოლუსები, რომლებიც შეესაბამებიან სრული \hat{H} -ჰამილტონიანის დისკრეტულ საკუთარ მნიშვნელობებს.

თავისუფალი მოძრაობის შესაბამის \hat{H}_0 ოპერატორს აქვს უწყვეტი სპექტრი ენერჯის საკუთარი $E \geq 0$ მნიშვნელობებით. ცხადია, სრულ ჰამილტონიანსაც ენერჯის იგივე $(0, \infty)$ ინტერვალში ექნება უწყვეტი სპექტრი. ეს კი ნიშნავს, რომ როგორც $G_0(E)$, ისე $G(E)$ გრინის ფუნქციებს კომპლექსურ E სიბრტყეზე აქვთ ჭრილი, რომელიც იწყება $E=0$ წერტილებში და ვრცელდება $E=\infty$ -მდე. მაშასადამე, თუ სრულ ჰამილტონიანს დისკრეტული სპექტრი არ გააჩნია, მაშინ გრინის ორივე ფუნქცია ენერჯის ანალიზური ფუნქციები იქნება კომპლექსური E -სიბრტყის ნებისმიერ სასრულ არეში და $0 < E < \infty$ შუალედში ექნებათ ჭრილი. როცა სრულ ჰამილტონიანს დისკრეტული სპექტრიც აქვს, მაშინ გრინის $G(E)$ სრულ ფუნქციას $E = E_n$ წერტილებში ექნება მარტივი პოლუსები, რომლებიც ბმული მდგომარეობების ენერჯიებს შეესაბამებიან.

რადგან გრინის ფუნქციებს გააჩნიათ ჭრილი 0 -დან ∞ -მდე არსი ღერძის გასწვრივ, ამიტომ კომპლექსური E -სიბრტყის არსი ღერძის დადებით ნაწილში მათ განსხვავებული მნიშვნელობა ექნებათ იმის მიხედვით, თუ რომელი მხრიდან ეუახლოვდებით ამ ღერძს — ზემოდან $E + i0$, ე. ი. დადებითი მნიშვნელობების მხრიდან, თუ ქვემოდან $E - i0$, ე. ი. უარყოფითი მნიშვნელობების მხრიდან. სწორედ ამ განსხვავების გამო, შემოვიღეთ გრინის ფუნქციების ორი მნიშვნელობა $G_0^{(+)}(E)$ და $G_0^{(-)}(E)$ ერთი მხრივ და $G_0^{(+)}(E)$ და $G_0^{(-)}(E)$ — მეორე მხრივ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ წინა პარაგრაფში მიღებული გაფანტვის მატრიცის სპექტრალური წარმოდგენიდან ადვილად მივიღებთ ოპტიკურ თეორემას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს გაფანტვის თეორიაში.

დავწეროთ გაფანტვის მატრიცის (38,20) წარმოდგენა საწყის p_α და საბოლოო p_β იმპულსებისათვის, ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ, შრედინგერის (1,91) განტოლების თანახმად, (38,18) ფუნქცია მიიღებს გამოსატულებას

$$g_n(p_\beta) = (E_n - E_\beta) \psi_n(p_\beta), \quad F_\beta = \frac{p_\beta^2 \hbar^2}{2\mu}. \quad (39,1)$$

გვექნება:

$$\langle p_\alpha | T^{(+)}(E) | p_\beta \rangle = \langle p_\alpha | V | p_\beta \rangle + \sum_n \frac{(E_n - E_\beta)(E_n - E_\alpha)}{E - E_n} \psi_n(p_\alpha) \psi_n^*(p_\beta) + \int dq \frac{\langle p_\alpha | T^{(+)}(E_q) | q \rangle \langle p_\beta | T^{(+)}(E_q) | q \rangle^*}{E - E(q) + i\varepsilon}. \quad (39,2)$$

ეს ფორმულა დავწეროთ ორ შემთხვევაში: როცა $E = E_\beta$ და როცა $E = E_\alpha$; მივიღებთ

$$\langle p_\alpha | T^{(+)}(E_\beta) | p_\beta \rangle = \langle p_\alpha | V | p_\beta \rangle - \sum_n (E_n - E_\alpha) \psi_n(p_\alpha) \psi_n^*(p_\beta) + \int dq \frac{\langle p_\alpha | T^{(+)}(E_q) | q \rangle \langle p_\beta | T^{(+)}(E_q) | q \rangle^*}{E_\beta - E_q + i\varepsilon}. \quad (39,3)$$

და

$$\langle p_\beta | T^{(+)}(E_\alpha) | p_\alpha \rangle = \langle p_\beta | V | p_\alpha \rangle - \sum_n (E_n - E_\beta) \psi_n(p_\alpha) \psi_n^*(p_\beta) + \int dq \frac{\langle p_\alpha | T^{(+)}(E_q) | q \rangle \langle p_\beta | T^{(+)}(E_q) | q \rangle^*}{E_\alpha - E_q - i\varepsilon}. \quad (39,4)$$

თუ ავიღებთ ამ ორი უკანასკნელი ფორმულის სხვაობას, მივიღებთ:

$$\langle p_\alpha | T^{(+)}(E_\beta) | p_\beta \rangle - \langle p_\beta | T^{(+)}(E_\alpha) | p_\alpha \rangle^* = (E_\alpha - E_\beta) \sum_n \psi_n^*(p_\beta) \psi_n(p_\alpha) + \int dq \langle p_\alpha | T^{(+)}(E_q) | q \rangle \langle p_\beta | T^{(+)}(E_q) | q \rangle^* \left[\frac{1}{E_\beta - E_q + i\varepsilon} - \frac{1}{E_\alpha - E_q - i\varepsilon} \right]. \quad (39,5)$$

ამ გამოსახულების გამოყენების დროს ვისარგებლეთ პოტენციალური ენერჯიის ერმიტულობით

$$\langle p_\alpha | V | p_\beta \rangle = \langle p_\beta | V | p_\alpha \rangle^*. \quad (39,6)$$

(39,5) გამოსახულებას შეგვიძლია ვუწოდოთ განზოგადებული ოპტიკური თეორემა გაფანტვის მატრიცისათვის ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ¹. ცხადია, ანალოგიურ ფორმულას მივიღებთ $T^{(-)}(E)$ -მატრიცისთვისაც.

განზოგადებული ოპტიკური თეორემიდან მარტივად მიიღება ჩვეულებრივი დამოკიდებულება, რომელიც ოპტიკური თეორემის შინაარსს განსაზღვრავს გა-

¹ სათანადო ფორმულა პირველად გამოიყენა ფინბერგმა: E. Feenberg, Phys. Rev., 40, 40, 1932.

ფანტის ამპლიტუდისათვის. ამისათვის გადავიღეთ ენერგეტულ ზედაპირზე $F' = E_{\beta} = E_{\alpha}$; მაშინ, რამდენადაც

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{E - E_q + i\varepsilon} - \frac{1}{E - E_q - i\varepsilon} \right] = -2\pi i \delta(E - E_q), \quad (39,7)$$

ამიტომ გვექნება

$$\begin{aligned} & (\rho_{\alpha} | T^{(+)}(E) | \rho_{\beta}) - (\rho_{\beta} | T^{(+)}(E) | \rho_{\alpha})^* = \\ & -2\pi i \int d\mathbf{q} \delta(E - E_q) (\rho_{\alpha} | T^{(+)}(E_q) | \mathbf{q}) (\rho_{\beta} | T^{(+)}(E_q) | \mathbf{q})^*. \end{aligned} \quad (39,8)$$

ცხადია

$$q^2 d\mathbf{q} = \frac{\mu \sqrt{2\mu E_q} dE_q}{\hbar^3}, \quad (39,9)$$

რის გამოც, თუ ჩავატარებთ ფილტრაციას, დაგვრჩება ინტეგრალი მხოლოდ კუთხეებით

$$\begin{aligned} & (\rho_{\alpha} | T^{(+)}(E) | \rho_{\beta}) - (\rho_{\beta} | T^{(+)}(E) | \rho_{\alpha})^* = \\ & -2\pi i \frac{\mu k}{\hbar^2} \int d\Omega_q (\rho_{\alpha} | T^{(+)}(E) | \mathbf{q}) (\rho_{\beta} | T^{(+)}(E) | \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (39,10)$$

ამ დამოკიდებულებას უწოდებენ T -მატრიცის უნიტარობის პირობას დრეკადი გაფანტის შემთხვევაში.

რადგან გაფანტის ამპლიტუდა განისაზღვრება

$$F(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -\frac{4\pi^2 \mu}{\hbar^2} (\mathbf{p}' | T(E) | \mathbf{p}) \quad p^2 \hbar^2 = p'^2 \hbar^2 = \mu E \quad (39,11)$$

ფორმულით, ამიტომ (39,10)-ში $\rho_{\alpha} = \rho_{\beta} \equiv \rho$ განტოლების შედეგად გვექნება

$$Im(\rho | T^{(+)}(E) | \rho) = -\frac{\pi \mu k}{\hbar^2} \int d\Omega_q |\rho | T^{(+)}(E) | \mathbf{q}|^2. \quad (39,12)$$

(39,11) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$Im F(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma(E), \quad (39,13)$$

რაც ემთხვევა ჩვენთვის უკვე ცნობილ (24,7) ფორმულას.

როცა ურთიერთქმედებას ცენტრალური ხასიათი აქვს, მაშინ გაფანტის მატრიცის სფერულ ფუნქციებად გაშლით და (39,10) გამოსახულებაში შეტანით, ხოლო შემდეგ კუთხეებით ინტეგრაციის შედეგად მივიღებთ

$$T_l^{(+)}(E) - T_l^{(+)*}(E) = -i \frac{8\pi^2 \mu k}{\hbar^2} T_l^{(+)}(E) T_l^{(+)*}(E). \quad (39,14)$$

პარციალურ ამპლიტუდაზე გადასვლისათვის საჭიროა $T_l(F)$ -გავამრავლოთ $-\frac{4\pi^2 \mu}{\hbar^2}$ მამრავლზე. მივიღებთ

$$F_l(k) - F_l^*(k) = 2ik |F_l(k)|^2, \quad (39,15)$$

საიდანაც

$$Im F_l(k) = k |F_l(k)|^2. \quad (39,16)$$

აქედან კი ნათელია, რომ

$$Im F_l^{-1}(k) = -k, \quad (39,17)$$

რასაც აკმაყოფილებს გამოსახულება

$$F_l^{-1}(k) = a_l(k) - ik, \quad (39,18)$$

სადაც $a_l(k)$ ნამდვილი ფუნქციაა. თუ გავიხსენებთ, რომ $F_l(k) = \frac{1}{k} \sin \delta_l e^{i\delta_l}$, მა-

შინ დავინახავთ, რომ $a_l(k) = k \operatorname{ctg} \delta_l$.

თუ ცნობილია გაფანტვის დიფერენციალური განივეკეთის მნიშვნელობა ყველა კუთხეზე, უნიტარობის (39,10) პირობა პრინციპში საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ თვით ამპლიტუდა. მართლაც, (39,10) ფორმულაში გადავიდეთ ამპლიტუდაზე (39,11) ფორმულის გამოყენებით და დრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$F(E, \theta_{pp'}) = \sqrt{\sigma(E, \theta_{pp'})} e^{i\gamma(\theta_{pp'})}, \quad (39,19)$$

სადაც $\sigma_{pp'}$ გამოხატავს გაფანტვის კუთხეს, ე. ი. კუთხეს საწყის და საბოლოო იმპულსებს შორის, $\sigma(\theta)$ დიფერენციალური განივეკეთია, ხოლო γ ამპლიტუდის ფაზა. ადვილად დავინახავთ, რომ უცნობი $\gamma(\theta_{pp'})$ სიდიდისათვის გვექნება შემდეგ ინტეგრალური განტოლება:

$$\sin \gamma(\theta_{pp'}) = \frac{k}{4\pi} \int d\Omega_{pq} \left\{ \frac{\sigma(\theta_{pq}) \sigma(\theta_{p'q})}{\sigma(\theta_{pp'})} \right\}^{1/2} \cos[\gamma(\theta_{pq}) - \gamma(\theta_{p'q})]. \quad (39,20)$$

ეს ინტეგრალური განტოლება ინვარიანტულია γ -ფაზის $(\pi - \gamma)$ -თი შეცვლის მიმართ. ამიტომ, (39,19) წარმოდგენის თანახმად, ინტეგრალური განტოლებიდან ნაპოვნი ამპლიტუდა არ იქნება ცალსახა. რადგან

$$F(\pi - \theta_{pp'}) = -\sqrt{\sigma} e^{-i\gamma(\theta_{pp'})} = -F^*(\theta_{pp'}), \quad (39,21)$$

ამიტომ დრეკადი გაფანტვის დიფერენციალური განივეკეთის გაზომვით, მოცემული ენერჯისათვის და ყველა კუთხეებზე, შესაძლებელია ამპლიტუდის განსაზღვრა

$$F(E, \theta_{pp'}) \rightarrow F^*(E, \theta_{pp'}) \quad (39,22)$$

გარდაქმნის სიზუსტით.

გამოვარკვეით როგორაა დაკავშირებული ამპლიტუდის ეს განუზღვრელობა ფაზის განუზღვრელობასთან. გავითვალისწინოთ (23,21) გამოსახულება, (39,19) გავამრავლოთ $P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი; მივიღებთ.

$$\int |F(\theta_{pp'})| e^{i\gamma(\theta_{pp'})} P_l(\cos \theta_{pp'}) \sin \theta_{pp'} d\theta_{pp'} = \frac{1}{ik} (e^{2i\delta_l} - 1), \quad (39,23)$$

საიდანაც ნამდვილი ნაწილების გატოლებით გვექნება

$$\int |F(\theta_{pp'})| \cos[\gamma(\theta_{pp'})] P_l(\cos \theta_{pp'}) \sin \theta_{pp'} d\theta_{pp'} = \frac{\sin 2\delta_l}{k} \quad (39,24)$$

თუ ამ გამოსახულებაში მოვახდენთ $\gamma \rightarrow \pi - \gamma$ შეცვლას, მაშინ მარცხენა მხარეში გაჩნდება მინუს ნიშანი. ტოლობის შესანარჩუნებლად საჭიროა ყველა δ_l ფაზას ნიშანი შევუცვალოთ საწინააღმდეგოთი. ამგვარად, განივეკეთის ერთი და იგივე მნიშვნელობა შეიძლება აღვწეროთ ფაზების ორი წყევით, რომლებიც ერთმანეთისაგან ნიშნით განსხვავდებიან.

დადი მნიშვნელობა აქვს იმ შემთხვევის განხილვას, როცა ნაწილაკებს შორის ერთდროულად მოქმედებს რამდენიმე პოტენციალი. ამ შემთხვევის კლასიკური მაგალითია პროტონის გაფანტვა პროტონზე, როცა გაფანტვის დროს მოქმედებს როგორც ატომგულური, ისე კულონური პოტენციალები. თუმცა, პროტონების პროტონებით გაფანტვაში კულონურ ველს დამატებითი სირთულეები შემოაქვს, სამაგიეროდ იგი იძლევა დამატებით ინფორმაციას თვით ატომგულური ურთიერთქმედების შესახებ.

ჯერ განვიხილოთ პრაქტიკულად ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როცა ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება იწერება ორი პოტენციალის ჯამით [26]

ამგვარად, ვთქვათ, სრულ ჰამილტონიანს აქვს სახე

$$H = H_0 + v_1 + v_2. \quad (40,1)$$

ლიპმან-შვინგერის განტოლებას გაფანტვის ტალღური ფუნქციისათვის ექნება შემდეგი ფორმა:

$$\psi_a^{(+)}(r) = \phi_a(r) + G_0^{(+)}(E) [v_1 + v_2] \psi_a^{(+)}(r), \quad (40,2)$$

სადაც a -მიუთითებს გასაზომ სიდიდეთა სრულ კრებულს, $\phi_a(r)$ ბრტყელი ტალღაა, ე. ი. წარმოადგენს H_0 -ოპერატორის საკუთარ ფუნქციას

$$\hat{H}_0 \phi_a = E \phi_a. \quad (40,3)$$

$\psi_a^{(+)}$ -იქნება (40,1) ჰამილტონიანის ამონახსნი, რომელიც განზღაბი ტალღის სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს. მატრიცული ელემენტი გაფანტვის T -მატრიცისა, რომელიც განსაზღვრავს გადასვლას თავისუფალ $|a\rangle$ და $|b\rangle$ მდგომარეობებს შორის, განისაზღვრება ფორმულით

$$\langle b | T^{(+)} | a \rangle = \langle \phi_b | v_1 + v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle. \quad (40,4)$$

ახლა განვიხილოთ შრედინგერის განტოლება

$$\hat{H}_1 \psi = E \psi, \quad (40,5)$$

სადაც

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0 + v_1 \quad (40,6)$$

წარმოადგენს სრულ ჰამილტონიანს, როცა ურთიერთქმედება მხოლოდ v_1 პოტენციალური ენერგიით ხდება.

ამონახსნი (40,5) განტოლებისა, რომელიც აკმაყოფილებს გაფანტვის სასაზღვრო პირობებს, იქნება

$$\psi_b^{(+)} = \phi_b + G_0^{(+)}(E) v_1 \psi_b^{(+)}. \quad (40,7)$$

ამ განტოლებიდან განესაზღვროთ ϕ_b ბრტყელი ტალღა და შევიტანოთ იგი (40,4) მატრიცულ ელემენტში; გვექნება

$$\begin{aligned} \langle b | T^{(+)}(E) | a \rangle &= \langle \psi_b^{(+)} - G_0^{(+)}(E) v_1 \psi_b^{(+)} | v_1 + v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle = \\ &= \langle \psi_b^{(+)} | v_1 + v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle - \langle G_0^{(+)}(E) v_1 \psi_b^{(+)} | v_1 + v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle; \end{aligned} \quad (40,8)$$

ამ უკანასკნელში (40,2) განტოლებიდან მოვახდინოთ შემდეგი შეცვლა:

$$(v_1 + v_2) \psi_a^{(+)} = G_b^{(+)}(E) [\psi_a^{(+)} - \Phi_a], \quad (40,9)$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $G_b^{(-)}(E) G_b^{(+)}(E) = 1$, გვექნება

$$\langle b | T^{(+)}(E) | a \rangle = \langle \varphi_b^{(-)} | v_1 + v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle - \langle v_1 \varphi_b^{(-)} | \psi_a^{(+)} - \Phi_a \rangle, \quad (40,10)$$

ან, ფრჩხილების გახსნის შემდეგ, მივიღებთ საბოლოო გამოსახულებას

$$\langle b | T^{(+)}(E) | a \rangle = \langle \varphi_b^{(-)} | v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle + \langle \varphi_b^{(-)} | v_1 | \Phi_a \rangle; \quad (40,11)$$

თუ გავიხსენებთ (32,4) განმარტებას, მაშინ დავინახავთ, რომ მეორე წევრი წარმოადგენს v_1 -პოტენციალზე გაფანტვის შესაბამის მატრიცას

$$\langle b | T_1^{(-)}(E) | a \rangle = \langle \varphi_b^{(-)} | v_1 | \Phi_a \rangle; \quad (40,12)$$

ამგვარად,

$$\langle b | T^{(+)}(E) | a \rangle = \langle \varphi_b^{(-)} | v_2 | \psi_a^{(+)} \rangle + \langle b | T_1^{(-)}(E) | a \rangle. \quad (40,13)$$

როგორც ვხედავთ, გაფანტვის სრული მატრიცა ორი წევრისაგან შედგება, ამასთან, მეორე წევრი წარმოადგენს v_1 -პოტენციალზე გაფანტვის მატრიცას, მაშინ როცა პირველ წევრს ასეთი მარტივი შინაარსი ალარა აქვს. ამ მატრიცულ ელემენტებში ტალღური ფუნქციების საშუალებით არაცხადად შედის ორივე პოტენციალი; ამასთან დაკავშირებით, ცხადია, ხელსაყრელია $\psi_a^{(+)}$ ფუნქციის წარმოადგენა $\varphi_a^{(+)}$ ფუნქციის საშუალებით. გამოვიღებთ ტოლობიდან

$$(E - \hat{H}) \psi_a = (E - H_0 - v_1) \varphi_a = (E - H_0 - v_1 - v_2) \varphi_a + v_2 \varphi_a, \quad (40,14)$$

საიდანაც

$$\psi_a^{(+)} = \varphi_a^{(+)} + G^{(+)}(E) v_2 \varphi_a^{(+)}, \quad (40,15)$$

სადაც $G^{(+)}(E)$ გრინის სრული ფუნქციაა, რომელიც შეესაბამება ორივე პოტენციალზე გაფანტვას

$$G^{(+)}(E) = (E - \hat{H} + i\varepsilon)^{-1}. \quad (40,16)$$

(40,15) გამოსახულება შეიძლება გადავწეროთ ეკვივალენტური ფორმითაც

$$\psi_a^{(+)} = \varphi_a^{(+)} + (E - \hat{H}_0 - v_1 + i\varepsilon)^{-1} v_2 \varphi_a^{(+)}. \quad (40,16')$$

თუ (40,15) ფუნქციის შევიტანთ (40,11) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\langle b | T^{(+)}(E) | a \rangle = \langle \varphi_b^{(-)} | v_1 | \Phi_a \rangle + \langle \varphi_b^{(-)} | v_2 + v_2 \frac{1}{E - H + i\varepsilon} v_2 | \varphi_a^{(+)} \rangle. \quad (40,17)$$

როგორც ვხედავთ, მეორე წევრში v_1 კვლავ შედის ჰამილტონიანის საშუალებით. როცა v_2 პოტენციალი სუსტია, მეორე წევრში შეგვიძლია მოვახდინოთ გაშლა v_2 -ის პირველი ხარისხის დატოვებით. ამ შემთხვევაში მეორე წევრი v_1 -პოტენციალზე დამოკიდებული დარჩება მხოლოდ $\varphi_a^{(\pm)}$ ფუნქციების საშუალებით, ამასთან, პირობის თანახმად, ეს ფუნქციები მოცემულია.

არანაკლებ საინტერესოა შემთხვევა, როცა ერთდროულად მოქმედებს ორი პოტენციალი და თანაც ორივეზე ცალ-ცალკე გაფანტვის T -მატრიცა ცნობილია. საჭიროა ვიპოვოთ გაფანტვის მატრიცა, რომელიც გამოხატავს გაფანტვას ერთდროულად ორივე პოტენციალზე. ამ შემთხვევაში, ამოცანის გადაწყვეტა ხელსაყრელია ოპერატორული მეთოდით.

შემოვიღოთ გრინის თავისუფალი მოძრაობის ფუნქცია $G_0(z)$ და თითოეული პორტენციალის შესაბამისი გრინის სრული ფუნქციები $G_i(z)$

$$G_0(z) = (E - H_0 \pm iz)^{-1}, \quad G_i(z) = (E - \hat{H}_0 - v_i \pm iz)^{-1}; \quad (40,18)$$

ვაეისხენოთ (34,10) და (34,20) ფორმულები:

$$G_i(z) = G_0(z) + G_i(z) v_i G_0(z), \quad (40,19)$$

$$T_i(z) = v_i + v_i G_i(z) v_i. \quad (40,20)$$

უნდა ვიპოვოთ $T(z)$ მატრიცა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალური განტოლებით:

$$T(z) = (v_1 + v_2) + (v_1 + v_2) G_0(z) T(z). \quad (40,21)$$

აღვიღია ამ განტოლების წარმოდგენა შემდეგნაირად

$$T(z) = v_1 + v_1 G_0(z) T(z) + v_2 + v_2 G_0(z) T(z); \quad (40,22)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$T'_i(z) = v_i + v_i G_0(z) T(z), \quad (40,23)$$

გვექნება

$$T(z) = T'_1(z) + T'_2(z). \quad (40,24)$$

ახლა კი საჭიროა ვიპოვოთ ის განტოლებები, რომლების ამონახსნებსაც წარმოადგენენ $T'_1(z)$ -და $T'_2(z)$ -მატრიცები.

განესაზღვროთ (40,19)-დან $G_0(z)$; გვექნება

$$G_0(z) = G_i(z) - (i_i(z) v_i G_0(z)). \quad (40,25)$$

ეს გამოსახულება შევიტანოთ (40,23)-ში; მივიღებთ

$$T'_i(z) = v_i + v_i G_i(z) T(z) - v_i G_i(z) v_i G_0(z) T(z); \quad (40,26)$$

შეორე წვერში (40,21) ფორმულიდან შევიტანოთ $T(z)$, გვექნება

$$T'_1(z) = v_1 + v_1 G_1(z) (v_1 + v_2) + v_1 G_1(z) (v_1 + v_2) G_0(z) T(z) - v_1 G_1(z) v_1 G_0(z) T(z), \quad (40,27)$$

საიდანაც

$$T'_1(z) = v_1 + v_1 G_1(z) v_1 + v_1 G_1(z) v_2 + v_1 G_1(z) v_2 G_0(z) T(z); \quad (40,28)$$

თუ ვაეისხენებთ (40,20) განტოლებას, მივიღებთ

$$T'_1(z) = T_1(z) + v_1 G_1(z) [v_2 + v_2 G_0(z) T(z)], \quad (40,29)$$

ხოლო (40,23) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$T'_1(z) = T_1(z) + v_1 G_1(z) T'_2(z), \quad (40,30)$$

სრულიად ანალოგიურად

$$T'_2(z) = T_2(z) + v_2 G_2(z) T'_1(z). \quad (40,31)$$

თანახმად (34,17) ფორმულისა,

$$v_i G_i(z) = T'_i(z) G_0(z), \quad (40,32)$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} T_1'(z) &= T_1(z) + T_1(z) G_0(z) T_2'(z) \\ T_2'(z) &= T_2(z) + T_2(z) G_0(z) T_1'(z). \end{aligned} \quad (40,33)$$

აქედან ნაპოვნი $T_1'(z)$ -და $T_2'(z)$ -მატრიცების წამი, (40,24) ფორმულის თანახმად, მოგვცემს საძიებელ $T(z)$ -მატრიცას.

ცხადია, ასევე მარტივად შეგვიძლია ვიპოვოთ განტოლებათა სისტემა $T_i'(z)$ -მატრიცებისათვის, რომლებიც მიიღება იმ შემთხვევაში, როცა საქმე გვაქვს გაფანტვასთან n რაოდენობის პოტენციალთა წამით [14]

$$V = \sum_{i=1}^n v_i(r); \quad (40,34)$$

მაშინ გაფანტვის სრული მატრიცა განსაზღვრული იქნება წამით

$$T(z) = \sum_{i=1}^n T_i'(z), \quad (40,35)$$

სადაც $T_i'(z)$ მატრიცები აკმაყოფილებენ შემდეგ სისტემას:

$$T_i''(z) = T_i(z) + \sum_{k \neq i}^n T_k(z) G_0(z) T_k''(z). \quad (40,36)$$

ამ პარაგრაფში მიღებულ ფორმულებს ჩვენ შემდგომში გამოვიყენებთ.

**ბაზანტვის მატრიცა კონკრეტული
ურთიერთქმედებებისათვის**

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით გაფანტვას კონკრეტული ურთიერთქმედებები...
სათვის, სახელდობრ, ვიპოვით გაფანტვის მატრიცის ცხად გამოხატულებებს
ორმოსა და დირაკის დელტა ფუნქციისმაგვარი პოტენციალებისათვის; როგორც
კერძო შემთხვევას, მივიღებთ ავრეთვე $T(E)$ -მატრიცას კონტაქტური ურთიერთ-
ქმედებებისათვის. ვიპოვით გაფანტვის მატრიცას ჰულტენისა და ექსპონენციალური
ორმოსათვის. ამავე თავში განვიხილავთ, ე. წ. „ეფექტური რადიუსის“ კარგად
ცნობილ და დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობის მქონე მიახლოებას; ამ მიახლოე-
ბას გამოვიყენებთ (n, p) გაფანტვისათვის მცირე ენერგიებზე.

**§ 41. ბაზანტვის $T(E)$ -მატრიცა კოტანციალური
ორმოს შემთხვევაში**

ვთქვათ, ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება გამოხატულია სფერული პო-
ტენციალური ორმოს სახით, რომლის სიღრმეა V_0 , ხოლო სიგანე — r_0 . საჭიროა
ვიპოვოთ გაფანტვის მატრიცის გამოხატულება. ამ ამოცანის ამოხსნის უშუალო
გზა ასეთი იქნება: რადგან ორმოს აქვს ცენტრალური სიმეტრია, ამიტომ ხელსაყ-
რელია გაფანტვის პარციალურ მატრიცაზე გადასვლა. ამისათვის მოვახდინოთ
გაშლა

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = 4\pi \sum_l \sum_m \langle p' | T_l(z) | p \rangle Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}'), \quad (41,1)$$

სადაც პარციალური მატრიცა აკმაყოფილებს ლიპმან-შეინგერის (35,9) განტო-
ლებას:

$$\langle p | T_l(z) | p' \rangle = \langle p | V_l | p' \rangle + 4\pi \int_0^\infty \frac{\langle p | V_l | q \rangle \langle q | T_l(z) | p \rangle q^2 dq}{E - E(q) + i\varepsilon}, \quad (41,2)$$

სადაც $E(q) = \frac{q^2 \hbar^2}{2\mu}$, ხოლო პოტენციალური ენერგიის მატრიცული ელემენტი გა-
ნისაზღვრება ფორმულით:

$$\langle p | V_l | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_l(pr) V(r) j_l(p'r) r^2 dr. \quad (41,3)$$

ორბოს შემთხვევაში ეს მატრიცული ელემენტი მიიღებს სახეს

$$\langle p | V_l | p' \rangle = -\frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^{r_0} j_l(pr) j_l(p'r) r^2 dr. \quad (41,4)$$

თუ ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ (I, 99) ფორმულას, გვექნება

$$\langle p | V_l | p' \rangle = -\left(\frac{V_0 r_0^2}{2\pi^2} \right) \frac{I_l(pp' | r_0)}{p'^2 - p^2}, \quad (41,5)$$

სადაც

$$I_l(pp' | r_0) = p j_{l-1}(pr_0) j_l(p'r_0) - p' j_{l-1}(p'r_0) j_l(pr_0). \quad (41,6)$$

ამის შემდეგ საჭიროა (41,5) გამოსახულება შევიტანოთ (41,2) განტოლებაში და ამოვხსნათ. ნაცვლად ამ გზისა, ჩვენ მიემართავთ უფრო მარტივ მეთოდს. ამისათვის ეიპოვოთ $\Omega(x)$ -მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს (32,27) განტოლებას [27]

$$(x - \hat{H}_0 - V) \Omega(x) = x - \hat{H}_0, \quad (41,7)$$

სადაც x -კომპლექსური ენერგიაა, ხოლო $T(x)$ -მატრიცა განისაზღვრება ტოლობით $T(x) = V \Omega(x)$.

გადავიდეთ (41,7) განტოლებაში კოორდინატული წარმოდგენის პარციალურ სიდიდეებზე; ამისათვის გავიხსენოთ, რომ

$$\langle r | klm \rangle = \langle r | kl \rangle \langle \bar{r} | lm \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr) Y_{lm}(\bar{r}); \quad (41,8)$$

ამასთან, ბესელის ფუნქციები ნორმირებულია პირობით

$$\int_0^\infty \langle r' | kl \rangle \langle kl | r \rangle k^2 dk = \frac{\delta(r-r')}{r^2}. \quad (41,8^1)$$

რადგან კინეტიკური ენერგიის ოპერატორს სფერულ კოორდინატებში აქვს სახე

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2} \right\}, \quad (41,9)$$

სადაც $\Delta_{\theta,\varphi}$ -ლეეანდრის ოპერატორია, ამიტომ

$$\hat{H}_0 | klm \rangle = E | klm \rangle \quad (41,10)$$

და, რამდენადაც $| klm \rangle = | kl \rangle | lm \rangle$, ამიტომ

$$\hat{H}_0 | kl \rangle = E | kl \rangle, \quad (41,11)$$

სადაც

$$\langle r' | H_0 | r \rangle = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \frac{\delta(r-r')}{r^2}. \quad (41,12)$$

თანახმად (41,11) ფორმულისა,

$$\int_0^\infty \langle r' | H_0 | r' \rangle \langle r' | kl \rangle r'^2 dr' = E \langle r | kl \rangle, \quad (41,13)$$

საილანაც (41.12) ფორმულის გათვალისწინებით გვექნება

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] \langle r | kl \rangle = 0, \quad (41.14)$$

რომელიც წარმოადგენს ბესელის სფერული ფუნქციების განტოლებას.

ახლა (41,7) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int \langle r | z - \hat{H}_0 - V | r' \rangle \langle r' | \Omega(z) | kl \rangle dr' = \langle r | z - \hat{H}_0 | kl m \rangle. \quad (41.15)$$

რადგან პოტენციალური ენერგია ცენტრალურია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\langle r' | \Omega(z) | kl \rangle = \langle r' | \Omega_l(z) | kl \rangle \langle r' | l m \rangle, \quad (41.16)$$

$$\langle r | z - \hat{H}_0 - V | r' \rangle = \sum_{LM} \langle r | z - H_{0L} - V | r' \rangle \langle r' | LM \rangle \langle r | LM \rangle, \quad (41.16')$$

ამ გამოსახულებების (41,15) განტოლებაში შეტანით საბოლოოდ მივიღებთ

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + (\zeta - U(r)) \right] \langle r | \Omega_l(z) | kl \rangle = (\zeta - k^2) \langle r | kl \rangle, \quad (41.17)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\zeta = \frac{2\mu z}{\hbar^2}, \quad U(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}. \quad (41.16)$$

თუ მოვძებნით (41,17) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს, მაშინ გაუჩანტვის $T(z) = \mathcal{V} \Omega(z)$ მატრიცის ვიპოვით შემდეგნაირად:

$$\langle k'l | T_l(z) | kl \rangle = \int_0^\infty \langle k'l | r \rangle \langle r | V | r' \rangle \langle r' | \Omega_l(z) | kl \rangle r^2 dr r'^2 dr'; \quad (41.19)$$

რამდენადაც

$$\langle r | V | r' \rangle = V(r) \frac{\delta(r-r')}{r^2}, \quad (41.19')$$

ამიტომ

$$\langle k'l | T_l(z) | kl \rangle = \int_0^\infty \langle k'l | r \rangle V(r) \langle r | \Omega_l(z) | kl \rangle r^2 dr. \quad (41.20)$$

კერძოდ, ორმოს შემთხვევაში გვექნება

$$\langle k'l | T_l(z) | kl \rangle = -V_0 \int_0^{r_0} \langle k'l | r \rangle \langle r | \Omega_l(z) | kl \rangle r^2 dr. \quad (41.21)$$

ამასთან აღვნიშნოთ, რომ $\langle k'l | T_l(z) | kl \rangle$ მატრიცა ჩვენ მიერ აღრე გამოყენებული $\langle k'l | T_l(z) | kl \rangle$ აღნიშვნისაგან განსხვავდება $\frac{1}{4\pi}$ მაშრავლით.

პოტენციალის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობის გამო (0, r_0) და $r > r_0$ არეში უნდა დავწეროთ ორი განტოლება. სახელდობრ, (41,17) განტოლებიდან გვექნება:

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + (\zeta + b^2) \right] \langle r | \Omega_l(z) | kl \rangle = (\zeta - k^2) \langle r | kl \rangle, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (41.22)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \zeta \right] (r | \Omega_l(z) | kl) = (\zeta - k^2) (r | kl), \quad (41,23)$$

სადაც

$$b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (41,24)$$

ეს განტოლებები არაერთგვაროვანია, ამიტომ მათი ზოგადი ამონახსნი (თითოეული არისათვის) წარმოდგენილი იქნება, როგორც ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნის ჯამი. ჭერ შვეისწავლათ (41,22) განტოლების ამონახსნის საკითხი. არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ტოლი იქნება

$$(r | \Omega_l(z) | kl) = A (r | kl). \quad (0 < r < r_0) \quad (41,25)$$

A -მუდმივი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ამ გამოსახულების (41,22) განტოლებაში შეტანით და ბესელის (41,14) განტოლების გათვალისწინებით. მივიღებთ

$$A = \frac{\zeta - k^2}{\zeta - k^2 + b^2}. \quad (41,26)$$

როცა $V_0 = 0$, მაშინ $A = 1$. იმავე არეში ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$B^+ (r | al)^+ + B^- (r | al)^-, \quad (41,27)$$

სადაც

$$(r | al)^\pm = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h_l^{(1,2)}(ar) \quad (41,28)$$

ჰანკელის პირველი და მეორე გვარის სფერული ფუნქციებია.

რადგან ამონახსნი სათავეში სასრული უნდა იყოს, ხოლო ასეთი თვისება აქვს მხოლოდ ბესელის სფერულ ფუნქციას, ამიტომ საჭიროა ავიღოთ $B^+ = B^- \equiv B$, ე. ი.

$$(r | \Omega_l(z) | kl) = B (r | al). \quad (41,29)$$

ამ ამონახსნის ერთგვაროვანი განტოლებაში შეტანით და კვლავ ბესელის განტოლების გათვალისწინებით გვექნება: $\zeta - a^2 + b^2 = 0$, საიდანაც

$$a^2 = \zeta + b^2 = \frac{2\mu(z + V_0)}{\hbar^2}. \quad (41,30)$$

$r > r_0$ არეში (41,23) განტოლებასაც ორი ამონახსნი ექნება. კერძოდ, არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი ტოლი იქნება

$$(r | \Omega_l(z) | kl) = (r | kl), \quad (A = 1, r > r_0) \quad (41,31)$$

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი იქნება

$$(r | \Omega_l(z) | kl) = c_1 (r | \beta l)^+ + c_2 (r | \beta l)^-. \quad r > r_0 \quad (41,32)$$

მოვითხოვთ, რომ უსასრულობაში გვექონდეს განზღადი სფერული ტალღა, მაშინ საჭიროა ავიღოთ $c_2 = 0$, ამასთან $\beta^2 = \zeta$.

ამგვარად, ზემოაღნიშნულ ორ არეში გვექნება შემდეგი ზოგადი ამონახსნები:

$$(r | \Omega_l(z) | kl) = A (r | kl) + B (r | al), \quad 0 < r < r_0 \quad (41,33)$$

$$(r | \Omega_l(z) | kl) = (r | kl) + C (r | \beta l)^+ \quad r > r_0 \quad (41,34)$$

B და C მუდმივების განსაზღვრისათვის საჭიროა ეს ამონახსნები შევყვართ $r=r_0$ წერტილზე. გვექნება:

$$A \langle r_0 | kl \rangle + B \langle r_0 | al \rangle = \langle r_0 | kl \rangle + C \langle r_0 | \beta l \rangle^+, \quad (41,35)$$

$$A \frac{\partial}{\partial r_0} \langle r_0 | kl \rangle + B \frac{\partial}{\partial r_0} \langle r_0 | al \rangle = \frac{\partial}{\partial r_0} \langle r_0 | kl \rangle + C \frac{\partial}{\partial r_0} \langle r_0 | \beta l \rangle^+. \quad (41,36)$$

ამ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ტოლი იქნება

$$\Delta_l(a\beta^+ | r_0) = \frac{2}{\pi} I_l(a\beta^+ | r_0), \quad (41,37)$$

სადაც

$$I_l(a\beta^+ | r_0) = j_l(ar_0) h_l^{(1)}(\beta r_0) - j_l(\beta r_0) h_l^{(1)}(ar_0). \quad (41,38)$$

შტრიხი აღნიშნავს გაწარმოებას r_0 -ით. ბეგელის ფუნქციის წარმოებულის (l ; 33) ფორმულის გათვალისწინებით I_l შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$I_l(a\beta^+ | r_0) = a j_{l-1}(ar_0) h_l^{(1)}(\beta r_0) - \beta h_l^{(1)}(\beta r_0) j_l(ar_0). \quad (41,39)$$

ამის შემდეგ მარტივად ვიპოვიოთ B და C კოეფიციენტებს. სახელდობრ, გვექნება

$$B = \frac{(1-A) \Gamma_l(k\beta^+ | r_0)}{\Gamma_l(a\beta^+ | r_0)}, \quad C = \frac{(1-A) \Gamma_l(ka | r_0)}{I_l(a\beta^+ | r_0)}. \quad (41,40)$$

თანახმად (41,21) და (41,33) ფორმულებისა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\langle k' l | T_l(z) | kl \rangle = -V_0 A \int_0^{r_0} \langle k' l | r \rangle \langle r | kl \rangle r^2 dr - V_0 B \int_0^{r_0} \langle k' l | r \rangle \langle r | al \rangle r^2 dr. \quad (41,41)$$

ინტეგრალების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ (E , 104) ფორმულა. მივიღებთ

$$\langle k' | T_l(z) | k \rangle = - \frac{V_0 r_0^2}{2\pi^2 \Gamma_l(a\beta^+ | r_0)} \left\{ \frac{A \Gamma_l(kk' | r_0) \Gamma_l(a\beta^+ | r_0)}{k'^2 - k^2} + \frac{(1-A) \Gamma_l(k\beta^+ | r_0) \Gamma_l(ak' | r_0)}{k'^2 - a^2} \right\}. \quad (41,42)$$

თანახმად (41,26) გამოსახულებისა, $A/1-A = \frac{1}{b^2} (\zeta - k^2)$, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება

$$\langle k' | T_l(z) | k \rangle = - \frac{V_0 r_0^2 b^2}{2\pi^2 \Gamma_l(a\beta^+ | r_0) (a^2 - k^2)} \left\{ \frac{(\zeta - k^2) \Gamma_l(kk' | r_0) \Gamma_l(a\beta^+ | r_0)}{b^2 (k'^2 - k^2)} + \frac{\Gamma_l(a\beta^+ | r_0) \Gamma_l(ak' | r_0)}{k'^2 - a^2} \right\}. \quad (41,42')$$

ამ მატრიცას პოლუსი ექნება მაშინ, როცა $\Gamma_l(a\beta^+ | r_0) = 0$, რომელიც $\beta = i\alpha$ -სათვის მოგვეცემს ორმოსათვის საკუთარი მნიშვნელობების ჩვენთვის კარგად ცნობილ (12,14) განტოლებას.

ვიპოვიოთ გაფანტვის ამპლიტუდა. ამისათვის გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0^+$, ამ დროს $z = E$ და $\beta = k$, (41,42') ფორმულაში პირველი შესაკრებო

ნული იქნება, გარდა ამისა, ენერგეტულ ზედაპირზე $k = k' = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$, გვექნება

$$T_l(k) = \frac{\hbar^2 r_0^2}{4\pi^2 \mu} \frac{\Gamma_l(kk^+|r_0) \Gamma_l(ak|r_0)}{\Gamma_l(ak^+|r_0)}. \quad (41,43)$$

თუ გამოვიყენებთ (E, 65) და (E, 91) ფორმულებს, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Gamma_l(ak^+|r_0) = \Gamma_l(ak|r_0) + i\Gamma_l(ak^0|r_0), \quad (41,44)$$

სადაც $\Gamma_l(ak^0|r_0)$ (41,39) გამოსახულებისაგან განსხვავდება იმით, რომ ჰანკელის სფერული ფუნქციები შეცვლილია ნეიმანის სფერული ფუნქციებით

$$\Gamma_l(ak^0|r_0) = a j_{l-1}(ar_0) n_l(kr_0) - kn_{l-1}(kr_0) j_l(ar_0). \quad (41,45)$$

იმევე (E, 65) და (E, 91) ფორმულების გამოყენებით

$$\Gamma_l(kk^+|r_0) = -\frac{i}{kr_0^2}. \quad (41,46)$$

$T_l(k)$ -მატრიცისათვის შედეგად მივიღებთ

$$T_l(k) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu k} \frac{i\Gamma_l(ak|r_0)}{\Gamma_l(ak|r_0) + i\Gamma_l(ak^0|r_0)}; \quad (41,47)$$

ამასთან, გავიხსენოთ, რომ $a^2 = k^2 + b^2$.

აღსანიშნავია, რომ გაფანტვის მატრიცის გამომხატულებას ენერგეტულ ზედაპირზე ადვილად მივიღებთ (35,12') ფორმულის დახმარებით, რომელსაც განხილულ შემთხვევაში ექნება სახე

$$T_l(k) = -\frac{V_0}{2\pi^2} \int_0^{r_0} r^2 j_l(kr) \frac{\chi_l(kr)}{kr} dr, \quad (41,48)$$

სადაც $\chi_l(kr)$ ფუნქციის ნაცვლად უნდა შევიტანოთ (12,40) გამოსახულება. $T_l(k)$ -მატრიცის დახმარებით ადვილად ვიპოვით $S_l(k)$ მატრიცასაც და გაფანტვის პარციალურ ამპლიტუდასაც. თანახმად (23,16) და (35,15) ფორმულებისა,

$$\frac{S_l(k) - 1}{2i} = kF_l(k) = \frac{i\Gamma_l(ak|r_0)}{\Gamma_l(ak|r_0) + i\Gamma_l(ak^0|r_0)}. \quad (41,49)$$

ინტეგრალური განივკვეთისათვის კი (35,21) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\Gamma_l^2(ak|r_0)}{\Gamma_l^2(ak|r_0) + \Gamma_l^2(ak^0|r_0)}. \quad (41,50)$$

რადგან (23,28) ფორმულის მიხედვით $kF_l(k) = (\text{ctg } \delta_l - i)^{-1}$, ამიტომ (41,49) ფორმულის დახმარებით მივიღებთ

$$\text{tg } \delta_l(k) = \frac{\Gamma_l(ak|r_0)}{\Gamma_l(ak^0|r_0)}. \quad (41,51)$$

ან, თუ გავიხსენებთ გაფანტვის $K_l(k)$ -მატრიცის (37,20) განმარტებას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$K_l(k) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu k} \frac{\Gamma_l(ak|r_0)}{\Gamma_l(ak^0|r_0)}. \quad (41,52)$$

მეორე მხრივ (12,58) ფორმულით ნაპოვნი გვექონდა $\xi \delta_i(k)$, ამიტომ $K_i(k)$ -მატრიცის საპოვნელად საკმარისი იყო მისი $\frac{1}{\nu(k)}$ -ზე გამრავლება. ცხადია, შედეგი დაემთხვევა (41,52) ფორმულას, რადგან (41,51) და (12,58) გამოსახულებანი ერთმანეთის იდენტურია.

შენიშნათ, რომ, როცა ინტერესებთ მოცემული ფაზით პოტენციალური ენერჯიის პარამეტრების აღდგენა, იყენებენ (41,51) ფორმულას.

ვიპოვოთ $T_i(k)$ -მატრიცის ყოფაქცევა მცირე ენერჯიებზე. ვიგულისხმობთ, რომ $kr_0 \ll 1$ და ვიპოვოთ $T_i'(ak|r_0)$ და $T_i'(ak^0|r_0)$ სიდიდეების ასიმპტოტური მნიშვნელობანი. ამისათვის გამოვიყენოთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების ასიმპტოტური (E, 47), (E, 58) ფორმულები და აგრეთვე რეკურენტული (E, 35) ფორმულა, გვექნება:

$$T_i'(ak|r_0) = -\frac{(kr_0)'}{(2l+1)!} b_{j_{l+1}}(br_0), \quad (41,53)$$

$$T_i'(ak^0|r_0) = -\frac{(2l-1)!!}{(kr_0)^{l+1}} b_{j_{l-1}}(br_0). \quad (41,54)$$

ამ ფორმულების მიღებისას გათვალისწინებულია, რომ $k \rightarrow 0$ შემთხვევაში $a \rightarrow b$. თანახმად (41,47) ფორმულისა, $kr_0 \ll 1$ -სათვის ექვეყნება

$$T_i'(k) = -\frac{\hbar^3}{4\pi^2\mu} (kr_0)^{2l} r_0 z_l(br_0), \quad (kr_0 \ll 1) \quad (41,55)$$

სადაც $z_l(br_0)$ ენერჯიაზე დამოუკიდებელი სიდიდეა და განისაზღვრება ფორმულით

$$z_l(br_0) = \frac{1}{(2l-1)!! (2l+1)!!} \frac{j_{l+1}(br_0)}{j_{l-1}(br_0)}. \quad (41,56)$$

$S_i(k)$ -მატრიცისათვის კი გვექნება შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$\frac{S_i(k)-1}{2i} = (kr_0)^{2l+1} z_l(br_0). \quad (kr_0 \ll 1) \quad (41,57)$$

დაწვეროთ $K_i(k)$ -მატრიცის გამოსახულებაც მცირე ენერჯიებზე. (41,52) ფორმულის მიხედვით $K_i(k)$ -მატრიცის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დაემთხვევა $T_i(k)$ -მატრიცის ასიმპტოტურ გამოსახულებას

$$K_i(k) = -\frac{\hbar^3}{4\pi^2\mu} (kr_0)^{2l} r_0 z_l(br_0); \quad (kr_0 \ll 1) \quad (41,58)$$

ხოლო გაფანტვის ფაზა, თანახმად (41,51) ფორმულისა, მცირე ენერჯიებზე განსაზღვრული იქნება შემდეგნაირად:

$$\xi \delta_i(k) = (kr_0)^{2l+1} z_l(br_0). \quad (41,59)$$

ასევე ადვილად ვიპოვოთ ინტეგრალურ განიკვევთს $kr_0 \ll 1$ ზღვარში. ამისათვის გამოვიყენოთ (41,50) ფორმულა და მასში შევიტანოთ $T_i'(ak|r_0)$ და $T_i'(ak^0|r_0)$ სიდიდეების ასიმპტოტური მნიშვნელობანი (41,53) და (41,54) ფორმულებიდან. მივიღებთ

$$\sigma(k) = 4\pi r_0^3 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (kr_0)^{4l} z_l^2(br_0); \quad (kr_0 \ll 1) \quad (41,60)$$

როცა $k \rightarrow 0$, მაშინ გაფანტვაში მნიშვნელოვანი იქნება მხოლოდ $l=0$ მომენტი, ამიტომ გვექნება¹

$$\sigma(0) = 4\pi a_0^2, \quad (k=0) \quad (41,61)$$

სადაც a_0 -არის გაფანტვის სიგრძე. ცხადია,

$$|a_0| = r_0 z_0(b r_0); \quad (41,62)$$

თუ გავიხსენებთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების მნიშვნელობას $l=0$ -სთვის, (41,51) ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ

$$\text{tg } \delta = \frac{k \text{tg } a r_0 - a \text{tg } k r_0}{k \text{ctg } a r_0 \text{tg } k r_0 + a}. \quad (41,63)$$

როცა $k \rightarrow 0$, ამ გამოსახულებიდან, ცხადია, $\delta(k) \rightarrow 0$. (41,63) ფორმულიდან განვსაზღვროთ $k \text{ctg } \delta(k)$ და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $k \rightarrow 0$ და გამოვიყენოთ გაფანტვის სიგრძის განმარტება; გვექნება

$$\lim_{k \rightarrow 0} (k \text{ctg } \delta) = -\frac{1}{a_0} = \frac{b_0}{\text{tg } b r_0 - b r_0}, \quad (41,64)$$

საიდანაც

$$a_0 = r_0 \left(1 - \frac{\text{tg } b r_0}{b r_0} \right), \quad (41,65)$$

რაც ემთხვევა (41,62) გამოსახულებას.

გაფანტვის სიგრძე მეტად მნიშვნელოვანი სიდიდეა მცირე ენერგიებზე გაფანტვის შესწავლის დროს, ამიტომ მიზანშეწონილია მისი თვისებების დეტალური განხილვა პოტენციალური ორმოს მაგალითზე. როცა პოტენციალური ენერგიის სიღრმე $V_0 \rightarrow 0$, ე. ი. $b \rightarrow 0$, მაშინ (41,65) ფორმულის მიხედვით გაფანტვის სიგრძეც მისიწრაფვის ნულისაკენ, ასევე ნულის ტოლი იქნება ფაზაც $k=0$ მნიშვნელობისათვის. დაუშვათ, $V_0 \neq 0$ და $b r_0$ იზრდება 0-დან $\frac{\pi}{2}$ -მდე, ე. ი.

$0 < b r_0 < \frac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ორმოში ენერგეტული დონე არა გვაქვს. (41,65) ფორმულიდან ნათელია, რომ გაფანტვის სიგრძე მოთავებული იქნება ინტერვალში: $-\infty \leq a_0 \leq 0$, ე. ი. იგი უარყოფითია. როცა $b r_0 = \frac{\pi}{2}$, ე. ი.

როცა ორმოში გვაქვს ზუსტად ერთი ენერგეტული დონე, მაშინ (41,65) ფორმულიდან გვექნება, რომ $a_0 = \pm \infty$. ამ შემთხვევაში ნულოვან ენერგიაზე, თანახმად (41,61) ფორმულისა, ინტეგრალური განიკვეთი უსასრულობის ტოლია. როგორც ამბობენ, გაფანტვას აქვს რეზონანსული ხასიათი. ამ დროს გაფანტვის ფაზა $\delta(0) = \frac{\pi}{2}$. $b r_0$ -ის შემდგომი ზრდით $3/2\pi$ -მდე ორმოში კვლავ ერთი დონე გვექ-

ნება. $\text{tg } b r_0$ სიდიდე $\frac{\pi}{2}$ -დან π -მდე უარყოფითია, ამიტომ, სანამ $\text{tg } b r_0$ გაუტოლდება $b r_0$ -ს, ე. ი. სანამ $\text{tg } b r_0 = b r_0 \equiv \gamma$, გაფანტვის სიგრძე დადებითია და იგი მოთავებულია ინტერვალში: $0 < a_0 < \infty$. ხოლო როცა $\gamma < b r_0 < 3/2\pi$, მაშინ

¹ ამ პარაგრაფში გაფანტვის სიგრძე a_0 -ით აღვნიშნეთ $a = |k^2 + b^2|^{-1/2}$ სიდიდისაგან განსხვავების მიზნით.

— $\infty < a_0 < 0$, ე. ი. გაფანტვის სიგრძე იქნება უარყოფითი. ამ შემთხვევაში $\delta(0) \simeq \pi$. როცა $kr_0 = 3/2\pi$, მაშინ ორმოში მეორე დონეც გაჩნდება. თანახმად (41,65) ფორმულისა, გაფანტვის სიგრძე $a_0 = \pm \infty$, განივკვეთს კვლავ უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობა ექნება, ხოლო გაფანტვის ფაზა ნულოვან ენერგიაზე ტოლი იქნება $\delta(0) = 3\pi/2$ და ა. შ. როგორც ვხედავთ, s -მდგომარეობაში ორმოში ენერგეტული დონის გაჩენა არსებით გავლენას ახდენს გაფანტვის სიგრძის თვისებებზე. სანამ ორმოში დონე არა გვაქვს, გაფანტვის ფაზა იზრდება და გაფანტვის სიგრძე უარყოფითია $a_0 < 0$. ორმოში პირველი ენერგეტული დონის წარმოქმნასთან ერთად გაფანტვის სიგრძე უსასრულოდ დიდი ხდება. პოტენციალური ორმოს სიღრმის შემდგომი გაზრდით, სანამ მეორე ენერგეტული დონე გაჩნდებოდეს, გაფანტვის სიგრძე ნულზე გაივლის და ნიშანს იცვლის. ყოველი ბმული მდგომარეობის ახლოს a_0 დიდი ხდება, ხოლო ახალი დონის გაჩენისას იგი უსასრულობას უტოლდება.

ახლა განვიხილოთ გაფანტვის მატრიცის ყოფაქცევა დიდი ენერგიებისათვის. ვიგულისხმობთ, რომ $kr_0 \rightarrow \infty$ ($kr_0 \gg br_0$), მაშინ ადვილად ვიპოვით $\Gamma_1(ak|r_0)$ და $\Gamma_1(ak^0|r_0)$ გამოსახულებების ზღვარს დიდი არგუმენტების ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების გამოხატულებების გამოყენებით. გვექნება:

$$\Gamma_1(ak|r_0) = \left(\frac{b}{2kr_0}\right)^2 \frac{\sin 2kr_0}{k}, \quad 2kr_0 \gg \pi \quad (41,66)$$

$$\Gamma_1(ak^0|r_0) = -kW[j_1(kr_0), n_1(kr_0)] = -\frac{1}{kr_0^2}. \quad (41,67)$$

მაშასადამე, (41,51) ფორმულის თანახმად,

$$\operatorname{tg} \delta_l(k) = -\left(\frac{b}{2k}\right)^2 \sin 2kr_0; \quad 2kr_0 \gg \pi \quad (41,68)$$

საიდანაც ნათელია, რომ პოტენციალური ორმოს შემთხვევაში

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \delta_l(k) = 0. \quad (41,69)$$

ესე იგი გაფანტვის ფაზა უსასრულო ენერგიებისათვის ნულის ტოლია

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta_l(k) = 0. \quad (41,70)$$

ადვილი დასაანახია, რომ ზღვარში დიდი ენერგიებისათვის როგორც გაფანტვის $T_l(E)$ -ის, ისე $K_l(E)$ -მატრიცა ნულისაკენ მიისწრაფვის.

§ 42. გაფანტვის მატრიცა უაუღწევადი პოტენციალური სფეროსათვის

განვიხილოთ შეუღწევადი პოტენციალური სფერო r_0 რადიუსით. გაფანტვის პარციალური მატრიცა განსაზღვრული იქნება (41,42') ფორმულით, სადაც საჭიროა ავიღოთ ზღვარი $V_0 \rightarrow \infty$. ჩვენ დავკმაყოფილებით გაფანტვის მატრიცის მნიშვნელობით ენერგეტულ ზედაპირზე, ამიტომ გამოვალთ (12,58) ფორმულიდან, რომლის ძალით გაუმჭირავლე პოტენციალური სფეროსათვის

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}, \quad (42,1)$$

სადაც $j_l(kr_0)$ და $n_l(kr_0)$ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციებია. ახლა ვიპოვოთ K_l -მატრიცა. (37,20) ფორმულის გამოყენებით შეუღწევად პოტენციალურ სფეროზე გაფანტვისათვის გვექნება

$$K_l(k) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu k} \frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}. \quad (42,2)$$

რაც შეეხება გაფანტვის T_l -მატრიცას, მას ადვილად ვიპოვიან (37,18) ფორმულის გამოყენებით. (42,2) გამოსახულების (37,18) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ

$$T_l(k) = -i \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu k} \frac{j_l(kr_0)}{h_l^{(1)}(kr_0)}, \quad (42,3)$$

სადაც $h_l^{(1)}(kr_0)$ -ჰანკელის სფერული ფუნქციაა.

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვიან $S_l(k)$ -მატრიცასაც; მართლაც, თანახმად (37,19) გამოხატულებისა, გვექნება

$$S_l(k) = -\frac{h_l^{(2)}(kr_0)}{h_l^{(1)}(kr_0)}; \quad (42,4)$$

ხოლო (37,22) ფორმულის შედეგად ინტეგრალური განიკვეთისათვის შეგვიძლია დავწერათ

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{j_l^2(kr_0)}{j_l^2(kr_0) + n_l^2(kr_0)}, \quad (42,5)$$

რომელსაც მცირე ენერგიებზე ექნება შემდეგი ასიმპტოტური სახე:

$$\sigma(k) = 4\pi r_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{[(2l+1)!!(2l-1)!!]^2} (kr_0)^{4l}. \quad (kr_0 \ll 1) \quad (42,6)$$

როცა $k \rightarrow 0$, ინტეგრალური განიკვეთი განსხვავდება ნულისაგან იმ შემთხვევაში, თუ ჯამში $l=0$; ამგვარად მივიღებთ

$$\sigma = 4\pi r_0^2, \quad (42,7)$$

რაც ოთხჯერ მეტია სფეროს გეომეტრიულ განიკვეთზე. ეს არ უნდა გაგვიკვირდეს, რადგან $k \rightarrow 0$ შეესაბამება დიდი ტალღის სიგრძეს, რომლის დროსაც გეომეტრიული ოპტიკის მიახლოება არ გამოადგება და ადგილი აქვს წმინდა კვანტურ ეფექტებს. თანახმად (42,1) ფორმულისა, მცირე ენერგიებზე გაფანტვის ფაზა განისაზღვრება ფორმულით

$$\text{tg } \delta_l(k) = -\frac{(kr_0)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}. \quad (42,8)$$

ასევე შეგვიძლია ვიპოვოთ ინტეგრალური განიკვეთის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი ენერგიებისათვის, ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვისარგებლოთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების (E,49) და (E,59) ასიმპტოტური მნიშვნელობებით. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \left(kr_0 - \frac{l\pi}{2} \right); \quad (kr_0 \gg 1) \quad (42,9)$$

დიდი kr_0 -სათვის (42,1) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\operatorname{tg} \delta_l = - \operatorname{tg} \left(kr_0 - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (42,10)$$

ე. ი. გაფანტვის ფაზა განისაზღვრება ფორმულით

$$\delta_l = -kr_0 + \frac{l\pi}{2}; \quad (42,11)$$

კერძოდ, $l=0$ -სათვის

$$\delta_0(k) = -kr_0. \quad (42,12)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ, როცა $k \rightarrow 0$, მაშინ $\delta_l \rightarrow 0$, ხოლო როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ ფაზაც უსასრულოდ იზრდება.

ვიპოვოთ გაფანტვის სიგრძე $l=0$ მდგომარეობისათვის. განმარტებით

$$\lim_{k \rightarrow 0} [k \operatorname{ctg} \delta_0(k)] = -\frac{1}{a} \quad (42,13)$$

გავითვალისწინოთ (42,8) ფორმულა $l=0$ -სათვის, გვექნება

$$a = r_0. \quad (42,14)$$

აღსანიშნავია, რომ $a > 0$ და იგი სფეროს რადიუსის ტოლია. ვიცით, რომ განზიდვის პოტენციალების შემთხვევაში მართლაც $a > 0$.

ცხადია, მცირე ენერგიებზე K_l -მატრიცას ექნება გამოსახულება

$$K_l(k) = (kr_0)^{2l} \frac{\hbar^2 r_0}{4\pi^2 \mu (2l+1)!! (2l-1)!!}; \quad (kr_0 \ll 1) \quad (42,15)$$

დიდი ენერგიებისათვის კი მივიღებთ

$$K_l(k) = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu k} \operatorname{tg} \left(kr_0 - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (kr_0 \gg 1) \quad (42,16)$$

რაც შეეხება $T_l(k)$ -მატრიცას, მისი ასიმპტოტური სახე მცირე ენერგიებზე ზუსტად ისეთი იქნება, რაც $K_l(k)$ -სი, ე. ი. განისაზღვრება (42,15) ფორმულით. ასიმპტოტური მნიშვნელობებისათვის დიდ ენერგიებზე, თანახმად (E, 49) და (E, 69) ფორმულებისა, გვექნება:

$$T_l(k) = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu k} e^{-i(kr_0 - \frac{l\pi}{2})} \sin \left(kr_0 - \frac{l\pi}{2} \right); \quad (kr_0 \gg 1) \quad (42,17)$$

თუ გავიხსენებთ პანკელის ფუნქციების ასიმპტოტურ ფორმულებს მცირე არგუმენტისათვის, (42,4) განმარტებიდან მივიღებთ $S_l(k) \simeq 1$, ხოლო დიდი ენერგიების დროს (E, 69) და (E, 70) ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$S_l(k) = e^{-2i \left(kr_0 - \frac{l\pi}{2} \right)}, \quad (42,18)$$

საიდანაც კვლავ ვღებულობთ ფაზის (42,11) ფორმულას.

§ 43. გაფანტვა ღირაკის დელტა ფუნქციისგამავარი
პოტენციალით

განვიხილოთ გაფანტვის ამოცანა ერთ მეტად სპეციალურ შემთხვევაში, როცა ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება განისაზღვრება შემდეგი პოტენციალური ენერგიით:

$$V(r) = -V_0 \frac{\delta(r-r_c)}{r^2}. \quad (43,1)$$

ეს პოტენციალი წარმოადგენს $\delta(r-r_c)$ ფუნქციის რადიალურ ნაწილს. V_0 -მულ-
მივი სიდიდე ფორმალურად შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პოტენციალური
ენერგიის სიღრმე. ადვილი მისახვედრია, რომ მისი განზომილება ენერგიის განზომ-
მილებას არ ემთხვევა¹. განხილული პოტენციალისათვის დამახასიათებელია, რომ
ერთი ნაწილაკი მერარესთან მხოლოდ მაშინ ურთიერთქმედებს, როცა ეს უკანას-
კნელი იმყოფება r_c -რადიუსის სფეროზე. ასეთი პოტენციალისათვის ძნელია რაი-
მე ფიზიკური შინაარსის მიცემა, მაგრამ იგი მთელ რივ ფიზიკურ ასპექტებს შეი-
ცავს, ამიტომ მისი საშუალებით საინტერესო დასკვნების გაკეთება შეიძლება. ღი-
რაკის დელტა ფუნქციისგამავარი პოტენციალი პირველად ფერმიმ გამოიყენა ნუ-
კლონების გაფანტვის აღსაწერად მცირე ენერგიებზე.

ვიპოვოთ გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა. ცენტრალური ურთიერთქმედებების
შემთხვევაში ეს მატრიცა აკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებას

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = \langle p | V_l | p' \rangle + 4\pi \int_0^\infty \frac{\langle p | V_l | q \rangle \langle q | T_l(E) | p' \rangle q^2 dq}{E - E(q) + i\epsilon}, \quad (43,2)$$

სადაც $E(q) = \frac{1}{2\mu} q^2 \hbar^2$, ხოლო $\langle p | V_l | p' \rangle$ მატრიცული ელემენტი განისაზღვრება
ფორმულით:

$$\langle p | V_l | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_l(pr) V(r) j_l(p'r) r^2 dr. \quad (43,3)$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ პოტენციალის მნიშვნელობას, (43,1) ფორმულ-
ლიდან მივიღებთ:

$$\langle p | V_l | p' \rangle = -\frac{V_0}{2\pi^2} j_l(pr_c) j_l(p'r_c). \quad (43,4)$$

როგორც ვხედავთ, მოხდა მატრიცული ელემენტის ფაქტორიზაცია p და p' ცვლა-
ლების ბესელის სფერულ ფუნქციებად. ამ ფაქტორიზაციის წყალობით (43,2)
ინტეგრალური განტოლება ადვილად ამოიხსნება. მართლაც, (43,4) გამოსახულე-
ბა შევიტანოთ (43,2) განტოლებაში; მივიღებთ

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = -\frac{V_0}{2\pi^2} j_l(pr_c) j_l(p'r_c) \tau_l(p'), \quad (43,5)$$

¹ ცხადია, სინამდვილეში პოტენციალის „სიღრმე“ იქნება $V_0 = \frac{V_0}{r_c^2}$, რომელსაც ენერგიის
განზომილება აქვს.

სადაც

$$\tau_l(p') = 1 + \frac{4\pi}{j_l(p'r_c)} \int_0^{\infty} \frac{q^2 j_l(qr_c) (q | T_l(E) | p') dq}{E - E(q) + i\epsilon} \quad (43,6)$$

ახლა, თუ ამ უკანასკნელში (43,5) ფორმულიდან შევიტანთ $(p | T_l(E) | p')$ მატრიცას, განვსაზღვრავთ $\tau_l(p')$ გამოსახულებას; კერძოდ გვექნება

$$\tau_l(p') = 1 - \frac{4\pi V_0}{2\pi^2} \tau_l \int_0^{\infty} \frac{q^2 j_l^2(qr_c) dq}{E - E(q) + i\epsilon}, \quad (43,7)$$

საიდანაც

$$\tau_l^{-1}(E) = 1 + \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 j_l^2(qr_c) dq}{E - E(q) + i\epsilon}. \quad (43,8)$$

როგორც ვხედავთ, τ_l მუდმივი მხოლოდ ენერგიაზე დამოკიდებული.

ამგვარად, ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = - \frac{V_0}{2\pi^2} j_l(pr_c) j_l(p'r_c) \tau_l(E), \quad (43,9)$$

რომელიც (43,4) გამოსახულების ძალით ასეც გადაიწერება:

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = \tau_l(E) \langle p | V_l | p' \rangle; \quad (43,10)$$

მაშასადამე, განხილული პოტენციალისათვის გაფანტვის მატრიცა ტოლია ბორნის მატრიცული ელემენტისა გამრავლებული $\tau_l(E)$ -მუდმივზე. შევნიშნოთ, რომ ნაცვლად აქ მოყვანილი ხელოვნური გზისა (43,2), ინტეგრალური განტოლება გადაგვარებული (43,4) გულით აღვიღად ამოიხსნება ფრედპოლმის მეთოდითაც.

გაფანტვის $T_l(E)$ -მატრიცის ცხადი გამოსახულების საპოვნელად გამოვთვალოთ (43,8) ფორმულაში შემავალი ინტეგრალი. $\tau_l(E)$ -გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\tau_l^{-1}(E) = 1 + b^2 A_l(kr_c), \quad (43,11)$$

სადაც

$$A_l(kr_c) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 j_l^2(qr_c) dq}{k^2 - q^2 + i\epsilon}, \quad (43,12)$$

ხოლო

$$b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (43,13)$$

გავითვალისწინოთ, რომ $j_l^2(qr_c)$ ლუწი ფუნქციაა და $j_l(qr_c)$ გამოვხატოთ ჰანკელის ფუნქციებით. მაშინ $A_l(kr_c)$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ კონტურული ინტეგრალებით \mathcal{E} -კომპლექსურ სიბრტყეზე

$$A_l(kr_c) = - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{C_1} \frac{z^2 j_l(zr_c) h_l^{(1)}(zr_c) dz}{[z - (k + i\epsilon)][z + (k + i\epsilon)]} + \int_{C_2} \frac{z^2 j_l(zr_c) h_l^{(2)}(zr_c) dz}{[z - (k + i\epsilon)][z + (k + i\epsilon)]} \right\}, \quad (43,14)$$

ამასთან, C_1 -კონტური გარს უკლის $z = k + i\varepsilon$ პოლუსს ზედა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო C_2 გარს უკლის $z = -(k + i\varepsilon)$ პოლუსს ქვედა ნახევარსიბრტყეში. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ზღვარში, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, ეს ინტეგრალი ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$A_1(kr_c) = -ik j_1(kr_c) h_1^{(1)}(kr_c), \quad (43,15)$$

რომელიც შემდეგი სახითაც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$A_1(kr_c) = k j_1(kr_c) n_1(kr_c) - ik j_1^*(kr_c); \quad (43,16)$$

მაშასადამე, გაფანტვის $T_l(E)$ -მატრიცას ექნება ასეთი სახე:

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = - \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \frac{j_l(pr_c) j_l(p'r_c)}{b^{-2} - ik j_l(kr_c) h_l^{(1)}(kr_c)}. \quad (43,17)$$

ამის შემდეგ ადვილია გაფანტვის პარციალური ამპლიტუდის პოვნა. როგორც ვიცით, იგი $T_l(E)$ -მატრიცასთან შემდეგნაირადაა დაკავშირებული:

$$F_l(k) = - \frac{4\pi^2 \mu}{\hbar^2} \langle k | T_l(E) | k \rangle; \quad \left(p^2 = p'^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \right). \quad (43,18)$$

მაშასადამე, (43,17) და (43,16) ფორმულების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$F_l(k) = \frac{j_l^*(kr_c)}{b_l^{-2} + k j_l(kr_c) n_l(kr_c) - ik j_l^*(kr_c)}, \quad (43,19)$$

სადაც $n_l(kr_c)$ ნეიმანის სფერული ფუნქციაა. რადგან ვიპოვეთ $F_l(k)$, ამიტომ ადვილია გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცის მოძებნაც ენერგეტულ ზედაპირზე.

თუ გავიხსენებთ, რომ ამპლიტუდა ფაზასთან დაკავშირებულია ფორმულით $F_l^{-1}(k) = k \operatorname{ctg} \delta_l - ik$, მაშინ მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta_l = \frac{1}{b_l^2 j_l^*(kr_c)} + k \frac{n_l(kr_c)}{j_l(kr_c)}. \quad (43,20)$$

როცა $V_0 \rightarrow \infty$, მაშინ გაფანტვის ფაზისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$k \operatorname{ctg} \delta_l = k \frac{n_l(kr_c)}{j_l(kr_c)}. \quad (43,21)$$

შეგნიშნოთ, რომ ეს გამოსახულება ემთხვევა გაუმჭვირვალე პოტენციალური სფეროს სათანადო ფორმულას. როცა $l=0$, მაშინ (43,21)-დან მივიღებთ

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = - \operatorname{ctg} kr_c, \quad (43,22)$$

საიდანაც გაფანტვის s ფაზისათვის გვექნება

$$\delta_0 = -kr_c, \quad (43,23)$$

ხოლო გაფანტვის $S_0(k)$ -მატრიცა ტოლი იქნება

$$S_0(k) = e^{-2ikr_c}. \quad (43,24)$$

მცირე ენერგიებზე, როდესაც შესრულებულია პირობა $kr_c \ll 1$, მივიღებთ

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi r_c^2; \quad (kr_c \ll 1) \quad (43,25)$$

ე. ი. ინტეგრალური განვიკვეთი ოთხჯერ წეტია გეომეტრიულ განიკვეთზე. როცა $kr_c \rightarrow 0$, ის იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს დაცემულ ნაწილაკთა დიდი ტალღის სიგრძეებთან, ამიტომ ეფექტი წმინდა კვანტურია და იგი არ შეიძლება განვიხილოთ გეომეტრიული ოპტიკის მიხსლოებაში.

ხელსაყრელია $\tau_1^{-1}(E)$ გამოსახულებას მივცეთ სხვა სახეც. კერძოდ მასში შემავალი ინტეგრალი გამოვხატოთ მთავარი მნიშვნელობით. გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\frac{1}{k^2 - q^2 + i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{k^2 - q^2} - i\pi \delta(k^2 - q^2), \quad (43,26)$$

სადაც \mathcal{P} აღნიშნავს მთავარ მნიშვნელობას. რადგან

$$\delta(k^2 - q^2) = \frac{1}{2k} [\delta(k - q) + \delta(k + q)] \quad (43,27)$$

და $j_l(-z) = (-1)^l j_l(z)$, ამიტომ გვექნება

$$\tau_1^{-1}(J_c) = 1 + b^2 \{ I_1(k) - ikj_l^*(kr_c) \}, \quad (43,28)$$

სადაც

$$I_1(k) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{j_l^*(qr_c) q^2 dq}{k^2 - q^2}; \quad (43,29)$$

მაშასადამე, (43,18) ფორმულის შედეგად პარციალური ამპლიტუდისათვის გვექნება

$$F_l(k) = \frac{j_l^*(kr_c)}{b^{-2} + I_1(k) - ikj_l^*(kr_c)}. \quad (43,30)$$

ვაფანტვის ფაზა კი გამოითვლება ფორმულით

$$k \operatorname{ctg} \delta_l(k) = \frac{1}{j_l^*(kr_c)} \left\{ \frac{1}{b^2} + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{j_l^*(qr_c) q^2 dq}{k^2 - q^2} \right\}. \quad (43,31)$$

ცხადია, ინტეგრალი მთავარი მნიშვნელობით, (43,16) ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება

$$I_1(k) = kj_l(kr_c) n_l(kr_c). \quad (43,32)$$

განვიხილოთ ბმული მდგომარეობების საკითხი. ამისათვის, როგორც ვიცით, საჭიროა ვიპოვოთ ვაფანტვის მატრიცის პოლუსები k -კომპლექსური სიბრტყის ვითარსი ღერძის დადებით ნაწილში. მაშასადამე, (43,9) ფორმულის მიხედვით, ბმული მდგომარეობის ენერგია $E = -\xi < 0$ განისაზღვრება გამოსახულებით

$$1 - \frac{2V_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{j_l^*(qr_c) q^2 dq}{\xi + E(q)} = 0. \quad (43,33)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_l(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 j_l^*(qr_c) dq}{\alpha^2 + q^2}, \quad (43,34)$$

$$\alpha^2 = \frac{2\mu_0}{h^2}. \quad (43,35)$$

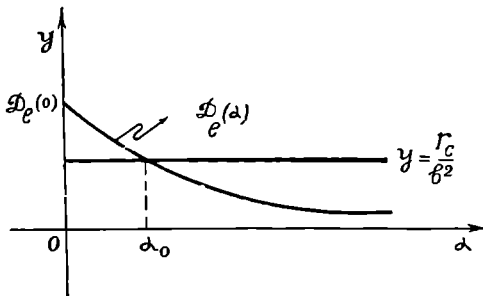
მაშინ ბმის ენერგია განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$\frac{1}{b^2} = D_l(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 j_l^2(qr_c) dq}{\alpha^2 + q^2}. \quad (43,36)$$

რადგან $D_l(\alpha) \geq 0$, ამიტომ ბმული მდგომარეობა გვექნება მხოლოდ $V_0 > 0$ დროს, ე. ი. მიზიდვის შემთხვევაში.

გამოვარკვევით როდის ექნება (43,36) განტოლებას ამოხსნა. $D_l(\alpha)$ სიდიდე α პარამეტრის კლებადი ფუნქციაა, მას მაქსიმუმი აქვს სათავეში, ამასთან, მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია

$$D_l(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_l^2(qr_c) dq = \frac{2}{\pi r_c} \int_0^{\infty} j_l^2(x) dx. \quad (43,37)$$



ნახ. 8.

როცა $\alpha \rightarrow \infty$, მაშინ $D_l(\infty) \rightarrow 0$, ამიტომ, თუ $y < \alpha$ სისტემაში დაეხაზავთ $y = D_l(\alpha)$ მრუდს და $y = \frac{r_c}{b^2}$ სწორს, დაეინახეთ, რომ მათ გადაკვეთას ადგილი ექნება მაშინ, როცა შესრულდება პირობა

$$\frac{r_c}{b^2} \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_l^2(x) dx. \quad (43,38)$$

ნაშთა თეორიის გამოყენებით ადვილად ამოგხსნით (43,36) გამოსახულებაში შემავალ ინტეგრალსაც, სრულიად ანალოგიურად იმისა, რაც გვექონდა $A_l(kr_c)$ ინტეგრალის ამოხსნის დროს, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$D_l(\alpha) = -\alpha j_l(i\alpha r_c) h_l^{(1)'}(i\alpha r_c). \quad (43,39)$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ (E,15) და (E,79) ფორმულებს, მივიღებთ

$$D_l(\alpha) = \frac{1}{r_c} K_{l+1/2}(\alpha r_c) I_{l+1/2}(\alpha r_c), \quad (43,40)$$

სადაც მოდიფიცირებული ბესელის ფუნქციები განისაზღვრებიან (E,18) და (E,19) ფორმულებით.

ამგვარად, საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{r_c}{b^2} = K_{l+1/2}(\alpha r_c) I_{l+1/2}(\alpha r_c). \quad (43,41)$$

ცხადია, იმავე განტოლებას მივიღებდით (43,11) გამოსახულების ნულთან ვატოლების შედეგად $k = i\alpha$ მნიშვნელობებისათვის.

საკუთარი მნიშვნელობების (43,41) განტოლება ტრანსცენდენტული განტოლებაა, მისი ამოხსნა შესაძლებელია გრაფიკულად ან სხვა რომელიმე მიახლოებითი მეთოდით. როგორც ვხედავთ, (43,1) პოტენციალით ურთიერთქმედების შემთხვევაში ორი სხეულის ამოცანას მხოლოდ ერთი ენერგეტული დონე აქვს.

განვიხილოთ $l=0$ შემთხვევა. (43,41) საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება მოგვცემს

$$\frac{r_c}{b^2} = \frac{1 - e^{-2\alpha r_c}}{2\alpha r_c}, \quad (43,42)$$

ამ გამოსახულების ზღვარი, როცა $\alpha \rightarrow 0$, გვაძლევს

$$\frac{r_c}{b^2} = 1; \quad (43,43)$$

მაშასადამე, (43,43) წარმოადგენს იმის პირობას, რომ ბმის ენერგია $\mathcal{E} = 0$. ნულისაგან განსხვავებული ფესვი კი გვექნება მაშინ, როცა $r_c/b^2 < 1$, ე. ი.

$$\frac{V_0}{r_c} > \frac{\hbar^2}{2\mu}. \quad (43,44)$$

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ $r_c \rightarrow 0$ -ის შემთხვევაში (43,42) ფორმულიდან ნათელია, რომ ენერგეტული დონის არსებობისათვის საჭიროა დაცულ იქნეს პირობა

$$\lim_{r_c \rightarrow 0} \frac{r_c}{b^2} = 1. \quad (43,45)$$

რადგან პოტენციალური ენერგიის ნამდვილ სიღრმეს განსაზღვრავს $V^0 = V_0/r_c^2$ სიდიდე, ამიტომ (43,45) პირობიდან აშკარაა, რომ $V^0 r_c^2$ ნამრავლი სასრული უნდა იყოს, რაც ნიშნავს, რომ r_c -ს ნულისაკენ მისწრაფებისას V^0 უსასრულობისაკენ უნდა მისწრაფოდეს, ხოლო V_0 —ნულისაკენ.

§ 44. ბაზანტვის მატრიცა კონტაქტური პოტენციალისათვის

წინა პარაგრაფში დირაკის დელტა ფუნქციისმაგვარი პოტენციალისათვის, როცა $l=0$, მივიღეთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება

$$\frac{r_c}{b^2} = \frac{1 - e^{-2\alpha r_c}}{2\alpha r_c}, \quad (44,1)$$

$$a^2 = \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}.$$

ვიპოვოთ ენერგიის მნიშვნელობა ϵ კერძო, მაგრამ მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევაში, როცა $r_c \rightarrow 0$. ამ დროს (43,1) პოტენციალი გადაიქცევა კონტაქტურ პოტენციალად. ე. ი. ურთიერთქმედება მოხდება მხოლოდ ნაწილაკთა შეხებისას. თუ გავითვალისწინებთ (43,45) პირობას, (44,1) გამოსახულება მოგვცემს

$$\alpha = \lim_{r_c \rightarrow 0} \frac{1}{r_c} \left[1 - \frac{r_c}{b^2} \right]; \quad (44,2)$$

მეშასადამე, კონტაქტური პოტენციალით ურთიერთქმედების დროს გვექნება ერთი დონე და ბმის ენერგია განისაზღვრება (44,2) ფორმულით.

ახლა ვიპოვოთ $T_0(E)$ მატრიცა კონტაქტური პოტენციალისათვის. ამისათვის გამოვიყენოთ (43,9) ფორმულა, რომელშიც გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $r_c \rightarrow 0$. თუ $l \neq 0$ სათავეში ბესელის ფუნქცია ნულოა, ამიტომ მივიღებთ მნიშვნელოვან დასკვნას, რომ კონტაქტური პოტენციალი აპირობებს ურთიერთქმედებას მხოლოდ $l=0$ მდგომარეობაში; ამგვარად,

$$\langle p | T_0(E) | p' \rangle = -\frac{V_0}{2\pi^2} \tau_0(E). \quad (44,3)$$

$\tau_0(E)$ გამოსახულების საპოვნელად საჭიროა (43,11) გამოსახულებაში ავიღოთ $l=0$ და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $r_c \rightarrow 0$. გვექნება

$$\tau_0^{-1}(E) = \lim_{r_c \rightarrow 0} b^2 \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{\sin 2kr_c}{2kr_c^2} - ik \right\}; \quad (44,4)$$

რადგან კონტაქტური პოტენციალი აპირობებს ბმულ მდგომარეობას, ამიტომ (44,4) ფორმულიდან (44,2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\tau_0^{-1}(E) = -b^2(\alpha + ik), \quad (44,5)$$

ხოლო $T_0(E)$ -მატრიცისათვის გვექნება

$$\langle p | T_0(E) | p' \rangle = \frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \frac{1}{\alpha + ik}. \quad (44,6)$$

როგორც ვხედავთ, $\langle p | T_0(E) | p' \rangle$ მატრიცული ელემენტი არაა დამოკიდებული p და p' იმპულსებზე. იგი ფუნქციაა მხოლოდ ენერგიისა $\hbar k = \sqrt{2\mu E}$.

თანახმად (43,18) ფორმულისა, გაფანტვის ამპლიტუდას ექნება სახე

$$F_0(k) = -\frac{1}{\alpha + ik} = \frac{1}{k \operatorname{ctg} \delta_0 - ik}, \quad (44,7)$$

საიდანაც

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = -\alpha, \quad (44,8)$$

რომელიც განიკვეთისათვის მოგვცემს

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{\alpha^2 + k^2}; \quad (44,9)$$

გაფანტვის სიგრძე კი ტოლი იქნება

$$\lim_{k \rightarrow 0} [k \operatorname{ctg} \delta_0(k)] = -\frac{1}{a} = -\alpha. \quad (44,10)$$

ცხადია,

$$\sigma(0) = 4\pi a^2. \quad (44,11)$$

გაფანტვის მატრიცის (44,6) ფორმულას შემდგომში გამოვიყენებთ სამი სხეულის ამოცანის განხილვის დროს.

§ 45. გაფანტვის მატრიცა ექსპონენციალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში

განვიხილოთ ნაწილაკთა ურთიერთქმედება განსაზღვრული ექსპონენციალური ორმოს სახით [6]:

$$V(r) = -V_0 e^{-\frac{r}{r_0}}, \quad (45,1)$$

სადაც V_0 დადებითი მუდმივია და განსაზღვრავს პოტენციალური ორმოს სიღრმეს, რაც შეეხება r_0 პარამეტრს, იგი ახასიათებს ურთიერთქმედების რადიუსს.

განვიხილოთ $l=0$ შემთხვევა. § 13-ში გავარკვეეთ, რომ $l=0$ მდგომარეობისათვის შრედინგერის განტოლება შეიძლება ამოიხსნას და ვიპოვოთ უწყვეტი სპექტრის ისეთი ფუნქციები, რომლებიც გაფანტვის ამოცანის სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ. გაფანტვის s -ფაზისათვის ამ პარაგრაფში მივიღეთ შემდეგი ფორმულა:

$$e^{2i\delta(k)} = (br_0)^{-2i\omega} \frac{\Gamma(1+i\omega) J_{i\omega}(2br_0)}{\Gamma(1-i\omega) J_{-i\omega}(2br_0)}, \quad (45,2)$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\omega = 2kr_0, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (45,3)$$

$\Gamma(1 \pm i\omega)$ ეილერის $\Gamma(x)$ ფუნქციებია, ხოლო $J_{\pm i\omega}(x)$ აღნიშნავს ბესელის წარმოსახვითი ინდექსის ფუნქციებს.

ჩვენ ვიცით, რომ გაფანტვის $S(k)$ მატრიცა ფაზასთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} \quad (45,4)$$

მაშასადამე, (45,4) და (45,2) ფორმულების შედარების შედეგად გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცისათვის მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$S(k) = (br_0)^{-2i\omega} \frac{\Gamma(1+i\omega) J_{i\omega}(2br_0)}{\Gamma(1-i\omega) J_{-i\omega}(2br_0)}. \quad (45,5)$$

$S(k)$ -მატრიცის ამ გამოსახულებას გამოვიყენებთ ანალიზური თვისებების შესწავლის დროს კომპლექსურ k -სიბრტყეზე. გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცის მოძებნის შემდეგ ადვილად ვიპოვით გაფანტვის $T(k)$ -მატრიცასაც.

გაფანტვის მატრიცის ანალიზურობის თვისებები

კვანტურ მექანიკაში, ტრადიციულად, ბმული მდგომარეობებისა და გაფანტვის ამოცანების ამოხსნისას ორ სხვადასხვა მეთოდს იყენებენ. კერძოდ, ბმული მდგომარეობების დახასიათებისათვის სარგებლობენ ტალღური ფუნქციებით, მაშინ როცა გაფანტვის ამოცანის შესწავლისას ხელსაყრელი აღმოჩნდა გაფანტვის მატრიცით სარგებლობა. ამასთან, გაფანტვის მატრიცა, როგორც ვიცით, გაფანტვის ამპლიტუდას ემთხვევა ენერგეტულ ზედაპირზე. შემდგომში გამოიჩვენა, რომ როგორც ბმული მდგომარეობის, ისე გაფანტვის ამოცანები შეგვიძლია აღვწეროთ გაფანტვის მატრიცის საშუალებით. ოღონდ ამისათვის საჭიროა დამატებით შევისწავლოთ გაფანტვის მატრიცის ანალიზური თვისებები კომპლექსური ენერგიის სიბრტყეზე ან, რაც ეკვივალენტურია, კომპლექსური ტალღური რიცხვის სიბრტყეზე.

აღსანიშნავია, რომ გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზურობის საკითხი მკიდროდ დაკავშირებული აღმოჩნდა მნიშვნელოვან ფიზიკურ თვისებებთან, რომელთა შესწავლას დღეს გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება. ამიტომ ამ თავში ჩვენ შევისწავლით გაფანტვის მატრიცის ანალიზურობის თვისებებს კომპლექსურ ენერგეტულ სიბრტყეზე და ვაჩვენებთ, თუ რა ფიზიკური შინაარსი შეესაბამება ამ მატრიცის განსაკუთრებულობებს.

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ არანაკლებ მნიშვნელოვანია გაფანტვის მატრიცის ანალიზურობის შესწავლის საკითხი კომპლექსურ მომენტთა სიბრტყეზეც. $S_1(E)$ -მატრიცის ანალიზურობასთან კომპლექსური მომენტის სიბრტყეზე ასევე საინტერესო ფიზიკური თვისებებია დაკავშირებული. მიუხედავად ამისა, წარმოდგენილ წიგნში $S_1(E)$ -მატრიცის თვისებებს L -კომპლექსურ სიბრტყეზე არ განვიხილავთ და დავკმაყოფილდებით მხოლოდ სპეციალური ლიტერატურის მითითებით [28].

§ 46. იოსტის ფუნქციები და მათი თვისებები

რადიალური ფუნქციები, რომლებიც გარკვეულ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ. კომპლექსური ენერგიის სიბრტყეზე გაფანტვის მატრიცის ანალიზურობის თვისებების შესასწავლად მეტად ხელსაყრელია შრედინგერის რადიალური განტოლების ისეთი ამონახსნების განხილვა, რომლებიც სპეციალურად შერჩეულ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ.

შემოვიღოთ ჯერ ეს ფუნქციები $l=0$ მომენტის შემთხვევაში. ამასთან, ქვემოთ $l=0$ ინდექსს ყველგან, წერის გამარტივების მიზნით, ჩამოვუშვებთ. დაეწეროთ შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლება

$$\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} \right] \varphi(r) = 0, \quad (46,1)$$

სადაც k -ტალღური რიცხვია,

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \quad (E > 0) \quad (46,2)$$

პოტენციალური ენერგიის ნაცვლად ხშირად ვისარგებლებთ აღნიშვნით

$$U(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}. \quad (46,3)$$

ცხადია, გაფანტვის მატრიცა დამოკიდებულია პოტენციალური ენერგიის ყოფაქცევაზე, ამიტომ ჩვენ შემოვისაზღვრებით პოტენციალთა გარკვეული კლასით, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

$$Q(0) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} r |V(r)| dr < \infty, \quad (46,4)$$

$$P(0) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} r^2 |V(r)| dr < \infty. \quad (46,5)$$

პირველი პირობა ნიშნავს, რომ $V(r)$ პოტენციალის სინგულარობა სათავეში r^{-2} -ზე სუსტია, მეორე პირობა კი გვეუბნება, რომ პოტენციალი უსასრულობაში ნული-საკენ მიისწრაფვის უფრო ჩქარა, ვიდრე r^{-3} .

შრედინგერის რადიალური ფუნქციების (46,1) განტოლებას აქვს ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. მათი გამოხატულება დამოკიდებული იქნება ამოცანის სასაზღვრო პირობებზე. ცხადია, ამონახსნები r -ცვლადის გარდა დამოკიდებული იქნება როგორც პარამეტრზე, ასევე k -ზეც. ამ დამოკიდებულების ხასიათი განისაზღვრება განტოლებითა და სასაზღვრო პირობებით. ამგვარად, შრედინგერის განტოლების ამონახსნი დამოკიდებული იქნება k -სა და r -ზე, ე. ი. $\varphi = \varphi(k, r)$. ეს ამონახსნი დაეუმორჩილოთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\varphi(k, 0) = 0, \quad \left[\frac{d\varphi(k, r)}{dr} \right]_{r=0} = 1. \quad (46,6)$$

როცა k -ნამდვილი სიდიდეა, მაშინ შრედინგერის განტოლებაც ნამდვილია, და რადგან ასევე ნამდვილია (46,6) სასაზღვრო პირობებიც, ამიტომ $\varphi(k, r)$ ფუნქციაც ნამდვილ ფუნქციას წარმოადგენს. ამასთან, იგი დამოკიდებული იქნება k^2 -ზე, რის გამოც ტალღური ფუნქცია k -ს ლუწი ფუნქცია იქნება, ე. ი.

$$\varphi(k, r) = \varphi(-k, r). \quad (46,7)$$

ჩვენი მიზანია შრედინგერის რადიალური ფუნქციების ყოფაქცევის შესწავლა არა მხოლოდ k -ტალღური რიცხვის ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის, არამედ k -ს კომპლექსური მნიშვნელობებისთვისაც. ცხადია, ტალღური რიცხვის კომპლექსურ

მნიშვნელობებს, ისევე როგორც კომპლექსურ ენერგიას, ფიზიკური აზრი არა აქვს, მაგრამ ტალღური ფუნქციების თვისებების შესწავლით კომპლექსური ენერგიებისათვის, როგორც ამას შემდგომში დაინახავთ, შევძლებთ მნიშვნელოვანი ფიზიკური თვისებების გამოკვლევას.

მაშასადამე, განვიხილოთ კომპლექსური ტალღური ვექტორის მნიშვნელობები. შრედინგერის (46,1) განტოლებაში

$$a(k, r) = k^2 - U(r) \quad (46,8)$$

სასრულ k -სათვის განსაკუთრებულობანი არა აქვს. პუნქტარეს თეორემა კი გვეუბნება, რომ თუ მეორე რიგის განტოლებაში შედის კოეფიციენტი. რომელიც ცვლადის გარდა დამოკიდებულია რაიმე პარამეტრზე და იგი ამ პარამეტრის მთელი ფუნქციაა, ხოლო სასაზღვრო პირობები ამ პარამეტრზე დამოკიდებული არ არის, მაშინ განტოლების ამონახსნი აღნიშნული პარამეტრის მთელი ფუნქციაა ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

მაშასადამე, პუნქტარეს თეორემის ძალით $\varphi(k, r)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (46,6) სასაზღვრო პირობებს, კომპლექსური k -პარამეტრის მთელი ფუნქცია იქნება. ე. ი. იგი წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას, რომელსაც კომპლექსურ k -სიბრტყეზე არავითარი განსაკუთრებულობანი არ ექნება ნებისმიერი r -ისათვის.

ახლა დაწეროთ ინტეგრალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $\varphi(k, r)$ ფუნქცია. ე. ი. საჭიროა დაწეროთ (46,1) დიფერენციალური განტოლებისა და (46,6) სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტური ინტეგრალური განტოლება.

შრედინგერის განტოლება ფორმალურად შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც განტოლება მოცემული მარჯვენა მხარით

$$\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + k^2\varphi(r) = A(r), \quad (46,9)$$

სადაც

$$A(r) = U(r)\varphi(r). \quad (46,10)$$

როცა $A(r) = 0$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც (46,6) პირობას აკმაყოფილებს, იქნება $\frac{1}{r} \sin kr$; ამიტომ ინტეგრალურ განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{r} + \int_0^\infty G_0(r, r'; k) U(r') \varphi(k, r') dr'. \quad (46,11)$$

გრინის $G_0(r, r'; k)$ ფუნქციას მოვთხოვთ, რომ იგი ნული იყოს, როცა $r > r'$. როგორც ვიცით, გრინის ფუნქცია დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left(\frac{d^2}{dr'^2} + k^2 \right) G_0(r, r'; k) = \delta(r-r'), \quad (l=0) \quad (46,12)$$

სადაც, ($E, 50$) ფორმულის თანახმად, ღირაკის ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგ ფორმით ინტეგრალად:

$$\delta(r-r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha r \sin \alpha r' d\alpha; \quad (46,13)$$

მაშასადამე, გრინის ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$G_0(r, r'; k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right)^{-1} \sin \alpha r \sin \alpha r' d\alpha =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha r \sin \alpha r'}{k^2 - \alpha^2} d\alpha. \quad (46,14)$$

იმის მიხედვით, თუ რომელია მეტი r და r' -ს შორის, ინტეგრალს ექნება ორი მნიშვნელობა:

$$G_0(r, r'; k) = -\frac{1}{k} \sin kr \cos kr', \quad r' > r \quad (46,15)$$

და

$$G_0(r, r'; k) = -\frac{1}{k} \cos kr \sin kr'. \quad r' < r \quad (46,16)$$

მაგრამ სასაზღვრო პირობა მოითხოვს, რომ $r' > r$ -სათვის $G_0(r, r'; k) \rightarrow 0$. (46,15) ფორმულის თანახმად, ეს პირობა მოგვეცემს $\sin k(r+r') = -\sin k(r-r')$. მაშასადამე, გრინის ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით

$$G_0(r, r'; k) = \frac{1}{k} \sin k(r-r'), \quad (46,17)$$

ხოლო ინტეგრალური განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \frac{1}{k} \int_0^r \sin k(r-r') U(r') \varphi(k, r') dr'. \quad (46,18)$$

იოსტის ფუნქციები [30]. გაფანტვის დამახასიათებელი სიდიდეები განისაზღვრება $\varphi(k, r)$ ფუნქციის ყოფაქცევით დიდ მანძილებზე. ამიტომ ხელსაყრელია შრედინგერის განტოლების ისეთი ამონახსნების განხილვა, რომლებიც გარკვეულ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ უსასრულობაში. განვიხილოთ, მაგალითად, (46,1) განტოლების ისეთი $f(k, r)$ ამონახსნი ($l=0$), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას უსასრულობაში:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f(k, r) = 1. \quad (46,19)$$

მაშასადამე, როცა $r \rightarrow \infty$, თვით $f(k, r)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(k, r) = e^{-ikr}. \quad (46,20)$$

$f(k, r)$ ფუნქციას უწოდებენ იოსტის ფუნქციას. ნამდვილი k -სათვის განტოლება ნამდვილია, ამიტომ თუ (46,19) სასაზღვრო პირობიდან ავიღებთ კომპლექსურად შეუღლებულს და შემდეგ მოვახდენთ $k \rightarrow -k$ შეცვლას, დავინახავთ, რომ შესრულებულია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$f^*(-k, r) = f(k, r). \quad (46,21)$$

იოსტის ფუნქციების ინტეგრალური განტოლება [29]. ახლა ვიპოვოთ ინტეგრალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს იოსტის ფუნქცია. ე. ი. საჭიროა დავწეროთ (46,1) დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი განტოლება, რომელშიც ჩართული იქნება (46,19) სასაზღვრო პირობა.

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნები ტოლი იქნება $e^{\pm ikr}$. (46,19) პირობის დასაკმაყოფილებლად უნდა შევარჩიოთ e^{-ikr} ფუნქცია. მაშასადამე, განტოლების ამონახსნი შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$f(k, r) = e^{-ikr} + \int_0^{\infty} G(r, r'; k) U(r') f(k, r') dr'; \quad (46,22)$$

როცა $r = \infty$, მაშინ მარჯვენა მხარეში მეორე წევრი (46,20) სასაზღვრო პირობის ძალით უნდა მოისპოს, ამიტომ გრინის $G(r, r'; k)$ ფუნქცია, როცა $r' < r$, ნულიც ტოლი უნდა იყოს. ამგვარად,

$$f(k, r) = e^{-ikr} + \int_r^{\infty} G(r, r'; k) U(r') f(k, r') dr'; \quad (46,23)$$

რადგან სასაზღვრო პირობის მიხედვით $G(r, r'; k) = 0$, როცა $r' < r$, ამიტომ (46,16) გამოსახულებიდან $\sin(r+r')k = -\sin(r'-r)k$. ამგვარად, (46,15) ფორმულის შედეგად გრინის ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$G(r, r'; k) = \frac{1}{k} \sin k(r'-r). \quad (46,24)$$

მაშასადამე, იოსტის ფუნქციისათვის საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ინტეგრალური განტოლება:

$$f(k, r) = e^{-ikr} + \frac{1}{k} \int_r^{\infty} \sin k(r'-r) U(r') f(k, r') dr'. \quad (46,25)$$

იოსტის ფუნქციის ანალიზური თვისებები [6, 18]. შევნიშნოთ, რომ (46,19) სასაზღვრო პირობა საშუალებას გვაძლევს იოსტის ფუნქცია განვსაზღვროთ მხოლოდ $Imk < 0$ არეში, ე. ი. k -კომპლექსური სიბრტყის ქვედა ნახევარში. ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ამ არეში იოსტის ფუნქცია ანალიზურია, ხოლო ნამდვილ ლერძზე, ე. ი. $Imk = 0$ -სათვის—უწყვეტი.

დამტკიცების მიზნით შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$g(k, r) = e^{ikr} f(k, r). \quad (46,26)$$

ცხადია, $g(k, r)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(k, r) = 1. \quad (46,27)$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ (46,26) განმარტებისა და (46,25) განტოლების თანხმად, $g(k, r)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$g(k, r) = 1 + \int_r^{\infty} G_k(r-r') U(r') g(k, r') dr', \quad (46,28)$$

სადაც გრინის ფუნქცია განიზარტება ტოლობით

$$G_k(R) = \frac{1 - e^{-2ikR}}{2ik}, \quad R = r' - r > 0 \quad (46,29)$$

$g(k, r)$ ფუნქციის ინტეგრალური განტოლება ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლებაა, ამიტომ იგი შეიძლება ამოვხსნათ იტერაციის მეთოდით. ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგი უსასრულო მწკრივის სახით:

$$g(k, r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(k, r), \quad (46,30)$$

ამასთან

$$g_0(k, r) = 1, \quad (46,30')$$

ხოლო

$$g_{n+1}(k, r) = \int_r^{\infty} dr' G_k(R) U(r') g_n(k, r'). \quad (46,31)$$

ადვილად დავამტკიცებთ, რომ $Imk < 0$ -სათვის (46,30) მწკრივი კრებადია. მართლაც, ნათელია, რომ $Imk < 0$ -სათვის ადგილი ექნება გრინის ფუნქციის შემდეგ შეფასებას:

$$|G_k(R)| \leq R \quad (Imk < 0) \quad (46,32)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$Q(r) = \int_r^{\infty} dr' r' |U(r')|, \quad (46,33)$$

მაშინ თანმიმდევრობით შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ:

$$|g_0(k, r)| \leq 1, \quad (46,34)$$

$$|g_1(k, r)| \leq \int_r^{\infty} dr' r' |U(r')| = Q(r), \quad (46,35)$$

$$|g_2(k, r)| \leq \int_r^{\infty} dr' r' |U(r')| Q(r') = \int_0^{Q(r)} Q dQ = \frac{Q^2(r)}{2}, \quad (46,36)$$

$$|g_3(k, r)| \leq \int_r^{\infty} dr' r' |U(r')| \frac{Q^2(r')}{2} = \frac{Q^3(r)}{3!} \quad (46,37)$$

და ა. შ. საბოლოოდ მივიღებთ შეფასებას

$$|g_{n+1}(k, r)| \leq \frac{Q^{n+1}(r)}{(n+1)!}. \quad (46,38)$$

როგორც ვხედავთ, (46,30) მწკრივისათვის მათემატიკულს წარმოადგენს $\exp(Q(r))$ მწკრივი, ამიტომ იგი თანაბრად კრებადი იქნება, თუ $r=0$ წერტილში პოტენციალი აკმაყოფილებს (46,4) პირობას. ამგვარად, (46,30) მწკრივის კრებადობა შედეგია პოტენციალზე დადებული (46,4) პირობისა, ე. ი. რომ პოტენციალის სინგულარობა სათავეში სუსტია $r=2$ -სთან შედარებით. $g(k, r)$ ფუნქციის ანალიზურობის დამტკიცებისათვის k -ს მიმართ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ k -თი წარ-

მოებულების მიმდევრობა ასევე კრებადია თანაბრად და უწყვეტია k -ს მიმართ. ამისათვის ხელსაყრელია (46,28) განტოლება გაფარმოთ k -თი. ამასთან, ინტეგრალის თანაბრად კრებადობის გამო k -ს მიმართ ყოველ ჩაკეტილ არეში, რომელიც $Imk < 0$ ნახევარ სიბრტყეს ეკუთვნის, გაფარმოების ოპერაცია შეგვიძლია გადავსვათ ინტეგრაციასთან. გაფარმოებით მიღებულ ინტეგრალურ განტოლებაში შეგვიძლია კვლავ გამოვიყენოთ იტერაციის მეთოდი. მიღებული მწკრივის უწყვეტობის დასამტკიცებლად მოვიქცეთ სრულიად ანალოგიურად იმისა, როგორც ზემოთ. განსხვავება იქნება იმაში, რომ k -თი გაფარმოების შემდეგ ინტეგრალქვეშ დამატებით გავვიჩნდება r მამრავლი, ამიტომ კრებადობისათვის ახლა უკვე აუცილებელი იქნება პოტენციალზე დადებული (46,5) პირობის შესრულება.

ამგვარად, $g(k, r)$ ფუნქციის წარმოებულების უწყვეტობისათვის ნამდვილი k მნიშვნელობებით საჭიროა პოტენციალი აკმაყოფილებდეს როგორც (46,4), ისე (46,5) პირობას.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ იოსტის $f(k, r)$ ფუნქცია, რომელიც $g(k, r)$ ფუნქციასთან დაკავშირებულია (46,26) ფორმულით, ანალიზურია მთელ კომპლექსურ ქვედა ნახევარსიბრტყეზე ($Imk < 0$) და უწყვეტია არსი ლერძის გასწვრივ ($Imk = 0$).

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში, როცა პოტენციალს ედება უფრო ძლიერი პირობა, მაგალითად,

$$\frac{2\mu}{h^2} \int dr e^{or} |V(r)| < \infty, \quad (46,39)$$

სადაც μ ნამდვილი და დადებითი რიცხვია, მაშინ იოსტის ფუნქციის ანალიზურობის არეა $Imk < \frac{a}{2}$, ე. ი. არე გრძელდება ზედა ნახევარსიბრტყეში.

გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცის განმარტება იოსტის ფუნქციებით. კავშირი $\varphi(k, r)$ ფუნქციასთან [30]. ზემოთ განხილული (46,19) სასაზღვრო პირობიდან ჩანს, რომ ანალიზურობის არეში, რომელიც ნამდვილ ლერძსაც შეიცავს, ადგილი აქვს პირობას

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f^*(-k^0, r) = 1, \quad (46,40)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$f^*(-k^0, r) = f(k, r). \quad (46,41)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, თუ $f(k, r)$ ფუნქციაში k -ს შევცვლით $-k$ -თი, მივიღებთ განტოლების დამოუკიდებელ ამონახსნს. რადგან ერონსკიანი არ არის დამოკიდებული r -ზე, ამიტომ $f(k, r)$ და $f(-k, r)$ ფუნქციებისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ მათი ასიმპტოტური მნიშვნელობებით $r = \infty$ -სათვის, ე. ი. $f(\pm k, r) = e^{\pm ikr}$ ფუნქციებით. მაშინ

$$W[f(k, r), f(-k, r)] = f(k, r) f'(-k, r) - f(-k, r) f'(k, r) = 2ik. \quad (46,42)$$

რადგან ერონსკიანი ნული არ არის, ამიტომ $f(k, r)$ და $f(-k, r)$ მართლაც დამოუკიდებელი ამონახსნები ყოფილა შრედინგერის განტოლებისა (გარდა $k = 0$ წერტილისა!), ამიტომ ჩვენ მიერ შემოღებული $\varphi(k, r)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წრფივი კომბინაცია

$$\varphi(k, r) = Af(k, r) + Bf(-k, r). \quad (46,43)$$

კოფიციენტები შეიძლება განისაზღვროს (46,6) სასაზღვრო პირობებით $r=0$ წერტილში. ეს პირობები A და B მუდმივების განსაზღვრავად მოგვეყენებინ შემდეგ ტოლობებს:

$$Af(k, 0) + Bf(-k, 0) = 0, \quad Af'(k, 0) + Bf'(-k, 0) = 1. \quad (46,44)$$

ამ ორი ტოლობიდან (46,42) ერონსკიანის მნიშვნელობის გათვალისწინებით $r=0$ -სათვის მივიღებთ

$$B = -A \cdot \frac{1}{2ik} f(k, 0); \quad (46,45)$$

გარდა ამისა, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$f(k) \equiv f(k, 0), \quad f(-k) \equiv f(-k, 0), \quad (46,46)$$

მაშინ $\varphi(k, r)$ -ფუნქციისათვის საბოლოოდ გვექნება

$$\varphi(k, r) = \frac{1}{2ik} \{ f(k) f(-k, r) - f(-k) f(k, r) \}; \quad (46,47)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, $\varphi(-k, r) = -\varphi(k, r)$, ე. ი. იგი ლუწი ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ (46,47) გამოსახულების გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობას:

$$f(k) = W | f(k, r), \varphi(k, r) |. \quad (46,48)$$

ასევე ცხადია, რომ

$$f(-k) = W | f(-k, r), \varphi(k, r) |. \quad (46,49)$$

$f(k)$ და $f(-k)$ იოსტის ფუნქციები დიდ როლს ასრულებენ გაფანტვის თეორიაში, რამდენადაც ისინი უშუალოდ დაკავშირებული არიან გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცასთან. მართლაც, ვიპოვოთ $\varphi(k, r)$ ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი მანძილებისათვის; გვექნება

$$\varphi(k, r) = -\frac{f(-k)}{2ik} \left\{ e^{-ikr} - \frac{f(k)}{f(-k)} e^{ikr} \right\}. \quad (46,50)$$

ამ გამოსახულების (23,17) გაფანტვის ასიმპტოტურ ფუნქციასთან შედარებით $l=0$ მდგომარეობისათვის მივიღებთ

$$S(k) = \frac{f(k)}{f(-k)}. \quad (46,51)$$

ამ ფორმულიდან ნათელია, რომ $S(k)$ -მატრიცის ანალიზური თვისებები k -კომპლექსური ცვლადის მიმართ შეიძლება შევისწავლოთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი იოსტის ფუნქციის ანალიზურ თვისებებზე დაყრდნობით.

(46,51) ფორმულიდან ცხადია, რომ

$$S(-k) = \frac{1}{S(k)}. \quad (46,52)$$

დრეკადი გაფანტვის დროს $S(k) = \exp [2i\delta(k)]$, ამიტომ (46,52) ტოლობის გათვალისწინებით გაფანტვის s -ფაზისათვის გვექნება ფორმულა

$$\delta(-k) = -\delta(k), \quad (l=0) \quad (46,53)$$

ე. ი. გაფანტვის s -ფაზა კენტი ფუნქციაა k -სი.

ასევე ცხადია, რომ ადგილი ექნება თანფარდობასაც

$$f(k) = |f(k)| e^{i\delta(k)}, \quad (46,54)$$

რომლის დამტკიცება ადვილია $S = \exp [2i\delta(k)]$ განმარტების გამოყენებით.

იოსტის ფუნქციების ინტეგრალური წარმოდგენები. ახლა გამოვიყვანოთ რამდენიმე მარტივი ფორმულა. ვიპოვოთ იოსტის ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენა. ამისათვის საკმარისია (46,25) ინტეგრალურ განტოლებაში დავუშვათ $r=0$, მაშინ მივიღებთ

$$f(k) = 1 + \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \sin kr U(r) f(k, r) dr. \quad (46,55)$$

როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ ამ წარმოდგენიდან ჩანს, რომ $f(k) \rightarrow 1$ და ფაზისათვის (46,54) ფორმულიდან მივიღებთ $\delta(\infty) = 0$.

შეიძლება ვიპოვოთ ინტეგრალური წარმოდგენა $\varphi(k, r)$ ფუნქციისთვისაც. ამისათვის ვისარგებლოთ $\varphi(k, r)$ ფუნქციის (46,18) ინტეგრალური განტოლებით, რომელშიც გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $r \rightarrow \infty$. ამ განტოლებაში შემავალი სინუსები ექსპონენტებით წარმოვადგინოთ და კრებადი და განშლადი ტალღები ცალ-ცალკე დავლაგოთ. გვექნება

$$\varphi(k, r) = \frac{1}{2ik} \left\{ e^{ikr} \left(1 + \int_0^{\infty} dr' e^{-ikr'} U(r') \varphi(k, r') \right) - e^{-ikr} \left(1 + \int_0^{\infty} dr' e^{ikr'} U(r') \varphi(k, r') \right) \right\}. \quad (46,56)$$

ახლა, თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ (46,50) ასიმპტოტურ ფორმულას, მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$f(k) = 1 + \int_0^{\infty} dr e^{-ikr} U(r) \varphi(k, r). \quad (46,57)$$

ამ ფორმულას შემდგომში გამოვიყენებთ. რაც შეეხება $f(-k)$ იოსტის ფუნქციის წარმოდგენას, საკმარისია (46,57) ფორმულაში ექსპონენტი დადებითი ნიშნით ავიღოთ, რამდენადაც $\varphi(k, r)$ ლუწი ფუნქციაა k -სი.

იოსტის ფუნქციები ნულისაგან განსხვავებული მომენტისათვის [31]. ახლა განვიხილოთ ნულისაგან განსხვავებული მომენტები. ცხადია, ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიღოთ შრედინგერის შემდეგი განტოლებიდან:

$$\frac{d^2 \varphi_l}{dr^2} + \left[k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l(k, r) = 0. \quad (46,58)$$

მოვიტხოვოთ, რომ პოტენციალური ენერგია იმავე (46,4) და (46,5) პირობებს აკმაყოფილებდეს. ჩვენ ვიცით, რომ, როცა $l \neq 0$, მაშინ (46,58) განტოლების ზოგად ამონახსნს სათავეს მახლობლად აქვს სახე

$$\varphi_l(r) = A r^{l+1} + \frac{B}{r^l}, \quad (r \rightarrow 0) \quad (46,59)$$

საიდაც ჩანს, რომ საჭიროა შეიცვალოს (46,6) სასაზღვრო პირობები, რადგან მათი დაკმაყოფილება შეუძლებელია. მოვითხოვთ, რომ (46,58) განტოლების ამონახსნი აკმაყოფილებდეს შემდეგ სასაზღვრო პირობას სათავეში:

$$(2l+1)!! \lim_{r \rightarrow 0} r^{-(l+1)} \varphi_l(k, r) = 1. \quad (46,60)$$

უსასრულობაში ამონახსნი იქნება ასეთი:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_l(k, r) = C e^{-ikr} + D e^{ikr}. \quad (46,61)$$

პუნკარეს თეორემის გამოყენებით ნათელია, რომ $\varphi_l(k, r)$ ფუნქცია ნებისმიერი l -ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (46,60) სასაზღვრო პირობას, k -ს მთელი ფუნქცია იქნება.

ხელსაყრელია იოსტის ფუნქცია $l \neq 0$ შემთხვევაში განვსაზღვროთ შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f_l(k, r) = i^l. \quad (46,62)$$

ადილი შესაძლებელია, რომ $f_l(k, r)$ და $f_l(-k, r)$ იოსტის ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას

$$W[f_l(k, r), f_l(-k, r)] = (-1)^l 2ik; \quad (46,63)$$

მაშასადამე, ისევე როგორც $l=0$ შემთხვევაში (როცა $k \neq 0$), $f_l(k, r)$ და $f_l(-k, r)$, შრედინგერის განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. (46,59) ყოფაქცევის თანახმად, $f_l(k)$ იოსტის ფუნქციის განსაზღვრა $f_l(k, 0)$ -ით აღარ შეიძლება. ამიტომ მისი განმარტებისათვის იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$f_l(k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\pm kr)^l}{(2l-1)!!} f_l(\pm k, r); \quad (46,64)$$

სითნაირად განმარტებული იოსტის ფუნქცია, როცა $|k| \rightarrow \infty$, ტოლია ერთისა და $k=0$ წერტილზე უწყვეტია. $f_l(k)$ ფუნქციის განმარტება შეიძლება ფორმულათა

$$f_l(k) = k^l W[f_l(k, r), \varphi_l(k, r)]. \quad (46,65)$$

შრედინგერის განტოლების $\varphi_l(k, r)$ რეგულარული ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც იოსტის ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. ისევე როგორც $l=0$ შემთხვევაში, ადვილად დაავამტკიცებთ, რომ

$$\varphi_l(k, r) = \frac{i}{2l^{l+1}} \{f_l(-k) f_l(k, r) - (-1)^l f_l(k) f_l(-k, r)\} \quad (46,66)$$

ვიპოვოთ ამ გამოსახულების ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი r -ებისათვის; ცხადია,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_l(k, r) = \frac{i^{l+1} f_l(-k)}{2l^{l+1}} \left\{ e^{-ikr} - (-1)^l \frac{f_l(k)}{f_l(-k)} e^{ikr} \right\}, \quad (46,67)$$

რომლის (23,17) ფორმულასთან შედარებით ვიპოვით კავშირს იოსტის ფუნქციებსა და გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცას შორის ნებისმიერი მომენტის შემთხვევაში

$$S_l(k) = \frac{f_l(k)}{f_l(-k)}. \quad (46,68)$$

ხშირად, (46,62)-ის ნაცვლად იხილავენ სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f_l(k, r) = 1; \quad (46,69)$$

ამ შემთხვევაში, ცხადია,

$$W [f_l(k, r), f_l(-k, r)] = 2ik, \quad (46,70)$$

იოსტის ფუნქციას კი განმარტავენ შემდეგნაირად:

$$f_l(k) = \lim_{r \rightarrow 0} (2l+1) r^l f_{l,k}(r) \quad (46,71)$$

ან ეკვივალენტური გამოსახულებით

$$f_l(k) = W [f_l(k, r), \varphi_l(k, r)], \quad (46,72)$$

სადაც $\varphi_l(k, r)$ შრედინგერის განტოლების რეგულარული ამონახსნია. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi_l(k, r) = \frac{i}{2k} [f_l(-k) f_l(k, r) - f_l(k) f_l(-k, r)]. \quad (46,73)$$

თუ ამ გამოსახულების ზღვარს, როცა $r \rightarrow \infty$, შევადარებთ (23,17) ფორმულას, მივიღებთ

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{f_l(k)}{f_l(-k)}. \quad (46,74)$$

აღსანიშნავია, რომ $f_l(k, r)$ ფუნქცია ანალიზურია კომპლექსური k -სიბრტყის ქვედა ნახევარში და კომპლექსური k -სათვის აკმაყოფილებს ტოლობას

$$f_l^*(-k^*, r) = f_l(k, r), \quad (46,75)$$

რომელიც $l=0$ შემთხვევაში ემთხვევა (46,21)-ს და შედგება (46,22) სასაზღვრო პირობისა.

§ 17. იოსტის ფუნქციის კავშირი გაფანტვის ტალღურ ფუნქციასთან, გრინის ფუნქციასა და ფრედჰოლმის დებარმინანტთან

იოსტის ფუნქციები დავაკავშიროთ ისეთ მნიშვნელოვან ფუნქციებთან, როგორცაა გაფანტვის ტალღური ფუნქცია $\chi_l^{(+)}(k, r)$, გრინის სრული ფუნქცია, რომელიც გაფანტვის სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს და შრედინგერის ინტეგრალური განტოლების ფრედჰოლმის დეტერმინანტთან, რომელიც აგრეთვე მნიშვნელოვანი სიდიდეა.

სიმარტივისათვის ჯერ განვიხილოთ ნულოვანი მომენტის შემთხვევა $l=0$ და, როგორც საზოგადოდ შეთანხმებული ვართ, ჩამოვეშვათ $l=0$ ინდექსი.

ცხადია, ჩვენ მიერ შემოღებული $\varphi(k, r)$ რადიალური ფუნქცია გაფანტვის ამოცანას არ აღწერს, რადგან იგი აკმაყოფილებს არა გაფანტვის ამოცანის სასაზღვრო პირობებს, არამედ (46,6)-ს. მაგრამ ამ $\varphi(k, r)$ ფუნქციით შეგვიძლია გამოვხატოთ გაფანტვის ამოცანის $\chi^{(+)}(k, r)$ ფუნქცია, რომელიც გაფანტვის სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს. აღნიშნულ კავშირს ადვილად დავამყარებთ, თუ ერთმა-

ნეთს შევადარებთ ამ ორი ფუნქციის ასიმპტოტურ გამოსახულებებს დიდი r -ებისათვის. (46,50) და (23,17) ფორმულების შედარებით მივიღებთ

$$\chi^{(+)}(k, r) = \frac{k\varphi(k, r)}{f(-k)}. \quad (47,1)$$

მართალია, ეს ფუნქციები ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი მამრავლით, მაგრამ ეს მუდმივი დამოკიდებულია ენერგიაზე, ამიტომ იგი სრულიად ცვლის გაფანტვის ტალღური ფუნქციის ანალიზურ თვისებებს. სახელდობრ, იგი აღარ არის ყველგან ანალიზური ფუნქცია იმ არეშიც კი, სადაც განმარტებულია $f(-k)$ ფუნქცია, რამდენადაც $f(-k) = 0$ წერტილებში გაფანტვის ფუნქციას ექნება პოლუსები.

ახლა დავაკავშიროთ იოსტის ფუნქციები გრინის სრულ ფუნქციასთან. გრინის პარციალური ფუნქცია $l=0$ -სათვის აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) \right] G(r, r') = \delta(r-r') \quad (47,2)$$

და სხვადასხვა სასაზღვრო პირობას ამოცანის ხასიათის მიხედვით. როცა $r \neq r'$, გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს მეორე რიგის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. როცა $r=r'$, გრინის ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო მისი პირველი რიგის წარმოებული, როგორც ეს განტოლებიდან ჩანს, სასრულ ნახტომს განიცდის. მართლაც, თუ ავიღებთ ინტეგრალს r -ით (47,2) განტოლებიდან მცირე ($r'-\varepsilon, r'+\varepsilon$) ინტერვალში, მივიღებთ:

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) \right] G(r, r') dr = 1, \quad (47,3)$$

საიდანაც გვექნება პირობა

$$\left[\frac{\partial G(r, r')}{\partial r} \right]_{r=r'+0} - \left[\frac{\partial G(r, r')}{\partial r} \right]_{r=r'-0} = 1. \quad (47,4)$$

გრინის ფუნქციას მოეთხოვრება შემდეგი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება: იგი იყოს რეგულარული $r=0$ წერტილში, ხოლო უსასრულობაში შეიცავდეს განშლად ტალღას. ეს პირობები, თუ გავითვალისწინებთ $\varphi(k, r)$ და $f(k, r)$ რადიალური ფუნქციების ყოფაქცევას მცირე და დიდ მანძილებზე, გვეუბნება, რომ გრინის ფუნქციას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$G_h(r, r') = \varphi(k, r) \xi(k, r'), \quad r < r' \quad (47,5)$$

$$G_h(r, r') = f(-k, r) \eta(k, r'), \quad r > r' \quad (47,6)$$

სადაც $\xi(r')$ და $\eta(r')$ ჩერჯრობით უცნობი ფუნქციებია. მათი განსაზღვრისათვის ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ გრინის ფუნქციის უწყვეტობის პირობა $r=r'$ წერტილზე, სახელდობრ, $r=r'$ წერტილზე (47,5) და (47,6) გამოსახულებები ტოლი უნდა იყოს და ადგილი უნდა ჰქონდეს (47,4) პირობას. ე. ი.

$$\varphi(k, r') \xi(k, r') = f(-k, r') \eta(k, r'), \quad (47,7)$$

$$\left[\frac{\partial f(-k, r)}{\partial r} \right]_{r=r'+0} \eta(k, r') - \left[\frac{\partial \varphi(k, r)}{\partial r} \right]_{r=r'-0} \xi(k, r') = 1. \quad (47,8)$$

პირველი ტოლობიდან განესაზღვროთ $\xi(k, r')$ და შევიტანოთ იგი მეორეში, გვექნება

$$\varphi(k, r') = \eta(k, r') \left\{ \varphi(k, r') \left[\frac{\partial f(-k, r)}{\partial r} \right]_{r'+0} - \left[\frac{\partial \varphi(k, r)}{\partial r} \right]_{r'-0} f(-k, r') \right\}. \quad (47,9)$$

გავითვალისწინოთ, რომ $f(-k, r)$ და $\varphi(k, r)$ ფუნქციებს უწყვეტი წარმოებულები აქვთ და გამოვიყენოთ (46,49) ფორმულა; მაშინ ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება $-f(-k)$ -ს ტოლი იქნება. ამის გამო η და ξ ფუნქციებისათვის მივიღებთ:

$$\eta(k, r') = -\frac{\varphi(k, r')}{f(-k)}, \quad \xi(k, r') = -\frac{f(-k, r')}{f(-k)}. \quad (47,10)$$

მაშასადამე, გრინის ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$G_k(r, r') = -\frac{\varphi(k, r) f(-k, r')}{f(-k)}, \quad r < r' \quad (47,11)$$

$$G_k(r, r') = -\frac{\varphi(k, r') f(-k, r)}{f(-k)}, \quad r > r' \quad (47,12)$$

ან $r >$ და $r <$ სიდიდეების შემოღებით საბოლოოდ გვექნება:

$$G_k^{(+)}(r, r') = -\frac{1}{f(-k)} \varphi(k, r >) f(-k, r >). \quad (47,13)$$

„+“ ნიშანი მიუთითებს იმაზე, რომ გრინის ფუნქციის ასიმპტოტიკა შეესაბამება განშლად ტალღას.

თუ გავიხსენებთ (47,1) დამოკიდებულებას, გრინის ფუნქცია შეგვიძლია დავუკავშიროთ გაფანტვის ტალღურ ფუნქციასაც. მართლაც, (47,13) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ

$$G_k^{(+)}(r, r') = -\frac{1}{k} \chi^{(+)}(k, r >) f(-k, r >). \quad (47,14)$$

ახლა კი ვიპოვოთ კავშირი იოსტის ფუნქციებსა და ფრედჰოლმის დეტერმინანტს შორის. ამისათვის ხელსაყრელია პოტენციალური ენერგიიდან გამოვიყოთ რაიმე λ პარამეტრი

$$\frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} = \lambda U(r) \quad (47,15)$$

და გამოვიყენოთ $f(k)$ ფუნქციის (46,57) ინტეგრალური წარმოდგენა $\varphi(k, r)$ ფუნქციის საშუალებით

$$f(k) = 1 + \lambda \int_0^{\infty} dr e^{-ikr} U(r) \varphi(k, r), \quad (47,16)$$

სადაც $\varphi(k, r)$, თანახმად (46,18) ფორმულისა, თავის მხრივ აკმაყოფილებს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\varphi(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \lambda \int_0^r G_0(r, r') U(r') \varphi(k, r') dr'. \quad (47,17)$$

ვიპოვოთ $f(k)$ ფუნქციის წარმოებული λ -პარამეტრის მიხედვით, ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ, (47,17) განტოლების თანახმად, $\varphi(k, r)$ ფუნქცია λ -ზე იქნება დამოკიდებული. გვექნება

$$\frac{df(k)}{d\lambda} = \lambda \int_0^{\infty} dr e^{-ikr} U(r) \frac{d\varphi(k, r)}{d\lambda} + \int_0^{\infty} dr e^{-ikr} U(r) \varphi(k, r). \quad (47,18)$$

ვიპოვოთ $\frac{d\varphi}{d\lambda}$. ამისათვის (47,17) გავაწარმოთ λ -პარამეტრით. მივიღებთ

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = G_0 U \varphi + \lambda G_0 U \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (47,19)$$

საიდანაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\frac{d\varphi}{d\lambda}$; გვექნება

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = (1 - \lambda G_0 U)^{-1} G_0 U \varphi. \quad (47,20)$$

თუ შემოვიღებთ გრინის სრულ ფუნქციას

$$G = (1 - \lambda G_0 U)^{-1} G_0, \quad (47,21)$$

მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = G U \varphi, \quad (47,22)$$

რომელიც შეგვიძლია შევითანოთ (47,18) გამოსახულებას; მივიღებთ

$$\frac{df(k)}{d\lambda} = \int_0^{\infty} dr e^{-ikr} (1 + \lambda U G) U \varphi. \quad (47,23)$$

მაგრამ, თანახმად (46,28) განტოლებისა¹, $1 + \lambda U G = g$, ამიტომ (46,26) აღნიშვნის ძალით საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{df(k)}{d\lambda} = \int_0^{\infty} dr f(k, r) U(r) \varphi(k, r). \quad (47,24)$$

ახლა გამოვიყენოთ (47,13) ფორმულა, მაშინ

$$\frac{df(-k)}{d\lambda} = -f(-k) \int_0^{\infty} G^{(+)}(r', r') U(r') dr', \quad (47,25)$$

¹ (46,28) განტოლების თანახმად, $g = 1 + \lambda U G_0 g$, საიდანაც $g = (1 - \lambda U G_0)^{-1}$; გამოვიყენოთ ახლა (34,10) განტოლება; ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $G = G_0 (1 - \lambda U G_0)^{-1}$, ან $G = G_0 g$; მაშასადამე, $g = 1 + \lambda U g$.

$$\frac{1}{f(-k)} \frac{df(-k)}{d\lambda} = -Sp(G^{(+)}U). \quad (47,26)$$

რამდენადაც, როცა $\lambda=0$, მაშინ $f(-k)=1$, ამ გამოსახულების ინტეგრაციით მივიღებთ ფორმულას

$$f(-k) = \exp \left[- \int_0^k Sp(G^{(+)}U) d\lambda \right]. \quad (47,27)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ გრინის სრული ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$G(z) = G_0(z) + \lambda G_0(z)U(z), \quad (47,28)$$

მაშინ (47,27) გამოსახულება ასეც გადაიწერება:

$$f(-k) = \exp \left[- \int_0^{\infty} d\lambda Sp(1-\lambda K)^{-1}K \right], \quad (47,29)$$

სადაც $K = G^{(+)}U$ წარმოადგენს გაფანტვის ამოცანის ინტეგრალური განტოლების გულს. დაბოლოს, თუ (47,29) ფორმულას შევადარებთ (H,84) გამოსახულებას, დაინახავთ, რომ ადგილი აქვს მნიშვნელოვან ფორმულას

$$f(-k) = \Delta(k). \quad (47,30)$$

ამგვარად, იოსტის $f(-k)$ ფუნქცია ემთხვევა გაფანტვის ამოცანის შრედინგერის ინტეგრალური განტოლების (H,71) ფრედჰოლმის დეტერმინანტს.

თანამად (H, 83) ფორმულისა, $f(-k)$ იოსტის ფუნქციისათვის გვექნება კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი წარმოდგენა:

$$f(-k) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \int_0^{\infty} K_n(r,r) dr \right\}, \quad (47,31)$$

სადაც $K_n = (G_0^{(+)}U)_n$ n -ური რიგის იტერირებული გულია.

თუ გავიხსენებთ (H, 84) ფორმულას, მაშინ შეგვიძლია აგრეთვე დავწეროთ

$$f(-k) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m(k)} \right), \quad (47,32)$$

სადაც $\lambda_m(k)$ წარმოადგენს K -გულის საკუთარ მნიშვნელობებს. როგორც ვხედავთ, იოსტის ფუნქციას $\lambda = \lambda_m$ წერტილებში აქვს ნულები.

ახლა განვიხილოთ ნულისაგან განსხვავებული მომენტების შემთხვევა. უპირველეს ყოვლისა, აღვნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს ფორმულას

$$f_l(-k) = \Delta_l(k), \quad (47,33)$$

სადაც $\Delta_l(k)$ ფრედჰოლმის დეტერმინანტია; ამასთან, ამ ფორმულის გამოყენების დროს უნდა ვივლისხმოდეთ, რომ ინტეგრალური განტოლების გულს აქვს სახე

$$K_l(r, r') = G_{0l}^{(+)}(r, r')V(r'), \quad (47,34)$$

$G_{0l}^{(+)}(r, r')$ გრინის ფუნქცია კი განისაზღვრება (28,17) ტოლობით.

თუ ერთმანეთს შევადარებთ (23,17) და (46,66) გამოსახულებების ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს, ადვილად დავამყარებთ კავშირს გაფანტვის ფუნქციასა და $\varphi_l(k, r)$ ფუნქციას შორის ნებისმიერი l -ისათვის, გვექნება¹

$$\chi_l^{(+)}(k, r) = \frac{k^{l+1} \varphi_l(k, r)}{f_l(-k)}. \quad (47,35)$$

სრულიად ანალოგიურად იმისა, რაც გვექონდა $l=0$ -ისათვის, ადვილად გამოვხატავთ გრინის სრულ ფუნქციას ნებისმიერი l -ისათვის, რომელიც შეესაბამება უსასრულობაში განშლად ტალღას, იოსტის ფუნქციის საშუალებით. გვექნება

$$G_l^{(+)}(k; r, r') = - \frac{k^l}{f_l(-k)} \varphi_l(k, r) f_l(-k, r'); \quad (47,36)$$

ანდა. გაფანტვის ტალღური ფუნქციის გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$G_l^{(+)}(k; r, r') = - \frac{1}{k} \chi_l^{(+)}(k, r) f_l(-k, r'). \quad (47,37)$$

გრინის ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] G_l^{(+)}(k; r, r') = \delta(r - r') \quad (47,38)$$

სასაზღვრო პირობით, რომელიც შეესაბამება განშლად ტალღას უსასრულობაში.

§ 48. გაფანტვის S-მატრიცის ანალიზური თვისებები

შევისწავლოთ გაფანტვის მატრიცის ანალიზური თვისებები კომპლექსურ k სიბრტყეზე. რამდენადაც ენერგია ტალღურ ვექტორთან დაკავშირებულია $k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$ თორმულთ, ამიტომ კომპლექსური k -ცვლადის ზედა ნახევარსიბრტყე გადაისახება კომპლექსური ენერგიის მთელ სიბრტყეზე, ხოლო k კომპლექსური ცვლადის სიბრტყის ქვედა ნახევარი უკვე უნდა განვიხილოთ როგორც რიმანის ზედაპირის მეორე ფურცელი. ამასთან, როგორც წესი, ქრილს ატარებენ არსი ლერძის გასწვრივ ნულიდან უსასრულობამდე. პირველ ფურცელს, რომელიც შეესაბამება $\text{Im} k > 0$ მნიშვნელობებს, უწოდებენ ფიზიკურ ფურცელს, ხოლო მეორეს—არაფიზიკურს. ფიზიკური ფურცლის სახელწოდება წარმოდგება იქიდან, რომ ტალღურ ფუნქციაში $\chi_l^{(+)}(k, r)$ გაფანტვის ამოცანის სასაზღვრო პირობას შეესაბამება სწორედ

$$\frac{k^2}{2\mu} = E + i\varepsilon.$$

გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცის (46,68) განმარტებიდან ნათელია, რომ

$$S_l(-k) = \frac{1}{S_l(k)}, \quad (48,1)$$

¹ (46,69) სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში (47,35) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში დავიჯდება $\frac{1}{k^l} \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)$ მარჯვლი, (47,37)-ში კი $\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right)$.

საიდანაც, ოცევე როგორც $l=0$ შემთხვევაში, თუ გავიხსენებთ. რომ $S_l(k) = \exp(2i\delta_l)$, მივიღებთ

$$\delta_l(-k) = -\delta_l(k). \quad (48,2)$$

ასევე (46,68) და (46,69) ფორმულებიდან ცხადია, რომ

$$S_l^*(k^*) = \frac{1}{S_l(k)}. \quad (48,3)$$

ნათელია, რომ $k^* = k$ შემთხვევაში, ე. ი. ნამდვილი k -სათვის, (48,3) ემთხვევა S_l -მატრიცის უნიტარობის პირობას $S_l^{(+)} S_l = 1$. (48,3) ფორმულიდან ჩანს, რომ არს ღერძზე $S_l(k)$ -მატრიცის აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატი ერთის ტოლია.

$S_l(k)$ -მატრიცის სიმეტრიის ზემომოყვანილი ფორმულები შეგვიძლია გამოვიყენოთ მისი განსაკუთრებული წერტილების ურთიერთთანაფარდობის დასადგენად. ვთქვათ, კომპლექსური k -სიბრტყის რაიმე k_0 წერტილში $S_l(k_0) = a_l$, მაშინ, (48,1) და (48,3) ფორმულების თანახმად, ადვილად ვიპოვიტ $S_l(k)$ -მატრიცის საკოორდინატო ღერძების სიმეტრიულად განლაგებულ მნიშვნელობებსაც; მართლაც, გვექნება:

$$S_l(k_0) = a_l, \quad S_l(-k_0) = \frac{1}{a_l}, \quad S_l(-k_0^*) = a_l^*, \quad S_l(k_0^*) = \frac{1}{a_l^*}. \quad (48,4)$$

ასე რომ, თუ ვიცით $S_l(k)$ -მატრიცის სახე რომელიმე ერთ მეთხედში, ადვილად ვიპოვიტ მის მნიშვნელობებს მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე. რადგან $S_l(k_0) S_l(-k_0^*) = |a_l|^2$ და $S_l(-k_0) S_l(k_0^*) = \frac{1}{|a_l|^2}$, ამიტომ ვითარს ღერძზე $S_l(k)$

ნამდვილი ფუნქციაა, ფაზა კი—წმინდა ვითარსი.

გარდა ამისა, (48,4) ფორმულებიდან, თუ ავიღებთ $a_l = 0$, გვექნება შემდეგი: როცა $S_l(k_0) = 0$, მაშინ $S_l(-k_0) = \infty$, ე. ი. S_l -მატრიცას ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ წერტილში ექნება პოლუსი. ასევე ცხადია, რომ პოლუსი გვექნება k_0^* წერტილშიც, ხოლო $-k_0^*$ წერტილში—ნული. ამგვარად, არსი ღერძის სიმეტრიულ წერტილებში ნული იცვლება პოლუსებით და პირიქით. ვითარსი ღერძის სიმეტრიულად ნული ნულად რჩება, პოლუსი კი—პოლუსად.

ახლა გამოვიდეთ გაფანტვის ამოცანის ფიზიკური შინაარსიდან და გამოვიკვლიოთ, თუ რა განსაკუთრებულობანი შეიძლება ჰქონდეს გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცას კომპლექსური სიბრტყის ამა თუ იმ არეში. ამასთან, საკმარისია გამოვარჯიოთ $S_l(k)$ -მატრიცის პოლუსების მდებარეობის საკითხი, რადგან ზემოთ დამტკიცებული სიმეტრიის ძალით ადვილად ვიპოვიტ მატრიცის ნულებსაც.

დავამტკიცოთ მეტად მნიშვნელოვანი დებულება, რომ $S_l(k)$ -მატრიცის პოლუსები ძევს კომპლექსური k -სიბრტყის ქვედა ნახევარსიბრტყეზე ან ვითარს ღერძზე.

განვიხილოთ სტაციონარული შემთხვევა, მაშინ გაფანტვის რადიალურ ტალღურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$R_l^{(+)}(r, t) = \frac{\chi_l^{(+)}(k, r)}{r} e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (48,5)$$

სადაც $\chi_i^{(+)}(k, r)$ გაფანტვის ამოცანის ტალღური ფუნქციაა, რომელსაც დიდ მანძილებზე, თანხმად (23,17) ფორმულისა, აქვს შემდეგი ასიმპტოტური გამოხატულება:

$$\chi_i^{(+)}(k, r) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i(kr - \frac{t\pi}{2})} - S_1(k) e^{i(kr - \frac{t\pi}{2})} \right\}. \quad (r \rightarrow \infty) \quad (48,6)$$

რადგან ჩვენ ვსწავლობთ მატრიცის ანალიზურ თვისებებს კომპლექსურ k -სიბრტყეზე, ამიტომ, ბუნებრივია, ენერგეტულ ფაზურ მამრავლს ამ შემთხვევაში გადამწყვეტი მნიშვნელობა ექნება. კომპლექსური k -სათვის ენერგიაც კომპლექსური იქნება. სახელდობრ, თუ $k = k_1 + ik_2$, სადაც k_1 და k_2 ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} (k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2). \quad (48,7)$$

ცხადია, კომპლექსური ენერგიები არასტაციონარულ პროცესებს აღწერენ. ასეთი პროცესების ფიზიკური შინაარსის გარკვევას ჩვენ ქვემოთ კიდევ დაეუბრუნდებით, ახლა კი ჩვენი ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენოთ კვანტური მექანიკის უწყვეტობის განტოლება, რომელსაც ინტეგრალური სახით აქვს შემდეგი ფორმა:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V |\psi|^2 dV = \oint_S (J, ds), \quad (48,8)$$

სადაც ინტეგრალები შესაბამისად აღებულია V -მოცულობაზე და ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ S -ფართზე. J -წარმოადგენს ალბათობის დენის ვექტორს

$$J = \frac{i\hbar}{2\mu} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \quad (48,9)$$

ახლა, ვთქვათ, $S_1(k)$ -მატრიცას $k = k_0 = k_1 + ik_2$ წერტილში აქვს პოლუსი. მაშინ პოლუსის მახლობლად (48,6) ფორმულაში ($r \rightarrow \infty$) შესაბამის ასიმპტოტურ გამოსახულებაში) დაგვრჩება შემდეგი წევრი:

$$R \chi_i^{(+)}(r, t) = (-i)^{l+1} \frac{S_1(k)}{2r} e^{ik_1 r} e^{-k_2 r} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (k = k_0) \quad (48,10)$$

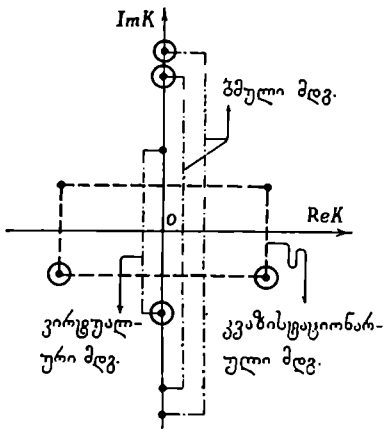
გამოვიყენოთ (48,8) უწყვეტობის განტოლება (48,10) ფუნქციისათვის. ამისათვის ვიგულისხმობთ, რომ V იმდენად დიდი მოცულობაა, რომ მის ზედაპირზე სამართლიანია (48,10) ასიმპტოტური გაშლა. თუ ამ დიდ მოცულობას წარმოვიდგენთ R რადიუსთან სფეროს სახით, მაშინ გვექნება

$$k_2 \left(k_2 \int_0^R |\chi_i(k, r)|^2 dr + \frac{1}{2} |S_1(k)|^2 e^{-2k_2 R} \right) = 0. \quad (48,11)$$

ამ ტოლობის დაკმაყოფილება კი, ცხადია, მაშინ შეიძლება, როცა ან $k_2 = 0$, ან $k_2 < 0$. მაშასადამე, $S_1(k)$ -მატრიცის პოლუსი ძვეს ან ვითარს ღერძზე, ან ქვედა ნახევარსიბრტყეში.

ამგვარად, თუ $S_1(k)$ -მატრიცას აქვს პოლუსები, მაშინ ისინი განლაგებული იქნებიან $Im k < 0$ არეში ან ვითარსი ღერძის დადებით მიმართულებაზე. ე. ი.

$Imk > 0$ არეში პოლუსი მხოლოდ და მხოლოდ ვითარს ღერძზე შეიძლება იყოს მოთავსებული. ზემოთ დამტკიცებული სიმეტრიის თვისების გამო შეიძლება დავასკვნათ, რომ $S_1(k)$ -მატრიცის ნულები მხოლოდ ვითარსი ღერძის უარყოფით ნაწილში შეიძლება მდებარეობდნენ. გარდა ამისა, თუ $S_1(k)$ -მატრიცის პოლუსი, რომელიც არ მდებარეობს ვითარსი ღერძზე, იმყოფება $Imk < 0$ ნაწილში, მაშინ $S_1(k)$ -მატრიცას იმავე ნახევარსიბრტყეში ექნება პოლუსი ვითარსი ღერძის სიმეტრიულ წერტილში. ამ პოლუსებს შეესაბამება ნულები არსი ღერძის სიმეტრიულ წერტილებში.



ნახ. 9.

შენიშნავს S_1 -მატრიცის პოლუსს, ხოლო • — ნულს.

ამგვარად, $Imk > 0$ არეში $S_1(k)$ მატრიცის პოლუსი აუცილებლად ვითარსი ღერძზე ძვეს, ნულები კი ყველგან შეიძლება შეგვხვდეს, ოღონდ ისინი აუცილებლად წვეილ-წვეილად უნდა დალაგდნენ ვითარსი ღერძის სიმეტრიულად. რაც შეეხება ქვედა ნახევარსიბრტყეს ($Imk < 0$), აქ ნულები განლაგებული იქნება მხოლოდ ვითარსი ღერძზე, პოლუსების მდებარეობა კი ნებისმიერია, ოღონდ ისინი უნდა შეგვხვდნენ წვეილ-წვეილად ვითარსი ღერძის

სიმეტრიულად. რადგან $Imk > 0$ ნახევარსიბრტყეს შეესაბამება ენერგეტული ზედაპირის ფიზიკური ფურცელი, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ როცა ფიზიკურ ფურცელზე $S_1(E)$ -მატრიცას აქვს პოლუსი, მისი შესაბამისი ნული უკვე არაფიზიკურ ფურცელზე იქნება მოთავსებული. ასევე პოლუსები $Imk < 0$ ქვედა ნახევარსიბრტყეში წარმოადგენენ პოლუსებს რიმანის არაფიზიკურ ფურცელზე [30, 34].

§ 48. ბმული მდგომარეობები და გავსატვის S_1 -მატრიცა

ნამდვილი ტალღური რიცხვებისათვის $S_1(k)$ -მატრიცა აღწერს გაფანტვის ამოცანას. ამ შემთხვევაში არც ერთი ნამდვილი $0 \leq k$ თ მნიშვნელობისათვის იოსტის $f_1(k)$ -ფუნქცია არსად ხდება ნულის ტოლი.

$S_1(k)$ -მატრიცას განსაკუთრებულობანი შეიძლება აღმოაჩნდეს მხოლოდ k -ს კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის. ამასთან, რამდენადაც იოსტის ფუნქციები განსაზღვრული გვაქვს k -ს კომპლექსური მნიშვნელობებისთვისაც, ამიტომ

$$S_1(k) = \frac{f_1(k)}{f_1(-k)} \quad (49,1)$$

მატრიცა განსაზღვრულია მთელ კომპლექსურ k -სიბრტყეზე. ქვემოთ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $S_1(k)$ -მატრიცის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ სისტემის ბმული მდგომარეობებიც.

გავიხსენოთ გაფანტვის ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური გამოსახულება

$$\frac{\chi_i(k, r)}{kr} = \frac{i}{2kr} \left| e^{-i(kr - \frac{r\pi}{2})} - S_i(k) e^{i(kr - \frac{r\pi}{2})} \right|; \quad (r \rightarrow \infty) \quad (49,2)$$

თუ $k = i\alpha$, სადაც $\alpha > 0$, ე. ი. $Imk < 0$ შნიშვნელობებისათვის $S_i(k)$ -მატრიცა ნულია

$$..S_i(-i\alpha) = 0, \quad (49,3)$$

მაშინ ტალღური ფუნქცია

$$\chi_i(-i\alpha, r) = \text{const } e^{-\alpha r}, \quad (49,4)$$

რომელიც კლებულობს როგორც ექსპონენტა $r \rightarrow \infty$ შემთხვევაში, წარმოადგენს კვადრატულად ინტეგრებად ფუნქციას და შეესაბამება ბმული მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას $-\frac{\alpha^2 \hbar^2}{2\mu}$ ენერგიით.

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ $S_i(k)$ -მატრიცის ყველა ნული ბმულ მდგომარეობას განსაზღვრავს, მაგრამ, სამწუხაროდ, როგორც ამას ქვემოთ დავინახავთ, ეს ასე არ არის; მართლაც, თანახმად (49,1) ფორმულისა, $k = -i\alpha$ შნიშვნელობისათვის

$$S_i(-i\alpha) = \frac{f_i(-i\alpha)}{f_i(i\alpha)}, \quad (\alpha > 0) \quad (49,5)$$

ამიტომ S_i -მატრიცა ნული შეიძლება გახდეს, როცა $f_i(-i\alpha) = 0$, იმ პირობით, რომ $f_i(i\alpha) \neq 0$.

თუ $f_i(i\alpha) = \infty$, ხოლო $f_i(-i\alpha)$ სასრულია, მაშინ მატრიცას გარეშე ნული აქვს, რომელიც შეიძლება ბმულ მდგომარეობას არ შეესაბამებოდეს. გარდა ამისა, ბმულ მდგომარეობაში $S_i(-i\alpha)$ ასევე შეიძლება არ გახდეს ნული, როცა $f_i(-i\alpha)$ და $f_i(i\alpha)$ ორივე ნულის ტოლია. ამ ზედმეტი ნულების მოშორება შეიძლება პოტენციალის ჩამოჭრით ნებისმიერად დიდ მანძილებზე. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ გაფანტვა ექსპონენციალური პოტენციალური ორმოთი

$$V(r) = -V_0 e^{-r/r_0}. \quad (49,7)$$

ასეთ ორმოზე გაფანტვა იძლევა სწორედ $S(k)$ -მატრიცის გარეშე ნულებს $l=0$ მდგომარეობაში; როგორც ვიცით, თანახმად (45,2) ფორმულისა, გაფანტვის მატრიცა ტოლი იქნება

$$S(k) = \left(\frac{\beta}{2} \right)^{-2i\omega} \frac{\Gamma(1+i\omega)}{\Gamma(1-i\omega)} \frac{J_{i\omega}(\beta)}{J_{-i\omega}(\beta)}, \quad (49,8)$$

სადაც

$$\omega = 2kr_0, \quad \beta = 2br_0, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (49,9)$$

ახლა გამოვარკვიოთ $k = -i\alpha$ -სათვის რა პირობებში ხდება ნული $S(-i\alpha)$. ცხადია, ეს შეიძლება მოხდეს შემდეგ ოთხ შემთხვევაში:

$$J_{2\alpha r_0}(\beta) = 0, \quad (49,10)$$

$$\Gamma(1+2\alpha r_0) = 0, \quad (49,11)$$

$$J_{-2\alpha r_0}(\beta) = \infty, \quad (49,12)$$

$$\Gamma(1-2\alpha r_0) = \infty; \quad (49,13)$$

პირველი განტოლება ემთხვევა (13,7) საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას, რომელიც ნამდვილად განსაზღვრავს ბმული მდგომარეობის ენერგიებს. (49,11) და (49,12) განტოლებებს დადებითი α -სათვის ამონახსნები არა აქვთ. რაც შეეხება (49,13) განტოლებას, მას ექნება ამოხსნა, როცა $2\alpha r_0 = 1, 2, 3, \dots$, მაგრამ როგორც გაფანტვის (13,18) ფუნქციიდან ჩანს, ამ შემთხვევაში ტალღური ფუნქცია იგივერად ნული ხდება და, მაშასადამე, აღნიშნული ნული გარეშე ნულია; იგი ბმულ მდგომარეობას არ განსაზღვრავს [32,33].

როგორც ვხედავთ, გარეშე ნულების გაჩენაზე პასუხისმგებელია $f_l(-k)$ იოსტის ფუნქცია, რომლის პოლუსებსაც შეესაბამება $S_l(k)$ -მატრიცის ნულები, რომლებიც ბმულ მდგომარეობას არ განსაზღვრავენ. გარეშე ნულები არ ჩნდება იმ შემთხვევაში, როცა $f_l(k)$ იოსტის ფუნქცია რეკულარულია მთელ k -სიბრტყეზე. ასეთი მდგომარეობა ხორციელდება მხოლოდ მაშინ, როცა პოტენციალური ენერგია აკმაყოფილებს (46,39) პირობას, ე. ი. როცა პოტენციალურ ენერგიას სასრული ქმედების რადიუსი აქვს. ამ შემთხვევაში $S_l(k)$ -მატრიცას გარეშე ნულები არა აქვს. აქედან კი გამომდინარეობს გარეშე ნულების ჩამოშორების პრაქტიკული მეთოდი. საჭიროა პოტენციალი ჩამოიჭრას ნებისმიერად დიდ მანძილზე.

ამგვარად, მივიღეთ მნიშვნელოვანი შედეგი: ბმული მდგომარეობის ენერგია განსაზღვრება $S_l(k)$ -მატრიცის ნულებით უარყოფით წარმოსახვით ღერძზე ან, რაც იგივეა, ზემოთ დამტკიცებული სიმეტრიის თვისებით, $S_l(k)$ -მატრიცის პოლუსებით დადებით ვითარს ღერძზე. როცა პოტენციალს სასრული ქმედების რადიუსი არა აქვს, მაშინ, მართალია, შესაძლებელია გარეშე არაფიზიკური ნულების გაჩენაც, მაგრამ მათი ჩამოშორება შეგვიძლია პოტენციალის ჩამოჭრით რაიმე სასრულ მანძილზე, რომელსაც ბოლოს უსასრულობისაკენ მივასწრაფებთ.

როცა $S_l(k)$ -მატრიცას ნული აქვს $k_n = -i\alpha_n$ წერტილზე, მაშინ $f_l(-i\alpha_n) = 0$, რაც, (46,47) ფორმულის თანახმად, ნიშნავს, რომ $f(-i\alpha, r)$ ფუნქცია პროპორციულია $\varphi(-i\alpha, r)$ ფუნქციისა

$$f(-i\alpha_n, r) = C_n \varphi(-i\alpha_n, r), \quad (49,14)$$

სადაც C_n მუდმივია, ხოლო $n=1, 2, 3, \dots$, რადგან დიდი მანძილებისათვის $f(-i\alpha_n, r) \sim \exp(-\alpha_n r)$, ხოლო $r=0$ წერტილზე $\varphi=0$, ამიტომ $\varphi(-i\alpha_n, r)$ წარმოადგენს კვადრატულად ინტეგრებად ფუნქციას, რომელიც შეესაბამება ბმულ მდგომარეობას ენერგიით $\frac{1}{2\mu} \alpha_n^2 \hbar^2$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $k_n^2 = (-i\alpha_n)^2 = -\alpha_n^2$ ნამდვილი სიდიდეა. ამისათვის დავწეროთ შრედინგერის რადიალური ფუნქციების (46,58) განტოლება k_n -სათვის და გავმარაგოთ $\varphi_i^*(k_n, r)$ -ზე. შემდეგ დავწეროთ განტოლება $\varphi_i^*(k_n, r)$ ფუნქციისათვის, რომელსაც გავმარაგებთ $\varphi_i(k_n, r)$ -ზე. შემდეგ ეს ორი განტოლება ერთმანეთს გამოვაკლოთ. შედეგად მივიღებთ

$$\frac{d}{dr} \text{Im} [\varphi_i(k_n, r), \varphi_i^*(k_n, r)] = 2i \text{Im} k_n^2 |\varphi_i(k_n, r)|^2 \quad (49,15)$$

$\varphi_i(k_n, r)$ და $\varphi_i^*(k_n, r) = \varphi_i(k_n^*, r)$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ამიტომ ვრონსკიანი იქნება მუდმივი. აქედან გამომდინარეობს

$$\text{Im} k_n^2 |\varphi_i(k_n, r)|^2 = 0, \quad (49,16)$$

საიდანაც დავასკვნით $Imk_n^2=0$, ე. ი. k_n^2 ნამდვილია. ვაჩვენოთ, რომ იგი უარყოფითია. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ $k_n^2 > 0$. მაშინ k_n არის იქნებოდა. მაგრამ არსი k_n -ისათვის $f(k_n)$ არ შეიძლება ნული იყოს; მართლაც, რადგან შესრულებულია ტოლობა $f^2(-k_n, r) = f_1(k_n, r)$, ამიტომ ნული გახდებოდა $f(-k_n)$ იოსტის ფუნქციაც, ხოლო (46,47) ფორმულის თანახმად, ასევე გვექნებოდა $\varphi(k_n, r) = 0$, რაც დაუშვებელია (46,6) სასაზღვრო პირობებით. ამიტომ $f(k)$ შეიძლება ნული გახდეს მხოლოდ $k_n^2 < 0$ მნიშვნელობებისათვის, ე. ი. $f(k)$ ფუნქციის ნულები მდებარეობენ $Imk < 0$ ნახევარსიბრტყის ვითარს ლერძზე $k_n = -i\alpha_n$.

ახლა ვიპოვოთ (49,14) გამოსახულებაში შემავალი ნორმირების C_n კოეფიციენტი [6]. ამისათვის საკმარისია (49,14) შევითანოთ (46,47)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ $f(-i\alpha_n) = 0$, მაშინ მივიღებთ

$$C_n = -\frac{2\alpha_n}{f(i\alpha_n)}; \quad (49,17)$$

მაშასადამე, ბმული მდგომარეობის ასიმპტოტურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$\varphi(-i\alpha_n, r) = -\frac{f(i\alpha_n)}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n r}. \quad (49,18)$$

გამოვარკვიოთ შეიძლება თუ არა $k=0$ წერტილი $l=0$ მდგომარეობაში გადაღვედეს ბმულ მდგომარეობას. თუ $f(k)=0$, როცა $k=0$, მაშინ, ნაცლად (49,14) ფორმულისა, გვექნება

$$f(0, r) = C_0 \varphi(0, r). \quad (49,19)$$

როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ $f(0, r) \rightarrow 1$ და $\varphi(0, r)$ არ იქნება კვადრატულად ინტეგრებადი. მაშასადამე, $l=0$ შემთხვევაში $k=0$ არ იძლევა ბმულ მდგომარეობას. შევნიშნოთ, რომ, $l=0$ მდგომარეობისაგან განსხვავებით, $l \neq 0$ შემთხვევაში $k=0$ შეიძლება განსაზღვრავდეს ბმულ მდგომარეობას.

ახლა დავამტკიცოთ მნიშვნელოვანი დებულება, რომ $f_1(k)$ -ფუნქციის ნულები $k = k_n = -i\alpha_n$ წერტილებში მარტივებია. ამისათვის გამოვიდეთ (46,72) ფორმულიდან

$$f_1(k) = W[f_1(k, r), \varphi_1(k, r)], \quad (49,20)$$

იგი გავაწარმოოთ k^2 -ით და შემდეგ ჩავსვათ $k^2 = k_n^2$; გვექნება

$$\frac{df_1(k_n)}{dk_n^2} = W \left[\frac{df_1}{dk_n^2}, \varphi_1 \right] + W \left[f_1, \frac{d\varphi_1}{dk_n^2} \right]. \quad (49,21)$$

ვისარგებლოთ (49,14) ფორმულით; გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{df_1(k_n)}{dk_n^2} &= \frac{1}{C_n} W \left[\frac{df_1(k_n, r)}{dk_n^2}, f_1(k_n, r) \right] + \\ &+ C_n W \left[\varphi_1(k_n, r), \frac{d\varphi_1(k_n, r)}{dk_n^2} \right]. \end{aligned} \quad (49,22)$$

მეორე მხრივ, $f_i(k, r)$ და $\varphi_i(k, r)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შრედინგერის განტოლებას; ამასთან, $\varphi_i(k, r)$ ფუნქცია წერტილში $r=0$ ნულის ტოლია, ხოლო $f_i(k_n, r)$ უსასრულობაში ექსპონენციალურად ისპობა; ამიტომ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$W[\varphi_i(k, r), \varphi_i(k_n, r)] = (k^2 - k_n^2) \int_0^r \varphi_i(r, r') \varphi_i(k_n, r') dr', \quad (49,23)$$

$$W[f_i(k, r), f_i(k_n, r)] = (k^2 - k_n^2) \int_r^\infty f_i(k, r') f_i(k_n, r') dr'. \quad (49,24)$$

ეს გამოსახულებები გავაწარმოოთ k^2 -ით და შემდეგ გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $k = k_n$. მიღებული გამოსახულებების (49,22)-ში შეტანით მივიღებთ

$$\frac{df_i(k_n)}{dk_n^2} = - \left[C_n \int_0^r \varphi_i^2(k_n, r') dr' + \frac{1}{C_n} \int_r^\infty f_i^2(k_n, r') dr' \right]; \quad (49,25)$$

გავითვალისწინოთ (49,14) ფორმულა; მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{df_i(k_n)}{dk_n^2} = & - \left[C_n \int_0^r dr' \varphi_i^2(k_n, r') + \right. \\ & \left. C_n \int_r^\infty dr' \varphi_i^2(k_n, r') \right] = - C_n \int_0^\infty \varphi_i^2(k_n, r) dr. \end{aligned} \quad (49,26)$$

ეს უკანასკნელი ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{df_i(k_n)}{dk_n} = -2k_n C_n \int_0^\infty dr \varphi_i^2(k_n, r). \quad (49,27)$$

რამდენადაც $C_n \neq 0$, ხოლო $\varphi_i(k_n, r)$ ნამდვილია, ამიტომ წარმოებულ $\frac{df_i(k_n)}{dk_n}$ ნულისაგან განსხვავებულია; საიდანაც დავასკვნით, რომ $f_i(k)$ ფუნქციის ნულები $I_{n,k} < 0$ არეში მარტივებია.

ახლა მოვახდინოთ ბმული მდგომარეობის ფუნქციის ნორმირება. ბმული მდგომარეობის ფუნქცია აღვნიშნოთ $\chi_{n1}(r)$ -ით. ცხადია,

$$\chi_{n1}(r) = A_{n1} \varphi_i(-i\alpha_n, r). \quad (k_n = -i\alpha_n) \quad (49,28)$$

ნორმირების A_{n1} მუდმივი განისაზღვრება პირობით:

$$\int \chi_{n1}^2(r) dr = 1. \quad (49,29)$$

ამ ფორმულაში შევიტანოთ (49,28) გამოსახულება და გავითვალისწინოთ (49,27); გვექნება

$$-A_{n1}^2 \frac{1}{2k_n C_n} \frac{df_i(k_n)}{dk_n} = 1. \quad (49,30)$$

C_n მუდმივის (49,17) ფორმულის გათვალისწინებით κ საბოლოოდ მივიღებთ

$$A_{nl}^2 = - \frac{4\alpha_n^2}{f_l(i\alpha_n) \left[\frac{df_l(-i\alpha_n)}{d\alpha_n} \right]}. \quad (49.31)$$

შენიშნოთ, რომ ბმული მდგომარეობის $\chi_{nl}(r)$ ფუნქცია შეგვიძლია გამოვხატოთ იოსტის $f_l(-i\alpha_n, r)$ ფუნქციითაც. ცხადია, ადგილი ექნება დამოკიდებულებას

$$\chi_{nl}(r) = B_{nl} f_l(-i\alpha_n, r). \quad (49,32)$$

თუ გავითვალისწინებთ (49,14) და (49,28) ფორმულებს, მაშინ მივიღებთ

$$B_{nl}^2 = \frac{A_{nl}^2}{C_n^2} = \frac{f_l(i\alpha_n)}{\left[\frac{df_l(-i\alpha_n)}{d\alpha_n} \right]}. \quad (49,33)$$

რადგან გაფანტვის მატრიცის განმარტებით

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{f_l(k)}{f_l(-k)}, \quad (49,34)$$

ამიტომ ნაშთთა თეორიის გათვალისწინებით (49,33) ფორმულიდან გვექნება

$$B_{nl}^2 = \frac{(-1)^l}{2\pi} \oint S_l(k) dk, \quad (49.35)$$

სადაც კონტურად აღებულია მცირე რადიუსის წრე, რომელიც მარჯვენა მიმართულებით გარს უვლის $k_n = i\alpha_n$ პოლუსს. (49,35) დამოკიდებულება ამყარებს პირდაპირ კავშირს ბმული მდგომარეობის ნორმირების კოეფიციენტსა და გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცას შორის.

ამგვარად, როგორც ვხედავთ, გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცის საშუალებით შეგვიძლია აღვწეროთ არა მხოლოდ გაფანტვის ამოცანები, არამედ ბმული მდგომარეობებიც. ამასთან, ბმული მდგომარეობის აღწერისას $S_l(k)$ -მატრიცას შეიძლება აღმოაჩნდეს გარეშე ნულები, მაგრამ ყოველ ცალკეულ კონკრეტულ შემთხვევაში ამ ნულების ჩამოშორება დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

§ 50. ვირტუალური და კვანძისტაციონარული ღონეები

ჩვენ შევისწავლეთ გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცის ანალიზური თვისებები და ვაჩვენეთ, რომ მისი განსაკუთრებულობანი მდებარეობენ კომპლექსური k -სიბრტყის ქვედა ნახევარში, ან ზედა ნახევარსიბრტყის ვითარს ღერძზე. ამასთან, აღმოჩნდა, რომ ზედა ნახევარსიბრტყის ვითარს ღერძზე განლაგებულ პოლუსებს სისტემის ბმული მდგომარეობები შეესაბამება. საინტერესოა გამოირკვეს რა ფიზიკური შინაარსი აქვთ $S(k)$ -მატრიცის ნულებს დადებით ვითარს ღერძზე (მათ, როგორც ვიცით, შეესაბამება პოლუსები უარყოფით ვითარს ღერძზე) და $S(k)$ -მატრიცის პოლუსებს ქვედა ნახევარსიბრტყეში, რომლებიც ვითარს ღერძზე არ მდებარეობენ. სიმარტივის მიზნით შემოვისაზღვროთ $l=0$ შემთხვევით [34].

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $S(k)$ -მატრიცის პოლუსი ძვეს $Imk < 0$ სიბრტყის ვითარს ღერძზე, სიმეტრიის თვისებით მას შეესაბამება $S(k)$ -მატრიცის

ნული ვითარსი ლერძის დადებით მიმართულებაზე. $S(k)$ -მატრიცის პოლუსი $Imk < 0$ სიბრტყის ვითარს ლერძზე აღვნიშნოთ $k_n = -i\beta_n$ ($\beta_n > 0$). მაშინ $i\beta_n$ -წერტილში $S(i\beta_n) = 0$ და (46,47) ფორმულის თანახმად, რადიალური ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობისათვის $r \rightarrow \infty$ დროს გვექნება

$$\varphi(-i\beta_n, r) = \text{const } e^{\beta_n r} \quad (50,1)$$

მაშასადამე, ფუნქცია ექსპონენციალურად იზრდება და მისი ნორმირება შეუძლებელია. მდგომარეობას, რომელიც განისაზღვრება $S(k)$ -მატრიცის ნულით ვითარსი ლერძის დადებით მიმართულებაზე, უწოდებენ ანტიბმულ ანდა ვირტუალურ მდგომარეობას. ვირტუალური მდგომარეობის ენერგეტული დონეები განისაზღვრება ფორმულით

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \beta_n^2}{2\mu} \quad (50,2)$$

როგორც ვიცი, $Imk < 0$ არე შეესაბამება რიმანის ენერგეტული ზედაპირის მეორე, ე. ი. არაფიზიკურ ფურცელს. ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ვირტუალურ დონეებს შეესაბამებათ $S(E)$ -მატრიცის პოლუსები არაფიზიკურ ფურცელზე.

ვირტუალური მდგომარეობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ორი ნუკლონის გაფანტვის ამოცანა მცირე ენერგიებზე. რადგან ენერგია მცირეა, ამიტომ მცირე იქნება β_n -იც. ამის გამო იოსტის $f(k)$ ფუნქცია შეგვიძლია გავშალოთ $i\beta_n$ ხარისხებში მწკრივად და შემოვიანაზღვროთ პირველი წევრით. გვექნება

$$f(k) = A(k - i\beta_n) + \dots + i; \quad (50,3)$$

მაშასადამე, $S(k)$ -მატრიცისათვის მცირე ენერგიებზე მივიღებთ გამოსახულებას

$$S(k) = \frac{f(k)}{f(-k)} = \frac{\beta_n + ik}{\beta_n - ik} \quad (50,4)$$

თუ გავიხსენებთ (23,19) და (23,28) ფორმულებს, გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = \beta_n, \quad (50,5)$$

ხოლო გაფანტვის ინტეგრალურ განიკვეთს ექნება სახე

$$\sigma_n(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \beta_n^2} \quad (50,6)$$

როცა ენერგია ნულისაქენ მიისწრაფვის, მაშინ

$$\sigma_n^{(s)}(0) = \frac{4\pi}{\beta_n^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{2\mu E_n} \quad (50,7)$$

მაშასადამე, თუ ვირტუალური დონის ენერგია ძალიან მცირეა, $\sigma_n^{(s)}(0)$ განიკვეთს ექნება ძალიან დიდი მნიშვნელობა. ნეიტრონ-პროტონის სისტემას, როგორც ვიცი, აქვს ერთი ენერგეტული დონე $\mathcal{E} = 2,23 \text{ Mev}$. ენერგიის ეს დონე განისაზღვრება $S(k)$ -მატრიცის ნულით $k_n = -i\alpha_n$ წერტილზე. მცირე ენერგიებზე $f(k)$ იოსტის ფუნქცია კვლავ შეგვიძლია გავშალოთ მწკრივად. შედეგად $S(k)$ -მატრიცისათვის მივიღებთ

$$S(k) = \frac{\alpha_n - ik}{\alpha_n + ik}, \quad (k \ll 1) \quad (50,8)$$

როსელიც მოგვცემს შემდეგ ფორმულას:

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = -\alpha_n, \quad (\alpha_n > 0) \quad (50,9)$$

ხოლო (n, γ) გაფანტვის ინტეგრალური განივკვეთისათვის გვექნება

$$\sigma_n^{(1)}(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \alpha_n^2} \quad \alpha_n^2 = \frac{2\mu \mathcal{E}_n}{\hbar^2}. \quad (50,10)$$

ნულოვან ენერგიაზე კი განივკვეთი ტოლია

$$\sigma_n^{(1)}(0) = \frac{4\pi \hbar^2}{2\mu \mathcal{E}} = 3,63 \cdot 10^{-21} \text{ სმ}^2. \quad (50,11)$$

(n, γ) გაფანტვის განივკვეთის აქ მიღებული (50,6) და (50,10) ფორმულები ჩვენ გამოიყვანეთ § 3i ფუნქტური რადიუსის მიახლოებაში და აღენიშნეთ, რომ (50,10) ფორმულა გამოხატავს გაფანტვას ტრიპლეტურ მდგომარეობაში, ხოლო (50,6)—სინგლეტურში.

იმის გამო, რომ განივკვეთის თეორიული მნიშვნელობა (50,11) გაცილებით ნაკლები აღმოჩნდა ექსპერიმენტულზე $\sigma_{\text{exp}}(0) = 20,5 \cdot 10^{-21} \text{ სმ}^2$, ვიგნერის მიერ დამტკიცებული იყო, რომ, გარდა ტრიპლეტური გაფანტვისა, ადგილი აქვს გაფანტვას სინგლეტურ მდგომარეობაშიც ვირტუალურ დონეზე. თანახმად (50,7) ფორმულისა, ნულოვან ენერგიაზე გაფანტვის განივკვეთის ექსპერიმენტული მნიშვნელობის მისაღებად საჭიროა ვირტუალური დონის ენერგია ტოლი იყოს

$$\frac{\hbar^2 \beta_n^2}{2\mu} = 0,0664 \text{ Mev.}$$

გაფანტვის განივკვეთში როგორც α_n , ისე β_n შედის კვადრატში, ამიტომ მათ ნიშანს მხოლოდ გაფანტვის ექსპერიმენტით ვერ განვსაზღვრავთ. დეიტრონის შემთხვევაში ცნობილია, რომ გვაქვს მხოლოდ ერთი ბმული მდგომარეობა $\mathcal{E} = 2,23 \text{ Mev}$ ბმის ენერგიით; იმის გამო, რომ (50,11) განივკვეთის მნიშვნელობა არ ეთანხმება ექსპერიმენტს, ცალსახად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $0,0664 \text{ Mev}$ დონე ვირტუალურია. საზოგადოდ ვირტუალური დონის ასეთი ცალსახა იდენტიფიკაცია შესაძლებელია მხოლოდ ისეთ შემთხვევაში, როცა სისტემის ყველა ნამდვილი ენერგეტული დონე ცნობილია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $f(k)$ იოსტის ფუნქცია ხდება ნული კომპლექსური ქვედა ნახევარსფერის ისეთი k სიდიდეებისათვის, რომლებიც არ მდებარეობენ ვითარს ლერძზე. ვთქვათ, მაგალითად, $S(k)$ -მატრიცის პოლუსი აქვს $k = k_1 - ik_2$ მნიშვნელობისათვის, სადაც k_1 და k_2 ნამდვილი დადებითი სიდიდეებია. მაშინ, ცხადია,

$$f(-k_1 + ik_2) = 0. \quad (50,12)$$

თანახმად (46,47) ფორმულისა, $\varphi(k, r)$ ფუნქციას ექნება შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$\varphi(k, r) = f(-k_1 + ik_2, r) \rightarrow A e^{ik_1 r} e^{k_2 r}. \quad (50,13)$$

ეს ფუნქცია შეესაბამება ვანშლად ტალღას, როცა $k_1 > 0$. ამასთანავე, $e^{k_2 r} \rightarrow \infty$, თუ $k_2 > 0$, როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში ტალღური ფუნქცია ნორმირებადი

არ არის, თუ ამ ასიმპტოტური ფუნქციით გამოვთვლით ალბათობის დენის ვექტორს, ძალიან დიდი R რადიუსის სფეროში, მივიღებთ

$$J = \frac{i\hbar}{2\mu} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{k_1 \hbar}{\mu} |\varphi(R)|^2, \quad (50,14)$$

სადაც

$$|\varphi(R)|^2 = |A|^2 e^{2k_2 R}. \quad (50,15)$$

როგორც ვხედავთ, მანძილის ზრდასთან ერთად ალბათობის ნაკადიც იზრდება. რაც ეწინააღმდეგება ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონს. სტაციონარულ მდგომარეობაში ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონს უზრუნველყოფს განშლადი და კრებადი ტალღების ერთდროული მონაწილეობა ზოგად ამოხსნაში. (50,14) ნაკადი განშლადია, რადგან (46,47) ფუნქციაში მხოლოდ განშლადი ტალღა დავტოვეთ. ასეთი სიტუაციის დროს მდგომარეობა შეიძლება გამოვასწოროთ და ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონი გადავარჩინოთ კომპლექსური ენერჯიის შემოღებით. ვიგულისხმობთ, რომ სტაციონარული მდგომარეობისათვის დამახასიათებელ მამრავლში $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right)$ ენერჯია კომპლექსურია. გავითვალისწინოთ, რომ $k = k_1 - ik_2$, მაშინ

$$E = E_0 - \frac{i}{2} \Gamma, \quad (50,16)$$

სადაც

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu} (k_1^2 - k_2^2), \quad (50,17)$$

ხოლო

$$\Gamma = \frac{2k_1 k_2 \hbar^2}{\mu} > 0. \quad (50,18)$$

ამ აღნიშვნებში ნაკადი პროპორციული გამოვა შემდეგი სიდიდისა:

$$|\varphi(R) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}|^2 = |\varphi(R)|^2 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} \quad (50,19)$$

ამ გამოსახულებიდან კი ჩანს, რომ ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონი შეიძლება დაცული იყოს იმ შემთხვევაშიც, როცა ტალღურ ფუნქციაში ვითვალისწინებთ მხოლოდ განშლად ტალღას, რამდენადაც $|\varphi(R)|^2$ გამოსახულების უსასრულოდ ზრდა შეიძლება კომპენსირებულ იქნეს $\exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)$ კლებადი ექსპონენციალური მამრავლით.

როცა $\Gamma > 0$, მაშინ ხდება ალბათობის დროის მიხედვით ექსპონენციალური შემცირება, ამასთან, რადიალური ფუნქციის ექსპონენციალურად ზრდის გამო ნაწილაკები ერთმანეთს სცილდებიან. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში მოხდება სისტემის დაშლა. ცხადია, სისტემის საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლიობა დაშლის მიმართ $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$ იქნება. ვთქვათ, სისტემის დამახასიათებელი დრო—მისი პერიოდი—გაცი-

ლებით ნაკლებია, ვიდრე \hbar/Γ , მაშინ სისტემა შედარებით დიდხანს ცოცხლობს და ამ შემთხვევაში მდგომარეობას ეწოდება კვაზისტაბილური.

როცა სისტემას დადებითი ენერჯია აქვს, მაშინ მისი სპექტრი უწყვეტია და ნაწილაკები ინფინიტურ მოძრაობას ასრულებენ. მაგრამ, თუკი სისტემა რალაც

პირობების გამო, გარკვეული τ -დროის განმავლობაში, სივრცის მცირე უბანშია ლოკალიზებული და კვაზისტაბილურ მდგომარეობას ქმნის, მაშინ ენერგეტული სპექტრი შეიძლება იყოს კვაზიდისკრეტული, მიუხედავად იმისა, რომ მისი სრული ენერგია დადებითია. ასეთ მეტასტაბილური სისტემის ენერგეტულ დონეებს კვაზისტაციონარულს უწოდებენ. ეს დონეები არ იქნებიან ერთმანეთისაგან მკვეთრად გამოყოფილი და მათ გარკვეული სიგანე ახასიათებთ. ამასთან, დონის სიგანე განსაზღვრული იქნება ზემოთ შემოღებული Γ -სიდიდით. განუზღვრელობის თანაფარდობის ძალით ნათელია, რომ, რაც მეტია დონის სიგანე, მით მცირე იქნება კვაზისტაციონარული სისტემის სიოცხლის ხანგრძლიობა და პირიქით.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცის პოლუსი მდებარეობს $k = -k_1 - ik_2$ წერტილში, სადაც k_1 და k_2 კვლავ ნამდვილი დადებითი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში ნული იქნება იოსტის ფუნქცია $f(k_1 + ik_2)$. (46,47) რადიალური ფუნქციის თანახმად კი უსასრულობაში გვექნება კრებადი ტალღა. დენის ნაკადი მიმართული იქნება რადიალურად ცენტრისაკენ. გარდა ამისა, განხილულ შემთხვევაში $\Gamma = -\frac{2k_1 k_2 \hbar^2}{\mu}$ უარყოფითია, ამიტომ ნაკადი სათაგის მიმართ

თულებით ექსპონენციალურად იზრდება. მაშასადამე, ჩვენ საქმე გვექნება ისეთ კვაზისტაციონარულ მდგომარეობასთან, რომლის დროსაც ზღემა ნაწილაკების ჩაქერა—შთანთქმა.

კვაზისტაციონარული დონეების არსებობა მკლავდება ნაწილაკთა გაფანტვის დროს. როცა დაცემული ნაწილაკის ენერგია ახლოსაა კვაზისტაციონარული სისტემის რომელიმე დონესთან, მაშინ გაფანტვის განიკვეთს რეზონანსულად დიდი მნიშვნელობა აქვს.

ამგვარად, მივიღეთ მნიშვნელოვანი შედეგი, რომ თუ $S(k)$ -მატრიცას პოლუსები აქვს კომპლექსური k -სიბრტყის ქვედა ნახევარში, მაშინ კვანტურ სისტემას გააჩნია კვაზისტაციონარული ენერგეტული დონეები. ამასთან, როცა პოლუსი მდებარეობს მესამე მეოთხედში ($k = -k_1 - ik_2$), მაშინ გვაქვს ნაწილაკის მიტაცება, ხოლო თუ პოლუსი მეოთხე მეოთხედშია ($k = k_1 - ik_2$) მოთავსებული, მაშინ ზღემა სისტემის დაშლა. ნათელია, რომ კვაზისტაციონარული დონეების შეესაბამისი პოლუსები მდებარეობენ კომპლექსური ენერგეტული სიბრტყის არაფიზიკურ ფურცელზე.

ახლა ჩვენ უკვე ვიცით რა ფიზიკური შინაარსი შეესაბამება გაფანტვის $S(k)$ -მატრიცის თითოეულ განსაკუთრებულობას. $S(k)$ მატრიცას k კომპლექსურ სიბრტყეზე, პოლუსები აქვს ან $Imk < 0$ ნახევარსიბრტყეში, ან $Imk > 0$ არის დადებით ვითარს ღერძზე. ვითარსი ღერძის დადებით მიმართულებაზე განლაგებულ პოლუსებს შეესატყვისება სისტემის ბმული მდგომარეობების ენერგიები. პოლუსს ამავე ღერძის უარყოფით ნაწილში შეესაბამება სისტემის ანტიბმული (ვირტუალური) მდგომარეობა, ხოლო პოლუსებს $Imk < 0$ ნახევარ სიბრტყეში, რომლებიც ვითარს ღერძზე არ მდებარეობენ, — კვაზისტაციონარული მდგომარეობები.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ $S(k)$ -მატრიცისა და გაფანტვის $T(k)$ -მატრიცის ურთიერთკავშირის ფორმულიდან ნათელია, რომ $T(k)$ მატრიცის პოლუსებსაც ვითარსი ღერძის დადებით მიმართულებაზე შეესაბამება სისტემის ბმული მდგომარეობის ენერგიები.

§ 51. იოსტის ფუნქციების ზოგირტი კონკრეტული კონკრეტული სისხის
 ურთიერთმედიანის შემთხვევაში

ვიპოვოთ იოსტის ფუნქციების კონკრეტული გამოხატულებანი ზოგირტი-
 მნიშვნელოვანი პოტენციალებისათვის, რომლებიც ხშირად გამოიყენებიან პრაქტი-
 კული გამოთვლების დროს. კერძოდ, ჩვენ ვიპოვოთ იოსტის ფუნქციებს ცენტრალური
 სიმეტრიის სასრული კედლების მქონე პოტენციალური ორმოსათვის, კულ-
 ტენისა და ექსპონენციალური პოტენციალებისათვის.

პოტენციალური ორმო. განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა ცენტრალური
 სიმეტრიის პოტენციალური ორმოში ნებისმიერი მომენტის შემთხვევაში. ვთქვათ,
 ორმოს სიღრმე V_0 -ის ტოლია, ხოლო სიგანე $-r_0$ -ისა. შრედინგერის რადიალური
 ფუნქციების განტოლების ამონახსნები სხვადასხვა იქნება $r < r_0$ და $r > r_0$ არსისათ-
 ვის. იმის გამო, რომ $r > r_0$ არეში $f_l(k, r)$ იოსტის ფუნქცია უნდა აკმაყოფილე-
 ბდეს (46,62) სასაზღვრო პირობას, ამიტომ ამონახსნებს ექნებათ ასეთი სახე:

$$f_l(k, r) = -ikr h_l^{(2)}(kr), \quad r > r_0 \quad (51,1)$$

$$f_l(k, r) = A_l j_l^{(1)}(\beta r) + B_l y_l^{(2)}(\beta r); \quad r < r_0 \quad (51,2)$$

სადაც A_l და B_l მუდმივებია, ხოლო k და β -სათვის შემოვიღოთ სტანდარტული
 აღნიშვნები:

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\mu(V_0 + E)}{\hbar^2} = b^2 + k^2. \quad (51,3)$$

$h_l^{(1)}(x)$ და $h_l^{(2)}(x)$ პანკელის პირველი და მეორე გვარის სფერული ფუნქციებია.
 თუ გავიხსენებთ მათ ასიმპტოტურ გამოსახულებებს, ადვილად დავინახავთ, რომ
 $f_l(k, r)$ ფუნქცია $r \rightarrow \infty$ -სათვის მართლაც აკმაყოფილებს (46,62) სასაზღვრო
 პირობას. A_l და B_l მუდმივები განისაზღვრება შეკერვის პირობიდან $r = r_0$ წერ-
 ტილზე; გვექნება:

$$-ikr_0 h_l^{(2)}(kr_0) = A_l j_l^{(1)}(\beta r_0) + B_l y_l^{(2)}(\beta r_0), \quad (51,4)$$

$$-i[kr_0 h_l^{(2)}(kr)]'_{r_0} = A_l [j_l^{(1)}(\beta r)]'_{r_0} + B_l [y_l^{(2)}(\beta r)]'_{r_0}. \quad (51,5)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი დაკავშირებულია ვრონსკიანთან, ამიტომ ადვილია მისი
 გამოთვლა

$$\Delta = (\beta r_0)^2 \beta^2 V [h_l^{(1)}(\beta r_0), h_l^{(2)}(\beta r_0)] = -2i\beta. \quad (51,6)$$

ამის შემდეგ ადვილად ვიპოვოთ, რომ:

$$A_l = \frac{kr_0^2}{2} [h_l^{(2)}(kr_0) h_l^{(2)'}(\beta r_0) - h_l^{(2)'}(kr_0) h_l^{(2)}(\beta r_0)], \quad (51,7)$$

$$B_l = \frac{kr_0^2}{2} [h_l^{(1)}(\beta r_0) h_l^{(1)'}(kr_0) - h_l^{(1)'}(\beta r_0) h_l^{(1)}(kr_0)]. \quad (51,8)$$

ახლა შემოვიღოთ $f_l(k)$ იოსტის ფუნქცია; (46,64) განმარტების ძალით

$$f_l(k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\pm kr)^l}{(2l-1)!!} f_l(\pm k, r). \quad (51,9)$$

გამოვიყენოთ (51,2), გამოსახულება და გავიხსენოთ, რომ

$$h_l^{(1,2)}(x) = \mp i \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}. \quad (51,10)$$

გარდა ამისა, რადგან $h_l^{(1,2)}(z) = j_l(z)$ იმ $j_l(z)$, ამიტომ ადვილად ვიპოვით

$$f_l(k) = -i \left(\frac{k}{\beta} \right)^l k r_0^2 \{ h_l^{(2)}(k r_0) j_l'(r_0) - h_l^{(1)'}(k r_0) j_l(r_0) \}. \quad (51,11)$$

გამოვიყენოთ ბესელის სფერული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა

$$y_l'(z) = y_{l-1}(z) - \frac{l+1}{z} y_l(z), \quad (51,12)$$

შედეგად გვექნება იოსტის შემდეგი ფუნქციები¹:

$$f_l(k) = -i \left(\frac{k}{\beta} \right)^l k r_0^2 \{ \beta j_{l-1}(r_0) h_l^{(2)'}(k r_0) - k j_l(r_0) h_{l-1}^{(2)}(k r_0) \}, \quad (51,13)$$

$$f_l(-k) = i \left(\frac{-k}{\beta} \right)^l k r_0^2 \{ \beta j_{l-1}(r_0) h_l^{(2)}(-k r_0) + k j_l(r_0) h_{l-1}^{(2)}(-k r_0) \}. \quad (51,14)$$

გაფანტვის $S_l(k)$ -მატრიცისათვის კი, თანახმად (46,68) განმარტებისა, გვექნება გამოსახულება

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{k j_l(\beta r_0) h_{l-1}^{(2)}(k r_0) - \beta j_{l-1}(\beta r_0) h_l^{(2)}(k r_0)}{k j_l(\beta r_0) h_{l-1}^{(2)}(-k r_0) + \beta j_{l-1}(\beta r_0) h_l^{(2)}(-k r_0)}. \quad (51,15)$$

ბმული მდგომარეობის ენერგიები განისაზღვრება $S_l(k)$ -მატრიცის $k = iz$ პოლუსებით ვითარსი ლერძის დადებით მონაკვეთზე. შედეგად მივიღებთ

$$\beta j_{l-1}(\beta r_0) h_l^{(2)}(-i \alpha r_0) + i \alpha j_l(\beta r_0) h_{l-1}^{(2)}(-i \alpha r_0) = 0. \quad (51,16)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $h_l^{(2)}(-iz) = -i k_l(z)$, სადაც $k_l(z)$ მაკდონალდის სფერული ფუნქციაა, მივიღებთ ორმოს საკუთარი მნიშვნელობების ჩვენთვის კარგად ცნობილ ფორმულას

$$\frac{\beta j_{l-1}(\beta r_0)}{j_l(\beta r_0)} = - \frac{\alpha k_{l-1}(\alpha r_0)}{k_l(\alpha r_0)}, \quad (51,17)$$

საიდანაც განისაზღვრება ბმული მდგომარეობის $\alpha = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2\mu}$ ენერგიები.

საინტერესოა ცალკე განვიხილოთ $S_l(k)$ -მატრიცის გამოსახულება $l=0$ შემთხვევაში; მივიღებთ

$$S(k) = e^{-2i k r_0} \frac{\beta \operatorname{ctg} \beta r_0 + i k}{\beta \operatorname{ctg} \beta r_0 - i k}. \quad (51,18)$$

ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ასევე ადვილად ვიპოვით ვირტუალური დონეების ენერგიას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ვირტუალური მდგომარეობის ენერგია განი-

¹ იოსტის ფუნქციები შეგვიძლია დაუკავშიროთ § 41-ში განხილულ $I_l(\beta k^+ | r_0)$ ფუნქციებს. სახელდობრ გვექნება

$$f_l(k) = -i \left(\frac{k}{\beta} \right)^l k r_0^2 I_l'(\beta k^+ | r_0), \quad f_l(-k) = i \left(\frac{k}{\beta} \right)^l k r_0^2 I_l'(\beta k^+ | r_0)$$

საზღვრება $S_1(k)$ -მატრიცის პოლუსით უარყოფით ვითარს ღერძზე. მაგალითად, $l=0$ მდგომარეობაში გვექნება ფორმულა

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} \beta r_0 = \pi, \quad (51,19)$$

სადაც $\frac{h^2 r_0^2}{2\mu}$ განსაზღვრავს ვირტუალური დონეების ენერგიას.

ჰულტენის პოტენციალი. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ორი ნაწილაკი ურთიერთქმედებს ჰულტენის პოტენციალით:

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/r_0}}{1 - e^{-r/r_0}}. \quad (51,20)$$

განვიხილოთ $l=0$ მომენტი. ამ პოტენციალისათვის $l=0$ შემთხვევაში ჩვენ § 16-ში ვიპოვეთ შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლების უწყვეტი სპექტრის ისეთი ამონახსნი, რომელიც $r = \infty$ ზღვარში ერთის ტოლი ხდება, ამიტომ იოსტის ფუნქცია ასეთი იქნება:

$$f(k, r) = e^{-ikr} F(A, B, C; e^{-r/r_0}) \quad (51,21)$$

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის A, B, C , პარამეტრები განსაზღვრება (16,31) – (16,33) ფორმულებით. რაც შეეხება იოსტის $f(k, 0) = f(k)$ ფუნქციას, იგი ეტოლება

$$f(k) = F(A, B, C; 1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(A+n)(B+n)}{n(A+B+n)}. \quad (51,22)$$

პარამეტრების მნიშვნელობების ჩასმით ადვილად მივიღებთ საბოლოო გამოსახულებას

$$f(k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{b_n^2 r_0^2}{n(n + 2ikr_0)} \right]; \quad (51,23)$$

თუ განსაზღვრავთ $f(-k)$ ფუნქციას, მაშინ ვიპოვით $S(k)$ -მატრიცასაც. ამასთან აღნიშნოთ, რომ იოსტის $f(-k)$ ფუნქცია დაემთხვევა ჰულტენის პოტენციალზე გაფანტვის ინტეგრალური განტოლების ფრედჰოლმის დეტერმინანტს. როცა $k = -i\alpha n$, მაშინ $f(-i\alpha n) = 0$ განსაზღვრავს ზეშედილი მდგომარეობებს; სახელდობრ, გვექნება

$$\alpha_n = \frac{b_n^2 r_0^2 - n^2}{2nr_0}, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (51,24)$$

ამასთან $n < br_0$ ენერგია განსაზღვრება ფორმულით

$$\mathcal{E}_n = \frac{h^2(b_n^2 r_0^2 - n^2)^2}{8\mu n^2 r_0^2}, \quad (51,25)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა ჩვენ მიერ აღრე მიღებულ (16,19) ფორმულას.

როგორც ვიცით, ვირტუალური მდგომარეობის ენერგიები განსაზღვრება $S(k)$ -მატრიცის ნულებით $k_n = i\gamma_n$ წერტილებში, სადაც $\gamma_n > 0$. მაშასადამე, ეს დონეები მოიძებნება $f(-i\gamma_n) = \infty$ პირობით, რაც ჩვენს შემთხვევაში გვაძლევს

$$\gamma_n = -\frac{n}{2r_0}. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (51,26)$$

მივიღეთ საინტერესო შედეგი, რომ პულტენის პოტენციალს ჰქონია ვირტუალური დონეების უსასრულო სიმრავლე და, რაც არსებითია, ღონეები პოტენციალური ენერჯიის სიღრმეზე დამოკიდებული არ ყოფილა. ვირტუალური დონეები მხოლოდ ურთიერთქმედების ძალის r_0 -რადიუსით განისაზღვრებიან.

ექსპონენციალური პოტენციალური ორმო. ექსპონენციალური ორმოს ამოცანის შემთხვევაში იოსტის ფუნქციის მოძებნას პრინციპული მნიშვნელობა აქვს, რადგან ამ პოტენციალისათვის, როგორც აღენიშნეთ, $S(k)$ -მატრიცას გარეშე ნულები გააჩნია. გარდა ამისა, როცა ვიპოვით იოსტის ფუნქციებს, შეძლევ განვიხილავთ გარეშე ნულების თავიდან მოცილების მეთოდს. ექსპონენციალური პოტენციალური ორმო განისაზღვრება ფორმულით

$$V(r) = -V_0 e^{-\frac{r}{r_0}}. \quad (51,27)$$

ასეთი პოტენციალური ორმოს ამონახსნები $l=0$ -სათვის მოძებნილი გვაქვს § 13-ში. რადგან იოსტის ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f(k, r) = 1, \quad (51,28)$$

ამიტომ (13,13) ამონახსნში უნდა დავიტოვოთ ის წევრი, რომელიც უსასრულობაში იზღვევა e^{-ikr} სიდიდეს; ამგვარად,

$$f(k, r) = A J_{i\omega}(x), \quad (51,29)$$

სადაც

$$x = 2br_0 e^{-\frac{r}{r_0}} = \beta e^{-\frac{r}{r_0}}, \quad \omega = 2kr_0. \quad (51,30)$$

თუ (51,29) ფუნქციას შევითანთ (51,28) სასაზღვრო პირობაში და გავითვალისწინებთ (13,17) ასიმპტოტურ ფორმულას, ადვილად ვიპოვით A კოეფიციენტს; გვექნება

$$A = (br_0)^{-i\omega} \Gamma(1+i\omega), \quad (51,31)$$

ხოლო იოსტის ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$f(k, r) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-i\omega} \Gamma(1+i\omega) J_{i\omega}\left(\beta e^{-\frac{r}{r_0}}\right). \quad (51,32)$$

$f(k) = f(k, 0)$ ფუნქციისათვის კი გვექნება ფორმულა

$$f(k) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-i\omega} \Gamma(1+i\omega) J_{i\omega}\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (51,33)$$

ასევე ადვილად ვიპოვით გაფანტვის მატრიცასაც; სახელდობრ, გვექნება

$$S(k) = e^{-2i\omega} \frac{\Gamma(1+i\omega)}{\Gamma(1-i\omega)} \frac{J_{i\omega}(\beta)}{J_{-i\omega}(\beta)}, \quad (51,34)$$

რაც ემთხვევა ჩვენ მიერ აღრე სხვა გზით მიღებულ (13,20) გამოსახულებას.

როგორც § 49-ში გამოვარკვეეთ, $S(k)$ -მატრიცის ამ გამოსახულებას აქვს გარეშე ნულები. ეს მეტად სერიოზული ნაკლია $S(k)$ -მატრიცის თეორიისა, რამ-

დენადაც ზოგად შემთხვევაში იგი აღარ იძლევა ბმული მდგომარეობებისა და გაფანტვის ამოცანის ერთიანი აღწერის მეთოდს. მაგრამ, როგორც მივუთითეთ, ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში, როცა პოტენციალს სასრული ქმედების რადიუსი არ გააჩნია, რაიმე დიდ მანძილზე პოტენციალის ხელოვნური ჩამოჭრით. შესაძლებელია ზედმეტი ნულების მოცილება. მაშასადამე, პრაქტიკულად, ჩვენს შემთხვევაში (51,27) ორმოს ნაცვლად უნდა განვიხილოთ ჩამოჭრილი ორმო [32]:

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 e^{-r/r_0}, & r < R \\ V(r) &= 0, & r > R \end{aligned} \quad (51,35)$$

$r < R$ არეში ზოგადი ამონახსნი კვლავ (13,16) სახით უნდა ავიღოთ, რადგან იგი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას $r=0$ წერტილში

$$\varphi(k, r) = A [J_{-i\omega}(\beta) J_{i\omega}(x) - J_{i\omega}(\beta) J_{-i\omega}(x)]. \quad r < R \quad (51,36)$$

იმ არეში კი, სადაც $r > R$, შეგვიძლია ავიღოთ ტალღური ფუნქცია

$$\chi(k, r) = B(e^{-ikr} - S(k) e^{ikr}). \quad r > R \quad (51,37)$$

ამ ორი ფუნქციის წყვეტის $r=R$ წერტილზე შეკერვით და ბესელის ფუნქციების წარმოებულების ფორმულების გამოყენებით ადვილად მივიღებთ

$$S(k) = e^{-2ikR} \frac{M(\omega, R)}{N(\omega, R)}, \quad (51,38)$$

სადაც M და N ფუნქციები განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$M(\omega, R) = J_{-i\omega}(\beta) J_{i\omega+1}\left(\beta e^{-\frac{R}{r_0}}\right) + J_{i\omega}(\beta) J_{-(i\omega+1)}\left(\beta e^{-\frac{R}{r_0}}\right), \quad (51,39)$$

$$N(\omega, R) = J_{-i\omega}(\beta) J_{i\omega-1}\left(\beta e^{-\frac{R}{r_0}}\right) + J_{i\omega}(\beta) J_{-(i\omega-1)}\left(\beta e^{-\frac{R}{r_0}}\right); \quad (51,40)$$

ნათელია, რომ $S(k)$ -მატრიცას $k_n = -i\omega_n$ წერტილში ნული ექნება მაშინ, როცა $M(\omega, R) = 0$, რაც $R \rightarrow \infty$ -ის დროს ზუსტად დაემთხვევა საკუთარი მნიშვნელობების (13,7) განტოლებას. $S(k)$ -მატრიცას სხვა ნულები აღარ ექნება და, ამგვარად, პოტენციალის ჩამოჭრის შედეგად $S(k)$ -მატრიცის გარეშე ნულები ამოვარდა.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ გარეშე არაფიზიკური ნულების გაჩენა დამახასიათებელია პოტენციალთა იმ კლასისათვის, რომლებიც უსასრულობაში მისწრაფიან ნულისაკენ e^{-r/r_0} სახით. ეს გარემოება ადვილად შეიძლება შევაპოწმოთ იმ შემთხვევაში, როცა პოტენციალურ ენერჯიას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} V(r) &= U(r), & r < R \\ V(r) &= -V_0 e^{-r/r_0}, & r > R \end{aligned} \quad (51,41)$$

სადაც $U(r)$ განსხვავდება ექსპონენტისაგან. შიგა არეში ჩვენ გვექნება $\varphi(k, r)$ ამონახსნი, რომელიც ნული უნდა იყოს $r=0$ წერტილში. გარე არეში კი ამონახსნს ექნება (51,32) ფორმა. იოსტის ფუნქციას ვიპოვიით (46,48) ფორმულათ.

თუ გამოვიყენებთ შიგა და გარე არის ფუნქციების შეკერვის პირობას $r = R$ წერტილზე. რადგან (51,32) ფუნქცია შეიცავს $\Gamma(1+i\omega)$ მამრავლს, ამიტომ იოსტის ფუნქციაც საზოგადოდ ამ სილიდებზე იქნება დამოკიდებული, რაც, როგორც წესი, ზედმეტ ნულებს მოგვცემს.

§ 52. დისპერსიული თანაფარდობანი იოსტის ფუნქციებისათვის

დისპერსიული თანაფარდობანი დიდ როლს ასრულებენ თანამედროვე ფიზიკაში. ისინი გარკვეულ კავშირს ამყარებენ სხვადასხვა სილიდებებს შორის და გვეხმარებიან ფიზიკური მოვლენების ზოგადი ხასიათის დადგენაში. აღსანიშნავია, რომ, როგორც შედეგი, დისპერსიული თანაფარდობები გამომდინარეობენ გაფანტვის მატრიცის ანალიზურობის თვისებიდან კომპლექსური ენერჯის სიბრტყეში.

დისპერსიული თანაფარდობების მკაცრი გამოყვანა ველის კვანტური თეორიის ძირითად აქსიომებზე დაყრდნობით მოგვცა ნ. ნ. ბოგოლიუბოვმა [142].

დისპერსიულმა თანაფარდობებმა ბოლო დროს განსაკუთრებული მნიშვნელობა მოიპოვეს ბირთვისა და ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში. როგორც ვიცით, ნუკლონებისა და საერთოდ ნაწილაკთა გაფანტვის თეორიის ძირითადი მიზანი მდგომარეობს ურთიერთქმედების პოტენციალის სახის დადგენაში, რისთვისაც საჭიროა გაფანტვის ფაზის აღდგენა გაფანტვის განივკვეთის ექსპერიმენტული მნიშვნელობიდან; ეს პროცედურა, რომელსაც ფაზურ ანალიზს უწოდებენ, როგორც თავის დროზე მიეუთითეთ, ცალსახა არ არის. განივკვეთის ერთი და იგივე მნიშვნელობა შეიძლება მივიღოთ ფაზების ორი ერთმანეთისაგან ნიშნით განსხვავებული ერთობლიობისათვის. დისპერსიული თანაფარდობანი გაფანტვის ამპლიტუდისათვის, პრინციპში, საშუალებას იძლევა, მოცემული განივკვეთის მნიშვნელობებით ყველა ენერჯიაზე და ბმული მდგომარეობის ენერჯიებით, ფაზის ნამდვილი ნიშნის განსაზღვრისა. დისპერსიულ თანაფარდობებს აქვთ მრავალი სხვა გამოყენებაც.

ჩვენ შემოვისაზღვრებით დისპერსიული თანაფარდობების განხილვით მხოლოდ იოსტის ფუნქციებისათვის [6].

დისპერსიული თანაფარდობის გამოყვანა იოსტის ფუნქციისათვის მეტად მარტივია. იგი ეყრდნობა კოშის თეორემას ანალიზური ფუნქციებისათვის.

როცა $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა $|z| \leq D$ არეში, მაშინ ამ არის რაიმე ჩაკტილ კონტურზე აღებული ინტეგრალი ტოლია

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{z' - z} \quad (52,1)$$

სადაც z -მდებარეობს კონტურის შიგნით. როცა z წერტილი კონტურის გარეთაა მოთავსებული, მაშინ (52,1) ინტეგრალი ნულის ტოლია. ხოლო თუ z -წერტილი კონტურზე მდებარეობს, მაშინ ინტეგრალი აიღება კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით

$$f(z) = \frac{\mathcal{P}}{\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{z' - z}. \quad (52,2)$$

ახლა გამოვიყენოთ ეს ფორმულები იოსტის $f_i(k)$ ფუნქციებისათვის. როგორც ვიცი, როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ $f_i(k) = 1$ მთელ $Imk < 0$ ნახევარსიბრტყეზე არსი ღერძის ჩათვლით. ამ დროს ნებისმიერი k -წერტილისათვის, რომელიც ქვედა ნახევარსიბრტყეში ძეხს, კოშის თეორემით $f_i(z) = 1$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$f_i(k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_i(k') - 1}{k' - k} dk', \quad (52,3)$$

სადაც C -კონტური წარმოადგენს არსი ღერძის $[-k_0, +k_0]$ მონაკვეთს და დიდი k_0 რადიუსის ნახევარწრეს ქვედა ნახევარსიბრტყეში. ამასთან, k_0 იმდენად დიდი

უნდა იყოს, რომ k -წერტილი კონტურის შიგნით მოთავსდეს.

როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ $f_i(k) = 1$ ფუნქცია ნულისაკენ მიისწრაფვის, ამიტომ $k_0 \rightarrow \infty$ ზღვარში ინტეგრალის წვლილი დიდ ნახევარწრეზე მოგვეცემს ნულს და ამასთან, თუ წერტილს მივასწრაფებთ არსი ღერძისაკენ, მაშინ, თანახმად (52,2) ფორმულისა, გვექნება

$$f_i(k) - 1 = -\frac{\mathcal{P}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[f_i(k') - 1] dk'}{k' - k}, \quad (52,4)$$

სადაც k ნამდვილი სიდიდეა ($Imk = 0$). ავიღოთ (52,4) გამოსახულების ნამდვილი ნაწილი. გვექნება

$$Re f_i(k) = 1 - \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im f_i(k') dk'}{k' - k}. \quad (52,5)$$

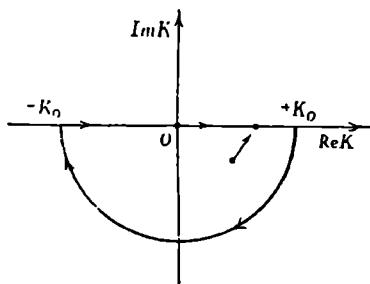
ამ ფორმულას ეწოდება დისპერსიული თანაფარდობა იოსტის ფუნქციისათვის. (52,5) სახით დისპერსიულ თანაფარდობას ფაქტიურად პრაქტიკული ღირებულება არა აქვს, რამდენადაც იგი ერთმანეთთან აკავშირებს იოსტის ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, რომელთაგან არც ერთის განსაზღვრა ექსპერიმენტით არ შეგვიძლია. ამიტომ ჩვენ შევეცდებით იოსტის ფუნქცია დავუკავშიროთ გაფანტვის ფაზას.

გავიხსენოთ მთავარი მნიშვნელობის განმარტება

$$\frac{\mathcal{P}}{k' - k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k' - k + i\varepsilon} + i\pi \delta(k' - k). \quad (52,6)$$

ამ ფორმულის (52,5) გამოსახულებაში შეტანით მივიღებთ

$$f_i(k) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im f_i(k') dk'}{k' - k + i\varepsilon}. \quad (52,7)$$



ნახ. 10

ჩვენთვის ცნობილია, რომ $f_1(k) = |f_1(k)| \exp[i\delta_1(k)]$, სადაც $\delta_1(k)$ გაფანტვის ფაზაა. ამ ფორმულის ძალით

$$Im f_1(k) = |f_1(k)| \sin \delta_1(k) = f_1(k) \sin \delta_1(k) e^{-i\delta_1(k)}, \quad (52,8)$$

ამიტომ (52,7) დისპერსიული ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f_1(k) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\delta_1(k')} \sin \delta_1(k') f_1(k') dk'}{k' - k + i\varepsilon}. \quad (52,9)$$

ეს უკანასკნელი კი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ინტეგრალური განტოლება იოსტის ფუნქციისათვის, რომლის გული განისაზღვრება გაფანტვის ფაზით ენერჯიის მთელ ინტერვალზე. ინტეგრალური განტოლებიდან თითქოს ჩანს, რომ $f_1(k)$ ფუნქციის საპოვნელად საკმარისია მხოლოდ და მხოლოდ ფაზის ცოდნა, სინამდვილეში კი, როგორც ამას ქვემოთ დაეინახავთ, დამატებით საჭიროა ბმული მდგომარეობის განმსაზღვრელი ყველა ნულის ცოდნაც $Im k < 0$ სიბრტყეში. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად შემოვიღოთ ე. წ. იოსტის დაყვანილი ფუნქცია. იოსტის ფუნქციის ნულები $Im k < 0$ სიბრტყეზე აღენიშნოთ $k_n = -i\alpha_n$, სადაც $\alpha_n > 0$, მაშინ იოსტის დაყვანილ ფუნქციას ასე განსაზღვრავენ:

$$\gamma_l(k) = f_l(k) \prod_{n=1}^{N_{b,l}} \frac{k - i\alpha_n}{k + i\alpha_n}, \quad (52,10)$$

სადაც $N_{b,l}$ არის ბმული მდგომარეობების რიცხვი მოცემული l -ისათვის. ცხადია, $\gamma_l(k)$ ანალიზური ფუნქციაა $Im k < 0$ სიბრტყეში, სადაც მას ნულები აღარა აქვს, და მიისწრაფვის ერთისაკენ, როცა $k \rightarrow \infty$. თუ განვიხილავთ $\ln \gamma_l(k)$ ფუნქციას, ენახავთ, რომ იგი ნულის ტოლი იქნება k -ს უსასრულობისაკენ მისწრაფებისას, ამიტომ $\ln \gamma_l(k)$ ფუნქციისათვის (52,4) ფორმულის ანალოგიურად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ln \gamma_l(k) = \frac{i\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \gamma_l(k') dk'}{k' - k}. \quad (52,11)$$

რადგან $|\gamma_l| = |f_l|$, ამიტომ

$$Re \ln \gamma_l = \ln |\gamma_l| = \ln |f_l|. \quad (52,12)$$

მაშასადამე, (52,11) გამოსახულების რეალური ნაწილის აღებით გვექნება

$$\ln |f_l(k)| = -\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im \ln \gamma_l(k') dk'}{k' - k}. \quad (52,13)$$

ახლა ვიპოვოთ $Im \ln \gamma_l(k)$; რადგან $f_l(k) = |f_l(k)| \exp[i\delta_1(k)]$, ამიტომ

$$Im \ln \gamma_l(k) = \delta_1(k) + Im \sum_n [\ln(k - i\alpha_n) - \ln(k + i\alpha_n)]. \quad (52,14)$$

თუ კომპლექსურ $k \pm i\alpha_n$ რიცხვს წარმოვიდგენთ $\rho_n e^{\pm i\varphi_n}$ სახით, მაშინ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\operatorname{Im} \ln \gamma_l(k) = \delta_l(k) - 2 \sum_n \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{k}{\alpha_n}. \quad (52,15)$$

ამ ფორმულის დახმარებით კი (52,13) მოგვცემს

$$\ln |f_l(k)| = -\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta_l(k') dk'}{k' - k} + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{k'}{\alpha_n} dk'}{k' - k}. \quad (52,16)$$

ბოლო ინტეგრალის ამოხსნით გვექნება¹

$$\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{k'}{\alpha_n} dk'}{k' - k} = \ln \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{k^2} \right). \quad (52,17)$$

გარდა ამისა, რამდენადაც $\ln |f_l(k)| = \ln f_l(k) - i\delta_l(k)$. ამიტომ

$$\ln f_l(k) = i\delta_l(k) - \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta_l(k') dk'}{k' - k} + \sum_{n=1}^{N_{b,l}} \ln \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{k^2} \right). \quad (52,18)$$

გავითვალისწინოთ (52,6) ფორმულა, მაშინ

$$\ln f_l(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta_l(k') dk'}{k' - k + i\varepsilon} + \sum_n \ln \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{k^2} \right), \quad (52,19)$$

საიდანაც $\operatorname{Im} k < 0$ შემთხვევაში საბოლოოდ მივიღებთ

$$f_l(k) = \prod_{n=1}^{N_{b,l}} \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{k^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta_l(k') dk'}{k' - k + i\varepsilon} \right). \quad (52,20)$$

მაშასადამე, (52,20) ფუნქცია წარმოადგენს (52,9) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს, ამასთან, მართლაც არს ლერძზე ყველა ენერგიაზე, გარდა ფაზის მნიშვნელობებისა, საჭიროა ყველა ბმული მდგომარეობების ცოდნაც.

საინტერესოა გამოვიყვანოთ დისპერსიული თანფარდობა ფრედჰოლმის დეტერმინანტისათვის ენერგეტულ სიბრტყეზე. ამასთან, როგორც ვიცით, $f_l(-k) = \Delta_l(k)$, სადაც $\Delta_l(k)$ გაფანტვის ინტეგრალური განტოლების ფრედჰოლმის დეტერმინანტია. (52,7) ფორმულიდან ნათელია, რომ

$$f_l(-k) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f_l(k') dk'}{k' + k + i\varepsilon}. \quad (52,21)$$

¹ И. С. Градштейн, и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, М., 1962. гл. 623.

მოვახდინოთ ინტეგრალში $k' \rightarrow -k'$ შეცვლა, რამდენადაც, (46,69) ფორმულის თანახმად,

$$f_l(-k) = f_l^*(k), \quad (51,21')$$

ამიტომ $Im f_l(k) = -Im f_l(-k) = -Im \Delta_l(k)$ და გვექნება

$$\Delta_l(k) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im \Delta_l(k') dk'}{k' - k - i\epsilon}. \quad (52,22)$$

გადავიდეთ ენერგეტულ სიბრტყეზე. ამისათვის უკანასკნელი ფორმულა ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\Delta_l(k) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k' + k) Im \Delta_l(k') dk'}{k'^2 - (k + i\epsilon)^2}. \quad (52,23)$$

ინტეგრალი აღებულია ლუწი ფუნქციიდან სიმეტრიულ საზღვრებში, ამიტომ, თუ გადავალთ $E = \frac{k^2}{2\mu}$, $E' = \frac{k'^2}{2\mu}$ ენერგეებზე, გვექნება

$$\Delta_l(z) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Im \Delta_l(E') dE'}{E' - z}. \quad z = E + i\epsilon \quad (52,24)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ ფრეძოლმის დეტერმინანტი შეგვიძლია ანალიზურად გაავარძელოთ მთელ ენერგეტულ კომპლექსურ სიბრტყეზე კრილით ნულიდან უსასრულობამდე არსი ღერძის გასწვრივ. (52,24) ფორმულიდან აშკარაა, რომ

$$\Delta_l^*(E + i\epsilon) = \Delta_l(E - i\epsilon), \quad (52,25)$$

ხოლო $\Delta_l(z)$ ფუნქციის ნახტომი კრილზე ტოლი იქნება

$$\Delta_l(E + i\epsilon) - \Delta_l(E - i\epsilon) = 2i Im \Delta_l(E). \quad (52,26)$$

Δ_l -ფუნქციის ფიზიკური მნიშვნელობა განისაზღვრება არს ღერძზე ზემოდან დაბრუნებისას

$$\Delta_l(E + i\epsilon) = f_l(-k), \quad (52,27)$$

სადაც k ნამდვილია. (52,25) და (52,21') ფორმულების თანახმად, თუ არს ღერძს მიუთახლოვდებით ქვემოდან, გვექნება

$$\Delta_l(E - i\epsilon) = f_l(k). \quad (52,28)$$

რამდენადაც $f_l(k) = |f_l(k)| e^{i\delta_l(k)}$, ამიტომ $\Delta_l(E)$ ფუნქციის ფაზა არს ღერძზე $-\delta_l(E)$ -ის ტოლია; მაშასადამე, გაფანტვის $S_l(E)$ -მატრიცისათვის გვექნება

$$S_l(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta_l(E - i\epsilon)}{\Delta_l(E + i\epsilon)} = e^{2i\delta_l(E)}. \quad (52,29)$$

(52,26) და (52,29) ფორმულებიდან მარტივად მივიღებთ

$$e^{i\delta_l(E)} \sin \delta_l(E) = - \frac{Im \Delta_l(E)}{\Delta_l(E + i\epsilon)}, \quad (52,30)$$

რომელიც $\frac{1}{k}$ -ზე გამრავლებით დაემთხვევა პარციალურ ამპლიტუდას.

§ 53. ლევინსონის თეორემა

გამოვიყენოთ ოსტის ფუნქციის ანალიზურობის თვისება და დავამტკიცოთ მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც ლევინსონის თეორემის სახელითაა ცნობილი [18]. ეს თეორემა გაფანტვის ფაზის მნიშვნელობებს აკავშირებს ნულოვან და უსასრულო ენერგიაზე სისტემის ბმული მდგომარეობების რიცხვთან. გამოვიღეთ გაფანტვის S_l -მატრიცის განმარტებიდან

$$S_l(k) = \frac{f_l(k)}{f_l(-k)} = e^{2i\delta_l(k)}. \quad (53,1)$$

ჩავთვალოთ, რომ გაფანტვის $\delta_l(k)$ ფაზა უწყვეტი ფუნქციაა k -სი, და მისი მნიშვნელობების არე არ არის შემოსაზღვრული $(0, \pi)$ ინტერვალით. გავალოგართმოდ (53,1) გამოსახულება

$$\ln S_l(k) = 2i\delta_l(k). \quad (53,2)$$

მიღებული ტოლობა გავაწარმოთ k -თი, გვექნება

$$\frac{d}{dk} \ln S_l(k) = 2i \frac{d\delta_l(k)}{dk}, \quad (53,3)$$

რადგან $\delta_l(k)$ კენტი ფუნქციაა k -სი, ამიტომ $\delta_l'(k)$ ლუწი ფუნქცია იქნება. ავიღოთ ინტეგრალი (53,3) ტოლობის ორივე მხარიდან $(-\infty, +\infty)$ შუალედში

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dk} \ln S_l(k) dk = 4i \int_0^{\infty} \frac{d\delta_l(k)}{dk} dk = 4i [\delta_l(\infty) - \delta_l(0)]. \quad (53,4)$$

მორე მხრივ, მარცხენა ინტეგრალი შეიძლება შემდეგნაირად გარდავაქმნათ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dk} \ln S_l(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f_l'(k)}{f_l(k)} - \frac{f_l'(-k)}{f_l(-k)} \right) dk = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_l'(k)}{f_l(k)} dk; \quad (53,5)$$

როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ $\ln f_l(k) \rightarrow 0$ $Im k < 0$ სიბრტყეში, ამიტომ შეიძლება (53,5) ინტეგრალის გამოთვლა, თუ კონტურს ავიღებთ ქვედა ნახევარსიბრტყეში. კოშის თეორემით $f_l(k)$ ფუნქციის ანალიზურობის გამო ინტეგრალში მნიშვნელოვანი იქნება მხოლოდ იზოლირებული ნულები $k_n = -i\alpha_n$, ამიტომ ნაშთთა თეორიით ეს ინტეგრალი ტოლი იქნება $-4\pi i N_{b,l}$ -ისა, სადაც $N_{b,l}$ არის l -მომენტის შესაბამისი ბმულ მდგომარეობათა რიცხვი. ამგვარად, (53,4)-იდან მივიღებთ

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \pi N_{b,l}. \quad (53,6)$$

სწორედ ეს ფორმულა გამოხატავს ლევინსონის თეორემის შინაარსს.

როცა პოტენციალი ახლო მოქმედებისაა, მაშინ $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_l(k) = 0$ და ლევიზონის თეორემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\delta_l(0) = \pi N_{l,0}. \quad (53,7)$$

შევიხსნათ, რომ, როცა $l=0$ -სათვის $f_0(0) = 0$, მაშინ თეორემას სკირდება ბოლიფიცირება. შეიძლება დამტკიცება, რომ ამ შემთხვევაში [18]

$$\delta_0(0) - \delta_0(\infty) = \pi \left(N_{l,0} + \frac{1}{2} \right); \quad (53,8)$$

(53,7) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ყოველი ახალი დონის დამატებით $\delta_l(0)$ უაზარდობდა π -ით.

ბაზანტმა კულონური ველით

დამუხტულ ნაწილაკთა გაფანტვას კულონური ველით მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს კვანტურ მექანიკაში. ეს მნიშვნელობა ძირითადად განპირობებულია ორი მიზეზით. ჯერ ერთი, ატომში არსებული ურთიერთქმედება წარმოადგენს კულონურ ურთიერთქმედებას და ამიტომ ატომების თვისებების დასადგენად საჭიროა ამომწურავად ვიცოდეთ ამ ველით გამოწვეული ყველა კვანტურ-მექანიკური თავისებურება. მეორეც, ატომბირთვის შემადგენელ ნაწილაკებს — პროტონებს დადებითი ელექტრული მუხტი აქვთ, ამიტომ პროტონებს შორის არსებულ ატომბირთვულ ურთიერთქმედებას ყოველთვის თან ახლავს კულონური ურთიერთქმედებაც. კულონური ურთიერთქმედება ართულებს პროტონების ბირთვული ურთიერთქმედების სურათს. აქედან გამომდინარე, თავისთავად ნათელია, რომ კულონური ურთიერთქმედების ზუსტი ხასიათის ცოდნის გარეშე ჩვენ ვერ შევძლებთ პროტონების წმინდა ატომბირთვული ურთიერთქმედების გამოყოფას.

ამ თავში შევისწავლით დამუხტულ ნაწილაკთა ურთიერთგაფანტვას, ე. ი. მოვებნით შრედინგერის განტოლების ისეთ ამონახსნებს, რომლებიც შეესაბამებიან დადებით სრულ ენერგიას. როგორც ცნობილია, ამ დროს მოძრაობა ინფინიტურია. რაც შეეხება ამონახსნებს უარყოფითი სრული ენერგიის შემთხვევაში, ჩვენ ისინი ადრე ვიპოვეთ და ამიტომ ამ თავში აღარ განვიხილავთ.

კულონურ პოტენციალს ჩვენ მიერ ადრე განხილულ პოტენციალებთან შედარებით ახასიათებს მთელი რიგი განსაკუთრებული თვისებები. ეს თავისებურებანი გამოწვეულია ამ ველის ნულისაკენ ნელი მისწრაფებით ნაწილაკებს შორის მანძილის უსასრულობისაკენ მისწრაფებისას.

§ 54. უწყვეტი სპაჩტრის ფუნქციები კულონური ველის უამთხვევაში

განვიხილოთ ორი წერტილოვანი მუხტის მქონე სისტემის ურთიერთქმედება შემდეგი პოტენციალური ენერგიით:

$$V(r) = \pm \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (54,1)$$

სადაც Z_1 და Z_2 აღნიშნავს სისტემების ელემენტარული მუხტების რაოდენობას. როცა სრული ენერგია დადებითია, მაშინ შრედინგერის განტოლების ენერგეტული

სპექტრი როგორც მიზიდვის, ისე განზიდვის ურთიერთქმედების შემთხვევაში უწყვეტი იქნება. განვიხილოთ დამუხტული ნაწილაკების გაფანტვის ამოცანა. ამისათვის ჯერ შევისწავლოთ ერთნაირი მუხტების მქონე ნაწილაკების გაფანტვა.

დავწეროთ შრედინგერის ფარდობითი მოძრაობის რადიალური ფუნქციების განტოლება

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{1}{Dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_l(r) = 0, \quad (54,2)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad D = \frac{\hbar^2}{2\mu Z_1 Z_2 e^2}. \quad (54,3)$$

ამ ფორმულაში μ სისტემის დაყვანილი მასაა.

როგორც ვიცით, შრედინგერის განტოლების ამონახსნს, რომელიც უწყვეტი სპექტრის შესაბამის სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს, უნდა ჰქონდეს (7,39) სახე, ე. ი.

$$R_l(k, r) = r^{-l} e^{ikr} \Phi_l(r). \quad (54,4)$$

ამასთან, უნდა მოვითხოვოთ, რომ $\Phi_l(r)$ ფუნქცია სათავეში იყოს მუდმივი; ამ გამოსახულების შრედინგერის განტოლებაში შეტანით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას $\Phi_l(r)$ ფუნქციისათვის

$$r \frac{d^2 \Phi_l}{dr^2} + (2l+2+2ikr) \frac{d\Phi_l}{dr} + \left(\frac{1}{D} - 2ik - 2ikl \right) \Phi_l = 0. \quad (54,5)$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$x = -2ikr \quad (54,6)$$

და ე. წ. კულონური პარამეტრი

$$\eta = \frac{1}{2kD} = Z_1 Z_2 \frac{\mu e^2}{\hbar v}. \quad (54,7)$$

შედეგად მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$x \Phi_l''(x) + (2l+2-x) \Phi_l'(x) - (l+1+i\eta) \Phi_l(x) = 0, \quad (54,8)$$

რომელიც წარმოადგენს გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებას პარამეტრებით:

$$A = l+1+i\eta, \quad C = 2l+2, \quad x = -2ikr. \quad (54,9)$$

ასე რომ $\Phi_l(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\Phi_l(x) = I'(l+1+i\eta, 2l+2, x), \quad (54,10)$$

ხოლო (54,4) რადიალური ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_l(k)}{(2l+1)!} (2kr)^l e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr). \quad (54,11)$$

ამ გამოსახულებაში მუდმივები შემოვიღეთ მოხერხებულობის მიზნით. ვიპოვოთ ნორმირების $C_l(k)$ კოეფიციენტი. გამოვიყენოთ § 8-ში განხილული წესი. სახელდობრ, ვიპოვოთ (54,11) გამოსახულების ასიმპტოტური სახე დიდ მანძილებზე და მოვითხოვოთ, რომ იგი $r \rightarrow \infty$ შემთხვევაში წარმოადგენდეს კრებადი და გან-

შლადი სფერული ტალღების ჯამს. კოეფიციენტი, რომელიც დაგვიჯდება ასეთი ასიმპტოტური გამოსახულების წინ, საჭიროა შევცვალოთ $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$ -ით, მაშინ, როგორც ვიცით, (54,11) რადიალური ტალღური ფუნქცია ნორმირებული იქნება დირაკის დელტა ფუნქციაზე ტალღური ვექტორის სკალაზე, ე. ი.

$$\int_0^{\infty} R_l^*(k, r) R_l(k', r) r^2 dr = \frac{\delta(k-k')}{kk'}. \quad (54,12)$$

მაშასადამე, ვიპოვოთ რადიალური ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა. გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის ასიმპტოტური მნიშვნელობის საპოვნელად დიდი არგუმენტებისათვის გამოვიყენოთ (D, 77) ფორმულა, სადაც $(i; a; b; x)$ ფუნქციები შევცვალოთ ერთიანებით. გვექნება

$$F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr) = \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\eta)} (2ikr)^{-(l+1+i\eta)} + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} (-2ikr)^{l\eta-(l+1)} e^{-2ikr}, \quad r \rightarrow \infty \quad (54,13)$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ ეს გამოსახულება ასეც გადაიწერება:

$$F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr) = \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} \frac{ie^{\frac{i\eta}{2}}}{(2kr)^{l+1}} \left\{ -\frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)} e^{-i\left(\frac{l\pi}{2} + \eta \ln 2kr\right)} + e^{i\left(\frac{l\pi}{2} + \eta \ln 2kr\right)} e^{-2ikr} \right\}. \quad (54,14)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$e^{i\delta_{cl}} = \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)}, \quad (54,15)$$

მაშინ (54,11) ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობისათვის დიდ მანძილზე მივიღებთ

$$H_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_l(k) \frac{e^{\frac{\pi l}{2}}}{\Gamma(l+1+i\eta)} e^{i\delta_{cl}} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl}\right). \quad (54,16)$$

როგორც ვხედავთ, კულონური ველით გაფანტვისას δ_{cl} ასრულებს ფაზის როლს; მაშასადამე, კულონური გაფანტვის ფაზა

$$\delta_{cl}(k) = \arg \Gamma(l+1+i\eta). \quad (54,16')$$

აღსანიშნავია, რომ სინუსის არგუმენტში, ჩვენ მიერ ადრე განხილული ველებისაგან განსხვავებით, დამატებით დაემატა $\eta \ln 2kr$ წევრი. ამის მიზეზია კულონური ურთიერთქმედების ნელი სწრაფვა ნულისაკენ, ამიტომ უსასრულობაშიც კი იგი იწვევს ბრტყელი ტალღის (თავისუფალი მოძრაობის) შეშფოთებას. მაგრამ, რამდენადაც $\eta \ln 2kr$ ნელა ცვლადია kr -თან შედარებით, ამიტომ ეს უკანასკნელი შეგვიძლია ნორმირების დროს არ გავითვალისწინოთ, რადგან არსებით როლს იგი არ ასრულებს. ახლა საკმარისია (54,16) გამოსახულებაში ავიღოთ

$$C_l(k) = e^{-\frac{\pi\eta}{2}} |\Gamma(l+1+i\eta)|, \quad (54,17)$$

რომ (54,11) ფუნქცია, რომელიც მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I_l(k, r) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \frac{|\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!} (2kr)^l e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr), \quad (54,18)$$

ნორმირებული აღმოჩნდა (54,12) პირობით, ხოლო მისი ასიმპტოტური გამოსახულება დიდ მანძილებზე განსაზღვრული იყოს ფუნქციით

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (54,19)$$

უპოვოთ $C_l(k)$ კოეფიციენტის ცხადი გამოსახულება. თუ გამოვიყენებთ (C, 33) ფორმულას, მისთვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$C_l^2(k) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} \prod_{\nu=1}^l (\nu^2 + \eta^2). \quad (54,20)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $l=0$, გვექნება

$$C^2(k) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}. \quad (54,21)$$

აღვნიშნოთ, რომ (54,15) ფორმულის თანახმად, გაფანტვის მატრიცას განზიდვის კლონური ველისათვის ექნება გამოსახულება

$$S_l(k) = e^{2i\delta_{cl}} = \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)}. \quad (54,22)$$

გაფანტვის ამოცანებში საინტერესოა ისეთი ნორმირება, როცა ასიმპტოტურ გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$I_l^{(+)}(k, r) = e^{i\delta_{cl}} \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl}\right)}{kr}, \quad (k \rightarrow \infty) \quad (54,23)$$

როგორც (54,16)-დან ჩანს, ამისათვის საჭიროა $C_l(k)$ კოეფიციენტის შემდეგნაირად შერჩევა:

$$C_l = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(l+1+i\eta). \quad (54,24)$$

ამგვარად, უწყვეტი სპექტრის ტალღურ ფუნქციას, რომელიც გაფანტვის სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს, ექნება შემდეგი სახე:

$$R_l^{(+)}(k, r) = e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{(2l+1)!} (2kr)^l e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr). \quad (54,25)$$

ახლა განვიხილოთ მიზიდვის ურთიერთქმედების შემთხვევა, რომელიც განხორციელებდა სხვადასხვა ნიშნის მუხტების დროს. შრედინგერის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) + \left(k^2 + \frac{1}{Dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_l(r) = 0. \quad (54,26)$$

აქ ჩვენ იგივე აღნიშვნები გამოვიყენეთ, რაც განზიდვის ურთიერთქმედებისათვის. მიზიდვის ველის შემთხვევაში შესაძლებელია როგორც ბმული მდგომარეობის წარმოქმნა, ისე გაფანტვა. რადგან ბმული მდგომარეობები ადრე განვიხილეთ, ახლა შემოვისაზღვრებით მხოლოდ გაფანტვით.

დადებითი ენერგიის შემთხვევაში შრედინგერის განტოლების ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$R_l(r) = r^l \phi_l(r) e^{-ikr}. \quad (54,27)$$

ამ გამოსახულების შრედინგერის განტოლებაში შეტანით და შემდეგ ახალი $x = 2ikr$ ცვლადის შემოღებით $\Phi_l(x)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების განტოლებას

$$x\Phi_l'(x) + (2l+2-x)\Phi_l'(x) - (l+1+i\eta)\Phi_l(x) = 0, \quad (54,28)$$

რომლის ამონახსნი იქნება შემდეგი ფუნქცია:

$$\Phi_l(r) = F(l+1+i\eta, 2l+2, 2ikr), \quad (54,29)$$

ხოლო რადიალურ ტალღურ ფუნქციას ექნება სახე

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_l(k)}{(2l+1)!} (2kr)^l e^{-ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, 2ikr). \quad (54,30)$$

$a_l(k)$ ნორმირების კოეფიციენტი სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება. სახელდობრ, (54,12) სახს ნორმირებისათვის საჭიროა

$$a_l(k) = e^{\frac{\pi\eta}{2}} |\Gamma(l+1-i\eta)|, \quad (54,31)$$

ან (C, 33) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$a_l^2(k) = \frac{2\pi\eta}{1-e^{-\pi\eta}} \prod_{\nu=1}^l (\nu^2 + \eta^2). \quad (54,32)$$

მაშასადამე, მიზიდვის კულონური ველის შემთხვევაში (54,12) პირობით ნორმირებული რადიალური ტალღური ფუნქციისათვის საბოლოოდ გვექნება გამოსახულება

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{\pi\eta}{2}} \frac{\Gamma(l+1-i\eta)}{(2l+1)!} (2kr)^l e^{-ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, 2ikr). \quad (54,33)$$

ამ ფუნქციის ასიმპტოტურ გამოხატულებას დიდ მანძილებზე ექნება შემდეგი სახე:

$$R_l(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta \ln 2kr + \delta_{cl}\right)}{kr}, \quad (54,34)$$

სადაც კულონური ფაზა, ამ შემთხვევაში, განისაზღვრება პირობით

$$e^{i\delta_{cl}} = \frac{\Gamma(l+1-i\eta)}{\Gamma(l+1+i\eta)}. \quad (54,35)$$

როგორც ვხედავთ, კულონურ ფაზებს მიზიდვისა და განზიდვის ურთიერთქმედებისათვის განსხვავებული ნიშნები აქვთ.

მივეუთითოთ, რომ თუ (54,33) ტალღურ ფუნქციაზე მოვახდენთ კუმპერის (D, 62) გარდაქმნას, ნორმირების კოეფიციენტის სიზუსტით, მივიღებთ ტალღურ ფუნქციას განზიდვის ურთიერთქმედებისათვის, ე. ი. (54,18) ფუნქციას.

დაბოლოს მივეუთითოთ, რომ, (54,7) ფორმულის თანახმად, კულონურ პარამეტრს შეიძლება მიეცეთ შემდეგი ფორმა:

$$\eta = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v}, \quad (54,36)$$

სადაც v ნაწილაკთა ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარეა.

§ 55. კულონური ფუნქციები

კულონურ ველში ინფინიტური მოძრაობის რადიალური ტალღური ფუნქციები გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების ნაცვლად შეგვიძლია სხვა ფუნქციებითაც გამოვხატოთ. კერძოდ, ამოცანებში, სადაც კულონური ურთიერთქმედებაც არის ჩართული, ხშირად გამოიყენება ე. წ. კულონური ფუნქციები $F_l(kr)$ და $G_l(kr)$, რომელთაგან პირველი რეგულარულია სათავეში, მეორე კი — არარეგულარული [35, 36]. კულონური ფუნქციები ისე განიმარტება, რომ ზღვარში მათი ასიმპტოტური გამოსახულებანი, როცა ურთიერთქმედებას გამოვრთავთ, შესაბამისად დაემთხვეს ბესელის $J_l(kr)$ და ნეიმანის $n_l(kr)$ ფუნქციების ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს. გარდა ამისა, შევეცდებით კულონური ფუნქციები გამოვხატოთ კარგად ცნობილი უიტეკერის ფუნქციების საშუალებით.

განვიხილოთ განზიდვის კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევა, მაშინ შრეინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლებას ექნება (54,2) სახე. მოვქმედნოთ ამ განტოლების ამოხსნა შემდეგნაირად:

$$R_l(k, r) = r^l e^{ikr} \Phi_l(r), \quad (55,1)$$

მაშინ, როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, $\Phi_l(r)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებას

$$x\Phi_l'(x) + (2l+2-x)\Phi_l'(x) - (l+1+i\eta)\Phi_l(x) = 0. \quad (55,2)$$

ასალი

$$w(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \Phi_l(x) \quad (55,3)$$

ფუნქციის შემოღებით (55,2) განტოლება მოგვეცემს

$$w''(x) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{x} + \frac{1/4 - \mu^2}{x^2} \right] w(x) = 0, \quad (55,4)$$

სადაც

$$\mu = \frac{c-1}{2} = l + \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{c}{2} - a = -i\eta, \quad x = -2ikr. \quad (55,5)$$

მიღებულ დიფერენციალურ განტოლებას უიტეკერის განტოლება ეწოდება და მისი ამონახსნები განხილული გვაქვს დამატებაში. (55,4) განტოლების კერძო ამონახსნები განისაზღვრება (F , 7) და (I , 8) უიტეკერის $M_{\lambda, \pm\mu}(x)$ ფუნქციებით. სახელდობრ, გვექნება:

$$M_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) = (-2ikr)^{l+1} e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr), \quad (55,6)$$

$$M_{i\eta, l+1/2}(2ikr) = (2ikr)^{l+1} e^{-ikr} F(l+1-i\eta, 2l+2, 2ikr). \quad (55,7)$$

მაშასადამე, ჩვენ მიერ წინა პარაგრაფში განხილული რადიალური ფუნქციების (54,18) გამოსახულება შეიძლება გამოვხატოთ უიტკერის $M_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr)$ ფუნქციით. კერძოდ, შეგვიძლია დაეწეროს

$$R_l(k, r) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(l+1+i\eta)}}{\sqrt{2\pi} kr} \frac{|\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!} M_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr). \quad (55,8)$$

როგორც ვიცი, (55,4) განტოლების კერძო ამონახსნებია აგრეთვე უიტკერის $W_{\pm i\eta, l}(\pm x)$ ფუნქციები. $M_{\pm i\eta, l}(x)$ ფუნქციებისაგან განსხვავებით, $W_{\pm i\eta, l}$ ფუნქციებს ახრი აქვთ მაშინაც, როცა $2l = \pm 1, \pm 2, \dots$. ნათელია, რომ უიტკერის $W_{\pm i\eta, l}$ ფუნქციებისათვის, (F, 11) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$W_{i\eta, l+1/2}(2ikr) = (2ikr)^{l+1} e^{-ikr} \psi(l+1-i\eta, 2l+2, 2ikr), \quad (55,9)$$

$$W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) = (-2ikr)^{l+1} e^{ikr} \psi(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr), \quad (55,10)$$

სადაც $\psi(a, c; x)$ ფუნქცია განისაზღვრება (D, 28') გამოსახულებით. ვიპოვოთ $W_{\pm i\eta, l+1/2}$ ფუნქციის ასიმპტოტური სახე დიდი kr -ებისათვის. ამ მიზნით გავიხსენოთ, რომ, (J, 80') ფორმულის თანახმად, დიდ მანძილებზე გვაქვს

$$\psi(l+1-i\eta, 2l+2, \mp 2ikr) = (\mp 2ikr)^{-l+1 \pm i\eta}. \quad (r \rightarrow \infty) \quad (55,11)$$

რადგან $(\mp)^{\pm i\eta} = \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2}\right)$, ამიტომ მარტივად ვაჩვენებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$W_{i\eta, l+1/2}(2ikr) = e^{-i(kr-\eta \ln 2kr) - \frac{\pi\eta}{2}}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (55,12)$$

$$W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) = e^{i(kr-\eta \ln 2kr) - \frac{\pi\eta}{2}}; \quad (r \rightarrow \infty) \quad (55,13)$$

შემოვიღოთ შემდეგი დამხმარე ფუნქციები [35,36]:

$$Y_l = \left[\frac{\Gamma(l+1-i\eta)}{\Gamma(l+1+i\eta)} \right]^{1/2} e^{\frac{i\pi}{2}(l+1-i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr), \quad (55,14)$$

$$Y_l^* = \left[\frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)} \right]^{1/2} e^{-\frac{i\pi}{2}(l+1+i\eta)} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr). \quad (55,15)$$

ცხადია, (55,12) და (55,13) ფორმულების თანახმად, ამ ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$Y_l = i e^{-i(kr-\eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{cl})}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (55,16)$$

$$Y_l^* = -i e^{i(kr-\eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{cl})}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (55,17)$$

სადაც კულონური გაფანტვის δ_{cl} ფაზა განსაზღვრულია (54,15) ფორმულით.

Y_l და Y_l^* ფუნქციები პროპორციულებია უიტკერის $W_{i\eta, l+1/2}(2ikr)$ და $W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr)$ ფუნქციებისა, ამიტომ ისინი წარმოადგენენ (55,4) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს¹. ამ ფუნქციების ასიმპტოტური გამო-

¹ ეს ფუნქციები კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში ისეთივე როლს ასრულებენ, რასაც პანკელის სფერული ფუნქციები ჩვენ მიერ აღრე განხილული ველების შემთხვევაში.

ხატულებანი გვაუქრებინებენ, რომ მათ ნაცვლად ხელსაყრელია შემდეგი ორი ფუნქციის შემოღება:

$$F_l(kr) = \frac{1}{2} (Y_l + Y_l^*), \quad (55,18)$$

$$G_l(kr) = \frac{1}{2} (Y_l^* - Y_l). \quad (55,19)$$

ამ ფუნქციების ასიმპტოტური გამოსახულებანი $kr \rightarrow \infty$ -სათვის ტოლი იქნება:

$$F_l(kr) = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl} \right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (55,20)$$

$$G_l(kr) = -\cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl} \right). \quad kr \rightarrow \infty \quad (55,21)$$

შევნიშნოთ, რომ როცა კულონური ურთიერთქმედება არა გვაქვს ეს ასიმპტოტური გამოსახულებანი დაემთხვევა თავისუფალი მოძრაობის შესაბამისი $kr j_l(kr)$ და $kr n_l(kr)$ ფუნქციების ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს.

$F_l(kr)$ და $G_l(kr)$ ფუნქციებს კულონურ ფუნქციებს უწოდებენ; ამასთან, $F_l(kr)$ სათავეში რეგულარულია, $G_l(kr)$ — არარეგულარული. კულონური ფუნქციების (55,20) და (55,21) ასიმპტოტური ფორმულების გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობას:

$$W[F_l, G_l] = F_l \frac{dG_l}{dr} - G_l \frac{dF_l}{dr} = k. \quad (55,22)$$

ახლა ვიპოვოთ კულონური ფუნქციების ცხადი გამოხატულებანი. ჯერ მოვიძებნოთ რეგულარული $F_l(kr)$ ფუნქცია. ამისათვის (55,14) და (55,15) გამოსახულებანი შევიტანოთ (55,18) განმარტებაში. გვექნება

$$F_l(kr) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\Gamma(l+1-i\eta)}{\Gamma(l+1+i\eta)} \right]^{1/2} e^{\frac{\pi i}{2}(l+1-i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr) + \left[\frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)} \right]^{1/2} e^{-\frac{\pi i}{2}(l+1+i\eta)} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) \right\} \quad (55,23)$$

თუ ჩავატარებთ მარტივ გარდაქმნებს და გამოვიყენებთ $M_{i\eta, l+1/2}(2ikr)$ ფუნქციის (F , 21) გამოხატულებას უიტკერის ფუნქციების მიხედვით

$$M_{i\eta, l+1/2}(2ikr) = \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\eta)} e^{\pi i} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} e^{i\pi(l+1-i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr), \quad (55,24)$$

მივიღებთ

$$F_l(kr) = \frac{|\Gamma(l+1-i\eta)|}{2(2l+1)!} e^{-\frac{\pi i}{2}(l+1+i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr). \quad (55,25)$$

თანახმად (F , 13) თვისებებისა,

$$M_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) = e^{-i\pi(l+1)} M_{i\eta, l+1/2}(2ikr); \quad (55,26)$$

ამიტომ (55,6) ფორმულის გათვალისწინებით (55,25) გამოსახულება მოგვცემს

$$F_l(kr) = e^{-\frac{\pi l}{2}} \frac{|\Gamma(l+1-i\eta)|}{2(2l+1)!} (2kr)^{l+1} e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr). \quad (55,27)$$

ახლა ვიპოვოთ არარეგულარული $G_l(kr)$ ფუნქცია. ამისათვის (55,14) და (55,15) ფორმულები შევიტანოთ (55,19) გამოსახულებაში; მივიღებთ

$$G_l(kr) = \frac{1}{2i} \left\{ \left[\frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)} \right]^{1/2} e^{-\frac{\pi i}{2}(l+1+i\eta)} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) - \left[\frac{\Gamma(l+1-i\eta)}{\Gamma(l+1+i\eta)} \right]^{1/2} e^{\frac{\pi i}{2}(l+1-i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr) \right\}. \quad (55,28)$$

მარტივი გარდაქმნებით ეს გამოსახულება დაიყვანება შემდეგ ფორმულაზე:

$$G_l(kr) = \frac{1}{2i} \frac{|\Gamma(l+1-i\eta)|}{(2l+1)!} e^{-\frac{\pi i}{2}(l+1-i\eta)} \overline{M}_{i\eta, l+1/2}(2ikr), \quad (55,29)$$

სადაც $\overline{M}_{i\eta, l+1/2}(2ikr)$ ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით

$$\begin{aligned} \overline{M}_{i\eta, l+1/2}(2ikr) &= \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} e^{i\pi(l+1-i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr) - \\ &= \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\eta)} e^{-i\pi(l+1-i\eta)} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr). \end{aligned} \quad (55,30)$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ (54,17) ფორმულას, კულონის ფუნქციებისათვის საბოლოოდ შეგვიძლია დაწვიროთ:

$$F_l(kr) = \frac{C_l(k)}{2(2l+1)!} e^{-\frac{\pi i}{2}(l+1)} M_{i\eta, l+1/2}(2ikr), \quad (55,31)$$

$$G_l(kr) = \frac{C_l(k)}{2i(2l+1)!} e^{-\frac{i\pi}{2}(l+1)} \overline{M}_{i\eta, l+1/2}(2ikr). \quad (55,32)$$

დაეშვით მოვიყვანოთ ასიმპტოტური გაშლის ფორმულები $kr \rightarrow 0$ -სათვის, ამასთან შემოვიხსნათ $l=0$ შემთხვევით [35]

$$F_0(kr) = C_0(k)kr \left[1 + \eta kr - \frac{1}{6}(kr)^2 + \frac{1}{3}\eta^2(kr)^2 + \dots + \right] \quad (55,33)$$

$$\begin{aligned} G_0(kr) &= -\frac{1}{C_0(k)} \left\{ 1 + 2k\eta \left[\ln 2kr + 2\gamma - 1 + h(\eta) + \ln \eta \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(kr)^2 + 3\eta^2(kr)^2 + \dots + \right\}, \end{aligned} \quad (55,34)$$

სადაც $C_0(k)$ განისაზღვრება (54,21) ფორმულით, ხოლო¹

$$h(\eta) = \operatorname{Re}\psi(-i\eta) - \ln \eta = \eta^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v^2 + \eta^2)} - \gamma - \ln \eta \quad (55,35)$$

$\gamma = 0,5772$ -ეილერის მუდმივა.

¹ $\psi(z)$ ფუნქციის განმარტება იხილეთ § C-ში.

აღნიშნოთ, რომ $l=0$ შემთხვევაში $F_0(0)=0$, ხოლო $i'_0(0)=-\frac{1}{C_0}$. რაც

შეეხება $l \neq 0$ შემთხვევას, $F_l(kr)$ ფუნქცია კვლავ ნულია სათავეში, ხოლო i'_l -განშლადი.

ასევე შეენიშნოთ, რომ (54,25) რადიალური ტალღური ფუნქცია $F_l(kr)$ კულონურ ფუნქციასთან დაკავშირებული იქნება ფორმულით

$$F_l^{(+)}(k, r) = \frac{F_l(kr)}{kr}. \quad (55,36)$$

კულონური ფუნქციები მეტად რთული ფუნქციებია ანალიზური გამოთვლებისათვის, ამიტომ სხვადასხვა ამოცანებში ხშირად მიმართავენ მიახლოებით ფორმულებს. ამ მიზნით $F_l(kr)$ და $G_l(kr)$ ფუნქციებისათვის შედგენილია მრავალი ცხრილი. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი ცხრილები არსებობს $l=0$ შემთხვევაში, როცა ფუნქციების მნიშვნელობა განსაზღვრულია η -ს ფართო ინტერვალში და kr -ის მცირე ბიჯისათვის [37].

5. ნ. იოსტის ფუნქციები კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში

გამოვარკვეით როგორი სახე აქვთ იოსტის ფუნქციებს კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში. ვერ ვიპოვით შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლების ისეთი ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(l+1)} \varphi_l(k, r) = 1. \quad (56,1)$$

ამ პარაგრაფში კულონური ველის შესაბამის სიდიდეებს გავუყუთებთ „ e “-ნიშნაკს. წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგებიდან ცხადია, რომ ფუნქცია, რომელიც განზიღვის კულონური ურთიერთქმედების დროს დაკმაყოფილებს (56,1) პირობას, იქნება შემდეგი:

$$\varphi_l(k, r) = r^{l+1} e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr), \quad (56,2)$$

ან კუმერის (D , 62) გარდაქმნის გამოყენებით იგივე ფუნქციას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$\varphi_l(k, r) = r^{l+1} e^{-ikr} F(l+1-i\eta, 2l+2, 2ikr). \quad (56,3)$$

თუ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების ნაცვლად ვისარგებლებთ ჟიტეკერის (55,6) და (55,7) ფუნქციებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\varphi_l(k, r) = (-2ik)^{-(l+1)} M_{-i\eta, l+1/2}(2ikr) = (2ik)^{-(l+1)} J_{i\eta, l+1/2}(2ikr), \quad (56,4)$$

რომელიც (55,24) ფორმულის გამოყენებით მიიღებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\varphi_l(k, r) = \frac{1}{(2ik)^{l+1}} \left\{ \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\eta)} e^{\pi i \eta} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} e^{-\pi i(l+1-i\eta)} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr) \right\}. \quad (56,5)$$

ახლა შემოვიღოთ ისეთი ამონახსნები, რომლებიც უსასრულობაში აკმაყოფილებენ (46,69) ტიპის სასაზღვრო პირობას. წინა პარაგრაფში მიღებული რადიალური

ფუნქციის (55,20) ასიმპტოტური გამოხატულება გვაფიქრებინებს, რომ კულონური ურთიერთქმედების შესაბამის რადიალურ ამონახსნს მოვთხოვით შემდეგი სასაზღვრო პირობის შესრულება:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-i(kr - \eta \ln 2kr)} f_i(-k, r) = 1. \quad (56,6)$$

რამდენადაც r -ის უსასრულობაში მისწრაფებისას უიტეკერის ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევა განისაზღვრება (55,13) ფორმულით, ე. ი.

$$W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr) = e^{i(kr - \eta \ln 2kr)} e^{-\frac{\pi\eta}{2}}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (56,7)$$

ამიტომ შეგვიძლია შევარჩიოთ შემდეგი ამონახსნები:

$$f_i(-k, r) = e^{\frac{\pi\eta}{2}} W_{-i\eta, l+1/2}(-2ikr), \quad (56,8)$$

$$f_i(k, r) = e^{\frac{\pi\eta}{2}} W_{i\eta, l+1/2}(2ikr), \quad (56,9)$$

აღვლი საჩვენებელია, რომ $f_i(\pm k, r)$ ფუნქციები დაკავშირებულია (55,14) და (55,15) ფუნქციებთან; სახელდობრ, გვექნება

$$Y_l^* = -i e^{i\epsilon l} e^{-\frac{i\pi l}{2}} f_i(-k, r), \quad Y_l = i e^{-i\epsilon l} e^{\frac{i\pi l}{2}} f_i(k, r), \quad (56,10)$$

სადაც კულონური გაფანტვის $\delta_{l\epsilon}$ -ფაზა განისაზღვრება (54,15) ფორმულით.

ახლა გამოვხატოთ $f_i(k, r)$ რადიალური ფუნქცია $f_i(\pm k, r)$ ფუნქციებით. ამისათვის ვისარგებლოთ (56,5) გამოსახულებით. (56,8) და (56,9) ფორმულებს გათვალისწინებით მივიღებთ

$$f_i(k, r) = \frac{1}{2ik} \left\{ \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\eta)} \frac{e^{\frac{\pi\eta}{2}}}{(2ik)^l} f_i(-k, r) - \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} \frac{e^{\frac{\pi\eta}{2}} e^{i\pi l}}{(2ik)^l} f_i(k, r) \right\}. \quad (56,11)$$

ამ გამოსახულების (46,73) ფორმულასთან შედარების შედეგად ადვილად ვიპოვიოთ იოსტის ფუნქციების გამოხატულებას კულონური ველისათვის; სახელდობრ, გვექნება:

$$f_i^+(k) = \frac{e^{-\frac{i\pi l}{2}}}{(2k)^l} e^{\frac{\pi\eta}{2}} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\eta)}, \quad (56,12)$$

$$f_i^-(k) = \frac{e^{\frac{i\pi l}{2}}}{(2k)^l} e^{\frac{\pi\eta}{2}} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)}. \quad (56,13)$$

ახლა გამოვიყენოთ $S_l(k)$ -მატრიცის (46,74) ფორმულა, რომლის მიხედვით გაფანტვის მატრიცას კულონური ურთიერთქმედებისათვის ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$S_l(k) = \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)} = e^{2i\epsilon l}, \quad (56,14)$$

რაც ემთხვევა ჩვენ მიერ აღრე მიღებულ (54,15) გამოსახულებას.

როცა კულონური ველი მიზიდვის ხასიათისაა, მაშინ ურთიერთქმედების დროს შესაძლებელია ბმული მდგომარეობების გაჩენა. როგორც ვიცით, ბმული მდგომარეობები განისაზღვრება $\mathcal{N}_f(k)$ -მატრიცის პოლუსებით k -კომპლექსური სიბრტყის ვითარსი ღერძის დადებით ნაწილში, ე. ი. როცა შესრულებულია პირობა

$$\Gamma\left(l+1+i\frac{1}{2kD}\right)^{-1}=0. \quad k=iz \quad (56,15)$$

ვიღერის $\Gamma(z)$ ფუნქციის თვისებით ეს მაშინაა შესაძლებელი, როცა

$$l+1+\frac{i}{2kD}=-n_r; \quad n_r=0, 1, 2, \dots \quad (56,16)$$

საიდანაც, თუ შემოვიღებთ მთავარ კვანტურ რიცხვს $n=n_r+l+1$, მივიღებთ ბორის ენერჯიის ფორმულას

$$E_n=-\frac{Z_1 Z_2 e^4 \mu}{2n^2 \hbar^2}; \quad (56,17)$$

კერძოდ, წყალბადისებური ატომის ენერჯიას მივიღებთ, როცა $Z_1=1$, ხოლო $Z_2=Z$ ემთხვევა ატომბირთვის პროტონთა რიცხვს.

§ ბრინის სრული ფუნქცია კულონური ურთიერთქმედებისათვის

ვიპოვოთ ბრინის სრული ფუნქცია დამუხტულ ნაწილაკთა კულონური ურთიერთქმედებისათვის. ამ ამოცანის გადაწყვეტა ძნელი არ არის, თუ გავიხსენებთ (47,37) ფორმულას, რომლის მიხედვით გაფანტვის სასაზღვრო პირობის შესაბამისი ბრინის ბარციალური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$G_f(r, r')=-\frac{1}{k} \chi_i^{(+)}(k, r_+) f_f(-k, r_-) e^{-i\frac{\pi l}{2}}, \quad (57,1)$$

სადაც $\chi_i^{(+)}(k, r)$ წარმოადგენს კულონური ველის შესაბამისი შრედინგერის რადიალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს გაფანტვის სასაზღვრო პირობას. (47,35) ფორმულის თანახმად და (56,2) და (56,13) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით, განზიდვის კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში, გვექნება

$$\chi_i^{(+)}(k, r)=\frac{\Gamma(l+1+i\eta) e^{-\frac{\pi\eta}{2}}}{2\Gamma(2l+2)} (2kr)^{l+1} e^{ikr} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr). \quad (57,2)$$

ცხადია, ეს ფუნქცია (54,25) რადიალურ ფუნქციასთან დაკავშირებულია სტანდარტული აღნიშვნით

$$R_l^{(+)}(k, r)=\frac{\chi_i^{(+)}(k, r)}{kr}; \quad (57,3)$$

რაც შეეხება $f_f(-k, r)$ ფუნქციას, იგი განისაზღვრება (56,8) ფორმულით. რადგან ადგილი აქვს (55,9) დამოკიდებულებას, ამიტომ ამ ფუნქციას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახეც:

$$f_f(-k, r)=e^{-\frac{i\pi}{2}(l+1+i\eta)} (2kr)^{l+1} e^{ikr} \psi(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr). \quad (57,4)$$

ამასთან, $\psi(\alpha, \epsilon; \epsilon)$ განისაზღვრება (17, 28') ფორმულით. (57,2) და (57,3) გამოსახულებები შვეიტანოთ გრინის კულონური ფუნქციის (57,1) განმარტებაში; გვექნება [14]

$$G_i^{(+)}(r, r') = \frac{i}{2k} (-1)^l \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(2l+2)} (4kr'r')^{l+1} e^{ik(r+r')} F(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr_-) \cdot \psi(l+1+i\eta, 2l+2, -2ikr_+). \quad (57,5)$$

ახლა გავიხსენოთ კულონური ფუნქციის (55,27) და Y_l^* ფუნქციის (57,15) განმარტებები, მაშინ გრინის კულონურ ფუნქციას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახეც:

$$G_i^{(+)}(r, r') = -\frac{i}{k} F_l(kr_-) Y_l^*(-2ikr_+). \quad (57,6)$$

საინტერესოა ვიპოვოთ გრინის ფუნქციის ყოფაქცევა დიდი r და r' მანძილებითათვის. ამ მიზნით საკმარისია გავიხსენოთ Y_l^* ფუნქციის (55,17) ასიმპტოტური მნიშვნელობა. გვექნება

$$(Y_l^*)^{(+)}(r, r') = -\frac{1}{k} \sin\left(kr_- - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr_- + \delta_{cl}\right) e^{i(kr_+ - \eta \ln 2kr_+ - \frac{l\pi}{2} + \delta_{cl})}. \quad (57,7)$$

სათავეში კი გრინის ფუნქცია რეგულარული იქნება $F_l(kr_-)$ კულონური ფუნქციის რეგულარობის გამო. ვხედავთ, რომ უსასრულობაში გრინის ფუნქცია წარმოადგენს განშლად სფერულ ტალღას კულონური ველისათვის დამახასიათებელი დამახინჯებით.

გრინის ფუნქციის გამოსახულება ადვილად დაიწერება, როცა იგი აკმაყოფილებს მდგარი ტალღის სასაზღვრო პირობას. (57,6) გამოსახულებიდან ნათელია, რომ ამისათვის საჭიროა დავეწროთ

$$g_i'(r, r') = \frac{1}{k} F_l(kr_-) \frac{1}{2i} (Y_l^* - Y_l). \quad (57,8)$$

ან არარეგულარული კულონური $G_l(kr)$ ფუნქციის (55,19) განმარტების თანახმად, საბოლოოდ გვექნება

$$g_i'(r, r') = \frac{1}{k} F_l(kr_-) G_l(kr_+). \quad (57,9)$$

დიდი მანძილებისათვის, (55,21) ფორმულის შედეგად, მართლაც გვექნება

$$g_i'(r, r') = -\frac{1}{k} \sin\left(kr_- - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr_- + \delta_{cl}\right) \cos\left(kr_+ - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr_+ + \delta_{cl}\right). \quad (57,10)$$

გრინის კულონური ფუნქციები, რომლებიც აქ შემოვიღეთ, საინტერესოა შევადაროთ § 28-ში მიღებულ სათანადო გამოსახულებებს გრინის ფუნქციებისათვის. ადვილი დასაბნია, რომ კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში $kr_j(kr)$, $kr_{n1}(kr)$ და $kr_{l1}^{(1)}(kr)$ ფუნქციები სათანადოდ იცვლება $F_l(kr)$, $G_l(kr)$ და Y_l^* ფუნქციებით.

§ 58. კულონური ველის უწყვეტი სპეჭრის ფუნქციები
პარაბოლურ კოორდინატებში

შინა პარაგრაფებში ჩვენ ვიპოვეთ ინფინიტური მოძრაობის შესაბამისი გაფანტვის პარციალური ტალღური ფუნქციები სფერულ კოორდინატებში. მაგრამ სხვა ურთიერთქმედებათაგან განსხვავებით, კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში ძალიან ხშირად მომენტის გამოყოფა არ არის ეფექტური. დიდი ქმედების რადიუსში გამო კულონურ ველში გაფანტვისას ერთდროულად მონაწილეობს ბევრი პარციალური ტალღა, ამიტომ უფრო ხელსაყრელია სრული ტალღური ფუნქციებით სარგებლობა. ამ მიზნით ამოცანათ შრედინგერის სათანადო განტოლება პარაბოლურ კოორდინატებში. ეს ამოცანა ბმული მდგომარეობებისათვის ამოხსნილი გვაქვს. ამ პარაგრაფში ვიპოვით უწყვეტი სპექტრის შესაბამის ფუნქციებს. როგორც ვიცით, პარაბოლური კოორდინატებით სარგებლობა განსაკუთრებით ეფექტურია იმ ამოცანებში, რომლებშიც არსებობს სივრცეში გამოყოფილი მიმართულება. ასეთ მიმართულებას გაფანტვის ამოცანაში წარმოადგენს დაცემული ნაწილაკთა მიმართულება.

გაფანტვის ამოცანაში საჭიროა მოიძებნოს შრედინგერის განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს გაფანტვის სასაზღვრო პირობას. სახელობრ, გაფანტვის ტალღური ფუნქცია უსასრულობაში უნდა წარმოადგენდეს დაცემული ბრტყელი ტალღისა და გაფანტული სფერული ტალღების ჯამს.

დაცემული ნაწილაკთა ნაკადის მიმართულებად ავიღოთ x -ღერძის მიმართულება. მაშინ ტალღურ ფუნქციას ამ ღერძის მიმართ ექნება აქსიალური სიმეტრია, ე. ი. იგი დამოკიდებული არ იქნება აზიმუტალურ ფ-კუთხეზე, რაც ნიშნავს, რომ შრედინგერის განტოლებაში მაგნიტური კვანტური m რიცხვი ნულის ტოლად უნდა ავიღოთ.

ვერ განვიხილოთ განზიდვის კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევა

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (58,1)$$

მაშინ, (20,14) და (20,14') გამოსახულებების თანახმად, შრედინგერის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) + \left[\frac{k^2 \xi^2}{4} - a \right] \psi_1(\xi) = 0, \quad (58,2)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right) + \left[\frac{k^2 \zeta^2}{4} - b \right] \psi_2(\zeta) = 0. \quad (58,3)$$

(ამ განტოლებათა მიღების დროს, რადგან სრული ენერგია $E > 0$, გამოყენებულია $\alpha \rightarrow ik$ შეცვლა), სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad (58,4)$$

ხოლო

$$a + b = \frac{1}{2D}, \quad (58,5)$$

სადაც მუდმივი D -განისაზღვრება (54,3) ფორმულით. სრული ტალღური ფუნქცია წარმოადგენს ნამრავს

$$\psi(\xi, \zeta) = \psi_1(\xi) \psi_2(\zeta). \quad (m=0) \quad (58,6)$$

ჩვენ გვინტერესებს ისეთი ამონახსნის მოძებნა, რომელსაც დიდი x -ებისა და $z < 0$ -ისათვის ექნება ბრტყელი ტალღის გამოხატულება

$$\psi = e^{ikz}, \quad (-\infty \leq z < 0), \quad x \rightarrow \infty \quad (58,7)$$

შესაბამისი ნაწილაკისა, რომელიც z -ღერძის გასწვრივ ეცემა $x > 0$ მიმართულებით. პარაბოლურ კოორდინატებში ამ პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\psi(\xi, \zeta) = e^{\frac{ik}{2}(\xi - \zeta)}; \quad (\zeta \rightarrow \infty \text{ და ყველა } \xi\text{-სათვის}) \quad (58,8)$$

ეს პირობა დაკუთვნილი იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\psi_1(\bar{\zeta}) = e^{\frac{ik\bar{\zeta}}{2}}, \quad (\text{ნებისმიერი } \bar{\zeta}\text{-სათვის}) \quad (58,9)$$

ხოლო $\psi_2(\bar{\zeta})$ აქვს ასიმპტოტური მნიშვნელობა

$$\psi_2(\bar{\zeta}) = e^{-\frac{ik\bar{\zeta}}{2}} \quad (\bar{\zeta} \rightarrow \infty) \quad (58,10)$$

შევიტანოთ (58,9) გამოსახულება (58,2) განტოლებაში; დაინახავთ, რომ განტოლება კმაყოფილება, თუ $u = \frac{1}{2} ik$. მაშინ (58,3) განტოლება (58,5) პირობის გათვალისწინებით ასე წარმოგვიდგება:

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right) + \left[\frac{k^2\zeta}{4} - \frac{1}{2D} + \frac{ik}{2} \right] \psi_2(\zeta) = 0. \quad (58,11)$$

ამ განტოლების ამონახსნი კი (58,10) ასიმპტოტური გამოსახულების შესაბამისად ვეძებთ შემდეგი ფუნქციის სახით:

$$\psi_2(\bar{\zeta}) = e^{-\frac{ik\bar{\zeta}}{2}} f(\bar{\zeta}), \quad (58,12)$$

ამასთან, ცხადია, უნდა მოვითხოვოთ, რომ $\bar{\zeta} \rightarrow \infty$ -სათვის $f(\bar{\zeta})$ ფუნქცია იყოს მუდმივი. (58,12) ფუნქცია შევიტანოთ (58,11) განტოლებაში. შედეგად უცნობი $f(\bar{\zeta})$ ფუნქციისათვის მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\bar{\zeta} f''(\bar{\zeta}) + (1 - ik\bar{\zeta}) f'(\bar{\zeta}) - \frac{1}{2D} f(\bar{\zeta}) = 0. \quad (58,13)$$

ახალი $x = ik\bar{\zeta}$ ცვლადის შემოღებით ეს განტოლება გადაიქცევა გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების განტოლებად

$$x f''(x) + (1-x) f'(x) + i\eta f(x) = 0, \quad (58,14)$$

სადაც $\eta = (2kD)^{-1}$ კულონური პარამეტრია. ამ განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ფუნქციით

$$f(x) = CF(-i\eta, 1, x); \quad (58,15)$$

ასე რომ შრედინგერის განტოლების ამონახსნი ამგვარი იქნება:

$$\psi(\xi, \zeta) = C e^{\frac{ik}{2}(\xi - \zeta)} F(-i\eta, 1, ik\bar{\zeta}). \quad (58,16)$$

ნორმირების C -კოეფიციენტი ისე შევარჩიოთ, რომ დაკუმული ბრტყელი ტალღის ამპლიტუდა ერთის ტოლი იყოს. ამისათვის ვიპოვოთ ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი $\bar{\zeta}$ -სათვის. ($D, 77$) ფორმულის თანახმად ადვილად ვიპოვით

$$F(-i\eta, 1, ikz) = \frac{(-ikz)^{i\eta}}{\Gamma(1+i\eta)} \left[1 - \frac{\eta^2}{ik(r-z)} + \dots + \right] + \frac{(ikz)^{-i\eta}}{\Gamma(-i\eta)} \cdot \frac{e^{ikz}}{ikz} \left[1 - \frac{(1+i\eta)^2}{ik(r-z)} + \dots + \right]. \quad (53,17)$$

მოვითხოვთ, რომ კვლარატულ ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებაში ერთი-ანი იყოს ყველაზე დიდი წევრი, ამისათვის საჭიროა

$$\left| \frac{\eta^2}{k(r-z)} \right| \ll 1. \quad (53,18)$$

შედეგად მივიღებთ

$$F(-i\eta, 1, ikz) = \frac{e^{\frac{\pi\eta}{2}}}{\Gamma(1+i\eta)} \left\{ e^{i\eta \ln kz} \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} i\eta \frac{e^{ikz}}{ikz} e^{-i\eta \ln kz} \right\}; \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (53,19)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ (58,16)-ში და გავითვალისწინებთ, რომ $\xi = \zeta = 2z$, $\zeta = r - z = r(1 - \cos \theta)$, სადაც θ გაფანტვის კუთხეა, მივიღებთ

$$\psi(\xi, \zeta) = \frac{C e^{\frac{\pi\eta}{2}}}{\Gamma(1+i\eta)} \left\{ e^{ikz + i\eta \ln kr(1 - \cos \theta)} + \frac{F_c(\theta)}{r} e^{ikr - i\eta \ln 2kr} \right\}, \quad (53,20)$$

სადაც

$$F_c(\theta) = - \frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} \quad (53,21)$$

წარმოადგენს გაფანტვის ამპლიტუდას კულონური ურთიერთქმედებისათვის. ცხადია, კულონური ფაზა განისაზღვრება დამოკიდებულებით

$$e^{2i\delta_c(k)} = \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)}. \quad (58,22)$$

შევნიშნოთ, რომ (53,18) პირობის შესასრულებლად საკმარისი არ არის r -იყოს დიდი. რადგან $r - z = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2}$, ამიტომ საჭიროა გაფანტვის კუთხე

ერთობ მცირე არ აღმოჩნდეს. მეორე მხრივ, რაც მეტია ნაწილაკთა შორის მანძილი, მით მცირეა გაფანტვის კუთხე. ექსპერიმენტზე kz -სიდიდე იმდენად დიდია, რომ გაფანტვის კუთხის აკრძალულ მნიშვნელობათა არეში გავზომვა პრაქტიკულად, სულ ერთია, არ ხერხდება. ასე რომ (58,18) პირობა გაფანტვის კუთხეს პრაქტიკულად არ ზღუდავს.

როგორც ვხედავთ, $\psi(\xi, \zeta)$ ფუნქციის ასიმპტოტური სახე შეესაბამება გაფანტვის ამოცანის დამახასიათებელ სურათს. ისევე როგორც სფერულ კოორდინატებში, კულონური ველის ქმედების დიდი რადიუსის გამო ბრტყელი ტალღა უსასრულოებაში დამახასიათებელია. ბრტყელ ტალღას რომ ერთეულოვანი ამპლიტუდა ჰქონდეს, ამისათვის საჭიროა დავიცვათ პირობა

$$C = e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1+i\eta). \quad (58,23)$$

ამგვარად, გაფანტვის ამოცანის შრედინგერის განტოლების ნორმირებულ ამონახსნს პარაბოლურ კოორდინატებში ექნება სახ

$$\psi(\xi, \zeta) = e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1+i\eta) e^{\frac{i\kappa}{2}(\xi-\zeta)} F(-i\eta, 1, i\kappa\xi). \quad (58,24)$$

ეს ფუნქცია ნორმირებულია იმ პირობით, რომ ასიმპტოტურ გამოსახულებაში შემავალ ბრტყელ ტალღას ჰქონდეს ერთეულოვანი ამპლიტუდა.

აღვილად დავწერთ ტალღურ ფუნქციას მიზიდვის კულონური ველისთვისაც. ამისათვის საკმარისია (58,24) ფუნქციაში η -შეცვალათ $-\eta$ -თი. გვექნება

$$\psi(\xi, \eta) = e^{\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1-i\eta) e^{\frac{i\kappa}{2}(\xi-\zeta)} F(i\eta, 1, i\kappa\xi). \quad (58,25)$$

ასეთივე ცვლილება უნდა მოვახდინოთ (58,21) ამპლიტუდაშიც.

როცა საჭიროა გარკვეული პროცესების გამოთვლა, აუცილებელი ხდება შრედინგერის განტოლების ისეთი ამონახსნებიც, როცა ბრტყელი ტალღა კი არ ვრცელდება x -ღერძის გასწვრივ, არამედ აქვს ნებისმიერი მიმართულება სივრცეში. ამ შემთხვევაში $\exp(i\kappa x)$ გამოსახულების ნაცვლად გვექნება $\exp(i\kappa r)$ ბრტყელი ტალღა. ამავე დროს საჭიროა $\kappa\xi = \kappa r - \kappa z$ გამოსახულების შეცვლა $\kappa r - \kappa z$ გამოსახულებით. ასე რომ, მაგალითად, განზიდვის ველისათვის გვექნება კულონური ფუნქცია

$$\varphi_k^{(+)}(r) = e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1+i\eta) e^{i\kappa r} F(-i\eta, 1, i[\kappa r - (\kappa r)]). \quad (58,26)$$

ეს ტალღური ფუნქცია უსასრულობაში წარმოადგენს დაცემული ბრტყელი ტალღისა და განშლადი სფერული ტალღების ჯამს, ამასთან დაცემული ბრტყელი ტალღის ამპლიტუდა ერთის ტოლია.

ბშირად გამოიყენება ისეთი ტალღური ფუნქციებიც, რომელთა სახე უსასრულობაში გამოიხატება დაცემული ბრტყელი ტალღითა და კრებადი სფერული ტალღების ჯამით. ცხადია, ამ ფუნქციას, რომელსაც $\varphi_k^{(-)}(r)$ -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ (58,26) გამოსახულებიდან შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$\varphi_k^{(-)}(r) = \varphi_k^{(+)*}(r). \quad (58,27)$$

ეს დამოკიდებულება სამართლიანია შემდეგი მოსაზრების გამო: კომპლექსურ შეუღლებულზე გადასვლით $\varphi_k^{(+)}(r)$ ფუნქციაში განშლადი სფერული ტალღა გადაიქცევა კრებადად, მაგრამ ბრტყელი ტალღაც დაცემულის ნაცვლად გახდება არეკვლილი. იმისათვის, რომ ბრტყელი ტალღა კვლავ დაცემულ ტალღას შეესაბამებოდეს, საჭირო დამატებით მოვახდინოთ $k \rightarrow -k$ შეცვლა. ასეთი შეცვლა კრებად ტალღაზე არ იმოქმედებს, რადგან მასში შედის ტალღური ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე.

თუ საჭიროა, რომ $\varphi_k^{(\pm)}(r)$ ფუნქციები ნორმირებული იყვნენ პირობით

$$\int \varphi_k^{(\pm)*}(r) \varphi_k^{(\pm)}(r) dr = \delta(k-k'), \quad (58,28)$$

მაშინ განზიდვის ველისათვის გვექნება შემდეგი კულონური ფუნქციები:

$$\varphi_k^{(\pm)}(r) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1 \pm i\eta) e^{i\kappa r} F(\mp i\eta, 1, \pm i[\kappa r - \kappa r]). \quad (58,29)$$

ტალღურ ფუნქციებს მიზიდვის კულონური ურთიერთქმედებისათვის მივიღებთ (58,29) გამოსახულებაში η -პარამეტრის $-\eta$ -თი შეცვლის შედეგად.

ვიდოთ ბრტყელი ტალღა ნორმირებული ტალღური ვექტორის სკალაზე

$$\psi_k(r) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}r} \quad (58,30)$$

და ვიპოვოთ შემდეგი ფარდობა $r=0$ წერტილში:

$$|\varphi_k^{(\pm)}(0)|^2 : |\psi_k(0)|^2. \quad (58,30')$$

ცხადია, ეს ფარდობა ტოლია $e^{-2\pi} |\Gamma(1 \pm i\eta)|^2$. თუ გავიხსენებთ (C, 34) ფორმულას, მივიღებთ

$$C^2(k) = \frac{|\varphi_k^{(\pm)}(0)|^2}{|\psi_k(0)|^2} = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}. \quad (58,31)$$

მაშასადამე, ეს ფარდობა ტოლი ყოფილა (54,21) გამოსახულებისა და იგი გამოხატავს $r=0$ წერტილში კულონური და თავისუფალი ნაწილაკის ალბათობის სიმკვრივების ფარდობას.

ანალოგიური ფარდობა მიზიდვის კულონური ველისათვის ტოლი იქნება

$$a^2(k) = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}, \quad (58,32)$$

სადაც $a(k)$ განისაზღვრება (54,32) ფორმულით $l=0$ შემთხვევაში.

დიდ ენერგიებზე, ე. ი. როცა $k \rightarrow \infty$, მაშინ $\eta \rightarrow 0$ და შედეგად როგორც (58,31), ისე (58,32) ფორმულებიდან ორივე შემთხვევაში მივიღებთ, რომ ალბათობათა სიმკვრივების ფარდობა მისწრაფვის ერთისაკენ. როცა $k \rightarrow 0$, მაშინ $\eta \rightarrow \infty$ და (58,31) ფორმულიდან გვექნება

$$C^2(k) = 2\pi\eta e^{-2\pi\eta} = 2\pi Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v} \exp\left(-2\pi Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v}\right). \quad (58,33)$$

ანალოგიურ დამოკიდებულებებს ექნება ადგილი მიზიდვის კულონური ველის შემთხვევაში. როგორც (58,31) ფორმულიდან ჩანს, რადგან $C^2(k)$ პროპორციულია $|\varphi_k(0)|^2$ სიდიდისა, ამიტომ

$$\Gamma = \exp\left(-2\pi Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v}\right) \quad (58,34)$$

მამრავლის გამო, მცირე ფარდობითი სიჩქარეებისათვის, ერთი და იმავე ნიშნის პქონე ნაწილაკთა ერთმანეთთან ახლოს მისვლის ალბათობა ექსპონენციალურად მცირეა. ეს გარემოება, მაგალითად, დიდად უშლის ხელს პროტონების ბირთვებთან ურთიერთქმედებას, წინააღმდეგ ნეიტრონებისა, რომლებზეც ატომბირთვის კულონური ბარიერი არ მოქმედებს. Γ -ს გამოვის მამრავლს უწოდებენ. იგი დიდ ორლს ასრულებს დამუხტული ნაწილაკების ბირთვებთან ურთიერთქმედების ამოცანების განხილვის დროს.

§ 50. რეზონანსისა და მოძების ფორმულიები

ჩვენ გამოვიყენებთ დამუხტულ ნაწილაკთა გაფანტვის ამპლიტუდის ფორმულა, რომელსაც, (58,21)-ის თანახმად, აქვს შემდეგი სახე:

$$F_c(\theta) = - \frac{\eta}{2k \sin \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)}, \quad (59,1)$$

სადაც

$$e^{z\eta} = \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)}, \quad (59,2)$$

ხოლო θ წარმოადგენს გაფანტვის კუთხეს C -სისტემაში. $\eta = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar v}$ - კულონური პარამეტრია. გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$d\sigma_c = |F_c(\theta)|^2 d\Omega = \left(\frac{\eta}{2k}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (59,3)$$

სადაც $d\Omega$ სხეულოვანი კუთხეა გაფანტვის მიმართულებით. თუ შევიტანთ კულონური პარამეტრის მნიშვნელობას ამ გამოსახულებაში, საბოლოოდ მივიღებთ

$$d\sigma_c = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_c}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (59,4)$$

სადაც $E_c = \mu v^2/2$ ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგიაა. (59,4) წარმოადგენს რეზერფორდის ცნობილ ფორმულას. როგორც ვხედავთ, განიკვეთის გამოსახულებაში არ შედის პლანკის მუდმივი და კვანტური გამოსახულება ზუსტად ემთხვევა კლასიკურს. ეს ერთადერთი შემთხვევაა, როცა კლასიკური და კვანტური შექანია ერთსა და იმავე ფორმულებს იძლევა. ეს გამოწვეულია კულონური ველის თავისებურებით, რომელიც მანძილის ზრდისას ნელა ისპობა.

აღვნიშნოთ, რომ მიუხედავად ამისა, კლასიკური და კვანტური გაფანტვის ფორმულებს შორის განსხვავება მაინც არსებობს იგივეური ნაწილაკების შემთხვევაში. ვთქვათ, ნაწილაკები იგივერებია $Z_1 = Z_2 = Z$, მაშინ რომელიმე ნაწილაკის გაფანტვის ალბათობა მოცემულ $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში ტოლი იქნება ორი ალბათობის ჯამისა. ერთია რომელიმე ერთი ნაწილაკის გაფანტვის ალბათობა $(\pi - \theta)$ -მიმართულებით, მეორე კი გაფანტვის ალბათობა $(\pi - \theta)$ კუთხეზე. მაშასადამე, კლასიკურ შექანიკაში გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განიკვეთი იგივეური ნაწილაკების შემთხვევაში გამოიხატება ფორმულით

$$d\sigma = |F(\theta)|^2 + |F(\pi - \theta)|^2 d\Omega, \quad (59,5)$$

რაც (59,1) ამპლიტუდის გამოხატულების ჩასმით მოგვცემს

$$d\sigma = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E_c}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} \right\} d\Omega. \quad (59,6)$$

კვანტური შექანიკის იგივეურობის პრინციპი ძირფესვიანად განსხვავდება კლასიკურისაგან. კვანტურ შექანიკაში ნაწილაკთა იგივეურობას შედეგად მოსდევს გაცივლითი ეფექტების წარმოქმნა.

განვიხილოთ ორი იგივეური ნახევარსპინიანი დამუხტული ნაწილაკი. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, (25,5) ფორმულის თანახმად, გაფანტვის განიკვეთი განისაზღვრება გამოსახულებით

$$d\sigma = \int \left(|F_c(l)|^2 + |F_c(\pi-\theta)|^2 - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} [F_c(l) F_c^*(\pi-\theta) + F_c^*(l) F_c(\pi-\theta)] \right) d\Omega; \quad (59,7)$$

• თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ ამპლიტუდის (59,1) გამოსახულებას და გავითვალისწინებთ კულონური პარამეტრის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$d\sigma = \left(\frac{Z^2 e^2}{4 E_c} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos \left(\frac{Z^2 e^2}{\hbar v} \ln \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} d\Omega. \quad (59,8)$$

ამ გამოსახულებას მოტტის ფორმულას უწოდებენ. ამ ფორმულისათვის დამახასიათებელია ბოლო ინტერფერენციული წვერის გაჩენა, რომელიც შედეგია კვანტური მექანიკის იგივეურობის პრინციპისა.

მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში, ე. ი. როცა $\frac{Z^2 e^2}{\hbar v} \gg 1$, ინტერფერენციული

წვერი ოსცილირებდა და ამიტომ მას გაფანტვაში წვლილი არ შეაქვს. ამ დროს მოტტის ფორმულა ემთხვევა კლასიკურ ფორმულას. აქ მეღანდება კულონური ველის კიდევ ერთი თავისებურება. იმ დროს, როცა, საზოგადოდ, კვანტური მექანიკიდან კლასიკურზე გადასვლა, ტალღური ოპტიკიდან გეომეტრიულ ოპტიკაზე გადასვლის ანალოგიით, მცირე ტალღის სიგრძეების დროს ხდება, კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში გაფანტვის კვანტური ფორმულებიდან კლასიკური შედეგები მიიღება მცირე სიჩქარეებისათვის, რაც ეკვივალენტურია დიდი ტალღის სიგრძეებისა.

§ 60. პროტონების პროტონებით გაფანტვა

ახლა განვიხილოთ პროტონების პროტონებით გაფანტვის შემთხვევა. იგი საინტერესოა იმდენად, რამდენადაც განზიდვის კულონური ურთიერთქმედების გარდა პროტონებს შორის, მოქმედებენ მძლავრი ატომგულური ძალებიც. პროტონების გაფანტვის დროს ატომგულური ძალები მნიშვნელოვანი როლს ასრულებს, მაშინ მათი გაფანტვა აიწერებოდა მოტტის ფორმულით. ექსპერიმენტები გვიჩვენებენ, რომ (p, p) გაფანტვა ძლიერ განსხვავდება მოტტის ფორმულით განსაზღვრული გაფანტვისაგან.

დავწეროთ შრედინგერის განტოლება რადიალური ფუნქციებისათვის, იგი (54,2) განტოლებისაგან განსხვავებული იქნება იმით, რომ კულონური ველის გარდა გვექნება ბირთვული $V(r)$ ურთიერთქმედებაც, რომელიც ცენტრალურად მივიჩნვიოთ. გვექნება

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) + \left[k^2 - \frac{1}{Dr} - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0. \quad (60,1)$$

კულონური ძალებისაგან განსხვავებით, ბირთვული ძალები ახლომოქმედებისანი არიან, ამიტომ ამ განტოლების ასიმპტოტური ამონახსნი წმინდა კულონური ველის შესაბამისი შრედინგერის განტოლების ამონახსნისაგან, დიდ მანძილებზე, განსხვავ-

ვებული იქნება იმით, რომ დამატებით გაჩნდება ბირთვული ურთიერთქმედებებით გამოწვეული ფაზის δ_l -წანაცვლება. მაშასადამე, (54,23) ასიმპტოტური გამოსახულების ნაცვლად მივიღებთ

$$R_l(k, r) = \frac{e^{i(\delta_l + \delta_l')}}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl} + \delta_l' \right), \quad (60,2)$$

სადაც δ_{cl} -გაფანტვის კულონური ფაზაა, ხოლო δ_l' —ბირთვული.

ტალღური ფუნქციის ასეთი ასიმპტოტიკა, ცხადია, მოგვეცემს გაფანტვის ამპლიტუდის შემდეგ ფორმულას:

$$F(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |e^{2i(\delta_l + \delta_l')} - 1| P_l(\cos \theta). \quad (60,3)$$

შენიშნოთ, რომ ფაზების შემცველი წევრი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ იგივეურად

$$e^{2i(\delta_l + \delta_l')} - 1 = (e^{2i\delta_l} - 1) + e^{2i\delta_l} (e^{2i\delta_l'} - 1). \quad (60,4)$$

აქედან გამომდინარე, ორივე პოტენციალზე გაფანტვის შესაბამისი ამპლიტუდა შეგვიძლია ასე ჩავეწეროთ:

$$F(\theta) = F_c(\theta) + F_{nc}(\theta), \quad (60,5)$$

სადაც $F_c(\theta)$ არის წმინდა კულონური გაფანტვის ამპლიტუდა

$$F_c(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta), \quad (60,6)$$

ხოლო $F_{nc}(\theta)$ უწოდებენ ბირთვული გაფანტვის ამპლიტუდას

$$F_{nc}(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\delta_l} (e^{2i\delta_l'} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (60,7)$$

ამ ამპლიტუდას, მართალია, ბირთვული ჰქვია, მაგრამ იგი არ არის წმინდა ბირთვული გაფანტვის ამპლიტუდა, რადგან მასში ჩართულია კულონური ეფექტები. კულონური ველის თანხლება არსებითად ცვლის ბირთვულ ურთიერთქმედებას. მხოლოდ მაშინ, როცა კულონური ველი არა გვაქვს, (60,7) დაემთხვევა წმინდა ბირთვული გაფანტვის ამპლიტუდას.

δ_l' -ფაზაც ასევე არ არის წმინდა ბირთვული ფაზა. იგი წარმოადგენს ბირთვული გაფანტვის ფაზას კულონური ურთიერთქმედების არსებობის შემთხვევაში. კულონური ურთიერთქმედება რომ არ იყოს, მაშინ წმინდა ბირთვული ფაზა δ_l' -ისაგან განსხვავებული იქნებოდა.

განვიხილოთ გაფანტვა მცირე ენერგიებზე, როცა მნიშვნელოვანია ბირთვული გაფანტვა მხოლოდ $l=0$ მდგომარეობაში. ამასთან, $l=0$ დროს შესაძლებელია ურთიერთქმედება მხოლოდ სინგლეტურ მდგომარეობაში, ე. ი. როცა სისტემის სპინი $S=0$ -ს.

კულონურ ურთიერთქმედებაში მცირე ენერგიებზეც კი მონაწილეობს მომენტების დიდი რაოდენობა. მაგრამ ამ შემთხვევაში საქმე მარტივდება, რადგან ჩვენთვის ცნობილია (60,6) ამპლიტუდა (58,21) სახით, რომელშიც მომენტების მიხედ-

ვით აჩაშტა ჩატარებულია. ამგვარაჲ, ბირთველ ამპლიტუდაში ჩვენ ავიღებთ $l=0$, ხოლო კულონურში გავითვალისწინებთ ყველა მომენტს.

რადგან პროტონები იგივეური ნაწილაკებია ნახევრის ტოლი სპინით, ამიტომ საპირთა გამოვიყენოთ განიკვეთის შემდეგი ფორმულა:

$$d\sigma = (|I'(0)|^2 + |I'(\pi-0)|^2 - \text{Re } I'^*(0) I'(\pi-0)) d\Omega. \quad (60,8)$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ (60,5) ფორმულა და გავითვალისწინოთ, რომ ბირთველი ამპლიტუდა $l=0$ მდგომარეობაში $0-\pi$ არ არის დამოკიდებული და ამიტომ $F'_{nc}(0) = F'_{nc}(\pi-0) \equiv F'_{nc}$. შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (|F_c(0)|^2 + |F_c(\pi-0)|^2 - \text{Re } F_c^*(0) F_c(\pi-0)) + |F_{nc}|^2 + \text{Re} ([F_c(0) + F_c(\pi-0)] F_{nc}). \quad (60,9)$$

ამ გამოსახულებაში უნდა შევიტანოთ ამპლიტუდების შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$F_c(\theta) = - \frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\delta_{c0}}, \quad (60,10)$$

$$F'_{nc} = \frac{1}{2ik} e^{i\delta_{c0}} (e^{i\delta_{c0}} - 1) = e^{i\delta_{c0}} e^{i\delta_{c0}} \frac{\sin \delta_{c0}}{k}. \quad (60,11)$$

ცხადია, (60,9) ფორმულის ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული წევრი ზუსტად დაემთხვევა მოტრის (59,8) ფორმულას. გარდა ამისა,

$$|F_{nc}|^2 = \frac{\sin^2 \delta_{c0}}{k^2}; \quad (60,12)$$

ინტერფერენციული წევრი კი მოგვეცემს

$$- \frac{\eta \sin \delta_{c0}}{2k^2} \left[\frac{\cos(\delta_{c0} + \eta \ln \sin^2 \theta/2)}{\sin^2 \theta/2} + \frac{\cos(\delta_{c0} + \eta \ln \cos^2 \theta/2)}{\cos^2 \theta/2} \right]; \quad (60,13)$$

მაშასადამე, გაფანტვის დიფერენციალურ განიკვეთს C -სისტემაში, (60,9) ფორმულის თანახმად, ექნება სახე

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4E_c} \right)^2 \left\{ \left[\frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{\cos \left(\frac{e^2}{\hbar v} \ln \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right] + \frac{4}{\eta^2} \sin^2 \delta_{c0} - \frac{2}{\eta} \sin \delta_{c0} \left[\frac{\cos(\delta_{c0} + \eta \ln \sin^2 \theta/2)}{\sin^2 \theta/2} + \frac{\cos(\delta_{c0} + \eta \ln \cos^2 \theta/2)}{\cos^2 \theta/2} \right] \right\} d\Omega. \quad (60,14)$$

ამ ფორმულაში პირველი წევრი გამოხატავს წმინდა კულონურ გაფანტვას გაცვლის გავალისწინებით, მეორე წევრი კი შესაბამება წმინდა ბირთველ გაფანტვას

ს-მდგომარეობაში, რაც შეეხება ბოლო წვერს, იგი გამოხატავს ბირთვული-ს და კულონური გაფანტვის ინტერფერენციას. ინტერფერენციული წვერი $\sin \delta_0$ -ის პრაპორციულია, ამიტომ თეორიული ფორმულის ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარებით შეიძლება განისაზღვროს ბირთვული ფაზის არა მხოლოდ სიდიდე, არამედ ნიშანიც.

როგორც ვხედავთ, C -სისტემაში დიფერენციალური განიკვეთი სიმეტრიულია $\theta = \frac{\pi}{2}$ კუთხის მიმართ. ამიტომ საკმარისია გაფანტვის შესწავლა $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

ინტერვალში. ჩვენ მიერ მიღებული (60,14) ფორმულის განიკვეთის ექსპერიმენტულ მნიშვნელობასთან შედარება გვიჩვენებს, რომ კულონური გაფანტვა ბირთვულს სკარბობს მხოლოდ მცირე კუთხეებზე. ეს თავისთავად ცხადია, რამდენადაც მცირე კუთხეები შეესაბამება დიდ სამიზნე მანძილებს, ხოლო კულონურ ველს გაცილებით დიდი ქმედების რადიუსი აქვს ბირთვულ ურთიერთქმედებასთან შედარებით. დიდ კუთხეებზე კი ბირთვული გაფანტვა აქარბებს კულონურს. გარდა ამისა, ცდა-სთან შედარება გვიჩვენებს, რომ ბირთვული ფაზა $\delta_0 > 0$, რაც ნიშნავს, რომ სინ-გლეტურ მდგომარეობაში (ν, ν) ბირთვული ურთიერთქმედების s -ფაზა მიზიდვის ხასიათისაა.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ბირთვული ფაზა შეგვიძლია დავაკავშიროთ შრე-დინგერის (60,1) განტოლების ამონახსნთან. ამისათვის შრედინგერის განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\chi_l'(k, r) + \left[k^2 - \frac{1}{Dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(k, r) = U(r) \chi_l(k, r), \quad (60,15)$$

სადაც $U = \frac{2\mu V}{h^2}$. (60,15) შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც არაერთგვაროვანი

განტოლება, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ ინტეგრალური განტოლების სახით. ამისათვის გამოვიყენოთ გრინის (57,9) ფუნქცია. რადგან განტოლების რეგულარული ამონახსნი, როცა $U(r) = 0$, ტოლია $F_l(kr)$ კულონური ფუნქციისა, ამიტომ გვექნება

$$\chi_l(kr) = F_l(kr) + \int_0^\infty g_l(r, r') U(r') \chi_l(k, r') dr'. \quad (60,16)$$

გრინის ფუნქციის ცხადი სახის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \chi_l(k, r) = & F_l(kr) + \frac{1}{k} G_l(kr) \int_0^r F_l(kr') U(r') \chi_l(k, r') dr' + \\ & \frac{1}{k} F_l(kr) \int_r^\infty G_l(kr') U(r') \chi_l(k, r') dr' \end{aligned} \quad (60,17)$$

განვიხილოთ ამ გამოსახულების ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი მანძილებისათვის. (55,20) და (55,21) ფორმულების თანახმად, გვექნება

$$\chi_l(k, r) = \sin \varphi_l - \frac{1}{k} \cos \varphi_l \int_0^\infty F_l(kr') U(r') \chi_l(k, r') dr'. \quad (60,18)$$

სადაც ფაზა φ_l -ტოლია გამოსახულებისა

$$\varphi_l = kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl}. \quad (60,19)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ გაფანტვის (23,24) სასაზღვრო პირობას, მივიღებთ

$$\text{tg } \delta_l(k) = -\frac{2\mu}{h^2 k} \int_0^\infty F_l(kr) V(r) \chi_l(k, r) dr. \quad (60,20)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ფაზის განმსაზღვრელი გამოსახულება ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის საშუალებით.

§ 01. გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა კულონური და ბირთვული პოლარის ერთდროული მოქმედების შემთხვევაში

ჩვენ ვიპოვეთ გაფანტვის ამპლიტუდა, როცა ბირთვულ ნაწილაკებს დამატებით ელექტრული მუხტიც გააჩნდათ. ამ პარაგრაფში იმავე ამოცანას, მისი დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობის გამო, გადავწყვეტთ $T(E)$ -მატრიცისთვისაც [68].

ვანვიხილოთ, მაშასადამე, ორი დამუხტული ნაწილაკი, რომელთაც, გარდა კულონურისა, ახასიათებთ ბირთვული ურთიერთქმედებაც. ასეთი სისტემის პამიტონიანი განისაზღვრება ფორმულით

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V_n(r) + V_c(r), \quad (61,1)$$

სადაც \hat{H}_0 -კინეტიკური ენერჯის ოპერატორია, $V_n(r)$ —ბირთვული ურთიერთქმედების პოტენციალი, ხოლო $V_c(r)$ კულონური ურთიერთქმედება

$$V_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (61,2)$$

ამგვარად, საქმე გვაქვს ორ პოტენციალზე გაფანტვასთან, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ § 40-ში მიღებული შედეგები. ამ პარაგრაფში ვაჩვენებთ, რომ გაფანტვის მატრიცას აქვს შემდეგი გამოხატულება:

$$\langle \mathbf{k}' | T(E) | \mathbf{k} \rangle = \langle \varphi_{\mathbf{k}'}^{(-)} | V_n | \varphi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle + \langle \mathbf{k}' | T_c(E) | \mathbf{k} \rangle, \quad (61,3)$$

სადაც

$$\langle \mathbf{k}' | T_c(E) | \mathbf{k} \rangle = \langle \varphi_{\mathbf{k}'} | V_c | \varphi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \quad (61,4)$$

წარმოადგენს წმინდა კულონური გაფანტვის მატრიცას. $\varphi_{\mathbf{k}}(r)$ ბრტყელი ტალღა ნორმირებულია პირობით

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}'} | \varphi_{\mathbf{k}} \rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (61,5)$$

$\varphi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(r)$ ჩვენ მიერ § 58-ში განხილული კულონური ფუნქციებია, რომლებიც ნორმირებულია (58,28) პირობით და აქვს (58,29) სახე. როგორც ვიცით, $\varphi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(r)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლიპმან-შეინგერის შემდეგ განტოლებას:

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(\pm)} = \varphi_{\mathbf{k}} + (r_0^{(\pm)}(E) V_c \varphi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}), \quad (61,6)$$

სადაც

$$(r_0^{(\pm)}(E)) = (E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon)^{-1} \quad (61,7)$$

თავისუფალი გრინის ფუნქციაა. (61,3) ფორმულაში მარჯვნივ პირველ წევრს მეორე; წევრის მსგავსი მარტივი შინაარსი არა აქვს. როგორც ვხედავთ, მატრიცული ელემენტი-ბირთვული პოტენციალიდან აიღება, ერთი მხრივ, კულონური პოტენციალის შესა-ბამისი ფუნქციით, ხოლო მეორე მხრივ—ორივე პოტენციალზე ერთდროულად გა-ფანტვის ფუნქციით, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\psi_k^{(+)} = \phi_k + G_0^{(+)}(E) (V_n + V_c) \psi_k^{(+)}. \quad (61,8)$$

მნიშვნელოვანია სწორედ ამ მატრიცული ელემენტის შემდგომი შესწავლა. ამისა-თვის გავიხსენოთ, რომ, (40,15) და (40,15') ფორმულების თანახმად, $\psi_k^{(+)}$ ფუნ-ქცია შეგვიძლია დავაკვიროთ $\varphi_k^{(+)}$ კულონური ურთიერთქმედების ტალღურ ფუნ-ქციასთან; სახელობარ

$$\psi_k^{(+)} = \varphi_k^{(+)} + G^{(+)}(E) V_n \varphi_k^{(+)} = \varphi_k^{(+)} + G_c^{(+)}(E) V_n \psi_k^{(+)}, \quad (61,9)$$

სადაც $G^{(+)}(E)$ და $G_c^{(+)}(E)$ შესაბამისად სრული და კულონური გრინის ფუნქ-ციებია

$$G^{(+)}(E) = (E - \hat{H} + i\epsilon)^{-1}, \quad G_c^{(+)}(E) = (E - \hat{H}_0 - V_c + i\epsilon)^{-1}. \quad (61,10)$$

ამგვარად, ჩვენს მიზანს შეადგენს შევისწავლოთ მატრიცა

$$\langle k' | T_{nc}(E) | k \rangle = \langle \varphi_k^{(-)} | V_n | \psi_k^{(+)} \rangle. \quad (61,11)$$

ვიზოვით ინტეგრალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს ეს მატრიცა. ამი-სათვის გავითვალისწინოთ (69,9) გამოხატულება, მივიღებთ

$$\langle k' | T_{nc}(E) | k \rangle = \langle \varphi_k^{(-)} | V_n | \varphi_k^{(+)} \rangle + \langle \varphi_k^{(-)} | V_n G_c^{(+)}(E) V_n | \psi_k^{(+)} \rangle. \quad (61,12)$$

ვიგულისხმობთ, რომ კულონური ველი განზიდვის ხასიათისაა (ბირთვის ფიზიკაში მხოლოდ განზიდვის ველთან გვაქვს საქმე), ამ შემთხვევაში ბმული მდგომარეო-ბები არ ხორციელდება და უწყვეტი სპექტრის ფუნქციები სრულ სისტემას აღგე-ნენ. ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ ერთეულოვანი ოპერატორი

$$\int dk |\varphi_k^{(\pm)}\rangle \langle \varphi_k^{(\pm)}| = 1. \quad (61,13)$$

ამ ოპერატორის გამოყენებით (61,12) ასე გადაიწერება:

$$\langle k' | T_{nc}(E) | k \rangle = \langle \varphi_k^{(-)} | V_n | \varphi_k^{(+)} \rangle +$$

$$\int \langle \varphi_k^{(-)} | V_n | \varphi_q^{(-)} \rangle \langle \varphi_q^{(-)} | G_c^{(+)}(E) | \varphi_q^{(-)} \rangle \langle \varphi_q^{(-)} | V_n | \varphi_k^{(+)} \rangle dq \quad (61,14)$$

ცხადია,

$$\langle \varphi_q^{(-)} | G_c^{(+)}(E) | \varphi_q^{(-)} \rangle = \frac{\delta(q - q')}{E - E(q) + i\epsilon}; \quad E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} \quad (61,15)$$

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფუნქციის ამ ფორმულას და (61,11) აღნიშნავს, (61,14)-დან მივიღებთ

$$\langle k' | T_{nc}(E) | k \rangle = \langle k' | V_n^{(+)} | k \rangle + \int \frac{\langle k' | V_n^{(-)} | q \rangle \langle q | T_{nc}(E) | k \rangle dq}{E(k) - E(q) + i\epsilon}. \quad (61,16)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\langle k' | V_n^{(\pm)} | k \rangle = \langle \varphi_k^{(-)} | V_n | \psi_k^{(\pm)} \rangle. \quad (61,17)$$

ამგვარად, (61,11) მატრიცა უნდა აკმაყოფილებდეს (61,16) ინტეგრალურ განტო-ლებას. როცა ბირთვულ ურთიერთქმედებას ცენტრალური ხასიათი აქვს, მაშინ

კულონური ველის იმავე სამეტრიის გამო ხელსაყრელია პარციალურ სიდიდეებზე გადასვლა. ამისათვის მოვახდინოთ გაშლა სფერულ ფუნქციებად

$$\langle k' | T_{nc}(E) | k \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \langle k' | T_{nc,l}(E) | k \rangle Y_{lm}(\bar{k}') Y_{lm}^*(\bar{k}) \quad (61.18)$$

$$\langle k' | V_n^{\pm} | k \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \langle k' | V_{nc,l}^{\pm} | k \rangle Y_{lm}(\bar{k}') Y_{lm}^*(\bar{k}). \quad (61.19)$$

ამ გამოსახულების (61,16) ინტეგრალურ განტოლებაში შეტანით და კუთხეების მიხედვით ინტეგრაციით ადვილად მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას პარციალური გაფანტვის მატრიცისათვის

$$\langle k' | T_{nc,l}(E) | k \rangle = \langle k' | V_{nc,l}^{\pm} | k \rangle + 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\langle k' | V_{nc,l}^{\pm} | q \rangle \langle q | T_{nc,l}(E) | k \rangle q^2 dq}{E(k) - E(q) + i\epsilon}. \quad (61.20)$$

ცხადია, წმინდა კულონური გაფანტვის (61,4) მატრიცა აკმაყოფილებს ლიპმან-შეინგერის განტოლებას, რომელსაც პარციალური გაფანტვისათვის ეწევა სახე

$$\langle k' | T_{cl}(E) | k \rangle = \langle k' | V_{cl} | k \rangle + 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\langle k' | V_{cl} | q \rangle \langle q | T_{cl}(E) | k \rangle q^2 dq}{E(k) - E(q) + i\epsilon}. \quad (61.21)$$

კულონური გაფანტვის პარციალური ამპლიტუდა ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულებისა:

$$F_{cl}(E) = -\frac{4\pi^2\mu}{h^2} T_{cl}(E; k, k'), \quad (61.22)$$

ხოლო გაფანტვის კულონურ δ_{cl} ფაზასთან გვექნება ასეთი კავშირი:

$$T_{cl}(E) = -\frac{h^2}{4\pi^2\mu k} \sin \delta_{cl} e^{i\delta_{cl}}. \quad (61.23)$$

რაც შეეხება გაფანტვის ფაზას ორივე პოტენციალის ერთდროული მოქმედებით, იგი, (61,3) ფორმულის თანახმად, განისაზღვრება მატრიცით

$$\begin{aligned} \langle k' | T_l(E) | k \rangle &= \langle k' | T_{nc,l}(E) | k \rangle + \langle k' | T_{cl}(E) | k \rangle = \\ &= -\frac{h^2}{4\pi^2\mu k} \sin \delta_l(k) e^{i\delta_l(k)}. \end{aligned} \quad (61.24)$$

ახლა გამოვხატოთ (61,20) ინტეგრალურ განტოლებაში შემაველი $V_{nc,l}^{\pm}(k', k)$ მატრიცული ელემენტი რადიალური კულონური ფუნქციებით. ამისათვის (61,19) მატრიცული ელემენტი გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\langle \varphi_k^{\pm} | V_n | \varphi_k^{\pm} \rangle = \int (\psi_k^{\pm})^* | \mathbf{q}' \rangle \langle \mathbf{q}' | V_n | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | \varphi_k^{\pm} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{q}'. \quad (61.25)$$

$V_n(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ მატრიცული ელემენტი და $\varphi_k^{\pm}(\mathbf{q})$ ფუნქციები გავშალოთ სფერულ ფუნქციებად

$$V_n(\mathbf{q}', \mathbf{q}) = 4\pi \sum_l \sum_m V_{nl}(q', q) Y_{lm}(\bar{q}') Y_{lm}^*(\bar{q}), \quad (61.26)$$

$$\varphi_k^{\pm}(\mathbf{q}) = 4\pi \sum_l \sum_m \varphi_{kl}^{\pm}(q) Y_{lm}(\bar{k}) Y_{lm}^*(\bar{q}), \quad (61.27)$$

სადაც $\varphi_{kl}^{\pm}(q)$ იქნება ვაფანტეის კულონური ფუნქციის რადიალური ნაწილი. ამ გამოსახულებების (61,25) ფორმულაში შეტანილ და (61,19) გაშლასთან შედარების შედეგად საბოლოოდ მივიღებთ

$$V_{nc,l}^{\pm}(k', k) = (4\pi)^2 \int_0^{\infty} q'^2 dq' \int_0^{\infty} q^2 dq \varphi_{kl}^{\pm}(q') V_{nl}(q', q) \varphi_{kl}^{\pm}(q). \quad (61,28)$$

ცხადია, (61,27) და (61,6) ფორმულების თანახმად, რადიალური ფუნქციებისათვის გვექნება შემდეგი ნორმირება:

$$(4\pi)^2 \int_0^{\infty} \varphi_{kl}^{\pm}(q) \varphi_{kl}^{\pm}(q) q^2 dq = \frac{\delta(k' - k)}{kk'}. \quad (61,29)$$

თუ დავაკვირდებით (61,28) გამოსახულებას, დავინახავთ, რომ $V_{nc,l}^{\pm}(k', k)$ მატრიცული ელემენტი წარმოადგენს ატომგულური ურთიერთქმედების $V_{nl}(q', q)$ მატრიცული ელემენტის გასაშუალებას ვაფანტეის კულონური ფუნქციების მიხედვით. რადგან კულონის ფუნქციები თავისთავად რთული ფუნქციებია, ამიტომ $V_{nc,l}^{\pm}(k', k)$ მატრიცული ელემენტის ცხადი სახის მოძებნა მთელი რიგი მნიშვნელოვანი ბირთვული ურთიერთქმედების პოტენციალების შემთხვევაში არ ხერხდება. ამიტომაც (61, 28) გამოსახულების საპოვნელად იძულებული ვართ მივმართოთ მიახლოებით მეთოდებს.

§ 62. ეშვამტარი რადიუსის მიახლოება დამუხტული ბირთვული ნაწილაკებისათვის. პროტონების პროტონებით გაზანთვა

აღრე ჩვენ განვიხილეთ ეფექტური რადიუსის მიახლოება ნეიტრალური ბირთვული ურთიერთქმედებისათვის. ახლა განვიხილოთ ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორმულა დადებითად დამუხტული ბირთვული ნაწილაკებისათვის. ბირთვული ახლო მოქმედების ძალების გარდა, ასეთ ნაწილაკებზე იმოქმედებს განზიდვის კულონური ძალაც. ასეთი შემთხვევის ტიპური მაგალითია პროტონების ვაფანტეა პროტონებით.

განვიხილოთ ურთიერთქმედება მცირე ენერგიებზე. ამ შემთხვევაში ბირთვული ურთიერთქმედება მნიშვნელოვანი იქნება $l=0$ მდგომარეობაში.

დაიწყოთ შრედინგერის განტოლება $l=0$ მომენტისათვის

$$\frac{d^2 f_h(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{1}{Dr} \right) f_h(r) = \frac{2\mu}{h^2} V(r) f_h(r), \quad (62,1)$$

სადაც J -პარამეტრისათვის შემოვიღეთ სტანდარტული აღნიშვნა

$$J = \frac{h^2}{2\mu Z_1 Z_2 e^2}. \quad (61,2)$$

μ -როგორც ყოველთვის, აღნიშნავს დაყვანილ მასას. $V(r)$ ბირთვული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიაა.

როცა r მეტია ატომგულური ძალების რადიუსზე, მაშინ $V(r) \approx 0$ და (62,1) დაიყვანება შრედინგერის განტოლებაზე წმინდა კულონური ურთიერთქმედებისათვის

$$\frac{d^2 \phi_h(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{1}{Dr} \right) \phi_h(r) = 0. \quad (62,3)$$

როგორც ვიცით, ამ განტოლებას აქვს ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი: რეგულარული $F(kr)$ და არარეგულარული $G(kr)$ ფუნქციები, რომელთა ასიმპტოტური გამოსახულებები, როცა $r \rightarrow \infty$, ტოლია

$$F(kr) = \sin(kr - \eta \ln 2kr + \delta_c), \quad (62,4)$$

$$G(kr) = -\cos(kr - \eta \ln 2kr + \delta_c), \quad (62,5)$$

სადაც კულონური პარამეტრი η -განისაზღვრება ფორმულით

$$\eta = \frac{1}{2kD}. \quad (62,6)$$

δ_c -კულონური გაფანტვის ფაზა. მცირე მანძილებზე კი კულონურ ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$F(r) = C kr(1 + \eta kr + \dots) \quad (62,7)$$

$$G(r) = -\frac{1}{C} \{1 + 2k\eta \ln 2kr + 2\gamma - 1 + \ln \eta + h(\eta)\} + \dots \quad (62,8)$$

γ -ეილერის მუდმივა, ხოლო

$$C^2(\eta) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}. \quad (62,9)$$

რაც შეეხება $h(\eta)$ ფუნქციას, იგი განისაზღვრება (55,35) ფორმულით

$$h(\eta) = -\ln \eta - \gamma + \eta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu^2 + \eta^2)}. \quad (62,10)$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ როცა $k \rightarrow 0$ (ე. ი. როცა $\eta \rightarrow \infty$), მაშინ [8]

$$h(\eta) = \frac{1}{12\eta^2} + \frac{1}{120\eta^4} + \frac{1}{252\eta^6} + \dots; \quad (k \rightarrow 0) \quad (62,11)$$

ასევე, როცა $k \gg 1$, გვაქვს

$$h(\eta) = -\gamma - \ln \eta + 1, 2\eta^2 + \dots. \quad (62,12)$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi_h(r) = C [\operatorname{ctg} \delta \cdot F(r) - G(r)], \quad (62,13)$$

სადაც C -მამრაველი წარმოადგენს (62,9) ფორმულით განსაზღვრულ მუდმივს. ამ ფუნქციას დიდ მანძილზე ექნება შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$\Phi_h(r) = \frac{C}{\sin \delta} \sin(kr - \eta \ln 2kr + \delta_c + \delta). \quad (62,14)$$

სადაც δ -ბირთვული გაფანტვის ფაზა. ნათელია, რომ (62,14) ასიმპტოტური სახე ექნება შრედინგერის (62,1) განტოლების ამონახსნს. მაშასადამე, $\Phi_h(r)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (62,3) განტოლების ამონახსნი, რომლის ასიმპტოტური გამოსახულება ემთხვევა (62,1) განტოლების ამონახსნის ასიმპტოტურ მნიშვნელობას.

სრულიად ანალოგიურად იმისა, რაც გვექონდა ნეიტრალური ნაწილაკების დროს, ე. ი. როცა გამოვიყვანეთ (31,18) ფორმულა, (62,1) განტოლება მოგვეცემს

$$\frac{d}{dr} W[f_h(r), f_0(r)] = k^2 f_h(r) f_0(r), \quad (62,15)$$

ხოლო (62,3) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{d}{dr} W[\phi_h(r), \phi_0(r)] = k^2 \phi_h(r) \phi_0(r), \quad (62,16)$$

სადაც W -ვრონსკიანია. ამ უკანასკნელს წვერ-წვერად გამოვაცლოთ (62,15) და ავიღოთ ინტეგრალი 0-დან ∞ -მდე. გვექნება

$$W[\phi_h(r), \phi_0(r)]_0^\infty - W[f_h(r), f_0(r)]_0^\infty = \frac{1}{2} k^2 L_c(k^2), \quad (62,17)$$

სადაც

$$L_c(k^2) = 2 \int_0^\infty dr [\Phi_h(r) \Phi_0(r) - f_h(r) f_0(r)]. \quad (62,18)$$

რადგან $f_h(r)$ და $\Phi_h(r)$ ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა ერთნაირია უსასრულობაში, ამიტომ (62,17) გამოსახულებაში ჩასმა $r = \infty$ -ზე ნულს გაუტოლდება. რადგან $f_h(0) = 0$, ამიტომ ნული იქნება აგრეთვე ვრონსკიანი

$$W[f_h(r), f_0(r)]_0 = 0; \quad (62,19)$$

თუ გამოვიყენებთ (62,13) ფორმულას და მასში გავითვალისწინებთ (62,7) და (62,8) ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს $r \rightarrow 0$ -სათვის, მივიღებთ

$$\Phi_h(r) = 1 + \frac{r}{D} \left[\ln \frac{r}{D} + 2\gamma - 1 + K(\eta) \right] + \dots, \quad (r \rightarrow 0) \quad (62,20)$$

სადაც $K(\eta)$ ცნობილი ფუნქციაა, იგი შემოღებული იყო ლ. ლანდაუსა და ი. სმოროდინსკის მიერ [38].

$$K(\eta) = C^2 k \operatorname{ctg} \delta \cdot D + h(\eta). \quad (62,21)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$-\frac{1}{a_c} = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{K(\eta)}{D} \right] \quad \lim_{k \rightarrow 0} \left[C^2 k \operatorname{ctg} \delta(k) + \frac{h(\eta)}{D} \right]. \quad (62,22)$$

a_c -ს უწოდებენ გაფანტვის სიგრძეს დამუხტული ბირთვული ნაწილაკების გაფანტვის შემთხვევაში. (62,20) გამოსახულებიდან ადვილად ვიპოვიოთ, რომ

$$\Phi_0(r) = \lim_{k \rightarrow 0} \phi_h(r) = 1 - \frac{r}{a_c} + \frac{r}{D} \left(\ln \frac{r}{D} + 2\gamma - 1 \right). \quad (62,23)$$

ასევე ცხადია, რომ

$$\frac{d\Phi_0(r)}{dr} = -\frac{1}{a_c} + \frac{1}{D} \left(\ln \frac{r}{D} + 2\gamma \right). \quad (62,24)$$

ამის შემდეგ ადვილად ვიპოვიოთ ვრონსკიანს

$$W[\Phi_h(r), \Phi_0(r)] = -\frac{1}{a_c} - \frac{K(\eta)}{D}, \quad (62,25)$$

რაც (62,17) ფორმულაში შეტანილ მოგვეცემა

$$\frac{K(k^2)}{J} = \frac{1}{a_c} + \frac{1}{2} k^2 I_c(k^2). \quad (62,26)$$

ეს ფორმულა ჯერჯერობით ზუსტია. მიახლოებას მივიღებთ, თუ მოვახდენთ $I_c(k^2)$ ფუნქციის მწკრივად გაშლას k^2 -ის ხარისხების მიხედვით. როცა შემოვისაზღვრებთ $I_c(0)$ წევრით, მივიღებთ ეფექტური რადიუსის მიახლოების შემდეგ ფორმულას:

$$\frac{K(k^2)}{D} = -\frac{1}{a_c} + \frac{1}{2} r_c^2 k^2, \quad (62,27)$$

სადაც

$$r_c^2 = 2 \int_0^{\infty} [\phi_0^2(r) - f_0^2(r)] dr. \quad (62,28)$$

r_c^2 -ს უწოდებენ ეფექტურ რადიუსს.

თუ გავიხსენებთ K -ფუნქციის (62,21) განმარტებას და $C^2(\eta)$ მუდმივის (62,9) ფორმულას, მაშინ (62,27) გამოსახულება შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\frac{\pi c \operatorname{ctg} \delta(k)}{J(c^{2n}-1)} + \frac{h(\eta)}{D} = -\frac{1}{a_c} + \frac{1}{2} r_c^2 k^2. \quad (62,29)$$

როცა ნაწილაკებს მუხტი არა აქვთ, მაშინ $\eta=0$ და დამუხტული ნაწილაკებისათვის გამოყენილი ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორმულები გადავლენ ნეიტრალური ნაწილაკებისათვის ჩვენ მიერ § 31-ში მიღებულ ფორმულებში.

პროტონების პროტონებით გაფანტვა. ჩვენ მიერ ზემოთ მიღებული (62,29) ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ (p, p) ურთიერთქმედებისათვის მცირე ენერგიებზე. პროტონების შემთხვევაში $Z_1=Z_2=1$ და $D=2,88 \cdot 10^{-13}$ სმ. ცდა გვიჩვენებს, რომ ეფექტური მიახლოების ფორმულების გამოყენება ნუკლონებისათვის შეგვიძლია $E_c \leq 10 \text{ Mev}$. მცირე ენერგიებზე $l=0$, ამიტომ პროტონებს შეუძლიათ ურთიერთქმედება სინგლეტურ მდგომარეობაში, ე. ი. $S=0$ სპინით. (62,29) ფორმულის ცდასთან შედარების შედეგად დადგინდა, რომ

$$a_c = -7,7\phi, \quad r_c^2 = 2,6\phi. \quad (62,30)$$

ეს ფაქტი, რომ გაფანტვის სიგრძე უარყოფითია, გვეუბნება, რომ 1S მდგომარეობაში ორი პროტონი არ ქმნის ბმულ მდგომარეობას.

არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენცილები

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ პოტენციალთა ერთ კლასს, რომელსაც არალოკალურ ფაქტორიზებად პოტენციალებს ან სეპარაბელურ პოტენციალებს უწოდებენ. ეს პოტენციალები არალოკალური პოტენციალების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. ისინი პირველად განხილული იყო ვიგნერის [39], ხოლო შემდეგ იამაგუჩის მიერ [40, 41]. ფაქტორიზებადი პოტენციალებისათვის დამახასიათებელია ის გარემოება, რომ მათთვის შრედიანგერის ინტეგრალური განტოლების გული გადაგვარებულია. ასეთი ინტეგრალური განტოლებები კი, როგორც ცნობილია, ადვილად იხსნება, სეპარაბელური პოტენციალებისათვის ასევე მარტივდება სამი სხეულის შესაბამისი მოძრაობის კვანტური განტოლება. ასეთი პოტენციალებისათვის სამი სხეულის ამოცანა პრინციპში ბოლომდე იხსნება.

ძნელია არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების გამოყენების დასაბუთება, მაგრამ, როგორც ჩანს, ეს პოტენციალები სისტემის ფიზიკურ თვისებებს გარკვეული ზომით კარგად ასახავენ. ფაქტორიზებადი პოტენციალების გამოყენების შესაძლებლობას ისიც ანაპირობებს, რომ ყოველთვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ნამდვილი პოტენციალის ისეთი შესატყვისი ფაქტორიზებადი პოტენციალი, რომელიც იმავე შედეგებს იძლევა [77]. გარდა ამისა, ნამდვილი ლოკალური პოტენციალი ყოველთვის შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სეპარაბელური პოტენციალების უსასრულო ჯამი, რომლის კრებადობის შემთხვევაში შესაძლებელია საკმარისი აღმოჩნდეს რამდენიმე წევრით შემოფარგვლა.

§ აჲ. არალოკალური პოტენცილები. შრედიანგერის განტოლება. უწყვეტობის განტოლება

არალოკალური პოტენციალები გარკვეულ როლს ასრულებენ კვანტურ მექანიკაში. ისინი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი აღმოჩნდნენ ბირთვის ფიზიკაში, სადაც არალოკალობა, როგორც ჩანს, არსებით ეფექტს იძლევა. აღსანიშნავია, რომ, როგორც ქვემოთ ვაჩვენებთ, არალოკალობა სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერჯის კვანტულენტურია. სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალების გამოყენების საკითხი კი ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემაა, რამდენადაც სიჩქარეზე დამოკიდებულება აპირობებს განზიდვას მცირე მანძილებზე, ხოლო ექსპერიმენტები მიუთითებენ, რომ ნუკლონები მცირე მანძილებზე მართლაც მძლავრად განიზიდებიან.

ცნობილია, რომ სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალების შემთხვევაში შრედინგერის განტოლება იწერება ინტეგრალური განტოლების სახით. თუ, მაგალითად:

$$V = V(r, \hat{p}), \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla; \quad (63,1)$$

მაშინ შრედინგერის განტოლება შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\nabla^2 \psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V \left(r, \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \right] \psi(r) = 0. \quad (63,2)$$

ამ განტოლებას სასრული რიგი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა $V \left(r, \frac{\hbar}{i} \nabla \right)$ ფუნქცია წარმოადგენს პოლინომს. ამიტომ ბუნებრივია (63,2) განტოლების ჩაწერა იმპულსურ წარმოდგენაში ინტეგრალური განტოლების სახით

$$\left(E - \frac{k^2 \hbar^2}{2m} \right) \varphi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(p-k, p) \varphi(p) dp, \quad (63,3)$$

სადაც

$$V(p-k, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(p-k \cdot r)} V(r, p) dr. \quad (63,4)$$

არალოკალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში კოორდინატულ წარმოდგენაშიც შრედინგერის განტოლება ინტეგრალური განტოლების სახით იწერება. ვთქვათ, გვაქვს ორი ნაწილაკი m_1 და m_2 მასებით, მაშინ შრედინგერის განტოლებას არალოკალური ურთიერთქმედებისათვის ექნება გამოხატულება

$$\left(E' + \frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 + \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 \right) \psi(r_1, r_2) = \int V(r_1, r_2 | r'_1, r'_2) \psi(r'_1, r'_2) dr'_1, dr'_2, \quad (63,5)$$

სადაც E' სრული ენერჯიაა, ხოლო $(r_1, r_2 | V | r'_1, r'_2)$ წარმოადგენს არალოკალური ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერჯიას კოორდინატულ წარმოდგენაში. იზოლირებულ სისტემისათვის ინახება სისტემის სრული იმპულსი, ამიტომ $(r_1, r_2 | V | r'_1, r'_2)$ პოტენციალური ენერჯია ტრანსილაციურად ინვარიანტული უნდა იყოს. ეს კი ნიშნავს, რომ პოტენციალურ ენერჯიას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$(r_1, r_2 | V | r'_1, r'_2) = \delta(R - R') (r | V | r'), \quad (63,6)$$

სადაც

$$r = r_1 - r_2, \quad R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}. \quad (63,7)$$

r და R შესაბამისად ფარდობითი და სიმძიმის ცენტრის რადიუსვექტორებია. (63,5) ფორმულაში გადავიდეთ (63,7) კოორდინატებზე. მარტივად მივიღებთ

$$\left(E' + \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R \right) \psi(r, R) = \int V(r, r') \delta(R - R') \psi(r', R') dr' dR', \quad (63,8)$$

სადაც μ დაყვანილი მასაა, ხოლო $M = m_1 + m_2$ — სრული. მოვხდინოთ ცვლადთა განცალკევა ფურიეს მეთოდით; ამონახსნი მოვძებნოთ ფორმით

$$\psi(r, R) = \psi(r) \varphi(R), \quad (63,9)$$

სადაც $\varphi(R)$ აკმაყოფილებს შრედინგერის განტოლებას ინერციის ცენტრის თავისუფალი მოძრაობისათვის $E_0 = \hbar^2 P^2 / 2M$ ენერგიით

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R \varphi(R) = E_0 \varphi(R), \quad (63,10)$$

მაშინ (63,8) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(E + \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\right) \psi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} (r|V|r') \psi(r') dr', \quad (63,11)$$

რომელიც წარმოადგენს ფარდობითი მოძრაობის არალოკალური ურთიერთქმედების შესაბამის შრედინგერის განტოლებას $E = E' - E_0$ ფარდობითი ენერგიით.

როგორც ვხედავთ, (63,11) განტოლება მიიღება ფარდობითი მოძრაობის შესაბამისი შრედინგერის განტოლებიდან, თუ მოვახდენთ შემდეგ შეცვლას:

$$V(r) \psi(r') \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (r|V|r') \psi(r') dr'; \quad (63,12)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა

$$V(r, r') = (r|V|r') = V(r) \delta(r-r'), \quad (63,13)$$

(63,11) განტოლება დაიყვანება ლოკალური ურთიერთქმედების შესაბამის შრედინგერის განტოლებაზე. ამგვარად, ლოკალური ურთიერთქმედება წარმოადგენს არალოკალურის სპეციალურ შემთხვევას. ცხადია, (63,11) სტაციონარული განტოლების ნაცვლად, შეგვიძლია განვიხილოთ დროზე დამოკიდებული შრედინგერის განტოლება

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi(r, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r', t) \psi(r', t) dr'; \quad (63,14)$$

ამგვარად, არალოკალური ურთიერთქმედებისათვის ჰამილტონის ოპერატორს ექნება სახე

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \int_{-\infty}^{+\infty} dr' V(r, r', t). \quad (63,15)$$

იმისათვის, რომ ჰამილტონიანი იყოს ერმიტული, საჭიროა

$$V(r, r') = V^*(r', r). \quad (63,16)$$

როგორც წესი, პოტენციალური ენერგია ნამდვილი ფუნქციაა, ამიტომ მისი ერმიტულობისათვის საკმარისია სიმეტრიულობის მოთხოვნა.

უწყვეტობის განტოლება. ვაჩვენოთ, რომ (63,14) განტოლებისათვის სამართლიანია ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონი. ამისათვის (63,14) განტოლებაში გადავიღეთ კომპლექსურად შეუღლებულზე

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi^*(r, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} V^*(r, r', t) \psi^*(r', t) dr'. \quad (63,17)$$

ეს უკანასკნელი გავამრავლოთ $\psi(r, t)$ ფუნქციაზე და შედეგი გამოვაკლოთ წინასწარ $\psi^*(r, t)$ -ფუნქციაზე გადამრავლებულ (63,14) განტოლებას; გვექნება

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) =$$

$$\psi^* \int V(r, r', t) \psi(r, t) dr' - \psi(r, t) \int V^*(r, r', t) \psi^*(r', t) dr'. \quad (63,18)$$

თუ შემოვიღებთ ρ ალბათობის სიმკვრივეს და J ალბათობის დენის ვექტორს ცნობილი ფორმულებით

$$\rho = \psi^* \psi, \quad J = \frac{i\hbar}{2\mu} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \quad (63,19)$$

მივიღებთ უწყვეტობის შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = \Phi(r, t), \quad (63,20)$$

სადაც $\Phi(r, t)$ ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით

$$\begin{aligned} \Phi(r, t) = & \frac{i}{\hbar} \psi(r, t) \int_{-\infty}^{+\infty} V^*(r, r', t) \psi^*(r', t) - \\ & \frac{i}{\hbar} \psi^*(r, t) \int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r', t) \psi(r', t) dr'. \end{aligned} \quad (63,21)$$

$\Phi(r, t)$ ფუნქცია ასრულებს წყაროს როლს. რადგან $V^*(r, r', t) = V(r', r, t)$, ამიტომ, თუ მოვახდენთ (63,20) განტოლების ინტეგრაციას მთელ სივრცეზე, მარჯვენა მხარე გაუტოლდება ნულს, მარცხენა კი მოგვცემს ნაწილაკთა შენახვის კანონს ინტეგრალური ფორმით

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint J_n ds, \quad (63,22)$$

რაც ფიზიკურად ეკვივალენტურია იმისა, რომ ნაწილაკთა რიცხვის შემცირება V მოცულობაში ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ ფართში გასულ ნაწილაკთა რიცხვის ტოლია.

არალოკალობის ფიზიკური შინაარსი. ახლა გამოვარკვეოთ საკითხი, თუ რა ფიზიკური შინაარსი აქვს არალოკალურ პოტენციალებს. შრედინგერის განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\nabla^2 \psi(r) = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \psi(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} F(r), \quad (63,23)$$

სადაც, როცა პოტენციალური ენერგია ლოკალურია,

$$F(r) = V(r) \psi(r), \quad (63,24)$$

ხოლო, როცა პოტენციალი არალოკალურია,

$$F(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r') \psi(r') dr'; \quad (63,25)$$

ვიგულისხმობთ, რომ $\psi(r)$ ფუნქცია და მისი პირველი რიგის წარმოებულები, ფიქსირებულ r_0 წერტილში, ჩვენთვის ცნობილია. მოვახდინოთ $\psi(r)$ ფუნქციის მწკრივად გაშლა r_0 წერტილის უშუალო Δr მახლობლობაში

$$\psi(r_0 + \Delta r) = \psi(r_0) + \Delta r (\nabla \psi)_{r=r_0} + \frac{1}{2} (\Delta r)^2 (\nabla^2 \psi)_{r=r_0} + \dots + \quad (63,26)$$

როცა $\psi(r_0)$ და $\nabla \psi(r_0)$ ცნობილია, მაღალი რიგის წარმოებულებს ვიპოვიტ შრედინგერის (63,23) განტოლებიდან, სახელდობრ:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r) = -E \psi(r) + \begin{cases} V(r) \psi(r), \\ \int V(r, r') \psi(r') dr'; \end{cases} \quad (63,27)$$

ასევე

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^3 \psi(r) = -E \nabla \psi(r) + \begin{cases} (\nabla V) \psi + V \nabla \psi, \\ \int \nabla V(r, r') \psi(r') dr' \end{cases} \quad (63,28)$$

და ა. შ.

ჩვენ ვხედავთ, რომ როცა პოტენციალი ლოკალურია, მაშინ ψ ფუნქციის ყოფაქცევა $r_0 + \Delta r$ წერტილში განისაზღვრება $\psi(r_0)$ და შრედინგერის განტოლებით. ასე რომ ლოკალური პოტენციალის შემთხვევაში $\psi(r)$ ფუნქციის ყოფაქცევა ნებისმიერ წერტილში განისაზღვრება მხოლოდ და მხოლოდ მისი ყოფაქცევით მუზობელ წერტილებში. ხოლო როცა პოტენციალი არალოკალურია, მაშინ $\psi(r)$ ფუნქციის ყოფაქცევა $r_0 + \Delta r$ წერტილში არ განისაზღვრება მისი მნიშვნელობით მხოლოდ r_0 წერტილში; იგი დამოკიდებული იქნება ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევაზე მთელ იმ არეში, სადაც განსაზღვრულია $V(r, r')$ არალოკალური პოტენციალი.

არალოკალური პოტენციალის დამოკიდებულება სიჩქარეზე. ახლა ვაჩვენოთ, რომ არალოკალური პოტენციალები ეკვივალენტურია სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალებისა. კერძოდ, დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r') \psi(r') dr' = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(r, \hat{p}) \psi(r); \quad (63,29)$$

მართლაც, $\psi(r')$ ფუნქცია გაეშალოთ მწკრივად r -ის მიხედვით; გვექნება

$$\psi(r') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (r' - r, \nabla)^m \psi(r) = e^{(r' - r, \nabla)} \psi(r), \quad (63,30)$$

სადაც გამოვიყენეთ ტოლობა $[\nabla_{r'}, \psi(r')]_{r=r'} = \nabla_r \psi(r)$. თუ გავიხსენებთ იმპულსის ოპერატორის ფორმულას $\hat{p} = -i\hbar \nabla$, მაშინ შეგვიძლია (63,30) ასე გადავწეროთ:

$$\psi(r') = \hat{R}(r', r) \psi(r), \quad (63,31)$$

სადაც \hat{R} წარმოადგენს ე. წ. ტრანსილაციის ოპერატორს

$$\hat{R}(r' - r) = e^{\hat{h} (r' - r, \hat{p})} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{r' - r, \hat{p}}{\hbar} \right)^m \quad (63,32)$$

როცა ეს ოპერატორი კომუტატორია ჰამილტონიანთან, მაშინ იმპულსი ინახება. ეს თვისება სივრცის ერთგვაროვნების შედეგია.

თუ (63,29) ფორმულაში შევიტანთ $\psi(r')$ -ის მნიშვნელობას (63,31) ფორმულიდან და გავითვალისწინებთ (63,32)-ს, მივიღებთ

$$v_m(r, \hat{p}) = \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r') (r' - r)^m d\tau \right) p^m. \quad (63,33)$$

მაშასადამე, ნამდვილად სამართლიანია (63,29) ფორმულა და არალოკალური პოტენციალები სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალების ეკვივალენტური ყოფილა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$f_m(r) = \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^m \int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r') (r - r')^m d\tau, \quad (63,33')$$

მაშინ გვექნება

$$v_m(r, \hat{p}) = (f_m(r) \cdot p^m). \quad (63,33'')$$

ამ გამოსახულების გამოყენებით კი შეგვიძლია დაეწეროთ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(r, r') \psi(r') d\tau = |f_0(r) + f_2(r) p^2 + \dots + \psi(r)| \quad (63,33''')$$

ამასთან, ამ გამოსახულებაში არ შევიდა \hat{p} -ს კენტი ხარისხების პროპორციული წევრები, რამდენადაც პოტენციალი ინვარიანტული უნდა იყოს სივრცის ინვერსიის მიმართ (ე. ი. დატული უნდა იყოს ლუწობის შენახვის კანონი). როცა იმპულსზე დამოკიდებულობის ეფექტი მცირეა, მაშინ (63,33''') მწკრივში ძირითადი იქნება პირველი ლოკალური წევრი $f_0(r)$. ეთქვამთ, ეს წევრი უარყოფითია, მაშინ, ცხადია, გვექნება მიზიდვა. ახლა, დაეუშვათ, იმპულსის ეფექტი იზრდება, მაშინ დადებითი $f_2(r)$ ფუნქციისათვის მეორე წევრმა შეიძლება გადააქარბოს პირველს და მთელი მარჯვენა მხარე გახდეს დადებითი, და მაშასადამე, დიდი იმპულსებისათვის მიზიდვა შეიცვალავს განზიდვით. რადგან დიდი იმპულსები მცირე მანძილებს შეესაბამება, ამიტომ არალოკალური პოტენციალების დახმარებით არსებობს პრინციპული შესაძლებლობა ურთიერთქმედებაში მცირე მანძილებზე განზიდვის ეფექტის ჩართვისა.

შრედინგერის არალოკალური განტოლება იმპულსურ წარმოდგენაში. შრედინგერის (63,11) განტოლების სხვადასხვა წარმოდგენაში დასაწერად ხელსაყრელია მისი ჩაწერა აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში შემდეგი სახით:

$$\left(E + \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \right) |\psi\rangle = V |\psi\rangle, \quad (63,34)$$

რომლიდანაც კოორდინატულ წარმოდგენაში მარტივად მიიღება (63,11) განტოლება. იმპულსურ წარმოდგენაში შრედინგერის განტოლების მისაღებად (63,34) მარცხნიდან გავამრავლოთ $\langle p|$ -ბრა ვექტორზე და მოვახდინოთ ერთეულოვანი ოპერატორების ჩასმა; გვექნება

$$\int \langle p| E + \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta |p'\rangle \langle p'|\psi\rangle dp' = \int \langle p| V |p'\rangle \langle p'|\psi\rangle dp', \quad (63,35)$$

სადაც იგულისხმება, რომ

$$\langle p | V | p' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipr} V(r, r') e^{ip'r'} dr dr'. \quad (63,36)$$

რადგან

$$\langle p | E + \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta | p' \rangle = \delta(p-p') \left(E - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \right), \quad (63,37)$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\left(E - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \right) \psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p | V | p' \rangle \psi(p') dp'. \quad (63,38)$$

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ, ლოკალური პოტენციალებისაგან განსხვავებით, ინტეგრალური განტოლების გული არაა $(p-p')$ -ის ფუნქცია.

შრედინგერის განტოლება არალოკალური ცენტრალური ურთიერთქმედებისათვის. ახლა დავწეროთ შრედინგერის (63,11) განტოლება ცენტრალური ურთიერთქმედებისათვის; ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია მხოლოდ რადიუს-ვექტორის სიდიდეზე იქნება დამოკიდებული. მოვახდინოთ $V(r, r')$ პოტენციალური ენერგიის მწკრივად გაშლა სფერულ ფუნქციებად

$$V(r, r') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l(r, r') Y_{lm}^*(\bar{r}) Y_{lm}(\bar{r}'), \quad (63,39)$$

გავითვალისწინოთ ლაპლასის ოპერატორის გამოხატულება სფერულ კოორდინატებში

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\Delta_{\theta, \varphi}}{r^2}. \quad (63,39')$$

როგორც ვიცით, იმპულსის მომენტის კვადრატის საკუთარი მნიშვნელობები და ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$-\Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (63,40)$$

შევიტანოთ (63,39) და (63,39') ფორმულები შრედინგერის (63,11) განტოლებაში და ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\psi(r) = R_l(r) Y_{lm}(\bar{r}), \quad (63,41)$$

თუ გავითვალისწინებთ (63,40) ფორმულას, $R_l(r)$ რადიალური ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = \frac{8\pi\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} V_l(r, r') R_l(r') r'^2 dr', \quad (63,42)$$

ხოლო დამხმარე $\chi_l(r) = r R_l(r)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\frac{d^2 \chi_l(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = \frac{8\pi\mu}{\hbar^2} r \int_0^{\infty} V_l(r, r') \chi_l(r') r' dr'. \quad (63,43)$$

ახლა ჩავეწეროთ შრედინგერის განტოლება ცენტრალური ველისათვის იმპულსურ წარმოდგენაში. ამისათვის ვისარგებლოთ (63,38) განტოლებით. ამ განტოლებაში შემავალი მატრიცული ელემენტი, რომელიც (63,36) ფორმულით გამოხატება, (63,39) ფორმულის დახმარებითა და ექსპონენტების სფერული ფუნქციების ჰერმიტიულობით შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\langle p | V | p' \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l(p, p') Y_{lm}^*(p) Y_{lm}(p'), \quad (63.44)$$

აქ $V_l(p, p')$ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$V_l(p, p') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_l(pr) r^2 dr \int_0^{\infty} V_l(r, r') j_l(p'r') r'^2 dr', \quad (63.45)$$

სადაც $j_l(pr)$ ბესელის სფერული ფუნქციაა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ცენტრალურ ველში ტალღური ფუნქცია ასე წარმოდგინდება:

$$\psi(p) = \psi_l(p) Y_{lm}(p) \quad (63.46)$$

და მოვახდენთ მარტივ ინტეგრაციას კუთხეების მიხედვით, (63,38) განტოლება რადიალური $\psi_l(p)$ ფუნქციისათვის მიიღებს სახეს

$$\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - p^2 \right) \psi_l(p) = \frac{8\pi\mu}{\hbar^2} \int_0^{\infty} V_l(p, p') \psi_l(p') p'^2 dp'. \quad (63.47)$$

გაფანტვის ინტეგრალური განტოლება არალოკალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში. დავეწეროთ შრედინგერის განტოლება გაფანტვის ამოცანისათვის. ცხადია, შრედინგერის (63,11) განტოლება, (27,25)-ის თანახმად და (63,12) თანაფარდობის გათვალისწინებით, მოგვექმს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\psi_k^{(\pm)}(r) = \phi_k(r) + \int G_0^{(\pm)}(r, r') V(r', r'') \psi_k^{(\pm)}(r'') dr' dr'', \quad (63.48)$$

სადაც $G_0^{(\pm)}(r, r')$ თავისუფალი მოძრაობის გრინის ფუნქციაა. როცა ურთიერთქმედებას (63,39) სახე აქვს, მაშინ ბრტყელი ტალღის (28,1) გრინის ფუნქციის (28,4) და გაფანტვის ტალღური ფუნქციის (29,1) ფორმულების გამოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ (63,48) განტოლება მიიღებს შემდეგ ფორმას:

$$\chi_l^{(\pm)}(kr) = kr j_l(kr) + 4\pi \int_0^{\infty} G_0^{(\pm)}(r, r') V_l(r', r'') \chi_l^{(\pm)}(kr'') r' r'' dr' dr''. \quad (63.49)$$

ასევე ცხადია, რომ გაფანტვის $T_l(E)$ -მარციალური მატრიცისათვის ლიპმან-შეინგერის განტოლებას ექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = V_l(p, p') + 4\pi \int_0^{\infty} \frac{V_l(p, q) \langle q | T_l(E) | p' \rangle q^2 dq}{E - E(q) + i\varepsilon}, \quad (63.50)$$

სადაც $E(q) = \hbar^2 q^2 / 2\mu$. ერთხელ კიდევ აღვნიშნოთ, რომ, ლოკალური ხასიათის ურთიერთქმედებისაგან განსხვავებით, (63,50) განტოლებაში $v_l(p, q)$ სხვაობის ფუნქცია არ არის.

გაფანტვის სრული $T'(x)$ -მატრიცა (63,50) განტოლების ამონახსნთან დაკავშირებული იქნება ფორმულით

$$(p | T'(x) | p') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (p | T_l(x) | p') Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'). \quad (63,51)$$

ამ პარაგრაფში მიღებულ ფორმულებს შემდგომში არაერთხელ გამოვიყენებთ.

§ 64. არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალები

არალოკალური პოტენციალების ერთ სპეციალურ შემთხვევას წარმოადგენს არალოკალური ფაქტორიზებადი (სეპარაბელური) პოტენციალები, რომლებიც ბირთვის ფიზიკაში გამოყენებული იყო ჯერ ვიგნერის [39], ხოლო შემდეგ იამაგუჩის [40—41] და სხვათა მიერ [42—93]. ამ პოტენციალს აქვს შემდეგი სახე:

$$V(r, r') = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \lambda_l v_l(r) v_l^*(r') Y_{lm}(\bar{r}) Y_{lm}^*(\bar{r}'); \quad (64,1)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ (63,39) ფორმულას, გვექნება

$$V_l(r, r') = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2\mu} v_l(r) v_l^*(r'). \quad (64,2)$$

ასეთ პოტენციალს ფაქტორიზებადი ეწოდება, რადგან $V(r, r')$ პოტენციალის დამოკიდებულება r და r' ცვლადებზე იყოფა ორ მამრავლად. λ_l -ს უწოდებენ პოტენციალური ენერჯის „ძალას“ ან „სიღრმეს“, $v_l(r)$ ს კი—ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმას. მოვითხოვთ, რომ $v_l(r)$ იყოს კვადრატულად ინტეგრებადი სხვა შეზღუდვებზე კი, რომლებიც ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმას ედება, უფრო ქვემოთ გვექნება ლაპარაკი. შევინიშნოთ, რომ ფაქტორიზებადი პოტენციალთან ჩვენ უკვე გვეკონდა საქმე, როცა განვიხილეთ გაფანტვა ღირაკის დელტა ფუნქციის ტიპის პოტენციალზე.

ცხადია, (64,1) პოტენციალი ერმიტულია. ჩვეულებრივ, პოტენციალები ნამდვილებია, ამიტომ (64,2)-ის ნაცვლად იხილავენ პოტენციალს

$$V_l(r, r') = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2\mu} v_l(r) v_l(r'). \quad (64,3)$$

ამ გამოსახულებაში კოეფიციენტი შერჩეულია იმ მოსაზრებით, რომ საბოლოო ფორმულაში ზედმეტი მუდმივები არ გაგვიჩნდეს. ადვილია ჩვენება, რომ თუ პოტენციალი ფაქტორიზებადია ერთ რომელიმე წარმოდგენაში, იგი ფაქტორიზებადი იქნება ყველა სხვა წარმოდგენაშიც. ასე მაგალითად, თუ (64,3) გამოსახულებას შევტანთ (63,45) ფორმულაში, მაშინ (63,44) მოგვცემს

$$V(p, p') = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \lambda_l v_l(p) v_l(p') Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}'), \quad (64,4)$$

ხოლო

$$V_l(p, p') = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2\mu} v_l(p) v_l(p'), \quad (64,5)$$

სადაც

$$v_l(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty v_l(r) j_l(pr) r^2 dr; \quad (64,6)$$

ამასთან, თუ ამ უკანასკნელს გავამრავლებთ $j_l(pr')$ ბესელის სფერულ ფუნქციასზე, ავიღებთ ინტეგრალს ნულიდან უსასრულობამდე და გავითვალისწინებთ ბესელის სფერული ფუნქციების ორთოგონალობის (9,8) პირობას, მივიღებთ

$$v_l(r) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty v_l(p) j_l(pr) p^2 dp. \quad (64,7)$$

როგორც ვხედავთ, მართლაც იმპულსურ წარმოდგენაშიც პოტენცილი ფაქტორიზებული გამოვიდა.

შევნიშნათ, რომ ხშირად პოტენციალის ფორმისათვის და მისი ფურიე-წარმოდგენისათვის იყენებენ შემდეგ არასიმეტრიულ განმარტებას:

$$\tilde{v}_l(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{v}_l(p) j_l(pr) p^2 dp, \quad (64,8)$$

და

$$\tilde{v}_l(p) = \int_0^\infty \tilde{v}_l(r) j_l(pr) r^2 dr. \quad (64,9)$$

ამ შემთხვევაში

$$V(p, p') = -\frac{2h^2}{\pi^2 \mu} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} \lambda_l \tilde{v}_l(p) \tilde{v}_l(p') Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'), \quad (64,10)$$

ხოლო

$$V_l(p, p') = -\frac{h^2 \lambda_l}{2\pi^2 \mu} \tilde{v}_l(p) \tilde{v}_l(p'). \quad (64,10')$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ უკანასკნელი აღნიშვნების შემთხვევაში კოორდინატულ წარმოდგენაში დამატებითი $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}$ ტიპის მამრავლი არ გვიჩნდება.

როცა $l=0$, მაშინ (64,1) ჯამი მხოლოდ ერთ წევრს შეიცავს; შემდგომში სათანადო სიდიდეებს, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, $l=0$ ნიშნაკს არ მიუთითებთ. სხვადასხვა წარმოდგენაში პოტენციალის მოსაძებნად ხელსაყრელია მისი აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში ჩაწერა

$$V = -V_0 |v\rangle \langle v|; \quad V_0 = \text{const} \quad (64,11)$$

ამ გამოსახულებიდან მარტივად ვიპოვიან როგორც (64,2) კოორდინატულ გამოსახულებას, ისე (64,4) იმპულსურ წარმოდგენასაც. (64,6) ფორმულიდან განსაკუთრებით ნათლად ჩანს ის ფაქტი, რომ ყველა წარმოდგენაში პოტენციალი ფაქტორიზებული დარჩება. ასე მაგალითად, რაიმე „ γ “-წარმოდგენაში (64,6) მოგვექმს

$$\langle \gamma | V | \gamma' \rangle = -V_0 \langle \gamma | v \rangle \langle v | \gamma' \rangle, \quad (64,12)$$

სადაც პოტენციალის ფორმა განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$v(\gamma) = \langle \gamma | v \rangle, \quad v^*(\gamma') = \langle v | \gamma' \rangle. \quad (64,13)$$

აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში შრეინგერის განტოლება ფაქტორიზებადი პოტენციალისათვის შემდეგნაირად დაწერება:

$$\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \Delta\right) |\psi\rangle = -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2} |v\rangle \langle v | \psi\rangle. \quad (64,14)$$

ცხადია, $V(r)$ ლოკალური პოტენციალისაგან განსხვავებით, $V(r, r')$ არალოკალურ პოტენციალს ექნება განზომილება

$$[V(r, r')] = [V(r)] L^{-3}. \quad (64,15)$$

შემდგომში საბოლოო გამოსახულებაში ზოგიერთი მუდმივის თავიდან მოცილების მიზნით V_0 სიდიდე შევარჩიოთ შემდეგნაირად:

$$V_0 = \frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu}, \quad (64,16)$$

აქ რომ s -მდგომარეობაში პოტენციალისათვის გვექნება

$$V(r, r') = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} v(r) v(r'). \quad (64,17)$$

თუ ავიღებთ L^{-1} განზომილების მქონე პოტენციალს, ე. ი. $[v(r)] = L^{-1}$, მაშინ პოტენციალის სიღრმეს ექნება განზომილება: $[\lambda] = L^{-3}$.

ფაქტორიზებადი პოტენციალის შემთხვევაში (63,11) ინტეგრალურ განტოლებას ექნება გადაკვარებული გული, ამიტომ იგი ძალზე მარტივად ამოიხსნება. ამაში მდგომარეობს ფაქტორიზებადი პოტენციალების ფართოდ გამოყენების საიდუმლოება ბირთვული ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანის გადაწყვეტის დროს. ძელი დასაჯერებელია, რომ რეალურ პოტენციალს, რომელიც ნუკლონთა შორის ურთიერთქმედებას ახორციელებს, ფაქტორიზებადი სახე ჰქონდეს, მაგრამ გვაქვს მთელი რიგი შემთხვევები, როცა ურთიერთქმედება არსებითად არ არის დამოკიდებული პოტენციალის სახეზე და, მეორეც, არსებობს ფაქტორიზებადი პოტენციალის ისეთი შერჩევის შესაძლებლობა, რომ მან ზუსტად გადმოსცეს ლოკალური პოტენციალის მთელი რიგი მნიშვნელოვანი თავისებურებები [77]. სანამ არ არის დადგენილი კემარტი ლოკალური ურთიერთქმედების პოტენციალის სახე ორ ნუკლონს შორის, მანამ არ არსებობს სერიოზული საფუძველი ფაქტორიზებადი პოტენციალების გამოყენების საწინააღმდეგოდ.

მისათვის, რომ ლოკალურმა პოტენციალმა მოგვეცეს ისეთივე შედეგები, რაც ფაქტორიზებადმა, ცხადია, საჭიროა დაცულ იქნეს ტოლობა:

$$V(r) \psi(r) = -\frac{\lambda \hbar^2}{4\pi^2 \mu} v(r) \int_{-\infty}^{+\infty} v(r') \psi(r') dr'. \quad (64,18)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\bar{\psi} = \frac{\hbar^2}{4\mu\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} v(r) \psi(r) dr, \quad (64,19)$$

სადაც $\bar{\psi}$ არის პოტენციალის ფორმით გასაშუალებელი ტალღური ფუნქცია. ცხადია,

$$v(r) = -\frac{1}{\lambda} V(r) \frac{\psi(r)}{\bar{\psi}}. \quad (64,20)$$

ვთქვათ, ლოკალური ურთიერთქმედების პოტენციალს $l=0$ მდგომარეობაში აქვს პულტენის პოტენციალის სახე

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/r_0}}{1 - e^{-r/r_0}}. \quad (64,21)$$

ამ პოტენციალისათვის $l=0$ მდგომარეობაში შრედინგერის განტოლება იხსნება და, როგორც ვიცით, ბმული მდგომარეობისათვის ამონახსნი ასეთი იქნება:

$$\psi(r) = N e^{-\alpha r} \frac{1 - e^{-r/r_0}}{r}; \quad \alpha^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad (64,22)$$

N ნორმირების მუდმივაა. თუ (64,21) და (64,22) შევიტანთ (64,20) ფორმულაში, მივიღებთ

$$v(r) = A \frac{e^{-\beta r}}{r}, \quad (64,23)$$

სადაც

$$A = \frac{V_0 N}{\lambda \bar{\psi}}, \quad \beta = \frac{1}{r_0} + \alpha. \quad (64,24)$$

მაშასადამე, თუ პოტენციალის ფორმას შევარჩევთ (64,23)-იუკავს პოტენციალის სახით, მაშინ მივიღებთ ისეთივე შედეგებს, როგორც მიიღება ლოკალური ურთიერთქმედების პულტენის პოტენციალით.

§ 65. შრედინგერის განტოლების ამოხსნა ფაქტორიზებული პოტენციალისათვის

ვთქვათ, ორი ნაწილაკი ურთიერთქმედებს არალოკალური ფაქტორიზებული პოტენციალით. ვიპოვოთ შესაბამისი შრედინგერის განტოლების ამონახსნი და ენერჯიის საკუთარი მნიშვნელობები. ამოცანის ამოხსნა განსაკუთრებით მარტივია იმპულსურ წარმოდგენაში.

ვთქვათ, პოტენციალს აქვს შემდეგი სახე:

$$V_l(p, p') = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2 \mu} v_l(p) v_l(p'). \quad (65,1)$$

შრედინგერის (63,47) განტოლება ასეთი პოტენციალისათვის მოგვცემს

$$\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - p^2 \right) \psi_l(p) = -\lambda_l \frac{2}{\pi} v_l(p) \int_0^\infty v_l(p') \psi_l(p') p'^2 dp'. \quad (65,2)$$

ჯერ განვიხილოთ ბმული მდგომარეობა, როცა $E < 0$. თუ შემოვიღებთ სტანდარტულ აღნიშვნას

$$\alpha^2 = \frac{2\mu |E|}{\hbar^2}, \quad E = -\mathcal{E} \quad (65,3)$$

მივიღებთ

$$(\alpha^2 + p^2) \psi_l(p) = \lambda_l v_l(p) A_l, \quad (65,4)$$

სადაც A_l მუდმივი ტოლია შემდეგი გამოსახულებისა:

$$A_l = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v_l(p') \psi_l(p') p'^2 dp'. \quad (65,5)$$

(65,4)-დან ცხადია, რომ ამონახსნი განისაზღვრება ფორმულით

$$\psi_l(p) = \frac{N_l v_l(p)}{\alpha^2 + p^2} \quad (65,6)$$

$N_l = \lambda_l A_l$ მუდმივი შეგვიძლია ვიპოვოთ ნორმირების პირობით

$$\int_0^{\infty} p^2 |\psi_l(p)|^2 dp = 1. \quad (65,7)$$

ახლა შევიტანოთ (65,6) ფორმულით განსაზღვრული $\psi_l(p)$ ფუნქცია (65,5) გამოსახულებაში; მივიღებთ

$$\frac{1}{\lambda_l} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_l^2(p) p^2 dp}{\alpha^2 + p^2} \equiv D_l(\alpha). \quad (65,8)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას, საიდანაც λ_l -ის და პოტენციალის ფორმის დამახასიათებელი პარამეტრების მოცემული მნიშვნელობის დროს შეგვიძლია განვსაზღვროთ α .

ვიგულისხმობთ, რომ $v_l(p)$ კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციაა. როცა α იზრდება ნულიდან უსასრულობამდე, (65,8) გამოსახულების მარჯვენა მხარე მონოტონურად მცირდება

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |v_l(p)|^2 dp = D_l(0) \quad (65,9)$$

სილიდიდან ნულამდე. თუ $y=0$ სისტემაში დავხაზავთ ორ მრუდს: $y = \frac{1}{\lambda_l}$ და $y = D_l(\alpha)$, მაშინ ეს ორი მრუდი ერთმანეთს მხოლოდ ერთხელ გადაკვეთს, როცა $\frac{1}{\lambda_l} < D_l(0)$. ასე რომ (66,8) განტოლებას ექნება ერთადერთი ფესვი, როცა

$$\frac{1}{\lambda_l} < \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v^2(p) dp. \quad (65,10)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $l=0$ და პოტენციალს აქვს ე. წ. იამა-გუჩის ფორმა [40]

$$v(p) = \frac{1}{\beta^2 + p^2}, \quad (65,11)$$

სადაც β^{-1} პარამეტრი ურთიერთქმედების რადიუსს გამოხატავს. კოორდინატულ წარმოდგენაში, (64,7) ფორმულის თანახმად, პოტენციალის ფორმა შემდეგი ფუნქციით განისაზღვრება:

$$v(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\beta r}}{r}, \quad (65,12)$$

რომელიც ემთხვევა იუკავას პოტენციალს. თუ (65,11) გამოსახულებას შევიტანთ (65,8) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{(\alpha^2 + p^2)(\beta^2 + p^2)^2}. \quad (65,13)$$

მარტივი ინტეგრაციის შემდეგ გვექნება

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\beta(\alpha + \beta)^2}. \quad (65,14)$$

(65,10) პირობა მოგვცემს

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{2\beta^3}, \quad \text{ე. ი.} \quad \lambda < 2\beta^3, \quad (65,14')$$

რაც (65,14)-დანაც გამომდინარეობს.

ცხადია, (65,11) ფორმის შესაბამის ტალღურ ფუნქციას ექნება შემდეგი გამონატულეობა:

$$\psi(p) = \frac{N}{(\alpha^2 + p^2)(\beta^2 + p^2)}. \quad (65,15)$$

თუ გამოვიყენებთ ნორმირების (65,7) პირობას N -მუდმივისათვის, მივიღებთ

$$N^2 = \frac{4}{\pi} \alpha\beta(\alpha + \beta)^3. \quad (65,16)$$

ადვილად ვიპოვით ტალღურ ფუნქციას კოორდინატულ წარმოდგენაში. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (65,15)-ის ფურიე-კომპონენტი. გვექნება

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N}{\beta^2 - \alpha^2} \frac{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}{r}. \quad (65,17)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ ჰულტენის ტალღური ფუნქცია. მაშასადამე, როცა ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმა ავარჩიეთ იუკავას პოტენციალის სახით, მაშინ ტალღური ფუნქცია დაემთხვა ჰულტენის ლოკალური პოტენციალის შესაბამის ტალღურ ფუნქციას. როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, ეს ასეც უნდა ყოფილიყო.

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ როგორც ენერგია, ისე ტალღური ფუნქცია მთელი რიგი პოტენციალის ფორმისათვის. $l=0$ მდგომარეობაში ხშირად გამოიყენება შემდეგი გამოსახულებები:

იამაგუჩის პოტენციალი [40]

$$\tilde{v}(r) = \frac{e^{-\beta r}}{r}, \quad \tilde{v}(k) = \frac{1}{\beta^2 + k^2}.$$

ექსპონენციალური პოტენციალი

$$\tilde{v}(r) = e^{-\beta r}, \quad \tilde{v}(k) = \frac{2\beta}{(\beta^2 + k^2)^2}.$$

გაუსის პოტენციალი

$$\tilde{v}(r) = e^{-\beta^2 r^2}, \quad \tilde{v}(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^3} e^{-\frac{k^2}{4\beta^2}}$$

$$\tilde{v}(r) = \frac{e^{-br}}{r} \left[\frac{d^2 - b^2}{2bd} \sin dr + \cos dr \right], \quad \tilde{v}(k) = \frac{k^2}{[(k-d)^2 + b^2][(k+d)^2 + b^2]}$$

პ, d , b მუდმივებია.

ღირაჯის ფუნქცია

$$\tilde{v}(r) = \frac{1}{r_c} \delta(r - r_c), \quad \tilde{v}(k) = \frac{1}{k} \sin kr_c, \quad (r_c = \text{const})$$

ღა

$$\tilde{v}(r) = \left(1 - \frac{b}{r}\right) e^{-ar}, \quad \tilde{v}(k) = \frac{(2a - ba^2) - bk^2}{(a^2 + k^2)^2}$$

საინტერესოა აგრეთვე შრედინგერის განტოლების ამოხსნა აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში. ამ შემთხვევაში ფაქტორიზებად პოტენციალს ექნება სახე

$$V = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} |v\rangle \langle v|, \quad (65,18)$$

შრედინგერის განტოლება კი ასე დაიწერება:

$$(E - \hat{H}_0) |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} |v\rangle \langle v | \psi\rangle, \quad (65,19)$$

სადაც $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta$ კინეტიკური ენერჯის ოპერატორია. (65,19) განტოლებაში

$$A = \langle v | \psi\rangle \quad (65,20)$$

მუდმივია; ამიტომ განტოლების ამონახსნი პირდაპირ დაიწერება

$$|\psi\rangle = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} A G_0(E) |v\rangle, \quad (65,21)$$

სადაც $G_0(E) = (E - \hat{H}_0)^{-1}$ თავისუფალი მოძრაობის გრინის ფუნქციაა. თუ ამ გამოსახულებას სკალარულად გავამრავლებთ $\langle v |$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \langle v | G_0(E) | v\rangle, \quad (65,22)$$

რომელიც წარმოადგენს საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას. ერთეულოვანი ოპერატორების ჩასმით გვექნება

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \int \langle v | p\rangle \langle p | G_0(E) | p'\rangle \langle p' | v\rangle p^2 dp p'^2 dp'. \quad (65,23)$$

ამ გამოსახულებიდან კი, თუ გავიხსენებთ გრინის ფუნქციის

$$\langle p | G_0(E) | p'\rangle = \frac{\delta(p - p')}{pp' \left(E - \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \right)} \quad (65,24)$$

გამოსახულებას, $E < 0$ შემთხვევისათვის მივიღებთ (65,8) ფორმულას, ხოლო (65,21) დამოკიდებულებიდან მისი $\langle p |$ ვექტორზე გამრავლებით — ამონახსნს

$$\psi(p) = \text{const} \langle p | G_0(E) | v\rangle, \quad (65,25)$$

რომელიც (65,24) ფორმულის გამოყენებით მარტივად მიიყვანება (65,6) სახეზე.

§ 66. გაზანთქვის მატრიცა არალოკალური ფაქტორიზებადი
ურთიერთქმედების შემთხვევაში

შევისწავლოთ გაფანტვის ამოცანა ნაწილაკთა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალებით ურთიერთქმედების შემთხვევაში. ვთქვათ, ორი ნაწილაკი ურთიერთქმედებს (64,5) პოტენციალით

$$V_l(p, p') = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2 \mu} v_l(p) v_l(p'). \quad (66, 1)$$

თუ გაფანტვის მატრიცას გავშლით მწყობრად

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \langle p | T_l(z) | p' \rangle Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'), \quad (66, 2)$$

მაშინ პარციალური $T_l(z)$ -მატრიცისათვის შეგვიძლია დავწეროთ ლიპმან-შვინგერის შემდეგი განტოლება:

$$\langle p | T_l(z) | p' \rangle = \langle p | V_l | p' \rangle + 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\langle p | V_l | q \rangle \langle q | T_l(z) | p' \rangle q^2 dq}{E - E(q) + i\varepsilon}. \quad (66, 3)$$

შევიტანოთ პოტენციალური ენერჯის (66,1) გამოხატულება ამ განტოლებაში; მივიღებთ

$$\langle p | T_l(z) | p' \rangle = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2 \mu} v_l(p) \tau_l(z) v_l(p'), \quad (66, 4)$$

სადაც $\tau_l(z)$ ენერგიაზე დამოკიდებული სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით

$$\tau_l(z) = 1 + \frac{8\pi\mu}{\hbar^2 v_l(p')} \int_0^{\infty} \frac{v_l(q) \langle q | T_l(z) | p' \rangle q^2 dq}{k^2 - q^2 + i\varepsilon}. \quad (66, 5)$$

ახლა (66,4) ფორმულიდან ნაპოვნი $T_l(z)$ მატრიცა შევიტანოთ ამ ფორმულაში და განვსაზღვროთ $\tau_l(z)$ სიდიდე. გვექნება

$$\tau_l^{-1}(z) = 1 + \lambda_l X_l(k), \quad (66, 6)$$

სადაც $X_l(k)$ წარმოადგენს შემდეგ ინტეგრალს:

$$X_l(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_l^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2 + i\varepsilon}. \quad (66, 7)$$

ამგვარად, ლიპმან-შვინგერის პარციალური განტოლების ამონახსნს აქვს (66,4) სახე, რომელშიც $\tau_l(E)$ ფუნქცია განისაზღვრება (66,6) ტოლობით. როგორც უხედავთ, როცა პოტენციალი ფაქტორიზებადია, მაშინ გაფანტვის $T_l(z)$ -მატრიცაც ფაქტორიზებადი ყოფილა. შევნიშნოთ, რომ (66,3) განტოლება (66,1) პოტენციალისათვის ასევე მარტივად იხსნება ფრედჰოლმის მეთოდით. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ (H, 70) და (H, 71) ფორმულებს, მარტივად მივიღებთ (66,4) გამოსახულებას, სადაც

$$\tau_l^{-1}(z) = \Delta_l(z) = 1 + \frac{2\lambda_l}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_l^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2 + i\varepsilon}; \quad (66, 8)$$

მაშასადამე, ჩვენ მიერ შემოღებული $\tau_l^{-1}(z)$ სიდიდე ფრედჰოლმის დეტერმინანტს ემთხვევა.

საინტერესოა ასევე აღვნიშნოთ, რომ (52,27) ფორმულის თანახმად იოსტის ფუნქციისა და N_l -მატრიცისათვის გვექნება

$$f_l(-k) = \Delta_l(k) = \tau_l^{-1}(k); \quad S_l(L) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau_l^{-1}(k^2 - i\varepsilon)}{\tau_l^{-1}(k^2 + i\varepsilon)}. \quad (66,8)$$

გაფანტვის ამპლიტუდის საპოვნელად საკმარისია გამოვიყენოთ (35,15) ფორმულა-მივიღებთ

$$F_l(k) = \lambda_l \frac{v_l^*(k)}{1 + \lambda_l X_l(k)}. \quad (66,9)$$

ინტეგრალური განივკვეთი გამოითვლება ფორმულით

$$\sigma(k) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |F_l(k)|^2. \quad (66,9')$$

ვიპოვოთ გაფანტვის ფაზის ფორმულა. ამ მიზნით $X_l(k)$ ინტეგრალიდან გამოვყოთ მთავარი მნიშვნელობა. ცხადია,

$$X_l(k) = x_l(k) - ikv_l^*(k), \quad (66,10)$$

სადაც $x_l(k)$ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$x_l(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_l^*(q) q^2 dq}{k^2 - q^2}. \quad (66,11)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $F_l(k) = (k \operatorname{ctg} \delta_l - ik)^{-1}$. მაშინ (66,9) ფორმულის დახმარებით მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta_l = \frac{1}{v_l^*(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_l} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_l^*(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} \right\}. \quad (66,12)$$

ამ გამოსახულებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ ფაზური ანალიზის დროს.

შენიშნოთ, რომ იგივე ამოცანა დამატებაში ამოხსნილი გვაქვს ფრედჰოლმის მეთოდით კოორდინატულ წარმოდგენაში. ჩვენ იქ მივიღეთ, რომ

$$k \operatorname{ctg} \delta_l = \frac{1}{v_l^*(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_l} + M_l(k) \right\}, \quad (66,13)$$

სადაც

$$M_l(k) = \frac{4k}{\pi} \int_0^{\infty} v_l(r) n_l(kr) r^2 dr \int_0^r v_l(r') j_l(kr') r'^2 dr'. \quad (66,14)$$

როგორც (66,12) გამოსახულებასთან შედარება გვიჩვენებს, ადგილი აქვს ტოლობას

$$x_l(k) = M_l(k). \quad (66,15)$$

ჩვენ ვიცით, რომ $K_l(k)$ -მატრიცა, რომელიც პროპორციულია $\operatorname{ctg} \delta_l$ -ისა, მცირე ენერგიებზე ისე იქცევა, როგორც k^{2l+1} , ამიტომ (66,12) ფორმულის თანახმად, $v_l(k)$ პოტენციალის ფორმა ისე უნდა შეირჩეს, რომ მას მცირე ენერგიებზე კვლავ შევძლებოთ ყოფაქცევა:

$$v_l(k) = \operatorname{const} k^l. \quad (66,16)$$

აქედან ჩანს, რომ (66,12) გამოსახულებაში სხვადასხვა l -ისათვის საჭიროა პოტენციალის ფორმის k -ზე დამოკიდებულების სათანადოდ შერჩევა.

იმისათვის, რომ გაფანტვის მატრიცას მცირე ენერგიებზე ჰქონდეს წესიერი ყოფაქცევა, საჭიროა პოტენციალის ფორმის შემდეგნაირი განსაზღვრა:

$$\pi_l(k) = k^l \left\{ \frac{1}{P_l(k)} + \frac{1}{Q_l(k)} + \dots + \right\}, \quad (66,17)$$

სადაც $P_l(k)$ და $Q_l(k)$ k^2 -ის ხარისხების პოლინომებია; ამასთან, $P_l(0)$ და $Q_l(0)$ მუდმივი სიდიდეებია. ასეთი ფორმისათვის გაფანტვის მატრიცას და, მაშასადამე, გაფანტვის ფაზას მცირე ენერგიებზე ექნება სწორი ყოფაქცევა; სახელობრ,

$$k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l(k) = a_l + b_l k^2 + c_l k^4 + \dots +, \quad (66,18)$$

სადაც a_l , b_l , c_l ენერგიაზე დამოუკიდებელი რიცხვებია.

ზემოთქმულიდან ნათელია, რომ g -მდგომარეობაში პოტენციალის ფორმას შეიძლება ჰქონდეს, მაგალითად, შემდეგი სახე:

$$v(k) = \frac{1}{\beta^2 + k^2}, \quad (66,19)$$

მაშინ როცა μ და l -მდგომარეობაში შეიძლება ავიღოთ

$$v_1(k) = \frac{k}{\beta_1^2 + k^2}, \quad v_2(k) = \frac{k^2}{\beta_2^2 + k^2}, \quad (66,20)$$

სადაც β , β_1 და β_2 მუდმივებია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა პოტენციალის ფორმას აქვს იამაგუჩის სახე, ე. ი. განისაზღვრება (66,19) ფორმულით. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$x_0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(\beta^2 + q^2)(k^2 - q^2)} = \frac{k^2 - \beta^2}{2\beta(k^2 + \beta^2)}, \quad (66,21)$$

(66,12) ფორმულის თანახმად, მარტივად მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\beta + \frac{\beta^2 + k^2}{2\beta} + \frac{(\beta^2 + k^2)^2}{\lambda}; \quad (66,22)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ ეფექტური რადიუსის მიახლოების სათანადო ფორმულას

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 - (P_1^2) k^4 + (Q_1^2) k^6 + \dots +, \quad (66,23)$$

გვექნება მნიშვნელოვანი დამოკიდებულებანი:

$$\frac{1}{a} = \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{\lambda} \right), \quad r_e = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{4\beta^2}{\lambda} \right), \quad (P_1^2) = -\frac{1}{\lambda}, \quad (Q_1^2) = 0, \quad (66,24)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ იამაგუჩის პოტენციალისათვის გაფანტვის $T(x)$ -მატრიცა ასეთი იქნება:

$$\langle p | T(x) | p' \rangle = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} v(p)v(p')v(x), \quad (66,25)$$

$$\tau^{-1}(x) = 1 - \lambda \frac{1}{2\beta \left(\beta - \frac{i}{h} \sqrt{2\mu x} \right)^2}; \quad (Imx > 0) \quad (66,26)$$

თუ გაფანტვა ხდება $l=2$ მდგომარეობაში, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (66,20) ფორმულით განსაზღვრული $\psi_2(x)$ ფორმა; შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} k^2 \text{ctg } \delta_2 = & -\beta_2^2 + \frac{5}{2} \beta_2^2 (\beta^2 + k^2) - \frac{15}{8} \beta_2 (\beta_2^2 + k^2)^2 + \\ & \frac{5}{16} \frac{(\beta_2^2 + k^2)^3}{\beta_2} + \frac{(\beta_2^2 + k^2)^4}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (66,27)$$

ამ გამოსახულებიდან ადვილად გამოითვლება სათანადო გაფანტვის სიგრძე, ეფექტური რადიუსი და ა. შ.

კონტაქტური ურთიერთქმედება, როგორც ძამაგუჩის ურთიერთქმედების კერძო შემთხვევა [63]. ახლა ვაჩვენოთ, რომ გაფანტვის $T(x)$ -მატრიცა კონტაქტური ურთიერთქმედებისათვის, რომელიც § 44-ში ვიპოვეთ, შეგვიძლია მივიღოთ როგორც გაფანტვის მატრიცის კერძო შემთხვევა იამაგუჩის ურთიერთქმედებისათვის, ზღვარში, როცა პოტენციალური ფორმის პარამეტრი $\beta \rightarrow \infty$. გამოვიყენოთ (66,25) ფორმულა. გავითვალისწინოთ (65,14) გამოსახულება, რომელიც მოცემულია λ და β პარამეტრებისათვის განსაზღვრავს ბმის ენერგიას და გადავიღოთ ზღვარზე, როცა $\beta \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$\tau^{-1}(x) = 1 - \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta} + \dots \right) \left(1 + 2i \frac{\sqrt{2\mu x}}{\beta h} + \dots \right) = -\frac{2}{\beta} \left(\alpha + \frac{i}{h} \sqrt{2\mu x} + \dots \right); \quad (66,28)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევითანთ (66,25) ფორმულაში და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\beta \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$\langle p | T(x) | p' \rangle = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} - \frac{1}{\alpha + \frac{i}{h} \sqrt{2\mu x}}, \quad Imx > 0 \quad (66,29)$$

რომელიც ზუსტად ემთხვევა ჩვენ მიერ ადრე მიღებულ ფორმულას. როგორც ვხედავთ, გაფანტვის მატრიცა არაა დამოკიდებული p და p' ვექტორებზე.

გაფანტვის მატრიცა აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში. ახლა ვიპოვოთ გაფანტვის მატრიცის გამოხატულება აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში. გამოვიღოთ $T(E)$ -მატრიცის შემდეგი განმარტებიდან:

$$T(E) = V + V G V, \quad (66,30)$$

სადაც გრინის $G(E)$ სრული ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$G(E) = G_0(E) + G(E) V G_0(E). \quad (66,31)$$

ეთქვით, პოტენციალურ ენერგიას აქვს (65,18) სახე

$$V = V_0 | v \rangle \langle v |, \quad \left(V_0 = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} \right) \quad (66,32)$$

მაშინ

$$T(E) = V_0 | v \rangle \langle v | [1 + V_0 \langle v | G(E) | v \rangle]. \quad (66,33)$$

(66,31)-დან ადვილად ვიპოვით $\langle v | G(E) | v \rangle$ გამოსახულებას. მართლაც, გვექნება

$$\langle v | G(E) | v \rangle = \langle v | G_0(E) | v \rangle + V_0 \langle v | G(E) | v \rangle \langle v | G_0(E) | v \rangle, \quad (66,34)$$

$$\langle v | G(E) | v \rangle = \frac{\langle v | G_0(E) | v \rangle}{1 - V_0 \langle v | G_0(E) | v \rangle} \quad (66,35)$$

ამ გამოსახულების (66,33) ფორმულაში შეტანით საბოლოოდ გვექნება

$$T(E) = V_0 \frac{|v\rangle\langle v|}{1 - V_0 \langle v | G_0(E) | v \rangle} \quad (66,36)$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ (64,4) გამოსახულებას.

$T(E)$ -მატრიცის პოლუსი $E = -\frac{\mu}{2}$ ენერგიაზე მოგვეცემა

$$\frac{1}{V_0} = \langle v | G_0(-\frac{\mu}{2}) | v \rangle \quad (66,37)$$

გავისვენოთ V_0 -ის მნიშვნელობა (66,32) აღნიშნვიდან; (66,37) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში ჩავსვათ ერთეულოვანი ოპერატორები და გამოვიყენოთ (65,24) ფორმულა; გვექნება

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{\alpha^2 + q^2}, \quad \alpha^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} \quad (66,38)$$

რაც ემთხვევა საკუთარი მნიშვნელობის (65,8) ფორმულას. მაშასადამე, როგორც მოსალოდნელი იყო, $T(E)$ -მატრიცის პოლუსმა გაგვისახლვრა ბმული მდგომარეობების ენერგია.

თუ (66,36) გამოსახულებას მარცხნიდან გავამრავლებთ $\langle p |$ ბრა-ვექტორზე, ხოლო მარჯვნიდან $| p' \rangle$ კეტ-ვექტორზე და კვლავ დავებრუნდებით (66,32) აღნიშვნას, მივიღებთ

$$\langle p | T(E) | p' \rangle = \frac{\langle p | V | p' \rangle}{1 - V_0 \langle v | G_0(E) | v \rangle} \quad (66,39)$$

საიდანაც ჩანს, რომ ფაქტორიზებადი პოტენციალის შემთხვევაში გაფანტვის მატრიცა ბორნის მიახლოების $T(E)$ -მატრიცისაგან განსხვავდება ენერგიაზე დამოკიდებული მულტიპლი მამრავლით

$$[1 - V_0 \langle v | G_0(E) | v \rangle]^{-1} \quad (66,40)$$

შეენიშნოთ, რომ $T_l(E)$ -მატრიცის საპოტენციალო $l \neq 0$ შემთხვევაში საკმარისია (66,36) ფორმულაში ყველა სიდიდეს ფორმალურად მივეწეროთ l -ინდექსი.

ფაქტორიზებადი პოტენციალის ყოფაქცევა მცირე და დიდ მანძილებზე [70]. ახლა გამოვარკვიოთ როგორი ყოფაქცევა უნდა ჰქონდეს ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმას დიდ და მცირე მანძილებზე, რომ ჩვენ მიერ ზემოთ განხილულმა გამოსახულებებმა აზრი არ დაკარგონ. ამისათვის პირველად ხელსაყრელია კოორდინატული წარმოდგენის განხილვა. $l=0$ მდგომარეობაში, თანახმად (63,43) განტოლებისა, თუ ავიღებთ

$$V(r, r') = -\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu} v(r) v(r'), \quad (66,41)$$

გვექნება

$$\frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + k^2 \chi(r) = A r v(r); \quad (66,42)$$

4-მუდმივი ტოლი იქნება

$$A = -\frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} v(r) \chi(r) r dr \quad (66,43)$$

გამოსახულებისა. დაეშვათ, $r=0$ წერტილში პოტენციალის ფორმას აქვს

$$v(r) \sim r^{-\alpha} \quad r \rightarrow 0 \quad (66,44)$$

გამოსახულება; მაშინ, თუ (66,42) განტოლების ამონახსნს მოვძებნით $\chi(r)=r^{-\alpha}$ სახით, ადვილად დავინახავთ, რომ $\chi(r) \sim r^{3-\alpha}$. მეორე მხრივ, იმისათვის, რომ (66,43) ფორმულით განსაზღვრული მუდმივი სასრული რიცხვი იყოს, საჭიროა იკრიბებოდეს ინტეგრალი

$$\int_0^{\infty} r^{3-2\alpha} dr. \quad (66,45)$$

მაშასადამე, საჭიროა $\alpha < 5/2$.

როცა $k=0$, მაშინ (66,42) მიიღებს სახეს

$$\frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} = A r v(r). \quad (66,46)$$

ავიღოთ ინტეგრალი r -დან ∞ -მდე. გვექნება

$$\frac{d\chi}{dr} = -A \int_r^{\infty} r'' v(r'') dr'' + C_1, \quad (66,47)$$

სადაც C_1 ინტეგრირების მუდმივია. ამ გამოსახულების კიდევ ერთხელ გაინტეგრირებით მივიღებთ

$$\chi(r) = -A \int_0^r dr' \int_{r'}^{\infty} r'' v(r'') dr'' + C_1 r + C_2. \quad (66,48)$$

დაეშვათ, რომ ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმას უსასრულობაში აქვს $r^{-\gamma}$ ყოფაქცევა. მაშინ (66,48) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალის კრებადობისათვის საჭიროა $\gamma > 3$. მაშასადამე, როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ $v(r)$ ნული უნდა ხდებოდეს ჩქარა, ვიდრე $\frac{1}{r^3}$.

ცხადია, რომ შესაბამისად შეზღუდვები დაედება პოტენციალის იმპულსური წარმოდგენის ფორმასაც. ასე მაგალითად, (66,11) ინტეგრალის კრებადობისათვის ღილ იმპულსებზე საჭიროა

$$v_l(p) \sim p^{-\frac{1+\alpha}{2}} \quad (66,49)$$

სადაც $\alpha > 0$. ხოლო ინტეგრალის კრებადობისათვის მცირე იმპულსებზე აუცილებელია

$$v_l^2(p) < M, \quad (66,50)$$

სადაც M სასრული რიცხვია.

ზემოთქმულის თანახმად, (66,11) ინტეგრალს აქვს შემდეგი თვისება

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{v^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} = 0, \quad (66,51)$$

ხოლო (66,12) ფორმულის თანახმად, ზღვარში, როცა $k \rightarrow \infty$, გვექნება

$$\text{tg } \delta(k) \sim kv^2(k); \quad k \rightarrow \infty \quad (66,52)$$

ასევე, როცა $k \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{v^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} = - \int_0^{\infty} v^2(q) dq; \quad (66,53)$$

ამიტომ, ცხადია, გაფანტვის სიგრძე, (66,12) ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$- \frac{1}{a} = \frac{1}{v^2(0)} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v^2(q) dq \right\}; \quad (66,54)$$

ამასთან, როგორც ვიცით, $l=0$ მდგომარეობაში $v(0)$ არ არის ნულის ტოლი.

დაბოლოს, საინტერესოა აღინიშნოს, როდის იქნება გაფანტვის მატრიცის წარმოდგენა ფაქტორიზებადი სახით კარგი მიახლოება.

ამ საკითხის გასარკვევად განვიხილოთ $T(E)$ -მატრიცის სპექტრალური წარმოდგენის (38,21) ფორმულა, საიდანაც ნათლად ჩანს, რომ სამი წვერიდან ფაქტორიზებადი წვერი იქნება ძირითადი იმ შემთხვევაში, როცა E -ენერგია ახლოსაა ორნაწილაკობრივი სისტემის E_n ბმის ენერჯიასთან, ან უწყვეტი სპექტრის ყველაზე არსებით რეზონანსთან.

ამგვარად, თუ ორი ნაწილაკის სისტემაში მთავარია რეზონანსები და ბმული მდგომარეობები, მაშინ გაფანტვის მატრიცას რეზონანსებისა და ბმული მდგომარეობების მახლობლობაში, ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ, ფაქტორიზებადი სახე აქვს საწყისი და საბოლოო იმპულსების მიმართ [93].

გარდა ამისა, (38,36) წარმოდგენის ფორმულიდან ნათლად ჩანს, რომ, როცა რეზოლვენტა $R_l(y, p; z) = 0$, მაშინ გაფანტვის მატრიცას აქვს ფაქტორიზებადი სახე. ძნელია იმ პირობების დადგენა, როცა რეზოლვენტის წვლილი (38,36) ჯამში უმნიშვნელოა ფაქტორიზებად წვერთან შედარებით. ერთი კი ცხადია, რომ $T_l(p, q; z)$ მატრიცა ზუსტად ფაქტორიზებადია ნახევრადენერგეტულ ზედაპირზე, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ გავიხსენებთ რომ $I_l(k, q; k) = I_l(q, k; k) = 0$.

თუ დავაკვირდებით (38,36) გამოსახულებას, ადვილად დავინახავთ, რომ, როცა გაფანტვის $T_l(k, k; z)$ მატრიცას ენერგეტულ ზედაპირზე პოლუსი აქვს $k = k_1 + ik_2$ წერტილზე, მაშინ ამავე წერტილზე პოლუსი ექნება გაფანტვის $T_l(p, q; z)$ მატრიცასაც ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ და იგი ფაქტორიზებადი იქნება საწყისი და საბოლოო იმპულსების მიმართ. მაშასადამე, თუ წარმოსახვითი ნიწილი k_2 ძალიან მცირეა და $k \approx k_1$, მაშინ გაფანტვის მატრიცა ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ფაქტორიზებადი სახით

$$T_l(p, q; E) \approx v_l(p) T_l(E) v_l(q), \quad (66,55)$$

ფაქტორიზებად გაფანტვის მატრიცას კი, როგორც ვიცით, შეესაბამება არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალი.

§ 67. გაზვანტვა ორი არაბლოკალური შპატორიზებალი
პოტენციალის ჯამით

განვიხილოთ მეტად მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როცა ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება განსაზღვრულია ორი ფაქტორიზებალი პოტენციალის ჯამით. ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯია, იმპულსურ წარმოდგენაში, შეგვიძლია ავილოთ შემდეგი ჯამის სახით [82]:

$$\langle p | V | p' \rangle = 4\pi \sum_l \sum_m V_l(p, p') Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}'), \quad (67,1)$$

სადაც $V_l(p, p')$ შეიცავს ორ წევრს

$$V_l(p, p') = \frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \{ \lambda_{1l} v_{1l}(p) v_{1l}(p') + \lambda_{2l} v_{2l}(p) v_{2l}(p') \}. \quad (67,2)$$

$v_{1l}(p)$ და $v_{2l}(p)$ პოტენციალის ფორმებს გამოხატავენ, ხოლო λ_{1l} და λ_{2l} — სიღრმეებს. ასეთი ტიპის პოტენციალი მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც პოტენციალის ფორმის შერჩევითა და $\lambda_{1l} \lambda_{2l} < 0$ პირობის დადებით მიზიდვის გარდა, მცირე მანძილებზე მან შეიძლება წარმოქმნას განზიდვა. ასე მაგალითად, თუ δ -მდგომარეობაში ორადე ფორმა სხვადასხვა ურთიერთქმედების რადიუსის იამაგურის გამოსახულებით განისაზღვრება

$$v_1(p) = (a_1^2 + p^2)^{-1}, \quad v_2(p) = (a_2^2 + p^2)^{-1}, \quad (67,3)$$

ხოლო როცა $a_1 = a_2$ და $\lambda_2 \lambda_1 < 0$, მაშინ პოტენციალურ ენერჯიას მიზიდვის სახით აქვს და მცირე მანძილებზე თანდათან გადადის განზიდვაში, $r = 0$. წერტილში კი ხდება უსასრულობა. როგორც ცნობილია, ასეთი ტიპის პოტენციალები სწორად გამოიყენება, ამიტომ მათ დაწვრილებით შევისწავლით.

განვიხილოთ ჯერ ბმული მდგომარეობა. დაწვროთ შრედინგერის განტოლება

$$(a^2 + p^2) \psi_l(p) = \frac{8\pi\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty V_l(p, p') \psi_l(p') p'^2 dp'. \quad (67,4)$$

ამ განტოლებაში შევიტანოთ (67,2) პოტენციალი და განვსაზღვროთ $\psi_l(p)$, ვპუნება

$$\psi_l(p) = \frac{1}{a^2 + p^2} [\lambda_{1l} v_{1l}(p) C_{1l} + \lambda_{2l} v_{2l}(p) C_{2l}], \quad (67,5)$$

სადაც მულმივები განისაზღვრებიან პირობით

$$C_{il} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty v_{il}(p) \psi_l(p) p^2 dp; \quad (i = 1, 2) \quad (67,6)$$

ამ უკანასკნელში (67,5)-დან $\psi_l(p)$ ფუნქციის შეტანით C_{il} კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ შეპლევ სისტემას:

$$[1 - \lambda_{1l} h_{11}^{(l)}(a)] C_{1l} - \lambda_{2l} h_{12}^{(l)}(a) C_{2l} = 0, \quad (67,7)$$

$$\lambda_{1l} h_{12}^{(l)}(a) C_{1l} - [1 - \lambda_{2l} h_{22}^{(l)}(a)] C_{2l} = 0,$$

სადაც

$$h_{ik}^{(l)}(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_{il}(q) v_{kl}(q) q^2 dq}{a^2 + q^2}. \quad (67,8)$$

იმისათვის, რომ (67,7) სისტემას ჰქონდეს ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნი, საჭიროა სისტემის დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა, რაც მოგვცემს

$$[1 - \lambda_{11} h_{11}^{(I)}(\alpha)] [1 - \lambda_{21} h_{22}^{(II)}(\alpha)] - \lambda_{12} \lambda_{21} h_{12}^{(II)}(\alpha) = 0. \quad (67,9)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას; მისი ამონხსნით ვიპოვით ენერგიას.

თუ (67,7) სისტემის მეორე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ C_{21} -ს და შევტანთ (67,5) ფუნქციაში, ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\psi_1(p) = \frac{N_1}{\alpha^2 + p^2} \left\{ v_{11}(p) + \frac{\lambda_{21} h_{12}^{(II)}(\alpha)}{1 - \lambda_{21} h_{22}^{(II)}(\alpha)} v_{21}(p) \right\}; \quad (67,10)$$

N_1 -მუდმივი მოიძებნება ნორმირების პირობით.

ეკრძო შემთხვევაში, როცა $\lambda_{21} = 0$, დავინახავთ, რომ

$$\psi_1(p) = \frac{N_1 v_1(p)}{\alpha^2 + p^2} \quad (67,11)$$

და

$$\frac{1}{\lambda_1} = h_{11}^{(I)}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_1^2(q) q^2 dq}{\alpha^2 + q^2}. \quad (67,12)$$

ახლა ვიპოვით გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა. დაეწეროთ ლიპმან-შვინგერის განტოლება

$$\langle p | T_1(E) | p' \rangle = V_1(p, p') + 4\pi \int_0^\infty \frac{V_1(p, q) \langle q | T_1(E) | p' \rangle q^2 dq}{E - E(q) + i\epsilon}, \quad (67,13)$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში (67,2) პოტენციალი, გვექნება

$$\langle p | T_1 | p' \rangle = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \{ \lambda_{11} v_{11}(p) A_{11}(p') + \lambda_{21} v_{21}(p) A_{21}(p') \}, \quad (67,14)$$

სადაც

$$A_{ii}(p') = v_{ii}(p') + \frac{8\pi\mu}{\hbar^2} \int \frac{v_{ii}(q) \langle q | T_1(E) | p' \rangle q^2 dq}{k^2 - q^2 + i\epsilon}. \quad (67,15)$$

ამ გამოსახულებაში (67,14) მატრიცის შეტანით $A_{ii}(p')$ სილიდებისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} [1 - \lambda_{11} X_{11}^{(I)}(k)] A_{11} - \lambda_{21} X_{12}^{(II)}(k) A_{21} &= v_{11}(p'), \\ -\lambda_{11} X_{12}^{(II)}(k) A_{11} + [1 - \lambda_{21} X_{22}^{(II)}(k)] A_{21} &= v_{21}(p'), \end{aligned} \quad (67,16)$$

სადაც

$$X_{ij}^{(I)}(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_{ij}(q) v_{ji}(q) q^2 dq}{k^2 - q^2 + i\epsilon}. \quad (67,17)$$

(67,16) სისტემის დეტერმინანტი ტოლია

$$\Delta_1(k) = [1 - \lambda_{11} X_{11}^{(I)}(k)] [1 - \lambda_{21} X_{22}^{(II)}(k)] - \lambda_{12} \lambda_{21} X_{12}^{(II)}(k). \quad (67,18)$$

ამის შემდეგ ადვილად განვსაზღვრავთ $A_{11}(p')$ და $A_{21}(p')$ სილიდებს, რომელთა (67,14)-ში შეტანით საბოლოოდ ვიპოვით გაფანტვის მატრიცას

$$\langle p | T_l(E) | p' \rangle = \frac{\hbar^2}{2\mu\pi^2 \Delta_l(k)} \{ \lambda_{1l} v_{1l}(p) v_{1l}(p') [1 - \lambda_{2l} X_{22}^{(l)}(k)] + \lambda_{2l} v_{2l}(p) v_{2l}(p') [1 - \lambda_{1l} X_{11}^{(l)}(k)] + \lambda_{1l} \lambda_{2l} X_{12}^{(l)}(k) \cdot [v_{1l}(p) v_{2l}(p') + v_{2l}(p) v_{1l}(p')] \} \quad (67,19)$$

თუ გამოვიყენებთ (35,15) ფორმულას, ადვილად ვიპოვიტ გავანტვის პარტიკულურ ამპლიტუდას

$$F_l(k) = \frac{1}{\Delta_l(k)} \{ \lambda_{1l} v_{1l}^2(k) [1 - \lambda_{2l} X_{22}^{(l)}(k)] + \lambda_{2l} [1 - \lambda_{1l} X_{11}^{(l)}(k)] v_{2l}^2(k) + 2\lambda_{1l} \lambda_{2l} v_{1l}(k) v_{2l}(k) X_{12}^{(l)}(k) \} \quad (67,20)$$

ფაზური ანალიზისათვის ხელსაყრელია მოვიძებნოთ $k \operatorname{ctg} \delta_l$. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ

$$F_l(k) = \frac{1}{k} \sin \delta_l e^{i\delta_l} = \frac{1}{k \operatorname{ctg} \delta_l - ik} \quad (67,21)$$

გარდა ამისა, რადგან

$$\frac{1}{k^2 - q^2 + i\epsilon} = e^{i\pi} \frac{1}{k^2 - q^2} - i\pi \delta(k^2 - q^2), \quad (67,22)$$

ამიტომ

$$X_{ij}^{(l)}(k) = x_{ij}^{(l)}(k) - ik v_{il}(k) v_{jl}(k), \quad (67,23)$$

სადაც

$$x_{ij}^{(l)}(k) = \frac{2}{\pi} e^{i\pi} \int_0^\infty \frac{v_{il}(q) v_{jl}(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} = -h_{ij}^{(l)}(i\alpha). \quad (67,24)$$

ამ ფორმულების გამოყენებით (67,20)-დან ადვილად მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$k \operatorname{ctg} \delta_l(k) = \frac{\Phi_l(k)}{\varphi_l(k)}, \quad (67,25)$$

სადაც

$$\Phi_l(k) = [1 - \lambda_{1l} x_{11}^{(l)}(k)] [1 - \lambda_{2l} x_{22}^{(l)}(k)] - \lambda_{1l} \lambda_{2l} x_{12}^{(l)2}(k) \quad (67,26)$$

$$\varphi_l(k) = -\lambda_{1l} v_{1l}^2(k) [1 - \lambda_{2l} x_{22}^{(l)}(k)] - \lambda_{2l} v_{2l}^2(k) [1 - \lambda_{1l} x_{11}^{(l)}(k)] - \lambda_{1l} \lambda_{2l} v_{1l}(k) v_{2l}(k) x_{12}^{(l)}(k). \quad (67,27)$$

შეენიშნოთ, რომ, (66,12) ფორმულის თანახმად,

$$k \operatorname{ctg} \delta_{il}(k) = \frac{1 - \lambda_{il} x_{ii}^{(l)}(k)}{-\lambda_{il} v_{ii}^2(k)}. \quad (67,28)$$

ეს გამოსახლება აღენიშნოთ შემდეგნაირად:

$$x_{il}(k) = k \operatorname{ctg} \delta_{il}(k), \quad (67,29)$$

მაშინ (67,25) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$k \operatorname{ctg} \delta_l(k) = \frac{x_{1l}(k) x_{2l}(k) - \gamma_{12}^{(l)}(k)}{x_{1l}(k) + x_{2l}(k) - 2\gamma_{12}^{(l)}(k)}, \quad (67,30)$$

სადაც

$$\gamma_{12}^{(l)}(k) = \frac{x_{12}^{(l)}(k)}{v_{1l}(k) v_{2l}(k)}. \quad (67,31)$$

(67,25) ფორმულის წარმოდგენა (67,30)-ის სახით ხელსაყრელია იმდენად, რამდენადაც გაფანტვის საერთო ფაზა გამოსატულია კალკულ პოტენციალზე გაფანტვის შესაბამისი ფაზების საშუალებით.

ერთწევრი პოტენციალური ენერჯის შესაბამისი გაფანტვის ფორმულების მისაღებად საჭიროა (67,30)-ში დავუშვათ $v_{11} = v_{21}$, მაშინ $x_{11} = x_{21}$ და, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $2\lambda_{11} = \lambda_{11}$, მივიღებთ (66,11) ფორმულას.

განვიხილოთ მაგალითები. ვთქვათ, ნაწილაკები N -მდგომარეობაში ურთიერთქმედებენ იამაგუჩის (67,3) პოტენციალებით. მაშინ, (66,21) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$x_i(k) = -a_i + \frac{a_i^2 + k^2}{2a_i} + \frac{(a_i^2 + k^2)^2}{\lambda_i}, \quad (67,32)$$

ხოლო (67,24) ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$x_{12}(k) = \frac{1}{a_2^2 - a_1^2} \left[\frac{a^2}{k^2 + a_2^2} - \frac{a_1}{k^2 + a_1^2} \right]. \quad (67,33)$$

ამის შემდეგ (67,33) ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვიპოვით გაფანტვის საერთო ფაზას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $l=0$ მდგომარეობაში გვაქვს შემდეგი ფორმის პოტენციალები [73,82]:

$$v_1(p) = (a_1^2 + p^2)^{-1}, \quad v_2(p) = \frac{1}{p} \sin pr_c, \quad \lambda_2 \rightarrow \infty. \quad (67,34)$$

$v_2(p) = \frac{1}{p} \sin pr_c$ პოტენციალურ კვლეის წარმოდგენს. მისი შესატყვისი ფაქტორიზებადი პოტენციალი, რადგან, თანახმად (64,7) გამოსახულებისა,

$$v_2(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(r - r_c)}{r_c}, \quad (67,34')$$

კოორდინატულ წარმოდგენაში განისაზღვრება ფორმულით

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{\hbar^2 \lambda_2}{8\pi\mu} \frac{\delta(r - r_c)}{r} \cdot \frac{\delta(r' - r_c)}{r'}. \quad (67,35)$$

ასეთი პოტენციალი წარმოქმნის უსასრულო განზიდვას $r = r_c$ წერტილში. თუ ავიღებთ $\lambda_1 < 0$, მაშინ ეს ორი პოტენციალი წარმოქმნის ორმოს, რომელიც $r = r_c$ მანძილზე კვლით ჩამოიჭრება. ადვილად ვიპოვით, რომ (67,34) ფორმის შემთხვევაში

$$x_{11}(k) = \frac{1}{2a_1(k^2 + a_1^2)} \left[1 - \frac{2a_1^2}{a_1^2 + k^2} \right], \quad (67,36)$$

$$x_{22}(k) = -\frac{\sin 2kr_c}{2k}, \quad (67,37)$$

$$x_{12}(k) = \frac{e^{-a_1 r_c} - \cos kr_c}{k^2 + a_1^2}. \quad (67,38)$$

ამ გამოსახულებების (67,25) და (67,26) ფორმულებში შეტანით და ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda_2 \rightarrow \infty$, მარტივად მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta = \frac{\psi(k)}{\varphi(k)} - k \operatorname{ctg} k r_c, \quad (67,39)$$

$$U(k) = \frac{k}{\sin kr_c} e^{-2a_1 r_c}, \quad (67,40)$$

$$Q(k) = 2e^{-a_1 r_c} - \cos kr_c + \frac{\sin kr_c}{k} \left[\frac{(k^2 + a_1^2)^2}{\lambda_1} + \frac{a_1}{2} - \frac{k^2}{2a_1} \right] \quad (67,41)$$

აღვილად ვიპოვით გაფანტვის სიგრძესაც. მართლაც, თანახმად განმარტებისა,

$$(k \operatorname{ctg} \delta)_{k=0} = -\frac{1}{a}, \text{ ამიტომ}$$

$$\frac{r_c}{a} = 1 - \frac{e^{-a_1 r_c}}{(2e^{-a_1 r_c} - 1) + a_1 r_c \left(\frac{1}{2} + \frac{a_1^2}{\lambda} \right)}. \quad (67,42)$$

ასევე ადვილად ვიპოვით საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებასაც. რადგან განხილულ შემთხვევაში

$$h_{11}(a) = \frac{1}{2a_1(a_1 + a)^2}, \quad h_{22}(a) = \frac{1 - e^{-2ar_c}}{2a}, \quad h_{12}(a) = \frac{e^{-a_1 r_c} - e^{-ar_c}}{a^2 - a_1^2}, \quad (67,43)$$

ამიტომ საკუთარი მნიშვნელობების (67,9) განტოლება, როცა $\lambda_2 \rightarrow \infty$, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$1 + \frac{\lambda_1}{2a_1(a_1 + a)^2} \left[1 - \frac{4a_1 a}{(a_1 - a)^2} \frac{(e^{-ar_c} - e^{-a_1 r_c})^2}{1 - e^{-2ar_c}} \right] = 0. \quad (67,44)$$

ამ ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია მხოლოდ მიახლოებითი მეთოდებით.

ახლა ვიპოვოთ ტალღური ფუნქცია. (67,10) გამოსახულების თანახმად, როცა $\lambda_2 \rightarrow \infty$, ვეჭვება

$$\psi(p) = \frac{N}{a^2 + p^2} \left\{ v_1(p) - \frac{h_{12}(a)}{h_{22}(a)} v_2(p) \right\}, \quad (67,45)$$

საიდანაც კოორდინატულ წარმოდგენაში რადიალური ფუნქციისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$H(r) = \frac{C}{r} \left\{ \frac{e^{-a_1 r} - e^{-ar}}{a^2 - a_1^2} - \frac{h_{12}(a)}{h_{22}(a)} \frac{e^{-a_1 r} - e^{-ar}}{2a} \right\} \quad (67,46)$$

მუდმივი შეგვიძლია ვიპოვოთ ნორმირების პირობით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ, როცა $r = r_c$, მაშინ $H(r_c) = 0$.

მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა, როცა ურთიერთქმედება ორი პოტენციალის ქაშს შეიცავს. უშვებს ზღვარს, როცა ერთ-ერთი პოტენციალის სიღრმე, ვთქვათ, $\lambda_{2i} \rightarrow \infty$. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს ურთიერთქმედებაში მცირე მანძილებზე ჩავერთოთ უსასრულოდ დიდი განზიდვა ზღვარში, როცა $\lambda_{2i} \rightarrow \infty$, გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა მიიღებს სახეს

$$\langle p | T_i(E) | p' \rangle = \frac{\hbar^2 \lambda_{1i}}{2\mu \pi^2 \Delta_i(k)} \{ v_{1i}(p) v_{1i}(p') X_{22}^{(i)}(k) + v_{2i}(p) v_{2i}(p') X_{11}^{(i)}(k) + X_{12}^{(i)}(k) [v_{1i}(p) v_{2i}(p') + v_{2i}(p) v_{1i}(p')] \}, \quad (67,47)$$

სადაც

$$\overline{\Delta_l(k)} = |1 - \lambda_{1l} X_{1l}^{(l)}(k) X_{2l}^{(l)}(k) + \lambda_{1l} \Delta_{1l}^{(l)}(k)| \quad (67,48)$$

მაგალითად, თუ $l=0$ მდგომარეობაში ვესურს გავითვალისწინოთ ქვბირი

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0, & (V_0 = \text{const}) \\ V(r) &= 0, & r > r_c \end{aligned} \quad (67,49)$$

რომელიც იმპულსურ წარმოდგენაში ეკვივალენტურია გამოსახულებისა

$$v(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty V(r) j_0(pr) r^2 dr = \text{const } j_1(pr_c), \quad (67,50)$$

მაშინ შესაბამისი ფაქტორიზებადი პოტენციალისათვის უნდა ავიღოთ

$$V(p, p') = \frac{\hbar^2 \lambda_{20}}{4\pi^2 \mu} [r_c^2 j_1(pr_c)] [r_c^2 j_1(p'r_c)]. \quad (67,51)$$

ამ შემთხვევაში ზღვარი $\lambda_{20} \rightarrow \infty$ შეესაბამება უსასრულო განზიდვას $(0, r_c)$ შუალედში. ამასთან, $T(E)$ -მატრიცაში შემავალ გამოსახულებაში $v_{20}(p)$ პოტენციალის ფორმაში უნდა ვიგულისხმობთ

$$v_{20}(p) = r_c^2 j_1(pr_c) \quad (67,52)$$

გამოსახულება, სადაც $j_1(pr_c)$ ბესელის ფუნქციაა. თუ $v_{10}(p)$ ფორმას ავიღებთ, მაგალითად, იამაგუჩის სახით და ვიგულისხმებთ, რომ $\lambda_{10} < 0$, მაშინ (67,48) ფორმულით განსაზღვრული $T_l(E)$ -მატრიცა გამოხატავს გაფანტვას პოტენციალზე, რომელსაც $(0, r_c)$ შუალედში ახასიათებს უსასრულო განზიდვა, ხოლო $r > r_c$ შუალედში — მიზიდვა.

§ 68. გაფანტვა რამდენიმე არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალით

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ შემთხვევას, როცა ნაწილაკებს შორის მოქმედებს რამდენიმე ფაქტორიზებადი პოტენციალი. ვთქვათ, პოტენციალს ახასიათებს ცენტრალური სიმეტრია, მაშინ, ზოგადი სახის ფაქტორებად პოტენციალურ ენერჯიას, რომელიც ინვარიანტულია ბრუნვისა და დროის არეკვლის მიმართ, იმპულსურ წარმოდგენაში ექნება სახე

$$V(p, p') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l(p, p') Y_{lm}(p) Y_{lm}^*(p'), \quad (68,1)$$

სადაც

$$V_l(p, p') = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \sum_{i=1}^{N_l} \lambda_{li} v_{li}(p) v_{li}(p'). \quad (68,2)$$

მაშასადამე, (64,4) გამოსახულებისაგან განსხვავებით, თითოეული l -ისათვის ფაქტორიზებადი პოტენციალი შეიცავს N_l -წევრს. პოტენციალთა ჯამის აღებას ის სიახლე შემოაქვს, რომ, როგორც ამას შემდგომ დავინახავთ, სათანადო ამოცანას ბმულ მდგომარეობაში შესაძლოა ჰქონდეს ერთზე მეტი ენერგეტული ღონე, წინააღმდეგ ერთწევრიანი პოტენციალისა, რომლის დროსაც მაქსიმუმ ერთი ღონე

გვაქვს. გარდა ამისა, როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, ამ შემთხვევაში შესაძლებელია უზრუნველყოთ განზიდვა მცირე მანძილებზე.

გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცის საპონენლად გამოვიყენოთ § 40-ში მიღებული შედეგები. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ, როცა პოტენციალური ენერგია

$$V(r) = \sum_{i=1}^n V_i(r), \quad (68,3)$$

მაშინ გაფანტვის ნატრიცას აქვს შემდეგი გამობატულება:

$$T'(z) = \sum_{i=1}^n T'_i(z), \quad (68,4)$$

სადაც $T'_i(z)$ -მატრიცები აკმაყოფილებენ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$T'_i(z) = T_i(z) + \sum_{k \neq i} T_i(z) G_0(z) T'_k(z); \quad (68,5)$$

ამასთან, $T'_i(z)$ არის V_i პოტენციალის შესაბამისი გაფანტვის მატრიცა.

წერის გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{ii} = \frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \lambda_{ii} \quad (68,6)$$

და ჩამოვუსვით l -ინდექსი. (68,5) განტოლება სკალარულად გავამრავლოთ მარცხნიდან $\langle p |$, ხოლო მარჯვნიდან $| p' \rangle$ ვექტორებზე და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\langle p | G_0(z) | p' \rangle = \frac{\delta(p-p')}{p^2 |z - E(p)|}, \quad E(p) = \frac{p^2 \hbar^2}{2\mu} \quad (68,7)$$

მაშინ მივიღებთ

$$\langle p | T'_i(z) | p' \rangle = \langle p | T_i(z) | p' \rangle + 4\pi \sum_{k \neq i}^{N_i} \int \frac{\langle p | T_i(z) | q \rangle \langle q | T'_k(z) | p' \rangle q^2 dq}{z - E(q)}. \quad (68,8)$$

როგორც ვაჩვენეთ, ერთი ფაქტორიზებადი პოტენციალის შესაბამისი გაფანტვის მატრიცაც ფაქტორიზებადია და მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\langle p | T_i(z) | p' \rangle = a_i v_i(p) \tau_i(z) v_i(p'), \quad (68,9)$$

სადაც

$$\tau_i^{-1}(z) = 1 - \lambda_i X_{ii}(z), \quad (68,10)$$

ხოლო

$$X_{ii}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_i(q) v_i(q) q^2 dq}{k^2 - q^2 + iz}; \quad \left(\frac{2\mu z}{\hbar^2} = k^2 + iz \right) \quad (68,11)$$

(68,9) გამოსახულების (68,8) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$\langle p | T'_i(z) | p' \rangle = a_i v_i(p) \tau_i(z) A_i(p'), \quad (68,12)$$

სადაც

$$A_i(p') = \tau_i(p') + 4\pi \sum_{k \neq i}^{N_i} \int \frac{v_i(q) \langle q | T'_k(z) | p' \rangle q^2 dq}{z - E(q)}. \quad (68,13)$$

ამ უკანასკნელში კი (68,12) გამოსახულების ჩასმით გვექნება

$$A_i(p') = v_i(p') + \sum_{k \neq i}^{N_I} \lambda_k \tau_k(z) A_k(p') X_{ik}(z). \quad (68,14)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$v_{ik}(z) = \lambda_k \tau_k(z) X_{ik}(z), \quad (68,15)$$

მაშინ (68,14) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$A_i - \sum_{k \neq i}^{N_I} v_{ik}(z) A_k = v_i. \quad (68,16)$$

რომელიც წარმოადგენს ალგებრულ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას A_i სიდიდეების მიმართ; ცხადია, (68,16) სისტემას შეიძლება მივცეთ იგივეური ფორმა

$$A_i - \sum_{k=1}^{N_I} v_{ik}(z) A_k + v_{ii}(z) A_i = v_i. \quad (68,17)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_{ik}(z) = [1 + v_{ii}(z)] \delta_{ik} - v_{ik}(z), \quad (68,18)$$

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\sum_{k=1}^{N_I} F_{ik}(z) A_k(p) = v_i(p). \quad (68,19)$$

ამასთან, $F_{ii} = 1$, ხოლო, როცა $i \neq k$, $F_{ik} = -v_{ik}(z)$. ამ სისტემას ამოხსნა ექნება, როცა სისტემის დეტერმინანტი

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1 - v_{12} & \dots & -v_{1N_I} \\ -v_{21} & 1 & \dots & -v_{2N_I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_{N_I,1} & -v_{N_I,2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (68,20)$$

ნული არ არის. ამონახსნი განისაზღვრება კრამერის ფორმულით

$$A_i(p) = \frac{\sum_{k=1}^{N_I} D_{ki} v_k(p)}{D(z)}, \quad (68,21)$$

სადაც $D_{ik}(z)$ არის F_{ik} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება. ამგვარად, (68,12) ფორმულის თანახმად

$$\langle p | T'_i(z) | p' \rangle = a_i v_i(p) \tau_i(z) \frac{\sum_{k=1}^{N_I} D_{ki}(z) v_k(p')}{D(z)}. \quad (68,22)$$

ხოლო (68,4) ფორმულის შესაბამისად სრული $T'(z)$ -მატრიცა ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$\langle p | T_i(z) | p' \rangle = \frac{1}{D_{I,N_I}(z)} \sum_{i,k=1}^{N_I} a_{ii} D_{ki}^{(i)}(z) v_{ii}(p) \tau_i(z) v_{ik}(p'). \quad (68,23)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $N_l = 2$, ამ გამოსახულებიდან მარტივად მივიღებთ წინა პარაგრაფში განხილულ შემთხვევას.

როგორც ვიცით, გაფანტვის პარციალური ამპლიტუდის მისაღებად საჭიროა (68,23)-ში გადავიღოთ ენერგეტულ ზედაპირზე და გავამრავლოთ იგი — $4\pi^2\mu/\lambda^2$ კოეფიციენტზე. შედეგად მივიღებთ

$$F_l(k) = -\frac{1}{D_{lN_l}(z)} \sum_{i,k=1}^{N_l} \lambda_{il} D_{ki}^{(l)}(z) v_{il}(k) \tau_{il}(z) v_{kl}(k), \quad (68,24)$$

სადაც

$$z = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} + iz. \quad (68,24')$$

k ცხვ $\delta_l(k)$ სიდიდის მოსაძებნად საჭიროა გამოვიყენოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი $F_l = (k \text{ ცხვ } \delta_l - ik)^{-1}$ ფორმულა.

ბმული მდგომარეობები. ახლა ვანვიხილოთ შრედინგერის (63,47) განტოლებების ამონახსნების საკითხი მიზიდვის (68,2) სახის პოტენციალის შემთხვევაში. მარტივად მივიღებთ, რომ ტალღურ ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში ექნება ასეთი სახე:

$$\psi_l(p) = \sum_{j=1}^N \frac{C_{lj} v_{lj}(p)}{\alpha^2 + p^2}, \quad \alpha^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad (68,25)$$

სადაც E -ბმის ენერგიაა, ხოლო

$$C_{lj} = \frac{2}{\pi} \lambda_{lj} \int_0^\infty v_{lj}(p') \psi_l(p') p'^2 dp'. \quad (68,26)$$

ვიპოვოთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება. ამ მიზნით (68,26) გამოსახულებაში (68,25)-დან შევიტანოთ $\psi_l(p)$ ფუნქციის მნიშვნელობა. გვექნება

$$C_{lj} = \lambda_{lj} \sum_{k=1}^N C_{lk} x_{ik}^{(l)}(\alpha), \quad (68,27)$$

სადაც

$$x_{ik}^{(l)}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_{il}(q) v_{lk}(q) q^2 dq}{\alpha^2 + q^2}. \quad (68,28)$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ (68,27) გამოსახულებას შეიძლება მიეცეს შემდეგი ფორმა:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ x_{ik}^{(l)}(\alpha) - \frac{\delta_{ik}}{\lambda_{lk}} \right\} C_{lk} = 0. \quad (68,29)$$

ამ ერთგვაროვანი ალგებრული განტოლების ამოხსნისათვის საჭიროა სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი, ე. ი.

$$\left\| x_{ik}^{(l)}(\alpha) - \frac{\delta_{ik}}{\lambda_{lk}} \right\| = 0. \quad (68,30)$$

ამ საუკუნეობრივი განტოლებიდან შეიძლება საკუთარი მნიშვნელობების მოძებნა. (68,29) განტოლებიდან და ნორმირების პირობის გამოყენებით ვიპოვიტ ყველა C_{lk} -კოეფიციენტს.

§ 60. ენერგეტიკული ფორმის რიცხვი არალოკალური
ფაქტორიზებადი პოტენციალების შემთხვევაში

ახლა გავარკვეთ მნიშვნელოვანი საკითხი, თუ რამდენი ბმული მდგომარეობის წარმოქმნა შეუძლია ამა თუ იმ სახის არალოკალურ ფაქტორიზებად პოტენციალს [71, 72, 144].

ჯერ განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როცა პოტენციალი ერთი წვეროსაგან შედგება. სახელდობრ, დავუშვათ, რომ ფაქტორიზებად პოტენციალს აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში აქვს სახე

$$V = \lambda |v\rangle\langle v|. \quad (69,1)$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ პოტენციალის შემთხვევაში შრედინგერის განტოლებას ექნება მაქსიმუმ ერთი ბმული მდგომარეობა.

განვიხილოთ შრედინგერის განტოლება

$$(E - \hat{H}_0) |\psi_E\rangle = \lambda |v\rangle\langle v | \psi_E\rangle, \quad (69,2)$$

სადაც \hat{H}_0 კინეტიკური ენერჯის ოპერატორია, ხოლო E -სრული ენერჯია. როცა $E < 0$, მაშინ $E - \hat{H}_0$ ერმიტული ოპერატორი უარყოფითად იქნება განსაზღვრული, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $|f\rangle$ ვექტორისათვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$\langle f | E - \hat{H}_0 | f \rangle < 0. \quad (69,3)$$

ამასთან, ნულთან ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $|f\rangle = 0$. დადებითად განსაზღვრული ოპერატორისათვის უტოლობა შებრუნებული იქნება. როგორც ვიცით, განსაზღვრული $E - \hat{H}_0$ ოპერატორს ექნება შებრუნებული და იგი გრინის თავისუფალ ფუნქციას წარმოადგენს

$$G_0(E) = (E - \hat{H}_0)^{-1}. \quad (69,4)$$

უხადა, შრედინგერის განტოლებაში

$$A = (v | \psi_E) \quad (69,5)$$

მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ განტოლების ამონახსნი მუდმივის სიზუსტით იქნება

$$|\psi_E\rangle = G_0(E) |v\rangle. \quad (69,6)$$

ამ გამოსახულების (69,5)-ში შეტანით მივიღებთ

$$\lambda (v | G_0(E) | v) = 1; \quad (69,7)$$

თუ ჩავსვამთ ერთეულოვან ოპერატორს, მაშინ

$$\frac{1}{\lambda} = \int (v | p) (p | G_0(E) | p') (p' | v) dp dp'. \quad (69,8)$$

გავიხსენოთ გრინის ფუნქციის შემდეგი გამოხატულება:

$$\langle p | G_0(E) | p' \rangle = \frac{-\delta(p-p')}{|E| + E(p)}; \quad (69,9)$$

მაშინ (69,8) ფორმულა მოგვცემს

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{8\pi\mu}{h^2} \int_0^\infty \frac{v^2(q) q^2 dq}{\alpha^2 + q^2}, \quad \alpha^2 = \frac{2\mu |E|}{h^2}. \quad (69,10)$$

თუ λ -ს ნაკვალად ავიღებთ $-\frac{\hbar^2 \lambda}{4\pi^2 \mu}$ კოეფიციენტს, მაშინ (69,10) ფორმულა დაეძ-
თხვევა ჩვენ მიერ ადრე გამოყვანილ (65,8) ფორმულას.

აღსანიშნავია, რომ (69,2) განტოლებას და, მაშასადამე, (69,7)-ს ან, რაც იგივეა, (69,10)-ს ექნება მაქსიმუმ ერთი საკუთარი მნიშვნელობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ აღნიშნულ განტოლებას ორი ორთოგონალური საკუთარი ფუნქცია აქვს E_1 და E_2 საკუთარი მნიშვნელობებით. მაშინ ზემოთ დამტკიცებულის ძალით ამონახსნებს ექნებათ ასეთი სახე:

$$|\psi_{E_1}\rangle = G_0(E_1) |\psi_{E_1}\rangle, \quad (69,11)$$

$$|\psi_{E_2}\rangle = G_0(E_2) |\psi_{E_2}\rangle. \quad (69,12)$$

ორთოგონალობის ძალით კი

$$\langle \psi_{E_1} | \psi_{E_2} \rangle = \langle \psi | G_0(E_1) G_0(E_2) | \psi \rangle = 0. \quad (69,13)$$

ცხადია, უარყოფითი E_1 და E_2 -ის დროს ნამრაველი $G_0(E_1) G_0(E_2)$ იქნება დადებითად განსაზღვრული, ამიტომ მივიღებთ $|\psi\rangle = 0$. მაშასადამე, მივედით წინააღმდეგობამდე.

რადგან $G_0(E)$ უარყოფითად განსაზღვრული ოპერატორია, ამიტომ ცხადია, (69,7) განტოლებას დადებითი λ -სათვის ამოხსნა არ ექნება. სიდიდე $\langle \psi | G_0(E) | \psi \rangle$, როცა $E < 0$, ენერჯიის კლებადი ფუნქციაა, ამიტომ, ცხადია, (69,7) განტოლებას ერთადერთი ფესვი ექნება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{E \rightarrow -\infty} \langle \psi | G_0(E) | \psi \rangle < \frac{1}{\lambda}; \quad (\lambda < 0) \quad (69,14)$$

0-აღნიშნავს ნულისაკენ მისწრაფვებას უარყოფითი მნიშვნელობების მხრიდან.

ის გარემოება, რომ ფაქტორიზებადი პოტენციალი ერთადერთ დონეს იძლევა, ამ პოტენციალის ნაკლებ მიუთითებს. მაგრამ არსებობს საშუალება ისეთი ფაქტორიზებადი პოტენციალების განხილვისა, რომლებიც რამდენიმე ბმულ მდგომარეობას ქმნიან და, ამავე დროს, ამ პოტენციალების ის მიმზიდველი მომენტი, რომ მათთვის შრედინგერის განტოლება ადვილად იხსნება, ძალაში რჩება. კერძოდ, ასეთი თვისება ახასიათებს პოტენციალს, რომელიც წარმოადგენს არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების ჯამს.

განვიხილოთ შემდეგი სახის ფაქტორიზებადი პოტენციალური ენერჯია:

$$V = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|, \quad (69,15)$$

სადაც $|v_i\rangle$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, ხოლო λ_i —ნამდვილი მუდმივები. შრედინგერის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$(E - \hat{H}_0) |\psi_E\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i | \psi_E \rangle. \quad (69,16)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A_i = \lambda_i \langle v_i | \psi_E \rangle, \quad (69,17)$$

მაშინ ამონახსნს ექნება გამოსახულება

$$|\psi_E\rangle = \sum_{i=1}^n A_i(E) G_0(E) |v_i\rangle. \quad (69,18)$$

აქედან ჩანს, რომ საკუთარი მნიშვნელობა მაქსიმუმ n -ჯერადად შეიძლება იყოს გადაგვარებული. (69,18) ამონახსნის (69,17) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას A_i -მუდმივებისათვის

$$\sum_{j=1}^n [\delta_{ij} - \lambda_i \langle v_i | G_0(E) | v_j \rangle] A_j = 0. \quad (69,19)$$

ამ განტოლებას ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამოხსნა ექნება, მაშინ როცა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია

$$\| \delta_{ij} - \lambda_i \langle v_i | G_0(E) | v_j \rangle \| = 0. \quad (69,20)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს საკუთარი მნიშვნელობების ტრანსცენდენტულ განტოლებას, ამიტომ ზოგად შემთხვევაში ანალიზის ჩატარება რთულია. მაგრამ რამდენადაც ჩვენს შემთხვევაში საკმე გვაქვს განსაზღვრულ ოპერატორებთან, შეგვიძლია მთელი რიგი მნიშვნელოვანი დასკვნების გაკეთება საკუთარი ფუნქციებისა და საკუთარი მნიშვნელობების რიცხვის შესახებ.

ჩერ ვაჩვენოთ, რომ ჰამილტონიანს აქვს მაქსიმუმ m განსხვავებული საკუთარი ფუნქცია. განვიხილოთ m რაოდენობის $|\psi_k\rangle$ ორთოგონალური ვექტორი

$$\langle \psi_j | \psi_k \rangle = -\frac{1}{E_k} \delta_{jk}, \quad k, j = 1, 2, \dots, m. \quad (69,21)$$

სადაც E_1, E_2, \dots, E_m უარყოფითი სიდიდეებია. შემოვიღოთ ახალი ვექტორები

$$|U_k\rangle = (E_k - \hat{H}_0) |\psi_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (69,22)$$

აღვიღად ვაჩვენებთ, რომ ეს ვექტორები, როცა დაკუთვლია (69,21) პირობა, წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, ე. ი. თუ განვიხილავთ

$$\sum_{k=1}^m C_k |U_k\rangle = 0, \quad (69,23)$$

ჩამს, მაშინ საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ ყველა $C_k = 0$. (69,23) ეკვივალენტურია

$$\sum_{k=1}^m C_k (E_k - \hat{H}_0) |\psi_k\rangle = 0 \quad (69,24)$$

განტოლებისა. გავამრავლოთ ეს ჩამი $\langle \psi_j |$ ვექტორზე და გავითვალისწინოთ ორთონორმირების (69,21) პირობა, გვექნება

$$\sum_{k=1}^m C_k \alpha_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (69,25)$$

სადაც

$$\alpha_{jk} = \delta_{jk} + \langle \psi_j | \hat{H}_0 | \psi_k \rangle \quad (69,26)$$

წარმოადგენს ერმიტულ მატრიცას. S -უნიტარული მატრიცის დახმარებით (69,26) შეიძლება დაიყვანოს დიაგონალურ სახეზე. ვთქვათ, მართლაც ვიპოვეთ ისეთი S -მატრიცა, რომ α_{jk} მატრიცა დაიყვანეთ დიაგონალურ სახეზე

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m S_{ij} \alpha_{jk} S_{ik}^* = \alpha_i \delta_{ij}, \quad (69,27)$$

სადაც α_i რიცხვები α_{jk} მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობებია. უკანასკნელ ტოლობაში შევიტანოთ α_{jk} მატრიცა (69,26) ტოლობიდან; მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^m S_{ij} S_{ij}^* + \left(\sum_{j=1}^m S_{ij} \langle \psi_j | \right) \dot{H}_0 \left(\sum_{k=1}^m | \psi_k \rangle S_{ik}^* \right) = \alpha_i \delta_{ii}, \quad (69,28)$$

რადგან $SS^+ = 1$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\alpha_i = 1 + \left(\sum_{j=1}^m S_{ij} \langle \psi_j | \right) \dot{H}_0 \left(\sum_{k=1}^m S_{ik}^* | \psi_k \rangle \right). \quad (69,29)$$

ცხადია, რამდენადაც კინეტიკური ენერჯის ოპერატორი \dot{H}_0 დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია, α_i დადებითი რიცხვებია, ამის გამო დეტერმინანტი

$$\| \alpha_{jk} \| = \prod_{i=1}^m \alpha_i \quad (69,30)$$

დადებითი იქნება, რაც ნიშნავს, რომ (69,25) სასტემას ექნება მხოლოდ $C_k = 0$ ამონახსნი. და, მაშასადამე, (69,22) ფორმულით განმარტებული ვექტორები წარფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია. ახლა გავიხსენოთ, რომ შრედინგერის განტოლების შესაძლო ამონახსნს აქვს (69,18) სახე. დაეუშვათ, რომ (69,16) განტოლებას აქვს n -ზე მეტი, ვთქვათ $m_i > n$ საკუთარი ვექტორი. მაშინ გვექნება

$$| \psi_{E_j} \rangle = \sum_{i=1}^n A_i(E_j) G_0(E_j) | \psi_i \rangle. \quad j=1, 2, \dots \quad (69,31)$$

ამ ვექტორებზე ვიპოქმელოთ $E_j - \dot{H}_0$ ოპერატორით, მაშინ, (69,22)-ის თანახმად, გვექნება

$$| U_j \rangle = \sum_{i=1}^n A_i(E_j) | \psi_i \rangle. \quad j=1, 2, \dots \quad (69,32)$$

ჩვენ დავამტყიცეთ, რომ $| U_j \rangle$ ვექტორები წარფივად დამოუკიდებლებია, (69,32) ტოლობიდან კი ჩანს, რომ მათი რიცხვი არ შეიძლება n -ზე მეტი იყოს (რადგან n რიცხვის $| \psi_i \rangle$ წარფივად დამოუკიდებელი ვექტორებიდან n -ზე მეტი წარფივად დამოუკიდებელი ვექტორის შედგენა შეუძლებელია). აქედან კი, პირიქით, ცხადია, რომ \dot{H} ჰამილტონიანს ექნება მაქსიმუმ n -საკუთარი $| \psi_{E_j} \rangle$ -ვექტორი.

ახლა კი დავამტყიცოთ, რომ (69,20) საუკუნეობრივ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს n -ზე მეტი ფესვი. დაეუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, გვაქვს $m > n$ ფესვი: E_1, E_2, \dots, E_m , მაშინ ზემოთქმულის ძალით და $| \psi_{E_j} \rangle$ ვექტორე-

ბის ორთოგონალობით მინიმუმ ($m-n$) რაოდენობის ექვტორი ნულია, მაშას-
 ლამე. (69,32)-შიც მინიმუმ $m-n$ ექვტორი ნულის ტოლი იქნება, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^n A_i(E_p)|v_i\rangle=0, \quad p > n \quad (69,33)$$

საიდანაც $A_i(E_p)=0$, როცა $p > n$, რაც ეწინააღმდეგება ფესვის არსებობას
 $p > n$ -სათვის.

ადგილი საჩვენებელია, რომ ბმულ მდგომარეობათა რაოდენობას განსაზღვრავს
 პოტენციალში უარყოფითი λ_i კოეფიციენტების რიცხვი. ამის დასამტკიცებლად
 ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიიდან ცალკე გამოვეყოთ შიზიდვის
 წევრები

$$V = \sum_{i=1}^l \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| + \sum_{i=l+1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| \quad (69,34)$$

სადაც $\lambda_i < 0$, როცა $i \leq l$ და $\lambda_i > 0$, როცა $l < i \leq n$. ვთქვათ, გვაქვს m -საკუთარი
 ექვტორი და მათი შესაბამისი საკუთარი მნიშვნელობები: E_1, E_2, \dots, E_m . მაშინ,
 ცხადია.

$$(E_h - H_0)|\psi_h\rangle = \sum_{i=1}^l \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|\psi_h\rangle + \sum_{i=l+1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|\psi_h\rangle. \quad (69,35)$$

ეს გამოსახულება გავამრავლოთ მარცხნიდან სკალარულად $\langle \psi_j|$ -ექვტორზე და გა-
 ვითვალისწინოთ ორთონორმირების (69,21) პირობა, მივიღებთ

$$- \sum_{i=1}^l \lambda_i \langle \psi_j | v_i \rangle \langle v_i | \psi_h \rangle = \alpha_{jh} + \sum_{i=l+1}^n \lambda_i \langle \psi_j | v_i \rangle \langle v_i | \psi_h \rangle. \quad (69,36)$$

მარჯვნივ მდგომი ოპერატორი არის ერმიტული და დადებითად განსაზღვრული.
 იგი უნიტარული მატრიცით შეიძლება დიაგონალურ სახეზე დავიყვანოთ. მარტი-
 ვად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\gamma_i = 1 + \left(\sum_{j=1}^m S_{ij} \langle \psi_j | \right) \left[H_0 + \sum_{i=l+1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| \right] \left(\sum_{k=1}^m S_{ik}^* |\psi_k\rangle \right), \quad (69,37)$$

სადაც γ_i -დადებითი რიცხვებია, რამდენადაც

$$\hat{H}_0 + \sum_{i=l+1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| \quad \lambda_i > 0 \quad (69,38)$$

ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია. მაშასადამე, (69,37) ტოლობის მარჯვე-
 ნა მხარეში მდგომი მატრიცის დეტერმინანტი დადებითია. ადვილად ვაჩვენებთ,
 რომ მარცხნივ მდგომი დეტერმინანტი, $l < m$ -ის შემთხვევაში, ნულის ტოლი
 იქნება.

მართლაც, ვთქვათ, $l < m$ და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\sqrt{\lambda_i} \langle \psi_j | v_i \rangle = F_{ij}, \quad (69,39)$$

$$\sqrt{\lambda_i} \langle v_i | \psi_k \rangle = f_{ik}; \quad (69,40)$$

F_{jk} -ს ექნება m -სტრიქონი და l სვეტი. f_{ih} -ს კი პირიქით. მაშინ (69,53)-ის მარცხენა მხარეს ექნება ასეთი სახე:

$$\sum_{i=1}^l F_{ji} f_{ih} \quad (69,41)$$

შემოვიღოთ პარამეტრი ε_i , რომელიც ერთის ტოლია, როცა $i < l$ და—ნულის ტოლი, როცა $l < i < m$, მაშინ

$$\sum_{i=1}^l F_{ji} f_{ih} = \sum_{i=1}^m F_{ji} \varepsilon_i f_{ih} = \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^m F_{ji} \varepsilon_i \delta_{ip} f_{ph} \quad (69,42)$$

ახლა კი ცხადია, რომ $\varepsilon_i \delta_{ip}$ მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ამიტომ მთელი მარცხენა გამოსახულების დეტერმინანტი ნულია, რამაც წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა; მაშასადამე, l არ არის m -ზე ნაკლები.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ბმული მდგომარეობების რაოდენობა ტოლია მაქსიმუმ (69,15) პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი λ_i -კოეფიციენტების რიცხვისა.

მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ მეტად მნიშვნელოვანი დებულება, რომ, როცა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალი ერთ წვერს შეიცავს, მაშინ სათანადო შრედიზგერის განტოლებას მაქსიმუმ ერთი ენერგეტული დონე აქვს, ხოლო როცა პოტენციალი n -წვერს შეიცავს, მაშინ ენერგეტულ დონეთა რიცხვი მაქსიმუმ n -ის ტოლი იქნება; კერძოდ, ბმული მდგომარეობების რიცხვი განისაზღვრება λ -ში უარყოფითი წვერების რაოდენობით.

§ 70. გაფანტვის უზარუნებელი ამოცანა

გაფანტვის ფაზის საშუალებით პოტენციალის აღდგენის ამოცანა გაფანტვის კვანტური თეორიის ერთ-ერთი ფუნდამენტურა ამოცანაა, რომელიც ლოკალური პოტენციალების შემთხვევაში მეტად დიდ სიმწელებს აწყდება და, ამასთან, ზოგად შემთხვევაში არაცალსახა პასუხს იძლევა. არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალებისათვის გაფანტვის ფაზითა და ბმული მდგომარეობის ენერჯიით პოტენციალის ფორმის აღდგენა შედარებით მარტივ ამოცანას წარმოადგენს. ლოკალური პოტენციალებისაგან განსხვავებით, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, პოტენციალის ფორმისათვის მიიღება შედარებით მარტივი ინტეგრალური განტოლება, რომელიც შეიძლება ამოიხსნას ნ. მუსხელიშვილის მეთოდით [70, 145].

ჩვენ ვიცით, რომ გაფანტვის ფაზა მოიძებნება ფორმულით

$$k \operatorname{ctg} \delta_l(k) = \frac{1}{v_l^2(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_l} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_l^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} \right\}, \quad (70,1)$$

სადაც $v_l(k)$ ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმას გამოხატავს. ამ უკანასკნელიდან ჩანს, რომ, თუ $k \operatorname{ctg} \delta_l(k)$ ენერჯიის ცნობილი ფუნქციაა, მაშინ იგი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ინტეგრალური განტოლება $v_l^2(k)$ ფორმის მიმართ და, მაშასადამე, ინტეგრალური განტოლების ამოხსნით შესაძლებელი იქნება პოტენციალის ფორმის აღდგენა.

გადავწეროთ (70,1) განტოლება უფრო მოსახერხებელი სახით. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi_1(k) = \lambda_1 k^2 v_1^*(k). \quad (70,2)$$

$$g_1(k) = k \operatorname{ctg} \delta_1(k). \quad (70,2')$$

მაშინ (70,1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi_1(k) = g_1(k) \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(q) dq}{k^2 - q^2} \right], \quad (70,3)$$

რომელიც წარმოადგენს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას $\varphi_1(k)$ ფუნქციისათვის. ცხადია, ფიზიკური აზრი ექნება ისეთ ამონახსნს, რომელიც ნიშანს არ იცვლის. გარდა ამისა, როგორც § 66-ში ვაჩვენეთ, $v_1(k)$ და, მაშასადამე, $\varphi_1(k)$ ზარკვეულ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ; სასულღობრ, გვექნება

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(k)}{k^2} < M, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(k)}{k} = 0, \quad (70,4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(k)}{g_1(k)} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(q) dq}{q^2}, \quad (70,5)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(k)}{g_1(k)} = 1. \quad (70,6)$$

ამ თვისებების გათვალისწინებით განტოლების ამოხსნის გარეშე შეგვიძლია გავაქეთოთ მთელი რიგი დასკვნები.

ექვეთ, მაგალითად, $g_1(+\infty) < 0$, ხოლო $g_1(+0) > 0$, მაშინ ადვილია ჩვენება, რომ (70,3) ინტეგრალურ განტოლებას ამოხსნა არა აქვს. (70,6) პირობით ნათელია, რომ $\varphi_1(+\infty) = g_1(+\infty) < 0$; $\varphi_1(k)$ ნიშანს არ უნდა იცვლიდეს, მაშასადამე, იგი უარყოფითი იქნება ნებისმიერი k -სათვის $\varphi_1(k) < 0$; მაგრამ (70,5) პირობის ძალით

$$\frac{\varphi_1(0)}{g_1(0)} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(q) dq}{q^2} > 0. \quad (70,7)$$

ეს კი მოითხოვს, რომ $g_1(+0) < 0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. მაშასადამე, როცა $g_1(+\infty) < 0$ და $g_1(+0) > 0$, განტოლებას მართლაც ამოხსნა არა აქვს.

როგორც ვიცი, (70,8) ფორმულის თანახმად, ბმული მდგომარეობა განისაზღვრება ფორმულით

$$D_l(\alpha) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(q) dq}{\alpha^2 + q^2}. \quad \left(\alpha^2 = \frac{2\mu\mathcal{L}}{h^2} \right) \quad (70,8)$$

ამ განტოლებას, (65,10) ფორმულის ძალით, ერთადერთი ფესვი ექნება, თუ და-
ცულია პირობა

$$D_l(0) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(q) dq}{q^2} < 0, \quad (70,9)$$

როცა ეს გამოსახულება დადებითია, მაშინ არაერთი ფესვი არ გვექნება. მაგრამ (70,5) ფორმულის თანახმად, $U_1(0)$ -ის ნიშანი განისაზღვრება $\varphi_1(0)/g_1(0)$ ფარდობის ნიშნით. რადგან $\varphi_1(\infty) = g_1(\infty)$ და $\varphi_1(k)$ ნიშანს ინარჩუნებს, ამიტომ (70,9) გამოსახულების ნიშანი განისაზღვრება $g_1(\infty)g_1(0)$ ნამრავლის ნიშნით. მიზიღვის შემთხვევაში $\varphi_1(\infty) > 0$, ამიტომ ვასკვნით, რომ $g_1(+0) < 0$ და $g_1(+\infty) > 0$ -სათვის სისტემას ექნება ერთი ბმული მდგომარეობა; ხოლო როცა $g_1(+0)g_1(+\infty) > 0$, სისტემას ბმული მდგომარეობა არ გააჩნია.

ახლა დავებრუნდეთ პოტენციალის ფორმის განსაზღვრის ამოცანას. ნაცვლად იმისა, რომ ამოვხსნათ (70,3) ინტეგრალური განტოლება, უფრო მარტივია იოსტის ფუნქციის დისპერსიული თანაფარდობის გამოყენება. კერძოდ, § 52-ში ჩვენ ვიპოვეთ იოსტის ფუნქცია გაფანტვის ფაზისა და ბმული მდგომარეობების საშუალებით. რამდენადაც არალოკალურ ფაქტორიზებულ პოტენციალს მაქსიმუმ ერთი ბმული მდგომარეობა აქვს, ამიტომ, თანახმად (52,20) ფორმულისა, შეგვიძლია დავეწეროთ

$$f_1(k) = \left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right) e^{U_1(k-i\varepsilon)}, \quad (70,10)$$

სადაც

$$U_1(k-i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta_1(q) dq}{k-q-i\varepsilon}. \quad (70,11)$$

რადგან $\delta_1(k)$ ფაზა კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$U_1(k-i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k+q)\delta(q) dq}{k^2-q^2-i\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\delta_1(q) q dq}{k^2-q^2-i\varepsilon}, \quad (70,12)$$

ან მთავარ მნიშვნელობებზე გადასვლით შეგვიძლია დავეწეროთ

$$U_1(\varepsilon) = \rho_1(k^2) + i\delta_1(k), \quad (70,13)$$

სადაც

$$\rho_1(k^2) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\delta_1(q) q dq}{k^2-q^2}. \quad (70,14)$$

მეორე მხრივ, (52,31) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$e^{i\delta_1} \sin \delta_1 = -\frac{Im \Delta_1(E)}{\Delta_1(E+i\varepsilon)}, \quad (70,15)$$

სადაც Δ_1 ფრედჰოლმის დეტერმინანტია. გავიხსენოთ (66,6) და (66,10) ფორმულები, მაშინ

$$-Im \Delta_1(E) = k\lambda_1 v_1^2(k) = \frac{1}{k} \varphi_1(k). \quad (70,16)$$

თანახმად (70,15) ფორმულისა, მივიღებთ

$$\varphi_1(k) = k \sin \delta_1 e^{i\delta_1} \Delta_1(E+i\varepsilon). \quad (70,17)$$

ახლა გამოვიყენოთ (52,26) და (52,27) ფორმულები, მაშინ

$$\varphi_1(k) = k \sin \delta_1 e^{-i\delta_1} f_1(k); \quad (70,18)$$

რაც, (70,10) და (70,13) ფორმულების გათვალისწინებით, მოგვცემს

$$\varphi_1(k) = k \sin \delta_1(k) \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right) e^{\rho_1(k^2)} \quad (70,19)$$

თუ გამოვიყენებთ (70,2) აღნიშვნას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$v_1^*(k) = \frac{1}{\lambda_1 k} \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right) \sin \delta_1 e^{\rho_1(k^2)} \quad (70,20)$$

მაშასადამე, პოტენციალის ფორმა განისაზღვრა ბმული მდგომარეობებითა და ვა-ფანტის ფაზით. როგორც ვხედავთ, ფაზის ნიშანი განისაზღვრება λ_1 -ის ნიშნით. როცა $\delta_1 > 0$, მაშინ $\lambda_1 > 0$ — გვექნება მიზიდვა, ხოლო, როცა $\delta_1 < 0$, მაშინ $\lambda_1 < 0$ — გვექნება განზიდვა. რადგან λ_1 მუდმივია, ამიტომ ენერგიის ცვლილებისას ფაზა ნიშანს არ იცვლის.

როცა პოტენციალი არ აპირობებს ბმულ მდგომარეობას, მაშინ $\alpha = 0$ და მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$v_1^*(k) = \frac{1}{\lambda_1 k} \sin \delta_1(k) e^{-\rho_1(k^2)} \quad (70,21)$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორ-
მულა $l=0$ შემთხვევაში

$$k \operatorname{ctg} \delta_0(k) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_c k^2 \quad (70,22)$$

სამართლიანია ნებისმიერი ენერგიისათვის. გამოვარკვეით, თუ როგორი იქნება ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმა, რომელიც გვაძლევს (70,22) გამოსახუ-
ლებას. ჭეჩ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა არა გვაქვს ბმული მდგომარეობა. მაშინ, როგორც ვიცით, ვაფანტის სიგრძე $a < 0$. ნეიტრონ-პროტონის შემთხვევაში ჩვენ გვექნება ვაფანტვა სინგლუტურ მდგომარეობაში. ამიტომ ყველა სიდიდეს მიუეწე-
როთ s -ინდექსი. ცხადია,

$$\operatorname{tg} \delta_{0s}(k) = \frac{2}{r_{1s}} \frac{k}{k^2 + \alpha_s^2}, \quad (70,23)$$

სადაც

$$\alpha_s^2 = -\frac{\Lambda_s}{a_{0s}}, \quad \Lambda_s = \frac{2}{r_{1s}} \quad (70,24)$$

გამოვთვალოთ $\rho_0(k^2)$ გამოსახულება, რომელიც განისაზღვრება (70,14) ფორმუ-
ლით; გვექნება

$$\rho_0(k^2) = -\frac{1}{2} \ln \frac{k^2 + \beta_2^2}{k^2 + \beta_1^2}, \quad (70,25)$$

სადაც β_1^2 და $\beta_2^2 > \beta_1^2$ განისაზღვრება პირობით

$$(k^2 + \alpha^2)^2 + \Lambda_s k^2 = (k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2), \quad (70,26)$$

რომელიც ეკვივალენტურია პირობისა, რომ β_1 და β_2 განისაზღვრება შემდეგი კვად-
რატული განტოლების ფესვებით:

$$\beta^2 - \Lambda_s \beta - \alpha^2 = 0, \quad (70,27)$$

$$\tilde{\rho}_{1,2} = \frac{1}{r_{1,2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2r_{1,2}}{a_1}} \right). \quad (70,28)$$

რადგან $a_1 < 0$, ამიტომ მეორე ფესვი არ გამოდგება. (70,22) ფორმულის დახმარებით განვსაზღვროთ $\sin \delta_{01}(k)$. ცხადია,

$$\sin \delta_{01}(k) = \frac{\Lambda_1 k}{\sqrt{\Lambda_1^2 k^2 + (k^2 + \alpha^2)}}. \quad (70,29)$$

ახლა, თუ (70,25) და (70,29) ფორმულებიდან მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ (70,21) გამოსახულებაში და გავითვალისწინებთ (70,26)-ს, მივიღებთ

$$v(k) = \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_1}} \frac{1}{(k^2 + \beta_1^2)^{1/2}}, \quad (70,30)$$

სადაც $\beta_1^{-1} = \tilde{\rho}_1^{-1}$ ასრულებს ურთიერთქმედების რადიუსის როლს.

როცა სისტემას აქვს ბმული მდგომარეობა, მაშინ $\alpha > 0$; ნეიტრონ-პროტონის სისტემაში ეს მდგომარეობა ხორციელდება დეიტრონის ტრიპლეტურ მდგომარეობაში. ამიტომ სათანადო სიდიდეებს მივუწეროთ t -ინდექსი. (70,22)-დან ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$t \kappa \delta_{01}(k) = \frac{\Lambda_1 k}{(k^2 - \alpha^2)}; \quad (70,31)$$

$\rho_0(k^2)$ გამოსახულებისათვის მივიღებთ

$$\rho_0(k^2) = -\frac{1}{2} \ln \frac{k^4}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)}. \quad (70,32)$$

ახლა უკვე β_1 და β_2 განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$\beta^2 - \Lambda_1 \beta + \alpha^2 = 0, \quad (70,33)$$

სახელდობრ,

$$\tilde{\rho}_{1,2} = \frac{1}{r_{e1}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2r_{e1}}{a_1}} \right). \quad (70,34)$$

(70,20) ფორმულის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ

$$v^2(k) = \frac{\Lambda_1}{\lambda_1} \frac{k^2 + \alpha^2}{(\beta_1^2 + k^2)(\beta_2^2 + k^2)}. \quad (70,35)$$

რადგან, როგორც (31,40) ფორმულა გვიჩვენებს,

$$\alpha = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} r_{e1} \alpha^2; \quad (70,36)$$

ამიტომ, ცხადია, $\alpha = \beta_2$ და (70,35) ფორმულიდან საბოლოოდ მივიღებთ

$$v(k) = \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_1}} \frac{1}{(k^2 + \beta_1^2)^{1/2}}, \quad (70,37)$$

სადაც $\beta_1^{-1} = \tilde{\rho}_1^{-1}$ წარმოადგენს ტრიპლეტური ურთიერთქმედების რადიუსს. ასეთი ფორმის ფაქტორიზებული პოტენციალი ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა გამოთვლებში [91].

§ 71. დამუხტული ნუკლონების გაზანტვა

დავეუშვათ, რომ ურთიერთმოქმედ ნაწილაკებს მუხტიც აქვთ. ამასთან, განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ ახლომოქმედების ფაქტორიზებადი პოტენციალების ჯამით და კულონური პოტენციალით, რომელიც, რა თქმა უნდა, ლოკალურია. ასეთი შემთხვევა შეიძლება განხორციელდეს, მაგალითად, პროტონის პროტონზე— (p, p) , α -ნაწილაკის α -ნაწილაკზე— (α, α) და სხვა გაფანტვისას.

ამოცანა გადავწყვიტოთ კოორდინატულ წარმოდგენაში [82]. მაშასადამე, ვთქვათ, $Z_1 e$ და $Z_2 e$ მუხტის მქონე ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერგიას აქვს შემდეგი სახე:

$$V(r, r') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l(r, r') Y_{lm}(r) Y_{lm}^*(r') + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (71,1)$$

სადაც

$$V_l(r, r') = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \sum_{i=1}^{N_l} \lambda_{li} v_{il}(r) v_{il}(r'). \quad (71,2)$$

განხილულ შემთხვევაში შრედინგერის (63,43) განტოლება მიიღებს შემდეგ ფორმას:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - k^2 + \frac{1}{Dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = -\frac{8\pi\mu}{\hbar^2} r \int_0^{\infty} V_l(r, r') \chi_l(r') r' dr', \quad (71,3)$$

სადაც $\chi_l = r R_l(r)$, ხოლო პარამეტრი— D შემდეგნაირადაა განმარტებული:

$$D = \frac{\hbar^2}{2\mu Z_1 Z_2 e^2}; \quad (71,4)$$

μ -სისტემის დაყვანილი მასაა. ფაქტორიზებადი პოტენციალის (71,2) გამოსახულება შევიტანოთ (71,3) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - k^2 + \frac{1}{Dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = f_l(r), \quad (71,5)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$f_l(r) = \sum_{i=1}^{N_l} \lambda_{li} r v_{il}(r) \bar{\chi}_l^{(i)}, \quad (71,6)$$

ხოლო

$$\bar{\chi}_l^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v_{il}(r) \chi_l(r) r dr \quad (i=1, 2) \quad (71,7)$$

დიდ მანძილზე ატომბირთვული ურთიერთქმედება სწრაფად ისპობა, ამიტომ (71,5)-ის ასიმპტოტური ამონახსნი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{1}{Dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] U_l(r) = 0. \quad (71,8)$$

ამონახსნს დიდი r -ებისათვის უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$\chi_l(r) = U_l(r) = \frac{C_l}{\sin \delta_l} \sin \left(kr - \eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{cl} + \delta_l \right), \quad (71,9)$$

სადაც

$$C_l(\eta) = c^{\frac{1}{2} \pi \eta} |\Gamma(l+1+i\eta)|; \quad (71,10)$$

η -პარამეტრი განისაზღვრება ფორმულით

$$\eta = \frac{1}{2kD} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \mu}{k h^2}. \quad (71,11)$$

$\delta_l(k)$ გაფანტვის ფაზა, გამოწვეული ფაქტორიზებული ბირთვული ურთიერთქმედებით, ხოლო $\delta_{cl}(k)$ წარმოადგენს კულონური გაფანტვის შესაბამის ფაზას, რომელიც განიზარტება შემდეგი ფორმულით:

$$e^{i\delta_{cl}} = \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)}, \quad \text{ან} \quad \delta_{cl} = \arg \Gamma(l+1+i\eta). \quad (71,12)$$

C_l -კოეფიციენტის მნიშვნელობა $l=0$ -სათვის ასეთია:

$$G_0^2(\eta) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}. \quad (71,13)$$

(71,5) განტოლების ამონახსნს, რომელიც (71,9) სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს, უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$\chi_l(r) = C_l G_l(r) + C_l \operatorname{ctg} \delta_l F_l(r), \quad (71,14)$$

სადაც $F_l(r)$ და $G_l(r)$ კარგად ცნობილი კულონური ფუნქციებია, შესაბამისად რეგულარული და არარეგულარული. როცა მუხტი არა გვაქვს, ეს ფუნქციები გადანადგურდება და ნეიმანის ფუნქციებში გამრავლებული kr -ზე. დიდ მანძილებზე მათი ასიმპტოტური სახე განისაზღვრება ფორმულებით

$$F_l(kr) = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl} + \delta_l \right), \quad (71,15)$$

$$G_l(kr) = -\cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \delta_{cl} + \delta_l \right). \quad (71,15')$$

ხელსაყრელია, შრედინგერის (71,3) განტოლება დაეწეროს ინტეგრალური განტოლების სახით

$$\chi_l(r) = C_l \operatorname{ctg} \delta_l F_l(r) + \int_0^\infty g_l^*(r, r') f_l(r') dr', \quad (71,16)$$

სადაც გრინის ფუნქცია განისაზღვრება (57,9) ფორმულით

$$g_l^*(r, r') = \frac{1}{k} F_l(r <) G_l(r >). \quad (71,17)$$

გრინის ეს ფუნქცია შეესატყვისება სასაზღვრო პირობას $\chi_l(0)=0$. მართლაც, როცა $r=0$, მაშინ $g_l(0, r')=0$ და (71,17)-დან $\chi_l(0)=0$.

გრინის ფუნქციის გათვალისწინებით (71,16) ფუნქცია გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\chi_l(r) = C_l \operatorname{ctg} \delta_l F_l(r) + \frac{1}{k} G_l(r) \int_0^r F_l(r') f_l(r') dr' + \frac{1}{k} F_l(r) \int_r^\infty G_l(r') f_l(r') dr' \quad (71,18)$$

$\chi_l(r)$ ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა $r = \infty$ -სათვის ტოლი იქნება

$$\chi_l(r) = C_l F_l(r) \operatorname{ctg} \delta_l + \frac{1}{k} G_l(r) \int_0^\infty F_l(r') f_l(r') dr'; \quad (71,19)$$

ამასთან, $F_l(r)$ და $G_l(r)$ -ს შესაბამისად ექნება (17,15) და (71,15') სახე. უკანასკნელი ფორმულის (71,14)-სთან შედარებით მივიღებთ

$$C_l(\eta) = \frac{1}{k} \int_0^\infty F_l(r') f_l(r') dr'. \quad (71,20)$$

ახლა ამ ფორმულაში შევიტანოთ $f_l(r)$ -ის (71,6) მნიშვნელობა და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_{ll} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{k C_l(\eta)} \int_0^\infty F_l(r') V_{ll}(r') r' dr; \quad (71,21)$$

შედეგად მივიღებთ

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^{N_l} \lambda_{il} A_{ll} \bar{\chi}_l^{(i)} = 1. \quad (71,22)$$

$\bar{\chi}_l^{(i)}$ მულტიპლერის მოსაძებნად $\chi_l(r)$ -ის მნიშვნელობა (71,18) ფორმულიდან შევიტანოთ (71,7)-ში. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ გვექნება

$$\bar{\chi}_l^{(i)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k C_l^{(i)}(\eta) \operatorname{ctg} \delta_l A_{ll} + \sum_{j=1}^{N_l} \lambda_{jl} \bar{\chi}_l^{(j)} Q_{lj}^{(i)}, \quad (71,23)$$

სადაც

$$Q_{ij}^{(i)}(k) = Q_{ji}^{(i)}(k) = \theta_{ij}^{(i)}(k) + \theta_{ji}^{(i)}(k), \quad (71,24)$$

ხოლო

$$Q_{ij}^{(i)}(k) = \frac{2}{\pi k} \int_0^\infty v_{il}(r) F_l(r) r dr \int_r^\infty v_{jl}(r') G_l(r') r' dr' \quad (71,25)$$

ან, რაც იგივეა,

$$Q_{ij}^{(i)}(k) = \frac{2}{\pi k} \int_0^\infty v_{jl}(r) G_l(r) r dr \int_0^r v_{il}(r') F_l(r') r' dr'. \quad (71,25')$$

ცხადია, (17,23) წარმოადგენს ალგებრულ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას $\bar{\chi}_l^{(j)}$ მულტიპლერის მიმართ; ეს უკანასკნელი შემდეგი ფორმით გადაიწერეთ:

$$\sum_{j=1}^{N_l} [\delta_{ij} - \lambda_{jl} Q_{lj}^{(i)}] \bar{\chi}_l^{(j)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k C_l^{(i)}(\eta) \operatorname{ctg} \delta_l A_{ll}. \quad (71,26)$$

ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta_{iN_i}(k)$ -ით აღნიშნოთ; მაშინ ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$\bar{\chi}_i^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k C_i^*(\eta) \operatorname{ctg} \delta_i \frac{\sum_{i=1}^{N_i} \Delta_{ij}^{(j)}(k) A_{ii}}{\Delta_{iN_i}(k)}, \quad (71,27)$$

სადაც $\Delta_{ij}^{(j)}(k)$ წარმოადგენს (i, j) ელემენტის შესაბამის ალგებრულ დამატებას. ეს ამონახსნი შევითვალთ (71,22) ფორმულაში, მივიღებთ

$$k C_i^*(\eta) \operatorname{ctg} \delta_i(k) = \frac{\Delta_{iN_i}(k)}{\omega_{iN_i}(k)}, \quad (71,28)$$

სადაც $\omega_{iN_i}(k)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$\omega_{iN_i}(k) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \lambda_{ij} \Delta_{ij}^{(j)} A_{ji} A_{ii}, \quad (71,29)$$

ხოლო Δ_{iN_i} , როგორც აღნიშნეთ, (71,26) სისტემის დეტერმინანტია

$$\Delta_{iN_i}(k) = \left| \delta_{ij} - \lambda_{ij} Q_{ij}^{(j)}(k) \right|. \quad (71,30)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $N_i=1$, ე. ი. როცა გვაქვს ერთი ფაქტორიზებადი პოტენციალი კულონის პოტენციალთან ერთად, მაშინ

$$\Delta_{i1}(k) = 1 - \lambda_{i1} Q_{i1}^{(1)}(k), \quad \omega_{i1}(k) = \lambda_{i1} A_{i1}^2(k). \quad (71,31)$$

ამ შემთხვევაში (71,28) გამოსახულება ასე დაიწერება [60]:

$$k C_i^*(\eta) \operatorname{ctg} \delta_{i1}(k) = \frac{1 - \lambda_{i1} Q_{i1}^{(1)}(k)}{\lambda_{i1} A_{i1}^2(k)}. \quad (71,32)$$

როცა ფაქტორიზებადი პოტენციალების რიცხვი ორის ტოლია $N_i=2$, მაშინ

$$\Delta_{i2}(k) = (1 - \lambda_{i1} Q_{i1}^{(1)})(1 - \lambda_{i2} Q_{i2}^{(2)}) - \lambda_{i1} \lambda_{i2} Q_{i1}^{(2)2}(k), \quad (71,33)$$

ხოლო

$$\omega_{i2}(k) = \lambda_{i1} A_{i1}^2 (1 - \lambda_{i2} Q_{i2}^{(2)}) + \lambda_{i2} A_{i2}^2 (1 - \lambda_{i1} Q_{i1}^{(1)}) + 2 \lambda_{i1} \lambda_{i2} A_{i1} A_{i2} Q_{i1}^{(2)}. \quad (71,34)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$x_{i1}^*(k) = C_i^*(\eta) k \operatorname{ctg} \delta_{i1}(k) \quad (71,35)$$

და

$$\gamma_{ij}^{(j)}(k) = \frac{Q_{ij}^{(j)}(k)}{A_{ii}(k) A_{jj}(k)}, \quad (71,36)$$

მაშინ $N_i=2$ -სათვის (71,28) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$C_i^*(\eta) k \operatorname{ctg} \delta_i(k) = \frac{x_{i1}^*(k) x_{i2}^*(k) - \gamma_{i2}^{(2)}(k)}{x_{i1}^* + x_{i2}^* + \gamma_{i1}^{(1)}}. \quad (71,37)$$

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, გაფანტვის საერთო $\delta_i(k)$ ფაზა გამოხატულია ცალკეული ფაქტორიზებადი და კულონური ელის შესაბამისი გაფანტვის ფაზებით.

შეინიშნოთ, რომ, როცა ნაწილაკებს მუხტი არა აქვთ $\eta=0$ და მაშინ (71,37) ფორმულა დაემთხვევა (67,30) გამოსახულებას.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა ურთიერთქმედება ხდება $l=0$ მდგომარეობაში და პირველი ფაქტორიზებული პოტენციალის ფორმა შეესაბამება იამაგუჩის გამოსახულებას, ხოლო მეორე — პოტენციალურ კედელს

$$v_{10}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\beta r}}{r}, \quad v_{20}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(r-r_c)}{r}; \quad (71,38)$$

ამასთან იგულისხმება, რომ $\lambda_0 \rightarrow \infty$, ამიტომ (71,28) გამოსახულება საკრძობლად გამარტივდება. ხოლო ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეებისათვის გვეჩვენა (ტეკვით $l=0$ ინდექსი ყველგან ჩამოშვებულია)

$$U_{21}(k) = \frac{F(kr_c)}{k} \int_{r_c}^{\infty} e^{-\beta r} f(kr) dr, \quad (71,39)$$

$$U_{12}(k) = \frac{G(kr_c)}{k} \int_0^{r_c} e^{-\beta r} f(kr) dr, \quad (71,40)$$

$$U_{11}(k) = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-\beta r} F(kr) dr \int_r^{\infty} e^{-\beta r} G(kr) dr, \quad (71,41)$$

$$U_{22}(k) = \frac{1}{2k} F(kr_c) G(kr_c). \quad (71,42)$$

ასევე ადვილად ვიპოვით, რომ:

$$A_1(k) = \frac{1}{k C_0(\eta)} \int_0^{\infty} F(kr) e^{-\beta r} dr, \quad (71,43)$$

$$A_2(k) = \frac{1}{k C_0(\eta)} F(kr_c). \quad (71,44)$$

შენიშნოთ, რომ თუ გამოვიყენებთ კულონის რეგულარული ფუნქციის ცხად გამოხატულებას $l=0$ მდგომარეობისათვის —

$$C_0(\eta) e^{-ikr} F(1+i\eta, 2, 2ikr), \quad (71,45)$$

მაშინ დამატებაში მოცემული ინტეგრალების ამოხსნის მეთოდის გამოყენებით ადვილად ვიპოვით

$$A_1(k) = \frac{1}{k^2 + \beta^2} e^{2\eta \operatorname{arctg} \frac{k}{\beta}} (k^2 + \beta^2)^{1/2} > 2k. \quad (71,46)$$

აღსანიშნავია, რომ ფაზური ანალიზი შეიძლება ჩავატაროთ ელექტრული გამომთვლელი მანქანების დახმარებით, რამდენადაც არსებობს კულონის ფუნქციების საუკეთესო ცხრილები $l=0$ მდგომარეობისათვის kr -ისა და $\eta(k)$ -ს საკმარისად ფართო ინტერვალისათვის [37]. მცირე ენერგიებზე კი ფაზური ანალიზი შეგვიძლია ჩავატაროთ ეფექტური რადიუსის მიახლოებაში.

საინტერესოა ზემოთ განხილული ამოცანის ამოხსნა იმპულსურ წარმოდგენაშიც [68]. ვთქვათ, ბირთვული პოტენციალი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$V_{nl}(p, p') = \sum_{i=1}^{N_l} a_{il} v_{i1}(p) v_{i1}(p'), \quad (71,47)$$

$$a_{il} = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \lambda_{il}. \quad (71,48)$$

გამოვიყენოთ § 61-ში განხილული მეთოდი, როცა ერთი პოტენციალი ორიდან კულონურ ურთიერთქმედებას გამოხატავს. ჩვენ დაინახეთ, რომ გაფანტვის მატრიცას აქვს სახე

$$\langle k' | T_l(E) | k \rangle = \langle k' | T_{nc,l}(E) | k \rangle + \langle k' | T_{cl}(E) | k \rangle. \quad (71,49)$$

მარჯვნივ მდგომი მეორე წევრი აღწერს წმინდა კულონურ გაფანტვას, პირველი კი—ბირთვულ გაფანტვას კულონის ველის თანხლებით. ჩვენი მიზანია სწორედ ამ უკანასკნელის გამოთვლა, რამდენადაც წმინდა კულონური გაფანტვის ამპლიტუდა კარგადაა ცნობილი. გამოვიყენოთ ლიპმან-შეინგერის (61,20) განტოლება ჩვენთვის სასურველი გაფანტვის მატრიცის საპოვნელად. ამისათვის წინასწარ გამოვიყენოთ (61,28) ფორმულა და განვსაზღვროთ მატრიცული ელემენტი $V_{nc,l}^{(\pm)}(k', k)$.

(71,47) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$V_{nc,l}^{(\pm)}(k', k) = \sum_{i=1}^{N_l} a_{il} g_{cl}^{(\pm)}(k') g_{cl}^{(\pm)}(k), \quad (71,49')$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$g_{cl}^{(\pm)}(k) = g_{cl}(k) e^{\pm i \delta_{cl}(k)} = 4\pi \int_0^\infty v_{il}(q) \varphi_{k'}^{(\pm)}(q) q^2 dq. \quad (71,50)$$

ამ გამოსახულებაში $\delta_{cl}(k)$ კულონის ველით გაფანტვის ფაზაა; იგი ხელსაყრელობის მიზნით შემოვიღეთ; ხოლო $\varphi_{k'}^{(\pm)}(q)$ წარმოადგენს კულონურ რადიალურ ფუნქციებს იმპულსურ წარმოდგენაში.

ახლა (71,49) გამოსახულება შევითანოთ (63,50) ინტეგრალურ განტოლებაში; მივიღებთ

$$\langle k' | T_{nc,l}(E) | k \rangle = \sum_{i=1}^{N_l} a_{il} g_{cl}^{(\pm)}(k') \tau_{cl}(k), \quad (71,51)$$

სადაც $\tau_{cl}(k)$ სილიდები განისაზღვრებიან

$$\sum_i [\delta_{ij} - a_{j1} I_{ij}^{(l)}(k)] \tau_{cl}(k) = g_{cl}^{(\pm)}(k) \quad (71,52)$$

ალგებრული სისტემიდან, რომელშიც $I_{ij}^{(l)}(k)$ აღნიშნავს შემდეგ ინტეგრალს:

$$I_{ij}^{(l)}(k) = 4\pi \int_0^\infty \frac{g_{cl}(q) g_{cl}(q) q^2 dq}{E(k) - E(q) \pm i\epsilon}. \quad (71,53)$$

თუ (71,52) სისტემის დეტერმინანტს აღვნიშნავთ $\Delta_{lN_l}(k)$ -თი

$$\Delta_{lN_l}(k) = |\delta_{ij} - a_{j1} I_{ij}^{(l)}(k)|, \quad (71,54)$$

მაშინ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\tau_{cl}(k) = \frac{1}{\Delta_{lN_l}(k)} \sum_{i=1}^{N_l} \Delta_{il}^{(l)}(k) g_{cl}^{(\pm)}(k), \quad (71,55)$$

სადაც $\Delta_{ij}^{(l)}(k)$ ალგებრული დამატებაა. ამგვარად, გაფანტვის მატრიცისათვის საბოლოოდ გვექნება ფორმულა

$$\langle k' | T_{nc;l}(E) | k \rangle = \frac{1}{\Delta_{lN_l}(k)} \sum_{i,j}^{N_l} a_{ij} \Delta_{ij}^{(l)}(k) g_{ci}^{\pm}(k') g_{cj}^{\pm}(k), \quad (71,56)$$

შეგნიშნოთ, რომ ეს მატრიცა (68,23) ფორმულიდან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ $v_l(q)$ პოტენციალის ფორმის ნაცვლად მონაწილეობენ კულონური ფუნქციებით გასაშუალოებული (71,50) გამოსახულებები.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $N_l=1$, მაშინ, რადგან

$$I_{ij}^{(l)}(k) = \frac{8\pi\mu}{h^2} \left\{ \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{g_{ci}(q) g_{cj}(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} - ik \left[\frac{\pi}{2} g_{ci}(k) g_{cj}(k) \right] \right\}, \quad (71,57)$$

ხოლო

$$e^{-i\delta_{ci}(k)} \langle k | T_{nc;l}(E) | k \rangle = - \frac{h^2}{4\pi^2 \mu k} \sin \delta_{nc;l} e^{i\delta_{nc;l}} = - \frac{h^2}{4\pi^2 \mu} (k \operatorname{ctg} \delta_{nc;l} - ik)^{-1} \quad (71,58)$$

ადვილად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$k \operatorname{ctg} \delta_{nc;l}(k) = \frac{1}{g_{ci}^{\pm}(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_l} + I_l(k) \right\}, \quad (71,59)$$

სადაც

$$I_l(k) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{g_{ci}^{\pm}(q) q^2 dq}{k^2 - q^2}. \quad (71,60)$$

ამ ფორმულაში შემავალი $g_{ci}(k)$ ფუნქცია, (71,50) აღნიშვნის თანახმად, ტოლია

$$g_{ci}(k) = 4\pi e^{\mp i\delta_{ci}(k)} \int_0^{\infty} v_l(q) \varphi_{kl}^{\pm}(q) q^2 dq. \quad (71,61)$$

$\varphi_{kl}^{\pm}(r)$ ფუნქციის ნაცვლად შეგვიძლია შემოვიღოთ $\chi_{kl}^{\pm}(r)$ ფუნქცია

$$\varphi_{kl}^{\pm}(r) = \frac{1}{kr} \chi_{kl}^{\pm}(r), \quad (71,62)$$

მაშინ გვექნება

$$g_{ci}(k) = \frac{4\pi}{k} e^{\mp i\delta_{ci}(k)} \int_0^{\infty} r v_l(r) \chi_{kl}^{\pm}(r) dr. \quad (71,63)$$

თუ გავიხსენებთ კულონის $F_l(kr)$ ფუნქციას და ნორმირების (61,29) პირობას, მაშინ ნათელია, რომ

$$F_l(kr) = (2\pi)^{3/2} e^{\mp i\delta_{ci}(k)} \chi_{kl}^{\pm}(r). \quad (71,64)$$

ამ წესით ნორმირებულ კულონურ ფუნქციას აქვს სწორედ (71,63) სახე. (71,63) გამოსახულებაში (71,64) ფუნქციის შეტანით საბოლოოდ ვიპოვიით

$$g_c(k) = \frac{1}{k} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} r v_1(r) F_1(kr) dr. \quad (71,65)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $l=0$, და ბირთვული გაფანტვის პოტენციალს ფორმა წარმოადგენს იუკავას პოტენციალს

$$v(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\beta r}}{r}, \quad v(k) = \frac{1}{\beta^2 + k^2}, \quad (71,66)$$

მაშინ, (71,46) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$g_c(k) = v(k) C_0(\eta|k|) e^{2\eta(k) \operatorname{arctg} \frac{k}{\beta}} \quad (71,67)$$

როგორც ვხედავთ, ეს გამოსახულება საკმარისად რთული ფუნქციაა k -სი; ამიტომ ზოგადი სახით (71,60) ინტეგრალის ამოხსნა შეუძლებელია. ამის გამო განვიხილოთ გაფანტვა მცირე ენერგიებზე, სახელდობრ, ვთქვათ, დაცულია პირობა $2\eta k|\beta| \ll 1$. ე. ი.

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\beta \hbar^2} \ll 1, \quad (71,68)$$

მაშინ ექსპონენტი (71,67) ფორმულაში შეგვიძლია მწკრივად გაგვალოთ და შევიწარმოოთ მხოლოდ პირველი ორი წევრი. გვექნება

$$g_c(k) = v(k) C_0(\eta) \left[1 + 2\eta \operatorname{arctg} \frac{k}{\beta} + \dots + \right]. \quad (71,69)$$

ამ გამოსახულების (71,60) ინტეგრალში შეტანით მივიღებთ

$$I(k) = I_0(k) + I_1(k) + \dots + \quad (71,70)$$

სადაც

$$I_0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta|q|) q^2 dq}{(\beta^2 + q^2)(k^2 - q^2)}, \quad (71,71)$$

$$I_1(k) = \frac{4}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta|q|) \operatorname{arctg} \frac{q}{\beta} q dq}{(\beta^2 + q^2)^2 (k^2 - q^2)}. \quad (71,72)$$

მოვახდინოთ შემდეგი შეცვლა:

$$\frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2 (k^2 - q^2)} = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^2} \left[\frac{1}{k^2 - q^2} + \frac{1}{\beta^2 + q^2} \right] + \frac{1}{k^2 + \beta^2} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2}, \quad (71,73)$$

მაშინ $I_0(k)$ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I_0(k) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{k^2}{(k^2 + \beta^2)^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta) d\eta}{\beta^2 + \eta^2} + i\beta \int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta) d\eta}{k^2 - \eta^2} \right] - \frac{\beta^2}{k^2 + \beta^2} \int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta) d\eta}{(\beta^2 + \eta^2)^2} \right\}. \quad (71,74)$$

გამოვიყენოთ ეილერის $I(x)$ ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებულის ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები [146]:

$$\psi(\eta|\beta) = \ln \frac{1}{2\beta D} - \beta D - 2\beta^2 D \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta) d\eta}{\beta^2 + \eta^2}, \quad (71,75)$$

$$h(\eta) = \operatorname{Re} \psi(-i\eta) - \ln \eta = 2Dk^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{C_0^2(\eta) d\eta}{\eta^2 - k^2}. \quad (71,76)$$

გავითვალისწინოთ, რომ განხილულ მიახლოებაში ადგილი ექნება ფორმულას

$$\psi\left(\frac{1}{2\beta D}\right) \approx -2\beta D - \gamma. \quad (71,77)$$

მაშინ გვექნება

$$I_0(k) = \frac{k^2}{D(k^2 + \beta^2)^2} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left(D\beta + \gamma + \ln \frac{1}{2\beta D} \right) - \frac{h(\eta)}{k^2} \right\} - \frac{1}{D(k^2 + \beta^2)} \left[\frac{D}{2\beta} + \frac{\gamma}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \ln \frac{1}{2\beta D} + \frac{1}{2\beta^2} \right]. \quad (71,78)$$

ახლა გამოვთვალოთ $I_1(k)$ ინტეგრალი. ამ ინტეგრალში უნდა შევინარჩუნოთ $\frac{1}{2\beta}$

რიგის წევრები და უგულებელვყოთ $\frac{1}{(2\beta D)^2} \ln \frac{1}{2\beta D}$ რიგის წევრები, ამისათვის ინტეგრალში $C_0(\eta)$ უნდა შევცვალოთ ერთიანით. შედეგად დაგვრჩება მარტივი ინტეგრალი, რომლის ამოხსნა მოგვცემს

$$I_1(k) = \frac{1}{D(k^2 + \beta^2)} \left[\ln \frac{k^2 + \beta^2}{4\beta^2} + \frac{k^2 + \beta^2}{2\beta^2} \right]. \quad (71,79)$$

შევიტანოთ $I(k)$ ინტეგრალის ნაპოვნი მიახლოებითი მნიშვნელობა (71,59) ფორმულაში და გავითვალისწინოთ (71,69) გამოსახულება, გვექნება

$$\frac{K(\eta)}{D} = k \operatorname{ctg} \delta_n(k) \left[1 - 4\eta \operatorname{arctg} \frac{k}{\beta} \right] + \frac{1}{D} \left[\ln \frac{(k^2 + \beta^2) D}{2\beta} - \gamma \right], \quad (71,80)$$

სადაც

$$K(\eta) = D C_0^2(\eta) k \operatorname{ctg} \delta_{nc}(k) + h(\eta) \quad (71,81)$$

ჩვენთვის კარგად ცნობილი ფუნქციაა, რომელიც შემოვიღეთ § 62-ში; ხალა გამოსახულება

$$k \operatorname{ctg} \delta_n(k) = \frac{1}{\sigma^2(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^2} \frac{k^2 - \beta^2}{2\beta} \right\}, \quad (71,82)$$

თანახმად (66,22) ფორმულისა, შესაბამება წმინდა ბირთულ გაფანტვას იმავეუ-
ნის პოტენციალის შემთხვევაში. რადგან მცირე ენერგიებზე

$$\frac{K(\eta)}{D} = -\frac{1}{a_{nc}} + \frac{1}{2} r_{nc} k^2 + \dots, \quad (71,83)$$

ამიტომ (71,84) გამოსახულების გაშლის შედეგად k^2 -ის ხარისხების მიხედვით
მარტივად მივიღებთ ეფექტური რადიუსის მიახლოების შემდეგ ფორმულებს:

$$-\frac{1}{a_{nc}} = -\frac{1}{a_n} \left(1 - \frac{2}{\beta D} \right) + \frac{1}{D} \left(\ln \frac{\beta D}{2} - \gamma \right), \quad (71,84)$$

$$\frac{1}{2} r_{nc} = \frac{1}{2} r_n \left(1 - \frac{2}{\beta D} \right) + \frac{1}{\beta^2 D} \left(1 - \frac{2}{3a_n \beta} \right); \quad (71,85)$$

სადაც, (66,24) ფორმულების თანახმად,

$$\frac{1}{a_n} = \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{\lambda} \right), \quad r_n = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{4\beta^2}{\lambda} \right); \quad (71,86)$$

ცხადია, a_n და r_n წარმოადგენენ დაუმუხტავი ნაწილაკების ბირთული ფაქტორ-
რიზებადი პოტენციალის შესაბამის გაფანტვის სიგრძესა და ეფექტურ რადიუსს.
ასე რომ, თუ (71,84) და (71,85) ფორმულებიდან ვიპოვით a_{nc} და r_{nc} სიდი-
დეებს პროტონების პროტონებზე გაფანტვისათვის, პრინციპში ჩვენ შეგვიძლია
აღვადგინოთ გაფანტვის სიგრძე და ეფექტური რადიუსი ნეიტრონების ნეიტრო-
ნებზე, ან პროტონების ნეიტრონებზე ურთიერთქმედების შემთხვევაში.

ცხადია, იმავე ფორმულებს მივიღებდით, თუ ეფექტური რადიუსის მიახ-
ლოებას გამოვიყენებდით კოორდინატული წარმოდგენის (71,32) ფორმულაში [60].

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ თუ თითოეული $\chi_{nl}(k)$ სიდიდისათვის გამოვი-
ყენებთ ეფექტური რადიუსის მიახლოების (71,84) და (71,85) ფორმულებს, მაშინ
(71,37) გამოსახულების დახმარებით ვიპოვით ეფექტური რადიუსის მიახლოების
ფორმულებს ორი ფაქტორიზებადი პოტენციალის მოქმედების შემთხვევაში [84].

§ 72. ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ამოცანა კონკრეტული ხასის შპატორიზებადი პოტენციალებისათვის

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალის
რამდენიმე კონკრეტულ შემთხვევას და ამ პოტენციალებისათვის ვიპოვით ფაქტორი-
ანალიზის ფორმულებს.

ღირაკის დელტა ფუნქციის მავარი პოტენციალის ფორმა. ვიპოვით გა-
ფანტვის ფაზა და ბმული მდგომარეობის ენერგია შემდეგი არალოკალური ფაქ-
ტორიზებადი პოტენციალის ფორმისათვის:

$$v_l(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} r_c \frac{\delta(r-r_c)}{r}. \quad (72,1)$$

ურთიერთქმედება ხდება $r=r_c$ რადიუსის სფეროს ზედაპირზე, სხვაგან ერთიერთ-
ქმედება ნულის ტოლია. გამოვიყენოთ (H, 105) ფორმულა

$$k \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_l(k) = \frac{1}{v_l^2(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_l} + \Delta I_l(k) \right\}. \quad (72,2)$$

ცხადია,

$$v_l(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} v_l(r) j_l(kr) r^2 dr = r_c^3 j_l(kr_c), \quad (72,3)$$

ხოლო (H, 101) ფორმულის თანახმად, $\Delta I_l(k)$ ტოლი იქნება

$$\Delta I_l(k) = kr_c^4 n_l(kr_c) j_l(kr_c); \quad (72,4)$$

შედეგად მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_l(k) = \frac{1}{j_l^2(kr_c)} \left\{ \frac{1}{r_c^4 \lambda_l} + kn_l(kr_c) j_l(kr_c) \right\}. \quad (72,5)$$

ამ ფორმულიდან განისაზღვრება გაფანტვის ფაზა.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $\lambda_l \rightarrow \infty$, მაშინ ჩვენ საქმე გვექნება
ე. წ. პოტენციალურ კედელთან და (72,5) ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\operatorname{ctg} \bar{\alpha}_l(k) = \frac{j_l(kr_c)}{n_l(kr_c)}, \quad (72,6)$$

რაც ემთხვევა ფაზის ფორმულას გაუმჭვირვალე სფეროსათვის. კერძო შემთხვევაში,
როცა $l=0$, მივიღებთ ცნობილ შედეგს $\bar{\alpha}_0(k) = -kr_c$.

ახლა ვიპოვოთ გაფანტვის სიგრძე და ეფექტური რადიუსი. $l=0$ შემთხვე-
ვაში (72,5) ფორმულიდან გვექნება

$$k \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_0(k) = \frac{k^2}{\sin^2 kr_c} \cdot \frac{1}{\lambda r_c^2} - k \operatorname{ctg} kr_c. \quad (72,7)$$

თუ მარჯვენა მხარეს მწკრივად გავშლით k^2 -ის ხარისხების მიხედვით, მაშინ ადვი-
ლია ჩვენება, რომ

$$k \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_0(k) = \frac{1}{\lambda r_c^2} \left(1 + \frac{1}{3} k^2 r_c^2 + \dots \right) - \frac{1}{r_c} + \frac{1}{3} k^2 r_c + \dots + \quad (72,8)$$

ეფექტური რადიუსის მიანლობის ფორმულასთან ამ გამოსახულების შედარება
გაფანტვის სიგრძისა და ეფექტური რადიუსისათვის მოგვცემს

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_c} \left(1 - \frac{1}{\lambda r_c^2} \right), \quad (72,9)$$

$$r_c = \frac{2}{3} r_c \left(1 + \frac{1}{\lambda r_c^2} \right), \quad (72,10)$$

საიდანაც ზღვარში, როცა $\lambda \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$a = r_c, \quad r_c = \frac{2}{3} r_c. \quad (72,11)$$

ე. ი. გაფანტვის სიგრძე ემთხვევა გაუმჭვირვალე სფეროს რადიუსს. ჩვენ მიერ
მიღებული (72,9) და (72,10) ფორმულებიდან ჩანს, რომ თუ ექსპერიმენტზე გან-

საზღვრულია a და r_c სიდიდეები, შესაძლებელია ვიპოვოთ პოტენციალის პარამეტრები r_c და λ .

ახლა ვიპოვოთ ბმული მდგომარეობის ენერგია. როგორც ვიცით, ენერგია განისაზღვრება (65,8) ფორმულით

$$\frac{1}{\lambda_l} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_l^2(q) q^2 dq}{a^2 + q^2}, \quad (72,12)$$

სადაც ბმის ენერგია $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 a^2}{2\mu}$. (72,3) გამოსახულების თანახმად,

$$\frac{1}{\lambda_l} = \frac{2r_c^4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{j_l^2(qr_c) q^2 dq}{a^2 + q^2}. \quad (72,13)$$

ამ გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი ამოხსნილი გვაქვს § 43-ში. ასე რომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{1}{\lambda_l r_c^4} = -\alpha j_l(i\alpha r_c) h_l^{(1)}(i\alpha r_c), \quad (72,14)$$

რომელიც ასეც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\frac{1}{\lambda_l r_c^2} = I_{l+1/2}(\alpha r_c) K_{l+1/2}(\alpha r_c), \quad (72,15)$$

სადაც მოდიფიცირებული ბესელის ფუნქციები განისაზღვრებიან (E , 18) და (E , 19) ფორმულებით. (72,15) წარმოადგენს ტრანსცენდენტულ განტოლებას. მისი ამოხსნა შესაძლებელია მიახლოებითი მეთოდებით. ცხადია, ამ განტოლებას ყოველი l -ისათვის ერთადერთი ფესვი ექნება.

$l=0$ შემთხვევაში, თუ გამოვიყენებთ (E , 18) და (E , 19) ფორმულებს, მივიღებთ საკუთარი მნიშვნელობის შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{1}{\lambda r_c^2} = \frac{1}{2\alpha r_c} (1 - e^{-2\alpha r_c}). \quad (72,16)$$

ამ განტოლებას $\alpha=0$ (ე. ი. $\mathcal{E}=0$) ამონახსნი ექნება $\lambda r_c^2=1$ დროს, ხოლო როცა შესრულებულია პირობა $\lambda r_c^2 > 1$, მაშინ (72,16) განტოლებას ექნება $\mathcal{E} \neq 0$ ამონახსნი.

ბმული მდგომარეობის არსებობის შემთხვევაში გაფანტვის სიგრძე და ეფექტური რადიუსი გამოვხატოთ a და r_c სიდიდეებით. ამისათვის, (72,16)-ის გამოყენებით, (72,9) და (72,10) ფორმულებიდან გამოვირიცხოთ $\frac{1}{\lambda r_c^2}$ სიდიდე. ვექნება

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_c} \left(1 - \frac{1 - e^{-2\alpha r_c}}{2\alpha r_c} \right), \quad (72,17)$$

$$r_c = \frac{2r_c}{3} \left[1 + \frac{1 - e^{-\alpha r_c}}{2\alpha r_c} \right]. \quad (72,18)$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში $a > 0$. როცა $a = 0$, მაშინ $\frac{1}{a} = 0$ და $r_c = \frac{4}{3} r_c$.

ხოლო როცა $a r_c \rightarrow \infty$, მაშინ $a = r_c$ და $r_c = 2/3 r_c$.

აღსანიშნავია, რომ შედეგები, რომლებიც ახლა მივიღეთ, ემთხვევა § 43-ში განხილულ შედეგებს. ეს გასაგებია, რამდენადაც დირაკის დელტა ფუნქციის მაგვარი პოტენციალის ფორმა ყოველთვის აღწერს ლოკალურ ურთიერთქმედებას.

იამაგუჩის განზოგადებულ: პოტენციალი [62]. ახლა განვიხილოთ $\xi = 0$ მდგომარეობის შესაბამისი პოტენციალი შემდეგი ფორმით:

$$v_n(k) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (72,19)$$

კოორდინატულ წარმოდგენაში პოტენციალის ფორმას ექნება სახე

$$v_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{k \sin kr \, dk}{(k^2 + \beta^2)^n}. \quad (72,20)$$

ამ ინტეგრალის ამოხსნა ადვილია ნაშთთა თეორიის გამოყენებით. რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია, ამიტომ, თუ β -ს დროებით აღვნიშნავთ b -თი, გვექნება

$$v_n(r) = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{2n-3} \left(\int_{C_1} \frac{ze^{iz} \, dz}{(z^2 + b^2)^n} - \int_{C_2} \frac{ze^{-iz} \, dz}{(z^2 + b^2)^n} \right); \quad (72,21)$$

ამასთან, ინტეგრაციის C_1 კონტური იკეტება ზედა ნახევარსიბრტყეში და გარს უვლის $z = ib$ პოლუსს, ხოლო C_2 — ქვედა ნახევარსიბრტყეში, რომელიც გარს უვლის $z = -ib$ პოლუსს. ასეთ შემთხვევაში ორივე ინტეგრალისათვის უორდანის ლემა დაკმაყოფილებული იქნება. თუ გამოვიყენებთ (A, 17) ფორმულას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$v_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(2\beta)^{2n-2}} \frac{e^{-\beta r}}{r} A_n(r), \quad (72,22)$$

სადაც

$$A_n(r) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-k-3)!}{(k-1)!(n-k-1)!} (2\beta r)^k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (72,23)$$

ამგვარად, განხილული ფორმა ემთხვევა იუკავას პოტენციალს, როცა $n = 1$. $n = 2$ -სათვის იგი იძლევა ექსპონენციალურ პოტენციალს და ა. შ.

ვიპოვოთ ენერჯიის საკუთარი მნიშვნელობები. გამოვიყენოთ (65,8) ფორმულა, გვექნება

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{p^3 \, dp}{(\alpha^2 + p^2)(\beta^2 + p^2)^n}. \quad (72,24)$$

განვიხილოთ $n = 1$ შემთხვევა. თუ გავიხსენებთ (65,14) ფორმულას, მივიღებთ

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{p^2 \, dp}{(\alpha^2 + p^2)(\beta^2 + p^2)^2} = \frac{1}{2\beta(\alpha + \beta)^2}. \quad (72,25)$$

ამ გამოსახულების β^2 პარამეტრით გაწარმოების შედეგად ადვილად ეიპოვით λ_n -ს ნებისმიერი n -ისათვის. გვექნება

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}} \frac{1}{\lambda_1}. \quad (\alpha \equiv \beta^2) \quad (72,26)$$

ცხადია, სამართლიანი იქნება რეკურენტული ფორმულა

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} = \frac{1}{2n(n+1)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\lambda_n} \quad (72,27)$$

ასევე ეიპოვით ფაზის ფორმულასაც, ამისათვის გამოვიყენოთ (66,12) დამოკიდებულება

$$k \operatorname{ctg} \delta_n(k) = \frac{1}{v_n^2(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{v_n^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} \right\}. \quad (72,28)$$

ამ გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი, (72,19) ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება

$$x_n(k, \beta^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(k^2 - q^2)(\beta^2 + q^2)^{2n}}, \quad (72,29)$$

როცა $n=1$, მაშინ, (66,21) ფორმულის თანახმად,

$$x_1(k, \beta^2) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(k^2 - q^2)(\beta^2 + q^2)^2} = \frac{k^2 - \beta^2}{2\beta(k^2 + \beta^2)^2}. \quad (72,30)$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$x_n(k, \alpha) = \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}} x_1(k, \alpha). \quad (72,31)$$

ამის შემდეგ ადვილად ეიპოვით გაფანტვის სიგრძისა და ეფექტური რადიუსის ფორმულებს; გვექნება

$$\frac{1}{a_n} = -\frac{\beta^{4n}}{\lambda_n} \frac{(4n-2)! \beta}{2^{4n-2} [(2n-1)!]^2}, \quad (72,32)$$

$$r_{en} = \frac{4n\beta^{4n-2}}{\lambda_n} + \frac{(4n-3)!}{\beta \cdot 2^{4n-4} [(2n-2)!]^2}. \quad (72,33)$$

$n=1$ შემთხვევაში აქედან მარტივად მივიღებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ (66,24) ფორმულებს.

აქვე განვიხილოთ შემდეგი ტიპის პოტენციალის ფორმა:

$$v_n(k) = \frac{1}{(\beta^2 + k^2)^{n+1/2}}. \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (72,34)$$

კოორდინატულ წარმოდგენაში პოტენციალის ფორმას შემდეგი სახე ექნება:

$$v_n(r) = -\frac{1}{2^{n-1/2} \beta^n \Gamma(n+1/2)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r^n K_n(\beta r)], \quad (72,35)$$

სადაც $K_n(\beta r)$ არის მაკლონალდის ფუნქცია მთელი ინდექსით. კერძო შემთხვევაში, როცა $n=0$ -ს, გვექნება

$$v_0(r) = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \frac{dK_0(r)}{dr}. \quad (72,36)$$

რადგან $K'_0(z) = -K_1(z)$, ამიტომ

$$v_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{r} K_1(\beta r); \quad (72,37)$$

ეს ფუნქცია სწრაფად ისპობა დიდ მანძილებზე.

ენერგია მოიძებნება ფორმულით

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{(\alpha^2 + p^2)(\beta^2 + p^2)^{2n+1}}. \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (72,38)$$

როცა $n=0$ -ს, გვექნება

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{(\alpha^2 + p^2)(\beta^2 + p^2)} = \frac{1}{\beta + \alpha}. \quad (72,39)$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ $x = \beta^2$ პარამეტრით გაწარმოებისას ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{1}{\lambda_0}. \quad (72,40)$$

საიდანაც მივიღებთ რეკურენტულ ფორმულას

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{(2n-1)(2n)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\lambda_{n-1}} \quad n=1, 2, \dots \quad (72,41)$$

ფაზის საპოვნელად გამოვიყენოთ (72,28) გამოსახულება. ცხადია, ამ შემთხვევაში

$$x_n(k, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{(k^2 - q^2)(\beta^2 + q^2)^{2n+1}}, \quad (72,42)$$

რომელიც $n=0$ -სათვის მოგვცემს

$$x_0(k, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{(k^2 - q^2)(\beta^2 + q^2)} = - \frac{\beta}{\beta^2 + k^2}, \quad (72,43)$$

ხოლო x_n მოიძებნება ამ გამოსახულების $x = \beta^2$ პარამეტრის მიხედვით გაწარმოებით

$$x_n(k, x) = \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x_0(k, x). \quad (72,44)$$

შედევად ფაზისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$k \operatorname{ctg} \delta_n(k) = \frac{(k^2 + \beta^2)^{2n+1}}{\lambda_n} + \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{(2\nu+1)!}{2^\nu \nu! (2\nu-1)(2\nu+1)} \frac{(\beta^2 + k^2)^\nu}{\beta^{2\nu-1}}. \quad (72,45)$$

ამ გამოსახულებიდან ადვილად ვიპოვით ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორმულებს. ასე მაგალითად, (72,28) დამოკიდებულებიდან ცხადია, რომ

$$\frac{1}{a_n} = \frac{(4n)! \beta}{2^{4n} [(2n)!]^2} - \frac{\beta^{4n+2}}{\lambda_n}, \quad (72,46)$$

ხოლო (72,45) გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{2} r_{en} = (2n+1) \frac{\beta^{4n}}{\lambda_n} + \frac{(4n-1)! \beta}{2^{4n-1} [(2n-1)!]^2}. \quad (72,47)$$

შევნიშნოთ, რომ საკმარისად მარტივად მივიღებდით (72,46) ფორმულას (66.54) გამოსახულების გამოყენებითაც.

ქვრძო შემთხვევაში, როცა $n=0$, გვექნება

$$\frac{1}{a_0} = \beta - \frac{\beta^2}{\lambda_0}, \quad \frac{1}{2} r_{e0} = \frac{1}{\lambda_0}. \quad (72,48)$$

ხოლო $n=1$ -სათვის მივიღებთ

$$\frac{1}{a_1} = \frac{3}{8} \beta - \frac{\beta^2}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{2} r_{e1} = \frac{3\beta^4}{\lambda_1} + \frac{3\beta}{4}. \quad (72,49)$$

მიტრას პოტენციალი [46, 47, 54, 55]. ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის პოტენციალის ფორმა:

$$v_l(p) = \frac{2}{p^2} Q_l \left(1 + \frac{\beta_l^2}{2p^2} \right), \quad (72,50)$$

სადაც

$$Q_l(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) dx}{y-x} \quad (72,51)$$

ლეჟანდრის მეორე გვარის ფუნქციაა, β_l პარამეტრია. ასეთი პოტენციალი მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც იგი ისეთივე გაფანტვას იძლევა, რასაც იუკავას პოტენციალი. განვიხილოთ $l=0$ შემთხვევა, მაშინ, რამდენადაც $l=0$ -სათვის

$$Q_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{2p^2} \right) = \frac{1}{2} \ln(1 + a^2 p^2), \quad \left(a \equiv \frac{2}{\beta} \right) \quad (72,52)$$

ამიტომ საკუთარი მნიშვნელობის განტოლებისათვის გვექნება

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + a^2 q^2) dq}{a^2 + q^2} = \frac{2}{a} \ln \frac{\beta + 2a}{\beta}, \quad (72,53)$$

ხოლო $x_0(k)$ ინტეგრალი ტოლი იქნება

$$x_0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + a^2 q^2) dq}{k^2 - q^2} = -\frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{2k}{\beta}. \quad (72,54)$$

ასე რომ ფაზისათვის მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = k^2 \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{2k}{\beta} \right] \left[\ln \frac{\beta^2 + 4k^2}{\beta^2} \right]^{-1} \quad (72,55)$$

ასევე შეგვიძლია ვიპოვოთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება და ფაზის მნიშვნელობა $\lambda \neq 0$ შემთხვევაშიც.

ტაბაკინის პოტენციალი [76]. განვიხილოთ $l=0$ მდგომარეობაში შემდეგი პოტენციალის ფორმა:

$$v(p) = \frac{1}{(\beta^2 + p^2)^m} \frac{\sin(ap + \gamma)}{(pa)^n}, \quad (72,56)$$

სადაც n მთელი რიცხვია, ხოლო m , მთელის გარდა, შეიძლება იყოს კენტი რიცხვის ნახევარიც. γ შეიძლება იყოს $0, \pi$ ან $\frac{\pi}{2}$. ტაბაკინმა აჩვენა, რომ ასეთ

პოტენციალებს ის შესანიშნავი თვისება აქვთ, რომ მათი საშუალებით შეიძლება გავითვალისწინოთ განზიდვა მცირე მანძილებზე, ე. ი. ურთიერთქმედებაში განზიდვის ჩასართველად არაა აუცილებელი მრავალწევრიანი პოტენციალების განხილვა.

ფუნქცია (72,56) გამოსახულებას შეეიტანთ (72,28) ფორმულაში, გვექნება

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = \frac{1}{v^2(k)} \varphi(k), \quad (72,57)$$

სადაც

$$\varphi(k) = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(aq + \gamma) q^2 dq}{(\beta^2 + q^2)^{2m} (qa)^{2n}}. \quad (72,58)$$

განმზიდავი გულის არსებობა ნიშნავს, რომ κ -ფაზა ნაშანს იცვლის გარკვეულ $F_i = E_c = \hbar^2 k_c^2 / 2\mu$ ენერგიაზე. ამისათვის კი საჭიროა, რომ $\operatorname{ctg} \delta(k_c) = \infty$; მაშასადამე, ამ ენერგიაზე (72,57) ფორმულის თანახმად $v^2(k_c) = 0$, სიღრმაც $k_c a + \gamma = \pi$, რაც განმზიდავი ბირთვის რადიუსისათვის მოგვცემს ფორმულას

$$a = \frac{\pi - \gamma}{k_c}; \quad (72,59)$$

მაგრამ $k = k_c$ -სათვის $\delta(k)$ ფაზამ ნიშანი უნდა შეიცვალოს, ამიტომ აგრეთვე უნდა მოვითხოვოთ, რომ

$$\varphi(k_c) = 0. \quad (72,60)$$

როცა m, n, γ პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის (72,59) და (72,60) პირობები დაკუთვია, მაშინ (72,56) ფორმის პოტენციალი მცირე მანძილებზე მიზიდვასთან ერთად აღწერს განზიდვასაც.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $m=1, n=0, \gamma = \frac{\pi}{2}$,

$$v(p) = \frac{\cos pa}{p^3 + a^2}; \quad (72,61)$$

მაშინ, (72,59) ფორმულის თანახმად, გვექნება $a = \frac{\pi}{2k_c}$, ხოლო

$$\varphi(k) = \frac{1}{\lambda} + \frac{2k}{(k^2 + \beta^2)^2} \left[\frac{e^{-\beta a} \operatorname{ch} \beta a}{2\beta} + \frac{\sin 2ak}{4k} \right] - \frac{ue^{-\beta a}}{2(k^2 + \beta^2)} \left(e^{-\beta a} + \frac{\operatorname{ch} \beta a}{\beta a} \right), \quad (72,62)$$

თუ გამოვიყენებთ (72,60) პირობას, შეიძლება განვსაზღვროთ λ პარამეტრი a და β პარამეტრების საშუალებით.

განზიღვა მცირე მანძილებზე შეგვიძლია აგრეთვე გავითვალისწინოთ პოტენციალის ფორმაში $(k^2 - k_c^2)$ მამრავლის შემოღებითაც. ასე მაგალითად, ფაქტორიზებული პოტენციალი ფორმით

$$v(k) = (k_c^2 - k^2) \frac{1}{(\beta^2 + k^2)^\gamma} \quad (72,63)$$

უზრუნველყოფს ფაზის ნიშნის ცვლილებას $k = k_c$ მნიშვნელობაზე.

§ 73. ფაქტორიზებული პოტენციალები ტანვორულის ძალებზე გათვალისწინებით

შევიძლია განვიხილოთ ისეთი არალოკალური ფაქტორიზებული პოტენციალები, რომლებიც ტანვორულ ძალებს შეიცავენ. როცა ნაწილაკებს სპინი გააჩნიათ, მაშინ მათ შორის ურთიერთქმედებას შეიძლება ჰქონდეს არაცენტრალური ხასიათი. როცა ნუკლონებს ვიხილავთ, მაშინ ზოგადი არაცენტრალური ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$V = 4\pi \sum_{LL'S} \sum_{JM} |\Phi_{LS}^M\rangle V_{LL'S}^J \langle \Phi_{LS}^M|, \quad (73,1)$$

სადაც $\langle \Phi_{LS}^M|$ ვექტორი წარმოადგენს სრული მომენტის კვადრატისა და z -პროექციის საკუთარ ვექტორს, ამასთან, სრული მომენტი $J = L + S$ და

$$|\Phi_{LS}^M\rangle = \sum_{m_L m_S} \langle LS m_L m_S | JM \rangle |L M_L\rangle |S M_S\rangle; \quad (73,2)$$

$\langle \Phi_{LS}^M|$ $Y_{LM}(\theta, \varphi)$ სფერული ფუნქციაა, ხოლო $\langle \chi | S M_S \rangle = \chi_{S M_S}$ ორი ნაწილაკის სისტემის სპინურ ფუნქციის წარმოადგენს.

ვთქვათ, $V_{LL'S}^J$ -ს აქვს შემდეგი ფაქტორიზებული სახე:

$$V_{LL'S}^J = -\frac{\hbar^2 \lambda^{JS}}{4\pi^2 \mu} |v_L^S\rangle \langle v_L^S|, \quad (73,3)$$

სადაც λ^{JS} -პოტენციალის „სიღრმეა“, ხოლო $\langle k | v_L^S \rangle = v_L^S(k)$ — პოტენციალის ფორმა.

ამგვარად, როცა პოტენციალი არაცენტრალურია და ფაქტორიზებული, (71,1) გამოსახულება მოგვცემს

$$V = -\frac{\hbar^2}{\pi\mu} \sum_{LL'S} \sum_{JM} |\Phi_{LS}^{JM}\rangle \langle v_{L'S}^{J'S} | \lambda^{J'S} \langle v_{L'S}^{J'S} | \langle \Phi_{L'S}^{J'S} |. \quad (73,4)$$

შეიძლება განვიხილოთ უფრო რთული შემთხვევა, როცა $V_{LL'}$ შეიცავს რამდენიმე წევრის ჯამს

$$V_{LL'}^{J'S} = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \sum_{i=1}^N |v_{L_i}^{J'S}\rangle \lambda_i^{J'S} \langle v_{L_i}^{J'S} |. \quad (73,5)$$

თუ $\langle v_{L_i}^{J'S} |$ -ს განვიხილავთ როგორც ერთსვეტიან, ხოლო $|v_{L_i}^{J'S}\rangle$ -ს როგორც ერთ-სტრიჟონიან მატრიცას, $\Lambda^{J'S}$ -ით კი აღვნიშნავთ დიაგონალურ მატრიცას ელემენტებით: $\lambda_1^{J'S}, \lambda_2^{J'S}, \dots, \lambda_N^{J'S}$, ე. ი.

$$\langle v_{L'}^{J'S} | = \begin{pmatrix} \langle v_{L_1}^{J'S} | \\ \langle v_{L_2}^{J'S} | \\ \vdots \\ \langle v_{L_N}^{J'S} | \end{pmatrix}, \quad |v_{L'}^{J'S}\rangle^+ = | |v_{L_1}^{J'S}\rangle \dots |v_{L_N}^{J'S}\rangle |, \quad (73,6)$$

მაშინ სამი მატრიცის გამრავლების წესის გამოყენებით (73,5) ასე გადაიწერება:

$$V_{LL'}^{J'S} = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} |v_{L'}^{J'S}\rangle^+ \Lambda^{J'S} \langle v_{L'}^{J'S} |, \quad (73,7)$$

რომელიც, როგორც ვხედავთ, ერთწევრიანი (73,3) პოტენციალისაგან ფორმალურად არ განსხვავდება.

ვიპოვოთ ჯერ ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია და საკუთარი მნიშვნელობები. დაეწეროთ შრედინგერის განტოლება ფარდობითი მოძრაობისათვის

$$\left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right) |\psi\rangle = V |\psi\rangle. \quad (73,8)$$

$|\psi\rangle$ ვექტორი გავშალოთ $|\Phi_{LS}^{JM}\rangle$ ვექტორებად

$$|\psi\rangle = \sum_{LSJM} |\psi_{LS}^J\rangle |\Phi_{LS}^{JM}\rangle. \quad (73,9)$$

თანხმად (73,1) გამოსახულებისა, შრედინგერის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$(\alpha^2 + k^2) \sum_{LSJM} |\psi_{LS}^J\rangle |\Phi_{LS}^{JM}\rangle = -\frac{8\pi\mu}{\hbar^2} \sum_{L'} \sum_{L'SJM} V_{LL'}^{J'S} |\psi_{L'S}^J\rangle |\Phi_{L'S}^{JM}\rangle. \quad (73,10)$$

ამ განტოლების მიღების დროს მარჯვენა მხარეში გამოვიყენეთ $\langle \Phi_{L'S}^{JM} |$ ვექტორების ორთონორმირების პირობა, ხოლო α -თი აღვნიშნეთ სიდიდე

$$\alpha^2 = \frac{2\mu\mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad (\mathcal{E} = -E > 0) \quad (73,11)$$

თუ ერთხელ კიდევ გავითვალისწინებთ $\langle \Phi_{LS}^M |$ ვექტორების ორთო-ნორმირებას, შრედინგერის განტოლება მიიღებს შემდეგ ფორმას:

$$(\alpha^2 + k^2) |\psi'_{L,S}\rangle = -\frac{8\pi\mu}{h^2} \sum_{L'} V_{LL'}^S |\psi'_{L',S}\rangle, \quad (73,12)$$

ხოლო (73,3) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$(\alpha^2 + k^2) |\psi'_{L,S}\rangle = \frac{2}{\pi} \lambda^{JS} |v_{L,S}^S\rangle \sum_{L'} \langle v_{L',S}^S | \psi'_{L',S}\rangle. \quad (73,13)$$

A^{JS} -ით აღნიშნოთ შემდეგი მუდმივი:

$$A^{JS} = \frac{2\lambda^{JS}}{\pi} \sum_{L'} \langle v_{L',S}^S | \psi'_{L',S}\rangle; \quad (73,14)$$

მაშინ (73,13) განტოლებიდან საკუთარი ვექტორისათვის გვექნება

$$|\psi'_{L,S}\rangle = A^{JS} \frac{1}{\alpha^2 + k^2} |v_{L,S}^S\rangle. \quad (73,15)$$

ამ ვექტორის (73,14) გამოსახულებაში შეტანით მივიღებთ

$$\frac{1}{\lambda^{JS}} = \frac{2}{\pi} \sum_{L'} \langle v_{L',S}^S | \frac{1}{\alpha^2 + k^2} |v_{L',S}^S\rangle. \quad (73,16)$$

ეს არის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება. ცხადად იგი ასე წარმოიდგინება:

$$\frac{1}{\lambda^{JS}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{L'} |v_{L',S}^S(q)|^2 \frac{q^2 dq}{\alpha^2 + q^2}. \quad (73,17)$$

განსასაზღვრი დაგვრჩა ნორმირების A^{JS} მუდმივი. მოვითხოვოთ, რომ $|\psi\rangle$ ვექტორი ნორმირებულია პირობით $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, მაშინ $|\Phi_{LS}^M\rangle$ ვექტორების ორთო-ნორმირების გამო, მოცემული J და S -ისათვის, გვექნება

$$\sum_L \langle \psi'_{L,S} | \psi'_{L,S} \rangle = 1, \quad (73,18)$$

საიდანაც (73,15) ვექტორის გამოყენებით მივიღებთ

$$[A^{JS}]^{-2} = \int_0^\infty \sum_L |v_{L,S}^S(q)|^2 \frac{q^2 dq}{(\alpha^2 + q^2)^2}. \quad (73,19)$$

ახლა განვიხილოთ ვაფანტის ამოცანა. $T(\varepsilon)$ -მატრიცა გავშალოთ $|\Phi_{LS}^M\rangle$ ვექტორების მიხედვით

$$T(\varepsilon) = 4\pi \sum_{LL'SJM} |\Phi_{LS}^M\rangle T_{LL'}^S(\varepsilon) \langle \Phi_{L'S}^M|. \quad (73,20)$$

ეს გამოსახულება პოტენციური ენერჯიის (73,1) გამოსახულებასთან ერთად შევითანოთ $T(x)$ -მატრიცის ინტეგრალურ განტოლებაში

$$T(x) = V + V(\epsilon_0(x)T(x), \quad (73,21)$$

გავითვალისწინოთ $|\Phi_{LS}^{LM}\rangle$ ვექტორების ორთონორმირების პირობა და გრინის ფუნქციის გამოხატულება

$$\langle \Phi_{LS}^{L'M'} | \epsilon_0(x) | \Phi_{LS}^{LM} \rangle = (\epsilon_{OL}(x))_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{LL'} \delta_{SS'}, \quad (73,22)$$

სადაც

$$G_{OL}(x) = \int_0^\infty \frac{q^2 dq |q\rangle \langle q|}{x - E(q)}, \quad (73,23)$$

მაშინ მარტივად მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას $T_{LL'}^{LS}(x)$ პარციალური სიდიდისათვის

$$T_{LL'}^{LS}(x) = V_{LL'}^{LS} + 4\pi \sum_{L''} V_{LL''}^{LS} (\epsilon_{OL''}(x)) T_{L''L}^{LS}(x). \quad (73,24)$$

ახლა გავითვალისწინოთ (73,3) გამოსახულება. მაშინ (73,24) გამოხატულება ასე გადაიწერება:

$$T_{LL'}^{LS}(x) = -\frac{\hbar^2 \lambda^{JS}}{4\pi^2 \mu} |v_L^{LS}\rangle \langle A_L^{LS}|, \quad (73,25)$$

სადაც ჩვენ შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\langle A_L^{LS}| = \langle v_L^{LS}| + 4\pi \sum_{L''} \langle v_{L''}^{LS}| G_{OL''}(x) T_{L''L}^{LS}(x). \quad (73,26)$$

(73,25) გამოსახულებიდან ამ უკანასკნელში შევიტანოთ $T_{LL'}^{LS}(x)$ სიდიდე; ვექნება

$$\langle A_L^{LS}| = \langle v_L^{LS}| - \frac{\hbar^2 \lambda^{JS}}{\pi \mu} \sum_{L''} \langle v_{L''}^{LS}| G_{OL''}(x) |v_L^{LS}\rangle \langle A_L^{LS}|, \quad (73,26')$$

საიდანაც განისაზღვრება $\langle A_L^{LS}|$; სახელდობრ,

$$\langle A_L^{LS}| = \tau^{JS}(x) \langle v_L^{LS}|, \quad (73,27)$$

სადაც

$$\tau^{JS}(x) = \left\{ 1 + \frac{\lambda^{JS} \hbar^2}{\pi \mu} \sum_{L''} \langle v_{L''}^{LS}| G_{OL''}(x) |v_L^{LS}\rangle \right\}^{-1} \quad (73,28)$$

თუ $\langle A_L^{LS}|$ -ის მნიშვნელობას (73,27) ფორმულიდან შევიტანთ (73,25)-ში, საბოლოოდ მივიღებთ

$$T_{LL'}^{LS}(x) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} |v_L^{LS}\rangle \lambda^{JS} \tau^{JS}(x) \langle v_L^{LS}|. \quad (73,29)$$

გავითვალისწინოთ (73,28) ფორმულაში გრინის ფუნქციის (73,23) გამოსახულება, მაშინ, ცხადია,

$$\frac{1}{\tau^{JS}(z)} = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{L'} \int_0^{\infty} \frac{|v_{L'}^{JS}(q)|^2 q^2 dq}{\frac{2\mu_E}{h^2} - q^2}. \quad (73,30)$$

ასე რომ პარტიკულური მატრიცის მატრიცულ ელემენტებს ექნებათ შემდეგი ცხადი გამოსახულება:

$$\langle p | T_{LL'}^{JS}(z) | p' \rangle = - \frac{\hbar^2 \lambda^{JS}}{4\pi^2 \mu} v_L^{JS}(p) \tau^{JS}(z) v_{L'}^{JS}(p'). \quad (73,31)$$

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ თუკი პოტენციალი განსაზღვრული იქნება და ფაქტორიზებადი პოტენციალების ჯამის სახით, ე. ი. (73,5) ფორმულით, მაშინ, (73,29)-ის ნაცვლად, გვექნება

$$T_{LL'}^{JS}(z) = - \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} |v_L^{JS}\rangle + \Lambda^{JS} \tau^{JS} \langle v_{L'}^{JS}|, \quad (73,32)$$

სადაც $\langle v_L^{JS}|$, $|v_{L'}^{JS}\rangle$ და Λ^{JS} წარმოდგენენ (73,6) მატრიცებს.

მიღებული შედეგები გამოვიყენოთ დეიტრონისათვის. დეიტრონში ხორციელდება ${}^3S_1 + {}^3D_1$ მდგომარეობა. ე. ი. $J=1$, $S=1$, ხოლო $L=0$, 2.

საკუთარი მნიშვნელობის (73,17) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{\alpha^2 + q^2} [C^2(q) + T^2(q)], \quad (73,33)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\lambda_i = \lambda^{11}, \quad C(q) = v_0^1(q), \quad T(q) = v_{\frac{1}{2}}^1(q). \quad (73,34)$$

ბმის ენერგია დამოკიდებული იქნება $C(q)$ და $T(q)$ პოტენციალის ფორმების კონკრეტულ სახეზე.

ახლა ვიპოვოთ დეიტრონის ტალღური ფუნქცია. ცხადია, რომ, (73,9) ფორმულის თანახმად, იმპულსურ წარმოდგენაში გვექნება

$$\psi(k) = \psi_{01}^1 \Phi_{01}^1(n) + \psi_{\frac{1}{2}1}^1 \Phi_{\frac{1}{2}1}^1(n), \quad \left(n = \frac{k}{k} \right) \quad (73,35)$$

სადაც, როგორც ვიცით,

$$\Phi_{01}^{1M}(n) = \frac{\chi_{1M}}{\sqrt{4\pi}}, \quad \Phi_{\frac{1}{2}1}^{1M}(n) = \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{4\pi}} \hat{S}_{12}(n) \chi_{1M}, \quad (73,36)$$

ხოლო, (73,15) ფორმულის თანახმად,

$$\psi_{01}^1(k) = A^{11} \frac{C(k)}{\alpha^2 + k^2}, \quad \psi_{\frac{1}{2}1}^1(k) = A^{11} \frac{T(k)}{\alpha^2 + k^2}. \quad (73,37)$$

შედეგად $\psi(k)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ u(k) + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12}(n) u(k) \right\} \chi_{1M}, \quad (73,38)$$

სადაც შემოვიღეთ აღნიშვნები: $\psi_{01}^1 = u$, $\psi_{21}^1 = v$. (73,18) ფორმულის მიხედვით u და v ფუნქციისათვის გვექნება ნორმირება

$$\int_0^{\infty} [u^2(k) + v^2(k)] k^2 dk = 1. \quad (73,39)$$

თუ გავითვალისწინებთ (73,37) ფორმულებს, შევიძლია დავწეროთ

$$\psi(k) = \frac{A}{\sqrt{4\pi(\alpha^2 + k^2)}} \left[C(k) + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12}(n) T(k) \right] \chi_{1M}. \quad (73,40)$$

ამასთან, $A = A^{11}$ განისაზღვრება (73,19) ფორმულით.

როცა $J=S=1$ და $L=0, 2$, მაშინ (73,1) პოტენციალი მარტივ სახესღებულობს. მართლაც, გავშალოთ ეს პოტენციალი დაფიქსირებული $J=S=1$ მნიშვნელობებისათვის, როცა L და L' წამში იღებენ ორ მნიშვნელობას 0 და 2-ს. (73,36) დამოკიდებულების გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ სამართლიანია ფორმულები

$$\sum_M |\phi_{01}^{1M}\rangle \langle \phi_{01}^{1M}| = \frac{1}{4\pi}, \quad \sum_M |\phi_{21}^{1M}\rangle \langle \phi_{21}^{1M}| = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{4\pi} \hat{S}_{12}(n),$$

$$\sum_M |\phi_{21}^{1M}\rangle \langle \phi_{21}^{1M}| = \frac{1}{32\pi} \hat{S}_{12}(n) \hat{S}_{13}(n'), \quad (73,41)$$

შედეგად პოტენციალისათვის გვექნება

$$V = V_{00}^{11} + \frac{1}{\sqrt{8}} V_{20}^{11} \hat{S}_{12}(n) + \frac{1}{\sqrt{8}} V_{22}^{11} \hat{S}_{12}(n') + \frac{1}{8} V_{22}^{11} \hat{S}_{13}(n) \hat{S}_{12}(n'), \quad (73,42)$$

ან (73,3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$V = -\frac{\hbar^2 \lambda^{11}}{4\pi^2 \mu} \left\{ |v_0^{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12}(n) |v_2^{11}\rangle \right\} \left\{ \langle v_0^{11}| + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{13}(n) \langle v_2^{11}| \right\}. \quad (73,43)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$|f_i\rangle = |v_0^{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12}(n) |v_2^{11}\rangle,$$

$$\langle f_i| = \langle v_0^{11}| + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12}(n') \langle v_2^{11}|, \quad (73,44)$$

მაშინ

$$V = -\frac{\hbar^2 \lambda^{11}}{4\pi^2 \mu} |f_i\rangle \langle f_i|. \quad (73,45)$$

როგორც ვხედავთ, ამ კერძო შემთხვევაში ურთიერთქმედება დავიდა ერთწევრიან ფაქტორიზებად პოტენციალზე, ოღონდ პოტენციალის ფორმა, (73,44) და (73,34) აღნიშვნების თანახმად, ტოლია

$$f_i(k) = C(k) + \frac{1}{\sqrt{8}} \hat{S}_{12}(n) T(k). \quad (73,46)$$

სრულიად ანალოგიურად $J=S=1$ მდგომარეობაში $T(z)$ -მატრიცისათვის გვექნება

$$T(\varepsilon) = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2 \mu} |f_l\rangle \tau_l(\varepsilon) \langle f_l|, \quad (73,47)$$

რომლის მიღება შეიძლება ან უშუალოდ (73,20) გამოსახულების გაშლით და (73,41) ფორმულების გამოყენებით, ან (73,21) განტოლების ამოხსნით (73,45) პოტენციალისათვის.

ამგვარად, გაფანტვის მატრიცისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოხატულებას:

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = -\frac{\hbar^2 \lambda_l}{4\pi^2 \mu} f_l^*(p) \tau_l(\varepsilon) f_l(p'), \quad (73,48)$$

საიდანაც $-4\pi^2 \mu / \hbar^2$ კოეფიციენტზე გამრავლებითა და ენერგეტულ ზედაპირზე გადასვლით მივიღებთ გაფანტვის ამპლიტუდის ფორმულას ტრიპლეტურ მდგომარეობაში ტენზორული ძალების გათვალისწინებით. კონკრეტული ამოცანების გადაწყვეტის დროს საჭიროა $C(k)$ და $T(k)$ პოტენციალთა ფორმების შერჩევა: ამასთან, როგორც § 66-ში აღვნიშნეთ, ამ ფორმებს უნდა ჰქონდეთ S და D -მდგომარეობისათვის დამახასიათებელი ასიმპტოტიკა. შეგვიძლია, მაგალითად, ფორმები ასე შევარჩიოთ:

$$C(k) = \frac{1}{(\beta^2 + k^2)^n}, \quad T(k) = \frac{k^2}{(\delta^2 + k^2)^m}, \quad (73,49)$$

სადაც n და m რიცხვებს შეიძლება მიეცეთ სხვადასხვა მნიშვნელობა. კერძოდ, იამაგუჩიმ განიხილა $n=1$ და $m=2$ შემთხვევა.

§ 74. ფაქტორიზებადი პოტენციალი სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში

ცნობილია, რომ სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება დიდ როლს ასრულებს ნუკლონების თვისებების დადგენის დროს, ამიტომ მნიშვნელოვანია შევისწავლოთ ისეთი ფაქტორიზებადი პოტენციალები, რომლებიც სპინ-ორბიტალურ წევრებსაც ითვალისწინებენ.

არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალი, რომელშიც ჩვეულებრივი ფაქტორიზებადი ნაწილის გარდა ჩართულია სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედებაც, შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით [82]:

$$\langle p | V | p' \rangle = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) v_l(p) v_l(p') [\lambda_l + \Lambda_l(\sigma \hat{1})] P_l(\bar{p} \cdot \bar{p}'), \quad (74,1)$$

სადაც $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ პაულის სპინური მატრიცაა, ხოლო $\hat{1}$ — ორბიტალური მობენტის ოპერატორი იმპულსურ წარმოდგენაში. $l=0$ მდგომარეობაში სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება არა გვაქვს, ამიტომ მოვითხოვთ, რომ სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების „ძალა“ $\Lambda_0=0$.

დაწვეროთ ლიპმან-შეინგერის განტოლება გაფანტვის $T(\varepsilon)$ -მატრიცისათვის

$$\langle p | T(\varepsilon) | p' \rangle = \langle p | V | p' \rangle + \int \frac{\langle p | V | q \rangle \langle q | T(\varepsilon) | p' \rangle dq}{z - E(q)}. \quad (74,2)$$

სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში ხელსაყრელია $T(z)$ -მატრიცის გაშლა

$$\mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(\bar{p}) = \sum_{m_1 = -l_1}^{+l_1} \sum_{m_2 = -l_2}^{+l_2} \langle l_1/2 m_1 m_2 | JM \rangle Y_{l_1 m_1}(\bar{p}) \chi_{l_2 m_2} \quad (74.3)$$

ფუნქციების მიხედვით. ამ ფორმულაში $\chi_{l_2 m_2}$ ნუკლონის სპინური ფუნქციაა, $\langle l_1/2 m_1 m_2 | JM \rangle$ კი კლებშ-ჯორდანის კოეფიციენტი. როგორც ვიცით. (74,3) გამოხატულება წარმოადგენს \hat{J}^2 , \hat{J}_z ოპერატორების საერთო საკუთარ ფუნქციას. გაფანტვის მატრიცის გაშლას $\mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}$ ფუნქციებად ეწება ასეთი სახე:

$$\langle p | T(z) | p' \rangle = 4\pi \sum_{JM} \langle p | T_{JM}(z) | p' \rangle \mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(\bar{p}) \mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(\bar{p}'). \quad (74.4)$$

გავიხსენოთ, რომ (3,7) ფორმულის მიხედვით (σl) ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები ტოლია

$$(\sigma l) \mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM} = a_{lJ} \mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}, \quad (74.5)$$

სადაც

$$\frac{1}{h^2} a_{lJ} = \begin{cases} l, & j = l + 1/2 \\ -(l+1), & j = |l - 1/2|. \end{cases} \quad (74.6)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\int P_L(\bar{p} \cdot \bar{q}) \mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(\bar{q}) d\Omega_q = \frac{4\pi}{2L+1} \mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(\bar{p}) \delta_{Ll}, \quad (74.7)$$

მაშინ (74,1) და (74,4) გამოსახულებების (74,2) განტოლებაში შეტანითა და ე-თხების მიხედვით ინტეგრაციის შედეგად მარტივად მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \langle p | T_{lJ}(z) | p' \rangle = \\ & - \frac{h^2}{4\pi^2 \mu} v_l(p) A_{lJ} \left\{ v_l(p') + 4\pi \int_0^\infty \frac{v_l(q) \langle q | T_{lJ}(z) | p' \rangle q^2 dq}{z - E(q)} \right\}. \end{aligned} \quad (74.8)$$

ამ გამოსახულების მიღების დროს ჩვენ გავითვალისწინეთ $\mathcal{Y}_{l_1 l_2}^{JM}$ ფუნქციების ორ-თო-ნორმირების პირობა, A_{lJ} -თი კი აღვნიშნეთ შემდეგი სიდიდე:

$$A_{lJ} = \lambda_l + \Lambda_l a_{lJ}. \quad (74.9)$$

(74,8) გამოსახულების ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება დროებით აღვნიშნოთ $B_l(p')$ -ით

$$B_l(p') = v_l(p') + 4\pi \int_0^\infty \frac{v_l(q) \langle q | T_{lJ}(z) | p' \rangle q^2 dq}{z - E(q)}, \quad (74.10)$$

მაშინ გვქვება

$$\langle p | T_{lJ}(z) | p' \rangle = - \frac{h^2}{4\pi^2 \mu} A_{lJ} v_l(p) B_l(p'). \quad (74.11)$$

გაფანტვის მატრიცის ეს გამოხატულება შევიტანოთ (74,10) ფორმულაში, საიდანაც განვსაზღვროთ $B_I(p')$. გვექნება

$$B_I(p') = v_I(p') \tau_{IJ}(z), \quad (74,12)$$

სადაც

$$\tau_{IJ}(z) = 1 + \frac{\hbar^2}{\pi\mu} A_{IJ} \int_0^\infty \frac{v_I^2(q) q^2 dq}{z - E(q)}. \quad (74,13)$$

მაშასადამე, გაფანტვის მატრიცისათვის საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\langle p | T_{IJ}(z) | p' \rangle = - \frac{\hbar^2}{4\pi^2 \mu} A_{IJ} v_I(p) v_I(p') \tau_{IJ}(z); \quad (74,14)$$

თუ გამოვიყენებთ (35,15) ფორმულას, ადვილად ვიპოვიოთ გაფანტვის პარციალური ამპლიტუდასაც; სახელდობრ, გვექნება

$$F_{IJ}(k) = A_{IJ} v_I^2(k) \tau_{IJ}(k). \quad (74,15)$$

(74,13) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალიდან გამოვყოთ მთავარი მნიშვნელობა

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_I^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2 + i\varepsilon} = x_I(k) - ik v_I^2(k), \quad (74,16)$$

სადაც

$$x_I(k) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{v_I^2(q) q^2 dq}{k^2 - q^2} \quad (74,17)$$

გავიხსენოთ, რომ $F_{IJ}(k) = (k \operatorname{ctg} \delta_{IJ} - ik)^{-1}$, მაშინ (74,15) ტოლობიდან მარტივად მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta_{IJ}(k) = \frac{1}{v_I^2(k)} \left\{ \frac{1}{A_{IJ}} + x_I(k) \right\}, \quad (74,18)$$

რომელიც, როცა სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება არა გვაქვს, ე. ი. როცა $A_I = 0$, ჩვენთვის კარგად ცნობილ (66,12) ფორმულაზე დაიყვანება.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. ვთქვათ, ნუკლონები ურთიერთქმედებენ $l=1$ მდგომარეობაში. მაშინ სრულ მომენტს ექნება ორი მნიშვნელობა $J=3/2$ და $J=1/2$, ხოლო $\hbar=1$ ერთეულებში $A_{1,1/2}$ -ს ექნება შემდეგი მნიშვნელობები:

$$A_{1,1/2} = \lambda_1 - 2\Lambda_1, \quad A_{1,3/2} = \lambda_1 + \Lambda_1; \quad (74,19)$$

მაშინ (74,18) ფორმულის მიხედვით ფაზისათვისაც გვექნება ორი ფორმულა:

$$k \operatorname{ctg} \delta_{1,1/2}(k) = \frac{1}{v_I^2(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 - 2\Lambda_1} + x_1(k) \right\}, \quad (74,20)$$

$$k \operatorname{ctg} \delta_{1,3/2}(k) = \frac{1}{v_I^2(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 + \Lambda_1} + x_1(k) \right\}. \quad (74,21)$$

პოტენციალის ფორმა $l=1$ მდგომარეობაში მიზანშეწონილია შევარჩიოთ შემდეგნაირად:

$$v(p) = \frac{p}{p^2 + \beta_1^2}, \quad (74,22)$$

სადაც β_1 ურთიერთქმედების რადიუსის დამახასიათებელი პარამეტრია, ხოლო $1/p$ —იმპულსი. მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$z_1(k) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(q^2 + \beta_1^2)^2 (k^2 - q^2)} = \frac{1}{2\beta_1} \left\{ 1 + \frac{k^2}{\beta_1^2 + k^2} \left[\frac{2\beta_1^2}{k^2 + \beta_1^2} - 1 \right] \right\}. \quad (74,23)$$

შედეგად მივიღებთ ფაზური ანალიზის შემდეგ ფორმულებს: [45]

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1, 1/2}(k) = \frac{(k^2 + \beta_1^2)^2}{\lambda_1 - 2\Lambda_1} - \frac{\beta_1}{2} (\beta_1^2 + 3k^2), \quad (74,24)$$

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1, 3/2}(k) = \frac{(k^2 + \beta_1^2)^2}{\lambda_1 + \Lambda_1} - \frac{\beta_1}{2} (\beta_1^2 + 3k^2). \quad (74,25)$$

ამ გამოსახულებათა სათანადო ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარებით შეგვიძლია ვიპოვოთ λ_1 , Λ_1 და β_1 პარამეტრები. მარტივად ვიპოვიან საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებებსაც; სახელობრ, ამ განტოლებას ექნება სახე $\tau_{11}(i\alpha) = 0$, სადაც $\alpha^2 = 2\mu E$, ხოლო E —ბმის ენერჯიაა.

„ფიზიკოსები დღემდე ნაწილაკებს ასე-
თელიდნენ: ერთი, ორი და ბევრი... ამჟა-
მად დრო დადგა თანმიმდევრობით და-
ვლისა“.

ნ. ნ. ბოგოლუბოვი

თ ა ვ ი X

სამი სხეულის ამოცანა

სამი სხეულის ამოცანა ზუსტად არაა გადაწყვეტილი არც კლასიკურ და არც კვანტურ მექანიკაში. ამ ამოცანის ამოხსნა, ზოგად შემთხვევაში, შეუძლებელია თანამედროვე სწრაფადმთვლელი ელექტრონული მანქანებითაც კი. მეორე მხრივ, დადგა დრო, როცა კვანტურ მექანიკაში, კერძოდ ბირთვის თეორიაში ან ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში, სერიოზული ნაბიჯის გადადგმაზე ფიქრიც კი, ამ ამოცანის გადაწყვეტის გარეშე, რეალურ საფუძველსაა მოკლებული.

ელემენტარული ნაწილაკების ურთიერთქმედების შესწავლის დროს ყოველ ნაბიჯზე გვხვდება სამი ნაწილაკის გაჩენა საშუალოდ თუ საბოლოოდ მდგომარეობაში, ამიტომ ასეთი სისტემების დეტალურ თავისებურებათა ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ელემენტარულ ნაწილაკთა თეორიის განვითარება.

როგორც ცნობილია, ორი ნუკლონის სისტემა არ იძლევა სრულ სურათს ატომგულური ურთიერთქმედების ყველა თავისებურებებისა. უფრო მეტიც, როგორც ჩანს, დაბალ ენერგიაზე ნუკლონთა ურთიერთქმედება არაა დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიის კონკრეტულ სახეზე. ამ საკითხში გადაწყვეტი როლი შეიძლება შეასრულოს მცირე ნუკლონიანი სისტემების შესწავლამ, კერძოდ, საკუროთა შესწავლილ იქნეს სამი ნაწილაკის როგორც გაფანტვის, ისე ბმული მდგომარეობების ამოცანა.

გარდა ამისა, თუ გვეცოდინება სამი სხეულის ამოცანის ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები, ჩვენ შევძლებთ ისინი გამოვიყენოთ ისეთი ატომბირთვებისთვისაც, რომლებიც წარმოიდგინება როგორც სამი ნუკლონური კლასტერის ერთობლიობა.

საკუროთა გზების გამოძებნა, რაც საშუალებას მოგვცემს სამი სხეულის პრობლემის მთლიანად გადაწყვეტისა თუ არა, ისეთი მიახლოებითი მეთოდების გამო-

ნახვისას მინც, რომლებიც მოგაწოდებენ გარკვეულ ინფორმაციას სამი სხეულისათვის დამახასიათებელ მნიშვნელოვან თავისებურებათა შესახებ.

სამი სხეულის ამოცანას, გარდა კინემატიკური სირთულისა, სხვა სიძნელეებიც გააჩნია, რაც მის ამოხსნას შეუძლებელს ხდის. ერთ-ერთი სიძნელეთაგანი იქნა მდგომარეობა, რომ სისტემას დაფიქსირებული სრული ენერჯისათვის გააჩნია: სხვადასხვა არსებითად განსხვავებული მდგომარეობანი; მაგალითად, შესაძლებელია ბმული ორნაწილაკიანი ქვესისტემების გაჩენა, რაც გაფანტვის ამოცანაში იწვევს შრედინგერის განტოლების ამონახსნების არაცალსახობას [10, 97].

სამი სხეულის კვანტურ-მექანიკური ამოცანის შესწავლას დიდი ისტორია აქვს. პირველი შრომა, რომელიც სერიოზულ ინფორმაციას შეიცავდა სამი სხეულის შინაგანი მდგომარეობის შესახებ, ეკუთვნის ლ. თომასს [98]. მან მიღებული შედეგი თეორემის სახით ჩამოაყალიბა, რომლის თანახმად, ნაწილაკთა შორის ცენტრალური ურთიერთქმედების დროს მეტი ბმის ენერჯია შეესაბამება იმ პოტენციალს, რომელსაც ნაკლები ქმედების რადიუსი აქვს. ზღვარში, ატომგულური ძალების რადიუსის ნულისაკენ მისწრაფების დროს, ბმის ენერჯია უსასრულო ხდება.

ატომბირთვული სამი სხეულის ამოცანის შესწავლაში მნიშვნელოვანი ნაბიჯი იქნა გადაღებული გ. სკორნიაკოვისა და კ. ტერ-მარტიროსიანის მიერ (1956 წ.) [99]. მათ გამოიყენეს სამი ნაწილაკის გაფანტვის ინტეგრალური განტოლება ნულოვანი ქმედების რადიუსის მქონე ძალებისათვის. ფაქტურად ეს იყო პირველი შემთხვევა, როცა სამი სხეულის ამოცანაში მიიღეს კონკრეტული შედეგები, თუმცა გარკვეულ შეზღუდულ პირობებში. სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლება შემდგომში გახდა ობიექტი სხვა ავტორთა გამოკვლევებისა [100, 101, 102].

სამი ნაწილაკის ამოცანის დასრულებული კორექტული თეორია შექმნა ლ. დ. ფადეევმა 1960 წელს [103—106]. მან გამოიყენა სამი ნაწილაკის ამოცანის შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები თავისუფალი ყოველგვარი წინააღმდეგობისაგან. აღსანიშნავია, რომ ფადეევის განტოლებები ფრედჰოლმის ტიპისანი არიან, ამიტომ მათი ამოხსნისათვის შესაძლებელია კარგად დამუშავებული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენება.

ფადეევის განტოლებები ურთიერთქმედების პოტენციალებს ცხადი სახით არ შეიცავენ. განტოლებაში შედიან ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცები ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ. განტოლების ასეთი სტრუქტურა ხელსაყრელი აღმოჩნდა სამი სხეულის ამოცანის გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებების გამოსაკვლევად რაც, როგორც ვიცით, მეტად მნიშვნელოვანია ელემენტარულ ნაწილაკთა თვისებების შესწავლისათვის. რამდენადაც სამი სხეულის რელატივისტური მოძრაობის განტოლება არ არსებობს, ამიტომ ერთადერთი იმედი ფადეევის განტოლებებიდან მიღებული ათარელატივისტური სამნაწილაკობრივი ამპლიტუდის ანალიზური თვისებების შესწავლას ემყარება. სამწუხაროდ, ზოგად შემთხვევაში, სამნაწილაკობრივი ამპლიტუდის ანალიზური თვისებები ჭკრჭკრობით დაღვნილი არ არის [81, 107, 108, 109].

ფადეევის განტოლებებმა დასაბამი მისცა სამი სხეულის ამოცანის სწრაფი ტემპით განვითარებას. სულ რამდენიმე წელში ამ პრობლემას მრავალი ასეული შრომა მიეძღვნა, შეიძლება ითქვას, რომ დღეს ჩვენ ვიმყოფებით იმ საზღვარზე,

როცა მახლოებით მეთოდები, რომლებიც დამუშავდა სამი სხეულის ამოცანის შესასწავლად, თანამედროვე მძლავრ გამოთვლით ტექნიკასთან ერთად საკმარისია სამი სხეულის ამოცანის იმ სახით გადასაწყვეტად, რომელიც მნიშვნელოვან ინფორმაციას მოგვაწვდის [110].

ჯერჯერობით ფაღვევის განტოლებების ამოხსნა შესაძლებელია ფაქტორიზებული პოტენციალების ან ისეთი ურთიერთქმედებისათვის, რომლებიც ფაქტორიზებული პოტენციალების კრებად ჩამოშლის შედეგად მიიღწევა. ქვემოთ სამი სხეულის ამოცანას განვიხილავთ კონკრეტული რიცხვითი ამოხსნების გარეშე. ფაღვევის განტოლებების გამოყენების მაგალითები კონკრეტულ შემთხვევებში შეიძლება ვიხილოთ საერთო ლიტერატურაში [53, 79, 90, 93, 129, 130, 138].

ჩვენ არ გავითვალისწინებთ ნუკლონების სპინს, რამდენადაც სათანადო ფორმულების წიგნში გამოყვანა მეტად მოუხერხებელია [114, 139]. სამი ნაწილაკის ამოცანაში სპინის გათვალისწინების საკითხთან დაკავშირებით მკითხველს მიუთითებთ მ. ვერდეს მნიშვნელოვან სტატიას [140].

§ 75. სამი თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა. კინემატიკა

სანამ სამ ურთიერთქმედ ნაწილაკს შევისწავლიდეთ, მნიშვნელოვანია სამი თავისუფალი ნაწილაკისაგან შედგენილი სისტემის განხილვა.

ვთქვათ, გვაქვს სამი ნაწილაკი მასებით: m_1 , m_2 და m_3 , რომლებიც ერთმანეთზე არ მოქმედებენ. ცხადია, ეს ამოცანა ფორმალურია, მაგრამ მას კინემატიკურ თანაფარდობათა დადგენის მიზნით მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს, რამდენადაც ეს თანაფარდობანი ძალაში დარჩება ურთიერთქმედების ჩართვის შემთხვევაშიც; ვთქვათ, ამ ნაწილაკების რადიუსევექტორებია: r_1 , r_2 და r_3 ათვლილი რაიმე უძრავი სისტემის სათაიდან. ასეთი სამი ნაწილაკის ჰამილტონიანი დაემთხვევა კინეტიკური ენერჯის ოპერატორს

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2m_3} \Delta_3, \quad (75,1)$$

სადაც Δ_1 -წარმოადგენს ლაპლასიანს r_1 -ვექტორის კოორდინატების მიმართ. შრედინგერის განტოლებას სტაციონარულ შემთხვევაში ექნება შემდეგი სახე:

$$\hat{H}_0 \Psi(r_1, r_2, r_3) = E \Psi(r_1, r_2, r_3). \quad (75,2)$$

რადგან ნაწილაკები ერთმანეთზე არ მოქმედებენ, ამიტომ ამ განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ნამრავლით

$$\Psi(r_1, r_2, r_3) = \psi_1(r_1) \psi_2(r_2) \psi_3(r_3), \quad (75,3)$$

სადაც თითოეული $\psi_i(r_i)$ ფუნქცია წარმოადგენს i -ური ნაწილაკის თავისუფალი მოძრაობის შესაბამის ბრტყელ ტალღას განსაზღვრული იმპულსით. ასე რომ სამი თავისუფალი არაიგივეური ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია, განსაზღვრული იმპულსით, იქნება

$$\psi_{k_1, k_2, k_3}(r_1, r_2, r_3) = (2\pi)^{-3/2} e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3)} \quad (75,4)$$

k_i -წარმოადგენს i -ური ნაწილაკის იმპულსს¹, ნორმირება კი მოხდენილია ღირა-
კის ლელტა ფუნქციაზე იმპულსების სკალირან. სისტემის ენერგია ტოლი იქნება

$$E = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3}. \quad (75,5)$$

სამი სხეულის ამოცანაში ხშირად ხელსაყრელია სხვა კოორდინატებზე გადა-
სვლა. ამასთან, აუცილებელია ისეთი კოორდინატების შემოღება, რომელთა საშუა-
ლებით შესაძლებელი იქნება სიმძიმის ცენტრის გამოყოფა. ამ თვალსაზრისით ყვე-
ლაზე ხელსაყრელია იაკობის კოორდინატებით სარგებლობა. ამასთან, ახალ კოორ-
დინატებზე გადასვლისას სათანადო იმპულსების საპოვნელად მნიშვნელოვანია გვახ-
სოვდეს, რომ ბრტყელი ტალღის ფაზა

$$Q = k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3, \quad (75,6)$$

რომელიც სკალარული სიდიდეა, ინვარიანტული უნდა დარჩეს.

თუ რომელიმე ორი ნაწილაკის სიმძიმის ცენტრის რადიუსვექტორს აღნიშ-
ნავთ $R_{\alpha\beta}$ -თი,

$$R_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha r_\alpha + m_\beta r_\beta}{m_{\alpha\beta}}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (75,7)$$

სადაც შემდგომში $m_{\alpha\beta}$ -თი ყველგან აღნიშნავთ შემდეგ ჯამს:

$$m_{\alpha\beta} = m_\alpha + m_\beta; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (75,8)$$

მაშინ იაკობის კოორდინატები შემდეგნაირად განისაზღვრება [7]:

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta} &= r_\alpha - r_\beta, \\ \rho_\gamma &= R_{\alpha\beta} - r_\gamma, \end{aligned} \quad (75,9)$$

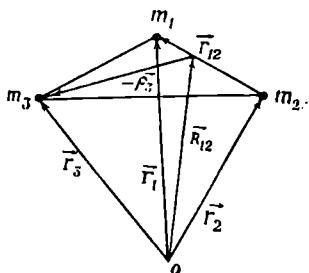
$$R = \frac{1}{M} (m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3),$$

სადაც $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ინდექსები იცვლება 1-დან 3-მდე, ხოლო $M = m_1 + m_2 + m_3$ სის-
ტემის მასაა.

როგორც ვხედავთ, გვაქვს იაკობის
კოორდინატების სამი შესაძლო ვარიანტი:

$$\begin{aligned} (r_{12}, \rho_3, R), \quad (r_{23}, \rho_1, R), \\ (r_{31}, \rho_2, R). \end{aligned} \quad (75,10)$$

ამ კოორდინატების გეომეტრიული შინა-
არსი ნათელია. R წარმოადგენს სამი ნა-
წილაკის სიმძიმის ცენტრის რადიუსვექ-
ტორს, $r_{\alpha\beta}$ არის α და β ნაწილაკის ფარ-
დობითი რადიუსვექტორი, ხოლო $-\rho_\gamma$
წარმოადგენს მესამე ნაწილაკის რადიუს-
ვექტორს, გავლებულს α და β ნაწილაკე-
ბის სიმძიმის ცენტრიდან.



ნახ. 11

r_1, r_2, r_3 ვექტორებს ადვილად გამოვხატავთ იაკობის კოორდინატების სა-
შუალებით. ამისათვის გავითვალისწინოთ, რომ საჭიროა (75,9) განვიხილოთ, რო-

¹ შენიშნოთ, რომ ქვემოთ ვისარგებლებთ იმპულსებით და არა ტალღური ვექტორებით.

გორც სამუცნობიან ვანტოლებათა სისტემა r_1, r_2 და r_3 ვექტორების მიმართ. ამასთან, ამ სისტემის დეტერმინანტი ერთის ტოლია.

აღვილად ვიპოვით, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} r_1 - R &= \frac{m_2}{m_{12}} r_{12} + \frac{m_3}{M} \rho_3 = -\frac{m_{23}}{M} \rho_1 = -\frac{m_3}{m_{13}} r_{31} + \frac{m_2}{M} \rho_2, \\ r_2 - R &= -\frac{m_1}{m_{12}} r_{12} + \frac{m_3}{M} \rho_3 = \frac{m_3}{m_{23}} r_{23} + \frac{m_1}{M} \rho_1 = -\frac{m_{13}}{M} \rho_2, \\ r_3 - R &= -\frac{m_{12}}{M} \rho_3 = -\frac{m_2}{m_{23}} r_{23} + \frac{m_1}{M} \rho_1 = \frac{m_1}{m_{13}} r_{31} + \frac{m_2}{M} \rho_2. \end{aligned} \quad (75,11)$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$dr_1 dr_2 dr_3 = dR dr_{\alpha\beta} d\rho_\gamma. \quad (75,11')$$

თუ (75,11) ფორმულებიდან r_1, r_2 და r_3 მნიშვნელობებს შევიტანთ (75,6) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$Q = r_{12} k_{12} + \rho_3 p_3 + RK = r_{23} k_{23} + \rho_1 p_1 + RK = r_{31} k_{31} + \rho_2 p_2 + RK, \quad (75,12)$$

სადაც იაკობის ვექტორების შესაბამისი იმპულსების როლს ასრულებენ შემდეგი სიდიდეები:

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta} &= \frac{m_\beta k_\alpha - m_\alpha k_\beta}{m_{\alpha\beta}}, \\ p_\gamma &= \frac{m_\gamma (k_\alpha + k_\beta) - m_{\alpha\beta} k_\gamma}{M}, \end{aligned} \quad (75,13)$$

$$K = k_1 + k_2 + k_3.$$

ამ შემთხვევაში $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ინდექსები იღებენ 1, 2, 3 მნიშვნელობებს. როგორც ვხედავთ, იმპულსებისთვისაც გვექნება საში შესაძლო ვარიანტი:

$$(k_{12}, p_3, K), (k_{23}, p_1, K), (k_{31}, p_2, K). \quad (75,14)$$

ამასთან, $k_{\alpha\beta}$ -ფარდობითი იმპულსია α და β ნაწილაკისა, p_γ -კი მესამე ნაწილაკის იმპულსია წინა ორის სიმძიმის ცენტრის მიმართ; K — სისტემის იმპულსია, ე. ი. წარმოადგენს ინერციის ცენტრის იმპულსს. საინტერესოა იაკობის იმპულსების დაკავშირება ნაწილაკთა k_1, k_2, k_3 იმპულსებთან. აღვილად ვაჩვენებთ, რომ გვაქვს შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულები:

$$\begin{aligned} k_1 - \frac{m_1}{M} K &= \frac{m_1}{m_{12}} p_3 + k_{12} = -p_1 = \frac{m_{11}}{m_{13}} p_2 - k_{31}, \\ k_2 - \frac{m_2}{M} K &= \frac{m_{12}}{m_{12}} p_3 - k_{12} = \frac{m_{12}}{m_{23}} p_1 + k_{23} = -p_2, \\ k_3 - \frac{m_3}{M} K &= -p_3 = \frac{m_{13}}{m_{23}} p_1 - k_{23} = \frac{m_{13}}{m_{13}} p_2 + k_{31}. \end{aligned} \quad (75,15)$$

ასევე ნათელია, რომ

$$dk_1 dk_2 dk_3 = dK dk_{\alpha\beta} dp_\gamma. \quad (75,15')$$

ახლა გამოვხატოთ სისტემის კინეტიკური ენერჯის ოპერატორი იაკობის კოორდინატებში. ადვილად ვიპოვიით, რომ $\nabla_{\mathbf{r}}$ -ოპერატორს ახალ კოორდინატებში აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} &= \nabla_{\mathbf{r}_{12}} + \frac{m_1}{m_{12}} \nabla_{\mathbf{p}_3} + \frac{m_1}{M} \nabla_{\mathbf{R}}, & \nabla_{\mathbf{r}_2} &= -\nabla_{\mathbf{r}_{12}} + \frac{m_2}{m_{12}} \nabla_{\mathbf{p}_3} + \frac{m_2}{M} \nabla_{\mathbf{R}}, \\ \nabla_{\mathbf{r}_3} &= -\nabla_{\mathbf{p}_3} + \frac{m_3}{M} \nabla_{\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (75,16)$$

სადაც $\nabla_{\mathbf{r}_{12}}$, $\nabla_{\mathbf{p}_3}$, $\nabla_{\mathbf{R}}$ გრადიენტებია სათანადოდ \mathbf{r}_{12} , \mathbf{p}_3 და \mathbf{R} რადიუს-ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების მიმართ. ანალოგიურად ვიპოვიით გრადიენტებს ორი დანარჩენი შესაძლო იაკობის კოორდინატებისთვისაც.

შევიტანოთ (75,16) ოპერატორები კინეტიკური ენერჯის ოპერატორის (75,1) გამოსახულებაში. მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= -\frac{\hbar^2}{2\mu_{12}} \Delta_{\mathbf{r}_{12}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_3} \Delta_{\mathbf{p}_3} - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{\mathbf{r}_{23}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \Delta_{\mathbf{p}_1} - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu_{31}} \Delta_{\mathbf{r}_{31}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \Delta_{\mathbf{p}_2} - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (75,17)$$

სადაც

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_{\alpha\beta}}, \quad \mu_\gamma = \frac{m_\gamma m_{\alpha\beta}}{M} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \quad (75,18)$$

წარმოადგენენ დაყვანილ მასებს შესაბამისად ორი და სამი ნაწილაკისა.

სრულიად ანალოგიურად, თუ გამოვიყენებთ (75,15) ფორმულებს და კინეტიკური ენერჯის ოპერატორის გამოხატულებას იმპულსურ წარმოდგენაში—

$$\dot{H}_0 = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3}, \quad (75,19)$$

ადვილად მივიღებთ

$$H_0 = \frac{k_{12}^2}{2\mu_{12}} + \frac{p_3^2}{2\mu_3} + \frac{K^2}{2M} = \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{K^2}{2M} = \frac{k_{31}^2}{2\mu_{31}} + \frac{p_2^2}{2\mu_2} + \frac{K^2}{2M}. \quad (75,20)$$

იმპულსთა სივრცეში თავისუფალი მოძრაობის კვანძ-ვექტორები იქნება: $|k_{12}, p_3, K\rangle$, $|k_{23}, p_1, K\rangle$ და $|k_{31}, p_2, K\rangle$. ამასთან, ცხადია, შესრულებული იქნება ტოლობა

$$|k_{12}, p_3, K\rangle = |k_{23}, p_1, K\rangle = |k_{31}, p_2, K\rangle, \quad (75,21)$$

რომელშიც უნდა გავიგოთ შემდეგი: როცა ერთ კვანძ-ვექტორს ვცვლით მეორით, მაშინ მეორე ვექტორის ცვლადები საჭიროა პირველი ვექტორის ცვლადებით გამოიხატოს ცვლადებს შორის ზევით მიღებული კავშირის საშუალებით.

ბრტყელი ტალღა განსაზღვრული იქნება გამოსახულებით

$$\langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{R} | \mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{K} \rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [\mathbf{k}_{\alpha\beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta} + \mathbf{p}_\gamma \mathbf{p}_\gamma + \mathbf{K} \mathbf{R}]\right). \quad (75,22)$$

ორთო-ნორმირების პირობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\langle \mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{K} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}, \mathbf{p}'_\gamma, \mathbf{K}' \rangle = \delta(\mathbf{k}_{\alpha\beta} - \mathbf{k}'_{\alpha\beta}) \delta(\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}'_\gamma) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}'). \quad (75,23)$$

ინერციის ცენტრის სისტემაში $\mathbf{K} = 0$ (შესაბამისად $\mathbf{R} = 0$) და (75,21) ვექტორების ნაცვლად გვექნება

$$|k_{12}, p_3\rangle = |k_{23}, p_1\rangle = |k_{31}, p_2\rangle, \quad (75,24)$$

სადაც $k_{\alpha\beta}$, p_γ იმპულსები შემდეგი ფორმულებით განისაზღვრება:

$$k_{\alpha\beta} = \frac{m_\beta k_\alpha - m_\alpha k_\beta}{m_{\alpha\beta}} \quad (75,25)$$

ამასთან

$$p_\gamma = -k_\gamma \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = -(p_1 + p_2 + p_3) = 0. \quad (75,26)$$

ბრტყელი ტალღა ინერციის ცენტრის მიმართ განისაზღვრება ფორმულით

$$\langle r_{\alpha\beta}, p_\gamma | k_{\alpha\beta}, p_\gamma \rangle = (2\pi\hbar)^{-3} e^{\frac{i}{\hbar}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} + p_\gamma p_\gamma)}, \quad (75,27)$$

რომელიც ნორმირებულია პირობით

$$\langle k_{\alpha\beta}, p_\gamma | k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma \rangle = \delta(k_{\alpha\beta} - k'_{\alpha\beta}) \delta(p_\gamma - p'_\gamma). \quad (75,28)$$

შეგნიშნოთ, რომ იაკობის კოორდინატების ერთი წყება შეიძლება მარტივად დაკავშიროთ მეორესთან ინერციის ცენტრის სისტემაში. ხელსაყრელია ეს კავშირი დაგვყაროთ მატრიცული სახით. შემოვიღოთ სამი მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{m_3}{m_{23}} & -1 \\ m_{23} \\ \frac{m_2 M}{m_{12} m_{23}} & -\frac{m_1}{m_{12}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{m_1}{m_{13}} & -1 \\ m_{13} \\ \frac{m_3 M}{m_{13} m_{23}} & -\frac{m_2}{m_{23}} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{m_{12}} & -1 \\ m_{12} \\ \frac{m_1 M}{m_{12} m_{13}} & -\frac{m_3}{m_{13}} \end{pmatrix}. \quad (75,29)$$

ამ მატრიცების დეტერმინანტები ერთის ტოლია, ხოლო შებრუნებულ მატრიცებს ეწებათ სახე:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{m_1}{m_{12}} & 1 \\ m_{12} \\ -\frac{m_2 M}{m_{12} m_{23}} & -\frac{m_3}{m_{23}} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{m_{23}} & 1 \\ m_{23} \\ -\frac{m_3 M}{m_{13} m_{23}} & -\frac{m_1}{m_{13}} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{m_3}{m_{13}} & 1 \\ m_{13} \\ -\frac{m_1 M}{m_{12} m_{13}} & -\frac{m_2}{m_{12}} \end{pmatrix}. \quad (75,30)$$

თუ ვისარგებლებთ (75,11) ფორმულებით, ადვილად ვიპოვიით

$$\begin{pmatrix} r_{12} \\ p_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_{23} \\ p_1 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} r_{31} \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (75,31)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $B = A^{-1}C^{-1}$ და, მაშასადამე, $B^{-1} = CA$, მაშინ (75,31) ფორმულიდან ადვილად ვიპოვით შემდეგ დამოკიდებულებებსაც:

$$\begin{pmatrix} r_{23} \\ \rho_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} r_{31} \\ \rho_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} r_{12} \\ \rho_3 \end{pmatrix}, \quad (75,32)$$

და

$$\begin{pmatrix} r_{31} \\ \rho_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} r_{12} \\ \rho_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} r_{23} \\ \rho_1 \end{pmatrix}. \quad (75,33)$$

სრულად ანალოგიურად დავამყარებთ კავშირს იაკობის კოორდინატების შესაბამის იმპულსებს შორისაც; სახელდობრ, (75,15) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} k_{12} \\ p_3 \end{pmatrix} = \tilde{A}^{-1} \begin{pmatrix} k_{23} \\ p_1 \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} k_{31} \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (75,34)$$

სადაც ტილდა აღნიშნავს ტრანსპონირებულ მატრიცას. რადგან $\tilde{A}\tilde{C} = \tilde{B}^{-1}$ და $\tilde{B} = \tilde{C}^{-1}\tilde{A}^{-1}$, ამიტომ (75,34)-დან ადვილად ვიპოვით შემდეგ ფორმულებსაც:

$$\begin{pmatrix} k_{23} \\ p_1 \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} k_{12} \\ p_3 \end{pmatrix} = \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} k_{31} \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (75,35)$$

და

$$\begin{pmatrix} k_{31} \\ p_2 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1} \begin{pmatrix} k_{12} \\ p_3 \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} k_{23} \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (75,36)$$

იაკობის $k_{\alpha\beta}$, p_γ ცვლადების მაგიერ ზოგჯერ ხელსაყრელია p_1 , p_2 , p_3 იმპულსების რომელიმე წყვილის აღება. მაგალითად, (k_{23}, p_1) ცვლადების ნაცვლად შეგვიძლია ავირჩიოთ p_1 და p_2 წყვილი. ადვილად ვიპოვით $k_{\alpha\beta}$, p_γ ცვლადებიდან p_1 , p_2 ცვლადებზე გადასვლის ფორმულებს, რომელთაც აქვეთ სახე:

$$\begin{aligned} k_{23} &= -p_2 - \frac{m_2}{m_{23}} p_1 = p_3 + \frac{m_3}{m_{23}} p_1, \\ k_{31} &= -p_3 - \frac{m_3}{m_{13}} p_2 = p_1 + \frac{m_1}{m_{13}} p_2, \\ k_{12} &= -p_1 - \frac{m_1}{m_{12}} p_3 = p_2 + \frac{m_2}{m_{12}} p_3. \end{aligned} \quad (75,37)$$

p_1 , p_2 , p_3 ვექტორების რომელიმე წყვილიდან სხვა რომელიმე ვექტორზე გადასვლა ხორციელდება (75,26) ფორმულით. აბსტრაქციული სივრცის ბაზისურ ვექტორებს ამ ცვლადებში ექნებათ სახე

$$|p_1, p_2\rangle = |p_2, p_3\rangle = |p_3, p_1\rangle. \quad (75,38)$$

(75,6) და (75,26) პირობის გამოყენებით ადვილად ვიპოვით, რომ

$$Q = p_1 r_{31} - p_3 r_{23} = p_2 r_{12} - p_3 r_{31} = p_3 r_{23} - p_1 r_{12}, \quad (75,39)$$

სადაც

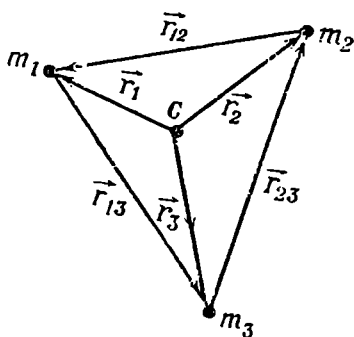
$$r_{\alpha\beta} = r_{\alpha} - r_{\beta} \quad (75,40)$$

და

$$r_{12} + r_{23} + r_{31} = 0. \quad (75,41)$$

კინეტიკური ენერჯის ოპერატორს (p_1, p_2, p_3) ცვლადებში, (75,27) და (75,34) ფორმულების თანახმად, ეწეება გამობატულება

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2\mu_{13}} + \frac{(p_1 p_2)}{m_3} + \frac{p_2^2}{2\mu_{23}} = \frac{p_2^2}{2\mu_{12}} + \frac{(p_2 p_3)}{m_1} + \frac{p_3^2}{2\mu_{13}} = \frac{p_1^2}{2\mu_{12}} + \frac{(p_1 p_3)}{m_2} + \frac{p_3^2}{2\mu_{23}}, \quad (75,42)$$



ნახ. 12

სადაც $\mu_{\alpha\beta}$ -დაყვანილი მასაა.

როგორც ვხედავთ, ინერციის ცენტრის სისტემაში სამი ნაწილაკის მდებარეობა შეგვიძლია დავახსიათოთ ორი ვექტორით (ე. ი. ვექტი დეკარტის კოორდინატით). თუ რომელ ორ ვექტორს ავირჩევთ ზემოთ შემოღებული ვექტორებიდან, ეს დამოკიდებულია ამოცანის კონკრეტულ ხასიათზე.

როცა ნაწილაკები იგივეურია, ე. ი. როცა $m_1 = m_2 = m_3 = m$, მაშინ ჩვენ მიერ მიღებული კინემატიკური ფორმულები საგრძნობლად გამარტივდება. ამ შემთხვევაში $m_{\alpha\beta} = 2m$, $\mu_{\alpha\beta} = m/2$, ხოლო $\mu_{\gamma} = 2m/3$.

იგივერი ნაწილაკებისათვის (ინერციის ცენტრის სისტემაში) (75,33) ფორმულები მოგვეცემენ

$$k_{\alpha\beta} = \frac{k_{\alpha} - k_{\beta}}{2}, \quad p_{\gamma} = -k_{\gamma}, \quad (75,43)$$

ხოლო კინეტიკური ენერჯია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$H_0(k_{\alpha\beta}, p_{\gamma}) = \frac{k_{\alpha\beta}^2}{m} + \frac{3p_{\gamma}^2}{4m}. \quad (75,44)$$

ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული იაკობის კოორდინატების ნაცვლად იხილავენ მათ პროპორციულ სიდიდეებსაც. ასე მაგალითად, შემოჰყავთ შემდეგი ვექტორები [93]:

$$p_1 = \frac{m_3 k_2 - m_2 k_3}{(2m_2 m_3 m_{23})^{1/2}}, \quad q_1 = \frac{m_1 (k_2 + k_3) - m_{23} k_1}{(2m_1 m_{23} M)^{1/2}}, \quad p = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{(2M)^{1/2}}. \quad (75,45)$$

ცხადია, მათი შინაარსი იაკობის იმპულსების შინაარსისაგან არ განსხვავდება. სახელდობრ, p_1 არის მეორე და მესამე ნაწილაკების ფარდობითი იმპულსი, q_1 წარმოადგენს პირველი ნაწილაკის იმპულსს მეორე და მესამეს ინერციის ცენტრის მიმართ, p კი სის-

ტემის სრული იმპულსია. ასეთი იმპულსების შემოღება ხელსაყრელია იმდენად, რამდენადაც კინეტიკური ენერჯის გამოხატულებაში მასები აღარ შევლენ, მართლაც, გვექნება

$$H_0(p_1, q_1, \mathbf{P}) = p_1^2 + q_1^2 + \mathbf{P}^2. \quad (75,46)$$

მდგომარეობის ნორმირებული კეტ-ვექტორი იქნება $|p_1, q_1, \mathbf{P}\rangle$. ინერციის ცენტრის სისტემაში $\mathbf{P} = 0$, ამიტომ დაგვიჩნება (p_1, q_1) წყვილი და შესაბამისად მდგომარეობის ვექტორი $|p_1, q_1\rangle$. ცხადია, გვექნება ცვლადთა შესაძლო (p_2, q_2) და (p_3, q_3) წყვილებიც; ამასთან,

$$|p_1, q_1\rangle = |p_2, q_2\rangle = |p_3, q_3\rangle. \quad (75,47)$$

(75,47) ტოლობა ისევე უნდა გავიგოთ, როგორც ეს მიეუთითეთ (75,29) ტოლობის განხილვის დროს.

კინეტიკურ ენერჯიას C -სისტემაში ექნება სახე

$$H_0 = p_1^2 + q_1^2 = p_2^2 + q_2^2 = p_3^2 + q_3^2. \quad (75,48)$$

ადვილად დავამყარებთ კავშირს სხვადასხვა წყვილებს შორის. გვექნება

$$\begin{aligned} p_2 &= -\left(\frac{m_1 m_2}{m_{13} m_{23}}\right)^{1/2} p_1 + \left(\frac{m_3 M}{m_{13} m_{23}}\right)^{1/2} q_1, \\ q_2 &= -\left(\frac{m_3 M}{m_{13} m_{23}}\right)^{1/2} p_1 - \left(\frac{m_1 m_2}{m_{13} m_{23}}\right)^{1/2} q_1. \end{aligned} \quad (75,49)$$

ასევე

$$\begin{aligned} p_1 &= -\left(\frac{m_1 m_3}{m_{12} m_{23}}\right)^{1/2} p_3 + \left(\frac{m_2 M}{m_{12} m_{23}}\right)^{1/2} q_3, \\ q_1 &= -\left(\frac{M m_2}{m_{12} m_{23}}\right)^{1/2} p_3 - \left(\frac{m_1 m_3}{m_{12} m_{23}}\right)^{1/2} q_3. \end{aligned} \quad (75,50)$$

შესაძლებელია p_i -ცვლადები გამოვხატოთ q_i -ცვლადების საშუალებითაც. ასე მაგალითად,

$$\begin{aligned} p_1 &= -\left(\frac{m_1 m_2}{m_3 M}\right)^{1/2} q_1 - \left(\frac{m_{23} m_{13}}{m_3 M}\right)^{1/2} q_2, \\ p_2 &= \left(\frac{m_{23} m_{13}}{m_3 M}\right)^{1/2} q_1 + \left(\frac{m_1 m_2}{m_3 M}\right)^{1/2} q_2. \end{aligned} \quad (75,51)$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ იაკობის p_α, q_α იმპულსების გამოხატვა სხვა შესაძლო p_β, q_β იმპულსებით განხორციელებულია ფორმულებით

$$\begin{aligned} p_\alpha &= -a_{\alpha\beta} p_\beta - b_{\alpha\beta} q_\beta, \\ q_\alpha &= b_{\alpha\beta} p_\beta - a_{\alpha\beta} q_\beta, \end{aligned} \quad (75,52)$$

სადაც $a_{\alpha\beta}$ და $b_{\alpha\beta}$ კოეფიციენტები განისაზღვრება მასების საშუალებით

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \left(\frac{m_\alpha m_\beta}{m_{\alpha\gamma} m_{\beta\gamma}}\right)^{1/2} = a_{\beta\alpha}, \\ b_{\alpha\beta} &= \left(\frac{m_\gamma M}{m_{\alpha\gamma} m_{\beta\gamma}}\right)^{1/2} = -b_{\beta\alpha}; \end{aligned} \quad (75,53)$$

$$b_{\alpha\beta} = (1 - a_{\alpha\beta}^2)^{1/2}. \quad (75,54)$$

ამ ფორმულებში ყველა შესაძლო კავშირები მიიღება $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ ციკლური გადასმით.

ამ პარაგრაფში მოცემულ ფორმულებს გამოვიყენებთ სამი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის მოძრაობის განტოლების გამოყენებისას.

სამი ნაწილაკის ამოცანაში სწორად ხელსაყრელია სხვა ტიპის კოორდინატების შემოღება. სახელობრ, შეგვიძლია ავიღოთ სამი სივრცე: x_{12}, x_{23}, x_{13} და სამი ეილერის კუთხე, რომლებიც ახასიათებენ სამი ნაწილაკის ურთიერთფარდობითი რადიუსვექტორებით შედგენილი სამკუთხედის ორიენტაციას სივრცეში. იმპულსურ წარმოდგენაში კი შეგვიძლია შემოვიღოთ ეილერის სამი კუთხე და $\omega_1 = \frac{k_1^2}{2m_1}$,

$$\omega_2 = \frac{k_2^2}{2m_2}, \quad \omega_3 = \frac{k_3^2}{2m_3} \text{ — სამი კოორდინატი.}$$

აღსანიშნავია, რომ კოორდინატების შერჩევის საკითხი მჭიდროდაა დაკავშირებული მომენტთა შეკრების წესთან. მაგალითად, როცა სამი უსპინო ნაწილაკის საჯამო მომენტი $L = L_1 + L_2$, სადაც L_1 პირველი და მეორე ნაწილაკის ფარდობითი მომენტია, ხოლო L_2 წარმოადგენს მესამე ნაწილაკის ფარდობით მომენტს პირველი ორის ინერციის ცენტრის მიმართ, მაშინ ხელსაყრელია იაკობის k_1, p_2 კოორდინატების შემოღება. მაგრამ, როცა სრული მომენტი $L = L_1 + L_2 + L_3$, სადაც L_3 წარმოადგენს i -ური ნაწილაკის მომენტს, მაშინ ხელსაყრელია k_1, k_2, k_3 კოორდინატებით სარგებლობა და ა. შ.

§ 76. სამი ნაწილაკის სისტემის იმპულსის მომენტი

განვიხილოთ სამი უსპინო ნაწილაკი. ასეთი სისტემის სრული ორბიტალური მომენტი რაიმე უძრავი წერტილის მიმართ ტოლი იქნება ცალკეული ნაწილაკის იმპულსის მომენტების ჯამისა, ე. ი.

$$J = J_1 + J_2 + J_3. \quad (76,1)$$

შემდგომში, რამდენადაც სამი სხეულის ამოცანას შევისწავლით ფარდობით კოორდინატებში, ხელსაყრელი იქნება სრული მომენტის წარმოდგენა შემდეგი ჯამის სახითაც:

$$J = I + L, \quad (76,2)$$

სადაც I წარმოადგენს ორი ნაწილაკის ფარდობითი მოძრაობის მომენტს, L კი მესამე ნაწილაკის მომენტია წინა ორის სიმძიმის ცენტრის მიმართ. ცხადია, სრული მომენტის ამგვარი სახით წარმოდგენა მნიშვნელოვანია იაკობის კოორდინატებით სარგებლობის დროს. მომენტთა შეკრების წესის მიხედვით ვეჭვება $|I - L| < J < |I + L|$.

დაეწეროთ ტალღური ფუნქცია, რომელიც საერთო საკუთარი ფუნქცია იქნება J^2, J_z ოპერატორებისა. რადგან (I^2, I_z) და (L^2, L_z) ოპერატორების საკუთარი ფუნქციებია $Y_{lm_1}(k)$ და $Y_{lm_2}(p)$ შესაბამისად, ამიტომ (4,2) ფორმუ-

ლის თანახმად, J^2 , J_z ოპერატორების საერთო საკუთარი ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, \bar{p}) = \sum_{m_L = -L}^{-1} \sum_{m_L = -L}^{+L} \langle iL m_L m_L | JM \rangle Y_{i m_L}(\bar{k}) Y_{L m_L}(\bar{p}), \quad (76,3)$$

სადაც $\langle iL m_L m_L | JM \rangle$ ვექტორული შეკრების კოეფიციენტია, ხოლო \bar{k} და \bar{p} იაკობის ერთეულოვანი ვექტორებია. ამ გამოსახულებაში $m_L + m_L = M$, ამიტომ ფაქტობრივად ერთმაგი ჩამი აიღება. (76,3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია ერთდროულად აკმაყოფილებს ორ განტოლებას:

$$J^2 \mathcal{Y}_{iL}^{JM} = \hbar^2 J(J+1) \mathcal{Y}_{iL}^{JM}, \quad (76,4)$$

$$J_z \mathcal{Y}_{iL}^{JM} = \hbar M \mathcal{Y}_{iL}^{JM}, \quad (76,5)$$

სადაც J -სრული მომენტის კვანტური რიცხვია. \mathcal{Y}_{iL}^{JM} ფუნქციები ორთო-ნორმირებული ფუნქციებია. მართლაც, თუ გავიხსენებთ კლებ-შეორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების (4,6) პირობას, მარტივად დავამტკიცებთ, რომ

$$\int \mathcal{Y}_{iL}^{J'M'}(\bar{k}, \bar{p}) \mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, \bar{p}) d\Omega_{\bar{k}} d\Omega_{\bar{p}} = \delta_{J,J'} \delta_{M,M'} \quad (76,6)$$

ან, თუ დირაკის აბსტრაქციულ სივრცეში შემოვიღებთ სკალარულ ნამრავლს, გვექნება

$$\langle \mathcal{Y}_{iL}^{J'M'} | \mathcal{Y}_{iL}^{JM} \rangle = \delta_{J,J'} \delta_{M,M'}, \quad (76,7)$$

ამასთან კვანტ-ვექტორი $|\mathcal{Y}_{iL}^{JM}\rangle = |iLJM\rangle$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$|\mathcal{Y}_{iL}^{JM}\rangle = \sum_{m_L} \langle iL m_L m_L | JM \rangle |i m_L\rangle |L M_L\rangle, \quad (76,8)$$

სადაც $\langle \bar{k} | i m_L \rangle = Y_{i m_L}(\bar{k})$, ხოლო $\langle \bar{p} | L m_L \rangle = Y_{L m_L}(\bar{p})$ და

$$\langle \bar{k} \bar{p} | iLJM \rangle = \mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, \bar{p}). \quad (76,9)$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ $Y_{i m_L}(-\bar{k}) = (-1)^l Y_{i m_L}(\bar{k})$, მაშინ (76,3) განმარტებიდან ნათელია, რომ ადგილი ექნება შემდეგ ფორმულებს:

$$\mathcal{Y}_{iL}^{JM}(-\bar{k}, \bar{p}) = (-1)^l \mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, \bar{p}), \quad (76,10)$$

$$\mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, -\bar{p}) = (-1)^L \mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, \bar{p}), \quad (76,11)$$

$$\mathcal{Y}_{iL}^{JM}(-\bar{k}, -\bar{p}) = (-1)^{l+L} \mathcal{Y}_{iL}^{JM}(\bar{k}, \bar{p}), \quad (76,12)$$

იმის გამო, რომ \mathcal{Y}_{iL}^{JM} ორთო-ნორმირებული ფუნქციებია, ნებისმიერი ფუნქცია შეგვიძლია გავშალოთ ამ ფუნქციების მწკრივად. ამიტომ (76,3) ფუნქციები დიდ დახმარებას გაგვიწივენ სამი სხეულის ტალღური ფუნქციიდან მომენტებზე დამოკიდებული ნაწილის გამოყოფაში.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულასაც:

$$Y_{lm_l}(k)Y_{Lm_L}(\bar{p}) = \sum_{J=|l-L|}^{l+L} \sum_{M=-J}^J \langle l m_l m_L | J M \rangle \mathcal{Y}_{lL}^{JM}(k, \bar{p}), \quad (76,13)$$

რომელიც მიიღება (76,3) ფორმულიდან კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთონორმირების პირობის გამოყენებით.

§ 77. სამი ნაწილაკის სისტემის პოტენციალური ენერგია

განვიხილოთ სამი ნაწილაკისაგან შედგენილი სისტემა m_1, m_2, m_3 მასებით. ასეთ კვანტურ სისტემაში შეიძლება სხვადასხვა ხასიათისა და ტიპის ძალები მოქმედებდნენ. სამი სხეულის შემთხვევაში, ნაწილაკებს შორის წყვილური ურთიერთქმედების გარდა, შესაძლებელია სამნაწილაკობრივი ძალებიც მოქმედებდეს.

როცა ამბობენ, ნაწილაკებს შორის წყვილური ძალები მოქმედებსო, გულისხმობენ, რომ პოტენციალური ენერგია დამოკიდებულია მხოლოდ ორ ნაწილაკს შორის არსებულ მანძილზე; ასე მაგალითად, სამ სხეულში ჩვენ გვეჩვენა შეძლები პოტენციალური ენერგია:

$$V = v_{12}(r_{12}) + v_{23}(r_{23}) + v_{31}(r_{31}), \quad (77,1)$$

რომელიც მოკლედ ასეც შეგვიძლია ჩაეწეროთ:

$$V = \sum_{i>j=1}^3 v_{ij}(r_{ij}). \quad (77,2)$$

ამ გამოსახულებაში $r_{ij} = r_i - r_j$ ფარდობითი რადიუსვექტორია. როცა ყოველ წყვილს შორის ერთნაირი ძალები მოქმედებს, მაშინ

$$V = \sum_{i>j=1}^3 v(r_{ij}). \quad (77,3)$$

გარდა ამისა, თუ წყვილური ურთიერთქმედება ცენტრალურია, მაშინ

$$V = \sum_{i>j=1}^3 v_{ij}(|r_{ij}|). \quad (77,4)$$

ე. ი. პოტენციალური ენერგია მხოლოდ ფარდობითი რადიუსვექტორების სიდიდებზეა დამოკიდებული.

სამი სხეულის ამოცანის განხილვის დროს, წერის გამარტივების მიზნით, ორი ინდექსის ნაცვლად, (77,2) ჯამში ხშირად ხელსაყრელია ერთი ფორმალური ინდექსის გამოყენება

$$V = \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha}(r_{\alpha}), \quad (77,5)$$

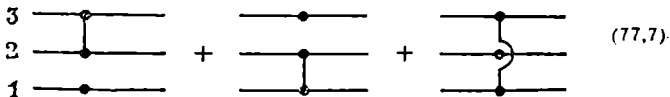
სადაც $\alpha = 1, 2, 3$ -ში იგულისხმება (3,2), (3,1) და (1,2) წყვილური ინდექსები.

სამწიფილაკობრივი ძალების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი ორი ნაწილაკის ურთიერთქმედებისას მნიშვნელოვანია მესამე ნაწილაკის ურთიერთქმედებაც, ამიტომ სათანადო პოტენციალური ენერგია შემდეგი სახით უნდა ჩაიწეროს:

$$U = U(r_{12}, r_{23}) + U(r_{23}, r_{31}) + U(r_{31}, r_{12}). \quad (77,6)$$

ამასთან, ვიგულისხმებთ, რომ ყველა შესაძლო სამწიფილაკობრივი ურთიერთქმედება ერთმანეთის ტოლია და ცალკეულ U -ფუნქციას ინდექსი აღარ მიუძღვნება. საერთო ურთიერთქმედება კი იქნება ჯამი ორ და სამწიფილაკობრივი ურთიერთქმედებებისა.

იზრნაწილაკობრივი ურთიერთქმედება სამი ნაწილაკის სისტემაში შეიძლება გრაფიკულადაც გამოვხატოთ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ჰორიზონტალური ხაზები შეესაბამება ნაწილაკთა თავისუფალ მოძრაობას, ხოლო ამ ხაზების შეერთება ნიშნავს ურთიერთქმედებას:



ნახ. 13.

ამ გრაფიკიდან ნათლად ჩანს, რომ თითოეულ აქტში ურთიერთქმედებას განიცდის მხოლოდ ორი ნაწილაკი, მესამე კი თავისუფალია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს დაუკავშირებელ დიაგრამებთან.

როცა სამი სხეულის სისტემაში მოქმედებენ სამწიფილაკობრივი ძალები, მაშინ ურთიერთქმედებაში ერთდროულად ჩაბმულია სამი ნაწილაკი. ან გრაფიკულად



ნახ. 14.

შემდგომში არ განვიხილავთ სამწიფილაკობრივ ძალებს, რამდენადაც მათი შეზღუდვის აუცილებლობის საკითხი ჯერ კიდევ გარკვეული არ არის [86]. ასე რომ მომავალში, როცა სამი სხეულის ამოცანაზე გვექნება საუბარი, ვიგულისხმებთ, რომ მასში მოქმედებენ მხოლოდ და მხოლოდ ორნაწილაკობრივი ძალები, და ურთიერთქმედების (77,1) სახე აქვს.

ის გარემოება, რომ სამი სხეულის ამოცანაში პოტენციალური ენერგია დამოკიდებულია სამ ფარდობით რადიუსვექტორზე, ამირობებს კინემატიკურ სიძველევებს, რომლებიც დამახასიათებელია სამი ნაწილაკის ამოცანისათვის. სამი სხეულის პრობლემის ზუსტად ამოუხსნადობის ერთ-ერთი მიზეზი სწორედ ამაშიც უნდა იქნებოდეს...

ინერციის ცენტრის სისტემაში სამი სხეულის მოძრაობა განისაზღვრება ორი რადიუსვექტორით, მაგალითად, იაკობის ორი ვექტორით $r_{\alpha\beta}$ და ρ . სამი ნაწი-

ლაკის სისტემის ტალღური ფუნქცია, ცხადია, ამ ორ ვექტორზე იქნება დამოკიდებული. ვთქვათ, ჩვენ ავირჩიეთ r_{12} , ρ_3 ვექტორები, მაშინ $\psi = \psi(r_{12}, \rho_3)$. შრედინგერის განტოლებაში ყველა ცვლადი ამ ვექტორებით უნდა გამოვხატოთ. § 75-ში მიღებული ფორმულების თანახმად ცენტრალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში, პოტენციალური ენერჯისათვის მივიღებთ

$$V(r_{12}, \rho_3) = v_{12}(r_{12}) + v_{23} \left(\left| \rho_3 - \frac{m_1}{m_{12}} r_{12} \right| \right) + v_{31} \left(\left| \rho_3 + \frac{m_2}{m_{12}} r_{12} \right| \right) \quad (77,9)$$

გამოსახულებას. აქედან კი ჩანს, რომ პოტენციალურ ენერჯიაში, r_{12} - და ρ_3 -სიდიდეების გარდა, შემოდის კუთხეები r_{12} და ρ_3 ვექტორებს შორის. ზოგად შემთხვევაში ეს გარემოება სამი სხეულის ამოცანაში ცვლადთა განცალგების საშუალებას არ იძლევა.

აღნიშნული სიძნელეების მიუხედავად, ამ ბოლო დროს კვანტურ მექანიკაში დამუშავდა მეთოდები, რომლებიც საკმაოდ მნიშვნელოვან იმფორმაციას გვაძლევს სამი სხეულის სისტემაში მიმდინარე ფიზიკური მოვლენების შესახებ [103, 134].

§ 78. ზომიერითი ოპერატორის მატრიცული ელემენტის გამოხატვა სამნაწილაკობრივი თავისუფალი მდგომარეობების მიხედვით

შემდგომში, როდესაც გამოვიყვანთ სამი ნაწილაკის სისტემის მოძრაობის განტოლებებს, ხშირად დაგვეჭირდება სხვადასხვა ოპერატორის მატრიცული ელემენტების გამოთვლა სამნაწილაკობრივი მდგომარეობის ვექტორებით. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ თავისუფალი გრინის ფუნქციის, პოტენციალური ენერჯის, გაფანტვის მატრიცისა და სხვა მატრიცული ელემენტები.

უპირველეს ყოვლისა, ნათელია, რომ სამი ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯის მატრიცული ელემენტისათვის გვექნება

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma, K' | H_0 | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle = H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K) \delta(k'_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta}) \delta(p'_\gamma - p_\gamma) \delta(K' - K), \quad (78,1)$$

სადაც

$$H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K) = \frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} + \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} + \frac{K^2}{2M}; \quad (78,2)$$

მანაადამე, კინეტიკური ენერჯია დიაგონალურია სამივე იმპულსის მიმართ.

სრულად ანალოგიურად სამნაწილაკობრივი გრინის თავისუფალი $G_0(z) = (z - \hat{H}_0)^{-1}$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma, K' | G_0(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle = \frac{\delta(k'_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta}) \delta(p'_\gamma - p_\gamma) \delta(K' - K)}{z - H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K)}. \quad (78,3)$$

.ცხადია, ინტეგრის ცენტრის სისტემაში ეს ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma | G_0(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma \rangle = \frac{\delta(k'_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta}) \delta(p'_\gamma - p_\gamma)}{z - H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma)}, \quad (78,4)$$

სადაც $H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma)$ მიიღება (78,2)-დან $K=0$ დამუშავებით, ე. ი.

$$H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma) = \frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} + \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3) \quad (78,5)$$

იგიველი ნაწილაკებისათვის $m_1 = m_2 = m_3 = m$, გვექნება

$$H_0(k_{\alpha\beta}, p_\gamma) = \frac{k_{\alpha\beta}^2}{m} + \frac{3p_\gamma^2}{4m} \quad (78,6)$$

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს ორი ნაწილაკის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია, რომელიც დამოკიდებულია $r_{\alpha\beta} = r_\alpha - r_\beta$ რადიუსვექტორზე. ვიპოვოთ მისი მატრიცული ელემენტი სამნაწილაკობრივი ბრტყელი ტალღების მდგომარეობით. მატრიცული ელემენტის განმარტებით

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma, K' | v_{\alpha\beta} | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle = (2\pi\hbar)^{-3} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(k'_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta} + p'_\gamma r_\gamma + K'R)} v_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) e^{\frac{i}{\hbar}(k_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta} + p_\gamma r_\gamma + KR)} dr_{\alpha\beta} dr_\gamma dR, \quad (78,7)$$

საიდანაც ნათელია, რომ $v_{\alpha\beta}$ -ს მატრიცული ელემენტი დიაგონალური იქნება ინერციის ცენტრისა და დაუქვეშირებელი მესამე ნაწილაკის p_γ იმპულსის მიმართ:

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma, K' | v_{\alpha\beta} | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle = \delta(p'_\gamma - p_\gamma) \delta(K' - K) \langle k'_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k_{\alpha\beta} \rangle, \quad (78,8)$$

ან C -სისტემაში

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma | v_{\alpha\beta} | k_{\alpha\beta}, p_\gamma \rangle = \delta(p'_\gamma - p_\gamma) \langle k'_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k_{\alpha\beta} \rangle; \quad (78,9)$$

ეს მატრიცული ელემენტი შეესაბამება α და β ნაწილაკების ურთიერთქმედებას, როცა მესამე ნაწილაკი თავისუფლად მოძრაობს. ასეთი მდგომარეობა დამახასიათებელია დაუქვეშირებელი დიაგრამებისათვის.

ახლა ვიპოვოთ სამი ნაწილაკის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის მატრიცული ელემენტი. გვექნება

$$\langle k'_1, k'_2, k'_3 | V | k_1, k_2, k_3 \rangle = (2\pi\hbar)^{-9} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^3 k'_i r_i} V e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^3 k_i r_i} dr_1 dr_2 dr_3. \quad (78,10)$$

თუ ამ ფორმულაში V -ს ნაცვლად შევუბანთ (77,1) გამოსახულებას და გავიხსენებთ (75,11) ფორმულებს ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\langle k'_1, k'_2, k'_3 | V | k_1, k_2, k_3 \rangle = \delta(K' - K) \{ \langle k'_{23} | v_{23} | k_{23} \rangle \delta(p'_1 - p_1) + \langle k'_{31} | v_{31} | k_{31} \rangle \delta(p'_2 - p_2) + \langle k'_{12} | v_{12} | k_{12} \rangle \delta(p'_3 - p_3) \} \quad (78,11)$$

როგორც ვხედავთ, სამი ნაწილაკის პოტენციალური ენერგიის მატრიცული ელემენტი კვლავ დიაგონალურია ინერციის ცენტრის იმპულსის მიმართ, მაგრამ იგი აღარ არის დიაგონალური p_γ -იმპულსების მიმართ.

ახლა განვიხილოთ ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალური განტოლება $T_{\alpha\beta}(z)$ ორ-ნაწილაკობრივი მატრიცისათვის იმ შემთხვევაში, როცა თავისუფალი გრინის ფუნქცია სამნაწილაკობრივია

$$T_{\alpha\beta}(z) = v_{\alpha\beta} + v_{\alpha\beta} G_0(z) T_{\alpha\beta}(z), \quad (78,12)$$

სადაც წმინდა ორნაწილაკობრივი შემთხვევისაგან განსხვავებით, $G_0(z)$, როგორც აღვნიშნეთ, სამნაწილაკობრივი თავისუფალი გრინის ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ ხოლმე, რომ $T_{\alpha\beta}(z)$ წარმოადგენს ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცას სამი ნაწილაკის მდგომარეობათა ჰილბერტის სივრცეში. გაფანტვის ასეთი მატრიცებით გამოიხატება სამი ნაწილაკის ამოცანის შესაბამისი მოძრაობის განტოლება, ამიტომ მათი მატრიცული ელემენტების განხილვას დიდი მნიშვნელობა აქვს. ავიღოთ $T_{\alpha\beta}(z)$ ოპერატორის მატრიცული ელემენტები $\langle k_{\alpha\beta} p_\gamma | K \rangle$ ვექტორებით და გავიხსენოთ (78,3) და (78,8) ფორმულები; მივიღებთ

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma, K' | T_{\alpha\beta}(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle = \delta(K' - K) \delta(p'_\gamma - p_\gamma) \langle k'_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k_{\alpha\beta} \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle k'_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k''_{\alpha\beta} \rangle \langle k''_{\alpha\beta}, p_\gamma, K' | T_{\alpha\beta}(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle}{z - H_0(k''_{\alpha\beta}, p_\gamma, K)} dk''_{\alpha\beta}. \quad (78,13)$$

იტერაციით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma, K | T_{\alpha\beta}(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma, K \rangle = \delta(K' - K) \delta(p'_\gamma - p_\gamma). \quad (78,14)$$

სადაც $t_{\alpha\beta}$ უკვე წმინდა ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცაა წანაცვლებული ენერგიით. C -სისტემაში იგივე ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma | T_{\alpha\beta}(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma \rangle = \delta(p'_\gamma - p_\gamma) \langle k'_{\alpha\beta} | t_{\alpha\beta} \left(z - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} \right) | k_{\alpha\beta} \rangle. \quad (78,15)$$

მაშასადამე, $T_{\alpha\beta}(z)$ -მატრიცა წარმოადგენს ორნაწილაკობრივი მატრიცის განზოგადებას იმ თვალსაზრისით, რომ იგი შეიცავს α -და β -ნაწილაკების გაფანტვას γ -ნაწილაკის არსებობის შემთხვევაში; ამასთან, γ -ნაწილაკის მონაწილეობა მატრიცაში გამოიხატება, ერთი მხრივ, დირაკის დელტა ფუნქციით, ხოლო მეორე მხრივ, მატრიცა სრულ ენერგიაზე კი აღარ არის დამოკიდებული, არამედ მას აკლდება მესამე ნაწილაკის $p_\gamma^2/2\mu_\gamma$ ფარდობითი კინეტიკური ენერგია. ე. ი. მატრიცა დამოკიდებულია სიდიდეზე

$$z(p_\gamma) = z - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma}. \quad (78,16)$$

ადვილად ვიპოვით თავისუფალი გრინის ფუნქციისა და $T_{\alpha\beta}(z)$ -მატრიცების კომბატულებას (75,45) ფორმულით განმარტებულ p, q ცვლადებშიც.

თანახმად (75,48) ფორმულისა, აშკარაა, რომ

$$\langle p', q' | G_0(z) | p, q \rangle = \frac{\delta(p' - p) \delta(q' - q)}{z - (p^2 + q^2)}, \quad (78,17)$$

ხოლო $T(z)$ -მატრიცისათვის ასევე მარტივად მივიღებთ

$$\langle p', q' | T(z) | p, q \rangle = \delta(q' - q) \langle p' | t(z - q^2) | p \rangle. \quad (78,18)$$

ამ პარაგრაფში მიღებულ ფორმულებს ხშირად გამოვიყენებთ სამი სხეულის ამოცანის განხილვისას. ამავე დროს შემდგომში ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცას $T(z)$ -ის ნაცვლად აღვნიშნაუთ $t(z)$ -ით.

§ 78. შრედინგერის განტოლება სამი ნაწილაკის
სისტემისათვის

შრედინგერის განტოლება სამი ნაწილაკის სისტემისათვის, როცა ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედებას აქვს წყვილური ხასიათი, დეკარტის კოორდინატებში შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\left(E + \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{r_i} \right) \Psi(r_1, r_2, r_3) = \sum_{i>j}^3 v_{ij}(r_{ij}) \Psi(r_1, r_2, r_3), \quad (79,1)$$

სადაც

$$\Delta_{r_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_{r_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_{r_2} - \frac{\hbar^2}{2m_3} \Delta_{r_3} \quad (79,2)$$

წარმოადგენს სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ოპერატორს. E კი სრული ენერჯიაა. ამ განტოლების გადაწერა ადვილად შეიძლება იაკობის კოორდინატებში, რისთვისაც ცვლადთა სამი შესაძლო ვარიანტიდან შეგვიძლია ვისარგებლოთ ერთ-ერთით.

მაგალითად, ავიღოთ r_{23} , ρ_1 , R ცვლადები. მაშინ (75,17) და (75,9) ფორმულების თანახმად, მარტივად მივიღებთ

$$\left[E + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \Delta_{\rho_1} + \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R \right) \right] \Psi(r_{23}, \rho_1, R) = \left[v_{12} \left(\rho_1 + \frac{m_3}{m_{23}} r_{23} \right) + v_{23}(r_{23}) + v_{31} \left(\rho_1 - \frac{m_2}{m_{23}} r_{23} \right) \right] \Psi(r_{23}, \rho_1, R). \quad (79,3)$$

პოტენციალური ენერჯია სისტემის სიმძიმის ცენტრის R -რადიუს-ვექტორზე არ არის დამოკიდებული და ტრანსლაციური ინვარიანტობა ახასიათებს, ამიტომ ადვილია სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის გამოყოფა. მართლაც, თუ ავიღებთ

$$\Psi(r_{23}, \rho_1, R) = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{iPR} \psi_0(r_{23}, \rho_1), \quad (79,4)$$

სადაც P -სიმძიმის ცენტრის იმპულსია; მაშინ $\psi(r_{23}, \rho_1)$ ფუნქციისათვის გვექნება შრედინგერის შემდეგი განტოლება:

$$\left[E + \frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \Delta_{\rho_1} \right] \psi_0(r_{23}, \rho_1) = \left[v_{12} \left(\rho_1 + \frac{m_3}{m_{23}} r_{23} \right) + v_{23}(r_{23}) + v_{31} \left(\rho_1 - \frac{m_2}{m_{23}} r_{23} \right) \right] \psi_0(r_{23}, \rho_1). \quad (79,5)$$

როგორც ვხედავთ, განტოლება დამოკიდებულია ორ ვექტორულ სიდიდეზე (ექვს კოორდინატზე), ამიტომ, ზოგად შემთხვევაში, ამ განტოლებაში ცვლადების განცალკეება არ ხდება.

სხვადასხვა კოორდინატებზე გადასასვლელად ხელსაყრელია შრედინგერის განტოლების ჩაწერა ღირაკის აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში, გვექნება

$$(E - \hat{H}_0) |\psi\rangle = \sum_{i>j}^3 v_{ij}(r_{ij}) |\psi\rangle. \quad (79,6)$$

ამასთან, რადგან პოტენციალური ვიწროვანი ტრანსილაციურად ინვარიანტულია, ამიტომ (79,6)-ში ვგულისხმობთ, რომ სისტემის სიმძიმის ცენტრი გამოირიცხვება.

ახლა შრედინგერის სამი ნაწილაკის სისტემის განტოლება ჩაწეროთ იმპულსურ წარმოდგენაში, რამდენადაც ამ შემთხვევაში შრედინგერის განტოლების ანალიზი განსაკუთრებით ხელსაყრელია. ამ მიზნით, (79,6) განტოლება გავამრავლოთ სკალარულად $\langle k_{23}, p_1 |$ ვექტორზე; ამავე დროს, თუ გამოვიყენებთ ერთეულოვანი ოპერატორების ჩასმას, გვექნება

$$\int \langle k_{23}, p_1 | E - \hat{H}_0 | k_{23}, p_1' \rangle \langle k_{23}, p_1' | \psi \rangle dk_{23} dp_1' = \int \langle k_{23}, p_1 | \sum_{i>j}^3 v_{ij}(r_{ij}) | k_{23}, p_1' \rangle \langle k_{23}, p_1' | \psi \rangle dk_{23} dp_1'. \quad (79,7)$$

თუ გავიხსენებთ (78,1) და ნორმირების (75,28) ფორმულებს, მარტივად მივიღებთ

$$\left[E - \left(\frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} \right) \right] \psi(k_{23}, p_1) = \int |\langle k_{23}, p_1 | v_{12} | k_{23}, p_1' \rangle + \langle k_{23}, p_1 | v_{23} | k_{23}, p_1' \rangle + \langle k_{23}, p_1 | v_{31} | k_{23}, p_1' \rangle| \psi(k_{23}, p_1') dk_{23} dp_1'. \quad (79,8)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, იმპულსურ წარმოდგენაში შრედინგერის განტოლება ინტეგრალური განტოლებაა. (79,8) განტოლებაში $\psi(k_{23}, p_1)$ არის ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში; შრედინგერის კოორდინატულ ფუნქციასთან იგი დაკავშირებულია ფორმულით

$$\psi(k_{23}, p_1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(k_{23}r_{23} + p_1 \rho_1)} \psi_0(r_{23}, \rho_1) dr_{23} d\rho_1. \quad (79,9)$$

ცხადია, იმპულსურ სივრცეზე გადასვლით სამი ნაწილაკის შრედინგერის განტოლება არ გამარტივებულა, იგი კვლავ ორ ვექტორზეა დამოკიდებული და ცვლადთა განცალკების საშუალებას არ იძლევა.

აღვნიშნოთ, რომ შრედინგერის განტოლებაში ჩვენ შეგვეძლო ცვლადებად აგველო (k_{12}, p_2) , ან (k_{31}, p_2) . შრედინგერის (79,8) განტოლებაში შემავალი მატრიცული ელემენტები თავის შესაბამის იაკობის კოორდინატებში განისაზღვრება (78,9) ფორმულით

$$\langle k_{\alpha\beta}, p_\gamma | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma \rangle = \delta(p_\gamma - p'_\gamma) \langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle. \quad (79,10)$$

თუ გავითვალისწინებთ (75,24) ტოლობას და (79,8) განტოლებაში მოვახდენთ ცვლადის შეცვლას ისე, რომ თითოეულ ინტეგრალში შემოვიღებთ იაკობის საკუთარ კოორდინატებს, მაშინ, რამდენადაც

$$dk'_{23} dp'_1 = dk'_{31} dp'_2 = dk'_{12} dp'_3, \quad (79,11)$$

შედეგად მივიღებთ

$$\left[E - \left(\frac{k_{12}^2}{2\mu_{23}} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} \right) \right] \psi(k_{23}, p_1) = \int \langle k_{12} | v_{12} | k'_{12} \rangle \delta(p_3 - p'_3) \psi(k'_{12}, p'_3) dk'_{12} dp'_3 + \int \langle k_{23} | v_{23} | k'_{23} \rangle \delta(p_1 - p'_1) \psi(k'_{23}, p'_1) dk'_{23} dp'_1 + \int \langle k_{31} | v_{31} | k'_{31} \rangle \delta(p_2 - p'_2) \psi(k'_{31}, p'_2) dk'_{31} dp'_2. \quad (79,12)$$

დირაკის დელტა ფუნქციებით ინტეგრაციის ჩატარების შემდეგ გვექნება:

$$\left[E - \left(\frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} \right) \right] \psi(k_{23}, p_1) = \int \langle k_{12} | r_{12} | k'_{12} \rangle \psi(k'_{12}, p_2) / dk'_{12} + \int \langle k_{23} | v_{23} | k'_{23} \rangle \psi(k'_{23}, p_1) / dk'_{23} + \int \langle k_{31} | r_{31} | k'_{31} \rangle \psi(k'_{31}, p_2) / dk'_{31}. \quad (79.13)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სამი ნაწილაკის შრედინგერის განტოლების ამოხსნა შესაძლოა ფიზიკური ურთიერთქმედებისათვის, ზოგად შემთხვევაში, შეუძლებელია. ამჟამად ასევე არ ხერხდება განტოლების ამოხსნა მანქანური მეთოდით, რამდენადაც არსებული მანქანების სიჩქარე და მახსოვრობა ჯერ კიდევ საკმარისი არ არის მრავალჯერადი ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნისათვის.

განვიხილოთ ძალზე კერძო შემთხვევა, როცა სამი ნაწილაკის სისტემაში ურთიერთქმედება ხდება მხოლოდ ორ ნაწილაკ შორის, მესამე კი უმოქმედოა. მაგალითად, ვთქვათ, რომელიმე $v_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \neq 0$, დანარჩენი ორი პოტენციალი კი ნულის ტოლია. მაშინ (79.13) განტოლებიდან გვექნება

$$\left[E - \left(\frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} + \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} \right) \right] \psi(k_{\alpha\beta}, p_\gamma) = \int \langle k_{\alpha\beta} | r_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle \psi(k'_{\alpha\beta}, p_\gamma) / dk'_{\alpha\beta}. \quad (79.14)$$

ეს განტოლება საშუალებას იძლევა ცვლადის განცალკევებას. მართლაც, მოვიქმენოთ ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$\psi_{p_\gamma, n_{\alpha\beta}}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma) = \delta(p_\gamma - p'_\gamma) \varphi_{n_{\alpha\beta}}(k_{\alpha\beta}), \quad (79.15)$$

სადაც p_γ -მესამე დაუკავშირებელი ნაწილაკის იმპულსის დაფიქსირებული მნიშვნელობაა, $n_{\alpha\beta}$ კი — ურთიერთმოქმედი წყვილის კვანტური რიცხვების ერთობლიობა. (79.14) განტოლება (79.15) ფუნქციის შტანის შემდეგ მოგვეკვს

$$\left(E_{p_\gamma} - \frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} \right) \varphi_{n_{\alpha\beta}}(k_{\alpha\beta}) = \int \langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle \varphi_{n_{\alpha\beta}}(k'_{\alpha\beta}) / dk'_{\alpha\beta}. \quad (79.16)$$

რომელიც წარმოადგენს ორი (α და β) ნაწილაკის შესაბამის შრედინგერის განტოლებას იმპულსურ წარმოდგენაში ენერგიით;

$$E_{p_\gamma} = E - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma}; \quad \mu_\gamma = \frac{m_\gamma m_{\alpha\beta}}{M}. \quad (79.17)$$

მაშასადამე, ჩვენ მიერ განხილულ კერძო შემთხვევაში ტალღური ფუნქცია წარმოადგენს ორი ნაწილაკის შესაბამისი ფარდობითი მოძრაობის ტალღური ფუნქციისა და მესამე ნაწილაკის თავისუფალი მოძრაობის ბრტყელი ტალღის ნამრავლს. როცა (79.17) შრედინგერის განტოლებას დისკრეტული სპექტრი აქვს, მაშინ $n_{\alpha\beta}$ -ში იგულისხმება ყველა იმ კვანტური რიცხვების ერთობლიობა, რომლებიც ორნაწილაკობრივ დისკრეტულ სპექტრს განსაზღვრავს. ხოლო როცა განტოლებას უწყვეტი სპექტრი აქვს, მაშინ $n_{\alpha\beta}$ ტოლი იქნება $k_{\alpha\beta}^2$ -ისა, რომელიც წარმოადგენს ფარდობითი მოძრაობის იმპულსის დაფიქსირებულ მნიშვნელობას. ჩვენ შემდგომში დაგვირდება (79.16) განტოლების უწყვეტი სპექტრის ისეთი ამონახსნები, რომლებიც გაფანტვის სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ერთ-ერთი ნაწილაკის მასა უსასრულოების ტოლია. ამ შემთხვევაში, მართალია, ამოცანა მარტივდება, მაგრამ მასში,

წინა შემთხვევასაგან განსხვავებით, შენარჩუნებულია სამი სხეულის ამოცანისათვის დამახასიათებელი თავისებურებანი. ვთქვათ, მესამე ნაწილაკის მასა უსასრულობის ტოლია, მაშინ ხელსაყრელია კოორდინატთა სათავე ამ ნაწილაკში მოვთავსოთ. ცხადია, ასეთი სისტემის შრედიწერის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\left(E + \frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_{r_1} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_{r_2} \right) \psi(r_1, r_2) = [v_1(r_1) + v_2(r_2) + v_{12}(r_1 - r_2)] \psi(r_1, r_2), \quad (79,18)$$

სადაც r_1 და r_2 პირველი და მეორე ნაწილაკის რადიუსვექტორებია სათავეთ m_3 ნაწილაკში.

ეს განტოლება ადვილად დაიწერება იმპულსურ წარმოდგენაშიც; თუ k_1 და k_2 -ით აღნიშნავთ პირველი და მეორე ნაწილაკის იმპულსებს, მაშინ

$$\left(E - \frac{k_1^2}{2m_1} - \frac{k_2^2}{2m_2} \right) \psi(k_1, k_2) = \int |\langle k_1, k_2 | v_1 | k'_1, k'_2 \rangle + \langle k_1, k_2 | v_2 | k'_1, k'_2 \rangle + \langle k_1, k_2 | v_{12} | k'_1, k'_2 \rangle| \psi(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2. \quad (79,19)$$

ამასთან, ცხადია, მატრიცული ელემენტები განისაზღვრებიან ფორმულებით

$$\langle k_1, k_2 | v_1 | k'_1, k'_2 \rangle = \delta(k_2 - k'_2) \langle k_1 | v_1 | k'_1 \rangle, \quad (79,20)$$

$$\langle k_1, k_2 | v_2 | k'_1, k'_2 \rangle = \delta(k_1 - k'_1) \langle k_2 | v_2 | k'_2 \rangle, \quad (79,21)$$

$$\langle k_1, k_2 | v_{12} | k'_1, k'_2 \rangle = \delta(K - K') \langle k_{12} | v_{12} | k'_{12} \rangle, \quad (79,22)$$

სადაც სისტემის სრული K -იმპულსი და ფარდობითი k_{12} -იმპულსი ტოლია გამოსახულებებისა

$$K = k_1 + k_2, \quad k_{12} = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_{12}}. \quad (79,23)$$

უკანასკნელი მატრიცული ელემენტის მოძებნა ადვილია, თუ მატრიცული ელემენტის განმარტებაში

$$\langle k_1, k_2 | v_{12} | k'_1, k'_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(k_1 r_1 + k_2 r_2)} v_{12}(r_{12}) e^{\frac{i}{\hbar}(k'_1 r_1 + k'_2 r_2)} dr_1 dr_2 \quad (79,24)$$

შემოვიღებთ იაკობის r_{12} და R ვექტორებს ორი ნაწილაკისათვის.

კერძო სახის პოტენციალებისათვის (79,19) განტოლებას ხშირად იყენებენ კონკრეტული გამოთვლების დროს.

§ 80. სამი ნაწილაკის სისტემის შრედიწერის განტოლება არალოკალური ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედების შემთხვევაში

როგორც აღვნიშნეთ, სამი ნაწილაკის ამოცანა ზოგად შემთხვევაში საკირო სიზუსტით ამჟამად სწრაფმთვლელ ელექტრონულ მანქანებზეც კი არ იხსნება. მაგრამ როცა ურთიერთქმედებას არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალის სახე აქვს, მაშინ იგივეური ნაწილაკების შემთხვევაში შრედიწერის განტოლება და-

იყვანება ერთგანზომილებიან ფოკალური ინტეგრალურ განტოლებასზე, რომლის ამოხსნა მიახლოებითი მეთოდებით ძნელი არ არის. როცა სისტემა შედგება სამი არაიგივერი ნაწილაკისაგან, მაშინ შრედინგერის განტოლება დაიყვანება სისტემაზე, რომელიც შეიცავს სამ ერთგანზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებას. როცა ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედება, ერთი წევრის ნაცვლად რამდენიმეს შეიცავს, მაშინ სისტემის შემადგენელ განტოლებათა რიცხვი იზრდება.

სამი იგივერი ნაწილაკის სისტემა. სიმარტივის მიზნით ჯერ განვიხილოთ იგივერი ნაწილაკთა სისტემა. ვთქვათ, სამივე ნაწილაკს ერთი და იგივე მასა აქვს და იგი m -ით აღვნიშნოთ [56, 78].

არალოკალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში სამი ნაწილაკის შრედინგერის განტოლება იმპულსურ წარმოდგენაში კვლავ (79,13) ფორმით გამოიხატება, ოღონდ, ამ შემთხვევაში, მატრიცული ელემენტები შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-i k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}} v(r_{\alpha\beta}, r'_{\alpha\beta}) e^{i k'_{\alpha\beta} r'_{\alpha\beta}} dr_{\alpha\beta} dr'_{\alpha\beta}. \quad (80,1)$$

ფაქტორიზებადობა კი ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ფორმულას

$$\langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle = -\frac{\hbar^2}{\pi^2 |k_{\alpha\beta}|} \sum_{l,m} \lambda_l v_{\alpha\beta}^{(l)}(k_{\alpha\beta}) v_{\alpha\beta}^{(l)}(k'_{\alpha\beta}) Y_{lm}^*(\bar{k}_{\alpha\beta}) Y_{lm}(\bar{k}'_{\alpha\beta}), \quad (80,2)$$

სადაც $\mu_{\alpha\beta}$ α და β ნაწილაკების დაყვანილი მასაა.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $l=0$; გარდა ამისა, რადგან სისტემა იგივერი ნაწილაკებისაგან შედგება, ამიტომ

$$\langle k_{\alpha\beta} | v | k'_{\alpha\beta} \rangle = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2\pi^2 m} v(k_{\alpha\beta}) v(k'_{\alpha\beta}). \quad (80,3)$$

გამოვიყენოთ შრედინგერის (79,13) განტოლება და ვიპოვოთ ბმული მდგომარეობები. ვავითვალისწინოთ, რომ ბმული მდგომარეობებისათვის $E = -\mathcal{E}$ და (80,3) ფორმულის დახმარებით დავწეროთ

$$J(k_{23}, p_1; \mathcal{E}) \psi(k_{23}, p_1) = \frac{\hbar^2 \lambda}{2\pi^2 m} \{v(k_{12}) \varphi(p_3) + v(k_{23}) \varphi(k_{23}) - v(k_{31}) \varphi(k_{31})\}, \quad (80,4)$$

სადაც

$$J(k_{23}, p_1; \mathcal{E}) = \mathcal{E} + \frac{k_{23}^2}{m} + \frac{3p_1^2}{4m}, \quad (80,5)$$

ხოლო

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(q) \psi(q, p) dq. \quad (80,6)$$

როგორც (80,4) გამოსახულებიდან ჩანს, სამი ნაწილაკის ამოცანის ტალღურ ფუნქციას აქვს შემდეგი გამოხატულება:

$$\Psi = \psi(k_{23}, p_1) + \psi(k_{31}, p_2) + \psi(k_{12}, p_3), \quad (80,7)$$

სადაც თითოეული $\psi(k_{\alpha\beta}, p_\gamma)$ ფუნქცია, თუ გავითვალისწინებთ (75,20) ფორმულას, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში მოგვცემს

$$D_{23}(k_{23}, p_1; \mathbb{G}) = D_{31}(k_{31}, p_2; \mathbb{G}) = D_{12}(k_{12}, p_3; \mathbb{G}), \quad (80,8).$$

განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$\psi^{(\gamma)}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma) = \frac{\hbar^2 \lambda}{2\pi^2 m} \frac{v_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) \varphi(p_\gamma)}{D(k_{\alpha\beta}, p_\gamma; \mathbb{G})}. \quad (80,9)$$

ახლა გამოვხატოთ (k_{12}, p_3) , (k_{31}, p_2) სიდიდეები k_{23} და p_1 ცვლადების საშუალებით. (75,34) და (75,36) ფორმულების თანახმად, იგივეური ნაწილაკებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} k_{12} &= -\frac{1}{2} k_{23} - \frac{3}{4} p_1, & p_3 &= k_{23} - \frac{1}{2} p_1. \\ k_{31} &= -\frac{1}{2} k_{23} + \frac{3}{4} p_1, & p_2 &= -k_{23} - \frac{1}{2} p_1. \end{aligned} \quad (80,10).$$

ხოლო (80.4) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \psi(k, p) &= \frac{\hbar^2 \lambda}{2\pi^2 m D(k, p; \mathbb{G})} \left\{ v\left(\left|\frac{1}{2}k + \frac{3}{4}p\right|\right) \varphi\left(k - \frac{1}{2}p\right) + \right. \\ &\quad \left. v(k) \varphi(p) + v\left(\left|-\frac{1}{2}k + \frac{3}{4}p\right|\right) \varphi\left(-k - \frac{1}{2}p\right) \right\} \quad (80,11). \end{aligned}$$

ცხადია, ამ ფუნქციას ახასიათებს სიმეტრია

$$\psi(-k, p) = \psi(k, p). \quad (80,12).$$

შევტანოთ (80,11) ფუნქცია (80,6) აღნიშვნაში; გვექნება

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \frac{\hbar^2 \lambda}{2\pi^2 m} \left\{ \int \frac{v(|q|) v\left(\left|\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}p\right|\right) \varphi\left(q - \frac{1}{2}p\right) dq}{D(q, p; \mathbb{G})} + \right. \\ &\quad \left. \int \frac{v^2(|q|) \varphi(p)}{D(q, p; \mathbb{G})} dq + \int \frac{v(|q|) v\left(\left|\frac{1}{2}q - \frac{3}{4}p\right|\right) \varphi\left(-q - \frac{1}{2}p\right) dq}{D(q, p; \mathbb{G})} \right\}; \quad (80,13). \end{aligned}$$

თუ პირველ ინტეგრალში შემოვიღებთ ახალ ცვლადს $Q = q - p/2$, ხოლო ბოლოში $Q = -q - p/2$, მაშინ ეს ინტეგრალები ერთმანეთს დაემთხვევა და გვექნება

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\hbar^2 \lambda}{2\pi^2 m} \int \frac{v^2(q) dq}{D(q, p; \mathbb{G})}\right) \varphi(p) = \\ &\frac{\hbar^2 \lambda}{\pi^2 m} \int \frac{v(|p+Q/2|) v(|Q+p/2|) \varphi(Q) dQ}{D(|Q+p/2|, p; \mathbb{G})}. \quad (80,14). \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ (80,5) ფორმულა; ადვილად მივიღებთ, რომ

$$mJ(|Q+p/2|, p; \xi) = m\xi + Q^2 + p^2 + (Qp).$$

განტოლებაში პლანკის მუდმივის მოცილების მიზნით, იმპულსების ნაცვლად ვიგულისხმობთ, რომ q , p და Q ტალღური ვექტორებია. მაშინ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\gamma^2 = \frac{m\xi}{\hbar^2}, \quad (80,15)$$

საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\left(1 - \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{v^2(q) q^2 dq}{\gamma^2 + q^2 + 3p^2/4}\right) \varphi(p) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\infty \varphi(Q) K(Q, p; \gamma) Q^2 dQ, \quad (80,16)$$

სადაც ინტეგრალური განტოლების გული ტოლია

$$K(Q, p; \gamma) = \int_{-1}^{+1} \frac{v(\sqrt{p^2 + Q^2/4 + pQx}) v(\sqrt{Q^2 + p^2/4 + pQx}) dx}{\gamma^2 + Q^2 + p^2 + pQx}. \quad (80,17)$$

ცხადია, ეს გამოსახულება სიმეტრიულია Q და p ცვლადების მიმართ

$$K(Q, p; \gamma) = K(p, Q; \gamma); \quad (80,18)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\xi(p) = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v^2(q) q^2 dq}{\gamma^2 + q^2 + 3p^2/4}, \quad (80,19)$$

მაშინ ინტეგრალური განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\xi(p) \varphi(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Q^2 dQ K(Q, p; \gamma) \varphi(Q). \quad (80,20)$$

ხშირად უფრო ხელსაყრელია სხვა ფუნქციის შემოღება შემდეგი აღნიშვნით:

$$F(p) = \xi(p) \varphi(p). \quad (80,21)$$

ამ აღნიშვნაში (80,20) ინტეგრალური განტოლება ასე გადაიწერება:

$$F(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{\xi(Q)} K(Q, p; \gamma) F(Q). \quad (80,22)$$

ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ სხვა აღნიშვნაც, კერძოდ,

$$\Phi(p) = \xi^{1/2}(p) \varphi(p), \quad (80,23)$$

მაშინ ინტეგრალური განტოლების გული სიმეტრიული გახდება; მართლაც, ვეჭვ-
ნება

$$\Phi(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q^2 dQ M(Q, p; \gamma) \Phi(Q), \quad (80,24)$$

სადაც

$$M(Q, p; \gamma) = \frac{K(Q, p; \gamma)}{\xi^{1/2}(Q) \xi^{1/2}(p)}; \quad (80,25)$$

როგორც ვხედავთ, (80,18) თვისებით $M(Q, p; \gamma) = M(p, Q; \gamma)$.

ამგვარად, სამი იგივეური ნაწილაკის ამოცანა ფაქტორიზებადი პოტენციალის შემთხვევაში დავიდა ერთგანზომილებიან ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოხსნა ძნელი არ არის მიახლოებითი მეთოდებით.

როცა ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმას აქვს იამაგუჩის სახე $\pi(p) = (\beta^2 + p^2)^{-1}$, მაშინ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\xi(p) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\beta \left(\beta + \sqrt{\gamma^2 + \frac{3}{4} p^2} \right)^2}, \quad (80,26)$$

ხოლო ინტეგრალური განტოლების გული ტოლი იქნება

$$K(Q, p; \gamma) = \frac{1}{(Qp)^3 (b-a)(c-a)} \left\{ \ln \frac{a+1}{a-1} - \frac{c-a}{c-b} \ln \frac{b+1}{b-1} - \frac{b-a}{b-c} \ln \frac{c+1}{c-1} \right\}, \quad (80,27)$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$a = \frac{\gamma^2 + Q^2 + p^2}{Qp}, \quad b = \frac{\beta^2 + Q^2 + \frac{1}{4} p^2}{Qp}, \quad c = \frac{\beta^2 + p^2 + \frac{1}{4} Q^2}{Qp}. \quad (80,28)$$

ამის შემდეგ არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს (80,16) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა ელექტრონული მანქანის საშუალებით. ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება სამი სხეულის ბმის ენერგია $\mathcal{E} = \frac{\gamma^2 h^2}{m}$ და $\varphi(p)$ ფუნქცია, რომლის (80,11) გამოსახულებაში შეტანით ვიპოვით სამი სხეულის ამოცანის შესაბამის ტალღურ ფუნქციასაც.

შეიძლება მოხდეს, რომ $\xi(p) = 0$, მაშინ, თუ შევადარებთ (80,19) გამოსახულებას ორი სხეულის ამოცანაში მიღებულ ბმის ენერგიის (65,8) ფორმულას, ეს შესაძლებელი იქნება მაშინ, როცა

$$\gamma^2 + \frac{3}{4} p^2 = \alpha^2, \quad (80,29)$$

სადაც α^2 დაკავშირებულია ორი სხეულის ბმის ენერგიასთან. სამი სხეულის ბმის ენერგია მეტია ორი სხეულის ბმის ენერგიაზე, ამიტომ (80,29) ტოლობა რეალური უ-სათვის არ დაკმაყოფილდება. მაგრამ (80,29) განტოლების ამონახსნი ($\gamma \ll \alpha$)

შეიძლება შეესაბამებოდეს სამი ნაწილაკის სისტემის აღვზნებულ მდგომარეობას ენერჯით, რომელიც ნაკლები იქნება ორი ნაწილაკის ბმის ენერჯიაზე. ასე რომ, საზოგადოდ, შესაძლოა ინტეგრალურ განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნები, რომლებიც აღვზნებულ მდგომარეობებს შეესაბამება [67, 161].

ხაში არაიგივური ნაწილაკის სისტემა [78]. ახლა განვიხილოთ განსხვავებული მასების მქონე ნაწილაკები და, ვთქვათ, სხვადასხვა წყვილი განსხვავებული ფაქტორიზებადი პოტენციალებით ურთიერთქმედებენ $l=0$ მდგომარეობაში. მაშინ ურთიერთქმედებას ექნება გამოხატულება

$$\langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle = - \frac{\hbar^2 \lambda_{\alpha\beta}}{4\pi^2 \mu_{\alpha\beta}} v_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) v_{\alpha\beta}(k'_{\alpha\beta}), \quad (80,30)$$

ხოლო ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია, შრედინგერის (79,13) განტოლების თანახმად, შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$\psi = \psi^{(1)}(k_{2\alpha}, p_1) + \psi^{(2)}(k_{31}, p_2) + \psi^{(3)}(k_{12}, p_3); \quad (80,31)$$

ამასთან, ჩვენ გავითვალისწინებთ (80,8) ტოლობა. (80,31) გამოსახულებაში $\psi^{(i)}$ ფუნქციები განისაზღვრება ფორმულით

$$\psi^{(i)}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma) = \frac{\hbar^2 \lambda_{\alpha\beta}}{4\pi^2 \mu_{\alpha\beta}} \frac{v_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) \varphi_{\alpha\beta}(p_\gamma)}{D_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma; \mathcal{E})}, \quad (80,32)$$

სადაც

$$D_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma; \mathcal{E}) = \mathcal{E} + \frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} + \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3) \quad (80,33)$$

ხოლო

$$\varphi_{\alpha\beta}(p_\gamma) = \int v_{\alpha\beta}(q) \psi(q, p_\gamma) dq. \quad (80,34)$$

$\varphi_{\alpha\beta}(p_\gamma)$ ფუნქციების განსასაზღვრად მიიღება ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, რომლის საპონენლად საკმარისია (80,34) გამოსახულებაში (80,31) ფუნქციის შეტანა და (80,32)-ის გათვალისწინება. ამასთან, ყველა გამოსახულება უნდა გამოვხატოთ ცვლადთა ერთი რომელიმე წყვილით. ამისათვის დაგვეჭირება (75,34) — (75,36) ფორმულების გამოყენება. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\Omega_{\alpha\beta}(p) \varphi_{\alpha\beta}(p) = \frac{\hbar^2 \lambda_{\beta\gamma}}{4\pi^2 \mu_{\beta\gamma}} \int_0^\infty \frac{v_{\alpha\beta}\left(Q + \frac{m_\alpha}{m_{\alpha\beta}} p\right) v_{\beta\gamma}\left(\frac{m_\gamma}{m_{\beta\gamma}} Q + p\right) \varphi_{\beta\gamma}(Q) Q^2 dQ d\Omega_Q}{D_{\beta\gamma}\left(\frac{m_\gamma}{m_{\beta\gamma}} Q + p, Q; \mathcal{E}\right)} +$$

$$\frac{\hbar^2 \lambda_{\alpha\gamma}}{4\pi^2 \mu_{\alpha\gamma}} \int_0^\infty \frac{v_{\alpha\gamma}\left(Q + \frac{m_\beta}{m_{\alpha\beta}} p\right) v_{\alpha\gamma}\left(\frac{m_\gamma}{m_{\alpha\gamma}} Q + p\right) \varphi_{\alpha\gamma}(Q) Q^2 dQ d\Omega_Q}{D_{\alpha\gamma}\left(\frac{m_\gamma}{m_{\alpha\gamma}} Q + p, Q; \mathcal{E}\right)}, \quad (80,35)$$

სადაც

$$\Omega_{\alpha\beta}(p) = 1 - \frac{\hbar^2 \lambda_{\alpha\beta}}{\pi \mu_{\alpha\beta}} \int_0^\infty \frac{v_{\alpha\beta}^2(q) q^2 dq}{D_{\alpha\beta}(q, p; \mathcal{E})}. \quad (80,36)$$

როგორც ვხედავთ, (80,35) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა შეიცავს ერთ-განზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებებს, ამიტომ მათი ამოხსნა აგრეთვე შესაძლებელია ელექტრონულ მანქანებზე.

კერძო შემთხვევაში, როცა ნაწილაკები იგივეურია, ე. ი. $m_1 = m_2 = m_3 = m$, მაშინ (80,35) სისტემა დაიყვანება ჩვენთვის უკვე ცნობილ (80,16) ინტეგრალურ განტოლებაზე.

საინტერესოა ისეთი შემთხვევის განხილვა, როცა ორ ნაწილაკს ტოლი მასა აქვს, მესამე ნაწილაკის მასა კი განსხვავებულია. მაგალითად, ვთქვათ, $m_3 = m_3 = m$, მაშინ, ბუნებრივია, $\lambda_{13} = \lambda_{12}$ და (80,35) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა ორ განტოლებაზე დაიყვანება:

$$\begin{aligned} \Omega_{23}(p) \varphi_{23}(p) &= \frac{\hbar^2 \lambda_{12}}{2\pi^2 \mu_{12}} \int_0^\infty \frac{v_{23} \left(\mathbf{Q} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) v_{12} \left(\frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{Q} + \mathbf{p} \right) \varphi_{12}(Q) Q^2 dQ d\Omega_Q}{D_{12} \left(\frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{Q} + \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathfrak{E} \right)} \\ \Omega_{13}(p) \varphi_{13}(p) &= \frac{\hbar^2 \lambda_{23}}{4\pi^2 \mu_{23}} \int_0^\infty \frac{v_{12} \left(\mathbf{Q} + \frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{p} \right) v_{23} \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \right) \varphi_{23}(Q) Q^2 dQ d\Omega_Q}{D_{23} \left(\frac{1}{2} \mathbf{Q} + \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathfrak{E} \right)} + \\ &\frac{\hbar^2 \lambda_{12}}{4\pi^2 \mu_{12}} \int_0^\infty \frac{v_{12} \left(\mathbf{Q} + \frac{m}{m_{12}} \mathbf{p} \right) v_{12} \left(\frac{m}{m_{12}} \mathbf{Q} + \mathbf{p} \right) \varphi_{12}(Q) Q^2 dQ d\Omega_Q}{D_{12} \left(\frac{m}{m_{12}} \mathbf{Q} + \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathfrak{E} \right)}. \end{aligned} \quad (80,37)$$

ამ განტოლებებში შემავალი $D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathfrak{E})$ სიდიდეები აღვიღად გამოითვლება (80,33) გამოსახულებების დახმარებით; სახელდობრ, გვექნება:

$$\begin{aligned} m D_{12} \left(\frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{Q} + \mathbf{p}, \mathbf{Q}; \mathfrak{E} \right) &= m \mathfrak{E} + \mathbf{Q}^2 + (\mathbf{Q}\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \nu p^2, \\ m D_{12} \left(\frac{m}{m_{12}} \mathbf{Q} + \mathbf{p}, \mathbf{Q}; \mathfrak{E} \right) &= m \mathfrak{E} + \frac{1}{2} \nu \mathbf{Q}^2 + (\nu - 1) (\mathbf{Q}\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \nu p^2, \\ m D_{23} \left(\frac{1}{2} \mathbf{Q} + \mathbf{p}, \mathbf{Q}; \mathfrak{E} \right) &= m \mathfrak{E} + \frac{1}{2} \nu \mathbf{Q}^2 + (\mathbf{Q}\mathbf{p}) + p^2; \end{aligned} \quad (80,38)$$

სადაც $\nu = 1 + \frac{m}{m_1}$. ანალოგიურად ეიბოვით (80,36) ფორმულაში შემავალ $D_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathfrak{E})$ გამოსახულებებსაც. კერძოდ,

$$m D_{23}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathfrak{E}) = m \mathfrak{E} + q^2 + \frac{2\nu - 1}{4} p^2, \quad (80,39)$$

$$m D_{12}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathfrak{E}) = m \mathfrak{E} + \frac{\nu}{2} q^2 + \frac{2\nu - 1}{2\nu} p^2.$$

• აუ გავითვალისწინებთ (80,38) და (80,39) ფორმულებს და q , p , Q ცვლადებში ვიგულისხმებთ სათანადო ტალღურ რიცხვებს, მაშინ (80,37) განტოლებებს შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \Omega_{23}(p)\varphi_{23}(p) &= \frac{\nu\lambda_{12}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{v_{23}\left(Q + \frac{1}{2}p\right)v_{12}\left(\frac{Q}{\nu} + p\right)\varphi_{12}(Q)Q^2 dQ d\Omega_Q}{\gamma^2 + Q^2 + (Qp) + \frac{1}{2}\nu p^2}, \\ \Omega_{12}(p)\varphi_{12}(p) &= \frac{\lambda_{23}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{v_{12}\left(Q + \frac{1}{\nu}p\right)v_{23}\left(p + \frac{1}{2}Q\right)\varphi_{23}(Q)Q^2 dQ d\Omega_Q}{\gamma^2 + \frac{1}{2}\nu Q^2 + (Qp) + p^2} + \\ & \frac{\nu\lambda_{12}}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{v_{12}\left(Q + \frac{\nu-1}{\nu}p\right)v_{12}\left(\frac{\nu-1}{\nu}Q + p\right)\varphi_{12}(Q)Q^2 dQ d\Omega_Q}{\gamma^2 + \frac{1}{2}\nu Q^2 + (\nu-1)(Qp) + \frac{1}{2}\nu p^2}, \end{aligned} \quad (80,40)$$

• სადაც γ განიშარტება (80,15) ფორმულით, ხოლო $\Omega_{23}(p)$ და $\Omega_{12}(p)$ განისაზღვრება გამოსახულებებით:

$$\Omega_{23}(p) = 1 - \lambda_{23} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_{23}^2(q)q^2 dq}{\gamma^2 + q^2 + \frac{2\nu-1}{4}p^2}, \quad (80,41)$$

$$\Omega_{12}(p) = 1 - \lambda_{12} \frac{\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_{12}^2(q)q^2 dq}{\gamma^2 + \frac{\nu}{2}q^2 + \frac{2\nu-1}{2\nu}p^2}. \quad (80,42)$$

• შიღებულ განტოლებებში შეგვიძლია ჩავატაროთ კუთხეებით ინტეგრაცია. შედეგად საბოლოოდ მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\Omega_{23}(p)\varphi_{23}(p) = \frac{\nu\lambda_{12}}{\pi} \int_0^\infty K_1(Q, p; \gamma)\varphi_{12}(Q)Q^2 dQ \quad (80,43)$$

$$\Omega_{12}(p)\varphi_{12}(p) = \frac{\lambda_{23}}{\pi} \int_0^\infty K_2(Q, p; \gamma)\varphi_{23}(Q)Q^2 dQ + \frac{\nu\lambda_{12}}{2\pi} \int_0^\infty K_3(Q, p; \gamma)\varphi_{12}(Q)Q^2 dQ.$$

• სადაც ინტეგრალური განტოლების გულეები განისაზღვრება ფორმულებით

$$\begin{aligned} K_1(p, Q; \gamma) &= \\ & \int_{-1}^1 \frac{v_{23}\left(\sqrt{Q^2 + \frac{1}{4}p^2 + pQx}\right)v_{12}\left(\sqrt{\frac{1}{\nu^2}Q^2 + p^2 + \frac{2}{\nu}Qpx}\right)dx}{\gamma^2 + Q^2 + \frac{1}{2}\nu p^2 + pQx}, \end{aligned} \quad (80,44)$$

$$K_2(p, Q; \gamma) =$$

$$\int_{-1}^1 \frac{v_{12} \left(\sqrt{Q^2 + \frac{1}{v^2} p^2 + \frac{2}{v} p Q x} \right) v_{23} \left(\sqrt{p^2 + \frac{1}{4} Q^2 + p Q x} \right) dx}{\gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma Q^2 + p^2 + p Q x}, \quad (30,45)$$

$$K_3(Q, p; \gamma) = \int_{-1}^1 \frac{v_{12} \left(\sqrt{Q^2 + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 p^2 + 2 \frac{v-1}{v} p Q x} \right)}{\gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma \left(p^2 + \frac{1}{2} \gamma p^2 + (v-1) p Q x \right)} \cdot v_{12} \left(\sqrt{\left(\frac{v-1}{v}\right)^2 Q^2 + p^2 + 2 \frac{v-1}{v} p Q x} \right) dx \quad (30,46)$$

ცხადია, ტოლი მასებისათვის $K_1 = K_2 = K_3$ და (80,44) განტოლება დაემთხვევა (80,16)-ს. (80,44) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით შეგვიძლია ვისარგებლოთ, მკვალთად, ΛH^3 სისტემის ბმის ენერჯის განსაზღვრის დროს, როცა ნეიტრონისა და პროტონის მასას ტოლად ჩავთვლით [80]. ამ შემთხვევაში m_1 იქნება Λ -ნაწილაკის მასა. იმავე განტოლებებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ L_3^u ბირთვისათვის, თუ მას წარმოვიდგენთ $(\alpha + n + p)$ მოდელით, სადაც α წარმოადგენს ${}^2He^1$ ატომბირთვს. ამ შემთხვევაში $m_1 = m_\alpha$ α -ნაწილაკის მასა იქნება [79].

§ 81. გავსახვების ამოცანის დასაბამი სხეულისათვის

განვიხილოთ სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანა. ისევე როგორც ორი სხეულის შემთხვევაში, ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ დაჯახება ხდება ერთმანეთისაგან უსასრულოდ დაშორებული, განსაზღვრული იმპულსების მქონე ნაწილაკებისა. დაჯახების შედეგად ნაწილაკები კვლავ უსასრულობაში მიდიან და მათ კვლავ განსაზღვრული იმპულსები აქვთ.

სამი სხეულის შემთხვევაში, როგორც საწყის, ისე საბოლოო მდგომარეობაში, უფრო მრავალფეროვან სურათთან გვაქვს საქმე. მართლაც, საწყის მომენტში, ისევე როგორც ორი სხეულის ამოცანაში, შესაძლებელია ერთმანეთზე იფანტებოდეს სამი თავისუფალი ნაწილაკი, მაგრამ სამი სხეულის ურთიერთქმედებისას შესაძლოა მოხდეს ერთი რომელიმე ნაწილაკის დაჯახება დანარჩენი ორის ბმულ მდგომარეობაზეც. რადგან ბმული მდგომარეობა დასაშვებია შედგენილი იყოს ნებისმიერი ორი ნაწილაკის მიერ, ამიტომ საწყის მომენტში შესაძლებელია ოთხი შემთხვევა განხორციელდეს:

$$1+2+3, \quad 1+(2,3), \quad 2+(1,3), \quad 3+(1,2), \quad (81,1)$$

სადაც (α, β) აღნიშნავს α და β ნაწილაკის ბმულ მდგომარეობას. ბოლო სამი დაჯახება ფაქტიურად ორნაწილაკობრივი დაჯახებაა მხოლოდ იმის გათვალისწინებით, რომ ერთ-ერთი ნაწილაკი რთულია და შინაგანი სტრუქტურა გააჩნია.

ზემოთ განხილულ თითოეულ ოთხი ტიპის დაჯახებას შედგად შეიქცევა. მოკვეს (81,1) ტიპის ნებისმიერი მდგომარეობა; ამასთან, დაჯახება იქნება დრკალი, თუ საწყისი სიტუაცია ბოლოშიც მეორდება და არ ხდება ნაწილაკთა შიშვანი მდგომარეობების, ცვლილება; ასე მაგალითად, სამი ნაწილაკის ურთიერთქმედებისას შესაძლებელია დრეკალი გაფანტვის შემდეგი პროცესები:

$$1+2+3 \rightarrow 1+2+3, \quad (81,2)$$

$$1+(2,3) \rightarrow 1+(2,3), \quad (81,3)$$

$$2-(1,3) \rightarrow 2+(1,3), \quad (81,4)$$

$$3+(1,2) \rightarrow 3+(1,2). \quad (81,5)$$

ცხადია, არადრეკალი გაფანტვა უფრო მეტ მრავალფეროვნებას გვაძლევს წარმოშობილი პროდუქტების თვალსაზრისით. მაგალითად, თავისუფალი ნაწილაკის გაფანტვას შეიძლება მოკვეს შემდეგი რეაქციები:

$$1+(2,3), \quad (81,6)$$

$$1+2+3 \rightarrow 2+(1,3), \quad (81,7)$$

$$3+(1,2), \quad (81,8)$$

რომელთაც შეგვიძლია ვუწოდოთ წყვილის შექმნის რეაქციები. ასევე, როცა საწყისი მდგომარეობა გვაქვს $1+(2,3)$ სიტუაცია, მას შეიძლება მოკვეს შემდეგი პროცესები:

$$1+(2,3)^{\circ}, \quad (81,9)$$

$$1+2+3, \quad (81,10)$$

$$1+(2,3) \rightarrow 2+(1,3), \quad (81,11)$$

$$3+(1,2). \quad (81,12)$$

პირველი წარმოდგენს არადრეკალ გაფანტვას ადგზნებით, მეორე რეაქციას შეიძლება ვუწოდოთ წყვილის დაშლა, მესამეს და მეოთხეს—გაფანტვა გადანაწილებით და ა. შ. აღნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ ზემოთ განხილულ რეაქციებში, ბოლო მდგომარეობაში, ორნაწილაკობრივი ქვესისტემები შეიძლება იყოს როგორც ნორმალურ, ისე ადგზნებულ მდგომარეობებში.

ცხადია, ასეთი სამი არაიგივერი ნაწილაკის სისტემის გაფანტვა აიწყოება ჰამილტონიანით

$$\dot{H} = \dot{H}_0 + V; \quad (81,13)$$

აქ \dot{H}_0 -სამი ნაწილაკის სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ოპერატორია

$$\dot{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2m_3} \Delta_3, \quad (81,14)$$

სადაც m_1, m_2, m_3 ნაწილაკთა მასებია. ხოლო პოტენციალური ენერჯია განისაზღვრება ფორმულით

$$V = v_{12}(r_{12}) + v_{23}(r_{23}) + v_{31}(r_{31}). \quad (81,15)$$

ვიგულისხმობთ, რომ ნაწილაკთა შორის მანძილის უსასრულობამდე ვაზრდისას, ე. ო. როცა $r_{ik} \rightarrow \infty$, წყვილური პოტენციალური ენერჯია $v_{ik}(r_{ik})$ საკმარისად სწრაფად ისპობა.

დაჭახების ამოცანის თავისებურების გამო ნაწილაკები ერთმანეთს ეკვებიან უსაძრულო მანძილებიდან და საბოლოო შედეგებსაც ეკვირდებით დიდ მანძილებზე დაჭახების ადგილიდან, ამიტომ საწყის და საბოლოო მომენტებში სრული V პოტენციალური ენერჯის გარკვეული ნაწილები, ე. ი. ზოგი წყვილური ურთიერთქმედება, ნულის ტოლია. ასე მაგალითად, (81,2) პროცესის დროს როგორც საწყის, ისე საბოლოო მომენტში ყველა ნაწილაკი თავისუფალია, ამიტომ ყოველი წყვილური ურთიერთქმედება როგორც საწყის, ისე საბოლოო მომენტში ნულის ტოლია. (81,3) პროცესის დროს კი ნულს გაუტოლდება v_{12} და v_{13} პოტენციალები როგორც საწყის, ისე საბოლოო მდგომარეობაში; ხოლო თუ გვაქვს (81,11) რეაქცია, მაშინ საწყის მომენტში კვლავ ნული იქნება v_{12} და v_{13} პოტენციალები, საბოლოოში კი— v_{12} და v_{23} .

ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს დაწვიროთ საწყისი და საბოლოო მდგომარეობის ასიმპტოტური ტალღური ფუნქციები დიდ მანძილებზე, რამდენადაც სამი სხეულის ამოცანის შესაბამისი შრედინგერის განტოლების ამოხსნა მარტივია, როცა (81,15) პოტენციალური ენერჯია ნულია, ან მხოლოდ ერთ წყვილურ ურთიერთქმედებას შეიცავს.

პირველი ასიმპტოტური მდგომარეობისათვის, როცა სამივე ნაწილაკი თავისუფალია, ჩვენ საქმე გვექნება შრედინგერის განტოლებასთან

$$\hat{H}_0 \Phi_{n_0} = E_{n_0} \Phi_{n_0}, \quad (81,16)$$

რ. რ. ლის ამონახსნი, (75,4) ფორმულის თანახმად, ტოლია

$$\Phi_{n_0}(r_1, r_2, r_3) = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i \sum_{\alpha=1}^3 k_{\alpha} r_{\alpha}} \quad (81,17)$$

სადაც n_0 -მოუთითებს თავისუფალი სამნაწილაკობრივი სისტემის ყველა კვანტურ რიცხვს; ჩვენს შემთხვევაში იგი უდრის k_1, k_2, k_3 იმპულსების ერთობლიობას, შესაბამისი ენერჯია კი ტოლი იქნება

$$E_{n_0} = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3}. \quad (81,18)$$

k_1, k_2, k_3 , იმპულსების ნაცვლად, შეგვიძლია ვისარგებლოთ იაკობის კოორდინატებით. ზემოთქმულის თანახმად, ამ ასიმპტოტური ფუნქციის გარდა კიდევ გვექნება სამი ფუნქცია, რომლებიც შეესაბამებიან ერთი ნაწილაკის თავისუფალ მოძრაობას ბმულ მდგომარეობაში მყოფი დანარჩენი ორის მიმართ. ეს ფუნქციები აღვნიშნოთ $\Phi_{n_{23}}, \Phi_{n_{31}}, \Phi_{n_{12}}$ -ით.

$n_{\alpha\beta}$ -მოუთითებს (α, β) ბმული წყვილის კვანტური რიცხვების ერთობლიობას; ამასთან, შესაძლოა თავისუფალი ნაწილაკის დამახასიათებელ კვანტურ რიცხვს, აღნიშვნების გამარტივების მიზნით, ტალღურ ფუნქციას არ მივუთითებთ.

შევეცადოთ მოვქმენოთ ეს ასიმპტოტური ფუნქციებიც. ვიპოვოთ ჯერ $\Phi_{n_{23}}$. ამ მიზნით დაწვიროთ შრედინგერის სამნაწილაკობრივი განტოლება, რომელშიც დატოვოთ მხოლოდ $V = v_{23}(r_{23})$ წყვილური ურთიერთქმედება

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2m_3} \Delta_3 + v_{23}(r_{23}) \right] \Phi = E \Phi. \quad (81,19)$$

ამ განტოლებიდან, თუ დავუშვებთ, რომ

$$\Phi = e^{\frac{i}{\hbar} k_1 r_1} \chi(r_2, r_3), \quad (81,20)$$

სწრაფად გამოირიცხება r_1 ვექტორი. მართლაც, გვექნება

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2m_3} \Delta_3 + v_{23}(r_{23}) \right] \chi = \left(E - \frac{k_1^2}{2m_1} \right) \chi; \quad (81,21)$$

2 და 3 ნაწილაკისათვის შემოვიღოთ იაკობის კოორდინატები

$$r_{23} = r_2 - r_3, \quad R_{23} = \frac{m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_{23}}, \quad (81,22)$$

მაშინ (81,21) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} - \frac{\hbar^2}{2m_{23}} \Delta_{R_{23}} + v_{23}(r_{23}) \right\} \chi(r_{23}, R_{23}) = \left(E - \frac{k_1^2}{2m_1} \right) \chi(r_{23}, R_{23}), \quad (81,23)$$

სადაც μ_{23} დაყვანილი მასაა. ამ განტოლებიდან კი შეგვიძლია გამოვიტოვოთ 2 და 3 ნაწილაკის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა, რისთვისაც საკმარისია შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\chi(r_{23}, R_{23}) = e^{\frac{i}{\hbar} K_{23} R_{23}} \varphi(r_{23}), \quad (81,24)$$

მაშინ გვექნება

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} + v_{23}(r_{23}) \right\} \varphi(r_{23}) = E_{23} \varphi(r_{23}), \quad (81,25)$$

სადაც

$$E_{23} = E - \frac{k_1^2}{2m_1} - \frac{K_{23}^2}{2m_{23}}, \quad (81,26)$$

ხოლო $K_{23} = k_2 + k_3$ არის (2,3) სისტემის ინერციის ცენტრის იმპულსი. (81,25) განტოლება წმინდა ორნაწილაკობრივი შრედინგერის განტოლებაა E_{23} ფარდობითი ენერგიით, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს როგორც დისკრეტული, ისე უწყვეტი სპექტრი. როცა (2,3) სისტემა ბმულია, მაშინ $E_{23} = -\mathcal{E}_{n_{23}}$ დისკრეტული მდგომარეობის ერთზე ნორმირებული (81,25) განტოლების ამონახსნი აღვნიშნოთ $\varphi_{n_{23}}(r_{23})$ -ით. (81,20) და (81,24) გამოსატყულებების თანახმად, (81,19) განტოლების იმპულსის სკალაზე ნორმირებული ამონახსნისათვის გვექნება

$$\Phi_{n_{23}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar} (k_1 r_1 + K_{23} R_{23})} \varphi_{n_{23}}(r_{23}), \quad (81,27)$$

ხოლო (81,26) ფორმულის მიხედვით ენერგიისათვის მივიღებთ

$$E_{n_{23}} = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{K_{23}^2}{2m_{23}} - \mathcal{E}_{n_{23}}. \quad (81,28)$$

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვიტ დანარჩენ ასიმპტოტურ ფუნქციებსაც— $\Phi_{n_{31}}$ და $\Phi_{n_{12}}$.

როცა $E_{23} > 0$, მაშინ (81,25) განტოლებას უწყვეტი სპექტრი ექნება. ეთქვით, $\varphi_{n_{23}}(r_{23})$ არის ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც უსასრულობაში აკმაყოფილებს ორნაწილაკობრივი გაფანტვის სასაზღვრო პირობას, ე. ი. წარმოადგენს

ბრტყელი და განზღადი სფერული ტალღის ქამს. მაშინ, (81,27) ფუნქციის ნაცვლად, გვექნება

$$\Phi_{n_0}^{(2,2)} = \frac{1}{(2\pi h)^2} e^{\frac{i}{h}(k_1 r_1 + K_{23} R_{23})} \Phi_{k_{23}}(r_{23}), \quad (81,29)$$

სადაც k_{23} არის ფარდობითი იმპულსი

$$k_{23} = \frac{m_1 k_2 - m_2 k_1}{m_{23}}, \quad E_{23} = \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}}; \quad (81,30)$$

სამნაწილაკობრივი $\Phi_{n_0}^{(2,2)}$ ფუნქცია შესაბამება ენერგიას —

$$F_{n_0}^{(2,2)} = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{K_{23}^2}{2m_{23}} + \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}}; \quad (81,31)$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ k_{23} და K_{23} ვექტორების გამოხატულებას k_2 და k_1 იმპულსებით, ადვილად ვიპოვით, რომ

$$F_{n_0} = E^{(2,2)}, \quad (81,32)$$

რაც, ცხადია, ასეც უნდა ყოფილიყო. ამ მიზეზის გამო (81,29) ფუნქციას მიუფუნქციურებთ n_0 ინდექსი. სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით $\Phi_{n_0}^{(2,1)}$ და $\Phi_{n_0}^{(1,2)}$ ფუნქციებსაც.

ის გარემოება, რომ ორი სხეულის ამოცანაში შესაძლებელია გვექნოდეს მხოლოდ (81,17) სახის ასიმპტოტური ფუნქცია, სამი სხეულის ამოცანაში კი — ოთხი ტიპისა, გამოწვეული ორნაწილაკობრივი ბმული ქვესისტემების გაჩენით, სამი სხეულის გაფანტვის ამოცანას გაცილებით ართულებს ორი სხეულის ამოცანასთან შედარებით. ძნელია, მაგალითად, ისეთი ამონახსნების მოძებნა, რომლებიც ყველა წყვილის შესაბამისი ფარდობითი მანძილების მიმართ დიდ მანძილებზე დააკმაყოფილებს გაფანტვის სასაზღვრო პირობას.

როგორ ვიპოვოთ რომელიმე ზემოგანხილული სამნაწილაკობრივი პროცესის ამპლიტუდა ან, თუ არადრეკად გაფანტვასთანა გვაქვს საქმე, — განივკვეთი? რადგან ჩვენ დეადგინეთ ასიმპტოტური ფუნქციების მნიშვნელობანი, ამიტომ საწყისი Φ_i ასიმპტოტური მდგომარეობიდან საბოლოო Φ_f მდგომარეობაში გადასვლის მატრიცა შეგვიძლია განესაზღვროთ ფორმულით

$$T_{if} = \langle \Phi_f | T | \Phi_i \rangle = \langle \Phi_f | V_f | \psi_i \rangle \quad (T_f = E_f) \quad (81,33)$$

სადაც V_f ურთიერთქმედების ის ნაწილია, რომელიც არ არის გათვალისწინებული საბოლოო Φ_f -მდგომარეობაში, ხოლო ψ_i წარმოადგენს შრედინგერის განტოლებას დადებითი ენერგიის შესაბამის ამონახსნს გაფანტვის სასაზღვრო პირობით. რადგან ასიმპტოტური ფუნქციები ჩვენთვის ცნობილია, საჭიროა ვიპოვოთ სამნაწილაკობრივი გაფანტვის T -მატრიცა ან გაფანტვის ψ -ფუნქცია.

ვიპოვოთ $T(x)$ -მატრიცის ინტეგრალური განტოლება, რისთვისაც შემოვივლით სამნაწილაკობრივი გრინის სრული ფუნქცია

$$G(x) = (x - \hat{H}_0 - V)^{-1}, \quad (81,34)$$

სადაც \hat{H} და V განისაზღვრებიან (81,14) და (81,15) ფორმულებით. გრინის თავისუფალ ფუნქციას კი ეწევა შემდეგი სახე:

$$(i_0(z)) = (z - \hat{H}_0)^{-1}; \quad (81,35)$$

თუ გამოვიყენებთ ოპერატორულ იგივეობას

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} (B - A) \frac{1}{B} = \frac{1}{B} (B - A) \frac{1}{A} \quad (81,36)$$

$A = G^{-1}(z)$ და $B = G_0^{-1}(z)$ ოპერატორებისათვის, მაშინ გრინის სრული ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$G(z) = G_0(z) + (i_0(z))V G(z). \quad (81,37)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V G(z) = T(z)G_0(z), \quad (81,38)$$

რომლის დახმარებითაც (81,37) განტოლების V -ზე გამრავლებით გვექნება

$$T(z) = V + V G_0(z)T(z). \quad (81,39)$$

მივიღეთ ლიპმან-შეინგერის განტოლება სამნაწილაკობრივი $T(z)$ -მატრიცისათვის. მაგრამ ამ განტოლების ამონახსნები, როგორც შემდეგ პარაგრაფში დავინახავთ, არაკალსახაა, ამიტომ სამი სხეულის ამოცანაში მისი გამოყენება შეუძლებელია.

სანამ ლიპმან-შეინგერის განტოლების ანალიზს შევუდგებოდეთ, აღვნიშნოთ, რომ გრინის $G(z)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ გრინის შემდეგი ფუნქციითაც:

$$(i_{\alpha\beta}(z)) = (z - H_0 - v_{\alpha\beta})^{-1}. \quad (\alpha \neq \beta = 1, 2, 3) \quad (81,40)$$

გრინის სამნაწილაკობრივი სრული $G(z)$ ფუნქციისაგან განსხვავებით (81,40) განმარტებაში შედის პოტენციალური ენერჯიის ჩხოლოდ ნაწილი, კერძოდ $v_{\alpha\beta}$. ამიტომ $G_{\alpha\beta}(z)$ -ს შემდგომში ჩვენ გრინის არასრულ ფუნქციას ვეწოდებთ. ადვილად ვიპოვიან (81,36) იგივეობის გამოყენებით, რომ ადვილი აქვს შემდეგ განტოლებებს:

$$G(z) = G_{12}(z) + G_{12}(z)[v_{31} + v_{23}]G(z), \quad (81,41)$$

$$G(z) = G_{23}(z) + G_{23}(z)[v_{12} + v_{31}]G(z), \quad (81,42)$$

$$G(z) = G_{31}(z) + G_{31}(z)[v_{12} + v_{23}]G(z); \quad (81,43)$$

ან ერთ ინდექსიან აღნიშვნებში იგივე განტოლებები ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ

$$G(z) = G_{\alpha}(z) + G_{\alpha}(z)[v_{\beta} + v_{\gamma}]G(z). \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3) \quad (81,44)$$

შევნიშნოთ, რომ ორი სხეულის ამოცანაში, გრინის სრული ფუნქციის გარდა, შესაძლებელი იყო გრინის თავისუფალი $G_0(z)$ ფუნქციის შემოღებაც. სამ სხეულში კი ამ ფუნქციებთან ერთად შესაძლებელია გრინის არასრული ფუნქციების განხილვაც. ამასთან, $G_{\alpha\beta}(z)$ ფუნქციების გამოყენება სამი სხეულის ამოცანაში აუცილებელია, რამდენადაც ყოველი ორი ნაწილაკისათვის გაფანტვის სასაზღვრო პირობები ამ ფუნქციებში უნდა ჩაეაქსოვოდ.

ორი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანისათვის ჩვენ გამოვიყვანეთ ლიპმან-შეინგერის განტოლება და აღვნიშნეთ, რომ, თუ არ გამოვეყოფთ მასათა ცენტრს, ამ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს არაკალსახა ამონახსნები.

ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ სამი სხეულის ამოცანის შესაბამისი ლიპმან-შეინგერის განტოლების ამონახსნებიც არაკალსახაა [97], ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ ამონახსნები არაკალსახა რჩება სიმძიმის ცენტრის გამოყოფის შემდეგაც. გარდა ამისა, სამი ნაწილაკის ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალური განტოლების გული არ არის ფრედალმისეული, ამიტომ ამ განტოლებისათვის შეუძლებელი ხდება წრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის კარგად დამუშავებული მეთოდების გამოყენება. ამის გამო ლიპმან-შეინგერის განტოლებას სამი სხეულის ამოცანისათვის ერთობ შეზღუდული პრაქტიკული ღირებულება აქვს.

ლიპმან-შეინგერის განტოლების ანალიზისათვის უფრო ხელსაყრელია ამ განტოლების ჩაწერა ტალღური ფუნქციებისათვის. წინასწარ გამოვიყვანოთ ფორმულები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს გრინის ფუნქციებით სრული და ასიმპტოტური ფუნქციების გამოხატვისა. ჯერ ერთი, როგორც ადრე დავამტკიცეთ (იხ. § 34), სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$|\psi_n\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(\varepsilon_n) |\Phi_n\rangle, \quad \varepsilon_n = E_n + i\varepsilon \quad (82,1)$$

სადაც ψ_n გაფანტვის ამოცანის სრული ტალღური ფუნქციაა, $G(\varepsilon_n)$ —სამნაწილაკობრივი გრინის სრული ფუნქცია, ხოლო Φ_n —ჩვენ მიერ წინა პარაგრაფში განხილული ოთხი ასიმპტოტური ფუნქციიდან ერთ-ერთს გამოხატავს იმის მიხედვით, $n = n_0$, თუ $n = n_\alpha$, სადაც $\alpha = 23, 31, 12$.

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ადვილი აქვს ფორმულას

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(\varepsilon_{n_0}) |\Phi_{n_0}\rangle = |\Phi_{n_0}\rangle. \quad \varepsilon_{n_0} = E_{n_0} + i\varepsilon \quad (82,2)$$

გავიხსენოთ, რომ გრინის თავისუფალი ფუნქცია $G_0(\varepsilon_{n_0}) = (E_{n_0} - \hat{H}_0 + i\varepsilon)^{-1}$, ხოლო $|\Phi_{n_0}\rangle$ წარმოადგენს \hat{H}_0 ოპერატორის საკუთარ ვექტორს ე. ი. $\hat{H}_0 |\Phi_{n_0}\rangle = E_{n_0} |\Phi_{n_0}\rangle$; მაშინ ადვილად მივიღებთ

$$i\varepsilon \frac{1}{E_{n_0} - \hat{H}_0 + i\varepsilon} |\Phi_{n_0}\rangle = \frac{i\varepsilon}{\varepsilon - 0} \frac{1}{E_{n_0} - (E_{n_0} - i\varepsilon)} |\Phi_{n_0}\rangle = |\Phi_{n_0}\rangle, \quad (82,2')$$

რაც ამტკიცებს (82,2) ტოლობას.

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(\varepsilon_{n_\alpha}) |\Phi_{n_\alpha}\rangle = 0. \quad (\alpha = 23, 31, 12) \quad (82,3)$$

მართლაც, თუ $|\Phi_{n_\alpha}\rangle$ ვექტორს გავშლით $|\Phi_{n_0}\rangle$ სრული სისტემის მიმართ, წინა შემთხვევისაგან განსხვავებით, მნიშვნელში გვექნებოდა სხვაობა: $E_{n_\alpha} - E_{n_0}$, რაც ნული არ არის, ამიტომ $\varepsilon \rightarrow 0$ ზღვარში მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას,

აღვილად დავამტკიცებთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობასაც:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \langle \psi_\alpha(z_{n_\alpha}) | \phi_{n_\alpha} \rangle = | \phi_{n_\alpha} \rangle, \quad (\alpha = 23, 31, 12) \quad (82,4)$$

სადაც $G_\alpha(z_{n_\alpha})$ არასრული გრინის ფუნქციაა—

$$G_\alpha(z_{n_\alpha}) = (H_{n_\alpha} - \hat{H}_0 - v_\alpha + i\varepsilon)^{-1}. \quad (\alpha = 23, 31, 12) \quad (82,5)$$

რადგან $| \phi_{n_\alpha} \rangle$ საკუთარი ვექტორია $\hat{H}_0 + v_\alpha$ ოპერატორის, ე. ი.

$$(E_{n_\alpha} - \hat{H}_0 - v_\alpha) | \phi_{n_\alpha} \rangle = 0, \quad (82,6)$$

ამიტომ

$$i\varepsilon \langle \psi_\alpha(z_{n_\alpha}) | \phi_{n_\alpha} \rangle = i\varepsilon \frac{| \phi_{n_\alpha} \rangle}{\varepsilon - 0} = | \phi_{n_\alpha} \rangle, \quad (82,6')$$

რაც ამტკიცებს (82,4) ტოლობას.

ახლა განვიხილოთ გამოსახულება

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \langle \psi_\alpha(z_{n_\beta}) | \phi_{n_\beta} \rangle \quad (82,7)$$

როცა $\alpha = \beta$; მივიღებთ წინა შემთხვევას. როცა $\alpha \neq \beta$, მაშინ $| \phi_{n_\beta} \rangle$ არ არის საკუთარი ვექტორი $(E_{n_\beta} - \hat{H}_0 - v_\alpha)$ ოპერატორისა, ამიტომ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, მნიშვნელში მივიღებთ სასრულ რიცხვს, რის გამოც (82,7) ნულის ტოლი იქნება. ამგვარად.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \langle \psi_\alpha(z_{n_\beta}) | \phi_{n_\beta} \rangle = 0. \quad (\alpha \neq \beta) \quad (82,8)$$

თუ α -ს ნულოვან მნიშვნელობასაც მივაკუთვნებთ, ამ ტოლობაში შეიძლება გავაერთიანოთ (82,2) გამოსახულებაც.

დაბოლოს დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულასაც:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\alpha(z_{n_0}) | \phi_{n_0} \rangle = | \phi_{n_0}^{(\alpha)} \rangle, \quad (\alpha = 23, 31, 12) \quad (82,9)$$

სადაც $G_\alpha(z_{n_0})$ წარმოადგენს არასრულ გრინის ფუნქციას, ხოლო $\langle r_1, R_\alpha, r_\alpha | \phi_{n_0}^{(\alpha)} \rangle$ (81,29) ტიპის ასიმპტოტური ფუნქციაა.

ზოგადობის დაურღვევლად დავამტკიცოთ (82,9) ტოლობა $\alpha = 2,3$ მნიშვნელობისათვის. ვაჩვენებთ, რომ სამნაწილაკობრივი თავისუფალი მდგომარეობის $| \phi_{n_0} \rangle$ ვექტორი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$| \phi_{n_0} \rangle = | \Phi_{k_1, k_{23}} \rangle | \Phi_{k_{23}} \rangle, \quad (82,10)$$

სადაც $K_{23} = k_2 + k_3$ არის (2, 3) ნაწილაკის ინერციის ცენტრის იმპულსი, k_{23} კი— მათი ფარდობითი იმპულსი. ცხადია,

$$(E_{n_0} - \hat{H}_0 - v_{23}) | \phi_{n_0} \rangle = | \Phi_{k_1, k_{23}} \rangle \left(E_{23} - \frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} - v_{23} \right) | \Phi_{k_{23}} \rangle, \quad (82,11)$$

სადაც

$$E_{23} = E_{n_0} - \left(\frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{K^2}{2m_{23}} \right) \quad (82,12)$$

წარმოადგენს 2 და 3 ნაწილაკის ფარდობით ენერგიას. რამდენადაც $\left(E_{23} - \frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} - r_{23} + i\varepsilon \right)^{-1}$ ორნაწილაკობრივი გრინის ფუნქციაა, ამიტომ, (82,1) ფორმულის ძალით,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \left(E_{23} - \frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \Delta_{r_{23}} - v_{23} + i\varepsilon \right)^{-1} |\Phi_{k_{23}}\rangle = |\Psi_{k_{23}}\rangle, \quad (82,13)$$

სადაც $\langle r_{23} | \Psi_{k_{23}} \rangle$ ამონახსნია ორი ნაწილაკის ფარდობითი მოძრაობის შრედინგერის განტოლებისა, რომელიც გაფანტვის სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს. ხოლო რადგან $|\Phi_{k_1, k_{23}}\rangle |\Psi_{k_{23}}\rangle = |\Psi_{n_0}^{(2,1)}\rangle$, ამიტომ (82,9) ფორმულაც დამტკიცებულია.

ახლა დაეწეროთ ლიპმან-შეინგერის განტოლება სამი ნაწილაკის სისტემისათვის. ამ მიზნით გაფანტვის სრული ტალღური ფუნქციის (82,1) განმარტებაში (81,37) ფორმულიდან შევიტანოთ გრინის სრული ფუნქციის გამოხატულება; გვექნება

$$|\Psi_n\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon (G_0(\varepsilon_n) |\Phi_n\rangle + G_0(\varepsilon_n) V |\Psi_n\rangle); \quad (82,14)$$

მაშასადამე, ყველაფერი დაიყვანება Φ_n -ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობის არჩევაზე. თუ $n = n_0$, ე. ი. სამივე ნაწილაკი თავისუფალია, მაშინ, (82,2) ფორმულას თანახმად, მივიღებთ ლიპმან-შეინგერის შემდეგ განტოლებას:

$$|\Psi_n\rangle = |\Phi_{n_0}\rangle + G_0(\varepsilon_{n_0}) V |\Psi_{n_0}\rangle. \quad (\varepsilon_{n_0} = E_{n_0} + i\varepsilon) \quad (82,15)$$

ახლა, თუ ვიგულისხმებთ, რომ (82,14) განტოლებაში $n = n_{23}$ და გავითვალისწინებთ (82,3) ფორმულას, მივიღებთ

$$|\Psi_{n_{23}}\rangle = (G_0(\varepsilon_{n_{23}}) V |\Psi_{n_{23}}\rangle), \quad (\varepsilon_{n_{23}} = E_{n_{23}} + i\varepsilon) \quad (82,16)$$

სადაც $E_{n_{23}}$ ენერგია განისაზღვრება (81,28) ფორმულით. $|\Psi_{n_{23}}\rangle$ გამოხატავს გაფანტვის მდგომარეობის ვექტორს, როცა ხდება პირველი ნაწილაკის გაფანტვა (2,3) ნაწილაკების ბმულ სისტემაზე. ანალოგიური განტოლებები დაიწერება $|\Psi_{n_{12}}\rangle$ და $|\Psi_{n_{12}}\rangle$ ვექტორებისთვისაც.

ამგვარად, $|\Psi_{n_{\alpha}}\rangle$ ვექტორებისათვის, სადაც $\alpha = 23; 31; 12$, ლიპმან-შეინგერის განტოლება ერთგვაროვან განტოლებას წარმოადგენს იმის გამო, რომ საქმე გვაქვს ბმულ ქვესისტემებთან, (82,16) ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას გააჩნია ამონახსნი, რაც ნიშნავს, რომ შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი ცალსახა აღარ იქნება. მაშასადამე, სამი სხეულის ამოცანისათვის ლიპმან-შეინგერის განტოლება ცალსახა ამონახსნებს არ იძლევა. ამ განტოლებას ცალსახა ამონახსნი ექნება მხოლოდ სამივე ნაწილაკის ბმული მდგომარეობისათვის. ლიპმან-შეინგერის განტოლების ამონახსნების არაცალსახობა სამი სხეულის ამოცანისათვის, ცხადია, შედეგია საშნაწილაკოვან სისტემაში ორნაწილაკობრივი ბმული მდგომარეობის შექმნის შესაძლებლობისა. ნათელია, რომ ლიპმან-შეინგერის განტოლების ამონახსნები არაცალსახა იქნება სამზე მეტი ნაწილაკთა სისტემისთვისაც, სადაც ბმული ქვესისტემების გაჩენის უფრო მეტი შესაძლებლობანი არსებობს.

გრინის $G_0(\varepsilon)$ თავისუფალი ფუნქციის ნაცვლად ლიპმან-შეინგერის განტოლების მიღებისას შეგვეძლო გამოგვეყენებინა გრინის არასრული ფუნქციები,

მაგალითად $G_{23}(z) = (z - H_0 - v_{23})^{-1}$. მაშინ (81,42) ოპერატორის მოქმედებით $|\Phi_{n_0}\rangle$, $|\Phi_{n_{23}}\rangle$ ასიმპტოტურ ვექტორებზე, $i\varepsilon$ სიდიდეზე გადამრავლებით და $\varepsilon \rightarrow 0$ ზღვარზე გადასვლით, (82,4) (82,9) და (82,15) ფორმულების თანახმად, მივიღებთ:

$$|\Psi_{n_0}\rangle = |\Phi_{n_0}^{(2,3)}\rangle + G_{23}(z_{n_0})[v_{12} + v_{31}]|\Psi_{n_0}\rangle, \quad (82,17)$$

$$|\Psi_{n_{23}}\rangle = |\Phi_{n_{23}}\rangle + G_{31}(z_{n_{23}})[v_{12} + v_{31}]|\Psi_{n_{23}}\rangle, \quad (82,18)$$

$$|\Psi_{n_{31}}\rangle = G_{23}(z_{n_{31}})[v_{12} + v_{31}]|\Psi_{n_{31}}\rangle, \quad (82,19)$$

$$|\Psi_{n_{12}}\rangle = G_{23}(z_{n_{31}})[v_{12} + v_{31}]|\Psi_{n_{12}}\rangle. \quad (82,20)$$

საიდანაც ჩანს, რომ $|\Psi_{n_0}\rangle$ და $|\Psi_{n_{23}}\rangle$ ვექტორები არაერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას აკმაყოფილებენ, $|\Psi_{n_{31}}\rangle$ და $|\Psi_{n_{12}}\rangle$ კი — ერთგვაროვანს.

ასე რომ ლიპმან-შვინგერის განტოლების აღნიშნული არაცალსახობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ გრინის სრულ ფუნქციას რომელი გრინის ფუნქციით გამოვხატავთ — თავისუფალით თუ არასრულით.

გაფანტვის ამოცანის სასაზღვრო პირობები ორი ნაწილაკის შემთხვევაში ცალსახად იყო ჩაქსოვილი გრინის სრულ ფუნქციაში. სამი სხეულის ამოცანის თავისებურებათა გამო იძულებული ვართ სამნაწილაკობრივი გრინის სრული ფუნქცია გამოვხატოთ არასრული გრინის $G_{\alpha}(z)$ ფუნქციებით, რომლებშიც სასაზღვრო პირობები სრულად არ არის გათვალისწინებული. ამიტომაც აღმოაჩნდა ამონახსნები ლიპმან-შვინგერის ერთგვაროვან განტოლებას. მაგრამ ინტეგრალური განტოლების მიმზიდველი მხარე სწორედ ის არის, რომ მასში გათვალისწინებულია სასაზღვრო პირობები. და თუ ეს პირობები არ შედის სამი ნაწილაკის ლიპმან-შვინგერის განტოლებაში, მაშინ იგი ფაქტიურად ინტეგრალურ განტოლებას არ წარმოადგენს.

გარდა ამისა, მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ როცა სამი სხეულის ურთიერთქმედება მხოლოდ ორნაწილაკობრივ პოტენციალურ ენერგიებს შეიცავს, მაშინ ლიპმან-შვინგერის ინტეგრალური განტოლების გული ჰილბერტ-შმიდტის პირობას აღარ აკმაყოფილებს, ამიტომ ეს განტოლება აღარ იქნება ფრედჰოლმის ტიპისა. ამის დასამტკიცებლად დავწეროთ (82,15) ლიპმან-შვინგერის განტოლება იმპულსურ წარმოდგენაში. გვიხსენოთ, რომ თავისუფალი გრინის ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\langle k_1, k_2, k_3 | G_0(z_{n_0}) | k'_1, k'_2, k'_3 \rangle = \frac{\delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \delta(k_3 - k'_3)}{E - E_{n_0} + i\varepsilon}, \quad (82,21)$$

სადაც E_{n_0} განისაზღვრება (81,18) ფორმულით. მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\Psi_{n_0}(k_1, k_2, k_3) = \Phi_{n_0}(k_1, k_2, k_3) + \frac{1}{E - E_{n_0} + i\varepsilon} \int \langle k_1, k_2, k_3 | V | k'_1, k'_2, k'_3 \rangle \Psi_{n_0}(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3, \quad (82,22)$$

სადაც ინტეგრალური განტოლების გული წარმოადგენს პოტენციალური ენერგიის მატრიცულ ელემენტს და განისაზღვრება (78,11) ფორმულით. თუ გავითვალისწინებთ ამ ფორმულას, გვექნება

$$\langle k_1, k_2, k_3 | V | k'_1, k'_2, k'_3 \rangle = \delta(K - K') \{ \langle k_{23} | v_{23} | k'_{23} \rangle \delta(p_1 - p'_1) + \langle k_{31} | v_{31} | k'_{31} \rangle \delta(p_2 - p'_2) + \langle k_{12} | v_{12} | k'_{12} \rangle \delta(p_3 - p'_3) \}, \quad (82,23)$$

ცხადია, Φ_{n_0} და Ψ_{n_0} ფუნქციებიც დიაგონალურია ინერციის ცენტრის იმპულსის მიმართ, ამიტომ (82,22) განტოლება შეიძლება შევკვეცოთ დირაკის $\delta(K-K')$ ფუნქციებზე. ეს კი ტოლფასია სამნაწილაკობრივი ლიპმან-შეინგერის განტოლებაში სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის გამოყოფისა. რაც შეეხება სხვა დელტა ფუნქციებს, (82,23) გამოსახულებაში ისინი დამოკიდებულია დაუკავშირებელი ნაწილაკის იმპულსებზე. ყოველ x_α პოტენციალში სხვადასხვა დაუკავშირებელ ნაწილაკთან გვაქვს საქმე, ამიტომ დელტა ფუნქციები სხვადასხვა იქნება სამივე წევრში, რის გამოც მათი შეკვეცა შეუძლებელია. ამ ტიპის დელტა ფუნქციაზე ინტეგრალური განტოლების გული არსებითად იქნება დამოკიდებული. ახლა შევამოწმოთ, იქნება თუ არა ინტეგრალური განტოლების გული ჰილბერტ-შმიდტის ტიპისა. ამისათვის დაკმაყოფილებული უნდა იყოს (H, 4) პირობა, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ასე დაიწერება:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk k' \int_{-\infty}^{+\infty} dp p' | \langle k, p | V | k', p' \rangle |^2 < \infty. \quad (82,24)$$

ცხადია, ინტეგრალური განტოლების (82,23) გულში შემავალი დირაკის დელტა ფუნქციების გამო (82,24) პირობა დაცული არაა, ამიტომ ლიპმან-შეინგერის განტოლების გული არ იქნება ჰილბერტ-შმიდტის ტიპისა. ეს კი ინტეგრალური განტოლების დიდი ნაკლია, რამდენადაც ამ უკანასკნელის შესასწავლად ველარ გამოყენებით კარგად დამუშავებულ ფრედჰოლმის თეორიას.

ამგვარად, სამი სხეულის გაფანტვის ამოცანის შესაბამის ლიპმან-შეინგერის განტოლებას მთელი რიგი არსებითი ნაკლოვანებები ახასიათებს, ამის გამო მათი გამოყენება გაფანტვის ამოცანების გადაწყვეტის დროს, როცა ნაწილაკთა რიცხვი ორზე მეტია, არახელსაყრელია. ამიტომ საჭიროა ისეთი კორექტული ინტეგრალური განტოლებების მოძებნა, რომლებიც, ჯერ ერთი, არაერთგვაროვანი იქნება გაფანტვის ამოცანისათვის და, მეორეც, მათი გულები ჰილბერტ-შმიდტის ტიპისანი იქნებიან. ასეთი განტოლებები 1960 წელს [103] სამი სხეულის ამოცანისათვის გამოყვანილი იყო ლ. დ. ფადეევის მიერ. შესაძლებელია ამ განტოლებათა განზოგადება როგორც ნებისმიერი ნაწილაკთა რიცხვის სისტემებისათვის [66], [131—136] [141], ისე რელატივისტური მოძრაობისთვისაც [160].

§ 83. ფადეევის განტოლებების გამოყვანა

მას შემდეგ, რაც წინა პარაგრაფში დეტალურად განვიხილეთ სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანის თავისებურებანი, ფადეევის განტოლებების გამოყვანა დიდ სიძნელეს აღარ წარმოადგენს [105].

გამოვიღეთ გრინის სრული ფუნქციის ინტეგრალური განტოლებიდან

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z), \quad (83,1)$$

სადაც V -წარმოადგენს სამი ნაწილაკის სისტემის პოტენციალურ ენერგიას

$$V = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha, \quad (\alpha = 23, 31, 12) \quad (83,2)$$

ხოლო $G_0(z)$ სამნაწილაკობრივი თავისუფალი გრინის ფუნქციაა

$$G_0(z) = (z - \hat{H}_0)^{-1}. \quad (83,3)$$

შემოვიღოთ სამნაწილაკობრივი ვაფანტის $T(z)$ -მატრიცა შემდეგი ტოლობით:

$$VG(z) = T(z)G_0(z); \quad (83,4)$$

მაშინ (83,1) განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z), \quad (83,5)$$

ხოლო $T(z)$ -მატრიცისათვის მივიღებთ ლიპმან-შვინგერის განტოლებას

$$T(z) = V + VG_0(z)T(z). \quad (83,6)$$

რადგანაც განმარტებით

$$V\Psi_n = T\phi_n, \quad (83,7)$$

ამიტომ ეს განტოლება მარტივად დაიყვანება ლიპმან-შვინგერის განტოლებაზე Ψ_n ფუნქციისათვის, საიდანაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (83,6) განტოლებასაც ნამდვილი x -ებისათვის არაყალბასა ამონახსნები გააჩნია.

იმის გამო, რომ სამი სხეულის სისტემაში შესაძლებელია ბმული ქვესისტემების წარმოქმნა, იძულებული ვართ $G_0(z)$ გრინის ფუნქციასთან ერთად შემოვიღოთ არასრული გრინის ფუნქციებიც. ფაღვევის განტოლებების გამოყვანის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ თურმე შესაძლებელია (83,6)-ში წევრები ისეთნაირად გადაწვრილდნენ, რომ ამ განტოლების ყველა ხარვეზი, რის შესახებაც წინა პარაგრაფში გვქონდა ლაპარაკი, მოიხსოს.

გადავწეროთ (83,6) განტოლება შემდეგნაირად:

$$T(z) = \sum_{\alpha} v_{\alpha} [1 + G_0(z)T(z)]. \quad (83,8)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ პოტენციალური ენერჯიის მსგავსად $T(z)$ -მატრიცაც ბუნებრივად სამ წევრად დაიყო

$$T(z) = \sum_{\alpha=1}^3 T^{\alpha}(z), \quad (83,9)$$

სადაც $T^{\alpha}(z)$, ცხადია, განისაზღვრება განტოლებით

$$T^{\alpha}(z) = v_{\alpha} + v_{\alpha} G_0(z) \sum_{\beta=1}^3 T^{\beta}(z). \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (83,10)$$

$T^{\alpha}(z)$ სიდიდეებისათვის მიღებული სისტემა არაფრითაა უკეთესი ამოსავალ (83,6) განტოლებაზე, მაგრამ (83,10) სისტემის ლიგონალზე ზის $1 - v_{\alpha} G_0(z)$ ორნაწილაკობრივი ოპერატორი, რომლის შებრუნება შეგვიძლია. ამისათვის (83,10) სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$[1 - v_{\alpha} G_0(z)] T^{\alpha} = v_{\alpha} + v_{\alpha} G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha}^3 T^{\beta}(z). \quad (83,11)$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ შებრუნებულ ოპერატორზე $[1 - v_\alpha G_0(z)]^{-1}$; გვექნება

$$T^\alpha(z) = [1 - v_\alpha G_0(z)] v_\alpha + [1 - v_\alpha G_0(z)]^{-1} v_\alpha G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha}^3 T^\beta(z). \quad (83,12)$$

ახლა შემოვიღოთ არასრული გრინის ფუნქციები და მათი შესაბამისი ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცები $T_\alpha(z)$. ცხადია, $G_\alpha(z) = (z - \hat{H}_0 - v_\alpha)^{-1}$ გრინის ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$G_\alpha(z) = G_0(z) + G_0(z) v_\alpha G_\alpha(z), \quad (\alpha = 12, 23, 31) \quad (83,13)$$

საიდანაც, თუ შემოვიღებთ ორნაწილაკობრივ $T_\alpha(z)$ -მატრიცას შემდეგი ტოლობით:

$$v_\alpha G_\alpha(z) = T_\alpha(z) G_0(z), \quad (83,14)$$

გვექნება განტოლება

$$T_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha G_0(z) T_\alpha(z). \quad (83,15)$$

აღსანიშნავია, რომ ეს მატრიცა წმინდა ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცისაგან განსხვავდება იმით, რომ მასში $G_0(z)$ სამნაწილაკობრივ თავისუფალ გრინის ფუნქციას წარმოადგენს. (83,15) განტოლებები ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლებებია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$T_\alpha(z) = [1 - v_\alpha G_0(z)]^{-1} v_\alpha. \quad (83,16)$$

ამ უკანასკნელის (83,12)-ში შეტანით საბოლოოდ მივიღებთ

$$T^\alpha(z) = T_\alpha(z) + T_\alpha(z) G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha}^3 T^\beta(z), \quad (83,17)$$

ან გაშლილი სახით გვექნება:

$$\begin{aligned} T^{23}(z) &= T_{23}(z) + T_{23}(z) G_0(z) [T^{31}(z) + T^{12}(z)], \\ T^{31}(z) &= T_{31}(z) + T_{31}(z) G_0(z) [T^{12}(z) + T^{23}(z)], \\ T^{12}(z) &= T_{12}(z) + T_{12}(z) G_0(z) [T^{23}(z) + T^{31}(z)]. \end{aligned} \quad (83,18)$$

ამ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ფადეევის განტოლებები. იგი წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას $T^{12}(z)$, $T^{23}(z)$, $T^{31}(z)$ ოპერატორებისათვის, რომელთა ჯამი გვაძლევს სამნაწილაკობრივ $T(z)$ -მატრიცას

$$T(z) = T^{12}(z) + T^{23}(z) + T^{31}(z). \quad (83,19)$$

ფადეევის განტოლებები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი მატრიცული განტოლების სახითაც:

$$\begin{pmatrix} T^{23}(z) \\ T^{31}(z) \\ T^{12}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{23}(z) \\ T_{31}(z) \\ T_{12}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} G_0(z) \begin{pmatrix} T^{23}(z) \\ T^{31}(z) \\ T^{12}(z) \end{pmatrix}. \quad (83,20)$$

როგორც აღმოჩნდა, ამ სისტემას სამი ნაწილაკის ლიპმან-შეინგერის განტოლების ხარეუბები აღარ გააჩნია. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (83,20) ინტეგრალ-

ლური განტოლების გული ჰილბერტ-შმიდტის ტიპისაა; ამასთან, ფადეევის განტოლების გული გამოიხატება შემდეგი მატრიცით:

$$\begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T'_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} G_0(z); \quad (83,21)$$

ამ გამოსახულების კვადრატის წარმოადგენს შემდეგი ტიპის წევრების ჯამს:

$$T_\alpha(z)G_0(z)T_\beta(z)G_0(z), \quad (\alpha \neq \beta) \quad (83,22)$$

ვისარგებლოთ (83,16) გამოხატულებით და გავიხსენოთ, რომ $Im\sqrt{z} \geq \varepsilon > 0$ არეში $[1 - v_\alpha G_0(z)]^{-1}$ ოპერატორი იქნება შემოსაზღვრული და ანალიზური, გარდა ორი ნაწილაკის ბმული მდგომარეობის შესაბამისი პოლუსებისა; ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$v_\alpha G_0(z)v_\beta G_0(z) \quad (83,23)$$

გამოსახულება კვადრატულად ინტეგრებადი. ავიღოთ ამ ნამრავლის მატრიცული ელემენტი თავისუფალი მდგომარეობის ექვტორებით და გავიხსენოთ (78,4) და (78,9) ფორმულები. მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ (83,23)-ის მატრიცული ელემენტი დირაკის დელტა ფუნქციებს აღარ შეიცავს და თუ z არ არის ნამდვილი, იგი კვადრატულად ინტეგრებადი იქნება. შემდგომში დამტკიცდა, რომ პოტენციალთა გარკვეული კლასისათვის (83,21) გული ჰილბერტ-შმიდტის ტიპისაა z -ის რეალური მნიშვნელობებისთვისაც კი [110].

ფადეევა გამოიკვლია (83,20) განტოლებათა სისტემა და აჩვენა, რომ ისინი ფრედჰოლმის ტიპისანი არიან და აქვთ ცალსახა ამონახსნები შემდეგი დაშვებით [104, 105]:

1. ორნაწილაკობრივი პოტენციალური ენერჯიის მატრიცული ელემენტები $\langle k | v_\alpha | k' \rangle$ (ამასთან, პოტენციალური ენერჯია შეიძლება არალოკალური იყოს) წარმოადგენენ k და k' იმპულსების გლუვ ფუნქციებს და აკმაყოფილებენ შეფასებას

$$|\langle k | v_\alpha | k' \rangle| \leq \text{const} [1 + |k - k'|]^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \quad (83,24)$$

2. $z=0$ წერტილი არ წარმოადგენს განსაკუთრებულ წერტილს ორნაწილაკობრივი ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალური განტოლებისათვის (სამივე შესაძლო გაფანტვის სიგრძე სასრულია);

3. დადებითი ენერჯიის შემთხვევაში ორნაწილაკობრივი ამოცანის სპექტრი უწყვეტია. ეს პირობა მნიშვნელოვანია მხოლოდ არალოკალური პოტენციალებისათვის, რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაში შესაძლებელი დადებითი საკუთარი მნიშვნელობების გაჩენა.

როცა ეს პირობები დაკლებული არ არის, მაშინ ფადეევის განტოლებები შეიძლება ფრედჰოლმის ტიპისა აღარ იყოს და სამი ნაწილაკის სისტემისათვის მათი ამოხსნით გვეკონდეს უსასრულო რაოდენობის დონეები [112, 90].

ამგვარად, ფადეევის განტოლებები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანის ფუნდამენტური განტოლებები. აღსანიშნავია, რომ ფადეევის განტოლებებში პოტენციალები ცხადი სახით აღარ შედიან, მათ ნაცვლად

განტოლებაში მონაწილეობენ ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცები ენერგეტულ ზედაპირს გარეთ. ეს გარემოება მეტად მნიშვნელოვანია სამი სხეულის გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებების შესასწავლად [107, 108, 109].

§ 84. ფაღევის განტოლებები ტალღური ფუნქციებისათვის

დაეწეროთ ფაღევის განტოლებები ტალღური ფუნქციებისათვის, რომლებიც გაფანტვის სხვადასხვა პროცესებს შეესაბამება. ამისათვის ჯერ ჩაეწეროთ ფაღევის განტოლებათა სისტემა გრინის ფუნქციებისათვის.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$G^\alpha(z) = G_0(z)T^\alpha(z)G_0(z), \quad (\alpha = 23, 31, 12) \quad (84,1)$$

მაშინ (83,5) ფორმულა მოგვცემს

$$G(z) = G_0(z) + \sum_{\alpha=1}^3 G^\alpha(z). \quad (84,2)$$

თუ გავითვალისწინებთ (84,1) აღნიშვნას, ადვილად მივიღებთ განტოლებას $G^\alpha(z)$ სიდიდეებისათვის, რისთვისაც საკმარისია (83,20) სისტემა მარცხნიდან და მარჯვნიდან გავამრავლოთ $G_0(z)$ გრინის ფუნქციაზე და ამავე დროს გავითვალისწინოთ (83,13) და (83,16) ფორმულები, რომელთაგანაც გამომდინარეობს

$$G_0(z)T_\alpha(z)G_0(z) = G_\alpha(z) - G_0(z) \quad (83,3)$$

ტოლობა. შედეგად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{pmatrix} G^{23}(z) \\ G^{31}(z) \\ G^{12}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{23}(z) - G_0(z) \\ G_{31}(z) - G_0(z) \\ G_{12}(z) - G_0(z) \end{pmatrix} + G_0(z) \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{23}(z) \\ G^{31}(z) \\ G^{12}(z) \end{pmatrix}. \quad (84,4)$$

ამ სისტემიდან ნაპოვნი $G^\alpha(z)$ სიდიდეების (84,2) ფორმულაში შეტანის შედეგად ვიპოვიოთ სამნაწილაკობრივი სისტემის გრინის სრულ $G(z)$ ფუნქციას.

ახლა ჩაეწეროთ ფაღევის განტოლებები ტალღური ფუნქციებისათვის. როგორც აღვნიშნეთ, გაფანტვის ამოცანაში შეიძლება განხორციელდეს რამდენიმე ასიმპტოტური მდგომარეობა; სახელდობრ, სამი ნაწილაკის შემთხვევაში ხორციელდება ოთხი ასიმპტოტური მდგომარეობა. ერთი სამივე ნაწილაკის ინფინიტური მოძრაობაა, ხოლო სამი შეესაბამება ერთი რომელიმე ნაწილაკის ინფინიტურ მოძრაობას დანარჩენი ორი ბმული ნაწილაკის მიმართ. ამ მდგომარეობათა ვექტორები შესაბამისად აღვნიშნეთ $|\Phi_{n_0}\rangle$ და $|\Phi_{n_\alpha}\rangle$ -თი, სადაც $\alpha = 23, 31, 12$. უკანასკნელ სამ ვექტორს, როგორც შევთანხმდით, ვუთითებთ მხოლოდ ბმული წყვილის კვანტურ რიცხვებს: n_{23} , n_{31} და n_{12} .

ფაღევის განტოლებების დასაწერად ტალღური ფუნქციებისათვის გამოვიყენოთ (82,1) ფორმულა, რომელიც გრინის სრული ფუნქციის დახმარებით გაფანტვის სრულ ტალღურ ფუნქციას განსაზღვრავს შემდეგნაირად:

$$|\Psi_n\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon G(\epsilon_n) |\Phi_n\rangle, \quad \epsilon_n = E_n + i\epsilon \quad (84,5)$$

სადაც n -ის ქვეშ იგულისხმება სათანადოდ ან n_0 , ან n_{23} , n_{31} , n_{12} , გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ

$$|\Phi_{n_0}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(z_{n_0}) |\Phi_{n_0}\rangle, \quad z_{n_0} = E_{n_0} + i\varepsilon \quad (84,6)$$

სადაც $|\Phi_{n_0}\rangle$ სამი ნაწილაკის თავისუფალი მოძრაობის ვექტორია.

ვიმოქმედოთ (84,2) ოპერატორით $i\varepsilon |\Phi_{n_0}\rangle$ ვექტორზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. (84,2) და (84,3) ფორმულების თანახმად მივიღებთ

$$|\Psi_{n_0}\rangle = |\Phi_{n_0}\rangle + \sum_{\alpha=1}^3 |\psi^\alpha\rangle, \quad (84,7)$$

სადაც $|\Psi_{n_0}\rangle$ გამოხატავს საწყის მომენტში არაბმული სამი ნაწილაკის გაფანტვის ვექტორს, ხოლო

$$|\psi^\alpha\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^\alpha(z_{n_0}) |\Phi_{n_0}\rangle. \quad (84,8)$$

ახლა, თუ (84,4) სისტემას მარჯვნიდან გავამრავლებთ $i\varepsilon |\Phi_{n_0}\rangle$ ვექტორზე და გადავალთ ზღვარზე, (82,9) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{pmatrix} |\psi_{n_0}^1\rangle \\ |\psi_{n_0}^2\rangle \\ |\psi_{n_0}^3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\Phi_{n_0}^{(23)}\rangle - |\Phi_{n_0}\rangle \\ |\Phi_{n_0}^{(31)}\rangle - |\Phi_{n_0}\rangle \\ |\Phi_{n_0}^{(12)}\rangle - |\Phi_{n_0}\rangle \end{pmatrix} + G_0(z) \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_{n_0}^1\rangle \\ |\psi_{n_0}^2\rangle \\ |\psi_{n_0}^3\rangle \end{pmatrix} \quad (84,9)$$

ამ განტოლებებში ψ^α ფუნქციებს, სიმარტივის მიზნით, ერთი ინდექსი მიუწერეთ. ხოლო $|\Phi_{n_0}^{(\alpha\beta)}\rangle$ -ში იგულისხმება (82,9) ვექტორი.

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ, მაგალითად, $(\Phi_{n_0}^{(23)} - \Phi_{n_0})$ სხვაობა უსასრულობაში წარმოადგენს განშლად ტალღას 2 და 3 ნაწილაკის ფარდობითი მოძრაობის მიმართ. მართლაც, გავიხსენოთ (81,17) და (81,29) ფუნქციების განმარტება და განვიხილოთ სხვაობა $(\Phi_{n_0} - \Phi_{n_0}^{(2,3)})$ ზღვარში, როცა $r_{23} \rightarrow \infty$. რადგან $\varphi_{k_{23}}(r_{23})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს გაფანტვის სასაზღვრო პირობას, ე. ი. როცა $r_{23} \rightarrow \infty$ აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi_{k_{23}}(r_{23}) \sim e^{\frac{i}{\hbar} k_{23} r_{23}} + F(k_{23}, k_{23}^0) \frac{e^{ik_{23} r_{23}}}{r_{23}}, \quad (84,10)$$

სადაც $F(k_{23}, k_{23}^0)$ გაფანტვის ამპლიტუდაა, k_{23}^0 —საწყისი ფარდობითი იმპულსი. ამიტომ მივიღებთ

$$\lim_{r_{23} \rightarrow \infty} (\Phi_{n_0} - \Phi_{n_0}^{(23)}) \sim e^{\frac{i}{\hbar} (k_1 r_1 + k_{23} r_{23})} F(k_{23}, k_{23}^0) \frac{e^{ik_{23} r_{23}}}{r_{23}}. \quad (84,11)$$

მაშასადამე, მართლაც, აღნიშნული სხვაობა პროპორციულია განშლადი ტალღისა r_{23} მანძილის მიმართ.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ერთი რომელიმე ნაწილაკი იფანტება დანარჩენი ორის ბმულ მდგომარეობაზე. იმის მიხედვით, თუ რომელი წყვილი ადგენს ბმულ მდგომარეობას, გვექნება სამი შემთხვევა. შესაბამისი ვექტორები აღნიშნონთ $|\Psi_{n_{23}}\rangle$, $|\Psi_{n_{31}}\rangle$ და $|\Psi_{n_{12}}\rangle$ -ით. η_{α} -მიუთითებს ორი ნაწილაკის სისტემის კვანტური რიცხვების ერთობლიობაზე.

ვთქვათ, გარკვეულობისათვის, საწყის მომენტში, ბმულ მდგომარეობაში იმყოფება (2,3) სისტემა, რომელზეც იფანტება პირველი ნაწილაკი. (84,2) ოპერატორით ვიმოქმედოთ $\varepsilon |\Phi_{n_{23}}\rangle$ ვექტორზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. რადგან, (82,3) ფორმულის თანახმად,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G_0(\varepsilon n_0) |\Phi_{n_{23}}\rangle = 0, \quad (84,12)$$

ხოლო

$$|\Psi_{n_{23}}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G(\varepsilon n_{23}) |\Phi_{n_{23}}\rangle, \quad (84,13)$$

ამიტომ სრული ვექტორი ტოლი იქნება

$$|\Psi_{n_{23}}\rangle = \sum_{\alpha=1}^3 |\psi_{n_{23}}^{\alpha}\rangle, \quad (84,14)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$|\psi_{n_{23}}^{\alpha}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G^{\alpha}(\varepsilon n_{23}) |\Phi_{n_{23}}\rangle. \quad (84,15)$$

ადვილად ვიპოვით ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას $|\psi_{n_{23}}^{\alpha}\rangle$ ვექტორებისათვის; ამისათვის საკმარისია (84,4) სისტემა გავამრავლოთ $\varepsilon |\Phi_{n_{23}}\rangle$ ვექტორზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. შედეგად გვექნება

$$\begin{pmatrix} |\psi_{n_{23}}^1\rangle \\ |\psi_{n_{23}}^2\rangle \\ |\psi_{n_{23}}^3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\Phi_{n_{23}}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + G_0(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(\varepsilon) & T_{23}(\varepsilon) \\ T_{31}(\varepsilon) & 0 & T_{31}(\varepsilon) \\ T_{12}(\varepsilon) & T_{12}(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_{n_{23}}^1\rangle \\ |\psi_{n_{23}}^2\rangle \\ |\psi_{n_{23}}^3\rangle \end{pmatrix}, \quad (84,16)$$

სადაც $\varepsilon = E_{n_{23}} + i\varepsilon$.

სრულად ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$|\Psi_{n_{31}}\rangle = \sum_{\alpha=1}^3 |\psi_{n_{31}}^{\alpha}\rangle, \quad |\Psi_{n_{12}}\rangle = \sum_{\alpha=1}^3 |\psi_{n_{12}}^{\alpha}\rangle \quad (84,17)$$

ფუნქციები შეესაბამებიან გაფანტვას (3,1) და (1,2) ბმულ წყვილებზე, ხოლო $|\psi_{n_{\alpha}}^{\alpha}\rangle$ ვექტორები აკმაყოფილებენ (84,16) სისტემას, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ მარჯვნივ თავისუფალ წევრში, რომელიც სვეტის სახით არის წარმოდგენილი, შესაბამისად გაჩნდება გამოსახულებები

$$\begin{pmatrix} 0 \\ |\Phi_{n_{31}}\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\Phi_{n_{12}}\rangle \end{pmatrix}. \quad (84,18)$$

როგორც ვხედავთ, როგორც სამი თავისუფალი ნაწილაკის, ისე ერთი ნაწილაკის გაფანტვას დანარჩენი ორის ბმულ სისტემაზე შეესაბამება არაერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც, ლიმპან-შვინგერის განტოლებებისაგან განსხვავებით, ცალსახა ამონახსნებს იძლევა.

ბმული მდგომარეობა. სამი არაიგივერი ნაწილაკის სისტემის ბმული მდგომარეობა აიწერება ფადეევის განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემით

$$\begin{pmatrix} |\psi^1\rangle \\ |\psi^2\rangle \\ |\psi^3\rangle \end{pmatrix} = G_0(z) \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi^1\rangle \\ |\psi^2\rangle \\ |\psi^3\rangle \end{pmatrix}, \quad (84,19)$$

ხოლო მდგომარეობის სრული ვექტორი გამოიხატება შემდეგი ჯამით:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^3 |\psi^\alpha\rangle. \quad (84,20)$$

ამასთან, ბმული მდგომარეობის შემთხვევაში $z = -\xi$, სადაც ξ სამი ნაწილაკის სისტემის ბმის ენერჯიაა.

ფადეევის (84,9) განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია შემდეგი სახითაც გადაიწეროს:

$$|\psi^\alpha\rangle = G_0(z) T_{\beta\gamma}(z) [|\psi^\beta\rangle + |\psi^\gamma\rangle], \quad (84,21)$$

სადაც α, β, γ იცვლება ციკლურად და ერთმანეთს არ უდრის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ფადეევის ერთგვაროვან განტოლებათა ეს სისტემა ეკვივალენტურია შრედინგერის განტოლებისა სამი სხეულისათვის. დაეწეროთ შრედინგერის განტოლება

$$(E - \hat{H}_0) |\Psi\rangle = V |\Psi\rangle, \quad (84,22)$$

სადაც სრული პოტენციალური ენერჯია წარმოადგენს წყვილური ურთიერთქმედებების ჯამს

$$V = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha. \quad (84,23)$$

ცხადია

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^3 G_0(z) v_\alpha |\Psi\rangle. \quad (84,24)$$

შემოვიღოთ ვექტორი

$$|\phi^\alpha\rangle = G_0(z) v_\alpha |\Psi\rangle, \quad (84,25)$$

მაშინ $|\Psi\rangle$ სრული ვექტორი წარმოიდგინება სამი ვექტორის ჯამის სახით

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^3 |\phi^\alpha\rangle. \quad (84,26)$$

ამიტომ ნათელია, რომ

$$|\psi^\alpha\rangle = G_0(z) v_\alpha \sum_{\beta=1}^3 |\psi^\beta\rangle, \quad (84,27)$$

საიდანაც

$$[1 - G_0(z) v_\alpha] |\psi^\alpha\rangle = G_0(z) v_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha}^3 |\psi^\beta\rangle. \quad (84,28)$$

აქედან კი შეგვიძლია ვიპოვოთ $|\psi^\alpha\rangle$. გვექნება

$$|\psi^\alpha\rangle = [1 - G_0(z) v_\alpha]^{-1} G_0(z) v_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha}^3 |\psi^\beta\rangle. \quad (84,29)$$

გრინის ფუნქციას განმარტებით

$$G_\alpha(z) = [1 - G_0(z) v_\alpha]^{-1} G_0(z) \quad (84,30)$$

ღა, რადგან

$$G_\alpha(z) v_\alpha = G_0(z) T_\alpha(z), \quad (84,31)$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$|\psi^\alpha\rangle = G_0(z) T_\alpha(z) \sum_{\beta \neq \alpha}^3 |\psi^\beta\rangle, \quad (84,32)$$

რაც, მართლაც, ემთხვევა ფადეევის განტოლებათა სისტემას სამი ნაწილაკის ბმული მდგომარეობებისათვის.

§ 85. შადევივის განტოლებები გრინის არასრული ფუნქციებით

თუ თავისუფალი $G_0(z)$ გრინის ფუნქციების ნაცვლად გამოვიყენებთ გრინის არასრულ ფუნქციებს, მაშინ ფადეევის განტოლებათა სისტემა სხვა სახითაც შეგვიძლია გადავწეროთ.

მაგალითისათვის განვიხილოთ $G_{23}(z)$ გრინის ფუნქცია, მაშინ გრინის სრული ფუნქცია განმარტება განტოლებით

$$G(z) = G_{23}(z) + G_{23}(z) [v_{31} + v_{12}] G(z). \quad (85,1)$$

შემოვიღოთ სამნაწილაკობრივი გაფანტვის $T(z)$ -მატრიცა

$$(v_{31} + v_{12}) G(z) = T(z) G_{23}(z); \quad (85,2)$$

მისთვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$T(z) = (v_{31} + v_{12}) + (v_{31} + v_{12}) G_{23}(z) T(z). \quad (85,3)$$

გაფანტვის სრული მატრიცა წარმოვიდგინოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$T(z) = T^{31}(z) + T^{12}(z), \quad (85,4)$$

მაშინ მარტივად მივიღებთ:

$$T^{31}(z) = [1 - v_{31} G_{23}(z)]^{-1} v_{31} + [1 - v_{31} G_{23}(z)]^{-1} v_{31} G_{23}(z) T^{12}(z), \quad (85,5)$$

$$T^{12}(z) = [1 - v_{12} G_{23}(z)]^{-1} v_{12} + [1 - v_{12} G_{23}(z)]^{-1} v_{12} G_{23}(z) T^{31}(z); \quad (85,6)$$

თუ შემოვიღებთ მატრიცებს

$$T_{31}(z) = v_{31} + v_{31} G_{23}(z) T_{31}(z), \quad (85,7)$$

$$T_{12}(z) = v_{12} + v_{12} G_{23}(z) T_{12}(z), \quad (85,8)$$

მაშინ (85,5) და (85,6)-დან მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{pmatrix} T^{31}(z) \\ T^{12}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{31}(z) \\ T_{12}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} G_{23}(z) \begin{pmatrix} T^{31}(z) \\ T^{12}(z) \end{pmatrix}. \quad (85,9)$$

ე. ი. სისტემა შედგება მხოლოდ ორი განტოლებისაგან. მაგრამ ეს სისტემა ნაკლებად მოსახერხებელია გამოყენებისათვის, რამდენადაც T_{31} და T_{12} განისაზღვრება არა $G_0(z)$ გრინის ფუნქციით, არამედ $G_{23}(z)$ ფუნქციით.

ქვემოთ განვიხილავთ უფრო ხელსაყრელ შემთხვევას, როცა ფაქტების განტოლებათა სისტემა კვლავ ორი განტოლებისაგან შედგება, მაგრამ მასში შემაჯავლი გაფანტვის მატრიცები კვლავ $G_0(z)$ ფუნქციით გამოიხატება.

შემოვიღოთ შემდეგი ტიპის გრინის არასრული ფუნქცია $G_1(z)$:

$$G_1(z) = G_0(z) + G_0(z) v_1 G_1(z). \quad (v_1 = v_{12} + v_{31}) \quad (85,10)$$

სათანადო $T_1(z)$ -მატრიცა ასე განვმარტოთ: $v_1 G_1 = T_1 G_0$; მაშინ მისთვის გვექნება განტოლება

$$T_1(z) = v_1 + v_1 G_0(z) T_1(z); \quad (85,11)$$

მაშასადამე, $T_1(z)$ წარმოადგენს ერთი ნაწილაკის გაფანტვის მატრიცას დანარჩენ ორზე, როცა უკანასკნელთა შორის ურთიერთქმედება არ არსებობს ($v_{23} = 0$).

ბუნებრივია, რომ გაფანტვის სამნაწილაკობრივ მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z), \quad (85,12)$$

შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$T(z) = \sum_{\alpha=1}^2 T^\alpha(z). \quad (85,13)$$

ამასთან, სრული პოტენციალური ენერგია ტოლია

$$V = v_{23} + v_{31} + v_{12} = v_1 + v_2. \quad (v_2 \equiv v_{23}) \quad (85,14)$$

მაშინ (85,12) განტოლებიდან მარტივად მივიღებთ:

$$T^1(z) = [1 - v_1 G_0(z)]^{-1} v_1 + [1 - v_1 G_0(z)]^{-1} v_1 G_0(z) T^2(z), \quad (85,15)$$

$$T^2(z) = [1 - v_2 G_0(z)]^{-1} v_2 + [1 - v_2 G_0(z)]^{-1} v_2 G_0(z) T^1(z). \quad (85,16)$$

თანხმად (85,11) განტოლებისა

$$T_1(z) = [1 - v_1 G_0(z)]^{-1} v_1, \quad (85,17)$$

ხოლო (85,16) ტოლობის საფუძველზე,

$$T_{23}(z) = [1 - v_2 G_0(z)]^{-1} v_2; \quad (85,18)$$

მაშასადამე, (85,15) და (85,16) განტოლებებიდან მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$T^1(z) = T_1(z) + T_1(z) G_0(z) T^2(z), \quad (85,19)$$

$$T^2(z) = T_{23}(z) + T_{23}(z) G_0(z) T^1(z)$$

რომელიც კვლავ შეგვიძლია ჩავწეროთ მატრიცული სახით:

$$\begin{pmatrix} T^1(x) \\ T^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_{23}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_1(x) \\ T_{23}(x) & 0 \end{pmatrix} G_0(x) \begin{pmatrix} T^1(x) \\ T^2(x) \end{pmatrix}. \quad (85,20)$$

ცხადია, გრინის ფუნქცია, (83,5) ფორმულის თანახმად, იქნება

$$G(x) = G_0(x) + G^{(1)}(x) + G^{(2)}(x), \quad (85,21)$$

სადაც $G^a(x)$ კვლავ (84,1) ფორმულით განიმარტება.

აღვიღად დაწვრიტ ფადეევის (85,20) განტოლებათა სისტემას გრინის ფუნქციებისთვისაც. ამ მიზნით ეს სისტემა გავამრავლოთ ორივე მხრიდან $G_0(x)$ ფუნქციაზე და გავიხსენოთ (83,13), (83,14), (83,2) და (85,10) ფორმულები. შედეგად მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} G^1(x) \\ G^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(x) - G_0(x) \\ G_{23}(x) - G_0(x) \end{pmatrix} + G_0(x) \begin{pmatrix} 0 & T_1(x) \\ T_{23}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^1(x) \\ G^2(x) \end{pmatrix}. \quad (85,22)$$

ამის შემდეგ აღვიღია ფადეევის განტოლებების დაწერა ტალღური ფუნქციებისათვის. განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა ერთი ნაწილაკის გაფანტვისა (2,3) სისტემის ბმულ მდგომარეობაზე. ვიმოქმედოთ (85,21) გრინის ფუნქციით $\varepsilon | \Phi_{n_{23}} \rangle$ ვექტორზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. (84,12) და (84,15) ფორმულების თანახმად, გვექნება

$$| \Psi_{n_{23}} \rangle = | \psi_{n_{23}}^1 \rangle + | \psi_{n_{23}}^2 \rangle. \quad (85,23)$$

აღვიღად მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებებს $| \psi_{n_{23}}^1 \rangle$ და $| \psi_{n_{23}}^2 \rangle$ ვექტორებისათვის. ამ მიზნით (85,22) განტოლება გავამრავლოთ ε -ზე და ვიმოქმედოთ $| \Phi_{n_{23}} \rangle$ ვექტორზე. ზღვარში, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{pmatrix} | \psi_{n_{23}}^1 \rangle \\ | \psi_{n_{23}}^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ | \psi_{n_{23}} \rangle \end{pmatrix} + G_0(x) \begin{pmatrix} 0 & T_1(x) \\ T_{23}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \psi_{n_{23}}^1 \rangle \\ | \psi_{n_{23}}^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (85,24)$$

რომელიც, ცხადია, ასეც შეიძლება ჩავწეროთ:

$$| \psi_{n_{23}}^1 \rangle = G_0(x) T_1(x) | \psi_{n_{23}}^2 \rangle, \quad (85,25)$$

$$| \psi_{n_{23}}^2 \rangle = | \Phi_{n_{23}} \rangle + G_0(x) T_{23}(x) | \psi_{n_{23}}^1 \rangle;$$

ხოლო ბმული მდგომარეობისათვის გვექნება შემდეგი სისტემა:

$$| \psi^1 \rangle = G_0(x) T_1(x) | \psi^2 \rangle, \quad (85,26)$$

$$| \psi^2 \rangle = G_0(x) T_{23}(x) | \psi^1 \rangle.$$

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ ფადეევის განტოლებები არასრული გრინის ფუნქციებით პირველად ჩაწერილი იყო შრომებში [107, 111].

§ 85. შადეაჰვის განტოლებები იმპულსურ წარმოდგენაში

სამი სხეულის ამოცანის შესწავლა ხელსაყრელია იმპულსურ წარმოდგენაში. ამ წარმოდგენაში ფადეევის განტოლებებს ადვილად ჩავწეროთ, თუ შემოვიღებთ იაკობის კოორდინატებს. საქმე გვექნება აბსტრაქციული სივრცის შემდეგ ბრავექტორებთან:

$$\langle k_{23}, p_1 |, \langle k_{31}, p_2 |, \langle k_{12}, p_3 |. \quad (86,1)$$

განსაზღვრულობის მიზნით განვიხილოთ ფადეევის განტოლებები Ψ -ფუნქციისათვის, რომელიც შესაბამება ნაწილაკის გაფანტვის ორი ბმული ნაწილაკის სისტემაზე. თუ სპინებს მხედველობაში არ მივიღებთ, ასეთი მდგომარეობა შეიძლება გვეკონდეს ნუკლონის გაფანტვისას დეიტრონზე.

ფადეევის შესაბამის განტოლებებს ინერციის ცენტრის სისტემაში აქვს სახე

$$\begin{aligned} |\psi_{n_{23}}^1\rangle &= |\varphi_{n_{23}}\rangle + G_0(z) [T_{23}(z) |\psi_{n_{23}}^2\rangle + T_{23}(z) |\psi_{n_{23}}^3\rangle], \\ |\psi_{n_{23}}^2\rangle &= G_0(z) [T_{31}(z) |\psi_{n_{23}}^1\rangle + T_{31}(z) |\psi_{n_{23}}^3\rangle], \\ |\psi_{n_{23}}^3\rangle &= G_0(z) [T_{12}(z) |\psi_{n_{23}}^1\rangle + T_{12}(z) |\psi_{n_{23}}^2\rangle], \end{aligned} \quad (86,2)$$

სადაც

$$|\varphi_{n_{23}}\rangle \equiv |\Phi_{p_1, n_{23}}\rangle = |\rho_1^0\rangle |\varphi_{n_{23}}\rangle. \quad (86,3)$$

ρ_1^0 დაცემული ნაწილაკის ფარდობითი იმპულსია, ხოლო $|\varphi_{n_{23}}\rangle$ -ბმული (2,3) წყვილის მდგომარეობის ვექტორი. რაც შეეხება z -ს, განვიხილოთ შემთხვევაში იგი ტოლი იქნება

$$z = E_{n_{23}} + i\varepsilon = \frac{p_1^2}{2\mu_1} - \mathcal{E}_{n_{23}} + i\varepsilon. \quad (86,4)$$

ხელსაყრელია ცვლადების ისეთნაირად შერჩევა, რომ თითოეული ψ^a ფუნქცია თავის საკუთარ იაკობის კოორდინატზე იყოს დამოკიდებული

$$\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(k_{23}, p_1), \quad \psi^{(2)} = \psi^{(2)}(k_{31}, p_2), \quad \psi^{(3)} = \psi^{(3)}(k_{12}, p_3). \quad (86,5)$$

გაფანტვის სრული ტალღური ფუნქცია მაშინ განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$\Psi = \Phi_{p_1, n_{23}}(k_{23}, p_1) + \psi^{(1)}(k_{23}, p_1) + \psi^{(2)}(k_{31}, p_2) + \psi^{(3)}(k_{12}, p_3), \quad (86,6)$$

სადაც, (86,3) ფორმულის თანახმად,

$$\Phi_{p_1, n_{23}}(k_{23}, p_1) = \delta(p_1 - p_1^0) \varphi_{n_{23}}(k_{23}). \quad (86,7)$$

ამ ფორმულაში $\varphi_{n_{23}}(k_{23})$ ბმული (2,3) სისტემის ტალღური ფუნქციაა.

იაკობის კოორდინატებში (86,2) სისტემის ჩასაწერად საკმარისია თითოეული განტოლება სკალარულად გაეამრავლოთ (86,1) ვექტორებზე შესაბამისად. თუ გავიხსენებთ, რომ თავისუფალი გრინის ფუნქცია დიაგონალურია იაკობის კოორდინატების მიმართ, ე. ი.

$$\langle k_{\alpha\beta}, p_\gamma | G_0(z) | k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma \rangle = \delta(k_{\alpha\beta} - k'_{\alpha\beta}) \delta(p_\gamma - p'_\gamma) D_{\alpha\beta}^{-1}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma; z), \quad (86,8)$$

სადაც

$$D_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}, p_\gamma; z) = z - \frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma}, \quad (86,9)$$

მაშინ (86,2)-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(k_{23}, p_1) &= \Phi(k_{23}, p_1) + \\ D_{23}^{-1}(k_{23}, p_1; z) &\left[\int \langle k_{23}, p_1 | T_{23}(z) | k_{31}, p_2 \rangle \psi^{(2)}(k_{31}, p_2) dk_{31} dp_2 + \right. \\ &\left. \int \langle k_{23}, p_1 | T_{23}(z) | k_{12}, p_3 \rangle \psi^{(3)}(k_{12}, p_3) dk_{12} dp_3 \right], \\ \psi^{(2)}(k_{31}, p_2) &= D_{31}^{-1}(k_{31}, p_2; z) \left[\int \langle k_{31}, p_2 | T_{31}(z) | k_{23}, p_1 \rangle \psi^{(1)}(k_{23}, p_1) dk_{23} dp_1 + \right. \\ &\left. \int \langle k_{31}, p_2 | T_{31}(z) | k_{12}, p_3 \rangle \psi^{(3)}(k_{12}, p_3) dk_{12} dp_3 \right], \end{aligned} \quad (86,10)$$

$$\psi^{(3)}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3) = D_{12}^{-1}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3; z) \left[\int \langle \mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3 | T_{12}(z) | \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1 \rangle \psi^{(1)}(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1) d\mathbf{k}_{23} d\mathbf{p}_1 + \right. \\ \left. \int \langle \mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3 | T_{12}(z) | \mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2 \rangle \psi^{(2)}(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2) d\mathbf{k}_{31} d\mathbf{p}_2 \right].$$

ამ სისტემაში წერის გამარტივების მიზნით \mathbf{p}_1° , \mathbf{p}_2° ინდექსები ყველგან ჩამოვუშვით.

გარდაეჭმნათ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებანი. განვიხილოთ (86,10) სისტემის პირველი განტოლების პირველი ინტეგრალი. გადაწეროთ იგი იგივეურად

$$A \equiv \int \langle \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1 | T_{23}(z) | \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1' \rangle \langle \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1' | \mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2 \rangle \psi^{(2)}(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2) d\mathbf{k}_{31} d\mathbf{p}_2 d\mathbf{k}_{23} d\mathbf{p}_1'. \quad (86,11)$$

ახლა გავიხსენოთ $T_{\alpha}(z)$ -მატრიცული ელემენტის (78,15) ფორმულა

$$\langle \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1 | T_{23}(z) | \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1' \rangle = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1') \langle \mathbf{k}_{23} | t_{23} \left(z - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} \right) | \mathbf{k}_{23}' \rangle. \quad (86,12)$$

გარდა ამისა, (75,24) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$\langle \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1' | \mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2' | \mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2 \rangle = \delta(\mathbf{k}_{31} - \mathbf{k}_{31}') \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2'). \quad (86,13)$$

ორი უკანასკნელი ფორმულის გამოყენებით (86,11) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$A = \int \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1') \langle \mathbf{k}_{23} | t_{23} \left(z - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} \right) | \mathbf{k}_{23}' \rangle \delta(\mathbf{k}_{31} - \mathbf{k}_{31}') \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2'). \quad (86,14)$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2) d\mathbf{k}_{31} d\mathbf{p}_2 d\mathbf{k}_{23} d\mathbf{p}_1'.$$

დაბოლოს ამ ინტეგრალში გამოვხატოთ ყველა სიდიდე \mathbf{p}_1 და \mathbf{p}_2 იმპულსებით. თუ გამოვიყენებთ (75,37) ფორმულებს, მივიღებთ

$$A = \int \langle \mathbf{k}_{23} | t_{23} \left(z - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} \right) | -\mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{m_{23}} \mathbf{p}_1 \rangle \psi^{(2)} \left(\mathbf{p}_1 + \frac{m_1}{m_{13}} \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \right) d\mathbf{p}_2. \quad (86,15)$$

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია გარდაეჭმნათ სისტემაში შემავალი დანარჩენი ინტეგრალებიც. საბოლოოდ გვექნება ინტეგრალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\psi^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) +$$

$$D_{23}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; z) \int \left[\langle \mathbf{k} | t_{23} \left(z - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_1} \right) | -\mathbf{p}' - \frac{m_2}{m_{23}} \mathbf{p} \rangle \psi^{(2)} \left(\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_{13}} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) + \right.$$

$$\left. \langle \mathbf{k} | t_{23} \left(z - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_1} \right) | \mathbf{p}' + \frac{m_3}{m_{23}} \mathbf{p} \rangle \psi^{(3)} \left(-\mathbf{p} - \frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \right] d\mathbf{p}',$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = D_{31}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; z) \int \left[\langle \mathbf{k} | t_{31} \left(z - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_2} \right) | \mathbf{p}' + \frac{m_1}{m_{13}} \mathbf{p} \rangle \psi^{(1)} \left(-\mathbf{p} - \frac{m_2}{m_{23}} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) + \right.$$

$$\left. \langle \mathbf{k} | t_{31} \left(z - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_2} \right) | -\mathbf{p}' - \frac{m_3}{m_{13}} \mathbf{p} \rangle \psi^{(3)} \left(\mathbf{p} + \frac{m_2}{m_{12}} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \right] d\mathbf{p}', \quad (86,16)$$

$$\psi^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = D_{12}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; z) \int \left[\langle \mathbf{k} | t_{12} \left(z - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_3} \right) | -\mathbf{p}' - \frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{p} \rangle \psi^{(1)} \left(\mathbf{p} + \frac{m_3}{m_{23}} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) + \right.$$

$$\left. \langle \mathbf{k} | t_{12} \left(z - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_3} \right) | \mathbf{p}' + \frac{m_2}{m_{12}} \mathbf{p} \rangle \psi^{(2)} \left(-\mathbf{p} - \frac{m_3}{m_{13}} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \right] d\mathbf{p}'.$$

რადგან განტოლებაში იაკობის ვექტორების ინდექსების მითითებას მნიშვნელობა ალარა აქვს, ამიტომ ისინი ჩამოვუშვით. (86,16) წარმოადგენს ფადეევის განტოლებათა სისტემას იმპულსურ წარმოდგენაში ჩვენ მიერ არჩეული კონკრეტული შემთხვევისათვის, როცა პირველი ნაწილაკი იფანტება (2,3) ბმულ სისტემაზე.

აღსანიშნავია, რომ ფადეევის განტოლებებში პოტენციალური ენერგია არ მონაწილეობს, მის ნაცვლად გაჩნდნენ ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცები

$$\langle k_{\alpha\beta} | t_{\alpha\beta} \left(z - \frac{p_{\gamma}^2}{2\mu_{\gamma}} \right) | k'_{\alpha\beta} \rangle \quad (86,17)$$

ენერგეტულ ზედაპირს ვარეთ, ე. ი. როცა

$$k_{\alpha\beta}^2 = k'_{\alpha\beta}{}^2 = 2\mu_{\alpha\beta} \left(z - \frac{p_{\gamma}^2}{2\mu_{\gamma}} \right). \quad (86,18)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა ნაწილაკები იგივეურნი არიან: $m_1 = m_2 = m_3 = m$; მაშინ (86,16) სისტემა ერთ ინტეგრალურ განტოლებაზე დაიყვანება, რადგან სამი $\psi^{(\alpha)}$ ფუნქციის ნაცვლად გვექნება ერთი ფუნქცია

$$\begin{aligned} \psi(k, p) &= \Phi(k, p) + \\ D^{-1}(k, p; z) &\int \left[\langle k | t \left(z - \frac{3p'^2}{4m} \right) | -p' - \frac{1}{2} p \rangle \psi \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) + \right. \\ &\left. \langle k | t \left(z - \frac{3p'^2}{4m} \right) | p' + \frac{1}{2} p \rangle \psi \left(-p - \frac{1}{2} p', p' \right) \right] dp'. \end{aligned} \quad (86,19)$$

ამასთან, ნაწილაკთა იგივეურობის გამო

$$\psi(k, p) = \psi(-k, p); \quad (86,20)$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\begin{aligned} \psi(k, p) &= \Phi(k, p) + D^{-1}(k, p; z) \int \left[\langle k | t \left(z - \frac{3p'^2}{4m} \right) | -p' - \frac{1}{2} p \rangle + \right. \\ &\left. \langle k | t \left(z - \frac{3p'^2}{4m} \right) | p' + \frac{1}{2} p \rangle \right] \psi \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) dp'. \end{aligned} \quad (86,21)$$

ახლა დავწეროთ ფადეევის განტოლებები სამი არაიგივეური ბმული სისტემისათვის იმპულსურ წარმოდგენაში. ცხადია, ამისათვის საკმარისია (86,16) სისტემაში დავუშვათ $\Phi = 0$ და z შევცვალოთ $E = -\mathcal{E}$, სადაც \mathcal{E} -სამი ნაწილაკის ბმის ენერგიაა. მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ეს სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \psi^{(\alpha)}(k, p) &= D_{\beta\gamma}^{-1}(k, p; z) \int \left[\langle k | t_{\beta\gamma} \left(z - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} \right) | -r_{\beta\gamma}^{\alpha} \rangle \psi^{(\beta)}(R_{\alpha\beta}^{\beta}, p') + \right. \\ &\left. \langle k | t_{\beta\gamma} \left(z - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} \right) | r_{\beta\gamma}^{\alpha} \rangle \psi^{(\gamma)}(-R_{\alpha\beta}^{\gamma}, p') \right] dp', \end{aligned} \quad (86,22)$$

ზადაც

$$r_{\beta\gamma}^{\beta} = p' + \frac{m_{\beta}}{m_{\beta\gamma}} p, \quad R_{\alpha\gamma}^{\alpha} = p + \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha\gamma}} p'. \quad (86,23)$$

α, β ინდექსები ლებულობენ 1, 2, 3 მნიშვნელობებს და ერთმანეთს არ უდრიან. კერძო შემთხვევაში, იგივეური ნაწილაკებისათვის $\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \psi^{(3)}$, ამიტომ (86,22) სისტემა დაიყვანება ერთ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\psi(k, p) = D^{-1}(k, p; E) \int \left[\langle k | t \left(E - \frac{3p^2}{4m} \right) | -\frac{1}{2} p - p' \rangle + \langle k | t \left(E - \frac{3p^2}{4m} \right) | \frac{1}{2} p + p' \rangle \right] \psi \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) dp', \quad (86,24)$$

ზადაც

$$D(k, p; E) = E - \frac{k^2}{m} - \frac{3p^2}{4m}. \quad (E = -\mathcal{E}) \quad (86,25)$$

როგორც ვხედავთ, (86,24) ინტეგრალური განტოლება ერთ ვექტორულ ცვლადზე დამოკიდებული.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ადვილია ფაქტების განტოლებების ჩაწერა იმ-პულსურ წარმოდგენაში თვით $T^{\alpha\beta}(z)$ მატრიცებისთვისაც. ამისათვის (83,17) განტოლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$T^{\alpha\beta}(z) = T_{\alpha\beta}(z) + T_{\alpha\beta}(z) G_0(z) [T^{\beta\gamma}(z) + T^{\gamma\alpha}(z)]. \quad (86,26)$$

თუ გავიხსენებთ (86,8) და (86,12) ფორმულებს, მაშინ ადვილად მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} \langle k_{\alpha\beta}, p_{\gamma} | T^{\alpha\beta}(z) | k'_{\alpha\beta}, p'_{\gamma} \rangle &= \delta(p_{\gamma} - p'_{\gamma}) \langle k_{\alpha\beta} | t_{\alpha\beta} \left(z - \frac{p_{\gamma}^2}{2\mu_{\gamma}} \right) | k'_{\alpha\beta} \rangle + \\ &\int \frac{\delta(p_{\gamma} - p'_{\gamma}) \langle k_{\alpha\beta} | t_{\alpha\beta} \left(z - \frac{p_{\gamma}^2}{2\mu_{\gamma}} \right) | k'_{\alpha\beta} \rangle}{D_{\alpha\beta}(k'_{\alpha\beta}, p'_{\gamma}; z)} \langle k'_{\alpha\beta}, p'_{\gamma} | T^{\beta\gamma}(z) + \\ &T^{\gamma\alpha}(z) | k'_{\alpha\beta}, p'_{\gamma} \rangle dk'_{\alpha\beta} dp'_{\gamma}. \end{aligned} \quad (86,27)$$

როგორც ვხედავთ, ინტეგრალური განტოლება შეიცავს ექვს ცვლადს $k_{\alpha\beta}, p_{\gamma}$ და აღწერს სამი ნაწილაკის სისტემაში მიმდინარე ნებისმიერ პროცესს ცნობილი ორნაწილაკობრივი $t_{\alpha\beta}$ -მატრიცის საშუალებით.

§ 87. ბაზანტვის აპლიტუდა და რეაქციის განივკვეთი

საინტერესოა გამოვარკვეოთ, თუ როგორ არის დაკავშირებული ფაქტების განტოლების ამონახსნები გაფანტვის ამპლიტუდასა და სხვადასხვა პროცესის განივკვეთთან. ამისათვის ჯერ განვიხილოთ ნაწილაკის დრეკალი გაფანტვა ორი ნაწილაკის ბმულ სისტემაზე, ე. ი. განვიხილოთ შემდეგი პროცესი:

$$\gamma + (\alpha, \beta) \rightarrow \gamma + (\alpha, \beta). \quad (87,1)$$

ღრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდის განმარტებისა და (81,33) ფორმულის თანახმად,

$$I'(p_\gamma, p_\gamma^0) = -\frac{4\pi^2 \mu_\gamma}{h^2} (\phi_f | r_{\alpha\gamma} + v_{\beta\gamma} | \Psi_i), \quad (p_\gamma^0 = p_\gamma^* = 2\mu_\gamma E), \quad (87,2)$$

სადაც $\mu_\gamma = \frac{1}{2M} m_\gamma m_{\alpha\beta}$, ხოლო p_γ^0 არის γ -ნაწილაკისა და (α, β) ნაწილაკის (ნბუ-ლი სისტემის) ფარლობითი იმპულსა საწყისი მომენტში. საბოლოო მდგომარეობაში კი იგივე იმპულსი აღენიშნეთ p_γ -თი ცხადია, საბოლოო მდგომარეობის ასიმპტოტური ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით

$$\phi_f(r_{\alpha\beta}, p_\gamma) = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-i p_\gamma r_{\alpha\beta}} \varphi_{n_{\alpha\beta}}(r_{\alpha\beta}), \quad (87,3)$$

$r_{\alpha\beta}, p_\gamma$ -აკობის კოორდინატებია, ხოლო $\varphi_{n_{\alpha\beta}}(r_{\alpha\beta})$ გამოხატავს (α, β) სისტემის შინაგანი მოძრაობის კოორდინატულ ტალღურ ფუნქციას, რომელიც ხასიათდება $n_{\alpha\beta}$ -კვანტური რიცხვების ერთობლიობით. (87,3) ასიმპტოტურ ფუნქციაში გათვალისწინებულია მხოლოდ (α, β) ურთიერთქმედება, ამიტომ გადასვლის ალბათობაში (ამპლიტუდაში) შევიდა ურთიერთქმედების დანარჩენი $V_f = r_{\alpha\gamma} + v_{\beta\gamma}$ ნაწილი. $|\Psi_i\rangle$ წარმოადგენს ფაღვევის განტოლების $|\Psi_{n_{\alpha\beta}}\rangle$ ტიპის ამონახსნს საწყისი მდგომარეობაში. შრეინგერის განტოლების გამოყენებით შეიძლება მოვახდინოთ შემდეგი შეცვლა:

$$(v_{\alpha\gamma} + v_{\beta\gamma}) |\Psi_i\rangle = \left\{ J_{n_{\alpha\beta}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_{\alpha\beta}} \Delta_{r_{\alpha\beta}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_\gamma} \Delta_{p_\gamma} - r_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \right\} |\Psi_i\rangle, \quad (87,4)$$

სადაც სისტემის საწყისი ენერგია ტოლია

$$E_i = J_{n_{\alpha\beta}} = \frac{p_\gamma^0}{2\mu_\gamma} - \mathcal{E}_{n_{\alpha\beta}}, \quad (87,5)$$

აქ $\mathcal{E}_{n_{\alpha\beta}}$ წარმოადგენს (α, β) სისტემის ბმის ენერგიას. თუ ვაეთვალისწინებთ რომ $\varphi_{n_{\alpha\beta}}(r_{\alpha\beta})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შრეინგერის განტოლებას

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu_{\alpha\beta}} \Delta_{r_{\alpha\beta}} + v(r_{\alpha\beta}) + \mathcal{E}_{n_{\alpha\beta}} \right\} \varphi_{n_{\alpha\beta}}(r_{\alpha\beta}) = 0, \quad (87,6)$$

მაშინ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$I'(p_\gamma, p_\gamma^0) = \frac{2\pi^2}{h^2} \lim_{p_\gamma^0 \rightarrow p_\gamma^*} (p_\gamma^0 - p_\gamma^*) \int e^{-i p_\gamma r_{\alpha\beta}} \varphi_{n_{\alpha\beta}}^*(r_{\alpha\beta}) \Psi(r_{\alpha\beta}, p_\gamma) d r_{\alpha\beta} d p_\gamma, \quad (87,7)$$

რომელიც შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$F(p_\gamma, p_\gamma^0) = \frac{2\pi^2}{h^2} \lim_{p_\gamma^0 \rightarrow p_\gamma^*} \int \varphi_{n_{\alpha\beta}}^*(k) \Psi_{n_{\alpha\beta}}(k, p) dk. \quad (87,8)$$

ამგვარად, (87,1) პროცესის ღრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდის მოსახებნად საკმარისია ავიღოთ ინტეგრალი იმპულსურ სივრცეში ფაღვევის განტოლების ამონახსნისა და ბმული ორი ნაწილაკის სისტემის იმპულსური წარმოდგენის ფუნქციის ნამრავლიდან.

არადრეკადი გაფანტვის დროს მნიშვნელოვანია რეაქციის დიფერენციალური განივევების გამოთვლა. განვიხილოთ შემდეგი ტიპის რეაქცია:



ნაწილაკი, რომლის ნომერია γ , და ბმული ქვესისტემა (α, β) ერთმანეთს ეჯახება, რის შემდეგაც მიიღება β -თავისუფალი ნაწილაკი და (α, γ) ბმული ქვესისტემა, ე. ი. ადგილი აქვს გაფანტვას გადანაწილებით. გადასვლის მატრიცული ელემენტი გამოითვლება ფორმულით

$$T_{ij} = \langle \Phi_j | v_{\alpha\beta} + v_{\beta\gamma} | \Psi_i \rangle, \quad (87,10)$$

სადაც Ψ_i იქნება საწყისი მდგომარეობის ზუსტი ფუნქცია კვანტური რიცხვებით p_γ^z და $n_{\alpha\beta}$. ეს ფუნქცია მიიღება ფადეევის განტოლებათა სისტემის ამოხსნით, Φ_j -კი საბოლოო მდგომარეობის ასიმპტოტური ტალღური ფუნქციაა:

$$\Phi_j = \Phi_{n_{\alpha\gamma}, p_\beta} = (2\pi\hbar)^{-3/2} \frac{i}{\hbar} p_\beta p_\beta \varphi_{n_{\alpha\gamma}}(r_{\alpha\gamma}). \quad (87,11)$$

p_β არის β და (α, γ) ქვესისტემის ფარდობითი მოძრაობის იმპულსი საბოლოო მდგომარეობაში. $\varphi_{n_{\alpha\gamma}}(r_{\alpha\gamma})$ წარმოადგენს (α, γ) ქვესისტემის შინაგანი მოძრაობის ტალღურ ფუნქციას $n_{\alpha\gamma}$ -კვანტური რიცხვებით.

ერთ სეკუნდში გადასვლის ალბათობა პროცესისა, როცა საბოლოო მდგომარეობის ფარდობითი p_β იმპულსი ძვეს ($p_\beta, p_\beta + dp_\beta$) ინტერვალში, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება ფორმულით

$$d\omega_{ij} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ij}|^2 \delta(E_i - E_j) dp_\beta. \quad (87,12)$$

საწყისი და საბოლოო მდგომარეობის ენერგიები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E_i = \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} - \mathcal{E}_{n_{\alpha\beta}}, \quad E_j = \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} - \mathcal{E}_{n_{\alpha\gamma}}. \quad (87,13)$$

დიფერენციალური განივევების მისაღებად საჭიროა (87,12) ალბათობა გავყოთ საწყის ნაკადზე, რომელიც ტოლია

$$J = \frac{p_\gamma}{\mu_\gamma (2\pi\hbar)^3}; \quad (87,14)$$

მაშასადამე, გაფანტვის დიფერენციალური განივევებისათვის გვექნება

$$d\sigma_{ij} = (2\pi)^4 \frac{\hbar^2 \mu_\gamma}{p_\gamma} |T_{ij}|^2 \delta(E_i - \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} + \mathcal{E}_{n_{\alpha\gamma}}) p_\beta^2 dp_\beta d\Omega_{p_\beta}. \quad (87,15)$$

ჩავატაროთ ინტეგრაცია p_β -თი, ამისათვის გავითვალისწინოთ დირაკის დელტა ფუნქციის ფილტრაციის თვისება; გვექნება

$$d\sigma_{ij} = (2\pi)^4 \hbar^2 \mu_\gamma \mu_\beta \frac{p_\beta^2}{p_\gamma} |T_{ij}|^2 d\Omega_{p_\beta}; \quad (87,16)$$

ამასთან, T_{ij} -მატრიცა გამოითვლება (87,10) ფორმულით. ამ მატრიცული ელემენტებიდან ადვილად გამოვირცხავეთ პოტენციალურ ენერგიას. მეტი გარკვეულობა

ბისათვის განვიხილოთ შემდეგი პროცესი $3 \rightarrow (1,2) \rightarrow 2 \rightarrow (1,3)$. მაშინ (87,10) ფორმულაში

$$V_f = v_{23} + v_{12} \quad (87,17)$$

$$\phi_f = \phi_{n_{31}, p_{2f}} = (2\pi\hbar)^{-3/2} \frac{1}{h} p_{2f} p_2 \varphi_{n_{31}}(r_{31}), \quad (87,18)$$

Ψ_{f-1} -ი ფაქტორების განტოლების ამონახსნია, რომელიც შემდეგნაირად წარმოიდგინება:

$$\Psi_f = \Psi_{n_{12}} = \psi_{n_{12}}^{(1)} + \psi_{n_{12}}^{(2)} + \psi_{n_{12}}^{(3)}. \quad (87,19)$$

სისტემის საწყისი და საბოლოო მდგომარეობის ენერგიები კი განისაზღვრება (87,13) ფორმულებით, სადაც უნდა ავიღოთ $\alpha=1$, $\beta=2$ და $\gamma=3$.

ფაქტორებს (84,16) განტოლებების თანახმად [იხ. (84,17) და (84,18) ფორმულები], შეგვიძლია დაწეროთ

$$v_{23} \psi_{n_{12}}^{(1)} = -v_{23} G_0(x) T_{23}(x) [\psi_{n_{12}}^{(2)} + \psi_{n_{12}}^{(3)}], \quad (87,20)$$

ხოლო თუ გავითვალისწინებთ ორნაწილაკობრივი $T_{23}(x)$ -მატრიცის განტოლებას

$$T_{23}(x) = r_{23} + v_{23} G_0(x) T_{23}(x), \quad (87,21)$$

სადაც $G_0(x)$ სამნაწილაკობრივი გრინის თვისუფალი ფუნქციაა, მაშინ (87,20) გამოსახულებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$v_{23} \psi_{n_{12}}^{(1)} = T_{23}(x) [\psi_{n_{12}}^{(2)} + \psi_{n_{12}}^{(3)}] - v_{23} [\psi_{n_{12}}^{(2)} + \psi_{n_{12}}^{(3)}], \quad (87,22)$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება

$$v_{23} \Psi_f = T_{23}(x) [\psi_{n_{12}}^{(1)} + \psi_{n_{12}}^{(2)}]. \quad (87,23)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$v_{12} \Psi_f = v_{12} \phi_{n_{12}} + T_{12}(x) [\psi_{n_{12}}^{(1)} + \psi_{n_{12}}^{(2)}] \quad (87,24)$$

და, მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \langle \phi_f | V_f | \phi_i \rangle &= \langle \phi_{n_{31}, p_{2f}} | v_{12} | \phi_{n_{12}, p_2} \rangle + \\ &\langle \phi_{n_{31}, p_{2f}} | T_{23}(x) (\psi_{n_{12}}^{(2)} + \psi_{n_{12}}^{(3)}) + T_{12} (\psi_{n_{12}}^{(1)} + \psi_{n_{12}}^{(2)}) \rangle. \end{aligned} \quad (87,25)$$

განვიხილოთ $\langle \phi_{n_{31}, p_{2f}} | v_{12} | \phi_{n_{12}, p_2} \rangle$ მატრიცული ელემენტი. ცხადია, ერთეულოვანი ოპერატორების ჩასმით შეგვიძლია დაწეროთ

$$\langle \phi_f | v_{12} | \phi_i \rangle = \int \langle \phi_{n_{31}, p_{2f}} | k_{31}, p_2 \rangle \langle k_{31}, p_2 | v_{12} | k'_{12}, p'_2 \rangle \cdot$$

$$\langle k'_{12}, p'_2 | \phi_{n_{12}, p_2} \rangle dk_{31} dp_2 dk'_{12} dp'_2. \quad (87,26)$$

რადგან იმპულსურ სივრცეში

$$\phi_{n_{\alpha\beta}, p_\gamma} = \delta(p_\gamma - p_\gamma) \varphi_{n_{\alpha\beta}}(k_{\alpha\beta}), \quad (87,27)$$

სადაც ბმული მდგომარეობის $\varphi_{n_{\alpha\beta}}(k_{\alpha\beta})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შრეინგერის იმპულსური წარმოდგენის განტოლებას

$$\left(\frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} + \mathcal{E}_{n_{\alpha\beta}} \right) \varphi_{n_{\alpha\beta}}(k_{\alpha\beta}) = - \int \langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle \varphi_{n_{\alpha\beta}}(k'_{\alpha\beta}) dk'_{\alpha\beta}, \quad (87,28)$$

ხოლო

$$\langle k_{\gamma\alpha}, p_\beta | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma \rangle = \langle k_{\alpha\beta}, p_\gamma | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma \rangle = \delta(p_\gamma - p'_\gamma) \langle k_{\alpha\beta} | v_{\alpha\beta} | k'_{\alpha\beta} \rangle. \quad (87,29)$$

ამიტომ, თუ k_{12} და k_{31} ვექტორებს შევცვლით p_2 და p_3 ვექტორებით

$$k_{31} = -p_3 - \frac{m_3}{m_{13}} p_2, \quad k_{12} = p_2 + \frac{m_2}{m_{12}} p_3, \quad (87,30)$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\langle \Phi_{n_3, p_2} | v_{12} | \Phi_{n_1, p_3} \rangle = \left\{ \xi_{n_{12}} + \frac{1}{2\mu_{12}} (p_{2f} + \frac{m_2}{m_{12}} p_3^2) \right\} \cdot \quad (87,31)$$

$$\varphi_{n_{12}} \left(p_{2f} + \frac{m_2}{m_{12}} p_3^2 \right) \varphi_{n_{31}} \left(p_3^2 + \frac{m_3}{m_{12}} p_{2f} \right);$$

ამგვარად, ჩვენ მიერ განხილული პროცესის გადასვლის მატრიცული ელემენტო განმარტებულია ფადეევის განტოლების ამონახსნით, ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცებითა და ბმული მდგომარეობის ფუნქციებით.

ანალოგიურად ვიპოვით (87,9) ტიპის ნებისმიერი პროცესის გადასვლის მატრიცულ ელემენტსაც. (87,16) ფორმულით განისაზღვრება ყველა იმ პროცესის განივკვეთი, როცა როგორც საწყისი, ისე საბოლოო მდგომარეობაში გვაქვს ორნაწილაკობრივი ბმული ქვესისტემები. როცა $p_T = p_B$, მაშინ (87,16) გამოსახულება იძლევა ღრეკადი გაფანტვის განივკვეთს.

ასეა ვაჩვენოთ, რომ იმავე პროცესის განივკვეთი შეგვიძლია გამოვხატოთ (86,27) განტოლების ამოხსნებით. მართლაც, $3 + (1,2) \rightarrow 2 + (1,3)$ პროცესის განივკვეთი დაკავშირებული იქნება გადასვლის შემდეგ მატრიცულ ელემენტთან:

$$T_{1f} = \langle \Phi_{n_3, p_{2f}} | T(z) | \Phi_{n_1, p_3} \rangle, \quad (87,32)$$

რომელიც ასე წარმოიდგინება:

$$T_{1f} =$$

$$\int \langle \Phi_{n_3, p_{2f}} | k_{31}, p_2 \rangle \langle k_{31}, p_1 | T(z) | k'_{12}, p'_3 \rangle \langle k'_{12}, p'_3 | \Phi_{n_1, p_3} \rangle dk_{31} dp_2 dk'_{12} dp'_3 \quad (87,33)$$

გავიხსენოთ (86,7) გამოხატულება, მაშინ საბოლოოდ გვექნება

$$T_{1f} = \int dk_{31} dk'_{12} \varphi_{n_{31}}^*(k_{31}) \varphi_{n_{12}}(k'_{12}) \langle k_{31}, p_{2f} | T(z) | k'_{12}, p_3 \rangle. \quad (87,34)$$

ამასთან, $T(z) = T^{23} + T^{31} + T^{12}$ განისაზღვრება (86,27) სისტემიდან, $\varphi_n(k)$ კი ორნაწილაკობრივი სისტემის ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქციაა.

ასეა განვიხილოთ რეაქცია

$$\gamma + (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta + \gamma. \quad (87,35)$$

ამ რეაქციაში ხდება (α, β) ბმული სისტემის გახლეჩა. რადგან ბოლო მდგომარეობაში სამეც ნაწილაკი თავისუფალია, ამიტომ მდგომარეობის დასახასიათებლად დაგვიტოვდება ორი ვექტორი. ასეთად შევარჩიოთ იაკობის $k_{\alpha\beta}$ და p_γ ვექტორები, მაშინ

$$d\sigma_{1f} = \frac{(2\pi)^4 h^2 \mu_\gamma}{p_T} |T_{1f}|^2 \delta \left(E_i - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} - \frac{k_{\alpha\beta}^2}{2\mu_{\alpha\beta}} \right) dk_{\alpha\beta} dp_\gamma, \quad (87,36)$$

სადაც

$$T_{1f} = \langle \Phi_f | v_{12} + v_{23} + v_{31} | \Psi_i \rangle. \quad (87,37)$$

ამ გამოსახულებაში Φ_f გამოხატავს სამი თავისუფალი ნაწილაკის საბოლოო მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას, რომელსაც იმპულსურ წარმოდგენაში ექნება ასეთი სახე:

$$\Phi_f \equiv \Phi_{n_0} = \delta(k - k') \delta(p - p'). \quad (87,38)$$

k' და p' იაკობის იმპულსების დაფიქსირებული მნიშვნელობებია. რაღვან.
 $V = v_{12} + v_{23} + v_{31}$ და $V \Psi_i = T(z) \Phi_i$, ამიტომ

$$T_{ij} =$$

$$\int \langle \Phi_j | k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma \rangle \langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma | T(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma \rangle \langle k_{\alpha\beta}, p_\gamma | \Phi_i \rangle dk'_{\alpha\beta} dp'_\gamma dk_{\alpha\beta} dp_\gamma \quad (87,39)$$

თანახმად (87,38) გამოსახულებისა, საბოლოოდ გვექნება

$$T_{ij} = \int \langle k'_{\alpha\beta}, p'_\gamma | T(z) | k_{\alpha\beta}, p_\gamma \rangle \varphi_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) dk_{\alpha\beta}; \quad (87,40)$$

ამასთან, $T(z) = T^{23} + T^{31} + T^{12}$ მატრიცის მნიშვნელობა მოიქმნება ფაღვეის (86,27) სისტემის ამოხსნით.

§ 88. საში ნაწილაკის ამოცანა ნულმვანი რადიუსის ურთიერთქმედების შემთხვევაში

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა საში ნაწილაკის სისტემაში წყვილური ურთიერთქმედება ხასიათდება ნულმვანი ურთიერთქმედების რადიუსით, ე. ი. როცა პოტენციალს კონტაქტური ხასიათი აქვს. ვუკეთ, ვსწავლობთ იგივეურ ნაწილაკთა სისტემას. კონკრეტულობისათვის განვიხილოთ პროცესი, როცა ერთი ნაწილაკი იფანტება დანარჩენი ორის ბმულ მდგომარეობაზე. ნაწილაკთა იგივეურობა და პოტენციალური ენერჯიის კონტაქტური ხასიათი საკმარისად ამარტივებს საში ნაწილაკის პრობლემას; კერძოდ, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ამ შემთხვევაში ფაღვეის განტოლებათა სისტემა დაიყვანება ერთ განტოლებაზე, რომელიც დამოკიდებული იქნება ერთ ცვლადზე.

განვიხილოთ ამოცანაში ტალღური ფუნქცია სიმეტრიული იქნება ნებისმიერი ორი ნაწილაკის გადასმის მიმართ. ამიტომ C -სისტემაში მას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Psi = \psi(k_{23}, p_1) + \psi(k_{31}, p_2) + \psi(k_{12}, p_3), \quad (88,1)$$

სადაც

$$\psi(-k, p) = \psi(k, p); \quad (88,2)$$

ამასთან, $\psi(k, p)$ ფუნქცია წარმოადგენს ფაღვეის (86,19) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს:

$$\psi_n(k, p) = \varphi_n(k, p) + D^{-1}(k, p; z) \int \left[\langle k | t(z_p) | -p' - \frac{1}{2} p \rangle + \langle k | t(z_p) | p' + \frac{1}{2} p \rangle \right] \psi \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) dp', \quad (88,3)$$

სადაც

$$D(k, p, z) = z - \frac{k^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m}, \quad z_p = z - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m}. \quad (88,4)$$

ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ისეთი ერთეულებით, როცა $\hbar = 1$. ამ შემთხვევაში ნაწილაკის იმპულსი და ტალღური ვექტორი ერთმანეთს ემთხვევა, ხოლო ენერჯია განსაზღვრული იქნება ფორმულით $k^2 = mE$.

ფაღვეის განტოლების თავისუფალი წევრი ჩვენი ამოცანისათვის გამოიხატება ტოლობით

$$\varphi_n(k, p) = \delta(p - p_0) \varphi_n(k); \quad (88,5)$$

სადაც p_0 -დაცემული ნაწილაკის იმპულსია, $\varphi_n(k)$ -კი წარმოადგენს შინაგანი მოძრაობის ტალღურ ფუნქციას ბმული ორნაწილაკობრივი სისტემისა, რომელზეც ხდება მესამე ნაწილაკის გაფანტვა. n -კვანტური რიცხვია. როგორც ვიცით, კონტაქტური ურთიერთქმედების დროს $\varphi_n(k)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi_n(k) = \frac{N}{\alpha^2 + k^2}, \quad \alpha^2 = m\mathcal{E}. \quad (88,6)$$

სადაც N -ნორმირების კოეფიციენტია, ხოლო \mathcal{E} -ბმის ენერგია. (88,3) ფაქტის განტოლებაში ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცა $\langle k | t(z) | k' \rangle$ ნულოვანი ქმედების რადიუსის შემთხვევაში k და k' იმპულსებზე დამოკიდებული არ არის და მას. (44,6) ფორმულის თანახმად, აქვს ასეთი სახე:

$$\langle k | t(z) | k' \rangle = \frac{1}{2\pi^2 m} \frac{-1}{\alpha + i\sqrt{mz}}; \quad \text{Im } z \geq 0 \quad (88,7)$$

გავიხსენოთ, რომ განხილულ ამოცანაში

$$z = \frac{3p_0^2}{4m} - \mathcal{E} + iz, \quad (88,8)$$

ამიტომ (88,4) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$m J(k, p; z) \delta(p - p_0) = - (k^2 + \alpha^2) \delta(p - p_0). \quad (88,9)$$

თუ ფაქტის განტოლებაში შევიტანთ (88,7) და (88,5) ფორმულებს, მაშინ (88,6) და (88,9) გამოსახულებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\psi_{p_0}(k, p) = \frac{N}{k^2 + \frac{3}{4} p^2 - mz} \left\{ \delta(p - p_0) - \frac{1}{\pi^2} \frac{\chi_{p_0}(p)}{\alpha + i\sqrt{mz}} \right\}, \quad (88,10)$$

სადაც

$$\chi_{p_0}(p) = \frac{1}{N} \int \psi_{p_0} \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) dp'. \quad (88,11)$$

ვიპოვოთ განტოლება, რომელსაც დააკმაყოფილებს $\chi_{p_0}(p)$ ფუნქცია. ამ მიზნით დაეწეროთ (88,10) ფუნქცია $k = p + \frac{1}{2} p'$ და $p = p'$ ცვლადებისათვის და შევიტანოთ იგი (88,11) გამოსახულების ინტეგრალში; გვექნება

$$\chi_{p_0}(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2} p_0 \right)^2 + \frac{3}{4} p_0^2 - mz} \\ \frac{1}{\pi^2} \int \frac{\chi_{p_0}(p') dp'}{\left[\left(p + \frac{1}{2} p' \right)^2 + \frac{3}{4} p'^2 - mz \right] (\alpha + i\sqrt{mz p'})}, \quad (88,12)$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\chi_{p_0}(p) = \frac{1}{p^2 + p p_0 + p_0^2 - mz}$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{\chi_{p_0}(p') dp'}{(p^2 + p p' + p'^2 - mz) \left(\alpha + i \sqrt{mz - \frac{3}{4} p'^2} \right)}. \quad (88,13)$$

ახლა, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\chi_{p_0}(p) = \frac{3}{8} \frac{a_{p_0}(p)}{\alpha - i \sqrt{mz_p}}, \quad (88,14)$$

მაშინ (88,13)-ის ნაცვლად გვექნება ინტეგრალური განტოლება $a(p, p_0)$ ფუნქციისათვის

$$\frac{\frac{3}{8} a_{p_0}(p)}{\alpha + i \sqrt{\frac{3}{4} p^2 - mz}} = \frac{1}{p^2 + p p_0 + p_0^2 - mz} + \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{a_{p_0}(p') dp'}{(p^2 + p p' + p'^2 - mz) (p'^2 - p_0^2 - iz)}. \quad (88,15)$$

ეს განტოლება ზუსტად ემთხვევა სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლებას, რომელიც მათ გამოიყენეს 1956 წელს [99].

ცხადია, (88,14) აღნიშვნის ძალით (88,10) ტალღური ფუნქცია შემდეგი გამოსახულებით განისაზღვრება:

$$\psi_{p_0}(k, p) = \frac{N}{k^2 + \frac{3}{4} p^2 - mz} \left\{ \delta(p - p_0) + \frac{1}{2\pi^2} \frac{a_{p_0}(p)}{p^2 - p_0^2} \right\}. \quad (88,16)$$

ახლა ვაჩვენოთ რა კავშირშია ღრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდასთან (88,15) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი — $a(p, p_0)$. ამ მიზნით გამოვიყენოთ (87,8) ფორმულა, რომელშიც შევიტანოთ (88,16) ფუნქციის მნიშვნელობა

$$F(p, p_0) = \lim_{p^2 - p_0^2} \frac{N a(p, p_0)}{p^2 - p_0^2 - i0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_n(k) dk}{k^2 + \alpha^2 + \frac{3}{4} (p^2 - p_0^2)}. \quad (88,17)$$

თუ გავიხსენებთ (88,6) გამოსახულებას და $\varphi_n(k)$ ფუნქციის ნორმირების პირობას, ადვილად დავინახავთ, რომ

$$F(p, p_0) = a(p, p_0)_{p^2 = p_0^2}; \quad (88,18)$$

მაშასადამე, გაფანტვის ამპლიტუდა უშუალოდ დაკავშირებული ყოფილა (88,15) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნთან.

აღსანიშნავია, რომ (88,15) განტოლება ერთ ექვტორულ ცვლადზეა დამოკიდებული, მაგრამ რამდენადაც ამ განტოლებაში შეგვიძლია მოვახდინოთ კუ-

თხეობით ინტეგრაცია, სინამდვილეში იგი წარმოადგენს ერთგანზომილებიან რეტეგ-
რალურ განტოლებას. ამ მიზნით მოვახდინოთ შემდეგი გაშლა:

$$a(p, p_0) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_l(p, p_0) Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}_0). \quad (88,19)$$

სრულად ანალოგიურად შეიძლება გავშალოთ განტოლების თავისუფალი წევრიც:

$$\begin{aligned} (p^2 + p_0^2 + pp_0 - m\varepsilon)^{-1} &= 4\pi \sum_{l, m} b_l(p, p_0) Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}_0) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) b_l(p, p_0) \mu_l(\bar{p} \cdot \bar{p}_0). \end{aligned} \quad (88,20)$$

ცხადია,

$$b_l(p, p_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) dx}{p^2 - p_0^2 - m\varepsilon - p p_0 x} = \frac{1}{p p_0} Q_l\left(\frac{m\varepsilon - p^2 - p_0^2}{p p_0}\right), \quad (88,21)$$

სადაც Q_l -ლეჯანდრის მეორე გვარის პოლინომია. თუ გამოვიყენებთ (88,19),
(88,20) ფორმულებს და კუთხეების მიხედვით მოვახდენთ ინტეგრაციას, მაშინ
(88,15) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\frac{3}{8} a_l(p, p_0)}{\alpha + \sqrt{3p^2/4 - m\varepsilon}} = b_l(p, p_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p'^2 dp' b_l(p', p)}{p'^2 - p_0^2 - i\varepsilon} a_l(p', p_0), \quad (88,22)$$

რომელიც ერთგანზომილებიანი ინტეგრალური განტოლებაა. მისი ამოხსნა ადვილია
მიახლოებითი მეთოდების გამოყენებით.

საინტერესოა განვიხილოთ გაფანტვა ნულის ტოლი ენერჯის შემთხვევაში,
ე. ი. როცა დაცემული ნაწილაკის იმპულსის სიდიდე ნულის ტოლია $p_0=0$, მაშინ,
ცხადია, $m\varepsilon = -\alpha^2$ და გაფანტვას სფერული სიმეტრია ექნება. ამ შემთხვევაში ინტე-
გრალური განტოლების დასაწერად ხელსაყრელია კვლავ (88,15) და გამოვიღეთ,
რადგან (88,22) განტოლება დაწერილია არსებითი დაშვებით, რომ $p_0 \neq 0$.

დავუშვათ, (88,15) განტოლებაში $p_0=0$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $a(p) \equiv a(p, 0)$,
გვექნება

$$\frac{\frac{3}{8} a(p)}{\alpha + \sqrt{\frac{3}{4} p^2 + \alpha^2}} = \frac{1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(p') dp'}{p'^2 (p^2 + pp' + p'^2 - m\varepsilon)}, \quad (88,23)$$

რადგან ამოცანას ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს, ამიტომ $a(p) = a(p)$ და
კუთხეებით ინტეგრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{\frac{3}{8} a(p)}{\alpha + \sqrt{\frac{3}{4} p^2 + \alpha^2}} = \frac{1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dp'}{pp'} \ln \frac{p^2 + p'^2 + \alpha^2 + pp'}{p^2 + p'^2 + \alpha^2 - pp'} a(p'). \quad (88,24)$$

ვიპოვოთ $a(p)$ ამპლიტუდის მნიშვნელობა $p=0$ შემთხვევაში. ამისათვის (88,24) განტოლებაში ავიღოთ ზღვარი, როცა $p \rightarrow 0$. ინტეგრალქვეშ ლოპიტალის წესის გამოყენების შემდეგ ადვილად ვიპოვით

$$\frac{3}{16} \frac{a(0)}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dp'}{x^2 + p'^2} a(p'). \quad (83,25)$$

შემოვიღოთ უგანზომილებო ცვლადები: $p = ax$, $p' = ax'$, ამასთან, $a(0) = \tilde{a}'(0)$, მაშინ საბოლოოდ გვექნება

$$\tilde{a}'(0) = \frac{16}{3} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{a}'(x') dx'}{1+x'^2} \right\}. \quad (83,25)$$

ეს განტოლება რიცხობრივად მარტივად ამოიხსნება.

სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლებიდან კონკრეტული შედეგები მიღებული იყო სკორნიაკოვის [101], ვ. დანილოვისა [102] და სხვათა შრომებში.

იმის გამო, რომ (88,15) განტოლება კონტაქტური ურთიერთქმედების ნედვგია, მისი გამოყენება ბმული მდგომარეობებისათვის ერთობ შეზღუდულია. კერძოდ, განტოლების ამონახსნები არაკალსახა აღმოჩნდა. ამის მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ თომასის თეორემის ძალით [98], როცა სამივე ნაწილაც შეუძლია ერთ წერტილში მოხვედრა, ასეთი სისტემის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია — ∞ -ის ტოლია.

სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლების გამოყენების საკითხი სამი ნაწილაცის სისტემის ბმული მდგომარეობისათვის შესწავლილი იყო ვ. დანილოვის [102], რ. მინლოსისა და ლ. ფაღევის მიერ [100]. კერძოდ, ვ. დანილოვმა მოძებნა განტოლების უსასრულოდ დიდი რაოდენობის საკეთარი მნიშვნელოვნებიდან რეალური ამონახსნების გამოყოფის მეთოდი.

§ 80. ფადეევის განტოლებაში ნაგისმიერი მომენტის შემთხვევაში

ვთქვათ, საქმე გვაქვს უსპინო არაიგიური სამი ნიწილაცის სისტემასთან, რომლებიც მოძრაობენ ნებისმიერი მომენტით. ვნახოთ ამ შემთხვევაში როგორ სახეს მიიღებენ ფაღევის განტოლებები [113]. სამი ნაწილაცის სისტემის სრული მომენტი აღენიშნოთ \mathbf{J} -თი, მისი პროექცია კი \mathbf{J}_M -ით. სრული მომენტი შეიძლება მივიღოთ ცალკეულ ნაწილაცთა მომენტების შეკრებით, მაგრამ ხელსაყრელი იაკობის კოორდინატების გამოყენების შემთხვევაში შემოვიღოთ ორი ნაწილაცის ფარდობითი მოძრაობის მომენტი \mathbf{I} (პროექციით m_I) და მესამე ნაწილაცის მომენტი- \mathbf{L} წინა ორი ნაწილაცის ინერციის ცენტრის მიმართ (პროექციით m_L). მაშინ $\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathbf{L}$ და $M = m_I + m_L$. ცვლადებად ავარჩიოთ \mathbf{p} და \mathbf{q} იმპულსები, რომლებიც განმარტებულია (75,45) ფორმულებით. ცხადია, ინერციის ცენტრის სისტემაში ($\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$) გვექნება შემდეგი ვექტორები:

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\rangle = |\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\rangle = |\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2\rangle = |\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3\rangle. \quad (89,1)$$

- ამ ტოლობაში იგულისხმება ის გარემოება, რომ, როცა ერთ რომელიმე ვექტორს, ვთქვათ $|p_2 q_2\rangle$ -ს, ვცვლით მეორით, მაგალითად $|p_1 q_1\rangle$ -ით, მაშინ საჭიროა p_1, q_1 ცვლადები გამოიხატოს p_2, q_2 ცვლადებით (75,49) ფორმულების გამოყენებით.
- ზემოთ შემოღებული ვექტორები ნორმირებულია პირობით

$$\langle p', q' | p, q \rangle = \delta(p' - p) \delta(q' - q). \quad (89,2)$$

ახლა შემოვიღოთ მდგომარეობის პარციალური ვექტორები: $|p m_{m_l}; q l m_L\rangle$. ამისათვის მოვასწინოთ $|p, q\rangle$ ვექტორის გაშლა სფერულ ფუნქციებად

$$|p, q\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_L} |p m_{m_l}, q l m_L\rangle Y_{l m_l}(\bar{p}) Y_{L m_L}(\bar{q}). \quad (89,3)$$

პარციალური ვექტორები ორთო-ნორმირებული იქნება პირობით

$$\langle p' l' m'_l; q' l' m'_L | p l m_l; q l m_L \rangle = \frac{\delta(p - p')}{p^2} \frac{\delta(q - q')}{q^2} \delta_{l'l'} \delta_{m_l m'_l} \delta_{L L'} \delta_{m_L m'_L}. \quad (89,4)$$

ჩასაც ადვილად შევამოწმებთ (89,2) და (89,3) ტოლობების გამოყენებით, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\delta(p - p') = \frac{\delta(p - p')}{p^2} \delta(\bar{p} - \bar{p}') = \frac{\delta(p - p')}{p^2} \sum_{m_l} Y_{l m_l}^*(\bar{p}) Y_{l m_l}(\bar{p}'). \quad (89,5)$$

ახლა შემოვიღოთ $|p q l L J M\rangle$ ვექტორი და იგი შემდეგნაირად განვმარტოთ:

$$|p q l L J M\rangle = \sum_{m_l m_L} \langle l m_l m_L | J M \rangle |p l m_l; q l m_L\rangle, \quad (89,6)$$

სადაც კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტი მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ სრული მომენტი მიიღება l და L მომენტების შეკრებით. თუ გავიხსენებთ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების (4,6) პირობას, მაშინ (89,6) ტოლობა შეგვიძლია მარტივად შევადარუნოთ

$$|p l m_l; q l m_L\rangle = \sum_{J M} \langle l m_l m_L | J M \rangle |p q l L J M\rangle. \quad (89,7)$$

აბრს შემდეგ $|p, q\rangle$ ვექტორი ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$|p, q\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_L} \sum_{J M} \langle l m_l m_L | J M \rangle |p q l L J M\rangle Y_{l m_l}(\bar{p}) Y_{L m_L}(\bar{q}). \quad (89,8)$$

ეს გამოსახელება გავამრავლოთ $Y_{l' m'_l}^*(\bar{p}') Y_{L' m'_L}^*(\bar{q}')$ ნამრავლზე, ავიღოთ ინტეგრალი $d\Omega_p d\Omega_q$ სხეულოვანი კუთხეებით, შემდეგ მიღებული შედეგი გავამრავლოთ $\langle l' L' m'_l m'_L | J' M'\rangle$ კოეფიციენტზე და ავჯამოთ m'_l და m'_L -ით. სფერული ფუნქციების ორთო-ნორმირებისა და (4,6) პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$|p q l L J M\rangle = \sum_{m_l m_L} \langle l m_l m_L | J M \rangle \int |p, q\rangle Y_{l m_l}^*(\bar{p}) Y_{L m_L}(\bar{q}) d\Omega_p d\Omega_q. \quad (89,9)$$

(89,2) ფორმულის გამოყენებით ასევე ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $|p q l L J M\rangle$ ვექტორები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\langle p' q' l' L' J' M' | p q l L J M \rangle = \frac{\delta(p - p')}{p^2} \frac{\delta(q - q')}{q^2} \delta_{l'l'} \delta_{L L'} \delta_{J J'} \delta_{M M'}. \quad (89,10)$$

შემდგომში წერის გამარტივების მიზნით ($LLJM$) კვანტური რიცხვების ერთობლიობას ხშირად ერთი α ასოთი აღვნიშნავთ. ქვემოთ ჩვენ დაგვირღება გრინის ფუნქციის გამოთვლა $|pqz\rangle$ მდგომარეობების მიხედვით. (89,9) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$\langle p'q'\alpha' | G_0(z) | pqz \rangle = \sum_{m_L m_L'} \sum_{m_L' m_L''} \langle L m_L m_L' | J M \rangle \langle L' m_L' m_L'' | J' M' \rangle \\ \int \langle p', q' | G_0(z) | p, q \rangle Y_{m_L}^*(\bar{p}) Y_{L m_L}(\bar{q}) Y_{L' m_L'}(\bar{p}') Y_{L' m_L''}(\bar{q}') \cdot \\ d\Omega_p d\Omega_{p'} d\Omega_q d\Omega_{q'}. \quad (89,11)$$

გავიხსენოთ, რომ

$$\langle p', q' | G_0(z) | p, q \rangle = \frac{\delta(p-p') \delta(q-q')}{z - (p^2 + q^2)}; \quad (89,12)$$

მაშინ წინა ტოლობა საბოლოოდ მოგვეცემა

$$\langle p'q'L'J'M' | G_0(z) | pqLJM \rangle = \frac{\delta(p-p') \delta(q-q')}{p^2 q^2 [z - (p^2 + q^2)]} \delta_{LL'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (89,13)$$

ასევე, ცხადია, (78,18) ფორმულის თანახმად ორნაწილაკობრივი გაფანტვის $T(z)$ -მატრიცისათვის გვექნება

$$\langle p', q' | T(z) | p, q \rangle = \delta(q-q') \langle p' | t(z-q^2) | p \rangle. \quad (89,14)$$

თუ მოვახდენთ გაშლას სფერული ფუნქციების მიხედვით

$$\langle p' | t(z-q^2) | p \rangle = 4\pi \sum_{l m_l} \langle p' | t_l(z-q^2) | p \rangle Y_{l m_l}^*(\bar{p}') Y_{l m_l}(\bar{p}), \quad (89,15)$$

შედგად გვექნება

$$\langle p', q' | T(z) | p, q \rangle = \delta(q-q') 4\pi \sum_{l m_l} \langle p' | t_l(z-q^2) | p \rangle Y_{l m_l}^*(\bar{p}') Y_{l m_l}(\bar{p}). \quad (89,16)$$

ახლა დავწეროთ ფადეევის განტოლებები სამი არაივური ნაწილაკისათვის განსაზღვრული მომენტით. ამისათვის გამოვიღეთ ფადეევის განტოლებათა (83,11) სისტემიდან. ჯერ განვიხილოთ ამ სისტემის პირველი განტოლება და ჩავწეროთ იგი პარციალური სიდიდეებისათვის. შედეგებს აღვიღად გადავიტანთ დანარჩენ ორ განტოლებაზეც.

$$T^1(z) = T_1(z) + T_1(z) G_0(z) [T^2(z) + T^3(z)], \quad (89,17)$$

სადაც $\nu = 1, 2, 3$ ინდექსი ფაქტიურად აღნიშნავს $\nu = 23, 31, 12$ მნიშვნელობებს. ეს განტოლება მარცხნიდან სკალარულად გავამრავლოთ $\langle p_1 q_1 \alpha_1 |$ ვექტორზე, მარჯვნიდან კი $| n \rangle$ საწყისი მდგომარეობის ვექტორზე. n აღნიშნავს კვანტური რიცხვების ერთობლიობას, რომლის დაზუსტება ამჟამად არ გვჭირდება. გვექნება

$$\langle p_1 q_1 \alpha_1 | T^1(z) | n \rangle = \langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) | n \rangle + \langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) G_0(z) T^2(z) | n \rangle + \\ \langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) G_0(z) T^3(z) | n \rangle. \quad (89,18)$$

ერთეულოვანი ოპერატორების ჩასმით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) G_0(z) T^2(z) | n \rangle = \\ \sum_{p_2 q_2 \alpha_2} \int \langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) | p_2 q_2 \alpha_2 \rangle \langle p_2 q_2 \alpha_2 | G_0(z) | p_2' q_2' \alpha_2' \rangle \cdot \\ \langle p_2' q_2' \alpha_2' | T^2(z) | n \rangle p_2^2 d p_2 q_2^2 d q_2 p_2'^2 d p_2' q_2'^2 d q_2'. \quad (89,19)$$

თუ გამოვიყენებთ (89,13) გამოსახულებას, მივიღებთ

$$\langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) G_0(z) T^2(z) | n \rangle =$$

$$\sum_{\alpha_0} \int \langle p_1 q_1 \alpha_1 | T_1(z) | p_2 q_2 \alpha_2 \rangle \frac{p_2^2 q_2^2}{z - (p_2^2 + q_2^2)} \langle p_2 q_2 \alpha_2 | T^2(z) | n \rangle dp_2 dq_2, \quad (89,20)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\psi_n^{(1)}(p, q; \alpha) = \langle p_i q_i \alpha_i | T^{(1)}(z) | n \rangle, \quad (89,21)$$

$$\Phi_n^{(1)}(p, q; \alpha) = \langle p q \alpha | T_i(z) | n \rangle \quad (89,22)$$

და
$$K_i(p, q; \alpha | p_i, q_i, \alpha_i) = \langle p q \alpha | T_i(z) | p_i q_i \alpha_i \rangle, \quad (89,23)$$

მაშინ (89,18) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\psi_n^{(1)}(p, q; \alpha) = \Phi_n^{(1)}(p, q; \alpha) +$$

$$\sum_{i=2}^n \sum_{\alpha_i} \int dp_i dq_i K_i(p, q; \alpha | p_i, q_i, \alpha_i) \frac{p_i^2 q_i^2}{z - (p_i^2 + q_i^2)} \psi_n^{(1)}(p_i, q_i; \alpha_i). \quad (89,24)$$

ანალოგიურად დაიწერება დანარჩენი ორი განტოლებაც, კერძოდ ისინი მიიღება ინდექსების ციკლური გადასმით, თავისუფალი წევრები კი ნულის ტოლი იქნება.

როგორც ვხედავთ, პარციალურ სიდიდეებში ფადეევის განტოლებები წარმოადგენენ ორ ცვლადზე დამოკიდებულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას. ამასთან, $\alpha = (LJM)$ ცვლადებით, ზოგად შემთხვევაში, აიღება უსასრულო ჯამები.

ახლა ინტეგრალური განტოლების გულს მივცეთ ცხადი სახე. ვიპოვოთ K_z -გული. გამოვიყენოთ (89,23) განმარტება და (89,9) ფორმულა. გვექნება

$$K_z(p, q; z | p_2, q_2; \alpha_2) = \sum_{m_l m_L} \sum_{m'_l m'_L} \langle l L m_l m_L | J M \rangle \langle l' L' m'_l m'_L | J' M' \rangle.$$

$$\int d\Omega_p, d\Omega_q, d\Omega_{p_2}, d\Omega_{q_2} \langle p, q | T_1(z) | p_2, q_2 \rangle \cdot$$

$$Y_{l m_l}^*(\bar{p}) Y_{L m_L}(\bar{q}) Y_{l' m'_l}(\bar{p}_2) Y_{L' m'_L}(\bar{q}_2). \quad (89,25)$$

(89,1) ტოლობის ძალით შეგვიძლია $|p_2, q_2\rangle$ ვექტორი შევცვალოთ $|p_1, q_1\rangle$ ვექტორით, ოღონდ შედგომ p_1, q_1 ცვლადები გამოვხატოთ p_2, q_2 ცვლადებით. ამიტომ, (89,16) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია დაწვიროთ

$$\langle p_1, q_1 | T_1(z) | p_2, q_2 \rangle =$$

$$\delta(q_1^2 - q_2^2) 4\pi \sum_{\lambda \mu} \langle p_1 | t_{\lambda}^{(1)}(z - q_1^2) | p_1 \rangle Y_{\lambda \mu}(\bar{p}_1) Y_{\lambda \mu}^*(\bar{p}_1). \quad (89,26)$$

ეს გამოსახულება შეეიტანოთ (89,25) ფორმულაში და ავიღოთ ინტეგრალი $d\Omega_p$ -ით. გარდა ამისა, გავითვალისწინოთ (89,6) ფორმულა, რომელშიც მოვხდინოთ შეცვლა

$$\delta(q^2 - q_1^2) = \frac{1}{2q} \delta(q - q_1). \text{ შედეგად მივიღებთ}$$

$$K_z = \frac{8\pi}{q} \sum_{m_l m_L} \sum_{m'_l m'_L} \langle l L m_l m_L | J M \rangle \langle l' L' m'_l m'_L | J' M' \rangle \int d\Omega_{p_2} d\Omega_{q_2} \delta(q^2 - q_1^2) \cdot$$

$$\langle p | t_{\lambda}^{(1)}(z - q^2) | p_1 \rangle Y_{l m_l}^*(\bar{p}_1) Y_{L m_L}^*(\bar{q}_1) Y_{l' m'_l}(\bar{p}_2) Y_{L' m'_L}(\bar{q}_2). \quad (89,27)$$

როგორც დირაკის დელტა ფუნქცია, ისე $t_1^{(1)}$ მატრიცა დამოკიდებული იქნება კუთხეებზე, რამდენადაც (89,27) ფორმულაში p_1, q_1 უნდა გამოიხატოს p_2, q_2 ცვლადების საშუალებით.

მოვახდინოთ (89,27) გამოსახულების შემდგომი გარდაქმნა. ავიღოთ კოორდინატთა ორი სისტემა. ერთი უძრავი xOy და მეორე $x'Oy'$ დამაგრებული სამი სხეულის სისტემასთან. ამასთან, მოძრავი სისტემის x' ღერძი დაემათხვიოთ p_2 -იმბულსს, x' -ღერძი კი ვავატაროთ p_1 -სა და p_2 -ზე გამავალ სიბრტყეზე.

(89,27) გამოსახულებაში შემაჯავლი ყველა კუთხე გამოეხატოთ კუთხეებით, რომლებიც ათვლება მოძრავი სისტემის x' -ღერძიდან. თუ შემოვიღებთ ბრუნვის $D_{m'm}^l(\psi, \theta, \varphi)$ მატრიცებს, სადაც ψ, θ, φ ეილერის კუთხეებია, შეგვიძლია დავწეროთ [5]:

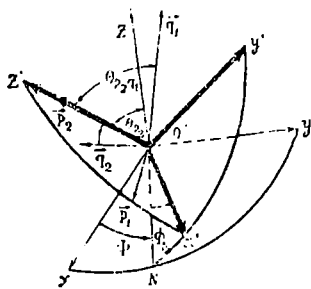


Fig. 15

$$\begin{aligned}
 Y_{lm_l}(\bar{p}_1) &= \sum_{n_l} D_{n_l m_l}^l(\omega) Y_{ln_l}(\theta_{p_2}, \varphi_1, 0) \\
 Y_{Lm_L}(\bar{q}_1) &= \sum_{n_L} D_{n_L m_L}^L(\omega) Y_{Ln_L}(\theta_{p_2}, \varphi_1, 0) \\
 Y_{l'm'_l}(\bar{p}_2) &= \sum_{n'_l} D'_{n'_l m'_l}(\omega) Y_{l'n'_l}(0, 0) \\
 Y_{L'm'_L}(\bar{q}_2) &= \sum_{n'_L} D'_{n'_L m'_L}(\omega) Y_{L'n'_L}(\theta_{p_2}, \varphi_2, 0),
 \end{aligned} \tag{89,28}$$

სადაც ω აღნიშნავს $(\psi, \theta_{p_2}, \varphi_{p_2})$ კუთხეების ერთობლიობას. ყველა კუთხე ნაჩვენებია მე-15 ნახაზზე.

გავითვალისწინოთ, რომ

$$Y_{l'n'_l}(0, 0) = \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} \delta_{n'_l, 0} \tag{89,29}$$

მაშინ (89,28) ფორმულების გამოყენებით (89,27) გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{4\sqrt{\pi}\sqrt{2l'+1}}{q} \sum_{m_l m_L m'_l m'_L} \sum_{n_l n_L n'_l} \langle lL m_l m_L | JM \rangle \langle l'L' m'_l m'_L | J'M' \rangle \cdot \\
 &\int d\Omega_{p_2} d\Omega_{q_2} \langle p | t_1^{(1)}(z-q^2) | p_1 \rangle \delta(q^2 - q_1^2) D_{n_l m_l}^l(\omega) D_{n_L m_L}^L(\omega) \\
 &D'_{n'_l m'_l}(\omega) D'_{n'_L m'_L}(\omega) Y_{ln_l}^l(\theta_{p_2}, \varphi_1, 0) Y_{Ln_L}^L(\theta_{p_2}, \varphi_1, 0) Y_{l'n'_l}^l(\theta_{p_2}, \varphi_2, 0).
 \end{aligned} \tag{89,30}$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადები. θ_{p_2} , φ_{p_2} , θ_{q_2} , φ_{q_2} ცვლადების ნაცვლად (ე. ი. $d\Omega_{p_2}$ $d\Omega_{q_2}$ სხეულოვანი კუთხეებისა) შემოვიყვანოთ ψ , θ_{p_2} , φ_{p_2} და $\theta_{p_2 q_2}$ ცვლადები. მაშასადამე, $d\Omega_{p_2} d\Omega_{q_2} \equiv d\omega d(\cos \theta_{p_2 q_2})$, სადაც $d\omega = d(\cos \theta_{p_2}) d\varphi_{p_2} d\psi$. შედეგად მივიღებთ

$$K_2 = \frac{4\sqrt{\pi} \sqrt{2l'+1}}{q} \sum_{n_l n_L n'_L} A_{n_l n_L n'_L} \int d(\cos \theta_{p_2 q_2}) \delta(q^2 - q_1^2) \langle p | t_l^{(l)}(z - q^2) | p_1 \rangle Y_{l m_l}^*(\theta_{p_2 p_1}, 0) Y_{L m_L}^*(\theta_{p_2 q_1}, 0) Y_{L' m'_L}(\theta_{p_2 q_2}, 0), \quad (89,31)$$

სადაც

$$A_{n_l n_L n'_L} = \sum_{m_l m_L m'_L} \langle l m_l m_L | J M \rangle \langle l' m'_L m'_L | J' M' \rangle. \quad (89,32)$$

$$\int d\omega D_{n_l m_l}^{l*}(\omega) D_{n_L m_L}^{L*}(\omega) D_{m'_L}^{l'}(\omega) D_{n'_L m'_L}^{L'}(\omega).$$

ამ გამოსახულებაში ადვილია ინტეგრალის აღება. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ ადგილი აქვს შეკრების ფორმულებს [19]:

$$D_{n_l m_l}^{l*}(\omega) D_{n_L m_L}^{L*}(\omega) = \sum_{j m} \langle l n_l m_l | j n \rangle \langle l m_L m_L | j m \rangle D_{j m}^{j*}(\omega),$$

$$D_{m'_L}^{l'}(\omega) D_{n'_L m'_L}^{L'}(\omega) = \sum_{j' m'} \langle l' n'_L m'_L | j' n' \rangle \langle l' m'_L m'_L | j' m' \rangle D_{j' m'}^{j'}(\omega), \quad (89,33)$$

გარდა ამისა, რამდენადაც

$$\int d\omega D_{j m}^{j*}(\omega) D_{j' m'}^{j'}(\omega) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \delta_{j j'}, \quad (89,34)$$

ამიტომ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$A_{n_l n_L n'_L} = \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{J J'} \delta_{M M'} \langle l n_l n_L | J n \rangle \langle l' n'_L n'_L | J n \rangle. \quad (89,35)$$

ამგვარად, K_2 -გულისათვის საბოლოოდ გვექნება

$$K_2(p, q; z | p_2, q_2; \alpha_2) =$$

$$\frac{32\pi^{5/2}}{q} \frac{\sqrt{2l'+1}}{2J+1} \delta_{J J'} \delta_{M M'} \sum_{m_l m_L m'_L} \langle l m_l m_L | J m \rangle \langle l' m'_L m'_L | J m \rangle.$$

$$\int d(\cos \theta_{p_2 q_2}) \delta(q^2 - q_1^2) \langle p | t_l^{(l)}(z - q^2) | p_1 \rangle \cdot$$

$$Y_{l m_l}^*(\theta_{p_1 p_2}, 0) Y_{L m_L}^*(\theta_{q_1 p_2}, 0) Y_{L' m'_L}(\theta_{q_2 p_2}, 0). \quad (89,36)$$

ერთხელ კიდევ აღვნიშნოთ, რომ ამ გამოსახულებაში საჭიროა ყველა კუთხე გამოვხატოთ $\theta_{q_2 p_2}$ კუთხის საშუალებით, ხოლო p_1 , q_1 ცვლადები p_2 , q_2 ცვლადებით. ამას ადვილად მოვახერხებთ (75,49) ფორმულების გამოყენებით.

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ $K_3(p, q; \alpha | p_3, q_3; \alpha_3)$ კულიცი. სახელდობრ, გვექნება

$$K_3(p, q; \alpha | p_3, q_3; \alpha_3) = \frac{32\pi^{3/2}}{q} \frac{\sqrt{2l'+1}}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle l_1 m_1 m_2 | J M \rangle \langle l_1' 0 m_3 | J' M' \rangle \cdot \int d(\cos \theta_{p_3 q_3}) \delta(q^2 - q_3^2) \langle p | \psi_1^{(1)}(x - q^2) | p_1 \rangle \cdot Y_{l_1 m_1}^*(\theta_{p_1 p_3}, 0) Y_{l_2 m_2}^*(\theta_{q_1 p_3}, 0) Y_{l_3 m_3}^*(\theta_{q_3 p_3}, 0). \quad (89,37)$$

ამ გამოსახულებაშიც ყველა კუთხე უნდა გამოიხატოს $\theta_{p_3 q_3}$ -კუთხით, ხოლო p_1, q_1 ცვლადები— p_3, q_3 -ით.

შევნიშნოთ, რომ სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით (89,24)-ის დანარჩენ ორ განტოლებასაც.

ადვილი მისახვედრია, რომ მიღებული განტოლებები ძალზე რთულია და მათი ამ სახით ამოხსნა თანამედროვე სწრაფადმთვლელი ელექტრონული მანქანებითაც კი შეუძლებელია.

შევნიშნოთ, რომ ონესის მიერ ფადეევის განტოლებები ჩაწერილი იყო სხვა წარმოდგენაში; სახელდობრ, იგი იხილავდა k_i იმპულსების ($i=1, 2, 3$) აბსოლუტურ სიდიდეებს და ვილერის კუთხეებს [109, 139].

ფადეევის განტოლებების გაშლა პარციალურ ტალღებად პირველად მოცემული იყო შრომაში [107], სადაც განიხილებოდა ნაწილაკის გაფანტვა ორი ნაწილაკის ბმულ მდგომარეობაზე იმ პირობით, რომ მესამე ნაწილაკის მასა უსასრულობის ტოლია.

§ 90. შადეევის განტოლებები იგივერი ნაწილაკებისათვის $J=0$ მომენტის შემთხვევაში

წინა პარაგრაფის შედეგები გამოვიყენოთ ფადეევის განტოლების იმ სახით გადასაწერად, რომლებიც ხელსაყრელი იქნება მიხსლოებითი ამოხსნის მეთოდების გამოსაყენებლად. განვიხილოთ იგივერი ნაწილაკთა სისტემა $m_1=m_2=m_3=m$; ვისარგებლოთ იაკობის p, q ცვლადებით. ამასთან, იგივერი ნაწილაკების შემთხვევაში სამ შესაძლო ცვლადს შორის გვექნება შემდეგი კავშირი:

$$\begin{aligned} p_2 &= -\frac{1}{2} p_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} q_1, & p_3 &= -\frac{1}{2} p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} q_1, \\ q_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} p_1 - \frac{1}{2} q_1, & q_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} p_1 - \frac{1}{2} q_1. \end{aligned} \quad (90,1)$$

გარდა ამისა, როგორც § 75-ში ვაჩვენეთ, გვაქვს ასეთი კავშირიც:

$$p_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} q_2, \quad p_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} q_2. \quad (90,2)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ადვილად ვიპოვით, რომ

$$A_{q_1}(-q_2) \leq p_2^2 \leq A_{q_1}(q_2), \quad (90,3)$$

$$A_{q_1}(\pm q_2) = \frac{1}{3} (2q_1 \pm q_2)^2. \quad (90,4)$$

გამოვიღეთ ფადეევის (89,24) განტოლებიდან, სადაც K'_2 და K_2 გულები განისაზღვრება (89,36) და (89,37) ფორმულებიდან. ამ ფორმულებში საჭიროა ყველა კუთხე გამოიხატოს საინტეგრაციო კუთხის საშუალებით, ხოლო p_1 , q_1 ცვლადები შესაბამისად p_2 , q_2 და p_3 , q_3 ცვლადებით. ამას ადვილად მოვახერხებთ ზემოთ დაწერილი ფორმულების გამოყენებით. (90,1) ფორმულებიდან ვიპოვოთ (p_2, q_2) სკალარული ნამრავლი. გვექნება

$$(p_2, q_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}} p_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} q_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} p_2^2. \quad (90,5)$$

(90,1)-ის პირველი განტოლებიდან ვიპოვოთ p_1^2 და შევითანოთ იგი (90,5) ტოლობაში: შედეგად მივიღებთ

$$(p_2, q_2) = -\frac{2}{\sqrt{3}} (p_2 p_1) - \frac{1}{\sqrt{3}} p_2^2. \quad (90,6)$$

განვსაზღვროთ p_1 და q_1 ცვლადები p_2 , q_2 ცვლადების დახმარებით. (90,1) ტოლობიდან გვექნება

$$p_1 = -\frac{1}{2} (p_2 + \sqrt{3} q_2), \quad q_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} p_2 - q_2), \quad (90,7)$$

საიდანაც

$$p_1 = \frac{1}{2} (p_2^2 + 3q_2^2 + 2\sqrt{3} p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2})^{1/2}; \quad (90,8)$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით (90,6) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\cos \theta_{p_2, p_1} = \frac{p_2^2 + \sqrt{3} p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2}}{p_2 (p_2^2 + 3q_2^2 + 2\sqrt{3} p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2})^{1/2}}. \quad (90,9)$$

სრულიად ანალოგიურად

$$\cos \theta_{p_2, q_1} = \frac{\sqrt{3} p_2^2 - p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2}}{p_2 (3p_2^2 + q_2^2 - 2\sqrt{3} p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2})^{1/2}}; \quad (90,10)$$

გარდა ამისა, (90,7) ფორმულიდან შეგვიძლია q_1 გამოვხატოთ p_2 , q_2 -ით და მათ შორის არსებული კუთხით; სახელდობრ,

$$q_1^2 = \frac{3}{4} p_2^2 + \frac{1}{4} q_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2}; \quad (90,11)$$

ამგვარად, (89,36) ფორმულაში შემავალ ინტეგრალში ყველა ცვლადები გამოვხატეთ p_2 , q_2 -ით და $\cos \theta_{p_2, q_2}$ -ით.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევას, როცა საჭირო იქნება $\cos \theta_{p_1, q_1}$ -ის გამოხატვა იმავე ცვლადებით. ამისათვის გამოვიყენოთ (90,7) ფორმულები. შედეგად მივიღებთ

$$\cos \theta_{p_1, q_1} = \frac{3p_2^2 - 3q_2^2 + 2\sqrt{3} p_2 q_2 \cos \theta_{p_2, q_2}}{4\sqrt{3} p_1 q_1}, \quad (90,12)$$

სადაც p_1 და q_1 განისაზღვრება (90,8) და (90,11) ფორმულებით.

სრულიად ანალოგიურად გამოვხატავთ K_3 გულის ყველა ცვლადს p_3, q_3 და $\cos \theta_{p_3 q_3}$ ცვლადების საშუალებით.

ამისათვის გამოვიყენოთ ფორმულები

$$q_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} p_1 - \frac{1}{2} q_1, \quad p_3 = -\frac{1}{2} p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} q_1, \quad (90,13)$$

საიდანაც

$$(p_3 q_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4} p_1^2 - \frac{1}{2} (p_1 q_1) + \frac{\sqrt{3}}{4} q_1^2, \quad (90,14)$$

გამოვიყენოთ (90,13)-ის მეორე ფორმულა და (90,14)-დან გამოვრიცხოთ (p_1, q_1) სკალარული ნამრავლი. გვექნება

$$p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} p_1^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} p_1 q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} q_1^2, \quad (90,15)$$

რადგან $p_1^2 = 3q_1^2 - 4p_3^2 - 4(p_3 q_3)$, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ კავშირს

$$\cos \theta_{p_3 q_3} = -\frac{p_3^2 - \sqrt{3} p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3}}{p_3 (p_3^2 + 3q_3^2 - 2\sqrt{3} p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3})^{1/2}}. \quad (90,16)$$

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვიოთ, რომ

$$\cos \theta_{p_3 p_1} = -\frac{\sqrt{3} p_3^2 + p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3}}{p_3 (3p_3^2 + 2\sqrt{3} p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3} + q_3^2)^{1/2}}. \quad (90,17)$$

ამოვხსნათ (90,13) ფორმულიდან p_1 და q_1 და გადავამრავლოთ ისინი სკალარულად; გვექნება;

$$4(p_1 q_1) = \sqrt{3} p_3^2 - 2(p_3 q_3) - \sqrt{3} q_3^2, \quad (90,18)$$

საიდანაც

$$\cos \theta_{p_1 q_1} = \frac{3p_3^2 - 3q_3^2 - 2\sqrt{3} p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3}}{4\sqrt{3} p_1 q_1}. \quad (90,19)$$

p_1 და q_1 განისაზღვრება ფორმულებით

$$p_1 = \frac{1}{2} (p_3^2 + 3q_3^2 - 2\sqrt{3} p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3})^{1/2}, \quad (90,20)$$

$$q_1 = \frac{1}{2} (3p_3^2 + q_3^2 + 2\sqrt{3} p_3 q_3 \cos \theta_{p_3 q_3})^{1/2}.$$

ახლა ვიპოვოთ $\partial(q^2 - q_1^2)$ ფუნქციის სახე სანტეგრაციო ცვლადებში; ღირაკის დელტა ფუნქციის $\partial(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \partial(x)$ თვისებისა და (90,11) ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\partial(q^2 - q_1^2) = \frac{2}{\sqrt{3} q_2 p_2} \partial(\cos \theta_{p_2 q_2} - x_2'), \quad (90,21)$$

სადაც

$$x_2' = -\frac{4q^2 - 3p_2^2 - q_2^2}{2\sqrt{3} p_2 q_2} \quad (90,22)$$

სრულიად ანალოგიურად გამოვხატავთ $\delta(q^2 - q_1^2)$ ფუნქციას p_3, q_3 და $\cos \theta_{p_3 q_3}$ -ით. მართლაც, (90,20) გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\delta(q^2 - q_1^2) = \frac{2}{\sqrt{3} p_3 q_3} \delta(\cos \theta_{p_3 q_3} - x'_3), \quad (90,23)$$

სადაც

$$x'_3 = \frac{4q^2 - 3p_3^2 - q_3^2}{2\sqrt{3} p_3 q_3}. \quad (90,24)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემის სრული მომენტი $J=0$. ასეთი შემთხვევა განხორციელდება, როცა $l=L$ და $l'=L$, მაშინ (89,36) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$K_2 = \frac{64\pi^{3/2}}{\sqrt{3} q p_2 q_2} \sum_{m_l} \langle l m_l - m_l | 00 \rangle \langle l' l' 00 | 00 \rangle \int d(\cos \theta_{p_2 q_2}) \delta(\cos \theta_{p_2 q_2} - x_2) \cdot \\ \langle p | t_l^{(1)}(z - q^2) | p_l \rangle Y_{l m_l}^*(\theta_{p_2 p_1}, 0) Y_{l' -m_l}(\theta_{p_2 q_1}, 0) Y_{l' 0}(\theta_{p_2 q_2}, 0), \quad (90,25)$$

სადაც p_l განისაზღვრება (90,8) ფორმულით.

ახლა გავიხსენოთ, რომ

$$\langle l m_l - m_l | 00 \rangle = (-1)^{l-m_l} (2l+1)^{-1/2}, \\ \langle l' l' 00 | 00 \rangle = (-1)^{l'} (2l'+1)^{-1/2} \quad (90,26)$$

და

$$Y_{l m_l}(\theta_{p_2 q_1}, 0) = (-1)^{m_l} Y_{l -m_l}^*(\theta_{p_2 q_1}, 0); \quad (90,27)$$

გარდა ამისა, ნათელია, რომ

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta_{p_1 q_1}) = \sum_{m_l} Y_{l m_l}(\theta_{p_2 q_1}, 0) Y_{l m_l}^*(\theta_{p_2 p_1}, 0). \quad (90,28)$$

შეიტანოთ ეს ფორმულები (90,25) გამოსახულებაში და ავიღოთ ინტეგრალი $\cos \theta_{p_2 q_2}$ -ით. შედეგად მივიღებთ

$$K_2(p, q; l | p_2, q_1; l') = \\ = \frac{8\pi (-1)^{l'+l'}}{q \sqrt{3} q_2 p_2} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} P_l(x_2) P_{l'}(x'_2) \langle p | t_l^{(1)}(z - q^2) | \bar{p}_2 \rangle, \quad (90,29)$$

სადაც

$$x_2 = \frac{2q^2 + q_2^2 - 3p_2^2}{2\sqrt{3} p_2 q}, \quad (90,30)$$

ხოლო \bar{p}_2 განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2} (p_2^2 + 3q_2^2 + 2\sqrt{3} p_2 q_2 x'_2)^{1/2} = (p_2^2 + q_2^2 - q^2)^{1/2}. \quad (90,31)$$

ახლა გავამარტივოთ K_3 -გულის გამოსახულება. სრულიად ანალოგიურად ეპყენებთ, რომ

$$K_3(p, q; l | p_3, q_3; l') = \\ = \frac{8\pi (-1)^{l'+l'}}{q \sqrt{3} q_3 p_3} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} P_l(x_3) P_{l'}(x'_3) \langle p | t_l(z - q^2) | \bar{p}_1 \rangle, \quad (90,32)$$

სადაც

$$x_3 = \frac{3p_3^2 - 2q^2 - q_3^2}{2\sqrt{3} p_3 q}, \quad (90,33)$$

ხოლო p_3 ადრე შემოდებული \bar{p}_2 გამოსახულებიდან განსხვავდება იმით, რომ p_2, q_2 ცვლადების ნაცვლად გვაქვს p_3 და q_3 ცვლადები

$$\bar{p}_3 = (p_3^2 + q_3^2 - q^2)^{1/2}. \quad (90,34)$$

რადგან განსაზღვრულ ინტეგრალში მნიშვნელობა არა აქვს, თუ რომელი ცვლადით ვისარგებლებთ, ამიტომ (89,24) განტოლების ორივე წევრი ერთი და იმავე სიდიდისაა, ოღონდ, რადგან x_2, x_2' და x_3, x_3' ცვლადები ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან, ამის გამო ლეჟანდრის პოლინომის თვისებით $P_l'(-x) = (-1)^l P_l'(x)$ ორივე წევრი გაერთიანდება და წინ დაუჯდება მამრავლი $1 + (-1)^{l+l'}$, ე. ი. l და l' -ს ერთი და იგივე ლუწობა უნდა ჰქონდეს.

ამგვარად, ფადეევის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა დაიყვანება შემდეგ განტოლებაზე:

$$\psi_l(p, q; z) = \Phi_l(p, q; z) +$$

$$2 \sum_{l'} \int dp' dq' K_2(p, q; l | p', q'; l') \frac{p'^2 q'^2}{z - (p'^2 + q'^2)} \psi_{l'}(p', q'; z); \quad (90,35)$$

თუ გავიხსენებთ K_2 გულის გამოხატულებას, შეგვიძლია საბოლოოდ დავეწვროთ

$$\psi_l(p, q; z) = \Phi_l(p, q; z) + \frac{4\pi}{\sqrt{3}q} \sum_{l'} V \overline{(2l+1)(2l'+1)} \cdot$$

$$\int_0^\infty dq'^2 \int_{A_q(-q')}^{A_q(q')} dp'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x') \langle p | t_l^{(1)}(x - q^2) | \bar{p} \rangle \psi_{l'}(p', q'; z)}{z - (p'^2 + q'^2)}, \quad (90,36)$$

სადაც ჯამი აიღება ისეთი l' -ებით, რომელთა ლუწობა ემთხვევა l -ის ლუწობას, ხოლო

$$x' = -\frac{4q^2 - 3p'^2 - q'^2}{2\sqrt{3} p' q'}, \quad x = \frac{2q^2 + q'^2 - 3p'^2}{2\sqrt{3} q \bar{p}}, \quad \bar{p}^2 = p'^2 + q'^2 - q^2. \quad (90,37)$$

ფადეევის (90,36) განტოლების დაწერის დროს ნაწილაკთა იგივეურობისა და $J=0$ -ის გარდა, სხვა დაშვება არ გავკეთებია.

§ 91. სამი სხეულის გაფანტვის ამოცანა არალოკალური ფაქტორიზაციაზე ურთიერთქმედების შემთხვევაში

განვიხილოთ სამი სხეულის გაფანტვის ამოცანა, როცა ნაწილაკებს შორის არსებულ ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერჯიას არალოკალური ფაქტორიზებადი სახე აქვს. როგორც ადრე აღვნიშნეთ, ამ პოტენციალებს მიახლოებით მაინც შეუძლიათ ასახონ ნამდვილი ურთიერთქმედების სურათი და, რაც მთავარია, მათი საშუალებით სამი ნაწილაკის ამოცანის ანალიზი შეგვიძლია ჩავატაროთ ბოლომდე. გარდა ამისა, სხვადასხვა მიახლოებები, რომლებიც გამოიყენება სამი

ნაწილაკის ამოცანაში, ასე თუ ისე დაკავშირებულია ორნაწილაკობრივი ურთიერთქმედების ფაქტორიზებადობასთან. ისევე როგორც სამი სხეულის ბმული მდგომარეობის ამოცანის განხილვისას ვაჩვენეთ, გაფანტვის შემთხვევაშიც მიიღება ერთგანზომილებიანი ინტეგრალური განტოლებები, რომელთა ამოხსნა სწრაფადმთვლელი ელექტრონული მანქანებით ძნელი არ არის [53, 56, 57, 59, 62, 63, 78, 87, 88, 90].

ჭერ ვანეხილოთ იგივერი ნაწილაკების გაფანტვის ამოცანა. ეთქვას განსაზღვრულობისათვის გეიანტერესებს ნაწილაკთა გაფანტვა ორი ნაწილაკის ბმულ მდგომარეობაზე. როგორც ვიცით, ამ პროცესის იმპულსური წარმოდგენის ფუნქცია მოიძებნება ფადეევის განტოლებიდან

$$\psi_{n,p_0}(k, p) = \phi_{n,p_0}(k, p) + D^{-1}(k, p; z) \int [\langle k | t(\varepsilon_p) | -p' - p/2 \rangle + \langle k | t(\varepsilon_p) | p' + p/2 \rangle] \psi_{n,p_0}(p + p'/2, p') dp'. \quad (91,1)$$

სრული ტალღური ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით

$$\Psi_{n,p_0} = \psi_{n,p_0}(k_{21}, p_1) + \psi_{n,p_0}(k_{31}, p_2) + \psi_{n,p_0}(k_{12}, p_3); \quad (91,2)$$

ამასთან იგულისხმება, რომ, ნაწილაკთა იგივერობის გამო,

$$\psi_{n,p_0}(k, p) = \psi_{n,p_0}(-k, p). \quad (91,3)$$

რაც შეეხება $\phi_{n,p_0}(k, p)$ ფუნქციას, იგი განიმარტება გამოსახულებით

$$\phi_{n,p_0}(k, p) = \delta(p - p_0) \varphi_n(k), \quad (91,4)$$

სადაც p_0 დაცემული ნაწილაკის ფარდობითი იმპულსია ბმული ქვესისტემის ინერციის ცენტრის მიმართ საწყის მდგომარეობაში, $\varphi_n(k)$ კი ბმული სისტემის შინაგანი მოძრაობის ტალღური ფუნქციაა, რომელიც ხასიათდება n -კვანტური რიცხვით. $D(k, p; z)$ ფუნქცია განისაზღვრება (86,9) ფორმულით, რომელიც ტოლი მასების შემთხვევაში ღებულობს სახეს

$$D(k, p; z) = z - \frac{k^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m}, \quad (91,5)$$

ხოლო განხილული პროცესისათვის z ტოლი იქნება [იხ. (86,4) ფორმულა]

$$z = \frac{3p_0^2}{4m} - \mathcal{E} + i\varepsilon, \quad (91,6)$$

სადაც \mathcal{E} —ორი დაკავშირებული ნაწილაკის ბმის ენერგიაა, გარდა ამისა, $\varepsilon_p = z - \frac{3p^2}{4m}$.

ქვემოთ ვისარგებლოთ ერთეულებით, როცა $\hbar = 1$.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ბმული ქვესისტემა s -მდგომარეობაში იმყოფება და გაფანტვასაც ვიხილავთ s -მდგომარეობაში.

s -მდგომარეობაში არალოკალურ ფაქტორიზებად ურთიერთქმედებას აქვს სახე

$$\langle p | v | p' \rangle = - \frac{\lambda}{2\pi^2 m} v(p) v(p'). \quad (91,7)$$

ასეთი პოტენციალისათვის ორნაწილაკობრივი გაფანტვის t -მატრიცა ფაქტორიზებულია და, თანახმად (66,4) გამოსახულებისა, განისაზღვრება ფორმულით

$$\langle p | t(z) | p' \rangle = - \frac{\lambda}{2\pi^2 m} \tau(p) \tau(z) v(p'), \quad (91,8)$$

სადაც

$$\tau^{-1}(z) = 1 + \lambda \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^2(q) q^2 dq}{mz - q^2}. \quad (91,9)$$

აღნიშნოთ, რომ ფაქტორიზებადი პოტენციალის შემთხვევაში ორი ნაწილაკის სისტემას ერთადერთი ბმული მდგომარეობა ექნება და შესაბამისი ტალღური ფუნქცია შოიციემა გამოსახულებით

$$\varphi_n(k) = N \frac{v(k)}{\alpha^2 + k^2}; \quad \alpha^2 = m \zeta^2 \quad (91,10)$$

ნორმირების N -კოეფიციენტი მოიძებნება შემდეგი პირობიდან:

$$\frac{1}{N^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(k) dk}{(\alpha^2 + k^2)^2}. \quad (91,11)$$

როგორც ვხედავთ, აღარ არსებობს აუცილებლობა n -კვანტური რიცხვის მითითებისა, ამიტომ ტალღურ ფუნქციას მხოლოდ p_0 -სიდიდეს მიეუწერო.

ფადეევის (91,1) განტოლებაში შევიტანოთ (91,8) მატრიცა და გავითვალისწინოთ (91,4) და (91,10) ფორმულები; შედეგად მივიღებთ

$$\psi_{p_0}(k, p) = - \frac{N v(k)}{m D(k, p; z)} \left\{ \delta(p - p_0) + \frac{\lambda}{\pi^2 N} \tau(z_p) \int v \left(p' + \frac{1}{2} p \right) \psi_{p_0} \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) dp' \right\}, \quad (91,12)$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ

$$m D(k, p; z) \delta(p - p_0) = -(\alpha^2 + k^2) \delta(p - p_0). \quad (91,13)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\chi(p, p_0) = \frac{1}{N} \int v \left(p' + \frac{1}{2} p \right) \psi \left(p + \frac{1}{2} p', p' \right) dp', \quad (91,14)$$

მაშინ გაფანტვის ტალღური ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\psi_{p_0}(k, p) = \frac{N v(k)}{k^2 + 3p^2/4 - m\epsilon} \left\{ \delta(p - p_0) + \frac{\lambda}{\pi^2} \tau(z_p) \chi(p, p_0) \right\} \quad (91,15)$$

ახლა, თუ $\psi_{p_0}(k, p)$ ფუნქციას დაეწეროთ $k = p + p'/2$ და $p = p'$ ცვლადებისათვის და შევიტანოთ (91,14) გამოსახულებაში, მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას $\chi_{p_0}(p)$ ფუნქციისათვის

$$\chi_{p_0}(p) = \frac{v(p_0 + p/2) \tau(p + p_0/2)}{p^2 + p_0^2 + pp_0 - m\varepsilon} +$$

$$\frac{\lambda}{\pi^2} \int \frac{v(p' + p/2) v(p + p'/2) \tau(z_{p'}) \chi_{p_0}(p') dp'}{p^2 + p'^2 + (p \cdot p') - m\varepsilon}. \quad (91,16)$$

როგორც ვხედავთ, ეს ინტეგრალური განტოლება დამოკიდებულია ერთ ვექტორზე. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A(p, p_0; \varepsilon) = \frac{v(p_0 + p/2) v(p + p_0/2)}{p^2 + p_0^2 + (pp_0) - m\varepsilon}, \quad (91,17)$$

მაშინ (91,16) ინტეგრალური განტოლება ასეც გადაიწერება:

$$\chi_{p_0}(p) = A(p, p_0; \varepsilon) + \frac{\lambda}{\pi^2} \int A(p, p'; \varepsilon) \tau(z_{p'}) \chi_{p_0}(p') dp'. \quad (91,18)$$

გავშალოთ $\chi_{p_0}(p)$ და $A(p, p_0; \varepsilon)$ ფუნქციები პარციალურ ტალღებად და ვაჩვენოთ, რომ (91,18) განტოლება სინამდვილეში არის ერთგანზომილებიანი ინტეგრალური განტოლება. გვექნება:

$$\chi(p, p_0) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \chi_{L}(p, p_0) Y_{LM}^*(\bar{p}) Y_{LM}(\bar{p}_0), \quad (91,19)$$

$$A(x, y; \varepsilon) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} A_L(x, y; \varepsilon) Y_{LM}^*(x) Y_{LM}(y) =$$

$$\sum_L (2J_L + 1) A_L(x, y; \varepsilon) J_L^*(x \cdot y), \quad (91,20)$$

სადაც $A_L(x, y; \varepsilon)$ შეიძლება ვიპოვოთ შებრუნების თეორემით; მივიღებთ

$$A_L(x, y; \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} v(\sqrt{x^2 + y^2/4 + xyt}) v(\sqrt{y^2 + x^2/4 + xyt}) P_L(t) dt. \quad (91,21)$$

ახლა (91,19) და (91,20) გამოსახულებები შევიტანოთ (91,18) ინტეგრალურ განტოლებაში და მოვახდინოთ ინტეგრაცია კუთხეებით; შედეგად მივიღებთ

$$\chi_L(p, p_0) = A_L(p, p_0; \varepsilon) + \frac{4\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} A_L(p, p'; \varepsilon) \tau(z_{p'}) \chi_L(p', p_0) p'^2 dp'. \quad (91,22)$$

ეს განტოლება კი მართლაც ერთგანზომილებიანი ინტეგრალური განტოლებაა, რომლის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ელექტრონული გამომთვლელი მანქანები.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა ურთიერთქმედების ფორმას აქვს იამა-გუჩის სახე

$$v(p) = (p^2 + p^2)^{-1}, \quad (91,23)$$

მაშინ (91,21) ფორმულის დახმარებით ინტეგრალური განტოლების გული შევკვიძ-
 ლია ვიპოვოთ ცხადი სახით. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$a = \frac{x^2 + y^2 - mz}{xy}, \quad b = \frac{\beta^2 + x^2 + y^2}{4}, \quad c = \frac{\beta^2 + y^2 + x^2}{4}, \quad (91,24)$$

მაშინ იამაგუჩის ფორმისათვის გვექნება

$$A_L(x, y, z) = \frac{1}{2(xy)^3} \int_{-1}^{+1} \frac{P_L(t) dt}{(a+t)(b+t)(c+t)}. \quad (91,25)$$

ამ გამოსახულებას შეიძლება მიეცეთ შემდეგი სახე:

$$(xy)^3 A_L(x, y, z) = \frac{1}{2(a-b)(a-c)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_L(t) dt}{a+t} +$$

$$\frac{1}{2(b-a)(b-c)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_L(t) dt}{b+t} + \frac{1}{2(c-a)(c-b)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_L(t) dt}{c+t}, \quad (91,26)$$

საიდანაც, თუ გავიხსენებთ ლეჟანდრის მეორე გვარის პოლინომის (G , 10) გან-
 მარტებას, მივიღებთ

$$A_L(x, y, z) = \frac{(-1)^L}{(xy)^3} \left\{ \frac{Q_L(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{Q_L(b)}{(b-a)(b-c)} + \right.$$

$$\left. \frac{Q_L(c)}{(c-a)(c-b)} \right\}; \quad (91,27)$$

გარდა ამისა, იამაგუჩის ფორმის შემთხვევაში, (91,9) ფორმულის გამოყენებით
 მარტივად ვიპოვიან, რომ

$$\tau^{-1}(z_p) = 1 - \frac{\lambda}{2\beta(\beta - i\sqrt{mz_p})^2}; \quad z_p = \varepsilon - \frac{3p^2}{4m} \quad (91,28)$$

ასე რომ ამ კერძო შემთხვევაში (91,22) განტოლებაში შემაჯავლო ყველა სიდიდე
 მარტივად განისაზღვრება.

აღნიშნოთ, რომ, როცა $L=0$, მაშინ

$$Q_0(a) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+a}{1-a} = \frac{1}{2} \ln \frac{xy + x^2 + y^2 - mz}{xy - x^2 - y^2 + mz}. \quad (91,29)$$

სრულად ანალოგიურად ვიპოვიან $Q_0(b)$ და $Q_0(c)$ სიდიდეებსაც.

ხშირად ხელსაყრელია (91,18) განტოლების ისე გადაწერა, რომ მისი ამო-
 ნახსნი დრეკალი გაფანტვისათვის უშუალოდ ამპლიტუდას ემთხვეოდეს. ამ მიზნით
 შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{\alpha(p, p_0)}{p^2 - p_0^2 - i\varepsilon} = 2\lambda\tau(\varepsilon_p) \chi_{p_0}(p); \quad (91,30)$$

მაშინ გაფანტვის სრული ტალღური (91,15) ფუნქცია განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$\psi_{p_0}(k, p) = \frac{\sqrt{V}(k)}{k^2 + 3p^2/4 - mz} \left\{ \delta(p - p_0) + \frac{1}{2\pi^2} \frac{a(p, p_0)}{p^2 - p_0^2 - i\varepsilon} \right\}, \quad (91,31)$$

ხოლო $a(p, p_0)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებას

$$\frac{a(p, p_0)}{p^2 - p_0^2 - i\varepsilon} = 2\lambda \tau(\varepsilon_p) \left\{ A(p, p_0; z) + \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{A(p, p'; z) a(p', p_0) dp'}{p'^2 - p_0^2 - i\varepsilon} \right\}. \quad (91,32)$$

ახლა, თუ ვისარგებლებთ (87,8) ფორმულით, დავინახავთ, რომ გაფანტვის ამპლიტუდა, მართლაც, $a(p, p_0)$ ფუნქციით განისაზღვრება.

ჩვენ აღრე ვაჩვენებთ, რომ, როცა ურთიერთქმედების რადიუსის გამომხატველი პარამეტრა $\beta \rightarrow \infty$, მაშინ ორნაწილაკობრივი გაფანტვის (91,8) მატრიცა, იამაგუჩის ფორმის შემთხვევაში, კონტაქტურ ურთიერთქმედებაში გადადის. სამი სხეულის ამოცანაში კი, $\beta \rightarrow \infty$ ზღვარში, სათანადოდ სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლებას მივიღებთ [62].

როცა $\beta \rightarrow \infty$, მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ერთადერთი ბმული მდგომარეობა ($l=0$ მომენტისათვის) განისაზღვრება ფორმულით

$$\lambda = 2\beta(\alpha + \beta)^2, \quad (91,33)$$

მაშინ (91,28) მოგვეცემს

$$\tau^{-1} \left(z - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right) = -\frac{2}{\beta} (\alpha + i \sqrt{mz - 3p^2/4} + \dots), \quad \beta \rightarrow \infty \quad (91,34)$$

სრულიად ასევე, (91,17) ფორმულის თანახმად, ღიდი β -სათვის გვექნება

$$A(p, p_0; z) \sim \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{p^2 + p_0^2 + p \cdot p_0 - mz}, \quad \beta \gg 1 \quad (91,35)$$

ასე რომ ზღვარში, როცა $\beta \rightarrow \infty$, (91,32) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{a(p, p_0)}{p^2 - p_0^2 - i\varepsilon} = -\frac{2}{\alpha + i \sqrt{m\varepsilon_p}} \left\{ \frac{1}{p^2 + p_0^2 + pp_0 - mz} + \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{a(p', p_0) dp'}{(p^2 + p'^2 + pp' - mz)(p'^2 - p_0^2 - i\varepsilon)} \right\}, \quad (91,36)$$

ან, რამდენადაც ადგილი აქვს ტოლობას

$$(\alpha + i \sqrt{m\varepsilon_p})(\alpha - i \sqrt{m\varepsilon_p}) = \frac{3}{4} (p_0^2 - p^2), \quad (91,37)$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{3/8 a(p, p_0)}{\alpha + \sqrt{3} p^2/4 - mz} = \frac{1}{p^2 + p_0^2 + pp_0 - mz} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(p', p_0) dp'}{(p^2 + p'^2 + pp' - mz)(p'^2 - p_0^2 - i\varepsilon)}, \quad (91,38)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის ინტეგრალურ განტოლებას.

როგორც ვხედავთ, სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლება კვბო შემთხვევაა ფაღვევის განტოლებისა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალისათვის იამაგუჩის ფორმით. ამიტომ ფაქტორიზებადი პოტენციალების სპეციალური შერჩევით და მათთვის ფაღვევის განტოლებების ამოხსნით საინტერესო ფიზიკური ინფორმაცია შეიძლება მივიღოთ სამი ნაწილაკის სისტემის თვისებათა შესახებ.

§ 92. სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების ჯამის შემთხვევაში

კვლავ განვიხილოთ იგივე რ ნაწილაკთა სისტემა s -მდგომარეობაში. ეოქვით, ადგილი აქვს ნაწილაკის გაფანტვას ორი ნაწილაკის ბმულ მდგომარეობაზე. დაეუშვათ, რომ ნაწილაკთა შორის ურთიერაქმედება ხორციელდება არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების ქამით

$$\langle p | v | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2 m} \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i(p) v_i(p'); \quad (i=1) \quad (92,1)$$

ამ შემთხვევაში, ფაღვევის განტოლების დასაწერად, ჯერ ეიპოვოთ $\Phi_{i, p_0}(k, p)$ თავისუფალი წვერი და გაფანტვის ორნაწილაკობრივი $t(x)$ -მატრიცა ურთიერთქმედებისათვის, რომელიც (92,1) ფორმულით განისაზღვრება. სათანადო ფორმულები გამოიყენილია § 68-ში, მათ ჩვენ მოვიყენებ ჩვენი მიზნებისათვის ხელსაყრელი ფორმით. ორი ნაწილაკის ბმული მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას ექნება (68,25) სახე

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i v_i(k)}{\alpha^2 + k^2}, \quad (92,2)$$

სადაც C_i -კოეფიციენტები განისაზღვრება (68,29) განტოლებიდან, ხოლო $\alpha^2 = m_0^2$. მაშინ $\Phi_{p_0}(k, p)$ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Phi_{p_0}(k, p) = \delta(p - p_0) \sum_{i=1}^N \frac{C_i v_i(k)}{\alpha^2 + k^2}. \quad (92,3)$$

რაც შეეხება გაფანტვის $t(x)$ -მატრიცას, (68,23) ფორმულის თანახმად, იგი ტოლი იქნება

$$\langle p | t(x) | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2 m} \sum_{i, k=1}^N \lambda_i \Omega_{ki}(x) v_i(p) v_k(p'), \quad (92,4)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\Omega_{ki}(x) = \frac{D_{ki}(x) \tau_i(x)}{D(x)}. \quad (92,5)$$

ამასთან, $\tau_i(x)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$\tau_i^{-1}(x) = 1 - \lambda_i X_{ii}(x) \quad (92,6)$$

$$X_{ij}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_i(q) v_j(q) q^2 dq}{mz - q^2}; \quad (92,7)$$

$D(z)$ -ის შემდეგი დეტერმინანტია:

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1 & -v_{12} & \dots & -v_{1N} \\ -v_{21} & 1 & \dots & -v_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_{N1} & -v_{N2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (92,8)$$

სადაც

$$v_{ih}(z) = \lambda_h \tau_h(z) X_{ih}(z), \quad (92,9)$$

ხოლო $D_{hi}(z)$ ამ დეტერმინანტის შესაბამისი ალგებრული დამატებაა.

ახლა შევიტანოთ (92,3) და (92,4) გამოსახულებანი ფადეევის (91,1) განტოლებაში. მივიღებთ

$$\psi_{p_0}(k, p) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i v_i(k)}{\alpha^2 + k^2} \delta(p - p_0) +$$

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{m D(k, p; z)} \sum_{i,k} \lambda_i \Omega_{hi}(z_p) v_i(k) \int v_h(p' + p/2) \psi(p + p'/2, p') dp'. \quad (92,10)$$

სადაც $z_p = z - \frac{3p^2}{4m}$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$F_i(p) = -\frac{2\lambda_i}{C_i} \sum_{k=1}^N \Omega_{hi}(z_p) \int v_h\left(p' + \frac{1}{2} p\right) \psi\left(p + \frac{1}{2} p', p'\right) dp'. \quad (92,11)$$

მაშინ, თუ გავიხსენებთ (91,13) ფორმულას, (91,10) გამოსახულება შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$\psi_{p_0}(k, p) = -\sum_{i=1}^N \frac{C_i v_i(k)}{k^2 + \frac{3}{4} p^2 - mz} \left\{ \delta(p - p_0) + \frac{1}{2\pi^2} F'_i(p) \right\}. \quad (92,12)$$

აღვიღად მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას $F_i(p)$ ფუნქციისათვის. ამისათვის საკმარისია (92,12) ფუნქცია შევიტანოთ (92,11) აღნიშვნაში. შედეგად გვქვანება

$$F_i(p) = \frac{2\lambda_i}{C_i} \left\{ \sum_{h,j} C_j \Omega_{hi}(z_p) A_{jh}(p, p_0; z) + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k,j} C_j \Omega_{hi}(z_p) \int A_{jh}(p, p'; z) F_j(p') dp' \right\}, \quad (92,13)$$

სადაც $A_{jk}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$A_{jk}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0; z) = \frac{r_j(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0/2) r_k(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}/2)}{p^2 + p_0^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}_0 - mz} \quad (92,14)$$

როცა $N=1$, ე. ი. როცა (92,1) პოტენციალური ენერგია მხოლოდ ერთი წვერისაგან შედგება, (92,13) სწრაფად დაიყვანება (91,18) განტოლებაზე.

ხელსაყრელია (92,13) განტოლების სხვა სახით გადაწერაც. ჯერ ერთი,

$F_i(\mathbf{p})$ ფუნქციის ნაცვლად შემოვიღოთ $f_i(\mathbf{p}) = \frac{C_i}{2} F_i(\mathbf{p})$ ფუნქცია, გარდა ამისა,

ხელსაყრელია შემდეგი აღნიშვნის შემოღებაც:

$$\Gamma_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = \lambda_i \sum_{k=1}^N A_{jk}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) \mathcal{M}_{ki}(z, \mathbf{p}); \quad (92,15)$$

მაშინ ინტეგრალური განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$f_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^N C_j \Gamma_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0; z) + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^N \int \Gamma_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) f_j(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (92,16)$$

როგორც ვხედავთ, $f_i(\mathbf{p})$ ფუნქციისათვის მიიღება N -ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა; ამასთან, თითოეული განტოლება დამოკიდებულია ერთ ცვლადზე. ამგვარად, გვაქვს მნიშვნელოვანი დასკვნა: რამდენ წვერსაც შეიცავს ორნაწილაკობრივი ფაქტორიზებული პოტენციალი, იმდენი ერთგანზომილებიანი ინტეგრალური განტოლებისაგან შედგება სამი ნაწილაკის ფაქტორის განტოლებათა სისტემა. გარკვეული თვისებების მქონე ორი ცვლადის ფუნქცია ყოველთვის შეგვიძლია გავშალოთ ფაქტორიზებული წევრების უსასრულო მწკრივად, ამიტომ ლოკალური პოტენციალი, ფაქტიურად, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც უსასრულო წევრების მქონე ფაქტორიზებული პოტენციალი. ზემოთქმულის თანახმად კი გამოდინარეობს, რომ ლოკალური პოტენციალებისათვის ფაქტორის განტოლებები შეგვიძლია დავიყვანოთ უსასრულო რაოდენობის წრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. ასეთი სისტემის საჭირო სიზუსტით ამოხსნა თანამედროვე ტექნიკის დონისათვის შეუძლებელია. მაგრამ ზოგჯერ აღნიშნული მწკრივიდან სწრაფი კრებადობის გამო, შესაძლებელია მნიშვნელოვანი აღმოჩნდეს მხოლოდ რამდენიმე წვერი, მაშინ უსასრულო განტოლებათა სისტემა სასრულზე დაიყვანება [122—125]. ასეთი სისტემის ამოხსნა კი, პრინციპში, შესაძლებელია სწრაფდამთვლელი ელექტრონული მანქანებით. აღსანიშნავია, რომ დღეისათვის არსებული მიზნობებით გამოთვლები სამი ნაწილაკის ამოცანაში სწორედ ამ მეთოდს ეყრდნობა [61, 65, 116, 117, 118, 119]. აქედან გამომდინარე, ნათელია, თუ რა მნიშვნელობა აქვს ფაქტორიზებული პოტენციალების გამოყენებას სამი სხეულის ამოცანისათვის.

იგივე მსჯელობა, ცხადია, ეხება ბმულ მდგომარეობასაც. ამ შემთხვევაში (92,16) სისტემაში თავისუფალი წვერი არ გვექნება და ფაქტორის განტოლებები ეკვივალენტური იქნება შემდეგი ერთგვაროვანი სისტემის:

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^N \int \Gamma_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) f_j(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (92,17)$$

თუ ამ განტოლებებიდან ნაპოვნ $f_i(p)$ ფუნქციებს შევითანთ გამოსახულებასში, რომელიც (92,12) ფორმულიდან პირველი წევრის ნულთან გატოლების შედეგად მიიღება, ე. ი. გამოსახულებაში

$$\psi(k, p) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^N \frac{v_i(k)}{k^2 + 3p^2/4 + \gamma^2} f_i(p), \quad (92,16)$$

მივიღებთ სამი ნაწილაკის ბმული მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას. სრული ტალღური ფუნქცია კი მიიღება (91,2) ტოლობით. აღვნიშნოთ, რომ ბმული მდგომარეობების განხილვის დროს საჭიროა ყველგან დავეშვათ $z = -\xi$, სადაც ξ -სამი ნაწილაკის სისტემის ბმის ენერგიაა, ხოლო $\gamma^2 = m\xi$.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა s -მდგომარეობაში ფაქტორიზებადი პოტენციალი შეიცავს მხოლოდ ორ წევრს: $N=2$. მივიღებთ ორი წრფივი ინტეგრალური განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას [82]:

$$f_1(p) = \frac{1}{\pi^2} \int \Gamma_{11}(p, p'; z) f_1(p') dp' + \frac{1}{\pi^2} \int \Gamma_{21}(p, p'; z) f_2(p') dp', \quad (92,19)$$

$$f_2(p) = \frac{1}{\pi^2} \int \Gamma_{12}(p, p'; z) f_1(p') dp' + \frac{1}{\pi^2} \int \Gamma_{22}(p, p'; z) f_2(p') dp'.$$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლებაში შესაძლებელია ზღვარზე გადასვლა, როცა, მაგალითად, λ_2 -ურთიერთქმედების ძალა უსასრულოდ იზრდება ($\lambda_2 \rightarrow \infty$). ეს კი, როგორც ვიცით, პრინციპში, ახლო მანძილებზე განხილვის ჩართვის საშუალებას იძლევა.

როცა $N=2$, მაშინ (92,6) და (92,8) ფორმულიდან გვექნება

$$D(z_p) = \frac{[1 - \lambda_1 X_{11}(z_p)] [1 - \lambda_2 X_{22}(z_p)] - \lambda_1 \lambda_2 X_{12}^2(z_p)}{[1 - \lambda_1 X_{11}(z_p)] [1 - \lambda_2 X_{22}(z_p)]}, \quad (92,20)$$

ხოლო (92,5) ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \Omega_{11}(z_p) = \Lambda(z_p) X_{22}(z_p), \quad (92,21)$$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \Omega_{21}(z_p) = -\Lambda(z_p) X_{12}(z_p), \quad (92,22)$$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} [\lambda_2 \Omega_{22}(z_p)] = -\Lambda(z_p) [1 - \lambda_1 X_{11}(z_p)], \quad (92,23)$$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} [\lambda_2 \Omega_{12}(z_p)] = -\lambda_1 \Lambda(z_p) X_{12}(z_p), \quad (92,24)$$

სადაც

$$\Lambda^{-1}(z_p) = [1 - \lambda_1 X_{11}(z_p)] X_{22}(z_p) + \lambda_1 X_{12}^2(z_p). \quad (92,25)$$

ამ ფორმულების გათვალისწინებით ადვილად დაენახავთ, რომ $\Gamma_{ij}(p, p'; z)$ ინტეგრალური განტოლების გულისსათვის, ზღვარში, როცა $\lambda_2 \rightarrow \infty$, გვექნება შემდეგი გამოსახულებები:

$$\Gamma_{11}(p, p'; z) = \lambda_1 \Lambda(z_p) \{A_{11}(p, p'; z) X_{22}(z_p) - A_{12}(p, p'; z) X_{12}(z_p)\} \quad (92,26)$$

$$\Gamma_{22}(p, p'; z) = -\Lambda(z_p) \{ \lambda_1 X_{12}(z_p) A_{21}(p, p'; z) + [1 - \lambda_1 X_{11}(z_p)] A_{22}(p, p'; z) \} \quad (92,27),$$

$$\Gamma_{12}(p, p'; z) = -\Lambda(z_p) \lambda_1 X_{12}(z_p) A_{11}(p, p'; z) \div$$

$$|1 - \lambda_1 X_{11}(z_p) A_{12}(p, p'; z)| \quad (92,28)$$

$$\Gamma_{21}(p, p'; z) = \lambda_1 \Lambda(z_p) |X_{22}(z_p) A_{21}(p, p'; z) - X_{12}(z_p) A_{22}(p, p'; z)|. \quad (92,29)$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (92,19) სისტემაში, მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას, რომელშიც ჩატარებულია ზღვარზე გადასვლა, როცა $\lambda_2 \rightarrow \infty$. თუ, მაგალითად, $v_1(p)$ პოტენციალის ფორმაში ვიგულისხმებთ იამაგუჩის პოტენციალს, ხოლო $v_2(p)$ ფორმას ავიღებთ სახით

$$v_2(p) = \frac{1}{p} \sin pr_c, \quad (92,30)$$

მაშინ, თუ $\lambda_1 < 0$, სამი სხეულის ამოცანაში, გარდა მიზიდვისა, $r = r_c$ მანძილზე იბართული იქნება პოტენციალური კედელი [75, 85].

§ 93. სამი სხეულის ამოცანა არალოკალური ფაქტორიზაციაში კონვანსიანისათვის ნაბისმიერი მომენტის შემთხვევაში

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ სამი ნაწილაკის ამოცანა ნულთან სრული მომენტის შემთხვევაში. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ნაწილაკებს შეუძლიათ ურთიერთქმედება ნებისმიერი მომენტით დახასიათებულ მდგომარეობაში. ავიღოთ სამი უსპინო ნაწილაკი m_1, m_2 და m_3 მასებით და შევისწავლოთ ასეთი სისტემის ბმული მდგომარეობა [83]. დავუშვათ, რომ ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ შემდეგი არალოკალური ფაქტორიზებული პოტენციალით¹:

$$\langle p | v_{\alpha\beta} | p' \rangle = \frac{1}{\pi \mu_{\alpha\beta}} \sum_{l,m} \lambda_{\alpha\beta}^{(l)} v_{\alpha\beta}^{(l)}(p) v_{\alpha\beta}^{(l)}(p') Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}'), \quad (93,1)$$

სადაც $v_{\alpha\beta}(p)$ არის პოტენციალის ფორმა α, β წვეულისათვის l -მომენტით, ხოლო $\mu_{\alpha\beta}$ დაყვანილი მასაა.

როგორც ვიცით, (93,1) პოტენციალურ ენერგიას შეესაბამება გაფანტვის შემდეგი ორნაწილაკობრივი მატრიცა:

$$\langle p | t_{\alpha\beta}(z) | p' \rangle = \frac{1}{\pi \mu_{\alpha\beta}} \sum_{l,m} v_{\alpha\beta}^{(l)}(p) v_{\alpha\beta}^{(l)}(p') \tau_{\alpha\beta}^{(l)}(z) Y_{lm}(\bar{p}) Y_{lm}^*(\bar{p}'), \quad (93,2)$$

სადაც ენერგიაზე დამოკიდებული $\tau_{\alpha\beta}^{(l)}(z)$ სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით

$$[\tau_{\alpha\beta}^{(l)}(z)]^{-1} = \frac{1}{\lambda_{\alpha\beta}^{(l)}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|r_{\alpha\beta}^{(l)}(q)|^2 q^2 dq}{2\mu_{\alpha\beta} z - q^2}. \quad (93,3)$$

ახლა დავწეროთ ფადეევის განტოლებები. მდგრადი მდგომარეობისათვის საჭიროა განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\psi^{(\alpha)}(k, p) = D_{\alpha\beta}^{-1}(k, p; z) \left\{ \langle k | t_{\beta\gamma} \left(z - \frac{p^2}{2\mu_\alpha} \right) | -r_{\beta\gamma}^\beta \rangle \psi^{(\beta)}(R_{\alpha\gamma}^\alpha, p') dp' + \int \langle k | t_{\beta\gamma} \left(z - \frac{p^2}{2\mu_\alpha} \right) | r_{\beta\gamma}^\gamma \rangle \psi^{(\gamma)}(-R_{\alpha\beta}^\alpha, p') dp' \right\}, \quad (93,4)$$

¹ ამ პარაგრაფშიც ვასარგებლებოთ ერთეულებით, რომლებშიც მიიღება $\hbar = 1$ დაშვებით.

სადაც $r_{\beta\gamma}^{\beta}$ და $R_{\alpha\gamma}^{\alpha}$ ვექტორები შემდეგი ფორმულებით განისაზღვრება:

$$r_{\beta\gamma}^{\beta} = p' + \frac{m_{\beta}}{m_{\beta\gamma}} p, \quad R_{\alpha\gamma}^{\alpha} = p + \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha\gamma}} p'; \quad (93,5)$$

α, β, γ ინდექსები იღებენ 1, 2, 3 მნიშვნელობებს.

სამი ნაწილაკის სრული მომენტი წარმოვიდგინოთ როგორც $J = I + L$, სადაც I არის ორი ნაწილაკის ფარდობითი მოძრაობის მომენტი, ხოლო L მესამე ნაწილაკის მომენტია პირველი ორი ნაწილაკის სიმძიმის ცენტრის მიმართ. ფაქტების განტოლების ამონახსნი გავშალოთ J^2 , J_z ოპერატორების საკუთარი ფუნქციების მწკრივად. გვექნება

$$\psi^{(\alpha)}(k, p) = \sum_{JM} \sum_{IL} \psi_{IL}^{(J)}(k, p) \mathcal{Y}_{IL}^M(\bar{k}, \bar{p}), \quad (93,6)$$

სადაც $\psi_{IL}^{(J)}(k, p)$ „რადიალური“ ფუნქციაა იმპულსურ წარმოდგენაში, ხოლო $\mathcal{Y}_{IL}^M(\bar{k}, \bar{p})$ განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathcal{Y}_{IL}^M(\bar{k}, \bar{p}) = \sum_{m_1 m_L} \langle l m_1 m_L | J M \rangle Y_{l m_1}(\bar{k}) Y_{L m_L}(\bar{p}). \quad (93,7)$$

შევიტანოთ (93,2) და (93,6) გამოსახულებანი ფაქტების (93,4) განტოლებაში, გადავამრავლოთ ეს განტოლება $\mathcal{Y}_{IL}^{J'M''}(\bar{k}, \bar{p})$ ფუნქციაზე და მოვხდინოთ ინტეგრაცია $d\Omega_{\bar{k}} d\Omega_{\bar{p}}$ სფერული კუთხეებით. თუ გავისხენებთ (93,7) ფუნქციების ორთონორმირების თვისებას და აგრეთვე (76,11) ფორმულას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \psi_{IL}^{(J)}(k, p) &= \frac{1}{\pi \mu_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}(k, p; z)} \sum_{l_1} \sum_{m_1} \sum_{J'M''} v_{\beta\gamma}^{l_1}(k) \tau_{\beta\gamma}^{l_1} \left(z - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} \right) \cdot \\ &((-1)^{l_1} \int p'^2 dp' \psi_{IL}^{(J)}(R_{\alpha\gamma}^{\alpha}, p') \mathcal{Y}_{IL}^{J'M''}(\bar{k}, \bar{p}) Y_{l_1 m_1}(\bar{k}) Y_{l_1 m_1}(\bar{r}_{\beta\gamma}^{\beta}) v_{\beta\gamma}^{l_1}(r_{\beta\gamma}^{\beta}) \cdot \\ &\quad \mathcal{Y}_{IL}^M(\bar{R}_{\alpha\gamma}^{\alpha}, \bar{p}') d\Omega_{\bar{k}} d\Omega_{\bar{p}} d\Omega_{p'} + \\ &(-1)^{l_1} \int p'^2 dp' \psi_{IL}^{(J)}(R_{\alpha\beta}^{\alpha}, p') \mathcal{Y}_{IL}^{J'M''}(\bar{k}, \bar{p}) Y_{l_1 m_1}(\bar{k}) Y_{l_1 m_1}^*(r_{\beta\gamma}^{\beta}) v_{\beta\gamma}^{l_1}(r_{\beta\gamma}^{\beta}) \cdot \\ &\quad \mathcal{Y}_{IL}^M(\bar{R}_{\alpha\beta}^{\alpha}, \bar{p}') d\Omega_{\bar{k}} d\Omega_{\bar{p}} d\Omega_{p'}) \cdot \end{aligned} \quad (93,8)$$

თუ გამოვიყენებთ (93,7) განმარტებას, $d\Omega_{\bar{k}}$ -სხეულოვანი კუთხით ინტეგრაციის ჩატარების შედეგად ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\sum_{m_1} \int \mathcal{Y}_{IL}^{J'M''}(\bar{k}, \bar{p}) Y_{l_1 m_1}(\bar{k}) Y_{l_1 m_1}^*(\bar{r}_{\beta\gamma}^{\beta}) d\Omega_{\bar{k}} = \delta_{l_1 l_1} \mathcal{Y}_{l_1}^{J'M''}(r_{\beta\gamma}^{\beta}, \bar{p}). \quad (93,9)$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით (93,8) განტოლება შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\psi_{IL}^{(J)}(k, p) = \frac{v_{\beta\gamma}(k) \tau_{\beta\gamma}^{l_1} \left(z - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} \right)}{\pi \mu_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}(k, p; z)} F_{IL}^{(J)}(p), \quad (93,10)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
 F_{iL'}^{(\beta\gamma)j}(\rho) &= \sum_{i'L'} \{ (-1)^j \int \rho'^2 d\rho' d\Omega_{\rho'} d\Omega_{\rho} v'_{\beta\gamma}(r'_{\beta\gamma}) \psi_{i'L'}^{(\beta\gamma)}(R'_{\alpha\gamma}, \rho') \cdot \\
 &\quad \mathcal{Y}_{iL'}^{jM^*}(\bar{r}'_{\beta\gamma}, \bar{\rho}) \cdot \mathcal{Y}_{i'L'}^{jM}(\bar{R}'_{\alpha\gamma}, \bar{\rho}') + \\
 &\quad (-1)^j \int \rho'^2 d\rho' d\Omega_{\rho'} d\Omega_{\rho} v'_{\beta\gamma}(r'_{\beta\gamma}) \psi_{i'L'}^{(\beta\gamma)}(R'_{\alpha\beta}, \rho') \cdot \\
 &\quad \mathcal{Y}_{iL'}^{jM^*}(\bar{r}'_{\beta\gamma}, \bar{\rho}) \cdot \mathcal{Y}_{i'L'}^{jM}(\bar{R}'_{\alpha\beta}, \bar{\rho}') \}. \quad (93,11)
 \end{aligned}$$

$F_{iL'}^{(\beta\gamma)j}(\rho)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას, რომლის მისაღებად საკმარისია (93,10) გამოსახულებით განსაზღვრული $\psi_{iL'}^{(\alpha\beta)j}(\bar{k}, \bar{\rho})$ ფუნქციები შევიტანოთ (93,11) გამოსახულებაში. გვექნება

$$\begin{aligned}
 I_{iL'}^{(\beta\gamma)j}(\rho) &= \sum_{i'L'} \left\{ \int \rho'^2 d\rho' U_{iL':i'L'}^{(\beta\gamma, \gamma\beta)j}(\rho, \rho'; z) \tau'_{\gamma\alpha} \left(z - \frac{\rho'^2}{2\mu_{\beta\gamma}} \right) F_{i'L'}^{(\gamma\alpha)j}(\rho') + \right. \\
 &\quad \left. \int \rho'^2 d\rho' V_{iL':i'L'}^{(\beta\gamma, \alpha\beta)j}(\rho, \rho'; z) \tau'_{\alpha\beta} \left(z - \frac{\rho'^2}{2\mu_{\gamma\alpha}} \right) F_{i'L'}^{(\alpha\beta)j}(\rho') \right\}, \quad (93,12)
 \end{aligned}$$

სადაც ჩვენ შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
 U_{iL':i'L'}^{(\beta\gamma, \gamma\beta)j}(\rho, \rho'; z) &= \frac{(-1)^j}{\pi\mu_{\gamma\alpha}} \int \mathcal{Y}_{iL'}^{jM^*}(\bar{r}'_{\beta\gamma}, \bar{\rho}) v'_{\beta\gamma}(r'_{\beta\gamma}) D_{\gamma\alpha}^{-1}(R'_{\alpha\gamma}, \rho'; z) \cdot \\
 &\quad v'_{\gamma\alpha}(R'_{\alpha\gamma}) \mathcal{Y}_{i'L'}^{jM}(\bar{R}'_{\alpha\gamma}, \bar{\rho}') d\Omega_{\rho'} d\Omega_{\rho} \quad (93,13)
 \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned}
 V_{iL':i'L'}^{(\beta\gamma, \alpha\beta)j}(\rho, \rho'; z) &= \frac{(-1)^j}{\pi\mu_{\alpha\beta}} \int \mathcal{Y}_{iL'}^{jM^*}(\bar{r}'_{\beta\gamma}, \bar{\rho}) v'_{\beta\gamma}(r'_{\beta\gamma}) D_{\alpha\beta}^{-1}(R'_{\alpha\beta}, \rho'; z) \cdot \\
 &\quad v'_{\alpha\beta}(R'_{\alpha\beta}) \mathcal{Y}_{i'L'}^{jM}(\bar{R}'_{\alpha\beta}, \bar{\rho}') d\Omega_{\rho'} d\Omega_{\rho}; \quad (93,14)
 \end{aligned}$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ $F_{iL'}^{(\alpha\beta)j}$, $F_{iL'}^{(\beta\gamma)j}$ და $F_{iL'}^{(\gamma\alpha)j}$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას. გავემარტივოთ ამ სისტემის გულები. რადგან (93,5) ფორმულების თანახმად r , R ვექტორები შეიცავენ კუთხეს ρ და ρ' ვექტორებს შორის, ამიტომ ადვილი ექნება შემდეგ გაშლას:

$$\begin{aligned}
 &\frac{v'_{\beta\gamma}(r'_{\beta\gamma}) v'_{\gamma\alpha}(R'_{\alpha\gamma})}{\pi\mu_{\gamma\alpha}(r'_{\beta\gamma})^j D_{\gamma\alpha}(R'_{\alpha\gamma}, \rho'; z) (I'_{\alpha\gamma})^j} = \\
 &\sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1) h_{iL'}^{(\beta\gamma, \gamma\alpha)}(\rho, \rho'; z) P_{\nu}(\bar{\rho} \cdot \bar{\rho}'). \quad (93,15)
 \end{aligned}$$

უხადია, $h_{iL'}^{(\beta\gamma, \gamma\alpha)}(\rho, \rho'; z)$ ფუნქცია განისაზღვრება გამოსახულებით

$$h_{iL'}^{(\beta\gamma, \gamma\alpha)}(\rho, \rho'; z) = \frac{1}{2\pi\mu_{\gamma\alpha}} \int_{-1}^{+1} dx P_{\nu}(x) \frac{v'_{\beta\gamma}(r'_{\beta\gamma}) v'_{\gamma\alpha}(R'_{\alpha\gamma})}{(r'_{\beta\gamma})^j D_{\gamma\alpha}(R'_{\alpha\gamma}, \rho'; z) (R'_{\alpha\gamma})^j}, \quad (93,16)$$

სადაც $x = \cos(\bar{\rho} \cdot \bar{\rho}')$. (93,15) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$U_{L'L'}^{(\beta\gamma; \gamma\alpha)'}(\rho, \rho'; \varepsilon) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} (2\gamma+1) \Gamma_{L'L'}^{(\beta\gamma; \gamma\alpha)'}(\rho, \rho') h_{L'L'}^{(\beta\gamma; \gamma\alpha)}(\rho, \rho'; \varepsilon), \quad (93,17)$$

აქ ჩვენ შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\Gamma_{L'L'}^{(\beta\gamma; \gamma\alpha)'}(\rho, \rho') = (-1)^l \int d\Omega_p d\Omega_{p'} (r_{\beta\gamma}^\beta)^l \mathcal{Y}_{L'L'}^{JM}(\bar{r}_{\beta\gamma}^\beta, \bar{\rho}) P_\nu(\bar{\rho} \cdot \bar{\rho}') \cdot (R_{\alpha\beta}^\alpha)^l \mathcal{Y}_{L'L'}^{JM}(\bar{R}_{\alpha\beta}^\alpha, \bar{\rho}'). \quad (93,18)$$

ანალოგიურად მოიძებნება (93,14) გამოსახულება. თუ მოვახდენთ გაშლას

$$\frac{v_{\beta\gamma}^\beta (r_{\beta\gamma}^\beta)^l v_{\alpha\beta}^\alpha (R_{\alpha\beta}^\alpha)^l}{\pi \mu_{\alpha\beta} (r_{\beta\gamma}^\beta)^l D_{\alpha\beta} (R_{\alpha\beta}^\alpha, \rho'; \varepsilon) (H_{\alpha\beta}^\alpha)^l} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} (2\gamma+1) h_{L'L'}^{(\beta\gamma; \alpha\beta)}(\rho, \rho') P_\nu(\bar{\rho} \cdot \bar{\rho}'), \quad (93,19)$$

მაშინ (93,14) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$V_{L'L'}^{(\beta\gamma; \alpha\beta)}(\rho, \rho'; \varepsilon) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} (2\gamma+1) \Gamma_{L'L'}^{(\beta\gamma; \alpha\beta)'}(\rho, \rho') h_{L'L'}^{(\beta\gamma; \gamma\alpha)}(\rho, \rho'; \varepsilon); \quad (93,20)$$

ამასთან

$$\Gamma_{L'L'}^{(\beta\gamma; \alpha\beta)'}(\rho, \rho') = (-1)^l \int d\Omega_p d\Omega_{p'} (r_{\beta\gamma}^\beta)^l \mathcal{Y}_{L'L'}^{JM}(\bar{r}_{\beta\gamma}^\beta, \bar{\rho}) P_\nu(\bar{\rho} \cdot \bar{\rho}') \cdot (H_{\alpha\beta}^\alpha)^l \mathcal{Y}_{L'L'}^{JM}(\bar{R}_{\alpha\beta}^\alpha, \bar{\rho}'). \quad (93,21)$$

ნათელია, რომ (93,16) გამოსახულება დამოკიდებულია პოტენციალის ფორმის კონკრეტულ სახეზე, (93,18) და (93,21) გამოსახულებები კი მხოლოდ კუთხეებს შეიცავენ და ამიტომ შესაძლებელია მათი ბოლომდე გამოთვლა.

ცნობილია, რომ თუ $r = \rho + R$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულას [115]:

$$r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\bar{r}) = \sum_{\Lambda M_\Lambda} B_{\Lambda M_\Lambda, \lambda\mu} \rho^{\lambda-\Lambda} Y_{\lambda-\Lambda, \mu-M_\Lambda}(\bar{\rho}) R^\Lambda Y_{\Lambda M_\Lambda}(\bar{R}), \quad (93,22)$$

სადაც $B_{\Lambda M_\Lambda, \lambda\mu}$ სიდიდეები განისაზღვრება ფორმულით

$$B_{\Lambda M_\Lambda, \lambda\mu} = (-1)^{\lambda-\Lambda} \left[\frac{4\pi (2\lambda+1)!}{(2\Lambda+1)! [(2\lambda-\Lambda)+1]!} \right]^{1/2} \langle \Lambda\lambda-\Lambda M_\Lambda \mu - M_\Lambda | \lambda\mu \rangle. \quad (93,23)$$

ჩვენ მიზანია ვიპოვოთ (93,22)-ის ანალოგიური ფორმულა $\mathcal{Y}_{L'L'}^{JM}(\bar{k}, \bar{\rho})$ ფუნქციონალისათვის. (93,7) განმარტების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$(r_{\beta\gamma}^\beta)^l \mathcal{Y}_{L'L'}^{JM}(\bar{r}_{\beta\gamma}^\beta, \bar{\rho}) = \sum_{m_l m_L} \langle l L m_l m_L | J M \rangle [(r_{\beta\gamma}^\beta)^l Y_{l m_l}(\bar{r}_{\beta\gamma}^\beta)] Y_{L m_L}(\bar{\rho}), \quad (93,24)$$

სოლო (93,5) და (93,22) ფორმულების თანახმად, გვეყენება

$$(r_{\beta\gamma}^{\beta})^j \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\bar{r}_{\beta\gamma}^{\beta}, \bar{\rho}) = \sum_{m_l m_L} \sum_{\Lambda M_{\Lambda}} \langle l L m_l m_L | J M \rangle B_{\Lambda M_{\Lambda}, i m_l} \left(\frac{m_{\beta}}{m_{\beta\gamma}} \rho \right)^{l-\Lambda} (\rho')^{\Lambda} \cdot Y_{l-\Lambda, m_l - M_{\Lambda}}(\bar{\rho}) Y_{\Lambda M_{\Lambda}}(\bar{\rho}') Y_{L m_L}(\bar{\rho}). \quad (93,25)$$

გამოვიყენოთ სფერული ფუნქციების (4, 37) შეკრების ფორმულა

$$Y_{l-\Lambda, m_l - M_{\Lambda}}(\bar{\rho}) Y_{L m_L}(\bar{\rho}) = \sum_{j' |l-\Lambda|}^{l+\Lambda} \left\{ \frac{|2(l-\Lambda)+1|(2L+1)}{4\pi(2j'+1)} \right\}^{1/2} \cdot$$

$$\langle l-\Lambda L 0 0 | j 0 \rangle \langle l-\Lambda L m_l - M_{\Lambda} m_L | j m_l + m_L - M_{\Lambda} \rangle Y_{j m_l + m_L - M_{\Lambda}}(\bar{\rho}). \quad (93,26)$$

ამ გამოსახულების შეტანით (93,25) ფორმულაში გაგვიჩნდება $\bar{\rho}'$ და $\bar{\rho}$ ერთეულური ვექტორების სფერული ფუნქციების ნაპრაული, რომელიც, (76,13) ფორმულის თანახმად, შევვიძლია გამოვხატოთ $\mathcal{Y}^{JM}(\bar{\rho}', \bar{\rho})$ ფუნქციით

$$Y_{\Lambda M_{\Lambda}}(\bar{\rho}') Y_{j m_l + m_L - M_{\Lambda}}(\bar{\rho}) = \sum_{j' = |\Lambda - J|}^{\Lambda + j} \sum_{M' = -j'}^{j'} \langle \Lambda j M_{\Lambda} m_l + m_L - M_{\Lambda} | j' M' \rangle \mathcal{Y}_{j' M'}^{j' M'}(\bar{\rho}', \bar{\rho}). \quad (93,27)$$

ასე რომ, თუ (93,25) ფორმულაში ვავითვალისწინებთ $B_{\Lambda M_{\Lambda}, i m_l}$ სიდიდს (93,23) მნიშვნელობასაც, გვეყენება შემდეგი გამოსახულება:

$$(r_{\beta\gamma}^{\beta})^j \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\bar{r}_{\beta\gamma}^{\beta}, \bar{\rho}) = \sum_{m_l m_L} \sum_{\Lambda M_{\Lambda}} \sum_{j' M'} (-1)^{\Lambda - l} \left\{ \frac{(2l+1)!(2L+1)!|2(l-\Lambda)+1|}{(2\Lambda+1)!(2j'+1)[2(l-\Lambda)+1]!} \right\}^{1/2}$$

$$\left(\frac{m_{\beta}}{m_{\beta\gamma}} \rho \right)^{l-\Lambda} \rho'^{\Lambda} \mathcal{Y}_{j' M'}^{j' M'}(\bar{\rho}', \bar{\rho}) \langle l-\Lambda L 0 0 | j 0 \rangle \langle l L m_l m_L | J M \rangle \cdot \langle \Lambda l - \Lambda M_{\Lambda} m_l - M_{\Lambda} | l m_l \rangle \langle l - \Lambda L m_l - M_{\Lambda} m_L | j m_l + m_L - M_{\Lambda} \rangle \langle \Lambda j M_{\Lambda} m_l + m_L - M_{\Lambda} | j' M' \rangle. \quad (93,28)$$

ცხადია, ამ გამოსახულებაში $M' = M - M_{\Lambda}$, ამიტომ ჯამი M' -ით ამოვარდება თუ გამოვიყენებთ კლებშ-ჟორდანის (4,10)–(4,12) სიმეტრიის თვისებებს და რაკას კოეფიციენტის (5,18) განმარტებას, მარტივად ჩავატარებთ აქამვის M_{Λ} -თი. მივიღებთ

$$\sum_{M_{\Lambda}} \langle \Lambda l - L M_{\Lambda} m_l - M_{\Lambda} | l m_l \rangle \langle l - \Lambda L m_l - M_{\Lambda} m_L | j m_l + m_L - M_{\Lambda} \rangle \cdot \langle \Lambda j M_{\Lambda} m_l + m_L - M_{\Lambda} | j' M' \rangle = \sqrt{(2j+1)(2l+1)} \langle l L m_l m_L | j' M \rangle W(L l - \Lambda j \Lambda; j l). \quad (93,29)$$

ამ გამოსახულების (93,28) ფორმულაში შეტანის შემდეგ შევვიძლია მოვახდინოთ აქამვა m_l და M_L -ის მიხედვით. აქამვის შედეგი კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტების ორთო-ნორმირების თვისების თანახმად იქნება $\delta_{j', j}$; ასე რომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$(r_{\beta\gamma}^{\beta})^j \mathcal{Y}_{L}^{JM}(\bar{r}_{\beta\gamma}^{\beta}, \bar{\rho}) = \sum_{L_j} A_{L_j}^{j'} \left(\rho', \frac{m_{\beta}}{m_{\beta\gamma}} \rho \right) \mathcal{Y}_{L_j}^{j' M}(\bar{\rho}', \bar{\rho}), \quad (93,30)$$

$$A_{L'L:\Lambda j}^J \left(\rho', \frac{m_\beta}{m_{\beta\gamma}} \rho \right) = (-1)^{\Lambda-l} \rho'^{\Lambda} \left(\frac{m_\beta}{m_{\beta\gamma}} \rho \right)^{l-\Lambda} \left\{ \frac{(2l+1)! (2l+1) (2L+1) [2(l-\Lambda)+1]}{(2\Lambda+1)! [2(l-\Lambda)+1]!} \right\}^{1/2} \langle l-\Lambda, l, 00 | j0 \rangle \Pi'(Ll-\Lambda, J\Lambda; j) \quad (93,31)$$

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$(L\alpha_\gamma)^l \mathcal{Y}_{L'L}^J(\bar{R}_{\alpha_\gamma}, \bar{\rho}') = \sum_{Lj} A_{L'L:\Lambda j}^J \left(\rho, \frac{m_\alpha}{m_{\alpha\gamma}} \rho' \right) \mathcal{Y}_{L'L}^J(\bar{\rho}, \bar{\rho}'). \quad (93,32)$$

თანხმად (93,31) და (93,33) ფორმულებისა, (93,18) გამოსახულება შემდეგნაირად ც გადაიწერება:

$$\Gamma_{L'L:\Lambda j}^J(\rho, \rho') = (-1)^l \sum_{\Lambda j'} \sum_{\Lambda' j'} A_{L'L:\Lambda j}^J \left(\rho', \frac{m_\beta}{m_{\beta\gamma}} \rho \right) \rho_{\Lambda' j'}^J \rho_{\Lambda j}^J \left(\rho, \frac{m_\alpha}{m_{\alpha\gamma}} \rho' \right). \quad (93,33)$$

სადაც

$$\rho_{\Lambda j'}^J = \int d\Omega_p d\Omega_{p'} \mathcal{Y}_{\Lambda j'}^J(\bar{\rho}, \bar{\rho}) \rho_{\nu}(\bar{\rho}') \bar{\rho}_{\nu}(\bar{\rho}') \mathcal{Y}_{\Lambda j'}^J(\bar{\rho}, \bar{\rho}'). \quad (93,34)$$

ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში ადვილად ჩავატარებთ ინტეგრაციას კუთხვებით. მართლაც, (93,34) ფორმულაში შევიტანოთ (93,7) განმარტება და ლეჟანდრის პოლინომიც გამოვხატოთ სფერული ფუნქციებით; გვექნება

$$\rho_{\Lambda j'}^J = \frac{4\pi}{2j'+1} \sum_{M_\Lambda M_j} \sum_{M_{\Lambda'} M_{j'}} \langle \Lambda j M_\Lambda M_j | J M \rangle \langle \Lambda' j' M_{\Lambda'} M_{j'} | J M \rangle \int d\Omega_p d\Omega_{p'} Y_{\Lambda M_\Lambda}^*(\bar{\rho}') Y_{j M_j}(\bar{\rho}) Y_{\nu M_\nu}^*(\bar{\rho}') Y_{\nu M_\nu}(\bar{\rho}) Y_{\Lambda' M_{\Lambda'}}(\bar{\rho}') Y_{j' M_{j'}}(\bar{\rho}'). \quad (93,35)$$

გამოვიყენოთ (G, 38) ფორმულა ინტეგრალისათვის საში სფერული ფუნქციიდან, მაშინ მივიღებთ

$$\rho_{\Lambda j'}^J = \left\{ \frac{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)}{(2j+1)(2j'+1)} \right\}^{1/2} \sum_{M_\Lambda M_j M_{\Lambda'} M_{j'}} \langle \Lambda j M_\Lambda M_j | J M \rangle \langle \Lambda' j' M_{\Lambda'} M_{j'} | J M \rangle \langle \Lambda \nu 00 | j' 0 \rangle \langle \nu \Lambda' 00 | j 0 \rangle \langle \Lambda \nu M_\Lambda \mu | j' M_j \rangle \langle \nu \Lambda' \mu M_{\Lambda'} | j M_j \rangle. \quad (93,36)$$

რადგან, (4,10) ფორმულის თანახმად

$$\langle \Lambda' j' M_{\Lambda'} M_{j'} | J M \rangle = \langle j' \Lambda' - M_{j'} - M_{\Lambda'} | J - M \rangle, \quad (93,37)$$

ამიტომ (5,15) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\sum_{M_\Lambda M_j M_{\Lambda'} M_{j'}} \langle \Lambda j M_\Lambda M_j | J M \rangle \langle \Lambda' j' M_{\Lambda'} M_{j'} | J M \rangle \cdot \langle \Lambda \nu M_\Lambda \mu | j' M_j \rangle \langle \nu \Lambda' \mu M_{\Lambda'} | j M_j \rangle = (-1)^{\Lambda'+j'-J} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} W(\Lambda \nu J \Lambda'; j' j). \quad (93,38)$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ

$$Q_{A'; A' j'}^{j'} = (-1)^{A'+j'-j} \sqrt{(2A'+1)(2A'+1)} \langle \Lambda \nu 00 | j' 0 \rangle \langle \nu \Lambda' 00 | j 0 \rangle \cdot \\ W(\Lambda \nu J A'; j' j). \quad (93,39)$$

ამგვარად, $\Gamma_{IL; I' L'}^j(p, p')$ სილიდები, რომლებიც გამოიხატება (93,33) ფორმულით, დაიყვანება ჯამების აღებაზე. სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით $\Gamma_{IL; I' L'}^{j' j}(p, p')$ სილიდებსაც. განსხვავება იმაში იქნება, რომ (93,33) გამოსახულებაში შევლენ

$$A_{IL; A_i}^j \left(p', \frac{m_\nu}{m_{\beta\alpha}} p \right) A_{I' L'}^{j'} \left(p, \frac{m_\alpha}{m_{\alpha\beta}} p' \right) \text{ სილიდები.}$$

ამგვარად, ამოცანა დაიყვანება (93,16) ფორმულით მოცემული $h_{\mu\nu\alpha}(p, p', z)$ სილიდების განსაზღვრაზე. მათ განსასაზღვრად კი საჭიროა პოტენციალის კონკრეტული სახის ცოდნა.

ეკრძო შემთხვევაში იგივერი ნაწილაკებისათვის $m_1 = m_2 = m_3 = m$ (93,12) სისტემის ნაცვლად გვექნება ერთი ინტეგრალური განტოლება [69].

$$F_{IL}^j(p) = 2 \sum_{I' L'} \int_0^\infty p'^2 dp' F_{IL; I' L'}^j(p, p'; z) z^{-j} \left(z - \frac{3}{4} \frac{p'^2}{m} \right) F_{I' L'}^{j'}(p'), \quad (93,40)$$

სადაც U^j განისაზღვრება (93,17) ფორმულით, რომელშიც უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ნაწილაკები იგივერებია.

ჩვენ მიერ ზემოთ მიღებული ფორმულები რთულია, რადგან უსასრულო ჯამებს შეიცავენ, მაგრამ თუ ამოცანაში ისეთი მდგომარეობა ხორციელდება, როცა ურთიერთქმედებაში ერთი ნულის ტოლი მომენტი მაინც მონაწილეობს, მაშინ გამოსახულებანი საკმარისად მარტივდება.

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ მოძრაობის იმავე განტოლებებს ადვილად მივიღებთ (89,24) ფორმულიდანაც. ამასთან, აღვნიშნოთ, რომ ხშირად მიახლოებითი გამოთვლებისათვის ხელსაყრელია იმ ცვლადებით სარგებლობა, რომლებიც შერჩეული გვექონდა (89,24) განტოლების გამოყვანის დროს.

ვისარგებლოთ ერთინდქსიანი აღნიშვნებით, მაშინ (89,24) განტოლებაში შემავალი $t_i(z)$ -მატრიცისათვის ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედების შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ გამოსახულებით—

$$\langle p | t_i^j(z) | p' \rangle = \frac{1}{\pi \mu_i} v_i^j(p) v_i^j(p') z_i^j(z), \quad (93,41)$$

სადაც $v_i^j(z)$ განსაზღვრული იქნება (93,3) ფორმულით.

შემოვიღოთ (89,24) განტოლებაში ახალი ფუნქცია

$$\psi_n^{(i)}(p, q; \alpha) = v_i^j(p) \tilde{\psi}_n^{(i)}(q, \alpha), \quad (93,42)$$

სადაც α აღნიშნავს კვანტური რიცხვების ერთობლიობას $\alpha \equiv (l, L, J, M)$; მაშინ მივიღებთ

$$v_i^j(p) \tilde{\psi}_n^{(i)}(q, \alpha) = \Phi_n^{(i)}(p, q; \alpha) + \\ \sum_{i=2}^j \sum_{\alpha_i} \int dp_i dq_i K_i(pq\alpha | p_i q_i \alpha_i) \frac{p_i^2 q_i^2}{z - (p_i^2 + q_i^2)} v_i^j(p_i) \tilde{\psi}_n^{(i)}(q_i, \alpha_i). \quad (93,43)$$

ამასთან, (93,43) განტოლებიდან ბმული მდგომარეობის შემთხვევას მაშინ მივიღებთ, თუ თავისუფალ წევრს ნულს გავუტოლებთ. ასეთი სახით (93,43) განტოლება გამოხატავს ნაწილაკის გაფანტვას ორი ნაწილაკის ბმულ სისტემაზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\tilde{\Phi}_n^{(1)}(p, q; \alpha) = \frac{\Phi_n^{(1)}(p, q; \alpha)}{v_1'(p)} \quad (93,44)$$

და

$$\tilde{K}_i(q\alpha | q_i, \alpha_i) = \int d\rho_i K_i(pq\alpha | \rho_i, q_i, \alpha_i) \frac{\rho_i^2 q_i^2}{s - (\rho_i^2 + q_i^2)} \frac{v_1'(\rho_i)}{v_1'(p)}, \quad (93,45)$$

რომელთა საშუალებით ფადეევის განტოლებიდან შეიძლება ჩამოვიშოროთ p -ზე დამოკიდებულება

$$\tilde{\Psi}_n^{(1)}(q, \alpha) = \tilde{\Phi}_n^{(1)}(q, \alpha) + \sum_{i=2}^3 \sum_{\alpha_i} \int d\alpha \tilde{K}_i(q\alpha | q_i, \alpha_i) \tilde{\Psi}_n^{(1)}(q_i, \alpha_i). \quad (93,46)$$

ანალოგიურად დაიწერება დანარჩენი ორი განტოლებაც. როგორც ვხედავთ, ფაქტორიზებადი პოტენციალისათვის ფადეევის განტოლებები დაიყვანება ერთგანზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. ცხადია, ფაქტორიზებადი პოტენციალისათვის გამარტივდება თვით $K_i(pq\alpha | \rho_i, q_i, \alpha_i)$ გულებიც.

საინტერესოა იგივე რ ნაწილაკთა სისტემის განხილვა. ამ შემთხვევაში ყველა წყვილური ურთიერთქმედება ერთმანეთის ტოლია ($V_1 = V_2 = V_3$) თუ გამოვიყენებთ $T^i(z)$ -მატრიცის განმარტებას

$$T^i(z) = v_i + v_i G_0(z) T^i(z), \quad (93,47)$$

სადაც $T^i(z)$ -სამნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცაა; მაშინ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ სხვადასხვა $T^i(z)$ -მატრიცები ($i = 1, 2, 3$) დაკავშირებული იქნება ერთმანეთთან

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2, k_3 | T^1(z) | k'_1, k'_2, k'_3 \rangle &= \langle k_2, k_1, k_3 | T^2(z) | k'_2, k'_1, k'_3 \rangle, \\ \langle k_1, k_2, k_3 | T^1(z) | k'_1, k'_2, k'_3 \rangle &= \langle k_1, k_3, k_2 | T^3(z) | k'_1, k'_3, k'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (93,48)$$

ამიტომ ფადეევის განტოლებათა სისტემა ერთ განტოლებაზე დაიყვანება. გავითვალისწინოთ ნაწილაკთა სტატისტიკაც. გამოვიყენოთ (93,48) ფორმულები და ვაჩვენოთ, რომ ფერმის ან ბოზეს ნაწილაკებისათვის შესაბამისად გვექნება

$$\langle p, q | T^i(z) | n_{\pm} \rangle = \pm \langle -p, q | T^i(z) | n_{\pm} \rangle, \quad (93,49)$$

სადაც $|n_{\pm}\rangle$ შესაბამისად წარმოადგენს საწყისი მდგომარეობის სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული მდგომარეობის კეტ ვექტორს.

მეტი სიცხადის მიზნით, ჯერ განვიხილოთ ორი იგივეური ნაწილაკის შემთხვევა; მაშინ

$$\langle r_1, r_2 | n_{\pm} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{ik_1 r_1} e^{ik_2 r_2} \pm e^{ik_1 r_2} e^{ik_2 r_1} \}. \quad (93,50)$$

დავწეროთ პოტენციალური ენერჯის მატრიცული ელემენტი $\langle k'_1, k'_2 | v | k_1, k_2 \rangle$. ცხადია,

$$\langle k'_1, k'_2 | v | n_{\pm} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle k'_1, k'_2 | v | k_1, k_2 \rangle \pm \langle k'_2, k'_1 | v | k_1, k_2 \rangle \}, \quad (93,51)$$

საიდანაც

$$\langle k'_1, k'_2 | v | n_{\pm} \rangle = \pm \langle k'_2, k'_1 | v | n_{\pm} \rangle. \quad (93,52)$$

ასეთივე თვისება ექნება ორნაწილაკობრივ $T(x)$ -მატრიცასაც. როცა ესარგებლობთ ფარდობითი k იმპულსით, მაშინ ნაწილაკთა გადასმა ნიშნავს $k \rightarrow -k$ შეცვლას, ამიტომ გასაგებია, რომ იაკობის ცვლადებში გვექნება შემდეგი თვისება:

$$\langle k_{2z}, p_1 | T^{(1)}(x) | n_{\pm} \rangle = \pm \langle k_{2z}, p_1 | T^{(1)}(x) | n_{\pm} \rangle = \pm \langle -k_{2z}, p_1 | T^{(1)}(x) | n_{\pm} \rangle, \quad (93,53)$$

სადაც $|n_{\pm}\rangle$ საწყისი მდგომარეობის სამნაწილაკობრივი ვექტორია.

აღნიშნული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ საწყისი მდგომარეობაში ორი იგივე-რი j და k ($j, k \neq z$) ნაწილაკის გადასმისას $T'(x)$ -მატრიცული ელემენტი იქნება სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული. ეს პირობა დაკმაყოფილებული იქნება, თუ (93,46) განტოლებაში შესაბამისად ავიღებთ ლუწუ ან კენტ l -ებს. ამ უკანასკნელი გარემოების გათვალისწინებით (93,46)-დან მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\check{\Psi}_{n_{\pm}}^{(1)}(q, \alpha) = \check{\Psi}_{n_{\pm}}^{(1)}(q, \alpha) + \sum_{\alpha'} \int dq' \check{K}(q, z | q', \alpha') \check{\Psi}_{n_{\pm}}^{(1)}(q', \alpha'), \quad (93,54)$$

რომლის გული განისაზღვრება ფორმულით

$$\check{K}(q, \alpha | q', \alpha') = \sum_{i=2}^3 \check{K}_i(q\alpha | q'\alpha'). \quad (93,55)$$

როცა გვსურს ბმულ მდგომარეობათა შესწავლა, ამ შემთხვევაში საჭიროა განვიხილოთ (93,54) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება.

საპი ნაწილაკის ამოცანის ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები

როდესაც საპი ნაწილაკის ამოცანის ამოხსნის მიახლოებით მეთოდებზე ლაპარაკობენ, გულისხმობენ მოძრაობის განტოლების ისეთ გამარტივებას, როცა შესაძლებელია ამ განტოლების ამოხსნისათვის სწრაფადმოთვლელი ელექტრონული მანქანების გამოყენება. ასეთი მიახლოების გარეშე, როგორც ვიცით, ლოკალური პოტენციალებისათვის ფადეევის განტოლებები ორ ცვლადზე დამოკიდებულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას წარმოადგენენ, რომელთა ამოხსნა თანამედროვე ტექნიკისთვისაც კი ძნელია. ამასთან, ჩვენ დაეინასეთ, რომ ფაქტორიზებადი პოტენციალების ჯამისათვის მიიღება ერთგანზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც იმდენ განტოლებას შეიცავს, რამდენი ფაქტორიზებადი პოტენციალიც გვაქვს ალებულ ჯამში. როცა განტოლებათა რიცხვი სასრულია, აღნიშნული სისტემის ამოხსნა სწრაფადმოთვლელ ელექტრონულ მანქანაზე, პრინციპში, შესაძლებელია. ამიტომ დღეისათვის არსებული ყველა მიახლოება საპი ნაწილაკის ფადეევის განტოლებებისა, მდგომარეობს პოტენციალური ენერჯის ფაქტორიზებად მამრავლებად გაშლაში. როცა მდგომარეობა ისეთია, რომ, კრებადობის განო, ჯამში შესაძლებელია რამდენიმე წევრის შენარჩუნება, მაშინ ჩამოიჭრება ლოკალური პოტენციალის შესაბამისი უსასრულო სისტემა და მისი ამოხსნა შესაძლებელი იქნება. ასეთ მიახლოებას საფუძვლად უდევს ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცის გაშლა ჰილბერტ-შმიდტის მეთოდით გაფანტვის ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარ ფუნქციებად. ამ თავში ჩვენ გამოვიყენებთ ამ მიახლოებას და დაწერთ სათანადო ფადეევის განტოლებებს. ამ მიახლოების გამოყენების კონკრეტულ მაგალითებს არ განვიზილავთ და დავკმაყოფილდებით სპეციალური ლიტერატურის მითითებით.

§ 94. ბაზანტპის მატრიცის გაშლა ჰილბერტ-შმიდტის მეთოდით

როგორც ვიცით, საპი სხეულის ამოცანის ამოხსნის ეფექტური მიახლოების მეთოდი მდგომარეობს პოტენციალური ენერჯის წარმოდგენაში ფაქტორიზებად მწკრივად. თუ მოვახერხებთ პოტენციალური ენერჯის მწკრივად გაშლას რაიმე ოპერატორის საკუთარი ფუნქციების ნამრავლად, მაშინ გაფანტვის მატრიცაც ფა-

ქტორიზებული მწკრივით წარმოიდგინება და მწკრივის ჩამოქრის შესაძლებლობის შემთხვევაში ფადეევის განტოლებები საკმარისად გამარტივდება.

პოტენციალური ენერჯიისა და გაფანტვის მატრიცის სეპარაბელური გაშლის ერთ-ერთ მეთოდს წარმოადგენს პილბერტ-შმიდტის გაშლა. ვაიხსენოთ, რომ პილბერტ-შმიდტის ფორმულები გამოხატავენ ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარი ფუნქციების ნამრავლად გაშლას [157].

გაფანტვის ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარი ფუნქციები [18, 121]. დაწვეროთ ლიპმან-შეინგერის განტოლება გაფანტვის ორნაწილაკობრივი მატრიცისათვის:

$$l(x, \lambda) = v + \lambda v G_0(x) l(x, \lambda). \quad (94,1)$$

ხელსაყრელობის მიზნით პოტენციალური ენერჯიიდან გამოყვავით λ -პარამეტრი; ცხადია. გაფანტვის მატრიცაც დამოკიდებული იქნება ამ პარამეტრზე. გაფანტვის $l(x, 1)$ მატრიცა გაფანტვის ამპლიტუდასთან დაკავშირებულია ცნობილი ფორმულით. შევნიშნოთ, რომ (94,1) ინტეგრალური განტოლების $v G_0(x)$ გული არ არის სიმეტრიული, — იგი პოლარულია. როგორც ვიცით, გარკვეული აღნიშვნით პოლარული გული შეგვიძლია სიმეტრიული გავხადოთ. მართლაც, შემოვიღოთ ახალი ოპერატორები

$$\Gamma(x, \lambda) = -(\hat{H}_0 - \varepsilon)^{-1/2} l(x, \lambda) (\hat{H}_0 - \varepsilon)^{-1/2} \quad (94,2)$$

$$K(x) = -(\hat{H}_0 - \varepsilon)^{-1/2} v (\hat{H}_0 - \varepsilon)^{-1/2}, \quad (94,3)$$

სადაც \hat{H}_0 ორნაწილაკობრივი კინეტიკური ენერჯიის ოპერატორია. რადგან $G_0(x) = (\varepsilon - \hat{H}_0)^{-1}$, ამიტომ (94,1) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Gamma(x, \lambda) = K(x) + \lambda K(x) \Gamma(x, \lambda). \quad (94,4)$$

ან, ცხადი სახით,

$$\langle p | \Gamma(x, \lambda) | p' \rangle = \langle p | K(x) | p' \rangle + \lambda \int \langle p | K(x) | q \rangle \langle q | \Gamma(x, \lambda) | p' \rangle dq. \quad (94,5)$$

ამ ინტეგრალურ განტოლებას ვუწოდოთ გაფანტვის სიმეტრიზებული ლიპმან-შეინგერის განტოლება.

მოექმენოთ მატრიცული ელემენტების ცხადი გამოსახულებანი. (94,3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\langle p | K(x) | p' \rangle = - \int \langle p | \frac{1}{\sqrt{\hat{H}_0 - \varepsilon}} | q \rangle \langle q | v | q' \rangle \langle q' | \frac{1}{\sqrt{\hat{H}_0 - \varepsilon}} | p' \rangle dq dq'; \quad (94,6)$$

თუ \hat{H}_0 კინეტიკური ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობას აღნიშნავთ $E(p) = p^2/2\mu$ -თი, მაშინ გვექნება

$$\langle p | K(x) | p' \rangle = - \frac{\langle p | v | p' \rangle}{\sqrt{[E(p) - \varepsilon][E(p') - \varepsilon]}}. \quad (94,7)$$

სრულად ანალოგიურად მივიღებთ გამოსახულებას

$$\langle p | \Gamma(x, \lambda) | p' \rangle = - \frac{\langle p | l(x, \lambda) | p' \rangle}{\sqrt{[E(p) - \varepsilon][E(p') - \varepsilon]}}. \quad (94,8)$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ (94,5) ინტეგრალური განტოლების გული ყოველთვის სიმეტრიულია, მაგრამ საზოგადოდ ერმიტული არ არის; იგი ერმიტულია მხოლოდ ნამდვილი და უარყოფითი ε -ებისათვის.

გადავიღეთ პარციალურ სიდიდეებზე. ამისათვის (94,5) ინტეგრალურ ვანტო-
ლებში შემავალი სიდიდეები გავშალეთ სფერულ ფუნქციებად:

$$\langle p | K(z) | p' \rangle = 4\pi \sum_{l,m} \langle p | K_l(z) | p' \rangle Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'), \quad (94,9)$$

$$\langle p | \Gamma(z, \lambda) | p' \rangle = 4\pi \sum_{l,m} \langle p | \Gamma_l(z, \lambda) | p' \rangle Y_{lm}^*(\bar{p}) Y_{lm}(\bar{p}'), \quad (94,10)$$

სადაც

$$\langle p | K_l(z) | p' \rangle = - \frac{\langle p | v_l | p' \rangle}{\sqrt{|E(p) - \varepsilon| |E(p') - \varepsilon|}}. \quad (94,11)$$

$$\langle p | \Gamma_l(z, \lambda) | p' \rangle = - \frac{\langle p | t_l(z, \lambda) | p' \rangle}{\sqrt{|E(p) - \varepsilon| |E(p') - \varepsilon|}}, \quad (94,12)$$

ხოლო $\langle p | v_l | p' \rangle$ განიპარტება ფორმულით

$$\langle p | v_l | p' \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_l(pr) v(r) j_l(p'r) r^2 dr. \quad (94,13)$$

გაფანტვის სიმეტრიზებული (94,5) ინტეგრალური განტოლება მიიღებს შემდეგ
სახეს:

$$\langle p | \Gamma_l(z, \lambda) | p' \rangle = \langle p | K_l(z) | p' \rangle + 4\pi \lambda \int \langle p | K_l(z) | q \rangle \langle q | \Gamma_l(z, \lambda) | p' \rangle q^2 dq. \quad (94,14)$$

ჩვენი მიზანია $\Gamma_l(z, \lambda)$ და $K_l(z)$ გამოსახულებების წარმოდგენა ჰილბერტ-შმიდტის
ფორმულებით. ამისათვის, როგორც ცნობილია, საჭიროა (94,14) ინტეგრალური
განტოლების გულის საკუთარი ფუნქციების ცოდნა; ეს ფუნქციები განისაზღვრება
განტოლებიდან

$$4\pi \int_0^\infty \langle p | K_l(z) | q \rangle \Omega_{nl}(q, z) q^2 dq = \eta_{nl}(z) \Omega_{nl}(p, z), \quad (94,15)$$

სადაც $\eta_{nl}(z)$ საკუთარი მნიშვნელობებია, ხოლო Ω_{nl} წარმოადგენს საკუთარი მნი-
შვნელობების დამახასიათებელი კვანტური რიცხვების ერთობლიობას. ამასთან, ვი-
გულისხმებთ, რომ საკუთარი მნიშვნელობები გადანომრლია მათი აბსოლუტური
მნიშვნელობების კლების მიხედვით. სანამ უშუალოდ გავლას მოვახდენთ, საჭიროა
დაწვრილებით შევისწავლოთ (94,15) განტოლების თვისებები. როგორც აღვნიშ-
ნეთ, $K_l(z)$ ოპერატორი საზოგადოდ ერმიტული არ არის, ამიტომ ზოგად შემთ-
ხვევაში $\eta_{nl}(z)$ რიცხვები კომპლექსურია. მხოლოდ ნამდვილი $z < 0$ შემთხვევაში
იქნება $\eta_{nl}(z)$ სიდიდეები ნამდვილი. უპირველეს ყოვლისა, აღვნიშნოთ, რომ, რო-
გორც ამას ქვემოთ დავამტკიცებთ, $\eta_{nl}(z)$ ანალიზური ფუნქციაა z -კომპლექსურ
სიბრტყეზე. რამდენადაც $z < 0$ -სათვის იგი ნამდვილია, ამიტომ შევარცის სიმეტრი-
ის პრინციპით გვეჩვენება ტოლობა

$$\eta_{nl}^*(z) = \eta_{nl}(z^*); \quad (94,16)$$

გარდა ამისა, (94,11) ფორმულის თანახმად, ნათელია, რომ ადგილი აქვს თვისებას

$$K_l^*(p, p'; z) = K_l(p, p'; z^*); \quad (94,17)$$

რაც, (94,15) და (94,16) ტოლობის მიხედვით, მოგვეცემს

$$\Omega_{nl}^*(p, z) = \Omega_{nl}(p, z^*), \quad \Omega_{nl}^*(p, z^*) = \Omega_{nl}(p, z). \quad (94,18)$$

ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციების ორთო-ნორმირების პირობა. ამისათვის ავიღოთ (94,15) განტოლება z^* -სათვის, გავამრავლოთ $\Omega_{n'l}^*(p, z)p^2 dp$ -ზე და კავა-
ინტეგრალთ

$$4\pi \int \Omega_{n'l}^*(p, z) K_l(p, q; z^*) \Omega_{n'l}(q, z^*) q^2 dq p^2 dp = \eta_{n'l}(z^*) \int \Omega_{n'l}^*(p, z) \Omega_{n'l}(p, z) p^2 dp. \quad (94,19)$$

ახლა გამოვიღეთ (94,15) განტოლების კომპლექსურად შეუღლებული განტოლები-
დან, გადავამრავლოთ იგი $\Omega_{nl}(p, z^*)p^2 dp$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი

$$4\pi \int \Omega_{nl}(p, z^*) K_l^*(p, q; z) \Omega_{n'l}^*(q, z) p^2 dp q^2 dq = \eta_{n'l}^*(z) \int \Omega_{nl}(p, z^*) \Omega_{n'l}^*(p, z) p^2 dp. \quad (94,20)$$

K_l -ოპერატორის სიმეტრიის გამო ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$[\eta_{n'l}(z^*) - \eta_{n'l}^*(z)] \int_0^\infty \Omega_{n'l}^*(p, z) \Omega_{nl}(p, z^*) p^2 dp = 0, \quad (94,20')$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\int \Omega_{n'l}(p, z) \Omega_{nl}(p, z) p^2 dp = \delta_{nn}. \quad (94,21)$$

როგორც ვხედავთ, ორთო-ნორმირების პირობაში კომპლექსურად შეუღლებული
არ მონაწილეობს.

ცხადია, Ω_{nl} წარმოადგენს რადიალურ ფუნქციას იმპულსურ წარმოდგენაში;
სრული ფუნქცია ტოლი იქნება

$$\Phi_{nlm}(p; z) = \Omega_{nl}(p, z) Y_{lm}(\bar{p}). \quad (94,22)$$

საინტერესოა გაიჩვენოს რა კავშირი არსებობს სიმეტრიზებული ლიპმან-შეინგერის
გაფანტვის ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარ ფუნქციებსა და არა-
სიმეტრიზებული განტოლების გულის საკუთარ ფუნქციებს შორის. რადგან (94,2)
და (94,3) მსგავსი გარდაქმნებით, ამიტომ ორივე გულის საკუთარი მნიშვნელობები
ერთი და იგივე იქნება, რის გამოც (94,1) განტოლების შემთხვევაში, საკუთარი
მნიშვნელობების განტოლება ასე დაიწერება:

$$4\pi v_l G_{nl}(z) |w_{nl}(z)\rangle = \eta_{nl}(z) |w_{nl}(z)\rangle \quad (94,23)$$

ან, ცხადი სახით,

$$4\pi \int_0^\infty \frac{\langle p | v_l | q \rangle w_{nl}(q, z) q^2 dq}{s - E(q)} = \eta_{nl}(z) w_{nl}(p, z). \quad (94,24)$$

თუ ამ განტოლებას გავყოფთ $\sqrt{E(p) - z}$ და გავითვალისწინებთ (94,11) აღნი-
შენას, მაშინ (94,15) განტოლებასთან შედარებით გვექნება

$$w_{nl}(p, z) = \sqrt{E_p - z} \Omega_{nl}(p, z), \quad (94,25)$$

რაც მოსალოდნელი იყო, რამდენადაც მსგავსი გარდაქმნების დროს ტალღური
ფუნქცია Ω_{nl} უნდა გამრავლდეს $(\hat{H}_0 - z)^{1/2}$ -ოპერატორზე.

იმისათვის, რომ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება დაემთხვეს შრედინგერის განტოლებას, უფრო ხელსაყრელია ახალი ფუნქციის შემოღება

$$\omega_{n_l}(\rho, z) = (z - E_p) a_{n_l}(\rho, z) \quad (94,26)$$

და, მაშასადამე,

$$\Omega_{n_l}(\rho, z) = -\sqrt{E_p - z} a_{n_l}(\rho, z). \quad (94,27)$$

მაშინ (94,24) განტოლება მიიღებს შემდეგ ფორმას:

$$\frac{4\pi}{z - E(p)} \int \langle p | v_l | q \rangle a_{n_l}(q, z) q^2 dq = \eta_{n_l}(z) a_{n_l}(\rho, z). \quad (94,28)$$

$a_{n_l}(\rho, z)$ ფუნქციებისათვის ნორმირების (94,21) პირობა ასე გადაიწერება:

$$\int_0^\infty |E(p) - z| a_{n_l}(\rho, z) a_{n_l}(\rho, z) \rho^2 d\rho = \bar{\delta}_{n_l n_l}. \quad (94,29)$$

საკუთარი მნიშვნელობების (94,28) განტოლება ჩაწეროთ შემდეგნაირად:

$$[z - E(p)] a_{n_l}(\rho, z) = \frac{4\pi}{\eta_{n_l}(z)} \int_0^\infty \langle p | v_l | q \rangle a_{n_l}(q, z) q^2 dq, \quad (94,30)$$

რონელიც წარმოადგენს შრედინგერის განტოლებას იმპულსურ წარმოდგენაში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ პოტენციალური ენერჯიის როლს ასრულებს $\frac{v(r)}{\eta_{n_l}}$ ფარობა.

გავამრავლოთ ახლა (94,28) განტოლება $(z - E_p) a_{n_l}(\rho, z) \rho^2 d\rho$ სიძლეზე, ავიღოთ ინტეგრალი და გავითვალისწინოთ (94,29) პირობა: გვექნება

$$4\pi \int a_{n_l}(\rho, z) v_l(\rho, q) a_{n_l}(q, z) \rho^2 dq = -\eta_{n_l}(z) \bar{\delta}_{n_l n_l}. \quad (94,31)$$

გაღვსენოთ (94,13) ფორმულა, მაშინ (94,31) გამოსახულება ასეც გადაიწერება:

$$\int_0^\infty R_{n_l}(\rho, z) v(\rho) R_{n_l}(\rho, z) \rho^2 d\rho = -\eta_{n_l}(z) \bar{\delta}_{n_l n_l}, \quad (94,32)$$

სადაც კოორდინატული წარმოდგენის $I_{n_l}(\rho, z)$ რადიალური ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით

$$R_{n_l}(\rho; z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty a_{n_l}(\rho, z) j_l(\rho r) \rho^2 d\rho. \quad (94,33)$$

ცხადია, თავის მხრივ, $a_{n_l}(\rho, z)$ ფუნქცია განისაზღვრება $R_{n_l}(\rho, z)$ ფუნქციით

$$a_{n_l}(\rho, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty I_{n_l}(\rho, z) j_l(\rho r) r^2 dr. \quad (94,34)$$

თუ გავიხსენებთ $\omega_{n_l}(\rho, z)$ ფუნქციის (94,18) თვისებას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$R_{n_l}^*(\rho, z) = I_{n_l}(\rho, z^*). \quad (94,35)$$

გასაგეცია, რომ $\chi_{n1}(r, z)$ ფუნქცია, რომელიც $R_{n1}(r, z)$ ფუნქციასთან დაკავშირებულია სტანდარტული აღნიშვნით $\chi_{n1} = r R_{n1}$, დაკმაყოფილებს შრედინგერის შემდეგ განტოლებას:

$$\chi_{n1}'(r, z) + \left[\frac{2\mu z}{h^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{v(r)}{\eta_{n1}(z)} \right] \chi_{n1}(r, z) = 0. \quad (94,36)$$

საკუთარი $\eta_{n1}(z)$ მნიშვნელობების თვისებები. შრედინგერის (94,36) განტოლების ამონახსნი, თუ გამოვალით იქიდან, რომ ნამდვილი z -ისათვის იგი შემოსაზღვრული იყოს, უნდა აკმაყოფილებდეს სასაზღვრო პირობებს:

$$\chi_{n1}(r) = \text{const } r^{l+1}, \quad r \rightarrow 0 \quad (94,37)$$

$$\chi_{n1}(r) = \text{const } e^{ikr}, \quad r \rightarrow \infty \quad (94,38)$$

ორივე ამ პირობის დაკმაყოფილება დადებითი ენერგიებისა და ნამდვილი $\eta_{n1}(z)$ რიცხვებისათვის შეუძლებელია, მაგრამ ეს შესაძლებელია კომპლექსური პოტენციალებისათვის. დავაკვირდეთ (94,30) ან (94,36) განტოლებას. ცხადია, ნამდვილი $z < 0$ -ისათვის პოტენციალური ენერგია ერმიტულია, ამიტომ განტოლების ამონახსნი მოგვეცემს ბმული მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას $\xi_{n1} = -z$ ბმის ენერგიით. ამგვარად, ნამდვილი $z < 0$ შემთხვევაში $\eta_{n1}(z)$ საკუთარი მნიშვნელობები განსაზღვრავენ იმ სიღიღებს, რომელზეც უნდა გაიყოს პოტენციალური ენერგია, რომ მივიღოთ წინასწარ მოცემული $z = -\xi_{n1}$ ბმის ენერგია. როგორც ვხედავთ, (94,36) განტოლება, მართალია, გარეგნულად შრედინგერის განტოლებას ემთხვევა, მაგრამ მას სრულიად განსხვავებული შინაარსი აქვს. როცა $\eta_{n1}(z) = 1$, მაშინ მივიღებთ შრედინგერის ჩვეულებრივ განტოლებას, რომელსაც ბმული მდგომარეობა აქვს მხოლოდ $z = -\xi_{n1}$ ენერგიისათვის, ამიტომ

$$\eta_{n1}(-\xi_{n1}) = 1 \quad (94,39)$$

წარმოადგენს ბმული მდგომარეობის არსებობის პირობას.

თანახმად (94,32) ფორმულისა, როცა $n = n'$, გვექნება

$$\eta_{n1}(z) = - \int_0^{\infty} v(r) R_{n1}^2(r, z) r^2 dr. \quad (94,40)$$

ხელსაყრელია $R_{n1}(r, z)$ ფუნქციიდან გამოვყოთ ნორმირების მულტიპლი $A_{n1}(z)$

$$R_{n1}(r, z) = A_{n1}(z) \tilde{R}_{n1}(r, z), \quad (94,41)$$

საიდანაც, ცხადია, ნორმირების კოეფიციენტი განისაზღვრება ფორმულით

$$A_{n1}^2(z) = -\eta_{n1}(z) \left\{ \int_0^{\infty} v(r) \tilde{R}_{n1}^2(r, z) r^2 dr \right\}^{-1} \equiv - \frac{\eta_{n1}(z)}{B_{n1}(z)}. \quad (94,42)$$

(94,40) ფორმულიდან ნათელია, რომ ნამდვილი უარყოფითი z -ებისათვის, როცა პოტენციალს განსაზღვრული ნიშანი აქვს, $\eta_{n1}(z)$ -ის ნიშანიც განსაზღვრულია. სახელობრ, როცა მიზიდვის პოტენციალი გვაქვს, $\eta_{n1}(z) > 0$, ხოლო განზიდვის შემ-

თხვევაში $\eta_{n_l}(z) < 0$. გამოვარკვეოთ ახლა $\frac{d\eta_{n_l}}{dz}$ წარმოებულის ნიშანი. ამსათვის გამოვიღეთ იგივეობიდან

$$\langle R_{n_l}(z) | \hat{H}_0 - z + \frac{\psi}{\eta_{n_l}(z)} | R_{n_l}(z) \rangle = 0, \quad (94,43)$$

სადაც \hat{H}_0 კინეტიკური ენერჯიის ოპერატორია რადიალურ კოორდინატებში. ეს გამოსახლება გადავამრავლოთ $\eta_{n_l}(z)$ -ზე და გავაწარმოოთ z -ით. შემდგომ კვლავ გაითვალისწინოთ (94,37) იგივეობა და გავიხსენოთ, რომ სკალარულ ნამრავლში მოთავსებული ოპერატორი ნამდვილი $z < 0$ -სათვის ერმიტულია. მაშინ გვექნება

$$\frac{d\eta_{n_l}(z)}{dz} \langle R_{n_l}(z) | \hat{H}_0 - z | R_{n_l}(z) \rangle - \eta_{n_l}(z) \langle R_{n_l} | R_{n_l} \rangle = 0, \quad (94,44)$$

საიდანაც, იმის გამო, რომ ნამდვილი $z < 0$ -სათვის $\hat{H}_0 - z$ დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია, მივიღებთ

$$\frac{1}{\eta_{n_l}(z)} \frac{d\eta_{n_l}(z)}{dz} > 0. \quad (94,45)$$

მაშასადამე, $z < 0$ -სათვის η_{n_l} -ის წარმოებულის ნიშანი ემთხვევა $\eta_{n_l}(z)$ -ის ნიშანს. ამასთანავე, ზემოთქმულის ძალით ნამდვილი უარყოფითი z -სათვის $\eta_{n_l}(z)$ -ის ნიშანი განისაზღვრება პოტენციალის ნიშნით. ამიტომაც $\eta_{n_l}(z)$ იქნება z -ის ზრდადი ფუნქცია მიზიდვის პოტენციალებისათვის, ხოლო კლებადი-განზიდვის პოტენციალების შემთხვევაში. რადგან ბმული მდგომარეობა განისაზღვრება $\eta_{n_l}(-\infty) = 1$ პირობით, ამიტომ იგი დასაშვებია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა შესრულებულია შემდეგი უტოლობა:

$$\eta_{n_l}(0) \geq 1. \quad (94,46)$$

შევისწავლოთ $\eta_{n_l}(z)$ საკუთარი მნიშვნელობების ანალიზური თვისებები. ამ მიზნით, დაეკავშიროთ ისინი იოსტის ფუნქციებთან. პოტენციალური ენერჯიის ნაცვლად განვიხილოთ $g\psi(r)$, სადაც აშკარად გამოყოფილია პოტენციალური ენერჯიის „ძალა“. ცხადაა, შრედინგერის განტოლების ამონახსნი $f_l(k, r; g)$, რომელიც აკმაყოფილებს (94.37) სასაზღვრო პირობას, მოიცემა ფორმულით

$$f_l \sim f_l(-k, g) f_l(k, r; g) - f_l(k, g) f_l(-k, r; g), \quad (94,47)$$

სადაც $f_l(k, g)$ იოსტის ფუნქციაა, ხოლო $f_l(k, r; g)$ — შრედინგერის განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\pm ikr} f_l(\pm k, r; g) = 1. \quad (94,48)$$

იოსტის ფუნქციები კი, როგორც ვიცით, განისაზღვრება (46,64) პირობით

$$f_l(\pm k, g) = \lim_{r \rightarrow 0} (\pm ikr)^l \frac{f_l(\pm k, r; g)}{(2l-1)!!}. \quad (94,49)$$

ახლა, თუ g -ს შევცვლით $g/\eta_{n_l}(z)$ -ით, მაშინ მივიღებთ შრედინგერის (94,36) განტოლებას, რომლის საკუთარი მნიშვნელობების მოძებნის ამოცანა ეკვივალენტურია პირობისა

$$f_l\left(-k, \frac{g}{\eta_{n_l}}\right) = 0. \quad (94,50)$$

ამ განტოლების ფესვები განსაზღვრავენ $\eta_{n_l}(z)$ საკუთარ მნიშვნელობებს. როგორც ვიცით, იოსტის ფუნქცია დაკავშირებულია განტოლების ფრედჰოლმის დეტერმინანტთან. კერძოდ, (47,32) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$f_l(-k, y) = \prod_{n=1}^{\infty} |1 - \eta_{n_l}(z)|. \quad (94,51)$$

ამასთან, ცხადია, თუ ρ რაიმე პარამეტრია, გვექნება

$$f_l\left(-k, \frac{y}{\rho}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\eta_{n_l}(z)}{\rho}\right]. \quad (94,52)$$

როცა $\rho = \eta_{n_l}(z)$. მაშინ (94,50) პირობის ძალით მართლაც მივიღებთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას. როგორც ვხედავთ, $\eta_{n_l}(z)$ საკუთარი მნიშვნელობების ანალიზურობის საკითხი დაკავშირებულია იოსტის ფუნქციის ანალიზურობის თვისებებთან. თავის მხრივ კი იოსტის ფუნქციის ანალიზურობა უკავშირდება პოტენციალური ენერჯიის ყოფაქცევას. როცა პოტენციალური ენერჯია აკმაყოფილებს (46,4) და (46.5) პირობებს, მაშინ, როგორც ვიცით, იოსტის ფუნქცია ანალიზურია რიმანის ფიზიკურ ფურცელზე, ე. ი. მთელ z კომპლექსურ სიბრტყეზე, გარდა ჰრილისა, არსი ლერძის დადებითი მიმართულების ნასწვრივ. იგივე ანალიზურობის თვისება ახასიათებს $\eta_{n_l}(z)$ სიდიდეს. მას განსაკუთრებულობა შეიძლება კქონდეს მხოლოდ ჰრილის ნასწვრივ. ხოლო რადგან $\eta_{n_l}(z)$ ანალიზურია და ნამდვილია $z < 0$ ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ შვარცის სიმეტრიის პრინციპის ძალით $\eta_{n_l}^*(z) = \eta_{n_l}(z^*)$.

ახლა გამოვიყენოთ (H,48) ფორმულა, რომელიც ჩვენი შემთხვევისათვის მოგვცემს

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_{n_l}(z)|^m = S_{y_l}(G_{0l}(z) v)^m. \quad (m=1, 2, \dots) \quad (94,53)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $m=1$, გვექნება

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_{n_l}(z) = \int_0^{\infty} \langle r | G_{0l}(z) | r' \rangle \langle r' | v | r \rangle dr dr'. \quad (94,54)$$

ვაიხსენოთ, გრინის ფუნქციის შემდეგი გამოხატულება:

$$\langle r | G_{0l}(z) | r' \rangle = -\frac{2\mu}{h^2} r r' i k j_l(kr) h_l^{(1)}(kr) \quad (94,55)$$

და, რომ ლოკალური პოტენციალისათვის

$$\langle r | v | r' \rangle = v(r) \delta(r-r'), \quad (94,56)$$

მაშინ საბოლოოდ გვექნება

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_{n_l}(z) = -\frac{2\mu}{h^2} i k \int_0^{\infty} r^2 dr j_l(kr) v(r) h_l^{(1)}(kr). \quad (94,57)$$

რადგან სათავეში $j_l(kr)h_l^{(1)}(kr) \sim \frac{1}{r}$, ამიტომ ინტეგრალი კრებადი იქნება, ოცა პოტენციალური ენერგია სათავეში უფრო ნელა ხდება უსასრულობა, ვიდრე r^{-2} , ხოლო უსასრულობაში სწრაფად მიისწრაფის ნულისაკენ. ამ შემთხვევაში მარცხენა მხარის კრებადობისათვის, როცა $n \rightarrow \infty$, საჭიროა საკუთარი მნიშვნელობები ნულისაკენ მიისწრაფოდნენ როგორც n^{-2} , სადაც $\beta > 1$, ე. ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \eta_{n_l}(z) = 0. \quad (94,58)$$

ჰილბერტ-შმიდტის ფორმულები. ახლა გამოვიყენოთ ($H, 41$) და ($H, 44$) ფორმულები და K_l და Γ_l სიდიდეები გავშალოთ (94,14) ინტეგრალური განტოლების გულის $\Omega_{n_l}(z)$ საკუთარ ფუნქციებად. რადგან ჩვენს შემთხვევაში $\lambda_{n_l}^{-1} = \eta_{n_l}(z)$, ამიტომ ამ გაშლას ექნება ასეთი სახე:

$$\langle \rho | K_l(z) | \rho' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{n_l}(z) \Omega_{n_l}(\rho, z) \Omega_{n_l}(\rho'; z), \quad (94,59)$$

$$\langle \rho | \Gamma_l(z, \lambda) | \rho' \rangle = \langle \rho | K_l(z) | \rho' \rangle + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \eta_{n_l}^2(z)}{1 - \lambda \eta_{n_l}(z)} \Omega_{n_l}(\rho, z) \Omega_{n_l}(\rho', z) \quad (94,60)$$

ცხადია, (94,59) გამოსახულების გათვალისწინებით (94,60) ფორმულა ასეც გადაიწერება:

$$\langle \rho | \Gamma_l(z, \lambda) | \rho' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{n_l}(z)}{1 - \lambda \eta_{n_l}(z)} \Omega_{n_l}(\rho, z) \Omega_{n_l}(\rho', z). \quad (94,61)$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (94,11) და (94,12) ფორმულებს. მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\langle \rho | v_l | \rho' \rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{n_l}(z) \omega_{n_l}(\rho, z) \omega_{n_l}(\rho', z), \quad (94,62)$$

$$\langle \rho | t_l(z) | \rho' \rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{n_l}(z)}{1 - \eta_{n_l}(z)} \omega_{n_l}(\rho, z) \omega_{n_l}(\rho'; z). \quad (94,63)$$

სადაც $\omega_{n_l}(\rho, z)$ წარმოადგენს $t_l(z)$ -მატრიცის ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარ ფუნქციებს. ამ მწკრივების კრებადობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ n -ის ზრდისას რამდენად სწრაფად მცირდება საკუთარი $\eta_{n_l}(z)$ მნიშვნელობები.

როგორც წინა პარაგრაფებში ვაჩვენებთ, ფადეევის განტოლებები (94,63) მატრიცისათვის დაიყვანება უსასრულო ერთ ცვლადზე დამოკიდებულ სისტემაზე. გარკვეულ შემთხვევებში პრაქტიკულად (94,63) ჯამში შეიძლება არსებითი აღმოჩნდეს n -ის მხოლოდ რამდენიმე მნიშვნელობა. შედეგად განტოლებათა სისტემა ჩამოიჭრება და სასრული რაოდენობის განტოლებათა დაიყვანება. ასეთი სისტემის ამოხსნა კი მიახლოებითი მეთოდებით შესაძლებელია.

§ 95. ლიპმან-შვინგერის ინტეგრალური განტოლების გულის
საკუთარი მნიშვნელობები და საკუთარი ფუნქციები
ჰულტენის პოტენციალისა და პოტენციალური ორგოსათვის

ახლა ვიპოვოთ ლიპმან-შვინგერის გაფანტვის ამოცანის ინტეგრალური გან-
ტოლების გულის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები კონკრე-
ტულ შემთხვევებში. კერძოდ, განვიხილოთ ორი პოტენციალის შემთხვევა: ჰულ-
ტენის პოტენციალისა და პოტენციალური ორგოსი.

ჰულტენის პოტენციალი. ჭერ განვიხილოთ პულტენის პოტენციალი

$$v(r) = -V_0 \frac{e^{-r/r_0}}{1 - e^{-r/r_0}}, \quad b^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \quad (95,1)$$

შევისწავლოთ $l=0$ შემთხვევა.

როგორც ვიცი, (51,23) ფორმულის თანახმად, იოსტის ფუნქციას $l=0$
მდგომარეობაში აქვს სახე

$$f(-k, b^2) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{b^2 r_0^2}{n(n-2ikr_0)} \right], \quad (95,2)$$

ხოლო შრედინგერის რადიალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც უსასრულო-
ბაში შეესაბამება $e^{\pm ikr}$ ასიმპტოტურ გამოსახულებას, (16,29) ფორმულის გათ-
ვალისწინებით, ტოლია

$$f(k, r; b^2) = e^{\mp ikr} F(ir_0[\pm k + \alpha], -ir_0[\mp k + \alpha], 1 \pm 2ikr_0, e^{-r/r_0}), \quad (95,3)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad k^2 = \alpha^2 + b^2. \quad (95,4)$$

ლიპმან-შვინგერის ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარი მნიშვნელობე-
ბის მოსაძებნად უნდა გამოვიღოთ განტოლებიდან

$$f\left(-k, \frac{b^2}{\eta_n}\right) = 0, \quad (95,5)$$

რაც, (95,2) ფორმულის თანახმად, მოგვცემს

$$\eta_n(x) = \frac{b^2 r_0^2}{n(n-2ikr_0)}. \quad (95,6)$$

ცხადია, (94,39) ფორმულის მიხედვით, ზმის ენერჯისათვის მივიღებთ ცნობილ
დამოკიდებულებას

$$\mathfrak{E}_n = \frac{\hbar^2(b^2 r_0^2 - n^2)}{8\mu n^2 r_0^2}. \quad (95,7)$$

ხოლო (94,46) პირობის თანახმად, ზმას ადგილი ექნება მაშინ, როცა

$\eta(0) = \left(\frac{br_0}{n}\right)^2 \geq 1$, რაც ჩვენ მიერ აღრე მიღებულ პირობას ემთხვევა.

არანორმირებული $\tilde{R}_n(r, z)$ ფუნქციის მისაღებად, რომელიც აკმაყოფილებს
სასაზღვრო პირობას $r=0$ და $r=\infty$ -ში, საჭიროა ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის
ჩამოჭრა. ავიღოთ $-ir_0(k+\alpha) = -n$, მაშინ $ir_0(-k+\alpha) = n - 2ir_0k$ და გვექნება

$$n\tilde{R}_n(r, z) = e^{ikr} F(n - 2ir_0k, -n, 1 - 2ikr_0, e^{-r/r_0}). \quad (95,8)$$

ვიპოვოთ ნორმირების მუდმივი

$$A_n^z(z) = -\eta_n(z) \left[\int v(r) \tilde{R}_n^z(r, z) r^2 dr \right]^{-1} = \frac{\eta_n(z)}{B_n(z)}. \quad (95,9)$$

ნორმირების ინტეგრალის ამოსახსნელად ხელსაყრელია ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია დაეკავშიროთ იაკობის $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ პოლინომთან. (D, 20). ფორმულის თანახმად,

$$r \tilde{R}_n(r, z) = e^{ikr} P_n^{(-2ikr_0, 1-2ikr_0)}(e^{-r/r_0}) \quad (95,10)$$

(ე. ი. $\alpha = -2ikr_0$, $\beta = 1 - 2ikr_0$). ახლა ვიპოვოთ $B_n(z)$ ინტეგრალი. გვექნება

$$B_n(z) = -V_0 \int_0^\infty \frac{e^{-r/r_0}}{1 - e^{-r/r_0}} e^{2ikr} [P_n^{(-2ikr_0, 1-2ikr_0)}(e^{-r/r_0})]^2 dr. \quad (95,11)$$

შენვიღოთ ახალი ცვლადი $x = \exp(-r/r_0)$, მაშინ მივიღებთ

$$B_n(z) = -V_0 r_0 \int_0^1 \frac{x^{-2ikr_0}}{1-x} [P_n^{(-2ikr_0, 1-2ikr_0)}(x)]^2 dx. \quad (95,12)$$

ეს ინტეგრალი კი იაკობის პოლინომების ნორმირების ინტეგრალია [146]. (D, 20') ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$B_n(z) = -V_0 r_0 \frac{n!}{2n-2ikr_0} \frac{\Gamma(1-2ikr_0) \Gamma(n)}{(1-2ikr_0)(2-2ikr_0)\dots(n-2ikr_0) \Gamma(n-2ikr_0)}. \quad (95,13)$$

ეს გამოსახულება შევითანოთ (95,9) ფორმულაში და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Gamma(n-2ikr_0) = (n-1-2ikr_0)(n-2-2ikr_0)\dots(1-2ikr_0) \Gamma(1-2ikr_0). \quad (95,14)$$

შედეგად მივიღებთ

$$A_n^z(z) = \frac{4\mu r_0}{h^2} \frac{1^2(n-2ikr_0)(n-ikr_0)}{[n!]^2 \Gamma^2(1-2ikr_0)}. \quad (95,15)$$

შეგვიშნოთ, რომ $A_n^z(0) = \frac{4\mu r_0}{h^2} \frac{1}{n}$.

ახლა, თუ ვიპოვით $\tilde{R}_n(r, z)$ ფუნქციის ფურიე-კოეფიციენტს, მივიღებთ $a_n(p, z)$ ფუნქციას, რომელიც დაკავშირებულია ლიპმან-შეინგერის განტოლების გულის საკუთარ ფუნქციასთან იმპულსურ წარმოდგენაში. სახელდობრ, რადგან $l=0$, ამიტომ, (94,34) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$a_n(p, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{A_n(z)}{p} \int_0^\infty \sin pr e^{ikr} P_n^{(-2ikr_0, 1-2ikr_0)}(e^{-r/r_0}) dr. \quad (95,16)$$

იაკობის პოლინომისათვის გამოვიყენოთ (D, 20) ფორმულა. ამ ფორმულის (95,16) ინტეგრალში შეტანით და მარტივი ინტეგრალების აღებით გვექნება

$$a_n(p, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_n(z) \left\{ \frac{1}{p^2 - k^2 - iz} + \sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(n-2ikr_0)(n+1-2ikr_0) \dots (n+\nu-1-2ikr_0) \left(p^2 - k^2 + \frac{\nu^2}{k^2} \right) + 2ik \frac{\nu}{r_0}}{(1-2ikr_0)(2-2ikr_0) \dots (\nu-2ikr_0) \left(p^2 - k^2 + \frac{\nu^2}{r_0^2} \right) + 4k^2 \frac{\nu^2}{r_0^3}} \right\}. \quad (95,17)$$

ამასთან, პირველ ინტეგრალში განშლადობის თავიდან ასაცილებლად მოვახდინეთ შეცვლა $k \rightarrow k + iz$, სადაც იგულისხმება, რომ საჭიროა $z \rightarrow 0$ ზღვარის აღება. თუ (95,17) ფუნქციას გადავამრავლებთ $[z - E(p)]^{-\frac{1}{2}}$ -ზე, მივიღებთ $a_n(p, z)$ ფუნქციას.

პოტენციალური ორმო. განვიხილოთ სფერული სიმეტრიის პოტენციალური ორმო V_0 სიღრმითა და r_0 -სივანით. როგორც ცნობილია, (51,13) ფორმულის თანახმად, ასეთი ორმოსათვის იოსტის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$f_l(-k, b^2) = ikr_0^2 \left(\frac{k}{\beta} \right)^l \left\{ \beta j_{l-1}(\beta r_0) h_l^{(1)}(-kr_0) + k j_l(\beta r_0) h_l^{(2)}(-kr_0) \right\}, \quad (95,18)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2\mu z}{h^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\mu(V_0 + z)}{h^2} = b^2 + k^2. \quad (95,19)$$

ლიპმან-შვინგერის განტოლების გულის საკუთარი მნიშვნელობების მისაღებად საჭიროა გამოვიყენოთ (94,50) პირობა. შედეგად მივიღებთ $\eta_{nl}(z)$ საკუთარი მნიშვნელობების შემდეგ ტრანსცენდენტულ განტოლებას:

$$\frac{\left(\frac{b^2}{\eta_{nl}(z)} + \frac{2\mu z}{h^2} \right)^{1/2} j_{l-1} \left(\sqrt{\frac{b^2}{\eta_{nl}(z)} + \frac{2\mu z}{h^2}} r_0 \right)}{j_l \left(\sqrt{\frac{b^2}{\eta_{nl}(z)} + \frac{2\mu z}{h^2}} r_0 \right)} = \frac{k h_l^{(1)}(kr_0)}{h_l^{(1)}(kr_0)}. \quad (95,20)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $l=0$, გვექნება

$$\left(\frac{b^2}{\eta_n(z)} + \frac{2\mu z}{h^2} \right)^{1/2} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{b^2}{\eta_n(z)} + \frac{2\mu z}{h^2}} r_0 \right) = ik. \quad (95,21)$$

იმისათვის, რომ ორმოში $l=0$ მდგომარეობაში გვექნოდეს ბმული მდგომარეობა, საჭიროა $\eta_n(0) \geq 1$, როცა $z=0$, (95,21) განტოლებიდან გვექნება $b^2/\eta_n^{1/2}(0) = \frac{\pi}{2}$, საიდანაც მივიღებთ ორმოში ღონის არსებობის ჩვენთვის კარგად ცნობილ ფორმულას

$$V_0 r_0^2 \geq \frac{\pi^2 h^2}{8\mu}. \quad (95,22)$$

როცა $l \neq 0$, მაშინ, (95,20) განტოლებიდან $z=0$ შემთხვევაში მივიღებთ

$$j_{l-1} \left(\sqrt{\frac{b^2}{\eta_{nl}(0)}} r_0 \right) = 0, \quad (95,23)$$

მოცემული l -ისათვის ბესელის სფერული ფუნქციის ფესვი განსაზღვრავს ორმოში დონის არსებობის პირობას. ასე მაგალითად, როცა $l=1$, გვექნება $\frac{br_0}{\sqrt{\eta_{n1}(0)}} = \pi$. საიდანაც, რადგან $\eta_{n1}(0) \geq 1$, მივიღებთ $br_0 \geq \pi$ პირობას და ა. შ.

ახლა ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები. არანორმირებული ტალღური ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (94,37) და (94,38) სასაზღვრო პირობებს, გვექნება

$$\tilde{R}_{nl}(r, k) = C_{nl}(k) j_l(\tilde{\beta}r), \quad r < r_0 \quad (95,24)$$

$$\tilde{R}_{nl}(r, k) = (-i)^{l+1} h_l^{(1)}(kr), \quad r > r_0 \quad (95,25)$$

სადაც

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{b^2}{\eta_{nl}(z)} + k^2. \quad (95,26)$$

$C_{nl}(k)$ მუდმივი სიდიდეები განისაზღვრება ფუნქციათა ტოლობით წყვეტის $r=r_0$ წერტილზე. გვექნება

$$C_{nl}(k) = (-i)^{l+1} \frac{h_l^{(1)}(kr_0)}{j_l(\tilde{\beta}r_0)}. \quad (95,27)$$

ფუნქციების წარმოებულების ტოლობა $r=r_0$ წერტილზე, თუ გავიხსენებთ (E, 33) ფორმულას, მოგვცემს საკუთარი მნიშვნელობების (95,20) განტოლებას.

განესაზღვროთ ნორმირების (94,42) ინტეგრალი

$$B_{nl}(z) = \int_0^{\infty} v(r) \tilde{R}_{nl}^2(r, z) r^2 dr = -C_{nl}^2(z) V_0 \int_0^{r_0} j_l^2(\tilde{\beta}r) r^2 dr. \quad (95,28)$$

ინტეგრალის ასაღებად გამოვიყენოთ (E,97) ფორმულა. შედეგად მივიღებთ

$$A_{nl}^2(z) = \frac{2\eta_{nl}(z)}{(V_0 r_0^2) C_{nl}^2(z) \{ j_l^2(\tilde{\beta}r_0) - j_{l-1}(\tilde{\beta}r_0) j_{l+1}(\tilde{\beta}r_0) \}}. \quad (95,29)$$

ახლა ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში. კოორდინატული ფუნქცია შევიტანოთ გამოსახულებაში

$$a_{nl}(p, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} A_{nl}(z) \int_0^{\infty} \tilde{R}_{nl}(r, z) j_l(pr) r^2 dr, \quad (95,30)$$

გვექნება

$$a_{nl}(p, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} A_{nl}(z) \left\{ C_{nl}(z) \int_0^{r_0} j_l(\tilde{\beta}r) j_l(pr) r^2 dr + (-i)^{l+1} \int_{r_0}^{\infty} h_l^{(1)}(kr) j_l(pr) r^2 dr \right\}. \quad (95,31)$$

პირველი ინტეგრალისათვის გამოვიყენოთ (E, 99) ფორმულა, რომელშიც გავითვალისწინოთ (95,20) საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება; მეორე ინტეგრალის ამოხსნა კი შესაძლებელია (E, 140) ფორმულით. ამგვარად, გვექნება

$$a_{nl}(p, k) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (-i)^{l+1} r_0^2 A_{nl}(k) \Gamma_l(p, k^+ | r_0) \cdot \left[\frac{1}{p^2 - \tilde{\beta}^2} + \frac{1}{k^2 - p^2 + i\varepsilon} \right], \quad (95,32)$$

სადაც

$$\Gamma_l(p, k^+ | r_0) = p j_{l-1}(pr_0) h_l^{(1)}(kr_0) - k j_l(pr_0) h_{l-1}^{(1)}(kr_0). \quad (95,33)$$

ამასთან ერონსკიანის განმარტებით $\Gamma_l(k, k^+ | r_0) = \frac{-i}{kr_0^2}$ სასრული სიდიდეა.

ჰილბერტ-შმიდტის ფორმულეებში შედის არა $a_{nl}(p, z)$, არამედ $\omega_{nl}(p, z) = (z - E_p) a_{nl}(p, z)$ ფუნქცია, ამიტომ (95,26) აღნიშვნის გათვალისწინებით (95,32) გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$\omega_{nl}(p, z) = D_{nl}(z) \frac{\Gamma_l(p, k^+ | r_0)}{p^2 - k^2 - b^2/\eta_{nl}(z)}, \quad (95,34)$$

სადაც $D_{nl}(z)$ იქნება შემდეგი მუდმივი:

$$D_{nl}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} r_0^2 (-i)^{l+1} \frac{b^2 A_{nl}(z)}{2\mu \eta_{nl}(z)}, \quad (95,35)$$

ან თუ გათვალისწინებთ $A_{nl}(z)$ მუდმივის (95,29) ფორმულას, საბოლოოდ გვექნება

$$D_{nl}(z) = \frac{b^2 r_0}{(\pi V_0 r_0)^{1/2}} \frac{\left[b^2 + \frac{2\mu z}{\hbar^2} \eta_{nl}(z) \right]^{1/2}}{\mu k \eta_{nl}(z)} \cdot \frac{j_{l-1}(\tilde{\beta} r_0)}{h_l^{(1)}(kr_0) [j_l^2(\tilde{\beta} r_0) - j_{l-1}(\tilde{\beta} r_0) j_{l+1}(\tilde{\beta} r_0)]^{1/2}}. \quad (95,36)$$

ამ ფორმულის გამოყენების დროს მხედველობაში მივიღეთ საკუთარი მნიშვნელობების (95,20) განტოლება

§ 96. ფადეევის განტოლებები ჰილბერტ-შმიდტის მიახლოებაში

ახლა განვიხილოთ ფადეევის განტოლებები იმ შემთხვევაში, როცა ორნაწილაკობრივი გაფანტვის მატრიცები წარმოდგენილია ჰილბერტ-შმიდტის ფორმულებით, ე. ი. როცა მატრიცა გაშლილია ინტეგრალური განტოლების საკუთარი ფუნქციების მშკრივად [121].

განვიხილოთ იგივე რ ნაწილაკთა სისტემა, ამასთან არაიგივე რ ნაწილაკთა სისტემის განხილვა დამატებით სიძნელეებს არ ქმნის. სიმარტივისათვის შემოვი-საზღვროთ შემთხვევით, როცა სისტემის სრული მომენტი $J=0$. ამ შემთხვევაში ჩვენ უნდა გამოვიღეთ ფადეევის (90,36) განტოლებიდან

$$\varphi_l(p, q; z) = \Phi_l(p, q; z) + \frac{4\pi}{\sqrt{3} q} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \cdot \int_0^\infty dq'^2 \int_{A(-q', q)}^{A(q', q)} dp'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x') \langle p | t_l^{(1)}(z - q^2) | \bar{p} \rangle \varphi_{l'}(p', q'; z)}{z - (p'^2 + q'^2)}, \quad (96,1)$$

რომელიც შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნაწილაკის გაფანტვისათვის ორის ბმული მდგომარეობაზე; ასეთი ამოცანისათვის $\Phi_l(p, q; z)$ ფუნქცია ტოლი იქნება

$$\Phi_l(p, q; z) = \frac{\bar{\sigma}(q - q_0)}{q_0^2} \varphi_n(p), \quad (96,2)$$

სადაც $\varphi_n(p)$ ორი ნაწილაკის ბმული მდგომარეობის ფუნქციაა; ღირაკის დელტა ფუნქცია კი შეესაბამება დაცემული ნაწილაკის თავისუფალ მოძრაობას q_0 იმპულსის საწყისი მნიშვნელობით.

$t_l^{(1)}(z - q^2)$ მატრიცისათვის გამოვიყენოთ ჰილბერტ-შმიდტის (94,63) ფორმულა

$$\langle p | t_l^{(1)}(z - q^2) | \bar{p} \rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{nl}(z - q^2) \omega_{nl}(p, z - q^2) \omega_{nl}(\bar{p}, z - q^2). \quad (96,3)$$

სადაც ღრობით შემოვიღეთ აღნიშვნა

$$\rho_{nl}(z) = \frac{\eta_{nl}(z)}{1 - \eta_{nl}(z)}. \quad (96,4)$$

გაფანტვის მატრიცის (96,3) გამოსახულება შევიტანოთ (96,1) განტოლებაში და, ამავე დროს, ხელსაყრელობის მიზნით $\psi_l(p, q; z)$ ფუნქცია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\psi_l(p, q; z) = \Phi_l(p, q; z) + \sum_n \rho_{nl}(z - q^2) \omega_{nl}(z - q^2) f_{nl}(q, z); \quad (96,5)$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sum_n \rho_{nl}(z - q^2) \omega_{nl}(p, z - q^2) f_{nl}(q, z) &= - \frac{4\pi}{\sqrt{3} q} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}. \\ \int_0^{\infty} dq'^2 \int_{A_q(-q')}^{A_q(q')} dp'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x') \Phi_{l'}(p', q'; z)}{z - (p'^2 + q'^2)} \sum_n \rho_{nl}(z - q^2) \omega_{nl}(p, z - q^2) \omega_{nl}(\bar{p}, z - q^2) - \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3} q} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \int_0^{\infty} dq'^2 \int dp'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x')}{z - (p'^2 + q'^2)} \cdot \\ &\quad \sum_{n'} \rho_{n'l'}(z - q^2) \omega_{n'l'}(p', z - q'^2) f_{n'l'}(q', z) \sum_n \rho_{nl}(z - q^2) \\ &\quad \omega_{nl}(p, z - q^2) \omega_{nl}(\bar{p}, z - q^2). \end{aligned} \quad (96,6)$$

გამოვიყენოთ $\omega_{nl}(p, z)$ ფუნქციების ორთო-ნორმირების პირობა; ამისათვის ეს განტოლება გადავმრავლოთ $(E_p - z)^{-1} \omega_{nl}(p, z - q^2) p^2 dp$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი. შედეგად მივიღებთ განტოლებას დამხმარე $f_{nl}(q, z)$ ფუნქციისათვის

$$f_{nl}(q, z) = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}q} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \int_0^\infty dq'^2 \int d\rho'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x')}{z - (\rho'^2 + q'^2)}$$

$$\omega_{nl}(\bar{\rho}, z - q^2) \Phi_{l'}(\rho', q'; z) - \frac{4\pi}{\sqrt{3}q} \sum_{l'} \sum_{n'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}.$$

$$\int_0^\infty dq'^2 \int d\rho'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x') \eta_{n'l'}(z - q'^2) \omega_{n'l'}(\rho', z - q'^2) \omega_{nl}(\bar{\rho}, z - q^2)}{[z - (\rho'^2 + q'^2)][1 - \eta_{n'l'}(z - q'^2)]} f_{n'l'}(q', z) \quad (96,7)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$g_{nl}(q, z) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}q} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \int_0^\infty dq'^2 \int_{A_q(-q')}^{A_q(q')} d\rho'^2 \frac{P_l(x) P_{l'}(x')}{\rho'^2 + q'^2 - z} \quad (96,8)$$

$$\omega_{nl}(\bar{\rho}, z - q^2) \Phi_{l'}(\rho', q'; z),$$

$$K_{nl, n'l'}(q, q'; z) =$$

$$\frac{4\pi}{\sqrt{3}q} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \int_{A_q(-q')}^{A_q(q')} d\rho'^2 \frac{1}{(\rho'^2 + q'^2 - z)[1 - \eta_{n'l'}(z - q'^2)]}$$

$$P_l(x) P_{l'}(x') \eta_{n'l'}(z - q'^2) \omega_{n'l'}(\rho', z - q'^2) \omega_{nl}(\bar{\rho}, z - q^2), \quad (96,9)$$

მაშინ ინტეგრალური განტოლება $f_{nl}(q, z)$ ფუნქციისათვის იქნება

$$f_{nl}(q, z) = g_{nl}(q, z) + \sum_{n'l'} \int_0^\infty dq'^2 K_{nl, n'l'}(q, q'; z) f_{n'l'}(q', z). \quad (96,10)$$

ეს ინტეგრალური განტოლებაც ჭერჭერობით ზუსტია. მიახლოებაზე გადასვლა ჯამში სასრული რაოდენობის წევრების შენარჩუნებაში მდგომარეობს. ამასთან, როგორც ადრე ვაჩვენეთ, ამ შემთხვევაში მივიღებთ ერთ ცვლადზე დამოკიდებულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სწრაფადმოთვლელი ელექტრონული მანქანები [64, 65, 116, 117, 118, 119, 137].

აღსანიშნავია, რომ (96,10) განტოლება შეგვიძლია გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა ორ ნაწილაკობრივ ურთიერთქმედებაში განშზიდავი ბირთვიც მონაწილეობს [158, 159].

§ 97. ბეიტმანის მეთოდი

ბეიტმანის მეთოდიც საშუალებას გვაძლევს პოტენციალისა და, მაშასადამე, გაფანტვის ორნაწილაკობრივი მატრიცის ფაქტორიზებადი წარმოდგენისა [127, 128].

ვთქვათ, ორნაწილაკობრივი ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია ცენტრალურია. მაშინ პოტენციალური ენერჯიის პარციალური მატრიცა, იმპულსურ წარმოდგენაში, როგორც ვიცით, განისაზღვრება ფორმულით

$$V_i(p, p') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty j_i(pr) V(r) j_i(p'r) r^2 dr. \quad (97,1)$$

ბეიტმანის მეთოდის თანახმად, $V_i(p, p')$ ფუნქცია იცვლება შემდეგი ფაქტორიზებული ჯამით [126]:

$$v_i(p, p') = \sum_{i=1}^n C_i v_i(p, s_i) v_i(p', s_i), \quad (97,2)$$

სადაც s_i -ნებისმიერი რიცხვებია. C_i -მუდმივი შეირჩევა იმ პირობით, რომ ჯამი ემთხვეოდეს $v_i(p, p')$ გამოსახულებას $p=s_i$ და $p'=s_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) წრფეებზე. საჭიროა s_i ნებისმიერი რიცხვები ისე შეირჩეს, რომ $v_i(p, p')$ ფუნქცია რაც შეიძლება ახლოს იყოს $V_i(p, p')$ ნამდვილ პოტენციალთან. ცხადია, დიდი რაოდენობის s_i რიცხვების ალებით და მათი სათანადო შერჩევით p და p' ღერძებზე შესაძლებელია რაგინდ ზუსტად მიუახლოვდეთ ნამდვილ $V_i(p, p')$ პოტენციალს.

ცხადია, s_i რიცხვები შეგვიძლია შევარჩიოთ შემდეგი კვადრატული ფუნქციონალის ექსტრემუმის პირობიდან:

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{\int [V_i(p, p') - v_i(p, p'; s_1, s_2, \dots, s_n)]^2 dp dp'}{\int v_i^2(p, p') dp dp'}. \quad (97,3)$$

რამდენადაც (97,2) პოტენციალს ფაქტორიზებული სახე აქვს, ამიტომ, როგორც § 68-ში დაეინახეთ, ორნაწილაკობრივი ფაფანტვის მატრიცასაც, (68,23) ფორმულის თანახმად, აგრეთვე ექნება ფაქტორიზებული გამოსახულება. ასეთი ფაქტორიზებული $t_i(z)$ მატრიცისათვის კი ფადეევის განტოლებები დაიყვანება (92,16) ერთგანზომილებიან ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომლის ამოხსნა, როცა n სასრულია, შესაძლებელია მიახლოებითი მეთოდებით. ყველა ახლოს ქმედების პოტენციალებისათვის $V_i(p, p')$ გლუვი ფუნქციებია, ამიტომ $v_i(p, p')$ კარგ მიახლოებას გვაძლევს n -ის მცირე მნიშვნელობებისთვისაც კი. მაშასადამე, ფადეევის სისტემა ახლო ქმედების პოტენციალებისათვის განტოლებათა მცირე რიცხვისაგან იქნება შედგენილი, რაც მათი საკმარისად დიდი სიზუსტით ამოხსნის გარანტიას გვაძლევს [128].

მათემატიკური დამატება

წინამდებარე თავში მოკლედ, განსაკუთრებული მათემატიკური სიმკაცრის გარეშე, ფიზიკოს-თეორეტიკოსისათვის ცნობილ აღნიშვნებში განხილულია მათემატიკის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი საკითხი. ეს საკითხები არსებითია არა მხოლოდ წიგნში მოცემული მასალის გასაგებად, არამედ თეორიული ფიზიკის სხვა დარგების ასათვისებლადაც. განსაკუთრებით ფართოდაა განხილული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებისა და ბესელის სფერული ფუნქციების თვისებები თეორიულ ფიზიკაში მათი უაღრესად დიდი მნიშვნელობის გამო.

§ A. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ფორმირთი
თვისება [149, 156]

შემოვიღოთ კომპლექსური ცვლადი $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ და ამ ცვლადის რაიმე $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = |w|e^{i\phi}$ ფუნქცია. კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია განიშარტება კომპლექსური სიბრტყის რაიმე D არეზე. ამასთან, თუ არეს აქვს ერთი შემომსაზღვრელი კონტური (ე. ი. არეს არა აქვს ხვრელები), მაშინ მას მარტივად მძულ არეს უწოდებენ, ხოლო როცა არე შემოსაზღვრულია ერთი გარე ჩაკეტილი კონტურით და რამდენიმე შიგა კონტურით, მაშინ მას მრავლადმძული ეწოდება. D არეს, რომელსაც ეკუთვნის საზღვარიც, ჩაკეტილს უწოდებენ და \bar{D} -თი აღნიშნავენ.

$f(z)$ ფუნქციას ღიფერენცირებადი ეწოდება $z = z_0$ წერტილში, თუ არსებობს ზღვარი

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (A, 1)$$

$z = z_0$ წერტილისათვის და ეს ზღვარი დამოკიდებული არ არის Δz -ის ნულისაკენ მისწრაფების ხასიათზე. ფუნქცია შესაძლოა წარმოებადი იყოს წერტილზე, რაიმე წირზე და მთელ არეზე.

$f(z)$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციას ანალიზური ეწოდება, თუ D არის ყოველ წერტილზე იგი ღიფერენცირებადაი. ასეთი ფუნქციისათვის ხშირად იყენებენ სხვა სახელწოდებებსაც, მაგალითად, რეგულარულს ან ჰოლომორფულს.

წერტილს, სადაც ირღვევა $f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობა, უწოდებენ განსაკუთრებულ წერტილს. $z = z_0$ -ს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი.

თრებელი წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მახლობლობა $0 < |x - x_0| < R$, რომელშიც $f(x)$ ანალიზურია. აქ იგულისხმება ისეთი წერტილები, რომლის მახლობლობაში $f(x)$ ცალსახაა.

იხილავენ სამი ტიპის იზოლირებულ განსაკუთრებულ წერტილს:

1. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (A, 2)$$

მაშინ x_0 -ს ეწოდება აცილებადი განსაკუთრებული წერტილი. ასე მაგალითად, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ფუნქციისათვის $x=0$ აცილებადი განსაკუთრებული წერტილია. აცილებად განსაკუთრებულ წერტილს შემდეგში განსაკუთრებულად არ ჩავთვლით.

2. თუ არსებობს (A, 2) ზღვარი და იგი უსასრულობის ტოლია, მაშინ $x = x_0$ -ს განსაკუთრებულ წერტილს პოლუსი ეწოდება. პოლუსში $|f(x_0)| = \infty$. $x = x_0$ პოლუსს ეწოდება m რიგისა, თუ $(x - x_0)^m f(x)$ და არა $(x - x_0)^{m-1} f(x)$ ანალიზურია $x = x_0$ წერტილში. ასე მაგალითად, $f(x) = (x-2)^{-5}$ ფუნქციისათვის $x=2$ არის $m=5$ რიგის პოლუსი.

3. თუ (A, 2) ზღვარი არ არსებობს, მაშინ $x = x_0$ -ს არსებითად განსაკუთრებული წერტილი ეწოდება. ასე მაგალითად, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ და $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ფუნქციებისათვის $x=0$ არის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი.

ფუნქციას ეწოდება მთელი ან პოლომორფული, თუ მას სულაც არა აქვს განსაკუთრებული წერტილები. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოიდგინება ხარისხოვანი მწკრივით

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (A, 3)$$

რომელიც კრებადია მთელ სიბრტყეზე. ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებასაც თუ $f(x)$ ფუნქციას, გარდა პოლუსებისა, სხვა განსაკუთრებულობა არ გააჩნია, მაშინ მას უწოდებენ მერომორფულს.

ანალიზური ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს მეტად მნიშვნელოვან თეორემას რომელიც კოშის ინტეგრალური თეორემის სახელწოდებითაა ცნობილი.

კოშის ინტეგრალური თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში და უწყვეტია \bar{D} -ში, მაშინ $f(x)$ ფუნქციიდან აღებული ინტეგრალი ამ არის საზღვარზე, იმ პირობით, რომ კონტურის შემოვლისას D -არე ყოველთვის ერთ მხარეს მდებარეობდეს, ნულის ტოლია:

$$\int_C f(x') dx' = 0. \quad (A, 4)$$

საინტერესო გამოყენება აქვს ამ თეორემას მრავალდამბული არეებისათვის. (A, 1) ნახაზიდან ცხადია, რომ

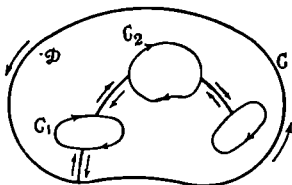
$$\int_C f(x') dx' = \sum_{i=1}^l \int_{C_i} f(x') dx', \quad (A, 5)$$

სადაც შიგა C_i კონტურების შემოვლა ხდება ისე, რომ არე რჩებოდეს ხელმარ-
ჯნივ, მაშინ როცა C საზღვრის შემოვლისას არე ხელმარცხნივ მდებარეობს.

კოშის ინტეგრალური ფორმულა. თუ $f(z)$ ანალიზურია D -არეში და უწყვე-
ტი \bar{D} -ში, მაშინ ადგილი აქვს კოშის ინტეგრალურ ფორმულას

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{z - z'}, \quad (A,6)$$

სადაც C -კონტური წარმოადგენს D არის საზღვარს; ამასთან კონტურის შემოვ-
ლა ხდება ისე, რომ არე რჩებოდეს ყოველთვის მარცხნივ. z -ი არის შიგნით მო-
თავსებული წერტილია. D არე შეიძლება შეიცავდეს ჰრიოლებსაც, ე- ი. მრავალ-
ბმული იყოს. კოშის ფორმულა საშუა-
ლებას გვაძლევს ვიპოვოთ $f(z)$ ფუნქცი-
ის მნიშვნელობა D არის ნებისმიერ წერ-
ტილში, როცა ცნობილია $f(z)$ -ის მნიშ-
ვნელობა საზღვარზე. კერძო შემთხვევაში
(A,6) მიიღებს სახეს



ნახ. (A,1)

$$\int_C \frac{dz'}{z - z'} = 2\pi i. \quad (A,7)$$

აქვე მოვიყვანოთ კოშის ფორმულა $f(z)$ ფუნქციის წარმოებულზე მისათვის, რომელიც
აგრეთვე იღო როლს ასრულებს ფიზიკის ამოცანებში. თუ $f(z)$ ანალიზურია D -
არეში და უწყვეტია \bar{D} -ში, მაშინ მას D არის ყველა წერტილში აქვს ნებისმიერი-
რიგის წარმოებული, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{(z - z')^{n+1}}, \quad (A,8)$$

სადაც C კელავ D არის საზღვარია.

ტეილორის მწკრივად გაშლა. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია R რადიუსიან
 C_R წრეში, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $z = b$ წერტილში, მაშინ არსებობს
 $(z - b)$ -ს ხარისხების ერთადერთი მწკრივი თანაბრად კრებადი $f(z)$ -საკენ, როცა
 $|z - b| \leq R' < R$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n, \quad (A,9)$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(b)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'}} \frac{f(z') dz'}{(z' - b)^{n+1}}, \quad (A,10)$$

ხოლო $C_{R'}$ -არის $R' = |z - b|$ რადიუსიანი წრე.

(A,9)-ს უწოდებენ ტეილორის მწკრივს. უდიდესი წრე $C_{R_c} (|z - b| \leq R_c)$,
რომლის ყველა შიგა წერტილი მოთავსებულია $f(z)$ -ის ანალიზურობის არეში.
წარმოადგენს (A, 9) ხარისხიანი მწკრივის კრებალობის წრეს, ხოლო R_c უწოდე-
ბენ კრებალობის რადიუსს.

ლორანის მწკრივად გაშლა. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია არეში ორ კონცენტრიულ C_{R_1} და C_{R_2} წრეებს შორის (ვთქვათ $R_2 < R_1$) ცენტრებით $z=b$ წერტილში ($b \neq \infty$), მაშინ არსებობს ერთადერთი მწკრივად გაშლა $(z-b)$ -ს დადებითი და უარყოფითი ხარისხების მიმართ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n(z-b)^{-n}, \quad (R_2 < |z-b| < R_1) \quad (A,11)$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}'} \frac{f(z') dz'}{(z'-b)^{n+1}}. \quad (A,12)$$

$$\bar{a}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}'} (z'-b)^{n-1} f(z') dz', \quad (A,13)$$

კონტური C_{R_1}' არის წრე $|z-b| = R_1' < R_1$, ხოლო C_{R_2}' $|z-b| = R_2' > R_2$ წრეა. (A,11)-ის პირველი წამი თანაბრად კრებადია $|z-b| \leq R_1'$ -სათვის და ანალიზურია C_{R_1}' -ის შიგნით; მეორე წამი თანაბრად კრებადია $|z-b| \geq R_2'$ და ანალიზურია C_{R_2}' წრის გარეთ.

(A,11) მწკრივი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-b)^n, \quad (A,14)$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{(z'-b)^{n+1}}. \quad (A,15)$$

C-კონტური წარმოადგენს C_{R_1} და C_{R_2} -ს შორის მოთავსებულ ნებისმიერ წრეწირს.

z -წერტილებს, რომლებზეც $f(z)=0$, უწოდებენ $f(z)$ -ის ნულებს ან ფესვებს. ანალიზურ $f(z)$ ფუნქციას $z=b$ წერტილზე ექნება m რიგის ფესვი (m მთელი დადებითი რიცხვია), თუ $z=b$ წერტილში $f(z)$ -ის ტელიორის მწკრივად გაშლაში პირველი m კოეფიციენტი $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ ნულის ტოლია, ხოლო $a_m \neq 0$; ამასთან, $(z-b)^{-m} f(z)$ იქნება ანალიზური და ნულისაგან განსხვავებული $z=b$ წერტილზე.

თეორემა ნაშთთა შესახებ. ვთქვათ, $z=b$ წერტილზე $f(z)$ ფუნქცია ან ანალიზურია, ან იზოლირებული განსაკუთრებულობა ახასიათებს; მაშინ $f(z)$ -ის ნაშთი b წერტილში— $\text{Res} f(z)$ ეწოდება ლორანის გაშლაში $(z-b)^{-1}$ წევრის კოეფიციენტს, ე. ი.

$$\text{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z') dz', \quad (A,16)$$

სადაც C კონტურია, რომელიც გარს ერტყმის b წერტილს და არ შეიცავს $f(z)$ -ის არავითარ განსაკუთრებულობას $z=b$ -საგან განსხვავებულს.

თუ $f(z)$ ანალიზურია, ანდა აქვს აცილებადი განსაკუთრებულობა $z=b \neq \infty$ -ზე, მაშინ $\text{Res} f(b) = 0$.

თუ $z=b \neq \infty$ არის m რიგის პოლუსი, მაშინ

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-b)^m f(z)]. \quad (\text{A}, 17)$$

ეთქვათ, კერძო შემთხვევაში $z=b$ მარტივი პოლუსია, ხოლო $f(z)$ -ს აქვს $f(z) = \frac{F(z)}{\Phi(z)}$ სახე, სადაც $F(z)$ და $\Phi(z)$ ანალიზური ფუნქციებია $z=b$ წერტილში და $F(b) \neq 0$. მაშინ $\Phi'(b) \neq 0$ და

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{F(b)}{\Phi'(b)}. \quad (\text{A}, 18)$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა: $f(z)$ ფუნქციის ნულელებში და პოლუსებში, მის ლოგარითმულ წარმოებულს $\frac{f'(z)}{f(z)}$ აქვს პირველი რიგის პოლუსები, ამასთან ფუნქციის ლოგარითმული ნაშთი ნულში ფესვის რიგის ტოლია, ხოლო პოლუსში პოლუსის რიგისა შებრუნებული ნიშნით.

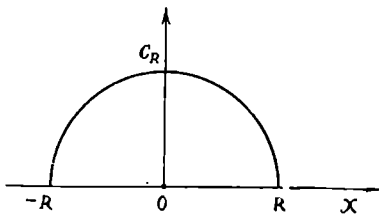
თუ $f(z)$ ფუნქცია უწყვეტია D არის C -საზღვარზე (საზღვარზე უწყვეტობა იგულისხმება იმ აზრით, რომ საზღვრის ნებისმიერი z_0 წერტილისათვის არსებობს $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} f(z) = f(z_0)$ და ამ არის შიგნით, გარდა სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული b_1, b_2, \dots, b_n წერტილებისა, ანალიზურია, მაშინ

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k). \quad (\text{A}, 19)$$

ამ ფორმულას დიდი გამოყენება აქვს განსაზღვრული ინტეგრალების ამოხსნის დროს. ნამდვილი განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც კონტურზე კომპლექსური ცვლადის ფუნქციიდან აღებული ინტეგრალის ნაწილი იმ პირობით, რომ კონტური შეიცავს არსი ღერძის (a, b)

ინტერვალს. ზოგიერთი $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

ტიპის ინტეგრალის ნაშთთა თეორიით გამოთვლის დროს უნდა გამოვიყენოთ C -კონტური, რომელიც შედგება არსი ღერძის $(-R, R)$ ინტერვალით და ნახევარწრივით $-C_R$ ზედა ნახევარსიბრტყეში. ორი შემდეგი



ნახ. (A, 2)

ლემმა ხშირად საშუალებას გვაძლევს აღნიშნულ ნახევარწრივზე აღებული ინტეგრალები გადავაგდოთ ამ წრის რადიუსის უსასრულობისაკენ მისწრაფებისას.

პირველი ლემა. ამ ლემის თანახმად,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z') dz' = 0, \quad (\text{A}, 20)$$

თუ ინტეგრალა არსებობს ყოველი სასრული R -სათვის და $\chi(f)$ თანაბრად მიიწვრათვის ნულისაკენ, როცა $|x| \rightarrow \infty$, $y \geq 0$ დროს.

მეორე ლემა (ქორდანის ლემა). თუ $\chi(x)$ ანალიზურია ზედა ნახევარსიბრტყეში, შესაძლო სასრული რაოდენობის პოლუსების გამოკლებით, და თანაბრად მიისწვრათვის ნულისაკენ, როცა $|x| \rightarrow \infty$ $y \geq 0$ -სათვის, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი k რიცხვისათვის

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \chi(z') e^{kz'} dz' = 0. \quad (A, 21)$$

განშტოების წერტილები. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ მას D არის სხვადასხვა ქვეარეებში აქვს ე. წ. $f_1(x), f_2(x), \dots$ შტოები და თავისი განმარტების არეში ყოველი შტო ლებულობს $f(x)$ ფუნქციის რაიმე მნიშვნელობების სიმრავლეს. ანალიზურ ფუნქციათა თეორია გარკვეული აზრით შეიძლება გავავრცელოთ ასეთ მრავალსაზა ფუნქციაზეც.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს რამდენიმე შტო, რომლებიც ანალიზურია $x=a$ წერტილის მახლობლობაში, გარდა შესაძლოა თვით a წერტილისა. როცა ცვლადი x წერტილი $x=a$ წერტილის ირგვლივ აღწერს ჩაკეტულ წირს, თუ $f(x)$ ფუნქცია თავისი ერთი შტოდან მეორეზე გადადის, მაშინ $x=a$ წერტილს განშტოების წერტილი ეწოდება. თუ ამ ჩაკეტული წირის $(n+1)$ ჯერადი შემოვლით ერთი და იმავე მიმართულებით კვლავ (პირველად!) დაუბრუნდებით პირველადწყებით შტოს, მაშინ n -ს უწოდებენ განშტოების წერტილის რიგს. თუ $x=a$ განშტოების წერტილზე განსაზღვრულია $f(x)$, მაშინ $f(a)$ საერთოა ყველა შტოსათვის. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $f(x) = \sqrt{x}$, რადგან $x = |x| e^{i\varphi}$, ამიტომ

$f(x) = \sqrt{|x|} e^{i\frac{\varphi}{2}}$. $x=0$ წერტილის ჩაკეტულ წრეზე ორჯერ შემოვლით არგუმენტი მიიღებს 4π ნაზრდს და $f(x)$ ფუნქცია საწყის მნიშვნელობას დაუბრუნდება. ამგვარად, $x=0$ იქნება პირველი რიგის განშტოების წერტილი.

როცა $x=a$ წერტილის ირგვლივ ერთი და იმავე მიმართულებით ყოველი შემოვლისას ახალ შტოებს ვლბულობთ, მაშინ განშტოების წერტილს ეწოდება უსასრულო რიგის ან ლოგარითმული. ასეთი უსასრულო რიგის განშტოების წერტილი აქვს, მაგალითად, $f(x) = \ln x$ ფუნქციას. რადგან $\ln x = \ln|x| + i\varphi$, ამიტომ ყოველი შემოვლისას $x=0$ წერტილისა $f(x)$ ლებულობს 2π ნაზრდს და არასოდეს უბრუნდება საწყის მნიშვნელობას.

ცალკეული ცალსაზა შტოები $f(x)$ ფუნქციისა განისაზღვრება არეებში, რომლებიც შემოსაზღვრულია კრილებით. ასე მაგალითად, $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის კრილი შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი მარტივი წირის გასწვრივ, რომელიც აერთებს $x=0$ და $x=+\infty$ წერტილებს.

ხშირად ხელსაყრელია მრავალსაზა (შტოებიანი) ფუნქციის წარმოდგენა ცალსაზა ფუნქციის სახით, რომელიც განსაზღვრულია რიმანის ზედაპირზე. რიმანის ზედაპირი შედგება x -სიბრტყეების. ან როგორც ამოიხსნენ, ფურცლების გარკვეული რიცხვისაგან, რომლებიც შეესაბამებან $f(x)$ ფუნქციის შტოებს და შეერთებული არიან ერთმანეთთან გარკვეული წყითი შეჩირეული კრილების გასწვრივ.

ანალიზური გავრძელება. დავეშვათ, გვაქვს ორი D_1 და D_2 არე, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები, მაგრამ გააჩნიათ საზღვრის γ საერთო ნაწი-

ლი. ვთქვათ, ამ არეებში შესაბამისად განსაზღვრულია ანალიზური ფუნქციები $f_1(z)$ და $f_2(z)$. ამბობენ, რომ $f_2(z)$ ფუნქცია წარმოადგენს $f_1(z)$ -ის უშუალო გაგრძელებას D_2 არეში, თუ არსებობს ისეთი $f(z)$ ფუნქცია, რომელიც ანალიზურია $D_1 + \Upsilon + D_2$ -ში, D_1 -ის ყველა წერტილში ემთხვევა $f_1(z)$ -ს, D_2 -ის ყველა წერტილში კი $f_2(z)$ -ს, ე. ი.

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) & D_1\text{-ში} \\ f(z) &= f_2(z) & D_2\text{-ში} \end{aligned} \quad (\text{A}, 22)$$

ანალიზური გაგრძელებისათვის არსებობს ერთი საკმარისი პირობა [152].

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი ისეთი მარტივადბმული D_1 და D_2 არე, რომელთაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ, მაგრამ მათ საზღვრებს აქვთ საერთო Υ -მონაკვეთი. ვთქვათ, ამ არეებში შესაბამისად განსაზღვრულია $f_1(z)$ და $f_2(z)$ ანალიზური ფუნქციები. თუ, გარდა ამისა, ეს ფუნქციები უწყვეტია $D_1 + \Upsilon$ და $D_2 + \Upsilon$ -ზე, ხოლო Υ -მონაკვეთის ყველა წერტილებში ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ $f_2(z)$ ფუნქცია წარმოადგენს $f_1(z)$ ფუნქციის უშუალო გაგრძელებას D_2 -არეში. $f_1(z)$ და $f_2(z)$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთიანი $f(z)$ ანალიზური ფუნქცია, განმარტებული ყველგან $D_1 + D_2 + \Upsilon$ არეში.

ვთქვათ, $f(z)$ ანალიზურია D არეში, რომლის საზღვარი შეიცავს არსი ღერძის Υ -მონაკვეთს. თუ $f(z)$ უწყვეტია $D + \Upsilon$ -ზე და Υ -ზე იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს, მაშინ $\tilde{f}(z)$ ფუნქცია, რომელიც განმარტებულია D არის არსი ღერძის სიმეტრიულ \tilde{D} არეში, ტოლობით

$$\tilde{f}(z^*) = f^*(z) \quad (\text{A}, 23)$$

წარმოადგენს $f(z)$ -ის ანალიზურ გაგრძელებას \tilde{D} არეში. ეს თეორემა გამოხატავს ე. წ. სიმეტრიის პრინციპის შინაარსს [152].

§ B. ლაპლასის ტიპის ბანტოლებიან ამონახსნის კონტურული ინტეგრალებით წარმოღობენა

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები [151, 155]. განვიხილოთ შემდეგი ტიპის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\mu(z) \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \nu(z) \frac{dw(z)}{dz} + \lambda(z) w(z) = 0, \quad (\text{B}, 1)$$

სადაც $\mu(z)$, $\nu(z)$ და $\lambda(z)$ პოლინომებია. ამ პოლინომების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის (B,1) განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ ყველა სპეციალური ფუნქციის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებაზე. (B,1) განტოლებას ლაპლასის ტიპის განტოლებას ვუწოდებთ.

თუ შემოვიღებთ ოპერატორს

$$L = \mu(z) \frac{d^2}{dz^2} + \nu(z) \frac{d}{dz} + \lambda(z), \quad (\text{B}, 2)$$

მაშინ (B,1) განტოლება ასეც გადაიწერება:

$$Lw(z) = 0. \quad (\text{B}, 3)$$

შევისწავლოთ (B,1) განტოლების ზოგადი ამონხსნის განსაკუთრებული წერტილები. ზოგადი ამონხსნის განსაკუთრებული წერტილების ხასიათს თურმე განსაზღვრავენ $\mu(x)$, $\nu(x)$ და $\lambda(x)$ ფუნქციების განსაკუთრებულობანი.

ამონხსნის განსაკუთრებულობის შესწავლის მიზნით ხელსაყრელია (B,1) განტოლების შემდეგი სტანდარტული ფორმით გადაწერა:

$$w'(x) + M(x)w'(x) + N(x)w(x) = 0; \quad (B,4)$$

როცა $M(x)$ და $N(x)$ ფუნქციები ანალიზურია, მაშინ (B,4) განტოლების ზოგად-ამონხსნს განსაკუთრებული წერტილები არა აქვს. მას განსაკუთრებული წერტილები ექნება $M(x)$ და $N(x)$ ფუნქციების პოლუსებში. წერტილებს, რომელზეც $M(x)$ და $N(x)$ ფუნქციებს განსაკუთრებულობანი აქვთ, განტოლების განსაკუთრებულ წერტილებს უწოდებენ.

იმ შემთხვევაში, როცა ზოგად ამონხსნს გააჩნია პოლუსი ან განშტოების წერტილი, მაშინ მას განტოლების რეგულარულ განსაკუთრებულ წერტილს უწოდებენ, ხოლო ირეგულარულია წერტილი, რომელზეც ზოგად ამონხსნს აქვს არსებითი განსაკუთრებულობა.

თუ $N(x)$ ფუნქციისათვის $x = \alpha$ წერტილი არის პოლუსი არაუმეტეს მეორე რიგისა, ხოლო $M(x)$ -ისათვის არაუმეტეს პირველი რიგისა, ე. ი. თუ

$$M(x) = \frac{f(x)}{x - \alpha}, \quad N(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - \alpha)^2}, \quad (B,5)$$

სადაც $f(x)$ და $\varphi(x)$ ანალიზური ფუნქციებია $x = \alpha$ წერტილზე, მაშინ $x = \alpha$ წერტილი იქნება (B,4) განტოლების რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი. მაშასადამე, როგორც აღვნიშნეთ, $x = \alpha$ წერტილში ზოგად ამონხსნს ექნება პოლუსი, ან განშტოების წერტილი.

ვიპოვოთ როგორი სახე აქვს ამონხსნს $x = \alpha$ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილის უშუალო მახლობლობაში. ამისათვის (B,4) განტოლების ამონხსნა ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$w(x) = (x - \alpha)^r [1 + ax + \dots +]. \quad (B,6)$$

შევიტანოთ ეს ფუნქცია (B,4) განტოლებაში, რომელშიც წინასწარ მოვახდინოთ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ანალიზური ფუნქციების ტეილორის მწკრივებად გაშლა $x = \alpha$ წერტილის მახლობლობაში:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \dots +, \\ \varphi(x) &= \varphi(\alpha) + (x - \alpha)\varphi'(\alpha) + \dots +. \end{aligned} \quad (B,7)$$

თუ ამის შემდეგ ნულს გავუტოლებთ x^{-2} -ის კოეფიციენტს, r -ის მიმართ მივიღებთ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას

$$r^2 + [f(\alpha) - 1]r + \varphi(\alpha) = 0, \quad (B,8)$$

რომელსაც ამონხსნის განმსაზღვრელ განტოლებას უწოდებენ. ამ განტოლებას საზოგადოდ ორი ფესვი ექნება r_1 და r_2 , რომლებიც განსაზღვრავენ ორ კერძო ამონხსნს

$$w_1(x) = (x - \alpha)^{r_1} \psi_1(x), \quad w_2(x) = (x - \alpha)^{r_2} \psi_2(x), \quad (B,9)$$

სადაც $\psi_1(x)$ და $\psi_2(x)$ ანალიზური ფუნქციებია $x = \alpha$ წერტილზე.

განტოლების ამონახსნის ხასიათი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში განი-
საზღვრება $x = \frac{1}{\zeta}$ ჩასმით. ასეთი ჩასმის გამოყენებით (B,4) განტოლება მიიღებს.
სახეს

$$\frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} + m(\zeta) \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} + n(\zeta)w(\zeta) = 0. \quad (B,10).$$

სადაც

$$m(\zeta) = \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} M \left(\frac{1}{\zeta} \right), \quad n(\zeta) = \frac{1}{\zeta^4} N \left(\frac{1}{\zeta} \right). \quad (B,11).$$

ამის შემდეგ $m(\zeta)$ და $n(\zeta)$ ფუნქციების პოლუსების ხასიათი $\zeta=0$ წერტილში შე-
გვიძლია განვსაზღვროთ ზოგადი ამონახსნის განსაკუთრებული წერტილის ბუნება
უსასრულობაში. ასე მაგალითად, თუ ამონახსნის განმსაზღვრელი განტოლების
ერთ-ერთი ფესვი არის r_1 , მაშინ ამოხსნას ექნება სახე $\zeta^{-r_1} \Phi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{r_1}} \Phi \left(\frac{1}{\zeta} \right)$.

სადაც $\Phi(1/\zeta)$ ანალიზური ფუნქციაა $\zeta=0$ წერტილში.

როცა განტოლებას ორი განსაკუთრებული წერტილი აქვს, მაშინ ცვლადის
შეცვლით ყოველთვის შეგვიძლია მივალწიოთ იმას, რომ ეს განსაკუთრებულობანი
გვექონდეს $x=0$ და $x=\infty$ წერტილებში. ასევე, სამი განსაკუთრებული წერტილის
შემთხვევაში შესაძლებელია მათი განლაგება ნულში, ერთში და უსასრულობაში.

ამონახსნის წარმოდგენა კონტურული ინტეგრლებით. შევისწავლოთ ლაპლას-
ის ტიპის განტოლების ამონახსნის წარმოდგენის საკითხი კონტურული ინტეგრა-
ლების სახით. ამ წარმოდგენის ძირითადი არსი შემდეგში მდგომარეობს: საჭიროა
 $w(x)$ ამონახსნი გამოვხატოთ შემდეგი ტიპის ინტეგრალით:

$$w(x) = \int_C K(x,t)v(t)dt, \quad (B,12).$$

სადაც ინტეგრალი აიღება x -ცვლადით C -კონტურზე, რომელიც x -ზე არაა დამო-
კიდებული. $K(x,t)$ -ს შეგვიძლია ვუწოდოთ ინტეგრალური წარმოდგენის გული.
მისი შერჩევა ჩვენზეა დამოკიდებული. წინასწარ შერჩეული $K(x,t)$ გულისათვის
საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი $v(t)$ ფუნქცია და საინტეგრაციო C -კონტური, რომ (B,12)
გამოსახულებამ დაეკმაყოფილოს (B,1) განტოლება. ამასთან, $v(t)$ -ს განსასაზღვრად
მიიღება დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა, როგორც წესი, კარგად
შერჩეული $K(x,t)$ გულისათვის გაცილებით ადვილი შეიძლება აღმოჩნდეს, ვიდრე
თვით (B,1) განტოლებისა. (B,1) განტოლების ამონახსნის კონტურული ინტეგრა-
ლით გამოსახატავად ძირითადად იხილავენ სამი ტიპის გულს:

$$K(x,t) = e^{xt}, \quad (B,13)$$

$$K(x,t) = (x-t)^p, \quad (B,13')$$

$$K(x,t) = x^t. \quad (B,13'')$$

პირველ შემთხვევაში (B,12)-ს უწოდებენ ეილერის, მეორე შემთხვევაში ლაპლასის,
ხოლო $K(x,t) = x^t$ გულის შემთხვევაში—მელინის გარდაქმნას. ამ სამი გარდაქმნი-
დან $x(t)$ -სათვის უფრო მარტივ განტოლებას მოგვეცემს ის გული, რომელიც უფრო
კარგად ასახავს (B,1) განტოლების განსაკუთრებულობებს. ასე მაგალითად, ვადა-
გვარებული პიპერგეომეტრიული ფუნქციის დიფერენციალურ განტოლებას უსა-

სრულობაში აქვს ირეგულარული განსაკუთრებულობა, რომელიც კარგად აიწერება e^x გულით, იმ დროს, როცა ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის ხელსაყრელია $(B, 13')$ გულის შერჩევა და ა. შ.

ლაპლასის წარმოდგენა. ჯერ განვიხილოთ $(B, 1)$ განტოლების ამონახსნის ლაპლასის ტიპის ინტეგრალური წარმოდგენა. ჩვენი მიზნებისათვის საკმარისია განვიხილოთ შემდეგი კერძო სახის დიფერენციალური განტოლება:

$$zw''(z) + (a_1z + a_0)w'(z) + (b_1z + b_0)w(z) = 0, \quad (B, 14)$$

სადაც a_0, a_1, b_0, b_1 ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია. $(B, 14)$ განტოლების შესაბამის $(B, 2)$ დიფერენციალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$L = z \frac{d^2}{dz^2} + (a_1z + a_0) \frac{d}{dz} + (b_1z + b_0). \quad (B, 15)$$

შენიშნოთ, რომ $(B, 14)$ განტოლება კოეფიციენტების კერძო მნიშვნელობებისათვის დაიყვანება გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე, ხოლო გარკვეული აღნიშვნებით ბესელის, უიტეკერის, ჩებიშევი-ერმიტის და სხვა სპეციალური ფუნქციების განტოლებებზე.

თუ $(B, 14)$ განტოლებას შევადარებთ $(B, 2)$ -ს და გავითვალისწინებთ $(B, 5)$ ფორმულებს, დავინახავთ, რომ $f(z) = a_0 + a_1z$, ხოლო $\varphi(z) = z(b_0 + b_1z)$, ამიტომ $(B, 8)$ განმსაზღვრელ განტოლებას ექნება სახე

$$r^2 + (a_0 - 1)r = 0,$$

საიდანაც $r_1 = 0, r_2 = 1 - a_0$. ამასთან ჩავთვალოთ, რომ $1 - a_0$ არ არის მთელი დადებითი რიცხვი. ამგვარად, $(B, 14)$ განტოლებას ექნება ორი ამოხსნა. ერთი იქნება რეგულარული $z=0$ წერტილში, რომელსაც მთელ კომპლექსურ z -სიბრტყეზე ექნება გამონატულება

$$1 + d_1z + d_2z^2 + \dots +, \quad (B, 16)$$

ხოლო მეორეს ექნება განსაკუთრებული წერტილი $z=0$ -ში:

$$z^{1-a_0}(1 + e_1z + e_2z^2 + \dots). \quad (B, 16')$$

ჩვენი მიზანია $(B, 14)$ განტოლების ამონახსნს მივცეთ $(B, 12)$ ინტეგრალური ფორმა, როცა წარმოდგენის გულს აქვს $(B, 13)$ -ის სახე.

გავითვალისწინოთ, რომ საინტეგრაციო კონტური z -ზე არაა დამოკიდებული და $(B, 12)$ გამოსახულებაზე ვიმოქმედოთ L -ოპერატორით. მაშინ

$$LK(z, t) = z \frac{d^2 K}{dz^2} + (a_1z + a_0) \frac{dK}{dz} + (b_1z + b_0)K. \quad (B, 17)$$

თუ მოვახდენთ გაწარმოებას და გავითვალისწინებთ, რომ $z e^{zt} = \frac{d}{dt} e^{zt}$, მაშინ $(B, 17)$ -ს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$LK(z, t) = (t^2 + a_1t + b_1) \frac{dK(z, t)}{dt} + (a_0t + b_0)K(z, t); \quad (B, 18)$$

შეშასადაძმე, $(B, 12)$ გამოსახულებაზე L -ოპერატორის მოქმედებით მივიღებთ

$$Lw(z) = \int_C \left[(t^2 + a_1t + b_1) \frac{dK}{dt} + (a_0t + b_0)K(z, t) \right] v(t) dt = 0. \quad (B, 18')$$

მოგახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრაცია გვექნება

$$\{(t^2 + a_1 t + b_1)K(s, t)v(t)\}_C - \int K(s, t) \left\{ (a_0 t + b_0)v(t) - \frac{d}{dt} [(t^2 + a_1 t + b_1)v(t)] \right\} dt = 0. \quad (B, 17)$$

ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ კონტურის ბოლო წერტილებზე თავისუფალი წიკრი ისპობოდეს

$$\{(t^2 + a_1 t + b_1)e^{zt}v(t)\}_C = 0, \quad (B, 19')$$

მაშინ (B, 19)-დან $v(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d}{dt} [(t^2 + a_1 t + b_1)v(t)] - (a_0 t + b_0)v(t) = 0, \quad (B, 20)$$

რომელიც შემდეგნაირადც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$(t^2 + a_1 t + b_1) \frac{dv(t)}{dt} = [(a_0 - 2)t + b_0 - a_1]v(t). \quad (B, 21)$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ (B, 21) ინტეგრალური წარმოდგენა აკმაყოფილებდეს (B, 14) დიფერენციალურ განტოლებას, საჭიროა $v(t)$ იყოს (B, 21) განტოლების ამოხსნა, ხოლო კონტური აკმაყოფილებდეს (B, 19') პირობას, ახლა (B, 21) განტოლებიდან ვიპოვოთ $v(t)$ ფუნქცია. ამისათვის ვთქვათ, რომ

$$t^2 + a_1 t + b_1 = 0 \quad (B, 21')$$

კვადრატულ განტოლებას აქვს განსხვავებული ფესვები α და β . მაშინ (B, 21) განტოლებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \frac{(a_0 - 2)t + (b_0 - a_1)}{(t - \alpha)(t - \beta)} = \frac{p - 1}{t - \alpha} + \frac{q - 1}{t - \beta}; \quad (B, 22)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ვიეტას თეორემის ძალით $\alpha + \beta = -a_1$, მაშინ p და q რიცხვებისათვის გვექნება

$$p = \frac{\alpha a_0 + b_0}{2\alpha + a_1}, \quad q = \frac{\beta a_0 + b_0}{2\beta + a_1}. \quad (B, 23)$$

ამის შემდეგ (B, 22) განტოლების ინტეგრაცია არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მივიღებთ

$$v(t) = A(t - \alpha)^{p-1}(t - \beta)^{q-1}, \quad (B, 24)$$

სადაც A -ნებისმიერი მუდმივია.

მაშასადამე, (B, 12) ფორმულის თანახმად, (B, 14) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის განისაზღვრება ფორმულით

$$w(z) = A \int_C (t - \alpha)^{p-1}(t - \beta)^{q-1} e^{tz} dt, \quad (B, 25)$$

სადაც C -კონტური ისე უნდა შეირჩეს, რომ ფუნქცია

$$\Omega(z, t) = (t - \alpha)^p (t - \beta)^q e^{tz} \quad (B, 26)$$

ნაზრდს არ ღებულობდეს კონტურის შემოვლისას, ე. ი.

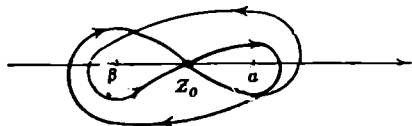
$$|\Omega(z, t)|_C = 0.$$

(B, 26')

ინტეგრალქვეშა ფუნქციას (B, 25) ფორმულაში აქვს განსაკუთრებული წერტილები $t = \alpha$ და $t = \beta$. თუ ვივლით სხეობით, რომ y და q მთელი რიცხვები არაა, მაშინ ეს განსაკუთრებული წერტილები იქნება განშტოების წერტილები. თუ $t = \alpha$ განშტოების წერტილს შემოვლელით დადებითი მიმართულებით, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გამრავლდება $\exp[(p-1)2\pi i] = \exp(p2\pi i)$ -ზე, ხოლო $t = \beta$ წერტილის შემოვლისას — $\exp q(2\pi i)$ მამრავლზე.

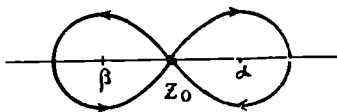
ავიღოთ კომპლექსური სიბრტყის რაიმე z_0 წერტილი, რომელიც სათავიდან სასრულ მანძილზე იმყოფება. C_α და C_β -თი აღნიშნოთ ჩაკეტილი კონტურები, რომლებიც გამოდიან z_0 წერტილიდან და გარს უვლიან α და β განსაკუთრებულ წერტილებს.

$C_{\alpha\beta}$ -თი აღნიშნოთ კონტური, რომელიც შეიცავს α და β განსაკუთრებული წერტილების შემოვლას შემდეგი მიმდევრობით: 1) C_α -კონტურზე დადებითი მიმართულებით, 2) C_β -კონტურზე დადებითი მიმართულებით, 3) C_α -კონტურზე უარყოფითი მიმართულებით და ბოლოს 4) C_β -ზე უარყოფითი მიმართულებით. პირველი შემოვლისას ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გამრავლდება $\exp(p2\pi i)$ მამრავლზე, მეორის დროს $\exp(q2\pi i)$. მესამე და მეოთხე შემთხვევაში კი სათანადოდ $\exp(-p2\pi i)$ და $\exp(-q2\pi i)$ მამრავლებზე. მაშასადამე, ბოლოს, როცა z_0 -წერტილში დავბრუნდებით, ვიქნებით იმავე შტოზე, რომელზეც კიკავით z_0 წერტილიდან გამოსვლისას.



ნახ. (B, 1)
 $C_{\alpha\beta}$ -კონტური

ტური შევკვიძლია გავამარტივოთ; მართლაც, ამ შემთხვევაში საკმარისია კონტური იწყებოდეს z_0 -წერტილიდან, გარს უვლიდეს $z = \alpha$ წერტილს მარჯვენა მიმართულებით, ხოლო შემდეგ $z = \beta$ წერტილს მარცხენა მიმართულებით (ნახ B, 2) ნაზრდები სათანადოდ ტოლი იქნება $\exp(p2\pi i)$ და $\exp(-p2\pi i)$ და, მაშასადამე, ასეთი კონტური დაკმაყოფილებს (B, 26') პირობას.



ნახ. (B, 2)

შეენიშნოთ, რომ თუ კონტურს შევარჩევთ ისე, რომ იგი არ უვლიდეს α და β წერტილებს, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, მართლაც, უბრუნდება თავის საწყის მნიშვნელობას, მაგრამ კოშის თეორემის ძალით (B, 25) ინტეგრალი ნულის ტოლი იქნება და ამიტომ არ განსაზღვრავს (B, 14) განტოლების ამონახსნს.

საინტეგრაციო კონტურად რომ მხოლოდ C_α ან C_β ავირჩიოთ, მაშინ ინტეგრალის სიდიდე z_0 წერტილის არჩევაზე შეიძლება აღმოჩნდეს დამოკიდებული.

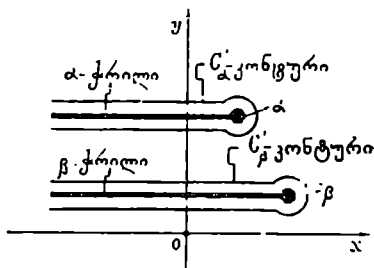
რაც, ცხადია, არ შეიძლება განტოლების ამოხსნას გამოხატავდეს. მაგრამ მიუხედავად ამისა, ჩვენ შეგვიძლია x_0 წერტილი ისე შევარჩიოთ, რომ C_α და C_β -კონტურზე გავრცელებულმა (B,25) გამოსახულებამ მოგვეცეს (B,14) განტოლების ამონახსნი.

ეთქვათ, z არის რაიმე დადებითი რიცხვი, მაშინ (B,26) ფუნქცია, როცა $Ret \rightarrow -\infty$ (ივლისისშემა, რომ Imz სასრულია), მისიწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ კონტური, რომელიც იწყებოდეს $-\infty$ -ში, გარს უვლიდეს $t = \alpha$ განსაკუთრებულ წერტილს და კვლავ უსასრულობაში მიდიოდეს. ცხადია, ამ შემთხვევაში (B,26') პირობა დაკმაყოფილებული იქნება. ეს კონტური აღწიწნოთ C'_α -ით. ასევე, თუ ავარჩევთ C'_β -კონტურს, რომელიც აგრეთვე $Ret = -\infty$ იწყება, გარს უვლის $t = \beta$ განსაკუთრებულ წერტილს დადებითი მიმართულებით და კვლავ $-\infty$ -ში ბრუნდება, კონტურის (B,26') პირობა დაკული იქნება; (B,25) ინტეგრალი კი, გავრცელებული ამ კონტურზე, მოგვეცემს მეორე ამონახსნს. ამგვარად, გვექნება (B,14) განტოლების შემდეგი ორი ამონახსნი:

$$w_1(x) = \int_{C'_\alpha} (t-x)^{p-1} (t-\beta)^{q-1} e^{xt} dt, \quad (B,27)$$

$$w_2(x) = \int_{C'_\beta} (t-x)^{p-1} (t-\alpha)^{q-1} e^{xt} dt. \quad (B,28)$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქციას აქვს განშტოების წერტილები $t = \alpha$ და $t = \beta$, ამიტომ იგი არაკალსახა იქნება. მისი ცალსახა ფუნქციად გადაქცევისათვის საჭიროა კრილების გატარება. ჩავთვალოთ, რომ α და β -ს განსხვავებული წარმოსახვითი ნაწილები აქვს და კრილები გავატაროთ ამ წერტილებიდან x -ღერძის პარალელურად $-\infty$ -მდე. ამ კრილებს, სათანადოდ, α და β კრილები ეუწოდოთ. გაკრილი სიბრტყეზე ავირჩიოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ის შტო, რომლისთვისაც $\arg(t-\alpha) = 0$, როცა $t-\alpha > 0$, ე. ი. α -კრილის გასწვრივ; ასევე $\arg(t-\beta) = 0$, როცა $t-\beta > 0$. ამ პროცედურის შემდეგ ჩვენ მიერ ნაპოვნ (B,27) და (B,28) ამონახს-



ნახ. (B, 3)

ნებს საესეგბით გარკვეული აზრი ექნებათ $x > 0$ შემთხვევაში. x -ის დადებითად განსაზღვრა დაგვეკირდა იმისათვის, რომ (B,26) ფუნქცია e^{tx} -მამრავლის წყალობით $t = -\infty$ მოსპობილიყო და კონტურის (B,26') პირობა დაკმაყოფილებული ყოფილიყო. ახლა დავამყაროთ კავშირი ჩვენ მიერ ნაპოვნ (B,27) და (B,28) ამონახსნებისა (B,14) განტოლების სათავეში რეგულარულ ამონახსნთან. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $p = q$. ამ შემთხვევაში საჭირო აღარაა რთული $C_{\alpha\beta}$ -კონტურის აღება. ახლა საკმარისია კონტური იწყებოდეს რაიმე x_0 წერტილში და გარს უვლიდეს α -ს დადებითი, ხოლო β -ს უარყოფითი მიმართულებით (ნახ. B,2). ცხადია, ასეთი კონტურის შემოვლისას ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ნაზრდს არ შეი-

ქენს. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამონახსნი არ იქნება x_0 -ზე დამოკიდებული, ამიტომ x_0 წერტილი— α -ში გადავიტანოთ. მაშასადამე, ავიღოთ კონტური, რომელიც იწყებოდეს α -ჭრილის ქვედა კიდეზე— α -ში, გარს უვლიდეს α -წერტილს დადებითი მიმართულებით, ხოლო შემდეგ β -ს უარყოფითი მიმართულებით. ამასთან α -განსაკუთრებული წერტილის შემოვლით მივიღებთ $w_1(x)$ ამონახსნს. α -ჭრილის ქვედა კიდიდან α -წერტილის გარს შემოვლისას გადავდივართ იმავე ჭრილის ზედა კიდეზე შემდეგ კი ვუვლით β -წერტილს უარყოფითი მიმართულებით. ჩვენ რომ β -ს შემოვლა მოგვეხდინა α -ჭრილის ქვედა კიდიდან, მაშინ მივიღებდით $-w_2(x)$ ამონახსნს, მაგრამ მანამდე ჩვენ α -წერტილს შემოვუარეთ და ამიტომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციამ მიიღო ნაზარდი $e^{2\pi i}$, რის გამოც β -ს შემოვლა უარყოფითი მიმართულებით მოგვეცემს— $e^{2\pi i} w_2(x)$ ამონახსნს.

ამგვარად, როცა $p=q$, რეგულარული ამონახსნი განისაზღვრება ფორმულით

$$w(x) = w^{(1)}(x) + w^{(2)}(x), \quad (B,29)$$

სადაც

$$w^{(1)}(x) = \int_{C_\alpha} (t-\alpha)^{p-1} (t-\beta)^{p-1} e^{xt} dt, \quad (B,30)$$

$$w^{(2)}(x) = -e^{2\pi i} \int_{C_\beta} (t-\alpha)^{p-1} (t-\beta)^{p-1} e^{xt} dt. \quad (B,31')$$

ვიღებთ წარმოდგენა. განვიხილოთ (B,1) განტოლების მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როცა $\mu(x)$ არის მერე რიგის პოლინომი, $\nu(x)$ —პირველი რიგისა, ხოლო λ მუდმივი სიდიდეა. ამ განტოლების ტიპს მიეკუთვნება, მაგალითად, ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლება და სხვა. ვიპოვოთ ასეთი განტოლების ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენა შემდეგი გულით:

$$K(x, t) = (x-t)^p. \quad (B,32)$$

ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, ვიპოვოთ $LK(x, t)$. (B,2) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$LK(x, t) = \mu(x) \rho(\rho-1) (x-t)^{\rho-2} + \rho\nu(x) (x-t)^{\rho-1} + \lambda(x-t)^\rho; \quad (B,33)$$

რადგან $\mu(x)$ და $\nu(x)$ პოლინომებია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მათი გაშლა $(x-t)$ ხარისხებად; ამ გაშლას ჩვენ მიერ განხილულ სპეციალურ შემთხვევაში ექნება სახე

$$\mu(x) = \mu(t) + (x-t) \mu'(t) + \frac{1}{2} (x-t)^2 \mu''(t), \quad (B,34)$$

$$\nu(x) = \nu(t) + (x-t) \nu'(t), \quad (B,35)$$

მაშინ (B,33) ფორმულა მოგვეცემს

$$LK(x, t) = \rho(\rho-1) \mu(t) (x-t)^{\rho-2} + [\mu'(t) \rho(\rho-1) + \rho\nu(t)] (x-t)^\rho + \left[\frac{1}{2} \mu''(t) \rho(\rho-1) + \rho\nu'(t) + \lambda \right] (x-t)^\rho. \quad (B,36)$$

ცხადია, ეს გამოსახულება ასეც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$LK(x, t) = \left[\mu(t) \frac{d^2}{dt^2} - \theta(t) \frac{d}{dt} + \kappa \right] (x-t)^\rho, \quad (B,37)$$

სადაც

$$\theta(t) = (\rho-1) \mu'(t) + \nu(t), \quad (B,38)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \rho(\rho-1) \mu''(t) + \rho\nu'(t) + \lambda. \quad (B,39)$$

შევიტანოთ (B,37) გამოსახლება (B,12) ინტეგრალურ წარმოდგენაში.
გვექება

$$L_{10}(s) = \int_C v(t) \left[\mu(t) \frac{d^2}{dt^2} - \theta(t) \frac{d}{dt} + \alpha \right] (s-t)^{\rho} dt = 0. \quad (B,40)$$

ჩავატაროთ ნაწილობრივი ინტეგრაცია. მივიღებთ

$$\left\{ \mu(t) v(t) \frac{d}{dt} (s-t)^{\rho} - (s-t)^{\rho} \frac{d}{dt} [\mu(t) v(t)] - \theta(t) v(t) (s-t)^{\rho} \right\}_C + \int_C K(s, t) \left[\frac{d^2}{dt^2} (\mu v) + \frac{d}{dt} (\theta v) + \alpha v \right] dt = 0. \quad (B,41)$$

კვლავ მოვითხოვოთ, რომ თავისუფალი წევრი კონტურის გასწვრივ ნულია, ე. ი.

$$[\rho \mu(t) v(t) (s-t)^{\rho-1} + \mu'(t) v + \mu v'(t) + \theta(t) v] (s-t)^{\rho} |_C = 0, \quad (B,42)$$

მაშინ (B,41)-დან ვიპოვით დიფერენციალურ განტოლებას, რომელსაც აკმაყოფილებს $v(t)$ ფუნქცია

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mu v) + \frac{d}{dt} (\theta v) + \alpha v(t) = 0. \quad (B,43)$$

ეს განტოლება შეგვიძლია საგრძნობლად გავამარტივოთ ρ -ს შერჩევით, რომელზეც ჯერჯერობით არავითარი პირობა არ დაგვიღია. პირობის თანახმად, μ , v და λ , t -ზე დამოუკიდებელი მუდმივი რიცხვები იქნება, ამიტომ შეგვიძლია ρ ისე შევარჩიოთ, რომ (B,39) ფორმულით განსაზღვრული α იყოს ნულის ტოლი. მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \rho(\rho-1) \mu''(t) + \rho v'(t) + \lambda = 0. \quad (B,44)$$

ამ განტოლების ორი ფესვის მიხედვით შეგვიძლია ვიპოვოთ ვიღერის ორი სხვადასხვა წარმოდგენა. (B,44) პირობით (B,43) განტოლება მარტივად ამოიხსნება, ამისათვის აღვნიშნოთ $\psi(t) = \mu(t) v(t)$, მაშინ

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\theta(t)}{\mu(t)}, \quad (B,45)$$

საოდნაჲ

$$\psi(t) = A \exp \left(- \int \frac{\theta(t)}{\mu(t)} dt \right); \quad A = \text{const} \quad (B,46)$$

თუ გავითვალისწინებთ (B,38) აღნიშვნას $v(t)$ ფუნქციისათვის, საბოლოოდ მივიღებთ

$$v(t) = \frac{A}{\mu^{\rho}(t)} \exp \left(- \int \frac{v(t) dt}{\mu(t)} \right). \quad (B,47)$$

კონტურის (B,42) პირობა, $v(t)$ -ს ამ მნიშვნელობის შეტანით, გამარტივდება, რამდენადაც მეორე წევრი მოისპობა. შედეგად დაგვრჩება

$$\{ \Omega(s, t) \}_C = 0, \quad (B,48)$$

სადაც

$$\Omega(s, t) = \rho \mu(t) v(t) (s-t)^{\rho-1}. \quad (B,49)$$

ამგვარად, (B,1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი (ზემოაღნიშნული შეზღუდვებით $\mu(t)$, $v(t)$ და $\lambda(t)$ ფუნქციებისა) გამოვხატეთ (B,12) სახით,

სადაც გული განსაზღვრულია (B,32) პირობით, $\psi(t)$ -ს აქვს (B,47) სახე, ხოლო კონტური აკმაყოფილებს (B,48) პირობას.

§ C. ეილერის $\Gamma(z)$ და $B(z, \omega)$ ფუნქციები

ეილერის $\Gamma(x)$ ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალით [152, 156]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (C,1)$$

მთელი დადებითი და ნულოვანი n -ისათვის

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (C,2)$$

ცხადია, $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$. (C,1) ინტეგრალის კრებადობისათვის საჭიროა $\operatorname{Re} x > 0$, როცა x მთელი არაა, ინტეგრალქვეშა ფუნქციას $e^{-t} t^{x-1}$ ექნება განშტოების წერტილი.

რადგან (C,1) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია $\operatorname{Re} x > 0$ -სათვის, ამიტომ $\operatorname{Re} x > 0$ ნახევარსიბრტყეზე $\Gamma(x)$ ფუნქცია ყველგან სასრულია, გარდა ამისა, ამავე ნახევარსიბრტყეზე (C,1) ფორმულის გამოყენებით შეიძლება გამოვთვალოთ ყველა რიგის წარმოებული. მაშასადამე, $\operatorname{Re} x > 0$ ნახევარსიბრტყეზე $\Gamma(x)$ ფუნქცია ანალიზურია.

მართალია, $\Gamma(x)$ ფუნქციის (C,1) განმარტება სამართლიანია მხოლოდ მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, მაგრამ იგი შეგვიძლია ანალიზური გაგრძელების მეთოდით განვსაზღვროთ $\operatorname{Re} x < 0$ არისათვისაც. ამისათვის (C,1)-ში ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია. რადგან თავისუფალი წევრი საზღვარზე მოისპობა, ამიტომ მივიღებთ

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt, \quad (C,3)$$

საიდანაც

$$x \Gamma(x) = \Gamma(x+1). \quad (C,4)$$

ამ უკანასკნელი დამოკიდებულების გამოყენებით $\Gamma(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია გავაგრძელოთ $\operatorname{Re} x < 0$ არეშიც. მართლაც, კომპლექსურ სიბრტყეზე გამოვეყოთ ერთეულოვანი სიგანის ზოლი $-1/2 < x < 1/2$ და მასში განვიხილოთ (C,4) ფორმულით განმარტებული $\Gamma(x)$ ფუნქცია ($x \neq 0$). რადგან (C,1) განმარტებულია $\operatorname{Re} x > 0$ არეში, ამიტომ ამ ორ ანალიზურ ფუნქციას ექნება საერთო განმარტების არე, რომელიც $0 < x < 1/2$ ზოლს ემთხვევა. ეს კი ნიშნავს, რომ პირველი ფუნქცია იქნება მეორის ანალიზური გაგრძელება $x < 0$ არეში.

გამოვარკვეოთ $\Gamma(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევა $\operatorname{Re} x < 0$ არეში. (C,4) ფორმულით თანახმად,

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\dots x \Gamma(x), \quad (C,5)$$

ან სხვანაირად

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n)(x+n-1)\dots x}, \quad (C,5')$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია.

ჩვენ ვხედავთ, რომ $\Gamma(x)$ ფუნქციას ექნება პოლუსები $x = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) წერტილებში. მართლაც, როცა $x \rightarrow -n$, მაშინ $(C, 5')$ გამოსახულების მრიცხველი გახდება $\Gamma(1) = 1$, ხოლო მნიშვნელი გაუტოლდება ნულს. $(C, 5')$ ფორმულიდან მივიღებთ

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \Gamma(z) = \frac{1}{(-1)(-2)\dots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (C, 6)$$

ე. ი. $\Gamma(x)$ ფუნქციის ყველა პოლუსის პირველი რივისა და ნაშთი პოლუსში განისაზღვრება $\frac{1}{n!}(-1)^n$ -ით. აღვილი მისახედრია, რომ თუ შევადგენთ $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$

ნამრავლს, მაშინ ამ გამოსახულებას პოლუსები ექნება ნებისმიერი $x = n$ მთელი რიცხვზე $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ეს ნამრავლი ხშირად გვხვდება პრაქტიკულ გამოთვლებში, ამიტომ მნიშვნელოვანია მისი გამოსახულების პოვნა.

განვიხილოთ ისევ $(C, 1)$ განმარტება და ჩერჯერობით ჩავთვალოთ, რომ x მოთავსებულია არსი ლერძის $(0, 1)$ მონაკვეთზე. ინტეგრალში შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $t = x^2$; მივიღებთ

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2x-1} dx, \quad (C, 7)$$

საიდანაც

$$\Gamma(1-x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{1-2x} dy. \quad (C, 8)$$

ამ ინტეგრალების ერთმანეთზე გადამრავლებით კი გვექნება

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{x}{y}\right)^{2x-1} dx dy. \quad (C, 9)$$

მიღებული ინტეგრალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორჯერადი ინტეგრალი (x, y) სიბრტყეზე, ამასთან, ინტეგრირების არეს წარმოადგენს $x > 0, y > 0$ კვადრანტი. შემოვიღოთ პოლარკოორდინატები

$$x = \rho \cos \varphi, \quad 0 \leq \rho \leq \infty \quad (C, 10)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx dy = \rho d\varphi d\rho.$$

ინტეგრალი ρ -თი მოგვეცემს ნახევარს; შედეგად გვექნება

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^{2x-1} \varphi d\varphi. \quad (C, 11)$$

ერთხელ კიდევ შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{u}, \quad d\varphi = -\frac{du}{2\sqrt{u(1+u)}}; \quad (C, 12)$$

მივიღებთ

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u} du. \quad (C,13)$$

ეს კი ცნობილი ინტეგრალია, რომელიც ტოლია $\frac{\pi}{\sin \pi s}$. ამგვარად, მივიღეთ მნიშვნელოვანი ფორმულა

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad (C,14)$$

ამ ფორმულის სამართლიანობაში ნებისმიერი s -ისათვის დაერწმუნდებით ანალიზური გაგრძელებით. როცა $s = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ტოლობის ორივე მხარე უსასრულობა ხდება, ცხადია, $\frac{1}{\Gamma(s)}$ ფუნქციას აღარ ექნება განსაკუთრებული წერტილები, ამიტომ იგი იქნება მთელი ფუნქცია, რომელსაც ექნება მხოლოდ ნულები $s = 0, -1, -2, \dots$ წერტილებში.

ვეიერშტრასმა მოგვცა $\Gamma(s)$ ფუნქციის განმარტება უსასრულო ნამრავლების სახით

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}, \quad (C,15)$$

სადაც $\gamma = 0,5772157$ ე. წ. ეილერის მუდმივია, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ასე განმარტებული $\Gamma(s)$ ფუნქცია ემთხვევა (C,1) განმარტებას და მას აქვს ყველა ზემოვანხილული თვისება. ამისათვის საკმარისია, მაგალითად, შევაშოწმოთ (C,14) ფორმულის სამართლიანობა. მართლაც, (C,4) თვისების თანახმად, (C,15) განმარტება მოგვცემს

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}; \quad (C,16)$$

თუ მოვახდენთ $s \rightarrow -s$ შეცვლას და (C,15) და (C,16) გამოსახულებებს წვერწვერად გადავაშრავლებთ, მივიღებთ

$$\frac{1}{\Gamma(s) \Gamma(1-s)} = s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right). \quad (C,17)$$

მაგრამ ცნობილია, რომ

$$\frac{\sin \pi s}{\pi s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right); \quad (C,18)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულის გათვალისწინებით კი (C,17) მოგვცემს დასამტკიცებელ ტოლობას.

ვეიერშტრასის (C,15) განმარტება ხელსაყრელია $\Gamma(s)$ ფუნქციის წარმოებულების მოსაძებნად. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\psi(s) = \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}; \quad (C,19)$$

თანახმად (C,15) ფორმულისა, გვექნება

$$\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right). \quad (C,20)$$

თუ გამოვიყენებთ (C,4) ფორმულას, მისი გალოგარითმებითა და გაწარმოებით ვიპოვიტ დამოკიდებულებას

$$\psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x); \quad (C,21)$$

მაშასადამე,

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right). \quad (C,22)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულიდან ცხადია, რომ ეილერის მუდმივი ტოლი იქნება

$$\gamma = -\psi(1) = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}. \quad (C,23)$$

თუ (C,20) გამოსახულებას გავაწარმოებთ, $\psi'(x)$ -ისათვის მივიღებთ

$$\psi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} = \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x). \quad (C,24)$$

ასევე ვიპოვიტ მაღალი რიგის წარმოებულებასაც

• ახლა გამოვიყენოთ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ფორმულა.

თუ (C,14) ფორმულაში შევიტანთ, $x=1/2$, მივიღებთ $\Gamma^2(1/2) = \pi$; საიდანაც

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (C,25)$$

თანახმად (C,5) ფორმულისა, როცა $x=-1/2$, გვექნება

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (C,26)$$

ან, სხვანაირად,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \quad (C,27)$$

დაეწეროთ (C,14) ფორმულა $x=n+1/2$ -ისათვის

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(n+1/2)\pi} = (-1)^n \pi, \quad (C,28)$$

ხოლო (C,26) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}. \quad (C,29)$$

(C,15) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვიყენოთ ე. წ. გარკვევების ფორმულა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (C,30)$$

ვიპოვოთ, თუ რისი ტოლი იქნება $|\Gamma(l+1+i\xi)|^2$, სადაც l მთელი რიცხვია, თანხმად (C,5) ფორმულისა:

$$\Gamma(l+1+i\xi) = (l+i\xi)(l-1+i\xi)\dots(1+i\xi) i\xi \Gamma(i\xi), \quad (C,31)$$

$$\Gamma(l+1-i\xi) = (l-i\xi)(l-1-i\xi)\dots(1-i\xi) \Gamma(1-i\xi); \quad (C,31')$$

საიდანაც

$$|\Gamma(l+1+i\xi)|^2 = (l^2 + \xi^2) [(l-1)^2 + \xi^2] \dots (1 + \xi^2) i\xi \Gamma(i\xi) \Gamma(1-i\xi). \quad (C,32)$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (C,14) ფორმულას, საბოლოოდ გვექნება

$$|\Gamma(l+1+i\xi)|^2 = \frac{\pi \xi}{\sin \pi \xi} \prod_{k=1}^l (k^2 + \xi^2); \quad (C,33)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $l=0$, მივიღებთ

$$|\Gamma(1+i\xi)|^2 = \frac{\pi \xi}{\sin \pi \xi}. \quad (C,34)$$

გამოვხატოთ $\Gamma(x)$ ფუნქცია კონტურული ინტეგრალით. ამისათვის დავწეროთ

$$\Gamma(x) = \int_C v(t) t^{x-1} dt, \quad (C,35)$$

სადაც $v(t)$ ფუნქცია და C -კონტური განსაზღვრას მოითხოვს. გამოვიყენოთ (C,4) ფორმულა

$$\int_C v(t) t^x dt = \int_C v(t) x t^{x-1} dt = \int_C v(t) \frac{d}{dt} t^x dt. \quad (C,36)$$

ნაწილობითი ინტეგრაციით მივიღებთ

$$\int_C \left[v(t) + \frac{dv}{dt} t \right] t^x dt = [v(t) t^x]_C, \quad (C,37)$$

სადაც მარჯვენა მხარისათვის, ბუნებრივია, მოვითხოვთ ნულთან ტოლობა. მაშინ $v(t)$ შეგვიძლია ვიპოვოთ განტოლებიდან

$$\frac{dv}{dt} + v(t) = 0, \quad (C,38)$$

რომელიც გვაძლევს ამონახსნს

$$v(t) = A e^{-t}. \quad (A = \text{const}) \quad (C,39)$$

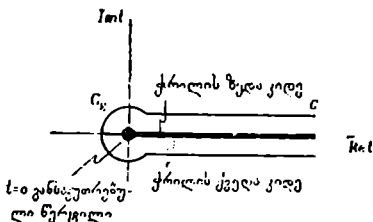
მაშასადამე,

$$\Gamma(x) = A \int_C e^{-t} t^{x-1} dt; \quad (C,40)$$

ამასთან, $\Omega(x, t) = t^x e^{-t}$ ფუნქცია უნდა ისპობოდეს კონტურის ბოლო წერტილების ჩასმის შედეგად.

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1) \ln t}$$

ქნება განშტოების $t=0$ წერტილი; არსი ღერძის გასწვრივ გავაგლოთ $t=0$ -დან $t=+\infty$ კრილი. ასეთ გაკრილ სიბრტყეზე (C,41) ფუნქცია ცალსახა იქნება; ამასთან შევთანხმდეთ და ჩავთვალოთ, რომ კრილის ზედა კიდეზე $\arg t=0$, ე. ი. კრილის ზედა კიდის გასწვრივ $\ln t$ ჩავთვალოთ ნამდვილ რიცხვად. ინტეგრაციის C -კონტური ისე ავირჩიოთ, რომ იგი იწყებოდეს $+\infty$ -ში, გარს უვლიდეს $t=0$ განსაკუთრებულ წერტილს და კვლავ მიდიოდეს უსასრულობაში. დავუშვათ, რომ $\operatorname{Re} z > 0$; კომის თეორემით ინტეგრალის სიდიდე არ შეიცვლება, თუ კონტურს ისე ვაღეფორმირებთ, რომ ხელს არ ვახლებთ განსაკუთრებულ წერტილს და კონტურის ბოლო წერტილსაც დამატარებულს დავტოვებთ. ამ თვისების



ნახ. (C,1)

გამო საინტეგრაციო კონტური შეგვიძლია დავიყვანოთ სამ კონტურზე: ერთია (∞, ϵ) მონაკვეთი კრილის ზედა კიდის გასწვრივ, მეორე $-\epsilon$ რადიუსის C_ϵ წრე ცენტრით $t=0$ წერტილში და მესამე (ϵ, ∞) მონაკვეთი კრილის ქვედა კიდეზე. შეთანხმების თანახმად, პირველ კონტურზე ინტეგრალის ქვეშ $\ln t$ ნამდვილია, ქვედა კიდეზე ვადასვლისას, რადგან $t=0$ წერტილს გარს ვუვლით დადებითი მიმართულებით, $\ln t$ დამატება 2π მამრავლი. ასე რომ

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = \int_\infty^\epsilon e^{-t} t^{z-1} dt + e^{(z-1)2\pi i} \int_\epsilon^\infty e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{C_\epsilon} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (C,42)$$

ახლა მივასწავოთ წრის რადიუსი ნულისაკენ. დავამტკიცოთ, რომ ამ დროს ინტეგრალი C_ϵ -კონტურზე ნულის ტოლია. ცხადია, e^{-t} ამ წრეზე შემოსაზღვრულია ϵ -ზე დამოუკიდებლად. შევაფასოთ t^{z-1} . რადგან $t = \epsilon e^{i\varphi}$, სადაც $\varphi = \arg t$, ამიტომ $|t^{z-1}| = \epsilon^{z-1} e^{-\varphi y}$. მაშასადამე, როცა $x > 1$, მაშინ $|t^{z-1}| \rightarrow 0$, თუ $\epsilon \rightarrow 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიისწრაფვის ∞ -საკენ როგორც $\frac{1}{\epsilon^{1-x}}$. რად-

გან C_ϵ -კონტურის სიგრძე $2\pi\epsilon$ -ის ტოლია, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ C_ϵ -ზე აღებული ინტეგრალი, როცა $\epsilon \rightarrow 0$, ნულის ტოლი იქნება; ამგვარად, (C,42)-დან დავგვრჩება

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = \int_\infty^\epsilon e^{-t} t^{z-1} dt + e^{2\pi i z} \int_\epsilon^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (C,43)$$

საიდანაც

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2\pi i z} - 1) \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (C,44)$$

თუ უკანასკნელს შევადარებთ (C,40) ფორმულას, დაეინახავთ, რომ $A^{-1} = e^{\pi iz} - 1$;
 და, მაშასადამე, $\Gamma(z)$ ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\pi iz} - 1} \int_C e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (C,45)$$

ანალიზური გაგრძელების ძალით ეს ფორმულა სამართლიანი იქნება ყველა z -ებისათვის. თუ გაეხსენებთ, რომ $(-1)^{z-1} = \exp(i\pi(z-1)) = -\exp(i\pi z)$, შეგვიძლია დაეწერთ

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-t} (-t)^{z-1} dt. \quad (C,46)$$

თანამდ (C,14)-ისა, გამოსახულება $\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{\pi} \sin \pi z \Gamma(1-z)$, ამიტომ (C,46)

წარმოდგენის გამოყენებით გვექნება მნიშვნელოვანი ფორმულა

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-t} (-t)^{-z} dt. \quad (C,47)$$

ყველა ზემომოტანილ ინტეგრალში C -ში იგულისხმება კონტური, რომელიც (C,1) ნახაზზეა მოცემული. ცხადია, თუ (C,47) ფორმულაში მოვახდენთ t ცვლადის შეცვლას $-t$ -თი, მაშინ გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt. \quad (C,48)$$

C -უკვე გამოხატავს კონტურს, რომლის ბოლოები $\operatorname{Re} t = -\infty$ წერტილშია და $t=0$ წერტილს გარს უღლის დადებითი მიმართულებით [151, 155, 156].

ვიღერის $B(z, w)$ ფუნქცია. ახლა განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (C,48')$$

კრებადობისათვის საკიროა, რომ $\operatorname{Re} z > 0$ და $\operatorname{Re} w > 0$. ინტეგრალქვეშა ფუნქციას აქვს ორი განსაკუთრებული წერტილი $t=0$ და $t=1$, ამასთან, კომპლექსური z და w -რიცხვებისათვის იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციას აქვს სახე

$$t^{z-1} (1-t)^{w-1} = e^{(z-1) \ln t + (w-1) \ln (1-t)}, \quad (C,49)$$

სადაც $\ln t$ და $\ln (1-t)$ ითვლება ნამდვილ სიდიდეებად.

ახალი ცვლადის შემოღებით (C,48) სხვა სახითაც შეგვიძლია გადავწეროთ. ვთქვათ,

$$x = \frac{t}{1-t}, \quad (C,50)$$

მაშინ (C,48) მიიღებს სახეს

$$B(z, w) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)^{z+w}}. \quad (C,51)$$

$B(z, w)$ ფუნქციას ეილერის ბეტა ფუნქცია ეწოდება. იგი შეგვიძლია დაავა-
ჯემიროთ ეილერის $\Gamma(z)$ ფუნქციასთან. ამისათვის (C,51) ფორმულაში შემოვი-
ლოთ ახალი ცვლადი $t = t_0^2 \varphi$, მაშინ მივიღებთ $B(z, w)$ ფუნქციის სხვა წარმო-
ვენასაც

$$B(z, w) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1} \varphi \cos^{2w-1} \varphi d\varphi. \quad (C,52)$$

გამოვიყენოთ $\Gamma(z)$ ფუნქციის (C,7) განმარტება. მივიღებთ

$$\Gamma(z) \Gamma(w) = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2z-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2w-1} dy. \quad (C,53)$$

ვადავიღეთ პოლარკოორდინატებზე (C,10) ფორმულებით. გვექნება

$$\Gamma(z) \Gamma(w) = 4 \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(z+w)-1} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1} \varphi \cos^{2w-1} \varphi d\varphi, \quad (C,54)$$

საიდანაც (C,7) და (C,52) ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ მნიშვნელო-
ვან დამოკიდებულებას ეილერის $\Gamma(z)$ და $B(z, w)$ ფუნქციებს შორის:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (C,55)$$

ამ ფორმულიდან გამოჩნდა, რომ ეილერის ბეტა ფუნქცია სიმეტრიულია z და
 w -ცვლადების გადასმის მიმართ

$$B(z, w) = B(w, z). \quad (C,56)$$

თუ (C,55) ფორმულაში ავიღებთ $w = 1 - z$, მაშინ

$$B(z, 1-z) = \Gamma(z) \Gamma(1-z), \quad (C,57)$$

რომელიც (C,51) ფორმულის გამოყენებით შეიძლება საცუქველად დაველოთ
(C,14) ფორმულის გამოყენებას.

$\Gamma(z)$ ფუნქციის მსგავსად $B(z, w)$ -ც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ უსასრულო
ნამრავლების სახით. ამისათვის ვისარგებლოთ (C,55) თვისებით და გამოვიყენოთ
ეილერის $\Gamma(z)$ ფუნქციის (C,15) განმარტება. გვექნება

$$B(z, w) = \frac{s+w}{w} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (k+z+w) k}{\prod_{k=1}^{\infty} (k+z)(k+w)}, \quad (C,58)$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$B(z, w) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{k(z+w+k)}{(z+k)(w+k)}. \quad (C,59)$$

ცხადია, უკანასკნელი ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ როგორც $B(x, w)$ ფუნქციის განმარტება. თუ (C,59) ფორმულიდან განვსაზღვრავთ $B(x+1, w)$ და $B(x, w+1)$ და მათ ერთმანეთს შევადარებთ, მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$wB(x+1, w) = zB(x, w+1). \quad (C,60)$$

მსგავსად (C,46) ფორმულისა, შეგვიძლია გამოვიყენოთ $B(x, w)$ ფუნქციის კონტურული ინტეგრალით წარმოდგენის ფორმულაც. განსხვავება იქნება იმაში, რომ, ნაცვლად c -ისა, კონტური დაიწყება $t=1$ წერტილში და გარს შემოუვლის $t=0$ განსაკუთრებულ წერტილს; შედეგად გვექნება

$$B(x, w) = - \frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C (-t)^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (C,61)$$

ამ ფორმულით შემდეგში ხშირად ვისარგებლებთ. საინტეგრაციო კონტური მოცემულია ნახ. (C,1).

§ D. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციები

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს [8, 153, 154, 156]:

$$x(1-x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{df(x)}{dx} - abf(x) = 0. \quad (D,1)$$

a , b , c -ს პარამეტრები ეწოდებათ, a და b ნებისმიერი სიდიდეებია, c კი არ არის ნული და არც უარყოფითი მთელი რიცხვი. (D,1) განტოლება სიმეტრიულია a და b პარამეტრების მიმართ, ამიტომაც ამოხსნასაც იმავე სიმეტრიის თვისება ექნება.

განტოლების ამოხსნა ვეძებთ შემდეგი უსასრულო მწკრივის სახით:

$$f(x) = x^r \sum_{s=0}^{\infty} A_s x^s. \quad (D,2)$$

ვიპოვოთ წარმოებულები და შევიტანოთ (D,1) განტოლებაში; გვექნება

$$x(x-1) \sum_{s=0}^{\infty} (r+s)(r+s-1) A_s x^{r+s-2} + [c - (a+b+1)x] \sum_{s=0}^{\infty} (r+s) A_s x^{r+s-1} - ab \sum_{s=0}^{\infty} A_s x^{r+s} = 0. \quad (D,3)$$

გავუტოლოთ ნულს x -ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტები. x -ის უმცირესი ხარისხის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა, როცა $A_0 \neq 0$, მოგვცემს ამონახსნის განმსაზღვრელ განტოლებას

$$r(r-1+c) = 0, \quad (D,4)$$

რომლის ფესვებია $r_1 = 0$ და $r_2 = 1 - c$.

ჯერ შევისწავლოთ $r_1 = 0$ ფესვის შემთხვევა: ვიგულისხმობთ, რომ (D,3)-ში ჩასმულია $r_1 = 0$, მაშინ z^0 -ის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა მოგვცემს

$$A_1 = \frac{ab}{c} A_0; \quad c \neq 0 \quad (D,5)$$

სრულიად ანალოგიურად, z -ის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობით მივიღებთ

$$A_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} A_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} A_0 \quad c \neq 0, c \neq -1 \quad (D,6)$$

და ა. შ. ვიპოვით ყველა კოეფიციენტს, თუ $c \neq 0, -1, -2, \dots$, მაშინ

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} A_n = \frac{(a+n)(a+n-1)(b+n)(b+n-1)}{(n+1)n(c+n)(c+n-1)} A_{n-1} = \dots \\ &= \frac{a(a+1) \dots (a+n)b(b+1) \dots (b+n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)c(c+1) \dots (c+n)} A_0. \end{aligned} \quad (D,6')$$

ბუნებრივია ავიღოთ $A_0 = 1$, მაშინ, (D,2) გამოსახულების თანახმად (როცა $r = 0$), გვექნება შემდეგი მწკრივი:

$$F(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots + \quad (D,7)$$

სადაც a და b ნებისმიერია, ხოლო $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ცხადაა, ეს მწკრივი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირადაც:

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (D,8)$$

მწკრივს, რომელიც განსაზღვრულია (D,7) ან, რაც იგივეა, (D,8) ფორმულით, ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია ეწოდება. იგი წარმოადგენს (D,1) განტოლების კერძო ამონახსნს. რომ ავიღოთ განსაზღვრული განტოლების მეორე ფესვი $r_2 = 1 - c$, ანალოგიური თანმიმდევრობით მივიღებთ მეორე კერძო ამონახსნს. მაგრამ ამ ამონახსნს უფრო მარტივად ვიპოვით შემდეგი აღნიშვნის შემოღებით:

$$f(z) = z^{1-c} w(z). \quad (D,9)$$

თუ მოვძებნით წარმოებულებს და შევითანთ (D,1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} z(1-z)w'' + [2-c-(a+b-2c+3)z]w' - \\ (a+1-c)(b+1-c)w(z) = 0. \end{aligned} \quad (D,10)$$

ამგვარად, გვექნება იგივე (D,1) განტოლება, ოღონდ სხვა პარამეტრებით; ამიტომ მეორე კერძო ამონახსნი იქნება

$$f_2(z) = z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z). \quad (D,11)$$

ეს ამონახსნი აზრს კარგავს, როცა $2-c = 0, -1, -2, \dots$ საშავიეროდ, იგი აზრია-ნია მაშინ, როცა პირველი კერძო ამონახსნი c -ს გარკვეული მნიშვნელობებისათვის არ ვარგა.

მაშასადამე, (D,1) განტოლებას ექნება შემდეგი ზოგადი ამონახსნი:

$$f(z) = C_1 F(a, b, c; z) + C_2 z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c; z). \quad (D,12)$$

ცხადია, ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის წარმოებული მოიძებნება ფორმულით

$$\frac{dF(a, b, c; x)}{dx} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; x). \quad (D,13)$$

განვიხილოთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის კერძო შემთხვევები: როცა $a=c$, მაშინ (D,7) მწკრივი მოგვეცემს

$$F(a, b, a; x) = 1 + bx + b(b+1) \frac{x^2}{2!} + \dots + (1-x)^{-b}. \quad (D,14)$$

როცა $a=b=1$ და $c=2$, მაშინ

$$F(1, 1, 2; x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}. \quad (D,15)$$

ამჟამად, რომ ნებისმიერი l -სათვის ადგილი აქვს ფორმულას

$$F(-a, l, l, -x) = (1+x)^a. \quad (D,16)$$

შენიშნოთ, რომ, როცა a და l პარამეტრებიდან რომელიმე ტოლია მთელი უარყოფითი $-n$ რიცხვისა, მაშინ ჰიპერგეომეტრიული მწკრივი ჩამოიჭრება და პოლინომად გადაიქცევა.

მთელი რიგი ცნობილი პოლინომები და ფუნქციები შეგვიძლია დავაკავშიროთ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებთან.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ლეჟანდრის განტოლება

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + l(l+1)y(x) = 0, \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (D,17)$$

ახალი $x=1-2t$ ცვლადის შემოღებით იგი დაიყვანება ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის შემდეგ განტოლებაზე:

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' + l(l+1)y = 0, \quad (D,17')$$

რომელშიც პარამეტრებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობა: $c=1$, $b=-l$, $a=l+1$. ასე რომ ლეჟანდრის პოლინომი განისაზღვრება შემდეგი ჰიპერგეომეტრიული მწკრივით:

$$P_l(x) = A_l F\left(l+1, -l, 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad A_l = \text{const} \quad (D,18)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომი $P_{lm}(x)$ მიიღება ლეჟანდრის $P_l(x)$ პოლინომის m -ჯერ გაწარმოებით, და ამასთან გამოვიყენებთ გაწარმოების (D,13) ფორმულას, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$P_{lm}(x) = \frac{(x+1)^{\frac{m}{2}}}{(x-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma(1-m)} F\left(-l, l+1, 1-m; \frac{1-x}{2}\right). \quad (D,19)$$

ჩვენ დაგვეტირება აგრეთვე იაკობის პოლინომები, რომლებიც ასევე შეიძლება დავაკავშიროთ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციასთან. იაკობის პოლინომები ასე განისაზღვრება:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = F(\alpha+n, -n, \beta; x) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+k-1)x^k}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}, \quad (D,20)$$

აქობის პოლინომები ორთო-ნორმირებულია შემდეგი პირობით:

$$\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta+n+1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)\Gamma(\alpha+n)} \frac{n!}{\alpha+2n} \delta_{nm} \quad (D,20')$$

ეს ფორმულა სამართლიანია მაშინ, როცა $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha-\beta) > -1$, n -ის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის გვაქვს ფორმულები:

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1,$$

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 - \frac{\alpha+1}{\beta} x, \quad (D,20'')$$

$$P_2^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 - 2 \frac{\alpha+2}{\beta} x + \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\beta(\beta+1)} x^2.$$

შეენიშნოთ, რომ

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (D,20''')$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ჰიპერგეომეტრიული მწკრივებით გამოვსახოთ სხვა სპეციალური ფუნქციებიც.

დაუშტკიცებლად მოვიტანოთ ორი მნიშვნელოვანი ფორმულა:

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-z). \quad (D,21)$$

ეს ფორმულა აქვეშირებს z და $1-z$ არგუმენტის ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს. (D,7) მწკრივით განსაზღვრული ფუნქციის განმარტების არეა $|z| < 1$ წრე, $|z| > 1$ არეში მის განსაზღვრად საჭიროა ანალიზური გაგრძელება. ანალიზური გაგრძელების სათანადო ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} F\left(a, a+1-c, a+1-b; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} F\left(b, b+1-c, b+1-a; \frac{1}{z}\right). \quad (D,22)$$

ეს მწკრივი კრებალია, როცა $|z| > 1$.

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა. გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია $F(a, b, c; z)$ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციიდან მიიღება ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $b \rightarrow \infty$. (D,1) განტოლებაში შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $x = bz$, მაშინ მივიღებთ

$$x f''(x) + \left[c - \left(1 + \frac{1+a}{b} \right) x \right] f'(x) - a f(x) = 0; \quad (D,23)$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $b \rightarrow \infty$, მივიღებთ განტოლებას

$$x f''(x) + (c-x) f'(x) - a f(x) = 0. \quad (D,24)$$

ამ განტოლებას უწოდებენ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებას. ცხადია, მისი ამონახსნი იქნება

$$F(a, c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right). \quad (D,25)$$

$F(a, c; z)$ ფუნქციას გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას უწოდებენ; იგი განისაზღვრება შემდეგი მწკრივით

$$F(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots + \quad (D,26)$$

ან, ეილერის $\Gamma(x)$ ფუნქციის დახმარებით იგივე მწკრივი ასეც შეგვიძლია ჩაეწეროს:

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (D,27)$$

ეს მწკრივი კრებალია ნებისმიერი სასრული z -ისათვის. a -პარამეტრი ნებისმიერია, c კი არ უნდა უდრიდეს $0, -1, -2, \dots$ როცა $a=0$, მაშინ $F(0, c; z)=1$, ხოლო როცა $a=-n$, სადაც n მთელი რიცხვია, მაშინ (D,26) მწკრივი n ხარისხის პოლინომზე დაიყვანება.

შევნიშნოთ, რომ (D,24) განტოლებას არამთელი c -პარამეტრისათვის აქვს მეორე კერძო ამოხსნა

$$z^{1-c} F(a-c+1, 2-c; z). \quad (D,28)$$

ამ ამოხსნას, პირველისაგან განსხვავებით, აქვს განსაკუთრებული წერტილი $z=0$. უშუალო შემოწმებით ვაჩვენებთ, რომ ეს ამოხსნა აკმაყოფილებს განტოლებას

$$z f''(z) + (2-c-z) f'(z) - (a-c+1) f(z) = 0. \quad (D,29)$$

ზშირად იხილავენ არარეგულარულ გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას, რომელიც წარმოადგენს შემდეგ წრფივ კომბინაციას:

$$\psi(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} F(a-c+1, 2-c; z). \quad (D,29')$$

$z=0$ წერტილი ამ ფუნქციისათვის განსაკუთრებული წერტილი იქნება.

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების წარმოდგენა კონტურული ინტეგრალებით, ჯერ დავიწყოთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების წარმოდგენით. გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული განტოლება (D,24) კერძო შემთხვევაა ჩვენ მიერ განხილული (B,14) განტოლებისა. სახელდობრ, თუ (B,14)-ში ავიღებთ $a_0=c$, $a_1=-1$, $b_1=0$, $b_0=-a$, მაშინ იგი (D,24) განტოლებას დაემთხვევა. ახლა (B,21') კვადრატულ განტოლებას ექნება $z^2-t=0$ სახე, რაც მოგვცემს ორ ფესვს $\alpha=0$ და $\beta=1$. მაშასადამე, (B,23) ფორმულის თანახმად, $p=a$, $q=c-a$. ასე რომ, (B,25) ფორმულის მიხედვით, რეგულარული ამოხსნა შეგვიძლია გამოვხატოთ შემდეგი კონტურული ინტეგრალით:

$$f(z) = \int_C e^{tz} t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} dt. \quad (D,30)$$

ამასთან, ინტეგრირების კონტური ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ, (B,26) ფორმულის თანახმად,

$$\Omega(z, t) = t^a (t-1)^{c-a} e^{tz} \quad (D,31) \dots$$

ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ კონტურის ბოლო წერტილების ჩასმისას. (D,31) ფუნქციის სახიდან აშკარად ჩანს, რომ შესაძლო კონტურები შეიძლება უამრავი იყოს. ასე მაგალითად, როცა $Rec > Rea > 0$, კონტურად შეგვიძლია ავიღოთ (0,1) მონაკვეთი. ამ შემთხვევაში, მართლაც, $\Omega(z, 1) = \Omega(z, 0) = 0$; ხოლო როცა $Rea > 0$ და $Rez > 0$, მაშინ კონტური იქნება $(-\infty, 0)$ მონაკვეთი. ასევე კონტურად შეგვიძლია შევარჩიოთ $C_{\alpha\beta}$ -ორმაგი კონტური (იხ. ნახ. B,1), რომელიც $\Omega(z, t)$ ფუნქციას უბრუნებს საწყის მნიშვნელობას, და სხვა.

ზემოთქმულის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$F(a, c; z) = A \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt. \quad (D,32)$$

A -მუდმივი განვსაზღვროთ პირობით $F(a, c; 0) = 1$; გვექნება

$$\frac{1}{A} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} dt = B(a, c-a); \quad (D,33)$$

თუ გავიხსენებთ (C,55) ფორმულას, საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt. \quad (D,34)$$

ეს წარმოდგენა სამართლიანი იქნება, როცა $Rec > Rea > 0$. კერძო შემთხვევაში, როცა $a=1$ და $c=2$, (D,34) ფორმულიდან მარტივად მივიღებთ

$$F(1, 2; z) = \frac{1}{z} (e^z - 1). \quad (D,35)$$

ამ უბრალო მაგალითიდანაც კი კარგად ჩანს ინტეგრალური წარმოდგენის ხელსაყრელობა ზოგიერთი გამოსახულებების მოძებნის დროს.

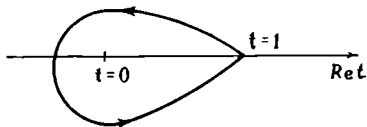
ვთქვათ, $Rec > Rea$ და c -არამთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი შეიძლება ავიღოთ ისეთ C' -კონტურზე, რომელიც იწყება $t=1$ წერტილში დადებითი მიმართულებით, გარს უვლის $t=0$ განსაკუთრებულ წერტილს და კვლავ $t=1$ წერტილში ბრუნდება ნახ. (D, 1).

რადგან (D,30) გამოსახულება რეგულარულია $z=0$ წერტილში, ამიტომ იგი მუდმივის სიზუსტით ამავე წერტილში რეგულარული პიპერგეომეტრიული ფუნქციის ტოლი იქნება. ასე რომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$F(a, c; z) = A \int_{C'} e^{tz} (-t)^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad (D,36)$$

მუდმივი კვლავ $F(a, c; 0) = 1$ პირობით განვსაზღვროთ; გვექნება

$$1 = A \int_{C'} (-t)^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad (D,37)$$



ნახ. (D, 1)

თუ გავიხსენებთ ვილერის ბეტა-ინტეგრალის (C,61) წარმოდგენას და (C,14) ფორმულას, მივიღებთ

$$A = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}; \quad (D,38)$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენაც:

$$F(a, c; z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \int_C e^{tz} (-t)^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad (D,39)$$

გამოვიყენოთ იგივე მეთოდი (D,29) განტოლების ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენებისთვისაც. ამ განტოლების (B,14) განტოლებასთან შედარების შედეგად დავსკვნით, რომ $a_1 = -1$, $a_0 = 2-c$, $b_0 = -a+c-1$ და $b_1 = 0$. განსაკუთრებული წერტილები, ცხადია, კვლავ $\alpha = 0$ და $\beta = 1$ იქნება. ხოლო $\rho = a-c+1$, $q = 1-a$. ასე რომ ამონახსნისათვის გვექნება წარმოდგენა

$$f(z) = z^{1-c} \int_C e^{tz} t^{a-c} (t-1)^{-a} dt. \quad (D,40)$$

$\Omega(z, t)$ ფუნქციას, რომელიც კონტურის შემოვლისას უნდა ისპობოდეს, ამ შემთხვევაში, აქვს გამოხატულება

$$\Omega(z, t) = t^{a-c+1} (t-1)^{1-a} e^{tz}. \quad (D,41)$$

ხელსაყრელია (D,40) ფორმულაში შემავალ ინტეგრალში მოვხადინოთ ცვლადის შეცვლა $z' = tz$, მაშინ გვექნება

$$f(z) = \int_C e^{t-z} (t-z)^{-a} t^{a-c} dt. \quad (D,42)$$

ამ შემთხვევაში კონტურის $[\Omega(z, t)]_C = 0$ პირობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\{t^{a-c+1} (t-z)^{1-a} e^{t-z}\}_C = 0. \quad (D,43)$$

ამ გამოსახულებიდან კი ნათელია, თუ როგორ უნდა შეირჩეს საინტეგრაციო კონტური. იგი უნდა იწყებოდეს $\text{Re } t = -\infty$ -ში, გარს უვლიდეს ორივე $t=0$ და

$t=z$ განსაკუთრებულ წერტილს დადებითი მიმართულებით და კვლავ $\text{Re } t = -\infty$ -ში ბრუნდებოდეს (ნახ. D, 2). ასეთი კონტურის ბოლო წერტილებში e^t -მამრავლის გამო (D,43) პირობა კმაყოფილდება.

შეენიშნოთ, რომ (D,42) ფუნქციას კვლავ არა აქვს $z=0$ განსაკუთრებული წერტილი, ამიტომ ისიც მუდმივის სიზუსტით შეგვიძლია გაეუტოლოთ $F(a, c; z)$ ფუნქციას, რომელსაც $z=0$ წერტილზე ასევე არა აქვს განსაკუთრებულობა. ამგვარად,

$$F(a, c; z) = A \int_C e^{t-z} (t-z)^{-a} t^{a-c} dt; \quad (D,44)$$

მუდმივი განესაზღვროთ იმავე $F(a, c, 0) = 1$ პირობით. ამ შემთხვევაში (D,44) ორივე განსაკუთრებულობა ერთმანეთს დაემთხვევა და, თუ გავიხსენებთ ეილერის $\Gamma(x)$ ფუნქციის გამოხატვას კონტურული (C,48) ინტეგრალით, გვექნება $A \cdot 2\pi i = \Gamma(c)$. მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \int_C e^{t(z-t)^{-a}} t^{a-c} dt. \quad (D,45)$$

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ სხვა შესაძლო ინტეგრალური წარმოდგენებიც.

ახლა განვიხილოთ გადაუგვარებელი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის კონტურული ინტეგრალებით წარმოდგენის საკითხი. ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების (D,1) დიფერენციალური განტოლების (B,1) განტოლებასთან შედარებით დავინახეთ, რომ

$$\mu(x) = x(1-x), \quad \nu(x) = c - (a+b+1)x, \quad \lambda = -ab. \quad (D,46)$$

ცხადია აგრეთვე, რომ

$$\mu''(x) = 2, \quad \nu'(x) = -(a+b+1), \quad \lambda = -ab. \quad (D,47)$$

(B,44) განტოლება (D,47) პარამეტრებისათვის მოგვეცემს

$$\rho(\rho-1) - \rho(a+b+1) - ab = 0. \quad (D,48)$$

ამ განტოლების ფესვები იქნება $\rho = -a$ და $\rho = -b$. ავირჩიოთ $\rho = -a$ ფესვი, რაც ნიშნავს, რომ ჩვენ ვიხილავთ ინტეგრალური წარმოდგენის $K(x, t) = (x-t)^{-a}$ გულს.

მარტივი ინტეგრაციის შედეგად (B,47) ფორმულიდან ვიპოვით

$$v(t) = A t^{a-c} (1-t)^{c-b-1}, \quad (D,49)$$

ხოლო (B,49) ფორმულიდან გვექნება

$$\Omega(x, t) = t^{a-c+1} (1-t)^{c-b} (x-t)^{-a-1}; \quad (D,50)$$

მაშასადამე, (B,12) ფორმულის თანახმად, გვექნება ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$F(a, b, c; z) = A \int_C t^{a-c} (1-t)^{c-b-1} (z-t)^{-a} dt \quad (D,51)$$

იმ პირობით, რომ

$$\{\Omega(x, t)\}_C = 0. \quad (D,52)$$

ხელსაყრელია (D,51) ინტეგრალი გარდაექმნათ ახალი $x = \frac{1}{t}$ ცვლადის შემოღებით; გვექნება

$$F(a, b, c; z) = \text{const} \int_C t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (D,53)$$

ხოლო ახალ აღნიშვნებში კონტურის (D,52) პირობა შემდეგნაირად წარმოვვიღებთ:

$$\{t^b (1-t)^{c-b} (1-tz)^{-a-1}\}_C = 0. \quad (D,54)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$, მაშინ (D,54) პირობა დაკმაყოფილდება კონტურისათვის, რომელსაც (0,1) მონაკვეთის სახე აქვს. მართლაც,

(D,54) ისპობა როგორც $t=0$, ისე $t=1$ წერტილებზე, (D,53) ფორმულაში შემავალი მუდმივის საპოვნელად გამოვიყენოთ პირობა

$$1 = \text{const} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt = B(b, c-b) \text{const.} \quad (\text{D},55)$$

ამგვარად, ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ერთ-ერთ წარმოდგენას ექნება სახე

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt}{(1-tz)^a}, \quad (\text{D},56)$$

რომელიც სამართლიანია, როცა $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$.

შევნიშნოთ, რომ (D,53) ფუნქცია, როცა $\text{Re}(c-b) > 0$, შეგვიძლია გამოვხატოთ შემდეგი სახითაც:

$$F(a, b, c; z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} \int_C' \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt}{(1-tz)^a}, \quad (\text{D},57)$$

სადაც C' -კონტური მოცემულია (D,1) ნახაზზე. იგი იწყება და მთავრდება $t=1$ განსაკუთრებულ წერტილში $t=0$ წერტილის გარს შემოვლის შემდეგ, სასარგებლოა გავიხსენოთ, რომ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია და, მაშასადამე, მისი (D,56) და (D,57) წარმოდგენა სიმეტრიულია a და b -ს მიმართ. ჩვენ რომ ავევრჩია $\rho = -b$ ფესვი, მივიღებდით წარმოდგენას, სადაც a შეცვლილი იქნებოდა b -თი.

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ სხვა ტიპის წარმოდგენებიც. გამოვიყენოთ (D,56) ფორმულა $F(a, b, c; 1)$ მნიშვნელოვანი გამოსახულების საპოვნელად. გვექნება

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt; \quad (\text{D},58)$$

თუ გავიხსენებთ ეილერის ბეტა-ფუნქციის განმარტებას, მივიღებთ

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} B(b, c-a-b), \quad (\text{D},59)$$

ან (C,55) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}. \quad (\text{D},60)$$

ცხადია, ეს ფორმულა სამართლიანია პირობით: $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$ და $\text{Re}(c-b-a) > 0$, შეიძლება დამტკიცება, რომ (D,60) ფორმულა სამართლიანია უფრო ნაკლები შეზღუდვის დროსაც. კერძოდ, როცა $\text{Re}(c-b-a) > 0$ და $c \neq 0, -1, -2, \dots$ და ა. შ. [154].

გამოვიყენოთ (D,45) წარმოდგენა ერთი მნიშვნელოვანი თანაფარდობის დასადგენად. ინტეგრალში შევცვალოთ ცვლადი. კერძოდ t -ს ნაცვლად განვიხილოთ $t = x+z$; გვექნება

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \int e^{t+z[t-(-z)]^{-(c-a)t} dt, \quad (\text{D},61)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$F(a, c; z) = e^z F(c-a, c; -z). \quad (D,62)$$

ამ ფორმულას კუმერის გარდაქმნას უწოდებენ.

სრულიად ანალოგიურად, თუ (D,57)-ში მოვახდენთ შეცვლას $t \rightarrow t[1-z+zt]^{-1}$, მივიღებთ

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right), \quad (D,62')$$

რომელიც აკავშირებს z და $z/z-1$ არგუმენტების ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს.

ზოგიერთი ფუნქციის გამოხატვა გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული მწკრივებით. როცა გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის პარამეტრები ტოლია, მაშინ (D,26) მწკრივი მოგვეცემს ექსპონენტის მწკრივად გაშლას, ე. ი.

$$e^z = F(a, a; z). \quad (D,63)$$

მთელი a და c რიცხვებისათვის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია მნიშვნელოვან პოლინომებზე დაიყვანება.

დაეშვათ, $a = -n$, სადაც n მთელი რიცხვია. ამავე დროს (D,39) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადის შეცვლა $t \rightarrow 1 - \frac{t}{z}$, გვექნება

$$F(-n, c; z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)} \frac{e^z}{z^{c-1}} \int_C \frac{e^{-t} t^{c+n-1} dt}{(t-z)^{n+1}}. \quad (D,64)$$

ანალიზური ფუნქციის წარმოებულებისათვის გაეისხნოთ კოშის (A,8) ფორმულა, მაშინ მივიღებთ

$$F(-n, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} z^{1-c} e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{c+n-1}). \quad (D,65)$$

საინტერესოა იმ შემთხვევის განხილვა, როცა: $a = -n$, ხოლო $c = m$, სადაც n და m მთელი რიცხვებია. (D,45) ფორმულაში შევიტანოთ პარამეტრების ეს მნიშვნელობანი და მოვახდინოთ $t \rightarrow z-t$ შეცვლა. გვექნება

$$F(-n, m; z) = \frac{\Gamma(m)}{2\pi i} \left(\int_C \frac{e^{-t} t^n dt}{(z-t)^{n+m}} \right) (-1)^{m+1} e^z, \quad (D,66)$$

ან. კოშის ზემოაღნიშნული (A,8) ფორმულის გამოყენებით, ვიპოვით:

$$F(-n, m; z) = (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} e^z \frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}} (z^n e^{-z}). \quad (D,67)$$

$F(-n, m; z)$ პოლინომი, როცა n და m მთელი რიცხვებია და $0 \leq m \leq n$, მულ-მივი მამრავლის სიზუსტით ემთხვევა ლაგერის განზოგადებულ პოლინომს, რომელიც ასე განიშარტება:

$$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F(m-n, m+1; z) = \frac{n!}{(n-m)!} e^z \frac{d^m}{dz^m} (e^{-z} z^{n-m}). \quad (D,68)$$

როცა $\eta=0$, მაშინ $L_n^m(x)$ პოლინომს აღნიშნავენ $L_n(x)$ -ით და მას ლაგერის პოლინომს უწოდებენ

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \quad (D,69)$$

ასევე, ჩებიშევი-ერმიტის პოლინომიც შეგვიძლია დავუკავშიროთ გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას. როგორც ცნობილია, $H_{2n}(x)$ ფუნქცია, სადაც n მთელი რიცხვია, აკმაყოფილებს განტოლებას

$$H_{2n}''(x) - 2xH_{2n}'(x) + 4nH_{2n}(x) = 0. \quad (D,70)$$

შემოვიღოთ ახალი $x=z^2$ ცვლადი, მაშინ (D,70) დაემთხვევა გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებას

$$xH_{2n}''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right)H_{2n}'(x) + nH_{2n}(x) = 0; \quad (D,71)$$

მაშასადამე,

$$H_{2n}(z) = (-1)^n 2^n (2n-1)!! F\left(-n, \frac{1}{2}; z^2\right) \quad (D,72)$$

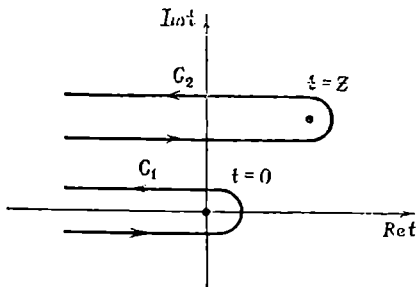
კოეფიციენტი შემოვიღეთ ნორმირებისათვის. სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n 2^{n+1} (2n+1)!! z F\left(-n, \frac{3}{2}; z^2\right). \quad (D,73)$$

გარდა ამისა, შეგვიძლია სხვა მრავალი ფუნქციაც დავაკავშიროთ $F(a, c; z)$ ფუნქციასთან.

გადავარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ასიმპტოტური სახე დიდ x -ებისათვის. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების კონტურული ინტეგრალებით წარმოღობის ფორმულები ასევე ხელსაყრელია ასიმპტოტური გამოსახულებების

საპოვნელად. გამოვიყენოთ (D,45) ფორმულა $F(a, c; z)$ ფუნქციის ასიმპტოტური გამოსახულების დასადგენად დიდი x -ებისათვის. (D,45)-ში გამოვიყენოთ კოშის თეორემა და სინტეგრაციო კონტური ისე ვადეფორმირებთ, რომ იგი ორ, C_1 და C_2 კონტურად გადაიქცეს. C_1 კონტური გარს უვლის $t=0$ წერტილს დაღებითი მიმართულებით, C_2 კი $t=z$ -ს. C_2 კონტურის ქვედა შტო და C_1 -ის ზედა შტო უსა-



ნახ. (D, 3)

სრულობაში უნდა ერთდებოდეს (ნახ. D,3). ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $F(a, c; z)$ -ის

გაშლა $\frac{1}{z}$ ხარისხებად. ამისათვის (D,45) ინტეგრალიდან გამოვიტანოთ $(-z)^{-a}$ გვექნება

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \left\{ (-z)^{-a} \int_{C_1} e^t \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a} t^{a-c} dt + \int_{C_2} e^t (t-z)^{-a} t^{a-c} dt \right\}. \quad (D,74)$$

მეორე ინტეგრალში მოვახდინოთ $t \rightarrow t+z$ შეცვლა; ამით C_2 კონტური გადავა C_1 -ში. გვექნება

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \left\{ (-z)^{-a} \int_{C_1} e^t \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a} t^{a-c} dt + \right. \\ \left. e^z z^{a-c} \int_{C_1} e^t \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{a-c} t^{-a} dt \right\}. \quad (D,75)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$G(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-b)}{2\pi i} \int_{C_1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a} t^{b-1} e^t dt, \quad (D,76)$$

საბოლოოდ მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} G(a, a-c+1, -z) + \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} G(c-a, 1-a; z). \quad (D,77)$$

ვიპოვოთ $G(a, b; z)$ ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა. ამისათვის (D,76) ინტეგრალში შემაჯალი $\left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a}$ გამოსახულება გავშალოთ მწკრივად t/z -ის ხაზისხების მიხედვით; გვექნება

$$G(a, b; z) = \frac{\Gamma(1-b)}{2\pi i} \left\{ \int_{C_1} t^{b-1} e^t dt + \frac{a}{z} \int_{C_1} t^b e^t dt + \right. \\ \left. \frac{a(a+1)}{2!z^2} \int_{C_1} t^{b+1} e^t dt + \dots + \right\}. \quad (D,78)$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ ეილერის $\Gamma(z)$ ფუნქციის (C,48) განმარტებას, მივიღებთ

$$G(a, b; z) = 1 + \frac{a}{z} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(-b)} + \frac{a(a+1)}{2!z^2} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(-1-b)} + \dots + \quad (D,79)$$

დაბოლოს, $\Gamma(x)$ ფუნქციის (C,4) თვისებით $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$. ამიტომ $G(a, b; z)$ ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი მწკრივი:

$$G(a, b; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1!z} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!z^2} + \dots + \quad (D,80)$$

ამგვარად, გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული $F(a, c; z)$ ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა დიდი z -ებისათვის განისაზღვრება (D,77) ფორმულით, რომელშიც $G(a, b; z)$ ფუნქციის მნიშვნელობა უნდა შევიტანოთ (D,80) ფორმულიდან.

საინტერესოა ვიპოვოთ $\psi(a, c; z)$ ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დიდი არგუმენტებისათვის; ამისათვის (D,28') განმარტებაში გამოვიყენოთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული მწკრივების (D,77) ასიმპტოტური მნიშვნელობა. $G(a, b; z)$ ფუნქციები შევცვალოთ ერთიანებით, მაშინ გვექნება

$$\phi(a, c; z) = \left\{ \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(1-[c-a])} + \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} (-1)^{1-c} \right\} (-z)^{-a} + \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \{ \Gamma(c)\Gamma(1-c) + \Gamma(c-1)\Gamma(2-c) \} z^a e^{-c}.$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (C,14) ფორმულას, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ პირველ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება $e^{-\pi a i} = (-1)^a$ -ს ტოლია, ხოლო მეორეში—ნულისა. ამგვარად, მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\phi(a, c; z) = z^{-a}, \quad (z \rightarrow \infty) \quad (D,80')$$

ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ინტეგრალი, რომელიც გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას შეიცავს [8, 158] განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$J_{ac}^{\nu}(z, k) = \int_0^{\infty} e^{-xz} z^{\nu} F(a, c; kz) dz. \quad (D,81)$$

$kz = x$ ახალი ცვლადის შემოღებით ადვილად გამოჩნდება, რომ ამ ინტეგრალის კრებადობისათვის საჭიროა

$$\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} x > |\operatorname{Re} k|, \quad (D,82)$$

ხოლო, როცა $a = -n$, სადაც n მთელი რიცხვია, მაშინ მეორე პირობის ნაცვლად საკმარისია პირობა $\operatorname{Re} x > 0$.

ინტეგრალის ამოხსნის მიზნით $F(a, c; kz)$ წარმოვიდგინოთ (D,39) კონტურული ინტეგრალით; გვექნება

$$J_{ac}^{\nu} = -\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(c-a)} \int_{C_1} \int_0^{\infty} e^{-(x-kt)z} z^{\nu} (-t)^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt dz, \quad (D,83)$$

კონტურული ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოვახდინოთ z -ით ინტეგრაცია; მივიღებთ

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-kt)z} z^{\nu} dz = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(x-kt)^{\nu+1}}; \quad (D,84)$$

მაშასადამე,

$$J_{ac}^{\nu} = -\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}} \int_{C_1} (-t)^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \left(1 - \frac{kt}{x}\right)^{-\nu-1} dt. \quad (D,85)$$

ახლა, თუ ვისარგებლებთ (D,57) ფორმულით, რომელშიც წინასწარ მოვახდინოთ იგივერ შეცვლას $b \rightarrow a$, დავინახავთ, რომ

$$J_{ac}^{\nu}(z, k) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}} F\left(a, \nu+1, c; \frac{k}{x}\right). \quad (D,86)$$

როცა $F\left(a, \nu+1, c; \frac{k}{x}\right)$ პოლინომზე დაიყვანება, J_{ac}^{ν} ინტეგრალი გამოიხატება ელემენტარულ ფუნქციებში; ასე მაგალითად,

$$J_{ac}^{\nu+1}(z, k) = (-1)^a \Gamma(c) \frac{d^n}{dx^n} [x^{a-c} (x-k)^{-a}]. \quad (D,87)$$

ასევე

$$J_{-n,c}^{\nu}(x, k) = (-1)^n \frac{\Gamma(c)\Gamma(\nu+1)(x-k)^{c+n-\nu-1}}{\Gamma(c+n)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{-\nu-1}(x-k)^{\nu-c+1}]. \quad (1,88)$$

განვიხილოთ ამ ფორმულის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როცა $x=k$, ამისათვის n -ური რიგის წარმოებულისათვის გავიხსენოთ ლაიბნიცის ფორმულა

$$J_{-n,c}^{\nu} = (-1)^n \frac{\Gamma(c)\Gamma(\nu+1)(x-k)^{c+n-\nu-1}}{\Gamma(c+n)} \sum_{j=0}^n \binom{j}{n} [x^{-\nu-1}]^{(n-j)} [(x-k)^{\nu-c+1}]^{(j)}, \quad (D,89)$$

აქედან კი ჩანს, რომ $x=k$ შემთხვევაში ნულისაგან ჯამის მხოლოდ n -ური წევრი განსხვავდება. ასე რომ (D,81) ინტეგრალი, როცა $k=x$ და $a=-n$, ტოლი იქნება გამოსახულებისა

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{\nu} F(-n, c; kx) dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{k^{\nu+1}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c+n-\nu-1)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-\nu-1)}. \quad (D,90)$$

ახლა განვიხილოთ მეორე მნიშვნელოვანი ინტეგრალი

$$I_{-n,c}^{\nu}(k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{\nu-1} [F(-n, c; kx)]^2 dx = \frac{1}{k^{\nu}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} F(-n, c; x) F(-n, c; x) dx. \quad (D,91)$$

კრებადობისათვის საჭიროა $\operatorname{Re} \nu > 0$. ამ ინტეგრალში ერთ-ერთი $F(-n, c; x)$ შევცვალოთ (D,65) პოლინომით; გვექნება

$$I_{-n,c}^{\nu}(k) = \frac{\Gamma(c)}{k^{\nu}\Gamma(c+n)} \int_0^{\infty} x^{\nu-c} F(-n, c; z) \frac{d^n}{dz^n} (e^{-x} x^{c+n-1}) dx. \quad (D,92)$$

ნამრავლის წარმოებულისათვის გამოვიყენოთ ლაიბნიცის ფორმულა, მივიღებთ

$$I_{-n,c}^{\nu}(k) = \frac{\Gamma(c)}{k^{\nu}\Gamma(c+n)} \sum_{j=0}^n \binom{j}{n} (-1)^{n-j} [(c+n-1)(c+n-2)\dots(c+n-j)] \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n+\nu-j-1} F(-n, c, x) dx. \quad (D,93)$$

ამ გამოსახულებაში შემაჯავლი ინტეგრალისათვის კი გამოვიყენოთ (D,90) ფორმულა; შედეგად (D,91) ინტეგრალისათვის გვექნება

$$I_{-n,c}^{\nu}(k) = \frac{\Gamma(\nu) n!}{k^{\nu} c(c+1)\dots(c+n-1)} \left\{ 1 + \frac{n(c-\nu-1)(c-\nu)}{1^2 \cdot c} + \frac{n(n-1)(c-\nu-2)(c-\nu-1)(c-\nu)(c-\nu+1)}{1^2 \cdot 2^2 c(c+1)} + \dots + \frac{n!(c-\nu-n)\dots(c-\nu+n-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2 c(c+1)\dots(c+n-1)} \right\}. \quad (D,94)$$

ჩვენ მიერ განხილული ინტეგრალები ხშირად გვხვდება ფიზიკური ამოცანების გადაწყვეტის დროს.

კანტური შექანიკის მოძრაობის განტოლება—შრდინგერის განტოლება—
 ხშირად დაიყვანება ბესელის ე. წ. განზოგადებულ განტოლებაზე. ამიტომ კვან-
 ტურ შექანიკაში ხშირად ამ განტოლების სხვადასხვა ამონახსნებთან გვაქვს საქ-
 მე [148, 150, 151].

ბესელის განტოლებას უწოდებენ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} + (x^2 - p^2) f(x) = 0, \quad (E, 1)$$

სადაც p -რიცხვია. ცხადია, ამონახსნი პარამეტრის სახით დამოკიდებული იქნება.
 ამ რიცხვზე. ბესელის განტოლება მეორე რიგის წრფივი ცვლადოფიციენტებიანი
 დიფერენციალური განტოლებაა, რომელიც ეკუთვნის ჩვენ მიერ განხილულ (B,4)
 განტოლების კლასს. სტანდარტული მეთოდის გამოყენებით ძნელი არ არის იმ
 მწკრივის მოძებნა, რომელიც ბესელის განტოლებას აკმაყოფილებს. (E,1) გან-
 ტოლებას ექნება $x=0$ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, ხოლო $x=\infty$
 იქნება განტოლების ირეგულარული განსაკუთრებული წერტილი. ამოხსნის განმ-
 საზღვრულ (B,8) განტოლებას ექნება $r^2 = p^2$ სახე. ე. ი. (E,1) განტოლების ერთ
 კერძო ამოხსნას $x=0$ წერტილში ექნება x^p გამოხატულება, მეორეს კი x^{-p} . მა-
 შასადამე, პირველი კერძო ამოხსნისათვის $x=0$ იქნება რეგულარული წერტილი,
 მეორისათვის კი პოლუსი, ან განშტოების წერტილი.

განიხილავთ (E,1) განტოლების სამი ტიპის კერძო ამონახსნს:

1. ბესელის $J_p(x)$ ფუნქცია ან პირველი გვარის ცილინდრული ფუნქცია,
2. ნეიმანის $N_p(x)$ ფუნქცია ან მეორე გვარის ცილინდრული ფუნქცია,
3. ჰანკელის $H_p^{(1)}(x)$ და $H_p^{(2)}(x)$ პირველი და მეორე გვარის ფუნქციები ან
 მესამე გვარის ცილინდრული ფუნქციები. ჯერ გამოვარკვიოთ რა სახე აქვს $J_p(x)$
 ფუნქციას. ამისათვის ხელსაყრელია იგი დავეუკავშიროთ გადაგვარებულ ჰიპერგე-
 ომეტრიულ ფუნქციას. (E,1) განტოლებაში მოვახდინოთ: ჩასმა

$$f(x) = x^p e^{-ix} w(x); \quad (E, 2)$$

შედგად მივიღებთ

$$xw''(x) + [2p+1-2ix] w'(x) - i(2v+1) w(x) = 0, \quad (E, 3)$$

ან, თუ მოვახდენთ ცვლადის შეცვლას $x=2ix$ ფორმულით, გვექნება

$$xw''(x) + [2p+1-x] w'(x) - \left(p + \frac{1}{2}\right) w(x) = 0. \quad (E, 4)$$

ეს განტოლება კი გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლე-
 ბაა, რომელსაც ექნება ორი კერძო ამონახსნი. განვიხილოთ რეგულარული ამო-
 ნახსნი $x=0$ წერტილში. ბესელის განტოლების $x=0$ წერტილში რეგულარული
 ამონახსნი გამოიხატება გამოსახულებით

$$w(x) = \text{const } x^p e^{-ix} F\left(p + \frac{1}{2}, 2p+1, 2ix\right). \quad (E, 5)$$

ნებისმიერი მუდმივი ტოლი იყოს $[2^{-p} \Gamma(p+1)]^{-1}$ სიდიდისა. შესაბამის ფუნქციას აღნიშნავენ $J_p(z)$ -ით და სწორედ მას უწოდებენ პირველი გვარის ცილინდრულ ფუნქციას. ამგვარად,

$$J_p(z) = \frac{z^p e^{-iz}}{2^p \Gamma(p+1)} F\left(p + \frac{1}{2}, 2p+1, 2iz\right). \quad (E,6)$$

e^{-iz} მწკრივისა და ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის გადამრავლებით ადვილად დავინახავთ, რომ $J_p(z)$ განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$J_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(p+\mu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} \quad |\arg z| < \pi \quad (E,7)$$

რადგან $z = \infty$ ამ ამონხსნისათვის ირეგულარული წერტილია, ამიტომ ვისაზღვრებთ $|\arg z| < \pi$ არით.

ბესელის განტოლების მეორე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი არამთელი p -სათვის არის $J_{-p}(z)$ ფუნქცია. ამიტომ არამთელი p -სათვის $J_p(z)$ და $J_{-p}(z)$ ფუნდამენტალურ ამონახსნებს აღგვენენ. როცა $p = n$ მთელი ნატურალური რიცხვია, მაშინ $J_{-n}(z)$ აღარ არის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რადგან

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z); \quad (E,8)$$

ამიტომ ამ შემთხვევაში საჭიროა არჩეულ იქნეს სხვა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

ნეიმანისა და ჰანკელის ფუნქციები შეგვიძლია განვსაზღვროთ $J_p(z)$ და $J_{-p}(z)$ ფუნქციების დახმარებით. სახელდობრ,

$$N_p(z) = \frac{\cos p\pi J_p(z) - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}, \quad p \neq 0, \pm 1, \dots; \quad |\arg z| < \pi \quad (E,9)$$

ხოლო

$$H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + iN_p(z), \quad (E,10)$$

$$H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - iN_p(z). \quad (E,11)$$

არამთელი ინდექსის ბესელის ფუნქციები მრავალსახა ფუნქციებია, მათი ძირითადი შტო განიზარტება $|\arg z| < \pi$ არეში (კრიტიკთ $z=0$ -დან $z=-\infty$ -მდე) ცილინდრული ფუნქციების მნიშვნელობანი $|\arg z| > \pi$ არეში ანალოზური გაგრძელებით მოიძებნება. ასე მაგალითად, $J_p(z)$ ცილინდრული ფუნქციის მნიშვნელობა $|\arg z| > \pi$ -სათვის განისაზღვრება ფორმულით

$$J_p(e^{i\pi n} z) = e^{i\pi n} J_p(z). \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (E,12)$$

აღნიშნული სამი გვარის ცილინდრული ფუნქციიდან სათავეში ბესელის მხოლოდ $J_p(z)$ ფუნქციაა სასარული.

კვანტური მექანიკის ამოცანებში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როცა $p = l + 1/2$, სადაც l მთელი დადებითი რიცხვია ნულის ჩათვლით; მაშინ $J_p(z)$ გამოიხატება ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით; სახელდობრ,

$$J_{l+1/2}(z) = (-1)^l z^l \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{d^l}{(zdz)^l} \left(\frac{\sin z}{z}\right), \quad (E,13)$$

$$J_{-(l+1/2)}(z) = z^l \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{d^l}{(zdz)^l} \left(\frac{\cos z}{z} \right). \quad (\text{E}, 14)$$

იხილავთ კომპლექსური არგუმენტის ცილინდრულ ფუნქციებსაც. ესენია:

$$I_p(z) \text{ მოდიფიცირებული ბესელის ფუნქცია} \\ I_p(z) = z^{-p} J_p(iz) \quad (\text{E}, 15)$$

და

$$K_p(z) = \frac{i\pi}{2} i^p H_p^{(1)}(iz), \quad (\text{E}, 16)$$

რომელსაც მოდიფიცირებული პანკელის ან მაკდონალდის ფუნქცია ჰქვია. $I_p(z)$ და $K_p(z)$ წარმოადგენს ბესელის განტოლების

$$z^2 \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + z \frac{df(z)}{dz} - (z^2 + p^2) f(z) = 0 \quad (\text{E}, 17)$$

წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს.

როცა $p = l + 1/2$, მაშინ $I_{\pm(l+1/2)}(z)$ და $K_{l+1/2}(z)$ ფუნქციებისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$I_{\pm(l+1/2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[e^z \sum_{\mu=0}^l \frac{(-1)^\mu (l+\mu)!}{\mu! (l-\mu)! (2z)^\mu} + (-1)^{l+1} e^{-z} \sum_{\mu=0}^l \frac{(l+\mu)!}{\mu! (l-\mu)! (2z)^\mu} \right] \quad (\text{E}, 18)$$

და

$$K_{l+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{\mu=0}^l \frac{(l+\mu)!}{\mu! (l-\mu)! (2z)^\mu}. \quad (\text{E}, 19)$$

ბესელის განზოგადებული განტოლება. ბესელის (E, 1) განტოლებაში მოვხდებით შემდეგი ჩასმა:

$$f(z) = t^\alpha u(t), \quad z = \gamma t^\beta. \quad (\text{E}, 20)$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$t^2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (2\alpha + 1)t \frac{du(t)}{dt} + [\alpha^2 - \beta^2 \rho^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}] u(t) = 0. \quad (\text{E}, 21)$$

ცხადია, ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, (E, 20) აღნიშვნების თანახმად, იქნება შემდეგი:

$$u(t) = t^{-\alpha} f(z) = t^{-\alpha} J_p(\gamma t^\beta). \quad (\text{E}, 22)$$

(E, 21) წარმოადგენს შემდეგი ტიპის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$t^2 u''(t) + at u'(t) + (b + ct^m) u(t) = 0, \quad (\text{E}, 23)$$

სადაც

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = \alpha^2 - \beta^2 \rho^2, \quad c = \gamma^2 \beta^2, \quad m = 2\beta. \quad (\text{E}, 24)$$

(E, 23)-ს ბესელის განზოგადებულ განტოლებას უწოდებენ. ცხადია, ამ განტოლების ამონახსნი იქნება რომელიმე ცილინდრული ფუნქცია, მაგალითად, ბესელის პირველი გვარის ფუნქცია

$$u(t) = t^{-\frac{a-1}{2}} J_p \left(\frac{2\sqrt{c}}{m} t^{\frac{m}{2}} \right), \quad (\text{E}, 25)$$

$$p = \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{m}. \quad (\text{E}, 26)$$

ამგვარად, (E, 25) ფორმულის დახმარებით პირდაპირ შეიძლება დაიწეროს (E, 23) ტიპის განტოლების ამონახსნი. როცა p მთელი არ არის, მაშინ მეორე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნის მისაღებად (E, 25)-ში p -ს ნაცულად უნდა დაეწეროს — p .

სფერული ფუნქციები. კენტურ მექანიკაში შრეინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლება ხშირად დაიყვანება (E, 23) ტიპის ბესელის განზოგადებულ განტოლებაზე. ამ შემთხვევაში $a=2$ და რადიალური განტოლების ამონახსნები წარმოადგენენ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ -ზე გამრავლებულ ცილინდრულ ფუნქციებს. ამიტომ ხელსაყრელი აღმოჩნდა ცილინდრული ფუნქციების ნაცულად ბესელის, ნეიმანისა და ჰანკელის სფერული ფუნქციების შემოღება, რომელთაც შემდეგნაირად განმარტავენ:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad (\text{E}, 27)$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(l+1/2)}(x), \quad (\text{E}, 28)$$

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(1)}(x), \quad (\text{E}, 29)$$

$$h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(2)}(x). \quad (\text{E}, 30)$$

ყველა ეს ფუნქცია (E, 25)-ის თანახმად აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^2 v_l(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d v_l(x)}{dx} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] v_l(x) = 0. \quad (\text{E}, 31)$$

რადგან ყველა ზემოთ შემოღებული სფერული ფუნქცია ერთი და იმავე განტოლების ამონახსნებია, ამიტომ ამ ფუნქციების რივი თვისებები ერთი ფორმულებით გამოიხატება. ამის გამო ფორმულებში, რომლებიც ყველა სფერული ფუნქციისათვის სამართლიანია, გამოვიყენებთ $v_l(x)$ აღნიშვნას.

შენიშნით, რომ (E, 31) წარმოადგენს შრეინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლებას თავისუფალი მოძრაობისათვის, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით $x = kr$ აღნიშვნის შემოღებით, სადაც k ტალღური რიცხვია.

ცხადია, $\chi_l(x) = x v_l(x)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{d^2 \chi_l(x)}{dx^2} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_l(x) = 0. \quad (\text{E}, 32)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ზემოთ შემოღებული სფერული ფუნქციებისათვის ადვილი აქვს შემდეგ რეკურენტულ ფორმულებს:

$$\frac{d v_l(ax)}{dx} = a v_{l-1}(ax) - \frac{l+1}{x} v_l(ax), \quad (\text{E}, 33)$$

$$2 \frac{d v_l(a z)}{dz} = \alpha v_{l-1}(a z) - \alpha v_{l+1}(a z) - \frac{1}{z} v_l(a z), \quad (E, 34)$$

$$v_{l+1}(z) = \frac{2l+1}{z} v_l(z) - v_{l-1}(z), \quad (E, 35)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{l+1} v_l(z)] = z^{l+1} v_{l-1}(z), \quad (E, 36)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{v_l(z)}{z^l} \right] = - \frac{v_{l+1}(z)}{z^l}. \quad (E, 37)$$

ამ ფორმულებს დიდი გამოყენება აქვთ და, როგორც აღვნიშნეთ, სამართლიანია ყველა სფერული ფუნქციისათვის.

ბესელის სფერული ფუნქციები. ახლა შევისწავლოთ ბესელის სფერული ფუნქციის თვისებები. აღვნიშნოთ, რომ ბესელის სფერული ფუნქცია არსი არგუმენტისათვის არსია. $j_l(z)$ ფუნქცია $z=0$ მნიშვნელობაზე სასრულია. $j_l(z)$ ფუნქცია, (E.13) და (E.27) ფორმულების თანახმად, განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$j_l(z) = (-1)^l z^l \frac{d^l}{(z dz)^l} \left(\frac{\sin z}{z} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z), \quad (E, 38)$$

რომელიც l -ის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის მოგვცემს

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad (E, 39)$$

$$j_1(z) = \frac{1}{z^2} (\sin z - z \cos z), \quad (E, 40)$$

$$j_2(z) = \frac{1}{z^3} [(3-z^2)\sin z - 3z \cos z], \quad (E, 41)$$

$$j_{-1}(z) = \frac{\cos z}{z}, \quad (E, 42)$$

$$j_{-2}(z) = -\frac{1}{z^2} (\cos z + z \sin z), \quad (E, 43)$$

და ა. შ. $j_l(z)$ -ის საპირველად ნებისმიერი l -ისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ (E,35) რეკურენტული ფორმულაც; მაგალითად, $j_3(z)$ -ისათვის გვექნება

$$j_3(z) = \frac{5}{z} j_2(z) - j_1(z). \quad (E, 44)$$

ცხადია, (E,6) ფორმულის მიხედვით, როცა $p = l + \frac{1}{2}$, ბესელის სფერული ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი განმარტება:

$$j_l(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^l e^{-iz}}{2^{l+1} \Gamma(l+3/2)} F(l+1, 2l+2; 2iz). \quad (E, 45)$$

როცა, მაგალითად, $l=0$, მაშინ (D,35) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ (E,39) გამოსახულებას.

(E,45) ფორმულის გამოყენებით ადგილად ვიპოვით $j_l(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევას როგორც მცირე, ისე დიდი არგუმენტებისათვის. მართლაც, როცა $x \rightarrow 0$, ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია და ექსპონენტი ერთიანებით შეგვიძლია შევცვალოთ მაშინ [6]

$$j_l(x) = \sqrt{\pi} \frac{x^l}{2^{l+1} \Gamma(l+3/2)}. \quad x \ll \sqrt{2(2l+3)} \quad (E,46)$$

ან თუ გავიხსენებთ (C, 26) ფორმულას, (E,46) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \quad x \ll \sqrt{2(2l+3)} \quad (E,47)$$

ვიპოვოთ $j_l(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევა დიდი x -ებისათვის. ამისათვის (E,45)-ში შემავალი გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის გამოვიყენოთ (D,77) ფორმულა. (D,80)-ით განსაზღვრული $G(a, b; x)$ ფუნქციისათვის შემოვი-საზღვროთ პირველი ერთის ტოლი წევრით, მაშინ

$$j_l(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2l+1}} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)\Gamma(l+1)} \cdot \frac{e^{i\left(x-\frac{l\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(x-\frac{l\pi}{2}\right)}}{2i}. \quad x \rightarrow \infty \quad (E,48)$$

თუ გამოვიყენებთ ვილერის $\Gamma(x)$ ფუნქციის გაორკეცების (C,30) ფორმულას, მაშინ $j_l(x)$ ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$j_l(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)}{x}; \quad x \gg l^2 \quad (E,49)$$

შეენიშნოთ, რომ $j_l(kr)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს შემდეგ პირობას:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty r^2 j_l(kr) j_l(k'r) dr = \frac{\delta(k-k')}{kk'}. \quad (E,50)$$

ამ პირობის გამოყენება ადვილია, თუ გავიხსენებთ, რომ $\chi_{lk}(r) = r j_l(kr)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{d^2 \chi_{lk}(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_{lk}(r) = 0. \quad (E,51)$$

ასეთივე განტოლება დაეწეროთ $\chi_{lk}(r)$ ფუნქციისთვისაც

$$\frac{d^2 \chi_{lk'}(r)}{dr^2} + \left[k'^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_{lk'}(r) = 0. \quad (E,51')$$

(E,51) განტოლება გადავამრავლოთ $\chi_{lk}(r)$ -ზე, (E,51') კი $\chi_{lk}(r)$ -ზე და პირველს გამოვაკლოთ მეორე. შემდეგ ავიღოთ ინტეგრალი 0-დან ∞ -მდე და ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია; გვექნება

$$\left(\chi_{lk} \frac{d\chi_{lk}}{dr} - \chi_{lk} \frac{d\chi_{lk'}}{dr} \right) \Big|_0^\infty + (k^2 - k'^2) \int_0^\infty \chi_{lk}(r) \chi_{lk'}(r) dr = 0. \quad (E,52)$$

რადგან, (E,47) ფორმულის თანახმად, როცა $r \rightarrow 0$, მაშინ $r j_l(kr) = \chi_{l,0} \rightarrow 0$, ამიტომ (E,52) გამოსახულების თავისუფალი წევრი ნულის ჩასმისას ისპობა. ზედა ზღვრის საბოვნელად გავიხსენოთ, რომ

$$\chi_{l,0}(kr) = \frac{1}{k} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right). \quad (E,52')$$

სინუსისა და კოსინუსის ოსცილაციის გამო r -ის უსასრულობისკენ მისწრაფებისას (E,52) გამოსახულების პირველი წევრი, გარდა $k=k'$ მახლობლობისა, ყველა წერტილში საშუალოდ ნული იქნება, ამიტომ $k=k'$ -სათვის ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\chi_{l,0} \chi_{l',0} - \chi_{l',0} \chi_{l,0}) \approx \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k'} \sin\left(k'r - \frac{l'\pi}{2}\right) \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) - \frac{1}{k} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \cos\left(k'r - \frac{l'\pi}{2}\right) \right] = \frac{k'^2 - k^2}{2k^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(k' - k)r}{k' - k}. \quad (E,52'')$$

თუ გავიხსენებთ ღირაკის დელტა ფუნქციის ერთ-ერთ განმარტებას, ამ უკანასკნელი გამოსახულებისათვის მივიღებთ

$$\frac{\pi}{2} (k'^2 - k^2) \frac{\delta(k - k')}{kk'}, \quad (E,52''')$$

ცხრილი (E,1)

l	n_r	$j_l(z)=0$ ფესვები
0	1	3,1416
	2	6,2832
	3	9,4248
	4	12,5664
1	1	4,4934
	2	7,7252
	3	10,9041
	4	14,0662
2	1	5,7634
	2	9,0950
	3	12,3229
	4	15,5146
3	1	6,9879
	2	10,4171
	3	13,8940
	4	16,9236

მაშასადამე, (E,52)-დან მივიღებთ დასამტკიცებელ (E,50) ფორმულას. შეენიშნოთ, რომ, თანახმად (E,38) განსაზღვრისა, გვაქვს ტოლობა

$$j_l(-z) = (-1)^l j_l(z). \quad (E,53)$$

სხვადასხვა ამოცანების გადაწყვეტისას ხშირად საჭიროა ბესელის სფერული ფუნქციების ფესვების ცოდნა.

განტოლებას

$$j_l(z) = 0 \quad (E,54)$$

ყოველი ნამდვილი z -ისათვის აქვს ნამდვილი მარტივი ფესვების უსასრულო სიმრავლე. ეს ფესვები უმეტესად მოიძებნება მიანლობებითი მეთოდებით, რამდენადაც (E,54) წარმოადგენს ტრანსცენდენტულ (z -ის უსასრულო ხარისხის) განტოლებას, ხოლო ასეთი ტიპის განტოლების ამოხსნის ზუსტი მეთოდები არ არსებობს.

შენიშნოთ, რომ $l=0$ შემთხვევაში (E,54) დაიყვანება $\sin z = 0$ განტოლებაზე, ამიტომ ამ კერძო შემთხვევაში შესაძლებელია ფესვების ზუსტად მოძებნა.

(E,1) ცხრილში მოტანილია ფესვების მნიშვნელობანი $l=0, 1, 2$ და 3 -სათვის. თითოეული l -ისათვის მოცემულია მხოლოდ ოთხი ფესვი $n_r=1, 2, 3, 4$.

ნეიმანის სფერული ფუნქცია. როგორც აღვნიშნეთ, ნეიმანის სფერული ფუნქცია განსაზღვრება ფორმულით

$$n_l(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-(l+1/2)}(z). \quad (E,55)$$

(E,14) განმარტების თანახმად, $n_l(z)$ მნიშვნელობები შეგვიძლია ვიპოვოთ ფორმულით

$$n_l(z) = (-1)^{l+1} z^l \frac{d^l}{(z dz)^l} \left(\frac{\cos z}{z} \right). \quad (E,56)$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის დახმარებით იგივე ფუნქცია, ცხადია, შემდეგი სახით გამოიხატება:

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{x^{-(l+1/2)} e^{-ix}}{2^{-(l+1/2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}-l\right)} F(-l, -2l, 2ix). \quad (E,57)$$

ეს ფორმულა განსაკუთრებით ხელსაყრელია ასიმპტოტურ გამოსახულებათა დასადგენად. ასე მაგალითად, როცა $x \rightarrow 0$, გვექნება

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\pi} \frac{2^l}{x^{l+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}-l\right)}. \quad (E,58)$$

ან, თუ გამოვიყენებთ (C,29) ფორმულას $\Gamma\left(\frac{1}{2}-l\right)$ ფუნქციისათვის, მივიღებთ

$$n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}. \quad x \ll \sqrt{2(2l+3)} \quad (E,58)$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობის ($x \rightarrow \infty$ -თვის) (D,77) ფორმულას, რომელშიც G -ფუნქცია შეცვლილია ერთიანი და $\Gamma(-2l)$ ფუნქციისათვის ვისარგებლებთ (C,30) გაორკეების ფორმულით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$n_l(x) = -\frac{\cos(x - l\pi/2)}{x}; \quad x \gg l^2 \quad (E,59)$$

აღენიშნოთ, რომ $n_l(x)$, ისევე როგორც $j_l(x)$ ფუნქცია, არსი არგუმენტებისათვის ნამდვილ ფუნქციას წარმოადგენს. როცა $r \rightarrow \infty$ ნეიმანის სფერული ფუნქცია $j_l(x)$ ფუნქციის მსგავსად მიისწრაფის ნულისაკენ, სათავეში კი განშლადია, რამდენადაც წარმოადგენს (E,31) განტოლების არარეგულარულ ამონახსნს. (E,56) ფორმულიდან აშკარაა, რომ

$$n_l(-x) = (-1)^{l+1} n_l(x). \quad (E,60)$$

მოვიტანოთ ფორმულები ნეიმანის $n_l(x)$ ფუნქციისათვის l -ის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის. (E,56)-დან ვიპოვით:

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad (E,61)$$

$$n_1(x) = -\frac{1}{x^2} (\cos x + x \sin x), \quad (E,62)$$

$$n_2(x) = -\frac{1}{x^3} \{ (3-x^2) \cos x + 3x \sin x \}, \quad (E,63)$$

$$n_{-1}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (E,64)$$

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-(l+1)}(x) \quad (E,64')$$

და ა. შ. შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერი l -ინდექსის ნეიმანის სფერული ფუნქცია.

ჰანკელის სფერული ფუნქციები. ჰანკელის სფერული ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x), \quad (\text{E},65)$$

$$h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x); \quad (\text{E},66)$$

(E,38) და (E,56) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$h_l^{(1)}(x) = (-1)^l x^l \frac{d^l}{(xdx)^l} \left[\frac{e^{ix}}{ix} \right]; \quad (\text{E},67)$$

ამასთან, ცხადია, არსი არგუმენტებისათვის

$$h_l^{(1)}(x) = h_l^{(2)*}(x). \quad (\text{E},68)$$

თუ გავიხსენებთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების ასიმპტოტური მნიშვნელობის ფორმულებს დიდი მანძილებისათვის, ჰანკელის სფერული ფუნქციებისათვის გვექნება გამოხატულება

$$h_l^{(1)}(x) = \frac{e^{i(z - \frac{l\pi}{2})}}{ix}, \quad x \gg l^2 \quad (\text{E},69)$$

$$h_l^{(2)}(x) = \frac{e^{-i(z - \frac{l\pi}{2})}}{-ix}, \quad x \gg l^2 \quad (\text{E},70)$$

ხოლო სათავის მახლობლად ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს ექნებათ სახე

$$h_l^{(1)}(x) = -i \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad \text{როცა } x \ll \sqrt{2(2l+3)} \quad (\text{E},71)$$

$$h_l^{(2)}(x) = i \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}; \quad \text{როცა } x \ll \sqrt{2(2l+3)} \quad (\text{E},72)$$

მოვიტანოთ ჰანკელის სფერული ფუნქციების გამოხატულება $l=0$ და $l=1$ შემთხვევაში:

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{ix}, \quad h_0^{(2)}(x) = \frac{e^{-ix}}{-ix}. \quad (\text{E},73)$$

$$h_1^{(1)}(x) = -e^{ix} \frac{i+x}{x^2}, \quad h_1^{(2)}(x) = -e^{-ix} \frac{-i+x}{x^2}, \quad (\text{E},74)$$

$$h_{-1}^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{x}, \quad h_{-1}^{(2)}(x) = \frac{e^{-ix}}{x}. \quad (\text{E},75)$$

ადვილად შემოწმდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$h_l^{(1)}(-x) = (-1)^l h_l^{(1)*}(x) \quad (\text{E},76)$$

$$h_l^{(2)}(-x) = (-1)^l h_l^{(2)*}(x). \quad (\text{E},77)$$

ასევე გვექნება

$$h_{l-1}^{(1)}(x) = i(-1)^{l-1} h_{l-1}^{(1)}(x), \quad (\text{E},77')$$

$$h_{l-1}^{(2)}(x) = -i(-1)^{l-1} h_{l-1}^{(2)}(x). \quad (\text{E},77'')$$

*) პირველი და მეორე გვარის ჰანკელის სფერულ ფუნქციებს ხშირად $h_l^{(\pm)}(x)$ -ითაც აღნიშნავენ.

მაკდონალდის სფერული ფუნქცია. ახლა შემოვიღოთ მაკდონალდის სფერული ფუნქცია

$$k_l(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} K_{l+1/2}(z), \quad (E,78)$$

რომელიც დაკავშირებულია წარმოსახვითი არგუმენტის ჰანკელის სფერულ ფუნქციასთან. სახელდობრ, (E,16) ფორმულის თანახმად,

$$k_l(z) = -i^l h_l^{(1)}(iz). \quad (E,79)$$

$k_l(z)$ ფუნქცია განისაზღვრება სასრული მწკრივით, რომელსაც, (E,19) ფორმულის თანახმად, ექნება გამოხატულება

$$k_l(z) = \frac{e^{-z}}{z} \sum_{\mu=0}^l \frac{(l+\mu)!}{\mu! (l-\mu)! (2z)^\mu}. \quad (E,80)$$

მაკდონალდის სფერულ ფუნქციას დიდი არგუმენტებისათვის ექნება მნიშვნელობა

$$k_l(z) = k_0(z) = \frac{e^{-z}}{z}, \quad z \gg l^2 \quad (E,81)$$

მაშასადამე, როცა $z \rightarrow \infty$, მაშინ $k_l(z)$ ფუნქცია ექსპონენციურად ისპობა, რის გამოც ამ ფუნქციას დიდი გამოყენება აქვს ფიზიკურ ამოცანებში. მცირე z -ებისათვის კი გვექნება

$$k_l(z) = \frac{(2l-1)!!}{z^{l+1}}, \quad z \ll \sqrt{2(2l+3)} \quad (E,82)$$

ასე რომ $k_l(z)$ ფუნქცია სათავეში განშლადია. მოვიტანოთ მაკდონალდის სფერული ფუნქციის მნიშვნელობა $l=0, 1$ და 2 -ისათვის. ცხადია,

$$k_0(z) = k_{-1}(z) = \frac{e^{-z}}{z}, \quad (E,83)$$

$$k_1(z) = \frac{1+z}{z^2} e^{-z}, \quad (E,84)$$

$$k_2(z) = \frac{z^2+3z+3}{z^3} e^{-z}. \quad (E,85)$$

რეკურენტულ ფორმულებს აქვთ სახე:

$$\frac{dk_l(az)}{dz} = -ak_{l-1}(az) - \frac{l+1}{z} k_l(az), \quad (E,86)$$

$$k_{l+1}(az) = k_{l-1}(az) + \frac{2l+1}{az} k_l(az). \quad (E,87)$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ რეკურენტული ფორმულები $k_l(z)$ ფუნქციებისათვის განსხვავდება ბესელის, ნეიმანისა და ჰანკელის სფერული ფუნქციების რეკურენტული ფორმულებისაგან.

შეენიშნოთ, რომ $\chi_l(z) = zk_l(az)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ბესელის შემდეგ განზოგადებულ განტოლებას:

$$\frac{d^2 \chi_l(z)}{dz^2} - \left[a^2 + \frac{l(l+1)}{z^2} \right] \chi_l(z) = 0. \quad (E,88)$$

ამ განტოლების განსხვავება (E,32) განტოლებისაგან განაპირობებს განსხვავებას რეკურენტულ ფორმულებშიც.

ვრონსკის დეტერმინანტი. ჩვენ მიერ განხილული ფუნქციებიდან წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნების წყვილებს აღვნიშნავთ $j_l(x)$ და $n_l(x)$ ფუნქციები ერთი მხრივ და $h_l^{(1)}(x)$ და $h_l^{(2)}(x)$ —მეორე მხრივ. ეს კი ნიშნავს, რომ ვრონსკის შესაბამისი დეტერმინანტები ნულისაგან განსხვავდება. შესანიშნავია ის გარემოება, რომ ვრონსკის დეტერმინანტი ბესელის ფუნქციებიდან l -ზე დამოკიდებული არ არის. ამ თვისების გამო ვრონსკიანები დიდ გამოყენებას პოულობენ სხვადასხვა გამოთვლის დროს. ავიღოთ ბესელის რომელიმე სფერული ფუნქცია $v_l(x)$ და მისი შესაბამისი წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქცია, რომელიც \bar{v}_l -ით აღვნიშნოთ. მაშინ, თუ გამოვიყენებთ (E,33) ფორმულას, ვრონსკის დეტერმინანტს

$$W[v_l(x), \bar{v}_l(x)] = \begin{vmatrix} v_l(x) & \bar{v}_l(x) \\ v_l'(x) & \bar{v}_l'(x) \end{vmatrix} \quad (E,89)$$

ექნება შემდეგი სახე:

$$W[v_l(x), \bar{v}_l(x)] = v_l(x)\bar{v}_{l-1}(x) - \bar{v}_l(x)v_{l-1}(x). \quad (E,90)$$

ავიღოთ კერძო შემთხვევა: $v_l(x) = j_l(x)$, $\bar{v}_l(x) = n_l(x)$, მაშინ, თუ (E,90) ფორმულაში შევიტანთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების ასიმპტოტურ მნიშვნელობებს (სულ ერთია რომელს: მცირე არგუმენტებისათვის $x \ll 1$, თუ დიდი არგუმენტებისათვის $x \gg 1$), მივიღებთ

$$W[j_l(x), n_l(x)] = j_l(x)n_{l-1}(x) - n_l(x)j_{l-1}(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (E,91)$$

სრულიად ანალოგიურად

$$W[h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)] = h_l^{(1)}(x)h_{l-1}^{(2)}(x) - h_l^{(2)}(x)h_{l-1}^{(1)}(x) = -\frac{2i}{x^2}. \quad (E,92)$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $v_l(x)$ სფერული ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წრფივად დამოუკიდებელი $j_l(x)$, $n_l(x)$ ან $h_l^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x)$ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია, ე. ი.

$$v_l(x) = a j_l(x) + b n_l(x) = c h_l^{(1)}(x) + d h_l^{(2)}(x). \quad (E,93)$$

ასე მაგალითად,

$$j_l(x) = \frac{1}{2} [h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)], \quad (E,94)$$

$$n_l(x) = \frac{1}{2i} [h_l^{(1)}(x) - h_l^{(2)}(x)] \quad (E,95)$$

და ა. შ.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ასევე წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს შეადგენენ $k_l(x)$ და მოდიფიცირებული სფერული ბესელის ფუნქცია

$$i_l(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} I_{l+1/2}(x). \quad (E,96)$$

მათი ვრონსკიანიც, ცხადია, ნულისაგან განსხვავდება და ამავე დროს l -ზე დამოკიდებული არ არის.

ზოგიერთი ინტეგრალი ბესელის სფერული ფუნქციებიდან. მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$\int_0^x j_l^*(x) x^2 dx = \frac{x^3}{2} \{j_l^*(ax) - j_{l-1}(ax) j_{l+1}(ax)\}, \quad l > 0 \quad (E,97)$$

$$\int_x^\infty k_l^*(bx) x^2 dx = -\frac{x^3}{2} \{k_l^*(bx) - k_{l-1}(bx) k_{l+1}(bx)\}, \quad (E,98)$$

$$\int_0^x j_l(ax) j_l(bx) x^2 dx = \frac{bx^2 j_l(ax) j_{l-1}(bx) - ax^2 j_{l-1}(ax) j_l(bx)}{a^2 - b^2}, \quad (E,99)$$

$$\int_x^\infty j_l(ax) k_l(bx) x^2 dx = \frac{bx^2 j_l(ax) k_{l-1}(bx) + ax^2 j_{l-1}(ax) k_l(bx)}{a^2 + b^2}. \quad (E,100)$$

ქვემოთ მოვიტანთ ასეთი ტიპის ინტეგრალების ამოხსნის მეთოდს. ვთქვათ, $v_l(x)$ და $\bar{v}_l(x)$ აღნიშნავს რომელიმე სფერულ ფუნქციას: ბესელის, ნეიმანის ან ჰანკელისას. მაშინ $\chi_l(x) = xv_l(ax)$ და $U_l(x) = x\bar{v}_l(bx)$ ფუნქციები შესაბამისად დააკმაყოფილებენ განტოლებებს

$$\chi_l'' + \left[a^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_l = 0, \quad (E,101)$$

$$U_l'' + \left[b^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] U_l = 0. \quad (E,101')$$

პირველი განტოლება გავამრავლოთ $U_l(x)$ -ზე, მეორე კი $-\chi_l(x)$ -ზე და პირველს გამოვაკლოთ მეორე. შემდეგ ავიღოთ ინტეგრალი და წარმოებულების შემცველ წევრში ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია. მივიღებთ

$$(U_l \chi_l' - \chi_l U_l') + (a^2 - b^2) \int \chi_l(ax) U_l(bx) dx = 0. \quad (E,102)$$

არეკურენტული (E,33) ფორმულის გამოყენებით მარტივად გვექნება

$$U_l \chi_l' - \chi_l U_l' = ax^2 v_{l-1}(ax) \bar{v}_l(bx) - x^2 b v_l(ax) \bar{v}_{l-1}(bx). \quad (E,103)$$

ამ უკანასკნელის (E,102)-ში შეტანით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\int x^2 v_l(ax) \bar{v}_l(bx) dx = \frac{bx^2 v_l(ax) \bar{v}_{l-1}(bx) - ax^2 v_{l-1}(ax) \bar{v}_l(bx)}{a^2 - b^2}. \quad (E,104)$$

ამ ინტეგრალის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (E,97) და (E,99) ინტეგრალები. სრულიად ანალოგიურად (E,100) ტიპის ინტეგრალის ამოსახსნელად უნდა განვიხილოთ ისევ (E,101) და (E,101') განტოლებები, სადაც უკანასკნელში $b \rightarrow ib$. მაშინ ამ განტოლებას დააკმაყოფილებს $U_l(x) = x k_l(bx)$ ფუნქცია.

ზემოთ ჩატარებული გამოთვლების ანალოგიურად მივიღებთ

$$U_l \chi_l' - \chi_l U_l' = ax^2 v_{l-1}(ax) k_l(bx) + bx^2 v_l(ax) k_{l-1}(bx). \quad (E,105)$$

ახლა მოვახდინოთ (E,102)-ში $b \rightarrow ib$ შეცვლა და მასში შევიტანოთ (E,105) გამოსახლება, გვექნება

$$\int x^2 v_l(ax) k_l(bx) dx = -\frac{bx^2 v_l(ax) k_{l-1}(bx) + ax^2 v_{l-1}(ax) k_l(bx)}{a^2 + b^2}, \quad (E,106)$$

რომლის კერძო შემთხვევასაც წარმოადგენს (E,100) ინტეგრალი.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ ზემოთ გამოტანილი ინტეგრლებიდან ზღვარში მიიღება მთელი რიგი საინტერესო ფორმულები. ასე მაგალითად, როცა $x \rightarrow \infty$, მაშინ (E,99) მოგვცემს (E,50) ფორმულას. ასევე, როცა $x \rightarrow 0$ -საკენ, (E,100) ფორმულა (E,47) და (E,82) გამოსახულებათა გათვალისწინებით მოგვცემს

$$\int_0^{\infty} j_l(ax)k_l(bx)x^2 dx = \frac{a^l}{b^{l+1}(a^2 + b^2)}. \quad (E,107).$$

ეილერის განტოლება. აღვნიშნოთ, რომ, როცა ბესელის განზოგადებულ განტოლებაში $c=0$, ან $m=0$, გვექნება

$$t^2 U'' + at U' + \rho U = 0, \quad (E,108).$$

სადაც ρ მუდმივია. ამ განტოლებას ეილერის განტოლება ეწოდება. იგი $x = \ln t$ აღნიშნით მუდმივ კოეფიციენტებიან განტოლებაზე დაიყვანება

$$U'' - (1-a)U' + \rho U = 0, \quad (E,109).$$

ამ განტოლების ამოხსნა კი მარტივია. ვეძებთ ამოხსნა $U = e^{nx}$ (ე. ი. $U = t^n$). (E,109) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$n^2 - (1-a)n + \rho = 0, \quad (E,110).$$

საიდანაც

$$n_{\pm} = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - \rho} \quad (E,111);$$

ზოგად ამონახსნს კი ექნება გამოხატულება

$$U(t) = C_1 t^{n_+} + C_2 t^{n_-} \quad (E,112)$$

განვიხილოთ შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლება მცირე r -ებისათვის. როცა პოტენციალი აკმაყოფილებს პირობას $r^2 V(r) = 0$, მაშინ განტო-

ლებაში შეგვიძლია გადავადოთ როგორც სრული, ისე პოტენციალური ენერჯია-ცენტრამშორ პოტენციალურ ენერჯიასთან შედარებით; დაგვრჩება

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l = 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (E,113);$$

რომელიც წარმოადგენს ეილერის განტოლებას. (E,108) განტოლებასთან შედარება-გაძლევს $a=2$, $\rho = -l(l+1)$, ამიტომ (E,113)-ის ზოგად ამოხსნას ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$R_l(r) = C_1 r^l + \frac{C_2}{r^{l+1}}. \quad (E,114),$$

სათავეში სასრულ ამონახსნს მივიღებთ მაშინ, როცა C_2 გავუტოლებთ ნულს.

ბესელის განტოლების ამონახსნების ინტეგრალური წარმოდგენა. ამ ამოცანის გადაწყვეტისას ჩვენ შეგვიძლია გამოვიდეთ უშუალოდ (E,1)-დან. მაგრამ უმჯობესია ამოსავალ განტოლებად ავირჩიოთ (E,4), რადგან მისი ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენები ნაპოვნი გვაქვს § D-ში; (E,1) განტოლების რეგულარული ამონახსნი კი გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციასთან დაკავშირებულია (E,6) ფორმულით. ამგვარად, საკმარისი იქნება გავიხსენოთ, თუ როგორი ინტეგრალური წარმოდგენა აქვს ბესელის ფუნქციის განმსაზღვრელ

$F(p+1/2, 2p+1, 2iz)$ ფუნქციას. გამოვიყენოთ (D,34) ინტეგრალური წარმოდგენა, ამ წარმოდგენის მიხედვით მივიღებთ

$$F(p+1/2, 2p+1, 2iz) = \frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1/2)\Gamma(p+1/2)} \int_0^1 e^{zt} t^{p-\frac{1}{2}} (1-t)^{p-\frac{1}{2}} dt. \quad (E,115).$$

ეს მნიშვნელობა შევითანოთ (E,6) ფორმულაში და შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$2t=1-iz. \quad (E,115')$$

ასეთი გარდაქმნის წყალობით განსაკუთრებული $t=0$ და $t=1$ წერტილები გადავლენ $\zeta=-i$ და $\zeta=i$ -ში. გარდა ამისა, გავიხსენოთ, რომ $\Gamma(x)$ ფუნქციის (C,30) გაორკეცების ფორმულა $x=(p+1/2)$ -ისათვის მოგვცემს

$$\frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+1/2)} = \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi}}. \quad (E,116).$$

შედგავდ მივიღებთ

$$J_p(z) = \frac{(z/2)^p}{i\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \int_{-i}^{+i} e^{z\zeta} (1+\zeta^2)^{p-\frac{1}{2}} d\zeta. \quad (E,117)$$

კიდევ ერთხელ მოვახდინოთ ცვლადის შეცვლა, კერძოდ ავიღოთ $i\tau = \zeta = e^{\frac{i\pi}{2}} \tau$; ეს ნიშნავს ζ კომპლექსური სიბრტყის მობრუნებას $-\frac{\pi}{2}$ კუთხეზე. ასეთი შეცვლით განსაკუთრებული წერტილები $\pm i$ გადავლენ არსი ღერძის ± 1 წერტილებში. შედეგად მივიღებთ

$$J_p(z) = \frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \int_{-1}^{+1} e^{iz\tau} (1-\tau^2)^{p-\frac{1}{2}} d\tau. \quad (\operatorname{Re} p > -1/2) \quad (E,118).$$

ამ წარმოდგენას ხშირად სხვა სახითაც გამოხატავენ. სათანადო ფორმულას მივიღებთ, თუ შემოვიღებთ ახალ $\tau = \sin \varphi$ ცვლადს; გვექნება

$$J_p(z) = \frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi e^{iz \sin \varphi} d\varphi. \quad (E,119).$$

მოეხდინოთ $e^{iz \sin \varphi} = \cos(x \sin \varphi) + i \sin(x \sin \varphi)$ გაშლა, რადგან ინტეგრალი სიმეტრიულ საზღვრებში აიღება, ამიტომ დაგვრჩება

$$J_p(x) = \frac{(x/2)^p}{\sqrt{\pi} \Gamma(p+1/2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \cos(x \sin \varphi) d\varphi. \quad (\text{E}, 120)$$

ცხადია, ამ წარმოდგენაში $\text{Re } p > -1/2$.

ადვილი მისახვედრია, რომ ბესელის სფერული ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$j_l(x) = \frac{x^l}{2^{l+1} l!} \int_{-1}^{+1} e^{iz\tau} (1-\tau^2)^l d\tau. \quad (\text{E}, 121)$$

ჩაეტაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია, გვექნება

$$j_l(x) = \frac{1}{2^{l+1} l!} \int_{-1}^{+1} e^{iz\tau} \frac{d^l}{d\tau^l} (\tau^2-1)^l d\tau, \quad (\text{E}, 122)$$

თუ გავიხსენებთ ლეჟანდრის პოლინომის განმარტებას

$$P_l(\tau) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\tau^l} (\tau^2-1)^l, \quad (\text{E}, 123)$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$j_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{+1} e^{iz\tau} P_l(\tau) d\tau. \quad (\text{E}, 124)$$

ან, თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადს $\tau = \sin \varphi$, გვექნება

$$j_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} P_l(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (\text{E}, 125)$$

პანკელის $H_p^{(1)}(x)$ და $H_p^{(2)}(x)$ ფუნქციების ინტეგრალური წარმოდგენის მოსაძებნად ასევე შეგვიძლია გამოვიყენოთ (B,27) და (B,28) ფორმულები, სადაც ავიღებთ პარამეტრებს, რომლებიც განისაზღვრება (B,14) და (E,4) განტოლებების შედარებით. შემდეგ, ამ ორი ამოხსნიდან, (B,30) ფორმულის გამოყენებით, შეგვიძლია ვიპოვოთ $x=0$ წერტილში რეგულარული ამონახსნიც, ამასთან იგი დაემთხვევა სათავეში რეგულარულ ბესელის $J_p(x)$ ფუნქციას.

პანკელის ფუნქციების ინტეგრალური წარმოდგენა შეგვიძლია აგრეთვე ვიპოვოთ (E,117) ფორმულიდან, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$J_p(x) = \frac{1}{2} [H_p^{(1)}(x) + H_p^{(2)}(x)]. \quad (\text{E}, 126)$$

ვადავწეროთ (E,117) წარმოდგენა შემდეგნაირად:

$$J_p(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{i\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \left\{ \int_{-i}^{-\infty} e^{z\zeta}(1+\zeta^2)^{p-\frac{1}{2}} d\zeta + \int_{-\infty}^i e^{z\zeta}(1+\zeta^2)^{p-1/2} d\zeta \right\}; \quad (E,127)$$

შეშასაღამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{i\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \int_{-\infty}^i e^{z\zeta}(1+\zeta^2)^{p-1/2} d\zeta, \quad (E,128)$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{i\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \int_{-i}^{-\infty} e^{z\zeta}(1+\zeta^2)^{p-1/2} d\zeta. \quad (E,129)$$

ცხადია, ნამდვილი z -ისათვის $H_p^{(1)*}(z) = H_p^{(2)}(z)$. ცვლადის შეცვლით ამ გამოსახულებებს შეგვიძლია მივცეთ სხვა სახეც, რომელიც ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა ამოცანებში. (E,128) და (E,129) ფორმულებიდან მარტივად ჩაიწერება ჰანკელის სფერული ფუნქციების წარმოდგენაც. (E,95) ფორმულის გამოყენებით კი ვიპოვით ნეიმანის სფერული ფუნქციის ინტეგრალურ წარმოდგენასაც.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$J = \int_{r_0}^{\infty} j_1(ax)h_1^{(1)}(bx)x^2 dx. \quad (E,130)$$

ეს ინტეგრალი განვიხილოთ როგორც ზღვარი:

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r_0}^R j_1(ax)h_1^{(1)}(bx)x^2 dx. \quad (E,131)$$

თანხმად (E,104) ფორმულისა, განუზღვრელი ინტეგრალი ტოლი იქნება

$$\int j_1(ax)h_1^{(1)}(bx)x^2 dx = -\frac{x^2\Gamma_1(a, b^+|x)}{a^2 - b^2}, \quad (E,132)$$

სადაც

$$\Gamma_1(a, b^+|x) = aj_{l-1}(ax)h_l^{(1)}(bx) - bj_l(ax)h_{l-1}^{(1)}(bx). \quad (E,133)$$

შეშასაღამე,

$$J = \frac{-1}{a^2 - b^2} \lim_{R \rightarrow \infty} [R^2\Gamma_1(a, b^+|R) - r_0^2\Gamma_1(a, b^+|r_0)]. \quad (E,134)$$

თუ გავიხსენებთ ბესელისა და ჰანკელის სფერული ფუნქციების ასიმპტოტურ გამოსახულებებს დიდი არგუმენტებისათვის, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [R^2\Gamma_1(a, b^+|R)] = \frac{-i(a^2 - b^2)}{2ab} \left\{ \frac{e^{-i(a-b)R}}{a-b} + (-1)^l \frac{e^{i(a+b)R}}{a+b} \right\} \quad (E,135)$$

ამ გამოსახულების მეორე წევრი ძლიერ ოსცილირებადი, ამიტომ იგი შეგვიძლია გადავადგოთ. პირველი წევრიც ოსცილირებადი, მაგრამ იგი ნულისაგან განსხვავებული იქნება, როცა $a=b$, ამიტომ იგი შევინარჩუნოთ. როცა $a=b$, მაშინ, ვრონსკიანის თვისების გამო,

$$\Gamma_1(a, b^+ | r_0) = \frac{-i}{ar_0^2}; \quad (\text{E},136)$$

ამიტომ გამოსახულება

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{2iab r_0^2 \Gamma_1(a, b^+ | r_0)}{(a+b)} = 1, \quad (\text{E},137)$$

რის გამოც (E,135) შეგვიძლია გავამრავლოთ ამ სიდიდესზე. შედეგად გვქვია

$$J = \frac{-r_0^2 \Gamma_1(a, b^+ | r_0)}{a+b} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{b-a} - \frac{e^{i(b-a)R}}{b-a} \right\}. \quad (\text{E},138)$$

გარდაქმნათ ფიგურულ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება; იგი ტოლი იქნება

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - \cos(b-a)R}{b-a} - i \frac{\sin(b-a)R}{b-a} \right\} = \\ & = \mathcal{P} \frac{1}{b-a} - i\pi \delta(b-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{b-a + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{E},139)$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int_0^\infty j_1(ax) h_1^{(1)}(bx) x^2 dx = \frac{-r_0^2 \Gamma_1(a, b^+ | r_0)}{b^2 - a^2 + i\varepsilon}. \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+) \quad (\text{E},140)$$

სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ ინტეგრალის მნიშვნელობას, როცა ინტეგრალში $h_1^{(1)}(bx)$ ფუნქციის ნაცვლად მონაწილეობს ჰანკელის მეორე გვარის $h_1^{(2)}(bx)$ ფუნქცია. ამისათვის (E,140) ინტეგრალში საკმარისია $i\varepsilon$ -ის წინ ავიღოთ მინუს ნიშანი, ხოლო (E,133) განმარტებაში $h_1^{(1)}$ ფუნქციის ნაცვლად ვივულისხმოთ მეორე გვარის ჰანკელის ფუნქცია. (E,140) ტიპის ინტეგრალები ხშირად გვხვდება პრაქტიკული გამოთვლების დროს.

მაგალითი 2. გამოვიყენოთ ბესელის სფერული ფუნქციის (E,124) ინტეგრალური წარმოდგენა და ვიპოვოთ ბრტყელი ტალღის ლეჟანდრის პოლინომებად გაშლის ჩვენთვის კარგად ცნობილი ფორმულა. ცხადია,

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(r) P_l(\cos \theta). \quad (\text{E},142)$$

$A_l(r)$ უცნობი ფუნქციის მოძებნა ადვილია, თუ (E,142) გამოსახულებას გავამრავლებთ $P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ -ზე და ავიღებთ ინტეგრალს $(0, \pi)$ შუალედში. ლეჟანდრის პოლინომების ორთო-ნორმირებისა და (E,124) წარმოდგენის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$A_l(r) = i^{l(2l+1)} j_l(kr), \quad (\text{E},143)$$

რაც (E,142)-ში შეტანით მოგვცემს საძიებელ გაშლას.

§ F. უიბაჰარის ფუნქციები

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების დიფერენციალურ განტოლებაში

$$x f''(x) + (c-x) f'(x) - a f(x) = 0 \quad (F,1)$$

შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია

$$f(x) = x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}} w(x); \quad (F,2)$$

მარტივი გარდაქმნებით $w(x)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას [154, 156]:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{x} + \frac{1/4 - \mu^2}{x^2} \right] w(x) = 0, \quad (F,3)$$

სადაც

$$\mu = \frac{c-1}{2}, \quad \lambda = \frac{c}{2} - a; \quad (F,4)$$

ან, შებრუნებით,

$$a = \frac{1}{2} + \mu - \lambda, \quad c = 1 + 2\mu. \quad (F,4')$$

ზემოთ მიღებულ (F,3) განტოლებას უიტეკერის განტოლებას უწოდებენ. რადგან (F,1) განტოლებას აქვს ორი კერძო ამონახსნი:

$$f_1(x) = F(a, c; x), \quad (F,5)$$

$$f_2(x) = x^{1-c} F(a-c+1, 2-c, x). \quad (F,6)$$

ამიტომ (F,2) გამოსახულების შესაბამისად უიტეკერის განტოლების კერძო ამონახსნებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$M_{\lambda, \mu}(x) = x^{\mu+1/2} e^{-\frac{x}{2}} F\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu+1; x\right) \quad (F,7)$$

$$M_{\lambda, -\mu}(x) = x^{-\mu+1/2} e^{-\frac{x}{2}} F\left(-\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 1-2\mu; x\right). \quad (F,8)$$

ზოგადი ამონახსნი იქნება ამ ამონახსნების წრფივი კომბინაცია. როცა $2\mu = \pm 1, \pm 2, \dots$, მაშინ ეს ამონახსნები აზრს კარგავენ. ამისათვის $M_{\lambda, \pm\mu}(x)$ უიტეკერის ფუნქციების ნაცვლად იხილავენ უიტეკერის შემდეგ ფუნქციას:

$$W_{\lambda\mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2 - \mu - \lambda)} M_{\lambda\mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(x). \quad (F,9)$$

უიტეკერის ეს ფუნქცია წარმოადგენს (F,3) განტოლების ისეთ ამონახსნს, რომელიც, როცა 2μ მთელი რიცხვია, ასევე აკმაყოფილებს უიტეკერის განტოლებას. ადვილი საჩვენებელია, რომ $W_{\lambda\mu}(x)$ და $W_{-\lambda\mu}(-x)$ ფუნქციები იქნებიან (F,3) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები.

თუ $M_{\lambda, \pm\mu}(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობებს შევითანთ (F,9) განმარტებაში, მაშინ უიტეკერის ფუნქციას გამოეხატათ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებით; სახელდობრ, გვექნება

$$W_{\lambda\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-\frac{z}{2}} \left\{ \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\mu-\lambda)} F(-\mu-\lambda+1/2, 2\mu+1, z) + s^{-2\mu} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\lambda)} F(1/2-\lambda-\mu, 1-2\mu, z) \right\}. \quad (F,10)$$

გარდა ამისა, (D,28') განმარტების გათვალისწინებით $W_{\lambda\mu}(z)$ ფუნქცია შეგვიძლია დავაკავშიროთ $\psi(a, c; z)$ ფუნქციასთან; მართლაც, გვექნება

$$W_{\lambda\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-\frac{z}{2}} \psi(1/2+\mu-\lambda, 1+2\mu; z). \quad (F,11)$$

$M_{\lambda\mu}(z)$ და $W_{\lambda\mu}(z)$ ფუნქციებისათვის $z=0$ განშტოების წერტილი იქნება, ხოლო $z=\infty$ წერტილი არსებითად განსაკუთრებული წერტილია, ამიტომ ამ ფუნქციებს განიხილავენ $|\arg z| < \pi$ არეში.

უიტკერის ფუნქციის (F,9) განმარტებიდან ნათელია, რომ

$$W_{\lambda\mu}(z) = W_{\lambda-\mu}(z). \quad (F,12)$$

ახლა, თუ (F,7) და (F,8) გამოსახულებებზე გამოვიყენებთ კუმერის (D,62) გარდაქმნას, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$M_{-\lambda\mu}(-z) = e^{-\pi i(\mu+\frac{1}{2})} M_{\lambda\mu}(z) \quad \text{Im} z > 0 \quad (F,13)$$

და

$$M_{-\lambda-\mu}(-z) = e^{\pi i(\mu-\frac{1}{2})} M_{\lambda-\mu}(z). \quad (F,14)$$

საინტერესოა $M_{\lambda\pm\mu}(z)$ ფუნქციების გამოხატვა $W_{\pm\lambda\mu}(z)$ უიტკერის ფუნქციებით. ამისათვის (F,9) განმარტებიდან განვსაზღვროთ $W_{-\lambda\mu}(-z)$ ფუნქცია. გარდა ამისა, თუ გამოვიყენებთ (F,13) და (F,14) თვისებებს, მაშინ გვექნება

$$W_{-\lambda\mu}(-z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\mu+\lambda)} e^{-i\pi(\mu+\frac{1}{2})} M_{\lambda\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu+\lambda)} e^{i\pi(\mu-\frac{1}{2})} M_{\lambda-\mu}(z). \quad (F,15)$$

განვიხილოთ (F,9) და (F,15) როგორც განტოლებათა სისტემა $M_{\lambda\mu}$ და $M_{\lambda-\mu}$ უცნობების მიმართ. ვიპოვოთ სისტემის დეტერმინანტი. მივიღებთ

$$\Delta = \Gamma(-2\mu)\Gamma(2\mu) \left\{ \frac{e^{i\pi(\mu-1/2)}}{\Gamma(1/2-\mu-\lambda)\Gamma(1/2+\mu+\lambda)} - \frac{e^{-i\pi(\mu+1/2)}}{\Gamma(1/2-\mu+\lambda)\Gamma(1/2+\mu-\lambda)} \right\}. \quad (F,16)$$

გამოვიყენოთ (C,14) ფორმულა. გვექნება

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\lambda\right) = \frac{\pi}{\sin \pi(\mu+\lambda+1/2)}, \quad (F,17)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right) = \frac{\pi}{\sin \pi(\mu-\lambda+1/2)}, \quad (F,18)$$

$$\Gamma(2\mu)\Gamma(-2\mu) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\pi}{\sin 2\pi\mu}. \quad (F,19)$$

შედევად სისტემის დეტერმინანტისათვის მივიღებთ მნიშვნელობას

$$\Delta = -\frac{1}{2\mu} e^{i\pi\lambda} \quad (F,20)$$

ამის შემდეგ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$M_{\lambda\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2+\mu-\lambda)} e^{-i\pi\lambda} W_{-\lambda\mu}(-z) - \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2+\mu+\lambda)} e^{i\pi(\mu-\lambda-1/2)} W_{\lambda\mu}(z). \quad (F,21)$$

სრულიად ანალოგიურად მოქმედებით $M_{\lambda-\mu}(z)$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნსაც.

ახლა ვიპოვოთ ასიმპტოტური მნიშვნელობები. (F,7) განმარტებიდან ცხადია, რომ $z=0$ წერტილის მახლობლობაში გვაქვს ფორმულა

$$M_{\lambda\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-\frac{z}{z}} \left\{ 1 + \frac{1/2+\mu-\lambda}{1!(2\mu+1)} z + \dots \right\}, \quad (F,22)$$

ასევე

$$M_{\lambda-\mu}(z) = z^{-\mu+1/2} e^{-\frac{z}{z}} \left\{ 1 + \frac{1/2-\mu-\lambda}{(1-2\mu)!} z + \dots \right\}. \quad (F,23)$$

უიტკეერის $W_{\lambda\mu}(z)$ ფუნქციის ასიმპტოტურ მნიშვნელობას ვიპოვით (F,9) ფორმულიდან, (F,22) და (F,23) ფორმულების გამოყენებით.

როცა $z \rightarrow \infty$, მაშინ, (F,11) განმარტების თანახმად, (D,80') ფორმულის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$W_{\lambda\mu}(z) = z^{-\lambda} e^{-\frac{z}{z}}. \quad z \rightarrow \infty \quad (F,24)$$

ანალოგიურად ვიპოვით სხვა ფუნქციების ასიმპტოტურ მნიშვნელობებსაც დიდი არგუმენტების შემთხვევაში.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ უიტკეერის ფუნქციების ინტეგრალური წარმოდგენები შეგვიძლია დავაკავშიროთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების ინტეგრალურ წარმოდგენებთან.

§ G. ლეჟანდრის პოლინომები და ლაპლასის სფერული ფუნქციები

ლეჟანდრის პოლინომები და სფერული ფუნქციები შედარებით კარგად არის ცნობილი საუნჩიერსტიტეტო მათემატიკის კურსიდან, ამიტომ ჩვენ დავკმაყოფილებით მხოლოდ მათი ძირითადი თვისებების აღნიშვნით [148, 149, 150].

ჩვენ ვიცით, რომ ლეჟანდრის (D,17) განტოლება გარკვეული აღნიშვნის შემოღებით ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე დაიყვანება. §D-შივე ვაჩვენეთ, რომ ლეჟანდრის მიკავშირებული $P_{lm}(x)$ პოლინომიც შეიძლება გამოიხატოს ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციით. შევეცადოთ ჩამოვთვალოთ ამ პოლინომების ძირითადი თვისებები, რომლებიც შეიძლება დავადგინოთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების თვისებებიდან. ქვემოთ ყველგან შემოვიღოთ აღნიშვნა $\zeta = \cos \theta$. ლეჟანდრის პოლინომი შემდეგნაირად განმარტდება:

$$P_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l. \quad (\zeta = \cos \theta) \quad (G,1)$$

ამ განმარტებიდან ცხადია, რომ

$$P_l(-\zeta) = (-1)^l P_l(\zeta). \quad (G,2)$$

l -ის კერძო მნიშვნელობებისათვის გვაქვს ფორმულები

$$\begin{aligned} P_0(\zeta) &= 1, \\ P_1(\zeta) &= \zeta, \end{aligned} \quad (G,3)$$

$$P_2(\zeta) = \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1)$$

და ა. შ.

ლეჟანდრის პოლინომები ორთო-ნორმირებული ფუნქციებია. კერძოდ, ადგილი აქვს ფორმულებს

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\xi) P_l(\xi) d\xi = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (G,4)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\zeta) P_l(\zeta') = 2\delta(\zeta - \zeta'). \quad (G,5)$$

ლეჟანდრის პოლინომებისათვის გვაქვს შემდეგი რეკურენტული ფორმულები:

$$(1 - \zeta^2) \frac{dP_l(\zeta)}{d\zeta} = lP_{l-1}(\zeta) - l\zeta P_l(\zeta), \quad (G,6)$$

$$(1 - \zeta^2) \frac{dP_l(\zeta)}{d\zeta} = (l+1)\zeta P_l(\zeta) - (l+1)P_{l+1}(\zeta). \quad (G,7)$$

ამ ორი ფორმულის გაერთიანება მოგვცემს

$$(2l+1)\zeta P_l(\zeta) = (l+1)P_{l+1}(\zeta) + lP_{l-1}(\zeta). \quad (G,8)$$

სხვადასხვა ამოცანებში მნიშვნელოვანია ლეჟანდრის განტოლების სხვა ამოხსნაც, რომელიც პოლინომს აღარ წარმოადგენს. მას უწოდებენ ლეჟანდრის მეორე გვარის ფუნქციას და აღნიშნავენ $Q_l(x)$ -ით. ეს ფუნქციაც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის საშუალებით. კომპლექსურ x -სიბრტყეზე, რომელსაც აქვს კრილი არსი ლერძის $[-1, 1]$ მონაკვეთზე, გვაქვს განმარტება

$$Q_l(x) = \frac{2^l l!^2}{(2l+1)!} \frac{1}{(z \mp 1)^{l+1}} F\left(l+1, l+1, 2l+2; \frac{2}{1 \mp z}\right). \quad (G,9)$$

უფრო ხელსაყრელია ამ ფუნქციის განსაზღვრა ინტეგრალური წარმოდგენით

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) dx}{z-x}. \quad (G,10)$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ z კომპლექსური სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია, რომელიც არ ძეგს არსი ლერძის -1 და $+1$ წერტილებს შორის. ცხადია, (G,2) ფორმულის თანახმად,

$$Q_l(-z) = (-1)^{l+1} Q_l(z). \quad (G,11)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $l = 0$ და 1 , გვექმევა მნიშვნელობანი

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} - 1. \quad (G, 12)$$

ლექანდრის მეორე გვარის ფუნქცია იმავე რეკურენტულ ფორმულებს აკმაყოფილებს, რასაც ლექანდრის $P_l(z)$ პოლინომი.

ლექანდრის მიკავშირებული პოლინომები. ლექანდრის მიკავშირებული პოლინომი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$P_{lm}(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z), \quad (z = \cos \theta) \quad (G, 13)$$

სადაც $0 \leq m \leq l$. როცა $|m| > l$, მაშინ, ცხადია, $P_{lm}(z) = 0$. შევნიშნოთ, რომ (G, 12) გამოსახულება ასეც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$P_{lm}(z) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}} (1-z^2)^l; \quad (-l \leq m \leq +l) \quad (G, 13')$$

ეს განმარტება სამართლიანია m -ის ორივე ნიშნისათვის. ამასთან, ცხადია,

$$P_{l-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(z). \quad (G, 14)$$

ლექანდრის მიკავშირებული პოლინომები ამ.ნახსენებია შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$(1-z^2)U''(z) - 2zU'(z) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] U(z) = 0. \quad (G, 15)$$

ეს განტოლება, როცა $m=0$, ლექანდრის ჩვეულებრივ განტოლებას დაემთხვევა ისევე, როგორც $P_{l0}(z) = P_l(z)$.

აშკარაა, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თვისებას:

$$P_{lm}(-z) = (-1)^{l+m} P_{lm}(z), \quad (G, 16)$$

რომელიც გამომდინარეობს (G, 13) განმარტებიდან.

ლექანდრის მიკავშირებული პოლინომებიც ორთო-ნორმირებულნი არიან; სახელობრ, ადგილი აქვს ფორმულას

$$\int_{-1}^{+1} P_{lm}(z) P_{l'm}(z) dz = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (G, 17)$$

შეიძლება დამტკიცდეს ორთოგონალობა ერთნაირი l -ისა და სხვადასხვა m -ისათვისაც.

ლექანდრის მიკავშირებული პოლინომების ერთზე ნორმირებისათვის საჭიროა ისინი გავამრავლოთ კოეფიციენტზე

$$C_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \left| \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right|^{1/2}} \quad (G, 18)$$

ლექანდრის პოლინომებისათვის სამართლიანია „შეკრების თეორემა“. თუ მოცემულია ორი თარტი $r(r, \varphi)$ და $r'(r', \varphi')$, რომელთა შორის კუთხე μ -ს ტოლია, მაშინ

$$P_l(\cos \vartheta) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \quad ;$$

$$2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos \theta) P_{lm}(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi') \quad ; \quad (G, 19)$$

ამასთან,

$$\cos \vartheta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') \quad ; \quad (G, 19')$$

ლაპლასის სფერული ფუნქციები, ლაპლასის სფერული ფუნქციები დაკავშირებულია $P_{lm}(\cos \theta)$ ლეჟანდრის პოლინომებთან. დავეწყოთ ლაპლასის განტოლება

$$\Delta \Phi = 0 \quad ; \quad (G, 20)$$

გადავრდეთ სფერულ კოორდინატებზე; გვექნება

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \Phi = 0 \quad ; \quad (G, 21)$$

სადაც $\Delta_{\theta, \varphi}$ ლეჟანდრის ოპერატორია—

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad ; \quad (G, 22)$$

განტოლების ამოხსნა ვეძებთ $\Phi = r^l Y(\theta, \varphi)$ სახით; გვექნება

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y(\theta, \varphi) + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0 \quad ; \quad (G, 23)$$

ამ განტოლების ნორმირებული ამონახსნი, რომელიც უწყვეტობისა და ცალსახობის სტანდარტულ პირობებს აკმაყოფილებს, განისაზღვრება ფორმულით

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad ; \quad (G, 24)$$

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ფუნქციას ლაპლასის სფერულ ფუნქციას უწოდებენ. l ინდექსი იღებს მნიშვნელობებს $l=0, 1, 2, \dots$, ხოლო m იცვლება— l -დან $+l$ -მდე. θ და φ ერთეულოვანი $\vec{r} = \frac{r}{r}$ ვექტორის პოლარ-კუთხეებია. ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ: აღნიშვნით

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv Y_{lm}(\vec{r}) \quad ; \quad (G, 25)$$

ე. ი. ორტის პოლარ-კუთხეების ნაცვლად არგუმენტში მივუთითებთ თვით ორტს.

შეგნიშნოთ, რომ, (G, 14) ფორმულის თანახმად, $Y_{lm}(\vec{r})$ და $Y_{l-m}(\vec{r})$ ფუნქციები ერთმანეთისაგან განსხვავდება $(-1)^m$ მაძრავლით. ხშირად (G, 24) განმარტებაში $(-1)^m$ მაძრავლს არ ითვალისწინებენ. მოგიტანოთ სფერული ფუნქციების მნიშვნელობანი რამდენიმე ინდექსისათვის:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = (4\pi)^{-1/2} \quad ;$$

$$Y_{11}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \quad ; \quad (G, 26)$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad ;$$

$$Y_{1-1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}.$$

ლაპლასის სფერული ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს ორთო-ნორმირების შემდეგ პირობებს:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (G, 27)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vec{r}) Y_{lm}(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (G, 28)$$

სადაც $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ სფერულიანი კუთხეა.

აღნიშნოთ, რომ ლაპლასის ფუნქციები წარმოადგენენ ორბიტალური მონენტის კვადრატისა და მისი z -პროექციის საერთო საკუთარ ფუნქციებს:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 Y_{lm}(\vec{r}) &= \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vec{r}), \\ \hat{L}_z Y_{lm}(\vec{r}) &= m \hbar Y_{lm}(\vec{r}); \end{aligned} \quad (G, 29)$$

მაშასადამე, l ყოფილა მომენტის კვანტური რიცხვი, ხოლო m —მაგნიტური კვანტური რიცხვი.

ადვილად შემოწმდება, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$Y_{l-m}(\vec{r}) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vec{r}). \quad (m > 0) \quad (G, 30)$$

ასევე, (G,16) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$Y_{lm}(-\vec{r}) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{r}). \quad (G, 31)$$

ამასთან, $-\vec{r}$ ორტის პოლარ-კუთხეებია $\pi + \theta$ და $\pi + \varphi$. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ კერძო შემთხვევაში, როცა $m=0$, გვექნება კავშირი

$$P_l(\cos \theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} Y_{l0}(\theta). \quad (G, 32)$$

ხოლო, როცა $\theta=0$, გვექნება

$$Y_{lm}(0, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \delta_{m0}. \quad (G, 33)$$

თუ \vec{r}_1 და \vec{r}_2 ორი რადიუსვექტორია, მაშინ ადგილი აქვს შეკრების შემდეგ ფორმულას:

$$P_l(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vec{r}_1) Y_{lm}(\vec{r}_2). \quad (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cos \theta) \quad (G, 34)$$

ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია \vec{r}_1 და \vec{r}_2 ვექტორზე და ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის მობრუნების მიმართ, გაიშლება შემდეგ მწკრივად:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) V_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2) P_l(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2); \quad (G, 35)$$

ან (G,34) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია ეს ფორმულა ასეც გადავწეროთ:

$$V(r_1, r_2) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l(r_1, r_2) Y_{lm}^*(\bar{r}_1) Y_{lm}(\bar{r}_2). \quad (G,36)$$

რადგან ლაპლასის სფერული ფუნქციები სრულ სისტემას ადგენენ, ამიტომ ერთი და იმავე არგუმენტის სფერული ფუნქციების ნამრაველი კვლავ სფერული ფუნქციებით შეგვიძლია გამოვხატოთ; სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$Y_{l_1 m_1}(\bar{r}) Y_{l_2 m_2}(\bar{r}) = \sum_{L=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sum_{M=-L}^{+L} \left\{ \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)} \right\}^{1/2} \langle l_1 l_2 00 | L0 \rangle \cdot \langle l_1 l_2 m_1 m_2 | LM \rangle Y_{LM}(\bar{r}), \quad (G,37)$$

სადაც $\langle l_1 l_2 m_1 m_2 | LM \rangle$ კლემშ-ჯორდანის კოეფიციენტია, ჯამები კი აიღება მონენტთა შეკრებით დასაშვებ ფარგლებში. (G,37) ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int Y_{LM}^*(\bar{r}) Y_{l_1 m_1}(\bar{r}) Y_{l_2 m_2}(\bar{r}) d\Omega = \left\{ \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)} \right\}^{1/2} \langle l_1 l_2 00 | L0 \rangle \cdot \langle l_1 l_2 m_1 m_2 | LM \rangle. \quad (G,38)$$

შევნიშნოთ, რომ კლემშ-ჯორდანის კოეფიციენტების თვისებით $\langle l_1 l_2 00 | L0 \rangle = 0$, თუ $L+l_1+l_2$ არ არის ლუწი რიცხვი.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული ფორმულები:

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \left\{ \frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right\}^{1/2} Y_{l+1,m} + \\ &\quad \left\{ \frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right\}^{1/2} Y_{l-1,m}, \end{aligned} \quad (G,39)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \left\{ \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1,m+1} - \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1,m+1} \right\} e^{-i\varphi}, \end{aligned} \quad (G,40)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) &= - \left\{ \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1,m-1} + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1,m-1} \right\} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (G,41)$$

ცხადია, კერძო შემთხვევაში, როცა $m=0$, (G,39) რეკურენტული ფორმულა დაიყვანება (G,8) გამოსახულებაზე.

შრედინგერის განტოლება ხშირად ხელსაყრელია ჩაიწეროს ინტეგრალური განტოლების სახით. მაგალითად, ჩვენ ვიცით, რომ იმპულსურ წარმოდგენაში შრედინგერის განტოლებას ინტეგრალური განტოლების სახე აქვს. განსაკუთრებით ხელსაყრელია გაფანტვის ამოცანის გადაწყვეტა ინტეგრალური განტოლების ფორმალისხმით. ქვემოთ ჩვენ მოკლედ შევხებით ფრედჰოლმის მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებებს, რომელთაც ყველაზე დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვთ კვანტური მექანიკის ამოცანების გადაწყვეტისას [144, 150, 151, 157].

განვიხილოთ აბსტრაქტულ ვექტორულ სივრცეში შემდეგი განტოლება:

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + \lambda K |\psi\rangle, \quad (H,1)$$

სადაც K -წრფივი ოპერატორია, ხოლო λ პარამეტრი. ეს განტოლება ჩაეწეროს „ x “-წარმოდგენაში

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt. \quad (H,2)$$

ამ განტოლებას ჰქვია ფრედჰოლმის მეორე გვარის არაერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება.

$$K(x, t) = \langle x | K | t \rangle \quad (H,3)$$

უწოდებენ ინტეგრალური განტოლების გულს; $\psi(x)$ -საძიებელი ფუნქციაა, ხოლო $\varphi(x)$ ცნობილი—თავისუფალი ფუნქცია. როგორც x , ისე t ცვლადი მოთავსებულია ერთსა და იმავე $[a, b]$ ინტერვალში. თავისუფალ წევრს ედება პირობა, რომ იგი იყოს კვადრატულად ინტეგრებადი. როცა (H,2) განტოლებაში ინტეგრალის რომელიმე საზღვარი ცვლადია, მაშინ განტოლებას ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლება ჰქვია. ჩვენ ქვემოთ მხოლოდ ფრედჰოლმის განტოლებებს განვიხილავთ.

გულს ეწოდება ფრედჰოლმისეული ან, უბრალოდ, ფრედჰოლმისა, როცა დაცულია პირობა

$$\int_a^b dx \int_a^b |K(x, t)|^2 dt < \infty. \quad (H,4)$$

ხშირად ასეთი გულების შესახებ ამბობენ, რომ იგი ეკუთვნის ჰილბერტ-შმიდტის გულების კლასსო. იგივე პირობა შეიძლება შემდეგი სახითაც ჩაიწეროს:

$$Sp(K K^*) < \infty, \quad (H,4^1)$$

სადაც Sp -აღნიშნავს ინტეგრალს დიაგონალური ელემენტებიდან.

როცა თავისუფალი წევრი $\varphi(x) = 0$, მაშინ

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \quad (H,5)$$

განტოლებას ფრედჰოლმის მეორე გვარის ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება ეწოდება.

გულს ეწოდებენ დადებითად განსაზღვრულს, თუ ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\int_a^b \int_a^b K(x, t) f^*(x) f(t) dx dt > 0, \quad (H,6)$$

უარყოფითად განსაზღვრული გულისათვის კი ეს გამოსახულება უარყოფითია. თუ (H,6) გამოსახულების ნიშანი დამოკიდებულია $f(x)$ -ზე, მაშინ გულს განუსაზღვრელი ჰქვია. როგორც დადებითად, ისე უარყოფითად განსაზღვრული გულებისათვის (H,6) გამოსახულება ნამდვილი იქნება.

ამბობენ, რომ ინტეგრალური განტოლების გული სინგულარულიაო, თუ: 1) მას აქვს პირველი გვარის წყვეტა, 2) საინტეგრაციო არეში გააჩნია განსაკუთრებული წერტილები ან 3) საინტეგრაციო არე უსასრულოა.

როცა საინტეგრაციო არე უსასრულოა, ვთქვათ $[0, \infty]$, მაშინ ახალი $\zeta = (1+x)^{-1}$ ცვლადის შემოღებით არეს გადავსახავთ $[0, 1]$ ინტერვალში, მაგრამ, სამაგიეროდ, ინტეგრალქვეშა ფუნქციას გაუჩნდება პოლუსი ζ კომპლექსური სიბრტყის სასრულ წერტილში.

გული ფრედჰოლმისეულია თუ არა, დამოკიდებული იქნება საინტეგრაციო არეზე. მართლაც, როცა (H,2) განტოლებაში $a=0$ და $b=\infty$, მაშინ გული $K(x, t) = e^{-xt}$ არ იქნება ფრედჰოლმისა; მართლაც,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xt} dt dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty, \quad (H,7)$$

ხოლო როცა არე არის $[1, \infty]$ ინტერვალი, მაშინ

$$\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-xt} dt dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx < \infty, \quad (H,7')$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში გული ფრედჰოლმისა იქნება.

ფრედჰოლმისეული ინტეგრალური განტოლების გულს ეწოდება სიმეტრიული, თუ იგი ემთხვევა თავის ერმიტულად შეუღლებულს

$$K(x, t) = K^*(x, t) = K^*(t, x). \quad (H,8)$$

ნამდვილი გული სიმეტრიულია, როცა

$$K(x, t) = K(t, x). \quad (H,8')$$

შეინიშნოთ, რომ განსაზღვრულ სიმეტრიულ გულებს შეესაბამებათ ერმიტული ოპერატორები.

გულს ეწოდება პოლარული, თუ მისი წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი ტიპის ნამრავლის სახით:

$$K(x, t) = V(t) G(x, t), \quad (H,9)$$

სადაც $G(x, t) = G^*(t, x)$ სიმეტრიულია, ხოლო $V(t)$ წარმოდგენს რაიმე ფუნქციას. გარკვეული აღნიშვნის შემოღებით პოლარულ გულს შეგვიძლია მივცეთ სიმეტრიული სახე. მართლაც, შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია

$$\psi(x) = \frac{\chi(x)}{\sqrt{V(x)}}, \quad (H,10)$$

მაშინ (H,2) ინტეგრალური განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\chi(x) = \sqrt{V(x)} \varphi(x) + \lambda \int_a^b K_0(x, t) \chi(t) dt, \quad (H,11)$$

რომლის გული

$$K_0(x, t) = V^{1/2}(x) G(x, t) V^{1/2}(t) \quad (H,12)$$

სიმეტრიულია.

შემოვიღოთ გრინის ფუნქცია $\langle x | G(\lambda) | t \rangle = G_\lambda(x, t)$, რომელიც ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს განსაზღვრავდეს თავისუფალი წევრის საშუალებით

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b \langle x | G(\lambda) | t \rangle \varphi(t) dt. \quad (H,13)$$

მივუთითოთ, რომ გრინის ფუნქციას ინტეგრალური განტოლების თეორიაში რეზოლვენტასაც უწოდებენ.

შევიტანოთ (H,13) გამოსახულება (H,2) განტოლებაში; მარტივად ვაჩვენებთ, რომ გრინის ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$G_\lambda(x, t) = K(x, t) + \lambda \int_a^b K(x, s) G_\lambda(s, t) ds; \quad (H,14)$$

როცა $\lambda=0$, მაშინ

$$G_0(x, t) = K(x, t). \quad (H,14')$$

შევნიშნოთ, რომ (H,5) ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას, ნამდვილი დადებითად განსაზღვრული სიმეტრიული გულისათვის, $\psi(x)=0$ ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნი ექნება λ -ს მხოლოდ გარკვეული $\lambda=\lambda_m$ მნიშვნელობებისათვის, რომელთაც განტოლების საკუთარი მნიშვნელობები ეწოდებათ, შესაბამის $\psi_m(x)$ ფუნქციებს კი საკუთარი ფუნქციები. ისინი ადგენენ ფუნქციათა ორთონომირებულ სისტემას. λ_m -საკუთარი მნიშვნელობები ადგენენ ზრდად მიმდევრობას; მათ შორის ყველაზე პატარა λ_0 რიცხვი, დადებითად განსაზღვრული გულისათვის, წარმოადგენს დადებით სიდიდეს.

როცა გული სიმეტრიულია, ოღონდ სინგულარული, მაშინ მას დისკრეტულთან ერთად შეიძლება უწყვეტი სპექტრიც აღმოაჩნდეს.

გადაგვარებული გული. გულს ეწოდება გადაგვარებული, თუ მისი წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი სასრულო ჯამის სახით:

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x) \beta_m(t). \quad (H,15)$$

ეს გული სიმეტრიული იქნება, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\beta_m(t) = \alpha_m^*(t). \quad (H,16)$$

გადაგვარებული გულის შემთხვევაში ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი ადვილია, რამდენადაც იგი დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე.

მართლაც, (H,15) შევიტანოთ ფრედჰოლმის (H,2) განტოლებაში; მივიღებთ:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \sum_{m=1}^n C_m \alpha_m(x), \quad (H,17)$$

სადაც

$$C_m = \int_a^b \beta_m(t) \psi_m(t) dt. \quad (H,17')$$

თუ შევძლებთ C_m კოეფიციენტების მოძებნას, მაშინ (H,17) იქნება ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი. C_m -კოეფიციენტების მოსაძებნად (H,17) გავმარაგოთ $\beta_k(x)$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი, გვექნება

$$C_k = \rho_k + \lambda \sum_{m=1}^n C_m a_{mk}. \quad (H,18)$$

ρ_k, a_{mk} მუდმივები განისაზღვრება ფორმულებით

$$\rho_k = \int_a^b \beta_k(x) \varphi(x) dx, \quad a_{mk} = \int_a^b \alpha_m(x) \beta_k(x) dx. \quad (H,19)$$

ადვილია (H,18) გამოსახულების შემდეგი ფორმით გადაწერა:

$$\sum_{m=1}^n (\lambda a_{mk} - \delta_{mk}) C_m = \rho_k, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (H,20)$$

რომელიც წარმოადგენს წრფივ არაერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. როცა სისტემის დეტერმინანტი ნული არ არის, მაშინ ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის ვიპოვით ყველა C_m კოეფიციენტს და, მაშასადამე, (H,17) ამოხსნისაღ.

როცა გვინტერესებს (H,5) ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა, მაშინ ყველა $\rho_k = 0$ და (H,20) სისტემას ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნი ექნება, მაშინ როცა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია

$$\|\lambda a_{mk} - \delta_{mk}\| = 0. \quad (H,21)$$

ეს უკანასკნელი λ -ის მიმართ n -ხარისხის განტოლებაა, ამიტომ მას მაქსიმუმ n ფესვი ექნება. ამგვარად, გადაგვარებული გულის შემთხვევაში საკუთარ მნიშვნელობათა რიცხვი სასრულია. როცა (H,15) ჯამში გვაქვს ერთადერთი წევრი, მაშინ ზემოთქმულის ძალით ინტეგრალურ განტოლებას ექნება მხოლოდ ერთი საკუთარი მნიშვნელობა. გადაგვარებულგულიანი ინტეგრალური განტოლების მაგალითზე ნათლად ჩანს, რომ ინტეგრალური განტოლების თვისებები მჭიდროდაა დაკავშირებული ალგებრულ განტოლებათა სისტემის თვისებებთან. კარგად ცნობილი ფრედჰოლმის თეორემები უშუალო ანალოგიაა ალგებრულ განტოლებათა სისტემებთან დაკავშირებული თეორემებისა. მაგალითად, როცა ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ამოხსნა, ეს ნიშნავს, რომ არაერთგვაროვან ერთადერთი ამოხსნა არ შეიძლება ჰქონდეს. მართლაც, ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება ეკვივალენტური იქნება (H,20)-ის შესაბამისი ალგებრული ერთ-

:გვაროვანი სისტემისა, რომლის ამოხსნადობისათვის საჭიროა სისტემის დეტერ-
მინანტის ნულთან ტოლობა, ამ დროს კი (H,20) არაერთგვაროვან სისტემას (ე. ი.
მის შესაბამის არაერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას) ამოხსნა არ ექნე-
ბა და ა. შ.

ამონახსნის მოძებნის ფორმალური მეთოდი. ვთქვათ, L არის წრფივი ერ-
მიტული დიფერენციალური ოპერატორი და გვაქვს შემდეგი განტოლება:

$$L\psi(x) = \lambda\psi(x) + f(x). \quad (H,22)$$

დავუშვათ, რომ L -ს აქვს შებრუნებული ოპერატორი, მაშინ (H,22)-ის L^{-1} ოპე-
რატორზე გამრავლებით მივიღებთ

$$\psi(x) = \lambda L^{-1}\psi(x) + \varphi(x), \quad (H,23)$$

სადაც $\varphi(x)$ რაიმე კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციაა. ცხადია, შეგვიძლია
დავწეროთ

$$L^{-1}\psi(x) = \int K(x, t)\psi(t) dt. \quad (H,24)$$

ასე რომ (H,23) ფორმალურად წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებას, მაგრამ
მასში ჯერ არ არის ჩაქსოვილი ინტეგრალური განტოლებისათვის დამახასიათებე-
ლი თვისება—თავისთავში შეიცავდეს სასაზღვრო პი-ობებსაც. ამიტომ (H,24)-ში
ინტეგრალს ჯერ კიდევ განმარტება სჭირდება.

რადგან $L^+ = L$, ამიტომ L^{-1} -იც ერმიტული იქნება; მაშასადამე, ინტეგრა-
ლური განტოლების გული იქნება სიმეტრიული. ცხადია, რომ სიმეტრიულ გულს
ნამდვილი საკუთარი მნიშვნელობები ექნება.

ჩვენ მიერ მიღებული (H,23) განტოლება ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$(1 - \lambda L^{-1})\psi(x) = \varphi(x), \quad (H,25)$$

საიდანაც

$$\psi(x) = (1 - \lambda L^{-1})^{-1}\varphi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda L^{-1}}{1 - \lambda L^{-1}}\varphi(x); \quad (H,26)$$

ამგვარად, ამონახსნი წარმოდგენილია თავისუფალი წევრის საშუალებით. მთავა-
რია $(1 - \lambda L^{-1})^{-1}$ ოპერატორის მონახვა. თუ (H,26) ფორმულას შევადარებთ
(H,13) ამონახსნს, გვექნება

$$1 + \lambda G(\lambda) = (1 - \lambda L^{-1})^{-1}, \quad (H,26')$$

საიდანაც გრინის ფუნქციისათვის მივიღებთ ცნობილ ფორმულას

$$G(\lambda) = (L - \lambda)^{-1}. \quad (H,27)$$

(H,14) გამოსახულებიდან აშკარაა, რომ გრინის ფუნქცია K ოპერატორთან და-
კავშირებულია შემდეგი ფორმულით:

$$G(\lambda) = (1 - \lambda K)^{-1} K. \quad (K = L^{-1}) \quad (H,27')$$

ნეიმანის მწკრივი. იტერაცია. (H,26) ამონახსნში შემავალი ოპერატორის
მოსაძებნად ხშირად მიმართავენ მწკრივად გაშლის მეთოდს; გვექნება

$$(1 - \lambda L^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L^{-n}. \quad (H,27'')$$

თანახმად (H,24) განმარტებისა,

$$L^{-1}\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (\text{H}, 28)$$

ამიტომ, ცხადია,

$$L^{-2}\varphi(x) = L^{-1} \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t) \varphi(t) dt_1 dt \quad (\text{H}, 29)$$

და ა. შ.

$$L^{-n}\varphi(x) = \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, t) \varphi(t) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt. \quad (\text{H}, 30)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$K_n(x, t) = \int_a^b dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} K(x, t_1) \dots K(t_{n-1}, t), \quad (\text{H}, 31)$$

მაშინ

$$L^{-n}\varphi(x) = \int_a^b K_n(x, t) \varphi(t) dt. \quad (\text{H}, 32)$$

ამ გამოსახულებაში ჩავრთოთ $n=0$ მნიშვნელობაც, ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ

$$\begin{aligned} K_0(x, t) &= \delta(x-t), \\ K_1(x, t) &= K(x, t). \end{aligned} \quad (\text{H}, 33)$$

ცხადია, (H,26) და (H,27) ფორმულების თანახმად, ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, (H,32) ფორმულის გათვალისწინებით, განსაზღვრული იქნება შემდეგი მწკრივით:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) \varphi(t) dt. \quad (\text{H}, 34)$$

ამ მწკრივს ნეიმანის მწკრივს უწოდებენ. მიზანშეწონილია მისი ერთხელ მაინც გაშლილი სახით ჩაწერა, გვექნება

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x) + \lambda \int K(x, t) \varphi(t) + \lambda^2 \int K(x, s) K(s, t) \varphi(t) dx dt + \\ &\lambda^3 \int K(x, s) K(s, p) K(p, t) \varphi(t) ds dp dt + \dots + \end{aligned} \quad (\text{H}, 34')$$

თუ ნეიმანის მწკრივი თანაბრად კრებადია, მაშინ (H,34) გამოსახულებაში შეგვიძლია გადავსვათ აჯამვისა და ინტეგრაციის რიგი, თუ ამის შემდეგ გავითვალისწინებთ (H,13) ფორმულას, გრინის ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$G_\lambda(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t). \quad (\text{H}, 35)$$

(H,13)-დან ცხადია, რომ გრინის ფუნქცია ასრულებს შემდეგი ინტეგრალური განტოლების გულის როლს:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_a^b G_\lambda(x, t) \varphi(t) dt. \quad (H,36)$$

დაეუბრუნდეთ ნეიმანის მწკრივს და ვნახოთ როგორია მისი აგების პრინციპი. ნულოვან მიახლოებაში ($\lambda=0$) ამონახსნად ვირჩევთ თავისუფალ წევრს, შემდეგ მიახლოებას მივიღებთ, თუ ინტეგრალური განტოლების მარჯვენა მხარეში შევიტანთ $\psi(x)=\varphi(x)$ ნულოვან მიახლოებას და ა. შ. ამ პროცესს უწოდებენ იტერაციას. იტერაციის შედეგად მივიღებთ ნეიმანის მწკრივს.

ნათელია, რომ ნეიმანის მწკრივი კრებადი იქნება მცირე $|\lambda|$ -ის შემთხვევაში მაინც. თუ გული შემოსაზღვრულია, ე. ი. $M = \max |K(x, t)| = \text{const}$, მაშინ ნეიმანის მწკრივის კრებადობისათვის საკმარისი იქნება შემდეგი უტოლობის შესრულება:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \quad (H,37)$$

თუ განტოლებას საკუთარი მნიშვნელობები არა აქვს, მაშინ ნეიმანის მწკრივი კრებადია ნებისმიერი λ -ისათვის.

აღენიშნოთ, რომ (H,31) ფორმულით განსაზღვრულ $K_n(x, t)$ გულს n -ურ იტერირებულ გულს უწოდებენ. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ, როცა $K(x, t)$ ფრედჰოლმის გულია, მაშინ იტერირებული გულებიც ფრედჰოლმისეული იქნება. მნიშვნელოვანია შეგნიშნოთ, რომ ზოგიერთი ტიპის სინგულარული გული იტერირების შემდეგ არასინგულარული ხდება.

(H,27) ფორმულიდან ადვილად დაინახავთ, რომ გრინის ფუნქცია ტოლია.

$$G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L^{-(n+1)}, \quad (H,38)$$

საიდანაც მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n G(\lambda)}{d\lambda^n} \right\}_{\lambda=0} = L^{-(n+1)}. \quad (H,39)$$

მოვიტანოთ ორი ფორმულაც, რომლებიც ტრივიალურად მტკიცდება

$$G^*(\lambda) = G(\lambda), \quad (H,39')$$

$$G(\lambda_1) - G(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) G(\lambda_1) G(\lambda_2).$$

ამ უკანასკნელს ჰილბერტის იგივეობა ჰქვია.

შეგნიშნოთ, რომ, ზემოთქმულის თანახმად, საკმარისად მცირე $|\lambda|$ -ისათვის გრინის ფუნქცია ანალიზური იქნება.

სიმეტრიული გულები. ჰილბერტ-შმიდტის ფორმულა. ცხადია, კვანტურ მექანიკაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ექნება სიმეტრიულ გულებს. ასეთი გულებისათვის ამოხსნის მეთოდები კარგად არის დამუშავებული. ვთქვათ, L ერთ-მიტული ოპერატორის ორთო-ნორმირებული საკუთარი ფუნქციებია ψ_m საკუთა-

• რი მნიშვნელობებით— λ_m . მაშინ გრინის ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\langle x | G(\lambda) | t \rangle = \sum_{mn} \langle x | \psi_m \rangle \langle \psi_m | (L - \lambda)^{-1} | \psi_n \rangle \langle \psi_n | t \rangle, \quad (\text{H}, 40)$$

საიდანაც

$$G_\lambda(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x) \psi_m^*(t)}{\lambda_m - \lambda}. \quad (\text{H}, 40')$$

• თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ (H,14) ინტეგრალურ განტოლებაში ან გავიხსენებთ (H,14') ფორმულას, ადვილად ვიპოვიტ სიმეტრიული გულის შემდეგ გაშლას:

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x) \psi_m^*(t)}{\lambda_m}. \quad (\text{H}, 41)$$

ამ უკანასკნელის (H,31) ფორმულაში შეტანით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ იტერირებული გულებისათვის გვექნება შემდეგი მწკრივად გაშლა:

$$K_n(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x) \psi_m^*(t)}{\lambda_m^n}. \quad (\text{H}, 42)$$

• ეს გამოსახულება შევიტანოთ (H,35) რეზოლვენტის გამოსახულებაში; მივიღებთ

$$G(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_m \frac{\psi_m(x) \psi_m^*(t)}{\lambda_m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} \right)^k \quad (\text{H}, 43)$$

რადგან

$$\sum_k \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} \right)^k = \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda}, \quad (\text{H}, 43')$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულა:

$$G(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x) \psi_m^*(t)}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda)}, \quad (\text{H}, 44)$$

რომელსაც ჰილბერტ-შმიდტის ფორმულა ეწოდება.

ჰილბერტ-შმიდტის ფორმულა საშუალებას იძლევა გრინის $G(x, t; \lambda)$ ფუნქციის გაგრძელებისა მთელ λ -კომპლექსურ სიბრტყეზე. სიმეტრიული გულის რეზოლვენტა არის λ -ის მერომორფული ფუნქცია, რომლის პოლუსები ემთხვევა ინტეგრალური განტოლების საკუთარ მნიშვნელობებს. ამ პოლუსების შესაბამისი ნაშთები წარმოადგენენ საკუთარი მნიშვნელობების შესაბამის საკუთარ ფუნქციებს. ნეიმანის მწკრივის კრებადობის რადიუსი, როგორც ეს (H,44) ფორმულიდან ჩანს, ტოლი იქნება მინიმალური საკუთარი მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდისა.

• ადვილი საჩვენებელია, რომ (H,2) ინტეგრალურა განტოლების (H,13) ამონახსნს, გრინის ფუნქციის (H,40') წარმოდგენის გამოყენებით, შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda \sum_m \frac{a_m}{\lambda_m - \lambda} \psi_m(x), \quad (\text{H}, 45)$$

სადაც

$$a_m = \int \psi_m^*(t) \varphi(t) dt \quad (H,46)$$

თავისუფალი წვერის ფურიე-კომპონენტია.

დაბოლოს, გამოვიყენოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ფორმულა. თანახმად (H,40') გამოსახულებისა, გრინის ფუნქციის შპურისათვის მივიღებთ

$$Sp G(\lambda) = \int_a^b G_\lambda(x, x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m - \lambda}, \quad (H,47)$$

ხოლო

$$Sp K_n = \int_a^b K_n(x, x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^n} \equiv A_n. \quad (n > 0) \quad (H,48)$$

არსებობს თეორემა, რომლის მიხედვით, თუ $A_n = 0$, მაშინ ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას საკუთარი მნიშვნელობები არა აქვს [157].

აღილი დასაკავშირებელია $Sp G(\lambda)$ და ზემოთ შემოღებული $A_n = Sp K_n$ სიდიდე. მართლაც, (H,35) და (H,47) ფორმულების თანახმად, გვექნება

$$Sp G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \lambda^n = \sum_n (Sp K_{n+1}) \lambda^n. \quad (H,49)$$

(H,42) ფორმულის გამოყენებით აღვიღალ დამატებებს, რომ

$$\iint |K_n(x, t)|^2 dx dt = \sum_m \frac{1}{\lambda_{2n}^m}; \quad (H,50)$$

როცა $n=1$, ინტეგრალური განტოლების გულისათვის მივიღებთ

$$\iint |K(x, t)|^2 dx dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}. \quad (H,51)$$

ფრედჰოლმის მეთოდი. ფრედჰოლმის მეთოდი გამოვიყენოთ გაფანტვის თეორიის ინტეგრალური განტოლების ამოსახსნელად [143, 157]. როგორც ვიცით, ამ განტოლებას აქვს სახე

$$\chi_i(r) = f_i(r) + \lambda \int_0^{\infty} K_i(r, r') \chi_i(r') dr', \quad (H,52)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$f_i(r) = kr j_i(kr), \quad (H,52')$$

$$K_i(r, r') = G_{0i}(r, r') V(r'); \quad (H,52'')$$

$j_i(kr)$ -ბესელის სფერული ფუნქციაა, $G_{0i}(r, r')$ -გრინის პარციალური ფუნქცია, $V(r)$ კი—პოტენციალური ენერგია. ამასთან, განტოლებაში შემოვიღეთ λ პარამეტრი, ხოლო წერის გამარტივების მიზნით ენერგიაზე დამოკიდებულებას არც გრინისა და არც ტალღურ ფუნქციებში არ მივუთითებთ.

როგორც ვხედავთ, (H,52) არის ფრედჰოლმის მეორე გვარის არაერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება. ამ განტოლების ამოხსნის ფრედჰოლმის მეთოდი

მის ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე დაყვანაში მდგომარეობს. უწყვეტი გამო-
სახულებების ნაცვლად შემოჰყავთ დისკრეტული სიდიდეები, მათ ისე იხილავენ,
როგორც ალგებრულ რიცხვებს, ბოლოს კი ისევ უწყვეტ სიდიდეებს უბრუნდებიან-
ზღვარზე გადასვლით.

პოტენციალური ენერგია წარმოვადგინოთ იგივეურად

$$V(r) = \int_0^{\infty} V(r')\delta(r-r')dr' \quad (H,53)$$

ინტეგრალი შევცვალოთ შემდეგი ჩამოთ:

$$V(r) = \lim_{\nu \rightarrow \infty, \Delta r_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\nu} V(r_k)\delta(r-r_k)\Delta r_k = V^{(\nu)}(r). \quad (H,53')$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\theta_k(r_k) = V(r_k)\Delta r_k, \quad (H,54)$$

მაშინ

$$V^{(\nu)}(r) = \sum_{k=1}^{\nu} \theta_k(r_k) \delta(r-r_k). \quad (H,55)$$

ამგვარად, (H,52) განტოლებაში $V(r')$ -ს ვცვლით $V^{(\nu)}(r')$ -ით, მაშინ χ_l ფუნქცია ც-
შეიცვლება $\chi_l^{(\nu)}$ ფუნქციით. გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\chi_l^{(\nu)}(r) = f_l(r) + \lambda \sum_{k=1}^{\nu} K_l(r, r_k)\chi_l^{(\nu)}(r_k), \quad (H,56)$$

აქ G_{0l} , თანახმად (H,52'') აღნიშვნისა,

$$K_l(r, r_k) = G_{0l}(r, r_k)\theta_k(r_k). \quad (H,57)$$

ახლა, თუ (H,56) განტოლებას დავწერთ $r=r_i$ -ისათვის, მივიღებთ შემდეგ წრფივ-
ალგებრულ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას:

$$\chi_l^{(\nu)}(r_i) = f_l(r_i) + \lambda \sum_{k=1}^{\nu} K_l(r_i, r_k)\chi_l^{(\nu)}(r_k). \quad (H,58)$$

ეს განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=1}^{\nu} F_{ik}^{(l)}(r_i, r_k)\chi_l^{(\nu)}(r_k) = f_l(r_i), \quad (H,59)$$

სადაც

$$F_{ik}^{(l)}(r_i, r_k) = \delta_{ik} - \lambda K_l(r_i, r_k). \quad (H,60)$$

როცა $i \neq k$, მაშინ

$$F_{ik}^{(l)} = -\lambda K_l(r_i, r_k), \quad i \neq k \quad (H,60')$$

სისტემის დეტერმინანტი, $\Delta_l^{(\nu)}$, (H,60) ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება

$$\Delta_l^{(\nu)} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_l(r_1, r_1) & -\lambda K_l(r_1, r_2) & \dots & -\lambda K_l(r_1, r_\nu) \\ -\lambda K_l(r_2, r_1) & 1 - \lambda K_l(r_2, r_2) & \dots & -\lambda K_l(r_2, r_\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K_l(r_\nu, r_1) & -\lambda K_l(r_\nu, r_2) & \dots & 1 - \lambda K_l(r_\nu, r_\nu) \end{vmatrix}, \quad (H,61)$$

ხოლო კრამერის თეორემის ძალით (H,59) სისტემის ამონახსნს ექნება გამოხატულება

$$\chi_i^{(v)}(r_i) = \frac{\sum_{k=1}^v \Delta_{i:k}^{(v)} f_i(r_k)}{\Delta_i^{(v)}}, \quad (H,62)$$

სადაც $\Delta_{i:k}^{(v)}$ არის სისტემის დეტერმინანტის k -ვლემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება.

თუ (H,62) ამონახსნს შევიტანთ (H,58) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\chi_i^{(v)}(r_i) = f_i(r_i) + \lambda \sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v K_i(r_i, r_k) f_i(r_j) \frac{\Delta_{i:j/k}^{(v)}}{\Delta_i^{(v)}}. \quad (H,63)$$

ამის შემდეგ მიღებულ ფორმულებში უნდა გადავიღოთ ზღვარზე, როცა $v \rightarrow \infty$ და $\Delta r \rightarrow 0$. ამისათვის ხელსაყრელია მოვახდინოთ სისტემის დეტერმინანტის გაშლა λ -ის ხარისხების მიხედვით. შეიძლება შემოვშაბოთ, რომ ამ გაშლას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(v)} = & 1 - \lambda \sum_{i=1}^v K_i(r_i, r_i) + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i,k=1}^v \left| \begin{array}{cc} K_i(r_i, r_i) & K_i(r_i, r_k) \\ K_i(r_k, r_i) & K_i(r_k, r_k) \end{array} \right| - \\ & \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{i,k,j=1}^v \left| \begin{array}{ccc} K_i(r_i, r_i) & K_i(r_i, r_k) & K_i(r_i, r_j) \\ K_i(r_k, r_i) & K_i(r_k, r_k) & K_i(r_k, r_j) \\ K_i(r_j, r_i) & K_i(r_j, r_k) & K_i(r_j, r_j) \end{array} \right| + \dots + \\ & (-1)^v \frac{\lambda^v}{v!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_v} \left| \begin{array}{cccc} K_i(r_{i_1}, r_{i_1}) & \dots & \dots & K_i(r_{i_1}, r_{i_v}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ K_i(r_{i_v}, r_{i_1}) & \dots & \dots & K_i(r_{i_v}, r_{i_v}) \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (H,64)$$

ავილოთ (H,63) ამოხსნა და განვიხილოთ მასში შემავალი სიდიდე:

$$\sum_{k=1}^v K_i(r_i, r_k) \Delta_{i:j/k}^{(v)}. \quad (H,64')$$

ცხადია, ეს გამოსახულება წარმოადგენს დეტერმინანტს, რომელშიც j -ური სვეტი შეცვლილია $K_i(r_i, r_1), K_i(r_i, r_2), \dots, K_i(r_i, r_v)$ სვეტით. ახლა, თუ ამ დეტერმინანტში, რომელსაც აღვნიშნავთ $\Delta_i^{(v)}(r_i, r_k; \lambda)$ -თი, მოვახდენთ გაშლას λ -ის ხარისხების მიხედვით, გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(v)}(r_i, r_j; \lambda) = & \lambda \sum_{k=1}^v K_i(r_i, r_k) \Delta_{i:j/k}^{(v)} = K_i(r_i, r_j) - \\ & \lambda \sum_{k=1}^v \left| \begin{array}{cc} K_i(r_i, r_j) & K_i(r_i, r_k) \\ K_i(r_k, r_j) & K_i(r_k, r_k) \end{array} \right| + \\ & \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{k=1}^v \sum_{m=1}^v \left| \begin{array}{ccc} K_i(r_i, r_j) & K_i(r_i, r_k) & K_i(r_i, r_m) \\ K_i(r_k, r_j) & K_i(r_k, r_k) & K_i(r_k, r_m) \\ K_i(r_m, r_j) & K_i(r_m, r_k) & K_i(r_m, r_m) \end{array} \right| + \dots + \end{aligned} \quad (H,65)$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\nu \rightarrow \infty$ და $\Delta r_i \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\Delta_i(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^{\infty} K_i(r, r) dr + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 \begin{vmatrix} K_i(r_1, r_1) & K_i(r_1, r_2) \\ K_i(r_2, r_1) & K_i(r_2, r_2) \end{vmatrix} -$$

$$\frac{\lambda^3}{3!} \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 dr_3 \begin{vmatrix} K_i(r_1, r_1) & K_i(r_1, r_2) & K_i(r_1, r_3) \\ K_i(r_2, r_1) & K_i(r_2, r_2) & K_i(r_2, r_3) \\ K_i(r_3, r_1) & K_i(r_3, r_2) & K_i(r_3, r_3) \end{vmatrix} + \dots + \quad (\text{H}, 66)$$

ახვევ (H,65) მოგვცემს

$$\Delta_i(r, r'; \lambda) = K_i(r, r') - \lambda \int_0^{\infty} dr_1 \begin{vmatrix} K_i(r, r') & K_i(r, r_1) \\ K_i(r_1, r') & K_i(r_1, r_1) \end{vmatrix} +$$

$$\frac{\lambda^2}{2!} \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 \begin{vmatrix} K_i(r, r') & K_i(r, r_1) & K_i(r, r_2) \\ K_i(r_1, r') & K_i(r_1, r_1) & K_i(r_1, r_2) \\ K_i(r_2, r') & K_i(r_2, r_1) & K_i(r_2, r_2) \end{vmatrix} + \dots + \quad (\text{H}, 67)$$

ხოლო (H,63) ამონახსნისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\chi_i(r) = f_i(r) + \lambda \int_0^{\infty} dr' \frac{\Delta_i(r, r'; \lambda)}{\Delta_i(\lambda)} f_i(r'). \quad (\text{H}, 68)$$

ცხადია, გრინის ფუნქცია განსაზღვრული ყოფილა შემდეგი გამოხატულებით:

$$G_i(r, r'; \lambda) = \frac{\Delta_i(r, r'; \lambda)}{\Delta_i(\lambda)}. \quad (\text{H}, 69)$$

ჩვენ ვიცით, რომ გრინის ფუნქცია მერომორფულია λ კომპლექსურ სიბრტყეზე, ამიტომ $\Delta_i(\lambda)$ და $\Delta_i(r, r'; \lambda)$ მთელი ფუნქციები იქნება λ სი.

აღნიშნოთ, რომ $\Delta_i(\lambda)$ -ს ეწოდება ფრედჰოლმის დეტერმინანტი, $\Delta_i(r, r'; \lambda)$ -ს კი ფრედჰოლმის პირველი მინორი. ხელსაყრელია ამ დეტერმინანტების გადაწერა შემდეგი სახით:

$$\Delta_i(r, r'; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} B_n^{(i)}(r, r'), \quad (\text{H}, 70)$$

$$\Delta_i(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} C_n^{(i)}, \quad (\text{H}, 71)$$

სადაც

$$C_0^{(i)} = 1, \quad B_0^{(i)}(r, r') = K_i(r, r'), \quad (\text{H}, 72)$$

$$B_n^{(i)}(r, r') = \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 \dots dr_n \begin{vmatrix} K_i(r, r') & K_i(r, r_1) & \dots & K_i(r, r_n) \\ K_i(r_1, r') & K_i(r_1, r_1) & \dots & K_i(r_1, r_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_i(r_n, r') & K_i(r_n, r_1) & \dots & K_i(r_n, r_n) \end{vmatrix} \quad (\text{H}, 73)$$

და

$$C_n^{(l)} = \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 \dots dr_n \begin{vmatrix} K_l(r_1, r_1) & K_l(r_1, r_2) & \dots & K_l(r_1, r_n) \\ K_l(r_2, r_1) & K_l(r_2, r_2) & \dots & K_l(r_2, r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_l(r_n, r_1) & K_l(r_n, r_2) & \dots & K_l(r_n, r_n) \end{vmatrix} \quad (\text{H},74)$$

ადგილი შესამოწმებელია, რომ ადგილი აქვს ფორმულას

$$C_n^{(l)} = Sp B_{n-1}^{(l)}(r, r') = \int B_{n-1}^{(l)}(r, r) dr. \quad (\text{H},75)$$

როცა სასრულ $(b-a)$ არეში $K_l(r, r')$ გული შემოსაზღვრულია, მაშინ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ, როგორც $\Delta_l(r, r'; \lambda)$, ისე $\Delta_l(\lambda)$ მწკრივები კრებადია λ -ის ყველა მნიშვნელობებისათვის; ამ მწკრივების კრებადობა გამომდინარეობს დეტერმინანტის თვისებიდან, რომელიც ადამარმა დაადგინა. ვთქვათ, გვაქვს n რანგის დეტერმინანტი A_{ik} ელემენტებით, მაშინ ამ დეტერმინანტის აბსოლუტური მნიშვნელობის სიდიდისათვის გვექნება შეფასება

$$|Det(A_{ik})| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{ik}|^2}. \quad (\text{H},76)$$

ვთქვათ, დეტერმინანტის ელემენტები შემოსაზღვრულია $|A_{ik}| < A$. მაშინ, ცხადია, (H,76)-ში შემაჯავლი ჯამი ნაკლები იქნება nA^2 -ზე; $i=1$ დან n -მდე ნამრავლის აღებით კი მარჯვენა მხარე ნაკლები იქნება $(nA^2)^n$ -ზე; ასე რომ ადამარს უტოლობა მიიღებს სახეს

$$|Det(A_{ik})| \leq \sqrt{n^n A^n}. \quad (\text{H},76')$$

რადგან (H,73) გამოსახულებაში შემაჯავლი დეტერმინანტი $(n+1)$ რანგისაა, ამიტომ, თუ მოვითხოვთ, რომ გული $|K_l(r, r')| < M_l = \text{const}$, ე. ი. შემოსაზღვრული იყოს, მაშინ, (H,76') შეფასების თანახმად, გვექნება

$$|B_n^{(l)}(r, r')| \leq \sqrt{(n+1)^{n+1} M_l^{n+1} (b-a)^n}. \quad (\text{H},77)$$

სრულიად ანალოგიურად

$$|C_n^{(l)}| \leq \sqrt{n^n M_l^n (b-a)^n}. \quad (\text{H},77')$$

ახლა განვიხილოთ მწკრივები:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)^{n+1} M_l^{n+1} (b-a)^n} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (\text{H},78)$$

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^n M_l^n (b-a)^n} \frac{\lambda^n}{n!}. \quad (\text{H},78')$$

რადგან $\frac{1}{n!} < \frac{e^n}{n^n}$, ამიტომ, ცხადია.

$$\sqrt{n^n M_l^n (b-a)^n} \frac{1}{n!} < n^{\frac{n}{2}} M_l^n (b-a)^n \frac{e^n}{n^n} = M^n (b-a)^n \frac{e^n}{n^{n/2}}, \quad (\text{H},78'')$$

რის გამოც λ^n -ის კოეფიციენტიდან n -ხარისხის ფესვი ტოლი იქნება სიდიდისა

$$\frac{M(b-a)e}{\sqrt{n}}, \quad (\text{H},78''')$$

რომელიც მიასწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. იგივეს ექნება ადგილი (H,78) მწკრივისთვისაც. მაშადადამე, (H,78) და (H,78') მწკრივები კრებადი იქნება ნებისმიერი λ -ისათვის. მაშინ, თუ გავიხსენებთ (H,77) და (H,77') შეფასებას, დაინახავთ, რომ მით უმეტეს კრებადი იქნება ფრედჰოლმის (H,70) და (H,71) მწკრივები. ¹

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ (H,73) ფორმულა, რომლის საშუალებითაც განიზღვრება $B_n^{(l)}(r, r')$ სიდიდე, პრაქტიკული გამოთვლებისათვის მოუხერხებელია, რამდენადაც მაღალი რანგის დეტერმინანტებიდან გვიხდება მრავალჯერადი ინტეგრაციების აღება. ამიტომ უფრო ხელსაყრელია შემდეგი რეკურენტული ფორმულათ სარგებლობა:

$$B_n^{(l)}(r, r') = C_n^{(l)} K_l(r, r') - n \int K_l(r, r'') B_{n-1}^{(l)}(r'', r') dr'' \quad (H,79)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს თანმიმდევრობით ვიპოვოთ ყველა $B_n^{(l)}(r, r')$, $B_0^{(l)}(r, r') = K_l(r, r')$ და $C_n^{(l)}$ კოეფიციენტების საშუალებით.

ახლა შევისწავლოთ ფრედჰოლმის დეტერმინანტის რამდენიმე თვისება. (H,70) და (H,71) ფორმულებიდან ცხადია, რომ, ერთი მხრივ,

$$Sp \Delta_l(r, r'; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} Sp B_n^{(l)}(r, r') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} C_n^{(l)}, \quad (H,80)$$

ხოლო მეორე მხრივ—

$$\Delta'(\lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} C_n^{(l)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} C_{n+1}^{(l)}. \quad (H,80')$$

მაშადადამე,

$$Sp \Delta_l(r, r'; \lambda) = - \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}. \quad (H,81)$$

თუ გავიხსენებთ (H,49) გამოსახულებას, მაშინ (H,69) და (H,81) ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$Sp G_l(r, r'; \lambda) = - \frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \lambda^n. \quad (H,82)$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრაციითა და $\Delta_l(0) = 1$ პირობის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Delta_l(\lambda) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_n \lambda^n \right) \quad A_n = Sp K_n \quad (H,83)$$

გავითვალისწინოთ, რომ (H,27') ფორმულის თანახმად $G(\lambda) = (1 - \lambda K)^{-1} K$, მაშინ $\Delta_l(\lambda)$ სიდიდე ასეც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\Delta_l(\lambda) = \exp \left(- \int_0^\lambda d\lambda Sp(1 - \lambda K)^{-1} K \right), \quad (H,84)$$

¹ შევნიშნოთ, რომ შემოუსაზღვრელი ირეებისათვის ფრედჰოლმის მწკრივების კრებადობა დამატკიცა ს. მახლინმა. *დ. მ. ДАН СССР* 42, 387 (1944).

სადაც გაფანტვის შემთხვევაში $K_{\dots}(r_{01}V)$ ინტეგრალური განტოლების გულს წარმოადგენს.

ახლა გავიხსენოთ (H,47) ფორმულა; (H.82) დამოკიდებულების თანახმად,

$$\frac{\Delta_i^*(\lambda)}{\Delta_i(\lambda)} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m - \lambda}. \quad (H,85)$$

ჩავატაროთ ინტეგრაცია და ვისარგებლოთ $\Delta_i(0)=1$ პირობით, გვექნება

$$\Delta_i(\lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right); \quad (H,86)$$

მაშასადამე, ფრედჰოლმის დეტერმინანტს $\lambda = \lambda_m$ წერტილში აქვს ნულები.

გაფანტვა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალით, როგორც მარტივი მაგალითი ფრედჰოლმის მეთოდის გამოყენებისა, ვიპოვოთ (63,49) განტოლების ამოხსნა, როცა $V_i(r, r')$ პოტენციალურ ენერჯიას აქვს შემდეგი ფაქტორიზებადი სახე:

$$V_i(r, r') = - \frac{\hbar^2 \lambda_i}{4\pi^2 \mu} v_i(r) v_i(r'). \quad (H,87)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\bar{\lambda}_i = - \frac{\hbar^2}{\pi \mu} \lambda_i. \quad (H,88)$$

ინტეგრალური განტოლების გულს ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$K_i(r, r'') = v_i(r'') r'' \int_0^{\infty} r' G_{0i}(r, r') v_i(r') dr' \quad (H,89)$$

ან

$$K_i(r, r'') = \bar{v}_i(r) v_i(r'') r'', \quad (H,90)$$

სადაც

$$\bar{v}_i(r) = \int_0^{\infty} r' t_{0i}(r, r') v_i(r') dr'; \quad (H,91)$$

მაშასადამე, ინტეგრალური განტოლების გული გადაგვარებულია, ამიტომ გვექნება

$$B_n^{(i)}(r, r') = \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 \dots dr_n \begin{vmatrix} v_i(r) \bar{v}_i(r') & v_i(r) \bar{v}_i(r_1) & \dots & v_i(r) \bar{v}_i(r_n) \\ v_i(r_1) v_i(r') & v_i(r_1) \bar{v}_i(r_1) & \dots & v_i(r_1) v_i(r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_i(r_n) \bar{v}_i(r') & v_i(r_n) \bar{v}_i(r_1) & \dots & v_i(r_n) v_i(r_n) \end{vmatrix} \quad (H,92)$$

ყოველი სვეტი და სტრიქონი ერთი და იმავე სილიდზე მრავლდება. ამ სილიდების დეტერმინანტიდან გატანის შედეგად მივიღებთ დეტერმინანტს ტოლი სვეტებით (ან სტრიქონებით), ასეთი დეტერმინანტი კი ნულის ტოლია. ამგვარად, $B_n^{(i)}(r, r') = 0$. ასევე ნული იქნება ყველა $C_n^{(i)}$, როცა $n > 1$, ხოლო $n=1$ -სათვის მივიღებთ

$$C_1^{(i)} = \int_0^{\infty} dr K_i(r, r); \quad (H,93)$$

მაშასადამე, (H.70) და (H.71) ფორმულებიდან გვექნება

$$\Delta_l(r, r'; \bar{\lambda}_l) = K_l(r, r'), \quad (\text{H.94})$$

$$\Delta_l(\bar{\lambda}_l) = 1 - \bar{\lambda}_l \int_0^\infty r v_l(r) \bar{v}_l(r) dr. \quad (\text{H.95})$$

ახლა გავიხსენოთ (H.90) და (H.91) ფორმულები; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta_l(r, r'; \bar{\lambda}_l) = \bar{v}_l(r) v_l(r') r', \quad (\text{H.96})$$

$$\Delta_l(\bar{\lambda}_l) = 1 - \bar{\lambda}_l \int_0^\infty v_l(r) G_{0l}(r, r') v_l(r') r r' dr d r'. \quad (\text{H.97})$$

თანხმად (H.68) ფორმულისა, ამონახსნისათვის მივიღებთ

$$\chi_l(r) = f_l(r) + \bar{\lambda}_l \frac{\bar{v}_l(r)}{\Delta_l(\bar{\lambda}_l)} \int_0^\infty r' v_l(r') f_l(r') dr'. \quad (\text{H.98})$$

ვიპოვოთ $\bar{v}_l(r)$ და Δ_l გამოსახულებანი ამისათვის გამოვიყენოთ $G_{0l}(r, r')$ გრინის ფუნქციის (28,30) ფორმულა, რომელიც შეესაბამება მდგარი ტალღის სასაზღვრო პირობას $r = \infty$ დროს. გვექნება

$$\Delta_l(\bar{\lambda}_l) = 1 - \bar{\lambda}_l \frac{2\mu k}{\hbar^2} \left\{ \int_0^\infty v_l(r) n_l(kr) r^2 dr \int_0^r v_l(r') j_l(kr') r'^2 dr' + \int_0^\infty v_l(r) j_l(kr) r^2 dr \int_r^\infty v_l(r') n_l(kr') r'^2 dr' \right\}. \quad (\text{H.99})$$

თუ გამოვიყენებთ ღირისლეს ფორმულას ორჯერად ინტეგრალში ინტეგრაციის რიგის შეცვლის შესახებ, მივიღებთ

$$\Delta_l(\bar{\lambda}_l) = 1 - \bar{\lambda}_l \frac{\pi\mu}{\hbar^2} M_l(k), \quad (\text{H.100})$$

სადაც

$$M_l(k) = \frac{4k}{\pi} \int_0^\infty v_l(r) n_l(kr) r^2 dr \int_0^r v_l(r') j_l(kr') r'^2 dr', \quad (\text{H.101})$$

ხოლო (H.91) და (28,30) გამოსახულებათა თანხმად, გვექნება

$$\bar{v}_l(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} kr \left\{ n_l(kr) \int_0^r v_l(r') j_l(kr') r'^2 dr' + j_l(kr) \int_r^\infty v_l(r') n_l(kr') r'^2 dr' \right\}. \quad (\text{H.102})$$

თუ ამ გამოხატულებას შევითანთ (H.98)-ში და გადავაღოთ ზღვარზე, როცა $r \rightarrow \infty$ (გავიხსენებთ ბესელისა და ნეიმანის სფერული ფუნქციების ასიმპტოტურ მნიშვნელობას დიდი kr -ებისათვის) და შევადარებთ (23,24) ასიმპტოტურ გამოსახულებას, მივიღებთ

$$\operatorname{Im} \delta_l(k) = -\frac{\pi \mu k}{\hbar^2} \frac{\bar{\lambda}_l v_l^*(k)}{1 - \bar{\lambda}_l \frac{\pi \mu}{\hbar^2} M_l(k)}, \quad (\text{H}, 103)$$

სადაც

$$v_l(k) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty r^2 v_l(r) j_l(kr) dr \quad (\text{H}, 104)$$

არის $v_l(r)$ ფუნქციის ფურიე-კომპონენტი.

დაეუბრუნდეთ (H, 98) აღნიშვნას, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$k \operatorname{ctg} \delta_l(k) = \frac{1}{v_l^*(k)} \left\{ \frac{1}{\lambda_l} + M_l(k) \right\} \quad (\text{H}, 105)$$

ამ ფორმულით მოიძებნება გაფანტვის $\delta_l(k)$ -თაზა.

თუ გამოვიყენებთ გრინის (28,17) ფუნქციას, რომელიც შეესაბამება განშლად ტალღას უსასრულობაში, ე. ი. გაფანტვის (23,22) ასიმპტოტურ გამოსახულებას, $S_l(k)$ -მატრიცისათვის სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{S_l(k) - 1}{2ik} = \frac{\lambda_l v_l^*(k)}{1 - \lambda_l M_l^{(+)}(k)} \quad (\text{H}, 106)$$

სადაც

$$M_l^{(+)}(k) = \frac{4ik}{\pi} \int_0^\infty v_l(r) h_l^{(+)}(kr) r^2 dr \int_0^r v_l(r') j_l(kr') r'^2 dr' \quad (\text{H}, 106')$$

$M_l^{(+)}(k)$ -ფრეკვალმის დეტერმინანტთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულით

$$\Delta_l(\lambda_l) = 1 - \lambda_l M_l^{(+)}(k). \quad (\text{H}, 106'')$$

რამდენადაც

$$\frac{4}{\pi} \int_0^\infty v_l(r) j_l(kr) r^2 dr \int_0^r v_l(r') j_l(kr') r'^2 dr' = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\infty v_l(r) j_l(kr) r^2 dr \right)^2 = v_l^*(k)$$

ამიტომ

$$M_l^{(+)}(k) = ik v_l^*(k) - M_l(k) \quad (\text{H}, 106''')$$

ამ უკანასკნელი ფორმულისა და (23,28) გამოსახულების გათვალისწინებით (H, 106)-დან ფაზისათვის კვლავ (H, 105) დამოკიდებულებას მივიღებთ.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ (47,33) ფორმულის თანახმად იოსტის ფუნქციისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$f_l(-k) = 1 - \lambda_l M_l^{(+)}(k), \quad (\text{H}, 107)$$

საიდანაც ადვილად ვიპოვით ბმული მდგომარეობის განტოლებას. ამისათვის, როგორც ვიცით, საჭიროა მოვითხოვოთ, რომ $f_l(-i\alpha) = 0$, სადაც $\alpha^2 = \frac{2\mu \mathcal{E}}{\hbar^2}$. მაშასადამე, საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{1}{\lambda_l} = M_l^{(+)}(i\alpha) \quad (\text{H}, 108)$$

რომელიც ემთხვევა საკუთარი მნიშვნელობების (65,8) გამოსახულებას.

ლიტერატურა

1. П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.
2. Л. Шнйф, Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.
3. ვ. ი. შამახლიძე, ი. შ. ვაშაკიძე, გ. ა. კილაშვილი, კვანტური მექანიკა, თსუ გამომცემლობა, 1959.
4. L. S. Biedenharn, J. Blatt, M. Rose, Rev. Mod. Phys., 24, 249, 1952.
5. А. С. Давыдов, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
6. М. Гольдбергер, К. Ватсон, Теория столкновений, «Мир», М., 1967.
7. ვ. ი. შამახლიძე, გ. ა. კილაშვილი, თეორიული ფიზიკა, ნაწ. 1, თსუ გამომცემლობა, 1967.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
9. Г. Бете, Э. Солпитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, Физматгиз, М., 1960.
10. L. L. Foldy, W. Tobochnik, Phys. Rev., 105, 1099, 1957.
11. Г. А. Бете, Р. Ф. Бечер, Физика ядра, ч. I, Гос. науч.-техн. изд-во Украины, Харьков, 1938.
12. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», М., 1971.
13. В. Гейзенберг, Теория атомного ядра, ИЛ, М., 1953.
14. Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, «Мир», М., 1969.
15. Строение атомного ядра, ИЛ, М., 1959.
16. Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, М., 1954.
17. Т. Ю. Ву, Т. Омуре, Квантовая теория рассеяния, «Наука», М., 1969.
18. А. Г. Ситенко, Лекции по теории рассеяния, Препринт ИТФ, 69—78, № 1, 2, 3, 4, Киев, 1969.
19. А. С. Давыдов, Теория атомного ядра, Физматгиз, М., 1958.
20. J. Schwinger, B. A. Lippmann, Phys. Rev., 79, 469, 1950.
21. H. P. Noyes, Phys. Rev. Lett., 15, 598, 1965.
22. A. S. Reiner, Nuovo Cim., 51, 1, 1967.
23. K. L. Kowalski, Phys. Rev. Lett., 15, 798, 1965.
24. K. L. Kowalski, D. Feldman, Journ. Math. Phys., 2, 499, 1961; 4, 507, 1963.
25. J. Gillespie, Phys. Rev., 160, 1432, 1967.
26. M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, Phys. Rev., 91, 398, 1953.
27. J. M. J. Van Leeuwen, A. S. Reiner, Physica, 27, 99, 1961.
28. В. Де альфаро, Т. Редже, Потенциальное рассеяние, «Мир», М., 1966.
29. R. Jost, A. Pais, Phys. Rev., 82, 840, 1951.
30. R. Jost, Helv. Phys. Acta, 20, 256, 1947.
31. R. J. Newton, Journ. Math. Phys., 1, 319, 1960.
32. S. T. Ma, Phys. Rev., 69, 668, 1946; 71, 195, 1947.
33. D. ter Haar, Physica, 12, 509, 1946.

34. S. T. Ma, *Rev. Mod. Phys.*, 25, 853, 1953.
35. F. L. Yost, J. A. Wheeler, G. Breit, *Phys. Rev.*, 49, 174, 1936.
36. M. H. Hull and G. Breit, *Coulomb Wave Function, Handbuch der Physik, Band XLII/1, p. 409, Springer-Verlag, Berlin Göttingen-Heidelberg, 1959.*
37. A. Tubis, *Tables of Nonrelativistic Coulomb Wave Functions. LA-2150, Los Alamos Scientific Labor., April, 4, 1958.*
38. Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский, *ЖЭТФ*, 14, 269, 1944.
39. E. R. Wigner, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 31, 546, 1932.
40. Y. Yamaguchi, *Phys. Rev.*, 95, 1628, 1954.
41. Y. Yamaguchi, Y. Yamaguchi, *Phys. Rev.*, 95, 1635, 1954.
42. A. N. Mitra, S. P. Pandya, *Nucl. Phys.*, 20, 455, 1960.
43. A. N. Mitra, T. H. Naqvi, *Nucl. Phys.* 25, 307, 1961.
44. A. N. Mitra, *Nucl. Phys.* 32, 529, 1962.
45. A. N. Mitra, V. S. Bhasin, B. S. Bhakar, *Nucl. Phys.*, 38, 316, 1962.
46. A. N. Mitra, *Phys. Rev.*, 123, 1892, 1961; 127, 1342, 1962.
47. A. N. Mitra, J. D. Anand, *Phys. Rev.*, 130, 2117, 1963.
48. A. N. Mitra, V. S. Bhasin, *Phys. Rev.*, 131, 1265, 1963. *Phys. Rev. Lett.*, 16, 523, 1966.
49. A. N. Mitra, *Phys. Rev.*, 139 B, 1472, 1965.
50. A. N. Mitra, *Phys. Rev.*, 150, 839, 1966.
51. A. N. Mitra, G. L. Schrenk, V. S. Bhasin, *Ann. of Phys.*, 40, 357, 1968.
52. A. N. Mitra, *Ann. of Phys.*, 43, 126, 1967.
53. A. N. Mitra, *The Nuclear Three-Body Problem, 503530: Advances in Nuclear Physics, Vol. 3, Plenum Press, New York-London, 1969,*
54. B. W. Lee, R. F. Sawyer, *Phys. Rev.*, 127, 2266, 1962.
55. T. Mongan, *Phys. Rev.*, 147, 1117, 1966.
56. В. Ф. Харченко, *УФЖ*, 7, 573, 1962.
57. В. Ф. Харченко, *УФЖ*, 7, 582, 1962.
58. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, *ЯФ*, 1, 994, 1965.
59. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, *Nucl. Phys.* 49, 15, 1963.
60. А. Г. Ситенко, О. В. Дробаченко, *УФЖ*, 8, 5, 1963.
61. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, Н. М. Петров, *Phys. Lett.*, 21, 56, 1966
62. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, *Модель нелокального взаимодействия и задача трех тел, Препринт ИТФ-68-11, Киев, 1968.*
63. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, *Препринт ИТФ-69-72, Киев, 1969.*
64. В. Ф. Харченко, Н. М. Петров, *Препринт ИТФ-69-8, Киев, 1969.*
65. В. Ф. Харченко, С. А. Стороженко, *Препринт ИТФ-69-19 и 69-91, Киев, 1969.*
66. V. F. Kharchenko, V. E. Kuzmichev, *Integral Equations For Four Identical Particle, Preprint ITP-71-99 E, 1971.*
67. C. C. H. Leung, S. C. Park, *Phys. Rev.*, 186, 1297, 1969,
68. D. R. Harrington, *Phys. Rev.*, 139 B, 691, 1965.
69. D. R. Harrington, *Phys. Rev.* 147, 685, 1966.
70. M. Gourdin, A. M. Martin, *Nuovo. Cim.*, 6, 757, 1957; 8, 699 1958.
71. G. S. Chirardi, A. Rimini, *Journ. of Math. Phys.*, 5, 722, 1964.
72. А. В. Рохленко, *ЖЭТФ*, 47, 896, 1964; 50, 93, 1966.
73. R. D. Puff, *Ann. of Phys.*, 13, 317, 1961.
74. F. Tabakin, *Phys. Rev.*, 137 B, 75, 1965.
75. F. Tabakin, *Ann. of Phys.*, 30, 51, 1964.
76. F. Tabakin, *Phys. Rev.*, 174, 1208, 1968.
77. L. H. Schick, *Rev. Mod. Phys.*, 33, 608, 1961.
78. Г. А. Чилашвили, *Сообщ. АН ГССР*, 32, 43, 1963; 33, 35, 1964.

79. Г. А. Чилашвили, Сообщ. АН ГССР, 34, 297, 1964.
80. И. Ш. Вашакидзе, Г. А. Чилашвили, ДАН СССР, 157, 557, 1964.
81. И. Ш. Вашакидзе, Г. А. Чилашвили, ЯФ, 4, 418, 1966.
82. Ф. Ткебучава, Г. А. Чилашвили, ЯФ, 7, 794, 1968.
83. Г. А. Чилашвили, Сообщ. АН ГССР, 48, 299, 1967.
84. Г. А. Чилашвили, Труды ТГУ, IA, 137, 1971.
85. В. Г. Туския, Г. А. Чилашвили, Сообщ. АН ГССР, 64, 46, 1971; ЯФ, 14, 1158, 1971.
86. И. Ш. Вашакидзе, Г. А. Чилашвили, ЯФ, 7, 41, 1968.
87. R. Aaron, R. D. Amado, Y. Y. Yam, Phys. Rev. Lett., 13, 574, 1964; Phys. Rev., 136 B, 650, 1964; 140 B, 1291, 1965.
88. R. D. Amado, Phys. Rev., 141, 902, 1966.
89. R. D. Amado, The Three Body Problem, $\text{\textcircled{R}}\text{\textcircled{R}}$: Elementary Particle Physics and Scattering Theory, Vol. 2, Gordon and Breach Science Publishers. New York-London-Paris, 1967.
90. R. D. Amado, J. V. Noble, Phys. Lett., 35 B, 25, 1971.
91. M. Bander, Phys. Rev., 138 B, 322, 1965.
92. A. S. Phillips, Nucl. Phys., A 107, 209, 1968.
93. C. Lovelace, Phys. Rev., 135 B, 1225, 1964.
94. H. Scadron, S. Weinberg, J. Wright, Phys. Rev., 135 B, 202, 1964.
95. W. Hunziker, Helv. Phys. Acta, 34, 591, 1961.
96. A. Grossmann, T. T. Wu, Journ. Math. Phys., 2, 710, 1961.
97. B. A. Lippmann, Phys. Rev., 102, 264, 1956.
98. L. H. Thomas, Phys. Rev., 47, 903, 1935.
99. Г. В. Скорняков, К. А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ, 31, 775, 1956.
100. Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 41, 1850, 1961; ДАН СССР, 141, 1335, 1961.
101. Г. В. Скорняков, ЖЭТФ, 31, 1046, 1956.
102. Г. С. Данилов, ЖЭТФ, 40, 498, 1961; 43, 1424, 1962.
103. Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 39, 1459, 1960.
104. Л. Д. Фаддеев, Труды Математического института им. В. А. Стеклова; т. 69, Издательство АН СССР, М.-Л., 1963.
105. Л. Д. Фаддеев, Методы интегральных уравнений в теории рассеяния для трех и более частиц, М., 1971.
106. Л. Д. Фаддеев, Интегральные уравнения теории рассеяния и малонуклонные системы. $\text{\textcircled{R}}\text{\textcircled{R}}$: Проблемы современной ядерной физики, Сборник докладов на Втором проблемном симпозиуме по физике ядра, Новосибирск, 1970, «Наука», М., 1971.
107. И. Ш. Вашакидзе, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе, Г. А. Чилашвили, В. П. Шелест, ДАН СССР, 158, 1302, 1964.
108. G. A. Chilashvili, R. M. Muradyan, V. P. Shelest, A. N. Tavkhelidze, Preprint, E-1659, Dubna, 1964.
109. R. L. Omnès, Phys. Rev., 134 B, 1858, 1964.
110. T. A. Osborn, Faddeev Equations For Local Potentials. SLAC-79, UC-34, Physics TID-4500, 1967.
111. А. И. Базь, В. Ф. Демин, И. И. Кузьмин, ЯФ, 4, 737, 1966; 4, 1131, 1966.
112. В. Н. Ефимов, ЯФ, 10, 107, 1969.
113. A. Ahmedzadeh, J. A Tjon, Phys. Rev., 139 B, 1085, 1965.
114. E. P. Harper, Y. E. Kim, A. Tubis, Phys. Rev., 2 C, 877, 1970.
115. M. Danos, L. C. Maximon, Journ. Math. Phys., 6, 766, 1965.
116. J. S. Levinger, A. H. Lu, R. Stagat, Phys. Rev., 179, 926, 1969.
117. D. Y. Wong, G. Zambotti, Phys. Rev., 154, 1540, 1967.
118. T. A. Osborn, H. P. Noyes, Phys. Rev. Lett., 17, 215, 1966.
119. J. S. Ball, D. Y. Wong, Phys. Rev., 169, 1362, 1968.

120. R. W. Stagat, Nucl. Phys., A 126, 654, 1969.
121. И. М. Народецкий, Препринт ИТЭФ-621, Москва, 1968.
122. L. D. Faddeev, The Physics of Electronic and Atomic Collisions, ed. Branscomb, JILA, Boulder, Colorado, 1968.
123. J. S. Ball, J. C. Y. Chen, D. Y. Wong, Abstracts of the VJC, PEAC "Nauka", Leningrad, 1967.
124. W. Bienter, K. Dietrich, Zs. Phys., 202, 74, 1967.
125. W. Bierter, K. Dietrich, Nuovo Cim., 52, 1209, 1967.
126. H. Beteman, Proc. Roy. Soc., A 100, 441, 1922.
127. В. Б. Беляев, Е. Вжещонко, Препринт ОИЯИ, P4-4144, 1968.
128. Б. А. Ахматходжаев, В. Б. Беляев, Е. Вжещонко, Препринт ИТФ-69-49, Киев, 1969.
129. H. Hebach, P. Hennoberg, H. Kummel, Phys. Lett., 24 B, 134, 1965.
130. J. Borysowicz, J. Dabrowski, Phys. Lett., 24 B, 125, 1967.
131. S. Weinberg, Phys. Rev., 133 B, 322, 1964.
132. J. V. Noble, Phys. Rev., 161, 1495, 1967.
133. R. G. Newton, Journ. of Math. Phys., 8, 851, 1967.
134. Ю. А. Симонов, Метод многомерных гармоник в теории связанных состояний ядер. ∇_{353} : «Проблемы современной ядерной физики», Сборник докладов, «Наука», М., 1971 და იქ მოთხოვნილი ლიტერატურა.
135. О. А. Якубовский, ЯФ, 5, 1312, 1967.
136. L. Rosenberg, Phys. Rev., 140 B, 217, 1965.
137. M. Fuda, Phys. Rev., 3 C, 485, 1971.
138. I. Duck, Three-Particle Scattering a Review of Recent Work on the Non-relativistic Theory. ∇_{353} : Advances in nuclear Physics, Vol. I, pp 341—410, Plenum Press, New York, 1968.
139. G. Derrick, J. M. Blatt, Nucl. Phys., 8, 310, 1958.
140. М. Верде, Проблема трех тел в ядерной физике, ∇_{353} : «Строение атомного ядра», 167—206, ИЛ, М., 1959.
141. F. Riordan, Nuovo Cim., 3 A, 53, 1971.
142. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958.
143. L. S. Rodberg, R. M. Thaler, Introduction to the Quantum Theory of Scattering, Academic Press, New York and London, 1967.
144. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М.-Л., 1951.
145. Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
146. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
147. Е. Вигнер, Теория групп, ИЛ, М., 1961.
148. Handbook of Mathematical Functions, Edited by Milton Abramowitz and A. Stegun, Doven Publ. New-York, 1965.
149. Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике, «Наука», М., 1968.
150. Г. Арфкен, Математические методы в физике, Атомиздат, Москва, 1970 г.
151. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I—II, ИЛ, М., 1958—1960.
152. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Изд. 3-е, «Наука», М., 1965.
153. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. II, «Наука», М., 1970.
154. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Вышшие трансцендентные функции, «Наука», М., 1965.

155. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, часть 2, Гостехиздат, Л.-М., 1949.
156. Э. Т. Уиттекер и Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 1—2, Физматгиз, М., 1962—63.
157. П. П. Забрейко, А. И. Комелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко. Интегральные уравнения, «Наука», М., 1968.
158. V. F. Kharchenko, S. A. Shadchin, Preprint ITP-70-92 E Kiev—1970.
159. V. F. Kharchenko, S. A. Shadchin, S. A. Storozhenko, Preprint ITP-71-107 E, Kiev—1971.
160. D. Ts. Stoyanov, A. N. Tavkbelidze. Phys. Lett., 13, 76, 1964; V. P. Shelest, D. Ts. Stoyanov, Phys. Lett., 13, 253, 1964.
161. Г. А. Чилашвили, Сообщения АН СССР, 67, 325, 1972.

საბანტო საძიებელი

- შლახთობის დენის ვექტორი 105, 211, 220, 267
- სიმკვრივე 267
- ანალიზური ფუნქცია 439
- ატომბირთვული მაგნიტონი 93
- პოტენციალი 309
- ურთიერთქმედება 305
- ურთიერთქმედების რადიუსი 101, 135, 260
- ბეიტმანის მეთოდი 437, 438
- ბესელის განტოლება 476
- — განზოგადებული 43, 48, 55, 57, 176, 177, 178, 478
- მოდიფიცირებული ფუნქცია 191, 316, 478
- სფერული ფუნქცია 43, 48, 59, 61, 62, 76, 124, 127, 179, 182, 183, 184, 186, 187, 239, 271, 273, 291, 306, 434, 439, 476, 479, 480, 481, 484
- ბესელის სფერული ფუნქციის ასიმპტოტიკა 482
- — ინტეგრალური წარმოდგენა 490, 492, 509
- — ფესვები 482
- ბირთვული გაფანტვის ამპლიტუდა 254, 255
- ბოზეს ნაწილაკები 420
- ბორნის მიახლოება 128, 129, 146, 283
- მიახლოების საზღვრები 130
- პარამეტრი 133
- მადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლება 235, 238, 239, 248
- გამოვის მამრავლი 251
- განსაზღვრული ოპერატორი 297
- — დადებითად 295, 428
- — უარყოფითად 295, 296
- კასაზომ სიდიდეთა სრული კრებული 47, 146, 171
- გაუმკვირვალე პოტენციალური სფერო 63, 188, 315
- გაუსის პოტენციალი 276
- გაფანტვის ამპლიტუდა 104, 105, 107, 116, 119, 145, 169, 192, 254, 280, 328, 408
- — იგიველი ნაწილაკებისათვის 111, 112
- — კელონური ურთიერთქმედებისათვის 249, 254
- — კელონური 259
- ამოცანის სასაზღვრო პირობა 105, 111, 115, 351
- ინტეგრალური განიკვეთი 105, 161, 181, 184, 219, 280
- ინტეგრალური განიკვეთი 116, 118, 120
- ინტეგრალური განტოლება 116, 118, 120
- კუთხე 104, 249, 252, 271
- პარციალური ამპლიტუდა 105, 106, 108, 154, 169, 188, 189, 255, 288, 294, 330
- ფაზა 107, 126, 154, 161, 170, 181, 182, 183, 184, 185, 188, 189, 193, 201, 229, 254, 280, 289, 300, 306, 308, 314, 315, 318, 517
- გაფანტვის სიგრძე 135, 137, 139, 182, 183, 185, 193, 263, 282, 285, 290, 303, 314, 315, 316, 318, 373
- — დამუხტული ნაწილაკებისათვის 262
- *T*-მატრიცის უნიტარობა 169, 170
- გაფანტვის *K*-მატრიცა 104, 159, 160, 161, 162, 183
- პარციალური *K*_l-მატრიცა 162, 180, 181, 183, 184, 185
- ბირთვული ფაზა 254, 261
- ორნაწილაკობრივი მატრიცა 372, 374, 383, 384, 387, 388, 390, 395, 405, 409, 421, 423, 435, 438
- ფაზა ბორნის მიახლოებაში 134
- გაფანტვა ვადანაწილებით 386
- გაუსის პოტენციალი 133
- კელონური ველით 132, 234

გაფანტვის S-მატრიცა 107, 109, 127, 139, 193, 201
 გაფანტვის პარტიკული S_i-მატრიცა 154, 155, 161, 181, 184, 203, 210, 212, 217, 223, 231, 232, 280
 — — S_i-მატრიცის პოლუსები 210, 211, 212, 214, 218, 221, 224, 245
 — — S_i-მატრიცის ნულები 210, 212, 218
 — — S_i-მატრიცის გარეშე ნულები 214, 217, 225, 226
 გაფანტვის T-მატრიცა 109, 143, 144, 145, 160, 171, 173, 180, 193, 257, 285, 290, 292, 309, 328, 330, 348
 — T-მატრიცის ინტეგრალური განტოლება 325
 — პარტიკული T_i-მატრიცა 152, 154, 155, 156, 184, 188
 — — აბსტრაქტულ სივრცეში 282
 — — ექსპონენციალური პოტენციალისათვის 193
 — — კონტაქტური პოტენციალისათვის 193
 — — კულონური ველისათვის 237, 244
 — — პოტენციალური ორმოსათვის 175, 180
 — — ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედებისათვის 279
 — — შეუღწევადი პოტენციალური სფეროსათვის 183
 გეომეტრიული ოპტიკის მიახლოება 184, 189
 გრინის ფუნქცია 113, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 154, 159, 196, 199, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 256, 306, 307, 325, 326, 429, 503, 505, 506, 507, 508, 512, 516
 — — თავისუფალი 113, 120, 146, 148, 150, 153, 162, 163, 258, 271, 278, 295, 346, 347, 348, 365
 — — არასრული 365, 367, 369, 371, 372, 378, 379
 — — სრული 150, 151, 152, 158, 159, 172, 258, 422
 — — ორნაწილაკობრივი 368
 — — სამწილაკობრივი 348, 364, 365, 366, 371, 372, 374, 381, 387
 — პარტიკული ფუნქცია 123, 125, 127, 153, 245, 509
 — სრული ფუნქციის ინტეგრალური განტოლება 370
 ზაუჯაევიჩის დიაგრამები 345, 347
 დავანილი მასა 40, 337, 340
 დეჩაბის ვექტორი 129

— პარამეტრი 135
 დეიტრონი 91, 96, 326
 დეიტრონის ტალღური ფუნქცია 99, 102, 326
 — ალგუნებული მდგომარეობა 102
 — ეფექტური რადიუსი 102
 — კვადრატული მომენტი 93, 100
 — საშუალო რადიუსი 102
 დირაკის დელტა ფუნქცია 16, 46, 47, 50, 70, 124, 153, 158, 186, 196, 197, 272, 278, 370, 378, 397, 401, 436
 — — ფუნქციის მაგვარი პოტენციალი 314, 317
 დირაკის ფორმალიზმი 7, 11, 14
 — აბსტრაქტული სივრცე 14, 17, 119, 269, 273, 278, 339
 დისპერსიული თანაფარდობანი 227, 228, 302
 დრეკილი გაფანტვა 103, 170, 201, 361, 364, 407
 — გაფანტვის ამპლიტუდა 385, 391
 — გაფანტვის განივიკვეთი 388
 მილერის განტოლება 488
 — გარდაქმნა 447
 — მუდმივი 242, 261, 456, 457
 — წარმოდგენა 452
 — Γ(z)-ფუნქცია 193, 245, 313, 454, 461, 469, 473, 481
 — B(z, x)-ფუნქცია 454, 455, 460, 461, 468
 ერთეულოვანი ოპერატორი 12, 13, 16, 163, 164, 278, 283, 350, 387, 395
 ერმიტული ოპერატორი 7, 10
 ეფექტური რადიუსი 135, 138, 139, 140, 263, 282, 314, 315, 316, 318
 — რადიუსის მიახლოება 134, 253, 281, 303, 309, 314
 — რადიუსის მიახლოება დამუხტული ნუკლონებისათვის 260, 263
 ექსპონენციალური პოტენციალი 276, 317
 ვექტორი
 — ბრა 11, 12, 148, 269, 283, 380
 — კტ 11, 12, 148, 283, 337, 341, 343, 420
 ვექტორული შეკრების კოეფიციენტები 7, 24, 343
 ვირტუალური დონე 141, 217, 218, 219, 223, 224, 225
 ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლება 199
 ვონსკის დეტერმინანტი 62, 136, 200, 201, 214, 222, 262, 435, 486

შაესიუფალი ნაწილაკი 47, 48, 49
 — — იმპულსურ წარმოდგენაში 51
 თანადობის თეორემა 108, 119
 თომასის თეორემა 333, 393

 ნაკობის ვექტორები 335, 345, 352, 388
 — კოორდინატები 335, 337, 338, 340, 342, 349, 350, 362, 363, 380, 381, 385, 399, 421
 — იმპულსები 335, 339, 340, 341, 389
 — პოლინომები 432, 464
 — პოლინომების ორთონორმირება 432, 465
 იამაგუჩის ფორმა 276, 281, 282, 286, 289, 291, 309, 314, 328, 356, 406, 407, 408, 409, 413
 იამაგუჩის განზოგადებული პოტენციალი 317
 იგიუერი ნაწილაკები 419, 420, 435
 იზოტროპული გაფანტვა 130
 ინერციის ცენტრის სისტემა 104, 111, 112, 255, 256, 338, 340, 341, 346, 347, 389
 ინტეგრალური განტოლების გული 501
 — — — გადაგვარებული 503, 515
 — — — დაღებიდად განსაზღვრული 502
 — — — სიმეტრიული 423, 502, 505, 507
 — — — პოლარული 423, 502
 ინფინიტური შოძრაობა 61, 82, 239, 247
 იოსტის ფუნქცია 75, 194, 197, 198, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 208, 212, 214, 217, 218, 223, 228, 280, 428, 429, 431, 433, 517
 — — კულონური ველისათვის 243, 244
 — — ექსპონენციალური პოტენციალისათვის 225
 — — პოტენციალური ორმოსათვის 222, 223
 — — ჰულტენის პოტენციალისათვის 224
 — დაყვანილი ფუნქცია 229
 — ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენა 202
 — ფუნქციის ინტეგრალური განტოლება 198
 იტერაციის მეთოდი 199, 348, 505
 იტერირებელი გული 208, 507, 508

 ძევისტიკონარული დონეები 217, 221
 კვანტური მდგომარეობა 8, 15
 კვანტური რიცხვი
 — — აზიმუტალური 21
 — — მაგნიტური 19, 21
 — — მთავარი 83
 — — მომენტის 21
 — — რადიალური 83
 — — პარაბოლური 90
 კლასტერი 326

კლებე-შორდანის კოეფიციენტები 25, 26, 27, 30, 97, 111, 329, 343, 344, 394, 398, 417
 კოშის თეორემა 440
 — ინტეგრალური ფორმულა 441
 კულონური ველი 305, 308, 310
 — გაფანტვის ფაზა 236, 238, 240, 244, 219, 254, 261, 306, 310
 — პარამეტრი 235, 239, 248, 252, 253, 261
 — ფუნქციები 239, 241, 242, 243, 256, 257, 260, 261, 306, 309, 311, 312

 ლაგერის განზოგადებული პოლინომი 85
 ლალასის ტიპის დიფერენციალური განტოლება 445
 — გარდაქმნა 447
 — ოპერატორი სფერულ კოორდინატებში 18, 124, 270
 — ოპერატორი პარაბოლურ კოორდინატებში 87
 — განტოლება 498
 ლევისონის თეორემა 232, 233
 ლეჟანდრის ოპერატორი 22, 176, 498
 პოლინომი 53, 106, 403, 417, 495
 — განტოლება 464, 495
 — მეორე გვარის ფუნქცია 53, 320, 392, 407, 496
 — მიკავშირებული პოლინომი 464, 497
 ლიმპან-შეინგერის განტოლება 147, 149, 151, 152, 171, 175, 259, 271, 279, 287, 310, 328, 347, 431, 433
 — სპი ნაწილაკისათვის 366, 368, 369, 370, 371, 372
 — სამწიფლაკობრივი $T(z)$ -მატრიცისათვის 365
 — სიმეტრიზებული განტოლება 423, 424, 425
 ლუწობა 7, 47

 მაკდონალდის სფერული ფუნქცია 43, 57, 101, 219, 223
 — მოდიფიცირებული ფუნქცია 478
 — — ფუნქციის ასიმპტოტიკა 485
 მელონის გარდაქმნა 447
 მთავარი მნიშვნელობა 158
 — — გრინის თავისუფალი ფუნქციისა 158, 159, 162, 167, 173
 — — გრინის სრული ფუნქციისა 158, 167, 173, 282
 მთელი ფუნქცია 440
 მიტრას პოტენციალი 320
 მომენტი 19, 20
 — ორბიტალური 19, 22, 29
 — სრული 19

- მომენტთა შეკრების წესი 23
- მოტის ფორმულა 253, 255
- მსგავსი გარდაქმნები 425
- მუსხელიშვილის მეთოდი 300
- ნეიშანის მწკრივი 128, 131, 505, 506
- სფერული ფუნქცია 43, 61, 62, 124, 126, 127, 180, 182, 183, 184, 306, 482
- ნეიშანის სფერული ფუნქციის ასიმპტოტური მნიშვნელობა 483
- ოპტიკური თეორემა 110, 168
- პარაბოლური კოორდინატები 86, 247
- პოტენციალი
 - არაცენტრალური 322, 323
 - ლოკალური 274, 411, 422, 429
 - არალოკალური 264, 269, 273, 274
 - ნულოვნების ურთიერთქმედებისა 91, 93
 - ტრანსილატორად ინვარიანტული 349, 350
 - ატომბირთვული ურთიერთქმედების 260, 305, 309
 - ფაქტორიზებადი 264, 272, 273, 275, 283, 285, 291, 295, 296, 300, 304, 305, 308, 314, 334, 403, 405, 409, 413, 419, 420, 422, 423
 - კონტაქტური 66, 282, 389, 390, 393, 408
 - ექსპონენციალური 64, 101, 213
 - პოტენციალური ორბი 54, 56, 101, 431, 433
 - სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედებით 69, 96, 328, 329
 - — ნულოვანი რადიუსის 66
 - ჭებირი 63, 291
 - კედელი 289, 309, 315, 413
 - პოტენციალის ძალა 272, 274, 286, 290, 412
 - პუნჯარეს თეორემა 196, 203
- შორდანის ლემა 115, 123, 125, 317, 444
- რაკის კოეფიციენტები 7
- რეპეტიის დიფერენციალური განიკვეთი 386
- რეზერფორდის ფორმულა 133, 251, 252
- რეზოლვენტა 121, 166, 167, 285, 503
- რიშანის ზედაპირი 209, 218, 429, 444
- სამი არაიგივერი ნაწილაკი 357, 377, 393
- სამი იგივერი ნაწილაკი 340, 352, 353, 356, 358, 383, 384, 389, 399, 404, 409
- სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანა 150, 193, 264, 332, 342, 344, 345, 360, 403
- — ინტეგრალური განტოლება ნულოვანი ქმედების რადიუსის ძალეებისათვის 333
- — ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია 412
- — თავისუფალი მოძრაობის ექვტორი 375
- — ინფინიტური მოძრაობა 374
- — კინეტიკური ენერჯის ოპერატორი 337, 340, 341, 349, 361
- — სრული მომენტი 342, 393, 402, 414
- — ტალღური ფუნქცია 353, 357
- სამანწილაკობრივი პროცესის განიკვეთი 364, 384
- — ამპლიტუდა 364, 384
- — გაფანტვის $T(z)$ -მატრიცა 364, 378, 379
- — გრინის სრული ფუნქცია 364, 365 366, 372, 374
- — გრინის თავისუფალი ფუნქცია 371, 372, 374, 381, 387
- — ძალები 344, 345
- სამეუთხედის წესი 23, 24, 29, 31
- საუკუნეობრივი განტოლება 294, 298, 299
- სივრცითი იზოტროპული ოსცილატორი 78, 80
- — ოსცილატორის ენერჯია 80
- — ოსცილატორის პოტენციალური ენერჯია 78
- სინგლტურნი მდგომარეობა 26, 94, 219, 303
- სკალარული ნამრავლი დირაკის სივრცეში 11
- სპექტრალური წარმოდგენის ფორმულები გრინის სრული ფუნქციისა 164
- — — — ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობისა 164
- — — — თავისუფალი ფუნქციისა 163
- — — — გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცისა 165, 285
- — — — $T_L(E)$ -მატრიცისა 165, 167
- სპინის პროექციის ოპერატორი 94
- სპინური ფუნქციები 26, 28, 322, 329
- სკორნიაკოვისა და ტერ-მარტიროსიანის განტოლება 391, 393, 408, 409
- სფერული ფუნქცია (ლაპლასის) 15, 17, 21, 41, 106, 322, 498
- — სპინით 28
- — ფუნქციების შეკრების ფორმულა 417
- ტაბაქინის პოტენციალი 278, 321
- ტენზორული ძალები 98, 322
- — ოპერატორი 96
- ტრანსილატორი ინვარიანტობა 149, 265

ტრანსილაციის ოპერატორი 36, 268
ტრიპლეტური მდგომარეობა 26, 94, 219, 303, 304

უიტეკერის განტოლება 239, 243, 493
— ფუნქცია 240, 241, 244, 448, 493
— ფუნქციის ასიმპტოტიკა 495
უწყვეტობის განტოლება 266, 267

შადევის განტოლებები 333, 334, 370, 372, 373, 374, 377, 378, 380, 385, 386, 387, 389, 390, 393, 396, 409, 410, 411, 413, 420, 422, 430, 438

— არასრულ გრინის ფუნქციებში 378, 380

— გრინის ფუნქციებისათვის 374, 380
— იგივეური ნაწილაკებისათვის 399, 403
— იმპულსურ წარმოდგენაში 380, 383
— სამი არაიგივეური ნაწილაკისათვის 383, 395

— ტალღური ფუნქციებისათვის 374, 380, 381

— პილბერტ-შმიდტის მიახლოებაში 435
შადევის განტოლებების ამონახსნი 387, 388

— გული 373
— ერთგვაროვანი სისტემა 377
ფაზური ანალიზი 110, 111, 227, 280, 288, 309, 314, 331

ფაქტორიზებადი პოტენციალის ფორმა 272, 273, 280, 281, 283, 284, 286, 291, 300, 302, 311, 321, 326, 327

— პოტენციალი ტენზორული ძალების შემთხვევაში 322

ფერმის ნაწილაკები 420
ფიზიკური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა 10

ფინიტური მოძრაობა 82
ფომფაქტორი 165

ფრედჰოლმის მეთოდი 187, 279, 280, 370, 509

— დეტერმინანტი 204, 224, 230, 231, 280, 302, 429, 512, 514

— მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლება 501

— პირველი მინორი 512
ფრედჰოლმისეული გული 501, 507
ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალური განტოლება 353, 356, 369, 372, 373
ფურიეს მეთოდი 265

შენახვის კანონი 32
— ენერჯის 34
— იმპულსის 35, 36, 269

— იმპულსის მომენტის 36, 40, 265

— ლუწობის 33, 37, 39, 269

— ნაწილაკთა რიცხვისა 266, 267

შეარტის სიმეტრიის პრინციპი 424, 429, 445

შრედინგერის განტოლება 8, 17, 41, 42, 47, 98, 265, 323

— აბსტრაქტულ სივრცეში 14, 17, 119, 269, 273, 278

— არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალისათვის 265, 266, 275, 266

— იმპულსურ სივრცეში 52, 265, 420

— კულონური ველისათვის 235

— რადიალური ფუნქციებისათვის 18, 41, 43, 45, 48, 54, 69, 72, 195, 202

— პარაბოლურ კოორდინატებში 87, 247

— სამი ნაწილაკის სისტემისათვის 334, 349, 362

— სამი ნაწილაკის სისტემისათვის ფაქტორიზებადი პოტენციალის შემთხვევაში 352

— ცენტრალური ურთიერთქმედებისათვის 270

შრედინგერის მეთოდი 7, 9, 14

ჩეზიშევერმიტის პოლინომი 448, 472

— განტოლება 448

ცენტრალური ველი 16, 40, 50, 52, 92, 103, 113

ძალები

არაცენტრალური 92, 94, 95

— მუხტურად სიმეტრიული 92

— სიჩქარეზე დამოკიდებული 96, 264, 265, 268

წმინდა ბირთვული გაფანტვა 314

წყალბადის ატომი 81

წყალბადის ატომის რადიალური ფუნქცია 83, 84

— ენერჯია 83, 90, 245

— პოტენციალური ენერჯია 81

წყვილის დამლა 361

— შექმნის რეაქცია 361

წყვილური ძალები 344, 345

ჰაიზენბერგის მეთოდი 7, 9, 14

ჰანკელის სფერული ფუნქციები 43, 44, 122, 127, 178, 180, 184, 185, 187, 222, 479, 484

— ფუნქციის ასიმპტოტიკა 484
პარტის ატომური ერთეულები 86
პილბერტის იგივეობა 507
— სივრცე 374
პილბერტ-შმიდტის პირობა 369, 370, 373
— გულების კლასი 501
— ფორმულა 422, 423, 424, 430, 435, 507,
508

პიპერგეომეტრიული ფუნქცია (მწკრივი) 72,
74, 89, 431, 432, 439, 447, 448, 462, 463,
464, 481, 483
— გადაგვარებული 80, 83, 447, 465, 466,
476, 481, 483
პიპერგეომეტრიული ფუნქციის ასიმპტო-
ტიკა 473
პომეოპოლარული ძალები 92
ჟულტენის ფუნქცია 276

თავი I

კვანტური მექანიკის ძირითადი სიდიდეები და მათი შენახვის კანონები	7
1. კვანტური მექანიკის აღწერის სხვადასხვა ფორმალში	7
2. მომენტები და მათი ძირითადი თვისებები	19
3. მომენტთა შეკრების წესი	22
4. ორი მომენტის ჯამის კვადრატისა და პროექციის საკუთარი ფუნქციები. კლებე-შორ-დანის კოეფიციენტები	24
5. სამი მომენტის ჯამის კვადრატისა და პროექციის საკუთარი ფუნქციები. რაკას კოეფიციენტები	29
6. შენახვის კანონები	32

თავი II

მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში	40
7. შრედინგერის რადიალური ფუნქციების განტოლება	40
8. უწყვეტი სპექტრის ტალღური ფუნქციების ნორმირება	45
9. თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა	47
10. ცენტრალური სიმეტრიის ველის შესაბამის ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში	50

თავი III

შრედინგერის განტოლების ამოხსნა ზოგიერთი მარტივი ამოცანებისათვის	54
11. უსასრულო კედლებიანი სწორკუთხა პოტენციალური ორმო	54
12. სასრულკედლებიანი პოტენციალური ორმო. პოტენციალური ჭებირი	56
13. ექსპონენციალური პოტენციალური ორმო	64
14. ნულოვანი ქმედების რადიუსის პოტენციალური ორმო	66
15. პოტენციალური ორმო სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედებით	69
16. პულტენის პოტენციალი	71
17. პოტენციალური ორმოს ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში	75
18. სივრცითი იზოტროპული ოსცილატორი	78
19. წყალბადისებური ატომის ამოცანა სფერულ კოორდინატებში	81
20. წყალბადისებური ატომის ამოცანა პარაბოლურ კოორდინატებში	86
21. ნუკლონების ურთიერთქმედების პოტენციალი	91
22. დეიტრონიის ამოცანა	96

თავი IV

დრეკადი გაფანტვის კვანტური თეორია	103
23. გაფანტვა ცენტრალური ველით	103
24. გაფანტვის ინტეგრალური განივკვეთი. ოპტიკური თეორემა. ფაზური ანალიზი	109
25. იგივე ნაწილაკთა გაფანტვის ამპლიტუდა	111
26. გრინის ფუნქცია	113
27. გრინის ფუნქციის განსაზღვრა პოლუსებზე მცირე წარმოსახვითი ნაწილის დამატებით და მისი ფორმალური განმარტება	117
28. გრინის ფუნქციის გაშლა სფერულ ფუნქციებად	121
29. გაფანტვის ინტეგრალური განტოლება რადიალური ფუნქციებისათვის	125
30. ბორნის მიახლოება	128
31. ეფექტური რადიუსის მიახლოება	134

თავი V

გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა	143
32. გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა	143
33. სიმძიმის ცენტრის გამოყოფა	147

34. გრინის სრული ფუნქცია	150
35. გაფანტვის პარციალური $T(E)$ -მატრიცა	152
36. მთავარი მნიშვნელობის გამოყოფა გრინის ფუნქციებიდან	158
37. გაფანტვის ერმიტული მატრიცა, K -მატრიცა	159
38. გრინის ფუნქციებისა და გაფანტვის მატრიცის სპექტრალური წარმოდგენის ფორმულები	162
39. ოპტიკური თეორემა	168
40. გაფანტვა რამდენიმე პოტენციალზე	171.

თ ა ვ ი VI

გაფანტვის მატრიცა კონკრეტულ ურთიერთქმედებისათვის	171
41. გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა პოტენციალური ორზონ შემთხვევაში	175
42. გაფანტვის მატრიცა შეუღწევადი პოტენციალური სფეროსათვის	183
43. გაფანტვა დირაკის დელტა ფუნქციისმაგვარი პოტენციალით	186
44. გაფანტვის მატრიცა კონტაქტური პოტენციალისათვის	191
45. გაფანტვის მატრიცა ექსპონენციალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში	193

თ ა ვ ი VII

გაფანტვის მატრიცის ანალიზურობის თვისებები	194
46. იოსტის ფუნქციები და მათი თვისებები	194
47. იოსტის ფუნქციის კავშირი გაფანტვის ტალღურ ფუნქციასთან, გრინის ფუნქციასა და ფრედჰოლმის დეტერმინანტთან	204
48. გაფანტვის \mathcal{N} -მატრიცის ანალიზური თვისებები	209
49. ბმული მდგომარეობები და გაფანტვის \mathcal{N} -მატრიცა	212
50. ვირტუალური და კვაზისტაციონარული დონეები	217
51. იოსტის ფუნქციები ზოგიერთი კონკრეტული სახის ურთიერთქმედების შემთხვევაში	222
52. დისპერსიული თანაფარდობანი იოსტის ფუნქციებისათვის	227
53. ლევისონის თეორემა	232

თ ა ვ ი VIII

გაფანტვა კულონური ველით	234
54. უწყვეტი სპექტრის ფუნქციები კულონური ველის შემთხვევაში	234
55. კულონური ფუნქციები	239
56. იოსტის ფუნქციები კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში	243
57. გრინის სრული ფუნქცია კულონური ურთიერთქმედებისათვის	245
58. კულონური ველის უწყვეტი სპექტრის ფუნქციები პარაბოლურ კოორდინატებში	247
59. რეზერფორდისა და მოტის ფორმულები	251
60. პროტონების პროტონებით გაფანტვა	253
61. გაფანტვის $T(E)$ -მატრიცა კულონური და ბირთვული ველების ერთდროული მოქმედების შემთხვევაში	257
62. ეფექტური რადიუსის მიახლოება დამუხტული ბირთვული ნაწილაკებისათვის. პროტონების პროტონებით გაფანტვა	260

თ ა ვ ი IX

არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალები	264
63. არალოკალური პოტენციალები. შრედინგერის განტოლება. უწყვეტობის განტოლება	264
64. არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალები	272
65. შრედინგერის განტოლების ამოხსნა ფაქტორიზებადი პოტენციალებისათვის	275
66. გაფანტვის მატრიცა არალოკალური ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედების შემთხვევაში	279
67. გაფანტვა ორი არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალის ჩამით	286
68. გაფანტვა რამდენიმე არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალით	291
69. ენერგეტულ დონეთა რიცხვი არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების შემთხვევაში	295

70. გაფანტვის შებრუნებული ამოცანა	300
71. დამუხტული ნუკლონების გაფანტვა	305
72. ნაწილათა ურთიერთქმედების ამოცანა კონკრეტული სახის ფაქტორ-ზეზბადი პოტენციალებისათვის	314
73. ფაქტორიზებადი პოტენციალები ტენზორული ძალების გათვალისწინებით	322
74. ფაქტორიზებადი პოტენციალი სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში	328

თ ა ვ ი X

სამი სხეულის ამოცანა	332
75. სამი თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა. კინემატიკა	334
76. სამი ნაწილაკის სისტემის იმპულსის მომენტი	342
77. სამი ნაწილაკის სისტემის პოტენციალური ენერჯია	344
78. ზოგიერთი ოპერატორის მატრიცული ელემენტის გამოხატვა სამნაწილაკობრივი თავისუფალი მდგომარეობის მიხედვით	345
79. შრედინგერის განტოლება სამი ნაწილაკის სისტემისათვის	349
80. სამი ნაწილაკის სისტემის შრედინგერის განტოლება არალოკალური ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედების შემთხვევაში	352
81. გაფანტვის ამოცანის დასაბამი სამი სხეულისათვის	360
82. ლიპმან-შეინგერის განტოლება სამი ნაწილაკის ამოცანისათვის	366
83. ფადეევის განტოლებების გამოყვანა	370
84. ფადეევის განტოლებები ტალღური ფუნქციებისათვის	374
85. ფადეევის განტოლებები გრინის არასრული ფუნქციებით	378
86. ფადეევის განტოლებები იმპულსურ წარმოდგენაში	380
87. გაფანტვის ამპლიტუდა და რეაქციის განიკვეთი	384
88. სამი ნაწილაკის ამოცანა ნულოვანი რადიუსის ურთიერთქმედების შემთხვევაში	389
89. ფადეევის განტოლებები ნებისმიერი მომენტის შემთხვევაში	393
90. ფადეევის განტოლებები იგივენი ნაწილაკებისათვის $J=0$ მომენტის შემთხვევაში	399
91. სამი სხეულის გაფანტვის ამოცანა არალოკალური ფაქტორიზებადი ურთიერთქმედების შემთხვევაში	403
92. სამი ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალების შემთხვევაში	409
93. სამი სხეულის ამოცანა არალოკალური ფაქტორიზებადი პოტენციალებისათვის ნებისმიერი მომენტის შემთხვევაში	413

თ ა ვ ი XI

სამი ნაწილაკის ამოცანის ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები	422
94. გაფანტვის მატრიცის გაშლა პილბერტ-შმიდტის მეთოდით	422
95. ლიპმან-შეინგერის ინტეგრალური განტოლების გულის საკუთარი მნიშვნელობები და საკუთარი ფუნქციები პულტენის პოტენციალისა და პოტენციალური ორმოსათვის	431
96. ფადეევის განტოლებები პილბერტ-შმიდტის მიახლოებაში	435
97. ბეიტმანის მეთოდი	437

თ ა ვ ი XII

მათემატიკური დამატება	439
§ A. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ზოგიერთი თვისება	439
§ B. ლაპლასის ტიპის განტოლების ამონახსნის კონტურულ ინტეგრალებით წარმოდგენა	445
§ C. ეილერის $\Gamma(z)$ და $B(z, w)$ ფუნქციები	454
§ D. პიერგეომეტრიული ფუნქციები	462
§ E. ბესელის სფერული ფუნქციები	476
§ F. უიტეკერის ფუნქციები	493
§ G. ლეჟანდრის პოლინომები და ლაპლასის სფერული ფუნქციები	495
§ H. ინტეგრალური განტოლებები	501

Гурам Александрович Чилашвили
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ДВУХ И
ТРЕХ ЧАСТИЦ

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1973

რედაქტორი ი. ვაშაკიძე
გამომცემლობის რედაქტორი გ. სალიაშვილი
მხატვარი რ. შახარაძე
ტექნიკური რედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ე. კენკიშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26/X-73
ქალღმის ფორმატი 70×108/16
ნაბეჭდი თაბახი 47,95
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 40,9

შეკვეთა 304 უც 11573 ტირაჟი 1000

ფახი 8 მან. 18 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.