შალვა ფხაკაძე

მათემატიკური ლოგიკა

საფუძვლები

ნაწილი II

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1999

22.12
510.6
ფ 998

ნაშრომი გათვალისწინებულია უნივერსიტეტის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის. წიგნში სიღრმისეულად და მისაწვდომად განიხილება მათემატიკური ლოგიკის საფუძველმდებითი საკითხები. კერძოდ, ნაშრომის ორივე ნაწილი მთლიანად პასუხობს პროგრამით გათვალისწინებულ საკითხებს.

რედაქტორები: დოც. ვ. ფხაკაძე
კ. ფხაკაძე

რეცენზენტები: პროფ. დ. გორდეზიანი
პროფ. რ. ომანაძე

ფ $\frac{1705000000}{608(06)-98}$

ISBN 99928-56-18-1

წინასწარი შენიშვნები წიგნით სარგებლობის შესახებ

მკითხველისაგან მოითხოვება საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის ცოდნა და წიგნზე დამოუკიდებლად მუშაობის მნიშვნელოვანი გამოცდილება. გარდა ამისა, წიგნის პირველი კითხვის დროს მკითხველისაგან მოითხოვება იცოდეს ძირითადი ლოგიკური კავშირებისა და ძირითადი კვანტორების შინაარსი და მათი ელემენტარული თვისებები.

თავები იყოფა პარაგრაფებად, ამასთან, ზოგიერთი პარაგრაფი იყოფა პუნქტებად. თავები გადანომრილია (ათობითი სისტემის მიხედვით აღნიშნული ნულისაგან განსხვავებული) ნატურალური რიცხვებით, პარაგრაფები — $m \cdot n$ სახით წარმოდგენილი ნატურალურ რიცხვთა წყვილებით, პუნქტები კი $m \cdot n \cdot p$ სახით წარმოდგენილი ნატურალურ რიცხვთა სამეულებით. ამასთან, ხსენებული წყვილებისა და სამეულების პირველი კომპონენტი თავის ნომერია, მეორე — პარაგრაფისა, მესამე კი — პუნქტისა. პარაგრაფების ნუმერაცია ყოველ თავში ხელახლა იწყება, პუნქტებისა კი ყოველ პარაგრაფში იწყება ხელახლა. პარაგრაფებისა და პუნქტების ციტირება წარმოებს შესაბამისი წყვილებისა და სამეულების მიხედვით — შემდეგი სახის ფრაზებით: (იხ. 3.5)*, (იხ. 3.5.2)*, თავებზე მითითება კი წარმოებს რომაული ციფრებით — შემდეგი სახის ფრაზებით: (იხ. III თავი)*. კონტექსტში გვხვდება განსაზღვრებები, შეთანხმებები, თეორემები, ლემები. წინადადებები და თეორემების, წინადადებებისა და ლემების შედეგები. თეორემები დანომრილია პარაგრაფების მიხედვით ($m \cdot n$) სახის გამოსახულებებით, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია, ამასთან, m გვიჩვენებს პარაგრაფის ნომერს, n კი — თეორემის ნომერს. თეორემათა ციტირება წარმოებს $(k; (m \cdot n))$ სახის გამოსახულებებით, სადაც k, m და n ნატურალური რიცხვებია და k მიუთითებს თავის ნომერს; თავის ფარგლებში ციტირებისას $(k; (m \cdot n))$-ის ნაცვლად ავიღებთ ($m \cdot n$)-ს. ანალოგიურად წარმოებს წინადადებების, ლემებისა და ზოგიერთი განსაზღვრებების და შეთანხმებების გადანომვრა და ციტირება. თუ რომელიმე თეორემას ორი ან მეტი შედეგი აქვს, მაშინ ეს შედეგები ინომრება რომაული ციფრებით (შედეგი I, შედეგი II და ა. შ.). მათი ციტირება წარმოებს შემდეგი სახის ფრაზებით: „(5; (3.6)) თეორემის II შედეგის ძალით", „იხ. (2.1) თეორემის შედეგი" და ა. შ. განსაზღვრებათა უმრავლე-

---

* რედაქტორის შენიშვნა: წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს მეორე ნაწილს სამი ნაწილისაგან შემდგარი სახელმძღვანელოსი. ამის გამო ტექსტში გვხვდება მითითება მესამე ნაწილზე, რომლის გამოცემა გათვალისწინებულია.

სობა მოცემულია ნუმერაციის გარეშე. მათი ციტირება წარმოებს თავზე, პარაგრაფზე და, შესაძლოა, პუნქტზე მითითებით (იხ. III თავი) ან (იხ. 3.5) ან (იხ. 4.5.3.) სახის გამოსახულებებით. ანალოგიურად წარმოებს ფორმულებისა და კონტექსტის სხვა ნაწილების ციტირება; ამასთან, ფორმულები გადანომრილია მრგვალ ფრჩხილებში მოცემული ნატურალური რიცხვებით და მათი ნუმერაცია ყოველ პუნქტში ხელახლა იწყება. ასეთ ციტირებათა მაგალითებია: „3.4.2.(8) ფორმულის ძალით", „იხ. 1.3.4.(8) ფორმულა", „იხ. (8) ფორმულა" (უკანასკნელი სახის ციტირება გამოიყენება პუნქტის ფარგლებში) და ა. შ. მითითებები გარეშე ლიტერატურაზე იმავე წესებით წარმოებს, მაგრამ იმ განსხვავებით, რომ დასაწყისში ემატება კვადრატულ ფრჩხილებში ჩასმული ლიტერატურის ნომერი. ასეთ ციტირებათა მაგალითებია: (იხ. [12]; 3.4.2(8)), (იხ. [12]; 3.4). შენიშვნები, როგორც წესი, არ ინომრება — გამონაკლისს შეადგენს ერთმანეთის მომდევნო შენიშვნები. ასეთ შემთხვევებში გვექნება: შენიშვნა I, შენიშვნა II და ა. შ. წინადადება, თეორემებისა და ლემებისაგან განსხვავებით, შესაძლოა ყალიბდებოდეს კონტექსტში მოცემული ცნებების საფუძველზე — იგი შესაძლოა არ იყოს დამოუკიდებელი კონტექსტისაგან. თეორემები, ლემები და შედეგები კი არსებითად მთლიანად ყალიბდება კონტექსტისაგან დამოუკიდებლად.

ტერმინთა[1] საძიებელი მიუთითებს გვერდს ან გვერდებს, სადაც მოცემულია ამ ტერმინის განმარტება (ტერმინით აღნიშნული ცნების განსაზღვრა) პირდაპირი ან არაპირდაპირი გზით. ტერმინისა და ამ ტერმინით აღნიშნული ცნების განსაზღვრის არაპირდაპირი გზით მოცემა გულისხმობს ისეთ ტერმინთა და ამ ტერმინებით აღნიშნულ ცნებათა განსაზღვრებების მოცემას, რომლებიდანაც ზოგად შეთანხმებათა საფუძველზე გამომდინარეობს საძიებელი განმარტება — ზოგჯერ მითითება წარმოებს იმ გვერდებზეც, სადაც მოცემულია ხსენებული ზოგადი შეთანხმებები. უკანასკნელი სახის მითითებებს ფრჩხილებში ვათავსებთ. არაპირდაპირი გზით შემოტანილი ტერმინების ბოლოში (ტერმინთა საძიებელში) დასმულია * სიმბოლო.

დამტკიცებაში შემოტანილი ტერმინები გამოიყენება მხოლოდ ამ დამტკიცებაში. იგივე ტერმინები შეიძლება სხვა შინაარსით შემოტანილი იქნან სხვა დამტკიცებაში. ამიტომ ასეთი ტერმინები არაა ხაზგასმული კონტექსტში და არც ტერმინთა საძიებელში გვხვდება.

---

[1] რედაქტორის შენიშვნა: ტექნიკური მიზეზების გამო წინამდებარე გამოცემას ტერმინთა საძიებელი არ ახლავს.

ზოგიერთი აბზაცის დასაწყისში დასმულია * ნიშანი იმის აღსანიშნავად, რომ ეს აბზაცი შეიძლება გამოტოვებულ იქნეს წიგნის პირველი კითხვის დროს. ეს ხშირად იმასთანაა დაკავშირებული, რომ ამ აბზაცის გაგება ძნელია წიგნის პირველი კითხვის დროს ან მას დამატებითი ხასიათი აქვს. ანალოგიური მიზნით * ნიშანი ზოგჯერ დაისმის პუნქტის წინ, ან თეორემის წინ, ან შენიშვნის წინ და ა. შ. (ამ შემთხვევაში შეიძლება გამოტოვებულ იქნეს მთელი პუნქტი, შესაბამისად თეორემა დამტკიცებითურთ, შესაბამისად შენიშვნა და ა. შ.).

ზოგჯერ მტკიცების დასასრულს და აგრეთვე შენიშვნის დასასრულს ვსვამთ ნიშანს *.

ფრჩხილებში სიტყვათა მოთავსება წარმოებს სხვადასხვა მიზნით (კონტექსტი უზრუნველყოფს გაუგებრობათა თავიდან აცილებას). ასეთ მიზანთა მაგალითებია:

a) ორი წინადადების (თეორემის) ერთდროულად მოკლედ ჩამოსაყალიბებლად.

b) გამარტივებული ტერმინებისა და წინადადებების დამაზუსტებელ ფრაზებს ხშირად ფრჩხილებში ვათავსებთ.

c) როცა რაიმე ფრაზის გამოტოვებით წინადადების შინაარსი არსებითად არ იცვლება, მაშინ ასეთ ფრაზას ფრჩხილებში ვათავსებთ და, მაშასადამე, ფრჩხილებში მოთავსებული ფრაზა არსებითი არ არის.

d) ცნებისა და ამ ცნების კერძო სახის ერთდროულად განსაზღვრის მიზნით. მაგალითად, განვსაზღვრავთ რა ცნებას „ელემენტთა ოჯახის (i-ური) ელემენტი" ვგულისხმობთ, რომ ამით ისაზღვრება ცნება „ელემენტთა ოჯახის ელემენტი" და მისი კერძო სახე „ელემენტთა ოჯახის i-ური ელემენტი"

e) ზოგჯერ დამაზუსტებელ ფრაზას ფრჩხილებში ვათავსებთ იმ მიზნით, რომ გავამართლოთ კონტექსტის უახლოეს მომდევნო ნაწილში იგივე დამაზუსტებელი ფრაზის გამოტოვება.

f) ზოგჯერ ფრხილებში ვათავსებთ ისეთ ფრაზას, რომლის გამოტოვება შესაძლებელია ადრე შემოტანილი შეთანხმების საფუძველზე.

ამა თუ იმ სიტყვის ან ფრაზის ხაზგასმისათვის გამოიყენება ან გამუქებული ასოები ან ბრჭყალები (ბრჭყალები გამოიყენება სხვა ჩვეულებრივი მიზნებისთვისაც). თუ კონტექსტში მოცემული წინადადების სწორად გაგების საშიშროებაა, მაშინ ზოგჯერ ამ წინადადების სათანადო შერჩეული სიტყვა ან ფრაზა გამუქებული ასოებით არის მოცემული (გამუქებული ასოებითაა ხაზგასმული).

III თავი

3. ლოგიკური ოპერატორები, მეტათეორია, ინტერპრეტაცია. სიმრავლისა და კლასის ცნებებთან დაკავშირებული ზოგიერთი განსაზღვრა და აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიის მაგალითები

3.1 მეტათეორია და ინტერპრეტაცია, ლოგიკური ოპერაციების შინაარსის განსაზღვრა

T იყოს მოცემული ფიქსირებული ძირითადი მათემატიკური თეორია, $\mathcal{A}$ იყოს $L(T)$ ენის განსაზღვრებადი ინტერპრეტაცია, K იყოს ამ ინტერპრეტაციის საგანთა არე — უნივერსუმი (თუ $L(T)$ თანამედროვე ენაა, მაშინ შერჩეულია საგანთა K არე, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი ცალსახად განისაზღვრება). ვიგულისხმებთ, რომ შემზღუდავი წესების სისტემის დახმარებით (ცალსახად) განსაზღვრულია პროპოზიციული და საგნობრივი ცვლადებისა და საკუთრივი კონსტანტების შინაარსი და აღნიშნული ტიპის არასაკუთრივი კონსტანტების მნიშვნელობათა არეები და ამ არეებიდან შერჩეულია ხსენებული არასაკუთრივი კონსტანტების მნიშვნელობები. იგულისხმება, რომ T არის J- ტიპის თეორია. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს თუ როგორ უნდა მოდიფიცირდეს შემოტანილი განსაზღვრებები და აღნიშვნები T' და T'' (J' -და J'' -ტიპის) თეორიებისათვის. ამასთან, განსაზღვრებებისა და აღნიშვნების შემოტანისას ვისარგებლებთ, აგრეთვე, უკანასკნელი ორი თეორიის ფორმებით და მათი გამარტივებული აღნიშვნებით მეორე თავში მოტანილი ზოგადი შეთანხმებების საფუძველზე.

პირველ და მეორე თავში მოტანილი მასალის საფუძველზე გვაქვს ზოგადი წარმოდგენა მეტასიმრავლეებსა და მეტაკლასებზე და $L(T)$ ენის ინტერპრეტაციაზე. ვიცით, რომ ოპერატორთა მნიშვნელობების არეები

მეტაკლასისა და მეტასიმრავლის ცნებების საფუძველზე განისაზღვრებიან, თავის მხრივ მეტაკლასისა და მეტასიმრავლის ცნებების დაზუსტება მოითხოვს თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოთა შინაარსის ცოდნას. ლოგიკური წრე რომ არ მივიღოთ, აუცილებელია ხსენებული ცნებები პარალელურად იქნენ დაზუსტებული, რაც საკმაო სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ეს სიძნელეები მოიხსნებოდა მხოლოდ ფიქსირებული დამხმარე თეორიის ენა რომ გამოგვეყენებინა უნივერსუმის საგნებიდან მეტასიმრავლეებისა და მეტაკლასების ასაგებად. საჭიროდ ვთვლი მეტასაგნების ასაგებად დამხმარე თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოებით გამდიდრებული T თეორიის ენის გამოყენებას. მეტაკლასისა და მეტასიმრავლის ცნებების დაზუსტებამდე არ გვექნება დაზუსტებული, მაგალითად, ამა თუ იმ ოპერატორის მნიშვნელობათა არის ცნება, მაგრამ ეს ხელს ვერ შეგვიშლის ვილაპარაკოთ ასო-ოპერატორების მნიშვნელობათა სისტემაზე და მასთან დაკავშირებულ სხვადასხვა ცნებებზე, რომელთა შინაარსი საბოლოოდ დაზუსტდება მეტასიმრავლისა და მეტაკლასის ცნებების დაზუსტების საფუძველზე. მანამდე კი, ლოგიკური წრის მიღების თავიდან აცილების მიზნით, დაზუსტებული ცნებები გამოიყენება შეზღუდულად.

3.1.1 პროპოზიციული კავშირები. ამ პუნქტში გავეცნობით ხუთ მარტივ ლოგიკურ ოპერატორს: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, რომლებსაც უწოდებენ აგრეთვე პროპოზიციულ კავშირებს. მომდევნო პუნქტში გავეცნობით ოთხ ოპერატორულ ნიშანს: $\forall$, $\exists$, τ, ι, რომელთა დახმარებით, აგრეთვე, ადგენენ ლოგიკურ ოპერატორებს.

ჩვეულებრივ ენაში გამოიყენება კავშირები: „არა", „და", „ან", „თუ... მაშინ...", „ეკვივალენტურია." მაგალითად, „π ნაკლებია 4-ზე" და „π მეტია 3-ზე" წინადადებიდან აღნიშნული კავშირებით მიიღება წინადადებები: „π ნაკლებია 4-ზე და π მეტია 3-ზე", „π მეტია 3-ზე ან π ნაკლებია 4-ზე" „არა π ნაკლებია 4-ზე," „თუ π ნაკლებია 4-ზე, მაშინ π მეტია 3-ზე", „არა π ნაკლებია 4-ზე და π ნაკლებია 4-ზე" და ა. შ. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, პროპოზიციული კავშირები ჩვეულებრივი ენის „არა," „ან," „და," „გამომდინარეობს," „ეკვივალენტურია" კავშირებს შეესაბამებიან და ძირითადად ამ კავშირების შინაარსს გამოხატავენ.

ვთქვათ, **A** და **B** მოცემული T შინაარსული თეორიის ისეთი ნებისმიერი ფორმულებია, $X_1,\dots,X_n$ ასოების ისეთი ნებისმიერი მიმდევრობაა, $a_1,\dots,a_n$ კი $X_1,\dots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა ისეთი ნებისმიერი სისტე-

მაა, რომ $X_1,\ldots,X_n$ ასოებს შორის იმყოფება **A** და **B** ფორმულების ყველა თავისუფალი ცვლადი და განსაზღვრებად $\mathcal{I}$ ინტერპრეტაციაში განსაზღვრულია **A** და **B** ფორმულების მნიშვნელობები $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის. არ გამოვრიცხავთ $n = 0$ შემთხვევას. ამ შემთხვევაში **A** და **B** წინადადებებს წარმოადგენენ. $n > 0$ შემთხვევაშიც **A** და **B** ფორმულებს განვიხილავთ, როგორც ($X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებულ) წინადადებებს. ჯერ-ჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ **A** და **B** ფორმულებს განუზღვრელი მნიშვნელობები არ აქვთ (ეს პირობა სრულდება ამ წიგნში განხილული თითქმის ყველა კონკრეტულად მოცემული შინაარსული თეორიების ინტერპრეტაციებში – გამონაკლისს შეადგენს მხოლოდ S_1, S_2, S_1^1 და S_2^2 თეორიების ინტერპრეტაციები).

1. ***A* და *B* წინადადებათა (ფორმულათა) კონიუნქცია** აღინიშნება $[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]$-ით (იკითხება: „**A** და **B**") და განსაზღვრით არის წინადადება (ფორმულა), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა **A**-ც ჭეშმარიტია და **B**-ც ჭეშმარიტია (ე.ი. $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ წინადადება ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხსენებული ასოების მნიშვნელობათა იმავე სისტემისათვის **A** წინადადებაც ჭეშმარიტია და **B** წინადადებაც ჭეშმარიტია). აქვე შევნიშნოთ, რომ პროპოზიციული კავშირების შინაარსის განსაზღვრისას ფრჩხილებში ვსვამთ „ფორმულას" და პირველ პლანზე ვაყენებთ „წინადადებას" – ამით ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ პროპოზიციული კავშირების შინაარსი წინადადებებად განხილულ ფორმულებზე მოქმედებაში ვლინდება. შემდგომ, პროპოზიციული კავშირების შინაარსის განსაზღვრებებში, სიმარტივისათვის, ფორმულებს აღარ ვახსენებთ; მაგრამ მკითხველმა უნდა იგულისხმოს, რომ წინადადებებთან დაკავშირებული ცნებების შემოტანით ფორმულებთან დაკავშირებული შესაბამისი ცნებებიც შემოიტანება). $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ კონიუნქციას უწოდებენ აგრეთვე **A** და **B** **წინადადებათა** (ფორმულათა) **ლოგიკურ ნამრავლს** და მას აღნიშნავენ აგრეთვე **AB**-ით; ამასთანავე, **A** და **B** წინადადებებს (ფორმულებს) ეწოდებათ $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ნამრავლის **თანამამრავლები** (**A** არის **პირველი თანამამრავლი**, **B** კი – **მეორე თანამამრავლი**). $\wedge$ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „და" და, როგორც ვხედავთ, $\wedge$

პროპოზიციული კავშირი დაახლოებით ისეთივე როლს ასრულებს შინაარსული მათემატიკური თეორიის ინტერპრეტაციაში, როგორ როლსაც ასრულებს „და" კავშირი ჩვეულებრივ ენაში. აქვე შევნიშნოთ, რომ პროპოზიციულ ოპერატორთა (კერძო პროპოზიციულ კავშირთა) როლი შინაარსული მათემატიკური თეორიის ინტერპრეტაციაში მხოლოდ მიახლოებით ემთხვევა მათ სახელწოდებათა როლს ჩვეულებრივ ენაში. აღნიშნულ სახელწოდებათა შინაარსი ჩვეულებრივი ენის წინადადებებში არსებითად არის დამოკიდებული კონტექსტზე. კონტექსისდა მიხედვით მათ, პროპოზიციული კავშირისაგან განსხვავებით, შეუძლიათ გამოხატონ, მაგალითად, მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები და მოვლენათა მიმდევრობითობა დროში. პროპოზიციული კავშირის შინაარსი ზუსტად განისაზღვრება მისი განსაზღვრით და იგი არსებითად არაა დამოკიდებული კონტექსტზე. ამის დასადასტურებლად სათანადო მაგალითების მოტანა თითოეული პროპოზიციული კავშირის შემთხვევაში სიძნელეს არ წარმოადგენს. მაგალითად, იმ დროს, როცა შინაარსულ მათემატიკურ თეორიებში $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ და $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$ სავსებით ტოლფასი წინადადებებია, შესაძლოა სრულიად სხვადასხვა შინაარსით იქნეს გაგებული „და" კავშირის გამოყენებით შედგენილი შემდეგი რთული წინადადებები: „შევხედე და შემეშინდა" და „შემეშინდა და შევხედე". მკითხველი ქვემოთ სხვა ლოგიკური კავშირების შინაარსის განსაზღვრასთან ერთად გზადაგზა ნახავს ამ საკითხთან დაკავშირებით შემდგომ შენიშვნებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა . ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად ვიგულისხმებთ, რომ $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ფორმულების კონიუნქციის ძირითადი აღნიშვნაა $\wedge\mathbf{AB}$, რომლის ნაცვლად კონტექსტში გამოყენებულია T' თეორიის $[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]$ ფორმა და მისი $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ გამარტივებული აღნიშვნა.

დასასრულ შევნიშნოთ შემდეგი: $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ წინადადებათა, ფორმულათა კონიუნქციის განსაზღვრაში გამოყენებული ფრაზა „$\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ ასოების მნიშვნელობათა $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ სისტემისათვის $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ წინადადება ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხსენებული ასოების იმავე სისტემისათვის $\mathbf{A}$ წინადადებაც ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში და $\mathbf{B}$ წინადადებაც ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში" არ უნდა მივიჩნიოთ შემდეგი დასკვნის საფუძვლად: „$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ფორმულა არის $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული წინადადება". ეს დასკვნა სწორი იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ ასოებიდან ყველა ცვლადია. ხსენებული ფრაზა

მიუთითებს მხოლოდ იმას, რომ $A \wedge B$ ფორმულა შეგვიძლია განვიხილოთ (ან, რაც იგივეა, უნდა განვიხილოთ) როგორც $X_1, \ldots, X_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული წინადადება. აქვე შევნიშნოთ, რომ $\wedge$ ოპერატორის (სიმბოლოს) $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციული შინაარსის მოტანილი განსაზღვრა ძალაშია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\wedge$ მოცემული T თეორიის ლოგიკური კავშირია. ანალოგიური შენიშვნა მხედველობაში გვექნება სხვა ფორმების, ოპერატორებისა და ოპერატორიული ნიშნების შემთხვევაში შენიშვნის ცხადად მოტანის გარეშეც.

2. *A* და *B* **წინადადებათა დიზუნქცია** აღინიშნება $[A \vee B]$-ით (იკითხება: „A ან B") და განსაზღვრით არის წინადადება, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A-ც მცდარია და B-ც მცდარია. $A \vee B$ დიზუნქციას უწოდებენ აგრეთვე A და B **წინადადებათა (ლოგიკურ) ჯამს** და A და B-ს ეწოდებათ ამ ლოგიკური ჯამის **შესაკრებები** (A არის **პირველი შესაკრები**, B კი — **მეორე შესაკრები**). $\vee$ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „ან".

შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივ ენაში კავშირი „ან" იხმარება ორი აზრით. ერთი იმ აზრით, რომელიც არსებითად შეესაბამება $\vee$-პროპოზიციული კავშირის აზრს შინაარსული მათემატიკური თეორიის ინტერპრეტაციაში და მეორე იმ აზრით, რომლის თანახმად A და B წინადადებებისაგან შედგენილი „A ან B" წინადადება ითვლება ჭეშმარიტად მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B წინადადებებიდან ერთი მცდარია, მეორე კი — ჭეშმარიტი. ქვემოთ „ან" კავშირს გამოვიყენებთ პირველი აზრით. მეორე აზრის გამოსახატავად კი გამოვიყენებთ კავშირს „ან... ან..." (ან A, ან B).

3. *A* **წინადადების უარყოფა** აღინიშნება $[\neg A]$-ით (იკითხება „არა A") და განსაზღვრით არის წინადადება, რომელიც ითვლება ჭეშმარიტად, როცა A მცდარია და ითვლება მცდარად, როცა A ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში. სიმარტივისათვის $\neg A$-ს ნაცვლად ხშირად წერენ $\overline{A}$-ს, მაგრამ მკითხველმა ყველგან $\overline{A}$ უნდა წარმოიდგინოს როგორც $\neg A$. $\neg$ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „არა" და როგორც ვხედავთ, ამ პროპოზიციულ კავშირს დაახლოებით ისეთივე შინაარსი აქვს შინაარსული მათემატიკური თეორიის ინტერპრეტაციაში, როგორი აზრიც აქვს ჩვეულებრივ ენაში კავშირს „არა".

4. *A* და *B* **წინადადებათა გამომდინარეობა (იმპლიკაცია)** აღინიშნება [**A** → **B**]-ით (იკითხება: „**A**-დან გამომდინარეობს **B**" ან „**A** იმპლიცირებს **B**-ს") და განსაზღვრით არის წინადადება, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა **A** ჭეშმარიტია და **B** მცდარია. **A**-ს ეწოდება **A** → **B** **იმპლიკაციის წანამძღვარი** ანუ **ანტეცედენტი**, **B**-ს კი ეწოდება — **შედეგი** ანუ **კონსეკვენტი**.

→ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებებია ჩვეულებრივი ენის შემდეგი კავშირები: „გამომდინარეობს" („გამომდინარეობა"), „იმპლიცირებს" („იმპლიკაცია"), „თუ... მაშინ...", „არა... ან...". ამ კავშირების შინაარსი ჩვეულებრივ ენაში რამდენადმე განსხვავდება „→" პროპოზიციული კავშირის შინაარსისაგან. მიუხედავად ამისა, შემდეგში ჩვეულებრივი ენის ხსენებულ კავშირებს (მეტაენაში) გამოვიყენებთ ისეთივე აზრით, როგორი აზრითაც შინაარსულ მათემატიკურ თეორიებში გამოიყენება „→" პროპოზიციული კავშირი. „**A** → **B**" იმპლიკაცია იკითხება აგრეთვე შემდეგნაირად: „თუ **A**, მაშინ **B**". ამასთან, ნაცვლად ერთი და იმავე აზრის მქონე ფრაზებისა: „**A**-დან გამომდინარეობს **B**" და „თუ **A**, მაშინ **B**", იმავე აზრით იხმარება შემდეგი ფრაზები: „**B** არის აუცილებელი პირობა **A**-თვის" „**A** არის საკმარისი პირობა **B**-თვის". ეს ფრაზები უფრო ზუსტად ასე გამოითქმის: „**B** არის აუცილებელი პირობა იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს **A**-ს" „**A** არის საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს **B**-ს"

მოტანილი განსაზღვრის მიხედვით „**A** → **B**" ჭეშმარიტია ყოველთვის, როცა **A** მცდარია. ეს ფაქტი შეიძლება ასე გამოითქვას: „**მცდარიდან ყველაფერი გამომდინარეობს**." ასევე ის ფაქტი, რომ „**A** → **B**" ჭეშმარიტია ყოველთვის, როცა **B** ჭეშმარიტია, შეიძლება ასე გამოითქვას „**ჭეშმარიტი ყველაფრიდან გამომდინარეობს**".

შენიშვნა: როგორც აღვნიშნეთ „გამომდინარეობს" და „თუ..., მაშინ..." კავშირების შინაარსი ჩვეულებრივ ენაში რამდენადმე განსხვავდება „→" პროპოზიციული კავშირის შინაარსისაგან. ჩვეულებრივ ენაში იგულისხმება, რომ როცა **A** და **B** წინადადებებია და **A** წინადადება მცდარია, მაშინ წინადადებას „თუ **A**, მაშინ **B**" არ აქვს აზრი. მაგრამ ასეთი გაგება მათემატიკაში დაუშვებელია. მართლაც, მაგალითად, ვთქვათ

„ფერმას დიდი თეორემის" სახელწოდებით ცნობილი A წინადადების[1] გამოყენებით დამტკიცებულია რაიმე B წინადადება. არ ვიცით ჭეშმარიტია თუ არა A წინადადება, მაგრამ წინადადება „A-დან გამომდინარეობს B" ჭეშმარიტია. ასევე „A-დან გამომდინარეობს B" შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი წინადადება მაშინაც, როცა B მცდარი წინადადებაა. მეორე მხრივ, ერთი წინადადებიდან მეორის გამოყვანა (ე. ი. გამომდინარეობს დამტკიცება) მაშინაა საინტერესო, როცა არ ვიცით პირველი წინადადება ჭეშმარიტია თუ მცდარი — თუ ვიცით რომ პირველი წინადადება ჭეშმარიტია, მაშინ ხსენებული გამოყვანა მეორე წინადადების ჭეშმარიტობის დამტკიცებად იქცევა (ამასთან, პირველი წინადადების ჭეშმარიტობის დამტკიცებიდან და ხსენებული გამოყვანიდან მსჯელობათა უბრალო გაერთიანებით მიიღება მეორე წინადადების ჭეშმარიტობის დამტკიცება). თუ ვიცით, რომ B ჭეშმარიტია, მაშინ B წინადადების დამტკიცება შეგვიძლია მივიჩნიოთ B წინადადების გამოყვანად ნებისმიერ ფიქსირებულ A წინადადებიდან (რამდენადაც B-ს გამოყვანა A-დან გულისხმობს რომ მივიჩნიოთ A ჭეშმარიტად და დავამტკიცოთ B). თუ ვიცით რომ A მცდარია, მაშინ $A \rightarrow B$ შემდეგნაირად დამტკიცდება (ვგულისხმობთ, რომ ვიცით იმპლიკაციის შინაარსი, როცა წინამძღვარი ჭეშმარიტია): ვთქვათ $A \rightarrow B$ მცდარია, მაშინ B მცდარია, A კი ჭეშმარიტია. ამასთან, ვიცით, რომ A მცდარია, ე. ი. A ერთდროულად არის ჭეშმარიტიც და მცდარიც. ეს წინააღმდეგობაა. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმას, რომ ჩვენი დაშვება არაა მართალი. მაშასადამე $A \rightarrow B$ არის ჭეშმარიტი.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ გამომდინარეობის ცნებას ჩვეულებრივ ენაში აქვს სხვაგვარი აზრი იმ შემთხვევაშიც კი, როცა წანამძღვარი და შედეგი ორივე ჭეშმარიტია. მართლაც, წინადადება „თუ $5 = 10 : 2$, მაშინ პარიზი საფრანგეთის დედაქალაქია" ჭეშმარიტი წინადადებაა იმპლიკაციის მოტანილი განსაზღვრის მიხედვით. მართლაც, „პარიზი საფრანგეთის დედაქალაქია" არის ჭეშმარიტი და ამიტომ მთელი წინადადება ჭეშმარიტია (მიუხედავად იმისა ჭეშმარიტია თუ არა წანამძღვარი — განხილულ წინადადებაში წანამძღვარიც ჭეშმარიტია). გამომდინარეობის ცნე-

[1] რედაქტორის შენიშვნა: იმ დროისათვის, როცა ხელნაწერი იქმნებოდა ფერმას დიდი თეორემა ღია მათემატიკურ პრობლემად ითვლებოდა, დღეს ვითარება სხვაგვარადაა, თუმცა ამან კონტექსტში გატარებული შინაარსის გასააზრებლად მკითხველს ხელი არ უნდა შეუშალოს.

ბის ჩვეულებრივი ენის მიხედვით გაგების შემთხვევაში განხილული წინადადება ჭეშმარიტი არაა: ის ფაქტი, რომ „პარიზი საფრანგეთის დედაქალაქია" არაფრით არ გამომდინარეობს $5 = 10 : 2$ წანამძღვრიდან — რადგან გამომდინარეობის ჩვეულებრივი გაგება გულისხმობს, რომ შედეგი როგორღაც „გამომდინარეობს" წანამძღვრიდან, რომ შედეგსა და წანამძღვარს შორის უნდა იყოს რაღაც შინაგანი კავშირი. ასეთი კავშირი არ შეიძლება გვქონდეს, როცა წანამძღვარი და შედეგი სავსებით სხვადასხვა ტიპის წინადადებებია. გამომდინარეობის ასეთნაირი გაგება მათემატიკური თეორიების შემთხვევაში მეტისმეტად ვიწრო იქნებოდა. საქმე იმაშია, რომ მათემატიკურ თეორიებში ხშირად აბსტრაჰირებას ახდენენ წინადადების შინაარსისაგან — წინადადებაში ყურადღება ექცევა მხოლოდ იმას, ჭეშმარიტია თუ მცდარი იგი. მაშასადამე, მათემატიკურ თეორიებში გამომდინარეობის ცნება უნდა განისაზღვროს „ჭეშმარიტობის" და „მცდარობის" ტერმინებით.

5. *A* და *B* წინადადებათა ეკვივალენტობა (ტოლძალოვნება) აღინიშნება $[A \leftrightarrow B]$-ით (იკითხება: „A ეკვივალენტურია B-სი" ან „A ტოლძალოვანია B-სი") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც ითვლება ჭეშმარიტად $\mathcal{M}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B წინადადებებიდან ორივე ჭეშმარიტია, ან როცა ორივე მცდარია. $\leftrightarrow$ ოპერატორის სახელწოდებებია: „ეკვივალენტობა", „ეკვივალენტურია", „ტოლძალოვნება", „ტოლძალოვანია", „მაშინ და მხოლოდ მაშინ". $A \leftrightarrow B$ წინადადება იკითხება ასეც: „A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B". ამასთანავე, ნაცვლად ერთი და იმავე აზრის მქონე ფრაზებისა „A ეკვივალენტურია B-სი" და „A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B" იხმარება აგრეთვე ფრაზები: „A-დან გამომდინარეობს B და პირიქით"; „A-ს აქვს ადგილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს B-ს"; „A არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა B პირობისათვის"; „იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს A პირობას აუცილებელი და საკმარისია შესრულებული იყოს B პირობა".

ცხადია, $A \leftrightarrow B$ ეკვივალენტობა ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია როგორც $A \rightarrow B$ გამომდინარეობა (იმპლიკაცია), ისე $B \rightarrow A$ გამომდინარეობა.

პროპოზიციული კავშირები უნდა განვიხილოთ, როგორც ფუნქციები, რომელთა არგუმენტები (მოცემული მათემატიკური თეორიის) წინადადებებია და რომელთა მნიშვნელობები ისევე წინადადებებია.

ამასთან, ყოველი წინადადება უნდა გავაიგივოთ ამ წინადადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობასთან. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ პროპოზიციული კავშირები $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ტიპის ორადგილიანი ფუნქციებია, $\neg$ კი იმავე ტიპის ერთადგილიანი ფუნქციაა.

პროპოზიციული კავშირები უმარტივესი სახით ლოგიკის ოპერატორებია. ოპარენდების (ან არგუმენტების) რიცხვის მიხედვით ლოგიკური ოპერატორი, კერძოდ, პროპოზიციული კავშირი, შეიძლება იყოს **n-ადგილიანი** ($n = 1, 2, \ldots$). ამასთან, ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა აღმნიშვნელ t და f კონსტანტებს ხშირად **განიხილავენ**, როგორც **ნულადგილიან ლოგიკურ ოპერატორებს (როგორც ნულადგილიან პროპოზიციულ კავშირებს)**.

ამრიგად, ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად, t და f უნდა განვიხილოთ როგორც სათანადო ტიპის ნულადგილიანი ფუნქციები.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ გამოყენებული ფრაზები „პროპოზიციული კავშირები **უნდა განვიხილოთ** როგორც ფუნქციები“, „**შეიძლება ითქვას**, რომ პროპოზიციული კავშირები არიან ყველგან განსაზღვრული ფუნქციები“ და „t, f კონსტანტები უნდა განვიხილოთ როგორც სათანადო ტიპის ნულადგილიანი ფუნქციები“, მიუთითებენ მხოლოდ იმას, რომ აღნიშნულ პროპოზიციულ კავშირებს ვაიგივებთ შესაბამის ფუნქციებთან. σ პროპოზიციული კავშირის შესაბამისი ფუნქცია აღინიშნება f_σ-თი და მას σ-ს **მიკავშირებული ფუნქცია ეწოდება**. ანალოგიურ ფრაზებსა და ტერმინებს გამოვიყენებთ სხვა ოპერატორებისა და ოპერატორული ნიშნების შემთხვევაში (ამასთან, ხშირად დავკმაყოფილდებით მხოლოდ იმაზე მითითებით, თუ როგორ განიხილება σ ოპერატორი ან ოპერატორული ნიშანი როგორც ფუნქცია). ამასთან, ვგულისხმობთ, რომ (არანულადგილიანი) ოპერატორის ან ოპერატორული ნიშნის შინაარსის განსაზღვრა ნიშნავს მისი მიკავშირებული ფუნქციის განსაზღვრას.

ამრიგად, ჯერჯერობით ვიცნობთ ორ ნულადგილიან, ერთ ერთადგილიან და ოთხ ორადგილიან პროპოზიციულ კავშირს.

2.2-ში მოტანილი ზოგადი შეთანხმების შესაბამისად $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ოპერატორების მიკავშირებული ფუნქციები $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში შესაბამისად აღინიშნებიან შემდეგი

$$\neg_{\mathcal{A}},\quad \wedge_{\mathcal{A}},\quad \vee_{\mathcal{A}},\quad \rightarrow_{\mathcal{A}},\quad \leftrightarrow_{\mathcal{A}},$$

სიმბოლოებით. ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად, უკანასკნელი აღნიშვნების ნაცვლად გამოიყენება აგრეთვე $f_{\neg}$, $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\leftrightarrow}$ აღნიშვნები. ეს უკანასკნელი აღნიშვნები ხაზს უსვამენ იმ გარემოებას, რომ $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ პროპოზიციული კავშირების მიკავშირებული ფუნქციები ინტერპრეტაციაზე დამოკიდებულნი არ არიან (ეს თვისება ოპერატორთა შორის მხოლოდ და მხოლოდ პროპოზიციულ კავშირებს აქვთ — ასევე, სხვა ასოებისაგან განსხვავებით, პროპოზიციული ასოს მნიშვნელობათა არე და საკუთრივი პროპოზიციული კონსტანტის მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული ინტერპრეტაციაზე).

ახლა ადვილი დასანახია, რომ განხილული პროპოზიციული კავშირების მიკავშირებული ფუნქციები შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ე.წ. **ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილებით:**

	$f_{\wedge}$	$f_{\vee}$	$f_{\rightarrow}$	$f_{\leftrightarrow}$
t t	t	t	t	t
t f	f	t	f	f
f t	f	t	t	f
f f	f	f	t	t

	$f_{\neg}$
t	f
f	t

(პირველ სვეტში მოცემულია ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა დალაგებული სისტემები გამარტივებული ფორმით, სხვა ნებისმიერ სვეტში მოცემულია მიკავშირებული ფუნქციის აღნიშვნა და ამ ფუნქციის მნიშვნელობები ხსენებულ დალაგებულ სისტემაზე. ამასთან, n-ადგილიანი პროპოზიციული კავშირის მნიშვნელობათა არეა $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ტიპის ყველა ყველგან განსაზღვრულ n-ადგილიან ფუნქციათა მეტასიმრავლე). მოტანილი ცხრილებიდან პირველი წარმოადგენს $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ორადგილიანი პროპოზიციული კავშირების $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\leftrightarrow}$ მიკავშირებული ფუნქციების **ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა გაერთიანებულ ცხრილს**. ორადგილიანი პროპოზიციული კავშირის მიკავშირებული ფუნქციის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი შესაძლოა ჩაიწეროს შემოკ-

ლებული სახითაც. ასეთი შემოკლებული სახე, მაგალითად, $f_\wedge$ ფუნქციის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილის შემდეგია:

$f_\wedge$	t f
t	t f
f	f f

იგულისხმება, რომ $f_\wedge$-ს სვეტში მოცემულია ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა დალაგებული წყვილების პირველი კომპონენტები, $f_\wedge$-ს სტრიქონში კი – მეორე კომპონენტები, ამასთან, $f_\wedge$ ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემულ წყვილზე მოცემულია წყვილის პირველი კომპონენტის შესაბამის სტრიქონსა და მეორე კომპონენტის შესაბამის სვეტის გადაკვეთაში.

3.1.2 ლოგიკური ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას. ვთქვათ, δ არის n-ადგილიანი ($n>0$) მარტივი ოპერატორი, $\sigma\Delta_1...\Delta_m$ კი n-ადგილიანი კვანტორია. δ **მარტივი ოპერატორის როლის განსაზღვრა (ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას)** გულისხმობს $\delta A_1...A_n$ სახის ფორმის მნიშვნელობის განსაზღვრას (განსაზღვრებად $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ) მისი თავისუფალი ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემისათვის იმ შემთხვევაში, როცა $\{1, 2,...,n\}$-დან აღებული თითოეული i-თვის განსაზღვრულია A_i ოპერანდის მნიშვნელობა იმავე ასოების მნიშვნელობათა იმავე სისტემისათვის; ამასთან, ეს პირობა უნდა სრულდებოდეს იმ შემთხვევაშიც, როცა $=$, $\equiv$ და $\in$ პრედიკატებისაგან განსხვავებული (ყველა ან) ზოგიერთი საკუთრივი კონსტანტა ასო არასაკუთრივ კონსტანტად არის მიჩნეული (რაც შესაძლებლობას გვაძლევს განვიხილოთ ასოების მნიშვნელობათა ისეთი სისტემები, რომლებშიც ამა თუ იმ არასაკუთრივ კონსტანტად მიჩნეული საკუთრივი კონსტანტის მნიშვნელობაა მისი მნიშვნელობათა არედან აღებული ნებისმიერი ობიექტი). $\sigma\Delta_1...\Delta_m$ **კვანტორის როლის განსაზღვრა (ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას)**. გულისხმობს $\sigma\Delta_1...\Delta_m A_1...A_n$ სახის ფორმის მნიშვნელობის განსაზღვრას მისი $X_1,...,X_k$ თავისუფალი ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი $a_1,...,a_k$ სის-

ტემისათვის იმ შემთხვევაში, როცა $\{1, 2, ..., n\}$-დან აღებული თითოეული i-თვის განსაზღვრულია A_i ოპერანდის მნიშვნელობები $\Delta_1 ... \Delta_m, X_1, ..., X_k$ ასოების $b_1, ..., b_m, a_1, ..., a_k$ სახის ყველა სისტემისათვის, სადაც $\{1, 2, ..., n\}$-დან აღებული თითოეული i-თვის b_i არის Δ_i ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ობიექტი; ამასთან ეს პირობა უნდა სრულდებოდეს იმ შემთხვევაშიც, როცა $=$, $\equiv$ და $\in$ პრედიკატებისაგან განსხვავებული (ყველა ან) ზოგიერთი საკუთრივი კონსტანტა ასო მიჩნეულია არასაკუთრივ კონსტანტად. **ოპერატორული ნიშნის როლის განსაზღვრა (ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას)** გულისხმობს შესაბამისი თითოეული კვანტორის როლის განსაზღვრას.

როგორც აქ შემდეგშიც ხშირად, სიმარტივისათვის, ნაცვლად ტერმინისა „ოპერატორის როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას" ვისარგებლებთ ტერმინით „ოპერატორის როლი" ანალოგიური აზრით იქნება გამოყენებული ტერმინები „კვანტორის როლი" და „ოპერატორული ნიშნის როლი"

წინა პარაგრაფში აღვწერეთ რა პროპოზიციული კავშირების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას დაუყოვნებლივ ცხადი გახდა პროპოზიციული კავშირის შინაარსი — ხსენებული როლის აღწერით საკმაოდ იოლად განისაზღვრა პროპოზიციული კავშირების მნიშვნელობათა არეები და მიკავშირებული ფუნქციები. ამ პუნქტში აღვწერთ ძირითადი თეორიის ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების როლს. ამის შემდეგაც მათი შინაარსის განსაზღვრა საკმაო სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. მხედველობაშია $\forall, \exists, \tau, \iota, \cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნები და მათი შესაბამისი კვანტორები.

$\forall, \exists, \tau, \iota, \cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნების შესაბამისი კვანტორებისათვის, გარდა 2.1-ში მოტანილი სამი პირობისა, დამატებით მოითხოვება შემდეგი (a) პირობის შესრულება.

(a). ვთქვათ, σ არის ერთ-ერთი $\forall, \exists, \tau, \iota, \cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ სიმბოლოებიდან. თუ σ მოცემული თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოა, მაშინ σ არის $(1, 1)$ წონის მქონე ოპერატორული ნიშანი, რომლის შესაბამის კვანტორებში ოპერატორულ ასოებად მხოლოდ საგნობრივი ასოები გამოიყენება.

ვთქვათ, $\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ კვანტორებია. $\forall$-ს ეწოდება **ზოგადობის ოპერატორული ნიშანი**, $\exists$-ს ეწოდება **არსებობის ოპერატორული ნიშანი**. $\forall\Delta$-ს ეწოდება **ზოგადობის კვანტორი** Δ ოპე-

რატორული ასოთი. $\exists\Delta$-ს კი ეწოდება არსებობის კვანტორი Δ ოპერატორული ასოთი. $\forall\Delta\, A$-ს ეწოდება A ფორმულის განზოგადება Δ-თი. $\exists\Delta\, A$-ს კი ეწოდება A ფორმულის დადასტურება Δ-თი. ამასთან, ისინი შესაბამისად იკითხებიან ფრაზებით „ყოველი Δ-თვის A" და „არსებობს ისეთი Δ, რომ A"

ვთქვათ, A მოცემული T თეორიის ნებისმიერი ფორმაა, $Y_1,\ldots,Y_m$ კი ასოების ისეთი ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლის წევრთა შორის იმყოფება A ფორმის ყველა თავისუფალი ცვლადი. მაშინ A ფორმის მნიშვნელობა $Y_1,\ldots,Y_m$ ასოების $\mathfrak{M}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა $a_1,\ldots,a_m$ სისტემისათვის, განსაზღვრით, არის A ფორმის მნიშვნელობა $Y_{i_1},\ldots,Y_{i_r}, Z_1,\ldots Z_k$ ასოების მნიშვნელობათა $a_{i_1},\ldots,a_{i_r}, b_1,\ldots,b_k$ სისტემისათვის, სადაც $Y_{i_1},\ldots,Y_{i_r}$ მიმდევრობის მისაღებად საკმარისია $Y_1,\ldots,Y_m$ მიმდევრობიდან ამოვაგდოთ განმეორებითი წევრები და A ფორმის დაბმული ასოები. $Z_1,\ldots,Z_k$ არის $Y_1,\ldots,Y_m$ მიმდევრობაში არმყოფი A ფორმის ყველა ერთმანეთისაგან განსხვავებული თავისუფალი ასოების (კონსტანტების) მიმდევრობა, $b_1,\ldots,b_k$ კი არის $Z_1,\ldots Z_k$ ასოების (კონსტანტების) მნიშვნელობები $\mathfrak{M}$ ინტერპრეტაციაში. ქვემოთ ამ პუნქტში ეს შენიშვნა ყველგან უნდა ვიქონიოთ მხედველობაში.

ვთქვათ, ახლა, რომ A მოცემული T თეორიის ნებისმიერი ფორმულაა, $X_1,\ldots X_n$ არის Δ-გან და ერთმანეთისაგან განსხვავებული A ფორმულის ყველა თავისუფალი ასოს მიმდევრობა, $Y_1,\ldots Y_m$ კი ასოების ისეთი ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლის წევრებს შორის გვხვდება A ფორმულის Δ-გან განსხვავებული ყველა თავისუფალი ცვლადი (ე. ი. $\forall\Delta\, A$ ფორმულის ან, რაც იგივეა, $\exists\Delta\, A$ ფორმულის ყველა თავისუფალი ცვლადი).

როგორც წინა პუნქტში, ჯერჯერობით აქაც ვიგულისხმოთ, რომ A ფორმულა განუსაზღვრელ მნიშვნელობებს არ ღებულობს.

$\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ კვანტორების როლი გამარტივებულად შეიძლება ასე განისაზღვროს. განსაზღვრით, $\forall\Delta\, A$, შესაბამისად $\exists\Delta\, A$, არის წინადადება (ფორმულა), რომელიც ჭეშმარიტია ($\mathfrak{M}$ ინტერპრეტაციაში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ($\mathfrak{M}$ ინტერპრეტაციის მიმართ) Δ ასოს ყოველი,

შესაბამისად ერთი მაინც, მნიშვნელობისათვის $\mathbf{A}$ წინადადება არის ჭეშმარიტი.

მოტანილი განსაზღვრის დაზუსტების მიზნით შევნიშნოთ შემდეგი. იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს ვილაპარაკოთ Δ ასოს ამა თუ იმ მნიშვნელობისათვის $\mathbf{A}$ წინადადებაზე, აუცილებელი და საკმარისია, წინასწარ დაფიქსირდეს $\mathbf{A}$ ფორმის Δ-გან განსხვავებული თავისუფალი ასოების მნიშვნელობები. ამიტომ ცხადია, რომ $\forall\Delta\ \mathbf{A}$ და $\exists\Delta\ \mathbf{A}$ ფორმულების (ჭეშმარიტული) მნიშვნელობები დამოკიდებული იქნება $\mathbf{A}$ ფორმულის Δ-გან განსხვავებული თავისუფალი ასოების მნიშვნელობათა სისტემაზე; Δ ასოს მნიშვნელობაზე აღნიშნული ფორმულების მნიშვნელობები დამოკიდებული არ იქნება და, მაშასადამე, $\forall\Delta\ \mathbf{A}$ და $\exists\Delta\ \mathbf{A}$ ფორმულებისათვის Δ მხოლოდ დაბმულ ასოს წარმოადგენს. ამასთან, Δ-გან განსხვავებული ასოს შემოსვლა $\forall\Delta\ \mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta\ \mathbf{A}$, ფორმულაში წარმოადგენს ასოს თავისუფალ შემოსვლას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს შემოსვლა წარმოადგენს ასოს თავისუფალ შემოსვლას განხილული ფორმულის $\mathbf{A}$ ნაწილში. მაშასადამე, $\forall\Delta\ \mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta\ \mathbf{A}$, ფორმულა **შეგვიძლია განვიხილოთ** როგორც Δ ფორმულის Δ ასოსგან განსხვავებული თავისუფალი ასოების (ან, რაც იგივეა, $\forall\Delta\ \mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta\ \mathbf{A}$, ფორმულის თავისუფალი ასოების) მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული წინადადება – ჭეშმარიტული მნიშვნელობა.

მოტანილი გამარტივებული განსაზღვრის ზუსტი ფორმაა შემდეგი. $\forall\Delta\ \mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta\ \mathbf{A}$, არის ფორმულა, რომლის (ჭეშმარიტული) მნიშვნელობა $\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n$ ასოების მნიშვნელობათა $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ სისტემისათვის არის $\mathbf{t}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\Delta, \mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n$ ასოების მნიშვნელობათა $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ სახის ყველა, შესაბამისად ერთი მაინც, სისტემისათვის $\mathbf{A}$ ფორმულის მნიშვნელობა არის $\mathbf{t}$ (სადაც $\mathbf{a}$ არის Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ნებისმიერი ობიექტი – ე. ი. $\mathbf{K}$ უნივერსუმიდან აღებული ნებისმიერი საგანი).

საზოგადოდ, **შეგვიძლია ვილაპარაკოთ** $\forall\Delta\ \mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta\ \mathbf{A}$, ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობაზე $\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_m$ ასოების ნებისმიერი $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m$ სისტემისათვის (ცხადია, $\mathbf{Y}_1,\dots,\mathbf{Y}_m$ ასოების ისეთი ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლის წევრთა შორის იმყოფება $\forall\Delta\ \mathbf{A}$ ფორ-

მულის (ან, რაც იგივეა, $\exists\Delta$ **A** ფორმულის) ყველა თავისუფალი ცვლადი; ამასთან, ეს უკანასკნელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა იგივეა, რაც $\forall\Delta$ **A**, შესაბამისად $\exists\Delta$ **A**, ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა $Y_{i_1},\dots,Y_{i_k}$ ასოების მნიშვნელობათა $b_{i_1},\dots,b_{i_k}$ სისტემისათვის, სადაც $Y_{i_1},\dots,Y_{i_k}$ მიმდევრობის მისაღებად საკმარისია $Y_1,\dots,Y_m$ მიმდევრობიდან ამოვაგდოთ განმეორებითი წევრები და $\forall\Delta$ **A** (ან, რაც იგივეა, $\exists\Delta$ **A**) ფორმის დაბმული ასოები.

განვიხილოთ მაგალითები S_1 თეორიიდან. ფორმულები

$$\sqrt{x} = y; \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy; \quad \sqrt{(x+y)^2} = x + y$$

(S_1 თეორიის ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში) წარმოადგენენ x და y ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებულ წინადადებებს, ე.ი. x და y ცვლადები ამ ფორმულების თავისუფალ ცვლადებს წარმოადგენენ (ამ ფორმულებში დაბმული ცვლადები არ გვაქვს). რაც შეეხება ფორმულებს

$$\exists x \quad [\sqrt{x} = y]; \tag{1}$$

$$\forall x \quad [x+y]^2 = x^2 + y^2 + 2x|y|; \tag{2}$$

$$\forall x \quad \left[\sqrt{[x+y]^2} = x + y\right]; \tag{3}$$

$$\exists y \quad [\varphi^2(x, y) = x], \tag{4}$$

ისინი მხოლოდ y ცვლადის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულ წინადადებებს წარმოადგენენ, გარდა უკანასკნელისა, რომელიც φ^2 და x ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული წინადადებაა. ამასთან, (1) ფორმულა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც y და z ასოებზე დამოკიდებული წინადადება. ადვილი დასანახია, რომ (1) ფორმულის მნიშვნელობა $y = 5$-სათვის არის t (ე.ი. $y = 5$-სათვის (1) წინადადება არის ჭეშმარიტი), $y = -5$-სათვის კი (1) ფორმულის მნიშვნელობა არის f. ასევე, ცხადია, რომ (2) ფორმულის მნიშვნელობა y-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის არის t, y-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის კი არის f. (3) ფორ-

მულის მნიშვნელობა y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის არის f. მართლაც. y-ის მოცემულ ნებისმიერ ფიქსირებულ y_0 მნიშვნელობისათვის $\forall x\left[\sqrt{[x+y_0]^2} = x+y_0\right]$ მცდარია, რამდენადაც თუ შევარჩევთ x-ის ისეთ x_0 მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $x_0 + y_0 < 0$ (ასეთი x_0-ის არსებობა ცხადია), მაშინ $x = x_0$ მნიშვნელობისათვის $\sqrt{[x+y_0]^2} = x + y_0$ ფორმულა მცდარ წინადადებას წარმოადგენს.

განვიხილოთ ახლა, $\tau\Delta$, შესაბამისად $\iota\Delta$, კვანტორები. როგორც ვიცით, τ-ს ეწოდება **განუსაზღვრელი დესკრიპციის** (აღწერის) **ოპერატორული ნიშანი**, ι-ს კი ეწოდება **განსაზღვრული დესკრიპციის ოპერატორული ნიშანი**. ამის შესაბამისად, $\tau\Delta$-ს ეწოდება **განუსაზღვრელი დესკრიპციის ოპერატორი** (**კვანტორი**), Δ **ოპერატორული ასოთი**, $\iota\Delta$-ს კი ეწოდება **განსაზღვრული დესკრიპციის ოპერატორი** (**კვანტორი**)·Δ **ოპერატორული ასოთი**. ხშირად ι სიმბოლოს ნაცვლად იყენებენ „℩“ სიმბოლოს (შებრუნებულ იოტას). აქვე შევნიშნოთ, რომ τ ოპერატორულ ნიშანს უწოდებენ **ჰილბერტის ოპერატორს** (იგი ჰილბერტმა შემოიტანა და მას იგი აღნიშნავდა ε-ით). $\tau\Delta$ **A** და $\iota\Delta$ **A** ტერმები შესაბამისად იკითხება ფრაზებით: „საგანი Δ ისეთი, რომ **A**“ და „ ერთადერთი საგანი Δ ისეთი, რომ **A**“.

ვიგულისხმოთ ისევ, რომ $\mathbf{A}, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ სიმბოლოებისათვის სრულდება ზემოთ აღნიშნული პირობები.

$\tau\Delta$ და $\iota\Delta$ კვანტორების როლი გამარტივებულად შეიძლება ასე განისაზღვროს. განსაზღვრით, $\tau\Lambda$ **A**, შესაბამისად $\iota\Delta$ **A**, არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს (Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ) ნებისმიერ, შესაბამისად ერთადერთ, ისეთ Δ საგანს, რომლისთვისაც **A** წინადადება ჭეშმარიტია; თუ ასეთი საგანი არ არსებობს, მაშინ $\tau\Delta$ **A**, შესაბამისად $\iota\Delta$ **A**, აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს.

მოტანილი განსაზღვრის დაზუსტების მიზნით შევნიშნოთ შემდეგი. იმისათვის რომ შესაძლო იყოს ვილაპარაკოთ Δ ასოს ამა თუ იმ მნიშვნელობისათვის **A** წინადადებაზე, აუცილებელი და საკმარისია, წინასწარ

დაფიქსირდეს A ფორმის Δ-გან განსხვავებული თავისუფალი ასოების მნიშვნელობები. ამიტომ ცხადია, რომ $\tau\Delta A$, შესაბამისად $\iota\Delta A$, ტერმების მნიშვნელობები დამოკიდებული იქნება A ფორმულის Δ-გან განსხვავებული თავისუფალი ასოების მნიშვნელობათა სისტემაზე; Δ ასოს მნიშვნელობაზე აღნიშნული ტერმების მნიშვნელობები დამოკიდებული არ იქნება და, მაშასადამე, $\tau\Delta A$ და $\iota\Delta A$ ტერმებისათვის Δ მხოლოდ დაბმულ ასოს წარმოადგენს. ამასთან, Δ-გან განსხვავებული ასოს შემოსვლა $\tau\Delta A$, შესაბამისად $\iota\Delta A$, ტერმში წარმოადგენს ასოს თავისუფალ შემოსვლას განხილული ტერმის A ნაწილში. მაშასადამე, $\tau\Delta A$, შესაბამისად $\iota\Delta A$, ტერმი **შეგვიძლია განვიხილოთ** როგორც A ფორმულის Δ ასოსგან განსხვავებული თავისუფალი ასოების (ან, არც იგივეა, $\tau\Delta A$, შესაბამისად $\iota\Delta A$, ფორმულის თავისუფალი ასოების) მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული საგანი.

მოტანილი გამარტივებული განსაზღვრის ზუსტი ფორმაა შემდეგი. $\tau\Delta A$, შესაბამისად $\iota\Delta A$, არის ტერმი, რომლის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის არის Δ ასოს ნებისმიერი, შესაბამისად ერთადერთი, ისეთი a_0 მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: A ფორმულის მნიშვნელობა $\Delta,X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $a_0,a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის არის t; თუ Δ ასოს ასეთი a_0 მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ განხილული ტერმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის არის Δ ასოს ნებისმიერი Δ_0 მნიშვნელობა.

განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმებთ შემდეგს: მოცემული თეორიის ნებისმიერ B ფორმულას, ნებისმიერ b საგნობრივ კვანტორულ ასოს და B ფორმულაში მყოფი b-გან განსხვავებული ყველა თავისუფალი ასოს მნიშვნელობათა ყოველ დალაგებულ სისტემას ეთანადება b ასოს ყველა ისეთი მნიშვნელობების მეტაერთობლიობა, რომლისთვისაც B ფორმულა ჭეშმარიტია (როცა b-გან განსხვავებული B ფორმულის თავისუფალი ასოების მნიშვნელობები ხსენებულ მნიშვნელობათა სისტემაში მოცემული მნიშვნელობებით არის დაფიქსირებული); თითოეულ ასეთ არაცარიელ მეტაერთობლიობაში (შემდეგში ვნახავთ, რომ ეს მეტაერთობლიობები მეტასიმრავლეებია) და, აგრეთვე, b ასოს მნიშვნელობათა

არეში (ე.ი. K არეში) მონიშნულია თითო საგანი; ამასთან, შესრულებულია შემდეგი **a** პირობა: იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული თეორია სიმრავლეთა თეორიაა და ხსენებული მეტაერთობლიობა (მეტასიმრავლე) სიმრავლეს შეიცავს ელემენტად, მაშინ ამ მეტაერთობლიობაში მონიშნული საგანი სიმრავლეა, თანაც, როცა აღნიშნული მეტაერთობლიობა ცარიელ სიმრავლეს შეიცავს ელემენტად, მაშინ ამ მეტაერთობლიობაში მონიშნული საგანი ცარიელი სიმრავლეა, იმ შემთხვევაში კი, როცა საგანთა არე რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა და ხსენებული მეტაერთობლიობა ნულს შეიცავს ელემენტად, მაშინ ამ ერთობლიობაში მონიშნული საგანი ნულია. ამასთან, $\tau\Delta\, \mathbf{A}$ ტერმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა α სისტემისათვის არის $\mathbf{A}$ ფორმულის, Δ ასოს და α სისტემის შესაბამის $\mathbf{A}$ მეტაერთობლიობაში მონიშნული საგანი ან K არეში მონიშნული საგანი იმისდა მიხედვით $\mathbf{A}$ მეტაერთობლიობა არაა ცარიელი თუ ცარიელია (არ გამოირიცხება შემთხვევა, როცა α სისტემა ცარიელია); $\iota\Delta\, \mathbf{A}$ ტერმის მნიშვნელობა კი იმავე α სისტემისათვის არის $\mathbf{A}$ მეტაერთობლიობის ერთადერთი საგანი ან K არეში მონიშნული საგანი იმისდა მიხედვით $\mathbf{A}$ მეტაერთობლიობა ერთადერთი საგნისაგან შედგება თუ არა (მაშასადამე, $\iota\Delta\, \mathbf{A}$ სახის ტერმების მნიშვნელობების განსაზღვრა მოითხოვს მხოლოდ ერთი საგნის მონიშვნას K არეში). უკანასკნელი წინადადება გამარტივებულად შეიძლება ასე გამოითქვას. $\tau\Delta$ აღნიშნავს Δ ასოს ისეთ მნიშვნელობათა არაცარიელ მეტაერთობლიობაში მონიშნულ საგანს, რომლებისთვისაც $\mathbf{A}$ წინადადება ჭეშმარიტია; თუ ასეთი მეტაერთობლიობა ცარიელია, მაშინ $\tau\Delta\, \mathbf{A}$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში მონიშნულ საგანს; $\iota\Delta\, \mathbf{A}$ აღნიშნავს Δ ასოს ისეთ ერთადერთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ წინადადება ჭეშმარიტია; თუ Δ ასოს ასეთი ერთადერთი მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ $\iota\Delta\, \mathbf{A}$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა K არეში მონიშნულ საგანს.

მეტაერთობლიობაში მონიშნული საგნების მოტანილი განსაზღვრიდან ბუნებრივად ინდუცირდება შემდეგი განსაზღვრა. $\mathbf{A}$ ფორმულის, Δ საგნობრივი კვანტორული ასოს და $Y_1,\ldots,Y_m$ ასოების მნიშვნელობათა $b_1,\ldots,b_m$ სისტემის შესაბამისს მეტაერთობლიობად უნდა მივიჩნიოთ $\mathbf{A}$ ფორმულის, Δ საგნობრივი კვანტორული ასოს და $Y_{i_1},\ldots,Y_{i_k}, Z_1,\ldots,Z_l$

ასოების მნიშვნელობათა $b_{i_1},\dots,b_{i_k}, c_1,\dots,c_r$ სისტემის შესაბამისი B მეტაერთობლიობა, სადაც $Y_{i_1},\dots,Y_{i_k}$ მიიღება $Y_1,\dots,Y_m$ მიმდევრობიდან განმეორებითი წევრებისა და ისეთი წევრების ამოგდებით, რომლებსაც A ფორმაში თავისუფალი შემოსვლა არ აქვთ ან ემთხვევა Δ ასოს. $Z_1,\dots,Z_r$ კი A ფორმის ყველა ერთმანეთისაგან და $\Delta, Y_1,\dots,Y_m$ ასოებისაგან განსხვავებული თავისუფალი ასოების (კონსტანტების) მიმდევრობაა, $c_1,\dots,c_r$ კი $Z_1,\dots,Z_r$ კონსტანტების მნიშვნელობებია. ამასთან, ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად, B მეტაერთობლიობით და B-ში და K-ში მონიშნული საგნებით უნდა განისაზღვროს საგანი, რომელიც აღინიშნება ტერმინით „ τΔ A, შესაბამისად ιΔ A, ტერმის მნიშვნელობა $Y_1,\dots,Y_m$ ასოების მნიშვნელობათა $b_1,\dots,b_m$ სისტემისათვის" (ცხადია, $Y_1,\dots,Y_m$ ასოების ისეთი ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლის წევრთა შორის იმყოფება τΔ A ტერმის (ან, რაც იგივეა, ιΔ A ტერმის) ყველა თავისუფალი ცვლადი). ცხადია, ეს უკანასკნელი მნიშვნელობა იგივეა, რაც τΔ A, შესაბამისად ιΔ A, ტერმის მნიშვნელობა $Y_{i_1},\dots,Y_{i_k}$ ასოების მნიშნელობათა $b_{i_1},\dots,b_{i_k}$ სისტემისათვის. ასევე ცხადია, რომ აღნიშნული მნიშვნელობა იგივეა, რაც τΔ A, შესაბამისად ιΔ A, ტერმის მნიშვნელობა $Y_{j_1},\dots,Y_{j_p}$ ასოების მნიშვნელობათა $b_{j_1},\dots,b_{j_p}$ სისტემისათვის, სადაც $Y_{j_1},\dots,Y_{j_p}$ მიიღება $Y_{i_1},\dots,Y_{i_k}$ მიმდევრობიდან საკუთრივი კონსტანტების ამოგდებით.

ცხადია, თუ $X_1,\dots,X_n$ ასოების ნებისმიერი ისეთი მიმდევრობაა, რომელიც ერთ მაინც საკუთრივ კონსტანტას შეიცავს, მაშინ $X_1,\dots,X_n$ ასოებიდან ზოგიერთი (ერთი მაინც) საკუთრივი კონსტანტის არასაკუთრივ კონსტანტად მიჩნევით ფართოვდება მოცულობა ცნებისა, რომელიც აღინიშნება ტერმინით: „ $X_1,\dots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემა".

3.1.3 ზოგადი შემთხვევა. ზოგად შემთხვევაში, როცა ფორმისათვის დაიშვება განუსაზღვრელი მნიშვნელობებიც (ე. ი. როცა განიხილება სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორია) მოტანილი განსაზღვრებები უნდა განზოგადდეს გაფართოებული არეებისათვის, ე. წ. ჭეშმარიტული განუსაზღვრელი მნიშვნელობის მცდართან ნაწილობრივად გაიგივების პრინციპის საფუძველზე. ეს პრინციპი გულისხმობს იმას, რომ ოპე-

რატორის მნიშვნელობის გამოანგარიშებისას განუსაზღვრელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უნდა მივიჩნიოთ მცდარად. ამ პრინციპის საფუძველზე მიღებული განზოგადებული ოპერატორებისათვის შევინარჩუნებთ აღნიშვნებს, სახელწოდებებსა და ფორმის წასაკითხად გამოყენებულ ფრაზებს (სხვა სახის განზოგადოებებისათვის იძულებული ვიქნებით ვისარგებლოთ შეცვლილი ან, უკიდურეს შემთხვევაში, მოდიფიცირებული აღნიშვნებით, სახელწოდებებითა და ფრაზებით). ზემოთ მოტანილი განსაზღვრებები ზოგად შემთხვევაში, როცა განზოგადებას ვაწარმოებთ ხსენებული პრინციპის საფუძველზე და, მაშასადამე, აღნიშვნებს, სახელწოდებებსა და წასაკითხად გამოყენებულ ფრაზებს ვინარჩუნებთ, შემდეგ სახეს იღებენ (მოგვყავს განსაზღვრებათა მხოლოდ ის ნაწილები, რომლებიც ეხებიან ფორმის მნიშვნელობებს — მხედველობაშია ფორმის მნიშვნელობები მოცემული თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში.

1. ***A* და *B* წინადადებათა (ფორმულათა) კონიუნქცია** $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა **A**-ც ჭეშმარიტია და **B**-ც. სხვა შემთხვევაში იგი მცდარია.

2. ***A* და *B* წინადადებათა დიზუნქცია** $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც, ჭეშმარიტია, როცა **A** და **B** წინადადებებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია. სხვა შემთხვევაში იგი მცდარია.

3. ***A* წინადადების უარყოფა** $\neg \mathbf{A}$ მცდარია, როცა **A** ჭეშმარიტია. დანარჩენ შემთხვევაში იგი ჭეშმარიტია.

4. ***A* და *B* წინადადებათა გამომდინარეობა (იმპლიკაცია)** $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც მცდარია, როცა **A** არის ჭეშმარიტი და **B** არ არის ჭეშმარიტი (2 შემთხვევა 9-დან). დანარჩენ შემთხვევაში იგი ჭეშმარიტია.

5. ***A* და *B* წინადადებათა ეკვივალენტობა (ტოლძალოვნება)** $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა **A** და **B** ორივე ჭეშმარიტია ან როცა არც ერთი მათგანი არ არის ჭეშმარიტი (5 შემთხვევა), სხვა შემთხვევაში იგი მცდარია.

6. $\forall \Delta\, \mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists \Delta\, \mathbf{A}$, წინადადება არის ჭეშმარიტი, როცა Δ ასოს ყოველი, შესაბამისად ერთი მაინც, მნიშვნელობისათვის **A** წინადადება არის ჭეშმარიტი. სხვა შემთხვევებში მცდარია.

7. $\tau \Delta\, \mathbf{A}$ არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს (Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ) ნებისმიერ ისეთ Δ_0 საგანს, რომლისთვისაც **A**

ჭეშმარიტია; თუ ასეთი საგანი არ არსებობს, მაშინ $\tau\Delta$ A აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\tau\Delta$ A აღნიშნავს სათანადო მეტაერთობლიობაში „მონიშნულ საგანს".

8. $\iota\Delta$ A არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს (Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ) ისეთ ერთადერთ საგანს, რომლისთვისაც A ჭეშმარიტია; თუ ასეთი (ერთადერთი) საგანი არ არსებობს, მაშინ $\iota\Delta$ A აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში (ე. ი. K არეში) „მონიშნულ საგანს".

3.1.4 დამატებითი ოპერატორები და ოპერატორული ნიშნები. ახლა განვსაზღვროთ (S_1 თეორიის) დამატებითი

$$\cdot\wedge, \quad \cdot\vee, \quad \cdot\neg, \quad \cdot\rightarrow, \quad \cdot\leftrightarrow, \quad \approx, \quad \equiv \tag{1}$$

ოპერატორების შინაარსი და $\cdot\forall, \cdot\exists$ და $\cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნებისა და შესაბამისი კვანტორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას. ზემოთ $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ ოპერატორთა შინაარსისა და ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას $\forall, \exists, \tau, \iota$ ოპერატორული ნიშნების განსაზღვრებები გავავრცელეთ გაფართოებულ არეებში აღნიშვნებისა და ტერმინოლოგიის შენარჩუნებით. იმავე სიმბოლოების შინაარსისა და სათანადო როლთა გაფართოებულ არეებში გავრცელების შედეგად მიიღება (1) სიმბოლოების შინაარსი (გარდა $\equiv$ სიმბოლოს შინაარსისა, რომელიც $=$ სიმბოლოს შინაარსის განსაზღვრის გაფართოებულ არეში გავრცელების შედეგად მიიღება) და $\cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნების როლები.

$\cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\neg, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow$ მარტივ ოპერატორებთან და $\cdot\forall\Delta, \cdot\exists\Delta, \cdot\tau\Delta$ სახის კვანტორებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგია მიიღება $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \cdot\forall\Delta, \cdot\exists\Delta, \cdot\tau\Delta$ ოპერატორებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგიიდან დამაზუსტებელი სიტყვის „ზუსტის" გამოყენებით. სახელდობრ, აღნიშნული მარტივი ოპერატორების შინაარსი, ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას და შესაბამისი ტერმინოლოგია შემდეგნაირად განისაზღვრება. (ამ განსაზღვრებებს საფუძვლად უდევს ე. წ. განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპი (იხ. 3.1.9)).

1. *A* და *B* **წინადადებათა (ფორმულათა) ზუსტი კონიუნქცია** აღინიშნება [A·∧B]-ით (იკითხება: „A და B ზუსტი აზრით") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა A-ც ჭეშმარიტია და B-ც ჭეშმარიტია; მცდარია, როცა A და B წინადადებებიდან ერთი მაინც მცდარია; სხვა შემთხვევაში იგი არის განუსაზღვრელი. ·∧ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „ზუსტი და".

2. *A* და *B* **წინადადებათა ზუსტი დიზიუნქცია** აღინიშნება [A·∨B]-ით (იკითხება: „A ან B ზუსტი აზრით") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც მცდარია, როცა A-ც მცდარია და B-ც მცდარია; ჭეშმარიტია, როცა A და B წინადადებებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია; სხვა შემთხვევაში იგი არის განუსაზღვრელი. ·∨ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „ზუსტი ან".

3. *A* **წინადადების ზუსტი უარყოფა** აღინიშნება [·¬A]-ით და, განსაზღვრით, არის მცდარი, განუსაზღვრელი და ჭეშმარიტი, როცა A წინადადება შესაბამისად არის ჭეშმარიტი, განუსაზღვრელი და მცდარი. ·¬ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „ზუსტი არა".

4. *A* და *B* **წინადადებათა ზუსტი გამომდინარეობა (ზუსტი იმპლიკაცია)** აღინიშნება [A·→B]-ით (იკითხება: „A-დან ზუსტად გამომდინარეობს B" ან „A ზუსტად იმპლიცირებს B-ს") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც მცდარია, როცა A ჭეშმარიტია და B მცდარი; ჭეშმარიტია შემდეგ შემთხვევაში: 1) A მცდარია, 2) B ჭეშმარიტია (სულ ხუთი შემთხვევა); დანარჩენ სამ შემთხვევაში იგი არის განუსაზღვრელი. ·→ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „ზუსტი გამომდინარეობა" ანუ „ზუსტი იმპლიკაცია".

5. *A* და *B* **წინადადებათა ზუსტი ეკვივალენტობა (ზუსტი ტოლძალოვნება)** აღინიშნება [A·↔B]-ით (იკითხება: „A ზუსტად ეკვივალენტურია B-სი" ანუ „A ზუსტად ტოლძალოვანია B-სი") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა A და B წინადადებებიდან ორივე ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარია; მცდარია, როცა A და B წინადადებებიდან ერთ-ერთი ჭეშმარიტია მეორე კი — მცდარი; სხვა შემთხვევაში იგი არის განუსაზღვრელი. ·↔ პროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა „ზუსტი ეკვივალენტობა" ანუ „ზუსტი ტოლძალოვნება"

6. $\cdot\forall\Delta\,\mathbf{A}$, შესაბამისად $\cdot\exists\Delta\,\mathbf{A}$, წინადადება ჭეშმარიტია, როცა Δ ასოს ყოველი, შესაბამისად ერთი მაინც, მნიშვნელობისათვის **A** წინადადება არის ჭეშმარიტი; მცდარია, როცა Δ ასოს ერთი მაინც, შესაბამისად ყოველი, მნიშვნელობისათვის **A** წინადადება არის მცდარი. სხვა შემთხვევაში იგი არის განუსაზღვრელი. $\cdot\forall\Delta$ და $\cdot\exists\Delta$ კვანტორების სახელწოდებაა „ზუსტი ზოგადობის კვანტორი" და „ზუსტი არსებობის კვანტორი". $\cdot\forall\Delta\,\mathbf{A}$ და $\cdot\exists\Delta\,\mathbf{A}$ ფორმულები იკითხება ფრაზებით: „ყოველი Δ-თვის **A** ზუსტი აზრით", „არსებობს ისეთი Δ, რომ **A** ზუსტი აზრით".

ცხადია, $\cdot\forall\Delta\,\mathbf{A}$, შესაბამისად $\cdot\exists\Delta\,\mathbf{A}$, წინადადება განუსაზღვრელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Δ ასოს ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც **A** წინადადება განუსაზღვრელია და, ამასთანავე, Δ ასოს თითოეული მნიშვნელობისათვის **A** წინადადება არის ჭეშმარიტი ან განუსაზღვრელი, შესაბამისად მცდარი ან განუსაზღვრელი.

7. $\cdot\text{℩}\Delta\,\mathbf{A}$ (იკითხება: „ისეთი Δ, რომ **A** ზუსტი აზრით") ტერმია, რომელიც აღნიშნავს (Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ) ნებისმიერ ისეთ Δ საგანს, რომლისთვისაც **A** არის ჭეშმარიტი; თუ ასეთი საგანი არ არსებობს, მაშინ $\cdot\text{℩}\Delta\,\mathbf{A}$ აღნიშნავს ნებისმიერ ისეთ Δ საგანს, რომლისთვისაც **A** არის განუსაზღვრელი; თუ ასეთი საგანიც არ არსებობს, მაშინ $\cdot\text{℩}\Delta\,\mathbf{A}$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან (ე. ი. **K**-დან) აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\cdot\text{℩}\Delta\,\mathbf{A}$ აღნიშნავს სათანადო მეტაერთობლიობაში (მეტასიმრავლეში) „მონიშნულ საგანს".

დასასრულ, განვსაზღვროთ $\approx$ და $\equiv$ ოპერატორთა მიკავშირებული ფუნქციები. ამ ოპერატორთა მიკავშირებული ფუნქციები $\leftrightarrow$ და $=$ ოპერატორების მიკავშირებულ ფუნქციებს ემთხვევა ძირითად (გაუფართოებელ) არეში და, მაშასადამე, ამ უკანასკნელი ოპერატორების მიკავშირებული ფუნქციების გაუფართოებელი არეებიდან გაფართოებულ არეებში გავრცელების შედეგად მიიღებიან. პრინციპი, რომელიც ასეთ გავრცელებას უდევს საფუძვლად, შემდეგნაირად შეიძლება გამოითქვას: **განუსაზღვრელი მნიშვნელობა მივიჩნიოთ შესაბამისი ტიპის განსაზღვრულ მნიშვნელობად**. მას ვუწოდოთ **განუსაზღვრელი მნიშვნელობის განსაზღვრულთან გაიგივების პრინციპი**.

A და B წინადადებათა ტოლფასობა აღინიშნება $[\mathbf{A}\approx\mathbf{B}]$-ით (იკითხება: „**A** ტოლფასია **B**-სი") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რო-

მელიც ჭეშმარიტია, როცა **A** და **B** ორივე ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარია ან ორივე განუსაზღვრელია, დანარჩენ 6 შემთხვევაში იგი არის მცდარი. ≈ პროპოზიციულ კავშირს ეწოდება **ტოლფასობა**.

სავსებით ანალოგიურად განისაზღვრება ≡ ოპერატორის (პრედიკატული სიმბოლოს) შინაარსი. სახელდობრ, T_1 და T_2 **ტერმების იგივურობა** აღინიშნება $[T_1 \equiv T_2]$-ით (იკითხება: „T_1 იგივურია T_2-ის") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა ორივე T_1 და T_2 ტერმს ერთი და იგივე განსაზღვრული მნიშვნელობა აქვს ან ორივე ტერმის მნიშვნელობა განუსაზღვრელია, დანარჩენ შემთხვევაში იგი არის მცდარი. ≡ პრედიკატულ სიმბოლოს ეწოდება **იგივურობა**.

ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში იგივურად ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლფასობები (სადაც **A** და **B** ნებისმიერი ფორმულებია):

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \approx [\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}];$$

$$\mathbf{A} \cdot\!\leftrightarrow \mathbf{B} \approx [\mathbf{A} \cdot\!\rightarrow \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \cdot\!\rightarrow \mathbf{A}];$$

$$[\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}] \approx \neg\, \mathbf{A} \vee \mathbf{B};$$

$$[\mathbf{A} \cdot\!\rightarrow \mathbf{B}] \approx \cdot\!\neg\, \mathbf{A} \cdot\!\vee \mathbf{B};$$

$$[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \approx \overline{\overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}}};$$

$$[\mathbf{A} \cdot\!\wedge \mathbf{B}] \approx \overline{\overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}}};$$

(იგულისხმება, რომ $\neg\,\mathbf{A}$ და $\cdot\!\neg\,\mathbf{A}$ შესაბამისად აღინიშნებიან $\overline{\mathbf{A}}$ და $\overline{\mathbf{A}}$ გამოსახულებებით).

შედეგი (ეკვივალენტობის, შესაბამისად ზუსტი ეკვივალენტობის ძირითადი თვისება). $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ ეკვივალენტობა, შესაბამისად $\mathbf{A} \cdot\!\leftrightarrow \mathbf{B}$ ზუსტი ეკვივალენტობა, ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე $\mathbf{A} \cdot\!\rightarrow \mathbf{B}$ და $\mathbf{B} \cdot\!\rightarrow \mathbf{A}$ გამომდინარეობა, ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში.

ქვემოთ დაზუსტდება მეტასიმრავლისა და მისი განზოგადების მეტაკლასის ცნებები. მანამდე კი ამ ცნებების ნაცვლად ხშირად გამოვიყენებთ მეტაერთობლიობის ცნებას, რომელიც მეტაკლასის ცნების განზოგადება ისევე, როგორც ერთობლიობის ცნება არის კლასის ცნების განზოგადებაა ისევე, როგორც ერთობლიობის ცნება არის კლასის ცნების გან-

ზოგადება (მეტაერთობლიობა ემთხვევა მისი შემადგენელი მეტასაგნების მეტაკლასს, როცა ასეთი მეტაკლასი არსებობს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მეტაერთობლიობა მეტასაგანი არაა — იგი არის საკუთრივი ერთობლიობა, რამდენადაც თუ მოცემული თეორია სიმრავლეთა ინტუიციური თეორიაა, მაშინ მეტასიმრავლის ცნება კლასის ცნების განზოგადებაა, წინააღმდეგ შემთხვევაში ნებისმიერი ერთობლიობა საკუთრივია). მეტასიმრავლის, მეტაკლასის, მეტაერთობლიობისა და ძირითადი მათემატიკური ენისა და ძირითადი მათემატიკური თეორიის ინტერპრეტაციის ცნებები პარალელურად შემოიტანებიან.

მიუხედავად იმისა, რომ მეტაკლასისა და მეტასიმრავლის ცნებები ჯერჯერობით დაზუსტებული არაა, მეტაერთობლიობის ცნება დაზუსტებულად შეგვიძლია მივიჩნიოთ, რამდენადაც შემდგომი განხილვის დროს არსებითი მნიშვნელობა არ ექნება იმის ცოდნას განხილული მეტაერთობლიობა მეტაკლასია (ან მეტასიმრავლეა) თუ არა. 1.3.5-ში მოტანილი ზოგადი შენიშვნებიდან გამომდინარეობს, რომ განსაზღვრებადი ინტერპრეტაციის K უნივერსუმი და $K^{\bullet}$ გაფართოებული არე მეტასიმრავლეებია (უფრო ზუსტად: არსებობს ისეთი მეტასიმრავლე, რომლის შემადგენელი საგნებია მხოლოდ და მხოლოდ K-დან, შესაბამისად $K^{\bullet}$-დან, აღებული საგნები). ადვილად დამტკიცდება, რომ

$$\{\langle a,a\rangle : a \in K\} \text{ და } \{\langle a,a\rangle : a \in K^{\bullet}\}$$

მეტასიმრავლეებია (მაგალითად, პირველი მათგანი განისაზღვრება თვისებით: $\exists y\,[y \in K \wedge X = \langle y, y\rangle]$).

$=$ და $\equiv$ პრედიკატული სიმბოლოების მიკავშირებული პრედიკატები შესაბამისად არიან $\{\langle a,a\rangle : a \in K\}$ და $\{\langle a,a\rangle : a \in K^{\bullet}\}$ მეტასიმრავლეები ($K^{\bullet} = K \cup \{\perp\}$). იგულისხმება, რომ ზოგად შემთხვევაში, როცა თეორიის ფორმებისათვის დაიშვება განუზღვრელი მნიშვნელობები, ამ მიკავშირებული პრედიკატებიდან თითოეულის განსაზღვრის არეა $K^{\bullet 2}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი პირველი მათგანის განსაზღვრის არეა K^2 ($\dot{K}^2$ მხოლოდ ზოგად შემთხვევაში შეიძლება იყოს თეორიის ალფაბეტის სიმბოლო). აქვე შევნიშნოთ, რომ პროპოზიციული კავშირების ზემოთ ცხრილებით მოცემული მიკავშირებული ფუნქციები მეტასიმბოლოებია, კერძოდ, ისინი მეტაფუნქციებია. იგივე ითქმის ზოგად შემთხვევაში პროპოზიციული კავშირების მიკავშირებულ ფუნქციებზე, რომლებიც როგორც ადვილი დასანახია, განისაზღვრებიან შემდეგი ცხრილებით:

	$f_{\wedge}$	$f_{\vee}$	$f_{\rightarrow}$	$f_{\leftrightarrow}$	$f_{\cdot\wedge}$	$f_{\cdot\vee}$	$f_{\cdot\rightarrow}$	$f_{\cdot\leftrightarrow}$	$f_{\bullet}$
t t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t f	f	t	f	f	f	t	f	f	f
t †	f	t	f	f	†	t	†	†	f
f t	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f f	f	f	t	t	f	f	t	t	t
f †	f	f	t	t	f	†	t	†	f
† t	f	t	t	f	†	t	t	†	f
† f	f	f	t	t	f	†	†	†	f
† †	f	f	t	t	†	†	†	†	t

	$f_{\neg}$	$f_{\cdot\neg}$
t	f	f
f	t	t
†	t	†

ისევე როგორც ზემოთ, აქაც, თითოეული ორადგილიანი მიკავშირებული ფუნქცია შესაძლებელია მოცემულ იქნეს შემოკლებული ცხრილით.

$\cdot\wedge$, $\cdot\vee$, $\cdot\rightarrow$, $\cdot\leftrightarrow$ ზუსტი პროპოზიციული კავშირების მიკავშირებული ფუნქციების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა შემოკლებული ცხრილებია:

$f_{\cdot\wedge}$	t	f	†
t	t	f	†
f	f	f	f
†	†	f	†

$f_{\cdot\vee}$	t	f	†
t	t	t	t
f	t	f	†
†	t	†	†

$f_{\cdot\rightarrow}$	t	f	†
t	t	f	†
f	t	t	t
†	t	†	†

$f_{\cdot\leftrightarrow}$	t	f	†
t	t	f	†
f	f	t	†
†	†	†	†

ასეთი შემოკლებული ცხრილების განხილვისას ვისარგებლებთ შემდეგი სახის ტერმინებით (რომელთა შინაარსი ბუნებრივად უნდა იქნას გაგებული): **პირველი არგუმენტის სვეტი**, **მეორე არგუმენტის სტრიქონი**, **სრული t-სტრიქონი** ანუ **სრული პირველი სტრი-**

ქონი (t არგუმენტის ჩათვლით), **f-სტრიქონი** (f არგუმენტის ჩაუთვლელად). **ცხრილის ძირითადი ნაწილი** (ნაწილი, რომელიც მიიღება სრული მესამე სვეტისა და სრული მესამე სტრიქონის ამოგდებით). ამოწერილი ცხრილების ძირითადი ნაწილები წარმოადგენენ $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\leftrightarrow}$ მიკავშირებული ფუნქციების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა გამარტივებულ ცხრილებს (გაუფართოებელ არეში).

ს. კლინი ([11], §64) იხილავს სამმნიშვნელობიან ლოგიკას, სადაც ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებად მიჩნეულია ჭეშმარიტი, მცდარი და განუსაზღვრელობა. ამასთან, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ოპერატორების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილებად იღებს $f_{.\neg}$, $f_{.\wedge}$, $f_{.\vee}$, $f_{.\rightarrow}$, $f_{.\leftrightarrow}$ ფუნქციების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილებს. ამ ცხრილებს იგი **ძლიერ ცხრილებს** უწოდებს. განიხილავს ე. წ. **სუსტ ცხრილებსაც**, რომლებსაც საფუძვლად უდევს პრინციპი: პროპოზიციული კავშირის (მიკავშირებული ფუნქციის) მნიშვნელობა უნდა იყოს განუსაზღვრელობა, როცა ერთი არგუმენტი მაინც განუსაზღვრელობაა. ასეთი ცხრილები განსხვავდებიან შესაბამისი ძლიერი ცხრილებისაგან მხოლოდ $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ოპერატორების შემთხვევაში (ძლიერი ცხრილიდან შესაბამისი სუსტი ცხრილის მისაღებად საკმარისია მესამე სტრიქონისა და მესამე სვეტის ყველა სიმბოლო შეიცვალოს † სიმბოლოთი). უკანასკნელი პრინციპი კერძო შემთხვევაა ქვემოთ მოტანილი ლოგიკური ოპერატორებისათვის განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ტრივიალური პრინციპისა. ამ უკანასკნელი პრინციპის გამოყენებით მიღებული პროპოზიციული კავშირებისა და ზოგადობის და არსებობის კვანტორების გაგრძელებები შესაბამისად აღინიშნებიან: $:\wedge$, $:\vee$, $:\rightarrow$, $:\forall$, $:\exists$ სიმბოლოებით და მათი სახელწოდებების დამაზუსტებელ ფრაზად გამოვიყენებთ „ტრივიალურს" (ტრივიალური კონიუნქცია, ტრივიალური დიზიუნქცია და ა. შ.). აქვე შევნიშნოთ, $:\forall x\, \mathbf{A}(x)$ და $:\exists x\, \mathbf{A}(x)$ ფორმულების მნიშვნელობა არის განუსაზღვრელობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x-ის ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც $\mathbf{A}(x)$ განუსაზღვრელობაა.

აღნიშვნებისა და მათ წასაკითხად გამოყენებული ფრაზების შენარჩუნება პროპოზიციული კავშირების გაფართოებულ არეზე ისეთი გავრცელებებისათვის, რომლებსაც საფუძვლად უდევს განუსაზღვრელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის მცდართან ნაწილობრივად გაიგივების პრინციპი, განპირობებულია შემდეგი მოსაზრებებით.

1. აღნიშნული პრინციპის გამოყენება განტოლებათა თეორიაში ტრადიციულია: განტოლება მცდარად ითვლება უცნობების მნიშვნელობათა ისეთ სისტემისათვის, რომლისთვისაც განტოლებას (ტოლობას) აზრი არ აქვს (რომლისთვისაც განტოლება განუსაზღვრელია); A განტოლებიდან გამომდინარეობს B განტოლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \rightarrow B$ ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტია (გაფართოებულ არეში). A და B განტოლებები ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \leftrightarrow B$ იგივურად ჭეშმარიტია (უკანასკნელი ორი წინადადების ანალოგები ზუსტი გამომდინარეობისა და ზუსტი ეკვივალენტობის შემთხვევაში არაა სამართლიანი).

2. ჩანაწერების წასაკითხად გამოყენებული ფრაზების შინაარსი უფრო ბუნებრივად გამოხატავს ჩანაწერის შინაარს ვიდრე ს. კლინის განსაზღვრის შემთხვევაში.

უკანასკნელი მოსაზრების დასადგენად შევნიშნოთ შემდეგი. ზოგად შემთხვევაშიც ნაცვლად ფრაზისა „A-დან გამომდინარეობს B" საესებით ბუნებრივი და მიზანშეწონილია შემდეგი ფრაზების გამოყენება: „თუ A, მაშინ B". „A პირობის ჭეშმარიტობა არის საკმარისი იმისათვის, რომ B პირობა იყოს ჭეშმარიტი", „B წინადადების ჭეშმარიტობა აუცილებელია იმისათვის, რომ A წინადადება იყოს ჭეშმარიტი". ამ ფრაზების ჭეშმარიტობა, მათი შინაარსის ბუნებრივად გაგების შემთხვევაში, ტოლფასია $A \rightarrow B$ წინადადების (ფორმულის) იგივურად ჭეშმარიტობისა. მაგალითად, წინადადება „თუ A, მაშინ B" ჭეშმარიტად უნდა ჩაითვალოს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B ჭეშმარიტია ან როცა A არაა ჭეშმარიტი. ამასვე მოითხოვს $A \rightarrow B$ წინადადების (ფორმულის) იგივურად ჭეშმარიტობა (ზოგად შემთხვევაშიც), როცა საფუძვლად მიჩნეულია კონტექსტში მოცემული განსაზღვრა. ასევე, თუ A ფორმულის ჭეშმარიტობა საკმარისია B ფორმულის ჭეშმარიტობისათვის, მაშინ $A \rightarrow B$ იგივურად ჭეშმარიტია და, პირიქითაც, თუ $A \rightarrow B$ იგივურად ჭეშმარიტია, მაშინ A ფორმულის ჭეშმარიტობა საკმარისია B ფორმულის ჭეშმარიტობისათვის. იგივეს ვერ ვიტყვით ზუსტი გამომდინარეობის შემთხვევაში: A პირობის ჭეშმარიტობა შესაძლოა იყოს საკმარისი B პირობის ჭეშმარიტობისათვის, მაგრამ $A \cdot\rightarrow B$ არ იყოს იგივურად ჭეშმარიტი (მართლაც ეს ასე იქნება, მაგალითად, როცა ცვლადების მნიშვნელობათა რაიმე სისტემისათვის A განუსაზღვრელია, B კი მცდარია). ანალოგიური მდგომა-

რეობაა $\leftrightarrow$ და $\cdot\leftrightarrow$ ოპერატორების შემთხვევაშიც. თითქმის ანალოგიური მდგომარეობაა $\neg, \cdot\neg, \wedge, \cdot\wedge, \vee, \cdot\vee$ ოპერატორების შემთხვევაშიც.

ორადგილიანი ზუსტი პროპოზიციული კავშირების (მიკავშირებული ფუქციების) ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა შემოკლებული ცხრილებისათვის დამახასიათებელია შემდეგი თვისება: მესამე სტრიქონში, შესაბამისად სვეტში, გვხვდება განსაზღვრული ჭეშმარიტული მნიშვნელობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ მნიშვნელობის შესაბამისი სვეტი, შესაბამისად სტრიქონი, მთლიანად ამ განსაზღვრული ჭეშმარიტული მნიშვნელობისაგან შედგება.

შენიშვნა. კარგად არის ცნობილი ჩვეულებრივი (ორმნიშვნელობიანი) ლოგიკის მნიშვნელობა სათვლელი ტექნიკისა და პროგრამირების თეორიის განვითარებისათვის. ამჟამად მიმდინარეობს დაძაბული მუშაობა ახალი V თაობის უნივერსალური სათვლელი მანქანებისა და შესაბამისი პროგრამული ენის შესაქმნელად. ასეთი უნივერსალური სათვლელი მანქანების არქიტექტორის საფუძველი უნდა იყოს მათემატიკური ლოგიკა, მისი პროგრამული უზრუნველყოფის საფუძველი უნდა იყოს ლოგიკური პროგრამირება. ამასთან დაკავშირებით მიუთითებენ, რომ ჩვეულებრივი (ორმნიშვნელობიანი) ლოგიკა არაა საკმარისი ლოგიკური პროგრამების ადეკვატურად აღწერისათვის, რომ საჭიროა გამოყენებულ იქნეს ს. კლინის სამმნიშვნელობიანი ლოგიკა (იხ. [45] და [50]). აქედან გამომდინარეობს პერსპექტიულობა ისეთი სამმნიშვნელობიანი ლოგიკის დეტალურად შესწავლისა, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობებია ჭეშმარიტი, მცდარი და განუსაზღვრელობა და რომლის ძირითად და წარმოებულ სიმბოლოებს შორის გვხვდება:

$$t, f, \dagger, \rotatebox[origin=c]{180}{$\dagger$}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, \tau, \iota, =, \cdot\neg, \cdot\wedge, \cdot\vee,$$

$$\cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow, \approx, \cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau, :\wedge, :\vee, :\rightarrow, :\forall, :\exists, \equiv.$$

და ისეთი სამმნიშვნელობიან წინადადებათა ალგებრის დეტალურად შესწავლა, რომლის ძირითად დაწარმოებულ სიმბოლოებს შორის გვხვდება:

$$t, f, \dagger, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \cdot\neg, \cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow, \approx, :\wedge, :\vee, :\rightarrow, :\forall, :\exists, \equiv.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ ხელოვნური ინტელექტის პრობლემასთან დაკავშირებული საკითხები გადაუდებლად მოითხოვენ მრავალმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიების დეტალურ შესწავლას.

მოტანილ განსაზღვრებებიდან კვანტორებისა და ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციების მიღება გარკვეულ სიძნელეებთან

არის დაკავშირებული. საჭიროა წინასწარ შემოტანილ იქნეს რიგი მეტამათემატიკური ცნებებისა. ლოგიკური წრის თავიდან აცილების მიზნით, მანამდე სანამ ძირითადი თეორიის კვანტორების მიკავშირებულ ფუნქციებს განვსაზღვრავდეთ დაგვჭირდება ძირითადი თეორიის ფორმის მნიშვნელობის ისეთი ცნება, რომლის განსაზღვრა არ ეყრდნობა კვანტორებისა და ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციის ცნებას და რომელიც 2.2.5-ში მოტანილ ზოგად განსაზღვრასთან წინააღმდეგობაში არაა (ასეთი განსაზღვრა არსებობს და იგი ეყრდნობა ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების როლის ზემოთმოტანილ განსაზღვრას). ასეთი განსაზღვრის მისაღებად საკმარისია ფორმის მნიშვნელობის ცნების ხსენებულ ზოგად განსაზღვრაში 2-ე პუნქტი შეიცვალოს შემდეგით:

2′. თუ σ არის $\sigma_1\Delta_1\ldots\Delta_m$ კვანტორი, რომლის როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას განსაზღვრულია, მაშინ $\mathbf{A}^0$ (ე. ი. $\sigma_1\Delta_1\ldots\Delta_m\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_n \mathrel{\overline{\underline{\bullet}}} \mathbf{A}$ ფორმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_p$ ასოების მნიშვნელობათა $\langle a_1,\ldots,a_p\rangle$ სისტემისათვის) განისაზღვრება ხსენებული როლის შესაბამისად.

აქ 2′ ფორმულირებულია ზოგადი ფორმით. შეგვეძლო მხედველობაში გვქონოდა მხოლოდ ძირითადი თეორიები, რომელთა ნებისმიერი $\sigma\Delta_1\ldots\Delta_m$ კვანტორი აკმაყოფილებს პირობას: $m = 1$.

ასეთი განსაზღვრა ეყრდნობა ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას კვანტორების როლის განსაზღვრას. ფორმის მნიშვნელობის ასეთი მოდიფიცირებული განსაზღვრის გამოყენებით განვსაზღვრავთ კვანტორებისა და ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებულ ფუნქციებს და მნიშვნელობათა არეებს. რის შემდეგ ადვილად შევამჩნევთ, რომ ფორმის მნიშვნელობის მოდიფიცირებული განსაზღვრა წინააღმდეგობაში არაა 2.2.5-ში მოტანილ ზოგად განსაზღვრასთან.

2′ -ის ნაცვლად შესაძლოა გამოვიყენოთ შემდეგი:

2″. თუ σ არის $\sigma_1\Delta_1\ldots\Delta_m$ კვანტორი, მაშინ $\mathbf{A}^0$ არის $a_1,\ldots,a_p$ დამხმარე არასაკუთრივი კონსტანტებით გაფართოებული თეორიის ისეთი $\sigma_1\Delta_1\ldots\Delta_m\mathbf{A}'$ ფორმის მნიშვნელობა, რომლის $\mathbf{A}$-დან მისაღებად საკმარისია $\mathbf{A}$-ში $X_1,\ldots,X_p$ ასოების თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად ჩაისვას $a_1,\ldots,a_p$ დამხმარე კონსტანტები ($\mathbf{A}'$ ფორმა $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ ასოებისაგან განსხვავებულ თავისუფალ ცვლადებს არ შეიცავს). აქ მხედველობაშია გაფართოებული თეორიის $\sigma_1\Delta_1\ldots\Delta_m\mathbf{A}'$ ფორმის მნიშვნელობა იმ $\mathcal{A}$

ინტერპრეტაციის მიმართ, რომლის განსაზღვრებადი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციიდან მისაღებად საკმარისია $\mathcal{A}$ კონსტანტებს მნიშვნელობები შევუნარჩუნოთ.

სავარჯიშო. ჩამოაყალიბეთ ფორმის მნიშვნელობის მოდიფიცირებული განსაზღვრა იმ შემთხვევისათვის, როცა ზოგიერთი ოპერატორებისათვის განსაზღვრულია მიკავშირებული ფუნქციები, დანარჩენებისათვის კი განსაზღვრულია მხოლოდ როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას.

3.1.5 მეტათეორიისა და მეტაენის ძირითადი განსაზღვრებები. 2.2-ში გავეცანით შინაარსული და ფორმალური მათემატიკური თეორიების ცნებებს. **თანამედროვე შინაარსული აქსიომური მათემატიკური თეორია** არის წყვილი, რომლის პირველი კომპონენტია თანამედროვე შინაარსული ენა L, მეორე კომპონენტი კი არის L ენის ფორმულათა სისტემა — **ჭეშმარიტ ფორმულათა სისტემა (აქსიომების სისტემა)**. **კლასიკური შინაარსული აქსიომური მათემატიკური თეორია** არის სამეული, რომლის პირველი კომპონენტია კლასიკური შინაარსული ენა L, მეორე კომპონენტი არის L ენის ფორმულათა სისტემა, მესამე კომპონენტი კი არის K საგანთა არე. **ფორმალური მათემატიური თეორია** არის სამეული, რომლის პირველი კომპონენტია L ფორმალური ენა, მეორე კომპონენტია L ენის ფორმულათა სისტემა, მესამე კომპონენტი კი არის გამოყვანის წესების სისტემა. მათემატიკური თეორიის ინტერპრეტაციაში ტერმები აღნიშნავენ საგნებს, ფორმულები კი წინადადებებს ამ საგნების შესახებ. ფორმალური თეორიის ინტერპრეტაციის მისაღებად საჭიროა წინასწარ მისი ენა (ფორმალური ენა) გარდაიქმნას თანამედროვე შინაარსულ მათემატიკურ ენად შემზღუდავი წესების სისტემის სათანადოდ გაფართოებით, თუ ეს შესაძლებელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში გარდაიქმნას იგი კლასიკურ შინაარსულ მათემატიკურ ენად საგანთა არის სათანადოდ შერჩევით და შემზღუდავი წესების სისტემის სათანადოდ გაფართოებით, რის შემდეგ ინტერპრეტაციის ცნება ისევე განისაზღვრება, როგორც შინაარსული თეორიის შემთხვევაში (იგულისხმება, რომ ფორმალური თეორიის ალფაბეტის თითოეული სიმბოლო ან ცვლადია, ან არასაკუთრივი კონსტანტა ან საკუთრივი კონსტანტაა). ფორმალური თეორიის შემთხვევაშიც გვექნება ინტერპრეტაციის ცნებასთან დაკავშირებული ის ცნებები, რომლებიც შემოიტანება შინაარსული თეორიების შემთხვევაში.

არსებითი განსხვავება ფორმალურ და შინაარსულ მათემატიკურ თეორიებს შორის იმაში მდგომარეობს, რომ ფორმალურ თეორიას შეუძლია მიიღოს თეორიის სახე და განვითარდეს (თეორემათა მტკიცების შედეგად) ინტერპრეტაციების განხილვის გარეშეც. შინაარსული თეორიების შემთხვევაში ეს შეუძლებელია. შინაარსული თეორია უნდა განვიხილოთ როგორც მისივე ნებისმიერად აღებული ინტერპრეტაცია ან მოდელი. შინაარსული თეორიის შესწავლა გულისხმობს მისი ინტერპრეტაციათა (კერძოდ მოდელთა) კლასის შესწავლას. ფორმალური T თეორიის ნებისმიერი (ფორმალური) თეორემა თეორემაა მის თითოეულ მოდელში. ფორმალური T თეორიის ნებისმიერი (ფორმალური) კვაზითეორემა კვაზითეორემაა მის თითოეულ მოდელში (ე. ი. კვაზითეორემაა T-ში). პირველი რიგის ფორმალური თეორიების შემთხვევაში მტკიცდება უკანასკნელი წინადადების შებრუნებული წინადადებაც. ფორმალური თეორიის ინტერპრეტაციების (კერძოდ მოდელების) განხილვა ფორმალური თეორიის გაღრმავებისა და გამოყენების მიზნით წარმოებს.

გარდა სიტყვის ცნებისა დაგვჭირდება ამ ცნების შემდეგი განზოგადება **გამოსახულება** ვუწოდოთ სიბრტყეზე (მაგალითად, ფურცელზე ან დაფაზე) გარკვეული წესით განლაგებულ ნებისმიერად აღებულ სიმბოლოთა ჩანაწერს. გამოსახულებას ვუწოდოთ A ალფაბეტის გამოსახულება, თუ მისი თითოეული შემადგენელი სიმბოლო A ალფაბეტის სიმბოლოა. ეს განსაზღვრებები შეიცავენ განუსაზღვრელ ტერმინებს, მაგრამ გამოსახულების ცნების შემდგომი დაზუსტება საჭირო არაა, რამდენადაც გამოსახულებათა ზოგად თვისებებს არ შევისწავლით. განვიხილავთ მხოლოდ კონკრეტულად მოცემულ გამოსახულებებს და ამიტომ გაუგებრობათა წარმოშობის საშიშროება არ იქნება.

რომ შევისწავლოთ მათემატიკური T თეორია L ენით, საჭიროა გვექნეს ამ თეორიის შემსწავლელი გარეშე შინაარსული თეორია — **მეტამათემატიკური** თეორია ანუ **მეტათეორია**. მეტათეორიის ენას ეწოდება **მეტამათემატიკური ენა** ანუ **მეტაენა**. შეიძლება ითქვას, რომ მეტაენა არის გარეშე ენა, რომელშიც შეისწავლება მოცემული მათემატიკური თეორია, კერძოდ, მათემატიკური თეორიის ენა — **მათემატიკური ენა**. T თეორია და მისი L ენა განისაზღვრება აბსტრაქტულად, ზუსტად. მეტათეორია და მეტაენა ჩვეულებრივ ზუსტად არ განისაზღვრება. მეტათეორია შედგება ჩვეულებრივი ენის (ჩვენ შემთხვევაში ქართული ენის) ნაწილისაგან (რომელიც თავისუფალია ჩვეულებრივი

ენებისათვის დამახასიათებელი სირთულეებისაგან), ჩვეულებრივი მათემატიკის ტერმინებისაგან და ამ ტარმინებთან დაკავშირებული ძირითადი მათემატიკური კანონებისაგან. საჭიროა მეტათეორია რაც შეიძლება სუსტი იყოს, იმისათვის, რომ მისი დახმარებით მიღებული შედეგები მოცემული მათემატიკური თეორიის შესახებ უფრო საიმედო იყოს. მაგრამ მეტათეორია უნდა იყოს იმდენად ძლიერი მაინც, რომ იგი შეიცავდეს სიმრავლის, ფუნქციის, მიმართების ცნებებს, ამ ცნებებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგიით და ძირითადი კანონებით.

კონსტრუქტივისტების მიერ შედგენილი ე. წ. კონსტრუქტივისტული მეტათეორია ძლიერ სუსტია. ვისარგებლებთ უფრო ძლიერი მეტათეორიით, რომლის საზღვრები ზუსტად არ იქნება განსაზღვრული — იგი ჩვეულებრივ მათემატიკაში (ფარულად) გამოყენებული მეტათეორიის ტიპის იქნება. შესაძლებელია მეტათეორიის აქსიომატიზირება კონსტრუქტივისტული მეტათეორიის საფუძველზე.

მათემატიკური თეორიის წინადადებებს (ფორმულებს) უწოდებენ **მათემატიკურ წინადადებებს**. წინადადებას, რომელშიც გამოთქმულია აზრი **მათემატიკური ობიექტების** (ფორმულები, ტერმები, სიტყვები, ჭეშმარიტული მნიშვნელობები და ა. შ.) შესახებ, ეწოდება **მეტამათემატიკური წინადადება**. უკანასკნელი ტერმინის ნაცვლად, სიმარტივისათვის, ხშირად გამოვიყენებთ ტერმინს: **მეტაწინადადება**. სხვა შემთხვევაშიც ვისარგებლებთ ასეთივე გამარტივებებით (რომლებიც მიიღებიან ტერმინებიდან დამაზუსტებელი სიტყვის ,,მეტამათემატიკურის'' ნაცვლად წინსართის როლში ,,მეტას'' გამოყენებით). ამის შესახებ სხვა სპეციალური შეთანხმების შემოტანის გარეშეც.

რიგობრივი რიცხვის ინტუიციური ცნებისა და ინდივიდების მოცემული ერთობლიობის ბაზაზე პირველ თავში განსაზღვრული იყო ინტუიციური კლასებისა და სიმრავლეების აგების კონკრეტული პროცესი. ეს პროცესი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს.

1. ნებისმიერი α რიგობრივი რიცხვისათვის α-ზე დამოკიდებული ზოგადი წესის α-ზე ნაკლები საფეხურის მქონე სიმრავლეებისა (კლასებისა) და ინდივიდების ერთობლიობაზე აიგება ყველა α საფეხურის საგანი (სიმრავლე). ამასთან, ინდივიდები მიჩნეულია უდაბლესი საფეხურის საგნებად.

2. გარკვეული წესის ელემენტების (სიმრავლეებისა და ინდივიდების) ერთობლიობაზე გამოყენებით აიგება ყველა ზესიმრავლე ანუ უმაღლესი საფეხურის საგანი ანუ საკუთრივი კლასი.

3. ინდივიდი კლასი არაა. ზესიმრაველე ელემენტი არაა. ორი სხვადასხვა საფეხურის კლასთა ერთობლიობები არ იკვეთებიან.

4. ნებისმიერი კლასის საფეხური აღემატება მისი თითოეული ელემენტის საფეხურს.

მეტათეორიაში ხშირად განიხილება სხვადასხვა სახის **ინტუიციური სიმრავლეები** ანუ **ინტუიციური კლასები**. ისინი ინტუიციურ სიმრავლეთა თეორიის მეთოდებით აიგებიან. მეტასიმრავლეები და მეტაკლასები ინტუიციური სიმრავლეების კერძო შემთხვევებს წარმოადგენენ. ძირითადად საქმე გვექნება მეტათეორიის ინტუიციურ სიმრავლეებთან. ისინი მეტათეორიის საგნებს წარმოადგენენ. ქვემოთაც შევჩერდებით ინტუიციური სიმრავლის ცნებაზე. ახლა განვსაზღვრავთ ინტუიციურ სიმრავლეებთან დაკავშირებულ ზოგიერთ ცნებას.

ვთქვათ, A კლასია ინტუიციური აზრით (ე.ი. A ინტუიციური კლასია). $\in$ იყოს კუთვნილების ოპერატორი ინტუიციური აზრით. ამბობენ, რომ a_0 არის A კლასის **წარმომქმნელი ელემენტი**, თუ არსებობს ისეთი $a_0,\ldots,a_n$ სასრული მიმდევრობა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა:

$$a_0 \in a_1 \wedge a_1 \in a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} \in a_n \wedge a_n \in A \qquad (1)$$

($n = 0$ შემთხვევას არ გამოვრიცხავთ). $a_0,\ldots,a_n$ მიმდევრობას ეწოდება A კლასის **ტოტი a_0 წვეროთი**, თუ შესრულებულია (1) და $\{0,1,\ldots,n\}$-დან აღებული თითოეული i-სთვის a_i არის $a_{i+1},\ldots,a_n$, A კლასებიდან მხოლოდ ერთი კლასის ელემენტი. $a_0,\ldots,a_n$ **ტოტის სიგრძე**, განსაზღვრით, არის $n + 1$. ამასთან, $a_0,\ldots,a_n$ ტოტს ეწოდება **მინიმალური ტოტი**, თუ არ არსებობს A კლასის ისეთი ტოტი, რომლის წვეროა a_0 და რომლის სიგრძე ნაკლებია $(n + 1)$-ზე. a_0-ს ეწოდება A კლასის ***n*-ური რანგის წარმომქმნელი**, თუ არსებობს $n + 1$ სიგრძის მინიმალური ტოტი a_0 წვეროთი. $a_0,a_1,\ldots,a_n$ ტოტს ეწოდება A კლასის **სრული ტოტი** თუ არ არსებობს A კლასის $a,a_0,\ldots,a_n$ სახის ტოტი. A კლასის n-ური რანგის წარმომქმნელთა ერთობლიობა აღინიშნება $A_{(n)}$-ით, ყველა წარმომქმნელის ერთობლიობა კი აღინიშნება A_ω-ით.

ადვილად ვრწმუნდებით შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობაში. თუ $a_0,\ldots,a_n$ აკმაყოფილებს (1) პირობას, მაშინ მოიძებნება $a_0,\ldots,a_n$ მიმდევრობის ისეთი a_0-ის შემცველი ქვემიმდევრობა, რომელიც A კლასის ტოტია. A კლასის ნებისმიერი a_0 წარმომქმნელისათვის მოიძებნება A

კლასის მინიმალური ტოტი a_0 წვეროთი. $A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{(n)}$. მოცემული A კლასის ყველა წარმომქმნელის ერთობლიობა მოიცავს A კლასის ნებისმიერი წარმომქმნელის წარმომქმნელთა ერთობლიობას. $a_0, \ldots, a_n$ ტოტი სრულია, როცა a_0-ს ელემენტი არ აქვს. ტოტის სისრულისათვის უკანასკნელი პირობა აუცილებელი არაა.

ვთქვათ, A არის T თეორიის ფორმა. ამბობენ, რომ კვანტორის შემოსვლა A ფორმაში არის **კვანტორის შეზღუდული შემოსვლა**, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან.

1. კვანტორის აღნიშნული შემოსვლის თითოეული ოპერატორული ასო პროპოზიციული (კვანტორული) ასოა.

2. კვანტორის აღნიშნულ შემოსვლას აქვს σx სახე, სადაც σ არის ერთ-ერთი $\forall$, $\exists$, τ, ι, $\cdot\forall$, $\cdot\exists$, $\cdot\tau$ ოპერატორულ ნიშნებიდან, x არის საგნობრივი კვანტორული ასო, ამასთან, კვანტორის განხილულ შემოსვლის ოპერანდს აქვს ან $[x \in y \rightarrow \mathbf{B}]$ სახე ან $[x \in y \wedge \mathbf{B}]$ სახე, იმისდა მიხედვით σ არის $\forall$ ან $\cdot\forall$ თუ არა, სადაც Y საგნობრივი ასოა, B კი ფორმულაა.

ამასთან, თუ შესრულებულია 2-ე პირობა, მაშინ ამბობენ, რომ განხილული **კვანტორის** σx **შემოსვლა შეზღუდულია Y-ით**. კვანტორის შემოსვლას A ფორმაში ეწოდება **შეუზღუდავი შემოსვლა**, თუ იგი არაა შეზღუდული შემოსვლა. A-ს ეწოდება **შეზღუდულკვანტორებიანი ფორმა**, თუ მისი თითოეული კვანტორი შეზღუდულია. ვთქვათ, T თეორიის A ფორმის σx კვანტორი X საგნობრივი ოპერატორული ასოთი არაა შეზღუდული Y საგნობრივი ასოთი. მაშინ **A ფორმის** σx **კვანტორის შეზღუდვა Y-ით** ეწოდება A ფორმის $\sigma x \mathbf{A}_1$ ნაწილის შეცვლას ან $\sigma x[x \in Y \rightarrow \mathbf{A}_1]$-ით ან $\sigma x[x \in y \wedge \mathbf{A}_1]$-ით იმისდა მიხედვით σ არის $\forall$ ან $\cdot\forall$ თუ არა.

ქვემოთ ხშირად ვისარგებლებთ შემდეგი შეთანხმებით. თუ B ფორმულაა, X საგნობრივი ოპერატორული ასოა, Y საგნობრივი ასოა, σ კი ერთ-ერთია $\forall$, $\exists$, τ, ι, $\cdot\forall$, $\cdot\exists$, $\cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნებიდან, მაშინ $\sigma x \in Y\mathbf{B}$ არის შემოკლებული აღნიშვნა ან $\sigma x[x \in Y \rightarrow \mathbf{B}]$ ფორმულისათვის ან $\sigma x[x \in y \wedge \mathbf{A}_1]$ ფორმულისათვის იმისდა მიხედვით σ არის $\forall$ ან $\cdot\forall$ თუ არა.

ქვემოთ ყველგან ამ თავში ვიგულისხმებთ, რომ მოცემულია (განიხილება) შინაარსული ან თანამედროვე ენის მქონე ფორმალური **ძირითადი** მათემატიკური თეორია (იხ. 2. 2. 2.).

შენიშვნა. T თეორიის შეზღუდვა იმით, რომ იგი იყოს ძირითადი თეორია არსებითი არაა: ინტერპრეტაციის აგების გამოყენებული მეთოდი გამოდგება იმ ზოგად შემთხვევაშიც, როცა ყველა ოპერატორული ნიშანი საკუთრივი კონსტანტაა და შესაძლებელია განისაზღვროს მათი როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას მათი სრული შინაარსის განსაზღვრამდე; ამასთან, პროპოზიციული კავშირები უნდა იყოს საკუთრივი კონსტანტები და წინასწარ უნდა განისაზღვრონ დანარჩენი საკუთრივი კონსტანტების მიკავშირებული ფუნქციები იმგვარად როგორც ეს ზემოთ გაკეთდა (ძირითადი თეორიის შემთხვევაში).

ვიგულისხმებთ, რომ მეტათეორიაში გვაქვს **დამხმარე** შინაარსული მათემატიკური თეორია D, რომლის L(D) ენის ალფაბეტის მისაღებად საკმარისია T თეორიის L(T) ენის ალფაბეტს დაემატოს შემდეგი სიმბოლოები

$$=, \equiv, \in', \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \cdot\neg, \cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow,$$
$$\forall, \exists, \tau, \iota, \cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau, s_0, s_1, \ldots,. \qquad (2)$$

სადაც $\in'$ არის T თეორიის ალფაბეტში არშემავალი კუთვნილების ოპერატორად წოდებული ორადგილიანი საკუთრივი კონსტანტა პრედიკატი. დამხმარე თეორიისა და დამხმარე თეორიის ენის ცნებები ქვემოთ თანდათან დაზუსტდებიან. ახლავე შევნიშნოთ, რომ L(D) ენაში T თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოებს, (1.1) შეთანხმების შესაბამისად, შევუნარჩუნებთ ტიპებს და ცვლადობისა, არასაკუთრივი კონსტანტობისა და საკუთრივი კონსტანტობის თვისებებს, გამონაკლისი იქნება მხოლოდ = და ≡ პრედიკატებისა და განსხვავებული T თეორიის საკუთრივი კონსტანტა ასო ოპერატორები, რომლებიც L(D) ენაში იმავე ტიპის არასაკუთრივ კონსტანტა ასო ოპერატორებად იქნებიან მიჩნეული (ასეთ საკუთრივ ასო ოპერატორთა შორის იქნება ∈ ოპერატორი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა T სიმრავლეთა კლასიკური თეორიაა). ქვემოთ ვნახავთ, რომ L(D) დამხმარე ენის შემზღუდავი წესების სისტემის ცნება საკმაოდ განსხვავდება მათემატიკური ენის შემზღუდავი წესების სისტემის ცნებისაგან. იგივე ითქმის დამხმარე ენის ინტერპრეტაციის ცნებაზე. მაგალითად, დამხმარე თეორიის L(D) ენის ინტერპრეტაციის შემთხვევაში კვანტორებისა

და ოპერატორული ნიშნებისათვის საკმარისია განისაზღვროს მათი როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას; ამასთან, განსხვავებულად განისაზღვრება პროპოზიციულ ასოებისაგან განსხვავებული ასოების მნიშვნელობათა არეები; არის სხვა განსხვავებებიც. ასეთი განსხვავება შემდეგი გარემოებითაა გამოწვეული: დამხმარე D თეორიის განხილვა გვესაჭიროება იმისათვის, რომ განისაზღვროს მოცემული მათემატიკური თეორიის ენის ოპერატორული ნიშნების, კვანტორების და პრედიკატული, სუბსტანციური ლოგიკური და ფუნქციონალური სუბსტანციური ასოების მნიშვნელობათა არეები. თუ მოვინდომებთ მეტათეორიის დამხმარე D თეორიაშიც ამის გაკეთებას ანალოგიური გზით, მაშინ იძულებული ვიქნებით განვიხილოთ მეტათეორია D_1 დამხმარე თეორიით და ა. შ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ნებისმიერ სიმრავლეთა თეორიის ენისათვის K უნივერსუმისა და $\in$ პრედიკატული სიმბოლოს მიკავშირებული პრედიკატის განსაზღვრის შემდეგ სავსებით ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ D დამხმარე თეორიის ენის ინტერპრეტაციის ტიპის ინტერპრეტაცია ($\in$ პრედიკატული სიმბოლოს მიკავშირებული პრედიკატი უნდა განისაზღვროს, როგორც K-დან აღებული საგნებისა და შედგენილი მეტაწყვილების რაიმე ერთობლიობა — ეს მიკავშირებული ფუნქცია განსაზღვრავს ინდივიდის, სიმრავლის, კლასისა და ელემენტის ცნებებს განსაზღვრებად ინტერპრეტაციაში). მეტი სიზუსტისათვის, ასეთ „ინტერპრეტაციას" ვუწოდოთ **ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა თ ე ო რ ი ი ს შ ი დ ა ი ნ ტ ე რ პ რ ე ტ ა ც ი ა.**

ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად, დამხმარე თეორიის L(D) ენის შემთხვევაში შემზღუდავი წესების სისტემის ზოგიერთი მოთხოვნა შესუსტებულია (მაგალითად, ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების განსაზღვრის არეებისა და მიკავშირებული ფუნქციების განსაზღვრის ნაცვლად ხსენებული წესების სისტემა მოითხოვს მხოლოდ მათი როლის განსაზღვრას ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას). ამიტომ D თეორიას ვერ განვიხილავთ მათემატიკურ თეორიად: „დამხმარე მათემატიკური თეორია" უნდა განვიხილოთ როგორც „მათემატიკური თეორიის" ცნებისაგან დამოუკიდებელი ცნება. იგივე ითქმის შემდეგ ცნებებზე: „დამხმარე მათემატიკური თეორიის ენა", „დამხმარე მათემატიკური თეორიის ენის ინტერპრეტაცია," „დამხმარე თეორიის ინტერპრეტაცია." აღნიშნულ ცნებებისთვისაც შეგვიძლია შემოვიტანოთ ზოგიერთ იმ ცნებათა სრული ანალოგები, რომლებიც შემოტანილი გვაქვს მათემატიკური თეორიების, მათემატიკური თეორიების ენებისა და მათი ინტერპრეტაციებისათვის

(ასეთი ცნებების მაგალითებია „ფორმის" ცნება, „ფორმის მნიშვნელობის" ცნება და ა. შ.).

სიმარტივისათვის, შემოტანილ ტერმინებში ხშირად გამოვტოვებთ ხოლმე სიტყვას. „დამხმარე". დამხმარე D თეორიის L(D) ენისათვის განვსაზღვრავთ T თეორიის L(T) ენის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის შესაბამისს ე. წ. (დამხმარე) D თეორიის L(D) ენის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციას. L(D) ენის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციას ვუწოდოთ D თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ არის T თეორიის ინტერპრეტაცია. ვიგულისხმებთ, რომ D დამხმარე თეორიისა და L(D) დამხმარე ენისათვის სხვა სახის ინტერპრეტაციები არ არსებობენ. ამის შესაბამისად ნაცვლად ტერმინისა „$\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია," სიმარტივისათვის, ხშირად ვისარგებლებთ უფრო ზოგადი ტერმინით: „ინტერპრეტაცია". ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ D თეორიის ენის ინტერპრეტაციებში ფორმებისათვის დაშვებულია განუზღვრელი მნიშვნელობებიც (მაშინაც, როცა T ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიაა). ამ მოთხოვნის ბუნებრიობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ D თეორიის ენის ალფაბეტი შეიცავს დამატებით მარტივ ოპერატორებს და დამატებით ოპერატორულ ნიშნებს. რადგან T ძირითადი მათემატიკური თეორიაა, წინა პუნქტებიდან გამომდინარეობს, რომ განსაზღვრულია T თეორიის ენის პროპოზიციული კავშირებისა და = და ≡ პრედიკატული სიმბოლოების შინაარსი და ოპერატორული ნიშნების (და, მაშასადამე, კვანტორების) როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას(თუკი ისინი T თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოებია). ვიგულისხმებთ, რომ იგივე იმავე გზით გაკეთებულია D დამხმარე მათემატიკური თეორიის შემთხვევაშიც (D შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც „ძირითადი დამხმარე თეორია", ამასთან, უკასკნელი ცნება „ძირითადი თეორიის" ცნებისაგან დამოუკიდებელ ცნებად უნდა მივიჩნიოთ).

2.2.2-ში მოტანილი შეთანხმების ძალით (ძირითადი) T თეორიის ოპერატორული ნიშნები, პროპოზიციული კავშირები და ტოლობის „=" და იგივურობის „≡" ნიშნები საკუთრივი კონსტანტებია (სპეციალური ოპერატორული ნიშნები ძირიცად თეორიას არ აქვს). იგივე მდგომარეობაა დამხმარე D თეორიის შემთხვევაში.

ვიგულისხმებთ, რომ თავდაპირველად აგებულია T თეორიის L(T) ენის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის K უნივერსუმი (დამთავრებულად წარმოდ-

გენადი პროცესით) და განსაზღვრულია პროპოზიციული და საგნობრივი კონსტანტების მნიშვნელობები. K არე საგანთა ცარიელი ერთობლიობაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა L(T) ენის ალფაბეტი უმარტივესია. იმ შემთხვევაში, როცა L(T) ისეთი კლასიკური ენაა, რომლის თანამედროვე ენად განხილვა შეუძლებელია, მაშინ K უნივერსუმად L(T) ენის საგანთა არე უნდა ავიღოთ. თუ L(T) თანამედროვე ენაა ან ისეთი კლასიკური ენაა, რომლის თანამედროვე ენად განხილვა შეიძლება, მაშინ K არედ უნდა ავიღოთ საგანთა რაიმე არაცარიელი ერთობლიობა(ან საგანთა ერთობლიობების კონკრეტულად მოცემული საკმაოდ მდიდარი კვაზიერთობლიობიდან აღებული ნებისმიერი არაცარიელი ერთობლიობა). განსაზღვრით, საგნობრივ ასოს მნიშვნელობათა არედ K უნივერსუმი მიიჩნევა (როცა L(T) ენას საგნობრივი ასოები აქვს, მაშინ K უნივერსუმი ცარიელია); პროპოზიციულ ასოს მნიშვნელობათა არედ კი ჭეშმარიტული მნიშვნელობებისაგან შედგენილი {t, f} მეტაერთობლიობა მიიჩნევა (ეს მეტაერთობლიობა და K უნივერსუმი მეტასიმრავლეები აღმოჩნდებიან). არასაკუთრივ საგნობრივ და არასაკუთრივ პროპოზიციულ კონსტანტებს ნებისმიერად ვაძლევთ მნიშვნელობებს მათ მნიშვნელობათა არეებიდან, t და f საკუთრივი პროპოზიციული კონსტანტების მნიშვნელობები შესაბამისად არიან „ჭეშმარიტი" და „მცდარი", საკუთრივი საგნობრივი კონსტანტების მნიშვნელობები კი ცალსახად განისაზღვრება შემზღუდავი წესების სისტემით (თუ L(T) ენას საკუთრივი საგნობრივი კონსტანტა გააჩნია, მაშინ ეს ენა კლასიკურია და მისი თანამედროვე ენად განხილვა შეუძლებელია (იხ. 2.2.2)).

შენიშვნა. აქ კონტექსტი ძირითადად წარმოადგენს შემზღუდავი წესების სისტემის ნაწილს. კონტექსტის იმ ნაწილს, სადაც მითითებულია, რომ საკუთრივი საგნობრივი კონსტანტების მნიშვნელობები ცალსახად განისაზღვრება შემზღუდავი წესების სისტემით, აქვს ასეთი ზოგადი სახე რამდენადაც სხვა შესაძლებლობა არაა (საკუთრივი საგნობრივი კონსტანტები კონკრეტულად არ გვაქვს მოცემული საზოგადოდ — ისინი კონკრეტულად მოიცემიან მხოლოდ კონკრეტულად მოცემული ენისათვის (კონკრეტულად მოცემული კლასიკური ენისათვის)).

რადგან T ძირითადი თეორიაა, T თეორიის L(T) ენის ალფაბეტის ნებისმიერი არასაკუთრივი კონსტანტა (ე. ი. ნებისმიერი არალოგიკური სიმბოლო) არის ან საგნობრივი კონსტანტა ან პროპოზიციული კონსტანტა ან პრედიკატი ან სუბსტანციური ფუნქციონალური ასო (კონსტანტა ოპერატორი) ან სუბსტანციური ლოგიკური კონსტანტა ოპერატორი.

ისეთ კლასიკურ L(T) ენას, რომლის თანამედროვე ენად განხილვა შესაძლებელია, გავაიგივებთ სათანადო თანამედროვე ენასთან. ამის შესაბამისად ნაცვლად ფრაზისა: „კლასიკური L(T) ენა შეგვიძლია განვიხილოდ თანამედროვე ენად" ვისარგებლებთ ფრაზით: „კლასიკური L(T) ენა არის თანამედროვე ენა". ვისარგებლებთ ამ შეთანხმების შესაბამისი სხვა ანალოგიური გამარტივებებითაც. ასეთი გამარტივების მაგალითია ფრაზა: „კლასიკური თეორია თანამედროვე ენით" და ა. შ.

შემოვიტანოთ T თეორიის L(T) ენის $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაზე დამოკიდებულ ცნებებს. ამით შემოტანილად მივიჩნევთ T თეორიის ინტერპრეტაციაზე დამოკიდებულ ცნებებსაც, რამდენადაც T თეორიის ინტერპრეტაცია ამავე დროს არის L(T) ენის ინტერპრეტაციაც (ამ ცნებათა მოცულობები ერთი და იგივეა, როცა T თანამედროვე თეორიაა). ამასთან, სიმარტივისათვის, ტერმინების შემოტანისას დამაზუსტებელ ფრაზებს (როგორიცაა: „$\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში", „$\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ", „$\mathscr{A}'$ ინტერპრეტაციაში" და ა. შ.) ზოგჯერ გამოვტოვებთ ხოლმე. მაგრამ საჭიროების შემთხვევაში ასეთი დამაზუსტებელი ფრაზებით ვისარგებლებთ გაუგებრობათა თავიდან აცილების მიზნით. ამასთან, ხშირად ვისარგებლებთ გამარტივებებით სრული სახით შემოტანილი ტერმინების გამოყენებისას. ცხადია, მხედველობაში გვექნება შემამოკლებელი სიმბოლოებით მოცემული ძირითადი თეორიების გაფართოებებიც.

ვიგულისხმებთ, რომ მეტათეორიაში გვაქვს რიგობრივი რიცხვის ინტუიციური ცნების შესატყვისი ყველა რიგობრივი რიცხვის W' მეტაკლასი. ვიგულისხმებთ, რომ თითოეული ინტუიციური რიგობრივი რიცხვისა და ინტუიციური სიმრავლის აგების პროცესი დასრულებულად წარმოდგენადია, თითოეული ზესიმრავლის (კერძოდ, W'-ის) აგების პროცესი კი დასრულებულად წარმოდგენადი არაა. ცხადია, ნებისმიერი ინტუიციური სიმრავლე, რომელიც რიგობრივი რიცხვია, W'-ის ელემენტია. ადვილად შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ A ინტუიციური სიმრავლე არის რიგობრივი რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ორი ნებისმიერი a და b ელემენტისათვის ან $a \in b$ ან $b \in a$ ან $a = b$ და A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი A სიმრავლის ქვესიმრავლეა (იხ. 1.3.1). ცხადია, W' კლასი დამოკიდებულია იმაზე თუ რიგობრივი რიცხვის აგების როგორ პროცესს მივიჩნევთ დასრულებულად წარმოდგენად პროცესად. ვიგულისხმებთ, რომ ამ საკითხში სათანადო შეთანხმება არ-

სებობს და ამ შეთანხმებით W' კლასი დაფიქსირებულია. ამასთან, ეს შეთანხმება უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს. მეტათეორიაში, მოცემული მათემატიკური თეორიის ენის თითოეული ინტერპრეტაციის უნივერსუმის აგების პროცესი დასრულებულად წარმოდგენადი უნდა იყოს და უნდა სრულდებოდეს 1.3.3 პუნქტში მოტანილი **a** და **b** აქსიომების სრული ანალოგები. ამ მოთხოვნებიდან, ცხადია, გამომდინარეობს შემდეგი: თუ T თეორიის L(T) ენის განსაზღვრებადი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია სიმრავლეთა თეორიის მოდელია, მაშინ ამ მოდელის რიგობრივ რიცხვთა W კლასი W'-ის საწყისი მონაკვეთია (იხ. 5.5.2).

D თეორიის ალფაბეტის და, საზოგადოდ, ნებისმიერი ალფაბეტის სიტყვის აღსანიშნავად, სიმარტივისათვის, თვით ამ სიტყვას გამოვიყენებთ. ეს შეთანხმება წარმოშობს შემდეგ სიძნელეს. ხსენებული ალფაბეტის სიტყვა შესაძლოა ერთდროულად აღმოჩნდეს თავის თავის აღმნიშვნელიც და საგნის ან ჭეშმარიტული მნიშვნელობის აღმნიშვნელიც. ამიტომ მეტი სიზუსტისათვის (გაუგებრობათა თავიდან აცილების მიზნით) საჭიროების შემთხვევაში გამოვიყენებთ გ. ფრეგეს მიერ შემოტანილ შემდეგ ზოგად შეთანხმებას. მოცემული ალფაბეტის **A** სიტყვა აღინიშნება **'A'** გამოსახულებით. აქ მეტაცვლადი **A** გამოყენებულია შეთანხმების მოკლედ ჩასაწერად. იგულისხმება, რომ **A** მეტაცვლადით აღნიშნული სიტყვის აღსანიშნავად გამოიყენება განხილული სახის მძიმეებში ჩასმული იგივე სიტყვა.

D თეორიის L(D) ენის $\mathcal{A}$-ინტერპრეტაცია აღვნიშნოთ $\mathcal{A}'$-ით. $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციები შემდეგნაირად განისაზღვრებიან.

T თეორიის ნებისმიერი ფორმულა განვიხილოთ, როგორც K არეზე განსაზღვრული თვისება (T თეორიის) რაიმე საგნობრივი ასოს მიმართ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში (იხ. 1.3.2 და 1.2 შემთხვევა, როცა K ცარიელია არ გამოვრიცხავთ). დავუშვებით, თითოეული ასეთი თვისება განსაზღვრავს მეტასიმრავლეს ($K = \varnothing$ შემთხვევაში ასეთი თვისებები და, მაშასადამე, ასეთი თვისებებით განსაზღვრული მეტასიმრავლეები არ გვექნება, რამდენადაც ამ შემთხვევაში T თეორიის ენის თეორიის ალფაბეტი უმარტივესია და, მაშასადამე, იგი არ შეიცავს საგნობრივ ასოებს). განსაზღვრით, ასეთი მეტასიმრავლეები, K არის საგნები, K არის ისეთი საგნების წარმოჰქმნელები, რომლებიც კლასებია ინტუიციური აზრით, ცარიელი სიმრავლე (ინტუიციური აზრით), t და f ჭეშმარიტული მნიშვნელობები, t, f,

†, ⸸ და T თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოები, ჩამოთვლილი სიმბოლოებისაგან შედგენილი სიტყვები და ინტუიციური სიმრავლეები შედგენილი T თეორიის ალფაბეტის ყველა სიტყვისაგან, შესაბამისად ყველა სიმბოლოსაგან, შესაბამისად ამა თუ იმ ტიპის ყველა ცვლადისაგან, შესაბამისად ამა თუ იმ ტიპის ყველა კვანტორული კონსტანტისაგან, შეადგენენ **უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანთა მეტაერთობლიობას** (იგულისხმება, რომ განუსაზღვრელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა და განუსაზღვრელი საგნობრივი მნიშვნელობა უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნებია — ისინი გაიგივებულნი არიან † და ⸸ სიმბოლოებთან შესაბამისად: ეს სიმბოლოები თავიანთ თავს ალნიშნავენ. ამ შემთხვევაში გ. ფრეგეს '†' და '⸸' ალნიშვნების გამოყენება აუცილებელი არაა — გაუგებრობის წარმოშობის საშიშროება არაა). გარდა ზემოთ ალნიშნული მეტასიმრავლეებისა, ხსენებული ინტუიციური კლასები, მათი წარმომქმნელი ინტუიციური სიმრავლეები და სხვა ხსენებული ინტუიციური სიმრავლეები, განსაზღვრით, მეტასიმრავლეებს წარმოადგენენ.

ალნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ K არაა ცარიელი, მაშინ არსებობს K-დან ალებული ყველა საგნის მეტასიმრავლე და ეს მეტასიმრავლე უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანია.

მართლაც, იგი განისაზღვრება T თეორიის $x = x$ ფორმულის K-ზე თვისებად განხილვის შედეგად მილებული თვისებებით (სადაც x საგნობრივი ასოა).

ახლა, უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნების საფუძველზე 1.3-ში აღწერილი მეთოდით აიგება α საფეხურის მეტასაგნები (მეტასიმრავლეები — მეტაკლასები) თითოეული $\alpha \in' W'$ რიგობრივი რიცხვისათვის, და უმალლესი საფეხურის მეტასაგნები (მეტაკლასები) ანუ მეტაზესიმრავლეები (ინდივიდების როლში მაგრამ არა ინდივიდებად — გამოდიან უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნები). 1.3-ში გამოყენებული ტერმინების ანალოგების მისალებად ხსენებულ ტერმინებს დავუმატებთ წინსართს „მეტას", ალნიშვნების ანალოგების მისალებად კი 1.3-ში გამოყენებულ შესაბამის ალნიშვნებს დავუმატებთ შტრიხს ზედა ინდექსად. მაგალითად, K'-ით ალინიშნება მეტასაგანთა მეტაერთობლიობა, S' და e' იქნებიან ერთადგილიანი პრედიკატები, ამასთან, $S'a$ ალნიშნავს a მეტასაგნის საფეხურს, $e'a$ კი იკითხება ფრაზით „მეტაელემენტია a" და ამ ფრაზის შესაბამისი შინაარსი აქვს $e'a$ ჩანაწერს. ასეთივე კავშირში იქნება D თეორიის $\mathscr{A}'\mathscr{A}$

ინტერპრეტაციასთან დაკავშირებული ტერმინები და აღნიშვნები T თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციასთან დაკავშირებულ ტერმინებთან და აღნიშვნებთან. რიგ შემთხვევაში შენარჩუნებული იქნება 1.3-ში შემოტანილი აღნიშვნები კონტექსტში ცხადად მოტანილი განსაზღვრებების შესაბამისად.

უფრო დეტალურად შევჩერდეთ მეტასიმრავლეებისა და მეტაკლასების აგების პროცესზე.

მათემატიკური ენის როლში გამოდის L(D) ენა. ამ ენის ფორმების მნიშვნელობებად დაიშვება განუსაზღვრელი მნიშვნელობები. K მეტაერთობლიობისაგან განსხვავებით K′ ჯერჯერობით განსაზღვრებადი მეტაერთობლიობაა. ჯერჯერობით აგებული გვაქვს K′ მეტაერთობლიობის ის საგნები, რომლებსაც უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნები ვუწოდეთ. შემოვიტანთ K′-ზე დამოკიდებულ განსაზღვრებებს და ამ განსაზღვრებებით შემოტანილ ცნებებს გამოვიყენებთ K′-ის ასაგებად ისე, რომ ლოგიკური წრე არ მივიღოთ (K′-ის შემადგენელი მეტასაგნების აგება მოხდება ბიჯებისაგან შედგენილი პროცესით ისე, რომ ყოველი ბიჯი განისაზღვრება წინა ბიჯებით შემოტანილი მეტასაგნების მეტაერთობლიობით, ამასთან, იგულისხმება, რომ ნულოვანი ბიჯით შემოიტანება უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნები.

L(D) ენის ასოების მნიშვნელობათა არეები შემდეგნაირად განისაზღვრებიან. საგნობრივი ასოს მნიშვნელობათა არეა $K'' = K' \setminus \{\dagger, \perp\}$ მეტაერთობლიობა (ვიგულისხმოთ, რომ † და ⊥ სიმბოლოებიდან თითოეული გაიგივებულია შესაბამისს განუსაზღვრელ მნიშვნელობასთან; ამასთან მოვითხოვთ, რომ საგნობრივ და პროპოზიციულ ასოებს უშუალოდ არ შემოჰქონდეთ განუსაზღვრელი მნიშვნელობები (განუსაზღვრელი მნიშვნელობის შემომტანი უნდა იყოს მხოლოდ სუბსტანციური ფუნქციონალური ასო); ამიტომ აუცილებელია საგნობრივი და პროპოზიციული ასოს მნიშვნელობათა არეა {t, f} მეტასიმრავლე; n-ადგილიანი სუბსტანციური ლოგიკური ასოს (ე. ი. n-ადგილიანი სუბსტანციური ლოგიკური ოპერატორის) მნიშვნელობათა არეა $\{t, f, \dagger\} \to K''^{*}$ ტიპის ყველა ისეთი ყველგან განსაზღვრული n-ადგილიანი მეტაფუნქციის მეტაერთობლიობა, რომელთაგან თითოეული განსაზღვრულ მნიშვნელობას ღებულობს განსაზღვრის არედან აღებულ ისეთ n-ეულზე, რომლის კომპონენტები განსაზღვრულ მნიშვნელობებს წარმოადგენენ (სადაც K''^{*} არ-

ის $K'' \cup \{\dashv\}$; n-ადგილიანი პრედიკატული ასოს მნიშვნელობათა არეა K''^{*}-ზე განსაზღვრული ყველა n-ადგილიანი მეტაპრედიკატების მეტაერთობლიობა; n-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური ასოს მნიშვნელობათა არეა $K'' \to K''$ ტიპის ყველა n-ადგილიანი მეტაფუნქციის მეტაერთობლიობა, ამასთან, ამ მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ f მეტაფუნქციას გავაიგივებთ ისეთ $K''^{*} \to K''^{*}$ ტიპის ყველგან განსაზღვრულ n-ადგილიან ფუნქციასთან, რომელიც f-ის გაგრძელებას წარმოადგენს და განსაზღვრულ მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ და მხოლოდ f ფუნქციის განსაზღვრის არეში.

ცხადია, L(T) ენის ალფაბეტის თითოეული ასოს მნიშვნელობათა არე $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ (იხ. 2.2.5) არის ნაწილი მისივე L(D) ენის $\mathscr{A}'\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა არისა. L(T) ენის საგნობრივ და პროპოზიციულ კონსტანტებს $\mathscr{A}'$ ინტერპრეტაციაში, განსაზღვრით, ექნება იგივე მნიშვნელობები, რაც მათ აქვთ $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში.

ვიგულისხმებთ, რომ D თეორიის L(D) ენის $\mathscr{A}'$ ინტერპრეტაციაში ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას ისევე განისაზღვრება, როგორც 3.1.2-ში; ასევე ვიგულისხმებთ, რომ პროპოზიციული კავშირების მიკავშირებული ფუნქციები ისევე განისაზღვრება როგორც, 3.1.1-ში და 3.1.3-ში (მხედველობაშია სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევა). ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ = და ≡ პრედიკატული სიმბოლოების მიკავშირებულ პრედიკატებად (ფუნქციებად) შესაბამისად მიჩნეულია

$$\{\langle a, a\rangle : a \in' K''\} \text{ და } \{\langle a, a\rangle : a \in' K''^{*}\}$$

(ასეთი სახის ჩანაწერი აღნიშნავს „: " სიმბოლოს წინ მყოფი სახის ჩანაწერით აღნიშნულ ყველა მეტასაგნის მეტაერთობლიობას, რომლისთვისაც სრულდება „: " სიმბოლოს შემდგომ მოცემული პირობა — იგი კერძო შემთხვევაში შესაძლოა იყოს მეტაკლასი, მეტასიმრავლე, კლასი, სიმრავლე). შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოტანილ ფრაზაში „= და ≡ პრედიკატული სიმბოლოების მიკავშირებულ პრედიკატებად (ფუნქციებად) შესაბამისად მიჩვეულია მეტაერთობლიობები..." ნაცვლად სიტყვისა „არის" გამოყენებულია სიტყვა „მიჩვეულია". ამის მიზეზია ის გარემოება, რომ

ხსენებული მეტაერთობლიობა არაა მეტაპრედიკატი (ისინი საკუთრივი მეტაერთობლიობებია) და, მაშასადამე, ისინი არ შეიძლება იყონ მიკავშირებული მეტაპრედიკატები (ან მეტაფუნქციები) პირდაპირი აზრით (ისინი არ არიან ორადგილიანი პრედიკატული ასოს მნიშვნელობათა არის საგნები). უფრო კორექტული იქნება თუ ჩავთვლით, რომ განხილული მეტაერთობლიობები განსაზღვრავენ $=$ და $\equiv$ პრედიკატული სიმბოლოების როლს $\mathcal{A}'$-ში ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას და, რომ ეს საკმარისია $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის აგების პროცესისათვის.

ბუნებრივად განისაზღვრება $\in'$ პრედიკატის როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას — იგი კუთვნილების პრედიკატია ინტუიციური აზრით. მის მიკავშირებულ პრედიკატად შეგვიძლია **მივიჩნიოთ** $\{\langle s_0, s_1\rangle : s_0 \in' s_1\}$ მეტაერთობლიობა.

ახლა, განვსაზღვროთ არაუდაბლესი საფეხურის მეტაკლასები (გავიხსენოთ, რომ $=$ და $\equiv$ პრედიკატებისაგან განსხვავებული T თეორიის საკუთრივი კონსტანტა ასო ოპერატორები D თეორიის L(D) ენის იმავე ტიპის არასაკუთრივი კონსტანტა ასო ოპერატორებია).

შენიშვნა. თითქმის ყველა პრაქტიკაში გამოყენებულ თეორიაში აღნიშნული სახის საკუთრივი კონსტანტა ასოების რიცხვი ნულია. შეგვიძლია ძირითადი თეორიის ცნება შეგვეზღუდა მოთხოვნით, რომ მას არ ჰქონოდა ხსენებული სახის საკუთრივი კონსტანტა ასო ოპერატორები. ასეთი შეზღუდვა არ გაგვათავისუფლებს რაიმე არსებითი სიძნელისაგან, რამდენადაც ზოგადი განხილვისას ვუშვებთ ხუთივე ტიპის კვანტორული ასოების არსებობის შესაძლებლობას (თუ რაიმე ტიპის კვანტორული ასო არსებობს თეორიის ალფაბეტში, მაშინ იმავე ტიპის საკუთრივი კონსტანტა ასოს დამატებით ქვემოთ განსაზღვრული π_α და π_∞ ერთობლიობები არ ფართოვდება და ამიტომ მეტასაგნის, მეტაკლასის და მეტასიმრავლის ცნებები არ იცვლება). რომ მოგვეთხოვა ფორმების მნიშვნელობების განსაზღვრისას ხსენებული ტიპის საკუთრივი კონსტანტა ასო, ოპერატორების როლის განსაზღვრა, მაშინ დამატებითი სიძნელეები გვექნებოდა ($=$ სიმბოლოს როლი D თეორიაში განისაზღვრება ისეთი მიკავშირებული ფუნქციით, რომელიც არაა მეტაკლასიც კი).

არაუდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლეები შემდეგნაირად განისაზღვრებიან.

Π იყოს D თეორიის ფორმულათა კლასი. W'-დან აღებული ნებისმიერი α რიგობრივი რიცხვისათვის განვსაზღვრავთ თვისებათა π_α ერ-

თობლიობას და α საფეხურის მეტასაგნებს — მეტასიმრავლეებს შემდეგნაირად. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის ძალით შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ π_β და β საფეხურის მეტასაგნები — მეტასიმრავლეები განსაზღვრულია α-ზე ნაკლები ყოველი რიგობრივი რიცხვისათვის.

1. π_α, განსაზღვრით, არის α-ზე ნაკლები საფეხურის მეტასაგანთა ერთობლიობაზე განსაზღვრული $S'x < \alpha \wedge P_\alpha(x)$ სახის თვისებათა ერთობლიობა, სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი **ცვლადია** D თეორიის ალფაბეტიდან, $P_\alpha(x)$ კი x-ის მიმართ თვისებად განხილული Π-დან აღებული ნებისმიერი შეზღუდულკვანტორებიანი A ფორმულაა, როცა A ფორმულაში მყოფი x-სგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადებისა და არასაკუთრივი კონსტანტა ასოების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია მათი ისეთი მნიშვნელობებით, რომელთა საფეხური α-ზე ნაკლებია, იმ პირობით, რომ x-გან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებისა და არასაკუთრივი საგნობრივი კონსტანტების მნიშვნელობების დასაფიქსირებლად გამოიყენება $\dagger$ და $\downarrow$ მეტასაგნებიც (განუსაზღვრელ მნიშვნელობებთან გაიგივებული სიმბოლო მეტასაგნები).

2. დაშვებით, π_α-დან აღებული ნებისმიერი $Q(x)$ თვისება განსაზღვრავს მეტასიმრავლეს — მეტასაგანს. ამასთან, თუ ეს $K[Q(x)]$ მეტასიმრავლე არაა α-ზე ნაკლები საფეხურის მეტასიმრავლე — მეტასაგანი, მაშინ, განსაზღვრით, $K[Q(x)]$ მეტასიმრავლე არის **α საფეხურის მეტასიმრავლე — მეტასაგანი** და ამ გზით მიღებული α საფეხურის მეტასიმრავლეების — მეტასაგნების გარდა სხვა α საფეხურის მეტასიმრავლე — მეტასაგანი არ არსებობს.

მეტასიმრავლისა და **მეტაელემენტის** ცნებები შემდეგნაირად განისაზღვრება. a არის მეტასიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არის უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლე ან მოიძებნება ისეთი $\alpha \in W'$ რიგობრივი რიცხვი, რომ a არის α საფეხურის მეტასაგანი (მეტასიმრავლე). **მეტაინდივიდი** ვუწოდოთ ისეთ უდაბლესი საფეხურის მატასაგანს, რომელიც არაა მეტასიმრავლე. **მეტაელემენტი** იყოს საერთო სახელწოდება მეტაინდივიდებისა და მეტასიმრავლეებისათვის. ვიგულისხმებთ, რომ თითოეული მეტასიმრავლე არის მეტაკლასი.

მეტასაგნის, მეტაკლასისა და მეტაზესიმრავლის ანუ უმაღლესი საფეხურის მეტასაგნის ცნებები შემდეგნაირად განისაზღვრებიან.

$\pi_{\text{თ}}$. განსაზღვრით, არის მეტაელემენტთა მეტაერთობლიობაზე განსაზღვრული „$e'x < \alpha \wedge P_{\text{თ}}(x)$" სახის თვისებათა ერთობლიობა, სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი ც ვ ლ ა დ ი ა D თეორიის ალფაბეტიდან, $P_{\text{თ}}(x)$ კი x-ის მიმართ თვისებად განხილული П-დან აღებული ნებისმიერი შეზღუდულ კვანტორებიანი A ფორმულაა, როცა A ფორმულაში მყოფი x-სგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადებისა და არასაკუთრივი კონსტანტა ასოების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია მათი ისეთი მნიშვნელობებით, რომლებიც ყველა მეტაელემენტის მეტაერთობლიობიდანაა აღებული, იმ პირობით, რომ x-სგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებისა და არასაკუთრივი საგნობრივი კონსტანტების მნიშვნელობების დასაფიქსირებლად გამოიყენება † და ⸸ მეტასაგნებიც (განუსაზღვრელ მნიშვნელობებთან გაიგივებული სიმბოლო მეტასაგნები).

დაშვებით, $\pi_{\text{თ}}$-დან აღებული ნებისმიერი Q(x) თვისება განსაზღვრავს მეტაკლასს. ამასთან, თუ არსებობს ისეთი A მეტასიმრავლე, რომ K[Q(x)] კლასს და A მეტასიმრავლეს ერთი და იგივე „ელემენტები" აქვთ, მაშინ K[Q(x)] მეტაკლასი და A მეტასიმრავლე ერთი და იგივეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, განსაზღვრით, K[Q(x)] მეტაკლასი არის **უმაღლესი საფეხურის მეტასაგანი** და ამ გზით მიღებული უმაღლესი საფეხურის მეტასაგნების გარდა სხვა უმაღლესი საფეხურის მეტასაგანი არ არსებობს.

ვიგულისხმებთ, რომ არსებობს მხოლოდ და მხოლოდ ზემოთ აღნიშნული გზით შემოტანილი მეტასიმრავლეები და მეტაკლასები.

უმაღლესი საფეხურის მეტასაგანს (მეტაზესიმრავლეს) ეწოდება, აგრეთვე, **საკუთრივი მეტაკლასი**. დასასრულ **მეტასაგანი** არის საერთო სახელი მეტაინდივიდებისა და მეტაკლასებისათვის.

ვიგულისხმებთ, რომ L(T) ენის შემზღუდავი წესების სისტემა შეიცავს წესებს, რომლებიც განსაზღვრავს პროპოზიციული კავშირებისა და სხვადასხვა ტიპის ასოების მნიშვნელობათა არეებს ისე, როგორც ეს 2.2.5-შია მოცემული; ასევე, აღნიშნული წესების სისტემა განსაზღვრავს ზემოთ განხილული პროპოზიციული კავშირების მიკავშირებულ ფუნქციებს და საკუთრივი კონსტანტა ოპერატორი ასოების მიკავშირებულ ფუნქციებს (ან პრედიკატებს) იმგვარად, როგორც ეს მოცემულია ამ პარაგრაფის წინა პუნქტებში (მხედველობაშია აღნიშნული ტიპის მხოლოდ ის სიმბოლოები, რომლებსაც შეიცავს T თეორიის ალფაბეტი). აღნიშნულის შესა-

ბამისად განსაზღვრულად ვიგულისხმებთ ხსენებული სიმბოლოების მნიშვნელობათა არეებს და ხსენებული საკუთრივი კონსტანტების მიკავშირებულ ფუნქციებს (მხედველობაშია ის ფაქტი, რომ T ძირითადი თეორიაა და, მაშასადამე, მისი ალფაბეტი მხოლოდ ზემოთ განხილულ პროპოზიციულ კავშირებს და ოპერატორულ ნიშნებს შეიცავს). შემდგომი ბიჯით T თეორიის არასაკუთრივ კონსტანტა ასო ოპერატორებს შევურჩევთ მნიშვნელობებს მათი მნიშვნელობების არეებიდან ნებისმიერად.

ახლა, D თეორიის L(D) ენის $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მისაღებად D თეორიის $=$ და $\equiv$ პრედიკატული სიმბოლოებისაგან განსხვავებულ T თეორიის კონსტანტა ოპერატორ ასოებს შევუნარჩუნებთ იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც მათ აქვთ $\mathcal{A}$-ში (T თეორიის ამა თუ იმ ასოს $\mathcal{A}$-ს მიმართ მნიშვნელობათა არე ნაწილია იმავე ასოს $\mathcal{A}'$-ის მიმართ მნიშვნელობათა არისა).

ამრიგად, $\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციის განსაზღვრა $=$, $\equiv$ და $\in'$ პრედიკატული სიმბოლოებისაგან, ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორებისაგან მოითხოვს მხოლოდ თითოეული მათგანის როლის განსაზღვრას ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას.

ახლა T თეორიის L(T) ენის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის აგების დასრულებისათვის კიდევ საჭიროა განისაზღვროს ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების მნიშვნელობათა არეები და მიკავშირებული ფუნქციები. ეს უკანასკნელნი, ახლა, ცალსახად განისაზღვრებიან და ეს განსაზღვრებები L(T) ენის შემზღუდავი წესების სისტემის ნაწილად უნდა მივიჩნიოთ.

აღნიშნული ცალსახობის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია არსებითად განსაზღვრულია. ტექნიკურ მოსაზრებებით საბოლოო განსაზღვრას მოგვიანებით განვახორციელებთ (ფაქტობრივად საჭირო განსაზღვრებები უფრო ზოგადი ფორმითაც უკვე მოცემულია 2.2.5-ში. მაგრამ მკითხველის ამ პუნქტში გაგზავნა მოგვიანებით აჯობებს ზოგიერთი მანამდე საჭირო საკითხების გაშუქების შემდეგ — ზოგიერთი მეტასიმრავლისა და მეტაკლასის არსებობის დადგენის შემდეგ, რამდენადაც 2.2.5-ში მოტანილი აღნიშნული განსაზღვრებები გულისხმობენ ხსენებული მეტასიმრავლეებისა და მეტაკლასების არსებობის ცოდნას). მანამდე სისტემატიურად შევისწავლით $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციებს და ამ შესწავლის პროცესში გამოვიყენებთ მხოლოდ იმას, რაც უკვე ვიცით $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის შესახებ. ასევე სისტემატურად შევისწავლით მეტასაგნის ცნებასა და მასთან დაკავშირებულ ცნებებს.

3.1.6 მეტათეორიისა და მეტაენის სისტემატიური შესწავლა. როგორც $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში, ისე $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში (T თეორიის) არასაკუთრივი კონსტანტა ასოების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის K უნივერსუმთან ან გაფართოებულ K' არესთან დაკავშირებული ერთი და იმავე ობიექტებით (K-ს ელემენტებით, K-ზე ან K'-ზე განსაზღვრული პრედიკატებით და ა. შ). ეს გარემოება უზრუნველყოფს I თავში მიღებული შედეგების გავრცელებას განხილულ ზოგადი შემთხვევისათვის. ასეთი შედეგებით ვისარგებლებთ ქვემოთ, მათ დამტკიცებას კი მკითხველს ვანდობთ. სიმარტივისათვის, ასეთი შედეგების გამოყენებისას ციტირებებს გავაკეთებთ პირველ თავში მოცემულ ანალოგებზე. ცხადია, $K \subseteq K'$

$\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციასთან დაკავშირებულ აღნიშვნების ანალოგებად $\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციაში ხშირად გამოვიყენებთ იმავე სიმბოლოებს, რომლებსაც ზედა დამატებით ინდექსად აქვთ ერთი შტრიხი. სიმარტივისათვის ზოგჯერ ამ დამატებით ინდექსს გამოვტოვებთ ხოლმე (განსაკუთრებით მაშინ, როცა ამით სიმბოლოს შინაარსი არ იცვლება — მაგალითად, თუ $\mathcal{A}$ სიმრავლეთა თეორიის ინტუიციური მოდელია, მაშინ $\varnothing$ და $\varnothing'$ სიმბოლოებს ერთი და იგივე შინაარსი აქვთ).

ახლა ადვილი დასანახია შემდეგი ლემის სამართლიანობა.

(1.1) ლემა 1. თითოეული მეტასაგანი ან მეტაინდივიდია ან მეტაკლასია; ამასთან, თითოეული მეტაკლასი არის კლასი ინტუიციური აზრით, ხოლო მეტაინდივიდი არაა კლასი ინტუიციური აზრით (მაშინ, როცა T აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიაა და $\mathcal{A}$ მისი მოდელია, მეტაინდივიდი შესაძლოა იყოს $\mathcal{A}$ მოდელის სიმრავლე; ეს არ მოხდება, როცა $\mathcal{A}$ ბუნებრივი (ინტუიციური) მოდელია.

2. თუ A არის მეტაკლასი, მაშინ $A \subseteq K'$

3. თუ $\alpha \neq \beta$, მაშინ α საფეხურის ყველა მეტასიმრავლის მეტასიმრავლეს არ აქვს საერთო ელემენტი β საფეხურის ყველა მეტასიმრავლის მეტასიმრავლესთან, უდაბლესი საფეხურის ყველა მეტასაგნის მეტასიმრავლესთან და ყველა მეტაზესიმრავლის ერთობლიობასთან (ან, რაც იგივეა, ყველა მეტაზესიმრავლის მეტაერთობლიობასთან).

განხილულ მეტასაგნებს მივიჩნევთ მეტათეორიის საგნებად. საქმე გვექნება მეტათეორიის სხვა სახის საგნებთანაც. მაგალითად, K' უნივერ-

სუმის საგნებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ მეტათეორიის სიმრავლე ჩვეულებრივი ინტუიციურ სიმრავლეთა თეორიის მეთოდებით რაიმე დამხმარე თეორიის განხილვის გარეშე. მეტათეორიის სიმრავლე, რომელიც შედგება K' არის ყველა საგნისაგან არ იქნება მეტაკლასი. მეტათეორიის ასეთი საგნების ზოგადად განხილვა საჭირო არაა, რამდენადაც საქმე გვექნება ასეთი საგნების მხოლოდ ზოგიერთ მაგალითთან. მაგალითად, $\in'$ ოპერატორის $\in'_{\mathcal{A}'}$ მიკავშირებული პრედიკატი უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც მეტათეორიის დალაგებული წყვილებისაგან შედგენილი მეტათეორიის სიმრავლე. სახელდობრ, მეტათეორიის $\langle a, b\rangle$ წყვილი არის $\in'_{\mathcal{A}'}$-ის ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a და b არის K'-დან აღებული საგნები და $a \in' b$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}'$-ში. ცხადია, $\in'_{\mathcal{A}'}$ (მეტათეორიის სიმრავლე) არაა მეტაკლასი (არაა მეტასაგანი). ცხადია, მეტათეორიის სიმრავლის ცნება მეტაკლასის ცნების განზოგადებაა.

$\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციას განვიხილავთ, როგორც ინტუიციურ სიმრავლეთა თეორიას, რომლისთვისაც კუთვნილების ოპერატორია $\in'$ ამიტომ მეტაკლასისა და მეტასიმრავლის ცნებებთან ერთად გვექნება ცნებები: **მეტაფუნქცია, მეტაფუნქცია მოდიფიცირებული აზრით, (n-ადგილიანი) მეტამიმართება** და ა. შ. $\in'$ განიხილება როგორც მიმართება მოდიფიცირებული აზრით. აქვე შევნიშნოთ რომ, თუ $\mathcal{A}$ კლასთა თეორიის ბუნებრივი (ინტუიციური) მოდელია, მაშინ $\mathcal{A}'$-ში T თეორიის $\in$ ოპერატორის მიკავშირებული პრედიკატი $\in'$ ოპერატორის მიკავშირებული პრედიკატის ნაწილია; ამასთან, $\in$ ოპერატორის მიკავშირებული პრედიკატი მეტასიმრავლეა, $\in'$ ოპერატორის მიკავშირებული პრედიკატის მეტაკლასის სახით წარმოდგენაც კი შეუძლებელია, გარდა ამისა, ამ პუნქტის ბოლომდე მოტანილი შედეგებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ ამ შემთხვევაში $\in$ ოპერატორის მიკავშირებული პრედიკატი 4-ზე ნაკლები ან ტოლი საფეხურის მეტასიმრავლეა და განისაზღვრება თვისებით:

$$S'x < 4 \wedge \exists a \in' \widetilde{K} \exists b \in' \widetilde{K}[a \in' \widetilde{K} \wedge b \in' \widetilde{K} \wedge x = \langle a, b\rangle \wedge a \in b],$$

სადაც, a, b და x არიან D თეორიის ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადები და $\widetilde{K}$ აფიქსირებს a, b და x ცვლადებისაგან განსხვავებული D თეორიის საგნობრივი ცვლადის მნიშვნელობას (აქ ვეყრდ-

ნობით იმ ფაქტს, რომ K-დან აღებული საგნებით შედგენილი დალაგებული მეტაწყვილის საფეხური 4-ზე ნაკლებია (იხ. ქვემოთ მოტანილი (1.2) ლემა), $\widetilde{K}$-ით აღინიშნება K არის საგნებისაგან შედგენილი მეტასიმრავლე, რომელიც ქვემოთ მოტანილი (1.1) წინადადების ძალით არსებობს და არის უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლე — მეტასაგანი).

თითოეული მეტაფუნქცია და მეტაპრედიკატი მეტასიმრავლეა (იხ. 5.4 და 5.5.1) როგორც მეტაფუნქცია მოდიფიცირებული აზრით, ისე მეტაპრედიკატი მოდიფიცირებული აზრით, შესაძლოა იყოს მეტაზესიმრავლე. **მოდიფიცირებულ მეტაფუნქციას**, შესაბამისად **მეტამიმართებას**, ვუწოდოთ **საკუთრივი** ან **არასაკუთრივი** იმისდა მიხედვით იგი მეტასიმრავლეა თუ მეტაზესიმრავლე.

სიმარტივისათვის, იქ სადაც საწინააღმდეგო არ გამომდინარეობს კონტექსტიდან ვიგულისხმებთ, რომ მეტაფუნქციები, მეტამიმართებები და ამ ტერმინებთან დაკავშირებული ტერმინები და ცნებები განიხილება მოდიფიცირებული აზრით. ამიტომ დამაზუსტებელ ფრაზას „მოდიფიცირებული აზრით" ხშირად გამოვტოვებთ ხოლმე. თუ $\mathcal{A}$ (კლასიკური) ინტუიციური სიმრავლეთა თეორიაა (ინტერპრეტაცია ყოველთვის შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კლასიკური შინაარსული თეორია), მაშინ $\mathcal{A}$ თეორიის ნებისმიერი A კლასი იქნება უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლე (იგი განისაზღვრება თვისებით „$x \in A$", სადაც x არის T თეორიის საგნობრივი ცვლადი, A-თი კი დაფიქსირებულია T თეორიის x-სგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადის მნიშვნელობა). ამიტომ, მაშინაც, როცა $\mathcal{A}$ კლასთა თეორიის ბუნებრივი (ინტუიციური) მოდელია, მეტასიმრავლე შეიძლება არ იყოს $\mathcal{A}$ თეორიის სისტემა. მაგალითად, თუ A ხსენებული მოდელის სიმრავლეა, მაშინ $\{\{A\}\}$ მეტასიმრავლე არაა $\mathcal{A}$ თეორიის სისტემა.

თუ T აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიაა, $\mathcal{A}$ კი მისი მოდელია, მაშინ $\mathcal{A}$ თეორიის სიმრავლე შესაძლოა არ იყოს სიმრავლე ინტუიციური აზრით. მეტასიმრავლეები $\mathcal{A}'$ თეორიაში სიმრავლეებია ინტუიციური აზრით. ასეთ შემთხვევაში, თუ A არის $\mathcal{A}$ მოდელის სიმრავლე, B კი არის $\mathcal{A}'$ თეორიის სიმრავლე ისე, რომ $a \in A$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \in' B$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}'$-ში, შესაძლოა, A და B არ იყონ ერთი და იგივე ობიექტები (შესაძლოა, B მეტასიმრავლე არ იყოს

$\mathcal{A}$ (მოდელის) თეორიის საგანი). საქმე იმაშია, რომ $\in$ მიმართება $\mathcal{A}'$ მოდელში რაღაც ნებისმიერი ისეთი ორადგილიანი მიმართებაა, რომლისთვისაც შესრულებულია სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები, და სრულიადაც არ მოითხოვება, რომ $\in$ მიმართებას ჰქონდეს იგივე შინაარსი, რაც მას აქვს ინტუიციურ სიმრავლეთა თეორიაში. $\mathcal{A}'$-ში $\in'$-ს ინტუიციური შინაარსი აქვს.

მეტასიმრავლეს ვუწოდოთ **საკუთრივი მეტასიმრავლე**, თუ იგი არაა (მოცემული T თეორიის) $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგანი. ბუნებრივად განისაზღვრება **მეტასისტემისა** და **მეტაერთობლიობის** ცნებები. ისინი მეტაკლასის ცნების ისეთივე განზოგადოებებს წარმოადგენს, როგორიც სისტემისა და ერთობლიობის ცნებებია კლასის ცნებისათვის. როგორც მეტასისტემა, ისე მეტაერთობლიობა ემთხვევა მისი შემადგენელი საგნებისაგან შედგენილ მეტაკლასს, როცა ასეთი კლასი არსებობს, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი მეტასაგანი არაა. ხშირად ნაცვლად ტერმინისა „მეტასიმრავლე", გამოვიყენებთ ტერმინს „სიმრავლე". ამასთან, როცა ტერმინი სიტყვათა ჯგუფია, მაშინ ხშირად დამაზუსტებელ ფრაზას ამ ჯგუფის არასრული ნაწილის მიმართ გამოვიყენებთ. მაგალითად ნაცვლად ტერმინისა „მეტადაულაგებელი მეტამათემატიკური n-ეული" გამოვიყენებთ ერთ-ერთს შემდეგი ტერმინებიდან „დაულაგებელი მეტამათემატიკური n-ეული", „მეტადაულაგებელი n-ეული". ვისარგებლებთ აგრეთვე სხვა ანალოგიური გამარტივებებით.

შეთანხმებით, ვიგულისხმებთ რომ, მაგალითად, ტერმინი მეტაფუნქცია არის გამარტივებული ფორმა **ტერმინისა მეტამათემატიკური ფუნქცია**. ვიგულისხმებთ, რომ ეს შეთანხმება ვრცელდება ყველა ტერმინზე, რომელიც იწყება წინსართით „მეტა" (მხედველობაშია ტერმინთა როგორც გამარტივებული ფორმები, ისე სრული ფორმები, დამოუკიდებლად იმისა ტერმინი შემოტანილია გამარტივებული ფორმით თუ სრული ფორმით). ამის შესაბამისად უნდა იქნეს გაგებული შემდეგი ტერმინების შინაარსი: „მეტამათემატიკური საგანი", „მეტამათემატიკური კლასი" და ა. შ.

T თეორიის მეტათეორიაში **ძირითადად** გამოვიყენებთ T თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში შემოტანილ აღნიშვნებსა და შეთანხმებებს. გაუგებრობათა თავიდან აცილების მიზნით შემოვიტანთ აგრეთვე ახალ აღნიშვნებსა და შეთანხმებებს. მაგალითად, თუ $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ მეტასაგნებია, მაშინ

$a_1,\ldots,a_n$ ობიექტებისაგან შედგენილ მეტადალაგებულ n-ეულს (მეტადალაგებულ სისტემას) აღვნიშნავთ $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$-ით — მეტადაულაგებელ n-ეულს კი აღვნიშნავთ $[a_1,\ldots,a_n]$-ით. ამასთან ცხადია, რომ იმ შემთხვევაშიც, როცა $\mathcal{A}$ ინტუიციურ სიმრავლეთა თეორიაა და $a_1,\ldots,a_n$ არიან $\mathcal{A}$ თეორიის საგნები, შესაძლოა $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ და $(a_1,\ldots,a_n)$ აღნიშვნებს არ ჰქონდეთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა (მაგალითად, როცა $a_1,\ldots,a_n$ საგნებიდან ერთი მაინც $\mathcal{A}$ თეორიის ზესიმრავლეა); აღნიშნულ შემთხვევაში მათ ერთი და იგივე მნიშვნელობა ექნებათ, როცა $a_1,\ldots,a_n$ ელემენტებია. იმავე აღნიშვნებს გამოვიყენებთ მეტათეორიის დალაგებული და დაულაგებელი n-ეულებისათვის (მეტაზესიმრავლეებიდან შედგენილი მეტათეორიის დაულაგებელი n-ეული არაა მეტათეორიის ცარიელი სიმრავლე! მეტაზესიმრავლეებისაგან შედგენილი მეტადაულაგებელი n-ეული ცარიელი მეტასიმრავლეა — ცარიელი სიმრავლეა).

(1.1) **წინადადება**. T თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის K უნივერსუმის საგნებისაგან შედგენილი მეტასიმრავლე არსებობს და იგი უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანია.

დამტკიცება. თუ K ცარიელია, მაშინ უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანი ცარიელი სიმრავლე (ინტუიციური აზრით) წარმოადგენს K უნივერსუმის საგნებისაგან შედგენილ მეტასიმრავლეს. თუ K არაა ცარიელი, მაშინ 2.1.1-ში მოტანილი შეთანხმებიდან გამომდინარეობს, რომ T თეორიის ალფაბეტი შეიცავს „=" პრედიკატს და $s_0, s_1,\ldots$ საგნობრივ ცვლადებს ან $\bar{s}_0, \bar{s}_2,\ldots$ საგნობრივ კონსტანტებს. ამიტომ K-ზე განსაზღვრული $x = x$ თვისება (სადაც x არის T თეორიის საგნობრივი კვანტორული ასო) განსაზღვრავს უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლეს, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ K უნივერსუმის შემადგენელი საგნები.

მეტასიმრავლე, რომლის არსებობასაც (1.1) წინადადება ადგენს, აღინიშნება $\widetilde{K}$-ით (K წარმოადგენს $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის — საგანთა ერთობლიობის აღნიშვნას). ცხადია, იგი არის საკუთრივი ერთობლიობა.

განვიხილოთ D^* თეორია, რომლის D-დან მისაღებად საკმარისია D თეორიის ალფაბეტს დაემატოს $\tilde{K}$ სიმბოლო არასაკუთრივ საგნობრივ კონსტანტად. D^* *თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია* აღინიშნება $\mathcal{A}^*$-ით და ისევ, განისაზღვრება როგორც D თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ $\mathcal{A}^*$-ის შემთხვევაში (დამატებით) $\tilde{K}$ არასაკუთრივ კონსტანტის მნიშვნელობად უნდა მივიჩნიოთ K უნივერსუმის საგნებისაგან შედგენილი მეტასიმრავლე.

T თეორიის ნებისმიერ **A** ფორმას შევუსაბამოთ D დამხმარე თეორიის შეზღუდულკვანტორებიანი $\mathbf{A}^*$ ფორმა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად. $\mathbf{A}^*$ არის D თეორიის ფორმათა

$$\mathbf{A}_0 \rightleftharpoons \mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$$

სახის მაქსიმალური სიგრძის მიმდევრობის უკანასკნელი წევრი, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი წესით. $\mathbf{A}_i$-ს ($i = 1,2,\dots,m$) მისაღებად საკმარისია მოიძებნოს $\mathbf{A}_{i-1}$-ის პირველი ისეთი $\sigma x \mathbf{A}'_{i-1}$ სახის ნაწილი, რომლის მთავარი ოპერატორი σx არის კვანტორის ისეთი შეუზღუდავი შემოსვლა $\mathbf{A}_{i-1}$-ში, რომლის $\mathbf{A}'_{i-1}$ ოპერანდი შეზღუდულკვანტორებიანი ფორმაა, და ეს ნაწილი შეიცვალოს $\sigma x[x \in Y_i \to \mathbf{A}'_{i-1}]$-ით ან $\sigma x[x \in Y_i \wedge \mathbf{A}'_{i-1}]$-ით იმისდა მიხედვით σ არის $\forall$ ან $\cdot\forall$ თუ არა, სადაც Y_i არის $\mathbf{A}_{i-1}$-ში შემოსვლის არმქონე D თეორიის მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადი. $\overline{\mathbf{A}}^*$-ით აღვნიშნოთ D^* თეორიის ფორმა, რომლის $\mathbf{A}^*$-დან მისაღებად საკმარისია $Y_1,\dots,Y_m$ ცვლადების ნაცვლად $\tilde{K}$-ის ჩასმა.

ადვილად დამტკიცდება შემდეგი წინადადება (იხ. (1;(3.1)) და (1;(3.2)) წინადადებები და მათი დამტკიცებები).

(1.2) წინადადება. ვთქვათ, **A** არის T თეორიის ფორმა, $X_1,\dots,X_n$ არის T თეორიის ასოების ისეთი მიმდევრობა, რომლის წევრებს შორის იმყოფება **A** ფორმის ყველა თავისუფალი ცვლადი, $\langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle$ კი არის $X_1,\dots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ. მაშინ T თეორიის **A** ფორმის მნიშვნელობა $X_1,\dots,X_n$ ასოების მნიშვნე-

ლობათა $\langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle$ სისტემისათვის იგივეა, რაც D^* თეორიის $\overline{A}^*$ ფორმის მნიშვნელობა $X_1,\dots,X_n$ ასოების $\mathcal{I}^*$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა იმავე სისტემისათვის.

შენიშვნა: ამ წინადადების სამართლიანობის ინტუიციურად გააზრებისათვის საჭიროა აღინიშნოს, რომ როგორც T თეორიის **A** ფორმის მნიშვნელობის გამოთვლისას, ისე D თეორიის $\overline{A}^*$ ფორმის მნიშვნელობის გამოთვლისას $\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ სახის კვანტორები $\widetilde{K}$ მეტასიმრავლეზე მოქმედებენ. არსებითად იგივე ითქმის $\tau\Delta$ და $\iota\Delta$ სახის კვანტორებზე (K-ში და K″-ში მონიშნული ობიექტები ერთი და იგივეა — ორივე ცარიელი მეტასიმრავლეა).

$a_1,\dots,a_n$ მეტაელემენტებისათვის არსებობს ისეთი A მეტასიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ $a_1,\dots,a_n$ მეტასაგნები. მართლაც, იგი განისაზღვრება:

$$S'x < \alpha \wedge [x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n] \qquad (1)$$

თვისებით, სადაც α ისეთი უმცირესი როგობრივი რიცხვია, რომელიც აღემატება $a_1,\dots,a_n$ მეტაელემენტების საფეხურებს, x არის (D თეორიის) საგნობრივი **კვანტორული ასო** ($a_1,\dots,a_n$ დამხმარე კონსტანტები აფიქსირებენ D თეორიის ერთმანეთისაგან და x-სგან განსხვავებული **კვანტორული საგნობრივი ასოების** მნიშვნელობებს). განხილულ A მეტასიმრავლეს ეწოდება $a_1,\dots,a_n$ **მეტაელემენტებისაგან შედგენილი მეტადაულაგებელი n-ეული** (ანუ **დაულაგებელი მეტამათემატიკური n-ეული** ანუ **დაულაგებელი მეტა n-ეული**) და აღინიშნება $[a_1,\dots,a_n]$-ით.

საზოგადოდ, $a_1,\dots,a_n$ მეტასაგნებისაგან შედგენილი მეტადაულაგებელი n-ეული აღინიშნება $[a_1,\dots,a_n]$-ით და, განსაზღვრით, არის $[a_{i_1},\dots,a_{i_k}]$, სადაც $a_{i_1},\dots,a_{i_k}$ არის მეტაელემენტებისაგან შედგენილი $a_1,\dots,a_n$ მიმდევრობის მაქსიმალური ქვემიმდევრობა.

ცხადია, $a_1,\dots,a_n$ მეტასაგნებისაგან შედგენილი მეტადაულაგებელი n-ეულის საფეხური არ აღემატება α-ს, სადაც α არის უმცირესი რიგობრივი რიცხვი, რომელიც აღემატება $a_1,\dots,a_n$ მიმდევრობაში მყოფ ყველა

მეტაელემენტის საფეხურს (როცა $a_1,...,a_n$ მიმდევრობის ყველა წევრი მეტაზესიმრავლეა, მაშინ $\alpha = 0$). ადვილად შევნიშნავთ, რომ თუ $a_1,...,a_n$ არიან $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის K უნივერსუმის საგნები, მაშინ $[a_1,...,a_n]$ უდაბლესი საფეხურის საგანი იქნება. მართლაც, ამ შემთხვევაში $K \neq \varnothing$, ამიტომ T თეორიას აქვს საგნობრივი კვანტორული ასო და შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (1) მიიღება T თეორიის ფორმულის თვისებად განხილვის შედეგად. პირობით ვიგულისხმოთ, რომ მეტასაგნების ცარიელი მიმდევრობის წევრებისაგან (მეტასაგნებისაგან) შედგენილი მეტადაულაგებელი 0-ეული არის ცარიელი მეტასიმრავლე.

$a_1,...,a_n$ მეტასაგნებისაგან შედგენილი **მეტადალაგებული n-ეული** (ანუ **დალაგებული მეტამათემატიკური n-ეული** ანუ **დალაგებული მეტა n-ეული**) შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრით:

$$\langle a_1 \rangle = a_1; \quad \langle a_1,...,a_n \rangle - [[1,[a_1]],...,[n,[a_n]]], \quad n = 0,2,3,...$$

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ $\langle a_1,...,a_n \rangle$, როცა $n \neq 1$, მეტასიმრავლეა. ადვილად მტკიცდება, რომ მეტაელემენტებისაგან შედგენილ დაულაგებელ და დალაგებულ მეტა n-ეულებს ისეთივე თვისებები აქვთ, რაც სიმრავლეთა თეორიაში ელემენტებისაგან შედგენილ დალაგებულ და დაულაგებელ მეტა n-ეულებს (იხ. 3.3).

ნებისმიერ თეორიაში ნებისმიერი **T** ტერმისა და **A** ფორმულისათვის

$$\begin{gathered} \forall\Delta[\Delta \in \mathbf{T} \to \mathbf{A}], \quad \exists\Delta[\Delta \in \mathbf{T} \wedge \mathbf{A}], \\ \tau\Delta[\Delta \in \mathbf{T} \wedge \mathbf{A}], \quad \iota\Delta[\Delta \in \mathbf{T} \wedge \mathbf{A}], \end{gathered} \tag{2}$$

ფორმების გამარტივებულ აღნიშვნებად შესაბამისად მივიჩნიოთ შემდეგი სიტყვები:

$$\forall\Delta \in \mathbf{TA}, \quad \exists\Delta \in \mathbf{TA}, \quad \tau\Delta \in \mathbf{TA}, \quad \iota\Delta \in \mathbf{TA}$$

(როცა გამარტივებული აღნიშვნის შესაბამისი სიტყვა მოცემული თეორიის ფორმაა).

ახლა ადვილად შევნიშნავთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ლემის 1-6 პუნქტები.

(1.2) ლემა. 1. $a_1,...,a_n$ $(n > 0)$ მეტაელემენტებისაგან შედგენილი მეტადაულაგებელი n-ეულის საფეხური არ აღემატება α-ს, სადაც α არის უმცირესი რიგობრივი რიცხვი, რომელიც აღემატება $a_1,...,a_n$ მეტაელემენტების საფეხურებს.

2. ნებისმიერი $\alpha \in W'$ რიგობრივი რიცხვი მეტასიმრავლეა და მისი საფეხური α-ს არ აღემატება. n ნატურალური რიცხვის საფეხური n-ზე ნაკლებია.

3. თუ $\mathcal{M}$ სიმრავლეთა თეორიის ინტუიციური მოდელია, მაშინ ამ მოდელის რიგობრივი რიცხვები უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლეებია.

4. $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგნებისაგან (ან უფრო ზოგადად: უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნებისაგან) შედგენილი მეტადალაგებული n-ეულების საფეხური $(n + 1)$-ს არ აღემატება.

5. α საფეხურის მეტასიმრავლის ელემენტის საფეხური α-ზე ნაკლებია. უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლის ელემენტი უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანია.

6. თუ $n > 1$ და α ისეთი მინიმალური რიგობრივი რიცხვია, რომელიც აღემატება $a_1,\ldots,a_n$ მეტაელემენტების საფეხურებს, მაშინ $\langle a_1,\ldots,a_n \rangle$ დალაგებული მეტამათემატიკური n-ეულების საფეხური $\max[n + 1, \alpha + 2]$-ს არ აღემატება. თუ, გარდა აღნიშნულისა, $\alpha > 0$, მაშინ ხსენებული მეტამათემატიკური n-ეულების საფეხური $\alpha + 2$-ზე ნაკლები არაა. მაშასადამე, თუ $n > 0$ და β საფეხურის მეტამათემატიკური n-ეულების ერთი კომპონენტი მაინც არაა უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანი, მაშინ ამ მეტამათემატიკური n-ეულის თითოეული კომპონენტის საფეხური ნაკლებია $(\beta - 2)$-ზე, სადაც $\beta - 2$-ით აღნიშნულია β რიგობრივი რიცხვის უშუალოდ წინა რიცხვის უშუალოდ წინა რიგობრივი რიცხვი (ასეთი რიგობრივი რიცხვის არსებობა გამომდინარეობს ამ მე-6 პუნქტის წინა წინადადებიდან). საზოგადოდ მეტამათემატიკური n-ეულის საფეხური მისი კომპონენტის საფეხურზე ნაკლები არაა და ტოლობას აქვს ადგილი მხოლოდ $n = 1$ შემთხვევაში და აგრეთვე, იმ შემთხვევაში, როცა მეტამათემატიკური n-ეული უდაბლესი საფეხურის მეტასაგანია.

7. $A_1,\ldots,A_n$ მეტასიმრავლეების პირდაპირი ნამრავლი მეტასიმრავლეა, რომლის საფეხური არ აღემატება $(n + \alpha + 2)$-ს, სადაც α არის უმცირესი რიგობრივი რიცხვი, რომელიც აღემატება $A_1,\ldots,A_n$ მეტასიმრავლეების საფეხურებს.

8. ვთქვათ, $n > 0$ და A და B მეტასიმრავლეებია, α კი ისეთი უმცირესი რიგობრივი რიცხვია, რომელიც აღემატება A და B მეტასიმრავლეების საფეხურებს და ნულს. მაშინ:

a) $A \to B$ ტიპის ყველა n-ადგილიანი ყველგან განსაზღვრული მეტაფუნქციების მეტაერთობლიობა მეტასიმრავლეების მეტაკლასია.

b) $A \to B$ ტიპის ყველა n-ადგილიანი მეტაფუნქციის მეტაერთობლიობა მეტასიმრავლეების მეტაკლასია. ამასთან, ამ მეტაკლასის თითოეული ელემენტის (ე. ი. $A \to B$ ტიპის n-ადგილიანი მეტაფუნქციის) ნებისმიერი ელემენტის საფეხური $(\alpha + n + 4)$-ს არ აღემატება.

c) A-ზე განსაზღვრული ყველა n-ადგილიანი მეტაპრედიკატის მეტაერთობლიობა მეტასიმრავლეების მეტაკლასია. ამასთან, ამ მეტაკლასის ელემენტის ელემენტის საფეხური $(\alpha + n + 2)$-ს არ აღემატება.

დავამტკიცოთ მე-7 პუნქტი. $n = 1$ შემთხვევა ტრივიალურია. ვიგულისხმოთ, რომ $n > 1$. მაშინ $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{X}}} A_i$ მეტაერთობლიობის განმსაზღვრელი თვისება იქნება $S_{n+\alpha+2}$-ზე განსაზღვრული შემდეგი თვისება:

$$S'x < n + \alpha + 2 \wedge \exists x_1 \in' S'_\alpha \cdots$$

$$\cdots \exists x_n \in' S''_\alpha [x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \wedge x_1 \in' A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in' A_n]$$

სადაც $x, x_1, \ldots, x_n$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია (ამ თვისების მეორე თანამამრავლი მიიღება

$$\exists x_1 \in' Y \cdots \cdots \exists x_n \in' Y[x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \wedge x_1 \in' Y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in' Y_n]$$

შეზღუდულკვანტორებიანი ფორმულის x-ის მიმართ თვისებად განხილვის შედეგად, სადაც $Y, Y_1, \ldots, Y_n$ ერთმანეთისაგან და $X, X_1, \ldots, X_n$ ცვლადებისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია); აქ მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის გარემოება, რომ როცა $x_1 \in' A_1, \cdots, x_n \in' A_n$, მაშინ $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$-ის საფეხური (წინა პუნქტის ძალით) $n + \alpha + 1$-ს არ აღემატება, $x_i \in S'_\alpha$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ და S'_α-ს საფეხური არის α. აღნიშნულიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{X}}} A_i$ მეტაერთობლიობა $n + \alpha + 2$-ზე ნაკლები ან ტოლი საფეხურის მეტასიმრავლეა.

ახლა დავამტკიცოთ უკანასკნელი პუნქტი: (1; (3.1)) თეორემისა და ამ ლემის მე-6 პუნქტის დახმარებით ადვილად დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $A \to B$ ტიპის n-ადგილიანი მეტაფუნქცია მეტასიმრავლეა, რომლის ელემენტის საფეხური $(n + \alpha + 4)$-ს არ აღემატება.

a) ქვეპუნქტის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ a) ქვეპუნქტში ხსენებული მეტაერთობლიობა განისაზღვრება მეტაკლასის განმსაზღვრელი შემდეგი თვისებით:

$$\mathfrak{e}X \wedge \forall Y \in' X[\exists Y_1 \in A \wedge \cdots \wedge \exists Y_n \in' A \wedge \exists Y_0 \in' B[Y = \langle\langle Y_1,\ldots,Y_n\rangle, Y_0\rangle]$$

$$\wedge \forall Y_1 \in A^n \forall Y_2 \in' B \forall Y_3 \in' B[\langle Y_1, Y_2\rangle \in' X \wedge \langle Y_1, Y_3'\rangle \in' X \to Y_2 = Y_3]$$

$$\wedge \forall Y_1 \in A^n \exists Y_2 \in B[\langle Y_1, Y_2\rangle \in' X]$$

სადაც $X, Y, Y_0, Y_1,\ldots,Y_n$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია, A, B, A^n ცვლიან თვისებად განხილულ ფორმულაში შესაბამისად Z_1, Z_2, Z_3 ერთმანეთისაგან და $X, Y, Y_0, Y_1,\ldots,Y_n$ ცვლადებისაგან განსხვავებულ საგნობრივ ცვლადებს. ასევე დამტკიცდება b) ქვეპუნქტის დარჩენილი ნაწილი იმ განსხვავებით, რომ განხილულ თვისებაში ზედმეტია უკანასკნელი ლოგიკური თანამამრავლი. c) ქვეპუნქტის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნავთ, რომ წინა პუნქტის ძალით A^n მეტასიმრავლეა და A-ზე განსაზღვრული n-ადგილიანი მეტაპრედიკატების მეტაერთობლიობა არის A^n მეტასიმრავლის ყველა ქვეკლასის (ანუ ქვესიმრავლის) მეტაკლასი (იხ. (1; (3.1)) თეორემის I შედეგი და (1; (3.3)) თეორემა); ამასთან, ამ მეტაკლასის ელემენტის ელემენტის საფეხური, მე-6 პუნქტის ძალით, $(\alpha + n + 2)$-ს არ აღემატება.

ბუნებრივად ისმის შემდეგი:

ამოცანა. გამოიკვლიეთ არის თუ არა ჭეშმარიტი შემდეგი წინადადება: „მეტაკლასების პირდაპირი ნამრავლი (მეტაერთობლიობა) არის მეტაკლასი?"

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმი K არაა ცარიელი. მაშინ T თეორიის ალფაბეტი არაა უმარტივესი და (2; (1.1)) შეთანხმების ძალით T თეორიის ალფაბეტი შეიცავს $s_0, s_1,\ldots$ საგნობრივ ცვლადებს ან $\bar{s}_0, \bar{s}_2,\ldots$ არასაკუთრივ საგნობრივ კონსტანტებს და, ამასთან, შეიცავს $=$ პრედიკატულ ნიშანს.

დამოუკიდებლად იმისა T ორმნიშვნელობიანი თუ სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიაა, იმ შემთხვევაში, როცა ამბობენ: „T თეორიის **A პროპოზიციული ფორმა განხილული** $\mathcal{A}$ **ინტერპრეტაციაში როგორც K ტიპის** (მეტამათემატიკური) **n-ადგილიანი მიმართება** T თეორიის ერთმანეთისაგან განსხვავებული $X_1,\ldots,X_n$ **კვანტორული საგნობრივი ასოების მიმართ**", მხედველობაში აქვთ K ტიპის n-ადგილიანი მეტაპრედიკატი G, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: n კომპონენტიანი მეტა n-ეული $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ არის G-ს ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\{1, 2,\ldots,n\}$-დან აღებული თითოეული i-სთვის a_i არის X_i ასოს მნიშვნელობათა არის ელემენტი (ე. ი. საგანი K უნივერსუმიდან) და A ფორმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$. ასოების მნიშვნელობათა $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ სისტემისათვის არის t (აქ იგულისხმება, რომ A ფორმის $X_1,\ldots,X_n$ ასოებისაგან განსხვავებული $Z_1,\ldots,Z_K$ თავისუფალი ცვლადებისა და თავისუფალი არასაკუთრივი კონსტანტების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია და G დამოკიდებულია ამ $Z_1,\ldots,Z_K$ ასოების მნიშვნელობათა დაფიქსირებულ სისტემაზე); ვნახავთ, რომ აღნიშნული სახის მეტა n-ეულების მეტაერთობლიობა მეტაკლასია (უფრო მეტიც, მეტასიმრავლეა) და, მაშასადამე, მოტანილი განსაზღვრა კორექტულია. ასევე, T თეორიის ნებისმიერი T **ტერმი** შეგვიძლია **განვიხილოთ** $\mathcal{A}$ **ინტერპრეტაციაში, როგორც** K → K ტიპის n-ადგილიანი მეტაფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავებული $X_1,\ldots,X_n$ **კვანტორული საგნობრივი ასოების მიმართ.** აქ მხედველობაშია $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle, T(a_1,\ldots,a_n)\rangle$ სახის ყველა ისეთი მეტაწყვილისაგან შედგენილი K → K ტიპის n-ადგილიანი მეტაფუნქცია f, რომ $T(a_1,\ldots,a_n)$ არის T ტერმის განსაზღვრული მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ სისტემისათვის. ამ f მეტაფუნქციას უწოდებენ, აგრეთვე, T **ტერმით განსაზღვრულ n-ადგილიან საგნობრივ მეტაფუნქციას** ერთმანეთისაგან განსხვავებულ $X_1,\ldots,X_n$ კვანტორული **საგნობრივი ასოების მიმართ.** ამ შემთხვევაშიც ვნახავთ, რომ აღნიშნული სახის მეტაენეულების მეტაერთობლიობა მეტასიმრავლეა.

შევნიშნოთ, რომ განხილული G და f მეტაერთობლიობები მეტასიმრაველებია.

მართლაც, G განისაზღვრება $(n+2)$-ზე ნაკლები საფეხურის მქონე მეტასაგანთა S'_{n+2} მეტასიმრავლეზე განსაზღვრული შემდეგი თვისებით:

$$Sx < n+2 \wedge \exists X_1 \in' \widetilde{K} \cdots \exists X_n \in' \widetilde{K}[x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \wedge \overline{\overline{\overline{A}}}^{\bullet}] \qquad (3)$$

სადაც X არის D თეორიის ისეთი მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადი, რომელსაც შემოსვლა არ აქვს A ფორმაში, განსხვავდება $X_1,\ldots,X_n$ კვანტორული საგნობრივი ასოებისაგან და A-დან $A^{\bullet}$-ის მიღებისას გამოყენებულ A-ში შემოსვლის არმქონე $Y_1,\ldots,Y_m$ ცვლადებისაგან, $\overline{\overline{\overline{A}}}^{\bullet}$ მიიღება $\overline{A}^{\bullet}$-დან $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში არმყოფი A ფორმის $Z_1,\ldots,Z_K$ თავისუფალი ცვლადების და თავისუფალი არასაკუთრივი კონსტანტა ასოების მნიშვნელობის დამფიქსირებელი $b_1,\ldots,b_K$ დამხმარე კონსტანტების ჩასმით ($\overline{\overline{\overline{A}}}^{\bullet}$-ის მისაღებად საკმარისია D თეორიის $A^{\bullet}$ ფორმაში $Z_1,\ldots,Z_K$ ცვლადებისა და არასაკუთრივი კონსტანტების ნაცვლად ჩაისვას $b_1,\ldots,b_K$ დამხმარე კონსტანტები, $Y_1,\ldots,Y_m$ ცვლადების ნაცვლად კი ჩაისვას K უნივერსუმის საგნებისაგან შედგენილი მეტასიმრავლის აღმნიშვნელი $\widetilde{K}$ დამხმარე კონსტანტა); აქ მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის გარემოება, რომ (3) ლოგიკური ნამრავლის მეორე თანამამრავლი $x = a$-სთვის არის მცდარი, როცა a არის $(n+2)$-ზე მეტი ან ტოლი საფეხურის მეტაკლასი, რამდენადაც წინა ლემის ძალით $\widetilde{K}$ მეტასიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული მეტა n-ეულის საფეხური $(n+2)$-ზე ნაკლებია. ახლა ადვილი დასანახია, რომ განხილული თვისება შეზღუდულკვანტორებიანი ფორმულის თვისებად განხილვის შედეგად მიიღება (გავიხსენოთ, რომ საზოგადოდ $\exists x \in Y B$ არის $\exists x[x \in Y \wedge B]$ ფორმულის შემოკლებული აღნიშვნა). ასევე, ზემოთ განხილული f-ი მეტასიმრავლეა. იგი განისაზღვრება S'_{n+5}-ზე განსაზღვრული შემდეგი თვისებით (აქ წინა ლემის უკანასკნელი პუნქტის გამოყენებისას α-ს როლში გამოდის $n+2$):

$$S'x < (n+5) \wedge \exists Y \in' \widetilde{K} \exists x_1 \in' \widetilde{K} \cdots$$

$$\cdots \exists x_n \in' \widetilde{K}[x = \langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle, Y\rangle \wedge Y = \overline{\overline{\overline{T}}}^{\bullet}]$$

სადაც X ისევე განისაზღვრება როგორც წინა შემთხვევაში (იმ განსხვავებით, რომ A ფორმის როლში გამოდის T ტერმი); იგივე ითქმის $\overline{\overline{\overline{T}}}^{\bullet}$-ზე ($\dot{T}$-დან იმავე გზით მიიღებიან $T^{\bullet}$, $\overline{T}^{\bullet}$ და $\overline{\overline{\overline{T}}}^{\bullet}$ ტერმები); მხედველობაშია სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაც. ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაში განხილული თვისების ნაცვლად შეგვეძლო აგვეღო S'_{n+5}-ზე განსაზღვრული შემდეგი თვისება:

$$Sx\langle(n+5)\wedge\exists x_1\in'\widetilde{K}\cdots\exists x_n\in'\widetilde{K}[x=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle,\overline{\overline{\overline{T}}}^{\bullet}\rangle]$$

ცხადია, განხილული G, შესაბამისად f, მეტასიმრავლის საფეხური $(n+2)$-ს, შესაბამისად $(n+5)$-ს, არ აღემატება.

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი თვისება ზოგად შემთხვევაში (ე.ი. როცა მხედველობაშია როგორც ორმნიშვნელობიანი, ისე სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორია) განსაზღვრავს მეტასიმრავლეს, რომელსაც ეწოდება $\mathcal{A}$ **ინტერპრეტაციაში T ტერმით განსაზღვრული $K\rightarrow K^{\bullet}$ ტიპის** (ანუ **T ტერმით განსაზღვრული განზოგადებული საგნობრივი) n-ადგილიანი მეტაფუნქცია $X_1,\ldots,X_n$ კვანტორული საგნობრივი ასოების მიმართ** (იგი შედგება $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,T(a_1,\ldots,a_n)\rangle$ სახის ყველა მეტაწყვილისაგან, სადაც $T(a_1,\ldots,a_n)$ არის T ტერმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $(a_1,\ldots,a_n)$ სისტემისათვის). იგი ყველგან განსაზღვრული იქნება. ცხადია აგრეთვე, რომ ზოგად შემთხვევაში

$$Sx<(n+5)\wedge\exists Y\in'\widetilde{K}\wedge\exists x_1\in'\widetilde{K}\cdots$$
$$\cdots\exists x_n\in'\widetilde{K}[x=\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle,Y\rangle\wedge Y=\overline{\overline{A}}^{\bullet}]$$

თვისებით განისაზღვრება მეტასიმრავლე. ამ მეტასიმრავლეს ეწოდება **A ფორმულით განსაზღვრული (ჭეშმარიტული) მეტაფუნქცია $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ**. იგი $K\rightarrow\{t,f\}$ ტიპის n-ადგილიანი მეტაფუნქციაა. ეს ფუნქცია ყველგან განსაზღვრულია, როცა T ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიაა. იგი შედგება $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,A(a_1,\ldots,a_n)\rangle$ სახის ისეთი მეტაწყვილებისაგან, რომლის მეორე კომპონენტი არის t ან f. ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაში უკანასკნელი თვისების ნაცვლად შეგვეძლია ავიღოთ შემდეგი თვისება:

$$Sx < n + 5 \wedge \exists x_1 \in' \widetilde{K} \cdots \exists x_n \in' \widetilde{K}[x = \left\langle \langle x_1,\ldots,x_n\rangle, \overline{\overline{A}}^* \right\rangle].$$

უკანასკნელი თვისება ზოგად შემთხვევაში განსაზღვრავს მეტასიმრავლეს, რომელსაც ეწოდება **A ფორმულით განსაზღვრული განზოგადებული (ჭეშმარიტული) მეტაფუნქცია $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ**. იგი $K \to \{t, f, \dagger\}$ ტიპის ყველგან განსაზღვრული n-ადგილიანი მეტაფუნქციაა.

განხილულ თვისებებში $\overline{\overline{A}}^*$ შეიძლება შეიცვალოს $\overline{A}$-ით, სადაც $\overline{A}$ არის A-ში $Z_1,\ldots,Z_K$ ცვლადების არასაკუთრივი კონსტანტების თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად $b_1,\ldots,b_K$ დამხმარე კონსტანტების ჩასმის შედეგი, იმ პირობით, რომ თვისების განსაზღვრის არედ უნდა იქნეს მიჩნეული K უნივერსუმი, $\overline{A}$ კი უნდა იქნეს მიჩნეული T თეორიის კვაზიფორმად (იხ. (1.2) წინადადება). სამართლიანია ამ წინადადების სრული ანალოგი $\overline{\overline{T}}^*$-ის მიმართ. სწორედ ასეთი თვისებები უნდა მივიჩნიოთ შემოტანილი ტერმინებით აღნიშნული ობიექტების განმსაზღვრელ თვისებებად (როგორც ეს გვქონდა G და f-ის განსაზღვრისას).

შევნიშნოთ, რომ მიღებული შედეგების საფუძველზე ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ რიგი კონკრეტული მეტასიმრავლეების არსებობა. მაგალითად, T თეორიის $x_1 = x_1$ ფორმულით განსაზღვრული n-ადგილიანი მეტაპრედიკატი (მეტასიმრავლე) T თეორიის ერთმანეთისაგან განსხვავებული $X_1,\ldots,X_n$ კანტორული საგნობრივი ასოების მიმართ იქნება $\widetilde{K}^n$, X_1 ტერმით განსაზღვრული მეტაფუნქცია (მეტასიმრავლე) x_1-ს მიმართ კი იქნება იგივური ფუნქცია $\widetilde{K}$-ზე.

ასევე ადვილად დამტკიცდება, რომ T თეორიის $Y_1,\ldots,Y_n$ კანტორული საგნობრივი ასოების ყველა მნიშვნელობათა სისტემის A მეტაერთობლიობა მეტასიმრავლეა. მართლაც, A არის n-ადგილიანი მეტაპრედიკატი, რომელიც მიიღება $x_1 = x_1 \wedge A$ ფორმულის ზემოთ განხილული $X_1,\ldots,X_n$ კანტორული საგნობრივი ასოების მიმართ n-ადგილიან მეტაპრედიკატად განხილვის შედეგად, სადაც A არის $x_i = x_j$ სახის ყველა ისეთი ტოლობის კონიუნქცია, რომლისთვისაც $i \neq j$ და Y_i არის Y_j. ქვემოთ მტკიცდება ეს წინადადება უფრო ზოგადი ფორმით (იხ. (1.4)

წინადადება), როცა $Y_1,\ldots,Y_n$ საგნობრივი და პროპოზიციული ასოების ნებისმიერი მიმდევრობაა (დაიშვება საკუთრივი კონსტანტებიც).

დადგენილი შედეგები ძალაში დარჩება თუ განხილულ ასოებისადმი წაყენებულ მოთხოვნებს შევასუსტებთ და ნაცვლად მოთხოვნისა, რომ ისინი იყოს კვანტორული ასოები მოვითხოვთ, რომ თითოეული მათგანი იყოს ცვლადი ან არასაკუთრივი კონსტანტა (დანარჩენი მოთხოვნების შეუცვლელად). მართლაც, თუ ასეთნაირად განზოგადებულ შემთხვევაში განხილული $X_1,\ldots,X_n$ ასოებს შორის გვხვდება არასაკუთრივი არაკვანტორული კონსტანტები, მაშინ მათ შევცვლით ისეთი კვანტორული ასოებით, რომლებსაც $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში და მოცემულ **A** ფორმაში შემოსვლა არ აქვთ, თანაც ისე, რომ განსხვავებული ასოები იცვლებოდნენ განსხვავებული ასოებით, ერთი და იგივე კი – ერთი და იგივე ასოებით. მიღებული **A′** ფორმის ასოთა შეცვლილი მიმდევრობის მიმართ სათანადო მეტაერთობლიობად განხილვა იმავე მეტაერთობლიობას მოგვცემს.

შევნიშნოთ, რომ თუ $X_1,\ldots,X_n$ არიან T თეორიის ერთმანეთისაგან განსხვავებული კვანტორული საგნობრივი ასოები და σ რელიაციური, შესაბამისად სუბსტანციური, სპეციალური მარტივი ოპერატორია, მაშინ $\sigma x_1\ldots x_n$ ატომალური ფორმა, განხილული $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში როგორც K ტიპის n-ადგილიანი მეტამიმართება, შესაბამისად $K \to K$ ტიპის n-ადგილიანი მეტაფუნქცია, T თეორიის $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ, იგივეა, რაც σ-ს მიკავშირებული ფუნქცია. ამიტომ (როცა σ-ს მის მიკავშირებულ ფუნქციასთან აიგივებენ) ნაცვლად ფრაზისა „σ მიმართება", შესაბამისად „σ ფუნქცია", ხშირად გამოიყენება ფრაზა „$\sigma X_1,\ldots,X_n$ მიმართება", შესაბამისად „$\sigma X_1,\ldots,X_n$ ფუნქცია".

აქვე შევნიშნოთ, რომ როცა $\mathcal{A}$ კლასთა თეორიის მოდელია, მაშინ განხილული მეტაფუნქცია შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ როგორც (მათემატიკური) სიმრავლე ან კლასი ან სისტემა. ასევე, როცა $\mathcal{A}$ საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის მოდელია, მაშინ განხილული მეტაფუნქცია შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ როგორც (მათემატიკური) სიმრავლე. იგივე ითქმის განხილული სახის მეტამიმართებაზე, როცა $\mathcal{A}$ კლასთა თეორიის მოდელია და აღნიშნული მეტა მიმართების ერთი მაინც „ელემენტის" ერთი მაინც კომპონენტი ზესიმრავლეა. ამრიგად, ამ პარაგრაფში განხილული ობიექტები კლასთა თეორიისა და საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაშიც ღრმად გამოდიან თეორიის $\mathcal{A}$ მოდელის საგანთა არედან.

სრულიად ანალოგიურად განიხილება $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში T თეორიის **ფორმულა**, შესაბამისად **ტერმი**, როგორც **ჭეშმარიტული მეტაფუნქცია და განზოგადებული ჭეშმარიტული მეტაფუნქცია**, შესაბამისად **საგნობრივი მეტაფუნქცია და განზოგადებული საგნობრივი მეტაფუნქცია**, $X_1,...,X_n$ კვანტორული **ასოების მიმართ**, სადაც X_i არის ან საგნობრივი ასო ან პროპოზიციული ასო $(i = 1,2,...,n)$. ასეთი σ მეტაფუნქციისათვისაც გვექნება $\sigma X_1,...,X_n$ სახის „გამარტივებული" აღნიშვნები.

ამ განსაზღვრებათა კორექტულობა (სათანადო მეტასიმრავლეების არსებობა) ისევე დამტკიცდება, როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, როცა D თეორიას აქვს არსებობის კვანტორი პროპოზიციული ასოთი. წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა მეტასიმრავლის სასრულობა და არსებობის კვანტორის როლი დიზიუნქციის ოპერატორს შევასრულებინოთ. მაგალითად, როცა მხოლოდ და მხოლოდ x_1 და x_2 არიან პროპოზიციული ცვლადები, მაშინ ზემოთ განხილულ თვისებებიდან, მაგალითად, უკანასკნელის ნაცვლად გვექნება:

$$Sx < n + 5 \wedge \exists x_3 \in \widetilde{K} \cdots \exists x_n \in \widetilde{K}[x = \left\langle \left\langle t, t, x_3, ..., x_n \right\rangle, \overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}_{tt} \right\rangle \vee$$

$$x = \left\langle \left\langle t, f, x_3, ..., x_n \right\rangle, \overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}_{tf} \right\rangle \vee x = \left\langle \left\langle f, t, x_3, ..., x_n \right\rangle, \overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}_{ft} \right\rangle \vee$$

$$x = \left\langle \left\langle f, f, x_3, ..., x_n \right\rangle, \overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}_{ff} \right\rangle]$$

სადაც $\overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}$ ისევე განისაზღვრება როგორც ზემოთ, $\overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}_{\sigma_1\sigma_2}$ კი მიიღება $\overset{\bullet}{\overline{\overline{\overline{A}}}}$-დან x_1 და x_2 ცვლადების თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად მათ მნიშვნელობათა (σ_1, σ_2) სისტემის ჩასმით.

(1.1) და (1.2) წინადადებების და (1.1) და (1.2) ლემების გამოყენებით შეიძლება სხვადასხვა საჭირო მეტაკლასებისა და მეტასიმრავლეების არსებობის დამტკიცება. მაგრამ ასეთი დამტკიცებების ძიება ყოველთვის წარმატებით არ სრულდება.

2.2.5-ში განხილული იყო მეტასიმრავლეთა მეტაერთობლიობები:

$$F^n_{\Phi s}, \overset{\bullet}{F}{}^n_{\Phi s}, F^n_{\Phi r}, \overset{\bullet}{F}{}^n_{\Phi r}, F^n_{ls}, \overset{\bullet}{F}{}^n_{ls}, F^n_{lr}, \overset{\bullet}{F}{}^n_{lr}, F^n_{\Phi s \bullet}, F^n_p, \overset{\bullet}{F}{}^n_p \ (n = 1,2,...). \quad (4)$$

(1.3) **ლემა.** 1. თუ (4)-დან აღებული თითოეული მეტაერთობლიობის განსაზღვრაში შევასუსტებთ მეტაერთობლიობის ელემენტებისადმი წაყენებულ მოთხოვნას და ნაცვლად მოთხოვნისა, რომ ისინი იყოს მეტასიმრავლეები მოვითხოვთ, რომ ისინი იყოს მეტაკლასები (დანარჩენი მოთხოვნების შეუცვლელად) მივიღებთ ხსენებული განსაზღვრის ტოლფას განსაზღვრას.

(2.4)-დან აღებული თითოეული მეტაერთობლიობა მეტაკლასია.

ეს ლემა (1.2) ლემის მე-8 პუნქტის უშუალო შედეგია.

ბუნებრივად ისმის შემდეგი

ამოცანა. (4)-დან აღებული ესა თუ ის მეტაკლასი არის თუ არა მეტასიმრავლე?

ადვილად შეიძლება იმის დანახვა, რომ ამ ამოცანის თითოეული შემთხვევას ექნება დადებითი პასუხი თუ დამტკიცდება, რომ მეტასიმრავლის ქვემეტასიმრავლეთა მეტაკლასი მეტასიმრავლეა. $\mathbf{F}_p^n$ არის $\widetilde{\mathrm{K}}^n$ მეტასიმრავლის ქვემეტასიმრავლეთა მეტაკლასი (თუ ეს მეტაკლასი საკუთრივი მეტაკლასია, მაშინ $\mathbf{F}_p^n$-თვის განხილულ ამოცანას უარყოფითი პასუხი ექნება).

დამხმარე D თეორიაში შემამოკლებელი სიმბოლო (წარმოებული საგნობრივი კონსტანტა) $\varnothing'$ შემოიტანება განსაზღვრით:

$$\varnothing' - \tau x \forall y [y \in x \leftrightarrow \neg y = y],$$

სადაც x და y ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადებია. ცხადია, ამ კონსტანტას მნიშვნელობა $\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციაში ცარიელი მეტასიმრავლეა. იგი $\mathcal{A}'$-ში არის უდაბლესი საფეხურის მეტასიმრავლე (მეტასაგანი). $\varnothing'$ კონსტანტის დახმარებით D თეორიაში შემოიტანება 3.2, 3.3 და (5; 5.6) პუნქტებში განხილული შემამოკლებელი სიმბოლოები.

იმის დამტკიცება, რომ D თეორიის ამა თუ იმ ხსენებულ შემამოკლებელ (წარმოებულ) სიმბოლოს $\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციაში აქვს ისეთივე ბუნებრივი შინაარსი, როგორი შინაარსიც მას აქვს სიმრავლეთა თეორიის ამა თუ იმ მოდელში. მოითხოვს სათანადო მეტაკლასების არსებობის დამტკიცებას. ასეთი მტკიცებების მოძებნა ადვილია წარმოებული საგნობრივი კონსტანტების შემთხვევაში. წარმოებული ოპერატორების შემთხვევაში მტკიცებების მოძებნა ზოგჯერ არ ხერხდება. ამასთან, ზოგიერ-

თი მიზნისათვის ხშირად საკმარისია დამტკიცდეს, რომ მას ბუნებრივი შინაარსის აქვს კონკრეტულად მოცემული არგუმენტების შემთხვევაში (ან არგუმენტთა რაიმე ერთობლიობისათვის). აქ არაა სავალდებულო დავეყრდნოთ მხოლოდ და მხოლოდ შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრაში მოცემულ სათანადო მეტაკლასის განმსაზღვრელ თვისებებს.

მაგალითად, იმის დასამტკიცებლად, რომ $\mathcal{A}'$-ში

$$I' - \tau x \forall y[y \in' x \leftrightarrow \neg y = \varnothing' \wedge \forall z[\neg z \in' y]] \qquad (5)$$

განსაზღვრით შემოტანილი I' კონსტანტას მნიშვნელობაა ყველა მეტაინდივიდის მეტასიმრავლე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\neg y = \varnothing' \wedge \forall z[\neg z \in' y] \qquad (6)$$

თვისება განსაზღვრავს მეტასიმრავლეს. ე. ი. უნდა დავამტკიცოთ ყველა მეტაინდივიდის მეტასიმრავლის არსებობა. ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ შემდეგი. უკანასკნელი თვისება ტოლძალოვანია S_1'-ზე განსაზღვრული შემდეგი თვისებისა:

$$Sy < 1 \wedge y \in' S_0' \wedge \neg y = \varnothing' \wedge \forall z \in' S_0'[\neg z \in' y];$$

ამასთან, უკანასკნელი თვისება განსაზღვრავს მეტასიმრავლეს, რომლის საფეხური 1-ს არ აღემატება (აქ ვსარგებლობთ იმ ფაქტით, რომ $\varnothing'$ აღნიშნავს ცარიელ მეტასიმრავლეს — უდაბლესი საფეხურის საგანს, S_0' კი აღნიშნავს უდაბლესი საფეხურის ყველა მეტასაგნის მეტასიმრავლეს, რომლის საფეხური ნულია. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\varnothing'$ და S_0' კონსტანტები აფიქსირებენ y_1 და y_2 საგნობრივი ცვლადების მნიშვნელობებს). აქ აუცილებელი არაა განხილულ თვისებაში $\varnothing'$-ის ნაცვლად $\varnothing'$-ით აღნიშნული ტერმინის ჩასმა ($\varnothing'$-ის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ცარიელი მეტასიმრავლის აღმნიშვნელი ნებისმიერი დამხმარე კონსტანტა). ამით თავიდან ვიცდენთ ხსენებული ჩასმის შედეგად შემოჭრილი შეუზღუდავი კვანტორების შეზღუდვის შესაძლებლობის დამტკიცებას.

აღნიშნული სიძნელეების წარმოშობის მიზეზია ის გარემოება, რომ $\mathcal{A}'$ თეორიაში არ გვაქვს მეტაკლასების არსებობის ისეთი მძლავრი აქსიომები, როგორიც გვაქვს სიმრავლეთა თეორიებში. ამიტომ საჭირო იქნება ზოგიერთი განსაზღვრის დაზუსტება. მაგალითად, f (**მოდიფიცირებული**) **მეტაფუნქციის განსაზღვრის არედ**, შესაბამისად **მნიშვნელობათა არედ**. უნდა მივიჩნიოთ მისი ელემენტების პირველი, შესაბა-

მისად მეორე, კომპონენტებისაგან შედგენილი **მეტაერთობლიობა**. თუ ეს მეტაერთობლიობა არაა მეტაკლასი, მაშინ $P^2_{r_1}f$, შესაბამისად $P^2_{r_2}f$, არ იქნება f ფუნქციის განსაზღვრის არე, შესაბამისად მნიშვნელობათა არე (ისინი ცარიელი მეტასიმრავლეები იქნება). ასევე, $A_1,\dots,A_n$ **მეტაკლასების პირდაპირ ნამრავლად** უნდა მივიჩნიოთ $(a_1,\dots,a_n)$ სახის მეტადალაგებული სისტემების მეტაერთობლიობა, სადაც a_i არის A_i კლასის ნებისმიერი ელემენტი ($i = 1,2,..,n$).

მომდევნო აბზაცში შემოტანილ სიმბოლოთა განსაზღვრებებში გამოყენებულია მომდევნო 3.2 პარაგრაფში და 3.3.3 პუნქტში შემოტანილი $\mathfrak{m}$, $P^2_{r_1}f$, $P^2_{r_2}f$ შემამოკლებელი სიმბოლოები.

$\mathcal{A}'$ ინტერპრეტაციაში $\widetilde{\Phi}^{3n}$ და $\widetilde{\Phi}^{3n}_b$ წარმოებული ოპერატორები შემოიტანებიან შემდეგი განსაზღვრებებით.

$$\widetilde{\Phi}^{3n}T_1T_2T_3 - \mathfrak{m}T_1 \wedge g^r_f T_1 \wedge P^2_{r_1}T_1 \subseteq T^n_2 \wedge P^2_{r_2}T_1 \subseteq T_3 \ (n=1,2,\dots); \quad (7)$$

$$\widetilde{\Phi}^{3n}_b T_1T_2T_3 - \mathfrak{m}T_1 \wedge g^r_f T_1 \wedge P^2_{r_1}T_1 = T^n_2 \wedge P^2_{r_2}T_1 \subseteq T_3 \ (n=1,2,\dots); \quad (8)$$

სადაც T_1, T_2, T_3 ნებისმიერი ტერმებია; $\widetilde{\Phi}^{3n}T_1T_2T_3$, შესაბამისად $\widetilde{\Phi}^{3n}_b T_1T_2T_3$, იკითხება ფრაზით: T_1 **არის** $T_2 \to T_3$ **ტიპის n-ადგილიანი საკუთრივი მეტაფუნქცია**, შესაბამისად **n-ადგილიანი, ყველგან განსაზღვრული საკუთრივი მეტაფუნქცია** (იხ. 5.5.3). სიმარტივისათვის, წარმოებული ოპერატორების აღნიშვნებში ზედა ინდექსებად „′" ნიშანი გამოტოვებულია.

დავამტკიცოთ, რომ $\widetilde{\Phi}^{3n}T_1T_2T_3$, შესაბამისად $\widetilde{\Phi}^{3n}_b T_1T_2T_3$, ფორმულას შესაბამისი ფრაზის შინაარსი აქვს — იგი ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისი ფრაზა ჭეშმარიტია.

T_1, T_2 და T_3 ტერმების თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობების ნებისმიერად დაფიქსირების შედეგად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ T_1, T_2 და T_3 საგნობრივი კონსტანტებია. ცხადია, $\mathfrak{m}T_1 \wedge g^r_f T_1$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა T_1 მეტასიმრავლეცაა და ფუნქციონალური მეტაგრაფიკიც. ე.ი. როცა T_1 საკუთრივი მეტაფუნქციაა (აქ არ

მოითხოვება რაიმე მეტასიმრავლის არსებობის დამტკიცება). საკმარისია (და აუცილებელი) ვიგულისმოთ, რომ T_1 საკუთრივი მეტაფუნქციაა და ვაჩვენოთ, რომ $P^2_{r_i}T_1$ ტერმის მნიშვნელობაა T_1 ტერმის ელემენტების (წყვილების) i-ური კომპონენტებისაგან შედგენილი მეტაკლასი (რომ ხსენებული სახის ყველა კომპონენტის მეტაკლასი არსებობს) ($i = 1,2$). ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს შემდეგი ლემიდან.

(1.4) ლემა. ვთქვათ, n ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვია და A არის α რიგობრივი რიცხვზე ნაკლები საფეხურის მეტასიმრავლე. მაშინ A-ში ელემენტად შემავალი (მეტაელემენტებისაგან შედგენილი) დალაგებული მეტა n-ეულების i-ური ($1\lesssim i \lesssim n$) კომპონენტების A_i მეტაერთობლიობა მეტასიმრავლეა და მისი საფეხური $\alpha + 1$-ს არ აღემატება. მაშასადამე, $P^n_{2_i}A$ ხსენებულ A_i მეტაერთობლიობას (მეტასიმრავლეს) ემთხვევა.

შენიშვნა: თუ A მეტაკლასის აღმნიშვნელი დამხმარე სიმბოლოა, მაშინ $P^n_{r_i}A$ კვაზიტერმია, რომლის მნიშვნელობაა ლემის ფორმულირებაში ხსენებული მეტაერთობლიობა ან ცარიელი მეტასიმრავლე იმისდა მიხედვით, ეს მეტაერთობლიობა მეტაკლასია თუ არა (იხ. 3.3.3).

ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ლემის ფორმულირებაში ხსენებული მეტაერთობლიობა განისაზღვრება შემდეგი (მეტასიმრავლის განმსაზღვრელი) თვისებით:

$$S'x < \alpha + 1 \wedge \exists x_1 \in' S'_\alpha \cdots \exists x_n \in' S'_\alpha \exists y \in' S'_\alpha$$
$$[y \in' A \wedge y = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \wedge x = x_i],$$

სადაც $x, y, x_1,\ldots,x_n$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია, S'_α და A კი თვისებად განხილულ ფორმულაში ცვლიან ერთმანეთისაგან და $x, y, x_1,\ldots,x_n$ ასოებისაგან განსხვავებულ y_1 და y_2 საგნობრივ ცვლადებს (აქ მხედველობაში უნდა მივიღოთ (1.2) ლემა, რომლის ძალით მეტაკლასის საფეხური მისი ელემენტის საფეხურზე ნაკლები არაა (პუნქტი 5) და მეტა n-ეულის საფეხური მისი კომპონენტის საფეხურზე ნაკლები არაა (პუნქტი 6))*.

დამტკიცებული ლემიდან და (1.2) ლემის მე-8 პუნქტიდან გამომდინარეობს

(1.3) წინადადება. თუ A და B მეტასიმრავლეებია და f არის $A \to B$ ტიპის მეტაფუნქცია, მაშინ f, f-ის **განსაზღვრის** არე და f-ის მნიშვნელობათა არე მეტასიმრავლეებია.

ზემოთ განხილული მეთოდით ადვილად დამტკიცდება შემდეგი

(1.4) წინადადება. ვთქვათ, $X_1,\ldots,X_n$ არის (T თეორიის) საგნობრივ და პროპოზიციულ ასოთა მიმდევრობა. მაშინ არსებობს A მეტასიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემები.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული X_i საგნობრივი ასოა.

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში მყოფი არასაკუთრივი კონსტანტა კვანტორული ასოა (წინააღმდეგ შემთხვევაში $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში მყოფ არასაკუთრივ არაკვანტორულ კონსტანტებს გამოვცვლით $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში არამყოფ შესაბამისი ტიპის კვანტორული ასოებით ისე, რომ ერთი და იმავე ასოების შემოსვლები შეიცვალოს ერთი და იმავე ასოებით, სხვადასხვა ასოების შემოსვლები კი — სხვადასხვა ასოებით (ამით A არ შეიცვლება)). მაშინ A განისაზღვრება $\mathscr{A}'$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმზე განსაზღვრული შემდეგი (მეტასიმრავლის განმსაზღვრელი) თვისებით:

$$S'x < 1 \wedge \exists x_{i_1} \in' S'_0 \cdots \exists x_{i_k} \in' S'_0 [x = \langle x_1,\ldots,x_n \rangle],$$

სადაც $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ არის $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობის მაქსიმალური ქვემიმდევრობა არაგანმეორებითი კვანტორული ასოებისა, X კი D თეორიის ისეთი საგნობრივი ცვლადია, რომელიც განსხვავდება $X_1,\ldots,X_n$ ასოებისაგან.

ეს მტკიცება განზოგადდება ზოგადი შემთხვევისათვის იმავე მეთოდით, რომელიც ზემოთ (ამავე პუნქტში) მითითებულია. ფორმით განსაზღვრული მეტაფუნქციებისა და მეტამიმართებების შესახებ მიღებული შედეგების განზოგადებისათვის.

თუ T თეორიის $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის საგანთა $\dot{K}$ არე T^* აქსიომური საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის ან კლასთა თეორიის $\mathscr{A}^*$ მოდელიდან აღებული სიმრავლეა, მაშინ (4) ერთობლიობები შეიძლება შემდეგნაირადაც იქნეს ინტერპრეტირებული (გაგებული).

$F^n_{\Phi s}$ არის T^* თეორიის $\mathcal{A}$ მოდელის $K \to K$ ტიპის ყველგან განსაზღვრული (მოდიფიცირებული) n-ადგილიანი ფუნქციების სიმრავლე (ასეთი სიმრავლის არსებობას უზრუნველყოფს T^* თეორიის აქსიომები). ასევე განისაზღვრება $F^n_{\Phi s^\bullet}$ და F^n_p. დანარჩენი კლასებიც რომ განისაზღვროს როგორც $\mathcal{A}$ მოდელის სიმრავლეები, საკმარისია f, t, † და ⊥ ობიექტები გავაიგივოთ $\mathcal{A}$ მოდელის ისეთ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ a_0, a_1, a_2, a_3 სიმრავლეებთან, რომლებიც K სიმრავლის ელემენტები არ არიან (თუ T^* არის S_1, მაშინ a_0, a_1, a_2, a_3 სიმრავლეებად ვიგულისხმებთ 0, 1, 2, 3 ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს). თუ K საკუთრივი კლასია (ე.ი. $\mathcal{A}$-დან აღებული ზესიმრავლეა), მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (4) სიმბოლოების მნიშვნელობებია სათანადო სახის კლასთა სისტემები. ასეთნაირად აგებულ შინაარსულ თეორიას უწოდებენ **T^* თეორიის $\mathcal{A}$ მოდელის ფრაგმენტს**. როცა K არე კონკრეტულად არ არის მითითებული, მაშინ ფრაგმენტის აქსიომათა სისტემის მისაღებად საჭიროა T^* თეორიის აქსიომათა სისტემა გავაფართოვოთ ფრაგმენტებისათვის (K არისათვის) დამახასიათებელი დამატებითი აქსიომებით. სიმრავლეთა თეორიის ამა თუ იმ ფრაგმენტს უწოდებენ, აგრეთვე **კერძო მათემატიკურ თეორიას**.

ამრიგად, არსებობს კერძო მათემატიკური თეორიის აგების ორი ძირითადი გზა. I გზა გულისხმობს კერძო მათემატიკური თეორიის (სიმრავლეთა თეორიისაგან) დამოუკიდებლად აგებას, მეორე კი კერძო მათემატიკურ თეორიას განიხილავს როგორც კლასიკურ სიმრავლეთა თეორიის ფრაგმენტს. უკანასკნელი გზა უფრო მკაცრი და კომპაქტურია — რიგი ცნებების შინაარსი უფრო ნათელია. მაგალითად, ტერმინი „ყველა ჯგუფთა კლასი" სავსებით ნათელი შინაარსის მათემატიკური ტერმინია, როცა ჯგუფის ცნება შემოიტანება როგორც აქსიომური სიმრავლეთა თეორიის ფიქსირებული მოდელის ფრაგმენტი.

3.1.7 ელემენტთა სქემა. A მეტაკლასის **ელემენტთა სქემა** ეწოდება ისეთ ფუნქციონალურ მეტაგრაფიკს, რომლის მნიშვნელობათა არის თითოეული ელემენტი A მეტაკლასის ელემენტია. მას ეწოდება, აგრეთვე **ელემენტთა სქემა**.

ამოცანა. გამოარკვიეთ არის თუ არა ჭეშმარიტი შემდეგი წინადადება: **A** მეტაკლასის ელემენტთა სქემის მნიშვნელობათა არე არის მეტაკლასი (ე. ი. არის **A** მეტაკლასის ნაწილი)?

თუ **A** ელემენტთა სქემის მნიშვნელობათა არის თითოეული ელემენტი მოცემული შინაარსული მათემატიკური T თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმიდან აღებული საგანია, შესაბამისად მათემატიკური წინადადებაა, შესაბამისად განსაზღვრული ჭეშმარიტული მნიშვნელობაა, მაშინ **A**-ს ეწოდება **საგნობრივი სქემა** ანუ **საგანთა სქემა**, შესაბამისად **პროპოზიციული სქემა** ანუ **წინადადებრივი სქემა** ანუ **წინადადებათა სქემა**, შესაბამისად **ჭეშმარიტული სქემა** ანუ **ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა სქემა**. ვაიგივებთ რა მათემატიკურ წინადადებას მის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობასთან, პროპოზიციულ სქემას განვიხილავთ როგორც ჭეშმარიტულ სქემას. თუ **A** ელემენტთა სქემის თითოეული ელემენტი არის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმიდან აღებული საგანი ან საგნობრივი განუსაზღვრელობა, შესაბამისად განსაზღვრული ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ან პროპოზიციული განუსაზღვრელობა, მაშინ **A**-ს ეწოდება **განზოგადებული საგნობრივი სქემა**, ანუ **განზოგადებული საგანთა სქემა**, შესაბამისად **განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემა** ანუ **განზოგადებული ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა სქემა**. შეიძლებოდა სხვა ტიპის სქემებისათვის შემოგვეტანა სპეციალური ტერმინები, მაგრამ ჩვენთვის საკმარისია აღნიშნული ოთხი სახის სქემის განხილვა. ესენია: საგნობრივი სქემა, ჭეშმარიტული სქემა, განზოგადებული საგნობრივი სქემა და განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემა.

ვთქვათ, **A** არის A მეტაკლასის ელემენტთა სქემა, $X_1,\ldots,X_n$ საგნობრივი და პროპოზიციული (მათემატიკური) ასოების არაცარიელი მიმდევრობაა[1], A_i არის X_i ასოს მნიშვნელობათა არე $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში, B კი $X_1,\ldots,X_n$ ასოების $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა ყველა დალაგებული სისტემის მეტასიმრავლეა (იხ. (1.4) წინადადება). თუ **A** ელემენტთა სქემის განსაზღვრის არე არის B მეტასიმრავლის ნაწილი, შესაბამისად B მეტასიმრავლის საკუთრივი ნაწილი, შესაბამისად B მეტა-

[1] ე. ი. X_i მეტაცვლადი აღნიშნავს გარკვეულ მათემატიკურ ასოს, რომელიც ან საგნობრივი ასოა ან პროპოზიციული.

სიმრავლე, მაშინ ამბობენ, რომ $\mathbf{A}$ არის ($\mathbf{A}$ მეტაკლასის) ელემენტთა სქემა, შესაბამისად ნაწილობრივი ელემენტთა სქემა, შესაბამისად ყველგან განსაზღვრული ელემენტთა სქემა, $X_1,\dots,X_n$ ასოების მიმართ. თუ $\mathbf{A}$ არის $\mathbf{A}$ მეტაკლასის ელემენტთა სქემა (განხილული) $X_1,\dots,X_n$ ასოების მიმართ, მაშინ $\mathbf{a}'$ აქსიომის (მხედველობაში $\mathbf{a}$ აქსიომის სრული ანალოგი (იხ. 1.3.3)) II შედეგის ძალით $\mathbf{A}$ მეტასიმრავლეა (ფუნქციონალური მეტაგრაფიკი მისი განსაზღვრის არის ეკვივალენტურია ინტუიციურად; მეტასიმრავლის ნაწილი მეტასიმრავლეა). მეტასიმრავლეა აგრეთვე $\mathbf{A}$-ს ყველა ისეთი ელემენტების პირველი კომპონენტების მეტაერთობლიობა, რომელთა მეორე კომპონენტი ფიქსირებული $\mathbf{a}$ მეტაელემენტია (განისაზღვრება α-ზე ნაკლები საფეხურის მქონე მეტასაგანთა S'_α მეტასიმრავლეზე განსაზღვრული $S'x < \alpha \wedge \langle x, \mathbf{a} \rangle \in \mathbf{A}$ თვისებით, სადაც α არის $\mathbf{A}$ მეტასიმრავლის საფეხურის უშუალოდ მომდევნო რიგობრივი რიცხვი). $\mathbf{a}'$ და $\mathbf{b}'$ აქსიომების, (1.2) ლემის მე-4 და მე-6 პუნქტებისა და (1; (3.1)) თეორემის (უფრო ზუსტად: (1; (3.1)) თეორემის სრული ანალოგის, რომლისთვისაც არსებითად ძალაშია (1; (3.1)) თეორემის დამტკიცება) საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ უკანასკნელ განსაზღვრაში სიტყვა „ნაწილი" ორივეგან შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „ქვეერთობლიობა" მართლაც, $\mathbf{a}'$ და $\mathbf{b}'$ აქსიომების ძალით, როგორც ზემოთ, ამ შემთხვევაშიც ვრწმუნდებით, რომ $\mathbf{A}$ მეტაკლასი მეტასიმრავლეა. აქედან (1.4) ლემის დახმარებით გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{A}$ ელემენტთა სქემის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე (მეტაერთობლიობები) მეტასიმრავლეებია. ცხადია, თუ $X_1,\dots,X_n$ ასოები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, მაშინ $\mathbf{B} = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$, წინააღმდეგ შემთხვევაში უკანასკნელ ტოლობას ადგილი არ აქვს.

ვთქვათ, ახლა, $X_1,\dots,X_n$ ასოების ისეთი არაცარიელი მიმდევრობაა, რომლის წევრთა შორის ერთი მაინც არაა არც საგნობრივი ასო და არც პროპოზიციული. ამ შემთხვევაშიც თითოეული X_i ასოს მნიშვნელობათა $\mathbf{A}_i$ არე მეტაკლასია, მაგრამ არ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ იგი მეტასიმრავლეა. $\mathbf{B}$ იყოს $X_1,\dots,X_n$ ასოების $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა ყველა დალაგებული სისტემის მეტაერთობლიობა. ჯერჯერობით არ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ეს მეტაერთობლიობა მეტაკლასია.

არ შეგვიძლია ვამტკიცოთ ელემენტთა ისეთი სქემის არსებობა, რომლის განსაზღვრის არე B მეტაერთობლიობაა. უფრო მეტიც, თუ B საკუთრივი მეტაერთობლიობაა, მაშინ სავარაუდოა, რომ ასეთი ელემენტთა სქემა არ არსებობდეს. ამიტომ წინა აბზაცში შემოტანილი ცნებების პირდაპირი გავრცელება განხილულ შემთხვევისათვის არ შეგვიძლია. ხსენებულ ცნებებს განხილულ შემთხვევისათვის შემდეგნაირად გავავრცელებთ. ბუნებრივად **განისაზღვრება მეტაწყვილებისაგან შედგენილი ფუნქციონალური მეტაერთობლიობის** ცნება და მისი **განსაზღვრის არისა** და **მნიშვნელობათა არის** ცნებები. **A მეტაკლასის ელემენტთა სქემა**, შესაბამისად **ელემენტთა ყველგან განსაზღვრული სქემა**, შესაბამისად **ელემენტთა ნაწილობრივი სქემა, $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ**, ეწოდება მეტაწყვილებისაგან შედგენილ ისეთ ფუნქციონალურ მეტაერთობლიობას, რომლის მნიშვნელობათა არის თითოეული ელემენტი A მეტაკლასის ელემენტია[1], განსაზღვრის არე კი არის B მეტაერთობლიობის ნაწილი, შესაბამისად B მეტაერთობლიობა, შესაბამისად B მეტაერთობლიობის საკუთრივი ნაწილი, წინა შემთხვევის საწინააღმდეგოდ, არ გამოვრიცხავთ იმის შესაძლებლობას, რომ ამ შემთხვევაში უკანასკნელი ტერმინებით აღნიშნული ობიექტები არ იყოს ელემენტთა სქემები (არ იყოს მეტაკლასები). მიუხედავად ამისა, უკანასკნელი განსაზღვრა წინა განსაზღვრასთან წინააღმდეგობაში არაა.

ზემოთ ფაქტობრივად დავამტკიცეთ შემდეგი:

წინადადება 1.5 ვთქვათ, $X_1,\ldots,X_n$ არის T თეორიის ალფაბეტის საგნობრივი და პროპოზიციული ასოების არაცარიელი მიმდევრობა, $\mathcal{A}$ არის A მეტაკლასის ელემენტთა სქემა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ T თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში, B კი $X_1,\ldots,X_n$ ასოების $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა ყველა დალაგებული სისტემის მეტაერთობლიობაა. მაშინ მეტასიმრავლეებია A, B, A-ს განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე და, აგრეთვე, A-ს ისეთი ელემენტების პირველი კომპონენტების მეტაერთობლიობა, რომელთა მეორე კომპონენტი ფიქსირებული მეტაელემენტია. **ამასთან**, A სქემაა.

---

[1] არ გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა ხსენებული მნიშვნელობათა არე არაა A მეტაკლასის ნაწილი (ე.ი. როცა ხსენებული არე საკუთრივი მეტაერთობლიობაა).

ვთქვათ, $\mathbf{A}$ არის T თეორიის პროპოზიციული, შესაბამისად საგნობრივი ფორმა. $X_1,\ldots,X_n$ კი (მათემატიკური) ასოების არაცარიელი მიმდევრობაა. **$\mathbf{A}$ ფორმით განსაზღვრული ჭეშმარიტული სქემა,** შესაბამისად **საგნობრივი სქემა,** $X_1,\ldots,X_n$ **ასოების მიმართ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში** ეწოდება $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle, A'\rangle$ სახის ყველა მეტაწყვილის მეტაერთობლიობას, სადაც $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ არის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი ისეთი სისტემა, რომლისთვისაც განსაზღვრულია $\mathbf{A}$ ფორმის მნიშვნელობა, A' კი $\mathbf{A}$ ფორმის ხსენებული მნიშვნელობაა (იგულისხმება, რომ $X_1,\ldots,X_n$ ასოებისაგან განსხვავებული $\mathbf{A}$ ფორმის თავისუფალი ცვლადების და თავისუფალი არასაკუთრივი კონსტანტების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია და, მაშასადამე, განხილული ტიპის სქემა ამ უკანასკნელი ასოების მნიშვნელობათა დაფიქსირებულ სისტემაზეა დამოკიდებული). ანალოგიურად, $\mathbf{A}$ **ფორმით განსაზღვრული განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემა,** შესაბამისად **განზოგადებული საგნობრივი სქემა,** $X_1,\ldots,X_n$ **ასოების მიმართ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში** ეწოდება $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle, A'\rangle$ სახის ყველა მეტაწყვილის მეტაერთობლიობას, სადაც $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ არის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემა, A' კი არის $\mathbf{A}$ ფორმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ სისტემისათვის (არ გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა $\mathbf{A}$ ფორმის ხსენებული მნიშვნელობა განუსაზღვრელია). ხშირად ამ სქემებს ისევ $\mathbf{A}$ ფორმით აღნიშნავენ (ე. ი. $\mathbf{A}$ ფორმას განიხილავენ როგორც სათანადო ტიპის სქემას ან როგორც სათანადო ტიპის განზოგადებულ სქემას). **ფორმით განსაზღვრულ ამა თუ იმ ტიპის განზოგადებულ სქემას** ვუწოდოთ **საკუთრივი,** თუ იგი არაა ფორმით განსაზღვრული სათანადო ტიპის სქემა.

საზოგადოდ, არ გამოვრიცხავთ იმის შესაძლებლობას, რომ ფორმით განსაზღვრული სქემა, შესაბამისად განზოგადებული სქემა, $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ არ იყოს (ჩვეულებრივი) სქემა (არ იყოს მეტაკლასი). მაგრამ ქვემოთ მოტანილი (1.5) და (1.6) ლემებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ

$X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობის თითოეული წევრი ან საგნობრივი ასოა, ან პროპოზიციული ასო, მაშინ **A** ფორმის $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ სქემად, შესაბამისად განზოგადებულ სქემად, განხილვით მიიღება სათანადო ტიპის (ჩვეულებრივი) სქემა (უფრო მეტიც, იგი წარმოადგენს არა მარტო მეტაკლასს, არამედ მეტასიმრავლესაც).

ცხადია, ფორმით განსაზღვრული განხილული განზოგადებული სქემები არიან სათანადო ტიპის ყველგან განსაზღვრული სქემები $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ.

ლემა 1.5 $X_1,\ldots,X_n$ $(n>0)$ საგნობრივი ასოების მიმართ $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში **T** თეორიის **A** ფორმულით, შესაბამისად ტერმით, განსაზღვრული ჭეშმარიტული სქემა და განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემა, შესაბამისად საგნობრივი სქემა და განზოგადებული საგნობრივი სქემა, მეტასიმრავლეებია.

დამტკიცება. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში მყოფი თითოეული არასაკუთრივი კონსტანტა კვანტორული ასოა (წინააღმდეგ შემთხვევაში $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში მყოფ არაკვანტორულ არასაკუთრივ კონსტანტებს გამოვცვლით **A** ფორმაში შემოსვლის არმქონე და $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობაში არმყოფი კვანტორული საგნობრივი ასოებით ისე, რომ ერთი და იმავე ასოს შემოსვლები შეიცვალოს ერთი და იმავე ასოებით, სხვადასხვა ასოების შემოსვლები კი შეიცვალოს სხვადასხვა ასოებით და შესაბამის გამოცვლებს მოვახდენთ **A** ფორმაში; მიღებული ფორმა საგნობრივ ასოთა შეცვლილი მიმდევრობის მიმართ სათანადო ტიპის სქემად განხილვისას მეტაწყვილთა იმავე მეტაერთობლიობას განსაზღვრავს). ჯერ ვიგულისხმებთ, რომ **T** სამნიშნელობიანი ლოგიკური თეორიაა (მეორე შემთხვევა ამ შემთხვევის კერძო შემთხვევად უნდა მივიჩნიოთ). ამ ზოგად შემთხვევაში **A** ფორმულით, შესაბამისად ტერმით, განსაზღვრებადი სქემის შესაბამისი წყვილთა მეტაერთობლიობა $\mathcal{M}'$ ინტერპრეტაციის მეტაელემენტთა მეტაკლასზე განსაზღვრული შემდეგი თვისებით განისაზღვრება:

$$\exists x_{i_1} \in' S_0' \cdots \exists x_{i_k} \in' S_0' [x = \langle \langle x_1,\ldots,x_n \rangle, \overline{A} \rangle \wedge \neg\overline{A} \approx \dagger] \qquad (1)$$

შესაბამისად

$$\exists x_{i_1} \in' S_0' \cdots \exists x_{i_k} \in' S_0' [x = \langle \langle x_1,\ldots,x_n \rangle, \overline{A} \rangle \wedge \neg\overline{A} \equiv \perp] \qquad (2)$$

სადაც $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ არის $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობის მაქსიმალური ქვემიმდევრობა კვანტორული ასოებისა, x კი D თეორიის ისეთი საგნობრივი ცვლადია. რომელიც განსხვავდება $X_1,\ldots,X_n$ ასოებისაგან და არ აქვს შემოსვლა $\mathbf{A}$ ფორმაში. ამასთან, $\overline{\mathbf{A}}$ მიიღება $\mathbf{A}$ ფორმიდან $X_1,\ldots,X_n$ ასოებისაგან განსხვავებული $\mathbf{A}$ ფორმის თავისუფალი ცვლადების და თავისუფალი არასაკუთრივი კონსტანტების ნაცვლად მათი დაფიქსირებული მნიშვნელობების აღმნიშვნელი დამხმარე კონსტანტების ჩასმით. (1.4) ლემის დამტკიცებაში გამოყენებული მეთოდით დამტკიცდება, რომ ეს მეტაერთობლიობა არის მეტასიმრავლე (რომ (1), შესაბამისად (2), ტოლძალოვანია S'_k სახის მეტასიმრავლეზე შეზღუდულკვანტორებიანი ფორმულით განსაზღვრული თვისებისა).

იმ შემთხვევაში, როცა T ორმნიშვნელიანი ლოგიკური თეორიაა (1), შესაბამისად (2), თვისების ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ შემდეგი თვისება:

$$\exists x_{i_1} \in' S'_0 \cdots \exists x_{i_k} \in' S'_0 [x = \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, \overline{\mathbf{A}}\rangle], \tag{3}$$

(სადაც x და $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ სიმბოლოები იმავე პირობებს აკმაყოფილებს).

იმ შემთხვევაში, როცა T სამნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიაა, $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ $\mathbf{A}$ ფორმით განსაზღვრული განზოგადებული სქემა (დამოუკიდებლად იმისა არსებობენ თუ არა განუსაზღვრელი მნიშვნელობები) განისაზღვრება თვისებით:

$$\exists x_{i_1} \in' S'_0 \cdots \exists x_{i_k} \in' S'_0 [x = \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, \overline{\mathbf{A}}\rangle].$$

(ამ თვისებისთვისაც მოიძებნება შეზღუდული კვანტორებიანი ფორმულით განსაზღვრული მისი ტოლძალოვანი თვისება).

მიღებული შედეგები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა $X_1,\ldots,X_n$ არის საგნობრივი და პროპოზიციული ასოების ნებისმიერი მიმდევრობა. ამ შემთხვევაში (1.5) ლემის ანალოგი იქნება.

(1.6) ლემა. ვთქვათ, $X_1,\ldots,X_n$ მიმდევრობის თითოეული წევრი არის საგნობრივი ან პროპოზიციული ასო. $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მიმართ $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში T თეორიის $\mathbf{A}$ ფორმულით, შესაბამისად ტერმით, განსაზღვრული ჭეშმარიტული სქემა და განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემა, შესაბამისად საგნობრივი სქემა და განზოგადებული საგნობრივი სქემა, მეტასიმრავლეებია.

ეს ლემა დამტკიცდება იმავე მეთოდით, რომელიც მითითებულია წინა პუნქტში ფორმით განსაზღვრული მეტაფუნქციებისა და მეტამიმართებების შესახებ მიღებული შედეგების განზოგადებისათვის.

შემოვიტანოთ ასოთა ნებისმიერ $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ მიმდევრობაზე დამოკიდებული შემდეგი აღნიშვნები.

$S_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$, შესაბამისად $S^{*}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$, არის $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ ფორმულის ჭეშმარიტულ სქემად, შესაბამისად განზოგადებულ ჭეშმარიტულ სქემად. განხილვის შედეგად მიღებული ყველა ობიექტის კვაზიმეტაერთობლიობა (აქ სიტყვა „ობიექტის" შეიძლება შეიცვალოს ფრაზით „$\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ ჭეშმარიტული სქემის, შესაბამისად განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემის"; თუ $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ მიმდევრობის თითოეული წევრი პროპოზიციული ან საგნობრივი ასოა, მაშინ სიტყვა „ობიექტის" შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „სქემის"); $S^{l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$, შესაბამისად $S^{*l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$, არის $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ ყველა ჭეშმარიტული სქემის, შესაბამისად განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემის, კვაზიმეტაერთობლიობა. ანალოგიურად განისაზღვრება $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ საგნობრივი სქემების

$$S^{s}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{s*}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{sl}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{s*l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$$

კვაზიმეტაერთობლიობები. $S^{l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$ არის $S_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$-ში შემავალი $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ ყველგან განსაზღვრული ჭეშმარიტული სქემების კვაზიმეტაერთობლიობა. ანალოგიურად შემოიტანება

$$S^{l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{*l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{s'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{sl'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n},\quad S^{s*l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \qquad (5)$$

აღნიშვნები ($S^{*}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$-ის და $S^{s*}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$-ის თითოეული ელემენტი ყველგან განსაზღვრულია).

ახლა ადვილად ვრწმუნდებით შემდეგ შემავლობათა სამართლიანობაში.

$$S'_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n};$$

$$S^{*}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{*l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{*l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n};$$

$$S^{s'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{s}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{sl}_{\Delta_1\cdots\Delta_n};$$

$$S^{s*}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{s*l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{s*l}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}.$$

ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაში გვქნება:

$$S'_{\Delta_1\cdots\Delta_n} = S_{\Delta_1\cdots\Delta_n} = S^{\bullet}_{\Delta_1\cdots\Delta_n};$$

$$S^{s'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} = S^{s}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} = S^{s^\bullet}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}.$$

ამრიგად, ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაში $S^{\bullet}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$, შესაბამისად $S^{s^\bullet}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$, არის ყველა ისეთი $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ ყველგან განსაზღვრული ჭეშმარიტული, შესაბამისად საგნობრივი, სქემების კვაზიმეტაერთობლიობა, რომლებიც ფორმულების, შესაბამისად ტერმების, $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ სქემებად განხილვის შედეგად მიიღებიან. ამასთან, იმ შემთხვევაში როცა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ საგნობრივი და პროპოზიციული ასოების მიმდევრობაა, მაშინ ზემოთ განხილული (ინდექსიანი S სიმბოლოებით აღნიშნული) ნებისმიერი კვაზიმეტაერთობლიობის თითოეული ელემენტი არის ან საგნობრივი სქემა ან ჭეშმარიტული სქემა ($\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ) და, პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან ამ შემთხვევაში, თითოეული განხილული კვაზიმეტაერთობლიობა ისეთ მეტაერთობლიობას წარმოადგენს, რომლის შემადგენელი საგნები მეტასიმრავლეებია.

ბუნებრივად ისმის შემდეგი ამოცანები.

ამოცანა 1. გამოიკვლიეთ

$$S^{\bullet}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{\bullet l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \text{ და } S^{s^\bullet}_{\Delta_1\cdots\Delta_n} \subseteq S^{s^\bullet l'}_{\Delta_1\cdots\Delta_n}$$

შემავლობებში შეიძლება თუ არა $\subseteq$ პრედიკატი შეიცვალოს $=$ პრედიკატით, როცა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ მიმდევრობის თითოეული წევრი არის საგნობრივი ასო ან პროპოზიციული ასო.

ამოცანა 2. იმ შემთხვევაში, როცა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოთა ნებისმიერი მიმდევრობაა, გამოიკვლიეთ არის თუ არა სამართლიანი სრული ანალოგი (1.5) ლემის იმ ვარიანტისა, რომლის (1.5) ლემიდან მისაღებად საკმარისია ლემის ბოლო სიტყვა „მეტასიმრავლეებია" შეიცვალოს სიტყვით „მეტაკლასებია"

იმ შემთხვევაში, როცა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოებიდან ერთი მაინც არაა არც საგნობრივი ასო და არც პროპოზიციული ასო (ე. ი. ერთი მაინც არის ოპერატორი), სავარაუდოა განხილული კვაზიერთობლიობებიდან ნებისმიერს გააჩნდეს ისეთი ელემენტი, რომელიც არაა ელემენტთა სქემა (ე. ი.

არაა მეტაკლასი, ე. ი. არის საკუთრივი მეტაერთობლიობა), მიუხედავად იმისა, რომ მისი ნებისმიერი ელემენტი (ობიექტი) არის ამა თუ იმ ტიპის სქემა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $\sigma\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ სახის კვანტორის შინაარსის გახსნა წარმოებს $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ სათანადო ტიპის ელემენტთა სქემების გამოყენებით (ისინი აღნიშნული კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის არგუმენტის როლში გამოდიან). ამასთან, მაღალი რიგის თეორიების საწინააღმდეგოდ, პირველი რიგის თეორიებში (იხ. 3.4) მხოლოდ ისეთი $\sigma\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ სახის კვანტორები გვხვდება, რომლის არც ერთი ოპერატორული ასო არაა ოპერატორი. ეს გარემოება ზემოთ აღნიშნულთან ერთად ნათელს ფენს იმ ღრმა განსხვავებას სირთულის თვალსაზრისით, რომელიც არსებობს პირველი რიგის თეორიებსა და მაღალი რიგის თეორიებს შორის. აქ მხედველობაში შემდეგი განსაკუთრებით რთული წარმონაქმნებია კვაზიმეტაერთობლიობები, რომლებიც ისეთი ინდექსიანი S სიმბოლოებით აღვნიშნეთ, რომელთა ზედა ინდექსებში ფიგურირებს (გვხვდება) 1 და, ამასთან ერთად, ქვედა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ინდექსებში ფიგურირებს ოპერატორი. ნებისმიერი ასეთი წარმონაქმნი კვაზიმეტაერთობლიობაა და შედგენილია ან $\mathrm{B} \to \widetilde{\mathrm{K}}$ ან $\mathrm{B} \to \widetilde{\mathrm{K}}^{\bullet}$ ან $\mathrm{B} \to \{t, f\}$ ან $\mathrm{B} \to \{t, f, \dagger\}$ ტიპის ყ ვ ე ლ ა ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციონალურ მეტაერთობლიობებისაგან ან აღნიშნული ტიპის ყ ვ ე ლ ა ფუნქციონალურ მეტაერთობლიობებისაგან (სადაც B არის $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა ყველა დალაგებული სისტემის მეტაერთობლიობა). შედარებით ნაკლებად რთული (მაგრამ რთული) წარმონაქმნებია კვაზიმეტაერთობლიობები, რომლებიც ისეთი ინდექსიანი S სიმბოლოებით აღინიშნებიან, რომელთა ზედა ინდექსებში არ ფიგურირებს 1 და, ამასთანავე, ქვედა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ინდექსებში გვხვდება ოპერატორი. თითოეული ასეთი წარმონაქმნი კვაზიმეტაერთობლიობაა და შედგენილია წინა შემთხვევის ანალოგიურად, იმ განსხვავებით, რომ ამ შემთხვევაში „ყველა" გულისხმობს მხოლოდ სათანადო ტიპის ფორმების $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მიმართ სათანადო ტიპის სქემად განხილვის შედეგად მიღებულ მეტაერთობლიობებს. აღნიშნული სახის (რთული) წარმონაქმნები მხოლოდ მაღალი რიგის თეორიებში გამოიყენებიან. დანარჩენი ინდექსიანი S სიმბოლოებით აღნიშნული წარმონაქმნები, როგორც ზემოთ აღინიშნა, ელემენტთა სქემებისაგან შედგენილი მეტაერთობლიობებია და ეს ელე-

მენტთა სქემები მეტასიმრავლეებია. აქვე შევნიშნოთ, რომ არაა აუცილებელი ისეთი წარმონაქმნების განხილვა, რომლებიც აღინიშნებიან ისეთი ინდექსიანი S' სიმბოლოებით, რომელთა ინდექსთა შორის ფიგურირებს 1-ი (ეს მიიღწევა მომდევნო პუნქტში განხილული ორი ვარიანტიდან სათანადო ვარიანტის ამორჩევით).

3.1.8 ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების შინაარსის განსაზღვრა. Δ იყოს T თეორიის ოპერატორული საგნობრივი ასო. $\forall, \exists, \tau, \iota$ ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებულ ფუნქციებს (მეტათეორიის ფუნქციებს) ერთი და იმავე განსაზღვრის არე აქვთ და ეს განსაზღვრის არეა $S_{\Delta}^{1'}$ ან $S_{\Delta}^{\bullet 1'}$ იმისდა მიხედვით T თეორია ორმნიშვნელობიანია თუ სამმნიშვნელობიანი. ცხადია, $S_{\Delta}^{1'}$, შესაბამისად $S_{\Delta}^{\bullet 1'}$, არის ყველა Δ ასოს მიმართ ყველგან განსაზღვრული ჭეშმარიტული სქემის, შესაბამისად განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემის, მეტაერთობლიობა. $\forall$ და $\exists$, შესაბამისად τ და ι, ოპერატორული ნიშნების (და, მაშასადამე, მათი შესაბამისი კვანტორების) მნიშვნელობათა არეა $S_{\Delta}^{1'} \to \{t, f\}$, შესაბამისად $S_{\Delta}^{1'} \to \widetilde{K}$, ტიპის ყველგან განსაზღვრულ მეტათეორიის ფუნქციათა ერთობლიობა ან $S_{\Delta}^{\bullet 1'} \to \{t, f, \dagger\}$, შესაბამისად $S_{\Delta}^{\bullet 1'} \to \widetilde{K}^{\bullet}$, ტიპის ყველგან განსაზღვრულ მეტათეორიის ფუნქციათა ერთობლიობა იმისდა მიხედვით T თეორია ორმნიშვნელოვანია თუ სამმნიშვნელოვანი. მნიშვნელობათა ეს არეები არ წარმოადგენენ მეტათეორიის მათემატიკურად მკაცრად განსაზღვრულ წარმონაქმნებს. მაგრამ ეს გარემოება განსაკუთრებულ სიძნელეებს არ შეგვიქმნის, რამდენადაც ოპერატორული ნიშნები საკუთრივი კონსტანტებია და საქმე გვექნება ხსენებული მნიშვნელობათა არის მხოლოდ კონკრეტულად განსაზღვრულ ელემენტებთან — ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებულ ფუნქციებთან — მეტათეორიის ფუნქციებთან (თუ დამტკიცდება, რომ ხსენებული მიკავშირებული ფუნქციები მეტაკლასებია, მაშინ შესაძლებლობა გვექნება $\forall, \exists, \tau$ და ι ოპერატორული ნიშნებიდან აღებული თითოეული ოპერატორული ნიშნის მნიშვნელობათა არე განვსაზღვროთ როგორც სათანადო ტიპის მეტაფუნქციათა მეტაერთობლიობა).

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ძირითადი თეორია T ორმნიშვნელობიანია.

ამ შემთხვევაში $\forall$ და $\exists$ ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციები $\forall_{\mathcal{A}}$ და $\exists_{\mathcal{A}}$ (ან, რაც იგივეა, $\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციები $\forall\Delta_{\mathcal{A}}$ და $\exists\Delta_{\mathcal{A}}$) შემდეგნაირად განისაზღვრებიან. $\forall_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\exists_{\mathcal{A}}$, ფუნქციის მნიშვნელობა არის **t** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი **A** არგუმენტის (Δ ასოს მიმართ ყველგან განსაზღვრული ჭეშმარიტული სქემის) ყველა, შესაბამისად ერთი მაინც, ელემენტის მეორე კომპონენტი არის **t**. აღნიშნულის შესაბამისად $\forall\Delta\mathbf{A}$ ფორმულის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში შემდეგნაირად განისაზღვრება. $\forall\Delta\mathbf{A}$ ფორმულის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში არის $\forall_{\mathcal{A}}$ ფუნქციის მნიშვნელობა იმ Δ ასოს მიმართ ჭეშმარიტულ სქემაზე, რომელსაც მივიღებთ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში **A** ფორმულის Δ-ს მიმართ ჭეშმარიტულ სქემად განხილვის შედეგად. ცხადია, ხსენებული სქემა და, მაშასადამე, $\forall\Delta\mathbf{A}$ ფორმულის (ჭეშმარიტი) მნიშვნელობა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში დამოკიდებული იქნება მხოლოდ და მხოლოდ **A**-ში თავისუფალი შემოსვლების მქონე Δ-გან განსხვავებული ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე. ამრიგად, Δ შეიძლება იყოს $\forall\Delta\mathbf{A}$ ფორმულისათვის მხოლოდ და მხოლოდ დაბმული ცვლადი, ამასთან, Δ-გან განსხვავებული ცვლადის შემოსვლა $\forall\Delta\mathbf{A}$ ფორმულაში წარმოადგენს ცვლადის თავისუფალ შემოსვლას $\forall\Delta\mathbf{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არის ცვლადის თავისუფალი შემოსვლა **A**-ში. ასევე განისაზღვრება $\exists\Delta\mathbf{A}$ ფორმულის შინაარსი.

განხილული ტერმინების შინაარსის მოტანილი განსაზღვრებები მივიჩნიოთ **ძირითად (პირველ) განსაზღვრებებად**. თუ ზემოთ ყველგან $S^{1'}_{\Delta}$ და $S^{*1'}_{\Delta}$ სიმბოლოებს შევცვლით S_{Δ} და S^{*}_{Δ} სიმბოლოებით შესაბამისად, მივიღებთ იმავე ტერმინების შინაარსის **არაძირითად (მეორე) განსაზღვრებებს**. S_{Δ}, შესაბამისად S^{*}_{Δ}, არის Δ (**საგნობრივი**) ასოს მიმართ ფორმულის ჭეშმარიტულ სქემად, შესაბამისად განზოგადებულ ჭეშმარიტულ სქემად, განხილვის შედეგად მიღებული ყველა ობიექტის (**მეტასიმრავლის**) მეტაერთობლიობა. $S_{\Delta} \subseteq S^{1'}_{\Delta}$ და $S^{*}_{\Delta} \subseteq S^{*1'}_{\Delta}$, ამასთან, აქ $\subseteq$ პრედიკატის ტოლობით შეცვლის შესაძლებლობის საკითხი გასარკვევია (ტოლობის შემთხვევაში ტოლფასნია ძირითადი და არაძ-

ირითადი განსაზღვრებები). ქვემოთ მოვიტანთ რა ამა თუ იმ **ძირითად (პირველ) განსაზღვრას**, ვიგულისხმებთ, რომ ამით მოტანილია შესატყვისი **არაძირითადი (მეორე) განსაზღვრა** (რომლის მისაღებად მხოლოდ განხილული სახის ცვლილებებია საჭირო).

$\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ სახის კვანტორების შინაარსის ძირითადი და არაძირითადი განსაზღვრებები და ამავე კვანტორების როლის განსაზღვრა ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას (იხ. 3.1.2) ტოლფასნია იმ აზრით, რომ ისინი ერთი და იგივე შედეგებს გვაძლევენ ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას. ანალოგიურ ტოლფასობას ადგილი ექნება ქვემოთ განხილული კვანტორებისათვის და ამის შესახებ მითითებებს ზოგჯერ არ გავაკეთებთ.

ცხადია, თუ $\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ კვანტორების მიკავშირებულ ფუნქციებს არაძირითადი განსაზღვრის მიხედვით აღვნიშნავთ $\underline{\forall}_{\mathcal{A}}$ და $\underline{\exists}_{\mathcal{A}}$ სიმბოლოებით, მაშინ $\underline{\forall}_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\underline{\exists}_{\mathcal{A}}$, იქნება $\forall_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\exists_{\mathcal{A}}$, მიკავშირებული ფუნქციის შევიწროება S_Δ-ზე.

განხილულ შემთხვევაში τ და ι ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციები (მეტათეორიის ფუნქციები) $\tau_{\mathcal{A}}$ და $\iota_{\mathcal{A}}$ შემდეგნაირად განისაზღვრებიან. $\tau_{\mathcal{A}}$ და $\iota_{\mathcal{A}}$ ფუნქციები მნიშვნელობებს ღებულობს Δ საგნობრივი ასოს მნიშვნელობათა არედან, რომელიც $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის K უნივერსუმია. ამასთან, $\tau_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\iota_{\mathcal{A}}$, მეტაფუნქციის მნიშვნელობა მის A არგუმენტზე Δ-ს მიმართ (ჭეშმარიტულ სქემაზე) არის Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ნებისმიერი, შესაბამისად ერთადერთი, ისეთი Δ_0 საგანი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $(\Delta_0, t) \in A$. თუ ასეთი საგანი არ არსებობს, მაშინ $\tau_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\iota_{\mathcal{A}}$, ფუნქციის მნიშვნელობა მის A არგუმენტზე არის Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ნებისმიერი საგანი. განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმებთ შემდეგს: $\tau_{\mathcal{A}}$ (ან, რაც იგივეა, $\iota_{\mathcal{A}}$) ფუნქციის განსაზღვრის $S^{1'}_\Delta$ არედან აღებულ ნებისმიერ A ელემენტს (Δ ასოს მიმართ ჭეშმარიტულ სქემას) ეთანადება A-ში ელემენტად შემავალი ისეთი მეტაწყვილების პირველი კომპონენტებისაგან შედგენილი მეტასიმრავლე, რომელთა მეორე კომპონენტი არის t ((1.5) წინადადებიდან გამომდინარეობს ასეთი მეტასიმრავლის არსებობა). თითოეულ ასეთ არაცარიელ მეტასიმრავლეში და, აგრეთვე, Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში (ე. ი. K არეში) მონიშნულია თი-

თო საგანი **a** პირობის დაცვით (იხ. 3.1.2). ამასთან, $\tau_{\mathcal{A}}$ ფუნქციის მნიშვნელობა $\tau_{\mathcal{A}}A$ (მისი განსაზღვრის არედან აღებულ A არგუმენტზე) არის A არგუმენტის შესაბამისს არაცარიელ მეტასიმრავლეში მონიშნული საგანი, თუ აღნიშნული მეტასიმრავლე ცარიელია, მაშინ $\tau_{\mathcal{A}}A$ არის Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში (ე. ი. K არეში) მონიშნული საგანი; თუ ხსენებულ მეტასიმრავლეს ერთადერთი ელემენტი აქვს, მაშინ $\iota_{\mathcal{A}}$ ფუნქციის მნიშვნელობა A-ზე ეს ერთადერთი ელემენტია, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\iota_{\mathcal{A}}$ ფუნქციის მნიშვნელობა A-ზე Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში (ე. ი. K-ში) მონიშნული საგანია. აღნიშნულის შესაბამისად განისაზღვრება $\tau\Delta A$ და $\iota\Delta A$ ტერმების შინაარსი ისევე, როგორც ზემოთ განვსაზღვრეთ $\forall\Delta A$ ფორმულის შინაარსი.

$\forall$, $\exists$, τ და ι ოპერატორულ ნიშნებს იყენებენ უფრო ზოგადი ფორმით, სახელდობრ შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის მოცემული T თეორიის ინტერპრეტაცია K უნივერსუმით, M კი $\widetilde{K}$ მეტასიმრავლის ნაწილია (M მეტასიმრავლეა). $\forall\Delta \in M$, $\exists\Delta \in M$, $\tau\Delta \in M$ და $\iota\Delta \in M$ სახის სიტყვებს, სადაც Δ არის T თეორიის საგნობრივი **ოპერატორული ასო**, სათანადო ტიპის **შეზღუდული მეტაკვანტორები** ეწოდებათ. ამბობენ აგრეთვე, რომ ისინი მიიღებიან $\forall\Delta, \exists\Delta, \tau\Delta$ და $\iota\Delta$ **კვანტორების M მეტასიმრავლით შეზღუდვის** შედეგად. აღნიშნულის შედეგად შემოტანილ ტერმინებში ნაცვლად სიტყვისა „მეტაკვანტორი" ზოგჯერ გამოვიყენებთ სიტყვას „კვანტორი" (როცა ეს გაუგებრობას არ იწვევს). ისინი, განსაზღვრით, ლოგიკური ოპერატორებია (კვანტორებია) და მათი როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას შემდეგნაირად განისაზღვრება. ვთქვათ, A რაიმე ფორმულაა, განხილული როგორც Δ ასოზე დამოკიდებული წინადადება. განსაზღვრით, $\forall\Delta \in MA$ (იკითხება: „M-დან აღებული ყოველი Δ-თვის A"), შესაბამისად $\exists\Delta \in MA$ (იკითხება: „არსებობს M-ის ისეთი Δ ელემენტი, რომ A"), არის წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Δ ასოს M-დან აღებული ყოველი, შესაბამისად ერთი მაინც, მნიშვნელობისათვის A წინადადება არის ჭეშმარიტი. ასევე, განსაზღვრით, $\tau\Delta \in MA$ (იკითხება: „M-დან აღებული Δ ასოს ნებისმიერი ისეთი მნიშვნელობა, რომ A") არის ტერმი,

რომელიც აღნიშნავს M-დან აღებულ Δ ასოს ნებისმიერ ისეთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც **A** არის ჭეშმარიტი; თუ ასეთი მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ $\tau\Delta \in' MA$ ტერმი აღნიშნავს Δ **ასოს მნიშვნელობათა არედან** აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\tau\Delta \in' MA$ აღნიშნავს სათანადო მეტასიმრავლეში მონიშნულ საგანს. სახელდობრ, ვიგულისხმებთ შემდეგს: მოცემული თეორიის ნებისმიერ **B** ფორმულას, ნებისმიერ **b** საგნობრივ კვანტორულ ასოს და **B** ფორმულაში მყოფი **b**-გან განსხვავებული ყველა თავისუფალი ასოების მნიშვნელბათა ყოველ დალაგებულ სისტემას ეთანადება **b** ასოს M-დან აღებული ყველა ისეთი მნიშვნელობის მეტაერთობლიობა (მეტასიმრავლე), რომლებისათვისაც **B** ფორმულა ჭეშმარიტია (იგი 3.1.2-ში ანალოგიურად განსაზღვრული მეტასიმრავლისა და M მეტასიმრავლის თანაკვეთაა). თითოეულ ასეთ არაცარიელ მეტაერთობლიობაში (მეტასიმრავლეში) და, აგრეთვე, **b** ასოს მნიშვნელობათა არეში მონიშნულია თითო საგანი **a** პირობის დაცვით (იხ. 3.1.2). ამასთან, $\tau\Delta \in' MA$ ტერმის მნიშვნელობა მისი ყველა თავისუფალი ასოს მნიშვნელობათა α სისტემისათვის არის **A** ფორმულის, Δ ასოსა და α სისტემის შესაბამისს მეტასიმრავლეში მონიშნული საგანი ან $\tilde{K}$-ში მონიშნული საგანი იმისდა მიხედვით ხსენებული მეტასიმრავლე ცარიელია თუ არა. დაბოლოს, განსაზღვრით, $\iota\Delta \in' MA$ (იკითხება: „M-დან აღებული Δ ასოს ერთადერთი ისეთი მნიშვნელობა, რომ **A**") არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს M-დან აღებულ Δ ასოს ერთადერთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც **A** არის ჭეშმარიტი; თუ ასეთი ერთადერთი მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ $\iota\Delta \in' MA$ ტერმი აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ მეორე შემთხვევაში $\iota\Delta \in' MA$ ტერმი აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში ($\tilde{K}$-ში) მონიშნულ საგანს. აღნიშნულის საფუძველზე ჩვეულებრივ ინდუცირდება უფრო ზოგადი შემდეგი ტერმინის შინაარსი: „$\tau\Delta \in' MA$, შესაბამისად $\iota\Delta \in' MA$, ტერმის მნიშვნელობა $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის", სადაც $X_1,\ldots,X_n$ არის ასოების ნებისმიერი ისეთი მიმდევრობა, რომლის წევრებს შორის იმყოფება $\tau\Delta \in' MA$ ტერმის ყველა თავისუფალი ცვლადი.

ცხადია, თუ M ცარიელია, მაშინ $\forall\Delta \in' M A$ ჭეშმარიტია, $\exists\Delta \in' M A$ კი მცდარია (რამდენადაც, ამ შემთხვევაში, M-დან აღებული Δ ასოს მნიშვნელობა არ არსებობს).

თუ განხილული სტრუქტურის (ინტერპრეტაციის) საგანთა არე სასრული ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა და M არის დადებითი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე (მეტასიმრავლე), მაშინ $\forall\Delta \in' M$, $\exists\Delta \in' M$, $\tau\Delta \in' M$, $\iota\Delta \in' M$ აღნიშვნების ნაცვლად იყენებენ აგრეთვე შემდეგ გამარტივებულ აღნიშვნებს: $\forall\Delta > 0$, $\exists\Delta > 0$, $\tau\Delta > 0$, $\iota\Delta > 0$. ამასთან, $\forall\Delta > 0$, შემთხვევაში ნაცვლად ფრაზისა „M-დან აღებული ყოველი Δ-თვის" იყენებენ ფრაზას „ყოველი დადებითი Δ-თვის". ასევე განიმარტება $\exists\Delta > 0$, $\tau\Delta > 0$, $\iota\Delta > 0$ კვანტორების შესაბამისი ფრაზები. ანალოგიურად განისაზღვრება $\forall\Delta \geq 0, \tau\Delta < 0, \exists\Delta \leq 0$ და ა. შ. კვანტორებისა და ამ კვანტორებთან დაკავშირებული გამარტივებული ფრაზების შინაარსი.

ახლა მოვიტანოთ შეზღუდული კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციების განსაზღვრებები.

განსაზღვრით, კვანტორის ტიპი და შესაბამისი შეზღუდული კვანტორის ტიპი ერთი და იგივეა. იგივე ითქმის მათი მიკავშირებული ფუნქციების ტიპის შესახებ. ამის შემდეგ შეზღუდული კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციების როგორც ძირითადი, ისე არაძირითადი განსაზღვრებები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს. $\forall\Delta \in' M$, შესაბამისად $\exists\Delta \in' M$, კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა არის t მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი A არგუმენტის (Δ ასოს მიმართ ჭეშმარიტული სქემის) A_M შევიწროების ყველა, შესაბამისად ერთი მაინც, ელემენტის მეორე კომპონენტი არის t (A_M არის A-ში შემავალი ისეთი მეტაწყვილების მეტასიმრავლე, რომელთა პირველი კომპონენტი M-ის ელემენტია). $\tau\Delta \in' M$, შესაბამისად $\iota\Delta \in' M$, კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა Λ არგუმენტზე (Δ ასოს მიმართ ჭეშმარიტულ სქემაზე) არის M-დან აღებული ნებისმიერი, შესაბამისად ერთადერთი, Δ ასოს ისეთი Δ_0 მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $(\Delta_0, t) \in A$, თუ ასეთი Δ_0 საგანი არ არსებობს, მაშინ $\tau\Delta \in' M$, შესა-

ბამისად $\iota\Delta \in' M$, კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა მის A არგუმენტზე არის Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ნებისმიერი საგანი. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\tau\Delta \in' M$, შესაბამისად $\iota\Delta \in' M$, კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა A-ზე არის სათანადო მეტასიმრავლეში მონიშნული საგანი. სახელდობრ, ვიგულისხმებთ შემდეგს: განსაზღვრის არედან აღებულ ნებისმიერ A საგანს (კვანტორული საგნობრივი Δ ასოს მიმართ ჭეშმარიტულ სქემას) ეთანადება A-ში ელემენტად შემავალი ისეთი მეტაწყვილების პირველი კომპონენტებისაგან შედგენილი მეტაერთობილობა (მეტასიმრავლე), რომელთა პირველი კომპონენტი M-დან აღებული Δ ასოს მნიშვნელობაა, მეორე კი არის t; თითოეულ ასეთ არაცარიელ მეტასიმრავლეში და, აგრეთვე, Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში (ე. ი. $\widetilde{K}$-ში) მონიშნულია თითო საგანი a პირობის (იხ. 3.1.2) დაცვით (იგი ზემოთ შეუზღუდავი დესკრიფციის კვანტორების შემთხვევაში ანალოგიურად განსაზღვრული მეტასიმრავლისა და M მეტასიმრავლის თანაკვეთაა). $\tau\Delta \in' M$ შეზღუდული კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა მის A არგუმენტზე არის A არგუმენტის შესაბამისს არაცარიელ მეტასიმრავლეში მონიშნული საგანი ან $\widetilde{K}$-ში მონიშნული საგანი იმისდა მიხედვით A არგუმენტის შესაბამისი მეტასიმრავლე ცარიელია თუ არა. $\iota\Delta \in' M$ შეზღუდული კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა A არგუმენტზე არის A-ს შესაბამისი მეტასიმრავლის ერთადერთი ელემენტი ან Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში მონიშნული საგანი იმისდა მიხედვით A-ს შესაბამისი მეტასიმრავლე ერთელემენტიანია თუ არა.

ცხადია, წინა აბზაცში აღნიშნულის საფუძველზე ვერ დავასკვნით, რომ შეზღუდული კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციის ძირითადი (პირველი) და არაძირითადი (მეორე) განსაზღვრებები ტოლფასია.

$\forall\Delta \in' M$, $\exists\Delta \in' M$, $\tau\Delta \in' M$ და $\iota\Delta \in' M$ კვანტორების შინაარსსა და მათ როლზე ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას და ამ კვანტორების (მეორე) არაძირითად და ძირითად განსაზღვრებების შესახებ შეიძლება ითქვას ზუსტად იგივე, რაც ზემოთ ვთქვით $\forall\Delta$ და $\exists\Delta$ კვანტორებთან დაკავშირებით.

სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში, გარდა განხილული შეზღუდული მეტაკვანტორებისა, სავსებით ანალოგიურად შემოიტანება შემდეგი სახის შეზღუდული კვანტორები:

$$\forall\Delta \in M\ ,\ \exists\Delta \in M\ ,\ \tau\Delta \in M\ ,\ \iota\Delta \in M$$

და მათთან დაკავშირებული განსაზღვრებები, სადაც Δ თეორიის ოპერატორული ასოა, M კი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმიდან აღებული ნებისმიერი საგანია (კლასია ან ინდივიდია). ტერმინოლოგია იგივე გვექნება, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ამ ოპერატორებს ეწოდებათ კვანტორები და არა მეტაკვანტორები. ამის შესაბამისად უნდა გავიგოთ, მაგალითად, აზრი ტერმინისა: **შეზღუდული ზოგადობის კვანტორი**. განსაზღვრულობისათვის აქაც დაგვჭირდება სათანადო მეტასიმრავლეებში საგნების მონიშვნა (როცა $\mathcal{A}$ ინტუიციური მოდელია ხსენებული მეტასიმრავლეები კლასები იქნებიან — სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი აქსიომა მოითხოვს $x \in M \wedge A$ სახის თვისების მქონე საგნებისაგან შედგენილი კლასის არსებობას, სადაც M მოდელიდან აღებული საგანია, A კი x-ის მიმართ თვისებად განხილული ფორმულაა). თუ M' არის მეტასიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ M-ის ელემენტები (ასეთი მეტასიმრავლე არსებობს), მაშინ განხილული შეზღუდული კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციები ($\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში) იგივეა რაც

$$\forall\Delta \in' M',\quad \exists\Delta \in' M',\quad \tau\Delta \in' M',\quad \iota\Delta \in' M'$$

შეზღუდული მეტაკვანტორების მიკავშირებული ფუნქციები.

$$\forall\Delta \in M,\quad \exists\Delta \in M,\quad \tau\Delta \in M,\quad \iota\Delta \in M \tag{1}$$

შეზღუდული კვანტორები შეგვეძლო შემოგვეტანა შემდეგნაირად. 3.1.6-ში მოტანილი შეთანხმებით ნებისმიერი T ტერმისა და A ფორმულისათვის

$$\forall\Delta \in TA,\quad \exists\Delta \in TA,\quad \tau\Delta \in TA,\quad \iota\Delta \in TA$$

შესაბამისად

$$\forall\Delta[\Delta \in T \to A],\ \exists\Delta[\Delta \in T \wedge A],\ \tau\Delta[\Delta \in T \wedge A],\ \iota\Delta[\Delta \in T \wedge A]$$

ფორმულების გამარტივებული აღნიშვნებია. აქედან (თუ ვიგულისხმებთ, რომ T არის A-ში თავისუფალი შემოსვლის არმქონე კვანტორული საგნობრივი ასო და ამ ასოს მივეცით მნიშვნელობად M) ინდუცირდება

$$\forall\Delta \in MA, \exists\Delta \in MA, \tau\Delta \in MA, \iota\Delta \in MA \qquad (2)$$

აღნიშვნების შინაარსი და ეს შინაარსი იგივეა, რაც მათ ზემოთ მოტანილი განსაზღვრით მივანიჭეთ; ე. ი. (2)-დან აღებულ ნებისმიერ გამოსახულებას ორივე გაგებისათვის ერთი და იგივე თავისუფალი ასოები აქვთ და მათი (ჭეშმარიტული) მნიშვნელობები ამ ასოების მნიშვნელობათა ერთი და იგივე სისტემისათვის ერთი და იგივეა (დაამტკიცეთ!). (1) შეზღუდული კვანტორების ასეთი გზით შემოტანა უფრო ხელსაყრელია, რამდენადაც იგი არ იწვევს თეორიის გართულებას ახალი ოპერატორების დამატებით.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ძირითადი თეორია T სამმნიშვნელობიანია.

ამ ზოგად შემთხვევაში მიკავშირებული ფუნქციების განსაზღვრებები უნდა გავრცელდეს გაფართოებულ არეებში შემდეგი პრინციპის საფუძველზე.

განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპი.

1. რელიაციური ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა მცდარია, შესაბამისად სუბსტანციური ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა საგნობრივი განუსაზღვრელობაა, როცა მისი ერთი არგუმენტი მაინც საგნობრივი განუსაზღვრელი მნიშვნელობაა ან როცა მისი ერთი არგუმენტი მაინც საკუთრივი განზოგადებული საგნობრივი სქემაა ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ.

2. თუ n-ადგილიანი σ ოპერატორის არგუმენტების $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ სისტემისათვის წინა პუნქტში განხილული პირობა შესრულებული არაა, მაშინ, განსაზღვრით, $\sigma a_1,\ldots,a_n$-ის მნიშვნელობაა $\sigma a_1',\ldots,a_n'$, სადაც a_i' არის f, როცა a_i არის †, იმ შემთხვევაში როცა a_i საკუთრივი განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემაა ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ, მაშინ a_i' ჭეშმარიტული სქემაა იმავე ასოების მიმართ, რომლის a_i-დან მისაღებად საკმარისია a_i-ს თითოეული ისეთი ელემენტის მეორე კომპონენტი შეიცვალოს f-ით, რომლის მეორე კომპონენტია † (განუსაზღვრელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა), დანარჩენ შემთხვევებში კი a_i' არის a_i.

ამ პრინციპის კერძო შემთხვევაა შემდეგი:

ჭეშმარიტული განუზღვრელი მნიშვნელობის მცდართან ნაწილობრივად გაიგივების პრინციპი. გაფართოებულ არე-

ში ლოგიკური ოპერატორის მნიშვნელობის გამოანგარიშებისას თითოეული განუსაზღვრელი მნიშვნელობა მცდარად უნდა მივიჩნიოთ, როგორც მაშინ, როცა იგი ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქციის არგუმენტია, ისე მაშინაც, როცა იგი ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქციის არგუმენტის (განზოგადებული ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ ჭეშმარიტული სქემის) ელემენტის მეორე კომპონენტია.

ცხადია, ეს პრინციპი გამოყენებადია მხოლოდ ლოგიკური ოპერატორებისათვის და იგი წინა პრინციპის ტოლფასია ლოგიკური ოპერატორების შემთხვევაში.

როგორც ვხედავთ, მოტანილი პრინციპები მოითხოვს განუსაზღვრელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის მცდართან გაიგივებას. ასეთი გაიგივება საკმაოდ ბუნებრივია. განუსაზღვრელი საგნობრივი მნიშვნელობის რომელიმე განსაზღვრულ საგანთან გაიგივება ბუნებრიობას მოკლებულია.

ქვემოთ ყველგან, იქ სადაც საწინააღმდეგო არ გამომდინარეობს კონტექსტიდან, ვიგულისხმებთ, რომ ნებისმიერი ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქცია ვრცელდება გაფართოებულ არეებში განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპის გამოყენებით (იგულისხმება, რომ გაფართოებულ არეებში ასეთნაირად გავრცელებულ ოპერატორთა აღსანიშნავად და, აგრეთვე, შესაბამისი ფორმების[1] წასაკითხად იგივე აღნიშვნები, სახელწოდებები და ფრაზები გამოიყენება, რაც ძირითად შემთხვევაში გვქონდა). ქვემოთ განხილული იქნება ოპერატორთა სხვა სახის გავრცელებებიც, რომლებიც სხვა პრინციპების გამოყენებით მიიღებიან. ისეთი გაგრძელებებისათვის, რომლებიც ე. წ განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპის გამოყენებით მიიღებიან, აღნიშვნები, სახელწოდებები და შესაბამისი ფორმების[1] წასაკითხად გამოყენებული ფრაზები ძირითად შემთხვევიდან მოდიფიცირებით მიიღებიან.

განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპის საფუძველზე ზემოთ განხილული ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას და მათი მიკავშირებული ფუნქციები ზოგად შემთხვევაში შემდეგნაირად განისაზღვრებიან (განსაზღვრებებს ვამარტივებთ იმის გათვალისწინებით, რომ ზოგად შემთხვევაშიც ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების აღსანიშნავად, სახელწოდებებად და შესაბამისს ფორმათა წასაკითხად იმავე

---

[1] ე. ი. ისეთი ფორმების, რომლებისთვისაც ისინი მთავარი ოპერატორებია.

სიმბოლოებს, სახელწოდებებს და ფრაზებს ვიყენებთ, რაც ზემოთ ძირითად შემთხვევაში გვქონდა — $\forall\Delta, \exists\Delta, \tau\Delta, \iota\Delta$ კვანტორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას ზოგადი შემთხვევისათვის განსაზღვრულია 3.1.2-ში კომპაქტურობისათვის მოგვყავს უკანასკნელთა განსაზღვრებებიც. ამასთან, ვიგულისხმებთ, რომ დესკრიფციის კვანტორებთან და მათ მიკავშირებულ ფუნქციებთან დაკავშირებული მეტასიმრავლეებისა და მათში მონიშნული საგნების განსაზღვრა და მათი გამოყენება დესკრიფციის ოპერატორების შინაარსისა და მათი მიკავშირებული ფუნქციების განსაზღვრაში ისევე წარმოებს, როგორც ძირითად შემთხვევაში. ამ შეთანხმების საფუძველზე კიდევ უფრო მეტად ვამარტივებთ განსაზღვრებებს).

1. $\forall\Delta\mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta\mathbf{A}$, წინადადება ჭეშმარიტია, როცა Λ ასოს ყოველი, შესაბამისად ერთი მაინც, მნიშვნელობისათვის $\mathbf{A}$ წინადადება ჭეშმარიტია. სხვა შემთხვევებში იგი მცდარია. ანალოგიურად განისაზღვრება $\forall\Delta \in' M$ და $\exists\Delta \in' M$ სახის შეზღუდული მეტაკვანტორების როლი (ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას): $\forall\Delta \in' M\mathbf{A}$, შესაბამისად $\exists\Delta \in' M\mathbf{A}$, წინადადება ჭეშმარიტია, როცა Δ ასოს ყოველი, შესაბამისად ერთი მაინც, M-დან აღებული მნიშვნელობისათვის $\mathbf{A}$ წინადადება ჭეშმარიტია. სხვა შემთხვევებში იგი მცდარია. იგივე ითქმის $\forall\Delta \in M$ და $\exists\Delta \in M$ სახის შეზღუდული **კვანტორების** შესახებ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში (შეზღუდული მეტაკვანტორების შემთხვევაში M არის $\widetilde{K}$ მეტასიმრავლის ნაწილი (მეტასიმრავლე), შეზღუდული კვანტორების შემთხვევაში კი M არის K უნივერსუმიდან აღებული საგანი (კლასი ან ინდივიდი)).

2. $\tau\Delta\mathbf{A}$ არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს (Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ) ნებისმიერ ისეთ Δ_0 საგანს, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ჭეშმარიტია; თუ ასეთი საგანი არ არსებობს, მაშინ $\tau\Delta\mathbf{A}$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\tau\Delta\mathbf{A}$ აღნიშნავს სათანადო მეტასიმრავლეში „მონიშნულ საგანს". ანალოგიურად განისაზღვრება $\tau\Delta \in' M$ სახის შეზღუდული **მეტაკვანტორის** როლი: $\tau\Delta \in' M\mathbf{A}$ არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს Δ ასოს ნებისმიერ ისეთ M-დან აღებულ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ჭეშმარიტია; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობა

არ არსებობს. მაშინ $\tau\Delta \in' MA$ აღნიშნავს Δ ასოს ნებისმიერ მნიშვნელობას — Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\tau\Delta \in' MA$ აღნიშნავს სათანადო მეტასიმრავლეში მონიშნულ საგანს. იგივე ითქმის $\tau\Delta \in M$ სახის კვანტორის შესახებ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში.

3. $\iota\Delta A$ არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს (Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ) ისეთ ერთადერთ Δ_0 საგანს, რომლისთვისაც A ჭეშმარიტია; თუ ასეთი Δ_0 საგანი არ არსებობს, მაშინ $\iota\Delta A$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმებთ, რომ მეორე შემთხვევაში $\iota\Delta A$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში მონიშნულ საგანს. ანალოგიურად განისაზღვრება $\iota\Delta \in' M$ სახის შეზღუდული მეტაკვანტორის როლი: $\iota\Delta \in' MA$ არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს Δ ასოს M-დან აღებულ ისეთ ერთადერთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც A ჭეშმარიტია. თუ Δ ასოს ასეთი ერთადერთი მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ $\iota\Lambda \in' MA$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებულ ნებისმიერ საგანს. განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმებთ, რომ მეორე შემთხვევაში $\iota\Delta \in' MA$ აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში მონიშნულ საგანს. იგივე ითქმის $\iota\Delta \in M$ სახის კვანტორის შესახებ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში.

შევნიშნოთ, რომ განხილულ ზოგად შემთხვევაშიც $\forall\Delta \in M$, $\exists\Delta \in M$, $\tau\Delta \in M$ და $\iota\Delta \in M$ კვანტორთა როლი (და, მაშასადამე, შინაარსიც) ინდუცირდება იმავე გამარტივებული აღნიშვნებიდან ისევე, როგორც ძირითად შემთხვევაში გვქონდა.

1-3 პუნქტებში განხილული კვანტორებისა და მეტაკვანტორების მიკავშირებული ფუნქციების როგორც (პირველი) ძირითადი განსაზღვრებები, ისე (მეორე) არაძირითადი განსაზღვრებები შემდეგნაირად მოიცემა:

$\forall\Delta$, $\exists\Delta$, $\forall\Delta \in' M$, $\exists\Delta \in' M$, $\forall\Delta \in M$, $\exists\Delta \in M$, $\tau\Delta$, $\iota\Delta$, $\tau\Delta \in' M$, $\iota\Delta \in' M$, $\tau\Delta \in M$, $\iota\Delta \in M$ კვანტორებისა და მეტაკვანორების მიკავშირებული ფუნქციების ტიპის ამ პუნქტის დასაწყისში აღნიშნულის შესაბამისად განსაზღვრის შემდეგ ამ მიკავშირებული ფუნქციებისათვის ძალაში რჩება ძირითადი შემთხვევისათვის (როცა ფორმებისათვის არ დაიშვება განუსაზღვრელი მნიშვნელობები) ზემოთ მოტანილი განსაზღვრებები მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ $\forall\Delta$, $\exists\Delta$, $\forall\Delta \in' M$, $\exists\Delta \in' M$, $\forall\Delta \in M$ და $\exists\Delta \in M$ კვანტორების და მეტაკვანტორების

მიკავშირებული ფუნქციების შემთხვევაში დამატებით უნდა მოვითხოვოთ (ან ვიგულისხმოთ), რომ ისინი არ ღებულობდნენ განუსაზღვრელ მნიშვნელობას (დანარჩენი კვანტორებისა და მეტაკვანტორების მიკავშირებული ფუნქციებიც არ ღებულობენ განუსაზღვრელ მნიშვნელობას). მაგალითად, $\forall\Delta \in' M$, შესაბამისად $\exists\Delta \in' M$, მეტაკვანტორის მიკავშირებული ფუნქცია, განსაზღვრით, მეტათეორიის ისეთი $S_{\Delta}^{\bullet 1'} \rightarrow \{t, f, \dagger\}$ ტიპის ყველგან განსაზღვრული ფუნქციაა, რომელიც არ ღებულობს განუსაზღვრელ $\dagger$ მნიშვნელობას და რომლის მნიშვნელობაა t მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი A არგუმენტის A_M შევიწროების ყველა, შესაბამისად ერთი მაინც, ელემენტის მეორე კომპონენტი არის t.

უკანასკნელ აბზაცში აღნიშნულის სრული ანალოგი სამართლიანია 1-3 პუნქტებში განხილული კვანტორებისა და მეტაკვანტორების როლის განსაზღვრისთვისაც.

თითოეული კვანტორის ან მეტაკვანტორის როლის განსაზღვრა და მისი მიკავშირებული ფუნქციების ძირითადი და არაძირითადი განსაზღვრებები ტოლფასია იმ აზრით, რომ ისინი ერთი და იმავე შედეგებს გვაძლევენ ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას. უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ხსენებულ ძირითად და არაძირითად განსაზღვრებებიდან არჩეულია ნებისმიერი. ამ არჩევანს არ დავაფიქსირებთ, რამდენადაც ქვემოთ მოტანილი მსჯელობები და შედეგები არაა არსებითად დამოკიდებულნი ასეთ არჩევაზე. ასეთი არჩევანის გაკეთების შემდეგაც განხილული ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების შინაარსისათვის – მიკავშირებული ფუნქციებისათვის გვრჩება ორი ვარიანტი. პირველი შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა ძირითადი T თეორია ორმნიშვნელობიანია, მეორე კი – იმ შემთხვევას, როცა ძირითადი T თეორია სამმნიშვნელობიანია. უნდა ვიგულისხმოთ, რომ თეორიის განსაზღვრა უზრუნველყოფს ამ ორი ვარიანტიდან ერთ-ერთის ამორჩევას. ამის შესაბამისად შეიძლება ითქვას, რომ განხილული ოპერატორული ნიშნებისა და კვანტორების შინაარსი ცალსახად განისაზღვრება.

3.1.9 დამატებითი ოპერატორული ნიშნებისა და მათი შესაბამისი კვანტორების შინაარსის განსაზღვრა.

3.1.4-ში განვსაზღვრეთ სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის

$$\cdot\wedge, \quad \cdot\vee, \quad \cdot\neg, \quad \cdot\rightarrow, \quad \cdot\leftrightarrow, \quad \approx, \quad \equiv \tag{1}$$

ოპერატორების შინაარსი და $\cdot\forall, \cdot\exists$ და $\cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას. 3.1.3 და 3.1.8 პუნქტებში $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ ოპერატორთა და $\forall, \exists, \tau$ ოპერატორული ნიშნების შინაარსი (უფრო ზუსტად, მათი მიკავშირებული ფუნქციები) გავავრცელეთ გაფართოებულ არეებზე განუსაზღვრელი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის მცდართან ნაწილობრივად გაიგივების პრინციპის საფუძველზე. აღნიშნული ოპერატორების და ოპერატორული ნიშნების გაგრძელებები იმავე სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შესაბამისი ტერმინოლოგიის შეუცვლელად (ამით ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის ოპერატორები სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის ოპერატორებად ვაქციეთ).

$$\cdot\wedge, \quad \cdot\vee, \quad \cdot\neg, \quad \cdot\rightarrow, \quad \cdot\leftrightarrow, \quad \cdot\forall, \quad \cdot\exists \tag{2}$$

ოპერატორებისა და ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციები იმავე ოპერატორებისა და ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციების გაგრძელებას წარმოადგენენ სხვა უფრო ზუსტი და ბუნებრივი პრინციპის საფუძველზე — რომელიც უფრო არსებითად ითვალისწინებს განუსაზღვრელ მნიშვნელობათა (ინტუიციურ) თავისებურებებს. ამიტომ უფრო ბუნებრივი იქნებოდა (2) ოპერატორებისათვის შეგვენარჩუნებინა იგივე ტერმინოლოგია და აღნიშვნები. ასეთი ბუნებრივი გზიდან გადახვევას იწვევს $\rightarrow$ და $\leftrightarrow$ სიმბოლოთა ტრადიციული შინაარსისათვის ანგარიშის გაწევა. უკანასკნელ პრინციპს ვუწოდებთ „**განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტ პრინციპს**". იგი მარტივი ოპერატორების შემთხვევაში გამარტივებულად შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს.

ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის ფორმაში პროპოზიციული და საგნობრივი ასოების თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად † და ⸸ სიმბოლოების ჩასმით მიღებულ გამოსახულებაში (ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის ფორმაში) †-ს თითოეული შემოსვლა სხვა შემოსვლებისაგან **დამოუკიდებლად** აღნიშნავს ნებისმიერ (განსაზღვრულ) ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, ⸸-ს თითოეული შემოსვლა კი სხვა შემოსვლებისაგან დამოუკიდებლად აღნიშნავს ნებისმიერ საგანს (**K** საგანთა არედან) ისე, რომ აღნიშნული გამოსახულების შინაარსის გარკვევისას მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული † და ⸸ სიმბოლოების ხსენებული შემოსვლებისათვის მნიშვნელობების მინიჭების ყველა შესაძლო შემთხვევები. თუ ყველა შესაძლო შემთხვევაში ფორმას ერთი და იგივე გან-

საზღვრული მნიშვნელობა აქვს, მაშინ ეს განსაზღვრული მნიშვნელობა ფორმის მნიშვნელობად უნდა მივიჩნიოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ფორმის მნიშვნელობად უნდა მივიჩნიოთ სათანადო ტიპის განუსაზღვრელი მნიშვნელობა.

განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპის ფორმულირებამდე წინასწარ შემოვიტანოთ შემდეგი ზოგადი შეთანხმება. σ ოპერატორის $\sigma_{\mathcal{A}}$ მიკავშირებული ფუნქციის გაგრძელება გაფართოებულ არეში განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპის საფუძველზე აღინიშნება $\cdot\sigma_{\mathcal{A}}$-ით და იგი მიიჩნევა ახალი (სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის) $\cdot\sigma$ ოპერატორის მიკავშირებულ ფუნქციად. ამასთან, σ ოპერატორთან და მის $\sigma_{\mathcal{A}}$ მიკავშირებულ ფუნქციასთან დაკავშირებული ტერმინების ანალოგები $\cdot\sigma$ ოპერატორისა და მისი $\cdot\sigma_{\mathcal{A}}$ მიკავშირებული ფუნქციისათვის მიიღება დამაზუსტებელი სიტყვის „ზუსტის" გამოყენებით (ზუსტი კონიუნქცია, ზუსტი იმპლიკაცია და ა. შ.) ამ შეთანხმებას და აღნიშნულ პრინციპს $\tau\Delta$ და $\iota\Delta$ სახის ოპერატორებისათვის არ გამოვიყენებთ, მაგრამ განვიხილავთ ზუსტ განუსაზღვრელ დესკრიფციის ოპერატორულ ნიშანს $\cdot\tau$-ს (რომლის როლისა და მიკავშირებული ფუნქციის განსაზღვრას ხსენებული პრინციპი არ უდევს საფუძვლად).

ახლა ხსენებული პრინციპი შემდეგნაირად ფორმულირდება.

განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპი. ვთქვათ, σ არის ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის n-ადგილიანი ოპერატორი $\sigma_{\mathcal{A}}$ მიკავშირებული ფუნქციით. მაშინ სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის $\cdot\sigma$ ოპერატორის $\cdot\sigma_{\mathcal{A}}$ მიკავშირებული ფუნქცია შემდეგნაირად განისაზღვრება. $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ იყოს $\cdot\sigma_{\mathcal{A}}$ ფუნქციის არგუმენტების სისტემა. $\langle a_1',\ldots,a_n'\rangle$ იყოს $\sigma_{\mathcal{A}}$ ფუნქციის არგუმენტების ნებისმიერი ისეთი სისტემა, რომელიც $\{1,2,\ldots,n\}$-დან აღებული თითოეული i-სთვის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: თუ a_i საგნობრივი ან პროპოზიციული განუსაზღვრელი მნიშვნელობაა, მაშინ a_i' იმავე ტიპის განსაზღვრული მნიშვნელობაა; თუ a_i საკუთრივი განზოგადებული ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ სქემაა, მაშინ a_i' იმავე ასოე-

ბის მიმართ სქემაა, რომლის a_i-დან მისაღებად საკმარისია a_i-ს ყოველ ის-ეთ ელემენტში, რომლის მეორე კომპონენტი განუსაზღვრელი მნიშვნელობაა, მეორე კომპონენტი შევცვალოთ იმავე ტიპის განსაზღვრული მნიშვნელობით, თუ a_i-ს მნიშვნელობა საგნობრივი ან პროპოზიციული განსაზღვრული მნიშვნელობაა ან თუ a_i-ს მნიშვნელობა ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ სქემაა, მაშინ a_i' არის a_i. თუ $\sigma_{\mathcal{A}} a_1' \cdots a_n'$-ის მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული $\langle a_1', \ldots, a_n' \rangle$ სისტემის არჩევაზე და იგი განსაზღვრული მნიშვნელობაა, მაშინ, განსაზღვრით, $\cdot\sigma_{\mathcal{A}} a_1 \cdots a_n$ არის $\sigma_{\mathcal{A}} a_1' \cdots a_n'$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\cdot\sigma_{\mathcal{A}} a_1 \cdots a_n$-ის მნიშვნელობაა სათანადო ტიპის განუსაზღვრელობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $\cdot\sigma_A$ ფუნქციის ნებისმიერი არგუმენტი ან საგანია (განსაზღვრული ან განუსაზღვრელი) ან ჭეშმარიტული მნიშვნელობა (განსაზღვრული ან განუსაზღვრელი) ან განზოგადებული ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ ჭეშმარიტული სქემაა ან განზოგადებული ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ საგნობრივი სქემაა. თუ მოცემული თეორიის თითოეული ოპერატორული ასო საგნობრივია ან პროპოზიციული, მაშინ მოცემულ პრინციპში შეგვიძლია ყველგან ამოვაგდოთ ფრაზები „ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ", „იმავე ასოების მიმართ".

განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირებისას ზუსტი პრინციპის გამოყენებით ცალსახად განისაზღვრება $\cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\neg, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow$ მარტივი ოპერატორებისა და $\cdot\forall\Delta$ და $\cdot\exists\Delta$ სახის კვანტორების შინაარსი. ამასთან, ამ ოპერატორებთან და $\cdot\tau\Delta$ ოპერატორთან დაკავშირებული ტერმინები მიიღება $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall\Delta, \exists\Delta, \tau\Delta$ ოპერატორებთან დაკავშირებული ტერმინებიდან დამაზუსტებელი სიტყვის „ზუსტის" გამოყენებით.

„ზუსტი" ოპერატორები და ოპერატორული ნიშნები, გასაგები მიზეზების გამო, მხოლოდ სამმნიშვნელობიან ლოგიკურ თეორიებში გამოიყენება. ამიტომ მხოლოდ ზოგადი შემთხვევის განხილვაა საჭირო. მარტივი ზუსტი ოპერატორების მიკავშირებული ფუნქციები (და, მაშასადამე, მათი როლი) და აგრეთვე $\cdot\forall\Delta$, $\cdot\exists\Delta$ და $\cdot\tau\Delta$ სახის კვანტორების როლი (ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას) განსაზღვრული იყო 3.1.4 პუნქტში. დანარჩენ ზუსტ კვანტორთა როლი და, აგრეთვე, ყველა ზემოთ ხსენებული კვანტორის მიკავშირებული ფუნქციები შემდეგნაირად განისაზღვრება.

1. $\cdot\forall\Delta \in' M$ და $\cdot\exists\Delta \in' M$ სახის შეზღუდული მეტაკვანტორების როლი (ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას) შემდეგნაირად განისაზღვრება: $\cdot\forall\Delta \in' MA$ შესაბამისად $\cdot\exists\Delta \in' MA$, წინადადება ჭეშმარიტია, როცა Δ ასოს ყოველი, შესაბამისად ერთი მაინც, M-დან აღებული მნიშვნელობისათვის A წინადადება ჭეშმარიტია. მცდარია, როცა Δ ასოს ერთი მაინც, შესაბამისად ყოველი, M-დან აღებული მნიშვნელობისათვის A წინადადება მცდარია. სხვა შემთხვევაში იგი განუსაზღვრელია. ამ კვანტორების სახელწოდებებია „შეზღუდული ზუსტი ზოგადობის მეტაკვანტორი" და „შეზღუდული ზუსტი არსებობის მეტაკვანტორი" ზუსტად ასევე განისაზღვრება სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში. $\cdot\forall\Delta \in M$ და $\cdot\exists\Delta \in M$ სახის შეზღუდული კვანტორების როლი და მათი სახელწოდებებია „შეზღუდული ზუსტი ზოგადობის კვანტორი" და „შეზღუდული ზუსტი არსებობის კვანტორი"

$\cdot\tau\Delta$ სახის კვანტორის შინაარსის (მიკავშირებული ფუნქციის) განსაზღვრა არ ეყრდნობა განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტ პრინციპს, მაგრამ მისი განსაზღვრაც ითვალისწინებს განუსაზღველ მნიშვნელობათა ინტუიციურ თავისებურებებს. ამის შედეგად არც (3.1.4-ში მოტანილ) $\cdot\tau\Delta$ კვანტორის როლის განსაზღვრას უდევს საფუძვლად განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე, ოპერირების ზუსტი პრინციპი. იგივე ითქმის $\cdot\tau\Delta \in' M$ სახის შეზღუდული ზუსტი მეტაკვანტორისა და $\cdot\tau\Delta \in M_1$ სახის შეზღუდული ზუსტი კვანტორის შესახებ. უკანასკნელთა როლი შემდეგნაირად განისაზღვრება.

2. $\cdot\tau\Delta \in' MA$ არის ტერმი, რომელიც აღნიშნავს M-დან აღებულ Δ ასოს ნებისმიერ ისეთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც A ჭეშმარიტია; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ $\cdot\tau\Delta \in' MA$ აღნიშნავს M-დან აღებულ Δ ასოს ნებიმსიერ ისეთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც A განუსაზღვრელია; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობაც არ არსებობს, მაშინ $\cdot\tau\Delta \in' MA$ აღნიშნავს Δ ასოს ნებისმიერ მნიშვნელობას. განსაზღვრულობისათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\cdot\tau\Delta \in' MA$ აღნიშნავს შესაბამისს არაცარიელ მეტასიმრავლეში „მონიშნულ საგანს" (აქ ფრაზა „შესაბამისი არაცარიელი მეტასიმრავლე" აღნიშნავს Δ ასოს ყველა ისეთი მნიშვნელობის არაცარიელ მეტაერთობლიობას (მეტასიმრავლეს), რომლისთვისაც A ჭეშმარიტია; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობა არ

არსებობს, მაშინ იგი აღნიშნავს Δ ასოს ყველა ისეთი მნიშვნელობის არაცარიელ მეტასიმრავლეს, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ განუზღვრელია; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობაც არ არსებობს, მაშინ იგი აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეს. იგულისხმება, რომ $\mathbf{A}$ ფორმულის Δ-გან განსხვავებული თავისუფალი ასოების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია). ზუსტად ასევე განისაზღვრება სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში $\cdot\tau\Delta\in\mathbf{M}$ სახის შეზღუდული კვანტორის როლი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლისას (გავიხსენოთ, რომ $\cdot\tau\Delta\not\in\mathbf{M}$ შეზღუდულ ზუსტ მეტაკვანტორში $\mathbf{M}$ აღნიშნავს $\widetilde{\mathbf{K}}$ მეტასიმრავლის ნაწილს, $\cdot\tau\Delta\in\mathbf{M}$ შეზღუდულ ზუსტ კვანტორში კი $\mathbf{M}$ არის $\widetilde{\mathbf{K}}$ მეტასიმრავლის ელემენტი).

*$\cdot\forall\Delta\in\mathbf{M}$, $\cdot\exists\Delta\in\mathbf{M}$ და $\cdot\tau\Delta\in\mathbf{M}$ კვანტორებიც შეგვეძლო შემოგვეტანა ზემოთ განხილული მეთოდით, სახელდობრ შემდეგნაირად. ნებისმიერი $\mathbf{T}$ ტერმისათვის და $\mathbf{A}$ ფორმულისათვის

$$\cdot\forall\Delta\in\mathbf{TA}\,,\ \cdot\exists\Delta\in\mathbf{TA}\,,\ \cdot\tau\Delta\in\mathbf{TA}$$

შესაბამისად მივიჩნიოთ

$$\cdot\forall\Delta[\Delta\in\mathbf{T}\cdot\rightarrow\mathbf{A}],\ \cdot\exists\Delta[\Delta\in\mathbf{T}\cdot\wedge\mathbf{A}],\ \cdot\tau\Delta[\Delta\in\mathbf{T}\cdot\wedge\mathbf{A}]$$

ფორმულების გამარტივებულ აღნიშვნებად. აქედან ინდუცირდება

$$\cdot\forall\Delta\in\mathbf{MA}\,,\ \cdot\exists\Delta\in\mathbf{MA}\,,\ \cdot\tau\Delta\in\mathbf{MA}$$

აღნიშვნების შინაარსი და ეს შინაარსი იგივეა, რაც მათ ზემოთ მოტანილი განსაზღვრებებით მივანიჭეთ (დაამტკიცეთ!)

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთ მოტანილი განხილვიდან ჩანს, რომ „ზუსტი ტიპის" ოპერატორები უფრო მეტად ითვალისწინებენ განუსაზღვრელ მნიშვნელობათა თავისებურებებს, ვიდრე დანარჩენი ზემოთ განხილული ოპერატორები. ეს გარემოება ბუნებრივად იწვევს იმას, რომ ზუსტი ტიპის ოპერატორები, სხვა ზემოთ განხილული ოპერატორებისაგან განსხვავებით, განუსაზღვრელ მნიშვნელობებსაც ღებულობენ. ამიტომ ხელსაყრელი არაა „ზუსტი განსაზღვრული დესკრიფციის ოპერატორის" ცნების შემოტანა (შეუძლებელია ასეთ ტერმინს მოვუძებნოთ ბუნებრივად გამართლებული შინაარსი).

3. ახლა განვსაზღვროთ ყველა სახის ზუსტი კვანტორებისა და მეტაკვანტორების შინაარსი (მიკავშირებული ფუნქციები). $\cdot\forall\Delta$, $\cdot\exists\Delta$, $\forall\Delta\not\in\mathbf{M}$, $\cdot\exists\Delta\not\in\mathbf{M}$, $\cdot\forall\Delta\in\mathbf{M}$, $\cdot\exists\Delta\in\mathbf{M}_1$ (შესაბამისად $\cdot\tau\Delta$, $\cdot\tau\Delta\not\in\mathbf{M}$, $\cdot\tau\Delta\in\mathbf{M}_1$)

კვანტორებისა და მეტაკვანტორების ტიპი იგივეა, რაც $\forall\Delta$ (შესაბამისად $\tau\Delta$) კვანტორების ტიპი ზოგად შემთხვევაში. იგივე ითქმის ამ კვანტორებისა და მეტაკვანტორების მიკავშირებული ფუნქციების ტიპებზე. ამასთან, ქვემოთ მოტანილი განსაზღვრებები შეგვიძლია მივიჩნიოთ, როგორც ძირითადად, ისე არაძირითადად იმისდა მიხედვით განსაზღვრის არედ მივიჩნევთ $S_{\Delta}^{\bullet 1'}$-ს თუ $S_{\Delta}^{\bullet}$-ს. $\cdot\forall\Delta_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\exists\Delta_{\mathcal{A}}$, მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა არის t მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი A არგუმენტის (ყველგან განსაზღვრული განზოგადებული Δ ასოს მიმართ ჭეშმარიტულის სქემის) ყველა, შესაბამისად ერთი მაინც, ელემენტის მეორე კომპონენტი არის t; $\cdot\forall\Delta_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\exists\Delta_{\mathcal{A}}$, მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა არის f მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი A არგუმენტის მეორე კომპონენტი არის f; დანარჩენ შემთხვევებში მისი მნიშვნელობა არის †. ანალოგიურად განისაზღვრება $\cdot\forall\Delta \in' M$ და $\cdot\exists\Delta \in' M$ კვანტორების შინაარსი: $\cdot\forall\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\exists\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა არის t მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი A არგუმენტის A_M შევიწროების ყველა, შესაბამისად ერთი მაინც, ელემენტის მეორე კომპონენტი არის t; $\cdot\forall\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\exists\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა არის f მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი A არგუმენტის A_M შევიწროების ერთი მაინც, შესაბამისად ყველა, ელემენტის მეორე კომპონენტი არის f; დანარჩენ შემთხვევებში მისი მნიშვნელობა არის †. $\cdot\tau\Delta_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\tau\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, ფუნქციის მნიშვნელობა მის A არგუმენტზე არის Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ნებისმიერი ისეთი Δ_0 საგანი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $(\Delta_0, t) \in' A$, შესაბამისად $(\Delta_0, t) \in' A_M$. თუ ასეთი Δ_0 საგანი არ არსებობს, მაშინ $\cdot\tau\Delta_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\tau\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, ფუნქციის მნიშვნელობა A არგუმენტზე არის Δ ასოს ნებისმიერი ისეთი Δ_0 მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $(\Delta_0, \dagger) \in' A$, შესაბამისად $(\Delta_0, \dagger) \in' A_M$. თუ ასეთი საგანიც არ არსებობს, მაშინ $\cdot\tau\Delta_{\mathcal{A}}$, შესაბამისად $\cdot\tau\Delta \in' M_{\mathcal{A}}$, მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა A არგუმენტზე არის Δ ასოს ნებისმიერი მნიშვნელობა. განსაზღვრულობი-

სათვის აქაც ვიგულისხმებთ, რომ $\cdot\tau\Delta$ $_{\prime}A$, შესაბამისად $\cdot\tau\Delta \in' M$ $_{\prime}A$, აღნიშნავს შესაბამის არაცარიელ მეტასიმრავლეში „მონიშნულ საგანს" (აქ ფრაზა „შესაბამისი არაცარიელი მეტასიმრავლე" აღნიშნავს Δ ასოს ყველა ისეთი Δ_0 მნიშვნელობის არაცარიელ მეტაერთობლიობას (მეტასიმრავლეს) რომელთაგან თითოეული აკმაყოფილებს პირობას $\langle\Delta_0, t\rangle \in' A$; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობა არ არსებობს, მაშინ იგი აღნიშნავს Δ ასოს ყველა ისეთი Δ_0 მნიშვნელობის არაცარიელ მეტასიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული აკმაყოფილებს პირობას $\langle\Delta_0, \dagger\rangle \in' A$; თუ Δ ასოს ასეთი მნიშვნელობაც არ არსებობს, მაშინ იგი აღნიშნავს Δ ასოს მნიშვნელობათა არეს). სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში $\cdot\forall\Delta \in M_1$, $\cdot\exists\Delta \in M_1$, $\cdot\tau\Delta \in M_1$ კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციები ისევე განისაზღვრება, როგორც $\cdot\forall\Delta \in' M$, $\cdot\exists\Delta \in' M$, $\cdot\tau\Delta \in' M$ მეტაკვანტორების მიკავშირებული ფუნქციები $\cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნების მიკავშირებული ფუნქციები, როგორც ვიცით, იგივეა, რაც $\cdot\forall\Delta, \cdot\exists\Delta$, $\cdot\tau\Delta$ კვანტორების მიკავშირებული ფუნქციები.

ზემოთ მოტანილი განხილვიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა. იქედან, რომ ფორმის რაიმე ნაწილის მნიშვნელობა განუსაზღვრელია, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ფორმის მნიშვნელობის განუსაზღვრელობა (ფორმის მნიშვნელობის გამოთვლა მოითხოვს მისი ნაწილების მნიშვნელობების გამოთვლას მათი სიგრძეების ზრდადობით (არაცალსახად) განსაზღვრული რიგით). აქვე შევნიშნოთ, რომ სუბსტანციური სპეციალური მარტივი ოპერატორების შემთხვევაში განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპი, პრაქტიკულად, იგივე შედეგებს იძლევა, რასაც ზემოთ მოტანილ განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპი, რომლის ძალით სუბსტანციური სპეციალური მარტივი ოპერატორის მნიშვნელობა განუსაზღვრელია, როცა მისი ერთი არგუმენტი მაინც, განუსაზღვრელია.

***შენიშვნა.** ზემოთ მოტანილი განხილვიდან ჩანს, რომ განუსაზღვრელი მნიშვნელობის წარმოშობის ერთადერთი მიზეზია **ნაწილობრივი ფუნქციები** — არა ყველგან განსაზღვრული სპეციალური სუბსტანციური ფუნქციები, რომ განუსაზღვრელი მნიშვნელობა უშუალოდ შეიძლება შემოიჭრას მხოლოდ სპეციალური სუბსტანციური ოპერატო-

რის მნიშვნელობის სახით (გავიხსენოთ $\mathbf{F}^{\bullet\,\text{п}}_{\Phi s}$-ის გაიგივება $\mathbf{F}^{\text{п}}_{\Phi s\bullet}$-თან). მართლაც, ზემოთ მოტანილი განხილვიდან ჩანს, რომ თითოეული ოპერატორი, რომელიც არაა სპეციალური სუბსტანციური ოპერატორი, განსაზღვრულ მნიშვნელობას გვაძლევს ყოველთვის, როცა მისი თითოეული არგუმენტის როლში გამოდის ამა თუ იმ ტიპის განსაზღვრული მნიშვნელობა ან ამა თუ იმ ტიპის სქემა (და არა განზოგადებული სქემა).

სავარჯიშო. შეამოწმეთ, რომ $\cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\neg, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow$ ლოგიკური კავშირების ერთჯერ გამოყენების შედეგად, როცა მისი ერთი ოპერანდი მაინც არის $\dagger$, ვღებულობთ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს მხოლოდ და მხოლოდ შემდეგ შემთხვევებში:

$$t\cdot\vee\dagger;\ \dagger\cdot\vee t;\ f\cdot\rightarrow\dagger;\ \dagger\cdot\rightarrow t;\ f\cdot\wedge\dagger;\ \dagger\cdot\wedge f.$$

ამასთან, პირველ ოთხ შემთხვევაში ეს განსაზღვრული მნიშვნელობა არის t, უკანასკნელ ორ შემთხვევაში კი არის f.

ზემოთ მოტანილი განხილვიდან ჩანს, რომ ისეთ თეორიებში, სადაც ფორმები განუსაზღვრელ მნიშვნელობებს არ ღებულობენ, $\cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\neg, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow, \approx, \equiv$ ოპერატორებისა და $\cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ ოპერატორული ნიშნების როლი (ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლას) იგივეა, რაც $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, =, \forall, \exists, \tau$ სიმბოლოების როლი შესაბამისად ($\cdot\leftrightarrow$ და $\approx$ ოპერატორების შესაბამისია მხოლოდ $\leftrightarrow$). ამიტომ ასეთ თეორიებში $\cdot\wedge, \cdot\vee, \cdot\neg, \cdot\rightarrow, \cdot\leftrightarrow, \approx, \equiv$ ოპერატორებს და $\cdot\forall, \cdot\exists, \cdot\tau$ ოპერატორულ ნიშნებს არ იყენებენ.

შენიშვნა. წარმოებული სიმბოლოებით გაფართოებულ თეორიებში, საზოგადოდ, შესაძლოა ფიგურირებდეს ნებისმიერი ტიპის ოპერატორული ნიშნები. რელიაციური ლოგიკური ოპერატორული ნიშნის მაგალითებია $\forall$ და $\exists$, სუბსტანციური ლოგიკური ოპერატორული ნიშნის მაგალითებია τ და ι. ზემოთ S_2 თეორიის შემთხვევაში გავეცანით სუბსტანციური სპეციალური ნაწილობრივი ოპერატორული ნიშნების მაგალითებს. ქვემოთ, 3.3-ში გავეცანით სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორული ნიშნისა და სუბსტანციური ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორული ნიშნების მაგალითებს. რელიაციური სპეციალური ოპერატორული ნიშნის საინტერესო მაგალითია წარმოებული ოპერატორული ნიშანი Ш, რომელიც შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრით:

$$\text{Ш}\Delta T_1 T_2 - \forall\Delta [\, T_1 = T_2]$$

(იხ. 3.2), სადაც Δ მოცემული თეორიის ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია, T_1 და T_2 კი — ნებისმიერი ტერმებია. განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ Ш ოპერატორული ნიშნის წონაა (2.1), მისი შესაბამისი კვანტორებია ШΔ სახის სიტყვები, სადაც Δ მოცემული თეორიის ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია (იგულისხმება, რომ მოცემული თეორიის ალფაბეტი შეიცავს საგნობრივ ცვლადებს და $\forall$ ოპერატორულ ნიშანს (და, მაშასადამე, ტოლობის პრედიკატსაც)). 2.2.5-ში და 2.2.6-ში მოტანილი შეთანხმებებიდან ადვილად დავასკვნით, რომ (იმ შემთხვევაში, როცა ფორმებისათვის განუსაზღვრელი მნიშვნელობები არ დაიშვება) ШΔ კვანტის ШΔ_f მიკავშირებული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ისეთი მეტაწყვილის მეტაერთობლიობა, რომლის ნებისმიერი კომპონენტი არის ყველგან განსაზღვრული Δ ცვლადის მიმართ საგნობრივი სქემა. ამასთან, ШΔ_f მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა A_1 და A_2 არგუმენტისათვის იქნება **t** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A_1 და A_2 (Δ ცვლადის მიმართ საგნობრივი სქემები) ერთი და იგივეა.

დასასრულ გავეცნოთ განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების კიდევ ერთ პრინციპს. რომელიც განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპის შემდგომ გამარტივებას წარმოადგენს (ამ პრინციპების პირველი პუნქტი ერთი და იგივეა).

განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ტრივიალური პრინციპი. 1. რელიაციური ოპერატორების მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა მცდარია, შესაბამისად სუბსტანციური ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა საგნობრივი განუსაზღვრელობაა, როცა მისი ერთი არგუმენტი მაინც საგნობრივი განუსაზღვრელი მნიშვნელობაა ან როცა მისი ერთი არგუმენტი მაინც საკუთრივი განზოგადებული საგნობრივი სქემაა ერთი ან რამდენიმე ასოს მიმართ.

2. თუ n-ადგილიანი σ ოპერატორის არგუმენტის $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ სისტემისათვის წინა პუნქტში განხილული პირობა არაა შესრულებული და, ამასთან, სისტემის ერთი არგუმენტი მაინც პროპოზიციული განუზღვრელობაა ან საკუთრივი განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემაა, მაშინ $\sigma a_1 \ldots a_n$-ის მნიშვნელობა სათანადო ტიპის განუზღვრელობაა.

ცხადია, ლოგიკური ოპერატორების შემთხვევაში ეს პრინციპი შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ტრივიალური პრინციპი ლოგიკური ოპერატორებისათვის. ლოგიკური ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქციის მნიშვნელობა სათანადო ტიპის განუზღვრელობაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ერთი არგუმენტი მაინც პროპოზიციული განუზღვრელობაა ან საკუთრივი განზოგადებული ჭეშმარიტული სქემაა.

განუზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ტრივიალური პრინციპის საფუძველზე σ ოპერატორის σ_A მიკავშირებული ფუნქციის გავრცელებას გაფართოებულ არეზე აღვნიშნავთ $:\sigma_A$ სიმბოლოთი და ვიგულისხმებთ რომ $:\sigma_A$ არის $:\sigma$ ოპერატორის მიკავშირებული ფუნქცია. ასეთ ოპერატორებთან დაკავშირებული ტერმინები მიიღება σ-თან დაკავშირებულ შესაბამის ტერმინებიდან დამაზუსტებელი სიტყვის „სუსტის" გამოყენებით (იხ. ზემოთ ს. კლინის მიერ განხილული სუსტი პროპოზიციული კავშირების სუსტი ცხრილები). სუსტი (ლოგიკური) ოპერატორების დეტალურ განხილვაზე არ შევჩერდებით. შევნიშნოთ მხოლოდ ის, რომ $:\neg$ და $:\leftrightarrow$ სუსტ ოპერატორებს (როგორც უკვე აღვნიშნეთ ზემოთ) იგივე შინაარსი აქვთ, შესაბამისად, რაც $\cdot\neg$ და $\cdot\leftrightarrow$ ზუსტ ოპერატორებს. არაა სამართლიანი ანალოგიური წინადადება $:\wedge, :\vee, :\rightarrow$ პროპოზიციული კავშირებისა და სუსტი კვანტორების შესახებ.

ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის T სამნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის ინტერპრეტაცია.

σ სპეციალურ, შესაბამისად ლოგიკურ, მარტივ კონსტანტა ოპერატორს ვუწოდოთ **ნორმალური $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში**, თუ მისი მიკავშირებული $\sigma_{\mathcal{A}}$ ფუნქცია $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში წარმოადგენს $\widetilde{K}$-ზე, შესაბამისად $\{t, f\}$-ზე, მისი შევიწროების გაგრძელებას $\widetilde{K}^{\bullet}$-ზე, შესაბამისად $\{t, f, \dagger\}$-ზე, ან განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპის მიხედვით ან განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპის მიხედვით ან განუსაზღვრელი მნიშვნელობის განსაზღვრულთან გაიგივების პრინციპის მიხედვით ან განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ტრივიალური პრინციპის მიხედ-

ვით. წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ვუწოდოთ **ანორმალური** $\mathcal{A}$ **ინტერპრეტაციაში**.

σ ლოგიკურ ოპერატორულ ნიშანს ვუწოდოთ **ნორმალური** $\mathcal{A}$ **ინტერპრეტაციაში**, თუ მისი მიკავშირებული ფუნქცია არის $U^{!}_{\sigma}$-ზე მისივე შევიწროების გაგრძელება $U^{*!}_{\sigma}$-ზე ან ჭეშმარიტული განუსაზღვრელი მნიშვნელობის მცდართან ნაწილობრივად გაიგივების პრინციპის მიხედვით ან განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპის მიხედვით. ან განუსაზღვრელი მნიშვნელობის განსაზღვრულთან გაიგივების პრინციპის მიხედვით ან განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ტრივიალური პრინციპის მიხედვით (გავიხსენოთ, რომ ლოგიკური ოპერატორებისათვის განუსაზღვრელი მნიშვნელობის მცდართან ნაწილობრივად გაიგივების პრინციპი ტოლფასია განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპისა). წინააღმდეგ შემთხვევაში σ-ს ვუწოდოთ $\mathcal{A}$ **ინტერპრეტაციაში ანორმალური ლოგიკური ოპერატორული ნიშანი**. ნორმალური, შესაბამისად ანომალური, ლოგიკური ოპერატორული ნიშნის შესაბამის კვანტორებს ვუწოდოთ **ნორმალური**, შესაბამისად **ანორმალური, ლოგიკური კვანტორი** (ოპერატორულ ნიშანს და შესაბამის კვანტორებს ერთი და იგივე მიკავშირებული ფუნქცია აქვთ).

როცა ოპერატორული ნიშნების მნიშვნელობათა არეები მეორე ვარიანტის მიხედვით აიღება, მაშინ უკანასკნელ განსაზღვრებებში $U^{!}_{\sigma}$ და $U^{*!}_{\sigma}$ სიმბოლოები უნდა შეიცვალოს U_{σ} და U^{*}_{σ} სიმბოლოებით. ქვემოთ მხედველობაში გვექნება განხილული ორი ვარიანტიდან ნებისმიერი (ვარიანტის არჩევას არსებითი მნიშვნელობა არ ექნება განხილული წინადადებების სამართლიანობისათვის). ამ მიზნით გამოვიყენებთ U^{p}_{σ} და U^{*p}_{σ} აღნიშვნებსაც, სადაც p არის ! ან ცარიელი სიტყვა.

სპეციალურ მარტივ კონსტანტა ოპერატორს, შესაბამისად ლოგიკურ მარტივ კონსტანტა ოპერატორს, შესაბამისად ლოგიკურ ოპერატორულ ნიშანს, შესაბამისად ლოგიკურ კვანტორს, **ვუწოდოთ ნორმალური (ანომალური)** L **ენაში** ანუ L-ში, თუ იგი ნორმალურია (ანომალურია) L ენის თითოეულ ინტერპრეტაციაში. სიმარტივისათვის, ამ ტერმინებიდან ფრაზას „L ენაში" („L-ში") გამოვტოვებთ ხოლმე, ამ

წიგნში განხილული თითქმის ყველა ძირითადი ოპერატორული ნიშანი ნორმალურია (გამონაკლისს შეადგენს მხოლოდ $\cdot\tau$ ოპერატორული ნიშანი).

შენიშვნა I. ცხადია, თუ $\cdot\tau$ ოპერატორულ ნიშნის მიკავშირებულ ფუნქციას ნებისმიერ $\mathscr{A}$ ინტერპტერაციაში განვსაზღვრავთ როგორც τ ოპერატორული ნიშნის მიკავშირებული ფუნქციის გაგრძელებას U_o^p არედან გაფართოებულ $U_o^{\cdot p}$ არეზე განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპის მიხედვით, მაშინ $\cdot\tau$ იქნება ნორმალური ოპერატორული ნიშანი. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $\cdot\tau\Delta\mathbf{A}$ სახის ტერმი შესაძლოა განუსაზღვრელი იყოს მოცემულ $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში მაშინაც, როცა არსებობს Δ-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ჭეშმარიტია: ამასთან, თუ Δ-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ჭეშმარიტია, არ არსებობს, ისეთი კი, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ განუსაზღვრელია, არსებობს, მაშინ $\cdot\tau\Delta\mathbf{A}$ იქნება განსაზღვრული მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა Δ-ს ერთადერთი ისეთი მნიშვნელობა აქვს, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ განუსაზღვრელია, და ეს ერთადერთი Δ_0 მნიშვნელობა Δ ასოს მნიშვნელობათა არეში მონიშნული საგანია (იგულისხმება, რომ $\mathbf{A}$ ფორმის Δ-გან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია.

შენიშვნა II. T თეორიის ინტერპრეტაციის ცნების განსაზღვრა განსაკუთრებით გართულებულია იმის გამო, რომ არა უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნების აგებას საფუძვლად უდევს T თეორიაზე დამოკიდებული (არადაფიქსირებული) ენა (მოითხოვება, რომ დამხმარე D თეორიის ალფაბეტი შეიცავდეს T თეორიის ალფაბეტს). ეს გართულება მოიხსნება, თუ D დამხმარე თეორიის ალფაბეტად ვიგულისხმებთ 3.1.5 პუნქტის (2)-ში მოცემულ სიმბოლოთა ერთობლიობას. ასეთ შემთხვევაში T თეორიის ინტერპრეტაციის განსაზღვრამდე განისაზღვრება D თეორიის ოპერატორების როლი ფორმების მნიშვნელობების გამოთვლისას და უდაბლესი საფეხურის მეტასაგნები. შემდეგაც პირველ თავში აღწერილი მეთოდით განისაზღვრება მეტასაგნები (კერძოდ, მეტასიმრავლეები და მეტაკლასები). ამის შემდეგ დაუყოვნებლივ განისაზღვრება T თეორიის ენის ინტერპრეტაცია. საინტერესო იქნება ინტერპრეტაციის ცნების ასეთი ვარიანტის შესწავლა.

3.1.10 ურთიერთშესაბამისი მათემატიკური და მეტამათემატიკური ოპერატორები და მათემატიკური ოპერატორების შესაბამისი მეტამათემატიკური ცნებები. ვთქვათ, T აქსიომური მეტამათემატიკური თეორიაა L ენით, $\mathcal{A}$ მისი ინტერპრეტაციაა, K კი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის საგანთა არეა. ქვემოთ ძირითადად იგულისხმება, რომ T სამნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიაა. მაგრამ მოტანილი განსაზღვრებებიდან ისინი, რომლებშიც მხოლოდ ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის სიმბოლოები ფიგურირებენ გამოდგება ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიების შემთხვევაშიც.

δ იყოს ერთ-ერთი შემდეგი სიტყვებიდან:

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}*, L, L*, T, T*, K, K*, \Phi T, \Phi T*.$$

ყოველ n-ადგილიან, $n \geq 1$, რელიაციურ მარტივ σ ოპერატორს შევუსაბამებთ δ-ზე დამოკიდებულ ტერმინსა და აღნიშვნას შემდეგნაირად (მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ რიგ შემთხვევაში δ-ს მნიშვნელობათა არედან უნდა გამოირიცხოს ΦT და ΦT*):

თუ $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ არის ჭეშმარიტი ფორმულა $\mathcal{A}$-ში, მაშინ ამბობენ, რომ „**A** ფორმულა ტოლფასია **B** ფორმულისა $\mathcal{A}$-ში" ან, მოკლედ, „**A** ტოლფასია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში". ასევე, სხვადასხვა ტიპის ჭეშმარიტობის ცნების გამოყენებით განისაზღვრება აზრი შემდეგი ტერმინებისა: „**A** ლოგიკურად ტოლფასია **B** -სი" ანუ „**A** ტოლფასია **B**-სი L-ში". „**A** ტოლფასია **B**-სი T-ში", „**A** ტოლფასია **B**-სი K არეში (K-ში)", „**A**-დან გამომდინარეობს **B** $\mathcal{A}$-ში", „**A**-დან ზუსტად გამომდინარეობს **B** T-ში", „**A**-დან ზუსტად გამომდინარეობს **B** K-ში", „**A** ლოგიკურად ეკვივალენტურია **B**-სი", „**A** ტოლია **B**-სი T-ში" და ა. შ. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ ეს და ქვემოთ მოტანილი განსაზღვრებები წინააღმდეგობაში არ არიან 2.3-ში მოტანილ განსაზღვრებებთან. ნაცვლად ტერმინისა, მაგალითად, „**A**-დან გამომდინარეობს **B** T-ში" ვისარგებლებთ აგრეთვე ტერმინით: „**A**-დან T — გამომდინარეობს **B**". ვისარგებლებთ აგრეთვე სხვა გამარტივებებით. ასეთი გამარტივებული ტერმინების მაგალითებია: „$\mathcal{A}$-თეორემა", „$\mathcal{A}$-კვაზი თეორემა", „L-თეორემა", „T-თეორემა", „L-კვაზი გამომდინარეობა",

„L* — გამომდინარეობა“ (უკანასკნელი ორი სინონიმური ტერმინებია) და ა. შ. (უკანასკნელ წინადადებაში მყოფი გამარტივებული ტერმინების შესაბამისი გაუმარტივებელი ტერმინები მოცემულია 2.3-ში; 2.3-ში მოცემული რიგი ტერმინებისა მომდევნო აბზაცში შემოიტანება უფრო ზოგადი სახით).

ყოველ n-ადგილიან, $n \geq 1$, რელიაციურ მარტივ σ ოპერატორს შევუსაბამებთ $\boldsymbol{\sigma}_{გ}$ მეტამათემატიკურ ოპერატორს შემდეგი სტანდარტული გზით. თუ $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, ისეთი ფორმებია, რომ $\sigma \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ ფორმაა, მაშინ, განსაზღვრით, $\boldsymbol{\sigma}_{გ} \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ არის $\vdash_{გ} \sigma \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ მეტაწინადადების ტოლფასი მეტაწინადადება (აქ სიტყვა „ტოლფასი“ მეტაენის სიტყვაა და მისი შინაარსი არ ემთხვევა არც ტოლფასობის მათემატიკური ცნების შინაარსს და არც ტოლფასობის მეტამათემატიკური ცნების შინაარსს: მათემატიკური ტოლფასობის (მიკავშირებული ფუნქციის) არგუმენტებია (ფორმულის) ჭეშმარიტული მნიშვნელობები, მეტამათემატიკური ტოლფასობის არგუმენტებია ფორმულები, აქ განხილული ტოლფასობის არგუმენტები კი არიან ფორმულათა სისტემაზე დამოკიდებული მეტამათემატიკური წინადადებები). თუ შეგვიძლია მოვძებნოთ დამტკიცება იმისა, რომ $\sigma \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ არაა ჭეშმარიტი $\mathcal{A}$-ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ ვწერთ $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$. ასევე, თუ არსებობს დამტკიცება იმისა, რომ $\sigma \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ არაა ჭეშმარიტი $\mathcal{A}$-ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ ვწერთ $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{A}}. \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$. ცხადია, $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ საზოგადოდ არაა $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ მეტაწინადადების უარყოფა; ამასთან, არაა გამორიცხული, რომ $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{A}}. \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ არ იყოს $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{A}}. \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n$ მეტაწინადადების უარყოფა. ასევე განისაზღვრება დანარჩენი $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{გ}$ სახის მეტამათემატიკური ოპერატორების შინაარსი. ამ ზოგადი განსაზღვრით სრულიად გარკვეულ შინაარს იძენს შემდეგი სახის მეტამეთემატიკური ოპერატორები

$$\Rightarrow_{გ}, \Leftrightarrow_{გ}, \approx_{გ}, {}^{\cdot}\!\Rightarrow_{გ}, {}^{\cdot}\!\Leftrightarrow_{გ}, \equiv_{გ}, \blacksquare_{გ}, \wedge_{გ}, \vee_{გ}, \ldots;$$
$$\overline{\Rightarrow}_{გ}, \overline{\Leftrightarrow}_{გ}, \approx_{გ}, {}^{\cdot}\overline{\Rightarrow}_{გ}, {}^{\cdot}\overline{\Leftrightarrow}_{გ}, \overline{\equiv}_{გ}, \overline{\equiv}_{გ}, \overline{\wedge}_{გ}, \overline{\vee}_{გ}, \ldots.$$

ამასთან, ეს შინაარსი, როგორც ადვილი დასანახია, წინააღმდეგობაში არაა 2.3-ში შემოტანილ განსაზღვრებებთან. ამიტომ ძალაში რჩება 2.3-ში

შემოტანილი $\approx_{\text{გ}}, \equiv_{\text{გ}}, \Rightarrow_{\text{გ}}, \Leftrightarrow_{\text{გ}}$ სახის მეტაოპერატორების აღმნიშვნელი ტერმინები და

$$\mathbf{A}\approx_{\text{გ}}\mathbf{B},\quad T_1\equiv_{\text{გ}}T_2,\quad \mathbf{A}\Rightarrow_{\text{გ}}\mathbf{B},\quad \mathbf{A}\Leftrightarrow_{\text{გ}}\mathbf{B}$$

სახის ჩანაწერების კითხვის წესები. ანალოგიური აღმნიშვნელი ტერმინები და კითხვის წესები გვექნება სხვა შემთხვევაშიც. მაგალითად, $\cdot\Leftrightarrow_{K}\cdot$ სიმბოლოს აღმნიშვნელი ტერმინია „ზუსტი კვაზიეკვივალენტობა K არეში" (K-ში) და $\mathbf{A}\cdot\Leftrightarrow_{K}\mathbf{B}$ ჩანაწერი იკითხება ფრაზით „**A** ზუსტად ეკვივალენტურია **B**-სი K-ში", ამასთან, ამ უკანასკნელი ფრაზის პირდაპირი აზრი განსხვავდება $\mathbf{A}\cdot\Leftrightarrow_{K}\mathbf{B}$ ჩანაწერის აზრისაგან. აღნიშნული ფრაზა გაგებულ უნდა იქნეს $\mathbf{A}\cdot\Leftrightarrow_{K}\mathbf{B}$ ჩანაწერის აზრით, როცა იგი ამ უკანასკნელი ჩანაწერის წასაკითხად გამოიყენება. აქვე შევნიშნოთ, რომ $\mathbf{A}\cdot\Leftrightarrow_{K}\cdot\mathbf{B}$ ჩანაწერი იკითხება ფრაზით „**A** ზუსტად კვაზიეკვივალენტურია **B**-სი K არეში" (K-ში) და ამ ფრაზას აღნიშნული ჩანაწერის აზრისაგან განსხვავებული სხვა აზრი არ აქვს. იგივე ითქმის ფრაზაზე „**A** ფორმალურად ეკვივალენტურია **B**-სი T-ში", რომლითაც იკითხება ჩანაწერი: $\mathbf{A}\Leftrightarrow_{\text{ფT}}\mathbf{B}$.

იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული მათემატიკური თეორიის ფორმები განუსაზღვრელ მნიშვნელობებს არ ღებულობენ, ზოგიერთ ოპერატორთა შინაარსი ერთმანეთს ემთხვევა. ასეთ შემთხვევაში ამა თუ იმ ოპერატორთან დაკავშირებულ ცნებებს, ტერმინებს და აღნიშვნებს გამოვიყენებთ იმავე შინაარსის მქონე სხვა ოპერატორების შემთხვევაშიც. მაგალითად, ერთი და იმავე ტიპის ტოლფასობა და ზუსტი ეკვივალენტობა სინონიმური ტერმინები იქნებიან.

მსჯელობათა გამარტივების მიზნით ხელსაყრელია სხვადასხვა ტიპის ტოლფასობის ცნება გავავრცელოთ ფორმულათა კლასზე შემდეგნაირად. **A** და **B** ფორმებს ვუწოდოთ **ტოლფასი ფორმები** $\mathcal{A}$-ში ($\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში), თუ ისინი არიან ან ტოლფასი ფორმულები $\mathcal{A}$-ში ან იგივური ტერმები $\mathcal{A}$-ში. ის გარემოება, რომ შეგვიძლია $\mathcal{A}$-ში **A** და **B** ფორმების ტოლფასობის დამტკიცების მოძებნა, შესაბამისად არსებობს $\mathcal{A}$-ში **A** და **B** ფორმების ტოლფასობის დამტკიცება, ჩაიწერება სახით $\mathbf{A}\approx_{\mathcal{A}}\mathbf{B}$, შესაბამისად $\mathbf{A}\approx_{\mathcal{A}}.\mathbf{B}$ (იკითხება: „**A** ტოლფასია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში", შესაბამი-

სად „**A** კვაზიტოლფასია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში"). $\approx_{\mathcal{A}}$ და $\approx_{\mathcal{A}\cdot}$ მეტამათემატიკურ მიმართებებს შესაბამისად ვუწოდოთ „მეტამათემატიკური ტოლფასობა $\mathcal{A}$-ში" და „მეტამათემატიკური კვაზიტოლფასობა $\mathcal{A}$-ში". ასევე განისაზღვრება

$$\approx_{L}, \approx_{L\cdot}, \approx_{T}, \approx_{T\cdot}, \approx_{K}, \approx_{K\cdot}$$

სიმბოლოთა შინაარსი, მათი აღმნიშვნელი ტერმინები და $\mathbf{A} \approx_{\delta} \mathbf{B}$ სახის ჩანაწერთა კითხვის წესები.

ცხადია, **A** და **B** ფორმები ტოლფასია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ფორმებში მყოფი ცვლადების ($\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ) მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემისათვის მათ ერთი და იგივე (განსაზღვრული ან განუსაზღვრელი) მნიშვნელობა აქვთ.

დამოკიდებულება, მაგალითად, „**A** ტოლფასია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში" მეტაწინადადებასა და „ $\mathbf{A} \approx_{\mathcal{A}} \mathbf{B}$ " მეტაწინადადებას შორის (რომელიც პირველი წინადადებით იკითხება) ასეთია: მეორედან გამომდინარეობს პირველი, ამასთან, არ გვაქვს არავითარი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ შებრუნებული გამომდინარეობა სამართლიანია საზოგადოდ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ფორმათა ამა თუ იმ ტიპის მეტამათემატიკურ ტოლფასობის ცნებას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს ფორმების გარდაქმნის წარმოების დროს. ფორმათა გარდაქმნების წარმოების დროს ჩვეულებრივ ვეყრდნობით (ამა თუ იმ ტიპის) ტოლფასობის შემდეგ თვისებას: **თ უ ფ ო რ მ ი ს რ ა ი მ ე ნ ა წ ი ლ ს შ ე ვ ც ვ ლ ი თ მ ი ს ი ტ ო ლ ფ ა ს ი ფ ო რ მ ი თ მ ი ვ ი ღ ე ბ თ მ ო ც ე მ უ ლ ი ფ ო რ მ ი ს ტ ო ლ ფ ა ს ფ ო რ მ ა ს**. ამ თვისების ანალოგები ამა თუ იმ ტიპის ეკვივალენტობისთვის და ზუსტი ეკვივალენტობისთვის შემდეგი შეზღუდული ხასიათის წინადადებებია (ფორმულათა ეკვივალენტობისა და ზუსტი ეკვივალენტობის ანალოგები ტერმებისათვის არ გვაქვს): თუ ფორმულის პროპოზიციულ ნაწილს შევცვლით მისი ეკვივალენტური ფორმულით, შესაბამისად ზუსტად ეკვივალენტური ფორმულით, მივიღებთ მოცემული ფორმულის ეკვივალენტურ, შესაბამისად ზუსტად ეკვივალენტურ ფორმულას. ორივე ეს წინადადება მცდარია ნებისმიერი ტიპის ეკვივალენტურობისა და ზუსტად ეკვივალენტურობის შემთხვევაში (ფორმულათა ამა თუ იმ ტიპის ზუსტად ეკვივალენტურობას არ აქვს რეფლექსურობის თვისებაც კი: მეტაწინადადებიდან „**A** ზუსტად ეკვივალენტურია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში" გამომდინარეობს **A** და **B**

ფორმულების ყველგან განსაზღვრულობა, მაშასადამე, თუ ფორმულა ყველგან განსაზღვრული არაა, მაშინ იგი არაა თავის თავის ზუსტად ეკვივალენტური $\mathcal{A}$-ში).

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ უკანასკნელი წინადადების მცდარობა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში ეკვივალენტურობისათვის და T-ში ზუსტად ეკვივალენტურობისათვის.

შევნიშნოთ, რომ თუ σ რელიაციური მარტივი ოპერატორია, $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ კი – ისეთი ფორმები, რომ $\sigma\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_n$ არის ფორმა, მაშინ $\sigma\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_n$ არის განხილული მათემატიკური თეორიის $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ ფორმებისაგან შედგენილი ახალი ფორმულა, $\mathfrak{S}_\delta\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_n$ და $\bar{\mathfrak{S}}_\delta\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_n$ სახის ჩანაწერები კი მეტამათემატიკური წინადადებებია $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ მათემატიკური ობიექტების (ფორმების) შესახებ. მაგალითად $\mathbf{T}_1 \equiv_{\mathcal{A}} \mathbf{T}_2$ (მეტამათემატიკური) იგივურობა არის მეტამათემატიკური წინადადება $\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ ტერმების შესახებ, $\mathbf{A}\approx\mathbf{B}$ კი ერთი მთლიანი მათემატიკური ფორმულაა – მათემატიკური წინადადებაა.

შენიშვნა. ფორმების წასაკითხად გამოყენებული ფრაზები (როგორიცაა „**A** ტოლფასია **B**-სი", „**A**-დან გამომდინარეობს **B**" და ა. შ.) არავითარ ინფორმაციას არ შეიცავს არც ამ ფორმების შესახებ და არც ამ ფორმების ნაწილების შესახებ. თითოეული მათგანი უბრალოდ შესაბამისი ფორმის სახელის როლს ასრულებს. იგივე არ შეიძლება ითქვას ზემოთ განხილული ანალოგიური ფრაზის შესახებ. მაგალითად, ფრაზა „**A** ტოლფასია **B**-სი T-ში" განსაზღვრულ ინფორმაციას შეიცავს $\mathbf{A}\approx\mathbf{B}$ ფორმულის შესახებ (**A** და **B** ფორმულების შესახებ).

განხილულ $\rightarrow, \leftrightarrow, \cdot\!\rightarrow, \cdot\!\leftrightarrow, \approx, =, \equiv$ მათემატიკურ ოპერატორებსა და შესაბამისს მეტამათემატიკურ ოპერატორებს (მეტაოპერატორებს) შორის კავშირი შემდეგი თეორემით გამოითქმის.

(3.1) თეორემა. ვთქვათ, T აქსიომური მათემატიკური თეორიაა L ენით, $\mathcal{A}$ მისი ინტერპრეტაციაა საგანთა K არით, **A** და **B** არიან T თეორიის ფორმულები, $\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ კი – ტერმები. δ იყოს ერთ-ერთი შემდეგი სიტყვებიდან:

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}*, \mathrm{L}, \mathrm{L}*, \mathrm{T}, \mathrm{T}*, \mathrm{K}, \mathrm{K}*$$

ისე, რომ თუ L არაა თანამედროვე ენა, მაშინ δ არ არის არც L და არც L*; $X_1,\ldots,X_n$ კი იყოს წყვილ-წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება **A**, **B**, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ფორმების ყველა თავისუფალი ცვლადი. მაშინ:

1. მეტაწინადადებები

$$\mathbf{A}\Rightarrow_\delta\mathbf{B},\ \mathbf{A}\Leftrightarrow_\delta\mathbf{B},\ \mathbf{A}\cdot\Rightarrow_\delta\mathbf{B},\ \mathbf{A}\cdot\Leftrightarrow_\delta\mathbf{B},\ \mathbf{A}\approx_\delta\mathbf{B},\ \mathbf{T}_1=_\delta\mathbf{T}_2,\ \mathbf{T}_1\equiv_\delta\mathbf{T}_2, \tag{3}$$

შესაბამისად ტოლფასია შემდეგი მეტაწინადადებებისა:

$$\begin{gathered}\vdash_\delta\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B},\quad \vdash_\delta\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B},\quad \vdash_\delta\mathbf{A}\cdot\rightarrow\mathbf{B},\quad \vdash_\delta\mathbf{A}\cdot\leftrightarrow\mathbf{B},\\ \vdash_\delta\mathbf{A}\approx\mathbf{B},\quad \vdash_\delta\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2,\quad \vdash_\delta\mathbf{T}_1\equiv\mathbf{T}_2,\end{gathered}\tag{4}$$

ასევე, მეტაწინადადება „ $\mathbf{T}_1=_{\mathcal{A}}\mathbf{T}_2$ “, შესაბამისად „ $\mathbf{T}_1\equiv_{\mathcal{A}}\mathbf{T}_2$ “, ტოლფასია შემდეგი მეტაწინადადებისა: „შეგვიძლია მოვძებნოთ, შესაბამისად არსებობს, იმის დამტკიცება, რომ $\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2$ ტოლობა იგივეობაა $\mathcal{A}$-ში“. თუ გარდა აღნიშნულისა ცნობილია, რომ **A**, **B**, $\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ ყველგან განსაზღვრული ფორმებია, მაშინ ურთიერთტოლფასნია შემდეგი მეტაწინადადებები:

$$\mathbf{T}_1=_\delta\mathbf{T}_2,\quad \mathbf{T}_1\equiv_\delta\mathbf{T}_2,\quad \vdash_\delta\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2,\quad \vdash_\delta\mathbf{T}_1\equiv\mathbf{T}_2\,.$$

ასევე ამ შემთხვევაში ურთიერთტოლფასია შემდეგი მეტაწინადადებები:

$$\mathbf{A}\Rightarrow_\delta\mathbf{B},\quad \mathbf{A}\cdot\Rightarrow_\delta\mathbf{B},\quad \vdash_\delta\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B},\quad \vdash_\delta\mathbf{A}\cdot\rightarrow\mathbf{B}\,.$$

1′. მეტაწინადადებები: „**A** ფორმულიდან გამომდინარეობს **B** ფორმულა $\mathcal{A}$-ში“, „**A** ეკვივალენტურია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში“, „**A**-დან ზუსტად გამომდინარეობს **B** $\mathcal{A}$-ში“, „**A** ზუსტად ეკვივალენტურია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში“, „**A** ტოლფასია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში“, „$\mathbf{T}_1$ ტოლია $\mathbf{T}_2$-ის $\mathcal{A}$-ში“ და „$\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ იგივური ტერმებია $\mathcal{A}$-ში“ შესაბამისად ტოლფასია შემდეგი წინადადებებისა: „$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“, „$\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“, „$\mathbf{A}\cdot\rightarrow\mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“, „ $\mathbf{A}\quad\leftrightarrow\mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“, „$\mathbf{A}\approx\mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“, „$\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“ და „$\mathbf{T}_1\equiv\mathbf{T}_2$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში“. ასევე, მეტაწინადადება „$\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ იგივური ტერმებია $\mathcal{A}$-ში“ ტოლფასია

შემდეგი მეტაწინადადებისა: „$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ ტოლობა იგივეობაა $\mathcal{A}$-ში". თუ, გარდა აღნიშნულისა, **A**, **B**, $\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ ყველგან განსაზღვრული ფორმებია, მაშინ ურთიერთტოლფასია შემდეგი მეტაწინადადებები: „**A** ეკვივალენტურია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში", „**A** ზუსტად ეკვივალენტურია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში", „**A** ტოლფასია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{A} \cdot\!\leftrightarrow \mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში". ასევე, ამ შემთხვევაში ურთიერთტოლფასია შემდეგი მეტაწინადადებები: $\mathbf{T}_1$ ტოლია $\mathbf{T}_2$-ის $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ იგივური ტერმებია $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{T}_2$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ იგივეობაა $\mathcal{A}$-ში". ამ შემთხვევაში ურთიერთტოლფასია აგრეთვე შემდეგი მეტაწინადადებები: „**A**-დან გამომდინარეობს **B** $\mathcal{A}$-ში", „**A**-დან ზუსტად გამომდინარეობს **B** $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში", „$\mathbf{A} \cdot\!\rightarrow \mathbf{B}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში".

1''. 1-ელ და 1' პუნქტებში მოცემულ წინადადებებში $\mathcal{A}$ სიმბოლოს თუ შევცვლით ნ-ს რომელიმე სხვა მნიშვნელობით, მივიღებთ ჭეშმარიტ წინადადებებს.

2. მეტაწინადადებები „**A**-დან გამომდინარეობს **B** $\mathcal{A}$-ში", „**A**-დან ზუსტად გამომდინარეობს **B** $\mathcal{A}$-ში", „**A** ეკვივალენტურია **B**-სი $\mathcal{A}$-ში", შესაბამისად ტოლფასია შემდეგი მეტაწინადადებებისა: „$\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1,\ldots,X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველი ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც **A** ფორმულის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$-ში არის **t**, **B** ფორმულის მნიშვნელობაც $\mathcal{A}$-ში არის **t**", „$\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1,\ldots,X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველი ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც **A** ფორმულის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$-ში არ არის **f**, **B** ფორმულის მნიშვნელობა არის **t**", „$\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1,\ldots,X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველი ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც, **A** და **B** ფორმულებიდან ერთ-ერთის მნიშვნელობა არის **t**, მეორის მნიშვნელობაც არის **t**.

დამტკიცება ადვილად გამომდინარეობს თეორემის ფორმულირებაში მყოფი ოპერატორთა და ტერმინთა შინაარსის განსაზღვრებებიდან.

შენიშვნა. თეორემის სამართლიანობა არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ არის განსაზღვრული მოცემული თეორემის ფორმის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$-ში მისი თავისუფალი ცვლადების $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ მნიშვნელობათა სისტემისათვის.

სავარჯიშო. ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერი **A** და **B** ფორმულებისათვის დაამტკიცეთ შემდეგი მეტაწინადადებები:

$$\neg[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \Leftrightarrow_{\mathbf{A}} \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B};$$

$$\cdot\neg[\mathbf{A} \cdot\wedge \mathbf{B}] \Leftrightarrow_{\mathbf{A}} \cdot\neg\mathbf{A} \cdot\vee\cdot \neg\mathbf{B};$$

აქ $\mathcal{A}$ შეიძლება შეიცვალოს წინა თეორემაში შემოტანილი δ ცვლადის ნებისმიერი სხვა მნიშვნელობით.

სხვადასხვა ტიპის მეტამათემატიკურ ტოლფასობებს, იგივურობებს, გამომდინარეობებსა და ტოლობებს ხშირად იყენებენ განსაზღვრებების და მეტათეორემების მოკლედ ჩასაწერად. წინა მეტათეორემის ძალით, მათ ნაცვლად შესაძლებელია შესაბამისად გამოვიყენოთ $\vdash_{\delta}\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, $\vdash_{\delta}\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{T}_2$, $\vdash_{\delta}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\vdash_{\delta}\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ სახის მეტამათემატიკური წინადადებები. ასევე, იმავე მიზნით ხშირად იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ჭეშმარიტ ფორმულად განხილულ (მათემატიკურ) ტოლფასობებს, იგივურობებს, გამომდინარეობებს და ტოლობებს. იყენებენ აგრეთვე სხვადასხვა ტიპის, იგივეობებად განხილულ ტოლობებს. ამასთანავე, ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში, ხსენებული მათემატიკური ფორმულის ამა თუ იმ ტიპის ჭეშმარიტ ფორმულებად განხილვაზე ან ტოლობის ამ თუ იმ ტიპის იგივეობად განხილვაზე" მიუთითებს კონტექსტი. ასეთი მითითებები, ნაცვლად ზუსტი ფრაზებისა, გამარტივებული ფრაზებით წარმოებს. ასეთი მითითებული ფრაზების მაგალითებია: „ვთქვათ, **A**", „ვთქვათ, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$", „კონსტანტა 0 ისაზღვრება $\mathbf{n} + 0 = \mathbf{n}$ ტოლობით", „გამოკლების ოპერაცია „$-$" ისაზღვრება $\mathbf{n} - \mathbf{m} = \mathbf{n} + [-\mathbf{m}]$ ტოლობით", განვიხილოთ $\mathbf{O}\mathbf{x} = 1 : \mathbf{x}$ იგივეობით განსაზღვრული **O** ოპერატორი" და ა. შ. აქვე შევნიშნოთ, რომ ტოლობის (ამა თუ იმ ტიპის) ჭეშმარიტ ფორმულად განხილვის მეთოდზე უფრო ზოგადია ტოლობის (სათანადო ტიპის) იგივეობად განხილვის მეთოდი. მაგალითად, ვთქვათ, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ ტოლობა გვინდა გამოვიყენოთ რაიმე σ ოპერატორის შინაარსის განსასაზღვრავად (რაიმე $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში). თუ ტოლობის ის მხარე, რომელიც არ შეიცავს განსაზღვრებად σ

სიმბოლოს, არ არის ყველგან განსაზღვრული ($\mathcal{A}$-ში), მაშინ შეუძლებელია ამ ტოლობის ჭეშმარიტ ფორმულად განხილვა, მაგრამ ასეთ შემთხვევაში ხშირად შესაძლებელი ხდება იგი განხილული იქნეს როგორც იგივეობა. თეორიებში, სადაც ფორმები განუზღვრელ მნიშვნელობებს არ ღებულობენ, ორივე მეთოდი ტოლფასია. აქვე შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ ერთი და იმავე ცნების განსაზღვრა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ როგორც მეტამათემატიკური ტოლფასობის, შესაბამისად მეტამათემატიკური გამომდინარეობის, შესაბამისად მეტამათემატიკური იგივურობის, საფუძველზე, ისე შესაბამისი ფორმულის ჭეშმარიტ ფორმულად განხილვის საფუძველზე მაგალითად, მთელ რიცხვთა თეორიაში ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრებები:

I. გამოკლების ოპერაცია „–" განისაზღვრება (მეტამათემატიკური) იგივურობით:

$$n - m \equiv n + [-m]. \tag{5}$$

II. გამოკლების ოპერაცია „–" განისაზღვრება (მათემატიკური) იგივურობით:

$$n - m \equiv n + [-m]. \tag{6}$$

მართლაც, II განსაზღვრა მოითხოვს: „–" ორადგილიანი ოპერატორის შინაარსი ისეთი იყოს, რომ (6) იყოს ჭეშმარიტი. ასეთი ოპერატორის არსებობა, ერთადერთობა და ყველგან განსაზღვრულობა გამომდინარეობს $n + [-m]$ ტერმის ყველგან განსაზღვრულობიდან და იქიდან რომ ამ ტერმს n და m ასოების მნიშვნელობათა თითოეული სისტემისათვის ერთადერთი განსაზღვრული მნიშვნელობა აქვს. იგულისხმება, რომ ასეთი ერთადერთი ოპერატორი აღინიშნება „–"-ით და (6) წარმოადგენს იგივურად ჭეშმარიტ ფორმულას (თუ „–" არ იყო მოცემული თეორიის ორადგილიანი ოპერატორი, მაშინ თეორიის ალფაბეტისადმი სპეციალურ სუბსტანციურ ორადგილიან ოპერატორად „–" სიმბოლოს დამატებით მიღებულ თეორიაში (6) ფორმულა იქნება იგივურად ჭეშმარიტი). ე. ი. (6) დამტკიცებადია და, მაშასადამე, გვაქვს (5). ასევე, I განსაზღვრა მოითხოვს: „–" ორადგილიანი ოპერატორის შინაარსი ისეთი იყოს, რომ (5) იყოს იგივურობა. წინა მსჯელობიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ ასეთი ოპერატორი არსებობს და არის ერთადერთი და რომ იგი ემთხვევა II განსაზღვრის შესაბამისს ოპერატორს.

შენიშვნა 1. აქ უხერხულობას იწვევს ის გარემოება, რომ ერთი და იგივე სიმბოლო „–" გამოყენებულია ორი სხვადასხვა ოპერატორის აღსანიშნავად – იგულისხმება, რომ $[-\mathfrak{m}]$-ში „–" აღნიშნავს განხილული თეორიის ერთადგილიან ოპერატორს და „–" სიმბოლო მოცემული ან გაფართოებული თეორიის ალფაბეტში ფიგურირებს ორჯერ როგორც განსხვავებული სიმბოლოები.

შენიშვნა 2. წინადადება „ორადგილიანი ოპერატორი „·" განისაზღვრება ტოლობით $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}=\underbrace{\mathfrak{m}+\mathfrak{m}+\cdots+\mathfrak{m}}_{\mathfrak{n}\text{-ჯერ}}$" უფრო რთული ბუნების განსაზღვრას წარმოადგენს. აქ განხილული „ტოლობა" არაა ტოლობა მათემატიკური აზრით – არაა ორი ტერმის ტოლობა.

3.2 სიმრავლეთა თეორიის ზოგიერთი განსაზღვრებები

ქვემოთ ყველგან (მომდევნო თავების ჩათვლით), იქ სადაც საწინააღმდეგოდ არ გამომდინარეობს კონტექსტიდან, ვიგულისხმებთ, რომ განიხილება $\overline{S}$ (შინაარსული ან ფორმალური) ძირითადი (სიმრავლეთა) თეორია, რომლის ალფაბეტი ემთხვევა $S, \overline{S}, S^{1}$ და $\overline{S}^{1}$ თეორიებიდან ერთ-ერთის ალფაბეტს, იმ განსხვავებით, რომ $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი შესაძლოა არ შეიცავდეს ან საგნობრივ ცვლადებს ან კვანტორულ საგნობრივ კონსტანტებს (2.1.1-ში მოტანილი ზოგადი შეთანხმებების ძალით ერთ-ერთ მათგანს მაინც იგი აუცილებლად უნდა შეიცავდეს). ამასთან, შინაარსული თეორიის შემთხვევაში მხედველობაში გვექნება როგორც ის შემთხვევა, როცა $\overline{S}$ კლასიკური თეორიაა, ასევე ის შემთხვევაც, როცა $\overline{S}$ თანამედროვე თეორიაა. კლასიკური თეორიის შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ $\in$ და $\varnothing$ (სათანადო ტიპის) საკუთრივი კონსტანტებია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი არასაკუთრივი კონსტანტებია. ამასთან, უკანასკნელ შემთხვევაში შესაძლოა $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავდეს $\varnothing$ საგნობრივ კონსტანტას. შესაძლოა ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ განხილული ალფაბეტის ზოგიერთი ოპერატორი ან ოპერატორული ნიშანი წარმოებული სიმბოლოა (წარმოებული სიმბოლოს ცნება ქვემოთ ამავე პარაგრაფში შემოიტანება). ცხადია, $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი შეიცავს

ერთს და მხოლოდ ერთს τ და ι ოპერატორული ნიშნებიდან. განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმებთ, რომ $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი შეიცავს τ ოპერატორულ ნიშანს (თუ $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავს τ-ს, მაშინ იგი შეიცავს ι-ს. ამასთან, ასეთ შემთხვევაში, ქვემოთ ყველგან τ-ს ნაცვლად უნდა ვიგულისხმოთ ι. ამით ქვემოთ მოტანილი წარმოებული სიმბოლოების განსაზღვრებების შინაარსი (არსებითად) არ იცვლება). ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ განიხილება $\overline{S}$ თეორიის ისეთი ნებისმიერად აღებული $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია, რომელიც ან $\overline{S}$ თეორიის მოდელია ან, უკიდურეს შემთხვევაში, მოითხოვება, რომ $\mathcal{A}$-ში შესრულებული იყოს მოცულობისა და კლასების არსებობის აქსიომები. ამასთან, ვიგულისხმებთ, რომ $\overline{S}$ თეორიას აქვს მოდელი (ეს ძლიერი დაშვებაა: პრაქტიკაში გავრცელებული თანამედროვე აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიის მოდელის არსებობის საკითხი პრობლემატურია).

ინტუიციური კლასიკურ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ შერჩეულია ინდივიდთა ერთობლიობა კონკრეტულად და $\overline{S}$ თეორიის საგანთა არეა ყველა ინდივიდისა და ამ ინდივიდებზე რაიმე კონკრეტული მეთოდის (არა მაინცდამაინც პირველ თავში გამოყენებული მეთოდის) გამოყენებით აგებული ყველა ინტუიციური კლასის ერთობლიობა. ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ $\in$ პრედიკატს ინტუიციური შინაარსი აქვს. აქვე შევნიშნოთ რომ, ამ შემთხვევაში, თუ თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავს $\bar{\text{ნ}}_0, \bar{\text{ნ}}_1, \ldots$ არასაკუთრივ საგნობრივ კონსტანტებს და Ɔ არასაკუთრივ სუბსტრანციურ ფუნქციონალურ კონსტანტას, მაშინ $\overline{S}$ თეორიის ინტერპრეტაცია ცალსახად განისაზღვრება (საგანთა არის ფიქსირების შემდეგ) $\overline{S}$ თეორიის აქსიომები უზრუნველყოფენ მოდელში კლასების, ზესიმრავლეების, ინდივიდებისა და სიმრავლეების ძირითადი თვისებების დადგენას. ამასთან, სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებები $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში იმ შემთხვევაში, როცა თეორიის ალფაბეტი $\varnothing$ სიმბოლოს შეიცავს, შემდეგნაირად შემოიტანება (რიგი ცნებების განსაზღვრა არსებითად ეყრდნობა აქსიომებიდან გამომდინარე თვისებებს და ამიტომ მათი შემოტანა მხოლოდ თეორიის მოდელებშია შესაძლებელი). $\mathbf{a}$ საგანს ეწოდება $\mathbf{b}$ **საგნის ელემენტი** ($\mathcal{A}$-ში), თუ $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ წინადადება ჭეშმარიტია. $\mathbf{a}$ საგანს ეწო-

დება **ელემენტი**, თუ არსებობს ისეთი b საგანი, რომ a არის b საგნის ელემენტი. ∅ საგნისაგან განსხვავებულ ელემენტის არმქონე ნებისმიერ საგანს ეწოდება **ინდივიდი**. a საგანს ეწოდება **სიმრავლე**, თუ იგი ელემენტია და არ არის ინდივიდი. a საგანს ეწოდება **კლასი**, თუ იგი არაა ინდივიდი. a კლასს ეწოდება **საკუთრივი კლასი** ანუ **ზესიმრავლე**, თუ იგი არაა ელემენტი. ცხადია, თითოეული სიმრავლე კლასია, ∅ კლასია, მას ეწოდება **ცარიელი კლასი**, თუ იგი სიმრავლეა, მას ეწოდება აგრეთვე **ცარიელი სიმრავლე**. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ ∅ ერთადერთი უელემენტო სიმრავლეა. ელემენტის მქონე კლასს ვუწოდოთ არაცარიელი კლასი. განსაზღვრით, ინტერპრეტაციის უნივერსუმიდან აღებული ნებისმიერი არაცარიელი **კლასისათვის** ვიტყვით, რომ იგი **შედგენილია** მისი **ელემენტებისაგან**.

იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავს ∅ საგნობრივ კონსტანტას, ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში მოტანილი ცნებებიდან მხოლოდ ნაწილი განისაზღვრება. სახელდობრ, ძალაში რჩება განსაზღვრა შემდეგი ტერმინებისა: **a საგანი b საგნის ელემენტია** და **ელემენტი**; ელემენტის მქონე საგანს ეწოდება **არაცარიელი კლასი**. **არაცარიელი სიმრავლე** ეწოდება ისეთ არაცარიელ კლასს, რომელიც ამავე დროს ელემენტია. **საკუთრივი კლასი** ანუ **ზესიმრავლე** ეწოდება ისეთ არაცარიელ კლასს, რომელიც არაა ელემენტი. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები უზრუნველყოფენ მოდელში ერთადერთი უელემენტო კლასის არსებობას, ამასთან, იგი ამავე დროს არის ელემენტიც. განსაზღვრით, იგი არის **სიმრავლე**, **ცარიელი სიმრავლე**, **კლასი**, **ცარიელი კლასი** და გარდა განხილულისა სხვა ამ თვისების კლასი და სხვა ამ თვისების სიმრავლე არ არსებობს. ცხადია (მოდელში), კლასის ცნება სიმრავლის ცნების განზოგადებაა. a საგანს ეწოდება ინდივიდი, თუ იგი არაა კლასი. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება ∅ სიმბოლოთი (უფრო ზუსტად: ∅ შემოიტანება როგორც წარმოებული საგნობრივი კონსტანტა, რომლის მნიშვნელობა მოდელში არის ცარიელი სიმრავლე).

არ გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა ყოველ მოდელში ინდივიდთა ერთობლიობა ცარიელია (ე. ი. როცა აქსიომები უზრუნველყოფენ მოდელში ინდივიდების არარსებობას). არ გამოვრიცხავთ აგრეთვე შემთხვევას, როცა ყოველ მოდელში თითოეული კლასი არის სიმრავლე. უკანასკ-

ნელ შემთხვევაში $\overline{S}$-ს ეწოდება, აგრეთვე, **საკუთრივი სიმრავლეთა თეორია**. წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ეწოდება, აგრეთვე, **კლასთა თეორია**. კლასთა თეორიის შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ აქსიომათა ერთობლიობა შეიცავს 2.2-ში მოტანილ კლასების არსებობის აქსიომას. აქვე შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ 3.5.1-ში განხილული ZF^{*} საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიაში მოცულობის აქსიომა უზრუნველყოფს მოდელში ინდივიდების არსებობას, ქვესიმრავლეთა სიმრავლის აქსიომა მოცულობის აქსიომასთან ერთად კი უზრუნველყოფს მოდელში ზესიმრავლეების არარსებობას.

$\overline{S}$ **სიმრავლეთა თეორიის** $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციას ვუწოდოთ **ბუნებრივი ინტერპრეტაცია**, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა.

1. $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმიდან აღებული თითოეული კლასი კლასია ინტუიციური აზრით, ინდივიდი კი ინდივიდია ინტუიციური აზრით (ინდივიდის წარმოქმნაში კლასები არ მონაწილეობენ — ინდივიდის წარმოქმნა წინ უსწრებს ნებისმიერი კლასის წარმოქმნას და, მაშასადამე, ინდივიდი კლასი არაა — მხედველობაშია კლასები და ინდივიდები ინტუიციური აზრით).

2. ტერმინს „არაცარიელი კლასი **შედგენილია** მისი ელემენტებისაგან" ინტუიციური შინაარსი აქვს. კერძოდ, კლასის ნებისმიერი ელემენტი ინტუიციური აზრით უნივერსუმის საგანია და კუთვნილების $\in$ მიმართებას ინტუიციური შინაარსი აქვს (ე. ი. უნივერსუმის **a** და **b** საგნებისაგან შედგენილი $\langle a, b\rangle$ მეტაწყვილი არის $\in$ მიმართების მიკავშირებული ფუნქციის ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა **b** კლასია და **a** მისი ელემენტია ინტუიციური აზრით).

$\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორიის ბუნებრივი მოდელი ვუწოდოთ მის ისეთ მოდელს, რომელიც მის ბუნებრივ ინტერპრეტაციას წარმოადგენს.

ცხადია, ბუნებრივ ინტერპრეტაციაში ორი კლასი ტოლია (ერთი და იგივეა) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ ერთი და იგივე ელემენტები აქვთ.

არ გამოვრიცხავთ იმის შესაძლებლობას, რომ $\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორიის $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმიდან აღებული **a** საგანი $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში იყოს არაცარიელი კლასი და, ამასთან, იგი იყოს ისეთი კლა-

სი ინტუიციური აზრით, რომლის ელემენტები ინტუიციური აზრით არ არიან უნივერსუმის საგნები (ასეთი რამ გამორიცხულია ბუნებრივი ინტერპრეტაციის შემთხვევაში).

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ განიხილება კლასთა თეორია — კლასთა თეორიის ფიქსირებული მაგრამ ნებისმიერად აღებული $\mathcal{A}$ მოდელი. ამასთან, მოტანილი განსაზღვრებები და შედეგები ძირითადად ძალაში რჩება საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიისთვისაც — საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერი მოდელისათვისაც. ყოველ გამონაკლის შემთხვევაში მივუთითებთ იმ ცვლილებების შესახებ, რომლებიც უნდა გაკეთდეს საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიაზე გადასვლის მიზნით. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ ყველაფერი ძალაში დარჩება $\overline{S}^1$ თეორიისათვის (ასეთ თეორიაზე გადასვლისათვის, როგორც ვიცით (იხ. 2.1.1), საკმარისია ყველგან τ ოპერატორული ნიშნის ნაცვლად ავიღოთ ι ოპერატორული ნიშანი). ამას იწვევს ის გარემოება, რომ $\tau x\mathbf{A}$ და $\iota x\mathbf{A}$ ტერმების მნიშვნელობები ერთი და იგივეა, როცა $\mathbf{A}$ ფორმულა ცალსახაა x-ის მიმართ ($\mathbf{A}$ ფორმულას ეწოდება **ცალსახა x-ის მიმართ**, თუ x-გან განსხვავებული $\mathbf{A}$ ფორმულის თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემისათვის არსებობს x-ის არაუმეტეს ერთი ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ჭეშმარიტია). მიუხედავად აღნიშნულისა, კონტექსტში მოტანილი ზოგიერთი მსჯელობა ზოგადი ხასიათისაა, რომელშიც იგულისხმება, რომ $\mathcal{A}$ ნებისმიერ სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერი ინტერპრეტაციაა. ასეთ შემთხვევაში, გაუგებრობათა თავიდან აცილების მიზნით $\mathcal{A}$ წოდებულია ინტერპრეტაციად. აქვე შევნიშნავთ, რომ თითქმის ყველგან მოთხოვნა „$\mathcal{A}$ იყოს მოდელი" შეგვიძლია შევასუსტოთ და იგი შევცვალოთ მოთხოვნით: $\mathcal{A}$ იყოს ისეთი ინტერპრეტაცია, რომელშიც სრულდება კლასების არსებობის აქსიომა (იხ. 2.2.6) და

$$\forall x \forall y [\forall z[z \in x \leftrightarrow z \in y] \leftrightarrow x = y]$$

მოცულობის აქსიომა.

კლასების არსებობისა და მოცულობის აქსიომებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ ყველა კლასთა არე **ბუნებრივი აზრით** ჩაკეტილია ქვემოთ 3.3-ში განხილული ოპერაციების მიმართ: აქ ფრაზა **ბუნებრივი აზრით** მიუთითებს არა მარტო იმას, რომ ოპერაციის მნიშვნელობა იყოს კლასი, როცა არგუმენტების როლში კლასები გამოდიან (ამ

პირობის შესრულებას უზრუნველყოფს ნებისმიერი აქსიომა, რომლის ძალით ცარიელი კლასი სიმრავლეა), არამედ იმასაც, რომ ოპერაციათა განსაზღვრებებში განხილული თვისებებით განსაზღვრული კლასები არსებობენ (ასეთი კლასის არარსებობის შემთხვევაში ოპერაციის მნიშვნელობა, განსაზღვრის ძალით, როცა ცარიელი კლასი სიმრავლეა, ცარიელი სიმრავლე იქნება). აქვე შევნიშნოთ, რომ, ზოგიერთი გამონაკლისის გარდა, იგივე დასკვნა შესაბამისად გამომდინარეობს კლასების არსებობის აქსიომის პირველ და მეორე სუსტი ფორმებიდანაც კლასთა თეორიის ისეთ ინტერპრეტაციებში, რომელთა უნივერსუმია კლასთა თეორიის პირველი ინტუიციური მოდელის პირველი ან მეორე ვარიანტი და რომელშიც თითოეული საგნობრივი კონსტანტის მნიშვნელობა ელემენტია. კლასთა თეორიის აქსიომებიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ყველა სიმრავლეთა კლასი **ბუნებრივი აზრით** ჩაკეტილია ხსენებული ოპერაციების მიმართ, გარდა დამატების ოპერაციისა (ნებისმიერი სიმრავლის დამატება ზესიმრავლეა) და $\cap$ და $\cap^{\bullet}$ ოპერაციებისა ($\cap$ მხოლოდ ცარიელ სიმრავლეზე გამოყენებით გვაძლევს ზესიმრავლეს, $\cap^{\bullet}$ კი მხოლოდ ელემენტებისაგან შედგენილი წყვილის არშემცველ სიმრავლეებზე გამოყენებით გვაძლევს ზესიმრავლეს — ხსენებული ზესიმრავლე ორივე შემთხვევაში **E** უნივერსალური კლასია), ამასთან, დამატების ოპერაცია მხოლოდ და მხოლოდ კლასთა თეორიის შემთხვევაში შემოიტანება, რამდენადაც საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიაში არ არსებობს უნივერსალური კლასი — „ყველა ელემენტთა სიმრავლე". მაგრამ საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიაშიც გვექნება **A** ტერმის (სიმრავლის) მიმართ დამატების ოპერაცია (იგი ფაქტობრივად არის გამოკლების ოპერაცია). საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაშიც თეორიის აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლეთა არე **ბუნებრივი აზრით** ჩაკეტილია აღნიშნული ოპერაციების მიმართ, მაგრამ ბუნებრიობა იკარგება მხოლოდ $\cap$ და $\cap^{\bullet}$ ოპერაციების გამოყენებისას ზემოთ აღნიშნულ გამონაკლის შემთხვევებში (დამატების ოპერაცია ამ შემთხვევაში, როგორც ზემოთ აღინიშნა, არ შემოიტანება). უკანასკნელი დასკვნა სამართლიანია იმავე ოპერაციების მიმართ საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის ისეთ ინტერპრეტაციაში, რომლის უნივერსუმია სიმრავლეთა თეორიის პირველი ინტუიციური მოდელი, გამონაკლისს შესაძლოა შეადგენდეს **P** ოპერაცია (**P** ოპერაცია იქნება გამონაკლისი, თუ ხსენებულ მოდელში არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომლის ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე არ არსებობს).

სიმრავლეთა თეორიის გავრცელებულ ვარიანტებში, როგორც წესი, არასაკუთრივი სუბსტანციური ფუნქციონალური სიმბოლოები არ გვხვდება (იხ., მაგალითად, [23] და [39]). ამ მხრივ გამონაკლისია, მაგალითად, [1], სადაც სიმრავლეთა თეორიის ალფაბეტში გვხვდება არასაკუთრივი სუბსტანციური ფუნქციონალური სიმბოლო Э. იგივე სიმბოლო გვხვდება $\tilde{S}$ თეორიის ალფაბეტში და, მაშასადამე, იგი შესაძლოა გვხვდებოდეს $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტში. ამიტომ არაა გამორიცხული $\overline{S}$ თეორიის ფორმებისათვის განუსაზღვრელი მნიშვნელობების დაშვების შესაძლებლობა. ხსენებულ გამონაკლისის შემთხვევაშიც სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები უზრუნველყოფენ მოდელებში Э სიმბოლოს მიკავშირებული ფუნქციების ყველგან განსაზღვრულობას და, მაშასადამე, მოდელებში განუსაზღვრელი მნიშვნელობები არ გვექნება. ამიტომ ქვემოთ ყველგან ძირითად კონტექსტში ვიგულისხმებთ, რომ განხილულ სიმრავლეთა თეორიის თითოეული ფორმა არის ყველგან განსაზღვრული — რომ სიმრავლეთა თეორია წარმოადგენს ორმნიშვნელობიან ლოგიკურ თეორიას. აღნიშნულის მიუხედავად, იმ მიზნით, რომ მხედველობაში ვიქონიოთ ზოგადი შემთხვევაც, გზადაგზა გავაკეთებთ შენიშვნებს, რომლებიც სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევას გულისხმობენ; ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ როცა $\overline{S}$ განიხილება როგორც სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორია, მაშინ მისი ალფაბეტი, გარდა აღნიშნულისა, შეიცავს ე. წ. დამატებით სიმბოლოებს (S_1 თეორიის ალფაბეტიდან) და $\cdot =$ და $\in$ საკუთრივ პრედიკატებს. ამასთან იგულისხმება, რომ $=$ და $\in$, შესაბამისად $\cdot =$ და $\cdot \in$ ოპერატორების მიკავშირებული ფუნქციები მიიღებიან გაუფართოებელ არეში $=$ და $\in$ ოპერატორთა მიკავშირებულ ფუნქციებიდან განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპით, შესაბამისად ზუსტი პრინციპით. $\cdot =$ და $\cdot \in$ ოპერატორების სახელწოდებებია **ზუსტი ტოლობა** და **ზუსტი კუთვნილება**. ანალოგიურ შეთანხმებას გამოვიყენებთ ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის სხვა ძირითადი ან წარმოებული ოპერატორის შემთხვევაში ისე, რომ ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის ნებისმიერი ძირითადი ან წარმოებული σ ოპერატორისა და მისი მიკავშირებული ფუნქციისათვის გვექნება სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის σ და $\cdot\sigma$ ოპერატორები, რომელთა მიკავშირებული ფუნქციები მიიღებიან: σ ოპერატორის მიკავშირებულ ფუნქციიდან განუსაზღვრელ

მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი და ზუსტი პრინციპებით. ზოგჯერ გავაკეთებთ, აგრეთვე, შენიშვნებს იმის შესახებ თუ როგორია ამა თუ იმ წარმოებული ოპერატორის შინაარსი განუსაზღვრელი მნიშვნელობებით გაფართოებულ არეში. დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ზოგადი შემთხვევის განხილვა არსებითი საჭიროებითაა გამოწვეული. საქმე იმაშია, რომ ხშირად სპეციალური მათემატიკური თეორიები სიმრავლეთა თეორიის ბაზაზე აიგება — ისინი სიმრავლეთა თეორიის გაფართოებებს წარმოადგენენ. ამასთან, ხშირად ასეთ თეორიებში ფორმები განუსაზღვრელ მნიშვნელობებს ღებულობენ.

თუ ერთი მაინც კვანტორული კონსტანტა $\overline{S}$ თეორიის ოპერატორული ასოა ან თუ $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი კვანტორულ კონსტანტას არ შეიცავს, მაშინ (კვანტორების წარმოების შესახებ ზოგადი შეთანხმების ძალით) $\overline{S}$ თეორიის კვანტორებია მხოლოდ და მხოლოდ $\forall\Delta$, $\exists\Delta$ და $\tau\Delta$ სახის სიტყვები, სადაც Δ არის $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერი (საგნობრივი) კვანტორული ასო.

I, M, E წარმოებული საგნობრივი კონსტანტები S თეორიაში შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრებებით (სადაც x, y და z ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი კვანტორული ასოებია — ე. ი. x, y და z შესაბამისად ნულოვანი, პირველი და მეორე კვანტორული ასოებია):

$$\mathbf{I} - \tau x[\forall y[y \in x \leftrightarrow \neg y = \varnothing \wedge \forall z[\neg z \in y]]];$$

$$\mathbf{M} - \tau x[\forall y[y \in x \leftrightarrow [\neg y \in \mathbf{I} \wedge \exists z[y \in z]]];$$

$$\mathbf{E} - \tau x[\forall y[y \in x \leftrightarrow \exists z[y \in z]]].$$

ეს განსაზღვრებები გარკვეულ შინაარსს ანიჭებს **I, M** და **E** სიმბოლოებს შემდეგი შეთანხმების საფუძველზე. გრძელი ტირე „—“ იკითხება „... წარმოადგენს შემოკლებულ აღნიშვნას ...თვის“, ამასთან, მეორე მრავალწერტილის ადგილზე ჩაისმის მოცემული თეორიის ფორმა (შესაძლოა შემოკლებული სახით), პირველი მრავალწერტილის ადგილზე კი ჩაისმის განსაზღვრებადი სიმბოლოს შემცველი (გაფართოებული თეორიის) ფორმა. ამ ფორმებს შესაბამისად ეწოდებათ განსაზღვრის მარჯვენა ნაწილი და მარცხენა ნაწილი. იგულისხმება, რომ მარცხენა ნაწილი არის შემოკლებული აღნიშვნა მარჯვენა ნაწილისათვის და, მაშასადამე, მარცხენა ნაწილის მნიშვნელობა იგივეა რაც მარჯვენა ნაწილისა. მაგალითად,

უკანასკნელი განსაზღვრის მარჯვენა ნაწილი შედგენილი კონსტანტაა, რომლის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$ მოდელში ყველა ელემენტთა კლასია. **E** აღნიშნავს ამ შედგენილ კონსტანტას და, მაშასადამე, აღმნიშვნელისა და აღნიშნულის გაიგივების პრინციპის ძალით **E** უნდა განვიხილოთ როგორც კონსტანტა (სახელდობრ, როგორც წარმოებული კონსტანტა), რომლის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$ მოდელში ყველა ელემენტის კლასია — ე. წ. **უნივერსალური კლასი**. ანალოგიურად ვრწმუნდებით, რომ $\mathcal{A}$ მოდელში **I** ყველა ინდივიდის კლასია, **M** კი ყველა სიმრავლის კლასია. განსაზღვრებად სიმბოლოს უწოდებენ აგრეთვე **შემამოკლებელ სიმბოლოს**. ქვემოთ განვიხილავთ წარმოებულ პროპორციულ კონსტანტების მაგალითებსაც.

საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის მოდელის შემთხვევაში **M** და **E** წარმოებული კონსტანტებიდან თითოეულის მნიშვნელობაა ცარიელი სიმრავლე. ამიტომ ამ შემთხვევაში ტერმინები „ყველა სიმრავლის სიმრავლე" და „უნივერსალური სიმრავლე" არ გამოიყენება — ამ ტერმინების შესაბამისი საგნები არ არსებობენ.

შევნიშნოთ, რომ მოტანილი განსაზღვრებები შეგვიძლია განვიხილოთ მოდელებისა და ინტერპრეტაციებისაგან დამოუკიდებლად — **I**, **M** და **E** შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ფორმათა შემოკლებული აღნიშვნები. ისინი შინაარსს იძენენ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში, ამასთან, ნებისმიერ მოდელში მათ ტერმინების შესაფერისი ბუნებრივი შინაარსი აქვთ.

სავარჯიშო. ჩაწერეთ მოტანილი განსაზღვრებები მეტაცვლადების გამოყენების გარეშე იმ შემთხვევაში, როცა $\bar{\mathrm{S}}$ თეორიის ალფაბეტს საგნობრივი ცვლადები არ აქვს.

განხილული სახის განსაზღვრამ განსაზღვრებად სიმბოლოს შეიძლება მიანიჭოს ამა თუ იმ ტიპის ოპერატორის შინაარსი ან ოპერატორული ნიშნის შინაარსი. ამ შემთხვევაში განსაზღვრებად სიმბოლოს (შემამოკლებელ სიმბოლოს) უწოდებენ **წარმოებულ ოპერატორს**, შესაბამისად **წარმოებულ ოპერატორულ ნიშანს**. ამასთან გულისხმობენ, რომ წარმოებული საგნობრივი ან პროპოზიციული კონსტანტები (ნულადგილიანი) **წარმოებული ოპერატორებია** და წარმოებული ოპერატორული ნიშნების გამოყენებით მიღებული ოპერატორებიც **წარმოებული ოპერატორებია** — წარმოებული კვანტორებია. გარდა აღნიშნულისა, სხვა ტიპის შემამოკლებელ სიმბოლოებს (ანუ წარმოებულ სიმბოლოებს) არ გამოვიყენებთ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. დაამტკიცეთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი შეიცავს საგნობრივ ცვლადებს, მოტანილ განსაზღვრაში ფრაზა „მინიმალურნომრიანი კვანტორული ასოებია" შეიძლება შეიცვალოს ფრაზით „მინიმალურინდექსიანი ცვლადებია", იმ შემთხვევაში კი, როცა $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავს საგნობრივ ცვლადებს, მოტანილ განსაზღვრაში სიტყვა „მინიმალურნომრიანი" შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „მინიმალურინდექსიანი".

ახლა შემოვიტანოთ რამდენიმე წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრა. ერთადგილიანი რელიაციური სპეციალური (წარმოებული) მარტივი ოპერატორები **i**, **e**, **m**, **k**, **k**$^{\bullet}$ შემოიტანებიან შემდეგი განსაზღვრებებით.

$$\mathbf{i}T - \neg T = \varnothing \wedge \neg\exists x[x \in T];$$

$$\mathbf{e}T - \exists x[T \in x];$$

$$\mathbf{m}T - T = \varnothing \vee [\exists x[x \in T] \wedge \exists x[T \in x]];$$

$$\mathbf{k}T - \neg T = \varnothing \vee \exists x[x \in T];$$

$$\mathbf{k}^{\bullet}T - \neg \mathbf{m}T \wedge \mathbf{k}T;$$

სადაც **T** ნებისმიერი ტერმია, **x** კი **T**-ში თავისუფალი შემოსვლის არმქონე მინიმალურ ნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოა. **i**, **e**, **m**, **k**, **k•** წარმოებული ოპერატორები შესაბამისად იკითხებიან: „ინდივიდია", „ელემენტია", „სიმრავლეა", „კლასია", „საკუთრივი კლასია" (ანუ „ზესიმრავლეა").

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1. დაამტკიცეთ, რომ მოთხოვნა „**x** იყოს **T**-ში თავისუფალი შემოსვლის არმქონე **მ ი ნ ი მ ა ლ უ რ ნ ო მ რ ი ა ნ ი** საგნობრივი კვანტორული ასო" უზრუნველყოფს იმას, რომ **x** იყოს (თეორიის) ოპერატორული ასო. ამიტომ აღნიშნულ ფრაზაში სიტყვა „კვანტორული" შეიძლება შეიცვალის სიტყვით „ოპერატორული".

2. დაამტკიცეთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი შეიცავს საგნობრივ ცვლადებს, მოტანილ განსაზღვრებებში ფრაზები „მინიმალურნომრიანი" და „კვანტორული ასოა„ შეიძლება ერთდროულად შესაბამისად შეიცვალოს სიტყვებით „მინიმალურინდექსიანი„ და „ცვლადია". წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლება სიტყვა „მინიმალურნომრიანი" შეიცვალოს სიტყვით „მინიმალურინდექსიანი".

ხშირად წარმოებული სიმბოლოს განსაზღვრაში განსაზღვრის მარჯვენა მხარეში მყოფი ზოგიერთი ოპერატორული ასოსაგან მოითხოვება მინიმალურნომრიანობა (სათანადო პირობის დაცვით). ამ მოთხოვნის მოხსნით (აღნიშნული პირობის მოუხსნელად) წარმოებული სიმბოლოს შინაარსი არსებითად არ იცვლება. მართალია, ამით იკარგება განსაზღვრის მარჯვენა მხარის ცალსახობა, მაგრამ ამ გზით მიღებული განსაზღვრის სხვადასხვა ვარიანტების მარჯვენა მხარეები ურთიერთკონგრუენტული ფორმებია — ურთიერთკონგრუენტულ ფორმებს კი ერთი და იგივე შინაარსი აქვთ. ამიტომ ხშირად წარმოებული სიმბოლოს განსაზღვრის ძირითადი ვარიანტის ნაცვლად გამოვიყენებთ ხსენებული სახის ამა თუ იმ ვარიანტს (ამის შესახებ მკითხველის გაფრთხილების გარეშეც).

შემოკლებული სიმბოლოს განსაზღვრის კერძო შემთხვევა ეწოდება გამოსახულებას, რომელიც მიიღება განსაზღვრაში მეტაცვლადების ნაცვლად მათი მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემის ჩასმით.

ვთქვათ, a, b, A და B არიან $\overline{S}$ თეორიის ტერმები, $X_1,\dots,X_n$ კი (ერთმანეთისაგან განსხვავებული) **ცვლადების** მიმდევრობაა, რომლის წევრთა შორის იმყოფება a, b, A და B ტერმების ყველა თავისუფალი ცვლადი. თუ $\overline{S}$ თეორიის ალფაბეტი ცვლადებს არ შეიცავს, მაშინ ეს მიმდევრობა ცარიელია. მკითხველი ადვილად გაიაზრებს თუ როგორ უნდა გამარტივდეს ქვემოთ მოტანილი წინადადებები ასეთ შემთხვევაში. როგორც ვიცით (მოცემული თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში), ტერმები აღნიშნავენ ($\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მიმართ) მისი თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებულ საგნებს, ფორმულები კი წარმოადგენენ მისი თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებულ წინადადებებს. ფორმულები იკითხება იმ წინადადებებით, რომლებსაც ისინი აღნიშნავენ (არ გამოვრიცხავთ შემთხვევებს, როცა ეს წინადადებები გამარტივებული ფორმით აიღება). ამიტომ, ნაცვლად მითითებისა იმის შესახებ, თუ როგორ იკითხება მოცემული ფორმულა, ხშირად უთითებენ იმას, თუ რომელ წინადადებას აღნიშნავს იგი და პირიქით. აქვე შევნიშნოთ, რომ ხშირად ნაცვლად მითითებისა, თუ როგორ იკითხება ფორმულა, უთითებენ იმას თუ როგორ იკითხება ფორმულის მთავარი ოპერატორი. ამით ბუნებრივად განისაზღვრება ფორმულის წაკითხვის წესიც. ასევე, ტერმი იკითხება იმ საგნის სახელით, რომელსაც იგი აღნიშნავს და ტერმების შემთხვევაშიც გვექნება ანალოგიური შეთანხმებები. ფორმულა „$a \in A$" აღნიშნავს წინადადებას „a არის A კლასის ელემ-

ენტი" ანუ „a ეკუთვნის A-ს" ანუ „a ეკუთვნის A კლასს". ამის შესაბამისად $a \in A$ წინადადება (ფორმულა) ითვლება ჭეშმარიტად $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A არის კლასი და a არის A კლასის ელემენტი (ე. ი. „$a \in A$" წინადადება (ფორმულა) ითვლება ჭეშმარიტად $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის მიმართ $X_1, \ldots, X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი $(a_1, \ldots, a_n)$ სისტემისათვის, რომლისთვისაც A ტერმის მნიშვნელობა არის (რაიმე) A' კლასი, a ტერმის მნიშვნელობა კი არის ისეთი საგანი, რომელიც A' კლასის ელემენტია. ფორმულა „$a = b$" აღნიშნავს წინადადებას „a და b ტერმების მნიშვნელობები ერთი და იგივე საგნებია" ანუ „a-ს და b-ს მნიშვნელობები ერთი და იგივე საგნებია" ანუ „a და b ერთი და იგივე საგნებს აღნიშნავენ" ანუ „a უდრის (ეტოლება) b-ს". თუ a და b საგნობრივი ცვლადებია, მაშინ $a = b$ ფორმულა აღნიშნავს აგრეთვე წინადადებას „a და b ცვლადების მნიშვნელობები ერთი და იგივეა". ანალოგიური დაზუსტებული ფრაზები გამოიყენება სხვა შემთხვევებშიც. მოტანილი შეთანხმებები უცვლელად უნდა გავავრცელოთ გაფართოებული თეორიის ფორმებსა და ოპერატორებზე (განსაკუთრებით იმ გაფართოებული თეორიის ფორმებსა და ოპერატორებზე, რომლის მისაღებად საკმარისია მოცემული თეორიის ალფაბეტს დავუმატოთ წარმოებული სიმბოლოები და მოცემული შინაარსული თეორიის საგნების უშუალოდ აღმნიშვნელი დამხმარე კონსტანტები).

ადვილი დასანახია შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა.

1. თუ a და b ტერმებიდან ერთის მნიშვნელობა მაინც არის $\perp$, მაშინ სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში $a = b$ და $a \in b$ ფორმულების მნიშვნელობებია f.

2. თუ სიმრავლეთა თეორიის $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგანთა რიცხვი ერთს აღემატება (ეს პირობა არატრივიალური აქსიომური სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ მოდელში შესრულებულია) და a და b ტერმებიდან ერთის მნიშვნელობა მაინც არის $\perp$, მაშინ $a \cdot = b$ ფორმულის მნიშვნელობაა $\dagger$.

3. თუ სიმრავლეთა თეორიის $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგანთა რიცხვი ერთს აღემატება და a და b ტერმებიდან ერთის მნიშვნე-

ლობა მაინც არის $\perp$, მაშინ $a \cdot \in b$ ფორმულის მნიშვნელობაა $\dagger$ გარდა იმ შემთხვევებისა, როცა a ტერმის მნიშვნელობაა ზესიმრავლე ან b ტერმის მნიშვნელობაა ცარიელი სიმრავლე ან ინდივიდი (ამ შემთხვევებში $a \cdot \in b$ ფორმულის მნიშვნელობაა f).

შენიშვნა. არსებითია ის გარემოება, რომ მაგალითად, „$a \in A$"-თი აღინიშნება წინადადება „a არის A კლასია ელემენტი" (რომელიც შეიძლება იყოს ან ჭეშმარიტი ან მცდარი) და არა ის ფაქტი, რომ a არის A კლასია ელემენტი. ის ფაქტი, რომ a არის A კლასის ელემენტი, ისევ „$a \in A$" სახით ჩაიწერება („$a \in A$" წინადადებით გამოიხატება). მაგრამ „$a \in A$" ჩანაწერი (წინადადება) რომ მხოლოდ ხსენებულ ფაქტს გამოხატავდეს (აღნიშნავდეს), მაშინ „$a \in A$" წინადადება აუცილებლობით იქნებოდა ჭეშმარიტი. მატემატიკაში „$a \in A$" სახის ჩანაწერი უმეტესად აღნიშნავს (მათემატიკურ) წინადადებას, რომელიც ჩვენი შესწავლის ობიექტს წარმოადგენს და მაშასადამე, წინასწარ არაა ცნობილი იგი ჭეშმარიტია თუ მცდარი. იგივე ითქმის სხვა მათემატიკურ წინადადებების შესახებაც. მეტამათემატიკური წინადადებები, პირიქით, უმეტესად იხმარება ფაქტების აღსანიშნავად (შესწავლის შედეგად ფაქტების აღსანიშნავად). ყველა გამონაკლის შემთხვევაში კონტექსტმა უნდა უზრუნველჰყოს გაუგებრობათა თავიდან აცილება.

განვიხილოთ სიმრავლეთა თეორიის შემდეგი პრედიკატები:

$$=, \in, \neq, \ni, \overline{\in}, \overline{\ni}, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset, \not\subseteq, \not\supseteq, \not\subset, \not\supset \tag{1}$$

($\overline{\in}$ და $\overline{\ni}$ სიმბოლოების ნაცვლად იყენებენ აგრეთვე $\notin$ და $\not\ni$ სიმბოლოებს). აღნიშნულ პრედიკატებიდან მოცემული $\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი პრედიკატებია მხოლოდ $=$ და $\in$, დანარჩენი პრედიკატები (1)-დან უნდა შემოვიტანოთ როგორც შემამოკლებელი სიმბოლოები შემდეგი განსაზღვრებებით (სადაც a, b, A და B ნებისმიერი ტერმებია, x კი ისეთი მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოა, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა არც A და არც B ტერმში):

$$[a \neq b] \quad - \quad \neg[a = b];$$

$$[A \ni a] \quad - \quad a \in A;$$

$$[a \overline{\in} A] \quad - \quad \neg[a \in A];$$

$$[A \overline{\ni} a] \quad - \quad a \overline{\in} A;$$

$$[A \subseteq B] \quad - \quad \forall x[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge kA \wedge kB;$$
$$[A \supseteq B] \quad - \quad B \subseteq A;$$
$$[A \subset B] \quad - \quad A \subseteq B \wedge A \neq B;$$
$$[A \supset B] \quad - \quad B \subset A;$$
$$[A \nsubseteq B] \quad - \quad \neg[A \subseteq B];$$
$$[A \nsupseteq B] \quad - \quad B \nsubseteq A;$$
$$[A \not\subset B] \quad - \quad \neg[A \subset B];$$
$$[A \not\supset B] \quad - \quad B \not\subset A.$$

ეს განსაზღვრებები განსაზღვრებად შემამოკლებელ სიმბოლოებს მოცემული $\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში $=$ და $\in$ პრედიკატების შინაარსით ცალსახად განსაზღვრულ შინაარსს ანიჭებენ.

აქ, მაგალითად, პირველი განსაზღვრის მარჯვენა მხარეში გვაქვს ისეთი წინადადება, რომლის შინაარსი $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში ცნობილია: $\neg$ კავშირის შინაარსის ძალით $\neg[a = b]$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა „$a = b$" არის მცდარი $\mathcal{A}$-ში. „$=$" პრედიკატის შინაარსის ძალით „$a = b$" არის მცდარი $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლო მაშინ, როცა a და b ტერმების მნიშვნელობები ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნებია; მაშასადამე, $\neg[a = b]$ წინადადება ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ a და b ტერმების მნიშვნელობები $\mathcal{A}$-ში ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნებია. ამიტომ, რამდენადაც $[a \neq b]$ არის $\neg[a = b]$ ფორმულის (მოკლე) აღნიშვნა, $a \neq b$ წინადადება ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია $\neg[a = b]$ წინადადება, ე. ი. – როცა a და b ტერმების მნიშვნელობები ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნებია. $a \neq b$ წინადადებით გამოხატული მსჯელობის პრედიკატი აღინიშნება „$- \neq -$" გამოსახულებით, რომელსაც მოკლედ აღნიშნავენ აგრეთვე $\neq$ სიმბოლოთი. ამრიგად, პირველი განსაზღვრა ცალსახად განსაზღვრავს $\neq$ პრედიკატის შინაარსს. იგივე შეიძლება ითქვას ყოველ შემდგომ განსაზღვრაზე (ყოველი შემოტა-

ნილი განსაზღვრის მარჯვენა მხარეში გვხედება მხოლოდ ისეთი პრედიკატები, რომელთაგან თითოეულის შინაარსი ან წინა განსაზღვრებითაა განსაზღვრული ან არის ერთ-ერთი $\in$ და $=$ პრედიკატებიდან). მაგალითად, მეორე განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{A} \ni \mathbf{a}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbf{A}$ არის კლასი და $\mathbf{a}$ არის $\mathbf{A}$ კლასის ელემენტი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა . არსებობენ სიმრავლეთა თეორიის ისეთი ფორმულირებები, რომელთა ალფაბეტი არ შეიცავს $=$ სიმბოლოს. ასეთი სიმრავლეთა თეორიის ისეთ მოდელში, რომელშიც ინდივიდთა კლასი ცარიელია (თუ ამას უზრუნველყოფს ამ თეორიის აქსიომები, მაშინ მის ნებისმიერ მოდელში) $=$ პრედიკატი შეიძლება შემოვიტანოთ როგორც შემამოკლებელი სიმბოლო შემდეგი განსაზღვრით:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \quad - \quad \forall x[x \in \mathrm{A} \leftrightarrow x \in \mathrm{B}],$$

სადაც $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ნებისმიერი ტერმებია, $\mathbf{x}$ კი მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოა (იგულისხმება, რომ თეორიის აქსიომებს შორისაა მოცულობის აქსიომა, რომლის ძალით ორი კლასი ერთი და იგივეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ ერთი და იგივე ელემენტები აქვთ).

ვთქვათ, ახლა, რომ (1) პრედიკატები $\overline{\mathrm{S}}$ თეორიის ძირითადი პრედიკატებია. მაშინ $\overline{\mathrm{S}}$ თეორიის ისეთი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის მისაღებად, რომელშიც (1)-დან აღებული $=$ და $\in$ პრედიკატებისაგან განსხვავებული პრედიკატების შინაარსი ისევე იყოს განსაზღვრული $=$ და $\in$ პრედიკატების შინაარსით, როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში გვქონდა, საკმარისია შევარჩიოთ ნებისმიერად $\in$-ის მნიშვნელობა მისი მნიშვნელობათა არედან ($=$ პრედიკატის მნიშვნელობა თავისთავად შერჩეულია – იგი საკუთრივი კონსტანტაა) და შემდეგ (1)-დან აღებული $=$ და $\in$ პრედიკატებისაგან განსხვავებული პრედიკატების შინაარსი განვსაზღვროთ მეტამათემატიკურ ტოლძალოვნებებით, რომელთა ზემოთ მოტანილი თორმეტი განსაზღვრიდან მისაღებად საკმარისია „–" სიმბოლო (გრძელი ტირე) შევცვალოთ $\Leftrightarrow_{\mathcal{A}}$ სიმბოლოთი (ამ წინადადების სამართლიანობის დამტკიცება ევალება მკითხველს). მაგალითად, $\subseteq$ პრედიკატის შინაარსის განმსაზღვრელი მეტატოლძალოვნება იქნება:

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \quad \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \quad \forall x[x \in \mathrm{A} \to x \in \mathrm{B}] \wedge \mathbf{k}\mathrm{A} \wedge \mathbf{k}\mathrm{B},$$

(სადაც A და B ნებისმიერი ტერმებია, x კი ისეთი მინიმალურნომრიანი კვანტორული საგნობრივი ასოა, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა არც A და არც B ტერმში). ადვილი დასანახია, რომ (ისინი როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში) ამ შემთხვევაშიც $A \subseteq B$ ფორმულა (ე. ი. უკანასკნელი ტოლძალოვნების მარჯვენა ნაწილი) ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B კლასებია და A კლასის თითოეული ელემენტი არის B კლასის ელემენტი. თუ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში $\in$ პრედიკატის მნიშვნელობა ისეა შერჩეული, რომ ინდივიდთა ერთობლიობა ცარიელია და მოცულობის აქსიომა შესრულებულია, მაშინ = პრედიკატის (საკუთრივი კონსტანტის) შინაარსი იგივეა, რასაც მას ანიჭებს შემდეგი ტოლძალოვნება:

$$A = B \quad \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \quad \forall x[x \in A \leftrightarrow x \in B],$$

სადაც A და B ნებისმიერი ტერმებია, x კი ისეთი მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოა, რომელსაც თავისუფალი შემოსვლა არ აქვს A და B ტერმებში. განხილულ შემთხვევაში (ე. ი. როცა (1) პრედიკატები $\overline{\mathrm{S}}$ თეორიის ძირითადი პრედიკატებია) ვიგულისხმებთ, რომ $\overline{\mathrm{S}}$ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები უზრუნველყოფენ ზემოთ მოტანილი თორმეტი განსაზღვრის შესაბამის ტოლძალოვნებათა შესრულებას თეორიის ნებისმიერ მოდელში.

შენიშვნა. ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის $\overline{\mathrm{S}}$ სიმრავლეთა თეორიის მოდელი. განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ როცა A და B ტერმებიდან ერთის მნიშვნელობა მაინც განუსაზღვრელია, მაშინ $\mathcal{A}$-ში $A \cdot\subseteq B$ ფორმულის მნიშვნელობა განუსაზღვრელია, გარდა შემდეგი შემთხვევებისა: (1) A და B ტერმებიდან ერთის მნიშვნელობა ინდივიდია (ამ შემთხვევაში $A \cdot\subseteq B$ ფორმულის მნიშვნელობაა f); (2) $\mathcal{A}$ მოდელის ინდივიდთა კლასი ცარიელია და B ტერმის მნიშვნელობაა უნივერსალური კლასი (ამ შემთხვევაში $A \cdot\subseteq B$ ფორმულის მნიშვნელობაა t).

სავარჯიშო. ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის $\overline{\mathrm{S}}$ სიმრავლეთა თეორიის მოდელი. (განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი პრინციპით) განსაზღვრეთ

$$=, \in, \neq, \ni, \overline{\in}, \overline{\ni}, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset, \not\subseteq, \not\supseteq, \not\subset, \not\supset$$

ოპერატორთა შინაარსი A მოდელის განუსაზღვრელი მნიშვნელობებით გაფართოებულ არეში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა I. $\subseteq$ ოპერატორის შინაარსის მოტანილ ორივე განსაზღვრაში ხშირად x-გან მოითხოვენ მხოლოდ იმას, რომ იგი იყოს $\overline{S}$ თეორიის ისეთი ნებისმიერი საგნობრივი ოპერატორული ასო, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა არც A და არც B ტერმში. ცხადია, ამით მეორე განსაზღვრის შინაარსი არ იცვლება. რაც შეეხება პირველ განსაზღვრას, აქ უხერხულობას იწვევს ის გარემოება, რომ $A \subseteq B$-ით აღნიშნული ფორმა (ფორმულა) ცალსახად არაა განსაზღვრული (x ასოს ნებისმიერობის გამო). აღნიშნული უხერხულობა არაა არსებითი. საქმე იმაშია, რომ $A \subseteq B$-ით აღნიშნული ფორმა, როგორც ადვილი დასანახია, წარმოადგენს ნებისმიერს გარკვეული აზრით ურთიერთტოლფას ფორმათა კლასიდან (ამ კლასის ფორმები ურთიერთკონგრუენტული ფორმულებია — $\overline{S}$ თეორიის შემთხვევაში ეს ცხადია. ზოგად შემთხვევაში მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ კონგრუენტულობის ზოგადი განსაზღვრა). ამიტომ ასეთი განსაზღვრა $\subseteq$ წარმოებულ ოპერატორს იმავე შინაარსს ანიჭებს, რასაც მას ანიჭებს ძირითად კონტექსტში მოტანილი ორივე განსაზღვრიდან თითოეული. ანალოგიური შენიშვნა ძალაში რჩება წარმოებულ ოპერატორთა ქვემოთ მოტანილ იმ განსაზღვრებების მიმართ, რომლებიც შეიცავენ ფრაზას „ისეთი მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოა": თუ ასეთ განსაზღვრაში აღნიშნული სახის ფრაზის თითოეულ შემოსვლას შევცვლით ფრაზით „ $\overline{S}$ თეორიის ასეთი ნებისმიერი საგნობრივი ოპერატორული ასოა", მივიღებთ წარმოებული ოპერატორის ისეთ განსაზღვრას, რომლის მარჯვენა მხარე განისაზღვრება კონგრუენტულობამდე სიზუსტით და რომელიც წარმოებულ ოპერატორს იმავე შინაარსს ანიჭებს, რასაც მას ანიჭებს ძირითად კონტექსტში მოტანილი განსაზღვრა. სამართლიანია ანალოგიური წინადადებები ქვემოთ მოტანილ განსაზღვრებებში მყოფი ისეთი ანალოგიური ფრაზების მიმართ, რომლებშიც ერთის ნაცვლად რამდენიმე საგნობრივ კვანტორული ასო ფიგურირებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა II. (1) პრედიკატების შინაარსის ზემოთ მოტანილ განსაზღვრებებში ნაგულისხმევი იყო, რომ მოცემული თეორიის ფორმები განუსაზღვრელ მნიშვნელობებს არ ღებულობენ. ამიტომ ამ განსაზღვრებებში შეგვეძლო გვეგულისხმა, რომ a, b, A და B ნებისმიერი საგნობრივი ასოებია. მართლაც, განხილულ შემთხვევაში, როცა სურთ განსაზღვრონ,

საზოგადოდ, σ n-ადგილიანი ($n > 0$) პრედიკატის შინაარსი $\sigma A_1 \ldots A_n$ სახის ფორმულების შინაარსის განსაზღვრის საფუძველზე, საკმარისია განისაზღვროს $\sigma \Lambda_1 \ldots \Lambda_n$ სახის ფორმულების შინაარსი იმ შემთხვევაში, როცა $\Lambda_1 \ldots \Lambda_n$ საგნობრივი ასოებია. საქმე იმაშია, რომ საგანთა ნებისმიერი $a_1, \ldots, a_n$ სისტემა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც საგნობრივი ასოების მნიშვნელობათა სისტემა და, მაშასადამე, $\sigma A_1 \ldots A_n$ სახის ფორმულების შინაარსის განსაზღვრა, სადაც $A_1, \ldots, A_n$ ნებისმიერი საგნობრივი ასოებია, უზრუნველყოფს σ პრედიკატის მიკავშირებული ფუნქციის განსაზღვრას. სამართლიანია ანალოგიური შენიშვნა სხვა ტიპის მარტივ ოპერატორების შემთხვევაშიც.

ზემოთ ვნახეთ თუ როგორ შეიძლება პრედიკატის (რელიაციური ოპერატორის) შინაარსი განისაზღვროს ინტერპრეტაციაში მეტატოლძალოვნებით. ასევე შეიძლება სუბსტანციური ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრა ინტერპრეტაციაში მეტაიგივურობით. აქ ფრაზა „ოპერატორის შინაარსი განისაზღვროს ინტერპრეტაციაში" ზუსტი არაა. თუ ოპერატორი, რომლის შინაარსსაც ვსაზღვრავთ, ძირითადია, მაშინ მისი შინაარსი ინტერპრეტაციაში განსაზღვრული უნდა იყოს. ამ შემთხვევაში ოპერატორის შინაარსი ინტერპრეტაციაში კი არ განისაზღვრება, არამედ ოპერატორის შინაარსი განისაზღვრება ინტერპრეტაციის აგების გასრულების მიზნით — ისეთნაირად დასრულების მიზნით, რომ განსაზღვრებად ინტერპრეტაციაში ადგილი ჰქონდეს სასურველ მეტატოლფასობას (მეტატოლძალოვნებას ან მეტაიგივურობას). თუ ოპერატორი, რომლის შინაარსიც განისაზღვრება, არაა ძირითადი ოპერატორი, მაშინ მეტატოლფასობით მისი შინაარსის განსაზღვრა ფაქტობრივად ნიშნავს ახალ თეორიაზე გადასვლას მოცემული თეორიის ალფაბეტისადმი აღნიშნული ოპერატორის სათანადო ტიპის სიმბოლოს დამატებით და მოცემული თეორიის ინტერპრეტაციის გარდაქმნას გარდაქმნილი თეორიის ისეთ ინტერპრეტაციად, რომელშიც ადგილი აქვს ოპერატორის შინაარსის განმსაზღვრელ მეტატოლფასობას, მოცემული თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოთა შინაარსის შეუცვლელად (ახალ თეორიაზე გადასვლის გარეშე ხსენებულ ტოლფასობას აზრი არ ექნებოდა). ცხადია, ამ მეორე შემთხვევაში ხელსაყრელია ოპერატორის შინაარსი განისაზღვროს მის წარმოებულ ოპერატორად (შემამოკლებელ სიმბოლოდ) განხილვის შედეგად (სათანადო განსაზღვრის მისაღებად საკმარისია მეტატოლფასობის ნიშანი შეიცვალოს „—" სიმბოლოთი). იგივე ითქმის ოპერატორული ნიშნის შინაარსის განსაზღვრის შესახებ.

ხშირად ნაცვლად $\mathcal{A}$-ში მეტაიგივურობისა, ძირითადი ოპერატორის შინაარსს განსაზღვრავენ $\mathcal{A}$-ში ტოლობით ან იგივურობით (აქ მხედველობაშია ის შემთხვევაც, როცა მოცემულ თეორიას აფართოებენ რამდენიმე ოპერატორის დამატებით და შემდეგ აწარმოებენ გაფართოებული თეორიის ამ დამატებითი ძირითადი ოპერატორების შინაარსის განსაზღვრას). ასეთ განსაზღვრას ჩვეულებრივ იძლევიან შემდეგი სახის ფრაზით: „σ ოპერატორის შინაარსი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით: $A =_{\mathcal{A}} B$, შესაბამისად იგივურობით: $A \equiv_{\mathcal{A}} B$, სადაც A და B სათანადოდ შერჩეული ტერმებია. აქ $A =_{\mathcal{A}} B$ ტოლობა, შესაბამისად $A \equiv_{\mathcal{A}} B$ იგივურობა, უნდა განვიხილოთ როგორც $\mathcal{A}$-ში ჭეშმარიტი ფორმულა: წმინდა მათემატიკურ ტოლობას $\mathcal{A}$-ში არაფრის განსაზღვრა არ შეუძლია. სხვა შემთხვევაშიც ხშირად იქნება გამოყენებული მათემატიკური ფორმულები როგორც $\mathcal{A}$-ში ჭეშმარიტი, რაზეც პირდაპირ ან არაპირდაპირ მიუთითებს კონტექსტი. აქაც ფაქტობრივად საქმე გვაქვს ინტერპრეტაციის აგების დასრულების პროცესთან.

მოტანილი განხილვიდან ჩანს, რომ ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრა უფრო ხელსაყრელია მისი შემამოკლებელ სიმბოლოდ განხილვის მეთოდით. ამიტომ ქვემოთ, იქ სადაც საწინააღმდეგო არ გამომდინარეობს კონტექსტიდან, ვიგულისხმებთ, რომ (1) პრედიკატებიდან $\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი პრედიკატებია მხოლოდ $=$ და $\in$, დანარჩენი კი მისი წარმოებული ოპერატორებია, რომელნიც შემოიტანებიან ზემოთ მოცემული განსაზღვრებებით. შემდეგშიც ახალ ოპერატორებს ძირითადად შემოვიტანთ განსაზღვრებებით — შემოვიტანთ როგორც შემამოკლებელ სიმბოლოებს. შემამოკლებელ სიმბოლოებს (წარმოებულ ოპერატორებს) მათი განსაზღვრებები ანიჭებს შინაარსს მოცემული თეორიის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში და ამით $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია ბუნებრივად გარდაიქმნება წარმოებული ოპერატორებით (წარმოებული სიმბოლოებით) გაფართოებული თეორიის ინტერპრეტაციად.

(1) (ძირითადი ან წარმოებული) მიმართებები შესაბამისად იკითხებიან: **ეტოლება, ეკუთვნის, არ ეტოლება (ანუ განსხვავდება), შეიცავს როგორც ელემენტს, არ ეკუთვნის, არ შეიცავს როგორც ელემენტს, შედის, შეიცავს, მკაცრად შედის, მკაცრად შეიცავს, არ შედის, არ შეიცავს, არ შედის მკაცრად, არ**

შეიცავს **მკაცრად**. ამასთანავე, ამ მიმართებათა სახელწოდებებია შესაბამისად: **ტოლობა** (ე.ი. **ტოლობის მიმართება**), **კუთვნილება**, **ტოლობის უარყოფა**, **შებრუნებული კუთვნილება**, **კუთვნილების უარყოფა**, **შებრუნებული კუთვნილების უარყოფა**, **შემავლობა**, **შემცველობა**, **მკაცრად შემავლობა**, **მკაცრად შემცველობა**, **შემავლობის უარყოფა**, **შემცველობის უარყოფა**, **მკაცრად შემავლობის უარყოფა**, **მკაცრად შემცველობის უარყოფა**. ნაცვლად ტერმინისა „ ტოლობის უარყოფა", გამოიყენება აგრეთვე ტერმინი **არატოლობა**. ასევე განისაზღვრება აზრი შემდეგი ტერმინებისა: **არაკუთვნილება**, **შებრუნებული არაკუთვნილება**, **არაშემავლობა**, **არაშემცველობა**. ნაცვლად ტერმინისა „შეიცავს", იხმარება აგრეთვე ტერმინი **მოიცავს** (მაგალითად, $A \supset B$ იკითხება „A მკაცრად მოიცავს B-ს"). თუ $A \supseteq B$, შესაბამისად $A \supset B$, ჭეშმარიტია, მაშინ ამბობენ, რომ „A **არის** B-ს **მომცველი**", შესაბამისად „A **არის** B-ს **მკაცრად მომცველი**".

თუ (1) სიმბოლოები ძირითადი ორადგილიანი პრედიკატებია, მაშინ

$$a = b;\ a \in A;\ A \ni a;\ A \subseteq B;\ A \supseteq B;\ A \subset B;\ A \supset B; \qquad (2)$$

$$a \neq b;\ a \overline{\in} A;\ A \overline{\ni} a;\ A \not\subseteq B;\ A \not\supseteq B;\ A \not\subset B;\ A \not\supset B; \qquad (3)$$

სადაც a, b, A და B ნებისმიერი საგნობრივი ასოებია, ამ პრედიკატების შესაბამისი უმარტივესი ფორმულებია. ზოგჯერ მსჯელობათა გამარტივების მიზნით, იმ შემთხვევაშიც, როცა (1) სიმბოლოებიდან ზოგიერთი წარმოებული ორადგილიანი პრედიკატია, (2)-დან და (3)-დან აღებულ ნებისმიერ ფორმულას შესაბამისი ძირითადი ან წარმოებული მიმართების მთავარ (ოპერატორის) სახელს უწოდებენ მაშინაც, როცა a, b, A და B ნებისმიერი ტერმებია. მაგალითად, $A \supseteq B$ და $a \in A$ ფორმულებს შესაბამისად ეწოდებათ შემცველობა და კუთვნილება. ქვემოთ ვნახავთ, რომ ნებისმიერი ფორმულა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (მეტამათემატიკური) მიმართება, რომელსაც ისევ ამ ფორმულით აღნიშნავენ. ამასთანავე, მაგალითად, $A \subseteq B$ ფორმულა, განხილული როგორც (მეტამათემატიკური) მიმართება, იმ შემთხვევაში, როცა A და B საგნობრივი ასოებია, იგივეა რაც $\subseteq$ პრედიკატული ნიშნის მიკავშირებული პრედიკატი. იგივე ითქმის სხვა მარტივი ოპერატორების შემთხვევაშიც. აქვე შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ მსჯელობათა გამარტივების მიზნით, პირიქითაც ფორმის სახელს იყენებენ მისი მთავარი ოპერატორის სახელწოდებად (იმ

შემთხვევაშიც, როცა ეს უკანასკნელი წარმოებული ოპერატორია). მაგალითად $\wedge$, $\vee$ ოპერატორებს სიმარტივისათვის შეგვიძლია შესაბამისად ვუწოდოთ კონიუნქცია და დიზიუნქცია. ქვემოთ ეს შეთანხმება გამოიყენება ნებისმიერი მარტივი ოპერატორის შემთხვევაში.

σ იყოს ნებისმიერი $=, \in, \neq, \ni, \overline{\in}, \overline{\ni}, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset, \not\subseteq, \not\supseteq, \not\subset, \not\supset$ პრედიკატებიდან. ზემოთ ვნახეთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{S}$ განიხილება როგორც ორმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორია, σ შესაძლებელია შემოვიტანოთ როგორც შემამოკლებელი სიმბოლო — როგორც წარმოებული პრედიკატი.

ამოცანა. გამოარკვიეთ შეიძლება თუ არა σ და $\cdot\sigma$ ოპერატორები შემოვიტანოთ როგორც შემამოკლებელი სიმბოლოები როგორც წარმოებული პრედიკატები იმ შემთხვევაში, როდესაც $\overline{S}$ განიხილება როგორც სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორია (σ და $\cdot\sigma$ ოპერატორების ზემოთ განხილული შინაარსის შეუცვლელად).

ამ ამოცანასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ შემდეგი.

$=$, $\in$, $\cdot =$ და $\cdot\in$ ძირითადი პრედიკატებია (მათ შემოტანა არ ესაჭიროებათ) და მათ მიკავშირებული ფუნქციები მიეწერებათ ზოგად შეთანხმებათა საფუძველზე (განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების უმარტივესი და ზუსტი პრინციპებით).

სამმნიშვნელობიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაში $\cdot\neq$ შემოიტანება როგორც წარმოებული ოპერატორი შემდეგი განსაზღვრით:

$$a\cdot \neq b \quad - \quad \cdot\neg[a\cdot = b].$$

შემოწმება ესაჭიროება იმ შემთხვევას, როცა a და b ტერმების მნიშვნელობებიდან ერთი მაინც არის $\perp$. ამ შემთხვევაში განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა არის $\dagger$ (ვგულისხმობთ, რომ $\mathscr{A}$ სიმრავლეთა თეორიის მოდელია და, მაშასადამე, $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგანთა რიცხვი 1-ს აღემატება). ამიტომ უკანასკნელი განსაზღვრა $\cdot\neq$ ოპერატორს ანიჭებს ისეთივე შინაარსს, როგორსაც მას ანიჭებს განუსაზღვრელ მნიშვნელობებზე ოპერირების ზუსტი პრინციპი.

ასევე, $\neq$ შემოიტანება როგორც წარმოებული ოპერატორი შემდეგი განსაზღვრით:

$$[a \neq b] \quad - \quad \neg\neg\cdot\neg[a\cdot = b].$$

აქაც შემოწმება ესაჭიროება იმ შემთხვევას, როცა a და b ტერმების მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთი არის $\perp$.

შემდეგი განსაზღვრებები იქნება:

$$[A \ni a] \quad - \quad a \in A;$$

$$[A\cdot \ni a] \quad - \quad a\cdot \in A.$$

$\neq$ ოპერატორის განსაზღვრის მისაღებად გამოყენებული მეთოდი არ გამოდგება $\overline{\in}$ პრედიკატისათვის, რამდენადაც არაა სამართლიანი შემდეგი წინადადება: „თუ a და A ტერმებიდან ერთის მნიშვნელობა მაინც არის საგნობრივი განუსაზღვრელობა, მაშინ $a\cdot \in A$ არის † (მაგალითად, როცა $A = \varnothing$ და $a = \perp$, მაშინ $a\cdot \in A = f$). დასასრულ შევნიშნოთ, რომ $\subseteq$ პრედიკატის განსაზღვრის მიღებას წინ უნდა უსწრებდეს k და $\cdot$ k პრედიკატების განსაზღვრის მიღება (სამმნიშვნელობიანი თეორიის შემთხვევაში).

თუ ქვემოთ სამმნიშვნელობიანი თეორიის შემთხვევაში გამოყენებული იქნება σ ან $\cdot\ \sigma$ სახის პრედიკატი მისი შემამოკლებელ სიმბოლოს სახით შემოტანის გარეშე, მაშინ იგი თეორიის ძირითად პრედიკატად უნდა მივიჩნიოთ — უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $\overline{S}$ თეორიის ნაცვლად განიხილება სათანადოთ გაფართოებული თეორია.

t და f წარმოებული პროპორციული კონსტანტები $\overline{S}$ თეორიაში შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრებებით:

$$t \quad - \quad \forall x[x = x];$$

$$f \quad - \quad \exists x[x \neq x].$$

სადაც x პირველი საგნობრივი კვანტორული ასოა. ცხადია, $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერ $\mathscr{M}$ ინტერპრეტაციაში t აღნიშნავს ჭეშმარიტს, f კი — მცდარს.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ რომ წარმოებული საგნობრივი კონსტანტები არიან **ნულადგილიანი სპეციალური სუბსტანციური წარმოებული ოპერატორები**, წარმოებული პროპოზიციული კონსტანტები კი არიან ნულადგილიანი წარმოებული ლოგიკური კავშირები ანუ ნულადგილიანი ლოგიკური რელიაციური წარმოებული ოპერატორები). ყველგან, სადაც საწინააღმდეგო არ გამომდინარეობს კონტექსტიდან, როცა ლაპარაკი იქნება წარმოებულ ოპერატორზე, მხედველობაში გვექ-

ნება ნულადგილიანი წარმოებული ოპერატორებიც. ძირითადი ოპერატორების შემთხვევაში პირიქით, როცა ლაპარაკია ოპერატორებზე ყველგან, სადაც კონტექსტიდან არ გამომდინარეობს საწინააღმდეგო, მხედველობაში გვექნება მხოლოდ არანულადგილიანი ოპერატორები.

წარმოებული ოპერატორების დახმარებით მოცემული თეორიის ფორმები შეიძლება ჩაიწეროს შემოკლებული სახით. ამ გზით მიღებულ გამოსახულებებს **შემოკლებულ ფორმებს** (**შემოკლებულ ფორმულებს, შემოკლებულ ტერმებს**) უწოდებენ. შემოკლებული ფორმის ცნება ემთხვევა იმ გაფართოებული თეორიის ფორმის ცნებას, რომლის მისაღებად საკმარისია მოცემული თეორიის ალფაბეტს დაემატოს წარმოებული სიმბოლოები სათანადო ტიპის ძირითად სიმბოლოებად. შემოკლებული ფორმები, მოცემული თეორიის ფორმების მსგავსად, შეიძლება ჩაიწერონ გამარტივებული სახით (ფრჩხილების გამოტოვებით და სხვა ხერხებით). შემოკლებული ფორმები მოცემული თეორიის ფორმების აღნიშვნებს წარმოადგენენ. ამ წიგნში განხილული წარმოებული ოპერატორები ისეთი განსაზღვრებებით შემოიტანებიან, რომ ნებისმიერ შემოკლებულ ფორმას და ამ შემოკლებული ფორმით აღნიშნულ ფორმას ერთი და იგივე თავისუფალი ცვლადები აქვთ. ამასთან, ამ თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემისათვის შემოკლებული ფორმის მნიშვნელობა (როგორც გაფართოებული თეორიის ფორმის მნიშვნელობა) იგივეა, რაც ამ შემოკლებული ფორმით აღნიშნული მოცემული თეორიის ფორმის მნიშვნელობა ხსენებული ცვლადების მნიშვნელობათა იმავე სისტემისათვის (მხედველობაშია მოცემული თეორიის **$\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციის შესაბამისი გაფართოებული თეორიის** ის $\mathscr{A}'$ **ინტერპრეტაცია**, რომლის $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციიდან მისაღებად საკმარისია წარმოებულ სიმბოლოებს მივანიჭოთ მათი განსაზღვრებების შესაბამისი მნიშვნელობები). შემოკლებული ფორმიდან ამ შემოკლებული ფორმით აღნიშნული ფორმის აღდგენა უნდა მოხდეს ბიჯების (სასრული) მიმდევრობით, სადაც თითოეული ბიჯი გულისხმობს **მინიმალური მოქმედების არის** მქონე წარმოებულ ოპერატორზე (ე. ი. ისეთ წარმოებულ ოპერატორზე, რომლის მოქმედების არეში სხვა წარმოებული ოპერატორი არ იმყოფება) მისი განსაზღვრის გამოყენებას. შემოკლებული ფორმით აღნიშნული ფორმა განისაზღვრება ცალსახად. თუ ზოგიერთი წარმოებული ოპერატორის განსაზღვრის მარჯვენა მხარე განისაზღვრება კონგრუენტულობამდე სიზუსტით (ისე როგორც ეს გვექნება $\subseteq$ ოპერატორის განსაზღვრის ვარიანტების შესახებ ზემოთ მოტა-

ნილ შენიშვნაში), მაშინ შემოკლებული ფორმით აღნიშნული ფორმა განისაზღვრება ცალსახად კონგრუენტულობამდე სიზუსტით. ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად, შემოკლებული სახით მოცემული ფორმის $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციაში მნიშვნელობის გამოთვლისას არაა აუცილებელი შემოკლებული ფორმიდან ფორმის აღდგენა — საკმარისია გამოვთვალოთ შემოკლებული ფორმის მნიშვნელობა როგორც (შემამოკლებელი სიმბოლოებით) გაფართოებული თეორიის ფორმისა $\mathcal{M}$ ინტერპრეტაციის შესაბამის $\mathcal{M}'$ ინტერპრეტაციაში. მოტანილი წინადადების სამართლიანობის დამტკიცება ზემოთ განხილული თეორიების შემთხვევებში სიძნელეს არ წარმოადგენს. აღნიშნულ წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ შემოკლებული ფორმულა და ამ შემოკლებული ფორმულით აღნიშნული ფორმულა ტოლფას წინადადებებს აღნიშნავენ. მაგრამ ეს წინადადებები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან (გარდა ზოგიერთი გამონაკლისი (ტრივიალური) შემთხვევისა).

ხშირად, ფორმათა მნიშვნელობების გამოთვლისას, ხელსაყრელია შემოკლებულ ფორმაში ყველა თავისუფალი ცვლადების ნაცვლად მათი მნიშვნელობათა სისტემების ჩასმა. ამასთან, ზოგიერთი ან ყველა თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები შეიძლება აღნიშნულ იყოს ე. წ. **დამხმარე კონსტანტებით** (ასე ვუწოდებთ სიმბოლოებს, რომლებიც არ გვხვდება არც მოცემული თეორიის ალფაბეტში და არც შემამოკლებელ სიმბოლოთა შორის). ამ გზით მიღებული სიტყვები წარმოადგენენ იმ თეორიის ფორმებს (ფორმულებს, ტერმებს), რომლის მისაღებად საკმარისია გაფართოებულ თეორიას დავუმატოთ დამხმარე კონსტანტები სათანადო ტიპის კონსტანტებად.

ასეთი თეორიის ფორმებს, ფორმულებსა და ტერმებს შესაბამისად ვუწოდებთ მოცემული თეორიის **კვაზიფორმებს**, **კვაზიფორმულებსა** და **კვაზიტერმებს**. ახლა გასაგებია, შემდეგი ტერმინების აზრი: **კვაზიკონსტანტა**, **პროპოზიციული კვაზიკონსტანტა** და ა. შ. ცხადია, ფორმა არის კერძო სახის კვაზიფორმა. ამ წიგნში განხილულ ნებისმიერ **ისეთ თეორიაში**, სადაც კონსტანტები არ გამოიყენება ოპერატორულ ასოებად, სამართლიანია შემდეგი წინადადება: თუ $X_1,..,X_n$ არის ასოების ისეთი მიმდევრობა, რომლის წევრთა შორის გვხვდება $\mathbf{A}$ ფორმის ყველა თავისუფალი ცვლადი, და თუ $\mathbf{A}$ ფორმაში $X_1,..,X_n$ ასოების თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად ჩავსვამთ ამ ასოების მნიშვნელობათა $a_1,...,a_n$ სისტემას, სადაც თითოეული a_i არის ან ძირითადი კონსტანტა ან წარმოებული კონსტანტა ან დამხმარე კონ-

სტანტა, მივიღებთ ისეთ კვაზიკონსტანტას, რომლის მნიშვნელობა ემთხვევა **A** ფორმის მნიშვნელობას $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის. ისეთ თეორიებში, სადაც კონსტანტები გვხვდება ოპერატორულ ასოებად აღნიშნული წინადადებების სამართლიანობისათვის საკმარისია დამატებით მოვითხოვოთ, რომ a_i არ იყოს კვანტორული კონსტანტა (ან, უკიდურეს შემთხვევაში, არ იყოს ისეთი კვანტორული კონსტანტა, რომელიც **A**-ში იმყოფება ოპერატორულ ასოდ).

ზემოაღნიშნულიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ ორმნიშვნელიანი ლოგიკური თეორიის შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი წინადადება. თუ σ არის მარტივი n-ადგილიანი სპეციალური, შესაბამისად ლოგიკური, კონსტანტა-ოპერატორი და $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში მისი შინაარსი (და, მაშასადამე, მისი მნიშვნელობა) განსაზღვრულია, მაშინ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგნების, შესაბამისად ჭეშმარიტულ მნიშვნელობების, აღმნიშვნელ დამხმარე კონსტანტების ნებისმიერ $a_1,\ldots,a_n$ სისტემისათვის განსაზღვრულია $[\sigma a_1\ldots a_n]$ სიტყვის (კვაზიფორმის) მნიშვნელობა. პირიქითაც, $\sigma a_1\ldots a_n$ სახის კვაზიფორმათა მნიშვნელობების განსაზღვრით (სადაც თითოეული a_i არის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგნის, შესაბამისად ჭეშმარიტული მნიშვნელობის, აღმნიშვნელი დამხმარე კონსტანტა), ცალსახად განისაზღვრება σ ოპერატორის შინაარსი.

ვთქვათ, A და B ნებისმიერი კლასებია $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში, ე. ი. A და B კვაზიტერმებია, რომელთა თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში ისეა დაფიქსირებული, რომ მათი მნიშვნელობები კლასებია (სიმარტივისათვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A და B-დან თითოეული არის ან ძირითადი კონსტანტა, ან დამხმარე კონსტანტა, ან წარმოებული კონსტანტა, ან საგნობრივი კონსტანტური ფორმა, ან საგნობრივი კვაზიკონსტანტური ფორმა, რომლის მნიშვნელობა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში კლასია). თუ $B \subseteq A$ ჭეშმარიტია, მაშინ ამბობენ, რომ B კლასი არის A **კლასის ნაწილი** ანუ A **კლასის ქვეკლასი**. თუ B კლასი სიმრავლეა, მაშინ B-ს ეწოდება, აგრეთვე, A **კლასის ქვესიმრავლე**. ნაცვლად ფრაზისა „B კლასი არის A კლასის ნაწილი" სარგებლობენ, აგრეთვე, ფრაზით „B კლასი **შედის** A-ში". B კლასს ეწოდება A **კლასის სრული ნაწილი** ანუ A **კლასის სრული ქვეკლასი**,

თუ A და B კლასებს ერთი და იგივე ელემენტი აქვთ. B კლასს ეწოდება A **კლასის საკუთრივი ნაწილი**, თუ $B \subset A$ ჭეშმარიტია და B-ს აქვს ელემენტი. B კლასს ეწოდება A **კლასის არასაკუთრივი ნაწილი** ანუ A **კლასის არასაკუთრივი ქვეკლასი**, როცა B **უელემენტო** კლასია ან როცა B კლასი A კლასის სრული ნაწილია. აქედან ბუნებრივად ინდუცირდებიან **სრული ქვესიმრავლის, საკუთრივი ქვესიმრავლისა** და **არასაკუთრივი ქვესიმრავლის** ცნებები. თუ $\mathcal{A}$ აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიის მოდელია, მაშინ A არის A კლასის ერთადერთი სრული ქვეკლასი. A კლასის არასაკუთრივი ნაწილები კი არიან მხოლოდ და მხოლოდ $\varnothing$ და A.

კლასებისათვის შემოტანილი ცნებებიდან ბუნებრივად ინდუცირდება ამ ცნებათა სრული ანალოგები სიმრავლეებისათვის. ამ უკანასკნელ ცნებებს შემოტანილად ვიგულისხმებთ განსაზღვრებათა ფორმულირებების გარეშე ყველა შემთხვევაში, თუ საწინააღმდეგო არაა თქმული ხსენებულ ცნებების აღმნიშვნელ ტერმინების სხვა აზრით გამოყენების მიზნით. ამ შეთანხმების სრული ანალოგით ვისარგებლებთ ყოველთვის, როცა შემოიტანება რომელიმე ზოგადი სახის ცნებასთან დაკავშირებული ცნებები და ტერმინები. მაგალითად, ქვემოთ შემოვიტანთ „კლასთა მიმდევრობის ცნებას", რომლიდანაც არ ვაინდუცირებთ „სიმრავლეთა მიმდევრობის ცნებას", რამდენადაც უკანასკნელი ტერმინის შინაარსი სხვაგვარად განისაზღვრება დამოუკიდებლად.

3.3 დალაგებული და დაულაგებელი n-ეულები და ზოგიერთი კლასური და სიმრავლური ოპერაცია

ამ პარაგრაფში გავეცნობით ე. წ. **საგნობრივ ოპერაციებს**. ისინი, კერძოდ, წარმოადგენენ **კლასურ ოპერაციებსა** და **სიმრავლურ ოპერაციებს**. გავეცნობით აგრეთვე **დალაგებული n-ეულის** ცნებას. დალაგებული n-ეული მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ძირითადი მათემატიკური ობიექტების სიმრავლეებად წარმოდგენის (ე. წ. სიმრავლიზაციის) პროცესში. კერძოდ, იგი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს საგნობრივი ოპერაციების განსაზღვრაში. ქვემოთ მოტანილი საგნობრივი ოპერაციები არსებითად კლასურ (კერძოდ, სიმრავლურ) ოპერაციებს

წარმოადგენენ. მათი გავრცელება ინდივიდებზე წარმოებს გადმოცემის გამარტივების მიზნით. ასეთი გავრცელება გვაძლევს იმის შესაძლებლობას, რომ ხსენებული ოპერაციები შემოტანილ იქნენ, როგორც შემამოკლებელი სიმბოლოები (როგორც წარმოებული ოპერატორები).

3.3.1 დაულაგებელი n-ეულები და სისტემები. წარმოებული ($n+1$)-ადგილიანი m-არული სუბსტანციური ლოგიკო-სპეციალური სრული ოპერატორული ნიშანი K_{m1}^{n+1}, შესაბამისად n-ადგილიანი m-არული სუბსტანციური სპეციალური სრული ოპერატორული ნიშანი K_m^n, $n > 0$, შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრით ($m = 0$ შემთხვევაში იგი იქნება წარმოებული ($n+1$)-ადგილიანი სუბსტანციური ლოგიკო-სპეციალური მარტივი ოპერატორი, შესაბამისად, n-ადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური მარტივი ოპერატორი):

$$K_{m1}^{n+1}\Delta_1 \ldots \Delta_m A T_1 \ldots T_n \quad - \quad \tau x[kx \wedge \forall y[y \in x \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists\Delta_1 \ldots \exists\Delta_m [A \wedge ey \wedge [y = T_1 \vee \ldots \vee y = T_n]]]],$$

შესაბამისად,

$$K_m^n\Delta_1 \ldots \Delta_m T_1 \ldots T_n \quad - \quad \tau x[kx \wedge \forall y[y \in x \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists\Delta_1 \ldots \exists\Delta_m [cy \wedge [y = T_1 \vee \ldots \vee y = T_n]]]],$$

სადაც $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ მოცემული თეორიის საგნობრივი ოპერატორული ასოებია, A ნებისმიერი ფორმულაა, $T_1,\ldots,T_n$ ნებისმიერი ტერმებია, x და y კი ერთმანეთისაგან და $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ ასოებისაგან განსხვავებული ისეთი მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომლებსაც არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები $A, T_1,\ldots,T_n$, შესაბამისად $T_1,\ldots,T_n$ ფორმებში (იგულისხმება, რომ პირველად შეირჩევა საჭირო თვისების მქონე x ასო, შემდეგ კი y).

თუ $m \neq 0$, მაშინ $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ მეტაცვლადების ფიქსირებულ მნიშვნელობათა სისტემისათვის $K_{m1}^{n+1}\Delta_1 \ldots \Delta_m$ არის წარმოებული ($n+1$)-ადგილიანი სუბსტანციური ლოგიკო-სპეციალური ოპერატორი (კვანტორი) $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ ოპერატორული ცვლადებით, $K_m^n\Delta_1 \ldots \Delta_m$ კი არის n-ადგილი-

ანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორი (კვანტორი) $\Delta_1,...,\Delta_m$ ოპერატორული ცვლადებით.

განხილული ტერმები, რომელთა შემოკლებული აღნიშვნებია

$$\mathbf{K}_{m1}^{n+1}\Delta_1...\Delta_m\mathbf{A}\mathbf{T}_1...\mathbf{T}_n \text{ და } \mathbf{K}_m^n\Delta_1...\Delta_m\mathbf{T}_1...\mathbf{T}_n, \qquad (1)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $m > 0$, შესაბამისად აღინიშნებიან შემდეგნაირად:

$$\{\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n:\mathbf{A}(\Delta_1...\Delta_m)\}; \quad \{\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n:\Delta_1...\Delta_m\}.$$

იგივე ტერმები $m = 0$ შემთხვევაში შესაბამისად აღინიშნებიან შემდეგნაირად:

$$\{\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n:\mathbf{A}\}; \quad \{\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n\}.$$

განხილული ტერმების უკანასკნელ აღნიშვნებს შემოკლებული აღნიშვნებისაგან განსასხვავებლად ვუწოდებთ **გამარტივებულ აღნიშვნებს**.

$\{\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n:\mathbf{A}(\Delta_1...\Delta_m)\}$ (τ ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრისა და კლასების არსებობის აქსიომის ძალით) მოცემული თეორიის $\mathcal{A}$ მოდელის უნივერსუმის ყველა ისეთი ელემენტის კლასია (ე. ი. აღნიშნავს ყველა ისეთი ელემენტის კლასს), რომელთაგან თითოეული $\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n$ ტერმებიდან რომელიმეს მნიშვნელობაა ($\mathcal{A}$ მოდელის მიმართ) $\Delta_1,...,\Delta_m$ ასოების მნიშვნელობათა რომელიმე ისეთ სისტემისათვის, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ფორმულის მნიშვნელობაა $\mathbf{t}$ (ეს კლასი დამოკიდებულია $\mathbf{A},\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n$ ფორმების $\Delta_1,...,\Delta_m$ ასოებისაგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე). ნებისმიერი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის შემთხვევაში იმავე ტერმით აღინიშნება უკანასკნელი წინადადების სრული ანალოგით აღწერილი ყველა ელემენტის კლასი ან $\varnothing$ (ცარიელი კლასი) იმისდა მიხედვით ხსენებული წინადადების სრული ანალოგით აღწერილი ყველა ელემენტის კლასი არსებობს თუ არა. ასევე მოხდება სხვა წარმოებული სუბსტანციური ოპერატორებისა და წარმოებული საგნობრივი კონსტანტების შემთხვევაში ნებისმიერი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის შემთხვევაზე გადასვლა (სხვა ტიპის წარმოებული სიმბოლოების შემთხვევაში ასეთი გადასვლა სიძნელეს არ წარმოადგენს). $\{\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_n:\Delta_1...\Delta_m\}$ არის $\mathcal{A}$ მოდელის უნივერსუმის ყველა ისეთი ელემენტის კლასი, რომელთაგან თი-

თოეული $T_1,\ldots,T_n$ ტერმებიდან რომელიმეს მნიშვნელობაა $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ ასოების ($\mathcal{M}$ მოდელის მიმართ) მნიშვნელობათა რომელიმე სისტემისათვის. განხილული გამარტივებული აღნიშვნების კერძო შემთხვევებია $\{x:x,A\}$, $\{T:A(x)\}$, $\{T:x\}$, $\{y:A(y)\}$, $\{s_0:A(s)\}$. $\{T_1,\ldots,T_n\}$ აღნიშვნის ნაცვლად იყენებენ აგრეთვე შემდეგი სახის (გამარტივებულ) აღნიშვნებს: $\{T_i:i=1,2,\ldots,n\}$, $\{T_i:0<i\leq n\}$, $\{T_i:0<i<n+1\}$.

$\{T_1,\ldots,T_n\}$ არის კლასი, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ $T_1,\ldots,T_n$ ტერმების ის მნიშვნელობები, რომლებიც ელემენტებს წარმოადგენენ (ეს კლასი დამოკიდებულია ამ ტერმებში მყოფი თავისუფალი ცვლადების ($\mathcal{M}$ მოდელის მიმართ) მნიშვნელობათა სისტემაზე — მისი ელემენტთა რიცხვი n-ს არ აღემატება). $\{T_1,\ldots,T_n:A\}$ არის ცარიელი კლასი (სიმრავლე) ან $\{T_1,\ldots,T_n\}$ იმისდა მიხედვით A მცდარია თუ ჭეშმარიტი (ეს კლასი დამოკიდებულია $T_1,\ldots,T_n,A$ ფორმებში მყოფი თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე). $\{T_1,\ldots,T_n\}$ აღნიშვნის კერძო შემთხვევაა $\{x_1,\ldots,x_n\}$, სადაც $x_1,\ldots,x_n$ ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადებია. ცხადია, $\{T_1,\ldots,T_n\}$ არის $K_0^1T_1\ldots T_n$ ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა, $K_0^1T_1\ldots T_n$ კი, თავის მხრივ,

$$\tau X\forall x[x\in X\leftrightarrow x=T_1\vee\ldots\vee x=T_n]$$

ტერმის შემოკლებული აღნიშვნაა (სადაც X და y ერთმანეთისაგან განსხვავებული ისეთი მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომ X და y ასოებს არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები $T_1,\ldots,T_n$ ტერმებში).

$\{T_1,\ldots,T_n\}$ ტერმს ეწოდება $T_1,\ldots,T_n$ **ტერმებისაგან შედგენილი დაულაგებელი n-ეული**. $n=2$ შემთხვევაში მას ეწოდება, აგრეთვე, T_1 და T_2 **ტერმებისაგან შედგენილი დაულაგებელი წყვილი**.

თუ $a_1,\ldots,a_n$ სიმბოლოებიდან თითოეული არის ან მოცემული თეორიის საგნობრივი კონსტანტა (ძირითადი ან წარმოებული), ან დამხმარე საგნობრივი კონსტანტა (ე. ი. მოცემული თეორიის ალფაბეტში არშე-

მავალი სიმბოლო, რომლითაც უშუალოდ აღინიშნება მოცემული თეორიის ინტერპრეტაციის საგანთა არედან აღებული რომელიმე საგანი), მაშინ ზემოთ მოტანილ ზოგად შეთანხმებათა საფუძველზე გასაგებია აზრი აღნიშვნებისა: $\mathbf{K}^{n}_{0}a_1 \dots a_n$, $\{a_1,\dots,a_n\}$ და ა. შ. ცხადია, თუ თითოეული a_i-ს მნიშვნელობა არის ზესიმრავლე, მაშინ $\{a_1,\dots,a_n\}$ ცარიელი სიმრავლეა. ფორმებთან დაკავშირებულ ცნებებიდან ბუნებრივად ინდუცირდება საგნებთან და ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებთან დაკავშირებული ცნებები. მაგალითად, $\{a_1,\dots,a_n\}$-ით აღნიშნულ საგანს ეწოდება $a_1,\dots,a_n$ **საგნებისაგან შედგენილი დაულაგებელი n-ეული**. $n = 2$ შემთხვევაში მას ეწოდება, აგრეთვე, a_1 და a_2 **საგნებისაგან შედგენილი დაულაგებელი წყვილი**.

შემდეგში, შემოვიტანთ რა ფორმებთან დაკავშირებულ აღნიშვნებსა და ცნებებს, ვიგულისხმებთ, რომ ამით შემოტანილია საგნებთან და ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებთან დაკავშირებული ინდუცირებული აღნიშვნები და ინდუცირებული ცნებები.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია საგნებთან დაკავშირებული აღნიშვნებისა და ცნებების ინდუცირება **მარტივი** წარმოებული ოპერატორების განსაზღვრებების საფუძველზე.

ვთქვათ, $a_1,\dots,a_n$ დამხმარე საგნობრივი კონსტანტების მიმდევრობაა. თუ $n > 0$ და $\mathcal{A}$ არის $\overline{S}$ თეორიის მოდელი, მაშინ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, $\{a_1,\dots,a_n\}$ აღნიშნავს კლასს, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ $a_1,\dots,a_n$ დამხმარე კონსტანტებით აღნიშნული ელემენტები. ამიტომ ბუნებრივი იქნებოდა შეთანხმება, რომლის ძალით $\{\ \}$ გამოსახულება იქნებოდა $\mathcal{A}$ მოდელის უნივერსუმის ცარიელი კლასის (ცარიელი სიმრავლის) აღმნიშვნელი კონსტანტა ან, რაც იგივეა, $\{\ \}$ იქნებოდა $\varnothing$ ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა $\mathcal{A}$ მოდელის შემთხვევაში. შეთანხმებით, $\{\ \}$ მივიჩნიოთ $\varnothing$ ტერმის გამარტივებულ აღნიშვნად (საზოგადოდ, ინტერპრეტაციებისაგან დამოუკიდებლად). ეს შეთანხმება ბუნებრივად გამომდინარეობს ზემოთ მოტანილ შეთანხმებებიდან $\{T_1,\dots,T_n\}$ აღნიშვნის შესახებ: $\{T_1,\dots,T_n\}$, $n > 0$, არის $\mathbf{K}^{n}_{01}T_1,\dots,T_n$ შემოკლებული ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა ან, რაც იგივეა,

$$\tau x[kx \wedge \forall y[y \in x \leftrightarrow y = T_1 \vee \dots \vee y = T_n] \qquad (3)$$

ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა.

მართლაც, უკანასკნელი შეთანხმება გავავრცელოთ $n = 0$ შემთხვევაზე. მაშინ { } იქნება (3) ტერმის აღმნიშვნელი იმ შემთხვევაში, როცა $n = 0$. ამასთან, $n = 0$ შემთხვევაში $y = T_1 \vee ... \vee y = T_n$ უნდა განვიხილოთ, როგორც დიზიუნქცია, რომლის კომპონენტთა რიცხვი არის ნული. ასეთი დიზიუნქციის შინაარსის გახსნისათვის საფუძვლად მივიჩნიოთ ნებისმიერი შემდეგი ორი ჭეშმარიტი წინადადებიდან: რამდენიმე წინადადების დიზიუნქცია ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთი მაინც წინადადება ჭეშმარიტია; რამდენიმე წინადადების დიზიუნქცია მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა წინადადება მცდარია. თითოეული მათგანიდან ბუნებრივად გამომდინარეობს, რომ დიზიუნქცია კომპონენტთა ნული რიცხვით მცდარია. ამიტომ $n = 0$ შემთხვევაში (3) ტერმის მნიშვნელობა ნებისმიერ $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში ან უელემენტო კლასია, ან $\varnothing$ კონსტანტით აღნიშნული ცარიელი კლასია იმისდა მიხედვით $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში უელემენტო კლასი არსებობს თუ არა. მაგრამ ნებისმიერ $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში, კლასის ცნების განსაზღვრის ძალით, უელემენტო კლასი შეიძლება იყოს მხოლოდ $\varnothing$ კონსტანტით აღნიშნული კლასი. მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში (3) ტერმით (და, მაშასადამე, { }-ით) აღნიშნული საგანია $\varnothing$ კონსტანტით აღნიშნული ცარიელი კლასი. ამიტომ ბუნებრივია { } გამოსახულება მოვიჩნიოთ $\varnothing$ ტერმის გამარტივებულ აღნიშვნად.

ოპერატორული ნიშანი $\mathbf{K}$ შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრით:

$$\mathbf{K}\ \Delta\ \mathbf{A} - \{\Delta : \mathbf{A}\},$$

სადაც Δ ნებისმიერი საგნობრივი ოპერატორული ასოა, $\mathbf{A}$ კი ნებისმიერი ფორმულაა. იმ შემთხვევაში, როცა $\mathbf{A}$ ისეთი ფორმულაა, რომ $\mathscr{A}$ ინტერპრეტაციაში არსებობს Δ ასოს მნიშვნელობათა არედან აღებული ყველა ისეთი ელემენტის სიმრავლე, რომლებისთვისაც $\mathbf{A}$ ჭეშმარიტია, მაშინ ნაცვლად $\mathbf{K}$ სიმბოლოსი, იყენებენ, აგრეთვე, $\mathcal{E}$ სიმბოლოს. $\mathbf{K}\ \Delta\ \mathbf{A}$, შესაბამისად $\mathcal{E}\Delta\ \mathbf{A}$, იკითხება: „$\Delta$-ს მნიშვნელობათა არედან აღებული ყველა ისეთი ელემენტის კლასი, შესაბამისად სიმრავლე, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტია $\mathbf{A}$“.

სისტემების აღსანიშნავად გამოვიყენებთ კვადრატულ ფრჩხილებს ისევე, როგორც კლასების გამარტივებულად აღსანიშნავად ვიყენებთ ფიგურულ ფრჩხილებს. მაგალითად, ვიგულისხმებთ რომ $[\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n:\mathbf{A}(\Delta_1\ldots\Delta_m)]$ ისეთ საგანთა სისტემაა, რომელთაგან თითოეული $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n$ ტერმებიდან რომელიმეს მნიშვნელობაა $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ ასოების მნიშვნელობათა ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც $\mathbf{A}$ ფორმულის მნიშვნელობაა $\mathbf{t}$. ასევე: ვიგულისხმებთ, რომ $[\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n]$ ისეთ საგანთა სისტემაა, რომელთაგან თითოეული $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n$ ტერმებიდან რომელიმეს მნიშვნელობაა (იგი დამოკიდებული იქნება $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n$ ტერმების თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე). უკანასკნელ სისტემას ვუწოდებთ აგრეთვე $\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_n$ **საგნებისაგან შედგენილ დაულაგებელ სისტემას**. მოტანილი აღნიშვნების ტერმებად განხილვა საზოგადოდ შეუძლებელია (ტერმის თითოეული მნიშვნელობა მოცემული ინტერპრეტაციის საგანი უნდა იყოს). ცხადია, $\{a_1,\ldots,a_n\} = [a_1,\ldots,a_n]$, როცა $a_1,\ldots,a_n$ ელემენტების აღმნიშვნელი ძირითადი ან დამხმარე კონსტანტებია. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს შეთანხმება წინააღმდეგობაში არაა 3.1.6-ში მოტანილ შეთანხმებასთან დაულაგებელი მეტა n-ეულების აღსანიშნავად კვადრატული ფრჩხილების გამოყენების შესახებ.

3.3.2 ზოგიერთი კლასური და სიმრავლური ოპერაცია. წარმოებული სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორები:

$$\setminus,\ \cup^n\ (n = 1, 2,\ldots),\ \cap^n\ (n = 1, 2,\ldots),\ \mathbf{U},\ \mathbf{\cap},\ \mathbf{I},\ \mathbf{C},\ \Delta,\ \mathbf{P} \qquad (1)$$

შემოიტანებიან შემდეგი განსაზღვრებებით (სადაც $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ (ნებისმიერი) ტერმებია) X, x და a ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომ მათ არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები შესაბამისს განსაზღვრებაში მყოფ ტერმებში, რომლებიც $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ მეტაცვლადებითაა აღნიშნული.

$$[\setminus \mathbf{A}\mathbf{B}] \quad - \quad \tau X[\mathbf{K}X \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow x \in \mathbf{A} \wedge x \,\overline{\in}\, \mathbf{B}]]. \qquad (2)$$

$$[\cup^n \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n] \quad - \quad \tau X[\mathbf{K}X \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \leftrightarrow x \in \mathbf{A}_1 \vee x \in \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee x \in \mathbf{A}_n]]. \qquad (3)$$

$$[\cap^n A_1 \cdots A_n] \quad - \quad \tau X[KX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \leftrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n]]. \tag{4}$$

$$[\cup A] \quad - \quad \tau X[KX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow eX \wedge \exists a[a \in A \wedge x \in a]]]. \tag{5}$$

$$[\cap A] \quad - \quad \tau X[KX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow eX \wedge \forall a[a \in A \rightarrow x \in a]]]. \tag{6}$$

$$[\setminus A] \quad - \quad A \cup^2 \{A\}. \tag{7}$$

$$[CA] \quad - \quad E \setminus A. \tag{8}$$

$$[\Delta AB] \quad - \quad [A \setminus B] \cup^2 [B \setminus A]. \tag{9}$$

$$[PA] \quad - \quad \tau X[KX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow mx \wedge x \subseteq A]]. \tag{10}$$

იგულისხმება, რომ $[A \setminus B]$ არის $[\setminus AB]$ ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა, $A \cup^2 B$ კი არის $[\cup^2 AB]$ ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა. უკანასკნელი სახის გამარტივებულ აღნიშვნაში $\cup^2$-ის ზედა ინდექსს გამოვტოვებთ ხოლმე. ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობებს. $[\cup^n A_1 \ldots A_n]$ და $[\cap^n A_1 \ldots A_n]$ შემოკლებული აღნიშვნების ნაცვლად იყენებენ აგრეთვე $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ და $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ გამარტივებულ აღნიშვნებს.

$[\setminus AB]$ ტერმს ეწოდება A და B **ტერმების სხვაობა**. $\setminus AB$-ს აღნიშნავენ აგრეთვე $C_A B$-თი და უწოდებენ B **ტერმის დამატებას** A **ტერმის მიმართ**. ცხადია, $C_E B$ და CB ერთი და იმავე ტერმებს აღნიშნავენ. ნაცვლად $C_A B$ აღნიშვნისა, ზოგჯერ იხმარება აგრეთვე CB როგორც გამარტივებული აღნიშვნა, თუ ეს გაუგებრობას არ იწვევს.

$$\cup^n A_1 \ldots A_n, \ \cap^n A_1 \ldots A_n, \ \cup A, \ \cap A$$

ტერმებს შესაბამისად ეწოდებათ: $A_1, \ldots, A_n$ **ტერმების გაერთიანება**, $A_1, \ldots, A_n$ **ტერმების თანაკვეთა**, A **ტერმის გაერთიანება**, A **ტერმის თანაკვეთა**. $|A$ ტერმს ეწოდება A **ტერმის უშუალო შემდეგი**. $|A$ აღნიშვნის ნაცვლად ხშირად გამოვიყენებთ გამარტივებულ აღნიშვნას A'-ს. A' აღნიშვნას ხშირად გამოვიყენებთ სხვა მიზნითაც

(მაგალითად, მას გამოვიყენებთ როგორც ერთიან სიმბოლოს, როგორც მეტაცვლადს). CA ტერმს ეწოდება **A ტერმის დამატება**. ΔAB ტერმს ეწოდება **A და B ტერმების სიმეტრიული სხვაობა**. PA ტერმს ეწოდება **A ტერმის ხარისხი**. ამ ტერმებიდან და ოპერატორებიდან ზემოთ მოტანილი ზოგადი შეთანხმებების საფუძველზე ბუნებრივად ინდუცირდება საგნებთან (კერძოდ, კლასებსა და სიმრავლეებთან დაკავშირებული ტერმინები და ოპერაციები $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში, ამასთან, ამ ტერმინებსა და ოპერაციებს ტრადიციული (ბუნებრივი) შინაარსი აქვთ $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერ მოდელში; ამ მხრივ გამონაკლისია C შემამოკლებელ სიმბოლოსთან დაკავშირებული ცნებები და ტერმინები საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიის მოდელის შემთხვევაში: „საგნის დამატებას" ბუნებრივი შინაარსი არ აქვს საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიის მოდელში, რამდენადაც ასეთ მოდელში უნივერსალური კლასი არ არსებობს (ასეთ მოდელში E აღინიშნავს ცარიელ სიმრავლეს). ამიტომ საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიაში C შემამოკლებელი სიმბოლოს შემოტანა ხელსაყრელი არაა.

შენიშვნა. (5) და (6) განსაზღვრებიდან (სახეზე მყოფი) $\epsilon X \wedge$ ნაწილის ამოგდებით (5) განსაზღვრის შინაარსი — განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა (მოდელში) არ შეიცვლება, (6) განსაზღვრის შინაარსი კი შეიცვლება მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა T ტერმის მნიშვნელობაა ცარიელი სიმრავლე ან ინდივიდი (ე. ი. უელემენტო საგანი). ამასთან, არგუმენტის ასეთი სახის მნიშვნელობისათვის (6) განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა E უნივერსალური კლასია, ($\epsilon X \wedge$ ნაწილის ამოგდებით) მოდიფიცირებული (6) განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა ხსენებული სახის არგუმენტისათვის კი იქნება ცარიელი სიმრავლე (საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში (5) და (6) განსაზღვრებების შინაარსი (მოდელში) მოდიფიცირების შედეგად არ იცვლება). (5) განსაზღვრაში $\epsilon X \wedge$ ნაწილი ფიგურირებს (5) და (6) განსაზღვრებების სიმეტრიულობებისათვის (რასაც, თავის მხრივ, მნიშვნელობა აქვს ორადულობის საკითხების შესწავლისათვის). შევნიშნოთ, რომ კლასთა თეორიის შემთხვევაში სიმრავლეთა კლასი ჩაკეტილია (1) ოპერაციების მიმართ, გამონაკლისია მხოლოდ $\cap$ ოპერაცია, რომელიც მხოლოდ და მხოლოდ ცარიელ სიმრავლეზე გვაძლევს ზესიმრავლეს ($\cap\varnothing = E$). თუ (6)-ის ნაცვლად ავიღებთ შესაბამისს მოდიფიცირებულ განსაზღვრას, მა-

შინ ხსენებული გამონაკლისი აღარ გვექნება (ამ შემთხვევაში $\bigcap\varnothing = \varnothing$). მაგრამ ინტუიციურად $\bigcap\varnothing = \mathbf{E}$ ტოლობა უფრო გამართლებულია, ვიდრე $\bigcap\varnothing = \varnothing$ ტოლობა ($\bigcap \mathbf{A}$ არის ყველა ისეთი ელემენტის კლასი, რომელიც $\mathbf{A}$ კლასის თითოეული ელემენტის ელემენტია).

ცხადია, სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ მოდელში სიმრავლის უშუალო შემდეგის მისაღებად საკმარისია სიმრავლეს ახალ ელემენტად დავუმატოთ თვით ეს სიმრავლე. ზესიმრავლის უშუალო შემდეგი თვით ეს ზესიმრავლეა. ინდივიდის უშუალო შემდეგი არის სიმრავლე, რომლის ერთადერთი ელემენტი ეს ინდივიდია. $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ინდივიდების გაერთიანება, შესაბამისად თანაკვეთა, ცარიელი სიმრავლეა. ინდივიდისა და $\mathbf{A}$ კლასის გაერთიანება არის $\mathbf{A}$ კლასი, თანაკვეთა კი ცარიელი სიმრავლეა. $\mathbf{A}$ კლასის ხარისხი $\mathbf{A}$ კლასის ყველა ქვესიმრავლის კლასია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აქსიომური სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი აქსიომაა შემდეგი წინადადება. სიმრავლის ხარისხი სიმრავლეა. ამ აქსიომის შესრულება სიმრავლეთა თეორიის პირველ ინტუიციურ მოდელში, როგორც ვიცით, პრობლემატურია. ამ აქსიომის შესრულება აუცილებელი და საკმარისია იმისათვის, რომ სიმრავლეთა თეორიის პირველი ინტუიციური მოდელი იყოს სიმრავლეთა თეორიის მოდელი მოდელის ცნების განსაზღვრის შესაბამისად.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ მოდელში (უფრო მეტიც, სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ ისეთ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში, რომელშიც შესრულებულია კლასების არსებობის აქსიომა და მოცულობის აქსიომა):

$$x \in [\setminus \mathbf{AB}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B} ;$$

$$x \in [\bigcup^n \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} x \in \mathbf{A}_1 \vee x \in \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee x \in \mathbf{A}_n ;$$

$$x \in [\bigcap^n \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} x \in \mathbf{A}_1 \wedge x \in \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge x \in \mathbf{A}_n ;$$

$$x \in [\bigcup \mathbf{A}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \exists a[a \in \mathbf{A} \wedge x \in a ;$$

$$x \in [\bigcap \mathbf{A}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \forall a[a \in \mathbf{A} \rightarrow x \in a ;$$

$$x \in [\,|\mathbf{A}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} x \in \mathbf{A} \vee [x = \mathbf{A} \wedge \mathrm{e}x];$$

$$x \in [\,\complement \mathbf{A}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \mathrm{e}x \wedge x \notin \mathbf{A} ;$$

$$x \in [\,\Delta \mathbf{AB}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} [x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B}] \vee [x \in \mathbf{B} \wedge x \notin \mathbf{A}] ;$$

$$x \in [\mathbf{PA}] \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \mathrm{m}x \wedge x \subseteq \mathbf{A} .$$

ისეთი თეორიის შემთხვევაში, რომლის თითოეულ მოდელში ინდივიდთა კლასი ცარიელია და (1) სიმბოლოები სათანადო ტიპის ძირითადი სიმბოლოებია, თუ გვსურს (1) სიმბოლოები იყოს იმავე შინაარსის მქონე ძირითადი ოპერატორები, მაშინ უკანასკნელი რვა ტოლძალოვნება შეგვიძლია მივიჩნიოთ ამ ოპერატორთა შინაარსის განსაზღვრებებად. მეექვსე ტოლძალოვნება გამოდგება „|“ ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრად მაშინაც, როცა პირობა ინდივიდთა ერთობლიობის შესახებ შესრულებული არაა (ვგულისხმობთ, რომ ტერმები განუსაზღვრელ მნიშვნელობებს არ ღებულობენ). აქ საქმეს შველის ის გარემოება, რომ საგნობრივი ცვლადების ნებისმიერ **a** მნიშვნელობისათვის $|\mathbf{a}$ არის არაცარიელი კლასი: პირობა „საგანს არ აქვს ელემენტი“ ცალსახად განსაზღვრავს საგანს მხოლოდ ისეთ მოდელებში, სადაც ინდივიდთა კლასი ცარიელია. ელემენტის მქონე საგანი აუცილებლად კლასია და იგი მოდელის შემთხვევაში ცალსახად განისაზღვრება თავისი ელემენტებით.

შენიშვნა. მოტანილ ტოლძალოვნებებიდან მეორე, შესაბამისად მესამე, ტოლძალოვნების მარჯვენა მხარეში იგულისხმება, რომ ლოგიკური ჯამის, შესაბამისად ნამრავლის, ოპერაციები სრულდება იმ მიმდევრობით რა მიმდევრობითაც არიან ისინი ჩაწერილნი. მაგრამ, იმ შემთხვევაში, როცა ეს ტოლძალოვნება მის მარცხენა მხარეში მოთავსებული ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრებად არის მიჩნეული, განსაზღვრის შინაარსი არ შეიცვლება, თუ ამ ლოგიკურ ჯამის, შესაბამისად ნამრავლის, ოპერაციებს სხვა ნებისმიერი რიგით შევასრულებთ: ყველა შემთვევაში ტოლძალოვნების მარჯვენა მხარე ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია მისი შემადგენელი ერთი მაინც, შესაბამისად თითოეული, $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_i$ სახის ფორმულა ($\mathbf{i} = 1,2,\dots,\mathbf{n}$).

მაგალითისათვის შევჩერდეთ, თუ როგორ განსაზღვრავს „\“ წარმოებულ ოპერატორის შინაარსს $\mathcal{A}$ მოდელში მისი ზემოთ მოტანილი (პირველი) განსაზღვრა.

$\tau\mathbf{X}$ ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრის თანახმად $[\backslash\mathbf{AB}]$ აღნიშნავს ისეთ $\mathbf{X}$ საგანს, რომელიც არის კლასი და რომლისთვისაც $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში (ე. ი. რომლის ელემენტია **x** საგანი) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია $\mathbf{x} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{x} \notin \mathbf{B}$, ე. ი. როცა „**x** არის **A** საგნის ელემენტი და **x** არ არის **B** საგნის ელემენტი“. რადგან მოდელში კლასი ცალსახად განისაზღვრება მისი ელემენტებით, ასეთი **X** საგანი ცალსახა-

დაა განსაზღვრული (ასეთი X კლასის არსებობა გამომდინარეობს კლასების არსებობის აქსიომიდან). ამრიგად, განსაზღვრის მარჯვენა მხარე (და მაშასადამე, [\AB]) აღნიშნავს იმ ერთადერთ X კლასს, რომლის ელემენტებია A საგნის ისეთი ელემენტები, რომლებიც B საგნის ელემენტები არ არიან. აქ იგულისხმება, რომ A და B განიხილება როგორც მისი თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული საგანი (X და x ცვლადებს არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები A და B ტერმებში). ანალოგიური შენიშვნები შეიძლება გავაკეთოთ სხვა ზემოთ მოტანილ წარმოებულ ოპერატორთა განსაზღვრებების შესახებ. ახლა გასაგებია თუ რისთვის არის საჭირო მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ თეორიის თითოეულ მოდელში ინდივიდთა კლასი იყოს ცარიელი, როცა (1) სიმბოლოები სათანადო ტიპის ძირითადი სიმბოლოებია და მათი შინაარსის განსაზღვრას აწარმოებენ ზემოთ მოტანილ რვა ტოლძალოვნებით, და რატომ არის ეს დამატებითი მოთხოვნა ზედმეტი, როცა განსაზღვრებად გამოყენებულია მეექვსე ტოლძალოვნება. აღნიშნული ტოლძალოვნებები რომ იქცენ განხილულ (ძირითად ოპერატორებად მიჩნეულ) ოპერატორთა შინაარსის განსაზღვრებებად საკმარისია ისინი განვიხილოთ ოპერატორთა შინაარსის განსაზღვრებებად შემდეგ დამატებით შეთანხმებებთან ერთად: „ოპერატორის მოქმედების შედეგი არის კლასი".

ახლა ადვილი დასანახია, რომ აღნიშნული დამატებითი შეთანხმება არაა საკმარისი ისეთ ინტერპრეტაციებში, რომლებშიც შესრულებული არაა მოცულობის აქსიომა, რომ მოცულობის აქსიომა უდევს საფუძვლად განხილული სახის ტოლძალოვნებებით ოპერატორის შინაარსის განსაზღვრას. აქვე შევნიშნოთ, რომ ამ წიგნში გამოყენებული შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრებებიდან თითოეული ცალსახად განსაზღვრავს შესაბამისი შემამოკლებელი სიმბოლოების ტიპს (მხედველობაშია მხოლოდ ზემოთ განხილული სიმბოლოთა ტიპები) და მის შინაარსს ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში. უფრო ზუსტად: ამ წიგნში გამოიყენება მხოლოდ [26]-ში შემოტანილი შემამოკლებელ სიმბოლოთა I-IV, II′ და IV′ ტიპის განსაზღვრებები და თითოეულ ასეთ განსაზღვრას აქვს ხსენებული თვისება. ამ ფაქტის შემოწმება თითოეული კონკრეტულად მოცემული განსაზღვრის შემთხვევაში სიძნელეს არ წარმოადგენს. ამიტომ ახალი ოპერატორების შემოტანა შემამოკლებელი სიმბოლოების სახით უფრო ხელსაყრელია.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში ზემოთ განხილული 8 ტოლძალოვნებიდან მეხუთე ტოლძალოვნებას ადგილი არ აქვს, როცა A არის $\varnothing$.

$\varnothing$ ტერმი აღინიშნება აგრეთვე O-თი. თუ $\mathcal{A}$ მოდელია, მაშინ O, |O, ||O,... ტერმების მნიშვნელობებს უწოდებენ (ჩვეულებრივ) **ნატურალურ რიცხვებს**. O, |O, ||O,... ტერმები შესაბამისად აღინიშნებიან ციფრებით შედგენილი 0,1,2,...,9,10,11,12,... სიტყვებით ათობითი სისტემის მიხედვით და შესაბამისად იკითხებიან „ნული," „ერთი," „ორი" და ა. შ. ეს სიტყვები განიხილებიან რა როგორც ერთიანი სიმბოლოები, არიან წარმოებული საგნობრივი კონსტანტები — შემამოკლებელი სიმბოლოები (მაგალითად 5-ის შემომტანი განსაზღვრაა: 5 — |||||O). ადვილად შევნიშნავთ, რომ ორი ნებისმიერი ერთმანეთისაგან განსხვავებული m და n ნატურალური რიცხვებიდან ერთ-ერთი მეორის საკუთრივი ქვესიმრავლეა. თუ $m \subset n$, მაშინ ამბობენ, რომ „m ნაკლებია n-ზე" ანუ „n მეტია m-ზე" და წერენ „$m < n$" ანუ „$n > m$". ადვილად მტკიცდება რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი არის მასზე ნაკლებ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. O, |O, ||O,... ტერმების აღნიშვნებს (ათობითი სისტემის მიხედვით) და სახელწოდებებს გამოვიყენებთ აგრეთვე ამ ტერმების მნიშვნელობების — ნატურალური რიცხვების აღნიშვნებად სახელწოდებებად.

ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვების ცნებასთან დაკავშირებული საკითხები დეტალურად შეისწავლება მომდევნო თავში.

სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები უზრუნველყოფენ (ჩვეულებრივ) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის არსებობას და ამ სიმრავლეს აღნიშნავენ N-ით.

ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვებისაგან უნდა განვასხვაოთ ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვები, რომლებსაც იმავე სიმბოლოებით აღვნიშნავთ და რომლებსაც ხშირად ვიყენებდით აქამდეც. ამასთან დაკავშირებით მოსალოდნელ გაუგებრობათა თავიდან აცილებას უზრუნველყოფს კონტექსტი.

3.3.3 დალაგებული n-ეულები და სისტემები. კლასთა ნამრავლი და პროექციები. ახლა შემოვიტანოთ წარმოებული n-ადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორი $Э^n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. ამ ოპერატორთა განსაზღვრა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$
\begin{aligned}
&[Э^1 T_1] \;-\; T_1; \\
&[Э^1 T_1 \ldots T_n] \leftrightarrow \{\{1,\{T_1\}\},\ldots,\{\{n,\{T_n\}\}, \quad (n = 0,2,3,\ldots)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

სადაც $T_1,\ldots,T_n$ ნებისმიერი ტერმებია.

[$\mathrm{Э}^n T_1 \ldots T_n$] ტერმი გამარტივებულად აღინიშნება აგრეთვე ($T_1,\ldots,T_n$)-ით. კერძოდ, [$\mathrm{Э}^0$] ტერმის (ე. ი. { } ტერმის) გამარტივებული აღნიშვნა იქნება „( )". ცხადია, $\mathrm{Э}^0$ არის $\varnothing$ ტერმის შემოკლებული აღნიშვნა. $\{K,\{T_K\}\}$ ტერმს ეწოდება ($T_1,\ldots,T_n$) ტერმის K-ური ელემენტი ($n = 2,3,\ldots$; $K = 1,2,\ldots,n$).

შენიშვნა. მოტანილ განსაზღვრაში 0,1,...,n სიტყვები (ათობითი სისტემის მიხედვით) O, |O, ||O,...,||...|O ტერმებს აღნიშნავენ. იგივე სიტყვები ინდექსების სახით იმავე განსაზღვრაში ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვებს (იხ. 4.1.2) აღნიშნავენ. ამასთან, O, |O, ||O,... ტერმები, როცა $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია მოდელია, ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვებია (იხ. 4.1.4).

($T_1,\ldots,T_n$) ტერმს (ე. ი. $\mathrm{Э}^n T_1 \ldots T_n$ ტერმს), $n > 0$, ეწოდება $T_1,\ldots,T_n$ ტერმებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული. T_i ტერმს ეწოდება ამ დალაგებული n-ეულის i-ური კომპონენტი ანუ i-ური წევრი ანუ i-ური კოორდინატი ($n = 1,2,\ldots,n$). ამასთან, ( ) ტერმს (ანუ $\mathrm{Э}^0$-ს ანუ { }-ს ანუ $\varnothing$-ს) ეწოდება ტერმებისაგან შედგენილი დალაგებული O-ეული. (T_1, T_n) ტერმს (ე. ი. $\mathrm{Э}^2 T_1 T_2$ ტერმს) ეწოდება აგრეთვე T_1 და T_2 ტერმებისაგან შედგენილი დალაგებული წყვილი. ახლა გასაგებია ნებისმიერი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის საგნებთან დაკავშირებული შემდეგი ტერმინების შინაარსი: $a_1,\ldots,a_n$ ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული (ცხადია, იგი აღინიშნება ($a_1,\ldots,a_n$)-ით), $a_1,\ldots,a_n$ კლასებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული, საგნებისაგან შედგენილი დალაგებული O-ეული (იგი ცარიელი კლასია), დალაგებული n-ეულის წევრი, $a_1,\ldots,a_n$ ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეულის i-ური კოორდინატი და ა. შ. (მოდელში ამ ტერმინებით აღნიშნულ ცნებებს ტერმინების შესაბამისი ბუნებრივი შინაარსი აქვთ).

განსაზღვრით, დალაგებული n-ეულების საერთო სახელია კორტეჟი. ამის შესაბამისად უნდა გავიგოთ შემდეგი ტერმინების შინაარსი: „ტერმებისაგან შედგენილი კორტეჟი," „საგნებისაგან შედგენილი კორ-

ტეჟი,'' ,,საგნებისაგან შედგენილი n-კომპონენტიანი კორტეჟი'' და ა. შ. ამ ტერმინებიდან ხშირად გამოვტოვებთ ხოლმე დამაზუსტებელ ფრაზებს ,,საგნებისაგან შედგენილი'' ,,ელემენტებისაგან შედგენილი,'' ,,კლასებისაგან შედგენილი''.

ცხადია, გვექნება შემოტანილი ტერმინების მეტამათემატიკური ანალოგები. მაგალითად, ასეთი ტერმინებია: ,,მეტასაგნებისაგან შედგენილი დალაგებული მეტაკორტეჟი, შესაბამისად მეტამათემატიკური n-ეული,'' ,,n წევრიანი მეტაკორტეჟი,'' ,,მეტამათემატიკური n-ეული'' და ა. შ. ნაცვლად ტემინისა ,,დალაგებული მეტაკორტეჟი'' უმეტესად ვისარგებლებთ სპეციალური ტერმინით: **დალაგებული სისტემა**. ამის შესაბამისად უნდა გავიგოთ შემდეგი ტერმინის აზრი: $X_1,\ldots,X_n$ **ასოების მნიშვნელობებისაგან შედგენილი დალაგებული სისტემა** ანუ, გამარტივებულად, $X_1,\ldots,X_n$ **ასოების მნიშვნელობათა დალაგებული სისტემა**. სიმარტივისათვის, განხილულ ტერმინებში ხშირად გამოვტოვებთ ხოლმე დამაზუსტებელ სიტყვას ,,დალაგებული''. ზემოთ ვსარგებლობდით კიდეც ასეთნაირად გამარტივებული ტერმინებით. სახელდობრ, როცა ლაპარაკი იყო $X_1,\ldots,X_n$ **ასოების მნიშვნელობათა სისტემაზე** (იხ. 3.1.1) მხედველობაში იყო $X_1,\ldots,X_n$ ასოების $a_1,\ldots,a_n$ მნიშვნელობებისაგან შედგენილი დალაგებული სისტემა. შევნიშნოთ, რომ ამ წიგნში განხილული ნებისმიერი თეორიის ნებისმიერი ასოს ნებისმიერი მნიშვნელობა მეტაელემენტია (იხ. 2.2.5). მაშასადამე, $X_1,\ldots,X_n$ ასოების მნიშვნელობათა სისტემა ყოველთვის მეტაელემენტებისაგან შედგენილი n-წევრიანი მეტაკორტეჟია (ე. ი. მეტაელემენტებისაგან შედგენილი მეტამათემატიკური n-ეულია).

3.1.6 პუნქტში მოტანილი ზოგადი შეთანხმების შესაბამისად $a_1,\ldots,a_n$ მეტასაგნებისაგან შედგენილი დალაგებული სისტემა აღინიშნება $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$-ით.

არაუმარტივესი ალფაბეტის მქონე ნებისმიერ თეორიაში $X_1,\ldots,X_n$ საგნობრივი ასოების მნიშვნელობათა სისტემა სისტემათა 1.3.5-ში მოტანილი განსაზღვრის მიხედვით, შევნიშნოთ, რომ სისტემის ცნების ხსენებული განსაზღვრა შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს. მოცემული თეორიის ფორმულის საგნობრივი ასოს მიმართ $\mathcal{I}$ ინტერპრეტაციის უნივერსუმზე განსაზღვრულ თვისებად განხილვის შედეგად მიღებული თვისებით განსაზღვრულ მეტასიმრავლეს ეწოდება **სისტემა** ($\mathcal{I}$ **ინტერპრეტაციაში** — $\mathcal{I}$ **ინტერპრეტაციის მიმართ**).

(3.1) თეორემა. ნებისმიერ $\mathcal{A}$ მოდელში დალაგებულ n-ეულებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

(a) საგნებისაგან შედგენილი ორი $(a_1,...,a_n)$ და $(b_1,...,b_n)$ დალაგებული n-ეულებიდან, $n > 0$, ერთი n-ეულის i-ური ელემენტი არ შეიძლება უდრიდეს მეორის j-ურ $(j \neq i)$ ელემენტს.

(b) თუ $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ $(n > 0)$ საგნობრივი კვანტორული ასოებია, მაშინ ამ ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი სისტემისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი ფორმულა:

$$ea_1 \wedge ... \wedge ea_n \wedge eb_1 \wedge eb_n \rightarrow$$
$$\rightarrow [(a_1,...,a_n) = (b_1,...,b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge ... \wedge a_n = b_n]$$

მაშასადამე, თუ $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ ელემენტებია, მაშინ[1]

$$(a_1,...,a_n) = (b_1,...,b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge ... \wedge a_n = b_n .$$

(c) საგნებისაგან შედგენილი n-ეული, როცა $n \neq 1$, არის n-ელემენტიანი სიმრავლე.

მართლაც, (a) თვისების დასამტკიცებლად დავუშვათ წინააღმდეგი, ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq n; \quad j \neq i; \quad \{j, \{a_j\}\} = \{i, \{b_i\}\} .$$

აქედან ადვილად ვპოულობთ, რომ

$$i = \{b_j\}; \quad j = \{a_i\} .$$

უკანასკნელი ორი ტოლობა ეწინააღმდეგება $1 \leq i \neq j \geq 1$ პირობას (i და j რიცხვებიდან ერთს მაინც უნდა ჰქონდეს არანაკლებ ორი ელემენტისა). ამით მტკიცდება (a) თვისება. (b) და (c) თვისებები მისი უბრალო შედეგებია.

(b) თვისება იძლევა იმის საფუძველს, რომ (იმ შემთხვევაში, როცა $a_1,...,a_n$ სიმბოლოთა მნიშვნელობები ელემენტებია) $(a_1,...,a_n)$-ს ეწოდოს „$a_1,...,a_n$ ელემენტებისაგან შედგენილი **დალაგებული** n-ეული". (b)

---

[1] თუ $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ დამხმარე კონსტანტებია, მაშინ მხედველობაშია ამ დამხმარე კონსტანტებით გაფართოებული თეორია.

თვისება შეიძლება ასეც გამოითქვას. ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული ერთადერთი გზით წარმოიდგინება სახით: $(a_1,...,a_n)$.

ცხადია. (a), (b) და (c) წინადადებათა სრული ანალოგები სამართლიანი იქნება დალაგებული სისტემების შემთხვევაშიც. უფრო მეტიც, (b) წინადადება დალაგებული სისტემების შემთხვევაში სამართლიანი იქნება შემდეგი გაძლიერებული ფორმით.

(b^*) თუ $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ საგნობრივი ცვლადებია, მაშინ

$$\langle a_1,...,a_n\rangle = \langle b_1,...,b_n\rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge ... \wedge a_n = b_n$$

(b) თვისება შეიძლება გავაძლიეროთ შემდეგნაირად.

(b') თუ $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ საგნობრივი ცვლადებია, მაშინ

$$ea_1 \wedge ... \wedge ea_n \Rightarrow [(a_1,...,a_n) = (b_1,...,b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge ... \wedge a_n = b_n].$$

ეს წინადადება არის (b) წინადადებისა და შემდეგი წინადადების შედეგი.

(d) დალაგებული n-ეული, რომლის ერთი კომპონენტი მაინც ზესიმრავლეა, არ შეიძლება ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეულის ტოლი იყოს.

დამტკიცება. n არ შეიძლება იყოს 0. შემთხვევა $n = 1$ ტრივიალურია. ვიგულისხმოთ, რომ $n > 1$. ასეთ შემთხვევაში, თუ $(b_1,...,b_n)$ n-ეულის i-ური კომპონენტი ზესიმრავლეა, მაშინ მისი i-ური ელემენტი $\{i, 0\}$ არ დაემთხვევა ელემენტებისაგან შედგენილი $(a_1,...,a_n)$ n-ეულის არც ერთ ელემენტს ($(a_1,...,a_n)$-ის ელემენტის ელემენტებს შორის ცარიელი სიმრავლე არ გვხვდება) *

ახლა შემოვიტანოთ X^n წარმოებული n-ადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორი შემდეგი განსაზღვრით:

$$[X^n T_1 ... T_n] \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists x_1 ... \exists x_n [x = (x_1,...,x_n) \wedge x_1 \in T_1 \wedge ... \wedge x_n \in T_n]]],$$

სადაც X. x. $x_1,...,x_n$ ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია. რომ მათ არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები $T_1,...,T_n$ ტერმებში $(n = 0,1,2,...)$. (იგულისხმება, რომ პირველად შეირჩევა საჭირო თვისების მქონე X ასო, შემდეგ x, შემ-

დეგ X_1 და ა. შ. სხვანაირად: იგულისხმება, რომ $X, x, x_1, \ldots, x_n$ ასოების ნომრების მიმდევრობა ზრდადია). აქ სიტყვა „კვანტორული" შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „ოპერატორული".

ცხადია, მოტანილი განსაზღვრა $n = 0$ შემთხვევაში გვაძლევს:

$$X^0 \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow x = (\ )]].$$

აქედან, რადგან ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ( ) არის $\varnothing$ გამომდინარეობა, რომ $X^0 = \{\varnothing\}$. ამიტომ ნებისმიერ მოდელში $X^0 = 1$.

ნაცვლად $X^n T_1 \ldots T_n$ შემოკლებული აღნიშვნებისა, გამოვიყენებთ აგრეთვე $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} T_i$ (გამარტივებულ) აღნიშვნას. ასევე, ნაცვლად $X^2 T_1 T_2$ აღნიშვნისა, გამოვიყენებთ აგრეთვე $T_1 X^2 T_2$ და $T_1 X T_2$ აღნიშვნებს. $X^n T_1 \ldots T_n$ ტერმს ეწოდება $T_1, \ldots, T_n$ **ტერმების პირდაპირი ნამრავლი** ანუ **გარე ნამრავლი**. ე. წ. მარცხნიდან შეჯგუფების კანონის ძალით $T_1 X T_2 X \ldots X T_n$ წარმოადგენს ტერმების $[[\ldots[[T_1 X T_2] X \ X T_3] \ldots] X T_n]$, ე. ი. $X^2 \ldots X^2 T_1 \ldots T_n$ ნამრავლის გამარტივებულ აღნიშვნას (ხსენებულ ნამრავლში სახეზე მყოფი ოპერატორების რიცხვია $n-1$). იგი, ცხადია, თუ $n > 2$, განსხვავდება ტერმების $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} T_i$ ნამრავლისაგან. ტერმების $T_1 X T_2 X \ldots X T_n$ ნამრავლს ვუწოდოთ $T_1, \ldots, T_n$ **ტერმებ-დეკარტული ნამრავლი**. ვგულისხმობთ, რომ დეკარტულისა და გარე ნამრავლის ცნებები ერთი და იგივეა, როცა თანამამრავლთა რიცხვი n არის 0 ან 1. ისინი, ცხადია, ერთი და იგივეა $n = 2$ შემთხვევაშიც.

ცხადია, ნებისმიერი მოდელის უნივერსუმის $A_1, \ldots, A_n$ საგნების (კერძოდ, **კლასების**) **პირდაპირი ნამრავლი** არის ელემენტებისაგან შედგენილი $(a_1, \ldots, a_n)$ სახის ყველა დალაგებული n-ეულის კლასი, სადაც a_i არის A_i-ს ნებისმიერი ელემენტი. კლასთა პირდაპირი ნამრავლის ორადგილიან X^2 ოპერაციას არ აქვს კომუტატიობის თვისება. ნებისმიერი მოდელის უნივერსუმის A და B კლასების AXB ნამრავლი მხოლოდ იმ შემთხვევაში უდრის BXA-ს, როცა $A = B$ ან როცა A და B კლასებიდან ერთი მაინც ცარიელია.

თუ $A_1,...,A_n$ კლასთა $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_n$ პირდაპირი ნამრავლის თითოეული A_i თანამამრავლი A კლასის ტოლია, მაშინ $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_n$ ნამრავლს ეწოდება A **კლასის n-ური ხარისხი** და იგი აღინიშნება A^n-ით. ცხადია, ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში $A^1 = A$ და $A^0 = \{\varnothing\}$. მაშასადამე, ნებისმიერ მოდელში $A^0 = 1$.

$n \geq 2$ შემთხვევაში, ცხადია, $A_1,...,A_n$ კლასთა დეკარტული ნამრავლის ელემენტები ორკომპონენტიან დალაგებულ კორტეჟებს (ელემენტთა წყვილებს) წარმოადგენენ. ცხადია, n რიცხვ კლასთა, შესაბამისად ტერმთა, დეკარტული ნამრავლი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც k რიცხვ კლასთა, შესაბამისად ტერმთა, დეკარტული ნამრავლი $\{1,2,...,n-1\}$-დან აღებულ ყოველ k-თვის.

$X^{\prime n}$ წარმოებული ერთადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორი $(n = 0,1,...)$ შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრით:

$$X^{\prime n}T \;-\; X^{n}TT\cdots T,$$

სადაც T ნებისმიერი ტერმია (იგულისხმება, რომ განსაზღვრის მარჯვენა მხარეში T მეორდება n-ჯერ — წინააღმდეგ შემთხვევაში განსაზღვრის მარჯვენა მხარე ფორმა არ იქნება). ვიგულისხმებთ, რომ T^n არის $X^{\prime n}T$ ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა.

ცხადია, თუ A კლასია, მაშინ $X^{\prime n}A = A^n$ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში.

ახლა განვსაზღვროთ წარმოებული ერთადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორები $pr^n_{i_1 i_2 ... i_q}$ და $Pr^n_{i_1 i_2 ... i_q}$, სადაც

$$n = 1,2,...,\ q \geq 1,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leq n.$$

ეს წარმოებული ოპერატორები შემოიტანებიან შემდეგი განსაზღვრებებით:

$$pr^n_{i_1 i_2 ... i_q} T \;-\; \tau X[kX \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_n [ex_1 \wedge \ldots \wedge ex_n \wedge T = (x_1, \ldots, x_n) \wedge$$
$$\wedge X = (x_{i_1} \ldots x_{i_q})]]$$

$$\Pr^{n}_{i_1 i_2 \ldots i_q} T \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y[ex_1 \wedge \ldots \wedge ex_n \wedge$$
$$\wedge\, y \in T \wedge y = (x_1, \ldots, x_n) \wedge x = (x_{i_1} \ldots x_{i_q})]]$$

სადაც T არის ნებისმიერი ტერმი. X, x, x_1, ..., x_n, y T-ში თავისუფალი შემოსვლების არმქონე ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია (ან, რაც იგივეა, მინიმალურნომრიანი საგნობრივი ოპერატორული ასოებია — იხ (1.1) და (1.2) შეთანხმებები).

$pr^{n}_{i_1 i_2 \ldots i_q} T$ ტერმს ეწოდება T **ტერმის n-განზომილებიანი პირდაპირი პროექცია ღერძებზე**, რომელთა ნომრებია $i_1, i_2, \ldots, i_q$. ასევე $\Pr^{n}_{i_1 i_2 \ldots i_q} T$ ტერმს ეწოდება T **ტერმის n-განზომილებიანი პროექცია ღერძებზე**, რომელთა ნომრებია $i_1, i_2, \ldots, i_q$. გარდა ამისა, $pr^{n}_{i_k} T$ ტერმს, $1 \leq k \leq n$, ეწოდება T **ტერმის n-განზომილებიანი პირდაპირი k-ური პროექცია**. $\Pr^{n}_{k} T$ ტერმს, $1 \leq k \leq n$, ეწოდება T **ტერმის n-განზომილებიანი k-ური პროექცია**. სიმარტივისათვის, $pr^{n}_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ და $\Pr^{n}_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ წარმოებულ ოპერატორების ზედა ინდექსს n-ს გამოვტოვებთ ხოლმე, როცა $n = 2$. ასევე, $n = 2$ შემთხვევაში შემოტანილ ტერმინებში სიმარტივისათვის ზოგჯერ გამოვტოვებთ სიტყვას „n-განზომილებიანი". აღნიშნულის შესაბამისად უნდა იქნეს გაგებული აზრი შემდეგი ტერმინებისა. „T ტერმის **პირდაპირი პირველი (მეორე) პროექცია**" და „T ტერმის **პირველი (მეორე) პროექცია**".

ცხადია, $a_1, \ldots, a_n$ ელემენტებისაგან შედგენილი $(a_1, \ldots, a_n)$ დალაგებული სისტემის პირდაპირი პროექცია ღერძებზე, რომელთა ნომრებია $i_1, \ldots, i_q$ არის $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q})$ დალაგებული q-ეული. ასევე a_1, a_2 ელემენტებისაგან შედგენილი (a_1, a_2) წყვილის პირველი პირდაპირი პროექცია არის a_1, მეორე პირდაპირი პროექცია კი არის a_2. ცხადია, აგრეთვე რომ, თუ A არის საგანი (კერძოდ, კლასი), მაშინ $pr^{n}_{i_1 i_2 \ldots i_q} A$, იმ შემთხვევაში როცა A რაიმე n-კომპონენტიანი დალაგებული $(a_1, \ldots, a_n)$ სისტემაა, არის

$(a_{i_1},\dots,a_{i_q})$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $pr^n_{i_1i_2\dots i_q}A$ არის ცარიელი სიმრავლე. $Pr^n_{i_1i_2\dots i_q}A$ კი არის $pr^n_{i_1i_2\dots i_q}a$ სახის ელემენტთა კლასი, სადაც a არის A საგნის ისეთი ნებისმიერი ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს n-კომპონენტიან დალაგებულ სისტემას. კერძოთ, $Pr^n_i A$ არის A-ში ელემენტთა შემავალ n-კომპონენტიან დალაგებულ სისტემათა i-ურ კომპონენტთა კლასი.

ხშირად წარმოებული Ɔ^n ოპერატორი $n = 2,3,\dots$ შემთხვევაში შემოაქვთ შემდეგი განსაზღვრით:

$$[\text{Ɔ}^2T_1T_2] — \{\{T_1\}, \{T_1,T_2\}\};$$

$$[\text{Ɔ}^nT_1\dots T_n] — ((T_1,\dots,T_{n-1}), T_n)\ (n = 3,4,\dots).$$

იგულისხმება, რომ $(T_1,\dots,T_k)$-ით აღინიშნება $\text{Ɔ}^kT_1\dots T_k$ ტერმი ახალი განსაზღვრის მიხედვით ($k = 2,3,\dots$). უკანასკნელ განსაზღვრაში ჯერ n-ს უნდა მივცეთ მნიშვნელობა 3 და მივიღებთ Ɔ^3-ის განსაზღვრას, შემდეგ უნდა მივცეთ მნიშვნელობა 4 და მივიღებთ Ɔ^4-ის განსაზღვრას და ა. შ. მოტანილ განსაზღვრას ვუწოდოთ Ɔ^n **ოპერატორის მეორე განსაზღვრა**. ვგულისხმობთ, რომ Ɔ^0 და Ɔ^1-ის მეორე განსაზღვრა ემთხვევა პირველ განსაზღვრას. Ɔ^n-ის მეორე განსაზღვრას ეთანხმება Ɔ^n ოპერატორთან დაკავშირებულ ცნებათა და ტერმინთა შინაარსის მეორე განსაზღვრებები. ცხადია, მეორე განსაზღვრა არაა პირველის ტოლფასი. ამასთან, მეორე განსაზღვრის შემთხვევაში არ გვექნება დალაგებული n-ეულის ($n > 1$) k-ური ელემენტის ცნების ანალოგი ($k = 1,2,\dots,n$). Ɔ^n ოპერატორის მეორე განსაზღვრის შემთხვევაში ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ული ($n = 2,3,\dots$) არის ერთელემენტიანი სიმრავლე (თუ a და b ელემენტებია და $a = b$, მაშინ $\{a\}$ არის (a,b) დალაგებული წყვილის ერთადერთი ელემენტი, წინააღმდეგ შემთხვევაში (a,b) არის ორელემენტიანი სიმრავლე). ამასთან, ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული ($n = 2,3,\dots$) ამავე დროს არის ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული k-ეული თითოეულ ისეთ k-თვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $1 \leq k \leq n$. ამიტომ ასეთნაირად შემოტანილი დალაგებული n-ეულის ცნება იწვევს რიგ უხერხულობას. მაგრამ (b) თვისება ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია ($n = 1,2$ შემთხვევებში ამის დამტკიცება სიძნელეს

არ წარმოადგენს, $n > 2$ შემთხვევებში კი მისი სამართლიანობა ადვილად მიიღება მათემატიკური ინდუქციით). შემდგომი მსჯელობები ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეულების შესახებ ძირითადად ეყრდნობა (b) თვისებას და არ აქვს არსებითი მნიშვნელობა იმას, თუ როგორ არის განსაზღვრული ელემენტთა დალაგებული n-ეულის ცნება (b) პირობის დაცვით. (b′) და (d) თვისებები მეორე განსაზღვრის შემთხვევაში სამართლიანი არაა. მართლაც, თუ a ელემენტია, b კი ზესიმრავლეა, მაშინ $(a,b) = (a,a)$. ეს იწვევს ზოგიერთი წარმოებული სიმბოლოს განსაზღვრის მცირედ გართულებას $\mathcal{P}$ ოპერატორის მეორე განსაზღვრის შემთხვევაში. საჭიროების შემთხვევაში მკითხველი ადვილად იპოვის შემამოკლებელ სიმბოლოთა მოტანილ განსაზღვრებების აღნიშნული სახის გართულებულ ფორმებს.

აქვე შევნიშნოთ რომ, თუ $\mathcal{P}$ ოპერატორს შემოვიტანთ (1) განსაზღვრით, სადაც $n = 0,1,2,\ldots$, მაშინ $a_1,\ldots,a_n$ ელემენტებისაგან შედგენილი n-ეულ $(a_1,\ldots,a_n)$ იქნება $\{\{k,\{a_k\}\} : k\ k \leq n\}$ სიმრავლე და ელემენტებისაგან შედგენილ n-ეულებს ექნებათ (a), (b), (c), (b′) და (d) თვისებები ((c) წინადადება სამართლიანი იქნება $n = 1$ შემთხვევის გამორიცხვის გარეშეც). $\mathcal{P}$-ის უკანასკნელ განსაზღვრას ვუწოდოთ **პირველი განსაზღვრის მოდიფიკაცია**. $\mathcal{P}$ ოპერატორის მეორე განსაზღვრის შემთხვევაში ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას (ტოლობა იქნება იგივურად ჭეშმარიტი):

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} T_i = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n .$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, საგანთა (კერძოდ, კლასთა) პირდაპირი ნამრავლის ცნება ემთხვევა საგანთა დეკარტული ნამრავლის ცნებას. ამასთან, ცხადია, ამ შემთხვევაშიც ტერმების პირდაპირი ნამრავლი განსხვავდება იმავე ტერმების დეკარტული ნამრავლისაგან.

ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე ქვემოთ **თითქმის ყველგან** შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ დალაგებული n-ეულის ცნება შემოტანილია განხილული სამი განსაზღვრიდან ნებისმიერით. მაგრამ აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ პირველი განსაზღვრის მოდიფიკაციის შემთხვევაში დალაგებული n-ეულების რაიმე M კლასის n-განზომილებიანი პროექცია i-ურ ღერძზე არ იქნება M-ის ელემენტთა i-ური კომპონენტების კლასი

და, გარდა ამისა, ადგილი არ ექნება ტოლობას $A^1 = A$ (გარდა იმ შემთხვევისა, როცა A ცარიელი სიმრავლეა).

3.3.4 ელემენტთა ოჯახი და მასთან დაკავშირებული სიმრავლური და კლასური ოპერაციები. ფუნქციონალურ გრაფიკს (ე.ი. ფუნქციას მოდიფიცირებული აზრით) უწოდებენ აგრეთვე **ელემენტთა ოჯახს (მოდიფიცირებული აზრით)**[1].

ვთქვათ, A არის ელემენტთა ოჯახი (ე.ი. Λ არის კვაზიტერმი, რომლის თავისუფალი ცვლადები ისეა დაფიქსირებული, რომ მისი მნიშვნელობაა ელემენტთა ოჯახი. სიმარტივისათვის შეგვეძლო გვეგულისხმა, რომ A კვაზიტერმი თავისუფალ ცვლადებს არ შეიცავს). $Pr_1 A$-ს უწოდებენ **A ელემენტთა ოჯახის ინდექსთა კლასს**. ეს კლასი აღვნიშნოთ J სიმბოლოთი (J არის A კლასის ელემენტების პირველი კომპონენტებისაგან შედგენილი კლასი (ვგულისხმობთ, რომ $\mathcal{M}$ მოდელია)). $Pr_2 A$-ს უწოდებენ **A ელემენტთა ოჯახის ელემენტთა კლასს**. $\tau x[(i,x) \in A]$ კვაზიტერმი, სადაც x და i ისეთი ელემენტებისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომლებსაც არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები A-ში, აღინიშნება Λ_i-თი. დალაგებული n-ეულების (d) თვისების საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ J-დან აღებული ყოველი i-თვის A_i არის (ე.ი. A_i ტერმის მნიშვნელობაა) ის ერთადერთი ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $(i,A_i) \in A$. განხილულ პირობებში A ელემენტთა ოჯახს აღნიშნავენ აგრეთვე $(A_i)_{i\in J}$ გამოსახულებით. J-დან აღებული ყოველი i-თვის A_i-ს, შესაბამისად (i,A_i)-ს, უწოდებენ **A ელემენტთა ოჯახის (i-ურ) ელემენტს**, შესაბამისად **(i-ურ) წევრს**. თუ A ელემენტთა ოჯახს განვიხილავთ როგორც კლასს, მაშინ ამ კლასის ელემენტები იქნებიან მხოლოდ და მხოლოდ A ელემენტთა ოჯახის წევრები. ხშირად A ელემენტთა ოჯახის i-ურ ელემენტს აიგივებენ მისივე i-ურ წევრთან და სარგებლობენ აქედან გამომდინარე გამარტივებებით. მაგალითად, სიმარტივისათვის, ნაცვლად ტერმინისა „მიმდევრობის ელემენტი" ხშირად იყენებენ ტერმინს „მიმდევრობის წევრი". აქვე შევნიშნოთ, რომ აქ შემოტანილი

---

[1] ეს ცნებები და ელემენტთა ოჯახის ცნება დეტალურად შეისწავლება V თავში.

ტერმინების შინაარსი დამოკიდებულნი არიან არა მარტო სათანადო ობიექტებზე, არამედ ამ ობიექტების სახელწოდებებზეც. მაგალითად, თუ A კლასი ელემენტთა ოჯახია, მაშინ ერთმანეთისაგან განსხვავებული შინაარსი აქვთ ტერმინებს: „A კლასის ელემენტი" და „A ელემენტთა ოჯახის ელემენტი".

თუ J არის ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე, შესაბამისად n ნატურალურ რიცხვზე მეტ ნატურალურ რიცხვთა $(n,+\infty)$ სიმრავლე, მაშინ $(A_i)_{i\in J}$ აღნიშვნის ნაცვლად იყენებენ აგრეთვე აღნიშვნას: $A_0, A_1, \ldots$, შესაბამისად $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$, და მას (ელემენტთა ოჯახს) უწოდებენ **მიმდევრობას**. ტერმინი მიმდევრობა (სასრული მიმდევრობა ან უსასრულო მიმდევრობა) გამოიყენება იმ შემთხვევებში, როცა J არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე (სასრული ან უსასრულო) ქვესიმრავლე.

შენიშვნა. ფუნქციონალური გრაფიკის (და, მაშასადამე, ელემენტთა ოჯახის) ცნება შეგვეძლო შემოგვეტანა სათანადო შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრის საფუძველზე — სახელდობრ, შემდეგი განსაზღვრის საფუძველზე.

$$\Phi_{gr}T \quad - \quad kT \wedge \forall x[x \in T \rightarrow \exists y \exists z[x = (y,z) \wedge ey \wedge ez]] \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z[(x,y) \in T \wedge (x,z) \in T \rightarrow y = z],$$

სადაც x, y და z ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი კვანტორული ასოებია, რომლებსაც თავისუფალი შემოსვლები არ აქვთ T-ში. მაშინ $(T_i)_{i\in J}$ უნდა განვიხილოთ, როგორც გამარტივებული აღნიშვნა T ტერმისათვის, რომელიც გამოიყენება მხოლოდ მაშინ, როცა T ელემენტთა ოჯახია (ე. ი. როცა $\Phi_{gr}T$ ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში). $\Phi_{gr}T$ იკითხება ფრაზით „ფუნქციონალური გრაფიკია T". აქვე შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის მარჯვენა მხარეში კონიუნქციის მესამე კომპონენტში არ მოვითხოვთ $ex \wedge ey \wedge ez$-ს იმის გამო, რომ კონიუნქციის მეორე კომპონენტის $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტობის შემთხვევაში, მაგალითად, $(x,y) \in T$-დან, გამომდინარეობს, რომ x და y ელემენტებია (იხ. დალაგებული n-ეულების (d) თვისება).

$\cup^{\bullet}$ და $\cap^{\bullet}$ წარმოებული ოპერატორები შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებებით.

$$\cup^{\bullet}T \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \exists i \exists a[ei \wedge ea \wedge ex \wedge \wedge (i,a) \in T \wedge x \in a]]] \tag{1}$$

$$\cap^{\bullet}T \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \forall i \forall a[ei \wedge ea \wedge ex \wedge \wedge (i,a) \in T \rightarrow x \in a]]] \tag{2}$$

სადაც T ნებისმიერი ტერმია, X, x, i, a კი ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომ მათ არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები T-ში.

თუ T ელემენტთა ოჯახია (ე.ი. T ტერმის მნიშვნელობა ფუნქციონალური გრაფიკია და ამ ფუნქციონალურ გრაფიკს უწოდებენ ელემენტთა ოჯახს), მაშინ, როგორც ვიცით, T (ე.ი. T-ს მნიშვნელობა — ელემენტთა ოჯახი) აღინიშნება აგრეთვე $(T_i)_{i \in J}$ გამოსახულებით, სადაც J არის $Pr_1 T$ ტერმი, T_i არის $\tau x[(i,x) \in T]$ ტერმი, i და x კი T-ში თავისუფალი შემოსვლების არ მქონე ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოები. ამასთან, ამ შემთხვევაში $\cup^{\bullet}T$ და $\cap^{\bullet}T$ ტერმების შესაბამისად აღნიშნავენ აგრეთვ $\bigcup\limits_{i \in J} T_i$ და $\bigcap\limits_{i \in J} T_i$ გამოსახულებებით და ამ ტერმების მნიშვნელობებს შესაბამისად უწოდებენ $(T_i)_{i \in J}$ **ელემენტთა ოჯახის გაერთიანებას**, შესაბამისად **თანაკვეთას**. ამასთან, $(T_i)_{i \in J}$ ელემენტთა ოჯახის T_i ელემენტს ეწოდება $\bigcup\limits_{i \in J} T_i$ **გაერთიანების**, შესაბამისად $\bigcap\limits_{i \in J} T_i$ **თანაკვეთის**, i-ური **კომპონენტი**. თუ J არის ნატურალური რიცხვების N, შესაბამისად n ნატურალურ რიცხვებზე მეტი ნატურალური რიცხვების სიმრავლე, მაშინ, როგორც ვიცით, $(T_n)_{n \in J}$ ელემენტთა ოჯახს უწოდებენ აგრეთვე მიმდევრობას და მას აღნიშნავენ აგრეთვე $T_0, T_1, \ldots,$ შესაბამისად $T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots,$ გამოსახულებით. ამასთან, ამ შემთხვევაში

$$\bigcup_{i \in N} T_i, \quad \bigcap_{i \in N} T_i, \quad \bigcup_{i \in (n,+\infty)} T_i, \quad \bigcap_{i \in (n,+\infty)} T_i$$

ტერმებს აღნიშნავენ აგრეთვე

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i, \quad \bigcup_{i=n+1}^{\infty} T_i, \quad \bigcap_{i=n+1}^{\infty} T_i$$

გამოსახულებებით. ანალოგიური გამარტივებული აღნიშვნები გვექნება მაშინაც, როცა J არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე. ასეთი გამარტივებული აღნიშვნების მაგალითებია: $\bigcap_{n=1}^{m} T_n$, $\bigcap_{n=m}^{\infty} T_n$ და ა. შ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (1) და (2) განსაზღვრებებიდან (სახეზე მყოფი) $ex \wedge$ ნაწილის ამოგდებით (1) განსაზღვრის შინაარსი — განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა (მოდელში) არ შეიცვლება, (2) განსაზღვრის შინაარსი კი შეიცვლება მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა T ტერმის მნიშვნელობაა ისეთი საგანი, რომელიც ელემენტად არ შეიცავს ელემენტებისაგან შედგენილ დალაგებულ წყვილს. ამასთან, არგუმენტის ასეთი სახის მნიშვნელობისათვის (2) განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა E უნივერსალური კლასია ($ex \wedge$ ნაწილის ამოგდებით), მოდიფიცირებული (2) განსაზღვრის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა ხსენებული სახის არგუმენტისათვის კი იქნება ცარიელი სიმრავლე (საკუთრივი სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში (1) და (2) განსაზღვრებების შინაარსი (მოდელში განხილული მოდიფიცირების შედეგად არ იცვლება). კლასთა თეორიის შემთხვევაში, $\cup^{*}$ ოპერაციის საწინააღმდეგოდ, სიმრავლეთა კლასი არაა ჩაკეტილი $\cap^{*}$ ოპერაციის მიმართ. ამასთან, $\cap^{*}$ ოპერაციის მხოლოდ და მხოლოდ ისეთ A სიმრავლეზე გვაძლევს ზესიმრავლეს, რომელიც ელემენტად არ შეიცავს ელემენტებისაგან შედგენილ დალაგებულ წყვილს ($\cap^{*} A = E$). თუ (2)-ის ნაცვლად ავიღებთ შესაბამის მოდიფიცირებულ განსაზღვრას, მაშინ აღნიშნული გამონაკლისი არ გვექნება (ამ შემთხვევაში $\cap^{*} A = \varnothing$). მაგრამ ინტუიციურად $\cap^{*} A = E$ ტოლობა უფრო გამართლებულია, ვიდრე $\cap^{*} A = \varnothing$ ტოლობა.

თუ $\cup^{*}$ და $\cap^{*}$ ძირითადი ერთადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორებია და გვსურს მათ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში მივცეთ იგივე შინაარსი, რასაც მათ მოტანილი განსაზღვრებები ანიჭებთ, მაშინ შეგვეძლო ამ ოპერატორთა შინაარსი განგვესაზღვრა $\mathcal{A}$-ში იგივურობით (რომლებსაც ზემოთ მოტანილი განსაზღვრებებიდან მივიღებთ „—" სიმბოლოს ნაცვლად „=" სიმბოლოს ჩასმით).

$$\cup^{\bullet}\mathbf{T} \quad =_{\mathcal{A}} \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \exists i \exists a[ei \wedge ea \wedge ex \wedge \wedge (i,a) \in \mathbf{T} \wedge x \in a]]] \tag{3}$$

$$\cap^{\bullet}\mathbf{T} \quad =_{\mathcal{A}} \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \forall i \forall a[ei \wedge ea \wedge ex \wedge \wedge (i,a) \in \mathbf{T} \rightarrow x \in a]]] \tag{4}$$

$\cup^{\bullet}$ და $\cap^{\bullet}$ ოპერატორთა, როგორც ძირითად ოპერატორთა, შინაარსი, იმ შემთხვევაში როცა მოცემული $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის ინდივიდთა კლასი ცარიელია, შეიძლება განისაზღვროს $\mathcal{A}$-ში შემდეგი ტოლძალოვნებებითაც.

$$x \in \cup^{\bullet}\mathbf{T} \quad \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \quad \exists i \exists a[ei \wedge ea \wedge ex \wedge (i,a) \in \mathbf{T} \wedge x \in a] \tag{5}$$

$$x \in \cap^{\bullet}\mathbf{T} \quad \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \quad \forall i \forall a[ei \wedge ea \wedge ex \wedge (i,a) \in \mathbf{T} \rightarrow x \in a] \tag{6}$$

ცხადია, თუ $\cup^{\bullet}$ და $\cap^{\bullet}$ სიმბოლოებს განვიხილავთ (1) და (2) განსაზღვრებებით შემოტანილ წარმოებულ ოპერატორებად, მაშინ (3), (4), (5) და (6) დამტკიცებადნი იქნებიან (ამასთანავე, (3) და (4) გამომდინარეობს განსაზღვრებებიდან ტრივიალურად). ასევე, თუ $\cup^{\bullet}$ და $\cap^{\bullet}$ სიმბოლოებს განვიხილავთ როგორც ძირითად ოპერატორებს, რომელთა შინაარსი განისაზღვრება (3) და (4) იგივურობებით, მაშინ (5) და (6) ტოლძალოვნებები დამტკიცებადნი იქნებიან დასასრულს, თუ მოცემული $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციის ინდივიდთა კლასი ცარიელია და $\cup^{\bullet}$ და $\cap^{\bullet}$ სიმბოლოებს განვიხილავთ როგორც ძირითად ოპერატორებს, რომელთა შინაარსი (5) და (6) ტოლძალოვნებებით განისაზღვრება, მაშინ (3) და (4) იგივურობები დამტკიცებადნი იქნებიან.

იმ შემთხვევაში, როცა $\mathbf{T}$ არის ელემენტთა ოჯახი (მოდიფიცირებული აზრით) ან, რაც იგივეა, $\mathbf{T}$ არის ფუნქციონალური გრაფიკი, რომლის გამარტივებული აღნიშვნაა $(\mathbf{T}_i)_{i \in J}$ (ე.ი. J არის $\mathrm{Pr}_1\mathbf{T}$ და $\mathbf{T}_i$ არის $\tau x[(i,x) \in \mathbf{T}]$, სადაც x და i ზემოაღნიშნულის შესაბამისად შერჩეული საგნობრივი კვანტორული ასოებია), მაშინ ადგილი აქვს შემდეგს (დამოუკიდებლად იმისა $\cup^{\bullet}$ და $\cap^{\bullet}$ არიან (1) და (2) განსაზღვრებებით შემოტანილი წარმოებული ოპერატორები, თუ ძირითადი ოპერატორები, რომელთა შინაარსი (3) და (4) იგივურობებით ან (5) და (6) ტოლძალოვნებებით მოიცემა ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად):

$$x \in \bigcup_{i \in J} T_i \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \exists_{i \in J}[x \in T_i], \tag{7}$$

$$x \in \bigcap_{i \in J} T_i \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \forall_{i \in J}[x \in T_i], \tag{8}$$

$$\bigcup_{i \in J} T_i \equiv_{\mathcal{A}} \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \exists_{i \in J}[x \in T_i]]], \tag{9}$$

$$\bigcap_{i \in J} T_i \equiv_{\mathcal{A}} \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \forall_{i \in J}[x \in T_i]]], \tag{10}$$

ამასთან, (9) და (10) შესაბამისად შეგვიძლია მივიჩნიოთ $(T_i)_{i \in J}$ ელემენტთა ოჯახის $\bigcup_{i \in J} T_i$ გაერთიანების და $\bigcap_{i \in J} T_i$ თანაკვეთის განსაზღვრებებად. იგივე ითქმის (7) და (8) ტოლძალოვნებათა შესახებ იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული თეორიის ინდივიდთა კლასი ცარიელია.

(7) და (8) ტოლძალოვნებათა კერძო შემთხვევებია შემდეგი:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \exists n \in N[x \in T_n];$$

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n \Leftrightarrow_{\mathcal{A}} \forall n \in N[x \in T_n].$$

$\exists n \in N$ და $\forall n \in N$ სიტყვების ნაცვლად ხშირად იქ სადაც გაუგებრობა არაა მოსალოდნელი, წერენ $\exists n$ და $\forall n$ სიტყვებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ T არ შეიცავს წყვილს, მაშინ (როგორც ვიცით) კლასთა თეორიის შემთხვევაში $\bigcap^{*} T = E$ საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში კი $\bigcap^{*} T = \varnothing$. ამიტომ წყვილის არშემცველ ტერმისათვის საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში ადგილი არ აქვს (6) ტოლძალოვნებას ასევე, როცა $(T_i)_{i \in J}$ არის ცარიელი ელემენტთა ოჯახი, მაშინ კლასთა თეორიის შემთხვევაში $\bigcap_{i \in J} T_i = E$, საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში კი $\bigcap_{i \in J} T_i = \varnothing$. მაშასადამე, ცარიელი $(T_i)_{i \in J}$ ოჯახისათვის საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში (8) ტოლძალოვნებას ადგილი არ აქვს.

წარმოებული ერთადგილიანი ერთარული სპეციალური სუბსტანციური ოპერატორული ნიშნები $\bigcup'$ და $\bigcap'$ შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებებით:

$$\bigcup'_x T \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall y[y \in X \leftrightarrow \exists x[y \in T]]],$$

$$\bigcap'_x T \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall y[y \in X \leftrightarrow \forall x[y \in T]]],$$

სადაც T არის ნებისმიერი ტერმი, x არის ნებისმიერი საგნობრივი **ოპერატორული** ასო, X და y კი ისეთი x-გან და ერთმანეთისგან განსხვავებული მინიმალურ ნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომ მათ არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები T-ში. $\bigcup'_x T$, შესაბამისად $\bigcap'_x T$, ტერმს ეწოდება **T ტერმის გაერთიანება**, შესაბამისად **თანაკვეთა**, **x-ის მიხედვით**. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებული იქნება T-ში თავისუფალი შემოსვლების მქონე x-გან განსხვავებული ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე. თუ T კონსტანტაა და მისი მნიშვნელობაა კლასი, მაშინ როგორც $\bigcup'_x T$ ტერმის, ისე $\bigcap'_x T$ ტერმის მნიშვნელობა ემთხვევა T კონსტანტას მნიშვნელობას. ასევე, თუ T არ შეიცავს x-ის თავისუფალ შემოსვლას, მაშინ T, $\bigcup'_x T$ და $\bigcap'_x T$ ტერმების მნიშვნელობები ერთი და იგივეა მათი თავისუფალი ასოების მნიშვნელობათა ნებისმიერი ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც T ტერმის მნიშვნელობაა კლასი. ცხადია, თუ A საგნის აღმნიშვნელი ძირითადი ან დამხმარე კონსტანტაა, მაშინ როგორც $\bigcup'_x A$ (ე.ი. A საგნის გაერთიანება x-ის მიხედვით). ისე $\bigcap'_x T$ (ე.ი. A საგნის თანაკვეთა x-ის მიხედვით) წარმოადგენს A საგნის ყველა ელემენტის კლასს.

შენიშვნა. კლასთა თეორიის შემთხვევაში ძირითადი ან წარმოებული კვანტორი, რომლის ერთი მაინც ოპერატორული ასო საგნობრივი ასოა, კერძოდ $\bigcup'_x$ და $\bigcap'_x$, შეიძლება განვიხილოთ როგორც კლასური ოპერაცია ან სიმრავლური ოპერაცია (რამდენადაც ასეთი საგნობრივი ასოს მნიშვნელობათა არე არაა კლასი). კლასთა თეორიის შემთხვევაში კლასების არსებობის აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ $\bigcup'_x T$, შესაბამისად $\bigcap'_x T$, არის $\exists x[y \in T]$, შესაბამისად $\forall x[y \in T]$, თვისების მქონე ელემენტთა კლასი (ლაპარაკია იმ თვისებებზე, რომლებიც განხილული ფორმულების y-ის მიმართ თვისებად განხილვის შედეგად მიიღებიან). საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში უკანასკნელი წინადადება შესაძლოა არ იყოს ჭეშმარიტი. მაგალითად, $\bigcup'_x T$, როცა x საგნობრივი ცვლადია T კი არის $\{x\}$, იქნება არაუნივერსალური კლასი, არამედ ცა-

რიელი სიმრავლე (საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში $\mathcal{M}$ მოდელში უნივერსალური კლასი არ არსებობს).

წარმოებული ორადგილიანი სუბსტანციური სპეციალური ოპერატორული ნიშნები $\cup''$ და $\cap''$ შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებებით:

$$\cup''_x JT \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall y[y \in X \leftrightarrow \exists x[x \in J \wedge y \in T]]],$$

$$\cap''_x JT \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall y[y \in X \leftrightarrow \forall x[x \in J \rightarrow y \in T]]],$$

სადაც J და T ნებისმიერი ტერმებია, x ნებისმიერი საგნობრივი **ოპერატორული** ასოა, X და y ისეთი x-გან და ერთმანეთისგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომ მათ არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები J და T ტერმებში. $\cup''_x JT$, შესაბამისად $\cap''_x JT$, ტერმს ეწოდება T **ტერმის გაერთიანება**, შესაბამისად **თანაკვეთა**, x ასოსა და J ტერმის მიხედვით. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებული იქნება T და J ტერმებში თავისუფალი შემოსვლების მქონე x-სგან განსხვავებული ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ $(T_i)_{i \in J}$ არის ელემენტთა ოჯახი (ე. ი. T არის ელემენტთა ოჯახი, J არის $P_{r_1}T$, ხოლო T_i არის $\tau x[(i,x) \in T]$ ტერმი, სადაც x და i ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურნომრიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომლებიც არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები T-ში), მაშინ

$$\cup''_i JT_i \quad =_{\mathcal{M}} \quad \bigcup_{i \in J} T_i,$$

$$\cap''_i JT_i \quad =_{\mathcal{M}} \quad \bigcap_{i \in J} T_i.$$

(აქ, კერძოდ, J შეიძლება იყოს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე N და, მაშასადამე, ელემენტთა ოჯახი იქნება ელემენტთა მიმდევრობა).

ტერმებისგან შედგენილი (x,J,T) სამეულს, შესაბამისად (x,T) წყვილს, სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი კვანტორული ასოა, T და J კი ნებისმიერი ტერმებია, ვუწოდოთ **სამკომპონენტიანი ოჯახი**, შესაბამისად **ორკომპონენტიანი ოჯახი**. ორივე შემთხვევაში x-ს ეწოდება **ოჯახის ძირითადი ასო**, T-ს კი ეწოდება ოჯახის გული (ვგულისხმობთ, რომ **ოჯახი**, ორკომპონენტიან ოჯახისა და სამკომპონენტიან ოჯახის საერთო სახელწოდებაა). J-ს ეწოდება განხილული სამკომპონენ-

ტიანი ოჯახის **ინდექსთა ტერმი**. უკანასკნელი ტერმინის ნაცვლად, იმ შემთხვევაში როცა J არის კონსტანტა და მისი მნიშვნელობაა კლასი, შესაბამისად სიმრავლე, იხმარება აგრეთვე ტერმინი **ინდექსთა კლასი**, შესაბამისად **ინდექსთა სიმრავლე**. J და T ტერმების, შესაბამისად T ტერმის, x-გან განსხვავებულ ცვლადებს ეწოდებათ (x,J,T), შესაბამისად (x,T) **ოჯახის პარამეტრები**. ნაცვლად აღნიშვნებისა (x,J,T) და (x,T) გამოვიყენებთ, აგრეთვე, აღნიშვნებს $(T)_{x\in J}$ და $(T)_x$.

(x,T) ორკომპონენტიან ოჯახის **ინდექსთა არე**, ანუ **განსაზღვრის არე**, ეწოდება x ასოს მნიშვნელობათა არეს. ცხადია, რამდენადაც x უნივერსალური საგნობრივი ასოა, ხსენებული ინდექსთა არე იქნება მოცემული სიმრავლეთა თეორიის $\mathcal{A}$ მოდელის უნივერსუმი — ყველა საგანთა სისტემა. (x,J,T) სამკომპონენტიან ოჯახის **განსაზღვრის არე** ანუ **ინდექსთა არე** ეწოდება $\{x: x \in J\}$ კლასს (იგი არის J ტერმის x-სგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული კლასი); თუ J კონსტანტაა და მისი მნიშვნელობა კლასია, მაშინ ამ უკანასკნელ კლასს ემთხვევა ინდექსთა არე. ინდექსთა არე კერძო შემთხვევაში შეიძლება აღმოჩნდეს ცარიელიც.

ინდექსთა არედან აღებული ნებისმიერი i-სთვის (x,J,T) შესაბამისად (x,T), ოჯახის **i-ური წევრი** ეწოდება $\langle i, T_i \rangle$ მეტაწყვილს, ოჯახის **i-ური საგანი** კი ეწოდება T_i-ს, სადაც T_i არის T ტერმის მნიშვნელობა x-ის i მნიშვნელობისათვის (იგი დამოკიდებული იქნება პარამეტრების მნიშვნელობათა სისტემაზე). (i, T_i) i-ურ წევრს ხშირად აიგივებენ T_i-სთან და ამის შესაბამისად ოჯახის i-ურ საგანს T_i-ს მიიჩნევენ ოჯახის i-ურ წევრად.

$\bigcup_x' T$, შესაბამისად $\bigcap_x' T$, ტერმს აღნიშნავენ აგრეთვე $\bigcup\limits_x T$-ით, შესაბამისად $\bigcap\limits_x T$-ით, და უწოდებენ $(T)_x$ **ოჯახის გაერთიანებას**, შესაბამისად **თანაკვეთას**. ასევე, $\bigcup_x^{\prime J} T$, შესაბამისად $\bigcap_x^{\prime J} T$, ტერმს აღნიშნავენ აგრეთვე $\bigcup\limits_{x\in J} T$-ით, შესაბამისად $\bigcap\limits_{x\in J} T$-ით, და უწოდებენ $(T)_{x\in J}$ **ოჯახის გაერთიანებას**, შესაბამისად **თანაკვეთას**.

ცხადია, თუ J არის კონსტანტა-ტერმი (ე. ი. საგნობრივი კონსტანტა) ან უფრო ზოგადად, თუ J არ შეიცავს x საგნობრივი ცვლადის თავისუფალ შემოსვლებს (სხვა თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები ამ შემ-

თხევაში დაფიქსირებულად იგულისხმება), მაშინ $\bigcup^{x,J}\mathbf{T}$ (ე. ი. $\bigcup_{x\in J}\mathbf{T}$), შესაბამისად $\bigcap^{x,J}\mathbf{T}$ (ე. ი. $\bigcap_{x\in J}\mathbf{T}$), აღნიშნავს ისეთ $\mathfrak{a}$ ელემენტთა კლასს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: J-დან აღებული ერთი მაინც, შესაბამისად ყოველი, $\mathbf{x}$-თვის $\mathfrak{a} \in \mathbf{T}$ (სადაც $\mathfrak{a}$ ნებისმიერი ისეთი $\mathbf{x}$-გან განსხვავებული საგნობრივი კვანტორული ასოა, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა $\mathbf{T}$-ში). კერძოდ, თუ J კონსტანტა-ტერმის მნიშვნელობაა კლასი და J კლასიდან აღებული ყოველი $\mathbf{x}$-თვის $\mathbf{T}$ ტერმის მნიშვნელობაა კლასი, მაშინ $(\mathbf{T})_{x\in J}$ სამკომპონენტიან ოჯახს ვუწოდებთ აგრეთვე **კლასთა სამკომპონენტიან ოჯახს**. $\bigcup_{x\in J}\mathbf{T}$-ს შესაბამისად $\bigcap_{x\in J}\mathbf{T}$-ს, კი ვუწოდებთ $(\mathbf{T})_{x\in J}$ **კლასთა სამკომპონენტიან ოჯახის გაერთიანებას**, შესაბამისად **თანაკვეთას**. ასევე, თუ $\mathbf{x}$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $\mathbf{T}$ ტერმის მნიშვნელობაა კლასი, მაშინ $\mathbf{T}_x$-ს ვუწოდებთ **კლასთა ორკომპონენტიან ოჯახს**, $\bigcup_x\mathbf{T}$-ს, შესაბამისად $\bigcap_x\mathbf{T}$-ს, ვუწოდებთ **კლასთა ორკომპონენტიან ოჯახის გაერთიანებას**, შესაბამისად **თანაკვეთას**. აქ თუ J არის $\mathbf{N}$, მაშინ ნაცვლად ტერმინებისა ,,კლასთა სამკომპონენტიანი ოჯახი" და ,,კლასთა ორკომპონენტიანი ოჯახი" ვისარგებლებთ ტერმინებით: **კლასთა სამკომპონენტიანი მიმდევრობა** და **კლასთა ორკომპონენტიანი მიმდევრობა**.

შემოტანილ ტერმინებში ფრაზებს ,,სამკომპონენტიანი" და ,,ორკომპონენტიანი" გამოვტოვებთ იქ, სადაც კონტექსტი უზრუნველყოფს გაუგებრობათა თავიდან აცილებას.

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ $(\mathbf{x},\mathbf{x},\mathbf{T})$ სამკომპონენტიანი ოჯახის გაერთიანება არის ცარიელი კლასი (სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლე არ შეიძლება შეიცავდეს ელემენტად თავისთავს).

ხშირად ამბობენ: ,,$\mathbf{T}$ ტერმი განხილული, როგორც ოჯახი J ტერმისა და $\mathbf{x}$ საგნობრივი კვანტორული ასოს მიმართ", შესაბამისად ,,$\mathbf{T}$ ტერმი განხილული როგორც ოჯახი $\mathbf{x}$ საგნობრივი კვანტორული ასოს მიმართ". ასეთ შემთხვევაში მხედველობაში აქვთ $(\mathbf{x},J,\mathbf{T})$ სამკომპონენტიანი ოჯახი, შესაბამისად $(\mathbf{x},\mathbf{T})$ ორკომპონენტიანი ოჯახი. ამრიგად, თითოეული ტერმი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორკომპონენტიანი ოჯახი ნებისმიერი საგნობრივი კვანტორული ასოს მიმართ, და როგორც სამკომპონენტიანი ოჯახი ნებისმიერი ტერმისა და ნებისმიერი საგნობრივი კვანტორული ასოს მიმართ.

შენიშვნა. $(T)_x$ ორკომპონენტიანი ოჯახი და $(T)_{x \in J}$ სამკომპონენტიანი ოჯახი საზოგადოდ შეუძლებელია რაიმე ბუნებრივი აზრით განხილულ იქნენ როგორც ელემენტთა ოჯახი, რამდენადაც T ტერმის მნიშვნელობები x-ის ზოგიერთ მნიშვნელობისათვის შეიძლება იყოს ზესიმრავლე. $(T)_x$ შემთხვევაში ამ შეუძლებლობას განაპირობებს ისიც, რომ x-ის მნიშვნელობათა არეა ყველა საგანთა სისტემა. მაგრამ თუ J არის კონსტანტა-ტერმი რომლის მნიშვნელობა არის კლასი. x კი არის ოპერატორული ასო და x-ის J-დან აღებული ყოველი მნიშვნელობისათვის T ტერმის მნიშვნელობა სიმრავლეა, მაშინ $(T)_{x \in J}$ სამელემენტიანი ოჯახი შეიძლება ბუნებრივი აზრით გავაიგივოთ შემდეგ ელემენტთა ოჯახთან:

$$\tau X[kX \wedge \forall y[y \in X \leftrightarrow \exists x \in J \exists z[ez \wedge y = (x, z) \wedge z = T]]],$$

სადაც X, y და z ისეთი x-გან და ერთმანეთისაგან განსხვავებული მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი კვანტორული ასოებია, რომ მათ არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები T-ში (ამ ელემენტთა ოჯახის გაერთიანება, შესაბამისად თანაკვეთა, იგივეა რაც $(T)_{x \in J}$ სამკომპონენტიან ოჯახის გაერთიანების, შესაბამისად თანაკვეთის მნიშვნელობა). ორკომპონენტიან ოჯახისათვის ანალოგიური (ბუნებრივი აზრით) გაიგივების შესაძლებლობა არ არის.

$\bigcup_x^J T$, შესაბამისად $\bigcap_x^J T$ ტერმს ზოგჯერ აღვნიშნავთ $\bigcup_x^J A$, შესაბამისად $\bigcap_x^J A$ გამოსახულებით. ეს განსაკუთრებით ხელსაყრელია, როცა J კონსტანტა-ტერმია. მაგალითად, როცა J არის N. აქვე შევნიშნოთ, რომ მაგალითად $\bigcup^N$, შესაბამისად $\bigcap^N$, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთადგილიანი ერთარული სპეციალური სუბსტანციური ოპერატორული ნიშანი.

კლასებს, რომელთა რიცხვი ერთს აღემატება. ან კლასებს, რომლებიც მოცემული ელემენტთა ოჯახის ელემენტებს (კერძოდ, მიმდევრობის „წევრებს" (ელემენტებს)) წარმოადგენენ, ან კლასებს, რომლებიც მოცემული კლასის (კერძოდ სიმრავლის) ელემენტებს წარმოადგენენ, ან კლასებს, რომლებიც მოცემული სამკომპონენტიანი, შესაბამისად ორკომპონენტიანი ოჯახის წევრთა მეორე კომპონენტებს წარმოადგენენ, ეწოდებათ **ურთიერთ არმკვეთნი**, თუ მათი თანაკვეთა. შესაბამისად ელემენტთა ოჯახის თანაკვეთა, შესაბამისად კლასის თანაკვეთა, შესაბამისად სამკომ-

პონენტიანი ოჯახის თანაკვეთა, შესაბამისად ორკომპონენტიანი ოჯახის თანაკვეთა, ცარიელი სიმრავლეა.

3.3.5 თეორიის გაფართოება და კვაზიგაფართოება. მათემატიკურ L' ენას ეწოდება L ენის **გაფართოება**, თუ იგი მიიღება L-დან ახალი სიმბოლოებისა და ამ ახალ სიმბოლოთა შესაბამისი შემზღუდავი წესებისა და წინადადებების დამატებით (არ გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა ახალ სიმბოლოთა ერთობლიობა ცარიელია – ამ შემთხვევაში L' და L ერთი და იგივე ენებია). თუ L' და L ერთი და იგივე ენებია, მაშინ L'-ს ეწოდება აგრეთვე L **ენის არასაკუთრივი გაფართოება**, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – **საკუთრივი გაფართოება**. შინაარსულ T' თეორიას ეწოდება **შინაარსული T თეორიის კვაზიგაფართოება**, თუ $L(T')$ არის $L(T)$ ენის გაფართოება და ნებისმიერი კვაზითეორემა T-ში არის კვაზითეორემა T'-ში. ასევე, ფორმალურ T' თეორიას ეწოდება **ფორმალური T თეორიის კვაზიგაფართოება**, თუ $L(T')$ არის $L(T)$ ენის გაფართოება და T თეორიის თითოეული ფორმალური კვაზითეორემა ამავე დროს არის T' თეორიის ფორმალური კვაზითეორემა. შინაარსული T თეორიის T' კვაზიგაფართოებას ეწოდება **T თეორიის კონსერვატიული კვაზიგაფართოება**, თუ T თეორიის ნებისმიერი ისეთი ფორმულა, რომელიც კვაზითეორემაა T'-ში არის კვაზითეორემა T-ში. ასევე, ფორმალური T თეორიის T' კვაზიგაფართოებას ეწოდება **T თეორიის კონსერვატიული კვაზიგაფართოება**, თუ T თეორიის ნებისმიერი ისეთი ფორმულა რომელიც T' თეორიის ფორმალური კვაზითეორემაა, არის T თეორიის ფორმალური კვაზითეორემა. როგორც შინაარსული, ისე ფორმალური თეორიების შემთხვევაში ორ თეორიას ეწოდებათ კვაზიეკვივალენტურები, თუ თითოეული მათგანი მეორის კვაზიგაფართოებაა (ე. ი. თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე ენა და ერთი და იგივე კვაზითეორემები სათანადო ტიპისა).

ადვილად შევნიშნავთ, რომ როგორც შინაარსული, ისე ფორმალური თეორიების შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი წინადადება. თუ T' არის T თეორიის (კონსერვატიული) კვაზიგაფართოება, მაშინ T' თეორიის კვაზიეკვივალენტური ნებისმიერი თეორია იქნება T თეორიის კვაზიეკვივალენტური ნებისმიერი თეორიის (კონსერვატიული) კვაზიგაფართოება.

შინაარსულ T' თეორიას ეწოდება **შინაარსული T თეორიის გაფართოება**, თუ $L(T')$ არის $L(T)$ ენის გაფართოება და თითოეული თეორემა T-ში ამავე დროს არის თეორემა T'-ში. ასევე ფორმალურ T' თეორიას ეწოდება **ფორმალური T თეორიის გაფართოება**, თუ $L(T')$ არის $L(T)$ ენის გაფართოება და T თეორიის თითოეული ფორმალური თეორემა ამავე დროს არის T' თეორიის ფორმალური თეორემა. როგორც შინაარსულ, ისე ფორმალურ თეორიების შემთხვევაში ორ თეორიას ეწოდებათ **ეკვივალენტურები**, თუ თითოეული მათგანი არის მეორის გაფართოება. შინაარსული T თეორიის T' გაფართოებას ეწოდება **შინაარსული T თეორიის კონსერვატიული გაფართოება**, თუ T თეორიის ნებისმიერი ისეთი ფორმულა, რომელიც თეორემაა T'-ში, არის თეორემა T-ში ასევე, ფორმალური T თეორიის T' გაფართოებას ეწოდება **ფორმალური T თეორიის კონსერვატიული გაფართოება**, თუ T თეორიის ნებისმიერი ისეთი ფორმულა, რომელიც T' თეორიის ფორმალური თეორემაა, არის T თეორიის ფორმალური თეორემა.

ადვილი დასანახია, რომ შინაარსული T' თეორია იქნება შინაარსული T თეორიის გაფართოება, თუ $L(T')$ არის $L(T)$ ენის გაფართოება და სახეზეა ალგორითმი, რომლის გამოყენება ნებისმიერად აღებული T თეორიის **A** ფორმულის T-ში ჭეშმარიტობის დამტკიცების მოძებნის ალგორითმზე გვაძლევს T'-ში **A** ფორმულის ჭეშმარიტობის დამტკიცების მოძებნის ალგორითმს. ასევე, ფორმალური T' თეორია იქნება ფორმალური T თეორიის გაფართოება, თუ $L(T')$ არის $L(T)$ ენის გაფართოება და სახეზეა ალგორითმი, რომლის გამოყენება ნებისმიერად აღებული T თეორიის **A** ფორმულის T-ში ფორმალურ დამტკიცებაზე გვაძლევს T'-ში **A** ფორმულის ფორმალური დამტკიცების მოძებნის ალგორითმს.

ხშირად, ნაცვლად იმისა რომ შემოიტანონ σ მარტივი კონსტანტა-ოპერატორი როგორც შემამოკლებელი სიმბოლო, თეორიას აფართოებენ σ ოპერატორით და ისეთი დამატებით (ე. წ. **σ ოპერატორის განმსაზღვრელი) აქსიომით**, რომელიც σ ოპერატორს აძლევს საჭირო შინაარსს გაფართოებული თეორიის მოდელებში; ამასთან, ყოველივე ეს ისე წარმოებს, რომ გაფართოებული თეორია გამოდის მოცემული თეო-

ერიის კონსერვატიული გაფართოება. მაგალითად, ზემოთ მოტანილი $\cup^n$ ოპერატორის

$$\cup^n A_1 \cdots A_n \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow x \in A_1 \vee \cdots \vee x \in A_n]]$$

განსაზღვრის შესაბამისი განმსაზღვრელი აქსიომა ისეთ აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიაში, რომლის აქსიომებს შორის არის ე. წ. განფენილობის აქსიომა (რომელიც გამორიცხავს ინდივიდების არსებობას მოდელებში) არის

$$x \in \cup^n X_1 \cdots X_n \leftrightarrow x \in X_1 \vee \cdots \vee x \in X_n ,$$

სადაც $X_1, \ldots, X_n$ ერთმანეთისაგან და x-გან განსხვავებული საგნობრივი კვანტორული ასოებია. ანალოგიურად შეიძლება მოძებნილი იქნეს სხვა შემამოკლებელ სიმბოლოთა განმსაზღვრელი აქსიომები იმ შემთხვევაში, როცა შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრას აქვს სახე:

$$\sigma A_1 \cdots A_n \quad - \quad \tau X[kX \wedge \forall x[x \in X \leftrightarrow \cdots]]$$

სადაც მრავალწერტილი ცვლის x-ის თავისუფალი შემოსვლის არმქონე ფორმულა. ასეთი მეთოდით თეორიის გაფართოება განსაკუთრებით ხელსაყრელია მაშინ, როცა თეორიის ალფაბეტში არ გვაქვს არც τ ოპერატორული ნიშანი და არც ι ოპერატორული ნიშანი. საზოგადოდ, ზემოთ განხილული ნებისმიერი შემამოკლებელი სიმბოლო შეიძლება შემოვიტანოთ „განმსაზღვრელი აქსიომის" მეთოდით — შემამოკლებელი სიმბოლოს განსაზღვრის შესაბამისი განმსაზღვრელი აქსიომების მისაღებად საკმარისია „—" ნიშანი შეიცვალოს $\leftrightarrow$ ან $=$ ნიშნით იმისდა მიხედვით განსაზღვრის მარჯვენა მხარე ფორმულაა თუ ტერმი და შემდეგ ვცვალოთ მეტაცვლადების მნიშვნელობები. ასეთნაირად მიღებული გაფართოებები თითქმის ყველა მათემატიკური თეორიის შემთხვევაში, პირველი რიგის თეორიების ჩათვლით (იხ. 3.4), კონსერვატიულია. ამასთან, განმსაზღვრელი აქსიომები შეიძლება შეიცვალოს ერთი განმსაზღვრელი აქსიომით, როცა თეორიას გააჩნია პროპოზიციული ცვლადები და უნივერსალური საგნობრივი ცვლადები (აქ იგულისხმება რომ, თუ თეორიას გააჩნია პროპოზიციული, შესაბამისად საგნობრივი (უნივერსალური) ცვლადები, მაშინ მისი აქსიომების სისტემა უზრუნველყოფს შემდეგი წინადადების ჭეშმარიტობას: თუ $\mathbf{A}$ თეორემაა, x პროპოზიციული, შესაბამისად საგნობრივი ცვლადია, $\mathbf{B}$ კი ისეთი ფორმულაა, შესაბამისად ტერმია, რომელიც თავისუფალია x ცვლადისათვის $\mathbf{A}$-ში (იხ. 2.1.3), მაშინ $(\mathbf{B}/\cdot x)\mathbf{A}$

ფორმულა თეორემაა). იგივე ითქმის შემამოკლებელი სიმბოლოების შესახებ, რომელთა განსაზღვრა [29] მონოგრაფიაში მოტანილი შემამოკლებელ სიმბოლოთა განსაზღვრებების ძირითად ტიპებს განეკუთვნებიან (მხედველობაშია I-IV, II′ და IV′ ტიპები). განმსაზღვრელი აქსიომის მეთოდით ფუნქციონალური და პრედიკატული სიმბოლოების შემოტანის საკითხი უფრო დეტალურად განიხილება მომდევნო პარაგრაფის ბოლოში.

3.4 პირველი რიგის თეორიები

ამ პარაგრაფში გავეცნობით ე.წ. I რიგის **შინაარსულ თეორიათა კლასს** და I **რიგის ფორმალურ თეორიათა კლასს**. თითოეული ეს კლასი საკმაოდ ფართოა და ისინი შესაბამისად შეიცავენ პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვან მრავალ ჩვეულებრივ აქსიომურ თეორიას და მათ ფორმალიზაციას. ორივე კლასს ურთიერთცალსახად ეთანადება ალფაბეტების ერთი და იგივე კლასი და ამ კლასის ნებისმიერი ელემენტის შესაბამისს ენას, რომელიც ამ ელემენტით ცალსახად განისაზღვრება, ეწოდება **პირველი რიგის ენა**.

პირველი რიგის ენის ალფაბეტი შედგება შემდეგი სიმბოლოებისაგან:

1. $s_0, s_1, s_2,...$ (საგნობრივი ცვლადები);

2. არასაკუთრივი საგნობრივი კონსტანტები;

3. არასაკუთრივი n-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური (სპეციალური) კონსტანტები ($n = 1,2,...$);

4. არასაკუთრივი n-ადგილიანი პრედიკატული კონსტანტები ($n = 1,2,...$);

5. $=$ (ტოლობის ნიშანი — ორადგილიანი საკუთრივი პრედიკატული კონსტანტა);

6. $\neg$, $\vee$ (პროპოზიციული კავშირები);

7. $\exists$ (ლოგიკური რელიაციური ოპერატორული ნიშანი).

2-4 პუნქტებიდან თითოეულის შესაბამის სიმბოლოთა ერთობლიობა შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო (კერძოდ, იგი შესაძლოა იყოს ცარიელი).

$\exists$ ოპერატორული ნიშნის შესაბამისი კვანტორებია მხოლოდ და მხოლოდ $\exists x$ სახის სიტყვები, სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი ცვალდია.

ფორმალური თეორიების შემთხვევაში ფორმულის, ტერმისა და ფორმის ცნებები, სიმბოლოთა შინაარსი, ენის ინტერპრეტაცია და მას-

თან დაკავშირებული ცნებები ისევე განისაზღვრება როგორც შინაარსულ თეორიებში. მიუხედავად ამისა ფორმალური თეორიის განსაზღვრა მოითხოვს სიმბოლოთა ფორმალური მახასიათებლების განსაზღვრას (ენისა და თეორიის ინტერპრეტაციების განხილვა აუცილებელი არაა ფორმალური თეორიის ცნების განსაზღვრისას). 2-5 პუნქტებით შემოტანილი სიმბოლოები, როგორც ვხედავთ, არალოგიკური სიმბოლოებია, დანარჩენი კი – ლოგიკური სიმბოლოები.

პირველი რიგის (ფორმალური ან შინაარსული) T თეორიის აქსიომებს ჰყოფენ ორ ჯგუფად: ლოგიკურ აქსიომებად და არალოგიკურ აქსიომებად. ამასთან, ლოგიკური აქსიომების კლასის განმსაზღვრელი წესები ყველა პირველი რიგის თეორიისათვის ერთი და იგივეა. პირველი რიგის თეორიის ლოგიკური აქსიომებია შემდეგი სახის ფორმულები (სადაც $n > 0$, A (ნებისმიერი) ფორმულაა, f n-ადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლოა, P n-ადგილიანი პრედიკატული სიმბოლოა, $x, x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ საგნობრივი ცვლადებია, T კი ტერმია:

1. $\neg A \vee A$;
2. $x = x$;
3. $(T/x)A \rightarrow \exists xA$;
4. $[x_1 = y_1 \rightarrow [\cdots \rightarrow [x_{n-1} = y_{n-1} \rightarrow$
   $\rightarrow [x_n = y_n \rightarrow fx_1 \cdots x_n = fy_1 \cdots y_n]] \cdots]]$;
5. $[x_1 = y_1 \rightarrow [\cdots \rightarrow [x_{n-1} = y_{n-1} \rightarrow$
   $\rightarrow [x_n = y_n \rightarrow Px_1 \cdots x_n = Py_1 \cdots y_n]] \cdots]]$;

1-3 პუნქტებით შემოტანილ ნებისმიერ აქსიომას შესაბამისად ეწოდება **პროპოზიციულობის აქსიომა**, **იგივეობის აქსიომა** და **ჩასმის აქსიომა**. მე-4 და მე-5 პუნქტებით შემოტანილ ნებისმიერ აქსიომას კი ეწოდება **ტოლობის აქსიომა**.

თითოეული ლოგიკური აქსიომა, როგორც ადვილი დასანახია, ლოგიკურად ჭეშმარიტი ფორმულებია. არალოგიკურ აქსიომათა კლასი არაფრით არ იზღუდება. იგი შეიძლება ცარიელიც იყოს.

გარდა აღნიშნულისა (პირველი რიგის შინაარსული თეორიისაგან განსხვავებით), პირველი რიგის ფორმალური თეორიის (ისევე, როგორც ნებისმიერი ფორმალური თეორიის) განსაზღვრა მოითხოვს გამოყვანის წესების განსაზღვრას. ყველა პირველი რიგის თეორიას აქვს ერთი და იგივე გამოყვანის წესები. ეს წესებია (სადაც A, B და C ნებისმიერი ფორმულებია):

1. **გაფართოების წესი:** A-დან გამოდის $A \vee B$;

2. **შეკუმშვის წესი:** $A \vee A$-დან გამოდის A;

3. **ასოციაციურობის წესი:** $A \vee [B \vee C]$-დან გამოდის $[A \vee B] \vee C$;

4. **კვეთის წესი:** $A \vee B$-დან და $\neg A \vee C$-დან გამოდის $B \vee C$;

5. **$\exists$-შემოტანის წესი:** თუ x ნებისმიერი ისეთი საგნობრივი ცვლადია, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა B-ში, მაშინ $A \rightarrow B$-დან გამოდის $\exists x A \rightarrow B$.

მე-4 გამოყვანის წესში $A \vee B$ და $\neg A \vee C$ ფორმულებს **წანამძღვრები** ეწოდებათ, $B \vee C$ ფორმულას კი – **დასკვნა**. ასევე განისაზღვრება სხვა ნებისმიერი გამოყვანის წესის **წანამძღვარი** და **დასკვნა**.

ფორმალური თეორიის შესაბამისი შინაარსული თეორია ვუწოდოთ ისეთ შინაარსულ თეორიას, რომელსაც იგივე ენა აქვს და რომლის აქსიომათა კლასი ემთხვევა ფორმალური თეორიის აქსიომათა კლასს (ვგულისხმობთ, რომ განიხილება მხოლოდ ისეთი ფორმალური თეორიები, რომელთაგან თითოეულის ენა შინაარსული თანამედროვე ენაა).

ცხადია, პირველი რიგის (როგორც შინაარსული ისე ფორმალური) თეორიის განსაზღვრა (მოცემა) მოითხოვს მხოლოდ არალოგიკური სიმბოლოებისა და არალოგიკური აქსიომების განსაზღვრას. ცხადია, აგრეთვე, რომ ნებისმიერი პირველი რიგის შინაარსული თეორია თანამედროვე თეორიაა და, მაშასადამე, პირველი რიგის ენა თანამედროვე ენაა.

ვთქვათ, T პირველი რიგის ფორმალური თეორიაა L ენით, T^* არის T თეორიის შესაბამისი პირველი რიგის შინაარსული თეორია, $\mathcal{A}$ კი $L(T^*)$ ენის (ან, რაც იგივეა, $L = L(T)$ ენის) რაიმე ინტერპრეტაციაა.

ადვილად შევნიშნავთ შემდეგს. 1. თუ T ფორმალური თეორიის რომელიმე გამოყვანის წესის შესაბამისი წანამძღვრები (წანამძღვარი) ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$-ში, მაშინ ამ წანამძღვრების (წანამძღვარის) შესაბამისი დასკვნა ჭეშმარიტი იქნება $\mathcal{A}$-ში. 2. ჭეშმარიტი იქნება წინადადება, რომლის მისაღებად საკმარისია 1-ელ წინადადებაში $\mathcal{A}$ სიმბოლოს შეცვლა T-თი, შესაბამისად K-თი, შესაბამისად L-ით. 3. ჭეშმარიტი იქნება წინადადება, რომლის მისაღებად საკმარისია 1-ელ და მე-2 პუნქტებით მოცემული ოთხი წინადადებიდან ნებისმიერში სიტყვა „ჭეშმარიტია“ შევცვალოთ

სიტყვით „დამტკიცებადია", შესაბამისად „კვაზიდამტკიცებადია". 4. ნებისმიერი ლოგიკური აქსიომა ჭეშმარიტია $\mathcal{M}$-ში.

1-3 პუნქტებით მოცემული წინადადებები მოკლედ (გამარტივებულად) შეიძლება ასე გამოითქვას: პირველი რიგის T ფორმალური თეორიის გამოყვანის წესები ამ ფორმალური თეორიის შესაბამისი T^* პირველი რიგის შინაარსული თეორიის დამტკიცებადი მეტამათემატიკური წინადადებებია. მე-4 წინადადება შეიძლება ასეც გამოითქვას: პირველი რიგის თეორიის ნებისმიერი ლოგიკური აქსიომა ლოგიკურად ჭეშმარიტი ფორმულაა. მაშასადამე, პირველი რიგის შინაარსული თეორიის შემთხვევაში ლოგიკური აქსიომები და გამოყვანის წესები სრულიად ზედმეტია.

ვთქვათ, T პირველი რიგის ფორმალური მათემატიკური თეორიაა, T^* კი შესაბამისი პირველი რიგის შინაარსული მათემატიკური თეორიაა. T^* თეორიასთან დაკავშირებულ ცნებებს მთლიანად გამოვიყენებთ T თეორიისათვის შემდეგი მარტივი სქემის მიხედვით: მაგალითად, „**A** ფორმულა დამტკიცებადია T-ში" ნიშნავს იმას, რომ „**A** ფორმულა დამტკიცებადია T^*-ში" და ა. შ. ასევე, T თეორიასთან დაკავშირებული ცნებები შეგვიძლია მთლიანად გამოვიყენოთ T^* თეორიაში. ამ შეთანხმების საფუძველზე T^* და T თეორიები შეგვიძლია ბუნებრივი აზრით გავაიგივოთ და, სიმარტივისათვის, ვილაპარაკოთ მხოლოდ T თეორიაზე. აქვე შევნიშნოთ, რომ შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი მნიშვნელოვანი.

(4.1) თეორემა. ვთქვათ, T პირველი რიგის თეორიაა, **A** კი T თეორიის ნებისმიერი ფორმულაა. მაშინ ტოლფასნია შემდეგი წინადადებები.

1. **A** ფორმულა არის კვაზითეორემა T-ში.

2. **A** არის T თეორიის ფორმალური კვაზითეორემა.

ამ თეორემის ძალით შინაარსი ფრაზისა „არსებობს T-ში **A** ფორმულის ჭეშმარიტობის დამტკიცება" შეიძლება გავიგოთ როგორც შინაარსი ფრაზისა: „არსებობს **A** ფორმულის ფორმალური დამტკიცება". უკანასკნელი ფრაზის აზრი უფრო ნათელია, როცა მოიძებნება T თეორიის ყველა ფორმალურ დამტკიცებათა გადათვლა — ეს პირობა სრულდება, როცა სახეზეა არალოგიკურ სიმბოლოთა ერთობლიობის ეფექტური გადათვლა და არალოგიკურ აქსიომათა ერთობლიობის ეფექტური გადათვლა. თუ ეს პირობაც შესრულებულია, მაშინ თეორემაში მოტანილი წინადადებებიდან თითოეული ტოლფასია შემდეგი წინადადების:

3. A არის T თეორიის ფორმალური თეორემა.

მოტანილი თეორემის საფუძველზე ფორმალური კვაზითეორემების დადგენისას ფორმალური მტკიცებები შეიძლება შეიცვალოს შინაარსული მსჯელობებით. თუ ხსენებული ეფექტურობის პირობებიც სრულდება, მაშინ თეორემების დადგენის დროსაც ფორმალური მტკიცებები შეიძლება შეიცვალოს შინაარსული მსჯელობებით. (4.1) თეორემიდან და უკანასკნელი შენიშვნიდან შეიძლება საკმაოდ ბევრი მნიშვნელოვანი ფორმალური შედეგების მიღება შინაარსული ხასიათის მსჯელობების დახმარებით.

პირველი რიგის T თეორიის **ატომალური ფორმულა** ანუ **ატომი** ეწოდება $P\tau_1\ldots\tau_n$ სახის ფორმულას, სადაც P არის თეორიის n-ადგილიანი პრედიკატი, $\tau_1,\ldots,\tau_n$ კი T თეორიის ტერმებია. ცხადია, ატომს არ აქვს საკუთრივი პროპოზიციული ნაწილი.

პირველი რიგის თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავს არც τ და არც ι ოპერატორულ ნიშანს. ამის გამო ასეთ თეორიებში ხშირად ძნელდება ამა თუ იმ შინაარსის წარმოებული სიმბოლოს შემოტანა შემამოკლებელი სიმბოლოს სახით. ამიტომ პირველი რიგის თეორიას ხშირად კონსერვატიულად აფართოებენ განმსაზღვრელი აქსიომის მეთოდით. ასეთ შემთხვევაში ხშირად ეყრდნობიან შემდეგ თეორემას.

(4.1) თეორემა (ფუნქციონალურ სიმბოლოს შემოტანაზე). ვთქვათ, x, $y_1,\ldots,y_n$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია და $\exists xA$ არის პირველი რიგის T თეორიის თეორემა, რომელშიც არაა $y_1,\ldots,y_n$ ცვლადებისაგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადი. ვთქვათ, T′ არის T თეორიის ისეთი გაფართოება, რომლის T-დან მისაღებად საკმარისია ალფაბეტს ახალ სიმბოლოდ დაემატოს n-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური სიმბოლო f და f-ის განმსაზღვრელი არალოგიკური აქსიომა $(fy_1,\ldots,y_n/x)A$. მაშინ T′ არის T თეორიის კონსერვატიული გაფართოება (ამ შემთხვევაში $\vdash_T \exists xA$-ს ეწოდება **არსებობის პირობა f-თვის**).

ამ თეორემისა და ქვემოთ მოტანილი შედეგების დამტკიცება მოცემულია, მაგალითად, [39]-ში (იხ. [39]: 4.5 და 4.6).

გავეცნოთ ფუნქციონალური სიმბოლოს შემოტანის მეორე მეთოდს, რომლის ანალოგი გამოდგება პრედიკატული სიმბოლოს შემოსატანადაც. პირველ რიგში განვიხილოთ პრედიკატული სიმბოლოს შემთხვევა.

ვთქვათ, $x_1,\dots,x_n$ არიან პირველი რიგის T თეორიის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცვლადები, D კი T თეორიის ისეთი ფორმულაა, რომელშიც არაა $x_1,\dots,x_n$ ცვლადებისაგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადი. ვთქვათ, T′ არის T თეორიის ისეთი გაფართოება, რომლის T-დან მისაღებად საკმარისია ალფაბეტს ახალ სიმბოლოდ დაემატოს n-ადგილიანი პრედიკატული სიმბოლო P და არალოგიკური აქსიომა $Px_1,\dots,x_n \leftrightarrow D$, რომელსაც ეწოდება **განმსაზღვრელი აქსიომა P-თვის**.

T′ თეორიის A′ ფორმულის თარგმანი T-ში ვუწოდოთ T თეორიის ისეთ **A** ფორმულას, რომლის **A′**-დან მისაღებად საკმარისია **A′**-ის თითოეული $\mathbf{PT_1\dots T_n}$ სახის (ატომალური) ნაწილი შეიცვალოს $(T_1,\dots,T_n/x_1,\dots,x_n)D$-ით. ცხადია, $\mathbf{A \equiv A'}$, როცა **A′** არის T თეორიის ფორმულა.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1. T′ არის T-ს კონსერვატიული გაფართოება;
2. $\vdash_{T'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A'}$
3. $\vdash_{T'} \mathbf{A'}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_T \mathbf{A}$.

ვთქვათ, ახლა, $x_1,\dots,x_n$, y, y′ არიან T თეორიის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცვლადები, D კი არის T თეორიის ისეთი ფორმულა, რომელშიც არაა $x_1,\dots,x_n$, y ცვლადებისაგან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადი. ვთქვათ,

$$\vdash_T \exists y D; \tag{1}$$

$$\vdash_T D \wedge (y'/y)D \rightarrow y = y' \tag{2}$$

და T′ არის T თეორიის ისეთი გაფართოება, რომლის T-დან მისაღებად საკმარისია ალფაბეტს ახალ სიმბოლოდ დაემატოს n-ადგილიანი სუბსტანციური ფუნქციონალური სიმბოლო f და f-ის **განმსაზღვრელი** არალოგიკური **აქსიომა** $y = fx_1\dots x_n \leftrightarrow D$. ამასთან, (1)-ს ვუწოდოთ **არსებობის პირობა f-თვის**, (2)-ს კი ვუწოდოთ **ერთადერთობის პირობა f-თვის**.

აქაც შეიძლება განისაზღვროს **T′ თეორიის A′ ფორმულის თარგმანი T-ში** და დამტკიცდეს ზემოთ მოტანილი 1-3 წინადადებები.

A' ფორმულის T-ში თარგმანის მისაღებად საჭიროა მისი თითოეული ატომური A'_i ნაწილი შეიცვალოს მისი T-ში A_i თარგმნით. ამასთან, თუ A'_i არ შეიცავს f-ს, მაშინ T-ში მისი თარგმანი არის A'_i. თუ A'_i შეიცავს f-ს და $fT_1...T_n$ არის A'_i-ს ისეთი ნაწილი, რომ $T_1,...,T_n$ ტერმები f-ს არ შეიცავენ, მაშინ A'_i-ს წარმოვიდგენთ სახით $(fT_1...T_n/z)B$ და A'_i-ს შევცვლით T'-ში მისი ეკვივალენტური

$$\exists z\,[(T_1,...,T_n,z/x_1,...,x_n,y)\,D \wedge B$$

ფორმულით. ასეთი გარდაქმნებით A'_i შეიცვლება T'-ში მისი ეკვივალენტური ფორმულით, რომელიც ამავე დროს T-ს ფორმულაა. ყველა A'_i-ს ასეთნაირად შეცვლით მივალთ A'-ის T-ში თარგმანზე (რომელიც იქნება A'-ის ეკვივალენტური T'-ში).

3.5 აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიის მაგალითები

ამ პარაგრაფში გავეცნობით ცერმელო-ფრენკელის საკუთრივ სიმრავლეთა თეორიას და გიოდელის კლასთა თეორიას. ისინი პირველი რიგის თანამედროვე თეორიებია და მათი ფორმალური და შინაარსული ვარიანტები შესაბამისად აღინიშნებიან ZF, Γ, ZF*, Γ* გამოსახულებებით. პირველი რიგის თეორიის ერთ-ერთი ვარიანტის განსაზღვრით განისაზღვრება მეორე ვარიანტიც. მეტი სიცხადისათვის თეორიის განსაზღვრისას მხედველობაში გვექნება შინაარსული ვარიანტი.

3.5.1 თეორია ZF* (ცერმელო-ფრენკელის შინაარსული საკუთრივი სიმრავლეთა თეორია). ZF* თეორიის ერთადერთი არალოგიკური სიმბოლოა ორადგილიანი პრედიკატული სიმბოლო ∈ . ცხადია, იგი წარმოადგენს არასაკუთრივ პრედიკატულ კონსტანტას. ∈ პრედიკატის შესახებ ვიცით მხოლოდ ის, რომ იგი ორადგილიანი არასაკუთრივი კონსტანტა-პრედიკატია და, რომ თეორიის რაიმე $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაცია თეორიის მოდელი იყოს, ამ პრედიკატის მნიშვნელობისაგან ($\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში) მოითხოვება ქვემოთ მოტანილი

არალოგიკური აქსიომების ჭეშმარიტობა $\mathcal{A}$-ში. ZF* თეორია $\overline{S}$ თეორიის იმ ვარიანტის კერძო შემთხვევაა, რომლის ალფაბეტი არ შეიცავს $\varnothing$ სიმბოლოს. ამიტომ ამ ვარიანტის შესაბამისად ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ინტერპრეტაციაში განისაზღვრება შემდეგი ტერმინების შინაარსი: „**a** საგანი **b** საგნის ელემენტია", „ელემენტი", „არაცარიელი კლასი", „არაცარიელი სიმრავლე", „საკუთრივი კლასი" ანუ „ზესიმრავლე", „არაცარიელი კლასი შედგენილია მისი ელემენტებისაგან". თუ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია (ქვემოთ მოტანილი) მოცულობის აქსიომა, მაშინ საგანი ცალსახად განისაზღვრება მისი ელემენტებით. ამასთან, ასეთ შემთხვევაში, ელემენტის არმქონე საგანი თუ არსებობს, მაშინ იგი ერთადერთი იქნება და მას ეწოდება „სიმრავლე," „ცარიელი სიმრავლე," „კლასი," „ცარიელი კლასი." მაშასადამე, ასეთ ინტერპრეტაციაში თითოეული საგანი კლასია, კლასის ცნება სიმრავლის ცნების განზოგადებას წარმოადგენს და კლასი (კერძოდ, სიმრავლე) ცალსახად განისაზღვრება მისი ელემენტებით. ისეთ ინტერპრეტაციაში, რომელშიც მოცულობის აქსიომასთან ერთად (ქვემოთ მოტანილი) ხარისხის აქსიომაც შესრულებულია, ყველა საგანი (კლასი) სიმრავლეა და, მაშასადამე, მოდელში ტერმინები „კლასი" და „სიმრავლე" სინონიმებია, ასევე სინონიმებია ტერმინები „ცარიელი კლასი" და „ცარიელი სიმრავლე". ამასთან, ინტერპრეტაციაში ცარიელი სიმრავლის არსებობას უზრუნველყოფს მოცულობის აქსიომა და (ქვემოთ მოტანილი) ქვესიმრავლეთა აქსიომები.

ტერმები მოცემულ ინტერპრეტაციაში საგნებს აღნიშნავენ. თეორიის ფორმალურ ვარიანტებში საგნებად იწოდებიან თვით ტერმები.

ქვემოთ ჩვეულებრივ ვისარგებლებთ ZF** და ZF$^{*\,**}$ თეორიების ფორმებით ძირითადი თეორიის ფორმების აღსანიშნავად.

$\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\forall$ სიმბოლოები შემოიტანება როგორც შემამოკლებელი სიმბოლოები (როგორც წარმოებული ოპერატორები და ოპერატორული ნიშანი) შემდეგი განსაზღვრებებით (სადაც **A** და **B** ნებისმიერი ფორმულებია, **x** კი ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია):

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \;—\; \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B};$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \;—\; \neg [\neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B}];$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \;—\; [\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}] \wedge [\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}];$$

$$\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A} \;—\; \neg \exists \mathbf{x} [\neg \mathbf{A}]$$

(განსაზღვრებები ჩაწერილია ZF^{**} თეორიის ფორმებით).

ადვილი დასანახია რომ მოტანილი განსაზღვრებები $\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\forall$ სიმბოლოებს ჩვეულებრივ შინაარსს ანიჭებს (იხ.3.2).

ZF^{*} თეორიის არალოგიკური აქსიომებია (იხ. (2; (1.3)) შეთანხმება).

$\forall Z[Z \in X \leftrightarrow Z \in Y] \rightarrow X = Y$. (**მოცულობის აქსიომა ანუ განფენილობის აქსიომა**)

ეს აქსიომა ადგენს იმას, რომ ორი სიმრავლე ტოლია (ერთი და იგივეა), თუ მათ ერთი და იგივე ელემენტები აქვთ. აქ მხედველობაშია მოდელი. საზოგადოდ ეს აქსიომა ადგენს, რომ ორი კლასი ტოლია, თუ მათ ერთი და იგივე ელემენტები აქვთ (როცა ეს აქსიომა შესრულებულია მაშინ ნებისმიერი საგანი კლასია).

შენიშვნა. აქ ვეყრდნობით (2; (1.3)) შეთანხმებას მოცემული თეორიის ალფაბეტის სიმბოლოთა აღნიშვნების შესახებ. ამ შეთანხმების ძალით განხილული აქსიომა ფაქტობრივად შემდეგი ფორმულაა $\forall s_2[s_2 \in s_0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow s_2 \in s_1] \rightarrow s_0 = s_1$.

$\exists Y[Y \in X] \rightarrow \exists Y[Y \in X \wedge \neg \exists Z[Z \in X \wedge Z \in Y]]$. **რეგულარობის აქსიომა**).

ეს აქსიომა ადგენს შემდეგს. თუ X საგანს აქვს ელემენტი, მაშინ მას ექნება ისეთი ელემენტიც, რომელიც X-ს არ კვეთს. აქ, მოდელის შემთხვევაში სიტყვა ,,საგანი'' შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით ,,სიმრავლე''.

შემდეგი აქსიომები ადგენენ სიმრავლეთა არსებობას (მოდელში). სიტყვა ,,საგანი'' შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით ,,სიმრავლე''

ქვესიმრავლეთა აქსიომებად იწოდებიან შემდეგი სახის ფორმულები:

$$\exists Z \forall X[X \in Z \leftrightarrow X \in Y \wedge \mathbf{A}],$$

სადაც $\mathbf{A}$ ნებისმიერი ფორმულაა, X, Y და Z ერთმანეთისაგან განსხვავებული ისეთი ნებისმიერი საგნობრივი (სიმრავლური) ცვლადებია, რომ Y და Z-ს არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლები $\mathbf{A}$-ში.

ეს აქსიომა ადგენს იმას, რომ ნებისმიერ Y სიმრავლისა და ნებისმიერი $\mathbf{A}$ ფორმულის ნებისმიერ X ცვლადის მიმართ თვისებად განხილვის შედეგად მიღებულ $\mathbf{A}(X)$ თვისებისათვის არსებობს Y-ის ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს Y-ის მხოლოდ და მხოლოდ იმ ელემენტებს,

რომლებსაც $A(X)$ თვისება აქვთ (ეს სიმრავლე დამოკიდებული იქნება $Y, X_1, ..., X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე, სადაც $X_1, ..., X_n$ არიან X ცვლადისაგან და ერთმანეთისაგან განსხვავებული A ფორმულის ყველა თავისუფალი ცვლადის მიმდევრობა — შემთხვევა, როცა $n = 0$ არ გამოირიცხება). აქაც მხედველობაშია მოდელი. მკითხველს ევალება გაშიფროს აქსიომის აზრი ზოგად შემთხვევაში.

შემოვიტანოთ წარმოებული ლოგიკური რელიაციური ოპერატორული ნიშანი Set შემდეგი განსაზღვრით.

$$\mathrm{Set}XA \;—\; \exists Y \forall X [A \rightarrow X \in Y],$$

სადაც A ნებისმიერი ფორმულაა, X ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია, Y კი ისეთი X-გან განსხვავებული მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადია, რომელსაც არ აქვთ თავისუფალი შემოსვლა A-ში.

ცხადია, $\mathrm{Set}XA$ ჭეშმარიტია განხილული თეორიის მოცემულ $\mathcal{M}$ მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ფორმულის X-ის მიმართ თვისებად განხილვის შედეგად მიღებული ყოველი $Q(X)$ თვისებისათვის არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტია $Q(X)$ თვისების მქონე ყველა საგანი (სიმრავლე). აქედან წინა აქსიომის გამოყენებით გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{Set}XA$ ჭეშმარიტია $\mathcal{M}$ მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ფორმულის X-ის მიმართ თვისებად განხილვის შედეგად მიღებული ყოველი $Q(X)$ თვისებისათვის არსებობს $Q(X)$ თვისების მქონე საგნებისაგან (სიმრავლეებისაგან) შედგენილი სიმრავლე. მკითხველს ევალება გაშიფროს $\mathrm{Set}X$ ოპერატორის შინაარსი იმ ზოგად შემთხვევაში, როცა შესრულებულია მოცულობის აქსიომა.

$\mathrm{Set}XA$ ფორმულა იკითხება ასე: „A კოლექტივიზირებადია X-ის მიმართ"

მომდევნო აქსიომების შინაარსი გაშიფრულია მხოლოდ მოდელებისათვის (მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ იმ ზოგად შემთხვევაში როცა ინტერპრეტაციაში შესრულებულია მოცულობის აქსიომა, რაც უზრუნველყოფს იმას, რომ ყველა საგანი იყოს სიმრავლე, აქსიომების შინაარსი ისევე იშიფრება როგორც მოდელში).

ჩანაცვლების აქსიომები ეწოდებათ შემდეგი სახის ფორმულებს:

$$\forall X \exists Z \forall Y [A \leftrightarrow Y \in Z] \rightarrow \mathrm{Set}Y \exists X [X \in X_0 \wedge A],$$

სადაც $\mathbf{A}$ ნებისმიერი ფორმულაა, X და Y ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადებია, Z და X_0 კი ერთმანეთისაგან და X და Y ცვლადებისაგან განსხვავებული ისეთი მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადებია, რომლებსაც არა აქვთ თავისუფალი შემოსვლები $\mathbf{A}$-ში.

აქ წანამძღვარი წარმოადგენს წინადადებას: ყოველი X სიმრავლისათვის არსებობს (X-ზე დამოკიდებული) ისეთი Z სიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი Y სიმრავლეები, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტია $\mathbf{A}(X,Y)$ (ე.ი. $\mathbf{A}$). დასკვნა კი წარმოადგენს შემდეგ წინადადებას. არსებობს X_0-ზე დამოკიდებული ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტია Y სიმრავლე იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს X_0-დან აღებული X-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომ $\mathbf{A}(X,Y)$ არის ჭეშმარიტი. სხვანაირად: არსებობს წანამძღვარში განხილული X-ზე დამოკიდებული სიმრავლეების გაერთიანება, როცა X ღებულობს მნიშვნელობებს X_0-დან. ამის გამო განხილულ აქსიომას უწოდებენ აგრეთვე **შერჩევისა და გაერთიანების აქსიომას** (აღნიშნული გაერთიანება-სიმრავლე დამოკიდებული იქნება $X_0, X_1,\ldots,X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე, სადაც $X_1,\ldots,X_n$ არიან X და Y ცვლადებისაგან და ერთმანეთისაგან განსხვავებული ყველა ისეთი ცვლადის მიმდევრობა, რომლებსაც თავისუფალი შემოსვლა აქვთ $\mathbf{A}$ ფორმულაში).

აქსიომათა მიღების უკანასკნელი ორი წესიდან თითოეული, ცხადია, გვაძლევს აქსიომების უსასრულო რაოდენობას.

შემდეგი აქსიომაა:

$\mathrm{Set}Y\forall Z[Z \in Z \to Z \in X]$. (**ქვესიმრავლეთა სიმრავლის აქსი-ომა** ანუ **ხარისხის აქსიომა**).

იგი ადგენს ისეთი სიმრავლის არსებობას, რომელიც შედგენილია მოცემული X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეებისაგან. (ისეთ ინტერპრეტაციაში, რომელშიც შესრულებულია მოცულობის აქსიომა (და, მაშასადამე, ყველა საგანი კლასია) ეს აქსიომა ადგენს ისეთი კლასის არსებობას, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ მოცემული კლასის ქვეკლასები — კერძოდ, ამ აქსიომის ძალით, ნებისმიერი კლასი სიმრავლეა).

შემდეგი უკანასკნელი აქსიომაა ე. წ. **უსასრულობის აქსიომა**

$$\exists X[\exists Y[Y \in X \wedge \forall Z[Z \,\overline{\in}\, Y]] \wedge \forall Y[Y \in X \rightarrow \exists Z[Z \in X \wedge$$
$$\wedge \forall X_0[X_0 \in Z \leftrightarrow X_0 \in Y \vee X_0 = Y]]]]$$

ეს აქსიომა ადგენს, რომ არსებობს ისეთი **X** სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ცარიელ სიმრავლეს და მის ნებისმიერ **Y** სიმრავლესთან ერთად შეიცავს |**Y** სიმრავლეს (**Y**-ის უშუალოდ შემდეგს), კერძოდ, იგი შეიცავს თითოეულ ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვს.

მოტანილ აქსიომებზე დაყრდნობით შეიძლება შემოტანილ იქნეს ელემენტარულ სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებები (როგორიცაა, დალაგებული წყვილი, ფუნქცია, ნატურალური რიცხვი, და ა. შ.) და დამტკიცებულ იქნეს ისეთი სიმრავლეების არსებობა, რომლებიც გამოიყენებიან სიმრავლეთა ელემენტარულ თეორიაში.

3.5.2 Γ^* თეორია (გიოდელის შინაარსულ კლასთა თეორია). Γ^* თეორია წარმოადგენს გიოდელის [5] Γ_1^* კლასთა თეორიის მოდიფიკაციას, ამასთან, ცვლილებები არარსებითი ხასიათისაა — ეს ცვლილებები არ იწვევს თეორიის მოდელთა ერთობლიობის არსებითად შეცვლას (ერთ-ერთის მოდელიდან მეორის მოდელი მცირე მოდიფიცირებით მიიღება). ამის შედეგად გიოდელის შედეგები ადვილად გადმოიტანება Γ^* თეორიაში. გიოდელის ვარიანტის საწინააღმდეგოდ, Γ^* პირველი რიგის თეორიაა. $L(\Gamma^*)$ ენის ალფაბეტი მიიღება $L(ZF^*)$ ენის ალფაბეტიდან ერთი ერთადგილიანი პრედიკატული სიმბოლოს **M**-ის დამატებით; **MT**, სადაც **T** ნებისმიერი ტერმია, იკითხება ფრაზით „სიმრავლეა **T**" (გიოდელის ვარიანტის, Γ_1^* თეორიის საწინააღმდეგოდ აქ მხოლოდ უნივერსალური საგნობრივი ცვლადები გვაქვს — სიმრავლური ცვლადები არ გვაქვს). როგორც წინა მაგალითში, ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ისევე განისაზღვრება შინაარსი შემდეგი ტერმინებისა: „**a** საგანი არის **b** საგნის ელემენტი," „ელემენტი," „არაცარიელი კლასი," „ზესიმრავლე" ანუ „საკუთრივი კლასი," „კლასი შედგენილია ელემენტებისაგან." „სიმრავლე" ეწოდება **a** საგანს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია **Ma** ფორმულა. თუ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია (ქვემოთ მოტანილი) მოცულობის აქსიომა, მაშინ საგანი ცალსახად განისაზღვრება მისი ელემენტებით. ამასთან, ასეთ შემთხვევაში ელემენტის არმქონე საგანი თუ არსებობს, მაშინ იგი ერთადერთი იქნება და მას ეწოდება **ცარიელი კლასი**. კერძოდ, ასეთ ინტერპრეტაციაში განსაზღვრულია **კლასის**

ცნება, იგი ემთხვევა საგნის ცნებას და, მაშასადამე, კლასის ცნება სიმრავლის ცნების განზოგადებაა. ქვემოთ მოტანილი B_2 და B_3 აქსიომებიდან (Λ_2 მოცულობის აქსიომასთან ერთად) გამომდინარეობს ერთადერთი ცარიელი კლასის არსებობა. Λ_1 და A_3 აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ a საგანი არის ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a სიმრავლეა. მოდელში ცარიელი კლასი სიმრავლეა (ეს გამოდის, მაგალითად, C_1 და C_4 აქსიომებიდან: C_1-ის ძალით არსებობს (უსასრულო) სიმრავლე; თუ C_4-ში x-ად მივიჩნევთ რაიმე ფიქსირებულ სიმრავლეს, A კლასად მივიჩნევთ ცარიელ კლასს, მაშინ y სიმრავლე, რომლის არსებობასაც ეს აქსიომა ადგენს, იქნება ცარიელი კლასი). მაშასადამე, მოდელში სიმრავლე შეგვიძლია მივიჩნიოთ ელემენტის სინონიმად, კლასი საგნის სინონიმად, ზესიმრავლე — ისეთი საგნის სინონიმად, რომელიც ელემენტი არაა, უელემენტო კლასი ერთადერთია და იგი ცარიელი სიმრავლეა.

ამრიგად, თუ ინტერპრეტაციაში შესრულებულია მოცულობის აქსიომა (კერძოდ, მოდელში) ნაცვლად ტერმინისა „საგნობრივი ცვლადი" შეგვიძლია ვისარგებლოთ ტერმინით „კლასური ცვლადი". ამ შეთანხმებით ხშირად ვისარგებლებთ იმ მიზნითაც, რომ მოტანილი განსაზღვრებები და შეთანხმებები ძალაში დარჩეს გიოდელისეული $\Gamma_1^{\bullet}$ თეორიისათვისაც.

შენიშვნა. ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ცარიელი კლასის ცნების განსაზღვრა არ მოხერხდა. ამიტომ ვერ განვსაზღვრეთ ინდივიდის ცნებაც. თუ ინტერპრეტაციაში შესრულებულია მოცულობის აქსიომა, მაშინ ინდივიდი საერთოდ არ არსებობს (კლასის ცნება ემთხვევა საგნის ცნებას).

ქვემოთ ყველგან $\Gamma^{\bullet}$, Γ, $\Gamma_0^{\bullet}$ და $\Gamma_1^{\bullet}$ თეორიების განხილვის პერიოდში იქ, სადაც არაფერია თქმული თუ რას აღნიშნავენ X, Y, Z, A, B, C, X_0, Y_0, Z_0, X_1,...; x, y, z, a, b, c, x_0, y_0, z_0, x_1,... ასოები, ვიგულისხმებთ, რომ ისინი შესაბამისად აღნიშნავენ s_0, s_2, s_4,...; s_1, s_3, s_5,... ასოებს.

წარმოებული ოპერატორები $\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ და წარმოებული ოპერატორული ნიშანი $\forall$ ისევე შემოიტანებიან, როგორც წინა მაგალითის შემთხვევაში. წარმოებული ოპერატორული ნიშანი $\exists!$ შემოიტანება შემდეგი განსაზღვრით:

$$\exists! x\mathbf{A} \quad - \quad \exists x\mathbf{A} \wedge [[\mathbf{A} \wedge (y/x)\mathbf{A}] \rightarrow x = y],$$

სადაც X ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია. A ნებისმიერი ფორმულაა, y კი A-ში თავისუფალი შემოსვლის არმქონე მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადია. $\exists!xA$ იკითხება ფრაზით „არსებობს ერთადერთი ისეთი x რომ A". ადვილი დასანახია, რომ $\exists!x$ წარმოებულ კვანტორს აღნიშნული ფრაზის შესაბამისი შინაარსი აქვს.

რიგი წარმოებული ოპერატორი მისი აღნიშვნის შესაბამისად ბუნებრივ შინაარსს იძენს ისეთ ინტერპრეტაციაში, სადაც სრულდება მოცულობის აქსიომა (კერძოდ, მოდელში).

e, k და k^{*} ერთადგილიანი პრედიკატები (თვისებები) შემოიტანებიან შემდეგი განსაზღვრებებით:

$$eT — \exists X [T \in X];$$

$$k'T — \exists X [X \in T];$$

$$k^{*}T — \neg\exists X [T \in X] \wedge \exists X [X \in T];$$

სადაც T ნებისმიერი ტერმია, X კი ისეთი მინიმალურინდექსიანი საგნობრივი ცვლადია, რომელსაც თავისუფალი შემოსვლა არ აქვს T-ში. eT, $k'T$, $k^{*}T$ ფორმულები შესაბამისად იკითხებიან ფრაზებით: „ელემენტია T," „არაცარიელი კლასია T," „საკუთრივი კლასია T" ანუ „ზესიმრავლეა T". აღნიშნულ ფორმულებიდან თითოეულს შესაბამისი ფრაზის შინაარსი აქვს ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში. სახელდობრ, eT ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა T ტერმის მნიშვნელობა ელემენტია, $k'T$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა T ტერმის მნიშვნელობა არაცარიელი კლასია, $k^{*}T$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა T ტერმის მნიშვნელობა ზესიმრავლეა (არასაკუთრივი კლასია); ისეთ ინტერპრეტაციაში, სადაც სრულდება მოცულობის აქსიომა, eT ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა T ტერმის მნიშვნელობა სიმრავლეა (ამ შემთხვევაში „სიმრავლე" და „ელემენტი" სინონიმური ტერმინებია და, მაშასადამე, eT-ს წასაკითხად შეგვიძლია გამოვიყენოთ, აგრეთვე, ფრაზა „სიმრავლეა T").

Γ^{*} თეორიის არალოგიკურ აქსიომათა სისტემა აღინიშნება Σ-თი და ეს აქსიომათა სისტემა იყოფა ოთხ ჯგუფად: A, B, C, D. ზოგიერთი ქვემოთ მოტანილი არალოგიკური აქსიომა Γ^{*} შინაარსული თეორიის შემ-

თხვევაში საინტერესო არაა (ისინი გარკვეული აზრით ზედმეტი არიან) — მაგრამ ისინი მაინც მოიტანება, რადგან მხედველობაშია თეორიის ფორმალური ვარიანტიც.

A ჯგუფის აქსიომები.

A1. $X \in Y \rightarrow MX$.

A2. $\forall a[a \in X \leftrightarrow a \in Y] \rightarrow X = Y$

A3. $\forall x \forall y[\exists z[Mz \wedge [x_1 \in z \leftrightarrow [x_1 = x \wedge Mx] \vee [x = y \wedge My]]]$.

A1 აქსიომის ძალით თითოეული ელემენტი სიმრავლეა. A2 აქსიომას ეწოდება **განფენილობის აქსიომა** ანუ **მოცულობის აქსიომა**. იგი ადგენს, რომ ერთი და იმავე ელემენტების მქონე საგნები (კლასები) ერთი და იგივეა (მხედველობაშია ის გარემოება რომ, როცა შესრულებულია A2 აქსიომა, მაშინ ინტერპრეტაციის უნივერსუმის ყველა საგანი კლასია). A3 აქსიომას ეწოდება **დაულაგებელი წყვილის აქსიომა**. ნებისმიერ ისეთ ინტერპრეტაციაში, რომელშიც სრულდება მოცულობის აქსიომა, A3 აქსიომის ძალით ნებისმიერი x და y საგნებისათვის არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ x-ით და y-ით აღნიშნული სიმრავლეები (აქ A3 აქსიომას უფრო რთული ფორმა აქვს, ვიდრე გიოდელის [5] კლასთა თეორიის შემთხვევაში — ეს გამოწვეულია იმ გარემოებით, რომ Γ^* თეორიაში სიმრავლური ცვლადები არ გვაქვს). ასეთ სიმრავლეს ეწოდება x და y **საგნებისაგან შედგენილი დაულაგებელი წყვილი** (მისი ერთადერთობა გამომდინარეობს A2 აქსიომიდან). ეს დაულაგებელი წყვილი აღინიშნება K^2xy-ით. ამასთან, K^2 სიმბოლო Γ^* თეორიაში შემოიტანება შემდეგი განმსაზღვრელი აქსიომით:

$$1.1\ \mathrm{Dfn.}\ x \in K^2X_1X_2 \leftrightarrow [x \in X_1 \wedge MX_1] \vee [x = X_2 \wedge MX_2]$$

(Dfn იკითხება სიტყვით: „განსაზღვრით" და ამ გამოსახულებას გამოვიყენებთ მხოლოდ და მხოლოდ ახალი სიმბოლოს განმსაზღვრელი აქსიომის (აქსიომების) მოტანისას). თეორიას გავაფართოებთ სხვა ახალი სიმბოლოების შემოტანითაც და, ამასთანავე, შემოვიტანთ სხვა შემამოკლებელ სიმბოლოებსაც (რომელთა განსაზღვრებებში და, საზოგადოდ, ყველგან T უინდექსოთ ან ინდექსებით არიან ნებისმიერი ტერმები).

განსაზღვრებადი აქსიომის მეთოდით შემოტანილ სიმბოლოებს ოპერატორებს, კონსტანტებს ვუწოდოთ **განსაზღვრებადი სიმბოლო-**

ები (**განსაზღვრებადი ოპერატორები**, **განსაზღვრებადი კონსტანტები**), **წარმოებული სიმბოლოები** (**წარმოებული ოპერატორი**, **წარმოებული კონსტანტა**) იყოს საერთო სახელი განსაზღვრებადი სიმბოლოების და შემამოკლებელი სიმბოლოებისა (განსაზღვრებადი ოპერატორებისა და შემამოკლებელი სიმბოლო-ოპერატორებისა, განსაზღვრებადი კონსტანტებისა და შემამოკლებელი სიმბოლო-კონსტანტებისა).

1.2 $k^1 T$ — $k^2 T T$

$\{T_1, T_2\}$ და $\{T\}$ შესაბამისად იყონ $k^2 T_1 T_2$ და $k^1 T$ ტერმების გამარტივებული აღნიშვნები.

ცხადია, თუ a და b სიმრავლეებია (ე. ი. თუ a და b სიმბოლოებით აღნიშნულია Γ^* თეორიის მოცემული ინტერპრეტაციის ისეთი საგანი, რომლებიც (სიმრავლეებია), მაშინ $\{a\}$ არის სიმრავლე, რომლის ერთადერთი ელემენტია a, $\{a, b\}$ კი ისეთი სიმრავლეა, რომლის ელემენტებია a და b სიმრავლეები. თუ a და b ზესიმრავლეებია, მაშინ $\{a\}$ და $\{a,b\}$ ცარიელი სიმრავლეებია.

1.3 $\text{Э}_0^2 T_1 T_2$ — $\{\{T_1\}, \{T_1 . T_2\}\}$.

1.4 $\text{Э}_0^1 T$ — T

1.5 $\text{Э}_0^n T_1 \cdots T_n$ — $\text{Э}_0^2 T_1 \text{Э}_0^{n-1} T_2 \cdots T_n$ $(n = 3,4,\ldots)$.

$(T_1,\ldots,T_n)$ იყოს $\text{Э}_0^n T_1 \cdots T_n$ ტერმის გამარტივებული აღნიშვნა $(n = 1,2,\ldots)$. მას ეწოდება $T_1,\ldots,T_n$ **ტერმებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული**. $n = 2$ შემთხვევაში მას ეწოდება, აგრეთვე, T_1 და T_2 **ტერმებისაგან შედგენილი (დალაგებული) წყვილი**. აქედან ბუნებრივად ინდუცირდება შესაბამისი ტერმინები საგნებისათვის: $a_1,\ldots,a_n$ **კლასებისაგან შედგენილი დალაგებული n-ეული** და ა. შ.

ადვილად მტკიცდება თეორემა (როცა არ ვუთითებთ თუ რა ტიპის თეორემაზეა ლაპარაკი იგულისხმება, რომ მხედველობაშია თეორება Γ^*-ში (ნებისმიერ მოდელში)).

1.6 თუ $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ სიმრავლეებია, მაშინ

$$(a_1,\ldots,a_n) = (b_1,\ldots,b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge\cdots\wedge a_n = b_n.$$

1.7 $T_1 \subseteq T_2$ — $\forall a[a \in T \rightarrow a \in T_2]$,

სადაც **a** არის ისეთი მინიმალურინდექსიანი ცვლადი, რომელსაც თავისუფალი შემოსვლა არ აქვს T_1 და T_2 ტერმებში (იგულისხმება, რომ $T_1 \subseteq T_2$-ით აღნიშნულია $\subseteq T_1 T_2$).

1.8 $T_1 \neq T_2$ — $\neg T_1 = T_2$.

1.9 $T_1 \subset T_2$ — $T_1 \subseteq T_2 \wedge T_1 \neq T_2$.

1.10 $\mathrm{Em}T$ — $\forall X[\neg X \in T]$,

სადაც **X** ისეთი მინიმალურინდექსიანი (საგნობრივი) ცვლადია, რომელსაც თავისუფალი შემოსვლა არ აქვს **T**-ში. **EmT** იკითხება ფრაზით „ცარიელია **T**".

1.11 $\mathrm{EX}T_1T_2$ — $\forall X[\neg[X \in T_1 \wedge X \in T_2]]$,

სადაც **X** ისეთი მინიმალურინდექსიანი (საგნობრივი) ცვლადია, რომელსაც თავისუფალი შემოსვლა არ აქვს T_1 და T_2 ტერმებში. $\mathrm{EX}T_1T_2$ იკითხება ფრაზით: „T_1 და T_2 ტერმები არ იკვეთებიან".

1.12 $\mathrm{Un}T$ — $\forall a \forall b \forall c[Ma \wedge Mb \wedge Mc \rightarrow$

$\rightarrow [(b,a) \in T] \wedge (c,a) \in T \rightarrow b = c]]$,

სადაც **a, b, c** არიან ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომლებსაც თავისუფალი შემოსვლები არ აქვთ **T**-ში. **UnT** იკითხება ფრაზით: „ცალსახაა **T** (ტერმი)".

მათემატიკური ინდუქციით **n**-ის მიმართ ადვილად მტკიცდება, რომ

$$\vdash_{\Gamma^*} Mx_1 \wedge \cdots \wedge Mx_{n+p} \rightarrow (x_1, \ldots, x_n, (x_{n+1}, \ldots, x_{n+p})) = (x_1, \ldots, x_{n+p})$$

შენიშვნა. გიოდელის კლასთა თეორიაში [5] (ამ წიგნში მოტანილი განსაზღვრისაგან განსხვავებით) ფუნქცია (მოდიფიცირებული აზრით), განსაზღვრით არის გრაფიკი, რომელსაც არ გააჩნია ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ორი ელემენტი, რომელთა მეორე კომპონენტები ერთი და იგივეა. ასეთ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არეს მისი ელემენტების მეორე კომპონენტები ადგენენ, მნიშვნელობათა არეს კი – პირველი კომპონენტები. ამასთან, ნებისმიერი **A** კლასი განიხილება როგორც მიმართება და როგორც თანადობა (რომლის გამოსვლის არე და ჩასვლის არე უნივერსალური კლასია) და როგორც თვისება. პირველ და მეორე შემთხვევაში მხედველობაშია ელემენტებისაგან შედგენილი იმ

დალაგებულ წყვილების კლასი, რომლებსაც A შეიცავს ელემენტებად, მესამე შემთხვევაში კი მხედველობაშია $x \in A$ ფორმულით უნივერსალურ კლასზე განსაზღვრული თვისება.

B ჯგუფის აქსიომები (ისინი ადგენენ კლასების არსებობას).

B1. $\exists A \forall x \forall y[Mx \wedge My \rightarrow [(x, y) \in A \leftrightarrow x \in y]]$.

B2. $\forall A \forall B \exists C \forall a[a \in C \leftrightarrow a \in A \wedge a \in B]$.

B3. $\forall A \exists B \forall a[Ma \rightarrow [a \in B \leftrightarrow \neg a \in A]]$.

B4. $\forall A \exists B \forall x[Mx \rightarrow [x \in B \leftrightarrow \exists y[My \wedge (y, x) \in A]]]$.

B5. $\forall A \exists B \forall x \forall y[Mx \wedge My \rightarrow [(y, x) \in B \leftrightarrow x \in A]]$.

B6. $\forall A \exists B \forall x \forall y[Mx \wedge My \rightarrow [(x, y) \in B \leftrightarrow (y, x) \in A]]$.

B7. $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z[Mx \wedge My \wedge Mz \rightarrow [(x, y, z) \in B \leftrightarrow (y, z, x) \in A]]$.

B8. $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z[Mx \wedge My \wedge Mz \rightarrow [(x, y, z) \in B \leftrightarrow (x, z, y) \in A]]$.

B1-ს ეწოდება $\in$ **მიმართების აქსიომა**. იგი იძლევა იმის გარანტიას, რომ $\in$ მიმართების შევიწროება ყველა სიმრავლის კლასზე არსებობს როგორც წყვილთა კლასი. საქმე იმაშია, რომ შეიძლება დამტკიცდეს ორი ნებისმიერი კლასის პირდაპირი ნამრავლის არსებობა. ამასთან, B3-ით არსებობს ნებისმიერი A კლასის დამატება CA, B2-ით არსებობს A და CA კლასების თანაკვეთა – **ცარიელი კლასი**. იგი A2-ის ძალით ცალსახად განისაზღვრება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. ახლა, B3-ით, არსებობს ყველა სიმრავლეთა კლასი, რომელიც ([5]-ში) აღინიშნება V-ით და ეწოდება **უნივერსალური კლასი**. აქედან, ზემოაღნიშნულის ძალით არსებობს $V^2 = V \times V$. ამიტომ თუ A არის კლასი, რომლის არსებობასაც ამტკიცებს B1 აქსიომა და $B = V^2$, მაშინ C კლასი, რომლის არსებობასაც ამტკიცებს B2 აქსიომა, იქნება ისეთ x და y სიმრავლეებისაგან შედგენილი (x, y) წყვილთა კლასი, რომლებიც აკმაყოფილებს $x \in y$ პირობას. B2-ს ეწოდება **თანაკვეთის აქსიომა**, B3-ს – **დამატების აქსიომა**, B4-ს – **განსაზღვრის არის აქსიომა**, B5-ს – **პირდაპირი ნამრავლის აქსიომა** (იგი იძლევა იმის გარანტიას, რომ არსებობს $V \times A$ პირდაპირი ნამრავლი), B6-B8-ს – **შექცევის აქსიომები**.

შევნიშნოთ, რომ A კლასი B1 აქსიომაში და B კლასი B5-B8 აქსიომებში არ განისაზღვრებიან ცალსახად, B2-B4 აქსიომებით კი შესაბამისი კლასები ცალსახად განისაზღვრებიან (A2 აქსიომის ძალით). ეს უკანას-

კნელი კლასები აღინიშნებიან $A \cap B$, CA და DA სიტყვებით და შესაბამისად ეწოდებათ A და B კლასების თანაკვეთა, A კლასის დამატება და A კლასის განსაზღვრის არე.

$\varnothing$, V, $\cap$, C და D სიმბოლოთა შინაარსის მოტანილი სიტყვიერი განსაზღვრებები არაა კორექტული. საქმე იმაშია, რომ მაგალითად, A და B არ არიან B2 აქსიომის (წინადადებების) თავისუფალი ცვლადები — ისინი დაბმული ცვლადებია. B2 წარმოადგენს წინადადებას A და B ცვლადების ყველა მნიშვნელობების შესახებ. $A \cap B$ აღნიშვნა კი ითვალისწინებს A და B ცვლადების ნებისმიერად აღებულ, მაგრამ ფიქსირებულ მნიშვნელობებს — ე. ი. მისთვის A და B თავისუფალი ცვლადებია. მაშასადამე, $A \cap B$ აღნიშვნის განხილული შემოტანა გულისხმობს იმას, რომ A და B თავისუფალი სახითაა B2 აქსიომაში — რომ თითოეული მათგანი ნებისმიერად აღებული, მაგრამ ფიქსირებული კლასის აღმნიშვნელი სიმბოლოა. ამიტომ ახალი სიმბოლოების შემოტანას გიოდელი ძირითადად აწარმოებს განმსაზღვრელი აქსიომის მეთოდით (ასეთი მეთოდის გამოყენება მოითხოვს სათანადო კლასების არსებობის წინასწარ დამტკიცებას, რაც უზრუნველყოფს გაფართოების კონსერვატიულობას). რიგი ასეთი სიმბოლოებისა კონტექსტში შემოტანილია როგორც შემამოკლებელი სიმბოლოები — ყველა მათგანის შემამოკლებელ სიმბოლოს სახით შემოტანა ძნელდება იმის გამო, რომ თეორიაში არ გვაქვს არც ერთი τ და ι ოპერატორული ნიშნებიდან. ზემოთ აღნიშნული ხუთი სიმბოლო შემდეგი განმსაზღვრელი აქსიომებით უნდა იქნენ შემოტანილი.

1.13 Dfn. $x \in \varnothing \leftrightarrow x \neq x$.

1.14 Dfn. $x \in V \leftrightarrow \mathrm{M}x \wedge x = x$.

1.15 Dfn. $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

1.16 Dfn. $x \in CA \leftrightarrow \mathrm{M}x \wedge \neg x \in A$.

1.17 Dfn. $x \in DA \leftrightarrow \exists y[(y, x) \in A \wedge \mathrm{M}y \wedge \mathrm{M}x]$.

C ჯგუფის აქსიომები (ისინი ადგენენ სიმრავლეთა არსებობას).

C1. $\exists a[\mathrm{M}a \wedge [\neg \mathrm{Em}a \wedge \forall x[x \in a \rightarrow \exists y[y \in a \wedge x \subset y]]]]$.

C2. $\forall x[\mathrm{M}x \rightarrow \exists y[\mathrm{M}y \wedge \forall a \forall b[a \in b \wedge b \in x \rightarrow a \in y]]]$.

C3. $\forall x[\mathrm{M}x \rightarrow \exists y[\mathrm{M}y \wedge \forall a[a \subseteq x \rightarrow a \in y]]]$.

C4. $\forall x[\mathrm{M}x \rightarrow \forall A[\mathrm{Un}A \rightarrow \exists y[\mathrm{M}y \wedge \forall a[\mathrm{M}a \rightarrow$

$[a \in y \leftrightarrow \exists b]b \in x \wedge (a, b) \in A]]]]]]$.

C1-ს ეწოდება **უსასრულობის აქსიომა**. იგი ადგენს, რომ არსებობს არაცარიელი სიმრავლე a, რომელიც მის ნებისმიერ ელემენტთან ერთად შეიცავს ამ ელემენტის მკაცრად შემცველ სიმრავლეს. C2 ადგენს სიმრავლის ელემენტთა გაერთიანების შემცველი სიმრავლის არსებობას. C3 ადგენს ნებისმიერი x სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის შემცველი სიმრავლის არსებობას. C4-ს ეწოდება **ჩასმის აქსიომა**, იგი ადგენს, რომ ყოველი ცალსახა A კლასისა და ყოველი x სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი y სიმრავლე, რომლის ელემენტებია ზუსტად ის სიმრავლეები, რომლებიც იმყოფებიან A კლასით განსაზღვრულ მიმართებაში x-ის ელემენტებთან (სხვანაირად, A კლასით განსაზღვრული ფუნქციის მნიშვნელობები x სიმრავლის ელემენტებზე აგებენ სიმრავლეს).

უკანასკნელი აქსიომის ნაცვლად ცერმელო იყენებდა ე. წ. **გამოყოფის აქსიომას**:

$$\forall x[Mx \rightarrow \forall A \exists y[My \wedge \forall a[a \in y \leftrightarrow a \in x \wedge a \in A]]];$$

ე. ი. არსებობს სიმრავლე, რომლის ელემენტებია x სიმრავლის ის და მხოლოდ ის ელემენტები, რომლებსაც აქვთ A თვისება (ე. ი. რომლებიც არიან A კლასის ელემენტები).

D ჯგუფი შედგება ერთადერთი აქსიომისაგან. ესაა აქსიომა

D. $\neg EmA \rightarrow \exists a[a \in A \wedge EXaA]$.

ე. ი. ყოველ არაცარიელ A კლასს აქვს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ იკვეთება A-თან.

ამ აქსიომის შედეგებია:

$$\neg x \in x \text{ და } \neg[x \in y \wedge y \in x].$$

პირველი მიიღება აქსიომის გამოყენებით $\{x\}$ სიმრავლეზე, მეორე კი – აქსიომის გამოყენებით $\{x, y\}$ სიმრავლეზე (წინააღმდეგის დაშვების მეთოდით).

D აქსიომას უწოდებენ **რეგულარობის აქსიომას**.

მოვიტანოთ ახლა ნებისმიერი ამორჩევის აქსიომის ფორმულირება (იგი არ მიეკუთვნება აქსიომათა Σ სისტემას).

$$\exists A[UnA \wedge \forall x[\neg Emx \wedge mx \rightarrow \exists y[y \in x \wedge (y, x) \in A]]].$$

ეს არის ამორჩევის აქსიომის მეტად ძლიერი ფორმა. იგი ადგენს ისეთი A კლასის არსებობას, რომ მასში შემავალი წყვილებისაგან შედგენილი A'

კლასი ($A' = A \cap V^2$) წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც ყოველ არაცარიელ x სიმრავლეს უთანადებს მისივე ელემენტს (ე. ი. რომელიც თითოეული არაცარიელი სიმრავლიდან ირჩევს ცალსახად განსაზღვრულ ელემენტს). აქედან C4 აქსიომის გამოყენებით გამომდინარეობს ნებისმიერი ამორჩევის აქსიომის ჩვეულებრივი ფორმულირება: წყვილ-წყვილად ერთმანეთის არმკვეთი არაცარიელი სიმრავლეების ნებისმიერი $\mathbf{M}$ სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი A სიმრავლე, რომელსაც თითოეულ $M \in \mathbf{M}$ სიმრავლესთან აქვს ერთადერთი საერთო ელემენტი.

D აქსიომის სამართლიანობა ინტუიციურ სიმრავლეთა თეორიაში ასე დამტკიცდება. თუ A არაცარიელი კლასია, მაშინ A კლასის ელემენტთა საფეხურებს (რიგობრივ რიცხვებს) შორის არსებობს უმცირესი α რიგობრივი რიცხვი. ვთქვათ, ახლა, a არის A კლასის ნებისმიერი α საფეხურის მქონე ელემენტი, მაშინ a და A არ იკვეთებიან (წინააღმდეგ შემთხვევაში მათი საერთო ელემენტი b იქნებოდა A კლასის ისეთი ელემენტი, რომლის საფეხური ნაკლებია a-ს საფეხურზე (α-ზე), რაც ეწინააღმდეგება α-ს განსაზღვრას.

Γ_0^{*}-ით აღვნიშნოთ განხილული თეორიის ერთი ვარიანტი, რომელიც უმნიშვნელოდ განსხვავდება გიოდელისეული ვარიანტისაგან [5]. Γ_0^{*} თეორიის ალფაბეტი იგივეა, რაც Γ^{*} თეორიისა, $L(\Gamma_0^{*})$ კი მხოლოდ შემდეგნაირად განსხვავდება $L(\Gamma^{*})$ ენისაგან. s_0, s_2, s_4 საგნობრივი ცვლადები კი იწოდებიან, აგრეთვე კლასურ ცვლადებად, $s_1, s_3, s_5, \ldots$ საგნობრივი ცვლადები კი იწოდებიან, აგრეთვე, სიმრავლურ ცვლადებად; ამასთან, თეორიის ინტერპრეტაციის აგების მიზნით თავდაპირველად უნდა შეირჩეს საგანთა K არე, $M \subseteq K$ სიმრავლეთა არე და სიმრავლური ცვლადების მნიშვნელობათა არედ უნდა ვიგულისხმოთ M. ზემოთ მოტანილი შეთანხმების შესაბამისად კლასური ცვლადები დიდი ასოებით აღინიშნებიან, სიმრავლური ცვლადები კი — პატარა ასოებით.

ცხადია, $L(\Gamma_0^{*})$ ენა არაა მათემატიკური ენა ზემოთ განხილული აზრით. საქმე გვაქვს უფრო ზოგადი ხასიათის მათემატიკურ ენასთან. იგივე ითქმის Γ_0^{*} თეორიის შესახებ. მიუხედავად ამისა, თეორიის ცნებასთან დაკავშირებული ზემოთ მოტანილი ცნებები და მათი თვისებები ძირითა-

დად უცვლელად, ზოგჯერ კი მცირე გასაგები მოდიფიცირებებით ძალაში რჩება. ქვემოთ, ამ მაგალითის განხილვისას, გამოვიყენებთ ასეთ ცნებებს და მათ თვისებებს მათი განსაზღვრებებისა და დამტკიცებების ცხადად მოტანის გარეშეც – მხოლოდ ზოგიერთ საჭირო შემთხვევაში მოვიტანთ მითითებებს ამა თუ იმ ტერმინის აზრის დასაზუსტებლად და ზოგიერთი მოდიფიცირებული თვისების ფორმულირებას.

Γ_0^{**} და Γ_0^{***} თეორიის ფორმებით ვისარგებლებთ ჩვეულებრივ. Γ_0^{*} თეორიის განსაზღვრებებს და აქსიომებს იგივე შინაარსი აქვთ, რაც Γ^{*} თეორიის შემთხვევაში, მხოლოდ ზოგიერთი მათგანის ფორმულირებანი მარტივდებიან იმასთან დაკავშირებით, რომ ამჯერად ჩვენს განკარგულებაშია სიმრავლური ცვლადებიც. ამიტომ Γ_0^{*} თეორიის განსაზღვრის დასრულების მიზნით მოვიტანთ მხოლოდ იმ განსაზღვრებებს და აქსიომებს, რომლებიც მოდიფიცირებას საჭიროებენ – ზოგიერთ შემთხვევაში კი დავკმაყოფილდებით შენიშვნით იმის შესახებ თუ როგორ უნდა მოდიფიცირდეს იგი.

$\exists!$ ოპერატორული ნიშნის განსაზღვრაში y-გან დამატებით უნდა მოვითხოვოთ, რომ მისი ტიპი ემთხვეოდეს x-ის ტიპს.

A3. $\forall x \forall y \exists z \forall a [a \in z \leftrightarrow a = x \vee a = y]$

1.1 Dfn. $x \in K^2 X_1 X_2 \leftrightarrow x = X_1 \vee x = X_2$.

1.6 თეორემა. $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$.

1.12. **UnT** — $\forall a \forall b \forall c [(b, a) \in T \wedge (c, a) \in T \rightarrow b = c]$,

სადაც a, b და c არიან ისეთი მინიმალურ ინდექსიანი სიმრავლური ცვლადები, რომლებსაც თავისუფალი შემოსვლები არ აქვთ T-ში.

B1. $\exists A \forall x \forall y [(x, y) \in A \leftrightarrow x \in y]$.

B3. $\forall A \exists B \forall a [a \in B \leftrightarrow \neg a \in A]$.

B4. $\forall A \exists B \forall x [x \in B \leftrightarrow \exists y [(y, x) \in A]]$.

B5. $\forall A \exists B \forall x \forall y [(y, x) \in B \leftrightarrow x \in A]$.

B6. $\forall A \exists B \forall x \forall y [(x, y) \in B \leftrightarrow (y, x) \in A]$.

B7. $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z [(x, y, z) \in B \leftrightarrow (y, z, x) \in A]$.

B8. $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z [(x, y, z) \in B \leftrightarrow (x, z, y) \in A]$.

1.14 Dfn. $x \in V \leftrightarrow x = x$.

1.16 Dfn. $x \in CA \leftrightarrow \neg x \in A$.

1.17 Dfn. $x \in DA \leftrightarrow \exists y[(y,x) \in A]$.

C1. $\exists a[\neg Ema \wedge \forall x[x \in a \rightarrow \exists y[y \in a \wedge x \subset y]]]$.

C2. $\forall x \exists y \forall a \forall b[a \in b \wedge b \in x \rightarrow a \in y]$.

C3. $\forall x \exists y \forall a[a \subseteq x \rightarrow a \in y]$.

C4. $\forall x \forall A[UnA \rightarrow \exists y \forall a[a \in y \leftrightarrow \exists b[b \in x \wedge (a,b) \in A]]]$.

ამ აქსიომებს (გამოტოვებული აქსიომების ჩათვლით) უნდა დაემატოს შემდეგი აქსიომა:

$$Mx \leftrightarrow x = x. \tag{1}$$

ეს აქსიომა ადგენს, რომ (თეორიის მოდელში) სიმრავლური ცვლადის მნიშვნელობათა არეა ყველა სიმრავლის ერთობლიობა. გიოდელის [5] აქსიომათა სისტემაში ეს აქსიომა არ ფიგურირებს, მაგრამ იქ ფარულად იგულისხმება მისი სამართლიანობა.

Γ_0^* თეორიის აქსიომათა სისტემა აღვნიშნოთ Σ_0-ით.

ამორჩევის აქსიომა იგივეა.

კლასთა თეორიის გიოდელის [5] ვარიანტი აღვნიშნოთ Γ_1^*-ით. იგი მხოლოდ იმით განსხვავდება Γ_0^*-გან, რომ Γ_1^*-ში ინტერპრეტაციების განსაზღვრისას უნივერსუმია $K \cup M$, ამასთან, არ იგულისხმება, რომ $M \subseteq K$. მაგრამ Γ_1^*-ში გვაქვს შემდეგი აქსიომა:

A_0. Kx.

უკანასკნელი აქსიომა უზრუნველყოფს მოდელში $M \subseteq K$ პირობის შესრულებას. ამიტომ Γ_0^* და Γ_1^* თეორიებს ერთი და იგივე მოდელები აქვთ. რადგან Γ^* თეორიის აქსიომებს იგივე შინაარსი აქვთ, რაც Γ_0^* თეორიის შესაბამისს აქსიომებს, ადვილად შევნიშნავთ, რომ Γ_0^* და Γ_1^* თეორიებსაც ერთი და იგივე მოდელები აქვთ სავსებით განსაზღვრული ბუნებრივი აზრით. აქედან ადვილად გამომდინარეობს Γ_1^* თეორიაში გიოდე-

ლის მიერ მიღებული ქვემოთ მოტანილი შედეგების სამართლიანობა Γ^{*}, Γ, Γ_0^{*} თეორიებისათვის.

Σ_1 იყოს Γ_1^{*} თეორიის აქსიომათა სისტემა.

გიოდელმა [5] დაამტკიცა, რომ თუ Σ_1 აქსიომათა სისტემა თავსებადია, მაშინ თავსებადი იქნება Σ_1' სისტემა, რომლის მისაღებად Σ_1 სისტემას უნდა დაემატოს განხილული ამორჩევის აქსიომა და კანტორის განზოგადებული კონტინუუმ-ჰიპოტეზა:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

გიოდელის მოტანილ შედეგს სიმარტივისათვის ასეც გამოთქვამენ: ამორჩევის აქსიომა და კანტორის განზოგადებული კონტინუუმ-ჰიპოტეზა თავსებადია სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებთან. ამორჩევის აქსიომის განხილული ფორმის თავსებადობიდან, ცხადია, გამომდინარეობს ამორჩევის აქსიომის უფრო სუსტი ფორმების თავსებადობა.

გიოდელის განხილული შედეგი ძალაშია იმ შემთხვევაშიც, როცა Σ_1 სისტემიდან გამორიცხულია D აქსიომა (იხ. [5]). გიოდელის შედეგი სპეციალურ დამტკიცებას მოითხოვს, რამდენადაც ცნობილი არაა აქსიომათა Σ_1 სისტემის თავსებადობა. გიოდელის შედეგის მოტანილი გამარტივებული ფორმა, ცხადია, არაა ზუსტი.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს შემდეგ წინადადებათა ტოლფასობა (Σ_0' და Σ_1' ისევე მიიღებიან Σ_0 და Σ_1 სისტემებიდან, როგორც Σ' მიიღება Σ სისტემიდან):

1. თავსებადია აქსიომათა Σ სისტემა.
2. თავსებადია აქსიომათა Σ_0 სისტემა.
3. თავსებადია აქსიომათა Σ_1 სისტემა.
4. თავსებადია აქსიომათა Σ' სისტემა.
5. თავსებადია აქსიომათა Σ_0' სისტემა.
6. თავსებადია აქსიომათა Σ_1' სისტემა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როგორც ZF* თეორიის შემთხვევაში, ინტუიციური მსჯელობით „მტკიცდება", რომ ყველა კლასთა სისტემა (ინტუიციური აზრით) შეადგენს Γ^{*}, შესაბამისად Γ_0^{*}, შესაბამისად Γ_1^{*}, თეორიის მოდელს.

3.5.3 სიმრავლეთა თეორიის მეორე ინტუიციური მოდელი. პირველ თავში განვსაზღვრეთ სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის ე. წ. I ინტუიციური მოდელი. ახლა განვსაზღვრავთ სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის ე. წ. II **ინტუიციურ მოდელს.** აქვე შევეცდებით გავცეთ პასუხი კითხვას: სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის I და II ინტუიციური მოდელები, იმ შემთხვევაში, როცა ინდივიდთა ერთობლიობა ცარიელია, არიან თუ არა აქსიომური სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის მოდელები ზემოთ მოტანილი მაგალითებისათვის.

სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის როგორც I ისე II ინტუიციურ მოდელს საფუძვლად უდევს რიგობრივი რიცხვის ერთი და იგივე ინტუიციური ცნება და პრინციპი, რომლის ძალით სიმრავლის აგება უნდა ხდებოდეს ბიჯებისაგან შედგენილი დამთავრებულად წარმოდგენადი პროცესით და, პირიქით, ასეთი პროცესით აგებული ერთობლიობა ყოველთვის შეგვიძლია მივიჩნიოთ სიმრავლედ. გარდა აღნიშნულისა, II ინტუიციურ მოდელს საფუძვლად უდევს აგრეთვე პრინციპი, რომლის ძალით ბიჯებისაგან შედგენილი დამთავრებულად წარმოდგენილი პროცესით აგებული ერთობლიობისათვის შესაძლოა ერთი ბიჯით აიგოს ამ ერთობლიობის ყველა შესაძლებელი ყველა ქვეერთობლიობა. აღნიშნულ პრინციპებს შესაბამისად ვუწოდოთ **პირველი პრინციპი** და **მეორე პრინციპი**. მეორე პრინციპი, როცა იგი განიხილება პირველ პრინციპთან ერთად, ტოლფასია პრინციპისა, რომლის ძალით მოცემული სიმრავლისათვის ერთი ბიჯით შეიძლება აიგოს ამ სიმრავლის ყველა შესაძლებელი ქვესიმრავლე (მართლაც, მეორე პრინციპში ხსენებული ერთობლიობები პირველი პრინციპის საფუძველზე შეგვიძლია სიმრავლეებად მივიჩნიოთ). ამრიგად, მეორე პრინციპის ძალით, ნებისმიერი სიმრავლის (დასრულებულად წარმოდგენადი პროცესით აგებული ნებისმიერი ერთობლიობის) ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე არსებობს და მისი აგების პროცესი დასრულებადად წარმოსადგენია. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს პრინციპი უაღრესად ძლიერ დაშვებად ითვლება — უსასრულო სიმრავლის „ყველა შესაძლებელი ქვესიმრავლის ერთობლიობა" კი თავისებურად ქაოსადაა მიჩნეული.

ამ პრინციპებისა და რიგობრივი რიცხვის ინტუიციური ცნების საფუძველზე სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის მეორე ინტუიციური მოდელის სიმრავლეები, შესაბამისად კლასები, შემდეგნაირად გა-

ნისაზღვრებიან. $\mathfrak{I}$ იყოს ინდივიდთა ერთობლიობა. იგულისხმება, რომ ეს ერთობლიობა დასრულებულად წარმოდგენადი პროცესითაა აგებული.

შემოიტანება **საგნის რანგის** ცნება, ამასთან, a საგნის რანგი აღინიშნება $rg\, a$-თი. ინდივიდები, განსაზღვრით, წარმოადგენენ უდაბლესი რანგის საგნებს (იგულისხმება, რომ უდაბლესი რანგის საგნებს — ინდივიდებს ერთი და იგივე რანგი აქვთ და ეს რანგი ნაკლებია ნებისმიერი სხვა საგნის რანგზე). გარდა უდაბლესი რანგის საგნებისა, ნებისმიერი $\alpha \in W$ რიგობრივი რიცხვისათვის განისაზღვრება R_α სიმრავლე და α რანგის საგნები (სიმრავლეები).

P-თი აღვნიშნოთ ერთადგილიანი სიმრავლური ოპერაცია, რომლის მნიშვნელობა $P(A)$ ნებისმიერ A სიმრავლეზე არის A სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლის სიმრავლე. პირველი პრინციპის შესაბამისად ინდივიდთა $\mathfrak{I}$ ერთობლიობას სიმრავლედ მივიჩნევთ. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის ძალით R_α სიმრავლეების განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ α რიგობრივ რიცხვზე ნაკლები ყველა β რიგობრივი რიცხვისათვის განსაზღვრულია R_β სიმრავლე და შემდეგნაირად განვსაზღვროთ R_α სიმრავლე. თუ $\alpha = 0$, მაშინ $R_\alpha' = \mathfrak{I}$ (ე. ი. $R_0 = \mathfrak{I}$). თუ $\alpha \neq 0$ და β არის α-ს უშუალოდ წინა რიგობრივი რიცხვი, მაშინ $R_\alpha = P(R_\beta) \cup \mathfrak{I}$; თუ α ზღვარითი რიგობრივი რიცხვია, მაშინ $R_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$. აქ $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$ გაერთიანების სიმრავლედ მიჩნევის შესაძლებლობა გამომდინარეობს იქედან, რომ α და $R_\beta (\beta < \alpha)$ სიმრავლეებია და $\beta < \alpha$ ტოლძალოვანია $\beta \in \alpha$ კუთვნილებისა.

მკითხველი ადვილად შენიშნავს, რომ სიმრავლის ცნების მომდევნო ორი ტოლფასი განსაზღვრისათვის სრულდება მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ სიმრავლის აგება დამთავრებულად წარმოდგენადი პროცესით უნდა ხდებოდეს.

განსაზღვრით, a საგანი არის სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არ არის ინდივიდი და არსებობს ისეთი α რიგობრივი რიცხვი, რომ $a \in R_\alpha$.

სიმრავლის ცნების ეს განსაზღვრა ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრისა:

განსაზღვრით, a საგანს ეწოდება სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი α რიგობრივი რიცხვი, რომ $a \in P(R_\alpha)$.

ამ ორი განსაზღვრის ტოლფასობის დამტკიცებამდე წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი ფორმულები:

$$R_\beta \subset R_\alpha\,(\beta < \alpha); \tag{1}$$

$$R_\beta \in R_\alpha\,(\beta < \alpha); \tag{2}$$

$$a \in b \wedge b \in R_\alpha \rightarrow a \in R_\alpha; \tag{3}$$

$$P(R_\alpha) \in P(R_{\alpha+1})\,(\alpha \in W). \tag{4}$$

(1)-(3) ფორმულების დამტკიცებისას, α-ს მიმართ ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის ძალით, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\begin{aligned}\forall\xi \in W\forall\eta \in W[\xi < \eta \wedge \eta < \alpha \rightarrow [R_\xi \subset R_\eta \wedge R_\xi \in R_\eta \wedge \\ \wedge[a \in b \wedge b \in R_\eta \rightarrow a \in R_\eta]]].\end{aligned} \tag{5}$$

R_α-ს განსაზღვრიდან და (5)-დან ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$P(R_\beta) \cup \mathfrak{I} = R_{\beta+1} \subseteq R_\alpha$$

(დამოუკიდებლად იმისა, α ზღვარითი რიგობრივი რიცხვია თუ არა). თუ $\beta = 0$, მაშინ

$$R_\beta = \mathfrak{I} \subset P(\mathfrak{I}) \cup \mathfrak{I} = R_1 \subseteq R_\alpha.$$

თუ $\beta \neq 0$, მაშინ

$$R_\beta \subset P(R_\beta) \cup \mathfrak{I} \subseteq R_\alpha;$$

აქ მკაცრ შემავლობას უზრუნველყოფს ის გარემოება, რომ (5)-ის ძალით R_β-ს ქვესიმრავლეა მისი ნებისმიერი, ინდივიდისაგან განსხვავებული, ელემენტი და R_β არის $P(R_\beta)$-ს ელემენტი. ახლა ცხადია (1) და (2) ფორმულების სამართლიანობა.

დავამტკიცოთ (3). შემთხვევა, როცა a ინდივიდია, ტრივიალურია. ვთქვათ, a არაა ინდივიდი თუ β არის α-ს უშუალო წინა რიგობრივი რიცხვი, მაშინ b-ს ელემენტი R_β-ს ელემენტია, საიდანაც (1)-ის დახმარებით ვპოულობთ: $a \in R_\beta \subset R_\alpha$. თუ α ზღვარითია, მაშინ b რომელიმე R_γ-ს ($\gamma < \alpha$) ელემენტია და (5)-ის და (1)-ის დახმარებით ვპოულობთ: $a \in R_\gamma \subset R_\alpha$.

(4) ადვილად გამომდინარეობს $R_{\alpha+1} = P(R_\alpha) \cup \mathfrak{I}$ ტოლობიდან.

ახლა სიმრავლის ცნების მოტანილი ორი განსაზღვრის ტოლფასობა შემდეგნაირად მტკიცდება. ვთქვათ, a სიმრავლეა პირველი განსაზღვრის მიხედვით და $a \in R_\alpha$. მაშინ

$$a \in R_\alpha \subset R_{\alpha+1} = P(R_\alpha) \cup \mathfrak{I}$$

აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $a \in P(R_\alpha)$ და, მაშასადამე, a არის სიმრავლე მეორე განსაზღვრის მიხედვითაც. ვთქვათ, ახლა, a სიმრავლეა მეორე განსაზღვრის მიხედვით და $a \in P(R_\alpha)$. მაშინ $P(R_\alpha) \subseteq R_{\alpha+1}$ შემავლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a \in R_{\alpha+1}$ და, მაშასადამე, a არის სიმრავლე პირველი განსაზღვრის მიხედვითაც.

(3) მეტაგამომდინარეობა სიტყვიერად შეიძლება ასე გამოითქვას: R_α-ს ნებისმიერი ელემენტი, თუ ეს ელემენტი სიმრავლეა, წარმოადგენს R_α-ს ქვესიმრავლეს. თუ ინდივიდთა სიმრავლე ცარიელია, მაშინ R_α-ს ნებისმიერი ელემენტი R_α-ს ქვესიმრავლეა.

ახლა, სიმრავლის რანგის ცნება ასე შემოიტანება. a სიმრავლის რანგი, $\mathrm{rg}\, a$, განსაზღვრით, არის უმცირესი α რიგობრივი რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება პირობა: $a \subseteq R_\alpha$. ასეთი α-ს არსებობა ადვილად გამომდინარეობს სიმრავლის ცნების ზემოთ მოტანილ მეორე განსაზღვრიდან, რამდენადაც (საზოგადოთ)

$$a \in P(R_\alpha) \Leftrightarrow a \subseteq R_\alpha. \tag{6}$$

ახლა დავამტკიცოთ რამდენიმე წინადადება.

(5.1) **წინადადება.** R_α არის ყველა ისეთი ელემენტთა სიმრავლე, რომელთა რანგი α-ზე ნაკლებია.

დამტკიცება. ტრანსფინიტური ინდუქციის კანონის ძალით შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ თეორემა სამართლიანია α-ზე ნაკლები ყველა β რიგობრივი რიცხვისათვის. $\alpha = 0$ შემთხვევა ტრივიალურია. ვთქვათ, α-ს აქვს უშუალოდ წინა რიგობრივი რიცხვი γ. მაშინ

$$R_\alpha = P(R_\gamma) \cup \mathfrak{I}. \tag{7}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში R_α-ს ელემენტებია ინდივიდები და R_γ-ს ქვესიმრავლეები. უკანასკნელთა რანგი, ცხადია, γ-ს არ აღემატება (ინდივი-

დების რანგი კი 0-ზე ნაკლებია). ვთქვათ, ახლა a საგნის რანგი α-ზე ნაკლებია (ე. ი. γ-ს არ აღემატება). მაშინ $a \subseteq R_\gamma$. აქედან და (7) ტოლობიდან გამომდინარეობს: $a \in R_\alpha$. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა α ზღვარითი რიგობრივი რიცხვია. მაშინ

$$R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta \tag{8}$$

აქედან და ინდუქციური დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ R_α-ს ნებისმიერი ელემენტის რანგი α-ზე ნაკლებია. ვთქვათ, ახლა, a საგნის რანგი ნაკლებია α-ზე. მაშინ მოიძებნება α-ზე ნაკლები ისეთი γ რიგობრივი რიცხვი, რომ $a \subseteq R_\gamma$. მაშინ $a \in P(R_\gamma) \cup \mathfrak{I} = R_{\gamma+1} \subseteq R_\alpha$. ♦

შედეგი. $R_{\alpha+1}$ არის ყველა ისეთ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთა რანგი α-ს არ აღემატება.

(5.2) წინადადება. α რიგობრივი რიცხვის რანგი არის α.

დამტკიცება. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის ძალით შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ α-ზე ნაკლები თითოეული β რიგობრივი რიცხვის რანგია β. $\alpha = 0$ შემთხვევა ტრივიალურია. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha > 0$. α-ზე ნაკლები ნებისმიერი β რიგობრივი რიცხვისათვის გვექნება:

$$\beta \subseteq R_\beta;\ \beta \in R_{\beta+1} \subseteq \alpha;\ \alpha \subseteq R_\alpha.$$

მტკიცების დასრულებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ α-ზე ნაკლები ნებისმიერი γ რიგობრივი რიცხვისათვის $\alpha \not\subseteq R_\gamma$. დავუშვათ წინააღმდეგი, რომ $\gamma < \alpha \wedge \alpha \subseteq R_\gamma$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\gamma \in R_\gamma$. აქედან კი (5.1) წინადადების ძალით გამომდინარეობს, რომ ინდუქციური დაშვების საწინააღმდეგოდ $\operatorname{rg} \gamma < \gamma$.

შედეგი. $\alpha \overline{\in} R_\alpha$.

(5.3) წინადადება. ნებისმიერი a სიმრავლის რანგი არის ისეთი უმცირესი რიგობრივი რიცხვი α, რომელიც აღემატება a სიმრავლის თითოეული ელემენტის რანგს.

დამტკიცება. (5.1) წინადადებიდან ადვილად გამომდინარეობს დასამტკიცებელ წინადადებაში ხსენებული α რიგობრივი რიცხვის არსებობა. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ a არაა ცარიელი. a სიმრავლის ნებისმიერ e ელემენტისათვის არსებობს ისეთი α-ზე ნაკლები (უმცირესი) γ

რიგობრივი რიცხვი, რომ $c \subseteq R_\gamma$. ამიტომ $e \in R_{\gamma+1} \subseteq R_\alpha$. მაშასადამე, $\alpha \subseteq R_\alpha$. ამიტომ a სიმრავლის რანგი α-ს არ აღემატება. (5.1) წინადადებისა და α რიგობრივი რიცხვის განსაზღვრის ძალით rg a არ შეიძლება იყოს α-ზე ნაკლები.

შედეგი. სიმრავლის რანგი აღემატება მისი ნებისმიერი ელემენტის რანგს.

სამივე დამტკიცებული წინადადებებიდან გამომდინარეობს:

(5.4) წინადადება. R_α სიმრავლეში შემავალი რიგობრივი რიცხვების სიმრავლე არის α. ამასთან, R_α სიმრავლის რანგი არის α.

განხილული სახის სიმრავლეებისა და ინდივიდების ერთობლიობას ვუწოდოთ **სიმრავლეთა თეორიის II ინტუიციური მოდელი.**

თუ შევადარებთ ერთმანეთს სიმრავლეთა თეორიის I და II ინტუიციურ მოდელებს შევნიშნავთ, რომ საგნის (ელემენტის) საფეხურის ანალოგი II მოდელში საგნის რანგია. ამიტომ S_α სიმრავლის ანალოგი არის R_α სიმრავლე. ვიგულისხმებთ, რომ ორივე მოდელს ინდივიდთა ერთი და იგივე ერთობლიობა აქვთ. ასეთ მოდელებს ვუწოდებთ ურთიერთშესაბამის ინტუიციურ მოდელებს. ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ ზემოთ ხსენებული პრინციპი, რომლის ძალით დასრულებულად წარმოდგენადია მოცემული სიმრავლის „ყველა შესაძლებელი" ქვესიმრავლეების აგების პროცესი, არანაკლებ მძლავრია, ვიდრე ის დაშვებები, რომლებიც გამოვიყენეთ სიმრავლეთა თეორიის I ინტუიციური მოდელის აგებისას. აქედან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლეთა თეორიის პირველი ინტუიციური მოდელი მეორე ინტუიციური მოდელის ნაწილია და

$$S_\alpha \subseteq R_\alpha. \tag{8}$$

სიმრავლეთა თეორიის II ინტუიციური მოდელიდან რომ მივიღოთ კლასთა თეორიის II ინტუიციური მოდელი, საგანთა არეს უნდა დავუმატოთ მოდელის ელემენტებისაგან შედგენილი „ყველა შესაძლო" კლასები. აქაც ვიგულისხმებთ, რომ უკანასკნელი პრინციპი არანაკლებ მძლავრია, ვიდრე ის დაშვებები, რომლებიც გამოვიყენეთ შესაბამის კლასთა თეორიის პირველი ინტუიციური მოდელის აგებისას (კლასთა თეორიის I და II ინტუიციონურ მოდელებს ვუწოდებთ ურთიერთშესაბამისებს, თუ მათ ერთი და იმავე ინდივიდთა ერთობლიობა აქვთ). ამრიგად, ურთიერთშესაბამისი მოდელებიდან I მოდელი II მოდელის ნაწილია როგორც სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში, ისე კლასთა თეორიის შემთხვევაში. იგუ-

ლისხმება, რომ ურთიერთშესაბამის ინტუიციურ მოდელებს რიგობრივ რიცხვთა ერთი და იგივე ერთობლიობა აქვთ (რიგობრივ რიცხვთა კლასი (ინტუიციური აზრით) არსებითად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი პროცესებია მიჩნეული დასრულებულად წარმოდგენად პროცესებად).

Π'_α-თი ($\alpha \in W$) აღვნიშნოთ სიმრავლეთა, შესაბამისად კლასთა, თეორიის II ინტუიციური მოდელის α-ზე ნაკლები რანგის მქონე ელემენტთა ერთობლიობაზე (ე.ი. R_α-ზე) განსაზღვრული „X-ის რანგი $< \alpha \wedge P_\alpha(X)$" სახის თვისებათა ერთობლიობა, სადაც X ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია, $P_\alpha(X)$ კი X-ის მიმართ თვისებად განხილული Π-დან აღებული ნებისმიერი შეზღუდულ კვანტორებიანი ფორმულაა, როცა ამ ფორმულაში მყოფი X-გან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია α-ზე ნაკლები რანგის მქონე ელემენტებით. ასევე Π'_ω-ით აღვნიშნოთ კლასთა თეორიის II ინტუიციური მოდელის ელემენტთა ერთობლიობაზე განსაზღვრული „X ელემენტია $P_\omega(X)$" სახის თვისებათა ერთობლიობა, სადაც X ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია, $P_\omega(X)$ კი X-ის მიმართ განხილული II-დან აღებული ნებისმიერი შეზღუდულ კვანტორებიანი ფორმულაა, როცა ამ ფორმულაში მყოფი X-გან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია ელემენტებით. ვიგულისხმებთ (და ეს ბუნებრივიც იქნება), რომ Π'_α-დან აღებული თითოეული თვისება (შესაბამისი მოდელის) სიმრავლეს განსაზღვრავს (ასეთ სიმრავლეთა ერთობლიობა მოიცავს R_α-ს. α-ზე დამოკიდებულ ასეთ ერთობლიობათა გაერთიანება კი დაემთხვევა მოდელის ყველა სიმრავლის ერთობლიობას), Π'_ω-დან აღებული თითოეული თვისება კი კლასს განსაზღვრავს (ასეთ კლასთა ერთობლიობა მოდელის კლასთა ერთობლიობის ნაწილი იქნება — მათ ტოლობაზე ვერაფერს ვიტყვით). მაშინ ადვილად დამტკიცდება, რომ ყოველი სიმრავლე კლასია. უკანასკნელი ორი დაშვებიდან პირველი განსაკუთრებით მძლავრი დაშვებაა მეორესთან შედარებით. საქმე იმაშია, რომ პირველი დაშვება გარკვეულ მოთხოვნას უყენებს ერთობლიობას, რომელიც ბიჯების მძლავრი — ტრანსფინიტური მიმდევრობით შეიქმნა — იგი აღნიშნულ ბიჯებს ზღუდავს ერთბაშად. მეორე დაშვება კი ზღუდავს ერთადერთ ბიჯს, რომლითაც ელემენტთა ერთობლიობიდან კლასთა ერ-

თობლიობა მიიღება. მოითხოვება, რომ აღნიშნული ერთადერთი ბიჯი არანაკლებ მძლავრი იყოს, ვიდრე ხსენებული მეორე დაშვება. ამასთან, ეს უკანასკნელი სავსებით ბუნებრივ მოთხოვნას წარმოადგენს.

კლასთა თეორიის II ინტუიციურ მოდელშიც, კლასს, რომელიც სიმრავლე არაა, ეწოდება **ზესიმრავლე** ანუ **საკუთრივი კლასი**. განსაზღვრით, ზესიმრავლე არის **უმაღლესი რანგის საგანი** (იგულისხმება, რომ ზესიმრავლეებს ერთი და იგივე რანგი აქვთ და ეს რანგი აღემატება ყველა დანარჩენი საგნის რანგს).

ცხადია, კლასთა თეორიის II ინტუიციურ მოდელში სიმრავლის ქვესიმრავლეთა კლასი სიმრავლეა. მაგრამ პრობლემატურია საკითხი: სიმრავლის ქვეკლასი სიმრავლეა თუ არა?

თუ კლასთა თეორიის II ინტუიციური მოდელის განსაზღვრისას კლასის ცნებას შევზღუდავთ Π'_∞-დან აღებული თვისებებით განსაზღვრული კლასებით (ამ კლასების ერთობლიობა მოიცავს ისეთი კლასების ერთობლიობას, რომლებიც (შესაბამისს) კლასთა თეორიის I ინტუიციურ მოდელში იგება), მაშინ დამტკიცდება, რომ სიმრავლის ქვეკლასი სიმრავლეა. უფრო მეტიც, ამ შემთხვევაში დამტკიცდება (1;(3.1)) თეორემის შემდეგი სრული ანალოგი: (a) A კლასი არის სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი რიგობრივი რიცხვი, რომელიც აღემატება A კლასის თითოეული ელემენტის რანგს. ამასთან, (a) წინადადება ისევე მტკიცდება, როგორც (1;(3.1)) თეორემა. (a) წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ ზესიმრავლის ელემენტთა რანგები არაა შემოსაზღვრული რიგობრივი რიცხვით. ამიტომ სიმრავლესა და ზესიმრავლეს შორის აქაც ისეთივე არსებითი განსხვავებაა, როგორც კლასთა თეორიის I ინტუიციურ მოდელში (იხ. 1.3) გვქონდა.

სიმრავლეთა თეორიის II ინტუიციურ მოდელშიც გვექნება კლასის ცნება, როგორც ისეთი ერთობლიობების, რომლებიც Π'_∞-დან აღებული თვისებებით განისაზღვრებიან, კლასის ცნებასთან დაკავშირებულ ცნებებთან ერთად, რომელთა ზუსტი აზრის გახსნისათვის მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ის გარემოება, რომ კლასი საგანი არ არის.

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს (დამტკიცდეს ინტუიციური მსჯელობით), რომ სიმრავლეთა თეორიის II ინტუიციური მოდელი არის ZF აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიის მოდელი (ვგულისხმობთ იმ შემთხვევას, როცა ინდივიდთა ერთობლიობა ცარიელია) ანალოგიური წინადადების

დამტკიცება I ინტუიციური მოდელის შემთხვევაში სერიოზულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული.

ZF აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომების ჭეშმარიტობის საკითხი ორივე ინტუიციურ მოდელში შევისწავლოთ პარალელურად.

1. სიმრავლის ინტუიციური ცნების განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ განფენილობის აქსიომა ჭეშმარიტია ორივე ინტუიციურ მოდელში.

2. რეგულარობის აქსიომის ჭეშმარიტობა შემდეგნაირად მტკიცდება სიმრავლეთა თეორიის I, შესაბამისად II, ინტუიციურ მოდელში. არაცარიელ x სიმრავლის ელემენტთა საფეხურებს, შესაბამისად რანგებს შორის არსებობს უმცირესი α რიგობრივი რიცხვი (I; 3). თუ y არის α საფეხურის, შესაბამისად რანგის, მქონე x-ის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $y \cap x = \varnothing$ (რამდენადაც სიმრავლის საფეხური, შესაბამისად რანგი, მისი ნებისმიერი ელემენტის საფეხურზე, შესაბამისად რანგზე, მეტია და, მაშასადამე, y-ის ელემენტი არ შეიძლება იყოს x-ის ელემენტი).

3. ქვესიმრავლეთა აქსიომების ჭეშმარიტობა სიმრავლეთა თეორიის II ინტუიციური მოდელის შემთხვევაში არის უბრალო შედეგი იმ ფაქტის, რომ სიმრავლის რანგი (როგორც ეს უშუალოდ გამომდინარეობს რანგის განსაზღვრიდან) არაა ნაკლები მისი ნებისმიერი ქვესიმრავლის რანგზე. ანალოგიური წინადადება სიმრავლის ქვესიმრავლის საფეხურის შესახებ ჭეშმარიტი არ უნდა იყოს (ვერ ვრიცხავთ იმის შესაძლებლობასაც, რომ მოცემული A სიმრავლის ქვესიმრავლის საფეხური რაგინდ დიდი იყოს (ე.ი. ნებისმიერი α რიგობრივი რიცხვისათვის არსებობდეს α-ზე მეტი საფეხურის მქონე A სიმრავლის ქვესიმრავლე). მიუხედავად ამისა, სიმრავლეთა თეორიის I ინტუიციურ მოდელში ქვესიმრავლეთა აქსიომები ჭეშმარიტია.

ქვესიმრავლეთა აქსიომების ჭეშმარიტობა სიმრავლეთა თეორიის I ინტუიციური მოდელის შემთხვევაში შემდეგნაირად მტკიცდება. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\exists Z \forall X [X \in Z \leftrightarrow X \in Y \wedge A] \tag{9}$$

ქვესიმრავლეთა აქსიომის მაგალითია. ამ ფორმულის თავისუფალი ცვლადების გადათვლა იყოს $X_1, \ldots X_n, Y$ უნდა დავამტკიცოთ (9)-ის ჭეშმარიტობა $X_1, \ldots X_n, Y$ ცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი $a_1, \ldots, a_n, a$ სისტემისათვის. ამ სისტემის (9)-ში ჩასმის შედეგი იყოს

$$\exists Z \forall X[X \in Z \leftrightarrow X \in a \wedge A^{*}(X)] \quad (10)$$

(იგულისხმება, რომ $a_1,...,a_n,a$ დამხმარე სიმბოლოებია და (10) არის ამ სიმბოლოებით გაფართოებული თეორიის ფორმულა). α იყოს უმცირესი რიგობრივი რიცხვი, რომელიც აღემატება $a_1,...,a_n,a$ სიმრავლეთა საფეხურებს. მაშინ I ინტუიციური მოდელის განსაზღვრის ძალით არსებობს ისეთი Z_0 სიმრავლე, რომელიც განისაზღვრება თვისებით „$SX < \alpha \wedge X \in a \wedge A^{*}(X)$". რადგან ეს თვისება ტოლძალოვანია თვისებისა „$X \in \alpha \wedge A^{*}(X)$", ამიტომ Z_0 ისეთი სიმრავლეა, როგორი სიმრავლის არსებობასაც ამტკიცებს (10) ფორმულა. მაშასადამე, (10) ფორმულა ჭეშმარიტია. აქედან და $a_1,...,a_n,a$ სისტემის ნებისმიერობიდან გამოდის (9) ფორმულის ჭეშმარიტობა.

4. ქვესიმრავლეთა სიმრავლის აქსიომების ჭეშმარიტობა სიმრავლეთა თეორიის II ინტუიციურ მოდელში უშუალოდ გამომდინარეობს მოდელის განსაზღვრიდან — იმ ძირითად პრინციპიდან (დაშვებიდან), რომელიც საფუძვლად უდევს მოდელის განსაზღვრას. ამასთან, a სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლის რანგი a სიმრავლის რანგის უშუალოდ მომდევნო რიგობრივი რიცხვია.

სიმრავლეთა თეორიის I ინტუიციური მოდელის შემთხვევაში განხილული აქსიომის ჭეშმარიტობის დამტკიცება მოითხოვს იმის ჩვენებას, რომ ნებისმიერი A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა საფეხურების ზემოდან შემოსაზღვრულია რიგობრივი რიცხვით (თუ რომელიმე A სიმრავლისათვის ასეთი რიგობრივი რიცხვი არ არსებობს, მაშინ A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე არ იარსებებს).

5. უსასრულობის აქსიომის ჭეშმარიტობა ორივე ინტუიციური მოდელის შემთხვევაში გამომდინარეობს იქიდან, რომ ω ისეთი სიმრავლეა, როგორი სიმრავლის არსებობასაც ადგენს ხსენებული აქსიომა.

6. შერჩევისა და გაერთიანების აქსიომების ჭეშმარიტობა ორივე მოდელის შემთხვევაში შემდეგნაირად მტკიცდება.

ვთქვათ, X_1 სიმრავლის ყოველ x ელემენტს ეთანადება X_x სიმრავლე. საკმარისია დამტკიცდეს, რომ (X_x სიმრავლეების გაერთიანება) $\bigcup\limits_{x \in X_1} X_x$ კლასი სიმრაველეა.

X_1 და X_x ($x \in X_1$) სიმრავლეებიდან თითოეულის წარმოქმნის პროცესი დასრულებულად წარმოდგენადია (სიმრავლის დამახასიათებელი თვისება). აქედან, რამდენადაც X_x სიმრავლეთა ინდექსი გაირბენს X_1 სიმრავლეს, გამომდინარეობს, რომ ყველა X_x სიმრავლის წარმოქმნის პროცესი დასრულებულად წარმოდგენადია (უფრო ზუსტად: ვუშვებთ, რომ განხილულ პირობებში ყველა X_x სიმრავლის წარმოქმნის პროცესი დასრულებულად წარმოდგენადია). მაშასადამე, $\bigcup\limits_{x \in X_1} X_x$ კლასის წარმოქმნის პროცესიც დასრულებულად წარმოდეგანადია, ე. ი. იგი სიმრავლეა.

სავარჯიშო. შეისწავლეთ ანალოგიური საკითხები კლასთა თეორიის I და II ინტუიციური მოდელებისათვის კლასთა თეორიის მოტანილი მაგალითების შემთხვევაში.

შენიშვნა. როგორც ვიცით, (2; 2.3) თეორია არაწინააღმდეგობრივია, თუ მას აქვს მოდელი. თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის დასამტკიცებლად ინტუიციური მოდელები არ გამოდგება, რადგანაც ასეთი მოდელები მიიღებიან არანათელ (არამკაცრ) პრინციპებზე დაყრდნობით. მიუხედავად ამისა, ასეთი მოდელები აძლიერებენ იმის რწმენას, რომ თეორია არაწინააღმდეგობრივია. საკითხი სიმრავლეთა თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის შესახებ ჯერაც გადაუწყვეტი (მძიმე) პრობლემაა.

IV თავი

4. სიმრავლურ-თეორიული თვალსაზრისი მათემატიკაში

4.1 ნატურალური და მთელი რიცხვები

4.1.1 წინასწარი შენიშვნები. მხედველობაში გვექნება $\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორია $\mathcal{A}$ მოდელით და ის შენიშვნები, რომლებიც მოტანილია 3.2 პარაგრაფის დასაწყისში (შემამოკლებელი სიმბოლოების განსაზღვრამდე). ქვემოთ განხილული თეორიები გააზრებული იქნება როგორც $\overline{S}$ თეორიის ფრაგმენტი $\overline{S}$ თეორიის ნებისმიერად აღებულ მოდელში. ამასთან, ზოგჯერ გაკეთდება მითითება იმის შესახებ თუ როგორ შეიძლება ესა თუ ის თეორია განვიხილოთ $\overline{S}$ თეორიისაგან დამოუკიდებლად როგორც პირველი რიგის თეორია.

$\overline{S}$ სიმრავლეთა თეორიის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ მოდელში ცდილობენ მათემატიკურ თეორიაში შესასწავლი ყველა საგანი წარმოიდგინონ სიმრავლის ან კლასის სახით და ეს საკმაო წარმატებით მიიღწევა. ჩვენი უახლოესი მიზანია რიცხვის ცნება განვსაზღვროთ ბუნებრივი გზით ისე, რომ რიცხვები სიმრავლეები იყოს. ჩვეულებრივ ენაში ნატურალური რიცხვები დათვლის პროცესების შედეგად მიიღებიან. ქვემოთ გავეცნობით ნატურალურ რიცხვებს, როგორც სიმრავლეებს. განხილული იქნება სხვადასხვა სახის ნატურალური რიცხვები, რომელთაგან თითოეული სახის ნატურალურ რიცხვებს ისეთივე ძირითადი თვისებები ექნებათ, რაც ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვებს. შევნიშნოთ, რომ ყოველი სახის ნატურალური რიცხვები (კერძოდ, **ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვები**) და მათი თვისებები შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი სახის ნატურალურ რიცხვთა განსაზღვრისა და შესწავლის დროს.

4.1.2 ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვები. ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვის ცნება ძირითად ცნებას წარ-

მოადგენს. ეს ნატურალური რიცხვები (ათობითი სისტემის მიხედვით) აღინიშნებიან 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 სიმბოლოებით (ციფრებით) შედგენილი შემდეგი სახის სიტყვებით:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots \qquad (1)$$

არაა იმის არავითარი იმედი, რომ ჩვენ შევძლებთ ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვის ცნების დაყვანას რაიმე არსებითად უფრო მარტივ ცნებებზე. მაგრამ თუ ჩვენ შევისწავლით ჩვენ წარმოდგენებს ნატურალურ რიცხვთა 0, 1, 2, 3, ... მიმდევრობის შესახებ, ჩვენ შევძლებთ გამოვარკვიოთ ნატურალურ რიცხვების შესახებ ჩვენი მსჯელობების საფუძვლები. ასეთ გამოკვლევას მივყევართ შემდეგ დასკვნამდე:

ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვთა მწკრივი არის საგანთა N სისტემა 0 საგნობრივი კონსტანტით და $|$ ერთადგილიანი ძირითადი ოპერაციით, ამასთანავე, თუ ვიგულისხმებთ, რომ საგნობრივი ცვლადებია n, m, ℓ, k ასოები უინდექსოდ ან ინდექსებით, $|$ ოპერაციის n ობიექტზე (ნატურალურ რიცხვზე) გამოყენების $|n$ შედეგი (გამარტივებულად) აღინიშნება n'-ით და n'-ს ეწოდება **n-ის უშუალო შემდეგი**, მაშინ ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვთა მწკრივის ყველა ცნობილი ძირითადი თვისება არის შედეგი **პეანოს აქსიომების** სახელწოდებით ცნობილი შემდეგი ხუთი წინადადებისა და ძირითადი არითმეტიკული პრედიკატების და ოპერაციების ქვემოთ მოტანილ განსაზღვრებებიდან

1. $0 \in N$;

2. $n \in N \rightarrow n' \in N$;

3. $n \in N \rightarrow n' \neq 0$;

4. $n \in N \wedge m \in N \wedge m' = n' \rightarrow n = m$;

5. $P(0) \wedge \forall n \in N[P(n) \rightarrow P(n')] \rightarrow \forall n \in NP(n)$ N-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი P თვისებისათვის (ინდუქციის აქსიომა).

შენიშვნა. თავისთავად ცხადია, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი გამომდინარეობა:

$$n \in N \wedge m \in N \wedge n = m \rightarrow n' = m'$$

ცხადია, ინდუქციის აქსიომა **წარმოადგენს მათემატიკური ინდუქციის კანონს – მათემატიკური ინდუქციის პრინციპს.**

შევნიშნოთ, რომ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი (ინდუქციის აქსიომა) ტოლფასია შემდეგი წინადადების:

5′. გარდა 1-ელი და მე-2 პუნქტების (აქსიომების) სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით მოღებული ნატურალური რიცხვებისა, სხვა ნატურალური რიცხვი არ არსებობს.

უფრო ზუსტად: 1-ელი, მე-2 და მე-5 აქსიომების ერთობლიობა ტოლფასია 1-ელი, მე-2 და მე-5′ წინადადებების (აქსიომების) ერთობლიობის.

მართლაც, ჯერ ვაჩვენოთ, რომ 1-ელი, მე-2 და მე-5′ წინადადებებიდან გამომდინარეობს მე-5 აქსიომა. დავუშვათ, შესრულებულია (1) და (2) და n არის ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. მაშინ 5′-ის ძალით n მიიღება (1) და (2) პუნქტების სასრული რიცხვჯერ გამოყენებით. (1) და (2) შესაძლებლობას იძლევა n-ის მიღებისას გზადაგზა ყოველი ნაბიჯის დროს მიღებული ნატურალური m რიცხვისათვის ვამტკიცებთ, რომ m-ს აქვს P თვისება. ახლა ვაჩვენოთ, რომ მე-5′ გამომდინარეობს 1-ელი, მე-2 და მე-5 აქსიომებიდან. ამისათვის, თავის მხრივ, საკმარისია მათემატიკური ინდუქციის კანონი გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაში, როცა $P(n)$-ად აღებულია წინადადება „n მიიღება 1-ელი და მე-2 აქსიომების სასრული რიცხვჯერ გამოყენებით".

ახლა ცხადია, რომ $0,0',0'',\ldots$ მიმდევრობის წევრთა შორის იმყოფება თითოეული ნატურალური რიცხვი.

მე-3 და მე-4 აქსიომებიდან გამომდინარეობს რომ სხვადასხვა $0''^{\cdots'}$ სახის სიმბოლოებით წარმოდგენილი ნატურალური რიცხვები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი: 1-ელი პუნქტის ერთჯერ და მე-2 პუნქტის რამდენჯერმე გამოყენებით მიღებული $0,1,\ldots,n$ ნატურალური რიცხვები თუ წყვილ-წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, მაშინ თუ მათ დაუმატებთ n'-ს მივიღებთ ისევ წყვილ-წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავებულ $0,1,\ldots,n,n'$ ნატურალურ რიცხვებს. ამისათვის კი საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ n' განსხვავდება $0,1,\ldots,n$ რიცხვებიდან თითოეულისაგან. 0-გან იგი განსხვავდება მე-3 პუნქტის ძალით. დანარჩენი შეიძლება ვაჩვენოთ შემდეგნაირად. 0-გან განსხვავებული ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვი $0,1,\ldots,n$ მიმდევრობიდან წარმოიდგინება სახით m', სადაც m არის $0,1,\ldots,n$ მიმდევრობაში k-ს უშუალო წინა წევრი. საჭიროა ვაჩვენოთ $n' \neq m'$. დავუშვათ წინააღმდეგი, რომ $n' = m'$, მაშინ მეოთხე აქსიომის ძალით გვექნება $m = n$. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას რომ $0,1,\ldots,n$ მიმდევრობის წევრები წყვილ-წყვილად განსხვავებულნი არიან. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმას, რომ $n' \neq m'$

1-ელი და მე-2 აქსიომების დახმარებით ნატურალური რიცხვები მიიღება გარკვეული რიგით. ამის შესაბამისად ვსაზღვრავთ $n > m$ უტოლო-

ბას. უტოლობა $n > m$ (იკითხება: „n მეტია m-ზე") აღნიშნავს იმას, რომ 1-ელი და მე-2 პუნქტების გამოყენებით n-ის მიღების პროცესში n-ის მიღებამდე მიიღება m. უტოლობის ეს განსაზღვრა შეიძლება დავანაწევროთ და მივიღოთ უტოლობის შემდეგი ინდუქციური განსაზღვრა:

1. $m' > m$;

2. თუ $n > m$, მაშინ $n' > m$;

3. $n > m$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს მიიღება 1-ელი და მე-2 პუნქტების სასრული რიცხვჯერ გამოყენებით.

მოცემულ m ნატურალურ რიცხვზე მეტი ნატურალური რიცხვების ამ განსაზღვრას აქვს ნატურალური რიცხვების ინდუქციური განსაზღვრის სახე, როცა 0-ის ნაცვლად აღებულია m' (მხედველობაშია განსაზღვრის 1-ელი, მე-2 და მე-5' პუნქტები).

ახლა მიმართებები $<$, $\geq$ და $\leq$ შესაბამისად შემდეგი ეკვივალენტობებით განისაზღვრებიან.

$$m < n \leftrightarrow n < m;$$

$$m \geq n \leftrightarrow m > n \vee m = n;$$

$$m \leq n \leftrightarrow n \geq m;$$

$m < n$, $m \geq n$ და $m \leq n$ შესაბამისად იკითხებიან: „m ნაკლებია n-ზე," „m მეტია ან ტოლი n-ზე," „m ნაკლებია ან ტოლია n-ზე." ამრიგად, სიმბოლოები $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ იკითხებიან: „მეტია," „ნაკლებია," „მეტია ან ტოლი," „ნაკლებია ან ტოლი." ამ მიმართებათა სახელწოდებებია: **(მკაცრად) მეტობა** (ანუ **(მკაცრად) მეტობის მიმართება**), **(მკაცრად) ნაკლებობა, არამკაცრად მეტობა, არამკაცრად ნაკლებობა.** $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\neq$ მიმართებების საერთო სახელია **უტოლობა**".

4.1.3 ზოგადი სახის ნატურალური რიცხვები. ის ფაქტი, რომ ჩვენი მსჯელობები ნატურალურ რიცხვების შესახებ ეყრდნობა მხოლოდ 1-5 წინადადების (ასეთი სახით ნატურალური რიცხვების თეორია პირველად განიხილა პეანომ) საშუალებას გვაძლევს ნატურალურ რიცხვთა თეორია განვიხილოთ უფრო ზოგადი აზრით: განვიხილოთ საგანთა (ობიექტთა) ნებისმიერი ისეთი სისტემა, რომლებსაც განსაზღვრით ეწოდებათ ნატურალური რიცხვები, რომელთა შორის ერთ

გარკვეულ ობიექტს ეწოდება ნული, აღინიშნება 0 სიმბოლოთი, სადაც მოცემულია საწყისი — პირველადი ოპერაცია „|"-ით აღნიშნული (განსაზღვრით, ამ ოპერაციის n ნატურალურ რიცხვზე გამოყენების შედეგი |n გამარტივებულად აღინიშნება n' და ეწოდება n-ის **უშუალო შემდეგი**) და შესრულებულია პეანოს აქსიომებად წოდებული 1-5 წინადადებები. მაშინ $0, 0', 0'', \ldots$ აღმოჩნდება ყველა ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა (ცხადია, ნატურალური რიცხვის ასეთი ზოგადი ცნება საზოგადოდ არ დაემთხვევა ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვის ცნებას). **ნატურალური რიცხვის** ასეთი **ზოგადი ცნების** შემთხვევაშიც ძალაში იქნება ყველაფერი, რაც ზემოთ ვთქვით ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვების შესახებ.

ნატურალური რიცხვის ასეთი ზოგადი ცნების შემთხვევაში **შეკრების ოპერაცია „+"** განისაზღვრება შემდეგი ე. წ. რეკურსიული განსაზღვრით:

$$\begin{cases} n + 0 = n & (1) \\ n + m' = (n + m)' & (2) \end{cases}$$

ეს ფორმულები განსაზღვრავს $n + m$-ს ნებისმიერ n და m ნატურალურ რიცხვებისათვის შემდეგნაირად: (1) განსაზღვრავს $n + m$-ს იმ შემთხვევაში, როცა $m = 0$ (2) განსაზღვრავს $n + p'$-ს იმ შემთხვევაში, როცა განსაზღვრულია $n + p$. მაშასადამე, რომ განისაზღვროს $n + m$ საჭიროა (1)-ის გამოყენებით განისაზღვროს $n + 0$ და შემდეგ (2)-ის რამდენჯერმე გამოყენებით თანდათანობით განისაზღვრონ $n + 0'$, $n + 0''$, $n + 0'''$ და ა. შ. მანამ, სანამ მეორე შესაკრები არ იქცევა m-ად (m-ს აქვს სახე $0''^{\cdots'}$)

ანალოგიურად, **გამრავლების ოპერაცია** შემოიტანება შემდეგი რეკურსული განსაზღვრით:

$$\begin{cases} n \cdot 0 = 0; \\ n \cdot m' = n \cdot m + n \end{cases}$$

გამოკლებისა და გაყოფის არა ყველგან განსაზღვრული ოპერაციები (ე. წ. **ნაწილობრივი ოპერაციები**) განისაზღვრებიან, როგორც შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციათა შექცეული ოპერაციები. სახ-

ელდობრ: ორი m და n ნატურალური რიცხვის **სხვაობა** შესაბამისად **განაყოფი** ეწოდება ისეთ ნატურალურ k რიცხვს (თუ არსებობს), რომლისთვისაც $n + k = m$ შესაბამისად $n \cdot k = m$. სხვაობა, შესაბამისად განაყოფი, n და m რიცხვებისა აღინიშნება $n - m$ -ით, შესაბამისად $n : m$-ით.

სიძნელეს არ წარმოადგენს შემოტანილ ოპერაციათა და უტოლობათა იმ თვისებების დამტკიცება, რომლებიც ჩვენთვის ცნობილია ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვებისათვის (ასეთი დამტკიცებები მოცემულია [18]-ში).

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ შემდეგი თეორემები.

1. ნებისმიერად აღებულ ორ m და n ნატურალურ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ერთს და მხოლოდ ერთს შემდეგი სამი შემთხვევიდან:

$$m = n;\ m > n;\ m < n.$$

2. ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ არაცარიელ A სიმრავლეში არსებობს მინიმალური ელემენტი (ე. ი. არსებობს ისეთი n ნატურალური რიცხვი A-დან, რომელიც ნაკლებია მისგან განსხვავებულ და A სიმრავლედან აღებულ ყოველ ნატურალურ რიცხვზე (მითითება. განიხილეთ შემთხვევები: 1) $0 \in A$; 2) $0 \overline{\in} A \wedge 1 \in A$; 3) $0 \overline{\in} A \wedge 1 \overline{\in} A \wedge 2 \in A$ და ა. შ.)

3. $n < m \wedge m \leq k \rightarrow n < k$.

4. $n \leq m \wedge m < k \rightarrow n < k$.

5. $n \cdot 1 = n$.

6. თუ $n \neq 0$, მაშინ არსებობს ერთადერთი ისეთი ნატურალური m რიცხვი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას: $n = m'$ (ასეთ ერთადერთ ნატურალურ m რიცხვს ეწოდება n-ის **უშუალოდ წინა ნატურალური რიცხვი**).

7. $n < m \wedge m < k \rightarrow n < k$ („$<$“ მიმართების ტრანზიტულობა).

8. $n \leq m \wedge m \leq k \rightarrow n \leq k$ („$\leq$“ მიმართების ტრანზიტულობა).

9. $n \neq 0 \rightarrow m + n > m$.

10. $m \geq n \wedge m_1 \geq n_1 \rightarrow m + m_1 \geq n + n_1$.

11. $m > n \wedge m_1 > n_1 \rightarrow m + m_1 > n + n_1$.

12. $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-\text{ჯერ}}$.

შენიშვნა. უკანასკნელი თვისების შესაბამისად ხშირად $n \cdot m$ ნამრავლს განსაზღვრავენ, როგორც ტოლშესაკრებთა ჯამს, სადაც თითოეული შესაკრები არის n, შესაკრებთა რიცხვი კი არის m. ორივე განსაზღვრის ტოლფასობა ცხადია.

შენიშვნა. ნატურალური რიცხვის განხილულ N ზოგად აქსიომურ თეორიას არ აქვს ისეთი სახე, როგორიც უნდა ჰქონდეს მათემატიკურ თეორიას. ზემოთ მოტანილი შეთანხმებების შესაბამისად. მას შეიძლება მიეცეს ჩვეულებრივი მათემატიკური თეორიის სახე შემდეგნაირად (სიმარტივისათვის ვიხილავთ შინაარსული თეორიის შემთხვევას, როცა გამოყვანის წესები და ლოგიკური აქსიომები სრულიად ზედმეტია). ვიგულისხმებთ, რომ N თეორიის ალფაბეტი ლოგიკურ სიმბოლოებად შეიცავს პირველი რიგის თეორიის ლოგიკურ სიმბოლოებს და ერთადგილიან პრედიკატულ ცვლადებს, არა ლოგიკურ სიმბოლოებად კი შეიცავს 0 არასაკუთრივ საგნობრივ კონსტანტას და $|$ ერთადგილიან ფუნქციონალურ სიმბოლოს. $n, m, n_0, m_0, n_1, m_1, \ldots$ იყოს მეტაცვლადები, რომელთა მნიშვნელობათა არეებია საგნობრივი ცვლადების ერთობლიობა, P კი იყოს მეტაცვლადი, რომლის მნიშვნელობათა არეა (ერთადგილიანი) პრედიკატული ცვლადების ერთობლიობა. მაშინ N თეორიის აქსიომები იქნებიან (n' არის $|n$-ის გამარტივებული აღნიშვნა).

1. $n' \neq 0$, სადაც n ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია.

2. $n' = m' \rightarrow n = m$, სადაც n და m ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადებია.

3. $P0 \wedge \forall n[Pn \rightarrow Pn'] \rightarrow \forall nPn$, სადაც P ნებისმიერი (ერთადგილიანი) პრედიკატული ცვლადია (ინდუქციის აქსიომა).

პეანოს 1-ელი და მე-2 აქსიომები სრულიად ზედმეტია (ისინი ინტერპრეტაციის N უნივერსუმის ტრივიალური თვისებებია).

ცხადია, N არაა პირველი რიგის თეორია: თუ ინდუქციის აქსიომას შევზღუდავთ და მოვითხოვთ მის შესრულებას მხოლოდ ფორმულებით განსაზღვრულ ერთადგილიან პრედიკატებისათვის, მაშინ მივიღებთ პირველი რიგის თეორიას, რომლის ალფაბეტში პრედიკატული ცვლადები აღარ გვექნება და რომლის არალოგიკური აქსიომები იქნება 1-ელი, მე-2 და ქვემოთ მოტანილი მე-3′ აქსიომა (ამ შემთხვევაში მხედველობაში გვაქვს თეორიის ფორმალური ვარიანტიც):

3′. $A(0) \wedge \forall n[A(n) \rightarrow A(n')] \rightarrow \forall nA(n)$,

სადაც $A(n)$ ნებისმიერი ფორმულაა, n ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია, $A(0)$ და $A(n')$ კი მიიღებიან $A(n)$-დან n ცვლადის თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად 0 და n' გამოსახულების ჩასმით. ასეთ პირველი რიგის თეორიას (როგორც შინაარსულ, ისე ფორმალურ ვარიანტს) **პეანოს არითმეტიკა** ეწოდება და იგი აღინიშნება P-თი. [38]-ში (იხ. (8;(8.1))) მოცემულია პეანოს არითმეტიკის სხვაგვარი ფორმულირება, სადაც 0 და $|$ არალოგიკური სიმბოლოების გარდა, არალოგიკური სიმბოლოებია ორადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლოები $+$ და და ორადგილიანი პრედიკატული სიმბოლო $<$. თუ N თეორიის მე-3 აქსიომას (ინდუქციის აქსიომას) გამოვიყენებთ $\{0,0',0'',...\}$ ერთადგილიან პრედიკატზე (თვისებაზე), ადვილად მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ N თეორიის მოდელის უნივერსუმი შედგენილია $0,0',0'',...$ ობიექტებისაგან. დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ N თეორია იმ სახით რა სახითაც იგი მოცემულია კონტექსტში, უნდა განვიხილოთ როგორც T სიმრავლეთა თეორიის ფრაგმენტი: N-ით აღნიშნულია ინტერპრეტაციის უნივერსუმი იგი აღებულია T თეორიის მოდელის უნივერსუმიდან და მონაწილეობს აქსიომების ფორმულირებებში — აქსიომები არიან N დამხმარე საგნობრივი კონსტანტით გაფართოებული T თეორიის ენის ფორმულები.

4.1.4 ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვები. ახლა, ნატურალური რიცხვის განზოგადოებული ცნების შესაბამისად, ნატურალურ რიცხვებს განვსაზღვრავთ როგორც გარკვეულ სიმრავლეებს (რომლებსაც სხვა სახის ნატურალურ რიცხვებისაგან განსასხვავებლად ზოგჯერ ვუწოდებთ **ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს**) ისე, რომ ამ სიმრავლეებისათვის ოპერაციის როლს შეასრულებს 3.3.2 პუნქტში შემოტანილი იმავე $|$ სიმბოლოთი აღნიშნული სიმრავლური (უფრო ზუსტად: კლასური) ოპერაცია და ამ ოპერაციის n ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვზე (სიმრავლეზე) გამოყენების $|n$ შედეგი აღინიშნება ისევ n'-ით და გვექნება მასთან დაკავშირებული ისეთივე ცნებები და ტერმინები როგორი ცნებებიც და ტერმინებიც ზემოთ გვქონდა. ამასთან, შესრულებული იქნებოდა 1-5 აქსიომები (ან, რაც იგივეა, შესრულებული იქნება პეანოს აქსიომები).

ნატურალური რიცხვები (როგორც სიმრავლეები) შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად.

1. ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$ არის (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვი.

2. თუ n არის (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვი, მაშინ n' (ე. ი. $n \cup \{n\}$) არის (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვი.

3. 1-ელი და მე-2 პუნქტების გამოყენებით მიღებული (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვების გარდა, სხვა (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვი არ არსებობს.

ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა თეორიაში ცარიელ სიმრავლეს ნული ეწოდება და აღინიშნება 0 ასოთი. ამრიგად, ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვებია შემდეგი სიმრავლეები:

$$0, 0', 0'', 0''' \ldots \qquad (1)$$

სიმრავლური „|" ოპერაციის განსაზღვრის ძალით სიმრავლეთა (1) მიმდევრობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$0, \{0\}, \{0,\{0\}\}, \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\},\ldots \qquad (2)$$

თუ ამ სიმრავლეებს ციფრებისაგან შედგენილ სიტყვებით აღვნიშნავთ, ათობითი სისტემის მიხედვით, მივიღებთ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \ldots,\ n,\ldots$$

სადაც n არის მე-n წევრი (გადანომვრას ვიწყებთ 0-ით: 0 ნულოვანი წევრია, 1 პირველი წევრია და ა. შ.). ამ აღნიშვნების გამოყენებით (2) მიმდევრობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$0,\ \{0\},\ \{0, 1\},\ \{0, 1, 2\},\ldots,\{0, 1, 2, 3,\ldots, n-1\},\ldots$$

ამრიგად, ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვები აღინიშნებიან ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვების აღმნიშვნელ სიმბოლოებით, ისე რომ n-ით აღნიშნული (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვი, როგორც ადვილი დასანახია, n-ელემენტიანი სიმრავლეა[1]. აქედან ცხადია, რომ (1) ან, რაც იგივეა, (2) მიმდევრობის წევრები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. აქედან ადვილად გამომდინარეობს რომ ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში 1-3 აქსიომის გარდა შესრულებული იქნება ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნების 4-5 აქსიომებიც.

ამრიგად, ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვის ცნება წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნების კერძო შემთხვევას. ამიტომ ყვე-

---

[1] ამ წინადადების სიტყვაში „n-ელემენტიანი" n აღნიშნავს ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვს.

ლაფერი, რაც ჩვენ წინა პუნქტში ვთქვით ზოგადი სახის ნატურალური რიცხვების შესახებ, ძალაშია ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვების შემთხვევაში.

ადვილი დასანახია, რომ ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვების შემთხვევაში

$$\mathrm{m} > \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{n} \subset \mathrm{m}; \quad \mathrm{m} > \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{n} \in \mathrm{m}; \quad \mathrm{n} \subset \mathrm{m} \leftrightarrow \mathrm{n} \in \mathrm{m}.$$

ამიტომ, ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვების შემთხვევაში $\mathrm{m} > \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{n} \subset \mathrm{m}$ და $\mathrm{m} > \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{n} \in \mathrm{m}$ ეკვივალენტობებიდან თითოეული შეგვიძლია მოვიჩნიოთ „>" მიმართების განსაზღვრად. ახლა ცხადია აგრეთვე, რომ

$$\mathrm{m} > \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{m} \supset \mathrm{n}; \quad \mathrm{m} < \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{m} \subset \mathrm{n};$$

$$\mathrm{m} \geq \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{m} \supseteq \mathrm{n}; \quad \mathrm{m} \leq \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{m} \subseteq \mathrm{n}$$

როგორც ვხედავთ, (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვის განხილული ინდუქციური განსაზღვრის უკანასკნელი მე-3 პუნქტი მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის ტოლფასია.

ამრიგად, ჩვენ ჯერჯერობით ვიცნობთ ნატურალური რიცხვების ზოგადი ცნების ორ კერძო შემთხვევას: ჩვეულებრივი ენის ნატურალურ რიცხვებსა და ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს. მათ შორის მხოლოდ ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვები წარმოადგენენ სიმრავლეებს. ქვემოთ განხილული სხვა სახის ნატურალური რიცხვებიც სიმრავლეებია.

4.1.5 მთელი რიცხვები. ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა $(\mathrm{m}, 0)$ და $(0, \mathrm{m})$ სახის დალაგებულ წყვილებს ეწოდება **მთელი რიცხვები.** $(\mathrm{m}, 0)$, $(0, \mathrm{m})$, $(\mathrm{m}', 0)$, $(0, \mathrm{m}')$ სახის მთელ რიცხვებს შესაბამისად ეწოდებათ **არაუარყოფითი მთელი რიცხვები, არადადებითი მთელი რიცხვები, დადებითი მთელი რიცხვები** (ანუ „+ **ნიშნიანი" მთელი რიცხვები**), **უარყოფითი მთელი რიცხვები** (ანუ „− **ნიშნიანი" მთელი რიცხვები**). აქ m აღნიშნავს ნებისმიერ ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვს და, მაშასადამე, m' არის m რიცხვის უშუალო შემდეგი. ნაცვლად ტერმინებისა „+ ნიშნიანი" და „− ნიშნიანი" იხმარება აგრეთვე ტერმინები **„დადებით ნიშნიანი"** და **„უარყოფით ნიშნიანი"**. არაუარყოფითი მთელი $(\mathrm{m}, 0)$ რიცხვი აღინიშნება m-ით და ეწოდება **ნატურალური მთელი რიცხვი** (საზოგა-

დოდ, არაუარყოფითი მთელი რიცხვი აღინიშნება მისი პირველი კომპონენტის აღმნიშვნელი სიმბოლოებით).

$(m, 0)$ და $(0, m)$ მთელ რიცხვებს **ურთიერთმოპირდაპირე მთელი რიცხვები** ეწოდებათ. უკანასკნელი ტერმინის ნაცვლად, სიმარტივისათვის, ხშირად ვისარგებლებთ ტერმინით **მოპირდაპირე მთელი რიცხვები**. ასევე მოვიქცევით სხვა ანალოგიურ შემთხვევაშიც, როცა საქმე გვექნება ტერმინთან, რომელშიც გვხვდება სიტყვა საწყისი ნაწილით „ურთიერთ".

შეკრებისა და გამოკლების ორადგილიანი ოპერაციების გარდა, რომლებიც $+$ და $-$ სიმბოლოებით აღინიშნებიან, იხილავენ **იგივურ და უარყოფის ერთადგილიან ოპერაციებს**, რომლებსაც ისევ $+$ და $-$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ. ნებისმიერ α მთელი რიცხვისათვის, განსაზღვრით $-\alpha$ არის α-ს მოპირდაპირე მთელი რიცხვი, $+\alpha$ კი არის α (ვგულისხმობთ რომ α არის ცვლადი, რომლის მნიშვნელობათა არეა მთელ რიცხვთა სიმრავლე). ამ ოპერაციათა შემოტანის შემდეგ, ცხადია, ნებისმიერი m ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვისათვის $+m$ აღნიშნავს $\langle m, 0\rangle$ მთელ რიცხვს, $-m$ კი აღნიშნავს $\langle 0, m\rangle$ მთელ რიცხვს.

შენიშვნა. თუ α-თი აღნიშნულია რომელიმე უარყოფითი მთელი რიცხვი, მაშინ $-\alpha$ იქნება „$+$ ნიშნიანი მთელი რიცხვი", $+\alpha$ კი იქნება „$-$ ნიშნიანი მთელი რიცხვი".

ჩვენ ვხედავთ, რომ მთელი ნატურალური რიცხვი აღინიშნება შესაბამისი ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვის აღმნიშვნელი სიმბოლოთი. ამ უკანასკნელ წინადადებას გამარტივებული სახით ასეც გამოთქვამენ: „მთელი ნატურალური რიცხვი აღინიშნება შესაბამისი ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვით". ანალოგიურ გამარტივებულ გამოთქმებს ჩვენ სხვა შემთხვევებშიც გამოვიყენებთ ყოველგვარი დამატებითი შენიშვნების გარეშე (ეს გაუგებრობებს არ გამოიწვევს რამდენადაც ასეთი გამარტივებული გამოთქმების პირდაპირი აზრით გაგება არც შეიძლება).

„$>$" პრედიკატი ისაზღვრება შემდეგი ეკვივალენტობებით:

$$(n, 0) > (m, 0) \leftrightarrow n > m;$$

$$(0, n) > (0, m) \leftrightarrow m > n;$$

$$(n, 0) > (0, m) \leftrightarrow n \neq 0 \vee m \neq 0;$$

$$(0, n) > (m, 0) \leftrightarrow f.$$

„ > " დამოკიდებულების დახმარებით განისაზღვრება <, ≤, ≥ დამოკიდებულებები ისევე, როგორც ეს მე-2 პუნქტში გავაკეთეთ (ამ სიმბოლოებთან დაკავშირებული კითხვის წესები უცვლელი რჩება).

α მთელი რიცხვის მოდული აღინიშნება $|\alpha|$-ით და განსაზღვრით არის α-სა და მის მოპირდაპირე $-\alpha$ რიცხვს შორის უდიდესი. ცხადია, თუ α ნატურალური მთელი რიცხვია, მაშინ $|\alpha| = |+\alpha| = |-\alpha| = \alpha$, ხოლო თუ α უარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ $|\alpha| = |+\alpha| = |-\alpha| \doteq -\alpha$.

ორი მთელი რიცხვის ჯამი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით (სადაც m და n მთელ რიცხვთა აღმნიშვნელ სიმბოლოებად გამოყენებული ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვების აღმნიშვნელი სიმბოლოებია):

$$\pm \mathrm{m} + [\pm \mathrm{n}] = \pm [\mathrm{m} + \mathrm{n}];$$

$$-\mathrm{n} + [+\mathrm{m}] = +[\mathrm{m} - \mathrm{n}] \leftrightarrow \mathrm{m} \geq \mathrm{n};$$

$$-\mathrm{n} + [+\mathrm{m}] = -[\mathrm{n} - \mathrm{m}] \leftrightarrow \mathrm{n} \geq \mathrm{m};$$

$$+\mathrm{m} + [-\mathrm{n}] = -\mathrm{n} + [+\mathrm{m}].$$

(იგულისხმება, რომ ეს ფორმულები არიან (იგივურად) ჭეშმარიტნი განსაზღვრის ძალით). ეს ფორმულები შეგვეძლო ჩაგვეწერა წყვილების დახმარებითაც.

ანალოგიურად, ორი მთელი რიცხვის ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით (ტოლობებით):

$$\pm \mathrm{m} \cdot [\pm \mathrm{n}] = +[\mathrm{m} \cdot \mathrm{n}];$$

$$+\mathrm{m} \cdot [-\mathrm{n}] = (-\mathrm{n}) \cdot (+\mathrm{m}) = -(\mathrm{m} \cdot \mathrm{n}).$$

გამოკლების ოპერაცია „ − " განისაზღვრება შემდეგნაირად. თუ α და β მთელი რიცხვებია, მაშინ α და β მთელი რიცხვების სხვაობა აღინიშნება $\alpha - \beta$-თი და განსაზღვრით არის $\alpha + (-\beta)$. როგორც ვხედავთ, მთელ რიცხვთა თეორიაში გამოკლების ოპერაცია ყველგან განსაზღვრული ოპერაციაა.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ თითოეულ მთელ ნატურალურ რიცხვს გავაიგივებთ შესაბამის ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთან, მაშინ მთელ რიცხვთა სიმრავლე, აღმოჩნდება ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება. ამასთანავე, მთელ რიცხვთა სიმრავლე იქნება

ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი მინიმალური (ბუნებრივი) გაფართოება, რომელშიც გამოკლების ოპერაცია იქნება ყველგან განსაზღვრული. ამოცანა ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი ბუნებრივი გაფართოების მოძებნისა, რომელშიც ბუნებრივად განსაზღვრული გამოკლების ოპერაცია იქნებოდა ყველგან განსაზღვრული, თავის დროზე იქნა დასმული და ისტორიულად ეს ამოცანა იყო მიზეზი მთელი რიცხვის ცნების შემოტანისა.

დასასრულ, გაყოფის „ : “ ოპერაცია ისაზღვრება შემდეგნაირად თუ α და β მთელი რიცხვებია, მაშინ α და β მთელი რიცხვების **განაყოფი** აღინიშნება $\alpha : \beta$-ით და, განსაზღვრით, არის ისეთი γ მთელი რიცხვი, (თუ არსებობს), რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\beta \cdot \gamma = \alpha$. ადვილი დასანახია, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გაყოფის ოპერაცია არაა ყველგან განსაზღვრული.

ვთქვათ, α მთელი რიცხვია, n კი დადებითი მთელი რიცხვი. α მთელი რიცხვის n-ური **ხარისხი** აღინიშნება α^n-ით და, განსაზღვრით, არის ტოლთანამამრავლთა ნამრავლი, სადაც თითოეული თანამამრავლი არის α, თანამამრავლთა რიცხვი კი არის n (უკანასკნელი n აქ განიხილება როგორც ჩვეულებრივი ენის ის ნატურალური რიცხვი, რომელიც შეესაბამება მთელ n რიცხვს, ე. ი. რომელსაც ათობით სისტემაში იგივე აღნიშვნა აქვს რაც მთელ რიცხვს)[1] . ნაცვლად α^n აღნიშვნისა, ვისარგებლებთ აგრეთვე აღნიშვნით $\alpha \mathbf{X} n$ („$\mathbf{X}$“ იკითხება „ხარისხად“), ამასთანავე, ვიგულისხმებთ რომ $\mathbf{X}$ არის ოპერაცია (ახარისხებისა) და $\alpha \mathbf{X} n$ (ე. ი. $\mathbf{X} \alpha n$) არის ძირითადი აღნიშვნა ხარისხისა, α^n კი არის გამარტივებული აღნიშვნა.

ასეთი გზით შემოიტანება ახარისხების ოპერაცია ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებში.

---

1 მეტი სიზუსტისათვის აქ n-ში შეგვეძლო გვეგულისხმა n მთელი რიცხვის აღმნიშვნელი ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვი და ფრაზა „თანამამრავლთა რიცხვი არის n“, როგორც იმის აღმნიშვნელი, რომ ხსენებულ თანამამრავლებსა და n სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება **დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა** (ამ უკანასკნელი ტერმინის განსაზღვრა ქვემოთ იქნება მოცემული).

ახლა ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს რომ შემოტანილ ოპერაციებს აქვთ ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც მკითხველისათვის ცნობილია საშუალო სკოლის კურსიდან. ამ თვისებათა დამტკიცებაზე არ შევჩერდებით.

მთელი ნატურალური რიცხვებისათვის „′" ოპერაცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $(n, 0)' = (n', 0)$. კონტექსტი აგვაცილებს თავიდან იმ გაუგებრობებს, რომლებიც შეიძლება წარმოიშვნენ იმის გამო, რომ ერთი და იმავე „′" სიმბოლოთი აღვნიშნავთ სხვადასხვა ოპერაციებს.

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ ასეთნაირად შემოტანილი „′" ოპერაციის შემთხვევაში მთელ ნატურალურ რიცხვთა სისტემისათვის შესრულებულია მე-2 პუნქტის 1-5 აქსიომები (ან, რაც იგივეა, პეანოს აქსიომები). ამრიგად, მთელი ნატურალური რიცხვის ცნება ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნების კერძო შემთხვევაა. ამიტომ მთელ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე გვექნება განხილული 4 ოპერაციისა და უტოლობათა ცნებების ორი განსაზღვრა. ერთი, რომელიც ინდუცირდება ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნებიდან და მეორე, რომელიც ინდუცირდება მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე ზემოთ შემოტანილი იმავე სახელწოდების ცნებებიდან (მაგალითისათვის შევნიშნოთ, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე შემოტანილი გამოკლების ოპერაციიდან შემდეგნაირად ინდუცირდება გამოკლების ოპერაცია მთელი ნატურალური რიცხვებისათვის. განსაზღვრით ორი მთელი ნატურალური α და β რიცხვების სხვაობა არის $\alpha - \beta$, თუ ეს უკანასკნელი მთელი ნატურალური რიცხვია — წინააღმდეგ შემთხვევაში $\alpha - \beta$ სხვაობა განსაზღვრული არაა).

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ განხილული ოპერაციებიდან თითოეულის ხსენებული ორი განსაზღვრა ტოლფასია. მაშასადამე, მთელ ნატურალურ რიცხვებზე მოქმედებათა წარმოებისას, როცა მოქმედების შედეგი ისევ მთელი ნატურალური რიცხვია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ისინი ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს წარმოადგენენ.

$\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_+$ და $\mathbf{Z}_-$ სიმბოლოებით შესაბამისად აღინიშნებიან მთელ რიცხვთა სიმრავლე, არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე და არადადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

4.2 წილადები და რაციონალური რიცხვები

მთელ რიცხვთა (m, n), $n > 0$ სახის დალაგებულ წყვილებს უწოდებენ **ჩვეულებრივ წილადებს**. ორ (m_1, n_1) და (m_2, n_2) წილადს უწოდებენ ეკვივალენტურებს და წერენ $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$, თუ $n_2 m_1 = n_1 m_2$[1]. „$\sim$" იკითხება „**ეკვივალენტურია**". „$\sim$" მიმართების უარყოფა აღინიშნება „$\not\sim$"-ით და იკითხება: „**არ არის ეკვივალენტური**".

ეკვივალენტობის „$\sim$" მიმართებას, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები[2]. ე. ი.

1. $(m, n) \sim (m, n)$;

2. $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \rightarrow (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1)$;

3. $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \wedge (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3) \rightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$.

აქ იგულისხმება, რომ n_1, n_2, n_3, n დადებითი მთელი რიცხვებია.

$(m, 10^n)$ სახის ჩვეულებრივ წილადს **ჩვეულებრივი ათწილადი** ეწოდება. $(11516, 10^3)$ ჩვეულებრივი ათწილადი შემოკლებულად 11,516-ით აღინიშნება (მძიმის შემდეგ მოთავსებულ ციფრთა რიცხვი მნიშვნელის ხარისხის მაჩვენებელს უნდა უდრიდეს). $(16, 10^4)$-ის შემოკლებული აღნიშვნა იქნება 0,0016.

ნაცვლად ტერმინებისა, „ჩვეულებრივი წილადი" და „ჩვეულებრივი ათწილადი" ხშირად ვისარგებლებთ გამარტივებული ტერმინებით „**წილადი**" და „**ათწილადი**".

ნებისმიერ α წილადს შევუსაბამოდ α წილადის ეკვივალენტურ ყველა წილადის A_α სიმრავლე. რადგან $\alpha \sim \alpha$, ამიტომ $\alpha \in A_\alpha$. ორ α და β წილადების შესაბამისი A_α და A_β სიმრავლეები, როგორც ეს ადვილად გამომდინარეობს 1-3 თვისებებიდან, ან ერთმანეთს ემთხვევიან, ან ერთმა-

---

[1] აქ ვსარგებლობთ გამარტივებული აღნიშვნებით, რომლებიც გამრავლების ოპერაციის გამოტოვებით მიიღებიან. ასეთი გამარტივებებით ვისარგებლებთ ქვემოთ ყოველგვარი შენიშვნების გარეშე.

[2] მიმართებები და მათი თვისებები დეტალურად შეისწავლება მომდევნო თავში.

ნეთს არ კვეთენ იმისდა მიხედვით $\alpha \sim \beta$ თუ არა. ამრიგად, A_α სახის სიმრავლეები ურთიერთეკვივალენტურ წილადთა სიმრავლეებს წარმოადგენენ. A_α სახის ურთიერთეკვივალენტურ წილადთა სიმრავლეებს **რაციონალური რიცხვები** ეწოდებათ. რაციონალური რიცხვის ნებისმიერ ელემენტს ეწოდება ამ **რაციონალური რიცხვის წარმომადგენელი** (ისინი ცხადია წილადებს წარმოადგენენ).

(m, n) წილადი აღინიშნება $\frac{m}{n}$-ით. ამასთანავე, m-ს ეწოდება ამ **წილადის მრიცხველი**, n-ს კი — **მნიშვნელი**. წილადს ეწოდება **დადებითი** (ანუ „+ ნიშანი") ან **უარყოფითი** (ანუ „− ნიშანი"), ან **არაუარყოფითი**, ან **არადადებითი** იმისდა მიხედვით, თუ როგორია მისი მრიცხველი (დადებითია, უარყოფითია, არაუარყოფითია თუ არადადებითია). $(m, 1)$ სახის წილადს (ე. ი. $\frac{m}{1}$ სახის წილადს) ეწოდება **მთელი წილადი** და იგი აღინიშნება m-ით. თუ m არის მთელი ნატურალური რიცხვი, მაშინ $\frac{m}{1}$ წილადს ეწოდება აგრეთვე **ნატურალური წილადი**. **მთელი რაციონალური რიცხვი**, განსაზღვრით, არის ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის წარმომადგენელთა (ე. ი. ელემენტთა) შორის გვხვდება მთელი წილადი (ცხადია, მთელი რაციონალური რიცხვის წარმომადგენელთა შორის მთელი წილადი ერთადერთი იქნება, რადგან ორი სხვადასხვა მთელი წილადი ურთიერთეკვივალენტური არ შეიძლება იყოს). ასევე განისაზღვრება **ნატურალური რაციონალური რიცხვი**. რაციონალურ რიცხვს ეწოდება **დადებითი** (ანუ „+ ნიშნიანი") ან **უარყოფითი** (ანუ „− ნიშნიანი), ან **არაუარყოფითი**, ან **არადადებითი** იმისდა მიხედვით, თუ როგორია მისი წარმომადგენელი.

Q, Q_+ და Q_- სიმბოლოებით შესაბამისად აღინიშნებიან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და არადადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. ამ სიმრავლეებიდან ნულის ამოგდებით მიღებული სიმრავლეების შესაბამისად აღნიშნავენ სიმბოლოებით $\dot{Q}$, $\dot{Q}_+$ და $\dot{Q}_-$ (უკანასკნელი ორი სიმბოლო შესაბამისად აღნიშნავს დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს და უარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს).

რაციონალურ რიცხვს აღნიშნავენ მისი წარმომადგენლების აღმნიშვნელი სიმბოლოებით. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ: რაციონალური რიცხვები აღინიშნებიან წილადებით, მთელი რაციონალური რიცხვები აღინიშნებიან აგრეთვე მთელი რიცხვებით, ნატურალური რაციონალური რიცხვები კი ნატურალური მთელი რიცხვებით და ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვებით[1]. ამის შესაბამისად რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში წილადები, მთელი რიცხვები და ნატურალური რიცხვები (უფრო ზუსტად ამ რიცხვების აღმნიშვნელი სიმბოლოები) განიხილებიან, როგორც შესაბამისი რაციონალური რიცხვების აღმნიშვნელი სიმბოლოები.

ორ წილადს ეწოდება **ურთიერთმოპირდაპირე წილადები**, თუ მათ აქვთ ერთნაირი მნიშვნელები და მათი მრიცხველები მოპირდაპირე მთელი რიცხვებია. ორ რაციონალურ რიცხვს ეწოდება **ურთიერთმოპირდაპირე რაციონალური რიცხვები**, თუ მათ აქვთ ისეთი წარმომადგენლები, რომლებიც მოპირდაპირე წილადებია. ამ ცნებებზე დაყრდნობით, ზუსტად, ისე როგორც წინა პუნქტში, განისაზღვრება უარყოფის ოპერაცია „$-$" და იგივური ოპერაცია „$+$". თუ m და n არიან ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვები, მაშინ ზემოთ შემოტანილი შეთანხმების საფუძველზე $\dfrac{(0,m)}{(n,0)}$ წილადი, შესაბამისად რაციონალური რიცხვი, აღინიშნება $\dfrac{-m}{n}$-ით. უარყოფის ოპერაციის დახმარებით იგივე წილადი, შესაბამისად რაციონალური რიცხვი, შეიძლება აღინიშნოს $-\dfrac{m}{n}$-ით.

თუ $\dfrac{m_1}{n_1} \sim \dfrac{m_2}{n_2}$, შესაბამისად $\dfrac{m_1}{n_1} \nsim \dfrac{m_2}{n_2}$, მაშინ, ცხადია, რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$, შესაბამისად $\dfrac{m_1}{n_1} \neq \dfrac{m_2}{n_2}$. ამიტომ

---

[1] აქ უფრო ზუსტი იყო გველაპარაკა, რომ რაციონალური რიცხვები აღინიშნება წილადის აღმნიშვნელი სიმბოლოებით, შესაბამისად, მთელი რიცხვის აღმნიშვნელი სიმბოლოებით, შესაბამისად, ჩვეულებრივ ნატურალური რიცხვების აღმნიშვნელი სიმბოლოებით.

შეიძლება ითქვას, რომ ეკვივალენტური წილადები რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში ტოლნი არიან, არაეკვივალენტური წილადები კი რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში არ არიან ტოლნი (წილადთა ეკვივალენტურობა საზოგადოდ არ უზრუნველყოფს მათ ტოლობას).

ორი $\frac{m_1}{n_1}$ და $\frac{m_2}{n_2}$ **წილადის ჯამი** $\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}$, **სხვაობა** $\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}$ და **ნამრავლი** $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}$ შესაბამისად განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2};$$

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{n_1n_2};$$

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}.$$

$\frac{m}{n}$ **წილადის შებრუნებული** ეწოდება $\frac{n}{m}$ ან $\frac{-n}{-m}$ წილადს იმისდა მიხედვით m დადებითია თუ უარყოფითი, იმ შემთხვევაში კი როცა m ნულია, $\frac{m}{n}$ წილადს შებრუნებული არ აქვს. ორი α და β წილადის **განაყოფი**, განსაზღვრით, ეწოდება პირველი წილადისა და მეორე წილადის შებრუნებულის ნამრავლს (თუ მეორე წილადს შებრუნებული არ აქვს, მაშინ ამ ორი წილადის განაყოფი არაა განსაზღვრული). ეს განაყოფი აღინიშნება აგრათვე α/β-ით და $\frac{\alpha}{\beta}$-ით. ადვილად შევნიშნავთ რომ α წილადის შებრუნებული არის $\frac{1}{\alpha}$ (ე.ი $1:\alpha$).

ვთქვათ, m და n ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვებია და $n>0$. მაშინ ჩვენი შეთანხმებიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{m}{n}$ აღნიშნავს

$\dfrac{\langle m,0\rangle}{\langle n,0\rangle}$ წილადსაც და m და n მთელი წილადების განაყოფსაც. მაგრამ ეს გარემოება გაუგებრობას არ გამოიწვევს, რადგან ხსენებული წილადი და განაყოფი ერთსა და იმავე ობიექტებს წარმოადგენენ. იმავე პირობებში, ცხადია, $\dfrac{-m}{-n}=\dfrac{m}{n}$. ამიტომ $\dfrac{-m}{-n}$ შეგვიძლია განვიხილოთ $\dfrac{m}{n}$ წილადის აღნიშვნად. იგივე შეიძლება ითქვას იმ შემთხვევაშიც, როცა m მთელი რიცხვია, n კი მთელი დადებითი რიცხვი.

$<, >, \leq, \geq, \lesssim, \gtrsim$ მიმართებები წილადების შემთხვევაში ისაზღვრება შემდეგი ეკვივალენტობებით.

$$\frac{m}{n}<\frac{p}{k}\leftrightarrow mk<np;$$

$$\frac{m}{n}>\frac{p}{k}\leftrightarrow \frac{p}{k}<\frac{m}{n};$$

$$\frac{m}{n}\leq\frac{p}{k}\leftrightarrow \frac{m}{n}<\frac{p}{k}\vee\frac{m}{n}=\frac{p}{k};$$

$$\frac{m}{n}\geq\frac{p}{k}\leftrightarrow \frac{p}{k}\leq\frac{m}{n};$$

$$\frac{m}{n}\lesssim\frac{p}{k}\leftrightarrow \frac{m}{n}<\frac{p}{k}\vee\frac{m}{n}\sim\frac{p}{k};$$

$$\frac{m}{n}\gtrsim\frac{p}{k}\leftrightarrow \frac{p}{k}\lesssim\frac{m}{n}.$$

ბუნებრივად განისაზღვრება ეკვივალენტობის მარცხენა მხარეთა კითხვის წესები. ცხადია:

$$\frac{m}{n}>\frac{p}{k}\Leftrightarrow mk>np;$$

$$\frac{m}{n}\geq\frac{p}{k}\Leftrightarrow \frac{m}{n}>\frac{p}{k}\vee\frac{m}{n}=\frac{p}{k};$$

$$\frac{m}{n}\gtrsim\frac{p}{k}\Leftrightarrow \frac{m}{n}>\frac{p}{k}\vee\frac{m}{n}\sim\frac{p}{k}.$$

$+, -, \cdot, :$ ოპერაციები და მეტნაკლებობის მიმართებები რაციონალურ რიცხვებისათვის ისაზღვრება მათი წარმომადგენლების მიხედვით. მაგალითად, r_1 და r_2 **რაციონალურ რიცხვების ჯამი** ეწოდება ისეთ, რაციონალურ რიცხვს, რომელიც შეიცავს r_1 და r_2 რაციონალური რიცხვების ნებისმიერად აღებულ წარმომადგენელთა ჯამს (ასეთნაირად განსაზღვრული რაციონალური რიცხვების ჯამი დამოკიდებული არ იქნება შესაკრებთა წარმომადგენლების არჩევაზე). ასევე, $r_1 < r_2$ ნიშნავს იმას, რომ r_1-ის წარმომადგენელი ნაკლებია r_2-ის წარმომადგენელზე (უკანასკნელი განსაზღვრის კორექტულობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ თუ r_1-ის ერთი რომელიმე წარმომადგენელი ნაკლებია r_2-ის რაიმე წარმომადგენელზე, მაშინ r_1-ის თითოეული წარმომადგენელი ნაკლებია r_2-ის ყველა წარმომადგენელზე). $>$, $\leq$, $\geq$ მიმართებები ჩვეულებრივ განისაზღვრება $<$ მიმართების დახმარებით. $>$ შეიძლება განისაზღვროს $<$ მიმართების მოტანილი განსაზღვრის ანალოგიურად. იგივეს ვერ ვიტყვით $\leq$ და $\geq$ მიმართებების შესახებ. ახარისხების ოპერაცია წილადებისათვის და რაციონელურ რიცხვებისათვის ისაზღვრება ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ 4.1.5 პუნქტში მთელი რიცხვების შემთხვევაში.

ადვილად მტკიცდება, რომ ორი ნებისმიერი α და β წილადისათვის ადგილი აქვს ერთს და მხოლოდ ერთს შემდეგი სამი შემთხვევიდან:

$$\alpha > \beta, \alpha < \beta, \alpha \sim \beta.$$

(აქ $\alpha \sim \beta$ ეკვივალენტობა არ შეიძლება შეიცვალოს $\alpha = \beta$ ტოლობით). აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ ორ r_1 და r_2 რაციონალურ რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ერთს და მხოლოდ ერთს შემდეგი სამი შემთხვევიდან:

$$r_1 > r_2, r_1 < r_2, r_1 = r_2.$$

r რაციონალური რიცხვის, შესაბამისად წილადის **მოდული** აღინიშნება $|r|$-ით და განისაზღვრით არის r და $-r$ რაციონალურ რიცხვებს, შესაბამისად წილადებს, შორის უდიდესი.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი ე.წ. **წილადის ძირითადი თვისება**: თუ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ მთელ რიცხვზე გადავამრავლებთ ან გავყოფთ მივიღებთ

მოცემული წილადის ეკვივალენტურ წილადს[1]. ამასთან, მოცემული წილადის ეკვივალენტური ნებისმიერი წილადის მისაღებად საკმარისია ასეთი გარდაქმნის ორჯერ გამოყენება.

წილადის ძირითადი თვისება რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში შემდეგ სახეს იღებს: წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ მთელ რიცხვზე გადამრავლებით ან გაყოფით წილადის მნიშვნელობა არ იცვლება. ამასთან, მხოლოდ და მხოლოდ ეკვივალენტურ წილადებს აქვთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა (გავიხსენოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში წილადის მნიშვნელობა (ან, უფრო ზუსტად, წილადის აღმნიშვნელ სიმბოლოს მნიშვნელობა) არის ის რაციონალური რიცხვი, რომლის წარმომადგენელიც ეს წილადია).

სიძნელეს არ წარმოადგენს წილადებისა და რაციონალური რიცხვების თვისებების დამტკიცება, რომელიც მკითხველისათვის ცნობილია საშუალო სკოლის კურსიდან.

ვთქვათ, m და n არიან მთელი რიცხვები, σ აღნიშნავს $+$, $-$, $\cdot$, $:$ და $\mathbf{X}$ ოპერაციებიდან რომელიმეს, σ_1 კი $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ დამოკიდებულებებიდან რომელიმეს. ამასთანავე ვთქვათ, რომ $m\sigma n$ განსაზღვრულია და უდრის K-ს. თუ m და n-ს განვიხილავთ, როგორც რაციონალურ რიცხვებს (იმ რაციონალურ რიცხვებს, რომლებსაც ისინი აღნიშნავენ), მაშინ $m\sigma n$ ტოლი იქნება იმ რაციონალური რიცხვისა, რომელიც აღინიშნება K-თი. ანალოგიურად, $m\sigma_1 n$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ჭეშმარიტია იმ შემთხვევაში, როცა m და n განიხილებიან როგორც რაციონალური რიცხვები. ამ წინადადებებს მოკლედ (გამარტივებულად) ასე გამოვთქვამენ: „რაციონალურ რიცხვებზე წარმოებული ძირითადი ოპერაციები და მეტნაკლებობის დამოკიდებულებები **შეთანხმებულია** მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ შესაბამისს ოპერაციებთან და მთელ რიცხვთა შორის მეტნაკლებობის დამოკიდებულებებთან. ადვილი დასანახია, რომ ისეთივე აზრით **შეთანხმებულია**, ერთი მხრივ, რაციონალურ რიცხვებზე განსაზღვრული ძირითადი ოპერაციები და მეტნაკლებობის დამოკიდებულებები და, მეორე მხრივ, ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებზე შესაბამისად წილადებზე განსაზღვრულ შესაბამის ოპერაციებთან და მეტნაკლებობის დამოკიდებულე-

---

[1] თუ $\frac{m}{n}$ არის წილადი, მაშინ $\frac{-3m}{-3n}$ განიხილება როგორც წილადი, რამდენადაც იგი აღნიშნავს $\frac{3m}{3n}$ წილადს.

ბებთან (მომდევნო პუნქტში ვისარგებლებთ ანალოგიური გამარტივებული სახის წინადადებით, ზუსტ ფორმულირებათა გარეშე).

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნა: მთელ რაციონალურ რიცხვებს, შესაბამისად ნატურალურ რაციონალურ რიცხვებს, აქვს მთელ რიცხვთა, შესაბამისად ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა, ყველა თვისება, რომლებიც გამოითქმის $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\mathbf{X}$ ოპერაციებისა და $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $=$ მიმართებების დახმარებით.

უკანასკნელი დასკვნა ეყრდნობა აგრეთვე იმ ფაქტს, რომ განსხვავებული ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვები შესაბამისად მთელი რიცხვები, განსხვავებულ რაციონალურ რიცხვებს აღნიშნავენ. ეს პირობა დარღვეულია წილადების შემთხვევაში — თითოეული რაციონალური რიცხვი აღინიშნება უსასრულო რაოდენობა წილადებით. წინა დასკვნა სწორია წილადის მიმართაც, იმ შენიშვნით, რომ რაციონალურ რიცხვთა თეორიის ტოლობის მიმართებას წილადების თეორიაში შეესაბამება არა ტოლობა არამედ ეკვივალენტობა.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ თუ ნატურალურ რაციონალურ რიცხვებში განვსაზღვრავთ „$'$" ოპერაციას ფორმულით $\left(\dfrac{m}{1}\right)' = \dfrac{m'}{1}$, მაშინ ნატურალურ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისათვის შესრულებული იქნება ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნების 1-5 აქსიომები. ამასთანავე, ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ (ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნების მიხედვით) აღნიშნული „$'$" ოპერაციის დახმარებით შემოტანილი $+$, $-$, $\cdot$, $:$ ოპერაციები და მეტნაკლებობის $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ მიმართებები იგივეა, რაც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ იმავე სიმბოლოებით აღნიშნულ ოპერაციებიდან და მიმართებებიდან ნატურალურ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ინდუცირებული ოპერაციები და მიმართებები.

4.3 ნამდვილი რიცხვები

4.3.1 ძირითადი განსაზღვრებები. რაციონალურ რიცხვთა $\mathbf{a}$ სიმრავლეს ეწოდება **ნამდვილი რიცხვი**, თუ მას უდიდესი ელემენტი არ აქვს და ამასთანავე, $\mathbf{a}$-დან აღებულ თითოეულ (რაციონალურ) $\mathbf{r}$ რიცხვისათვის $\mathbf{a}$ შეიცავს $\mathbf{r}$-ზე ნაკლებ ყველა რაციონალურ რიცხვს.

ცხადია, რაციონალურ რიცხვთა $\mathbf{Q}$ სიმრავლის არასაკუთრივი ქვესიმრავლეები $\varnothing$ და $\mathbf{Q}$ ნამდვილი რიცხვებია. მათ ეწოდებათ **არასა-**

კუთრივი **ნამდვილი რიცხვები**, დანარჩენ ნამდვილ რიცხვებს კი — **საკუთრივი ნამდვილი რიცხვები**. საკუთრივ ნამდვილ რიცხვებს ეწოდებათ, აგრეთვე, **სასრული ნამდვილი რიცხვები**, არასაკუთრივ ნამდვილ რიცხვებს კი — **უსასრულო ნამდვილი რიცხვები**. ამასთან, $\varnothing$ და **Q** უსასრულო ნამდვილი რიცხვები შესაბამისად აღინიშნებიან, აგრეთვე, $-\infty$ და $+\infty$ სიმბოლოებით და ეწოდებათ **დადებითი უსასრულობა** და **უარყოფითი უსასრულობა**. სიმარტივისათვის შემოტანილ ტერმინებში ხშირად გამოვტოვებთ სიტყვას „ნამდვილი".

ერთი და იმავე საგნის ორი სხვადასხვა სიმბოლოთი აღნიშვნა (როგორც, მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა თეორიაში ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$-ით და $-\infty$-ით) არავითარ სიძნელეს არ იწვევს. ცოტა უფრო უხერხულია ერთი და იმავე სიმბოლოთი ორი სხვადასხვა საგნის აღნიშვნა. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა განსაკუთრებული სიფრთხილე გაუგებრობათა თავიდან ასაცილებლად. მიუხედავად ამისა, ზოგჯერ ხელსაყრელია ერთი და იმავე სიმბოლოთი ორი ან მეტი სხვადასხვა საგნის აღნიშვნა. ასეთ სიმბოლოს მაგალითია ზემოთ განხილული ციფრი 0. ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა თეორიაში 0 აღნიშნავს ცარიელ სიმრავლეს, მთელ რიცხვთა თეორიაში 0 აღნიშნავს $\{\{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}\}$, სიმრავლეს (თუ წყვილის ცნების მეორე განსაზღვრას მივიჩნევთ საფუძვლად, მაშინ აღნიშნავს $\{\{\varnothing\}\}$-ს), რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში 0 აღნიშნავს ურთიერთეკვივალენტურ წილადთა (განსაზღვრულ) უსასრულო სიმრავლეს, ნამდვილ რიცხვთა თეორიაში კი — უარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. მიუხედავად იმისა, რომ ყველა ხსენებული თეორია ერთი თეორიის — სიმრავლეთა თეორიის ნაწილია აღნიშვნების განხილული სისტემა ხელსაყრელია.

თუ **a** **ნამდვილი რიცხვის** (**Q** სიმრავლის მიმართ) **დამატებას** აქვს უმცირესი **r** ელემენტი (ე. ი. ისეთი ელემენტი, რომელიც ნაკლებია ყველა დანარჩენ ელემენტებზე), მაშინ **a** ნამდვილი რიცხვი **r** რაციონალურ რიცხვის აღმნიშვნელი სიმბოლოებით აღინიშნება (იგულისხმება, რომ ზეპირ მეტყველებაში **a** ნამდვილი რიცხვი აღინიშნება **r** რაციონალური რიცხვის თითოეულ სახელით) და **a**-ს ეწოდება **რაციონალური ნამდვილი რიცხვი**. თუ, ამასთანავე, **r** არის მთელი რაციონალური რიცხვი, შესაბამისად ნატურალური რაციონალური რიცხვი, მაშინ **a**-ს ეწოდება **მთელი ნამდვილი რიცხვი**, შესაბამისად **ნატურალური ნამდვილი რიცხვი**. ამრიგად, წილადები აღნიშნავენ რაციონალურ

ნამდვილ რიცხვებს, ამიტომ რაციონალურ ნამდვილ რიცხვებს უწოდებენ, აგრეთვე, **წილად ნამდვილ რიცხვებს**. ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, აგრეთვე, რომ მთელი ნამდვილი რიცხვები აღინიშნება იმავე სიმბოლოებით, რითაც აღვნიშნავდით მთელ რიცხვებს, ნატურალური ნამდვილი რიცხვები კი აღინიშნება იმავე სიმბოლოებით, რითაც აღვნიშნავდით ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს. თუ a სასრული ნამდვილი რიცხვის დამატებას უმცირესი ელემენტი არ აქვს, მაშინ a-ს ეწოდება **ირაციონალური (ნამდვილი) რიცხვი**; როგორც ირაციონალური ისე რაციონალური ნამდვილი რიცხვები სასრული ნამდვილი რიცხვებია.

$>, <, \geq, \leq$ მიმართებები განისაზღვრება შემდეგი ეკვივალენტობებით:

$$a > b \leftrightarrow a \supset b\,;\ a < b \leftrightarrow a \subset b\,;\ a \geq b \leftrightarrow a \supseteq b\,;\ a \leq b \leftrightarrow a \subseteq b\,.$$

ამ მიმართებებთან დაკავშირებით კითხვის წესები იგივეა, რაც ზემოთ გვქონდა. შეგვეძლო $<$, $\geq$, $\leq$ მიმართებები განგვესაზღვრა „$>$" მიმართების დახმარებით ისევე როგორც 4.1.2 პუნქტში გვქონდა (ამით ამ მიმართებათა შინაარსი არ შეიცვლებოდა).

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ შემდეგი თეორემები.

1. ნებისმიერ a და b ნამდვილი რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ერთსა და მხოლოდ ერთს შემდეგი სამი შემთხვევიდან: $a > b$; $a = b$; $a < b$.

2. ორ ნებისმიერ a და b ნამდვილ რიცხვებს შორის მოთავსებულია ერთი მაინც რაციონალური რიცხვი (c ნამდვილი რიცხვი მოთავსებულია a და b ნამდვილ რიცხვებს შორის ნიშნავს იმას, რომ $a < c < b$ ან $b < c < a$).

ნამდვილ a რიცხვს ეწოდება **დადებითი** (ანუ „+ **ნიშნიანი**") ან **უარყოფითი** (ანუ „− **ნიშნიანი**"), ან **არაუარყოფითი**, ან **არადადებითი** იმისდა მიხედვით $a > 0$, $a < 0$, $a \geq 0$ თუ $a \leq 0$. ცხადია, ეს განსაზღვრა ტოლფასია შემდეგისა: ნამდვილ რიცხვს ეწოდება დადებითი, შესაბამისად არადადებითი, თუ იგი შეიცავს, შესაბამისად არ შეიცავს, დადებით რაციონალურ რიცხვს. ნამდვილ რიცხვს ეწოდება უარყოფითი, შესაბამისად არაუარყოფითი, თუ მისი დამატება შეიცავს, შესაბამისად არ შეიცავს, უარყოფით რაციონალურ რიცხვს.

საკუთრივი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება $\mathbf{R}$ ასოთი, ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე კი $\overline{\mathbf{R}}$-ით. შინაარსი სიმბოლოებისა

$$\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}^{\bullet}, \mathbf{R}^{\bullet}_+, \mathbf{R}^{\bullet}_-, \overline{\mathbf{R}}_+, \overline{\mathbf{R}}_-, \overline{\mathbf{R}}^{\bullet}, \overline{\mathbf{R}}^{\bullet}_+, \overline{\mathbf{R}}^{\bullet}_-$$

ისევე ისაზღვრება, როგორც რაციონალურ რიცხვთა $\mathbf{Q}$ სიმბოლოსთან დაკავშირებულ $\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-, \mathbf{Q}^{\bullet}, \mathbf{Q}^{\bullet}_+, \mathbf{Q}^{\bullet}_-$ სიმბოლოთა შინაარსი (იხ. 4.2).

α ნამდვილი რიცხვის დამატების არაუმცირესი ელემენტების მოპირდაპირე რაციონალური რიცხვების სიმრავლეს ეწოდება **a ნამდვილი რიცხვის მოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვი** (აქ და სხვა ანალოგიურ შემთხვევებში მკითხველმა უნდა დაამტკიცოს, რომ განსაზღვრაში მითითებული სიმრავლე ნამდვილი რიცხვია). ადვილად მტკიცდება რომ, თუ a ნამდვილი რიცხვი არის b-ს მოპირდაპირე, მაშინ b, თავის მხრივ, იქნება a-ს მოპირდაპირე და, მაშასადამე, a და b **ურთიერთმოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვები** იქნებიან. ადვილი დასანახია აგრეთვე, რომ $+\infty$ და $-\infty$ ურთიერთმოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვებია. განსაზღვრით უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ r_1 და r_2 რაციონალური რიცხვები ურთიერთმოპირდაპირე რაციონალური რიცხვებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა r_1 და r_2 ნამდვილი რაციონალური რიცხვები ურთიერთმოპირდაპირენი არიან. თუ a ირაციონალური რიცხვია, მაშინ a რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი წარმოადგენს a ნამდვილი რიცხვის დამატების ელემენტთა მოპირდაპირე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. ურთიერთმოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვების ცნებაზე დაყრდნობით, ზუსტად ისე როგორც 4.1.5 პუნქტში, განისაზღვრება **უარყოფის ოპერაცია „ − "** და იგივური ოპერაცია „ + ". ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ ∞ არის $\mathbf{Q}$ ნამდვილი რიცხვის აღმნიშვნელი სიმბოლო, $+\infty$ და $-\infty$ კი არიან ∞ სიმბოლოდან + და − ერთადგილიან ოპერაციების გამოყენებით მიღებული აღნიშვნები (ეს წინააღმდეგობაში არაა $+\infty$ და $-\infty$ აღნიშვნათა ზემოთ მოტანილ განსაზღვრასთან).

a ნამდვილი რიცხვის **მოდული** აღინიშნება $|a|$-თი და განსაზღვრით არის a და $-a$ რიცხვებს შორის უდიდესი.

ახლა განვსაზღვროთ ნამდვილი რიცხვის **შებრუნებული რიცხვის** ცნება.

დადებითი ნამდვილი a რიცხვის შებრუნებული ნამდვილი რიცხვი ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელსაც მივიღებთ a რიცხვის დამატების ელემენტთა შებრუნებულ რაციონალურ რიცხვთა

სიმრავლესა და არადადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანებიდან უდიდესი ელემენტის (თუ არსებობს) ამოგდებით. უარყოფითი ნამდვილი a რიცხვის შებრუნებული ნამდვილი რიცხვი ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელსაც მივიღებთ a რიცხვის დამატების უარყოფითი ელემენტების (რაციონალური რიცხვების) შებრუნებული რაციონალური რიცხვების სიმრავლიდან უდიდესი ელემენტის (თუ არსებობს) ამოგდებით. 0-ს შებრუნებული არ აქვს.

ადვილად შემოწმდება, რომ როგორც $+\infty$-ის, ისე $-\infty$-ის შებრუნებული არის 0. ადვილად შემოწმდება, აგრეთვე, რომ თუ r_1 და r_2 ურთიერთშებრუნებული რაციონალური რიცხვებია, მაშინ r_1 და r_2 (რაციონალური) ნამდვილი რიცხვები ურთიერთშებრუნებული ნამდვილი რიცხვებია.

a და b **ნამდვილი რიცხვების ჯამი** $a+b$ ეწოდება $\alpha+\beta$ სახის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, სადაც α და β შესაბამისად არიან a და b რიცხვების ნებისმიერი ელემენტები.

a და b **ნამდვილი რიცხვების სხვაობა** $a-b$ ისაზღვრება ფორმულით $a-b=a+(-b)$.

a და b **ნამდვილი რიცხვების ნამრავლი** $a\cdot b$ ისაზღვრება შემდეგნაირად:

1. თუ a და b არაუარყოფითი რიცხვებია, მაშინ $a\cdot b$ ნამრავლი არის რაციონალური რიცხვების სიმრავლე, რომლის ელემენტებია უარყოფითი რაციონალური რიცხვები და $\alpha\cdot\beta$ სახის რაციონალური რიცხვები, სადაც α და β შესაბამისად არიან a და b რიცხვების არაუარყოფითი ელემენტები.

2. თუ a და b არადადებითი რიცხვებია, მაშინ (განსაზღვრით)

$$ab=-a\cdot(-b).$$

3. თუ a და b რიცხვებიდან ერთი დადებითია და მეორე უარყოფითი, მაშინ (განსაზღვრით)

$$a\cdot b=-[-a\cdot b]=-[a\cdot(-b)].$$

a და b **ნამდვილი რიცხვების განაყოფი**, $a:b$, ეწოდება a რიცხვისა და b რიცხვის შებრუნებულის ნამრავლს (თუ $b=0$, მაშინ ცხადია, a და b რიცხვების განაყოფი, $a:b$, განსაზღვრული არ იქნება).

$a : b$-ს ნაცვლად იხმარება აგრეთვე $\frac{a}{b}$ და a/b აღნიშვნები, $a \cdot b$-ს ნაცვლად კი — ab. ამასთანავე, a b-ს ანალოგიურად, ab განიხილება როგორც $[\cdot\, ab]$ ფორმის გამარტივებული სახე — გამარტივებული აღნიშვნა. ასევე, $\frac{a}{b}$ და a/b არიან $[:\, ab]$ ფორმის გამარტივებული აღნიშვნები.

შემოტანილი განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

(3.1) თეორემა. ნებისმიერი a სასრული ნამდვილი რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$a + (\pm\infty) = \pm\infty + a = (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty \tag{1}$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & \text{როცა} \quad a > 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad a = 0, \\ \mp\infty, & \text{როცა} \quad a < 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty; \tag{3}$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty; \tag{4}$$

$$a : (\pm\infty) = 0; \tag{5}$$

$$(\pm\infty) + (\mp\infty) = -\infty; \tag{6}$$

შენიშვნა. ხშირად, განსაზღვრავენ რა სასრულ ნამდვილ რიცხვებს, შემდეგ აფართოებენ სასრულ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლეს ორი $+\infty$ და $-\infty$ „აბსტაქტულ" — „არასაკუთრივ" ელემენტების დამატებით (არ უთითებენ, თუ რას წარმოადგენენ ეს აბსტრაქტული $+\infty$ და $-\infty$ ელემენტები) და სასრულ ნამდვილ რიცხვებზე ოპერაციათა განსაზღვრის შემდეგ უსასრულო ნამდვილ რიცხვზე მოქმედებების სპეციალური ტოლობებით განსაზღვრავენ. უმეტესად ასეთ ტოლობებად (1)-(5) ტოლობებს იღებენ. ამასთან, ც. ელიასი [43] ხსენებულ ოპერაციებს განსაზღვრავს ტოლობათა სისტემით, რომელიც (1)-(6) სისტემიდან მიიღება, თუ შევცვლით (6) ტოლობებს შემდეგი ტოლობებით:

$$(\pm\infty) + (\mp\infty) = +\infty. \tag{6'}$$

ცხადია, ტოლობათა (1)-(6) სისტემა გარკვეული აზრით ტოლფასია ელიასის ტოლობათა სისტემისა. ინტუიციურად (6) და (6′) ტოლობები იწ-

ვევს უხერხულობას, მაგრამ, როგორც ელიასმა აჩვენა, თუ მივიღებთ ტოლობათა (1)-(6) სისტემას ან ელიასის შესაბამის სისტემას, მაშინ რიგი თეორემებისა უფრო მარტივად ყალიბდება.

შეიძლება ზოგიერთი ინტუიციური მოსაზრების მოტანა (6) ტოლობების უპირატესობის შესახებ (6′) ტოლობებთან შედარებით. ერთ-ერთი ასეთი მოსაზრებაა: $+\infty$ არის ეფექტურად თვლადი (უსასრულო) სიმრავლე. ამიტომ იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც პოტენციალური უსასრულობა. პოტენციალური უსასრულობა კი ყოველ მომენტში სასრულია — ∞-ის (ე. ი. ცარიელი სიმრავლის) ანალოგიურად წარმოდგენა არ ხერხდება. ამასთანავე, ცარიელ სიმრავლეს უფრო აბსოლუტური ხასიათი აქვს. ამიტომ (6) ტოლობა წარმოადგენს $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$ (a სასრული ნამდვილი რიცხვია) ტოლობის ანალოგს. ანალოგიური მოსაზრებებით შეიძლება გავამართლოთ $\pm\infty \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$ ტოლობებიც.

შემოტანილი ოპერაციებიდან ინდუცირებულ ოპერაციებს სასრულ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლეზე აღვნიშნავთ იმავე სიმბოლოებით.

შემოტანილ განსაზღვრებათა საფუძველზე ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს სასრულ ნამდვილ რიცხვებზე წარმოებული ძირითადი ოპერაციების, მეტნაკლებობის დამოკიდებულებების და შებრუნებული რიცხვისა და მოპირდაპირე რიცხვის ცნებათა ის თვისებები, რომლებიც ცნობილია მკითხველისათვის საშუალო სკოლის კურსიდან. ადვილად მტკიცდება აგრეთვე ისიც, რომ აღნიშნული ოპერაციები, დამოკიდებულებები და ცნებები შეთანხმებულია რაციონალურ, შესაბამისად მთელ, შესაბამისად ჩვეულებრივ ნატურალურ, რიცხვებში წარმოებულ შესაბამის ოპერაციებთან, დამოკიდებულებებთან და ცნებებთან.

ნატურალურ ნამდვილ რიცხვებში „′" ოპერაცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: ნებისმიერი a ნატურალური ნამდვილი რიცხვისათვის a' იყოს ის ნატურალური ნამდვილი რიცხვი, რომელიც აღინიშნება m'-ით, სადაც m ის ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვია, რომლითაც აღინიშნება a. ასეთნაირად განსაზღვრულ „′" ოპერაციის მიმართ სამართლიანია წინა პუნქტის ბოლოში გაკეთებული შენიშვნის სრული ანალოგი.

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს ნატურალური რიცხვის შემდეგი 6 სახის ცნება:

1. ნატურალური რიცხვის ზოგადი ცნება — ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, როგორც ობიექტთა სისტემა, ერთი საწყისი ერთადგილიანი ოპერაციით, სადაც შესრულებულია პეანოს აქსიომები.

2. ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვები.

3. როგორც ცარიელი 0 სიმრავლიდან „|" ოპერაციის გამოყენებით მიღებული სიმრავლეები.

4. მთელი ნატურალური რიცხვები.

5. რაციონალური ნატურალური რიცხვები.

6. ნამდვილი ნატურალური რიცხვები.

უკანასკნელი 5 სახე ნატურალური რიცხვებისა, 1-ელი სახის ნატურალური რიცხვების კერძო შემთხვევებს წარმოადგენენ. ამიტომ 1-ლი სახის (ე. ი. ზოგადი სახის) ნატურალური რიცხვების შემთხვევაში მიღებული შედეგები სამართლიანი იქნება უკანასკნელ ხუთ შემთხვევაშიც.

ნამდვილი a რიცხვის n-ური ხარისხი, სადაც n ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური ნამდვილი რიცხვია, აღინიშნება a^n-თი და განსაზღვრით არის $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, სადაც თანამამრავლთა რიცხვი არის n. ამასთან, თუ გარდა აღნიშნულისა, a ნულისაგან განსხვავებული სასრული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ, განსაზღვრით, $a^0 = 1$ და $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

ვთქვათ, n არის ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური ნამდვილი რიცხვი. n ხარისხის ფესვი a ნამდვილი რიცხვიდან ეწოდება ისეთ ნამდვილ რიცხვს (თუ არსებობს), რომლის n-ური ხარისხი უდრის a-ს. ასეთ ნამდვილ რიცხვთა შორის უდიდესი აღინიშნება $\sqrt[n]{a}$-ით. ვიგულისხმოთ, რომ $\sqrt[n]{a}$ არის „$\sqrt{\ } na$" ძირითადი აღნიშვნის (ტერმის) გამარტივებული ჩაწერა. განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ n ხარისხის ფესვი a-დან არსებობს, მაშინ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. ხარისხი წილადი მაჩვენებლით $a^{\frac{m}{n}}$, სადაც a არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, $\frac{m}{n}$ კი წილადი ნამდვილი რიცხვია (ე. ი. რაციონალური ნამდვილი რიცხვია), განისაზღვრება ტოლობით $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (იმ შემთხვევაში, როცა $a = 0$ უნდა მოვითხოვოთ დამატებით, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი ნამდვილი რიცხვი დადებითი იყოს). $\sqrt[n]{a}$ ტერმს ეწოდება **რადიკალი**. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ტოლობაზე დაყ-

რდნობით მიიღება რადიკალებისა და წილადმაჩვენებლიანი ხარისხების ძირითადი თვისებები: საიდანაც კერძოდ გამომდინარეობს, რომ a^2 არაა დამოკიდებული r რაციონალური რიცხვის წარმომადგენლის არჩევაზე.

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ 1. $\sqrt[n]{+\infty}=+\infty \quad (n=1,2,\dots)$.

2. თუ a არის არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი და n არის ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური ნამდვილი რიცხვი, მაშინ $\sqrt[n]{a}$ არის გაერთიანება უარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისა და ისეთ არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისა, რომელთა n-ური ხარისხი ნაკლებია a-ზე.

3. თუ n ნულისაგან განსხვავებული წყვილი ნატურალური რიცხვია, მაშინ n ხარისხის ფესვს დადებით a რიცხვიდან ორი მნიშვნელობა აქვს: $\sqrt[n]{a}$ და $-\sqrt[n]{a}$.

4. კენტი ხარისხის ფესვს ნამდვილ რიცხვიდან ერთადერთი მნიშვნელობა აქვს (და, მაშასადამე, იგი აღინიშნება $\sqrt[n]{a}$-ით).

ხარისხი, რომლის ფუძე a ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, ხარისხის მაჩვენებელი α კი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, აღინიშნება a^α-თი და განისაზღვრება შემდეგნაირად (შემთხვევა, როცა α (ნამდვილი) რაციონალური რიცხვია ზემოთაა განხილული). $1^\alpha=1$ $(-\infty\le\alpha\le\infty)$; თუ $a>1$, შესაბამისად $0<a<1$, და α ირაციონალური რიცხვია, მაშინ a^α არის ისეთ r რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: მოიძებნება α-ს, შესაბამისად α-ს დამატების, ისეთი β ელემენტი, რომ $r<a^\beta$ (უკანასკნელი უტოლობის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის განსაზღვრისას r და β საკუთრივი რაციონალური რიცხვები შესაბამის ნამდვილ რიცხვებად უნდა მივიჩნიოთ). თუ უკანასკნელ წინადადებაში (განსაზღვრაში) a^α-სგან დამატებით მოვითხოვთ, რომ იგი შეიცავდეს უარყოფით რაციონალურ რიცხვებს, მივიღებთ აღნიშნული განსაზღვრის ტოლფასს განსაზღვრას. ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ ასეთნაირად მოდიფიცირებული განსაზღვრა ვრცელდება იმ შემთხვევაშიც, როცა α უსასრულო რიცხვია. აქვე შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის ასეთი მოდიფიცირება $a>1$ და $\alpha=\infty$, შესაბამისად $0<a<1$ და $\alpha=-\infty$, შემთხვევაში ზედმეტია. აღნიშნული განსაზღვრის იმ შემთხვევას, როცა $0<a<1$, მოდიფიცირების გარეშე გავავრცელებთ იმ შემთხვევაზე, როცა $a=0$ და α დადებითია. 0-ის არადადებითი ხარისხი (კერძოდ, 0^0)

არ განისაზღვრება. ასევე არ განისაზღვრება ∞^0, $(-\infty)^0$ და უარყოფითი ნამდვილი რიცხვების ხარისხები ირაციონალური მაჩვენებლით.

ცხადია, $0^\alpha = 0$; თუ $(0 < \alpha \le \infty)$, თუ $\infty \ge a > 1$, მაშინ $a^\infty = \infty$ და $a^{-\infty} = 0$; თუ $0 < a < 1$, მაშინ $a^\infty = 0$ და $a^{-\infty} = \infty$; თუ $\infty \ge a \ge 1$, მაშინ $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty}$; თუ $0 < a < 1$, მაშინ $a^\infty = \frac{1}{a^{-\infty}}$; $\infty^\alpha = \infty$ $(0 < \alpha \le \infty)$; $\infty^\alpha = 0$ $(-\infty \le \alpha < 0)$;

ახლა ადვილად შევნიშნავთ, რომ ნებისმიერი α სასრული ნამდვილი რიცხვისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადება. თუ $a \ge 1$, შესაბამისად $0 < a < 1$, მაშინ a^α არის ისეთ r რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: მოიძებნება α-ს, შესაბამისად α-ს დამატების, ისეთი β ელემენტი, რომ $r < a^\beta$.

b (ნამდვილი) **რიცხვის ლოგარითმი** a ფუძით აღინიშნება $\log_a b$-თი და, განსაზღვრით, არის ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b. შესაძლოა, b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით არ არსებობდეს. მაგალითად, უარყოფითი რიცხვის ლოგარითმი დადებითი ფუძით არ არსებობს. თუ a ერთისაგან განსხვავებული დადებითი ნამდვილი რიცხვია, b კი — დადებითი რიცხვი, მაშინ არსებობს $\log_a b$ და იგი ცალსახად განისაზღვრება. ამასთან, თუ $1 < a \le \infty$, შესაბამისად $0 < a < 1$, მაშინ $\log_a b$ არის ისეთ r რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $a^r < b$, შესაბამისად $a^r > b$ (დაამტკიცეთ!).

სავარჯიშო. 1. $\log_{\frac{1}{2}} \infty = -\infty$; $\log_{10} \infty = \infty$.

2. $a^{\log_a b} = b$ $([0 < a < 1 \vee 1 < a < \infty] \wedge b > 0)$.

შენიშვნა. როგორც აღინიშნა 0^0, ∞^0 და $(-\infty)^0$ არ განისაზღვრებიან. ამის მიზეზია ის გარემოება, რომ არ არსებობენ შემდეგი ზღვრები.

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ b \to 0}} a^b; \quad \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to 0}} a^b; \quad \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to 0}} a^b.$$

ვაიგივებთ რა რაციონალურ ნამდვილ რიცხვებს შესაბამის რაციონალურ რიცხვებთან, მთელ ნამდვილ რიცხვებს შესაბამის მთელ რიცხვებთან და ნატურალურ ნამდვილ რიცხვებს შესაბამის ჩვეულებრივ ნატურა-

ლურ რიცხვებთან, ნამდვილ რიცხვთა თეორიაში შემოტანილი ოპერაციებიდან, მიმართებებიდან და ცნებებიდან ბუნებრივად ინდუცირდებიან შესაბამისად ცნებები რაციონალური რიცხვებისათვის, შესაბამისად მთელი რიცხვებისათვის, შესაბამისად ჩვეულებრივ ნატურალური რიცხვებისათვის. ასეთ ინდუცირებულ ოპერაციებს ჩვენ შემოტანილად ჩავთვლით ყოველგვარი შენიშვნების გარეშე. მაგალითად, რადიკალის ოპერაცია შეგვიძლია შემოტანილად ვიგულისხმოთ რაციონალურ რიცხვთა თეორიაში, მთელ რიცხვთა თეორიასა და ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვთა თეორიაში.

a **ნამდვილი რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა** სიზუსტით ერთამდე ნაკლებობით, შესაბამისად **მეტობით**, ეწოდება ისეთ m მთელ ნამდვილ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $m \leq a < m+1$, შესაბამისად $m \geq a > m-1$. ასევე, a **ნამდვილი რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით** $\frac{1}{10^n}$ **-მდე ნაკლებობით**, შესაბამისად **მეტობით**, ეწოდება ისეთ $\frac{m}{10^n}$ სახის ათწილადს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $\frac{m}{10^n} \leq a < \frac{m+1}{10^n}$, შესაბამისად $\frac{m}{10^n} \geq a > \frac{m-1}{10^n}$.

4.3.2 ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ორი ძირითადი თვისება. თეორემა 3.2 (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის შესახებ). თუ სასრულ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლე გაყოფილია ორ არაცარიელ A და B სიმრავლედ ისე, რომ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნაკლებია B სიმრავლის თითოეულ ელემენტზე, მაშინ ან A სიმრავლეს აქვს უდიდესი ელემენტი ან B სიმრავლეს აქვს უმცირესი ელემენტი.

დამტკიცება. $\cup A$ აღვნიშნოთ c-თი. დავუშვათ რომ c არ არის A სიმრავლის უდიდესი ელემენტი. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ მაშინ c არის B სიმრავლის უმცირესი ელემენტი.

c ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ A სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის $c \geq a$. აქ ჩვენი დაშვების ძალით ტოლობა გამორიცხულია. ამიტომ c არ ეკუთვნის A სიმრავლეს და, მაშასადამე, c არის B სიმრავლის ელემენტი. ავიღოთ B სიმრავლის ნებისმიერი b ელემენტი. საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ $c \leq b$. ავიღოთ c-ს ნებისმიერი ელემენტი r. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $r \in b$. რადგან $r \in c$, მოიძებნება ისეთი $a \in A$ ნამდვილი რიცხვი, რომ $r \in a$. რადგან $a < b$ და, მაშასადამე, $a \subset b$, უკანასკნელი კუთვნილების მიმართებიდან გამომდინარეობს, რომ $r \in b$.

ვთქვათ, E არის ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლე. ნამდვილ a რიცხვს ეწოდება E **სიმრავლის ზემოდან**, შესაბამისად **ქვემოდან**, **შემომსაზღვრელი**, თუ a მეტია ან ტოლი, შესაბამისად ნაკლებია ან ტოლი, E სიმრავლის ყოველ ელემენტზე. E სიმრავლეს ეწოდება **ზემოდან**, შესაბამისად **ქვემოდან**, **შემოსაზღვრული** (**შემოუსაზღვრელი**), თუ მას აქვს (არ აქვს) სასრული ზემოდან, შესაბამისად ქვემოდან, შემომსაზღვრელი. a ნამდვილ რიცხვს ეწოდება E **სიმრავლის ზედა**, შესაბამისად **ქვედა**, **საზღვარი**, თუ იგი არის E სიმრავლის ზემოდან, შესაბამისად ქვემოდან, შემომსაზღვრელ რიცხვთა შორის უმცირესი, შესაბამისად უდიდესი.

თეორემა 3.3 ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ E სიმრავლეს აქვს ერთადერთი ზედა, შესაბამისად ქვედა, საზღვარი. ამასთანავე, ზემოდან, შესაბამისად ქვემოდან, შემოსაზღვრული ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლის ზედა, შესაბამისად ქვედა, საზღვარი სასრული ნამდვილი რიცხვია. ზემოდან, შესაბამისად ქვემოდან, შემოუსაზღვრელი ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი E სიმრავლის ზედა, შესაბამისად ქვედა, საზღვარი კი არის $+\infty$, შესაბამისად $-\infty$.

დამტკიცება. ადვილად შემოწმდება, რომ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ E სიმრავლის ერთადერთი ზედა, შესაბამისად ქვედა, საზღვარი არის $\cup E$, შესაბამისად $\cap E$-დან მაქსიმალური ელემენტის ამოგდებით მიღებული სიმრავლე. თეორემის დანარჩენ ნაწილთა სამართლიანობის შემოწმება სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ქვემოთ, როცა მსჯელობა იწარმოებს ნამდვილ რიცხვთა თეორიაში, ტერმინები „ნატურალური რიცხვი", „მთელი რიცხვი" და „რაციონალური რიცხვი" შესაბამისად უნდა გავიგოთ როგორც „ნამდვილი ნატურა-

ლური რიცხვი", „ნამდვილი მთელი რიცხვი" და „ნამდვილი რაციონალური რიცხვი". იმ გამონაკლისის შემთხვევაში კი, როცა აღნიშნული ტერმინები გვინდა გამოვიყენოთ პირდაპირი აზრით (თუ საჭირო იქნა გაუგებრობათა თავიდან ასაცილებლად), ვისარგებლებთ დამაზუსტებელი სიტყვით „საკუთრივი" („საკუთრივი მთელი რიცხვი" და ა. შ.). ამ შეთანხმებით ზემოთაც ვსარგებლობდით.

4.3.3 ნამდვილი რიცხვის წარმოდგენა ათწილადის სახით. საკუთრივ მთელ რიცხვთა α მიმდევრობას[1] ეწოდება ათწილადი, თუ α_i არის ერთ-ერთი 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 რიცხვებიდან ($i = 1,2,\ldots$) და, ამასთანავე, ყოველ n-თვის მოიძებნება ისეთი $m > n$, რომ $\alpha_n \neq 9$. ნაცვლად $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ აღნიშვნისა, α ათწილადს აღნიშნავენ აგრეთვე $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$ გამოსახულებით. ამასთანავე, იმ შემთხვევაში როცა სარგებლობენ უკანასკნელი აღნიშვნით, α_i სიმბოლოს აიგივებენ α_i რიცხვის აღმნიშვნელ ციფრთან და უწოდებენ α ათწილადის i-ურ ათობით ნიშანს ($i = 1,2,\ldots$), α_0 სიმბოლოს კი, როცა α_0 რიცხვი არაუარყოფითია, აიგივებენ ათობითი სისტემის მიხედვით α_0 რიცხვის აღმნიშვნელ სიტყვასთან, ხოლო როცა α_0 რიცხვი უარყოფითია, აიგივებენ $\dot{-}\sigma$-თან, სადაც σ არის ათობითი სისტემის მიხედვით $-\alpha_0$ რიცხვის აღმნიშვნელი სიტყვა. ნაცვლად აღნიშვნისა $\dot{-}\sigma$ იყენებენ, აგრეთვე $\overline{\sigma}$, როგორც გამარტივებულ აღნიშვნას. ათწილადის აღსანიშნავად იყენებენ აგრეთვე $\dot{-}14{,}132119\ldots$ და $\overline{14}{,}132119\ldots$ სახის გამოსახულებებს. ასეთი სახის აღნიშვნა არაა სრულყოფილი. იგი აღნიშნავს ნებისმიერ ისეთ α ათწილადს, რომლისთვისაც $\alpha_0 = -14$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 1$, $\alpha_6 = 9$. კერძო შემთხვევებში ასეთი სახის აღნიშვნა კონტექსტის საფუძველზე ცალსახად განსაზღვრავს ათწილადს. $-51{,}8912\ldots$ და $-\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$ სახის აღნიშვნებს არ იყენებენ ათწილადის აღსანიშნავად: ქვემოთ ჩვენ დავამყარებთ ურთიერთცალსახა თანადობას სასრულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და ათწილადების სიმრავლეს შორის და ათწილადის აღმნიშვნელ გამოსახულებებს გამოვიყენებთ ამ ათწილადის შესაბამისი ნამდვილი რიცხვის აღსანიშნავად. მაშინ, მაგალითად, $-51{,}8912\ldots$ აღმოჩნდება $51{,}8912\ldots$ ათწილა-

[1] მიმდევრობის ცნების განსაზღვრა იხ. 5.4.2 პუნქტში.

დის შესაბამისი ნამდვილი რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვის აღნიშვნა. α ათწილადს ეწოდება **სასრული**, თუ მოიძებნება ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ n-ზე მეტ ყველა ნატურალურ m რიცხვისათვის $\alpha_m = 0$. ასეთი ათწილადი აღინიშნება, აგრეთვე $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ ჩვეულებრივი ათწილადით. ათწილადს ეწოდება **უსასრულო** ათწილადი თუ იგი არ არის სასრული. განხილული α ათწილადის **მთელი ნაწილი** ეწოდება α_0 რიცხვს, α **ათწილადის წილადური ნაწილი** კი ეწოდება $0,\alpha_1\alpha_2...$ ათწილადს. ცხადია, ათწილადის განსაზღვრისათვის საკმარისია განისაზღვროს მისი მთელი ნაწილი და ათობითი ნიშნები.

ამბობენ, რომ **საკუთრივი მთელი რიცხვი m ნაკლებია a ნამდვილ რიცხვზე**, თუ m ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია a-ზე. ქვემოთ ვისარგებლებთ სხვა ანალოგიური ტერმინებით (გამარტივებული გამოთქმებით) მათი განსაზღვრებათა ფორმულირებების გარეშე.

a სასრული ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი α ათწილადი განისაზღვრება შემდეგი პირობით. α_n არის უდიდესი საკუთრივი მთელი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\alpha_0 : 10^0 + \alpha_1 : 10^1 + \alpha_2 : 10^2 + \ldots + \alpha_n : 10^n \le a$$

(აქ n-ს მიმდევრობით უნდა მივცეთ 0, 1, 2,... მნიშვნელობები და მოტანილი (რეკურენტული) ფორმულა მიმდევრობით განსაზღვრავს $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$, ნამდვილ რიცხვებს).

ადვილად მტკიცდება, რომ ამ გზით მიღებული $\alpha = \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...$ მიმდევრობა ათწილადია.

ნამდვილ რიცხვს ვუწოდოთ **ათობით-რაციონალური ნამდვილი რიცხვი**, თუ მისი შესაბამისი ათწილადი სასრულია.

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ განსაზღვრული სასრული ნამდვილი რიცხვების შესაბამისი ათწილადები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი α ათწილადი წარმოადგენს იმ a ნამდვილი რიცხვის შესაბამის ათწილადს, რომელიც განისაზღვრება პირობით: რაციონალური რიცხვი $r \in a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება ისეთი n, რომ $r < \alpha_0,\alpha_1...\alpha_n$. ამრიგად, თუ მხედველობაში მივიღებთ წინა სავარჯიშოში მოცემულ წინადადებას, ვრწმუნდებით, რომ ზემოთ მოტანილი განსაზღვრა ურთიერთცალსახა თანადობას ამყარებს სასრულ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლესა და ათწილადთა სიმრავლეს

შორის. a ნამდვილ რიცხვს ეწოდება **ათობით რაციონალური ნამდვილი რიცხვი**, თუ a-ს შესაბამისი ათწილადი არის სასრული.

მოცემულ ნებისმიერ სასრულ ნამდვილ რიცხვს გავაიგივებთ შესაბამის ათწილადთან. ამით ათწილადის აღნიშვნები იქცევიან შესაბამის ნამდვილ რიცხვთა აღნიშვნებად. აღნიშნული გაიგივების საფუძველზე ნამდვილი რიცხვებზე წარმოებულ ოპერაციებიდან ინდუცირდებიან ათწილადთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ოპერაციები. $a=\alpha$ სახის ტოლობას, სადაც α არის ათწილადი, a კი არის მისი შესაბამისი ნამდვილი რიცხვი, ეწოდება **a ნამდვილი რიცხვის წარმოდგენა (გაშლა) ათწილადად**.

შევნიშნოთ, რომ ათწილადის მოტანილი განსაზღვრა დამოკიდებული არაა ნამდვილი რიცხვის ცნებაზე. ხშირად სასრულ ნამდვილ რიცხვებს განსაზღვრავენ როგორც ათწილადებს.

ნამდვილ რიცხვთა თეორიაში ათწილადის წევრებს (საკუთრივ მთელ რიცხვებს) გავაიგივებთ შესაბამის მთელ ნამდვილ რიცხვებთან. ამით ათწილადი აღმოჩნდება მთელ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა. ათწილადის ასეთი ცნების შემთხვევაშიც შევინარჩუნებთ ათწილადის ცნებასთან დაკავშირებულ ზემოთ განხილულ ცნებებს. ცხადია, ათწილადის ცნების ასეთი მოდიფიცირების შემთხვევაში ათწილადის მთელი ნაწილი ნამდვილი რიცხვი აღმოჩნდება. ამ შემთხვევაშიც ათწილადებს განვიხილავთ როგორც შესაბამის ნამდვილ რიცხვებს — ათწილადის აღნიშვნებს განვიხილავთ როგორც შესაბამისი ნამდვილი რიცხვების აღნიშვნებს.

სავარჯიშო 1. დაამტკიცეთ შემდეგი წინადადება: α და β ათწილადების შეკრება (გამოკლება) შეიძლება ვაწარმოოთ შემდეგი ეფექტური წესის მიხედვით. უპირველეს ყოვლისა, პირველ შესაკრებს (საკლებს) ქვემოდან მივუწეროთ მეორე შესაკრების (მაკლების), ისე რომ მძიმე მოხვდეს მძიმის ქვეშ. ვთქვათ, $n_1, n_2,\ldots$ არის ისეთი მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა ნატურალური რიცხვებისა, რომ ნატურალური რიცხვი n არის ამ მიმდევრობის წევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჯამი (სხვაობა) ამ ათწილადთა n-ურ ათობით ნიშნებისა განსხვავდება 9-გან (0-გან). თუ ასეთი ნატურალური რიცხვები არ არსებობენ, მაშინ საკმარისია შევკრიბოთ (გამოვაკლოთ) α და β რიცხვების მთელი ნაწილები, ამასთანავე, მიღებული ჯამი უნდა გავადიდოთ ერთი ერთეულით. თუ $n_1, n_2, n_3\ldots$ მიმდევრობა არაცარიელია, მაშინ პირველად იკრიბებიან (აკლდებიან) ათობით ნიშნები ნომრებით $n_1, n_1-1,\ldots,1$ და მთელი ნაწილები ჩვეულებრივი წესების

დაცვით; ამასთანავე, თუ n_1 არაა განხილული მიმდევრობის უკანასკნელი წევრი, მაშინ n_1-ური ათობით ნიშანს ჯამისა (სხვაობისა), სხვა ათობით ნიშნებისაგან განსხვავებით, არ ვწერთ — ვიმახსოვრებთ. შემდეგ ანალოგიურად იკრიბებიან (აკლდებიან) ათობითი ნიშნები ნომრებით $n_2, n_2 - 1, \ldots, n_1 + 1$ და ვავსებთ ცარიელ ადგილს ნომერით n_1 (საჭიროების შემთხვევაში დამახსოვრებული ათობითი ნიშნიდან შესაძლებელია ერთის დასესხება) და ა. შ. შეკრების შემთხვევაში, თუ $n_1, n_2, \ldots$ მიმდევრობა სასრულია და n_k მისი უკანასკნელი წევრია, მაშინ n_k ნომრის ათობითი ნიშნების შეკრებისას მიღებული ჯამი უნდა გავადიდოთ ერთით.

შენიშვნა. განხილული წესი იმ შემთხვევაში, როცა $n_1, n_2, \ldots$ მიმდევრობა სასრულია, იძლევა ჩვეულებრივ ათწილადს, რომელსაც განვიხილავთ სასრული ათწილადის აღნიშვნად.

2. დაამტკიცეთ: თუ α არის ათწილადი, მაშინ α_0 იქნება მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით 1-მდე ნაკლებობით, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ კი იქნება მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$-მდე ნაკლებობით, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 1 : 10^n$ კი — მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$-მდე მეტობით.

3. განაზოგადეთ ამ პუნქტში მოტანილი ცნებები და შედეგები s-ობით წილადებისათვის, სადაც s არის 2-ზე მეტი ან ტოლი ნატურალური რიცხვი (s-ობით წილადები ათწილადების, ე. ი. ათობითი წილადების, ანალოგიურად განისაზღვრება რიცხვთა ისეთ სისტემაში, რომლის ფუძედ მიჩნეულია s. აქ საჭიროა გვქნეს $0, 1, 2, \ldots, s - 1$ რიცხვების აღმნიშვნელი ციფრები — $s - 1$ რიცხვის აღმნიშვნელი ციფრი შეასრულებს ციფრი 9-ის როლს).

4. დაამტკიცეთ: სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადი არის რაციონალური რიცხვი.

5. დაამტკიცეთ: უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი არის ირაციონალური რიცხვი.

4.3.4 ნამდვილი რიცხვის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, რიცხვითი ღერძი. რიცხვითი ღერძი ეწოდება

ისეთ $x = (d, 0, p)$ სამეულს, რომლის პირველი კომპონენტი წრფეა, მეორე და მესამე კომპონენტები კი პირველი კომპონენტის ერთმანეთისაგან განსხვავებული წერტილებია. მეორე კომპონენტს 0-ს ეწოდება x **ღერძის სათავე**, $\ell = [0P)$ სხივის მიმართულებას ეწოდება x **ღერძის დადებითი მიმართულება**, $\ell' = [P0)$ სხივის მიმართულებას კი – x **ღერძის უარყოფითი მიმართულება**. $[0, P]$ მონაკვეთის სიგრძე მიჩნეულია სიგრძის ერთეულად. d წრფეს ეწოდება x **ღერძის ფუძე**. რიცხვით ღერძს ჩვეულებრივ აიგივებენ მის ფუძესთან და ამის შესაბამისად იყენებენ გამარტივებულ გამოთქმებს. ასეთი გამარტივებული გამოთქმების მაგალითებია „x ღერძის წერტილი“ (მხედველობაშია x ღერძის ფუძის (ე. ი. d წრფის) წერტილი), „x ღერძის წერტილთა სიმრავლე“ (მხედველობაშია x ღერძის ფუძე, ე. ი. d წრფე) და ა. შ. გარდა ამ გამარტივებებისა, გადმოცემის გამარტივების მიზნით, შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებები (შეთანხმებები): „x ღერძის A წერტილი იმყოფება (მდებარეობს) x ღერძის B წერტილიდან დადებით, შესაბამისად უარყოფით, მიმართულებით“ განსაზღვრით ნიშნავს იმას, რომ $B \neq A$ და $[B, A]$ სხივი ℓ, შესაბამისად ℓ', სხივის თანამიმართულია. აღნიშნული ფრაზის ნაცვლად იყენებენ აგრეთვე შემდეგ გამარტივებულ ფრაზებს: „x ღერძის A წერტილი იმყოფება x ღერძის B წერტილის მარჯვნივ, შესაბამისად მარცხნივ“ და „x ღერძის A წერტილი იმყოფება x ღერძის B წერტილის ზევით, შესაბამისად ქვევით“. გადავზომოთ რაიმე $[CD]$ მონაკვეთი x ღერძის A წერტილიდან დადებითი მიმართულებით, შესაბამისად უარყოფითი მიმართულებით, ნიშნავს ვიპოვოთ x ღერძის ისეთი B წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $|AB| = |CD|$ და $[AB)$ სხივი ℓ, შესაბამისად ℓ' სხივის თანამიმართულია ($|AB|$-ით აღინიშნება მანძილი A-დან B-მდე). „AB მონაკვეთი არის სიგრძის ერთეული“ ნიშნავს „AB მონაკვეთის სიგრძე არის სიგრძის ერთეული“. ქვემოთ ვისარგებლებთ სხვა ანალოგიური განსაზღვრებებითაც ამ განსაზღვრებათა ცხადად მოტანის გარეშე.

x ღერძის O სათავისაგან განსხვავებულ წერტილთა სიმრავლე იყოფა O წერტილიდან დადებით მიმართულებით მყოფ და უარყოფით მიმართულებით მყოფ ურთიერთარამკვეთ წერტილთა სიმრავლეებად. პირველი მათგანი ემთხვევა ℓ სხივის შესაბამის ღია სხივს, მეორე კი ℓ სხივის

მოპირდაპირე სხივის შესაბამის ღია სხივს (ერთი და იმავე წრფეზე მდებარე ერთმანეთისაგან განსხვავებულ საერთო სათავის მქონე სხივებს ურთიერთმოპირდაპირე სხივები ეწოდებათ).

x რიცხვითი ღერძის წერტილთა სიმრავლესა და სასრულ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლეს შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა შემდეგი ორი აქსიომის საფუძველზე.

1. **უწყვეტობის აქსიომა.** თუ x ღერძის წერტილთა სიმრავლე გაყოფილია ორ A და B ქვესიმრავლედ ისე, რომ A სიმრავლის თითოეული წერტილი მოთავსებულია B სიმრავლის ყველა წერტილიდან უარყოფით მიმართულებით, მაშინ ან A სიმრავლე შეიცავს ისეთ წერტილს (ელემენტს), რომელიც იმყოფება A სიმრავლეში შემავალ ყველა დანარჩენ წერტილიდან დადებითი მიმართულებით, ან B სიმრავლე შეიცავს ისეთ წერტილს, რომელიც იმყოფება B სიმრავლეში შემავალ ყველა დანარჩენ წერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით.

2. **არქიმედეს აქსიომა.** ნებისმიერ ორ AB და KP მონაკვეთისათვის მოიძებნება ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ KP მონაკვეთი A-დან AB მონაკვეთში $[AB)$ მიმართულებით გადაიზომება n-ჯერ და ამ გადაზომვის შემდეგ ან არ დარჩება ნაშთი ან დარჩება KP მონაკვეთზე ნაკლები ნაშთი.

მართლაც, ვთქვათ, a არის ნებისმიერი სასრული ნამდვილი რიცხვი. მისი შესაბამისი წერტილი x ღერძიდან განვსაზღვროთ შემდეგნაირად.

I **შემთხვევა.** a **არის ნამდვილი რაციონალური რიცხვი.** r იყოს მისი შესაბამისი საკუთრივი რაციონალური რიცხვი, $\frac{m}{n}$ კი იყოს r-ის წარმომადგენელი (n მთელი ნატურალური რიცხვია). a ნამდვილ რაციონალურ რიცხვს შევუსაბამოთ x ღერძის ის M წერტილი, რომელსაც მივიღებთ, თუ $[OP]$ ერთეულოვანი მონაკვეთის n კონგრუენტულ ნაწილად გაყოფით მიღებულ მონაკვეთს გადავზომავთ x ღერძზე სათავიდან $|m|$-ჯერ დადებითი მიმართულებით ან უარყოფითი. ადვილი დასანახია, რომ $[OP]$ ერთეულოვანი მონაკვეთის nk კონგრუენტულ ნაწილად გაყოფით მიღებული მონაკვეთის თუ გადავზომავთ x ღერძზე სათავიდან $|m| \cdot k$-ჯერ იმავე მიმართულებით, იმავე M წერტილს მივიღებთ (ვგულისხმობთ, რომ k საკუთრივი მთელი ნატურალური რიცხვია).

აქედან გამომდინარეობს, რომ M წერტილი არ არის დამოკიდებული r-ის $\frac{m}{n}$ წარმომადგენლის არჩევაზე და, მაშასადამე, a რიცხვის შესაბამისი M წერტილის მოტანილი განსაზღვრა კორექტულია. ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი ორი ნამდვილი რაციონალური a_1 და a_2 რიცხვისათვის $a_1 > a_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a_1-ის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია a_2-ის შესაბამისი წერტილიდან დადებითი მიმართულებით. r საკუთრივი რაციონალური რიცხვის შესაბამისი ვუწოდოთ X ღერძის იმ წერტილს, რომელიც არის r ნამდვილი რაციონალური რიცხვის შესაბამისი.

II **შემთხვევა.** a **არის ირაციონალური რიცხვი.** X ღერძის წერტილთა სიმრავლე შემდეგნაირად გავყოთ ორ A და B ნაწილად: X ღერძის c წერტილი მივაკუთვნოთ A სიმრავლეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს a ნამდვილი რიცხვის ისეთი r ელემენტი (საკუთრივი რაციონალური რიცხვი), რომ r-ის შესაბამისი წერტილი იმყოფება c წერტილიდან დადებითი მიმართულებით. შევნიშნოთ, რომ A და B სიმრავლეები აკმაყოფილებენ უწყვეტობის აქსიომაში მოთხოვნილ პირობებს, ამასთანავე, A სიმრავლე არ შეიცავს ისეთ წერტილს, რომელიც მოთავსებული იქნება A სიმრავლეში შემავალი ყველა დანარჩენი წერტილიდან დადებითი მიმართულებით.

მართლაც, ვთქვათ, $a_1 \in A$ და $b_1 \in B$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ a_1 მოთავსებულია b_1 წერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით და არსებობს A სიმრავლის ისეთი წერტილი, რომელიც a_1-დან იმყოფება დადებითი მიმართულებით. არსებობს a ნამდვილი რიცხვის ისეთი r ელემენტი, რომ r-ის შესაბამისი r' წერტილი იმყოფება a_1-დან დადებითი მიმართულებით. $r' \in A$, რამდენადაც არსებობს a ნამდვილი რიცხვის ისეთი r_1 ელემენტი, რომელიც აღემატება r-ს და, მაშასადამე, მისი შესაბამისი r_1' წერტილი იმყოფება r'-დან დადებითი მიმართულებით. ახლა, ცხადია, $r' \neq b_1$. რადგან $b_1 \overline{\in} A$, ამიტომ b_1 არ შეიძლება იმყოფებოდეს r'-დან უარყოფით მიმართულებით. მაშასადამე, b_1 არის r'-დან დადებითი მიმართულებით. ამრიგად, r' და, მით უმეტეს, a_1 იმყოფება b_1-დან უარყოფით მიმართულებით.

ამიტომ უწყვეტობის აქსიომის ძალით არსებობს B სიმრავლის ისეთი M წერტილი, რომელიც მოთავსებულია B სიმრავლეში შემავალ ყველა დანარჩენი წერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით. ეს M წერტილი შეუსაბამოთ α ნამდვილ რიცხვს.

დავამტკიცოთ, რომ ამგვარად განსაზღვრული თანადობა იქნება ურთიერთცალსახა თანადობა x რიცხვით ღერძის წერტილთა სიმრავლესა და R სასრულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის.

ამისათვის საკმარისია დამტკიცდეს:

(1). თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია და $a > b$, მაშინ a-ს შესაბამისი a' წერტილი იმყოფება b-ს შესაბამის b' წერტილიდან დადებითი მიმართულებით (კერძოდ, $a' \neq b'$).

(2). თუ M არის x ღერძის ნებისმიერი წერტილი, a კი — ისეთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთა შესაბამისი წერტილები იმყოფებიან M წერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით, მაშინ a არის ნამდვილი რიცხვი, M კი a ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი წერტილია.

ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი წერტილის განსაზღვრიდან და ამ განსაზღვრასთან დაკავშირებით მოტანილი მსჯელობებიდან ადვილად გამომდინარეობს:

(3). ნებისმიერი P ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი P' წერტილი იმყოფება მის ნებისმიერი ელემენტის (საკუთრივი რაციონალური რიცხვის) შესაბამისი წერტილიდან დადებითი მიმართულებით. ასევე, P' იმყოფება P ნამდვილი რიცხვის დამატების ნებისმიერი r ელემენტის შესაბამის r' წერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით, გარდა იმ გამონაკლისი შემთხვევისა, როცა P არის r რაციონალური ნამდვილი რიცხვი. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $r' = P'$

ახლა (1)-ის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ შემდეგი. რადგან $a > b$, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომ $r \in a$ და $r \overline{\in} b$. აქედან (3) წინადადების საფუძველზე დავასკვნით, რომ a' იმყოფება r-ის შესაბამის r' წერტილიდან დადებითი მიმართულებით, b' კი ან იმყოფება r' -დან უარყოფითი მიმართულებით ან ემთხვევა r'-ს. ორივე შემთხვევაში a' იმყოფება b' -დან დადებითი მიმართულებით.

დამტკიცებული (1) წინადადებიდან ადვილად დავასკვნით:

(4). c ნამდვილი რიცხვი იმყოფება a და b ნამდვილ რიცხვებს შორის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა c-ს შესაბამისი წერტილი x ღერძიდან იმყოფება a და b რიცხვების შესაბამის წერტილებს შორის.

აქედან, ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლის სათანადო თვისებების საფუძველზე, გამომდინარეობს.

(5). ღერძის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის იმყოფება ერთი მაინც რაციონალური წერტილი (ე. ი. ისეთი წერტილი, რომლის შესაბამისი ნამდვილი რიცხვი რაციონალურია).

ახლა, (2)-ის დასამტკიცებლად, შევნიშნოთ, რომ არქიმედეს აქსიომის ძალით a არ არის ცარიელი სიმრავლე, (5) წინადადების ძალით კი a სიმრავლეს არ აქვს უდიდესი ელემენტი.

(1)-დან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ a შეიცავს მის ნებისმიერ ელემენტზე ნაკლებ ყველა რაციონალურ რიცხვს. მაშასადამე, a არის ნამდვილი რიცხვი. a ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი a' წერტილი რომ M-ს ემთხვევა ადვილად მტკიცდება წინააღმდეგობის დაშვებით, რაც ამ შემთხვევაში იმას ნიშნავს, რომ a იმყოფება M-დან დადებითი მიმართულებით ან უარყოფითი მიმართულებით.

რიცხვითი x ღერძის ნებისმიერი M წერტილის შესაბამის ნამდვილ რიცხვს ამ M **წერტილის x-კოორდინატი** ეწოდება. ნაცვლად ტერმინისა x-კოორდინატი იყენებენ აგრეთვე ტერმინს **კოორდინატი**, როცა კონტექსტი უზრუნველყოფს გაუგებრობათა თავიდან აცილებას. რიცხვითი ღერძის თითოეულ წერტილს აიგივებენ ამ წერტილის შესაბამის ნამდვილ რიცხვთან (ე. ი. მის კოორდინატთან). ამის შესაბამისად რიცხვითი ღერძის წერტილს უწოდებენ **რაციონალურ წერტილს**, თუ მისი კოორდინატი რაციონალური ნამდვილი რიცხვია. ასევე შემოიტანება ტერმინები: რიცხვითი ღერძის **მთელი წერტილი**, **ნატურალური წერტილი** და **ირაციონალური წერტილი**.

ზემოთ ჩვენ ფაქტობრივად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემები.

თეორემა 3.4 თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია და $a > b$, მაშინ a-ს შესაბამისი a' წერტილი x რიცხვითი ღერძიდან იმყოფება b-ს შესაბამის b' წერტილიდან დადებითი მიმართულებით.

თეორემა 3.5 x ღერძის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის იმყოფება ერთი რაციონალური წერტილი მაინც.

თეორემა 3.6 c ნამდვილი რიცხვი მოთავსებულია a და b ნამდვილ რიცხვებს შორის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x რიცხვითი ღერძის c წერტილი (ე. ი. c რიცხვის შესაბამისი წერტილი) მოთავსებულია x რიცხვითი ღერძის a და b წერტილებს შორის.

4.3.5 მონაკვეთის სიგრძე. ვთქვათ, სიგრძის ერთეულად მიჩნეულია OP მონაკვეთი. AB **მონაკვეთის სიგრძე** ეწოდება a ნამდვილ რიცხვს, რომლის შესაბამისი ათწილადი $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...$ შემდეგნაირად განისაზღვრება. α_0 არის A-დან AB მონაკვეთში OP ერთეულის AB მიმართულებით გადაზომვათა მაქსიმალური რიცხვი. ვგულისხმობთ, რომ გადაზომვათა რიცხვს გამოვხატავთ საკუთრივი ნატურალური მთელი რიცხვებით (ასეთი რიცხვის არსებობა გამომდინარეობს არქიმედეს აქსიომიდან). α_1 არის წინა გადაზომვის შედეგად მიღებულ **პირველ** A_1B **ნაშთში** ერთეულის 10 კონგრუენტული ნაწილიდან გაყოფის შედეგად მიღებული მონაკვეთის A_1-დან $[A_1B)$ მიმართულებით გადაზომვათა მაქსიმალური რიცხვი. საზოგადოდ, თუ განსაზღვრულია $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ და k-ური ნაშთი, რომელიც წერტილისაგან განსხვავდება, მაშინ α_{k+1} არის (k + 1)-ურ A_kB ნაშთში ერთეულის 10^k კონგრუენტულ ნაწილად გაყოფის შედეგად მიღებული მონაკვეთის A_k-დან $[A_kB)$ მიმართულებით გადაზომვათა მაქსიმალური რიცხვი. თუ რომელიმე ეტაპის გადაზომვათა შედეგად მიღებული ნაშთი გადაგვარებულია წერტილად, მაშინ პროცესი წყდება და პროცესის შედეგად მიიღება $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ სახის სიტყვა, რომელიც მიჩნეული გვაქვს სასრული ათწილადის აღნიშვნად. ადვილად დამტკიცდება მოტანილი განსაზღვრის კორექტულობა (მონაკვეთის სიგრძე დამოკიდებული არ იქნება იმაზე, გადაზომვებს A-დან ვაწარმოებთ [AB) მიმართულებით, თუ B-დან [BA) მიმართულებით). [AB] მონაკვეთის სიგრძე აღინიშნება |AB|-თი.

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ შემდეგი წინადადებები.

1. ერთეულის თანაზომადი მონაკვეთის სიგრძე არის რაციონალური რიცხვი.

2. ერთეულის უთანაზომო მონაკვეთის სიგრძე არის ირაციონალური რიცხვი.

3. x = (d,O,P) რიცხვითი ღერძის M წერტილის კოორდინატი არის + OM ან − OM იმისდა მიხედვით [OM) მიმართულება ემთხვევა x ღერძის დადებით მიმართულებას თუ არა.

4. თუ C არის AB მონაკვეთის შიდა წერტილი, მაშინ $AB = AC + CB$.

5. რიცხვითი ღერძის ორ A და B წერტილებს შორის მანძილი AB უდრის $|b - a|$, სადაც a არის A წერტილის კოორდინატი, b კი არის B წერტილის კოორდინატი.

6. კონგრუენტულ მონაკვეთებს ტოლი სიგრძეები აქვთ.

7. მონაკვეთის სიგრძე არ არის დამოკიდებული ერთმანეთის მდებარეობაზე, ე. ი. თუ OP სიგრძის ერთეული O_1P_1 მონაკვეთის კონგრუენტულია, მაშინ მოცემული AB მონაკვეთის სიგრძე არ შეიცვლება. სიგრძის ერთეულად OP-ს ნაცვლად O_1P_1 მონაკვეთის აღებით.

ამ პუნქტის დასასრულს შევნიშნოთ შემდეგი.

რიცხვითი ღერძის წერტილების შესაბამის ნამდვილ რიცხვებთან გაიგივების საფუძველზე რიცხვითი ღერძი (რომელსაც აგრეთვე ერთგანზომილებიანი სივრცეს უწოდებენ) შეიძლება განვიხილოთ როგორც სასრულ ნამდვილ რიცხვთა **R** სიმრავლე. მაშინ სიბრტყე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $\mathbf{R}^2$ ანუ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, სივრცე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $\mathbf{R}^3$. საზოგადოდ, $\mathbf{R}^n$-ს, $n = 1, 2, \ldots$, იხილავენ როგორც n-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეს. ამასთანავე, გვაქვს რა ნამდვილი რიცხვები, საკუთრივი რაციონალური რიცხვები, წილადები, საკუთრივი მთელი რიცხვები და საკუთრივი ნატურალური რიცხვები განსაზღვრული როგორც სიმრავლეები ადვილი დასანახია, რომ n-განზომილებიანი $\mathbf{R}^n$ სივრცე, მისი ელემენტები, მისი ელემენტების ელემენტები და ა. შ. სიმრავლეებს წარმოადგენენ ($n = 1, 2, \ldots$). ყველა ამ სიმრავლეების აგებისათვის გამოსავალ პუნქტს წარმოადგენს ცარიელი სიმრავლე.

მომდევნო თავში გავეცნობით, თუ როგორ ისაზღვრება როგორც სიმრავლეები ისეთი მნიშვნელოვანი მათემატიკური ობიექტები, როგორიცაა გრაფიკი, თანადობა, ფუნქცია, მიმართება (თვისება), დალაგებული სიმრავლე. აქვე შევნიშნოთ, რომ ისეთი მათემატიკური ობიექტები, როგორიცაა ტოპოლოგიური სივრცე, ჯგუფი, რგოლი, წრფივი სივრცე და ა. შ. ისაზღვრებიან როგორც სიმრავლეები. მაგალითად, **ტოპოლოგიური სივრცე** ეწოდება სიმრავლეთა $(M, \mathbf{M})$ წყვილს, სადაც მეორე კომპონენტი არის პირველი კომპონენტის ქვესიმრავლეთა ისეთი სიმრავლე, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები (ე. წ. ტოპოლოგიური სივრცის აქსიომები):

I. $\mathbf{M} \in \mathbf{M}$.

II. **M**-ის ნებისმიერი ქვესიმრავლის გაერთიანება **M**-ის ელემენტია.

III. **M**-ის ნებისმიერი არაცარიელი სასრული ქვესიმრავლის თანაკვეთა **M**-ის ელემენტია.

II აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ $\varnothing \in \mathbf{M}$ (**M**-ის ქვესიმრავლის გაერთიანება ცარიელი სიმრავლეა).

განსაზღვრით, **M**-ის ელემენტებს ეწოდებათ $(M, \mathbf{M})$ ტოპოლოგიური სივრცის **ღია სიმრავლეები**, ღია სიმრავლეთა დამატებებს M-ის მიმართ კი ეწოდებათ $(M, \mathbf{M})$ ტოპოლოგიური სივრცის **ჩაკეტილი სიმრავლეები**.

ზემოთ განვსაზღვრავდით სხვადასხვა სახის მიმართებებისა და ოპერაციების მხოლოდ შინაარსს. მომდევნო თავის შესწავლის შემდეგ მკითხველი ადვილად შეძლებს ზემოთ განხილული ოპერაციები და მიმართებები წარმოადგინოს სიმრავლეების ან მეტასიმრავლეების სახით (ამ თავში განხილული ოპერაციები და მიმართებები წარმოიდგინებიან სიმრავლეების სახით, კლასიკური ოპერაციები და მიმართებები წარმოიდგინებიან მეტასიმრავლეების სახით).

4.3.6 ნამდვილი რიცხვის ზოგადი ცნება. ისევე როგორც ზოგადი სახის ნატურალური რიცხვები, ნამდვილი რიცხვის ცნება შეიძლება შემოტანილ იქნეს აქსიომური მეთოდით შემდეგნაირად (ამ პუნქტში გამოიყენება მომდევნო თავში შემოტანილი ცნებები და ტერმინები).

ნამდვილი რიცხვი ეწოდება ობიექტთა R სისტემის ელემენტებს, რომელშიც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ყველგან განსაზღვრული ორადგილიანი „+" და „·" ოპერაციები, ნაკლებობის „<" პრედიკატი და შესრულებულია შემდეგი აქსიომები (სადაც იგულისხმება, რომ a, b, c არიან საგნობრივი ცვლადები მნიშვნელობათა R არით და ab წარმოადგენს $a \cdot b$-ს გამარტივებულ აღნიშვნას).

I. „>" წარმოადგენს სრული მკაცრი დალაგების მიმართებას.

II. შეკრების ოპერაციას აქვს II_1-II_5 თვისებები:

II_1. $\forall a \forall b \quad [a + b = b + a]$ (შეკრების კომუტაციურობა).

II_2. $\forall a \forall b \forall c \quad [a + [b + c]] = [a + b] + c]$ (შეკრების ასოციაციურობა).

II_3. $\exists b \forall a \quad [a + b = a]$.

ელემენტი, რომლის არსებობასაც II_3 აქსიომა ადგენს, ერთადერთია, იგი აღინიშნება 0-თი და ეწოდება ნული (თუ 0_1 და 0_2 ასეთი ელემენტებია, მაშინ $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$).

II_4. $\forall a \exists b \quad [a + b = 0]$.

ნამდვილი რიცხვი, რომლის არსებობასაც II_4 აქსიომა ადგენს, ცალსახად ისაზღვრება **a** რიცხვით, მას ეწოდება **a** რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი და აღინიშნება $-$ **a**-თი (თუ b_1 და b_2 ორი ასეთი რიცხვია, მაშინ $b_1 = b_1 + 0 = b_1 + a + b_2 = b_2 + [a + b_1] = b_2 + 0 = b_2$). ამრიგად, „$-$" განიხილება როგორც ერთადგილიანი ოპერაცია, რომლის მნიშვნელობა ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვზე არის მისი მოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვი. იმავე სიმბოლოთი აღინიშნება გამოკლების ორადგილიანი ოპერაციაც, რომელიც ისაზღვრება შემდეგნაირად. **a** და **b** ნამდვილი რიცხვების სხვაობა აღინიშნება $[a - b]$-თი და ისაზღვრება ტოლობით:

$$[a - b] = a + [- b].$$

II_5. $\forall a \forall b \forall c \quad [a < b \rightarrow a + c < b + c]$.

III. გამრავლების ოპერაციას აქვს III_1-III_5 თვისებები:

III_1. $\forall a \forall b \quad [ab = ba]$ (გამრავლების კომუტაციურობა).

III_2. $\forall a \forall b \forall c \quad [a[bc] = [ab]c]$ (გამრავლების ასოციაციურობა)

III_3. $\exists b \forall a \quad [ab = a]$.

ნამდვილი რიცხვი, რომლის არსებობასაც III_3 აქსიომა ადგენს, ერთადერთია, იგი აღინიშნება 1-ით და ეწოდება **ე რ თ ე უ ლ ი** (თუ b_1 და b_2 ორი ასეთი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $b_1 = b_1 b_2 = b_2 b_1 = b_2$).

III_4. $\forall a \quad [a \neq 0 \rightarrow \exists b [ab = 1]$.

ნამდვილი რიცხვი, რომლის არსებობასაც III_4 აქსიომა ადგენს ცალსახად ისაზღვრება ნულისაგან განსხვავებული **a** ნამდვილი რიცხვით, იგი აღინიშნება $1/a$ -ით და ეწოდება **a რ ი ც ხ ვ ი ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი**. **a** და **b** რიცხვების, $b \neq 0$, **გ ა ნ ა ყ ო ფ ი** აღინიშნება $[a : b]$-ით და ისაზღვრება ტოლობით $[a : b] = a \cdot [1/b]$.

0, 1, 1 + 1, 1+ 1 + 1,... რიცხვებს ეწოდებათ ნატურალური რიცხვები (ისინი აღინიშნებიან 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ციფრებით შედგენილი სიტ-

ყვებით ათობითი სისტემის მიხედვით), 0, 1, – 1, 2, – 2,... რიცხვებს ეწოდებათ მთელი რიცხვები. ნატურალურ, მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები შესაბამისად აღინიშნებიან N, Z და Q ასოებით.

III_5. $\forall a \forall b \forall c \quad [a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc]$.

IV. $\forall a \forall b \forall c \quad [[a + b] \cdot c = ac + bc]$ (გამრავლების დისტრიბუციულობა შეკრების მიმართ).

V. $\forall a \exists n \in N \quad [a < n]$ (არქიმედეს აქსიომა).

VI. (უწყვეტობის აქსიომა) ჩალაგებულ სეგმენტთა ნებისმიერი $[a_n, b_n]$ მიმდევრობისათვის $(a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n\ ,\ n = 0, 1, 2,...)$ არსებობს ერთი მაინც ნამდვილი რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის მიმდევრობის ყველა წევრს.

I-IV აქსიომები საზღვრავენ **წრფივ დალაგებულ სიმრავლეს**, I-V აქსიომები კი – დალაგებულ არქიმედეს ველს. II_1-II_4 აქსიომები ნიშნავს იმას, რომ R არის აბელის ჯგუფი (კომუტაციური ჯგუფი) შეკრების მიმართ, III_1-III_4 აქსიომები კი ნიშნავს იმას, რომ $R\backslash\{0\}$ არის აბელის ჯგუფი გამრავლების მიმართ.

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ VI აქსიომა ტოლფასია თითოეულისა შემდეგი ორი აქსიომიდან (უფრო ზუსტად: თუ I-VI აქსიომების სისტემაში VI აქსიომას შევცვლით ერთ-ერთით ქვემოთ მოტანილ VI′ და VI″ აქსიომებიდან, მივიღებთ I-VI აქსიომათა სისტემის ტოლფას სისტემას).

VI′ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ ზემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზედა საზღვარი.

VI″ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ყოველი განკვეთა განისაზღვრება ნამდვილი რიცხვით.

მოტანილ აქსიომებზე დაყრდნობით შეიძლება დამტკიცდეს ნამდვილი რიცხვის ის თვისებები, რომლებიც ისწავლება საშუალო სკოლის კურსში.

აქსიომურ თეორიაში მიღებული ცოდნა – კერძოდ, აქსიომურ ნამდვილ რიცხვთა თეორიაში მიღებული ცოდნა, როგორც ვიცით, მრავალსახაა – იგი სამართლიანია აქსიომური თეორიის ნებისმიერ მოდელში. ამიტომ სასურველია ნამდვილ რიცხვთა თვისებები მიღებულ იქნეს განხილული აქსიომებიდან – აქსიომური თეორიის საფუძველზე. მიუხედავად ამისა, ზემოთ მოტანილი განხილვა აუცილებელია – სასრულ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების + და · ოპე-

რაციებით, 0 და 1 კონსტანტებით და „<" პრედიკატით წარმოადგენს აქსიომური ნამდვილ რიცხვთა თეორიის მოდელს. ამით მტკიცდება აქსიომური ნამდვილ რიცხვთა თეორიის შეფარდებითი არაწინააღმდეგობრიობა (თუ სიმრავლეთა თეორია არაწინააღმდეგობრივია, მაშინ ნამდვილ რიცხვთა თეორიაც არაწინააღმდეგობრივია). აქსიომური თეორიის არაწინააღმდეგობრიობა კი აუცილებელია იმისათვის, რომ თეორიაში მიღებული ცოდნა იყოს კორექტული.

შესაძლოა, არ იყოს ცნობილი აქსიომური თეორია წინააღმდეგობრივია თუ არა. ასეთ მდგომარეობას აქვს ადგილი თანამედროვე აქსიომური სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში. აქედან ვერ დავასკვნით, რომ ასეთ აქსიომურ თეორიაში მიღებულ შედეგებს არ ჰქონდეთ დადებითი მნიშვნელობა. ის ფაქტი, რომ თანამედროვე აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიაში დღემდე არაა აღმოჩენილი წინააღმდეგობა, იმას მიუთითებს, რომ დღემდე მასში მიღებული შედეგები გარკვეული აზრით საიმედოა სიმრავლეთა თეორიის ზოგიერთი ფრაგმენტის მოდელში. მაგალითად, აქსიომური ნამდვილ რიცხვთა თეორია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სიმრავლეთა თეორიის ფრაგმენტი (ამისათვის საჭიროა ვიგულისხმოთ, რომ ობიექტთა R სისტემა სიმრავლეს წარმოადგენს). ასეთი ფრაგმენტის მოდელია წინა პუნქტებში განხილული სასრული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შესაბამისი ოპერაციებით პრედიკატითა და კონსტანტებით. აქსიომურ სიმრავლეთა თეორიაში მიღებული ცოდნის სიმრავლეთა თეორიის მოდელში გამოყენებაზე არაფერს ვამბობთ, რამდენადაც ასეთი მოდელის არსებობა პრობლემატური საკითხია (ასეთი მოდელის მოძებნა აქსიომური თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის დამტკიცებას იწვევს).

ლიტერატურა

1. Бурбаки Н., Теория множеств, М., 1965
2. Бурбаки Н., Функции действительного переменного, М., 1965
3. Бурбаки Н., Интегрирование (меры, интегрирование мер), М., 1967
4. Ван Хао, Мак-Нотон Р., Аксиоматические системы теории множеств, М., 1963
5. Гёдель К., Совместимость аксиом выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. Успехи мат. наук, 3 вып.1, (1948), 96-149
6. Гокиели Л. П., Логика, Тбилиси, 1965
7. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, мир, М., 1964
8. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, М., 1971
9. Карри Х., Основания математической логики, М., 1969
10. Кац М , Улам С., Математика и логика, М., 1971
11. Клини С. К., Введение в математику, М., 1957
12. Клини С. К., Математическая логика, М., 1973
13. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функции и функционального анализа, М., 1967
14. Кондаков Н. И., Введение в логику, М., 1967
15. Коэн П. Рэ., Теория множеств и континуум - гипотеза, М., 1967
16. Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, М., 1970
17. Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973
18. Ландау Э., Основы анализа, Гос. М., 1970
19. Линдон Р., Заметки по логике, М., 1968
20. Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965
21. Марков А. А., Теория алгоритмов, Тр. Мат. Инст. Ан СССР, 42, 1954
22. Мостовский А., Конструктивные множества и их приложения, М., 1973
23. Мендельсон Э., Введение в математическую логику, М., 1971
24. Новиков П. С., Элементы математической логики, М., 1973
25. Пхакадзе Ш. С., К теории лебеговской меры, Тр. Тбилисского математического ин-та АН ГССР, т. XXV, 1-269

26. Пхакадзе Ш. С., Некоторые вопросы теории обозначений, ТГУ, 1977
27. Пхакадзе В. Ш., Теоремы подстановки и связь между б-процессами и α -процессами, Труды ИПМ ТГУ-1992
28. ფხაკაძე კ. შ., „წინადადებათა i-ალგებრა“, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 1995
29. Рухая Х. М., Описание производной формальной математической теории $\mathfrak{T}^+$, Труды ИПМ ТГУ-1983
30. Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, М., 1972
31. Робинсон А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, М., 1967
32. Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., 1972
33. Сикорский Р., Булевые алгебры, М., 1969
34. Столл Р. Р., Множества, логика, аксиоматические теории, М., 1968
35. ტარსკი ა., ლოგიკისა და დედუქციურ მეცნიერებათა მეთოდოლოგიის შესავალი, თბილისი, 1971
36. Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960
37. Френкель В., А. Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, М., 1966
38. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979
39. Шелфилд Дж., Математическая логика, М., 1975
40. Чёрч А., Введение в математическую логику, М., 1960
41. Шиханович Ю. А., Введение в современную математику, М., 1965
42. Bachmann N, Transfinite Zahlem, Berlin-GÖttingen-Heidelberg, 1955
43. Bernays P., Frenkel A. A. Axiomatic set theory, Amsterdam, 1958
44. Elias Z., Integration of non-meazurable functions, Cahad. Math. Bull., 1966, 9, №3, 307-330
45. Klaua P., Allgemeine Mehgehlehere, Berlin, 1964
46. Myczoft A., Logik programs and many-valued logik; Lecture Notes Comp. Sci., 166, 1984, p. 274-286
47. Mostowski A., Constructible sets with Applications, Warszawa, 1969
48. Sierpinski W., Hypothese du continy, Warszawa-Lwow, 1944
49. Sierpinski W., Cardinal and ordinal numbre, Warszawa, 1958
50. Ulam S. M., A collection of mathematical problems, New York, 1960
51. Fitting M., A Kripke, Kleene semantica for logic programs, J. Logik Programming, 2, 1985, № 4, p. 295-312

შინაარსი

IV თავი

გამომცემლობის რედაქტორი ნ. ელიზბარაშვილი
კორექტორი ე. კასრელიშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.06.99
საბეჭდი ქაღალდი 60X84 1/16.
პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 16,75 სააღრ.-საგამომც. თაბახი 13,47
ტირაჟი 200 შეკვეთის №

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14

დაიბეჭდა თსუ სარედაქციო-საგამომცემლო
კომპიუტერულ სამსახურში, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1