საქართველოს სსრ განათლების სამინისტრო

დოც. ე. წითლანაძე

მეთოდური მითითებანი

მათემატიკური ანალიზი

1. ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა
2. განუსაზღვრელი ინტეგრალები

სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა

თბილისი 1948

ზოგადი მეთოდური მითითებანი

მათემატიკური ანალიზი წარმოადგენს ძირითად მათემატიკურ დისციპლინათაგანს. ამიტომ ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიაქციონ მათემატიკური ანალიზის შესწავლას.

თეორიული მასალა შესწავლილი უნდა იყოს თანდათანობით უმაღლესი განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებული პროგრამის მიხედვით. სტუდენტმა უნდა დაამუშაოს პროგრამით გათვალისწინებული მასალა სახელმძღვანელოების მიხედვით, გადაწყვიტოს რაც შეიძლება მეტი ამოცანები და მაგალითები.

საზოგადოდ, მათემატიკური დისციპლინის შესწავლისათვის სტუდენტმა უნდა მიაქციოს ყურადღება შემდეგ მითითებებს:

1. წიგნის კითხვის დროს სტუდენტს თან უნდა ჰქონდეს ქაღალდი და ფანქარი და ჩაატაროს ყველა გამოთვლა, რომელიც შეხვდება ამათუიმ ფორმულის გამოყვანის დროს. ძნელი და გაუგებარი ადგილები რამოდენიმეჯერ უნდა წაიკითხოს.

2. მას შემდეგ, რაც სტუდენტმა წაიკითხა ესათუის პარაგრაფი, უნდა შეეცადოს დამოუკიდებლად გადმოსცეს მათი შინაარსი თავისი ყველა დეტალით. თუ ზოგიერთი ფორმულა და განმარტებანი დაავიწყდათ, მაშინ საჭიროა ეს პარაგრაფი ხელახლა წაიკითხონ და განსაკუთრებული ყურადღება მიაქციონ იმ ადგილებს, რომლების დამოუკიდებლად გადმოცემა ვერ შეძლეს. შეიძლება მოხდეს, რომ ამათუიმ პარაგრაფის წაკითხვა მოუხდეს სტუდენტს რამოდენიმეჯერ.

3. განმარტებებისა და თეორემების ფორმალურ გაზეპირებას არავითარი აზრი არა აქვთ. საჭიროა გულმოდგინეთ გააზრება მათი შინაარსისა.

წინამდებარე მეთოდურ მითითებებში ჩვენ მოგვყავს განმარტებანი და თეორემები სახელმძღვანელოს ცალკეულ ადგილებიდან. აღნიშნულია ყველა მეტად საჭირო თეორიული საკითხები და განხილულია ამოცანები, რომლებიც სანიმუშოა სხვა მაგალითებისა და ამოცანების ამოსახსნელად.

თ ა ვ ი I

ნ ა მ დ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი

ამ თავის მასალა შეგიძლიათ იპოვოთ შემდეგ სახელმძღვანელოებში:

1. ლ. გ ო კ ი ე ლ ი, მათემატიკური ანალიზის შესავალი, §§1—8, გვ. 1—63.

2. Г. Фихтенгольц, курс диференциального и интегрального исчисления, ტ. I, §1, გვ. 11—46.

ამ უკანასკნელი წიგნის მიხედვით მასალის დამუშავება უფრო ადვილია—განსაკუთრებული ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ საკითხებს:

1. რაციონალური რიცხვები

მთელსა და წილად რიცხვებს, როგორც დადებითს, ისე უარყოფითს, რაციონალური რიცხვები ეწოდება. მაშასადამე, ყოველი რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც უკვეცი წილადი $\frac{p}{q}$, სადაც p და q მთელი რიცხვებია, მასთან $q \neq 0$. კერძოდ, თუ $q = 1$, მაშინ ვღებულობთ მთელ რიცხვს. რაციონალურ რიცხვთა ერთობლიობას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება. თუ a და b მთელი რიცხვებია ($a \neq 0$), მაშინ ყოველი $ax + b = 0$ სახის განტოლების ფესვი რაციონალური რიცხვი იქნება. მაგრამ, თუ განვიხილავთ განტოლებას $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), სადაც a, b, c მოცემული მთელი რიცხვებია, მაშინ მისი ფესვები, საზოგადოდ, არ არის რაციონალური რიცხვი.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე შესაძლოა გამოვსახოთ წრფის წერტილებით. ამისათვის საჭიროა ავიღოთ წრფე, რომელზედაც აღნიშნულია O წერტილი (ნულოვანი წერტილი, ანუ სათავე). ავიღოთ აგრეთვე წრფის გარკვეული მონაკვეთი, რომელიც მივიჩნიოთ სიგრძის ერთეულად. გადავზომოთ სიგრძის ერთეულად მიღებული მონაკვეთი

ჩვენი წრფის სათავის მარჯვნივ და მარცხნივ ერთჯერ, ორჯერ, სამჯერ და ა. შ.; მივიღებთ მთელ რაციონალურ რიცხვთა გამოსახულებას წრფეზე. ამ წესით მიღებულ წერტილებს ეწოდება წრფის მთელი წერტილები. განვიხილოთ ახლა $\pm\frac{n}{m}$ სახის რაციონალური რიცხვები. მათი შესაბამი წერტილების მოსაძებნად წრფეზე, სიგრძის ერთეულად მიღებული მონაკვეთი გავყოთ m თანასწორ ნაწილად და გადავზომოთ მისი თანატოლი მონაკვეთები სათავის მარჯვნივ და მარცხნივ n-ჯერ. ასე მაგალითად, თუ ერთეულად მიღებულ მონაკვეთს შუაზე გავყოფთ და ზემოხსენებულ გადაზომვას ვაწარმოებთ, მივიღებთ ყველა $\pm\frac{n}{2}$ სახის რაციონალურ რიცხვებს და ა. შ.

მაშასადამე, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ეთანადება წრფის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა მანძილები სათავიდან რაციონალური რიცხვებით გამოისახება.

ცნობილია, რომ ჯერ კიდევ ელემენტალური მათემატიკის მოთხოვნილებებს მივყევართ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოების აუცილებლობაზე, ასე მაგალითად, არ არსებობს $\frac{p}{q}$ სახის რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის 2, ე. ი. $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვი არ არის. ნათქვამის დასამტკიცებლად დავუშვათ წინააღმდეგი: ვთქვათ არსებობს ისეთი $\frac{p}{q}$ წილადი, რომ $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წილადი $\frac{p}{q}$ უკვეცია, ე. ი. p და q არიან ურთიერთ მარტივი. ვინაიდან $p^2 = 2q^2$, ამიტომ p უნდა იყოს ლუწი რიცხვი, ე. ი. $p = 2r$, სადაც r — მთელია. მაგრამ თუ p ლუწია და წილადი $\frac{p}{q}$ უკვეცი, მაშინ q რიცხვი უნდა იყოს კენტი. მაგრამ $q^2 = 2r^2$, ე. ი. q — ლუწი რიცხვია. ამრიგად, გამოდის, რომ p და q ლუწი რიცხვებია და მაშასადამე, ისინი არ არიან ურთიერთ მარტივი, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის 2-ს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $x^2 - 2 = 0$ განტოლების ფესვები

რაციონალური რიცხვები არ არის. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ისეთი კვადრატის დიაგონალის სიგრძე, რომლის გვერდი სიგრძის ერთეულის ტოლია, რაციონალური რიცხვით ვერ გამოისახება. უფრო ზოგადად, ეს იმას ნიშნავს, რომ წრფეზე არსებობს ისეთი წერტილები, რომლებსაც არავითარი რაციონალური რიცხვები არ შეესაბამება. პირიქით, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე საკმარისი არ არის იმისათვის, რომ წრფის ყოველ წერტილს შევუსაბამოთ გარკვეული რიცხვი.

მოვიგონოთ რაციონალურ რიცხვთა ძირითადი თვისებები.

ა) რაციონალურ რიცხვთა ყოველი წყვილისათვის a და b ადგილი აქვს ერთ-ერთს შემდეგი დამოკიდებულებიდან:

$$\text{ან } a=b, \text{ ან } a>b, \text{ ან } b>a.$$

$$\text{ბ) თუ } a>b \text{ და } b>c, \text{ მაშინ } a>c$$

(ამ თვისებას მეტობის ნიშანის ტრანზიტულობის თვისება ეწოდება).

გ) თუ $a>b$, მაშინ მოიძებნება აგრეთვე ისეთი რაციონალური რიცხვი c, რომ $a>c$ და $c>b$, ე. ი. *ორ რაციონალურ რიცხვს შორის მუდამ არსებობს მესამე რაციონალური რიცხვი*, მაგალითად $\frac{a+b}{2}$. ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლე.

დ) რაციონალურ რიცხვთა შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა (როცა გამყოფი ნულის ტოლი არ არის), მთელ ხარისხად ამაღლება, ისევ რაციონალურ რიცხვს გვაძლევს.

ირაციონალური რიცხვები

ირაციონალური რიცხვის განმარტებას დედეკინდის მიხედვით საფუძვლად უდევს რაციონალურ რიცხვთა *განკვეთის* ცნება.

გავყოთ ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ორ არა ცარიელ კლასად A და A'. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ყოველ ასეთ გაყოფას *განკვეთა ეწოდება*, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1°. ყოველი რაციონალური რიცხვი ეკუთვნის ან A ან A' კლასს;

2°. A კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია A′ კლასის ნებისმიერ რიცხვზე.

A კლასს ეწოდება განკვეთის ქვედა კლასი.

A′ კლასს კი—განკვეთის ზედა კლასი. რაციონალურ რიცხვთა განკვეთის ამ განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი რაციონალური რიცხვი, რომელიც ნაკლებია ქვედა კლასის რომელიმე რიცხვზე, აგრეთვე ქვედა კლასს ეკუთვნის. სავსებით ასევე, ყოველი რაციონალური რიცხვი, რომელიც მეტია ზედა კლასის რომელიმე რიცხვზე, ზედა კლასს ეკუთვნის.

მაგალითი 1. A კლასში მოვათავსოთ ყველა ისეთი რაციონალური რიცხვები a, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \angle 1$, ხოლო A′ კლასს მივაკუთნოთ დანარჩენი რაციონალური რიცხვები.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა ასეთი გაყოფა ორ კლასად წარმოადგენს განკვეთას.

მაგალითი 2. A კლასს მივაკუთვნოთ ყველა რაციონალური რიცხვი, რომლებიც 1-ზე ნაკლებია და თვით რიცხვი 1-იც, ხოლო ზედა კლასს მივაკუთვნოთ დანარჩენი რაციონალური რიცხვები.

ამ შემთხვევაშიაც მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა განკვეთას.

შევნიშნოთ, რომ პირველ მაგალითში არ მოიძებნება ქვედა კლასის უდიდესი რაციონალური რიცხვი; მაგრამ არსებობს ზედა კლასის უმცირესი რიცხვი, რომელიც უდრის 1. მეორე მაგალითში ზედა კლასში არ გვაქვს უმცირესი რიცხვი, ქვედა კლასში კი არსებობს უდიდესი რაციონალური რიცხვი, რომელიც უდრის 1.

მაგალითი 3. ქვედა A კლასს მივაკუთვნოთ ყველა ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები a, რომელთა კვადრატი ნაკლებია 2-ზე: $a^2 \angle 2$; ამავე კლასს მივაკუთვნოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვები და რიცხვი 0; A′ კლასს კი მივაკუთვნოთ დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. მაშ A′ კლასს მიეკუთვნება ისეთი დადებითი რაციონალური a რიცხვები, რომელთა კვადრატი მეტია 2-ზე.

აქაც მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა განკვეთას. აქ საგულისხმოა ის გარემოება, რომ არც A კლასშია უდიდესი რაციონალური რიცხვი და არც A′ კლასშია უმცირესი რაციონალური რიცხვი. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ყოველი გაყოფა ორ კლასად იქნება განკვეთა. ასე მაგალითად, თუ A კლასს მივაკუთვნებთ ყველა მთელ რიცხვებს, ხოლო A′ კლასს— ყველა წილად რიცხვებს, ცხადია გვექნება რაციონალურ რიცხვთა

გაყოფა ორ კლასად, მაგრამ ასეთი გაყოფა რა თქმა უნდა არ არის განკვეთა.

თეორემა. შ ე უ ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა ი ს ე თ ი გ ა ნ კ ვ ე თ ა, რ ო მ ქ ვ ე დ ა კ ლ ა ს ი A შ ე ი ც ა ვ დ ე ს უ დ ი დ ე ს რ ი ც ხ ვ ს, ხ ო ლ ო ზ ე დ ა კ ლ ა ს ი A′ შ ე ი ც ა ვ დ ე ს უ მ ც ი რ ე ს რ ი ც ხ ვ ს,

დამტკიცება. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, რომ A კლასში არსებობს უდიდესი რიცხვი α, ხოლო B კლასში—უმცირესი რიცხვი β. განკვეთის 2° პირობის ძალით $\alpha \angle \beta$. მაგრამ მაშინ α და β რიცხვებს შორის იარსებებს მესამე რიცხვი γ, რომელიც არც A და არც A′ კლასს არ მიეკუთვნება. ეს კი განკვეთის 1° პირობის ძალით შეუძლებელია. მაშ ჩვენი დაშვება არაა სწორი. ამრიგად შეუძლებელია, რომ ერთდროულად არსებობდეს A კლასში უდიდესი რიცხვი და A′ კლასში უმცირესი რიცხვი. დავიმახსოვროთ, რომ განკვეთა შეიძლება იყოს მხოლოდ სამი სახისა:

1 ან ქვედა კლასში არ არის უდიდესი რიცხვი, ხოლო ზედა კლასში არის უმცირესი რიცხვი;

2 ან ქვედა კლასში არის უდიდესი რიცხვი, ხოლო ზედა კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი;

3 ან არც ქვედა კლასშია უდიდესი რიცხვი, არც ზედა კლასშია უმცირესი რიცხვი.

პირველ ორ შემთხვევაში ამბობენ, რომ განკვეთა სწარმოებს რაციონალური რიცხვის საშუალებით, ანუ რომ განკვეთა განსაზღვრავს რაციონალურ რიცხვს. ყოველი რაციონალური რიცხვი განსაზღვრავს 1) ან 2) სახის განკვეთას, და პირიქით, ყოველი 1) ან 2) სახის განკვეთა განსაზღვრავს მხოლოდ რაციონალურ რიცხვს. 3) სახის განკვეთას ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი გ ა ნ კ ვ ე თ ა ეწოდება. რაციონალური განკვეთის დროს ვიტყვით, რომ გამკვეთი რიცხვი რაციონალურია, ან რაციონალური რიცხვი განსაზღვრულია განკვეთით. გამკვეთი რაციონალური რიცხვი იქნება ან A კლასის უდიდესი ან A′ კლასის უმცირესი რიცხვი. ირაციონალური განკვეთა არ განსაზღვრავს რაციონალურ რიცხვს და ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ირაციონალური განკვეთა განსაზღვრავს ახალი ბუნების—ირაციონალურ α რიცხვს.

განმარტება. ყველა რაცინალურ და ირაციონალურ რიცხვთა ერთობლიობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

თუ აღებულია რომელიმე ნაკვეთი სიგრძის ერთეულად, მაშინ ყოველი სხვა ნაკვეთის ზომა გარკვეული ნამდვილი რიცხვით გამოისახება ან რაციონალურით, ან ირაციონალურით და პირიქით, ყოველი ნამდვილი რიცხვისთვის არსებობს სრულიად გარკვეული სათანადო ნაკვეთი, როცა მასშტაბი თავიდანვე არჩეულია.

3. ნამდვილ რიცხვთა შედარება

განვიხილოთ ორი ნამდვილი რიცხვი α და β. როცა α და β რაციონალური რიცხვებია, მაშინ არითმეტიკიდან ცნობილია მათი ტოლობისა და მეტნაკლებობის გამორკვევის ხერხი. ორი რაციონალური რიცხვის ტოლობისა და უტოლობის ფაქტი შეიძლება რაციონალური რიცხვების განკვეთის საშუალებითაც გამოითქვას. (A, B) განკვეთით განსაზღვრული α რაციონალური რიცხვი ტოლია (A_1, B_1) განკვეთით განსაზღვრული β რაციონალური რიცხვისა, როცა A კლასი ემთხვევა A_1 კლასს და B კლასი ემთხვევა B_1 კლასს.

რიცხვი β მეტია α რიცხვზე, როცა β ეკუთვნის (A, B) განკვეთის B კლასს, და β ნაკლებია α-ზე, როცა β ეკუთვნის A კლასს.

თუ α რაციონალური რიცხვია, ხოლო β ირაციონალური, მაშინ შეუძლებელია α უდრიდეს β-ს. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\alpha < \beta$, როცა α ეკუთვნის A_1 კლასს და $\alpha > \beta$, როცა α ეკუთვნის B_1 კლასს. ამ განმარტების ძალით ირაციონალური რიცხვი მეტია ქვედა კლასის ყოველ რიცხვზე და ნაკლებია ზედა კლასის ყოველ რიცხვებზე. მაშასადამე თუ β არის რაიმე განკვეთით განსაზღვრული რაციონალური ან ირაციონალური რიცხვი, მაშინ ამ განკვეთის ქვედა კლასის ნებისმიერი a რიცხვისათვის და ზედა კლასის b რიცხვისათვის, შეგვიძლია დავწეროთ: $a \leqslant \beta \leqslant b$, ე. ი. ქვედა კლასის ყოველი რიცხვი არ აღემატება, ხოლო ზედა კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლები არ არის, განკვეთით განსაზღვრულ რიცხვზე.

ვთქვათ ეხლა, რომ α და β ირაციონალური რიცხვებია, რომლებიც განსაზღვრულია შესაბამისად (A, B) და (A', B') განკვეთებით.

როცა $A = A'$, მაშინ $\alpha = \beta$. როცა A და A' კლასები სხვადასხვაა, მაშინ შესაძლოა ორი შემთხვევა:

ა) არსებობს რაციონალური რიცხვი r, რომელიც ეკუთვნის A' კლასს და არ ეკუთვნის A კლასს.

ს) არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის A კლასს და არ ეკუთვნის A′ კლასს.

როცა რაციონალური რიცხვი r არ ეკუთვნის A კლასს, მაშინ იგი ეკუთვნის B კლასს და მაშასადამე, $\alpha \angle r$. მაგრამ r შედის A′ კლასში და $r \angle \beta$ და—მაშასადამე, $\alpha \angle r$ და $r \angle \beta$. რიცხვი α ნაკლებია β-ზე, თუ არსებობს რაციონალური რიცხვი მეტი α ზე და β-ზე ნაკლები; ამ ფაქტს ჩასწერენ ასე: $\alpha \angle \beta$. როცა ხსენებული თვისების რაციონალური რიცხვი არ არსებობს, მაშინ კლასები A და A′ ერთიდაიგივეა და $\alpha = \beta$.

4. დედეკინდის თეორემა

ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ერთი შესანიშნავი თვისება აქვს, რომლითაც იგი არსებითად განსხვავდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისაგან. მოვიგონოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა განკვეთის დროს ყოველთვის არ არსებობდა გამკვეთი რიცხვი. სწორედ ეს გარემოება გახდა საფუძველი ახალი—ირაციონალური რიცხვების შემოყვანისა. განვიხილოთ ახლა ნამდვილ რიცხვთა განკვეთა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის განკვეთა ვუწოდოთ მის გაყოფას ორ არაცარიელ კლასად X და У, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1°. ყოველი ნამდვილი რიცხვი ეკუთვნის ან X, ან У კლასს;

2°. X კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია У კლასის ნებისმიერ რიცხვზე.

ისმება საკითხი: ყოველთვის არსებობს თუ არა ნამდვილ რიცხვთა განკვეთის დროს გამკვეთი რიცხვი? ამ კითხვაზე ამომწურავ პასუხს გვაძლევს დედეკინდის თეორემა.

თეორემა. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ყოველი (X, У) განკვეთისას მუდამ არსებობს გამკვეთი ნამდვილი რიცხვი β. რიცხვი β ან უდიდესი რიცხვია ქვედა კლასში X (და მაშინ ზედა კლასში У არ არსებობს უმცირესი რიცხვი), ან უმცირესია ზედა კლასში У (და მაშინ ქვედა კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი).

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A-თი ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ქვედა კლასში X, ხოლო B იყოს რაციონალურ რიცხვთა

სიმრავლე, რომელსაც შეიცავს ზედა კლასი Y. ცხადია, A და B სიმრავლეები შეადგენენ ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის განკვეთას. განკვეთა (A, B) განსაზღვრავს რაღაც ნამდვილ β რიცხვს; ეს რიცხვი უნდა მიეკუთვნოს X და Y კლასებიდან ერთ-ერთს. ვთქვათ β ეკუთვნის ქვედა კლასს X, მაშინ β არის X კლასის უდიდესი რიცხვი. მართლაც, რომ β არ ყოფილიყო X კლასის უდიდესი რიცხვი, მაშინ მოიძებნებოდა ამ კლასის რიცხვი $\alpha_0 > \beta$. ვთქვათ r არის რაციონალური რიცხვი, მოთავსებული α_0 და β რიცხვებს შორის: $\alpha_0 > r > \beta$. რიცხვი r ეკუთვნის X კლასს და, მაშასადამე, ეკუთვნის A კლასს. მივიღეთ, რომ β რიცხვის გამსაზღვრელი განკვეთის ქვედა კლასის კუთვნილი რიცხვი r ამ რიცხვს აღემატება. ეს კი შეუძლებელია. სავსებით ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისათვის დავამტკიცებთ, რომ თუ β X კლასის რიცხვია, მაშინ შეუძლებელია არსებობდეს Y კლასის უმცირესი რიცხვი.

ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ თუ β რიცხვი ეკუთვნის Y კლასს, მაშინ იგი Y კლასში უმცირესია და ქვედა კლასში X არ არსებობს უდიდესი.

ნამდვილ რიცხვთა დამტკიცებულ თვისებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის **უწყვეტობის თვისება** ეწოდება.

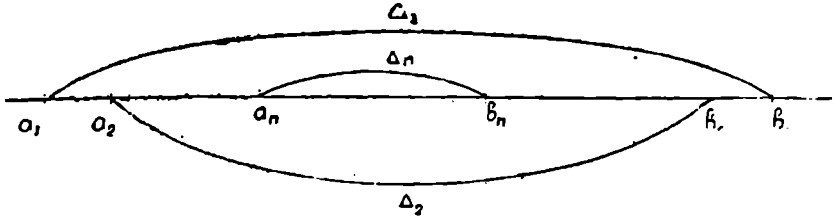
ვ. კანტორის თეორემა

განვიხილოთ მონაკვეთების უსასრულო მიმდევრობა $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ მონაკვეთთა ამ მიმდევრობას მომჭიმავი მიმდევრობა ეწოდება, თუ ამ მიმდევრობის ყოველი მონაკვეთი მთლიანად ეკუთვნის მის წინამავალ მონაკვეთს და ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n, რომ $|\Delta_n| < \varepsilon$, სადაც $|\Delta_n|$ სიმბოლოთი აღნიშნულია Δ_n მონაკვეთის სიგრძე.

თეორემა. არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი, რომელიც ეკუთვნის მომჭიმავ მონაკვეთთა მიმდევრობის ყველა მონაკვეთს.

დამტკიცება. ვთქვათ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, მონაკვეთების მომჭიმავი მიმდევრობაა. აღვნიშნოთ a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n, ... შესაბამად ამ მონაკვეთების საწყისი და ბოლო წერტილები (იხ. ნახ. 1).

ცხადია, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leqslant a_n \leqslant \dots$ და $b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots$ გავყოთ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ორ კლასად X და Y შემდეგნაირად:



ნახ. 1.

α ნამდვილი რიცხვი მივაკუთვნოთ X კლასს, თუ არსებობს ისეთი n, რომლისთვისაც $a_n \geqslant \alpha$. წინააღმდეგ შემთხვევაში α მივაკუთვნოთ Y კლასს. ამგვარად, X კლასს მივაკუთვნებთ წრფის ყველა ისეთ წერტილებს, რომელთა მარჯვნივ იმყოფება მომჭიმადი მონაკვეთების მიმდევრობის რომელიმე მონაკვეთის ერთი მარცხენა საწყისი წერტილი მაინც, ან თვითონ ეს წერტილები წარმოადგენენ მონაკვეთების მარცხენა საწყის წერტილებს. ყველა სხვა წერტილებს მივაკუთვნებთ Y კლასს. ნამდვილ რიცხვთა გაყოფა ორ ასეთ სიმრავლედ წარმოადგენს განკვეთას. მართლაც, ყოველი ნამდვილი რიცხვი მიეკუთვნება ან X ან Y კლასს. არცერთი ეს კლასი ცარიელი არ არის. დავამტკიცოთ, რომ X კლასის ნებისმიერი წერტილი მდებარეობს Y კლასის ნებისმიერი წერტილის მარცხნით. ვთქვათ α არის X კლასის ნებისმიერი რიცხვი, ხოლო β კი — Y კლასის ნებისმიერი რიცხვი. დავამტკიცოთ, რომ $\alpha < \beta$ დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ რომ $\beta \angle \alpha$. ვინაიდან α ეკუთვნის X კლასს, ამიტომ მოიძებნება $a_n \geqslant \alpha$, ე. ი. $a_n > \beta$ და, მაშასადამე, β უნდა მიეკუთვნოს X კლასს, ეს კი ჩვენ პირობას ეწინააღმდეგება. ამგვარად ნამდვილ რიცხვთა ზემოხსენებული წესით გაყოფა ორ კლასად წარმოადგენს განკვეთას. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რაღაც ნამდვილ γ რიცხვს. დავამტკიცოთ, რომ γ წარმოადგენს $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ მონაკვეთების საერთო წერტილს. ვთქვათ არსებობს ისეთი მონაკვეთი Δ_n, რომელიც არ შეიცავს γ წერტილს. მაშინ მონაკვეთი Δ_n უნდა მდებარეობდეს მთლიანად ან γ წერტილის მარცხნით ან მარჯვნით. ვთქვათ Δ_n მდებარეობს γ-ს მარჯვნით, მაშინ $\gamma < a_n$. მაგ-

რამ γ და a_n წერტილებს შორის მოიძებნება წერტილი x, რომელიც უნდა მიეკუთვნოს X კლასს, ვინაიდან $\gamma \angle x \angle a_n$, ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება, რადგანაც ეს წერტილი აღებულია У კლასიდან ($x \overline{\gt} \gamma$). სავსებით ასევე დავრწმუნდებით, რომ Δ_n მონაკვეთი არ შეიძლება მთლიანად მდებარეობდეს γ წერტილის მარცხნით. მაშასადამე, ჩვენი მომჭიმადი მიმდევრობის Δ_n მონაკვეთი არ შეიძლება მდებარეობდეს მთლიანად γ წერტილის არც მარცხნით არც მარჯვნით და ამიტომ იგი უნდა შეიცავდეს γ წერტილს.

მაშასადამე, არსებობს წერტილი, რომელიც ეკუთვნის მონაკვეთთა განხილული მიმდევრობის ყველა მონაკვეთს.

დავამტკიცოთ, რომ ასეთი საერთო წერტილი ერთად-ერთია. ვთქვათ არსებობს ასეთი თვისების მეორე γ_1 წერტილი. აღვნიშნოთ γ და γ_1 წერტილებს შორის მანძილი d-თი. რადგანაც γ და γ_2 წერტილები ეკუთვნის Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n, ... მიმდევრობის ყოველ მონაკვეთს, ამიტომ არცერთი ამ მონაკვეთის სიგრძე ar იქნება ნაკლები d-ზე, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რადგან d რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი n, რომლისთვისაც $|\Delta_n| \angle d$. ამგვარად ჩვენი დაშვება სწორი არ არის და თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

შემდგომი მასალის დამუშავებამდე საჭიროა ვიცოდეთ ზოგიერთი განმარტებანი სიმრავლეთა თეორიიდან.

განმარტება 1. სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი მთლიანად არის მოთავსებული რაიმე მონაკვეთის შიგნით.

მაგალითი. ყველა დადებით წესიერ წილადთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

განმარტება 2. ნამდვილ რიცხვთა M სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვევიდან, თუ არსებობს ისეთი K რიცხვი, რომ M სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $K \leq x$. K რიცხვს სიმრავლის ქვედა საზღვარი ეწოდება.

ასე მაგალითად, დადებით რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვევიდან. მისი ქვედა საზღვარია 0 და ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვი.

განმარტება 3. M სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზევიდან, თუ არსებობს ისეთი C რიცხვი, რომ M სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $x \leq c$.

C რიცხვს სიმრავლის ზედა საზღვარი ეწოდება.

მაგალითად, უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზევიდან. მისი ზედა საზღვარი იქნება ნული და ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. ლუწ რიცხვთა მიმდევრობა 2, 4, 6, . . . არარის ზევიდან შემოსაზღვრული. თუ ავიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots,$$

ცხადია, იგი შემოსაზღვრულია ზევიდან რიცხვით 1-ით და ყველა ერთზე მეტი რიცხვით.

განმარტება 4. სიმრავლის ქვედა საზღვართა შორის უდიდეს რიცხვს სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი ეწოდება.

განმარტება 5. სიმრავლის ზედა საზღვართა შორის უმცირეს რიცხვს სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი ეწოდება.

თ ა ვ ი II

ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ც ნ ე ბ ა

დაამუშავეთ შემდეგი ლიტერატურა:

1) ლ. გოკიელი, დიფერენციალური აღრიცხვა, გვ. 25—29.

2) ა. რუხაძე და ა. ხარაძე, უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები, ტ. I, გვ. 24—33.

3) Г. Фихтенгольц, Курс диференциального и интегрального исчисления, ტ. I, თავი II, § 1, გვ. 111—138.

4. В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа, ტ. I, გვ. 71—87.

ცვლადი სიდიდე ეწოდება სიმბოლოს, რომელსაც შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობანი. იტყვიან, რომ მოცემულია x ცვლადი, როცა მოცემულია მის მნიშვნელობათა სიმრავლე $X = \{x\}$. მუდმივი სიდიდე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ცვლადის კერძო შემთხვევა, როცა X სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ერთ ელემენტს.

ასე მაგალითად, სიდიდე x, რომელსაც შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა მოცემულ a და b ($a \angle b$) რიცხვებს შორის, იქნება ცვლადი სიდიდე. x სიდიდე, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას $8x - 5 = 0$, წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და ა. შ. უმეტეს შემთხვევებში ცვლადი სიდიდეები ერთმანეთთან არის დაკავშირებული; ერთმანეთთან კავშირში მყოფი სიდიდეების მაგალითებია: კუთხის სიდიდე და მისი სინუსი; x და y ცვლადების მნიშვნელობანი, რომლებიც დააკმაყოფილებს განტოლებას $x + y = 2$ და ა. შ.

y ცვლადს ეწოდება x ცვლადის ფუნქცია, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის გარკვეული მნიშვნელობა. x ცვლადს დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი ეწოდება. ზოგჯერ y ცვლადს დამოკიდებულ ცვლადს უწოდებენ. ჩვეულებრივად x და y ცვლადებს შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას აღ-

ნიშნავენ $y = f(x)$ სიმბოლოთი და იკითხება ასე: „y არის x-ის ფუნქცია“.

დამოუკიდებელი ცვლადის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ანუ ფუნქციის არსებობის არე ეწოდება. ფუნქციის ყველა მნიშვნელობათა ერთობლიობას ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს უწოდებენ. დიფერენციალურ აღრიცხვაში შეისწავლება ისეთი ფუნქციები, რომელთა განსაზღვრის არე და ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგება.

ხშირად ორ ცვლადს შორის ფუნქციონალური კავშირი ისეთია, რომ არგუმენტის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის რამოდენიმე მნიშვნელობა. ასეთ ფუნქციას მრავალსახა ფუნქცია ჰქვია. მაგალითად, ფუნქცია $y = \pm\sqrt{x}$ არის ორსახა ფუნქცია.

ჩვენს მიერ ზევით მითითებულ ლიტერატურაში ყურადღება მიაქციეთ, რომ ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს სხვადასხვა წესით: a) ანალიზურად, b) გრაფიკულად, c) ცხრილებით.

ყველა იმ ფუნქციებს, რომლებიც გვხედება ელემენტარულ ალგებრაში და ტრიგონომეტრიაში, ელემენტარული ფუნქციები ეწოდება. ელემენტარული ფუნქციებია:

ხარისხოვანი ფუნქცია: $f(x)=x^\alpha$, სადაც α ნამდვილი რიცხვია.

მაჩვენებლიანი ფუნქცია: $f(x)=a^x$, სადაც $a>0$.

ლოგარითმული ფუნქცია: $f(x)=\log_a x$, სადაც $a>0$.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} x$.

შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

ფუნქციები, შედგენილი ყველა დასახელებული ელემენტარული ფუნქციების სასრული კომბინაციებით.

ელემენტარულ ფუნქციათა შორის განსაკუთრებითი მნიშვნელობა აქვს შემდეგ ფუნქციებს:

1) პოლინომიალურ ფუნქციას (ანუ უბრალოდ პოლინომს). პოლინომს უწოდებენ

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

სახის ფუნქციას, სადაც კოეფიციენტები a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x-ის ხარისხის მაჩვენებლები კი — მთელი დადებითი რიცხვები.

2) რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც წარმოადგენს ორი პოლინომის შეფარდებას. მაგალითად,

$$y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^4 - 5x + 3} \qquad y = \frac{x^5 - 1}{x^6 + x^5 + 2x^2 - 3}.$$

3) ცხადი ან უცხადო სახით წარმოდგენილ ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც გამოსახულია რაციონალური ფუნქციისა და ფესვის ნიშნის საშუალებით, მაგალითად:

$$y = \sqrt[7]{\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 1}} \qquad y = \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^3}}{2 - x}.$$

როცა მოცემული ფუნქცია არ არის ალგებრული ფუნქცია, მაშინ მას ტრანსცენდენტულ ფუნქციას უწოდებენ. ტრანსცენდენტული ფუნქციებია, მაგალითად, ყველა ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, ლოგარითმული ფუნქცია, ფუნქცია $y = \frac{a^x + 2}{x}$ და ა. შ.

ხშირად ერთი ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად არა ერთი, არამედ რამოდენიმე ტოლობით. კიდევ მეტიც, ზოგჯერ გვხვდება ისეთი ფუნქციაც, რომელიც ანალიზურად გამოსახულია ტოლობათა უსასრულო რიცხვით. ამ საკითხების შესახებ დაწვრილებითი მასალა იხილეთ წიგნში: В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, „Курс математического анализа“ ტ. I, გვ. 72—75. ამავე წიგნის 75—78 გვერდებზე თქვენ ნახავთ ფუნქციათა გრაფიკულად გამოსახვის ხერხებს და საინტერესო და საჭირო მასალას ლუწ და კენტ ფუნქციათა შესახებ, შებრუნებული ფუნქციის განმარტებას და მათ მაგალითებს.

თავი III

ზღვართა თეორია

მთელი მათემატიკური ანალიზისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ცვლადის ზღვარის ცნებას. ამ თავის დასამუშავებლად სტუდენტმა გულმოდგინეთ და აუჩქარებლად უნდა დაამუშაოს ლიტერატურით სათანადო თეორიული მასალა და გადაწყვიტოს რაც შეიძლება მეტი რაოდენობის მაგალითები. საჭირო მასალას მოძებნით შემდეგ წიგნებში:

1) ლ. გოკიელი, დიფერენციალური აღრიცხვა, გვ. 32—59;

2) ა. ხარაძე და ა. რუხაძე, უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები, ტომი I, გვ. 186—208;

3) В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа, ტ. I, გვ. 39—44, 87—103;

4) Г Фихтенгольц, Курс диференциального и интегрального исчисления, ტ. I, გვ. 50—63, 66—75, 85—95;

კარგად დაიხსომოთ ცვლადის ზღვრის განმარტება. იტყვიან, რომ x ცვლადის ზღვარია a მუდმივი რიცხვი, თუ x-ის ცვლილების დროს, მისი რიცხვითი მნიშვნელობა უახლოვდება a-ს ისე, რომ x-ისა და a-ს სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა გარკვეული დროიდან დაწყებული შეიძლება ყოველ წინასწარ აღებულ რაგინდ მცირე დადებით რიცხვზე ნაკლები გახდეს და შემდეგშიაც ასეთი დარჩეს.

ის ფაქტი, რომ x ცვლადის ზღვარია a რიცხვი, აღინიშნება ასე: $\lim x = a$.

ცვლადის ზღვარის განმარტებაში განსაკუთრებით უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას, რომ თუ x ცვლადის ზღვარია a, მაშინ რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს დადებითი მუდმივი ε რიცხვი, $x - a$ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა x-ის ცვლილების რაიმე მომენტიდან დაწყებული მუდამ ნაკლებია, ვიდრე ε.

მივაქციოთ ყურადღება იმასაც, რომ ცვლადის ცვლილების ხასიათი სხვადასხვანაირი შეიძლება იყოს. ამის გამო იტყვიან, რომ:

1) x ცვლადი ზრდადია, თუ x იცვლება ისე, რომ მისი ყო-

ველი შემდეგი მნიშვნელობა მეტია ვიდრე წინა მნიშვნელობა. ასეთი ცვლადის გამომსახველი წერტილი რიცხვით წრფეზე მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ.

2) ცვლადი x კლებადია, თუ x იცვლება ისე, რომ მისი ყოველი შემდეგი მნიშვნელობა ნაკლებია წინამავალ მნიშვნელობაზე. რიცხვით წრფეზე ასეთი გამომსახველი წერტილი მოძრაობს მარჯვნიდან მარცხნით.

3) x ცვლადს მონოტონური ცვლადი ეწოდება. თუ იგი ან მუდამ ზრდადია ან მუდამ კლებადი.

ზევით მითითებულ ლიტერატურაში მოძებნეთ და დაიმახსოვრეთ მონოტონური ცვალებადის მაგალითები. სასურველია თქვენ თითონ ააგოთ ანალოგიური მაგალითები.

4) x ცვლადს ზემოდან შემოსაზღვრული ეწოდება, თუ შემოსაზღვრულია ზემოდან რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც ცვლადის მიერ მიღებულ მნიშვნელობებისაგან შედგება.

ზემოდან შემოსაზღვრული ცვლადისათვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. *თუ ზრდადი ცვლადი ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ამ ცვლადის ზღვარი და ეს ზღვარი იქნება ცვლადის ზუსტი ზედა საზღვარი.*

როცა ცვლადი შემოსაზღვრულია ზევიდან, მაშინ, განმარტების მიხედვით, შემოსაზღვრულია ზევიდან ამ ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ამ სიმრავლის ნამდვილი ზედა საზღვარი იმავე დროს არის ცვლადის ნამდვილი ზედა საზღვარი.

სავსებით ასევე, თუ *კლებადი ცვლადი ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ამ ცვლადის ზღვარი და ეს ზღვარი არის ცვლადის ნამდვილი ქვედა საზღვარი.*

5) თუ x ცვლადი ისეთია, რომ აბსოლუტური მნიშვნელობა $|x|$ მუდამ ნაკლები რჩება რაიმე მუდმივ და დადებით a რიცხვზე, მაშინ x-ს შემოსაზღვრული ცვლადი ჰქვია. ყველა სხვა შესაძლო შემთხვევაში x ცვლადი არა შემოსაზღვრულია.

განსაკუთრებული ყურადღებით შეისწავლეთ უსასრულოდ მცირისა და უსასრულოდ დიდის განსაზღვრა და მათთან დაკავშირებული დებულებანი. დავიმახსოვროთ, რომ უსასრულოდ მცირე (და აგრეთვე უსასრულოდ დიდი) გარკვეული სახის ცვლად სიდიდეს

ეწოდება. მივაქციოთ ყურადღება იმ განსხვავებას, რომელიც არსებობს უსასრულოდ მცირესა და ძალიან მცირე მუდმივ სიდიდეს შორის.

გაარჩიეთ $+\infty$, $-\infty$ და ∞ სიმბოლოების შინაარსი.

6) დაამუშავეთ საკითხი ფუნქციის ზღვარის შესახებ.

თუ მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, მაშინ მისი ზღვრული მნიშვნელობა, როცა $x \to a$, დამოუკიდებელია ფუნქციის მნიშვნელობისაგან a წერტილზე და საზოგადოდ შესაძლებელია, რომ ეს ზღვარითი მნიშვნელობა არც კი უდრიდეს ფუნქციის მნიშვნელობას a წერტილზე.

მაგალითი 1. მოვძებნოთ $y = 2 + \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვარი, როცა $x \to 1$.

მოვძებნოთ ჯერ მარცხენა ზღვარი. გვაქვს

$$\lim_{x \to 1-0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}} \right) = 2 + \frac{1}{1 + \lim\limits_{x \to -0} 2^{\frac{1}{1-x}}} = 2,$$

რადგანაც $\lim\limits_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \infty$;

მაშასადამე, ჩვენი ფუნქციის მარცხენა ზღვარია 2.

ეხლა მოვძებნოთ მარჯვენა ზღვარი. გვექნება,

$$\lim_{x \to 1+0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}} \right) = 2 + \frac{1}{1 + \lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{1}{1-x}}} = 2 + 1 = 3.$$

7) ფუნქციის ზღვრის არსებობის გამოსაკვლევად არსებობს კოშის ნიშანი. ეს ნიშანი არის აუცილებელი და საკმარისიც და შემდეგში მდგომარეობს:

იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს ზღვარი როცა $x \to a$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ ყველა a-საგან განს-

ხვაევბული x' და x'' მნიშვნელობებისთვის, რომლებიც დააკმაყოფილებენ უტოლობებს $|x'-a| \angle \delta$ და $|x''-a| \angle \delta$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|f(x')-f(x'') \angle \varepsilon.$$

მოძებნეთ ჩვენს მიერ დასახელებულ ლიტერატურაში ამ თეორემის აუცილებლობისა და საკმარისობის დამტკიცება და შეისწავლეთ.

დაამუშავეთ ყურადღებით В. В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов-ის წიგნის 96—100 გვერდებზე მოყვანილი ზოგადი თეორემები ფუნქციათა ზღვრების შესახებ.

ამ თეორემების დამტკიცების დროს მხედველობიდან არ გამოგრჩეთ, რომ როცა ორი ფუნქციის სხვაობის ზღვარი არსებობს, აქედან არ გამომდინარეობს მონაწილე ფუნქციების ზღვრების არსებობა ცალ-ცალკე. მაგალითად,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = 0,$$

ე. ი. არსებობს $\sqrt{x+1}$ და $\sqrt{x-1}$ ფუნქციების სხვაობის ზღვარი, როცა $x \to \infty$; ცალ-ცალკე კი ამ ფუნქციების ზღვრები, როცა $x \to \infty$, არ არსებობს.

8) შეისწავლეთ ტიპიური მაგალითები:

$$1.\ \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1.$$

$$2.\ \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

სადაც e ნეპერის რიცხვია.

$$3.\ \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,$$ სადაც k მუდმივი რიცხვია.

$$4.\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, სადაც a ნებისმიერი დადებითი მუდმივია.

შენიშვნა. 4 და 5 მაგალითებში სიმბოლო „$\ln y$" აღნიშნავს y-ის ნატურალურ ლოგარითმს. მხედველობაში იქონიეთ, რომ თითქმის მთელ მათემატიკურ ანალიზში სარგებლობენ ნატურალური ლოგარითმებით, ე. ი. ლოგარითმებით, რომელთა ფუძედ აღებულია ნეპერის e რიცხვი. არ გამოგრჩეთ იმ ფორმულის შესწავლა, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს მოცემული რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს ამავე რიცხვის ლოგარითმთან ფუძით 10.

სავარჯიშო მაგალითები.

1) მოვძებნოთ ზღვარი

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}.$$

ამ შემთხვევაში მრიცხველის და მნიშვნელის ზღვარი, როცა $x \to 1$, უდრის ნულს, და, მაშასადამე, უშუალოდ გამოყენება თეორემისა წილადის ზღვარის შესახებ, არ შეიძლება. საჭიროა ზღვარის სიმბოლოს ქვევით მდგომი რაციონალური წილადი გარდაიქმნას შემდეგნაირად:

$$\frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(3x^2 + 2x + 1)}{(x-1)^2} = 3x^2 + 2x + 1.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}(3x^2 + 2x + 1) = 6.$$

ანალოგიურ შემთხვევებში, ე. ი. როცა ზღვარის სიმბოლოს ქვევით იმყოფება რაციონალური წილადი და მრიცხველის და მნიშვნელის ზღვარი ნულის ტოლია, როცა $x \to a$, მაშინ საჭიროა მრიცხველი დაშალოთ ისეთ მამრავლებად, რომელთა შეკვეცა შესაძლებელია; შეკვეცის შემდეგ კი გადახვიდეთ ზღვარზე.

გამოთვალეთ ზღვრები:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right]$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m და n მთელი რიცხვებია).

2) გამოვთვალოთ ზღვარი:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}.$$

ამ მაგალითში უშუალოდ გადასვლა ზღვარზე მოგვცემს განუსაზღვრელ გამოსახულებას $\frac{\infty}{\infty}$. ანალოგიურ შემთხვევებში საჭიროა ზღვარის სიმბოლოს ქვეშ მყოფი რაციონალური წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ x-ის უდიდეს ხარისხზე და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე. გვაქვს:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}};$$

ვინაიდან $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$, ნებისმიერი მუდმივი a რიცხვისათვის, ამიტომ წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1;$$

გამოთვალე ზღვრები

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^4+x^2+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)(3x+2)(4x+5)}{(x-1)(2x+3)(3x-4)}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-2}{5x^4+2}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{2x+7}$.

3) მოვძებნოთ ზღვარი

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}.$$

როცა ზღვარის ნიშნის ქვევით იმყოფება ირაციონალური წილადი და მრიცხველისა და მნიშვნელის ზღვარი უდრის ნულს, მაშინ საჭიროა ირაციონალობა გადავიტანოთ მნიშვნელიდან მრიცხველში, ან პირიქით, მრიცხველიდან მნიშვნელში. ამნაირად მივაღწევთ მრიცხველისა და მნიშვნელის შეკვეცას ისეთ თანამამრავლს, რომელიც წარმოშობს განუსაზღვრელობას და შემდეგ კი გადავიდეთ ზღვარზე ჩვენს მაგალითის შემთხვევაში გვაქვს:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\left[1-\sqrt[3]{1+2x}+\sqrt[3]{(1+2x)^2}\right]\left(\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}{\left[1-\sqrt[3]{1+2x}+\sqrt[3]{(1+2x)^2}\right]\left(\sqrt[3]{2+x}+x\right)}=$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left[\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^3 + 1^3\right]\left(\sqrt{2+x} - x\right)}{\left[1 - \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{(1+2x)^2}\right]\left(2 + x - x^2\right)} =$$

$$= 2\lim_{x\to -1} \frac{\left(x+1\right)\left(\sqrt{2+x} - x\right)}{\left[1 - \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{(1+2x)^2}\right]\left(x+1\right)\left(2-x\right)} =$$

$$= 2\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2+x} - x}{\left[1 - \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{(1+2x)^2}\right]\left(2-x\right)} = \frac{4}{9};$$

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[k]{a+x} - \sqrt[k]{a-x}}{x}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2} - \sqrt[3]{a^2-ax-x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$

იმ შემთხვევაში როცა მაგალითები შეიცავს ტრიგონომეტრიულ, მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს, ხშირად საჭირო ხდება ცნობილი

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ და } \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ზღვრების გამოყენება.

4) მოვძებნოთ ზღვარი

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}.$$

მრიცხველისა და მნიშვნელის ზღვარი როგორც ვხედავთ ნულის ტოლია. ანალოგიურ შემთხვევებში წილადი ისე უნდა გარდაიქმნას, რომ შედეგად მივიღოთ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ სახის ზღვარი. ჩვენს მაგალითზე გვექნება.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{mx}{2}}{x^2} = \frac{m^2}{2} \lim \left(\frac{\sin \frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\right)^2 = \frac{m^2}{2};$$

მოძებნეთ შემდეგი ზღვრები:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

b¹) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x}$.

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a+x) - \sin (a-x)}{x}$.

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a + 2x) - 2 \sin (a+x) + \sin a}{x^2}$.

არავითარ შემთხვევაში არ დაკმაყოფილდეთ ზემომოყვანილი მცირე რაოდენობის მაგალითების ამოხსნით, საჭიროა სტუდენტი თავისუფლად აკეთებდეს მაგალითებს ზღვრების გამოთვლაზე. გვევა-

ლებათ აიხსნათ შემდეგი მაგალითები წიგნიდან: გიუნტერისა და კუზმინის, უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ტ. I. გვ. 80—89.

დაამუშავეთ პროფ. ლ. გოკიელის წიგნიდან „მათემატიკური ანალიზის შესავალი“, მე 11 და მე-12 პარაგრაფებში მოცემული საკითხები, გვ. 112 116.

მითითებულ ლიტერატურაში საუბარია სხვადასხვა რიგის უსასრულო მცირეებზე. უსასრულოდ მცირე სიდიდეების შეცვლაზე ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით ზღვრების გამოთვლის დროს. გამოიყვანეთ მაგალითები უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა რიგის გამოკვლევაზე. ამ მაგალითებს თქვენ მოძებნით ზევით მოთითებულ ლიტერატურაში.

ფუნქციის უწყვეტობა

დაამუშავეთ: პროფ. ლ. გოკიელის მათემატიკური ანალიზის შესავალის სახელმძღვანელოს 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 პარაგრაფები, გვ. 123—174.

ფუნქციის უწყვეტობა ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. განვიხილოთ ცალსახა ფუნქცია $y = f(x)$, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე სიმრავლის ყოველ წერტილზე. ვთქვათ a არის $y = f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის სიმრავლის რაიმე წერტილი. იტყვიან რომ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია a წერტილზე, თუ ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით ε რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, როცა $|x - a| < \delta$.

თუ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე სიმრავლის ყოველ წერტილზე, მაშინ იტყვიან, რომ იგი უწყვეტია ამ სიმრავლეზე.

როცა $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტი არ არის მისი განსაზღვრა არის რომელიმე წერტილზე $x = x_0$, მაშინ x_0-ს ეწოდება ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

ვთქვათ, a არის ფუნქციის განსაზღვრის რაიმე წერტილი თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\delta > 0$, რომ ყველა a-ზე მეტი x-თვის, რომლებიც დააკმაყოფილებენ უტოლობას $x - a < \delta$, ადგილი აქვს უტოლობას $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, მაშინ იტყვიან, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან $x = a$ წერტილზე.

როცა აქ ხსენებული პირობები დაკმაყოფილებულია ყველა a-ზე ნაკლები x-თვის, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან $x = a$ წერტილზე.

განსაზღვრა 1. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება (a, b) შუალედში შემოსაზღვრული, თუ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შემოსაზღვრულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოიძებნება ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ $|f(x)| < M$ ყოველი x-თვის, რომელიც (a, b) შუალედიდან არის აღებული. თუ ფუნქცია ამ პირობას არ აკმაყოფილებს, მაშინ მას არაშემოსაზღვრული ეწოდება, და ამ შემთხვევაში ყოველი დადებითი რაგინდ დიდი A რიცხვისათვის მოიძებნება (a, b) შუალედის ისეთი x წერტილი, რომ $|f(x)| > A$.

განსაზღვრა 2. $f(x)$ ფუნქციას ზრდადი ეწოდება (a, b) შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი ორი მნიშვნელობისათვის x_1 და x_2, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x_1 < x_2$ ადგილი აქვს უტოლობას $f(x_1) \leq f(x_2)$, ხოლო, $f(x)$-ს ეწოდება კლებადი (a, b) შუალედში, თუ (a, b) შუალედის ყოველი ორი წერტილისათვის x_1 და x_2, სადაც $x_1 < x_2$, ადგილი აქვს უტოლობას: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

განსაზღვრა 3. ფუნქციას მონოტონური ეწოდება, თუ იგი ზრდადია ან კლებადია.

განსაკუთრებული ყურადღება მიაქციეთ შემდეგ თეორემებს:

თეორემა 1. დახურულ (a, b) შუალედში უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ შუალედში.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ (a, b) შუალედში, მაშინ იგი ამ შუალედში მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა და ქვედა საზღვრებს.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე $x = x_0$ წერტილზე და $f(x_0) \neq 0$, მაშინ მოიძებნება x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის $f(x)$ ფუნქცია მუდმივ ნიშანს ინარჩუნებს. ეს ნიშანი ემთხვევა $f(x_0)$ რიცხვის ნიშანს.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) შუალედში და $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს სხვადასხვა ნიშნები აქვს, მაშინ (a, b) შუალედში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $f(c) = 0$.

თეორემა 5. ვთქვათ, $f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია დახურულ (a, b) შუალედში, ხოლო M და m იყოს მისი უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობანი, მაშინ ნე-

ბისმიერი η რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $m \angle \eta \angle M$, მოიძებნება (a, b) შუალედში ისეთი $x=\zeta$ წერტილი, რომ $f(\zeta)=\eta$.

უწყვეტ ფუნქციათა ამ თვისებების გამოყენებას თქვენ ხშირად შეხვდებით მათემატიკური ანალიზის კურსის შემდეგი შესწავლის დროს. საჭიროა მკაფიოდ გახსოვდეთ მათი ზუსტი გამოთქმა და დამტკიცება.

იმის შემდეგ, რაც თქვენ უკვე იცით ზოგადი თვისებანი და დებულებანი უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ, გადადით კერძო სახის ფუნქციების განხილვაზე. შეისწავლეთ მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული, შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები. გამოიკვლიეთ ამ ფუნქციების უწყვეტობის საკითხი.

მაგალითი. შევისწავლოთ $x=\arcsin y$ ფუნქცია, სადაც x აღნიშნავს ფუნქციას, ხოლო y—დამოუკიდებელ ცვლადს. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-1, +1)$ შუალედი, ე. ი. როცა $-1 \leqslant y \leqslant +1$, მაშინ $x=\arcsin y$ ფუნქცია განსაზღვრულია. განსაზღვრის მიხედვით, $y=\sin x$. ფუნქცია სინუსი არამონოტონური ფუნქციაა და ამიტომაც აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც დაშორებულია Ox ღერძიდან მანძილით $\angle$ 1, გადაკვეთს სინუსოიდს უამრავ წერტილში. ცხადია შებრუნებულ ფუნქციას $x=\arcsin y$ მოცემული y-ის მნიშვნელობისათვის არ ექნება ცალსახა მნიშვნელობა, რადგანაც x ცვლადს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე. შევთანხმდეთ, გამოვყოთ ერთ ერთი ასეთი მნიშვნელობა როგორც მთავარი მნიშვნელობა. ვინაიდან $y=\sin x$ ფუნქცია მონოტონურად იცვლება $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და ამავე დროს უწყვეტია, ამიტომ, ბუნებრივია, მთავარ მნიშვნელობებად x ცვლადისა, მივიღოთ მისი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებს $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ უტოლობას $(-1, +1)$ შუალედის ყოველ წერტილს, ამ პირობებში, ეთანადება x-ის ერთად-ერთი მნიშვნელობა $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში.

ქვევით, y-ის მოცემული მნიშვნელობისათვის, სიმბოლოს $\arcsin y$-ის ქვეშ ჩვენ გვესმის რიცხვი, მოთავსებული $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში

და რომლის სინუსი უდრის y-ს. გამოვიკვლიოთ ახლა $x = \arcsin y$ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი. ვთქვათ $y \to y_0$. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{y \to y_0} \arcsin y = \arcsin y_0$.

y ცვლადს შეუძლია თავის y_0 ზღვარს მიუახლოვდეს მარჯვნიდანაც და მარცხნიდანაც, ე. ი. მონოტონურად იზრდება; მაგრამ მაშინ x ფუნქცია აგრეთვე მონოტონურად იზრდება. გარდა ამისა, ვინაიდან $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}$, ამიტომ x სიდიდე შემოსაზღვრულია. მაშასადამე, x ცვლადი მონოტონურია და შემოსაზღვრული. მოვიგონოთ თეორემა მონოტონური და შემოსაზღვრული ცვლადის ზღვრის არსებობის შესახებ. ამ თეორემის ძალით x ცვლადს აქვს ზღვარი, რომელიც აღვნიშნოთ x_0. როცა $x \to x_0$, მაშინ $\sin x \to \sin x_0$, ვინაიდან sinx ფუნქცია უწყვეტია. მაგრამ $y = \sin x$ და, მაშასადამე, $y \to \sin x_0$.

მეორეს მხრივ, პირობის თანახმად $y \to y_0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $y_0 = \sin x_0$ და $x_0 = \arcsin y_0$.

მაშასადამე, $\lim\limits_{y \to y_0} \arcsin y = x_0 = \arcsin y_0$ და ამიტომ $\arcsin y \to \arcsin y_0$. ამგვარად, $x = \arcsin y$ ფუნქცია უწყვეტია.

ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

დაამუშავეთ ლიტერატურა

1. ლ. გოკიელი, „დიფერენციალური აღრიცხვა" გვ. 89—107.
2. ა. რუხაძე და ა. ხარაძე, „უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები", გვ. 242—303.
3. გიუნტერი და კუზმინი, უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწ. I, განყოფილება III, ამოხსენით ამოცანები: 216—318; 327—341; 342—397.

ამ მასალის წარმატებითი დამუშავება დიდად არის დამოკიდებული ფუნქციის წარმოებულისა და დიფერენციალის ცნების მკაფიო წარმოდგენაზე. სტუდენტი გარკვეული უნდა იყოს ამ ცნებებში, მან უნდა მიიღოს მრავალი ამოცანის ამოხსნით ისეთი წვრთნა, რომ თავისუფლად ახერხებდეს მოცემული კერძო სახის ფუნქციების წარმოებულების და დიფერენციალის სწრაფად მოძებნას.

განვიხილოთ (a,b) შუალედში $y = f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ დამოუკიდებელი ცვლადის რომელიმე მნიშვნელობა x და მივცეთ

მას ნაზრდი Δx. ეს ნაზრდი შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. გარდა ამისა, ნაზრდი Δx უნდა იყოს ისეთი, რომ $x + \Delta x$ წერტილი არ გამოდიოდეს (a,b) შუალედიდან. ფუნქციისათვის გვექნება ორი მნიშვნელობა $f(x)$ და $f(x + \Delta x)$. სხვაობა $f(x + \Delta x) - f(x)$, რომელიც ფუნქციის ნაზრდია, აღვნიშნოთ Δy-ით.

განსაზღვრა. მოცემული x—ისათვის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ეწოდება ფუნქციის Δy ნაზრდისა და არგუმენტის Δx ნაზრდის ფარდობის ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი Δx ნულისაკენ მიისწრაფის.

ფუნქციის წარმოებულს აღნიშნავენ y' ან $f'(x)$ სიმბოლოებით. მაშ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x).$$

შესაძლებელია, რომ ზღვარი $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ არსებობდეს (a,b) შუალედის ზოგიერთი წერტილებისათვის და არ არსებობდეს სხვა წერტილებისათვის. ამის გამო მოცემული ფუნქციის წარმოებული არ წარმოადგენს საზოგადოდ x-ის გარკვეულ ფუნქციას ფუნქციის განსაზღვრის არეში. შესაძლოა, რომ წარმოებულის განსაზღვრის არე ნაწილი იყოს ფუნქციის განსაზღვრის არისა. მანამ გავეცნობოდეთ ფუნქციათა გაწარმოების სხვადასხვა ხერხებს, ივარჯიშეთ წარმოებულის გამოთვლაზე უშუალო ხერხით.

მაგალითი. მოვძებნოთ $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ფუნქციის წარმოებული.

მივცეთ დამოუკიდებელ x ცვლადს Δx ნაზრდი; მაშინ ფუნქციის შესაბამი მნიშვნელობა იქნება $y + \Delta y = \sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1}$. აქედან ვიპოვით ფუნქციის ნაზრდს: $\Delta y = \sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$. გამოვთვალოთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობის ზღვარი, როცა $\Delta x \to 0$. გვაქვს:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\Delta x \quad \left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2x+\Delta x)}{\Delta x\,\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x+\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

საჭიროა იცოდეთ წარმოებულის გეომეტრიული და მექანიკური შინაარსი.

შეისწავლეთ შემდეგი თეორემების დამტკიცება.

თეორემა 1. თუ ფუნქცია მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს, მაშინ მისი წარმოებული ნულის ტოლია.

თეორემა 2. თუ ფუნქციათა რიცხვი სასრულოა, მაშინ ამ ფუნქციათა ჯამის წარმოებული შესაკრებ ფუნქციათა წარმოებულთა ჯამის ტოლია.

თეორემა 3. ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული უდრის პირველი ფუნქციის წარმოებულს, გამრავლებულს მეორე ფუნქციაზე პლუს მეორე ფუნქციის წარმოებული, გამრავლებული პირველი ფუნქციის წარმოებულზე.

თეორემა 4. წილადის წარმოებული უდრის მრიცხველის წარმოებულს გამრავლებულს მნიშვნელზე, მინუს მნიშვნელის წარმოებული გამრავლებული მრიცხველზე, გაყოფილს მნიშვნელის კვადრატზე.

ვთქვათ $y = f(u)$ და $u = \varphi(x)$.

ამ პირობებში y იქნება x-ის ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ $f(u)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები წარმოებადია. მაშინ ფუნქცია $F(x) = f(\varphi(x))$, აგრეთვე წარმოებადი იქნება და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x) = f'(u)\,\varphi'(x).$$

მაშ რთული ფუნქციის წარმოებულის მისაღებად y-ს გავაწარმოებთ დამხმარე u ცვლადით და შედეგს გავამრავლებთ დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე დამოუკიდებელი x ცვლადით:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

თეორემა 6. თუ აღებული ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციის წარმოებული ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ აღებული ფუნქციაც წარმოებადია და მისი წარმოებული ტოლია შებრუნებული ფუნქციის წარმოებულის შებრუნებული სიდიდის.

ქვემოთ მოყვანილი ელემენტარული ფუნქციების გაწარმოება უნდა იცოდეთ ზეპირად:

1. $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$.
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3. $(x^m)' = mx^{m-1}$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
8. $(\mathrm{arcsix})' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
10. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
11. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

ამ ძირითადი ფორმულებისა და გაწარმოების ძირითადი წესების დახმარებით (იხ. თეორემები 1, 2, 3, 4, 5) შეგიძლიათ იპოვოთ სხვადასხვა ფუნქციების წარმოებულები. გააწარმოეთ ფუნქციები, რომლებიც მოყვანილია წიგნში: გიუნტერისა და კუზმინის, უმაღლეს მათემატიკის ამოცანათა კრებულში, I ნაწ. თავი III, § 3, №№ 216—318.

ყურადღება მიაქციეთ იმ კავშირს, რომელიც არსებობს ფუნქციის უწყვეტობასა და წარმოებადობას შორის. სახელდობრ შეისწავლეთ.

თეორემა 6. თუ ფუნქცია მოცემულ წერტილზე წარმოებადია, მაშინ იგი ამ წერტილზე უწყვეტი იქნება.

დამტკიცება. ვინაიდან $y = f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია მოცემულ a წერტილზე, ამიტომ $f'(a) = y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. აქედან $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha$, ანუ $\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, სადაც α ცვლადია და მიისწრაფის ნულისაკენ Δx-თან ერთად. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე, როგორც ორი უსასრულოდ მცირე სიდიდის ჯამი, უსასრულოდ მცირეა; მაშასადამე, $\Delta y \to 0$, ანუ $f(a + \Delta x) \to f(a)$, როცა $\Delta x \to 0$, და ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილზე უწყვეტია.

მაგალითი. განვიხილოთ ფუნქცია $y = |x|$. იგი $x = 0$ წერტილზე უწყვეტია. მართლაც, ვინაიდან $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$, ამიტომ $\Delta y \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$.

დავამტკიცოთ, რომ $y = |x|$ ფუნქციას $x = 0$ წერტილზე წარმოებული არ აქვს. ამისათვის უნდა გავსინჯოთ ზღვარი

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

შესაძლოა ორი შემთხვევა:

1) $\Delta x \to 0$ ისე, რომ $\Delta x > 0$,

2) $\Delta x \to 0$ ისე, რომ $\Delta x < 0$.

მოვძებნოთ ზღვარი ამ ორივე შემთხვევაში.

პირველ შემთხვევაში გვექნება:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

მეორე შემთხვევაში გვაქვს:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

ამნაირად, $y = |x|$ ფუნქციას $x = 0$ წერტილზე წარმოებული არ აქვს, ვინაიდან შეფარდებას $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, როცა $\Delta x \to 0$, ზღვარი არ აქვს. მაშასადამე, ფუნქციის უწყვეტობა არ უზრუნველყოფს ამ ფუნქციის წარმოებადობას.

ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებული. ხშირად ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა შეიძლება გამარტივებულ იქნეს ე. წ. ლოგარითმული წარმოებულის მოძებნით. ნაცვლად მოცემული ფუნქციის გაწარმოებისა ვეძებთ ამ ფუნქციის ნატურალური ლოგარითმის წარმოებულს. მოცემული ფუნქციის წარმოებულის შეფარდებას თვით ამ ფუნქციასთან, რომელიც ცხადია უდრის ფუნქციის ლოგარითმის წარმოებულს, ეწოდება მოცემული ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებული.

ვთქვათ $y = f(x)$ მოცემული ფუნქციაა, მაშინ მისი ლოგარითმული წარმოებული იქნება:

$$\frac{y'}{y} = [\ln y]' = [\ln f(x)]'.$$

როცა $f(x)$ ფუნქცია დადებითია (და წარმოებადი), მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნატურალურ ლოგარითმს აზრი ექნება და წარმოადგენს გარკვეულ წარმოებად ფუნქციას.

როცა x-ის ზოგი მნიშვნელობებისათვის $y = f(x)$ ფუნქცია უარყოფითია, მაშინ $y = -f(x)$ ფუნქცია დადებითი იქნება და $\ln[-f(x)]$ არსებობს. ამ ფუნქციის წარმოებული კი უდრის

$$\frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ უარყოფითი ფუნქციებისათვისაც წარმოებულის შეფარდება თვით ფუნქციასთან არის მისი აბსოლუტური სიდიდის ლოგარითმის წარმოებული.

მაგალითი. მოვძებნოთ $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ფუნქციის წარმოებული.

მოცემული ფუნქციის გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)].$$

გავაწარმოვოთ ეს ტოლობა რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით, გვექნება:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1-x^2};$$

საიდანაც $\quad y'=\frac{y}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$

რთული მაჩვენებლიანი ფუნქციის გაწარმოება. ასე ეწოდება ფუნქციას, რომლის ფუძეც და ხარისხის მაჩვენებელიც ცვლადია; მაგალითად x^x, $(tgx)^{sinx}$ და ა. შ. საზოგადოდ რთული მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახეა: $y=U^V$, სადაც $U=f(x)$ და $V=\varphi(x)$. თუ გავალოგარითმებთ მოცემულ ფუნქციას, მივიღებთ:

$$\ln y=V\ln U,$$

რომლის გაწარმოებით გვექნება:

$$\frac{y'}{y}=V\frac{u'}{u}+V'\ln u,$$

საიდანაც

$$y'=(u^v)'=vu^{v-1}u'+u^v\ln u\cdot v'.$$

მაგალითი. გავაწარმოოთ $y=x^x$ ფუნქცია. გალოგარითმება მოგვცემს: $\ln y=x\ln x$, რომლის გაწარმოებით მივიღებთ:

$\frac{y'}{y}=\ln x+1;$ აქედან $y'=x^x(1+\ln x)$.

ფუნქციის დიფერენციალის განმარტება

როგორც ვიცით

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

და

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x,$$

სადაც $\varepsilon\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$.

ამგვარად ფუნქციის ნაზრდი ტოლია ორი შესაკრების ჯამისა:

1) $f'(x)\triangle x$ და 2) $\varepsilon\triangle x$. შევნიშნოთ, რომ როცა $f'(x)\neq 0$, მაშინ მეორე შესაკრები უსასრულოდ მცირეა პირველ შესაკრებთან შედარებით, ე. ი. $\frac{\varepsilon\triangle x}{f'(x)\triangle x}=\frac{\varepsilon}{f'(x)}\to 0$, როცა $\triangle x\to 0$. ამის გამო პირველ შესაკრებს ფუნქციის ნაზრდის მთავარი ნაწილი ეწოდება. სხვანაირად, მას ფუნქციის დიფერენციალი ჰქვია და აღინიშნება ასე: dy ანუ $df(x)$. მაშასადამე, $dy=f'(x)\triangle x$, ე. ი. როცა ფუნქციის წარმოებული ნულიდან განსხვავებულია, მაშინ მისი დიფერენციალი ეწოდება წარმოებულისა და დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდის ნამრავლს.

როცა $f'(x)\neq 0$ და $\triangle x$ უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $\triangle y-dy$ სხვაობა ფუნქციის ნაზრდსა და დიფერენციალს შორის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა ვიდრე $\triangle x$.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის დიფერენციალი $\triangle x$-ის მიმართ წრფივი ფუნქციაა.

ვთქვათ, $f(x)=x$. მაშინ

$$df(x)=dx=(x)'\triangle x=\triangle x,$$

ე. ი.

$$\triangle x=dx.$$

მაშასადამე, დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდი და დიფერენციალი თანატოლია.

მოძებნეთ ჩვენს მიერ დასახელებულ ლიტერატურაში ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი და შეისწავლეთ.

სხვადასხვა რიგის წარმოებულები. ვთქვათ მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულია $f'(x)$. წარმოებული $f'(x)$ თვითონ x-ის ფუნქციაა და ამიტომ შესაძლებელია არსებობდეს მისი წარმოებული. პირველი წარმოებულის წარმოებულს მეორე რიგის წარმოებული ეწოდება და აღინიშნება ასე: $y''=f''(x)$. მეორე რიგის წარმოებულიდან ხელახლად შესაძლოა ავიღოთ წარმოებული. ეს იქნება მოცემული ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული. იგი აღინიშნება ასე: $y'''=f'''(x)$. თუ გავაგრძელებთ წარმოებულთა ასეთ თანდათანობით გაწარმოებას, შეგვიძლია მივიღოთ ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმოებული. საზოგადოდ ფუნქციის n რიგის წარმოებული ეწოდება ფუნქციას, რომელსაც მივიღებთ მოცემული ფუნქციის n-ჯერ თანდათანობითი გაწარმოებით. n-რი რიგის წარმოებულს აღნიშნავენ

ასე: $Y^{(n)} = f^{(n)}(x)$, სადაც ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეში n რიცხვი გვიჩვენებს წარმოებულის რიგს.

მაგალითი. მოვძებნოთ $y = \frac{1}{x+1}$ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულები:

$$y' = [(x+1)^{-1}]' = (-1)(x+1)^{-2},$$
$$y'' = (-1)(-2)(x+1)^{-3} = (-1)^2(1\cdot 2)(x+1)^{-3}$$
$$y''' = (-1)^2(1\cdot 2)(-3) = (-1)^3(1\cdot 2\cdot 3)(x+1)^{-4},$$
$$y^{IV} = (-1)^3(1\cdot 2\cdot 3)(-4)(1^0+1)^5 = (-1)^4$$
$$(1\,.\,2\cdot 3\cdot 4)(x+1)^{-5}$$

როგორც ამ გამოთვლებიდან ვრწმუნდებით, საზოგადოდ, n-რი რიგის წარმოებული მოცემული ფუნქციისა იქნება:

$$y^{(n)} = (-1)^n\,.\,n'\,.\,(x+1)^{-(n+1)}.$$

ივარჯიშეთ მაგალითებზე წიგნიდან: გიუნტერისა და კუზმინის უმაღლეს მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწ. I, თავი III.

სხვადასხვა რიგის დიფერენციალები. მოვიგონოთ, რომ როცა მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, მისი დიფერენციალი ეწოდება გამოსახულებას:

$$dy = f'(x)dx \qquad .$$

ამ გამოსახულების დიფერენციალს მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი ჰქვია და აღინიშნება ასე:

$$d(dy) = d^2y.$$

სავსებით ასევე, მეორე რიგის დიფერენციალის დიფერენციალი არის მესამე რიგის დიფერენციალი და აღინიშნება d^3y-ით. საზოგადოდ n-რი რიგის დიფერენციალი არის დიფერენციალი $(n-1)$ რიგის დიფერენციალისა.

გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი:

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)\,dx]'dx = f''(x)\,dx^2,$$

ე. ი. ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი უდრის მისი მეორე რიგის წარმოებულისა და დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალის კვადრატის ნამრავლს.

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$d^3y = f'''(x)dx^3,$$

ე. ი. ფუნქციის მესამე რიგის დიფერენციალი უდრის მისი მესამე

რიგის წარმოებულისა და დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალის მესამე ხარისხის ნამრავლს.

თუ გავაგრძელებთ ამ გამოთვლებს მივიღებთ:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n,$$

ე. ი. ფუნქციის n- რი რიგის დიფერენციალი უდრის მისი n-რი რიგის წარმოებულისა და დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალის n—ხარისხის ნამრავლს. შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი ფორმულიდან შეგვიძლია მივიღოთ ფუნქციის n-რი რიგის წარმოებულის შემდეგნაირი აღნიშვნა: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$. შეისწავლეთ ორი ფუნქციის ნამრავლის n-რი რიგის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყვანა და ტექნიკა მისი გამოყენებისა.

ფუნქციის დიფერენციალის ინვარიანტობა

გავეცნოთ ფუნქციის დიფერენციალის ერთ თვისებას, რომელსაც დიფერენციალის ინვარიანტობის თვისებას უწოდებენ. როგორც ვიცით, თუ y არის x არგუმენტის ფუნქცია მაშინ მისი დიფერენციალი არის:

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (1)$$

წარმოვიდგინოთ ეხლა, რომ $y = f(u)$, სადაც $u = \varphi(x)$, ხოლო x დამოუკიდებელი ცვლადია. მაშინ $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, აქედან $y_x' dx = y_u \cdot u_x' dx$, მაგრამ $u_x' dx = du$, ხოლო $y_x' dx = dy$. მაშასადამე, მივიღებთ

$$dy = y_u'\,du. \qquad (2)$$

თუ ეხლა შევადარებთ ერთმანეთს (1) და (2) ფორმულებს, დავრწმუნდებით, რომ დიფერენციალის ფორმულა რჩება ერთიდაიგივე, იმისგან დამოუკიდებლივ u არის დამოუკიდებელი ცვლადი თუ ფუნქცია. მივაქციოთ ყურადღება იმასაც, რომ (1) ფორმულაში თანამამრავლი dx დამოუკიდებელია x—საგან და წარმოადგენს დამოუკიდებელ ცვლადს. (2) ფორმულაში კი du არის ფუნქცია დამოუკიდებელი x ცვლადისა, ვინაიდან $du = u_x' dx$. დასკვნა ასეთია: როცა $y = f(x)$, სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, ან სხვა ცვლადის ფუნქცია, მაშინ $dy = y_x' d_x$;

შეისწავლეთ პოსე და პრივალოვის IV თავის § 7 და § 8. აქ განხილულია საკითხი მრუდის პარამეტრული სახით წარმოდგენის შესახებ. აქვე ნახავთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულებს. აქვე გამოყვანილია მრუდის მხებისა და ნორმალის განტოლებანი. ამოხსენით დემიდოვის ამოცანათა კრებულიდან ამოცანები № 415, 447, 449, 467, 469, 487, 823, 824, 828 და 829 და პოსე პრივალოვის წიგნის IV თავის ბოლოს მოყვანილი ყველა სავარჯიშო მაგალითები.

აქ განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. მოცემულია ფუნქცია პარამეტრული სახით $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$. მოვძებნოთ $\frac{d^2y}{dx^2}$

მეორე რიგის წარმოებული $\frac{d^2y}{dx^2}$ გამოითვლება ფორმულით

$$y''_{xx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \qquad (1)$$

სადაც $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx}$; x', x'', y', y'' არის x და y პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები პარამეტრით t.

წინასწარ მოვძებნოთ x-ის და y-ის პირველი რიგის წარმოებულები t პარამეტრით, გვექნება:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cos t;$$

აქედან უშუალოდ გამოითვლება მეორე რიგის წარმოებულები t პარამეტრით:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3a\cos t\,.\,(2\sin^2 t - \cos^2 t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3b\sin t\,.\,(2\cos^2 t - \sin^2 t).$$

ჩავსვათ ყველა ეს მნიშვნელობანი (1) ფორმულაში მივიღებთ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3a\cos^2t\sin t\cdot 3b\sin t(2\cos^2t-\sin^2t)}{(-3a\cos^2t\sin t)^3}-$$

$$-\frac{3b\sin^2t\cos t\cdot 3a\cos t(2\sin^2t-\cos^2t)}{(-3a\cos^2t\sin t)^3}$$

საიდანაც

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{3a^2\cos^4t\sin t}$$

იგივე შედეგი შეგვეძლო მიგვეღო შემდეგნაირადაც:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{3b\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t;$$

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2t}\cdot\frac{1}{-3a\cos^2t\sin t}=\frac{b}{3a^2\cos^4t\sin t}.$$

მაგალითი 2. მოვძებნოთ

$$\left.\begin{aligned}x&=t^2-3t+4,\\ y&=t^2-4t+4\end{aligned}\right\}$$

მრუდის მხების კუთხური კოეფიციენტი $x=2$, $y=1$ წერტილზე.

ამოხსნა. კუთხური კოეფიციენტის მოსაძებნად, საჭიროა მოიძებნოს $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის მნიშვნელობა $x=2$, $y=1$ წერტილზე. გვაქვს:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t-3}{2t-4}$$

ახლა მოვძებნოთ t პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $x = 2$, $y = 1$ წერტილს. ამისათვის საჭიროა მოვძებნოთ $t^2 - 3t + 4 = 2$ და $t^2 - 4t + 4 = 1$ განტოლებათა საერთო ფესვი, როგორც გამოთვლები გვარწმუნებს, ეს ფესვია $t = 1$.

ახლა კი ადვილად მივიღებთ საძიებელ კუთხურ კოეფიციენტსაც:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = \left(\frac{2t-3}{2t-4}\right)_{t=1} = \frac{2-3}{2-4} = \frac{1}{2}.$$

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ წირის $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ მხების მიერ კოორდინატთა ღერძებიდან მოკვეთილ მონაკვეთების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და უდრის a-ს.

ამოხსნა. დავწეროთ წირის მხების განტოლება:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\left(X - x\right).$$

$\frac{dy}{dx}$ წარმოებული მოვძებნოთ წირის განტოლებიდან, რომელიც გავაწარმოოთ x ცვლადით, როგორც უცხადო ფუნქცია:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = 0$$

საიდანაც

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

მაშასადამე, მხების განტოლება იქნება:

$$Y - y = -\sqrt{\frac{y}{x}}\left(X - x\right). \qquad (\alpha)$$

მოვძებნოთ ეხლა მისი მონაკვეთები კოორდინატთა ღერძებთან. მონაკვეთი oy ღერძთან იქნება:

$$Y=y+\sqrt{\frac{v}{x}}\,x,$$

რომელიც მიღებულია (α) განტოლებიდან, თუ დავუშვებთ $X=o$. ox ღერძთან მონაკვეთს მივიღებთ იმავე (α) განტოლებიდან, თუ დავუშვებთ $Y=o$. გვექნება

$$X=x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

ამ მონაკვეთების ჯამი იქნება:

$$X+Y=x+y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x+y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y=$$

$$=\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2=a.$$

ამოხსენით დუბნოვის ამოცანათა კრებულიდან ამოცანები № 445, 447, 449, 467, 469, 487, 823, 824, 828, 829 და ყველა სავარჯიშოები პოსე და პრივალოვის წიგნის IV თავიდან.

დაამუშავეთ პოსე და პრივალოვის წიგნის V თავის § 1, 2 და 6. იგივე მასალა გააღრმავეთ და შეისწავლეთ ვ. ნემიცკის, მ. ჩერკასოვის და ა. სლუცკაიას წიგნიდან გვ. 142—143, 174—177, 177—187. მკაფიოდ დაიმახსოვრეთ თეორემების გამოთქმა და დამტკიცება. ყურადღება მიაქციეთ როლისა და ლაგრანჟის თეორემების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას და ლაგრანჟის თეორემიდან გამომდინარე შედეგებს. დაუკვირდით როლის თეორემის ალგებრულ შინაარსს. შეისწავლეთ ფუნქციის ზრდისა და კლების ანალიზური ნიშნები. ლოპიტალის (L'Hospital-ის) წესი განუსაზღვრელობათა გახსნისა. ამოხსენით მაგალითები კრებულიდან: გიუნტერისა და კუზმინი, უმაღლეს მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწ. I, თავი IV, § 2. მაგალითები 106—178.

მაგალითი 1. მოვძებნოთ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

შევნიშნოთ, რომ როცა $x = 1$, წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ნულის ტოლია. საქმე შეეხება $\frac{0}{0}$ —სახის განუსაზღვრელობის გახსნას. გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი, მივიღებთ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}.$$

აქ, როცა $x = 1$, წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ხელახლა ნულის ტოლია, ე. ი. ისევ $\frac{0}{0}$ —სახის განუსაზღვრელობა გვაქვს. გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი ხელმეორედ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{3}{2}.$$

მაგალითი 2. მოვძებნოთ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$;

ამ შემთხვევაში საკითხი ეხება $\frac{\infty}{\infty}$ —სახის განუსაზღვრელობის გახსნას. გვექნება:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}$$

ახლა უკვე $\frac{0}{0}$ —სახის განუზღვრელობა გვაქვს და ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos 3x \sin 3x}{-6\cos x \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}.$$

როგორც უკანასკნელი შედეგი გვიჩვენებს, საჭიროა ლოპიტალის წესის მესამეჯერ გამოყენება:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = 3.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = 3.$$

მაგალითი 3. მოვძებნოთ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

აქ $\infty - \infty$ — სახის განუსაზღვრელობა გვაქვს. წარმოვადგინოთ გამოსათვლელი ზღვარი შემდეგნაირად:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}.$$

პირველი ზღვარი გამოითვლება უშუალოდ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) = 2.$$

მეორე წილადი, როცა $x=0$, მოგვცემს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობას. ამიტომ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{2x\sin x + x^2 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3};$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right) = \frac{2}{3};$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ $(x>0)$.

ამ შემთხვევაში უნდა გავხსნათ 1^∞ —სახის განუსაზღვრელობა. გავალოგარითმოთ $y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ ფუნქცია და შემდეგ მოვძებნოთ ზღვარი:

$$\ln y = \frac{\ln \sin x - \ln x}{1 - \cos x}.$$

აქედან

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2\cos x} = -\frac{1}{3}$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

მაგალითი ō. მოვძებნოთ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

აქ საქმე გვაქვს 0^0—სახის განუსაზღვრელობასთან.

$$\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1.$$

ასე რომ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}.$$

ამ საკითხების შეთვისების შემდეგ გადადით ფუნქციის ექსტრემუმის თეორიის შესწავლაზე. დაამუშავეთ პოსე და პრივალოვის სახელმძღვანელოს V თავის § 3, 4 და 5. ვ. ნემიცკის, მ. ჩერკასოვის და სლუცკაიას წიგნის გვერდები 207—212; ლ. გოკიელის წიგნის დიფერენციალური აღრიცხვის გვ. 134—139. დაიმახსოვრეთ მოცემულ წერტილზე ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის განმარტება, აუცილებელი და საკმარისი პირობა ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობისა და წესები ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის გამოკვლევისა.

ყურადღებით შეისწავლეთ მაგალითები და ამოცანები, რომლებიც შეგხვდებათ მითითებულ ლიტერატურის მიხედვით თეორიული მასალის შესწავლის დროს. გადაწყვიტეთ დუბნოვის ამოცანათა

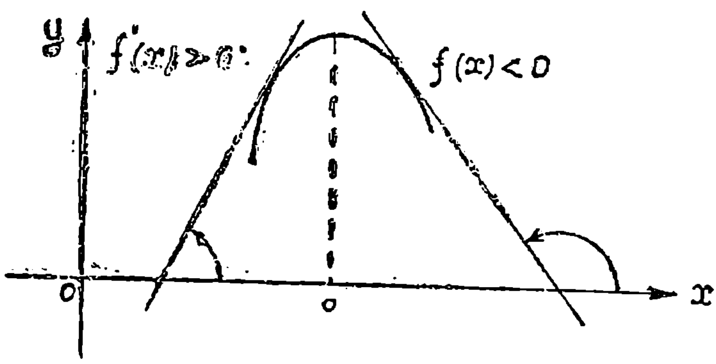
კრებულიდან ამოცანები №№ 553, 557, 558, 564, 566, 568, 576. 581, 584, 622, 626. 629, 630, 634, 636.

პირველი ხერხი მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნისა მდგომარეობს ფუნქციის პირველი წარმოებულის ნიშნის გამოკვლევაში. ამ ხერხის თანახმად საჭიროა მოიძებნოს პირველი წარმოებულის ფესვები და შემდეგ გამოვიკვლიოთ ამ წარმოებულის ნიშანი უკვე მოძებნილი ფესვების მახლობლობაში.

გარდა ამ ხერხისა დაამუშავეთ მეორე ხერხი ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის გამოკვლევისა მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნის საშუალებით. შეისწავლეთ აგრეთვე საკითხი ფუნქციის გრაფიკის აგების შესახებ.

ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის გამოკვლევის დროს პირველი რიგის წარმოებულის ნიშნის დახმარებით, როგორც უკვე ვიცით, ვეძებთ წარმოებულის ფესვებს და შემდეგ ვიკვლევთ წარმოებულის ნიშანს ყოველი მოძებნილი ფესვის მიდამოში.

მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი $x=a$ წერტილში, თუ $f'(a)=0$ (ან $f'(a)$ არ არსებობს), ხოლო $f'(x)$ ნიშანს იცვლის პლიუსიდან მინუსზე, როცა x გაივლის $x=a$ წერტილს (იხ. ხაზ. 2).



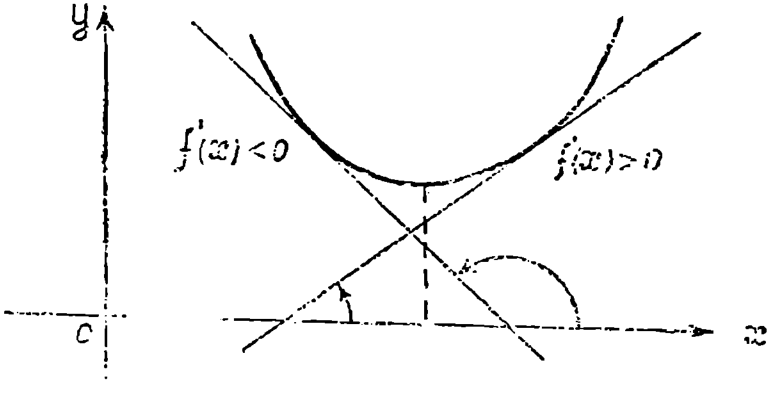
ნახ. 2.

რადგანაც a წერტილის მიდამოში $f'(x)$ წარმოებული დადებით მნიშვნელობიდან გადადის უარყოფით მნიშვნელობებზე, ამიტომ a წერტილის მიდამოში $f'(x)$ წარმოებული კლებადი ფუნქცია იქნება. ვთქვათ, არსებობს მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$. მაშინ $f'(x)$ უწყვეტია. ზევით ნათქვამის თანახმად $f''(x)$ წარმოებული $x=a$ წერტილის მიდამოში უარყოფითია. მაშასადამე, როცა არსებობს $f'(x)$ და $f''(x)$ და მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას $x=a$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი, მაშინ პირველი რიგის წარმოებული ამ წერტილში ნულის ტოლია, ხოლო მეორე რიგის წარმოებული კი — უარყოფითი, ე. ი.

$f'(a)=0$ და $f''(a)<0$. და პირიქით, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $x=a$ წერტილზე წარმოებულები $f'(a)$, და $f''(a)$, მასთან $f'(a)=0$, ხოლო $f''(a)<0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას $x=a$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი.

მართლაც, რადგანაც $x=a$ წერტილში ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული ნულის ტოლია და $f''(a)<0$, ამიტომ $x=a$ წერტილზე $f'(x)$ კლებადია და, მაშასადამე, ამ წერტილის მიდამოში მარცხნივ მას ექნება დადებითი მნიშვნელობანი, ხოლო ამ წერტილის მიდამოში მარჯვნივ—უარყოფითი მნიშვნელობანი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x=a$ წერტილში ფუნქციას ექნება მაქსიმუმი.

როცა $x=a$ წერტილზე $f'(a)=0$, ხოლო $f'(x)$, როცა x გაივლის $x=a$ წერტილს, იცვლის ნიშანს მინუსიდან პლიუსზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას $x=a$ წერტილზე აქვს მინიმუმი (იხ. ნახ. 3).



ნახ. 3.

ვინაიდან $x=a$ წერტილის მიდამოში $f'(x)$ წარმოებული უარყოფითი მნიშვნელობებიდან დადებითზე გადადის, ამიტომ ამ წერტილის მიდამოში $f'(x)$ არის ზრდადი ფუნქცია. თუ არსებობს $f''(x)$, მაშინ $x=a$ წერტილში მეორე რიგის წარმოებულს $f''(x)$ ექნება დადებითი ნიშანი. მაშასადამე, როცა $f(x)$ ფუნქციას $x=a$ წერტილზე აქვს მინიმუმი, მაშინ ამ წერტილზე მისი პირველი რიგის წარმოე-

ბული უდრის ნულს, ხოლო მეორე რიგის წარმოებული დადებითია. პირიქით, თუ $f(a)=0$ და $f''(a)>0$, მაშინ ფუნქციას $x=a$ წერტილზე აქვს მინიმუმი. მართლაც, ვინაიდან პირობის თანახმად, $x=a$ წერტილზე პირველი რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო $f''(a)>0$, ამიტომ $f'(x)$ წარმოებული $x=a$ წერტილზე ზრდადია და მაშასადამე, ამ წერტილის მიდამოში მარცხნივ აქვს უარყოფითი მნიშვნელობანი, ხოლო-მარჯვნივ აქვს დადებითი მნიშვნელობანი. ამიტომ, ფუნქციის ექსტრემუმის პირველი წესით გამოკვლევის თანახმად, $x=a$ წერტილზე ფუნქციას ექნება მინიმუმი.

ამგვარად, როცა ვიკვლევთ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის საკითხს მეორე წესით საჭიროა შევასრულოთ:

I **ნაბიჯი**—მოვძებნოთ პირველი რიგის წარმოებული.

II **ნაბიჯი**—წარმოებული გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება. ამ განტოლების ნამდვილი ფესვები არის ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.

III **ნაბიჯი**—მოვძებნოთ მეორე რიგის წარმოებული.

IV **ნაბიჯი**—გამოვარკვიოთ მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი ფუნქციის ყოველ კრიტიკულ წერტილზე.

როცა მეორე რიგის წარმოებული კრიტიკულ წერტილზე უარყოფითია, მაშინ აღებული კრიტიკული წერტილი ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია; პირიქით, როცა მეორე რიგის წარმოებული კრიტიკულ წერტილზე დადებითია, მაშინ ეს კრიტიკული წერტილი ფუნქციის მინიმუმის წერტილია.

შენიშვნა. თუ მეორე რიგის წარმოებული ამათუიმ კრიტიკულ წერტილზე ნულის ტოლია, მაშინ საკითხი ფუნქციის ექსტრემუმის გამოკვლევისა ღიად რჩება. საჭიროა ასეთ შემთხვევაში მივმართოთ ექსტრემუმის გამოკვლევის პირველ ხერხს.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ x^4-2x^2-3 ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

ამოხსნა.

1) $f'(x)=4x^3-4x$;

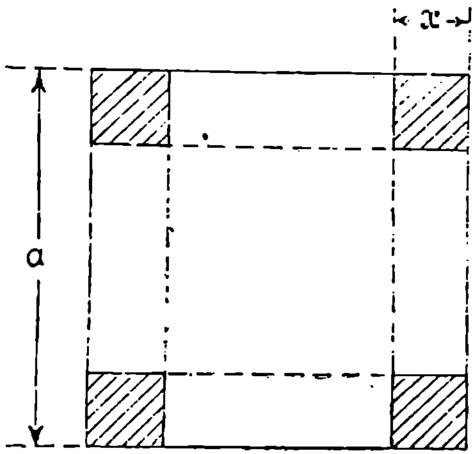
2) $f'(x)=4x^3-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$;

3) $f''(x)=12x^2-4$;

4) $f''(0)<0$, $f''(1)>0$, $f''(-1)>0$.

მაშასადამე, $x=0$ წერტილი არის ჩვენი ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და maximum $f(x)=3$. წერტილები $x=\pm 1$ არის—მინიმუმის წერტილები და minimum $f(x)=f(\pm 1)=2$.

ამოცანა 1. მოცემულია კვადრატული ბრტყელი ფირფიტი, რომლის გვერდის სიგრძე მოცემულია და უდრის a-ს. საჭიროა ოთხივე კუთხიდან მას ჩამოვაჭრათ ისეთი ზომის კვადრატები, რომ დარჩენილი მასალისაგან უდიდესი მოცულობის ყუთი გაკეთდეს (იხ. ნახ. 4).



ნახ. 4.

ამოხსნა. ვთქვთ x არის ჩამოჭრილი კვადრატების გვერდის სიგრძე; გადავღუნოთ წყვეტილით აღნიშნულ ხაზებზე ფირფიტი; მიღებული, ზევიდან ახდილი, ყუთის მოცულობა იქნება;

$$v=(a-2x)^2 x.$$

მოვძებნოთ x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც v ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. ამისათვის გავაწარმოოთ v და წარმოებული გავუტოლოთ ნულს, გვექნება

$$v'=(a-2x)^2-4\ (a-2x)\ x=0,$$

საიდანაც

$$x_1=\frac{a}{6}\ ; \qquad x_2=\frac{a}{2}\ .$$

გამოვიკვლიოთ ეხლა ფუნქციის კრიტიკული წერტილებისათვის, რომელი იძლევა v-ს მაქსიმუმს. ამისათვის გამოვიკვლიოთ მეორე რიგის წარმოებულის v''-ის ნიშანი, გვექნება:

$$v''=-8a+24x,$$

საიდანაც სჩანს, რომ:

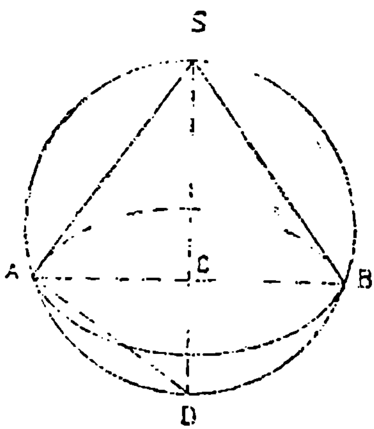
$$V''_{x=\frac{a}{6}}=-4a<0,$$

ხოლო

$$V''_{x=\frac{a}{2}}=4a>0,$$

ე. ი. $x=\dfrac{a}{6}$ არის v-ს მაქსიმუმის წერტილი. $x=\dfrac{a}{2}$ წერტილი შეეფერება მინიმუმს; მართლაც, ნახევარნახევარი, რომ ჩამოვაჭრათ კვადრატის გვერდებს ოთხივე მხრიდან, საბოლოოდ ყუთის გასაკეთებელი მასალა აღარ დარჩება. მოცულობა ნულის ტოლი იქნება.

ამოცანა 2. მოცემულია a რადიუსიანი სფერო. ჩავხაზოთ მასში ისეთი კონუსი, რომლის მოცულობა იქნება უდიდესი.



ნახ. 5.

ამოხსნა. ვთქვათ ASB საძიებელი კონუსია (ნახ. 3); შემოვიღოთ აღნიშვნები: AC=y და SC=x, მაშინ კონუსის მოცულობა V ტოლი იქნება:

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2x.$$

გარდა ამისა შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{CD}{y}=\frac{y}{SC}\ ;$$

ე. ი.

$$\frac{2a-x}{y}=\frac{y}{x} ,$$

საიდანაც

$$y^2=x\,(2a-x).$$

ამის შემდეგ მოცულობა V ასე გამოისახება

$$V=\frac{1}{3}\pi\,(2a\,x^2-x^3).$$

მოვძებნოთ შემდეგი განტოლების ფესვები:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi}{3}\,(4ax-3x^2)=0.$$

მივიღებთ:

$$x_1=0, \qquad x_2=\frac{4a}{3} .$$

ფესვი x_1, ცხადია, შეესაბამება მინიმუმის შემთხვევას, ვინაიდან, თუ კონუსის სიმაღლე, ნულის ტოლია, ცხადია მოცულობაც ნული იქნება. გამოვიკვლიოთ მეორე რიგის წარმოებულის V''-ის ნიშანი მეორე ფესვისათვის. გვექნება:

$$V''_{x=\frac{4}{3}a}=\left[\frac{4}{3}\pi\,(a-6x)\right]_{x=\frac{4a}{3}}<0.$$

მაშასადამე, სფეროში ჩახაზული კონუსი უდიდესი მოცულობისა იქნება მაშინ, თუ მისი სიმაღლე სფეროს რადიუსის $\frac{4}{3}$-ის ტოლია.

ფუნქციათა გრაფიკების აგება. შევისწავლეთ დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით ფუნქციათა გრაფიკების აგების ხერხები. როცა მოცემული განტოლებით შევისწავლით შესაბამ მრუდს უნდა ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ საკითხებს:

1) სიმეტრიულია თუ არა მრუდი,

2) აქვს თუ არა ფუნქციას წყვეტის წერტილები,

3) პერიოდულია თუ არა ფუნქცია,

4) რომელ წერტილებში გადაკვეთს მრუდი კოორდინატთა ღერძებს,

5) მოვძებნოთ ფუნქციის ზრდისა და კლების შუალედები,

6) მოვძებნოთ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები,

7) ავაგოთ მრუდის რამოდენიმე წერტილი,

8) გამოვიკვლიოთ მრუდის ყოფა-ქცევა, როცა არგუმენტი უსასრულოდ იზრდება.

მაგალითი. დავხაზოთ $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$ განტოლებით მოცემული მრუდი.

ამოხსნა. 1) მრუდი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ,

2) ფუნქციას წყვეტის წერტილები არ აქვს,

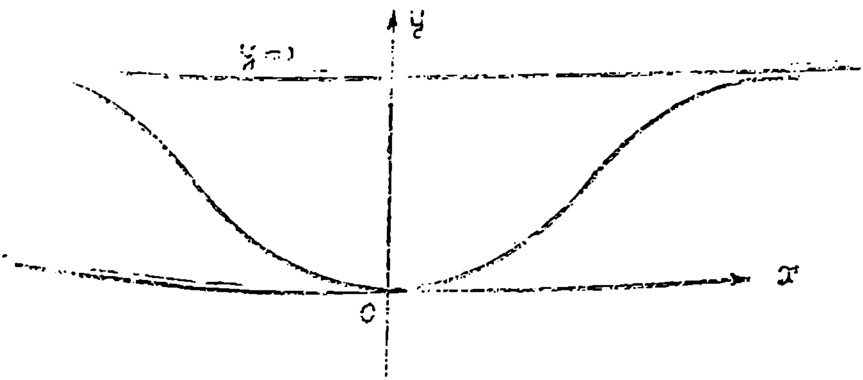
3) ფუნქცია არაპერიოდულია,

4) მრუდი გადის კოორდინატთა სათავეზე,

5) მოცემული ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს.

6) ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები შესაბამად იქნება:

$$y' = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \quad y'' = \frac{2 - 6x^2}{(1 + x^2)^3}.$$



ნახ. 6

როგორც პირველი რიგის წარმოებულის აგებულიდან სჩანს იგი ყოველ წერტილზე არსებობს და ნულის ტოლია როცა $x = 0$. ხოლო მეორე რიგის წარმოებული, როცა $x = 0$, დადებითია. მაშასადამე $x = 0$ წერტილზე ჩვენ ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

7) ვთქვათ ეხლა $x \to \infty$, მაშინ

$$\lim_{x \to \infty} y = 1.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $y = 1$ წრფე არის ჩვენი მრუდის ასიმპტოტი. ვიცით რა მრუდის ყველა ეს თვისებები ადვილად ავაგებთ თვით მრუდსაც. მას ექნება მე-6 ნახაზზე გამოხაზული სახე.

გადაწყვიტეთ პოსე და პრივალოვის წიგნის V თავის § 13-ის ამოცანები № 11—34 და დუბნოვის ამოცანათა კრებულის ამოცანები № 541, 542.

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

დაამუშავეთ შემდეგი ლიტერატურა:

1. ა. რუხაძე და ა. ხარაძე, უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები, ტ. II, თავი II, გვ. 22—82.

მეთოდური მითითებანი კურსის ცალკეულ თავებზე

თავი I. |გაწარმოების შებრუნებული ამოცანა., ცნება პრიმიტიულის შესახებ. განუსაზღვრელი ინტეგრალი.|

ინტეგრალურ აღრიცხვას გაცილებით მეტი გამოყენება აქვს, ვიდრე დიფერენციალურ აღრიცხვას. ინტეგრალური აღრიცხვის დახმარებით შესაძლოა, მაგალითად, გამოვითვალოთ ტანის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, გამოვიანგარიშოთ ინერციის მომენტები' ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა. გამოვთვალოთ სხვადასხვა ნაკვთების ფართები, სხეულთა მოცულობა, რკალის სიგრძე და ა. შ.

ნათლად წარმოიდგინეთ რას წარმოადგენს პრიმიტიული (პირველყოფილი) ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი. გამოარკვიეთ რის გამო ხდება, რომ ერთიდაიგივე მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის სიმბოლო $\int f(x)dx$ გამოსახავს ფუნქციათა უსასრულო სიმრავლეს, რომლებიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივი სიდიდით განსხვავდებიან.

მხედველობაში იქონიეთ, რომ ინტეგრალში $\int f(x)\,dx$, $f(x)$ ფუნქციას ინტეგრალსქვეშა ფუნქცია ეწოდება, ხოლო $f(x)dx$—ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალი.

განვიხილოთ მაგალითები:

1) მოვძებნოთ x^4 ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, ე. ი. მოვძებნოთ $\int x^4dx$.

ამოხსნა. ვინაიდან, $(x^5)' = 5x^4$, ამიტომ $x^4 = \left(\frac{x^5}{5}\right)'$, მაშასადამე:

$$\int x^4dx = \frac{x^5}{5}.$$

2) მოვძებნოთ $\cos x$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, ე. ი. ვიპოვოთ ინტეგრალი.

$$\int \cos x dx.$$

ვიცით, რომ

$$(\sin x)' = \cos x,$$

ამიტომ

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

3) მოვძებნოთ

$$\int \frac{dx}{x}.$$

ვინაიდან

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

დაუკვირდეთ, რომ მაგალითში 1) ჩვენ შეგვეძლო დაგვეწერა აგრეთვე:

$$(x^5 + 6)' = 5x^4; \quad \left(x^5 - \frac{1}{8}\right)' = 5x^4.$$

საზოგადოდ კი, როცა c ნებისმიერი მუდმივაა, მაშინ

$$(x^5 + c)' = 5x^4.$$

აქედან მივიღებთ:

$$x^4 = \left(\frac{x^5 + 6}{5}\right)'; \quad x^4 = \left(\frac{x^5 - \frac{1}{8}}{5}\right)' \text{ და } x^4 = \left(\frac{x^4 + c}{5}\right)'.$$

მაშასადამე,

$$\int x^4dx = \frac{x^5 + 6}{5} = \frac{1}{5}x^5 + \frac{6}{5};$$

$$\int x^4dx = \frac{x^5 - \frac{1}{8}}{5} = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{40},$$

$$\int x^4dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

სავსებით ასევე:

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

4) მოძებნეთ ინტეგრალები: $\int x^3dx$; $\int \sin xdx$;

$$\int \sec^2 xdx; \int \frac{dx}{1+x^2}, \int \csc^2 xdx.$$

ქვევით თქვენ დარწმუნდებით, რომ ნებისმიერი მუდმივი c-ს განსაზღვრისათვის საჭიროა მოცემული იყოს დამატებითი პირობები.

კიდევ ერთხელ მოვიგონოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტება. თქვენს მიერ დამუშავებული მასალიდან უკვე იცით, რომ აღებული ფუნქციის ინტეგრალი არის ფუნქციათა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც ერთმანეთისაგან ნებისმიერი მუდმივით განსხვავდებიან. სხვანაირად, თუ

$$\varphi'(x) = f(x), \text{ მაშინ } \int f(x)dx = \varphi(x) + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

სწორედ ამის გამო გამოსახულებას

$$\int f(x)dx$$

ეწოდება f(x) ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ გარდა $\varphi(x) + C$ სახის ფუნქციებისა f(x) ფუნქციის ინტეგრალი არ შეიძლება იყოს სხვა სახის ფუნქცია. მართლაც, ვთქვათ $\varphi_1(x)$ არის აგრეთვე ინტეგრალი f(x) ფუნქციისა, მაშინ

$$\varphi'_1(x) = f(x).$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi(x).$$

მისი გაწარმოებით მივიღებთ

$$\Psi'(x) = \varphi'_1(x) - \varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

მაშასადამე,

$$\Psi'(x) = 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\Psi(x) = C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ჩავსვათ უკანასკნელ ტოლობაში $\Psi(x)$-ის მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$\varphi_1(x) - \varphi(x) = C \text{ ანუ } \varphi_1(x) = C + \varphi(x),$$

ე. ი. ფუნქცია $\varphi_1(x)$ არის $\varphi(x) + C$ სახისა.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული უდრის ინტეგრალსქვეშა ფუნქციას, ხოლო დიფერენციალი — ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალს.

მართლაც, თუ

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C, \tag{1}$$

მაშინ

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [\varphi(x) + C]' = \varphi'(x). \tag{2}$$

მეორეს მხრივ პრიმიტიული ფუნქციის განმარტების მიხედვით

$$\varphi'(x) = f(x),$$

მაშასადამე,

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x). \tag{3}$$

(3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\left[\int f(x)dx\right]'dx = f(x)dx,$$

ანუ

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{4}$$

სავსებით ასევე:

$$\int\left[d[\varphi(x) + C\right] = \int\varphi'(x)dx = \int f(x)dx = \varphi(x) + C \tag{5}$$

(4) და (5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრების

ოპერაცია არის გაწარმოების ოპერაციის შებრუნებული ოპერაცია. მაშასადამე, სიმბოლოები $\int$ და d, განხილული როგორც ოპერაციები, ერთმანეთის შებრუნებული არიან. კარგად წარმოიდგინეთ (1)—(5) ფორმულების შინაარსი და დაიმახსოვრეთ.

გაიმეორეთ ფუნქციათა გაწარმოების ცხრილი, რომელიც მოყვანილი იყო პოსე და პრივალოვის „დიფერენციალური აღრიცხვის" 88 გვერდზე.

თუ ახლა მოვიგონებთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებას, დავრწმუნდებით, რომ ფუნქციის დიფერენციალის მოსაძებნი ყოველი ფორმულა ცხრილიდან, მოგვცემს ინტეგრალური აღრიცხვის სათანადო ფორმულას.

მიიღეთ მხედველობაში ეს უკანასკნელი გარემოება და დასწერეთ თქვენით ინტეგრალური აღრიცხვის რამოდენიმე ფორმულა. დასწერეთ, მაგალითად, ეს ფორმულები ხარისხოვანი, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული და შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვის.

A. **სასრული რიცხვის დიფერენციალთა ალგებრული ჯამის ინტეგრალი უდრის შესაკრებთა ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს.**

B. **მუდმივი თანამამრავლი შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ და შევიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის შიგნით.**

თქვენ ახლა შეგიძლიათ შეადგინოთ ცხრილი ძირითადი ინტეგრალებისა, რომელთა სამართლიანობის შესამოწმებლად საკმარისია უჩვენოთ, რომ ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეში მყოფი ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალს. ამგვარად თქვენ გექნებათ ცხრილი:

$$1.\quad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$\left.\begin{array}{l} 2.\quad \int \sin\alpha x\,dx = -\dfrac{\cos\alpha x}{\alpha} + C \\[2ex] 3.\quad \int \cos\alpha x\,dx = \dfrac{\sin\alpha x}{\alpha} + C \\[2ex] 4.\quad \int \dfrac{dx}{\cos^2\alpha x} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha x}{\alpha} + C \\[2ex] 5.\quad \int \dfrac{dx}{\sin^2\alpha x} = -\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha x}{\alpha} + C \end{array}\right\} \quad (\alpha \neq 0).$$

6. $$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}x\right) + C = -\frac{1}{ab} \operatorname{arcctg}\left(\frac{b}{a}x\right) + C.$$

7. $$\int \frac{dx}{+\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{b}{a}x\right) + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{-\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arccos\left(\frac{b}{a}x\right) + C.$$

9. $$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C.$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b} \ln\left|bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

11. $$\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k\ln a} + C.$$

12. $$\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$$

ეს ცხრილი წარმოადგენს ძირითად ინტეგრალებს, რომლებზედაც დაიყვანება ყველა სხვა ინტეგრალების გამოთვლა. იგი უნდა გვახსოვდეს ზეპირად.

როცა ინტეგრალის მოძებნა დამყარებულია ცხრილის ინტეგრალების უშუალო გამოყენებაზე, მაშინ იტყვიან, რომ ინტეგრალი მოიძებნება უშუალო ინტეგრებით. კარგად უნდა შეისწავლოთ და დაეუფლოთ უშუალო ინტეგრების შესრულებას. ამ საკითხის ათვისების შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა სწორედ იქნეს მოსაზრებული ცხრილის რომელი ფორმულით უნდა იყოს გამოთვლილი მოსაძებნი ინტეგრალი. ამისათვის ყურადღება უნდა მიექცეს, ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალი ხომ არ წარმოადგენს რაიმე ცნობილი ფუნქციის დიფერენციალს; თუ ეს მართლაც ასეა, დავასახელოთ ეს ფუნქცია. ინტეგრალის გამოთვლის დროს უნდა შეგვეძლოს ვისარგებლოთ B თეორემით. უნდა შეგვეძლოს ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალის იგიური გარდაქმნა ისე, რომ გარდაქმნის შემდეგ მივიღოთ რაიმე ფუნქციის დიფერენციალი.

მაგალითები.

№ 1. $$\int \sqrt[6]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{6}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C =$$

$$= \frac{6x^{\frac{11}{6}}}{11} + C;$$

№ 2. $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + C =$$

$$= 4x^{\frac{1}{4}} + C;$$

№ 3. $$\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + C;$$

№ 4. $$\int (2x^5+1)^3\,x^4\,dx = \int \frac{1}{10}(2x^5+1)^3\,d\,(2x^5+1) =$$

$$= \frac{1}{10}\,\frac{(2x^5+1)^4}{4}\,C = \frac{1}{40}\,(2x^5+1) + C^4;$$

№ 5. $$\int (5x^3-1)^2\,dx = \int (25x^6 - 10x^3 + 1)\,dx =$$

$$= 25\int x^6\,dx - 10\int x^3\,dx + \int dx = \frac{25}{7}x^7 - \frac{5}{2}x^4 + x + C.$$

შენიშვნა. უკანასკნელ მაგალითში ჩვენი ინტეგრალის გამოთვლა დაყვანილია სამი ინტეგრალის გამოთვლაზე. თვითეული ინტეგრალის გამოთვლისას საჭირო იყო ფუნქციისათვის მიგვემატებინა ნებისმიერი მუდმივი, მაგრამ ცხადია, რომ აზრი არ აქვს თვითეულ შესაკრებს ცალ-ცალკე დავუმატოთ ნებისმიერი მუდმივი, ვინაიდან ჯამისათვის მნიშვნელობა არ აქვს დავუმატებთ მას რამოდენიმე, თუ ერთ ნებისმიერ მუდმივს. ამით არის გამოწვეული, რომ საბოლოოდ ჩვენ ვწერთ მხოლოდ ერთ ნებისმიერ მუდმივს. ასევე მოვიქცევით ყველა ანალოგიურ შემთხვევაში.

№ 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \sin^3 ax\,\cos ax\,dx$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $z=\sin ax$. მაშინ $dz=a\cos ax dx$ და ამიტომ მივიღებთ:

$$\int \sin^5 ax \cos ax dx = \frac{1}{a}\int z^5 dz = \frac{1}{a}\frac{\sin^6 ax}{6} + C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

№ 7. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}}$;

№ 8. $\int (5x^3+4)x^2dx$;

№ 9. $\int (\ln x)^4 \frac{dx}{x}$;

№ 10. $\int (x^4+1)^3 xdx$;

№ 11. $\int (x^5-3x^2+4)dx$;

№ 12. $\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

ამოხსნის სისწორე შეამოწმეთ თქვენს მიერ მიღებული პასუხის დიფერენციალის მოძებნით. როგორც ვიცით, თუ კი ინტეგრალი სწორედ არის ამოხსნილი, ხსენებული დიფერენციალი უნდა ტოლი იყოს ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალისა.

№ 13. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 4}$.

ამოხსნა. ავღნიშნოთ $u=\sin x+4$, მაშინ $du=\cos x dx$. ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 4} = \ln|\sin x + 4| + C.$$

ამოხსენით ამ მაგალითის ანალოგიურად შემდეგი ინტეგრალები:

№ 14. $\int \frac{5x^2 dx}{4x^3-9}$;

№ 15. $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$;

№ 16. $\int \frac{4x^3\,dx}{5x^4+2}$.

და შეამოწმეთ ამოხსნის სისწორე.
გამოთვალეთ აგრეთვე ინტეგრალები:

№ 17. $\int e^{\sin x} \cos x dx$;

№ 18. $\int e^{x^5} x^3 dx$;

№ 19. $\int e^{x^4} x^3 dx$;

№ 20. $\int 3^{\cos^3 x} \sin 3x dx$;

№ 21. $\int (2^x + 3^x)^2 dx$;

№ 22. $\int (a^x + b^x)^2 dx$;

№ 23. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{4x^3\,dx}{\sqrt{25-x^8}}$.

ეს ინტეგრალი მიიყვანება ცხრილის 7 ინტეგრალზე, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას: $z = x^4$. აქედან $dz = 4x^3dx$ და მაშასადამე,

$$\int \frac{4x^3\,bx}{\sqrt{25-x^8}} = \int \frac{dz}{\sqrt{25-z^2}} = \arcsin\frac{z}{5} + C =$$
$$= \arcsin\frac{x^4}{5} + C.$$

ამოხსენით ინტეგრალები:

№ 24. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{3-2x^6}}$;

№ 25. $\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{4-2x^4}}$;

№ 26. $\frac{x^4\,d\,x}{\sqrt{64-25x^{10}}}$;

კოშის ამოცანა. ინტეგრალური აღრიცხვის სხვადასხვა საკითხებში გამოყენების დროს არსებითი მნიშვნელობა აქვს კოშის შემდეგ ამოცანას.

მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია და ორი რიცხვი x_0 და y_0; მოვძებნოთ $f(x)$ ფუნქციის ისეთი პრიმიტიული, რომელიც უდრის y_0, როცა $x = x_0$.

ვიგულისხმოთ, რომ $F(x)$ არის ერთ-ერთი პრიმიტიული; საძიებელი ფუნქცია აღვნიშნოთ $\psi(x)$-ით, მაშინ

$$\psi(x) = F(x) + C.$$

ამ ტოლობაში უცნობია C, მაგრამ ამოცანის პირობის თანახმად, როცა $x = x_0$, მაშინ $\Psi(x_0)$ უნდა უდრიდეს y_0, საიდანაც C-ს განსაზღვრისთვის გვექნება ტოლობა:

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

ე. ი.

$$C = y_0 = F(x_0).$$

მაშასადამე საძიებელი პრიმიტიული იქნება:

$$\psi(x) = F(x) - F(x_0) + y_0.$$

ამოცანა 1. მატარებელი მოძრაობს სიჩქარით $v = 4t^3 - 3t^2 + 30$ კმ/საათი და საწყის მომენტში სადგურიდან დაშორებულია 15 კმ. შევადგინოთ მატარებლის მოძრაობის განტოლება.

ამოხსნა. ვინაიდან

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 3t^2 + 30,$$

ამიტომ

$$S = \int (4t^3 - 3t^2 + 30)\, dt = t^4 = t^3 + 30t + C.$$

პირობის თანახმად, როცა $t = 0$, მაშინ $s = 15$ კმ, ამიტომ $C = 15$კმ.
საბოლოოდ მივიღებთ:

$$S = t^4 - t^3 + 30t + 15.$$

ამოცანა 2. მოვძებნოთ ინტეგრალი $\int (2x^3 - 4x + 3)\, dx$ ისე რომ იგი ნულის ტოლი იყოს, როცა $x = 2$.

ამოხსნა.

$$f(x) = \int (2x^3 - 4x + 3)\, dx = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 3x + C,$$

თანახმად ამოცანის პირობისა, გვაქვს:

$$f(2) = \frac{1}{2} 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + C = 0;$$

საიდანაც $C = -6$ და, მაშასადამე, საძიებელი ინტეგრალი იქნება:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + 3x - 6.$$

ინტეგრების ელემენტარული ხერხები

1. დაშლის ხერხი. ეს ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უნდა დაიშალოს ისეთ შესაკრებებად, რომელთა ინტეგრება ცალ-ცალკე შედარებით ადვილია. ხერხი ემყარება შემდეგ თეორემას:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx;$$

ამ ხერხით ჩვენ უკვე მოგვიხდა ზევით სარგებლობა. ამოვხსნათ კიდევ რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1.

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{x}\,dx = \int \left(x + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} - \ln|x| + c;$$

მაგალითი 2. $$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

მაგალითი 3. $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

მაგალითი 4. $$\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx - \int \cos x\,dx = \int \sin^{-2} x\,d(\sin x) - \int \cos x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

მაგალითი 5. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a| \right] + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{dx}{9x^2 - 16}$. თანახმად წინა მაგალითისა გვექნება:

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 16} = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+4} \right| + C;$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{e^x\,dx}{25e^{2x} - 36}$ ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად შეგვიძლია ვისარგებლოთ აგრეთვე მაგალითით 5. მივიღებთ:

$$\int \frac{e^x dx}{25e^{2x} - 36} = \frac{1}{60} \ln \left| \frac{5e^x - 6}{5e^x + 6} \right| + C;$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1) $\int \frac{m\,dx}{a^2x^2 - b^2}$ 2) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{tg^2 x - 4}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 12}$;

2 ჩასმის ხერხი. ინტეგრალების გამოთვლის დროს ხშირად სასარგებლოა ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ცვლადის მაგიერ ახალი ცვლადის შემოტანა. ზოგიერთ შემთხვევაში ახალი ცვლადის მოხერხებული შემოტანით ინტეგრალსქვეშა გამოთქმა იმდენად მარტივდება, რომ იგი ცნობილ ინტეგრალზე დაიყვანება. განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

აქედან, თანახმად განუზღვრელი ინტეგრალის განმარტებისა, გვაქვს:

$$dF(x) = f(x)dx.$$

ავიღოთ შემდეგი ჩასმა:

$$x = \varphi(t), \tag{2}$$

სადაც t ახალი ცვლადია, მივიღებთ:

$$dF(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

ვაინტეგროთ უკანასკნელი ტოლობა, გვექნება:

$$F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \tag{3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ვისარგებლოთ ახლა (2) და (3) ტოლობებით, მივიღებთ:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{4}$$

ამ ფორმულას ეწოდება ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა ინტეგრალის ქვეშ. ჩასმის ხერხის გამოყენების დროს, როგორც ზევით იყო ნათქვამი, ინტეგრალის გამოსათვლელად უნდა ავიღოთ ჩასმა $x = \varphi(t)$. ზოგჯერ უფრო სასარგებლოა მივმართოთ ჩასმას: $t = \Psi(x)$, სადაც $\Psi(x)$ რაღაც ფუნქციაა x-ისა. განვიხილოთ ტოლობა

$$t = \Psi(x)$$

როგორც განტოლება x და t ცვლადებს შორის. ამოვხსნათ იგი x-ის მიმართ, მივიღებთ x-ის გამოსახულებას t-ს საშუალებით და ამის შემდეგ შესაძლო გახდება ჩასმის განხორციელება.

ჩასმის ხერხი ერთ-ერთი უძლიერესი მეთოდია ინტეგრალის გამოთვლისა.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი:

1) მოვძებნოთ ინტეგრალი: $\int (ax + b)^n dx$. ვთქვათ $ax + b = t$. გამოვსახოთ ინტეგრალსქვეშა დიფერენციალი ახალი t ცვლადის საშუალებით. გვექნება $dt = adx$, ე. ი. $dx = \frac{1}{a} dt$. ჩვენი ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int (ax + b)^n dx = \int t^n \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

დაუბრუნდეთ ძველ ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C.$$

2) გამოვთვალოთ ინტეგრალი. $\int \frac{dx}{(2-3x)^2}$.

ავიღოთ ჩასმა: $2 - 3x = t$. მაშინ $-3dx = dt$; $dx = -\frac{1}{3} dt$

და

$$\int \frac{dx}{(2-3x)^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{3t} + C = \frac{1}{3(2-3x)} + C.$$

3) გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int \frac{Adx}{(x-a)^n}$, სადაც $n \neq 1$.

ავიღოთ ჩასმა $x - a = t$, საიდანაც $dx = dt$. მივიღებთ:

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \int \frac{Adt}{t^n} = A \int t^{-n} dt = \frac{A}{-n+1} t^{-n+1} + C =$$

$$= -\frac{A}{(n-1)\, t^{n-1}} + C;$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

კერძოდ, როცა $n = 1$, მაშინ ინტეგრალი გადაწყდება ლოგარითმული ფუნქციით:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A \ln(x-a) + C.$$

4) მოვძებნოთ ინტეგრალი: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. გამოვიყენოთ ჩას-

მა: $x = a\sin t$, საიდანაც $dx = a\cos t dt$ და $a^2 - x^2 = a^2(1-\sin^2 t) =$ $= a^2\cos^2 t$. ამის შემდეგ ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2\cos^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt =$$

$$\frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C.$$

რადგანაც $\sin t = \frac{x}{a}$, ამიტომ $\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, ხოლო $t = \arcsin \frac{x}{a}$ მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

5) მოვძებნოთ ინტეგრალი: $\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^k}$, სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია, აღვნიშნოთ $x^2 + a^2 = z$, მაშინ $2xdx = dz$; $xdx = \frac{1}{2} dz$. მაშასადამე;

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^k} = -\frac{1}{2(k-1)z^{k-1}} + C.$$

დავუბრუნდეთ ძველ x ცვლადს, მივიღებთ:

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

6) განვიხილოთ ინტეგრალი: $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}}.$$

ავიღოთ ჩასმა: $x + \frac{p}{2} = t$, მაშინ: $dx = dt$ და ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{4q - p^2}{4}}$$

გავარჩიოთ სამი შესაძლო შემთხვევა:

a) შემთხვევა, როცა $p^2 - 4q < 0$; აღვნიშნოთ ამ შემთხვევაში $\frac{p^2 - 4q}{4} = -a^2$. ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადს და ჩავსვათ a-ს მნიშვნელობა, გვექნება:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C, \ (p^2 - 4q < 0).$$

b) შემთხვევა, როცა $p^2 - 4q > 0$. მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{p^2 - 4q}{4} = a^2$. ჩვენი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{t - a}{t + a} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \ln \frac{x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}}{x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}} + C.$$

მაშასადამე, აღებულ შემთხვევაში:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} \ln \frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4q}} + C.$$
$$(p^2 - 4q > 0);$$

c) შემთხვევა, როცა $q^2 - 4q = 0$, მაშინ

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C,$$

ე. ი.

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = -\frac{2}{2x + p} + C \quad (p^2 - 4q = 0).$$

7) ამოვხსნათ ინტეგრალი: $\int \frac{6x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x} dx.$

გავამრავლოთ ინტეგრალქვეშა წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი x^3-ზე, მივიღებთ:

$$\int \frac{6x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{6x^5 + 5x^4 + 4x^3}{x^6 + x^5 + x^4} dx.$$

ახლა კი ავიღოთ ჩასმა: $x^6 + x^5 + x^4 = t$; აქედან $(6x^5 + 5x^4 + 4x^3)\,dx = dt$ და ჩვენი ინტეგრალი ასე გამარტივდება:

$$\int \frac{6x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^6 + x^5 + x^4| + C.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1. $\int \frac{xdx}{x^4 + a^2}$ იხმარეთ ჩასმა $x^2 = at.$

2. $\int \frac{x^2dx}{x^6 + 4}$ $x^3 = 2t.$

3. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ იხმარეთ ჩასმა $x^2+1=t.$

4. $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2}$ $x^n=at.$

5. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$ $x^2-x+1=t.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$ $2x+1=t^3$

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ $x^2+1=t^2.$

8. $\int \sqrt{1-x}\,dx$ $1-x=t^2.$

9. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$ $x^3+1=t^4.$

10. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[p]{x^n+a}}$ $x^n+a=t^p.$

11. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ $1+x^2=t^2.$

12. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ $x^3+2=t^2.$

13. $\int \sqrt[n]{(a+bx)^m}$ $a+bx=t^{\frac{n}{m}}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ $x=\frac{2}{3}t.$

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^4}}$ $x^2=at.$

16. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^8}}$ — იხმარეთ ჩასმა $x^4 = at$.

17. $\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 - x^{2n}}}$ $x^n = at$.

18. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ $x = t^2$.

19. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$ $x + 1 = t^2$.

20. $\int xe^{x^2} dx$ $x^2 = t$.

21. $\int \frac{e^x dx}{ex^2 + 4}$ $e^x = 2t$.

22. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ $\ln x = t$.

23. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1 + x^2} dx$ $\operatorname{arctg} x = t$.

24. $\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dt$ $tg x = t$.

25. $\int \cos^3 x dx$ $\sin x = t$.

26. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$ $e^{-x} = t$.

27. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ $e^x + e^{-x} = t$.

28. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ „ $\ln x = t$.

29. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ $\sin x = t$.

30. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$ იხმარეთ ჩასმა $\sin x = t$.

31. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$ $\arcsin x = t$.

32. $\int \frac{cocx\ dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ $\sin x = t^{3/2}$

33. $\int \frac{\sin x\ dx}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}$ $1+2\cos x = t^3$.

34. $\int \sin x\ 2x \sqrt{1+3\cos^2 x}\ dx$ $1+3\cos^2 x = t^2$.

35. $\int \frac{\sin 2x\ dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $1+\cos^2 x = t^2$.

36. $\int \frac{\sin 2x\ dx}{2\sin^2 x+3}$ $2\sin^2 x+3 = t$.

37. $\int \frac{\cos x \sin 2x\ dx}{3\cos^3 x+2}$ $3\cos^3 x+2 = t$.

38. $\int \sqrt[3]{\frac{tg^2 x}{\cos^2 x}}\ dx$ $tgx = t^3/_2$.

39. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\ arctgx}$ $arctgx = t$.

40. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$ $tgx = t$.

პასუხები:

1. $\frac{1}{2a}\ arctg\ \frac{x^2}{a} + c$.
2. $\frac{1}{6}\ arctg\ \frac{x^3}{2} + c$.
3. $\frac{1}{2} \ln \left| x^2+1 \right| + c$.
4. $\frac{1}{na}\ arctg\ \frac{x^n}{a} + c$.

5. $\ln|x^2-x+1|+c.$ 6. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+1)^2}+c.$

7. $\sqrt{x^2+1}$ 8. $\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+c.$

9. $\frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3+1)^3}+c.$ 10. $\frac{p}{n(p-1)}\sqrt[p]{(x^n+a)^{p-1}}+c.$

11. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c.$ 12. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+c.$

13. $\frac{n}{b(m+n)}(a+bx)^{\frac{m+n}{n}}+c.$ 14. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+c.$

15. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a}+c.$ 6. $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{a}+c.$

17. $\frac{1}{n}\arcsin\frac{x^n}{n}+c.$ 18. $2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+c.$

19. $2\sqrt{x+1}-2\ln|1+\sqrt{x+1}|1+c.$ 20. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

21. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+c$ 22. $\frac{(\ln x)^2}{2}+c$

23. $\frac{1}{3}(\operatorname{arctg}x)^3+c$ 24. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+c$

25. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+e$ 26. $\ln\frac{e^x}{e^x+1}+c$

27. $\ln|e^x+e^{-x}|+c.$ 28. $\ln|\ln x|+c$

29. $\frac{1}{4}\sin^4x-\frac{1}{6}\sin^6x+c$ 30. $\frac{1}{4}\sin^4x+c$

31. $-\frac{1}{2\arcsin^2 x}+c$ 32. $3\sqrt[3]{\sin x}+c$

33. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2\cos x)^3}+c$ 34 $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^3 x)^2}+c$

35. $-2\sqrt{1+\cos^3 x}+c$ 36. $\frac{1}{2}\ln\left|(2\sin^2 x)+3\right|+c$

37. $-\frac{2}{9}\ln\left(3\cos^3 x+2\right)+c$ 38. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}+c$

39. $\ln|\operatorname{arctg} x|+c$ 40. $\ln|\operatorname{tg} x|+c$

3. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი. ეს ხერხი დამყარებულია შემდეგი ფორმულის მიზანშეწონილ გამოყენებაზე. თუ $u(x)$ და $v(x)$ არის x-ის მოცემული ფუნქციები, მაშინ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

მართლაც, ერთის მხრივ, გვაქვს:

$$d\left[\int u\,dv\right] = d\left[uv'dx\right] = uv'dx = u\,dv;$$

მეორეს მხრივ,

$$d\left[uv - \int v\,du\right] = d(uv) - d\left[\int v\,du\right] = u\,dv + v\,du -$$

$$-d\left[\int vu'dx\right] = u\,dv + v\,du - vu'dx =$$

$$= u\,dv + v\,du - v\,du = u\,dv;$$

მაშასადამე,

$$d\left[\int u\,dv\right] = d\left[uv - \int v\,du\right],$$

ე. ი.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (\alpha)$$

უმთავრესად ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალქვეშა დიფერენციალი წარმოად-

გენს ნამრავლს, ან შეიცავს მაჩვენებლიან ფუნქციას, ან შეიცავს ლოგარითმებს, ან შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

გადავწყვიტოთ რამოდენიმე მაგალითი.

1) მოვძებნოთ ინტეგრალი $\int x\cos x dx$.

ამოხსნა. ვთქვათ $u=x$ და $dv=\cos x dx=d\sin x$, მაშინ $du=dx$ და $v=\sin x+c_1$, ამიტომ

$$\int xs\cos x dx=\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{d\sin x}_{dv}=\underbrace{x}_{u}\underbrace{(\sin x+c_1)}_{v}-$$

$$-\int\underbrace{(\sin x+c_1)}_{v}\underbrace{dx}_{du}=x\sin x+c_1x-\int\sin x dx-\int c_1dx=$$

$$=x\sin x+\cos x+c.$$

(შევნიშნოთ, რომ c_1-ის შემცველი წევრები ისპობა. ამის გამო ნებისმიერ მუდმივს c_1-ს აღარ დავწერთ).

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის არა მიზანშეწონილი გამოყენებით, ზოგჯერ მოცემული ინტეგრალის გამარტივების ნაცვლად, მივდივართ უფრო რთული ინტეგრალის გამოთვლაზე. ამიტომ საჭიროა ვიდრე ფორმულის გამოყენებას დავიწყებთ, წინასწარ გავითვალისწინოთ როგორი გამარტივება მოყვება ინტეგრალქვეშა დიფერენციალის ამა თუ იმ წესით აღნიშვნას u და dv სიდიდეებით.

2) მოვძებნოთ $\int xe^x dx$.

ვთქვათ $u=e^x$, $dv=xdx$, მაშინ

$$du=e^xdx,\ v=\frac{x^2}{2}.$$

ამიტომ

$$\int e^xxdx=e^x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}e^xdx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^xx^2bx.$$

როგორც ვხედავთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებამ მიგვიყვანა უფრო რთული ინტეგრალის $\int e^xx^2dx$ გამოთვლაზე, ვიდრე თავიდან აღებული ინტეგრალი იყო. ეს გამოწვეულია ფორმულის არამიზანშეწონილი გამოყენების გამო.

ახლა ვთქვათ: $u=x$, $dv=e^xdx$, მაშინ $du=dx$, $v=e^x$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\int e^x \cdot x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x\ (x-1) + c\,.$$

როცა ვაპირებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებას საჭიროა მხედველობაში ვიქონიოთ შემდეგი მითითებანი: ა) dx უნდა იყოს თანამამრავლის dv-ს ნაწილი, ბ) ფუნქცია v შედარებით ადვილად უნდა მოიძებნებოდეს dv დიფერენციალიდან. გ) მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ საბოლოოდ მოგვიხდება ინტეგრალის $\int vdu$-ს აღება და ამიტომ იგი რაც შეიძლება მარტივი უნდა იყოს. დ) ინტეგრალის გამარტივებას უნდა მოველოდეთ du დიფერენციალის ხარჯზე. ამიტომ როცა ვირჩევთ u ფუნქციას საჭიროა, იგი ისეთი იყოს, რომ მისი დიფერენციალი მასზე მარტივი ფუნქცია აღმოჩნდეს.

ზოგჯერ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა ერთიდაიგივე ინტეგრალის ამოხსნის დროს საჭიროა რამოდენიმეჯერ გამოვიყენოთ. განვიხილოთ მაგალითი:

მაგალითი 3. მოვძებნოთ $\int x^2 e^x dx$.

ამოხსნა. ვთქვათ $u=x^2$, $dv = e^x dx$. საიდანაც $du=2xdx$ და $v=e^x$. მაშასადამე,

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - 2\int xe^x dx\,.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ჩვენ უკვე ამოხსნილი გვქონდა ზევით ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით (მაგალითი 2), ჩავსვათ იქ მიღებული შედეგი, გვექნება:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c\,.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int e^{mx} \cos nx dx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $u=e^{mx}$, $dv=\cos nx dx$, მაშინ $du=me^{mx}dx$,

$$v = \frac{1}{n}\sin nx$$

ამიტომ

$$\int e^{mx}\cos nx dx=\frac{1}{n}\ e^{mx}\sin nx-\frac{m}{n}\ \int e^{mx}\sin nx dx; \qquad (1)$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა: $u=\cos nx$, $dv=e^{mx}dx$; მაშინ $du=-n\ \sin nx dx$, $v=\frac{1}{m}e^{mx}$.

ამიტომ საძიებელი ინტეგრალი ასე გამოისახება

$$\int e^{mx}\cos nx dx=\frac{1}{m}\ e^{mx}.\ \cos nx+\frac{n}{m}\ \int e^{mx}\sin nx dx. \qquad (2)$$

გავამრავლოთ (1) ტოლობა $\frac{n}{m}$-ზე, ხოლო (2) ტოლობა $\frac{m}{n}$-ზე და ამნაირად მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)\int e^{mx}.\ \cos nx dx=\frac{1}{m}\ e^{mx}.\sin nx+\frac{1}{n}\ e^{mx}\cos nx+c,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$\int e^{mx}\cos nx dx=\frac{e^{mx}}{n^2+m^2}\left(n\ \sin nx+m\cos nx\right)+c.$$

გადაწყვიტეთ შემდეგი მაგალითები:

1. $\int \operatorname{arctg}x dx$
2. $\int x^2\operatorname{arctg}x dx$
3. $\int \arcsin x dx$
4. $\int x^2\arcsin x dx$
5. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ dx$
6. $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$,
7. $\int x^3e^{2x}dx$
8. $\int x^5e^{-x^2}dx$
9. $\int x\ \sin 2x dx$
10. $\int x^2\cos^2x dx$

ამ მაგალითებში ყველგან საჭიროა ვისარგებლოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. აქვე მოგვყავს მათი პასუხები:

1. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)+c$

2. $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} x \, (x^6+1) - \frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{18} - \frac{x}{6} + c$

3. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

4. $\frac{1}{3} x^3 \arcsin x + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + c$

5. $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c$

6. $-\arcsin x \sqrt{1-x^2} + x + c$

7. $e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right) + c$

8. $-\frac{1}{2} e^{-x^2} \left(x^4 + 2x^2 + 2\right) + c$

9. $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

10. $\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + c$

4. რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება

დაამუშავეთ შემდეგი ლიტერატურა:

ა. რუხაძე და ა. ხარაძე „უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები", ტომი II, გვ. 33-51.

ვიდრე გადახვიდოდეთ რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრების საკითხებზე, საჭიროა წინასწარ შეისწავლოთ რაციონალური ფუნქციების ზოგიერთი თვისებანი და საკითხი რაციონალურ წილადების დაშლის შესახებ ელემენტარულ წილადებად.

რაციონალური ფუნქცია ჰქვია $\frac{f(x)}{F(x)}$ სახის წილადს, სადაც $f(x)$ და $F(x)$ პოლინომებია:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ \dots + b_{m-1}x+b_m, \\ F(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots + a_{n-1}x+a_n, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ხოლო $b_0, \dots, b_m$ $a_0,$ a_n — ნამდვილი რიცხვებია. რაციონალური წილადის ინტეგრალს აქვს სახე:

$$\int \frac{f(x)dx}{F(x)}. \qquad (2)$$

$f(x)$ და $F(x)$ პოლინომების მიმართ იგულისხმება შემდეგი: 1) ისინი არიან ურთიერთ მარტივი, 2) $f(x)$ პოლინომის რიგი ნაკლებია $F(x)$ პოლინომის რიგზე და 3) $F(x)$ პოლინომის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთს.

რაციონალური წილადი $\frac{f(x)}{F(x)}$ მუდამ შეიძლება მივიყვანოთ ისეთ სახემდე, როცა ყველა ზევითმოყვანილი პირობა შესრულებული იქნება.

1. თუ $F(x)$ პოლინომის ფესვებია $a, b, c, \dots l$ და ამას გარდა ისინი მარტივია, მაშინ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი ასე დაიშლება:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \qquad + \frac{L}{x-l}.$$

(3) ტოლობის დამტკიცებას იპოვით ზემოთ დასახელებულ წიგნში და ამას გარდა, იქ იპოვით $A, B, C,$ L კოეფიციენტების გამოთვლის სხვადასხვა ხერხს.

მაგალითი. დავშალოთ მარტივ წილადებად შემდეგი რაციონალური წილადი:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2+1}{x^3-9x}.$$

მნიშვნელის ფესვები ამ შემთხვევაში არის 0, 3 და —3. ამიტომ ადგილი აქვს დაშლას:

$$\frac{x^2+1}{x^3-9x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}. \qquad (3)$$

გამოვთვალოთ დაშლის კოეფიციენტები A, B და C.

კოეფიციენტთა შედარების ხერხი. გავაერთმნიშვნელოვანოთ (3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი. მივიღებთ:

$$x^2+1=A(x^2-9)+Bx(x+3)+Cx(x-3).$$

შევადაროთ x-ის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტები მარჯვენა და მარცხენა მხარეში, გვექნება:

$$A+B+C=1,$$

$$B-C=0,$$

$$-9A=1.$$

საიდანაც $A=-\frac{1}{9}, \qquad B=\frac{5}{9}, \qquad C=\frac{5}{9}.$

განუსაზღვრელობათა გახსნის ხერხი. გამოვთვალოთ ახლა იგივე კოეფიციენტები მეორე ხერხით—განუსაზღვრელობათა გახსნის წესით:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^3-9x}\,x=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2-9}=-\frac{1}{9};$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^3-9x}\,(x-3)=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+1)}{x(x+3)}=\frac{5}{9}$$

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^3-9x}\,(x+3)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x(x-3)}=\frac{5}{9}.$$

მაშასადამე, დაშლას აქვს სახე:

$$\frac{x^2+1}{x^3-9x}=-\frac{1}{9}\,\frac{1}{x}+\frac{5}{9}\,\frac{1}{x-3}+\frac{5}{9}\,\frac{1}{x+3}.$$

2. ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა F(x)-ს აქვს ჯერადი ფესვები. ვთქვათ, a, b, ..., l არიან F(x) პოლინომის ფესვები, რომლებიც წარმოადგენენ შესაბამისად α, β .., λ ჯერადობის ფესვებს, სადაც $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$.

ამ შემთხვევაში წილადი $\frac{f(x)}{F(x)}$ დაიშლება შემდეგნაირად:

$$\frac{\quad}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A\alpha-1}{x-a}+\frac{B_0}{(x-b)^{\beta}}+$$

$$+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B\beta.1}{x-b}+$$

$$+\frac{L_0}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda.1}}+\ldots+\frac{L\lambda.1}{x-l},$$

სადაც $A_0, A_1, \ldots, L_{\lambda\cdot 1}$ გარკვეული მუდმივებია. ამის დამტკიცებას იპოვით ზემოთ დასახელებულ სახელმძღვანელოში.

მაგალითი. დავშალოთ მარტივ წილადებად რაციონალური წილადი $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$.

მნიშვნელს აქვს ფესვი 1, რომლის ჯერადობა უდრის 2-ს და მარტივი ფესვი 2. თანახმად ზევითნათქვამისა დაშლას ექნება სახე:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

გამოვთვალოთ დაშლის კოეფიციენტები. ამისათვის შევკრიბოთ დაშლის მარჯვენა მხარის მარტივი წილადები. მივიღებთ:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A_1(x-2)+A_2(x-1)(x-2)+B(x-\ )}{(x-1)^2(x-2)}$$

გავუტოლოთ მრიცხველები ერთმანეთს და შევადაროთ x-ის ტო-

ლი ხარისხების კოეფიციენტები ტოლობის ორივე მხარეში, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$A_2+B=0,\ A_1-3A_2-2B=1,\ -2A_1+2A_2+B=1;$$

საიდანაც $A_1=-2$, $A_2=-3$, $B=3$.

მაშასადამე, დაშლას ექნება სახე:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}.$$

3. ახლა ვთქვათ, რომ $F(x)$ პოლინომს აქვს k-ჯერადი კომპლექსური ფესვი $\alpha+i\beta$. მაშინ მას ექნება აგრეთვე k ჯერადი შეუღლებული ფესვი $\alpha-i\beta$.

$F(x)$ პოლინომი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$F(x)=\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k F_k(x),$$

სადაც $F_k(x)$ არის $n-2k$ ხარისხის პოლინომი. რაციონალური წილადი $\frac{f(x)}{F(x)}$ ამ შემთხვევაში დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0x+B_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}+\frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}}+\dots+$$

$$+\frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_k(x)}{F_k(x)},$$

სადაც პოლინომს $F_k(x)$ უკვე აღარ აქვს ფესვები $\alpha\pm i\beta$. ამ ტოლობის დამტკიცება დაამუშავეთ ზემოთაღნიშნულ წიგნიდან.

ასეთი დაშლის შემდეგ პოლინომს $F_k(x)$ ექნება უკვე, $\alpha\pm i\beta$ ფესვებიდან განსხვავებული, სხვა კომპლექსური და სხვა ჯერადობის ფესვები. მათ შესახებაც გავიმეორებთ დაშლის ზევითმოყვანილ წესს და ა. შ., სანამ ამოვწურავთ მნიშვნელის ყველა კომპლექსურ ფესვს.

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი რაციონალური წილადისაგან:

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\,dx.$$

როგორც ზევითნათქვამიდან გამომდინარეობს ამ ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება შემდეგი ინტეგრალების გამოთვლაზე:

$$I_1=\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx,\qquad I_2=\int\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\,dx.$$

შევჩერდეთ ამ ინტეგრალების ამოხსნაზე.

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი I_1. ვთქვათ $k=1$, მაშინ

$$I_1=\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln(x-a)+C.$$

როცა $k\neq1$, მაშინ $I_1=A\int(x-a)^{-k}dx=A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+$

$$+C=-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C.$$

2. გამოვთვალოთ ახლა ინტეგრალი I_2.

შემოვიღოთ ჩასმა: $x-\alpha=z$, მაშინ $dx=dz$ და

$$I_2=\int\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\,dx=\int\frac{Mz+M\alpha+N}{(z^2+\beta^2)^k}\,dz=$$

$$=M\int\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^k}+(M\alpha+N)\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^k}=MI'_k+(M\alpha+N)I''_k,$$

სადაც

$$I'_k=\int\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^k},\quad I''_k=\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^k}.$$

ვთქვათ $k=1$. მაშინ

$$I'_1=\int\frac{zdz}{z^2+\beta^2}=\frac{1}{2}\ln\,(z^2+\beta^2)+C,$$

$$I''_1=\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{\beta}+C,$$

და

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\ dx = \frac{M}{2}\ \ln[(x-\alpha)^2+\beta^2] +$$

$$+\frac{M\alpha+N}{\beta}\ \text{arctg}\ \frac{x-\alpha}{\beta}+C.$$

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $k \neq 1$. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$I_k' = \int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(z^2+\beta^2)^{k-1}} + C.$$

გამოვთვალოთ I_k''.

$$I_k'' = \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^k} = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{z^2+\beta^2-z^2}{(z^2+\beta^2)^k}\ dz =$$

$$\frac{1}{\beta^2}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{k-1}} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{z^2dz}{(z^2+\beta^2)^k},$$

ე. ი.

$$I_k'' = \frac{1}{\beta^2}\ I''_{k-1} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{z^2dz}{(z^2+\beta^2)^k}$$

გამოვთვალოთ უკანასკნელი ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. აღვნიშნოთ $z=u$, $\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^k} = dv$, მაშინ $dz=du$,

$$v = \int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)\ (z^2+\beta^2)^{k-1}}.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{z^2dz}{(z^2+\beta^2)^k} = -\frac{z}{(2k-2)\ (z^2+\beta^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\ I_{k-1}''.$$

ამის შემდეგ ინტეგრალი I_k'' გამოისახება ასე:

$$I_k'' = \frac{z}{(2k-2)\beta^2(z^2+\beta^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)\beta^2}\ I_{k-1}''. \qquad (4)$$

ამნაირად ინტეგრალის I_k''-ის გამოთვლა დაყვანილია I''_{k-1} ინტეგრალის გამოთვლაზე. სხვანაირად, I_k'' ინტეგრალის გამოთვლა დაყვანილია ასეთივე ტიპის ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელშიც k მაჩვენებელი შეცვლილია k—1-ით. ამის გამო უკანასკნელ ტოლობას I_k'' ინტეგრალის რედუქციის ფორმულა ეწოდება. თუ გამოვიყენებთ (4) ფორმულას მიმდევრობით k—1-ჯერ, I_k'' ინტეგრალი დაიყვანება ინტეგრალის $\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$ გამოთვლაზე. უკანასკნელი ინტეგრალი კი ტოლია $\frac{1}{\beta}\ \mathrm{arctg}\ \frac{z}{\beta}$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1. $\int\frac{x^4dx}{x^2-1}$. 2. $\int\frac{x^3dx}{(2-x)^3}$

3. $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$. 4. $\int\frac{x^3+2x^2-6x+5}{(x-2)^2(x-1)}dx$.

5. $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^3}dx$. 6. $\int\frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$.

7. $\int\frac{dx}{(x-2)^3(+1)^2}$. 8. $\int\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$.

9. $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. 10. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

11. $\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$. 12. $\int\frac{x^6+1}{x^6+x^4}dx$.

13. $\int\frac{dx}{x^3+1}$. 14. $\int\frac{dx}{1-x^4}$.

15. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$. 16. $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}$.

17. $\int \frac{dx}{1+x^4}$. 18. $\int \frac{1-x^4}{1+x^4}\,dx$.

19. $\int \frac{x^2dx}{1+x^4}$ 20. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

21. $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)}\,dx$. 22. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)x-3)(x-4)}$.

23. $\int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$. 24. $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx$.

25. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

პასუხები

1. $\frac{1}{3}x^3+x+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+c$.

2. $-x+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{12}{x-2}\,6\ln(x-2)+c$.

3. $\frac{1}{x}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+c$.

4. $x+2\ln(x-1)+5\ln(x-2)-\frac{9}{x-2}+c$.

5. $\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+c$.

6. $\frac{3(x-1)}{16(x+1)}-\frac{x+1}{16(x-1)}-\frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\frac{x+1}{x-1}+c$.

7. $\frac{(x+1)^2}{6(x-2)^2}-\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{3(x+1)}-\ln\frac{x-2}{x+1}+c$.

8. $-\dfrac{x+3}{2(1-x^2)} + \ln \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{(x+1)^5(x-1)^3}} + c.$

9. $-\dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2} \ln(x+1) - \dfrac{1}{4} \ln(x^2+1) + c.$

10. $\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{x+1}{x^2+1} + \ln \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \operatorname{arctg} x\right) + c.$

11. $\dfrac{3}{4} \ln \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2} - \operatorname{arctg} x + \dfrac{5x-6}{2(x-1)^2} + c.$

12. $\dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \ln \sqrt{1=x^2} + \operatorname{arctg} + c.$

13. $\dfrac{1}{3} \ln + \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$

14. $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$

15. $\dfrac{1}{3} \ln \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

16. $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$

17. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \sqrt{\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + c.$

18. $-x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + c.$

19. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + c.$

20. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{3}+c\,.$

21. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c\,.$

22. $\ln\sqrt{\frac{(x-2)^2(x-4)}{(x-3)^3(x-1)}}+c\,.$

23. $\ln\left[\,(x+1)^4(x-2)^3(x-1)^2\,\right].$

24. $\frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1(\,(x+2)^2}+c\,.$

25. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\mathrm{arctg}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c\,.$

რაციონალური ფუნქციების ინტეგრების თეორიის დამუშავების შემდეგ უნდა გავაკეთოთ დასკვნა, რომ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი მუდამ გადაწყდება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამოცანას მუდამ აქვს ამოხსნა და ეს ამოხსნა ელემენტარული ფუნქციებით და მათი სასრული კომბინაციებით წარმოგვიდგება.

ნ. ირაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

დაამუშავეთ ლიტერატურა:

ა. რუხაძე და ა. ხარაძე, უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები, ტომი II. გვ. 52—69.

უმეტეს შემთხვევებში, ინტეგრალი ირაციონალური ფუნქციიდან დაყავთ ინტეგრალზე რაციონალური ფუნქციიდან. ამა თუ იმ ჩასმით, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის რაციონალურ ფუნქციაზე დაყვანას ეწოდება მოცემული ინტეგრალის რაციონალიზაცია. რათქმაუნდა იგულისხმება, რომ შეუძლებელია ყველა ირაციონალური ფუნქციის რაციონალიზაცია. საზოგადოდ მრავალი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი შეუძლებელია გამოისახოს სასრული სახით ელემენტარული ფუნქციების და მათი კომბინაციების საშუალებით.

შეისწავლეთ შემდეგი ტიპის ინტეგრალების თეორია:

1) $$\int R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)dx,$$

სადაც R არის მისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, ხოლო $m, n, \ldots, r, s$ — ნებისმიერი მთელი რიცხვები. ასეთი ინტეგრალის რაციონალიზაციისათვის უნდა ავიღოთ ჩასმა $x = z^k$, სადაც k არის $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ წილადების საერთო მნიშვნელი. ამ ჩასმის შედეგად მოსაძებნი ინტეგრალი დაიყვანება შემდეგი სახის ინტეგრალზე რაციონალური ფუნქციიდან:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx = k \int R\left(z^k, z^{m_1}, \ldots, r^{r_1}\right) z^{k-1} dz,$$

სადაც $m_1, \ldots, r_1$ მთელი რიცხვებია.

მაგალითი: მოვძებნოთ ინტეგრალი $\int \frac{\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$.

თუ ავიღებთ ჩასმას $x = z^{12}$, მივიღებთ

$$\int \frac{\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int z^{11} \frac{z^8 - z^3}{z^6} dx =$$

$$= 12 \int \left(z^{13} - z^8\right) dx = \frac{6}{7} z^{14} - \frac{4}{3} z^9 + C =$$

$$= \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} - \frac{3}{4} \sqrt[4]{x^3} + C.$$

$$2) \quad \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx,$$

სადაც $m, n, \ldots, r, s$ მთელი რიცხვებია, ხოლო a, b, c, d—ნებისმიერი მუდმივები და მასთან ისეთები, რომ $ad - bc \neq 0$.

ეს ინტეგრალი, ჩასმით

$$z = \frac{ax+b}{cx+d}$$

დაიყვანება 1) ტიპის ინტეგრალზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$x = \frac{dz - b}{a - cz}, \quad dx = \frac{ad - bc}{(a - cz)^2} dz$$

და ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dz-b}{a-cz}, z^{\frac{m}{n}}, \ldots, z^{\frac{r}{s}}\right)\frac{ab-bc}{(a-cz)^2}\, dz$$

და თუ უკანასკნელ ინტეგრალში ვიხმართ ჩასმას $z = u^k$, სადაც k არის ყველა წილად მაჩვენებელთა მნიშვნელების უმცირესი ჯერადი, მაშინ იგი დაიყვანება ინტეგრალზე რაციონალური ფუნქციიდან.

მაგალითი. მოვძებნოთ ინტეგრალი $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{1}{(2-x)^2}dx$.

თუ ავიღებთ ჩასმას

$$z = \frac{2-x}{2+x}, \text{ მაშინ } x = 2\frac{1-z}{1+z}, \; dx = -\frac{4}{(1+z)^2}\, dz$$

და მაშასადამე,

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{1}{(2-x)^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int z^{-\frac{5}{3}}\, dz =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

3) განვიხილოთ ახლა შემდეგი ტიპის ინტეგრალები

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \qquad (1)$$

სადაც R აღნიშნავს x ცვლადისა და $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ფესვის რაციონალურ ფუნქციას. ასეთი ტიპის ინტეგრალები მუდამ მიიყვანება ინტეგრალზე რაციონალური ფუნქციიდან. ამისათვის იხმარება ე. წ. ეილერის ჩასმები. როცა $a > 0$, მაშინ ინტეგრალის რაციონალიზაციისთვის იხმარება ეილერის **პირველი ჩასმა**:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = z + \sqrt{a}\, x,$$

საიდანაც

$$x = \frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}\, z}$$

მაშასადამე,

$$dx = -2\frac{\sqrt{a}\ z^2 - bz + c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}\ z)^2}\,dz$$

და

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\ z^2 - bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\ z - b}.$$

თუ მოძებნილ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მოცემულ ინტეგრალში, გვექნება:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= -2\int R\left(\frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}\,z}, \frac{\sqrt{a}\ z^2 - bz + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\ z - b}\right)$$

$$\frac{\sqrt{a}\,z^2 - bz + c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}\ z)^2}\,dz,$$

სადაც უკანასკნელი ინტეგრალი უკვე აღებულია z-ის რაციონალური ფუნქციიდან.

მაგალითი. მოვძებნოთ ინტეგრალი $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

ავიღოთ ჩასმა

$$\sqrt{x^2+2x-1} = z + x,$$

საიდანაც გვაქვს:

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{1+z^2}{1-z},$$

$$dx = -\frac{1}{2}\,\frac{z^2-2z-1}{(1-z)^2}\,dz,$$

$$\sqrt{x^2+2x-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{z^2-2z-1}{1-z}.$$

ინტეგრალი ახლა ასე წარმოგვიდგება:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} = \int\frac{dz}{1-z} = -\ln|1-z| + C =$$

$$= -\ln\left(1 + x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}\right) + C.$$

როცა $a<0$, ხოლო $c>0$, მაშინ (1) ინტეგრალის მოსაძებნად ხმარობენ ეილერის მეორე ჩასმას:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz + \sqrt{c}.$$

საიდანაც

$$ax + b = 2\sqrt{c}\, z + xz^2.$$

მოვძებნოთ x, dx და $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. გვაქვს:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\, z - b}{a - z^2}, \quad dx = 2\,\frac{\sqrt{c}\, z^2 - bz + a\sqrt{c}}{(a - z^2)^2}\, dz,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}\, z^2 - bz + a\sqrt{c}}{a - z^2}.$$

ამ მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = 2\int R\left(\frac{2\sqrt{c}\, z - b}{a - z^2},\right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{c}\, z^2 - bz + a\sqrt{c}}{a - z^2}\right) \frac{\sqrt{c}\, z^2 - bz + a\sqrt{c}}{(a - z^2)^2}\, dz,$$

უკანასკნელი ინტეგრალი კი აღებულია უკვე რაციონალური ფუნქციიდან.

მაგალითი. მოვძებნოთ $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$.

ავიღოთ ჩასმა

$$\sqrt{1 + 2x - x^2} = 1 + xz.$$

აქედან მივიღებთ:

$$x = 2\,\frac{1 - z}{1 + z^2}, \quad dx = 2\,\frac{z^2 - 2z - 1}{(1 + z^2)^2}\, dz,$$

$$\sqrt{1 + 2x - x^2} = -\frac{z^2 - 2z - 1}{1 + z^2}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -2 \int \frac{dz}{1+z^2} = 2\operatorname{arcctg} z + c = .$$

$$= 2 \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1+2x-x^2} - 1}{x} + c \cdot$$

როცა a და c კოეფიციენტები ორივე უარყოფითია, მაშინ განხილული ინტეგრალის მოსაძებნად იხმარება ეილერის მესამე

ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)z,$$

სადაც α არის $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ერთ-ერთი ნამდვილი ფესვი. აღვნიშნოთ β-თი ამავე საშწევრის მეორე ნამდვილი ფესვი, მაშინ

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

აქედან

$$(x-\beta)\, a = (x-\alpha)\, z^2 \text{ და მაშასადამე, } x = \frac{\alpha z^2 - \beta a}{z^2 - a},$$

$$dx = \frac{2a(\beta-\alpha)z}{(z^2-a)^2}\, dz, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\alpha-\beta)z}{z^2-a}.$$

თუ მიღებულ გამოსახვებს შევიტანთ მოცემულ ინტეგრალში, გვექნება:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx = \int R\left(\frac{\alpha z^2 - \beta a}{z^2-a}, \frac{za(\alpha-\beta)}{z^2-a}\right) \frac{2az(\beta-\alpha)dz}{(z^2-a)^2}$$

შენიშვნა. გვახსოვდეს, რომ ეილერის მესამე ჩასმა გამოსადეგია მხოლოდ მაშინ, როცა $ax^2+bx+c=0$ განტოლების α და β ფესვები ნამდვილია და $\alpha \neq \beta$. როცა $\alpha = \beta$, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ ინტეგრალი თავიდანვე იქნება ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან.

მაგალითი. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x-2-x^2}}$.

ამ შემთხვევაში $a=-1<0$, $c=-2<0$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

ავიღოთ ჩასმა:

$$\sqrt{3x-2-x^2} = \sqrt{(2-x)(x-1)} = (x-1)z.$$

გვაქვს:

$$x=\frac{2+z^2}{1+z^2},\ dx=-\frac{dz\,(x-1)\,dz}{1+z^2}.$$

ამ ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{3x-2-x^2}}=-2\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}-2\int\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=-\frac{z}{1+z^2}-3\mathrm{arctg}z+C=$$

$$=-\sqrt{3x-2-x^2}-3\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3x-2-x^2}{x-1}}+C.$$

4) $\int x^m(a+bx^n)^p dx,$

სადაც a, b, m, n და p მუდმივი რიცხვებია. ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას დიფერენციალური ბინომი ეწოდება. როგორც თქვენ ნახავთ ჩვენს მიერ მითითებულ ლიტერატურაში, ეს ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში გადაწყდება მხოლოდ შემდეგ სამ შემთხვევაში:

1°. როცა p მთელი რიცხვია,

2°. როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია,

3°. როცა $\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია.

შეისწავლეთ ყველა ამ შემთხვევებში დიფერენციალური ბინომიდან ინტეგრალის მოძებნის ხერხები.

დასასრულს ამოხსენით ინტეგრალები:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$. 2. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. 4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

5. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 6. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx$.

7. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{\sqrt{-x^2+x+4}}\,dx$. 8. $\displaystyle\int \frac{x^5+2x+x^3-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$.

9. $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$. 10. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

11. $\displaystyle\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$. 12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+2x-1}\,dx$.

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. 14. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^6}{(x-1)^3}}\,dx$.

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)}}$. 18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}$.

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. 20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$.

21. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 22. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$. 24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. 26. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

27. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. 28. $\int x^4\sqrt{(1+x^2)^3}\,dx$.

29. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x)^3}\,dx$. 30. $\int \sqrt{x(1+\sqrt{x})}\,dx$.

პასუხები:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(3x+\frac{1}{2}+\sqrt{9x^2+3x+3}\right)+c$.

2. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4 \ln \left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+c$.

3. $\operatorname{arctg}\frac{3+2x}{2\sqrt{2-3x-x^2}}+c$.

4. $\sqrt{2+4x-x^2}+2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}+c$.

5. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$.

6. $-\left(\frac{x}{2}+\frac{9}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{27}{8}\arcsin(2x-3)+c$.

7. $-\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{2}\right)\sqrt{-x^2+x+4}+\frac{31}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{17}}+c$.

8. $\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln(x+1+$
$+\sqrt{x^2+2x-1})+c$.

9. $\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\Big(x+1+$

$+\sqrt{x^2+2x+2}\Big)+c.$

10. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln\ (x-1+$

$+\sqrt{x^2-2x-1} + c.$

11. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\ \ln$

$\left[\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right]+c.$

12. $\frac{1}{4}\ x(x^2+1)\sqrt{x^2+2} - \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}} + c.$

13. $\ln\ \frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}} + c.$

14. $\frac{2z^5}{(z^3-1)^2} + \frac{10z^2}{3(z^3-1)} + \frac{10}{9}\ \ln(z^2+z+1)\ \frac{20}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}$

$-\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\ \frac{20}{9}\ln\ (z-1)+c$, სადაც $z = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$

15. $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + c.$

16. $\frac{3}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{2z+1}{\sqrt{3}} - \ln\frac{z-1}{\sqrt{z^2+z+1}} + c$, სადაც $t =$

$= \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$

17. $\ln\ \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, სადაც $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

18. $-\frac{3}{16}(3x+5)\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^4}}+c.$

19. $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)-\frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\right.$

$\left.+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+c.$

20. $-z-\frac{1}{6}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+c,\ z=$

$=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}.$

21. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\right.$

$\left.+\sqrt{x^2+1}\right)+c.$

22. $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}+c.$

23. $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c,$ სადაც

$z=\sqrt[3]{1+x^5}$

24. $-\frac{(3x^2+2)\sqrt{1+x^2}}{8x^4}-\frac{3}{8}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+c.$

25. $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+c,$ სადაც $z=$

$=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}.$

26. $\frac{1}{4}\ln\frac{z+1}{z-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+c$, სადაც $z=\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}}$

27. $-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+c$.

28. $\left(\frac{1}{8}x^7+\frac{3}{16}x^5+\frac{1}{64}x^3-\frac{3}{128}x\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{3}{128}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+c$.

29. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+c$.

30. $\frac{3z}{5(z^2-1)^5}+\frac{3z}{40(z^2-1)^4}-\frac{7z}{60(z^2-1)^3}+\frac{7z}{81(z^2-1)^2}-\frac{21}{128(z^2-1)}-\frac{21}{256}\ln\frac{z-1}{z+1}+c$, სადაც $z=\sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{z}}}$.

8. ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ინტეგრება

საჭიროა წაიკითხოთ და დაამუშაოთ შემდეგი ლიტერატურა.

ა. რუხაძე, ა. ხარაძე, უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლები, ტომი II, გვ. 69-75.

გვახსოვდეს, რომ ინტეგრალი ტრანსცენდენტული ფუნქციიდან საზოგადოთ არის უმაღლესი ტრანსცენდენტული. ინტეგრება დამთავრებული სახით მხოლოდ მცირეოდენ კერძო შემთხვევებში შესრულდება.

არსებობს ორი ძირითადი მეთოდი ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ინტეგრებისა:

1°. რაციონალიზაცია ინტეგრალქვეშა დიფერენციალისა.

2°. რედუქციის ხერხი.

ინტეგრალქვეშა დიფერენციალის რაციონალიზაციისთვის ხშირად იხმარება შემდეგი ჩასმა:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \tag{1}$$

საიდანაც

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალქვეშ შედის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ლუწ ხარისხებში და ნამრავლის სახით, რომლის თანამამრავლთა რიცხვი ლუწია, მაშინ სარგებლობენ აგრეთვე შემდეგი ჩასმით:

$$\operatorname{tg}x = z, \tag{2}$$

საიდანაც

$$\sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2},$$

$$\sin x\cos x = \frac{z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

გაარჩიეთ და დაინახსოვრეთ შემდეგი კლასის ტრანსცედენტულ ფუნქციათა ინტეგრება:

$$\int R\,(\sin x,\ \cos x,)\,dx, \tag{3}$$

სადაც R არის sinx-ისა და cosx-ის რაციონალური ფუნქცია. (1) ჩასმის ძალით ეს ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე რაციონალური ფუნქციიდან:

$$\int R(\sin x, (\cos x) = \int R\left(\frac{2z}{1+t^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dt}{1+z^2}.$$

არსებობს სამი კერძო შემთხვევა (3) ინტეგრალის უფრო მარტივად ამოხსნისა:

1) $R(\sin x, \cos x)$ ფუნქცია კენტია $\cos x$-ის მიმართ:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

ამ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ ჩასმით:

$$z = \sin x.$$

2) $R(\sin x, \cos x)$ ფუნქცია კენტია $\sin x$-ის მიმართ:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

ამ შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის რაციონალიზაცია მოხდება ჩასმით:

$$z = \cos x.$$

3) $R(\sin x, \cos x)$ ფუნქცია არ იცვლება, როცა $\sin x$-სა და $\cos x$-ს ორივეს შევუცვლით ნიშანს, ე. ი.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

ამ შემთხვევაში ჩვენი ინტეგრალის ქვევით რაციონალიზაცია მოხდება ჩასმით: $\operatorname{tg} x = z$.

ინტეგრალისათვის

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

სადაც m და n მთელი რიცხვებია, ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდის გამოყენებით, მიიღება რედუქციის შემდეგი ფორმულები:

1. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx.$$

2. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{m+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx.$$

3. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} +$$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\ \cos^{n-2} x\ dx\,.$$

4. $$\int \sin^m x \cos^n x\ dx = -\frac{\cos^{n+1} x\ \sin^{m+1} x}{n+1} + $$
$$+\frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x\ \cos^{n+2} x\ dx\,.$$

5. $$\int \sin^m x \cos^n x\ dx = -\frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{m+n} + $$
$$+\frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\ \cos^n x dx\,.$$

6. $$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\cos^{n+1} x\ \sin^{m+1} x}{m+1} + $$
$$+\frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x\ \cos^n x dx\,.$$

შეისწავლეთ აგრეთვე შემდეგი ტიპის ინტეგრალები:

$\int R\ (x)\, e^{ax}\ dx$, $\int R\ (x) \sin ax\ dx$, $\int R\,(x) \cos ax\ dx$, სადაც $R\ (x)$ x-ის პოლინომი.

გამოიყვანეთ ფორმულები:

1. $$\int e^{ax} \cos bx\ dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C\,.$$

2. $$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C\,.$$

3. $$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{d^n}{da^n}\left(e^{ax}\ \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\right) + C\,.$$

4. $$\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{d^n}{da^n}\left(e^{ax}\ \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\right) + C\,.$$

დასასრულ ამოხსენით ინტეგრალები:

1. $\int \sin^3 x dx\,.$ 2. $\int \sin^9 x dx.$

3. $\int \sin^8 x\, dx.$

4. $\int \mathrm{cns}^7 x dx.$

5. $\int \cos^8 x dx.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^{12} x}.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^7 x}.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$

10. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

11. $\int \sin^7 x \cos^6 x dx.$

12. $\int \sin^7 x \cos^9 x dx.$

13. $\int \sin^6 x \cos^4 x dx.$

14. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^3 x} dx.$

15. $\int \frac{\sin^{10} x dx}{\cos^4 x}.$

16. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$

17. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx.$

18. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$

19. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx.$

20. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$

21. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

22. $\int \frac{dx}{\sin^8 x \cos^4 x}.$

23. $\int \frac{dx}{\sin^7 x \cos^3 x}.$

24. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^5 x}.$

25. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^7 x}.$

26. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^8 x}.$

27. $\int \mathrm{tg}^5 x dx.$

28. $\int \frac{dx}{1 + \mathrm{tg} x}.$

29. $\int \frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} dx.$

30. $\int \frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{(4 + \mathrm{tg}^2 x)\mathrm{tg}^3 x} dx.$

31. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4}$.

32. $\int \frac{1 + \mathrm{tg}x}{\sin 2x} dx$.

33. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

34. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)}$.

35. $\int \frac{3\cos x + 4\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx$.

36. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

37. $\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x}dx$.

37. $\int x^2 \sin x dx$

39. $\int 2^x \cos x dx$.

40. $\int (x^2 + 3x + 5)\cos 2x dx$.

40. $\int 3^x \sin x dx$.

42. $\int e^x \sin 3x dx$.

43. $\int x^2 \cos x e^x dx$.

44. $\int x^2 \sin x e^x dx$.

პასუხები

1. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

2. $-\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{6}{5}\cos^5 x + \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C$.

3. $\frac{35}{128} x - \frac{1}{8} \sin x \cos x \left(\sin^6 x + \frac{7}{6}\sin^4 x + \frac{35}{24}\sin^2 x + \frac{35}{16}\right) + C$.

4. $\sin x - \sin^3 x - \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$.

5. $\frac{5}{16} x - \frac{1}{6} \sin x \cos x \left(\cos^4 x + \frac{5}{4}\cos^2 x + \frac{15}{8}\right) + C$.

6. $\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{5}{8} \ln \mathrm{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$.

7. $\operatorname{tg}x+\frac{5}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^5x+\frac{10}{7}\operatorname{tg}^7x+\frac{5}{9}\operatorname{tg}^9x+$

$+\frac{1}{11}\operatorname{tg}^{11}x+C.$

8. $\frac{5}{6}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{\sin^2x}\left(\frac{1}{6\sin^4x}+\frac{5}{24\sin^2x}+\frac{5}{16}\right)+C.$

9. $-\left(\operatorname{ctg}x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5x\right)+C.$

10. $\frac{1}{15}\cos^3x\left(3\cos^2x-5\right)+C.$

11. $-\frac{1}{7}\cos^7x+\frac{1}{3}\cos^9x-\frac{3}{11}\cos^{11}x+\frac{1}{13}\cos^{13}x+C.$

12. $\frac{1}{8}\sin^8x-\frac{2}{5}\sin^{10}x+\frac{1}{2}\sin^{12}x-\frac{2}{7}\sin^{14}x+\frac{1}{16}\sin^{16}x+C.$

13. $\frac{1}{10}\sin^7x\cos^3x+\frac{3}{80}\sin^7\cos x-\frac{1}{160}\sin^5x\cos x-$

$-\frac{1}{128}\sin^3x\cos x-\frac{3}{256}\sin x\cos x+\frac{3x}{256}+C.$

14. $\frac{1}{2\cos^2x}+\frac{3}{2}\cos^2x-\frac{\cos^4x}{4}-\ln\cos x+C.$

15. $\operatorname{tg}^3x\left(\frac{35}{16}-\frac{21}{16}\sin^2x-\frac{3}{8}\sin^4x-\frac{1}{6}\sin^6x\right)+$

$+\frac{105}{16}\operatorname{tg}x-\frac{105}{16}x+C.$

16. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{3}{2}x+C.$

17. $-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}+C.$

18. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x-2\ln\sin x+\frac{1}{2}\sin^2x+C.$

19. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$

20. $\ln tg x - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$

21. $\frac{1}{3tg^3 x}\left(tg^2 x - 1\right)\left(tg^4 x + 10tg^2 x + 1\right) + C.$

22. $\frac{1}{3}tg^3 x + 5tg x - 10ctg x - \frac{1}{3}ctg^3 x - ctg^5 x -$

$- \frac{1}{7}ctg^7 x + C.$

23. $\frac{1}{2}tg^2 x + 4\ln tg x - ctg^2 x - ctg^4 x - \frac{1}{6}ctg^6 x + C.$

24. $\frac{1}{4}\left(tg^4 x - ctg^4 x\right) + 2\left(tg^2 x + ctg^2 x\right) + 6\ln ctg x + C.$

25. $\frac{1}{4tg^4 x} - \frac{5}{2tg^2 x} + 10\ln tg x + 5tg^2 x + \frac{5}{4}tg^4 x + \frac{1}{6}tg^6 x + C.$

26. $-\frac{1}{7}ctg^7 x + \frac{1}{5}ctg^5 x - \frac{1}{3}ctg^3 x + ctg x + x + C.$

27. $\frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \ln\cos x + C.$

28. $\frac{1}{2}\left[x + \ln(\sin x + \cos x)\right] + C.$

29. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + tg x}{1 - tg x}\right) + C$

30. $-\frac{1}{8tg^2 x} - \frac{\ln tg x}{16} + \frac{\ln(4 + tg^2 x)}{32} + C.$

31. $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C.$

32. $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}x + \frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}x + C.$

33. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) + C.$

34. $-\frac{1}{3\,(\mathrm{tg}^3x + 1)} + C.$

35. $\frac{23}{29x} - \frac{14}{29}\ln(5\cos x + 2\sin x) + C.$

36. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\mathrm{tg}^2x + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}x + 1}{\mathrm{tg}^2x - \sqrt{2}\,\mathrm{tg}x + 1} + C.$

37. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}\right) + C.$

38. $2x\sin x + (2 - x^2)\cos x + C.$

39. $\frac{2^x(\sin x + \ln 2 \cdot \cos x)}{1 + (\ln 2)^2} + C.$

40. $\cos 2x\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \sin 2x\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) + C.$

41. $\frac{3^x(\sin x\ln 3 - \cos x)}{1 + (\ln 3)^2} + C.$

42. $\frac{1}{10}e^x(\sin^3x - 3\cos 3x) + C.$

43. $\frac{1}{2}e^x\left[(x^2 - 1)\cos x + (x - 1)^2\sin x\right] + C.$

44. $\frac{1}{2}e^x\left[(x^2 - 1)\sin x - (x - 1)^2\cos x\right] + C.$

კიდევ ერთხელ შეამოწმეთ თქვენი მომზადება განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიაში. მოიგონეთ ინტეგრების ძირითადი ხერხები, რაციონალურ და ირაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრებისა. გაიმეორეთ ძირითადი ტიპის ინტეგრალები ტრანსცედენტულ ფუნქციათაგან.

დამოუკიდებლივ გამოსთქვით და დაამტკიცეთ ყველა თეორემა, რომლებიც კურსის შესწავლის დროს შეგხვდათ.

რედაქტორი დოც. ვ. ჭელიძე
ტექრედაქტორი გ. ნადარეიშვილი

***

გადაეცა წარმოებას 1948 წ. 11/II. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 1948 წ. 14/V. ქაღალდის ზომა 84×120. წიგნის ანაწყობის ზომა 6×9,5. ტირაჟი 1000. გამომც. შეკვ. № 14. სტამბის შეკვეთის № 267.
უე 02627

***

საავტორო ფორმათა რაოდენობა 5.
სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 7.
სასტამბო ნიშნ. რაოდ. ფორმაში 32.000.

***

საქ. სსრ მინისტრთა საბჭოსთან არსებულ პოლიგრაფიისა და გამომცემლობის სტამბა „კომუნისტი" ლენინის ქ. № 28.