საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია

ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტი

მინდია სალუქვაძე
ალექსანდრე თოფჩიშვილი
ვილჰელმ მაისურაძე

დუალობა არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებში

თბილისი
2000

აუკ 519.8

მრავალკრიტერიული (ვექტორული) და ზოგადად არასკალარული ოპტიმიზაციის თეორიაში დუალობას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია. ეს იმ გარემოებითაა გამოწვეული, რომ შესაძლებელია მასზე დაფუძნებული ამოცანის ამოხსნის ეფექტური ალგორითმების, პროცედურებისა და მეთოდების აგება. მონოგრაფიაში ვითარდება დუალობის თეორია ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის არასასრულ-განზომილებიან სივრცეებში. მონოგრაფიის დასაწყისში განხილულია კლასიკური მრავალკრიტერიული ამოცანები სასრულგანზომილებიან სივრცეებში, მოყვანილია რიგი ცნობილი, უკვე კლასიკურად ქცეული დებულებები და შედეგები ზოგადი ხასიათის ამოცანისათვის. მეორე ნაწილში კი პირველადაა ფორმალიზებული დუალური ამოცანები არასასრულგანზომილებიან სივრცეებში და დადგენილია მათი სხვადასხვა მნიშვნელოვანი თვისებები.

მონოგრაფია გათვალისწინებულია გამოყენებითი მათემატიკის, მართვისა და ოპტიმიზაციის სპეციალისტებისათვის, აგრეთვე, შესაბამისი სპეციალობების მაღალი კურსების სტუდენტებისა და ასპირანტებისათვის.

დასაბეჭდად დამტკიცებულია საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს მიერ

პასუხისმგებელი რედაქტორი - ტექნ. მეცნ. დოქტორი, აკადემიკოსი ვ. ჭიჭინაძე

რეცენზენტები: ტექნ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი ა. გუგუშვილი

ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი გ. ცერცვაძე

ნამუშევარი შესრულებულია საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის № 6.1 პროექტის ფარგლებში, რომელსაც მიღებული აქვს 1997 - 1998 წ.წ. გრანტი.

"მოდესტა", 2000

ეძღვნება

საქართველოს სახელმწიფოებრიობის

3000

წლისთავს

წინასიტყვაობა

გადაწყვეტილების მიღებისას (როგორც ინდივიდუალურისა, ასევე ჯგუფურის) გადაწყვეტილების მიმღებ პირს მრავალ ურთიერთდაპირისპირებულ მაჩვენებელთან აქვს საქმე. ეს მაჩვენებლები ახასიათებენ ამა თუ იმ სისტემის მდგომარეობას ან მიმდინარე პროცესის ვითარებას. ამიტომ სისტემის მათემატიკური მოდელის აგების შემდეგ მიიღება მრავალკრიტერიული (ზოგადად ვექტორული ან არასკალარული) ამოცანა. ამასთან დაკავშირებით, ბოლო ოცწლეულის განმავლობაში ფართოდ ვითარდება გადაწყვეტილების მიღების თეორია მრავალი კრიტერიუმის გათვალისწინებით.

სასრულგანზომილებიან სივრცეებში ამ თეორიის ერთ-ერთ ძირითად, ფუნდამენტურ ცნებას წარმოადგენს პარეტო-ოპტიმალური, ანუ ეფექტური ამონახსნის ცნება. ის წარმოადგენს რიცხვითი ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილის განზოგადებას რამოდენიმე ფუნქციის შემთხვევაზე: ამონახსნი პარეტო-ოპტიმალურია, თუ კი ნებისმიერი კრიტერიუმის გაუმჯობესება შესაძლოა მხოლოდ სხვა კრიტერიმების მნიშვნელობათა გაუარესების ხარჯზე. აღნიშნული ცნების სახელწოდება იტალიელი ეკონომისტის და სოციოლოგის ვ. პარეტოს (1848 – 1923) სახელთან არის დაკავშირებული. საქონლის საბაზრო გაცვლის პროცესის მათემატიკური შესწავლის დროს მან პირველმა დაიწყო მისი გამოყენება.

პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნების თვისებების შესწავლას და მოძებნის მეთოდებს მიეძღვნა მრავალი ნაშრომი და მონოგრაფია, რომელთა რაოდენობა უკვე რამოდენიმე ათასს აღწევს. ოპერაციათა კვლევის სხვადასხვა მიმართულებაში, მათემატიკურ ეკონომიკაში, ოპტიმალური მართვის თეორიასა და სხვ. მომიჯნავე დარგებში ეს საკითხები ღრმად განიხილება. ძირითადი კვლევები დაფუძნებულია წრფივი და ამოზნექილი პროგრამირების თანამედროვე მიღწევებზე და მათ შორის შეიძლება გამოიკვეთოს რამდენიმე სახის ძირითადი მიმართულება:

ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენა;
დუალური ამოცანების შედგენა;
დუალური ამოცანების გამოყენება მოცემული ამოცანის ამონახსნთა ეფექტური მოძებნისათვის.

კლასიკური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის ძირითადად დამუშავებულია დუალობის თეორია, რომლის საფუძველზეც აგებულია ამონახსნთა სიმრავლეების ძიების ეფექტური მეთოდები. (ამ თეორიას

საფუძვლად კლასიკური ერთკრიტერიული ამოცანების დუალობის თეორია უდევს.)

ამასთან ერთად, ბოლო წლებში უფრო მეტი ყურადღება ეთმობა არა კლასიკურ მრავალკრიტერიულ ამოცანებს, არამედ მრავალკრიტერიულ ამოცანებს არასასრულგანზომილებიან კრიტერიულ სივრცეებში. ეს გამოწვეულია რეალური მართვის პროცესების რთული მოდელების საშუალებით უფრო ზუსტ აღწერასთან. აღნიშნული ამოცანების კვლევა დაფუძნებულია არაწრფივ ანალიზზე, რომელიც თავის მხრივ წარმოადგენს მრავალსახა ასახვათა თეორიის შედეგს. მრავალსახა ასახვათა თეორია კი კლასიკური ანალიზის ბუნებრივი განზოგადოებაა.

კლასიკურ ანალიზში საქმე გვაქვს ისეთი სახის ასახვასთან, როდესაც თითოეულ წერტილს ასახვის განსაზღვრის არედან შეესაბამება ერთადერთი მნიშვნელობა ასახვის მნიშვნელობათა არედან. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას სიტუაცია, უმეტეს შემთხვევაში, გართულებულია. ასახვის საშუალებით თითოეულ წერტილს განსაზღვრის არედან შეესაბამება არა ერთადერთი წერტილი ასახვის მნიშვნელობათა არედან, არამედ მთელი სიმრავლე. მაგალითისათვის შეგვიძლია მოვიყვანოთ კონფლიქტური სიტუაცია, როდესაც ერთი მხარის მიერ გამოყენებულ კონკრეტულ სტრატეგიას შეიძლება დაუპირისპირდეს მოწინააღმდეგის სტრატეგიების მთელი ერთობლიობა.

წარმოდგენილი მონოგრაფიის ძირითადი მიზანია მრავალსახა ასახვათა თეორიის გამოყენება არასკალარული ოპტიმიზაციის ცენტრალური პრობლემების კვლევისა და გადაწყვეტისათვის, და უფრო მეტიც დუალური თეორიის საფუძვლების ჩამოყალიბებისათვის. ჩვენი აზრით, აღნიშნული მიდგომა არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებისადმი კარგ პერსპექტივას იძლევა და წარმოადგენს წინ გადადგმულ ნაბიჯს არასკალარული ოპტიმიზაციის თეორიის სრულყოფის გზაზე, თუ კი გავითვალისწინებთ იმ გარემოებას, რომ დღეისათვის ამ პრობლემებისადმი მიდგომათა არსებულ მრავალფეროვნებაში ჯერ კიდევ ძნელია გამოიკვეთოს ზოგადი და რაციონალური.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ქვეშ იგულისხმება ოპტიმიზაციის ისეთი ამოცანა, რომელშიც კრიტერიული სივრცე არ არის აუცილებლად სასრულგანზომილებიანი. უკვე კლასიკურად ქცეული მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის ეს სივრცე ყოველთვის სასრულგანზომილებიანია. ეს გარემოება ზუსტად მიუთითებს მრავალკრიტერიული ამოცანის ამონახსნის ცნებათა მრავალფეროვნებაზე. ამ ცნებათა უმეტესი ნაწილი არ ექვემდებარება განზოგადოებას არასასრულგანზომილებიან კრიტერიულ სივრცეზე, ვინაიდან ამ განსაზღვრებებში პრინციპულად ფიგურირებს სასრულგანზომილებიანობის ფაქტორი. მეორე მხრივ, უმეტეს პრაქტიკულ ამოცანებში კრიტერიული სივრცე არ არის სასრულგანზომილებიანი.

წინასიტყვაობა

ვინაიდან ნებისმიერი არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნეს კრიტერიულ სივრცეში ექსტრემალურ წერტილთა სიმრავლის ფუნქციონალურ დახასიათებაზე, შემოთავაზებული მონოგრაფია ითვალისწინებს აღნიშნულ წერტილთა სიმრავლის კვლევას და პრინციპულად ახალი შედეგების დადგენას.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის გარკვეული სტრუქტურის მქონე კონუსით ნაწილობრივ დალაგებული კრიტერიული სივრცის ფიქსირებული ქვესიმრავლისათვის განისაზღვრება ექსტრემალურ ელემენტთა რამოდენიმე ცნება. შეისწავლება ასეთ ელემენტთა სიმრავლეებს შორის კავშირი და დგინდება მათი ზოგიერთი ტოპოლოგიური თვისებები.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის დუალური ამოცანის აგებისათვის, ძირითად არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანასა და მის დუალურ ამოცანას შორის ურთიერთ მიმართებათა შესწავლის მიზნით კონსტრუირდება სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვის შეუღლებული მრავალსახა ასახვა. დგინდება შეუღლებული ასახვის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ, მიიღება სხვადასხვა დებულება მისი დიფერენცირებადობის შესახებ, რომელიც გამოიყენება დუალური თეორიის აგებისათვის. მუშავდება დუალობის ძირითადი პრინციპი და შეისწავლება არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი და შეუღლებული ამოცანები.

სასრულგანზომილებიანი მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის უკვე კლასიკურად ქცეულ დუალობის შედეგებთან ერთად არასკალარული ოპტიმიზაციის ზოგადი ამოცანისათვის მონოგრაფიაში დამუშავებულია პრინციპულად ახალი მიდგომები და დამტკიცებულია მთელი რიგი ახალი დებულებებისა, რომლებიც მიღებულია ბოლო ხანს უშუალოდ ავტორების მიერ. ძირითადად, ყველა კლასიკური შედეგი მოყვანილია დამტკიცების გარეშე, შესაბამისად გამოყენებული ლიტერატურის მითითებით.

მასალა მონოგრაფიაში წარმოდგენილია 4 ძირითად თავში, რომელთა დატვირთვა განაწილებულია შემდეგნაირად. პირველ თავს აქვს ზოგადი ხასიათი, მასში განიხილება ზოგადი ცნებები კლასიკური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიიდან. მეორე თავში განიხილება ზოგადთეორიული საკითხები ვექტორული ფუნქციების უნაგირა წერტილების, მაქსიმინებისა და მინიმაქსების შესახებ. შემოდის დუალური მრავალკრიტერიული ამოცანების ზოგადი კონსტრუქცია სასრულგანზომილებიანი სივრცეებისათვის. მესამე თავში მრავალსახა ასახვათა თეორიის საფუძველზე შეისწავლება არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანები. ეს ისეთი ამოცანებია, რომელთათვისაც კრიტერიული სივრცე ზოგად შემთხვევაში ბანახის სივრცეს წარმოადგენს. აიგება სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვა, რომელიც თავის მხრივ ორი მრავალსახა ასახვის თანაკვეთის სახით წარმოდგინდება. ეს ასახვები გარკვეულ ბუნებრივ პირობებს აკმაყოფილებენ. აგრეთვე, კრიტერიულ სივრცეში

პითითებული მრავალსახა ასახვის ინვარიანტული წერტილის მეშვეობით განისაზღვრება ექსტრემალური წერტილი (იმ შემთხვევაში, როდესაც სივრცე კონუსის მეშვეობით ნაწილობრივ დალაგებულია). ეს გარემოება მრავალსახა ასახვათა თვისებების საფუძველზე, კერძოდ, წარმოებულისა და კოდიფერენციალის სტრუქტურიდან გამომდინარე, ექსტრემალური წერტილების დახასიათების საფუძველს იძლევა. აღნიშნული მიდგომა საკმაოდ მოხერხებულია, ვინაიდან ის C კონუსის სტრუქტურის გარკვევის საშუალებას იძლევა. დგინდება კრიტერიულ სივრცეში მოცემული სიმრავლის ექსტრემალური წერტილების არსებობის პირობები. ბოლო, მეოთხე თავში არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის დუალური ამოცანის აგებისათვის, ძირითად არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანასა და მის დუალურ ამოცანას შორის ურთიერთ მიმართებათა შესწავლის მიზნით კონსტრუირდება სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვის შეუღლებული მრავალსახა ასახვა. დგინდება შეუღლებული ასახვის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ, მიღებულია სხვადასხვა დებულება მისი დიფერენცირებადობის შესახებ, რომელიც გამოიყენება დუალური თეორიის აგებისათვის. მუშავდება დუალობის ძირითადი პრინციპი და შეისწავლება არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი და შეუღლებული ამოცანები.

ვინაიდან მონოგრაფია გათვალისწინებულია მკითხველთა ფართო წრეზე, ავტორები შეძლებისდაგვარად შეეცადნენ, რათა შესაბამისს ადგილებში მოეყვანათ აუცილებელი განმარტებები და ფაქტები, რომლებიც არ შედიან ოპტიმიზაციის თეორიის გავრცელებულ კურსებში.

ფორმულები, თეორემები, დასკვნები, მაგალითები და ნახატები აღინიშნებიან მონოგრაფიის ერთი თავის ფარგლებში თანმიმდევრულად.

ავტორები მკითხველებს წინასწარ უხდიან მადლობას გამოგზავნილი შენიშვნებისა და კომენტარებისათვის.

ძირითადი აღნიშვნები

$\varnothing$ - ცარიელი სიმრავლე.
$A\times B$ - A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი.
$h{:}A\to B$ - h ასახვა A სიმრავლიდან B სიმრავლეში.
$F{:}A\to 2^B$ - F მრავალსახა ასახვა A სიმრავლიდან B სიმრავლეში.
$E\,(E^1)$ - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.
E^m - m-განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე.
$0_{(m)}=(0,0,\dots,0)$ - E^m სივრცის ნულოვანი ელემენტი.

$y,\ z\in E^m$ ელემენტებისათვის:
$y \geqq z \leftrightarrow y_i \geqq z_i,\ i=1,2,\dots,m$;
$y \geq z \leftrightarrow y \geqq z,\ y\neq z$;
$y > z \leftrightarrow y_i > z_i,\ i=1,2,\dots,m$;
$y \overset{=}{>} z \leftrightarrow y=z$ ან $y_i > z_i$ ერთი მაინც i=1,2,…,m-სათვის.

$E^m_> = \{y\in E^m \mid y>0_{(m)}\}$ - დადებითი ორტანტი E^m სივრცეში.
$E^m_+ = E^m_{\geqq} = \{y\in E^m \mid y\geqq 0_{(m)}\}$ - არაუარყოფითი ორტანტი E^m სივრცეში.

$z_1,\ z_2\in X$ ელემენტებისათვის (X - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც ნაწილობრივ დალაგებულია ამოზნექილი, ჩაკეტილი, მახვილი C კონუსის მეშვეობით):
$z_1 \geqq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C$;
$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C\setminus\{0\}$;
$z_1 > z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in \operatorname{int} C$;

$A\subseteq X$ სიმრავლისათვის (X - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე):
$\overline{A}(clA)$ ($\overline{A}^{w}$) - A სიმრავლის ჩაკეტვა (სუსტი ჩაკეტვა);
$int\,A$ - A სიმრავლის შიგა ნაწილი;
$Fr\,A=\overline{A}-int\,A$ - A სიმრავლის საზღვარი;
$ri\,A$ - A ამოზნექილი სიმრავლის ფარდობითი შიგა ნაწილი;
2^A - A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე;
$conv\,A$ - A სიმრავლის ამოზნექილი გარსი;
$\overline{convA}$ - A სიმრავლის ამოზნექილი ჩაკეტვა;
$con\,A$ - A სიმრავლის კონუსური გარსი;

$T_A(y^*)$ - A სიმრავლის მხები კონუსი y^* წერტილში;
$Max\, A$ ($Min\, A$) A სიმრავლის მაქსიმალურ (მინიმალურ) ელემენტთა სიმრავლე.

$A, B \subseteq X$ სიმრავლეებისათვის (X - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე):

$$A+B=\{y\in X \mid y=a+b,\ a\in A,\ b\in B\};$$

$$A-B=\{y\in X \mid y=a-b,\ a\in A,\ b\in B\};$$

$$\lambda A=\{\lambda a\in X \mid a\in A\},\ \lambda\in E^1.$$

K^* - K სიმრავლის შეუღლებული კონუსი.
X^* - X ტოპოლოგიური სივრცის დუალური, შეუღლებული სივრცე.

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ - კრიტერიუმები (მიზნის ფუნქციები).
$f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ - ვექტორული კრიტერიუმი.
Y_i - f_i კრიტერიუმის სკალა.
$\hat{Y}$ - (ვექტორული) შეფასებების სიმრავლე.
$Y=f(X)=\{y\in E^m \mid y=f(x), x\in X\}$ მიღწევადი (ვექტორული) შეფასებების სიმრავლე.
$\underset{f}{\geqq}$, $\underset{f}{\geq}$, $\underset{f}{>}$, $\sim_f$ თანადობები X-ში, რომლებიც ინდუცირებულია შესაბამისად $\geqq$, $\geq$, $>$, $=$ თანადობებით.
$P(Y) = \mathrm{Max}\ Y$ ($P_f(X)$) - ეფექტური, პარეტოს მიხედვით ოპტიმალური შეფასებების (ამონახსნების) სიმრავლე.
$S(Y)$ ($S_f(X)$) - სუსტად ეფექტური, სლეიტერის მიხედვით ოპტიმალური შეფასებების (ამონახსნების) სიმრავლე

$$M=\left\{\mu\in E^m_{>} \mid \sum_{i=1}^{m}\mu_i=1\right\}.$$

$$\overline{M}=\left\{\mu\in E^m_{\geqq} \mid \sum_{i=1}^{m}\mu_i=1\right\}.$$

$\langle x,y\rangle$ - $x\in X^*$ წრფივი ფუნქციონალის მნიშვნელობა $x\in X$ წერტილში. თუ X ჰილბერტის სივრცეა, მაშინ ეს სკალარული ნამრავლია.
$\in$ - ეკუთვნის.
$\forall$ - ნებისმიერობის კვანტორი.
$\exists$ - არსებობის კვანტორი.
$\Rightarrow$ - იმპლიკაცია "გამომდინარეობს".
$\Leftrightarrow$ - ექვივალენტობა.
$\|\cdot\|$ - ნორმა ნორმირებულ სივრცეებში.

თავი 1

ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანები

ამ თავში განიხილება ზოგადი ცნებები კლასიკური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიიდან. კერძოდ, ამოცანის ფორმალური ჩამოყალიბება, ამონახსნთა ცნებები და სხვა დამხმარე ფაქტები.

1.1. ზოგადი ცნებები მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიდან

1. გადაწყვეტილების მიღებისას (როგორც ინდივიდუალურისა, ასევე ჯგუფურის) გადაწყვეტილების მიმღებ პირს მრავალ ურთიერთდაპირისპირებულ მაჩვენებელთან აქვს საქმე. ეს მაჩვენებლები ახასიათებენ ამა თუ იმ სისტემის მდგომარეობას ან მიმდინარე პროცესის ვითარებას. ამიტომ სისტემის მათემატიკური მოდელის აგების შემდეგ მიიღება მრავალკრიტერიული (ზოგადად ვექტორული ან არასკალარული) ამოცანა. ამასთან დაკავშირებით, ბოლო ოცწლეულის განმავლობაში ფართოდ ვითარდება გადაწყვეტილების მიღების თეორია მრავალი კრიტერიუმის გათვალისწინებით.

გადაწყვეტილების მიღების კონცეფცია, როგორც აზროვნების პირველადი საფუძველი, იხილავს გადაწყვეტას როგორც ალტერნატივათა გონივრულ ამორჩევას გარკვეული სიმრავლიდან. ამ ალტერნატივებს, მათში შესაბამისად ჩადებული კონკრეტული შინაარსის საფუძველზე, უწოდებენ სტრატეგიებს, გეგმებს, ვარიანტებს და ა.შ. ამორჩევას ის ადამიანი ახდენს, რომელიც იღებს გადაწყვეტილებას და მიისწრაფვის გარკვეული მიზნის მისაღწევად. ასეთი პირის როლში შეიძლება იყოს ერთი ადამიანი ან ადამიანთა მთელი ჯგუფი, რომლებიც უფლებამოსილი არიან მიიღონ გადაწყვეტილება, ისინი პასუხს აგებენ მიღებული გადაწყვეტილების შედეგებზე.

გადაწყვეტილების მიღების დროს მათემატიკური მეთოდების გამოყენება გულისხმობს შესაფერისი მათემატიკური მოდელის აგებას, რომელიც ფორმალურად გამოსახავს პრობლემურ სიტუაციას, ანუ გადაწყვეტილების მიღების სიტუაციას. განსაზღვრულობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღების ამო-

ცანებისათვის (ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის), როდესაც შემთხვევით და განუზღვრელ ფაქტორებს ადგილი არა აქვს, ასეთი მოდელის კომპონენტებს წარმოადგენენ X ალტერნატივათა სიმრავლის ყველა ის ელემენტი, რომლებიდანაც უნდა ამოირჩეს ერთი საუკეთესო, ანუ ოპტიმალური ამონახსნი და მოხდეს გადაწყვეტილების მიმღები პირის პრიორიტეტების აღწერა. იმისათვის, რომ უზრუნველყოფილი იყოს ამორჩევის (თავისუფლების) შესაძლებლობა, X სიმრავლე უნდა შეიცავდეს ორ ალტერნატივას მაინც.

2. მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებში ამონახსნთა უპირატესობებით შედარება სდება არა პირდაპირ, არამედ X სიმრავლეზე განსაზღვრული რიცხვითი $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$ ფუნქციებით, რომელთაც ეწოდებათ კრიტერიუმები (და, აგრეთვე, ხარისხის ანუ ეფექტურობის მაჩვენებლებით, კრიტერიალური ფუნქციებით, მიზნობრივი ფუნქციებით და ა.შ.). იგულისხმება, რომ $m \geq 2$; იმ შემთხვევაში, როცა $m=1$, ოპტიმიზაციის ამოცანა ერთკრიტერიულია.

ყოველი f_i კრიტერიუმისათვის რიცხვთა E ღერძზე მიეთითება Y_i ქვესიმრავლე, რომლიდანაც f_i ღებულობს თავის მნიშვნელობებს. პრაქტიკულად, Y_i ქვესიმრავლე (მას ხშირად f_i კრიტერიუმის სკალას უწოდებენ) განისაზღვრება იმ შინაარსის მიხედვით, რომელსაც ის ატარებს. მაგალითად, თუ წინასწარ ცნობილია, რომ f_1 კრიტერიუმის მნიშვნელობა დადებითია ან არაუარყოფითია (ახასიათებს მასას, ღირებულებას და ა.შ.), მაშინ შეიძლება მივიღოთ $Y_1=(0,\infty)$ ან $Y_1=[0,\infty)$. თუ f_2 კრიტერიუმის მნიშვნელობები ქვემოდან და ზემოდან რაიმე ბუნებრივი a და b საზღვრებით არის შემოსაზღვრული, მაშინ $Y_2=[a,b]$ (თუ f_2 - რესურსების მარაგის დახარჯული ნაწილია, მაშინ $Y_2=[0,1]$). თუ f_3 კრიტერიული ფუნქციის მნიშვნელობები მხოლოდ ნული და ნატურალური რიცხვებია (ვთქვათ, f_3 განისაზღვრება რაიმე ობიექტების დათვლის შედეგად), მაშინ $Y_3=\{0,1.2,\ldots\}$. თუ f_4 მნიშვნელობაზე არ არის რაიმე შინაარსობრივი შეზღუდვა, მაშინ $Y_4=(-\infty,+\infty)=E$ და ა.შ.

ეგრეთ წოდებული კერძო (აგრეთვე ლოკალური) f_i, $i=1,2,\ldots,m$, კრიტერიუმები ქმნიან ვექტორულ კრიტერიუმს $f=(f_1 f_2,\ldots f_m)$. ითვლება, რომ ყოველი x ამონახსნი მთლიანად ხასიათდება შესაბამისი (ვექტორული) შეფასებით, ე.ი. $f(x)$ ვექტორით. ამიტომ, ყველა ამონახსნთა X სიმრავლიდან ოპტიმალური ამონახსნის ამორჩევა დაიყვანება მიღწევადი შეფასებების

$$Y = f(X) = \left\{ y \in E^m \;\middle|\; y = f(x),\, x \in X \right\}$$

სიმრავლიდან ოპტიმალური შეფასების ამორჩევაზე, სადაც E^m - m-განზომილებიანი სივრცეა, რომელსაც კრიტერიული სივრცე ეწოდება. აუცილებლო-

ბის შემთხვევაში ეს სივრცე შეიძლება ევკლიდეს სივრცედ ჩაითვალოს, რომელსაც გააჩნია მეტრიკა, განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით:

$$\|y-y'\| = \langle y-y', y-y' \rangle^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - y_i')^2\right]^{1/2}$$

რეალურ ამოცანებში Y სიმრავლის აგება ხშირად რთულია ან საერთოდ შეუძლებელია. ამიტომ განსახილველად შემოაქვთ შედარებით უფრო ფართო სიმრავლე $\hat{Y} \subseteq E^m$, რომლის ელემენტებსაც შესაძლებელია შინაარსობრივი აზრი მიეცეს. უფრო ხშირად ყველა ამონახსნთა სიმრავლე $\hat{Y} \supseteq Y$ არის მრავალგანზომილებიანი $Y^{\times} = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$ პარალელეპიპედი. ზოგჯერ $\hat{Y}$ მიიღება $Y^{\times}$-საგან ამა თუ იმ შეზღუდვის მეშვეობით, რაც დამყარებულია მიუღწევადი ან შინაარსობრივი დატვირთვის არმქონე ვექტორების უგულვებელყოფაზე.

$\hat{Y}$ სიმრავლის განხილვის შემოღება მთელ რიგ უპირატესობებს იძლევა. მაგალითად, წარმოიშვება საშუალება არა ერთი ამოცანის, არამედ ამოცანათა მთელი ოჯახის განხილვისა, რომელთაგან თითოეულისათვის მიღწევადი შეფასებების სიმრავლე შედის $\hat{Y}$-ში. კერძოდ, შესაძლებელი ხდება ოპტიმალური ამონახსნის ამოცანის ამა თუ იმ პარამეტრებთან დამოკიდებულების ხასიათის შესწავლა.

შემდგომში ამონახსნი ყოველთვის აღინიშნება x ასოთი, რომელსაც შეიძლება ახლავდეს სხვადასხვა ინდექსები, ხოლო მისი შესაბამისი შეფასება y ასოთი იმავე ინდექსებით. მაგალითად: $y=f(x)$, $y^*=f(x^*)$ და ა.შ. თუ მოცემული ვექტორული შეფასება y^0 მიღწევადია და მას რამოდენიმე ამონახსნი შეესაბამება, მაშინ x^0-ის ქვეშ ნებისმიერი მათგანი შეიძლება იგულისხმებოდეს (ე.ი. ნებისმიერი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $f(x^0)=y^0$ ტოლობას).

3. ინდივიდუალურ გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანებში კრიტერიუმები ემსახურებიან ამონახსნთა არსებით თვისებათა (ნიშანთა) "ინტენსიურობის" გამოხატვას. მაგალითად, ზოგიერთ ნაკეთობათა შედარებისას შეიძლება გამოყენებული იქნას ისეთი კრიტერიუმები, როგორიცაა მასა, ღირებულება, გამოშვების თარიღი, შესახედაობა და ა.შ. ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანებში f_i კრიტერიუმი ახასიათებს ამონახსნთა "ხარისხს" (ან უპირატესობას) $\{1,2,\ldots,m\}$ ჯგუფში შემავალი i-ური ინდივიდის თვალსაზრისით. მაგალითად, თუ ამონახსნების რიცხვი სასრულია და i ინდივიდმა მოახდინა მათი რანჟირება (დაალაგა უპირატესობის მიხედვით), მაშინ შეიძ-

ლესა მივიღოთ $f_i(x')=1$ - ყველაზე დიდი უპირატესობის მქონე x' ამონახსნისათვის, $f_i(x'')=2$ - უპირატესობის მიხედვით მომდევნო x'' ამონახსნისათვის, და ა.შ.

თავიანთი ხასიათის მიხედვით კრიტერიუმები იყოფა რაოდენობრივ და ხარისხობრივ კრიტერიუმებად. უხეშად რომ ვთქვათ, კრიტერიუმი რაოდენობრივია, როდესაც აზრი აქვს მისი მნიშვნელობების შედარებას, მივუთითებთ რა, თუ რამდენად ან რამდენჯერ მეტია ერთი მნიშვნელობა მეორეზე, და ხარისხობრივია, როდესაც ასეთი შედარებები აზრს მოკლებულია. რაოდენობრივი f_i კრიტერიუმის მაგალითია მასა. თუ მასის საზომი ერთეული ფიქსირებულია, მაშინ შეიძლება ლაპარაკი იმაზე, თუ ერთი ნაკეთობა რამდენჯერ მძიმეა მეორეზე: წონათა შეფარდება არ იცვლება, თუ ზომის ერთი ერთეულიდან გადავდივართ მეორეზე, ანუ f_i-ის kf_i-ში გარდაქმნის შემდეგ, სადაც $k>0$. გასაგებია, რომ ყველა სხვა გარდაქმნის შემთხვევაში, (რომელიც არ არის k დადებით რიცხვზე გამრავლება), შეიძლება f_i მნიშვნელობის თავიდან მოცემული თანაფარდობა შეცვალოს.

განხილულ მაგალითში f_i კრიტერიუმის დასაშვები გარდაქმნებია ყველა დადებითი წრფივი გარდაქმნები და მხოლოდ ისინი. ზოგადად, φ ფუნქციას უწოდებენ f_i კრიტერიუმის დასაშვებ გარდაქმნას, თუ $\varphi(f_i)$ ფუნქცია კვლავ აღმოჩნდება კრიტერიუმი, რომელიც იგივე თვისებას აფასებს, რასაც f_i. f_i-ის $f_i'=\varphi(f_i)$-ით შეცვლით Y_i სიმრავლე იცვლება $Y_i'=\varphi(Y_i)$ სიმრავლით.

ამრიგად, ყველა კრიტერიუმს უკავშირებენ Φ დასაშვებ გარდაქმნათა სიმრავლეს და ამბობენ, რომ ამ კრიტერიუმს აქვს Φ ტიპის სკალა, ანუ შეფასება ხდება Φ ტიპის სკალის მიხედვით. როგორც წესი, Φ სიმრავლე შემოდის კრიტერიუმის განსაზღვრასთან ერთად, მაგრამ ზოგჯერ სკალის განსაზღვრა საკმაოდ რთული დამოუკიდებელი ამოცანაა.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში $\Phi=\Phi_0=\{\varphi \mid \varphi(z)=kz,\ k>0\}$. ასეთი ტიპის სკალას **ფარდობის სკალას** უწოდებენ, რადგანაც შენარჩუნებულია შემდეგი სიდიდეების შეფარდება: $kz^1/kz^2 = z^1/z^2 = C = const.$

გავრცელებულია, აგრეთვე, $\Phi=\Phi_{lin}=\{\varphi \mid \varphi(z)=kz+l,\ k>0\}$ ტიპის სკალაში გაზომვის შემთხვევა. აქ დასაშვები გარდაქმნაა k დადებით რიცხვზე გამრავლება და ნებისმიერი რიცხვის დამატება. ასეთ სკალას **ინტერვალთა სკალას** უწოდებენ. ეს სახელწოდება გამომდინარეობს იმ თვისებიდან, რომ შენარჩუნებულია ინტერვალთა თანაფარდობა:

$$\frac{z^1-z^2}{z^3-z^4}=\frac{(kz^1+l)-(kz^2+l)}{(kz^3+l)-(kz^4+l)}=C=const.$$

ინტერვალთა სკალის მქონე კრიტერიუმის მაგალითია "ნაკეთობის გამოშვების თარიღი": დროის გასაზომად აუცილებელია დაფიქსირდეს მასშტაბი და აღრიცხვის დაწყება.

სკალა მით უფრო სრულყოფილია, რაც უფრო ვიწროა დასაშვებ გარდაქმნათა Φ სიმრავლე. ინტერვალთა სკალაზე არანაკლებ სრულყოფილი სკალის მქონე კრიტერიუმებს უწოდებენ რაოდენობრივს. უმრავლეს შემთხვევაში რაოდენობრივი კრიტერიუმები შეესაბამება ობიექტური ("ფიზიკური") თვისებების ობიექტურ გაზომვებს. თუმცა, საკმაოდ ხშირად გამოიყენება ინტერვალთა სკალაზე ნაკლებ სრულყოფილი სკალის მქონე კრიტერიუმებიც.

ნაკლებად სრულყოფილი კრიტერიუმების სკალას, რომელიც გვხვდება ოპტიმიზაციის ამოცანებში, წარმოადგენს რიგობრივი სკალა, რომლისთვისაც დასაშვებ გარდაქმნათა Φ_{ord} სიმრავლე შედგება მონოტონურად ზრდადი ყველა ფუნქციისაგან: $\Phi = \Phi_{ord} = \{\varphi \mid z^1 > z^2 \Rightarrow \varphi(z^1) > \varphi(z^2)\}$. რიგობრივი სკალის მქონე კრიტერიუმებს უწოდებენ ხარისხობრივს. ხარისხობრივი კრიტერიუმის მნიშვნელობების შედარებას აზრი აქვს მხოლოდ "მეტი", "ნაკლები" და "ტოლი" თანადობისათვის — ისინი მხოლოდ მონოტონური გარდაქმნებისას ინახებიან. მაგრამ იმის გარკვევას, თუ რამდენჯერ ან რამდენით მეტია ერთი მნიშვნელობა მეორეზე, აზრი არა აქვს. რიგობრივი სკალის მქონე კრიტერიუმების გამოყენება ბუნებრივია, როდესაც ამონახსნები რანჟირებულია, ანუ განლაგებულია რომელიმე თვისების ინტენსიურობის ზრდის ან კლების მიხედვით, და მხოლოდ შემდეგ მათ მიეწერება რიცხვითი მნიშვნელობები იმგვარად, რომ მეტ ინტენსივობას შეესაბამებოდეს მეტი (ან, პირიქით, ნაკლები) რიცხვი. ჩვეულებრივ ასეთი რანჟირება ხდება სუბიექტური "გაზომვებისას", მაგალითად, ხდება სუბიექტის აზრის გამოხატვა ამონახსნთა უპირატესობის შესახებ.

საკმაოდ ხშირად სუბიექტური გაზომვები სრულდება ქულობრივ სკალაზეც. მაგალითად, ექსპერტებს შეუძლიათ ქულებით შეაფასონ ნაკეთობის გარეგნული სახე. ქულობრივი სკალის მქონე კრიტერიუმებს უჭირავთ "შუალედური" მდგომარეობა რაოდენობრივ და ხარისხობრივ კრიტერიუმებს შორის.

მტკიცებას, მოცემული ტიპის სკალების მქონე კრიტერიუმების მნიშვნელობის შესახებ, უწოდებენ ადეკვატურს, თუ მისი ჭეშმარიტულობა არ იცვლება სკალის ტიპებით განსაზღვრული ყველა დასაშვებ გარდაქმნათა კრიტერიუმებისათვის გამოყენებისას. ამიტომ, პრაქტიკული მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანების ანალიზისას და ამოხსნისას გამოყენებულ უნდა იქნეს მხოლოდ ის განსაზღვრებები და ცნებები, მეთოდები და პროცედურები, რომლებსაც ადეკვატური დასკვნებისა და რეკომენდაციების მიღებისაკენ მივყავვართ.

მაგალითად, ფართოდ გამოიყენება მრავალკრიტერიული ამოცანის ამოხსნის მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია f ვექტორული კრიტერიუმის ერთი $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ განზოგადოებული ფუნქციით, ე.წ. ნახვევის სახით წარმოდგენაზე. ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ეს კრიტერიუმი იმ ამოცანებისათვის, რომლებსაც ახლავს ხარისხის კრიტერიუმი, არ გამოდგება. ავიღოთ ყველაზე უფრო გავრცელებული კრიტერიუმი - წრფივი $F_\Sigma = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i$ "ნახვევი", სადაც μ_i რაღაცა დადებითი რიცხვებია, რომლებიც ახასიათებენ კრიტერიუმების შეფარდებით მნიშვნელობებს (ე.წ. მნიშვნელობის, ანუ წონითი კოეფიციენტები). ვთქვათ, მაგალითად, m=2, μ_1=μ_2=1, $f(x')$=(2,8), $f(x'')$=(1,27). მაშინ F_Σ გვიჩვენებს, რომ x'' უკეთესია, ვიდრე x', რადგანაც 2+8<1+27. მაგრამ, თუ პირველი კრიტერიუმისათვის გამოვიყენებთ დასაშვებ გარდაქმნას $\varphi_1(z)=z^5$, ხოლო მეორესათვის $\varphi_2(z)=z^{1/3}$ (ე.ი. f_1 შევცვალოთ f_1^5-ით, ხოლო f_2 კი $f_2^{1/3}$-ით), მაშინ დასკვნა აღმოჩნდება საწინააღმდეგო, რადგანაც 32+2>1+3.

სხვადასხვა ტიპის სკალებში გაზომვების საკითხები, უფრო ზუსტი გაცნობისათვის, შეიძლება ენახოთ წიგნში [28]. ზუსტი და სრული აღწერა გაზომვათა მათემატიკური თეორიისა მოცემულია მონოგრაფიებში [33, 40].

4. როგორც უკვე აღნიშნული იყო, X სიმრავლიდან ოპტიმალური ამონახსნის გამოყოფა უნდა მოხდეს გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ უპირატესობების თანადობის არჩევის საფუძველზე. ეს უპირატესობები ფორმალიზებულად $f_1, f_2, \ldots, f_m$ კრიტერიუმების საშუალებით უნდა იყვნენ აღწერილი. გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში უპირატესობების აღსაწერად შემუშავებულია სპეციალური ზოგადი მეთოდები. უფრო დაწვრილებით ეს საკითხები გაშუქებულია მონოგრაფიებში [28, 59].

5. შემდეგ თავებში ყურადღება დაეთმობა როგორც ზოგადად სასრულგანზომილებიან მრავალკრიტერიულ ამოცანებს, ასევე უსასრულოგანზომილებიან მრავალკრიტერიულ ამოცანებს.

სასრულგანზომილებიან მრავალკრიტერიულ ამოცანებში X არის E^n სივრცის ქვესიმრავლე. ასეთ ამოცანებში X სიმრავლე, როგორც წესი, უფრო ფართო $D \subseteq E^n$ სიმრავლიდან გამოიყოფა სპეციალური შეზღუდვების საშუალებით, რომლებიც უფრო ხშირად წარმოდგენილია შემდეგ უტოლობათა სახით:

$$X = \{x \in D \mid g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0, \ldots, g_k(x) \geq 0\}, \tag{1.1}$$

სადაც $g_j(x)$, $j=1,\ldots,k$, სიმრავლე D-ზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციებია, რომლებიც $g(x)= =g=(g_1,g_2,\ldots,g_k)$ შეზღუდვათა ვექტორ-ფუნქციას შეადგენენ. ამასთან იგულისხმება, რომ $f_1,f_2,\ldots,f_m$ განსაზღვრული არიან D-ზე.

D სიმრავლის როლში ხშირად გამოდის ან მთლიანად E^n სივრცე, ან მისი სპეციფიური ქვესიმრავლე, მაგალითად, არაუარყოფითი ორტანტი $E^n_{\geqq}$, რომელიც შედგენილია არაუარყოფითკომპონენტებიანი ყველა ვექტორით: $E^n_{\geqq}=\{x\in E^n \mid x_1\geqq 0, x_2\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0\}$. პრაქტიკულად, D სიმრავლე გამოიყოფა E^n სივრციდან x_i ცვლადზე დადებული ყველაზე მარტივი და ცხადი შეზღუდვების საშუალებით. ამრიგად, თუ x_i წარმოადგენს i-ური ტიპის რესურსის საჭირო რაოდენობას, მაშინ $x_i\geqq 0$ და შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $D=E^n_{\geqq}$.

6. X (ან D) სიმრავლის სტრუქტურისა და $f_i(x)$ (აგრეთვე $g_j(x)$) ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე გამოიყოფა მრავალკრიტერიული ამოცანების სხვადასხვა კლასები. ამრიგად, თუ X, (D), სიმრავლე შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას, მაშინ ამოცანას ეწოდება სასრული, ხოლო თუ X, (D), ალრიცხვადია, ე.ი. სასრულია ან თვლადია, მაშინ ამოცანას ეწოდება დისკრეტული. კერძოდ, თუ ყოველი x ვექტორის X, (D),-დან ყველა x_i კომპონენტი მთელი რიცხვია, მაშინ ამოცანას ეწოდება მთელრიცხობრივი. თუ ვექტორები, რომლებიც ადგენენ X, (D), სიმრავლეს, ბულისაა (ე.ი. შესდგებიან მხოლოდ ნულებისა და ერთიანებისაგან), მაშინ თვითონ ამოცანას ეწოდება ბულის ამოცანა (ანუ ბულის ტიპის ამოცანა).

თუ X (ან D) სიმრავლე ამოზნექილია, ხოლო ყველა $f_i(x)$ (აგრეთვე $g_j(x)$) - ჩაზნექილი ფუნქციებია, მაშინ ამოცანას ეწოდება ჩაზნექილი. კერძოდ, თუ X პოლიედრული სიმრავლეა (ე.ი. E^n-დან "ამოჭრილია" წრფივ უტოლობათა და ტოლობათა სისტემის საშუალებით), ხოლო ყველა $f_i(x)$ წრფივია, მაშინ მრავალკრიტერიული ამოცანა წრფივია.

სპეციალურ კლასის სახით გამოიყოფა, აგრეთვე, ის ამოცანები, რომლებშიც ყველა $f_i(x)$ (და $g_j(x)$) ფუნქციები დიფერენცირებადია (ზოგჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადობაც მოითხოვება). ამასთან, როგორც წესი, იგულისხმება, რომ D სიმრავლე ღიაა (მაგალითად, მის როლში გამოდის თვითონ E^n სივრცე, ან დადებითი $E^n_{>}=\operatorname{int}E^n_{\geqq}=\{x\in E^n \mid x_1>0, x_2>0,\ldots,x_n>0\}$) ორტანტი ან რაიმე $X\subseteq \operatorname{int}D$ ქვესიმრავლე.

1.2. უპირატესობის თანადობები

1. საკმარისად ზოგადად და კარგადაა დამუშავებული უპირატესობათა ბინარულ თანადობების ენაზე აღწერის ხერხი. საზოგადოდ, ბინარული თანადობები შეიძლება გამოყენებულ იქნენ და პრაქტიკულად კიდევაც იხმარებიან არა მარტო უპირატესობათა, არამედ ნებისმიერი ბუნების ობიექტებს შორის სხვადასხვა ხასიათის წყვილ-წყვილი კავშირების ასაღწერადაც.

როგორც ცნობილია, ρ ბინარული თანადობა A სიმრავლეზე ეწოდება $A^2=$ $=A\times A$ სიმრავლის ქვესიმრავლეს, ანუ (a,b) დალაგებულ წყვილთა ერთობლიობას, სადაც $a,b\in A$. თუ $(a,b)\in\rho$, მაშინ ამბობენ, რომ a ρ-თანადობაშია b-თან და ამ ფაქტს აღნიშნავენ $a\rho b$ ჩანაწერით.

შეიძლება განხილული იქნეს n-არული თანადობებიც, როგორც A^n სიმრავლის ქვესიმრავლე.

ჩვენ განვიხილავთ **მხოლოდ ბინარულ თანადობებს** და ამიტომ ზედსართავი სახელი "ბინარული" ხშირად გამოტოვებული იქნება.

ბინარული თანადობებისადმი, როგორც სიმრავლეებისადმი, ყველა თეორიულ-სიმრავლური ოპერაცია გამოიყენება, მათ შორის თანაკვეთის ოპერაცია $\cap$, გაერთიანების ოპერაცია $\cup$, სხვაობის ოპერაცია $\setminus$ და სხვა. თანადობებისათვის შემოღებულია სპეციფიკური ოპერაციები. ρ^{-1}-ის ქვეშ იგულისხმება ρ-ს შებრუნებული თანადობა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\rho^{-1}=\{(a,b)\in A^2 \mid (b,a)\in\rho\},$$

ე.ი. (a,b) წყვილი შედის ρ^{-1}-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (b,a) წყვილი შედის ρ-ში.

ვთქვათ, $B\subset A$. $\rho_B=\{(a,b)\in\rho \mid a,b\in B\}$ თანადობას ეწოდება ρ-**შეზღუდვა** B-ზე.

ρ თანადობას ეწოდება **რეფლექსური**, თუ $(a,a)\in\rho$ $\forall a\in A$, და ρ თანადობას ეწოდება **ირრეფლექსური**, თუ $(a,a)\notin\rho$, ე.ი. $a\rho a$ არ არის მართებული არცერთი a-სთვის, $a\in A$.

ρ თანადობას ეწოდება **სიმეტრიული**, თუ $(a,b)\in\rho$ პირობიდან გამომდინარეობს $(b,a)\in\rho$; ρ თანადობას ეწოდება **ასიმეტრიული**, თუ $(a,b)\in\rho$ პირობიდან გამომდინარეობს $(b,a)\notin\rho$, და ეწოდება **ანტისიმეტრიული**, თუ $(a,b)\in\rho$ და $(b,a)\in\rho$ პირობიდან გამომდინარეობს $a=b$. ასიმეტრიული მიმართება, ცხადია, ირრეფლექსურიც არის.

ρ თანადობას ეწოდება **ტრანზიტული**, თუ $a\rho b$ და $b\rho c$-დან გამომდინარეობს $a\rho c$.

a და b ელემენტებს A-დან ეწოდებათ **შედარებადი** ρ თანადობის მიმართ, თუ სამართლიანია $a\rho b$ ან $b\rho a$, ხოლო ეწოდებათ არაშედარებადი, როდესაც

არასამართლიანია არც $a\rho b$ და არც $b\rho a$. ρ თანადობას ეწოდება **სრული** (ან **ბმული**), თუ ნებისმიერი ორი $a,b\in A$ ელემენტი შედარებადია (მათ შორის, როცა $a=b$). თანადობას, რომელიც არ არის სრული, ეწოდება **ნაწილობრივი** (ან **არაბმული**).

მაგალითად, $\geqq$ თანადობა ("არანაკლები") ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე რეფლექსური, ანტისიმეტრიული, ტრანზიტული და სრულია, ხოლო თანადობა $>$ ("მეტი") ირრეფლექსურია, ასიმეტრულია, ტრანზიტულია, მაგრამ არ არის სრული (რადგანაც $a>a$ არ არის სამართლიანი).

რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ თანადობას ეწოდება **ექვივალენტობა**. ექვივალენტობის თანადობის მაგალითია მიმართება "=", ვექტორთა ტოლობის თანადობა E^m-დან. ექვივალენტობები მათემატიკაში დიდ როლს თამაშობენ. ეს იმით აიხსნება, რომ ისინი მჭიდროდ არიან დაკავშირებული სიმრავლეთა დაყოფასთან. A სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა $\{A_j\}$ ერთობლიობას ეწოდება A სიმრავლის დაყოფა, თუ A_j სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ თანაიკვეთებიან ($A_j\bigcap A_l=\varnothing, j\neq l$) და ერთობლიობაში მთელ A სიმრავლეს შეადგენენ ($\bigcup_j A_j=A$). თვით A_j სიმრავლეებს ეწოდებათ დაყოფის კლასები.

თუ ρ ექვივალენტობაა, მაშინ ის წარმოქმნის A სიმრავლის დაყოფას შემდეგნაირად: a და b ეკუთვნიან ერთიდაიგივე კლასს (ე.წ. ექვივალენტობის კლასს) იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $(a,b)\in\rho$. პირიქით, თუ მოცემულია A სიმრავლის დაყოფა $\{A_j\}$, მაშინ ρ თანადობა, განსაზღვრული $(a,b)\in\rho$ პირობით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a და b ეკუთვნიან დაყოფის ერთსა და იგივე კლასს, იქნება ექვივალენტობა.

ირრეფლექსურ ტრანზიტულ (და ამიტომ ასიმეტრულ) თანადობას ეწოდება **მკაცრი (ნაწილობრივი) დალაგება**. ხოლო რეფლექსურ და ტრანზიტულ თანადობას — **(ნაწილობრივი) კვაზიდალაგება**. ანტისიმეტრიულ კვაზიდალაგებას (ნაწილობრივი) დალაგება ეწოდება.

განვიხილოთ $\geqq, \geq, >, \overline{\overline{>}}$ თანადობები, რომლებიც E^m-ზე განსაზღვრული არიან შემდეგნაირად:

$a\geqq b \quad \leftrightarrow \quad a_i\geqq b_i, i=1,2,\ldots,m;$

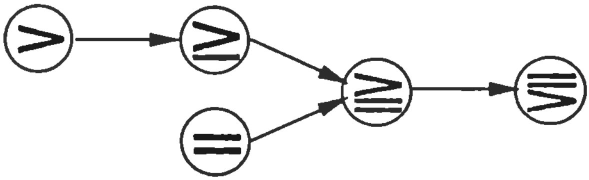
$a\geq b \quad \leftrightarrow \quad a\geqq b, a\neq b$ (ანუ სამართლიანია m უტოლობა $a_i\geqq b_i$, ამასთან ერთი მათგანი მაინც მკაცრია);

$a>b \quad \leftrightarrow \quad a_i>b_i, i=1,2,\ldots,m;$

$a\overline{\overline{>}} b \quad \leftrightarrow \quad a=b$ ან $a_i>b_i$ ერთი $i\in\{1,2,\ldots,m\}$-სთვის მაინც.

ადვილი დასანახია, რომ $\geqq$ თანადობა ნაწილობრივი დალაგებაა, $\geq$ და $>$ მკაცრი ნაწილობრივი დალაგებებია, ხოლო $\overset{=}{>}$ რეფლექსურია (მაგრამ არ არის არც სიმეტრიული და არც ტრანზიტული).

ამ ოთხი თანადობის ურთიერთ კავშირი შეიძლება გამოსახული იქნეს სქემით, რომელიც მოყვანილია ნახ. 1.1-ზე.



ნახ. 1.1

ამ სქემის შესაბამისად, მაგალითად, $a>b$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია, აგრეთვე, $a \geq b, a \geqq b, a \overset{=}{>} b$ უტოლობები, ამიტომ $> \subset \geq \subset \geqq \subset \overset{=}{>}$. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ $\geq$ და $=$-ის გაერთიანება არის $\geqq$. აგრეთვე, სასარგებლოა მხედველობაში გვქონდეს ის ფაქტი, რომ $a \overset{=}{>} b$ სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b \geq a$ არ სრულდება.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.1 [30]. $a \overset{=}{>} b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $<\mu,a> \geqq <\mu,b>$ უტოლობა სრულდება რომელიმე μ ვექტორისათვის M სიმრავლიდან, სადაც

$$M = \left\{ \mu \in E^m \mid \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \ldots, \mu_m > 0, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}.$$

ვთქვათ, ψ ისეთი ფუნქციაა, რომელიც A-ს ასახავს U სიმრავლეში, რომელზეც განსაზღვრულია δ თანადობა. ეს A-ზე ინდუცირებს ρ თანადობას შემდეგნაირად: $(a,b) \in \rho \leftrightarrow (\psi(a),\psi(b)) \in \delta$. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ δ თანადობა რეფლექსურია (ირრეფლექსურია, სიმეტრიულია, ტრანზიტულია), მაშინ ასეთივე იქნება ρ. აქედან გამომდინარეობს: თუ δ ექვივალენტობაა (კვაზიდალაგებაა, მკაცრი დალაგებაა), მაშინ ρ-ც ასეთივე ტიპის თანადობა იქნება.

2. უპირატესობათა ასაწერად ფართოდ გამოიყენება ბინარული თანადობები, რომლებიც A სიმრავლის ურთიერთშედარებად ობიექტებზე მოიცემა (მრავალკრიტერიალურ ამოცანებში ასეთ სიმრავლეებს წარმოადგენენ ამონახსნთა X სიმრავლე და შეფასებათა $\hat{Y}$ სიმრავლე).

უპირატესობის (მკაცრი) თანადობა P: aPb ნიშნავს, რომ a ობიექტი (მკაცრად) უპირატესია, ვიდრე b.

განურჩევლობის თანადობა I: aIb ნიშნავს, რომ a და b ობიექტები ერთნაირია უპირატესობის თვალსაზრისით (თუ ამორჩევას შევზღუდავთ მხოლოდ ამ ორი ობიექტით, მაშინ სულერთია რომელს ამოვირჩევთ).

არამკაცრი უპირატესობის თანადობა R: aRb ნიშნავს, რომ a ობიექტი არანაკლებ უპირატესია, ვიდრე b, ანუ ადგილი აქვს aPb ან aIb თანადობას; ფორმალურად R არის P და I–ის გაერთიანება.

უპირატესობათა თანადობებს ყოველთვის უნდა ახასიათებდეს შემდეგი თვისებები: P ასიმეტრიულია (და ირრეფლექსურია); I რეფლექსური და სიმეტრიულია, R რეფლექსურია; P და I არ იკვეთებიან (aPb და aIb არ შეიძლება ერთდროულად სამართლიანი იყოს). სასარგებლოა მხედველობაში გვქონდეს, რომ P და I შეიძლება აღვადგინოთ R-ის მიხედვით:

aIb, როდესაც ერთდროულად სრულდება aRb და bPa, ანუ $I = R \bigcap R^{-1}$;

aPb, როდესაც aRb მართებულია, ხოლო bRa არაა მართებული: $P = R \setminus R^{-1} = R \setminus I$.

ამრიგად, I არის R-ის "სიმეტრიული ნაწილი", ხოლო P - R-ის "არასიმეტრიული ნაწილი".

ზოგად შემთხვევაში R, P და I თანადობები არატრანზიტულებია. თუ R აღმოჩნდება ტრანზიტული, მაშინ ტრანზიტული იქნებიან P და I; ამ შემთხვევაში R კვაზიდალაგებაა, P - მკაცრი დალაგება, I - ექვივალენტობა, ამასთან P ტრანზიტულია I-ს მიმართ: aPb, bIc, aIb და bPc პირობებიდან გამომდინარეობს aPc.

3. ვთქვათ, A-ში მოცემულია R არამკაცრი უპირატესობის თანადობა (რომელიც, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, წარმოქმნის P და I თანადობებს), ხოლო B A-ს ქვესიმრავლე. $a^{*} \in B$ ობიექტს (ელემენტს) ეწოდება **საუკეთესო (ოპტიმალური)** R-ის მიხედვით (B-ში), თუ ის არანაკლებ უპირატესია, ვიდრე ნებისმიერი სხვა ობიექტი B-დან, ანუ თუ $a^{*}Ra$ სამართლიანია ნებისმიერი a-სთვის B-დან. საუკეთესო ობიექტი ერთადერთია I ექვივალენტობის სიზუსტით, ე.ი. თუ b^{*} აგრეთვე საუკეთესოა B-ში, მაშინ $a^{*}Ib^{*}$. თუ B-დან ერთი ელემენტის ამორჩევაა საჭირო, მაშინ შეიძლება ნებისმიერი საუკეთესოს არჩევა (თუ ასეთები B-ში არსებობენ). თუ R რიგის თანადობაა, მაშინ საუკეთესო ელემენტი ერთადერთია.

სამწუხაროდ, თუ R თანადობა არ არის ბმული კვაზიდალაგება, მაშინ საუკეთესო ელემენტი შეიძლება სასრულ B სიმრავლეშიც არ აღმოჩნდეს. მაგალითად, თუ $B=\{a,b,c\}$ და $R=\{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c)\}$, მაშინ B-ში საუკეთესო ელემენტი არ არსებობს (a და b არაშედარებადნი არიან R-ის მიმართ). ამის გამო საჭირო ხდება მაქსიმალური ობიექტის შედარებით სუსტი ცნების შემოღება. შემდეგისათვის მაქსიმალური ობიექტის ცნება მოხერხებული იქნება შემოვიღოთ სამაგალითოდ ზოგადი შემთხვევისათვის: როცა არ იგულისხმება, რომ მაქსიმალური ობიექტი აუცილებლად უნდა შედიოდეს B სიმრავლეში.

$a^0 \in A$ ობიექტს ეწოდება **ფარდობითად მაქსიმალური** B-ში P-ს მიმართ (ანუ **არადაქვემდებარებული, არადომინირებადი**), თუ B-ში არ არსებობს a^0 ობიექზე მკაცრად უპირატესი a ობიექტი, ანუ თუ aPa^0-ს ადგილი არა აქვს არც ერთი $a \in B$-სთვის. თუ a^0 ობიექტი ეკუთვნის B-ს, მაშინ მას უწოდებენ **მაქსიმალურს** P-ს მიმართ B-ში. ახლახანს განხილულ მაგალითში მაქსიმალური (B-ში) ელემეხტებია a და b. ადვილი შესამოწმებელია, რომ B-ში საუკეთესო ობიექტი მაქსიმალურიცაა. შებრუნებული დებულება, რა თქმა უნდა, სწორი არ არის.

აღვნიშნოთ P-ს მიმართ B-დან მაქსიმალური ობიექტების სიმრავლე $Max_P B$-ით. ეს სიმრავლე **შინაგანად მდგრადია** იმ გაგებით, რომ, თუ a, $b \in Max_P B$, მაშინ შეუძლებელია შესრულდეს aPb ან bPa. ამ სიმრავლეს ეწოდება **გარეგანად მდგრადი** [58], თუ ყოველი $a \in B$ ობიექტისათვის, რომელიც არ არის მაქსიმალური, მოიძებნება უფრო უპირატესი მაქსიმალური ობიექტი, ე.ი. სამართლიანი იქნება $a^0 Pa$ რომელიმე $a^0 \in Max_P B$-სთვის. გარეგანად (და, რა თქმა უნდა, შინაგანადაც) მდგრად $Max_P B$ სიმრავლეს ეწოდება P თანადობის **ბირთვი** B-ში [132, 133]. (აქვე აღვნიშნოთ, რომ თამაშთა თეორიაში შინაგანად და გარეგანად მდგრად ქვესიმრავლეებს უწოდებენ ნეიმან-მორგენშტერნის ამონახსნებს, ხოლო ბირთვად მიღებულია მაქსიმალური ელემენტების სიმრავლე.)

მდგრადობის ცნებას დიდი მნიშვნელობა აქვს. მართლაც, თუ $Max_P B$ სიმრავლე გარეგანად მდგრადია, მაშინ ოპტიმალური ობიექტი (ანუ ის, რომელიც გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ საკმარისად სრული უპირატესობათა გამოვლენის შემდეგ ჩაითვლება საუკეთესოდ) ამ სიმრავლიდან უნდა იქნეს ამორჩეული. თუ კი $Max_P B$ გარეგანად მდგრადი არ აღმოჩნდება, მაშინ იმისათვის, რომ ამორჩევა ამ სიმრავლის ფარგლებით შევზღუდოთ, არავითარი საფუძველი არა გვაქვს. რთული არ არის შევამოწმოთ, რომ თუ R კვაზიდალაგებაა, ხოლო B სიმრავლე სასრულია, მაშინ $Max_P B$ სიმრავლე არაცარიელია და უფრო მეტიც, გარეგანად მდგრადია; ამასთან, $Max_P B$ შეიძლება ავაგოთ "პირდაპირი გადარჩევის" გზით, თუ კი B-ს ყოველ ობიექტს

შევადარებთ დანარჩენებს და ყველა მაქსიმალურს ამოვირჩევთ. ამრიგად, თუ R კვაზიდალაგებაა, მაშინ $Max_P B$ სიმრავლე შეიძლება არც იყოს გარეგანად მდგრადი (კერძოდ, იყოს ცარიელი) მხოლოდ B-ს უსასრულობის დროს. მაქსიმალური ელემენტების სიმრავლის არაცარიელობისა და გარეგანად მდგრადობის სხვადასხვა სახის პირობები მოცემულია შრომებში [3, 25, 64, 86, 131].

შენიშვნა 11. ზემოთ განიხილებოდა ერთი ოპტიმალური ობიექტის ამორჩევის ამოცანა. მაგრამ, არსებობს ამოცანები, სადაც საჭიროა არა ერთი, არამედ რამოდენიმე საუკეთესოს ამორჩევა, ან საჭიროა დალაგდეს ობიექტები უპირატესობათა მიხედვით და ა.შ. ასეთი ამოცანებისათვის მაქსიმალური ობიექტისა და ბირთვის ცნება თავის მნიშვნელობას კარგავს. მაგალითად, თუ საჭიროა r საუკეთესო ობიექტის ამორჩევა ("კონკურსის" ამოცანა), მაშინ შეუძლებელია ვამტკიცოთ, რომ ყველა ისინი P-ს მიმართ მაქსიმალური ობიექტებია. უმარტივესი მაგალითი: $B = \{a, b, c\}$, $P = \{(a, c)\}$. აქ $Max_P B = \{a, b\}$, მაგრამ, თუ საჭიროა ორი საუკეთესო ობიექტის ამორჩევა, მაშინ c-ს იგნორირება ან გადაგდება არ შეიძლება: თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირი დამატებით გვაცნობებს, რომ c-ს აქვს უპირატესობა ვიდრე b-ს, მაშინ საძიებელი ობიექტები აღმოჩნდებიან a და c. ამოცანებში, რომლებშიც აუცილებელია დადგენილი r რაოდენობით საუკეთესო ობიექტების ამორჩევა, მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ P-ს მიმართ r-მაქსიმალური ობიექტის ცნება [36].

შენიშვნა 12. ხშირად გამოიყენება აგრეთვე ყველაზე ცუდი და მინიმალური ობიექტის ცნება. $a_* \in B$ ობიექტს ეწოდება **ყველაზე ცუდი** B-ში, თუ ყველა $a \in B$-სთვის სამართლიანია aRa_*. $a_0 \in B$ ობიექტს ეწოდება **მინიმალური** B-ში P-ს მიმართ, თუ არცერთი $a \in B$-სთვის არ სრულდება $a_0 Pa$. B-დან P-ს მიმართ ყველა მინიმალური ობიექტების სიმრავლე აღვნიშნოთ $Min_P B$.

4. რიცხვით ψ ფუნქციას, განსაზღვრულს A-ზე, ეწოდება P-ს მიმართ **ზრდადი (არაკლებადი)**, თუ aPb–დან გამომდინარეობს $\psi(a) > \psi(b)$ ($\psi(a) \geqq \psi(b)$) უტოლობა ნებისმიერი $a, b \in A$-სთვის. სამართლიანია შემდეგი დებულება (იხ., მაგალითად, [7, 34]).

თეორემა 12. ვთქვათ, $B \subseteq A$ და $a^0 \in B$ წერტილში მიიღწევა P-ს მიმართ B-ზე არაკლებადი ψ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. იმისათვის, რომ a^0 ობიექტი იყოს P-ს მიმართ მაქსიმალური, საკმარისია შესრულდეს ერთი-ერთი მაინც შემდეგი ორი პირობიდან:

ა) ψ ზრდადია P-ს მიმართ B-ზე;

ბ) a^0 წერტილი ψ-ს ერთადერთი მაქსიმუმის წერტილია B-ზე.

$B \subseteq A$ ქვესიმრავლეს ვუწოდოთ **ფარდობითად ზემოდან ჩაკეტილი** A-ში R-ის მიმართ (P-ს მიმართ), თუ ნებისმიერი $a \in A$ და $b \in B$-თვის aRb-დან (aPb-დან) გამომდინარეობს, რომ $a \in B$. ადვილად შესამოწმებელია შემდეგი დებულებები (იხ. [39, გვ. 22]).

თეორემა 1.3. თუ $B_j \subseteq A$, $j \in J$, და B_j, $j \in J$, ქვესიმრავლეები ფარდობითად ზემოდან ჩაკეტილებია A-ში R-ის (P-ს) მიმართ, მაშინ ასეთივე თვისება ექნება $B = \bigcap_{j \in J} B_j$ სიმრავლესაც.

თეორემა 1.4. თუ ψ არაკლებადია P-ს მიმართ A-ზე, მაშინ ნებისმიერი t რიცხვისათვის $B = \{a \in A \mid \psi(a) \geqq t\}$ ქვესიმრავლე ფარდობითად ზემოდან ჩაკეტილია A-ში P-ს მიმართ.

თეორემა 1.5. ვთქვათ, $B \subseteq A$ ფარდობითად ზემოდან ჩაკეტილია A-ში P-ს მიმართ. მაშინ $a \in B$ ობიექტი ფარდობითად მაქსიმალურია P-ს მიმართ B-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის მაქსიმალურია A-ში P-ს მიმართ.

ამბობენ, რომ ψ რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს R **სრულ კვაზიდალაგებას** A-ზე, თუ aRb პირობა არის სამართლიანი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\psi(a) \geqq \psi(b)$. ψ ფუნქციას, რომელიც არამკაცრ უპირატესობის თანადობას ქმნის, **ფასეულობის**, აგრეთვე, **სარგებლობის ფუნქციას** უწოდებენ. ეს სახელწოდება შემორჩა იმ დროიდან, როდესაც შეცდომით თვლიდნენ, რომ ყოველ ობიექტს გააჩნია რაიმე ობიექტური ფასეულობა (სარგებლიანობა), რომლებიც ასახავენ იმ უპირატესობებს, რასაც ანიჭებენ მათ ადამიანები. თანამედროვე თვალსაზრისით სარგებლიანობის ფუნქცია წარმოადგენს მხოლოდ "ტექნიკურად მოსახერხებელ" საშუალებას უპირატესობათა აღსაწერად: სუბიექტს მიეწერება ისეთი რიცხვითი ფუნქცია, რომელიც, ასე ვთქვათ, მაქსიმიზირდება მისი ქმედებებით. გასაგებია, რომ ფასეულობის ფუნქცია წარმოადგენს ხარისხობრივ კრიტერიუმს: იგი განსაზღვრულია ნებისმიერი ზრდადი გარდაქმნის სიზუსტით. ფასეულობის ფუნქციის არსებობის პირობები მოყვანილია [28, 57]-ში. აქ აღვნიშნავთ მხოლოდ იმ ფაქტს, რომ ფასეულობის ფუნქცია არსებობს ნებისმიერი სრული კვაზიდალაგებისათვის, როდესაც სიმრავლე დათვლადია, ე.ი. სასრულია ან თვლადი.

თუ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია ψ ფასეულობის ფუნქცია, რომელიც წარმოქმნის R არამკაცრი უპირატესობის თანადობას, მაშინ ნებისმიერი $B \subseteq A$-თვის, ცხადია, რომ

$$Max_P B = \left\{ b \in B \mid \psi(b) = \max_{a \in B} \psi(a) \right\}$$

ამასთან ერთად P-ს მიმართ ყველა მაქსიმალური ობიექტი B-დან საუკეთესოა.

5. ბინარულ თანადობათა "ენის" დამახასიათებელ თავისებურებას წარმოადგენს დაშვება იმის შესახებ, რომ უპირატესობის მიხედვით ორი ობიექტის შეთანადების შედეგი არ არის დამოკიდებული ალტერნატივათა A სიმრავლის შემადგენლობაზე. თუმცა, რიგ შემთხვევებში ასეთ გარემოებას ადგილი აქვს და მის გასათვალისწინებლად გვიწევს მივმართოთ უპირატესობათა აღწერის უფრო მდიდარ "ენას", რომელიც დაფუძნებულია ამორჩევის ფუნქციის გამოყენებაზე.

ვთქვათ W არის A სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა. **ამორჩევის ფუნქცია** (W -ზე) ეწოდება C ასახვას, რომელიც ყოველ $B \in W$ სიმრავლეს შეუთანადებს $C(B) \subseteq B$ ქვესიმრავლეს. იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია მკაცრი უპირატესობის P თანადობა, ამორჩევის ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით: $C(B) = Max_P B$, $B \subseteq W$. მოცემული ამორჩევის ფუნქციის მიხედვით უპირატესობის ბინარული თანადობის შემოტანის საკითხი გაცილებით უფრო ფაქიზი აღმოჩნდა [28, 111]. ამორჩევის ფუნქციის აპარატი წარმოადგენს ამორჩევის ზოგადი თეორიის საფუძველს. ბოლო დროს ეს თეორია ინტენსიურად ვითარდება [1].

1.3. კრიტერიუმთა დამოუკიდებლობა უპირატესობის მიხედვით

1. მრავალკრიტერიულ ამოცანაში ყოველი $x \in X$ ამონახსნი სავსებით ხასიათდება თავისი $y=f(x)$ შეფასებით, ამიტომ ოპტიმალური ამონახსნის ამორჩევა დაიყვანება მიღწევადი შეფასებების Y სიმრავლიდან ოპტიმალური შეფასების ამორჩევაზე. ამასთან დაკავშირებით, გადაწყვეტილების მიმღები პირის უპირატესობათა აღწერა თავდაპირველად ხორციელდება ყველა შეფასებათა $\hat{Y}$ სიმრავლეში. პრაქტიკულად ასეთი აღწერა ჩვეულებრივ ხდება უპირატესობის ბინარული თანაფარდობის ან ფასეულობის ფუნქციის საშუალებით.

გადაწყვეტილების მიმღები პირის უპირატესობათა შესახებ სრული ინფორმაციის არარსებობის შემთხვევაში ($f_1, f_2, \ldots, f_m$ კრიტერიუმების ჩამონათვალის გარდა), $\hat{Y}$ სიმრავლეში შეიძლება განხილული იქნეს მხოლოდ განურჩევლობის თანაფარდობა, რომელიც წარმოადგენს შეფასებათა ვექტორების ტოლობის (=) თანაფარდობას, როგორც E^n-დან (ამასთან არამკაცრი უპირატესობის თანაფარდობა ემთხვევა =-ს, ხოლო მკაცრი უპირატესობის თანაფარდობა აღმოჩნდება ცარიელი). განურჩევლობის თანაფარდობა = ამონახსნთა სიმრავლეში ინდუცირებს განურჩევლობის $\underset{f}{\sim}$ დამოკიდებულებას: $x \underset{f}{\sim} x'$, როდესაც $f(x)=f(x')$, ე.ი. ამონახსნები, რომელთაც გააჩნიათ ტოლი შეფასებები, ერთნაირებია უპირატესობის მიხედვით. $\underset{f}{\sim}$ თანაფარდობა წარმოადგენს ექვივალენტურობას და X სიმრავლეს ყოფს კლასებად, რომლებიც შედგებიან უპირატესობის მიხედვით ერთნაირი ამონახსნებისაგან.

ამგვარად, თუ ამოცანა არატრივიალურია, ე.ი. თუ Y სიმრავლე შეიცავს ერთ შეფასებაზე მეტს, მაშინ ოპტიმალური ამონახსნის ამორჩევა გადაწყვეტილების მიმღები პირის უპირატესობათა შესახებ ინფორმაციის გარეშე შეუძლებელია.

2. ერთკრიტერიუმიან ამოცანებში (როცა $m=1$) ამ სახის სრული ინფორმაცია ჩვეულებრივ მდგომარეობს შეფასებათა უპირატესი ცვლილების მიმართულების ჩვენებაში $\hat{Y}=Y$ სიმრავლეზე, რომელიც წარმოადგენს რიცხვითი წრფის ქვესიმრავლეს. ეს აიხსნება იმით, რომ გამოყენებით ამოცანათა უმრავლესობაში კრიტერიუმად არჩეულია ისეთი ფუნქციები, რომელთათვისაც ყოველთვის ან უფრო დიდი მნიშვნელობაა უპირატესი მცირესთან შედარებით, ანდა პირიქით, მცირე უპირატესია დიდთან შედარებით.

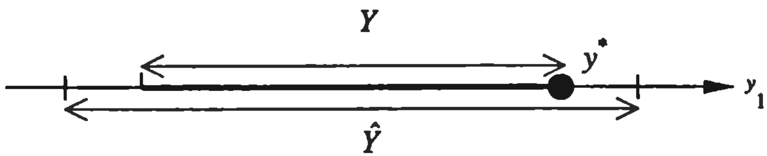
პირველ შემთხვევაში კრიტერიუმი ხშირად ატარებს მოგების, შემოსავლის (ან სხვა) აზრს, გამოხატავს დასახული მიზნის მიღწევის ხარისხს

(მაგალითად, ვექმიური დავალების შესრულების პროცენტს), ან ასახავს "ტექნიკურ" მახასიათებლებს, რომლებიც სასურველია გაზრდილ იქნეს (მაგალითად, ოპერატორის მუშაობის მოსასერხებლობა, რომელიც ექსპერტების მიერ ქულებით ფასდება).

მეორე შემთხვევაში კრიტერიუმი ატარებს ნაკლოვანებათა, რესურსთა დანახარჯთა და სხვა აზრს, ან აღწერს "ტექნიკურ" მახასიათებლებს, რომლებიც სასურველია მინიმიზირებულ იქნენ (მაგალითად, გარემოს დაბინძურება).

რამდენადაც მეორე შემთხვევა ადვილად დაიყვანება პირველზე, მაგალითად f_1-ის შეცვლით $-f_1$-ით, ამიტომ ორივე შემთხვაში ერთკრიტერიული ამოცანა შეიძლება ფორმულირებული იქნეს მაქსიმიზაციის ამოცანის სახით, ე.ი. ამოცანაზე, რომელშიც კრიტერიუმის მეტ მნიშვნელობებს ენიჭებათ უპირატესობა ნაკლებთან შედარებით. f_1 კრიტერიუმის მაქსიმიზაციის ამოცანაში $\hat{Y}$-ზე განსაზღვრული მკაცრი უპირატესობის თანადობა წარმოადგენს რიცხვებს შორის ჩვეულებრივ "მეტობის" (>) თანადობას. ამგვარად, მაქსიმიზაციის ამოცანაში კრიტერიუმი ფასეულობის ფუნქციის როლს თამაშობს: ნებისმიერი ორი x, x' ამონახსნი შედარებადია უპირატესობის მიხედვით და მათ შორის საუკეთესოა ის, რომლისთვისაც კრიტერიუმის მნიშვნელობა მეტია. აქედან გამომდინარე, ოპტიმალური y^* შეფასება არის უდიდესი Y-ში (იხ. ნახ. 1.2), ხოლო ოპტიმალურია ნებისმიერი $x^* \in X$ ამონახსნი, რომლისთვისაც f_1 მაქსიმუმალურ მნიშვნელობას ღებულობს X-ზე:

$$f_1(x^*) = \max_{x \in X} f_1(x) = y^*$$



ნახ. 1.2

თუ ასეთი ამონახსნი არ არსებობს, განსახილველად შემოაქვთ ამონახსნთა მაქსიმიზირებადი $\{x^{*r}\} \subseteq X$ მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$\lim_{r \to \infty} f_1(x^{*r}) = \sup_{x \in X} f_1(x).$$

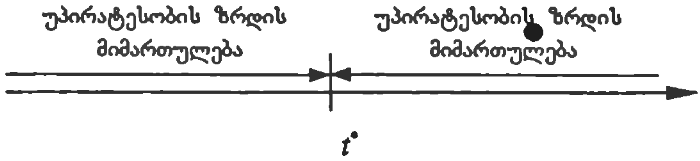
თუ კრიტერიუმი შემოსაზღვრულია Y-ზე ზემოდან, მაშინ ნებისმიერი $\xi>0$-თვის (ე.ი. ნებისმიერი მოცემული სიზუსტისათვის) მოიძებნება ისეთი N რიცხვი, რომ ნებისმიერი $r>N$-თვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$\sup_{x\in X} f_1(x) - f_1(x^{*r}) \leqq \xi.$$

შევნიშნოთ, რომ არადინამიკური ხასიათის გამოყენებით ამოცანებში კრიტერიუმის ზემოდან ან ქვემოდან შემოუსაზღვრელობა ჩვეულებრივ მიუთითებს პრობლემური სიტუაციისათვის აგებულ მათემატიკურ მოდელში არსებულ ცთომილებაზე (მაგალითად, არ არის გათვალისწინებული რესურსების შემოსაზღვრულობა).

ადვილი დასანახია, რომ ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრება ადექვატურია ისეთი f_1 კრიტერიუმისათვის, რომელსაც აქვს მხოლოდ რიგობრივი სკალა. მაქსიმიზირებადი მიმდევრობის განსაზღვრა ადექვატურია, როდესაც დასაშვებია ამ კრიტერიუმის უწყვეტი მონოტონური გარდაქმნები.

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ნებისმიერი ერთკრიტერიული ამოცანა ადვილად წარმოიდგინება მაქსიმიზაციის ამოცანის სახით უპირატესობის ზრდის ერთი მიმართულების მოცემის გზით. ზოგიერთ შემთხვევაში ამისათვის საჭიროა უპირატესობათა შესახებ უფრო სრულ:ა ინფორმაცია. თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი [43]. ვთქვათ, f_1 არის შეკვეთის შესრულების დრო, ამასთან კრიტერიუმისათვის არასასურველია როგორც მითითებულ t^* ვადაზე გვიან, ასევე ვადაზე ადრე შეკვეთის შესრულება. ამ შემთხვევაში Y_1 სკალაზე გვაქვს უპირატესობის ზრდის ორი მიმართულება (იხ. ნახ. 1.3) და სხვადასხვა ნიშნის f_1-t^* გადახრების შესადარებლად აუცილებელია დამატებითი ინფორმაცია. კერძოდ, თუ დადგენილია, რომ მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული გადახრებია ერთნაირი უპირატესობის მიხედვით, მაშინ საწყისი ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ ახალი $\left|f_1-t^*\right|$ კრიტერიუმის მინიმიზაციის ამოცანაზე.



ნახ. 1.3

3. მრავალკრიტერიულ ამოცანებში უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთს ადარებენ ვექტორულ შეფასებებს, ე.ი. $f=(f_1, f_2,\dots, f_m)$ ვექტორული კრიტე-

რიუმის მნიშვნელობებს. ბუნებრივია, რომ უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთს შევადაროთ ის ვექტორული შეფასებები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ერთი კომპონენტით. ამიტომ, ინფორმაცია ერთი კერძო კრიტერიუმის მნიშვნელობის შეცვლის უპირატესობის შესახებ ყველა სხვა კრიტერიუმის ფიქსირებული მნიშვნელობისას ყველაზე უფრო ხელმისაწვდომი და საიმედოა. ამიტომაც არის, რომ პირველ რიგში მისი მიღება და ამოცანის ანალიზისათვის გამოყენებაა მიზანშეწონილი.

საზოგადოდ f_l კრიტერიუმის მნიშვნელობები უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთს სხვადასხვაგვარად შეიძლება შეეფარდებოდნენ, იმისდა მიხედვით, თუ რომელი მნიშვნელობებია ფიქსირებული ყველა სხვა კრიტერიუმისათვის. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, s და t რიცხვებისათვის Y_l-დან, მაგალითად, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $(y_1, y_2,\ldots, y_{l-1}, s, y_{l+1},\ldots, y_m)$ შეფასება უპირატესია $(y_1,y_2,\ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1},\ldots, y_m)$-ზე, თუმცა $(y'_1, y'_2,\ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1},\ldots, y'_m)$ ნაკლებად უპირატესია $(y'_1, y'_2,\ldots, y'_{l-1}, t, y'_{l+1},\ldots, y'_m)$-სთან შედარებით. მაშინ, თქმა იმისა, თუ f_l კრიტერიუმებიდან რომელია უპირატესი (f_s ან f_t), დანარჩენი კრიტერიუმების მნიშვნელობების მითითების გარეშე, შეუძლებელია.

f_l კრიტერიუმს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ზემოთ აღნიშნულ გარემოებას, **უპირატესობის მიხედვით** დანარჩენ კრიტერიუმებზე **დამოკიდებულს** უწოდებენ. მაგალითად, თუ f_1 და f_2 ოთახის სიგრძე და სიგანეა, ხოლო f_3 - ჭერის სიმაღლე, მაშინ მობინადრის თვალსაზრისით f_3 უპირატესობის მიხედვით დამოკიდებულია $\{f_1,f_2\}$-ზე. მოვიყვანოთ მეორე მაგალითი: f_1 (ოთახის ტემპერატურა) და f_2 (მისი ტენიანობა) კრიტერიუმებიდან თითოეული უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთზეა დამოკიდებული (მხედველობაში გვაქვს კომფორტი ადამიანისათვის).

უფრო ხშირად გვხვდება ისეთი კრიტერიუმები, რომელთა მნიშვნელობები შეიძლება დავალაგოთ უპირატესობის მიხედვით დანარჩენი კრიტერიუმების მნიშვნელობების განხილვის გარეშე. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი შემოსავლის, ნარჩენებისა და სხვა კრიტერიუმები. ასეთ კრიტერიუმებს უწოდებენ **უპირატესობის მიხედვით** დანარჩენებისაგან **დამოუკიდებელ** კრიტერიუმებს [78]. უფრო ზუსტად, f_l კრიტერიუმი უპირატესობის მიხედვით დამოუკიდებელია დანარჩენი $m-1$ კრიტერიუმებისაგან, თუ ნებისმიერი ოთხი შეფასებისათვის, რომლებსაც აქვთ სახე

$$(y_1, y_2,\ldots,y_{l-1}, s, y_{l+1},\ldots, y_m),\quad (y_1, y_2,\ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1},\ldots, y_m),$$
$$(y'_1, y'_2,\ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1},\ldots, y'_m),\quad (y'_1, y'_2,\ldots, y'_{l-1}, t, y'_{l+1},\ldots, y'_m),$$

თანადობიდან

$$(y_1, y_2,\ldots,y_{l-1}, s, y_{l+1},\ldots, y_m)R(y_1, y_2,\ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1},\ldots, y_m),$$

ყოველთვის გამომდინარეობს თანადობა

$$(y'_1, y'_2,\ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1},\ldots, y'_m)\, R\, (y'_1, y'_2,\ldots, y'_{l-1}, t, y'_{l+1},\ldots, y'_m).$$

თუ f_l კრიტერიუმი დამოუკიდებელია უპირატესობის მიხედვით დანარჩენ კრიტერიუმთა სიმრავლისაგან, მაშინ Y_l სიმრავლეზე შეიძლება შემოვიღოთ არამკაცრი უპირატესობის R_l თანადობა, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ sR_lt, როცა

$$(y'_1, y'_2, \ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1}, \ldots, y'_m)R(y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1}, \ldots, y_m)$$

რომელიმე ორი (ე.ი. ორი ნებისმიერი) ასეთი სახის შეფასებისათვის. ამის გარდა, $\hat{Y}$ სიმრავლეზეც შეიძლება შემოვიღოთ არამკაცრი უპირატესობის $R_{(l)}$ თანადობა, თუ ვიგულისხმებთ, რომ: $yR_{(l)}y'$, როცა $y_i = y'_i$, ყველა $i \neq l$-თვის, და $y_l R_{(l)} y'_l$.

ამოცანებს, რომლებშიც ყველა კრიტერიუმი დამოუკიდებელია უპირატესობის მიხედვით, ანუ, ყოველი კრიტერიუმი დამოუკიდებელია უპირატესობის მიხედვით ყველა დანარჩენი კრიტერიუმების სიმრავლისაგან, ხოლო ყოველი კრიტერიუმის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე არამკაცრი უპირატესობის თანადობას წარმოადგენს $\geqq$ თანადობა ("არა ნაკლები"), ეწოდებათ **მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციის ამოცანები**. ასეთ ამოცანებში ყოველი კრიტერიუმისათვის სასურველია გვქონდეს რაც შეიძლება დიდი მნიშვნელობა, ანუ, როგორც ამბობენ, სასურველია ყოველი კრიტერიუმის მაქსიმიზაცია. თუ ამოცანაში სასურველია ყოველი კრიტერიუმის მინიმიზაცია, მაშინ მას ეწოდება **მრავალკრიტერიული მინიმიზაციის ამოცანა**.

1.4. ეფექტური, სუსტად ეფექტური შეფასებები და ამონახსნები

1. მრავალკრიტერიულ მაქსიმიზაციის ამოცანაში ორი ვექტორული შეფასებიდან, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ ერთი კომპონენტით, უპირატესობა ენიჭება იმას, რომლისთვისაც ეს კომპონენტიც მეტია. მაგრამ რა შეიძლება ითქვას y და y' ვექტორულ შეფასებებზე, რომელთათვისაც სრულდება უტოლობები

$$y_i \geqq y_i',\ \ i=1,2,\dots,m? \tag{1.2}$$

თავდაპირველად განვიხილოთ ინდივიდუალური გადაწყვეტილების მიღების მრავალკრიტერიული ამოცანის შემთხვევა. დავუშვათ, რომ მისაღები გადაწყვეტილების უპირატესობა აღიწერება არამკაცრი უპირატესობის R თანადობით $\hat{Y}$-ზე, ამასთან, ცნობილია, რომ იგი არა მარტო რეფლექსურია, არამედ ტრანზიტულიცაა (ე. ი. წარმოადგენს კვაზიდალაგებას). თუ ჩავთვლით, რომ $\hat{Y}=Y_1\times Y_2\times\dots\times Y_m$, მაშინ ვექტორული შეფასებებისათვის, მათი კომპონენტებისათვის თანადობის თანმიმდევრულად გამოყენებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) R (y_1', y_2, \dots, y_m),$$
$$(y_1', y_2, \dots, y_m) R (y_1', y_2', y_3, \dots, y_m),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(y_1', y_2', \dots, y_{m-1}', y_m) R (y_1', y_2', \dots, y_m').$$

ამ თანადობისა და R-ის ტრანზიტულობის საფუძველზე ვასკვნით, რომ სამართლიანია yRy', ე.ი. ვექტორული შეფასება y არანაკლებ მისაღებია, ვიდრე y'.

თუ შეუძლებელია იმის მტკიცება, რომ R ტრანზიტულია, ან თუ $\hat{Y}$ არ წარმოადგენს $Y_1\times Y_2\times\dots\times Y_m$ პირდაპირ ნამრავლს, მაშინ შეუძლებელია ფორმალური გზით მივიდეთ ფორმულირებულ მტკიცებამდე. თუმცა, ნებისმიერ შემთხვევაში იგი იმდენად ბუნებრივია, რომ ინდივიდუალური გადაწყვეტილებების მიღებისას შემოდის როგორც აქსიომა. ამ აქსიომის მიღება, რომელსაც ხშირად **პარეტოს (ძლიერ) აქსიომას** უწოდებენ, ნიშნავს შეფასებათა $\hat{Y}$ სიმრავლეში არამკაცრი უპირატესობის თანადობის შემოტანას, რომელიც ემთხვევა $\geqq$ (ნაწილობრივ) დალაგებას ვექტორებისათვის E^m სივრციდან.

არამკაცრი უპირატესობის $\geqq$ თანადობას შეესაბამება განურჩევლობის $=$ თანადობა და მკაცრი უპირატესობის $\geq$ თანადობა ($y \geqq y'$ ნიშნავს, რომ სამართლიანია (1.2) უტოლობები, ამასთან, ერთი მათგანი მაინც მკაცრია).

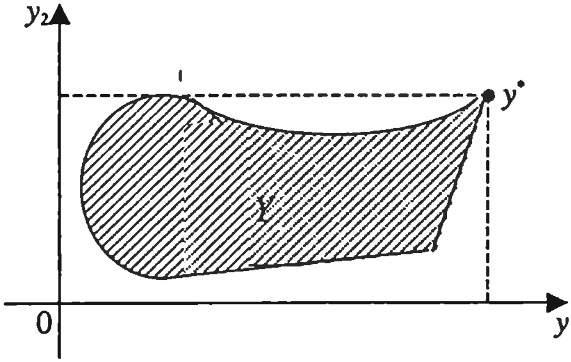
2. ახლა განვიხილოთ ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების მრავალკრიტერიული ამოცანა, როცა f_i წარმოადგენს $\{1,2,\dots,m\}$ ჯგუფში შემავალი i-ური ინდივიდის ფასეულობის ფუნქციას, ასე რომ $f_i(x) \geqq f_i(x')$ ნიშნავს, რომ გადაწყვეტილება x არ არის x' გადაწყვეტილებაზე უარესი i-ური ინდივიდუმის თვალსაზრისით. ასეთ ამოცანაში $\hat{Y}$ შეფასებათა სიმრავლეზე განსაზღვრულმა უპირატესობის თანადობამ უნდა ასახოს "ჯგუფური თვალსაზრისი", რომელიც აგრეგირებას გაუწევს ინდივიდუალურ თანადობას. თუ $y=y'$, ე.ი. $f(x)=f(x')$, მაშინ x და x' გადაწყვეტილებათა ექვივალენტობის შესახებ დასკვნა შეიძლება გაკეთდეს მთელი ჯგუფისათვისაც. გასარკვევი დაგვრჩა საკითხი: თუ (1.2)-ში ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია, შეგვიძლია თუ არა ჩავთვალოთ, რომ გადაწყვეტილება x უპირატესია x'-ზე?

სამწუხაროდ, ყველა რეალურ სიტუაციაში ამ კითხვაზე დადებითი პასუხს ვერ გავცემთ. მართლაც, თუ (1.2)-ში მხოლოდ ერთი მკაცრი უტოლობაა, ეს ნიშნავს, რომ x უპირატესია x'-ზე ჯგუფის მხოლოდ ერთი წევრისათვის, ხოლო ყველა დანარჩენისათვის ორივე გადაწყვეტილება ტოლფასია. მაგრამ ზოგიერთ სიტუაციაში შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ "ერთი ხმა" ძალიან ცოტაა, და მაშინ ჯგუფი მთლიანობაში ვალდებული არაა ჩათვალოს, რომ x გააჩნია უპირატესობა x'-ზე.

ისე ჩანს, რომ სხვადასხვა სიტუაციებში y და y' შეფასებათა შედარების შედეგი შეიძლება დამოკიდებული იყოს იმაზე, თუ რამდენი მკაცრი უტოლობა სრულდება (1.2)-ში. მაგრამ ყველაზე სუსტი დაშვება მდგომარეობს იმაში, რომ y მთელი ჯგუფისათვის უპირატესია y'-თან შედარებით, თუ კი (1.2)-ში ყველა უტოლობა მკაცრია. ამ დაშვებას, რომელიც მიღებულია ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა თითქმის ყველა ცნობილ მოდელში, (და რომელსაც **პარეტოს "სუსტი" აქსიომა** ეწოდება), $\hat{Y}$-ზე შემოაქვს მკაცრი უპირატესობის თანადობა, რომელიც ემთხვევა E^m-ის ვექტორებისათვის განსაზღვრულ $>$ თანადობას (უფრო ზუსტად, მის შეზღუდვას $\hat{Y}$-ზე): $y>y'$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y_i > y_i'$, $\forall i=1,2,\dots,m$. ამგვარად, ამოცანის სპეციფიკიდან გამომდინარე, მკაცრი უპირატესობის P თანადობა სხვადასხვაგვარად შეიძლება შემოვიღოთ, მაგრამ ის აუცილებლად მოიცავს $>$ თანადობას. სხვადასხვაგვარი შეიძლება იყოს აგრეთვე არამკაცრი უპირატესობისა და განურჩევლობის მიმართებები. ყველა ამ თანადობების განსაზღვრის საკითხი საკმაოდ რთულია და ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა თეორიის კვლევის საგანს წარმოადგენს [26, 28, 55, 61, 111].

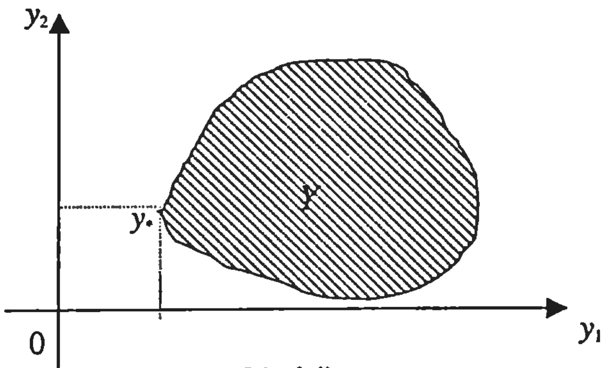
3. ამგვარად, მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის $\hat{Y}$ სიმრავლეზე შემოტანილია არამკაცრი უპირატესობის $\geqq$ თანადობა, მკაცრი

უპირატესობის ორი $\geq$ და $>$ თანადობა და განურჩევლობის $=$ თანადობა. ზოგადი განსაზღვრის თანახმად, $y^* \in Y$ შეფასებას ეწოდება საუკეთესო $\geqq$-ის მიმართ (Y-ში), თუ ნებისმიერი $y \in Y$ შეფასებისათვის სამართლიანია $y^* \geqq y$. ვინაიდან $\geqq$ თანადობა წარმოადგენს (ნაწილობრივ) დალაგებას, შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ ერთი ასეთი y^* წერტილი (ნახ. 1.4ა).



ნახ. 1.4ა

ანალოგიურად, მინიმიზაციის ვექტორული ამოცანისათვის შეიძლება არსებობდეს ერთადერთი $y_* \in Y$, ისეთი რომ $y \geq y_*$ ნებისმიერი $y \in Y$-თვის (ნახ. 1.4ბ).



ნახ. 1.4ბ

4. თუ პრაქტიკულ მრავალკრიტერიულ ამოცანაში არსებობს უდიდესი $\geqq$ თანადობის მიმართ მიღწევადი y^* შეფასება, სწორედ იგი უნდა ჩაითვა-

ლის ოპტიმალურად. სამწუხაროდ, ასეთი შემთხვევა რეალიზდება ძალზე იშვიათად: როგორც წესი, y^* შეფასება არ არსებობს (იხ. [65]). ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ $\geqq$ დალაგება არ არის სრული. მაგალითად, თუ $y_i > y_i'$, მაგრამ $y_j > y_j'$, მაშინ y და y' შეუსადარნი არიან $\geqq$-ის თანადობით. ამიტომ ამოცანის არსიდან გამომდინარე, გვიწევს გამოვიყენოთ შეფასებები, რომლებიც მაქსიმალურნი არიან $\geqq$-ისა და $>$-ის მიხედვით.

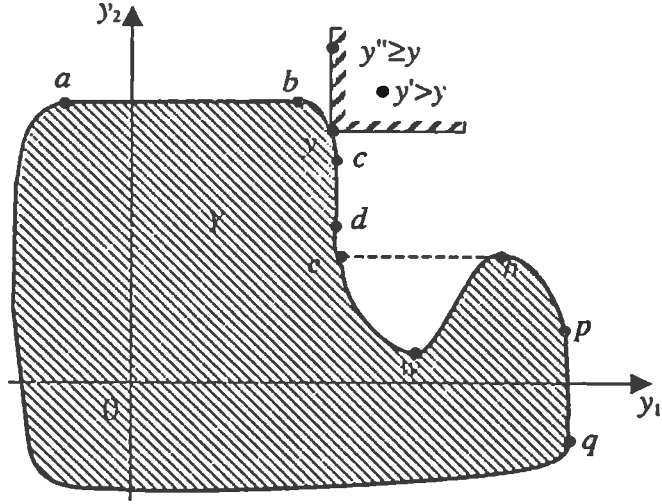
$y^0 \in Y$ შეფასებას ეწოდება **მაქსიმალური** Y–ში $\geqq(>)$-ის მიმართ, თუ არ არსებობს ისეთი $y \in Y$ შეფასება, რომ $y \geq y^0$ $(y > y^0)$. ასეთი შეფასებებისათვის, ჩვეულებრივ, გამოიყენება სპეციალური სახელწოდებები. შეფასებას, რომელიც მაქსიმალურია $\geqq$-ის მიმართ Y–ში, უწოდებენ **ეფექტურს**, ასევე **ოპტიმალურს პარეტოს მიხედვით, პარეტო-ოპტიმალურს, პარეტოს ოპტიმუმს**. Y-ის ყველა ასეთ შეფასებათა სიმრავლეს უწოდებენ **ეფექტურს**, ან **პარეტოს სიმრავლეს** და აღნიშნავენ $P(Y)$-ით.

შეფასებას, მაქსიმალურს $>$-ის მიმართ, უწოდებენ **სუსტად ეფექტურს**, ასევე **სუსტად ოპტიმალურს პარეტოს აზრით, პარეტოს სუსტ ოპტიმუმს, ოპტიმალურს სლეიტერის აზრით**. ყველა ასეთ შეფასებებათა სიმრავლეს Y-დან ვუწოდებთ **სუსტად ეფექტურს** და აღვნიშნავთ $S(Y)$-ით.

ვინაიდან $y > y'$-დან გამომდინარეობს $y \geq y'$, ამიტომ Y-ის მიმართ ყოველი ეფექტური ვექტორული შეფასება სუსტად ეფექტურიცაა, ასე რომ $P(Y) \subseteq S(Y)$. მართლაც, თუ y^0 არ არის სუსტად ეფექტური, მაშინ რაიმე $y \in Y$-თვის უნდა შესრულდეს $y > y^0$ თანაფარდობა, ხოლო მასთან ერთად $y \geq y^0$, ასე რომ y^0 შეუძლებელია იყოს სუსტად ეფექტური.

m=2-თვის, მხატვრული გამოთქმა რომ ვიხმაროთ, $P(Y)$ წარმოადგენს Y სიმრავლის ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვარს (იმ ნაწილების გარეშე, რომლებიც ერთერთი საკოორდინატო ღერძის პარალელურია ან მდებარეობენ საკმაოდ ციცაბო და ღრმა ღრმულებში), ხოლო $S(Y)$ დამატებით შეიძლება მოIცავდეს საზღვრის ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ უბნებს.

ნახ. 1.5-ზე $P(Y)$ სიმრავლე (Y-ის ეფექტური საზღვარი) წარმოქმნილია bc, de მრუდებით (d და e წერტილების გარეშე) და hp-თი, ხოლო $S(Y)$ შედგება ორი ნაწილისაგან – $abcde$ (e-ს ჩათვლით) და hpq. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ შევნიშნავთ, რომ წერტილები, რომლებიც $\geqq$-ის აზრით y-ზე უკეთესია, ავსებენ მართ კუთხეს, რომლის გვერდებიც კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ხოლო წვეროს წარმოადგენს y წერტილი (თვითონ y წერტილი გამოირიცხება); $>$-ის აზრით y-ზე უკეთესი წერტილები, შეადგენენ ამ კუთხის შიდა ნაწილს.



ნახ. 1.5

5. $\geqq, \geq, >$ თანადობები, რომლებიც განსაზღვრულია შეფასებათა სიმრავლეზე, წარმოქმნიან აზრობრივად ანალოგიურ $\underset{=f}{\succ}, \underset{-f}{\succ}, \underset{f}{\succ}$ თანადობებს ამონახსნთა სიმრავლეში. მაგალითად, $x \underset{-f}{\succ} x' \leftrightarrow f(x) \geq f(x')$. $\underset{=f}{\succ}$ თანადობა, წარმოადგენს (ნაწილობრივ) კვაზიდალაგებას, ხოლო $\underset{-f}{\succ}$ და $\underset{f}{\succ}$ მკაცრ (ნაწილობრივ) კვაზიდალაგებებს. შეგახსენებთ, რომ განურჩევლობის $\sim_f$ თანადობა, რომელიც წარმოქმნილია = ტოლობის თანადობით, ექვივალენტობას წარმოადგენს.

$\underset{=f}{\succ}$-ის მიმართ უდიდეს ამონახსნს შეესაბამება $\geqq$-ის მიმართ უდიდესი შეფასება Y-ზე. ამრიგად, $\underset{=f}{\succ}$-ის მიმართ უდიდესი ამონახსნი მაქსიმუმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს X-ზე თითოეულს $f_1, f_2, \ldots, f_m$ კრიტერიუმებიდან. ასეთი ამონახსნები, როგორც უკვე აღნიშნული იყო, უეჭველად შეიძლება ჩაითვალოს ოპტიმალურად, მაგრამ ისინი პრაქტიკულად თითქმის არასდროს არსებობენ.

ამონახსნს, რომელიც მაქსიმალურია $\underset{-f}{\succ}$-ის მიმართ ($\underset{f}{\succ}$-ის მიმართ), შეესაბამება მაქსიმალური შეფასება $\geq$-ის მიმართ ($>$-ის მიმართ) Y-ზე. ჩვეულებრივ, ამ ამონახსნთათვის, გამოიყენება სახელწოდებანი, რომლებიც შესა-

ბამისი შეფასებების დასახელებათა ანალოგიურია. შემდგომში გამოყენებული იქნება ტერმინები "ეფექტური", "სუსტად ეფექტური" და, აგრეთვე, "პარეტოს მიხედვით ოპტიმალური" და "პარეტოს მიხედვით სუსტად ეფექტური" ამონახსნები.

ამრიგად, $x^0 \in X$ ამონახსნი **ეფექტურია**, თუ არ არსებობს ისეთი $x \in X$ ამონახსნი, რომ $x \succ_{f} x^0$, ე.ი. რომლისათვისაც სრულდება $f(x) \geq f(x^0)$ პირობა. $x^0 \in X$ ამონახსნი **სუსტად ეფექტურია**, თუ არ არსებობს ისეთი $x \in X$ ამონახსნი, რომ $x \succ_{f} x^0$, ე.ი. რომლისათვისაც სრულდება $f(x) > f(x^0)$ პირობა. ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლე აღნიშნული იქნება $P_f(X)$-ით, ხოლო სუსტად ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლე – $S_f(X)$-ით. ცხადია, $P_f(X) \subseteq S_f(X)$. აღვნიშნოთ, რომ $P_f(X)$ სიმრავლის აგების ამოცანას [23, 80] შრომებში ეწოდება ვექტორული მაქსიმიზაციის ამოცანა.

შენიშვნა 1.1 ეფექტური ამონახსნის ცნება კარგავს თავის აზრს, როდესაც მოითხოვება რამოდენიმე საუკეთესო ამონახსნის შერჩევა.

6. ზემოთ მოყვანილი გარეგანად მდგრადობის განმარტების თანახმად ეფექტურ შეფასებათა $P(Y)$ სიმრავლეს (სუსტად ეფექტურ შეფასებათა $S(Y)$ სიმრავლეს) ეწოდება **გარეგანად მდგრადი**, თუ ნებისმიერი $y \in Y \setminus P(Y)$-სათვის (შესაბამისად $y \in Y \setminus S(Y)$-სათვის) მოიძებნება ისეთი $y^0 \in P(Y)$ (შესაბამისად $y^0 \in S(Y)$), რომ $y^0 \geqq y$ (შესაბამისად $y^0 > y$). ბუნებრივია, შესაძლებელია ვილაპარაკოთ ეფექტურ (სუსტად ეფექტურ) ამონახსნთა გარეგანად მდგრად სიმრავლეზე, როგორც ამონახსნთა სიმრავლეზე, რომელსაც შეესაბამება ეფექტურ (სუსტად ეფექტურ) შეფასებათა გარეგანად მდგრადი სიმრავლე.

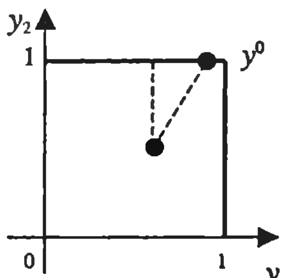
აღვნიშნოთ, აგრეთვე, რომ უფრო მოსახერხებელია გამოვიყენოთ ეფექტურ შეფასებათა სიმრავლის გარეგანად მდგრადობის რამდენადმე განსხვავებული განსაზღვრება: $P(Y)$ სიმრავლე გარეგანად მდგრადია, თუ ნებისმიერი $y \in Y$-სათვის მოიძებნება ისეთი $y^0 \in P(Y)$, რომ $y^0 \geqq y$. ადვილია დავინახოთ, რომ მოცემული განსაზღვრება ზემოთმოცემულის ექვივალენტურია.

მართლაც, ვთქვათ, $P(Y)$ გარეგანად მდგრადია განხილული პირველი განსაზღვრების მიხედვით. ავიღოთ ნებისმიერი $y \in Y$ შეფასება. თუ $y \in P(Y)$, მაშინ $y^0 \geqq y$ სამართლიანია $y^0 = y$-სათვის. ხოლო თუ $y \notin P(Y)$, მაშინ არსებობს ისეთი $y^0 \in P(Y)$ შეფასება, რომ $y^0 \geq y$, ასე რომ $y^0 \geqq y$ მართებულია. ვთქვათ ახლა პირიქით, $P(Y)$ გარეგანად მდგრადია მეორე განსაზღვრების აზრით. ავარჩიოთ ნებისმიერი $y \in Y \setminus P(Y)$ შეფასება. მისთვის მოიძებნება შეფასე-

ბა $y^{00}\in P(Y)$ ისეთი, რომ $y^0 \geqq y$. მაგრამ, რადგან y არ არის ეფექტური, ხოლო y^0 ეფექტურია, ამიტომ $y^0 \geq y$.

ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად, კვაზიდალაგების ბირთვის არსებობის შესახებ სასრულ სიმრავლეზე, შეიძლება მტკიცება იმისა, რომ თუ Y სიმრავლე შედგება შეფასებათა სასრული რაოდენობისაგან, მაშინ ეფექტურ და სუსტად ეფექტურ შეფასებათა და ამონახსნთა სიმრავლეები გარეგანად მდგრადია. თუ Y უსასრულოა, მაშინ აღნიშნული სიმრავლეები შეიძლება არ იყვნენ გარეგანად მდგრადები. მაგრამ ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის ბუნებრივ დაშვებებში (X კომპაქტია, ხოლო ყველა f_i ნახევრადუწყვეტია ზემოდან), ეს სიმრავლეები გარეგანად მდგრადები აღმოჩნდებიან.

მაგალითი 11. ვთქვათ, რომ Y ერთეულოვანი კვადრატია, რომლიდანაც "ამოგლეჯილია" მარჯვენა ზედა წვერო (იხ. ნახ. 1.6). ამ Y-სათვის $P(Y)$ სიმრავლე, ცხადია, ცარიელია, ხოლო $S(Y)$ წარმოქმნილია კვადრატის ზედა და მარჯვენა გვერდებით ((1,1) წერტილის გარეშე). $S(Y)$ სიმრავლე გარეგანად მდგრადია: ყოველ $y=(y_1,y_2)\in Y$ წერტილს, რომლისთვისაც $y_1<1$, $y_2<1$, შეიძლება შევუსაბამოთ, მაგალითად, $y^0=\left(y_1+1\big/2, 1\right)$ წერტილი, ამასთან $y^0>y$.



ნახ. 1.6

ზემოთაღნიშნულთან დაკავშირებით ინტერესს იწვევს საკითხი იმის შესახებ, თუ როდის არის $P(Y)$ სიმრავლის გარეგანად მდგრადობა $S(Y)$ სიმრავლის ანალოგიური თვისების ტოლფასი. ამ კითხვის პასუხს შეიცავს შემდეგი დებულება.

თეორემა 16 [39]. თუ $P(Y)$ სიმრავლე გარეგანად მდგრადია, მაშინ $S(Y)$-იც გარეგანად მდგრადია. იმ შემთხვევაში, როდესაც $R(y)=\{y'\in Y \mid y'\geqq y\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია და შემოსაზღვრული ნებისმიერი $y\in S(Y)$-სათ-

ვის, $S(Y)$-ის გარეგანი მდგრადობიდან გამომდინარეობს $P(Y)$-ის გარეგანი მდგრადობა.

7. ვთქვათ, R ნებისმიერი კვაზიდალაგებაა X სიმრავლეზე. f ვექტორული კრიტერიუმი, განსაზღვრული X-ზე, წარმოქმნის R კვაზიდალაგებას, თუ $\underset{=f}{\succ}$ თანადობა ემთხვევა R-ს. რა შემთხვევაში არსებობს ვექტორული კრიტერიუმი, რომელიც წარმოქმნის რაიმე კვაზიდალაგებას? როგორია ასეთი კრიტერიუმის მინიმალური განზომილება? როგორ ავაგოთ იგი? ამ საკითხების შესწავლას აქვს არამარტო თეორიული მნიშვნელობა, არამედ პრაქტიკულიც. მაგალითად, დასახელებული კრიტერიუმის მითითება შეიძლება აღმოჩნდეს კვაზიდალაგების მოცემის ეკონომიური ხერხი. თუმცა, რადგან ჩამოთვლილი საკითხები მონოგრაფიის თემასთან პირდაპირი კავშირში არ იმყოფება, ჩვენ მათ არ განვიხილავთ. დაინტერესებულმა მკითხველმა შეიძლება მიმართოს შესაბამის ლიტერატურას [29, 32, 66, 76, 81].

8. მრავალკრიტერიულ ამოცანაში უპირატესობის თანადობის მოცემის ერთერთი ხერხი შემდეგში მდგომარეობს: E^m სივრცეში გამოიყოფა რაიმე C კონუსი (დომინირების კონუსი), და იგულისხმება, რომ yR^Cy', როდესაც $y-y'\in C$. ცხადია, რომ $C=E^m_{\geqq}$-თვის მიიღება $\geqq$ თანადობა, ხოლო $C=E^m_{>}$-თვის კი მიიღება $>$ თანადობა. აქედან გამომდინარე, მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა წარმოადგენს კონუსის მიხედვით ოპტიმიზაციის ამოცანის კერძო შემთხვევას [7, 134, 135].

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც C კონუსი პოლიედრალურია (მრავალწახნაგაა): $C=\left\{y\in E^m \;\middle|\; By\geqq 0_{(l)}\right\}$ სადაც B არის $l\times m$-განზომილებიანი რიცხვითი მატრიცა. ასეთი კონუსისათვის $y-y'\in C$ ჩართვა ტოლფასია იმისა, რომ $B(y-y')\geqq 0_{(l)}$, ე.ი. $By\geqq By'$ აქედან გამომდინარე, საწყისი ამოცანა f ვექტორული კრიტერიუმით, რომელშიც უპირატესობანი განსაზღვრულია პოლიედრალური კონუსის საშუალებით, ახალი ვექტორული $f^B=(f_1^B, f_2^B,\dots,f_l^B)=Bf$ კრიტერიუმის განსაზღვრის შემდეგ, აღმოჩნდება "ჩვეულებრივი" მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციის ამოცანა [68, 136].

9. (სუსტად) ეფექტური ამონახსნის განსაზღვრება "სტატიკურია" იმ თვალსაზრისით, რომ ის დაფუძნებულია ამონახსნთა წყვილწყვილად შედარებაზე და არ არის დაკავშირებული საკითხთან: შესაძლებელია თუ არა "რბილი" გადასვლა ერთი ამონახსნიდან მეორეზე, უფრო უპირატესზე, "ინფინიტეზიმალურად" ("დადებითი სიჩქარით") გავზრდით რა თითეულ კრიტერიუმს. ზოგიერთ მოდელებში ასეთი გადასვლის განხორციელების შე-

საძლებლობა დიდ ინტერესს წარმოადგენს. ასეთ მაგალითს წარმოადგენს პირდაპირი გაცვლის მოდელი, რომელშიც ყოველი მომხმარებელი მონაწილეობს გაცვლაში, ისწრაფვის რა თავისათვის უდიდესი სარგებლიანობის მქონე საქონლის ერთობლიობის შეგროვებას, ე.ი. ფორმალურად - მაქსიმიზაცია გაუკეთოს თავის ღირებულების ფუნქციას. ამ სახის მოდელებს ჯერ კიდევ XIX-ე საუკუნეში ფ. ეჯვორტი და ვ. პარეტო განიხილავდნენ. გაცვლის მოდელში ეფექტური არის მდგომარეობა (მომხმარებელთა შორის საქონლის განაწილება), რომელიც არ შეიძლება გაუმჯობესებულ იქნეს საქონლის კვლავგადანაწილების გზით არც ერთი მონაწილისათვის, ზოგიერთ სხვა მონაწილეთა "ინტერესების შებღალვის" გარეშე. ამგვარად, პარეტოს მიხედვით ოპტიმალობა ასახავს ეკონომიკური წონასწორობის იდეას: თუ მდგომარეობა არ არის ეფექტური, მაშინ ხორციელდება ვაჭრობა, რომელიც მიგვიყვანს ეფექტურ მდგომარეობამდე.

თუ გაცვლის პროცესს განვიხილავთ როგორც წვრილ გარიგებათა მიმდევრობას, რომელიც ხელსაყრელია ყველა მონაწილისათვის, მაშინ იგი ფორმალიზებულად შეიძლება ავღწეროთ გლუვი მრუდით, რომლის გასწვრივ მოძრაობისას ყველა კრიტერიუმი ინფინიტიზიმალურად იზრდება. მაშინ შეიძლება გამოვყოთ ის მდგომარეობები, რომელთაგანაც არ გამოდის ასეთი ტიპის არცერთი გლუვი მრუდი. ასეთ მდგომარეობებს ს. სმეილმა პარეტოს კრიტიკული წერტილები უწოდა. ცხადია, რომ ასეთი წერტილების ერთობლიობა (პარეტოს კრიტიკული სიმრავლე) შეიცავს სუსტად ეფექტური წერტილების მთელ სიმრავლეს, მაგრამ ზოგად შემთხვევაში ამ უკანასკნელზე ფართოა (პარეტოს კრიტიკული წერტილის განსაზღვრის "ლოკალური ხასიათის" გამო). მაგალითად, 1.5 სურათზე პარეტოს კრიტიკულ წერტილთა სიმრავლეში, ყველა სუსტად ეფექტურის გარდა, შევა ისეთი ამონახსნებიც, რომელთა შეფასებები ძევს საზღვრის მონაკვეთზე.

პარეტოს კრიტიკული წერტილის ცნება გლუვი ფუნქციის სტაციონარული (კრიტიკული) წერტილის ცნების განზოგადებას წარმოადგენს (ე.ი. წერტილისა, რომელშიც მისი გრადიენტი ნულად გადაიქცევა). პარეტოს აზრით ოპტიმალობის უფრო დაწვრილებითი განხილვა, აღწერილი "დინამიკური" მიდგომის საფუძველზე მონოგრაფიის ფარგლებს სცილდება; დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიმართოს ს. სმეილის შრომებს [54, 112].

10. ეფექტური და სუსტად ეფექტური შეფასებების სიმრავლეები გამოყოფილი იქნა Y-დან უპირატესობის დამოკიდებულების ზოგიერთ მარტივ დამახასიათებელ თვისებათა საფუძველზე. მაგრამ ეს სიმრავლეები მიზანშეწონილია განვიხილოთ უფრო ზოგად სიტუაციაშიც, როდესაც დაშვებულია უპირატესობის აღწერა ამორჩევის C ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია

$\hat{Y}$ სიმრავლის საკმაოდ «ფართო» W ქვესიმრავლეების ერთობლიობაზე (ცხადია, $Y \in W$).

ჩვენს მიერ განხილულ შემთხვევაში მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციის ამოცანა განისაზღვრება შემდეგი პირობით: თუ $y' \in Z$, $y'' \in Z$, $Z \in W$, შეფასებები ისეთებია, რომ $y''_j > y'_j$ და $y''_i = y'_i$ ყველა დანარჩენი $m-1$ ცალი $i \in M$-თვის, მაშინ $y' \notin C(Z)$.

პარეტოს აქსიომა ძლიერ (სუსტ) ვარიანტში შემდეგნაირად ფორმულირდება: თუ $y' \in Z$, შეფასებისათვის ($Z \in W$) Z სიმრავლეში მოიძებნება y'' შეფასება ისეთი, რომ $y''_i \geq y'_i$ ყველა $i \in M$-თვის, სადაც ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია ($y''_i > y'_i$ ყველა $i \in M$-თვის), მაშინ $y' \notin C(Z)$.

ეს აქსიომა, რომლიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C(Y) \subseteq P(Y)$ (შესაბამისად $C(Y) \subseteq S(Y)$) ხშირად გამოიყენება ამორჩევის ფუნქციების საშუალებით უპირატესობათა აღწერისას [26, 55].

1.5. ბიბლიოგრაფიული მონაცემები მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიიდან

მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიის ფუძემდებლური იდეები ჩამოყალიბებულია მონოგრაფიებში [9, 44, 89]. ვექტორული ოპტიმიზაციის პრობლემატიკა სასრულგანზომილებიან სივრცეებში ფართოდაა გამოკვლეული და მისი ძირითადი შედეგები მოყვანილია სხვადასხვა მონოგრაფიებში, კერძოდ, [39, 82, 108, 113]-ში. ამ შრომებში მოყვანილია მრავალკრიტერიული ამოცანის ამოხსნის მრავალი ალგორითმი და პროცედურა. დაინტერესებულმა მკითხველმა აქვე შეიძლება მონახოს მრავალი ბიბლიოგრაფიული მითითება ვექტორული ოპტიმიზაციის სხვადასხვა თანამედროვე ასპექტებზე. სტატიკური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის პრობლემების შესწავლას ეძღვნება [101]. ვექტორული ამოცანების სხვადასხვა კლასიფიკაცია მოყვანილია [24, 82, 113] შრომებში.

უფრო მოგვიანებით წარმოიშვა მრავალკრიტერიულ ამოცანათა ისეთი კლასები, რომლებშიც ვექტორულ მიზნობრივ ფუნქციათა და ალტერნატივათა სიმრავლის სტრუქტურის მიმართ სპეციალური მოთხოვნები იქნა წამოყენებული (იხ. [13, 139]). კრებადი მრავალკრიტერიული ამოცანების მიმართ სპეციფიკური მიდგომა შემოთავაზებულია ნაშრომში [100], რომელიც უფრო მოგვიანებით ორი პირის ანტაგონისტურ თამაშებზე განზოგადდა [98]-ში. საინტერესო შედეგები იქნა მიღებული მონოგრაფია [135]-ში, რომელიც ეხება მრავალკრიტერიული ამოცანების ამონახსნთა სხვადასხვა კლასების სტრუქტურის შესწავლას და კვლევას. რიგი საკითხებისა, რომლებიც დაკავშირებულია მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისთვის ამონახსნთა სიმრავლეთა აგებასთან, განხილულია შრომებში [14, 16, 19, 20, 22, 91, 93]. ზოგად დომინანტური კონუსის შემთხვევაზე განზოგადოებული კონუსური ექსტრემალური წერტილების ზოგიერთი თვისება გამოკვლეულია [117, 134]-ში, ამასთან [116, 118]-ში დამტკიცებულია თეორემები ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის მინიმაქსებისა და უნაგირა წერტილების შესახებ. მართვის ზოგიერთი ვექტორული ამოცანა გამოკვლეულია [63]-ში, ხოლო ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში ვექტორული აპროქსიმაციის ამოცანები ვრცლად განხილულია [27, 77, 114]-ში. მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის სტოქასტური ამოცანები საკმაოდ ფართოდ და ღრმადაა განხილული [72]-ში.

ამასთან ერთად, ბოლო ხანს მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიაში ამოცანების ახალი კლასები შეისწავლება. ეს ამოცანები რეალური პრაქტიკიდან გამომდინარეობენ. აქ შეგვიძლია ავღნიშნოთ: მრავალკრიტერიული არასაკუთრივი ამოცანები, რომლებიც პირველად გამოკვლეულია იქნა [49, 96, 97]-ში, მრავალკრიტერიული ამოცანები განუზღვრელობის გათვალისწინებით [13, 17], მრავალკრიტერიული ამოცანები არასრული ინფორმაციის პირობებში [12] და მრავალი სხვა.

როგორც აღვნიშნეთ, ამჟამად ერთ-ერთ პრიორიტეტულ მიმართულებას მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიაში წარმოადგენს ამოცანები განუზღვრელობის გათვალისწინებით. ეს ისეთ ამოცანათა კლასია, რომელშიც სისტემის შესაბამის მოდელში გათვალისწინებულია გარე ფაქტორების ზეგავლენა. სისტემაზე ამ ზეგავლე-

ნას ახდენს ბუნების რაიმე შეშფოთებები, ცდომილებები და სხვა მოქმედი ფაქტორები. ამ განუზღვრელი ფაქტორების შესახებ არავითარი სტატისტიკური (ალბათური) ხასიათის ინფორმაცია არაა მოცემული და განუზღვრელ ფაქტორების შესახებ მხოლოდ მათი დიაპაზონების არეა ცნობილი. ამასთან დაკავშირებით, ვექტორული მაქსიმინის არსებობის საკმარისი პირობები ღრმადაა შესწავლი [90, 107, 138]-ში. უფრო ზოგად, ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში, განუზღვრელობის პირობებში მრავალკრიტერიული ამოცანების კონუსურად ოპტიმალური წერტილების თვისებები გამოკვლეულია [122]-ში.

შევნიშნავთ, რომ მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორია მჭიდროდაა დაკავშირებული და გადაჯაჭვული კლასიკურ თამაშთა თეორიასთან. ამ თეორიების ზოგიერთი კავშირი გამოკვლეულია [130]-ში. რიგი მოსაზღვრე საკითხების შესწავლას ეძღვნება [62, 127] შრომები. თამაშთა თეორიაზე დაყრდნობით მრავალკრიტერიული პრობლემები ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში გამოკვლეულია [83]-ში. აქვე აღვნიშნავთ, რომ თვით მრავალკრიტერიულ თამაშთა თეორია დღეს მეცნიერების ერთ-ერთი უთანამედროვესი მიმართულებაა. მისი ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა, კერძოდ, ანტაგონისტური მრავალკრიტერიული თამაშების უნაგირა წერტილებთან დაკავშირებით შეისწავლება [15, 47]-ში.

სტატიკური ვექტორული ამოცანების კვლევამ განუზღვრელობის გათვალისწინებით საფუძველი ჩაუყარა მრავალკრიტერიული დინამიკური ამოცანების შესწავკლას განუზღვრელობის პირობებში, რომლის ფუნდამენტური კონცეფციაც მკაფიოდაა ჩამოყალიბებული რიგ მონაგრაფიებში (იხ., მაგალითად, [21, 139]).

სხვადასხვა სახის მრავალკრიტერიული ამოცანების ამონახსნთა სიმრავლეების დადგენისათვის გამოიყენება ეფექტური მეთოდები. მაგრამ, ხშირ შემთხვევებში, შესაბამისი პროცედურები შრომატევადია. ამასთან, ხშირად გადაწყვეტილების მიმღებ პირს აინტერესებს მიიღოს არა ზუსტ ამონახსნთა სიმრავლე, არამედ მისი გარკვეული თვალსაზრისით მიახლოება. ამისათვის შეისწავლება ე.წ. ზღვრული ამოცანები. ამასთან დაკავშირებით, კრებადი მრავალკრიტერიული ამოცანები, როგორც კლასიკური შემთხვევისათვის, ასევე განუზღვრელობის გათვალისწინებით, შესწავლილია [50-53, 100, 102-104]-ში. ეს შედეგები, აგრეთვე, განზოგადებულია დინამიკურ ამოცანებზეც [95, 99, 124, 125].

მრავალკრიტერიული ამოცანების ერთ-ერთი გამოყენება N წერტილის მიახლოების ამოცანებისათვის გამოკვლეულია [56, 126]-ში.

თავი 2

დუალობა კლასიკური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებში

ამ თავში განიხილება ზოგადთეორიული საკითხები ვექტორული ფუნქციების უნაგირა წერტილების, მაქსიმინებისა და მინიმაქსების შესახებ. შემოდის დუალური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანების ზოგადი კონსტრუქცია რიგი ევკლიდური კრიტერიული სივრცეებისათვის ცნობილი ფაქტი ნებისმიერი სტრუქტურის მქონე დალაგებული ტოპოლოგიური სივრცისათვისაა განზოგადოებული. ყველა ფაქტი ევკლიდური სივრცისათვის მოყვანილია დამტკიცების გარეშე. დაინტერესებულ მკითხველს ეს მასალა შეუძლია მოიძიოს მონოგრაფია [39]-ში.

2.1. ვექტორული ფუნქციების უნაგირა წყვილები

დუალობის საკითხები მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის გაცილებით რთულია, ვიდრე ანალოგიური საკითხები ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის. ეს იმითაა გამოწვეული, რომ ჩვეულებრივი ოპტიმიზაციის თეორიის დუალობისაგან განსხვავებით [6], სადაც დუალობა დაკავშირებულია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე წრფივად დალაგებული სიმრავლის მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტების დამთხვევასთან, დუალობის ცნება მრავალკრიტერიულ ოპტიმიზაციაში დაფუძნებულია ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლეებში მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტების ცნებებზე. გადასვლა ღერძზე წრფივად დალაგებული სიმრავლეებიდან სიმრავლეებზე ევკლიდეს სივრცეში, დუალობის შესწავლისას, არ არის ტრივიალური. უხეშად რომ ვთქვათ, სკალარულ შემთხვევაში, იმისათვის, რომ მივიღოთ პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნთა დამთხვევა, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ არ არსებობს "წყვეტა" პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნთა სახეებს შორის. თუ ასეთი წყვეტა არ არის, მაშინ აღნიშნული სახეთა სიმრავლეები "შეწებდებიან" წერტილში, რომელიც ერთდროულად იძლევა პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნებს. მრავალკრიტერიულ შემთხვევაში ეს "შეწებება" პირდაპირი და დუალური სიმრავლეები-

სა საკმარისი არ არის; დუალური კონსტრუქცია ისეთი უნდა იყოს, რომ პირდაპირი და დუალური სიმრავლეები "შეწებდეს" თავიანთი მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტების სიზუსტით.

არსებული პუბლიკაციები, მიძღვნილი მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის დუალობისადმი, პირობითად შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად. შრომათა პირველ ჯგუფში [30, 69, 73-75, 79, 87, 110, 121] დუალობა, ასე თუ ისე, დაკავშირებულია ლაგრანჟის ტიპის ფუნქციებთან. შრომათა მეორე ჯგუფში [71, 120, 137] დუალობა შეისწავლება შეუღლებული ფუნქციების აპარატის გამოყენებით და აქ მიღებული შედეგები წარმოადგენს ფენხელის დუალობის თეორიის შემდგომ განზოგადებას. რომ არ შევეხოთ მეორე მიმართულების შრომებს, ამ თავში შემოთავაზებულია დუალობის ისეთი კონსტრუქცია, რომლის ჩარჩოებშიც ჯდება შრომათა პირველი ჯგუფის მიდგომა. ძირითადად, აქ მოყვანილი მასალა ეყრდნობა პუბლიკაციებს [30, 37, 39].

მათემატიკურ დაპროგრამებაში დუალობის კლასიკური თეორია ფართოდ იყენებს რიცხვითი ფუნქციების უნაგირა წყვილების, მაქსიმინებისა და მინიმაქსების ცნებებს. ამ პარაგრაფში ანალოგიური ცნებები, რომლებიც აუცილებელია მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის დუალობის თეორიის განვითარებისათვის, შემოდის ვექტორული ფუნქციებისათვის.

1. ვთქვათ, X და Y ორი, ნებისმიერი ბუნების მქონე, არაცარიელი სიმრავლეა, Z ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც დალაგებულია C ამოზნექილი, ჩაკეტილი, სხეულოვანი და შვერილოვანი ($C\cap -C=\{0\}$) კონუსის საშუალებით, ხოლო $K{:}X\times Y\to Z$ მოცემული ასახვაა. ყველა აღნიშნული დაშვება გამოყენებული იქნება მხოლოდ ამ პარაგრაფის ბოლომდე.

განსაზღვრის სახით მივიღოთ, რომ თუ $z_1, z_2\in Z$, მაშინ:

$$z_1 \geqq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C\,;$$

$$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C\setminus\{0\}\,;$$

$$z_1 \ngeq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \notin C\setminus\{0\}\,;$$

$$z_1 > z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in \operatorname{int} C\,;$$

$$z_1 \ngtr z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \notin \operatorname{int} C\,;$$

$$z_1 \overline{\overline{>}}\, z_2 \leftrightarrow z_2 \ngeq z_1\,.$$

განსაზღვრა 2.1 $(x^0,y^0)\in X\times Y$ ვექტორს ეწოდება $K(x,y)$ ვექტორ-ფუნქციის ძლიერი უნაგირა წყვილი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$K(x,y^0)\leqq K(x^0,y^0)\leqq K(x^0,y),\quad \forall x\in X,\forall y\in Y. \tag{2.1}$$

განსაზღვრა 2.2 $(x^0,y^0)\in X\times Y$ ვექტორს ეწოდება $K(x,y)$ ვექტორ-ფუნქციის ძლიერი-სუსტი უნაგირა წყვილი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$K(x,y^0) \overset{=}{<} K(x^0,y^0) \leqq K(x^0,y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \qquad (2.2)$$

განსაზღვრა 2.3. $(x^0,y^0) \in X \times Y$ ვექტორს ეწოდება $K(x,y)$ ვექტორ-ფუნქციის სუსტი-ძლიერი უნაგირა წყვილი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$K(x,y^0) \leqq K(x^0,y^0) \overset{=}{<} K(x^0,y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \qquad (2.3)$$

განსაზღვრა 2.4. $(x^0,y^0) \in X \times Y$ ვექტორს ეწოდება $K(x,y)$ ვექტორ-ფუნქციის სუსტი უნაგირა წყვილი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$K(x,y^0) \overset{=}{<} K(x^0,y^0) \overset{=}{<} K(x^0,y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \qquad (2.4)$$

თანახმად $\geq$ და $\overset{=}{>}$ თანადობების განსაზღვრისა, $K(x,y^0) \overset{=}{<} K(x^0,y^0)$ პირობის შესრულება ყველა $x \in X$-თვის ნიშნავს იმას, რომ $K(x^0,y^0) \geqq K(x,y^0)$ თანაფარდობა არ სრულდება არცერთი $x \in X$-თვის. ანალოგიურად, $K(x^0,y^0) \overset{=}{<} K(x^0,y)$ პირობის შესრულება ყველა $y \in Y$-თვის ნიშნავს, რომ პირობა $K(x^0,y^0) \geqq K(x^0,y)$ არ სრულდება არცერთი $y \in Y$-თვის.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ძლიერი უნაგირა წყვილი უნაგირაა (2.2)-(2.4)-ის აზრითაც, და ყოველი ნახევრადძლიერი (ძლიერი-სუსტი და სუსტი-ძლიერი) უნაგირა წყვილი, ასევე, სუსტ წყვილს წარმოადგენს. თუ ჩვენ განვიხილავთ Z სივრცის სახით ჩვეულებრივ R^m სივრცეს სტანდარტული დალაგებით (C კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია), მაშინ ძლიერი უნაგირა წყვილი ეს არის ჩვეულებრივი უნაგირა წერტილი K ვექტორ-ფუნქციის ყველა კომპონენტისათვის ერთდროულად: (2.1) სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყოველი $i=1,2,\ldots,m$-სათვის სრულდება $K_i(x,y^0) \leqq K_i(x^0,y^0) \leqq K_i(x^0,y)$ უტოლობები ყველა $x \in X$, $y \in Y$-სათვის. ამასთან დაკავშირებით, ცხადია, რომ ძლიერი უნაგირა წერტილები საკმაოდ იშვიათად არსებობენ.

განსახილველად შემოვიტანოთ შემდეგი ოთხი სიმრავლე:

$$Q^1 = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \{q \in Z \mid q \leqq K(x,y)\}$$

$$Q^2 = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \{q \in Z \mid q \geqq K(x,y)\}$$

$$H^1 = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \{h \in Z \mid h \overset{=}{<} K(x,y)\}$$

$$H^2 = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \{h \in Z \mid h \overset{=}{>} K(x,y)\}$$

ამ სიმრავლეებს თამაშთა თეორიის ტერმინოლოგიაში აქვთ ბუნებრივი ინტერპრეტაცია, თუ K აღნიშნავს მოგების ვექტორულ ფუნქციას, ხოლო X და Y, შესაბამისად, პირველი და მეორე მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლეს. (პირველი მოთამაშე ესწრაფვის მოგების ფუნქციის "მაქსიმიზაციას"). ამ შემთხვევაში Q^1 არის იმ მოგებათა სიმრავლე, რომლებიც პირველ მოთამაშეს შეუძლია თავისთვის უზრუნველყოს (მოკლედ, მისი გარანტირებული მოგებები), ხოლო H^1 არის იმ მოგებების სიმრავლე, რომელთა გაუარესების შესაძლებლობაც მას შეუძლია არ მისცეს მეორე მოთამაშეს ("დაცული" მოგებები). ანალოგიური აზრი გააჩნია Q^2 და H^2 სიმრავლეებს მეორე მოთამაშისათვის.

შემოტანილ სიმრავლეთა განსაზღვრებებიდან უშუალოდ შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ სამართლიანია $Q^1 \subsetneq H^1$ და $Q^2 \subsetneq H^2$ ჩართვები, რომლებსაც, ასევე, გააჩნიათ ცხადი თეორიული სათამაშო აზრი.

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ სრულდება $Q^1 \subsetneq H^1$ ჩართვა. დავუშვათ, რომ $q \in Q^1$. მაშინ არსებობს ისეთი $x^1 \in X$ ელემენტი, რომ $K(x^1,y) - q \in C$, $\forall y \in Y$. მეორე მხრივ, $C \cap (-C\setminus\{0\}) = \varnothing$. ამიტომ $K(x^1,y) - q \notin -C\setminus\{0\}$, $\forall y \in Y$, ე.ი. $q - K(x^1,y) \notin C\setminus\{0\}$, $\forall y \in Y$. აქედან გამომდინარეობს: $q \not\geq f(x^1,y)$, $\forall y \in Y$. მაშინ

$$q \in \bigcap_{y \in Y}\{q \in Z \mid q \not\geq K(x^1,y)\} \subset \bigcup_{x \in X}\bigcap_{y \in Y}\{q \in Z \mid q \not\geq K(x^1,y)\} = H^1$$

უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ $Q^1 \subsetneq H^1$.

$Q^2 \subsetneq H^2$ ჩართვის სამართლიანობა მტკიცდება ზუსტად ანალოგიურად.

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 2.1. სამართლიანია შემდეგი ჩართვები:

$$Q^2 - Q^1 \subsetneq C; \tag{2.5}$$

$$(Q^1 - H^2) \cap (C\setminus\{0\}) = \varnothing; \tag{2.6}$$

$$(H^1 - Q^2) \cap (C\setminus\{0\}) = \varnothing. \tag{2.7}$$

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. დავამტკიცოთ (2.5) ჩართვის სამართლიანობა. დავუშვათ, რომ $q^1 \in Q^1$ და $q^2 \in Q^2$. მაშინ $q^2 - q^1 \in Q^2 - Q^1$. $q^2 \in Q^2$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $y^* \in Y$ ელემენტის არსებობა, რომ $q^2 - K(x,y^*) \in C$, $\forall x \in X$. $q^1 \in Q^1$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $x^* \in X$ ელემენტის არსებობა, რომ $K(x^*,y) - q^1 \in C$, $\forall y \in Y$. კერძოდ, $x = x^*$ და $y = y^*$-სათვის ვღებულობთ:

$$q^2 - K(x^*,y^*) \in C,$$
$$K(x^*,y^*) - q^1 \in C.$$

C კონუსის ამოზნექილობის გამო $C + C \subset C$, ამიტომ $(q^2 - K(x^*,y^*)) + (K(x^*,y^*) - q^1) \in C$. აქედან კი ვღებულობთ $q^2 - q^1 \in C$, საიდანაც გამომდინარეობს (2.5).

ახლა დავრწმუნდეთ (2.6) ჩართვის ჭეშმარიტებაში. დავუშვათ წინააღმდეგი. მაშინ მოიძებნება $q\in Q^1$ და $h\in H^2$ ელემენტები, ისე რომ

$$q-h\in C\setminus\{0\}. \tag{2.8}$$

$q\in Q^1$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $x^*\in X$ ელემენტის არსებობა, რომ $K(x^*,y)-q\in C,\ \forall y\in Y$. $h\in H^2$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $y^*\in Y$ ელემენტის არსებობა, რომ $K(x,y^*)\not\geq h,\ \forall x\in X$, ანუ $K(x,y^*)-h\notin C\setminus\{0\},\ \forall x\in X$. კერძოდ, $x=x^*$ და $y=y^*$-სათვის ვღებულობთ:

$$K(x^*,y^*)-q\in C, \tag{2.9}$$

$$K(x^*,y^*)-h\notin C\setminus\{0\}. \tag{2.10}$$

ცხადია, $C\setminus\{0\}$ამოზნექილი კონუსია, ამიტომ: $C+(C\setminus\{0\})\subset C\setminus\{0\}$. (2.8) და (2.9) ჩართვიდან ვასკვნით:

$$(q-h)+K(x^*,y^*)-q\in (C\setminus\{0\})+C\subset C\setminus\{0\}.$$

აქედან გამომდინარე

$$K(x^*,y^*)-h\in C\setminus\{0\}. \tag{2.11}$$

(2.11) ჩართვა ეწინააღმდეგება (2.10)-ს. აქედან გამომდინარე (2.6) სამართლიანია.

დაბოლოს დავამტკიცოთ (2.7) ჩართვის ჭეშმარიტება. დავუშვათ წინააღმდეგი. მაშინ მოიძებნება $h\in H^1$ და $q\in Q^2$ ელემენტები, ისე რომ

$$h-q\in C\setminus\{0\}. \tag{2.12}$$

$h\in H^1$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $x^*\in X$ ელემენტის არსებობა, რომ $h\not\geq K(x^*,y),\ \forall y\in Y$, ანუ $h-K(x^*,y)\notin C\setminus\{0\},\ \forall y\in Y$. $q\in Q^2$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $y^*\in Y$ ელემენტის არსებობა, რომ $q-K(x,y^*)\in C,\ \forall x\in X$. კერძოდ, $x=x^*$ და $y=y^*$-სათვის ვღებულობთ:

$$q-K(x^*,y^*)\in C, \tag{2.13}$$

$$h-K(x^*,y^*)\notin C\setminus\{0\}. \tag{2.14}$$

როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, $C+(C\setminus\{0\})\subset C\setminus\{0\}$. ამიტომ (2.12) და (2.13) ჩართვიდან ვღებულობთ:

$$(h-q)+q-K(x^*,y^*)\in (C\setminus\{0\})+C\subset C\setminus\{0\}.$$

აქედან გამომდინარე

$$h-K(x^*,y^*)\in C\setminus\{0\}. \tag{2.15}$$

(2.15) ჩართვა ეწინააღმდეგება (2.14)-ს. აქედან გამომდინარე (2.7) სამართლიანია და თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

თუ ჩვენ კვლავ განვიხილავთ Z სივრცის სახით ჩვეულებრივ E^m სივრცეს სტანდარტული დალაგებით (C კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია), მაშინ თეორემა 2.1 გვიჩვენებს, რომ *მაქსიმინის* (*მინიმაქსის*) ანალოგი არის Q^1 და H^1 სიმრავლეების წყვილი (შესაბამისად Q^2 და H^2), ხოლო უტოლობას (m=1)

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} K(x,y) \leqq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} K(x,y)$$

შეესაბამება ამ სიმრავლეთა (2.5)-(2.7) თვისებები.

2. უმარტივესი მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ (x',y') და (x'',y'') წყვილები, რომლებიც წარმოადგენენ უნაგირა წყვილებს (2.2), (2.3) ან (2.4)-ის აზრით, შეიძლება იყვნენ არასადარი (ე.ი. არ არის სამართლიანი არც $K(x',y')\geqq K(x'',y'')$, და არც $K(x',y')\leqq K(x'',y'')$ უტოლობები), ან დომინირებდეს ერთი მეორეზე (მაგალითად, $K(x',y')\geq K(x'',y'')$), ხოლო (x',y'') და (x'',y') წყვილები შეიძლება არც იყვნენ უნაგირა. თუმცა, ქვემოთ მოყვანილი მტკიცების თანახმად ძლიერი უნაგირა წყვილის არსებობა არსებით შეზღუდვებს ადებს ნახევრადძლიერ უნაგირა წყვილების სტრუქტურას.

ვთქვათ, რომ W^{ss} (შესაბამისად W^{sw}, W^{ws}, W^{ww}) — ძლიერი (შესაბამისად, ძლიერი-სუსტი, სუსტი-ძლიერი, სუსტი, დანარჩენი სამი ტიპისათვის) უნაგირა წყვილების სიმრავლეა, ხოლო W_0^{sw} და W_0^{ws} (W_0^{ww}) — (2.2) და (2.3) ((2.4) ტიპის) სიმრავლეთა წყვილებია, რომლებიც არ არიან ძლიერი (ნახევრადძლიერი). სამართლიანია

თეორემა 2.2. თუ $W^{ss}\neq\varnothing$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენებს:

$$W^{ss}=X^s\times Y^s,\ W_0^{sw}=X^s\times Y^w,\ W_0^{ws}=X^w\times Y^s,$$

(იმ შემთხვევაში, როდესაც $W_0^{sw}=\varnothing$ ან $W_0^{ws}=\varnothing$, მაშინ $Y^w=\varnothing$ ან $X^w=\varnothing$). ამასთან, ყველა ძლიერი უნაგირა წყვილი ექვივალენტურია, ხოლო ყოველი სუსტი უნაგირა წყვილი ან ძლიერის ექვივალენტურია, ან არაშედარებადია მასთან.

აქვე გავიხსენებთ, რომ (x',y') და (x'',y'') წყვილები ექვვალენტურია, თუ ისინი აკმაყოფილებენ $K(x',y')=K(x'',y'')$ ტოლობას.

3. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$Ex\,[A\,|\,C]=\{\,z\in A\,|\,(z+C)\cap A=\{z\}\}$$

- A სიმრავლის C-ექსტრემალურ წერტილთა სიმრავლე.

ურთიერთკავშირს K ვექტორ-ფუნქციის უნაგირა წყვილებზე მნიშვნელობებსა და Q^1, Q^2, H^1 და H^2 სიმრავლეებს შორის, ადგენს

თეორემა 2.3. სამართლიანია ჩართვა

$$K(W^{ww})\subseteq H^1\cap H^2 \qquad (2.16)$$

და ტოლობები

$$K(W^{ss})=Q^1\cap Q^2, \qquad (2.17)$$

$$K(W^{sw})=Q^1\cap H^2, \qquad (2.18)$$

$$K(W^{ws}) = H^1 \cap Q^2. \qquad (2.19)$$

დამტკიცება. თანამიმდევრულად დავამტკიცოთ (2.16)-(2.19)-ის სამართლიანობა.

დავიწყოთ (2.16)-ით. ვთქვათ, $z \in K(W^{ww})$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $(x_0, y_0) \in W^{ww}$ წყვილი, რომ $z = f(x^0, y^0)$. ამასთან $(x^0, y^0) \in W^{ww}$ ჩართვიდან ვასკვნით: $z \ngtr f(x^0, y)$, $\forall y \in Y$, და $f(x, y^0) \ngtr z$, $\forall x \in X$, საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს:

$$z \in \bigcap_{y \in Y} \left\{ z \in Z \mid z \ngtr K(x^0, y) \right\} \subset H^1,$$

$$z \in \bigcap_{x \in X} \left\{ z \in Z \mid K(x, y^0) \ngtr z \right\} \subset H^2,$$

ე.ი. $z \in H^1 \cap H^2$ და ამით (2.16) დამტკიცებულია.

გადავიდეთ (2.17)-ის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $z \in K(W^{ss})$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $(x^0, y^0) \in W^{ss}$ წყვილი, რომ $z = f(x^0, y^0)$, და (2.1)-დან გამომდინარე

$$K(x^0, y) \geqq z, \quad \forall y \in Y,$$

$$z \geqq K(x, y^0), \quad \forall x \in X.$$

ე.ი.

$$z \in \bigcap_{y \in Y} \left\{ z \in Z \mid K(x^0, y) \geqq z \right\}$$

$$z \in \bigcap_{x \in X} \left\{ z \in Z \mid z \geqq K(x, y^0) \right\}$$

რადგან $(x^0, y^0) \in X \times Y$, ამიტომ $x^0 \in X, y^0 \in Y$. ამრიგად ვღებულობთ:

$$\bigcap_{y \in Y} \left\{ z \in Z \mid K(x^0, y) \geqq z \right\} \subset \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \left\{ z \in Z \mid K(x^0, y) \geqq z \right\} = Q^1,$$

$$\bigcap_{x \in X} \left\{ z \in Z \mid z \geqq K(x, y^0) \right\} \subset \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \left\{ z \in Z \mid z \geqq K(x, y^0) \right\} = Q^2.$$

ამიტომ $z \in Q^1 \cap Q^2$, ე.ი. $K(W^{ss}) \subset Q^1 \cap Q^2$. ახლა ვაჩვენოთ შებრუნებული ჩართვის სამართლიანობა. დავუშვათ, რომ $z \in Q^1 \cap Q^2$, მაშინ $z \in Q^1$, $z \in Q^2$. $z \in Q^1$ პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $x^0 \in X$ ელემენტის არსებობა, რომ

$$K(x^0, y) \geqq z, \quad \forall y \in Y,$$

ხოლო $z \in Q^2$ ჩართვიდან გამომდინარეობს ისეთი $y^0 \in Y$ ელემენტის არსებობა, რომ

$$z \geqq K(x, y^0), \quad \forall x \in X.$$

კერძოდ, $x = x^0$ და $y = y^0$-თვის გვექნება:

$$K(x^0,y^0) \geqq z, \qquad z \geqq K(x^0,y^0).$$

ამრიგად,

$$K(x^0,y^0)-z\in C,\;\; K(x^0,y^0)-z\in -C,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$K(x^0,y^0)-z\in C\cap(-C).$$

რადგან $C\cap(-C)=\{0\}$, $K(x^0,y^0)=z$, ამიტომ, სინამდვილეში სრულდება პირობები:

$$K(x^0,y)\geqq K(x^0,y^0), \quad \forall y\in Y,$$

$$K(x^0,y^0)\geqq K(x,y^0), \quad \forall x\in X.$$

ე.ი. $(x^0,y^0)\in W^{ss}$ და $z=K(x^0,y^0)\in f(W^{ss})$. აქედან გამომდინარე $Q^1\cap Q^2\subset K(W^{ss})$, ამრიგად (2.17) ტოლობა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ (2.18) ტოლობის სამართლიანობა. ვთქვათ, $z\in K(W^{sw})$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $(x^0,y^0)\in W^{sw}$ წყვილი, რომ $z=f(x^0,y^0)$, სადაც $x^0\in X$ და $y^0\in Y$. $(x^0,y^0)\in W^{sw}$ ჩართვიდან ვღებულობთ:

$$K(x^0,y)\geqq z, \quad \forall y\in Y,$$

$$K(x,y^0)\ngeq z, \quad \forall x\in X.$$

ამ ორი პირობიდან გამომდინარეობს:

$$z\in\bigcap_{y\in Y}\left\{z\in Z \;\middle|\; K(x^0,y)\geqq z\right\}\subset Q^1,$$

$$z\in\bigcap_{x\in X}\left\{z\in Z \;\middle|\; K(x,y^0)\ngeq z\right\}\subset H^2,$$

ე.ი. $z\in Q^1\cap H^2$, ან $K(W^{sw})\subset Q^1\cap H^2$.

ახლა დავრწმუნდეთ $Q^1\cap H^2\subset K(W^{sw})$ ჩართვის ჭეშმარიტებაში. დავუშვათ, რომ $z\in Q^1\cap H^2$. მაშინ $z\in Q^1$ და $z\in H^2$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ არსებობს $x^0\in X$ და $y^0\in Y$ ელემენტები, რომლებისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

$$K(x^0,y)\geqq z, \quad \forall y\in Y,$$

$$K(x,y^0)\ngeq z, \quad \forall x\in X.$$

ამ უკანასკნელიდან ვღებულობთ:

$$K(x^0,y)-z\in C,\;\; \forall y\in Y,$$

$$K(x,y^0)-z\notin C\setminus\{0\},\;\; \forall x\in X.$$

კერძოდ, $x=x^0$ და $y=y^0$-თვის გვექნება:

$$K(x^0,y^0)-z\in C,\;\; K(x^0,y^0)-z\notin C\setminus\{0\}.$$

აქედან ვასკვნით, რომ

$$K(x^0,y^0)=z.$$

ე.ი.

$$K(x^0, y) \geqq K(x^0, y^0), \quad \forall y \in Y,$$

$$K(x, y^0) \ngeq K(x^0, y^0), \quad \forall x \in X.$$

ამრიგად, $(x^0,y^0) \in W^{sw}$, ხოლო $z=K(x^0,y^0) \in K(W^{sw})$, ე.ი. $Q^1 \cap H^2 \subset K(W^{sw})$ ჩართვაც სამართლიანია, მაშასადამე სრულდება (2.18) ტოლობა.

(2.19) ტოლობის დამტკიცება ზუსტად ანალოგიურია (2.18) ტოლობის დამტკიცებისა, ამიტომ მასზე არ შევჩერდებით. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.4. სამართლიანია ჩართვა

$$K(W^{ss}) \subseteq Ex\,[H^1 \mid C \setminus \{0\}] \cap Ex\,[H^2 \mid -C \setminus \{0\}]. \tag{2.20}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $z \in K(W^{ss})$. მაშინ (2.17)-დან ვასკვნით, რომ $z \in Q^1 \cap Q^2$. როგორც ადრე დავამტკიცეთ, $Q^1 \subseteq H^1$, ე.ი. $z \in H^1$, $z \in Q^2$. დავუშვათ, რომ $z \notin Ex[H^1 \mid C \setminus \{0\}]$. მაშინ მოიძებნება $z^1 \in H^1$, ისეთი რომ $z^1 \neq z$ და $z^1 - z \in C \setminus \{0\}$. მაგრამ $z^1 - z \in H^1 - Z^2$, ხოლო (2.7)-ის თანახმად $(H^1 - Q^2) \cap \cap (C \setminus \{0\}) = \varnothing$. ასე რომ, $z^1 - z$ არ შეიძლება იყოს $C \setminus \{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $z \in Ex[H^1 \mid C \setminus \{0\}]$, ე.ი.

$$K(W^{ss}) \subseteq Ex\,[H^1 \mid C \setminus \{0\}]. \tag{2.21}$$

ახლა დავამტკიცოთ

$$K(W^{ss}) \subseteq Ex\,[H^2 \mid -C \setminus \{0\}] \tag{2.22}$$

ჩართვის ჭეშმარიტება. კვლავ ავიღოთ $z \in K(W^{ss})$. მაშინ (2.17)-დან ვასკვნით, რომ $z \in Q^1 \cap Q^2$. როგორც ადრე დავამტკიცეთ, $Q^2 \subseteq H^2$, ე.ი. $z \in Q^1$, $z \in H^2$. დავუშვათ, რომ $z \notin Ex[H^2 \mid -C \setminus \{0\}]$. მაშინ მოიძებნება $z^2 \in H^2$, ისეთი რომ $z^2 \neq z$ და $z - z^2 \in C \setminus \{0\}$. მაგრამ $z - z^2 \in Q^1 - H^2$, ხოლო (2.6)-ის თანახმად $(Q^1 - -H^2) \cap (C \setminus \{0\}) = \varnothing$. ასე რომ, $z - z^2$ არ შეიძლება იყოს $C \setminus \{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (2.22) ნამდვილად სრულდება. მაშინ (2.21) და (2.22)-დან ვღებულობთ (2.20)-ს ჩართვას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.5. სამართლიანია ტოლობა

$$K(W^{ss}) = Ex\,[Q^1 \mid C] \cap Ex\,[Q^2 \mid -C]. \tag{2.23}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სრულდება ორი

$$K(W^{ss}) \subseteq Ex\,[Q^1 \mid C], \tag{2.24}$$

$$K(W^{ss}) \subseteq Ex\,[Q^2 \mid -C] \tag{2.25}$$

ჩართვა, საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს

$$K(W^{ss}) \subseteq Ex\,[Q^1 \mid C] \cap Ex\,[Q^2 \mid -C] \tag{2.26}$$

ჩართვის სამართლიანობა.

ვთქვათ, $z \in K(W^{ss})$. მაშინ, (2.17)-ის თანახმად, $z \in Q^1 \cap Q^2$, ე.ი. $z \in Q^1$, $z \in Q^2$. დავუშვათ, რომ $z \notin Ex[Q^1 \mid C]$. მაშინ მოიძებნება $z^1 \in Q^1$, ისეთი რომ

$z^1-z \in C\setminus\{0\}$. მაგრამ $z^1-z\in Q^1-Q^2\subset Q^1-H^2$, ხოლო (2.6)-ის თანახმად $(Q^1-H^2)\cap(C\setminus\{0\})=\varnothing$. ასე რომ, z^1-z არ შეიძლება იყოს $(C\setminus\{0\})$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $z\in Ex[Q^1\,|\,C]$, ე.ი. (2.24) სამართლიანია.

ახლა დავამტკიცოთ (2.25). კვლავ ავიღოთ $z\in K(W^{ss})$. მაშინ (2.17)-დან ვასკვნით, რომ $z\in Q^1\cap Q^2$, ე.ი. $z\in Q^1$, $z\in Q^2$. დავუშვათ, რომ $z\notin Ex[Q^2\,|-C]$. მაშინ მოიძებნება $z^2\in Q^2$, ისეთი რომ $z^2-z\in -C\setminus\{0\}$, ე.ი. $z-z^2\in C\setminus\{0\}$. მაგრამ $z-z^2\in Q^1-Q^2\subseteq H^1-Q^2$. ამიტომ $z-z^2\in H^1-Q^2$. (2.7)-ის თანახმად $(H^1-Q^2)\cap\cap(C\setminus\{0\})=\varnothing$. ასე რომ, $z-z^2$ არ შეიძლება იყოს $C\setminus\{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (2.25) ნამდვილად სრულდება. ამრიგად (2.26) ჭეშმარიტია.

(2.17)-ის თანახმად $K(W^{ss})=Q^1\cap Q^2$. მაშინ (2.26)-დან ვღებულობთ:

$$K(W^{ss})\subseteq Ex\,[Q^1\,|\,C]\cap Ex\,[Q^2|-C]\subseteq Q^1\cap Q^2=K(W^{ss}),$$

რის შედეგადაც გამომდინარეობს (2.23) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.6. სამართლიანია ტოლობა

$$K(W^{sw})=Ex\,[Q^1\,|\,C]\cap Ex\,[H^2|-C\setminus\{0\}]. \tag{2.27}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სრულდება ორი

$$K(W^{sw})\subseteq Ex\,[Q^1\,|\,C], \tag{2.28}$$

$$K(W^{sw})\subseteq Ex\,[H^2|-C\setminus\{0\}] \tag{2.29}$$

ჩართვა, საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს

$$K(W^{sw})\subseteq Ex\,[Q^1\,|\,C]\cap Ex\,[H^2|-C\setminus\{0\}] \tag{2.30}$$

ჩართვის სამართლიანობა.

ვთქვათ, $z\in K(W^{sw})$. მაშინ, (2.18)-ის თანახმად, $z\in Q^1\cap H^2$, ე.ი. $z\in Q^1$, $z\in H^2$. დავუშვათ, რომ $z\notin Ex[Q^1\,|\,C]$. მაშინ მოიძებნება $z^1\in Q^1$, ისეთი რომ $z^1-z\in C\setminus\{0\}$. მაგრამ $z^1-z\in Q^1-H^2$, ხოლო (2.6)-ის თანახმად $(Q^1-H^2)\cap\cap(C\setminus\{0\})=\varnothing$. ასე რომ, z^1-z არ შეიძლება იყოს $C\setminus\{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $z\in Ex[Q^1\,|\,C]$, ე.ი. (2.28) სამართლიანია.

ახლა დავამტკიცოთ (2.29). ავიღოთ $z\in K(W^{sw})$. მაშინ (2.18)-დან ვასკვნით, რომ $z\in Q^1\cap H^2$, ე.ი. $z\in Q^1$, $z\in H^2$. დავუშვათ, რომ $z\notin Ex[H^2\,|-C\setminus\{0\}]$. მაშინ მოიძებნება $z^2\in H^2$, ისეთი რომ $z^2-z\in -C\setminus\{0\}$, ე.ი. $z-z^2\in C\setminus\{0\}$. მაგრამ $z-z^2\in Q^1-H^2$. (2.6)-ის თანახმად $(Q^1-H^2)\cap(C\setminus\{0\})=\varnothing$. ასე რომ, $z-z^2$ არ შეიძლება იყოს $C\setminus\{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (2.29) ნამდვილად სრულდება. ამრიგად (2.30) ჭეშმარიტია.

(2.18)-ის თანახმად $K(W^{sw})=Q^1\cap H^2$. მაშინ (2.30)-დან ვღებულობთ:

$$K(W^{sw}) \subseteq Ex\,[Q^1 \,|\, C] \cap Ex\,[H^2 \,|\, -C \setminus \{0\}] \subseteq Q^1 \cap H^2 = K(W^{sw}),$$

რის შედეგადაც გამომდინარეობს (2.27) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.7. სამართლიანია ტოლობა

$$K(W^{ws}) = Ex\,[Q^2 \,|\, -C] \cap Ex\,[H^1 \,|\, C \setminus \{0\}]. \tag{2.31}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სრულდება ორი

$$K(W^{ws}) \subseteq Ex\,[Q^2 \,|\, -C], \tag{2.32}$$

$$K(W^{ws}) \subseteq Ex\,[H^1 \,|\, C \setminus \{0\}] \tag{2.33}$$

ჩართვა, საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს

$$K(W^{ws}) \subseteq Ex\,[Q^2 \,|\, -C] \cap Ex\,[H^1 \,|\, C \setminus \{0\}] \tag{2.34}$$

ჩართვის სამართლიანობა.

ვთქვათ, $z \in K(W^{ws})$. მაშინ, (2.19)-ის თანახმად, $z \in Q^2 \cap H^1$, ე.ი. $z \in Q^2$, $z \in H^1$. დავუშვათ, რომ $z \notin Ex[Q^2 \,|\, -C]$. მაშინ მოიძებნება $z^2 \in Q^2$, ისეთი რომ $z^2 - z \in -C \setminus \{0\}$, ე.ი. $z - z^2 \in C \setminus \{0\}$. მაგრამ (2.7)-ის თანახმად $(H^1 - Q^2) \cap (C \setminus \{0\}) = \varnothing$. ასე რომ, $z - z^2$ არ შეიძლება იყოს $C \setminus \{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $z \in Ex[Q^2 \,|\, -C]$, ე.ი. (2.32) სამართლიანია.

ახლა დავამტკიცოთ (2.33). ავიღოთ $z \in K(W^{ws})$. მაშინ (2.19)-დან ვასკვნით, რომ $z \in Q^2 \cap H^1$, ე.ი. $z \in Q^2$, $z \in H^1$. დავუშვათ, რომ $z \notin Ex[H^1 \,|\, C \setminus \{0\}]$. მაშინ მოიძებნება $z^1 \in H^1$, ისეთი რომ $z^1 - z \in C \setminus \{0\}$. მაგრამ $z^1 - z \in H^1 - Q^2$. (2.7)-ის თანახმად $(H^1 - Q^2) \cap (C \setminus \{0\}) = \varnothing$. ასე რომ, $z^1 - z$ არ შეიძლება იყოს $C \setminus \{0\}$ კონუსის ელემენტი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (2.33) ნამდვილად სრულდება. ამრიგად (2.34) ჭეშმარიტია.

(2.19)-ის თანახმად $K(W^{ws}) = H^1 \cap Q^2$. მაშინ (2.34)-დან ვღებულობთ:

$$K(W^{ws}) \subseteq Ex\,[Q^2 \,|\, -C] \cap Ex\,[H^1 \,|\, C \setminus \{0\}] \subseteq Q^2 \cap H^1 = K(W^{ws}),$$

რის შედეგადაც გამომდინარეობს (2.31) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული 2.4-2.7 თეორემებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

შედეგი 2.1 ვთქვათ, $Z = E^m$, C კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია. მაშინ

ა) $K(W^{ss})$ სიმრავლე ემთხვევა $\geq$ თანადობის მიმართ H^1-ში მაქსიმალური და H^2-ში მინიმალური ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას, და აგრეთვე $K(W^{ss})$ სიმრავლე ემთხვევა Q^1-ში უდიდესი და Q^2-ში უმცირესი ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას.

ბ) $K(W^{sw})$ სიმრავლე ემთხვევა $\geq$ თანადობის მიმართ Q^1-ში მაქსიმალური და H^2-ში მინიმალური ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას.

გ) $K(W^{ws})$ სიმრავლე ემთხვევა $\geq$ თანადობის მიმართ Q^2-ში მინიმალური და H^1-ში მაქსიმალური ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას.

შედეგ 2.1-ში ჩამოყალიბებული ა) - გ) რეზულტატები ცალკე დამტკიცებულია მონოგრაფია [39]-ში (იხ. § 4.1, თეორემა 3), სადაც აგრეთვე ალ-

ნიშნული იქნა, რომ ეს ა) - გ) დებულებები გამომდინარეობს [42] ნაშრომის შედეგებიდან.

ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი Q^1, Q^2, H^1 და H^2 სიმრავლეები შეიძლება იყოს წარმოდგენილი შემდეგნაირად:

$$Q^1 = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \{K(x, y) - C\}, \tag{2.35}$$

$$Q^2 = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \{K(x, y) + C\}, \tag{2.36}$$

$$H^1 = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \{K(x, y) + C' \cup \{0\}\}, \tag{2.37}$$

$$H^2 = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \{K(x, y) - C' \cup \{0\}\}, \tag{2.38}$$

სადაც $C' = Z \setminus C$.

შემდეგში მაგალითების განხილვისას ჩვენ ვისარგებლებთ ერთი მარტივი ფაქტით. სამართლიანია ჩართვები:

$$C \subset -C' \cup \{0\}. \tag{2.39}$$

$$-C \subset C' \cup \{0\}. \tag{2.40}$$

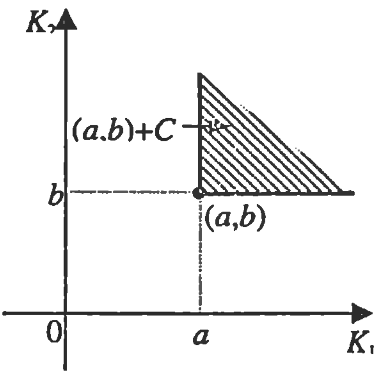
ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (2.39). ((2.40)-ის დამტკიცება ზუსტად ანალოგიურია). ვთქვათ, $z \in C$. თუ $z=0$, მაშინ $z \in -C' \cup \{0\}$. დავუშვათ, რომ $z \neq 0$ და $z \notin -C' \cup \{0\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $z \notin -C'$, ე.ი. $z \in -C$. აქედან გამომდინარე $z \in C \cap (-C)$. ბოლო ჩართვა შეუძლებელია, რადგან C არის შეერილოვანი კონუსი, ე.ი. $C \cap (-C) = \{0\}$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (2.39)-ის სამართლიანობას.

შევნიშნოთ შემდეგი ფაქტი. თუ $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ და $Y = \{1, 2, \ldots, k\}$, ხოლო $K : X \times Y \to E^m$ ცალსახა ვექტორ-ფუნქცია, მაშინ $K(X \times Y)$, როგორც $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის სახე E^m-ში K ასახვის შემთხვევაში, შეიძლება წარმოდგეს იმ $n \times k$-განზომილებიანი მატრიცის სახით, რომლის ელემენტებსაც წარმოადგენენ $K(x, y) = (K_1(x, y), K_2(x, y), \ldots, K_m(x, y))$ ვექტორ-ფუნქციის მნიშვნელობები E^m-ში, როცა $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ და $y \in \{1, 2, \ldots, k\}$. თუ მოხერხებულობის მიზნით მივიღებთ, რომ $K(x, y) = a_{ij}$, როცა $x = i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ და $y = j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, მაშინ აღნიშნულის თანახმად მივიღებთ შემდეგ მატრიცას:

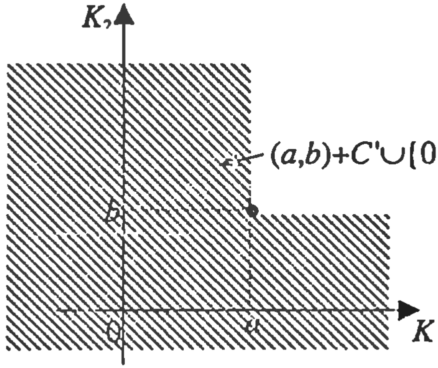
$$K(X \times Y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2k} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nk} \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი (2.41) მატრიცის თითოეული a_{ij} ელემენტი არის m-განზომილებიანი ვექტორი, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს კონკრეტული სახე ყოველი კონკრეტული K ასახვისათვის. კერძოდ, თუ $n=k=m=2$, მაშინ $X=\{1,2\}$, $Y=\{1,2\}$ და

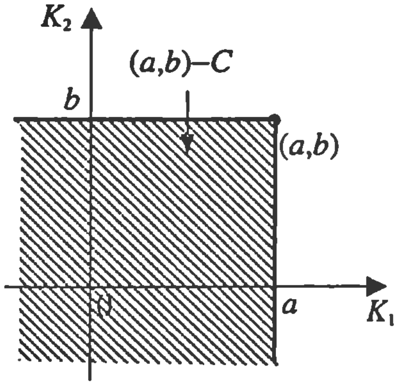
$$K(X\times Y)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$



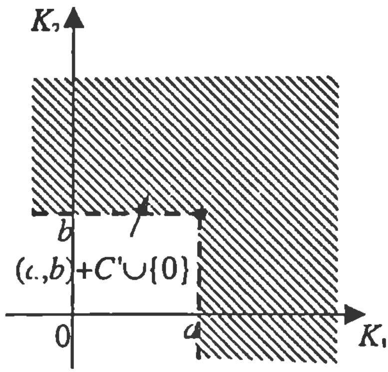
ნახ. 2.1



ნახ. 2.2



ნახ. 2.3



ნახ. 2.4

გეომეტრიული თვალსაჩინოების მიზნით E^2 სივრცეში (a,b) ვექტორით წაძრული $C=\{z\in E^2 \mid z_1 \geqq 0,\ z_2 \geqq 0\}$, $C'\cup\{0\}$, $-C$ და $-C'\cup\{0\}$ კონუსები, შესაბამისად, გამოსახულია ნახ. 2.1, 2.2, 2.3 და 2.4-ზე.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი, რომლებიც ილუსტრირებას უკეთებს ზემოთმოყვანილ თეორემებს. ყველა ამ მაგალითში $X = Y = \{1,2\}$, ხოლო $K(x,y) = (K_1(x,y), K_2(x,y))$ ვექტორ-ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია (2.42) მატრიცის სახით, ამასთან, x - სტრიქონი, ხოლო y სვეტია.

მაგალითი 2.1 ვთქვათ, K ვექტორ-ფუნქცია მოცემულია შემდეგი მატრიცის საშუალებით:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3,0) & (0,1) \\ (2,0) & (1,0) \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$Q^1 = \bigcup_{i=1,2} \bigcap_{j=1,2} \{a_{ij} - C\}, \tag{2.43}$$

$$Q^2 = \bigcup_{j=1,2} \bigcap_{i=1,2} \{a_{ij} + C\}, \tag{2.44}$$

$$H^1 = \bigcup_{i=1,2} \bigcap_{j=1,2} \{a_{ij} + C' \cup \{0\}\}, \tag{2.45}$$

$$H^2 = \bigcup_{j=1,2} \bigcap_{i=1,2} \{a_{ij} - C' \cup \{0\}\}. \tag{2.46}$$

(2.43)-(2.46)-დან ვღებულობთ:

$$Q^1 = [[(3,0) - C] \cap [(0,1) - C]] \cup [[(2,0) - C] \cap [(1,0) - C]] =$$
$$= (-C) \cup [(1,0) - C] = (1,0) - C;$$

$$Q^2 = [[(3,0) + C] \cap [(2,0) + C]] \cup [[(0,1) + C] \cap [(1,0) + C]] =$$
$$= [(3,0) + C] \cup [(1,1) + C];$$

$$H^1 = [[(3,0) + C' \cup \{0\}] \cap [(0,1) + C' \cup \{0\}]] \cup$$
$$\cup [[(2,0) + C' \cup \{0\}] \cap [(1,0) + C' \cup \{0\}]] =$$
$$= [[(3,0) + C' \cup \{0\}] \cap [(0,1) + C' \cup \{0\}]] \cup [(1,0) + C' \cup \{0\}];$$

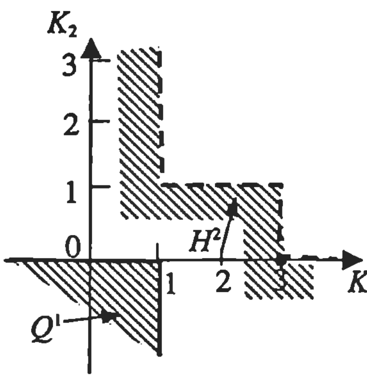
$$H^2 = [[(3,0) - C' \cup \{0\}] \cap [(2,0) - C' \cup \{0\}]] \cup$$
$$\cup [[(0,1) - C' \cup \{0\}] \cap [(1,0) - C' \cup \{0\}]] =$$
$$= [(2,0) - C' \cup \{0\}] \cup [(1,0) - C' \cup \{0\}] = (1,0) - C' \cup \{0\}.$$

Q^1, H^1, Q^2 და H^2 სიმრავლეები წარმოდგენილია ნახ. 2.5 და 2.6-ზე, საიდანაც ჩანს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თანადობებს:

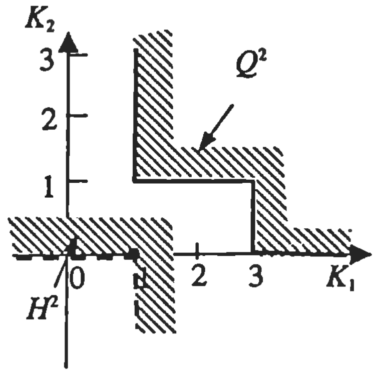
$$Q^1 \supset \{(1,0)\};$$
$$Q^2 \supset \{(3,0)\};$$
$$H^1 \supset \{(0,1);\ (1,0);\ (2,0);\ (3,0)\};$$
$$H^2 \supset \{(0,1);\ (1,0);\ (2,0);\ (3,0)\}.$$

უკანასკნელი ჩართვებიდან გამომდინარეობს:

$$Q^1 \cap Q^2 = \varnothing,$$
$$H^2 \cap Q^1 = \{(1,0)\},$$
$$H^1 \cap Q^2 = \{(3,0)\},$$
$$H^1 \cap H^2 \supseteq \{(0,1);\ (1,0);\ (2,0);\ (3,0)\}.$$



ნახ. 2.5



ნახ. 2.6

მიღებული შედეგიდან შეგვიძლია დავასკვნათ: (2,2) წერტილი წარმოადგენს ძლიერ-სუსტ უნაგირა წყვილს ((2.18) ტოლობის საფუძველზე), (1,1) წერტილი სუსტ-ძლიერ უნაგირა წყვილს ((2.19) ტოლობის საფუძველზე), ხოლო ტოლობა (2.17)-იდან გამომდინარე $K(W^{ss})=\varnothing$, ე.ი. განხილულ შემთხვევაში ძლიერი უნაგირა წყვილი არ არსებობს. ვაჩვენოთ, რომ (1,2) წერტილი წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს. მართლაც:

$$K(1,2) - K(1,2) = (0,1) - (0,1) = (0,0) \notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2) - K(1,2) = (1,0) - (0,1) = (1,-1) \notin C\setminus\{0\};$$
$$K(1,2) - K(1,1) = (0,1) - (3,0) = (-3,1) \notin C\setminus\{0\};$$
$$K(1,2) - K(1,2) = (0,1) - (0,1) = (0,0) \notin C\setminus\{0\}.$$

სუსტი უნაგირა წყვილის განსაზღვრის თანახმად, უკანასკნელი თანადობები ასაბუთებს, რომ (1,2) წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს. ამასთან, სხვა სუსტი უნაგირა წყვილები არ არსებობს. როგორც ჩვენ ვაჩვენეთ $H^1 \cap H^2 \supseteq$

$\supseteq\{(0,1);(1,0):(2,0);\ (3,0)\}$, ე.ი. გარდა (0,1) წერტილისა $H^1 \cap H^2$ მოიცავს სხვა წერტილებსაც, ამიტომ (2.16) ჩართვა სინამდვილეში მკაცრია.

მაგალითი 2.2. განვიხილოთ $K(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია მატრიცით:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (1,1) & (3,0) \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

მაშინ კვლავ (2.43)-(2.46)-დან ვღებულობთ:

$$Q^1 = [[(2,2)-C]\cap[(2,3)-C]]\cup[[(1,1)-C]\cap[(3,0)-C]] =$$
$$= [(2,2)-C]\cup[(1,0)-C] = (2,2)-C\ ;$$
$$Q^2 = [[(2,2)+C]\cap[(1,1)+C]]\cup[[(2,3)+C]\cap[(3,0)+C]] =$$
$$= [(2,2)+C]\cup[(3,3)+C] = (2,2)+C\ ;$$
$$H^1 = [[(2,2)+C'\cup\{0\}]\cap[(2,3)+C'\cup\{0\}]]\cup$$
$$\cup[[(1,1)+C'\cup\{0\}]\cap[(3,0)+C'\cup\{0\}]] =$$
$$= [(2,2)+C'\cup\{0\}]\cup[[(1,1)+C'\cup\{0\}]\cap[(3,0)+C'\cup\{0\}]] =$$
$$= (2,2)+C'\cup\{0\}\ ;$$
$$H^2 = [[(2,2)-C'\cup\{0\}]\cap[(1,1)-C'\cup\{0\}]]\cup$$
$$\cup[[(2,3)-C'\cup\{0\}]\cap[(3,0)-C'\cup\{0\}]] =$$
$$= [(2,2)-C'\cup\{0\}]\cup[[(2,3)-C'\cup\{0\}]\cap[(3,0)-C'\cup\{0\}]] =$$
$$= (2,2)-C'\cup\{0\}\ .$$

ნახ. 2.7-ზე წარმოდგენილია Q^1 და Q^2 სიმრავლეები.

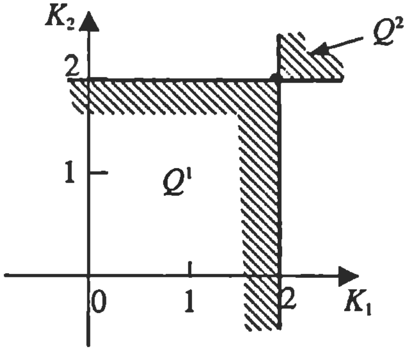
ადვილი მისახვედრია, რომ H^1 მოიცავს (2.47) ტოლობით განსაზღვრული $K(X\times Y)$ მატრიცის ყველა ელემენტს, გარდა $K(1,2)=a_{12}=(2,3)$-სა, ხოლო H^2 მოიცავს ამ მატრიცის მხოლოდ ორ $K(1,1)=a_{11}=(2,2)$ და $K(2,2)=a_{22}=(3,0)$ ელემენტს. აქედან გამომდინარე გვაქვს:

$$H^1 \cap H^2 = \{(2,2),(3,0)\}.$$

ამიტომ (2.16) ჩართვის თანახმად თუ ამოცანას გააჩნია სუსტი უნაგირა წყვილი ეს შეიძლება იყოს მხოლოდ ან (1,1) ან (2,2). პირველად ვაჩვენოთ, რომ (1,1) წერტილი წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს. მართლაც:

$$K(1,1)-K(1,1) = (2,2)-(2,2) = (0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,1)-K(1,1) = (1,1)-(2,2) = (-1,-1)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(1,1)-K(1,1) = (2,2)-(2,2) = (0,0)\notin C\setminus\{0\};$$

$$K(1,1)-K(1,2)=(2,2)-(2,3)=(0,-1)\notin C\setminus\{0\}.$$



ნახ. 2.7

სუსტი უნაგირა წყვილის განსაზღვრის თანახმად, უკანასკნელი თანადობები ასაბუთებს, რომ (1,1) წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (2,2) წერტილი წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს. მართლაც:

$$K(1,2)-K(2,2)=(2,3)-(3,0)=(-1,3)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(2,2)=(3,0)-(3,0)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(2,1)=(3,0)-(1,1)=(2,-1)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(2,2)=(3,0)-(3,0)=(0,0)\notin C\setminus\{0\}.$$

მართლაც, სუსტი უნაგირა წყვილის განსაზღვრის თანახმად, უკანასკნელი თანადობები ასაბუთებს, რომ (2,2) წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს.

გარდა ამისა, როგორც ეს Q^1 და Q^2 სიმრავლეების სტრუქტურიდან ჩანს (რასაც კიდევაც ადასტურებს ნახ. 2.7),

$$Q^1\cap Q^2=\{(2,2)\}.$$

ამიტომ (1,1) წარმოადგენს ძლიერ უნაგირა წყვილს (იხ. (2.17) ფორმულა).

მაგალითი 2.3. ვთქვათ, K ვექტორ-ფუნქცია მოცემულია შემდეგი მატრიცის საშუალებით:

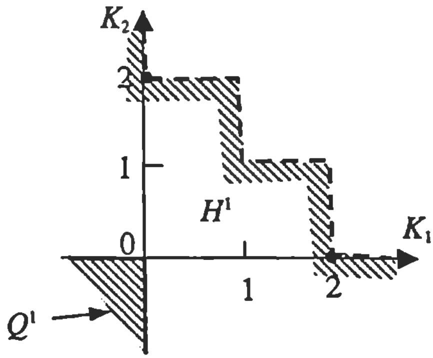
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (0,2) & (1,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

მაშინ კვლავ (2.43)-(2.46)-დან ვღებულობთ:

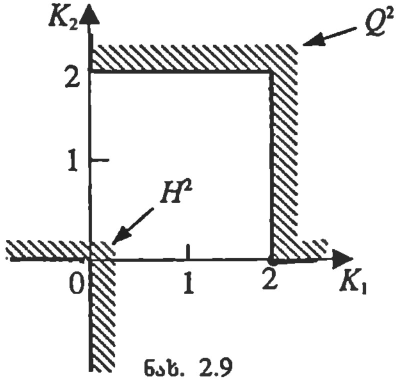
$$Q^1=\big[[(0,2)-C]\cap[(1,0)-C]\big]\cup\big[[(0,1)-C]\cap[(2,0)-C]\big]=$$
$$=-C\cup[-C]=-C\,;$$

$$Q^2 = [[(0,2)+C]\cap[(0,1)+C]]\cup[[(1,0)+C]\cap[(2,0)+C]] =$$
$$= [(0,2)+C]\cup[(2,0)+C];$$
$$H^1 = [[(0,2)+C'\cup\{0\}]\cap[(1,0)+C'\cup\{0\}]]\cup$$
$$\cup[[(0,1)+C'\cup\{0\}]\cap[(2,0)+C'\cup\{0\}]];$$
$$H^2 = [[(0,2)-C'\cup\{0\}]\cap[(0,1)-C'\cup\{0\}]]\cup$$
$$\cup[[(1,0)-C'\cup\{0\}]\cap[(2,0)-C'\cup\{0\}]] =$$
$$= [(0,2)-C'\cup\{0\}]\cup(2,0)-C'\cup\{0\}] =$$
$$= -C'.$$

ნახ. 2.8-ზე წარმოდგენილია Q^1 და H^1 სიმრავლეები, ხოლო ნახ. 2.9-ზე - Q^2 და H^2.



ნახ. 2.8



ნახ. 2.9

ვინაიდან $Q^1\cap Q^2=\varnothing$, მაშინ ტოლობა (2.17)-ის თანახმად K ვექტორ-ფუნქციას არა აქვს ძლიერი უნაგირა წყვილი. $Q^1\cap H^2=\varnothing$ ტოლობიდან, (2.18)-ის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს, რომ K ვექტორ-ფუნქციას არც ძლიერი-სუსტი უნაგირა წყვილი გააჩნია. $H^1\cap Q^2=\{(0,2); (2,0)\}$ ტოლობიდან (2.19)-ის გათვალისწინებით ვლებულობთ, რომ გვაქვს ორი სუსტი-ძლიერი უნაგირა წყვილი: (1,1) და (2,2).

ადვილი მისახვედრია, რომ ორივე H^1 და H^2 სიმრავლეები მოიცავენ (2.48) ტოლობით განსაზღვრული $K(X\times Y)$ მატრიცის ოთხივე ელემენტს, ე.ი.

$$H^1 \cap H^2 = \{(0,2); (1,0); (0,1); (2,0)\}.$$

შევამოწმოთ, შეესაბამება თუ არა ამ თანაკვეთის რომელიმე წერტილს სუსტი უნაგირა წყვილი, რისთვისაც შევამოწმოთ (2.4) პირობის შესრულება ყველა წყვილისათვის. გამოვთვალოთ: (1,1) წერტილისათვის -

$$K(1,1)-K(1,1)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,1)-K(1,1)=(0,1)-(0,2)=(0,-1)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(1,1)-K(1,1)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(1,1)-K(1,2)=(0,2)-(1,0)=(-1,2)\notin C\setminus\{0\};$$

(1,2) წერტილისათვის -

$$K(1,2)-K(1,2)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(1,2)=(2,0)-(1,0)=(1,0)\in C;$$
$$K(1,2)-K(1,1)=(1,0)-(0,2)=(1,-2)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(1,2)-K(1,2)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$

(2,1) წერტილისათვის -

$$K(1,1)-K(2,1)=(0,2)-(0,1)=(0,1)\in C;$$
$$K(2,1)-K(2,1)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,1)-K(2,1)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,1)-K(2,2)=(0,1)-(2,0)=(-2,1)\notin C\setminus\{0\};$$

(2,2) წერტილისათვის -

$$K(1,2)-K(2,2)=(1,0)-(2,0)=(-1,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(2,2)=(0,0)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(2,1)=(2,0)-(0,1)=(2,-1)\notin C\setminus\{0\};$$
$$K(2,2)-K(2,2)=(0,0)\notin C\setminus\{0\}.$$

აქედან ვასკვნით, რომ (1,1) და (2,2) წარმოადგენენ სუსტ უნაგირა წყვილებს (2.48) მატრიცით მოცემული ვექტორ-ფუნქციისათვის.

მასალას მოყვანილი ფაქტების შესახებ თეორიულ-თამაშებრივ ტერმინოლოგიაში დაინტერესებული მკითხველი შეიძლება გაეცნოს ვ.ვ. პოდინოვსკის და ვ.დ. ნოგინის ერთობლივ მონოგრაფიაში [39].

2.2. დუალური ამოცანების ზოგადი კონსტრუქცია

ამ პარაგრაფში ნაჩვენებია, რომ ეფექტურ ამონახსნთა მოძებნის ამოცანა საწყის მრავალკრიტერიულ ამოცანაში მჭიდროდაა დაკავშირებული ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წყვილების აგების ამოცანასთან. ფორმულირდება წყვილი დუალური ამოცანებისა, რომლებიც შესაბამისად თავდაპირველი მაქსიმალური ელემენტებისა და დუალური სიმრავლის მინიმალური ელემენტების მოძებნაში მდგომარეობს. დგინდება, რომ სიმრავლე ამონახსნებისა, რომლებიც ერთდროულად წარმოადგენენ პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნებს, წარმოადგენს პირდაპირი და დუალური სიმრავლეების თანაკვეთას და ემთხვევა ლაგრანჟის ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს მის უნაგირა წყვილებზე.

1. ვთქვათ, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ და $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ ვექტორ-ფუნქციები მოცემულია $D \subseteq E^n$ სიმრავლეზე, ხოლო

$$X = \left\{ x \in D \mid g(x) \geqq 0_{(k)} \right\} \tag{2.49}$$

შემოვიტანოთ **ლაგრანჟის ვექტორული ფუნქცია**

$$L(x,\lambda) = \left(f_1(x) + <\lambda, g(x)>, f_2(x) + <\lambda, g(x)>, \ldots, f_m(x) + <\lambda, g(x)>\right) \tag{2.50}$$

და განვიხილოთ ამ ფუნქციის სხვადასხვა ტიპის უნაგირა წყვილების თვისებები $D \times E^k_{\geqq}$ სიმრავლეზე.

თეორემა 2.8. ლაგრანჟის (2.50) ფუნქციისათვის ძლიერი და სუსტად ძლიერი, და აგრეთვე ძლიერსუსტი და სუსტი უნაგირა წყვილების ცნებები $D \times E^k_{\geqq}$ სიმრავლეზე ექვივალენტურებია:

$$W^{ss} = W^{ws}, \; W^{sw} = W^{ww}. \tag{2.51}$$

თუ (x^0, λ^0) ნებისმიერი ტიპის უნაგირა წყვილია, მაშინ

$$g(x^0) \geqq 0_{(k)}, \quad <\lambda^0, g(x^0)> = 0, \tag{2.52}$$

ისე, რომ $x^0 \in X$. ამასთან, თუ $(x^0, \lambda^0) \in W^{ww}$, მაშინ x^0 ეფექტური ამონახსნია (ე.ი. $x^0 \in P_f(x)$), და თუ $(x^0, \lambda^0) \in W^{ss}$, მაშინ x^0 მაქსიმუმის წერტილია X-ზე თითოეული $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფუნქციისათვის.

თეორემა 2.8 გვიჩვენებს, რომ L ფუნქციის სუსტი უნაგირა წყვილები პირდაპირ არიან დაკავშირებული საწყისი მრავალკრიტერიული ამოცანის ეფექტურ ამონახსნებთან. შემდგომში განვიხილავთ L წყვილის მხოლოდ სუსტ უნაგირა წყვილებს და სიმოკლისათვის ვუწოდებთ მათ უბრალოდ

უნაგირა წყვილებს, ხოლო ყველა ასეთი წყვილების სიმრავლეს აღვნიშნავთ W-თი.

2. შემოვიტანოთ სიმრავლეები $Q = Q^1$ და $H = H^2$ (§ 2.1), რომლებსაც შესაბამისად ვუწოდებთ პირდაპირს და დუალურს:

$$Q = \bigcup_{x \in D} Q(x), \qquad Q(x) = \bigcap_{\lambda \in E_{\geqq}^{s}} \left\{ q \in E^m \mid q \leqq L(x,\lambda) \right\}$$

$$H = \bigcup_{\lambda \in E_{\geqq}^{s}} H(\lambda), \qquad H(\lambda) = \bigcap_{x \in D} \left\{ h \in E^m \mid h \overline{\overline{>}} L(x,\lambda) \right\}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $x \in D \backslash X$, მაშინ $Q(x) = \varnothing$, ამიტომ

$$Q = \bigcup_{x \in X} Q(x) = \bigcup_{x \in X} \left\{ q \in E^m \mid q \leqq f(x) \right\} = Y_{\bullet}, \tag{2.53}$$

სადაც $Y_{\bullet} = Y - E_{\geqq}^{m}$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $H(\lambda)$ სიმრავლე (იხ. [39, ლემა 1.2.1]) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახითაც:

$$H(\lambda) = \bigcap_{x \in D} \bigcup_{\mu \in M} \left\{ h \mid <\mu, h> \geqq \wp(\mu, x, \lambda) \right\} \tag{2.54}$$

სადაც $\wp$ ლაგრანჟის სკალური ფუნქციაა:

$$\wp(\mu, x, \lambda) = <\mu, L(x,\lambda)>.$$

Q სიმრავლის (H სიმრავლის) $\geq$ თანადობის მიმართ მაქსიმალურ (მინიმალურ) ელემენტთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $MaxQ$-თი ($MinH$-ით). თეორემა 2.3 და ტოლობა (2.27) გვიჩვენებს, რომ L ლაგრანჟის ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე უნაგირა წყვილების W სიმრავლეზე მჭიდრო კავშირშია $MaxQ$ და $MinH$ სიმრავლეებთან.

თეორემა 2.9. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$MaxQ \bigcap MinH = Q \bigcap H = L(W). \tag{2.55}$$

ამ თეორემის თამახმად, თუ $MaxQ \subseteq MinH$, მაშინ

$$MaxQ = Q \bigcap H = L(W);$$

თუ $MaxQ \supseteq MinH$, მაშინ

$$MinH = Q \bigcap H = L(W);$$

საბოლოოდ, თუ $MaxQ = MinH$, მაშინ

$$MaxQ = MinH = Q \bigcap H = L(W). \tag{2.56}$$

3. (2.53) ტოლობისა და ლემა 2.2.1-დან გამომდინარეობს (იხ. [39, გვ. 76]), რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$MaxQ = Max\bigcup_{x\in X} Q(x) = MaxY_{*} = P(Y),$$

სადაც $P(Y)$ არის საწყისი მრავალკრიტერიული ამოცანის ეფექტურ შეფასებათა სიმრავლე.

ასე რომ, შემდეგი ორი ამოცანა ექვივალენტურია:

პირდაპირი ამოცანა 1. ვიპოვოთ სიმრავლე $MaxQ$.

პირდაპირი ამოცანა 2. ვიპოვოთ სიმრავლე $P(Y)$.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\underset{\lambda}{Inf}\; L(x,\lambda) = \left(\inf_{\lambda} L_1(x,\lambda), \inf_{\lambda} L_2(x,\lambda),\ldots,\inf_{\lambda} L_m(x,\lambda)\right)$$

მაშინ, ადვილი შესამჩნევია, რომ $Q(x)$ სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$Q(x) = \left\{ q\in E^m \;\middle|\; q \leqq \underset{\lambda\in E_{-}^{l}}{Inf}\; L(x,\lambda)\right\}.$$

აღნიშნულთან დაკავშირებით, პირდაპირი ამოცანა მდგომარეობს

$$\underset{x\in D}{Max}\;\underset{\lambda\in E_{-}^{l}}{Inf}\; L(x,\lambda) = Max\left\{ x\in \overline{E}^m \;\middle|\; z = \underset{\lambda\in E_{-}^{l}}{Inf}\; L(x,\lambda),\; x\in D\right\} \tag{2.57}$$

სიმრავლის მოძებნაში. აქ $\overline{E}^m = \overline{E}\times\overline{E}\times\ldots\times\overline{E}$ და $\overline{E}$ გაფართოებული რიცხვითი ღერძია, რომელიც მიიღება E-დან $-\infty$ და $+\infty$ სიმბოლოების დამატებით. პირდაპირი ამოცანის ეს ფორმულირება ზემოთმოყვანილის ექვივალენტურია (რამდენადაც მაქსიმალური ელემენტები, მათი განსაზღვრის თანახმად, უნდა ეკუთვნოდნენ E^m-ს).

პირდაპირ ამოცანას შევუთანადოდ შემდეგი დუალური ამოცანა.

დუალური ამოცანა. ვიპოვოთ $MinH$ სიმრავლე.

დუალური მრავალკრიტერიული ამოცანების აგებული კონსტრუქცია შემოთავაზებული იყო ვ.დ. ნოგინის ნაშრომში (იხ. [30]); იქვე იყო დადგენილი $MaxQ \cap MinH = Q\cap H$ ტოლობა.

სკალარულ შემთხვევაში (m=1) პირდაპირი ამოცანა ღებულობს ჩვეულებრივ სახეს (იხ. (2.57)): ვიპოვოთ

$$\max_{x\in D}\inf_{\lambda\in E_{-}^{l}} L(x,\lambda)\,.$$

მაგრამ, რადგან $H(\lambda)$ სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$H(\lambda) = \left\{ h \in E \;\middle|\; h \geqq \sup_{x \in D} L(x,\lambda) \right\}$$

ტოლობის სახით, ამიტომ დუალური ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ

$$\min_{\lambda \in E^l_{\geqq}} \sup_{x \in D} L(x,\lambda).$$

დუალური მრავალკრიტერიული ამოცანების შესწავლისას, ისევე როგორც სკალარული დუალური ამოცანებისათვის, პრინციპულად მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც ადგილი აქვს $MaxQ = MinH$ ტოლობას, ანუ, როდესაც პირდაპირი ამოცანის ყოველი ამონახსნი ამავე დროს არის დუალური ამოცანის ამონახსნიც და პირიქით. ამასთან, ყოველი $MaxQ$, $MinH$, $Q \cap H$ და $L(W)$ სიმრავლეთაგანი საწყისი მრავალკრიტერიული ამოცანის $P(Y)$ ეფექტური შეფასებების სიმრავლეს ემთხვევა.

ჩაზნექილი და წრფივი მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის მონოგრაფია [39]-ში დაწვრილებით შესწავლილია ის პირობები, როდესაც პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა.

თავი 3

კონუსური ექსტრემალური წერტილების ფუნქციონალური მახასიათებლები

ამ თავში მრავალსახა ასახვათა თეორიის საფუძველზე შეისწავლება არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანები. ეს ისეთი ამოცანებია, რომელთათვისაც კრიტერიული სივრცე ზოგად შემთხვევაში ბანახის სივრცეს წარმოადგენს. აიგება სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვა, რომელიც თავის მხრივ ორი მრავალსახა ასახვის თანაკვეთის სახით წარმოდგინდება. ეს ასახვები გარკვეულ ბუნებრივ პირობებს აკმაყოფილებენ. აგრეთვე, კრიტერიულ სივრცეში მითითებული მრავალსახა ასახვის ინვარიანტული წერტილის მეშვეობით განისაზღვრება ექსტრემალური წერტილი (იმ შემთხვევაში, როდესაც სივრცე კონუსის მეშვეობით ნაწილობრივ დალაგებულია). ეს გარემოება მრავალსახა ასახვათა თვისებების საფუძველზე, კერძოდ, წარმოებულისა და კოდიფერენციალის სტრუქტურიდან გამომდინარე, ექსტრემალური წერტილების დახასიათების საფუძველს იძლევა. აღნიშნული მიდგომა საკმაოდ მოხერხებულია, ვინაიდან ის C–კონუსის სტრუქტურის გარკვევის საშუალებას იძლევა. დგინდება კრიტერიულ სივრცეში მოცემული სიმრავლის ექსტრემალური წერტილების არსებობის პირობები. ძირითადი შედეგები მოყვანილია ნაშრომებში [48, 70, 84, 85, 128, 129].

3.1. მრავალსახა ასახვათა თეორიის კავშირი მომიჯნავე მიმართულებებთან

უკანასკნელ წლებში მკვეთრად გამოიკვეთა მრავალსახა ასახვათა თეორიის ახალი პრობლემა, რაც კლასიკური ანალიზის ბუნებრივ და პერსპექტიულ განზოგადოებასთანაა დაკავშირებული. აღნიშნული თეორიის ირგვლივ უამრავი პუბლიკაცია არსებობს, ძირითადი იდეები მოყვანილია მონოგრაფიაში [31].

მოცემული თეორია მჭიდრო კავშირშია ვექტორული ოპტიმიზაციის თეორიასთან.

მრავალსახა ასახვათა თეორია თანამედროვე ეტაპზე ფართოდ გამოიყენება მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სხვადასხვა სფეროში. მოცემული თეორიის საფუძველზე აგებული არაწრფივი ანალიზი მრავალი კლასიკური ამოცანის გადაწყვეტის ხელსაყრელ საშუალებად იქცა. განსაკუთრებით უნდა გამოიყოს მრავალსახა ასახვათა თეორიის პროდუქტიულობა ისეთ სამეცნიერო მიმართულებებში, როგორიცაა მათემატიკური ეკონომიკა, თამაშთა თეორია, ვარიაციული აღრიცხვა, ოპტიმალური მართვის თეორია და სხვა.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, მონოგრაფიის ერთ-ერთ ძირითად მიზანს არასკალარული ოპტიმიზაციის ცენტრალური პრობლემების გადასაწყვეტად მრავალსახა ასახვის თეორიის, როგორც ძირითადი ინსტრუმენტის, გამოყენება წარმოადგენს. ავტორების აზრით, თუ გავითვალისწინებთ იმ გარემოებას, რომ მრავალკრიტრიული ამოცანებისადმი დღემდე არსებულ მრავალ მიდგომათა შორის ძნელია გამოიყოს უფრო ზოგადი და რაციონალური, ზემოაღნიშნული მიდგომა არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებისადმი საინტერესო უნდა იყოს.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ქვეშ იგულისხმება ოპტიმიზაციის ისეთი ამოცანა, რომელშიც კრიტერიული სივრცე არ არის აუცილებლად სასრულგანზომილებიანი. უკვე კლასიკურად ქცეულ მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის ეს სივრცე ყოველთვის სასრულგანზომილებიანია. ეს გარემოება ზუსტად მიუთითებს მრავალკრიტერიული ამოცანის ამონახსნის ცნებათა მრავალფეროვნებაზე. ამ ცნებათა უმეტესი ნაწილი არ ექვემდებარება განზოგადოებას არასასრულგანზომილებიან კრიტერიულ სივრცეზე, ვინაიდან ამ განსაზღვრებებში პრინციპულად ფიგურირებს სასრულგანზომილებიანობის ფაქტორი. მეორე მხრივ, უმეტეს პრაქტიკულ ამოცანებში კრიტერიული სივრცე არ არის სასრულგანზომილებიანი.

ვინაიდან ნებისმიერი არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნას კრიტერიულ სივრცეში ექსტრემალურ წერტილთა სიმრავლის ფუნქციონალურ დახასიათებაზე, მოცემული ნაშრომი ასეთ წერტილთა გამოკვლევას ეძღვნება. მოყვანილია ახალი შედეგები.

მონოგრაფიის ეს ნაწილი გარკვეული თვალსაზრისით მჭიდრო კავშირშია შრომებთან [24, 115, 118, 134]. ზოგიერთი მსგავსი შედეგი მიღებული იყო ნაშრომ [92]-ში, კერძოდ, ორი პირის ანტაგონისტური თამაშებისათვის მოგების ვექტორული ფუნქციებით შემოთავაზებული იყო კონუსური უნაგირა წერტილების არსებობის საკმარისი პირობები.

3.2. დამხმარე ცნებები

მრავასახა ასახვათა თეორიიდან მოვიყვანოთ რამდენიმე ცნება (იხ. [31]).

ვთქვათ, X და Y სიმრავლეებია. $F{:}X\to 2^Y$ ასახვას ეწოდება **მრავალსახა ასახვა**, თუ ნებისმიერი $x\in X$ წერტილი F ასახვის საშუალებით აისახება $F(x)$ ქვესიმრავლეში Y-დან (2^Y აღნიშნავს Y სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს, ანუ $2^Y=\{A \mid A\subset Y\}$). ქვესიმრავლეს $F(x)\subset Y$ ეწოდება **x წერტილის სახე** ან F მრავალსახა ასახვის მნიშვნელობა x წერტილში. სიმრავლეს $DomF= =\{x\in X \mid F(x)\neq\varnothing\}$ ეწოდება F-ის **ეფექტურობის არე**. F ასახვას ეწოდება **საკუთრივი**, თუ $DomF\neq\varnothing$. სიმრავლეს $\Gamma(F)=\{(x,y)\in X\times Y \mid y\in F(x)\}$ ეწოდება F მრავალსახა ასახვის **გრაფიკი**. $\Gamma(F)$ გრაფიკი სრულიად ახასიათებს F მრავალსახა ასახვას. იმ შემთხვევაში, როდესაც X ამოზნექილი სიმრავლეა, F-ს ეწოდება ამოზნექილი, თუ კი $\Gamma(F)$ ამოზნექილია $X\times Y$ დეკარტულ ნამრავლში. თუ F_1 და F_2 ორი მრავალსახა ასახვაა X-დან Y-ში, მაშინ $F=F_1\cap F_2$ მრავალსახა ასახვა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F(x)=F_1(x)\cap F_2(x),\ \ \forall x\in X.$$

თუ X წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა და Q არის არაცარიელი და ამოზნექილი ქვესიმრავლე X-ში, მაშინ $x\in Q$ წერტილისათვის შემდეგ სიმრავლეს

$$T_Q(x)=\overline{\bigcup_{h>0}\frac{1}{h}(Q-x)}$$

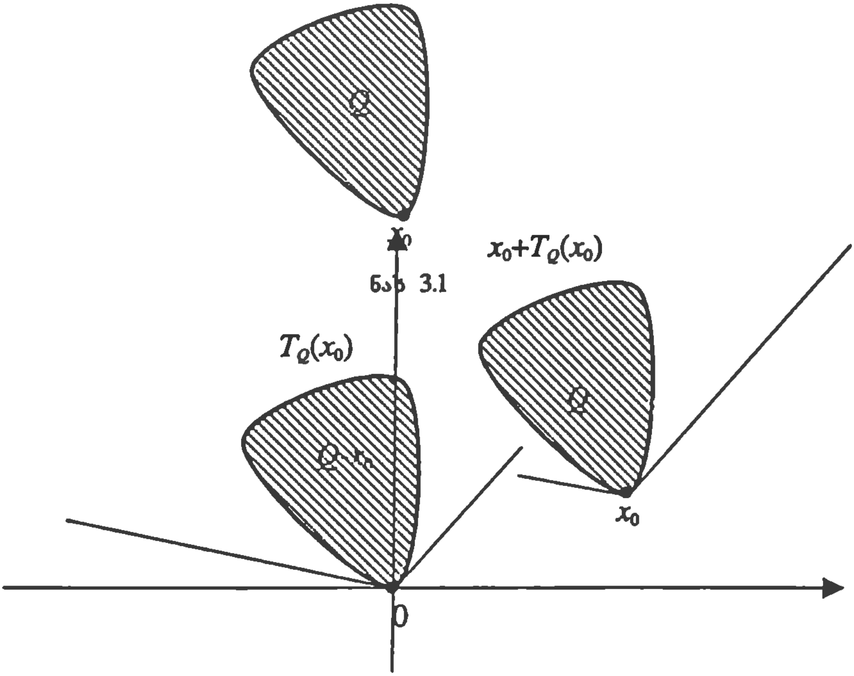
ეწოდება Q სიმრავლის **მხები კონუსი** x წერტილში. $T_Q(x)$ არის ამოზნექილი, ჩაკეტილი კონუსი X სივრცეში წვეროთი $0\in X$ წერტილში. თუ $\mathrm{int}Q\neq\varnothing$, მაშინ $\mathrm{int}T_Q(x)\neq\varnothing$ (შემდგომში სიმბოლოებით $\overline{Q}$, $\mathrm{int}Q$ და $\mathrm{Fr}Q=\overline{Q}\setminus\mathrm{int}Q$ ყველგან, შესაბამისად, აღნიშნულია Q სიმრავლის ჩაკეტვა, შიგა ნაწილი და საზღვარი). ნახ. 3.1-ზე მოყვანილია სიბრტყის $Q\subset E^2$ ქვესიმრავლე გამოყოფილი $x_0\in Q$ წერტილით, ხოლო ამ სიმრავლის შესაბამისი $T_Q(x_0)$ და $x_0+T_Q(x_0)$ კონუსები მოყვანილია ნახ. 3.2-ზე.

თუ X ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ X^* სიმბოლოთი აღვნიშნავთ X სივრცის ტოპოლოგიურად დუალურ სივრცეს. ვთქვათ X_0 არაცარიელი ქვესიმრავლეა X სივრცეში, მაშინ შემდეგ სიმრავლეს

$$X_0^*=\{p\in X^* \mid \langle p,x\rangle\geq 0,\ \ \forall x\in X_0\}$$

ეწოდება **არაუარყოფითი პოლარული კონუსი** X_0 სიმრავლისათვის.

$N_Q(x) = -T_Q^*(x)$ კონუსს ეწოდება **ნორმალური კონუსი** Q სიმრავლისათვის $x \in Q$ წერტილში. თუ X ჰაუსდორფის, ლოკალურად ამოზნექილი, წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა და Q ამოზნექილი ქვესიმრავლეა X-ში,



ნახ 3.1

ნახ 3.2

მაშინ $\sigma_Q : X^* \to R \cup \{+\infty\}$ ფუნქციონალს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$\sigma_Q(p) = \sup_{x \in Q} < p, x >,$$

Q სიმრავლის **საყრდენი ფუნქცია** ეწოდება, ხოლო $b(Q)=Dom\sigma_Q$ სიმრავლეს ეწოდება Q სიმრავლის **ბარიერული კონუსი**. თუ X და Y ბანახის სივრცეებია, F: $X \to 2^Y$ მრავალსახა ასახვაა, ხოლო X^* და Y^* დუალური სივრცეებია შესაბამისად X და Y-თვის, მაშინ $F^* : X^* \to 2^{Y^*}$ მრავალსახა ასახვას, რომელიც განისაზღვრება პირობით

$$p \in F^*(q) \Leftrightarrow (p, -q) \in b(\Gamma(F))$$

ეწოდება F ასახვის **შეუღლებული ასახვა**. თუ X და Y ბანახის სივრცეებია, F: $X \to 2^Y$ ამოზნექილი მრავალსახა ასახვაა, ხოლო $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$, მაშინ $DF(x_0,y_0) : X \to 2^Y$ მრავალსახა ასახვას, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$\Gamma(DF(x_0,y_0)) = T_{\Gamma(F)}(x_0,y_0),$$

ეწოდება F მრავალსახა ასახვის **წარმოებული** $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$ წერტილში. $DF(x_0,y_0)$ მრავალსახა ასახვის შეუღლებულ $DF(x_0,y_0)^* : Y^* \to 2^{X^*}$ ასახვას ეწოდება F: $X \to 2^Y$ მრავალსახა ამოზნექილი ასახვის **კოდიფერენციალი** $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$ წერტილში. ადვილი საჩვენებელია შემდეგი იმპლიკაციის სამართლიანობა:

$$p \in DF(x_0,y_0)^*(q) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (p,-q) \in b(\Gamma(DF(x_0,y_0))) = N_{\Gamma(F)}(x_0,y_0) = -T^*_{\Gamma(F)}(x_0,y_0).$$

ქვემოთ მოყვანილ მაგალითში წარმოდგენილია ამოზნექილი მრავალსახა ასახვის დიფერენციალისა და კოდიფერენციალის ანალიზური და გეომეტრიული სტრუქტურები.

მაგალითი 3.1 ვთქვათ, რომ $X=Y=E^1$, ხოლო $F:E^1 \to E^1$ მრავალსახა ასახვა განსაზღვრულია

$$F(x) = \begin{cases} x+[2;3], & x \in [0;1], \\ \varnothing, & x \notin [0;1] \end{cases}$$

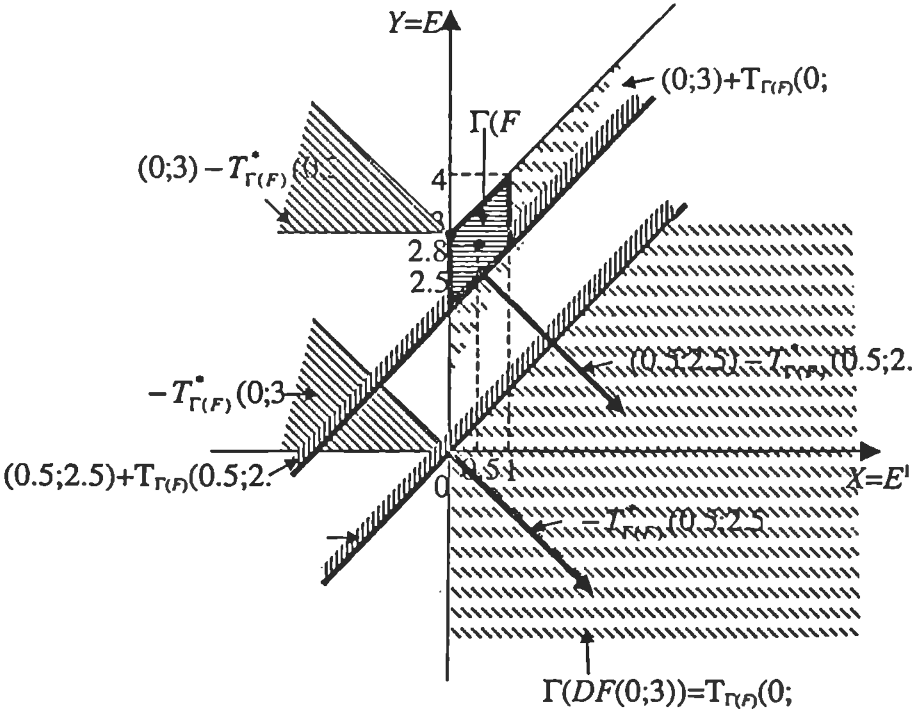
ტოლობით. მაშინ F მრავალსახა ასახვის $\Gamma(F)$ გრაფიკს ექნება ნახ. 3.3-ზე მოცემული სახე. ამ სურათიდან ჩანს, რომ $\Gamma(F)$ ამოზნექილი ქვესიმრავლეა $E^2=X\times Y$ დეკარტულ ნამრავლში. განვიხილოთ (x_0,y_0) წერტილის მდებარეობის რამდენიმე შემთხვევა $\Gamma(F)$ სიმრავლეში. ცხადია, რომ (x_0,y_0) წერტილი შეიძლება იყოს $\Gamma(F)$ სიმრავლის

1. შიგა წერტილი;
2. სასაზღვრო წერტილი;
3. განაპირა წერტილი.

სხვა ტიპის წერტილები $\Gamma(F)$ სიმრავლეს არც კი გააჩნია. განვიხილოთ ცალ-ცალკე სამივე შესაძლო შემთხვევა.

1. $(x_0,y_0) = (0.5;2.8)$.

მაშინ (x_0,y_0) წერტილი $\Gamma(F)$ სიმრავლის შიგა წერტილია, ე.ი. $(x_0,y_0) \in \mathrm{int}\Gamma(F)$. გვაქვს: $T_{\Gamma(F)}(0.5;2.8)=E^2$. უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ $DF(0.5;2.8)(x)=E^1$, $\forall x \in E^1$. ხოლო $-T^*_{\Gamma(F)}(0.5;2.8) = (E^2)^* = \{0\}$, საიდანაც ვასკვნით:



ნახ. 3.3

$$DF(0.5;2.8)^*(q) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } q = 0, \\ \varnothing, & \text{თუ } q \neq 0. \end{cases}$$

2. $(x_0,y_0) = (0.5;2.5)$.

ამ შემთხვევაში (x_0,y_0) წერტილი $\Gamma(F)$ სიმრავლის სასაზღვრო წერტილი, ე.ი. $(x_0,y_0)\in\partial\Gamma(F)$. მაგრამ ეს წერტილი არ არის $\Gamma(F)$ სიმრავლის განაპირა წერტილი. გვაქვს: $T_{\Gamma(F)}(0.5;2.5)=\{\ (x,y)\in E^2 \mid y\geq x\ \}$. ამიტომ, თუ $E^1_+ = \{y\in E^1 \mid y\geq 0\}$, მაშინ

$$DF(0.5;2.5)(x) = \begin{cases} y+E^1_+, & \text{თუ } x = y, \\ \varnothing, & \text{თუ } x \neq y. \end{cases}$$

გარდა ამისა, $-T^{*}_{\Gamma(F)}(0.5;2.5)=\{\ (q,-p)\in E^2\ \mid p=q,\ q\geq 0\ \}$, საიდანაც ვასკვნით:

$$DF(0.5;2.5)^{*}(q)=\begin{cases}-p, & \text{თუ } q=p,\\ \varnothing, & \text{თუ } q\neq p.\end{cases}$$

3. $(x_0,y_0)=(0;3)$.

ამ შემთხვევაში (x_0,y_0) წერტილი არის $\Gamma(F)$ სიმრავლის განაპირა წერტილი. გვაქვს: $T_{\Gamma(F)}(0;3)=\{\ (x,y)\in E^2\mid\ x\geq 0,\ y\leq x\ \}$. მაშინ

$$DF(0;3)(x)=\begin{cases}y-E^1_+, & \text{თუ } x=y,\ x\geq 0,\\ \varnothing, & \text{თუ } x<0.\end{cases}$$

გარდა ამისა, $-T^{*}_{\Gamma(F)}(0;3)=\{\ (q,-p)\in E^2\ \mid\ q\leq 0,\ 0\leq p\leq -q\ \}$, საიდანაც ვასკვნით:

$$DF(0;3)^{*}(q)=\begin{cases}[0;-p], & \text{თუ } q=-p,\ q\leq 0,\\ \varnothing, & \text{თუ } q>0.\end{cases}$$

3.3. სპეციფიკური მრავალსახა ასახვის ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, X არის ბანახის სივრცე, რომელიც ნაწილობრივ დალაგებულია ამოზნექილი, ჩაკეტილი, მასვილი, სხეულოვანი $C\subset X$ კონუსით, ე.ი. $C\cap(-C)=\{0\}$, $\text{int}C\neq\varnothing$. ვთქვათ, Ω ისეთი ამოზნექილი ქვესიმრავლეა X სივრცეში, რომ $\text{int}\Omega\neq\varnothing$. განვიხილოთ $F:X\to 2^Y$ მრავალსახა ასახვა, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$F(x)=\begin{cases}\Omega\bigcap(x+C), & x\in\Omega;\\ \varnothing, & x\notin\Omega.\end{cases}\tag{3.1}$$

ვიტყვით, რომ $x_0\in\Omega$ წერტილი C-ექსტრემალური წერტილია Ω სიმრავლისათვის, თუ x_0 არის F მრავალსახა ასახვის ინვარიანტული წერტილი, ანუ სამართლიანია $F(x_0)=\{x_0\}$ ტოლობა.

თუ Y ბანახის სივრცეა, L ქვესიმრავლეა Y-ში და $\varphi: L\to 2^X$ მრავალსახა ასახვაა, მაშინ x_0 ნებისმიერი C-ექსტრემალური წერტილისათვის $\varphi(L)=\Omega$ სიმრავლიდან $y_0\in\varphi^{-1}(x_0)$ წერტილს არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამონახსენი ეწოდება.

აქაც და შემდგომშიც ვიგულისხმებთ, რომ Ω სიმრავლე არაცარიელი ქვესიმრავლეა X ბანახის სივრცეში.

ცხადია, $DomF=\Omega$.

ვაჩვენოთ, რომ F ასახვა, რომელიც განსაზღვრულია (3.1) ტოლობით, არის ამოზნექილი მრავალსახა ასახვა. ვთქვათ, რომ $(x_1,y_1)\in\Gamma(F)$, $(x_2,y_2)\in\Gamma(F)$ და $\alpha\in[0,1]$, ე.ი. $y_1\in\Omega\cap(x_1+C)$, $y_2\in\Omega\cap(x_2+C)$. მაშინ $y_1\in\Omega$, $y_1\in x_1+C$, $y_2\in\Omega$, $y_2\in x_2+C$. ამრიგად, $\alpha y_1\in\alpha x_1+C$, $(1-\alpha)y_2\in(1-\alpha)x_2+C$, ამიტომ $\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\in\alpha x_1+(1-\alpha)x_2+C$, და ასევე $\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\in\Omega$, $F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=\Omega\cap(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2+C)$. ამის გამო, $\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\in F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$. უკანასკნელი ნიშნავს, რომ $F: X\to 2^X$ ასახვა ამოზნექილია.

შემოვიღოთ $F_1: X\to 2^X$ და $F_2: X\to 2^X$ ორი მრავალსახა ასახვა შემდეგნაირად:

$$F_1(x)=\begin{cases}\Omega, & x\in\Omega;\\ \varnothing, & x\notin\Omega,\end{cases}\tag{3.2}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}x+C, & x\in\Omega;\\ \varnothing, & x\notin\Omega.\end{cases}\tag{3.3}$$

ცხადია, რომ სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$F(x)=(F_1\cap F_2)(x)=F_1(x)\cap F_2(x),\tag{3.4}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$DomF(x) = DomF_1 = DomF_2. \tag{3.5}$$

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 3.1 თუ $\bar{x} \in \mathrm{int}\,\Omega$, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი γ რიცხვი, რომ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\begin{gathered}[F_1(\bar{x}+u_1)-v_1]\bigcap[F_2(\bar{x}+u_2)-v_2] \neq \varnothing,\\ \forall(u_1,v_1), \forall(u_2,v_2) \in \gamma B \times \gamma B,\end{gathered} \tag{3.6}$$

სადაც B ერთეულოვანი სფეროა X სივრცეში.

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. თუ $\bar{x} \in \Omega$, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი δ_1 რიცხვი, რომ $\bar{x}+\delta_1 B \subset \Omega$. განვიხილოთ ორი ნებისმიერი, მაგრამ ერთმანეთისაგან განსხვავებული u_1, $u_2 \in \delta_1 B$ ელემენტი. ვინაიდან $\bar{x}+u_1$, $\bar{x}+u_2 \in \Omega$, ამიტომ F_1 და F_2 მრავალსახა ასახვების (3.2) და (3.3) განსაზღვრების თანახმად ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$F_1(\bar{x}+u_1) = \Omega, \tag{3.7}$$

$$F_2(\bar{x}+u_2) = \bar{x}+u_2+C. \tag{3.8}$$

ვინაიდან $\bar{x}+\delta_1 B \subset \Omega$, ამიტომ (3.7) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\bar{x}+\delta_1 B \subset F_1(\bar{x}+u_1). \tag{3.9}$$

რადგანაც $u_2 \in \delta_1 B$ და $\delta_1 B$ ღია სფეროა, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი δ_2 რიცხვი, რომ $u_2+\delta_2 B \subset \delta_1 B$. მეორე მხრივ, რადგანაც $0 \in C$ და $\mathrm{int}C \neq \varnothing$, ამიტომ $\delta_2 B \cap \mathrm{int}C$ თანაკვეთა არაცარიელი ღია სიმრავლეა, ე.ი. არსებობს ისეთი $\bar{u} \in \delta_2 B \cap \mathrm{int}C$ ელემენტი და დადებითი δ_3 რიცხვი, რომ

$$\bar{u}+\delta_3 B \subset \mathrm{int}C \subset C. \tag{3.10}$$

(3.10) ჩართვიდან ვღებულობთ, რომ

$$\bar{x}+u_2+\bar{u}+\delta_3 B \subset \bar{x}+u_2+C. \tag{3.11}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.8) ტოლობას, მაშინ (3.11) ჩართვიდან დავასკვნით:

$$\bar{x}+u_2+\bar{u}+\delta_3 B \subset F_2(\bar{x}+u_2). \tag{3.12}$$

რადგან $\bar{u} \in \delta_2 B$ და $u_2+\delta_2 B \subset \delta_1 B$, ამიტომ $u_2+\bar{u} \in \delta_1 B$. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი δ_4 რიცხვი, რომ სამართლიანია ჩართვა

$$u_2+\bar{u}+\delta_4 B \subset \delta_1 B. \tag{3.13}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.13) ჩართვას, მაშინ (3.9)-დან ვღებულობთ:

$$\bar{x}+u_2+\bar{u}+\delta_4 B \subset F_1(\bar{x}+u_1). \tag{3.14}$$

ვთქვათ, $\gamma = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$ და $\bar{y}(u_2) = \bar{x}+u_2+\bar{u}$ ($\bar{y}$ დამოკიდებულია u_2-ზე). მაშინ (3.12) და (3.14) ჩართვებიდან მივიღებთ:

$$\bar{y}(u_2)+\gamma B \subset F_1(\bar{x}+u_1),\ \bar{y}(u_2)+\gamma B \subset F_2(\bar{x}+u_2),\ \forall u_1, u_2 \in \gamma B.$$

ეს ნიშნავს, რომ სამართლიანია (3.6) პირობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.1 თუ $\bar{x} \in \operatorname{int}\Omega$, მაშინ $\operatorname{int} F(\bar{x}) \neq \varnothing$.

დამტკიცება. (3.4)-დან გვაქვს

$$\operatorname{int} F(\bar{x}) = \operatorname{int}[F_1(\bar{x}) \bigcap F_2(\bar{x})].$$

ცხადია,

$$\operatorname{int}[F_1(\bar{x}) \bigcap F_2(\bar{x})] = \operatorname{int} F_1(\bar{x}) \bigcap \operatorname{int} F_2(\bar{x}),$$

და თუ გავითვალისწინებთ (3.2) და (3.3)-ს, გვექნება

$$\operatorname{int} F_1(\bar{x}) \bigcap \operatorname{int} F_2(\bar{x}) = (\operatorname{int}\Omega) \bigcap \operatorname{int}(\bar{x} + C).$$

მაგრამ $\bar{x} \in \operatorname{int}\Omega \subset \Omega$, და ამის გამო სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\operatorname{int}\Omega) \bigcap \operatorname{int}(\bar{x} + C) = (\operatorname{int}\Omega) \bigcap \{\bar{x} + \operatorname{int} C\}. \tag{3.15}$$

ვინაიდან $\operatorname{int}\Omega \neq \varnothing$, $\operatorname{int}C \neq \varnothing$ და $\bar{x} \in \operatorname{int}\Omega$, მაშინ (3.15)-დან გამომდინარეობს:

$$(\operatorname{int}\Omega) \bigcap \operatorname{int}(\bar{x} + C) \neq \varnothing.$$

ამრიგად, მიღებული ტოლობათა ერთობლიობადან ვასკვნით, რომ $\operatorname{int} F(\bar{x}) \neq \varnothing$. ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2 თუ $\bar{x} \in \operatorname{int}\Omega$, მაშინ $0 \in \operatorname{int}(F_1 - F_2)(\bar{x})$.

დამტკიცება. დავუშვათ, $\bar{x} \in \operatorname{int}\Omega$. ლემა 3.1-ის თანახმად გვაქვს $\operatorname{int} F(\bar{x}) \neq \varnothing$, ამიტომ $\operatorname{int} F_1(\bar{x}) \bigcap \operatorname{int} F_2(\bar{x}) \neq \varnothing$.

ამდენად, არსებობს ისეთი $\bar{y}$, რომ $\bar{y} \in \operatorname{int} F_1(\bar{x})$ და $\bar{y} \in \operatorname{int} F_2(\bar{x})$. ამიტომ

$$0 = \bar{y} - \bar{y} \in \operatorname{int} F_1(\bar{x}) - \operatorname{int} F_2(\bar{x}).$$

თუ ვისარგებლებთ იმ ფაქტით, რომ A და B სიმრავლეთა ამოზნექილობიდან გამომდინარეობს $\operatorname{int}A+B = \operatorname{int}(A+B)$ ტოლობა (იხ. [119]), მაშინ ვღებულობთ:

$$\operatorname{int} F_1(\bar{x}) - \operatorname{int} F_2(\bar{x}) = \operatorname{int} F_1(\bar{x}) + \operatorname{int}(-F_2(\bar{x})) =$$
$$= \operatorname{int}(F_1(\bar{x}) + (-F_2(\bar{x})) = \operatorname{int}(F_1 - F_2)(\bar{x}),$$

რადგან $F_1(\bar{x})$ და $F_2(\bar{x})$ ამოზნექილი სიმრავლეებია.

ყოველივე ამის გამო, $0 \in \operatorname{int}(F_1 - F_2)(\bar{x})$. ამით დამტკიცება დასრულებულია.

შენიშვნა 3.1 ნებისმიერი $x \in \Omega$ წერტილი არის $F : X \to 2^X$ მრავალსახა ასახვის უძრავი წერტილი, ე.ი. $x \in F(x)$, $\forall x \in \operatorname{Dom}F$. ამის გამო, თუ $\bar{x} \in \Omega$ ისეთი წერტილია, რომ $F(\bar{x})$ შედგება ერთადერთი წერტილისაგან, მაშინ $F(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

ამ შენიშვნაში $\bar{x}$ არის Ω სიმრავლის სასაზღვრო წერტილი. მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, კერძოდ, რომ $\bar{x}$ არ არის Ω სიმრავლის სასაზღვრო წერტილი, მაშინ უნდა შესრულდეს $\bar{x} \in \mathrm{int}\Omega$ პირობა, რადგან $\bar{x} \in \Omega$. ამ შემთხვევაში ლემა 3.1-ის თანახმად, $\mathrm{int}\, F(\bar{x}) \neq \varnothing$, ე.ი., $F(\bar{x})$ არ შეიძლება შედგებოდეს ერთადერთი ელემენტისაგან.

ამრიგად, გვაქვს

$$\begin{aligned}\Gamma(F_1) &= \{(x,y) \in X \times X \mid y \in F_1(x)\} = \{(x,y) \in \Omega \times X \mid \\ &\mid y \in F_1(x)\} = \{(x,y) \in \Omega \times X \mid y \in \Omega\} = \\ &= \{(x,y) \in \Omega \times \Omega\} = \Omega \times \Omega,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(F_2) &= \{(x,y) \in X \times X \mid y \in F_2(x)\} = \{(x,y) \in \Omega \times X \mid \\ &\mid y \in F_2(x)\} = \{(x,y) \in \Omega \times X \mid y \in x + C\} = \\ &= \{(x,y) \in \Omega \times X \mid y - x \in C\} = \{(x, x+z) \in \Omega \times X \mid z \in C\}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

რადგან Ω და C ჩაკეტილი სიმრავლეებია X სივრცეში, ამიტომ უშუალოდ (3.16) და (3.17) ტოლობებიდან გამომდინარეობს $\Gamma(F_1)$-ი და $\Gamma(F_2)$-ი სიმრავლეების ჩაკეტილობა $X{\times}X$ დეკარტულ ნამრავლ'ში. ასევე ცხადია, რომ

$$\Gamma(F) = \Gamma(F_1) \cap \Gamma(F_2). \tag{3.18}$$

შენიშვნა 3.2 თუ $(x_0, y_0) \in \Gamma(F)$ და $x_0 \in \Omega$, მაშინ შესაძლოა მოიძებნოს ისეთი ელემენტი $z_0 \in C$, რომ $y_0 = x_0 + z_0 \in \mathrm{int}\,\Omega$.

ამრიგად, იმ შემთხვევაში, როდესაც საქმე გვაქვს F მრავალსახა ასახვის გრაფიკის რომელიმე წერტილთან, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $(x_0, x_0 + z_0) \in \Omega \times \Omega$ რომელიმე $z_0 \in C$ წერტილისათვის.

3.4. სპეციფიკური მრავალსახა ასახვის წარმოებული და კოდიფერენციალი

ამ პარაგრაფში ზემოთ განსაზღვრულ ცნებებზე დაყრდნობით დავადგენთ სპეციფიკური F მრავალსახა ასახვის დიფერენციალისა და კოდიფერენციალის ანალიზურ სტრუქტურებს. მათ საფუძველზე შემდგომში მიღებული იქნება არასკალარული ოპტიმიზაციის აუცილებელი პირობები.

როგორც 3.2 პარაგრაფში იყო განსაზღვრული თუ X წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა და Q არის არაცარიელი და ამოზნექილი ქვესიმრავლე X-ში, მაშინ $x\in Q$ წერტილისათვის შემდეგ სიმრავლეს

$$T_Q(x)=\bigcup_{h>0}\frac{1}{h}(Q-x)$$

ეწოდება Q სიმრავლის მხები კონუსი x წერტილში. მხები კონუსის შეუღლებულ კონუს აქვს სახე:

$$T_Q^*(x)=\{p\in X^*\ \big|\ <p,x>\geq 0,\ \forall x\in T_Q(x)\}.$$

ვთქვათ, X წარმოადგენს ბანახის სივრცეს. $L(X,X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X სივრციდან X-ში წრფივ უწყვეტ ოპერატორთა წრფივი სივრცე.

ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას:

თეორემა 3.2 ვთქვათ, X ბანახის სივრცეა, Ω არის X-ის ამოზნექილი კომპაქტური ქვესიმრავლე, ხოლო C ამოზნექილი და ჩაკეტილი კონუსია X-ში. დავუშვათ, $A\in L(X,X)$, ხოლო $Q:X\to 2^X$ მრავალსახა ასახვაა, რომელიც მოცემულია პირობით

$$Q(x)=\begin{cases}Ax+C, & x\in\Omega,\\ \varnothing, & x\notin\Omega.\end{cases}\tag{3.19}$$

მაშინ ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in\Gamma(Q)$ და $u\in X$, $q\in X^*$-თვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$DQ(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}Au+T_C(y_0-Ax_0), & u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing, & u\notin T_\Omega(x_0),\end{cases}\tag{3.20}$$

$$DQ(x_0,y_0)^*(q)=\begin{cases}A^*q-T_\Omega^*(x_0), & q\in T_C^*(y_0-Ax_0),\\ \varnothing, & q\notin T_C^*(y_0-Ax_0).\end{cases}\tag{3.21}$$

დამტკიცება. ვინაიდან Ω და C წარმოადგენენ X სივრცის ამოზნექილ და ჩაკეტილ ქვესიმრავლეებს, ხოლო A წრფივი უწყვეტი ოპერატორია X-დან X-ში, ადვილი საჩვენებელია, რომ $Q:X\to 2^X$ მრავალსახა ასახვა ჩაკეტილი და ამოზნექილია, ხოლო მისი $\Gamma(Q)$ გრაფიკი ამოზნექილი და ჩაკეტილი სიმრავლეა $X\times X$ დეკარტულ ნამრავლში.

პირველ რიგში დავამტკიცოთ (3.20) ტოლობის სამართლიანობა. ვთქვათ, $(x_0,y_0)\in\Gamma(Q)$, $u\in X$. წარმოებულის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს:

$$v\in DQ(x_0,y_0)(u) \quad\Leftrightarrow\quad (u,v)\in T_{\Gamma(Q)}(x_0,y_0).$$

ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ არსებობს წერტილთა ორი ისეთი მიმდევრობა $\{u_n\}\subset X$, $\{v_n\}\subset X$, და რიცხვთა მიმდევრობა $\{h_n\}$, $h_n>0$, რომ

$$u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u,\quad v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}v,\quad (x_0+h_nu_n,y_0+h_nv_n)\in\Gamma(Q),\ \forall n\in N.$$

Q ასახვის (3.19) განსაზღვრის თანახმად ეს უკანასკნელი ნიშნავს:

$$x_0+h_nu_n\in\Omega,\forall n\in N, \tag{3.22}$$

$$y_0+h_nv_n\in A(x_0+h_nu_n)+C,\forall n\in N. \tag{3.23}$$

(3.23) ჩართვიდან გამომდინარეობს:

$$y_0-Ax_0+h_n(v_n-Au_n)\in C,\quad \forall n\in N. \tag{3.24}$$

ვინაიდან $x_0\in\Omega$, $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u$, და Ω კომპაქტურია, (3.22) პირობიდან გამომდინარეობს $\{h_n\}$-ის კრებადობა რომელიმე ნამდვილი რიცხვისაკენ. მაშინ $T_\Omega(x_0)$ კონუსის განსაზღვრის თანახმად, ვღებულობთ, რომ $u\in T_\Omega(x_0)$. მეორე მხრივ, რადგან A წრფივი უწყვეტი ოპერატორია X სივრციდან X-ში და აგრეთვე $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u$, $v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}v$, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$v_n-Au_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}v-Au.$$

რადგან $(x_0,y_0)\in\Gamma(Q)$, ამიტომ $y_0-Ax_0\in C$. $T_C(y_0-Ax_0)$ კონუსის განსაზღვრის თანახმად (3.24) ჩართვიდან ვასკვნით: $v-Au\in T_C(y_0-Ax_0)$. ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება:

თუ $u\in T_\Omega(x_0)$, მაშინ

$$v\in DQ(x_0,y_0)(u)\quad\Rightarrow\quad v\in Au+T_C(y_0-Ax_0). \tag{3.25}$$

მეორე მხრივ, ადვილი საჩვენებელია, რომ $\mathrm{Dom}DQ(x_0,y_0)\subset T_\Omega(x_0)$. ამიტომ, თუ $u\notin T_\Omega(x_0)$, მაშინ ეფექტურობის არის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს:

$$u\notin DomDQ(x_0,y_0)\quad\Leftrightarrow\quad DQ(x_0,y_0)(u)=\varnothing. \tag{3.26}$$

ვაჩვენოთ (3.25)-ის საწინააღმდეგო ჩართვის სამართლიანობა. მხები კონუსის განმარტებიდან გვაქვს:

$$u\in T_\Omega(x_0),\ v\in Au+T_C(y_0-Ax_0)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\exists\{u_n\}\subset X,\ \{\tau_n\},\ \tau_n>0,\ u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u,\ x_0+\tau_nu_n\in\Omega,\ \forall n\in N,\\ \exists\{w_n\}\subset X,\ \{\gamma_n\},\ \gamma_n>0,\ w_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}v-Au,\ y_0-Ax_0+\gamma_nw_n\in C,\ \forall n\in N.\end{cases} \tag{3.27}$$

დავუშვათ, $h_n = \min\{\tau_n, \gamma_n\}$, $v_n = w_n + Au_n$, $\forall n \in N$. რადგან $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v - Au$ და $A \in L(X,X)$, ცხადია, რომ $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$. (3.27)-დან მივიღებთ:

$$\begin{cases} \exists\{u_n\} \subset X,\ \{h_n\},\ h_n > 0,\ u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u,\ x_0 + h_n u_n \in \Omega,\ \forall n \in N, \\ \exists\{v_n\} \subset X,\ \{h_n\},\ h_n > 0,\ v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v,\ y_0 - Ax_0 + h_n(v_n - Au_n) \in C,\ \forall n \in N. \end{cases}$$

ამ უკანასკნელისა და Q მრავალსახა ასახვის განსაზღვრის თანახმად სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$(x_0 + h_n u_n, y_0 + h_n v_n) \in \Gamma(Q),\ \forall n \in N. \tag{3.28}$$

ამგვარად, არსებობს ისეთი $\{(u_n, v_n)\} \subset X \times X$ წერტილთა მიმდევრობა და $\{h_n\}$, $h_n > 0$, რიცხვთა მიმდევრობა, რომ $(u_n, v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, v)$ და სრულდება (3.28) პირობა. მაშინ, რადგან $(x_0, y_0) \in \Gamma(Q)$, სრულდება ჩართვა $(u,v) \in T_{\Gamma(Q)}(x_0, y_0)$. ამ ფაქტიდან პირდაპირ გამომდინარეობს:

$$v \in DQ(x_0, y_0)(u),\quad \forall u \in T_\Omega(x_0). \tag{3.29}$$

(3.25), (3.26) და (3.29)-დან გამომდინარეობს:

$$DQ(x_0, y_0)(u) = \begin{cases} Au + T_C(y_0 - Ax_0), & u \in T_\Omega(x_0), \\ \varnothing, & u \notin T_\Omega(x_0), \end{cases}$$
$$\forall (x_0, y_0) \in \Gamma(Q),\ \forall u \in X.$$

ამით ტოლობა (3.20) დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ (3.21) ტოლობის სამართლიანობა.

(3.20) ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned} \Gamma(DQ(x_0, y_0)) &= \{(u,v) \in T_\Omega(x_0) \times X \mid v - Au \in T_C(y_0 - Ax_0)\} = \\ &= \{(u, w + Au) \in T_\Omega(x_0) \times X \mid w \in T_C(y_0 - Ax_0)\} = T_{\Gamma(Q)}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.30}$$

მეორე მხრივ, კოდიფერენციალის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$p \in DQ(x_0, y_0)^*(q) \iff \langle p, -q \rangle \in -T^*_{\Gamma(Q)}(x_0, y_0).$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.30)-ს, ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned} &p \in DQ(x_0, y_0)^*(q) \iff \\ &\iff \langle p, u \rangle - \langle q, w + Au \rangle = \langle p - A^* q, u \rangle - \langle q, w \rangle \le 0, \\ &\forall u \in T_\Omega(x_0),\ \forall w \in T_C(y_0 - Ax_0). \end{aligned} \tag{3.31}$$

შევნიშნოთ, რომ $T_\Omega(x_0)$ და $T_C(y_0 - Ax_0)$ ამოზნექილი და ჩაკეტილი კონუსებია X სივრცეში. პირველ რიგში განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $q \notin T^*_C(y_0 - Ax_0)$. მაშინ აღნიშნული $q \in X^*$ -თვის შეიძლება შევარჩიოთ ისე-

თი $w=w(q)\in T_C(y_0-Ax_0)$, რომ $<q,w(q)><0$. რადგან ნებისმიერი დადებითი t-თვის გვაქვს $tw(p)\in T_C(y_0-Ax_0)$, ამიტომ ნებისმიერი $p\in X^*$ ფუნქციონალისათვის შეგვიძლია შევარჩიოთ t-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ (3.31) უტოლობის მარჯვენა მხარე დაირღვეს. ეს კი თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $p\notin DQ(x_0,y_0)^*(q)$, ე.ი., თუ $q\notin T_C^*(y_0-Ax_0)$, მაშინ $DQ(x_0,y_0)^*(q)=\varnothing$. ამის გარდა, რადგან $T_\Omega(x_0)$ და $T_C(y_0-Ax_0)$ ამოზნექილი და ჩაკეტილი კონუსებია, პირობა (3.31)-ის მარჯვენა მხარეში სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესრულებულია შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$p-A^*q\in -T_\Omega^*(x_0),\quad q\in T_C^*(y_0-Ax_0).$$

ე.ი. ვღებულობთ:

$$DQ(x_0,y_0)^*(q)=\begin{cases}A^*q-T_\Omega^*(x_0), & q\in T_C^*(y_0-Ax_0),\\ \varnothing, & q\notin T_C^*(y_0-Ax_0).\end{cases}$$

ამრიგად, (3.21) ტოლობა დამტკიცებულია. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

(3.19)-ით ტოლობით განსაზღვრული $Q:X\to 2^X$ მრავალსახა სახვისათვის დამტკიცებული თეორემა ((3.20) და (3.21) ფორმულები) ცხადი სახით იძლევა მისი წარმოებულისა და კოდიფერენციალის ანალიზურ სტრუქტურას.

ლემა 3.3. ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in\Gamma(F_2)$ წერტილისათვის და $u\in X$, $q\in X^*$ ელემენტებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$DF_2(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}u+T_C(y_0-Ax_0), & u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing, & u\notin T_\Omega(x_0),\end{cases}\tag{3.32}$$

$$DF_2(x_0,y_0)^*(q)=\begin{cases}q-T_\Omega^*(x_0), & q\in T_C^*(y_0-Ax_0),\\ \varnothing, & q\notin T_C^*(y_0-Ax_0).\end{cases}\tag{3.33}$$

დამტკიცება. დამტკიცებისათვის საკმარისია ვისარგებლოთ თეორემა 3.2-ით, რომელშიც $A\in L(X,X)$ ოპერატორის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ E იგივური ოპერატორი და გავიხსენოთ ის გარემოება, რომ $E^*\in L(X,X)$ აგრეთვე იგივური ოპერატორია X^* სივრციდან X^* სივრცეში. ამით ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.3. ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in\Gamma(F_1)$ და $u\in X$, $q\in X^*$ ელემენტებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$DF_1(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}T_\Omega(y_0), & u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing, & u\notin T_\Omega(x_0),\end{cases}\tag{3.34}$$

$$DF_1(x_0,y_0)^*(q)=\begin{cases}-T_\Omega^*(x_0), & q\in T_\Omega^*(y_0),\\ \varnothing, & q\notin T_\Omega^*(y_0).\end{cases}\tag{3.35}$$

დამტკიცება. (3.16) ტოლობის თანახმად გვაქვს $\Gamma(F_1)=\Omega\times\Omega$. ამიტომ

$$v \in DF_1(x_0, y_0)(u) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (u,v) \in T_{\Gamma(F_1)}(x_0, y_0) = T_{\Omega\times\Omega}(x_0, y_0) = T_\Omega(x_0, y_0) \times T_\Omega(x_0, y_0),$$

$$u \notin T_\Omega(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad u \notin Dom DF_1(x_0, y_0) \Leftrightarrow \quad DF_1(x_0, y_0)(u) = \varnothing,$$

ე.ი.,

$$DF_1(x_0, y_0)(u) = \begin{cases} T_\Omega(y_0), u \in T_\Omega(x_0), \\ \varnothing, \qquad u \notin T_\Omega(x_0). \end{cases}$$

ამგვარად, (3.34) ტოლობა დამტკიცებულია. დავამტკიცოთ ახლა (3.35) ტოლობის სამართლიანობა. ზემოთ მოყვანილი ფაქტიდან გამომდინარეობს:

$$\Gamma(DF_1(x_0, y_0)) = \{(u,v) \in T_\Omega(x_0) \times T_\Omega(y_0)\} = T_{\Gamma(F_1)}(x_0, y_0),$$

$$p \in DF_1(x_0, y_0)^*(q) \quad \Leftrightarrow \quad (p,-q) \in -T^*_{\Gamma(F_1)}(x_0, y_0).$$

ეს კი, თავის მხრივ, ნიშნავს

$$< p,u > - < q,v > \leq 0, \forall u \in T_\Omega(x_0), \forall v \in T_\Omega(y_0).$$

რადგან $T_\Omega(x_0)$ და $T_\Omega(y_0)$ ამოზნექილი, ჩაკეტილი კონუსებია X სივრცეში, ზემოთ მოყვანილ უტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p \in -T^*_\Omega(x_0)$ და $q \in T^*_\Omega(y_0)$. თუ $q \notin T^*_\Omega(y_0)$, მაშინ, ცხადია, $DF_1(x_0,y_0)^*(q) = \varnothing$. ამრიგად,

$$DF_1(x_0, y_0)^*(q) = \begin{cases} -T^*_\Omega(x_0), q \in T^*_\Omega(y_0), \\ \varnothing, \qquad q \notin T^*_\Omega(y_0). \end{cases}$$

ამით დამტკიცება დასრულებულია.

ლემა 3.3 და თეორემა 3.3 ფაქტიურად გვაძლევენ F მრავალსახა ასახვის დიფერენციალისა და კოდიფერენციალის განსაზღვრის საშუალებას ცხადი სახით.

თეორემა 3.4. თუ $\mathrm{int}\Omega \neq \varnothing$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ჩართვები:

$$(0,0) \in \mathrm{int}(\Gamma(F_1) - \Gamma(F_2)), \tag{3.36}$$

$$(0,0) \in \mathrm{int}(T_{\Gamma(F_1)}(x_0, y_0) - T_{\Gamma(F_2)}(x_0, y_0)), \ \forall (x_0, y_0) \in \Gamma(F). \tag{3.37}$$

დამტკიცება. თავიდან ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია (3.36) ჩართვა. რადგან $\mathrm{int}\Omega \neq \varnothing$, ამიტომ არსებობს $\bar{x} \in \mathrm{int}\,\Omega$. . ლემა 3.1-ის თანახმად გვაქვს, რომ $\mathrm{int}\, F(\bar{x}) \neq \varnothing$, საიდანაც გამომდინარეობს $\bar{y} \in \mathrm{int}\, F(\bar{x}) \subset F(\bar{x}) = F_1(\bar{x}) \bigcap F_2(\bar{x})$ ელემენტის არსებობა. ამგვარად,

$$(0,0) = (\bar{x}, \bar{y}) - (\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma(F_1) - \Gamma(F_2).$$

რადგან $\bar{x} \in \mathrm{int}\,\Omega$, ამიტომ $(x,y) \in X \times X$ ნებისმიერი წყვილისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\bar{s}$ რიცხვი, რომ

$$\bar{x} + sx \in \mathrm{int}\, Q, \quad \forall s \in [0, \bar{s}],$$

ასევე არსებობს ისეთი $\bar{l}$ რიცხვი, რომ
$$ty \in \operatorname{int}(F_1 - F_2)(\bar{x}), \quad \forall t \in [0,\bar{l}],$$
ვინაიდან ლემა 3.2-ის თანახმად $0 \in \operatorname{int}(F_1 - F_2)(\bar{x})$.

ვთქვათ, $d = \min(\bar{s},\bar{l})$, მაშინ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ჩართვების სამართლიანობა:
$$\bar{x} + tx \in \operatorname{int} Q, \quad \forall t \in [0,\delta],$$
$$ty \in \operatorname{int}(F_1 - F_2)(\bar{x}), \quad \forall t \in [0,\delta]. \tag{3.38}$$
აქედან, F_1 ასახვის განსაზღვრის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს ტოლობები:
$$F_1(\bar{x} + tx) = \Omega = F_1(\bar{x}).$$
(3.38) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ჩართვა:
$$ty \subset (F_1 - F_2)(\bar{x}) = F_1(\bar{x}) - F_2(\bar{x}), \quad \forall t \in [0,\delta].$$
ამიტომ, არსებობს ისეთი ორი z_1, z_2 ვექტორი, რომ
$$z_1 \in F_1(\bar{x}) = F_1(\bar{x} + tx), \quad z_2 \in F_2(\bar{x})$$
და
$$ty = z_1 - z_2.$$
ამგვარად,
$$(0,0) + t(x,y) = (tx,ty) = (\bar{x} + tx - \bar{x}, y_1 - y_2) =$$
$$= (\bar{x} + tx, y_1) - (\bar{x}, y_2) \in \Gamma(F_1) - \Gamma(F_2), \quad \forall t \in [0,\delta].$$
აქედან გამომდინარეობს, რომ $(0,0) \in \operatorname{cor}(\Gamma(F_1) - \Gamma(F_2))$[1].

ვინაიდან $\Gamma(F_1)$-$\Gamma(F_2)$ ამოზნექილი სიმრავლეა, ამიტომ
$$\operatorname{cor}(\Gamma(F_1) - \Gamma(F_2)) = \operatorname{int}(\Gamma(F_1) - \Gamma(F_2)).$$
აქედან
$$(0,0) \in \operatorname{int}(\Gamma(F_1) - \Gamma(F_2)).$$
ახლა ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია (3.37) ჩართვა. თავიდან შევნიშნოთ, რომ (3.18) ტოლობის თანახმად $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$ ჩართვას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(x_0,y_0) \in \Gamma(F_1)$ და $(x_0,y_0) \in \Gamma(F_2)$. მეორე მხრივ, მხები კონუსის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს:
$$\Gamma(F_1) \subset (x_0, y_0) + T_{\Gamma(F_1)}(x_0, y_0),$$
$$\Gamma(F_2) \subset (x_0, y_0) + T_{\Gamma(F_2)}(x_0, y_0).$$
აქედან ვღებულობთ:
$$\Gamma(F_1) - \Gamma(F_2) \subset T_{\Gamma(F_1)}(x_0, y_0) - T_{\Gamma(F_2)}(x_0, y_0). \tag{3.39}$$

---

[1] cor Q - Q სიმრავლის ალგებრული შიგა ნაწილი.

რადგან $\operatorname{int}[\Gamma(F_1)-\Gamma(F_2)]\subset\Gamma(F_1)-\Gamma(F_2)$, (3.36) და (3.39)-ის გამოყენებით, მივიღებთ (3.37)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3.3. ვინაიდან სამართლიანია ტოლობები

$$\Gamma(DF_1(x_0,y_0))=T_{\Gamma(F_1)}(x_0,y_0),$$

$$\Gamma(DF_2(x_0,y_0))=T_{\Gamma(F_2)}(x_0,y_0),$$

ამიტომ ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$ წერტილისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$(0,0)\in\operatorname{int}[\Gamma(DF_1(x_0,y_0))-\Gamma(DF_2(x_0,y_0))]. \tag{3.40}$$

თეორემა 3.5. ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $u\in X$ ელემენტისათვის სამართლანია შემდეგი ტოლობა:

$$DF(x_0,y_0)(u)=DF_1(x_0,y_0)(u)\bigcap DF_2(x_0,y_0)(u)=$$

$$=\begin{cases}T_\Omega(y_0)\bigcap[u+T_C(y_0-x_0), & u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing, & u\notin T_\Omega(x_0).\end{cases}$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$\Gamma(DF(x_0,y_0))=T_{\Gamma(F)}(x_0,y_0)=T_{\Gamma(F_1)\cap\Gamma(F_2)}(x_0,y_0).$$

რადგან $\Gamma(F_1)$ და $\Gamma(F_2)$ ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებია $X\times X$ დეკარტულ ნამრავლში, ამიტომ თეორემა 3.4-ის თანახმად გვექნება:

$$(0,0)\in\operatorname{int}(\Gamma(F_1)-\Gamma(F_2)).$$

ცნობილი ფაქტის გამოყენებით (იხ. [31]), ვღებულობთ შემდეგ ტოლობებს:

$$T_{\Gamma(F_1)\cap\Gamma(F_2)}(x_0,y_0)=T_{\Gamma(F_1)}(x_0,y_0)\bigcap T_{\Gamma(F_2)}(x_0,y_0)=$$

$$=\Gamma(DF_1(x_0,y_0))\bigcap\Gamma(DF_2(x_0,y_0))=$$

$$=\Gamma[DF_1(x_0,y_0)\bigcap DF_2(x_0,y_0)].$$

აქედან კი ვასკვნით:

$$DF(x_0,y_0)=DF_1(x_0,y_0)\bigcap DF_2(x_0,y_0).$$

(3.32)-ისა და (3.34)-ის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$DF(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}T_\Omega(y_0)\bigcap[u+T_C(y_0-x_0)], & u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing, & u\notin T_\Omega(x_0).\end{cases}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემით საბოლოოდ დადგინდა F მრავალსახა ასახვის დიფერენციალის სტრუქტურა.

თეორემა 3.6. ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$ წერტილისათვის და $q\in X^*$ ელემენტისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$DF(x_0,y_0)^*(q)=DF_1(x_0,y_0)^*(q_1)+DF_2(x_0,y_0)^*(q_2), \tag{3.41}$$

სადაც $q=q_1+q_2$.

დამტკიცება. რადგან $DF_1(x_0,y_0)$, $DF_2(x_0,y_0) : X\to 2^X$ ამოზნექილი და ჩაკეტილი მრავალსახა ასახვებია, ამიტომ სრულდება (3.40) ჩართვა. მაშინ, ცნობილი ფაქტის გათვალისწინებით (იხ. [31]), მივიღებთ (3.41) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემით დადგინდა F მრავალსახა ასახვის კოდიფერენციალის ანალიზური სტრუქტურაც.

ამრიგად, საბოლოოდ ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$DF_1(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}T_\Omega(y_0),\ u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing,\qquad u\notin T_\Omega(x_0),\end{cases}\tag{3.42}$$

$$DF_2(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}u+T_C(y_0-Ax_0),\ u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing,\qquad u\notin T_\Omega(x_0),\end{cases}\tag{3.43}$$

$$DF_1(x_0,y_0)^*(q_1)=\begin{cases}-T^*_\Omega(x_0),\ q_1\in T^*_\Omega(y_0),\\ \varnothing,\qquad q_1\notin T^*_\Omega(y_0),\end{cases}\tag{3.44}$$

$$DF_2(x_0,y_0)^*(q_2)=\begin{cases}q_2-T^*_\Omega(x_0),\ q_2\in T^*_C(y_0-Ax_0),\\ \varnothing,\qquad q_2\notin T^*_C(y_0-Ax_0),\end{cases}\tag{3.45}$$

$$\begin{cases}F(x)=F_1(x)\bigcap F_2(x),\\ (x_0,y_0)\in\Gamma(F)\end{cases}\Leftrightarrow\quad (x_0,y_0)\in\Gamma(F_1),(x_0,y_0)\in\Gamma(F_2).\tag{3.46}$$

თეორემა 3.5-ის თანახმად

$$DF(x_0,y_0)(u)=\begin{cases}T_\Omega(y_0)\bigcap[u+T_C(y_0-x_0)],\ u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing,\qquad u\notin T_\Omega(x_0).\end{cases}\tag{3.47}$$

თეორემა 3.6-ის თანახმად

$$DF(x_0,y_0)^*(q)=DF_1(x_0,y_0)^*(q_1)+DF_2(x_0,y_0)^*(q_2),\quad q=q_1+q_2.\tag{3.48}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ შენიშვნა 3.2-ს, იმ შემთხვევაში, როდესაც $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$, შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი $z_0\in C$ ვექტორი, რომ $y_0=x_0+z_0$ და $x_0+z_0\in\Omega$, $x_0\in\Omega$. ამგვარად, ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$DF_1(x_0,x_0+z_0)^*(q_1)=\begin{cases}-T^*_\Omega(x_0),\ q_1\in T^*_\Omega(x_0+z_0),\\ \varnothing,\qquad q_1\notin T^*_\Omega(x_0+z_0),\end{cases}$$

(3.49)

$$DF_2(x_0,x_0+z_0)^*(q_2)=\begin{cases}q_2-T^*_\Omega(x_0),\ q_2\in T^*_C(z_0),\\ \varnothing,\qquad q_2\notin T^*_C(z_0).\end{cases}$$

მიღებული თანაფარდობები არსებითად გამოყენებული იქნება მომდევნო პარაგრაფებში.

3.5. მხები კონუსის ერთი თვისება

არასკალარული ოპტიმიზაციის კონუსური ოპტიმალობის აუცილებელი პირობების მისაღებად დაგვჭირდება მხები კონუსის ერთი თვისება F მრავალსახა ასახვის ინვარიანტულ წერტილთან დაკავშირებით.

თეორემა 3.7. თუ $F(x_0) = \{x_0\}$, მაშინ სამართლიანია ტოლობა:

$$\operatorname{int} T_\Omega(x_0) \bigcap C = \varnothing. \tag{3.50}$$

დამტკიცება. რადგან Ω ამოზნექილი და ჩაკეტილი სიმრავლეა X სივრცეში არაცარიელი შიგა ნაწილით, ამიტომ, ცნობილი ფაქტის თანახმად (იხ. [31]), გვაქვს $\operatorname{int} T_\Omega(x_0) \neq \varnothing$, ამასთან სრულდება პირობა

$$\operatorname{int} T_\Omega(x_0) = \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(\operatorname{int} \Omega - x_0). \tag{3.51}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი., ჩავთვლით, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\operatorname{int} T_\Omega(x_0) \bigcap C \neq \varnothing.$$

მაშინ არსებობს z ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $z \in \operatorname{int} T_\Omega(x_0) \cap C$ პირობას. (3.51) ტოლობიდან მივიღებთ: არსებობს ისეთი $\bar{h}$ ელემენტი, რომ $z \in \left(\frac{1}{\bar{h}}\right)(\operatorname{int} \Omega - x_0)$. აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა: მოიძებნება ისეთი $\bar{x} \in \operatorname{int} \Omega$, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\bar{h} z = \bar{x} - x_0. \tag{3.52}$$

რადგან C კონუსია, $z \in C$ და $\bar{h} > 0$, ამიტომ (3.52)-დან ვღებულობთ:

$$\bar{x} - x_0 \in C. \tag{3.53}$$

მეორე მხრივ, სამართლიანია $\operatorname{int} \Omega \subset \Omega$ ჩართვა, ამიტომ

$$\bar{x} \in \Omega. \tag{3.54}$$

(3.52) და (3.53) პირობებიდან ვღებულობთ შემდეგ ჩართვას:

$$\bar{x} \in \Omega \bigcap (x_0 + C). \tag{3.55}$$

ახლა გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ x_0 არის Ω სიმრავლის სასაზღვრო წერტილი. რადგან $\bar{x} \in \operatorname{int} \Omega$, ამიტომ $\bar{x} \neq x_0$. ე.ი., შეგვიძლია დავასკვნათ: არსებობს ისეთი $\bar{x} \in \Omega$ წერტილი, რომ $\bar{x} \neq x_0$ და $\bar{x} \in F(x_0)$. (ეს ფაქტი აშკარაა, (3.55) ჩართვიდან გამომდინარე). ეს კი ეწინააღმდეგება $F(x_0) = \{x_0\}$ პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3.4. თეორემა 3.7 სამართლიანია მაშინაც, როდესაც X წარმოადგენს ნორმირებულ სივრცეს.

იმისდამიუხედავად, რომ დამტკიცებული თეორემა 3.7 დამხმარე ხასიათისაა ჩვენი კონკრეტული მიზნისათვის, მას გააჩნია თავისთავადი ინტერესიც.

3.C. კონუსური ოპტიმალობის პირობები

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ $x_0 \in \Omega$ წარმოადგენს F მრავალსახა ასახვის ინვარიანტულ წერტილს, მაშინ სინამდვილეში x_0 არის Ω სიმრავლის C-მინიმალური წერტილი პარეტოს აზრით. თუ x_0 აკმაყოფილებს $F(x_0) = \Omega$ ტოლობას, მაშინ x_0-ს ეწოდება Ω სიმრავლის აბსოლუტური C-მინიმალური წერტილი.

ამ შენიშვნის თანახმად, დებულება, რომელიც წარმოადგენს $F(x_0) = \{x_0\}$ ან $F(x_0)=\Omega$ ტოლობიდან მიღებულ შედეგს, იქნება კონუსური ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა, შესაბამისი აზრით.

თეორემა 3.6-ის თანახმად სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$Dom[DF(x_0,x_0+z_0)]^* = Dom[DF_1(x_0,x_0+z_0)]^* +$$
$$+ Dom[DF_2(x_0,x_0+z_0)]^*.$$

მაგრამ (3.49) პირობის თანახმად ადგილი აქვს ტოლობებს

$$Dom[DF_1(x_0,x_0+z_0)]^* = T_\Omega^*(x_0+z_0),$$
$$Dom[DF_2(x_0,x_0+z_0)]^* = T_C^*(z_0).$$

ამგვარად, შეგვიძლია დავასკვნათ:

$$Dom[DF(x_0,x_0+z_0)]^* = T_\Omega^*(x_0+z_0)+T_C^*(z_0).$$

აგრეთვე, შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს ჩართვას

$$T_\Omega^*(x_0+z_0)\bigcap T_C^*(z_0) \subset T_\Omega^*(x_0+z_0)+T_C^*(z_0).$$

თეორემა 3.6-ისა და (3.49) ტოლობის თანახმად მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$DF(x_0,x_0+z_0)^*(q_1+q_2) =$$
$$= \begin{cases} q_2-(T_\Omega^*(x_0)+T_\Omega^*(x_0)), & q_1+q_2 \in T_\Omega^*(z_0+x_0)+T_C^*(z_0), \\ \varnothing, & q_1+q_2 \notin T_\Omega^*(z_0+x_0)+T_C^*(z_0). \end{cases} \tag{3.56}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ $T_\Omega^*(x_0)$ არის ჩაკეტილი კონუსი X^* სივრცეში და $0 \in T_\Omega^*(x_0)$, მაშინ $T_\Omega^*(x_0)+T_\Omega^*(x_0) = T_\Omega^*(x_0)$. ამის გარდა, თუ მხედველობაში მივიღებთ იმ გარემოებას, რომ $DF_1(x_0,x_0+z_0)^*$ მუდმივი მრავალსახა ასახვაა თავის ეფექტურობის არეში და, აგრეთვე, იმას, რომ $0 \in DF_1(x_0,x_0+z_0)^*$, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ ტოლობა (3.56)-ში, რომ $q_1=0$. ამ შენიშვნის გათვალისწინებით, თუ დავუშვებთ, რომ $q_2 = q$, მივიღებთ, რომ სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$DF(x_0, x_0+z_0)^*(q)=\begin{cases} q-T^*_\Omega(x_0), & q\in T^*_C(z_0),\\ \varnothing, & q\notin T^*_C(z_0).\end{cases} \tag{3.57}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $z_0=0$ და გავითვალისწინებთ $T^*_C(x_0)=C^*$ ტოლობას, მაშინ (3.57)-დან ვრწმუნდებით შემდეგი თანაფარდობის ჭეშმარიტებაში:

$$DF(x_0, x_0)^*(q)=\begin{cases} q-T^*_\Omega(x_0), & q\in C^*,\\ \varnothing, & q\notin C^*\end{cases} \tag{3.58}$$

(3.47)-დან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა:

$$DF(x_0, x_0+z_0)(u)=\begin{cases} T_\Omega(x_0+z_0)\bigcap[u+T_C(z_0)], & u\in T_\Omega(x_0),\\ \varnothing, & u\notin T_\Omega(x_0).\end{cases} \tag{3.59}$$

ცხადია,

$$u+T_C(z_0)\subset T_\Omega(x_0)+T_C(z_0),\ \ \forall u\in T_\Omega(x_0). \tag{3.60}$$

ვინაიდან $DF(x_0,x_0+z_0)(u)=\varnothing$, $\forall u\notin T_\Omega(x_0)$, (3.59) და (3.60)-დან გამომდინარეობს ჩართვა

$$DF(x_0, x_0+z_0)(u)\subset T_\Omega(x_0+z_0)\bigcap[T_\Omega(x_0)+T_C(z_0)],\ \ \forall u\in X. \tag{3.61}$$

(3.50)-ის თანახმად მივიღებთ:

$$T_\Omega(x_0)+T_C(z_0)\subset \overline{T_\Omega(x_0)+T_C(z_0)}=T_{\Omega+C}(x_0+z_0). \tag{3.62}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.61) და (3.62) თანაფარდობებს, საბოლოოდ გვექნება:

$$DF(x_0, x_0+z_0)(u)\subset T_\Omega(x_0+z_0)\bigcap T_{\Omega+C}(x_0+z_0),\ \ \forall u\in X. \tag{3.63}$$

ლემა 3.4. ვთქვათ, $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$ და

$$F(x)\subset y_0+C,\quad \forall x\in\Omega. \tag{3.64}$$

მაშინ ადგილი აქვს ჩართვას

$$\Omega\subset y_0+C\subset x_0+C,\quad \forall x\in\Omega \tag{3.65}$$

და, ამასთანავე, სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$F(x_0)=\Omega. \tag{3.66}$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $x\in\Omega$ წერტილისათვის $x\in F(x)$, ამიტომ (3.64) ჩართვიდან ვღებულობთ $x\in y_0+C$. მაშინ

$$\Omega\subset y_0+C. \tag{3.67}$$

მეორე მხრივ,

$$\begin{gathered} y_0+C\subset F(x_0)+C=\\ =\{\Omega\bigcap(x_0+C)\}+C\subset x_0+C+C\subset x_0+C,\quad \forall x\in\Omega\end{gathered} \tag{3.68}$$

(3.67) და (3.68)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს (3.65)-ის სამართლიანობა. (3.65)-დან, კერძოდ, ვღებულობთ:

$$\Omega \subset x_0 + C. \tag{3.69}$$

ვინაიდან $F(x_0) = \Omega \cap (x_0 + C)$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სრულდება (3.66) ტოლობა. ლემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებულ ლემაში x_0 წარმოადგენს Ω სიმრავლის აბსოლუტური მინიმუმის წერტილს.

შენიშვნა 3.5. ცხადია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ იმპლიკაციას:

$$F(x_0) = \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \subset x_0 + C. \tag{3.70}$$

თეორემა 3.8. ვთქვათ, $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$. დავუშვათ, რომ სრულდება პირობა

$$F(x) \subset y_0 + C, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.71}$$

მაშინ ადგილი აქვს ჩართვას:

$$DF(x_0, y_0)(u) \subset C, \quad \forall u \in X. \tag{3.72}$$

დამტკიცება. ლემა 3.4-დან გამომდინარეობს, რომ $\Omega \subset y_0 + C$. ვინაიდან $y_0 \in F(x_0) \subset \Omega$ და C ჩაკეტილი კონუსია, ამიტომ

$$T_\Omega(y_0) \subset T_{y_0+C}(y_0 + 0) \subset \overline{T_{\{y_0\}}(y_0) + T_C(0)} = \overline{0 + C} = C.$$

ამრიგად,

$$T_\Omega(y_0) \subset C. \tag{3.73}$$

თუ კვკლავ ვისარგებლებთ ლემა 3.4-ით, მაშინ მივიღებთ $\Omega \subset x_0 + C$, და რადგან $x_0 \in \Omega$, (3.73)-ის დამტკიცების ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ჩართვას

$$T_\Omega(x_0) \subset C. \tag{3.74}$$

ვინაიდან $y_0 \in F(x_0)$, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $z_0 \in C$ ვექტორი, რომ $y_0 = x_0 + z_0 \in F(x_0)$. ამიტომ გვაქვს:

$$T_{\Omega+C}(y_0) = T_{\Omega+C}(x_0 + z_0) \subset \overline{T_\Omega(x_0) + T_C(z_0)}. \tag{3.75}$$

მაშინ (3.74) და (3.75) ჩართვებიდან გამომდინარეობს, რომ, აგრეთვე, სრულდება შემდეგი ჩართვა:

$$T_{\Omega+C}(y_0) \subset \overline{C + T_C(z_0)}. \tag{3.76}$$

რადგან C ამოზნექილი კონუსია, გვაქვს

$$C \subset T_C(z_0). \tag{3.77}$$

ამგვარად, გვაქვს $C + T_C(z_0) \subset T_C(z_0) + T_C(z_0) \subset T_C(z_0)$ ჩართვები და ამიტომ

$$\overline{C + T_C(z_0)} \subset \overline{T_C(z_0)} \subset T_C(z_0).$$

ამის გამო ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$T_{\Omega+C}(y_0) = T_{\Omega+C}(x_0 + z_0) \subset T_C(z_0). \tag{3.78}$$

მაშინ (3.63), (3.73) და (3.78)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$DF(x_0, y_0)(u) \subset T_\Omega(y_0) \bigcap T_{\Omega+C}(y_0) \subset C \bigcap T_C(z_0), \quad \forall u \in X.$$

(3.77)-ის თანახმად გვაქვს $C \bigcap T_C(z_0) = C$, $\forall z_0 \in C$. ამიტომ აქედან გამომდინარეობს (3.72) ჩართვა. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.5. თუ $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$, მაშინ ადგილი აქვს ჩართვას

$$F(x) - y_0 \subset DF(x_0, y_0)(x - x_0), \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.79}$$

დამტკიცება. გვაქვს $\Omega - x_0 \subset T_\Omega(x_0)$ ჩართვა. ამიტომ ნებისმიერი $x \in \Omega$-თვის $u = x - x_0 \subset T_\Omega(x_0)$. თეორემა 3.5-დან ვღებულობთ შემდეგ ტოლობას:

$$T_\Omega(y_0) \bigcap [x - x_0 + T_C(y_0 - x_0)] = DF(x_0, y_0)(x - x_0).$$

მეორე მხრივ, ვინაიდან $\Omega - y_0 \subset T_\Omega(y_0)$ და $F(x) \subset \Omega$, $\forall x \in \Omega$, გვექნება შემდეგი ჩართვა:

$$F(x) - y_0 \subset T_\Omega(y_0), \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.80}$$

ამის გარდა,

$$F(x) \subset x + C \subset x + y_0 - x_0 + T_C(y_0 - x_0), \quad \forall x \in \Omega,$$

და, ამგვარად,

$$F(x) - y_0 \subset x - x_0 + T_C(y_0 - x_0), \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.81}$$

(3.80) და (3.81) ჩართვებიდან გამომდინარეობს:

$$F(x) - y_0 \subset T_\Omega(y_0) \bigcap [x - x_0 + T_C(y_0 - x_0)] =$$
$$= DF(x_0, y_0)(x - x_0), \quad \forall x \in \Omega.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.9. თუ $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$ და

$$DF(x_0,y_0)(u) \subset C, \ \forall u \in X,$$

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$F(x) \subset y_0 + C, \ \forall x \in \Omega.$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $x \in \Omega$-თვის განვიხილოთ $u = x - x_0 \in X$. რადგან $DF(x_0,y_0)(x - x_0) \subset C$, მაშინ, თუ ვისარგებლებთ ლემა 3.5-ით, მივიღებთ ჩართვას:

$$F(x) - y_0 \subset DF(x_0,y_0)(x - x_0) \subset C, \quad \forall x \in \Omega,$$

რაც ნიშნავს $F(x) \subset y_0 + C$ ჩართვის სამართლიანობას ნებისმიერი $x \in \Omega$ ელემენტისათვის. ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.8 და 3.9-დან უშუალოდ გამომდინარეობს

თეორემა 3.10. თუ $(x_0,y_0) \in \Gamma(F)$, მაშინ ადგილი აქვს ექვივალენტობას

$$F(x) \subset y_0 + C, \ \forall x \in \Omega \iff DF(x_0,y_0)(u) \subset C, \ \forall u \in X.$$

გავიხსენოთ, რომ ამოზნექილი და ჩაკეტილი $C \subset X$ კონუსი მახვილია, თუ სრულდება $C \cap (-C) = \{0\}$ პირობა.

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 3.11. ვთქვათ, C მახვილი კონუსია X სივრცეში და $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი იმპლიკაცია:

$$F(x)\subset y_0+C,\ \ \forall x\in\Omega\ \ \Leftrightarrow\ \ y_0=x_0,\ F(x_0)=\Omega.$$

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. დავუშვათ, $F(x)\subset y_0+C$, $\forall x\in\Omega$. ლემა 3.3-დან გამომდინარეობს, რომ $\Omega\subset x_0+C$, $F(x_0)=\Omega$, ამიტომ $y_0-x_0\in C$, $x_0-y_0\in C$. ვინაიდან C მახვილია, ამიტომ $x_0=y_0$ და $F(x_0)=\Omega$.

დავამტკიცოთ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $y_0=x_0$ და $F(x_0)=\Omega$. მაშინ $\Omega\subset\subset y_0+C$ და $F(x)\subset y_0+C$, $\forall x\in\Omega$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.11 სინამდვილეში ახასიათებს Ω სიმრავლის აბსოლუტური მინიმუმის წერტილს F მრავალსახა ასახვის დიფერენციალის საშუალებით.

ვინაიდან $(x_0,x_0)\in\Gamma(F)$, $\forall x\in\Omega$, თეორემა 3.11-დან ვღებულობთ:

$$F(x)\subset x_0+C,\ \ \forall x\in\Omega\ \ \Leftrightarrow\ \ F(x_0)=\Omega. \tag{3.82}$$

(3.82) იმპლიკაციის გამოყენებით თეორემა 3.10-დან ვასკვნით:

$$DF(x_0,x_0)(u)\subset C,\ \ \forall u\in X\ \ \Leftrightarrow\ \ F(x_0)=\Omega. \tag{3.83}$$

ᲨᲔᲜᲘᲨᲕᲜᲐ 3.6. ის პირობა, რომ არსებობს $x_0\in\Omega$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $F(x_0)=\Omega$ ტოლობას, ხშირად ირღვევა. ამ პირობის შესრულება დამოკიდებულია Ω ამოზნექილი სიმრავლისა და C ამოზნექილი კონუსის სტრუქტურაზე. ამ თვალსაზრისით, ეს პირობა უფრო მკაცრია, ვიდრე პირობა, რომ არსებობს ისეთი $x_0\in\Omega$ წერტილი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს $F(x_0)=\{x_0\}$ ტოლობას.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემები წარმოადგენენ კონუსური ოპტიმალობის აუცილებელ პირობებს.

3.7. თეორემა ინვარიანტული წერტილის არსებობის შესახებ

შევნიშნოთ, რომ C და $-C$ კონუსები ტოპოლოგიური თვისებებით ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებიან. ამიტომაც, ყველა ზემოთ მოყვანილი ფაქტი, რომელშიც ფიგურირებს C კონუსი, სამართლიანია $-C$ კონუსისისთვაც. კერძოდ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $F_- = F_1 \bigcap F_2^-$, სადაც $F_2^- : X \to 2^X$ მრავალსახა ასახვა განსაზღვრულია ტოლობით

$$F_2^-(x) = \begin{cases} x - C, x \in \Omega, \\ \varnothing, \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

და თუ მხედველობაში მივიღებთ იმ გარემოებას, რომ $(-C)^* = -C^*$, მაშინ (3.58) ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$DF_-(x_0, x_0)^*(q) = \begin{cases} q - T_\Omega^*(x_0), q \in -C^*, \\ \varnothing, \qquad\quad q \notin -C^*. \end{cases} \tag{3.84}$$

თეორემა 3.12 თუ $F(x_0) = \{x_0\}$, მაშინ არსებობს ისეთი $q \in -C^* \setminus \{0\}$ ვექტორი, რომ $0 \in DF_-(x_0, x_0)^*(q)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ სიმრავლე

$$K = T_\Omega(x_0) - C.$$

ვინაიდან $T_\Omega(x_0)$ და C ამოზნექილი კონუსებია X სივრცეში, ადვილი საჩვენებელია, რომ K ასევე ამოზნექილი კონუსია X სივრცეში. მეორე მხრივ, $\mathrm{int}\Omega \neq \varnothing$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{int}T_\Omega(x_0) \neq \varnothing$. იმის გამო, რომ $0 \in C$, სამართლიანია $T_\Omega(x_0) \subset K$ ჩართვა. ამგვარად, ვასკვნით, რომ $\mathrm{int}K \neq \varnothing$. ამიტომ K ამოზნექილი კონუსია X სივრცეში არაცარიელი შიგა ნაწილით.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $K \neq X$. მართლაც, დავუშვათ, $\bar{x} \in \mathrm{int}T_\Omega(x_0)$. ვაჩვენოთ, რომ $\bar{x} \notin K$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $x \in T_\Omega(x_0)$ და $y \in C$ ორი ვექტორი, რომ $y = \bar{x} + x$. ვინაიდან $T_\Omega(x_0)$ ამოზნექილი კონუსია, $\bar{x} \in \mathrm{int}T_\Omega(x_0)$ და $x \in T_\Omega(x_0)$. ამიტომ, $y \in \mathrm{int}T_\Omega(x_0)$. რადგან $y \in C$, წინა ჩართვიდან შეგვიძლია დავასკვნათ: $\mathrm{int}T_\Omega(x_0) \cap C \neq \varnothing$. მაგრამ თეორემის პირობის თანახმად $F(x_0) = \{x_0\}$. მაშინ თეორემა 3.7-დან გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{int}T_\Omega(x_0) \cap C = \varnothing$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმ ფაქტს, რომ $-\bar{x} \notin K$. აქედან კი გამომდინარეობს: $-\bar{x} \in X \setminus K$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $K \neq X$.

ახლა შევნიშნოთ, რომ $T_\Omega(x_0)$ და $-C$ ამოზნექილი კონუსებია X სივრცეში. ამიტომ ცნობილი ფაქტის თანახმად, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$(T_\Omega(x_0) - C)^* = K^* = (-C)^* \bigcap T_\Omega^*(x_0).$$

რადგან $K \neq X$ და $\mathrm{int}K \neq \varnothing$, K^{*} არ შეიძლება იგივურად ემთხვეოდეს $\{0\}$ სიმრავლეს. ამიტომ არსებობს ისეთი $q \in (-C)^{*} \bigcap T_{\Omega}^{*}(x_0)$ ვექტორი, რომ $q \neq 0$, ანუ არსებობს ისეთი $q \in -C^{*} \setminus \{0\}$, რომ $q \in T_{\Omega}^{*}(x_0)$. ამგვარად, ვასკვნით: $0 \in q - T_{\Omega}^{*}(x_0)$. მაშინ, (3.84) ტოლობის გამოყენებით, ეს უკანასკნელი ჩართვა ნიშნავს იმას, რომ $0 \in DF(x_0, x_0)^{*}(q)$, სადაც $q \in -C^{*} \setminus \{0\}$. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა წარმოადგენს კონუსური ოპტიმალობის ერთ-ერთ აუცილებელ პირობას პარეტოს აზრით ექსტრემალური x_0 წერტილისათვის.

თეორემა 3.13. დავუშვათ, არსებობს ისეთი $x_0 \in \Omega$ წერტილი, რომ $F(x_0) = \{x_0\}$. მაშინ მოიძებნება ისეთი არანულოვანი წრფივი უწყვეტი $q \in X^{*}$ ფუნქციონალი, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$q \in -C^{*} \bigcap T_{\Omega}^{*}(x_0).$$

დამტკიცება. თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.84) ტოლობას, მაშინ თეორემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 3.12-დან.

შენიშვნა 3.7. სრულდება შემდეგი ჩართვა:

$$\Omega - x_0 \subset T_{\Omega}(x_0).$$

აქედან ვასკვნით: $T_{\Omega}^{*}(x_0) \subset (\Omega - x_0)^{*}$. ამიტომ, თეორემა 3.13-ის პირობებში, აგრეთვე, სრულდება შემდეგი ჩართვა:

$$-q \in C^{*} \bigcap (\Omega - x_0)^{*}.$$

ისმის კითხვა: რა პირობებში არსებობს $x_0 \in \Omega$ წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს $F(x_0) = \{x_0\}$ ტოლობას? ამ კითხვაზე პასუხს გავცემთ თეორემა 3.14-ში.

ვთქვათ, X წრფივი სივრცეა, ხოლო Q არის X-ის არაცარიელი ქვესიმრავლე. $\overline{q} \in Q$ წერტილს ეწოდება Q სიმრავლის **კიდურა წერტილი**, თუ არ არსებობს ღია ინტერვალი ბოლოებით Q-ში, რომელიც შეიცავს $\overline{q}$ წერტილს. ბანახის X სივრცეს ეწოდება მკაცრად ამოზნექილი, თუ $x, y \in B, x \neq y$ პირობები უზრუნველყოფენ $\|x + y\| < 2$ უტოლობას, სადაც B ჩაკეტილი ერთეულოვანი სფეროა X-ში.

ლემა 3.6. ვთქვათ, X მკაცრად ამოზნექილი ბანახის სივრცეა, Q ამოზნექილი კომპაქტური ქვესიმრავლეა X-ში, ხოლო $\overline{x} \in X \setminus Q$. მაშინ არსებობს ისეთი $\overline{q} \in Q$ წერტილი, რომელიც წარმოადგენს Q-ს კიდურა წერტილს და აკმაყოფილებს ექსტრემალურ ტოლობას:

$$\sup_{q \in Q} \|q - \overline{x}\| = \|\overline{q} - \overline{x}\|. \tag{3.85}$$

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. ვინაიდან პირობის თანახმად Q კომპაქტური ქვესიმრავლეა X-ში, ხოლო $\|\cdot\|: X \to E_+^1 \cup \{+\infty\}$ უწყვეტი ფუნქციაა Q-ში, არსებობს $\bar{q} \in Q$, რომელიც აკმაყოფილებს (3.85) ტოლობას [67]. გასაგებია, რომ $\bar{q}$ არის Q სიმრავლის საზღვრის წერტილი. მართლაც, თუ $\operatorname{int} Q = \varnothing$, მაშინ Q-ს ყველა წერტილი სასაზღვროა, და, ამგვარად, $\bar{q}$ არის სასაზღვრო წერტილი. დავუშვათ, რომ $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$ და $\bar{q} \in \operatorname{int} Q$. მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი γ რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება $\bar{q} + \gamma B \subset Q$ ჩართვა. მეორე მხრივ, ყოველთვის შეიძლება შერჩეული იქნეს იმდენად მცირე $\tau > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანი იქნება $\bar{q} + \tau(\bar{q} - \bar{x}) \in \bar{q} + \gamma B$ ჩართვა. მაშინ, ტოლობა (3.85)-ს თანახმად ვღებულობთ:

$$\|\bar{q} + \tau(\bar{q} - \bar{x}) - \bar{x}\| = (1+\tau)\|\bar{q} - \bar{x}\| \leq \|\bar{q} - \bar{x}\|. \tag{3.86}$$

რადგან $\bar{x} \notin Q$, გვაქვს $\|\bar{q} - \bar{x}\| \neq 0$. გავითვალისწინებთ რა, რომ τ დადებითია, ვრწმუნდებით, რომ უტოლობა (3.86) წინააღმდეგობრივია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სამართლიანია $\bar{q} \in FrQ$ ჩართვა. ამის გარდა, $\|\cdot\|: X \to E_+^1 \cup \{+\infty\}$ ასახვა ამოზნექილია და სასრულმნიშვნელობებიანია Q-ზე, ამდენად, $\bar{q} \in \operatorname{int} Dom\|\cdot\|$. კარგად ცნობილი ფაქტის თანახმად [60], $\|\cdot\|: X \to E_+^1 \cup \{+\infty\}$ ასახვა სუბდიფერენცირებადია $\bar{q} \in FrQ$ წერტილში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $x^* \in X^*$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$< x^*, q - \bar{q} > + \|\bar{q} - \bar{x}\| \leq \|q - \bar{x}\|, \forall q \in X \tag{3.87}$$

განვიხილოთ $H = \{q \in X \mid < x^*, q - \bar{q} > = 0\}$ ჰიპერსიბრტყე. გასაგებია, რომ $\bar{q} \in H$. ვინაიდან (3.87) სრულდება ნებისმიერი $q \in X$-თვის, კერძოდ Q სიმრავლეზე. (3.85) თანახმად $\|q - \bar{x}\| \leq \|\bar{q} - \bar{x}\|, \forall q \in Q$. ამდენად, (3.87)-დან ვღებულობთ: $< x^*, q - \bar{q} > \ \leq 0, \forall q \in Q$. გასაგებია, რომ x^* არ შეიძლება იყოს ნულოვანი, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში შესრულდებოდა $\|\bar{q} - \bar{x}\| \leq \|q - \bar{x}\|, \forall q \in X$, უტოლობა, რომელიც არ არის სამართლიანი იმ მიზეზის გამო, რომ $\bar{q} \neq \bar{x}$. ამდენად, x^* არის საყრდენი ფუნქციონალი, ხოლო H - საყრდენი ჰიპერსიბრტყე Q სიმრავლისათვის $\bar{q} \in Q$ წერტილში.

დავუშვათ, რომ $\bar{q}$ არ არის Q სიმრავლის კიდურა წერტილი. მაშინ არსებობს ისეთი ორი განსხვავებული $q_1, q_2 \in Q$ წერტილი, რომ ღია (q_1, q_2) ინტერვალი მოიცავს $\bar{q}$ წერტილს. რადგან Q სიმრავლე ამოზნექი-.

ლია, არცერთი ამ წერტილებიდან არ შეიძლება იყოს Q-ს შიგა წერტილი, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში, ერთ-ერთი შემდეგი სამი $[q_1,q_2)$, $(q_1,q_2]$, (q_1,q_2) ინტერვალიდან, რომელთაგანაც თითოეული შეიცავს $\bar{q}$ წერტილს, მთლიანად განთავსდებოდა $\operatorname{int} Q$-ში, რაც შეუძლებელია $\bar{q} \in FrQ$ ჩართვის თანახმად. ამრიგად, $q_1,q_2 \in H$ ბოლო ჩართვიდან გამომდინარეობს, რომ $q_1,q_2 \in H \cap Q$. ამდენად, (3.87)-დან ვღებულობთ უტოლობას:

$$\|\bar{q}-\bar{x}\| \le \|q-\bar{x}\|, \ \forall q \in (q_1,q_2). \tag{3.88}$$

ვინაიდან (q_1,q_2) ინტერვალის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება იყოს წარმოდგენილი $tq_1+(1-t)q_2$ ამოზნექილი კომბინაციის სახით, სადაც $t\in(0,1)$, (3.88) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\|\bar{q}-\bar{x}\| \le \|tq_1+(1-t)q_2-\bar{x}\|, \ \forall t \in (0,1).$$

კერძოდ, ბოლო უტოლობა სამართლიანია t=1/2-თვის, მაშასადამე, ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$\|\bar{q}-\bar{x}\| \le \frac{1}{2}\|(q_1-\bar{x})+(q_2-\bar{x})\|. \tag{3.89}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ $\|q_1-\bar{x}\|>0$, $\|q_2-\bar{x}\|>0$. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს $q_1,q_2 \in Q$, $\bar{x} \in X \setminus Q$, ჩართვებიდან. ამიტომ, თუ

$$\sigma = \max\{\|q_1-\bar{x}\|, \|q_2-\bar{x}\|\},$$

მაშინ $\sigma>0$ და ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვებს:

$$(q_1-\bar{x})/\sigma, \quad (q_2-\bar{x})/\sigma \in B.$$

ვინაიდან ბანახის X სივრცე მკაცრად ამოზნექილია, სამართლიანია მკაცრი უტოლობა:

$$\|(q_1-\bar{x})+(q_2-\bar{x})\| < 2\sigma. \tag{3.90}$$

(3.90)-ის გათვალისწინებით (3.89)-დან პირდაპირ ვღებულობთ უტოლობას

$$\|\bar{q}-\bar{x}\| < \sigma = \max\{\|q_1-\bar{x}\|, \|q_2-\bar{x}\|\}. \tag{3.91}$$

ახლა გავიხსენოთ ის გარემოება, რომ $\bar{q}$ აკმაყოფილებს ექსტრემალურ (3.85) ტოლობას. მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ (3.91) უტოლობა წინააღმდეგობრივია. ამრიგად, არ არსებობს ღია $(q_1,q_2) \subset Q$ ინტერვალი, რომელიც მოიცავს $\bar{q} \in Q$ წერტილს. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.7. ვთქვათ, X ბანახის სივრცეა, Q შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეა X-ში, ხოლო C ჩაკეტილი კონუსია X-ში, არაცარიელი შიგა ნაწილით. მაშინ არსებობს ისეთი $x \in X$ წერტილი, რომ

$$x \notin Q \quad \text{და} \quad Q \subset x+C. \tag{3.92}$$

დამტკიცება. ვინაიდან Q შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეა X-ში, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი r რიცხვი, რომ

$$Q \subset rB. \tag{3.93}$$

რადგან $\operatorname{int}C \neq \varnothing$, $\operatorname{int}C \cap \operatorname{Fr}C = \varnothing$ და $\operatorname{Fr}C$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა X-ში, არსებობს ისეთი $\bar{y} \in \operatorname{int}C$ ვექტორი, რომ

$$\inf_{z \in FrC} \|\bar{y} - z\| = \sigma > 0$$

(იხ. [67]).

მეორე მხრივ, ნებისმიერი დადებითი t რიცხვისათვის სამართლიანია $t \cdot \operatorname{Fr}C = \operatorname{Fr}C$ ტოლობა. ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი $\bar{t}$ რიცხვი, რომ

$$\inf_{z \in FrC} \|\bar{t} \cdot \bar{y} - z\| = \bar{t}\sigma > r. \tag{3.94}$$

მეორე მხრივ, ცხადია, $\bar{t} \cdot \bar{y} = \bar{z} \in \operatorname{int}C$ და

$$\|z - \bar{z}\| > r, \quad \forall z \in FrC. \tag{3.95}$$

რადგან ნებისმიერი $u \in rB$ ელემენტისათვის გვაქვს $\|u\| \leq r$, (3.95) უტოლობა ნიშნავს იმას, რომ

$$\bar{z} + rB \subset \operatorname{int}C \subset C,$$

ე.ი.,

$$rB \subset -\bar{z} + C. \tag{3.96}$$

მეორე მხრივ, $0 \in \operatorname{Fr}C$, და ამიტომ (3.95) უტოლობიდან გამომდინარეობს $\|\bar{z}\| > r$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ თუ კი $x = -\bar{z}$, მაშინ $x \notin rB$, და რადგან $Q \subset rB$, ამიტომ გვაქვს: $x \notin Q$. აქედან უშუალოდ ვღებულობთ:

$$Q \subset x + C, \quad x \in X, \quad x \notin Q.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.7-დან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$G = \{x \in X \setminus Q \mid Q \subset x + C\},$$

მაშინ $G \neq \varnothing$. ამიტომ არსებობს ისეთი $\bar{x} \in G$, რომ

$$\bigcap_{x \in G} \{x + C\} = \bar{x} + C. \tag{3.97}$$

ცხადია, $\bar{x} + C$ წარმოადგენს Q სიმრავლის კონუსურ გარსს წვეროთი $\bar{x} \notin Q$ წერტილში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი სხივი სათავით $\bar{x}$-ში, რომელიც $\bar{x} + C$ კონუსში ძევს, უკიდურეს შემთხვევაში Q სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც შეიცავს. ამასთან, ცხადია, $\bar{x} + C$, აგრეთვე, ამოზნექილი და ჩაკეტილი სიმრავლეა, რადგან C კონუსი ამოზნექილი და ჩაკეტილია.

ლემები 3.6 და 3.7 წარმოადგენენ დამხმარე დებულებებს F მრავალსახა ასახვის ინვარიანტული წერტილის არსებობის დასასაბუთებლად.

თეორემა 3.14. ვთქვათ, X მკაცრად ამოზნექილი ბანახის სივრცეა, Ω კომპაქტური ქვესიმრავლეა X-ში, ხოლო C ჩაკეტილი მახვილი კონუსია X-ში არაცარიელი შიგა ნაწილით. მაშინ არსებობს ისეთი $x_0 \in \Omega$ წერტილი, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$F(x_0) = \{x_0\}.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ Ω სიმრავლის ამოზნექილი ჩაკეტილი გარსი $\overline{co}(\Omega)$. მაზურის თეორემის თანახმად (იხ. [8]), $\overline{co}(\Omega)$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა X სივრცეში. ლემა 3.7-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი $\bar{x} \in X$ წერტილი, $\bar{x} \notin \overline{co}(\Omega)$, რომელიც აკმაყოფილებს ჩართვას

$$\bar{x} + C \supset \overline{co}(\Omega). \tag{3.98}$$

ლემა 3.6-ის თანახმად, არსებობს კიდურა $x_0 \in \overline{co}(\Omega)$ წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს ექსტრემალურ ტოლობას

$$\sup_{q \in \overline{co}(\Omega)} \|q - \bar{x}\| = \|x_0 - \bar{x}\|. \tag{3.99}$$

რადგან $\overline{co}(\Omega)$ ამოზნექილი ქვესიმრავლეა X სივრცეში და $x_0 \in \overline{co}(\Omega)$, $\overline{co}(\Omega)$ სიმრავლისათვის $x_0 \in \overline{co}(\Omega)$ წერტილში შეგვიძლია განვიხილოთ მხები კონუსი $T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0)$. ადგილი აქვს ჩართვას

$$\overline{co}(\Omega) \subset x_0 + T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0). \tag{3.100}$$

ამრიგად, $\bar{x} \in \bar{x} + C$, რადგან $0 \in C$ და $x_0 \in \overline{co}(\Omega) \subset \bar{x} + C$ (3.98) ჩართვის თანახმად. რადგან $\bar{x} + C$ ამოზნექილი სიმრავლეა, ნებისმიერი ნატურალური $k \in N$ რიცხვისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\{x_k\}$ მიმდევრობა შემდეგი თანაფარდობის საფუძველზე:

$$x_k = \bar{x} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)(x_0 - \bar{x}) \in \bar{x} + C. \tag{3.101}$$

ვინაიდან $x_0 - \bar{x} \in C$ და $x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{k(k+1)}(x_0 - \bar{x}),\ \forall k \in N$, ამიტომ

$$x_{k+1} + C = x_k + C + \frac{1}{k(k+1)}(x_0 - \bar{x}) \subset x_k + C. \tag{3.102}$$

ახლა ნებისმიერი $k \in N$ რიცხვისათვის განვსაზღვროთ სიმრავლე:

$$W(x_k) = (x_0 + T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0)) \bigcap (x_k + C). \tag{3.103}$$

რადგან $x_0 \in \overline{co}(\Omega)$ და $\bar{x} \notin \overline{co}(\Omega)$, ამიტომ $x_{k+1}-x_k \neq 0$, $\forall k\in N$. ამგვარად

$$W(x_{k+1}) \subset W(x_k) \tag{3.104}$$

და

$$W(x_1) = (x_0 + T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0)) \bigcap (\bar{x} + C).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $W(x_1)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია X სივრცეში. ამიტომ $W(x_k)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია X სივრცეში ნებისმიერი $k\in N$ რიცხვისათვის.

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ ნებისმიერი $k\in N$ რიცხვისათვის $W(x_k)$ სიმრავლე არაცარიელი და ჩაკეტილი სიმრავლეა X სივრცეში, რადგან $x_0 + T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0)$ და x_k+C ჩაკეტილებია. ვინაიდან $x_k \in [\bar{x}, x_0], \forall k \in N$, შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგ უტოლობათა უსასრულო ჯაჭვი:

$$+\infty > \Delta(W(x_1)) > \Delta(W(x_2)) > \ldots > \Delta(W(x_k)) > \ldots \tag{3.105}$$

სადაც $\Delta(W(x_k))$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $W(x_k)$ სიმრავლის დიამეტრი. ამგვარად, $\{W(x_k)\}$, k=1,2,..., წარმოადგენს არაცარიელ ჩაკეტილ სიმრავლეთა მიმდევრობას X სივრცეში და ამასთან $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta(W(x_k)) = 0$. ვინაიდან X ბანახის სივრცეა, არსებობს ისეთი ერთადერთი $y_0\in X$ ელემენტი, რომ

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} W(x_k) = \{y_0\}. \tag{3.106}$$

ეხლა შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან Ω კომპაქტური ქვესიმრავლეა ბანახის სივრცეში და x_0 წარმოადგენს $\overline{co}(\Omega)$ სიმრავლის კიდურა წერტილს, ამიტომ $x_0\in\Omega$ (იხ. [8]). რადგან Ω კომპაქტური ქვესიმრავლეა X სივრცეში, ამიტომ იგი ჩაკეტილია, ხოლო $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ ტოლობის გათვალისწინებით აქედან გამომდინარეობს ის, რომ $\{x_k\}$ მიმდევრობაში არსებობს Ω სიმრავლის ელემენტთა ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ამ ქვემიმდევრობას კვლავ $\{x_k\}$ ქვემიმდევრობა წარმოადგენს.

ასევე, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ არსებობს ისეთი ნატურალური $k_0\in N$ რიცხვი, რომ $x_k\in\Omega$, $\forall k\geq k_0$. რადგან $\Omega \subset \overline{co}(\Omega) \subset x_0 + T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0)$, მრავალსახა F ასახვის განსაზღვრიდან ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$F(x_k) = \Omega \bigcap (x_k + C) \subset \left(x_0 + T_{\overline{co}(\Omega)}(x_0)\right) \bigcap (x_k + C) = W(x_k), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.107}$$

მეორე მხრივ, (3.101) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$x_k = x_0 - \frac{1}{k}(x_0 - \bar{x}), \quad \forall k \in N. \tag{3.108}$$

ამიტომ, (3.108) ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$F(x_k) = F\left(x_0 - \frac{1}{k}(x_0 - \bar{x})\right) = \Omega \bigcap \left(x_0 - \frac{1}{k}(x_0 - \bar{x}) + C\right),$$
$$\forall k \geq k_0.$$

მაგრამ

$$x_0 - \frac{1}{k}(x_0 - \bar{x}) + C \supset x_0 + C, \; \forall k \geq k_0,$$

ვინაიდან $\frac{1}{k}(x_0 - \bar{x}) + C \subset C, \forall k$. ამიტომ

$$F(x_k) \supset \Omega \bigcap (x_0 + C) = F(x_0), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.109}$$

$F(x_0) \neq \varnothing$, რადგან $x_0 \in \Omega$.

უშუალოდ (3.107) და (3.109)-დან გამომდინარეობს:

$$F(x_0) \subset F(x_k) \subset W(x_k), \quad \forall k \geq k_0.$$

ამიტომ

$$F(x_0) \subset \bigcap_{k=k_0}^{\infty} F(x_k) \subset \bigcap_{k=k_0}^{\infty} W(x_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} W(x_k) = \{y_0\},$$

ე.ი., $F(x_0) = \{y_0\}$.

თუ კი მხედველობაში მივიღებთ იმ გარემოებას, რომ x_0 წარმოადგენს F მრავალსახა ასახვის უძრავ წერტილს, მაშინ დავასკვნით, რომ $y_0 = x_0$, ე.ი. $F(x_0) = \{x_0\}$. თეორემა დამტკიცებულია.

როგორც უკვე შევნიშნეთ, F მრავალსახა ასახვის ინვარიანტული წერტილი წარმოადგენს Ω სიმრავლის C-მინიმალურ წერტილს პარეტოს აზრით. ამიტომ, პარეტოს აზრით Ω სიმრავლის C-მინიმალური წერტილის არსებობა სინამდვილეში ექვივალენტურია F ასახვის ინვარიანტული წერტილის არსებობისა.

ამიტომ, დამტკიცებული თეორემა 3.14 სინამდვილეში არის დებულება Ω სიმრავლის C-მინიმალური წერტილის არსებობის შესახებ პარეტოს აზრით.

შენიშვნა 3.8. თეორემა 3.14-ში არ მოითხოვებოდა Ω სიმრავლის ამოზნექილობა. მისი შესრულებისათვის საკმარისია მხოლოდ Ω სიმრავლის კომპაქტურობა. არსებითია ის ფაქტიც, რომ C მახვილი კონუსია X სივრცეში, რადგან მისი მეშვეობით განისაზღვრება დალაგების მიმართება X სივრცეში.

3.8. კონუსური ოპტიმალობის აუცილებელ პირობათა პრაქტიკული გამოყენება

ზემოთ დადგენილი კონუსური ოპტიმალობის აუცილებელი პირობები ზოგადი სასიათისაა. ამიტომ, მათი პრაქტიკული გამოყენება ყოველ კონკრეტულ სიტუაციაში მოითხოვს ამ სიტუაციის შესაბამის დაზუსტებას. ქვემოთ მოყვანილი იქნება ასეთი დაზუსტების ერთ-ერთი მაგალითი თეორემა 3.13-თვის.

ვთქვათ, Y და X ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეებია. L არის ამოზნექილი ქვესიმრავლე X–ში. ვიგულისხმებთ, რომ X ნაწილობრივ დალაგებულია ზემოთ განსაზღვრული $C \subset X$ კონუსით, ხოლო $g: L \to X$ მოცემული ცალსახა ოპერატორია.

ვიტყვით, რომ $g: L \to X$ ოპერატორი არის C-ჩაზნექილი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$g(\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2) - \alpha g(y_1) - (1-\alpha) g(y_2) \in C,$$
$$\forall y_1, y_2 \in L, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

$g: L \to X$ ოპერატორს ეწოდება C-ამოზნექილი, თუ $-g: L \to X$ არის C-ჩაზნექილი.

ახლა მოვითხოვოთ, რომ L იყოს ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლე Y-ში, ხოლო $g: L \to X$ იყოს უწყვეტი და C-ჩაზნექილი ისეთი ოპერატორი, რომლისთვისაც $\overline{co}(g(L))$ ამოზნექილი ჩაკეტვა არის კომპაქტური ქვესიმრავლე X-ში. ამ შემთხვევაში $g(L)$ არის კომპაქტური ქვესიმრავლე X-ში. მართლაც, g-ს უწყვეტობისა და L-ის ჩაკეტილობის გამო $g(L)$ ჩაკეტილია X–ში. მეორე მხრივ, $g(L) \subset \overline{co}(g(L))$, და რადგან $\overline{co}(g(L))$ კომპაქტურია, ცნობილი ფაქტის თანახმად, მისი ჩაკეტილი $g(L)$ ქვესიმრავლე, აგრეთვე, კომპაქტურია. ამ პირობებში თეორემა 3.13-ში მოვითხოვეთ, რომ $\Omega = co(g(L))$.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $F(x_0) = \{x_0\}$, სადაც $x_0 \in co(g(L))$, ადგილი აქვს $x_0 \in g(L)$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $x_0 \in co(g(L)) \setminus g(L)$. რადგან $x_0 \in co(g(L))$, მოინახება ისეთი სასრული $\{x_i\} \subset g(L)$, $i=1,2,\ldots,k$, ერთობლიობა, რომ x_0 წარმოდგება შემდეგი ამოზნექილი კომბინაციის სახით:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,k.$$

რადგან $\{x_i\} \subset g(L)$, არსებობს ისეთი სასრული $\{y_i\} \subset L$ ერთობლიობა, რომ

$$x_i = g(y_i),\ \ i = 1,2,\dots,k.$$

ვთქვათ,

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0,\, i = 1,2,\dots,k.$$

რადგან L ამოზნექილია, $y \in L$ და $\bar{x} = g(y) \in g(L)$. მეორე მხრივ, $g(L) \subset \subset co(g(L))$, ამიტომ $\bar{x} \in co(g(L))$. ვინაიდან g არის C-ჩაზნექილი ოპერატორი, ამიტომ C-ჩაზნექილობის განსაზღვრის გათვალისწინებით იოლად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$g(y) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(y_i) = \bar{x} - x_0 \in C,$$

ე.ი.

$$\bar{x} \in x_0 + C. \tag{3.110}$$

ცხადია, $\bar{x} \neq x_0$, რადგან $\bar{x} \in g(L)$ და $x_0 \notin g(L)$ დაშვების თანახმად. მაგრამ, $\bar{x} \in co(g(L))$ და ამიტომ (3.110)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\bar{x} \in \Omega \bigcap \{x_0 + C\} = F(x_0).$$

ეს კი ეწინააღმდეგება $F(x_0) = \{x_0\}$ პირობას, რაც თავის მხრივ ნიშნავს იმას, რომ $x_0 \in g(L)$.

თეორემა 3.13-ის თანახმად, თუ $x_0 \in co(g(L))$ არის F ასახვის ინვარიანტული წერტილი, ე.ი. $F(x_0) = \{x_0\}$, მაშინ არსებობს ისეთი არანულოვანი $q \in X^*$ ფუნქციონალი, რომ

$$q \in -C^* \bigcap T^*_{co(g(L))}(x_0).$$

რადგან სამართლიანია ჩართვა

$$co(g(L)) - x_0 \subset T_{co(g(L))}(x_0) \tag{3.111}$$

და

$$T^*_{co(g(L))}(x_0) = \{q \in X^* \ \big| < q,x > \ge 0,\ \ \forall x \in T_{co(g(L))}(x_0)\},$$

ამიტომ, (3.111)-ის გათვალისწინებით, უკანასკნელიდან ვღებულობთ:

$$q \in -K^* \setminus \{0\},$$

$$< q,x > \ge 0, \quad \forall x \in co(g(L)) - x_0. \tag{3.112}$$

თავის მხრივ, $g(L) \subset co(g(L))$, ამიტომ (3.112)-დან გამომდინარეობს:

$$< q,x > \ge 0, \quad \forall x \in g(L) - x_0, \quad q \in -K^* \setminus \{0\}.$$

ეს კი, ცხადია, ნიშნავს:

$$< q,x > \le 0, \quad \forall x \in g(L) - x_0, \quad q \in K^* \setminus \{0\}. \tag{3.113}$$

ზემოდ დამტკიცებულის თანახმად, $x_0 \in g(L)$. ამიტომ არსებობს ისეთი $y_0 \in L$, რომ $x_0 = g(y_0)$. აქედან გამომდინარე, (3.113) შეიძლება ჩაიწეროს ექვივალენტური სახით

$$< q, g(y) - g(y_0) > \le 0, \quad \forall y \in L, \quad q \in K^* \setminus \{0\}. \tag{3.114}$$

რადგან $y_0 \in L$, (3.114)-დან უშუალოდ ვასკვნით:

$$\max_{y \in L} < q, g(y) > = < q, g(y_0) > \le 0, \quad q \in K^* \setminus \{0\}. \tag{3.115}$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა L კომპაქტური ქვესიმრავლეა Y-ში, ხოლო X ბანახის სივრცეა, მაზურის თეორემის თანახმად (იხ. [8]), $\overline{co}(g(L))$ არის კომპაქტური ქვესიმრავლე X-ში, და ამიტომ ამ შემთხვევაში სამართლიანია (3.115) ტოლობა.

ვთქვათ, $Y=E^n$, $X=E^m$ და $C = E_+^m$, V არის ამოზნექილი კომპაქტური ქვესიმრავლე E^n-ში, ხოლო $h: V \to E^k$ ცალსახა უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციაა ჩაზნექილი კომპონენტებით V-ზე (ჩვეულებრივი აზრით). ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ შემთხვევაში $h: V \to E^k$ არის ჩაზნექილი ოპერატორი. განვიხილოთ სიმრავლე

$$L = \{ y \in V \mid h_i(y) \ge 0, \ i = 1,2,\dots,k \}.$$

ცხადია, L ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა V-ში. V-ს კომპაქტურობის გამო, L კომპაქტური ქვესიმრავლეა Y-ში. თუ $g: L \to E^m$ არის ცალსახა უწყვეტი ვექტორ-ფუნქცია L-ზე ჩაზნექილი კომპონენტებით, მაშინ, ცხადია, g არის E_+^m-ჩაზნექილი. ამიტომ დაცულია ყველა პირობა იმისათვის, რომ სრულდებოდეს (3.115) ტოლობა, რომელიც $(E^m)^* = E^m$ ფაქტის გათვალისწინებით ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\max_{y \in \{ y \in V \mid h_i(y) \ge 0, i=1,2,\dots,k \}} \sum_{i=1}^{k} q_i g_i(y) = \sum_{i=1}^{k} q_i g_i(y_0), \tag{3.116}$$

სადაც $q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in E^m \setminus \{0\}$. ვთქვათ, $\alpha = \sum_{i=1}^{k} q_i$. ცხადია, $\alpha > 0$. ამიტომ, თუ $\gamma_i = (1/\alpha) q_i$, $i = 1,2,\dots,m$, მაშინ (3.116) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\max_{y \in \{ y \in V \mid h_i(y) \ge 0, i=1,2,\dots,k \}} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i g_i(y) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i g_i(y_0). \tag{3.117}$$

უკანასკნელი, ცხადია, სინამდვილეში არის კარლინის კარგად ცნობილი დებულება (იხ. [23]), $y \in \{y \in V \mid h_i(y) \geq 0, i = 1,2,...k\}$ წერტილის ეფექტურობის შესახებ, ე.ი. პარეტო ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა g ვექტორული ფუნქციისათვის $\{y \in V \mid h_i(y) \geq 0, i = 1,2,...k\}$ სიმრავლეზე. ასე რომ, ამ შემთხვევაში F ასახვის x_0 ინვარიანტული წერტილის მოძებნის ამოცანა დაიყვანება ამოზნექილი პროგრამირების პარამეტრული ამოცანის ამონახსნის მოძებნაზე, სადაც პარამეტრის როლს თამაშობს $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m)$ ვექტორი $\{\gamma \mid \gamma_i \geq 0, i = 1,2,...,m, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1\}$ სიმპლექსიდან, რომლის ამოსახსნელადაც შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს ნებისმიერი ცნობილი მეთოდი.

თავი 4

დუალური თეორიის საფუძვლები მართვის არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის

ამ თავში არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის დუალური ამოცანის აგებისათვის, ძირითად არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანასა და მის დუალურ ამოცანას შორის ურთიერთ მიმართებათა შესწავლის მიზნით კონსტრუირდება სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვის შეუღლებული მრავალსახა ასახვა. დგინდება შეუღლებული ასახვის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ, მიღებულია სხვადასხვა დებულება მისი დიფერენცირებადობის შესახებ, რომელიც გამოიყენება დუალური თეორიის აგებისათვის. შემოთავაზებულია დუალობის ძირითადი პრინციპი და შესწავლება არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი და შეუღლებული ამოცანები.

4.1. ექსტრემალური ელემენტები ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში

ვთქვათ, Z წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა, C არის ამოზნექილი, ჩაკეტილი, სხეულოვანი მახვილი კონუსი Z-ში. ჩავთვალოთ, რომ Z ნაწილობრივ დალაგებულია C კონუსით. ამასთან, განსაზღვრის სახით მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $z_1, z_2 \in Z$ ორი ელემენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ექვივალენტობებს:

$$\begin{aligned} z_1 \geqq z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 \in C, \\ z_1 \geq z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 \in C \setminus \{0\}, \\ z_1 > z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 \in \operatorname{int} C. \end{aligned} \tag{4.1}$$

აუცილებლობის შემთხვევაში, C კონუსით ნაწილობრივ დალაგებულ Z სივრცეს ჩავწერთ $<Z,C>$ წყვილის სახით.

ვთქვათ, რომ Ω არაცარიელი ქვესიმრავლეა $<Z,C>$-ში. განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$
\begin{aligned}
&p\max\Omega=\{z\in\Omega \mid (\Omega-z)\cap C=\{0\}\},\\
&p\min\Omega=\{z\in\Omega \mid (\Omega-z)\cap(-C)=\{0\}\},\\
&s\max\Omega=\{z\in\Omega \mid (\Omega-z)\cap \operatorname{int}C=\varnothing\},\\
&s\min\Omega=\{z\in\Omega \mid (\Omega-z)\cap(-\operatorname{int}C)=\varnothing\}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$p\max\Omega$ და $p\min\Omega$ სიმრაველეებს, შესაბამისად, ვუწოდებთ Ω სიმრავლის **მაქსიმალურ და მინიმალურ ელემენტთა სიმრავლეებს პარეტოს აზრით**, ხოლო $s\max\Omega$ და $s\min\Omega$ სიმრავლეებს - Ω სიმრავლის **მაქსიმალურ და მინიმალურ ხიმრავლეებს სლეიტერის აზრით**. თუ $\{z^n\}\in Z$ მიმდევრობაა და $z\in Z$, მაშინ $\{z^n\}$ მიმდევრობის ჩვეულებრივ კრებადობას, ანუ ძლიერად კრებადობას, და სუსტად კრებადობას z ელემენტისაკენ, შესაბამისად, აღვნიშნავთ $z^n\to z$ და $z^n\xrightarrow{w} z$ სიმბოლოებით, ხოლო $A\subset Z$ ქვესიმრავლის ძლიერ, ანუ ჩვეულებრივ ჩაკეტვას, და სუსტ ჩაკეტვას - $\overline{A}$ და $\overline{A}^w$ სიმბოლოებით.

განვსაზღვროთ ახალი სიმრავლეები:

$$
\begin{aligned}
&p\sup\Omega=p\max\overline{(\Omega-C)}^w,\\
&p\inf\Omega=p\min\overline{(\Omega+C)}^w,\\
&s\sup\Omega=s\max\overline{(\Omega-C)}^w,\\
&s\inf\Omega=s\min\overline{(\Omega+C)}^w
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$p\sup\Omega$-ს და $p\inf\Omega$-ს, შესაბამისად, ვუწოდებთ Ω სიმრავლის **ზემაქსიმალურ და ქვემინიმალურ ელემენტთა ხიმრავლეებს პარეტოს აზრით**, ხოლო $s\sup\Omega$ და $s\inf\Omega$-ს – Ω **ხიმრავლის ზემაქსიმალურ და ქვემინიმალურ ელემენტთა სიმრავლეებს სლეიტერის აზრით**.

განსაზღვრა 4.1. $p\max\Omega\cup p\min\Omega\cup s\max\Omega\cup s\min\Omega$ გაერთიანების ნებისმიერ z_0 ელემენტს ეწოდება Ω სიმრავლის C-ექსტრემალური წერტილი (ან უფრო მარტივად, Ω სიმრავლის ექსტრემალური წერტილი).

პირველ რიგში შევისწავლით Ω სიმრავლის C-ექსტრემალურ წერტილებს პარეტოს აზრით.

თეორემა 4.1. ვთქვათ, Z რეფლექსიური ბანახის სივრცეა, ხოლო Ω - არაცარიელი ქვესიმრავლე $<Z,C>$-ში. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$p\sup\Omega\subset p\max\overline{\Omega}^w. \tag{4.4}$$

თუ ნებისმიერი $h\in Z$-თვის $\Omega\cap(h+C)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია Z-ში, მაშინ

$$p\max\overline{\Omega}^w\subset p\max\overline{(\Omega-C)}. \tag{4.5}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $z_0 \in p\sup\Omega$. მაშინ, (4.3)-ის თანახმად, გვაქვს, რომ $z_0 \in p\max\overline{(\Omega - C)}^w$, ხოლო (4.2)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$z_0 \in \overline{(\Omega - C)}^w \tag{4.6}$$

$$\left(\overline{(\Omega - C)}^w - z_0\right) \bigcap C = \{0\}. \tag{4.7}$$

(4.6)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მოიძებნება მიმდევრობები $\{z^n\} \subset \Omega$ და $\{c^n\} \subset C$, რომელთათვისაც $z_0^n = z^n - c^n$ ტოლობით განსაზღვრული $\{z_0^n\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადი იქნება z_0 ელემენტისაკენ. ვაჩვენოთ, რომ სინამდვილეში $\{c^n\} \subset C$ მიმდევრობა ძლიერად იკრიბება $0 \in Z$ ელემენტისაკენ. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება დადებითი ε რიცხვი და $\{c^{n_i}\} \subset \{c^n\}$ ქვემიმდევრობა, რომელთათვისაც შესრულდება პირობა

$$B(0,\varepsilon) \bigcap \{c^{n_i}\} = \varnothing, \tag{4.8}$$

სადაც $B(0,\varepsilon) = \{z \in Z \mid \|z\| \le \varepsilon\}$ არის ჩაკეტილი ბირთვი Z-ში. (4.8)-დან უშუალოდ ვასკვნით, რომ

$$\|c^{n_i}\| > \varepsilon, \quad \forall i \in N, \tag{4.9}$$

სადაც N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა. $\{s^i\}$ მიმდევრობა განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$s^i = \varepsilon \frac{c^{n_i}}{\|c^{n_i}\|}, \ i \in N.$$

რადგან $\dfrac{\varepsilon}{\|c^{n_i}\|} > 0$, $\{c^{n_i}\} \subset C$ და $\|s^i\| = \varepsilon$, $\forall i \in N$, ამიტომ

$$\{s^i\} \subset C \bigcap \partial B(0,\varepsilon), \tag{4.10}$$

სადაც $\partial B(0,\varepsilon)$ არის $B(0,\varepsilon)$ ჩაკეტილი ბირთვის საზღვარი. ახალი $\{\hat{s}^i\}$ მიმდევრობის ელემენტები განვსაზღვროთ ტოლობებით

$$\hat{s}^i = c^{n_i} - s^i, \ i \in N. \tag{4.11}$$

რადგან $1 - \varepsilon / \|c^{n_i}\| > 0$ და $\{c^{n_i}\} \subset C$, ცხადია, რომ $\{\hat{s}^i\} \subset C$. მეორე მხრივ, გვაქვს: $z_0^{n_i} + c^{n_i} = z^{n_i}, i \in N$. ვინაიდან $\{z^{n_i}\} \subset \{z^n\} \subset \Omega$, ამიტომ $\{z_0^{n_i} + c^{n_i}\} \subset \Omega$. გარდა ამისა, (4.11)-დან ვღებულობთ:

$$z_0^{n_i} + s^i = z_0^{n_i} + c^{n_i} - \hat{s}^i, \quad i \in N,$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$\{z_0^{n_i} + s^i\} \subset \Omega - C. \tag{4.12}$$

ვინაიდან Z რეფლექსური ბანახის სივრცეა, ამიტომ $B(0,\varepsilon)$ ჩაკეტილი ბირთვი სუსტად ბიკომპაქტურია [8]. $\partial B(0,\varepsilon)$ არის სუსტად ჩაკეტილი ქვესიმრავლე $B(0,\varepsilon)$-ში, ამიტომაც იგი სუსტად ბიკომპაქტურია. C, როგორც ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლე ნორმირებულ სივრცეში, სუსტად ჩაკეტილია [41]. ამიტომ (4.10)-ის გათვალისწინებით, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე ვასკვნით, რომ $\{s^i\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება გამო-იყოს ქვემიმდევრობა, რომელიც სუსტად კრებადი იქნება $s_0 \in C \cap \partial B(0,\varepsilon)$ ელემენტისაკენ. ეს ქვემიმდევრობა ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ისევ $\{s^i\}$-ით ავღნიშნოთ, ე.ი., $s_i \xrightarrow{w} s_0 \in C \cap \partial B(0,\varepsilon)$. რადგან $\varepsilon > 0$, ამიტომ s_0 არის არანულოვანი ელემენტი C-ში. ამდენად, (4.12) ჩართვიდან ვღებულობთ:

$$z_0^{n_i} + s^i \xrightarrow{w} z_0 + s_0 \in \overline{(\Omega - C)}^w$$

ვთქვათ, $\bar{z}_0 = z_0 + s_0$. მაშინ, $\bar{z}_0 \in \overline{(\Omega - C)}^w$ და $\bar{z}_0 - z_0 = s_0 \in C \setminus \{0\}$. აღნიშნული ჩართვა ეწინააღმდეგება (4.7) პირობას, საიდანაც ვასკვნით: $c^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ვინაიდან ყოველი ძლიერად კრებადი მიმდევრობა სუსტად კრებადიც არის, ამიტომ $c^n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} 0$, და, რადგან $c^n = z^n - z_0^n$, ამიტომ $z^n - z_0^n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} 0$. გარდა ამისა $z_0^n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} z_0$, აქედან გამომდინარეობს კრებადობა: $z^n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} z_0$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $z_0 \in \overline{\Omega}^w$ მეორე მხრივ, იმის გათვალისწინებით, რომ $0 \in C$, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$\Omega \subset \Omega \setminus C.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\overline{\Omega}^w \subset \overline{(\Omega - C)}^w$ ამ უკანასკნელი ჩართვის გათვალისწინებით და იმის გამო, რომ z_0 ელემენტი აკმაყოფილებს (4.7) ტოლობას და $z_0 \in \overline{\Omega}^w$, სამართლიანია ტოლობა

$$(\overline{\Omega}^w - z_0) \cap C = \{0\}.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ნიშნავს, $z_0 \in p\max\overline{\Omega}^w$ ჩართვის სამართლიანობას. ამრიგად, დამტკიცებილია ჩართვა (4.4), ე.ი. $p\sup\Omega \subset p\max\overline{\Omega}^w$

ვაჩვენოთ ახლა თეორემის მეორე ნაწილის სამართლიანობა, ე.ი. დავამტკიცოთ, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი ჩართვა:

$$p\max\overline{\Omega}^{w} \subset p\max\overline{(\Omega-C)}.$$

ვთქვათ, რომ $z_0 \in p\max\overline{\Omega}^{w}$ მაშინ

$$z_0 \in \overline{\Omega}^{w}, \tag{4.13}$$

$$\left(\overline{\Omega}^{w} - z_0\right)\bigcap C = \{0\}. \tag{4.14}$$

დაუშვათ, რომ $z_0 \notin p\max\overline{(\Omega-C)}$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\bar{z}_0 \in \overline{\Omega-C}$, რომლისთვისაც

$$\bar{z}_0 - z_0 \in C\setminus\{0\}. \tag{4.15}$$

რადგან $\bar{z}_0 \in \overline{\Omega-C}$, ამიტომ არსებობს მიმდევრობები $\{z^n\}\subset\Omega$ და $\{c^n\}\subset$ $\subset C$ ისეთები, რომ

$$z_0^n = z^n - c^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{z}_0. \tag{4.16}$$

რამდენადაც $\operatorname{int}C \neq \varnothing$, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ $h\in Z$ ელემენტი ისეთი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება შემდეგ ჩართვას:

$$\bar{y}_0 \in h + \operatorname{int}C\,. \tag{4.17}$$

$h + \operatorname{int}C$ ღია სიმრავლეა Z სივრცის ძლიერ ტოპოლოგიაში. ამიტომ, (4.16)-ის გათვალისწინებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ მოიძებნება ისეთი $n\in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ

$$z_0^n = z^n - c^n \in h + \operatorname{int}C,\ \forall n > n_0. \tag{4.18}$$

აქედან ვასკვნით:

$$z^n \in h + \operatorname{int}C + c^n,\ \forall n > n_0. \tag{4.19}$$

რადგან $c^n\in C$, $\forall n\in N$, ამიტომ ცნობილი ფაქტის თანახმად $\operatorname{int}C + c^n \subset$ $\subset\operatorname{int}C$, საიდანაც, კერძოდ, გამომდინარეობს ჩართვა $\operatorname{int}C + c^n \subset \operatorname{int}C$, $\forall n>n_0$. ამიტომ (4.19)-დან ვღებულობთ:

$$z^n \in h + C,\quad \forall n > n_0. \tag{4.20}$$

მეორე მხრივ, $\{z^n\} \subset \Omega$, ამიტომ (4.20)-ის თანახმად გვაქვს:

$$\{z^n\} \subset A\bigcap(h+C),\quad \forall n > n_0. \tag{4.21}$$

რადგან პირობის თანახმად $A \cap h{+}C$ ნორმით შემოსაზღვრულია Z-ში, ხოლო Z რეფლექსური ბანახის სივრცეა, ამიტომ ცნობილი ფაქტის თანახმად $A\cap(h{+}C)$ არის სუსტად კომპაქტური ქვესიმრავლე Z-ში [8]. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $\{z^n\}$, $n>n_0$, ქვემიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს ქვემიმ-

დევრობა, რომელიც სუსტად კრებადი იქნება რაიმე $\omega \in Z$ ელემენტისაკენ. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$z^n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\rightarrow}} \omega, \quad n > n_0. \tag{4.22}$$

ვინაიდან $\{z^n\} \subset \Omega$, ამიტომ

$$\omega \in \overline{\Omega}^w. \tag{4.23}$$

მეორე მხრივ, $c^n = z^n - z_0^n, n > n_0$. მაგრამ $\{z_0^n\}$ მიმდევრობა ძლიერად იკრიბება $\overline{z}_0$ ელემენტისაკენ; ამიტომ $\{z_0^n\}$ მიმდევრობა სუსტადაც იკრიბება $\overline{z}_0$ ელემენტისაკენ. ამის გამო (4.23) ტოლობაში სუსტ ზღვარზე გადასვლით ვასკვნით:

$$c^n = z^n - z_0^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \omega - \overline{z}_0.$$

რადგან $\{c^n\} \subset C$ და C სუსტად ჩაკეტილიც არის, ამიტომ $\omega - \overline{z}_0$, როგორც $\{c^n\} \subset C$ მიმდევრობის სუსტი ზღვარი ისევ არის C-ს ელემენტი, ე.ი.

$$\omega - \overline{z}_0 \in C. \tag{4.24}$$

(4.15) თანახმად კი ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$\overline{z}_0 - z_0 \in C \setminus \{0\}. \tag{4.25}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $C + C \setminus \{0\} \subset C \setminus \{0\}$, (4.24) და (4.25) ჩართვებიდან ვღებულობთ:

$$\omega - \overline{z}_0 \in C \setminus \{0\}. \tag{4.26}$$

რადგან $\omega \in \overline{\Omega}^w$, (4.26) ეწინააღმდეგება (4.14) ჩართვას, რაც თავის მხრივ ამტკიცებს $p\max \overline{\Omega}^w \subset p\max \overline{(\Omega - C)}$ ჩართვის ჭეშმარიტებას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.1-დან გამომდინარეობს ქვემოთმოყვანილი დებულებები.

შედეგი 4.1. თუ Z სასრულ განზომილებიანი სივრცეა, მაშინ თეორემა 4.1-ის პირობებში ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$p\max \overline{\Omega}^w = p\max \overline{(\Omega - C)}. \tag{4.27}$$

დამტკიცება. რადგან სასრულგანზომილებიანი სივრცე რეფლექსურია, ხოლო სასრულგანზომილებიან სივრცეში სიმრავლეთა სუსტი და ძლიერი ჩაკეტვები ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ (4.4) და (4.5) ჩართვები თეორემა 4-1-ში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$p\max \overline{(\Omega - C)} \subset p\max \overline{\Omega},$$

$$p\max \overline{\Omega} \subset p\max \overline{(\Omega - C)},$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს (4.27). ამით შედეგი დამტკიცებულია.

შედეგი 4.2. თუ Z არის რეფლექსური ბანახის სივრცე, ხოლო Ω მასში ამოზნექილი ქვესიმრავლეა, მაშინ თეორემა 4.1-ის პირობებში ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$p\max\overline{\Omega}^{w} = p\max\overline{(\Omega - C)}.$$

დამტკიცება. დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს იმ მოსაზრებიდან, რომ ამოზნექილი Ω სიმრავლის შემთხვევაში $\Omega - C$ ასევე ამოზნექილი ქვესიმრავლეა, ხოლო რეფლექსურ ბანახის სივრცეში ამოზნექილი სიმრავლის სუსტი და ძლიერი ჩაკეტვები ერთმანეთს ემთხვევა. ამრიგად, შედეგი სამართლიანია.

განსაზღვრა 4.2 ნორმირებულ Z სივრცეში C კონუსს ეწოდება ნორმალური კონუსი, თუ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\delta > 0$, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$\|x+y\| \geq \delta, \quad \forall x, y \in C, \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

განსაზღვრა 4.3. $<Z,C>$ ნაწილობრივ დალაგებულ ნორმირებულ სივრცეში $\|\cdot\|$ ნორმას ეწოდება პოლიმონოტონური C-ზე, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი დადებითი m რიცხვი, რომ პირობები $y \in C$, $x - y \in C$ განაპირობებენ შემდეგ უტოლობას:

$$\|y\| \leq m\|x\|. \tag{4.28}$$

იმისათვის, რომ $C \subset Z$ კონუსი Z ნორმირებულ სივრცეში ნორმალური იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ Z სივრცის ნორმა პოლიმონოტონური იყოს C-ზე [41].

განსაზღვრა 4.4. ვიტყვით, რომ $A \subset <Z,C>$ ქვესიმრავლე ნაწილობრივ დალაგებულ Z სივრცეში რიგობრივად შემოსაზღვრულია ზემოდან, თუ არსებობს ისეთი $b \in Z$ ელემენტი, რომ $b - A \subset C$. $A \subset <Z,C>$ ქვესიმრავლე ნაწილობრივ დალაგებულ Z სივრცეში რიგობრივად შემოსაზღვრულია ქვემოდან, თუ არსებობს ისეთი $a \in Z$ ელემენტი, რომ $A - a \subset C$. $A \subset <Z,C>$ ქვესიმრავლე ნაწილობრივ დალაგებულ Z სივრცეში რიგობრივად შემოსაზღვრულია, თუ იგი რიგობრივად შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან.

თეორემა 4.2. ვთქვათ, $\Omega \subset <Z,C>$ ქვესიმრავლე რიგობრივად შემოსაზღვრულია ზემოდან Z ნორმირებულ სივრცეში, ხოლო C ნორმალური კონუსია Z-ში. მაშინ ნებისმიერი $h \in Z$ ელემენტისათვის $\Omega \cap (h + C)$ სიმრავლე ნორმით შემოსაზღვრულია Z-ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $z \in \Omega \cap (h + C)$. მაშინ $z \in \Omega$, $z - h \in C$. რადგან Ω რიგობრივად შემოსაზღვრულია ზემოდან, ამიტომ არსებობს ისეთი $a \in Z$ ელემენტი, რომ $a - z \in C$. ამდენად, გვაქვს:

$$\begin{cases} a-z\in C, \\ \\ z-h\in C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-h\in C, \\ \\ (a-h)-(z-h)\in C. \end{cases} \tag{4.29}$$

რადგან C კონუსი ნორმალურია, ზემოთ უკვე აღნიშნულის თანახმად, $\|\cdot\|$ ნორმა პოლიმონოტონურია C-ზე. ამიტომ, განსაზღვრა 4.3-ის თანახმად, (4.29)-დან ვღებულობთ, რომ არსებობს მუდმივი m, რომლისთვისაც ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$\|z-h\|\le m\|a-h\|. \tag{4.30}$$

მეორე მხრივ, გვაქვს

$$\|z\|=\|z+h-h\|\le\|z-h\|+\|h\|,$$

საიდანაც (4.30)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ: თუ $q=m\|a-h\|+\|h\|$, მაშინ $\|z\|\le q$. რადგან z ნებისმიერი ელემენტია $\Omega\cap(h+C)$ სიმრავლიდან, ეს უკანასკნელი თავისთავად ნიშნავს $\Omega\cap(h+C)$ სიმრავლის ნორმით შემოსაზღვრულობას Z სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული ლებულება წარმოადგენს $\Omega\cap(h+C)$ სიმრავლის ნორმით შემოსაზღვრულობის აუცილებელ პირობას.

განსაზღვრა 4.5. $p\min\Omega$ და $p\max\Omega$ სიმრავლეებს ეწოდებათ გარეგანად მდგრადი, თუ შესაბამისად ადგილი აქვთ შემდეგ ჩართვებს:

$$\Omega\subset p\min\Omega+C,$$
$$\Omega\subset p\max\Omega-C.$$

განსაზღვრა 4.6. $\Omega\subset\langle Z,C\rangle$ ქვესიმრავლეს ეწოდება C-ბიკომპაქტური (სუსტად C-ბიკომპაქტური), თუ ნებისმიერი $z_0\in\Omega$ ელემენტისათვის $(z_0-C)\cap\Omega$ არის ბიკომპაქტური (სუსტად ბიკომპაქტური) ქვესიმრავლე Z-ში.

თუ Z ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $A\subseteq Z$ - არაცარიელი ქვესიმრავლე Z-ში, სიმრავლეს

$$b(A)=\{\,p\in Z^*\mid\sigma_A(p)<+\infty\,\},$$

სადაც $\sigma_A\colon Z^*\to R\cup\{+\infty\}$ ფუნქცია განსაზღვრულია ტოლობით

$$\sigma_A(p)=\sup_{x\in A}\langle p,x\rangle,\ p\in Z^*,$$

ეწოდება A სიმრავლის **ბარიერული კონუსი**, ხოლო სიმრავლეს

$$H(A)=-b(A)^*=\{\,z\in Z\mid\langle p,z\rangle\le 0,\ \forall p\in b(A)\,\}$$

ეწოდება A სიმრავლის **რეცესიული კონუსი**.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ნებისმიერი $z\in A$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$H(A)=\bigcap_{\lambda>0}\lambda(A-z)\neq\{0\}.$$

ცნობილია, რომ, თუ A ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა Z-ში, მაშინ A-ს სუსტად შემოსაზღვრულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $b(A)=Z$ [31, გვ. 37]. სამართლიანია

ლემა 4.1 ვთქვათ, A ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა Z ლოკალურად ამოზნექილ წრფივ ტოპოლოგიურ სივრცეში. A სუსტად შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$H(A)=\{0\}.$$

დამტკიცება. დებულება ტრივიალურია იმის გამო, რომ $H(A)=-b(A)^{*}=$ $=(z^{*})^{*}=\{0\}$.

თეორემა 4.3. ვთქვათ, Z სეპარაბელური და რეფლექსური ბანახის სივრცეა, ხოლო $\Omega\subset<Z,C>$ C-ბიკომპაქტური ქვესიმრავლეა Z-ში. მაშინ, $p\min\Omega$ არაცარიელი სიმრავლეა და არის გარეგანად მდგრადი. თუ Ω ამოზნექილი, ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა და ამასთან $p\max\Omega$ არაცარიელია, მაშინ Ω სუსტად C-ბიკომპაქტურია.

დამტკიცება. რადგან C არის ამოზნექილი, ჩაკეტილი და მახვილი კონუსი Z სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში, ამიტომ ცნობილი ფაქტის თანახმად [41], C-ზე არსებობს მკაცრად დადებითი ფუნქციონალი

$$z^{*}\in C^{*}=\{z^{*}\in Z^{*}\ \big|\ <z^{*},z>\geq 0,\ \forall z\in C\},$$

რომლისთვისაც $<z^{*},z>>0,\ \forall z\in C\setminus\{0\}$. ვთქვათ, $\hat{z}$ ნებისმიერი ელემენტია Ω-ში. რადგან Ω არის C-ბიკომპაქტური, ამიტომ $\Omega\bigcap(\hat{z}-C)$ ბიკომპაქტური ქვესიმრავლეა Z-ში. ფუნქციონალური ანალიზიდან ცნობილი ფაქტის თანახმად, არსებობს ისეთი $z^{0}\in\Omega\bigcap(\hat{z}-C)$, რომ

$$\min_{z\in\Omega\bigcap(\hat{z}-C)}<z^{*},z>=<z^{*},z^{0}>. \tag{4.31}$$

ვაჩვენოთ, რომ $z^{0}\in p\min\Omega$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი ელემენტი $\bar{z}\in\Omega$, რომ $z^{0}-\bar{z}=p\in C\setminus\{0\}$. რადგან $z^{0}\in\Omega\bigcap(\hat{z}-C)$, ამიტომ $z^{0}\in\Omega$ და $z^{0}=\hat{z}-q,\ q\in C$, ე.ი. $\bar{z}=z^{0}-p=\hat{z}-p-q$. ცხადია, რომ $\bar{z}\in\hat{z}-C$. რადგან $\bar{z}\in\Omega$, ამიტომ $\bar{z}\in\Omega\bigcap(\hat{z}-C)$. მეორე მხრივ, $z^{0}-\bar{z}\in C\setminus\{0\}$. ამიტომ, იმის გათვალისწინებით, რომ z^{*} მკაცრად დადებითი ფუნქციონალია C-ზე, ვასკვნით, რომ $<z^{*},z^{0}-\bar{z}>>0$. ამდენად, მოიძებნება ისეთი $\bar{z}\in\Omega\bigcap(\hat{z}-C)$ ელემენტი, რომ

$$<z^{*},z^{0}>\ >\ <z^{*},\bar{z}>. \tag{4.32}$$

(4.32) უტოლობა ეწინააღმდეგება (4.31) ტოლობას, რაც თავის მხრივ ამტკიცებს, რომ $z^0 \in p\min\Omega$, ე.ი. $p\min\Omega$ არაცარიელია. რადგან $z^0 \in \Omega \bigcap (\hat{z} - C)$, სადაც $z^0 \in p\min\Omega$, ამიტომ $\hat{z} = z^0 + h, h \in C$. ვინაიდან $\hat{z}$ ნებისმიერი ელემენტი იყო Ω სიმრავლიდან, ამიტომ, ცხადია, რომ $\Omega \subset$ $\subset p\min\Omega + C$ (რადგან $z^0 + h \in p\min\Omega + C$). ასე რომ, $p\min\Omega$ გარეგანად მდგრადია.

ვაჩვენოთ ახლა თეორემის მეორე ნაწილის სამართლიანობა. დავუშვათ, რომ $p\min\Omega$ არაცარიელია, Ω არის ამოზნექილი და ჩაკეტილი, მაგრამ Ω არ არის C-სუსტად ბიკომპაქტური. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\hat{z} \in \Omega$ ელემენტი, რომ $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არ იქნება სუსტად ბიკომპაქტური ქვესიმრავლე Z-ში. რადგან Ω და C ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებია Z-ში, ამიტომ $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არის ამოზნექილი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლე Z-ში. ამ სიმრავლის ამოზნექილობა განაპირობებს მის სუსტად ჩაკეტილობას, ე.ი. $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არის სუსტად ჩაკეტილი ქვესიმრავლე Z-ში, და, ცხადია, $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ ამოზნექილია. რადგან $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არ არის სუსტად ბიკომპაქტური, მაგრამ არის სუსტად ჩაკეტილი, ამიტომ $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არ შეიძლება იყოს სუსტად კომპაქტური. რადგან რეფლექსურ ბანახის სივრცეში სიმრავლის სუსტად კომპაქტურობა ექვივალენტურია ამ სიმრავლის შემოსაზღვრულობისა [8, გვ. 81], ვასკვნით: $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არ შეიძლება იყოს შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე Z-ში, რადგან ნორმირებულ სივრცეში სიმრავლის შემოსაზღვრულობა და სუსტად შემოსაზღვრულობა ერთმანეთის ექვივალენტურნი არიან [5, გვ. 263, 11, გვ. 184]. ამიტომ, $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ არ შეიძლება იყოს სუსტად შემოსაზღვრული. ვთქვათ, რომ $L = (\Omega + C) \bigcap (\hat{z} - C)$. ცხადია, $0 \in C$. ამიტომ $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega \subset L$, და, რადგან $(\hat{z} - C) \bigcap \Omega$ სუსტად შემოსაზღვრულია, ამიტომ L, აგრეთვე, არის სუსტად შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე Z-ში. ლემა 4.1-ის თანახმად, ეს ნიშნავს იმას, რომ L სიმრავლის რეცესიული კონუსი $H(L)$ არ შეიძლება ემთხვეოდეს $\{0\}$ სიმრავლეს, ე.ი.

$$H(L) = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda (L - y_0) \neq \{0\}, \tag{4.33}$$

სადაც y_0 ნებისმიერი ელემენტია L-დან [31, გვ. 37]. ამდენად, არსებობს ისეთი $\bar{z} \in H(L)$ ელემენტი, რომ $\bar{z} \neq 0$. ეს თავის მხრივ ნიშნავს იმას, რომ

$$\bar{z} \in \lambda (L - y), \quad \forall y \in L.$$

კერძოდ, იმის გამო, რომ $0 \in C$ და $\hat{z} \in \Omega$, ამიტომ $y = \hat{z} \in L$, და სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$\bar{z} \in \lambda (L - \hat{z}). \tag{4.34}$$

მეორე მხრივ, დაშვების თანახმად $p\min\Omega$ არაცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ, თუ $z_0 \in p\min\Omega$, მაშინ, აგრეთვე, სამართლიანი უნდა იყოს ჩართვაც

$$\bar{z} \in \lambda(L - z_0). \tag{4.35}$$

(4.34) ჩართვიდან ვღებულობთ:

$$\hat{z} + \lambda^{-1}\bar{z} \in L. \tag{4.36}$$

(4.35) ჩართვიდან კი ვღებულობთ თანაფარდობას

$$z_0 + \lambda^{-1}\bar{z} \in L, \tag{4.37}$$

სადაც $z_0 \in p\min\Omega$. მაგრამ $L \subset \hat{z} - C$ და $L \subset \Omega + C$, ამიტომ (4.36) და (4.37)-დან შესაბამისად ვღებულობთ:

$$\hat{z} + \lambda^{-1}\bar{z} \in \hat{z} - C, \tag{4.38}$$

$$z_0 + \lambda^{-1}\bar{z} \in \Omega + C. \tag{4.39}$$

(4.38)-დან ვასკვნით, რომ $-\lambda^{-1}\bar{z} \in C$, (4.39)-დან კი უშუალოდ გამომდინარეობს ისეთი $\bar{z}_0 \in \Omega$ და $h \in C$ ელემენტების არსებობა, რომ

$$z_0 + \lambda^{-1}\bar{z} = \bar{z}_0 + h. \tag{4.40}$$

ე.ი. $z_0 - \bar{z}_0 = -\lambda^{-1}\bar{z} + h$. რადგან $-\lambda^{-1}\bar{z} + h \in C$ და $\bar{z} \neq 0$, ამიტომ

$$\bar{z}_0 - z_0 \in -C \setminus \{0\}. \tag{4.41}$$

რადგან $\bar{z}_0 \in \Omega$ და $z_0 \in p\min\Omega$, ამიტომ (4.41)-დან ვღებულობთ წინააღმდეგობას, რაც თავის მხრივ ნიშნავს იმას, რომ Ω სინამდვილეში არის სუსტად C-ბიკომპაქტური ქვესიმრავლე Z სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა მოთხოვნილ პირობებში ადგენს პარეტოს აზრით მინიმალურ ელემენტთა სიმრავლის ტოპოლოგიურ სტრუქტურას.

4.2 მრავალსახა ასახვათა შეუღლებული ასახვები

დავუშვათ, რომ X და Z ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეებია. ისევე, როგორც ზემოთ, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ Z სივრცე ნაწილობრივ დალაგებულია ამოზნექილი, ჩაკეტილი, სხეულოვანი, მახვილი C კონუსით. X^*-ით და Z^*-ით შესაბამისად აღვნიშნოთ X და Z სივრცეთა შეუღლებული სივრცეები. $P(Z)=P(<Z,C>)$–ით აღვნიშნოთ Z სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა. განვიხილოთ მრავალსახა F: $X \to P(<Z,C>)$ ასახვა. F ასახვის გრაფიკი აღვნიშნოთ $\Gamma(F)$-თ, ე.ი.

$$graphF = \{(x,z) \in X \times Z \mid z \in F(x)\} = \Gamma(F).$$

F მრავალსახა ასახვის **ეფექტურობის არე** ეწოდება სიმრავლეს

$$DomF = \{x \in X \mid F(x) \neq \varnothing\}.$$

F: $X \to P(<Z,C>)$ ასახვას ეწოდება საკუთრივი, თუ $DomF$ არაცარიელი სიმრავლეა. ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ F საკუთრივი მრავალსახა ასახვაა.

განსაზღვრა 4.7. F: $X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის ზეგრაფიკი ეწოდება $EpiF$ სიმრავლეს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$EpiF = \{(x,z) \in X \times Z \mid z \in F(x)+C\}. \tag{4.42}$$

ვთქვათ, რომ $\sigma_{\Gamma(F)}$: $X^* \times Z^* \to R \cup \{+\infty\}$ არის $\Gamma(F)$ სიმრავლის საყრდენი ფუნქციონალი, ე.ი.

$$\sigma_{\Gamma(F)}(x^*,z^*) = \sup_{x \in X} \sup_{z \in F(x)} (<x^*,x> + <z^*,z>), \qquad \forall (x^*,z^*) \in X^* \times Z^* \tag{4.43}$$

$b(\Gamma(F))$-ით აღვნიშნოთ $\Gamma(F)$ სიმრავლის ბარიერული კონუსი, ე.ი.

$$b(\Gamma(F)) = Dom\sigma_{\Gamma(F)} = \{(x^*,z^*) \in X^* \times Z^* \mid \sigma_{\Gamma(F)}(x^*,z^*) < +\infty\}. \tag{4.44}$$

განსაზღვრა 4.8. F^*: $Z^* \to P(X^*)$ მრავალსახა ასახვას, რომელიც განსაზღვრულია პირობით

$$x^* \in F^*(z^*) \iff (x^*,-z^*) \in b(\Gamma(F)), \tag{4.45}$$

ეწოდება F: $X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის შეუღლებული ასახვა.

$\varphi_{\Gamma(F)}$: $X^* \times Z^* \to R \cup \{+\infty\}$ ნამდვილი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$\varphi_{\Gamma(F)}(x^*,z^*) = \sigma_{\Gamma(F)}(x^*,-z^*), \quad \forall (x^*,z^*) \in X^* \times Z^* \tag{4.46}$$

მაშინ, განსაზღვრა 4.8-ის თანახმად, გვაქვს

$$x^* \in F^*(z^*) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{\Gamma(F)}(x^*, z^*) < +\infty. \tag{4.47}$$

$\varphi : X \times Z^* \to \overline{R}$ ($\overline{R} = R \bigcup \{-\infty, +\infty\}$) ნამდვილ ფუნქციას განვსაზღვრავთ ტოლობით

$$\varphi(x, z^*) = \inf_{z \in F(x)} < z^*, z >, \quad \forall (x, z^*) \in X \times Z^* \tag{4.48}$$

მაშინ შეიძლება განისაზღვროს φ ფუნქციის კერძო შეუღლებული ფუნქცია პირველი არგუმენტის მიმართ (იხ. [60]) $\varphi^*(\cdot, z^*) : X^* \to \overline{R}$ შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\varphi^*(x^*, z^*) = \sup_{x \in X}(< x^*, x > - \varphi(x, z^*)), \quad \forall x^* \in X^* \tag{4.49}$$

φ ფუნქციის კერძო მეორე შეუღლებულს პირველი არგუმენტის მიმართ, ე.ი. $\varphi^{**}(\cdot, z^*) : X \to \overline{R}$ ნამდვილ ფუნქციას, ექნება სახე

$$\varphi^{**}(x, z^*) = \sup_{x^* \in X^*}(< x^*, x > - \varphi^*(x^*, z^*)), \quad \forall x \in X. \tag{4.50}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$-\inf_{z \in F(x)} < z^*, z > = \sup_{z \in F(x)} < -z^*, z >,$$

(4.49) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\varphi^*(x^*, z^*) = \sup_{x \in X}(< x^*, x > - \inf_{z \in F(x)} < z^*, z >) =$$

$$= \sup_{x \in X}(< x^*, x > + \sup_{z \in F(x)} < -z^*, z >) =$$

$$= \sup_{x \in X} \sup_{z \in F(x)} (< x^*, x > - < z^*, z >).$$

ამრიგად, სამართლიანია ტოლობები:

$$\begin{aligned} \varphi^*(x^*, z^*) &= \varphi_{\Gamma(F)}(x^*, z^*) = \sigma_{\Gamma(F)}(x^*, -z^*) = \\ &= \sup_{x \in X} \sup_{z \in F(x)} (< x^*, x > - < z^*, z >), \quad \forall (x^*, z^*) \in X^* \times Z^* \end{aligned} \tag{4.51}$$

(4.50) ტოლობიდან უშუალოდ ვღებულობთ:

$$\varphi^{**}(x, z^*) = \sup_{x^* \in X^*}(< x^*, x > - \varphi_{\Gamma(F)}(x^*, z^*) =$$

$$= \sup_{x^* \in X^*}(< x^*, x > - \sigma_{\Gamma(F)}(x^*, -z^*) =$$

$$= \sup_{x^* \in X^*}(< x^*, x > - \varphi^*(x^*, z^*)), \quad \forall (x, z^*) \in X \times Z^* \tag{4.52}$$

ცხადია, რომ $x \to \varphi^{**}(x,z^*)$ ფუნქცია, როგორც X–ზე აფინურ და უწყვეტ ფუნქციათა $\{<x^*,x>-\varphi^*(x,z^*) \mid x^* \in X^*\}$ სიმრავლის ზუსტი წერტილოვანი ზედა ზღვარი, არის X–ზე ამოზნექილი და ქვემოდან ნახევრად უწყვეტი ფუნქცია [60]. ცხადია, რომ შეიძლება აიგოს $\varphi^{**}(x,z^*)$ ფუნქციის კერძო შეუღლებული პირველი არგუმენტის მიმართ, ე.ი. განისაზღვროს ნამდვილი $\varphi^{***}(\cdot,z): X^* \to \overline{R}$ ფუნქცია ტოლობით

$$\varphi^{***}(x^*,z^*) = \sup_{x\in X}(<x^*,x>-\varphi^{**}(x,z^*)), \quad \forall (x^*,z^*) \in X^* \times Z^*.$$

მაგრამ მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $\varphi^{**}(x,z^*)$ ფუნქციის შეუღლებულის განხილვას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, რადგან ყოველთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\varphi^{***}(x^*,z^*) = \varphi^*(x^*,z^*), \quad \forall (x^*,z^*) \in X^* \times Z^* \tag{4.53}$$

გარდა ამისა, მარტივი საჩვენებელია, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\varphi^{**}(x,z^*) \le \varphi(x,z^*), \quad \forall (x,z^*) \in X \times Z^* \tag{4.54}$$

დავამტკიცოთ დამხმარე ხასიათის რამდენიმე დებულება.

თეორემა 4.4. ნებისმიერი $z^* \in Z^*$ ელემენტისათვის სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$DomF \subset Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*). \tag{4.55}$$

დამტკიცება. გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ

$$Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*) = \{x \in X \mid \varphi^{**}(x,z^*) < +\infty\}.$$

ვთქვათ, რომ $x \in DomF$. მაშინ $DomF(x) \neq \varnothing$ და არსებობს ისეთი $\hat{z} \in F(x)$ ელემენტი, რომ

$$\varphi(x,z^*) = \inf_{z\in F(x)} <z^*,z> \le <z^*,\hat{z}>.$$

მაგრამ $<z^*,\hat{z}> < +\infty$. ამიტომ, $\varphi(x,z^*) < +\infty$. (4.54) უტოლობის თანახმად, უკანასკნელიდან ვასკვნით, რომ $\varphi^{**}(x,z^*) < +\infty$, $\forall x \in X$, რაც, ცხადია, ნიშნავს იმას, რომ $x \in \varphi^{**}(\cdot,z^*)$, ე.ი.

$$DomF \subset Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.5. ვთქვათ, X ბანახის სივრცეა. მაშინ ნებისმიერი $(x,z^*)\in \operatorname{int}DomF\times Z^*$ წყვილისათვის მოიძებნება წრფივი და უწყვეტი ფუნქციონალი $x^*\in X^*$, რომლისთვისაც სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$<x^*,x>=\varphi^*(x^*,z^*)+\varphi^{**}(x,z^*). \qquad (4.56)$$

დამტკიცება. რადგან $x\to\varphi^{**}(x,z^*)$ არის ამოზნექილი და ნახევრად უწყვეტი ფუნქცია X-ზე, ამიტომ ცნობილი ფაქტის თანახმად [60, გვ.23], $\varphi^{**}(\cdot,z^*)$ არის უწყვეტი ფუნქცია $\operatorname{int}Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*)$-ზე. თეორემა 4.4-ის თანახმად, ადგილი აქვს ჩართვას $DomF\subset Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*)$, საიდანაც ელემენტარულად შეიძლება შემოწმდეს, რომ ასევე სამართლიანია ჩართვა $\operatorname{int}DomF\subset \operatorname{int}Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*)$. ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, $\varphi^{**}(\cdot,z^*)$ უწყვეტია, აგრეთვე, $\operatorname{int}DomF$-ზე. ამიტომ, თუ $x\in\operatorname{int}DomF$, მაშინ $\varphi^{**}(\cdot,z^*)$ უწყვეტია x წერტილში. ამასთან, $x\in Dom\varphi^{**}(\cdot,z^*)$ და ამიტომ $\varphi^{**}(\cdot,z^*)<+\infty$. ცნობილი ფაქტის თანახმად, აღნიშნულ პირობებში [60, გვ. 31], $\varphi^{**}(\cdot,z^*)$ სუბდიფერენცირებადია x წერტილში, ე.ი. არსებობს ისეთი $x^*\in X^*$ ელემენტი, რომ $x^*\in\partial\varphi^{**}(\cdot,z^*)$. მეორე მხრივ, ადგილი აქვს შემდეგ ექვივალენტობებს [60, გვ. 31]:

$$x^*\in\partial\varphi^{**}(x,z^*) \quad\Leftrightarrow\quad <x^*,x>=\varphi^{***}(x^*,z^*)+\varphi^{**}(x,z^*). \qquad (4.57)$$

მაგრამ (4.53) ტოლობის თანახმად $\varphi^{***}(x^*,z^*)=\varphi^*(x^*,z^*)$. ამიტომ (3.16)-დან ვღებულობთ:

$$<x^*,x>=\varphi^*(x^*,z^*)+\varphi^{**}(x,z^*).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 4.9. ვთქვათ, X და Z ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეებია, ხოლო $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვაა. მაშინ

1. F-ს ეწოდება ამოზნექილი, თუ $\Gamma(F)$ არის ამოზნექილი ქვესიმრავლე $X\times Z$ დეკარტულ ნამრავლში.
2. F-ს ეწოდება C-ამოზნექილი, თუ ნებისმიერი ორი x_1, $x_2\in X$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\lambda\in[0,1]$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+C.$$

$F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის საშუალებით განვსაზღვროთ მრავალსახა $F_+:X\to P(<Z,C>)$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$F_+(x) = F_+(x) + C, \quad \forall x \in X. \tag{4.58}$$

მაშინ ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Gamma(F_+) = Epi(F). \tag{4.59}$$

მარტივად შეიძლება შემოწმდეს შემდეგი დებულებების სამართლიანობა:

ლემა 4.2. იმისათვის, რომ $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა იყოს ამოზნექილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი ორი $x_1, x_2 \in X$ წერტილისათვის და ნებისმერი $\lambda \in [0,1]$ რიცხვისათვის ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ჩართვას:

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda) F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2).$$

ლემა 4.3. იმისათვის, რომ $F_+: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა იყოს ამოზნექილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა იყოს C-ამოზნექილი.

განსაზღვრა 4.9-დან და ლემა 4.3-დან ვასკვნით, რომ თუ მრავალსახა $F: X \to P(<Z,C>)$ ასახვისათვის $Epi(F)$ არის ამოზნექილი, მაშინ მრავალსახა $F_+: X \to P(<Z,C>)$ ასახვა არის ამოზნექილი.

გავიხსენოთ რიგი განსაზღვრებისა, რომლებიც შემოღებული გვქონდა ადრე.

განსაზღვრა 4.10. ვთქვათ, V წრფივი, ლოკალურად ამოზნექილი, ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო Q - არაცარიელი და ამოზნექილი ქვესიმრავლეა V-ში, ხოლო $v_0 \in Q$. მაშინ, $T_Q(v_0)$ სიმრავლეს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$T_Q(v_0) = \overline{\bigcup_{\tau>0} \frac{1}{\tau}(Q - v_0)},$$

ეწოდება Q სიმრავლის მხები კონუსი $v_0 \in Q$ წერტილში.

$T_Q(v_0)$ არის ამოზნექილი და ჩაკეტილი კონუსი V ტოპოლოგიურ სივრცეში.

განსაზღვრა 4.11. ვთქვათ, X და Z ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეებია, ხოლო $F: X \to P(<Z,C>)$ ამოზნექილი მრავალსახა ასახვაა. მაშინ, $DF(x_0, z_0): X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვას, განსაზღვრულს ტოლობით

$$\Gamma(DF(x_0, z_0)) = T_{\Gamma(F)}(x_0, z_0), \tag{4.60}$$

ეწოდება F მრავალსახა ასახვის წარმოებული $(x_0, z_0) \in \Gamma(F)$ წერტილში.

განსაზღვრა 4.12. $DF(x_0, z_0): X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის შეუღლებულ $DF(x_0, z_0)^*: Z^* \to X^*$ ასახვას ეწოდება F ასახვის კოდიფერენციალი $(x_0, z_0) \in \Gamma(F)$ წერტილში.

თეორემა 4.6. თუ $F:X\to P(<Z,C>)$ ამოზნექილი მრავალსახა ასახვაა და $(x_0,z_0)\in\Gamma(F)$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$DF(x_0,z_0)^*(z^*)=\{x^*\in X^* \mid \varphi^*(x^*,z^*)=<x^*,x_0>-<z^*,z_0>\},\quad \forall z^*\in Z^* \tag{4.61}$$

დამტკიცება. განსაზღვრა 4.8-ის თანახმად გვაქვს

$$x^*\in DF(x_0,z_0)^*(z^*)\ \Leftrightarrow\ (x^*,-z^*)\in b(\Gamma(DF(x_0,z_0))).$$

მაგრამ განსაზღვრა 4.11-ის თანახმად გვაქვს, რომ

$$\Gamma(DF(x_0,z_0))=T_{\Gamma(F)}(x_0,z_0),$$

ამიტომ, სამართლიანია ექვივალენტობა

$$x^*\in DF(x_0,z_0)^*(z^*)\ \Leftrightarrow\ (x^*,-z^*)\in b(T_{\Gamma(F)}(x_0,z_0)).$$

რადგან $T_{\Gamma(F)}(x_0,z_0)$ არის კონუსი, ამიტომ ბარიერული კონუსის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$b(T_{\Gamma(F)}(x_0,z_0))=-T^*_{\Gamma(F)}(x_0,z_0).$$

ამდენად, ადგილი აქვს შემდეგ ექვივალენტობას:

$$x^*\in DF(x_0,z_0)^*(z^*)\ \Leftrightarrow\ (x^*,-z^*)\in -T^*_{\Gamma(F)}(x_0,z_0)). \tag{4.62}$$

გარდა ამისა, ცნობილი ფაქტის თანახმად [31, გვ. 109], ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\begin{aligned}&-T^*_{\Gamma(F)}(x_0,z_0)=\\&=\{(p,q)\in X^*\times Z^* \mid <p,x_0>+<q,z_0>=\sigma_{\Gamma(F}(p,q)\}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

(4.63)-დან (4.62)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$x^*\in DF(x_0,z_0)^*(z^*)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ <x^*,x_0>-<z^*,z_0>=\sigma_{\Gamma(F)}(x^*,-z^*)=\varphi^*(x^*,z^*).$$

ეს კი თავის მხრივ ნიშნავს იმას, რომ

$$DF(x_0,z_0)^*(z^*)=\{x^*\in X^* \mid \varphi^*(x^*,z^*)=<x^*,x_0>-<z^*,z_0>\}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.6-ში მოყვანილი შედეგედი გვაძლევს $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის კოდიფერენციალის მოხერხებულ სტრუქტურულ წარმოდგენას, რომელიც გამოყენებული იქნება ქვემოთ მოყვანილ მსჯელობებში.

შენიშვნა 4.1 ხანი-ბანახის თეორემის ერთ-ერთი შედეგის თანახმად, თუ x^* არის არანულოვანი ფუნქციონალი X-ზე, მაშინ ყოველთვის მოინახება ისეთი $\bar{x}$ ელემენტი, რომ $<x^*,\bar{x}>\neq 0$. ამ დებულებით იოლად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$DF(x_0,z_0)^*(0)=\{0\}.$$

ამიტომ $DF(x_0,z_0)^*$ მრავალსახა ასახვისათვის შინაარსობრივი დატვირთვა ენიჭება მხოლოდ იმ $DF(x_0,z_0)^*(z^*)$ სიმრავლეებს, რომელთათვისაც $z^*\neq 0$.

შევნიშნოთ ახლა ის ფაქტი, რომ $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვითა და (4.58) ტოლობით განსაზღვრული $F_+:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვისათვის ყოველთვის ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$\Gamma(F)\subset\Gamma(F_+). \tag{4.64}$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება ელემენტარულად შემოწმდეს იმის გათვალისწინებით, რომ $0\in C$. ასე რომ, ნებისმიერი $(x_0,z_0)\in\Gamma(F)$ წყვილისათვის, აგრეთვე, სამართლიანია ჩართვა $(x_0,z_0)\in\Gamma(F_+)$.

თეორემა 4.7. ვთქვათ, $F:X\to P(<Z,C>)$ არის მრავალსახა ასახვა ამოზნექილი და ჩაკეტილი $\Gamma(F)$ გრაფიკით. მაშინ, ნებისმიერი $(x_0,z_0)\in\Gamma(F)$ წერტილისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$DF_+(x_0,z_0)^*(z^*)=\begin{cases}DF(x_0,z_0)^*(z^*), & z^*\in C^*,\\ \varnothing, & z^*\notin C^*\end{cases} \tag{4.65}$$

დამტკიცება. $G:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$G(x)=C,\ \ \forall x\in X.$$

რადგან C ამოზნექილი და ჩაკეტილია, ამიტომ $G:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვაც ამოზნექილი და ჩაკეტილია. გარდა ამისა, $DomG = X$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Gamma(G)=\{(x,z)\in X\times Z \mid z\in C\}=X\times C. \tag{4.66}$$

რადგან $DomF - DomG = DomF - X = X$, ამიტომ $0\in \mathrm{int}(DomF-DomG)$. თუ $(x_0,z_0)\in\Gamma(F)$, მაშინ იმის გამო, რომ $0\in C$, ადგილი აქვს ჩართვას $(x_0,0)\in\Gamma(G)=X\times C$. ვინაიდან F და G მრავალსახა ასახვებია ამოზნექილი და ჩაკეტილი გრაფიკებით, ამიტომ, ცნობილი ფაქტის თანახმად [60], სამართლიანია ტოლობა

$$D(F+G)(x_0,z_0+0)^*=DF(x_0,z_0)^*+DG(x_0,0)^*.$$

მაგრამ $F+G=F_+$, ამიტომ, ნებისმიერი $z^*\in Z^*$ ელემენტისათვის უნდა სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობა:

$$DF_+(x_0,z_0)^*(z^*)=DF(x_0,z_0)^*(z^*)+DG(x_0,0)^*(z^*). \tag{4.67}$$

ამრიგად, $x^*\in DF_+(x_0,z_0)^*(z^*)$ ჩართვას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x^*=x_1^*+x_2^*$, სადაც $x_1^*\in DF(x_0,z_0)^*(z^*)$ და $x_2^*\in DG(x_0,0)^*(z^*)$. თავის მხრივ, გვაქვს

$$x_2^* \in DG(0,x_0)^*(z^*) \quad \Leftrightarrow \quad (x_2^*,-z^*) \in -T^*_{\Gamma(G)}(x_0,0).$$

მაგრამ, რადგან (4.66)-ის თანახმად $\Gamma(G) = X \times C$, ამიტომ

$$-T^*_{\Gamma(G)}(x_0,0) = -T^*_{X \times C}(x_0,0) = -T^*_X(x_0) \times T^*_C(0) =$$

$$= -(X)^* \times C^* = -\{0\} \times C^*,$$

ე.ი.

$$x_2^* \in DG(x_0,0)^*(z^*) \quad \Leftrightarrow \quad (x_2^*,-z^*) \in \{0\} \times (-C)^*$$

უკანასკნელიდან მარტივად ვასკვნით, რომ

$$DG(x_0,0)^*(z^*) = \begin{cases} 0, & z^* \in C^*, \\ \varnothing, & z^* \notin C^* \end{cases} \tag{4.68}$$

(4.68) ტოლობის გათვალისწინებით (4.67)-დან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ

$$DF_+(x_0,z_0)^*(z^*) = \begin{cases} DF(x_0,z_0)^*(z^*), & z^* \in C^*, \\ \varnothing, & z^* \notin C^* \end{cases}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.7 სინამდვილეში ამტკიცებს, რომ $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის კოდიფერენციალის განხილვას $Z^* \setminus C^*$ სიმრავლის წერტილში აზრი არა აქვს, საკმარისია $DF_+(x_0,z_0)^*(z^*)$ განხილულ იქნას მხოლოდ $z^* \in C^*$ წერტილებში და ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ, თუ F არის ამოზნექილი და ჩაკეტილი მრავალსახა ასახვა, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$DF_+(x_0,z_0)^*(z^*) = DF(x_0,z_0)^*(z^*), \ \forall z^* \in C^*. \tag{4.69}$$

ზემოთ ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ, რომ, თუ $F: X \to P(<Z,C>)$ არის ამოზნექილი, ამოზნექილია, აგრეთვე, $F_+: X \to P(<Z,C>)$.

სინამდვილეში, სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ $F_+: X \to P(<Z,C>)$ ამოზნექილია, მაშინ $F: X \to P(<Z,C>)$ ასევე არის ამოზნექილი. მართლაც, გვაქვს:

$$F(x) = F_+(x) - C.$$

ამიტომ, ნებისმიერი ორი $x_1, x_2 \in X$ წერტილისათვის და ნებისმერი $\lambda \in [0,1]$ რიცხვისათვის გვექნება:

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) =$$

$$= \lambda F_+(x_1) - \lambda C + (1-\lambda)F_+(x_2) - (1-\lambda)C =$$

$$= \lambda F_+(x_1) + (1-\lambda)F_+(x_2) - C \subset$$

$$\subset F_+(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - C = F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),$$

რაც, ლემა 4.2-ის თანახმად, უკვე ნიშნავს $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსასა ასასვის ამოზნექილობას. ამრიგად, სინამდვილეში სამართლიანია

თეორემა 4.8. იმისათვის, რომ $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა იყოს ამოზნექილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $F_+: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა იყოს ამოზნექილი.

თუ $F: X \to P(<Z,C>)$ ამოზნექილი მრავალსახა ასახვაა, მაშინ თეორემა 4.8-ისა და თეორემა 4.6-ის გათვალისწინებით ნებისმიერი $(x_0,z_0) \in \Gamma(F_+) = =Epi(F)$ წერტილისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$DF_+(x_0,z_0)^*(z^*) = \\ = \{x^* \in X^* \mid \varphi^*(x^*,z^*) = <x^*,x_0> - <z^*,z_0>\}, \forall z^* \in Z^*. \tag{4.70}$$

მაგრამ თეორემა 4.7-ის თანახმად, თუ F არა მარტო ამოზნექილი, არამედ ჩაკეტილიც არის, ე.ი. $\Gamma(F_+) = Epi(F)$ ჩაკეტილია, მაშინ (4.70) ტოლობა შეიძლება განხილული იქნას მხოლოდ $C^* \subset Z^*$ სიმრავლეზე და ჩაწერილ იქნას შემდეგი სახით:

$$DF(x_0,z_0)^*(z^*) = \\ = \{x^* \in X^* \mid \varphi^*(x^*,z^*) = <x^*,x_0> - <z^*,z_0>\}, \forall z^* \in C^* \tag{4.71}$$

ამდენად, სამართლიანია

თეორემა 4.9. ვთქვათ, $F: X \to P(<Z,C>)$ არის ამოზნექილი მრავალსახა ასახვა, რომლისთვისაც $Epi(F)$ ჩაკეტილია. მაშინ, ნებისმიერი $(x_0,z_0) \in Epi(F)$ წერტილისა და $z^* \in C^*$ ფუნქციონალისათვის სამართლიანია (4.71) ტოლობა.

შენიშვნა 4.2. თუ $(x_0,z_0) \in \mathrm{int}\Gamma(F_+)$, მაშინ $T_{\Gamma(F_+)}(x_0,z_0) \equiv X \times Z$, ე.ი. $T^*_{\Gamma(F_+)}(x_0,z_0) = \{(0,0)\}$. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა: $DF_+(x_0,z_0)^*(0) = \{0\}$. ამრიგად, $DF_+(x_0,z_0)^*$ მრავალსახა ასახვას შინაარსობრივი დატვირთვა გააჩნია მხოლოდ $\Gamma(F_+)$ სიმრავლის სასაზღვრო წერტილებისათვის, ე.ი. როცა $(x_0,z_0) \in \partial\Gamma(F_+)$, სადაც $\partial\Gamma(F_+)$-ით აღნიშნულია $\Gamma(F_+)$ სიმრავლის საზღვარი. მეორე მხრივ, რადგან $\Gamma(F_+) = Epi(F)$, ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ ექვივალენტობას:

$$(x_0,z_0) \in \partial\Gamma(F_+) \iff (x_0,z_0) \in \partial Epi(F) \iff \\ \iff x_0 \in DomF, \quad z_0 \in \partial(F(x_0) + C).$$

შენიშვნების 4.1-ის, 4.2-ის და თეორემა 4.7-ის გათვალისწინებით შემოვიტანოთ

განსაზღვრა 4.13. ვთქვათ, $F: X \to P(<Z,C>)$ არის ამოზნექილი მრავალსახა ასახვა, რომლისთვისაც $Epi(F)$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $X \times Z$-ში. ვიტყვით, რომ F კოდიფირენცირებადია $x_0 \in DomF$ წერტილში, თუ ნების-

მიერი $(x_0, z_0) \in \partial Epi(F)$ ელემენტისათვის მოიძებნება $z^* \in C^* \setminus \{0\}$ ფუნქციონალი, რომლისთვისაც

$$DF(x_0, z_0)^*(z^*) =$$
$$= \{x^* \in X^* \mid \varphi^*(x^*, z^*) = < x^*, x_0 > - < z^*, z_0 > \neq \varnothing\}.$$

შენიშვნა 4.3. ზოგადობის შეუზღუდავად, განსაზღვრა 4.13-ში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოითხოვება $z^* \in C^* \cap B(0,1)$ ელემენტის არსებობა, სადაც $B(0,1) = \{z^* \in Z^* \mid \|z^*\| = 1\}$. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს მრავალსახა $DF(x_0, z_0)^*$ ასახვის სტრუქტურისა და φ^* ფუნქციის განსაზღვრებიდან.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $C_+^* = C^* \cap B(0,1)$.

განვსაზღვროთ ახლა $F : X \to P(< Z, C >)$ მრავალსახა ასახვის კიდევ ორი განსხვავებული ტიპის შეუღლებული ასახვა, რომელთაც, გაურკვევლობის თავიდან აცილების მიზნით, ჩვენ ვუწოდებთ F ასახვის პოლიარას და ბიპოლიარას.

განსაზღვრა 4.14. $F^0 : X^* \to P(< Z, C >)$ მრავალსახა ასახვას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$F^0(x^*) = \{z \in Z \mid z_+^* \in C_+^* : < z_+^*, z > = \varphi^*(x^*, z_+^*)\},$$

ეწოდება F მრავალსახა ასახვის პოლიარა.

განსაზღვრა 4.15. $F^{00} : X \to P(< Z, C >)$ მრავალსახა ასახვას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$F^{00}(x) = \{z \in Z \mid z_+^* \in C_+^* : < z_+^*, z > = \varphi^{**}(x, z_+^*)\},$$

ეწოდება F მრავალსახა ასახვის ბიპოლიარა.

ამ ასახვებისათვის ქვემოთ დავადგენთ დუალობის ზოგიერთ თანადობას.

ქვემოთ, ყველგან ჩავთვლით, $F : X \to P(< Z, C >)$ არის ამოზნექილი მრავალსახა ასახვა ჩაკეტილი ზეგრაფიკით.

$S : X \to P(< Z, C >)$ მრავალსახა ასახვა განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$S(x) = \{z \in Z \mid (x, z) \in Epi(F)\}. \tag{4.72}$$

თეორემა 4.10. ვთქვათ, $F : X \to P(< Z, C >)$ მრავალსახა ასახვა კოდიფერინცირებადია $x_0 \in Dom F$ წერტილში. მაშინ, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\partial(F(x_0) + C) = \partial S(x_0). \tag{4.73}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $z_0 \in \partial(F(x_0)+C)$. მაშინ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ელემენტები $z_n \in B(0,\frac{1}{n})$, რომ $z_0 + z_n \in F(x_0+C)$. ეს ნიშნავს იმას, რომ $\{(x_0, z_0+z_n)\}$ მიმდევრობა არის ქვესიმრავლე $Epi(F)$-დან. მეორე მხრივ, ცხადია, რომ $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ამიტომ $z_0 + z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$. რადგან $Epi(F)$ ჩაკეტილია ვასკვნით, რომ $(x_0, z_0) \in Epi(F)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $z_0 \in S(x_0)$. ამით დამტკიცებულია შემდეგი ჩართვა:

$$\partial(F(x_0)+C) \subset \partial S(x_0). \tag{4.74}$$

მეორე მხრივ, რადგან F კოდიფერენცირებადია $x_0 \in Dom F$ წერტილში, მოიძებნება ორი ისეთი $x^* \in X^*$ და $z_+^* \in C_+^*$ ფუნქციონალი, რომ

$$\varphi^*(x^*, z_+^*) = \sup_{x\in X} \sup_{z\in F(x)} (<x^*, x> - <z_+^*, z>) =$$

$$= <x^*, x_0> - <z_+^*, z_0>.$$

აქედან უშუალოდ ვასკვნით შემდეგი უტოლობის სამართლიანობას:

$$<x^*, x_0> - <z_+^*, z_0> \geq <x^*, x> - <z_+^*, z>,$$

$$\forall x \in X, \forall z \in F(x).$$

კერძოდ, $x = x_0$ წერტილისათვის უკანასკნელიდან ვღებულობთ

$$<z_+^*, z - z_0> \leq 0, \quad \forall z \in F(x_0). \tag{4.75}$$

ვაჩვენოთ, რომ z_0 არ შეიძლება იყოს $S(x_0)$ სიმრავლის შიგა წერტილი. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი ორი $\bar{z} \in F(x_0)$ და $\bar{c} \in \operatorname{int} C$ ელემენტი, რომ $z_0 = \bar{z} + \bar{c}$. ვინაიდან (4.75) სამართლიანია ნებისმიერი $\bar{z} \in F(x_0)$ ელემენტისათვის, უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით ამავე (4.75) უტოლობიდან ვღებულობთ:

$$<z_+^*, \bar{c}> \leq 0. \tag{4.76}$$

რადგან $z_+^* \in C^* \setminus \{0\}$ და $\bar{c} \in \operatorname{int} C$, ცნობილი ფაქტის თანახმად ყოველთვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$<z_+^*, \bar{c}> > 0.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ

$$z_0 \notin \operatorname{int} S(x_0). \tag{4.77}$$

ვინაიდან $z_0 \in \partial(F(x_0)+C)$ და სამართლიანია (4.74) ჩართვა, (4.77)-დან უშუალოდ ვასკვნით:

$$\partial(F(x_0)+C) \subset \partial S(x_0). \tag{4.78}$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ სამართლიანი იქნება შებრუნებული ჩართვაც:

$$\partial S(x_0) \subset \partial(F(x_0)+C).$$

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ S ასახვის განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს $F(x_0)+C \subset S(x_0)$ ჩართვა, ე.ი. $\operatorname{int} F(x_0)+C \subset \operatorname{int} S(x_0)$. ამიტომ, ცხადია, რომ ნებისმიერი $z_0 \in \partial S(x_0)$ ელემენტისათვის სამართლიანია თანადობა

$$z_0 \notin \operatorname{int}(F(x_0)+C). \tag{4.79}$$

მეორე მხრივ, $Epi(F)$-ის ჩაკეტილობა განაპირობებს $S(x_0)$-ის ჩაკეტილობას. ამიტომ, იმის გამო, რომ $z_0 \in \partial S(x_0)$, უშუალოდ გამომდინარეობს $z_0 \in S(x_0)$ ჩართვა. ეს კი, თავის მხრივ, ნიშნავს იმას, რომ

$$z_0 \in F(x_0)+C. \tag{4.80}$$

(4.79) და (4.80), ცხადია, გვაძლევს ჩართვას

$$z_0 \in \partial(F(x_0)+C).$$

ამით ფაქტიურად დამტკიცებულია, რომ

$$\partial S(x_0) \subset \partial(F(x_0)+C). \tag{4.81}$$

(4.78) და (4.81) გვაძლევს (4.73) ტოლობას, რაც სრულიად ამტკიცებს თეორემას.

ამდენად, გარკვეულ პირობებში $F(x_0)+C$ და $S(x_0)$ სიმრავლეთა საზღვრები ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 4.11. ვთქვათ, $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა კოდიფერენცირებადია $x_0 \in DomF$ წერტილში. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$\partial(F(x_0)+C) \subset F^{00}(x_0). \tag{4.82}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $z \in \partial(F(x_0)+C)$. რადგან F კოდიფერენცირებადია $x_0 \in DomF$ წერტილში, მოიძებნება $z_+^* \in C_+^*$ და $x^* \in X^*$ ფუნქციონალები, რომელთათვისაც სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\varphi^*(x^*, z_+^*) = < x^*, x_0 > - < z_+^*, z >,$$

საიდანაც ვასკვნით:

$$< z_+^*, z > = < x^*, x_0 > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \le$$

$$\le \sup_{x^* \in X^*} (< x^*, x_0 > - \varphi^*(x^*, z_+^*)) = \varphi^{**}(x_0, z_+^*).$$

ე.ი. სამართლიანია უტოლობა

$$< z_+^*, z > \ \leq \ \varphi^{**}(x_0, z_+^*). \qquad (4.83)$$

მეორე მხრივ, გვაქვს:

$$\varphi^*(x^*, z_+^*) \ \geq < x^*, x > - < z_+^*, \bar{z} >, \ \forall x \in X, \forall \bar{z} \in F(x).$$

კერძოდ, $x = x_0$ წერტილისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$< x^*, x_0 > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \ \leq < z_+^*, \bar{z} > . \qquad (4.84)$$

რადგან $z \in \partial(F(x_0)+C)$, ამიტომ $S(x_0)$-ის ჩაკეტილობისა და თეორემა 4.10-ს თანახმად, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$z \in F(x_0) + C,$$

ე.ი. არსებობს $\bar{z} \in F(x_0)$ და $\bar{c} \in C$ ორი ისეთი ელემენტი, რომ $z = \bar{z} + \bar{c}$, ე.ი. $\bar{z} = z - \bar{c}$ და $\bar{z} \in F(x_0)$. ამიტომ, (4.84)-ის თანახმად გვექნება:

$$< x^*, x_0 > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \ \leq < z_+^*, z > - < z_+^*, \bar{c} > .$$

მაგრამ $\bar{c} \in C$ და $z_+^* \in C_+^*$, ამიტომ $< z_+^*, \bar{c} > \geq 0$. აქედან ვასკვნით, რომ

$$< x^*, x_0 > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \ \leq < z_+^*, z >,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\sup_{x^* \in X^*} (< x^*, x_0 > - \varphi^*(x^*, z_+^*)) = \varphi^{**}(x_0, z_+^*) \ \leq < z_+^*, z > . \qquad (4.85)$$

(4.83) და (4.85) უტოლობებიდან უშუალოდ ვღებულობთ ტოლობას

$$< z_+^*, z > = \varphi^{**}(x_0, z_+^*).$$

განსაზღვრა 4.15-ის თანახმად, ეს უკანასკნელი უკვე ნიშნავს იმას, რომ $z \in F^{00}(x_0)$. ასე რომ სამართლიანია ჩართვა (4.82). თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემით ფაქტიურად დამყარდა თანადობა $F(x_0)$+C სიმრავლის საზღვარსა და $F^{00}(x_0)$ სიმრავლის შორის.

4.3. დუალობის ძირითადი პრინციპი

დავუშვათ, როგორც წინა ნაწილში, რომ X და Z წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეებია, Z სივრცე ნაწილობრივ დალაგებულია ამოზნექილი, ჩაკეტილი, სხეულოვანი (არაცარიელი შიგა ნაწილით), მახვილი C კონუსით. აუცილებლობის შემთხვევაში C კონუსით ნაწილობრივ დალაგებულ Z სივრცეს ჩავწერთ $<Z,C>$ წყვილის სახით. X^*-ით და Z^*-ით შესაბამისად აღვნიშნოთ X და Z სივრცეთა შეუღლებული სივრცეები. $P(Z)=P(<Z,C>)$–ით აღვნიშნოთ Z სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა. განვიხილოთ $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა.

ვთქვათ, Ω არაცარიელი ქვესიმრავლეა $<Z,C>$-ში. განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$p\max\Omega=\{z\in\Omega \mid (\Omega-z)\bigcap C=\{0\}\},$$

$$p\min\Omega=\{z\in\Omega \mid (\Omega-z)\bigcap(-C)=\{0\}\},$$

$$P\max\Omega=p\max\overline{(\Omega-C)},$$

$$P\min\Omega=p\min\overline{(\Omega+C)}.$$

$p\max\Omega$ ($p\min\Omega$) სიმრავლეს ვუწოდებთ Ω სიმრავლის **მაქსიმალურ ელემენტთა სიმრავლეს პარეტოს აზრით (მინიმალურ ელემენტთა სიმრავლეს პარეტოს აზრით)**.

$\varphi:X\times Z^*\to\overline{R}$ ($\overline{R}=R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$) ნამდვილი ფუნქცია განვსაზღვროთ ტოლობით

$$\varphi(x,z^*)=\inf_{z\in F(x)}<z^*,z>,\quad \forall(x,z^*)\in X\times Z^*$$

როგორც წინა ნაწილში, φ ფუნქციის $\varphi^*(\cdot,z^*):X^*\to\overline{R}$ კერძო შეუღლებული ფუნქცია პირველი არგუმენტის მიმართ განისაზღვრება ტოლობით

$$\varphi^*(x^*,z^*)=\sup_{x\in X}(<x^*,x>-\varphi(x,z^*)),\quad \forall x^*\in X^*$$

ხოლო φ ფუნქციის $\varphi^{**}(\cdot,z^*):X\to\overline{R}$ კერძო მეორე შეუღლებულს პირველი არგუმენტის მიმართ ექნება სახე

$$\varphi^{**}(x,z^*)=\sup_{x^*\in X^*}(<x^*,x>-\varphi^*(x^*,z^*)),\quad \forall x\in X.$$

მრავალსახა ასახვების დუალობის ძირითადი პრინციპის ჩამოყალიბებისათვის წინასწარ დავადგინოთ რამდენიმე დებულება.

თეორემა 4.12 ვთქვათ, Z რეფლექსური ბანახის სივრცეა, ხოლო $x\in\operatorname{int}DomF$. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$P\max F^{00}(x)=p\max F^{00}(x).\qquad (4.86)$$

(აქ $F^{00}:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვის ბიპოლიარაა (იხ. განსაზღვრა 4.15)).

დამტკიცება. წინასწარ ვაჩვენოთ $F^{00}(x)-C$ ქვესიმრავლის ჩაკეტილობა Z სივრცეში. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$F^{00}(x)-C=\{z\in Z \mid \exists z_+^*\in C_+^*:<z_+^*,z>\le \varphi^{**}(x,z_+^*)\}. \qquad (4.87)$$

მართლაც, ვთქვათ, $z\in F^{00}(x)-C$. მაშინ $z=\bar{z}-\bar{c}$, სადაც $\bar{z}\in F^{00}(x)$, $\bar{c}\in C$. $\bar{z}\in F^{00}(x)$ ჩართვიდან გამომდინარეობს ისეთი $z_+^*\in C_+^*$ ელემენტის არსებობა, რომ

$$<z_+^*,\bar{z}>=\varphi^{**}(x,z_+^*). \qquad (4.88)$$

მეორე მხრივ, $\bar{c}\in C$, რაც, ცხადია, ნიშნავს შემდეგ უტოლობას:

$$-<z_+^*,\bar{c}>\le 0. \qquad (4.89)$$

(4.88) ტოლობისა და (4.89) უტოლობის შეკრებით ვღებულობთ:

$$<z_+^*,\bar{z}>-<z_+^*,\bar{c}>=<z_+^*,\bar{z}-\bar{c}>=<z_+^*,z>\ \le\varphi^{**}(x,z_+^*),$$

რაც, ცხადია, ნიშნავს, რომ

$$z\in\{z\in Z \mid \exists z_+^*\in C_+^*:<z_+^*,z>\le \varphi^{**}(x,z_+^*)\}.$$

ამით ფაქტიურად დამტკიცებულია ჩართვა

$$F^{00}(x)-C\subset\{z\in Z \mid \exists z_+^*\in C_+^*:<z_+^*,z>\le \varphi^{**}(x,z_+^*)\}. \qquad (4.90)$$

ახლა ვთქვათ, $z\in\{z\in Z \mid \exists z_+^*\in C_+^*:<z_+^*,z>\le \varphi^{**}(x,z_+^*)\}$. მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $z_+^*\in C_+^*$ და $\bar{c}\in C$ ორი ელემენტი, რომ

$$<z_+^*,z>=\ \varphi^{**}(x,z_+^*)-<z_+^*,\bar{c}>.$$

ეს ნიშნავს შემდეგ ტოლობას:

$$<z_+^*,z+\bar{c}>=\ \varphi^{**}(x,z_+^*),$$

ე.ი. $z+\bar{c}\in F^{00}(x)$, საიდანაც უშულაოდ გამომდინარეობს $z\in F^{00}(x)-C$ ჩართვა. ამით დამტკიცდა, რომ

$$F^{00}(x)-C\supset\{z\in Z \mid \exists z_+^*\in C_+^*:<z_+^*,z>\le \varphi^{**}(x,z_+^*)\}. \qquad (4.91)$$

(4.90) და (4.91) ჩართვებიდან კი გამომდინარეობს ტოლობა (4.87).

ვთქვათ, რომ $\hat{z}$ არის $F^{00}(x)-C$ სიმრავლის ზღვრული წერტილი. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\{z_n\}\subset F^{00}(x)-C$ მიმდევრობა, რომ $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{z}$. რადგან ნებისმიერი ნატურალური n-თვის $z_n\in F^{00}(x)-C$, ამიტომ (4.87) ტოლობის თანახმად მოიძებნება ისეთი $\{z_{+n}^*\}\subset C_+^*$ მიმდევრობა, რომ

$$< z^*_{+n}, z_n > \le \varphi^{**}(x, z^*_{+n}). \qquad (4.92)$$

რადგან Z რეფლექსური ბანახის სივრცეა, ამიტომ C^*_+ არის სუსტად ბიკომპაქტური ქვესიმრავლე Z^*-ში. აქედან გამომდინარე, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოიძებნება $z^*_{+0} \in C^*_+$ ფუნქციონალი, რომლისკენაც $\{z^*_{+n}\} \subset C^*_+$ მიმდევრობა სუსტად იკრიბება, ე.ი. $z^*_{+n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} z^*_{+0}$. მეორე მხრივ, φ^{**} ფუნქციის განსაღვრიდან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ მოიძებნება ისეთი $\{x^*_n\} \subset X^*$ მიმდევრობა, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას

$$< x^*_n, x > - \varphi^*(x^*_n, z^*_{+n}) > \varphi^{**}(x, z^*_{+n}) - \frac{1}{n}, \quad \forall n = 1,2,3... \qquad (4.93)$$

(4.92) და (4.93)-დან ვღებულობთ:

$$< x^*_n, x > - \varphi^*(x^*_n, z^*_{+n}) > < z^*_{+n}, z_n > - \frac{1}{n}, \quad \forall n = 1,2,3,...,$$

ე.ი.

$$< x^*_n, x > - < z^*_{+n}, z_n > > \varphi^*(x^*_n, z^*_{+n}) - \frac{1}{n}, \quad \forall n = 1,2,3,... \qquad (4.94)$$

თავის მხრივ, (4.51) ტოლობებიდან გვაქვს:

$$\varphi^*(x^*_n, z^*_{+n}) \ge < x^*_n, \bar{x} > - < z^*_{+n}, \bar{z} >, \quad \forall \bar{x} \in X, \forall \bar{z} \in F(\bar{x}).$$

უკანასკნელი ფაქტის გათვალისწინებით, (4.94)-დან ვღებულობთ:

$$< x^*_n, x - \bar{x} > - < z^*_{+n}, z_n - \bar{z} > > -\frac{1}{n}, \quad \forall n = 1,2,3,...,$$

ე.ი.

$$< x^*_n, \bar{x} - x > < < z^*_{+n}, \bar{z} - z_n > + \frac{1}{n}, \qquad (4.95)$$
$$\forall n = 1,2,3,..., \forall \bar{x} \in X, \forall \bar{z} \in F(\bar{x}).$$

რადგან $x \in \mathrm{int} DomF$, მოიძებნება $0 \in Z$ წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $x + U \subset DomF$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $F(x+u) \ne \varnothing$, $\forall u \in U$. ვინაიდან $-u \in U$, აგრეთვე დაცულია პირობა $F(x-u) \ne \varnothing$, $\forall u \in U$. თუ (4.95)-ში თანმიმდევრობით ჩავსვავთ $\bar{x} = x + u$ და $\bar{x} = x - u$-ს, სადაც u ნებისმიერი წერტილია U-ში, მივიღებთ:

$$< x^*_n, u > < < z^*_{+n}, \bar{z} - z_n > + \frac{1}{n},$$
$$\forall n = 1,2,3,..., \forall u \in U, \forall \bar{z} \in F(x+u),$$

$$< x_n^*, u > \; > - < z_{+n}^*, \bar{z} - z_n > - \frac{1}{n},$$
$$\forall n = 1,2,3,\dots,\ \forall u \in U,\ \forall \bar{z} \in F(x-u),$$

ე.ი.

$$< x_n^*, u > \; < \; < z_{+n}^*, \hat{z} - z_n > + < z_{+n}^*, \bar{z} - \hat{z} > + \frac{1}{n},$$
$$\forall n = 1,2,3,\dots,\ \forall u \in U,\ \forall \bar{z} \in F(x+u),$$
$$< x_n^*, u > \; > - < z_{+n}^*, \hat{z} - z_n > - < z_{+n}^*, \bar{z} - \hat{z} > - \frac{1}{n},$$
$$\forall n = 1,2,3,\dots,\ \forall u \in U,\ \forall \bar{z} \in F(x-u).$$

რადგან $z_{+n}^* \xrightarrow[n\to\infty]{w} z_{+0}^*$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{z}$ და $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, უკანასკნელი ორი უტოლობიდან ვასკვნით:

$$\left| < x_n^*, u > \right| \le M, \quad \forall n = 1,2,3,\dots, \forall u \in U, \tag{4.96}$$

სადაც M რაიმე დადებითი მუდმივი რიცხვია.

უტოლობა (4.96) ამტკიცებს, რომ $\{x_n^*\} \subset X^*$ მიმდევრობა სუსტად შემოსაზღვრულია $0 \in Z$ წერტილის U მიდამოზე, საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს ამ მიმდევრობის სუსტი შემოსაზღვრულობა მთელ Z-ზე. აქედან კი გამომდინარეობს ისეთი $x^* \in Z^*$ ელემენტის არსებობა, რომ $x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{w} x^*$. მეორე მხრივ, მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს $\varphi^*: X^* \times Z^* \to R$ ფუნქციის ნახევრად უწყვეტობა ქვემოდან, ე.ი. სამართლიანია შემდეგი უტოლობა [60]:

$$\underline{\lim}_{(x_n^*, z_{+n}^*) \to (x^*, z_0^*)} \varphi^*(x_n^*, z_{+n}^*) \;\ge\; \varphi^*(x^*, z_0^*). \tag{4.97}$$

ამიტომ, (4.97)-ის გათვალისწინებით (4.94)-ში ზღვარზე გადასვლით ვღებულობთ:

$$< x^*, x > - \varphi^*(x^*, z_{+0}^*) \;\ge\; < z_{+0}^*, \hat{z} >, \tag{4.98}$$

საიდანაც φ^{**} ფუნქციის განსაზღვრიდან ვღებულობთ:

$$\varphi^{**}(x, z_{+0}^*) \;\ge\; < z_{+0}^*, \hat{z} >.$$

ვინაიდან $z_{+0}^* \in C_+^*$, ამიტომ (4.87)-ის თანახმად $\hat{z} \in F^{00}(x) - C$. ამით $F^{00}(x) - C$ სიმრავლის ჩაკეტილობა დამტკიცებულია.

რადგან $F^{00}(x) - C$ ჩაკეტილია, ამიტომ ეს სიმრავლე სუსტად ჩაკეტილიცაა, ე.ი. $\overline{F^{00}(x) - C}^{w} = F^{00}(x) - C$. მეორე მხრივ, (4.87) ტოლობის

თანახმად $F^{00}(x)$ არის $F^{00}(x)-C$ სიმრავლის საზღვარი, რომელიც, ცხადია, არის ჩაკეტილი და მითუმეტეს სუსტად ჩაკეტილი, ე.ი. სამართლიანია, აგრეთვე, ტოლობა $\overline{F^{00}(x)}^{w} = F^{00}(x)$. გარდა ამისა, როგორც უკვე ზემოთ იყო დამტკიცებული, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$P\max F^{00}(x) = p\max(F^{00}(x)-C) \subset p\max F^{00}(x). \tag{4.99}$$

მეორე მხრივ, მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ყოველთვის სამართლიანია შემდეგი ჩართვაც:

$$p\max F^{00}(x) \subset p\max(F^{00}(x)-C). \tag{4.100}$$

ამრიგად, (4.99) და (4.100) ჩართვები, ცხადია, იძლევიან ტოლობას:

$$P\max F^{00}(x) = p\max F^{00}(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შემდეგში დაგვჭირდება შემდეგი დებულება:

თეორემა 4.13. ვთქვათ, $x\in \mathrm{int}DomF$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$P\max F^{00}(x) \subset \partial S(x). \tag{4.101}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$P\max F^{00}(x) \subset S(x). \tag{4.102}$$

განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$S(x) = \{z\in Z \mid (x,z)\in Epi(F)\} = \{z\in Z \mid z\in F(x)+C\}.$$

დაუშვათ, რომ (4.102) არაა სამართლიანი. მაშინ მოიძებნება ისეთი $z\in P\max F^{00}(x)$ ელემენტი, რომ $z\notin S(x)$, რაც თავის მხრივ ნიშნავს $(x,z)\notin Epi(F)$. რადგან $Epi(F)$ ამოზნექილი და ჩაკეტილია (დაშვების თანახმად), ამიტომ შესაძლებელია $\{(x,z)\}$ და $Epi(F)$ ჩაკეტილ სიმრავლეთა მკაცრი განცალება (ხანი-ბანახის თეორემის საფუძველზე). ე.ი. მოიძებნება ისეთი $(x^*,-z^*)\in X^*\times Z^*\setminus\{(0,0)\}$ ფუნქციონალი, რომ

$$\begin{gathered}\sup_{\bar{x}\in X}\ \sup_{\bar{z}\in F(\bar{x})+C} (<x^*,\bar{x}>-<z^*,\bar{z}>) < \\ < <x^*,x>-<z^*,z>.\end{gathered} \tag{4.103}$$

(4.103)-დან ვასკვნით, რომ, კერძოდ $\bar{x}=x$-სთვის და ნებისმიერი $\bar{z}$-სთვის, $\bar{z}\in F(x)+C$, შესრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$<z^*,\bar{z}> \ > \ <z^*,z>. \tag{4.104}$$

კერძოდ, ნებისმიერი $\hat{z}\in F(x)$ ფიქსირებული წერტილისათვის და ნებისმიერი $c\in C$ ელემენტისათვის გვექნება:

$$< z^*, \hat{z} > + < z^*, c > \; > \; < z^*, z >, \; \forall c \in C. \tag{4.105}$$

(4.104) შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $z^* \in C^*$. ცხადია, $z^* \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში (4.104)-დან მივიღებთ:

$$\sup_{\bar{x} \in X} < x^*, \bar{x} > \; < \; < x^*, x >. \tag{4.106}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $(x^*, z^*) \neq 0$, ამიტომ $z^* \neq 0$ დაშვებიდან ვღებულობთ $x^* \neq 0$. ამიტომ (4.106) არაა სამართლიანი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს $z^* \in C^* \setminus \{0\}$ ჩართვას, და, ცხადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $z^* \in C_+^*$. შეგვიძლია, აგრეთვე, ჩავთვალოთ, რომ $z^* = z_+^* \in C_+^*$. მაშინ, φ^* ფუნქციის განსაზღვრიდან და (4.103) უტოლობიდან პირდაპირ ვღებულობთ:

$$\varphi^*(x^*, z_+^*) \; < \; < x^*, x > - < z_+^*, z >.$$

აქედან ვასკვნით:

$$< z_+^*, z > \; < \; < x^*, x > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \; <$$

$$< \; \sup_{x^* \in X^*} \{ < x^*, x > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \} = \varphi^{**}(x, z_+^*).$$

ამდენად, დადგენილია შემდეგი უტოლობა:

$$< z_+^*, z > \; < \; \varphi^{**}(x, z_+^*). \tag{4.107}$$

რადგან $z_+^* \neq 0$, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $c \in C$ ელემენტი, რომ ადგილი ჰქონდეს ზუსტ ტოლობას $(c \neq 0)$:

$$< z_+^*, z + c > = \varphi^{**}(x, z_+^*).$$

ეს კი, ცხადია, ნიშნავს: $z + c \in F^{00}(x)$. ვთქვათ, რომ $\bar{z} = z + c$. რადგან $c \neq 0$, ამიტომ $\bar{z} \neq z$. მეორე მხრივ, $\bar{z} \in F^{00}(x)$, ამიტომ $\bar{z} - z \in F^{00}(x) - z$, და, რადგან $\bar{z} - z = c$, გვექნება $c \in (F^{00}(x) - z) \bigcap C$. ვინაიდან $c \neq 0$, ეს ნიშნავს იმას, რომ $(F^{00}(x) - z) \bigcap C \neq \{0\}$. ე.ი. $z \notin p\max F^{00}(x)$. მაგრამ თეორემა 4.12-ის თანახმად $p\max F^{00}(x) = P\max F^{00}(x)$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $z \notin P\max F^{00}(x)$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს შემდეგი ჩართვის სამართლიანობას:

$$P\max F^{00}(x) \subset S(x).$$

ამით (4.102) დამტკიცებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $P\max F^{00}(x) \subset \partial S(x)$. (4.102)-ის თანახმად, თუ $z \in P\max F^{00}(x)$, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $z \notin \operatorname{int} S(x)$. დაუშვათ საწინა-

ალმდეგო. ე.ი. მივიღოთ, რომ $z \in \operatorname{int} S(x)$. მაშინ, საკმარისად მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$z + \varepsilon B(0,1) \subset S(x).$$

რადგან $z \in P\max F^{00}(x)$, ამიტომ $z \in F^{00}(x) - C$ (თეორემა 4.12-ის თანახმად), ე.ი. არსებობს ისეთი $\bar{z} \in F^{00}(x)$ და $\bar{c} \in C$, რომ $z = \bar{z} - \bar{c}$. ვინაიდან სამართლიანია $z \in z + \varepsilon B(0,1)$ ნებისმიერი ε რიცხვისათვის, ამიტომ, კერძოდ, $\bar{z} - \bar{c} \in z + \frac{1}{2}\varepsilon B(0,1)$. მეორე მხრივ, $\bar{z} \in F^{00}(x)$. ამიტომ მოიძებნება ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ ელემენტი, რომ $< z_+^*, \bar{z} > = \varphi^{**}(x, z_+^*)$. მაგრამ

$$\varphi^{**}(x, z_+^*) = \sup_{x^* \in X^*} (< x^*, x > - \varphi^*(x^*, z_+^*)),$$

ამიტომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $x_n^* \in X^*$, რომ სრულდება უტოლობა

$$< z_+^*, \bar{z} > - \frac{1}{n} \;<\; < x_n^*, x > - \varphi^*(x_n^*, z_+^*). \tag{4.108}$$

ამასთან ერთად, მარტივად შეიძლება შემოწმდეს შემდეგი უტოლობა:

$$\varphi^*(x_n^*, z_+^*) \;\geq\; \sup_{\hat{x} \in X} \sup_{\hat{z} \in F(\hat{x}) + C} (< x_n^*, \hat{x} > - < z_+^*, \hat{z} >). \tag{4.109}$$

ამიტომ, სამართლიანია შემდეგი უტოლობა ((4.108) და (4.109)-დან):

$$< x_n^*, \hat{x} > - < z_+^*, \hat{z} > \;<\; < x_n^*, x > - < z_+^*, \bar{z} > + \frac{1}{n},$$

$$\forall \hat{x} \in X, \forall \hat{z} \in F(\hat{x}) + C.$$

კერძოდ, $\hat{x} = x$ -თვის ვღებულობთ:

$$< z_+^*, \hat{z} > \;>\; < z_+^*, \bar{z} > - \frac{1}{n}, \quad \forall \hat{z} \in F(x) + C. \tag{4.110}$$

მეორე მხრივ, $\bar{z} - \bar{c} + \frac{1}{2}B(0,1) \subset S(x)$, და, ე.ი.

$$\bar{z} - \bar{c} + \frac{1}{2}B(0,1) \subset F(x) + C.$$

ამიტომ ნებისმიერი $u \in \frac{1}{2}B(0,1)$ ელემენტისათვის

$$\hat{z} = \bar{z} - \bar{c} + u \in F(x) + C.$$

ამიტომ, (4.110)-დან ვღებულობთ:

$$< z_+^*, \bar{z} - \bar{c} + u > \; \geq \; < z_+^*, \bar{z} > -\frac{1}{n},$$

$$\forall n = 1,2,3,..., \; \forall u \in \frac{1}{2} B(0,1).$$

აქედან ვასკვნით:

$$- < z_+^*, \bar{c} > + < z_+^*, u > \; \geq -\frac{1}{n},$$

$$\forall n = 1,2,3,..., \; \forall u \in \frac{1}{2} B(0,1).$$

რადგან $\bar{c} \in C$ ჩართვიდან გამომდინარეობს $< z_+^*, \bar{c} > \; \geq 0$, სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$< z_+^*, u > \; \geq -\frac{1}{n}, \quad \forall n = 1,2,3,..., \; \forall u \in \frac{1}{2} B(0,1).$$

ვინაიდან ეს უკანასკნელი სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის, ამიტომ

$$< z_+^*, u > \; \geq 0, \quad \forall u \in \frac{1}{2} B(0,1).$$

რადგან $B(0,1)$ არის 0-ის სიმეტრიული მიდამო, ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობასაც:

$$< z_+^*, u > \; \leq 0, \quad \forall u \in \frac{1}{2} B(0,1).$$

ამრიგად,

$$< z_+^*, u > = 0, \quad \forall u \in \frac{1}{2} B(0,1).$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ნიშნავს, რომ $z_+^* = 0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $z_+^* \in C^* \setminus \{0\}$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $z \notin \operatorname{int} S(x)$. ამიტომ, (4.102)-ის თანახმად $z \in \partial S(x)$. ამით დამტკიცებულია ჩართვა (4.101). თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 4.4. ვთქვათ, B არის ქვესიმრავლე (Z,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში. მაშინ B შეიძლება განვიხილოთ როგორც (B,τ') ტოპოლოგიური სივრცე, სადაც $\tau' = \{ B \cap U \mid U \in \tau \}$. τ'-ს ეწოდება Z-დან B-ზე ინდუცირებული ტოპოლოგია. გარდა ამისა, თუ $A \subset B$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $B \setminus (B \setminus A) = A$. ამიტომ, თუ $B \setminus A$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე (B,τ') სივრცეში, მაშინ A იქნება ღია ქვესიმრავლე (B, τ') სივრცეში.

დავადგინოთ $F^{00}(x)$-ის პარეტოს აზრით მაქსიმალურ ელემენტთა სიმრავლის სტრუქტურა ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში.

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 4.14. ვთქვათ, $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა კოდიფერენცირებადია $x\in \operatorname{int}DomF$ წერტილში. მაშინ, $p\max F^{00}(x)$ არის ღია ქვესიმრავლე $\partial(F(x)+C)$-ში ინდუცირებული ტოპოლოგიის აზრით.

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. ზემოთ უკვე დამტკიცებული დებულების თანახმად, იმის გამო, რომ F კოდიფერენცირებადია $x\in \operatorname{int}DomF$ წერტილში, გვაქვს (თეორემა 4.12, თეორემა 4.13, თეორემა 4.10):

$$p\max F^{00}(x)=P\max F^{00}(x)\subset \partial S(x)=\partial(F(x)+C).$$

ამდენად, სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$p\max F^{00}(x)\subset \partial(F(x)+C). \qquad (4.111)$$

თუ $\partial(F(x)+C)$-ს განვიხილავთ როგორც ტოპოლოგიურ სივრცეს ინდუცირებული ტოპოლოგიით და მივიღებთ, რომ $A=p\max F^{00}(x)$ და $B=\partial(F(x)+C)$, მაშინ, შენიშვნა 4.4-ს გათვალისწინებით, დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\partial(F(x)+C)\setminus p\max F^{00}(x)$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე $\partial(F(x)+C)$-ში τ' ტოპოლოგიის აზრით.

ვთქვათ, z არის $\partial(F(x)+C)\setminus p\max F^{00}(x)$ სიმრავლის ნებისმიერი ზღვრული წერტილი. მაშინ, ცნობილი ფაქტის თანახმად [10, გვ. 78], z არის აღნიშნული სიმრავლის ზღვრული წერტილი როგორც Z სივრცის ტოპოლოგიაში, ისევე τ' ტოპოლოგიაშიც. მაშინ მოიძებნება $\{z_n\}\subset\partial(F(x)+C)\setminus p\max F^{00}(x)$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება z ელემენტისაკენ τ' ტოპოლოგიის აზრით. აქედან ვასკვნით, რომ $\{z_n\}\subset\partial(F(x)+C)$, მაგრამ $\{z_n\}\not\subset p\max F^{00}(x)$. ამასთან, $\{z_n\}$ მიმდევრობა კრებადი იქნება z ელემენტისაკენ Z სივრცის ტოპოლოგიის აზრით. მაგრამ $\partial(F(x)+C)$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე Z-ში, ამიტომ $z\in\partial(F(x)+C)$. ვაჩვენოთ, რომ $z\notin p\max F^{00}(x)$. ამით დამტკიცდება, რომ $z\in\partial(F(x)+C)\setminus p\max F^{00}(x)$, რაც, თავის მხრივ, დაამტკიცებს $\partial(F(x)+C)\setminus p\max F^{00}(x)$ ქვესიმრავლის ჩაკეტილობას $\partial(F(x)+C)$-ში τ' ტოპოლოგიის აზრით. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. მივიღოთ, რომ

$$z\in p\max F^{00}(x). \qquad (4.112)$$

თეორემა 4.11-ის თანახმად, $\partial(F(x)+C)\subset F^{00}(x)$. ამიტომ $\{z_n\}\subset F^{00}(x)$, თუმცა $\{z_n\}\not\subset p\max F^{00}(x)$. ეს ნიშნავს იმას, რომ მოიძებნება $\{c_n\}\subset C\setminus\{0\}$ მიმდევრობა და $\{c_n+z_n\}$ მიმდევრობისათვის სრულდება $\{c_n+z_n\}\subset F^{00}(x)$ ჩართვა. რადგან, თეორემა 4.11-ის თანახმად, $\partial(F(x)+C)\subset F^{00}(x)$, ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ $\{c_n+z_n\}$ მიმდევრობის მხოლოდ იმ ქვემიმდევრობას, რომელიც შედის $\partial(F(x)+C)$-ში, რადგან τ' ტოპოლოგიის აზრით მხოლოდ ასეთი ქვემიმდევრობის განხილვას აქვს აზრი. სიმარტივისათვის ამ ქვემიმდევრობას ისევ $\{c_n+z_n\}$-ით ავღნიშნავთ, ე.ი. ჩავთვლით, რომ $\{c_n+z_n\}\subset\partial(F(x)+C)$. ვინაიდან F კოდიფერენცირებადია $x\in \operatorname{int}DomF$ წერტილში და $c_n+z_n\in\partial(F(x)+C)$, მოიძებ-

ნება $z^*_{+n} \in C^*_+$ და $x^*_n \in X^*$ ფუნქციონალები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობას:

$$\begin{aligned} &< x^*_n, x > - < z^*_{+n}, c_n + z_n > \ \geq \ < x^*_n, \bar{x} > - < z^*_{+n}, \bar{z} >, \\ &\forall \bar{x} \in X, \forall \bar{z} \in F(\bar{x}) + C. \end{aligned} \qquad (4.113)$$

კერძოდ, რადგან $F(x)+C$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $z_n \in \partial(F(x)+C)$, ამიტომ $z_n \in F(x)+C$, ე.ი. (4.113) ტოლობაში შეგვიძლია მივიღოთ $\bar{x} = x$ და $\bar{z} = z_n$. (4.113) ამ შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$< z^*_{+n}, c_n + z_n > \ \leq \ < z^*_{+n}, \bar{z} >, \quad \forall \bar{z} \in F(x) + C,$$

ე.ი.

$$< z^*_{+n}, c_n > \ \leq 0.$$

რადგან $\{c_n\} \subset C$, ამიტომ

$$< z^*_{+n}, c_n > \ \geq 0.$$

ამრიგად,

$$< z^*_{+n}, c_n > = 0, \quad \forall n = 1,2,3,... \qquad (4.114)$$

(4.114)-ის გათვალისწინებით (4.113)-დან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} &< x^*_n, x > - < z^*_{+n}, z_n > \ \geq \ < x^*_n, \bar{x} > - < z^*_{+n}, \bar{z} >, \\ &\forall \bar{x} \in X, \forall \bar{z} \in F(\bar{x}) + C. \end{aligned} \qquad (4.115)$$

მაგრამ $x \in \mathrm{int} DomF$. ამიტომ (4.115) უტოლობიდან მარტივად შეიძლება დადგინდეს $\{x^*_n\} \subset X^*$ მიმდევრობის სუსტი შემოსაზღვრულობა, ე.ი. მოიძებნება ისეთი $x^* \in X^*$ ელემენტი, რომ $x^*_n \xrightarrow[n \to \infty]{w} x^*$. მეორე მხრივ, $\{z^*_{+n}\} \subset C^*_+$, ხოლო, ცნობილი ფაქტის თანახმად [41], C^*_+ არის სუსტად ჩაკეტილი. ამიტომ, თუ $z^*_{+n} \xrightarrow[n \to \infty]{w} z^*_+$, მაშინ $z^*_+ \in C^*_+$. რადგან $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z$, ამიტომ (4.115)-ში ზღვარზე გადასვლით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} &< x^*, x > - < z^*, z > \ \geq \ < x^*, \bar{x} > - < z^*_+, \bar{z} >, \\ &\forall \bar{x} \in X, \forall \bar{z} \in F(\bar{x}) + C. \end{aligned} \qquad (4.116)$$

მეორე მხრივ, რადგან $z \in \partial(F(x)+C) \subset \overline{F(x)+C}$, ამიტომ (4.116)-დან და φ^* ფუნქციის განსაზღვრიდან უშუალოდ ვასკვნით:

$$< x^*, x > - < z^*, z > = \varphi^*(x^*, z^*_+),$$

ე.ი.

$$< z^*, z > = < x^*, x > - \varphi^*(x^*, z_+^*) \leq$$
$$\leq \sup_{x^* \in X^*} (< x^*, x > - \varphi^*(x^*, z_+^*)) = \varphi^{**}(x, z_+^*).$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$< z_+^*, z > \leq \varphi^{**}(x, z_+^*). \qquad (4.117)$$

(4.114)-დან უშუალოდ ვღებულობთ $z_+^* \notin \operatorname{int} C_+^*$. ამიტომ, თუ (4.117) სრულდება ზუსტი ტოლობის სახით, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\bar{c} \in C \setminus \{0\}$ ელემენტი, რომ $< z_+^*, \bar{c} > = 0$, და, აგრეთვე, შესრულდება ტოლობა

$$< z_+^*, z + \bar{c} > = \varphi^{**}(x, z_+^*). \qquad (4.118)$$

თუ (4.117) სრულდება მკაცრი უტოლობის სახით, მაშინ მითუმეტეს არსებობს ისეთი $\bar{c} \in C \setminus \{0\}$, რომელიც, აგრეთვე, აკმაყოფილებს (4.118) ტოლობას. ამრიგად, ყველა შემთხვევაში არსებობს ისეთი $\bar{c} \in C \setminus \{0\}$ ელემენტი, რომ

$$z + \bar{c} \in F^{00}(x), \quad \bar{c} \in C \setminus \{0\}.$$

ეს უკანასკნელი კი, ცხადია, ნიშნავს:

$$\bar{c} \in (F^{00}(x) - z) \bigcap C, \quad \bar{c} \neq 0. \qquad (4.119)$$

მეორე მხრივ, (4.112)-ის თანახმად, $(F^{00}(x) - z) \bigcap C = \{0\}$, რაც ეწინააღმდეგება (4.119) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს $\partial(F(x)+C) \setminus p\max F^{00}(x)$ სიმრავლის τ' ჩაკეტილობას, რაც თავის მხრივ ნიშნავს იმას, რომ $p\max F^{00}(x)$ არის ღია ქვესიმრავლე $\partial(F(x)+C)$-ში τ' ტოპოლოგიის აზრით. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.15. თუ $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა კოდიფერენცირებადია $x \in \operatorname{int} DomF$ წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$P\max F^{00}(x) \subset P\min F(x). \qquad (4.120)$$

დამტკიცება. თეორემა 4.10-ისა და თეორემა 4.13-ის თანახმად გვაქვს:

$$P\max F^{00}(x) \subset \partial(F(x)+C). \qquad (4.121)$$

რადგან $\partial(F(x) + C) \subset \overline{F(x) + C}$, ამიტომ (4.121)-დან ვღებულობთ:

$$P\max F^{00}(x) \subset \overline{F(x) + C}.$$

ვთქვათ, $z \in P\max F^{00}(x)$. თეორემა 4.11-ის თანახმად $P\max F^{00}(x) \subset \subset F^{00}(x)$. ამიტომ, $z \in F^{00}(x)$, ხოლო $F^{00}(x)$-ის განსაზღვრიდან უშუალოდ ვღებულობთ ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ ფუნქციონალის არსებობას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$< z_+^*, z > = \varphi^{**}(x, z_+^*). \qquad (4.122)$$

ვთქვათ, რომ c ნებისმიერი ელემენტია $C\setminus\{0\}$-დან. მაშინ, ცხადია, $<z_+^*, c> \geq 0$. ვაჩვენოთ, რომ სინამდვილეში ადგილი აქვს $<z_+^*, c> > 0$ მკაცრ უტოლობას. მართლაც, თუ ეს უკანასკნელი არ სრულდება, მაშინ ადგილი ექნება $<z_+^*, c> = 0$ ტოლობას. (4.122)-დან კი გამომდინარეობს:

$$<z_+^*, z+c> = \varphi^{**}(x, z_+^*).$$

ეს კი, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ $z+c\in F^{00}(x)$. რადგან, თეორემა 4.12-ის თანახმად, $P\max F^{00}(x) = p\max F^{00}(x)$, ამიტომ $z\in p\max F^{00}(x)$. ე.ი.

$$(F^{00}(x) - z) \cap C = \{0\},$$

მაშინ, როცა $c\in (F^{00}(x)-z)\cap C$, $c\in C\setminus\{0\}$. ამდენად, მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობას:

$$<z_+^*, c> \; > 0, \quad \forall c\in C\setminus\{0\}.$$

ცნობილი ფაქტის თანახმად, ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ

$$z_+^* \in \operatorname{int} C_+^*.$$

გავიხსენოთ ახლა, რომ რადგან $F: X\to P<Z,C>$ ამოზნექილი მრავალსახა ასახვაა, $F(x)+C$ აგრეთვე ამოზნექილია. ამიტომ $\overline{F(x)+C}^{w} = \overline{F(x)+C}$, ანუ $(F(x)+C)$-ს სუსტი ჩაკეთვა ემთხვევა მის ძლიერ ჩაკეტვას. საბოლოოდ $P\min F(x) = P\inf F(x) = p\min\overline{(F(x)+C)}$. დებულების დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ $z\in p\min\overline{(F(x)+C)}$ ჩართვის სამართლიანობა. დაუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. მივიღოთ, რომ $z\notin p\min\overline{(F(x)+C)}$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\bar{c}\in -C\setminus\{0\}$ ელემენტი, რომ $\bar{c}\in ((\overline{F(x)+C}) - z)\bigcap(-C)$. აქედან ვასკვნით, რომ არსებობს ისეთი $\bar{z}\in \overline{F(x)+C}$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $\bar{c} = \bar{z} - z$, ან $\bar{z} = z + \bar{c}$ პირობას. ამიტომ გვექნება:

$$<z_+^*, \bar{z}> \; = <z_+^*, z> - <z_+^*, -\bar{c}>.$$

მაგრამ $-\bar{c}\in C\setminus\{0\}$, ამიტომ, ზემოთ უკვე დამტკიცებულის თანახმად, $<z_+^*, -\bar{c}> > 0$. ამრიგად, (4.122)-დან ვღებულობთ შემდეგ უტოლობას:

$$<z_+^*, \bar{z}> \; < \; <z_+^*, z> = \varphi^{**}(x, z_+^*),$$

ე.ი.

$$<z_+^*, \bar{z}> \; < \; \varphi^{**}(x, z_+^*) = \sup_{x^*\in X^*}(<x^*, x> - \varphi^*(x^*, z_+^*)).$$

ამდენად, არსებობს $x^*\in X^*$ ფუნქციონალი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\varphi^{*}(x^{*},z_{+}^{*}) < < x^{*},x> - < z_{+}^{*},\bar{z}> <$$
$$< \sup_{x\in X} \underline{\sup}_{w\in \overline{F(x)+C}} (< x^{*},x> - < z_{+}^{*},w>), \quad \forall \bar{z}\in \overline{F(x)+C}. \tag{4.123}$$

მეორე მხრივ, $F(x) + C$ ჩაკეტილია, ამიტომ $\overline{F(x)+C} = F(x)+C$. ამასთან სამართლიანია თანადობათა შემდეგი ჯაჭვი:

$$\sup_{x\in X} \sup_{w\in F(x)+C} (< x_{\cdot}^{*},x> - < z_{+}^{*},w>) \leq$$
$$\leq \sup_{x\in X} \sup_{w\in F(x)} (< x^{*},x> - < z_{+}^{*},w>) = \varphi^{*}(x^{*},z_{+}^{*}). \tag{4.124}$$

(4.124) ეწინააღმდეგება (4.123)-ს, რაც, თავის მხრივ, გვაძლევს იმას, რომ სანამდვილეში ადგილი აქვს ჩართვას

$$z\in P\min\overline{(F(x)+C)} = P\min F(x).$$

ამით დამტკიცებულია (4.120) ჩართვის სამართლიანობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დადგენილი ფაქტები საშუალებას იძლევიან მნიშვნელოვანი დებულების, ე.წ. **დუალობის ძირითადი პრინციპის**, მისაღებად.

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 4.16. ვთქვათ, $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა კოდიფერენცირებადია $x\in \mathrm{int}DomF$ წერტილში. მაშინ სამართლიანია შემდეგი თანადობები:

$$P\min F(x) \subset F^{00}(x), \tag{4.125}$$
$$p\max F^{00}(x) = \mathrm{int}P\min F(x), \tag{4.126}$$

სადაც $\mathrm{int}P\min F(x)$ გაიგება $\partial(F(x)+C)$ სიმრავლეზე Z-დან ინდუცირებული τ' ტოპოლოგიის აზრით.

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. მარტივად შეიძლება შემოწმდეს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$P\min F(x) \subset \partial S(x).$$

მაგრამ, თეორემა 4.10-ის თანახმად, $\partial S(x)=\partial(F(x)+C)$, ხოლო თეორემა 2.11-ის თანახმად, $\partial(F(x)+C)\subset F^{00}(x)$. ამდენად, (4.125) ჩართვა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ ახლა (4.126) ტოლობის სამართლიანობა. თეორემა 4.14-ის თანახმად, $p\max F^{00}(x)$ არის ღია ქვესიმრავლე $\partial(F(x)+C)$ სიმრავლეში τ' ტოპოლოგიის აზრით. თეორემა 4.12-ის თანახმად, $P\max F^{00}(x) = p\max F^{00}(x)$, ხოლო თეორემა 4.15-ის გათვალისწინებით $P\max F^{00}(x) \subset P\min F(x)$. ამიტომ, სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$p\max F^{00}(x) \subset P\min F(x). \tag{4.127}$$

რადგან $p\max F^{00}(x)$ არის ღია τ' ტოპოლოგიის აზრით, ამიტომ (4.127)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ, ვინაიდან $P\min F(x)$ არის ქვესიმრავლე $\partial(F(x)+C)$-ში, ამიტომ τ' ტოპოლოგიის აზრით სამართლიანი იქნება ჩართვა

$$p\max F^{00}(x) \subset \mathrm{int}P\min F(x). \tag{4.128}$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ სამართლიანია შემდეგი ჩართვაც:

$$\mathrm{int}P\min F(x) \subset p\max F^{00}(x). \tag{4.129}$$

ვთქვათ, $z \in \mathrm{int}P\min F(x)$. (4.125)-ის სამართლიანობის გამო უკანასკნელიდან ვასკვნით: $z \in F^{00}(x)$. ვაჩვენოთ, რომ სინამდვილეში ადგილი აქვს $z \in p\max F^{00}(x)$ ჩართვას. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. მივიღოთ, რომ $z \notin p\max F^{00}(x)$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\bar{c} \in C \setminus \{0\}$ ელემენტი, რომ $\bar{z} = z + \bar{c} \in F^{00}(x)$. რადგან $z \in p\max F^{00}(x)$, ხოლო თეორემა 4.12-ისა და თეორემა 4.10-ის გათვალისწინებით, $p\max F^{00}(x) \subset \partial(F(x)+C)$, ამიტომ $z \in \partial(F(x)+C)$. აქედან უშუალოდ ვასკვნით $z \in \overline{F(x)+C}$. $F(x)+C$-ის ჩაკეტილობის გამო, $z \in F(x)+C$. ამიტომ, C კონუსის ამოზნექილობის გამო გვექნება:

$$\bar{z} = z + \bar{c} \in F(x) + C + C \subset F(x) + C = \overline{F(x)+C}.$$

ვინაიდან $\partial(F(x)+C) \subset F^{00}(x) \bigcap \overline{(F(x)+C)}$, $\bar{z} \in F^{00}(x) \bigcap \overline{(F(x)+C)}$ და τ' ტოპოლოგიის აზრით საინტერესოა მხოლოდ $\partial(F(x)+C)$ სიმრავლის ელემენტები, ჩავთვლით, რომ $\bar{z} \in \partial(F(x)+C)$. რადგან $P\min F(x) \subset \partial(F(x)+C)$, $\mathrm{int}P\min F(x) \subset P\min F(x)$, $z \in \mathrm{int}P\min F(x)$ და $P\min F(x) = p\min \overline{(F(x)+C)}$, ამიტომ მოიძებნება $0 \in Z$ წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ

$$(z+U) \bigcap \partial(F(x)+C) \subset p\min \overline{(F(x)+C)}. \tag{4.130}$$

მაგრამ $F(x)+C$ არის ამოზნექილი ქვესიმრავლე Z-ში F-ისა და C-ს ამოზნექილობის გამო, $\overline{(F(x)+C)} = F(x)+C$ და $z, \bar{z} \in \overline{F(x)+C}$, ამიტომ

$$z(t) = t\bar{z} + (1-t)z = t(z+\bar{c}) + (1-t)z =$$
$$= z + t\bar{c} \in \overline{F(x)+C}, \quad \forall t \in [0,1].$$

ვაჩვენოთ, რომ $z(t) \in \partial(F(x)+C)$, $\forall t \in [0,1]$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\bar{t} \in (0,1)$, რომ $z(\bar{t}) = z + \bar{t}\bar{c} \in \mathrm{int}(F(x)+C)$. რადგან F კოდიფერენცირებადია $x \in \mathrm{int}DomF$ წერტილში და $\bar{z} = z + \bar{c} \in F(x)+C$, ამიტომ მოიძებნება $x^* \in X^*$ და $z_+^* \in C_+^*$ ორი ფუნქციონალი, რომელთათვისაც სამართლიანი იქნება შემდეგი უტოლობა:

$$< x^*, x > - < z_+^*, \bar{z} > \; \geq \; < x^*, x^+ > - < z_+^*, z^+ >,$$
$$\forall x^+ \in X, \forall z^+ \in F(x^+) + C.$$

კერძოდ, $x^+ = x$-თვის უკანასკნელიდან ვღებულობთ

$$< z_+^*, \bar{z} > \; \leq \; < z_+^*, z^+ >, \quad \forall z^+ \in F(x) + C. \tag{4.131}$$

რადგან $\overline{(F(x)+C)} = F(x)+C$, ამიტომ $\partial(F(x)+C) \subset F(x)+C$. განვიხილოთ ნებისმიერი $z^{+} = z(t)+u = z+\bar{t}\bar{c}+u \in (z+U)\bigcap \partial(F(x)+C)$ ელემენტი. მაშინ, იმის გათვალისწინებით, რომ $\bar{z}=z+\bar{c}$, (4.131)-დან ვღებულობთ:

$$< z_{+}^{*}, z+\bar{c} > \ \leq \ < z_{+}^{*}, z+\bar{t}\bar{c}+u >, \quad \forall u \in U.$$

უკანასკნელიდან ვასკვნით:

$$< z_{+}^{*}, \bar{c}-\bar{t}\bar{c} > \ \leq \ < z_{+}^{*}, u >, \quad \forall u \in U,$$

ე.ი.

$$(1-\bar{t}) < z_{+}^{*}, \bar{c} > \ \leq \ < z_{+}^{*}, u >, \quad \forall u \in U.$$

მაგრამ $(1-\bar{t})>0$ და რადგან $\bar{c} \in C \setminus \{0\}$, ამიტომ $< z_{+}^{*}, \bar{c} > \ \geq 0$. საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$< z_{+}^{*}, u > \geq 0, \quad \forall u \in U.$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ U არის $0 \in Z$ წერტილის სიმეტრიული მიდამო, უკანასკნელიდან ვასკვნით, რომ $z_{+}^{*}=0$. ეს კი ეწინააღმდეგება $z_{+}^{*} \in C_{+}^{*}$ პირობას, რაც, თავის მხრივ, ამტკიცებს, რომ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$z(t) = z+t\bar{c} \in \overline{F(x)+C}, \quad \forall t \in [0,1].$$

რადგან $z+t\bar{c} \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0$, ამიტომ საკმარისად მცირე დადებითი $t^{*}>0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ჩართვას

$$z(t^{*}) = z+t^{*}\bar{c} \in (z+U)\bigcap \partial(F(x)+C).$$

ამიტომ, (4.130)-დან ვღებულობთ:

$$z(t^{*}) \in p\min\overline{(F(x)+C)}.$$

უკანასკნელი ნიშნავს შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$((\overline{F(x)+C}) - z^{*}(t))\bigcap(-C) = \{0\}. \qquad (4.132)$$

მაგრამ $z = z(t^{*}) - t^{*}\bar{c} \in \overline{F(x)+C}$. ამიტომ

$$-t^{*}\bar{c} \in ((\overline{F(x)+C}) - z^{*}(t))\bigcap(-C).$$

ვინაიდან $-t^{*}\bar{c} \neq 0$, ამიტომ (4.132) ტოლობა წინააღმდეგობრივია, ე.ი. $z \in p\max F^{00}(x)$. ამით ფაქტიურად დამტკიცებულია შემდეგი ჩართვა:

$$\mathrm{int}P\min F(x) \subset p\max F^{00}(x).$$

(4.128)-თან ერთად ეს უკვე ნიშნავს, რომ სამართლიანია (4.126). თეორემა დამტკიცებულია.

4.4. არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი და შეუღლებული ამოცანები

ვთქვათ, Y ლოკალურად ამოზნექილი წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო Y^* - მისი შეუღლებული სივრცე (Y-ში გვაქვს $\sigma(Y,Y^*)$ სუსტი ტოპოლოგია, ხოლო Y^*-ში - $\sigma(Y^*,Y)$ სუსტი ტოპოლოგია). X და $<Z,C>$ იგივე სივრცეებია, რაც ზემოთ, ხოლო X^* და Z^* - მათი შეუღლებულები. $<Z,C>$ სივრცეში მაქსიმალურ ელემენტს აღვნიშნავთ $+\infty_z$.

ვთქვათ, $f:Y\to <Z,C>\cup\{+\infty_z\}$ ფიქსირებული ცალსახა ასახვაა. ჩავთვალოთ, რომ ეს ასახვა საკუთრივია, ე.ი. არსებობს ისეთი $\bar{y}\in Y$, რომ $f(\bar{y})\neq\infty_z$.

არასკალარული ოპტიმიზაციის (მინიმიზაციის) ძირითადი ამოცანის ქვეშ ვგულისხმობთ იმ $z\in Z$ ელემენტების მოძებნის ამოცანას, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$z\in P\min f(Y).$$

აღვნიშნოთ ეს ამოცანა (L)-ით.

ცხადია, (L)-ამოცანის ყველა ამონახსნთა სიმრავლე, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $P\min(L)$-ით, განსაზღვრის თანახმად მოიცემა ტოლობით

$$P\min(L)=P\min f(Y).$$

ჩავთვალოთ, რომ $P\min(L)\neq\varnothing$. თუ $f(y)=z\in P\min f(Y)$, მაშინ ნებისმიერ $y\in$ $\in f^{-1}(z)$ ელემენტს ვუწოდებთ **არასკალარული ოპტიმიზაციის (მინიმიზაციის) ამოცანის ამონახსნს**.

ახლა ვთქვათ, რომ მოცემულია ცალსახა $\psi:Y\times X\to Z\cup\{+\infty_z\}$ ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\psi(y,0)=f(y),\ \ \forall y\in Y. \tag{4.133}$$

ცხადია, ყოველი ფიქსირებული $z^*\in Z^*$ ფუნქციონალისათვის განსაზღვრულია ნამდვილი $<z^*,\psi(\cdot,\cdot)>:X\times Y\to R\cup\{+\infty\}$ ფუნქცია. ამიტომ, შეგვიძლია ავაგოთ ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი შეუღლებული (იხ. [60]) განსაზღვრული ტოლობით

$$\begin{aligned}&\psi^*(y^*,x^*,z^*)=\\&=\sup_{(y,x)\in Y\times X}(<y^*,y>+<x^*,x>-<z^*,\psi(y,x)>).\end{aligned} \tag{4.134}$$

განვიხილოთ $\psi_+^*:Y^*\times X^*\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა, განსაზღვრული ტოლობით

$$\psi_+^*(y^*,x^*)=\{z\in Z\ \big|\ \exists z_+^*\in C_+^*:<z_+^*,z>=\psi^*(y^*,x^*,z_+^*)\}. \tag{4.135}$$

ცხადია, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) = \sup_{(y,x)\in Y\times X} (< x^*,x > - < z_+^*,\psi(y,x) >), \qquad \forall z_+^* \in C_+^*, x^* \in X^*, \tag{4.136}$$

$$\psi_+^*(0,x^*) = \{z \in Z \mid \exists z_+^* \in C_+^* : < z_+^*, z > = \psi^*(0,x^*,z_+^*), \quad \forall x^* \in X^*\}. \tag{4.137}$$

ტოლობა (4.137)-ით სინამდვილეში განსაზღვრულია მრავალსახა $-\psi_+^*(0,\cdot) : X^* \to < Z,C >$ ასახვა. ამიტომ

$$-\psi_+^*(0,X^*) = \bigcup_{x^*\in X^*} \{-\psi_+^*(0,x^*)\} \subset < Z,C > .$$

არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი (L)-ამოცანის **შეუღლებულ (მაქსიმიზაციის) ამოცანის** ქვეშ გვესმის ისეთი $z\in Z$ ელემენტების მოძებნის ამოცანა, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$z \in p\max\{-\psi_+^*(0,X^*)\}.$$

ეს ამოცანა აღვნიშნოთ (L^*)—ით.

ცხადია, (L^*)-ამოცანის ყველა ამონახსნთა სიმრავლე, რომელსაც $p\max(L^*)$-ით აღვნიშნავთ, განსაზღვრის თანახმად მოიცემა ტოლობით

$$p\max(L^*) = p\max\{-\psi_+^*(0,X^*)\}.$$

თუ $z\in p\max(L^*)$, მაშინ $z \in -\psi_+^*(0,X^*)$, და $(-\psi_+^*(0,X^*) - z) \bigcap C = \{0\}$. მაშინ, ნებისმიერ $x^* \in (-\psi_+^*(0,\cdot))^{-1}(z)$ ელემენტს ეწოდება (L^*)-ამოცანის ამონახსნი.

ახლა შევნიშნოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $x\in X$ ელემენტისათვის $\psi(Y,x)\subset<Z,C>$. ამიტომ, შეგვიძლია განვსაზღვროთ $F:X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვა შემდეგი ტოლობით:

$$F(x) = P\min\psi(Y,x), \ \forall x\in X. \tag{4.138}$$

პირობა (4.133)-ის თანახმად, ადგილი აქვს ტოლობას $\psi(Y,0)=f(Y)$. ამიტომ, (4.138)-დან უშუალოდ ვღებულობთ:

$$F(0) = P\min f(Y) = P\min(L). \tag{4.139}$$

ყველგან ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ დაცულია

პირობა A. ნებისმიერი $x\in X$-თვის $P\min\psi(Y,x)$ გარეგანად მდგრადია.

რადგან $P\min\psi(Y,x) = \min\overline{(\psi(Y,x)+C)}$, ამიტომ, გარეგანად მდგრადობის განსაზღვრის გათვალისწინებით, (A) პირობის შესრულება ნიშნავს იმას რომ ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ჩართვას

$$\overline{\psi(Y,x)+C} \subset p\min\overline{(\psi(Y,x)+C)} + C. \tag{4.140}$$

F ფუნქციის განსაზღვრიდან კი, ცხადია, (4.140) ჩართვა ექვივალენტურია შემდეგი ჩართვისა:

$$\overline{\psi(Y,x)+C} \subset F(x)+C, \quad \forall x\in X.$$

გარდა ამისა, ისევ F ფუნქციის განსაზღვრიდან, ასევე, გამომდინარეობს ჩართვა

$$F(x)\subset \overline{\psi(Y,x)+C}, \quad \forall x\in X. \tag{4.141}$$

შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ, რადგან $0\in C$, სამართლიანია ჩართვაც:

$$\psi(Y,x)\subset \overline{\psi(Y,x)+C} \subset F(x)+C, \quad \forall x\in X. \tag{4.142}$$

ისევე, როგორც ზემოთ, $F: X\to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვისათვის, რომელიც კონკრეტულად განსაზღვრულია ტოლობა (4.138)-ით, შეიძლება φ^{*}, φ^{**}, F^{0} და F^{00} ფუნქციები შემდეგი ტოლობებით განისაზღვროს:

$$\varphi^{*}(x^{*},z^{*}) = \sup_{x\in X}\sup_{z\in F(x)} (<x^{*},x> - <z^{*},z>),$$

$$\forall (x^{*},z^{*})\in X^{*}\times Z^{*},$$

$$\varphi^{**}(x,z^{*}) = \sup_{x^{*}\in X^{*}} (<x^{*},x> - \varphi^{*}(x^{*},z^{*})),$$

$$\forall (x,z^{*})\in X\times Z^{*},$$

$$F^{0}(x^{*}) = \{z\in Z \mid \exists z_{+}^{*}\in C_{+}^{*}: <z_{+}^{*},z> = \varphi^{*}(x^{*},z_{+}^{*})\},$$

$$\forall x^{*}\in X^{*},$$

$$F^{00}(x) = \{z\in Z \mid \exists z_{+}^{*}\in C_{+}^{*}: <z_{+}^{*},z> = \varphi^{**}(x,z_{+}^{*})\},$$

$$\forall x\in X.$$

ამასთან, (4.87) ტოლობების თანახმად, გვაქვს

$$F^{00}(x) - C = \{z\in Z \mid \exists z_{+}^{*}\in C_{+}^{*}: <z_{+}^{*},z> \le \varphi^{**}(x,z_{+}^{*})\},$$

$$\forall x\in X.$$

თეორემა 4.17. ვთქვათ, შესრულებულია (A) პირობა. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\psi_{+}^{*}(0,x^{*}) = F^{0}(x^{*}), \quad \forall x^{*}\in X^{*} \tag{4.143}$$

დამტკიცება. (4.136) ტოლობის საფუძველზე გვაქვს:

$$\psi^{*}(0,x^{*},z_{+}^{*}) \ \ge\ <x^{*},x> - <z_{+}^{*},\psi(y,x)>,$$

$$\forall x\in X, \forall y\in Y, \forall z_{+}^{*}\in C_{+}^{*}.$$

უკანასკნელი, ცხადია, ექვივალენტურია უტოლობისა

$$\psi^{*}(0,x^{*},z_{+}^{*}) \ \ge\ <x^{*},x> - <z_{+}^{*},z>,$$

$$\forall x\in X, \forall z\in \psi(Y,x), \forall z_{+}^{*}\in C_{+}^{*}.$$

რადგან $z_+^* \in C_+^*$ და z_+^* ფუნქციონალი უწყვეტია Z-ზე, ამიტომ ბოლო უტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) \ge < x^*,x > - < z_+^*,z >,$$
$$\forall x \in X, \forall z \in \overline{\psi(Y,x)+C}, \forall z_+^* \in C_+^*.$$

(4.141)-ის გათვალისწინებით, აქედან ვასკვნით:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) \ge < x^*,x > - < z_+^*,z >,$$
$$\forall x \in X, \forall z \in F(x), \forall z_+^* \in C_+^*.$$

ე.ი.

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) \ge \sup_{x\in X}\sup_{z\in F(x)} (< x^*,x > - < z_+^*,z >),$$
$$\forall x^* \in X^*, \forall z_+^* \in C_+^*.$$

ამდენად, სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) \ge \varphi^*(x^*,z_+^*), \quad \forall x^* \in X^*, \forall z_+^* \in C_+^*. \qquad (4.144)$$

მეორე მხრივ, გვაქვს:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) = \sup_{x\in X}\sup_{z\in\psi(Y,x)} (< x^*,x > - < z_+^*,z >),$$
$$\forall x^* \in X^*, \forall z_+^* \in C_+^*.$$

(4.142)-ის გათვალისწინებით, ამ პირობიდან ვღებულობთ:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) \le \sup_{x\in X}\sup_{z\in F(x)+C} (< x^*,x > - < z_+^*,z >) \le$$
$$\le \sup_{x\in X}\sup_{z\in F(x)} (< x^*,x > - < z_+^*,z >) = \varphi^*(x^*,z_+^*),$$
$$\forall x^* \in X^*, \forall z_+^* \in C_+^*.$$

ამდენად, დადგენილია აგრეთვე უტოლობა

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) \le \varphi^*(x^*,z_+^*), \quad \forall x^* \in X^*, \forall z_+^* \in C_+^*. \qquad (4.145)$$

(4.144) და (4.145)-დან ვღებულობთ შემდეგ ტოლობას:

$$\psi^*(0,x^*,z_+^*) = \varphi^*(x^*,z_+^*), \quad \forall x^* \in X^*, \forall z_+^* \in C_+^*. \qquad (4.146)$$

(4.137)-ში (4.146)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\psi_+^*(0,x^*) = \{z \in Z \mid \exists z_+^* \in C_+^* : < z_+^*,z > = \varphi^*(x^*,z_+^*)\},$$
$$\forall x^* \in X^*,$$

რაც, F^0 ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, ნიშნავს, რომ

$$\psi_+^*(0,x^*) = F^0(x^*), \quad \forall x^* \in X^*$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.18. ვთქვათ, შესრულებულია (A) პირობა და $0\in \mathrm{int}DomF$. მაშინ, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$p\max F^{00}(0)=p\max(L^*). \qquad (4.147)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $z\in p\max F^{00}(0)$. მაშინ, ცხადია, $z\in F^{00}(0)$. ამიტომ, მოიძებნება ისეთი $\bar{z}_+^*\in C_+^*$ ელემენტი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$<\bar{z}_+^*,z>=\varphi^{**}(0,\bar{z}_+^*).$$

რადგან $0\in \mathrm{int}DomF$, ამიტომ, თეორემა 4.5-ის თანახმად, მოიძებნება ისეთი $\bar{x}^*\in X^*$ ელემენტი, რომ

$$\varphi^{**}(0,\bar{z}_+^*)=-\varphi^*(\bar{x}^*,\bar{z}_+^*).$$

ამდენად, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$<\bar{z}_+^*,z>=-\varphi^*(\bar{x}^*,\bar{z}_+^*).$$

ეს კი, F^0 ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, ნიშნავს, რომ $z\in -F^0(\bar{x}^*)$. რადგან $-F^0(\bar{x}^*)\in -F^0(X^*)$, ამიტომ $z\in -F^0(X^*)$. ვაჩვენოთ, რომ სინამდვილეში $z\in p\max(-F^0(X^*))$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\bar{z}\in -F^0(X^*)$ ელემენტი, რომ $\bar{z}-z=\bar{c}\in C\setminus\{0\}$. ვინაიდან $\bar{z}\in -F^0(X^*)$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ორი $x^*\in X^*$ და $z_+^*\in C_+^*$ ფუნქციონალი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$<z_+^*,\bar{z}>=-\varphi^*(x^*,z_+^*).$$

მაგრამ

$$-\varphi^*(x^*,z_+^*)\ \le \sup_{u^*\in X^*}\{-\varphi^*(u^*,z_+^*)\}=\varphi^{**}(0,z_+^*),$$

ამიტომ სამართლიანია უტოლობა

$$<z_+^*,\bar{z}>\ \le\ \varphi^{**}(0,z_+^*).$$

ეს, ცხადია, ნიშნავს, რომ $\bar{z}\in F^{00}(0)-C$, ე.ი. მოიძებნება ისეთი $\hat{c}\in C$, რომ $\bar{z}+\hat{c}=z+\hat{c}+\bar{c}=z+c^+\in F^{00}(0)$, სადაც $c^+=\hat{c}+\bar{c}\in C\setminus\{0\}$, რადგან $\hat{c}\in C$, $\bar{c}\in C\setminus\{0\}$. ამდენად, ვღებულობთ $c^+\in(F^{00}(0)-z)\bigcap C$ ჩართვას, ამასთან $c^+\neq 0$. ეს კი ეწინააღმდეგება $z\in p\max F^{00}(0)$ პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ჩართვას

$$z\in p\max(-F^0(X^*)),$$

რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს:

$$p\max F^{00}(0) \subset p\max(-F^0(X^*)). \qquad (4.148)$$

მეორე მხრივ, რადგან დაცულია პირობა (A), ამიტომ სამართლიანია თეორემა 4.17, რომლიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$-\psi_+^*(0, X^*) = -F^0(X^*).$$

ე.ი.

$$p\max(-\psi_+^*(0, X^*)) = p\max(-F^0(X^*)).$$

ეს უკანასკნელი კი ნიშნავს, რომ ((4.148)-ის თანახმად)

$$p\max F^{00}(0) \subset p\max(L^*). \qquad (4.149)$$

ახლა ვაჩვენოთ ჩართვა (4.149)-ის შებრუნებული ჩართვის სამართლიანობა.

ვთქვათ, $z \in p\max(L^*)$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $x^* \in X^*$, რომ $z \in -F^0(x^*)$, საიდანაც, F^0 ფუნქციის განსაზღვრის გათვალისწინებით უშუალოდ გამომდინარეობს ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ ელემენტის არსებობა, რომლისთვისაც შესრულდება ტოლობა

$$< z_+^*, z > = -\varphi^*(x^*, z_+^*). \qquad (4.150)$$

ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია აგრეთვე ტოლობა

$$-\varphi^*(x^*, z_+^*) = \varphi^{**}(0, z_+^*). \qquad (4.151)$$

მართლაც, φ^{**}-ის განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველთვის სამართლიანია უტოლობა

$$\varphi^{**}(0, z_+^*) \ \geq \ -\varphi^*(x^*, z_+^*). \qquad (4.152)$$

ვაჩვენოთ, შებრუნებული უტოლობის სამართლიანობაც:

$$\varphi^{**}(0, z_+^*) \ \leq \ -\varphi^*(x^*, z_+^*). \qquad (4.153)$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. მივიღოთ, რომ

$$\varphi^{**}(0, z_+^*) \ > \ -\varphi^*(x^*, z_+^*).$$

თეორემა 4.5-ის თანახმად, მოიძებნება ისეთი $\overline{x}^* \in X^*$ ელემენტი, რომლისთვისაც

$$\varphi^{**}(0, z_+^*) = -\varphi^*(\overline{x}^*, z_+^*),$$

ე.ი. უნდა შესრულდეს შემდეგი უტოლობა:

$$-\varphi^*(\overline{x}^*, z_+^*) \ > \ -\varphi^*(x^*, z_+^*).$$

(4.150)-ის გათვალისწინებით, უკანასკნელიდან ვღებულობთ:

$$-\varphi^*(\overline{x}^*, z_+^*) > < z_+^*, z >.$$

რადგან $z_+^* \in C_+^*$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\overline{c} \in C \setminus \{0\}$ ელემენტი, რომ

$$< z_+^*, z + \overline{c} > = -\varphi^*(\overline{x}^*, z_+^*).$$

ეს უკანასკნელი, F^0-ის განსაზღვრის თანახმად, ნიშნავს: $z + \overline{c} \in -F^0(X^*)$. ე.ი. $\overline{c} \in (-F^0(X^*) - z) \bigcap C$ და $\overline{c} \neq 0$. უკანასკნელი, ცხადია, ეწინააღმდეგება პირობას

$$z \in p\max(L^*) = p\max(-F^0(X^*)).$$

ეს, თავის მხრივ, ამტკიცებს (4.151) ტოლობის სამართლიანობას. ამიტომ (4.150) და (4.151)-დან უშუალოდ ვღებულობთ:

$$< z_+^*, z > = \varphi^{**}(0, z_+^*).$$

ეს ტოლობა, F^{00} ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, ნიშნავს იმას, რომ $z \in F^{00}(0)$.

მეორე მხრივ, თეორემა 4.5-ის საფუძველზე იოლად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $F^{00}(0) \subset -F^0(X^*)$. $z \in F^{00}(0)$ პირობიდან გამომდინარეობს $0 \in -F^{00}(0) - z$ ჩართვა. მეორე მხრივ, $z \in p\max(-F^0(X^*))$. ე.ი.

$$(-F^0(X^*) - z) \bigcap C = \{0\}.$$

ვინაიდან $F^{00}(0) \subset -F^{00}(X^*)$, ვღებულობთ:

$$0 \in (F^{00}(0) - z) \bigcap C \subset (-F^0(X^*) - z) \bigcap C = \{0\}.$$

ეს კი ნიშნავს:

$$(F^{00}(0) - z) \bigcap C = \{0\}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $z \in p\max F^{00}(0)$. ამით ფაქტირად დამტკიცებულია შემდეგი ჩართვაც:

$$p\max(L^*) \subset p\max F^{00}(0). \tag{4.154}$$

(4.154)-თან ერთად (4.149) ამტკიცებს (4.147) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ამდენად, თეორემა 4.18 ამყარებს კავშირს შეუღლებული (L^*)-ამოცანის პარეტოს აზრით მაქსიმალურ ელემენტთა სიმრავლესა და $F^{00}(0)$ სიმრავლის პარეტოს აზრით მაქსიმალურ ელემენტთა სიმრავლის შორის.

როგორც ეს უკვე ზემოთ აღვნიშნეთ, ვთვლით, რომ $F(0) = P\min f(Y) = P\min(L) \neq \varnothing$. სინამდვილეში ეს უკანასკნელი გულისხმობს შემდეგი პირობის შესრულებას:

პირობა B. $P\min \psi(Y,0) \neq \varnothing$.

ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ψ ფუნქციის მიმართ ზემოთ მოთხოვნილი (4.133) პირობიდან.

თეორემა 4.19. ვთქვათ, რომ $P\min \overline{(\psi(Y,0)+C)}$ გარეგანად მდგრადია. მაშინ, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$P\min F(0) = F(0). \tag{4.155}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $z \in P\min F(0)$. მაშინ, ცხადია, $z \in F(0)$. მეორე მხრივ, გვაქვს:

$$F(0) = P\min(\psi(Y,0)) = p\min \overline{(\psi(Y,0)+C)}.$$

ამიტომ,

$$F(0) \subset \overline{\psi(Y,0)+C}.$$

C კონუსის ამოზნექილობისა და ჩაკეტილობის გათვალისწინებით, იოლად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$\overline{\psi(Y,0)+C} + C \subset \overline{\psi(Y,0)+C}.$$

ამიტომ, $F(0)+C \subset \overline{\psi(Y,0)+C}$, საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს:

$$\overline{F(0)+C} \subset \overline{\psi(Y,0)+C}. \tag{4.156}$$

მეორე მხრივ, ცხადია, $F(0) \subset \overline{F(0)+C}$. ამიტომ სამათლიანია ჩართვა

$$z \in \overline{\psi(Y,0)+C}.$$

$p\min \overline{(\psi(Y,0)+C)}$-ის გარეგანად მდგრადობის გამო, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას:

$$\overline{\psi(Y,0)+C} \subset p\min \overline{(\psi(Y,0)+C)} + C.$$

ამდენად,

$$z \in p\min \overline{(\psi(Y,0)+C)} + C.$$

ეს კი, თავისთავად, ნიშნავს შემდეგს:

მოიძებნება ისეთი $\bar{z} \in p\min \overline{(\psi(Y,0)+C)} = F(0) \subset \overline{F(0)+C}$, რომ $\bar{z} - z \in -C$.

ასე რომ, $\bar{z} - z \in (\overline{F(0)+C} - z) \bigcap (-C)$. მაგრამ $z \in P\min F(0)$. ამიტომ,

$$(\overline{F(0)+C} - z) \bigcap (-C) = \{0\}.$$

ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $z = \bar{z} \in F(0)$. ამით დამტკიცდა ჩართვა

$$P\min F(0) \subset F(0). \tag{4.157}$$

ვაჩვენოთ შებრუნებული ჩართვის სამართლიანობა.

ვთქვათ, $z \in F(0)$. მაშინ, (4.156)-ის თანახმად

$$z \in \overline{F(0)+C} \subset \overline{\psi(Y,0)+C},$$

ხოლო, იმის გამო, რომ $p\min\overline{(\psi(Y,0)+C)}$ გარეგანად მდგრადია, არსებობს ისეთი $\bar{z} \in p\min\overline{(\psi(Y,0)+C)}$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $\bar{z}-z \in C$ პირობას. ვინაიდან $\overline{F(0)+C} \subset \overline{\psi(Y,0)+C}$, ამიტომ მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი ჩართვის სამართლიანობა:

$$p\min\overline{(\psi(Y,0)+C)} \subset p\min\overline{(F(0)+C)}.$$

ამდენად, $\bar{z} \in P\min\overline{(F(0)+C)}$.

მეორე მხრივ, $z \in \overline{F(0)+C}$. ამიტომ,

$$\bar{z}-z \in (\bar{z}-(\overline{F(0)+C})) \cap (-C).$$

აქედან ვასკვნით:

$$z-\bar{z} \in ((\overline{F(0)+C})-\bar{z}) \cap (-C).$$

რადგან $\bar{z} \in p\min\overline{(F(0)+C)}$, ამიტომ $z-\bar{z} \in ((\overline{F(0)+C})-\bar{z}) \cap (-C)$. ე.ი. $z=\bar{z} \in p\min(\overline{F(0)+C})$. ამით დამტკიცებულია შემდეგი ჩართვაც:

$$F(0) \subset P\min F(0). \tag{4.158}$$

(4.157) და (4.158) გვაძლევენ (4.155) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

$\psi: Y{\times}X \to Z \cup \{+\infty_Z\}$ ასახვას (A) და (B) პირობებთან ერთად დამატებით მოვთხოვთ კიდევ ერთი პირობის დაკმაყოფილებას.

პირობა C. (4.138) ტოლობით განსაზღვრული $F: X \to P(<Z,C>)$ მრავალსახა ასახვისთვის $0 \in \mathrm{int}DomF$, ამასთან, F კოდიფერენცირებადია 0 წერტილში.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი (L) და შეუღლებული (L^*) ამოცანებისათვის **დუალობის დებულება** მდგომარეობს შემდეგში.

თეორემა 4.20. ვთქვათ, $\psi: Y{\times}X \to Z \cup \{+\infty_Z\}$ ასახვა აკმაყოფილებს (A)-(C) პირობებს. მაშინ:

ა) ნებისმიერი $z \in P\min(L)$ ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ ფუნქციონალი, რომ

$$< z_+^*, z > = \max_{x^* \in X^*}\{-\psi^*(0,x^*,z_+^*)\};$$

ბ) ადგილი აქვს ტოლობას

$$p\max(L^*) = \mathrm{int}\, P\min(L).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლე:
$$Q = \bigcup_{z_+^* \in C_+^*} \{ z \in Z \mid < z_+^*, z > = \max_{x^* \in X^*} \{ -\varphi^*(x^*, z_+^*) \} \}.$$

ვაჩვენოთ, შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:
$$F^{00}(0) = Q. \qquad (4.159)$$

მართლაც, თუ $z \in Q$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ ელემენტი, რომ
$$< z_+^*, z > = \max_{x^* \in X^*} \{ -\varphi^*(x^*, z_+^*) \}.$$

რადგან $< z_+^*, z > < +\infty$, ამიტომ
$$\max_{x^* \in X^*} \{ -\varphi^*(x^*, z_+^*) \} = \sup_{x^* \in X^*} \{ -\varphi^*(x^*, z_+^*) \}.$$

ეს უკანასკნელი კი, φ^{**} ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, ნიშნავს, რომ $< z_+^*, z > = \varphi^{**}(0, z_+^*)$, რაც F^{00} ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, თავის მხრივ, ამტკიცებს $z \in F^{00}$ ჩართვას. ამით დამტკიცებულია
$$Q \subset F^{00}(0)$$
ჩართვა.

ვაჩვენოთ ამ უკანასკნელი ჩართვის შებრუნებული ჩართვის სამართლიანობაც. ვთქვათ, $z \in F^{00}(0)$. რადგან $0 \in \mathrm{int} Dom F$, ამიტომ, თეორემა 4.5-ის თანახმად, მოიძებნება ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ და $x^* \in X^*$ ორი ფუნქციონალი, რომ
$$\varphi^{**}(0, z_+^*) = -\varphi^*(x^*, z_+^*) = < z_+^*, z >.$$

რადგან $\varphi^{**}(0, z_+^*) = \sup_{u^* \in X^*} (-\varphi^*(u^*, z_+^*)) = -\varphi^*(x^*, z_+^*)$, ამიტომ
$$< z_+^*, z > = \max_{x^* \in X^*} \{ -\varphi^*(x^*, z_+^*) \}.$$

ეს კი, ცხადია, ნიშნავს $z \in Q$ პირობის შესრულებას. ამით დამტკიცდა შემდეგი ჩართვა:
$$F^{00}(0) \subset Q.$$

ე.ი. (4.159) ტოლობა სამართლიანია.

ვინაიდან F კოდიფერენცირებადია $0 \in \mathrm{int} Dom F$ წერტილში, თეორემა 4.16-ის თანახმად სრულდება შემდეგი პირობები:
$$P\min F(0) \subset F^{00}(0), \qquad (4.160)$$
$$p\max F^{00}(0) = \mathrm{int}\, P\min F(0). \qquad (4.161)$$

აქ $\mathrm{int} P\min F(0)$ გაიგება Z-დან $\partial(F(0)+C)$ სიმრავლეზე ინდუცირებული ტოპოლოგიის აზრით.

მაგრამ $P\min(L) = F(0)$, ხოლო, თეორემა 4.19-ის თანახმად, $P\min F(0) = F(0)$, ამიტომ, (4.160)-დან ვღებულობთ:

$$P\min(L) \subset F^{00}(0). \tag{4.162}$$

(4.159) ტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ თუ z არის ნებისმიერი ელემენტი $P\min(L)$-ში, მაშინ, (4.162)-ის თანახმად, $z \in F^{00}(0)$. ამიტომ, მოიძებნება ისეთი $z_+^* \in C_+^*$ ფუნქციონალი, რომ

$$< z_+^*, z > = \max_{x^* \in X^*} \{-\varphi^*(x^*, z_+^*)\}.$$

(4.146) ტოლობის გათვალისწინებით, უკანასკნელიდან ვღებულობთ:

$$< z_+^*, z > = \max_{x^* \in X^*} \{-\psi^*(0, x^*, z_+^*)\}.$$

ამით თეორემის ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

თეორემა 4.18-ის თანახმად $P\max F^{00}(0) = P\max(L^*)$. ამიტომ, (4.161)-დან ვღებულობთ შემდეგ ტოლობას:

$$P\max(L^*) = \mathrm{int}P\min F(0). \tag{4.163}$$

რადგან თეორემა 4.19-ის თანახმად $P\min F(0) = F(0) = P\min(L)$, ამიტომ (4.163)-დან ვღებულობთ ტოლობას

$$P\max(L^*) = \mathrm{int}P\min(L),$$

სადაც $\mathrm{int}P\min(L)$ გაიგება Z-დან $\partial(F(0)+C)$ სიმრავლეზე ინდუცირებული ტოპოლოგიის აზრით. ამით დამტკიცდა თეორემის მეორე ბ) ნაწილიც. ამრიგად, თეორემა მთლიანობაში დამტკიცებულია.

დამტკიცებული შედეგი სინამდვილეში წარმოადგენს არასკალარული ოპტიმიზაციის შეუღლებული ამოცანების ამონახსნთა სიმრავლეებს შორის კავშირის გამომხატველ ძირითად დებულებას.

ბოლოსიტყვაობა

მრავალკრიტერიული (ვექტორული) და ზოგადად არასკალარული ოპტიმიზაციის თეორიაში დუალობას გარკვეული მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია. ეს იმ გარემოებითაა გამოწვეული, რომ შესაძლებელია მასზე დაფუძნებული ამოცანის ამოხსნის ეფექტური ალგორითმების, პროცედურებისა და მეთოდების აგება. მონოგრაფიაში განვითარდა დუალობის თეორია ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის არასასრულგანზომილებიან სივრცეებში. მონოგრაფიის დასაწყისში განხილული იქნა კლასიკური მრავალკრიტერიული ამოცანები სასრულგანზომილებიან სივრცეებში, მოყვანილი იყო რიგი ცნობილი, უკვე კლასიკურად ქცეული, დებულებები და შედეგები ზოგადი ხასიათის ამოცანისათვის. მეორე ნაწილში კი პირველად იქნა ფორმალიზებული დუალური ამოცანები არასასრულგანზომილებიან სივრცეებში და დადგენილი იქნა მათი სხვადასხვა მნიშვნელოვანი თვისებები.

ვინაიდან ნებისმიერი არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნეს კრიტერიულ სივრცეში ექსტრემალურ წერტილთა სიმრავლის ფუნქციონალურ დახასიათებაზე, მონოგრაფიაში გათვალისწინებული იქნა აღნიშნულ წერტილთა სიმრავლის კვლევა და დადგინდა პრინციპულად ახალი შედეგები.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის გარკვეული სტრუქტურის მქონე კონუსით ნაწილობრივ დალაგებული კრიტერიული სივრცის ფიქსირებული ქვესიმრავლისათვის განისაზღვრა ექსტრემალურ ელემენტთა რამოდენიმე ცნება. შესწავლილია ასეთ ელემენტთა სიმრავლეებს შორის კავშირი და დადგენილია მათი ზოგიერთი ტოპოლოგიური თვისება.

არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის დუალური ამოცანის აგებისათვის, ძირითად არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანასა და მის დუალურ ამოცანას შორის ურთიერთ მიმართებათა შესწავლის მიზნით კონსტრუირებული იქნა სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვის შეუღლებული მრავალსახა ასახვა. დადგინდა შეუღლებული ასახვის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ, მიღებულია სხვადასხვა დებულება მისი დიფერენცირებადობის შესახებ, რომელიც გამოყენებულია დუალური თეორიის აგებისათვის. დამუშავდა დუალობის ძირითადი პრინციპი და შესწავლილია არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი და შეუღლებული ამოცანები.

სასრულგანზომილებიანი მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის უკვე კლასიკურად ქცეულ დუალობის შედეგებთან ერთად არასკალარული ოპტიმიზაციის ზოგადი ამოცანისათვის მონოგრაფიაში დამუშავებული იქნა პრინციპულად ახალი მიდგომები და დამტკიცდა მთელი რიგი ახალი დებულებებისა.

აგრეთვე, უნდა აღინიშნოს, რომ საზოგადოდ, არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა, ე.ი. ამოცანა, სადაც კრიტერიული სივრცის სასრულგანზომილებიანობა არსებით ფაქტორს არ წარმოადგენს, უშუალო კონტაქტშია თამაშთა თეორიასთან. ის გამოწვეულია იმ გარემოებით, რომ, მაგალითად, ჩვეულებრივი ანტაგონისტური თამაში შეიძლება ჩამოყალიბებული იქნეს, როგორც არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა კონკრეტული კრიტერიული სივრცისა და რიგის განსაზღვრული კონკრეტული კონუსით. ამ მხრივ მონოგრაფია წარმოადგენს ერთ-ერთ პირველ მცდელობას თამაშთა თეორიისა და მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის ერთი პოზიციის შესაქმნელად, მათ შორის კავშირის დადგენისათვის და შემდგომი ანალიზისათვის. ავტორთა აზრით ასეთი საკითხების წინა პლანზე წამოწევა მათი შემდგომი უფრო ღრმა დამუშავების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია მრავალი სოციალური და ეკონომიური პრობლემის გადაჭრისათვის, რამდენადაც იმ მრავალალმიზნობრივი ამოცანების გადაწყვეტისათვის, რომელთაც წამოჭრის საბაზრო ეკონომიკა, თვით "ოპტიმალური ამონახსნი" კლასიკური აზრით ხშირად არ ასახავს ან ვერ ასახავს პრობლემის ჭეშმარიტ შინაარს, არ აკმაყოფილებს მეტად თუ ნაკლებად დასაბუთებულ მოთხოვნებს.

მასალა მონოგრაფიაში წარმოდგენილი იქნა 4 ძირითად თავში, რომელთა დატვირთვა განაწილებულია შემდეგნაირად. პირველი თავი ზოგადი ხასიათისაა, მასში განიხილება ზოგადი ცნებები კლასიკური მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თეორიიდან. მეორე თავში განიხილება ზოგადთეორიული საკითხები ვექტორული ფუნქციების უნაგირა წერტილების, მაქსიმინებისა და მინიმაქსების შესახებ. შემოტანილ იქნა დუალური მრავალკრიტერიული ამოცანების ზოგადი კონსტრუქცია სასრულგანზომილებიანი სივრცეებისათვის. მესამე თავში მრავალსახა ასახვათა თეორიის საფუძველზე შესწავლილია არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანები. ეს ისეთი ამოცანებია, რომელთათვისაც კრიტერიული სივრცე ზოგად შემთხვევაში ბანახის სივრცეს წარმოადგენს. აგებულია სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვა, რომელიც თავის მხრივ ორი მრავალსახა ასახვის თანაკვეთის სახით წარმოდგინდება. ეს ასახვები გარკვეულ ბუნებრივ პირობებს აკმაყოფილებენ. აგრეთვე, კრიტერიულ სივრცეში მითითებული მრავალსახა ასახვის ინვარიანტული წერტილის მეშვეობით განსაზღვრულია ექსტრემალური წერტილი (იმ შემთხვე-

ვაში, როდესაც სივრცე კონუსის მეშვეობით ნაწილობრივ დალაგებულია). ეს გარემოება მრავალსახა ასახვათა თვისებების საფუძველზე, კერძოდ, წარმოებულისა და კოდიფერენციალის სტრუქტურიდან გამომდინარე, ექსტრემალური წერტილების დახასიათების საფუძველს იძლევა. აღნიშნული მიდგომა საკმაოდ მოხერხებულია, ატარებს ზოგად ხასიათს და საშუალებას იძლევა განხილულ იქნეს არაგლუვი ამოცანებიც. დგინდება კრიტერიულ სივრცეში მოცემული სიმრავლის ექსტრემალური წერტილების არსებობის პირობები. ბოლო, მეოთხე თავში არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის დუალური ამოცანის აგებისათვის, ძირითად არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანასა და მის დუალურ ამოცანას შორის ურთიერთ მიმართებათა შესწავლის მიზნით, კონსტრუირებულია სპეციალური ტიპის მრავალსახა ასახვის შეუღლებული მრავალსახა ასახვა. დადგინდა ასეთი შეუღლებული ასახვის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ, მიღებულია სხვადასხვა დებულება მისი დიფერენცირებადობის შესახებ, რომელიც გამოყენებულია დუალური თეორიის აგებისათვის. დამუშავდა დუალობის ძირითადი პრინციპი და შესწავლილია არასკალარული ოპტიმიზაციის ძირითადი და შეუღლებული ამოცანები.

ლიტერატურა

1. Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов / Препринт. - М.: Институт проблем управления. - 1980.
2. Бокучава И.Т., Топчишвили А.Л., Чхиквадзе Н.Н. Об одной процедуре выбора сети минимальной стоимости // Труды института систем управления им. А.И. Элиашвили Академии Наук Грузии. Грузия, Тбилиси: Модеста. - 1998. - С. 76-81.
3. Бондарева О.Н. Сходимость пространств с отношением и теоретико-игровые следствия // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1979. - № 3. - С. 84-92.
4. Вулих Б.З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин: Калининский государственный университет. 1977.
5. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. - М.: Наука. - 1967. - 415с.
6. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. - М.: Физматгиз. - 1971.
7. Гурвиц Л. Программирование в линейных топологических пространствах / В кн.: Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. - М.: Издательство иностранной литературы. - 1962. - С. 65-155.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы: Общая теория. - М.: Издательство иностранной литературы. - 1962. - 895с.
9. Иоселиани А.Н., Михалевич А.А., Нестеренко В.Б., Салуквадзе М.Е. Методы оптимизации параметров теплообменных аппаратов АЭС. - Минск: Наука и техника. - 1981. - 139с.
10. Келли Дж. Общая топология. - М.: Наука. - 1981. - 431с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука. - 1972. - 496с.
12. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. - М.: Международный научно-исследовательский институт проблем управления. - 1990. - 112с.

13. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности. - М.: Международный научно-исследовательский институт проблем управления. - 1988. - 131с.
14. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Гарантии в линейных многокритериальных задачах при неопределенности / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1991. - 43с.
15. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Игровые линейно-квадратические задачи / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1992. - 64с.
16. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Метод решения одного класса многокритериальных линейных задач / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 28с.
17. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. - Тбилиси: Мецниереба. - 1991. - 128с.
18. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Некоторые игровые задачи управления и их приложения. - Тбилиси: Мецниереба. - 1998. - 462с.
19. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в линейных многокритериальных задачах / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1991. - 38с.
20. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 139, № 3. - 1990. - С. 549-552.
21. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. - Тбилиси: Мецниереба. - 1996. - 475с.
22. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е., Майсурадзе В.Ю. Построение гарантирующих управлений с помощью принципа максимума / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 15с.
23. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. - М.: Мир. - 1964. - 838с.
24. Киласония Н.А., Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Об одном классификационном подходе к методам многокритериальной оптимизации / Препринт. Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 18с.
25. Кулаковская Т. Классические принципы оптимальности для бесконечных кооперативных игр / В кн.: Современные направления теории игр. - Вильнюс: Мокслас. - 1976. - С. 94-108.

26. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. - М.: Издательство иностранной литературы. - 1961. - 642с.
27. Майсурадзе В.Г., Чернявский И.В. Аппроксимация парето-оптимальных решений / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 24с.
28. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. - М.: Наука. - 1974.
29. Морозов В.В., Федоров В.В. О формировании векторного критерия по бинарному отношению предпочтения // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1980. - № 3. - С. 630-639.
30. Ногин В.Д. Двойственность в многоцелевом программировании // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1977. - № 1. - С. 254-258.
31. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ: Перевод с англ. - М.: Мир. - 1988. -512с.
32. Оре О. Теория графов. - М.: Наука. -1968. - 352с.
33. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Экономика. - 1978.
34. Подиновский В.В. Методы многокритериальной оптимизации. Вып. 1. Эффективные планы. - М. - 1971.
35. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1975. - № 2. - С. 330-344.
36. Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В кн.: Многокритериальные задачи принятия решений. - М.: Машиностроение. - 1978. - С. 48-92.
37. Подиновский В.В. Общие антагонистические игры // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1981. - № 5. - С. 1140-1153.
38. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. - М.: Советское радио. - 1975.
39. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука. - 1982. - 254с.
40. Пфанцагль И. Теория измерений. - М.: Мир. - 1976. - 247с.
41. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. - М.: Мир. - 1969.
42. Розен В.В. Ситуация равновесия в играх с упорядоченными исходами / В кн.: Современные направления в теории игр. - Вильнюс: Мокслас. - 1976. - С. 115-118.

43. Руа Б. К общей методологии выработки и принятия решений / В кн.: Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. - М.: Статистика. - 1979. - С. 123-167.
44. Салуквадзе М.Е. Задача векторной оптимизации в теории управления. - Тбилиси: Мецниереба. - 1975. - 197с.
45. Салуквадзе М.Е., Бардин А.Е. Векторный риск в многокритериальных задачах / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1992. - 28с.
46. Салуквадзе М.Е., Бардин А.Е. Минимаксный риск // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 145, № 3. - 1992.
47. Салуквадзе М.Е., Майсурадзе В.Г. *К*-седловые точки в антагонистической игре // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 141, № 3. - 1991. - С. 509-512.
48. Салуквадзе М.Е., Майсурадзе В.Г., Топчишвили А.Л. Теория многозначных отображений в задачах нескалярной оптимизации / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1996. - 28с.
49. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Несобственные многокритериальные задачи линейного программирования // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 133, № 1. - 1989. - С. 53-55.
50. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Об одном свойстве седловых точек по Слейтеру многокритериальных задач при неопределенности // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 144, № 2. - 1991. - С. 257-260.
51. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Об одном свойстве слабо эффективных решений многокритериальной задачи // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 140, № 1. - 1990. - С. 37-40.
52. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Свойства слабо эфективных решений последовательности многокритериальных задач / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 20с.
53. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Слабо эффективные решения последовательности многокритериальных задач // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 141, № 3. - 1991. - С. 501-504.
54. Смейл С. Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса // Успехи математических наук. - 1972. - Т. 27, вып. 3 (165). - С. 177-187.
55. Современное состояние исследования операций / Под редакцией Моисеева Н.Н. - М.: Наука. -1979.

56. Топчишвили А.Л., Чернявский И.В. Задача сближения с N целевыми точками с учетом помех / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1992. - 18с.
57. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. - М.: Наука. -1978. - 351с.
58. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука. - 1970. - 707с.
59. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. - М.: Наука. -1971. - 254с.
60. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. - М.: Мир. - 1979. - 400с.
61. Arrow K.J. Social Choice and Individual Values (Second Edition). - Wiley, New York, New York. - 1963.
62. Beltadze G.N., Topchishvili A.L. Equilibrium Situations in Lexicographical Noncooperative Games // Abstracts of the Second International Conference in Multiple-Objective Programming and Goal Programming "M.O.P.G.P.'96", Malaga, Spain, May 1996. - Malaga, Spain. - 1996. - P. 39.
63. Benker H., Kossert S. Remarks on Quadratic Optimal Control Problems in Hilbert Spaces // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. - Vol. 1, No. 3. - 1982. - Pp. 13-21.
64. Bergström T.C. Maximal Elements of Acyclic Relations on Compact Sets // Journal of Economy Theory. -1975. - Vol. 10, No. 3. - Pp. 403-404.
65. Bod P. On Closed sets Having a Least element // Optimization and Operations Research. - Springer-Verlag, Berlin, etc. - 1976. - Pp. 23-24.
66. Bogart K.P. Maximal Dimensional Partially Ordered Set // Discrete Mathematics. - 1975. - Vol. 5, No. 1. - Pp. 21-31.
67. Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis. - Academic Press, New York, New York. - 1960.
68. Frehel J. Problémes Multicretères: Théorie de la Domination de Yu et Efficacité de Pareto // Merta. - 1974. - Vol. 13, No. 1. - Pp. 47-57.
69. Gale D., Kuhn H.W., Tucker A.W. Linear Programming and the Theory of Games // Activity Analysis of Production and Allocation. - Wiley, New York, New York. - 1951. - Pp. 317-329.
70. Göpfert A., Tammer Chr., Topchishvili A.L. On Coderivatives of Set-Valued Mappings / Report, No. 24. - Institute of Optimization and Stochastics, Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg, Germany. - 1997. - 13p.

71. Gros C. Generalization of Fenchel's Duality Theorem for Convex Vector Optimization // European Journal of Operations Research. - 1979. - Vol. 2. - Pp. 368-376.
72. Guddat J., Guerra Vasquez F., Tammer K. and Wendler K. Multiobjective and Stochastic Optimization Based on Parametric Optimization. - Akademie-Verlag, Berlin, Germany. - 1985.
73. Isermann H. Existence and Duality in Multiple Objective Linear Programming // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. - 1976. - Vol. 130. - Pp. 64-75.
74. Isermann H. On Some Relations between a Dual Pair of Multiple Objective Linear Programs // Z. Oper. Res. - 1978. - B. 22, N. 1. - S. 33-41.
75. Isermann H. Duality in Multiple Objective Linear Programming // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. - 1978. - Vol. 155. - Pp. 274-285.
76. Hiraguti T. On the Dimension of Orders // Scientific Reports. - Kanazawa University, Japan. - 1955. - Vol. 4, No. 4. - Pp. 1-20.
77. Jahn, J. Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Spaces. - Lang Verlag Frankfurt, Bern, New York. - 1986.
78. Keeney R.L., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. - Wiley, New York, New York. - 1976.
79. Kornbluth J.S.H. Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming // Operations Research Quarterly. - 1974. - Vol. 25. - Pp. 599-614.
80. Kuhn H.W., Tucker A.W. Nonlinear Programming // Proceedings of Second Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. - University California Press, Berkeley, CA. - 1951. - Pp. 481-492.
81. Leclerc B. Arbres et Dimensions des Ordres // Discrete Mathematics. - 1976. - Vol. 14, No. 1. - Pp. 69-76.
82. Lieberman E.R. Multi-Objective Programming in the USSR. - Academic Press Limited, London, UK. - 1991. - 368p.
83. Maisuradze V., Salukvadze M., Topchishvili A. Investigation of Multicriteria Problems in Partially Ordered Spaces Based on Game Theory // Proceedings of A. Eliashvili Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences. - Modesta, Tbilisi, Georgia. - 1998. - Pp. 17-28.
84. Maisuradze V.G., Salukvadze M.E., Topchishvili A.L., Tanaka T. Characterization of Cone Extreme Points Based on Set-Valued Analysis // Abstracts of the IV International Scientific Conference on "Multicriteria and Game Problems under Uncertainties", Orekhovo-Zuevo, Russia, September 1996. - Moscow, Russia. - 1996. - P. 150.

85. Maisuradze V.G., Topchishvili A.L. The Conic Extreme Points and the Multivalued Mapping Theory // Abstracts of the Second International Conference in Multiple-Objective Programming and Goal Programming "M.O.P.G.P.'96", Malaga, Spain, May 1996. - Malaga, Spain. - 1996. - P. 79.
86. Mukherji A. The Existence of Choice Functions // Econometrica. - 1977. - Vol. 45, No. 4. - Pp. 889-894.
87. Rödder W. A Generalized Saddlepoint Theory. Its Application to Duality Theory for Linear Vector Optimum Problems // European Journal of Operations Research. - 1977. - Vol. 1. - Pp. 55-59.
88. Salukvadze M.E. Optimization of Guarantees in Multicriteria Problems // Proceedings of the 10th International Conference on Multiple Criteria Decision Making (Taipei, Taiwan, July 1992). - Vol. I. - 1992. - Taipei, Taiwan, R.O.C. - Pp. 1-6.
89. Salukvadze M.E. Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory. - Academic Press, New York, New York. - 1979. - 219p.
90. Salukvadze M.E., Bardin A. Vector-Valued Risk in Multicriteria Problems // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (R. Caballero, F. Ruiz, R.E. Steuer (eds.). Advances in Multiple Objective and Goal programming. Proceedings of the 2nd International Conference on Multi-Objective Programming and Goal Programming (Torrimolinos, Spain, May 1996)). - Springer, Germany. - Vol. 455. - 1997.- Pp. 235-244.
91. Salukvadze M.E., Maisuradze V.G. Cone Maximin in a Multicriterion Problem // Collection of Scientific Works on "Multicriterial Dynamic Problems under Uncertainty". - Orekhovo-Zuevo Pedagogical Institute, Orekhovo-Zuevo, Russia. - 1991. - Pp. 30-33.
92. Salukvadze M.E., Maisuradze V.G. Sufficient Conditions for the Existence of the Conic Saddle Points // Abstracts of the Third International Workshop on Multiple Criteria Problems under Uncertainty (Orekhovo-Zuevo, Russia, September 5-9, 1994). - 1994. - P. 79.
93. Salukvadze M.E., Maisuradze V.Iu. Guaranteeing Control Existence in a Linear Problem // Collection of Scientific Works on "Multicriterial Dynamic Problems under Uncertainty". - Orekhovo-Zuevo Pedagogical Institute, Orekhovo-Zuevo, Russia. - 1991. - Pp. 43-46.
94. Salukvadze M., Remizov A. Root-Mean-Square Division in the Games under Uncertainty // Proceedings of A. Eliashvili Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences. - Modesta, Tbilisi, Georgia. - 1998. - Pp. 5-17.

95. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Converging Multiple Objective Dynamic Problems // Abstracts of the IV International Conference on Multicriteria and Game Problems under Uncertainties (Orekhovo-Zuevo, Russia, September 1996). - Moscow, Russia. - 1996. - P. 151.
96. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Inproper Linear Programming Problems with Vector-Valued Criteria // Abstracts of the International Conference "Multicriteria Problems of Mathematical Programming" (Jalta, USSR, October-November 1988). Institute of Cybernetics, Kiev, Ukraine. - 1988. - P. 16.
97. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Insoluble Multi-criteria Linear Programming Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 61, No. 3. - 1989. - Pp. 487-491.
98. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Limiting Games with a Vector-Valued Payoff Function // Abstracts of the Third International Workshop "Multiple Criteria Problems under Uncertainty" (Orekhovo-Zuevo, Russia, September 1994). - Orekhovo-Zuevo, Russia. - 1994. - P. 80.
99. Salukvadze M., Topchishvili A. Limiting Multiple Objective Dynamic Problems // Proceedings of A. Eliashvili Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences. - Modesta, Tbilisi, Georgia. - 1997. - Pp. 23-28.
100. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Some Properties of Multicriteria Optimization Problems // Proceedings of the 10th International Conference on Multiple Criteria Decision Making (Taipei, Taiwan, July 1992). - Vol. IV. - Taipei, Taiwan, R.O.C.- 1992. - Pp. 77-86.
101. Salukvadze M., Topchishvili A. Static Multicriteria Optimization Problems in Conditions of Uncertainty // Proceedings of A. Eliashvili Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences. Modesta, Tbilisi, Georgia. - 1997. - Pp. 15-22.
102. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Weakly-Efficient Solutions of Limiting Multicriteria Optimization Problems // INFOR. - Vol. 30, No.2. - 1992. - Canada. - Pp. 148-159.
103. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Weakly-Efficient Solutions of Limiting Multicriteria Optimization Problems // Multiple Criteria Decision Making: Theory, Computation and Applications in Business, Industry and Government (eds. A. Goicoechea, L. Duckstein, S. Zionts). Proceedings of the 9-th International Confrence (Fairfax, Virginia, USA, August 1990). - Springer-Verlag. - 1992. - Pp. 373-386.
104. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L. Weakly-Efficient Solutions of Limiting Multicriteria Optimization Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 77, No. 2. - 1993. - Pp. 373-386.

105. Salukvadze M.E., Topchishvili A.L., Zhukovskiy V.I. Strategies of Threats and Counter-Threats in Multicriteria Differential Games / Preprint. - Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi, Georgia. - 1996. - 21p.

106. Salukvadze M.E., Zhukovskiy V.I. Optimization of Guarantees in Multicriteria Problems // Dynamic Economy Models and Optimal Control. Proceedings of the 4th International Workshop (Wien, Austria, July 1991). - North-Holland, Amsterdam, Holland. - 1992. - Pp. 69-74.

107. Salukvadze M.E., Zhukovskiy V.I. Sufficient Conditions in the Vector-Valued Maximin Problems // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (G. Fandel, T. Gal (eds.). Multiple Criteria Decision Making. Proceedings of the 12th International Conference (Hagen, Germany, June 1995)). - Springer, Germany. - Vol. 448. - 1997.- Pp. 74-82.

108. Sawaragi Y., Nakayma H., Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization. - Academic Press, New York, New York. - 1985.

109. Schaefer H.H. Topological Vector Spaces. - The Macmillan Company, New York, New York. - 1966.

110. Schönfeld P. Some Duality Theorems for the Non-Linear Vector Maximum Problem // Unternehmensforschung. - 1970. - B. 14, No. 1. - S. 51-63.

111. Sen A.K. Collective Choice and Social Welfare. - Holden-Day, San-Francisco, CA. - 1970.

112. Smale S. Global Analysis and Economics, V. Pareto Theory with Constraints // Journal of Mathematical Economics. -1974. - Vol.1. - Pp. 213-221.

113. Steuer R.E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. - John Wiley and Sons, New York, New York. - 1986. - 546p.

114. Tanaka, T. Approximately Efficient Solutions in Vector Optimization // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. - Vol. 5. - 1996.

115. Tanaka T. Generalized Quasiconvexity, Cone Saddle Points, and a Minimax Theorem for Vector-Valued Functions // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 81, No. 2. - 1994. - Pp. 355-377.

116. Tanaka T. Minimax Theorems and Saddle Point Theorems in Vector Optimization // Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making (Taipei, Taiwan, July 19-24, 1992). - Vol. III. - Taipei, Taiwan, R.O.C. - 1992. - Pp. 341-350.

117. Tanaka T. On Cone-Extreme Points in R^n // Science Reports of Niigata University. - Vol. 23. - 1987. - Pp. 13-24.
118. Tanaka T. Two Types of Minimax Theorems for Vector-Valued Functions // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 68, No. 2. - 1991. - Pp. 321-334.
119. Tanaka T., Kuroiwa D. The Convexity of A and B Assures intA+B=int(A+B) // Applied Mathematical Letters. - Vol. 6, No. 1. - 1993. - Pp. 83-86.
120. Tanino T., Sawaragi Y. Conjagate Maps and Duality in Multiobjective Optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1980. - Vol. 31, No. 4. - Pp. 473-499.
121. Tanino T., Sawaragi Y. Duality Theory in Multiobjective Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1979. - Vol. 27, No. 4. - Pp. 509-529.
122. Topchishvili A.L. Conic Optimal Solutions for Multicriteria Problems under Uncertainties // Abstracts of the Seventh Workshop of the DGOR Working Group "Decision Theory and Decision Support" (Bad Liebenzell, Germany, March 1997). - Hohenheim, Germany. - 1997. - P. 14.
123. Topchishvili A.L. Convex Operators in Multicriteria Problems // Abstracts of the Third DAS Workshop & Eighth Workshop of the DGOR Working Group "Decision Theory and Decision Support", Laxenburg, Austria, February 1998. - Laxenburg, Austria. - 1998. - P. 21.
124. Topchishvili A.L. Limiting Solution Set Structure for Converging Multiple Objective Dynamic Problems Sequence // Abstracts of the 12th International Conference on Multiple Criteria Decision Making "Twenty Years of East-West Cooperation in MCDM" (Hagen, Germany, June 1995). - Hagen, Germany. - 1995. - P. 157.
125. Topchishvili A.L. Limiting Solution Set Structure for Converging Multiple Objective Dynamic Problems Sequence // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (G. Fandel, T. Gal (eds.). Multiple Criteria Decision Making. Proceedings of the 12th International Conference (Hagen, Germany, June 1995)). - Springer, Germany. - Vol. 448. - 1997. - Pp. 103-111.
126. Topchishvili A.L. *N* Points Rapprochement Problem under Disturbances // Abstracts of the Third DAS Workshop & Eighth Workshop of the DGOR Working Group "Decision Theory and Decision Support" (Laxenburg, Austria, February 1998). - Laxenburg, Austria. - 1998. - P. 21.

127. Topchishvili A.L., Beltadze G.N. Multicriteria Noncooperative Games with Strictly Ordered Criteria // A. Göpfert, J. Seeländer, Chr. Tammer (eds.). Methods of Multicriteria Decision Theory. Proceedings of the 6-th Workshop of the DGOR Working Group "Multicritria Optimization and Decision Theory" (Alexisbad (Harz), Germany, March 1996). - Verlag Hänsel-Hohenhausen, Egelbach |Frankfurt |Washington. - 1997. - Pp. 69-86.
128. Topchishvili A.L., Maisuradze V.G. The Multivalued Mapping Theory in Nonscalar Optimization Problems // A. Göpfert, J. Seeländer, Chr. Tammer (eds.). Methods of Multicriteria Decision Theory. Proceedings of the 6-th Workshop of the DGOR Working Group"Multicritria Optimization and Decision Theory" (Alexisbad (Harz), Germany, March 1996). Verlag Hänsel-Hohenhausen, Egelbach |Frankfurt |Washington. - 1997. - Pp. 87-107.
129. Topchishvili A.L., Maisuradze V.G., Ehrgott M. Convex Operators in Vector Optimization: Directional Derivatives and the Cone of Decrease Directions / Report in Wirtschaftsmathematik, Nr. 40. - Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserlautern, Kaiserslautern, Germany. - 1998 - 15p.
130. Topchishvili A.L., Maisuradze V.G., Salukvadze M.E. Connection of Multicriteria Problems under Uncertainties and Antagonistic Games with Vector-Valued Payoff Function / Preprint. - Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi, Georgia. - 1996. - 26p.
131. Walker M. On the Existence of maximal Elements // Journal of Economy Theory. - 1977. - Vol. 16. - Pp. 470-474.
132. White D.J. Optimality and Efficiency. I // European Journal of Operations Research. - 1980.- Vol. 4. - Pp. 346-355.
133. White D.J. Optimality and Efficiency. II // European Journal of Operations Research. - 1980.- V. 6. - Pp. 426-427.
134. Yu P.L. Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1974. - Vol. 14, No. 3. - Pp. 319-377.
135. Yu P.L. Multiple-Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions. - Plenum, New York, New York. - 1985.
136. Yu P.L., Zeleny M. The Techniques of Linear Multiobjective Programming // RAIRO. - 1974. - Vol. 8, No. V-3. - Pp. 51-71.
137. Zowe J. Fenchelsche Dualitätsaussagen in Endlichdimensionalen Halbgeordneten Vectorräumen // ZAMM. - 1973. - B. 53. - S. 230-232.

138. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. Sufficient Conditions in the Vector-Valued Maximin Problems / Preprint. - Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi, Georgia. - 1995. - 16p.

139. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. - Academic Press, New York, New York. -1993. - 404p.

140. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Kourzin D.V. Linear-Quadratic Differential Games with Side Payments / Preprint. - Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi, Georgia. - 1994. - 64p.

141. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S. The Berge Equilibrium / Preprint. - Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi, Georgia. - 1994. - 32p.

142. ბოკუჩავა ი.ტ., თოფჩიშვილი ა.ლ., სხირტლაძე რ.ლ. აპროქსიმაციული მეთოდით ახალი ტექნოლოგიის შეფასების ერთი რეალიზაციის შესახებ // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის შრომათა კრებული. - საქართველო, თბილისი: „მოდესტა“. - 1998. - გვ. 99-104.

სარჩევი

გვ.

სარჩევი

Mindia E. Salukvadze
Alexander L. Topchishvili
Vilhelm G. Maisuradze

DUALITY IN NONSCALAR OPTIMIZATION PROBLEMS

Duality plays a significant role in multicriteria (vector-valued) and, in general, non-scalar optimization theory. This is stipulated by the fact that effective algorithms, procedures and methods can be constructed, based on it. Duality theory developed in the monograph is applicable for vector-valued optimization problems in infinitedimensional spaces. Classical multicriteria problems in finite dimensional spaces are studied at the beginning of the monograph. The well-known statements and results, which have already become classical are given for the general type problems. Dual problems in infinitedimensional spaces which are formalized for the first time are presented in the second part of the monograph. Their different important properties are established.

The monograph is supposed both for the specialists in the areas of applied mathematics, control and optimization and for senior students and postgraduates of the corresponding fields.

Tbilisi
"MODESTA"
2000

Миндия Евгеньевич Салуквадзе
Александр Леванович Топчишвили
Вильгельм Григорьевич Майсурадзе

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ НЕСКАЛЯРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Двойственность занимает значительное место в теории многокритериальной (векторной) и, в общем случае, нескалярной оптимизации. Это вызвано тем обстоятельством, что, основываясь на ней, возможно построение эффективных алгоритмов, процедур и методов решения задачи. В монографии развивается теория двойственности для задач векторной оптимизации в бесконечномерных пространствах. В начале монографии рассматриваются классические многокритериальные задачи в конечномерных пространствах, приведен ряд известных, уже ставших классическими, утверждений и результатов для задач общего характера. Во второй же части, впервые формализованы двойственные задачи в бесконечномерных пространствах и установлены их различные важные свойства.

Монография рассчитана на специалистов в области прикладной математики, управления и оптимизации, а также на студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

Тбилиси
"МОДЕСТА"
2000

დაკაბადონება: ა. თოფჩიშვილი

გარეკანის მხატვარი: გ. თოფჩიშვილი

ტექნიკური რედაქტორი: ა. გურული

ფასი შეთანხმებით

ტირაჟი 300

გამომცემლობა "მოდესტა"
თბილისი, კ. გამსახურდიას გამზირი, 34
ტელ.: 384753