ომარ ღლონტი

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა

(კურსი ეკონომისტებისათვის)

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი 2002

ნაშრომი წარმოადგენს სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის კურსს ეკონომისტებისათვის, მაგრამ გამოადგება მათემატიკოსებსაც, როგორც ამ საგნის გამარტივებული კურსი. წიგნი დაეხმარება ყველას, ვინც დაინტერესებულია ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდებით.

რედაქტორი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი გ. დოჭვირი

რეცენზენტი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი ზ. ხეჩინაშვილი

შინაარსი

ძირითადი აღნიშვნები

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ალბათური სივრცე;

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$ - სტოქასტური ბაზისი, ფილტრული ალბათური სივრცე;

$\mathbf{P}^*$ – მარტინგალური ალბათობა;

$\mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}$ – ორი ალბათური ზომის ეკვივალენტურობა;

$\mathbf{P}(A)$ - A-ხდომილობის ალბათობა;

$\mathbf{E}X$ – X-შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი;

$\mathbf{D}X$ – X-ის დისპერსია;

$\mathbf{P}(B|A)$ – B-ხდომილობის პირობითი ალბათობა A-დაყოფის მიმართ;

$\mathbf{E}(X|A)$ – X-ის პირობითი მათემატიკური ლოდინი A-დაყოფის მიმართ;

$I_A(\omega)$ – A-ხდომილობის ინდიკატორი;

$N(x)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია $\left(N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right)$;

$\mathrm{cov}(X, Y)$ – კოვარიაცია X-სა და Y-ს შორის;

$N(a, \sigma^2)$ – ნორმალური (გაუსის) განაწილების აღნიშვნა მათემატიკური ლოდინით a და დისპერსიით σ^2;

$\varnothing$ – შეუძლებელი ხდომილობა, ცარიელი სიმრავლე;

$\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$;

$a^+ = \max[a, 0]$;

B -- ობლიგაციის ფასი;

S – აქციის ფასი;

SF – თვითდაფინანსებადი სტრატეგიების კლასი;

π – სტრატეგია;

C_N - ოფციონის ფასი;

(B, S) – ფინანსური ბაზარი;

r – ურისკო ფასიანი ქაღალდის საპროცენტო განაკვეთი;

τ მარკოვის მომენტი.

წინასიტყვაობა

ნაშრომს საფუძვლად დაედო ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში 1996–2001 წლებში მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის, მაგისტრანტებისათვისა და 2001 წელს ეკონომიკის ფაკულტეტის ფინანსური პროფილის სპეციალური ჯგუფის სტუდენტებისათვის სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში წაკითხული ლექციათა ციკლი. წიგნი დაწერილია პროფ. ა. გაგნიძის წინადადებითა და ხელშეწყობით, საერთაშორისო ფონდ Tacis (პროგრამა “Tempus”) ძალისხმევით, რის გამოც ავტორი მათ მიმართ გულწრფელად გამოხატავს მადლიერების გრძნობას.

მკითხველს მასალის გაცნობისათვის მოეთხოვება ალბათობის თეორიის ძირითადი საუნივერსიტეტო კურსის ცოდნა. ავტორი შეეცადა საკითხთა საკმაოდ ფართო სპექტრი გაეშუქებინა. ნაშრომი ემსახურება სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ძირითადი საფუძვლებისა და მეთოდების შესწავლას. მათ, ვისაც უნდა ღრმად გაეცნოს ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდების თეორიულ და პრაქტიკულ გამოყენებას, შეუძლიათ მიმართონ ნაშრომებს [13], [16], [20], [25], [26].

ავტორი მადლობას უხდის კოლეგებს, ვისთანაც სამეცნიერო სემინარებზე მუშაობით გაიღრმავა ცოდნა ამ მიმართულებით, განსაკუთრებით, ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის ფინანსური მათემატიკის სემინარის მონაწილეებს და თსუ ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების ლაბორატორიის თანამშრომლებს.

შესავალი

ფინანსური ანალიზის ერთ-ერთი მთავარი ობიექტია **ფინანსური ბაზარი**, რომელიც ფულისა და ვალუტის, ძვირფასი ლითონების (ოქროს, ვერცხლის, პლატინისა და სხვა), ფასიანი ქაღალდებისა და ფინანსური ინსტრუმენტების **ბაზრების ერთობლიობაა.**

ფინანსური ინსტრუმენტების ბაზრებზე მიღებულია შემდეგი კლასიფიკაცია:

1) ძირითადი (პირველადი) ინსტრუმენტები: a) ურისკო – ობლიგაცია, ბონი, ასევე საბანკო ანგარიში; b) რისკიანი – აქცია.

2) წარმოებული (მეორადი) ინსტრუმენტებია: ოფციონები, ფიუჩერსები, ვარანტები, სვოპები, კეპები და სხვა.

მე-2 პუნქტში წარმოდგენილია ფასიანი ქაღალდები, რომელთა ფასები დამოკიდებულია სხვა საბაზისო სიდიდეებზე (აქციის ფასზე, ვალუტის ფასზე, ოქროს ფასზე და სხვა) და სწორედ ამიტომ მათ უწოდებენ წარმოებულებს. ასეთი ფასიანი ქაღალდებით ხდება გაცხოველებული ვაჭრობა სხვადასხვა ფინანსური ინსტიტუტის მიერ არა მარტო ფინანსურ ბაზრებზე (საფონდო ბირჟებზე), არამედ ბაზრების გარეთაც (over the counter).

წარმოებული ფასიანი ქაღალდები ცნობილია სხვა სახელწოდებითაც – contingent claims, რაც ინგლისურად ნიშნავს პირობით (შემთხვევით) პრეტენზიებს (პპ). გასაგებია, რომ ეს პირობითი პრეტენზია გააჩნია ამ ფასიანი ქაღალდის მფლობელს, ხოლო ემიტენტისათვის ანუ იმისათვის, ვინც გამოუშვა ფასიანი ქაღალდი, ესაა პირობითი (შემთხვევითი) ფინანსური ვალდებულება, რომელიც დამოკიდებულია, მაგალითად, შემდეგი ხასიათის პირობაზე – თუ აქციის ფასმა მიიღო გარკვეული მნიშვნელობა, უნდა შესრულდეს ერთი ფინანსური ვალდებულება და თუკი აქციის ფასმა მიიღო სხვა მნიშვნელობა, უნდა შესრულდეს განსხვავებული ფინანსური ვალდებულება. პპ-ს დასახასიათებლად გამოიყენება – გადახდის ფუნქცია - გასამრჯელო - $f_T(S)$, რომელიც წარმოადგენს T-ალსრულების მომენტამდე აქციის ფასების ფუნქციას (ფუნქციონალს). შესაძლებელია, რომ $f_T(S) = f_T(S_T)$ დამოკიდებული იყოს აქციის ფასის მნიშვნელობაზე ბოლო T-მომენტში, როდესაც ხდება პრეტენზიის შესრულება. მაგ-

ალითად, თუ

$$f_T(S_T) = |S_T - K|^+ = \max(0, S_T - K), \qquad (0.1)$$

მაშინ ამ პრეტენზიის (პპ) შინაარსი შემდეგია – თუ T-ალსრულების მომენტში აქციის ფასი S_T ფიქსირებულ K-ზე (შეთანხმების ფასზე) ნაკლები იქნება, მაშინ ფასიანი ქაღალდის მფლობელი არაფერს მიიღებს და მისი დანაკარგი იქნება ის ფასი, რომელიც გადაიხადა შეძენილ ფასიან ქაღალდში. ხოლო, თუ ფასი S_T გადააჭარბებს K-ს, მაშინ ის მიიღებს ემიტენტიდან $(S_T - K)$-თანხას და მისი მოგება იქნება – ამ თანხას გამოკლებული ფასიანი ქაღალდის ფასი. ასეთი ტიპის გასამრჯელო (0.1) წარმოადგენს, ეგრეთ წოდებულ, სტანდარტული ევროპული ყიდვის (call) ოფციონის კონტრაქტის გასამრჯელოს. დაწვრილებით ოფციონურ კონტრაქტებს შემდგომში გავაშუქებთ. აქ ჩვენ გვინდა მხოლოდ ხაზი გავუსვათ შემთხვევითი ხასიათის ფინანსურ ვალდებულებებს, რომლებიც საზოგადოდ გამოიხატებიან f_T-გასამრჯელოს საშუალებით, რომელიც შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს.

აქციათა ბაზარი აღმოცენდა ჯერ კიდევ 1531 წელს ანტვერპენში (ბელგია). დღეს მსოფლიოში ფუნქციონირებს 150 უმსხვილესი საფონდო ბირჟა (ფინანსური ბაზარი). ფინანსური ბაზრების მათემატიკური მოდელირება დაიწყო მხოლოდ 1900 წელს და პიონერი ამ მიმართულებით იყო ლ. ბაშელიე. პარიზის მათემატიკურ საზოგადოებას მან წარუდგინა თავისი სადოქტორო დისერტაცია "Théorie de la speculation", რომელშიც შეეცადა აღეწერა აქციის ფასები, როგორც შემთხვევითი პროცესი, რომლის ნაზრდები Δt-დროის ინტერვალში გარკვეული ალბათური აზრით $\sqrt{\Delta t}$-რიგისაა. დღევანდელი თვალთახედვით, ბაშელიეს მიერ განხილული პროცესი ბროუნის მოძრაობას წარმოადგენს. ა. კოლმოგოროვი წერდა თავის ფუნდამენტურ ნაშრომში "Об аналитических методах в теории вероятностей", რომ ბაშელიე იყო პირველი, ვინც დაიწყო სისტემური შესწავლა ისეთი სქემების, რომლებშიც გადასვლის ალბათობა (ე.ი. ალბათობა იმისა, რომ t-მომენტში აღმოჩნდება რეალიზებული A-ხდომილობა პირობაში, რომ საწყის t_0-მომენტში სისტემა გარკვეულ x-მდგომარეობაშია) უწყ-

ვეტად იცვლება დროის მსვლელობასთან ერთად. მხოლოდ ხუთი წლის შემდეგ (1905 წელს) იმავე ფაქტზე. ე.ი. $\sqrt{\Delta t}$-ს ეფექტზე ალნიშნავდა გენიალური ა. ეინშტეინი. ბროუნის მოძრაობის ზუსტი მათემატიკური თეორია ააგო 1923 წელს ნ. ვინერმა და დღეს მისი დამსახურების გამო ბროუნის მოძრაობას ვინერის პროცესის სახელით მოიხსენიებენ.

ბაშელიემ ბროუნის მოძრაობის საშუალებით აქციის ფასების ევოლუცია არა მარტო წარმოადგინა, არამედ მან გათვალა იმ დროის საფრანგეთში გავრცელებული ფასიანი ქალალდების, ოფციონების, ფასები და შეადარა ისინი რეალურ საბაზრო ფასებს. ა. შირიაევი ალნიშნავს, რომ "უდავოდ ლ. ბაშელიეს დისერტაცია იყო პირველი ნაშრომი სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში". მაგრამ თანამედროვეებმა ის ვერ გაიგეს და სათანადოდ ვერ შეაფასეს. მისი მასწავლებელიც (ა. პუანკარე) კი არ იყო ამ თემით ალფრთოვანებული და თავისი კარიერა ბაშელიემ ბესანსონში, საფრანგეთის დედაქალაქიდან დაშორებით, დაასრულა. მისი ნაშრომი იგნორირებული იქნა და კარგა ხნით მიივიწყეს. მხოლოდ 1965 წელს ლ. სევიჯმა ბაშელიეს ნაშრომი ხელმორედ ალმოაჩინა და მისი ინიციატივით პ. სამუელსონმა ეკონომისტებისა და მათემატიკოსთა ფართო წრის ყურადღება მიაქცევინა ამ ნაშრომისადმი და აგრეთვე ბაშელიესეული ბროუნის მოძრაობის მოდელი შეცვალა უფრო რეალური გეომეტრიული (ასევე უწოდებენ ეკონომიკურს) ბროუნის მოძრაობის მოდელით, რომელიც აქციის ფასების დადებითობას უზრუნველყოფს.

სტოქასტური ანალიზის განვითარებამ და, განსაკუთრებით, მარტინგალური მეთოდების დახვეწამ, წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქალალდებით ვაჭრობის მკვეთრმა ზრდამ და მათთვის სპეციალიზირებული ბირჟების ჩამოყალიბებამ უკვე 1973 წელს ოფციონის გამოყენების პრაქტიკაში და მათი ფასდადების თეორიაში რევოლუცია მოახდინა. ეს პროცესი დაიწყო ფ. ბლეკის, მ. შოულსის და რ. მერტონის ფუნდამენტური ნაშრომებით. ამ მეცნიერთა ლვაწლი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის განვითარებაში შეუფასებელია. შემდეგ კი ამ მიმართულებით შეიტანეს მნიშვნელოვანი წვლილი ჟ. კოქსმა, რ. როსმა,

მ. რუბინშტეინმა, ჯ. ჰარისონმა, ს. პლისკამ, დ. კრეპსმა, ჯ. ჰალმა, ჰ. ფიოლმერმა, მ. შვეიცერმა, დ. დაფიმ, ლ. ელ კარუიმ, ე. პარდუმ, ფ. დელბაენმა, ვ. შახერმაიერმა, ი. კარატზაცმა, ს. შრევმა, მ. მიუზელამ, ა. შირიაევმა, ი. კაბანოვმა, დ. კრამკოვმა, ა. მელნიკოვმა და სხვა.

საკმაოდ აქტიურად მიმდინარეობს კვლევა სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის მიმართულებით ჩვენშიც – ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტსა და ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში.

მოკლედ განვიხილოთ წიგნის სტრუქტურა. პირველ თავში მოცემულია მოსამზადებელი მასალა, რაც დაეხმარება მკითხველს გამოყენებული მათემატიკური აპარატის აღქმაში. ამ თავში ამოსავალია ალბათობის თეორიის ძირითადი კურსიდან აღებული ალბათური სივრცის "დაყოფის" ცნება. მოყვანილია დაყოფის მიმართ პირობითი მათემატიკური ლოდინის განმარტება და განხილულია მარტინგალები დაყოფათა ნაკადის მიმართ, რასაც, ჩვენი აზრით, მკითხველი უფრო კარგად აითვისებს, ვიდრე მარტინგალებს σ-ალგებრათა ნაკადის მიმართ. სახელმძღვანელოს დანიშნულებიდან გამომდინარე, ავტორმა ასეთი გამარტივება მიზანშეწონილად მიიჩნია.

მეორე თავი აცნობს მკითხველს ძირითად ფასიან ქაღალდებს – აქციებსა და ობლიგაციებს და წარმოებულ (მეორად) ფასიან ქაღალდებს – ფორვარდებს, ფიუჩერსებსა და ოფციონებს.

მესამე თავი ეძღვნება ფინანსურ ბაზარს განუსაზღვრელობის პირობებში. განხილულია მარკოვიცის პორტფელის თეორია. გაშუქებულია, თუ რას წარმოადგენს დივერსიფიკაცია. მოცემულია ფინანსური აქტივების ფასდადების თეორია და მისი განზოგადოება – ფინანსური აქტივების გათვლების არბიტრაჟული თეორია. შემდეგ კი შეისწავლება მრავალნაბიჯიანი ამოცანები პირობითი არაერთგვაროვნების ავტორეგრესიულ და მათი განზოგადებული მოდელების ფარგლებში.

მეოთხე თავში, მარტინგალურ მეთოდებზე დაყრდნობით, განხილულია (B, S)-ფინანსური ბაზრების ბინომიალური მოდელები, ოფციონების ფასდადება და ჰეჯირება. მოყვანილია კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის ცნობილი ფორმულები. დაწვრილებით განხილულია

როგორც ევროპული ტიპის, ასევე ამერიკული ტიპის ოფციონები.

მეხუთე თავში დისკრეტული დროის შემთხვევაში ზოგადი ფინანსური ბაზრისათვის მოყვანილია ჰარისონისა და პლისკას მეტად საინტერესო შედეგები – 1) მარტინგალური ალბათობის (ზომის) არსებობა იწვევს არბიტრაჟის გამორიცხვას, ე.ი. საწყისში არაფრიდან მომავალში ფულის გაკეთების შეუძლებლობას და 2) ერთადერთი მარტინგალური ალბათობის (ზომის) არსებობა იწვევს ბაზრის სისრულეს, ე.ი. ამ ბაზარზე ნებისმიერი ფინანსური ვალდებულების შესრულების შესაძლებლობას. ამ თავში განხილულია არასრული ფინანსური ბაზრებიც და მათში ფასგათვლებისა და ჰეჯირების მეთოდები.

მეექვსე თავი ეძღვნება ბლექ-შოულსის მოდელებს. ეს უკვე მოდელებია უწყვეტი დროით და აქციის ფასი აღიწერება გეომეტრიული (ეკონომიკური) ბროუნის მოძრაობით. ამ თავში გამოყვანილია ბლექ-შოულსის დიფერენციალური განტოლება და მოყვანილია ბლექ-შოულსის ევროპული ოფციონების ფასდადებისა და ჰეჯირების პოპულარული ფორმულები. მოკლედაა განხილული ამერიკული ტიპის ოფციონები. განხილულია ასევე ოფციონის ფასგათვლების მიახლოებითი მეთოდები – მონტე-კარლოს მეთოდი და ბინომიალური ხის აგების მეთოდი.

მეშვიდე თავში გაშუქებულია არასტანდარტულ, ე.ი. ეგზოტიკურ ოფციონთა გავრცელებული ნაირსახეობა და ფასგათვლები ბლოკური, უკანმხედი, რუსული, აზიური და სხვა ოფციონებისათვის.

ნაშრომი არის ილუსტრირებული მაგალითებით, დართულია ამოცანებიც.

თავი I

სტოქასტური ბაზისი და მარტინგალები

§ 1. სტოქასტური ბაზისი

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის მოდელებს ყოველთვის განიხილავდნენ საბაზისო ალბათურ სივრცეზე $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, რომელიც წარმოადგენს სამეულს ა. კოლმოგოროვის აქსიომატიკიდან. აქ Ω – ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა, რომელიც წარმოადგენს ნებისმიერი ბუნების სიმრავლეს. ნაშრომის პირველ ნაწილში ვიხილავთ Ω-ს, რომელსაც გააჩნია ელემენტების სასრული რაოდენობა. ამ პირობებში $\mathcal{F}$ არის Ω-ს ქვესიმრავლეების სისტემა, ეგრეთ წოდებული, ალგებრა[1] და მის ელემენტებს $A \in \mathcal{F}$ ხდომილობებს უწოდებენ. სამეულის მესამე ელემენტი $\mathbf{P}$-ალბათობა (ალბათური ზომა) განმარტებული $\mathcal{F}$-ზე, ე.ი. ხდომილობებზე და თითოეულ $A \in \mathcal{F}$ მიაწერს არაუარყოფით რიცხვს $\mathbf{P}(A) \geq 0$ ისეთს, რომ

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
2. თუ $A, B \in \mathcal{F}$ და $AB = \varnothing$, მაშინ $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

ალგებრათა ნაკადების განხილვის საჭიროება, რომელიც სისტემების დინამიკასთანაა დაკავშირებული, იწვევს სამეულის მაგივრად შემდეგი ოთხეულის განხილვას $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$, სადაც $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ წარმოადგენს Ω-ს ქვესიმრავლეების ალგებრათა ნაკადს, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ (არაკლებად მიმდევრობას). ამ ნაკადს ფილტრაციას უწოდებენ, თვით ოთხეულს კი – ფილტრაციით აღჭურვილ ალბათურ სივრცეს. ყოველი $\mathcal{F}_n$ შეიძლება გავიგოთ, როგორც ხდომილობათა ერთობლიობა, რომელსაც n-მომენტამდე აკვირდებოდნენ. სხვანაირად $\mathcal{F}_n$ – ესაა ჩვენთვის საინტერესო მოვლენაზე n-მომენტისათვის მოპოვებული ინფორმაცია. უფრო მარტივი სტრუქტურების ინფორმაციულ ნაკადებს დაწვრილებით განვიხილავთ შემდეგ პარაგრაფში.

---

[1] Ω-ს ქვესიმრავლეების სისტემა ქმნის ალგებრას:
1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. თუ $A, B \in \mathcal{F}$, მაშინ $AB \in \mathcal{F}$.
3. თუ $A \in \mathcal{F}$, მაშინ $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.

ვინაიდან ალბათობის თეორიიდან ყველაზე მნიშვნელოვანი ობიექ-ტია შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აუცილებელია სტოქასტური ფი-ნანსური მოდელების განსახილველად, ჩვენ აქ მოვიყვანთ მის განმარ-ტებას. ალბათურ სივრცეზე $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ შემთხვევითი სიდიდე – ესაა ნებისმიერი რიცხვითმნიშვნელობიანი ფუნქცია Ω-ზე, $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ისეთი, რომ $\{X \leq x\}$, $x \in R$, ხდომილობაა. ჩვენი დაშვების (Ω სას-რულია) ფარგლებში შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ მნიშვნელობათა სასრული რაოდენობა.

დავუშვათ, რომ $\mathcal{G}$ წარმოადგენს Ω-ს ქვესიმრავლეების ისეთ ალ-გებრას, რომ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. ვიტყვით, რომ შემთხვევითი სიდიდე $X = (X(\omega),\ \omega \in \Omega)$ ზომადია $\mathcal{G}$-ს იმართ, თუ ნებისმიერი ნამდვილი x-ისათვის $\{\omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{G}$.[2] ცხადია, რომ ნებისმიერი შემთხვე-ვითი სიდიდე $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-ალბათურ სივრცეზე ზომადია $\mathcal{F}$-ის მიმართ.

§ 2. ხდომილობათა სისტემები

ალბათობის თეორიაში ხდომილობათა ერთობლიობებს, გაერთიანებ-ულებს გარკვეული პრინციპით, დიდი როლი ენიჭება. განვიხილოთ ტრადიციული კოლმოგოროვისეული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ სასრული ალბათური სივრცის დროს, სადაც $\mathcal{F}$ წარმოადგენს ხდომილობათა სპეციალურ სისტემას, რომელიც მოიცავს განხილული ალბათური მოდელის ყველა ხდომილობას – Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეს, თვით Ω-საც, შეუძლებელ ხდომილობას $\varnothing$ და ნებისმიერი ხდომილობების თვლად გაერთიანებებსა (ჯამებს) და თანაკვეთებს.

ვიტყვით, რომ ხდომილობათა სისტემა $(A_i \in \Omega,\ i = \overline{1,m})$

$$A = \{A_1, \ldots, A_m\}$$

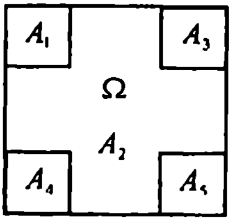
ქმნის Ω-ს **დაყოფას** და $A_1, \ldots, A_m$ – მისი ატომებია, თუ წყვილ-წყვილად $A_1, \ldots, A_m$ უთავსებადებია, $\mathbf{P}(A_i) > 0$, $i = \overline{1,m}$, და

$$A_1 + \cdots + A_m = \Omega.$$

მაგალითი 1. განვიხილოთ Ω-ს როლში კვადრატი ერთეულოვანი გვერდებით (იხ. ნახ. 1).

---

[2] ე.ი. ხდომილობა, რომ X მიიღებს x-მნიშვნელობას.



ნახ. 1

განვიხილოთ ხდომილობები A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. თუ $\mathbf{P}(A_i) > 0$, $i = \overline{a,5}$, ცხადია, რომ ისინი წარმოადგენენ Ω-ს დაყოფის ატომებს და Ω-ს დაყოფათა სისტემა

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_5\}.$$

თუ $B_1 = A_1 + A_3$, $B_2 = A_4 + A_5$ და $B_3 = A_2$, მაშინ გასაგებია, რომ $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ ასევე ქმნის Ω-ს სხვა დაყოფას. მკითხველს თვითონ შეუძლია სხვა დაყოფების მოძებნა.

ამოცანა. მაგალით 1-ში მოცემულების გარდა მოიყვანეთ ნახ. 1-ზე წარმოდგენილი Ω-ს სხვა დაყოფები.

მაგალითი 2. დავუშვათ, რომ $\Omega = \{A, \overline{A}\}$, სადაც A არის ხდომილობა “მოვა წვიმა”, $\overline{A}$ – “არ მოვა წვიმა”. ამ შემთხვევაში შეიძლება Ω-ს შემდეგი დაყოფები განვიხილოთ:

1) $\mathcal{A}_1 = \{\Omega\}$ – ტრივიალური ერთი ატომით $A = \Omega$;

2) $\mathcal{A}_2 = \{A, \overline{A}\}$ ორი ატომით A და $\overline{A}$.

მაგალითი 3. დავუშვათ $\Omega = \{A, B, C\}$, სადაც A-ხდომილობა რაიმე კომპანიის აქციის ფასის აწევას შეესატყვისება, B-ხდომილობა – ფასის უცვლელად დარჩენას, ხოლო C-ხდომილობა – ფასის დაწევას. დავუშვათ, რომ ყველა ეს ხდომილობა მოსალოდნელია, ე.ი. $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$ და $\mathbf{P}(C) > 0$. ამ შემთხვევაში ხუთი სხვადასხვა

დაყოფაა:

$$\mathcal{A}_1 = \{\Omega\} \text{ ერთი ატომით } \Omega;$$
$$\mathcal{A}_2 = \{A+B, C\} \text{ ორი ატომით } A+B \text{ და } C;$$
$$\mathcal{A}_3 = \{A+C, B\} \text{ ორი ატომით } A+C \text{ და } B;$$
$$\mathcal{A}_4 = \{A, B+C\} \text{ ორი ატომით } A \text{ და } B+C;$$
$$\mathcal{A}_5 = \{A, B, C\} \text{ სამი ატომით } A, \ B \text{ და } C.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-ზე განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის რაიმე შემთხვევითი სიდიდე $\xi = \xi(\omega)$. დავუშვათ, რომ ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

$$\xi \sim \begin{cases} x_1, \dots, x_n \\ p_1, \dots, p_n \end{cases}, \qquad p_i > 0, \quad \sum p_i = 1.$$

განვიხილოთ ხდომილობები $A_1 = \{\xi = x\}$, $A_2 = \{\xi = x_2\}, \dots, A_n = \{\xi = x_n\}$. სისტემა $\mathcal{A}^\xi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ქმნის Ω-ს დაყოფას, ვინაიდან ნებისმიერი წყვილი ხდომილობა $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$-დან უთავსებადია,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

და $\mathbf{P}(A_i) = p_i > 0$.

$\mathcal{A}^\xi$ დაყოფას უწოდებენ Ω-ს დაყოფას, რომელიც წარმოქმნილია ξ-შემთხვევითი სიდიდის მიერ.

თუ $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^l)$ – შემთხვევითი ვექტორია კომპონენტებით ξ^i, $i = \overline{1, l}$, მაშინ $\mathcal{A}^\xi$ – ესაა დაყოფა, რომლის ატომებიცაა

$$A_{y_1, y_2, \dots, y_l} = \{\xi^1 = y_1, \ \xi^2 = y_2, \dots, \xi^l = y_l\}.$$

მას უწოდებენ Ω-ს დაყოფას, წარმოქმნილს ξ-შემთხვევითი ვექტორით ან $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^l$-შემთხვევითი სიდიდეებით.

მაგალითად, თუ $l = 2$ და $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ და კომპონენტების განაწილების კანონებია

$$\xi^1 \sim \begin{cases} x_1^1, x_2^1 \\ p_1^1, p_2^1 \end{cases}, \qquad \xi^2 \sim \begin{cases} x_1^2, x_2^2 \\ p_1^2, p_2^2 \end{cases},$$

მაშინ Ω-ს დაყოფას, წარმოქმნილს $\xi = (\xi^1, \xi^2)$-ით შემდეგი სახე აქვს

$$\mathcal{A}^\xi = \{ \{\xi^1 = x_1^1, \xi^2 = x_1^2\}, \{\xi^1 = x_2^1, \xi^2 = x_1^2\}, \{\xi^1 = x_1^1, \xi^2 = x_2^2\}, \{\xi^1 = x_2^1, \xi^2 = x_2^2\} \}.$$

§ 3. პირობითი ალბათობა და პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის მიმართ

განვიხილოთ სასრული ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ და Ω-ს რაიმე დაყოფა

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

(ე.ი. $A_i \in \mathcal{F}$, $i = \overline{1,m}$, $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$, $A_1 + A_2 + \cdots + A_m = \Omega$, $\mathbf{P}(A_i) > 0$, $i = \overline{1,m}$).

გავიხსენოთ, თუ როგორ განიმარტება A-ხდომილობის პირობითი ალბათობა B-ხდომილობის მიმართ. ესაა რიცხვი, რომელიც დაითვლება გამოსახულებიდან

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)},$$

თუ $\mathbf{P}(B) > 0$.

განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე $\pi = \pi(\omega)$ შემდეგი განაწილების კანონით

$$\pi \sim \begin{cases} \mathbf{P}(A|A_1), & \mathbf{P}(A|A_2), & \ldots, & \mathbf{P}(A|A_m) \\ \mathbf{P}(A_1), & \mathbf{P}(A_2), & \ldots, & \mathbf{P}(A_m) \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ, π-შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია პირობითი ალბათობები $\mathbf{P}(A|A_i)$, $i=\overline{1,m}$. ვინაიდან $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $\mathcal{A}$-დაყოფის ატომებია და $\mathbf{P}(A_i) > 0$, $i = \overline{1,m}$, ეს პირობითი ალბათობები გამოითვლება ფორმულით

$$\mathbf{P}(A|A_i) = \frac{\mathbf{P}(AA_i)}{\mathbf{P}(A_i)}. \tag{1}$$

განხილულ π-შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ **A-ხდომილობის პირობით ალბათობას $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ** და აღნიშნავენ სიმ-ბოლოთი $\mathbf{P}(A|\mathcal{A})$ ან $\mathbf{P}(A|\mathcal{A})(\omega)$, ე.ი. A-ხდომილობის პირობითი ალბათობა $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ ესაა შემთხვევითი სიდიდე და არა რიცხვი შემდეგი განაწილების კანონით

$$\mathbf{P}(A|\mathcal{A}) \sim \begin{cases} \mathbf{P}(A|A_1), & \mathbf{P}(A|A_2), & \ldots, & \mathbf{P}(A|A_m) \\ \mathbf{P}(A_1), & \mathbf{P}(A_2), & \ldots, & \mathbf{P}(A_m) \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ პირობითი ალბათობის $\mathbf{P}(A|\mathcal{A})$ მათემატიკური ლოდინი უდრის

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(A|\mathcal{A})) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(A|A_k)\mathbf{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(AA_k) = \mathbf{P}(A),$$

ე.ი. ადგილი აქვს გამოსახულებას

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(A|\mathcal{A})) = \mathbf{P}(A), \tag{2}$$

რომელიც შეიძლება წავიკითხოთ ასე – დაყოფის მიმართ A-ხდო-მილობის პირობითი ალბათობის მათემატიკური ლოდინი უდრის A-ხდომილობის ალბათობას.

თუ დაყოფა წარმოქმნილია ξ-შემთხვევითი სიდიდით:

$$\mathcal{A}^{\xi} = \{\, \{\xi = x_1\},\ \{\xi = x_2\}, \ldots, \{\xi = x_n\} \,\}$$

მაშინ $\mathbf{P}(A|\mathcal{A}^{\xi})$-სთვის გამოიყენება აღნიშვნა $\mathbf{P}(A|\xi)$ ან $\mathbf{P}(A|\xi)(\omega)$. ანალოგიურად $\mathbf{P}(A|\mathcal{A}^{(\xi_1\xi_2,\ldots,\xi_l)})$ აღინიშნება $\mathbf{P}(A|\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l)$-ით და უწოდებენ A-ხდომილობის პირობით ალბათობას $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$-შემთხვევითი სიდიდეების მიმართ.

დავუშვათ, რომ მოცემულია დისკრეტული ტიპის η შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონით

$$\eta \sim \begin{cases} y_1, y_2, \ldots, y_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{cases}$$

და $B_i = \{\eta = y_i\}$, $i = \overline{1, n}$. გამოვიყენოთ პირობითი ალბათობა $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ და განვმარტოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ $\mathbf{E}(\eta|\mathcal{A})$** შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{E}(\eta|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A}). \tag{3}$$

ვინაიდან $\mathbf{P}(B_i|\mathcal{A}) = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A})(\omega)$, $i = \overline{1, n}$, შემთხვევითი სიდიდეებია, $\mathbf{E}(\eta|\mathcal{A})$-ც შემთხვევითი სიდიდეა (აღნიშნავენ ასევე $\mathbf{E}(\eta|\mathcal{A})(\omega)$) და (3)-დან (2)-ის გამოყენებით

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\eta(\mathcal{A})) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{E}(\mathbf{P}(B_i|\mathcal{A})) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{P}(B_i) = \mathbf{E}\eta,$$

ე.ი.

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\eta(\mathcal{A})) = \mathbf{E}\eta, \tag{4}$$

რომელიც გვეუბნება, რომ $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ η-შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინის საშუალო უდრის η-შემთხვევითი სიდიდის საშუალოს. ფორმულა (4) წარმოადგენს ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ფორმულას ალბათობის თეორიაში.

მოვიყვანოთ η-შემთხვევითი სიდიდის $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1) $\mathbf{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{A}) = a\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}) + b\mathbf{E}(\eta|\mathcal{A})$, a და b მუდმივებია.

2) $\mathbf{E}(\xi|\{\Omega\}) = \mathbf{E}\xi$.

3) $\mathbf{E}(C|\mathcal{A}) = C$, C მუდმივია.

4) თუ $\xi = I_A(\omega)$, მაშინ $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathbf{P}(A|\mathcal{A})$.

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს დაყოფა $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ და $\eta = \eta(\omega)$ რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა. მაშინ ვიტყვით, რომ η ზომადია ამ $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ (ან $\mathcal{A}$-ზომადია), თუ $\mathcal{A}^\eta \subseteq \mathcal{A}$. ცხადია, რომ შემთხვევითი სიდიდე η არის $\mathcal{A}^\eta$-ზომადი. თუ ავიღებთ ერთ ატომიან დაყოფას $\mathcal{A} = \{\Omega\}$, მაშინ η-შემთხვევითი სიდიდე მხოლოდ მაშინაა ზომადი ამ $\mathcal{A}$-ს მიმართ, თუ იგი მუდმივია, $\eta \equiv C$.

გავაგრძელოთ თვისებების ჩამოთვლა:

5) თუ η არის $\mathcal{A}$-ზომადი, მაშინ

$$\mathbf{E}(\xi\eta|\mathcal{A}) = \eta\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}),$$

და, კერძოდ,

$$\mathbf{E}(\eta|\mathcal{A}) = \eta.$$

6) $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}\xi$, თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

7) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\eta_1, \eta_2)|\eta_1) = \mathbf{E}(\xi|\eta_1)$.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ ვიპოვოთ $\mathbf{E}(\xi + \eta|\eta)$ და $\mathbf{E}(\xi\eta|\eta)$.

მოყვანილი თვისებების გამოყენებით,

$$\mathbf{E}(\xi + \eta|\eta) = \mathbf{E}(\xi|\eta) + \mathbf{E}(\eta|\eta) = \mathbf{E}\xi + \eta,$$
$$\mathbf{E}(\xi\eta|\eta) = \eta\mathbf{E}(\xi|\eta) = \eta\mathbf{E}\xi.$$

მაგალითი 2. დავუშვათ, რომ ξ და η დამოუკიდებლებია და ერთნაირად განაწილებულები. მაშინ

$$\mathbf{E}(\xi|\xi + \eta) = \mathbf{E}(\eta|\xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}\,. \tag{5}$$

ვაჩვენოთ, რომ (5)-ს მართლაც აქვს ადგილი. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ ξ და η ღებულობენ მნიშვნელობებს $1, 2, \ldots, n$ და გამოვთვალოთ ($1 \le k \le m$, $2 < l \le 2m$)

$$\mathbf{P}(\xi = k|\xi + \eta = l) = \frac{\mathbf{P}(\xi = k, \xi + \eta = l)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} = \frac{\mathbf{P}(\xi = k, \eta = l - k)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(\xi = k)\mathbf{P}(\eta = l - k)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} = \frac{\mathbf{P}(\eta = k)\mathbf{P}(\xi = l - k)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} =$$
$$= \mathbf{P}(\eta = k|\xi + \eta = l).$$

ამით მტკიცდება (5)-ში პირველი ტოლობა:

$$\mathbf{E}(\xi|\xi + \eta) = \mathbf{E}(\eta|\xi + \eta),$$

რის გამოყენებითაც

$$2\mathbf{E}(\xi|\xi+\eta)=\mathbf{E}(\xi|\xi+\eta)+\mathbf{E}(\eta|\xi+\eta)=\mathbf{E}(\xi+\eta|\xi+\eta)=\xi+\eta$$

და

$$\mathbf{E}(\xi|\xi+\eta)=\frac{\xi+\eta}{2}$$

და (5) მთლიანად დამტკიცებულია.

ამოცანა. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდეები ξ, η და ζ. დავუშვათ, რომ ξ და η დამოუკიდებლებია, $\mathbf{E}\eta=0$ და $\mathbf{E}(\zeta|\xi)=1+\xi$. გამოთვალეთ $\mathbf{E}(a\xi+b\eta+c\zeta|\xi)$, სადაც a,b,c რაიმე მუდმივებია.

თუ $\psi(\xi)$ – ξ-ის რაიმე ფუნქციაა, სადაც $\xi=\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების კანონია $\xi\sim\begin{cases}x_1,x_2,\ldots,x_n\\ p_2,p_2,\ldots,p_n\end{cases}$, მაშინ $\psi(\xi)$ განაწილების კანონი იქნება

$$\psi\sim\begin{cases}\psi(x_1), & \psi(x_2), & \ldots, & \psi(x_n)\\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n\end{cases}$$

და დაყოფა $\mathcal{A}^{\psi(\xi)}\subseteq\mathcal{A}^{\xi}$.

მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, რომ პირობითი მათემატიკური ლოდინები $\mathcal{A}^{\eta}$ და $\mathcal{A}^{\eta+\xi}$-დაყოფების მიმართ წარმოადგენენ წრფივ ფუნქციებს შესაბამისად η-სა და $\eta+\xi$-ს მიმართ და ამიტომ ეს პირობითი მათემატიკური ლოდინები არიან $\mathcal{A}^{\eta}$ და $\mathcal{A}^{\eta+\xi}$-ზომადები. და საერთოდ პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{A})(\omega)$ წარმოადგენს არა მარტო შემთხვევით სიდიდეს, არამედ იმ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ზომადია $\mathcal{A}$-დაყოფის მიმართ.

§ 4. მარტინგალები

დავუშვათ $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ – სასრული ალბათური სივრცე და $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{A}_n$ Ω-ს დაყოფათა მიმდევრობაა. იგი წარმოადგენს ხდომილობათა არაკლებად ნაკადს. ვინაიდან $\mathcal{A}_1$-ხდომილობათა გარკვეული სისტემაა, $\mathcal{A}_2$ – ასევე ხდომილობათა სისტემაა, მაგრამ უფრო მდიდარი. იგი შეიცავს მთლიანად $\mathcal{A}_1$-სისტემას და კიდევ

სხვა ხდომილობებს და ა.შ. ასეთი ნაკადი წარმოადგენს რეალური სიტუაციის მოდელს, როდესაც დროის მიხედვით ინფორმაციული ნაკადი იზრდება: პირველ მომენტში გვაქვს ინფორმაცია $\mathcal{A}_1$, მეორე მომენტში – $\mathcal{A}_2$, რომელიც, რასაკვირველია, მთელ ძველ ინფორმაციასაც შეიცავს და ა.შ.

განმარტება 1. შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1,\dots,\xi_n$ მიმდევრობას უწოდებენ $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n$-დაყოფათა ნაკადის მიმართ **მარტინგალს**, თუ

1) ξ_k არის $\mathcal{A}_k$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდე (ე.ი. $\mathcal{A}_k^\xi \subseteq \mathcal{A}_k$) და
2) $\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{A}_k) = \xi_k$, $1 \le k \le n-1$.

როდესაც $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}^{\xi_1,\dots,\xi_k}$ დაყოფაა, რომელსაც ქმნიან შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_k$, მაშინ უბრალოდ ამბობენ, რომ მიმდევრობა $\xi = (\xi_k)$, $k = 1,2,\dots,n$, ქმნის მარტინგალს. საზოგადოდ კი საჭიროა მითითება დაყოფათა ნაკადისა და აღნიშვნა $\xi = (\xi_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 1,2,\dots,n$, მარტინგალისთვის $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n$-ნაკადის მიმართ.

მოვიყვანოთ მარტინგალების უმარტივესი მაგალითები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მიმდევრობა $S_1, S_2,\dots,S_n$, სადაც $S_k = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k$ და $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}^{\eta_1,\dots,\eta_k}$, ხოლო $\eta_1,\dots,\eta_k$ – დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებია:

$$\mathbf{P}(\eta_k = 1) = \mathbf{P}(\eta_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

გავარკვიოთ დაყოფის სტრუქტურა:

$$\mathcal{A}_1 = \{A^+, A^-\},$$

სადაც ატომებია $A^+ = \{\eta = 1\}$ და $A^- = \{\eta = -1\}$;

$$\mathcal{A}_2 = \{A^{++}, A^{+-}, A^{-+}, A^{--}\},$$

სადაც ატომებია $A^{++} = \{\eta_1 = 1, \eta_2 = 1\}$, ე.ი. ერთდროულად როგორც η_1 უდრის 1, ასევე η_2 უდრის ერთს; $A^{+-} = \{\eta_1 = 1, \eta_2 = -1\}$, $A^{-+} = \{\eta_1 = -1, \eta_2 = 1\}$, $A^{--} = \{\eta_1 = -1, \eta_2 = -1\}$;

შემდეგ

$$\mathcal{A}_3 = \{A^{+++}, A^{++-}, A^{+-+}, A^{+--}, A^{-++}, A^{--+}, A^{-+-}, A^{---}\}$$

და ატომები ტოლია

$$\begin{aligned}
A^{+++} &= \{\eta_1 = 1,\ \eta_2 = 1,\ \eta_3 = 1\},\\
A^{++-} &= \{\eta_1 = 1,\ \eta_2 = 1,\ \eta_3 = -1\},\\
A^{+-+} &= \{\eta_1 = 1,\ \eta_2 = -1,\ \eta_3 = 1\},\\
A^{+--} &= \{\eta_1 = 1,\ \eta_2 = -1,\ \eta_3 = -1\},\\
A^{-++} &= \{\eta_1 = -1,\ \eta_2 = 1,\ \eta_3 = 1\},\\
A^{+--} &= \{\eta_1 = 1,\ \eta_2 = -1,\ \eta_3 = -1\},\\
A^{-+-} &= \{\eta_1 = -1,\ \eta_2 = 1,\ \eta_3 = -1\},\\
A^{---} &= \{\eta_1 = -1,\ \eta_2 = -1,\ \eta_3 = -1\},
\end{aligned}$$

და ასე შემდეგ $\mathcal{A}_4, \dots, \mathcal{A}_n$.

გასაგებია, რომ $\mathcal{A}^{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_k} = \mathcal{A}^{S_1,S_2,\dots,S_k}$. ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობა $S = (S_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, ქმნის მარტინგალს. მართლაც S_k არის $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}^{S_1,\dots,S_k}$-ზომადი და

$$\mathbf{E}(S_{k+1}|\mathcal{A}_k) = \mathbf{E}(S_{k+1} - S_k + S_k|\mathcal{A}_k) = \mathbf{E}(S_k + \eta_{k+1}|\mathcal{A}_k),$$

სადაც η_{k+1} დამოუკიდებელია $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}^{S_1,\dots,S_k}$-ზე. ამიტომ და კიდევ S_k-ს $\mathcal{A}_k$-ს მიმართ ზომადობის გამო

$$\mathbf{E}(S_{k+1}|\mathcal{A}_k) = \mathbf{E}(S_k|\mathcal{A}_k) + \mathbf{E}(\eta_{k+1}|\mathcal{A}_k) = S_k + \mathbf{E}\eta_k = S_k,$$

ვინაიდან

$$\mathbf{E}\eta_k = 0.$$

რაც ასრულებს მარტინგალობის 2) თვისების დამტკიცებას და მიმდევრობა $S = (S_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, მართლა ქმნის მარტინგალს.

თუ $S_0 = 0$ და ავიღებთ $\mathcal{A}_0 = \{\Omega\}$-ტრივიალურ დაყოფას, მაშინ მიმდევრობა $(S_k, \mathcal{A}_k)_{0 \le k \le n}$ ასევე მარტინგალია.

მაგალითი 2. წინა მაგალითისაგან განსხვავებით, დავუშვათ ყველა $\mathbf{P}(\eta_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\eta_i = -1) = q$, $p \ne q$ და $\xi_k = S_k - k(p - q)$.

მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ქმნის მარტინგალს.

ამოცანა: აჩვენეთ, რომ ასევე მარტინგალია

$$\xi_k = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_k}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

მაგალითი 3. დავუშვათ, რომ η რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა და $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n$ რაიმე ნაკადია, მაშინ მიმდევრობა

$$\xi = (\xi_k, \mathcal{A}_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $\xi_k = \mathbf{E}(\eta|\mathcal{A}_k)$, ქმნის მარტინგალს.

თუ მარტინგალის განმარტებაში (იხ. 2)) ორივე მხრიდან ავიღებთ მათემატიკურ ლოდინს, მივიღებთ

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_k|\mathcal{A}_k) = \mathbf{E}\xi_k$$

და დაყოფის მიმართ პირობითი მათემატიკური ლოდინების თვისება 6)-ის ძალით $(\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{A}_k)) = \mathbf{E}\xi_{k+1})$

$$\mathbf{E}\xi_{k+1} = \mathbf{E}\xi_k, \qquad k = 1, 2, \dots, n-1, \tag{6}$$

ე.ი. ξ_k-მიმდევრობის მათემატიკური ლოდინი რჩება მუდმივი და დროის განმავლობაში არ იცვლება. ეს მარტინგალის მეტად მნიშვნელოვანი თვისებაა.

დავუშვათ, რომ S_k-ს მივცეთ მოთამაშის ჯამური ერთეულოვანი მოგების ინტერპრეტაცია (ე.ი. თუ $\eta_k = 1$, მაშინ იგი იგებს $+1$ და თუ $\eta_k = -1$, მაშინ კი აგებს -1 თანხას). შეიძლება S_k-მ მიიღოს როგორც ნულოვანი მნიშვნელობა, უარყოფითი: $-k$, დადებითი: k და ნებისმიერი $-k$-დან $+k$-მდე. თუ ჩვენ გვაინტერესებს მოთამაშის საშუალო მოგება, მაშინ (1)-ის ძალით ეს საშუალო მოგება დროში არ იცვლება და მარტინგალ-მიმდერობა ასოცირდება სამართლიან თამაშთან. თუკი $\mathbf{E}\xi_{k+1} > \mathbf{E}\xi_k$, მაშინ ასეთ თამაშს მოთამაშისათვის ხელსაყრელს უწოდებენ და მას შეესატყვისება სუბმარტინგალის განმარტება, ხოლო თუ $\mathbf{E}\xi_{k+1} < \mathbf{E}\xi_k$, მას შეესატყვისება სუპერმარტინგალის განმარტება (თვისება 2) შეიცვლება $\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{A}_k) > \xi_k$ სუბის,

ხოლო $\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{A}_k) < \xi_k$ – სუპერის შემთხვევაში, შესაბამისად). გასაგებია, რომ როდესაც $p = q = \frac{1}{2}$ გვაქვს მარტინგალის შემთხვევა, როცა $p > q$ – სუბმარტინგალის და $p < q$ დროს – სუპერმარტინგალის.

ალბათობის თეორიასა და შემთხვევითი პროცესების თეორიაში გავრცელებულია უფრო ფართო ცნება: პირობითი მათემატიკური ლოდინი σ-ალგებრების მიმართ და მარტინგალის განმარტებაში მისი გამოყენება. ამ უფრო ფართო ცნების გარეშე შეუძლებელია სტოქასტური ანალიზის შესწავლა უწყვეტი დროის შემთხვევაში. ვინაიდან ჩვენ პრობლემების შინაარსობლივ ასპექტზე ვახდენთ ყურადღების გამახვილებას, აქ მოცემული ვიწრო ცნება – პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის მიმართ და მისი დახმარებით მარტინგალის განმარტება ჩვენი მიზნებისათვის საკმარისია, მით უმეტეს, რომ სასრული ალბათური სივრცის შემთხვევაში პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის და σ-ალგებრის მიმართ ერთმანეთისგან არ განსხვავდება. საზოგადოდ კი ორივეს თვისებები ანალოგიურია, ხოლო მარტინგალს, σ-ალგებრის მიმართ პირობითი მათემატიკური ლოდინის დახმარებით, ისევე განმარტავენ, როგორც ეს აქაა წარმოდგენილი. ამ ზოგად ობიექტებს ვიყენებთ მხოლოდ V თავის §3-ში, ვინაიდან იქ ალბათური სივრცე არ არის სასრული.

თავი II
ფასიანი ქაღალდები

§ 1. ძირითადი ფასიანი ქაღალდები

ძირითად ფასიან ქაღალდებს წარმოადგენენ აქციები და ობლიგაციები (ან ბონები).

აქცია – ესაა საწილო ფასიანი ქაღალდი, რომელსაც უშვებენ კორპორაციები, კომპანიები, ფირმები კაპიტალის აკუმულაციის მიზნით შემდეგი საქმიანობის წარმართვისათვის. აქციის მფლობელს ან აქციონერს აქვს კომპანიის მართვაში მონაწილეობის მიღების უფლება წესით: რამდენი აქცია – იმდენი ხმა. ასევე მას აქვს **დივიდენდების** მიღების უფლება. აქციები ორი სახისაა – ჩვეულებრივი და პრივილეგირებული. ჩვეულებრივი აქციის მფლობელი ღებულობს დივიდენდს კომპანიის მოგებიდან და მისი სიდიდე დამოკიდებულია კომპანიის წარმატებულ საქმიანობაზე. კომპანიის გაკოტრებისას ის კარგავს მთელ თავის ინვესტიციებს. პრივილეგირებული აქციის მფლობელი ნაკლებად რისკავს თავისი ინვესტიციების დაკარგვაში, მაგრამ ღებულობს ისეთ დივიდენდს, რომლის სიდიდე არ იზრდება კომპანიის შემოსავლის ზრდასთან ერთად. ბევრს იზიდავს აქციის ფლობა იმ თვალსაზრისით, რომ მისი ფასის მერყეობა "ფულის" გაკეთების შესაძლებლობას იძლევა.

აქციის ყიდვა და გაყიდვა წარმოებს საბროკერო ფირმების მეშვეობით საფონდო ბირჟებზე. ამერიკის შეერთებული შტატების უმსხვილესი საფონდო ბირჟაა NYSE (New York Stock Exchange). სხვა საფონდო ბირჟაზე AMEX (Americal Stock Exchange) ვაჭრობენ, როგორც წესი, საშუალო ზომის კომპანიები. ფინანსურ ბაზარს OTC (over - the - counter)[3] არ აქვს გარკვეული ადგილი და აქ ვაჭრობენ საკომპიუტერო-სატელეფონო ქსელით დილერების მეშვეობით. OTC-ს პოპულარობა გამოწვეულია იმით, რომ მასში მონაწილეობისათვის კომპანიის კაპიტალზე შეზღუდვა არაა.

---

[3] ბირჟის გარეთ.

ობლიგაცია – ესაა სავალო ფასიანი ქაღალდი (სავალო ვალდებულებით), რომელსაც უშვებს სახელმწიფო ან ბანკები, ფინანსური ინსტიტუტები, კომპანიები კაპიტალის აკუმულაციის მიზნით და თავისი ვალების რესტრუქტურირების გამო.

როგორც წესი, ობლიგაციებს უშვებენ გარკვეული ვადით, რომლის დასრულების შემდეგ ხდება მათი დაფარვა (გამოსყიდვა). ობლიგაციის მიმზიდველობა გამოწვეულია იმით, რომ მის მფლობელს უხდიან პროცენტებს შეთანხმებული წესით და გარანტირებულია გარკვეულ დროს მთელი თანხის განაღდება. ობლიგაციის მთლიანად ურისკო ფინანსურ ინსტრუმენტად მიჩნევა არ შეიძლება. ობლიგაციის გამომშვები კომპანიის გაკოტრებით გამოწვეული ვალდებულების შეუსრულებლობის გარკვეული რისკის წილი არსებობს. სახელმწიფო ობლიგაციები კი ნაკლებად რისკიანია. ობლიგაციაზე მითითებულია: ნომინალური ფასი, განაღდების მომენტი, საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი და საწყისი ფასი. უშვებენ მოკლევადიან, საშუალოვადიან და გრძელვადიან ობლიგაციებს. მოკლევადიანი ობლიგაციებია ერთი წლის ვადით, საშუალოვადიანი 1-დან 10 წლამდე და გრძელვადიანი – 10 წელზე მეტი ვადით.

საბანკო ანგარიშიც განიხილება როგორც ფასიანი ქაღალდი, რომელიც მიეკუთვნება ობლიგაციებს. არსი ისაა, რომ თანხას თქვენს ანგარიშზე ემატება გარკვეული თანხა საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისად.

პროცენტების დარიცხვა ხდება ორი წესით: წელიწადში m-ჯერ დარიცხვა და უწყვეტი დარიცხვა.

პირველ შემთხვევაში N წლის შემდეგ საწყისი B_0-კაპიტალი გახდება

$$B_N(m) = B_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{mN},$$

სადაც $r(m)$ – წლიური საპროცენტო განაკვეთია პროცენტის m-ჯერ დარიცხვის დროს და

$$B_N(\infty) = B_0 e^{r(\infty)N},$$

როდესაც უწყვეტად ხდება პროცენტის დარიცხვა და $r(\infty)$ აქ წლიური საპროცენტო განაკვეთია პროცენტის უწყვეტად დარიცხვის დროს.

გასაგებია, რომ

$$B_N(m) \to B_N(\infty),$$

როდესაც $r(m) \to r(\infty)$, $m \to \infty$.

თუ უწყვეტად დარიცხული პროცენტი $r(\infty) = r$, მაშინ

$$r(m) = m(e^{r/m} - 1) \qquad \text{და} \qquad r = m \ln\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right).$$

§ 2. ფორვარდული კონტრაქტი

ფორვარდული კონტრაქტი წარმოადგენს მარტივ წარმოებულ ფასიან ქაღალდს. ეს კონტრაქტი შეთანხმებაა აქტივის ყიდვასა და გაყიდვაზე გარკვეულ ფასად და გარკვეულ მომავალ მომენტში. კონტრაქტს, ჩვეულებრივ, დებს ორი ფინანსური ინსტიტუტი ან ფინანსური ინსტიტუტი და ერთ-ერთი მისი კორპორაციული კლიენტი. ფორვარდული კონტრაქტით ვაჭრობა არ წარმოებს საფონდო ბირჟაზე.

ფორვარდულ კონტრაქტში შესული ერთი მხარე ძირითად აქტივზე იღებს ყიდვის ვალდებულებებს. ამბობენ, რომ იგი იკავებს **გრძელ პოზიციას.** მეორე მხარე კი ვალდებულია გაყიდოს აქტივი იმავე მომენტში და იმავე ფასად. იგი იმყოფება **მოკლე პოზიციაში.** კონტრაქტში ფიქსირებულ ამ ფასს უწოდებენ **მიწოდების ფასს.** კონტრაქტის დადების მომენტში ეს ფასი ისე შეირჩევა, რომ კონტრაქტის ღირებულება ნულის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ კონტრაქტის დადებისას მხარეები არაფერს იხდიან. მოგვიანებით ფასი იცვლება და შესაძლებელია როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი გახდეს. მაგალითად, თუ ძირითადი აქტივის ფასი კონტრაქტის დადების შემდეგ მკვეთრად გაიზარდა, გრძელი პოზიციის შესაბამისი ფასი დადებითი ხდება, ხოლო მოკლე პოზიციისა – უარყოფითი.

კონტრაქტის განაღდება შემდეგნაირად ხდება: კონტრაქტში დათქმულ დროს მოკლე პოზიციაში მყოფი მხარე მიაწვდის ძირითად აქტივს

წინასწარ შეთანხმებულ მიწოდების ფასად გრძელ პოზიციაში მყოფ მხარეს და მისგან სანაცვლოდ მიიღებს ნაღდ ფულს.

ფორვარდული ფასი. გარკვეული კონტრაქტის ფორვარდული ფასი განისაზღვრება, როგორც მიწოდების ფასი, რომელიც ნულად აქცევს კონტრაქტის ღირებულებას. ფორვარდული ფასი და მიწოდების ფასი კონტრაქტის დადების დროს ერთმანეთის ტოლია. შემდეგ კი ფორვარდული ფასი შესაძლებელია შეიცვალოს. ცხადია, მიწოდების ფასი უცვლელი რჩება.

დავუშვათ, რომ ერთეული აქტივის მიწოდების ფასი არის K. კონტრაქტის განაღდების მომენტია T, ხოლო ძირითადი აქტივის ერთეულის ფასი ამ მომენტში არის S_T, მაშინ

$$S_T - K$$

წარმოადგენს კონტრაქტის გრძელ პოზიციაში მყოფი მხარის გასამრჯელოს. თუ S_T აღემატება K-ს, ეს მხარე მოგებაშია, ხოლო, თუ S_T ნაკლებია K-ზე, იგი წაგებაშია. ანალოგიურად, ფორვარდულ კონტრაქტში მოკლე პოზიციაში მყოფი მხარის გასამრჯელოა

$$K - S_T$$

და ამ პოზიციაში მყოფი მხარის მოგებას ადგილი აქვს, თუ მიწოდების ფასი K აღემატება აქტივის ნაღდ ფასს T-მომენტში (S_T-ს) და თუკი $S_T > K$, მაშინ ეს მხარე წაგებაშია.

მაგალითი. ფორვარდული კონტრაქტი დადებულია A და B ფინანსურ ინსტიტუტებს შორის. კონტრაქტის პირობით A ინსტიტუტი ვალდებულია, 6-თვის შემდეგ მიაწოდოს B-ინსტიტუტს 10 000 X-აქცია, თითოეული ათ US დოლარად, ხოლო B-ინსტიტუტი ვალდებულია იყიდოს X-აქციათა ეს რაოდენობა დათქმულ 100 000 US დოლარად.

დავუშვათ, რომ კონტრაქტის განაღდების დროს, ექვსი თვის შემდეგ, ერთი X-აქცია ფინანსურ ბაზარზე ღირს 9 US დოლარი, მაშინ A ინსტიტუტი 90 000 US დოლარად ყიდულობს 10 000 X-აქციას და მიაწვდის ამ რაოდენობა აქციებს B-ინსტიტუტს მიწოდების ფასში,

რომელიც 100 000 US დოლარითაა განსაზღვრული. B-ინსტიტუტი, კონტრაქტის თანახმად, ვალდებულია სწორედ ამ ფასად შეიძინოს X აქციათა დათქმული (10 000) რაოდენობა. A-ინსტიტუტს რჩება მოგება $100\,000 - 90\,000 = 10\,000$ US დოლარი. ამ თანხას აგებს B-ინსტიტუტი,ვინაიდან ის რომ არ ყოფილიყო ვალდებული შეესრულებინა ფორვარდული კონტრაქტი, თვითონ შეიძენდა 10 000 X-აქციას ფინანსურ ბაზარზე 90 000 US დოლარად და არ გადაიხდიდა 100 000-ს.

მკითხველს თვითონ შეუძლია გააანალიზოს სხვა შესაძლებლობები, მაგალითად, 6 თვის შემდეგ X აქციის ფასი გახდა 11 US დოლარი, 10 US დოლარი და სხვა.

§ 3. ფიუჩერსული კონტრაქტი

ეს კონტრაქტი წარმოადგენს შეთანხმებას ორ მხარეს შორის ძირითადი აქტივის გარკვეულ დროს და გარკვეულ ფასად ყიდვასა და გაყიდვის შესახებ. განსხვავებით ფორვარდული კონტრაქტისა, ფიუჩერსული კონტრაქტი ივაჭრება საფონდო ბირჟაზე (ფინანსურ ბაზარზე). შესაძლებელი რომ იყოს ნორმალური ვაჭრობა, ბირჟაზე ხდება ვაჭრობის შეზღუდვა გარკვეული სტანდარტული წესებით. ფიუჩერსული კონტრაქტის დროს არ არის აუცილებელი, რომ კონტრაქტში მონაწილე ორი მხარე ერთმანეთს იცნობდეს. იმისათვის, რომ კონტრაქტი არ დაირღვეს, შემუშავებულია სპეციალური მექანიზმი ფორვარდულ კონტრაქტთან განსხვავებით. ფიუჩერსულ კონტრაქტში ჩვეულებრივ მკაცრად არ არის ფიქსირებული მიწოდების თარიღი. ფიქსირებულია მხოლოდ მიწოდების თვე. ფორვარდული კონტრაქტის დროს, როგორც იყო აღნიშნული, მხარეებს შორის ანგარიშსწორება კონტრაქტის ვადის დასრულებისას ხდება. ფიუჩერსული კონტრაქტის დროს ყოველდღიური ანგარიშსწორება წარმოებს. ეს ასეა ორგანიზებული: წინასწარ შეაქვთ გარკვეული თანხა – **მარჟა**. ინვესტორის მოგება-წაგების ასახვის მიზნით, ყოველი სავაჭრო დღის ბოლოს სამარჟო ანგარიში გადაითვლება ფიუჩერსული ფასების ცვლილებების გამო. დავუშვათ, რომ ერთ კონტრაქტზე საწყისი მარჟაა β_0, რომელიც საერთოა გრძელ და მოკლე პოზიციაში

მყოფი მხარეებისათვის, ხოლო $\beta_t^{\text{ბ}}$ და $\beta_t^{\text{მ}}$ სამარჯო ანგარიშებია t-ური სავაჭრო დღის ბოლოს შესაბამისად გრძელ და მოკლე პოზიციაში მყოფ ინვესტორებისათვის. დავუშვათ, რომ კონტრაქტის მიწოდების ფასია F_0, რაც ემთხვევა ფიუჩერსულ ფასს კონტრაქტის დადების მომენტში, F_t კი t-ური დღის დახურვის ფასია.

ამ აღნიშვნებში პირველი დღის ბოლოს სამარჯო ანგარიშზე შემდეგი ცვლილებებია

$$\beta_1^{\text{ბ}} = \beta_0 + (F_1 - F_0),$$
$$\beta_1^{\text{მ}} = \beta_0 - (F_1 - F_0).$$

აქედან კარგად ჩანს, რომ რამდენითაც მატულობს ერთი მხარის სამარჯო ანგარიში, ზუსტად იმდენით კლებულობს მეორე მხარის სამარჯო ანგარიში. მაგალითად, თუ $F_1 > F_0$, მაშინ გრძელ პოზიციაში მყოფი ინვესტორისათვის საწყისი β_0-მარჟა იზრდება $(F_1 - F_0)$-ით და სწორედ $(F_1 - F_0)$-ით კლებულობს მოკლე პოზიციაში მყოფის საწყისი β_0-მარჟა. ანალოგიურად წარმოებს სამარჯო ანგარიში t-ური დღის ბოლოს

$$\beta_t^{\text{ბ}} = \beta_{t-1}^{\text{ბ}} + (F_t - F_{t-1}),$$
$$\beta_t^{\text{მ}} = \beta_{t-1}^{\text{მ}} - (F_t - F_{t-1}).$$

აქედან მარტივი დასანახია, რომ

$$\beta_t^{\text{ბ}} = \beta_0 + (F_t - F_0),$$
$$\beta_t^{\text{მ}} = \beta_0 - (F_t - F_0).$$

აქ იგულისხმება, რომ t-ური დღის ბოლოს ინვესტორების პოზიციები არ იცვლება, მხოლოდ იცვლება აღსრულების ფასი – თუ დასაწყისში იგი F_0 იყო, ახლა იგი F_t იქნება.

დავუშვათ, რომ T ფიუჩერსული კონტრაქტის აღსრულების მომენტია და $\tilde{T}$ რაიმე მომენტია, რომელიც T-ზე ნაკლებია. დავუშვათ, რომ $\tilde{T}$ სავაჭრო დღეს გრძელ პოზიციაში მყოფმა ინვესტორმა დახურა

პოზიცია იმავე კონტრაქტში საწინააღმდეგო პოზიციის დაკავებით აღსრულების ფასით $F_{\widetilde{T}}$ (ე.ი. გრძელ პოზიციაში მყოფ ინვესტორს ჰქონდა ვალდებულება, ეყიდა $F_{\widetilde{T}}$-ფასად საბაზისო აქტივი, ახლა კი იღებს ვალდებულებას, გაყიდოს იგი $F_{\widetilde{T}}$-ფასად). ამ სიტუაციაში მისი მოგება იქნება $F_{\widetilde{T}} - F_0$, თუ $F_{\widetilde{T}} > F_0$ და წაგება კი $F_0 - F_{\widetilde{T}}$, თუ $F_{\widetilde{T}} < F_0$.

იყენებენ შემდეგ დამცავ მექანიზმს. ფიქსირებულია სიდიდე β, რომელსაც **დამცავ მარჟას** უწოდებენ და რომელიც მიახლოებით $0.75\beta_0$-ია ($\beta \approx 0,75\beta_0$). თუ რომელიმე t-სავაჭრო დღეს ინვესტორის (სულერთია, რომელ პოზიციაშია იგი) მარჟა ამ სიდიდეზე დაბლა დაეცა, მაშინ ბროკერი უგზავნის მას სამარჟო მოთხოვნას – ინვესტორმა უნდა შეავსოს თავისი მარჟა საწყის β_0-მარჟის დონემდე. თუ ამას ინვესტორი ვერ ახერხებს, მას უხურავენ პოზიციას.

ყველა ჩამოთვლილ პროცედურას ახორციელებს ბირჟასთან არსებული სპეციალური რგოლი, რომელსაც **საკლირინგო პალატა** ჰქვია. ბოლოს უნდა შევნიშნოთ, რომ ფიუჩერსული ფასები ძირითად აქტივზე ყოველთვის ნაკლებია მის **სპოტ** (ნაღდ) ფასებზე. მიწოდების პერიოდის განმავლობაში კი ფიუჩერსული ფასები სპოტ ფასების ტოლია. თუ ფიუჩერსული კონტრაქტის საბაზისო აქტივს წარმოადგენს რაიმე აქცია t-მომენტში სპოტ ფასით S_t, მაშინ მისი ფიუჩერსული ფასი t-მომენტში F_t გამოიხატება შემდეგი ფორმულით

$$F_t = S_t e^{r(T-t)},$$

სადაც T – მიწოდების დროა, r – უწყვეტად დარიცხული ურისკო წლიური საპროცენტო განაკვეთია ინვესტიციისათვის, რომელიც t-მომენტში წარმოებს და სრულდება T-მომენტში.

§ 4. ოფციონური კონტრაქტი

ოფციონი წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქაღალდია. ოფციონი, ანუ ოფციონური კონტრაქტი – ეს ფასიანი ქაღალდია, რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას გაყიდოს (იყიდოს) რაიმე ფასეულობა (მაგალითად, აქცია, ობლიგაცია, ვალუტა, ...) წინასწარ შეთანხმებულ პირობებში. ესაა შეთანხმება ცალმხრივი ვალდებულებით მყიდ-

ველსა და გამყიდველს შორის. ოფციონის გამომშვებს **ემიტენტს** უწოდებენ.

მიღებული ტერმინოლოგიით ოფციონები ორ კლასად იყოფიან:

1) **ყიდვის ოფციონი** (ან მყიდველის ოფციონი). მას ინგლისურად უწოდებენ call-option. ჩვენც ვიხმართ **კოლ-ოფციონი**.

2) **გაყიდვის ოფციონი** (ან გამყიდველის ოფციონი). ესაა put-option, პუტ-ოფციონი.

კოლ-ოფციონი იძლევა ყიდვის უფლებას, პუტ-ოფციონი გაყიდვის უფლებას. ეს ოფციონები მუშაობენ სხვადასხვა მიმართულებით: როცა შემოსავალი ერთიდან იზრდება, მაშინ შემოსავალი მეორიდან კლებულობს.

აღსრულების (დაფარვის, განაღდების) დროის მიხედვით ოფციონები იყოფიან **ევროპულ** და **ამერიკულ** ტიპებად. ევროპული ტიპის ოფციონებს აქვთ აღსრულების ფიქსირებული თარიღი. ამერიკული ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება აღასრულოს ოფციონი ოფციონური კონტრაქტის სიცოცხლის ნებისმიერ მომენტში. ძირითადად ვაჭრობენ უფრო ამერიკული ოფციონებით, ვინაიდან ის უფრო მიმზიდველია მფლობელისათვის, რადგან იგი ხდება ვაჭრობის აქტიური მონაწილე: აქვს უფლება თვითონ შეარჩიოს აღსრულების მომენტი და გადაწყვიტოს ეს საოპტიმიზაციო ამოცანა. ევროპული ოფციონის მფლობელი პასიურია, ვინაიდან მას უფლება აქვს აღასრულოს ოფციონი მხოლოდ და მხოლოდ ოფციონის სიცოცხლის ბოლო ფიქსირებულ მომენტში.

განვიხილოთ სტანდარტული ოფციონები აქციაზე, რომლის ფასის ევოლუცია არის S_n, $n \geq 0$.

სტანდარტული და ევროპული ტიპის კოლ-ოფციონი აღსრულების N-მომენტით ხასიათდება ფიქსირებული K-ფასით (აღსრულების ფასი, სტრაიკი, დაფარვის ფასი), რომელსაც ოფციონის მფლობელი იხდის აქციის შესაძენად აღსრულების N-მომენტში. ამ მომენტში აქციის ფასი S_N შეიძლება მკვეთრად განსხვავდებოდეს K-საგან. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონის მყიდველი ხელსაყრელ სიტუაციაშია, რადგან ჯერ აქციის ყიდვით K-ფასად, შემდეგ კი მისი რეალიზაციით საბაზრო S_N-ფასად, იგი ღებულობს შემოსავალს $(S_N - K)$-ს. თუკი აღმოჩნდა, რომ $S_N < K$, მაშინ ოფციონის მფლობელისათვის მისი

უფლების გამოყენება აზრს კარგავს, ვინაიდან მას შეუძლია აქცია შეიძინოს K-ზე დაბალ ფასად და იგი ამ უფლებას არ იყენებს. ე.ი. N-მომენტში მყიდველის შემოსავალი f_N გამოიხატება ფორმულით (f_N-გადახდის ფუნქციაა)

$$f_N = (S_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0).$$

ვინაიდან ოფციონი ფასიანი ქაღალდია და მის მფლობელს იგი ნაყიდი აქვს C_N-ფასად, მისი მოგება იქნება

$$(S_N - K)^+ - C_N.$$

ე.ი.

$$\begin{aligned} (S_N - K) - C_N, &\quad \text{თუ } S_N > K, \\ -C_N, &\quad \text{თუ } S_N \le K, \end{aligned}$$

ოფციონის გამყიდველის მოგება კი იქნება

$$C_N - (S_N - K)^+,$$

ე.ი.

$$\begin{aligned} C_N - (S_N - K), &\quad \text{თუ } S_N > K, \\ C_N, &\quad \text{თუ } S_N \le K. \end{aligned}$$

სტანდარტული ევროპული გაყიდვის ოფციონის დროს N-ალსრულების მომენტით და K-ფიქსირებული სიდიდით, რომლითაც ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება გაყიდოს N-მომენტში აქცია K-ფასად, ოფციონის მფლობელი იღებს შემოსავალს $(K - S_N)$-ს, თუ $S_N < K$. სუფთა შემოსავალი კი იქნება

$$(K - S_N) - P_N,$$

სადაც P_N – პუტ-ოფციონის ფასია, თუკი $S_N < K$, მაშინ მფლობელი ოფციონს არ ანაღდებს, ე.ი. პუტ-ოფციონის მფლობელის სუფთა შემოსავალი უდრის

$$(K - S_N)^+ - P_N.$$

სტანდარტულ ოფციონებს გარდა გავრცელებულია ეგზოტიკურ ოფციონების მრავალნაირობა. ამ ოფციონებს სპეციალურად განვიხილავთ მომავალში.

ამოცანა: აჩვენეთ, რომ ერთსა და იმავე აქტივზე ფორვარდული კონტრაქტი და ევროპული სტანდარტული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების კომბინაცია ეკვივალენტურები არიან.

მითითება: აჩვენეთ, რომ ფორვარდული კონტრაქტის გადახდის ფუნქცია სტანდარტული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების გადახდის ფუნქციათა კომბინაციაა.

თავი III

ფინანსური ბაზარი განუსაზღვრელობის პირობებში

§ 1. მარკოვიცის პორტფელის თეორია

გ. მარკოვიცმა 1952 წელს საფუძველი ჩაუყარა ფასიანი ქაღალდების **პორტფელის** თეორიას, რომელიც განუსაზღვრელობის პირობებში ეძღვნება ინვესტიციურ გადაწყვეტილებათ ოპტიმიზაციას. შესაბამის ალბათურ-სტატისტიკურ ანალიზს უწოდებენ **საშუალო-დისპერსიულ** ანალიზს.

გ. მარკოვიცმა პორტფელის შედგენისას შეძლო, სრულად გამოეყენებინა **დივერსიფიკაციის** როლი.

გავიხსენოთ, თუ რას წარმოადგენს ფასიანი ქაღალდების **პორტფელი** (portfolio) – ესაა სხვადასხვა ფინანსური აქტივების სია (ობლიგაციების, აქციების, სხვადასხვა წარმოებული ფასიანი ქაღალდების და სხვა), რომლებიც ფიზიკური ან იურიდიული პირის საკუთრებაშია და რომლებიც მოცემულ ფინანსურ ბაზარზე ვაჭრობენ. **დივერსიფიკაცია** კი გულისხმობს სერიოზული დანაკარგების თავიდან აცილების მიზნით პორტფელში ფართო წრის კომპანიათა ფასიანი ქაღალდების ჩართვას. გავიხსენოთ ცნობილი გაფრთხილება: ნუ ჩადებთ ყველა თქვენს კვერცხს ერთ კალათში.

მარკოვიტცის პორტფელის თეორიის არსის გარკვევისათვის განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ამოცანა, ე.ი. გვაქვს საწყისი მომენტი (ნულოვანი) და მხოლოდ ერთი შემდეგი მომენტი (ბოლო). დავუშვათ, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_N$ მოცემული ფინანსური ბაზრის ყველა აქტივის ერთობლიობაა. დავუშვათ, რომ საწყის მომენტში ამ აქტივების შესაბამისი ფასებია $S_0^1, S_0^2, \ldots, S_0^N$ და $\pi_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ – ინვესტორის პორტფელია საწყის მომენტში. აქ $b_1, b_2, \ldots, b_N$ – შესაბამისი აქტივების რაოდენობაა, ე.ი. b_1 არის A_1 აქტივის, ფასით S_0^1, რაოდენობა, b_2 – A_2-სა, ფასით S_0^2 და ა.შ. ცხადია, რომ ინვესტორის საწყისი კაპიტალია

$$X_0^{\pi} = b_1 S_0^1 + b_2 S_0^2 + \cdots + b_N S_0^N. \tag{1}$$

დავუშვათ ასევე, რომ ბოლო მომენტში აქტივების ფასებია

$$S_1^1 = (1+\rho^1)S_0^1,$$
$$S_1^2 = (1+\rho^2)S_0^2,$$

$$S_1^N = (1+\rho^N)S_0^N,$$

სადაც $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N$ – შემთხვევითი სიდიდეებია, $\rho^i > -1$, $i = 1, 2, \dots, N$. ეს პირობა საჭიროა, რომ უზრუნველყოფილი იყოს აქტივების ფასების დადებითობა. ინვესტორს არჩეული აქვს $\pi_0 = (b_1, b_2, \dots, b_N)$–პორტფელი. აქციების ფასები შეიცვალა ბოლო მომენტისათვის და ინვესტორის კაპიტალი, რომელიც საწყის მომენტში იყო X_0^π, გახდება

$$X_1^\pi = b_1 S_1^1 + b_2 S_1^2 + \cdots + b_N S_1^N. \qquad (2)$$

პორტფელის **შემოსავლიანობა (ამონაგები)** ეწოდება შემდეგ სიდიდეს

$$R_\pi = \frac{X_1^\pi - X_0^\pi}{X_0^\pi}. \qquad (3)$$

თუ პორტფელში მხოლოდ ერთი აქტივია, ვთქვათ, A_1, მაშინ $X_0^\pi = b_1 S_0^1$ და $X_1^\pi = b_1 S_1^1$. ასეთი მარტივი პორტფელის ამონაგები იქნება

$$R_\pi = \frac{b_1(S_1^1 - S_0^1)}{S_0^1} = \frac{b_1 \rho^1 S_0^1}{b_1 S_0^1} = \rho^1.$$

აქ პორტფელის ამონაგები ემთხვევა A_1 აქტივის ამონაგებს.

განვიხილოთ, თუ რა არის **პორტფელის რისკი**. ერთი აქტივის რისკიანობა იზომება ამ აქტივის შემოსავლიანობის (ამონაგების) დისპერსიით ან საშუალო–კვადრატული გადახრით, ხოლო პორტფელის რისკი იზომება R_π–პორფელის შემოსავლიანობის დისპერსიით, ან საშუალო–კვადრატული გადახრით.

ადვილი საჩვენებელია (1) და (2)-ის ჩასმით (3)-ში, რომ

$$R_\pi = \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{b_k S_0^k}{X_0^\pi}\Big) R^k, \tag{4}$$

სადაც

$$R^k = \frac{S_1^k - S_0^k}{S_0^k} = \rho^k$$

წარმოადგენს k-ური აქტივის A_k-ს ამონაგებს და R_π-ს დისპერსია

$$\mathbf{D} R_\pi = \mathbf{D} \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{b_k S_0^k}{X_0^\pi}\Big) R^k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \Big(\frac{b_k S_0^k}{X_0^\pi}\Big)\Big(\frac{b_l S_0^l}{X_0^\pi}\Big) \operatorname{cov}(R^k, R^l),$$

სადაც

$$\operatorname{cov}(R^k, R^l) = \mathbf{E}(R^k - \mathbf{E}R^k)(R^l - \mathbf{E}R^l)$$

R^k-სა და R^l-ს შორის კოვარიაციაა.

შევნიშნოთ, რომ სიდიდეებს $\frac{b_k S_0^k}{X_0^\pi}$ ნათელი შინაარსი აქვთ, ისინი წარმოადგენენ A_k-აქტივის ფარდობით წონას მთელ პორტფელში.

აღნიშვნებში

$$w_k = \frac{b_k S_0^k}{X_0^\pi}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{5}$$

(ცხადია, რომ $\sum_{k=1}^{N} w_k = 1$) R_π-ს დისპერსიისთვის მივიღებთ

$$\mathbf{D} R_\pi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} w_k w_l \operatorname{cov}(R^k, R^l). \tag{6}$$

ვაჩვენოთ ახლა რისკის დამწევი დივერსიფიკაციის ეფექტი. განვიხილოთ ორი აქტივის A_1 და A_2-ის შემთხვევა ($N = 2$). ამ დროს

$$\mathbf{D} R_\pi = w_1^2 \mathbf{D} R^1 + w_2^2 \mathbf{D} R^2 + w_1 w_2 \operatorname{cov}(R^1, R^2).$$

დავუშვათ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი, $\frac{\mathrm{cov}(R^1,R^2)}{\sqrt{\mathbf{D}R^1\mathbf{D}R^2}} = -1$. ე.ი. ვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ამ ორ აქტივს აქვს სრული უარყოფითი კორელაცია. დავუშვათ, რომ $w_1 = w_2$ და ვინაიდან $w_1 + w_2 = 1$, ეს ნიშნავს, რომ $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$. ასევე მოვითხოვოთ სიმარტივისათვის, რომ $\mathbf{D}R^1 = \mathbf{D}R^2 = \sigma^2$, მაშინ

$$[\mathbf{D}R_\pi]^- = \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{4}.\,[4] \tag{7}$$

თუკი აქტივები დადებითად სრულად კორელირებენ $\left(\frac{\mathrm{cov}(R^1,R^2)}{\sqrt{\mathbf{D}R^1\mathbf{D}R^2}} = 1\right)$, მაშინ

$$[\mathbf{D}R_\pi]^+ = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{3}{4}\sigma^2. \tag{8}$$

განვიხილოთ კიდევ შემთხვევა, როდესაც აქტივები არ კორელირებენ, ე.ი. $\mathrm{cov}(R^1, R^2) = 0$, მაშინ

$$[\mathbf{D}R_\pi]^0 = \frac{\sigma^2}{2} \tag{9}$$

და, როგორც ჩანს (7), (8), (9) გამოსახულებებიდან

$$[\mathbf{D}R_\pi]^- < [\mathbf{D}R_\pi]^0 < [\mathbf{D}R_\pi]^+. \tag{10}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ **პორტფელის რისკის შესამცირებლად** საჭიროა აქტივს მოვუძებნოთ მასთან **სრულად უარყოფითად კორელირებული წყვილი** და ჩავრთოთ იგი პორტფელში. **უარყოფითი კორელირებულობის ეფექტს** უწოდებენ **მარკოვიცის ეფექტს**, ე.ი. პორტფელის შედგენის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სწრაფვაა თანხების განთავსება ფასიან ქაღალდებში, რომელთა შორის ბევრია უარყოფითად კორელირებული.

---

[4] $[\mathbf{D}R_\pi]^-$ და $[\mathbf{D}R_\pi]^+$ აღნიშვნებია $\mathbf{D}R_\pi$-ს უარყოფით და დადებით კორელირების დროს და $[\mathbf{D}R_\pi]^0$-ით არაკორელირების დროს.

დავუშვათ, რომ პორტფელში არა ორი, არამედ ისევ N აქტივია და ყველა R^i შემოსავალი არაკორელირებულია, მაშინ (6)-დან

$$\mathbf{D}R_\pi = \sum_{k=1}^{N} w_k^2 \mathbf{D}R^k$$

და თუ $w_k = \frac{1}{N}$, ე.ი. თანაბარი თანხებია ინვესტირებული თითოეულ A_k აქტივში, მაშინ

$$\mathbf{D}R_\pi = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{D}R^k .$$

თუკი ყველა $\mathbf{D}R^k$ უდრის σ^2-ს, მაშინ

$$\mathbf{D}R_\pi = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} . \tag{11}$$

(11) გამოსახულებიდან ვღებულობთ **არაკორელირებულობის ეფექტს**, რომელიც გვეუბნება, რომ თუ ინვესტირებას ვახდენთ არაკორელირებულ ფასიან ქაღალდში, მაშინ პორტფელის რისკის შასამცირებლად საჭიროა ავიღოთ N რაც შეიძლება დიდი. მართლაც მაშინ (11)-დან

$$\mathbf{D}R_\pi \to 0, \qquad N \to \infty .$$

რეალურ სიტუაციაში პორტფელის შემადგენლობაში გარკვეული დონის კორელირებული აქტივები ყოველთვის გვხვდება.

ამ შემთხვევაში (6)-დან (11)-ის მაგივრად მივიღებთ

$$\mathbf{D}R_\pi \doteq \frac{\sigma^2}{N} + \frac{(N-1)}{N} \overline{\mathrm{cov}}_N ,$$

სადაც

$$\overline{\mathrm{cov}}_N = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{N} \sum_{l=1}^{N} \mathrm{cov}(R^k, R^l) \tag{12}$$

წარმოადგენს საშუალო კოვარიაციას, ე.ი. კოვარიაციათა ჯამს, გაყოფილს მათს რაოდენობაზე $N(N-1)$.

ამ (12) ფორმულიდან ჩანს, რომ პორტფელის რისკი, როცა $N \to \infty$, უკვე აღარ მიდის ნულისაკენ და ადგილი აქვს

$$\mathbf{D}R_\pi \to \overline{\mathrm{cov}}_N,$$

ე.ი. რისკი მიისწრაფვის ცალკეული აქტივების საშუალო კოვარიაციისაკენ.

როგორც დავინახეთ, საშუალო რისკი ორი ნაწილისაგან შედგება: 1) რისკი, რომელიც გამოირიცხება დივერსიფიკაციით (არასისტემატური რისკი) და 2) რისკი, რომელსაც დივერსიფიკაცია ვერ აქრობს (სისტემატური ან საბაზრო რისკი).

მარკოვიტცის საშუალო-დისპერსიული ანალიზი ეფუძნება ორ მახასიათებელს – პორტფელის საშუალო შემოსავლიანობას $\mathbf{E}R_\pi$ და რისკს $\mathbf{D}R_\pi$. ამ ორი მახასიათებლის დახმარებით საუკეთესო პორტფელის არჩევის ამოცანა შეიძლება სხვადასხვანაირად იყოს ფორმულირებული იმის მიხედვით, თუ როგორია ოპტიმალობის კრიტერიუმი. მაგალითად, ავირჩიოთ რაიმე მიზნის ფუნქცია $f = f(\mathbf{E}R_\pi, \mathbf{D}R_\pi)$ და ვიპოვოთ მისი მაქსიმუმი დასაშვებ პორტფელთა კლასზე

$$\pi(x) = \{\pi(b_1, \ldots, b_N) \,:\, b_i \geq 0,\;\; X_0^\pi = x\}.$$

ბუნებრივია ამოცანის შემდეგი დასმაც: ვიპოვოთ ისეთი პორტფელი π, რომელიც ანიჭებს მინიმუმს რისკს $\mathbf{D}R_\pi$ პირობაში, რომ $\pi \in \pi(x)$ და $\mathbf{E}R_\pi = -m$, სადაც m – რაიმე მუდმივია.

მარკოვიტცი იყენებდა **ეფექტური** პორტფელის ცნებას. ესაა პორტფელი მაქსიმალური საშუალო ამონაგებით მინიმალური დისპერსიის დროს და მთელი საშუალო დისპერსიული ანალიზი ეძღვნება ასეთი ეფექტური პორტფელის მოძებნას თავისი გრაფიკული ილუსტრაციებით სივრცეზე კოორდინატებით $\mathbf{E}R_\pi$ და $\sqrt{\mathbf{D}R_\pi}$.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი, როდესაც პორტფელში ორი აქტივია და მათ შორის კორელაციის კოეფიციენტი უდრის $0,6$. განვიხილოთ ცხრილი მონაცემებით[5], როდესაც თითოეული რისკიანი

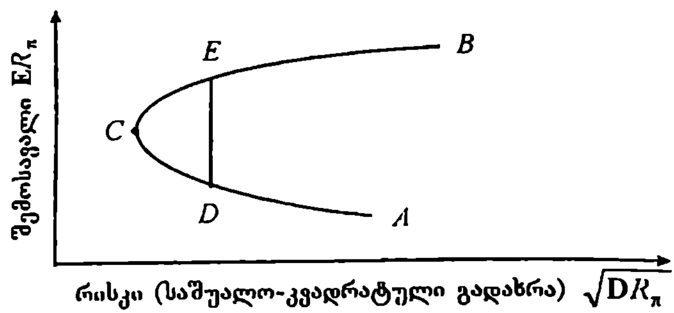
[5] ცხრილი და დიაგრამა მოყვანილია [27] წიგნიდან.

აქტივის წილი პორტფელში იცვლება 10%-ით. პირველი აქტივის მოსალოდნელი შემოსავალი (ამონაგები) 10% საშუალო-კვადრატული გადახრით 14%, ხოლო მეორე აქტივის მოსალოდნელი შემოსავალი 12% საშუალო-კვადრატული გადახრით 15%.

ცხრილი 1. **კორელაციის კოეფიციენტი $R = 0,6$.**

წონა w_1	წონა w_2	შემოსავალი $\mathbf{E}R_\pi$	საშუალო კვადრატული $\sqrt{\mathbf{D}R_\pi}$ გადახრა
0	1,0	10,0	14,0
0,1	0,9	10,2	13,55
0,2	0,8	10,4	13,22
0,3	0,7	10,6	13,01
0,4	0,6	10,8	12,92
0,5	0,5	11,0	12,97
0,6	0,4	11,2	13,15
0,7	0,3	11,4	13,45
0,8	0,2	11,6	13,86
0,9	0,1	11,8	14,38
1,0	0	12,0	15,0

მოცემული ფიქსირებული კორელაციის კოეფიციენტისათვის სხვადასხვა პორტფელებისათვის, რომლებიც შეიძლება შედგეს ამ ორი აქტივისაგან, დათვლილია თითოეულის შემოსავალი და საშუალო-კვადრატული გადახრა. მონაცემები მოთავსებულია შემდეგ დიაგრამაზე



ნახ. 1

როგორც ცხრილი, ასევე დიგრამა (ნახ. 1) კარგად გვიჩვენებს დივერსიფიკაციის სარგებელს. ამ ზომიერი კორელირების შემთხვევის დროს, მაგალითად, როდესაც პირველი აქტივის და მეორე აქტივის წონები ერთმანეთს უტოლდება $w_1 = w_2 = 0,5$. მაშინ, როგორც ცხრილიდან ჩანს, შემოსავალი უდრის 11%-ს, ხოლო რისკი 12,97%-ია, შეადარეთ: თუ პორტფელში მხოლოდ პირველი აქტივია, შემოსავალი 10%-ია, რისკი კი 14%, როდესაც მხოლოდ მეორე აქტივია პორტფელში, მაშინ შემოსავალი უდრის 12%-ს, მაგრამ რისკი საკმაოდ დიდია, 15%. მრუდი, გამოსახული ნახ. 1-ზე წარმოადგენს ეფექტურობის საზღვარს. ეფექტურობის საზღვარი ჩაზნექილია. რაც მეტად იქნება ჩაზნექილი ეს საზღვარი, მით მეტია სარგებელი დივერსიფიკაციიდან, მაგრამ ამ საზღვარის ყველა წერტილი არაა ეფექტური. ეფექტურია ამ მრუდის მხოლოდ ზედა ნაწილი, ე.ი. CB-მონაკვეთი. მრუდის ზემოთ გვაქვს არე, მიუღწეველი რისკ-შემოსავლის კომბინაციებისა, ხოლო მრუდის ქვემოთ კი უარესი კომბინაციები რისკისა და შემოსავლის, რომელთა გამოსწორება შესაძლებელია. მაგალითად, თუ პორტფელს შეესაბამება წერტილი D, მაშინ მისი გაყიდვით და პორტფელის ყიდვით, რომელსაც E-წერტილი შეესაბამება, ხდება შემოსავლიანობის გაზრდა რისკის გაზრდის გარეშე.

უნდა შევნიშნოთ, რომ არ არსებობს ერთადერთი საუკეთესო პორტფელი. ყველა წერტილი CB-მონაკვეთზე შეესატყვისება ეფექტურ პორტფელებს.

§ 2. CAPM-ის თეორია (ფინანსური აქტივების ფასწარმოების მოდელი – CAPM Capital Asset Pricing Model)

ეს თეორია აგებული იყო 60-იან წლებში უ. შარპისა და ჯ. ლინტნერის ძალისხმევით და ემყარება **გაწონასწორებული ბაზრის კონცეფციას**, რაც იმას გულისხმობს, რომ ამ ბაზარზე გამორიცხულია ოპერაციული დანახარჯები, მისი მონაწილეები (ინვესტორები) ერთგვაროვნები არიან იმ თვალსაზრისით, რომ მათ აქვთ ფასების მომავალი ცვლის შეფასების ერთნაირი შესაძლებლობა ყველასთვის მისაწვდომ ინფორმაციაზე დაყრდნობით, ყველა გადაწყვეტილებას იღებენ მოსა-

ლოდნელი ფასებისა და მათი კოვარიაციების ან მოსალოდნელი ამონაგებისა და სტანდარტული გადახრების საფუძველზე. იგულისხმება ასევე, რომ ყველა აქტივი უსასრულოდ დაყოფადია, ე.ი. სურვილის შემთხვევაში ინვესტორს შეუძლია იყიდოს აქციის ნაწილი და ბაზარზე არის ურისკო აქტივი r-საპროცენტო განაკვეთით.

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ამოცანა: თუ ურისკო აქტივის (ვთქვათ, ობლიგაციის ან საბანკო ანგარიშის) საწყისი ფასი აღვნიშნეთ B_0-ით, მისი ევოლუცია გამოისახება ფორმულით

$$B_1 = B_0(1+r). \tag{1}$$

თუ რაიმე A-რისკიანი აქტივის საწყისი ფასი $S_0(A)$-ია, მისი ევოლუცია გამოისახება ფორმულით

$$S(A) = S_0(A)(1+\rho(A)), \tag{2}$$

სადაც $\rho(A)$ ამ აქციის შესაბამისი საპროცენტო განაკვეთია.

განვიხილოთ CAPM-თეორიისთვის მნიშვნელოვანი ახალი ობიექტი – მთელი ფინანსური ბაზრის საპროცენტო განაკვეთი ρ. ამ ρ-ს ინტერპრეტაცია შეიძლება შემდეგნაირად:

$$\rho = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \tag{3}$$

სადაც S_0 $S\&P\,500$ – ინდექსის საწყისი ფასია და S_1 ამ ფასის ევოლუცია. ეს გასაგებია, ვინაიდან ინდექსი $S\&P\,500$ წარმოადგენს ფინანსური ბაზრის გლობალურ მახასიათებელს.

ძირითადია შემდეგი: გამომდინარე საბაზრო წონასწორობის კონცეფციიდან, CAPM-ის თეორია ადგენს, რომ ყველა აქტივისათვის A არსებობს სიდიდე $\beta(A)$, რომელსაც უწოდებენ ამ აქტივის **ბეტას**, ისეთი, რომ

$$\mathbf{E}[\rho(A)] = r + \beta(A)[\mathbf{E}\rho - r] \tag{4}$$

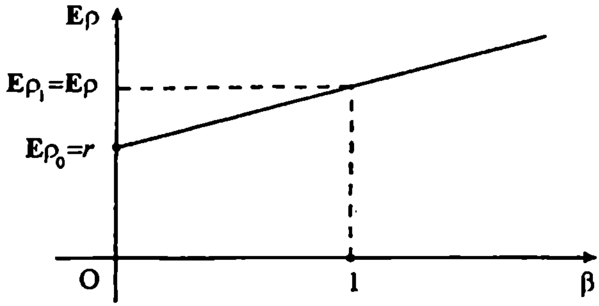
და

$$\beta(A) = \frac{\mathrm{cov}(\rho(A), \rho)}{\mathbf{D}\rho}. \tag{5}$$

ვინაიდან (2)-დან

$$\rho(A) = \frac{S_1(A) - S_0(A)}{S_0(A)}, \tag{6}$$

ეს კი A-აქციის ამონაგებს წარმოადგენს, ხოლო (3)-დან ჩანს, რომ ρ – ბაზრის ამონაგებია. ფორმულა (4) გვიჩვენებს წრფივ კავშირს ამ ამონაგებების საშუალოებებს შორის, აქტივის ბეტაც $\beta(A)$ ამ ამონაგებებს შორის კოვარიაციით განიმარტება (იხ. (5)).



ნახ. 2

ნახ. 2-ზე გამოსახულია აქციის საშუალო ამონაგები, როგორც β-ს ფუნქცია და ამ მრუდს ეწოდება CAPM-ის მრუდი.

აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ რისკიან აქტივებზე გრძელვადიანმა დაკვირვებებმა გვიჩვენეს, რომ $\mathbf{E}\rho(A) > r$.

კარგად ცნობილია, რომ ამერიკის შეერთებული შტატების სახაზინო თამასუქის (US Tresure Bill) საპროცენტო განაკვეთი $\tilde{r}$ კარგად აპროქსიმირებს r-ს ურისკო ფასიანი ქაღალდის საპროცენტო განაკვეთს, ხოლო ფინანსური ბაზრის საპროცენტო განაკვეთის ρ-ს აპროქსიმირება, როგორც წესი, წარმოებს $S\&P\,500$ ინდექსის საპროცენტო განაკვეთით, ამიტომ ამ სიდიდეების ისტორიულ მონაცემებზე

დაყრდნობით, უფრო სწორად, ჭარბ ამონაგებებზე, ე.ი. სხვაობებზე ($\bar{\rho} - \bar{r}$), დაყრდნობით ხდება წრფივი რეგრესიული მეთოდების გამოყენებით აქტივის ბეტას შეფასება.

აქტივის ბეტა $\beta(A)$ მეტად მნიშვნელოვანია, ვინაიდან იგი პორტფელის შედგენისას წარმოადგენს საბაზრო ცვლილებებზე აქტივის მგრძნობიარობის საზომს.

ძირითად (4) თანაფარდობაზე დაყრდნობით ღებულობენ შემდეგ წარმოდგენას

$$\rho(A) - r = \beta(A)(\rho - r) + \eta(A), \tag{7}$$

სადაც $\eta(A)$ შემთხვევითი სიდიდეა ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით $\mathbf{E}\eta(A)$ და არაკორელირებული $(\rho - \mathbf{E}\rho)$-თან. იგი წარმოადგენს კავშირს A-აქტივის ჭარბ ამონაგებსა $(\rho(A) - r)$ და ბაზრის ჭარბ ამონაგებს $(\rho - r)$ შორის.

აქედან

$$\mathbf{D}\rho(A) = \beta^2(A)\mathbf{D}\rho + \mathbf{D}\eta(A). \tag{8}$$

ეს ნიშნავს, რომ A-აქტივში ინვესტირების რისკი შედგება ორი რისკისაგან

1) ბაზრის სისტემატური რისკი $\beta^2(A)\mathbf{D}\rho$ და
2) A-აქტივის არასისტემატური რისკი $\mathbf{D}\eta(A)$.

დივერსიფიკაციის გამოყენებით შესაძლებელია არასისტემატიური რისკის შემცირება.

§ 3. ფინანსური აქტივების გათვლების არბიტრაჟული თეორია (APT – Arbitrage Pricing Theory)

როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, CAPM-თეორია წარმოადგენს "რისკისა და ამონაგების" თეორიას. ძირითადი გამოსახულებაა A აქტივის გამოსათვლელი წინა პარაგრაფის ფორმულა (7):

$$\rho(A) = r + \beta(A)(\rho - r) + \eta(A). \tag{1}$$

გათვლების არბიტრაჟული თეორია, რომელიც ასევე "რისკისა და ამონაგების" თეორიაა, წარმოადგენს CAPM-ის განზოგადოებას და საბაზისოდ ირჩევს მრავალფაქტორიან მოდელს

$$\rho(A) = a_0(A) + a_1(A)f_1 + \cdots + a_q(A)f_q + \zeta(A), \qquad (2)$$

სადაც $\zeta(A)$ – "შეშფოთებაა (ხმაური)", $f_1, f_2, \ldots, f_q$ სხვადასხვა ფაქტორია (მაგალითად, ფასები ენერგომატარებლებზე, საპროცენტო განაკვეთი და ა.შ.).

როგორც წესი, მოითხოვენ, რომ $\mathbf{E}f_i = 0$, $\mathbf{D}f_i = 1$, $\mathrm{cov}(f_i, f_j) = 0$, $i \neq j$, $\zeta(A)$-ს აქვს $\mathbf{E}\zeta(A) = 0$ და არ კორელირებს $f_1, \ldots, f_q$ ფაქტორებთან და სხვა აქტივების "შეშფოთებებთან".

გასაგებია, რომ (1) წარმოადგენს (2)-ის კერძო შემთხვევას - ერთფაქტორიან მოდელს ფაქტორით $f_1 = \rho$.

ძირითადი მიზანი APT-თეორიაში არის საშუალო ამონაგების $\mathbf{E}\rho(A)$ განსაზღვრა ასიმპტოტური არბიტრაჟის არარსებობის კონცეფციაზე დაყრდნობით.

განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი, რომელიც შედგება N აქტივისაგან $A_1, A_2, \ldots, A_N$ და თითოეული აქტივის ამონაგები ემორჩილება გამოსახულებას

$$\rho(A_i) = a_0(A_i) + a_1(A_i)f_1 + \cdots + a_q(A_i)f_q + \zeta(A_i),$$

სადაც $\mathbf{E}f_k = 0$, $\mathbf{E}\zeta(A_i) = 0$, $\mathrm{cov}(f_k, f_l) = 0$, $k \neq l$, $\mathbf{D}f_k = 1$, $\mathrm{cov}(f_k, \zeta(A_i)) = 0$, $\mathrm{cov}(\zeta(A_i)\zeta(A_j)) = \sigma_{ij}$, $k, l = 1, \ldots, q$ და $i, j = 1, \ldots, N$.

თუ $d = (d_1, \ldots, d_N)$ – რაიმე პორტფელია, მაშინ მისი შესაბამისი ამონაგებია

$$\rho(d) = d_1\rho(A_1) + \cdots + d_N\rho(A_N) = \sum_{i=1}^{N} d_i a_{i0} + \left(\sum_{i=1}^{N} d_i a_{i1}\right) f_1 +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} d_i a_{iq}\right) f_q + \sum_{i=1}^{N} d_i \zeta(A_i). \qquad (3)$$

სადაც $a_{ik} = a_k(A_i)$.

განხილული მოდელის კოეფიციენტების დახმარებით ქმნიან მატრი-ცას

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & & a_{1q} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & & a_{2q} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & a_{N1} & a_{N2} & & a_{Nq} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის გამოყენებით შესაძლებელია [6] ისეთი არატრივიალური პორტფელის $d = (d_1, \dots, d_N)$ შერჩევა, რომ

$$d_1 + \cdots + d_N = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i a_{ik} = 0, \qquad k = 1, \dots, q, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i a_{i0} = \sum_{i=1}^{N} d_i^2. \tag{6}$$

განვიხილოთ პორტფელი $\theta d = (\theta d_1, \dots, \theta d_N)$. ცხადია, რომ

$$\rho(\theta d) = \theta \rho(d)$$

და (2)–(6) ძალით

$$\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^{N} d_i^2 + \theta \sum_{i=1}^{N} d_i \zeta(A_i)$$

და

$$\mu(\theta d) = \mathbf{E}\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^{N} d_i^2,$$

$$\sigma^2(\theta d) = \mathbf{D}\rho(\theta d) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^{N} d_i d_j \sigma_{ij}.$$

---

[6] მასალის ფორმულებით გადატვირთვის აცილების მიზნით კონსტრუქცია არ მოგვყავს.

თუ ავიღებთ $\theta = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{-2/3}$, მაშინ

$$\mu(\theta d) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sigma^2(\theta d) = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{N} d_i d_j \sigma_{ij}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{\frac{4}{3}}}.$$

სიმარტივისათვის ავიღოთ $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\sigma_{ii} = 1$, მაშინ

$$\sigma^2(\theta d) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{-\frac{1}{3}}$$

და თუ $\sum\limits_{i=1}^{N} d_i^2 \to \infty$, როცა $N \to \infty$, მაშინ $\mu(\theta f) \to \infty$ და $\sigma^2(\theta d) \to 0$. ავიღოთ $S_0(A_1) = \cdots = S_0(A_N) = 1$. ამ შემთხვევაში საწყისი კაპიტალი, (4)-ის გამოყენებით,

$$X_0(\theta d) = \theta(d_1 + \cdots + d_N) = 0,$$

კაპიტალი კი $n = 1$ მომენტში

$$X_1(\theta d) = \theta[d_1 S_1(A_1) + \cdots + d_N S_1(A_N)] = \theta\rho(d) = \rho(\theta d).$$

რადგან

$$\mathbf{E}X_1(\theta d) = \mathbf{E}\rho(\theta d) = \mu(\theta d) \to \infty \quad \text{და}$$
$$\mathbf{D}X_1(\theta d) \to 0, \quad \text{როცა} \quad N \to \infty,$$

ამიტომ საკმაოდ დიდი N-ისათვის $X_1(\theta x) \geq 0$ დიდი ალბათობით და დადებითი ალბათობით $X_1(\theta d) > 0$, ე.ი. ნულოვანი საწყისი კაპიტალით პორტფელის აგების მეშვეობით მივიღეთ ასიმპტოტური დადებითი მოგება, რაც ასიმპტოტურ არბიტრაჟს წარმოადგენს[7]. ჩვენ

[7] არბიტრაჟია საწყისი ნულოვანი კაპიტალით მომავალში დადებითი მოგების მიღება.

ვთვლით, რომ ფინანსური ბაზრები, რომლებსაც ვიხილავთ, უარბიტრაჟო ბაზრებია და ამიტომ არბიტრაჟის გამორიცხვისთვის ვითხოვთ პირობას:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} d_i^2 < \infty. \tag{7}$$

ამ პირობას გამოხატავენ შემდეგნაირად

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(a_{i0} - \lambda_0 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_{ik} \right)^2 < \infty, \tag{8}$$

სადაც $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ – გარკვეული მუდმივებია დამოკიდებული ფაქტორული მოდელის კოეფიციენტებზე. მათ მოსაძებნად გამოიყენება მატრიცა A.

პირობა (8)-დან გამომდინარეობს, რომ $N \to \infty$ შემთხვევაში აქტივების დიდი უმეტესობა ისეთი უნდა იყოს, რომ აქტივების კოეფიციენტებს შორის $a_0(A_i), a_1(A_i), \ldots, a_q(A_i)$ დამყარდეს "თითქმის წრფივი" კავშირი

$$a_0(A_i) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k(A_i)$$

და ვინაიდან

$$a_0(A_i) = \mathbf{E}\rho(A_i),$$

A_i-აქტივის საშუალო ამონაგებისათვის გვექნება

$$\mathbf{E}\rho(A_i) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k(A_i) \tag{9}$$

და ესაა APT-თეორიის ძირითადი ფორმულა. აქ λ_0 მოდელის ნულოვანი ბეტა პარამეტრია და უდრის ურისკო აქტივის ამონაგებს, თუ იგი მონაწილეობს პორტფელში, ხოლო λ_k, $k = 1, 2, \ldots, q$ – ფაქტორების შესატყვისი ამონაგებებია.

ბოლოს უნდა შევნიშნოთ, რომ ამონაგების დისპერსიის შემცირების მიზნით, მიმართავენ არა $d=(d_1,\dots,d_N)$, არამედ $\theta d=(\theta d_1,\dots,\theta d_N)$ პორტფელს და θ-მუდმივს სპეციალურად არჩევენ.

APT-ფასიანი ქაღალდების ფასდადების თეორია შეიქმნა 80-იან წლებში ს. როსისა და რ. როლის ძალისხმევით.

§ 4. ARCH და GARCH-მოდელები

წინა პარაგრაფებთან შედარებით, აქ განხილული მოდელები ასახავენ აქტივების ფასების დინამიკას.

ARCH-მოდელი (Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model – პირობითი არაერთგვაროვნების ავტორეგრესიული მოდელი) ი. ენგლის მიერ არის 1982 წელს შემოღებული.

განვიხილოთ დინამიკაში ფინანსური ბაზარი დისკრეტული დროით. დავუშვათ, რომ აქტივების ფასების ევოლუცია აღიწერება გამოსახულებით

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{1}$$

სადაც

$$H_n = h_0 + \cdots + h_n, \qquad n \geq 0 \tag{2}$$

და

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right) \approx \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}},$$

$$\text{როცა} \quad \Delta S_n \text{ - მცირეა,}$$

ე.ი. h_n მიახლოებით წარმოადგენს აქციის ფასის ამონაგებს n-მომენტისათვის.

მიმდევრობა $(d_n)_{n\geq 1}$ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას.

უმარტივესი დაშვება (h_n)-ის ალბათურ ყოფაქცევაზე შეიძლება იყოს ის, რომ

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{3}$$

სადაც (ε_n) – დამოუკიდებელი სტანდარტული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, $\varepsilon_n \sim N(0,1)$, ხოლო $\sigma_n = +\sqrt{\mathrm{D}h_n}$, სადაც $\mathrm{D}h_n$ – დისპერსიაა h_n-ის. ფინანსურ ლიტერატურაში σ_n-ს, რომელიც (3)-ში შედის, ვოლატილობას (ცვალებადობას) უწოდებენ. ვოლატილობა σ_n შეიძლება ფინანსური ბაზრის მოდელებში თვითონაც იყოს შემთხვევითი $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$ და ARCH და GARCH (Generalized ARCH – განზოგადოებული ARCH) მოდელები სწორედ განეკუთვნებიან ვოლატილობის მოდელებს. განვიხილოთ ARCH(p)-მოდელი. ამ მოდელში

$$\begin{aligned} h_n &= \sigma_n \varepsilon_n, \qquad n \geq 0, \\ \sigma_n^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_p h_{n-p}^2, \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, რაიმე მუდმივებია; $h_0(\omega)$ დამოკიდებულია (ε_n)-მიმდევრობაზე.

განვიხილოთ დაწვრილებით შემთხვევა $p = 1$, ე.ი. ARCH(1)-მოდელი, მაშინ (4)-დან

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{5}$$

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2, \tag{6}$$

$$\mathrm{E}[h_n^2 | h_0, \ldots, h_{n-1}] = \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2,$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$\mathrm{E}h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}h_{n-1}^2.$$

და თუ $0 < \alpha_1 < 1$, მაშინ ამ რეკურენტულ გამოსახულებას გააჩნია ერთადერთი სტაციონარული ამოხსნა

$$\mathrm{E}h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.$$

გარდა ამისა,

$$\mathrm{E}h_n = 0$$

და

$$\mathrm{cov}(h_n, h_m) = 0, \quad \text{როცა} \quad n \neq m.$$

აქედან ჩანს, რომ გარკვეულ პირობებში h_0-ზე (თუ $\mathrm{E}h_0 = 0$ და $\mathrm{E}h_0^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$) მიმდევრობა $(h_n)_{n\geq 0}$ წარმოადგენს ფართო აზრით **თეთრ ხმაურს**. შევნიშნოთ, რომ **თეთრ ხმაურს** უწოდებენ არაკორელირებულ მიმდევრობას ნულოვანი მათემატიკური ლოდინითა და სასრული დისპერსიით.

ARCH-მოდელის გამოყენებით შესაძლებელია $(h_n^2)_{n\geq 0}$ და $(\sigma_n^2)_{n\geq 0}$ მიმდევრობათა ოპტიმალური პროგნოზი, ე.ი. ამოცანა, როდესაც 0-დან m მომენტამდე ვაკვირდებოდით $h_0, h_1, \ldots, h_m$ მნიშვნელობებს და გვინდა განვჭვრიტოთ, რა მოხდება l ბიჯის შემდეგ $m+l$ მომენტში, რა მნიშვნელობებს მიიღებენ h_{m+l}^2 და σ_{m+l}^2, თუ ამ ოპტიმალურ პროგნოზებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $\widehat{h}_{m+l}^2$ და $\widehat{\sigma}_{m+l}^2$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\widehat{h}_{m+l}^2 = \widehat{\sigma}_{m+l}^2 = \alpha_0 \frac{1-\alpha_1^l}{1-\alpha_1} + \alpha_1^l h_m^2, \tag{7}$$

როდესაც $l \to \infty$, მაშინ $\alpha_1^l \to 0$, ვინაიდან $\alpha_1 < 1$ და $\widehat{h}_{m+l} \to \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = \mathrm{E}h_n^2$.

აქ მკითხველს დააინტერესებს – რატომ არ იხილავენ $(h_n)_{n\geq 1}$ პროგნოზის ამოცანას? უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ მოდელში ეს ამოცანა ტრივიალურია ($\widehat{h}_{m+l} = 0$) და არაფერს იძლევა.

თუ α_0 და α_1 მოდელში ცნობილი არ არის, როგორ უნდა შეფასდნენ ეს კოეფიციენტები. ამაზე პასუხს იძლევა დროითი მწკრივების ანალიზი.

მკითხველის ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ გარემოებასაც, რომ $(h_n)_{n>0}$ მიმდევრობის სტაციონარული განაწილების სიმკვრივე საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში უფრო მეტადაა ზევით "გაწელილი", ვიდრე ნორმალური განაწილების სიმკვრივე (მძიმე კუდების ეფექტი). პრაქტიკული დაკვირვებები რეალურ ფინანსურ ბაზრებზე მიმოქცევაში მყოფ აქციებზე სწორედ ასეთ ეფექტს ავლენენ. ამიტომ ARCH-მოდელებმა დიდი ყურადღება მიიქციეს, როგორც თეორეტიკოსების, ასევე პრაქტიკოსების.

GARCH(p,q) მოდელი, რომელიც ARCH-ის განზოგადოებაა (და

1987 წელს თ. ბოლლერსლევმა წარმოადგინა) შემდეგი სახისაა. ამ მოდელში $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ და ვოლატილობა σ_n^2 აკმაყოფილებს რეკურენტულ განტოლებას

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_p h_{n-p}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{n-q}^2, \quad (8)$$

სადაც $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,p}$, $\beta_j \geq 0$, $j = \overline{1,q}$, რაიმე მუდმივებია, h_0 და σ_0 შემთხვევითი სიდიდეებია, დამოუკიდებლები $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ მიმდევრობისაგან.

განვიხილოთ GARCH(1,1) მოდელი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\mathbf{E}h_n^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{E}h_{n-1}^2$$

და პირობაში $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ არსებობს "სტაციონარული" მნიშვნელობა $\mathbf{E}h_n^2$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\mathbf{E}h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

პროგნოზის ფორმულებს შემდეგი სახე აქვს:

$$\widehat{h}_{m+l}^2 = \widehat{\sigma}_{m+l}^2 = \alpha_0 \frac{1 - \gamma^l}{1 - \gamma} + \gamma^l(\alpha_1 h_m^2 + \beta_1 \sigma_m^2), \quad (9)$$

სადაც

$$\gamma = \alpha_1 + \beta_1.$$

ფორმულა (9)-ის გამოსაყენებლად საჭიროა ვიცოდეთ კოეფიციენტები α_0, α_1 და β_1, აგრეთვე σ_0^2. ვინაიდან (8)-დან როცა $p = 1$, $q = 1$:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2. \quad (10)$$

აქედან კი

$$\sigma_1^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_0^2 + \beta_1 \sigma_0^2.$$

ჩვენთვის σ_0^2 ცნობილია და σ_1^2-ს ვიპოვით. შემდეგ ისევ (10)-დან ვიპოვით

$$\sigma_2^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_1^2 + \beta_1 \sigma_1^2$$

და ა.შ. σ_n^2-საც ვიპოვით და ჩავსვამთ (9)-ში.

ცხადია. GARCH(p, q)-მოდელები p-სა და q-ს არჩევის საშუალებით მეტ შესაძლებლობებს იძლევიან ARCH(p)-სთან შედარებით.

თავი IV

ბინომიალური მოდელები. ფასგათვლები, ჰეჯირება

§ 1. (B,S)-ფინანსური ბაზარი. ბინომიალური სქემა

მოდელი, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ, ეკუთვნის კოქსს, როსსა და რუბინშტეინს. ამ მოდელში იგულისხმება, რომ ბაზრის ფუნქციონირება წარმოებს დროის დისკრეტულ მომენტებში $n=0,1,\dots,N$ ($N<\infty$). ფინანსურ ბაზარზე ორი აქტივია – ურისკო (საბანკო ანგარიში ან ობლიგაცია), რომლის ფასები $B=(B_n)$, $n=0,1,\dots,N$, ფუნქციონირების მომენტებში გამოისახება შემდეგი რეკურენტული ფორმულებით:

$$B_n=(1+r)B_{n-1} \tag{1}$$

საწყისი ფასით $B_0>0$ და $r>0$ საპროცენტო განაკვეთით და რისკიანი (აქცია), რომლის ფასები $S=(S_n)$, $n=0,1,\dots,N$, ევოლუციონირებენ შემდეგნაირად:

$$S_n=(1+\rho_n)S_{n-1}, \qquad S_0>0, \tag{2}$$

სადაც შემთხვევითობა შედის $\rho_n=\rho_n(\omega)$ სიდიდეების, $n=1,2,\dots,N$, საშუალებით. ეს სიდიდეები ქმნიან ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას და თითოეული ρ_n ღებულობს მნიშვნელობას ან a-ს, ან b-ს დადებითი ალბათობებით $q=\mathrm{P}(\rho_n=a)$ და $q=\mathrm{P}(p_n=b)$, $p+q=1$.

ამ მოდელში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $\Omega=\{\omega=(x_1,\dots,x_N)\}$ წარმოადგენს $(x_1,\dots,x_N)$-მიმდევრობათა სივრცეს, სადაც $x_i=a$ ან b-ს. სიდიდეები $\rho{=}\rho_n(\omega)$ კოორდინატული გზით განისაზღვრებიან $\rho_n(\omega)=\rho_n(x_1,\dots,x_n)=x_n$.

შემოდის

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_N(x_i,\dots,x_N)=p^{\nu_b(x_1,\dots,x_N)}q^{N-\nu_b(x_1,\dots,x_N)}, \tag{3}$$

სადაც $\nu_b(x_1, \ldots, x_N)$ - იმ x_i-ების რაოდენობაა, რომლებიც b-ს უდრიან. მაგალითად,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_N(\overbrace{b, b, \ldots, b}^{N}) = p^N,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_N(\overbrace{a, a}^{2}, \overbrace{b, b, \ldots, b}^{N-2}) = q^2 p^{N-2}.$$

სინამდვილეში (3)-ით განმარტებულია ალბათობათა ოჯახი $\mathcal{P}$, ვინაიდან თითოეულ არჩეულ p-ს შეესაბამება კონკრეტული ალბათობა. ამიტომ მკითხველს არ უნდა გაუკვირდეს, როდესაც ლაპარაკი გვექნება იმავე ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეზე, Ω-ზე, საწყისი $\mathbf{P}$-ალბათობის გარდა სხვა $\mathbf{P}^*$-ალბათობაზე.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ (1)-ში B_0 და r არაშემთხვევითი სიდიდეებია, ურისკო აქტივის B-ს ფასები არაშემთხვევითია, ხოლო ρ_n, $n \geq 1$, შემთხვევითობის გამო აქციის ფასები S შემთხვევითია, სტოქასტურია.

რეკურენტული გამოსახულებები (1), (2) შეიძლება გადაიწეროს სხვაობიანი განტოლებების ფორმითაც. აღნიშვნებში $\Delta B_n = B_n - B_{n-1}$ და $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ ეს ასე გამოიყურება

$$\Delta B_n = r B_{n-1}, \tag{4}$$

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1} \tag{5}$$

და მათ ამოხსნებს შემდეგი სახე აქვს:

$$B_n = B_0(1 + r)^n, \tag{6}$$

$$S_n = S_0(1 + \rho_1)(1 + \rho_2) \cdots (1 + \rho_n). \tag{7}$$

შემდგომში ჩვენ ვისარგებლებთ ნებისმიერი (1), (2), (4), (5), (6), (7) წარმოდგენებით იმისდა მიხედვით, რომელიც ჩვენთვის უფრო მოხერხებული იქნება.

§ 2. ინვესტორის მოქმედება (B,S)-ფინანსურ ბაზარზე. პორტფელი. თვითდაფინანსებადი სტრატეგიები

ინვესტორი გარკვეული საწყისი კაპიტალით $X_0 = x > 0$ შედის (B,S)-ფინანსურ ბაზარზე და მისი შესაძლებლობების გამოყენებით ცდილობს, მომავალში გაზარდოს თავისი x-კაპიტალი. თუ ინვესტორი ძალიან ფრთხილია, იგი მიმართავს მხოლოდ ურისკო აქტივს და მთელ თავის კაპიტალს ჩადებს საბანკო ანგარიშზე, რის შედეგადაც წინა პარაგრაფის ფორმულა (6)-ის შესაბამისად n-მომენტში მას ექნება კაპიტალი $X_n = x(1+r)^n$. თუ ინვესტორი მიზნად ისახავს N-მომენტში ჰქონდეს f_N რაოდენობის თანხა, მაშინ მისი საწყისი კაპიტალი უნდა იყოს ტოლი

$$x = (1+r)^{-N} f_N.$$

მეორეს მხრივ, თუ ინვესტორი უკიდურესად რისკიანია, მაშინ იგი მთელ თავის საწყის კაპიტალს $X_0 = x$ განათავსებს აქციებში და n-მომენტში მას ექნება თანხა §1 (7)-ის შესაბამისი:

$$X_n = x(1+\rho_1)(1+\rho_2)\cdots(1+\rho_n).$$

საშუალოდ კი, თუ $(\rho_1 = b)$-ს ალბათობა p ცნობილია,

$$\mathbf{E}X_n = x[\mathbf{E}(1+\rho_1)\mathbf{E}(1+\rho_2)\cdots\mathbf{E}(1+\rho_n)] = x[1+(bp+aq)]^n$$

და N-მომენტისათვის საშუალოდ f_N-თანხის მისაღებად (ე.ი. $\mathbf{E}X_N = f_N$) მას სჭირდება საწყისი $X_0 = x$ კაპიტალი:

$$x = [1+(bp+aq)]^{-N} f_N.$$

ინვესტორს (B,S)-ბაზარზე მოქმედების მესამე გზაც აქვს – თავისი კაპიტალის ნაწილი შეუძლია დადოს საბანკო ანგარიშზე, დარჩენილი კი განათავსოს აქციებში.

B_0 – ერთი ობლიგაციის ფასია, S_0 – კი ერთი აქციის ფასია საწყის მომენტში. დავუშვათ, რომ $n=0$ მომენტში ინვესტორს გააჩნია β_0 ობლიგაცია და γ_0 აქცია (დასაშვებია β_0 და γ_0-ის ნებისმიერი წილადი და უარყოფითი მნიშვნელობები, რაც შეესატყვისება სიტუაციას, რომ

ერთ ფასიან ქაღალდს რამდენიმე ფლობს და ვალის აღებას: β_0-ს უარყოფითი მნიშვნელობა გამოხატავს სესხის აღებას დაბრუნების ნორმით $r \times 100\%$, γ_0-ის უარყოფითი მნიშვნელობა ნიშნავს აქციების სესხებას). ამიტომ საწყისი კაპიტალი

$$X_0 = \beta_0 X_0 + \gamma_0 S_0$$

და $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ ქმნის ინვესტორის პორტფელს (portfolio) საწყის $n = 0$ მომენტში. ბაზრის შემდეგი ფუნქციონირების (აქციის ახალი ფასის გამოცხადება) მომენტია $n = 1$. სანამ ეს მომენტი დადგება, ინვესტორს შეუძლია შეცვალოს თავისი პორტფელი $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ და მოახდინოს ახალი $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ პორტფელის ფორმირება მხოლოდ საწყის ინფორმაციაზე (B_0, S_0)-ზე დაყრდნობით და კაპიტალის გადინების (მაგალითად, მოხმარებაზე) გამორიცხვით. შეცვლილი პორტფელი $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_0)$ აძლევს საწყის კაპიტალს X_0 ახალ წარმოდგენას

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0.$$

ახლა ვნახოთ, თუ რა მოხდება $n = 1$ მომენტში. ინვესტორს არჩეული აქვს პორტფელი $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, აქციის ფასი გახდა S_1, ობლიგაციის კი B_1. ამიტომ $n = 1$ მომენტში ინვესტორის კაპიტალი X_1 გახდება:

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1$$

და კაპიტალის ნაზრდი $\Delta X_1 = X_1 - X_0$ შემდეგი სახისაა:

$$\Delta X_1 = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1.$$

ანალოგიურად ინვესტორი ემზადება $n = 2$ მომენტისათვის და ცვლის თავის $\pi = (\beta_1, \gamma_1)$-პორტფელს $\pi_2 = (\beta_2, \gamma_2)$-ზე. ამ შემთხვევაში X_1-ს ახალ წარმოდგენას ექნება სახე

$$X_1 = \beta_2 B_1 + \gamma_2 S_1,$$

ხოლო როცა გამოცხადდება $n = 2$ მომენტში აქციის ახალი ფასი S_2, ინვესტორის კაპიტალი X_2 გახდება

$$X_2 = \beta_2 B_2 + \gamma_2 S_2$$

და კაპიტალის ნაზრდი $\Delta X_2 = X_2 - X_1$, მიიღებს სახეს

$$\Delta X_2 = \beta_2 \Delta B_2 + \gamma_2 \Delta S_2$$

და ასე შემდეგ ნებისმიერი n-ისათვის

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$$

და

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n,$$

სადაც $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$-პორტფელი შედგენილია მხოლოდ ფასების წარსულ ინფორმაციაზე დაყრდნობით. ფორმალურად ეს ნიშნავს, რომ β_n და γ_n არიან $A^{S_1,\dots,S_{n-1}}$-ზომადები, სადაც $A^{S_0,S_1,\dots,S_{n-1}}$ არის დაყოფა წარმოქმნილი $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$-ით. კაპიტალის ნაზრდის ΔX_n-ის სახეა

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \tag{8}$$

ხოლო ჯამური კაპიტალია

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k). \tag{9}$$

ამ ტოლობის შინაარსი შემდეგშია: ინვესტორის $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$-კაპიტალის ფორმირება ხდება მხოლოდ ობლიგაციებისა და აქციების ფასებში $(\Delta B_k, \Delta S_k)$-ცვლილებების ხარჯზე და კაპიტალის რაიმე მოზიდვისა და გადინების გარეშე.

საზოგადოდ, ვინაიდან

$$X_n = \beta_n X_n + \gamma_n S_n,$$

მაშინ ფორმალურად მისი ნაზრდი იქნება

$$\begin{aligned}
\Delta X_n = X_n - X_{n-1} &= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_{n-1} B_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} = \\
&= \beta_n B_n - \beta_n B_{n-1} + \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_n - \\
&\quad - \gamma_n S_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \beta_{n-1} B_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} = \\
&= \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n,
\end{aligned} \tag{10}$$

თუ შევადარებთ (8) და (10). დავინახავთ, რომ პირობა (8)-ს მაგივრად შეიძლება ვისმაროთ პირობა

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0, \tag{11}$$

რაც ნიშნავს, რომ $\pi_k = (\beta_k, \gamma_k)$, $k \leq n$, ისეთებია, რომ კაპიტალის ცვალებადობა საბანკო ანგარიშზე $B_{n-1}\Delta\beta_1$ შეიძლება მოხდეს მხოლოდ შესაბამის აქციებში კაპიტალის $S_{n-1}\Delta\gamma_n$ ცვალებადობის ხარჯზე და პირიქით. სტრატეგიას $\pi = (\pi_n)$, $0 \leq n \leq N$, $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, რომელიც აკმაყოფილებს (11) პირობას, უწოდებენ **თვითდაფინანსებად** სტრატეგიას. თვითდაფინანსებად სტრატეგიების კლასს აღვნიშნავთ SF-ით (selffinancing).

თუ (8)-ში ჩავსვამთ ΔB_n-სა და ΔS_n-ს (4) და (5)-დან, მივიღებთ

$$\Delta X_n = rX_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r). \tag{12}$$

შემდგომში, რათა გავუსვათ ხაზი $X = (X_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, მიმდევრობის $\pi = (\pi_n)$, $0 \leq n \leq N$, სტრატეგიაზე დამოკიდებულებას, გამოვიყენებთ აღნიშვნას $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geq 0}$.

როგორც შევნიშნეთ, თვითდაფინანსებად სტრატეგიების კლასი აღინიშნება SF-ით და ეს ისეთი π სტრატეგიებია, რომლებისათვის სრულდება (11) პირობა, ე.ი.

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0.$$

ეს ეკვივალენტურია იმისა, რომ π-ს შესაბამისი კაპიტალი X წარმოდგება (9) სახით:

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k\Delta B_k + \gamma_k S_k).$$

§ 3. ჰეჯური სტრატეგიები და ინვესტიციის ფასი

დავუშვათ, რომ ინვესტორს შემდეგი პირობითი ფინანსური ვალდებულება აქვს შესასრულებელი $f_N(\omega) = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, სადაც ფუნქცია f_N დამოკიდებულია აქციის ფასის S მთელ რეალიზაციაზე $(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, ე.ი. შემთხვევითი მიმდევრობის რეალიზაციაზე. ეს

ნიშნავს, რომ N მომენტისთვის ინვესტორს სჭირდება თავისი კაპიტალის მიყვანა რაოდენობაზე, რომელიც f_N-ზე ნაკლები არ იქნება. განვიხილოთ მაგალითი: დავუშვათ, რომ $f_N = \max(S_0, S_1, \ldots, S_N)$. მაშინ, თუ $(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ მიმდევრობის შემთხვევაში $N = 5$ რეალიზაციაა US$-ში $(80, 85, 79, 80, 83, 82)$, მაშინ $\overline{f}_N = 85$ და თუ რეალიზაცია შემდეგია $(80, 81, 78, 83, 82, 81)$, მაშინ $\tilde{f}_N = 83$. აქედან კარგად ჩანს, რომ ვალდებულება პირობითი (შემთხვევითი) ხასიათისაა და დამოკიდებულია აქციის ფასების რეალიზაციაზე.

ინვესტორს შეუძლია, გამოიყენოს ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობები, თავისი საწყისი კაპიტალი, სტრატეგიების არჩევის დროს კი შეზღუდულია **თვითდაფინანსებად სტრატეგიების SF კლასით.**

ახლა განვიხილოთ, თუ რა არის **ჰეჯი**, ანუ ჰეჯური სტრატეგია. სიტყვა ჰეჯი (hedge) ინგლისურად მესერს ნიშნავს და ჰეჯურ სტრატეგიაში იგულისხმება დამცავი სტრატეგია, ე.ი. ისეთი სტრატეგია, რომელიც ყველა სიტუაციაში უზრუნველყოფს ფინანსური ვალდებულების შესრულებას. ზუსტი განმარტება კი შემდეგია: თვითდაფინანსებადი $\pi = (\pi_n)$-სტრატეგია არის ჰეჯი (ანუ ჰეჯური სტრატეგია), როდესაც ინვესტორის ნებისმიერი $\omega \in \Omega$ საწყისი კაპიტალი დადებითია $X_0^{\pi}(\omega) = x > 0$ და კაპიტალი ბოლო N-მომენტში $X_N^{\pi}(\omega) \geq f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ (S_0 მუდმივია და $S_0 > 0$, $S_n(\omega) = (1 + \rho(\omega)S_{n-1}(\omega))$. სიტყვები ნებისმიერი $\omega \in \Omega$ უნდა გავიგოთ ასე, რაც არ უნდა მოხდეს, აქციის ფასის რა რეალიზებაც არ უნდა იყოს.

π-ჰეჯს უწოდებენ მინიმალურს, თუ ყველა $\omega \in \Omega$ შესრულდება ტოლობა

$$X_N^{\pi}(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)).$$

შემოვიტანოთ **საინვესტიციო ფასის** C_N-ცნება. C_N სიდიდე – ესაა ის მინიმალური საწყისი კაპიტალი, რომელიც ინვესტორს აძლევს გარანტიას შესაბამისი $\pi^n = (\pi_n^*)_{0 \leq n \leq N}$ თვითდაფინანსებადი პორტფელის კონსტრუქციის საშუალებით ყველა $\omega \in \Omega$ (ყოველთვის) მიიღოს ბოლო N-მომენტში კაპიტალი არანაკლები ვიდრე დაგეგმილი

$f_N(\omega)$.

აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ჰეჯის განმარტების დროს მოვითხოვოთ დამატებითი პირობის $X_n^\pi \geq 0$ შესრულება ყველა $0 \leq n \leq N$.

ფასს C_N-ს უწოდებენ **სამართლიან ფასს**. სამართლიანია იგი ოფციონის მყიდველისა და გამყიდველის – ორივეს თვალსაზრისით. მართლაც, თუ ოფციონის გამყიდველს აქვს ეს C_N საწყისი თანხა (ოფციონის რეალიზაციიდან), იგი ბოლოს შეასრულებს ფინანსურ ვალდებულებას, თუკი მას C_N-ზე ნაკლები საწყისი თანხა ექნება, გამყიდველი ვერ შეასრულებს ვალდებულებას. C_N-ზე მეტი საწყისი თანხის დროს იგი რისკის გარეშე მიიღებს შემოსავალს (შეეძლო უკვე C_N-ით შეესრულებინა ფინანსური ვალდებულება, C_N-ს ჭარბი თანხა მას სუფთად დარჩა). ადგილი აქვს არბიტრაჟულ სიტუაციას.

§ 4. ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადება და ჰეჯირება ბინომიალურ ფინანსურ ბაზარზე

განვიხილოთ (B, S) ბინომიალური ფინანსური ბაზარი. დავუშვათ, რომ $\pi = \pi_n)$ – რაიმე თვითდაფინანსებადი სტრატეგიაა, $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \geq 1}$ – მისი შესატყვისი კაპიტალი, $X_0^\pi = x$. ვიხილავთ ევროპული ტიპის ოფციონს $f_N = f_N(\omega) = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ გადახდის ფუნქციითა და N-განაღდების მომენტით.

განვიხილოთ დისკონტირებული კაპიტალი

$$M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}, \qquad 0 \leq n \leq N.$$

ადრე უკვე ვაჩვენეთ (იხ. §3 ფორმულა (12)), რომ

$$\Delta X_n^\pi = r X_{n-1}^\pi + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r)$$

და ამ განტოლების გამოყენებით

$$\Delta M_n^\pi = M_n^\pi - M_{n-1}^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \frac{X_n^\pi - (1+r)X_n^\pi}{B_{n-1}(1+r)} =$$

$$= \frac{\Delta X_n^\pi - r X_n^\pi}{B_n} = \frac{\gamma_n S_{n-1}}{B_n}(\rho_n - r).$$

აღვნიშნოთ

$$m_n = \sum_{k=1}^{n}(\rho_k - r),$$

მაშინ

$$\Delta M_n^\pi = M_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k S_{k-1}}{B_k} \Delta M_k. \tag{1}$$

იმისათვის, რომ მიმდევრობა $(m_n)_{n\geq 1}$ იყოს მარტინგალი $(\mathcal{F}_n) = (\mathcal{A}^{S_0,S_1,\dots,S_n})$-ნაკადის და რაიმე $\mathbf{P}^*$-ალბათური ზომის მიმართ, უნდა შესრულდეს პირობა

$$\mathbf{E}^*(m_n|\mathcal{F}_{n-1}) = m_{n-1}$$

ან

$$\mathbf{E}^*[\Delta m_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

სადაც გასაშუალება შეესატყვისება $\mathbf{P}^*$-ალბათურ ზომას.

ვინაიდან $\Delta m_n = (\rho_n - r)$ და ρ_n დამოუკიდებელია $\mathcal{F}_{n-1}$-ზე, მარტინგალობის პირობა იქნება შემდეგი სახის

$$\mathbf{E}^*(\rho_n - r) = a(1-p^*) + np^* - r = (b-a)p^* - (r-a) = 0. \tag{2}$$

აქედან

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} \tag{3}$$

და ეს p^* განსაზღვრავს ერთადერთ ალბათურ ზომას $\mathbf{P}^*$-ს, რომლის მიმართ $(m_n, \mathcal{F}_n)$ მარტინგალია. ამ ზომის მიმართ ასევე მარტინგალია დისკონტირებული კაპიტალი $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n) = (\frac{X_n^\pi}{B_n}, \mathcal{F}_n)$, რაც პირდაპირ ჩანს (1)-დან და ასეთ ზომას, რომელიც თითოეული $\mathbf{P}$-ს, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, ეკვივალენტურია, **მარტინგალურ ალბათურ ზომას** უწოდებენ. ვინაიდან (2) განტოლებას ერთადერთი ამოხსნა აქვს წარმოდგენილი (3)-ით, ბინომიალურ ბაზარზე არსებობს ერთადერთი მარტინგალური ალბათური ზომა. თუ რა მნიშვნელობა აქვს ამას ფინანსებში, ამის შესახებ იხ. V თავის §1-ში.

ამ ფაქტის გამოყენებით, ე.ი. $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n)$ მარტინგალობით $\mathbf{P}^*$-ს მიმართ ხდება შესაძლებელი საწყისი და ტერმინალური X_N^π კაპიტალის დაკავშირება:

$$\mathbf{E}^*(1+r)^{-N} X_N^\pi = x$$

და ვინაიდან, თუ ოფციონის კონტრაქტის ვალდებულებაა $f_N = f_N(\omega) = f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$, ჰეჯირება კი ნიშნავს $X_N^\pi(\omega) = f_N(\omega)$, $\omega \in \Omega$, მაშინ აქედან

$$\frac{x}{B} = \mathbf{E}^*\Big(\frac{f_N}{B_N}\Big).$$

ამაზე დაყრდნობით და მარტინგალური მეთოდების გამოყენებით (აქ არ მოგვყავს) მტკიცდება ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადებისა და ჰეჯირების ძირითადი შედეგი: (B,S)-ბინომიალურ ფინანსურ ბაზარზე ევროპული ტიპის ოფციონის $f_N = f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$ გადახდის ფუნქციითა და განაღდების N-მომენტით სამართლიანი ფასი C_N განისაზღვრება ფორმულით

$$C_N = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N, \tag{4}$$

სადაც გასაშუალება წარმოებს მარტინგალური ალბათური ზომით $\mathbf{P}^*$ ისეთით, რომ

$$\mathbf{P}^*(\rho_1 = b) = p^* = \frac{r-a}{b-a}.$$

ჰეჯური სტრატეგიები $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ შემდეგი სახისაა

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* B_n}{S_{n-1}} \tag{5}$$

და

$$\beta_n^* = \frac{X_n^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}, \tag{6}$$

სადაც α_n^*, რომელიც საზოგადოდ $\mathcal{F}_{n-1}$-ზომადია, განისაზღვრება მარტინგალის $\mathrm{E}^*(\frac{f_N}{B_N}|\mathcal{F}_n)$ სპეციალური სახის წარმოდგენიდან. კონკრეტული სახის დადგენა ხერხდება გადახდის ფუნქციის f_N-ის კონკრეტული სახით და შემდეგ სწორედ f_N-ის სპეციალურ გამოსახულებათა შემთხვევებს განვიხილავთ.

თუ $f_N = f(S_N)$, ე.ი. თუ გადახდის ფუნქცია f_N დამოკიდებულია არა ყველა $S_0, S_1, \dots, S_N$-ზე, არამედ მხოლოდ აქციის ფასის ბოლო მნიშვნელობაზე S_N, მაშინ ასეთი ოფციონის სამართლიანი ფასია

$$C_N = (1+r)^{-N} F_N(S_0; p^*), \tag{7}$$

სადაც

$$F_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} f\big(x(1+b)^k(1+a)^{n-k}\big) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{8}$$

თვითდაფინანსებადი მინიმალური ჰეჯი $\pi^* = (\pi_n^*)_{0\le n\le N}$ შემდეგი სახისაა:

$$\begin{aligned}\gamma_n^* &= (1+r)^{-(N-n)} \times \\ &\times \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b);p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a);p^*)}{S_{n-1}(b-a)},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\beta_n^* = \frac{1}{B_N}\big\{&F_{N-n+1}(S_{n-1};p^*) - (1+r)\big[F_{N-n}(S_{n-1}(1+b);p^*) - \\ &- F_{N-n}(S_{n-1}(1+a);p^*)\big]\big\}.\end{aligned} \tag{10}$$

შემდეგი შედეგი ეკუთვნის კოქს, როსსა და რუბინშტეინს. **სტანდარტული გაყიდვის ევროპული ოფციონისათვის** $f(S_N) = (S_N - K)^+ = \max(0, S_N - K)$ გადახდის ფუნქციით სამართლიანი ფასი C_N შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$C_N = S_0 B(k_0, N; \widetilde{p}) - K(1+r)^{-N} B(k_0, N; p^*), \tag{11}$$

სადაც

$$\widetilde{p} = \frac{1+b}{1+r}p^*, \qquad (12)$$

$$B(j, N; , p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \qquad (13)$$

ხოლო k_0 ის უმცირესი მთელი რიცხვია, რომლისთვისაც

$$S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k_0} > K \qquad (14)$$

და თუ $k_0 > N$, მაშინ $C_N = 0$.

ამ შედეგიდან სტანდარტული ყიდვის ოფციონისათვის გადახდის $f(S_N) = (K - S_N)^+ = \max(0, K - S_N)$ ფუნქციით, ვინაიდან

$$\max(0, K - S_N) = \max(S_N - K, 0) - S_N + K,$$

მივიღებთ შემდეგი სახის სამართლიან ფასს:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N &= \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} \max(0, K - S_N) = \\ &= C_N - \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} S_N + K(1+r)^{-N}. \end{aligned}$$

მაგრამ $\mathbf{E}^* S_N = (1+r)^{-N} S_0$ და სამართლიანია ტოლობა

$$\mathbf{P}_N = C_N - S_0 + K(1+r)^{-N}, \qquad (15)$$

რომელსაც **კოლ-პუტ პარიტეტს** უწოდებენ.

მოყვანილი შედეგების საილუსტრაციოდ განვიხილავთ მაგალითებს.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი შემთხვევა $N = 1$. დავუშვათ, რომ ჩვენი (B, S) ბინომიალური ბაზარი შემდეგი სტრუქტურისაა: $B_n \equiv B_0 = 1$ (ე.ი. საპროცენტო განკვეთი $r = 0$), $S_0 = 1$ და $a = -\alpha$, $b = \alpha$, $0 < \alpha < 1$, ამიტომ ბინომიალური ხე შემდეგი სახისაა:

$$
\begin{tikzcd}
 & S_1^u = 1+\alpha \\
S_0 = 1 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & S_1^d = 1-\alpha
\end{tikzcd}
$$

ე.ი. როდესაც ფასის აწევა ხდება, მაშინ $S_1^u = 1+\alpha$-ის ტოლია, დაწევის დროს $S_1^d = 1-\alpha$.

ვიხილავთ სტანდარტული ყიდვის ოფციონს გადახდის ფუნქციით $f(x) = (x-1)^+$, ე.ი. სტრაიკი $K = 1$. ვიპოვოთ ამ ოფციონის სამართლიანი ფასი C_1 და მინიმალური ჰეჯი.

ჯერ გამოვითვალოთ ოფციონის სამართლიანი ფასი C_1. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ ფორმულები (11)–(14). ჩვენ შემთხვევაში $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$, ხოლო (12)-დან

$$\tilde{p} = \frac{1+\alpha}{2}$$

და (11)-დან

$$C_1 = B\Big(1,1;\frac{1+\alpha}{2}\Big) - B\Big(1,1;\frac{1}{2}\Big) = \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

ე.ი. ოფციონის სამართლიანის ფასია

$$C_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

ვიპოვოთ γ_1^*. ამისათვის გამოვიყენოთ (9):

$$\gamma_1^* = \frac{F_0(1+\alpha;\frac{1+\alpha}{2}) - F_0(1-\alpha;\frac{1+\alpha}{2})}{2\alpha} = \frac{f(1+\alpha) - f(1-\alpha)}{2\alpha} =$$
$$= \frac{\max(0,(1+\alpha)-1) - \max(0,(1-\alpha)-1)}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2},$$

ხოლო

$$\beta_1^* = X_0 - \gamma_1^* = C_1 - \gamma_1^* = \frac{\alpha-1}{2}$$

და

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

ტერმინალური კაპიტალი

$$X_1^{\pi^*} = \gamma_1^* S_1 + \beta_1^* B_1.$$

ვინაიდან აქციის ფასის აწევის დროს $S_1 = 1+\alpha$ და $B_1 = 1$, ამ შემთხვევისათვის ეს კაპიტალი

$$(X_1^u)^{\pi^*} = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{\alpha-1}{2} = \alpha.$$

ამ დროს $f(1+\alpha) = \max(0, (1+\alpha)-1) = \alpha$ და ემიტენტის კაპიტალი α საკმარისია ვალდებულების α შესასრულებად.

აქციის ფასის დაწევის შემთხვევაში

$$(X_1^d)^{\pi^*} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha-1}{2} = 0,$$

ხოლო ფინანსური ვალდებულება $f(1-\alpha) = \max(0, (1-\alpha)-1) = 0$ და მართლაც არ არის საჭირო რაიმე კაპიტალი ვალდებულების შესასრულებლად.

შემდეგი მაგალითი მეტად საინტერესო და პოპულარულია.

მაგალითი 2. ამ მაგალითში (B, S) ბინომიალური ბაზარი **ვალუტის ბაზარია.** ისევ ვიხილავთ, როგორც მაგალით 1-ში ერთნაბიჯიან ამოცანას $N = 1$. დავუშვათ, რომ S-ით აღიწერება 100 USS დოლარის ფასის ევოლუცია, რომელიც შვეიცარიის ფრანკებში იზომება. დავუშვათ $S_0 = 150$ SFR (SFR – შვეიცარული ფრანკი) და ფასი S_1 $N = 1$ მომენტში შეიძლება გახდეს 180 SFR (კურსის აწევა) ან 90 SFR (კურსის დაწევა). ვინაიდან

$$S_1 = S_0(1+\rho_1),$$

აქ ρ_1 ღებულობს ორ მნიშვნელობას $b = \frac{1}{5}$ (დოლარის კურსის აწევის დროს) და $a = -\frac{2}{5}$ (დოლარის კურსის დაწევის დროს).

დავუშვათ ასევე, რომ $B_0 = 1$ SFR და $r = 0$, ე.ი. საბანკო ანგარიშზე სესხის დადებას მოგება არ მოაქვს, მაგრამ სესხის აღების შემთხვევაში მის დაბრუნებისას პროცენტს არ ართმევენ. ვიხილავთ ყიდვის ოფციონს გადახდის ფუნქციით $f(S_1) = \max(0, S_1 - K)$, სადაც სტრაიკი $K = 150$ SFR, ე.ი. კურსის აწევისას ოფციონის მფლობელი მიიღებს 180 SFR−150 SFR= 30 SFR, კურსის დაცემისას არაფერს არ მიიღებს $f(S_1) = 0$.

დავუშვათ, რომ დოლარის კურსის აწევა ხდება ალბათობით $\frac{1}{2}$ (ე.ი. $\mathbf{P}(\rho_1 = b) = \mathbf{P}(\rho_1 = a) = \frac{1}{2}$), მაშინ

$$\mathbf{E}f(S_1) = 30\,\frac{1}{2} + 0\,\frac{1}{2} = 15$$

და ალბათობის თეორიის კლასიკურ მოსაზრებებზე დაყრდნობით ეს უნდა ჩაითვალოს ოფციონის ფასად. მაგრამ მიღებული მნიშვნელობა არსებითად არის დამოკიდებული, თუ რას დავუშვებთ აწევის და დაწევის p და q-ს ალბათობების მნიშვნელობად. თუ, მაგალითად, $p = \frac{1}{3}$, მაშინ $\mathbf{E}f(S_1) = 10$ და ასე p-ს სხვა მნიშვნელობების დროს.

მოყვანილი ოფციონის ფასდადებისა და ჰეჯირების თეორია არაა დამოკიდებული p-ს მნიშვნელობაზე. ყველა გათვლები ხდება p^*-ალბათობის გამოყენებით, რომელიც ტოლია

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0+\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{2}{3},$$

და (11)-(14)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავთვალოთ სამართლიანი ფასი C_1. აქ k_0 უდრის 1-ს და

$$C_1 = S_0 p^*(1+b) - K p^* = S_0 p^* b = 150\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{5} = 20,$$

ე.ი. ოფციონის გამყიდველი მყიდველისგან მიიღებს 20 SFR და მისი საწყისი კაპიტალი იქნება სწორედ ეს $X_0 = 20$ SFR. ვინაიდან $S_0 = 150$, $B_0 = 1$ და

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$$

შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\beta_0 = 0$ და $\gamma_0 = \frac{2}{15}$.

$N = 1$ მომენტის წინ გამყიდველი ისე ცვლის თავის საწყის პორტფელს (β_0, γ_0)-ს პორტფელზე (β_1, γ_1), რომ $N = 1$ მომენტში შესრულდეს ოფციონის კონტრაქტის პირობები.

ოპტიმალური მნიშვნელობა $\gamma_1 = \gamma_1^*$ გამოითვლება (9)-დან

$$\gamma_1^* = \frac{F_0(S_0(1+b);p^*) - F_0(S_0(1+a);p^*)}{S_0(b-a)} =$$

$$= \frac{f(S_0(1+b)) - f_0(S_0(1+a))}{S_0(b-a)} = \frac{f(S_0(1+b))}{S_0(b-a)} =$$

$$= \frac{\max\{0, S_0(1+b) - K\}}{S_0(b-a)} = \frac{b}{b-a} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}.$$

ვინაიდან $X_0 = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0$ და $B_0 = 1$, აქედან

$$\beta_1^* = X_0 - \gamma_1^* S_0 = 20 - \frac{1}{3} \cdot 150 = -30.$$

ამ პორტფელის $\pi_1^* = (-30, \frac{1}{3})$ ინტერპრეტაცია შემდეგია: β_1^*-ის უარყოფითი მნიშვნელობა ნიშნავს, რომ ემიტენტი სესხულობს 30 SFR, ე.ი. ემიტენტს პრემიის სახით ოფციონის გაყიდვიდან ჰქონდა 20 SFR, ისესხა 30 SFR და გაუხდა 50 SFR. ამ 50 SFR-ად მას შეუძლია შეიძინოს 33.33 US\$ (კურსით ≪ 150 SFR = 100 US\$≫), ვინაიდან $\gamma_1^* = \frac{1}{3}$. ორი სიტუაციაა შესაძლებელი $N = 1$ მომენტის შემდეგ, როდესაც დოლარის ახალი კურსი გამოცხადდება.

1) კურსი აიწია ≪ 100 US = 180 SFR ≫. ამ შემთხვევაში ემიტენტმა ოფციონის მფლობელს უნდა გადაუხადოს $\max(0, 180 - 150) = 30$ (SFR) და ამის გაკეთება მართლაც შეუძლია, ვინაიდან მისი კაპიტალია

$$X_1^* = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -30 + \frac{1}{3} 180 = 30\,(\mathrm{SFR}),$$

რომლის ინტერპრეტაცია ასეც შეიძლება: $\gamma_1^* S_1$ იქნება $\frac{1}{3} 180 = 60$ (SFR) ტოლი და იგი საკმარისია, რომ ემიტენტმა დააბრუნოს ვალი 30 SFR და გადაუხადოს ოფციონის მფლობელს 30 SFR.

2) კურსი დაიწია და $\ll 100\,\mathrm{US} = 90\,\mathrm{SFR} \gg$. ამ შემთხვევაში $f(S_1) = 0$. ე.ი. ემიტენტი არაფერს არ უხდის ოფციონის მფლობელს, მაგრამ უნდა გადაიხადოს ვალი 30 SFR, რომელიც მან აიღო საბანკო ანგარიშიდან. მაგრამ მას 33.33 US (ე.ი. $\gamma_1^* \cdot 100 = \frac{1}{3} \cdot 100$) გააჩნია და მისი გადაცვლით შვეიცარიულ ფრანკებში (კურსით $\ll 100\,\mathrm{US} = 90\,\mathrm{SFR} \gg$) მიიღებს ზუსტად 30 SFR, რომელსაც დააბრუნებს საბანკო აგარიშზე.

ამოცანა 1. იპოვეთ გაყიდვის ოფციონის ფასი პირველი მაგალითის შემთხვევაში.

ამოცანა 2. იპოვეთ გაყიდვის ოფციონის ფასი მეორე მაგალითის შემთხვევაში.

ამოცანა 3. აჩვენეთ, რომ $C_{N_2} \geq C_{N_1}$ და $\mathbf{P}_{N_2} \geq \mathbf{P}_{N_1}$, როდესაც $N_2 \geq N_1$.

§ 5. ამერიკული ოფციონები, დისკრეტული დრო, ბინომიალური მოდელი

როგორც ცნობილია **ევროპული ტიპის** ოფციონები ხასიათდებიან იმით, რომ მათი მფლობელი იყენებს თავის უფლებას და ოფციონის ალსრულებას აწარმოებს წინასწარ განსაზღვრულ N დღეს, რომელიც მითითებულია კონტრაქტში.

ფინანსურ პრაქტიკაში უფრო ფართო გავრცელება პოვეს, ეგრეთ წოდებულმა, **ამერიკული ტიპის** ოფციონებმა, რომლებიც იმით განსხვავდებიან ევროპული ტიპის ოფციონებისაგან, რომ კონტრაქტში წინასწარ არ არის ფიქსირებული ალსრულების დღე და ოფციონის მფლობელს შეუძლია ალასრულოს თავისი უფლება ნებისმიერ მომენტში სიმრავლიდან $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

გასაგებია, რომ ასეთი ოფციონის მფლობელისათვის ეს მეორადი ფასიანი ქალალდი საკმაოდ მიმზიდველია, ვინაიდან მფლობელი პროცესის აქტიური მონაწილე ხდება, რადგანაც მან უნდა გადაწყვიტოს როდის წარადგინოს ოფციონი განალდებისათვის, ე.ი. უნდა იპოვოს ოპტიმალური პასუხი კითხვაზე – როდის სჯობს ოფციონის წარდგენა, რომ წაგებაში არ დარჩეს.

მიუხედავად იმისა, რომ ფასდადებისა და ჰეჯირების პრობლემები ევროპული ტიპის ოფციონებთან შედარებით ამერიკული ტიპის ოფციონებისათვის საგრძნობლად რთულდება, მსოფლიოში დადებული ოფციონური კონტრაქტების უმეტესი ნაწილი მაინც მოდის ამერიკული ტიპის ოფციონებზე.

განვიხილოთ, თუ კონკრეტულად რა არის მითითებული ამერიკული ტიპის ოფციონურ კონტრაქტში. ცხადია, მითითებულია ყველა ის მომენტი, როდესაც შესაძლებელია ოფციონის წარდგენა გასანაღდებლად, ესენია $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

გარდა ამისა ნაჩვენებია გადახდის ფუნქციათა (გასამრჯელოთა) მიმდევრობა

$$f = \{ f_0(S_0), f_1(S_0, S_1), f_2(S_0, S_2, S_2), \dots, f_n(S_0, S_1, \dots, S_n), \\ \dots, f_N(S_0, S_1, \dots, S_N) \}, \qquad (1)$$

სადაც თითოეული $f_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$ წარმოადგენს ოფციონის მფლობელის გასამრჯელოს (მას ამ თანხას უხდიან), თუ კი იგი n-მომენტში წარადგენს ოფციონს გასანაღდებლად და აქციათა ფასების რეალიზაცია ამ მომანტისათვის იქნება $(S_0, S_1, \dots, S_n)$.

მაგალითი 1. a) დავუშვათ, რომ $N = 6$ და $f_n = \max(S_0, S_1, \dots, S_n)$. დავუშვათ ასევე, რომ აქციათა ფასების რეალიზაციაა US$

$$(S_0 = 10,\ S_1 = 9,\ S_2 = 10,\ S_3 = 10,\ S_4 = 11,\ S_5 = 11,5,\ S_6 = 11).$$

მაშინ გადახდის ფუნქციათა მნიშვნელობები იქნება

$$f = \{ f_0 = 10,\ f_1 = 10,\ f_2 = 10,\ f_3 = 10,\ f_4 = 11, \\ f_5 = 11,5,\ f_6 = 11,5 \}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ოფციონის განაღდებას მისი მფლობელი გადაწყვეტს $n = 4$ მომენტში, იგი მიიღებს გასამრჯელოს $f_4 = 11$-ს. უკეთესი იყო, რომ ოფციონის დასაფარავად ამ სიტუაციაში იგი მისულიყო $n = 5$ ან $n = 6$ მომენტში. მაგრამ საქმე ისაა, რომ $n = 4$ მომენტში ოფციონის მფლობელმა ხომ არ იცის როგორი იქნება $n = 5$

და $n = 6$ მომენტებში აქციის ფასები. მას უხდება ყოველ მომენტში გადაწყვეტილების მიღება, გაანაღდოს თავისი ოფციონი თუ არა.

b) თუ კი აქციათა ფასების ევოლუცია სხვაა a)-პუნქტთან შედარებით:

$$(S_0 = 10,\ S_1 = 9,\ S_2 = 11,2,\ S_3 = 11,6,\ S_4 = 12,\ S_5 = 12,2,\ S_6 = 12),$$

მაშინ f-ფუნქციათა სისტემის მნიშვნელობები იქნება

$$f = \{f_0 = 10,\ f_1 = 10,\ f_2 = 11,2,\ f_3 = 11,6,\ f_4 = 12,\ f_5 = 12,2,\ f_6 = 12,2\}.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $n = 4$-მომენტისათვის ოფციონის მფლობელი გასამრჯელოდ მიიღებს $f_4 = 12$-ს და არა $f_4 = 11$, როგორც a)-პუნქტში იყო. აქედან ნათლად ჩანს, რომ ვალდებულებას $f_n = \max(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ შემთხვევითი ხასიათი აქვს და დამოკიდებულია იმაზე, თუ აქციათა ფასების როგორ რეალიზაციაა განხორციელებული.

მაგალითი 2. სტანდარტული ყიდვის ოფციონის დროს გადახდის ფუნქციათა სისტემაა

$$f = \{f_0 = |S_0 - K|^+,\ f_1 = |S_1 - K|^+, \ldots,\ f_n = |S_n - K|^+, \ldots, f_N = |S_N - K|^+\},$$

სადაც K მოცემული დადებითი მუდმივაა, ხოლო სტანდარტული გაყიდვის ოფციონის დროს

$$f = \{f_0 = |K - S_0|^+,\ f_1 = |K - S_1|^+, \ldots,\ f_n = |K - S_n|^+, \ldots, f_N = |K - S_N|^+\}.$$

ამერიკული ოფციონის მფლობელი (B, S)-ბაზრის ისტორიიდან გამომდინარე, უნდა შეეცადოს სწორედ აირჩიოს განაღდების მომენტი τ და ეს მომენტი უნდა აირჩეს იმ ინფორმაციაზე დაყრდნობით, რომლებსაც აქციების ფასები იძლევიან. საზოგადოდ, τ შემთხვევითი სიდიდეა და წარმოადგენს, ეგრეთ წოდებულ, მარკოვის მომენტს.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\tau = \tau(\omega)$, $\omega \in \Omega$, ისეთი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც "მომავალზე არაა დამოკიდებული" და ყოველ n-მომენტში მხოლოდ იმ ინფორმაციით განისაზღვრება, რომელიც ამ მომენტისთვის არსებობს აქციის ფასების შესახებ – $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. გასაგებია, რომ ამ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

განვიხილოთ ემიტენტის ((B, S)-ბაზრის მონაწილე, რომელიც უშვებს ფასიან ქაღალდს – ოფციონს ამ შემთხვევაში) პრობლემა. მას საწყის მომენტში ოფციონის რეალიზაციიდან შემოსდის x-თანხა. თუ f-გადახდის ფუნქციათა (გასამრჯელოთა) სისტემა განისაზღვრება (1)-ით, მაშინ იტყვიან, რომ ემიტენტის სტრატეგია $\pi = (\pi_n) = (\beta_n, \gamma_n)$[8] წარმოადგენს (x, f, N) - ამერიკული ტიპის ჰეჯს, თუ ნებისმიერ ω-სთვის ($\omega \in \Omega = \{-1, 1\}^N$) ემიტენტის საწყისი კაპიტალი

$$X_0^\pi(\omega) = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = x \tag{2}$$

და ყველა $0 \leq n \leq N$ მისი კაპიტალი n-მომენტისათვის

$$\begin{aligned} X_n^\pi(\omega) &= \beta_n(\omega) B_n + \gamma_n(\omega) S_n(\omega) \geq \\ &\geq f_n(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

ე.ი. ემიტენტის კაპიტალი ყოველთვის მეტია f_n-ზე და ემიტენტი ფინანსური ვალდებულების შესრულებას ყოველთვის შეძლებს.

თუ რაიმე მარკოვის $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\omega)$ მომენტისათვის

$$X_{\tilde{\tau}(\omega)}^{\tilde{\pi}}(\omega) = f_{\tilde{\tau}(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{\tilde{\tau}(\omega)}(\omega)), \quad \omega \in \Omega, \tag{4}$$

მაშინ ამ $\tilde{\pi}$-სტრატეგიას (ანუ ამ (x, f, N)-ჰეჯს) უწოდებენ **მინიმალურს**.

ამერიკული ოფციონის **სამართლიანი, ანუ რაციონალური**, ფასი იქნება ის ყველაზე მცირე x, რომლის დროსაც (2), (3) და (4) შესრულდება, ე.ი. ის უმცირესი საწყისი კაპიტალი, რომელიც უზრუნ-

[8] β_n – ობლიგაციათა რაოდენობა პორტფელში n-მომენტისათვის, ხოლო γ_n – აქციათა რაოდენობა.

ველყოფს ყოველთვის ემიტენტის მხრიდან ოფციონის კონტრაქტის ფინანსური ვალდებულების შესრულებას და ამ სამართლიან ფასს აღნიშნავენ C_N^*-ით, ხოლო მარკოვის მომენტს $\tau^* = \tau^*(\omega)$, რომლისთვისაც საწყის C_N^*-კაპიტალის დროს და ნებისმიერი ემიტენტის თვითდაფინანსებადი π-სტრატეგიისათვის თვისებით (3), სინამდვილეში

$$X^{\pi}_{\tau^*(\omega)} = f_{\tau^*(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{\tau^*(\omega)}(\omega)),$$

ეწოდება **რაციონალური (ოპტიმალური) ოფციონის აღსრულების (დაფარვის) მომენტი.**

დავუშვათ, რომ სტრატეგია $\pi = (\beta, \gamma)$ რაიმე თვითდაფინანსებადი სტრატეგიაა, ე.ი. ისეთი, რომ

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0.$$

ამ პირობის გათვალისწინებით, როგორც ადრეც აღვნიშნავდით, ამ თვითდაფინანსებადი π სტრატეგიის შესაბამისი კაპიტალი n-მომენტისთვის

$$X_n^{\pi} = \beta_n X_n + \gamma_n S_n$$

შემდეგი წარმოდგენისაა

$$X_n^{\pi} = X_0^{\pi} + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k)$$

და დისკონტირებული კაპიტალი

$$M_n^{\pi} = \frac{X_n^{\pi}}{B_n}$$

წარმოადგენს მარტინგალის $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}^{S_0, S_1, \ldots, S_n}$-ნაკადისა და მარტინგალური $\mathbf{P}^*$-ზომის მიმართ, რომელიც განისაზღვრება ალბათობით

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}.$$

M_n^{π}-ის მარტინგალობიდან გამომდინარე ($\mathbf{E}^*$– გასაშუალებაა $\mathbf{P}^*$-მარტინგალური ალბათობით)

$$\mathbf{E}^* M_{\tau}^{\pi} = M_0^{\pi},$$

ე.ი.

$$X_0^\pi = \mathrm{E}^*(1+r)^{-\tau} X_\tau^\pi. \tag{5}$$

დავუშვათ, რომ ეს π-სტრატეგია წარმოადგენს (x, f, N)-ჰეჯს, ე.ი.

$$X_0^\pi = x$$

და

$$X_n^\pi(\omega) \geq f_n(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega))$$

ყველა $0 \leq n \leq N$. მაშინ გამოსახულება (5)-დან

$$x \geq \sup \mathrm{E}^*(1+r)^{-\tau} f_\tau,$$

სადაც sup აღებულია ყველა მარკოვის მომენტით $0 \leq \tau \leq N$. თუ ჰეჯი π მინიმალურია, ე.ი. არსებობს ისეთი მარკოვის მომენტი σ, რომ ყველა ω-სთვის $X_\sigma^\pi = f_\sigma$, მაშინ

$$x = X_0^\pi = \mathrm{E}^*(1+r)^{-\sigma} X_\sigma^\pi = \mathrm{E}^*(1+r)^{-\sigma} f_\sigma$$

და გვაქვს

$$x = \sup_\tau \mathrm{E}^*(1+r)^{-\tau} f_\tau, \tag{6}$$

ე.ი. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ეს პირობა (6) აუცილებელი პირობაა, ე.ი. ემიტენტის საწყის კაპიტალსა x-ს და გადახდის ფუნქციათა შორის აუცილებლად სამართლიანია გამოსახულება (6), სადაც სუპრემუმი აღებულია ყველა მარკოვის მომენტისათვის $0 \leq \tau \leq N$.

მარტინგალური მეთოდების გამოყენებით მტკიცდება (აქ არ მოგვყავს), რომ პირობა (6) როგორც აუცილებელი, ასევე საკმარისი პირობაცაა. ამ ფაქტზე დაყრდნობით ამერიკული ოფციონის ფასდადების ძირითად შედეგს შემდეგი სახე აქვს: (B, S)-ფინანსური ბაზრის ბინომიალურ მოდელში ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N^* = \sup \mathrm{E}^*(1+r)^{-\tau} f_\tau, \tag{7}$$

სადაც სუპრემუმი აღებულია ყველა მარკოვის მომენტით $\tau = \tau(\omega)$, რომელიც $0 \leq \tau(\omega) \leq N$, $\omega \in \Omega$ და ეს სუპრემუმი მიიღწევა რაიმე

მარკოვის მომენტზე τ^*-ზე. ეს მომენტი τ^* არის **რაციონალური** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\mathbf{E}^*(1+r)^{-\tau^*} f_{\tau^*} = \sup_{\tau} \mathbf{E}^*(1+r)^{-\tau} f_{\tau}. \tag{8}$$

აქედან ჩანს, რომ (8) არის ამოსავალი ამ რაციონალური მომენტის, ე.ი. ისეთი მომენტის, როდესაც მიზანშეწონილია ოფციონის დაფარვა, პოვნისათვის. კარგად ცნობილია, რომ $\sup_{\tau} \mathbf{E}^*(1+r)^{-\tau} f_{\tau}$ მოძებნის ამოცანა წარმოადგენს შემთხვევითი პროცესების (ამ შემთხვევაში შემთხვევითი მიდევრობების) **ოპტიმალური გაჩერების ამოცანას** და მისი ამოხსნა ყოველთვის დიდ სირთულეებთანაა დაკავშირებული.

§ 6. ამერიკული ოფციონი აქციის ფასის სიმეტრიული გეომეტრიული ხეტიალით წარმოდგენის დროს

აქ განვიხილავთ ამოცანას შედარებით გამარტივებულ პირობებში. დავუშვათ, რომ

$$f_n(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)) = \beta^n g(S_n(\omega)), \qquad \omega \in \Omega,$$

სადაც $0 < \beta < 1$ და ყიდვის ოფციონისავის $g(x) = (x - K)^+ = \max(0, x - K)$, ხოლო გაყიდვის ოფციონისათვის $g(x) = (K - x)^+$, სადაც $K > 0$. როგორც ვიცით, ჩვენ ბინომიალურ მოდელში აქციის ფასის ევოლუცია მოცემულია გამოსახულებით

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n),$$

სადაც (ρ_n) – დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა ორი მნიშვნელობით b და a, $-1 < a < r < b$, შესაბამისი ალბათობებით (მარტინგალური ალბათობებით)

$$p^* = \frac{r - a}{b - a} \qquad \text{და} \qquad q^* = 1 - p^*.$$

დავუშვათ, რომ

$$1 + b = \lambda,$$
$$1 + a = \lambda^{-1},$$

სადაც $\lambda > 1$.

ამ შემთხვევაში აქციის ფასის $(S_n)_{n\geq 0}$ ევოლუცია გამოისახება შემდეგნაირად

$$S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}, \tag{1}$$

სადაც

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \rho_n = \lambda - 1, \\ -1, & \text{თუ } \rho_n = \lambda^{-1} - 1,. \end{cases}$$

აქციის ფასი $S = (S_n)_{n\geq 0}$ გამოსახული (1)-ით წარმოადგენს ერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს და მას უწოდებენ **სიმეტრიულ გეომეტრიულ ხეტიალს** მდგომარეობებით $E = \{\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

დავუშვათ, რომ $S_0 = x$ და $n \geq 0$.

ავღნიშნოთ

$$V_n(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq n} E_x (1 + r)^{-\tau} \beta^\tau g(S_\tau), \tag{2}$$

სადაც $0 < \beta < 1$. E_x – ნიშნავს გასაშუალებას ალბათური ზომით $\mathbf{P}_x$, $x \in E$, ისეთით, რომ $\mathbf{P}_x(S_0 = x) = 1$ და ამ ზომის მიმართ მიმდევრობა $\rho_1, \rho_2, \dots$ არის დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეების მიმდევრობა, რომლებისათვის

$$\mathbf{P}_x(\rho_1 = \lambda - 1) = p^* \quad \text{და} \quad \mathbf{P}_x(\rho_1 = \lambda^{-1} - 1) = 1 - p^*$$

ყველა $x \in E$-სათვის. აქ

$$p^* = \frac{\lambda(r + 1) - 1}{\lambda^2 - 1}.$$

შემდეგ p^*-ს მაგივრად ვიხმართ p-ს ვარსკვლავის გარეშე.

აღვნიშნოთ $m \geq 0$-სათვის

$$D_m = \{x : V_m(x) = g(x)\}, \qquad (3)$$

$$C_m = \{x : V_m(x) > g(x)\}. \qquad (4)$$

პირველი მათგანი წარმოადგენს ისეთი x-ების E-დან სიმრავლეს, რომელთათვისაც ფიქსირებული m-სათვის $V_m(x)$-განსაზღვრული (2)-ით უდრის $g(x)$, ხოლო მეორე – ისეთ x-ების სიმრავლეს, რომელთათვისაც $V_m(x) > g(x)$-ზე.

ადვილი დასანახია, რომ

$$C_n \supseteq C_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq C_0 = \varnothing$$

და

$$D_n \subseteq D_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq D_0 = E,$$

ე.ი. ყველა C_n-ებს შორის ყველაზე ღარიბია C_0 (იგი ცარიელი სიმრავლეა) და ყველა D_n-ებიდან ყველაზე მდიდარი D_0-ია (იგი მთელ E-ს წარმოადგენს).

მარკოვის მიმდევრობათა ოპტიმალური გაჩერების თეორიიდან (ჩვენი მიმდევრობა (S_n), განსაზღვრული (1)-ით სწორედ ასეთია), რომელიც საფუძვლად უდევს ამერიკული ოფციონის ფასდადების პრინციპებს, ოპტიმალურია მარკოვის მომენტი

$$\tau_n = \min\{0 \leq m \leq n : V_{n-m}(S_m) = g(S_m)\}, \qquad (5)$$

ე.ი. ეს მომენტი ისეთია, რომ

$$E_x(1+r)^{-\tau_n}\beta_{\tau_n} g(S_{\tau_n}) = V_n(x)$$

(ეს მომენტი ოპტიმალურია ყველა τ-სთვის, რომელიც $0 \leq \tau \leq n$).

პირდაპირ ჩანს (5) და (3)-დან, რომ

$$\tau_n = \min\{0 \leq m \leq n : \ S_m \in D_{n-m}\}.$$

ეს ამართლებს სახელწოდებას: სიმრავლეებს $D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0$ უწოდებენ **გაჩერების არეებს**, ხოლო სიმრავლეებს $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_0$ კი – **გაგრძელების არეებს.** ეს ასე უნდა გავიგოთ, თუ $S_0 \in D_n$, მაშინ დაკვირვება წყდება, თუკი $S_0 \in C_n$, მაშინ დაკვირვება გრძელდება. თუ $S_1 \in D_{n-1}$, მაშინ დაკვირვება წყდება, ხოლო თუ

$S_1 \in C_{n-1}$, მაშინ გრძელდება და ა.შ. შევნიშნოთ, რომ n-მომენტში $D_0 = E$, რაც დაკვირვების შეწყვეტას ნიშნავს. ემიტენტისათვის დაკვირვების შეწყვეტა ნიშნავს იმ მომენტში, როცა ეს მოხდა, ოფციონის წარდგენას დასაფარავად.

ოპტიმალური გაჩერების თეორიის გამოყენებით მტკიცდება, რომ არსებობენ ისეთი β-ზე დამოკიდებული რიცხვები $K_1^*(\beta), K_2^*(\beta), \ldots, K_n^*(\beta)$, დალაგებულები ზრდის მიხედვით $K_1^*(\beta) \le K_2^*(\beta) \le \cdots \le K_n^*$ და გაჩერების არეებია

$$D_n = \{x = \lambda^k,\ k \ge K_n^*\},$$

ოპტიმალური მომენტი τ_n^*, მარკოვის მომენტთა კლასში მნიშვნელობებით $\{0, 1, \ldots, n\}$-დან, შემდეგი სტრუქტურისაა

$$\tau_n^* = \min\{0 \le m \le n:\ S_m \in [\lambda^{K_{n-m}^*(\beta)}, \infty)\},$$
$$K_0^*(\beta) = -\infty.$$

პრობლემის გადაწყვეტა უფრო რთულია, როდესაც $0 \le n \le N$ და $N < \infty$, ვიდრე შემთხვევაში $N \to \infty$ და სწორედ ამ ბოლო შემთხვევას განვიხილავთ.

ვინაიდან

$$V_0(x) \le V_1(x) \le \cdots,$$

მაშინ არსებობს

$$V(x) = \lim_{n \to \infty} V_n(x)$$

და

$$V(x) = \sup_\tau E_x\Big(\frac{\beta}{1+r}\Big)^\tau g(S_\tau).$$

ოპტიმალური მარკოვის მომენტი

$$\tau_\infty = \inf\{n:\ V(S_n) = g(S_n)\}$$

პირობაში, რომ

$$\mathbf{P}_x(\tau_\infty < \infty) = 1, \qquad x \in E,$$

და

$$V(x) = E_x\Big(\frac{\beta}{1+r}\Big)^{\tau_\infty} g(S_{\tau_\infty}). \tag{6}$$

თუ ავიღეთ

$$K^*(\beta) = \lim_{n\to\infty} K_n^*(\beta),$$

მაშინ

$$\tau^*(\beta) = \inf\{n: \; S_n \in D^* = [\lambda^{K^*(\beta)}, \infty)\}$$

და პრობლემა დადის $K^*(\beta)$-ს და $V(x)$-ფუნქციის მოძებნაზე.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\beta = 1$ და $g(x) = (x-1)^+$, მაშინ $V(x) = x$ და გაჩერების ოპტიმალური მომენტი (სასრულ მომენტთა კლასში) არ არსებობს. აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ როდესაც $0 \le n \le N < \infty$ და $\beta = 1$, მაშინ განხილული ამერიკული ყიდვის ოფციონი ემთხვევა შესაბამის ევროპული ტიპის ოფციონს ალსრულების N-მომენტით.

განვიხილოთ შემთხვევა $0 < \beta < 1$, მაშინ

$$V(x) = \begin{cases} Cx^\gamma, & x < x^*(\beta) = \lambda^{K^*(\beta)}, \\ x - 1 & x \ge x^*(\beta), \end{cases} \tag{7}$$

სადაც

$$C = \min(B_1, B_2),$$

$$x^*(\beta) = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]}, & \text{თუ } C = B_1, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]+1}, & \text{თუ } C = B_2 \end{cases} \tag{8}$$

და

$$B_1 = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]} - 1)\lambda^{-\gamma[\log_\lambda \widetilde{x}]},$$

$$B_2 = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]+1} - 1)\lambda^{-\gamma[\log_\lambda \widetilde{x}]-\gamma},$$

$[y]$ – y-ის მთელი ნაწილია.

$$\tilde{x} = \frac{\gamma}{\gamma - 1},$$

$$\gamma = \log_\lambda \left(\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}\right),$$

$$A = \frac{1 + r}{\rho p}, \qquad B = \frac{1 - p}{p}.$$

აქ დაკვირვების გაგრძელების არე არის

$$(0, \lambda^{K^*(\beta)}) = (0, x^*(\beta)).$$

მიღებული შედეგის ინტერპრეტაცია შემდეგია: ყოველ ნაბიჯზე n ვუყურებთ აქციის ფასის S_n-ის მნიშვნელობას, როდესაც იგი პირველად გადააჭარბებას $x^*(\beta)$, განსაზღვრულს (8)-დან, მაშინვე უნდა წარვადგინოთ ოფციონი გასანაღდებლად. გამოსახულებების წინა §5-დან (7)-ის და (6), (7)-ის შედარება გვიჩვენებს, რომ სამართლიანი ფასი C_N^* ამ ამერიკული ყიდვის დისკონტირებული ოფციონისა გადახდის ფუნქციათა სისტემით $f = \{f_n = \beta(S_n - 1)^+\}$ განისაზღვრება (7), (8)-იდან, რომელშიც $\tilde{x}$-ის მაგივრად უნდა ჩავსვათ S_0.

შესაძლებელია ასევე გაყიდვის ოფციონის შესწავლა, რასაც ჩვენ აქ აღარ შევეხებით.

თავი V

ზოგადი სრული და არასრული (B,S)-ფინანსური ბაზრები, დისკრეტული დრო

§ 1. არბიტრაჟი, მარტინგალური ზომა (ალბათობა), ბაზრის სისრულე

განვიხილოთ ზოგადი (B,S)-ფინანსური ბაზარი დისკრეტული დროის შემთხვევაში, ე.ი საბანკო ანგარიშის ფასების ევოლუცია აღიწერება რაიმე (დაკონკრეტების გარეშე) დეტერმინირებული დადებითი მიმდევრობით $B=(B_n)$, $0\le n\le N$, ხოლო აქციის ფასების ევოლუცია ასევე რაიმე დადებითი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობით $S=(S_n(\omega)$, $0\le n\le N$. შესაძლებელია S ვექტორულიც იყოს (ე.ი. მაშინ განიხილება მრავალი აქციის შემთხვევა). ცხადია, ეს შემთხვევითი სიდიდეები მოცემული არიან საბაზო დისკრეტულ ალბათურ სივრცეზე ფილტრაციით $(\Omega,\mathcal{F},F=(\mathcal{F}_n),\mathbf{P}))$, სადაც $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{F}_N=\mathcal{F}$, $N<\infty$, და Ω-ში სასრული რაოდენობა ელემენტარული ხდომილობებია. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\mathcal{F}_n=\mathcal{A}^{S_0,S_1,\dots,S_n}$ (ე.ი. დაყოფათა ნაკადია).

სტრატეგია $\pi=(\pi_n)$, რომელიც შედგება $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$ პორტფელებისაგან, აქ β_n და γ_n არიან $\mathcal{F}_{n-1}$ ზომადები ($\mathcal{F}_{-1}=\mathcal{F}_0$) და წარმოადგენენ შესაბამისად ურისკო და რისკიან აქტივთა რაოდენობას. სტრატეგია π-ს შესაბამისი კაპიტალი $X^\pi=(X_n^\pi)$ შემდეგი სახისაა

$$X_n^\pi=\beta_nB_n+\gamma_nS_n.$$

სტრატეგიათა კლასი თვითდაფინანსებადია, თუ ყოველი $1\le n\le N$

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n=0,$$

სადაც $\Delta\beta_n=\beta_n-\beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n=\gamma_n-\gamma_{n-1}$.

გავარკვიოთ, თუ რა არის **არბიტრაჟი**. ვიტყვით, რომ თვითდაფინანსებადი სტრატეგია **არბიტრაჟულია** ან ახორციელებს არბიტრაჟულ შესაძლებლობას, თუ

$$X_0^\pi=0,\qquad X_n^\pi\ge 0,\quad 1\le n\le N,\qquad \text{და}\qquad X_N^\pi>0$$

დადებითი P-ალბათობით.

მარტივად რომ ვთქვათ, არაფრიდან დასაწყისში შესაძლებელია მოგების რაიმე გვქონდეს.

როგორც ცნობილია, ალბათური ზომა $\mathbf{P}^*$ ეკვივალენტურია $\mathbf{P}$ ალბათური ზომისა, თუ $\mathbf{P}^*(A) = 0$ ყოველთვის, როდესაც $\mathbf{P}(A) = 0$ და პირიქით, $\mathbf{P}(A) = 0$ ყოველთვის, როდესაც $\mathbf{P}^*(A) = 0$, $A \in \mathcal{F}$.

მარტინგალური ზომის (ალბათობის) განმარტება კი შემდეგია: ალბათური ზომა $\mathbf{P}^*$ განმარტებული $(\Omega, \mathcal{F})$-ზე წარმოადგენს მარტინგალურ ზომას (ალბათობას). (B, S)-ფინანსური ბაზრისათვის, თუ $\mathbf{P}^*$ ეკვივალენტურია $\mathbf{P}$-ს მიმართ ($\mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}$) და $(\frac{S_n}{B_n})_{0 \le n \le N}$-მიმდევრობა წარმოადგენს მარტინგალს $(\mathcal{F}_n)$-ნაკადისა და $\mathbf{P}^*$-ალბათობის მიმართ.

ხარისონმა და პლისკამ 1981 წელს მიიღეს შემდეგი საინტერესო შედეგი: **ფინანსური (B, S)-ბაზრისათვის ერთი მაინც მარტინგალური ზომის (ალბათობის) არსებობა იგივეა, რაც ამ ბაზარზე არბიტრაჟის არარსებობა.**

განვიხილოთ, თუ რა არის სრული ფინანსური ბაზარი. ბაზარს უწოდებენ **სრულს**, თუ ნებისმიერი გადახდის ფუნქციისათვის (ალებული ფინანსური ვალდებულებებისათვის) $f_N = f_N(\omega)$ მოიძებნება ისეთი თვითდაფინანსებადი სტრატეგია π, რომ მისი შესატყვისი ტერმინალური კაპიტალი $X_N(\omega) = f_N(\omega)$, $\omega \in \Omega$, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ნებისმიერი ფინანსური ვალდებულების შესრულების შესაძლებლობაა სრულ ფინანსურ ბაზარზე). ბაზარს უწოდებენ **არასრულს**, თუ ასეთი შესაძლებლობა არაა.

ასევე ჰარისონმა და პლისკამ აჩვენეს, რომ განხილული ზოგადი (B, S)**-ბაზარი სრულია, თუ არსებობს მხოლოდ ერთი მარტინგალური ზომა (ალბათობა).**

ჩვენ მიერ განხილულ კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის ბინომიალურ (B, S)-ფინანსურ ბაზარზე არსებობდა, როგორც ვაჩვენეთ, მხოლოდ ერთი მარტინგალური ზომა (ალბათობა), ე.ი. ეს ბაზარი სრული ფინანსური ბაზარია და მასზე არბიტრაჟის შესაძლებლობა გამორიცხულია.

აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ცნობილი ბლეკ-შოულსის (B, S)-

ბაზარი უწყვეტი დროის შემთხვევაში, რომელსაც შემდგომში განვიხილავთ, ასევე სრული ბაზარია, რომელზედაც არბიტრაჟული შესაძლებლობა გამორიცხულია. არასრულ ფინანსურ ბაზრებზე მრავალი მარტინგალური ზომა არსებობს, თითოეული მათგანი არაარბიტრაჟულია. არასრული ფინანსური ბაზრის მაგალითია შემდეგი, ეგრეთ წოდებული, ფინანსური **ტრინომიალური** (B, S)-ბაზარი, სადაც $B_n \equiv B_0 = 1$[9], ხოლო აქციის ფასი $S = (S_n(\omega))$, ფილტრულ ალბათურ სივრცეზე $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს დისკრეტული დროით, რომელიც მოცემულია რეკურენტული გამოსახულებით

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n), \tag{1}$$

სადაც $S_0 > 0$ დეტერმინისტულია, $(\rho_n)_{n\geq 1}$ კი ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ρ ღებულობს მხოლოდ სამ (და არა ორს, როგორც ბინომიალურ შემთხვევაშია) მნიშვნელობას a, b და c ალბათობებით p, q და l შესაბამისად. ჩვენ ვითხოვთ, რომ $a < b < c$ და $-1 < a < 0 < c$. როგორც ვიცით, ალბათური ზომა $\mathbf{P}^*$ მარტინგალურია, თუ $(\frac{S_n}{B_n})_{n\geq 1}$-მიმდევრობა მარტინგალია ამ ზომისა და $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-ნაკადის მიმართ. ვინაიდან ამ მაგალითში ჩვენ დავუშვით, რომ $B_n \equiv B_0 = 1$, ამიტომ მარტინგალობის პირობაა

$$\mathbf{E}_{p^*}[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}$$

(აქ გასაშუალება ხდება $\mathbf{P}^*$-ალბათობის მიმართ), ანუ

$$\mathbf{E}_{p^*}[\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \tag{2}$$

გამოსახულება (1)-დან $\Delta S_n = S_{n-1}\rho_n$ და (2)-დან

$$\mathbf{E}_{p^*}[\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}_{p^*}[S_{n-1}\rho_n|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}\mathbf{E}_{p^*}[\rho_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

ρ_n დამოუკიდებელია $\mathcal{F}_{n-1}$-ზე და $S_{n-1} \neq 0$, ამიტომ ვღებულობთ

$$\mathbf{E}_{p^*}[\rho_n] = ap^* + bq^* + cl^* = 0. \tag{3}$$

[9] ეს დაშვება სიმარტივისათვისაა გაკეთებული.

ვინაიდან

$$p^* + q^* + l^* = 1, \tag{4}$$

(3)-დან ვღებულობთ პირობას

$$p^*(c-a) + q^*(c-b) = c. \tag{5}$$

ალბათური მარტინგალური ზომა $\mathbf{P}^*$ განისაზღვრება p^*, q^* და l^*-ით (ე.ი. $\mathbf{P}^*(\rho_1 = a) = p^*$, $\mathbf{P}^*(\rho_1 = b) = q^*$ და $\mathbf{P}^*(\rho_1 = c) = l^*$), რომლებიც (5) და (4)-ს აკმაყოფილებენ. ცხადია ასეთი ზომა ერთი არ არის, ვინაიდან სამი უცნობია p^*, q^* და l^*. ბინომიალური ბაზრის დროს, როგორც ადრე ვნახეთ, ორი უცნობია და ორი განტოლებაა, ამიტომ მარტინგალური ზომა ერთადერთია.

განვიხილოთ $\mathbf{P}_1^*$-ალბათური ზომა, რომელიც განისაზღვრება $p_1^* = \frac{c}{2(c-a)}$, $q_1^* = \frac{c}{2(c-b)}$ და $l_1^* = 1 - p_1^* - q_1^*$. ადვილი დასანახავია, რომ ეს ზომა მარტინგალურია. მარტინგალური ზომაა ასევე $\mathbf{P}_2^*$, რომელიც განისაზღვრება $p_2^* = \frac{c}{3(c-a)}$, $q_2^* = \frac{2c}{3(c-b)}$ და $l_2^* = 1 - p_2^* - q_2^*$-ით.

ამოცანა. მოიყვანეთ ამ ტრინომიალურ სქემაში კიდევ (გარდა $\mathbf{P}_1^*$ და $\mathbf{P}_2^*$-ზომებისა) სხვა მარტინგალური ზომების მაგალითები.

უწყვეტი დროის შემთხვევაში არასრულ ფინანსური ბაზრის მოდელს წარმოადგენენ ე.წ. სტოქასტური ვოლატილობის მოდელები. როგორც ვნახავთ შემდგომში ბლექ-შოულსის მოდელი გულისხმობს, რომ საბაზისო აქტივის ფასი აღიწერება დიფუზიური პროცესით, რომლის ვოლატილობის კოეფიციენტი მუდმივაა. სინამდვილეში ეს ასე არაა, ვოლატილობის კოეფიციენტი დროზეც არის დამოკიდებული და შემთხვევითი ბუნებისაა. ვოლატილობის მოდელში ეს კოეფიციენტი გარკვეულ სტოქასტურ განტოლებას აკმაყოფილებს.

არასრული ფინანსური ბაზრებისათვის, სრული ბაზრებისგან განსხვავებით, საბაზისო აქტივთა სისტემით გარკვეული გარემოს აღწერა სრულად ვერ ხერხდება და საბაზისო აქტივთა საშუალებით შემდგარი პორტფელების დახმარებით შეუძლებელია რისკის სრული გაქრობა. მაგრამ შესაძლებელია მომავალი რისკის ზემოდან ან ქვემოდან რეპლიკაცია. მაგალითად, ევროპული ტიპის **ოფციონების ჰეჯირების ზემო ფასი** შემდეგნაირად განისაზღვრება.

დავუშვათ, რომ $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ – ყველა მარტინგალური ზომის $\mathbf{P}^*$-სიმრავლეა. ვიხილავთ ევროპულ ოფციონს ზოგად (B,S)-ფინანსურ ბაზარზე (დისკრეტული დროის შემთხვევაში). დავუშვათ, რომ ოფციონის განაღდების მომენტია N და გადახდის ფუნქციაა f_N. ასევე დავუშვათ, რომ მოცემულია **მოხმარების პროცესი** $C = (C_n)_{n\geq 0}$, რომელიც წარმოადგენს არაუარყოფით არაკლებად პროცესს და $C_0 = 0$, ხოლო C_n-ები არიან $\mathcal{F}_n$-ზომადები. მაშინ ამ ევროპული ოფციონის ზემო ფასია ის მინიმალური საწყისი კაპიტალი, რომელიც აძლევს ემიტენტს შესაძლებლობას აწარმოოს მოხმარება C-ს მიხედვით და ბოლო მომენტში მისი კაპიტალი ყოველთვის მეტი იყოს f_N-ზე. ამ ოფციონის ჰეჯირების ზემო ფასს აღნიშნავენ $C^*(f_N;\mathbf{P})$.

ელ კარუის, კვინეზის და კრამკოვის შედეგებზე დაყრდნობით მიღებულია

$$C^*(f_N;\mathbf{P}) = \sup_{\mathbf{P}^*\in\mathcal{P}(\mathbf{P})} B_0\mathbf{E}_{\mathbf{P}^*}\frac{f_N}{B_N},$$

სადაც გასაშუალება წარმოებს მარტინგალური $\mathbf{P}^*$-ზომით, ხოლო სუპრემუმი აიღება ყველა მარტინგალური ზომით.

§ 2. საშუალო-კვადრატული ჰეჯირება არასრულ ფინანსურ ბაზარზე

დავუშვათ, რომ ისევ, როგორც წინა პარაგრაფში, განვიხილავთ ზოგად (B,S)-ფინანსურ ბაზარს და ეს ბაზარი არასრულია. მაშინ, როგორც იყო აღნიშნული, ევროპული ოფციონის f_N-გადახდის ფუნქციის ზუსტ მიღწევას ტერმინალური კაპიტალით, ემიტენტი ვერ ახერხებს ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ოპტიმალური ჰეჯირება საშუალო-კვადრატული აზრით. ვიხილავთ შემთხვევას მოხმარების გარეშე. ოპტიმალობის კრიტერიუმს შემდეგი სახე აქვს:

$$R_N(\pi,x) = \mathbf{E}[X_N^\pi(x) - f_N]^2.$$

პრობლემაა ვიპოვოთ ის საწყისი კაპიტალი x^* და სტრატეგია π^*, რომელზედაც კრიტერიუმი მინიმუმს აღწევს

$$\inf_{(\pi,x)} R_N(\pi;x) = R_N(\pi^*;x^*).$$

ეს ამოცანა რთული არ არის, როდესაც ძირითადი P-ალბათობის მიმართ, $S = (S_n, \mathcal{F}_n)$-მარტინგალია და $\mathbf{E}S_n^2 < \infty$. თვითდაფინანსებად π სტრატეგიების კლასში, თუ $B_n \equiv B_0 = 1$, კაპიტალს შემდეგი სახე აქვს:

$$X_n^\pi(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k.$$

ვინაიდან S-მარტინგალია, $(X_n^\pi, \mathcal{F}_n)$ ასევე P-მარტინგალია და

$$\mathbf{E}X_N^\pi(x) = x.$$

თუ ავიღებთ $\xi = X_N^\pi(x) - f_N$, მაშინ ვინაიდან

$$\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2$$

და

$$\mathbf{E}\xi^2 = (\mathbf{E}\xi)^2 + \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2.$$

ამიტომ

$$R_N(\pi; x) = [\mathbf{E}(f_N - x)]^2 + \mathbf{E}[(X_N^\pi(x) - x) - (f_N - \mathbf{E}f_N)]^2.$$

ამ ტოლობაზე დაყრდნობით წყდება ოპტიმიზაციის ამოცანა. x^* და γ_n^* შემდეგი სახე აქვთ შესაბამისად

$$x^* = \mathbf{E}f_N, \tag{1}$$

$$\gamma_n^* = \frac{\mathbf{E}(f_N \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})}{\mathbf{E}((\Delta S_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1})}. \tag{2}$$

როდესაც S-ძირითადი P-ზომის მიმართ მარტინგალი არ არის, ამოცანა საგრძნობლად რთულდება და მის ამოხსნას დიდი ძალისხმევა მოანდომეს ფიოლმერმა, შვაიცერმა, ზონდერმანმა და ბევრმა სხვამ.

ამოცანა. განვიხილოთ ტრინომიალური სიმეტრიული სქემა, რომელშიც ρ ღებულობს სამ მნიშვნელობას $- -\alpha, 0, +\alpha$ $(\alpha > 0)$ ალბათობებით $p = l$ და $q = 1 - 2p$. დავუშვათ $f_N = (S_N - K)^+$. იპოვეთ ოპტიმალური x^* და γ_n^*.

§ 3. ფასგათვლა და ოპტიმალური საშუალო-კვადრატული ჰეჯირება ერთ მარტინგალურ სქემაში. დისკრეტული დრო

განვიხილოთ $(B,S)=(B_n,S_n)_{n\geq 0}$-ფინანსური ბაზარი დისკრეტული დროის შემთხვევაში, როდესაც $B_n\equiv B_0$, ე.ი. $r=0$, ხოლო აქციის ფასი წარმოდგება შემდეგნაირად

$$S_n=S_0e^{H_n},\qquad n\geq 0, \tag{1}$$

სადაც

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2. \tag{2}$$

აქ $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ – **თეთრი ხმაურია**, ე.ი. ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ სტანდარტულ ნორმალურ სიდიდეთა მიმდევრობაა, α_k, $k\geq 0$, კი მუდმივებია. დავუშვათ, რომ $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-ხდომილობათა ნაკადი წარმოქმნილია $(S_0,S_1,\dots,S_n)$-ით. ეს ნაკადი σ-ალგებრათა და არა დაყოფათა ნაკადია (იხ გვ. 25). მაშინ $(S_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ წარმოადგენს მარტინგალს. მართლაც, ყოველი n-ისათვის S_n არის $\mathcal{F}_n$-ზომადი და

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}\Big\{S_0\exp\Big[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\Big]\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big\}=\\
&= \mathbf{E}\Big\{S_0\exp\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\varepsilon_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\Big]e^{\alpha_n\varepsilon_n-\frac{1}{2}\alpha_n^2}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big\}=\\
&= \mathbf{E}[S_{n-1}e^{\alpha_n\varepsilon_n-\frac{1}{2}\alpha_n^2}|\mathcal{F}_{n-1}]=S_{n-1}e^{-\frac{1}{2}\alpha_n^2}\mathbf{E}[e^{\alpha_n\varepsilon_n}|\mathcal{F}_{n-1}]=\\
&= S_{n-1}e^{-\frac{1}{2}\alpha_n^2}\mathbf{E}e^{\alpha_n\varepsilon_n}=S_{n-1}e^{-\frac{1}{2}\alpha_n^2}e^{\frac{1}{2}\alpha_n^2}=S_{n-1}.
\end{aligned}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ჯერ ის, რომ S_{n-1} არის $\mathcal{F}_{n-1}$-ზომადი, შემდეგ ის, რომ ε_n დამოუკიდებელია $\mathcal{F}_{n-1}$-ზე და ბოლოს ε_n-ის ნორმალურობა $N(0,1)$, რის გამოც $\mathbf{E}e^{\alpha_n\varepsilon_n}=e^{\frac{1}{2}\alpha_n^2}$. ვინაიდან ჩვენ

ვაჩვენეთ, რომ

$$\mathbf{E}[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1},$$

მიმდევრობა $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ მარტინგალია.

დავუშვათ, რომ ვიხილავთ ყიდვის (კოლ) სტანდარტულ ევროპულ ოფციონს აქციაზე, რომლის ფასი აღიწერება (1), (2) ფორმულებით. ამ ოფციონის გადახდის ფუნქციაა $f_N = (S_N - K)^+$, სადაც K – შეთანხმების ფასია, N – აღსრულების დრო.

ვინაიდან ჩვენი სქემა ექცევა წინა პარაგრაფის ზოგად სქემაში, ფასისა და ოპტიმალური ჰეჯური სტრატეგიის დასათვლელად უნდა გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის ფორმულები (1) და (2):

$$x^* = C_N = \mathbf{E} f_N,$$

$$\gamma_n^* = \frac{\mathbf{E}(f_N \Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1})}{\mathbf{E}((\Delta S_n)^2|\mathcal{F}_{n-1})}.$$

ჩვენი შემთხვევის $f_N = (S_N - K)^+$, ΔS_n და $(\Delta S_n)^2$-ების ჩასმით ამ ფორმულებში და შესაბამისი კონკრეტული გათვლებით, რასაც ჩვენ აქ არ ვაკეთებთ, მივიღებთ, რომ ოფციონის ფასია

$$C_N = S_0 N\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \alpha_k^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \alpha_k^2}}\right) - KN\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \alpha_k^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \alpha_k^2}}\right),$$

ხოლო ოპტიმალური საშუალო-კვადრატული ჰეჯური სტრატეგია

$$\gamma_n^* = -\frac{e^{\alpha_n^2}\sigma_n}{a_n(e^{\alpha_n^2} - 1)} N\left[-\frac{a_n(\ln\frac{K}{S_{n-1}} + l_n^{(1)})}{\sqrt{1+\sigma_k^2}}\right] +$$

$$+ \frac{K a_n^{-1}\sigma_n}{S_{n-1}(e^{\alpha_n^2} - 1)} N\left[\frac{a_n(\ln\frac{K}{S_{n-1}} + l_n^{(2)})}{\sqrt{1+\sigma_k^2}}\right] -$$

$$- \frac{1}{S_{n-1}(e^{\alpha_n^2} - 1)}\left\{S_{n-1} N\left[\frac{a_n(\ln\frac{S_{n-1}}{K} + \frac{1}{2}\sum_{k=n}^N \alpha_k^2)}{\sqrt{\sum_{k=n}^N \alpha_k^2}}\right] -\right.$$

$$- KN\left[\frac{a_n(\ln \frac{S_{n-1}}{K} - \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{N}\alpha_k^2)}{\sqrt{\sum_{k=n}^{N}\alpha_k^2}}\right]\Bigg\},$$

სადაც

$$l_n^{(1)} = -\frac{3}{2}\alpha_n^2 - \sum_{k=n}^{N}\alpha_k^2, \qquad l_n^{(2)} = -\frac{3}{2}\alpha_n^2 + \sum_{k=n}^{N}\alpha_k^2,$$

$$\sigma_n^2 = \alpha_n^2 a_n^2, \qquad a_n = \left(\sum_{k=n}^{N}\alpha_k^2\right)^{-1},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

შენიშვნა. მიმდევრობა $(M_n)_{n\geq 0}$, რომელიც წარმოადგენს გაუსის (ნორმალურ) მიმდევრობას და ამასთან მარტინგალიცაა უწოდებენ **გაუსის მარტინგალს.** ჩვენი განხილული სქემის შემთხვევაში გაუსის მარტინგალია $M_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_k$. მოყვანილი შედეგების ანალოგიურ შედეგებს აქვს ადგილი ზოგადი გაუსის მარტინგალის შემთხვევაშიც.

§ 4. ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტების ფასდადება

ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტები აღწერილი გვაქვს მეორე თავის §2 და §3-ში. როგორც აღვნიშნეთ, ესაა შეთანხმება რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვაზე მისი მიწოდებით მომავალში (გარკვეულ დროს) წინასწარ შეთანხმებული ფასით ("ფორვარდული" ანუ "ფიუჩერსული"). ამ კონტრაქტებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა. **ფორვარდული კონტრაქტი** წარმოადგენს შეთანხმებას ორ დაინტერესებულ მხარეს შორის შუამავლის გარეშე. ფიუჩერსული კონტრაქტი ასეთივე შეთანხმებაა, რომელიც აწარმოებს ურთიერთგანგარიშებებს შეთანხმებულ მხარეებს შორის.

დავუშვათ, რომ აქტივის, რომელზედაც იდება კონტრაქტი, საბაზრო ფასის ევოლუციაა $S = (S_k)_{k\leq N}$. აქ N – კონტრაქტის დახურვის მომენტია (ამ მომენტში ხდება აქტივის მიწოდება).

ცხადია, თუ გარიგება ხდება სწორედ N-მომენტში, მაშინ ფორვარდული და ფიუჩერსული ფასები უნდა იყოს ეს საბაზრო ფასი S_N. მაგრამ, თუ შეთანხმება ხდება $n < N$ მომენტში, მაშინ ისმის კითხვა, რა უნდა გავიგოთ სამართლიან შეთანხმების ფასად უარბიტრაჟო ბაზარზე. ვიხილავთ (B, S)-ბაზარს დისკრეტული დროის შემთხვევაში, სადაც $B = (B_n)$ – საბანკო ანგარიშია, $S = (S_n)$ – აქტივის ფასი, რომელზეც იდება კონტრაქტი.

ა) დავუშვათ, რომ მყიდველის კაპიტალი $X = (X_N^\pi)_{n\leq N}$, რომელიც შეესატყვისება სტრატეგიას $\pi = (\beta, \gamma)$, განისაზღვრება ფორმულით

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n D_n, \tag{1}$$

სადაც $\mathcal{D} = (D_n, \mathcal{F}_n)$, $n \leq N$, $D_0 = 0$, წარმოადგენს ჯამური დივიდენდების პროცესს (თავისი ნიშნით), დაკავშირებულს S-აქტივთან.

დავუშვათ ფორვარდული კონტრაქტი დაიდო n-მომენტში და მხარეები $\mathcal{F}_n$-ინფორმაციაზე დაყრდნობით შეთანხმდნენ $F_n(N)$ მიწოდების ფასზე (ფორვარდულ ფასზე). მაშინ გამომდინარე ფორვარდული კონტრაქტის მექანიზმიდან ჯამური დივიდენდების პროცესს შემდეგი სტრუქტურა აქვს

$$D_k = 0, \qquad n \leq k < N,$$

და

$$D_N = S_N - F_n(N).$$

ფორმულა (1)-დან

$$\Delta\Big(\frac{X_k^\pi}{B_k}\Big) = \gamma_k \frac{\Delta D_k}{B_k},$$

საიდანაც

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \sum_{k=n+1}^{N} \gamma_k \frac{\Delta D_k}{B_k}, \qquad n < N. \tag{2}$$

ცხადია, რომ ფორვარდული კონტრაქტისათვის, რომელიც n-მომენტში დადებული $\gamma_k = 0$, $k \leq n$ და $\gamma_k = \gamma_{n+1}$, ყველა $k \geq n+1$, სადაც γ_k შეიძლება განვიხილოთ, როგორც S აქტივის ერთეულის "რაოდენობა". ფორმულა (2)-დან

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \gamma_{n+1}\,\frac{S_N - F_n(N)}{B_N}\,. \tag{3}$$

დავუშვათ, რომ (B,S)-ბაზარი უარბიტრაჟოა და სრულია და $\mathbf{P}^*$-ის ერთადერთი მარტინგალური ზომაა, რომლის მიმართ $(\frac{S_n}{B_n})_{n\leq N}$ მარტინგალია.

დავუშვათ, რომ ფორვარდული ფასები $F_n(N)$ ისეთია, რომ

$$\mathbf{E}_{p^*}\Big(\frac{S_N - F_n(N)}{B_N}\,|\mathcal{F}_n\Big) = 0, \qquad n \leq N,$$

ე.ი.

$$F_n(N) = \frac{\mathbf{E}_{p^*}(\frac{S_N}{B_N}|\mathcal{F}_n)}{\mathbf{E}_{p^*}(\frac{1}{B_N}|\mathcal{F}_n)} = \frac{S_n}{\mathbf{E}_{p^*}(\frac{B_n}{B_N}|\mathcal{F}_n)}\,, \qquad n \leq N. \tag{4}$$

მაშინ (3)-დან

$$\mathbf{E}_{p^*}\,\frac{X_N^\pi}{B_N} = \mathbf{E}_{p^*}\,\frac{X_n^\pi}{B_n}\,, \tag{5}$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ფორვარდელი კონტრაქტი, დადებული n-მომენტში $F_n(N)$-ფასით, რომელიც განისაზღვრება (4) ფორმულით არის უარბიტრაჟო, ვინაიდან, თუ $X_n^\pi = 0$ და $\mathbf{P}(X_N^\pi \geq 0) = 1$, მაშინ $\mathbf{P}(X_N^\pi = 0) = 1$. და ამ აზრით $F_n(N)$ არის ამ ფორვარდული კონტრაქტის სამართლიანი ფასი.

b) განვიხილოთ ახლა ფიუჩერსული კონტრაქტი. დავუშვათ იგი იდება n-მომენტში ($n < N$) $\mathcal{F}_n$-ინფორმაციაზე დაყრდნობით შეთანხმების $\Phi_n(N)$-ფასით (ფიუჩერსული ფასით). დივიდენდების ენაზე (ნიშნით) ფიუჩერსული მექანიზმის აღწერა შეიძლება შემდეგნაირად. თუ n+1 მომენტში აღმოჩნდა, რომ ფიუჩერსული ფასი გახდა $\Phi_{n+1}(N)$ და $\Phi_{n+1}(N) < \Phi_n(N)$, მაშინ მყიდველს შეაქვს ჯამი $\Phi_n(N) -$

$\Phi_{n+1}(N)$ გამყიდველის ანგარიშზე. თუ კი $\Phi_{n+1}(N) > \Phi_n(N)$, მაშინ პირიქით, გამყიდველს შეაქვს მყიდველის ანგარიშზე $\Phi_{n+1}(N) - \Phi_n(N)$.

აღვნიშნოთ $\delta_0 = \Phi_0(N)$ და

$$\delta_n = \Phi_n(N) - \Phi_{n-1}(N), \qquad n \geq 1.$$

ასევე

$$D_n = \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n$$

და $\Delta D_n = \delta$, $n \geq 1$. მაშინ (1)-დან

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \gamma_{n+1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\Delta D_k}{B_k}.$$

თუ ფინანსური (B, S) ბაზარი იგივეა, რაც a) პუნქტში, მაშინ პირობა

$$\mathbf{E}_{p^*}\left(\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\Delta D_k}{B_k} | \mathcal{F}_n \right) = 0$$

ფასებზე $\Phi_0(N), \ldots, \Phi_{n+1}(N)$ იძლევა ფიუჩერსულ კონტრაქტზე არბიტრაჟის გამორიცხვის პირობას.

თუ მოვითხოვთ, რომ $\mathbf{P}^*$-ზომის მიმართ $(D_n, \mathcal{F}_n)$ იყოს მარტინგალი, რაც ნიშნავს

$$\mathbf{E}_{p^*}(D_N | \mathcal{F}_n) = D_n.$$

ვინაიდან

$$\mathcal{D}_n = \delta_0 + \cdots + \delta_k = \Phi_n(N) \qquad \text{და} \qquad \mathcal{D}_N = \Phi_N(N) = S_N$$

და ფიუჩერსული ფასი იქნება

$$\Phi_n(N) = \mathbf{E}_{p^*}(S_N | \mathcal{F}_n), \qquad n \leq N.$$

ასეთი ფასი გამორიცხავს არბიტრაჟს.

ამოცანა. აჩვენეთ, რომ როცა $B = (B_n)_{n \leq N}$ არაშემთხვევითი მიმდევრობაა. ფიუჩერსული ფასი $\Phi_n(N)$ ემთხვევა ფორვარდულს $F_n(N)$-ს.

თავი VI

ბლეკ-შოულსის მოდელები

§ 1. აქციის ფასების ყოფაქცევა უწყვეტი დროის შემთხვევაში

ნებისმიერი სიდიდე, რომლის მნიშვნელობა დროში გაურკვევლად იცვლება წარმოადგენს სტოქასტურ (შემთხვევით) პროცესს. იგი შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობაა და ალბათობის თეორიის შესწავლის ობიექტია. განიხილავენ სტოქასტურ პროცესებს დისკრეტული და უწყვეტი დროით. პროცესების დისკრეტული დროითი მნიშვნელობები იცვლება მხოლოდ განსაზღვრულ ფიქსირებულ მომენტებში. ნაშრომის პირველ ნაწილში სწორედ ასეთი პროცესები იყო გამოყენებული აქციის ფასების (S_n), $n \geq 0$, ყოფაქცევის აღსაწერად. პროცესები უწყვეტი დროით კი ისეთი პროცესებია, რომელთა მნიშვნელობათა ცვალებადობას ადგილი აქვს დროის ნებისმიერ მომენტში. უნდა შევნიშნოთ, რომ უწყვეტად აქციის ფასების ცვალებადობას ადგილი არა აქვს. მათი ცვალებადობა ხდება საფონდო ბირჟაზე კოტირების მომენტებში. მიუხედავად ამისა, პროცესები უწყვეტი დროით (შემდგომში ვიხმართ ასევე – უწყვეტი პროცესები) მრავალი თვალსაზრისით წარმოადგენენ მეტად სასარგებლო მოდელებს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სტოქასტური პროცესების ფართო კლასის – **მარკოვის პროცესების** – განხილვა. ეს ისეთი პროცესებია, რომელთათვისაც მათი პროგნოზი შესაძლებელია მხოლოდ აწმყო მნიშვნელობებით. ძველი ისტორია და რა გზით იყო მიღებული პროცესის აწმყო მნიშვნელობები, საჭირო არ არის. ესაა, ეგრეთ წოდებული, მარკოვისეულობის თვისება.

აქციის ფასები, ჩვეულებრივ, მარკოვის პროცესებით კარგად აღიწერება. აქციის ფასის პროგონზი, რომელიც მარკოვის პროცესს წარმოადგენს, არ იქნება დამოკიდებული მის ერთი კვირის წინა, ან ერთი თვის წინა, ან კი ერთი წლის წინა მნიშვნელობებზე და დაეყრდნობა აქციის მხოლოდ აწმყო ფასს. მომავალი პროგნოზი ფასების მიმართ გაურკვეველია და გამოიხატება ალბათობათა განაწილების

ტერმინებში. მარკოვისეულობის თვისება იწვევს იმას, რომ აქციის ფასის ალბათური განაწილება ნებისმიერი კონკრეტული მომავალი მომენტისათვის დამოკიდებულია მხოლოდ მის აწმყო ფასზე.

1. **ვინერის პროცესი.** აქციის ფასის ყოფაქცევის წარმოდგენა ხდება, ჩვეულებრივ, ვინერის პროცესის დახმარებით. იგი მარკოვის პროცესების კლასს მიეკუთვნება და ასევე ცნობილია როგორც ბროუნის მოძრაობა. გამოიყენება ფიზიკაში სითხეში მოთავსებული ნაწილაკის აღსაწერად, რომელიც დიდ რაოდენობა პატარა მოლეკულების დაჯახების ობიექტია.

დავუშვათ, რომ $W = (W_t)_{t \geq 0}$ ვინერის პროცესია. განვიხილოთ დროის მცირე Δt მონაკვეთი და ვნახოთ, თუ როგორია W-ს ცვალებადობა ΔW ამ ინტერვალში, კონკრეტულად, თუ როგორია ΔW დროის Δt ინტერვალის სიგრძესთან მიმართებაში. აღმოჩნდა, რომ მათ აკავშირებთ გამოსახულება

$$\Delta W = \mathcal{E}\sqrt{\Delta t}, \quad (1)$$ [10]

სადაც $\mathcal{E}$ – სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი. შემთხვევითი სიდიდე სიმკვრივით $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, მისი მათემატიკური ლოდინი ნულია, დისპერსია კი 1, აღინიშნება $N(0,1)$. ფორმულა (1)-დან გამომდინარეობს $\mathbf{E}\Delta W = 0$, $\mathbf{D}(\Delta W) = \Delta t$.

გარდა ამისა, ვინერის პროცესის ცვალებადობები ნებისმიერ ორ დროის გადაუკვეთელ ინტერვალთა შორის დამოუკიდებლები და ვინერის პროცესი წარმოადგენს, ეგრეთ წოდებულ, სტოქასტურ პროცესებს დამოუკიდებელი ნაზრდებით.

დავუშვათ, რომ W იცვლება დროის $[0,T]$-ინტერვალზე და $N = \frac{T}{\Delta t}$, მაშინ (1)-ის გამოყენებით

$$W_T - W_0 = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_k \sqrt{\Delta t},$$

[10] ΔW უნდა გავიგოთ ასე, რომ ნებისმიერი t მომენტისათვის ის უდრის $W_{t+\Delta t} - W_t$.

სადაც $\mathcal{E}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ სტანდარტული ნორმალური სიდიდეებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $W_T - W_0$ ნორმალურადაა განაწილებული მათემატიკური ლოდინით $\mathbf{E}(W_T - W_0) = 0$ და დისპერსიით $\mathbf{D}(W_T - W_0) = N\Delta t = T$. სტანდარტული ვინერის პროცესი ნულიდან გამოდის $W_0 = 0$ და მისთვის ნებისმიერ t-მომენტში $\mathbf{E}W_t = 0$, $\mathbf{D}W_t = t$, მისი განაწილება კი ნორმალურია.

როდესაც $\Delta t \to 0$, გამოსახულება (1) ზღვარში შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$dW = \mathcal{E}\sqrt{dt}\,. \tag{2}$$

ცოტა გაკვირვებას გამოიწვევს ასეთი სახის დიფერენციალი. მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ ვინერის პროცესის ტრაექტორიები დროის უწყვეტი ფუნქციები კი არიან, მაგრამ $[0, T]$-ინტერვალის არც ერთ წერტილში დიფერენცირებადები არ არიან. ამიტომ განვითარებულია სპეციალური სტოქასტური აღრიცხვა – სტოქასტური ინტეგრირებისა და დიფერენცირების თეორია, რომელიც ნათელყოფს ვინერის პროცესის სტოქასტური დიფერენციალის ცნებას და მისით ოპერირების საშუალებას იძლევა. ჩვენ ამ თემას არ შევეხებით და დავკმაყოფილდებით dW-ს წარმოდგენით (2) გამოსახულების საშუალებით, რომლის საფუძველია (1), თუმცა შემდგომში მაინც მოვიყვანთ სტოქასტური აღრიცხვის უმნიშვნელოვანესი ცვლადის გარდაქმნის იტოს ფორმულას და ვისარგებლებთ კიდევაც ამ ფორმულით.

2. განზოგადოებული ვინერის პროცესი. დავუშვათ, რომ მისი აღნიშვნაა $x = (x_t)_{t\geq 0}$. ამ პროცესის ცვალებადობა Δx დროის მცირე Δt-ინტერვალში გამოისახება შემდეგნაირად

$$\Delta x = a\Delta t + b\mathcal{E}\sqrt{\Delta t}\,, \tag{3}$$

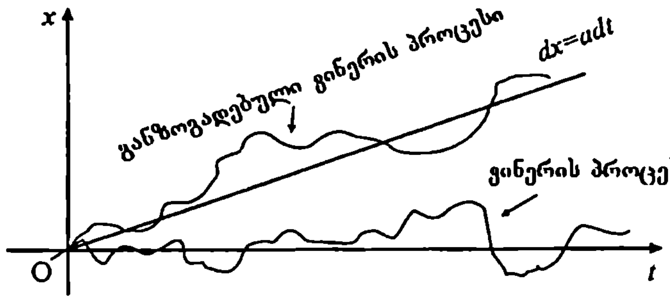
სადაც a და b მუდმივებია. a არის გადატანის კოეფიციენტი, ხოლო $b > 0$ დიფუზიის კოეფიციენტი. ფორმულა (3)-დან ჩანს, რომ Δx ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით $\mathbf{E}\Delta x = a\Delta t$,

$\mathbf{D}\Delta x = b^2\Delta t$, სტანდარტული გადახრა კი $b\sqrt{\Delta t}$-ს უდრის, ხოლო $\mathbf{E}x_T = aT$ და $\mathbf{D}x_T = b^2T$.

გამოსახულება (3)-ის ზღვრული სახეა

$$dx = adt + bdW. \tag{4}$$

ფორმულების (1) და (3)-ის შედარებით ჩანს, რომ ვინერის პროცესს გადატანის ნულოვანი კოეფიციენტი ($a = 0$) აქვს, მისი დიფუზია b კი ერთია. განსხვავება ვინერისა და განზოგადოებული ვინერის პროცესებს შორის კარგად ჩანს შემდეგ სურათზე. განზოგადოებული ვინერის პროცესი ესაა ძირითადი ვინერის პროცესი გადატანით ტენდენციით, დადებითი ან უარყოფითი ტრენდით (სურათზე დადებითი ტრენდია გამოსახული).



ნახ. 1

ამოცანა. გამოსახეთ ნახ. 1-ზე განზოგადოებული ვინერის პროცესი უარყოფითი ტრენდით.

იბადება კითხვა, შეიძლება თუ არა ვინერის პროცესით რისკიანი აქტივის ფასების აღწერა? პასუხი უარყოფითია (თუმცა ასე აკეთებდა – აღწერდა განზოგადოებული ვინერის პროცესით **ბაშელიე** და დღესაც ასეთი მოდელები – ბაშელიეს ტიპის მოდელები – მეცნიერთა გამოკვლევების ობიექტებია). ვინერის პროცესით აქტივის ფასების აღწერა არ შეიძლება შემდეგი მიზეზების გამო. პირველ რიგში, იმიტომ, რომ ვინერის პროცესმა შეიძლება უარყოფითი მნიშვნელობაც მიიღოს, ფასი კი ყოველთვის დადებითი უნდა იყოს, გარდა ამისა:

1) აქტივები ხასიათდებიან ვოლატილობის[11] სხვადასხვა ხარისხით, ვინერის პროცესებს დიფუზიის კოეფიციენტი მუდმივი აქვს და ვოლატილობა უცვლელია.

2) რისკიან აქტივებს აქვთ დადებითი მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი. ვინერის პროცესის ΔW-ის საშუალო ნულის ტოლია და საშუალოდ მომავალი ფასი არ იქნება აწმყო ფასთან განსხვავებული.

3) ვინერის პროცესებისათვის $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ დამოუკიდებელია W_t-ზე. სინამდვილეში აქტივებისათვის ეს ასე არ არის. უფრო $\frac{\Delta W_t}{W_t}$ არაა დამოკიდებული W_t-ზე.

3. იტოს პროცესები. ეს ისეთი სტოქასტური პროცესებია, რომლებსაც განზოგადოებული ვინერის პროცესის გამოსახულება აქვთ იმ განსხვავებით, რომ a და b მუდმივები აღარ არიან და წარმოადგენენ ძირითადი ცვლადების – თვით პროცესის მნიშვნელობებისა და დროის – ფუნქციებს. მათ დიფერენციალს შემდეგი სახე აქვს

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW \tag{5}$$

ან

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\mathcal{E}\sqrt{dt}\,.$$

4. გეომეტრიული (ეკონომიკური) ბროუნის მოძრაობა. დღეს გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა ყველაზე გავრცელებული მოდელია რისკიანი აქტივების ფასების ევოლუციის აღსაწერად. ბლეკ-შოულსის მოდელებშიც სწორედ ესაა გამოყენებული. ეს პროცესი კერძო სახის იტოს პროცესს წარმოადგენს, რომელშიაც $a(x,t) = \mu x$, ხოლო $b(x,t) = \sigma x$, სადაც μ - რაიმე მუდმივია, ხოლო $\sigma > 0$ დადებითი მუდმივია და გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა წარმოდგება შემდეგნაირად[12]

$$dS = \mu S dt + \sigma S \mathcal{E}\sqrt{Dt} \tag{6}$$

---

[11] ფინანსურ ლიტერატურაში სტანდარტულ გადახრას ვოლატილობას უწოდებენ.

[12] აღნიშვნა S-ს ვიყენებთ იმიტომ, რომ იგი ტრადიციულია აქციის ფასის აღსანიშნავად.

ან

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

აქ σ-კოეფიციენტს უწოდებენ ვოლატილობის კოეფიციენტს. კოეფიციენტი μ კი წარმოადგენს აქტივის ამონაგების განაკვეთს.

დავუშვათ, რომ ვოლატილობის კოეფიციენტი $\sigma = 0$. მაშინ (6)-დან მივიღებთ

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt \tag{7}$$

და

$$S_t = S_0 e^{\mu t}. \tag{8}$$

ასე ხდება ურისკო ფასიანი ქაღალდის (ვთქვათ ობლიგაციის) ფასის ევოლუცია, μ – საპროცენტო განაკვეთია და, ცხადია, ამ აქტივის ამონაგებსაც წარმოადგენს.

ამ შემთხვევაში (7)-დან ცვალებადობა ΔS გამოისახება შემდეგნაირად

$$\Delta S = \mu S \Delta t. \tag{9}$$

§ 2. იტოს ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა

სტოქასტური ანალიზის ფუძემდებელმა ტ. იტომ აჩვენა, რომ ნებისმიერი პროცესი, რომელიც მეორე პროცესის ფუნქციაა და ეს უკანასკნელი იტოს პროცესია, თვითონ იქნება იტოს პროცესი, ე.ი. თუ $f(S,t)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა S-ისა და უწყვეტად დიფერენცირებადია t-თი და S არის იტოს პროცესი შემდეგი წარმოდგენით

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dW,$$

მაშინ $f(S,t)$-ც იტოს პროცესია დიფერენციალით

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S} dW. \tag{1}$$

დავუშვათ, რომ S საბაზისო ფასიანი ქაღალდის ფასია, ხოლო $f(S,t)$ წარმოებული ფასიანი ქაღალდის ფასი. თუ S აღიწერება განტოლებით

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW, \tag{2}$$

მაშინ

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma\,dW \tag{3}$$

და ამ წარმოებული ფასიანი ქაღალდის გადატანის კოეფიციენტი იქნება $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{df}{dS}\mu S + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}$, ხოლო ვოლატილობის კოეფიციენტი $\frac{df}{dS}\sigma$.

ფორმულა (1) წარმოადგენს სტოქასტური აღრიცხვის ერთ-ერთ ძირითად ფორმულას.

განვიხილოთ კონკრეტული ლოგარითმული სახის ფუნქცია $G = \ln S$, მაშინ ვინაიდან $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$, (1)-დან მივიღებთ

$$dG = \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)dt + \sigma\,dW.$$

აქ μ და $\frac{\sigma^2}{2}$ მუდმივებია და G წარმოადგენს განზოგადოებულ ვინერის პროცესს გადატანის კოეფიციენტით $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ და დიფუზიის კოეფიციენტით σ. დავუშვათ, რომ t-მომენტში G-ს მნიშვნელობაა $\ln S$, ხოლო T-მომენტში $\ln S_T$, მაშინ G-ცვალებადობა $T - t$ ინტერვალზე უდრის $\ln S_T - \ln S$ და ის განაწილებულია ნორმალურად $\mathcal{N}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t), \sigma^2(T - t))$.

$\ln S_T$ განაწილებულია ნორმალურად $\mathcal{N}(\ln S + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t), \sigma^2(T - t))$, ე.ი. S_T-ს აქციის ფასს T-მომენტში აქვს ლოგნორმალური ალბათური განაწილება.[13]

მაგალითი 1. აქციის საწყისი ფასი $S = 40$, სიმი მოსალოდნელი საშუალო ამონაგებია 16% წლიური, ხოლო ვოლატილობა 20%

[13] შემთხვევით სიდიდეს ლოგნორმალური განაწილება აქვს, თუ მის ნატურალურ ლოგარითმს ნორმალური განაწილება აქვს.

წლიური და T უდრის 6 თვეს, მაშინ $\ln S_T$ იქნება განაწილებული ნორმალურად

$$\mathcal{N}\Big(\ln 40 + \Big(0,16 - \frac{0,04}{2}\Big)(0,5),\, 0,04 \cdot 0,5\Big)$$

როგორც ცნობილია, ალბათობის თეორიის კურსიდან ალბათობა იმისა, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე მოთავსდება მისი საშუალო მნიშვნელობიდან ორი სტანდარტული გადახრის დაშორების შუალედში უდრის 95%. ამიტომ 95% დასაჯერობით

$$3,477 < \ln S_T < 4,041.$$

ეს შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$e^{3,477} < S_T < e^{4,041}$$

ან

$$32,36 < S_T < 56,88,$$

ე.ი. 95%-იანი ალბათობით აქციის ფასი 6 თვის ბოლოს იქნება 32,36-ს და 56,88-ს შორის.

§ 3. ბლეკ-შოულსის დიფერენციალური განტოლება

როგორც უკვე იყო აღნიშნული ბლეკ-შოულსის მოდელში აქციის ფასის ევოლუციის წარმოდგენა ხდება გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის გამოყენებით და იგი აღიწერება სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებით

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW, \tag{1}$$

სადაც μ და σ მუდმივებია. დავუშვათ აგრეთვე, რომ ურისკო საპროცენტო განაკვეთი r მუდმივია. განვიხილოთ წარმოებული ფასიანი ქაღალდი, რომლის ფასი $f(S)$ ფუნქციაა ძირითადი აქტივის S ფასისა. იტოს ფორმულის გამოყენებით, ცხადია, თუ f-შესაბამისი

სიგლუვისაა, რაც იტოს ფორმულაში მოითხოვება, ჩვენ გვექნება

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma\, dW. \qquad (2)$$

ამ განტოლებების (1) და (2)-ის დისკრეტული ვარიანტებია

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W \qquad (3)$$

და

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial D}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma\, \Delta W, \qquad (4)$$

სადაც ΔS და Δf მცირე დროის ინტერვალში S-ისა და f-ის ცვლილებებია. ორივე გამოსახულებაში $\Delta W = \mathcal{E}\sqrt{\Delta t}$ ერთი და იგივეა, მაგრამ სხვადასხვა კოეფიციენტებით და თუ შევადგენთ პორტფელს S-ისა და f-ის სპეციალური კომბინაციით, შეიძლება სტოქასტური წევრის გამორიცხვა ამ პორტფელის ფასში.

შესაბამისი პორტფელი შემდეგი შემადგენლობის იქნება: ერთი წარმოებული ფასიანი ქაღალდი და ამ ქაღალდით მოკლე პოზიციაში ყოფნა და $\frac{\partial f}{\partial S}$ ძირითადი აქციის წილი და ამით გრძელი პოზიციის დაკავება, ე.ი.

$$\begin{cases} -1: & \text{წარმოებული აქტივი,} \\ +\frac{\partial f}{\partial S}: & \text{აქციები.} \end{cases}$$

პორტფელის ფასი იქნება

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S. \qquad (5)$$

მცირე Δt დროში π-ს ცვლილება

$$\Delta\pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S. \qquad (6)$$

ამ გამოსახულებაში ჩავსვათ Δf (4)-დან და ΔS (3)-დან, მივიღებთ

$$\Delta\pi = \Big(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)\Delta t, \tag{7}$$

ვინაიდან ეს განტოლება არ შეიცავს ΔW-ს, ამ Δt-მცირე დროის ინტერვალში პორტფელი π ურისკოა და ამის გამო მას აქვს მყისიერი ურისკო საპროცენტო განაკვეთი, ცვალებადობა $\Delta\pi$ შემდეგნაირად გამოისახება (იხ. §1-ის ფორმულა (9))

$$\Delta\pi = r\pi\Delta t. \tag{8}$$

თუ აქ $\Delta\pi$ ჩავსვამთ (7)-დან და π-ს (5)-დან, მივიღებთ

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)\Delta t = r\Big(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\Big)\Delta t.$$

ასე რომ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \tag{9}$$

ამ განტოლებას უნდა დაემატოს სასაზღვრო პირობა

$$f(t,S)|_{t=T} = g(S,T), \tag{10}$$

სადაც $g(S,T)$ გადახდის ფუნქციას წარმოადგენს – შემთხვევითი ხასიათის ფინანსური ვალდებულებას (contingent claim).

განტოლება (9), (10) ბლეკ-შოულსის კარგად ცნობილი და პოპულარული დიფერენციალური განტოლებაა.

ევროპული ყიდვის (call) ოფციონის პირობა (10)-ს შემდეგი სახე აქვს

$$f = \max(S - K, 0), \qquad \text{როცა} \quad t = T,$$

ხოლო გაყიდვის ოფციონის შემთხვევაში

$$f = \max(K - S, 0), \qquad \text{როცა} \quad t = T.$$

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ მოყვანილ გათვლებში პორტფელი ურისკოა მხოლოდ დროის მოკლე პერიოდში. როცა S და t იცვლებიან, $\frac{\partial f}{\partial S}$ ასევე იცვლება, პორტფელი რომ ურისკო დარჩეს,

აუცილებელია პორტფელში უწყვეტად იცვლებოდნენ წარმოებული ფასიანი ქაღალდის და აქციის ფარდობითი პროპორციები.

ამოცანა. ფორვარდული კონტრაქტი უდივიდენდო აქციაზე არის წარმოებული ფასიანი ქაღალდი. როგორც ცნობილია, ფორვარდული კონტრაქტის ფასი უდრის

$$f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \tag{11}$$

სადაც K – მიწოდების ფასია.

აჩვენეთ, რომ (11) აკმაყოფილებს (9)-ს.

გავარკვიოთ რა არის რისკ-ნეიტრალური ფასდადება (ვალუაცია). რისკის მიმართ ნეიტრალობა – ესაა ხელოვნური (აბსტრაქტული) გარემოს მდგომარეობა – რისკ ნეიტრალური სამყარო, სადაც ინვესტორები რისკის მიმართ გულგრილობას იჩენენ. ამიტომ ისინი არ მოითხოვენ რისკისათვის პრემიას და თვითონაც არ უხდიან სხვას ფულს რისკის გაღებისათვის. შედეგად რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში ყველა რისკიანი აქტივისათვის იხდიან ურისკო შემოსავალს. ამ სამყაროში რისკიანი აქტივების საშუალო შემოსავალი ისეთივეა, როგორც ურისკო ფასიანი ქაღალდის. ეს სამყარო მეტად მნიშვნელოვანი ინსტრუმენტია წარმოებული ფასიანი ქაღალდების ანალიზისათვის. როგორც უკვე იყო აღნიშნული $\ln S_T$-ს აქვს ალბათური განაწილება $\mathcal{N}(\ln S + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t))$. რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში კი $\ln S_T$-ს იგივე ნორმალური განაწილება აქვს განსხვავებით იმისა, რომ μ-ს მაგივრად ურისკო საპროცენტო განაკვეთი r მონაწილეობს.

§ 4. ბლეკ-შოულსის ოფციონის ფასგათვლის ფორმულები

ბლეკმა და შოულსმა განტოლება (9) სასაზღვრო პირობით (10) ამოხსნეს და მიიღეს ზუსტი ფასგათვლები ევროპული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონებისათვის. თუ გადახდის ფუნქცია უდრის $g(S_T)$-ს საზოგადოდ, ამოხსნის სახე იქნება

$$f(t, S) = e^{-(T-t)r}\mathbf{E}_{t,S}\, g(S_T), \tag{1}$$

სადაც $\mathbf{E}_{t,s}$ აღნიშნავს გასაშუალებას რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ იმ პირობით, რომ $S_t = S$.

როგორც ვიცით, სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონისათვის

$$g(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

და ფორმულა (1)-დან მივიღებთ ევროპული ყიდვის (კოლ) ოფციონისათვის გამოსახულებას

$$C = C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{2}$$

სადაც

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \tag{3}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \tag{4}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

ხოლო სტანდარტული გაყიდვის ოფციონის ფასის გამოსახულებაა

$$P = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \tag{5}$$

რაც მიიღება გამოსახულების $(K - S)^+ = (S - K)^+ - S + K$ დახმარებით. სამართლიანია $P_T = C_T - S_0 + Ke^{-rT}$, რომელსაც კოლ–პუტ პარიტეტს უწოდებენ. ამერიკული ყიდვის ოფციონის ფასისათვის $\overline{C}$ სამართლიანია ისევ ფორმულა (2), ე.ი.

$$\overline{C} = C,$$

ხოლო გაყიდვის ამერიკული ოფციონისათვის ანალიზური ფორმულის მიღება ვერ ხერხდება, განვითარებულია რიცხვითი მეთოდები მისი ფასის გამოსათვლელად.

მოყვანილი ფორმულები – ყიდვის ოფციონისათვის (2), (3), (4) და გაყიდვის ოფციონისათვის (5), (3), (4) წარმოადგენენ პოპულარულ

და მეტად მნიშვნელოვან ბლეკ-შოულსის სტანდარტული ოფციონების ფასგათვლის ფორმულებს.

მოვიყვანოთ ამ ფორმულების ზოგიერთი თვისება.

როდესაც აქციის ფასი S მკვეთრად იზრდება, მაშინ ყოველთვის წარმოებს ყიდვის ოფციონის ალსრულება და იგი ძალიან ემსგავსება ფორვარდულ კონტრაქტს მიწოდების K-ფასით, რომლის ფასიცაა

$$S - Ke^{-rT}.$$

ბლეკ-შოულსის (3), (4), (5) განტოლებიდან, ვინაიდან d_1 და d_2 ამ შემთხვევაში მიისწრაფვიან უსასრულობისკენ, ორივე $N(d_1)$ და $N(d_2)$ უახლოვდებიან 1-ს და სწორედ ამ ფორვარდულ ფასისაკენ მისწრაფვებას ვღებულობთ (2)-დან. შემთხვევაში, როდესაც ვიხილავთ გაყიდვის ოფციონს და S ასევე მკვეთრად იზრდება, ევროპული გაყიდვის ოფციონის ფასი P ნულისკენ მიდის, რასაც ფორმულა (5)-იც გვიჩვენებს, რადგანაც როდესაც d_1 და d_2 მიდიან უსასრულობისაკენ, $N(-d_1)$ და $N(-d_2)$ მიისწრაფვიან ნულისაკენ.

ბლეკ-შოულსის ფორმულებში შედიან პარამეტრები, რომლებიც მონაწილეობენ აქციის ფასის ევოლუციის გამოსახულებაში – ფასი S t-მომენტში და ვოლატილობა σ, ასევე ურისკო საპროცენტო განაკვეთი r და ოფციონის გადახდის ფუნქციაში შემავალი პარამეტრები – T-ოფციონის ალსრულების მომენტი და შეთანხმების ფასი K. მეტად მნიშვნელოვანია ის გარემოება, რომ ფორმულებში არ მონაწილეობს პარამეტრი μ, რომელიც ახასიათებს აქციის ფასის ამონაგების ზრდის (ან კლებადობის) ტენდენციას, ურისკო საპროცენტო განაკვეთი r სწორედ μ-ის ადგილს იკავებს. ფორმულაში შემავალი პარამეტრი σ მეტად მნიშვნელოვანია. იგი ფასიანი ქაღალდის რისკიანობის საზომად გვევლინება. ბლეკ-შოულსის ფორმულებში სწორედ ვოლატილობაა ხოლმე უცნობი, ყველა დარჩენი პარამეტრი ყოველთვის ცნობილია. ვოლატილობის შეფასების ამოცანა მეტად მნიშვნელოვანია და მასზე გვექნება საუბარი. აქ კი ბლეკ-შოულსის ფორმულების თვისებებში განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვოლატილობა σ ნულისაკენ მისწრაფვის. ვინაიდან ამ დროს აქცია ურისკო ხდება, მისი ფასი T

მომენტისათვის გახდება Se^{rT} და გადასახადის ფუნქციის სახე გახდება

$$\max(Se^{rT} - X, 0)$$

მისი დღევანდელი ფასი იქნება

$$e^{-rT}\max(Se^{rT} - K, 0) = \max(S - Ke^{-rT}, 0).$$

ეს შედეგი გამომდინარეობს ბლეკ-შოულსის ფორმულიდანაც. განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა $S > Ke^{-rT}$, საიდანაც

$$\ln(S/K) + rT > 0$$

და როცა $\sigma \to 0$, d_1 და $d_2 \to \infty$, ხოლო $N(d_1)$ და $N(d_2) \to 1$. ამ შემთხვევაში ბლეკ-შოულსის (2), (3), (4) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$C = S - Ke^{-rT}.$$

თუ კი $S < Ke^{-rT}$, მაშინ

$$\ln(S/K) - rT < 0,$$

და როდესაც $\sigma \to 0$, d_1 და $d_2 \to -\infty$, ხოლო $N(d_1)$ და $N(d_2) \to 0$ და (2), (3), (4) ფორმულიდან $C = 0$. ამიტომ ოფციონის ფასი ყოველთვის იქნება

$$\max(S - Ke^{rT}, 0),$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

§ 5. ბლეკ-შოულსის ფორმულის გამოყვანა

1. როგორც აღნიშნული იყო წინა პარაგრაფში, ბლეკ-შოულსის ყიდვის (კოლ) ოფციონის ფასის გამოყვანისათვის უნდა გამოითვალოს

$$C = e^{-(T-t)r}\mathbf{E}_{t,S}[\max(S_T - K, 0)],$$

სადაც გასაშუალება წარმოებს რისკ-ნეიტრალური ალბათობით იმ პირობით, რომ $S_t = S$, რომლის დროსაც $\ln S_N$-ს აქვს ნორმალური სიმკვრივე მათემატიკური ლოდინით $a = \ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$ და დისპერსიით $b^2 = \sigma^2(T - t)$. S-ის რისკ-ნეიტრალური განაწილების

სიმკვრივე, ე.ი. ლოგნორმალური განაწილების სიმკვრივე აღვნიშნოთ $f(x)$-ით.

გამოვთვალოთ ოფციონის ფასი

$$C = e^{-(T-t)} \int_K^{\infty} (x - K) f(x) dx = \int_K^{\infty} x f(x) dx - \int_K^{\infty} K f(x) dx.$$

დავიწყოთ პირველი ინტეგრალით. შევცვალოთ ცვლადი ფორმულით $x = e^y$. მაშინ ლოგნორმალური განაწილებიდან გადავდივართ ნორმალურ განაწილებაზე და, ვინაიდან $f(x) = \varphi(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{\varphi(y)}{e^y}$, სადაც $\varphi(y)$ – ნორმალური განაწილების სიმკვრივეა,

$$\int_K^{\infty} x f(x) dx = \int_{\ln K}^{\infty} e^y \frac{\varphi(y)}{e^y} e^y \, dy =$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} e^y \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{-(y-a)^2}{2b^2}\Big) dy =$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{-(y^2 - 2ay + a^2 - 2yb^2}{2b^2}\Big) dy =$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{-[(y - (a+b^2))^2 - 2ab^2 - b^4}{2b^2}\Big) dy =$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{-(y - (a+b^2))^2}{2b^2}\Big) \exp\Big(a + \frac{b^2}{2}\Big) dy =$$

$$= \exp\Big(a + \frac{b^2}{2}\Big) \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{-(y - (a+b^2))^2}{2b^2}\Big) dy =$$

$$= \exp\Big(a + \frac{b^2}{2}\Big)\Big(1 - N\Big(\frac{\ln K - (a+b^2)}{2b^2}\Big)\Big) =$$

$$= \exp\Big(\ln S + \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\Big) \times$$

$$\times \left\{1 - N\left[\frac{\ln K - \ln S - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right\} =$$

$$= e^{r(T-t)} S \left\{1 - N\left\{\frac{-\ln\frac{S}{K} - (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}\right\} =$$

$$= e^{r(T-t)} S N\left\{\frac{\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} = e^{r(T-t)} S N(d_1).$$

დავთვალოთ მეორე ინტეგრალი

$$K\int_K^\infty f(x)dx = K\left\{1 - N\left\{\frac{\ln K - (\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2}))(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}\right\} =$$

$$= K\left\{1 - N\left\{\frac{-\ln\frac{S}{K} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}\right\} =$$

$$= K N\left\{\frac{\ln\frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\} = K N(d_2).$$

ოფციონის ფასის ფორმულა იქნება

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{1}$$

ამ ფორმულის გამოყვანა შესაძლებელია კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის ბინომიალურ სქემაში, რომელიც ჩვენ პირველი ნაწილის IV თავის §4-ში განვიხილეთ, შესაბამისი ყიდვის ოფციონის ფასში ზღვარზე გადასვლით პარამეტრებზე დამოკიდებულების სპეციალური შემთხვევის დროს.

2. როგორ ხორციელდება ზღვარზე გადასვლა? განიხილავენ ბინომიალურ ბაზართა ოჯახს (B, S, Δ), სადაც $\Delta > 0$ და აქციის ფასის ევოლუციას სწორედ ამ Δ-ბიჯით იღებენ და არა მარტო $\Delta = 1$, როგორც ეს კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის სქემაშია. ეს ოჯახი განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული განტოლებებით

$$B_t^{(\Delta)} = (1 + r\Delta)B_{t-\Delta}^{(\Delta)}, \qquad S_0^{(\Delta)} > 0,$$

$$S_t^{(\Delta)} = (1+\rho_t(\Delta))S_{t-\Delta}^{(\Delta)}, \qquad S_0^{(\Delta)} > 0,$$

სადაც $r > 0$, ხოლო

$$\rho_t(\Delta) = \mu\Delta + \sigma\Delta W_t,$$

W_t – ვინერის პროცესია, $\Delta W_t = W_t - W_{t-\Delta}$ და $\mathbf{E}\rho_t(\Delta) = \mu\Delta$, $\mathbf{D}\Delta W_t = \Delta$, $\mathbf{D}\rho_t(\Delta) = \sigma^2\Delta$, სადაც μ რაიმე მუდმივია, $\sigma > 0$.

ამ ბაზარს ბოლომდე განსაზღვრავენ მთელ $[0,T]$-ინტერვალზე შემდეგნაირად:

$$s \in [t, t+\Delta), \qquad t = 0, \Delta, 2\Delta,$$
$$B_s^{(\Delta)} \equiv B_t^{(\Delta)}, \qquad S_s^{(\Delta)} \equiv S_t^{(\Delta)}, \qquad \rho_s(\Delta) \equiv \rho_t(\Delta).$$

გადახდის ფუნქცია ევროპული ყიდვის ოფციონისათვის შემდეგნაირად განიმარტება

$$f = (S_{[T/\Delta]\Delta} - K)^+.$$

ამოცანაა ვიპოვოთ ოფციონის ფასის $C_T(\Delta)$ ზღვარი, როდესაც $\Delta \to 0$. შედეგად სქემა შემდეგნაირად გამოიყურება

$$\Delta B_t^{(\Delta)} = rB_{t-1}^{(\Delta)},$$
$$\Delta S_t^{(\Delta)} = (\mu\Delta + \sigma\Delta W_t)S_t^{(\Delta)}.$$

ბუნებრივადაა მოსალოდნელი, რომ ამ სქემის ზღვრული სქემა, როდესაც $\Delta \to 0$, იყოს ბლეკ-შოულსის სქემა

$$dB_t = rB_t\,dt$$
$$dS_t = (\mu\,dt + \sigma\,dW_t)S_t.$$

და რომ გარკვეულ პირობებში ფასი

$$C_T(\Delta) \to C_T = C\text{-ს კენ.}$$

დავუშვათ, რომ (B, S, Δ)-ბაზრისათვის სრულდება პირობები $1 + b(\Delta) = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}$, $1 + a(\Delta) = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$ და ვინაიდან $1 + r\Delta \sim e^{r\Delta}$

კოქს-როსისა და რუბინშტეინის ფორმულა ამ შემთხვევაში გვაძლევს ფორმულებს

$$C_T(\Delta) = S_0 B(k_0(\Delta), [T/\Delta], \widetilde{p}_\Delta) - \\ - K(1 + r\Delta)^{-[r/\Delta]} B(k_0(\Delta), [T/\Delta], p^*_\Delta), \qquad (2)$$

სადაც

$$k_0(\Delta) = 1 + \left[\frac{\ln(K/S_0(1+a)^{[T/\Delta]})}{\ln(1+a)(1+b)}\right],$$

$$p^*_\Delta = \frac{r\Delta - a(\Delta)}{b(\Delta) - a(\Delta)},$$

$$\widetilde{p}_\Delta = \frac{1 + b(\Delta)}{1 + a(\Delta)} p^*_\Delta.$$

თუ გამოვიყენებთ მუავრ-ლაპლასის კლასიკურ ზღვარით თეორემას, როდესაც $\Delta \to 0$, მივიღებთ, რომ

$$B(k_0(\Delta), [T/\Delta], p^*_\Delta) \sim N\left(\frac{[T/\Delta]p^*_\Delta - k_0(\Delta)}{\sqrt{[T/\Delta]p^*_\Delta(1 - p^*_\Delta)}}\right) = N(y^*_\Delta),$$
$$B(k_0(\Delta), [T/\Delta], \widetilde{p}_\Delta) \sim N\left(\frac{[T/\Delta]\widetilde{p}_\Delta - k_0(\Delta)}{\sqrt{[T/\Delta]\widetilde{p}_\Delta(1 - \widetilde{p}_\Delta)}}\right) = N(\widetilde{y}_\Delta), \qquad (3)$$

სადაც

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ფორმულებიდან (2) და (3) გამომდინარეობს, რომ როდესაც $\Delta \to 0$,

$$C_T(\Delta) \sim S_0 N(\widetilde{y}_\Delta) - K(1 + r\Delta) e^{-[T/\Delta]} N(y^*_\Delta)$$

და დარჩა დასადგენი, თუ საით მიდიან $k_0(\Delta)$, $(1 + r\Delta)^{-[T/\Delta]}$, $\widetilde{y}_\Delta$, y^*_Δ, როდესაც $\Delta \to 0$. ამ ზღვრების დადგენის შემდეგ ირკვევა, რომ $C_T(\Delta)$ მართლაც ზღვარში მიდის ბლექ-შოულსის ოფციონის ფასისკენ $C_T(\Delta) \to C$, როდესაც $\Delta \to 0$.

ამოცანა 1. ამოწერეთ ევროპული ყიდვის (კოლ) სტანდარტული ოფციონის საწყისი ($t = 0$) ფასი შემთხვევაში, როდესაც $K = S_0$ და $r = 0$.

ამოცანა 2. გათვალეთ ევროპული გაყიდვის (პუტ) სტანდარტული ოფციონის საწყისი ($t = 0$) ფასი შემთხვევაში, როდესაც $K = S_0$ და $r = 0$.

§ 6. ჰეჯირება ბლეკ-შოულსის მოდელში

გავარკვიოთ, თუ როგორ უნდა იქცეოდეს ემიტენტი, როდესაც ის თავის მოქმედებაში ბლეკ-შოულსის სქემით ხელმძღვანელობს. გავიხსენოთ ყიდვის ოფციონის ფასის ფორმულა (იხ. (2). §4)

$$C(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{1}$$

სადაც $d_1 = d_1(t,S) = [\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)][\sigma\sqrt{T-t}]^{-1}$, $d_2 = d_2(t,S) = d_1(t,S) - \sigma\sqrt{T-t}$.

დავუშვათ, რომ საწყის მომენტში $t = 0$ მას ოფციონის რეალიზაციიდან შემოუვიდა (1)-ის შესაბამისი თანხა

$$C(0,S) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2). \tag{2}$$

როგორც ადრე იყო აღნიშნული რისკ-ნეიტრალური პორტფელის შესაქმნელად ემიტენტმა უნდა შეიძინოს $\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1(0,S)) = \gamma_0$ რაოდენობა აქცია. როგორც (2)-დან ჩანს $C(0,S)$ თანხა ამისათვის საკმარისი არ არის და მან უნდა აიღოს საბანკო ანგარიშიდან β_0-თანხა, რომელიც უდრის

$$\beta_0 = -Ke^{-rT}N(d_2(0,S))$$

და $C(0,S) + \beta_0$ თანხით იყიდოს ზუსტად γ_0-რაოდენობა აქციები. ყოველ t-მომენტში იმავე მოსაზრებიდან, ე.ი. რომ ჰქონდეს ურისკო პორტფელი, ემიტენტმა უნდა აირჩიოს სტრატეგია $(\gamma_t \beta_t)$, სადაც აქციათა რაოდენობა t-მომენტში

$$\gamma_t = N(d_1(t, S_t)),$$

ხოლო თანხა, აღებული საბანკო ანგარიშიდან

$$\beta_t = -Ke^{-r(T-t)}N(d_2(t,S_t)).$$

მაშინ t-მომენტში ემიტენტის კაპიტალი იქნება

$$X_t = S_tN(d_1(t,S_t)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(t,S_t))$$

და აღსრულების T მომენტში, როდესაც $S_T > K$ სიდიდეები $d_1 \to \infty$, $d_2 \to \infty$ და $N(d_1) \to 1$, $N(d_2) \to 1$. ამიტომ

$$X_T = S_T - K,$$

ხოლო თუ კი $S_T < K$, მაშინ $d_1 \to -\infty$, $d_2 \to -\infty$ და $N(d_1) \to 0$, $N(d_2) \to 0$. შედეგად $X_T = 0$ და $X_T = \max(S_T - K, 0)$, ე.ი. ყიდვის ოფციონის ვალდებულება შესრულებული იქნება.

იტოს ფორმულის გამოყენებით არჩეული (γ_t, β_t)-სტრატეგიისათვის სამართლიანია

$$S_t d\gamma_t + e^{rt}d\beta_t = 0. \tag{3}$$

სტრატეგიის ამ თვისებას უწოდებენ თვითდაფინანსებადობის თვისებას. მისი შინაარსი შემდეგშია – ემიტენტი გარედან კაპიტალს არ იღებს და არც გასცემს. ამის თაობაზე ჩვენ ვიმსჯელეთ ჰეჯირების განხილვის დროს ბინომიალურ ბაზარზე.

ამოცანა. აჩვენეთ (3)-ის სამართლიანობა.

§ 7. ვოლატილობის შეფასება

1. განვიხილოთ σ-ვოლატილობის ემპირიული შეფასება.

ბლექ-შოულსის მოდელში აქციის ფასის ევოლუცია ემორჩილება გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას და ამიტომ აქციის ამონაგები $\ln S_T - \ln S_t$ ნორმალურადაა განაწილებული $N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$, $\sigma^2(T-t))$. მისი სტანდარტული გადახრა უდრის $\sigma\sqrt{T-t}$-ს.

აქციის ფასის დაკვირვება, როგორც წესი, დროის ფიქსირებულ ინტერვალზე წარმოებს (მაგალითად, ყოველდღე, ყოველკვირა, ყოველთვე).

ვთქვათ $n+1$ – დაკვირვებების რაოდენობაა, S_i – აქციის ფასი i-ური ინტერვალის ბოლოს ($i = 0, 1, \ldots, n$), τ – დროის ინტერვალის სიგრძე, ხოლო

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

წარმოადგენს აქციის ამონაგებს i-ურ ინტერვალზე და მისი სტანდარტული გადახრა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ იქნება $\sigma\sqrt{\tau}$. ამ სტანდარტული გადახრის სტატისტიკური შეფასება იქნება

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}\,, \tag{1}$$

სადაც $\overline{u}$ წარმოადგენს u_i, $i = \overline{1,n}$-ების საშუალო არითმეტიკულს. თვით σ-ვოლატილობის შეფასება კი იქნება

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}}\,. \tag{2}$$

ამ შეფასების მიახლოებითი შეცდომაა $\frac{s^*}{\sqrt{2n}}$.

2. პირველ პუნქტში მოვიყვანეთ აქციის ფასის ვოლატილობის შეფასება მიღებული ამ ფასის ისტორიაზე დაყრდნობით. ამ პუნქტში კი განვიხილავთ ალტერნატიულ შეფასებას, რომელსაც **ნაგულისხმევ ვოლატილობას** უწოდებენ. ამ მეთოდის იდეა შემდეგშია. აქციის ფასი, ჩამოთვლილი ბლექ-შოულსის თეორიული ფორმულით, უტოლდება ამ აქციის საბაზრო ნაღდ ფასს $\overline{C}$, რომელსაც აკვირდებიან ფინანსურ ბაზარზე. მაშინ ვღებულობთ, მაგალითად, ყიდვის ევროპული ოფციონისავის

$$\overline{C} = SN\left(\frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) -$$

$$- Ke^{-r(T-t)}N\left(\frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

ამ გამოსახულებაში კი ყველა სიდიდე, გარდა σ-ვოლატილობისა, უკვე ცნობილია. თუ ვიპოვით ისეთ σ^*-ს, რომელიც ტოლობას შეასრულებს, იგი იქნება სწორედ ნაგულისხმევი ვოლატილობა. იხილავენ სტანდარტულ ყიდვის ევროპულ ოფციონებს სხვადასხვა მიწოდების ფასებით $K_1, K_2, \ldots, K_m$, იღებენ შესაბამის საბაზრო ფასებს $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_m$, მათ გაუტოლებენ ბლექ-შოულსის შესაბამის თეორიულ ფასებს, პოულობენ ნაგულისხმევ ვოლატილობებს $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_m^*$ და თუ აღმოჩნდა ამ სიდიდეების გარკვეული მდგრადობა, მაშინ იმ სიდიდეს, რომლის მიმართაც მდგრადობაა, ირჩევენ ვოლატილობის შესაფასებლად.

§ 8. ოფციონების ფასგათვლები მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებით

1. მონტე-კარლოს მეთოდი საკმაოდ მძლავრი რიცხვითი მეთოდია და მოდელირების დროს ხშირად გამოიყენება. მისი ძირითადი იდეა შემდეგში მდგომარეობს – თუ ცნობილია საკვლევი სისტემის ცალკეული შემთხვევითი ბუნების პარამეტრების ალბათური განაწილებები, **იმიტაციის** საშუალებით ხდება ამ პარამეტრების ფორმირება, ე.ი. წარმოებს მოცემული განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებისა და შემთხვევითი პროცესების რეალიზაციების აგება. მნიშვნელოვანია ამ მეთოდის როლი ფინანსური ანალიზის ამოცანების გადაწყვეტის დროს და, კერძოდ, ოფციონების ფასგათვლებში. მეთოდის შესაძლებლობას აძლიერებს დღეს არსებული ფართო კომპიუტერულ სისტემათა რგოლი.

მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება შემდეგნაირად წარმოებს. ხდება სისტემაში შემავალი ცვლადების ბუნების გამოვლენა მათი ალბათური განაწილებების დადგენის მიზნით. შემდეგ მიმართავენ ცვლადების მოძრაობის იმიტაციას, რაც ხორციელდება შემთხვევითი რიცხვების მრავალჯერადი იმიტაციის ხარჯზე და მათი კორექტირებით, რათა მივიღოთ ისეთივე განაწილება, როგორიც ძირითად ცვლადებს გააჩნია. ამას მოსდევს თვით მოდელირების განხორციელება, ე.ი. შემავალი ცვლადების გაერთიანება სისტემის ლოგიკის შესაბამისად. ასე ვღებულობთ გამოსავალ სიდიდეებს. ამ პროცესის მრავალ-

ჯერადი განმეორება (შესაძლოა ათასეულობით, რაც კომპიუტერზე წარმოებს და დიდ სიძნელეებთან არ არის დაკავშირებული) საშუალო გამოსავალი სიდიდეების გათვლის შესაძლებლობას იძლევა. ეს საშუალედო სიდიდეები წარმოადგენენ მოდელირებული ცვლადების მომავალ (მოსალოდნელ) მნიშვნელობებს. შემდეგ მათი აწმყო სიდიდეების დასადგენად ხდება შესაბამისი დისკონტირება. გათვლების სიზუსტე დადგინდება სტანდარტული გადახრების გათვლით.

2. ჩვენ უნდა შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ ბლეკ-შოულსის მოდელში ევროპული ტიპის ოფციონის ფასი t-მომენტში (არბიტრაჟული ფასი, ე.ი. ისეთი ფასი, რომელიც გამორიცხავს არბიტრაჟის შესაძლებლობას), თუ გადახდის ფუნქცია (გასამრჯელო) $g(S_u, u \leq T)$ აქციის ფასის მთელ წარსულ ისტორიაზეა დამოკიდებული, შემდეგი სახისაა

$$f(t,S) = e^{-(T-t)r} E^*_{t,S} g(S_u, t \leq u \leq T), \tag{1}$$

სადაც $E^*_{t,S}$ აღნიშნავს გასაშუალებას რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ იმ პირობით, რომ $S_t = S$, r – ურისკო საპროცენტო განაკვეთია. ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონებისათვის, როდესაც $g(S_u, u \leq T) = g(S_T)$, ეს ფორმულა გადადის §4 (1) ფორმულაში და, როგორც ვაჩვენეთ, ხერხდება ოფციონის ფასებისათვის ზუსტი ანალიზური ფორმულების მიღება. ზუსტი ფორმულები სხვა შემთხვევებშიც მიიღება, მაგრამ ბევრ შემთხვევაში, მაგალითად, ეგზოტიკური[14] სახის ოფციონებისათვის გასამრჯელოთი, რომელიც აქციის ფასის მთელ წარსულ ისტორიაზეა დამოკიდებული, ეს ვერ ხერხდება და მიმართავენ მონტე-კარლოს მეთოდს. როგორ უნდა გამოვიყენოთ ეს მეთოდი? გავიხსენოთ, რომ რისკ-ნეიტრალური ალბათობა ბლეკ-შოულსის მოდელში ესაა ნორმალური განაწილება მათემატიკური ლოდინით $\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$, დისპერსიით $\sigma^2(T - t)$ და რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში აქციის ფასის ევოლუცია აღიწერება გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობით

$$dS_u = rS_u\,du + \sigma S_u dW^*_u, \quad 0 \leq t \leq u \leq T, \tag{2}$$

[14] ეგზოტიკური ოფციონების შესახებ იხილეთ შემდეგში (თავი VII).

რომლის ამოხსნაცაა

$$S_u = Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)+\sigma(W_u^*-W_t^*)}, \quad 0 \le t \le u \le T, \qquad (3)$$

აქ W^* წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობას რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ. როგორც ვხედავთ, (1)-ისა და (3)-ის შედარებით ოფციონის ფასგათვლის ამოცანა დადის $g(S_u, t \le u \le T)$-ს საშუალოს გამოთვლაზე და შემდეგ მის დისკონტირებაზე $e^{-(T-t)r}$-ით. $g(S_u, t \le u \le T)$-ს საშუალოს გამოთვლას ვაწარმოებთ მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებით, ამისათვის საჭიროა ვინერის პროცესის ტრაექტორიების გენერაცია. ყველა კომპიუტერს გააჩნია შემთხვევითი რიცხვების (უფრო სწორედ, ფსევდოშემთხვევითი რიცხვების) გენერაციის პროგრამა, რომლის საშუალებით ხდება ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეების იმიტაცია და ვინაიდან Δt-დროის ინტერვალში $\Delta W^* = \mathcal{E}\sqrt{\Delta t}$, სადაც $\mathcal{E}$ – სტანდარტული ნორმალური სიდიდეა, ამ ცვლილების ΔW^*-ს გამოთვლა სიძნელეს არ წარმოადგენს და ეყრდნობა მხოლოდ ნორმალურ $N(0,1)$ შემთხვევითი სიდიდის გათამაშებას, ხოლო თვით $W_u^* = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_k\sqrt{\Delta t}$, სადაც $N = \frac{T-t}{\Delta t}$, და $\mathcal{E}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეებია. შესაძლებელია აგრეთვე სხვა მეთოდების გამოყენებაც, მაგალითად, იმიტაცია ვინერის პროცესის ლევი-ტესელსკის წარმოდგენაზე დაყრდნობით, აპროქსიმაცია შემთხვევითი ხეტიალით და სხვა. ზოგ კომპიუტერს ვინერის პროცესის მისაღებად გამზადებული ქვეპროგრამებიც გააჩნია.

დავუშვათ, რომ ვინერის პროცესის პირველი აგებული რეალიზაცია არის $\widetilde{W}^{*(1)}$, მეორე – $\widetilde{W}^{*(2)}$ და ა.შ., ბოლო – $\widetilde{W}^{*(n)}$. გამოვთვალოთ შესაბამისი გასამრჯელოები. თუ როგორია g-ს დამოკიდებულება აქციის ფასებზე, ყოველთვის ცნობილია და ამიტომ შესაძლებელია გამოთვლები

$$g^{(1)} = g\left(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)+\sigma(W_u^{*(1)}-W_t^{*(1)})},\ t \le u < T\right),$$

$$g^{(2)} = g\left(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)+\sigma(W_u^{*(2)}-W_t^{*(2)})},\ t \le u < T\right),$$

$$g^{(n)} = g\left(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)+\sigma(W_u^{*(n)}-W_t^{*(n)})},\ t \le u < T\right).$$

შემდეგ ჩვენ ვიღებთ ამ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკულს

$$\widehat{g} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}$$

და მისი საშუალებით ვაფასებთ $E^*_{t,S}g(S_u, t \le u \le T)$-ს, ხოლო ოფციონის მიახლოებით ფასად ავიღებთ

$$\widehat{f} = e^{-r(T-r)}\widehat{g}\text{-ს.}$$

ცხადია, საჭიროა ამ სიდიდის სტანდარტული გადახრის გამოთვლაც, რომლიდანაც გამოთვლების სიზუსტე დასაბუთდება.

§ 9. ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასგათვლები ბლეკ-შოულსის სქემებში

განვიხილოთ ყიდვის ამერიკული ოფციონი გადახდის ფუნქციათა სისტემით

$$f_t = e^{-\lambda t}(S_t - K)^+, \qquad t \ge 0,$$

და მეორე-გაყიდვის ამერიკული ოფციონი გადახდის ფუნქციათა სისტემით

$$f_t = e^{-\lambda t}(K - S_t)^+, \qquad t \ge 0,$$

სადაც $K > 0$, $\lambda \ge 0$.

პირველს უწოდებენ დისკონტირებულ სტანდარტული ყიდვის ამერიკულ ოფციონს, მეორეს კი – დისკონტირებული გაყიდვის სტანდარტულ ამერიკულ ოფციონს.

გავიხსენოთ, რომ ამერიკული ტიპის ოფციონები მიმზიდველია მისი მფლობელისთვის იმით, რომ მას თვითონ შეუძლია გადაწყვიტოს როდის ალასრულოს ოფციონი და წყვეტს საინტერესო პრობლემას.

ჩვენ ამ პარაგრაფში მოკლედ შევეხებით ამ ორი ოფციონის ფასგათვლის პრობლემას. მოვიყვანთ მხოლოდ შედეგებს.

დისკონტირებული ყიდვის ოფციონისათვის საწყის $t = 0$ მომენტში ფასი $\lambda > 0$ შემთხვევაში $C(\lambda)$ იქნება

$$C(\lambda) = \begin{cases} C_1 S_0^{\gamma_1}, & S_0 < S_1^*, \\ S_0 - K, & S_0 \geq S_1^*, \end{cases}$$

სადაც

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}},$$
$$C_1 = \gamma_1^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1 - 1}{K}\right)^{\gamma_1 - 1},$$
$$S_1^* = K\,\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1},$$

და ოფციონის განაღდება უნდა მოხდეს იმ მომენტში, როდესაც აქციის ფასი პირველად მიაღწევს S_1^*. შემთხვევაში, როდესაც $\lambda = 0$ და აღსრულების ინტერვალია $[0, T]$, აღსრულება ბოლო T-მომენტში უნდა მოხდეს.

დისკონტირებული გაყიდვის ოფციონისათვის რაციონალური ფასია $(\lambda \geq 0)$

$$P(\lambda) = \begin{cases} C_2 S_0^{\gamma_2}, & S_0 > S_2^*, \\ K - S_0, & S_0 \leq S_2^*, \end{cases}$$

სადაც

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}},$$
$$C_2 = |\gamma_2|^{|\gamma_2|}\left(\frac{K}{1 + |\gamma_2|}\right)^{1 + |\gamma_2|},$$
$$S_2^* = K\,\frac{|\gamma_2|}{1 + |\gamma_2|},$$

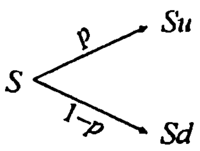
და ოპტიმალური აღსრულების მომენტია ის პირველი მომენტი, როდესაც აქციის ფასი ჩამოვა S_2^*-მდე.

§ 10. ბინომიალური ხე

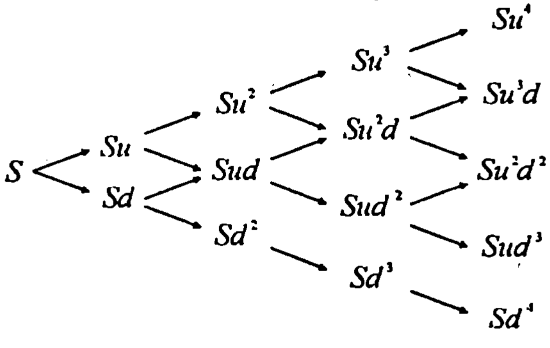
საზოგადოდ აქციის ფასის ევოლუცია ბინომიალური მოდელის მიხედვით წარმოებს შემდეგნაირად

$$S_n = S_{n-1}\eta_n, \qquad S_0 = S, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

სადაც $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომლებიც მხოლოდ ორ მნიშვნელობას იღებენ u-ს და d-ს ($u > 1$, $0 < d < 1$) ალბათობებით p და $(1-p)$. კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის მოდელში (იხ. თავი III) $\eta_n = 1 + \rho_n$ აქციის ფასის საწყისი S-დან Su-სკენ მოძრაობა წერმოადგენს ფასის აწევას – "up" – ამიტომ იყენებენ u-აღნიშვნას, მოძრაობა კი S-დან Sd-სკენ – ფასის დაწევაა – "down" – შესაბამისი აღნიშვნით d. ნახ. 1-ზე გამოსახულია ერთნაბიჯიანი $N = 1$ ბინომიალური ხე, ხოლო ნახ. 2-ზე მრავალნაბიჯიანი ხე.



ნახ. 1



ნახ. 2

განვიხილოთ უწყვეტი დროის შემთხვევა, როდესაც აქციის ფასი გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობით აღიწერება

$$dS = \mu S\, dt + \sigma\, dW.$$

დავუშვათ, რომ ოფციონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა T დაყოფილია დროის მცირე Δt-ინტერვალებად და აგრეთვე თითოეულ ამ ინტერვალში. აქციის ფასი მოძრაობს S-დან Su-მდე და S-დან Sd-მდე შესაბამისად აქციის ფასის აწევისა ($u > 1$) და დაწევის ($d < 1$) ალბათობებით p და $(1-p)$.

ამ სიდიდეებს (u, d და p) განხილულ მოდელში შემდეგნაირად ანგარიშობენ. გადადიან რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში. როგორც ცნობილია, ამ დროს მოქმედებს შემდეგი პრინციპი:

a) ყველა აქტივის საშუალო ამონაგები არის ურისკო საპროცენტო განაკვეთი,

b) მომავალი ფინანსური ნაკადების დისკონტირება ხდება ურისკო საპროცენტო განაკვეთით.

ამიტომ აქციის მოსალოდნელი (საშუალო) ფასი Δt ინტერვალის ბოლოს არის $Se^{r\Delta t}$, სადაც S აქციის ფასია ამ ინტერვალის დასაწყისში. მეორეს მხრივ, ეს საშუალო ფასი Δt-ინტერვალის ბოლოს უდრის $pSu + (1-p)Sd$ და გვაქვს

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd$$

ან

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d. \qquad (1)$$

გავიხსენოთ, რომ განხილულ მოდელში აქციის ფასის ცვალებადობის დისპერსია დროის Δt მცირე ინტერვალში უდრის $S^2\sigma^2\Delta t$. მეორეს მხრივ, ამ დისპერსიის დათვლა უშუალოდ შეიძლება p-სა და Su, d-ს გამოყენებით (შევნიშნოთ, რომ S შემთხვევითი არ არის): $\mathbf{D}\Delta S = \mathbf{D}(S_{\Delta t} - S) = \mathbf{D}S_{\Delta t} = \mathbf{E}S_{\Delta t}^2 - (\mathbf{E}D_{\Delta t})^2 = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2$ და

$$S^2\sigma^2\Delta t = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2$$

ან

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2. \qquad (2)$$

ჩვეულებრივ უშვებენ, რომ

$$u = \frac{1}{d}. \tag{3}$$

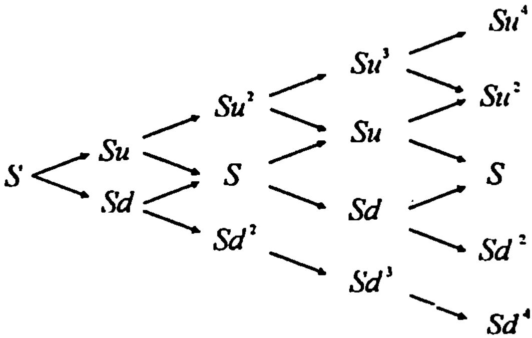
გვაქვს სამი (1), (2) და (3) გამოსახულება, საიდანაც ადვილად ვპოულობთ სამ p, u და d სიდიდეს:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \tag{4}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{6}$$

დასაწყისში აქციის ფასია S, Δt-ს ბოლოს Su ან Sd, $2\Delta t$-ს ბოლოს Su^2 ან $Sud = S$ და ასე შემდეგ. შესაბამისი ბინომიალური ხე გამოსახულია ნახ. 3-ზე



ნახ. 3

ოფციონის ფასგათვლა იწყება ხის ბოლოდან T-მომენტში და შემდეგ ხდება დაბრუნება უკან. ბოლო T-მომენტში ოფციონის ფასი ცნობილია, მაგალითად, იგი უდრის $\max(S_T - K, 0)$ სტანდარტული ევროპული ყიდვის (კოლ) ოფციონისათვის და $\max(K - S_T, 0)$ გაყიდვის (პუტ) ოფციონისათვის, სადაც S_T–ოფციონის ფასია ბოლოში, K კი აღსრულების ფასი (სტრაიკი). ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ვიმყოფებით რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში, $(T - \Delta t)$-

დროის თითოეულ კვანძზე ფასი შეიძლება გაითვალოს, როგორც T-ში ფასის საშუალო მნიშვნელობა დისკონტირებული ურისკო r-საპროცენტო განაკვეთით დროის Δt-პერიოდში, ე.ი. სიდიდით $e^{-r\Delta t}$, ხოლო $(T-2\Delta t)$-დროის თითოეულ კვანძზე როგორც $(T-\Delta t)$-ში ფასის საშუალო მნიშვნელობა დისკონტირებული ასევე $e^{-r\Delta t}$-თი და ა.შ. ასეთი უკან-უკან სიარულით მივაღწევთ საწყისს და მიღებული სიდიდე იქნება ოფციონის საწყისი ფასი.

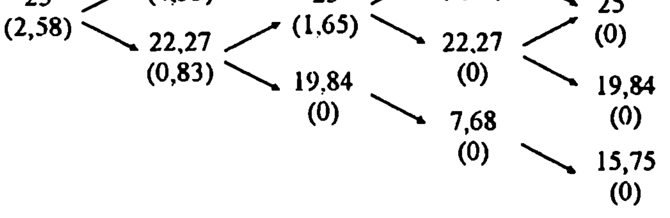
მაგალითი. დავუშვათ, რომ $S = 25$, $K = 25$, $r = 0,1$, $\sigma = 0,4$. დავუშვათ, T უდრის 4 თვეს და Δt – ერთ თვეს, ე.ი. $T = 0,3333$ წ. და $\Delta t = 0,0822$ წ. ვიხილავთ სტანდარტულ ევროპული ყიდვის (კოლ) ოფციონს.

ჯერ უნდა დავთვალოთ u, d და p (5), (6) და (4) ფორმულების გამოყენებით. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$u = 1,1224, \quad d = 0,8909, \quad e^{r\Delta t} = e^{0.1\times 0,0833} = 1,0084,$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0,5076, \qquad 1 - p = 0.4924,$$

და ბინომიალურ ხეს შემდეგი სახე ექნება



ნახ. 4

ნახ. 4-ზე ფრჩხილებში მითითებულია შესაბამისი მომენტებისათვის ოფციონის გათვლილი ფასები. ბოლო $T = 0,3333$ წ მომენტში ეს

ფასები გამოითვლება ყიდვის (კოლ) ოფციონის გადახდის ფუნქციით და კვანძებში ზემოდან (ვინაიდან სტრაიკი 25-ია) ქვემოთ უდრიან $39,68 - 25 = 14,68$, $31,49 - 25 = 31,49$, $25 - 25 = 0$, 0-ს და ბოლოს 0-ს, ვინაიდან $0,84$ და $15,75$ სტრაიკზე ნაკლებებია. შემდეგ ვითვლით ფასებს $T - \Delta t = 0,3333 - 0,0833 = 0,25$ წ მომენტში და ასე შემდეგ ჩავდივართ საწყისში. მაგალითად, ზემოდან პირველ კვანძში $T - \Delta t = 0.25$ წ მომენტში. ის ასე ხდება

$$(1468 \times 0,5076 + 6,49 \times 0,4924)e^{-0,1\times 0,0833} = 10,65$$

ან $T - 2\Delta t = 0,3333 - 2 \times 0,0833 = 0,1664$ წ. მომენტის მეორე კვანძში

$$(3,27 \times 0,5076 + 0 \times 0,4924)e^{-0,1\times 0,0833} = 1,65$$

და ასევე სხვა კვანძებში. ბოლოს ოფციონის საწყისი ფასისათვის მივიღეთ $2,58$.

ამოცანა. მოყვანილი მაგალითის პირობებში გათვალეთ ბინომიალური ხე და სტანდარტული ევროპული გაყიდვის ოფციონის ფასები.

ბინომიალური ხის მეთოდი ფართო გამოყენებას პოვებს ამერიკული ტიპის ოფციონების მიახლოებითი ფასდადების დროს. მაგრამ ჩვენ ამაზე აღარ შევჩერდებით. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ ამ შემთხვევაში თითოეული კვანძისათვის აუცილებელია გავარკვიოთ – აქვს თუ არა ოფციონის ადრინდელ აღსრულებას უპირატესობა ოფციონის დატოვებასთან მომავალში აღსრულებისათვის.

თავი VII
ეგზოტიკური ოფციონები

§ 1. ეგზოტიკური ოფციონების ნაირსახეობა

წარმოებული ფასიანი ქაღალდები უფრო რთული გასამრჯელოთი (გადახდის ფუნქციით), ვიდრე სტანდარტული ევროპული, ან ამერიკული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონები, ეგზოტიკური ოფციონის სახელით არიან ცნობილი. უნდა აღინიშნოს, რომ უმეტესი ეგზოტიკური ოფციონებით ვაჭრობა ბირჟის გარეთ ხდება. რუბინშტეინის მიერ 1991–1992 წლებში შემოთავაზებულია ეგზოტიკური ოფციონების კატეგორიად დაყოფა. გავრცელებულ კატეგორიებს ჩვენ მოკლედ შევეხებით, შემდეგ კი ზოგიერთ მათგანს დაწვრილებით განვიხილავთ.

ბლოკური ოფციონები. ასეთი ოფციონები წარმოადგენს პორტფელს, რომელიც შედგება სტანდარტული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონის, ფორვარდული კონტრაქტის, ნაღდი ფულისა და თვით საბაზისო აქტივისაგან. ასეთ ოფციონებს მიეკუთვნება ცნობილი კოლარ ოფციონი, ბოსტონის ოფციონი და სხვა.

არასტანდარტული ამერიკული ოფციონები. ესენია ოფციონები, რომლებსაც ამერიკული ოფციონების სტანდარტული თვისებები – განაღდება ნებისმიერ მომენტში ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში, უცვლელი შეთანხმების ფასი (სტრაიკი) – ყოველთვის არ გააჩნია. მაგალითად, ბერმუდის ოფციონის შემთხვევაში ადრინდელი აღსრულება შემოსაზღვრულია გარკვეული დღით ოფციონის სიცოცხლის პერიოდიდან.

მომავალში დამწყები ოფციონები. ესაა ოფციონი, რომელშიც საფასურს დღეს იხდიან, მფლობელი კი მას მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ მომენტში იღებს (ე.ი. იგი იწყება მომავალში). თუ ეს მომენტი T_0-ია და $T_0 < T$, სადაც T ოფციონის აღსრულების მომენტია, მაშინ ყიდვის ოფციონის გასამრჯელო-ტერმინალური გადასახადი

$$FS_T = (S_T - S_{T_0})^+,$$

ე.ი. სტრაიკი $K = S_{T_0}$. ოფციონის ფასდადების ფორმულას საწყის მომენტში შემდეგი სახე აქვს

$$FS_0 = C(S_0, T - T_0, S_0).$$

შედგენილი ოფციონები. ასეთებია ოფციონები ოფციონებზე. გავრცელებულია ოთხი ძირითადი ტიპი: კოლი კოლზე, პუტი კოლზე, კოლი პუტზე და პუტი პუტზე. განვიხილოთ, მაგალითად კოლი კოლზე. პირველ აღსრულების T_1 დღეს შედგენილი ოფციონის მფლობელი იხდის პირველ სტრაიკს K_1 (შეთანხმების ფასს) და იღებს კოლ ოფციონს. ეს ოფციონი კი აძლევს მფლობელს უფლებას, რომ მეორე სტრაიკის K_2-ის ფასად მეორე აღსრულების T_2 დღეს იყიდოს ძირითადი (საბაზისო) აქტივი.

შედგენილ ოფციონს ყიდულობენ, როგორც წესი, ორი გარემოების გამო: პირველი, რომ დაიცვან თავი გაურკვეველი სიტუაციისაგან, როდესაც წინასწარ არაა ცნობილი, საჭირო იქნება თუ არა დაცვა და მეორე, რომ დაიზღვიონ თავი რისკისაგან უფრო იაფი ხერხით, ვიდრე ძირითადი ოფციონის ყიდვაა.

ოფციონები ზღუდით. ესაა ოფციონები, რომელთა გადახდის ფუნქცია დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა გარკვეულ დონეს მიაღწევს საბაზისო აქტივის ფასი სიცოცხლის გარკვეულ პერიოდში.

ბინარული ოფციონები. ესაა ოფციონები წყვეტილი სახის გადახდის ფუნქციით. ბინარული ოფციონების უმარტივესი მაგალითებია ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონები "ნაღდი ფული ან არაფერი". ყიდვის ოფციონის გასამრჯელოს სახეა $BC_T = QI(S_T > K)$, ხოლო გაყიდვის ოფციონისა $BP_T = QI(S_T < K)$, სადაც $I(\cdot)$ შესაბამისი სიმრავლის ინდიკატორია, მაგალითად

$$I(S_T > K) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } S_T > K; \\ 0, & \text{თუ } S_T \leq K. \end{cases}$$

ასეთი ყიდვის ოფციონის მფლობელი არაფერს არ იღებს, თუ აქტივის ფასი აღსრულების T მომენტში სტრაიკის ფასის ქვემოთაა ან ტოლია ($S_T \leq K$) და იღებს Q რაოდენობის თანხას, თუ აქტივის

ფასი მეტია სტრაიკის ფასზე ($S_T > K$). აქტივის ფასის ლოგ-ნორმალურობის პირობებში და სტანდარტულ აღნიშვნებში ყიდვის ოფციონის "ნაღდი ფული ან არაფერი" ფასის ფორმულა t მომენტში შემდეგია $Qe^{-r(T-t)}N(d_2)$.

გავრცელებულია ასევე ბინარული ოფციონის "აქტივი ან არაფერი". აქ იგივე პირობებია, როგორც ზემოთმოყვანილ ოფციონის "ნაღდი ფული ან არაფერი"-ს დროს, იმ განსხვავებით, რომ Q თანხის ნაცვლად ყიდვის ოფციონის მფლობელი მიიღებს თვით აქტივის ფასს S_T და ამ ოფციონის ფასის ფორმულა t მომენტში არის $S_t N(d_1)$. სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონი ეკვივალენტურია ოფციონის "აქტივი ან არაფერი" გრძელი პოზიციისა და ოფციონის "ნაღდი ფული ან არაფერი" მოკლე პოზიციისა, როდესაც $Q = K$.

უკანმხედი ოფციონები. ასეთი ოფციონების გასამრჯელო დამოკიდებულია აქტივის მაქსიმალურ ფასზე, რომელიც ოფციონის სიცოცხლეში მიიღწევა.

აზიური ოფციონები. ასეთი ოფციონის გასამრჯელო დამოკიდებულია აქტივის ფასის საშუალო მნიშვნელობაზე ოფციონის სიცოცხლის გარკვეულ პერიოდში.

ოფციონები გაცვლაზე ერთი აქტივისა მეორეზე. მაგალითად, ოფციონი ყიდვაზე გერმანული მარკისა ამერიკულ დოლარზე წარმოადგენს ოფციონს გაცვლაზე ერთი უცხოური სავალუტო აქტივისა მეორე უცხოურ სავალუტო აქტივზე.

ამომრჩევი ოფციონი. ძირითადი თვისებაა – წინასწარ განსაზღვრულ $T_0 < T$ მომენტში მფლობელი ირჩევს, იყოს ეს ოფციონი ყიდვისა, თუ გაყიდვის, ე.ი. ამ ოფციონის გასამრჯელო T_0-მომენტში არის

$$CH_{T_0} = \max\left(C(S_{T_0}, T - T_0, K_1), P(S_{T_0}, T - T_0, K_2)\right),$$

სადაც C და P შესაბამისად T_0 მომენტში ყიდვის და გაყიდვის ოფციონების ფასია, როდესაც სტრაიკები ერთი და იგივეა $K_1 = K_2 = K$, მაშინ პუტ-კოლ პარიტეტის გამოყენებით ამომრჩევი ოფციონის ფასი

t მომენტში არის

$$CH_t = C(S_t, T-t, K) + P(S_t, T_0 - t, Ke^{-r(T-T_0)}), \quad t \in [0,T].$$

ბლეკ-შოულსის ფორმულის გამოყენებით საწყის მომენტში $t=0$ ოფციონის ფასდადების ფორმულის სახეა

$$CH_0 = S_0(N(d_1) - N(-\overline{d}_1)) + Ke^{-rt}(N(-\overline{d}_2) - N(d_2)),$$

სადაც

$$\overline{d}_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T_0}{\sigma\sqrt{T_0}},$$
$$\overline{d}_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T_0}{\sigma\sqrt{T_0}},$$

ხოლო d_1 და d_2 გამოითვლება ფორმულებით

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

კალათის ოფციონი. ესაა ოფციონური კონტრაქტი კალათაზე, რომელშიაც შედის გარკვეული რაოდენობის სხვადასხვა აქტივი.

რუსული ოფციონი. ეს ოფციონი წარმოადგენს უკანმხედი გაყიდვის (პუტ) ამერიკული ტიპის დისკონტირებული ოფციონის სპეციალურ სახეს.

კიბისებური ოფციონი. ამ ოფციონის სტრაიკი იცვლება ყოველთვის, როდესაც ძირითადი აქტივის ფასი მიაღწევს წინასწარგანსაზღვრულ დონეებიდან შემდეგ საფეხურს. მაგალითად, თუ საწყისი სტრაიკია K, საფეხურები შეიძლება აირჩეს შემდენაირად $K+h$, $K+2h, \ldots$ $(0 < h < K)$. როდესაც ფასი აღწევს $(K+h)$-ს, სტრაიკი ხდება $(K+h)$-ის ტოლი და მოგება h ფიქსირდება. თუ როდისმე ამის შემდეგ ფასმა მიაღწია $(K+2h)$-ს, სტრაიკი გახდება

$K + 2h$ და მოგება h კიდევ ფიქსირდება და ასე შემდეგ. ოფციონის ალსრულებისას ამ მოგებებს ოფციონის მფლობელი აუცილებლად მიიღებს ოფციონის შინაგან ღირებულებასთან ერთად ამ მომენტში.

ასეთი ტიპის ოფციონებია აგრეთვე "კლიკევ და ოფციონი "დაძახებით". პირველ ოფციონში სტრაიკის შეცვლა ხდება გარკვეულ დღეებში, ხოლო მეორეში "დაძახებით", როდესაც კი მფლობელი მოისურვებს. მაგალითად, თუ სტრაიკი იყო 100 და მფლობელმა "დაიძახა", როდესაც აქტივის ფასია 120, მაშინ სტრაიკი ხდება 120, ხოლო მოგება 20 ფიქსირდება.

მრავალფაქტორიანი ოფციონები. ამ კლასს მიეკუთვნება განხილული კალათის ოფციონი, ოფციონი "ცისარტყელა", სპრედ ოფციონი და ოფციონი "ქვანტი".

კოლი "ცისარტყელა" ოფციონის გასამრჯელოს სახეა

$$C_T = \left(\max(S_T^1, S_T^2, \ldots, S_T^n) - K\right)^+,$$

სადაც $S_T^1, S_T^2, \ldots, S_T^n$ – ძირითადი აქტივების ფასებია.

სპრედ-ოფციონებისათვის გასამრჯელო არის სხვაობა ორი ძირითადი აქტივის ფასებს შორის.

"ქვანტო"-ოფციონის გადახდის ერთეულების რაოდენობა ერთ აქტივზეა დამოკიდებული, ხოლო ერთეულის ფასი მეორე აქტივის ფასითაა განსაზღვრული.

ეგზოტიკური ოფციონების ჰეჯირების პრობლემას ცალკე ჩვენ არ განვიხილავთ.

§ 2. ბლოკური ოფციონები

ასეთი ოფციონი წარმოადგენს პორტფელს, რომელიც შედგება სტანდარტული ევროპული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების, ფორვარდული კონტრაქტის, ნაღდი ფულისა და თვით საბაზისო აქტივისაგან. ბლოკურ ოფციონებს მიეკუთვნება ისეთი ცნობილი ოფციონები, როგორიცაა: ხარის სპრედი, დათვის სპრედი, პეპელას სპრედი, სტრედლი და სტრენგლი, რომლებიც წარმოადგენს სტანდარტული ოფციონების კომბინაციებს.

განვიხილოთ შემდეგი ბლოკური ოფციონები.

კოლარ ოფციონი. დავუშვათ, რომ $K_1 > K_2 > 0$ ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვებია. გასამრჯელო აღსრულების T მომენტში კოლარ ოფციონის გრძელი პოზიციიდან ტოლია

$$CL_T = \min\left(\max(S_T, K_1), K_2\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ CL_T წარმოდგება შემდეგნაირად

$$CL_T = K_1 + (S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+.$$

აქედან ჩანს, რომ კოლარი წარმოადგენს პორტფელს, რომელიც შედგება ნაღდი ფულისა და ორი სტანდარტული ყიდვის ოფციონისაგან სხვადასხვა შეთანხმების ფასით (სტრაიკებია K_1 და K_2).

ცხადია, რომ ფასდადების ფორმულა ამ ოფციონისათვის t მომენტში არის

$$CL_1 = K_1 e^{-r(T-t)} + C(S_t, T-t, K_1) - C(S_t, T-t, K_2),$$

სადაც $C(S_t, T-t, K) = C(S_t, T-t, K, r, \sigma)$ ყიდვის ოფციონის ბლეკ-შოულსის ფასია t მომენტში.

ბოსტონის ოფციონი. ესაა ოფციონი გასამრჯელოთი

$$CB_T = (S_T - K_1)^+ - (K_2 - K_1),$$

სადაც $K_1 < K_2$ დადებითი მუდმივია.

შეწყვეტილი ფორვარდი. ესაა მოდიფიკაცია ტიპური ფორვარდული კონტრაქტისა, რომელშიაც პოტენციალური დანაკარგი გრძელი პოზიციიდან შემოსაზღვრულია რაიმე წინასწარ განმსაზღვრელი რიცხვით. გასამრჯელოს სახეა

$$BF_T = \max(S_T, F) - K,$$

სადაც $F = S_0 e^{rT}$ აქტივის ფორვარდული ფასია და $K > F$ რაიმე მუდმივია. ვინაიდან

$$BF_T = (S_T - F)^+ + F - K,$$

ცხადია, რომ ფასდადების ფორმულას t მომენტში შემდეგი სახე აქვს

$$BF_t = C(S_t, T-t, F) + (F-K)e^{-r(T-t)}.$$

კერძოდ, ვთქვათ K-ს მარჯვენა დონე K_0 გამოიხატება ფორმულით

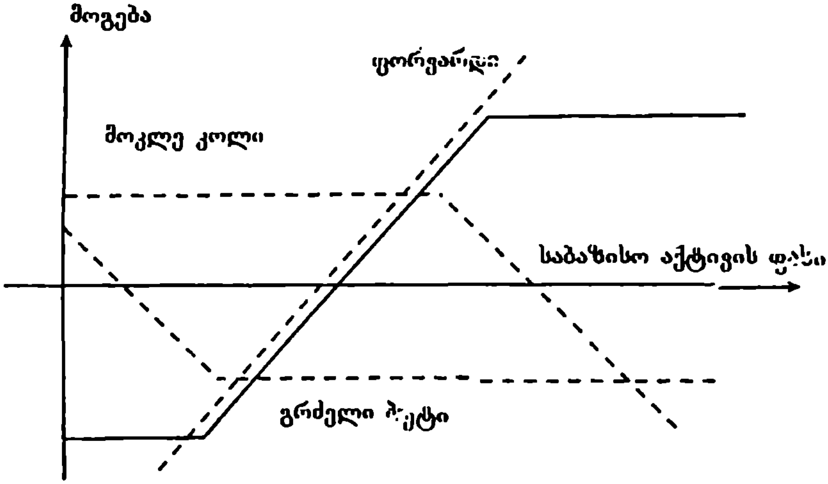
$$K_0 = e^{rT}(S_0 + C(S_0, T, S_0 e^{rT})),$$

რომელიც მიიღება $BF_0 = 0$ გამოსახულებიდან.

დიაპაზონური ფორვარდი. ამ ოფციონის გასამრჯელოს სახეა

$$\begin{aligned} RF_T &= \max(\min(S_T, K_2), K_1) - F = \\ &= \max(\min(S_T - F, K_2 - F), K_1 - F), \end{aligned}$$

სადაც $K_1 < F < K_2$ და $F = S_0 e^{rT}$ საბაზისო აქტივის ფორვარდული ფასია.



ნახ. 1

ვინაიდან

$$RF_T = S_T - F + (K_1 - S_T)^+ - (S_T - K_2)^+,$$

ეს წარმოდგენა გვიჩვენებს, რომ დიაპაზონურ ფორვარდს შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც პორტფელს შემდგარს გრძელი ფორვარდული კონტრაქტისაგან, გრძელი გაყიდვის ოფციონისაგან სტრაიკით K_1 და

მოკლე ყიდვის ოფციონისაგან სტრაიკით K_2. ამიტომ ამ ოფციონის ფასი t მომენტში არის

$$RF_t = S_t - S_0 e^{rT} + P(S_t, T - t, K_1) - C(S_t, T - t, K_2),$$

სადაც $P(S_t, T - t, K_1)$ სტანდარტული გაყიდვის ოფციონის ფასია t მომენტში. K_1 და K_2 ისე შეირჩევა, რომ საწყისი ფასი დიაპაზონური ფორვარდისა იყოს ნულის ტოლი.

დიაპაზონური ფორვარდული კონტრაქტის სქემა იხ. ნახ. 1-ზე.

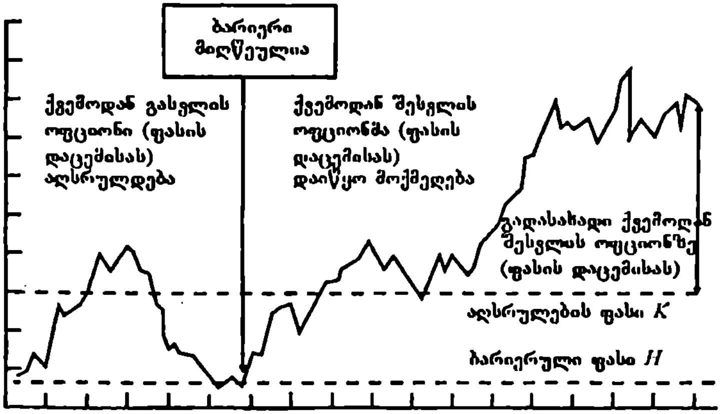
ბოლოს, შევნიშნოთ, რომ დიაპაზონური ფორვარდული კონტრაქტი ცნობილია შემდეგი სხვა სახელებითაც: უფასო კოლარი, მოქნილი ფორვარდი, ცილინდრული ოფციონი, ოფციონური მესერი, მინი-მაქსი და ფორვარდული ინტერვალი.

§ 3. ოფციონები შეზღუდვით

ესაა ოფციონები, რომელთა გასამრჯელო (გადახდის ფუნქცია) დამოკიდებულია იმაზე, თუ დროის გარკვეულ პერიოდში რა დონეს მიაღწევს ძირითადი აქტივის ფასი.

ამ ოფციონის გავრცელებული ნაირსახეობაა ნოკაუტ-ოფციონი. იგი იგივეა, რაც სტანდარტული ოფციონი, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ როდესაც ძირითადი აქტივის ფასი მიაღწევს გარკვეულ ზღუდეს, H-ს, ოფციონი წყვეტს თავის არსებობას.

ყიდვის ნოკაუტ ოფციონის შემთხვევაში, საზოგადოდ ზღუდე H ნაკლებია შეთანხმების K-ფასზე. ამ შემთხვევაში გვაქვს ყიდვის ქვემოდან გასვლის ოფციონი. ესაა ოფციონი, რომელიც წყვეტს არსებობას (ნოკაუტშივარდება), თუ აქტივის ფასი ჩამოდის H-ის ქვემოთ. გაყიდვის ნოკაუტ-ოფციონის დროს ზღუდე $H > K$ და მას უწოდებენ გაყიდვის ზემოდან გასვლის ოფციონს. ქვემოდან შესვლის ოფციონი არის ყიდვის ოფციონი, რომელიც იწყებს არსებობას მხოლოდ მაშინ, როდესაც მიიღწევა ზღუდე H და $H < K$. ანალოგიურად, ზემოდან შესვლის ოფციონი არის გაყიდვის ოფციონი, რომელიც იწყებს არსებობას მაშინ, როდესაც აქტივის ფასი მიაღწევს H ზღუდეს და $H > K$. საილუსტრაციოდ იხილეთ შემდეგი ნახატი:



ნახ. 2

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ოფციონი სავალუტოა ზღუდით და როდესაც აქტივის როლში Q გაცვლითი სავალუტო კურსია რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში შემდეგი ევოლუციით

$$Q_t = Q_0 e^{\lambda t + \sigma W_t}, \qquad t \in [0, T],$$

სადაც

$$\lambda = r - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$r = r_d$ ადგილობრივი ურისკო საპროცენტო განაკვეთია, ხოლო r_f უცხოური ურისკო საპროცენტო განაკვეთია. ამ შემთხვევაში ყიდვის ქვემოდან შესვლის ოფციონის ფასი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება

$$C = Q_0 e^{-r_f T}\left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT}\left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T}),$$

ხოლო გაყიდვის ზემოდან შესვლის ოფციონის ფასია

$$\tilde{C} = K e^{-rT}\left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T}) - Q_0 e^{-r_f T}\left(\frac{H}{Q_0}\right)^{2\lambda} N(-y),$$

სადაც

$$y = \frac{\ln\left[\frac{H^2}{(Q_0 K)}\right]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონი წარმოადგენს შესაბამისი ყიდვის ქვემოდან გასვლისა და ქვემოდან შესვლის ოფციონების ჯამს და ამიტომ ყიდვის ქვემოდან გასვლის ოფციონის ფასი იქნება სტანდარტული ევროპული ყიდვის ოფციონის ფასს გამოკლებული C. ანალოგიურად ევროპული გაყიდვის ზემოდან გამოსვლის ოფციონის ფასი უდრის სტანდარტული ევროპული გაყიდვის ოფციონის ფასს გამოკლებული $\widetilde{C}$.

ოფციონები ზღუდით იგივე ფუნქციას ასრულებს, რასაც სტანდარტული ოფციონები და მიმზიდველია მათი სიიაფითა და იმით, რომ აძლევს მათ მფლობელს მოქნილად მოქმედების შესაძლებლობას ბაზარზე მათი წარმოდგენის მიხედვით.

განვიხილოთ საილუსტრაციოდ შემდეგი:

მაგალითი 1. Videotech Ltd ბრიტანული კომპანიაა, რომელიც ტელეგამოსახულების ციფრული დამუშავებისათვის უშვებს ხელსაწყოებს. მას მიღებული აქვს $5 მილიონიანი შეკვეთა ნიუ-იორკის ტელეკომპანიისათვის სისტემების მიწოდებაზე და ანგარიშის გაფორმება (ამერიკულ დოლარებში) 6 თვის შემდეგ მოხდება. ამჟამად სპოტ-კურსი შემდეგია £1 = $1,5000, ხოლო 6-თვიანი ფორვარდის კურსი £1 = $1,4782.

კომპანიისთვის არაა ხელსაყრელი ბრიტანული ფუნტის კურსის ზრდა. Videotech-ის ხაზინადარს მიაჩნია, რომ ბრიტანული ეკონომიკა სწრაფი ალმავლობის დასაწყისშია და ამიტომ საკმაოდ მოსალოდნელია ფუნტის გაძლიერება. კომპანიას შეუძლია მიიღოს მარტივი გადაწყვეტილება, გაყიდოს მისაღები $5 მილიონი ფორვარდული კურსით და ექვსი თვის შემდეგ შეიძინოს £3382492. ეს დამაკმაყოფილებელ მოგებას მოუტანდა.

მაგრამ ხაზინადარს სურს, ნახოს კომპანიისათვის სარგებელი ამ 6 თვის განმავლობაში რომელიმე მომენტში ფუნტის კურსის დაცემისგანაც. იგი თვლის, რომ ეკონომიკური გაურკვევლობის დროს ამის

ალბათობა საკმაოდ დიდია. ცხადია, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია კომპანიის მიერ კოლ ოფციონის შეძენით ფუნტ სტერლინგებზე, რომელიც დაიცავს მას ფუნტის ზრდისაგან და მოაგებინებს ფუნტის კურსის ნებისმიერი დაცემის დროს. მაგრამ 6-თვიანი სამართლიანი სპოტ-ოფციონის ფასი, 0,0232 ფუნტი ერთ დოლარში, საკმაოდ მაღალი ჩანს, ვინაიდან მისი აღსრულების დროს სუფთა შემოსავალი იქნებოდა £3217333 (5000000 : 1,5000 − 5000000 × 0,0232). ეს კი ნაკლებია £3.25 მილიონზე, რაც კომპანიისათვის დასაშვებ ზღვარს წარმოადგენს. ამიტომ Videotech-ი იღებს გადაწყვეტილებას იყიდოს გასვლის (ნოკაუტ) ოფციონი სტრაიკით $1,5000 და ზღუდით $1,4350. მისი ფასია £0,0164 ერთ დოლარში, რაც 29%-ით უფრო იაფია, ვიდრე ჩვეულებრივი ოფციონი. ამასთან ერთად კომპანია ავალებს თავის ბანკს იყიდოს ფორვარდით დოლარი იმ შემთხვევისათვის, თუ სპოტ-კურსის დაცემა მოხდა $1,4350-მდე. ასეთი სტრატეგია Videotech-ს ოფციონის ანულირების შემთხვევაში აძლევს გარანტიას დაფაროს თავისი რისკი. შესაძლებელია ორი სცენარი:

1) ფუნტი სტერლინგი არასოდეს არ დაეცემა $1,4350-მდე და ოფციონი გადარჩება. იგი ამ შემთხვევაში ისეთივეა, როგორც ჩვეულებრივი კოლ ოფციონი. თუ აღსრულების დღეს ფუნტი სტერლინგი სტრაიკზე დაბალია, ოფციონი გაუფასურდება და Videotech-ი შეასრულებს სპოტ-შეთანხმებას დოლარების გაყიდვაზე და ფუნტების ყიდვაზე. თუ ფუნტი $1,5000-ზე მაღალია, Videotech-ი გაანაღდებს თავის ოფციონს და მიიღებს £3333333. თუ აქედან გამოვაკლებთ პრემიას £82000, მაშინ Videitech-ს დარჩება £3251333. ეს უმცირესი თანხაა, რომელიც შეუძლია მიიღოს კომპანიამ და ის ცოტათი უფრო მეტია, ვიდრე დასაშვები ზღვარი £3,25 მილიონი.

2) ფუნტი სტერლინგი ეცემა $1,4350-ზე დაბლა, ხდება ოფციონის ანულირება და Videotech-ი აღასრულებს თავის ფორვარდულ შეთანხმებას დოლარების გაყიდვაზე და ფუნტების ყიდვაზე. დავუშვათ, რომ ეს მოხდა 3 თვის შემდეგ და ფორვარდული კურსი უდრის $1,4244, მაშინ მიღებული თანხა შეადგენს £3510250 და ოფციონური პრემიის გამოკლებით £3428250, რაც თითქმის £50000-ით

უფრო კარგია, ვიდრე უბრალო ფორვარდული გარიგება, რომელიც დასაწყისში იყო განხილული.

§ 4. უკანმხედი ოფციონები

ესაა ოფციონები, რომელთა გასამრჯელო (გადახდის ფუნქცია) დამოკიდებულია აქტივის მაქსიმალურ, ან მინიმალურ ფასზე, ოფციონის სიცოცხლეში რომ მიიღწევა, ე.ი. მაგალითი ოფციონისა, რომლებიც დამოკიდებულია არა მხოლოდ აქტივის ფასზე აღსრულების T მომენტში, არამედ აქტივის ფასის მთელ წარსულზე.

აღვნიშნოთ $S_T^m = \min\limits_{0\le t\le T} S_t$ და $S_T^m = \max\limits_{0\le t\le T} S_t$ აქტივის მინიმალური და მაქსიმალური ფასი შესაბამისად ოფციონის სიცოცხლეში და S_T-თი აქტივის ტერმინალური ფასი.

განვიხილოთ ორი ოფციონი. პირველი – სტანდარტული უკანმხედი ყიდვის ოფციონი გასამრჯელოთი

$$C_T^L := (S_T - S_T^m)^+ = S_T - S_T^m,$$

და მეორე – სტანდარტული უკანმხედი გაყიდვის ოფციონი გასამრჯელოთი

$$P_T^L := (S_T^M - S_T)^+ = S_T^M - S_T.$$

ამ ორივე ოფციონისათვის შესაძლებელია ზუსტი ფასდადების ფორმულის მოძებნა.

დავუშვათ, რომ აქტივის ფასის ევოლუცია ემორჩილება გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას და რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში

$$S_t = S_0 e^{\eta_t},$$

სადაც

$$\eta_t = \sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

და W_t ბროუნის მოძრაობაა ამ სამყაროში. გამოვთვალოთ უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის სამართლიანი ფასი ($E^*(\cdot)$ გასაშუალოებაა რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში)

$$P^L = e^{-rT} E^* P_T^L = e^{-rT} E^*(S_T^M - S_T) = S_0(e^{-rT} E^* e^{\eta_T^M} - 1),$$

სადაც η_T^M წარმოადგენს η-ს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ოფციონის სიცოცხლეში. აქედან ჩანს, რომ სამართლიანი ფასის P^L-ის გამოსათვლელად საჭიროა $e^{\eta_T^M}$-ის საშუალოს გამოთვლა. რისთვისაც უნდა ვიცოდეთ η_T^M-ის ალბათური განაწილება. კარგად ცნობილია, რომ ამ განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$F_{\eta_T^M}(x) = N\Big(\frac{x-(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) - \\ - e^{\frac{2(r-\sigma^2/2)x}{\sigma^2}} N\Big(\frac{-x-(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big).$$

ამ ფორმულის გამოყენებით სტანდარტული გამოთვლებით ვღებულობთ, რომ

$$P^L = S_0\Big\{-N(-d) + e^{-rT}N(-d+\sigma\sqrt{T}) + \\ + \frac{\sigma^2}{2r}e^{-rT}\Big[-N\Big(d-\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T}\Big) + e^{-rT}N(d)\Big]\Big\}, \qquad (1)$$

სადაც $d = (r/\sigma + \sigma/2)\sqrt{T}$.

სტანდარტული უკანმხედი ყიდვის ოფციონის შემთხვევაში ფასდადების ფორმულას შემდეგი სახე აქვს

$$C^L = S_0\Big\{N(d) - e^{-rT}N(d-\sigma\sqrt{T}) + \\ + \frac{\sigma^2}{2r}e^{-rT}\Big[N\Big(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T}\Big) - e^{-rT}N(-d)\Big]\Big\}. \qquad (2)$$

დამტკიცება ანალოგიურია გაყიდვის ოფციონის შემთხვევისა, ხოლო η-ს მაქსიმუმის განაწილების მაგივრად საჭიროა გამოვიყენოთ η-ს მინიმუმის განაწილების ფუნქცია, რაც ასევე ცნობილია.

თუ განვიხილავთ რეგულარული ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონებს სტრაიკით $K = S_0$, მაშინ მათი ფასდადების ფორმულები ემთხვევა შესაბამისად (2)-სა და (1)-ის პირველ წევრებს.

სინამდვილეში, უკანშხედი ყიდვის ოფციონი იძლევა შესაძლებლობას ძირითადი აქტივის ყიდვისა იმ უმცირეს ფასად, რასაც კი იგი აღწევს ოფციონის სიცოცხლეში, გაყიდვის ოფციონი კი – გაყიდვისა აქტივის იმ უდიდეს ფასად, რასაც კი იგი აღწევს ოფციონის სიცოცხლეში.

ევროპული უკანშხედი ყიდვის ოფციონის ფასი t მომენტში შემდეგი ფორმულით გამოითვლება

$$C_t^L = S_t N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^m) + r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - S_t^m e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^m) + r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - $$
$$- \frac{S_t\sigma^2}{2r} N\left(\frac{\ln(S_t^m|S_t) - r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) +$$
$$+ e^{-r\tau} \frac{S_t\sigma^2}{2r}\left(\frac{S_t^m}{S_t}\right)^{2r\sigma^{-2}} N\left(\frac{\ln(S_t^m|S_t^m) + r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

სადაც S_t^m აქტივის ფასის მინიმალური მნიშვნელობაა $[0,t]$ ინტერვალზე, $r_1 = r + \frac{1}{2}\sigma^2$, $r_2 = r - \frac{1}{2}\sigma^2$, $\tau = T - t$.

ევროპული უკანშხედი გაყიდვის ოფციონის ფასი t მომენტში მოიცემა გამოსახულებით

$$P_t^L = -S_t N\left(-\frac{\ln(S_t|S_t^M) + r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) +$$
$$+ S_t^M e^{-r\tau} N\left(-\frac{\ln(S_t|S_t^M) + r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) +$$
$$+ \frac{S_t\sigma^2}{2r} N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^M) + r_1\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) -$$
$$- e^{-r\tau} \frac{S_t\sigma^2}{2r}\left(\frac{S_t^M}{S_t}\right)^{2r\sigma^{-2}} N\left(\frac{\ln(S_t|S_t^M) - r_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

სადაც S_t^M აქტივის ფასის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $[0,t]$ ინტერვალზე.

და ბოლოს, შევნიშნავთ, რომ ვინაიდან $e^{-rT}S_t^m$ არაზრდადი პროცესია, ამერიკული უკანშხედი ყიდვის ოფციონის ფასი $C_t^{L_a}$, ტოლია შესაბამისი ევროპული ოფციონის ფასისა, ($C_t^{L_a} = C_t^L$), ხოლო

ამერიკული უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის P_t^{L*} ფასისათვის გვაქვს

$$P_t^L \leq P_t^{L*} \leq e^{r\tau} P_t^L + S_t(e^{r\tau} - 1).$$

აღვნიშნოთ, რომ ბ. დოჭვირმა და მ. შაშიაშვილმა ბლეკ-შოულსის მოდელში განიხილეს ამერიკული ტიპის უკანმხედი გაყიდვის (პუტ) ოფციონი გადახდის ფუნქციათა სისტემით

$$P_L = (P_t^L), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

სადაც

$$P_t^L = \max_{u \leq t} S_u - S_t.$$

პრობლემა მათ დაიყვანეს ერთგანზომილებიან არეკვლილ დიფუზიური პროცესის გაჩერების ამოცანაზე და აჩვენეს, რომ ოპტიმალური გაჩერების არის საზღვარი წარმოადგენს ნახვევის ტიპის ინტეგრალური განტოლების ამოხსნას.

§ 5. რუსული ოფციონი

უკანმხედი გაყიდვის ოფციონის ნაირსახეობას წარმოადგენს რუსული ოფციონი, რომელიც ამერიკული ტიპის ოფციონია შემდეგი გადახდის ფუნქციათა სისტემით $f^R = (f_t^R)$, $t \geq 0$, სადაც

$$f_t^R = e^{-\lambda t}\left(\max_{u \leq t} S_u - aS_t\right)^+, \qquad a \geq 0, \quad \lambda > 0. \tag{1}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $a = 1$, ეს ოფციონი წარმოადგენს უკანმხედი ამერიკული გაყიდვის ოფციონს დისკონტით სწორედ იმ სახით, რა სახითაცაა ის გავრცელებული.

რუსული ოფციონი ფინანსური ინჟინერიის თვალსაზრისით საკმაოდ საინტერესოა. მისი მფლობელი თვითონ ირჩევს აღსრულების მომენტს τ-ს და ამ მომენტში მას აქვს უფლება გაყიდოს აქციები ამ მომენტამდე აქციის მიერ მიღწეულ მაქსიმალურ ფასად და ამიტომ განიცდის ნაკლებ სინანულს იმის გამო, რომ არ გაყიდა სწორედ მაშინ, როდესაც აქციის ფასმა მაქსიმუმს მიაღწია.

რუსული ოფციონი შეპისა და შირიაევის მიერაა 1993 წელს შემოღებული შემთხვევაში, როდესაც ფორმულა (1)-ში $a = 0$. მათ

განავითარეს ამ ოფციონის ფასდადების თეორიული ასპექტები (B, S) ბაზრის ბლექ-შოულსის მოდელში, კოქსის-როსისა და რუბინშტეინის ბინომიალურ სქემაში ფასდადების პრობლემა ისევე $a = 0$ შემთხვევისათვის განიხილეს კრამკოვმა და შირიაევმა. ორივე შემთხვევაში ფასდადების ფორმულების მიღება ხერხდება მხოლოდ უსასრულო დროითი ჰორიზონტისათვის, ე.ი. შემთხვევაში, როდესაც ოფციონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. ზოგადი შემთხვევა (1)-ის სახის გასამრჯელოთი განიხილა შირიაევმა თავის ახალ მონოგრაფიაში [26]. ოპტიმალური ჰეჯური სტრატეგიების აგება ჯერჯერობით ღიად რჩება.

დავუშვათ, რომ ვიხილავთ (B, S) ბაზრის ბლექ-შოულსის სქემას σ ვოლატილობით და r ურისკო საპროცენტო განაკვეთით. განვიხილოთ რუსული ოფციონი ზოგადი გადახდის ფუნქციათა სისტემით (1). მაშინ დროითი უსასრულო ჰორიზონტის შემთხვევაში ამ ოფციონის ფასდადების ფორმულას შემდეგი სახე აქვს

$$C_{\infty}^{R} = S_0 \begin{cases} (\tilde{\psi} - a)\, \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 \tilde{\psi}^{\gamma_1} - \gamma_1 \tilde{\psi}^{\gamma_2}}, & \text{თუ } 1 < \tilde{\psi}, \\ 1 - a, & \text{თუ } \tilde{\psi} = 1, \end{cases} \tag{2}$$

სადაც

$$\gamma_1 = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B}\,,$$

$$\gamma_2 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B}\,,$$

$$A = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}, \qquad B = \frac{2r}{\sigma^2}\,,$$

ხოლო $\tilde{\psi}^*$ შემდეგი ტრანსცენდენტური განტოლების

$$\psi^{\gamma_1}\Big(1 - \frac{1}{\gamma_1} - \frac{a}{\psi}\Big) = \psi^{\gamma_2}\Big(1 - \frac{1}{\gamma_2} - \frac{a}{\psi}\Big)$$

ამოხსნაა $\psi > a$ არეში. თუ $a = 0$, მაშინ

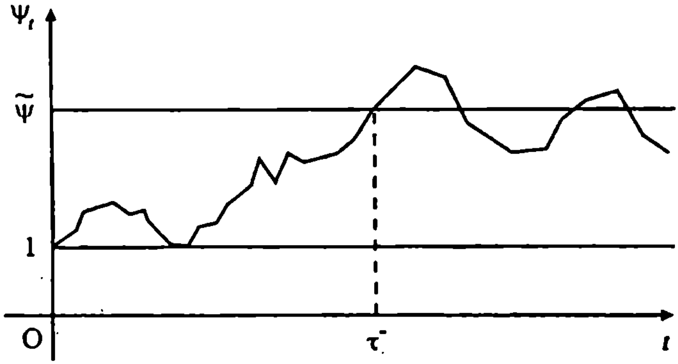
$$\tilde{\psi} = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - 1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}. \tag{3}$$

ამ ოფციონის აღსრულების ოპტიმალური მომენტია ის τ მომენტი, როდესაც შემთხვევითი პროცესი

$$\psi_t = \frac{\max\limits_{u\le t} S_u}{S_t}, \qquad t \geq 0,$$

მიაღწევს პირველად $\tilde{\psi}$ დონეს.

საინტერესოა რუსული ოფციონის განხილვა აქციის δ დივიდენდური განაკვეთის შემთხვევაში. დაფიმ და ჰარისონმა აჩვენეს $a = 0$ შემთხვევაში, რომ ფასდადების ფორმულების მისაღებად (2) ფორმულაში ((3)-თან ერთად) r უნდა შევცვალოთ $r - \delta$-თი, λ კი $\lambda + \delta$-თი.



ნახ. 3

ჩვენს მიერ განხილული იყო ბლეკ-შოულსის მოდელში შემდეგი ამერიკული ტიპის ოფციონი, რომელიც წარმოადგენს რუსული და ინტეგრალური რუსული ოფციონის კომბინაციას გადახდის ფუნქციათა

სისტემით $g = (g_t)$, $t \leq T$, სადაც

$$g_t = e^{-\lambda t} \max_{u \leq t} S_u + S_t \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{\max_{v \leq u} S_v}{S_u} du$$

პრობლემა გადაწყვეტილია უსასრულო ჰორიზონტის შემთხვევაში, ე.ი. როდესაც $T \to \infty$. ნაპოვნია ოფციონის ფასი და ოპტიმალური გაჩერების არის საზღვარი. აქ ისევ უნდა ვადევნოთ თვალი ψ_t-პროცესს და, როცა იგი მიაღწევს განსაზღვრულ დონეს, წარვადგინოთ ოფციონი განაღდებისათვის.

§ 6. აზიური ოფციონი

აზიური ოფციონი ისეთი ოფციონების კლასის (ევროპული ან ამერიკული ტიპების) საერთო სახელია, რომლის გადახდის ფუნქცია ემყარება აქტივთა ფასების საშუალოს ოფციონის სიცოცხლის გარკვეული პერიოდის განმავლობაში. აზიური ოფციონი უფრო რობასტულია დასრულების ვადასთან სიახლოვეში მანიპულაციების მიმართ, ვიდრე სტანდარტული ოფციონი და, როგორც წესი, უფრო იაფია, ვიდრე სტანდარტული ოფციონი.

ხშირ შემთხვევაში იგი უფრო შეესატყვისება კორპორაციის საჭიროებას. მაგალითად, თუ ამერიკული კომპანია მოელის შემდეგი წლის განმავლობაში თავისი გერმანული ქვეკომპანიიდან გარკვეულ თანხას გერმანულ მარკებში, ცხადია, რომ ის დაინტერესდება ოფციონით, რომელიც იძლევა გარანტიას, რომ შემდეგი წლის განმავლობაში საშუალო გაცვლითი განაკვეთი გერმანული მარკისა დოლარზე გარკვეულ დონეზე მაღლა იყოს. ამის საშუალებას კი აზიური გაყიდვის (პუტ) ოფციონი უფრო კარგად უზრუნველყოფს, ვიდრე სტანდარტული გაყიდვის ევროპული ოფციონი.

დავუშვათ, რომ T ოფციონის ვალდებულებების შესრულების დღეა და T_0 $(0 \leq T_0 \leq T)$ გასაშუალოების პერიოდის დასაწყისი. მაშინ აზიური ყიდვის ოფციონის გადახდის ფუნქცია განმარტებით შემდეგია

$$C_T^A = (A_S(T_0, T) - K)^+,$$

სადაც

$$A_S(T_0,T) = \frac{1}{T - T_0}\int_{T_0}^{T} S_u\, du$$

არის არითმეტიკული საშუალო აქტივების ფასებისა მთელ $[T_0, T]$ დროის ინტერვალზე. K არის სტრაიკი და აქ ვგულისხმობთ, რომ $S = (S_t)$, $0 \le t \le T$, აქტივის ფასი ემორჩილება გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას, ე.ი.

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t},$$

სადაც $W = (W_t)$, $0 \le t \le T$, ბროუნის მოძრაობაა რისკ-ნეიტრალური P^* ალბათობის მიმართ.

ძირითადი სიძნელე აზიური ოფციონის ფასდადებასა და ჰეჯირებაში ისაა, რომ შემთხვევითი სიდიდე $A(T_0,T)$ არ არის ლოგნორმალურად განაწილებული და ამიტომ ამ ოფციონის ფასდადების ცხადი ფორმულით მიღება საკმაოდ რთულია. მიმართავენ მიახლოებით მეთოდებს. შესაძლებელია ფასის საპოვნელად მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება. ძირითადად კი იყენებენ რუთიენსის 1990 წ. და ვორსტის 1992 წ. მიერ დამოუკიდებლად შემოთავაზებულ მიდგომას, რომელიც ემყარება საშუალო არითმეტიკულის აპროქსიმაციას საშუალო გეომეტრიულით, რომელიც უკვე ლოგნორმალურადაა განაწილებული. იქცევიან შემდეგნაირად. ჯერ უწყვეტი დროის საშუალოს, $A(T_0,T)$, უახლოვდებიან მისი დისკრეტული დროის საშუალოთი

$$A^n(T_0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i},$$

სადაც $t_i = T_0 + i(T - T_0)/n$. შემდეგ კი $A^n(T_0,T)$ არითმეტიკულ საშუალოს ცვლიან გეომეტრიული საშუალოთი

$$G^n(T_0,T) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} S_{t_i}\right)^{1/n}$$

რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში

$$S_{t_i} = S_{T_0} e^{\sigma(W_{t_i} - W_{T_0}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t_i - T_0)},$$

სადაც W ბროუნის მოძრაობაა ამ სამყაროში. მაშინ

$$G^n(T_0, T) = cS_{T_0} e^{\frac{\sigma}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}$$

მკაცრად დადებითი c მუდმივით. იმის გამო, რომ W ბროუნის მოძრაობა დამოუკიდებელ ნაზრდებიანი პროცესია, ბოლო ფორმულა ნათელყოფს, რომ რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში გეომეტრიულ საშუალოს, $G^n(T_0, T)$, ლოგნორმალური განაწილება აქვს.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $T_0 = 0$. მაშინ $t_i = i\frac{T}{n}$ და

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა ნულოვანი საშუალოთი და დისპერსიით

$$D^*\eta_n = \frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)^2. \tag{1}$$

გამოვთვალოთ აზიური ყიდვის (კოლ) ოფციონის სამართლიანი C^A ფასის მიახლოება

$$\begin{aligned}\widetilde{C}^A &= ce^{-rT}E^*(G^n(0,T) - K)^+ = cS_0 e^{-rT}E^*(e^{\frac{\sigma}{n}\eta_n} - K)^+ = \\ &= cS_0 e^{-rT}E^*\left(e^{\frac{\sigma^2 D^*\eta_n}{2n^2}} e^{(\frac{\sigma}{n}\eta_n - \frac{\sigma^2 D^*\eta_n}{2n^2})} - K\right)^+ = \\ &= cS_0 e^{-rT}\left[e^{\frac{\sigma^2 D^*\eta_n}{2n^2}} N(d) - KN\left(d - \frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right)\right],\end{aligned}$$

სადაც $N(\cdot)$ ნორმალური განაწილების ფუნქციაა და

$$\begin{aligned}d &= \left(\frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right)^{-1}\ln\left(e^{\frac{\sigma^2 D^*\eta_n}{2n^2}}/K\right) + \frac{\sigma\sqrt{D^*\eta_n}}{2n} = \\ &= \left(\frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right)^{-1}\left[\frac{\sigma^2 D^*\eta_n}{2n^2} - \ln K\right] + \frac{\sigma\sqrt{D^*\eta_n}}{2n}.\end{aligned} \tag{2}$$

ჩვენ მივიღეთ აზიური ყიდვის ოფციონისათვის შემდეგი მიახლოებითი ფასდადების ფორმულა:

$$\widetilde{C}^A = cS_0e^{-rT}\left[e^{\frac{\sigma^2 D^*\eta_n}{2n^2}}N(d) - KN\left(d - \frac{\sigma}{n}\sqrt{D^*\eta_n}\right)\right],$$

სადაც $D^*\eta_n$ განისაზღვრება (1)-დან, ხოლო d – (2)-დან. აქ c ცნობილი მუდმივაა, რომლის გამოთვლა მიგვინდვია მკითხველისათვის.

შესაძლებელია ფასდადების სხვა ტიპის მიახლოებული ფორმულის მიღება. ამისათვის, ჯერ ზუსტად ითვლიან არითმეტიკული საშუალოს $A(T_0,T)$ განაწილების პირველ ორ მომენტს, შემდეგ კი უშვებენ, რომ $A(T_0,T)$-ს განაწილება ლოგნორმალურია იგივე პირველი ორი მომენტით.

ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში შესაძლებელია აზიური ოფციონის ფასის ზუსტი ფორმულის მიღება. განვიხილოთ შემდეგი აზიური ყიდვის ოფციონი

$$C_T^A = (A_S(0,T) - K)^+$$

გადახდის ფუნქციით, რომელშიაც

$$A_S(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i\frac{T}{n}} > \frac{1}{n}S_0 \geq K.$$

ეს პირობა საკმაოდ შემზღუდავია. თუ ფასს ვითვლით არა ნულოვან, არამედ რაიმე t მომენტში, იგი გადადის პირობაში,

$$A_S(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i\frac{T}{n}} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{t-1} S_{i\frac{T}{n}} \geq K.$$

მაშინ ასეთი ოფციონის სამართლიანი ფასი ზუსტად დაითვლება. მართლაც,

$$C^A = e^{-rT}E^*\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i\frac{T}{n}} - K\right) =$$

$$= e^{-rT}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{ri\frac{T}{n}}E^*\left(\frac{S_{i\frac{T}{n}}}{e^{ri\frac{T}{n}}}\right) - K\right] =$$

$$= e^{-rT}\left[\frac{S_0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{ri\frac{T}{n}} - K\right] = e^{-rT}\left[\frac{S_0}{n}\cdot\frac{e^{rT}-1}{e^{r\frac{T}{n}}-1} - K\right].$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა (მნიშვნელით $q = e^{r\frac{T}{n}}$).

აზიური ოფციონის ფასის ზუსტი ფორმულაა

$$C^A = e^{-rT}\left[\frac{S_0}{n}\left(\frac{e^{rT}-1}{e^{r\frac{T}{n}}-1}\right) - K\right].$$

თუ n დიდია, მაშინ მივიღებთ მიახლოებით ფასდადების ფორმულას

$$C^A \approx e^{-rT}\left[\frac{S_0(e^{rT}-1)}{rT} - K\right].$$

აზიური ოფციონის სხვა ტიპს წარმოადგენს ოფციონი, რომლის სტრაიკი აქტივის საშუალო ფასია. ასეთი ყიდვის ოფციონის გადახდის ფუნქციის სახეა

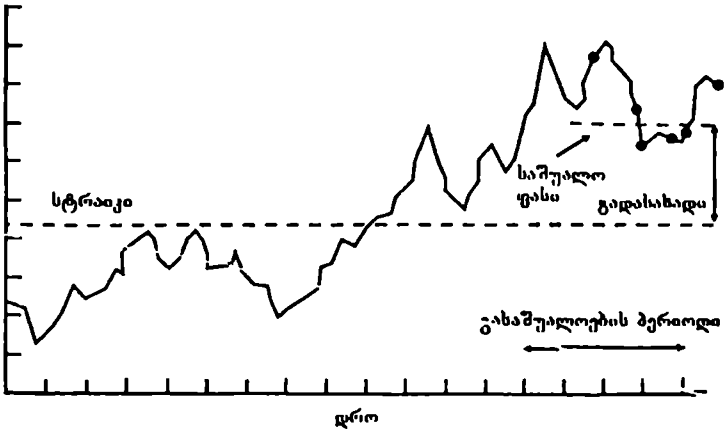
$$C_T^A = (S_T - A(T_0, T))^+,$$

გაყიდვის კი

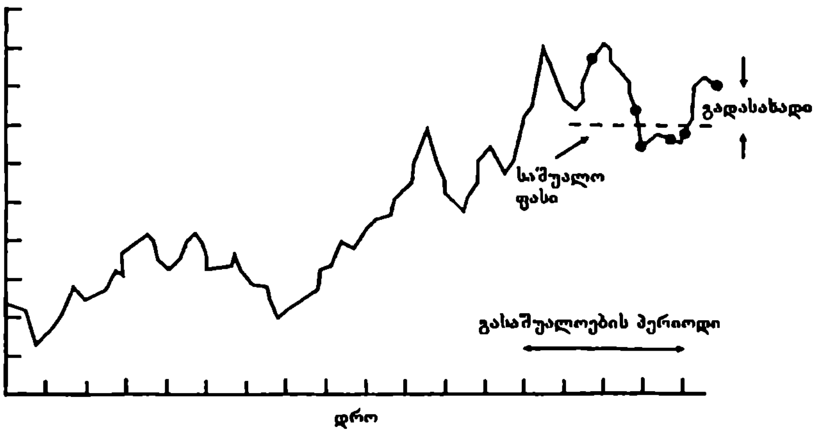
$$P_T^A = (A(T_0, T) - S_T)^+.$$

ასეთი ოფციონების ფასდადება ისევე წარმოებს, როგორც წინა პუნქტებში განხილულ აზიური ოფციონებისათვის.

გამოვსახოთ გრაფიკულად აზიური ოფციონი გასაშუალოებული აქტივის ფასით და აზიური ოფციონი გასაშუალოებული სტრაიკით (იხ. ნახ. 4 და 5).



ნახ. 4



ნახ. 5

საინტერესოა შევადაროთ ერთმანეთს სამი ოფციონი: სტანდარტული ოფციონი, აზიური ოფციონი გასაშუალოებული აქტივის ფასით და აზიური ოფციონი გასაშუალოებული სტრაიკით.

ძირითადი აქტივის რისკის მაჩვენებლები განსაზღვრავენ, თუ რო-

მელი ოფციონი უფრო შეესატყვისება კონკრეტულ შემთხვევას. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მონაცემები სამი გერმანული კომპანიისა, რომლებიც თავის საქონელს ყიდიან ამერიკის შეერთებულ შტატებში.

ა) A კომპანია არარეგულარულად აწვდის საქონელს, რომლის თვითღირებულებაა 1,4 მილიონი გერმანული მარკაა და კომპანიამ აუცილებლად უნდა მიიღოს 20%-ზე არა ნაკლები მოგება. რეალიზაციის ფასი ამერიკაში ერთი მილიონი დოლარის დონეზეა გაჩერებული. შეკვეთიდან მთლიანი თანხის (დოლარებში) მიღებამდე გადის 6 თვე. ასეთ პირობებში A კომპანიამ უნდა იყიდოს სტანდარტული პუტ ოფციონი ამერიკულ დოლარებზე (ან კოლი გერმანულ მარკაზე) სტრაიკით $\$ 1 = \mathrm{DM} 1,6800$.

ბ) B კომპანია ახორციელებს რეგულარულ მიწოდებებს და ყოველი თვის ბოლოს მას ამისათვის უხდიან ამერიკულ დოლარებს, რომლის კონვერტაცია გერმანულ მარკებში მაშინვე ხდება. დანახარჯებისა და ფასების სტრუქტურა კომპანიისა იგივეა, რაც A კომპანიის. B კომპანიამ წლის დასაწყისში უნდა იყიდოს 12-თვიანი აზიური ოფციონი გასაშუალოებული აქტივის ფასით ამერიკულ დოლარებზე სტრაიკით $\$1 = \mathrm{DM}1,6800$, რომლის გასამრჯელო განისაზღვრება გაცვლითი კურსის გასაშუალოებით თითოეული თვის ბოლოს.

გ) C კომპანიას სამრეწველო სიმძლავრეები გააჩნია თვით შეერთებულ შტატებში. ყოველთვიური ხარჯები წარმოებაზე შეადგენენ 833333 დოლარს და ამ თანხებს გადმორიცხავს ძირითადი (დედისეული) კომპანია. ფაბრიკა დაკავებულია მასშტაბურ პროექტში, რომელიც დასრულდება წლის ბოლოს და მოიტანს შემოსავალს 12 მილიონ დოლარს, რაც 20%-იან მოგებას უზრუნველყოფს. მაგრამ მოგების დონე გერმანულ მარკებში დამოკიდებულია გაცვლით კურსზე თითოეული თვის ბოლოს და, განსაკუთრებით წლის ბოლოს. ამ შემთხვევაში C კომპანიამ უნდა განიხილოს ამერიკულ დოლარებზე 12 თვიანი აზიური პუტ ოფციონის გასაშუალოებული სტრაიკით შეძენის შესაძლებლობა.

A და B კომპანიების საწყისი დანახარჯები გერმანულ მარკებში ფიქსირებულია და, აქედან გამომდინარე, სტრაიკი შეირჩევა $\$1 = \mathrm{DM}1.6800$. C კომპანიის დანახარჯები გერმანულ მარკებში გაირ-

კვევა მხოლოდ წლის ბოლოს და ამიტომ სტრაიკი უნდა განისაზღვროს გასაშუალოებული გაცვლითი კურსით.

და ბოლოს, განვიხილოთ აზიური ოფციონის გამოყენების მაგალითი.

მაგალითი 2. ამერიკული კომპანია AWI განთავსებულია დიდ ბრიტანეთში და აწარმოებს კალიფორნიული ღვინის იმპორტს. 1992 წლის ივლისიდან 1993 წლის ივნისის ჩათვლით კომპანია დებს კონ-ტრაქტს ყოველთვიური 5000 ღვინით სავსე ყუთის იმპორტზე ფა-სით \$90 თითოეულ ყუთზე მიწოდების განაღდებით თითოეული თვის ბოლო სამუშაო დღეს.

აზიური ოფციონის მაჩვენებლები

ტიპი	კოლი დოლარებზე (პუტი ფუნტებზე)
სტრაიკი	£1 = \$1,8000
პრემია	£0,012 ერთ \$-ზე
ძირითადი აქტივი	\$5400000
ჯამური პრემია	£114480
აღსრულების ვადა	30 ივნისი, 1993 წ.
გასაშუალოების პერიოდი	1 ივლისი 1992წ. – 30 ივნისი 1993წ.
გასაშუალოების მეთოდი	თითოეული თვის ბოლო სამუშაო დღის დახურვის სპოტ-კურსის საშუ-ალო არითმეტიკული (12 დაკვირვება)
საბოლოო განაღდება	2 ივლისი 1993 წ. სხვაობის მეშვეობით სტრაიკისა და საშუალო კურსს შორის გამოხატული ფუნტ სტერლინგებში კურსით £1 = \$1,8000

ფუნტი სტერლინგის კურსი მყარად იზრდებოდა წლის დასაწყ-ისიდან და 1992 წლის მაისში, როდესაც კომპანიის ბიუჯეტი დგე-ბოდა, მისმა კურსმა შეადგინა £1 = \$1,8260. კომპანიის ფინანსური დირექტორი თვლის, რომ ეს ზრდა კიდევ ცოტა ხნით გაგრძელდება, მაგრამ შემდეგ იგი დაიწევს თავის საშუალო დონემდე, დაახლოებით £1 = \$1,7000. ამ შემთხვევაში კომპანიას გაუჩნდება პრობლემები, ვინაიდან მიწოდებიდან მინიმალურ დასაშვებ მოგებას უზრუნველყოფს

კურსი £1 = $1,7500. უფრო დაბალი კურსი კი კომპანიისთვის მიუღებელია.

AWI კომპანია იხილავს მოქმედებათა ორ ვარიანტს:

1) ყოველთვიური მიწოდებების ფორვარდული კონტრაქტების დასტა გაცვლითი კურსით £1 = $1,7560. 2) აზიური (გასაშუალოებული კურსის) ოფციონი სტრაიკით £1 = $1,8000 და პრემიით (ფასით) £0,012 ერთ დოლარზე (ან $0,0656 ერთ ფუნტზე). კომპანია ირჩევს მეორე ვარიანტს, ვინაიდან პირველ ვარიანტში ფორვარდის კოტირება ახლოა მინიმალურ მისაღებ კურსთან და მოცემულ მომენტში ფუნტი სტერლინგის სიმძლავრით სარგებლობის საშუალებას არ იძლევა.

რეალურად, ოფციონის სიცოცხლის პერიოდში, ფუნტი სტერლინგის კურსმა დოლარის მიმართ შემდეგი ცვალებადობა განიცადა (იხ. ცხრ.).

თარიღი	გაცვლითი კურსი (£/$)	საერთო ჯამი ანგარიშის მიხედვით დოლარებში	საერთო ჯამი ანგარიშის მიხედვით ფუნტებში
მაისი 92	1,8260		
ივნისი	1,9010		
ივლისი	1,9192	450000,00	234472,70
აგვისტო	1,9894	450000,00	226883,13
სექტემბერი	1,7740	450000,00	253664,04
ოქტომბერი	1,5660	450000,00	287356,32
ნოემბერი	1,5042	450000,00	299162,32
დეკემბერი	1,5140	450000,00	297225,89
იანვარი 93	1,4865	450000,00	302724,52
თებერვალი	1,4254	450000,00	315700,86
მარტი	1,5030	450000,00	299401,20
აპრილი	1,5727	450000,00	286132,13
მაისი	1,5585	450000,00	288739,17
ივნისი	1,5103	450000,00	297954,05
სულ	საშ. 1,6908	5400000,00	3389416,35

ამ ცხრილში ასახულია კურსების დინამიკა და ნაღდი ფულის ნაკადები. როგორც ვხედავთ, ძლიერმა ფუნტმა სტერლინგმა მისცა

კომპანიას საშუალება მხოლოდ 230000 ფუნტი სტერლინგი გადაეხადა თვეში, როდესაც დასაშვები იყო 255000 ფუნტი სტერლინგი, რაც $£1 = \$1,7500$ კურსს შეესაბამება. სექტემბრის შემდეგ გადახდები გაიზარდა და მიაღწია პიკს 1993 წლის თებერვალში. ფუნტი სტერლინგის საშუალო გაცვლითმა კურსმა შეადგინა ერთ ფუნტზე 1,608 დოლარი, რამაც გამოიწვია ოფციონის ასრულების დროს 570600 ფუნტი სტერლინგის გადახდა

$$((1,800 - 1,6098) \times 5400000 : 1,8000).$$

ამიტომ კომპანიის ხარჯებმა პრემიის ჩათვლით შეადგინეს

$$£2933296,35 = 3389416,35 + 114480 - 570600,$$

რაც შეესატყვისება ფაქტიურ გაცვლით კურსს $£1 = \$1,8409$ და კომპანიის ხარჯები საგრძნობლად დაბალია 30 მილიონ ფუნტ სტერლინგზე (შეადარეთ დასაშვებ £3084000) და ხარჯებზე ჰეჯირებაზე ფორვარდული დასტით (£3075170,8).

საერთო შენიშვნები

ამ შენიშვნების მიზანია ძირითადი ნაშრომების მითითება, რომლებსაც ეყრდნობა ამ წიგნის ცალკეული მონაკვეთი.

ნაშრომის პირველი თავი "სტოქასტური ბაზისი და მარტინგალები" დაწერილია ა. შირიაევის ცნობილი სახელმძღვანელოს [22] მიხედვით. მეორე თავისათვის "ფასიანი ქაღალდები", გამოყენებულია ჯ. ჰალის პოპულარული ნაშრომი [13], ქართველ მეცნიერთა კოლექტიური მონოგრაფია [16] და ა. შირიაევის ორტომეულის პირველი წიგნი [25]. მესამე თავი "ფინანსური ბაზარი განუსაზღვრელობის პირობებში" ეყრდნობა ძირითადად [16]-სა და [25]-ს, გამოყენებულია [4], [17], [27]. მეოთხე თავის "ბინომიალური მოდელები, ფასგათვლები, ჰეჯირება" საფუძველია ნაშრომები [3], [5], [18], [23], [26]. თავი V – "ზოგადი სრული და არასრული (B, S)-ფინანსური ბაზრები, დისკრეტული დრო" – ემყარება ნაშრომებს [8], [12], [20], [26], აგრეთვე [11] და [15]. თავი VI – "ბლეკ-შოულსის მოდელები" დაწერილია ამ საკითხის გადმოცემის [13]-ში წარმოდგენილი პრინციპების მიხედვით, გამოყენებულია ნაშრომები [7], [14], [16], [19], [24], [26], [27]. ბოლო თავი VII – "ეგზოტიკური ოფციონები" – წარმოადგენს [16]-ის მეშვიდე თავის შემოკლებულ ვარიანტს, გამოყენებულია დამატებით [6], [9] და [10].

ზოგიერთი საჭირო ტერმინი

ვისაც სურს ფინანსურ ბაზარზე იყიდოს, ამბობენ, რომ ის "**იკავებს გრძელ (long) პოზიციას**". გაყიდვის მსურველზე ამბობენ, რომ "**იკავებს მოკლე (short) პოზიციას**".

"**ხარი**" (**bull**) – საფონდო ბირჟის დილერია, რომელიც ბირჟაზე ფასების აწევას მოელის. "ხარების ბაზარი" – ესაა ბაზარი, რომელზეც დილერი უფრო დიდი ალბათობით ყიდულობს, ვიდრე ყიდის. გრძელ პოზიციაში მყოფ "ხარს" აქვს იმედი, რომ ნაყიდს გაყიდის უფრო მაღალ ფასში და მოიგებს.

"**დათვი**" (**bear**) – საფონდო ბირჟის დილერია, რომელიც ელოდება ფასების დაწევას. "დათვების ბაზარი" – ესაა ბაზარი, რომელზეც დილერი მეტი ალბათობით ყიდის, ვიდრე ყიდულობს. მას შეუძლია გაყიდოს ისიც, რაც მას არა აქვს, რასაც ჰქვია "**მოკლე გაყიდვები**" ან "**დათვის პოზიციის დამყარება**". "დათვს" იმედი აქვს დახუროს თავისი მოკლე პოზიცია უფრო იაფად ყიდვით, ვიდრე გაყიდა და ეს სხვაობა მას მოგებას მისცემს.

თუ K ოფციონის ალსრულების ფასია, ხოლო S_0 აქციის საწყისი ფასი, მაშინ ამ სიდიდეთა კავშირებიდან გამომდინარე ოფციონები იყოფიან სამ კატეგორიად: 1) **მოგებით (in – the – money)**; 2) **ნულოვანი მოგებით (at – the – money)** და 3) **წაგებით (out – the – money)**. ყიდვის (კოლ) ოფციონის დროს: პირველი კატეგორიის დროს $S_0 > K$; მეორეს დროს $S_0 = K$ და მესამე კატეგორიის დროს $S_0 < K$.

საბირჟო ინდექსები. ესენია ბირჟის გლობალური მახასიათებლები.

დოუ ჯონსის (Dow Jones) ინდექსები. მაგალითად DJIA – Dow Jones Industrial Average. ესაა ინდექსი მიღებული 30 მსხვილი ინდუსტრიული კომპანიის მონაცემთა შეწონილი გასაშუალებით. მაღალ ფასიანი აქციები მეტი წონით სარგებლობენ.

ინდექსი Standard & Poor's 500 (S&P 500) შედგენილია 500 კომპანიათა მონაცემების გათვალისწინებით (აღებულია 400 ინდუსტრიული, 20 სატრანსპორტო, 40 კომუნალური და 40 ფინანსური).

NYSE composite index შედგება ყველა აქციის გათვალისწინებით,

რომლითაც ნიუ-იორკის სავონდო ბირჟაზე ვაჭრობენ.

NASDAQ Composite index კი შედგენილია დაახლოებით 5000 კომპანიათა მონაცემებზე დაყრდნობით, რომლებიც OTC-ზე (ბირჟის გარეთ) ვაჭრობენ.

საგნობრივი საძიებელი

ლიტერატურა

1. Bachelier L. Théorie de la speculation. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1900, v. 17, 21-86.
2. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. J. Polit. Economy, 1973, v. 3, 637-659.
3. Булонь П., Интербарг В.И. Элементы финансовой математики. ლექციები, წაკითხული 1999 წელს ეკონომიკის ფაკულტეტზე უნივერსიტეტში პარიზ-8-ში, სანტ-დენი, 1-44.
4. Campbel J., Lo A., MacKinlay A. The Econometrics of financial markete. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1997.
5. Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach. J. Financial Econom., 1979, v. 3, No. 7, 229-263.
6. Dochviri B., Shashiashvili M. The American lookback put and optimal stopping. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Inst. of Applied Math., 1998, v. 13, No. 3, 23-25.
7. Duffie D. Dynamic asset pricing theory. Princeton Univ. Press, 1992.
8. Föllmer H., Schweizer M. Hedging of contingent claims under incomplete information. Applied Stochastic Analysis (Stochastic Monographs, v. 5). London: Gordon and Breach., 1991, 389-414.
9. Glonti O.A. Pricing of the option which is the combination of Russian and integral Russian options. Bulletin of Georgian Acad. of Sciences, 2000, v. 162, No. 4, 8-9.
10. Глонти О.А. Опцион, представляющий комбинацию русского и интегрального русского опционов. Препринт 4602, Лаборатория вероятностно-статистических методов ТГУ, 2000.
11. Glonti O., Khechinashvili Z. Financial (B, S)-market with Gaussian martingale. Mean square optimal hedging strate-

gies. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 1997, v. 115, 33-43.

12. Harrison J.M., Pliska S.K. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stoch. Processes Appl., 1981, v. 11, 215-260.
13. Hull J.C. Options, futures and other derivative securities. Princeton Hall, New Jersey (3rd ed.), 1997.
14. Karatzas I., Shreve S. Methods of mathematical finance. New York: Columbia Univ. Press, 1995.
15. Khechinashvili Z. Mean square optimal hedging strategies for (B, S)-financial market. Bulletin of the Georgian Acad. of Sciences, 1999, v. 159, No. 2, 23-25.
16. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ. ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტი, სსა, ფონდი "ევრაზია", თბ., 1999,
17. Markowitz H. Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. Cambridge, MA: Blackwell, 1990.
18. Мельников А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М., ТВП, 1997.
19. Merton R.C. Theory of rational option pricing. Bell. J. of Economics and Management Science, 1973, No. 4, 141-183.
20. Musela M., Rutkowski M. Martingale methods in financial modeling. Application of mathematics. Stochastic modeling and applied probability, 36, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
21. Шепп Л.А., Ширяев А.Н. Новый взгляд на расчеты "Русского опциона". Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, N 1, 130-149.
22. Ширяев А.Н. Вероятность. Изд. 2-ое. М.: Наука, 1989.
23. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время.

Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, N 1, 21-79.

24. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время. Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, N 1, 80-129.
25. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. т. 1. Факты. Модели. М., Фазис, 1998.
26. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. т. 2. Теория. М., Фазис, 1998.
27. Уотшем Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. ЮНИТИ, М., 1999.

28 ა. გაგნიძე. საფინანსო ანალიზის მათემატიკური საწყისები. თბილისი, უნივერსალი, 2002.

გამომცემლობა „უნივერსალი“

თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 1
☎: 29 09 60, 8(99) 17 22 30
E-mail: universal@posta.ge