პროფ. ი. ნატანსონი

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის საფუძვლები

თარგმანი ი. ძარცივაძისა

სტალინის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

თბილისი — 1949

წინასიტყვაობა

ამ წიგნს საფუძვლად უდევს ლექციები, წაკითხული ჩემს მიერ ლენინგრადის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. ამიტომ ეს წიგნი გათვალისწინებულია იმ მკითხველთათვის, რომლებიც იცნობენ ანალიზის ძირითად იდეებს: ირაციონალური რიცხვი, ზღვარი, რიცხვთა სიმრავლის საზღვრები, უწყვეტი ფუნქცია, წარმოებული, რიმანის ინტეგრალი, მწკრივი და ა. შ., მე ვგულისხმობ, რომ ეს საკითხები ცნობილია და გადმოცემას ვიწყებ სიმრავლეთა თეორიით.

ძალიან რომ არ გადიდებულიყო ამ წიგნის მოცულობა, მე დავკმაყოფილდი მხოლოდ ერთი ცვლადის ფუნქციათა თეორიით. კერძოდ, იძულებული ვიყავით არ მოგვეყვანა ფუბინის შესანიშნავი თეორემა ორჯერად ინტეგრალებზე. რასაკვირველია, ეს ძალიან სამწუხაროა. სხვათა შორის, ჩვენს წიგნში, რომელიც მიძღვნილია ფუნქციათა თეორიის საფუძვლებისადმი, ბუნებრივად არ შევიდა მრავალი მნიშვნელოვანი საკითხი, მაგალითად, სიმრავლის ფუნქციათა თეორია, ბორელის სიმრავლეთა კლასიფიკაცია და მისი კავშირი ბერის კლასიფიკაციასთან, ლებეგის ინტეგრალის გეომეტრიული თეორია, პერონისა და დანჟუას ინტეგრალები და ა. შ. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის სრული კურსის შექმნა წარმოადგენს საბჭოთა მათემატიკოსების ერთ-ერთ მორიგ ამოცანათაგანს.

ამ წიგნის ზოგიერთი თავის ბოლოში მოყვანილია სავარჯიშოები. მათი რიცხვი არც იმდენად დიდია, მაგრამ ისინი საკმარისად ძნელი არიან. მე მიმაჩნია ერთი ძნელი ამოცანის ამოხსნა უფრო სასარგებლოდ, ვიდრე მრავალი ადვილი ამოცანის ამოხსნა. საუკეთესო გზად კვლევითი მუშაობის წარმოების მოსამზადებლად შეიძლება ჩაითვალოს ძნელი ამოცანების ამოხსნა.

ჩემთვის საგრძნობლად ძნელი იყო იმ ნაწილის გადმოცემა ტრანსფინიტურ რიცხვთა თეორიიდან, რომელიც ეხება სიმრავლეთა თეორიის ანტინომიებს. ამ საკითხების იმ ნაწილის უყურადღებოდ დატოვება ჩავთვალე შეუძლებლად. მაგრამ მათი გადაწყვეტა, როგორც ცნობილია, კიდევ არაა მოძებნილი. ბუნებრივია, რომ ამ წიგნის ეს ადგილები ატარებს სუბიექტურ ხასიათს.

ჩემმა მასწავლებელმა, პროფ. გ. მ. ფიხტენგოლცმა, მთლიანად წაიკითხა ამ წიგნის ხელნაწერი და მომცა მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მითითებები, ამას გარდა მე დიდად დავალებული ვარ პროფ. დ. კ. ფადეევისაგან, რომელმაც გამოიჩინა აგრეთვე ამ სამუშაოებისადმი დიდი ინტერესი. დაბოლოს, უნდა შევნიშნოთ, რომ წიგნის დაწერის შრომა მნიშვნელოვნად გაადვილებული იყო ჩემი ლექციების ჩანაწერებით, რომლებიც გადმომცა სტუდენტ მ. შიროხოვმა. სასიამოვნოდ მიმაჩნია მადლობა გამოვუცხადო აღნიშნულ პირებს.

პროფ. ი. ნატანსონი

თ ა ვ ი I

უსასრულო სიმრავლეები

§ 1. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიას საფუძვლად უდევს ეგრეთწოდებული „სიმრავლეთა თეორია“. ამ დისციპლინას შედარებით მოკლე ისტორია აქვს: პირველი სერიოზული შრომები ამ დარგში, რომლებიც გ. კანტორს ეკუთვნის, გამოქვეყნებულია წარსული საუკუნის ბოლოს. მიუხედავად ამისა, სიმრავლეთა თეორია ამჟამად მათემატიკის მეტად ფართო დარგს წარმოადგენს. ჩვენს კურსში, რომლისათვისაც სიმრავლეთა თეორიას მხოლოდ დამხმარე მნიშვნელობა აქვს, ამ დისციპლინის მხოლოდ ელემენტებით დავკმაყოფილდებით. მკითხველს, რომელსაც სურს სიმრავლეთა თეორიაში ცოდნის გაღრმავება, ჩვენ მივუთითებთ ფ. ჰაუსდორფის[1] შესანიშნავ მონოგრაფიაზე.

სიმრავლის ცნება მათემატიკის ერთერთი ძირითადი ცნებაა და იგი ზუსტ განმარტებას არ ემორჩილება. ამის გამო ჩვენ ამ ცნების აღწერით დავკმაყოფილდებით. სიმრავლე იმ საგანთა კრებულს, ერთობლიობას, კოლექციას ეწოდება, რომლებიც გაერთიანებული არიან რაიმე ნიშნის მიხედვით. მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ ყველა ნატურალურ რიცხვების სიმრავლეზე, წრფის ყველა წერტილთა სიმრავლეზე, ყველა ნამდვილ კოეფიციენტებიან პოლინომების სიმრავლეზე და ა. შ.

როდესაც სიმრავლეზე ვლაპარაკობთ, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ყოველი საგნის მიმართ სწორია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი ორი შესაძლებლობიდან: ეს საგანი ან შედის ჩვენს სიმრავლეში, როგორც მისი ელემენტი, ან არა.

თუ A რაიმე სიმრავლეა, ხოლო x წარმოადგენს რაიმე საგანს, მაშინ x საგნის A სიმრავლისათვის მიკუთვნების ფაქტი აღინიშნება ასე:

$$x \in A.$$

თუ კი x არ შედის A-ში, ამას ასე ჩასწერენ:

$$x \overline{\in} A.$$

---

[1] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1937.

მაგალითად, თუ R ყველა რაციონალურ რიცხვების სიმრავლეა, მაშინ

$$-\frac{3}{4}\in R,\ \sqrt{2}\ \overline{\in}\ R.$$

თვით სიმრავლე არასოდეს არ წარმოადგენს თავის ელემენტს

$$A\ \overline{\in}\ A.$$

ფორმულირებათა ზოგადობისა და სიმარტივის მიზნით სასარგებლოა შემოღება ეგრეთწოდებული „ცარიელი სიმრავლის", რომელიც სავსებით მოკლებულია ელემენტებს. მაგალითად,

$$x^2+1=0$$

განტოლების ნამდვილი ფესვების სიმრავლე ცარიელია. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება 0 სიმბოლოთი; შემდეგში არ წარმოიშვება ამ სიმბოლოს „ნულ" რიცხვთან არევის საშიშროება, რადგან კონტექსტიდან აშკარა იქნება თუ რას ეხება საქმე.

ცარიელ სიმრავლესთან ერთად ჩვენ შევხვდებით „ერთელემენტიან" სიმრავლეებსაც, ე. ი. სიმრავლეებს, რომლებიც მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან შედგებიან, მაგალითად,

$$2x-6=0$$

განტოლების ფესვთა სიმრავლე შედგება ერთი ელემენტისაგან — რიცხვ 3-საგან. საჭიროა ვერიდოთ არევას ერთელემენტიანი სიმრავლისა და მისი ერთად-ერთი ელემენტისა.

თუ A სიმრავლის ყველა ელემენტის საერთო სახელი არის x, მაშინ ზოგჯერ სწერენ

$$A=\{x\}.$$

თუ შესაძლებელია სიმრავლის ყველა ელემენტის აღნიშვნების ამოწერა, მაშინ მათ სწერენ რიგში, და მოათავსებენ ფიგურულ ფრჩხილებში, მაგალითად

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

განმარტება 1. ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს B სიმრავლის ელემენტს, ამბობენ, რომ A არის B სიმრავლის ნაწილი (ან ქვესიმრავლე) და წერენ

$$A\subset B,\ B\supset A.$$

ამგვარ დამოკიდებულებას ეწოდება ჩართვა.

ვთქვათ, მაგალითად, N არის ყველა ნატურალურ რიცხვების, ხოლო R—ყველა რაციონალური რიცხვების სიმრავლე, მაშინ

$$N\subset R.$$

ცხადია, რომ ყოველი სიმრავლე თავისივე ნაწილია

$$A\subset A.$$

ცარიელი სიმრავლე ყოველი A სიმრავლის ნაწილია. იმისათვის, რომ ეს დებულება სავსებით ცხადი გახდეს, საკმარისია 1 განმარტება ასეთი სახით გამოითქვას: არც ერთი ელემენტი, რომელიც B-ში არ შედის, არც A-ში შედის.

განმარტება 2. ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. თუ $A\subset B$ და $B\subset A$, მაშინ ამბობენ, რომ A და B სიმრავლეები ტ ო ლ ი ა რ ი ა ნ და სწერენ

$$A=B.$$

მაგალითად, თუ $A=\{2,3\}$, ხოლო B —

$$x^2-5x+6=0$$

განტოლების ფესვთა სიმრავლეა, მაშინ $A=B$.

განმარტება 3. ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. S სიმრავლეს, რომელიც ორივე, A და B სიმრავლეების ელემენტებისაგან შედგება და არ შეიცავს არცერთ სხვა ელემენტს, A და B სიმრავლეთა ჯ ა მ ი ეწოდება და აღინიშნება ასე:

$$S=A+B.$$

ამგვარადვე განიმარტება n სიმრავლის $A_1, A_2, \dots, A_n$ ჯამი, სიმრავლეთა $A_1, A_2, A_3, \dots$ მიმდევრობის ჯამი და, საზოგადოთ, ისეთ A_ξ სიმრავლეთა სიმრავლის ჯამი, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსასხვავებლად ξ ნიშნაკით არიან აღნიშნული, სადაც ξ რაიმე სხვადასხვა მნიშვნელობებს იღებენ. სათანადო აღნიშვნები ასეთია:

$$S=A_1+A_2+\dots+A_n, \text{ ან } S=\sum_{k=1}^{n} A_k,$$

$$S=A_1+A_2+A_3+\dots, \text{ ან } S=\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$S=\sum_{\xi} A_\xi .$$

მაგალითად, თუ S ყველა დადებითი რიცხვების სიმრავლეა, მაშინ

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} (k-1,\ k].$$

თუ $A\subset B$, მაშინ ცხადია

$$A+B=B.$$

კერძოდ,

$$A+A=A.$$

განმარტება 4. ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. P სიმრავლეს, რომელიც შედგება ორივე A და B სიმრავლის საერთო ელემენტებისაგან და არ შეიცავს არცერთ სხვა ელემენტს, ეწოდება A და B სიმრავლეების თ ა ნ ა კ ვ ე თ ა და აღინიშნება ასე:

$$P=AB.$$

მაგალითად, თუ $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, მაშინ

$$AB=\{3,4\}.$$

მსგავსად განიმარტება n სიმრავლის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ თანაკვეთა, სიმრავლეთა $A_1, A_2, A_3, \ldots$ მიმდევრობის თანაკვეთა და, საზოგადოდ, ისეთ A_ξ სიმრავლეთა სიმრავლის თანაკვეთა, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსასხვავებლად ξ ნიშნაკით არიან აღნიშნული. სათანადო აღნიშვნები ასეთია:

$$P=A_1A_2\cdots A_n, \text{ ან } P=\prod_{k=1}^{n} A_k,$$

$$P=A_1A_2A_3\cdots, \text{ ან } P=\prod_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$P=\prod_{\xi} A_\xi.$$

მაგალითად,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)=\{0\} \text{ (ერთელემენტიანი სიმრავლე)}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{k}\right)=0 \text{ (ცარიელი სიმრავლე).}$$

თუ $A\subset B$, მაშინ ცხადია

$$AB=A.$$

კერძოდ, $AA=A$.

ის გარემოება, რომ A და B სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არა აქვთ, შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$AB=0.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ აგრეთვე, რომ A და B სიმრავლეები „არ იკვეთებიან".

თეორემა 1. ვთქვათ, A რაიმე სიმრავლეა და $\{E_\xi\}$ — სიმრავლეთა სიმრავლე, მაშინ

$$A\sum_{\xi} E_\xi=\sum_{\xi} AE_\xi. \tag{1}$$

დამტკიცება. ავღნიშნოთ

$$S=A\sum_{\xi} E_\xi, \quad T=\sum_{\xi} AE_\xi.$$

ვთქვათ, $x\in S$. ეს ნიშნავს, რომ $x\in A$ და $x\in \sum_{\xi} E_\xi$. უკანასკნელი დამოკი-

დებულება კი აღნიშნავს, რომ $x \in E_{\xi_0}$. მაგრამ მაშინ $x \in AE_{\xi_0}$ და, მით უფრო, $x \in T$. ამგვარად,

$$S \subset T.$$

ვთქვათ, ახლა, პირიქით, $x \in T$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x \in AE_{\xi_0}$, ან სხვანაირად, $x \in A$ და $x \in E_{\xi_0}$, მაგრამ იქედან, რომ $x \in E_{\xi_0}$, გამომდინარეობს, რომ $x \in \sum_{\xi} E_\xi$, ხოლო მაშინ (რადგანაც $x \in A$) $x \in S$. მაშასადამე,

$$T \subset S,$$

რაც ზემოთ დამტკიცებულთან ერთად გვაძლევს

$$S = T.$$

კერძოდ, დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$A(B+C) = AB + AC.$$

განმარტება 5. ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. R სიმრავლეს, რომელიც A სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან შედგება, რომლებიც არ შედიან B—სიმრავლეში, და არ შეიცავს არც ერთ სხვა ელემენტს, ეწოდება A და B სიმრავლეთა *სხვაობა* და აღინიშნება ასე:

$$R = A - B.$$

მაგალითად, თუ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, მაშინ

$$A - B = \{1,2\}.$$

თეორემა 2. *თუ A, B და C სამი სიმრავლეა, მაშინ*

$$A(B - C) = AB - AC.$$

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

კაცს თვალში ეცემა ანალოგია, რომელიც არსებობს სიმრავლეებზე მოქმედებასა და არითმეტიკულ მოქმედებათა შორის. მაგრამ ეს ანალოგია არასრულია. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ $A + A = A$, $AA = A$. ასეთი ტოლობანი არითმეტიკაში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, არა გვაქვს. მოვიყვანოთ აღნიშნული ანალოგიის დარღვევის კიდევ ერთი მაგალითი.

თეორემა 3. *დამოკიდებულება*

$$(A - B) + B = A, \tag{2}$$

სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $B \subset A$.

დამტკიცება. ვთქვათ, (2) სამართლიანია. რადგანაც შესაკრები ყოველთვის ნაწილია ჯამისა, გვაქვს $B \subset A$. დავუშვათ ახლა, რომ $B \subset A$. მაშინ ცხადია $(A - B) + B \subset A$. მაგრამ შებრუნებული ჩართვა $(A - B) + B \supset A$, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, სამართლიანია ყოველგვარი შეზღუდვების გარეშე, საიდანაც გამომდინარეობს (2).

§ 2. ურთიერთცალსახა თანადობა

ვთქვათ, A და B ორი სასრული სიმრავლეა. ბუნებრივია დაისვას საკითხი იმის შესახებ, ერთნაირია თუ არა ელემენტების რაოდენობა ამ სიმრავლეებში:

იმისათვის რომ გადავჭრათ ეს საკითხი, ჩვენ შეგვიძლია დ ა ვ ი თ ვ ა-ლ ო თ თითოეული სიმრავლისათვის ელემენტები, და ვნახოთ, ერთნაირია, თუ არა, დათვლის შედეგად მიღებული რიცხვები.

მაგრამ დასმული საკითხი შეიძლება გადავწყვიტოთ ჩვენი სიმრავლეთა ელემენტების დათვლის გარეშეც. ვთქვათ, მაგალითისათვის, A ლათინური ასოების

$$A=\{a,b,c,d,e\}$$

სიმრავლეა, ხოლო B, ბერძნული ასოებისა:

$$B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

თუ ჩვენ ამ სიმრავლეებს შემდეგნაირად დავალაგებთ:

A:	a	b	c	d	e
B:	α	β	γ	δ	ε

შაშინ ყოველგვარი დათვლის გარეშე შევნიშნავთ, რომ A-სა და B-ს ელემენტების ერთიდაიგივე რაოდენობა აქვთ.

რა არის დამახასიათებელი სიმრავლეთა შედარების ამ ხერხისათვის? დამახასიათებელია ის, რომ A სიმრავლის ყოველი ელემენტისათვის მითითებულია B სიმრავლის ერთ და მხოლოდ ერთ სათანადო ელემენტზე და პირიქით.

შედარების ამ მეორე ხერხის ძალა იმაში მდგომარეობს, რომ მისი გამოყენება შესაძლებელია მაშინაც, როდესაც შესადარებელი სიმრავლეები უ ს ა-ს რ უ ლ ო არიან, მაგალითად, თუ N წარმოადგენს ყველა ნატურალური რიცხვების სიმრავლეს, ხოლო M ყველა $\frac{1}{n}$ სახის რიცხვების სიმრავლეს, მაშინ შედარების მეორე ხერხი უშუალოდ გვიჩვენებს, რომ N სიმრავლის ელემენტთა „რაოდენობა“ ისეთივეა, როგორც M სიმრავლისა; იმისათვის, რომ ამაში დავრწმუნდეთ, საკმარისია ჩვენი სიმრავლეები ასე დავალაგოთ:

N:	1	2	3	4	...
M:	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

და ჩავთვალოთ n და $\frac{1}{n}$ რიცხვები ერთმანეთის შესაბამ ელემენტებად.

გადავიდეთ ახლა ზუსტ განმარტებებზე.

განმარტება 1. ვ თ ქ ვ ა თ, A და B ო რ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ა. ი მ ფ ე ს ს, რ ო მ ე ლ ი ც A ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ყ ო ვ ე ლ a ე ლ ე მ ე ნ ტ ს შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ს B ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ე რ თ ს ა და მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ b ე ლ ე მ ე ნ ტ ს, ა მ ა ს თ ა ნ ა-ვ ე ი ს ე, რ ო მ ყ ო ვ ე ლ ი $b \in B$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ე რ თ ი და მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ი $a \in A$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ი ქ ნ ე ბ ა, ე წ ო დ ე ბ ა უ რ თ ი ე რ თ ც ა ლ-ს ა ხ ა თ ა ნ ა დ ო ბ ა A და B ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ს შ ო რ ი ს.

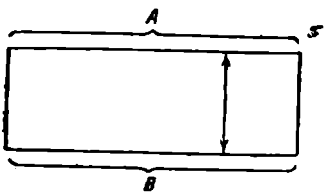
განმარტება 2. თუ ორი A და B სიმრავლეს შორის შესაძლებელია ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარება, ამბობენ, რომ ეს სიმრავლეები ეკვივალენტური არიან, ან რომ მათ ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ, და სწერენ

$$A \sim B.$$

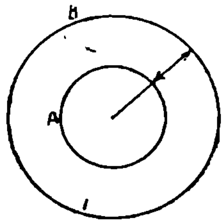
ადვილი გასაგებია, რომ ორი სასრული სიმრავლე ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ელემენტების ერთიდაიგივე რაოდენობას შეიცავენ, ისე რომ ერთნაირი სიმძლავრის ცნება წარმოადგენს სასრული სიმრავლეების ერთნაირი რიცხვობრიობის პირდაპირ განზოგადოებას.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი წყვილ-წყვილად ეკვივალენტური სიმრავლეებისა.

ვთქვათ, A და B წარმოადგენენ მართკუთხედის ორი პარალელური გვერდების (ნახ. 1) სიმრავლეებს. ადვილი მისახვედრია, რომ $A \sim B$.



ნახ. 1

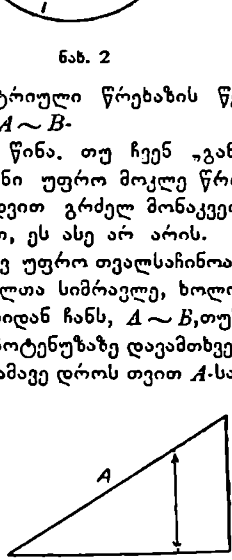


ნახ. 2

დავუშვათ კიდევ, რომ A და B ორი კონცენტრიული წრეხაზის წერტილთა სიმრავლეებია (ნახ. 2). აქაც ცხადია, რომ $A \sim B$.

ეს მაგალითი ნაკლებად ტრივიალურია, ვიდრე წინა. თუ ჩვენ „განვაწკრივებთ" ჩვენს წრეხაზებს, მაშინ ერთ-ერთი მათგანი უფრო მოკლე წრფივ მონაკვეთად გადაიქცევა, ვიდრე მეორე. ერთი შეხედვით გრძელ მონაკვეთზე წერტილებიც „მეტი" უნდა იყოს. როგორც ვხედავთ, ეს ასე არ არის.

აი მაგალითი, რომელშიაც ეს პარადოქსი კიდევ უფრო თვალსაჩინოა. A იყოს მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის წერტილთა სიმრავლე, ხოლო B კათეტის წერტილთა სიმრავლე. როგორც მე-3 ნახაზიდან ჩანს, $A \sim B$, თუმცა კათეტი ჰიპოტენუზაზე მოკლეა. თუ ჩვენს კათეტს ჰიპოტენუზაზე დავამთხვევთ, B სიმრავლე A სიმრავლის ნაწილი აღმოჩნდება, ამავე დროს თვით A-საგან განსხვავებული. ასეთ ნაწილს ჩვენ სიმრავლის წესიერ ნაწილს ვუწოდებთ (ე. ი. B არის A-ს წესიერი ნაწილი, თუ $B \subset A$, მაგრამ $B \neq A$). ამგვარად, უკანასკნელ მაგალითში, ჩვენ ისეთ სიმრავლეს შევხვდით, რომელსაც აქვს თავისივე ეკვივალენტური წესიერი ნაწილი. თავისთავად ცხადია, რომ სასრული სიმრავლეს არა აქვს თავისივე ეკვივალენტური წესიერი ნაწილები. ამგვარად, სწორედ A



ნახ. 3

სიმრავლის უსასრულობას უნდა მიეწეროს მისი ასეთი საკვირველი თვისება. ქვემოთ ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ ყოველ უსასრულო სიმრავლეს აქვს თავისივე ეკვივალენტური ნაწილი. ჯერ-ჯერობით კი აღნიშნულ ფაქტის საილუსტრაციოდ ერთ მაგალითს მოვიყვანთ.

ვთქვათ, N ყველა ნატურალურ რიცხვების, ხოლო M — ყველა ლუწ რიცხვების სიმრავლეა:

$$N=\{n\},\quad M=\{2n\}.$$

თუ ამ სიმრავლეებს შემდეგნაირად დავალაგებთ

N:	1	2	3	4	5	...
M:	2	4	6	8	10	

მაშინ უშუალოდ დავრწმუნდებით მათ ეკვივალენტობაში, თუმცა M სიმრავლე N-ის წესიერი ნაწილია: „ლუწი რიცხვები იმდენია, რამდენიც ყველა ნატურალური რიცხვები“.

მოვიყვანოთ ეკვივალენტობის ცნების ზოგიერთი მარტივი თვისებები, რომელთა მტკიცება, უდაოდ, მკითხველს შეიძლება მივანდოთ:

თეორემა 1. *a*) ყოველთვის $A\sim A$.

b) თუ $A\sim B$, მაშინ $B\sim A$.

c) თუ $A\sim B$, ხოლო $B\sim C$, მაშინ $A\sim C$.

თეორემა 2. ვთქვათ, $A_1,A_2,A_3,\ldots$ და $B_1,B_2,B_3,\ldots$ სიმრავლეთა ორი მიმდევრობაა. თუ როგორც A_n სიმრავლეები არ იკვეთებიან ერთმანეთთან, ისე B_n სიმრავლეებიც:

$$A_nA_{n'}=0,\quad B_nB_{n'}=0\quad (n\neq n'),$$

და თუ ყოველი n-სათვის

$$A_n\sim B_n\quad (n=1,2,3,\ldots),$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\sim\sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

§ 3. თვლადი სიმრავლეები

განმარტება 1. ვთქვათ, N ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა;

$$N=\{1,2,3,4,\ldots\}.$$

N სიმრავლის ყოველ ეკვივალენტურ A სიმრავლეს თვლადი სიმრავლე ეწოდება.

ხანდახან ამბობენ აგრეთვე, რომ A სიმრავლეს "*a* სიმძლავრე აქვს". აშკარაა, რომ ყველა თვლადი სიმრავლეები ურთიერთს შორის ეკვივალენტური არიან.

აი თვლადი სიმრავლეების რამდენიმე მაგალითი:

$$A=\{1,4,9,16,\dots,n^2,\dots\},$$
$$B=\{1,8,27,64,\dots,n^3,\dots\},$$
$$C=\{2,4,6,8,\dots,2n,\dots\},$$
$$D=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}.$$

თეორემა 1. იმისათვის, რომ A სიმრავლე თვლადი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შეიძლებოდეს მისი „გადანომრვა", ე. ი. წარმოდგენა

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\dots a_n,\dots\} \tag{1}$$

მიმდევრობის სახით.

დამტკიცება. თუ A სიმრავლე (1) სახით არის წარმოდგენილი, მაშინ იმისათვის რომ A-სა და N სიმრავლეს შორის ურთიერთცალსახა თანადობა დავამყაროთ, საკმარისია A სიმრავლის ყოველ a_n ელემენტს ამავე ელემენტის n ნომერი შევუსაბამოთ, ასე რომ A თვლადია.

შებრუნებით, თუ A თვლადია, მაშინ A-სა და N-ს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა φ. საკმარისია a_n-ით A სიმრავლის ის ელემენტი აღვნიშნოთ, რომელიც φ თანადობაში n რიცხვს უპასუხებს, იმისათვის, რომ A სიმრავლე (1) სახით წარმოვადგინოთ.

თეორემა 2. ყოველი უსასრულო A სიმრავლიდან შესაძლებელია თვლადი D ქვესიმრავლის გამოყოფა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A უსასრულო სიმრავლეა. გამოვყოთ A-დან ნებისმიერი ელემენტი a_1. რადგან A უსასრულოა, ის არ ამოიწურება a_1 ელემენტის გამოყოფით, და ამის გამო ჩვენ შეგვიძლია დარჩენილი $A-\{a_1\}$ სიმრავლიდან a_2 ელემენტის გამოყოფა. იმავე მოსაზრებების ძალით $A-\{a_1,a_2\}$ ცარიელი არაა, და მისგან შეგვიძლია a_3 ელემენტის გამოყოფა. A სიმრავლის უსასრულობის გამო ეს პროცესი უსაზღვროდ შეგვიძლია გავაგრძელოთ, რის შედეგად მივიღებთ გამოყოფილ ელემენტების მიმდევრობას

$$a_1,a_2,a_2,\dots,a_n,\dots,$$

რომელიც საძიებელ D სიმრავლეს შეადგენს.

თეორემა 3. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ქვესიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A თვლადი სიმრავლეა, ხოლო B—მისი უსასრულო ქვესიმრავლე. დავალაგოთ A სიმრავლე მიმდევრობის სახით

$$a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$$

და გადავარჩიოთ ერთიმეორის მიყოლებით A-ს ელემენტები ნომრების მიხედვით. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ დრო და დრო შევხვდებით B სიმრავლის ელემენტებს, და B-ს ყოველი ელემენტი ადრე თუ გვიან შეგვხვდება. თუ B-ს ყოველ ელემენტს ჩვენ შევუსაბამებთ მასთან „შეხვედრის" ნომერს, ჩვენ გადავნომრავთ

B-ს, ამასთანავე, უკანასკნელის არასრული ხასიათის გამო, ჩვენ ამ გადანომრვაზე მოგვიხდება ყველა ნატურალური რიცხვების დახარჯვა.

შედეგი. თუ თვლად A სიმრავლეს სასრული M სიმრავლე ჩამოვაშორეთ, დარჩენილი $A-M$ სიმრავლე თვლადი იქნება.

თეორემა 4. სასრული სიმრავლისა და თვლადი სიმრავლის ჯამი, რომელთაც საერთო ელემენტები არა აქვთ, თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$
$$B=\{b_1,b_2,b_3,\dots\},$$

და $AB=0$. თუ $A+B=S$, მაშინ S შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით

$$S=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\ b_1,b_2,b_3,\dots\},$$

რის შემდეგაც ცხადი ხდება S-ის გადანომრვის შესაძლებლობა.

პირობა იმის შესახებ, რომ განსახილავ სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არა აქვთ, როგორც წინა ისე შემდეგ თეორემებში, შესაძლებელია ჩამოშორებული იყოს.

თეორემა 5. სასრული რაოდენობით აღებული წყვილწყვილად არაგადამკვეთი თვლადი სიმრავლეების ჯამი აგრეთვე თვლადია.

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ სამი შესაკრები სიმრავლის შემთხვევაში; კონტექსტიდან აშკარა იქნება მსჯელობის ზოგადი ხასიათი.

დავუშვათ, რომ A,B, C სამი თვლადი სიმრავლეა:

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\},$$
$$B=\{b_1,b_2,b_3,\dots\},$$
$$C=\{c_1,c_2,c_3,\dots\}.$$

მაშინ ჯამი $S=A+B+C$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი მიმდევრობის სახით

$$S=\{a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,\dots\}$$

და მისი თვლადობა აშკარაა.

თეორემა 6. წყვილწყვილად არაგადამკვეთ სასრული სიმრავლეთა თვლადი ერთობლიობის ჯამი თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A_k ($k=1,2,3,\dots$) წარმოადგენენ წყვილ-წყვილად არაგამკვეთ სასრულ სიმრავლეებს:

$$A_1=\{a_1^{(1)},a_2^{(1)},\dots,a^{(1)}_{n_1}\},$$
$$A_2=\{a_1^{(2)},a_2^{(2)},\dots,a_{n_2}^{(2)}\},$$
$$A^3=\{a_1^{(3)},a_2^{(3)},\dots,a_{n_3}^{(3)},$$

იმისათვის, რომ ამ სიმრავლეთა S ჯამი მიმდევრობის სახით წარმოვადგინოთ, საკმარისია ამოვიწეროთ ჯერ A_1-ის ყველა ელემენტი მიმდევრობით, შემდეგ A_2-ს ელემენტები და ა. შ.

თეორემა 7. წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ თვლადი სიმრავლეთა თვლადი ერთობლიობის ჯამი თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A_k $(k=1,2,3,\ldots)$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან და თვლადი არიან. ეს სიმრავლეები ასე დავწეროთ

$$A_1=\{a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)},\ldots\},$$
$$A_2=\{a_1^{(2)},a_2^{(2)},a_3^{(2)},\ldots\},$$
$$A_3=\{a_1^{(3)},a_2^{(3)},a_3^{(3)},\ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

თუ ჩვენ ამოვიწერთ $a_1^{(1)}$ ელემენტს, შემდეგ ისეთ ელემენტს ამოვიწერთ, რომელთაც ზედა და ქვედა ინდექსების ჯამი 3-ის ტოლი აქვთ, შემდეგ ისეთ ელემენტებს, რომელთათვისაც ეს ჯამი 4-ს უდრის და ა. შ., მაშინ S ჯამი აღმოჩნდება წარმოდგენილი

$$S=\{a_1^{(1)},a_1^{(2)},a_2^{(1)},a_1^{(3)},a_2^{(2)},a_3^{(1)},a^{(1)}_4,\ldots\},$$

მიმდევრობის სახით, საიდანაც გამომდინარეობს მისი თვლადობა.

თვლადი სიმრავლის სიმძლავრის აღნიშნული a სიმბოლოს გამოყენებით დამტკიცებული თეორემები შეგვიძლია შემდეგი მნემონიკური სქემით გამოვსახოთ:

$$a-n=a,\quad a+n=a,\quad a+a+\ldots+a=na=a,\quad n_1+n_2+n_3+\cdots=a$$
$$a+a+a+\ldots=aa=a.$$

თეორემა 8. ყველა რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. მოცემული მნიშვნელის მქონე $\frac{p}{q}$ წილადების სიმრავლე, ე. ი. სიმრავლე

$$\frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \frac{3}{q},\ldots,$$

აშკარაა, თვლადია. მაგრამ მნიშვნელს შეუძლია მიიღოს აგრეთვე თვლადი სიმრავლე ნატურალური მნიშვნელობებისა 1,2,3,... მაშასადამე, მე-7 თეორემის ძალით, $\frac{p}{q}$ წილადების სიმრავლე თვლადია; ამ სიმრავლიდან ყველა ისეთი წილადების გამოკლებით, რომლებიც იკვეცებიან, და მე-3 თეორემის გამოყენებით, დავრწმუნდებით, რომ ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვების სიმრავლე R_+, თვლადია. რადგან ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვების R_- სიმრავლე, ცხადია, ეკვივალენტურია R_+ სიმრავლისა, ამიტომ იგიც თვლადია, ხოლო მაშინ თვლადია R სიმრავლეც, ვინაიდან

$$R=R_-+\{0\}+R_+.$$

შედეგი. ნებისმიერი $[a,b]$ სეგმენტის რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

თეორემა 9. თუ უსასრულო M სიმრავლეს მივუმატებთ ახალ ელემენტების სასრულ ან თვლად A სიმრავლეს, ამით მისი სიმძლავრე არ შეიცვლება, ე. ი.

$$M \dot{+} A \sim M.$$

დამტკიცება. მე-2 თეორემის ძალით M-იდან გამოვყოთ თვლადი ქვესიმრავლე D და ვთქვათ, $M-D=P$, მაშინ

$$M=P+D,\ M+A=P+(D+A).$$

რადგან $P\sim P$, $D+A\sim D$ (თეორემები 4 და 5). ამიტომ $M+A\sim M$.

თეორემა 10. თუ უსასრულო S სიმრავლე არათვლადია, ხოლო A კი მისი სასრული ან თვლადი ნაწილია, მაშინ

$$S-A\sim S.$$

დამტკიცება. $M=S-A$ სიმრავლე არ შეიძლება სასრული იყოს, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, გამოსავალი S სიმრავლე სასრული ან თვლადი იქნებოდა. მაგრამ, მაშინ, მე-9 თეორემის ძალით გვექნება $M+A\sim M$, ეს კი ნიშნავს, რომ $S\sim S-A$.

შედეგი. ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თავისივე ეკვივალენტურ წესიერ ნაწილს.

მართლაც, უსასრულო სიმრავლიდან მისი ნებისმიერი სასრული ნაწილის გამოკლებით, მე-3 და მე-10 თეორემების საფუძველზე, ამ სიმრაელის სიმძლავრე არ შეიცვლება.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, სასრული სიმრავლეს არა აქვს ასეთი თვისება. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს მოვიყვანოთ უსასრულო სიმრავლის დადებითი ხასიათის განმარტება:

განმარტება 2. სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი შეიცავს თავისივე ეკვივალენტურ ნაწილს.

ეს განმარტება რ. დედეკინდს ეკუთვნის.

დასასრულს, დავამტკიცოთ შემდეგი, საკმარისად ზოგადი თეორემა:

თეორემა 11. თუ A სიმრავლის ელემენტები n ნიშნაკით განისაზღვრებიან, რომელთაგან ყოველი, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, მნიშვნელობათა თვლად სიმრავლეს გაირბენს

$$A=\{a_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\}\ (x_k=x_k^{(1)},x_k^{(2)},\ldots;k=1,2,3,\ldots,n),$$

მაშინ სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. თეორემა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცოთ.

თეორემა აშკარაა, თუ $n=1$, ე. ი. როცა მხოლოდ ერთი ნიშნაკი გვაქვს. დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია $n=m$-სათვის და ვაჩვენოთ, რომ იგი სამართლიანია $n=m+1$-სათვისაც.

ამგვარად, ვთქვათ,

$$A=\{a_{x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1}}\}.$$

აღვნიშნოთ A_i-თი A სიმრავლის იმ ელემენტების სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$x_{m+1}=x^{(i)}_{m+1},$$

სადაც $x^{(i)}_{m+1}$ წარმოადგენს $(m+1)$-ლი ნიშნაკის ერთერთ შესაძლებელ მნიშვნელობას, ე. ი. აღვნიშნოთ

$$A_i=\{a_{x_1,x_2,\ldots,x_m,x^{(i)}_{m+1}}\}.$$

დაშვების ძალით A_i სიმრავლე თვლადია, და რადგან

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,$$

ამიტომ თვლადია A სიმრავლეც. თეორემა დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ ამ თეორემიდან გამომდინარე რამდენიმე დებულება:

1) სიბრტყის იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომელთაც ორივე კოორდინატი რაციონალური აქვთ, თვლადია.

2) k ნატურალური რიცხვისაგან შედგენილი

$$(n_1,n_2,\ldots,n_k)$$

კომპლექსების სიმრავლე თვლადია.

შემდეგი ფაქტი უფრო მეტად საინტერესოა:

3) მთელი კოეფიციენტებიანი

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

პოლინომების სიმრავლე თვლადია.

მართლაც, ეს უშუალოდ გამომდინარეობს მე-11 თეორემიდან, თუ ჯერ ფიქსირებული n ხარისხის პოლინომებს განვიხილავთ, და შემდეგ დამტკიცების დასასრულებლად გამოვიყენებთ მე-7 თეორემას.

რადგან ყოველ პოლინომს ფესვები აქვს სასრული რაოდენობით, ამიტომ დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 12. (გ. კანტორი) ალგებრული რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

(გავიხსენოთ, რომ ალგებრული, ისეთ რიცხვს ეწოდება, რომელიც წარმოადგენს მთელი კოეფიციენტებიანი პოლინომის ფესვს).

§ 4. კონტინუუმის სიმძლავრე

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ყოველი უსასრულო სიმრავლე თვლადია. დავამტკიცოთ ეს შემდეგ მნიშვნელოვან მაგალითზე:

თეორემა 1. სეგმენტი $U=[0,1]$ არათვლადია.

(გავიხსენოთ, რომ სეგმენტად $[a,b]$ იწოდება ისეთი x რიცხვების სიმრავლე, რომლებისათვისაც $a \leqslant x \leqslant b$).

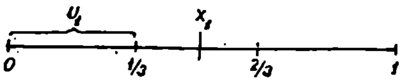
დამტკიცება. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, U სეგმენტი თვლადია. მაშინ მისი ყველა წერტილი შესაძლებელია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{*}$$

ვთქვათ, ეს შესრულებულია, ე. ი. ყოველი $x \in U$ წერტილი იმყოფება (*) მიმდევრობაში. გავყოთ U სამ თანატოლ ნაწილად $\frac{1}{3}$ და $\frac{2}{3}$ წერტილებით. ცხადია, რომ x_1 წერტილი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს სამივე სეგმენტს

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right], \tag{1}$$

და ერთი მათგანი მაინც არ შეიცავს მას (ნახ. 4). აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი U_1-ით (თუ წერტილი x_1 არ ეკუთვნის ორ სეგმენტს (1)-თაგან, მაშინ U_1 დავარქვათ ნებისმიერ მათგანს, მაგალითად, იმას, რომელიც უფრო მარცხნივ მდებარეობს).



ნახ. 4

ახლა U_1 სეგმენტი გავყოთ სამ თანასწორ ნაწილად, და მათ შორის აღვნიშნოთ U_2-თი ისეთი, რომელიც არ შეიცავს x_2 წერტილს (ხოლო თუ ასეთი სეგმენტი ორია, ერთ-ერთი მათგანი).

შემდეგ ვყოფთ სამ თანასწორ ნაწილად U_2 სეგმენტს, და U_3-ით აღვნიშნავთ იმას მათ შორის, რომელიც არ შეიცავს x_3-ს და ა. შ.

შედეგად მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებული სეგმენტების უსასრულო მიმდევრობას

$$U \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots,$$

რომლებსაც ის თვისება აქვთ, რომ

$$x_n \overline{\in} U_n.$$

იმის გამო, რომ U_n სეგმენტის სიგრძე არის $\frac{1}{3^n}$, ცხადია, რომ ეს სიგრძე n-ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნულისაკენ და, მაშასადამე, ზღვართა თეორიის ცნობილი თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომელიც ყველა U_n სეგმენტს ეკუთვნის

$$\xi \in U_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

ξ, წარმოადგენს რა U სეგმენტის წერტილს, უნდა შედიოდეს (*) მიმდევრობაში, მაგრამ ეს აშკარაა შეუძლებელია, რადგან როგორი n-იც არ უნდა ავიღოთ, გვაქვს

$$x_n \overline{\in} U_n, \quad \xi \in U_n,$$

საიდანაც

$$\xi \neq x_n,$$

ე. ი. ξ არ შეიძლება იყოს (*) მიმდევრობის რომელიმე წერტილი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

დამტკიცებული თეორემა შემდევი განმარტების მოხდენის საბაბს გვაძლევს:

განმარტება. თუ A სიმრავლე $U=[0,1]$ სეგმენტის ეკვივალენტურია,

$$A \sim U,$$

მაშინ ამბობენ, რომ A-ს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე ან, უფრო მოკლედ, სიმძლავრე c.

თეორემა 2. ყოველ $[a, b]$ სეგმენტს, ყოველ (a, b) ინტერვალს და ყოველ $(a, b]$ ან $[a, b)$ ნახევარსეგმენტს აქვს c სიმძლავრე.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$A=[a, b].$$

ფორმულა

$$y=a+(b-a)x$$

ამყარებს ურთიერთ ცალსახა თანადობას $A=\{y\}$ და $U=\{x\}$ სიმრავლეებს შორის, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ A-ს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე. რადგან უსასრულო სიმრავლიდან ერთი ან ორი ელემენტის გამოკლებით მივიღებთ გამოსავალი სიმრავლის ეკვივალენტურ სიმრავლეებს, ამიტომ მონაკვეთები

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b)$$

იგივე სიმძლავრისა არიან, როგორც $[a, b]$, ე. ი. c სიმძლავრისა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. სასრული რაოდენობით აღებულ წყვილწყვილად არაგადამკვეთ c სიმძლავრის სიმრავლეთა ჯამი c სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$S=\sum_{\kappa=1}^{n} E_k \qquad (E_k E_{k'}=0, \quad k \neq k'),$$

სადაც ყოველ E_k სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს. ავიღოთ $[0, 1)$ ნახევრადსეგმენტი და

$$c_0=0<c_1<c_2<\ldots<c_{n-1}<c_n=1$$

წერტილებით, დავანაწილოთ იგი n ნახევრადსეგმენტად:

$$[c_{k-1}, c_k) \qquad (k=1, 2, \ldots n).$$

ყოველ ამ ნახევრადსეგმენტს აქვს c სიმძლავრე, ასე რომ ჩვენ შეგვიძლია E_k სიმრავლე და $[c_{k-1}, c_k)$ ნახევრადსეგმენტი დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ურთიერთცალსახა თანადობით. ადვილი მისახვედრია, რომ ამით მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობ S — ჯამსა და

$$[0, 1)=\sum_{\kappa=1}^{n}[c_{k-1}, c_k)$$

ნახევრადსეგმენტს შორის. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. წყვილწყვილად არა გადამკვეთ c სიმძლავრის სიმრავლეთა თვლადი ერთობლიობის ჯამი c სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} E_k \qquad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

სადაც ყოველ E_k სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

ავიღოთ [0,1) ნახევრადსეგმენტზე მონოტონურად ზრდადი მიმდევრობა

$$c_0=0<c_1<c_2<\dots,$$

რომლისათვისაც

$$\lim_{k\to\infty} c_k=1.$$

E_k და $[c_{k-1}, c_k)$ სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარებით ყოველი k-სათვის, ჩვენ დავამყარებთ ურთიერთ ცალსახა თანადობას S-სა და [0,1)-ს შორის.

შედეგი 1. ყველა ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

$$Z=\sum_{k=1}^{\infty}\{[k-1,\ k)+[-k,\ -k+1)\}.$$

შედეგი 2. ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

შედეგი 3. არსებობს ტრანსცენდენტული[1] რიცხვები.

თეორემა 5. ნატურალურ რიცხვთა ყველა მიმდევრობათა Q სიმრავლეს

$$Q=\{(n_1,\ n_2,\ n_3,\dots)\}$$

c სიმძლავრე აქვს.

დამტკიცება. ჩვენ, Q-სა და (0,1) ინტერვალის ყველა ირაციონალურ წერტილთა სიმრავლეს (უკანასკნელ სიმრავლეს, ცხადია კონტინუუმის სიმძლავრე აქვს) შორის ურთიერთცალსახა თანადობას დავამყარებთ, თუ ერთმანეთის შესაბამისად ჩავთვლით

$$(n_1,\ n_2,\ n_3,\dots)\in Q$$

მიმდევრობასა და ისეთ x ირაციონალურ რიცხვს, რომლის დაშლასაც ჯაჭვწილად შემდეგი სახე აქვს:

$$x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\dots}}}$$

თანადობის დამყარების შესაძლებლობა ამტკიცებს თეორემას.

[1] ე. ი. არა ალგებრული. ტრანსცენდენტული რიცხვების არსებობის მტკიცების ეს მეთოდი ეკუთვნის გ. კანტორს.

მოყვანილი დამტკიცება გულისხმობს, რომ მკითხველისათვის ცნობილია ჯაჭვწილადების თეორია.

შესაძლებელია მოვიყვანოთ სხვა დამტკიცება, რომელიც ორობითიწილადების თეორიაზეა დამყარებული. ამ მიზნით გავიხსენოთ აღნიშნული თეორიის ზოგიერთი ფაქტები. ისინი სარგებლობას მოგვიტანენ სხვა მიზნისათვისაც. აი ორობითიწილადების ჩვენთვის საჭირო თვისებები:

1) ორობითიწილადი ეწოდება შემდეგი მწკრივის ჯამს

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k} \qquad (a_k = 0,1).$$

ეს ჯამი აღინიშნება

$$0,\ a_1a_2a_3\dots \qquad (1)$$

სიმბოლოთი.

2) ყოველი $x \in [0,1]$ რიცხვი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ

$$x = 0,\ a_1a_2a_3\dots$$

სახით. ეს წარმოდგენა ერთადერთია, როდესაც x არ არის $\frac{m}{2^n}$ სახის რიცხვი $m = 1,\ 3,\dots 2^n - 1$). რიცხვები 0 და 1 იშლებიან (ცალსახად) წილადებად

$$0 = 0{,}000\dots,\quad 1 = 0{,}111$$

თუ კი $x = \frac{m}{2^n}$ $(m = 1,\ 3,\dots 2^n - 1)$, მაშინ x გვაძლევს ორ დაშლას. ამ დაშლებში $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ნიშნები ერთნაირია, ხოლო a_n ერთერთ დაშლაში უდრის 1-ს, მეორეში კი 0-ს. ყველა დანარჩენი ნიშნები პირველ დაშლაში ნულებია („0 პერიოდში“), ხოლო მეორეში—ერთიანები („1 პერიოდში“), მაგალითად,

$$\frac{3}{8} = \begin{cases} 0{,}011000\dots \\ 0{,}010111 \end{cases}$$

3) ყოველი ორობითიწილადი (1) გვაძლევს [0,1] სეგმენტის რაიმე x რიცხვს.

თუ ეს წილადი შეიცავს 0 ან 1-ს პერიოდში, მაშინ x არის $\frac{m}{2^n}$ $(m = 1,\ 3,\dots 2^n - 1)$ სახის რიცხვი (გამონაკლის შემთხვევას შეადგენენ წილადები 0,000... და 0,111...), და მაშინ მოცემულ დაშლასთან ერთად არსებობს x რიცხვის მეორე ორობითიწილადად დაშლაც. თუ რომ წილადი (1) არ შეიცავს 0-ს ან 1-ს პერიოდში, მაშინ $x \neq \frac{m}{2^n}$ და x რიცხვს სხვა ორობითიწილადად დაშლა არა აქვს.

ამის შემდეგ დაუბრუნდეთ მე-5 თეორემას. შევთანხმდეთ, რომ არ ვიხმაროთ წილადები, რომლებიც შეიცავენ ერთიანს პერიოდში. მაშინ [0,1) ნახევარსეგმენტის ყოველი რიცხვი ერთად ერთნაირად წარმოიდგინება შემდეგი ფორმით

$$0,a_1a_2a_3\dots$$

ამავე დროს, რა N რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, მოიძებნებიან ისეთი a_k, რომ

$$a_k = 0, \quad k > N.$$

შებრუნებით, ასეთი თვისების ყოველნაირ (1) წილადს უპასუხებს წერტილი [0,1)-დან. მაგრამ (1) წილადის მოცემა შეიძლება იმ k რიცხვების მითითებით, რომელთათვისაც

$$a_k = 0.$$

ეს k რიცხვები ჰქმნიან ნატურალურ რიცხვების ზრდად მიმდევრობას

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots \tag{2}$$

და ყოველ ასეთ მიმდევრობას უპასუხებს (1) წილადი. მაშასადამე, (2) სახის მიმდევრობათა H სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს. მაგრამ H და Q სიმრავლეს შორის ადვილია ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარება. ამისათვის საკმარისია (2) მიმდევრობას შევუსაბამოთ ის მიმდევრობა

$$(n_1, n_2, n_3, \dots)$$

Q სიმრავლიდან, რომლისათვისაც

$$n_1 = k_1, \quad n_2 = k_2 - k_1, \quad n_3 = k_3 - k_2, \dots$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.. თუ A სიმრავლის ელემენტები n ნიშნაკებით განისაზღვრებიან, რომელთაგან ყოველი, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, c მნიშვნელობებს იღებენ[1],

$$A = \{ a_{x_1, x_2, \dots x_n} \},$$

მაშინ A სიმრავლე c სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ სამი ნიშნაკის შემთხვევა, რადგანაც მსჯელობას ზოგადი ხასიათი აქვს.

ვთქვათ,

$$A = \{ a_{x, y, z} \}.$$

ავღნიშნოთ X-ით (სათანადოდ, Y და Z-ით) x ნიშნაკის მნიშვნელობათა სიმრავლე (სათანადოდ, y და z ნიშნაკთა მნიშვნელობების სიმრავლე), ამასთან, ყოველი ნიშნაკი იცვლება სხვებისაგან დამოუკიდებლად, და ყოველ X, Y, Z სიმრავლეს აქვს c სიმძლავრე.

დავამყაროთ თითოეულ X,Y და Z სიმრავლესა და ნატურალურ რიცხვების ყველა მიმდევრობათა Q სიმრავლეს შორის ურთიერთცალსახა თანადობა. ეს საშუალებას მოგვცემს დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა A და Q სიმრავლეებს შორის.

[1] როგორც აქ, ისე ქვემოთ, ჩვენ ვხმარობთ გამოთქმებს „c მნიშვნელობები", „სიმრავლეში არის c ელემენტი" და ასე ამგვარად, იმის ნაცვლად, რომ ვთქვათ „მნიშვნელობათა სიმრავლეს აქვს c სიმძლავრე" და ა. შ.; ვიმედოვნებთ, რომ ეს მკითხველს არ დააბრკოლებს.

სახელდობრ, ვთქვათ, ξ წარმოადგენს A სიმრავლის რაიმე ელემენტს. მაშინ

$$\xi = a_{x_0, y_0, z_0}$$

სადაც

$$x_0 \in X, \quad y_0 \in Y, \quad z_0 \in Z.$$

X, Y, Z-სა და Q-ს შორის არსებულ თანადობებში x_0, y_0, z_0 ელემენტებს Q სიმრავლის რაღაც ელემენტები უპასუხებენ. ვთქვათ, მაგალითად,

x_0 ელემენტს უპასუხებს $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ მიმდევრობა,
y_0 " " $(p_1, p_2, p_3, \dots)$ "
z_0 " " $(q_1, q_2, q_3, \dots)$

შევუსაბამოთ ξ ელემენტს

$$(n_1, p_1, q_1, n_2, p_2, q_2, n_3, \dots)$$

მიმდევრობა, რომელიც, ცხადია, ეკუთვნის Q-ს. ადვილი მისახვედრია, რომ ამით ჩვენ მივიღეთ ურთიერთცალსახა თანადობა A-სა და Q-ს შორის.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს რიგი მნიშვნელოვანი შედეგებისა.

შედეგი 1. სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

შედეგი 2. სამგანზომილებიან სივრცის ყველა წერტილთა სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, სივრცის წერტილთა სიმრავლის სიმძლავრე არ არის დამოკიდებული მის განზომილებაზე.

შედეგი 3. c რაოდენობით აღებულ წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ c სიმძლავრის მქონე სიმრავლეთა ჯამს c სიმძლავრე აქვს.

მართლაც, შესაკრებ სიმრავლეთა და xy სიბრტყის, ox ღერძის პარალელურ ყველა წრფეების სიმრავლეს შორის შესაძლებელია დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა. თუ ამის შემდეგ დავამყარებთ ურთიერთცალსახა თანადობას ყოველ შესაკრებ სიმრავლესა და მის შესაბამ წრფეს შორის, ცხადია, რომ მივიღებთ ურთიერთცალსახა თანადობას ჯამსა და xy სიბრტყეს შორის.

სქემატურად 3, 4 თეორემები და უკანასკნელი შედეგი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$c + c + \dots + c = cn = c, \quad c + c + c + \dots = ca = c, \quad cc = c.$$

თეორემა 7. თუ A სიმრავლის ელემენტები განისაზღვრება ნიშნაკების თვლადი სიმრავლით

$$A = \{ a_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots} \},$$

რომელთაგან ყოველი, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, c მნიშვნელობებს ღებულობს, მაშინ A სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

დამტკიცება. ვთქვათ, x_k ნიშნაკის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის X_k. დავაკავშიროთ ეს სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა ყველა მიმდევრობების Q სიმრავლესთან ურთიერთცალსახა თანადობით. ეს თანადობა აღვნიშნოთ φ_k-თი ($k = 1, 2, 3, \dots$).

ამის შემდეგ, ამოვარჩიოთ ნებისმიერი $\xi \in A$ ელემენტი. მაშინ

$$\xi = a_{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots},$$

სადაც

$$x_k^{(0)} \in X_k \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

ვთქვათ, φ_k თანადობაში x_k ნიშნაკის $x_k^{(0)}$ მნიშვნელობას შეესაბამება

$$(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \dots) \in Q$$

მიმდევრობა.

მაშინ $\xi \in A$ ელემენტს შეესაბამება მთელრიცხვა უსასრულო მატრიცა

$$\left|\begin{array}{l} n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_3^{(1)}, \dots \\ n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, n_3^{(2)}, \dots \\ n_1^{(3)}, n_2^{(3)}, n_3^{(3)}, \dots \\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \qquad (*)$$

ადვილი აღმოსაჩენია, რომ A სიმრავლესა და (*) მატრიცების L სიმრავლეს შორის მიღებული თანადობა ურთიერთცალსახაა. ამრიგად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ L-ს c სიმძლავრე აქვს. მაგრამ ეს თითქმის ცხადია, რადგანაც (*) მატრიცს შევუსაბამებთ

$$(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_1^{(2)}, n_3^{(1)}, n_2^{(2)}, n_1^{(3)}, n_4^{(1)}, \dots)$$

მიმდევრობას (რომელიც ისევეა აგებული, როგორც ჩვენ § 3-ის მე-7 თეორემის მტკიცებაში მოვიქეცით), მივიღებთ ურთიერთცალსახა თანადობას L-სა და Q-ს შორის.

თეორემა 8. ყველა

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)$$

სახის მიმდევრობათა T სიმრავლეს, სადაც a_k ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, 0 და 1-ის მნიშვნელობებს ღებულობენ, c სიმძლავრე აქვს.

დამტკიცება. ვთქვათ, S წარმოადგენს T სიმრავლის იმ მიმდევრობათა სიმრავლეს, რომლებშიაც, რაიმე ადგილებიდან დაწყებული, ყველა a_k უდრის 1-ს. S-ში შემავალ ყოველ $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ მიმდევრობას შეიძლება შევუსაბამოთ რიცხვი, რომლის დაშლას ორობითიწილადად წარმოადგენს $0{,}a_1a_2a_3\dots$; ეს რიცხვი იქნება ან 1 ან $\frac{m}{2^n}$ სახის რიცხვი ($m = 1, 3, \dots, 2^n - 1$), ამავე დროს

თანადობა S-სა და აღნიშნული სახის რიცხვთა სიმრავლეს შორის, ცხადია, ურთიერთცალსახა იქნება, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ S თვლადი სიმრავლეა.

მეორეს მხრივ, თუ $T—S$ სიმრავლის $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ მიმდევრობას შევუსაბამებთ რიცხვს, რომლის დაშლას ორობითიწილადად $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ სახე აქვს, ჩვენ მივიღებთ ურთიერთცალსახა თანადობას $T—S$ სიმრავლესა და $[0,1)$ ნახევრადსეგმენტს შორის, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $T—S$, და, მაშასადამე, T სიმრავლეს c სიმძლავრე აქვს.

შედეგი. თუ A სიმრავლის ელემენტები განისაზღვრება თვლადი რაოდენობით აღებულ ნიშნაკებით, რომელთაგან ყოველი, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, ორ მნიშვნელობას ღებულობს, მაშინ A-ს c სიმძლავრე აქვს.

მართლაც, თუ $A=\{a_{x_1}, {}_{x_2, x_3}, \dots\}$ და

$$x_k = \begin{cases} l_k \\ m_k, \end{cases}$$

მაშინ იმისათვის, რომ A და T სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობა დავამყაროთ, საკმარისია, A სიმრავლის ყოველ ელემენტს $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ მიმდევრობა შევუსაბამოთ, სადაც ყოველი a_k 0-ის ან 1-ის ტოლია, იმისდამიხედვით $x_k = l_k$ თუ $x_k = m_k$.

§ 5. სიმძლავრეთა შედარება

ჩვენ ზემოთ ასეთი გამოთქმების შინაარსი განვსაზღვრეთ: „ორ სიმრავლეს ერთნაირი სიმძლავრე აქვს", „სიმრავლეს აქვს c სიმძლავრე". ამგვარად, თუ ჩვენ რაიმე მსგავს გამოთქმებში შევხვდებით სიტყვას „სიმძლავრე", ვიცით რას აღნიშნავს იგი, მაგრამ თავისთავად ეს ცნება ჩვენ განმარტებული არა გვაქვს. მაშ, რა არის სიმრავლის სიმძლავრე?

გ. კანტორი ცდილობდა სიმრავლის სიმძლავრის განმარტებას შემდეგი, საკმარისად ბუნდოვანი გამოთქმების, საშუალებით:

„მოცემული A სიმრავლის სიმძლავრე ეწოდება იმ ზოგად იდეას, რომელიც დაგვრჩება ჩვენ, თუ ამ სიმრავლის წარმოდგენის დროს, მოვახდენთ განყენებას როგორც მისი ელემენტების ყველა თვისებებისაგან, ისე მათი რიგიდან". ამასთან დაკავშირებით, გ. კანტორი A სიმრავლის სიმძლავრეს აღნიშნავდა

$$\overline{\overline{A}}$$

სიმბოლოთი (ორი ხაზი—„ორმაგი" განყენება).

ამჟამად სიმძლავრის ცნების კანტორისებური განმარტება არ ითვლება დამაკმაყოფილებლად (თუმცა აღნიშვნა $\overline{\overline{A}}$ მეტად მოხდენილი აღმოჩნდა), ზემოთმოყვანილი განმარტების ნაცვლად, მიღებულია შემდეგი ფორმალური განმარტება.

განმარტება 1. ვთქვათ, ყველა სიმრავლეები განაწილებულია კლასებად ისე, რომ ორი სიმრავლე ერთ კლასში მოთავსდე-

ზა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ეკვივალენტური არიან. შევუსაბამოთ სიმრავლეთა ყოველ კლასს რაიმე სიმბოლო და ვუწოდოთ მას ამ კლასის ნებისმიერი სიმრავლის სიმძლავრე. ამასთანავე, თუ რაიმე A სიმრავლის სიმძლავრე არის α, სწერენ

$$\overline{\overline{A}} = \alpha.$$

ამდაგვარ განმარტებისას ცხადია, რომ ეკვივალენტურ სიმრავლეებს მართლაც ტოლი სიმძლავრეები აქვთ. თუ იმ კლასს, რომელიც შეიცავს ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეს, შევუსაბამებთ a სიმბოლოს, შეიძლება ითქვას, რომ თვლად სიმრავლეს აქვს a სიმძლავრე.

შემდეგ, c არის ის სიმბოლო, რომელიც შეესაბამება $U=[0,1]$ სიმრავლის შემცველ კლასს და ამიტომ U სიმრავლის ყველა ეკვივალენტურ სიმრავლეების შესახებ ჩვენ ვამბობდით, რომ მათ c სიმძლავრე აქვთ.

მოვიყვანოთ 1 განმარტების გამოყენების კიდევ ერთი მაგალითი. ვთქვათ,

$$A=\{a,b,c\}$$

სიმრავლის შემცველ კლასს შევუსაბამეთ სიმბოლო „3". მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ A სიმრავლის ყოველ ეკვივალენტურ სიმრავლეს (ე. ი. უბრალოდ რომ ვთქვათ, ნებსით სიმრავლეს სამ ელემენტისაგან) აქვს სიმძლავრე 3. ჩვენ ვხედავთ, რომ ცნება ელემენტების რაოდენობის შესახებ, უფრო ზოგადი ცნების—სიმძლავრის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს.

დაბოლოს, 0 ცარიელი სიმრავლის სიმძლავრეა, 1—ნებისმიერი „ერთელემენტიანი" სიმრავლისა.

გვაქვს რა, ამგვარად, სიმძლავრის ცნების განმარტება, ბუნებრივია დაისვას საკითხი სიმძლავრეთა შედარების შესახებ.

განმარტება 2. ვთქვათ, A და B სიმრავლეებია, რომელთაც სათანადოდ α და β სიმძლავრეები აქვთ:

$$\overline{\overline{A}} = \alpha, \overline{\overline{B}} = \beta.$$

თუ 1) A და B სიმრავლენი ეკვივალენტური არაა, მაგრამ 2) B სიმრავლეში არსებობს A სიმრავლის ეკვივალენტური B^* ნაწილი, მაშინ ამბობენ, რომ B სიმრავლეს მეტი სიმძლავრე აქვს, ხოლო A სიმრავლეს — ნაკლები სიმძლავრე, და სწერენ

$$\alpha<\beta, \ \beta>\alpha.$$

მაგალითად, თუ

$$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{32}\}, \ \overline{\overline{A}}=32,$$

$$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_{49}\}, \ \overline{\overline{B}}=49,$$

მაშინ A არ არის $\sim B$, მაგრამ $A\sim B^*$, სადაც $B^*=\{b_1,b_2,\ldots,b_{32}\}$ და ამიტომ

$$32<49.$$

სავსებით ასევე, ყოველი ნატურალური რიცხვი n ნაკლებია, ვიდრე ყოველი სიმძლავრე a და c.

დაბოლოს, თუ

$$N = \{1.2,3,\ldots\}, \; \overline{\overline{N}} = a,$$

$$U = [0,1], \; \overline{\overline{U}} = c,$$

მაშინ N არ არის $\sim U$ (იხ. თეორ. 1. § 4), მაგრამ $N \sim U^*$, სადაც

$$U^* = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \subset U.$$

ამიტომ

$$a < c.$$

სავსებით ბუნებრივია დავსვათ საკითხი, არსებობს თუ არა სიმძლავრე, მოთავსებული a და c-ს შორის, ე. ი. ისეთი μ სიმძლავრე, რომ

$$a < \mu < c.$$

ეს საკითხი ჯერ გადაწყვეტილი არ არის. თავის დროზე გ. კანტორმა გამოსთქვა აზრი, რომ ასეთი სიმძლავრეები არ არსებობს. ეს აზრი ამჟამად „კონტინუუმის ჰიპოტეზის" სახელწოდებითაა ცნობილი. ამ საკითხის გარშემო დიდძალი ლიტერატურა არსებობს.

სამაგიეროდ, ადვილი ასაგებია c-ზე მეტი სიმძლავრის სიმრავლეები.

თეორემა 1. [0,1] სეგმენტზე მოცემული ყოველნაირი ნამდვილი ფუნქციების F სიმრავლეს c-ზე მეტი სიმძლავრე აქვს.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ უპირველესად ყოვლისა, რომ F არ არის $\sim U$, სადაც $U = [0,1]$.

დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, $F \sim U$ და φ არის რაიმე ურთიერთცალსახა თანადობა F-სა და U-ს შორის. შევთანხმდეთ, რომ აღვნიშნოთ $f_t(x)$-ით ის ფუნქცია F სიმრავლიდან, რომელიც φ თანადობაში $t \in [0,1]$ რიცხვს შეესაბამება. დავუშვათ

$$F(t,x) = f_t(x).$$

ეს არის სავსებით გარკვეული ორი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც მოცემული $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ არეში.

აღვნიშნოთ

$$\psi(x) = F(x,x) + 1.$$

ეს ფუნქცია მოცემულია $0 \leqslant x \leqslant 1$-სათვის, ე. ი. $\psi(x) \in F$. მაგრამ, მაშინ φ თანადობაში $\psi(x)$ ფუნქციას შეესაბამება რაღაც $a \in U$ რიცხვი, ე. ი. $\psi(x) = f_a(x)$, ანუ

$$\psi(x) = F(a,x).$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, [0,1]-დან ყველა x-სათვის გვექნება

$$F(x,x) + 1 = F(a,x).$$

ეს კი შეუძლებელია, მაგალითად, $x = a$-სათვის.

ამგვარად, მართლაც F არ არის $\sim U$. მაგრამ თუ ჩვენ განვიხილავთ

$$F^* = \{\sin x \dot{+} c\} \ (0 \leqslant c \leqslant 1)$$

ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელიც ნაწილია F-სა, დავინახავთ რომ $F^* \sim U$.

თეორემა დამტკიცებულია.

განმარტება 3. [0,1] სეგმენტზე მოცემული ყველა ფუნქციათა F სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება f სიმბოლოთი.

ამ სიმბოლოს დახმარებით 1 თეორემა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

$$c < f.$$

არსებობენ თუ არა f-ზე მეტი სიმძლავრეები? თურმე ასეთი სიმძლავრეები არსებობენ. კიდევ მეტიც, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი სიმძლავრის, ყოველი სიმრავლისათვის შესაძლებელია უფრო მეტი სიმძლავრის სიმრავლის აგება.

თეორემა 2. ვთქვათ, M რაიმე სიმრავლეა. თუ T არის M სიმრავლის ყველა ნაწილების სიმრავლე, მაშინ

$$\overline{\overline{T}} > \overline{\overline{M}}.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ T სიმრავლის ელემენტებს წარმოადგენენ M-ის ყველა ნაწილი, კერძოდ თვითონ M, ცარიელი 0 და M-ის ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლეები.

ვაჩვენოთ, პირველად ყოვლისა, რომ T არ არის $\sim M$.

დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ, $T \sim M$, და φ არის რაიმე ურთიერთცალსახა თანადობა ამ სიმრავლეებს შორის. ყოველ $m \in M$ ელემენტს φ თანადობის ძალით უპასუხებს T-ს გარკვეული ელემენტი, რომელსაც ჩვენ $\varphi(m)$-ით აღვნიშნავთ. ამავე დროს T-ს ყოველი ელემენტი ერთი და მხოლოდ ერთი $m \in M$ ელემენტის $\varphi(m)$-ს წარმოადგენს.

$m \in M$ ელემენტს „კარგი" დავარქვათ, თუ

$$m \in \varphi(m),$$

და დავარქვათ „ცუდი"—წინააღმდეგ შემთხვევაში. ელემენტი, რომელიც φ თანადობაში თვით M სიმრავლეს უპასუხებს, „კარგი" იქნება, ხოლო ელემენტი, რომელიც ცარიელ სიმრავლეს შეესაბამება, „ცუდი" იქნება. ვთქვათ, S წარმოადგენს M-ის ყველა „ცუდი" (და მხოლოდ „ცუდი") ელემენტების სიმრავლეს. რადგან $S \in T$, ამიტომ φ თანადობაში S-ს რაღაც $m_0 \in M$ ელემენტი შეესაბამება

$$S = \varphi(m_0).$$

როგორია ეს m_0 ელემენტი—„კარგია" თუ „ცუდი"? დავუშვათ, რომ m_0 „კარგი" ელემენტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$m_0 \in \varphi(m_0) = S,$$

და რადგანაც S მხოლოდ „ცუდი" ელემენტებისაგან შედგება, ამიტომ m_0 „ცუდია", რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ამგვარად, m_0 „ცუდი“ ელემენტია. მაგრამ მაშინ

$$m_0 \overline{\in} \varphi(m_0) = S;$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ m_0 „კარგი“ ელემენტია. ამგვარად, m_0 ელემენტი არც „კარგია“ და არც „ცუდი“, და რადგან ყოველი ელემენტი ან „კარგია“ ან „ცუდი“, გამოდის აბსურდული სიტუაცია, რომელიც ააშკარავებს, რომ T არ არის $\sim M$.

მაგრამ, თუ T^* არის M სიმრავლის ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლეების სიმრავლე, მაშინ ცხადია $T^* \sim M$, და რადგანაც $T^* \subset T$, თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ვთქვათ, M წარმოადგენს n ელენტისაგან შემდგარ სასრული სიმრავლეს. მაშინ T სიმრავლე 2^n ელემენტს შეიცავს. მართლაც, T შეიცავს ერთცარიელ სიმრავლეს; c_n^1 ერთელემენტიან სიმრავლეს, c_n^2 ორელემენტიან სიმრავლეს და ა. შ. სულ T-ში შევა

$$1 + c_n^1 + c_n^2 + \ldots + c_n^n = 2^n$$

ელემენტი. აღვნიშნავთ, რომ ეს შედეგი სწორია იმ შემთხვევებისათვისაც, როდესაც M ცარიელი ($n = 0$) სიმრავლეა, ან ერთელემენტიანი სიმრავლე ($n=1$), რადგანაც პირველ შემთხვევაში T შედგება ერთი ელემენტისაგან — M-საგან, ხოლო მეორე შემთხვევაში M-სა და ცარიელი სიმრავლისაგან.

ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივია შემდეგი განმარტების შემოღება.

განმარტება 4. თუ M სიმრავლეს μ სიმძლავრე აქვს, ხოლო მისი ყველა ნაწილების T სიმრავლის სიმძლავრე არის τ, მაშინ ამბობენ, რომ

$$\tau = 2^\mu.$$

თეორემა 2 ნიშნავს, რომ

$$2^\mu > \mu.$$

თეორემა 3. სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$c = 2^a.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, T ნატურალური რიცხვების N სიმრავლის ყველა ნაწილების სიმრავლეა, ხოლო L—ყველა შემდეგი სახის მიმდევრობების სიმრავლე

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

მაშინ (თეორემა 8, § 4)

$$\overline{\overline{T}} = 2^a, \quad \overline{\overline{L}} = c.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $N^* \in T$ ელემენტი. N^* წარმოადგენს ნატურალური რიცხვების რაღაც სიმრავლეს. შევუსაბამოთ N^*-ს $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ მიმდევრობა შემდეგი წესის მიხედვით. თუ $k \in N^*$, მაშინ $a_k = 1$, ხოლო თუ $k \overline{\in} N^*$, მაშინ $a_k = 0$. ცხადია, რომ ერთ პირობებში მივიღებთ ურთიერთცალსახა თანადობას T-სა და L-ს შორის, რაც ამტკიცებს თეორემას.

მე-2 და მე-3 თეორემებიდან კვლავ გამომდინარეობს, რომ

$$c>a.$$

შემდეგ ორ თეორემას დიდი მნიშვნელობა აქვს.

თეორემა 4. ვ თ ქ ვ ა თ, $A\supset A_1\supset A_2$. თ უ $A_2\sim A$, მ ა შ ი ნ

$$A_1\sim A.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, φ წარმოადგენს რაიმე ურთიერთცალსახა თანადობას A-სა და A_2-ს შორის. A სიმრავლის ყოველ ელემენტს ამ თანადობაში უპასუხებს A_2-ის რაღაც ელემენტი.

კერძოდ, A_2 სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც A_1 სიმრავლეს ელემენტებს შეესაბამებიან, ჰქმნიან გარკვეულ $A_3\subset A_2$ სიმრავლეს.

ამგვარად, A_1 ურთიერთცალსახა თანადობაში იმყოფება A_3-სთან. მაგრამ $A_2\subset A_1$, მაშასადამე, A_3-ის ის ელემენტები, რომლებიც ამ თანადობაში A_2-ს უპასუხებენ, ჰქმნიან გარკვეულ $A_4\subset A_3$ ქვესიმრავლეს.

ახლა, რადგანაც $A_3\subset A_2$, და A_2 და A_4 კი ურთიერთცალსახა თანადობით არიან დაკავშირებული, შესაძლებელია $A_5\subset A_4$ სიმრავლის შექმნა, რომელიც შედგება A_4-ის იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც A_3-ს უპასუხებენ.

ამ პროცესის გაგრძელებით, ჩვენ მივიღებთ სიმრავლეთა

$$A\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset A_4\supset A_5\supset\dots$$

მიმდევრობას, რომელიც ისეთია, რომ

$$\begin{gathered} A\sim A_2, \\ A_1\sim A_3, \\ A_2\sim A_4, \\ A_3\sim A_5, \end{gathered}$$

ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\left.\begin{aligned} A-A_1&\sim A_2-A_3, \\ A_1-A_2&\sim A_3-A_4, \\ A_2-A_3&\sim A_4-A_5, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

რომლებიც პირდაპირ გამომდინარეობს A_n სიმრავლეთა განმარტებებიდან[1]. დავუშვათ

$$D=AA_1A_2A_3\dots$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$A=\underline{(A-A_1)}+(A_1-A_2)+\underline{\underline{(A_2-A_3)}}+(A_3-A_4)+\underline{\underline{\underline{(A_4-A_5)}}}+\dots+D$$

$$\underline{A_1}=(A_1-A_2)+\underline{(A_2-A_3)}+(A_3-A_4)+\underline{\underline{(A_4-A_5)}}+\dots+D,$$

ამასთან, თითოეული სტრიქონის ცალკეული შესაკრებები არ იკვეთებიან.

(*)-ის ძალით, ერთნაირად ხაზგასმული შესაკრებები ორივე ჯამში ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მაგრამ ამ ჯამების სხვა შესაკრებები წყვილ-წყილად იგიური არიან, საიდანაც გამომდინარეობს A და A_1-ის ეკვივალენტობა.

თეორემა 5. (ე. შრედერი — ფ. ბერნშტეინი). *ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. თუ თითოეული მათგანი მეორის რაიმე ნაწილის ეკვივალენტურია, მაშინ ისინი ერთმანეთის ეკვივალენტური არიან.*

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A\sim B^*,\ \ B^*\subset B,$$

$$B\sim A^*,\ \ A^*\subset A.$$

დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა B-სა და A^* სიმრავლეს შორის. ამ დროს, A^*-ის ის ელემენტები, რომლებიც B^* სიმრავლის ელემენტების შესაბამი აღმოჩნდებიან, ჰქმნიან რაღაც A^{**} სიმრავლეს. ცხადია, რომ $A\supset A^*\supset A^{**}$ და $A\sim A^{**}$ (რადგანაც $A\sim B^*$, $B^*\sim A^{**}$). აქედან, მე-4 თეორემის საფუძველზე, $A\sim A^*$, და რადგანაც $A^*\sim B$, ამიტომ $A\sim B$.

მე-4 და მე-5 თეორემებს აქვთ მთელი რიგი მნიშვნელოვანი შედეგებისა.

შედეგი 1. *თუ α და β ორი სიმძლავრეა, მაშინ დამოკიდებულებანი*

$$\alpha=\beta,\ \alpha<\beta,\ \alpha>\beta$$

არათავსებადია.

მართლაც, ის ფაქტი, რომ დამოკიდებულება $\alpha=\beta$ გამორიცხავს დანარჩენ ორს, სავსებით აშკარაა.

დავუშვათ ახლა, რომ ერთდროულად განხორციელდა ორივე $\alpha<\beta$ და $\alpha>\beta$ დამოკიდებულება. ვთქვათ, რომ A და B ორი სიმრავლეა α და β სიმძლავრეებით:

$$\overline{\overline{A}}=\alpha,\ \ \overline{\overline{B}}=\beta.$$

[1] მკითხველის ყურადღებას მივაქცევთ იმ გარემოებაზე, რომ $A^*\subset A$, $B^*\subset B$, $A^*\sim B$, $A\sim B$ დამოკიდებულებებიდან არ გამომდინარეობს, რომ $A-A^*\sim B-B^*$.

რადგან $\alpha<\beta$, ამიტომ

1) A და B არ არიან ეკვივალენტური;

2) $A\sim B^*$, სადაც $B^*\subset B$.

მაგრამ იქედან, რომ $\alpha>\beta$, გამომდინარეობს, რომ

3) $B\sim A^*$, სადაც $A^*\subset A$.

2) და 3)-დან გამომდინარეობს, რომ $A\sim B$, ეს კი ეწინააღმდეგება 1)-ს.

შედეგი 2. *თუ α,β,γ — სამი სიმძლავრეა და*

$$\alpha<\beta,\ \beta<\gamma,$$

მაშინ

$$\alpha<\gamma,$$

ე. ი. დამოკიდებულება < ტრანზიტულია.

მართლაც, თუ A,B,C სამი α,β,γ სიმძლავრის სიმრავლეა, მაშინ $A\sim B^*\subset B$, $B\sim C^*\subset C$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $A\sim C^{**}\subset C$, სადაც C^{**} არის C^*-ს იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც B-სა და C^*-ს თანადობაში B^*-ის ელემენტებს უპასუხებენ.

დაგვრჩენია აღმოვაჩინოთ, რომ

$$A \text{ არ არის } \sim C.$$

მაგრამ რომ ყოფილიყო $A\sim C$, აღმოჩნდებოდა, რომ $C^{**}\sim C$, და მაშინ, მე-4 თეორემის თანახმად, ჩვენ გვექნებოდა, რომ $C^*\sim C$, საიდანაც $B\sim C$ და $\beta=\gamma$.

შენიშვნა. *უშუალოდ მე-2 განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $A\sim B^*\subset B$, მაშინ ან $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$, ან $\bar{\bar{A}}<\bar{\bar{B}}$.*

ამასთან დაკავშირებით $A\sim B^*\subset B$ დამოკიდებულებას ხშირად ასედაც სწერენ:

$$\bar{\bar{A}}\leqslant\bar{\bar{B}}.$$

ამ აღნიშვნის დახმარებით თეორემა 5 შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: *თუ $\alpha\geqslant\beta$ და $\alpha\leqslant\beta$, მაშინ $\alpha=\beta$.*

თუ m და n ორი ნატურალური რიცხვია, მაშინ სამი დამოკიდებულებიდან

$$m=n,\ m<n,\ m>n$$

ერთი (და მხოლოდ ერთი) აუცილებლად განხორციელებულია. XI თავში ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ორი ნებისმიერი α და β სიმძლავრისათვის აგრეთვე აუცილებლად განხორციელდება ერთერთი შედეგი სამი, ერთმანეთის გამომრიცხავი, დამოკიდებულებიდან

$$\alpha=\beta,\ \alpha>\beta,\ \alpha<\beta.$$

ამგვარ თვისების აღსანიშნავად ხმარობენ ტერმინს ტრიხოტომია.

ვაჩვენოთ შრედერ-ბერნშტეინის თეორემის გამოყენება შემდეგ მაგალითზე.

თეორემა 6, *[0,1] სეგმენტზე მოცემულ ყველა უწყვეტ ფუნქციების Φ სიმრავლეს c სიძლავრე აქვს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Phi^* = \{\sin x + c\}$. ცხადია, რომ $\Phi^* \subset \Phi$ და $\overline{\overline{\Phi^*}} = c$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{\overline{\Phi}} \geqslant c. \tag{1}$$

დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ

$$\overline{\overline{\Phi}} \leqslant c. \tag{2}$$

ამ მიზნით აღვნიშნოთ H-ით ყველა

$$[u_1, u_2, u_3, \ldots]$$

სახის მიმდევრობათა სიმრავლე, სადაც u_k ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად იღებენ ყველა ნამდვილ მნიშვნელობებს. § 4-ის მე-7 თეორემის ძალით $\overline{\overline{H}} = c$.

გადავნომროთ [0,1] სეგმენტის ყველა რაციონალური რიცხვები

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

და ყოველ $f(x) \in \Phi$ ფუნქციას შევუსაბამოთ

$$a_f = [f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots]$$

მიმდევრობა.

აშკარაა, რომ $a_f \in H$. ამავე დროს, თუ უწყვეტი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები არ არიან იგივურად ტოლი, მაშინ

$$a_f \neq a_g.$$

მართლაც, თუ $a_f = a_g$, მაშინ ტოლობა

$$f(x) = g(x)$$

შესრულებული იქნებოდა [0,1] სეგმენტის ყოველი რაციონალური მნიშვნელობისათვის, აქედან ორივე ფუნქციის უწყვეტობის ძალით, მივიღებდით, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია [0,1] სეგმენტის ყოველი x-სათვის, და $f(x)$, $g(x)$ ფუნქციები იგივურად ტოლი იქნებოდენ.

მაშასადამე, Φ სიმრავლე ეკვივალენტურია $H^* = \{a_f\}$ სიმრავლისა. რადგან $H^* \subset H$ და $\overline{\overline{H}} = c$, ამიტომ დამოკიდებულება (2) დამტკიცებულია, და მასთან თეორემაც.

სავარჯიშო I თავისათვის

1. დაამტკიცეთ, რომ მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.
2. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა თანადობა (0,1)-სა და [0,1]-ს შორის.
3. დაამტკიცეთ, რომ $f = 2^c$.
4. თუ $A = B + C$, $\overline{\overline{A}} = c$, მაშინ თუნდაც ერთ სიმრავლეს B და C სიმრავლეებიდან აქვს c სიმძლავრე. დამტკიცება!

5. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია შემდეგი თვისებისაა: ყოველ x_0-ს შეესაბამება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როგორც კი შესრულდება $|x-x_0|<\delta$ უტოლობა მივიღებთ შედეგად $f(x)\geqslant f(x_0)$. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.

6. აჩვენეთ რომ § 3-ს, მე-4, მე-5, მე-6, მე-7 და § 4-ს, მე-3 და მე-4 თეორემებში შესაძლებელია მოვიშოროთ პირობა იმის შესახებ, რომ შესაკრებ სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არ ჰქონდეთ.

7. დაამტკიცეთ ფორმულა $AB+C=(A+C)(B+C)$. განაზოგადეთ იგი.

8. ვთქვათ, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ სიმრავლეთა მიმდევრობაა. აღვნიშნოთ $\overline{A}$-თი იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც A_n სიმრავლეთა უსასრულო სიმრავლეს ეკუთვნიან, ხოლო $\underline{A}$-თი იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც არ ეკუთვნიან A_n სიმრავლეთა მხოლოდ სასრული რაოდენობას. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overline{A}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{A}=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty}A_k.$$

თ ა ვ ი II

წერტილოვანი სიმრავლეები

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით რიცხვითი წრფის წერტილთა სიმრავლეებს. ნამდვილ რიცხვთა მთელს სიმრავლეს ჩვენ Z სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. შევნიშნოთ, რომ ყველა ცნებებს, რომლებსაც ქვემოთ შევხვდებით, როგორიცაა მაგალითად: „წერტილი“, „სეგმენტი“, „ინტერვალი“ და სხვა მისი მსგავსი, ჩვენ წმინდა არითმეტიკული მნიშვნელობით ვხმარობთ; მაგალითად, როდესაც ვიტყვით, რომ „წერტილი y მდებარეობს x წერტილზე უფრო მარჯვნივ“, მხედველობაში გვექნება, რომ $y>x$.

§ 1. დაგროვების წერტილი

განმარტება 1. x_0 *წერტილს წერტილოვანი* E *სიმრავლის დაგროვების წერტილი ეწოდება, თუ ამ წერტილის შემცველი ყოველი ინტერვალი შეიცავს* E *სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც, განსხვავებულს* x_0 *წერტილისაგან.*

შენიშვნა: 1) თვითონ x_0 წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს და შეიძლება არც ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს.

2) თუ x_0 წერტილი ეკუთვნის E სიმრავლეს, მაგრამ არ წარმოადგენს მისი დაგროვების წერტილს, მას E სიმრავლის *იზოლირებული* წერტილი ეწოდება.

3) თუ x_0 წარმოადგენს დაგროვების წერტილს E სიმრავლისათვის, მაშინ ამ წერტილის შემცველი ყოველი (α,β) ინტერვალი E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს.

დავამტკიცოთ ეს უკანასკნელი შენიშვნა. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, x_0 წერტილის შემცველი ინტერვალი (α,β) შეიცავს E სიმრავლის წერტილებს მხოლოდ სასრული რაოდენობით. $E\cdot(\alpha,\beta)$ სიმრავლის, x_0-საგან განსხვავებული წერტილები იყოს $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$. დავარქვათ δ უმცირეს რიცხვს შემდეგ დადებით რიცხვს შორის:

$$|x_0-\xi_1|,\ |x_0-\xi_2|,\ldots,\ |x_0-\xi_n|,\ x_0-\alpha,\ \beta-x_0,$$

და განვიხილოთ $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ ინტერვალი. მასში არ მოხვდება არც ერთი $\xi_k(k=1,2,\ldots n)$ წერტილი, და რადგანაც

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(\alpha,\beta),$$

ინტერვალი $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, საზოგადოდ, არ შეიცავს E სიმრავლის x_0-საგან განსხვავებულ წერტილებს, ეს კი ეწინააღმდეგება იმ გარემოებას, რომ x_0 დაგროვების წერტილია E სიმრავლისა.

დაგროვების წერტილის ცნებას შეიძლება მივუდგეთ სხვა თვალსაზრისით. ამ მიზნით შემოვიღოთ

განმარტება 2. x_0 წერტილს E სიმრავლის ზღვარითი წერტილი ეწოდება, თუ ამ სიმრავლიდან შეიძლება გამოვყოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ წერტილთა ისეთი მიმდევრობა

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

რომ

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

ვაჩვენოთ ზღვარითი წერტილის და დაგროვების წერტილის ტოლფასობა.

თეორემა 1. თუ x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის დაგროვების წერტილს, მაშინ იგი E სიმრავლის ზღვარითი წერტილია, და პირიქით.

დამტკიცება. ის გარემოება, რომ სიმრავლის ყოველი ზღვარითი წერტილი ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილსაც წარმოადგენს — სავსებით აშკარაა.

პირიქით, ვთქვათ, x_0 წარმოადგენს E-ს დაგროვების წერტილს. ავარჩიოთ $(x_0-1,\ x_0+1)$ ინტერვალში $x_1 \in E$ წერტილი, რომელიც განსხვავდება x_0-საგან. შემდეგ $\left(x_0-\frac{1}{2},\ x_0+\frac{1}{2}\right)$ ინტერვალში ავირჩიოთ x_0-სა და x_1-საგან განსხვავებული წერტილი $x_2 \in E$ და ა. შ.

პროცესის n-ურ საფეხურზე ვარჩევთ $\left(x_0-\frac{1}{n},\ x_0+\frac{1}{n}\right)$ ინტერვალიდან $x_n \in E$ წერტილს, რომელიც განსხვავდება $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ წერტილებისაგან.

ამის შედეგად, E სიმრავლიდან ამორჩეულია $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომლისათვისაც, აშკარაა, გვექნება

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0,$$

ე. ი. x_0 არის E-ს ზღვარითი წერტილი.

თეორემა 2. (ბ. ბოლცანო—კ. ვეიერშტრასი). ყოველ უსასრულო შემოსაზღვრულ E სიმრავლეს აქვს ერთი მაინც დაგროვების წერტილი (რომელიც, შესაძლებელია, არც კი ეკუთვნოდეს E-ს).

დამტკიცება. რადგანაც E სიმრავლე შემოსაზღვრულია, ამიტომ შესაძლებელია დავასახელოთ მისი შემცველი სეგმენტი $[a,b]$.

აღვნიშნოთ

$$c = \frac{a+b}{2}$$

და განვიხილოთ $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტები. არ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ორივე მათგანი შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა მხოლოდ სასრულ რაოდენობას, რადგან ასეთ შემთხვევაში თვით E სიმრავლეც მხოლოდ სასრული იქნებოდა. მაშასადამე, ერთერთი სეგმენტი მაინც შეიცავს E-ს წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს. დავარქვათ მას $[a_1,b_1]$ (თუ ორივე $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტი შეიცავს E-ს წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს, მაშინ $[a_1,b_1]$ დავარქვათ მხოლოდ ერთ მათგანს, რომელს—სულ ერთია). აღვნიშნოთ

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

და დავარქვათ $[a_2,b_2]$ იმას—$[a_1,c_1]$ და $[c_1,b_1]$ სეგმენტებისაგან, რომელშიდაც E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეა მოთავსებული (მისი არსებობა ისევე მტკიცდება, როგორც ზემოთ).

ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ ერთმანეთში ჩადებული სეგმენტების

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots,$$

უსასრულო მიმდევრობას ავაგებთ, ისე რომ ყოველი სეგმენტი E-ს წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს.

რადგანაც

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

ამიტომ $[a_n,b_n]$ სეგმენტის სიგრძე n-ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნულისაკენ, და, ზღვართა თეორიის ცნობილი თეორემის მიხედვით, არსებობს ყველა $[a_n,b_n]$ სეგმენტებისათვის საერთო ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

ვაჩვენოთ, რომ x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის დაგროვების წერტილს. ამისათვის ავიღოთ x_0 წერტილის შემცველი ნებისმიერი (α,β) ინტერვალი. აშკარაა, რომ თუ n საკმარისად დიდია, მაშინ

$$[a_n,b_n] \subset (\alpha,\beta),$$

ისე რომ (α,β)-ში მოთავსებულია E-ს წერტილთა უსასრულო სიმრავლე, საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

შევნიშნოთ, რომ E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის პირობის უგულველყოფამ შეიძლება გამოიწვიოს თეორემის სამართლიანობის დარღვევა. მაგალითისათვის შეიძლება ავიღოთ ყველა ნატურალური რიცხვთა N სიმრავლე. ის უსასრულოა, მაგრამ არა აქვს არც ერთი დაგროვების წერტილი.

გამოყენებებში ხშირად სასარგებლოა ბალცანო-ვეიერშტრასის თეორემის სხვა სახე, რომელშიაც საქმე ეხება არა სიმრავლეებს, არამედ რიცხვით მიმდევრობებს.

ჩვენ ვამბობთ, რომ მოცემული გვაქვს რიცხვითი მიმდევრობა

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \tag{*}$$

თუ ყოველ n-ს ეთანადება რიცხვი x_n; ამასთან, მიმდევრობის სხვადასხვა წევრები შესაძლებელია ერთმანეთის ტოლი იყოს. ასეთია, მაგალითად, მიმდევრობა

$$0,1,0,1,0,1,\ldots$$

თუ მას განვიხილავთ როგორც წერტილოვან სიმრავლეს, ის სასრული იქნება, რადგან მხოლოდ ორი 0 და 1 ელემენტებისაგან შედგება, როგორც მიმდევრობა კი ის უსასრულოა.

(*) მიმდევრობას შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი K რიცხვი, რომ ყოველი n-სათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$|x_n| < K.$$

ბ ო ლ ც ა ნ ო - ვ ე ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს თეორემის ზემოაღნიშნული ფორმა ასეთია:

თეორემა 2*. ყ ო ვ ე ლ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი დ ა ნ

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (*)$$

შ ე ს ა ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა ა მ ო ვ ა რ ჩ ი ო თ კ რ ე ბ ა დ ი ქ ვ ე მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ (*) მიმდევრობის წევრთა სიმრავლე. თუ ეს სიმრავლე სასრულია, მაშინ მისი ერთერთი წერტილი (*) მიმდევრობაში უსასრულოდ ხშირად გვხვდება. ვთქვათ, ეს წერტილი არის ξ და ვიგულისხმოთ, რომ

$$x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \ldots = \xi,$$

მაშინ $\{x_{n_k}\}$ საძიებელი მიმდევრობაა.

თუ კი აღნიშნული სიმრავლე უსასრულოა, მისთვის გამოიყენება ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა. ვთქვათ, x_0 არის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი; მაშინ E-დან გამოიყოფა

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots, \qquad (**)$$

მიმდევრობა, რომელიც x_0-საკენ იკრიბება, ამასთან, მისი ყველა წევრი და მით უფრო მათი ინდექსები $m_1, m_2, m_3, \ldots$ სხვადასხვა რიცხვებია.

დავუშვათ $n_1 = m_1$ და დავარქვათ n_2 იმ პირველ რიცხვს $m_1, m_2, m_3, \ldots$-ს შორის, რომელიც მეტი აღმოჩნდება, ვიდრე n_1 შემდეგ, დავარქვათ n_3 იმ რიცხვს მათ შორის, რომელიც მეტი აღმოჩნდება ვიდრე m_2 და ა. შ. შედეგად მივიღებთ

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$$

მიმდევრობას ზ რ დ ა დ ი ინდექსებით. რამდენადაც ეს მიმდევრობა ნაწილია (**)-სა, ამიტომ ცხადია, რომ

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. ჩაკეტილი სიმრავლეები

შემოვიღოთ მთელი რიგი განმარტებებისა, რომლებიც მჭიდროდ არიან დაკავშირებული დაგროვების წერტილის ცნებასთან.

განმარტებანი. ვთქვათ, E წერტილოვანი სიმრავლეა.

1. E სიმრავლის ყველა დაგროვების წერტილთა სიმრავლეს E-სათვის წარმოებული სიმრავლე ეწოდება, და აღინიშნება E'-ით.

2. თუ $E' \subset E$, მაშინ E-ს ჩაკეტილი სიმრავლე ჰქვია.

3. თუ $E \subset E'$, მაშინ სიმრავლეს თავისთავში მკვრივი ეწოდება.

4. თუ $E = E'$, მაშინ სიმრავლეს სრულყოფილი ჰქვია.

5. $E + E'$ სიმრავლეს, E სიმრავლისათვის ჩაკეტვა ეწოდება და $\bar{E}$-ით აღინიშნება.

ამგვარად, სიმრავლეს ჩაკეტილი ეწოდება, თუ ის ყველა თავის დაგროვების წერტილს შეიცავს. თავისთავში მკვრივი სიმრავლე მოკლებულია იზოლირებულ წერტილებს. სრულყოფილი სიმრავლე ჩაკეტილი და თავისთავში მკვრივია.

გავაშუქოთ მაგალითებზე მოცემული განმარტებანი.

მაგალითები

1. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $E' = \{0\}$. სიმრავლე არც ჩაკეტილია და არც მკვრივია თავისთავში.

2. $E = (a,b)$, $E' = [a,b]$. სიმრავლე მკვრივია თავისთავში, მაგრამ არაა ჩაკეტილი.

3. $E = [a,b]$, $E' = [a,b]$. სიმრავლე სრულყოფილია.

4. $E = Z$, $E' = Z$, ე. ი. ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე სრულყოფილია.

5. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}, \dots, 0\right\}$, $E' = \{0\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია, მაგრამ არაა თავისთავში მკვრივი.

6. $E = R$ (ყველა რაციონალური რიცხვების სიმრავლე) $E' = Z$, სიმრავლე თავისთავში მკვრივია, მაგრამ არაა ჩაკეტილი.

7. $E = 0$, $E' = 0$, ე. ი. ცარიელი სიმრავლე სრულყოფილია.

8. E—სასრული სიმრავლეა, $E' = 0$, ე. ი. სასრული სიმრავლე ჩაკეტილია, მაგრამ არაა მკვრივი თავისთავში.

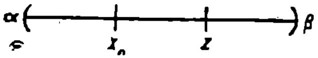
ქვემოთ ჩვენ გავეცნობით ჩაკეტილ და სრულყოფილ სიმრავლეების უფრო რთულ და საინტერესო მაგალითებს.

თეორემა 1. ნებისმიერი წერტილოვანი E სიმრავლის წარმოებული E' სიმრავლე ჩაკეტილია.

დამტკიცება. თეორემა ტრივიალურია, თუ E' ცარიელია. ვთქვათ, E' ცარიელი არაა და x_0 არის მისი დაგროვების წერტილი.

ავიღოთ x_0-ის შემცველი ნებისმიერი (α,β) ინტერვალი. დაგროვების წერტილის განმარტების მიხედვით, ამ ინტერვალში მოიძებნება წერტილი $z \in E'$. მაშასადამე, (α,β) არის გამოსავალ E სიმრავლის დაგროვების წერტილის შემცველი ინტერვალი (ნახ. 5), და ამიტომ იგი E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს.

ამგვარად, x_0 წერტილის შემცველი ყოველი ინტერვალი, E-ს წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს, ასე რომ x_0 E სიმრავლის დაგროვების წერტილია. სხვანაირად, $x_0 \in E'$. ამგვარად, E' სიმრავლე შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს და, მაშასადამე, ჩაკეტილია.



ნახ. 5

თეორემა 2. თუ $A \subset B$, მაშინ $A' \subset B'$.

ეს ფაქტი აშკარაა.

თეორემა 3. სამართლიანია ფორმულა

$$(A+B)' = A' + B'.$$

დამტკიცება. ჩართვა

$$A' + B' \subset (A+B)'$$

გამომდინარეობს მე-2 თეორემიდან. დავამტკიცოთ შებრუნებული ჩართვა

$$(A+B)' \subset A' + B'. \qquad (*)$$

ვთქვათ, $x_0 \overline{\in} A' + B'$.

რადგან $x_0 \overline{\in} A'$, ამიტომ არსებობს ისეთი x_0-ის შემცველი (α_1,β_1) ინტერვალი, რომელშიაც არ არის A სიმრავლის არც ერთი წერტილი, გარდა შესაძლებელია, თვით x_0 წერტილისა. იმავე მოსაზრებებით, არსებობს ისეთი (α_2,β_2) ინტერვალი, რომ

$$x_0 \in (\alpha_2,\beta_2),$$

მაგრამ $B(\alpha_2,\beta_2)$ სიმრავლე ან ცარიელია, ან მხოლოდ x_0 წერტილისაგან შედგება. თუ აღვნიშნავთ

$$\lambda = \max\{\alpha_1,\alpha_2\},\ \mu = \min\{\beta_1,\beta_2\},$$

მივიღებთ ისეთ (λ,μ) ინტერვალს, რომელიც შეიცავს x_0 წერტილს, მაგრამ არ შეიცავს $A+B$ სიმრავლის არც ერთს x_0-საგან განსხვავებულ წერტილს. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ

$$x_0 \overline{\in} (A+B)',$$

საიდანაც გამომდინარეობს (*) ჩართვა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ნებისმიერი E სიმრავლის $\overline{E}$ ჩაკეტვა ჩაკეტილია. მართლაც,

$$(\overline{E})' = (E+E')' = E' + (E')' \subset E' + E' = E' \subset \overline{E}.$$

შედეგი 2. იმისათვის რომ სიმრავლე ჩაკეტილი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი ემთხვეოდეს თავის ჩაკეტვას:

$$E=\bar{E}.$$

ამ პირობის საკმარისობა წინა შედეგიდან გამომდინარეობს. შებრუნებით, ვთქვათ, E სიმრავლე ჩაკეტილია, მაშინ

$$\bar{E}=E+E'\subset E\subset\bar{E},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\bar{E}=E$.

შემდეგი თეორემა აგრეთვე მე-3 თეორემიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 4. სასრული რაოდენობით აღებულ ჩაკეტილი სიმრავლეების ჯამი ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ჯერ ორი შესაკრები სიმრავლის შემთხვევა განვიხილოთ

$$\Phi=F_1+F_2.$$

მე-3 თეორემის ძალით, გვაქვს

$$\Phi'=F_1'+F_2',$$

მაგრამ, რადგან $F_1'\subset F_1$, $F_2'\subset F_2$, ამიტომ

$$\Phi'\subset\Phi,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

ზოგადი შემთხვევა მათემატიკური ინდუქციის ხერხით ამოიწურება.

შენიშვნა. ჩაკეტილ სიმრავლეთა უსასრულო სიმრავლის ჯამი შესაძლოა არც იყოს ჩაკეტილი სიმრავლე.

მართლაც, ვთქვათ მაგალითისათვის,

$$F_n=\left[\frac{1}{n},\ 1\right] \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

მაშინ ყველა F_n ჩაკეტილია, მაგრამ მათი ჯამი

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n=(0,1]$$

არ არის ჩაკეტილი.

ჩაკეტილ სიმრავლეთა თანაკვეთისათვის სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 5. ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი სიმრავლის თანაკვეთა ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, ჩაკეტილი F_ξ სიმრავლეები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან ξ ნიშნაკით, რომელიც რაიმე სიმრავლის მნიშვნელობებს ღებულობს, და

$$\Phi=\prod_{\xi}F_\xi$$

არის მათი თანაკვეთა.

მაშინ $\Phi\subset F_\xi$ ყოველი ξ-სათვის, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\Phi'\subset F'_\xi$ და, მით უფრო, $\Phi'\subset F_\xi$. რადგანაც ეს სამართლიანია ყოველი ξ-სათვის, ამიტომ

$$\Phi'\subseteq\prod_\xi F_\xi ,$$

ე. ი. $\Phi'\subset\Phi$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ლემა. ვთქვათ, E სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან (ქვემოდან) და $\beta=\sup E$ $(\alpha=\inf E)$, მაშინ

$$\beta\in\bar{E}\quad(\alpha\in\bar{E}).$$

დამტკიცება. თუ $\beta\in E$, მით უფრო გვექნება $\beta\in\bar{E}$. დავუშვათ, რომ $\beta\,\bar{\in}\,E$. რადგან, ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის არსებობს ისეთი $x\in E$, რომ $x>\beta-\varepsilon$, ამიტომ β-ს შემცველი ნებისმიერი ინტერვალი შეიცავს E სიმრავლის წერტილებსაც, რომლებიც, ცხადია, განსხვავდებიან β-საგან, რადგანაც $\beta\,\bar{\in}\,E$. მაშასადამე, β წარმოადგენს E სიმრავლის დაგროვების წერტილს და, მაშასადამე, $\beta\in E'\subset\bar{E}$. ამგვარად, $\beta\in\bar{E}$ ყოველთვის.

თეორემა 6. ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ F სიმრავლეში არსებობს ყველაზე უფრო მარჯვენა (მარცხენა) წერტილი.

მართლაც, ვთქვათ $\beta=\sup F$. მაშინ

$$\beta\in\bar{F}=F.$$

განმარტება 6. ვთქვათ, E წერტილოვანი სიმრავლეა, ხოლო $\mathfrak{M}$—ინტერვალების რაღაც სისტემა. თუ ყოველი $x\in E$-სათვის არსებობს ისეთი $\delta\in\mathfrak{M}$, რომ

$$x\in\delta,$$

ამბობენ, რომ E სიმრავლე დაფარულია ინტერვალთა $\mathfrak{M}$ სისტემით.

თეორემა 7 (ე. ბორელი). თუ ჩაკეტილი, შემოსაზღვრული F სიმრავლე დაფარულია ინტერვალთა უსასრულო $\mathfrak{M}$ სისტემით, მაშინ ამ უკანასკნელიდან შეიძლება ამოვარჩიოთ ისეთი სასრული სისტემა $\mathfrak{M}^*$, რომელიც აგრეთვე ფარავს F სიმრავლეს.

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ წინააღმდეგის დაშვებით. ვიგულისხმოთ, რომ $\mathfrak{M}$-დან არ შეიძლება ინტერვალთა რაიმე ისეთი სასრული სისტემის ამორჩევა, რომელიც დაფარავს F-ს (აქედან, სხვათა შორის, გამომდინარეობს, რომ F სიმრავლე უსასრულოა).

მოვათავსოთ F რაიმე სეგმენტში $[a,b]$ (რაც შესაძლებელია, რადგანაც F შემოსაზღვრულია) და აღვნიშნოთ

$$c=\frac{a+b}{2}.$$

შეუძლებელია, რომ $F.[a,c]$ და $F.[c,b]$ სიმრავლეებიდან ორივეს დაფარვა შეიძლებოდეს $\mathfrak{M}$ სისტემის ინტერვალთა სასრული რაოდენობით, რადგან ასეთ შემთხვევაში მთელი F სიმრავლე დაიფარებოდა ინტერვალთა სასრული რაოდენობით. მაშასადამე, ერთერთი სეგმენტი მაინც $[a,c]$ და $[c,b]$-საგან შეიცავს F-ის ისეთ ნაწილს, რომელიც არ შეიძლება დაიფაროს $\mathfrak{M}$ სისტემის სასრული ნაწილით. დავარქვათ $[a_1,b_1]$ იმ სეგმენტს მათ შორის, რომელიც F-ის ასეთ ნაწილს შეიცავს. ამასთანავე, თუ ორივე სეგმენტი $[a,c]$ და $[c,b]$ შეიცავს F სიმრავლის ისეთ ნაწილს, რომლის დაფარვა არ შეიძლება $\mathfrak{M}$ სისტემის სასრული ნაწილით, მაშინ $[a_1,b_1]$-ით აღვნიშნოთ მხოლოდ ერთი რომელიმე მათგანი, სახელდობრ რომელი — სულერთია. ცხადია, რომ $F.[a_1,b_1]$ სიმრავლე უსასრულოა.

აღვნიშნოთ ახლა

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

და დავარქვათ $[a_2,b_2]$ იმ სეგმენტს $[a_1,c_1]$ და $[c_1,b_1]$-დან, რომელიც შეიცავს F სიმრავლის ისეთ ნაწილს, რომლის დაფარვა არ შეიძლება $\mathfrak{M}$ სისტემის ინტერვალთა სასრული რაოდენობით; იმაში, რომ $[a_1,c_1]$ და $[c_1,b_1]$ სეგმენტებიდან ერთი მაინც ასეთი თვისებისაა, ჩვენ დავრწმუნდებით ისევე, როგორც ზემოთ (თუ ორივე სეგმენტს აქვს აღნიშნული თვისება, მაშინ $[a_2,b_2]$-ით აღვნიშნავთ მხოლოდ ერთ მათგანს).

ამ პროცესის გაგრძელებით, ჩვენ ავაგებთ ჩადებული სეგმენტების

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$$

მიმდევრობას, რომელთაც ის თვისება აქვთ, რომ არც ერთი

$$F.[a_n,b_n]\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

სიმრავლე არ შეიძლება დაფარულ იქნას $\mathfrak{M}$ სისტემის ინტერვალების სასრული რაოდენობით (და, მაშასადამე, ყოველი ეს სიმრავლე უსასრულოა).

რადგან $[a_n,b_n]$ სეგმენტის სიგრძე $\frac{b-a}{2^n}$-ის ტოლია, რომელიც n-ის ზრდასთან ერთად ნულისაკენ მიისწრაფვის, არსებობს ამ სეგმენტებისათვის საერთო ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

ვაჩვენოთ, რომ x_0 ეკუთვნის ჩვენს F სიმრავლეს. ამ მიზნით $F.[a_1,b_1]$ სიმრავლეში ამოვარჩიოთ x_1 წერტილი, შემდეგ $F.[a_2,b_2]$ (უსასრულო) სიმრავლეში ამოვარჩიოთ x_2, განსხვავებული x_1-საგან, შემდეგ $F.[a_3,b_3]$-ში ამოვარჩიოთ x_3 წერტილი, განსხვავებული x_1 და x_2-საგან და ა. შ.

ამის შედეგად, ჩვენ მივიღებთ F სიმრავლის სხვადასხვა წერტილების

$$x_1,x_2,x_3,\ldots$$

მიმდევრობას, ამასთანავე

$$a_n\leqslant x_n\leqslant b_n.$$

მაგრამ მაშინ აშკარაა, რომ

$$x_0=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

ასე რომ x_0 F სიმრავლის ზღვარითი წერტილია.

მაგრამ F ხომ ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშასადამე, მართლაც

$$x_0 \in F.$$

ახლა უკვე ადვილია მტკიცების დასრულება. რადგან $\mathfrak{M}$ სისტემა ფარავს F სიმრავლეს, ამიტომ ამ სისტემაში მოიძებნება ისეთი δ_0 ინტერვალი, რომ

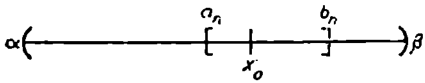
$$x_0 \in \delta_0.$$

თუ n საკმარისად დიდია, აშკარაა (ნახ. 6), რომ

$$[a_n, b_n] \subset \delta_0,$$

და მით უფრო

$$F \cdot [a_n, b_n] \subset \delta_0,$$



ნახ. 6.

ე. ი. სიმრავლე $F\cdot[a_n, b_n]$ დაფარულია $\mathfrak{M}$ სისტემის ერთი ინტერვალით, ეს კი ეწინააღმდეგება თვითონ განმარტებას $[a_n, b_n]$ სეგმენტისა, რაც ამტკიცებს თეორემას.

შენიშვნა. ბორელის თეორემა ძალას ჰკარგავს, თუ მოვიცილებთ შემოსაზღვრულობის ან ჩაკეტილობის პირობას F სიმრავლისათვის.

მართლაც, განვიხილოთ, მაგალითად, ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე. იგი ჩაკეტილია (რადგანაც $N'=0$), მაგრამ არაა შემოსაზღვრული. განვიხილოთ, ყველა

$$\left(n-\frac{1}{3},\quad n+\frac{1}{3}\right)\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

სახის ინტერვალების სისტემა $\mathfrak{M}$, რომელიც ფარავს N-ს. რადგანაც ამ სისტემის ყოველი ინტერვალი N სიმრავლის მხოლოდ თითო წერტილს ფარავს, ამიტომ ცხადია, რომ ამ სისტემის არავითარ სასრულ ნაწილს არ შეუძლია უსასრულო N სიმრავლის დაფარვა. ამგვარად, შემოსაზღვრულობის პირობა არსებითია.

მეორე მაგალითის სახით განვიხილოთ ყველა $\frac{1}{n}$ - სახის რიცხვების სიმრავლე:

$$E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

ეს სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა ჩაკეტილი.

ყოველი $\frac{1}{n}$ წერტილის მახლობლად ავაგოთ ინტერვალი δ_n, რომელიც შეიცავს ამ წერტილს, მაგრამ, რომელიც იმდენად მცირეა, რომ არ შეიცავს E სიმრავლის სხვა წერტილებს, და ამ ინტერვალების სისტემას დავარქვათ $\mathfrak{M}$. ცხადია, რომ $\mathfrak{M}$ სისტემა ფარავს E სიმრავლეს, მაგრამ იგივე მოსაზრებანი, რაც წინა მაგალითში, გვიჩვენებენ, რომ E არ იფარება $\mathfrak{M}$-ს არავითარი სასრული ნაწილით. მაშასადამე, ჩაკეტილობის პირობა აგრეთვე არსებითია.

პარაგრაფის დასასრულს აღვნიშნოთ ჩაკეტილი სიმრავლის კიდევ ერთი თვისება, რომლის გამოყენებასაც შეეძლო რამდენადმე შეემოკლებინა ბორელის თეორემის დამტკიცება.

თეორემა 8. *ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა და*

$$x_1, x_2, x_3, \dots \qquad (*)$$

წარმოადგენს F-ის წერტილთა მიმდევრობას. თუ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

მაშინ $x_0 \in F$.

მართლაც, თუ (*) მიმდევრობა განსხვავებული წერტილების უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს, მაშინ x_0 არის F-ის ზღვარითი წერტილი, და $x_0 \in F$, თუ კი (*) მიმდევრობაში მხოლოდ სასრული რაოდენობაა განსხვავებული წერტილებისა, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, მიმდევრობის ყველა წევრი რომელიღაც მათგანიდან დაწყებული, დაემთხვევიან x_0-ს და $x_0 \in F$.

§ 3. შიგა წერტილები და ღია სიმრავლეები

განმარტება 1. *x_0 წერტილს E სიმრავლის შიგა წერტილი ეწოდება, თუ არსებობს ამ წერტილის შემცველი ისეთი (α,β) ინტერვალი, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეში შედის.*

თვით განმარტებიდან ჩანს, რომ E სიმრავლის შიგა წერტილი *ეკუთვნის* ამ სიმრავლეს.

განმარტება 2. *E სიმრავლეს ღია სიმრავლე ეწოდება, თუ ყოველი მისი წერტილი შიგა წერტილია.*

მაგალითები

1. ყოველი (a,b) ინტერვალი ღია სიმრავლეა.
2. ყველა ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე ღიაა.
3. ცარიელი სიმრავლე 0 ღიაა.

4) სეგმენტი $[a,b]$ არ არის ღია სიმრავლე, რადგანაც მისი ბოლოები არ წარმოადგენენ შიგა წერტილებს.

თეორემა 1. *ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი სიმრავლის ჯამი ღია სიმრავლეა.*

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$S=\sum_{\xi} G_{\xi},$$

სადაც ყოველი G_ξ სიმრავლე ღიაა. ვთქვათ, $x_0 \in S$, მაშინ $x_0 \in G_{\xi_0}$, რომელიმე ξ_0-სათვის. რადგან G_{ξ_0} ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს ისეთი (α,β) ინტერვალი, რომ

$$x_0 \in (\alpha,\beta) \subset G_{\xi_0},$$

მაგრამ მაშინ, მით უფრო

$$x_0 \in (\alpha,\beta) \subset S,$$

ასე რომ x_0 შიგა წერტილია S სიმრავლისა. რამდენადაც x_0 არის S სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი, თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ყოველი სიმრავლე, რომელიც ინტერვალების ჯამის სახით წარმოიდგინება, ღიაა.

თეორემა 2. სასრული რაოდენობით აღებული ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$P = \prod_{k=1}^{n} G_k,$$

სადაც ყოველი G_k ღია სიმრავლეა. თუ P ცარიელია, თეორემა ტრივიალურია. დავუშვათ, რომ P არაა ცარიელი და ვთქვათ, $x_0 \in P$. მაშინ

$$x_0 \in G_k \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

და ყოველი a-სათვის ($k=1,2,\ldots,n$), მოიძებნება ისეთი (α_k,β_k) ინტერვალი, რომ

$$x_0 \in (\alpha_k,\beta_k) \subset G_k.$$

აღვნიშნოთ

$$\lambda = \max(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n); \quad \mu = \min(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n).$$

აშკარაა, რომ

$$x_0 \in (\lambda,\mu) \subset P,$$

ე. ი. x_0 შიგა წერტილია P სიმრავლისა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ღია სიმრავლეთა უსასრულო სიმრავლის თანაკვეთა შესაძლებელია არ იყოს ღია სიმრავლე.

მართლაც, თუ

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

მაშინ ყოველი G_n ღია სიმრავლეა, მაგრამ მათი თანაკვეთა

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$$

არაა ღია სიმრავლე.

განმარტება 3. ვთქვათ, E და S ორი წერტილოვანი სიმრავლეა. თუ $E\subset S$, მაშინ $S-E$ სიმრავლეს ეწოდება E სიმრავლის დამატება S სიმრავლემდე და ასე აღინიშნება:

$$C_sE.$$

კერძოდ, C_ZE სიმრავლეს [სადაც $Z=(-\infty,+\infty)$] უბრალოდ E სიმრავლის დამატებას უწოდებენ და

$$CE\text{-თი}$$

აღნიშნავენ.

დამატებითი სიმრავლის ცნების დახმარებით ადვილია კავშირის აღმოჩენა ჩაკეტილ და ღია სიმრავლეებს შორის.

თეორემა 3. თუ G ღია სიმრავლეა, მისი CG დამატება ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x_0\in G$, მაშინ არსებობს ისეთი (α,β) ინტერვალი, რომ

$$x_0\in(\alpha,\beta)\subset G.$$

ეს ინტერვალი სრულებით არ შეიცავს CG სიმრავლის წერტილებს, და მაშასადამე, x_0 არ არის CG სიმრავლის დაგროვების წერტილი. ამიტომ ის, წერტილი, რომელიც დაგროვების წერტილია CG სიმრავლისა, არ შეიძლება შედიოდეს G-ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ CG შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს.

თეორემა 4. თუ F ჩაკეტილი სიმრავლეა, მისი დამატება CF ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x_0\in CF$. მაშინ x_0 არ წარმოადგენს F სიმრავლის დაგროვების წერტილს და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი (α,β) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს x_0 წერტილს და არ შეიცავს x_0-საგან განსხვავებულ F სიმრავლის არც ერთ წერტილს. მაგრამ, რადგანაც x_0-იც არ შედის F-ში, ამიტომ (α,β) არ შეიცავს, საზოგადოდ, F-ის წერტილებს, ასე რომ $(\alpha,\beta)\subset CF$ და x_0 შიგა წერტილია CF-სათვის.

მაგალითისათვის აღვნიშნოთ, რომ ორივე ერთმანეთის მიმართ დამატებითი Z და O სიმრავლეები ერთდროულად ღია და ჩაკეტილი არიან.

ადვილი შესამჩნევია, რომ 1) თუ G ღია სიმრავლეა, ხოლო $[a,b]$—მისი შემცველი სეგმენტი, მაშინ $[a,b]-G$ ჩაკეტილი სიმრავლეა და რომ 2) თუ F ჩაკეტილი სიმრავლეა, ხოლო (a,b)—მისი შემცველი ინტერვალი, მაშინ $(a,b)-F$ სიმრავლე ღიაა.

ეს დებულებანი გამომდინარეობენ შემდეგი აშკარა იგივეობებიდან:

$$[a,b]-G=[a,b]\cdot CG.$$

$$(a,b)-F=(a,b)\cdot CF,$$

პირიქით, თუ F ჩაკეტილია და $[a,b]\supset F$, მაშინ $[a,b]-F$ სიმრავლე არ წარმოადგენს, საზოგადოდ, ღია სიმრავლეს. ვთქვათ, მაგალითად, $F=[0,1]$ და $[a,b]=[0,2]$, მაშინ

$$[a,b]-F=(1,2].$$

ამასთან დაკავშირებით სასარგებლოა შემდეგი განმარტების შემოღება.

განმარტება 4. ვთქვათ, E არაცარიელი შემოსაზღვრული სიმრავლეა და $a=\inf E$, $b=\sup E$. $S=[a,b]$ სეგმენტს ეწოდება E-ს შემცველი უმცირესი სეგმენტი.

თეორემა 5. თუ S არის ჩაკეტილი შემოსაზღვრული F სიმრავლის უმცირესი შემცველი სეგმენტი, მაშინ

$$C_s F=[a,b]-F,$$

სიმრავლე ღიაა.

დამტკიცება. ცხადია, რომ საკმარისია დავრწმუნდეთ

$$C_s F=(a,b)\cdot CF$$

იგივეობის სამართლიანობაში.

ვთქვათ, $x_0\in C_s F$; ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$x_0\in[a,b],\quad x_0\overline{\in}F.$$

მაგრამ, რადგან $x_0\overline{\in}F$, ამიტომ $x_0\neq a$, და $x_0\neq b$ (რადგან, მე-2 პარაგრაფის მე-6 თეორემის მიხედვით, a და b შედიან F-ში). მაშასადამე, $x_0\in(a,b)$. გარდა ამისა, x_0, ცხადია, შედის CF-ში ასე რომ

$$C_s F\subset(a,b)\cdot CF.$$

შებრუნებული ჩართვა კი აშკარაა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. მანძილები და განცალებადობა

განმარტება 1. ვთქვათ, x და y რიცხვითი წრფის ორი წერტილია.

$$|x-y|$$

რიცხვს x და y წერტილებს შორის მანძილი ეწოდება და აღინიშნება

$$\rho(x,y)\text{-ით.}$$

ცხადია, რომ $\rho(x,y)=\rho(y,x)\geqslant 0$, და

$$\rho(x,y)=0$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$x=y.$$

განმარტება 2. ვთქვათ, x_0 რაიმე წერტილია, ხოლო E—წერტილთა არაცარიელი სიმრავლე. x_0-სა და E სიმრავლის წერტილთა შორის მანძილების ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება მანძილი x_0 წერტილიდან E სიმრავლემდე და აღინიშნება $\rho(x_0,E)$-თი ან $\rho(E,x_0)$-ით:

$$\rho(x_0,E)=\inf\{\rho(x_0,x)\}\quad(x\in E).$$

აშკარაა, რომ $\rho(x_0,E)$ ყოველთვის არსებობს და არაუარყოფითია. თუ $x_0 \in E$, მაშინ

$$\rho(x_0,E)=0,$$

მაგრამ შებრუნებულ გარემოებას, საზოგადოდ, ადგილი არა აქვს. მაგალითად, თუ $x_0=0$, $E=(0,1)$, მაშინ $\rho(x_0,E)=0$, მაგრამ $x_0 \bar{\in} E$.

განმარტება 3. ვთქვათ, A და B ორი არაცარიელი წერტილოვანი სიმრავლეა. A სიმრავლის წერტილებსა და B სიმრავლის წერტილებს შორის მანძილთა ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება მანძილი A და B სიმრავლეებს შორის და $\rho(A,B)$-თი აღინიშნება:

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\} \ (x \in A, y \in B).$$

აშკარაა, რომ $\rho(A,B)$ არსებობს ყოველთვის, და რომ $\rho(A,B)=\rho(B,A)\geqslant 0$.

თუ A და B სიმრავლეები იკვეთებიან, $\rho(A,B)=0$. მაგრამ შებრუნებული გარემოება სამართლიანი არ არის საზოგადოდ. მაგალითად, თუ

$$A=(-1,0),\ B=(0,1),\ \text{მაშინ}\ \rho(A,B)=0,\ \text{მაგრამ}\ A.B=0.$$

შევნიშნოთ, რომ მანძილი x_0 წერტილიდან E სიმრავლემდე წარმოადგენს უბრალოდ მანძილს E სიმრავლიდან $\{x_0\}$ სიმრავლემდე, რომლის ერთადერთ წერტილს წარმოადგენს x_0. ეს შენიშვნა შემდეგისათვის ძალიან სასარგებლოა.

თეორემა 1. ვთქვათ, A და B ორი არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამასთან ერთ-ერთი მაინც შემოსაზღვრულია. მაშინ არსებობენ ისეთი წერტილები

$$x^* \in A \ \text{და} \ y^* \in B,$$

რომ

$$\rho(x^*,y^*)=\rho(A,B).$$

დამტკიცება. ზუსტი ქვედა საზღვრის განმარტების ძალით, ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ორი წერტილი

$$x_n \in A \ \text{და} \ y_n \in B,$$

რომ

$$\rho(A,B)\leqslant|x_n-y_n|<\rho(A,B)+\frac{1}{n}. \tag{1}$$

გავანაწილოთ ნატურალური რიცხვები ორ P და Q ჯგუფად, შემდეგნაირად: რიცხვი n შევიყვანოთ P ჯგუფში, თუ $x_n-y_n\geqslant 0$ და შევიყვანოთ Q ჯგუფში, თუ $x_n-y_n<0$. ერთერთი ამ ჯგუფთაგანი უსასრულოა; ვთქვათ, ეს არის P, რომელიც შედგება რიცხვებისაგან

$$n_1<n_2<n_3<\cdots$$

მაშინ (1) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$\rho(A,B)\leqslant x_{n_k}-y_{n_k}<\rho(A,B)+\frac{1}{n_k},$$

საიდანაც

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}-y_{n_k})=\rho(A,B). \tag{2}$$

ჩვენი პირობის ძალით A და B სიმრავლეებიდან ერთერთი შემოსაზღვრულია. დავუშვათ, მაგალითისათვის, რომ შემოსაზღვრულია A სიმრავლე. მაშინ x_{n_k} მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და მისგან, ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის მიხედვით, გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა

$$x_{n_{k_i}},$$

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x^*. \tag{3}$$

A სიმრავლის ჩაკეტილობის ძალით, x^* წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს ამ სიმრავლეს, $x^* \in A$.

მეორეს მხრივ $y_{n_{k_i}} = x_{n_{k_i}} - (x_{n_{k_i}} - y_{n_{k_i}})$ და (2) და (3)-ის ძალით

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = y^*,$$

სადაც

$$y^* = x^* - \rho(A,B).$$

B სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო, $y^* \in B$ და, აშკარაა,

$$\rho(x^*,y^*) = \rho(A,B).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ მაგალითზე, რომ თეორემა ჰკარგავს ძალას, თუ ორივე სიმრავლე A და B—არაშემოსაზღვრულია.

ვთქვათ, $N=\{n\}$ და $M=\left\{n+\frac{1}{2n}\right\}$. ორივე ეს სიმრავლე ჩაკეტილია ($N'=M'=0$) და $\rho(N,M)=0$. მაგრამ რადგან $N \cdot M=0$, ისეთი ორი წერტილი $x^* \in N$ და $y^* \in M$, რომელთათვისაც $\rho(x^*,y^*)=0$, არ არსებობს. ცხადია აგრეთვე, რომ თუ თუნდაც ერთი სიმრავლე, A ან B არაა ჩაკეტილი, თეორემა არ არის სამართლიანი, რაც ჩანს თუნდაც შემდეგი მაგალითიდან $A=[1,2)$, $B=[3,5]$, სადაც $\rho(A,B)=1$.

აღვნიშნოთ დამტკიცებული თეორემის რამდენიმე შედეგი.

შედეგი 1. თუ A და B ჩაკეტილი სიმრავლეებია, ერთი მათგანი მაინც შემოსაზღვრულია და $\rho(A,B)=0$, მაშინ A და B იკვეთებიან.

შედეგი 2. ვთქვათ, x_0 ნებისმიერი წერტილია, ხოლო F — არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლე. მაშინ F-ში არსებობს ისეთი x^* წერტილი, რომლისათვისაც

$$\rho(x_0,x^*) = \rho(x_0,F).$$

შედეგი 3. თუ x_0 წერტილი და ჩაკეტილი F სიმრავლე ისეთებია, რომ $\rho(x_0,F)=0$, მაშინ $x_0 \in F$.

გადავიდეთ მნიშვნელოვანი „განცალებადობის თეორემის“ განხილვაზე. წინასწარ ორი მარტივი ლემა დავამტკიცოთ.

ლემა 1. ვთქვათ, A არაცარიელი წერტილოვანი სიმრავლეა და d იყოს დადებითი რიცხვი. აღვნიშნოთ[1]

$$B=Z(\rho(x,A)<d).$$

მაშინ $A\subset B$ და B ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. $A\subset B$ ჩართვა აშკარაა. დავამტკიცოთ, რომ B ღია სიმრავლეა,

ვთქვათ, $x_0\in B$. მაშინ $\rho(x_0,A)<d$ და A-ში მოიძებნება ისეთი x^* წერტილი, რომ

$$\rho(x_0,x^*)<d.$$

აღვნიშნოთ $d-\rho(x_0,x^*)=h$ და ვაჩვენოთ, რომ $(x_0-h,\ x_0+h)$ ინტერვალი B სიმრავლეში შედის. აქედან მივიღებთ, რომ x_0 B სიმრავლის შიგა წერტილია, და მაშასადამე, B ღია სიმრავლეა.

ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი

$$y\in(x_0-h,\ x_0+h).$$

მაშინ $|y-x_0|<h$, და რადგანაც $|x_0-x^*|=d-h$, ამიტომ

$$|y-x^*|\leq|y-x_0|+|x_0-x^*|<h+(d-h)=d.$$

მაშასადამე, $\rho(y,x^*)<d$, და მით უფრო

$$\rho(y,A)<d,$$

ასე რომ $y\in B$. ამგვარად, მართლაც

$$(x_0-h,\ x_0+h)\subset B,$$

და ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. ვთვათ, A_1 და A_2 ისეთი ორი არაცარიელ სიმრავლეა, რომ

$$\rho(A_1,A_2)=r>0.$$

ავიღოთ

$$B_1=Z\left(\rho(x,A_1)<\frac{r}{2}\right),\ B_2=Z\left(\rho(x,A_2)<\frac{r}{2}\right).$$

მაშინ

$$B_1\cdot B_2=0.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $B_1\cdot B_2\neq 0$ და

$$\zeta\in B_1\cdot B_2.$$

მაშინ

$$\rho(\zeta,A_1)<\frac{r}{2},\ \rho(\zeta,A_2)<\frac{r}{2},$$

[1] აღნიშვნას შემდეგი აზრი აქვს: „B არის იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\rho(x,A)<d$“.

და მოიძებნება ისეთი $x_1 \in A_1$ და $x_2 \in A_2$ წერტილები, რომ

$$|\xi-x_1|<\frac{r}{2},\ |\xi-x_2|<\frac{r}{2},$$

საიდანაც

$$|x_1-x_2|<r$$

და მით უფრო $\rho(A_1,A_2)<r$, რაც შეუძლებელია. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2 (განცალებადობის თვისება) ვთქვათ, F_1 და F_2 ურთიერთ არაგადამკვეთი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლეებია. არსებობენ ისეთი ღია G_1 და G_2 სიმრავლეები, რომ

$$G_1 \supset F_1,\ G_2 \supset F_2,\ G_1 \cdot G_2 = 0.$$

დამტკიცება. პირველი თეორემის პირველი შედეგის მიხედვით

$$\rho(F_1,F_2)=r>0.$$

თუ ახლა აღვნიშნავთ

$$G_i=Z\left(\rho(x,F_i)<\frac{r}{2}\right) \qquad (i=1,2)$$

და 1-ლ და მე-2 ლემას გამოვიყენებთ, თეორემა დამტკიცებული იქნება.

შევნიშნოთ, სხვათა შორის, რომ F_1 და F_2 სიმრავლეების შემოსაზღვრულობის პირობა შეიძლება მოვიშოროთ თეორემის სამართლიანობის დაურღვევლად, რის დამტკიცებაზედაც ჩვენ არ შევჩერდებით. პირიქით, ორივე სიმრავლის ჩაკეტილობის პირობა არსებითია, რაც უკვე შემდეგი მაგალითიდან ჩანს

$$A=[0,1),\ B=[1,2].$$

§ 5. შემოსაზღვრული ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების აგებულება

განმარტება 1. ვთქვათ, G ღია სიმრავლეა. თუ (a,b) ინტერვალი G სიმრავლეში შედის, მაგრამ მისი ბოლოები ამ სიმრავლეს არ ეკუთვნიან

$$(a,b)\subset G,\ a\,\overline{\in}\,G,\ b\,\overline{\in}\,G,$$

მაშინ ამ ინტერვალს G სიმრავლის შემადგენელ ინტერვალს ვუწოდებთ[1].

თეორემა 1. თუ G არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია სიმრავლეა, მაშინ მისი ყოველი წერტილი მის რომელიმე შემადგენელ ინტერვალს ეკუთვნის.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$x_0 \in G.$$

აღვნიშნოთ

$$F=[x_0,+\infty)\cdot CG.$$

---

[1] ეს ტერმინი პირველად შემოყვანილია აქ.

ყოველი სიმრავლე $[x_0,+\infty)$ და CG ჩაკეტილია, და ამიტომ F სიმრავლეც ჩაკეტილია. გარდა ამისა, რადგანაც G შემოსაზღვრულია, F არ არის ცარიელი. ბოლოს, F სიმრავლის არც ერთი წერტილი არ მდებარეობს x_0-ის მარცხნივ. ამგვარად, F სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან. ასეთ პირობებში, ამ სიმრავლეში არსებობს ყველაზედ უფრო მარცხენა წერტილი μ, ამასთან, ცხადია, რომ $\mu \geqslant x_0$. მაგრამ $x_0 \in G$, და, მაშასადამე, $x_0 \overline{\in} F$, ასე რომ $x_0 \neq \mu$, ე. ი.

$$x_0 < \mu.$$

შევნიშნოთ შემდეგ, რომ $\mu \overline{\in} G$ (რადგან $\mu \in F \subset CG$).

დასასრულს ვაჩვენოთ, რომ

$$[x_0, \mu) \subset G.$$

დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, ეს ასე არ არის. მაშინ უნდა მოიძებნებოდეს ისეთი y წერტილი, რომ

$$y \in [x_0, \mu) \text{ და } y \overline{\in} G.$$

მაგრამ ამ დამოკიდებულებებიდან მივიღებდით, რომ

$$y \in F, \; y < \mu,$$

ეს კი ეწინააღმდეგება μ წერტილის განმარტებას.

ამგვარად, ჩვენს მიერ დამტკიცებულია ისეთი μ წერტილის არსებობა, რომელსაც შემდეგი სამი თვისება აქვს:

$$1) \; \mu > x_0, \quad 2) \; \mu \overline{\in} G, \quad 3) \; [x_0, \mu) \subset G.$$

ანალოგიურად მტკიცდება ისეთი λ წერტილის არსებობა, რომლისთვისაც გვაქვს

$$1) \; \lambda < x_0, \quad 2) \; \lambda \overline{\in} G_0, \quad 3) \; (\lambda, x_0] \subset G.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (λ, μ) წარმოადგენს G სიმრავლისათვის შემადგენელ ინტერვალს, რომელიც შეიცავს x_0 წერტილს, რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

მოყვანილი მტკიცებიდან გამომდინარეობს შემადგენელი ინტერვალების თვით არსებობის ფაქტიც ყოველი არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია სიმრავლისათვის.

თეორემა 2. *თუ (λ, μ) და (σ, τ) ერთი და იგივე ღია G სიმრავლის შემადგენელი ინტერვალებია, მაშინ ისინი ან იგიური არიან, ან არ იკვეთებიან.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ არსებობს ორივე (λ, μ) და (σ, τ) ინტერვალისათვის საერთო x წერტილი

$$\lambda < x < \mu, \quad \sigma < x < \tau.$$

ვიგულისხმოთ, რომ

$$\tau < \mu.$$

მაშინ აშკარაა $\tau \in (\lambda, \mu)$, მაგრამ ცხადია, რომ ეს შეუძლებელია, რადგანაც

$$(\lambda, \mu) \subset G, \quad \tau \overline{\in} G.$$

მაშასადამე,

$$\mu \leqslant \tau.$$

მაგრამ, რადგან μ და τ სავსებით თანასწორუფლებიანი არიან, იმავე მოსაზრებებით მივიღებ

$$\tau \leqslant \mu.$$

და მაშინ $\tau = \mu$.

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $\sigma = \lambda$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (λ,μ) და (σ,τ) იგიურნი არიან.

შედეგი. არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლის განსხვავებული შემადგენელი ინტერვალების სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.

მართლაც, თუ ჩვენ ყოველ შემადგენელ ინტერვალში ამოვირჩევთ თითო რაციონალურ წერტილს, მაშინ შემადგენელ ინტერვალთა სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაში იქნება მოყვანილი ყველა რაციონალური რიცხვების R სიმრავლის ნაწილთან.

ყველა ზემონათქვამს შეიძლება თავი მოუყაროთ შემდეგი თეორემის სახით:

თეორემა 3. ყოველი არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლე წარმოიდგინება ისეთი ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრავლის ჯამის სახით, რომელთა ბოლოები G სიმრავლეს არ მიეკუთვნებიან:

$$G = \sum_k (\lambda_k,\mu_k) \quad (\lambda_k \overline{\in} G,\ \mu_k \overline{\in} G).$$

ჩვენ უკვე აღვნიშნავდით, რომ შებრუნებითაც: ყოველი სიმრავლე, რომელიც ინტერვალების ჯამის სახით წარმოიდგინება, ღია.

თეორემა 4. ვთქვათ, G არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია სიმრავლეა და (a,b)—G-ში შემავალი ინტერვალია. ასეთ შემთხვევაში, შემადგენელ ინტერვალებს შორის მოიძებნება ერთი ისეთი, რომელიც შეიცავს (a,b)-ს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x_0 \in (a,b)$. მაშინ $x_0 \in G$, და G-ს შემადგენელ ინტერვალებში მოიძებნება ისეთი ინტერვალი (λ,μ), რომ

$$x_0 \in (\lambda,\mu).$$

თუ ვიგულისხმებთ

$$\mu < b,$$

მაშინ $\mu \in (a,b)$, ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $\mu \overline{\in} G$. მაშასადამე,

$$b \leqslant \mu.$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ

$$\lambda \leqslant a,$$

და, მაშასადამე,

$$(a,b) \subset (\lambda,\mu),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

გადავიდეთ ახლა ჩაკეტილი შემოსაზღვრული სიმრავლეების აგებულების შესწავლაზე.

ვთქვათ, F ასეთი სიმრავლეა, და S—მისი შემცველი უმცირესი სეგმენტი. როგორც ვიცით, C_sF ღია სიმრავლეა. თუ ეს სიმრავლე არაა ცარიელი, მისთვის გამოიყენება მე 3 თეორემა, ამის გამო სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 5. არაცარიელი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლე წარმოადგენს ან სეგმენტს, ან მიიღება რაღაც სეგმენტიდან ისეთი არაგადამკვეთი ინტერვალების სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ამოღებით, რომელთა ბოლოები F-ს მიეკუთვნებიან.

თავისთავად ცხადია, რომ პირიქითაც—ყოველი სიმრავლე, რომელიც მიიღება სეგმენტიდან ინტერვალების რაიმე სიმრავლის ამოღებით,—ჩაკეტილია.

შევნიშნოთ, რომ C_sF სიმრავლის შემადგენელ ინტერვალებს F-სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალები ეწოდება.

რადგან სრულყოფილი სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ მე-5 თეორემა სამართლიანია მისთვისაც. საჭიროა გამოვიკვლიოთ, თუ რა დამატებითი პირობები უნდა მოვთხოვოთ ჩაკეტილ სიმრავლის მოსაზღვრე ინტერვალებს იმისათვის, რომ იგი სრულყოფილი აღმოჩნდეს. პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 6. ვთქვათ, F არაცარიელი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლეა და $S=[a,b]$ მისი შემცველი უმცირესი სეგმენტია.

მაშინ

1. ისეთი x_0 წერტილი, რომელიც F-ის ორი მოსაზღვრე ინტერვალის საერთო ბოლოს წარმოადგენს, F-ის იზოლირებული წერტილია.

2. თუ a (ან b) ერთერთი მოსაზღვრე ინტერვალის ბოლოა, იგი F-ს იზოლირებული წერტილია.

3. გარდა 1 და 2-ში აღნიშნულ იზოლირებულ წერტილებისა, F სიმრავლე სხვა იზოლირებულ წერტილებს არ შეიცავს.

დამტკიცება. 1 და 2 დებულებანი აშკარაა, დავამტკიცოთ 3. ვთქვათ, x_0 F სიმრავლის იზოლირებული წერტილია. დავუშვათ ჯერ, რომ $a<x_0<b$. იზოლირებული წერტილის განმარტების მიხედვით, არსებობს ამ წერტილის შემცველი ისეთი (α,β) ინტერვალი, რომელშიაც არ შედის x_0-საგან განსხვავებული წერტილები F სიმრავლისა, ამასთან ცხადია, რომ $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$.

მაგრამ მაშინ (x_0,β) ინტერვალი სრულებით არ შეიცავს F-ის წერტილებს და, მაშასადამე, $(x_0,\beta)\subset C_sF$. მე-4 თეორემის მიხედვით, არსებობს ისეთი (λ,μ) მოსაზღვრე ინტერვალი F სიმრავლისა, რომელიც შეიცავს (x_0,β)-ს. რომ ყოფილიყო $\lambda<x_0$, მაშინ x_0 წერტილი ვერ მიეკუთვნებოდა F სიმრავლეს, ამიტომ აუცილებელია, რომ $\lambda\geqslant x_0$. მაგრამ უტოლობა $\lambda>x_0$ ეწინააღმდეგება იმას, რომ $(x_0,\beta)\subset(\lambda,\mu)$.

მაშასადამე, $\lambda=x_0$, ე. ი. x_0 წარმოადგენს F-ის ერთერთ მოსაზღვრე ინტერვალის მარცხენა ბოლოს.

სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება, რომ x_0 წარმოადგენს F-ის რაღაც მოსაზღვრე ინტერვალის მარჯვენა ბოლოს, საიდანაც გამომდინარეობს 3.

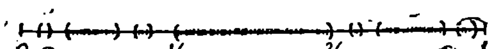
შემთხვევა $x_0=a$ ან $x_0=b$, განიხილება ანალოგიურად.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 7. *ყოველი არაცარიელი შემოსაზღვრული სრულყოფილი P სიმრავლე წარმოადგენს ან სეგმენტს, ან მიიღება რაღაც სეგმენტისაგან ისეთი ინტერვალების სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ამოღებით, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთენ და რომლებსაც არა აქვთ საერთო ბოლოები არც ურთიერთს შორის, არც გამოსავალ სეგმენტთან. პირიქით, ყოველი, ასეთი საშუალებით მიღებული სიმრავლე, სრულყოფილია.*

მოვიყვანოთ სრულყოფილი სიმრავლის საინტერესო და მნიშვნელოვანი მაგალითი.

კანტორის G_0 და P_0 სიმრავლეები. გავყოთ $U=[0,1]$ სეგმენტი წერტილებით $\frac{1}{3}$ და $\frac{2}{3}$ სამ ნაწილად და ამოვიღოთ მისგან $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ინტერვალი. ყოველი დარჩენილი სეგმენტი $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ და $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ გავყოთ სამ ნაწილად (პირველი $\frac{1}{9}$ და $\frac{2}{9}$, ხოლო მეორე $\frac{7}{9}$ და $\frac{8}{9}$ წერტილებით) და ამოვიღოთ თითოეულისაგან შუა ინტერვალები $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ შემდეგ, გავყოთ სამ ნაწილად ყოველი დარჩენილი ოთხი სეგმენტი, და მოვაშოროთ მათ შუა ინტერვალები (ნახ, 7). ეს პროცესი უსაზღვროდ გავაგრძელოთ.



ნახ. 7.

ამის შედეგად [0,1]-დან ამოღებული აღმოჩნდება G_0 სიმრავლე, რომელიც ინტერვალების თვლადი სიმრავლის ჯამს წარმოადგენს

$$G_0=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)+\left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right]+\cdots$$

დარჩენილი P_0 სიმრავლე (მე-7 თეორემის ძალით) სრულყოფილი აღმოჩნდება:

G_0 და P_0 სიმრავლეები კანტორის სიმრავლეების სახელწოდებას ატარებენ.

არაა ძნელი ამ სიმრავლეების არითმეტიკული დახასიათება. ამ მიზნით გამოვიყენოთ სამობითი წილადების აპარატი.

როგორი წერტილები მოხვდებიან პირველ ამოღებულ ინტერვალში, ე. ი. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ინტერვალში? ცხადია, რომ ყოველი ასეთი წერტილის სამობითიწილადად დაშლაში

$$x=0,a_1a_2a_3\ldots \quad (a_k=0,1,2)$$

აუცილებლად გვექნება

$$a_1=1.$$

ამ ინტერვალის თითოეული ბოლო კი წარმოიდგინება სამობითიწილადების საშუალებით ორნაირად

$$\frac{1}{3}=\begin{cases}0.100000\ldots\\0,022222\ldots\end{cases} \qquad \frac{2}{3}=\begin{cases}0,122222\ldots\\0,200000\ldots\end{cases}$$

[0,1] სეგმენტის ყველა სხვა წერტილების დაშლა სამობითიწილადად არ შეიძლება მძიმის შემდეგ პირველ ადგილზე ერთიანს შეიცავდეს.

ამგვარად, G_0 სიმრავლის აგების პროცესის პირველ საფეხურზე, [0,1] სეგმენტიდან ამოღებულ იქნა ის და მხოლოდ ის წერტილები, რომელთა პირველი სამობითი ნიშანი დაშლაში აუცილებლად ერთიანს წარმოადგენს.

ანალოგიურად აღმოვაჩენთ, რომ მეორე საფეხურზე ამოღებულ იქნა ისეთი და მხოლოდ ისეთი წერტილები, რომელთაც დაშლის მეორე სამობითი ნიშანი აუცილებლად ერთიანის ტოლი აქვთ, და. ა. შ.

ამიტომ პროცესის დამთავრების შემდეგ ამოუღებელი დარჩებიან ის და მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც შეიძლება წარმოდგნილ იქნან სამობითიწილადად

$$0,a_1a_2a_3\ldots,$$

რომელშიაც არც ერთი a_k არ ექნება ერთიანის ტოლი.

მოკლედ რომ ვთქვათ, G_0 ისეთი წერტილებისაგან შედგება, რომელთა სამობითიწილადად დაშლა შეუძლებელია ერთიანის გამოყენების გარეშე, P_0—კი ისეთი წერტილებისაგან, რომელთათვისაც ასეთი დაშლა შესაძლებელია.

შედეგი. კანტორის სრულყოფილ სიმრავლეს P_0 c სიმძლავრე აქვს.

მართლაც,

$$P_0=\{0,a_1a_2a_3\ldots\} \quad \left(a_k=\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.\right)$$

და საკითხი დაიყვანება I თავის § 4-ის მე-8 თეორემაზე.

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ ამოღებული ინტერვალების ბოლოების გარდა (რომლებიც მხოლოდ თვლად სიმრავლეს შეადგენენ), კანტორის სრულყოფილი P_0 სიმრავლე შეიცავს სხვა წერტილებსაც. ასეთი „არა ბოლო" წერტილის მაგალითს ნებისმიერი

$$0,a_1a_2a_3\ldots \quad (a_k=0,2)$$

სახის წილადი გვაძლევს, რომელიც არ შეიცავს 0-ს ან 2-ს პერიოდში.

§ 6. კონდენსაციის წერტილები. ჩაკეტილი სიმრავლის სიმძლავრე

მე-5 პარაგრაფის ბოლოს ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ კანტორის სრულყოფილი P_0 სიმრავლის სიმძლავრე არის c. თურმე ეს თვისება ყველა არაცარიელ სრულყოფილ სიმრავლეებს მიეკუთვნება.

თეორემა 1. ყოველი არაცარიელი სრულყოფილი P სიმრავლის სიმძლავრე არის c.

დამტკიცება. ვთქვათ, P არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლეა. ავიღოთ

$$x \in P$$

წერტილი და ამ წერტილის შემცველი δ ინტერვალი. რადგან x არ არის P-ს იზოლირებული წერტილი, ამიტომ $P\delta$ უსასრულო სიმრავლეა.

ამოვირჩიოთ $P\delta$-ში ორი სხვადასხვა წერტილი x_0 და x_1 და ავაგოთ ისეთი ინტერვალები δ_0 და δ_1, რომ $i=0,1$-სათვის გვქონდეს:

$$1)\ x_i \in \delta_i,\quad 2)\ \delta_i \subset \delta,\quad 3)\ \bar{\delta}_0 \cdot \bar{\delta}_1 = 0,\quad 4)\ m\delta_i < 1$$

($\bar{\delta}$ წარმოადგენს δ ინტერვალის ჩაკეტვას, $m\delta$ კი δ ინტერვალის სიგრძეს).

რადგან x_0 წარმოადგენს P_0 წერტილის დაგროვების წერტილს, ამიტომ δ_0 ინტერვალში P სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე არსებობს. ამოვირჩიოთ მათ შორის ორი სხვადასხვა $x_{0,0}$ და $x_{0,1}$ წერტილი და ავაგოთ ისეთი $\delta_{0,0}$ და $\delta_{0,1}$ ინტერვალები, რომ $k=0,1$-სათვის გვქონდეს

$$1)\ x_{0,0} \in \delta_{0,0},\quad 2)\ \delta_{0,k} \subset \delta_0,\quad 3)\ \bar{\delta}_{0,0} \cdot \bar{\delta}_{0,1} = 0,\quad 4)\ m\delta_{0,k} < \frac{1}{2}.$$

ანალოგიურად აგება ვაწარმოოთ x_1 წერტილისათვის.

ამის შედეგად ჩვენ აგებული გვექნება $x_{i,k}$ $(i,k=0,1)$ წერტილები და $\delta_{i,k}$ ინტერვალები ისეთები, რომ

$$1)\ x_{i,k} \in \delta_{i,k},\quad 2)\ \delta_{i,k} \subset \delta_i,\quad 3)\ \bar{\delta}_{i,k} \cdot \bar{\delta}_{i',k'} = 0,\ \text{თუ}\ (i,k) \neq (i',k'),$$

$$4)\ m\delta_{i,k} < \frac{1}{2}.$$

გავაგრძელოთ აგების ეს პროცესი. n-ური ნაბიჯის შემდეგ, ჩვენ აგებული გვექნება

$$x_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\ (i_k = 0,1;\ k = 1,2,\ldots,n)$$

წერტილები და ისეთი $\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ ინტერვალები, რომ

$$1)\ x_{i_1,i_2,\ldots,i_n},\quad 2)\ \delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},i_n} \subset \delta_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$$

$$3)\ \bar{\delta}_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \cdot \bar{\delta}_{i_1',i_2',\ldots,i_n'} = 0\ (\text{თუ}\ (i_1,i_2,\ldots,i_n) \neq (i_1',i_2',\ldots,i_n'))$$

$$4)\ m\delta_{i_1,\ldots,i_n} < \frac{1}{n}.$$

რადგან ყოველი $x_{i_1,\ldots,i_n}$ წერტილი დაგროვების წერტილია P სიმრავლისათვის, ამიტომ შეიძლება $P\delta_{i_1,\ldots,i_n}$ სიმრავლეში ორი სხვადასხვა

$$x_{i_1,\ldots,i_n,0} \quad \text{და} \quad x_{i_1,\ldots,i_n,1}$$

წერტილის პოვნა და ისეთი ორი

$$\delta_{i_1,\ldots,i_n,0} \quad \text{და} \quad \delta_{i_1,\ldots,i_n,1}$$

ინტერვალის აგება, რომ ($i_{n+1}=0,1$-სათვის)

$$1)\ x_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} \in \delta_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} \quad 2)\ \overline{\delta}_{i_1,\ldots,i_{n+1}} \subset \delta_{i_1,\ldots,i_n}$$

$$3)\ \overline{\delta}_{i_1,\ldots,i_n,0}\cdot\overline{\delta}_{i_1,\ldots,i_n,1}=0,\ 4)\ m\delta_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} < \frac{1}{n+1}.$$

წარმოვიდგინოთ, რომ ეს პროცესი ჩატარებულია ყოველი ნატურალური n-სათვის.

ყოველ უსასრულო მიმდევრობას

$$(i_1,i_2,i_3,\ldots) \quad (i_k=0,1)$$

შევუსაბამოთ ის წერტილი

$$x_{i_1,i_2,i_3,\ldots},$$

რომელიც ჩადებული სეგმენტების

$$\overline{\delta}_{i_1} \quad \overline{\delta}_{i_1,i_2} \quad \overline{\delta}_{i_1,i_2,i_3}\ldots$$

თანაკვეთის ერთადერთ წერტილს წარმოადგენს.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ სხვადასხვა $i_1,i_2,i_3,\ldots$ და $i_1',i_2',i_3',\ldots$ მიმდევრობების შესაბამი

$$x_{i_1,i_2,i_3,\ldots} \quad \text{და} \quad x_{i_1',i_2',i_3',\ldots}$$

წერტილები სხვადასხვაა.

მართლაც, თუ n უმცირესია იმ m რიცხვთა შორის, რომელთათვისაც $i_m\neq i_m'$, მაშინ

$$i_1=i_1',\ i_2=i_2',\ldots,\ i_{n-1}=i_{n-1}',\ i_n\neq i_n'$$

და

$$\overline{\delta}_{i_1,\ldots,i_n} \quad \text{და} \quad \overline{\delta}_{i_1',\ldots,i_n'}$$

სეგმენტები არ იკვეთებიან, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$x_{i_1,i_2,i_3,\ldots} \neq x_{i_1',i_2',i_3',\ldots}$$

ვთქვათ,

$$S=\{x_{i_1,i_2,i_3,\ldots}\}.$$

I თავის, § 4-ის მე-8 თეორემის ძალით

$$\overline{\overline{S}}=c.$$

მაგრამ ადვილი საჩვენებელია, რომ $S\subset P$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{\overline{P}} \geqslant c.$$

მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ

$$\overline{\overline{P}} \leqslant c,$$

საიდანაც $\overline{\overline{P}} = c$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ჩვენს უახლოეს ამოცანას წარმოადგენს მიღებული შედეგის გადატანა ნებისმიერ ჩაკეტილ სიმრავლეზე. ამ მიზნისათვის სასარგებლოა „კონდენსაციის წერტილის“ ცნების შემოღება.

განმარტება (ე. ლინდელოფი). x_0 *წერტილს* E *სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი ეწოდება, თუ ამ წერტილის შემცველი ყოველი* (a,b) *ინტერვალი შეიცავს* E *სიმრავლის წერტილთა არათვლად სიმრავლეს.*

აშკარაა, რომ რაიმე სიმრავლის ყოველი კონდენსაციის წერტილი მით უმეტეს ამავე სიმრავლის დაგროვების წერტილს წარმოადგენს.

თეორემა 2 (ე. ლინდელოფი). *თუ* E *სიმრავლის არც ერთი წერტილი არ არის მისი კონდენსაციის წერტილი, მაშინ* E *სიმრავლე სასრულია ან თვლადია.*

დამტკიცება. (r,R) ინტერვალს ვუწოდოთ „წესიერი“, თუ 1) მისი ბოლოები r და R რაციონალურია; 2) ამ ინტერვალში E სიმრავლის სასრული ან თვლადი სიმრავლეა მოთავსებული. აშკარაა, რომ „წესიერ“ ინტერვალთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადია, რადგანაც, საზოგადოდ, რაციონალურ რიცხვთა (r,R) წყვილების სიმრავლე თვლადია.

ვაჩვენოთ, რომ E სიმრავლის ყოველი წერტილი (ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ E არაცარიელი სიმრავლეა) რაიმე „წესიერ“ ინტერვალშია მოთავსებული. მართლაც, ვთქვათ, $x\in E$. რადგან x არ არის E-ს კონდენსაციის წერტილი, ამიტომ არსებობს ისეთი (a,b) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს ამ წერტილს და რომელშიაც E სიმრავლის წერტილთა მხოლოდ თვლადი სიმრავლე მოხვდება. თუ ჩვენ ისეთ r და R რაციონალურ რიცხვებს ავიღებთ, რომ

$$a<r<x<R<b,$$

მაშინ (r,R) იქნება x-ის შემცველი „წესიერი“ ინტერვალი. აქვე შევნიშნოთ, რომ აქედან გამომდინარეობს „წესიერი“ ინტერვალების თვით არსებობაც.

გადავნომროთ ყველა წესიერი ინტერვალები

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$$

ახლახან დამტკიცებული დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E=\sum_{k=1}^{\infty} E\delta_k.$$

მარჯვენა მხარეში მოთავსებულ ჯამში შესაკრებთა თვლადი სიმრავლე გვაქვს; თავისი მხრივ თითოეული შესაკრები ან სასრულია ან თვლადია. აქედან გამომდინარეობს, რომ E ან სასრულია ან თვლადია.

შედეგი 1. თუ E სიმრავლე არათვლადია, მაშინ არსებობს ამ სიმრავლის ერთი მაინც კონდენსაციის წერტილი, რომელიც ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის.

საინტერესოა ამ შედეგის დაპირისპირება ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემასთან. იმ დროს, როდესაც ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა ეხება ყოველგვარ უსასრულო სიმრავლეს, უკანასკნელ შედეგში საქმე მხოლოდ არათვლად სიმრავლეებთან გვაქვს. სამაგიეროდ აქ, ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემისაგან განსხვავებით, არაა საჭირო E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის მოთხოვნა, და კონდენსაციის წერტილის არსებობის ფაქტის გარდა, აქ გარანტირებულია ისეთი კონდენსაციის წერტილთა არსებობა, რომლებიც შედიან E სიმრავლეში.

შედეგი 2. ვთქვათ, E წერტილოვანი სიმრავლეა, ხოლო P—მისი ყველა კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე. მაშინ $E—P$ სიმრავლე სასრული ან თვლადია.

მართლაც, $E—P$ სიმრავლის არც ერთი წერტილი, არ არის რა E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი, მით უფრო არ იქნება კონდენსაციის წერტილი თვით $E—P$ სიმრავლისათვის.

შედეგი 3. ვთქვათ, E არათვლადი სიმრავლეა და P მისი ყველა კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლეა. მაშინ EP სიმრავლე არათვლადია.

მართლაც, $EP=E-(E-P)$ და საკითხი მიიყვანება I თავის § 3-ის მე-10 თეორემაზე.

შევნიშნოთ, რომ მე-3 შედეგი ფარავს 1-ლ შედეგს.

თეორემა 3. თუ E სიმრავლე არათვლადია, მაშინ E სიმრავლის ყველა კონდენსაციის წერტილთა P სიმრავლე სრულყოფილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ ჯერ P სიმრავლის ჩაკეტილობა. ვთქვათ, x_0 ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილია. ავიღოთ ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი (a,b) ინტერვალი. მასში ერთი მაინც P სიმრავლის z წერტილი მოიძებნება. მაგრამ მაშინ (a,b) ინტერვალი, როგორც E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილის შემცველი ინტერვალი, E-ს წერტილთა არათვლად სიმრავლეს შეიცავს. რადგან (a,b) x_0-ის შემცველი ნებისმიერი ინტერვალია, ამიტომ x_0 E-ს კონდენსაციის წერტილი ყოფილა, და, მაშასადამე, იგი ეკუთვნის P-ს. ამგვარად, P ჩაკეტილია.

დაგვრჩენია დავრწმუნდეთ, რომ P-ს არა აქვს იზოლირებული წერტილები. ვთქვათ, $x_0 \in P$ და (a,b) მისი შემცველი ინტერვალია. მაშინ

$$Q=E\cdot(a,b)$$

სიმრავლე არათვლადია, და, ამიტომ, მე-2 თეორემის მე-3 შედეგის ძალით, Q-ში ამავე სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა არათვლადი სიმრავლე მო-

ხვდება. მაგრამ $Q \subset E$ და ამიტომ Q სიმრავლის ყველა კონდენსაციის წერტილი მით უფრო E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილებიც იქნება, ასე რომ Q-ში (და მაშ (a,b)-შიც) P სიმრავლის წერტილთა არათვლადი სიმრავლეა მოთავსებული. ამგვარად, x_0 წერტილის შემცველი ნებისმიერი ინტერვალი P სიმრავლის წერტილთა არათვლად სიმრავლეს შეიცავს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x_0 \in P'$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. (*გ. კანტორი — ი. ბენდიქსონი*). *ყოველი არათვლადი, ჩაკეტილი F სიმრავლე წარმოიდგინება*

$$F=P+D$$

სახით, სადაც P სრულყოფილი, ხოლო D-სასრული ან თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. მართლაც, თუ P წარმოადგენს F-ის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლეს, მაშინ $P \subset F$ და $D=F-P$ სასრული ან თვლადია.

შედეგი. არათვლად ჩაკეტილ სიმრავლეს c სიმრავლე აქვს.

სავარჯიშო II თავისათვის

1. თუ $f(x)$ $[a,b]$-ზე მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც $f(x) \geqslant c$, ყოველი c-სათვის, ჩაკეტილია.

2. ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე წარმოადგენს ღია სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლის თანაკვეთას.

3. განაზოგადეთ განცალებადობის თეორემა არაშემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლეებისათვის.

4. დაამტკიცეთ, რომ $[0,1]$-ის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა ათწილადად დაშლა შესაძლებელია ციფრი 7-ის დაუხმარებლად, სრულყოფილია.

5. წარმოადგინეთ $[0,1]$ არაგადამკვეთი სრულყოფილი სიმრავლეების c ჯამის სახით.

6. დაამტკიცეთ, რომ $[0,1]$-ის ირაციონალურ წერტილთა სიმრავლე არ შეიძლება წარმოვადგინოთ ჩაკეტილ სიმრავლეების თვლადი სიმრავლის ჯამად.

7. $[0,1]$-ზე ააგეთ ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილი იქნება ყოველ რაციონალურ და უწყვეტი იქნება ყოველ ირაციონალურ წერტილზე.

8. დაამტკიცეთ $[0,1]$-ზე ისეთი ფუნქციის აგების შეუძლებლობა, რომელიც უწყვეტი იქნება ყოველ რაციონალურ და წყვეტილი იქნება ყოველ ირაციონალურ წერტილზე.

9. თუ $f(x)$ ფუნქცია, მოცემული $[a;b]$-ზე, ისეთია, რომ $Z(f(x) \geqslant c)$ და $Z(f(x) \leqslant c)$ სიმრავლეები, ყოველი c-სათვის, ჩაკეტილი არიან, მაშინ $f(x)$ უწყვეტია.

10. თუ E სიმრავლე დაფარულია ინტერვალთა ნებისმიერი $\mathfrak{M}$ სისტემით, მაშინ ამ უკანასკნელიდან შეიძლება გამოვყოთ თვლადი ქვესისტემა $\mathfrak{M}^*$, რომელიც აგრეთვე ფარავს E-ს (ე. ლინდელოფი).

11. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სიმრავლის შიგა წერტილების სიმრავლე ღიაა.

თ ა ვ ი III

ზომადი სიმრავლეები

§ 1. შემოსაზღვრული ღია სიმრავლის ზომა

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში დიდი მნიშვნელობა აქვს წერტილოვანი სიმრავლის *ზომის* ცნებას, რომელიც ანზოგადოებს ცნებას მონაკვეთის სიგრძის, მართკუთხედის ფართობის, პარალელეპიპედის მოცულობის და ა. შ. ამ თავში ჩვენ შევისწავლით *წრფივ* შემოსაზღვრულ წერტილოვან სიმრავლეთა გაზომვის თეორიას, რომელიც ა. ლებეგს ეკუთვნის.

რადგან ღია სიმრავლეებს უმარტივესი სტრუქტურა აქვთ, ბუნებრივია საკითხის შესწავლა ასეთი სიმრავლეებით დავიწყოთ.

განმარტება 1. (a,b) *ინტერვალის ზომა, მის სიგრძეს, ე. ი.* $b-a$ *რიცხვს ეწოდება.* ეს რიცხვი ასე აღინიშნება:

$$m(a,b)=b-a.$$

ცხადია, რომ ყოველთვის $m(a,b)>0$.

ლემა 1. *თუ* Δ *ინტერვალში მოთავსებულია ურთიერთ არაგადამკვეთ* $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ *ინტერვალები, მაშინ*

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \leqslant m\Delta.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\Delta=(A,B),\ \ \delta_k=(a_k,b_k)\ \ (k=1,2,\ldots,n).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ δ_k ინტერვალები გადანომრილი არიან მათი მარცხენა ბოლოების ზრდის მიხედვით, ე. ი. რომ

$$a_1<a_2<\ldots<a_n.$$

მაგრამ მაშინ აშკარაა, რომ

$$b_k\leqslant a_{k+1}\ \ (k=1,2,\ldots,n-1),$$

რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში δ_k და δ_{k+1} ინტერვალები გადაიკვეთებოდენ ერთმანეთთან. ამის გამო ჯამი

$$Q=(B-b_n)+(a_n-b_{n-1})+\dots+(a_2-b_1)+(a_1-A)$$

არაუარყოფითია. მაგრამ ცხადია, რომ

$$m\Delta=\sum_{k=1}^{n} m\delta_k+Q,$$

საიდანაც გამომდინარეობს ლემა.

შედეგი. თუ Δ ინტერვალზე მოთავსებულია ურთიერთ არაგადამკვეთი δ_k ინტერვალების თვლადი სიმრავლე ($k=1,2,3\dots$), მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k\leqslant m\Delta.$$

[როდესაც საქმე გვექნება დადებით განშლად მწკრივთან, მას მივაწერთ $+\infty$-ის ტოლ ჯამს; ამიტომ ყოველ დადებით მწკრივს აქვს გარკვეული ჯამი. უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k<C$$

(დადებითი მწკრივისათვის) უზრუნველყოფს მის კრებადობას]

განმარტება 2. არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლის mG ზომა ეწოდება მისი ყველა შემადგენელი δ_k ინტერვალების სიგრძეთა ჯამს:

$$mG=\sum_k m\delta_k.$$

(თუ ჩვენ არ ვიცით $\{\delta_k\}$ სიმრავლე სასრულია თუ თვლადი, მაშინ ვიხმართ $\sum\limits_k m\delta_k$ აღნიშვნას; ამ აღნიშვნაში იგულისხმება, გარემოებისდამიხედვით

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \quad \text{ან} \quad \sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k).$$

ზემოაღნიშნული შედეგის ძალით

$$mG<+\infty.$$

თუ G სიმრავლე ცარიელია, მაშინ, თანახმად განმარტებისა,

$$mG=0,$$

ასე რომ ყოველთვის $mG\geqslant 0$.

თუ Λ წარმოადგენს ინტერვალს, რომელიც შეიცავს ღია G სიმრავლეს, მაშინ

$$mG\leqslant m_\Delta,$$

რაც იმავე შედეგიდან გამომდინარეობს.

მაგალითი (**კანტორის G_0 სიმრავლე**). კანტორის G_0 სიმრავლის აგება მიმდევრობითი საფეხურების რიგისავან შედგება.

პირველ საფეხურზე აიღებოდა $\frac{1}{3}$ სიგრძის $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ინტერვალი.

მეორე საფეხურზე მას ემატებოდა ორი ინტერვალი $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ და $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, თვითეული $\frac{1}{9}$ სიგრძისა.

მესამე საფეხურზე მათ კიდევ ოთხი, თვითეული $\frac{1}{27}$ სიგრძის, ინტერვალი ემატებოდა, და ა. შ.

ამგვარად,

$$mG_0 = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots$$

თუ ამ პროგრესიას შევაჯამებთ ცნობილი ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$mG_0=1.$$

თეორემა 1. ვთქვათ, G_1 და G_2 ორი შემოსაზღვრული ღია სიმრავლეა. თუ $G_1\subset G_2$, მაშინ

$$mG_1\leqslant mG_2.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\delta_i (i=1,2,\ldots)$ და $\Delta_k (k=1,2,\ldots)$ არიან, შესაბამად, G_1 და G_2 სიმრავლეების შემადგენელი ინტერვალები.

II თავის § 5-ის მე-4 თეორემის ძალით ყოველი δ_i ინტერვალი ერთ (და მხოლოდ ერთ) Δ_k ინტერვალში შედის.

ამიტომ $\{\delta_i\}$ სიმრავლე შეიძლება დავანაწილოთ ურთიერთ არაგადამკვეთ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ქვესიმრავლეებად, δ_i ინტერვალის A_k-დმი მიკუთვნებით იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$\delta_i\subset\Delta_k.$$

მაშინ, ორმაგი მწკრივების ცნობილი თვისების გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$mG_1 = \sum_i m\delta_i=\sum_k\Bigl(\sum_{\delta_i\in A_k} m\delta_i\Bigr).$$

მაგრამ, 1-ლი ლემის შედეგის ძალით,

$$\sum_{\delta_i \in \Delta_k} m\delta_i \leqslant m\Delta_k,$$

საიდანაც

$$mG_1 \leqslant \sum_k m\Delta_k = mG_1,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შედეგი. შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლის ზომა წარმოადგენს მასში შემავალ ყოველნაირ ღია შემოსაზღვრულ სიმრავლეების ზომათა ზუსტ ზედა საზღვარს.

თეორემა 2. თუ შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლე წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთ ღია სიმრავლეთა სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$G = \sum_k G_k \quad (G_k G_{k'} = 0,\ k \neq k'),$$

მაშინ

$$mG = \sum_k mG_k.$$

ზომის ამ თვისებას სრული ადიტიურობა ეწოდება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\delta_i^{(k)}$ $(i=1,2,\ldots)$ შემადგენელი ინტერვალებია G_k სიმრავლისა. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი მათგანი შემადგენელი ინტერვალია G სიმრავლისა.

მართლაც, ის გარემოება, რომ

$$\delta_i^{(k)} \subset G,$$

აშკარაა. დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ $\delta_i^{(k)}$-ს ბოლოები G-ს არ ეკუთვნიან. დავუშვათ, მაგალითად, რომ $\delta_i^{(k)}$-ს მარჯვენა ბოლო ეკუთვნის G-ს. მაშინ ეს ბოლო (დავარქვათ მას μ) უნდა ეკუთვნოდეს რომელიმე შესაკრებ სიმრავლეს. ვთქვათ,

$$\mu \in G_{k'}.$$

(ცხადია, რომ $k' \neq k$, რადგან μ წერტილი G_k-ს უდავოთ არ ეკუთვნის). მაგრამ $G_{k'}$ სიმრავლე ღიაა, და, მაშასადამე, μ ეკუთვნის ამ სიმრავლის ერთ-ერთ შემადგენელ ინტერვალს

$$\mu \in \delta_i^{(k')}.$$

მაგრამ ეს იმას იწვევს, რომ $\delta_i^{(k)}$ და $\delta_i^{(k')}$ იკვეთებიან, რაც ეწინააღმდეგება პირობას

$$G_k G_{k'} = 0.$$

ამგვარად, ყოველი $\delta_i^{(k)}$, მართლაც შემადგენელი ინტერვალია G სიმრავლისა. მეორეს მხრივ, G სიმრავლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ერთ $\delta_i^{(k)}$ ინტერვალს მაინც. ბოლოს, ყველა ეს ინტერვალი სხვადასხვაა. ამგვარად, სიმრავლე

$$\{\delta_i^{(k)}\}\ (i=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$$

წარმოადგენს G ჯამის ყველა შემადგენელ ინტერვალების სიმრავლეს.

ამის დადგენის შემდეგ, ადვილია მტკიცების დაბოლოება:

$$mG=\sum_{i,k} m\delta_i^{(k)}=\sum_k\left(\sum_i m\delta_i^{(k)}\right)=\sum_k mG_k,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

იმისათვის, რომ გავავრცელოთ (სათანადო ცვლილებებით) მიღებული თეორემა *გადამკვეთი* შესაკრებების ჯამისათვის, ჩვენ ორი მარტივი ლემის დამტკიცება დაგვჭირდება.

ლემა 2. *ვთქვათ, $[P,Q]$ სეგმენტი დაფარულია (λ,μ) ინტერვალების სასრული H სისტემით. მაშინ*

$$Q-P<\sum_H m(\lambda,\mu).$$

დამტკიცება. გამოვყოთ H სისტემიდან მისი რაღაც H^* ნაწილი, რომელიც შემდეგნაირად აიგება: ვუწოდოთ (λ_1,μ_1) H სისტემის რომელიმე ისეთ ინტერვალს, რომელიც P წერტილს შეიცავს,

$$\lambda_1<P<\mu_1$$

(ერთი მაინც ასეთი ინტერვალი აუცილებლად არსებობს). თუ აღმოჩნდა, რომ

$$\mu_1>Q,$$

მაშინ (λ_1,μ_1) ინტერვალი შეადგენს ასაგებ H^* სისტემას.

თუ $\mu_1\leqslant Q$, მაშინ $\mu_1\in[P,Q]$ და H სისტემაში შესაძლებელია ისეთი (λ_2,μ_2) ინტერვალის პოვნა, რომელიც შეიცავს μ_1-ს,

$$\lambda_2<\mu_1<\mu_2.$$

თუ აღმოჩნდა, რომ

$$\mu_2>Q,$$

პროცესი დამთავრებულია და (λ_1,μ_1) და (λ_2,μ_2) ინტერვალები შეადგენენ H^* სისტემას.

თუ კი $\mu_2\leqslant Q$, მაშინ $\mu_2\in[P,Q]$ და H სისტემაში მოიძებნება ისეთი (λ_3,μ_3) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს μ_2-ს

$$\lambda_3<\mu_2<\mu_3.$$

თუ $\mu_3>Q$, პროცესი დამთავრებულია, ხოლო, თუ $\mu_3\leqslant Q$, ვაგრძელებთ ინტერვალების გამოყოფას.

მაგრამ H სიმრავლე, პირობის მიხედვით, სასრულია, ჩვენი პროცესი კი, H-გან ახალ-ახალი ინტერვალების გამოყოფაში მდგომარეობს, რადგან

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$$

ამიტომ პროცესი აუცილებლად უნდა დასრულდეს, მისი დასასრული კი იმაში მდგომარეობს, რომ რომელიღაც μ_k წერტილი უნდა აღმოჩნდეს Q წერტილის მარჯვნივ.

ვთქვათ,

$$\mu_n > Q,$$

მაგრამ $\mu_{n-1} \leqslant Q$, ე. ი. პროცესი მთავრდება n-ურ საფეხურის შემდეგ.

მაშინ

$$(\lambda_1, \mu_1),\ (\lambda_2, \mu_2), \ldots,\ (\lambda_n, \mu_n)$$

შეადგენენ H^* სისტემას. ამასთან

$$\lambda_{k+1} < \mu_k \ (k=1,2,\ldots,n-1).$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) > \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) + (\mu_n - \lambda_n) = \mu_n - \lambda_1,$$

და, რადგან

$$\mu_n - \lambda_1 > Q - P,$$

ამიტომ

$$Q - P < \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k),$$

საიდანაც, მით უფრო

$$Q - P < \sum_{H} (\mu - \lambda).$$

ლემა 3. ვთქვათ, Δ ინტერვალი წარმოადგენს ღია სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$\Delta = \sum_k G_k.$$

მაშინ

$$m\Delta = \sum_k mG_k.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Delta = (A, B)$ და G_k სიმრავლის შემადგენელი ინტერვალები არიან $\delta_i^{(k)} (i = 1, 2, \ldots)$.

ავიღოთ დადებითი ε რიცხვი $\left(0<\varepsilon<\frac{B-A}{2}\right)$ და განვიხილოთ Δ ინტერვალში შემავალი $[A+\varepsilon, B-\varepsilon]$ სეგმენტი.

ეს სეგმენტი $\delta_i^{(k)}$ $(i=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$ ინტერვალთა სისტემით არის დაფარული. თუ ამ სისტემისათვის II თავის § 2-ში განხილულ ბორელის თეორემას გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$\delta_{i_s}^{(k_s)}\ (s=1,2,\ldots n)$$

ინტერვალთა ისეთ სასრულ სისტემას, რომელიც ფარავს $[A+\varepsilon, B-\varepsilon]$ სეგმენტს. წინა ლემის ძალით,

$$B-A-2\varepsilon<\sum_{s=1}^{n} m\delta_{i_s}^{(k_s)},$$

საიდანაც მით უფრო

$$B-A-2\varepsilon\leqslant\sum_{i,k} m\delta_i^{(k)}=\sum_k\left(\sum_i m\delta_i^{(k)}\right)=\sum_k mG_k.$$

ვინაიდან ε ნებისმიერად მცირეა, ამიტომ

$$B-A\leqslant\sum_k mG_k$$

და ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლე წარმოადგენს ღია G_k სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$G=\sum_k G_k,$$

მაშინ

$$mG\leqslant\sum_k mG_k.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, Δ_i $(i=1,2,\ldots)$ G სიმრავლის შემადგენელი ინტერვალებია. მაშინ

$$mG=\sum_i m\Delta_i.$$

მაგრამ

$$\Delta_i=\Delta_i\sum_k G_k=\sum_k(\Delta_i G_k),$$

საიდანაც, მე-3 ლემის ძალით

$$m\Delta_i\leqslant\sum_k m(\Delta_i G_k),$$

და, მაშასადამე,

$$mG \leqslant \sum_i \Big[\sum_k m(\Delta_i G_k)\Big] = \sum_k \Big[\sum_i m(\Delta_i G_k)\Big]. \qquad (*)$$

მეორეს მხრივ,

$$G_k = G_k \cdot \sum_i \Delta_i = \sum_i (\Delta_i G_k).$$

ამასთან (და ეს ამ შემთხვევაში არსებითია) მარჯვენა მხარის ცალკეული შესაკრებები ერთმანეთთან *არ იკვეთებიან* (იმიტომ რომ $\Delta_i \Delta_{i'} = 0$, როცა $i \neq i'$). მაშასადამე, ჩვენ ისეთ პირობებში ვიმყოფებით, როდესაც შესაძლებელია მე-2 თეორემის გამოყენება, და ამიტომ

$$\sum_i m(\Delta_i G_k) = mG_k. \qquad (*_*)$$

$(*)$ და $(*_*)$-ის დაპირისპირებით მივიღებთ გამოთქმულ დებულებას.

§ 2. შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლის ზომა

ვთქვათ, F არაცარიელი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლეა და S—მისი შემცველი უმცირესი სეგმენტი. როგორც ცნობილია (თავი II, § 3, თეორემა 5), C_sF ღია სიმრავლეა, და ამიტომ მას აქვს გარკვეული ზომა $m[C_sF]$. ეს გარემოება გვაძლევს საბაბს შემდეგი განმარტების შემოღებისა.

განმარტება 1. *არაცარიელი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლის ზომა ეწოდება რიცხვს*

$$mF = B - A - m[C_sF],$$

სადაც $S = [A,B]$ არის F სიმრავლის შემცველი უმცირესი სეგმენტი.

ცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლისათვის ზომის განმარტება საჭირო არ არის, ვინაიდან ასეთი სიმრავლე ღიაა, და მის ზომად ჩვენ შეთანხმებული ვართ ჩავთვალოთ რიცხვი 0. შემდეგ, ადვილია იმის ჩვენება, რომ არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლე არ შეიძლება ღია აღმოჩნდეს (ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით), ასე რომ არაა საჭირო დაისვას საკითხი ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეთა ზომის განმარტებათა ურთიერთკავშირის შესახებ.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

1. $F = [a,b]$. ამ შემთხვევაში, აშკარაა, რომ $S = [a,b]$ და $C_sF = 0$, ასე რომ

$$m[a,b] = b - a,$$

ე. ი. სეგმენტის ზომა მის სიგრძეს უდრის.

2. E არის არაგადამკვეთი სეგმენტების ჯამი სასრული რაოდენობით

$$E = [a_1,b_1] + [a_2,b_2] + \dots + [a_n,b_n].$$

შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ სეგმენტები დანომრილია მათი მარცხენა ბოლო წერტილების ზრდის მიხედვით, მაშინ აშკარაა, რომ

$$b_k < a_{k+1} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$S=[a_1,b_n],\quad C_sE=(b_1,a_2)+(b_2,a_3)+\dots+(b_{n-1},\ a_n).$$

მაშასადამე,

$$mE=b_n-a_1-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k),$$

ე. ი. სასრული რაოდენობის ურთიერთ არაგადამკვეთი სეგმენტების ჯამის ზომა ამ სეგმენტების სიგრძეთა ჯამს უდრის.

3. ვთქვათ, $F=P_0$ (კანტორის სრულყოფილი სიმრავლე). ამ შემთხვევაში $S=[0,1]$ და $C_sF=G_0$, საიდანაც

$$mP_0=1-1=0,$$

ე. ი. კანტორის სრულყოფილი P_0 სიმრავლის ზომა უდრის ნულს. ეს ფაქტი საინტერესოა დაუპირისპიროთ იმ გარემოებას, რომ P_0-ის სიმძლავრე არის c.

თეორემა 1. შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლის ზომა არაუარყოფითი რიცხვია.

დამტკიცება. მართლაც, თუ 1-ლი განმარტების აღნიშვნებით ვისარგებლებთ, მაშინ აშკარაა, რომ

$$C_sF\subset(A,B),$$

და § 1-ის 1-ლი თეორემის მიხედვით

$$m[C_sF]\leqslant m(A,B)=B-A,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$mF\geqslant 0.$$

ლემა. ვთქვათ, F შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლეა, რომელიც Δ ინტერვალში შედის, მაშინ

$$mF=m\Delta-m[C_\Delta F].$$

დამტკიცება. $C_\Delta F$ სიმრავლე ღიაა, ასე რომ ლემას აზრი აქვს. ვთქვათ, $\Delta=(A,B)$, ხოლო F სიმრავლის შემცველი უმცირესი სეგმენტი კი არის $S=[a,b]$ (ნახ. 8). მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$C_\Delta F=C_\Delta S+C_sF.$$

მარჯვენა ნაწილის ორივე შესაკრები ღია სიმრავლეა და ერთმანეთს არ კვეთენ. მაშინ, ზომის ადიტივობის თვისების გამო (§ 1, თეორემა 2) გვექნება

$$m[C_\Delta F]=m[C_\Delta S]+m[C_S F].$$

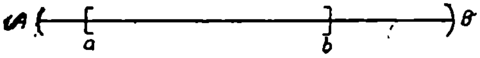
მაგრამ აშკარაა, რომ $C_\Delta S=(A,a)+(b,B)$, საიდანაც

$$m[C_\Delta S]=(a-A)+(B-b),$$

და, მაშასადამე,

$$m[C_\Delta F]=(B-A)-(b-a)+m[C_S F],$$

რაც ამტკიცებს ლემას.



ნახ. 8

თეორემა 2. ვთქვათ, F_1 და F_2 ორი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლეა. თუ $F_1\subset F_2$, მაშინ

$$mF_1\leqslant mF_2.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, Δ ინტერვალია, რომელიც შეიცავს F_2 სიმრავლეს. მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$C_\Delta F_1\supset C_\Delta F_2,$$

და, მაშასადამე,

$$m[C_\Delta F_1]\geqslant m[C_\Delta F_2],$$

ასე რომ საკითხი წინა ლემაზე დაიყვანება.

შედეგი. შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლის ზომა წარმოადგენს F-ში შემავალი ყველა ჩაკეტილი სიმრავლეების ზომათა ზუსტ ~~ნამდვილ~~ ზედა საზღვარს.

თეორემა 3. ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა, ხოლო G—ღია შემოსაზღვრული სიმრავლე. თუ $F\subset G$, მაშინ

$$mF\leqslant mG.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, Δ წარმოადგენს G-ს შემცველ ინტერვალს. ადვილია ჩვენება, რომ

$$\Delta=G+C_\Delta F,$$

საიდანაც, § 1-ის მე-3 თეორემის ძალით, მივიღებთ

$$m\Delta\leqslant mG+m[C_\Delta F],$$

და საქმე ლემაზე დაიყვანება.

თეორემა 4. ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლის ზომა წარმოადგენს G-ში შემავალი ჩაკეტილი სიმრავლეების ზომათა ნამდვილ ზედა საზღვარს.

ზუსტ

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. წინა თეორემის ძალით, mG ზედა საზღვარია ჩაკეტილი $F\subset G$ სიმრავლეების ზომებისა და უნდა ვაჩვენოთ, რომ ამ ჩაკეტილ სიმრავლეთა ზომები შეგვიძლია რაგინდ დაუახლოვოთ mG-ს.

ვთქვათ, G-ს შემადგენელი ინტერვალებია (λ_k,μ_k) $(k=1,2,\ldots)$, ასე რომ

$$m\,G=\sum(\mu_k-\lambda_k).$$

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და იმდენად დიდი ნატურალური n შევარჩიოთ, რომ აღმოჩნდეს

$$\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k)>mG-\frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ, ყოველი k-სათვის ისეთი $[\alpha_k,\beta_k]$ სეგმენტი ვიპოვოთ, რომ გვქონდეს

$$[\alpha_k,\beta_k]\subset(\lambda_k,\mu_k),\ \ m[\alpha_k,\beta_k]>m(\lambda_k,\mu_k)-\frac{\varepsilon}{2n},$$

(რისთვისაც საკმარისია ისეთი η_k ავიღოთ, რომ

$$0<\eta_k<\min\left[\frac{\mu_k-\lambda_k}{2},\ \frac{\varepsilon}{4n}\right]$$

და აღვნიშნოთ $\alpha_k=\lambda_k+\eta_k$, $\beta_k=\mu_k-\eta_k$). დასასრულს, დავუშვათ, რომ

$$F_0=\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k,\beta_k].$$

მაშინ, აშკარაა, $F_0\subset G$; F_0 ჩაკეტილია, და

$$mF_0=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)>\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k)-\frac{\varepsilon}{2}>mG-\varepsilon.$$

რადგან ε რაგინდ მცირეა, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი F ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ზ ო მ ა წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს F-ი ს შ ე მ ც ვ ე ლ ი ყ ო ვ ე ლ ნ ა ი რ ი ღ ი ა შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ი ს ზ ო მ ა თ ა ზ უ ს ტ ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც ზემოთ, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ შეიძლება ავაგოთ ისეთი ღია შემოსაზღვრული სიმრავლე, რომელიც შეიცავს F-ს და რომლის ზომა რაგინდ ახლოა mF-თან.

ამ მიზნით ავიღოთ F-ის შემცველი, Δ ინტერვალი, და განვიხილოთ ღია, $C_\Delta F$ სიმრავლე. როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$, ჩვენ შეგვიძლია (მე-4 თეორემის ძალით) ისეთი ჩაკეტილი Φ სიმრავლე ვიპოვოთ, რომ

$$\Phi\subset C_\Delta F;\ m\Phi>m[C_\Delta F]-\varepsilon.$$

დავუშვათ

$$G_0=C_\Delta\Phi.$$

ადვილი შესამჩნევია, G_0 ღია სიმრავლეა, რომელიც შეიცავს F-ს. ამასთანავე

$$mG_0=m\Delta-m\Phi<m\Delta-m[C_\Delta F]+\varepsilon=mF+\varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. ვთქვათ, შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლე წარმოადგენს ჩაკეტილ ურთიერთ არაგადამკვეთ სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის ჯამს.

$$F=\sum_{k=1}^{n}F_k \qquad (F_k\cdot F_{k'}=0,\ k\neq k').$$

მაშინ

$$mF=\sum_{k=1}^{n}mF_k.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ საკმარისია ორი შესაკრები სიმრავლის შემთხვევა განვიხილოთ

$$F=F_1+F_2' \quad (F_1\cdot F_2=0).$$

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$, და ისეთი ორი შემოსაზღვრული ღია G_1 და G_2 სიმრავლე შევარჩიოთ, რომ აღმოჩნდეს

$$G_i\supset F_i,\ mG_i<mF_i+\frac{\varepsilon}{2}\ (i=1,2),$$

ეს შესაძლებელია წინა თეორემის ძალით.

აღვნიშნოთ

$$G=G_1+G_2.$$

მაშინ G არის შემოსაზღვრული, F სიმრავლის შემცველი, ღია სიმრავლე. მაშასადამე,

$$mF\leqslant mG\leqslant mG_1+mG_2<mF_1+mF_2+\varepsilon.$$

ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო, ეს უტოლობა გვაძლევს

$$mF\leqslant mF_1+mF_2. \tag{*}$$

მეორეს მხრივ, განცალებადობის თეორემის ძალით, ისეთი ორი B_1 და B_2 ღია სიმრავლე არსებობს, რომ

$$B_i\supset F_i\ (i=1,2),\ B_1B_2=0.$$

ამ შენიშვნის შემდეგ ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და ვიპოვოთ ისეთი შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლე, რომ

$$G\supset F \text{ და } mG<mF+\varepsilon.$$

მაშინ B_1G და B_2G წარმოადგენენ ურთიერთ არაგადამკვეთ ღია შემოსაზღვრულ სიმრავლეებს, რომლებიც, სათანადოდ, F_1 და F_2-ს შეიცავენ.

მაშასადამე

$$mF_1+mF_2\leqslant m(B_1G)+m(B_2G)=m[B_1G+B_2G],$$

(აქ ჩვენ ვისარგებლეთ ზომის ადიტივობით ღია სიმრავლეებისათვის). მაგრამ $B_1G+B_2G\subset G$. საიდანაც

$$mF_1+mF_2\leqslant mF<mF+\varepsilon$$

და ε-ის ნებისმიერობის ძალით

$$mF_1+mF_2\leqslant mF. \qquad (^*_*)$$

(*) და ($^*_*$) დაპირისპირებით, მივიღებთ

$$mF=mF_1+mF_2,$$

რის დამტკიცებასაც მოვითხოვდით.

§ 3. შემოსაზღვრული სიმრავლის შიგა და გარე ზომები

განმარტება 1. შემოსაზღვრული E სიმრავლის გარე ზომა m^*E ეწოდება E სიმრავლის შემცველ ყოველნაირ შემოსაზღვრულ ღია სიმრავლეების ზომათა ზუსტ ქვედა საზღვარს

$$m^*E=\inf_{G\supset E}\{mG\}.$$

ცხადია, რომ ყოველი შემოსაზღვრული E სიმრავლისათვის გარე ზომა არსებობს, და ამასთან

$$0\leqslant m^*E<+\infty.$$

განმარტება 2. შემოსაზღვრული E სიმრავლის შიგა ზომა m_*E, ეწოდება E სიმრავლეში შემავალ ყოველნაირ ჩაკეტილ სიმრავლეთა ზომების ზუსტ ზედა საზღვარს

$$m_*E=\sup_{F\subset E}\{mF\}.$$

აშკარაა, რომ ყოველი შემოსაზღვრული E სიმრავლისათვის არსებობს შიგა ზომა, და ამასთან

$$0\leqslant m_*E<+\infty.$$

თეორემა 1. თუ G ღია შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ

$$m^*G=m_*G=mG.$$

თეორემა გამომდინარეობს § 1-ის 1-ლი თეორემის შედეგიდან და § 2-ის მე-4 თეორემიდან.

თეორემა 2. თუ F ჩაკეტილი შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ

$$m^*F=m_*F=mF.$$

თეორემა გამომდინარეობს § 2-ის მ-2 თეორემის შედეგიდან და მე-5 თეორემიდან.

თეორემა 3. *ყოველი შემოსაზღვრული* E *სიმრავლისათვის*

$$m_*E\leqslant m^*E.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, G შემოსაზღვრული ღია სიმრავლეა, რომელიც შეიცავს E სიმრავლეს. E სიმრავლის როგორი ჩაკეტილი F ქვესიმრავლეც არ უნდა ავიღოთ, გვექნება $F\subset G$ და, § 2-ის მე-3 თეორემის ძალით $mF\leqslant mG$. აქედან

$$m_*E\leqslant mG.$$

მაგრამ, რადგანაც ეს სამართლიანია E სიმრავლის შემცველ ყოველ ღია შემოსაზღვრულ G სიმრავლისათვის, ამიტომ

$$m_*E\leqslant m^*E,$$

რის დამტკიცებასაც ვთხოულობდით.

თეორემა 4. *ვთქვათ,* A *და* B *შემოსაზღვრული სიმრავლეებია. თუ* $A\subset B$, *მაშინ*

$$m_*A\leqslant m_*B,\quad m^*A\leqslant m^*B.$$

დამტკიცება. ორივე უტოლობა ანალოგიურად მტკიცდება. შევჩერდეთ, მაგალითისათვის, პირველ მათგანზე.

ვთქვათ, S წარმოადგენს იმ სიმრავლეს, რომელიც შედგება A სიმრავლის ყველა ჩაკეტილი ქვესიმრავლეების ზომებისაგან, და T ასეთივე სიმრავლეა B სიმრავლისათვის. მაშინ

$$m_*A=\sup S,\quad m_*B=\sup T.$$

ვთქვათ, F წარმოადგენს A სიმრავლის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს, მაშინ F მით უმეტეს B სიმრავლის ქვესიმრავლეა. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$S\subset T,$$

და თეორემა გამომდინარეობს იმ ცნობილი ფაქტიდან, რომ რაიმე სიმრავლის ქვესიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი არ აღემატება თვით ამ სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს.

თეორემა 5. *თუ შემოსაზღვრული* E *სიმრავლე წარმოადგენს* E_k *სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს,*

$$E=\sum_k E_k$$

მაშინ

$$m^*E\leqslant\sum_k m^*E_k.$$

დამტკიცება. Σm^*E_k მწკრივის განშლადობის შემთხვევაში თეორემა აშკარაა. ვიგულისხმოთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია. ავიღებთ რა ნებისმიერ $\varepsilon>0$, ჩვენ შეგვიძლია ისეთი ღია შემოსაზღვრული G_k სიმრავლეები ვიპოვოთ, რომ

$$G_k \supset E_k,\ mG_k < m^*E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\ (k=1,2,3,\dots).$$

Δ იყოს E სიმრავლის შემცველი რაიმე ინტერვალი. მაშინ $E \subset \Delta \sum_k G_k$, საიდანაც, § 1-ის მე-3 თეორემის ძალით

$$m^*E \leqslant m\left[\Delta \sum_k G_k\right] = m\left[\sum_k \Delta G_k\right] \leqslant \sum_k m(\Delta G_k) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k m\, G_k \leqslant \sum_k m^*E_k + \varepsilon,$$

და თეორემის სამართლიანობა ε რიცხვის ნებისმიერობიდან გამომდინარეობს.

თეორემა 6. თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთი E_k სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k'),$$

მაშინ

$$m_*E \geqslant \sum_k m^* E_k.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ პირველი n სიმრავლე $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$. ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობენ ისეთი ჩაკეტილი F_k სიმრავლეები, რომ

$$F_k \subset E_k,\ mF_k > m_*E_k - \frac{\varepsilon}{n}\ (k=1,2,\dots,n).$$

F_k სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან და მათი ჯამი $\sum_{k=1}^{n} F_k$ ჩაკეტილია. აქედან, § 2-ის მე-6 თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ

$$m_*E \geqslant m\left[\sum_{k=1}^{n} F_k\right] = \sum_{k=1}^{n} m\,F_k > \sum_{k=1}^{n} m_*E_k - \varepsilon.$$

რადგან $\varepsilon>0$ ნებისმიერია, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{n} m_*E_k \leqslant m_*E.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია შესაკრებ სიმრავლეთა სასრული რიცხვის შემთხვევაში. თუ კი შესაკრები სიმრავლეები თვლად სიმრავლეს შეადგენენ, მაშინ n რიცხვის ნებისმიერობის გამოყენებით აღმოვაჩენთ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_* E_k$ მწკრივის კრებადობას და

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_* E_k \leqslant m_* E$$

უტოლობას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თეორემა ძალას ჰკარგავს, თუ მოვხსნით პირობას იმის შესახებ, რომ E_k სიმრავლეებს არ ჰქონდეთ საერთო ელემენტები. მაგალითად, თუ

$$E_1=[0,1],\ E_2=[0,1],\ E=E_1+E_2,$$

მაშინ $m_*E=1$, $m_*E_1+m_*E_2=2$.

თეორემა 7. ვთქვათ, E შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ Δ ამ სიმრავლის შემცველი ინტერვალია, მაშინ

$$m^*E+m_*[C_\Delta E]=m\Delta.$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და ვიპოვოთ ისეთი ჩაკეტილი F სიმრავლე, რომ

$$F\subset C_\Delta E,\ mF>m_*[C_\Delta E]-\varepsilon.$$

თუ ახლა მივიღებთ $G=C_\Delta F$, მაშინ G იქნება ისეთი შემოსაზღვრული ღია სიმრავლე, რომელიც შეიცავს E-ს, საიდანაც, § 2-ის ლემის დახმარებით, აღმოვაჩენთ

$$m^*E\leqslant mG=m\Delta-mF<m\Delta-m_*[C_\Delta E]+\varepsilon.$$

აქედან, ε-ის ნებისმიერობის ძალით, გამომდინარეობს, რომ

$$m^*E+m_*[C_\Delta E]\leqslant m\Delta.$$

შებრუნებული უტოლობის

$$m^*E+m_*[C_\Delta E]\geqslant m\Delta. \qquad (*)$$

მისაღებად უფრო ფაქიზი მსჯელობის ჩატარება გვიხდება.'

ავიღოთ $\varepsilon>0$ და ვიპოვოთ ისეთი შემოსაზღვრული ღია G_0 სიმრავლე, რომ

$$G_0\supset E,\ mG_0<m^*E+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Δ ინტერვალის ბოლოებს A და B დავარქვათ და Δ-ში შემავალი ისეთი (a,b) ინტერვალი ვიპოვოთ, რომ

$$A<a<A+\frac{\varepsilon}{3},\quad B-\frac{\varepsilon}{3}<b<B.$$

ამის შემდეგ მივიღოთ

$$G = \Delta G_0 + (A,a) + (b,B).$$

G სიმრავლე შემოსაზღვრულია, ღიაა, შეიცავს E-ს და ისეთია, რომ

$$mG < m^*E + \varepsilon.$$

მაგრამ, გარდა ამისა (და ეს აქ მთავარია), სიმრავლე

$$F = C_\Delta G$$

ჩაკეტილია, რაც ადვილი შესამოწმებელი

$$F = [a,b] \cdot CG$$

იგივეობიდან გამომდინარეობს,

რადგან $F \subset C_\Delta E$, ამიტომ

$$m_*[C_\Delta E] \geq mF = m\Delta - mG > m\Delta - m^*E - \varepsilon.$$

აქედან, ε-ის ნებისმიერობის ძალით, (*) უტოლობა გამომდინარეობს და მასთან ერთად თეორემაც.

შედეგი. თეორემის აღნიშვნების შენარჩუნებით გვექნება:

$$m^*[C_\Delta E] - m_*[C_\Delta E] = m^*E - m_*E.$$

მართლაც, თუ ჩვენ E და $C_\Delta E$ სიმრავლეებს როლებს შევუცვლით, მივიღებთ:

$$m^*(C_\Delta E] + m_*E = m\Delta;$$

საიდანაც

$$m^*(C_\Delta E] + m_*E = m^*E + m_*[C_\Delta E],$$

ეს კი დასამტკიცებელი ტოლობის ტოლფასია.

§ 4. ზომადი სიმრავლეები

განმარტება. შემოსაზღვრულ E სიმრავლეებს ზომადი ეწოდება, თუ მისი შიგა და გარე ზომები ერთმანეთის ტოლია:

$$m^*E = m_*E.$$

მათ საერთო მნიშვნელობას E სიმრავლის ზომა ეწოდება და აღინიშნება mE-თი,

$$mE = m^*E = m_*E.$$

ზომის ცნების განმარტების ეს ხერხი ლებეგს ეკუთვნის; ამასთან დაკავშირებით ხშირად ზომად სიმრავლეს „ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეს“ ან უფრო მოკლედ „(L) ზომად სიმრავლეს“ უწოდებენ.

თუ E სიმრავლე არაზომადია, მაშინ მის ზომაზე ლაპარაკი არ შეიძლება, და სიმბოლო mE ჩვენთვის აზრს მოკლებულია. კერძოდ, ჩვენ ყველა არაშემოსაზღვრულ სიმრავლეებს არაზომადად ვთვლით[1].

თეორემა 1. ღია შემოსაზღვრული სიმრავლე ზომადია და მისი ახლახან განმარტებული ზომა ემთხვევა § 1-ში შემოყვანილ ზომას.

ეს ფაქტი § 3-ის თეორემის უშუალო შედეგს წარმოადგენს. სრულებით ასევე § 3-ს მე-2 თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ჩაკეტილი შემოსაზღვრული სიმრავლე ზომადია და მისი ახლახან განმარტებული ზომა ემთხვევა § 2-ში შემოყვანილ ზომას:

§ 3-ს მე-7 თეორემის შედეგიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 3. თუ E შემოსაზღვრული სიმრავლეა, რომელიც Δ ინტერვალში შედის, მაშინ E და $C_\Delta E$ ერთდროულად ზომადია ან არა.

§ 3-ის მე-5 და მე-6 თეორემების დაპირისპირებით მივიღებთ:

თეორემა 4. თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთი ზომადი სიმრავლეების სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$E=\sum_k E_k \quad (E_kE_{k'}=0,\ \ k\neq k'),$$

მაშინ E სიმრავლე ზომადია და

$$mE=\sum_k mE_k.$$

დამტკიცება გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობებიდან:

$$\sum_k mE_k=\sum_k m_*E_k\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant \sum_k m^*E_k=\sum_k mE_k.$$

ზომის დამტკიცებულ თვისებას მისი სრული ადიტიურობა ეწოდება.

უკანასკნელ თეორემაში არსებითი იყო ის, რომ ცალკეული შესაკრებები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებოდნენ. მოვიშოროთ ახლა თავიდან ეს შეზღუდვა, თუმცაღა ჯერ-ჯერობით შესაკრებ სიმრავლეთა სასრული რიცხვის შემთხვევისათვის.

თეორემა 5. სასრული რაოდენობის ზომად სიმრავლეთა ჯამი ზომადი სიმრავლეა.

[1] შეიძლებოდა ზომის ცნების განზოგადოება ზოგიერთი სახის არაშემოსაზღვრულ სიმრავლეებზედაც. ჩვენ ამას არ ჩავატარებთ.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k,$$

ამასთან E_k სიმრავლეები ($k=1,2,\ldots,n$) ზომადი არიან.

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და ყოველი ნატურალური k-სათვის ავაგოთ ისეთი ჩაკეტილი F_k და შემოსაზღვრული ღია G_k სიმრავლეები, რომ გვქონდეს

$$F_k \subset E_k \subset G_k, \; mG_k - mF_k < \frac{\varepsilon}{n}, \; (k=1,2,\ldots,n).$$

ამის შედეგად აღვნიშნოთ

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k, \quad G = \sum_{k=1}^{n} G_k.$$

ცხადია, რომ F სიმრავლე ჩაკეტილია, ხოლო G ღიაა და შემოსაზღვრული; ამავე დროს

$$F \subset E \subset G,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$mF \leqslant m_* E \leqslant m^* E \leqslant mG. \tag{*}$$

მაგრამ $G-F$ სიმრავლე ღიაა (რადგანაც მისი წარმოდგენა შეიძლება $G \cdot CF$ სახით) და შემოსაზღვრული. მაშასადამე, ეს სიმრავლე ზომადია. F სიმრავლე აგრეთვე ზომადია, და ამიტომ, რამდენადაც

$$G = F + (G-F)$$

და F და $G-F$ სიმრავლეები არ გადაიკვეთებიან, შეიძლება გამოვიყენოთ წინა თეორემა, რომელიც გვაძლევს

$$mG = mF + m(G-F),$$

საიდანაც

$$m(G-F) = mG - mF.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$m(G_k - F_k) = mG_k - mF_k \; (k=1,2,\ldots,n).$$

აღვნიშნოთ ახლა ადვილი შესამოწმებელი ჩართვა

$$G - F \subset \sum_{k=1}^{n} (G_k - F_k).$$

აქ შემავალი ყველა სიმრავლე შემოსაზღვრული და ღიაა, ასე რომ § 1-ის თეორემის საფუძველზე გვაქვს

$$m(G-F) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(G_k - F),$$

ან

$$mG - mF \leqslant \sum_{k=1}^{n} [mG_k - mF] < \varepsilon.$$

აქედან და (*)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$m^*E - m_*E < \varepsilon,$$

და, რადგანაც ε რაგინდ მცირეა, ამიტომ

$$m^*E = m_*E.$$

თეორემა 6. სასრული რაოდენობის ზომადი სიმრავლეების თანაკვეთა ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E = \prod_{k=1}^{n} E_k,$$

სადაც E_k ზომადი სიმრავლეებია. დავარქვათ Δ რაიმე ისეთ ინტერვალს, რომელიც ყველა E_k სიმრავლეებს შეიცავს. ადვილია შემოწმება, რომ

$$C_\Delta E = \sum_{k=1}^{n} C_\Delta E_k.$$

მაგრამ $C_\Delta E_k$ სიმრავლეები ზომადია E_k სიმრავლეებთან ერთად, საიდანაც მე-5 თეორემის ძალით, გამომდინარეობს $C_\Delta E$ სიმრავლის ზომადობა, ეს კი სიმრავლის ზომადობას გვაძლევს, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 7. ორი ზომადი სიმრავლის სხვაობა ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E = E_1 - E_2,$$

სადაც E_1 და E_2 ზომადი სიმრავლეებია. დავარქვათ Δ ორივე, E_1 და E_2 სიმრავლის შემცველ რაიმე ინტერვალს. მაშინ

$$E = E_1 \cdot C_\Delta E_2,$$

და საქმე წინა თეორემაზე მიიყვანება.

თეორემა 8. თუ მე-7 თეორემის პირობებში გვექნება $E_1 \supset E_2$, მაშინ

$$mE = mE_1 - mE_2.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$E_1 = E + E_2 \quad (EE_2 = 0),$$

საიდანაც მე-4 თეორემის ძალით

$$mE_1 = mE + mE_2,$$

რაც თეორემის ტოლფასია.

თეორემა 9. თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე წარმოადგენს ზომადი სიმრავლეების თვლად ჯამს, მაშინ E ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

შემოვიყვანოთ A_k $(k=1,2,\ldots)$ სიმრავლეები შემდეგნაირად:

$$A_1 = E_1, \; A_2 = E_2 - E_1, \ldots, A_k = E_k - (E_1 + \cdots + E_{k-1}), \ldots$$

ადვილია შემოწმება, რომ

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

ამასთან ყველა A_k ზომადი სიმრავლეებია და წყვილ-წყვილად არ გადაიკვეთებიან (ამაშია მტკიცების მთელი აზრი), ასე რომ საქმე მე-4 თეორემაზეა დაყვანილი.

E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის პირობის მოშორება (ეს პირობა მე-5 თეორემაში თავისთავად შესრულებული იყო) არ შეიძლება, როგორც ეს ცხადია თუნდაც შემდეგი მაგალითიდან

$$E_k = [0, k],$$

სადაც ჯამი $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k = [0, +\infty)$ არაზომადია.

თეორემა 10. ზომადი სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლის თანაკვეთა ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k,$$

სადაც ყველა E_k ზომადი სიმრავლეებია. რადგან $E \subset E_1$, ამიტომ E სიმრავლე შემოსაზღვრულია. Δ-თი აღვნიშნოთ E სიმრავლის შემცველ რაიმე ინტერვალი და მივიღოთ

$$A_k = \Delta E_k \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

მაშინ

$$E = \Delta E = \Delta \prod_{k=1}^{\infty} E_k = \prod_{k=1}^{\infty} (\Delta E_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_k.$$

ადვილია შემოწმება, რომ

$$C_\Delta E = \sum_{k=1}^{\infty} C_\Delta A_k,$$

და საქმე დაიყვანება მე-3 და მე-9 თეორემებზე.

დაბოლოს, დავამტკიცოთ ორი თეორემა, რომლებსაც დიდი მნიშვნელობა აქვთ ფუნქციათა თეორიაში.

თეორემა 11. ვთქვათ, $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ზომადი სიმრავლეებია. თუ

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$$

და თუ ჯამი $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$mE = \lim_{n\to\infty} [mE_n].$$

დამტკიცება. ადვილი ალმოსაჩენია, რომ E სიმრავლე შემდეგი სახით შეიძლება იქნას წარმოდგენილი

$$E = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + (E_4 - E_3) + \ldots,$$

სადაც ცალკეული შესაკრებები წყვილ წყვილად არ გადაიკვეთებიან. აქედან მე-4 და მე-8 თეორემების ძალით გამომდინარეობს, რომ

$$mE = mE_1 + \sum_{k=1}^{\infty} m(E_{k+1} - E_k) = mE_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [mE_{k+1} - mE_k].$$

უსასრულო მწკრივის ჯამის თვითონ განმარტების საფუძველზე უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$mE = \lim_{n\to\infty} \{mE_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [mE_{k+1} - mE_k]\},$$

ეს კი თეორემის ტოლფასია, ვინაიდან

$$mE_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [mE_{k+1} - mE_1] = mE_n.$$

თეორემა 12. ვთქვათ, $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ზომადი სიმრავლეებია, ხოლო $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$. თუ

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots,$$

მაშინ

$$mE = \lim_{n\to\infty} [mE_n].$$

დამტკიცება. ეს თეორემა ადვილი დასაყვანია წინაზე. მართლაც, თუ Δ-ს დავარქმევთ E_1 სიმრავლის შემცველ რაიმე ინტერვალს, ჩვენ გვექნება

$$C_\Delta E_1 \subset C_\Delta E_2 \subset C_\Delta E_3 \subset \ldots$$

$$C_\Delta E = \sum_{k=1}^{\infty} C_\Delta E_k.$$

მე-11 თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ

$$m(C_\Delta E) = \lim_{n\to\infty} [m(C_\Delta E_k)],$$

რაც შეიძლება ასედაც წარმოვადგინოთ:

$$m\Delta - mE = \lim_{n\to\infty} [m\Delta - mE_n],$$

ეს კი თეორემის ტოლფასია.

§ 5. ზომადობა და ზომა როგორც მოძრაობის ინვარიანტები

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლეები, რომლებიც ნებისმიერი ბუნების ობიექტებისაგან შედგებიან. იმ შემთხვევაში, როცა ნაჩვენებია რაიმე წესი, რომლის მიხედვითაც A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს B სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი b ელემენტი შეესაბამება, ამბობენ, რომ მოცემულია A სიმრავლის ც ა ლ ს ა ხ ა ა ს ა ხ ვ ა B სიმრავლეში. ამასთან არ იგულისხმება, რომ B სიმრავლის ყოველი ელემენტი შესაბამისია A სიმრავლის რაიმე ელემენტისა. ასახვის ცნება ფუნქციის ცნების პირდაპირ განზოგადოებას წარმოადგენს. ამასთან დაკავშირებით, $a \in A$ ელემენტის შესაბამ $b \in B$ ელემენტს ხშირად $f(a)$-თი აღნიშნავენ და სწერენ

$$b = f(a).$$

თუ $b = f(a)$, მაშინ b ელემენტს a ელემენტის ს ა ხ ე ს ვუწოდებთ, ხოლო a ელემენს b ელემენტის წ ი ნ ა ს ა ხ ე ს ვუწოდებთ. ამასთან, ერთ b ელემენტს შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე წინასახე.

ვთქვათ, A^* წარმოადგენს A სიმრავლის ნაწილს, ხოლო B^*—ამ A^* სიმრავლის ელემენტების ყველა სახეების სიმრავლეა (სხვანაირად რომ ვთქვათ,

თუ $a \in A^*$, მაშინ $f(a) \in B^*$ და თუ $b \in B^*$, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი $a \in A^*$, რომ $b=f(a)$), ამ შემთხვევაში B^* სიმრავლეს A^* სიმრავლის სახე ეწოდება. რაც ასე ჩაიწერება:

$$B^*=f(A^*).$$

ამასთან, A^* სიმრავლეს B^* სიმრავლის წინასახე ეწოდება.

ამ ზოგად ცნებების დადგენის შემდეგ გადავიდეთ ასახვების ერთი მნიშვნელოვანი სპეციალური სახის განხილვაზე.

განმარტება 1. რიცხვითი Z წრფის ცალსახა $\varphi(x)$ ასახვას თავისთავში მოძრაობა ეწოდება, თუ წრფის რომელიმე ორი წერტილის სახეთა შორის მანძილი ტოლია თვით ამ წერტილებს შორის მანძილისა:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, მოძრაობა ეწოდება Z სიმრავლის Z სიმრავლეშივე ისეთ ასახვას, რომელიც არ ცვლის მანძილებს Z-ის წერტილებს შორის.

მოძრაობის ცნების განმარტებაში არაა შეტანილი მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ Z სიმრავლის ყოველი წერტილი წარმოადგენდეს რაიმე წერტილის სახეს, და აგრეთვე მოთხოვნა იმისა, რომ Z-ის სხვადასხვა წერტილებს სხვადასხვა სახე ჰქონდეთ. მიუხედავად ამისა, ორივე ეს გარემოება შესრულებულია. დავრწმუნდეთ ამაში ჯერჯერობით მხოლოდ ერთ-ერთი მათგანისათვის.

თეორემა 1. ვთქვათ, $\varphi(x)$ — მოძრაობაა. თუ $x \neq y$, მაშინ $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y| \neq 0.$$

თეორემა 2. *a*) თუ $A \subset B$, მაშინ $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

$$b)\quad \varphi\left(\sum_{\xi} E_{\xi}\right)=\sum_{\xi} \varphi(E_{\xi}).$$

$$c)\quad \varphi\left(\prod_{\xi} E_{\xi}\right)=\prod_{\xi} \varphi(E_{\xi}).$$

d) თუ E_0 ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ $\varphi(E_0)=E_0$.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ 1-ლი თეორემა გამოიყენება მხოლოდ *c*) პუნქტის დამტკიცების დროს.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ შემდეგი სამი ასახვა მოძრაობას წარმოადგენს:

I. $\varphi(x)=x+d$ (ძვრა).

II. $\varphi(x)=-x$ (სარკისებური არეკვლა).

III. $\varphi(x)=-x+d$.

მეტად მნიშვნელოვანია ის, რომ ამ სამი (საკუთრივ—ორი, იმიტომ რომ III შეიცავს II-ს) ტიპით ამოიწურება ყველა შესაძლებელი მოძრაობანი Z-ში.

თეორემა 3. თუ $\varphi(x)$ მოძრაობაა, მაშინ ან

$$\varphi(x)=x+d,$$

ან

$$\varphi(x)=-x+d.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$\varphi(0)=d.$$

მაშინ ყოველი x-სათვის გვექნება

$$|\varphi(x)-d|=|x|,$$

და, მაშასადამე,

$$\varphi(x)=(-1)^{\sigma(x)}\cdot x+d \quad (\sigma(x)=0,1).$$

$\sigma(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყოველი $x\neq 0$-სათვის. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს იმის აღმოჩენა, რომ $\sigma(x)$ მუდმივი სიდიდეა.

ვთქვათ, x და y ორი წერტილია, ამასთან $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq y$.

მაშინ

$$\varphi(x)-\varphi(y)=(-1)^{\sigma(x)}\cdot x-(-1)^{\sigma(y)}y,$$

ან

$$\varphi(x)-\varphi(y)=(-1)^{\sigma(x)}[x-(-1)^{\rho}\cdot y],$$

სადაც $\rho=\sigma(y)-\sigma(x)$ და მას აქვს ერთერთი მნიშვნელობა შემდეგი სამიდან

$$\rho=1,0,-1.$$

თუ მოძრაობის განმარტებით ვისარგებლებთ, შევვიძლია მივიღოთ, რომ

$$|x-(-1)^{\rho}y|=|x-y|,$$

აქედან, ან

$$x-(-1)^{\rho}y=x-y,$$

ან

$$x-(-1)^{\rho}y=-x+y.$$

მაგრამ მეორე შემთხვევა შეუძლებელია, რადგანაც მას იქამდე მივყევართ, რომ

$$2x=y[1+(-1)^{\rho}],$$

საიდანაც ($\rho=\pm 1$-სათვის) $x=0$, ან ($\rho=0$-სათვის) $x=y$, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას.

მაშასადამე, დაგვრჩა პირველი შემთხვევა, რომელიც გვაძლევს $\rho=0$, ე. ი.

$$\sigma(y)=\sigma(x).$$

მაშასადამე, ყოველი $x\neq 0$-სათვის $\sigma(x)$-ს ერთიდაიგივე მნიშვნელობა აქვს

$$\sigma(x)=\sigma \quad (\sigma=0,1),$$

ასე რომ

$$\varphi(x)=(-1)^{\sigma}\cdot x+d.$$

რამდენადაც ეს ტოლობა, ცხადია, ძალაში რჩება $x=0$-სათვისაც, თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. მოძრაობის დროს ყოველი $y\in Z$ წერტილი წარმოადგენს რაღაც $x\in Z$ წერტილის სახეს, ე. ი. $\varphi(Z)=Z$.

მართლაც, თუ $\varphi(x)=(-1)^\sigma x+d$, მაშინ y წერტილის წინასახეს

$$x=(-1)^\sigma(y-d)$$

წერტილი წარმოადგენს.

თუ $\varphi(x)=(-1)^\sigma x+d$ რაიმე მოძრაობაა, მაშინ

$$\varphi^{-1}(x)=(-1)^\sigma(x-d)$$

მოძრაობას შებრუნებული მოძრაობა ეწოდება. ეს ორი მოძრაობა დაკავშირებულია ერთმანეთთან

$$\varphi[\varphi^{-1}(x)]=\varphi^{-1}[\varphi(x)]=x$$

დამოკიდებულებებით.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ x წერტილს φ მოძრაობაში აქვს y სახე, მაშინ y წერტილს φ^{-1} მოძრაობაში სახედ x წერტილი აქვს. მეტად მნიშვნელოვანია ის, რომ ყოველი მოძრაობისათვის არსებობს მისი შებრუნებული მოძრაობა.

თეორემა 4. მოძრაობის დროს: *a*) ყოველი ინტერვალი გადადის იგივე ზომის ინტერვალში, ამასთან სახე—ინტერვალის ბოლოებს წინასახე—ინტერვალის ბოლოების სახეები წარმოადგენენ.

b) შემოსაზღვრული სიმრავლის სახე ისევ შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Delta=(a,b)$ — რაიმე ინტერვალია. მაშინ $\varphi(x)=x+d$ მოძრაობის დროს Δ ინტერვალის სახეს $(a+d,\ b+d)$ ინტერვალი წარმოადგენს, ხოლო $\varphi(x)=-x+d$ მოძრაობის დროს—$(d-b,\ d-a)$ ინტერვალი. ორივე შემთხვევაში

$$m\varphi(\Delta)=b-a=m\Delta.$$

b)-ს დასამტკიცებლად, დავარქვათ E რაიმე შემოსაზღვრულ სიმრავლეს. თუ Δ ინტერვალია, რომელიც შეიცავს E სიმრავლეს, მაშინ

$$\varphi(E)\subset\varphi(\Delta),$$

ასე რომ $\varphi(E)$ შემოსაზღვრულია. შესაძლებელია ასედაც ვიმსჯელოთ: თუ ყოველი x-სათვის E-დან გვაქვს $|x|<k$, მაშინ $\varphi(E)$-ს ყოველი y-სათვის გვექნება $|y|<k+|d|$.

თეორემა 5. მოძრაობის დროს: *a*) ჩაკეტილი სიმრავლე გადადის ჩაკეტილ სიმრავლეში. *b*) ღია სიმრავლე ღია სიმრავლეში გადადის.

დამტკიცება. *a*) ვთქვათ, $\varphi(F)$ ჩაკეტილი F სიმრავლის სახეს წარ–

მოადგენს. y_0-ით აღვნიშნოთ $\varphi(F)$ სიმრავლის რაიმე დაგროვების წერტილი, და ვიპოვოთ ისეთი $\{y_n\}$ მიმდევრობა, რომლისათვისაც

$$\lim y_n = y_0, \quad (y_n \in \varphi(F)).$$

ვთქვათ, ახლა

$$x_0 = \varphi^{-1}(y_0), \quad x_n = \varphi^{-1}(y_n).$$

მაშინ $x_n \in F$. მაგრამ

$$|x_n - x_0| = |y_n - y_0|,$$

ასე რომ

$$x_n \to x_0$$

და, F სიმრავლის ჩაკეტილობის ძალით, $x_0 \in F$, საიდანაც

$$y_0 = \varphi(x_0) \in \varphi(F).$$

მაშასადამე, $\varphi(F)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა.

b) ვთქვათ, G ღია სიმრავლეა. აღვნიშნოთ

$$F = CG.$$

მაშინ F ჩაკეტილი სიმრავლეა და

$$G + F = Z, \quad G \cdot F = 0.$$

აქედან, მე-2 თეორემისა და მე-3 თეორემის შედეგის ძალით,

$$\varphi(G) + \varphi(F) = Z, \quad \varphi(G) \cdot \varphi(F) = 0,$$

ე. ი. $\varphi(G)$ წარმოადგენს ჩაკეტილი $\varphi(F)$ სიმრავლის დამატებას, და მაშასადამე, ღიაა.

თეორემა 6. შემოსაზღვრული ღია სიმრავლის ზომა მოძრაობის დროს არ იცვლება.

დამტკიცება. ვთქვათ, G ღია შემოსაზღვრული სიმრავლეა. მაშინ $\varphi(G)$ აგრეთვე ღია შემოსაზღვრული სიმრავლეა. დავაჰქვათ δ_k $(k=1,2,\ldots)$ G სიმრავლის შემადგენელ ინტერვალებს. მე-4 თეორემის საფუძველზე, $\varphi(G)$ სიმრავლის შემადგენელ ინტერვალებს $\varphi(\delta_k)$ წარმოადგენენ, ამასთან ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ინტერვალებით $\varphi(G)$ სიმრავლის ყველა შემადგენელი ინტერვალები ამოიწურება. აქედან

$$m\varphi(G) = \sum_k m\varphi(\delta_k) = \sum_k m\delta_k = mG,$$

რის დამტკიცებასაც მოვითხოვდით.

თეორემა 7. მოძრაობა არ ცვლის შემოსაზღვრული სიმრავლის არც შიგა, არც გარე ზომას.

დამტკიცება. *a*) ვთქვათ, E შემოსაზღვრული სიმრავლეა. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი შემოსაზღვრული ღია G სიმრავლე, რომ გვქონდეს

$$G \supset E, \quad mG < m^*E + \varepsilon.$$

ასეთ შემთხვევაში $\varphi(G)$—შემოსაზღვრული ღია სიმრავლეა, რომელიც $\varphi(E)$ სიმრავლეს შეიცავს. მაშასადამე,

$$m^*\varphi(E) \leqslant m\varphi(G) < m^*E+\varepsilon,$$

აქედან, ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ, რომ

$$m^*\varphi(E) \leqslant m^*E,$$

ასე რომ შემოსაზღვრული E სიმრავლის გარე ზომა მოძრაობის დროს არ იზრდება. მაგრამ მაშინ იგი არც მცირდება, ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, შებრუნებული მოძრაობა გარე ზომის გაზრდას გამოიწვევდა.

ამგვარად,

$$m^*\varphi(E) = m^*E.$$

b) Δ-თი აღვნიშნოთ E სიმრავლის შემცველი რაიმე ინტერვალი. მაშინ $\varphi(\Delta)$ წარმოადგენს $\varphi(E)$ სიმრავლის შემცველ ინტერვალს. დავუშვათ, შემდეგ.

$$A = C_{\Delta}E.$$

$$E+A=\Delta, \ EA=0$$

დამოკიდებულებები გვაძლევენ, რომ

$$\varphi(E)+\varphi(A)=\varphi(\Delta), \ \varphi(E)\cdot\varphi(A)=0,$$

ასე რომ $\varphi(E)$ წარმოადგენს $\varphi(A)$ სიმრავლის დამატებას $\varphi(\Delta)$ ინტერვალის მიმართ. აქედან § 3-ს მე-7 თეორემის ძალით

$$m^*\varphi(A)+m_*\varphi(E)=m\varphi(\Delta)$$

და თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილისა და მე-4 თეორემის საფუძველზე

$$m^*A+m_*\varphi(E)=m\Delta.$$

მაშასადამე,

$$m_*\varphi(E)=m\Delta-m^*C_{\Delta}E)$$

და ისევ § 3-ის მე-7 თეორემის გამოყენებით ვიპოვით რომ,

$$m_*\varphi(E)=m_*E.$$

შედეგი. მოძრაობის დროს ზომადი სიმრავლე იგივე ზომის ზომად სიმრავლეში გადადის.

განმარტება 2. A და B სიმრავლეებს კონგრუენტული ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი მოძრაობა, რომელშიაც ერთ-ერთი მათგანი გადადის მეორეში.

ამ ტერმინის დახმარებით დამტკიცებული შედეგები შეიძლება გამოთქმულ იქნას შემდეგი სახით:

თეორემა 8. კონგრუენტულ სიმრავლეებს ერთნაირი შიგა და გარე ზომები აქვთ. ზომადი სიმრავლის კონგრუენტული სიმრავლე აგრეთვე ზომადია და მას იგივე ზომა აქვს.

§ 6. ზომადი სიმრავლეების კლასი

მე-4 და მე-5 §§-ში ჩვენ თვით ზომადი სიმრავლეების თვისებებს შევისწავლიდით, აქ კი შევჩერდებით ზომადი სიმრავლეების მთელი კლასის ზოგიერთ თვისებებზე.

თეორემა 1. *ყოველი შემოსაზღვრული თვლადი სიმრავლე ზომადია, და მისი ზომა ნულს უდრის.*

დამტკიცება. ვთქვათ, შემოსაზღვრული E სიმრავლე შედგება

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

წერტილებისაგან.

E_k-თი აღვნიშნოთ ერთელემენტიანი სიმრავლე, რომელიც შედგება x_k წერტილისაგან. ცხადია, რომ E_k ზომადი სიმრავლეა და მას ნულის ტოლი ზომა აქვს; თეორემა გამომდინარეობს

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

ტოლობიდან და § 4-ის მე-4 თეორემიდან.

როგორც კანტორის სრულყოფილი P_0 სიმრავლის მაგალითი გვიჩვენებს, დამტკიცებული თეორემის შებრუნება არ შეიძლება.

განმარტება 1. *თუ E სიმრავლე ჩაკეტილი სიმრავლეების თვლადი სიმრავლის ჯამის სახით წარმოიდგინება*

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} F_k,$$

ამბობენ, რომ E სიმრავლე F_σ ტიპისაა.

განმარტება 2. *თუ E სიმრავლე ღია სიმრავლეების თვლადი სიმრავლის თანაკვეთის სახით წარმოიდგინება*

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} G_k,$$

მაშინ ამბობენ, რომ E სიმრავლე G_δ ტიპისაა.

§ 4-ის მე-9 და მე-10 თეორემებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 2. *ყოველი შემოსაზღვრული F_σ ან G_δ ტიპის სიმრავლე ზომადია.*

დამტკიცება. F_σ-ის ტიპის სიმრავლეების შესახებ ეს ცხადია, რადგანაც ჯამის შემოსაზღვრულობიდან შესაკრებთა შემოსაზღვრულობაც გამომდინარეობს, და, რადგან ეს უკანასკნელნი ჩაკეტილნი არიან, ამიტომ ზომადიც არიან.

თუ კი E შემოსაზღვრული G_δ ტიპის სიმრავლეა, მაშინ აღვნიშნავთ რა E სიმრავლის შემცველ რომელიმე ინტერვალს Δ-თი, E შეგვიძლია ზომადი სიმრავლეების შემდეგი გადაკვეთის სახით წარმოვიდგინოთ

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} \Delta G_k,$$

რის შემდეგაც E-ს ზომადობა აშკარა ხდება.

განმარტება 3. თუ E სიმრავლე შესაძლებელია მიღებულ იქნას ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეებზე შეკრებისა და გადაკვეთის ოპერაციათა სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრაელის გამოყენების საშუალებით, მაშინ E-ს ბორელის სიმრავლე ეწოდება. ბორელის შემოსაზღვრულ სიმრავლეს (B) ზომადი სიმრავლე ჰქვია.

მაგალითად, F_σ ან G_δ ტიპის სიმრავლეები ბორელის სიმრავლეებია.

ისეთივე მსჯელობით, როგორც მე-2 თეორემაში, დავადგენთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3. (B) ზომადი სიმრავლე (L) ზომადია.

შებრუნებული თეორემა არაა სამართლიანი: არსებობენ მაგალითები ისეთი (L) ზომადი სიმრავლეებისა, რომლებიც (B) არაზომადი არიან.

საინტერესოა გამოვარკვიოთ, არსებობენ თუ არა, საზოგადოდ, შემოსაზღვრული და (L) არაზომადი სიმრავლეები? პირდაპირი ანგარიშით ამ საკითხის გადაჭრა არ შეიძლება, როგორც ამას გვიჩვენებს შემდეგი:

თეორემა 4. ყველა ზომადი სიმრავლეების M სიმრავლეს იგივე სიმძლავრე აქვს, რაც ყველა წერტილოვანი სიმრავლეების სიმრავლეს ე. ი. 2^c.

დამტკიცება. უპირველესად ყოვლისა ცხადია, რომ

$$\overline{\overline{M}} \leqslant 2^c.$$

მეორეს მხრივ, ავიღოთ რაიმე ნულზომიანი ზომადი სიმრავლე, რომელსაც c სიმძლავრე აქვს (მაგალითად კანტორის სრულყოფილი P_0 სიმრავლე) და დავარქვათ S მისი ყველა ქვესიმრავლეების სიმრავლეს. რადგან ნულზომიანი სიმრავლის ყოველ ქვესიმრავლეს ნულის ტოლი გარე ზომა აქვს და, მაშასადამე, ზომადია, ამიტომ

$$S \subset M,$$

და რამდენადაც $\overline{\overline{S}} = 2^c$, ცხადია, რომ

$$\overline{\overline{M}} \geqslant 2^c.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მიუხედავად ამისა, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა ა. *არსებობენ შემოსაზღვრული არაზომადი სიმრავლეები.* ამ ფაქტის დასამტკიცებლად შემდეგი მაგალითი მოვიყვანოთ.

არაზომადი სიმრავლის მაგალითი. $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ სეგმენტის წერტილები გავანაწილოთ კლასებად შემდეგი წესის მიხედვით: ორი x და y წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ შევიყვანოთ ერთიდაიგივე კლასში, როდესაც მათ შორის სხვაობა

$$x-y$$

რაციონალური რიცხვია. ეს შეიძლება განვახორციელოთ შემდეგნაირად: ყოველ $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ წერტილს შევუსაბამოთ კლასი $K(x)$ ისეთი წერტილებისა $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ სეგმენტიდან, რომლებსაც

$$x+r$$

სახე აქვთ, სადაც r რაციონალური რიცხვია. კერძოდ $x \in K(x)$.

ვაჩვენოთ, რომ *სხვადასხვა*[1] $K(x)$ და $K(y)$ კლასები არ გადაიკვეთებიან ერთმანეთთან. მართლაც, წარმოვიდგინოთ რომ ისინი იკვეთებიან და $z \in K(x)\,K(y)$, მაშინ

$$z=x+r_x,\quad z=y+r_y,$$

სადაც r_x და r_y რაციონალური რიცხვებია, საიდანაც

$$y=x+r_x-r_y.$$

ახლა თუ $t \in K(y)$, მაშინ

$$t=y+r=x+(r_x-r_y+r)=x+r',$$

ასე რომ $t \in K(x)$ და $K(y) \subset K(x)$. ანალოგიურად დავადგენთ, რომ $K(x) \subset K(y)$ და მაშინ აღმოჩნდება, რომ $K(x)=K(y)$, ე. ი. რომ $K(x)$ და $K(y)$ ერთიდაიგივე კლასს წარმოადგენს, რაც ეწინააღმდეგება იმ დაშვებას, რომ ისინი სხვადასხვა კლასებია.

ამგვარი გზით აგებული ყველა კლასების სიმრავლე გვაძლევს მოთხოვნილ დაყოფას.

ამის შემდეგ, ყოველი კლასიდან ამოვირჩიოთ თითო წერტილი, და ამორჩეულ წერტილთა სიმრავლეს დავარქვათ A.

A სიმრავლე არაზომადია.

ამის დასამტკიცებლად $[-1, +1]$ სეგმენტის ყველა რაციონალური რიცხვები გადავნომროთ

$$r_0=0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\dots$$

---

[1] „სხვადასხვა“ სიმრავლეთა თეორიის აზრით, ე. ი. ისეთები, რომ $K(x) \neq K(y)$. პირიქით, სავსებით შესაძლებელია, $K(x)=K(y)$, თუმცა $x \neq y$, და მაშინ ეს კლასები არ არიან სხვადასხვა.

და A_k-თი აღვნიშნოთ A სიმრავლიდან

$$\varphi_k(x)=x+r_k$$

ძვრით მიღებული სიმრავლე.

(სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $x \in A$, მაშინ $x+r_k \in A_k$, და თუ $x \in A_k$, მაშინ $x-r_k \in A$).

კერძოდ, $A_0=A$. ყველა A_k სიმრავლეები კონგრუენტული არიან ერთმანეთთან, და ამიტომ (§ 5, თეორემა 8)

$$\begin{aligned} m_*A_k&=m_*A=\alpha \\ m^*A_k&=m^*A=\beta \end{aligned} \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

დავრწმუნდეთ, რომ

$$\beta>0. \tag{1}$$

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \subset \sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{2}$$

მართლაც, თუ $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, მაშინ x მოხვდება ზემოჩატარებული დაყოფის ერთერთ კლასში. თუ A სიმრავლეში ამ კლასის წარმომადგენელი არის x_0, მაშინ $x-x_0$ სხვაობა რაციონალური რიცხვია, და ამასთან აშკარაა, რომ ეს რაციონალური რიცხვი $[-1,+1]$ სეგმენტს ეკუთვნის, საიდანაც

$$x-x_0=r_k$$

და $x \in A_k$. ამგვარად, (2) დამტკიცებულია.

მაგრამ მაშინ (§ 3, თეორემა 5)

$$1=m^*\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \leqslant m^*\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right] \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} m^*A_k,$$

ე. ი.

$$1\leqslant\beta+\beta+\beta+\cdots$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1).

მეორეს მხრივ, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\alpha=0. \tag{3}$$

ამისათვის, უპირველესად ყოვლისა დავრწმუნდეთ, რომ $n \neq m$-სათვის

$$A_nA_m=0. \tag{4}$$

მართლაც z წერტილი A_nA_m-ში რომ შედიოდეს, მაშინ

$$x_n=z-r_n \text{ და } x_m=z-r_m$$

A სიმრავლის (აშკარაა, სხვადასხვა) წერტილები იქნებოდენ, ე. ი. ისინი სხვადასხვა კლასების წარმომადგენლები უნდა ყოფილიყვნენ, რაც შეუძლებელია. რადგანაც მათი სხვაობა

$$x_n - x_m = r_m - r_n$$

რაციონალური რიცხვია. ამგვარად, (4) დამტკიცებულია.

მეორეს მხრივ, ადვილია ჩვენება, რომ ყოველი k-სათვის

$$A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]$$

(რადგანაც, თუ $x \in A_k$, მაშინ $x = r_0 + r_k$ სადაც $|x_0| \leqslant \frac{1}{2}$, $|r_k| \leqslant 1$), ასე რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]. \tag{5}$$

(5) და (4)-დან, § 3-ის მე-6 თეორემის ძალით გამომდინარეობს, რომ

$$3 = m_* \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right] \geqslant m_* \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right] \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} m_* A_k,$$

საიდანაც

$$\alpha + \alpha + \alpha + \ldots \leqslant 3$$

და $\alpha = 0$.

(1)-სა და (3) დაპირისპირებით მივიღებთ:

$$m_* A < m^* A,$$

რაც ამტიცებს A სიმრავლის არაზომადობას.

შენიშვნა. ჩვენ რომ თავიდანვე კლასებად დაგვეყო ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლე, ნაცვლად $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ სეგმენტისა, მაშინ ჩატარებული მსჯელობის პირდაპირი გამეორებით მივიდოდით $A \subset E$ არაზომად სიმრავლემდე. ამგვარად, ყოველი დადებითიზომიანი სიმრავლე შეიცავს არაზომად ნაწილს.

§ 7. ზოგადი შენიშვნები ზომის პრობლემის შესახებ

§ 6-ის ბოლოში მიღებულ უარყოფითმა შედეგმა შეიძლება გვაფიქრებინოს, რომ ლებეგის მიერ მოცემული ზომის განმარტება არ ვარგა, და ამის გამო ბუნებრივად ისმის საკითხი მისი რაიმე გზით გაუმჯობესების შესახებ.

ამ საკითხზე პასუხის გასაცემად, პირველად ყოვლისა, საჭიროა ზუსტად ჩამოვაყალიბოთ ის პრობლემა, რომლის გადაჭრაც გვსურს.

წერტილოვანი სიმრავლეების გაზომვათა ამოცანა შეიძლება ორნაირად დაისვას:

I. **გაზომვის თეორიის ძნელი**[1] **ამოცანა.** საჭიროა ყოველ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს E მივაწეროთ ისეთი არაუარყოფითი μE რიცხვი — მისი ზომა, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. თუ $E=[0,1]$, მაშინ $\mu E=1$.

2. თუ A და B კონგრუენტული სიმრავლეებია, მაშინ $\mu A=\mu B$.

3. თუ E სიმრავლე წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთი $E_k (k=1,2,\dots)$ სიმრავლეების სასრული რაოდენობის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს, მაშინ

$$\mu E=\sum_{k} \mu E_k \quad \text{(ზომის სავსებით ადიტივობა).}$$

ჩვენ ამოცანა ჩამოვაყალიბეთ წრფივი სიმრავლეების შემთხვევაში, ე. ი. ერთგანზომილებიანი R_1 სივრცისათვის. მისი დასმა შეიძლება R_2 სიბრტყისათვის და, საზოგადოდ, n განზომილებიან R_n სივრცისათვის, მხოლოდ ამისათვის 1 მოთხოვნაში $[0,1]$ სეგმენტის ნაცვლად $[0,1;\ 0,1]$ კვადრატზე ან, საზოგადოდ, n-განზომილებიან ერთეულ კუბზე უნდა გველაპარაკა.

მაგრამ ადვილია იმის დამტკიცება, რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1. *გაზომვის თეორიის ძნელი ამოცანა არ ამოიხსნება თუნდაც R_1 სივრცის შემთხვევაში.*

დამტკიცება. § 6-ში მოყვანილ არაზომად სიმრავლის მაგალითში ჩვენ ავაგეთ ურთიერთშორის არაგადამკვეთი წყვილწყვილად კონგრუენტული სიმრავლეები

$$A_0, A_1, A_2, \dots,$$

რომლებსაც ის თვისება აქვთ, რომ

$$\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \subset \sum_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right].$$

გაზომვის ძნელი ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელი რომ ყოფილიყო, მივიღებდით, რომ

$$\mu\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right].$$

მაგრამ $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ სეგმენტი კონგრუენტულია $[0,1]$ სეგმენტისა, გარდა ამისა (ყოველი k-სათვის)

$$\mu(A_k)=\mu(A)=\sigma$$

[1] ტერმინები: გაზომვის თეორიის „ძნელ" და „ადვილ" ამოცანები—არ არიან საყოველთაოდ მიღებული. მე ისინი შემომყავს ფორმულირების სიმარტივისათვის, თუმცა არ ვთვლი მათ სავსებით მოხდენილად.

და, ბოლოს, $\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია, საიდანაც

$$1\leq\sigma+\sigma+\sigma+\ldots<+\infty.$$

რაც შეუძლებელია როგორც $\sigma>0$ ისე $\sigma=0$ შემთხვევებში.

თეორემა დამტკიცებულია.

II. **გაზომვის თეორიის ადვილი ამოცანა**, რომელიც თითქმის ისევე ჩამოყალიბდება, როგორც I ამოცანა, იმ ერთად ერთი განსხვავებით, რომ მოთხოვნა მე-3 შენარჩუნებულია შესაკრებ სიმრავლეთა მხოლოდ *სასრული რაოდენობის* შემთხვევაში, ე. ი. ზომის სავსებით ადიტივობის ნაცვლად მისი მხოლოდ სასრული ადიტივობა მოითხოვება.

ამ ამოცანასთან დაკავშირებით, ჩვენ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ შემდეგ შედეგებს:

თეორემა 2 (ს. ბანახი). *გაზომვის თეორიის ადვილი ამოცანა ამოიხსნება* R_1 *და* R_2 *სივრცეების შემთხვევაში, მაგრამ არა ცალსახად.*

თეორემა 3 (ფ. ჰაუსდორფი). R_n *სივრცეებისათვის* ($n>2$) *გაზომვის თეორიის მარტივი ამოცანა არ ამოიხსნება.*

განსხვავება ამ შედეგებს შორის იმით აიხსნება, რომ კონგრუენტობის ცნება, რომელიც ამოცანის ჩამოყალიბებაში შედის, არსებითად დაკავშირებულია მოძრაობის ცნებასთან. რადგანაც მაღალი განზომილების სივრცეებში მოძრაობათა ჯგუფი უფრო ფართოა, ამიტომ ბუნებრივია, რომ ასეთი ჯგუფის ინვარიანტის შექმნაც უფრო ძნელი იქნება.

დასასრულს მოვიყვანოთ რამოდენიმე მოსაზრება, რომელიც გარკვეულნაირად „ამართლებს" *ლებეგის* ზომის განსაზღვრას.

ვთქვათ, ჩვენ გაზომვის თეორიის ადვილი ამოცანის რაიმე ამოხსნა გვაქვს. მაშინ

$$A\subset B$$

დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu A\leq\mu B \text{ (მონოტონობის პრინციპი),}$$

რადგან $\mu B=\mu A+\mu(B-A)$. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი ისეთი E სიმრავლის ზომა μE, რომელიც მხოლოდ ერთი წერტილისაგან შედგება, ნულის ტოლია, რადგანაც [0,1] სეგმენტზე შეგვიძლია ავიღოთ E სიმრავლის კონგრუენტულ „სიმრავლეთა" რაგინდ დიდი რიცხვი.

აქედან, თავისი მხრივ, გამომდინარეობს, რომ ყოველი სასრული სიმრავლის μ—ზომა ნულის ტოლია, და აგრეთვე

$$\mu(a,b)=\mu(a,b]=\mu[a,b)=\mu[a,b].$$

შემდეგ, დამოკიდებულება

$$[0,1]=\left[0,\frac{1}{n}\right]+\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

გვიჩვენებს, რომ

$$\mu\left[0, \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n},$$

საიდანაც ცხადია, რომ რაციონალური სიგრძის (a,b) სეგმენტის ზომა μ $b-a$-ს ტოლია. მონოტონობის პრინციპის გამოყენებით ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\mu[a,b] = b-a$$

სამართლიანია ყოველი $[a,b]$ სეგმენტისათვის.

მაგრამ მაშინ ცხადია, რომ ყოველი ისეთი ღია G სიმრავლისათვის, რომელსაც შემადგენელი ინტერვალების სასრული რაოდენობა აქვს, გვექნება

$$\mu G = mG,$$

ხოლო თუ შემადგენელი ინტერვალების თვლადი სიმრავლე გვაქვს, მაშინ

$$\mu G \geqslant mG.$$

გაზომვის თეორიის ადვილი ამოცანის გადაწყვეტის ყველაზე უფრო ბუნებრივი ხერხები იქნება ის, რომლების დროსაც ღია G სიმრავლის ზომა μ ტოლია შემადგენელი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამისა (ზემოთ თქმულიდან ცხადია, რომ საკმარისია მოვითხოვოთ $\mu G \leqslant \sum_k \mu\delta_k$, ისიც იმ შემთხვევისათვის, როცა შემადგენელი ინტერვალების უსასრულო სიმრავლე გვაქვს). ბ ა ნ ა ხ ი ს თეორემის დამტკიცებიდან შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ამოხსნის ასეთი საშუალებანი მართლაც არსებობენ (ამგვარად, ჩვენ ამას დაუმტკიცებლად ვიღებთ). თუ ჩვენ ამოხსნის ასეთ ხერხებს „რეგულარულს" ვუწოდებთ, ადვილად დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 4. გ ა ზ ო მ ვ ი ს თ ე ო რ ი ი ს ა დ ვ ი ლ ი ა მ ო ც ა ნ ი ს ა მ ო ხ ს ნ ი ს ყ ო ვ ე ლ ი რ ე გ უ ლ ა რ უ ლ ი ხ ე რ ხ ი ს ა თ ვ ი ს ზ ო მ ა დ ი E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ზ ო მ ა μE მ ი ს ი ლ ე ბ ე გ ი ს mE ზ ო მ ი ს ტ ო ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რეგულარული ხერხის განმარტებიდან ცხადია, რომ ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლის μG ზომა მისი ლებეგის mG ზომის ტოლია. მაგრამ მაშინ ყოველი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი F სიმრავლისათვის გვექნება აგრეთვე

$$\mu F = mF.$$

თუ ახლა შემოსაზღვრული E სიმრავლე შეიცავს F ჩაკეტილ სიმრავლეს და შედის G შემოსაზღვრულ ღია სიმრავლეში, მაშინ მონოტონობის პრინციპის ძალით

$$mF \leqslant \mu E \leqslant mG,$$

საიდანაც

$$m_* E \leqslant \mu E \leqslant m^* E,$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. ვიტალის თეორემა

განმარტება. ვთქვათ, E წერტილოვანი სიმრავლეა, ხოლო M—სეგმენტების რაიმე სისტემა. თუ ყოველი $x\in E$ წერტილისათვის და $\varepsilon>0$-სათვის არსებობს ისეთი $d\in M$ სეგმენტი, რომ

$$x\in d,\ md<\varepsilon,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ M სისტემა ფარავს E სიმრავლეს ვიტალის აზრით.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, M სისტემა E სიმრავლეს ფარავს ვიტალის აზრით, თუ E სიმრავლის ყოველი წერტილი შედის M სისტემის რაგინდ მცირე სეგმენტებში.

ფუნქციათა თეორიაში შემდეგ თეორემას მრავალრიცხოვანი გამოყენებები აქვს.

თეორემა 1 (დ. ვიტალი). თუ შემოსაზღვრული E სიმრავლე სეგმენტთა M სისტემით დაფარულია ვიტალის აზრით, მაშინ ამ უკანასკნელ სისტემიდან შეიძლება გამოიყოს $\{d_k\}$ სეგმენტთა ისეთი თვლადი სისტემა, რომ

$$d_i d_k=0\ (k\neq i),\ m^*\left[E-\sum_k d_k\right]=0.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, d_k სეგმენტები წყვილწყვილად არ იკვეთებიან, და ფარავენ E სიმრავლეს ნული ზომის მქონე სიმრავლის სიზუსტით.

ჩვენ ამ შესანიშნავი თეორემის ბანახის მიერ მოცემულ დამტკიცებას მოვიყვანთ.

დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე E სიმრავლის შემცველი Δ ინტერვალი (E სიმრავლე შემოსაზღვრულია!) და მოვაშოროთ M სისტემას ყველა ის სეგმენტები, რომლებიც მთლიანად Δ-ში არ არიან მოთავსებული. ადვილი მისახვედრია, რომ ყველა დარჩენილი სეგმენტების სისტემა M_0 (ე. ი. გამოსავალი M სისტემის ყველა ისეთი სეგმენტების სისტემა, რომლებიც მთლიანად მოთავსებული არიან Δ-ში), აგრეთვე ვიტალის აზრით ფარავს E სიმრავლეს.

ამის შემდეგ ავიღოთ რაიმე $d_1\in M_0$ სეგმენტი. თუ $E\subset d_1$, საკითხი ამოწურულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ ვაგრძელებთ M_0 სისტემიდან სეგმენტების მიმდევრობით გამოყოფას შემდეგი წესის მიხედვით. ვთქვათ უკვე აგებულია არაგადამკვეთი სეგმენტები

$$d_1, d_2, \ldots, d_n. \tag{1}$$

თუ

$$E\subset\sum_{k=1}^{n} d_k,$$

სეგმენტების გამოყოფის პროცესი დამთავრებულია და თეორემა დამტკიცებულია. თუ კი

$$E-\sum_{k=1}^{n} d_k\neq 0, \tag{2}$$

მაშინ აღვნიშნოთ

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} d_k, \quad G_n = \Delta - F_n,$$

და განვიხილოთ M_0 სისტემის ყველა ის სეგმენტები, რომლებიც ღია G_n სიმრავლეში შედიან. (2)-ის ძალით ასეთი სეგმენტები აუცილებლად არსებობენ, და მათი სიგრძეები შემოსაზღვრული არიან ზევიდან (თუნდაც, რიცხვით $m\Delta$). ვუწოდოთ k_n ყველა ასეთი სეგმენტების სიგრძეთა ზუსტ ზედასაზღვარს, და d_{n+1}-ით აღვნიშნოთ ის სეგმენტი მათ შორის, რომლისათვისაც

$$md_{n+1} > \frac{1}{2} k_n. \tag{3}$$

ცხადია, რომ d_{n+1} სეგმენტი არ იკვეთება (1) მიმდევრობის არცერთ სეგმენტთან.

თუ $d_1, d_2, \ldots$ სეგმენტების აგების ეს პროცესი არ წყდება პროცესის სასრული რაოდენობით განმეორების შემდეგ (შეწყვეტის შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებული იქნებოდა), მაშინ მას მივყავართ ურთიერთ არაგადამკვეთი

$$d_1, d_2, d_3, \ldots \tag{4}$$

სეგმენტების მიმდევრობის აგებამდე. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს მიმდევრობა საძიებელ მიმდევრობას წარმოადგენს, ე. ი.

$$m^*(E - S) = 0, \tag{5}$$

სადაც

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} d_k.$$

ამ მიზნით, ყოველი k-სათვის ავაგოთ ისეთი D_k სეგმენტი, რომელსაც ისეთივე შუა წერტილი აქვს, როგორც d_k-ს და რომლის სიგრძეც ხუთჯერ აღემატება ამ უკანასკნელის სიგრძეს, $mD_k = 5md_k$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} mD_k < +\infty. \tag{6}$$

მართლაც, d_k სეგმენტები არ იკვეთებიან და შედიან Δ-ში, ასე რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} md_k \leqslant m\Delta, \tag{7}$$

აქედან კი გამომდინარეობს (6).

ამის გამო, (5) დამოკიდებულების დასამტკიცებლად საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ

$$E-S\subset \sum_{k=i}^{\infty} D_k \tag{8}$$

ყოველი i-სათვის.

ვთქვათ $x\in E-S$. მაშინ $x\in G_i$ და (რამდენადაც G_i ღიაა) არსებობს M_0 სისტემის ისეთი სეგმენტი d, რომ

$$x\in d\subset G_i.$$

ამავე დროს, არ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ

$$d\subset G_n \tag{9}$$

ყოველი n-სათვის, რადგან ეს მოგვცემდა ყოველი n-სათვის

$$md\leqslant k_n<2md_{n-1},$$

ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც ((7)-ის ძალით) $md_n\to 0$. მაშასადამე, ზოგიერთი n-სათვის დამოკიდებულება (9) არ არის შესრულებული, და ამიტომ გვექნება

$$d\cdot F_n\neq 0. \tag{10}$$

ვიგულისხმოთ, რომ n უმცირესია ყველა ამ პირობის დამაკმაყოფილებელ რიცხვებს შორის. რადგანაც

$$d\cdot F_i=0,$$

ხოლო $F_1\subset F_2\subset\ldots$, ამიტომ ცხადია, რომ

$$n>i.$$

n-ის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$d\cdot F_{n-1}=0,$$

ხოლო აქედან, თავისი მხრივ, გამოდის ორი შედეგი: ჯერ ერთი

$$d\cdot d_n\neq 0, \tag{11}$$

და შემდეგ $d\subset G_{n-1}$ და, მაშასადამე,

$$md\leqslant k_{n-1}<2md_n. \tag{12}$$

მაგრამ (11) და (12)-დან აშკარად გამომდინარეობს, რომ

$$d\subset D_n$$

და, მით უფრო,

$$d\subset \sum_{k=i}^{\infty} D_k.$$

მაშასადამე,

$$x \in \sum_{k=i}^{\infty} D_k,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (8) და თეორემა დამტკიცებულია.

გამოყენების დროს ხანდახან სასარგებლოა ვიტალის თეორემის ერთნაირად სახეცვლილი ფორმა:

თეორემა 2 (დ. ვიტალი). 1-ლი თეორემის პირობებში, ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის არსებობს M სისტემის ისეთი ურთიერთ არაგადამკვეთი $d_1, d_2, \ldots, d_n$ სეგმენტების სასრული სისტემა, რომლისათვისაც

$$m^*\left[E - \sum_{k=1}^{n} d_k\right] < \varepsilon.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ Δ-თი რაიმე E სიმრავლის შემცველი ინტერვალი და მოვაშოროთ M სისტემას ყველა ის სისტემები, რომლებიც Δ-ში არ შედიან. თუ დარჩენილი სისტემა არის M_0, მაშინ ცხადია, რომ იგი აგრეთვე ფარავს E სიმრავლეს ვიტალის აზრით. გამოვიყენოთ M_0 სისტემისათვის თეორემა 1 და ავაგოთ M_0 სისტემის $\{d_k\}$ სეგმენტების ისეთი მიმდევრობა, რომლებიც ერთმანეთთან არ იკვეთებიან და

$$m^*\left[E - \sum_{k} d_k\right] = 0.$$

თუ $\{d_k\}$ სისტემა სასრულია, თეორემა დამტკიცებულია. თუ კი ეს სისტემა უსასრულოა, მაშინ ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} m d_k \leqslant m\Delta,$$

და შეიძლება ვიპოვოთ იმდენად დიდი n, რომ

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} m d_k < \varepsilon.$$

მაგრამ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$E - \sum_{k=1}^{n} d_k \subset \left[E - \sum_{k=1}^{\infty} d_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k, \tag{13}$$

საიდანაც

$$m^*\left[E - \sum_{k=1}^{n} d_k\right] < \varepsilon.$$

რადგანაც (13)-ის მარცხენა ნაწილში პირველი შესაკრების გარე ზომა უდრის ნულს.

სავარჯიშო III თავისათვის

დაამტკიცეთ, რომ:

1. ყოველ სრულყოფილ სიმრავლეში არსებობს სრულყოფილი ნულის ტოლი ზომის ქვესიმრავლე.

2. თუ A დადებითი ზომის ზომადი სიმრავლეა, მასში არსებობს ისეთი ორი x და y წერტილი, რომელთა შორის მანძილი რაციონალურია.

3. შემოსაზღვრული E სიმრავლის ზომადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის არსებობდეს ისეთი ჩაკეტილი $F\subset E$ სიმრავლე, რომ $m^*(E-F)<\varepsilon$ (ვალე-პუსენის ნიშანი).

4. ყოველი შემოსაზღვრული E სიმრავლისათვის შეიძლება აიგოს ისეთი A და B სიმრავლეები, რომ $A\subset E\subset B$, A არის F_σ ტიპის, B კი G_δ ტიპისა, და

$$mA=m_*E,\quad mB=m^*E.$$

5. თუ A და B ისეთი ორი ზომადი სიმრავლეა, რომელთაც საერთო წერტილები არა აქვთ, მაშინ ყოველი E სიმრავლისათვის გვექნება

$$m^*[E(A+B)]=m^*(EA)+m^*(EB),\quad m_*[E(A+B)]=m_*(EA)+m_*(EB).$$

6. იმისათვის, რომ შემოსაზღვრული E სიმრავლე ზომადი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი შემოსაზღვრული A სიმრავლისათვის გვქონდეს

$$m^*A=m_*(AF)+m^*(A\cdot CE)$$

(კარათეოდორის ნიშანი).

7. E სიმრავლეს არსად მკვრივი ეწოდება, თუ ყოველი ინტერვალი შეიცავს CE' სიმრავლის წერტილებს. ააგეთ არსად მკვრივი შემოსაზღვრული დადებითი ზომის სრულყოფილი სიმრავლე.

8. ააგეთ $U=[0,1]$ სეგმენტში შემავალი ისეთი ზომადი E სიმრავლე, რომ ყოველი $\Delta\subset U$ ინტერვალისათვის გვქონდეს

$$m(\Delta E)>0,\quad m(\Delta\cdot CE)>0.$$

9. თუ $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$, $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\dots$ და E შემოსაზღვრულია, მაშინ $n\to\infty$-სათვის გვაქვს

$$m^*E_n\to m^*E.$$

დამტკიცება!

10, გაზომვის თეორიის ძღვილი ამოცანის ამოხსნის ყოველგვარი ხერხისათვის შემოსაზღვრული თვლადი სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია.

თავი IV

ზომადი ფუნქციები

§ 1. ზომადი ფუნქციის განმარტება და უმარტივესი თვისებები

თუ E სიმრავლის ყოველი x-სათვის შეთანადებულია რაიმე $f(x)$ რიცხვი, ვიტყვით, რომ E სიმრავლეზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. ამასთან ჩვენ დასაშვებად ვთვლით, რომ ფუნქცია იღებდეს უსასრულო მნიშვნელობებსაც, მხოლოდ მათ გარკვეული ნიშანი უნდა ჰქონდეთ, ე. ი. ჩვენ შემოგვყავს „არასაკუთრივი“ რიცხვები $-\infty$ და $+\infty$. ეს რიცხვები ერთმანეთთან და ყოველ სასრულ a რიცხვთან დაკავშირებული არიან უტოლობებით

$$-\infty<a<+\infty$$

და ამ რიცხვებისათვის შემოგვაქვს მოქმედებათა შემდეგი კანონები:

$$+\infty\pm a=+\infty,\ +\infty+(+\infty)=+\infty,\ +\infty-(-\infty)=+\infty,$$

$$-\infty\pm a=-\infty,\ -\infty+(-\infty)=-\infty,\ -\infty-(+\infty)=-\infty,$$

$$|+\infty|=|-\infty|=+\infty,$$

$$+\infty.a=a.(+\infty)=+\infty,\ -\infty.a=a(-\infty)=-\infty,\ \text{თუ}\ a>0,$$

$$+\infty.a=a.(+\infty)=-\infty,\ -\infty.a=a(-\infty)=+\infty,\ \text{თუ}\ a<0,$$

$$0.(\pm\infty)=(\pm\infty).0=0,$$

$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty;\ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty}=0.$$

აქ a აღნიშნავს ნამდვილ სასრულ რიცხვს.

სიმბოლოებს:

$$+\infty-(+\infty),\ -\infty-(-\infty),\ +\infty+(-\infty),\ -\infty(+\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \ \frac{a}{0}$$

ჩვენ აზრს მოკლებულად ვთვლით.

როდესაც საქმე ეხება $f(x)$ ფუნქციას, რომელიც E სიმრავლეზეა მოცემული, მაშინ სიმბოლოთი

$$E(f>a)$$

E სიმრავლის ისეთ x წერტილთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ, რომელთათვისაც შესრულებულია უტოლობა

$$f(x)>a.$$

ანალოგიური აზრით შემოიღება

$$\mathrm{E}(f\geqslant a),\ \mathrm{E}(f=a),\ \mathrm{E}(f\leqslant a),\ \mathrm{E}(a<f\leqslant a)$$

და ამის მსგავსი სიმბოლოები. თუ ის სიმრავლე, რომელზედაც მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია, აღნიშნულია რაიმე სხვა ასოთი, მაგალითად A-თი ან B-თი, ჩვენ შესაბამად დავწერთ

$$A(f>a),\ B(f>a).$$

განმარტება 1. E სიმრავლეზე მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას ზომადი ეწოდება, თუ ზომადია როგორც E, ისე

$$\mathrm{E}(f>a)$$

სიმრავლე ყოველი a-სათვის.

იმასთან დაკავშირებით, რომ აქ ლაპარაკია ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეებზე, ხშირად (სწორედ ამ გარემოებისათვის ხაზის გასასმელად) $f(x)$ ფუნქციას (L) ზომად ფუნქციას უწოდებენ.

თეორემა 1. ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ნულზომიან სიმრავლეზეა მოცემული, ზომადია.

მტკიცება აშკარაა.

თეორემა 2. ვთქვათ, $f(x)$ წარმოადგენს E-ზე მოცემულ ზომად ფუნქციას. თუ A არის E სიმრავლის ზომადი ქვესიმრავლე, მაშინ $f(x)$ განხილული მხოლოდ $x\in$ A-სათვის ზომადია[1].

მართლაც,

$$A(f>a)=A\cdot\mathrm{E}(f>a).$$

თეორემა 3. ვთქვათ, $f(x)$ მოცემულია ისეთ ზომად E სიმრავლეზე, რომელიც წარმოიდგინება ზომადი E_k სიმრავლეების სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრავლის ჯამის სახით

$$\mathrm{E}=\sum_k \mathrm{E}_k.$$

თუ $f(x)$ ზომადია ყოველ E_k სიმრავლეზე, მაშინ ის ზომადია E სიმრავლეზედაც.

მართლაც,

$$\mathrm{E}(f>a)=\sum_k \mathrm{E}_k(f>a).$$

---

[1]. ამ, შედარებით ვრცელი, გამოთქმის ნაცვლად, ჩვენ ვიტყვით ხოლმე, რომ $f(x)$ ზომადია A სიმრავლეზე.

განმარტება 2. ერთსადაიმავე E სიმრავლეზე მოცემულ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს ეკვივალენტური ეწოდებათ, თუ

$$mE(f \neq g) = 0.$$

$f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათა ეკვივალენტობისათვის მიღებულია შემდეგი აღნიშვნა

$$f(x) \sim g(x).$$

განმარტება 3. ვთქვათ, რაიმე S გარემოება სამართლიანია რაღაც E სიმრავლის ყველა წერტილისათვის, გარდა იმ წერტილებისა, რომლებიც შედიან E სიმრავლის E_0 ქვესიმრავლეში. თუ $mE_0=0$, მაშინ ამბობენ, რომ S გარემოება სამართლიანია თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე, ან E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილისათვის.

კერძო შემთხვევებში, გამონაკლის წერტილთა E_0 სიმრავლე შეიძლება ცარიელიც იყოს.

ახლა შეიძლება ითქვას, რომ E-ზე მოცემული ორი ფუნქცია ეკვივალენტურია, თუ ისინი თითქმის ყველგან ტოლია E-ზე.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია E სიმრავლეზე და ზომადია, ხოლო $g(x) \sim f(x)$, მაშინ $g(x)$ აგრეთვე ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A = E(f \neq g), \quad B = E - A.$$

მაშინ $mA=0$, ასე რომ B ზომადია. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ზომადია B სიმრავლეზე. მაგრამ B სიმრავლეზე $f(x)$ და $g(x)$ არ განსხვავდებიან, ასე რომ $g(x)$ ზომადია B-ზე. რამდენადაც $g(x)$ ზომადია A-ზედაც (რადგანაც $mA=0$), ამიტომ ის ზომადია $E=A+B$ სიმრავლეზედაც.

თეორემა 5. თუ E სიმრავლის ყველა წერტილისათვის $f(x)=c$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზომადია.

მართლაც

$$E(f>a) = \begin{cases} E, & \text{თუ } a < c. \\ O, & \text{თუ } a \geqslant c. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემაში c შესაძლებელია უსასრულოც იყოს.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ E სიმრავლეზე მოცემული ზომადი ფუნქციაა, მაშინ ყოველი a-სათვის

$$E(f \geqslant a), \ E(f=a), \ E(f \leqslant a), \ E(f<a)$$

ზომადი სიმრავლეებია.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$E(f \geqslant a) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right),$$

საიდანაც გამომდინარეობს $E(f \geqslant a)$ სიმრავლის ზომადობა. დანარჩენი სიმრავლეების ზომადობა გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულებებიდან:

$$E(f=a)=E(f\geqslant a)-E(f>a),\ E(f\leqslant a)=E-E(f>a),$$

$$E(f<a)=E-E(f\geqslant a).$$

შენიშვნა. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ თუნდაც ერთერთი

$$E(f\geqslant a),\ E(f\leqslant a),\ E(f<a) \tag{1}$$

სიმრავლეებიდან ზომადია ყოველი a-სათვის, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზომადია E სიმრავლეზე (რომელიც აგრეთვე ზომადად იგულისხმება).

მართლაც,

$$E(f>a)=\sum_{n=1}^{\infty} E\left(f\geqslant a+\frac{1}{n}\right)$$

იგივეობა გვიჩვენებს, მაგალითად, რომ $f(x)$ ზომადია, თუ ზომადია ყველა $E(f\geqslant a)$ სიმრავლეები. ამის მსგავსად მტკიცდება სხვა დებულებანიც. ამგვარად, ზომადი ფუნქციის განმარტებაში $E(f>a)$ სიმრავლე შეიძლება შეიცვალოს (1)-ის ნებისმიერი სიმრავლით.

თეორემა 7. თუ E სიმრავლეზე მოცემული $f(x)$ ფუნქცია ზომადია ამ სიმრავლეზე და k სასრული რიცხვია, მაშინ ფუნქციები 1) $f(x)+k$, 2) $kf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$ და, თუ $f(x)\neq 0$, აგრეთვე ფუნქცია 5) $\dfrac{1}{f(x)}$, ზომადი არიან.

დამტკიცება. 1) $f(x)+k$ ფუნქციის ზომადობა გამომდინარეობს

$$E(f+k>a)=E(f>a-k)$$

დამოკიდებულებიდან.

2) $kf(x)$ ფუნქციის ზომადობა $k=0$-სათვის მე-5 თეორემიდან გამომდინარეობს. სხვა k რიცხვებისათვის კი ეს გამომდინარეობს შემდეგი ცხადი დამოკიდებულებიდან

$$E(kf>a)=\begin{cases} E\left(f>\dfrac{a}{k}\right), & \text{თუ } k>0, \\[2ex] E\left(f<\dfrac{a}{k}\right), & \text{თუ } k<0. \end{cases}$$

3) $|f(x)|$ ფუნქცია ზომადია იმიტომ, რომ

$$E(|f|>a)=\begin{cases} E & \text{თუ } a<0, \\ E(f>a)+E(f<-a), & \text{თუ } a\geqslant 0. \end{cases}$$

4) ანალოგიურად, იქედან, რომ

$$E(f^2>a)=\begin{cases} E, & \text{თუ } a<0, \\ E[|f|>\sqrt{a}) & \text{თუ } a\geqslant 0. \end{cases}$$

გამომდინარეობს $f^2(x)$ ფუნქციის ზომადობა.

5) დაბოლოს, როცა $f(x)\neq 0$, გვაქვს

$$E\left(\frac{1}{f}>a\right)=\begin{cases} E(f>0), & \text{თუ } a=0, \\ E(f>0)\cdot E\left(f<\frac{1}{a}\right), & \text{თუ } a>0, \\ E(f>0)+E(f<0)\cdot E\left(f<\frac{1}{a}\right), & \text{თუ } a<0, \end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს $\dfrac{1}{f(x)}$-ის ზომადობა.

თეორემა 8. $E=[A,B]$ სეგმენტზე მოცემული და უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. უპირველეს ყოვლისა, ვაჩვენოთ, რომ

$$F=E(f\leqslant a)$$

სიმრავლე ჩაკეტილია. მართლაც, თუ x_0 ამ სიმრავლის ზღვარითი წერტილია და

$$x_n\to x_0 \ (x_n\in F),$$

მაშინ $f(x_n)\leqslant a$ და, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ძალით, გვექნება

$$f(x_0)\leqslant a,$$

ე. ი. $x_0\in F$, რაც ამტკიცებს F სიმრავლის ჩაკეტილობას.

მაგრამ მაშინ სიმრავლე

$$E(f>a)=E-E(f\leqslant a)$$

ზომადია, და თეორემა დამტკიცებულია.

ზომადი ფუნქციის თვითონ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ არაზომად სიმრავლეზე მოცემული ფუნქცია არაზომადია.

მაგრამ ადვილია აღმოჩენა ისეთი ფუნქციის არსებობისა, რომელიც ზომად სიმრავლეზეა მოცემული და არაზომადია.

განმარტება 4. ვთქვათ, M წარმოადგენს $E=[A,B]$ სეგმენტის ქვესიმრავლეს. ისეთ $\varphi_M(x)$ ფუნქციას, რომელიც ერთის ტოლია M სიმრავლეზე და ნულის ტოლია $E-M$ სიმრავლეზე M სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია ეწოდება.

თეორემა 9. M სიმრავლე და მისი მახასიათებელი $\varphi_M(x)$ ფუნქცია ერთდროულად ზომადია ან არაზომადი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $\varphi_M(x)'$ ფუნქცია ზომადია, მაშინ M სიმრავლის ზომადობა გამომდინარეობს

$$M = \mathrm{E}(\varphi_M > 0)$$

დამოკიდებულებიდან.

შებრუნებით, თუ M ზომადი სიმრავლეა, მაშინ დამოკიდებულებანი

$$\mathrm{E}(\varphi_M > a) = \begin{cases} 0, \text{ თუ } a \geqslant 1, \\ M, \text{ თუ } 0 \leqslant a < 1, \\ \mathrm{E}, \text{ თუ } a < 0 \end{cases}$$

გვიჩვენებენ, რომ $\varphi_M(x)$ ზომადია.

აქედან, სხვათა შორის, ძალიან მარტივად მიიღებიან წყვეტილი ზომადი ფუნქციების მაგალითები.

§ 2. ზომადი ფუნქციების შემდგომი თვისებები

ლ ე მ ა. თ უ E ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ო რ ი ზ ო მ ა დ ი $f(x)$ დ ა $g(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\mathrm{E}(f > g)$$

ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ო მ ა დ ი ა.

მართლაც, თუ ჩვენ გადავნომრავთ ყველა რაციონალურ რიცხვებს

$$r_1, r_2, r_3, \ldots,$$

მაშინ ადვილად შემოწმდება შემდეგი დამოკიდებულება

$$\mathrm{E}(f > g) = \sum_{k=1}^{\infty} E(f > r_k)\mathrm{E}(g < r_k),$$

საიდანაც გამომდინარეობს ლემა.

თეორემა 1. ვ თ ქ ვ ა თ, $f(x)$ დ ა $g(x)$ წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ე ნ E-ზე მ ო ც ე მ უ ლ ს ა ს რ უ ლ ზ ო მ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ს. მ ა შ ი ნ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი

1) $f(x)-g(x)$, 2) $f(x)+g(x)$, 3) $f(x)\cdot g(x)$ ზ ო მ ა დ ი ა, დ ა თ უ $g(x) \neq 0$, ა გ რ ე თ ვ ე 4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ც ზ ო მ ა დ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 1) $a+g(x)$ ფუნქცია ზომადია ყოველი a-სათვის. მაშასადამე (ლემის ძალით) $\mathrm{E}(f > a+g)$ სიმრავლე ზომადია, და რადგან

$$\mathrm{E}(f-g > a) = \mathrm{E}(f > a+g),$$

ამიტომ $f(x)-g(x)$ ფუნქცია ზომადია.

2) $f(x)+g(x)$ ჯამის ზომადობა იქედან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x)+g(x) = f(x)-[-g(x)].$$

3) $f(x)\cdot g(x)$ ნამრავლის ზომადობა შემდეგი იგივეობიდან გამომდინარეობს:

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}\left\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\right\}$$

თუ § 1-ის მე-7 თეორემას დავიხმარებთ.

4) დაბოლოს, $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადის ზომადობა

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

იგივეობის შედეგია.

ეს თეორემა გვიჩვენებს, რომ ზომად ფუნქციებზე არითმეტიკული მოქმედებების მოხდენას არ გამოვყავართ ფუნქციათა ამ კლასის საზღვრებიდან. შემდეგი თეორემა ამის მსგავს შედეგს გვაძლევს უკვე არაარითმეტიკული მოქმედების—ზღვარზე გადასვლის მოქმედების მიმართ.

თეორემა X. *ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია $f_1(x)$, $f_2(x)$,... ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა. თუ ყოველ $x\in E$ წერტილში არსებობს (სასრული ან უსასრულო) ზღვარი*

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

მაშინ $F(x)$ ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. ავირჩიოთ ნებისმიერი a და განვიხილოთ სიმრავლეები

$$A_m^{(k)}=E\left(f_k>a+\frac{1}{m}\right),\quad B_m^{(n)}=\prod_{k=n}^{\infty}A_m^{(k)}.$$

ეს სიმრავლეები, აშკარაა, ზომადი არიან, და თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ

$$E(F>a)=\sum_{m,\,n}B_m^{(n)}.$$

გადავიდეთ ამ იგივეობის შემოწმებაზე.

ვთქვათ, $x_0\in E(F>a)$, მაშინ $F(x_0)>a$, და მოიძებნება ისეთი ნატურალური m, რომ $F(x_0)>a+\frac{1}{m}$. რამდენადაც $f_k(x_0)\to F(x_0)$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი n, რომ როდესაც $k\geqslant n$, გვექნება

$$f_k(x_0)>a+\frac{1}{m}.$$

სხვანაირად, $x_0 \in A_m^{(k)}$ ყოველი $k \geqslant n$-სათვის. მაგრამ მაშინ $x_0 \in B_m^{(n)}$ და მით უფრო $x_0 \in \sum_{m,n} B_m^{(n)}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$E(F>a) \subset \sum_{m,\,n} B_m^{(n)}.$$

ახლა დაგვრჩენია შებრუნებული ჩართვის დადგენა

$$\sum_{m,\,n} B_m^{(n)} \subset \mathrm{E}(F>a), \tag{*}$$

და თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ვთქვათ, $x_0 \in \sum_{m,n} B_m^{(n)}$. მაშინ $x_0 \in B_m^{(n)}$ რომელიღაც ფიქსირებული n და m-სათვის. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$x_0 \in A_m^{(k)} \text{ ყოველი } k \geqslant n\text{-სათვის.}$$

სხვანაირად,

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში k-ს მივასწრაფებთ უსასრულობისაკენ და გადავალთ ზღვარზე, მაშინ მივიღებთ:

$$F(x_0) \geqslant a + \frac{1}{m};$$

საიდანაც ცხადია, რომ $F(x_0) > a$, ე. ი. $x_0 \in \mathrm{E}(F>a)$. ამით (*) ჩართვა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა შეიძლება შემდეგნაირად განზოგადოვდეს.

თეორემა 3. ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ ზომადი ფუნქციები და რაღაც $F(x)$ ფუნქცია. თუ

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x) \tag{α}$$

დამოკიდებულება შესრულებულია თითქმის ყველგან E-ზე, მაშინ $F(x)$ ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A-თი E-ს ის ქვესიმრავლე, რომლის $x \in \mathrm{E}$ წერტილებზედაც (α) დამოკიდებულება არ არის სამართლიანი (ამ წერტილებში ზღვარი $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ შესაძლებელია სრულიად არც არსებობდეს). პირობის ძალით $mA=0$ და $F(x)$ ზომადია A სიმრავლეზე. მე-2 თეორემის ძალით იგი ზომადია E$-A$ სიმრავლეზედაც და მაშინ იგი ზომადია მთელს E სიმრავლეზე.

§ 3. ზომად ფუნქციათა მიმდევრობანი. ზომითი კრებადობა

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოგვიხდება

$$E(|f-g|\geqslant\sigma),\quad E(|f-g|<\sigma)$$

სახის სიმრავლეთა განხილვა, სადაც $f(x)$ და $g(x)$ E სიმრავლეზე მოცემული ფუნქციებია, ხოლო σ-რაიმე დადებითი რიცხვია. ის წერტილები, რომლებშიაც როგორც $f(x)$ ისე $g(x)$ ფუნქციები ერთდროულად იღებენ ერთნაირი ნიშნის უსასრულო მნიშვნელობებს, ზუსტად რომ ვთქვათ, არ შედიან არცერთ ამ სიმრავლეში, რადგანაც $f(x)-g(x)$ სხვაობას ასეთ პირობებში აზრი არა აქვს. იმის გამო, რომ აღნიშნული გარემოება გარკვეულ უხერხულობას ჰქმნის, ჩვენ შევთანხმდეთ [1] ეს წერტილები $E(|f-g|\geqslant\sigma)$ სიმრავლის ელემენტებად ჩავთვალოთ. ასეთი შეთანხმების შემდეგ აშკარაა, რომ

$$E=E(|f-g|\geqslant\sigma)+E(|f-g|<\sigma)$$

და მარჯვენა მხარეში შესაკრებები არ იკვეთებიან.

თეორემა 2 (ა. ლებეგი). ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციათა $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ მიმდევრობა, რომელიც E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე კრებადია თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $\sigma>0$ რიცხვი, გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty}\{mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)\}=0.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ უპირველესად ყოვლისა, რომ § 2-ის მე-3 თეორემის ძალით ზღვარითი $f(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ზომადია, და, მაშასადამე, ის სიმრავლეები, რომელთა შესახებაც ლაპარაკია თეორემაში, ზომადი არიან.

აღვნიშნოთ

$$A=E(|f|=+\infty),\quad A_n=(|f_n|=+\infty),\quad B=E(f_n \text{ არ}\to f)$$

$$Q=A+\sum_{n=1}^{\infty}A_n+B.$$

ცხადია, რომ

$$mQ=0. \tag{1}$$

---

[1] ამ შეთანხმებას შემთხვევითი ხასიათი აქვს. მაგრამ იმის გამო, რომ შემდეგში მხოლოდ თითქმის ყველგან სასრულ ფუნქციებს ვიხილავთ, და $E(|f-g|\geqslant\sigma)$ სიმრავლეები კი საინტერესო იქნებიან მხოლოდ მათი ზომის მხრივ, საბოლოოდ სულერთია როგორ მოვექცევით

$$E(f=\pm\infty)+E(g=\pm\infty),$$

სიმრავლეს, რადგანაც მისი ზომა მაინც ნულის ტოლია.

დავუშვათ აგრეთვე, რომ

$$E_k(\sigma)=E(|f_k-f|\geqslant\sigma),\quad R_n(\sigma)=\sum_{k=n}^{\infty}E_k(\sigma),$$

$$M=\prod_{n=1}^{\infty}R_n(\sigma).$$

ეს სიმრავლეები ზომადია. მაგრამ, რადგანაც

$$R_1(\sigma)\supset R_2(\sigma)\supset R_3(\sigma)\supset\dots,$$

ამიტომ III თავის § 4-ის მე-12 თეორემის ძალით, $n\to\infty$-სათვის გვექნება

$$mR_n(\sigma)\to mM. \tag{2}$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$M\subset Q. \tag{3}$$

მართლაც, თუ $x_0\,\overline{\in}\,Q$, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x_0)=f(x_0),$$

ამასთან ყველა $f_1(x_0), f_2(x_0),\dots$ რიცხვებიდან და მათი $f(x_0)$ ზღვარიც—სასრული არიან. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი n, რომ $k\geqslant n$-სათვის გვექნება

$$|f_k(x_0)-f(x_0)|<\sigma.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ,

$$x_0\,\overline{\in}\,E_k(\sigma)\quad(k\geqslant n),$$

და ამისგამო $x_0\,\overline{\in}\,R_n(\sigma)$ და, მით უფრო, $x_0\,\overline{\in}\,M$; საიდანაც გამომდინარეობს (3).

მაგრამ მაშინ, (1)-ის ძალით, $mM=0$, და (2) მიიღებს სახეს

$$\lim_{n\to\infty} mR_n(\sigma)\to 0. \tag{4}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია, რადგანაც

$$E_n(\sigma)\subset R_n(\sigma).$$

შენიშვნა. აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ მივიღეთ უფრო ძლიერი შედეგი (4), ვიდრე ის, რის დამტკიცებაც გვინდოდა. ქვემოთ, დ. ფ. ეგოროვის თეორემის დამტკიცების დროს, ჩვენ სწორედ ამ შედეგით სარგებლობა მოგვიხდება.

დამტკიცებული თეორემა საბაბს გვაძლევს დავადგინოთ შემდეგი

განმარტება (ფ. რისი). *ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციათა*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\dots \tag{*}$$

მიმდევრობა და ზომადი თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქცია. თუ, როგორიც არ უნდა იყოს $\sigma>0$ რიცხვი, გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}[mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)]=0,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ (*) მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ზომით კრებადობისათვის ჩვენ ვიხმართ გ. მ. ფიხტენგოლცის მიერ შემოღებულ აღნიშვნას

$$f_n(x)\Longrightarrow f(x).$$

ზომით კრებადობის ახლახან შემოღებული ცნების დახმარებით ლებეგის თეორემა ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

თეორემა 1*. თუ ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია თითქმის ყველგან, მაშინ იგი ზომით კრებადია იგივე ზღვარითი ფუნქციისაკენ.

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თეორემის შებრუნება არ შეიძლება.

მაგალითი. გავსაზღვროთ [0,1) ნახევარსეგმენტზე ყოველი ნატურალური k-სათვის k ფუნქციისაგან შემდგარი ჯგუფი:

$$f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x),\dots,\ f_k^{(k)}(x),$$

სადაც

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right)\\[2mm] 0, & x\overline{\in}\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right).\end{cases}$$

[კერძოდ $f_1^{(1)}(x)\equiv1$ მთელს [0,1)-ზე]. თუ ყველა ამგვარად აგებულ ფუნქციებს მიმდევრობით გადავნომრავთ ერთი ნიშნაკით, მაშინ მივიღებთ

$$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x),\ \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),\ \varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),\ \varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),\dots$$

მიმდევრობას.

ადვილია იმის შემჩნევა, რომ $\varphi_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობა ზომით კრებადია ნულისაკენ. მართლაც, თუ $\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$, მაშინ ყოველი $\sigma>0$-სათვის გვექნება [1]

$$E(|\varphi_n|\geqslant\sigma)=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),$$

ამ სიმრავლის ზომა კი $\frac{1}{k}$-ს უდრის, რომელიც მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა n უსასრულოდ იზრდება.

---

[1] ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\sigma<1$, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში $E(|\varphi_n|>1)$ ცარიელია და ეს შემთხვევა ტრივიალურია.

ამასთანავე

$$\varphi_n(x)\to 0$$

დამოკიდებულება არაა სამართლიანი [0,1) მონაკვეთის არცერთი წერტილისათვის. მართლაც, თუ $x_0\in[0,1)$, მაშინ ყოველი k-სათვის მოიძებნება ისეთი i, რომ

$$x_0\in\left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right),$$

ასე რომ $f_i^{(k)}(x_0)=1$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, რა შორსაც არ უნდა გავყვეთ

$$\varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ \varphi_3(x_0),\dots$$

მიმდევრობას, ყოველთვის შევხვდებით მასში ერთის ტოლ რიცხვებს, რაც ამტკიცებს გამოთქმულ დებულებას.

ამგვარად, ცნება ზომით კრებადობის შესახებ არსებითად უფრო ზოგადია, ვიდრე თითქმის ყველგან კრებადობის, და მით უფრო, ყველგან კრებადობის ცნებები.

ბუნებრივია ვიკითხოთ თუ რამდენად განსაზღვრავს

$$f_n(x) \Longrightarrow f(x)$$

დამოკიდებულება $f(x)$ ფუნქციას, ე. ი. ერთადერთია თუ არა ზღვარითი ფუნქცია ზომით კრებადობის დროს.

მე-2 და მე-3 თეორემები საშუალებას გვაძლევენ პასუხი გავცეთ დასმულ კითხვას.

თეორემა 2. თუ $f_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ იგივე მიმდევრობა ზომით კრებადია ყოველი $f(x)$ ფუნქციის ეკვივალენტურ $g(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ყოველი $\sigma>0$-სათვის გვექნება

$$E(|f_n-g|\geqslant\sigma)\subset E(f\neq g)+E(|f_n-f|\geqslant\sigma),$$

საიდანაც (რამდენადაც $mE(f\neq g)=0$) გვექნება

$$mE(|f_n-g|\geqslant\sigma)\leqslant mE(|f_n-f|\geqslant\sigma),$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 3. თუ $f_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობა ზომით კრებადია ორი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ $f(x)$ და $g(x)$ ეკვივალენტური არიან.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\sigma>0$-სათვის გვექნება

$$E(|f-g|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)+E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right), \qquad (*)$$

იმიტომ რომ ისეთი წერტილი, რომელიც არ შედის ამ დამოკიდებულების

მარჯვენა მხარეში, არ შეიძლება შევიდეს არც მის მარცხენა მხარეში. მაგრამ

$$f_n \Longrightarrow f \text{ და } f_n \Longrightarrow g$$

დამოკიდებულებანი გვიჩვენებენ, რომ (*)-ის მარჯვენა მხარის ზომა n-ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნულისაკენ, საიდანაც ცხადია, რომ

$$m\mathrm{E}(|f-g| \geqslant \sigma) = 0.$$

მაგრამ, რადგანაც [1]

$$\mathrm{E}(f \neq g) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(|f-g| \geqslant \frac{1}{n}\right),$$

ამიტომ ცხადია $f \sim g$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მე-2 და მე-3 თეორემები გვიჩვენებენ, რომ თუ ჩვენ გვსურს ზომით კრებადობისათვის, აღვადგინოთ ზღვრული ფუნქციის ერთად ერთობის თვისება, მაშინ უნდა შევთანხმდეთ, რომ ეკვივალენტური ფუნქციები იგივეურად ჩავთვალოთ. ეს ასეც ხდება ფუნქციათა თეორიის მეტრიკულ საკითხებში, ე. ი. ისეთ საკითხებში, რომლებშიაც ფუნქციათა თვისებები შეისწავლება იმ სიმრავლეთა ზომების დახმარებით, რომლებზედაც ფუნქციას აქვს ან არა აქვს ესა თუ ის თვისება. ინტეგრალურ აღრიცხვაში ჩვენ საკითხისადმი ამდაგვარი მიდგომის ბევრ მაგალითს ვნახავთ.

თუმცა ზომით კრებადობა უფრო ზოგადია თითქმის ყველგან კრებადობაზე, მიუხედავად ამისა ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 4 (ფ. რისი). ვთქვათ, ფუნქციათა $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ. ასეთ პირობებში არსებობს ისეთი

$$f_{n_1}(x),\ f_{n_2}(x),\ f_{n_3}(x), \ldots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \cdots)$$

ქვემიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ[2].

დამტკიცება. ავიღოთ ისეთი დადებითი რიცხვების

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots$$

მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_k = 0.$$

---

[1] აქ რომ $\subset$ ნიშნის ნაცვლად $=$-ის ნიშანი გვეხმარა, შეცდომას დავუშვებდით. მაგალითად, ის წერტილები, რომლებშიაც $f(x) = g(x) = +\infty$, მარცხენა მხარეში არ შედიან, ჩვენ კი შევთანხმდით, რომ ისინი ჩავურთოთ $\mathrm{E}(|f-g| \geqslant \sigma)$ სახის ყველა სიმრავლეებს.

[2] თეორემის ჩამოყალიბების დროს ჩვენ თავის თავად ცხადად მიგვაჩნია, რომ ადგილი აქვს ყველა დანათქვამებს, რომელიც გაკეთებულია ზომით კრებადობის განსაზღვრისას, ასე: E ზომადი სიმრავლეა, თვით მოცემული ფუნქციები ზომადია და სხ.

ვთქვათ, გარდა ამისა, რომ

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3+\cdots \quad (\eta_k>0)$$

დადებითი კრებადი მწკრივია.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ინდექსების

$$n_1<n_2<n_3<\cdots \tag{*}$$

საძიებელი მიმდევრობა. აღვნიშნოთ n_1-ით ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომლისათვისაც

$$m\mathrm{E}(|f_{n_1}-f|\geqslant\sigma_1)<\eta_1.$$

ასეთი რიცხვი აუცილებლად არსებობს, ვინაიდან

$$m\mathrm{E}(|f_n-f|\geqslant\sigma_1)\to 0,$$

როცა $n\to\infty$.

შემდეგ, n_2-ით ის ნატურალური რიცხვი აღვნიშნოთ, რომლისათვისაც

$$m\mathrm{E}(|f_{n_2}-f|\geqslant\sigma_2)<\eta_2, \quad n_2>n_1.$$

საზოგადოდ, n_k-თი აღვნიშნოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომლისათვისაც

$$m\,\mathrm{E}(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma_k)<\eta_k, \quad n_k>n_{k-1}.$$

(*) მიმდევრობა, ამგვარად, აგებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე გვექნება

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x). \tag{**}$$

მართლაც, ვთქვათ

$$R_i=\sum_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma_k), \quad Q=\prod_{i=1}^{\infty}R_i.$$

რადგანაც

$$R_1\supset R_2\supset R_3\supset\cdots,$$

ამიტომ (თავი III, § 4, თეორემა 12)

$$mR_i\to mQ.$$

მეორეს მხრივ, აშკარაა, რომ

$$mR_i<\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k,$$

ასე რომ $mR_i\to 0$, და, მაშასადამე,

$$mQ=0.$$

დაგვრჩენია იმ გარემოების შემოწმება, რომ ($*_*$) დამოკიდებულება სამართლიანია ყველა x-სათვის $\mathrm{E}-\mathrm{Q}$ სიმრავლიდან.

ვთქვათ, $x_0 \in \mathrm{E}-\mathrm{Q}$. მაშინ $x_0 \in R_{i_0}$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, როცა $k \geqslant i$

$$x_0 \overline{\in} \mathrm{E}(|f_{n_k}-f| \geqslant \sigma_k).$$

და, მაშასადამე,

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)| < \sigma_k \qquad (k \geqslant i_0).$$

აქედან კი, რამდენადაც $\sigma_k \to 0$, ცხადია, რომ

$$f_{n_k}(x_0) \to f(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ლებეგის თეორემამ საბაბი მოგვცა დაგვედგინა ცნება ზომით კრებადობის შესახებ. მეორეს მხრივ, იგივე თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ დ. ფ. ეგოროვის მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა ჵ (დ. ფ. ეგოროვი). ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ისეთი ზომად და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციების

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots$$

მიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია ზომად და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისაკენ

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x). \tag{*}$$

ასეთ შემთხვევაში, ყოველი $\delta>0$-სათვის არსებობს ისეთი $E \supset E_\delta$ ზომადი სიმრავლე, რომ

1) $mE_\delta > m\mathrm{E}-\delta$.

2) E_δ სიმრავლეზე (*) კრებადობა თანაბარია.

დამტკიცება. ლებეგის თეორემის მტკიცების დროს ნაჩვენები იყო, რომ ყოველი $\sigma>0$-სათვის გვექნება

$$mR_n(\sigma) \to 0, \quad n \to \infty \tag{1}$$

სადაც

$$R_n(\sigma) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{E}(|f_k-f| \geqslant \sigma).$$

შევნიშნავთ რა ამას, ავიღოთ კრებადი დადებითი მწკრივი

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3+\cdots \qquad (\eta_i>0)$$

და დადებითი რიცხვების ნულისაკენ კრებადი

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots, \qquad \lim \sigma_i = 0$$

მიმდევრობა.

(1)-ის ძალით ყოველ ნატურალურ i რიცხვს ისეთი n_i ნატურალური რიცხვი შეიძლება შევუსაბამოთ, რომ

$$mR_{n_i}(\sigma_i) < \eta_i.$$

ამის შემდეგ ვიპოვოთ ისეთი i_0, რომ

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta$$

(სადაც δ არის თეორემის ჩამოყალიბებაში მონაწილე რიცხვი), და დავუშვათ

$$e = \sum_{i=i_0}^{\infty} R_{n_i}(\sigma_i).$$

აშკარაა, რომ

$$me < \delta.$$

ვთქვათ,

$$E_\delta = E - e.$$

ვაჩვენოთ, რომ E_δ საძიებელი სიმრავლეა.

$$mE_\delta > mE - \delta$$

უტოლობა აშკარაა, ასე რომ უნდა შევამოწმოთ

$$f_n(x) \to f(x)$$

მისწრაფების თანაბრობა E_δ სიმრავლეზე.

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$. ვიპოვოთ ისეთი i, რომ

$$i \geqslant i_0, \quad \sigma_i < \varepsilon,$$

და ვაჩვენოთ, რომ $k \geqslant n_i$-სათვის, და ყოველი $x \in E_\delta$-სათვის გვექნება

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

საიდანაც მივიღებთ თეორემის სამართლიანობას.

თუ $x \in E_\delta$, მაშინ $x \overline{\in} e$; მაშასადამე, კერძოდ

$$x \overline{\in} R_{n_i}(\sigma_i).$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, $k \geqslant n_i$-სათვის

$$x \overline{\in} E(|f_k - f| \geqslant \sigma_i),$$

ასე რომ

$$|f_k(x) - f(x)| < \sigma_i \qquad (k \geqslant n_i),$$

და მით უფრო

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (k \geqslant n_i).$$

თეორემა დამტკიცებულია, რადგანაც n_i დამოკიდებულია მხოლოდ ε-ზე და არაა დამოკიდებული x-ზე.

§ 4. ზომადი ფუნქციების სტრუქტურა

რაიმე ფუნქციის შესწავლის დროს თავისთავად იბადება საკითხი ამ ფუნქციის ზუსტად ან მიახლოებით წარმოდგენის შესახებ უფრო მარტივი ბუნების ფუნქციათა დახმარებით.

ასეთია, მაგალითად, პოლინომის მარტივ მამრავლებად ან რაციონალური წილადის უმარტივეს წილადებად დაშლის ალგებრული საკითხები. ასეთივეა საკითხი უწყვეტი ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად ან ტრიგონომეტრიულ მწკრივად დაშლისა და ა. შ.

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვამტკიცებთ რამდენიმე თეორემას ზომადი ფუნქციების უწყვეტი ფუნქციებით მიახლოებითი წარმოდგენის შესახებ, ე. ი. გადავწყვეტთ მსგავს საკითხს ზომადი ფუნქციებისათვის. ეს თეორემები, ჩვენ საშუალებას მოგვცემენ ვიპოვოთ, ზომადი ფუნქციების ძირითადი სტრუქტურული თვისება, რომელიც მე-4 თეორემით გამოითქმება.

თეორემა 1. ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქცია. როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$, არსებობს ზომადი შემოსაზღვრული $g(x)$ ფუნქცია, ისეთი რომ

$$mE(f\neq g)<\varepsilon.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A_k=E(|f|>k),\quad Q=E(|f|=+\infty).$$

პირობის მიხედვით, $mQ=0$. აშკარა

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots,$$

$$Q=\prod_{k=1}^{\infty}A_k$$

დამოკიდებულებების ძალით (თავი III, § 4, თეორემა 12) გვექნება $k\to\infty$-სათვის

$$mA_k\to mQ=0.$$

მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი k_0, რომ

$$mA_{k_0}<\varepsilon.$$

განვსაზღვროთ E სიმრავლეზე შემდეგნაირი $g(x)$ ფუნქცია

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{როცა } x\in E-A_{k_0},\\ 0, & \quad\text{"}\quad x\in A_{k_0},\end{cases}$$

ეს ფუნქცია ზომადია და გარდა ამისა, შემოსაზღვრულია, რადგან

$$|g(x)|\leqslant k_0.$$

და ბოლოს,

$$E(f\neq g)=A_{k_0},$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

დამტკიცებული თეორემა იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქცია გახდება შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი, თუ მოვიშორებთ რაგინდ მცირე ზომის სიმრავლეს.

განმარტება. ვ თ ქ ვ ა თ, $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა მ ო ც ე მ უ ლ ი ა E ს ი მ რ ა ვ ზ ე და $x_0 \in E$, ა მ ა ს თ ა ნ ა ვ ე $f(x_0) \neq \pm\infty$. ა მ ბ ო ბ ე ნ, რ ო მ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წ ე რ ტ ი ლ ზ ე ორ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი:

1) თ უ x_0 წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ი ზ ო ლ ი რ ე ბ უ ლ წ ე რ ტ ი ლ ს;

2) თ უ $x_0 \in E'$ და დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ი დ ა ნ

$$x_n \to x_0, \quad x_n \in E,$$

გ ა მ ო მ დ ი ნ ა რ ე ო ბ ს დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

თუ $f(x)$ უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ უწყვეტია ამ სიმრავლეზე.

ლემა 1. ვ თ ქ ვ ა თ, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ე ბ ი ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ა რ ი ა ნ და წ ყ ვ ი ლ წ ყ ვ ი ლ ა დ ა რ ი კ ვ ე თ ე ბ ი ა ნ. თ უ

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე მ ო ც ე მ უ ლ ი $\varphi(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა მ უ დ მ ი ვ ი ა ყ ო ვ ე ლ F_k ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე, მ ა შ ი ნ ი გ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ა F ს ი მ რ ა ვ ლ ე ზ ე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $x_0 \in E'$ და

$$x_i \to x_0, \quad x_i \in F.$$

F სიმრავლის ჩაკეტილობის ძალით, x_0 წერტილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს, და, მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი m, რომ

$$x_0 \in F_m.$$

მაგრამ F_k სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან. მაშასადამე, თუ $k \neq m$, მაშინ $x_0 \overline{\in} F_k$, და, F_k-ს ჩაკეტილობის ძალით, x_0 წერტილი არ არის დაგროვების წერტილი ამ სიმრავლისა.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\{x_i\}$ მიმდევრობაში შესაძლებელია არსებობდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობა ისეთი წერტილებისა, რომლებიც ეკუთვნიან F_k $(k \neq m)$ სიმრავლეს. გამოვყოთ მიმდევრობის ყველა ის წერტილი, რომლებიც შედიან ერთერთ

$$F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}, E_{m+1}, \ldots, F_n$$

სიმრავლეში, და x_{i_0} იყოს უკანასკნელი მათ შორის. მაშინ $i > i_0$-სათვის აუცილებელია რომ გვქონდეს

$$x_i \in F_m,$$

ე. ი. $i > i_0$-სათვის გვექნება
$$\varphi(x_i)=\varphi(x_0),$$
ეს კი ამტკიცებს ლემას.

ლემა 2. ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტში შედის. თუ $\varphi(x)$ მოცემულია F სიმრავლეზე და უწყვეტია მასზე, მაშინ $[a,b]$ სეგმენტზე შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი თვისებების $\psi(x)$ ფუნქცია:

1) $\psi(x)$ უწყვეტია;
2) თუ $x\in F$, მაშინ $\psi(x)=\varphi(x)$;
3) $\max|\psi(x)|=\max|\varphi(x)|$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $[\alpha,\beta]$-თი F-ის შემცველი უმცირესი სეგმენტი. $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე საძიებელი $\psi(x)$ ფუნქცია უკვე აგებული რომ ყოფილიყო, საკმარისი იქნებოდა მისი განმარტება ასეთნაირად შეგვევსო
$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(\alpha), & \text{თუ } x\in[a,\alpha]\\ \varphi(\beta), & \text{თუ } x\in(\beta,b],\end{cases}$$
რომ მიგვეღო საძიებელი $\psi(x)$ ფუნქცია მთელ $[a,b]$ სეგმენტზე.

ამის გამო, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $[a,b]$ წარმოადგენს F-ის შემცველ უმცირეს სეგმენტს.

თუ $F=[a,b]$, თეორემა ტრივიალურია. ამიტომ, ვიგულისხმოთ, რომ $F\neq[a,b]$. მაშინ $[a,b]-F$ სიმრავლე შედგება ისეთი ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი სიმრავლისაგან, რომელთა ბოლოები F-ს ეკუთვნიან (F სიმრავლის დამატებითი ინტერვალებისაგან).

განვმარტოთ $\psi(x)$ ფუნქცია ისე, რომ იგი $\varphi(x)$-ის ტოლი იყოს F სიმრავლის წერტილებზე და წრფივი იყოს დამატებით ინტერვალებზე.

შევამოწმოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობა. უწყვეტობა $[a,b]-F$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე აშკარაა. ვთქვათ, x_0 არის F სიმრავლის წერტილი. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $\psi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ამ წერტილზე მარცხნიდან (უწყვეტობა მარჯვნიდან მტკიცდება სავსებით ანალოგიურად).

თუ x_0 წარმოადგენს რომელიმე დამატებითი ინტერვალის მარჯვენა ბოლოს, მაშინ $\psi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა ამ წერტილზე მარცხნიდან აშკარაა.

ვთქვათ, x_0 არ არის არც ერთი დამატებითი ინტერვალის მარჯვენა ბოლო და
$$x_1<x_2<x_3<\dots$$
ისეთ წერტილთა მიმდევრობაა, რომელიც კრებადია x_0-საკენ.

თუ
$$x_n\in F \qquad (n=1,2,3,\dots),$$
მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციის F სიმრავლეზე უწყვეტობის გამოყენებით, მივიღებთ
$$\psi(x_n)=\varphi(x_n)\to\varphi(x_0)=\psi(x_0).$$
ამის გამო, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ
$$x_n\,\overline{\in}\,F \qquad (n=1,2,3,\dots).$$

ასეთ შემთხვევაში x_1 წერტილი რაიმე (λ_1,μ_1) დამატებით ინტერვალში მოხვდება, ამასთან $\mu_1<x_0$ (რადგანაც x_0 არ არის დამატებითი ინტერვალის მარჯვენა ბოლო). ვთქვათ,

$$\lambda_1<x_k<\mu_1 \ (k=1,2,\ldots,n_1),\ x_{n_1+1}>\mu_1.$$

მაშინ x_{n_1+1} მოხვდება სხვა დამატებითი (λ_2,μ_2) ინტერვალში, ამასთან ისევ $\mu_2<x_0$. ამ მსჯელობის გაგრძელებით ჩვენ მივიღებთ ისეთ დამატებით ინტერვალთა

$$(\lambda_1,\mu_1),\ (\lambda_2,\mu_2),\ (\lambda_3,\mu_3),\ldots$$

მიმდევრობას, რომლებიც დალაგებული არიან მარცხნიდან მარჯვნივ, ნომრების ზრდის მიხედვით, და

$$x_k\in(\lambda_i,\mu_i) \qquad (k=n_{i-1}+1,\ldots,n_i).$$

$$x_{n_i}<\mu_i<x_0$$

დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ

$$\mu_i\to x_0,$$

ხოლო, იმის გამო, რომ

$$\mu_{i-1}\leqslant\lambda_i<x_0,$$

ცხადია, რომ ასევე

$$\lambda_i\to x_0.$$

მაგრამ λ_i და μ_i F-ში შედიან, ასე რომ

$$\lim_{i\to\infty}\psi(\lambda_i)=\lim_{i\to\infty}\psi(\mu_i)=\psi(x_0).$$

იმის გამო, რომ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობანი რაიმე ინტერვალში მოთავსებული არიან მის მნიშვნელობებს შორის ბოლოებზე, ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\psi(x_n)=\psi(x_0).$$

ამგვარად, $\psi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა დამტკიცებულია.

მისი აგებიდან ჩანს, რომ იგი ემთხვევა $\varphi(x)$ ფუნქციას F სიმრავლეზე.

ბოლოს, ვეიერშტრასის ცნობილი თეორემის ძალით, სეგმენტზე უწყვეტი $|\psi(x)|$ ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის არსებობს უდიდესი — $\max|\psi(x)|$. ადვილია იმის ალმოჩენა, რომ როცა $x\in F$

$$|\varphi(x)|\leqslant\max|\psi(x)|,$$

მაგრამ $|\varphi(x)|$ ფუნქცია რომ $\max|\psi(x)|$ მნიშვნელობას არ აღწევდეს, მაშინ $|\psi(x)|$ ფუნქციაც ვერ მიაღწევდა ამ მნიშვნელობას. მაშასადამე,

$$\max|\varphi(x)|=\max|\psi(x)|.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია სავსებით.

თეორემა 2 (ე. ბორელი). ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქცია. როგორიც არ უნდა იყოს $\sigma>0$ და $\varepsilon>0$ რიცხვები, $[a,b]$ სეგმენტზე არსებობს ისეთი უწყვეტი $\psi(x)$ ფუნქცია, რომლისათვისაც

$$mE(|f-\psi|\geqslant\sigma)<\varepsilon.$$

ამასთანავე. თუ $|f(x)|\leqslant K$, მაშინ შეიძლება $\psi(x)$-იც ისე შევარჩიოთ, რომ

$$|\psi(x)|\leqslant K.$$

დამტკიცება. ჯერ-ჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ

$$|f(x)|\leqslant K,$$

ი, რომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

ნებისმიერი $\sigma>0$ და $\varepsilon>0$-ის დაფიქსირების შემდეგ, ვიპოვოთ ისეთი დიდი ნატურალური m რიცხვი, რომ

$$\frac{K}{m}<\sigma,$$

და ავაგოთ

$$E_i=E\left(\frac{i-1}{m}K\leqslant f<\frac{i}{m}K\right)\ (i=1-m,\ 2-m,\ldots,m-1),$$

$$E_m=E\left(\frac{m-1}{m}K\leqslant f\leqslant K\right)$$

სიმრავლეები.

ეს სიმრავლეები ზომადი არიან, წყვილწყვილად არ იკვეთებიან და

$$[a,b]=\sum_{i=1-m}^{m}E_i.$$

ყოველი i-სათვის ავაგოთ ისეთი ჩაკეტილი $F_i\subset E_i$ სიმრავლე, რომლის ზომა

$$mF_i>mE_i-\frac{\varepsilon}{2m}$$

და დავუშვათ

$$F=\sum_{i=1-m}^{m}F_i.$$

ცხადია, რომ $[a,b]-F=\sum\limits_{1}(E_i-F_i)$, საიდანაც

$$m[a,b]-mF<\varepsilon.$$

განვსაზღვროთ ახლა F სიმრავლეზე შემდეგი $\varphi(x)$ ფუნქცია

$$\varphi(x)=\frac{i}{m}K, \text{ როცა } x\in F_i \ (i=1-m,\dots,m).$$

1-ლი ლემის ძალით ეს ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლეზე, $|\varphi(x)|\leqslant K$ და, დაბოლოს, როცა $x\in F$, გვაქვს

$$|f(x)-\varphi(x)|<\sigma.$$

ახლა დაგვრჩენია გამოვიყენოთ მე-2 ლემა. ეს გვაძლევს ისეთ უწყვეტ $\psi(x)$ ფუნქციას, რომელიც F სიმრავლეზე $\varphi(x)$ ფუნქციას ემთხვევა და

$$|\psi(x)|\leqslant K.$$

რამდენადაც

$$E(|f-\psi|\geqslant\sigma)\subset[a,b]-F,$$

ცხადია, რომ $\psi(x)$ ნაპოვნია.

ამგვარად, შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

დავუშვათ ახლა, რომ $f(x)$ არ არის შემოსაზღვრული. მაშინ, 1-ლი თეორემის გამოყენებით, შეიძლება ისეთი შემოსაზღვრული $g(x)$ ფუნქციის აგება, რომ

$$mE(f\neq g)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$E(|f-\psi|\geqslant\sigma)\subset E(f\neq g)+E(|g-\psi|\geqslant\sigma),$$

ასე რომ $\psi(x)$ ფუნქცია წყვეტს ამოცანას.

შედეგი. ყოველი $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს ისეთი უწყვეტი $\psi_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც ზომით კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

მართლაც, თუ ჩვენ ავიღებთ ორ ნულისაკენ კრებად მიმდევრობას

$$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3>\dots,\ \lim_{n\to\infty}\sigma_n=0,$$

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3>\dots,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,$$

და ყოველი n-სათვის ავაგებთ ისეთ უწყვეტ $\psi_n'(x)$ ფუნქციას, რომ

$$mE(|f-\psi_n|\geqslant\sigma_n)<\varepsilon_n,$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ

$$\psi_n(x)\Rightarrow f(x).$$

მართლაც, როგორი $\sigma>0$ რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ $n\geqslant n_0$-სათვის $\sigma_n<\sigma$ და ასეთი n-სათვის

$$E(|f-\psi_n|\geqslant\sigma)\subset E(|f-\psi_n'|\geqslant\sigma_n),$$

საიდანაც გამომდინარეობს ნათქვამი.

$\{\psi_n(x)\}$ მიმდევრობისათვის ფ. რისის (§ 3) თეორემის გამოყენებით ჩვენ უწყვეტი ფუნქციების ისეთ $\{\psi_{n_k}(x)\}$ მიმდევრობას მივიღებთ, რომელიც კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ დავამტკიცეთ

თეორემა 3 (მ. ფრეშე). $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ყოველი ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს უწყვეტ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $f(x)$-საკენ თითქმის ყველგან.

ამ თეორემის დახმარებით მტკიცდება შესანიშნავი და მეტად მნიშვნელოვანი

თეორემა 4 (ნ. ლუზინი). ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქცია. როგორიც არ უნდა იყოს $\delta>0$, არსებობს ისეთი უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ

$$mE(f\neq\varphi)<\delta.$$

თუ, კერძოდ, $|f(x)|\leqslant K$, მაშინ

$$|\varphi(x)|\leqslant K.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ldots$$

უწყვეტი ფუნქციათა ის მიმდევრობაა, რომელზედაც ლაპარაკი იყო ფრეშეს თეორემაში. დ. ე. ეგოროვის თეორემის გამოყენებით, ჩვენ შეგვიძლია ისეთი E_δ სიმრავლის პოვნა, რომ

$$mE_\delta>b-a-\frac{\delta}{2},$$

და ამასთან E_δ სიმრავლეზე

$$\varphi_n(x)\rightarrow f(x)$$

თანაბრად x-ის მიმართ.

აქედან, ანალიზის ცნობილი თეორემის ძალით[1], $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია E_δ სიმრავლეზე (ამ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული განმარტების აზრით. ეს ისე არ უნდა გავიგოთ, თითქოს $f(x)$ ფუნქცია განხილული მთელს $[a,b]$ შუალედში, უწყვეტი იყოს E_δ სიმრავლის ყოველ წერტილზე. აქ სრულებით არ უნდა ვიხილავდეთ $f(x)$ ფუნქციას E_δ სიმრავლის გარეთ).

განვიხილოთ E_δ სიმრავლის ისეთი ჩაკეტილი F სიმრავლე, რომლის ზომაც

$$mF>mE_\delta-\frac{\delta}{2}.$$

---

[1] ანალიზის კურსებში თეორემა მტკიცდება სეგმენტზე მოცემული ფუნქციების შემთხვევაში, მაგრამ იგივე მტკიცება ინარჩუნებს ძალას ნებისმიერ სიმრავლეებზე მოცემული ფუნქციებისათვისაც.

თუ $f(x)$ ფუნქციას მხოლოდ F სიმრავლეზე განვიხილავთ, იგი, აშკარაა, უწყვეტი იქნება ამ სიმრავლეზე.

მე-2 ლემის გამოყენებით, ჩვენ მივიღებთ $[a\ b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ისეთ უწყვეტ $\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელიც F სიმრავლეზე ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციას.

მაშასადამე,

$$E(f \neq \varphi) \subset [a,b]-F,$$

და ამ სიმრავლის ზომა $<\delta$, ასე რომ $\varphi(x)$ წარმოადგენს ჩვენთვის საჭირო ფუნქციას.

თუ, კერძოდ, $|f(x)| \leqslant K$, მაშინ ეს უტოლობა სამართლიანია აგრეთვე ისეთი x-სათვის, რომლებიც F-ს ეკუთვნიან, და მაშინ, მე-2 ლემის ძალით,

$$|\varphi(x)| \leqslant K.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ნ. ლუზინის თეორემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეც: ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქცია უწყვეტი გახდება, თუ ჩამოვიშორებთ რაგინდ მცირე ზომის სიმრავლეს. ზოგიერთი ავტორი[1] ამ მნიშვნელოვან თვისებას ზომადი ფუნქციების თვით განმარტებადაც იღებს. ადვილი ამოსაჩენია ორივე განმარტების ტოლფასობა; მეორე განმარტება ნაკლებად ფორმალურია და მაშინვე გვიჩვენებს, რომ ზომადი ფუნქციის ცნება მჭიდროთაა დაკავშირებული უწყვეტი ფუნქციის ცნებასთან.

§ 5. ვეიერშტრასის თეორემა

წინა პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცეთ რამდენიმე თეორემა ზომადი ფუნქციების უწყვეტი ფუნქციებით აპროქსიმაციის შესახებ. ამ მიმართულებით შესაძლებელია უფრო შორს წავიდეთ და უწყვეტი ფუნქციების ნაცვლად პოლინომებზე ვილაპარაკოთ.

ამ მიზნით ჩვენ დაგვჭირდება, თავისთავადაც მნიშვნელოვანი, ვეიერშტრასის თეორემა. ჩვენ გადმოვცემთ მას ს. ბერნშტეინის მიხედვით.

ლემა 1. ყოველი x-სათვის გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \qquad (1)$$

მართლაც, ნიუტონის ბინომის ფორმულაში

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$a=x$, $b=1-x$-ის ჩასმით მივიღებთ (1) ფორმულას.

---

[1] იხ. მაგალითად: П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного.

ლემა 2. თუ $0 \leqslant x \leqslant 1$, მაშინ

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant n. \tag{2}$$

დამტკიცება. გავაწარმოოთ z-ით იგივეობა

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n \tag{3}$$

და, გავამრავლოთ შედეგი z-ზე:

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1}. \tag{4}$$

(4)-ის z-ით გაწარმოებითა და შედეგის z-ზე გამრავლებით, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k = nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{5}$$

ჩავსვათ (3), (4) და (5)-ში

$$z = \frac{x}{1-x}$$

და მიღებული იგივეობანი $(1-x)^n$-ზე გავამრავლოთ. მაშინ მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx). \tag{8}$$

გავამრავლოთ (6) ტოლობა n^2x^2-ზე, (7) — $2nx$-ზე, (8) კი 1-ზე, და ყველანი შევკრიბოთ:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

ლემის დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $0 \leqslant x \leqslant 1$-სათვის გვექნება

$$x(1-x)<1.$$

განმარტება 1. ვთქვათ, $f(x)$ წარმოადგენს $[0,1]$ სეგმენტზე მოცემულ სასრულ ფუნქციას.

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{9}$$

პოლინომს $f(x)$ ფუნქციისათვის **ბერნშტეინის პოლინომი** ეწოდება.

თეორემა 1 (ს. ბერნშტეინი). თუ $f(x)$ ფუნქცია *უწყვეტია* $[0,1]$ *სეგმენტზე, მაშინ* $n \to \infty$-*სათვის გვექნება*

$$B_n(x) \to f(x) \tag{10}$$

თანაბრად x-*ის მიმართ*.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$M=\max|f(x)|.$$

ავიღოთ $\varepsilon>0$ და ავარჩიოთ ისეთი $\delta>0$, რომ გვქონდეს

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon,$$

როცა $|x''-x'|<\delta$.

ამის შემდეგ ავიღოთ ნებისმიერი $x \in [0,1]$. (1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

საიდანაც

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{11}$$

გავყოთ ყველა $k=0,1,2,\ldots,n$ რიცხვები ორ A და B კატეგორიად, ისე რომ

$$k \in A, \text{ თუ } \left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta,$$

$$k \in B, \text{ თუ } \left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta.$$

თუ $k \in A$, მაშინ

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon,$$

და 1-ლი ლემის ძალით

$$\sum_{A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\varepsilon\sum_{A}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\varepsilon. \qquad (12)$$

თუ კი $k\in B$, მაშინ

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1,$$

საიდანაც, მე-2 ლემის ძალით,

$$\sum_{B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\cdot C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{B}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<\frac{2M}{n\delta^2}. \qquad (13)$$

(11), (12) და (13)-ს დაპირისპირებით ყოველი $x\in[0,1]$-სათვის მივიღებთ

$$|B_n(x)-f(x)|<\varepsilon+\frac{2M}{n\delta^2}.$$

მაშასადამე, როცა

$$n>\frac{2M}{\varepsilon\delta^2},$$

მივიღებთ

$$|B_n(x)-f(x)|<2\varepsilon,$$

რის დამტკიცებაც გვსურდა.

თეორემა 2 (კ. ვეიერშტრასი). *ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$-ზე მოცემული უწყვეტი ფუნქცია. ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის არსებობს ისეთი $P(x)$ პოლინომი, რომ*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

ყოველი $x\in[a,b]$-სათვის.

დამტკიცება. თუ $[a,b]=[0,1]$, მაშინ თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს ბერნშტეინის თეორემიდან. ვთქვათ, $[a,b]\neq[0,1]$. განვიხილოთ y არგუმენტის შემდეგი ფუნქცია

$$f[a+y(b-a)].$$

ეს ფუნქცია მოცემულია და უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე. ვიპოვოთ ისეთი $Q(y)$ პოლინომი, რომ $y\in[0,1]$ სათვის

$$|f[a+y(b-a)]-Q(y)|<\varepsilon.$$

თუ $x \in [a,b]$, მაშინ $\dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$ და, მაშასადამე,

$$\left|f(x)-Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon.$$

ამის გამო $P(x)=Q\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ ჩვენთვის საჭირო პოლინომს წარმოადგენს.

ვეიერშტრასის თეორემის დახმარებით ბორელისა და ფრეშეს (მაგრამ არა ლუზინის!) თეორემები სხვანაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ. მაგალითად, ფრეშეს თეორემა შეიძლება გამოითქვას შემდეგი სახით:

თეორემა 3 (მ. ფრეშე) $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ყოველი ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს პოლინომთა ისეთი მიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია $f(x)$ საკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{\varphi_n(x)\}$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან კრებად უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობას. თუ $P_n(x)$ ისეთი პოლინომია, რომ ყოველი $x \in [a,b]$-სათვის

$$|P_n(x)-\varphi_n(x)|<\frac{1}{n},$$

მაშინ $\{P_n(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია $f(x)$-საკენ ყოველ ისეთ x წერტილზე, სადაც

$$\varphi_n(x)\to f(x),$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

მკითხველს ვანდობთ, სათანადოთ შესცვალოს ბორელის თეორემა ($|P_n(x)|\leqslant \sup|f(x)|$ შეფასების შენარჩუნებით!).

ვეიერშტრასის დამტკიცებულ თეორემასთან მჭიდრო კავშირი აქვს იგივე ავტორის თეორემას უწყვეტი პერიოდული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული პოლინომებით აპროქსიმაციის შესახებ.

განმარტება 2. n-ური რიგის ტრიგონომეტრიული პოლინომი ეწოდება

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ფუნქციას.

თუ $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, მაშინ $T(x)$ ტრიგონომეტრიულ პოლინომს ლუწი ეწოდება.

ლემა 3. a) $\cos^k x$ ფუნქცია წარმოიდგინება ლუწი ტრიგონომეტრიული პოლინომით.

b) თუ $T(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომია, მაშინ $T(x)\cdot\sin x$ აგრეთვე ტრიგონომეტრიული პოლინომია.

$c)$ თუ $T(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომია, მაშინ $T(x+a)$ აგრეთვე ტრიგონომეტრიული პოლინომია.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

ლემა 4. თუ $f(x)$ მოცემულია და უწყვეტია $[0,\pi]$ სეგმენტზე, მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის არსებობს ისეთი ლუწი ტრიგონომეტრიული პოლინომი $T(x)$, რომ ყოველი $x\in[0,\pi]$-სათვის გვექნება

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ

$$f(\operatorname{arc}\cos y)$$

ფუნქცია. ეს ფუნქცია მოცემული და უწყვეტია $[-1,+1]$ სეგმენტზე-ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k y^k$ პოლინომი, რომ ყოველი $y\in[-1,+1]$-სათვის გვექნება

$$\left|f(\operatorname{arc}\cos y)-\sum_{k=0}^{n} a^k y^r\right|<\varepsilon.$$

ახლა ვთქვათ, $x\in[0,\pi]$. მაშინ $\cos x\in[-1,+1]$ და, მაშასადამე,

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k\cos^k x\right|<\varepsilon.$$

დაგვრჩენია შევნიშნოთ, რომ მე-3 ლემის (a)-ს ძალით $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\cos^k x$ ფუნქცია ლუწ ტრიგონომეტრიულ პოლინომს წარმოადგენს.

შედეგი. თუ ლუწ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პერიოდი 2π და უწყვეტია მთელს ღერძზე, მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის მოიძებნება ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი, რომ ყოველი ნამდვილი x-სათვის გვექნება

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

მართლაც, $[0,\pi]$ სეგმენტზე ამ უტოლობის დაკმაყოფილება შესაძლებელია ლუწი ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომით, ასე რომ უტოლობა თავისთავად დაკმაყოფილდება $x\in[-\pi,0]$-სათვისაც და მაშინ, $f(x)-T(x)$ სხვაობის პერიოდულობის გამო, იგივე უტოლობა დაკმაყოფილდება ყველგან.

თეორემა 4 (კ. ვეიერშტრასი). ვთქვათ, $f(x)$ უწყეტი პერიოდული ფუნქციაა, პერიოდით 2π. როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$, არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომი, რომ ყოველი x-სათვის გვექნება

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

დამტკიცება. მე-4 ლემის შედეგის ძალით, ლუწი

$$f(x)+f(-x),\ [f(x)-f(-)]\sin x$$

ფუნქციებისათვის მოიძებნება ისეთი $T_1(x)$ და $T_2(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომები, რომ

$$f(x)+f(-x)=T_1(x)+\alpha_1(x),\ [f(x)-f(-x)]\cdot\sin x=T_2(x)+\alpha_2(x),$$

სადაც

$$|\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

პირველი ტოლობის $\sin^2 x$-ზე, ხოლო მეორე ტოლობის $\sin x$-ზე გამრავლებით, შეკრებითა და ორზე გაყოფით მივიღებთ

$$f(x)\cdot\sin^2 x=T_3(x)+\beta(x)\left(|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

სადაც $T_3(x)$ ისევ რაღაც ტრიგონომეტრიული პოლინომია.

აქ $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი პერიოდული ფუნქცია იყო. მაშასადამე, ასეთივე ტოლობა სამართლიანი იქნება $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციისათვისაც:

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin^2 x=T_4(x)+\gamma(x)\quad\left(|\gamma(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

ამ ტოლობაში x-ის $x+\frac{\pi}{2}$-ით შეცვლა მოგვცემს

$$f(x)\cos^2 x=T_5(x)+\delta(x)\qquad\left(|\delta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

საიდანაც

$$f(x)=T_3(x)+T_5(x)+\beta(x)+\delta(x),$$

ე. ი. $T_3(x)+T_5(x)$ ჩვენთვის საჭირო პოლინომია.

ჩვენ ამ თეორემას ახლა არ დავუკავშირებთ ზომად ფუნქციების თეორიას, მაგრამ ქვემოთ იგი მეტად დიდ სარგებლობას მოგვიტანს.

სავარჯიშო IV თავისათვის

1. თუ $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $g_n(x)\rightrightarrows g(x)$, მაშინ $f_n(x)+g_n(x)\rightrightarrows f(x)+g(x)$.

2. თუ $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, ხოლო $g(x)$ ზომადი და თითქმის ყველგან სასრულია, მაშინ $f_n(x)g(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$.

3. გაავრცელეთ ეგოროვის თეორემა ფუნქციათა ისეთ მიმდევრობაზე, რომელიც E სიმრავლის ყოველ წერტილზე მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ.

4. არსებობს პოლინომთა ისეთი $p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)+\dots$ მწკრივი, რომელსაც შემდეგი თვისება აქვს: როგორი უწყვეტი ფუნქციაც არ უნდა ავი

ლოთ ნებისმიერ $[a,b]$ სეგმენტზე, შეიძლება ისე შევაჯგუფოთ მწკრივის წევრები (მათი რიგის შეუცვლელად), რომ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[p_{n_k+1}(x)+\dots+p_{n_{k+1}}(x)]$ მწკრივი თანაბრად კრებადი იყოს $[a,b]$-ზე $f(x)$-საკენ.

5. იმისათვის, რომ ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციების $f_1(x)$, $f_2(x)$,… მიმდევრობა ზომით კრებადი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\sigma>0$ და $\varepsilon>0$ ყოველგვარ წყვილს შეესაბამებოდეს ისეთი N რიცხვი, რომ, როცა $n>N$, $m>N$, გვქონდეს

$$mE(|f_n-f_m|\geq\sigma)<\varepsilon$$

(ფ. რისი).

6. ბორელისა და ფრეშეს თეორემებში უწყვეტი ფუნქციების ნაცვლად შესაძლებელია ტრიგონომეტრიულ პოლინომებზე ვილაპარაკოთ (თუ ძირითადი სეგმენტი არის $[-\pi,+\pi]$).

7. ზომადი ფუნქციების თვლადი სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი ზომადი ფუნქციაა.

8. თუ ყოველი ფიქსირებული n-სათვის და $k\to\infty$-სათვის გვექნება

$$f_k^{(n)}(x)\Rightarrow f^{(n)}(x),$$

ხოლო $n\to\infty$ სათვის კი

$$f^{(n)}(x)\Rightarrow f(x),$$

მაშინ $\{f_k^{(n)}(x)\}$ სიმრავლიდან შესაძლებელია ისეთი მიმდევრობის გამოყოფა, რომელიც ზომით კრებადია $f(x)$-საკენ.

9. წინა შედეგი არ არის სამართლიანი, თუ ყველგან მის ჩამოყალიბებაში ზომით კრებადობას შევცვლით ჩვეულებრივი კრებადობით.

თავი V

ლებეგის ინტეგრალი შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის

§ 1. ლებეგის ინტეგრალის განმარტება

ინტეგრალის კლასიკური განმარტება, რომელიც ო. კოშიმ მოგვცა და ბ. რიმანმა განავითარა, როგორც ცნობილია, შემდეგში მდგომარეობს: განიხილება $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული სასრული $f(x)$ ფუნქცია. სეგმენტი $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

წერტილებით გაიყოფება ნაწილებად, ყოველ $[x_k, x_{k+1}]$ ნაწილში ამოირჩევა ξ_k წერტილი და შეიდგინება რიმანის ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k).$$

თუ

$$\lambda = \max\,(x_{k+1} - x_k)$$

რიცხვის ნულისაკენ მისწრაფების დროს, σ ჯამი მიისწრაფვის სასრული I ზღვრისაკენ, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წესისა და არც ξ_k წერტილების არჩევისაგან, მაშინ ამ I ზღვარს $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი ეწოდება და აღინიშნება

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

სიმბოლოთი.

ზოგჯერ, იმის აღსანიშნავად, რომ საქმე ეხება სწორედ რიმანის ინტეგრალს, სწერენ

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

ფუნქციებს, რომელთათვისაც რიმანის ინტეგრალი არსებობს, რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციები ან, უფრო მოკლედ, (R) ინტეგრებადი ფუნქციები ჰქვიათ.

$f(x)$ ფუნქციის (R) ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია, რომ იგი შემოსაზღვრული იყოს.

უკვე კოშიმ აჩვენა, რომ ყოველი უწყვეტი ფუნქცია (R) ინტეგრადია. არსებობენ აგრეთვე წყვეტილი (R) ინტეგრებადი ფუნქციებიც. კერძოდ, ასეთია ნებისმიერი წყვეტილი მონოტონური ფუნქცია.

მიუხედავად ამისა, ადვილი ასაგებია ისეთი შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც არ იქნება (R) ინტეგრებადი. განვიხილოთ, მაგალითად, დ ი რ ი ხ- ლ ე ს $\psi(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა, რომელიც $[0, 1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ფუნქცია არ არის (R) ინტეგრებადი, რადგანაც σ ჯამი იქცევა 0-ად, როცა ყველ ξ_k ირაციონალურია, ხოლო $\sigma = 1$, თუ ყველა ξ_k რაციონალურია.

ამგვარად, ინტეგრალის რიმანისებურ განმარტებას არსებითი ნაკლი აქვს—საკმარისად უბრალო ფუნქციებიც კი ინტეგრებადი არ არიან.

ამ გარემოების მიზეზის გამორკვევა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

საქმე შემდეგში მდგომარეობს: რიმანის σ ჯამების შედგენის დროს, ჩვენ $[a, b]$ სეგმენტს მცირე $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ სეგმენტებად (დავარქვით მათ $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$) ვანაწილებთ, ყოველ e_k-ში ვიღებთ ξ_k წერტილს, და ვადგენთ

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, me_k$$

ჯამს. ჩვენ მოვითხოვთ, რომ ამ ჯამს ჰქონდეს e_k სიმრავლეში ξ_k წერტილების შერჩევისაგან დამოუკიდებელი ზღვარი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, e_k სიმრავლის ყოველი x წერტილი შესაძლებელია მიღებულ იქნას ξ_k-დ და ამ წერტილის ცვლილებამ არ უნდა გამოიწვიოს σ ჯამების საგრძნობი ცვლილება. ეს კი მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, როდესაც ξ_k წერტილის ცვლილება, მცირედით შეცვლის $f(\xi_k)$-ს სიდიდეს. მაგრამ რა აერთიანებს ერთმანეთთან e_k სიმრავლის სხვადასხვა წერტილებს? მათ აერთიანებს ის, რომ ისინი ახლოს არიან ერთმანეთთან, რადგანაც e_k წარმოადგენს მცირე $[x_k, x_{k-1}]$ სეგმენტს.

თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ x აბსცისების საკმარისი სიახლოვე გამოიწვევს ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობათა სიახლოვეს და ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მოველოდეთ, რომ ξ_k წერტილის ცვლა e_k სიმრავლის ფარგლებში მცირეოდენ გავლენას ახდენს σ ჯამის სიდიდეზე, მაგრამ წყვეტილი ფუნქციისათვის ეს ასე არ არის.

შეიძლება სხვანაირად ითქვას, რომ e_k სიმრავლეები ისე არიან შედგენილი, რომ $f(\xi_k)$ მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციების შემთხვევაში შეგვიძლია ჩავთვალოთ e_k სიმრავლეზე ფუნქციის სხვა მნიშვნელობათა ნორმალურ წარმომადგენლად.

ამგვარად, რიმანის ინტეგრალის თვითონ განმარტება შესაძლებელია განზოგადებულად ჩავთვალოთ მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციების შემთხვევაში, სხვა ფუნქციებისათვის კი მას საკმარისად შემთხვევითი ხასიათი აქვს. ქვემოთ ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ (R) ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია, რომ განსახილავი ფუნქცია არ იყოს „ძალიან წყვეტილი".

ფუნქციათა უფრო ფართო კლასებისათვის ინტეგრალის ცნების განზოგადების მიზნით, ლებეგმა შემოიღო ინტეგრების მეორე პროცესი, რომელშიაც x წერტილები გაერთიანებული არიან არა შემთხვევითი ნიშნის მიხედვით, მათი Ox ღერძზე ერთმანეთთან სიახლოვის მხრივ, არამედ გაერთიანებული არიან მათთვის ფუნქციის შესაბამი მნიშვნელობების სიახლოვის ნიშნის მიხედვით. ამ მიზნით ლებეგი ახდენს არა Ox ღერძზე მოთავსებული $[a, b]$ სეგმენტის, არამედ ორდინატთა ღერძზე მოთავსებულ ისეთ $[A, B]$ სეგმენტის დაყოფას ნაწილებად, რომელიც შეიცავს $f(x)$-ის ყველა მნიშვნელობას:

$$A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B.$$

თუ ახლა შევადგენთ სხვადასხვა e_k სიმრავლეებს ასე:

$$e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1}),$$

მაშინ ცხადია, რომ e_k სიმრავლის სხვადასხვა x წერტილებს მართლაც ფუნქციის ახლო მნიშვნელობები შეესაბამება, თუმცა, რიმანის პროცესისაგან განსხვავებით, თვითონ x წერტილები შესაძლებელია საკმარისად დაშორებულიც იყვნენ ერთმანეთისაგან.

კერძოდ, e_k სიმრავლეზე ფუნქციის მნიშვნელობების კარგ წარმომადგენლად გამოდგება, მაგალითად, y_k, ასე რომ ბუნებრივია ინტეგრალის ცნებას საფუძვლად

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k.$$

ჯამი დავუდოთ.

გადავიდეთ ახლა საკითხის ზუსტ გადმოცემაზე.

ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, ამასთან

$$A < f(x) < B. \tag{1}$$

$[A, B]$ სეგენტი დავყოთ ნაწილებად

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \dots < y_n = B$$

წერტილებით და ყოველ $[y_k, y_{k+1})$ ნახევარსეგმენტს შევუსაბამოთ

$$e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

სიმრავლე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ e_k სიმრავლეებს შემდეგი ოთხი თვისება აქვთ:

1) e_k სიმრავლეები წყვილწყვილად არ იკვეთებიან: $e_k e_{k'} = 0$ $(k \neq k')$.

2) ეს სიმრავლეები ზომადი არიან.

3) $E = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$.

4) $mE = \sum_{k=0}^{n-1} me_k$.

განვმარტოთ ახლა ლებეგის ქვედა s და ზედა S ჯამები:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} me_k .$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$\lambda = \max (y_{k+1} - y_k),$$

მაშინ მივიღებთ

$$0 \leqslant S - s \leqslant \lambda mE. \tag{2}$$

ლებეგის ჯამების ძირითად თვისებას გამოსახავს

ლემა. ვთქვათ, $[A, B]$ სეგმენტის დანაწილების რაიმე წესისათვის გვაქვს ლებეგის s_0 და S_0 ჯამები. თუ ჩვენ დავუმატებთ დაყოფის ახალ $\overline{y}$ წერტილს და შევადგენთ ლებეგის s და S ჯამებს, აღმოჩნდება, რომ

$$s_0 \leqslant s, \quad S \leqslant S_0 .$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, დაყოფის ახალი წერტილების მიმატებით ქვედა ჯამი არ მცირდება, ხოლო ზედა ჯამი არ იზრდება.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$y_i < \overline{y} < y_{i+1}. \tag{3}$$

მაშინ, როცა $k \neq i$, $[y_k, y_{k+1})$ ნახევრადსეგმენტები და, მათთან ერთად e_k სიმრავლეებიც, მონაწილეობენ დანაწილების ახალ შემთხვევაშიაც. $[y_i, y_{i+1})$ ნახევრადსეგმენტი კი, ახალ დანაწილებაზე გადასვლის შემდეგ, შეიცვლება ორი

$$[y_i, \overline{y}), [\overline{y}, y_{i+1})$$

ნახევრადსეგმენტით; ამასთან დაკავშირებით e_i სიმრავლეც დაიყოფა ორ სიმრავლედ

$$e'_i = E(y_i \leqslant f < \overline{y}), \quad e''_i = E(\overline{y} \leqslant f < y_{i+1}) .$$

აშკარაა, რომ

$$e_i = e'_i + e''_i \text{ და } e'_i e''_i = 0,$$

ასე რომ

$$me_i = me'_i + me''_i \tag{4}$$

ზემონათქვამიდან ცხადია, რომ s ჯამში მიიღება s_0 ჯამიდან,

$$y_i me_i$$

შესაკრების შეცვლით შემდეგი ორი შესაკრებით

$$\overline{y_i m e_i'} + \overline{y_i m e_i''};$$

საიდანაც, (3) და (4)-ის გამოყენებით, გამომდინარეობს, რომ

$$s \leqslant s_0 .$$

ზედა ჯამისათვის მსჯელობა ანალოგიურია.

შედეგი. არც ერთი ქვედა ჯამი s არ აღემატება არც ერთ ზედა S ჯამს.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[A, B]$ სეგმენტის რაიმე ორი დანაწილება I და II. ვთქვათ ამ დანაწილებებს შეესაბამება ქვედა s_1 და s_2 ჯამები, და ზედა S_1 და S_2 ჯამები.

შევადგინოთ $[A, B]$ სეგმენტის მესამე დანაწილება — დანაწილება III, რომელიც განხორციელებულია I და II დანაწილებათა ყველა წერტილით. თუ III დანაწილების შესაბამ ჯამებს s_3 და S_3-ით აღვნიშნავთ, მაშინ, ლემის ძალით,

$$s_1 \leqslant s_3 , \ S_3 \leqslant S_2 ,$$

საიდანაც, იმის გამო, რომ

$$s_3 \leqslant S_3 ,$$

მივიღებთ, რომ

$$s_1 \leqslant S_2 ,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ავირჩიოთ რაიმე გარკვეული ზედა S_0 ჯამი. ყოველი ქვედა s ჯამისათვის გვექნება

$$s \leqslant S_0 ,$$

ამიტომ ლებეგის ყველა ქვედა ჯამების $\{s\}$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან. ვთქვათ, U წარმოადგენს ამ სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს

$$U = \sup \{s\} .$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$U \leqslant S_0 .$$

S_0 ჯამის ნებისმიერობის გამო, უკანასკნელი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის ყველა ზედა ჯამების $\{S\}$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან. დავარქვათ V ამ სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს

$$V = \inf \{S\} .$$

აშკარაა, რომ დანაწილების ყოველგვარი წესისათვის გვექნება

$$s \leqslant U \leqslant V \leqslant S .$$

მაგრამ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $S - s \leqslant \lambda m E$; საიდანაც

$$0 \leqslant V - U \leqslant \lambda m E$$

და, რადგან λ ნებისმიერად მცირეა, ცხადია, რომ

$$U = V .$$

განმარტება. U და V რიცხვების საერთო მნიშვნელობას E სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$(L)\int_E f(x)\,dx.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც სხვა სახის ინტეგრალებში არევა მოსალოდნელი არ არის, სწერენ უბრალოდ

$$\int_E f(x)\,dx.$$

კერძოდ, თუ E წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტს, ხმარობენ სიმბოლოებს

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია ინტეგრებადია ლებეგის აზრით, ან უფრო მოკლედ, (L) ინტეგრებადია. უკვე ამ შენიშვნიდან ჩანს, რომ ინტეგრების (L) პროცესი გამოიყენება ფუნქციათა გაცილებით უფრო ფართო კლასისათვის, ვიდრე ინტეგრების (R) პროცესი. კერძოდ, სავსებით იხსნება საკითხები, რომლებიც დაკავშირებული არიან ინტეგრების პირობებთან, რომლებსაც (R) ინტეგრალებისათვის შედარებით რთული ხასიათი აქვთ.

თეორემა 1. თუ $\lambda \to 0$, მაშინ ლებეგის s და S ჯამები მიისწრაფვიან $\int_E f(x)\,dx$ ინტეგრალისაკენ.

თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს

$$s \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant S,$$

$$S - s \leqslant \lambda \cdot mE$$

უტოლობებისაგან.

ამ თეორემიდან სხვათაშორის გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა, რომელიც თვით განმარტების ძალით დაკავშირებულია A და B რიცხვებთან, ნამდვილად არაა მათზე დამოკიდებული.

მართლაც, დავუშვათ, რომ

$$A < f(x) < B, \; A < f(x) < B^*,$$

და $B^* < B$. დავანაწილოთ $[A, B]$ სეგმენტი ნაწილებად

$$A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B,$$

ამასთან ისე, რომ B^* იყოს დაყოფის ერთერთი წერტილი

$$B^* = y_m.$$

თუ ჩვენ შევადგენთ e_k სიმრავლეებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$e_k = 0 \qquad (k \geqslant m).$$

მაშასადამე,

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k = \sum_{k=0}^{m-1} y_k m e_k = s^*,$$

სადაც s^* — ლებეგის ქვედა ჯამია, აგებული $[A, B^*]$ სეგმენტისათვის. დაყოფის წერტილების შემჭიდროებითა და ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ, რომ

$$I = I^*,$$

სადაც I და I^* წარმოადგენენ $[A, B]$ და $[A, B^*]$ სეგმენტების შესაბამ ლებეგის ინტეგრალთა მნიშვნელობებს. ამგვარად, B რიცხვის ცვალებადობა გავლენას არ ახდენს ინტეგრალის მნიშვნელობაზე. იგივე ეხება A რიცხვსაც. ეს ფაქტი არსებითია, რადგანაც მხოლოდ ამის შემდეგ არის განთავისუფლებული ინტეგრალის განმარტება A და B წერტილების ამორჩევის შემთხვევითი ხასიათისაგან.

§ 2. ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციის ინტეგრალის რამოდენიმე თვისებას.

თეორემა 1. *თუ ზომადი $f(x)$ ფუნქცია ზომად E სიმრავლეზე აკმაყოფილებს*

$$a \leqslant f(x) \leqslant b$$

უტოლობას, მაშინ

$$a mE \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant b \cdot mE.$$

ამ თეორემას ჩვეულებრივ *საშუალო მნიშვნელობის თეორემა* ეწოდება.

დამტკიცება. ვთქვათ, n ნატურალური რიცხვია. თუ ჩვენ დავუშვებთ

$$A = a - \frac{1}{n}, \quad B = b + \frac{1}{n},$$

მაშინ აღმოჩნდება, რომ

$$A < f(x) < B,$$

და ლებეგის ჯამები შეიძლება შევადგინოთ $[A, B]$ სეგმენტის დანაწილებით. მაგრამ თუ

$$A \leqslant y_k \leqslant B,$$

მაშინ ცხადია

$$A \sum_{k=0}^{n-1} me_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k \leqslant B \sum_{k=0}^{n-1} me_k$$

ან, რაც იგივეა,

$$A \cdot mE \leqslant s \leqslant B \cdot mE,$$

საიდანაც, ზღვარშიაც

$$\left(a - \frac{1}{n}\right) mE \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \left(b + \frac{1}{n}\right) mE.$$

n რიცხვის ნებისმიერობის ძალით, თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან რამოდენიმე მარტივი შედეგი გამომდინარეობს.

შედეგი 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია ზომად E სიმრავლეზე და $f(x)=c$, მაშინ

$$\int_E f(x)\,dx = c\cdot mE.$$

შედეგი 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია (არადადებითია), ასეთივეა მისი ინტეგრალიც.

შედეგი 3. თუ $mE=0$, მაშინ ყოველი შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც მოცემულია E-ზე, გვექნება

$$\int_E f(x)\,dx=0.$$

თეორემა 2. ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. თუ E სიმრავლე წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთი სიმრავლეების სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$E=\sum_k E_k \quad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

მაშინ

$$\int_E f(x)\,dx=\sum_k\int_{E_k} f(x)\,dx.$$

ამ თეორემით გამოსახულ თვისებას ინტეგრალისა ეწოდება მისი სრული ადიტივობა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ჯერ უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც შესაკრებთა რიცხვი უდრის ორს

$$E=E'+E'' \qquad (E'\cdot E''=0).$$

თუ E სიმრავლეზე გვაქვს

$$A<f(x)<B$$

და თუ ჩვენ $[A,\ B]$ სეგმენტს დავანაწილებთ $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$ წერტილებით, და შევადგენთ სიმრავლეებს

$$e_k=E(y_k\leqslant f<y_{k+1}),\ e_k'=E'(y_k\leqslant f<y_{k+1}),\ e_k''=E''(y_k\leqslant f<y_{k+1}),$$

ცხადია, მივიღებთ

$$e_k=e'_k+e_k'' \qquad (e'_ke''_k=0),$$

საიდანაც

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k=\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e'_k+\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k''$$

და ზღვარში, როცა $\lambda\to 0$, მივიღებთ

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{E'} f(x)\,dx+\int_{E''} f(x)\,dx.$$

ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია ორი შესაკრები სიმრავლის შემთხვევაში. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით, ჩვენ ადვილად გავავრცელებთ თეორემას შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობის შემთხვევაში.

დაგვრჩენია იმ შემთხვევის განხილვა, როდესაც

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

ამ შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{\infty} mE_k = mE,$$

ასე რომ $n \to \infty$-სათვის გვექნება

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} mE_k \to 0. \qquad (*)$$

შევნიშნეთ რა ეს, ვთქვათ,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} E_k = R_n.$$

რადგან შესაკრებ სიმრავლეების სასრული რიცხვის შემთხვევაში თეორემა უკვე დამტკიცებულია, ამიტომ

$$\int_E f\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f\,dx + \int_{R_n} f\,dx.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით

$$A \cdot mR_n \leqslant \int_{R_n} f\,dx \leqslant B \cdot mR_n,$$

ხოლო (*)-ის ძალით mR_n ზომა მიისწრაფვის ნულისაკენ n-ის ზრდასთან ერთად, საიდანაც ცხადია, რომ

$$\int_{R_n} f\,dx \to 0.$$

მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\int_E f\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\,dx.$$

ამ თეორემიდან რამდენიმე შედეგი გამომდინარეობს.

შედეგი 1. თუ ზომადი შემოსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია E სიმრავლეზე, და ერთმანეთის ეკვივალენტური არიან, მაშინ

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

მართლაც, თუ

$$A = \mathrm{E}(f \neq g),\ B = \mathrm{E}(f = g),$$

მაშინ $mA = 0$ და

$$\int_A f\,dx = \int_A g\,dx = 0.$$

B სიმრავლეზე კი ორივე ფუნქცია იგივურია და

$$\int_B f\,dx = \int_B g\,dx.$$

ახლა დაგვრჩენია ამ ტოლობის შეკრება წინა ტოლობასთან.

კერძოდ, ნულის ეკვივალენტური ფუნქციის ინტეგრალი ნულის ტოლია.

თავის თავად ცხადია, რომ ეს უკანასკნელი დებულება არ არის შებრუნებადი. მაგალითად, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1, +1]$ სეგმენტზე, ასე:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{როცა } x < 0, \end{cases}$$

მაშინ[1]

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = -1 + 1 = 0,$$

თუმცა $f(x)$ ფუნქცია არ არის ნულის ეკვივალენტური.

მიუხედავად ამისა სამართლიანია

შედეგი 2. თუ არაუარყოფითი ზომადი შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)\,dx \qquad (f(x) \geqslant 0),$$

ნულის ტოლია, მაშინ ეს ფუნქცია ეკვივალენტურია ნულისა.

მართლაც, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\mathrm{E}(f > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(f > \frac{1}{n}\right).$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია არაა ეკვივალენტური ნულისა, აუცილებლად მოიძებნება ისეთი n_0, რომ

$$m\mathrm{E}\left(f > \frac{1}{n_0}\right) = \sigma > 0.$$

---

[1] რადგანაც E სიმრავლიდან ერთი წერტილის გადაგდება არ ცვლის ინტეგრალის მნიშვნელობას, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერ [a, b), (a, b], (a, b) შუალედზე აღებული ინტეგრალი აღვნიშნოთ ისევე, როგორც [a, b] სეგმენტზე, სიმბოლოთი $\int_a^b f(x)dx$.

დავუშვათ

$$A = \mathrm{E}\left(f > \frac{1}{n_0}\right), \ B = \mathrm{E} - A,$$

მაშინ ჩვენ გვექნებ

$$\int_A f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{n_0}\sigma, \quad \int_B f(x)\,dx \geqslant 0;$$

ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{n_0}\sigma,$$

რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

თეორემა 3. თუ ზომად Q სიმრავლეზე მოცემულია ორი ზომადი შემოსაზღვრული $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ

$$\int_Q [f(x) + F(x)]dx = \int_Q f(x)\,dx + \int_Q F(x)\,dx.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$a < f(x) < b, \qquad A < F(x) < B.$$

დავანაწილოთ ორივე $[a, b]$ და $[A, B]$ სეგმენტი, წერტილებით

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b, \qquad A = Y_0 < Y_1 < \ldots < Y_N = B,$$

და განვიხილოთ სიმრაელეები

$$e_k = Q(y_k \leqslant f < y_{k+1}), \ \mathrm{E}_i = Q(Y_i \leqslant f < Y_{i+1})$$

$$T_{i;k} = \mathrm{E}_i e_k \, (i = 0, 1, \ldots, N-1; \ k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

აშკარაა, რომ

$$Q = \sum_{i,k} T_{i;k},$$

და $T_{i;k}$-სიმრავლეები წყვილწყვილად არ იკვეთებიან. ამისგამო

$$\int_Q (f + F)\,dx = \sum_{i,k} \int_{T_{i;k}} (f + F)\,dx.$$

მაგრამ $T_{i;k}$ სიმრავლეზე გვექნება

$$y_k + Y_i \leqslant f(x) + F(x) < y_{k+1} + Y_{i+1},$$

საიდანაც, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის საფუძველზე,

$$(y_k + Y_i)\, mT_{i;k} \leqslant \int_{T_{i;k}} (f + F)\,dx \leqslant (y_{k+1} + Y_{i+1})\, mT_{i;k}.$$

ყველა ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ

$$\sum_{i,k} (y_k + Y_i)\, mT_{i;k} \leqslant \int_Q (f + F)\,dx \leqslant \sum_{i,k} (y_{k+1} + Y_{i+1})\, mT_{i;k}. \tag{1}$$

გამოვითვალოთ

$$\sum_{i,k} y_k m T_{i,k} \tag{2}$$

ჯამი ცალკე.

იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(\sum_{i=0}^{N-1} m\, T_{i,k} \right).$$

მაგრამ

$$\sum_{i=0}^{N-1} m\, T_{i,k} = m\left[\sum_{i=0}^{N-1} T_{i,k} \right] = m\left[\sum_{i=0}^{N-1} E_i e_k \right] = m\left[e_k \sum_{i=0}^{N-1} E_i \right] = m(e_k Q) = m e_k,$$

ასე რომ (2) ჯამი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასე:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k .$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს არის $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ქვედა S_f ჯამი.

ანალოგიურად გამოითვლებიან სხვა ჯამებიც, რომლებიც მონაწილეობენ (1)-ში. ასე რომ ამ უტოლობას შეიძლება მივცეთ სახე

$$s_f + s_F \leqslant \int_Q (f+F)\, dx \leqslant S_f + S_F, \tag{3}$$

სადაც შემოყვანილი აღნიშვნები თავისთავად გასაგები არიან.

$[a, b]$ და $[A, B]$ სეგმენტების დანაწილების წერტილთა შემჭიდროებით და ზღვარზე გადასვლით (3) უტოლობიდან მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

თეორემა 4. *თუ ზომად* E *სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი შემოსაზღვრული* $f(x)$ *ფუნქცია და* c *არის მუდმივი, მაშინ*

$$\int_E c f(x) dx = c \int_E f(x)\, dx .$$

დამტკიცება. თეორემა ტრივიალურია, თუ $c = 0$.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $c > 0$. ვთქვათ,

$$A < f(x) < B.$$

დავანაწილებთ რა $[A, B]$ სეგმენტს y_k წერტილებით და შემოვიყვანთ, როგორც ჩვეულებრივ, e_k სიმრავლეებს, მივიღებთ

$$\int_E c f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{e_k} c f(x)\, dx.$$

მაგრამ e_k სიმრავლეზე გვექნება

$$cy_k \leqslant cf(x) < cy_{k+1},$$

ასე რომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით

$$cy_1 me_k \leqslant \int_{e_k} cf(x)\,dx \leqslant cy_{k+1} me_k.$$

ყველა ასეთი უტოლობათა შეკრებით, მივიღებთ

$$cs \leqslant \int_E cf(x)\,dx \leqslant cS,$$

სადაც s და S წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ჯამებს. ამ უკანასკნელ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

დასასრულს, ვთქვათ, $c < 0$. მაშინ

$$0 = \int_E [cf(x) + (-c)f(x)]\,dx = \int_E cf(x)\,dx + (-c)\int_E f(x)\,dx,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

შედეგი. თუ $f(x)$ და $F(x)$ ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციებია E სიმრავლეზე, მაშინ

$$\int_E [F(x) - f(x)]\,dx = \int_E F(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx.$$

თეორემა 5. ვთქვათ, $f(x)$ და $F(x)$ ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციებია ზომად E სიმრავლეზე. თუ

$$f(x) \leqslant F(x),$$

მაშინ

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E F(x)\,dx.$$

მართლაც, $F(x) - f(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია, ასე რომ

$$\int_E F\,dx - \int_E f\,dx = \int_E (F - f)\,dx \geqslant 0.$$

თეორემა 6. თუ $f(x)$ ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციაა ზომად E სიმრავლეზე, მაშინ

$$\left| \int_E f(x)\,dx \right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$P = E(f \geqslant 0) \qquad N = E(f < 0).$$

მაშინ

$$\int_E f\,dx = \int_P f\,dx + \int_N f\,dx = \int_P |f|\,dx - \int_N |f|\,dx,$$

$$\int_E |f|\,dx = \int_P |f|\,dx + \int_N |f|\,dx,$$

და საკითხი დაიყვანება ელემენტარულ უტოლობაზე

$$|a - b| \leqslant a + b \qquad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

§ 3. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

აქ ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ საკითხს: ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციათა

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

ისეთი მიმდევრობა, რომელიც რაიმე აზრით (ყველგან, თითქმის ყველგან, ზომით) კრებადია შემოსაზღვრული ზომადი $F(x)$ ფუნქციისაკენ. ისმება საკითხი, სამართლიანია თუ არა დამოკიდებულება

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E F(x)\,dx. \tag{1}$$

თუ (1) სამართლიანია, ამბობენ, რომ შესაძლებელია ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, საზოგადოდ, ეს ასე არ არის. მაგალითად, თუ $f_n(x)$ ფუნქციები განსაზღვრული არიან $[0,\ 1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად:

$$f_n(x)=\begin{cases} n, \text{ როცა } x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, \text{ როცა } x\,\overline{\in}\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

მაშინ ყოველი $x\in[0,\ 1]$-სათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,$$

მაგრამ

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=1,$$

და ეს ინტეგრალი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ.

ამიტომ, ბუნებრივია დაისვას საკითხი იმ დამატებითი შეზღუდვების შესახებ, რომლებიც უნდა მოვთხოვოთ $f_n(x)$ ფუნქციებს, რომ (1) ტოლობა მაინც სამართლიანი იყოს.

ჩვენ დავკმაყოფილდებით შემდეგი თეორემის დამტკიცებით:

თეორემა (ა. ლებეგი). *ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ზომად შემოსაზღვრულ ფუნქციათა* $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots$ *ისეთი მიმდევრობა, რომელიც ზომით კრებადია შემოსაზღვრულ ზომად* $F(x)$ *ფუნქციისაკენ:*

$$f_n(x)\Rightarrow F(x).$$

თუ არსებობს ისეთი მუდმივი K, *რომელიც ყოველი* n-*სა და ყველა* $x\in E$-*სათვის აკმაყოფილებს უტოლობას*

$$|f_n(x)|<K,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E F(x)\,dx. \tag{1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. უპირველესად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ E სიმრავლის თითქმის ყველა x წერტილისათვის გვექნება

$$|F(x)| \leqslant K. \tag{2}$$

მართლაც, $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობიდან (რისის თეორემის საფუძველზე) შეიძლება ამოვირჩიოთ ისეთი $\{f_{n_k}(x)\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან. ყოველ წერტილზე, სადაც

$$f_{n_k}(x) \to F(x),$$

შესაძლებელია ზღვარზე გადასვლა $|f_{n_k}(x)| \leqslant K$ უტოლობაში, რაც მოგვცემს (2)-ს.

ახლა ვთქვათ, σ დადებითი რიცხვია. დავუშვათ

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - F| \geqslant \sigma), \quad B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma).$$

მაშინ

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f_n - F|\,dx = \int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx.$$

მაგრამ, $|f_n(x) - F(x)| \leqslant |f_n(x)| + |F(x)|$ უტოლობის ძალით, $A_n(\sigma)$ სიმრავლის თითქმის ყველა x-სათვის გვექნება

$$|f_n(x) - F(x)| < 2K,$$

ასე რომ, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx \leqslant 2K \cdot mA_n(\sigma) \tag{3}$$

(იმ გარემოებას, რომ $|f_n - F| < 2K$ უტოლობა შეიძლება არ იყოს შესრულებული 0 ზომის სიმრავლეზე, არ არის არსებითი; შესაძლებელია, მაგალითად, $|f_n(x) - F(x)|$ ფუნქცია ამ სიმრავლეზე შევცვალოთ ნულით; მაშინ $|f_n - F| < 2K$ უტოლობა შესრულებული იქნება A-ს ყოველ წერტილზე. მაგრამ, რადგანაც ფუნქციის შეცვლა 0 ზომის სიმრავლეზე გავლენას არ ახდენს ინტეგრალის მნიშვნელობაზე, ამიტომ (3) სამართლიანია ასეთი შეცვლის გარეშეც).

მეორეს მხრივ, ისევ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx \leqslant \sigma m B_n(\sigma) \leqslant \sigma mE.$$

ამ უტოლობის (3)-თან დაპირისპირებით მივიღებთ, რომ

$$\left|\int_E f_n dx - \int_E F dx\right| \leqslant 2K \cdot mA_n(\sigma) + \sigma mE. \tag{4}$$

ამის შემდეგ ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ იმდენად მცირე $\sigma > 0$, რომ

$$\sigma \cdot mE < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ σ-ს დაფიქრების შემდეგ, ზომით კრებადობის თვით განმარტების საფუძველზე გვექნება, რომ, როცა $n \to \infty$,

$$mA_n(\sigma) \to 0$$

და მაშასადამე, $n > N$-თვის მივიღებთ

$$2K \cdot mA_n(\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ასეთი n რიცხვებისათვის (4) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$\left| \int_E f_n dx - \int_E F dx \right|$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

ადვილი მისახვედრია, რომ თეორემა სამართლიანი რჩება იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც

$$| f_n(x) | < K$$

უტოლობა შესრულებულია თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე. დამტკიცება ისეთივეა როგორც წინა შემთხვევა.

შემდეგ, რადგანაც ზომით კრებადობა უფრო ზოგადია, ვიდრე ჩვეულებრივი კრებადობა, ამიტომ თეორემა მით უფრო სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$f_n(x) \to F(x)$$

თითქმის ყველგან (და მით უმეტეს, ყველგან).

§ 4. რიმანის და ლებეგის ინტეგრალების შედარება

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია (არა აუცილებლად სასრული) $f(x)$ ფუნქცია. ვთქვათ $x_0 \in [a, b]$ და $\delta > 0$. აღვნიშნოთ $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ინტერვალზე, სათანადოდ, $m_\delta(x_0)$ და $M_\delta(x_0)$-ით:

$$m_\delta(x_0) = \inf \{ f(x) \}, \quad M_\delta(x_0) = \sup \{ f(x) \} \quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$$

(თავისთავად ცხადია, რომ ჩვენ მხედველობაში გვაქვს $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ინტერვალის მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც, ამავე დროს, $[a, b]$ სეგმენტზედაც მდებარეობენ).

აშკარაა, რომ

$$m_\delta(x_0) \leq f(x_0) \leq M_\delta(x_0).$$

თუ δ მცირდება, მაშინ $m_\delta(x_0)$ არ მცირდება, ხოლო $M(x_0)$ არ იზრდება. ამიტომ არსებობს გარკვეული ზღვრები

$$m(x_0) = \lim_{\delta \to +0} m_\delta(x_0), \quad M(x) = \lim_{\delta \to +0} M_\delta(x),$$

ამასთან, აშკარაა, რომ

$$m_\delta(x_0) \leqslant m(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant M_\delta(x_0).$$

განმარტება. $m(x)$ და $M(x)$ ფუნქციებს, სათანადოდ, $f(x)$ ფუნქციისათვის ბერის ქვედა და ზედა ფუნქციები ეწოდებათ.

თეორემა 1. (რ. ბერი). ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია სასრულია x_0 წერტილში. იმისთვის რომ $f(x)$ უწყვეტი იყოს ამ წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$m(x_0) = M(x_0). \qquad (*)$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-ის აღებით ისეთ $\delta > 0$ რიცხვს ვიპოვით, რომ როგორც კი გვექნება

$$|x - x_0| < \delta,$$

მაშინვე მივიღებთ

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$-ს ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

მაგრამ აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant m_\delta(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon,$$

და, მაშასადამე, მით უფრო

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant m(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon,$$

საიდანაც, ε-ის ნებისმიერობის ძალით, გამომდინარეობს (*). ამგვარად, (*) პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ვთქვათ ახლა, პირიქით, მოცემულია, რომ (*) შესრულებულია. მაშინ აშკარაა, რომ

$$m(x_0) = M(x_0) = f(x_0)$$

და ბერის ფუნქციათა საერთო მნიშვნელობა x_0 წერტილზე სასრულია.

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqslant m(x_0), \quad M(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

ეს უტოლობები გვიჩვენებენ, რომ

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0), \quad M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

თუ ახლა $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, მაშინ რადგან $f(x)$ მოთავსებულია $m_\delta(x_0)$-სა და $M_\delta(x_0)$-ს შორის, მივიღებთ

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, იქედან, რომ $|x - x_0| < \delta$, გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე.

ძირითადი ლემა. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებათა მიმდევრობა

$$a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_{n_1}^{(1)} = b$$

$$a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \quad < x_{n_i}^{(i)} = b$$

ამასთან, $i \to \infty$ -სათვის გვქონდეს

$$\lambda_i = \max [x^{(i)}_{k+1} - x^{i}_{k}] \to 0.$$

ვთქვათ, $m_k^{(i)}$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ქვედა საზღვარს $[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}]$ სეგმენტზე. შემოვიღოთ შემდეგნაირი $\varphi_i(x)$ ფუნქცია

$$\varphi_i(x) = m_k^{(i)}, \text{ როცა } x \in (x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)})$$

$$\varphi_i(x) = 0, \quad \text{როცა} \quad x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}.$$

თუ x_0 არ ემთხვევა არცერთ $x_k^{(i)}$ წერტილს ($i = 1, 2, 3,$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n_i$), მაშინ

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_i(x_0) = m(x_0).$$

დამტკიცება. ავირჩიოთ i რიცხვი და დავარქვათ $[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}]$ ის სეგმენტს i-ურ დანაწილებაში, რომელიც შეიცავს x_0 წერტილს. რადგანაც x_0 არ წარმოადგენს დაყოფის არცერთ წერტილს, ამიტომ

$$x_{k_0}^{(i)} < x_0 < x^{(i)}_{k_0+1},$$

და, მაშასადამე, საკმარისად მცირე $\delta > 0$ რიცხვებისათვის გვექნება

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x^{(i)}_{k_0}, x^{(i)}_{k_0+1}],$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$m^{(i)}_{k_0} \leqslant m_\delta(x_0)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\varphi_i(x_0) \leqslant m_\delta(x_0).$$

δ-ს ნულისაკენ მისწრაფებით და ზღვარზე გადასვლით, დავინახავთ, რომ ნებისმიერი i-სათვის გვექნება

$$\varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0).$$

ამით ლემა უკვე დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა $m(x_0) = -\infty$. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ $m(x_0) > -\infty$ და ვთქვათ,

$$h < m(x_0).$$

მაშინ მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$m_\delta(x) > h.$$

ასეთი δ-ს დაფიქსირების შემდეგ, ვიპოვოთ იმდენად დიდი i_0, რომ როცა $i > i_0$, გვქონდეს

$$[x^{(i)}_{k_0}, \ x^{(i)}_{k_0+1}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

სადაც, ისევე როგორც ზემოთ, $[x_{k_0}^{(i)}, x^{(i)}_{k_0+1}]$ აღნიშნავს x_0-ის შემცველ სეგმენტს. ასეთი i_0-ის არსებობა გამომდინარეობს

$$\lambda_i \to 0$$

პირობიდან.

ამგვარი i რიცხვებისათვის გვექნება

$$m_{k_0}^{(i)} \geqslant m_\delta(x_0) > h,$$

ან, რაც იგივეა,

$$\varphi_i(x_0) > h.$$

ამგვარად, ყოველი $h < m(x_0)$-სათვის მოიძებნება ისეთი i_0, რომ $i > i_0$ რიცხვებისათვის

$$h < \varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0),$$

ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $\varphi_i(x_0) \to m(x_0)$. ლემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ბერის $m(x)$ და $M(x)$ ფუნქციები ზომადია.

მართლაც, დაყოფის წერტილთა $\{x_k^{(i)}\}$ სიმრავლე თვლადია, და, მაშასადამე, აქვს ნულის ტოლი ზომა. ამის გამო, ლემა ნიშნავს იმას, რომ

$$\varphi_i(x) \to m(x)$$

თითქმის ყველგან.

მაგრამ $\varphi_i(x)$, ცხადია, ზომადია, რადგანაც იგი უბნობრივ მუდმივია. მაშასადამე, $m(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ზომადია. ბერის ზედა $M(x)$ ფუნქციისათვის მსჯელობა ანალოგიურია.

შედეგი 2. თუ ლემის პირობებში გამოსავალი $f(x)$ ფუნქ- შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,dx \to (L)\int_a^b m(x)\,dx.$$

მართლაც, თუ $|f(x)| \leqslant K$, მაშინ ცხადია

$$|\varphi_i(x)| \leqslant K, \quad |m(x)| \leqslant K,$$

საიდანაც პირველად ყოვლისა გამომდინარეობს ის, რომ ეს ფუნქციებიც (L) ინტეგრებადია, რის შემდეგ საკმარისია დავეყრდნოთ ლებეგის თეორემას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ.

გადავაკეთოთ ახლა მე-2 შედეგის ჩამოყალიბება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n_i-1}\int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \varphi_i(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}[x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}] = s_i,$$

სადაც s_i წარმოადგენს i-ური დანაწილების შესაბამ დარბუს ქვედა ჯამს. ამგვარად, მე-2 შედეგი ნიშნავს იმას, რომ $i \to \infty$-თვის

$$s_i \to (L)\int_a^b m(x)dx.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ დარბუს ზედა S_i ჯამი i-ს ზრდის დროს მიისწრაფვის ბერის ზედა ფუნქციის ინტეგრალისაკენ

$$S_i \to (L)\int_a^b M(x)\,dx.$$

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში

$$S_i - s_i \to (L)\int_a^b [M(x) - m(x)]\,dx.$$

მეორეს მხრივ, ანალიზის კურსში მტკიცდება, რომ შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის (R) ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$S_i - s_i \to 0.$$

ამ გარემოების დაპირისპირებით ზემონათქვამთან მივიღებთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის (R) ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ გვქონდეს

$$(L)\int_a^b [M(x) - m(x)]\,dx = 0. \tag{1}$$

(1) პირობა, ყოველ შემთხვევაში, შესრულებული იქნება, თუ $M(x) - m(x)$ ფუნქცია ნულის ეკვივალენტურია, მაგრამ, რადგანაც ეს ფუნქცია არაუარყოფითია, ამიტომ პირიქითაც (1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$m(x) \sim M(x). \tag{2}$$

ამგვარად, შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის (R) ინტეგრებადობა ტოლფასია (2) დამოკიდებულებისა.

ამ შედეგის ბერის თეორემასთან დაპირისპირებით მივიღებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 2 (ლებეგი). *იმისათვის რომ შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია (R) ინტეგრებადი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი თითქმის ყველგან უწყვეტი იყოს.*

ეს შესანიშნავი თეორემა, წარმოადგენს (R) ინტეგრებადობის ყველაზე უფრო მარტივსა და ნათელ ნიშანს. კერძოდ, იგი ამართლებს § 1-ში გაკეთებულ შენიშვნას იმის შესახებ, რომ (R) ინტეგრებადი — შესაძლებელია იყოს მხოლოდ „არა ძალიან წყვეტილი" ფუნქციები.

დავუშვათ ახლა, რომ $f(x)$ ფუნქცია (R) ინტეგრებადია. მაშინ იგი აუცილებლად შემოსაზღვრულია და თითქმის ყველგან გვექნება

$$m(x) = M(x).$$

მაგრამ

$$m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x).$$

ამიტომ

$$f(x) = m(x)$$

თითქმის ყველგან, და $f(x)$ ფუნქცია, არის რა ეკვივალენტური ზომადი $m(x)$ ფუნქციისა, ზომადი იქნება თვითონაც. რადგან ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია (L) ინტეგრებადია, ასეთი იქნება $f(x)$-იც, ე. ი. რაიმე ფუნქციის ინტეგრებადობიდან რიმანის აზრით გამომდინარეობს მისი ინტეგრებადობა ლებეგის აზრით.

დაბოლოს, $f(x)$ და $m(x)$ ფუნქციების ეკვივალენტობიდან გამომდინარეობს

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b m(x)\,dx.$$

მაგრამ, როგორც ანალიზის კურსიდან არის ცნობილი, ძირითადი ლემას პირობებში, (R) ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$s_i \to (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

სადაც s_i დარბუს ქვედა ჯამია, დაყოფის i-ური წესის შესაბამისი. ამ გამოთქმების დაპირისპირებით იმასთან, რომ, როგორც ნაჩვენები იყო

$$s_i \to (L)\int_a^b m(x)dx,$$

მივიღებთ, რომ

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

ყოველივე ზემონათქვამი შესაძლებელია შევაჯამოთ შემდეგი თეორემის სახით:

თეორემა 3. *ყოველი (R) ინტეგრებადი ფუნქცია (L) ინტეგრებადია და მისი ორივე ინტეგრალი ტოლია.*

დასასრულს აღვნიშნოთ, რომ დირიხლეს $\psi(x)$ ფუნქცია (რომელიც ტოლია ნულისა ირაციონალურ წერტილებში, და ტოლია ერთის რაციონალურ წერტილებში) (L) ინტეგრებადია (რადგანაც იგი ნულის ეკვივალენტურია), მაგრამ, როგორც ვნახეთ § 1-ში, იგი არაა (R) ინტეგრებადი, ასე რომ მე-3 თეორემის შებრუნება არ შეიძლება.

§ 5. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ისეთი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე აქვს გარკვეული $f'(x)$ წარმოებული (ბოლო a და b წერტილებში მხედველობაში გვაქვს ცალმხრივი წარმოებულები). ისმება საკითხი, როგორ ვიპოვოთ პირველყოფილი $f(x)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი $f'(x)$ წარმოებული?

ანალიზის კურსში მტკიცდება, რომ თუ $f'(x)$ წარმოებული (R) ინტეგრებადია, მაშინ

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

მაგრამ ცნობილია თუნდაც შემოსაზღვრული, მაგრამ არა (R) ინტეგრებადი წარმოებულების მაგალითებიც (პირველი ასეთი მაგალითი ვ. ვოლტერამ ააგო). ამის გამო, რიმანის ინტეგრალი იძლევა დასმული საკითხის არასრულ ამოხსნას. ლებეგის ინტეგრალი ამ ამოცანის გადასაწყვეტად უფრო ძლიერი იარაღია.

თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში აქვს $f'(x)$ წარმოებული. თუ $f'(x)$ შემოსაზღვრულია, მაშინ ის (L) ინტეგრებადია და

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

დამტკიცება. უპირველესად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, რადგანაც $[a, b]$-ს ყოველ წერტილზე მას აქვს სასრული წარმოებული. გავავრცელოთ $f(x)$ ფუნქციის განმარტება უფრო ფართო $[a, b+1]$ სეგმენტისათვის შემდეგნაირად: მივიღოთ

$$f(x) = f(b) + (x-b)f'(b),$$

როცა $b < x \leqslant b+1$.

$f(x)$ ფუნქცია ახლა უწყვეტია და აქვს სასრული წარმოებული $[a, b+1]$ სეგმენტზე.

აღვნიშნოთ

$$\varphi_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right],$$

სადაც $x \in [a, b]$, ხოლო $n = 1, 2, \ldots$

$[a, b]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილზე გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n x = f'(x),$$

და რადგან ყოველი $\varphi_n(x)$ ფუნქცია ზომადია უწყვეტობის გამო, ამიტომ ზომადია $f'(x)$ ფუნქციაც, საიდანაც გამომდინარეობს ამ პირობის ძალით შემოსაზღვრული ფუნქციის (L) ინტეგრებადობა.

შემდეგ, ლაგრანჟის ფორმულის ძალით

$$\varphi_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \; (0 < \theta < 1),$$

ასე რომ ყოველი $\varphi_n(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ერთიდაიგივე რიცხვით, და ამიტომ, ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის ლებეგის თეორემით, მივიღებთ

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx. \tag{1}$$

მაგრამ

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = n\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - n\int_a^b f(x)\,dx = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx.$$

$f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ ფუნქციის ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნის მოხდენა შესაძლებელია, რადგანაც ეს ფუნქცია უწყვეტია და მისი ინტეგრალი შეიძლება რიმანის აზრით ავიღოთ, (R) ინტეგრალებისათვის კი ჩასმის თეორია კარგად ცნობილია). აქედან

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx.$$

უკანასკნელი ორი ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = f\left(b+\frac{\Theta'_n}{n}\right) - f\left(a+\frac{\Theta''_n}{n}\right) \quad (0<\Theta'_n<1,\ 0<\Theta''_n<1),$$

საიდანაც, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = f(b)-f(a).$$

ამ ტოლობის (1)-თან დაპირისპირებით აღმოვაჩენთ, რომ

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx.$$

თუ ახლა b-ს შევცვლით ნებისმიერი x-ით $[a, b]$-დან, მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

თავი VI

ჯამებადი ფუნქციები

§ 1. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ინტეგრალი

ამ თავში ჩვენ განვაზოგადებთ ლებეგის ინტეგრალის განმარტებას არაშემოსაზღვრული ფუნქციებისათვის, ამასთან, პირველ პარაგრაფში მხოლოდ არაუარყოფითი ფუნქციებით დავკმაყოფილდებით.

ლემა 1. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ზომადი და არაუარყოფითია ზომად E სიმრავლეზე. ვთქვათ, შემდეგ, N — ნატურალური რიცხვია. თუ $[f(x)]_N$ ფუნქცია განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } f(x) \leqslant N, \\ N, & \text{თუ } f(x) > N, \end{cases}$$

მაშინ ეს ფუნქცია აგრეთვე ზომადია.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$E([f]_N > a) = \begin{cases} E(f > a), & \text{თუ } a < N, \\ 0 & , \text{თუ } a \geqslant N, \end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს ლემა.

ლემის პირობებში ცხადია, რომ $[f(x)]_N$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, და, მაშასადამე, (L) ინტეგრებადია. რადგან, გარდა ამისა,

$$[f(x)]_1 \leqslant [f(x)]_2 \leqslant [f(x)]_3 \leqslant \cdots,$$

ამიტომ

$$\int_E [f(x)]_1 dx \leqslant \int_E [f(x)]_2 dx \leqslant \int_E [f(x)]_3 dx \leqslant \cdots$$

და არსებობს გარკვეული (სასრული ან უსასრულო) ზღვარი

$$\lim_{N \to +\infty} \int_E [f(x)]_N dx. \tag{*}$$

განმარტება. (*) ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი E სიმრავლეზე, და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_E f(x) dx.$$

თუ ეს ინტეგრალი სასრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას (L) ინტეგრებადი ან ჯამებადი ფუნქცია ჰქვია E სიმრავლეზე.

ამგვარად, ყოველ არაუარყოფით ზომად ფუნქციას ჩვენ ვაწერთ ინტეგრალს, მაგრამ ჯამებადს მხოლოდ ისეთ ფუნქციას ვუწოდებთ, რომლის ინტეგრალიც სასრულია.

ზოგჯერ, იმ გარემოების აღსანიშნავად, რომ ინტეგრალი ლებეგის აზრით განიხილება, სწერენ

$$(L)\int_E f(x)dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $E=[a,b]$, იხმარება აღნიშვნა

$$\int_a^b f(x)dx.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ შემოსაზღვრული (ზომადი და არაუარყოფითი) $f(x)$ ფუნქციისათვის ინტეგრალის ახალი განმარტება ემთხვევა წინად მოცემულ განმარტებას, რადგანაც საკმარისად დიდი N-სათვის გვექნება

$$[f(x)]_N=f(x).$$

ამის გამო, ყოველი შემოსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია ჯამებადია.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე, მაშინ იგი თითქმის ყველგან სასრულია ამ სიმრავლეზე.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$A=E(f=+\infty).$$

A სიმრავლეზე $[f(x)]_N$ ფუნქცია N-ის ტოლია, ასე რომ

$$\int_E [f]_N\, dx \geqslant \int_A [f]_N dx = N\cdot mA,$$

და რომ გვქონდეს $mA>0$, მაშინ $\int_E [x]_N dx$ ინტეგრალი N-ის ზრდასთან ერთად უსაზღვროდ ზრდადი იქნებოდა, რაც ეწინააღმდეგება $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობას.

თეორემა 2. თუ $mE=0$, მაშინ ყოველი არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე და

$$\int_E f(x)dx=0.$$

ეს თეორემა აშკარაა.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ეკვივალენტური არიან E სიმრავლეზე, მაშინ

$$\int_E f(x)\, dx=\int_E g(x)dx.$$

მართლაც, ყოველ ისეთ წერტილზე, სადაც $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები თანატოლია, $[f(x)]_N$ და $[g(x)]_N$ ფუნქციებიც აგრეთვე თანატოლია; ასე რომ ეს უკანასკნელი ფუნქციები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. სხვა დანარჩენი ცხადია.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა ზომად E სიმრავლეზე, ხოლო E_0 არის E სიმრავლის ზომადი ქვესიმრავლე, მაშინ

$$\int_{E_0} f(x)\,dx \leqslant \int_E f(x)dx.$$

მართლაც, ეს უტოლობა აშკარაა, თუ $f(x)$-ს შევცვლით $[f(x)]_N$-ით. ამის შემდეგ საჭიროა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $N\to\infty$. კერძოდ, $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობიდან E სიმრავლეზე გამომდინარეობს მისი ჯამებადობა E-ს ნებისმიერ ზომად ქვესიმრავლეზე.

თეორემა 5. ვთქვათ, $f(x)$ და $F(x)$ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია E სიმრავლეზე, თუ $f(x)\leqslant F(x)$, მაშინ

$$\int_E f(x)dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

ეს თვისება მტკიცდება სავსებით აშკარა უტოლობის

$$[f(x)]_N \leqslant [F(x)]_N$$

ინტეგრებით და შემდგომი ზღვარზე გადასვლით.

კერძოდ, თუ $F(x)$ ჯამებადია, ჯამებადია $f(x)$-იც.

თეორემა 6. თუ (ჩვეულებრივ პირობებში)

$$\int_E f(x)\,dx = 0,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ნულის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. რადგან

$$0 \leqslant \int_E [f]_N\,dx \leqslant \int_E f(x)dx,$$

ამიტომ $[f(x)]_N$ ფუნქცია (ყოველი N-სათვის) ნულის ეკვივალენტურია. ვთქვათ,

$$A = \sum_{N=1}^{\infty} E([f]_N \neq 0).$$

მაშინ $mA = 0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ როცა $x \in E - A$, გვექნება $f(x)=0$, რადგან, საზოგადოდ, ყოველი x-სათვის E-დან

$$\lim_{N\to\infty} [f(x)]_N = f(x).$$

თეორემა 7. ვთქვათ, $f'(x)$ და $f''(x)$ წარმოადგენენ სიმრავლეზე მოცემულ ორ არაუარყოფით ზომად ფუნქციას. თუ $f(x) = f'(x) + f''(x)$, მაშინ

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f'(x)\,dx + \int_E f''(x)\,dx.$$

დამტკიცება. რადგან ყოველი N-სათვის

$$[f'(x)]_N + [f''(x)]_N \leqslant f(x),$$

ამიტომ

$$\int_E [f']_N\,dx + \int_E [f'']_N\,dx \leqslant \int_E f(x)dx,$$

საიდანაც, ზღვარზე გადასვლით $N \to \infty$-სათვის, მივიღებთ

$$\int_E f'\,dx + \int_E f''\,dx \leqslant \int_E f\,dx. \tag{1}$$

შებრუნებული უტოლობის დასამტკიცებლად, ვაჩვენოთ რომ ყოველი N-სათვის

$$[f(x)]_N \leqslant [f'(x)]_N + [f''(x)]_N. \tag{2}$$

ვთქვათ, $x_0 \in E$. თუ

$$f'(x_0) \leqslant N, \quad f''(x_0) \leqslant N,$$

მაშინ

$$[f(x_0)]_N \leqslant f(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0) = [f'(x_0)]_N + [f''(x_0)]_N.$$

თუ თუნდაც ერთი მაინც რიცხვთაგანი $f'(x_0)$-სა და $f''(x_0)$-ს შორის აღემატება N-ს, მაშინ

$$[f(x_0)]_N = N = [f'(x_0)]_N + [f''(x_0)]_N,$$

რადგან ერთერთი შესაკრები მარჯვენა ნაწილში ტოლია N-სა, ხოლო მეორე არაუარყოფითია. ამგვარად, (2) დამტკიცებულია.

(2) უტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_E [f]_N dx \leqslant \int_E [f']_N dx + \int_E [f'']_N dx.$$

აქედან

$$\int_E [f]_N dx \leqslant \int_E f'\,dx + \int_E f''\,dx$$

და ზღვარზე გადასვლით, როცა $N \to +\infty$, მივიღებთ

$$\int_E f\,dx \leqslant \int_E f'\,dx + \int_E f''\,dx. \tag{3}$$

(1)-ს და (3)-ს დაპირისპირებით მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას. კერძოდ, თუ ორივე ფუნქცია $f'(x)$ და $f''(x)$ ჯამებადია, მაშინ ჯამებადია მათი ჯამიც.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი და არაუარყოფითი ფუნქცია, ხოლო $k \geqslant 0$ — სასრული რიცხვია, მაშინ

$$\int_E kf(x)dx = k\int_E f(x)dx.$$

დამტკიცება. თეორემა ტრივიალურია, თუ $k=0$. ყოველი ნატურალური k-სათვის იგი წინა თეორემის შედეგს წარმოადგენს. თუ $k=\frac{1}{m}$, სადაც m ნატურალური რიცხვია, მაშინ ისევ მე-7 თეორემის ძალით გვექნება

$$\int_E f(x)dx = m\int_E \frac{1}{m} f(x)dx$$

და

$$\int_E \frac{1}{m} f(x)\,dx = \frac{1}{m}\int_E f(x)dx.$$

აქედან გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა k-ს ყოველი რაციონალური მნიშვნელობისათვის. ვთქვათ, ბოლოს, k ირაციონალური დადებითი რიცხვია. ავიღოთ ისეთი r და R რაციონალური რიცხვები, რომ $r<k<R$. მე-5 თეორემის ძალით

$$r\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E kf(x)dx \leqslant R\int_E f(x)dx.$$

და დაგვრჩა ზღვარზე გადასვლა, როცა r და R რიცხვები მიისწრაფვიან k-საკენ.

კერძოდ, $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობიდან $kf(x)$ ფუნქციის ჯამებადობა გამომდინარეობს.

შემდეგი თეორემა მეტად მნიშვნელოვანია. მისი ჩამოყალიბებამდე დავამტკიცოთ ერთი, თითქმის აშკარა, ლემა.

ლემა 2. ვთქვათ, x_0 წერტილში გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = F(x_0).$$

მაშინ ყოველი ნატურალური N-სათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x_0)]_N = [F(x_0)]_N.$$

დამტკიცება. თუ $F(x_0)>N$, მაშინ საკმარისად დიდი n-სათვის გვექნება აგრეთვე $f_n(x_0)>N$, და, მაშასადამე (ასეთი n-სათვის),

$$[f_n(x_0)]_N = N = [F(x_0)]_N.$$

სავსებით ასევე, თუ $F(x_0)<N$, მაშინ საკმარისად დიდი n-სათვის გვექნება $f_n(x_0)<N$, და, მაშასადამე,

$$[f_n(x_0)]_N = f_n(x_0) \to F(x_0) = [F(x_0)]_N.$$

დაგვრჩენია იმ შემთხვევის გარჩევა, როდესაც $F(x_0)=N$. ასეთ შემთხვევაში, ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის შეიძლება მივუთითოთ ისეთი n_0, რომ, როცა $n>n_0$, გვექნება

$$f_n(x_0)>N-\varepsilon$$

და, მაშასადამე ($n>n_0$-სათვის)

$$N-\varepsilon<[f_n(x_0)]_N\leqslant N,$$

ე. ი.

$$|[F(x_0)]_N-[f_n(x_0)]_N|<\varepsilon \qquad (n>n_0).$$

ამგვარად, ლემა სამართლიანია ყველა შემთხვევაში.

თეორემა 9 (პ. ფატუ). თუ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x),\dots$ მიმდევრობა თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ

$$\int_E F(x)dx \leqslant \sup\{\int_E f_n(x)dx\}. \qquad (**)$$

დამტკიცება. ლემის ძალით, E სიმრავლეზე თითქმის ყველგან გვექნება ($n\to\infty$-სათვის)

$$[f_n(x)]_N\to[F(x)]_N.$$

რამდენადაც ყოველი $[f_n(x)]_N$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია N რიცხვით, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლებეგის თეორემა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ, ასე რომ

$$\int_E [F]_N\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_E [f_n]_N dx.$$

მაგრამ ყოველი n-სათვის

$$\int_E [f_n]_N dx \leqslant \int_E f_n dx \leqslant \sup\{\int_E f_n dx\},$$

ასე რომ ზღვარში მივიღებთ

$$\int_E [F]_N dx\leqslant \sup\{\int_E f_n dx\}.$$

ახლა თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $N\to+\infty$, მივიღებთ (**) უტოლობას. რ. დ. გ.

კერძოდ, თუ ყველა $f_n(x)$ ჯამებადია და

$$\int_E f_n(x)dx\leqslant A<+\infty,$$

მაშინ ჯამებადია ზღვარითი $F(x)$ ფუნქციაც.

შედეგი. თუ წინა თეორემის პირობებში არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx,$$

მაშინ

$$\int_E F(x)\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx. \tag{5}$$

დამტკიცება. შედეგი ტრივიალურია, თუ (4) ზღვარი უდრის $+\infty$-ს. ვიგულისხმოთ რომ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx = l < +\infty.$$

მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის შეიძლება ისეთი n_0 ვიპოვოთ, რომ როცა $n>n_0$

$$\int_E f_n dx < l+\varepsilon.$$

ფუნქციათა $f_{n_0}(x)$, $f_{n_0+1}(x),\dots$ მიმდევრობისათვის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\int_E F dx \leqslant l+\varepsilon,$$

საიდანაც, ε რიცხვის ნებისმიერობის ძალით, გამომდინარეობს (5).

ამ შედეგის დახმარებით ადვილად მიიღება შემდეგი თეორემა, რომელიც ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის საკითხს ეხება.

თეორემა 10 (ბ. ლევი). ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია არაზომადი უარყოფითი ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \cdots$$

თუ

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

მაშინ

$$\int_E F(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

დამტკიცება. უპირველესად ყოვლისა, ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx$$

არსებობს და, წინა შედეგის მიხედვით,

$$\int_E F\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx.$$

მეორეს მხრივ, ყოველი n-სათვის გვაქვს $f_n(x)\leqslant F(x)$, საიდანაც

$$\int_E f_n\,dx \leqslant \int_E F dx,$$

და, მაშასადამე, ზღვარშიაც

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა $u_1(x), u_2(x),\ldots$ მიმდევრობა. თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)=F(x),$$

მაშინ

$$\int_E F(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)dx.$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია დავუშვათ

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

და გამოვიყენოთ წინა თეორემა.

შედეგი. თუ წინა თეორემის პირობებში

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)dx<+\infty,$$

მაშინ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე გვექნება:

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x)=0 \qquad (6)$$

მართლაც, განსახილავ შემთხვევაში $F(x)$ ფუნქცია ჯამებადია, და, მაშასადამე, თითქმის ყველგან სასრულია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან, მაგრამ ამ მწკრივის კრებადობის წერტილებში (6) პირობის შესრულება აშკარაა.

თეორემა 12 (ინტეგრალის სრული ადიტიურობა). ვთქვათ, E სიმრავლე წარმოადგენს წყვილწყვილად არაგადამკვეთ E_k სიმრავლეების სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$E=\sum_k E_k \quad (E_kE_{k'}=0 \;\; k\neq k').$$

E სიმრავლეზე მოცემული ყოველი არაუარყოფითი ზომადი $f(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\int_{E} f(x)\,dx = \sum_{k} \int_{E_k} f(x)dx.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ $u_k(x)$ ფუნქციები ($k=1,2\ldots$) შემდეგნაირად:

$$u_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } x \in E_k \\ 0 \quad , & \text{თუ } x \in E - E_k. \end{cases}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$f(x) = \sum_{k} u_k(x),$$

და ამიტომ (მე-7 თეორემის ძალით, თუ შესაკრებთა რიცხვი სასრულია, და მე-11 თეორემის საფუძველზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში)

$$\int_{E} f(x)\,dx = \sum_{k} \int_{E} u_k(x)dx. \tag{7}$$

გამოვითვალოთ ახლა ინტეგრალი $\int_{E} u_k(x)dx$. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$[u_k(x)]_N = \begin{cases} [f(x)]_N, & \text{თუ } x \in E_k, \\ 0 \quad , & \text{თუ } x \in E - E_k', \end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{E} [u_k]_N\,dx = \int_{E_k} [f]_N dx.$$

N-ის გაზრდითა და ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\int_{E} u_k\,dx = \int_{E_k} f dx,$$

რაც, (7)-თან დაკავშირებით, ამტკიცებს თეორემას.

§ 2. ნებისმიერი ნიშნის ჯამებადი ფუნქციები

ახლა ჩვენ გავავრცელებთ ლებეგის ინტეგრალის განმარტებას ნებისმიერი ნიშნის არაშემოსაზღვრული ფუნქციებისათვის. როგორც დავინახავთ, ეს ნებისმიერი ზომადი ფუნქციისათვის შესაძლებელი არ არის.

ვთქვათ, $f(x)$ წარმოადგენს ზომად E სიმრავლეზე ზომად ფუნქციას.

შემოვიღოთ $f_+(x)$ და $f_-(x)$ ფუნქციები შემდეგნაირად:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \quad , & \text{თუ } f(x) < 0 \end{cases}; \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{თუ } f(x) < 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქციები ზომადი და არაუარყოფითი არიან, ასე რომ არსებობს ორივე ინტეგრალი

$$\int_E f_+(x)dx, \quad \int_E f_-(x)dx.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x).$$

ამიტომ ბუნებრივია, სხვაობას

$$\int_E f_+(x)\,dx-\int_E f_-(x)dx$$

ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი. მაგრამ „სხვაობას"

$$+\infty-(+\infty)$$

აზრი არა აქვს. ამის გამო, სიმბოლოს

$$\int_E f_+(x)\,dx-\int_E f_-(x)dx$$

აზრი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც თუნდაც ერთი $f_+(x)$ და $f_-(x)$ ფუნქციებიდან, ჯამებადია.

განმარტება 1. თუ თუნდაც ერთი $f_+(x)$ და $f_-(x)$ ფუნქციებს შორის ჯამებადია E სიმრავლეზე, მაშინ (სასრული ან უსასრულო) სხვაობას

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

$f(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი ეწოდება E სიმრავლეზე და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\int_E f(x)dx. \tag{1}$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ თითოეული $f_+(x)$ და $f_-(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და, ამიტომ, ინტეგრალის ახალი განმარტება ასეთი $f(x)$ ფუნქციისათვის მიიყვანება წინად მიღებულ განმარტებაზე. სავსებით ასევე, თუ (თუნდაც არაშემოსაზღვრული) ზომადი $f(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია, მაშინ

$$f_+(x)=f(x), \; f_-(x)=0,$$

და ჩვენ ისევ ინტეგრალის ძველ განმარტებამდე მივდივართ.

იმისათვის, რომ (1) ინტეგრალი არსებობდეს და სასრული იყოს, ცხადია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ თითოეული $f_+(x)$ და $f_-(x)$ ფუნქცია ჯამებადი იყოს.

განმარტება 2. $f(x)$ ფუნქციას (L) ინტეგრებადი ან ჯამებადი ფუნქცია ეწოდება E სიმრავლეზე, თუ ინტეგრალი $\int\limits_E f(x)dx$ არსებობს და სასრულია.

ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია ჯამებადია, არაუარყოფითი ფუნქციისათვის ჯამებადობის ახალი განმარტება ტოლფასია წინად მოცემული განმარტებისა.

ყველა ჯამებადი ფუნქციათა სიმრავლე ჩვეულებრივ L-ით აღინიშნება, ასე რომ $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობის ფაქტი შეიძლება ჩაიწეროს ასე: $f(x) \in L$.

თეორემა 1. იმისათვის რომ ზომადი $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ჯამებადი იყოს $|f(x)|$ ფუნქცია. თუ ეს პირობა დაცულია, მაშინ

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |f(x)|\,dx.$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

და, მაშასადამე (§ 1-ის მე-7 თეორემა),

$$\int\limits_E |f|\,dx = \int\limits_E f_+dx + \int\limits_E f_-dx,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

ალვნიშნოთ ამ თეორემის რამდენიმე აშკარა შედეგი:

I. ჯამებადი ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია.

II. თუ $m\mathrm{E}=0$, მაშინ E-ზე ყოველი $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია და $\int\limits_E f(x)dx=0$.

III. E სიმრავლეზე ჯამებადი ფუნქცია ჯამებადია მის ყოველ ქვესიმრავლეზე.

IV. ვთქვათ, $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქციები ჯამებადი არიან E სიმრავლეზე და $|f(x)| \leqslant F(x)$. თუ $F(x)$ ფუნქცია ჯამებადია, მაშინ ჯამებადია $f(x)$-იც.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ეკვივალენტური არიან, მაშინ, ცხადია, ეკვივალენტური არიან $f_+(x)$ და $g_+(x)$ და აგრეთვე $f_-(x)$ და $g_-(x)$ ფუნქციები. აქედან გამომდინარეობს:

თეორემა 2. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ეკვივალენტური არიან. ერთ-ერთი $\int\limits_E f(x)dx$ და $\int\limits_E g(x)dx$ ინტეგრალის არსებობიდან გამომდინარეობს არსებობა მეორე ინტეგრალისა და მათი ტოლობა.

კერძოდ, $f(x)$ და $g(x)$ ერთდროულად არიან ან არ არიან ჯამებადი. შემდეგში ჩვენ, საზოგადოდ, არ განვასხვავებთ ეკვივალენტურ ფუნქციებს. ასეთი შეთანხმება ძალიან სასარგებლოა: მაგალითად, ჯამებადი ფუნქციები შეგვიძლია

უყოყმანოთ შევკრიბოთ. საქმე იმაშია, რომ, $f'(x)+f''(x)$ ჯამის შედგენის დროს, ჩვენ მხედველობიდან უნდა გამოვრიცხოთ ის წერტილები, რომლებშიაც შესაკრებები სხვადასხვა ნიშნის უსასრულო მნიშვნელობებს იღებენ. იმისათვის, რომ არ მოვახდინოთ ასეთი გამორიცხვა, ჩვენ ამ წერტილებში შევცვლით ერთერთი შესაკრების მნიშვნელობებს, რადგან ასეთ წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულია (შესაკრებები ჯამებადია!). ამასთან, არა აქვს მნიშვნელობა იმას, თუ რომელი შესაკრები იცვლება, და როგორი მნიშვნელობები ენიჭება მას,—ახალი ჯამი ეკვივალენტურია ძველისა.

თეორემა 3 (ინტეგრალის სასრული ადიტიურობა). ვთქვათ, E სიმრავლე წარმოადგენს სასრული რაოდენობით აღებულ ურთიერთ არაგადამკვეთ ზომად E_k სიმრავლეების ჯამს

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k').$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია თითოეულ E_k სიმრავლეზე, მაშინ იგი ჯამებადია E ჯამზედაც და

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

დამტკიცება. § 1-ის მე-12 თეორემის ძალით სამართლიანია ტოლობანი

$$\int_E f_+\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_+\,dx,$$

$$\int_E f_-\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_-\,dx,$$

ამავე დროს, მათი მარჯვენა (და, მაშასადამე, მარცხენა) ნაწილები სასრულია. ამის შემდეგ დაგვრჩენია მეორე ტოლობა გამოვაკლოთ პირველს.

შესაკრებების თვლადი სიმრავლის შემთხვევაში, $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობიდან ყოველ შესაკრებ სიმრავლეზე არ გამომდინარეობს მისი ჯამებადობა ამ სიმრავლეების ჯამზე.

მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია (0,1)-ზე შემდეგნაირად

$$f(x) = \begin{cases} n, \text{ როცა } \dfrac{2n+1}{2n(n+1)} < x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ -n, \text{ როცა } \dfrac{1}{n+1} < x \leqslant \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}. \end{cases} \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

მაშინ $f(x)$ ჯამებადია ყოველ $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ ნახევრადსეგმენტზე, ამასთან

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0.$$

ამასთან ერთად, მათი (0,1) ჯამზე $f(x)$ ფუნქცია არაა ჯამებადი, რადგან

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

მიუხედავად ამისა, სამართლიანია შემდეგი თეორემები ინტეგრალის სრული ადიტიურობის შესახებ:

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე, რომელიც წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთ ზომადი E_k სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლის ჯამს

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \qquad (E_k \cdot E_{k'} = 0,\ k \neq k'),$$

მაშინ

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \tag{2}$$

თეორემა 5. ვთქვათ, ზომადი E სიმრავლე წარმოიდგინება ურთიერთ არაგადამკვეთ ზომად E_k სიმრავლეების თვლადი სიმრავლის ჯამის სახით. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია ყოველ E_k სიმრავლეზე, და თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

მაშინ $f(x)$ ჯამებადია E სიმრავლეზე და სამართლიანია ტოლობა (2).

დამტკიცება. მე-4 თეორემის პირობებში გვაქვს (იხ. § 1-ის მე-12 თეორემა)

$$\int_E f_+ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_+ dx,$$

$$\int_E f_- dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_- dx;$$

ამასთან, ამ ტოლობათა მარცხენა (და, მაშასადამე, მარჯვენა) მხარეები სასრულია. ახლა დაგვრჩენია წევრობრივ გამოვაკლოთ მეორე ტოლობა პირველს.

თუ მე-5 თეორემის პირობები შესრულებულია, მაშინ (§ 1-ის მე-12 თეორემის ძალით)

$$\int_E |f|\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f|\, dx.$$

აქედან გამომდინარეობს $|f(x)|$ ფუნქციის ჯამებადობა, და, მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობაც E სიმრავლეზე, და, ამგვარად, საქმე მე-4 თეორემამდე მიიყვანება.

აღსანიშნავია, რომ, როგორც ამას გვიჩვენებს წინა მაგალითი, მე-5 თეორემის პირობა არ შეიძლება შეიცვალოს

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx$$

მწკრივის კრებადობის პირობით.

თეორემა 6. *თუ $f(x)$ ჯამებადია E სიმრავლეზე, ხოლო k სასრული მუდმივია, მაშინ $kf(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ჯამებადია E-ზე და*

$$\int_E k f(x)\, dx = k \int_E f(x) dx.$$

დამტკიცება. თეორემა ტრივიალურია, თუ $k=0$. $k>0$ შემთხვევისათვის, აშკარაა

$$(kf)_+ = kf_+, \quad (kf)_- = kf_-$$

ტოლობების საფუძველზე, თეორემა დაიყვანება § 1-ის მე-8 თეორემაზე (სახელდობრ, საჭიროა მოვახდინოთ აღნიშნულ ტოლობების ინტეგრება და გამოვაკლოთ მეორე პირველს).

უარყოფითი k-ს შემთხვევის გამოსაკვლევად, განვიხილოთ წინასწარ უფრო კერძო შემთხვევა, როცა $k=-1$. ადვილი აღმოსაჩენია, რომ

$$(-f)_+ = f_-, \quad (-f)_- = f_+,$$

საიდანაც

$$\int_E -f(x)dx = \int_E f_-(x)dx - \int_E f_+(x)\, dx = -\int_E f(x)dx.$$

ამგვარად მამრავლი (-1) შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

დაბოლოს k ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვი იყოს. მაშინ.

$$\int_E k\,f dx = -\int_E |k|\,f dx = -|k|\int_E f dx = k\int_E f dx,$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)$ ჯამებადი ფუნქციაა E სიმრავლეზე, ხოლო $\varphi(x)$ შემოსაზღვრულია და ზომადი ამ სიმრავლეზე, მაშინ მათი ნამრავლი $f(x)\varphi(x)$ ჯამებადია E-ზე.

მართლაც, ამ ნამრავლის აბსოლუტური სიდიდე (რომელიც, ცხადია, ზომადი ფუნქციაა) არ აღემატება ჯამებად ფუნქციას $k|f(x)|$, სადაც $k=\sup\{|\varphi(x)|\}$.

თეორემა 7. თუ თითოეული ფუნქცია $f'(x)$ და $f''(x)$-დან ჯამებადია E სიმრავლეზე, ჯამებადია $f(x)=f'(x)+f''(x)$ ფუნქციაც, და ამასთან

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f'(x)\,dx + \int_E f''(x)dx. \tag{3}$$

დამტკიცება. $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობა გამომდინარეობს

$$|f(x)| \leqslant |f'(x)| + |f''(x)|$$

უტოლობიდან და § 1-ის მე-7 თეორემიდან. ახლა დაგვრჩა (3) ტოლობის დამტკიცება. ამ მიზნით შემოვიღოთ სიმრავლეები

$$E_1 = E(f' \geqslant 0,\ f'' \geqslant 0);\ E_2 = E(f' < 0,\ f'' < 0);$$

$$E_3 = E(f' \geqslant 0,\ f'' < 0,\ f \geqslant 0);\ E_4 = E(f' \geqslant 0,\ f'' < 0, f < 0);$$

$$E_5 = E(f' < 0,\ f'' \geqslant 0,\ f \geqslant 0):\ E_6 = E(f' < 0;\ f'' \geqslant 0,\ f < 0).$$

ცხადია, რომ

$$E = \sum_{k=1}^{6} E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k'),$$

და საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_{E_k} f\,dx = \int_{E_k} f'\,dx + \int_{E_k} f''\,dx \qquad (k=1,2,\ldots,6).$$

ეს ერთნაირად ხერხდება ყოველი k-სათვის. მაგალითისათვის მსჯელობა ჩავატაროთ $k=6$-სათვის. გადავწეროთ ტოლობა

$$f(x) = f'(x) + f''(x)$$

ასეთი სახით:

$$-f'(x) = f''(x) + [-f(x)],$$

ამით ჩვენ იმას მივაღწევთ, რომ E_0 სიმრავლეზე მარჯვენა მხარის ორივე შესაკრები არაუარყოფითი იქნება. ამიტომ § 1-ს მე-7 თეორემის ძალით გვექნება

$$\int_{E_0}(-f')dx=\int_{E_0}f''\,dx+\int_{E_0}(-f)dx,$$

საიდანაც

$$\int_{E_0}f\,dx=\int_{E_0}f'\,dx+\int_{E_0}f''\,dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შემდეგი თეორემა მეტად მნიშვნელოვანია.

თეორემა 8. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე. ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ ნებისმიერი ზომადი $e\subset E$ სიმრავლისათვის ზომით $me<\delta$ გვექნება

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

დამტკიცება. $f(x)$ ფუნქციასთან ერთად ჯამებადია მისი აბსოლუტური სიდიდეც $|f(x)|$. ამიტომ, არაუარყოფითი ფუნქციის ინტეგრალისთვის განმარტების საფუძველზე, არსებობს ისეთი N_0, რომ

$$\int_E|f(x)|dx-\int_E[f(x)]_{N_0}dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

აღვნიშნოთ $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2N_0}$.

ეს δ საძიებელ რიცხვს წარმოადგენს. მართლაც,

$$|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}$$

ფუნქცია არაუარყოფითია E სიმრავლეზე. მაშასადამე, როგორი ზომადი e ქვესიმრავლეც არ უნდა ავიღოთ E სიმრავლისა, გვექნება

$$\int_e\{|f(x)|-[|f(x)|]\}dx\leqslant\int_E\{|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}\}dx,$$

საიდანაც

$$\int_e|f(x)|\,dx-\int_e[|f(x)|]_{N_0}<\frac{\varepsilon}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$\int_e|f(x)|\,dx<\int_e[|f(x)|]_{N_0}dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

მაგრამ, რადგან

$$[|f(x)|]_{N_0}\leqslant N_0,$$

ამიტომ

$$\int_e[|f(x)|]_{N_0}dx\leqslant N_0\cdot me,$$

და, მაშასადამე,

$$\int_e |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \cdot me.$$

აქედან ცხადია, რომ, როცა $me<\delta$, გვექნება

$$\int_e |f(x)|\,dx<\varepsilon,$$

და მით უფრო

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ინტეგრალის დამტკიცებულ თვისებას მისი *აბსოლუტური უწყვეტობა* ჰქვია.

§ 3. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

V თავის § 3-ში დამტკიცებული ლებეგის თეორემა შესაძლებელია შემდეგნაირად იქნას განზოგადებული.

თეორემა 1 (ა. ლებეგი). *ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია ზომადი ფუნქციათა $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ მიმდევრობა, რომელიც ზომით კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ. თუ არსებობს ისეთი ჯამებადი $\Phi(x)$ ფუნქცია, რომ ყოველი n-სათვის*

$$|f_n(x)|\leqslant \Phi(x), \tag{*}$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E F(x)\,dx.$$

დამტკიცება. უპირველესად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ (*) პირობა უზრუნველყოფს თითოეული $f_n(x)$ ფუნქციის ჯამებადობას. შემდეგ, ადვილად შევნიშნავთ, რომ თითქმის ყველა x-თვის გვექნება

$$|F(x)|\leqslant\Phi(x). \tag{1}$$

ამის აღმოსაჩენად საკმარისია, რისის თეორემის გამოყენებით, გამოვყოთ $\{f_n\}$ მიმდევრობიდან ისეთი $\{f_{n_k}(x)\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან, და გადავიდეთ ზღვარზე უტოლობაში

$$|f_{n_k}(x)|\leqslant\Phi(x).$$

საჭიროების შემთხვევაში, ნულ ზომიან სიმრავლეზე $F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა შეცვლით, შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ (1) პირობა შესრულდეს E სიმრავლის ყოველ წერტილზე. (1)-დან, კერძოდ, გამომდინარეობს $F(x)$ ფუნქციის ჯამებადობა E სიმრავლეზე.

ავირჩიოთ ახლა ნებისმიერი $\sigma>0$ და აღვნიშნოთ

$$A_n(\sigma)=\mathrm{E}(|f_n-f|\geqslant\sigma),\quad B_n(\sigma)=\mathrm{E}(|f_n-f|<\sigma).$$

მაშინ

$$\mathrm{E}=A_n(\sigma)+B_n(\sigma),\quad A_n(\sigma)\cdot B_n(\sigma)=0,$$

და $n\to\infty$-სათვის

$$mA_n(\sigma)\to 0.$$

ამ შენიშვნის შემდეგ ჩავატაროთ შემდეგი შეფასებანი:

$$\left|\int\limits_{\mathrm{E}} f_n\,dx-\int\limits_{\mathrm{E}} F\,dx\right|\leqslant\int\limits_{\mathrm{E}}|f_n-\mathrm{F}|\,dx=\int\limits_{A_n(\sigma)}|f_n-F|\,dx+\int\limits_{B_n(\sigma)}|f_n-\mathrm{F}|\,dx.$$

მაგრამ $B_n(\sigma)$ სიმრავლეზე გვექნება $|f_n-\mathrm{F}|<\sigma$, საიდანაც

$$\int\limits_{B_n(\sigma)}|f_n-\mathrm{F}|\,dx\leqslant\sigma\cdot mB_n(\sigma)\leqslant\sigma.m\mathrm{E}.$$

მეორეს მხრივ,

$$|f_n-\mathrm{F}|\leqslant 2\Phi(x),$$

ასე რომ

$$\int\limits_{A_n(\sigma)}|f_n-\mathrm{F}|\,dx\leqslant 2\int\limits_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx.$$

ზემონათქვამის შეჯამება გვაძლევს

$$\left|\int\limits_{\mathrm{E}} f_n\,dx-\int\limits_{\mathrm{E}} F\,dx\right|\leqslant 2\int\limits_{A_n(\sigma)}\Phi(x)\,dx+\sigma\cdot m\,\mathrm{E} \tag{2}$$

ვთქვათ, ბოლოს, $\varepsilon>0$. ავირჩიოთ იმდენად მცირე $\sigma>0$, რომ

$$\sigma\cdot m\,\mathrm{E}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

შემდეგ, თუ $\Phi(x)$ ფუნქციის ინტეგრალის აბსოლუტური უწყვეტობით ვისარგებლებთ, მაშინ ვიპოვით ისეთ $\delta>0$, რომ ყოველი ზომადი $e\subset\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის, რომლის ზომა $me<\delta$, გვექნება

$$\int\limits_{e}\Phi(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

თუ $n>n_0$, მაშინ (უკვე ამორჩეული σ-სათვის)

$$mA_n(\sigma)<\delta,$$

და, მაშასადამე,

$$2\int\limits_{A_n(\sigma)}\Phi(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

(2), (3)-სა და (4)-ს დაპირისპირებით მივიღებთ, $n>n_0$-სათვის გვექნება

$$\left|\int\limits_{\mathrm{E}} f_n(x)\,dx-\int\limits_{\mathrm{E}}\mathrm{F}(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

შედეგი. თეორემის პირობებში გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi(x) f_n(x)\,dx = \int_E \varphi(x)\,F(x)\,dx,$$

სადაც $\varphi(x)$ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციაა.

მართლაც, თუ $\varphi(x)\leqslant K$, მაშინ

$$|\varphi(x) f_n(x)| \leqslant K\,\Phi(x),$$

და (*) პირობა შესრულებულია. ახლა დაგვრჩა შევამოწმოთ, რომ

$$\varphi(x) f_n(x) \Rightarrow \varphi(x)\,F(x).$$

მაგრამ ეს იქედან გამომდინარეობს, რომ

$$E(|\varphi f_n - \varphi F| \geqslant \sigma) \subset E\left(|f_n - F| \geqslant \frac{\sigma}{K}\right),$$

ასე რომ ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა შეიძლება კიდევ უფრო მეტად განვაზოგადოთ. ამისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ერთი მნიშვნელოვანი ცნების შემოყვანა. ვთქვათ, რომ ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ჯამებადი ფუნქციათა $M=\{f(x)\}$ ოჯახი. თუ ჩვენ ამოვირჩევთ რომელიმე $f_0(x)$ ფუნქციას, მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$, რომ

$$e\subset E,\quad me<\delta$$

დამოკიდებულებანი გამოიწვევენ დამოკიდებულებას:

$$\left|\int_e f_0(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

მაგრამ ეს δ რიცხვი დამოკიდებულია ამორჩეულ $f_0(x)$ ფუნქციაზე, და, საზოგადოდ, საერთო δ რიცხვი M ოჯახისათვის არ არსებობს. ეს გარემოება საბაბს გვაძლევს შემოვიღოთ შემდეგი

განმარტება. ვთქვათ, $M=\{f(x)\}$ წარმოადგენს E სიმრავლეზე მოცემულ ჯამებად ფუნქციათა ოჯახს. თუ ყოველ $\varepsilon>0$-ს შეესაბამება ისეთი $\delta>0$, რომ

$$e\subset E,\quad me<\delta$$

დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს დამოკიდებულება

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

M ოჯახის ნებისმიერი ფუნქციისათვის, მაშინ ამბობენ, რომ ამ ოჯახის ფუნქციებს ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები აქვთ.

თეორემა 2 (დ. ვიტალი). ვთქვათ, ზომად E სიმრავლეზე მოცემულია ჯამებადი ფუნქციათა ისეთი $f_1(x), f_2(x), f_3(x),\dots$

მიმდევრობა, რომელიც ზომით კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ. თუ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობის ფუნქციებს ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები აქვთ, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E F(x)\,dx.$$

დამტკიცება. უპირველესად ყოვლისა შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ზღვარითი $F(x)$ ფუნქცია ჯამებადია E სიმრავლეზე. ამისათვის ავირჩიოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$, და ვიპოვოთ ისეთი $\delta>0$, რომ $me<\delta$-სათვის გვქონდეს

$$\left|\int_e f_n(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

ვთქვათ, e რაიმე ზომადი სიმრავლეა ($e\subset E$), ზომით $me<\delta$. მაშინ, თუ მივიღებთ

$$e_+=e(f_n\geqslant 0),\ e_-=e(f_n<0),$$

გვექნება

$$me_+<\delta,\ me_-<\delta$$

და, მაშასადამე,

$$\int_{e_+}|f_n|\,dx=\left|\int_{e_+}f_n\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \int_{e_-}|f_n|\,dx=\left|\int_{e_-}f_n\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

საიდანაც

$$\int_e|f_n(x)|\,dx<\varepsilon. \tag{5}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, $|f_n(x)|$ ფუნქციებს აგრეთვე ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები აქვთ.

თუ ახლა (რისის თეორემით) ავაგებთ ისეთ $\{f_{n_k}(x)\}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც კრებადია $F(x)$-საკენ თითქმის ყველგან, და თუ $f_{n_k}(x)$ ფუნქციისათვის დავწერთ (5) უტოლობას, მაშინ ფატუს თეორემა § 1-დან გვაძლევს, რომ

$$\int_e|F(x)|\,dx\leqslant\varepsilon, \tag{6}$$

ასე რომ $F(x)$ ჯამებადია e სიმრავლეზე. აქ e აღნიშნავს E სიმრავლის ისეთ ნებისმიერ ქვესიმრავლეს, რომლის ზომა $<\delta$. აქედან აშკარაა, რომ $F(x)$ ჯამებადია გამოსავალ E სიმრავლეზედაც, რადგანაც იგი შეიძლება დაიშალოს ისეთ ნაწილების სასრულ რაოდენობად, რომელთა ზომა $<\delta$. ახლა შეიძლება შევუდგეთ თეორემის მთავარ მტკიცების დასაბუთებას. თუ ჩვენ ამოვირჩევთ $\sigma>0$-ს და, როგორც ზემოთ, დავუშვებთ

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-F|\geqslant\sigma),\ B_n(\sigma)=E(|f-F|<\sigma),$$

მივიღებთ იმავე შეფასებას

$$\left|\int_E f_n\,dx-\int_E F\,dx\right|\leqslant\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|\,dx+\sigma mE.$$

აქედან

$$\left|\int_E f_n\,dx - \int_E F\,dx\right| \leqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n|\,dx + \int_{A_n(\sigma)} |F|\,dx + \sigma mE. \tag{7}$$

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ და σ არჩეულია ისე, რომ

$$\sigma mE < \frac{\varepsilon}{3}.$$

როგორც ვნახეთ დამტკიცების დასაწყისში, ყოველ $\varepsilon > 0$-ს შეესაბამება ისეთი $\delta > 0$, რომ როგორც კი

$$e \subset E, \; me < \delta,$$

მაშინვე მივიღებთ (იხ. (5) და (6))

$$\int_e |f|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_e |F|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ $n > n_0$-სათვის გვექნება

$$mA_n(\sigma) < \delta,$$

ასე, რომ (7) მიიღებს სახეს

$$\left|\int_E f_n\,dx - \int_E F\,dx\right| < \varepsilon,$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თეორემის პირობებში გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi(x) f_n(x)\,dx = \int_E \varphi(x) F(x)\,dx,$$

სადაც $\varphi(x)$ ნებისმიერი ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციაა.

მართლაც, თუ $|\varphi(x)| \leqslant K$, მაშინ

$$\left|\int_e \varphi(x) f_n(x)\,dx\right| \leqslant k \int_e |f_n(x)|\,dx,$$

ასე რომ $\varphi(x) f_n(x)$ ფუნქციებს აგრეთვე ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები აქვთ.

სავარჯიშო V და VI თავებისათვის

1. თუ $f_n(x) \geqslant 0$ და $\int_E f_n(x) \to 0$, მაშინ $f_n(x) \Longrightarrow 0$, მაგრამ არაა აუცილებელი, რომ $f_n(x)$ მიისწრაფოდეს 0-საკენ თითქმის ყველგან.

2. დამოკიდებულება

$$\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dx \to 0$$

ტოლფასია იმისა, რომ $f_n(x) \Longrightarrow 0$.

3. თუ $\alpha_n \to 0$, მაშინ არსებობს არაუარყოფითი ზომადი $u_n(x)$ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_E u_n(x)dx < +\infty$, მაგრამ E სიმრავლის არცერთ წერტილზე $u_n(x)$ არ მიისწრაფვის ნულისაკენ.

4. ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია ჯამებადი ფუნქციათა $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ მიმდევრობა; თუ ყოველი ზომადი $e \subset E$ სიმრავლისათვის გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} \int_e f_n(x)\,dx = 0,$$

მაშინ $f_n(x)$ ფუნქციებს ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები აქვთ (ლებეგი).

5). (წინა შედეგის განზოგადება). იმისათვის, რომ ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi(x) f_n(x)dx = \int_E \varphi(x) F(x) dx$$

სამართლიანი იყოს ყოველი ზომადი შემოსაზღვრული $\varphi(x)$-სათვის აუცილებელია, რომ $f_n(x)$ ფუნქციებს ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები ჰქონდეთ.

6. აჩვენეთ, რომ V თავის § 3-ისა და VI თავის § 3-ის ლებეგის თეორემები წარმოადგენენ VI თავის § 3-ის ვიტალის თეორემის შედეგებს.

7. ვთქვათ, $\Phi(u)$ დადებითი ზრდადი ფუნქციაა, რომელიც მოცემულია $u \geqslant 0$-სათვის და მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ u-სთან ერთად. თუ რაიმე $M=\{f(x)\}$ ოჯახის ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\int_E |f(x)| \cdot \Phi(|f(x)|)dx \leqslant A < +\infty,$$

სადაც A არაა დამოკიდებული $f(x)$ ფუნქციის არჩევისაგან, მაშინ ყველა ფუნქციას M-დან ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები აქვთ (ვალე-პუსენი).

8. თუ ინტეგრალი

$$\int_E \varphi(x) f(x) dx$$

არსებობს ნებისმიერი ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია თითქმის ყველგან (ლებეგი).

9. ვთქვათ, E სიმრავლეზე მოცემულია სასრული ზომადი $f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ რიცხვთა მიმდევრობა

$\dots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ $(y_k \to +\infty,\ y_{-k} \to -\infty,\ y_{k+1} - y_k < \lambda)$ და დავუშვათ $e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1})$. $f(x)$ ფუნქციის ჯამებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k m e_k$ მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა.

10. თუ მე-9 სავარჯიშოს პირობებში $\sum y_k me_k$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ, როცა λ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამ მწკრივის ჯამი მიისწრაფვის $\int\limits_E f\,dx$-საკენ.

11. (R) ინტეგრებადი ფუნქციების თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი (R) ინტეგრებადი ფუნქციაა.

12. კანტორის სრულყოფილი R_0 სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია (R) ინტეგრებადია.

13. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ორი არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა მოცემული E სიმრავლეზე. თუ $E_y = E(g \geqslant y)$, მაშინ

$$\int\limits_E f(x)\,g(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \Phi(y)\,dy,$$

სადაც $\Phi(y) = \int\limits_{E_y} f(x)dx$ (დ. ფადეევი).

14. ვთქვათ, [0,1]-ზე მოთავსებულია n ზომადი სიმრავლე $E_1, E_2, \dots, E_n$. თუ [0,1] სეგმენტის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ყოველ შემთხვევაში q ამ სიმრავლეთაგანს, მაშინ ერთერთი სიმრავლის ზომა მაინც $\geqslant \frac{q}{n}$ (ლ. კანტოროვიჩი).

15. ვთქვათ, $[a,b]$-ზე მოცემულია ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია. ვთქვათ, შემდეგ, α მუდმივი რიცხვია, $0<\alpha<b-a$. თუ ყოველი α-ზე ნაკლები ზომის სიმრავლისათვის $\int\limits_e f(x)dx = 0$, მაშინ $f(x) \sim 0$ (მ. გოვურინი).

16. ვთქვათ, $f(x)$ ჯამებადია $[a,b]$-ზე და უდრის 0-ს $[a,b]$-ს გარეთ. თუ

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt,$$

მაშინ

$$\int\limits_a^b |\varphi(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \text{ (ა. კოლმოგოროვი).}$$

17. ვთქვათ, $[a,b]$-ზე მოცემულია ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია. თუ ყოველი c-სათვის $(a \leqslant c \leqslant b)$ გვაქვს $\int\limits_a^c f(x)dx = 0$, მაშინ $f(x) \sim 0$.

თავი VII

კვადრატით ჯამებადი ფუნქციები

§ 1. ძირითადი განმარტებები. უტოლობანი. ნორმა

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციათა მეტად მნიშვნელოვან კლასს,— კვადრატით ჯამებადი ფუნქციების კლასს. სიმარტივისათვის, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა ფუნქცია, რომლებზედაც ვილაპარაკებთ, მოცემულია რაიმე $E=[a, b]$ სეგმენტზე.

განმარტება. ზომად $f(x)$ ფუნქციას *კვადრატით ჯამებადი ფუნქცია* ეწოდება, თუ

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty.$$

კვადრატით ჯამებადი ყველა ფუნქციათა სიმრავლე ჩვეულებრივ L_2-ით აღინიშნება.

თეორემა 1. *ყოველი კვადრატით ჯამებადი ფუნქცია ჯამებადია, ე. ი.* $L_2\subset L$.

ეს თეორემა აშკარა

$$|f(x)|\leqslant \frac{1+f^2(x)}{2}$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს.

სავსებით ასევე.

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს

თეორემა 2. *ორი, კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ნამრავლი ჯამებადია.*

აქედან,

$$(f\pm g)^2=f^2\pm 2fg+g^2,$$

იგივეობის ძალით, მივიღებთ:

თეორემა 3. L_2-*ში შემავალი ორი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა ისევ* L_2-*ში შედის.*

ბოლოს, აღვნიშნოთ საკმარისად აშკარა გარემოება, რომ $f(x)$-თან ერთად, L_2-ში შედიან ყველა $kf(x)$ სახის ფუნქციებიც, სადაც k სასრული მუდმივია.

თეორემა 4 (ბუნიაკოვსკისა და შვარცის უტოლობა). თუ $f(x) \in L_2$ და $g(x) \in L_2$, მაშინ

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]. \qquad (1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ კვადრატული სამწევრი:

$$\psi(u) = Au^2 + 2Bu + C,$$

რომლის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია და $A > 0$. თუ ეს სამწევრი არაუარყოფითია u-ს ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, მაშინ

$$B^2 \leqslant AC. \qquad (2)$$

მართლაც ეს რომ ასე არ ყოფილიყო, აღმოჩნდებოდა, რომ

$$\varphi\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A}(AC - B^2) < 0.$$

ამ შენიშვნის შემდეგ, აღვნიშნოთ

$$\varphi(u) = \int_a^b [uf(x) + g(x)]^2 dx = u^2\int_a^b f^2 dx + 2u\int_a^b fg dx + \int_a^b g^2 dx.$$

ეს სამწევრი არაუარყოფითია და ამიტომ მისთვის შესრულებულია პირობა (2), რაც ტოლფასია თეორემისა [1].

შედეგი. თუ $f(x) \in L_2$, მაშინ

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}. \qquad (3)$$

მართლაც, თუ (1)-ში ვიგულისხმებთ $g(x) = 1$ და $f(x)$-ს შევცვლით $|f(x)|$-ით, მივიღებთ (3).

თეორემა 5 (კოშის უტოლობა). თუ $f(x) \in L_2$ და $g(x) \in L_2$, მაშინ

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

დამტკიცება. ბუნიაკოვსკი-შვარცის უტოლობის ორივე მხრიდან ფესვის ამოღებით ვიპოვით

$$\int_a^b fg dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2 dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2 dx}.$$

[1] ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\int_a^b f^2 dx > 0$. თუ $\int_a^b f^2 dx = 0$, მაშინ $f(x)$ ეკვივალენტური იქნებოდა ნულისა და (1) უტოლობა გადაიქცეოდა ტრივიალურ $0=0$ იგივობად.

ამ უტოლობის ორზე გამრავლებით და ორივე მხარეში

$$\int_a^b f^2 dx + \int_a^b g^2 dx$$

გამოსახულების დამატებით მივიღებთ

$$\int_a^b (f+g)^2 dx \leqslant \left(\sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}\right)^2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

კოშის უტოლობა საშუალებას გვაძლევს შევხედოთ L_2-ს ახალი თვალსაზრისით. სახელდობრ, თუ ჩვენ ყოველ $f(x) \in L_2$ ფუნქციას შევუსაბამებთ რიცხვს

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx},$$

მაშინ ადგილი ექნება შემდეგ გარემოებებს:

I. $\| f \| \geqslant 0$, ამასთან $\|f\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) \sim 0$.

II. $\| kf \| = | k | \cdot \| f \|$, კერძოდ, $\| -f \| = \| f \|$.

III. $\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$.

$\| f \|$ რიცხვს $f(x)$ ფუნქციის ნორმა ეწოდება. თვალში გვეცემა ის ანალოგია, რომელიც არსებობს $\| f \|$-სა და ნამდვილი (ან კომპლექსური) x რიცხვის აბსოლუტურ მნიშვნელობას $|x|$-ს შორის. ეს ანალოგია არის წყარო მთელი რიგი მნიშვნელოვანი და ლამაზი აგებებისა.

უხეშად რომ ვთქვათ, ანალიზში აბსოლუტური მნიშვნელობის ძირითადი დანიშნულება მდგომარეობს იმაში, რომ მისი დახმარებით რიცხვით წრფეზე ჩვენ მანძილების გაზომვას ვაწარმოებთ

$$\rho(x, y) = | x - y |.$$

ასეთ შემთხვევაში, ნორმის შემოყვანა საშუალებას გვაძლევს L_2-საც უყუროთ როგორც რაიმე „სივრცეს", რომელშიაც აგრეთვე შესაძლებელია გაზომვების მოხდენა

$$\rho(x, y) = \| f - g \|$$

თუ ჩვენ შევთანხმდებით ერთმანეთის ეკვივალენტური ფუნქციები ჩავთვალოთ იგივურად, მაშინ $\rho(f, g)$ მანძილს ჩვენთვის ჩვეული თვისებები ექნება:

1) $\rho(f, g) \geqslant 0$, ამასთან $\rho(f, g) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f = g$.

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$.

3) $\rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

თუ ნებისმიერი ბუნების ელემენტების რაიმე A სიმრავლეზე მოცემულია ელემენტების წყვილის მსგავსი $\rho(x, y)$ ფუნქცია, მაშინ A-ს მ ე ტ რ ი კ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ეწოდება.

მაშასადამე, L_2 მეტრიკული სივრცეა. პირველად ეს თვალსაზრისი L_2-ის შესახებ დ. ჰილბერტმა განავითარა, და ამიტომ L_2-ს ჰილბერტის სივრცე ეწოდება.

§ 2. საშუალოდ კრებადობა

ნორმის ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიტანოთ ზღვრის ცნება ჰილბერტის სივრცეში თითქმის იგივე გამოსახულებების დახმარებით, როგორც რიცხვითი წრფის ჩვეულებრივ შემთხვევაში.

განმარტება 1. L_2 სივრცის f ელემენტს ამავე სივრცის ელემენტების $f_1, f_2, f_3, \ldots$ მიმდევრობის ზღვარი ეწოდება, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის ისეთი მთელი დადებითი N მოიძებნება, რომ ყოველი $n > N$-სათვის გვექნება

$$\| f_n - f \| < \varepsilon.$$

ამავე გარემოებას ჩვენ გამოვსახავთ იმით, რომ ვიტყვით, $\{f_n\}$ მიმდევრობა *კრებადია* f ელემენტისაკენ, ან, რომ f_n ელემენტი *მიისწრაფვის* f-საკენ და ვწერთ, ჩვეულებრივისამებრ,

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f, \quad f_n \to f.$$

აქ მკითხველის ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმ ღრმა განსხვავებაზე, რომელიც არსებობს

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{და} \quad f_n \to f$$

დამოკიდებულებებს შორის.

პირველი მათგანი აღნიშნავს, რომ ფიქსირებული x-სათვის *რიცხვითი* $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია $f(x)$-საკენ ჩვეულებრივი აზრით.

მეორე კი ნიშნავს იმას, რომ L_2 ელემენტების მიმდევრობა კრებადია $f \in L_2$ ელემენტისაკენ 1 განმარტების აზრით. ფუნქციათა თეორიის ჩვეულებრივ ტერმინებში $f_n \to f$ ნიშნავს იმას, რომ

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობის ამ ახალ სახეს ეწოდება *საშუალოდ კრებადობა*.

თეორემა 1. თუ $\{f_n(x)\}$ *მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია* $f(x)$ *ფუნქციისაკენ, მაშინ იგი კრებადია მისკენ ზომითაც*.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\sigma > 0$ და

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \geqslant \sigma).$$

მაშინ

$$\int_a^b (f_n - f)^2 dx \geqslant \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2 dx \geqslant \sigma^2 m A_n(\sigma),$$

რადგან σ ფიქსირებულია, ცხადია, რომ

$$mA_n(\sigma) \to 0$$

და ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f_n \Longrightarrow f$.

შედეგი. თუ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $f(x)$-საკენ, მაშინ მისგან გამოიყოფა ისეთი $\{f_{n_k}(x)\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია $f(x)$-საკენ თითქმის ყველგან.

ეს შედეგი მიიღება 1-ლი თეორემის და ფ. რისის თეორემის (VI თავის მე-3 §-დან) უბრალო დაპირისპირებით. მაგრამ ამ შედეგის დამტკიცება შესაძლებელია ზომით კრებადობის ყოველგვარი გამოყენების გარეშეც. სახელდობრ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n - f)^2 dx = 0,$$

მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთ $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ მიმდევრობა, რომ

$$\int_a^b (f_{n_k} - f)^2 dx < \frac{1}{2^k},$$

მაშინ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (f_{n_k} - f)^2 dx$$

კრებადია, და VI თავის § 1-ს მე-11 თეორემის მიხედვით $[a, b]$-ზე თითქმის ყველგან გვექნება

$$f_{n_k}(x) \to f(x).$$

შევნიშნოთ, რომ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობის საშუალოდ კრებადობისაგან $f(x)$ ფუნქციისაკენ არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა თითქმის ყველგან $f(x)$-საკენ, ამის მაგალითს წარმოადგენს თუნდაც IV თავის § 3-ში მოცემული მაგალითი.

სავსებით ასევე, $[a, b]$-ს ყოველ წერტილში, $f_n(x) \to f(x)$ კრებადობა არ იწვევს საშუალოდ კრებადობას.

მაგალითი. ვთქვათ, $[0, 1]$ სეგმენტზე მოცემულია $\{f(x)\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x) = n, \text{ როცა } 0 < x < \frac{1}{n},$$

და $f_n(x) = 0$ $[0, 1]$ სეგმენტის სხვა წერტილებში. მაშინ ცხადია, რომ ყოველი $x \in [a, b]$-სათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

ამავე დროს

$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \int_0^{1/n} n^2 dx = n \to +\infty.$$

თეორემა 2 (ზღვრის ერთად-ერთობა). L_2-ის ელემენტების $f_1, f_2, f_3, \ldots$, მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი შეიძლება ჰქონდეს.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$f_n \to f, \quad f_n \to g,$$

მაშინ

$$\| f - g \| \leqslant \| f - f_n \| + \| f_n - g \|,$$

და რადგანაც ამ უტოლობის მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო მარცხენა მხარე არაუარყოფითი მუდმივია, ამიტომ

$$\| f - g \| = 0;$$

საიდანაც, $f - g = 0$ და $f = g$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შეიძლება თეორემის მეორე დამტკიცებაც მოვიყვანოთ: თუ $f_n \to f$ და $f_n \to g$, მაშინ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა ზომით კრებადია $f(x)$-სა და $g(x)$-საკენ, ასე რომ $f(x) \sim g(x)$, და ეკვივალენტური ფუნქციები კი ჩვენ შევთანხმდით ჩავთვალოთ სივრცის ერთი და იგივე ელემენტად.

თეორემა 3 (ნორმის განუწყვეტლობა) თუ $f_n \to f$, მაშინ $\| f_n \| \to \| f \|$.

დამტკიცება. აშკარა უტოლობებიდან

$$\| f_n \| \leqslant \| f \| + \| f - f_n \|,$$
$$\| f \| \leqslant \| f_n \| + \| f - f_n \|$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\Big| \| f_n \| - \| f \| \Big| \leqslant \| f_n - f \|,$$

აქედან კი მიიღება თეორემა.

შედეგი. კრებადი $\{f_n\}$ მიმდევრობის წევრთა ნორმები შემოსაზღვრულია.

განმარტება 2. L_2 სივრცის წერტილთა $\{f_n\}$ მიმდევრობას თავისთავში კრებადი ეწოდება, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის მოიძებნება ისეთი N, რომ, როცა $n > N$ და $m > N$, მივიღებთ

$$\| f_n - f_m \| < \varepsilon.$$

თეორემა 4. თუ $\{f_n\}$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, მაშინ იგი თავის თავში კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f.$$

ნებისმიერ $\varepsilon > 0$-ის ალებით ვიპოვით ისეთ N-ს, რომ როცა $n > N$, მაშინ

$$\| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

თუ ახლა $n > N$ და $m > N$, მაშინ

$$\| f_n - f_m \| \leqslant \| f_n - f \| + \| f - f_m \| < \varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

უფრო ღრმა შედეგს წარმოადგენს შებრუნებული

თეორემა 5 (ე. ფიშერი). *თუ $\{f_n\}$ მიმდევრობა კრებადია თავისთავში, მაშინ მას აქვს ზღვარი.*

დამტკიცება. ავიღოთ კრებადი მიმდევრობა $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ და ყოველი k-სათვის მოვძებნოთ ისეთი n_k, რომ როცა $n \geqslant n_k$ და $m \geqslant n_k$, გვქონდეს

$$\| f_n - f_m \| < \frac{1}{2^k}.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

ასე რომ

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \| < \frac{1}{2^k},$$

და, მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \| < +\infty.$$

§ 1-ის (3) უტოლობის ძალით

$$\int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\, dx \leqslant \sqrt{b-a}\, \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|,$$

ასე რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\, dx$$

მწკრივი აგრეთვე კრებადია. აქედან, VI თავის § 1-ის მე-11 თეორემის ძალით,

$$| f_{n_1}(x) | + \sum_{k=1}^{\infty} | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) |$$

მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია, და მით უფრო კრებადია თითქმის ყველგან

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \}$$

მწკრივიც.

მაგრამ ამ უკანასკნელი მწკრივის კრებადობა, ცხადია, ტოლფასია სასრული

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

ზღვრის არსებობისა.

შემოვიღოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ტოლია ამ ზღვრისა ყველგან, სადაც იგი არსებობს და სასრულია, და ტოლია ნულის იქ, სადაც ეს ზღვარი არ არსებობს, ან უსასრულოა.

$f(x)$ ფუნქცია, აშკარაა, ზომადია და $[a, b]$-ზე თითქმის ყველგან

$$f_{n_k}(x) \to f(x).$$

ჩვენ ამოცანას შეადგენს იმის დამტკიცება, რომ ეს ფუნქცია ჰილბერტის სივრცის ელემენტია და იგი წარმოადგენს ელემენტთა $\{f_n\}$ მიმდევრობის ზღვარს.

ამ მიზნით, ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი N, რომ $n > N$ და $m > N$-სათვის გვქონდეს

$$\| f_n - f_m \| < \varepsilon.$$

თუ k_0 ისეთია, რომ $n_{k_0} > N$, მაშინ ნებისმიერი $n > N$ და $k > k_0$-სათვის გვექნება

$$\int_a^b (f_n - f_{n_k})^2 dx < \varepsilon^2.$$

აქედან, ფატუს თეორემის გამოყენებით $\{(f_n - f_{n_k})^2\}$ $(k > k_0)$ მიმდევრობისათვის მივიღებთ, რომ[1]

$$\int_a^b (f_n - f)^2 dx \leqslant \varepsilon^2,$$

ე. ი. ნებისმიერი n-სათვის $(n > N)$ გვექნება

$$\| f_n - f \| \leqslant \varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

ჰილბერტის L_2 სივრცის ფიშერის თეორემაში დადგენილი თვისება იწოდება ამ სივრცის **სისავსედ**. მკითხველმა, რა თქმა უნდა, შეამჩნია, რომ მე-4 და მე-5 თეორემები წარმოადგენენ კრებადობისათვის ბოლცანო-კოშის ცნობილი ნიშნის ანალოგს. ბოლცანო-კოშის ნიშანი წარმოადგენს რიცხვითი Z წრფის განუწყვეტლობის ერთერთ ფორმას. ეს თვისება შეიძლება გამოვსახოთ ერთერთი შემდეგი დებულებით:

A. თუ Z წრფის წერტილები გაყოფილია ისეთ ორ X და Y კლასად, რომ X კლასის ყოველი წერტილი მოთავსებულია უფრო მარცხნივ, ვიდრე ნებისმიერი წერტილი Y კლასისა, მაშინ ან X კლასში არსებობს ყველაზე უფრო მარჯვენა წერტილი, ან Y კლასში არსებობს ყველაზე უფრო მარცხენა წერტილი.

[1] ამ დამტკიცებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $f_n - f \in L_2$ და, მაშასადამე, ისიც, რომ $f(x) \in L_2$.

B. ზემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

C. მონოტონურად ზრდად ცვლადს, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან, აქვს სასრული ზღვარი.

D. თუ $\{d_n\}$ — ისეთი, ერთმანეთში ჩადებული სეგმენტების მიმდევრობაა, რომელთა სიგძეები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, მაშინ არსებობს წერტილი, რომელიც შედის ყველა d_n სეგმენტში.

E. ბოლცანო-კოშის ნიშანი: თავის თავში კრებად $\{x_n\}$ მიმდევრობას სასრული ზღვარი აქვს.

საკმარისია Z წრფეს მოვაშოროთ ერთი წერტილი, რომ ყველა აღნიშნული თეორემები მცდარი გახდენ.

A, B, C, D, E თეორემებიდან მხოლოდ უკანასკნელია ჩამოყალიბებული წრფის წერტილთა რიგის ცნების გარეშე. ამიტომ ბუნებრივია, რომ სწორედ ეს თეორემა გადაიტანება სივრცეების უწყვეტობის დასახასიათებლად უფრო რთული ტიპის სივრცეების შემთხვევაში, ვიდრე არის რიცხვითი წრფე.

განმარტება 3. L_2-ში შემავალი A სიმრავლე ყველგან მკვრივია L_2-ში, თუ L_2-ის ყოველი წერტილი წარმოადგენს A სიმრავლის წერტილთა მიმდევრობის ზღვარს.

თეორიულ-ფუნქციონალურ ენაზე ეს განმარტება ასე გამოიყურება: ფუნქციათა $A \subset L_2$ კლასი ყველგან მკვრივია L_2-ში, თუ L_2-ში შემავალი ყოველი ფუნქცია წარმოადგენს ფუნქციათა A-დან გამოყოფილი მიმდევრობის ზღვარს (საშუალოდ კრებადობის აზრით).

ადვილი საჩვენებელია, რომ $A = \{g\}$ სიმრავლის L_2-ში ყველგან სიმკვრივისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $f \in L_2$ წერტილისათვის და ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის შეიძლებოდეს ისეთი $g \in A$ ფუნქციის პოვნა, რომ

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

თეორემა 6. ფუნქციათა თითოეული კლასი:

M — შემოსაზღვრული ზოგადი ფუნქციების კლასი,

C — უწყვეტი ფუნქციების კლასი,

P — პოლინომთა კლასი

ყველგან მკვრივია L_2-ში. თუ ძირითადი $[a, b]$ სეგმენტი არის $[-\pi, +\pi]$, მაშინ

T ტრიგონომეტრიულ პოლინომთა კლასი

ყველგან მკვრივია L_2-ში.

დამტკიცება. 1) ვთქვათ, $f(x) \in L_2$. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$, და ვიპოვოთ (ინტეგრალის აბსოლუტური უწყვეტობის თვისების გამოყენებით) ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$e \subset [a, b], \quad me < \delta$$

დამოკიდებულებანი იწვევდენ დამოკიდებულებას

$$\int_e f^2 dx < \varepsilon^2.$$

IV თავის § 4-ის 1-ლი თეორემის ძალით, ასეთი $\delta > 0$ რიცხვისათვის შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი ზოგადი შემოსაზღვრული $g(x)$ ფუნქცია, რომ

$$mE(f \neq g) < \delta,$$

ამასთან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $g(x) = 0$ $E(f \neq g)$ სიმრავლის წერტილებში.

მაშინ

$$\| f - g \|^2 = \int_a^b (f - g)^2 dx = \int_{E(f \neq g)} (f - g)^2 dx = \int_{E(f \neq g)} f^2 dx < \varepsilon^2,$$

ე. ი.

$$\| f - g \| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია M კლასისათვის.

2) ვთქვათ, $f(x) \in L_2$ და $\varepsilon > 0$. ვიპოვოთ ისეთი $g(x) \in M$ ფუნქცია, რომ

$$\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ვთქვათ, $|g(x)| \leqslant K$. ლუზინის თეორემის ძალით არსებობს ისეთი უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ

$$mE(g \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{16K^2}, \quad |\varphi(x)| \leqslant K.$$

ამ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\| g - \varphi \|^2 = \int_a^b (g - \varphi)^2 dx = \int_{E(g \neq \varphi)} (g - \varphi)^2 dx \leqslant 4K^2 \cdot mE(g \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

საიდანაც

$$\| g - \varphi \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

და, მაშასადამე,

$$\| f - \varphi \| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია C კლასისათვის.

3) ვთქვათ, $f(x) \in L_2$ და $\varepsilon > 0$. ვიპოვოთ ისეთი $\varphi(x) \in C$, რომ

$$\| f - \varphi \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ, ვეიერშტრასის თეორემით ავარჩიოთ ისეთი $P(x)$ პოლინომი, რომ ყოველი $x \in [a, b]$-სათვის გვქონდეს

$$|\varphi(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

მაშინ

$$\| \varphi - P \|^2 = \int_a^b (\varphi - P)^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4(b-a)} (b - a) = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

საიდანაც

$$\| \varphi - P \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$\| f - P \| < \varepsilon.$$

ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია P კლასისათვის.

4) ვთქვათ, ბოლოს, $[a, b] = [-\pi, +\pi]$ და $f(x) \in L_2$.

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$, და ისევე, როგორც ზევით, ვიპოვოთ ისეთი უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქცია $[-\pi, +\pi]$ სეგმენტზე, რომ

$$\| f - \varphi \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ვთქვათ,

$$| \varphi(x) | \leqslant K.$$

ავაგოთ $[-\pi, +\pi]$ სეგმენტზე უწყვეტი $\psi(x)$ ფუნქცია შემდეგი დაშვებით

$$\psi(x) = \varphi(x), \text{ როცა } x \in [-\pi + \delta, \pi]$$
$$\psi(-\pi) = \varphi(\pi)$$

და მივიღოთ $\psi(x)$ ფუნქცია წრფივად $[-\pi, -\pi + \delta]$ სეგმენტზე, ამავე დროს $\delta > 0$ ავირჩიოთ ისე, რომ

$$\delta < \frac{\varepsilon^2}{64 K^2}.$$

$\psi(x)$ ფუნქცია, ისევე როგორც $\varphi(x)$, უწყვეტია $[-\pi, +\pi]$ სეგმენტზე, მაგრამ, რაც ახლა მთავარია ჩვენთვის, იგი პ ე რ ი ო დ უ ლ ი ა, ე. ი.

$$\psi(-\pi) = \psi(\pi).$$

ამასთან ცხადია, რომ $|\psi(x)| \leqslant K$, ასე რომ

$$\| \varphi - \psi \|^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi - \psi)^2 dx = \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} (\varphi - \psi)^2 dx \leqslant 4 K^2 \delta < \frac{\varepsilon^2}{16},$$

საიდანაც

$$\| f - \psi \| < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

ვეიერშტრასის თეორემის ძალით ($\psi(x)$-ის პერიოდულობა!), არსებობს ისეთი $T(x)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომი, რომ ყოველი $x \in [-\pi, +\pi]$-სათვის

$$| \psi(x) - T(x) | < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}}.$$

მაშინ

$$\| \psi - T \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\psi - T)^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{16},$$

და, მაშასადამე,

$$\| f - T \| < \varepsilon,$$

რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

მრავალ საკითხში დიდი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციათა მიმდევრობის სუსტი კრებადობის ცნებას.

განმარტება 4. L_2-ში შემავალი ფუნქციების $f_1(x), f_2(x), \ldots$ მიმდევრობას სუსტად კრებადი ჰქვია $f(x) \in L_2$ ფუნქციისაკენ, თუ

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b g(x) f_n(x)\, dx = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

ტოლობა, სამართლიანია ყოველი $g(x) \in L_2$ ფუნქციისათვის.

ჩვენ არ შევისწავლით დაწვრილებით კრებადობის ამ ახალ სახეს, არამედ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ ერთი თეორემით.

თეორემა 7. თუ ფუნქციათა $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ იგივე მიმდევრობა სუსტად კრებადია ამ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ, $g(x) \in L_2$. მაშინ ბუნიაკოვსკი-შვარცის უტოლობა გვაძლევს, რომ

$$\left\{ \int_a^b g(x) [f_n(x) - f(x)]\, dx \right\}^2 \leqslant \left[\int_a^b g^2(x) dx \right] \cdot \left[\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \right],$$

საიდანაც

$$\left| \int_a^b g f_n dx - \int_a^b g f dx \right| \leqslant \| g \| \quad \| f_n - f \| \to 0,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

§ 3. ორთოგონალური სისტემა

განმარტება 1. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ ორ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს ეწოდებათ ურთიერთ ორთოგონალური, თუ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0.$$

განმარტება 2. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას ნორმირებული ჰქვია, თუ

$$\int_a^b f^2(x) dx = 1.$$

განმარტება 3. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ ფუნქციათა $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$ სისტემას ორთონორმირებული სისტემა ეწოდება, თუ ამ სისტემის ყოველი ფუნქცია ნორმირებულია, ხოლო ყოველი ორი ფუნქცია ურთიერთ ორთოგონალურია.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფუნქციათა $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა ორთონორმირებულია, თუ

$$\int_a^b \omega_i(x)\omega_k(x)dx = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

ცხადია, რომ ყოველი ორთოგონალური სისტემა შედის L_2-ში.

ორთონორმირებული სისტემის კლასიკურ მაგალითს ტრიგონომეტრიული სისტემა წარმოადგენს

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{1}$$

რომელიც განიხილება $[-\pi, +\pi]$ სეგმენტზე.

ვთქვათ, რაიმე $f(x) \in L_2$ ფუნქცია წარმოადგენს ორთონორმირებული სისტემის ფუნქციათა წრფივ აგრეგატს

$$f(x) = c_1\omega_1(x) + \ldots + c_n\omega_n(x).$$

ამ ტოლობის $\omega_k(x)$-ზე $(k = 1, 2, \ldots, n)$ გამრავლებით და ინტეგრებით მივიღებთ

$$c_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx,$$

ე. ი. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან სავსებით ცალსახად. კერძოდ, თუ

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

მაშინ

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} T(x)\sin kx\, dx.$$

ტრიგონომეტრიული სისტემისათვის ეს ფორმულები ნაპოვნი იყო ფურიეს მიერ, ამიტომ ბუნებრივია შემდეგი ზოგადი განმარტების შემოღება:

განმარტება 4. ვთქვათ, $\{\omega_k(x)\}$ ორთონორმირებული სისტემაა და $f(x)$ რაიმე ფუნქციაა L_2-დან.

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$$

რიცხვებს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ეწოდება $\{\omega_k(x)\}$ სისტემაში.

მწკრივს

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $\{\omega_k(x)\}$ სისტემაში.

განვიხილოთ, თუ რამდენად ახლოა ჰილბერტის სივრცეში $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

თვით ამ ფუნქციასთან, ე. ი. გამოვითვალოთ

$$\| f - S_n \| .$$

ამისათვის გამოვითვალოთ ჯერ ინტეგრალები

$$\int_a^b f(x)\, S_n(x)\, dx \text{ და } \int_a^b S_n^2(x) dx.$$

პირველი მათგანისათვის გვაქვს

$$\int_a^b f(x)\, S_n(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f(x) \omega_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

სავსებით ასევე

$$\int_a^b S_n^2(x) dx = \sum_{i,\ k} c_i c_k \int_a^b \omega_i(x) \omega_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{2}$$

ამ შენიშვნების შემდეგ მივიღებთ

$$\| f - S_n \|^2 = \int_a^b (f^2 - 2f\, S_n + S_n^2) dx = \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

ან

$$\| f - S_n \| = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{3}$$

(3) ტოლობას **ბესელის იგივობა** ეწოდება. რადგან ამ ტოლობის მარცხენა მხარე არაუარყოფითია, ამიტომ მისგან გამომდინარეობს **ბესელის უტოლობა**

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \| f \|^2.$$

რადგან n ნებისმიერია, ამიტომ ბესელის უტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ უფრო გაძლიერებული სახით

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \| f \|^2. \tag{4}$$

თუ, კერძოდ, აღმოჩნდა, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2, \tag{5}$$

მაშინ მას პარსევალის ტოლობა ეწოდება. მას ძალიან მარტივი აზრი აქვს. სახელდობრ, ბესელის იგივობა (3) საშუალებას გვაძლევს პარსევალის ტოლობა მისი ტოლფასი ფორმით ჩავწეროთ

$$\lim_{n \to \infty} \| f - S_n \| = 0.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, პარსევალის ტოლობა ნიშნავს იმას, რომ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები $S_n(x)$ კრებადი არიან (L_2-ში დამყარებული მეტრიკის აზრით, ან, უფრო მარტივად, საშუალოდ) ამ ფუნქციისაკენ.

განმარტება ნ̄. ორთონორმირებულ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემას ჩაკეტილი ეწოდება, თუ პარსევალის ტოლობა სამართლიანია ყოველი ფუნქციისათვის L_2-დან.

თეორემა 1. *თუ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა ჩაკეტილია, მაშინ L_2-ს ფუნქციათა ნებისმიერი წყვილისათვის $f(x)$ და $g(x)$ გვექნება*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

სადაც

$$a_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx, \quad b_k = \int_a^b g(x)\omega_k(x)dx.$$

დამტკიცება. $f(x) + g(x)$ ჯამისათვის ფურიეს კოეფიციენტებს $a_k + b_k$ წარმოადგენენ. ამიტომ

$$\| f + g \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2,$$

საიდანაც

$$\int_a^b f^2 dx + 2\int_a^b fg dx + \int_a^b g^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2,$$

ეს კი თეორემის ტოლფასია.

დამტკიცებულ ფორმულას პარსევალის განზოგადებული ფორმულა ჰქვია.

თეორემა 3 (ვ. სტეკლოვი — ც. ხევერინი). ვთქვათ, A ყველგან მკვრივი კლასია L_2-ში. თუ პარსევალის ტოლობა სამართლიანია A კლასის ყოველი ფუნქციისათვის, მაშინ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ არის L_2 კლასის ფუნქცია. შევადგინოთ მისი ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x)$$

და აღვნიშნოთ ისინი $S_n(f)$-ით, იმ მიზნით, რომ ხაზი გავუსვათ მათს დამოკიდებულებას f-საგან.

მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ

1) $S_n(kf) = k\,S_n(f)$,

2) $S_n(f_1 + f_2) = S_n(f_1) + S_n(f_2)$,

3) $\| S_n(f) \| \leqslant \| f \|$.

პირველი ორი თვისება ტრივიალურია. რაც შეეხება მესამეს, იგი გამომდინარეობს (2)-დან და ბესელის უტოლობიდან

$$\| S_n \|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \| f \|^2.$$

ამ შენიშვნის შემდეგ, ამოვირჩიოთ რაიმე $f(x) \in L_2$ ფუნქცია და ავილოთ $\varepsilon > 0$. რადგანაც A კლასი ყველგან მკვრივია L_2-ში, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $g(x) \in A$ ფუნქცია, რომ

$$\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ მაშინ

$$\| f - S_n(f) \| \leqslant \| f - g \| + \| g - S_n(g) \| + \| S_n(g) - S_n(f) \|.$$

შემდეგ,

$$\| S_n(g) - S_n(f) \| = \| S_n(g - f) \| \leqslant \| g - f \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

და, მაშასადამე,

$$\| f - S_n(f) \| < \frac{2}{3}\varepsilon + \| g - S_n(g) \|.$$

რადგანაც $g(x)$-სათვის შესრულებულია პარსევალის ტოლობა, ამიტომ $n > n_0$-სათვის გვექნება

$$\| g - S_n(g) \| < \frac{\varepsilon}{3},$$

და, მაშასადამე, ასეთი n რიცხვებისათვის მივიღებთ

$$\| f - S_n(f) \| < \varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

შედეგი 1. თუ პარსევალის ტოლობა შესრულებულია თითოეული ფუნქციისათვის: $1, x, x^2, x^3, \dots,$ მაშინ $\{\omega_i(x)\}$ სისტემა ჩაკეტილია.

მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი პოლინომი

$$P(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m.$$

მაშინ

$$S_n(P) = A_0 S_n(1) + A_1 S_n(x) + \dots + A_m S_n(x^m)$$

და, მაშასადამე,

$$\| P - S_n(P) \| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |A_k| \cdot \| x^k - S_n(x^k) \| .$$

ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფვის ნულისაკენ $\frac{1}{n}$-თან ერთად, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ პარსევალის ტოლობა შესრულებულია ყოველი პოლინომისათვის, მაგრამ პოლინომთა P კლასი ყველგან მკვრივია L_2-ში.

მაგრამ არსებობენ თუ არა ჩაკეტილი სისტემები? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა სტეკლოვ-სევერინის თეორემის მეორე შედეგი.

შედეგი 2. ტრიგონომეტრიული (1) სისტემა ჩაკეტილია.

მართლაც, საკმარისია შევამოწმოთ პარსევალის ტოლობის შესრულება ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული პოლინომისათვის

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k + b_k \sin kx),$$

მაგრამ ეს ტრივიალურია, რადგანაც $T(x)$ წარმოადგენს (1) სისტემის ფუნქციათა წრფივ აგრეგატს.

თეორემა 3. (ფ. რისი — ე. ფიშერი). ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ორთონორმირებული $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა. თუ $c_1, c_2, c_3, \dots$ რიცხვები ისეთია, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty,$$

მაშინ არსებობს ისეთი $f(x) \in L_2$ ფუნქცია, რომლისათვისაც

1) c_k რიცხვები წარმოადგენენ ფურიეს კოეფიციენტებს;

2) მისთვის შესრულებულია პარსევალის ტოლობა.

დამტკიცება: ავიღოთ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

და ვაჩვენოთ, რომ $S_1, S_2, \ldots$ მიმდევრობა კრებადია თავის თავში. ამ მიზნით დავუშვათ, რომ $m > n$ და გამოვითვალოთ $\| S_m - S_n \|$

$$\| S_m - S_n \|^2 = \int_a^b \Big[\sum_{k=n+1}^{m} c_k \omega_k(x) \Big]^2 dx = \sum_{i,\, k} c_i c_k \int_a^b \omega_i(x)\, \omega_k(x)\, dx = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 .$$

თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ არსებობს ისეთი N, რომ, როცა $m > n > N$, გვექნება

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 < \varepsilon^2$$

ან, რაც იგივეა,

$$\| S_m - S_n \| < \varepsilon,$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\{ S_n \}$ მიმდევრობა კრებადია თავის თავში.

მაგრამ მაშინ, ფიშერის თეორემის მიხედვით, არსებობს ისეთი $f(x) \in L_2$ ფუნქცია, რომ

$$\| S_n - f \| \to 0.$$

ეს საძიებელი ფუნქციაა. მართლაც, § 2-ის მე-7 თეორემის ძალით, $\{ S_n(x) \}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $f(x)$-საკენ, ე. ი. ყოველი $g(x) \in L_2$-სათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

კერძოდ, თუ ავიღებთ

$$g(x) = \omega_i(x),$$

მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)\, \omega_i(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\, \omega_i(x)\, dx.$$

მაგრამ, თუ $n > i$, მაშინ

$$\int_a^b S_n(x)\, \omega_i(x)\, dx = \int_a^b \Big[\sum_{k=1}^{n} c_k\, \omega_k(x) \Big] \omega_i(x)\, dx = c_i,$$

საიდანაც

$$\int_a^b f(x)\, \omega_i(x)\, dx = c_i,$$

და $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირველ მოთხოვნას.

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $S_n(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამს, და

$$\| S_n - f \| \to 0$$

დამოკიდებულება, რომელიც თვით $f(x)$-ის განმარტებას იძლევა, გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ ფუნქციისათვის შესრულებულია პარსევალის ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. არსებობს მხოლოდ ერთი ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს რისი-ფიშერის თეორემის ორივე პირობას.

მართლაც, დავუშვათ, რომ არსებობს ორი ასეთი ფუნქცია $f(x)$ და $g(x)$. პირველი პირობის ძალით მათ საერთო ფურიეს მწკრივი აქვთ, ხოლო მაშინ მეორე პირობა გვიჩვენებს, რომ

$$S_n \to f \quad \text{და} \quad S_n \to g,$$

საიდანაც $f = g$.

საინტერესოა გამოირკვეს, შეინარჩუნებს თუ არა ეს შენიშვნა ძალას, თუ თეორემის მეორე პირობაზე უარს ვიტყვით. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად ჩვენ შემდეგი განმარტება დაგვჭირდება:

განმარტება 6. $]a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ და L_2 კლასის ფუნქციათა $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემას **სავსე** ეწოდება, თუ L_2-ში არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული[1] ისეთი ფუნქცია, რომელიც ყოველი $\varphi_k(x)$ ფუნქციის ორთოგონალურია.

შევნიშნოთ, რომ ამ განმარტებაში არ მოითხოვება, რომ $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა ორთონორმალური იყოს.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ რისი-ფიშერის მხოლოდ პირველი პირობის დამაკმაყოფილებელი ფუნქციის ერთად ერთობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ გამოსავალი ორთონორმირებული $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა სავსე იყოს.

მართლაც, თუ ეს სისტემა სავსეა და ორ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციას მასში ფურიეს ერთნაირი კოეფიციენტები აქვთ

$$\int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,\omega_k(x)\,dx \qquad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

მაშინ მათი სხვაობა, ორთოგონალურია რა სისტემის ყოველი ფუნქციისა, იგივურად ნული უნდა იყოს, საიდანაც $f(x) = g(x)$.

პირიქით, თუ სისტემა არაა სავსე და $h(x)$ ისეთი ფუნქციაა, რომელიც არ უდრის იგივურად ნულს და სისტემის ყოველი ფუნქციის ორთოგონალურია, მაშინ საკმარისია პირველი პირობის დამაკმაყოფილებელ რაიმე $f(x)$ ფუნქციას მივუმატოთ $h(x)$, რომ მივიღოთ $f(x)$-საგან განსხვავებული ისეთი ფუნქცია, რომელიც აგრეთვე აკმაყოფილებს ამ პირობას.

ორთონორმირებული სისტემის შემთხვევაში ჩაკეტილობისა და სისავსის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 4. იმისათვის, რომ ორთონორმირებული $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა სავსე იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი ჩაკეტილი იყოს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა ჩაკეტილია. თუ რაიმე $f(x) \in L_2$ ფუნქცია სისტემის ყველა ფუნქციების ორთოგონალურია, მაშინ მისი ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

[1] მოვიგონოთ, რომ ნულის ეკვივალენტურ ფუნქციას ჩვენ ნულის იგივურად ვთვლით.

მაშინ პარსევალის ფორმულა გვაძლევს

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

და f(x) ფუნქცია ტოლია იგივეურად ნულისა, ე. ი. სისტემა სავსეა.

პირიქით, ვთქვათ, $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა სავსეა. დავუშვათ, რომ რაიმე $g(x) \in L_2$ ფუნქციისათვის პარსევალის ტოლობა არ არის შესრულებული. მაშინ აუცილებელია

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \| g \|^2,$$

სადაც

$$c_k = \int_a^b g(x)\, \omega_k(x)\, dx$$

$g(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია. რისს-ფიშერის თეორემის საფუძველზე მოიძებნება ისეთი f(x) ფუნქცია, რომ

$$\int_a^b f(x)\, \omega_k(x)\, dx = c_k, \quad \| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $f(x) - g(x)$ სხვაობა ორთოგონალურია სისტემის ყოველი ფუნქციისა და (სისტემა სავსეა!)

$$f(x) = g(x),$$

ეს კი ეწინააღმდეგება

$$\| f \| < \| g \|$$

პირობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ტრიგონომეტრიული (1) სისტემა სავსეა.

დასასრულს, შევჩერდეთ კიდევ ერთ საკითხზე, რომელიც დაკავშირებულია ორთონორმირებული სისტემების თეორიასთან.

ვთქვათ, $\{\omega_k(x)\}$ წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტის ორთონორმირებულ სისტემას და

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{6}$$

მწკრივი კრებადია. მაშინ რისს-ფიშერის თეორემის ძალით

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \omega_k(x) \tag{7}$$

მწკრივი რაიმე $f(x) \in L_2$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს წარმოადგენს, და მისი კერძო ჯამები

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

საშუალოდ კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ. ამის გამო, მათგან შეიძლება შევადგინოთ ისეთი კერძო მიმდევრობა $\{S_{n_i}(x)\}$, რომელიც კრებადია [$f(x)$ ფუნქციისაკენ] $[a, b]$ სეგმენტზე თითქმის ყველგან. თურმე n_i ინდექსების ამორჩევა შეიძლება მოვახდინოთ ისე, რომ არ ვიცოდეთ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა, არამედ მხოლოდ (6) მწკრივი გამოვიყენოთ. ამჟამად არსებობს მთელი რიგი გამოკვლევებისა, რომლებიც მიძღვნილია ამ საკითხისადმი. ჩვენ მოვიყვანთ მხოლოდ უმარტივეს შედეგებს, რომლებიც ეხებიან ამ საკითხს.

თეორემა ნ (ს. კაჩმაჟი). ვთქვათ,

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2.$$

თუ $n_1 < n_2 \ldots$ რიცხვები ისეთია, რომ

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{n_i} < +\infty, \qquad \textbf{(K)}$$

მაშინ $\{S_{n_i}(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. ბესელის იგივეობა გვაძლევს რომ

$$\| S_{n-1} - f \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 = r_n.$$

(ჩვენ $f(x)$-ის ქვეშ სწორედ იმ ფუნქციას ვგულისხმობთ, რომელიც რისი-ფიშერის თეორემის ორივე პირობას აკმაყოფილებს). ამიტომ (K) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (S_{n_i-1} - f)^2 \, dx < +\infty$$

და, VI თავის § 1-ის მე-11 თეორემის შედეგის ძალით, $[a, b]$-ზე თითქმის ყველგან გვექნება

$$S_{n_i-1}(x) \to f(x).$$

მეორეს მხრივ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b [c_k \omega_k(x)]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$$

და VI თავის § 1-ის იმავე მე-11 თეორემის ძალით, $[a, b]$-ზე თითქმის ყველგან გვექნება

$$c_{n_i}\omega_{n_i}(x) \to 0.$$

საიდანაც

$$S_{n_i}(x) \to f(x),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 6 (**გ. რადემახერი**). ვთქვათ $\psi(k)$ დადებითი ზრდადი ფუნქციაა, რომელიც მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ k-სთან ერთად და

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\, c_k^2 < +\infty, \tag{8}$$

თუ $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ რიცხვები ისეთია, რომ

$$\psi(n_i) \geqslant i, \tag{R}$$

მაშინ $\{S_{n_i}(x)\}$ მიმდევრობა კრებადია თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ (R) პირობის დამაკმაყოფილებელი n_i რიცხვები აკმაყოფილებენ (K) პირობასაც, საიდანაც მიიღება თეორემა. ამ მიზნით შევნიშნოთ, რომ (8) პირობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \psi(k)\, c_n^2 < +\infty, \tag{9}$$

საიდანაც, (R)-ის ძალით, მით უფრო

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} c_k^2 < +\infty. \tag{10}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ორმაგი მწკრივი

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2-1} c_k^2 + \sum_{k=n_2}^{n_3-1} c_k^2 + \sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2 + \cdots \\
\displaystyle\qquad\qquad + \sum_{k=n_2}^{n_3-1} c_k^2 + \sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2 + \cdots \\
\displaystyle\qquad\qquad\qquad\qquad + \sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2 + \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots
\end{array}\right\} \tag{11}$$

კრებადია, თუ მას ავჯამავთ სვეტების მიხედვით. მაგრამ მაშინ იგი კრებადია სტრიქონების შეჯამების დროსაც, რაც (K) პირობის ტოლფასია, რადგან i-ური სტრიქონის ჯამი r_{n_i}-ს უდრის. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა: (K) და (R) პირობები ტოლფასი არიან. მართლაც, ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ (R) პირობის დამაკმაყოფილებელი n_i რიცხვები აკმაყოფილებენ (K) პირობასაც. პირიქით, ვთქვათ, n_i რიცხვები აკმაყოფილებენ (K) პირობას. ეს იმას ნიშნავს რომ (11) მწკრივის სტრიქონების მიხედვით შეჯამება მიგვიყვანს სასრულ ჯამზე. თუ ამ მწკრივს ავჯამავთ სვეტების მიხედვით, ვნახავთ, რომ (10) შესრულებულია. თუ მივიღებთ, რომ

$$\psi(k) = i \qquad (n_i \leqslant k < n_{i+1};\ i = 1,\ 2, \ldots),$$

მაშინ (10) შეიძლება დავწეროთ (9) ან (8) ფორმით. მაშასადამე, $\psi(k)$ აკმაყოფილებს რადემახერის თეორემის პირობებს, ხოლო n_i რიცხვები კი (R) პირობას.

§ 4. l_2 სივრცე

ევკლიდეს ორგანზომილებიანი R_2 სივრცის წერტილებს ნამდვილი რიცხვების $(a_1,\ a_2)$ დალაგებული წყვილები წარმოადგენენ.

თუ ყოველ $M\ (a_1,\ a_2)$ წერტილს შევუსაბამებთ x რადიუს-ვექტორს, მაშინ M წერტილის a_1 და a_2 კოორდინატები x ვექტორის გეგმილები იქნება საკოორდინატო ღერძებზე. ამის გამო $(a_1,\ a_2)$ წყვილი შეიძლება განვიხილოთ არა მარტო როგორც M წერტილი, არამედ როგორც x ვექტორი. ასეთი განხილვა უფრო შინაარსიანია. სახელდობრ, თუ მოცემულია ორი $x = (a_1,\ a_2)$ და $y = (b_1,\ b_2)$ ვექტორი, შეიძლება შევადგინოთ მათი ჯამი

$$x + y = (a_1 + b_1,\quad a_2 + b_2),$$

და აგრეთვე შევეიძლია გავამრავლოთ $x = (a_1,\ a_2)$ ვექტორი ნამდვილ k რიცხვზე

$$kx = (ka_1,\ ka_2),$$

მაშინ როცა, წერტილებისათვის მსგავსი მოქმედებანი არ შემოყავთ.
$x = (a_1, a_2)$ ვექტორის სიგრძეს

$$\| x \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

რიცხვი წარმოადგენს (შევნიშნოთ, სხვათა შორის, რომ ეს სხვა არაფერია, თუ არა პითაგორის თეორემა).

მოგაგონებთ ბოლოს, რომ ორი $x = (a_1,\ a_2)$ და $y = (b_1,\ b_2)$ ვექტორის სკალარული $(x,\ y)$ ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის მოთავსებული კუთხის კოსინუსის ნაწრავლს:

$$(x,\ y) = \| x \| \quad \| y \| \cdot \cos\Theta,$$

ამასთანავე, იგი ვექტორების გეგმილების საშუალებით გამოისახება ცნობილი ფორმულით

$$(x,\ y) = a_1\ b_1 + a_2\ b_2.$$

თუ ვიცით ეს ნამრავლი და ორივე ვექტორის სიგრძე, მაშინ მათ შორის მოთავსებულ კუთხეს ადვილად ვიპოვით შემდეგი დამოკიდებულებიდან:

$$\cos\Theta = \frac{(x,\ y)}{\| x \| \quad \| y \|} \qquad (0 \leqslant \Theta \leqslant \pi).$$

კერძოდ. ვექტორების მართობობის პირობას აქვს სახე

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

ზუსტად იგივე შეგვიძლია გავიმეოროთ სამგანზომილებიანი R_3 სივრცის შესახებაც:

1) გარკვეული მიმდევრობით აღებული რიცხვთა $x = (a_1, a_2, a_3)$ სამეული შეიძლება განვიხილოთ ან როგორც წერტილი ამ სივრცისა, ან როგორც ვექტორი მოთავსებული ამ სივრცეში.

2) მეორე განხილვის დროს ვექტორი შეგვიძლია გავამრავლოთ რიცხვზე და ორი ვექტორი შეგვიძლია შევკრიბოთ. $x = (a_1, a_2, a_3)$ ვექტორის $\| x \|$ სიგრძე. როგორც ეს პითაგორის თეორემიდან გამომდინარეობს, არის

$$\| x \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

3) თუ გვაქვს ორი $x = (a_1, a_2, a_3)$ და $y = (b_1, b_2, b_3)$ ვექტორი, შეიძლება შევადგინოთ მათი სკალარული ნამრავლი

$$(x, y) = \| x \| \quad \| y \| \cdot \cos \Theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

4) ვიცით რა (x, y) ნამრავლი, და ვექტორების სიგრძეები, შეგვიძლია გამოვითვალოთ მათ შორის მოთავსებული Θ კუთხე

$$\cos \Theta = \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|} \qquad (0 \leqslant \Theta \leqslant \pi).$$

5) დაბოლოს, ვექტორების ორთოგონალობის პირობას შემდეგი სახე აქვს

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

ამ დამოკიდებულებების განზოგადებით შეიძლება შემოვიღოთ n-განზომილების ევკლიდური R_n სივრცის ცნება, რომლის წერტილებსა და ვექტორებს ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-წევრიანი

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

კომპლექსები შეადგენენ.

აქ, განმარტების მიხედვით, ვექტორის სიგრძეს ვუწოდებთ რიცხვს

$$\| x \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ სკალარული ნამრავლი უკვე არ შეიძლება განმარტებულ იქნას კუთხის საშუალებით, არამედ მის განმარტებად უნდა მივიღოთ

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$$

ტოლობა.

პირიქით, Θ კუთხე შიძლება განსაზღვრული იყოს სკალარული ნამრავლის საშუალებით შემდეგი დამოკიდებულების დახმარებით

$$\cos \Theta = \frac{(x, y)}{\| x \| \quad \| y \|} \qquad (0 \leqslant \Theta \leqslant \pi),$$

მაგრამ, იმისათვის რომ ეს განმარტება კანონიერი იყოს, საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \quad \|y\|.$$

როცა ეს დამტკიცებული იქნება (ქვემოთ ეს გაკეთებულია), მაშინ ბუნებრივია $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ და $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ვექტორები ორთოგონალურ ვექტორებად მივიღოთ, თუ

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0.$$

ვაგრძელებთ რა განზოგადების ამ პროცესს, ჩვენ ბუნებრივად მივდივართ „უსასრულო განზომილების" R_∞ სივრცის ცნებამდე, რომელიც აგრეთვე l_2-ით აღინიშნება. ამასთან, ჩვენ საკითხის „ვექტორული" განხილვით დავკმაყოფილდებით.

განმარტება. ნამდვილი რიცხვების უსასრულო

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

მიმდევრობას l_2 სივრცის ვექტორი ეწოდება, თუ

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} < +\infty.$$

$\|x\|$ რიცხვს x ვექტორის სიგრძე ან ნორმა ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $x \in l_2$, მაშინ ყოველი k-სათვის

$$kx = (ka_1, ka_2, ka_3, \ldots)$$

ვექტორი აგრეთვე შედის l_2-ში, ამასთან

$$\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$$

და, კერძოდ: $\|-x\| = \|x\|$.

სავსებით ასევე, თუ x-თან ერთად l_2-ში შედის

$$y = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

ვექტორი, მაშინ

$$x + y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$$

ჯამვექტორი აგრეთვე შედის l_2-ში, რადგანაც

$$(a_k + b_k)^2 \leqslant 2(a_k^2 + b_k^2).$$

შემდეგ

$$|a_k b_k| \leqslant a_k^2 + b_k^2$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. ამ მწკრივის ჯამს x და y ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება.

l_2 და L_2 სივრცეებს შორის მჭიდრო კავშირი არსებობს. ავიღოთ რაიმე ორთონორმირებული $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა და ყოველ $f(x) \in L_2$ ფუნქციას შევუსაბამოთ მისი ფურიეს

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$$

კოეფიციენტების

$$x = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$$

მიმდევრობა [1].

პარსევალის ფორმულის ძალით

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2} = \|f\| < \infty,$$

x მიმდევრობა l_2 სივრცის ვექტორია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ L_2 და l_2-ს შორის დამყარებული თანადობა ურთიერთცალსახაა. მართლაც, L_2-ის სხვადასხვა ელემენტებს ($\{\omega_k\}$ სისტემის სისავსის გამო) l_2 სივრცის სხვადასხვა ვექტორები შეესაბამებიან, ხოლო, რისი-ფიშერის თეორემის ძალით, l_2 სივრცის ყოველი ვექტორი L_2 სივრცის რაიმე ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების ნაკრებს წარმოადგენს.

მაგრამ ამ თანადობას, ურთიერთცალსახობის გარდა, კიდევ სხვა თვისებებიც აქვს. სახელდობრ, თუ

$$x \sim f, \ y \sim g,$$

მაშინ

$$x + y \sim f + g,$$
$$kx \sim kf.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ L_2 სივრცის ელემენტებს შორის არსებობს რაიმე წრფივი

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_n f_n = 0$$

დამოკიდებულება, მაშინ იგი არ დაირღვევა, თუ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ელემენტებს l_2 სივრცის შესაბამისი ელემენტებით შევცვლით [ამასთან, 0-ით l_2 სივრცეში $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ ვექტორი აღინიშნება]. თუ ამას დაუპირისპირებთ იმ გარემოებას (რაც უკვე აღნიშნული იყო), რომ

$$\|x\| = \|f\|,$$

მაშინ L_2 და l_2 სივრცეების სრული გეომეტრიული იგივობა აშკარა გახდება. ამასთან დაკავშირებით, l_2- სივრცესაც ჰილბერტის სივრცეს უწოდებენ.

ვთქვათ,

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad y = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

[1] ჩვენ ვიმედოვნებთ, რომ მკითხველს არ დააბრკოლებს ის გარემოება, რომ x ასოთი ჩვენ აღვნიშნავთ როგორც $f(x)$, $\omega_k(x)$, ... ფუნქციების არგუმენტებს, ასე l_2 სივრცის ვექტორებს.

წარმოადგენენ l_2 სივრცის რაიმე ორ ვექტორს, ხოლო f და g მათი შესაბამი ელემენტებია L_2 სივრცეში. პარსევალის განზოგადებული ფორმულა გვაძლევს, რომ

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k = (x,\ y).$$

ამასთან დაკავშირებით, ბუნებრივია

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

ინტეგრალს f და g ელემენტების[1] სკალარული ნამრავლი ვუწოდოთ და აღვნიშნოთ იგი

$$(f,\ g)\text{-თი},$$

ასე რომ

$$(f,\ g) = (x,\ y).$$

ბუნიაკოვსკი-შვარცის უტოლობა ახლა შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$|(f,\ g)| \leqslant \| f \| \quad \| g \| .$$

აქედან გამომდინარეობს L_2 სივრცის f და g ელემენტებს შორის Θ კუთხის განმარტების შესაძლებლობა

$$\cos\Theta = \frac{(f,\ g)}{\| f \| \quad \| g \|} \qquad (0 \leqslant \Theta \leqslant \pi).$$

კერძოდ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათა ურთიერთ მართობობის ზემომოყვანილი

$$(f,\ g) = 0$$

განმარტება ტოლფასია იმ პირობისა, რომ მათ (როგორც L_2-ის ელემენტებს) შორის მოთავსებული კუთხე $\frac{\pi}{2}$-ს ტოლია.

შემდეგ, თუ $\omega(x)$ ნორმირებული ფუნქციაა

$$\| \omega \| = 1,$$

იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც L_2 სივრცის ერთეული ვექტორი (ან l_2 სივრცისა, რაც ერთიდაიგივეა, როგორც ეს ვნახეთ ზემოთ). ასეთ შემთხვევაში შეიძლება განვმარტოთ f ვექტორის გეგმილი ω მიმართულებაზე, ისე როგორც ჩვეულებრივ,

$$\text{გეგ}_\omega f = \| f \| \cdot \cos\Theta,$$

სადაც Θ არის კუთხე f და ω ვექტორებს შორის. სხვანაირად რომ ვთქვათ,

$$\text{გეგ}_\omega f = \int_a^b f(x)\, \omega(x)\, dx.$$

[1] L_2 სივრცის ელემენტებს ჩვენ ახლა ამავე სივრცის ვექტორებსაც ვუწოდებთ.

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\omega_k(x)\}$ ორთონორმირებულ სისტემაში[1] წარმოადგენენ f ფუნქციის გეგმილებს სისტემის ფუნქციების დახასიათებულ მიმართულებებზე.

თუ ჩვენ n განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე გვაქვს, მაშინ $x = (a_1, \ldots a_n)$ ვექტორის სიგრძე ეწოდება

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

რიცხვს; ეს პითაგორის თეორემის განზოგადებაა, რადგან a_k წარმოადგენენ x ვექტორის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე. განვიხილოთ $m\,(m \leqslant n)$ ასეთი გეგმილი. იმისათვის, რომ გავიგოთ, ყველა n გეგმილი მივიღეთ მხედველობაში თუ არა, შეიძლება უბრალოთ შევადაროთ ერთმანეთს m და n რიცხვები, მაგრამ ამის ნაცვლად შეგვიძლია ვნახოთ, გვექნება თუ არა ყოველი x ვექტორისათვის შესრულებული

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$$

ტოლობა (რადგან, თუ $m < n$, მაშინ აუცილებლად მოიძებნება ისეთი ვექტორები, რომლებისათვისაც $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^2 < \| x \|^2$). დაბოლოს, შეიძლება გამოვარკვიოთ, არსებობს თუ არა მხედველობაში მიღებული ყველა m ღერძისადმი ორთოგონალური მიმართულებანი.

უსასრულო განზომილებიანი L_2 სივრცისათვის ყოველი ორთონორმირებული $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა წარმოადგენს საკოორდინატო ღერძების ორთოგონალურ სისტემას. გვინდა რა გამოვარკვიოთ ყველა მიმართულებებია თუ არა მიღებული მხედველობაში ამ სისტემის შედგენის დროს, ჩვენ მოკლებული ვართ საშუალებას ვიმოქმედოთ პირდაპირი თვლით. n-განზომილებიანი სივრცისათვის მითითებული დანარჩენი ორი ხერხის განზოგადებით ჩვენ ბუნებრივად მივალთ ჩაკეტილი და სრული ორთონორმირებული სისტემის განმარტებებზე. კერძოდ, სავსებით აშკარა ხდება მიზეზი ამ განმარტებათა ტოლფასობისა.

აქამდე l_2 და L_2 სივრცეთა შორის კავშირი გამოყენებული იყო ჩვენს მიერ L_2 სივრცეზე ზოგიერთი ახალი თვალსაზრისების დასადგენად (რაც, რა თქმა უნდა, აგრეთვე მეტად მნიშვნელოვანია). ვაჩვენოთ, რომ ეს კავშირი ხასარგებლოა ახალი ფაქტების დადგენისათვისაც.

უწინარეს ყოვლისა,

$$|(x, y)| \leqslant \| x \| \, \| y \|$$

[1] ეს არ არის აუცილებლად ის სისტემა, რომლის დახმარებითაც დამყარებული იყო თანადობა L_2-სა და l_2-ს შორის.

უტოლობა, რომელიც ტოლფასია ბუნიაკოვსკი-შვარცის

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \quad \|g\|$$

უტოლობისა, ნიშნავს იმას, რომ

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right), \qquad (1)$$

ხოლო

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

უტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}. \qquad (2)$$

(1) და (2) უტოლობებს წმინდა ალგებრული ხასიათი აქვთ. შემდეგ, L_2 სივრცის სისრულისაგან ავტომატიურად გამომდინარეობს l_2 სივრცის სისრულე (ე. ი. ისეთი $x_1, x_2, x_3, \ldots$ მიმდევრობის კრებადობა, რომლისათვისაც $\|x_n - x_m\|$ მიისწრაფვის ნულისაკენ n-სა და m-ის ზრდასთან ერთად).

რადგანაც ყოველი n-განზომილებიანი R_n სივრცე წარმოადგენს l_2 სივრცის ნაწილს, ამიტომ ყოველი ზემონათქვამი ((1) და (2) უტოლობანი, სისრულე) გამოიყენება ამ სივრცის შემთხვევისათვისაც.

დასასრულს, განვიხილოთ კიდევ ერთი ისეთი საკითხი, რომლისათვისაც L_2-სა და l_2-ს შორის არსებული კავშირი მეტად სასარგებლოა.

ავირჩიოთ რაიმე $g \in L_2$ ელემენტი, და ყოველ $f \in L_2$-ს შევუსაბამოთ რიცხვი

$$\Phi(f) = (f, g). \qquad (3)$$

ამით L_2-ში მოცემულია რაღაც ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობებს ნამდვილი რიცხვები წარმოადგენენ. ამ ფუნქციას შემდეგი აშკარა თვისებები აქვს

$$1)\ \Phi(f_1 + f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2),$$
$$2)\ |\Phi(f)| \leqslant K \cdot \|f\| \quad (K = \|g\|).$$

ყოველ $\Phi(f)$ ფუნქციას, რომლის f არგუმენტი L_2-ის ელემენტია, ხოლო რომლის მნიშვნელობანი ნამდვილი რიცხვებია და რომელსაც 1) და 2) თვისებები აქვს — **წრფივი ფუნქციონალი** ეწოდება L_2 სივრცეში. თურმე არავითარი სხვა წრფივი ფუნქციონალები L_2 სივრცეში, გარდა (3)-სა, არ არსებობენ.

თეორემა (მ. ფრეშე). *თუ $\Phi(f)$ წრფივი ფუნქციონალია L_2 სივრცეში, მაშინ არსებობს ერთი (და მხოლოდ ერთი) ისეთი $g \in L_2$ ელემენტი, რომ ყოველი $f \in L_2$-სათვის გვექნება*

$$\Phi(f) = (f, g).$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ რაიმე ორთონორმირებული სისტემის საშუალებით განვახორციელეთ ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა L_2-სა და

A_2-ს შორის, რომელიც არ არღვევს ამ სივრცეებში არსებულ წრფივ დამოკიდებულებებს და რომელიც ინარჩუნებს ელემენტის ნორმას. თუ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ Φ ფუნქციონალის მნიშვნელობა $\Phi(f)$ შეთანადებულია l_2 სივრცის იმ x ელემენტთან, რომელიც აღნიშნულ თანადობაში $f \in L_2$ ელემენტს უპასუხებს, მაშინ ამგვარი გზით ჩვენი ფუნქციონალი მოცემული იქნება l_2-ში და მას შემდეგი თვისებები ექნება

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2), \qquad |\Phi(x)| \leqslant K \cdot \| x \| \cdot$$

ამოვაჩინოთ ისეთი $y \in l_2$ ელემენტის არსებობა, რომ ყოველი $x \in l_2$-სათვის გვქონდეს

$$\Phi(x) = (x, y). \tag{4}$$

ამ მიზნით, ჩვენ ჯერ დავრწმუნდეთ იმაში, რომ Φ ფუნქციონალი ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი ა, ე. ი. ყოველი ნამდვილი a-სათვის გვექნება

$$\Phi(ax) = a\Phi(x). \tag{5}$$

(5) დამოკიდებულება, აშკარაა, სრულდება, როცა n ნატურალური რიცხვია. აქედან, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ იგი სამართლიანია მაშინაც, როცა a-ს აქვს $\frac{1}{m}$ სახე, სადაც m ნატურალური რიცხვია, და, მაშასადამე, (5) სამართლიანია ყოველი დადებითი რაციონალური a რიცხვისათვის. შემდეგ, თუ $(0, 0, \ldots)$ ვექტორს 0-ით აღვნიშნავთ, გვექნება, რომ

$$\Phi(0) = \Phi(0 + 0) = 2\Phi(0),$$

საიდანაც ცხადია, რომ $\Phi(0) = 0$ და (5) სამართლიანია $a = 0$-სათვისაც. ბოლოს იქედან, რომ

$$0 = \Phi(0) = \Phi[x + (-x)] = \Phi(x) + \Phi(-x),$$

გამომდინარეობს, რომ $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, და, მაშასადამე, (5) სამართლიანია ყოველგვარი რაციონალური რიცხვისათვის. დაგვრჩა იმ შემთხვევის განხილვა, როცა a ირაციონალურია. ასეთ შემთხვევაში დავარქვათ r რაიმე რაციონალურ რიცხვს და ვაჩვენოთ, რომ

$$\Phi(rx) = r\,\Phi(x) \tag{6}$$

ტოლობა ზღვარში, როცა $r \to a$, გადადის (5)-ში. (6)-ის მარჯვენა მხარისათვის ეს აშკარაა. მეორეს მხრივ

$$|\Phi(rx) - \Phi(ax)| = \Phi[(r - a)x]| \leqslant K \cdot |r - a| \cdot \| x \|,$$

ასე რომ (6)-ის მარცხენა მხარე აგრეთვე მიისწრაფვის (5)-ის მარცხენა მხრისაკენ.

ამგვარად, (5) დამტკიცებულია.

განვიხილოთ

$$e_k = (0, \ldots \quad 0, 1, 0, \ldots)$$

ვექტორები (ერთიანი k-ურ ადგილზე) და დავუშვათ

$$\Phi(e_k) = A_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$y = (A_1, A_2, A_3, \ldots)$$

ვექტორი შედის l_2-ში. მართლაც, თუ

$$y_n = (A_1, A_2, \ldots A_n, 0, 0, \ldots),$$

მაშინ $y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k e_k$, საიდანაც

$$\Phi(y_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k^2$$

და $|\Phi(x)| \leqslant K \cdot \| x \|$ უტოლობა გამოყენებული y_n-სათვის გვაძლევს, რომ

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} A_k^2} \leqslant K,$$

საიდანაც, n-ის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ

$$\| y \| \leqslant K.$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ y სწორედ საძიებელ ელემენტს წარმოადგენ, ე. ი. რომ ყოველ $x \in l_2$-სათვის სამართლიანია (4).

ვთქვათ,

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

l_2-ს ელემენტია. აღვნიშნოთ

$$x_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

მაშინ $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ და

$$\Phi(x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k a_k. \tag{7}$$

თუ n მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, მაშინ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფვის (x, y)-საკენ.

მეორეს მხრივ,

$$|\Phi(x) - \Phi(x_n)| = |\Phi(x - x_n)| \leqslant K \| x - x_n \| = K \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2},$$

ასე რომ n-ის ზრდასთან ერთად $\Phi(x_n)$ მიისწრაფვის $\Phi(x)$-საკენ და (7) გადადის (4)-ში.

აღვნიშნოთ g-თი L_2 სივრცის ის ელემენტი, რომელიც დამყარებულ თანადობაში y-ს უპასუხებს. ვთქვათ, f არის L_2-ის ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო x — მისი შესაბამი ელემენტი l_2-ში. მაშინ

$$\Phi(f) = \Phi(x) = (x, y) = (f, g).$$

დაგვრჩა იმის ჩვენება, რომ L_2-ში არსებობს მხოლოდ ერთი g ელემენტი, რომელიც ყოველი f-სათვის აკმაყოფილებს

$$\Phi(\mathrm{f}) = (\mathrm{f}, g)$$

დამოკიდებულებას.

მაგრამ ასეთი ელემენტები რომ იყოს ორი g_1 და g_2, მაშინ ყოველი f-სათვის გვექნებოდა

$$(\mathrm{f}, g_1 - g_2) = (\mathrm{f}, g_1) - (\mathrm{f}, g_2) = \Phi(\mathrm{f}) - \Phi(\mathrm{f}) = 0.$$

ავიღოთ ამ ტოლობაში $\mathrm{f} = g_1 - g_2$, მაშინ მივიღებთ

$$(g_1 - g_2, g_1 - g_2) = \| g_1 - g_2 \|^2 = 0,$$

საიდანაც $g_1 = g_2$. თეორემა დამტკიცებულია მთლიანად.

§ 5. წრფივად დამოუკიდებელი სისტემები

განმარტება 1. $[a, b]$-ზე მოცემულ ფუნქციათა $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ სისტემას წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ეწოდება, თუ შესაძლებელია $A_1, A_2, \ldots, A_n$ მუდმივთა ისეთი სისტემის მოძებნა, რომელთაგან თუნდაც ერთი არ უდრის ნულს და ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x) \sim 0. \qquad (1)$$

თუ მუდმივთა ასეთი სისტემა არ არსებობს, ე. ი. (1)-დან გამომდინარეობს რომ

$$A_1 = A_2 = \quad = A_n = 0,$$

მაშინ $\{\varphi_i(x)\}$ სისტემას წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ეწოდება.

ადვილია შემჩნევა, რომ თუ $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემის თუნდაც ერთი ფუნქცია ეკვივალენტურია ნულის, მაშინ ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, და რომ, წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის ყოველი ნაწილი წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას შეადგენს.

თეორემა 1. ყ ო ვ ე ლ ი ო რ თ ო ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა.

მართლაც, თუ $\{\omega_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ორთონორმირებული სისტემაა $[a, b]$-ზე, და თუ

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \omega_k(x) \sim 0,$$

მაშინ, ამ ტოლობის $\omega_i(x)$-ზე გამრავლებითა და ინტეგრებით, ვიპოვით, რომ

$$A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

თეორემა 2. $x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_i}$ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა ს ი ს ტ ე მ ა, ს ა დ ა ც $n_1, n_2, \ldots, n_i$ მ თ ე ლ ი დ ა ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ა გ ა ნ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ა, წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე.

ეს თეორემა გამომდინარეობს იქედან, რომ მთელ პოლინომს ფესვთა მხოლოდ სასრული რიცხვი შეიძლება რომ ჰქონდეს.

განმარტება 2. $\varphi_1(x)$; $\varphi_2(x), \ldots$ ფუნქციათა თვლად სისტემას *წრფივად დამოუკიდებელი* ეწოდება, თუ წრფივად დამოუკიდებელია მისი ყოველი სასრული ნაწილი.

მაგალითად, წრფივად დამოუკიდებელია ყოველი თვლადი ორთონორმირებული სისტემა, ან სისტემა $1, x, x^2, \ldots$.

ვთქვათ, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ L_2 კლასის ფუნქციათა სისტემას. მივიღოთ, როგორც ზემოთ, L_2-ის ნებისმიერი ორი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციისათვის

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx,$$

და შევადგინოთ

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1), & (\varphi_1, \varphi_2), & \ldots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1), & (\varphi_2, \varphi_2), & & (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi_n, \varphi_1), & (\varphi_n, \varphi_2), & \ldots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი.

განმარტება 3. Δ_n დეტერმინანტს $\{\varphi_i(x)\}$ სისტემის *გრამის დეტერმინანტი* ეწოდება.

თეორემა 3. *იმისათვის რომ ფუნქციათა*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{2}$$

სისტემა წრფივად დამოკიდებული იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი გრამის დეტერმინანტი ნულს უდრიდეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, (2) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ არსებობს $A_1, A_2, \ldots, A_n$ მუდმივების ისეთი სისტემა, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და

$$A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x) \sim 0. \tag{3}$$

ამ ტოლობის $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$-ზე გამრავლებით და ყოველი გამრავლების შემდეგ ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$\left.\begin{array}{l} A_1(\varphi_1, \varphi_1) + A_2(\varphi_1, \varphi_2) + \ldots + A_n(\varphi_1, \varphi_n) = 0 \\ A_1(\varphi_2, \varphi_1) + A_2(\varphi_2, \varphi_2) + \ldots + A_n(\varphi_2, \varphi_n) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_1(\varphi_n, \varphi_1) + A_2(\varphi_n, \varphi_2) + \ldots + A_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

(4) ტოლობებში A_k მუდმივები უცნობები რომ ყოფილიყო, ეს ტოლობები მოგვცემდა წრფივ განტოლებათა სისტემას Δ_n დეტერმინანტით. მაგრამ

მუდმივთა ჩვენი A_k მნიშვნელობათათვის (4) ერთგვაროვანი სისტემა დაკმაყოფილებულია, და, რადგან ყველა A_k არ არის ნული, ამიტომ

$$\Delta_n = 0, \tag{5}$$

რაც ამტკიცებს პირობის აუცილებლობას.

დავუშვათ ახლა, რომ $\Delta_n = 0$. მაშინ (4) განტოლებათა წრფივ ერთგვაროვან სისტემას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამოხსნები. ვთქვათ, რომ A_1, $A_2, \ldots, A_n$ ასეთი ამოხსნებია, ასე რომ (4) ტოლობანი იგივობებს წარმოადგენენ. გადავწეროთ ეს იგივობანი ასე:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\left[A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x)\right]dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\left[A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x)\right]dx = 0.$$

ამ ტოლობათა გამრავლებით A_1-ზე, $\ldots$, A_n-ზე და შეკრებით ვიპოვით, რომ

$$\int_a^b \left[A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x)\right]^2 dx\,] = 0.$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3), ასე რომ $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

შედეგი. თუ

$$\Delta_n \neq 0,$$

მაშინ არცერთი დეტერმინანტი[1] $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ აგრეთვე არ უდრის ნულს.

მართლაც, თუ $\Delta_n \neq 0$, $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, და, მაშასადამე, წრფივად დამოუკიდებელია მისი ყოველი $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ $(m < n)$ ნაწილიც, მაგრამ მაშინ $\Delta_m \neq 0$.

ლემა. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ფუნქციათა $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ სისტემა. დავუშვათ

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \varphi_1(x) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_2, \varphi_{n-1}) & \varphi_2(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

მაშინ

$$(\psi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \Delta_n & (k = n). \end{cases}$$

[1] Δ_1-ის ქვეშ (φ_1, φ_1) იგულისხმება.

დამტკიცება. $\psi_n(x)$-ის $\varphi_k(x)$-ზე გამრავლებისათვის, საკმარისია (6) დეტერმინანტის უკანასკნელი სვეტი გავამრავლოთ $\varphi_k(x)$-ზე, ხოლო მიღებული ნამრავლის ინტეგრალის ასაღებად საჭიროა აგრეთვე მხოლოდ ბოლო სვეტის წევრების ინტეგრება. დანარჩენი ცხადია.

თუ ჩვენ $\psi_n(x)$ დეტერმინანტს დავშლით უკანასკნელი სვეტის ელემენტების მიხედვით, ცხადია, რომ მივიღებთ

$$\psi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + \cdots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \Delta_{n-1}\varphi_n(x). \tag{7}$$

მაშასადამე, თუ $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ $\psi_n(x)$ არაა ნულის ეკვივალენტური (რადგან $\Delta_{n-1} \neq 0$). (7) ტოლობის $\psi_n(x)$-ზე გამრავლებითა და ინტეგრებით, თუ ლემასაც მივიღებთ მხედველობაში, მივიღებთ

$$\int_a^b \psi_n^2\,dx = \Delta_{n-1}\,\Delta_n, \tag{8}$$

ასე რომ (ნულისაგან განსხვავებული) Δ_n და Δ_{n-1} დეტერმინანტები ერთნაირი ნიშნისა არიან. მაგრამ, იმავე მოსაზრებებით, ერთნაირი ნიშნისა არიან Δ_{n-2} და Δ_{n-1} და ა. შ. დეტერმინანტები. მაშასადამე, Δ_n დეტერმინანტს იგივე ნიშანი აქვს, რაც $\Delta_1 = (\varphi_1\ \varphi_1) > 0$. ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ თეორემა:

თეორემა 4. წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის გრამის დეტერმინანტი დადებითია.

აქ განვითარებული მოსაზრებები საშუალებას გვაძლევენ ადვილად დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

თეორემა 5 (ე. შმიდტი). ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია სასრული ან თვლადი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$. მაშინ შესაძლებელია ავაგოთ ისეთი ორთონორმირებული $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots$ სისტემა, რომ 1) ყოველი $\omega_n(x)$ ფუნქცია წარმოადგენდეს $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემის პირველი n ფუნქციის წრფივ აგრეგატს, და, პირიქით, 2) ყოველი $\varphi_n(x)$ ფუნქცია $\{\omega_k(x)\}$ სისტემის პირველი n ფუნქციის წრფივი აგრეგატი იყოს.

დამტკიცება. დავუშვათ

$$\omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad \omega_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \qquad (n \geqslant 2),$$

სადაც $\psi_n(x)$ (6) ტოლობით განისაზღვრება. ამითი საძიებელი სისტემა აგებულია. მართლაც, (7)-დან ცხადია, რომ

$$\omega_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x),$$

ასე რომ $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა აკმაყოფილებს თეორემის პირველ მოთხოვნილებას.

ლემიდან გამომდინარეობს, რომ $\psi_n(x)$ და, მაშასადამე, $\omega_n(x)$-იც ორთოგონალურია ყოველი $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . , $\varphi_{n-1}(x)$-სა. მაგრამ მაშინ $\omega_n(x)$ ორთოგონალურია $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ ფუნქციების ყოველგვარი წრფივი აგრეგატებისა, და კერძოდ, ყოველი $\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$ ფუნქციისაც. მაშასადამე, $\{\omega_k(x)\}$ სისტემა შედგება წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ფუნქციებისაგან. (8) ტოლობის ძალით, ყოველი $\omega_n(x)$ ფუნქცია ნორმირებულია და $\{\omega_n(x)\}$ ორთონორმირებული სისტემაა.

ახალა დაგვრჩა იმის ჩვენება, რომ

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \omega_k(x). \tag{9}$$

ეს ტრივიალურია $n = 1$-სათვის. ვთქვათ, ეს დამტკიცებულია $n < m$-სათვის. მაშინ, (7)-ის ძალით,

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\Delta_{m-1}} \psi_m(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\Delta_{m-1}} \varphi_k(x),$$

საიდანაც, მარჯვენა მხარეში $\psi_m(x)$-ის $\sqrt{\Delta_{m-1}\Delta_m}\ \omega_m(x)$-ით შეცვლისა და $\varphi_k(x)$-ის ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$ ფუნქციათა წრფივი აგრეგატებით შეცვლის შემდეგ, მივიღებთ, რომ (9) სამართლიანია $n = m$-სათვისაც, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შენიშვნა. $\{\varphi_k(x)\}$ და $\{\omega_k(x)\}$ ერთდროულად სრული არიან ან არა.

ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ისეთი $h(x)$ ფუნქცია, რომელიც ორთოგონალურია ერთი სისტემის ყველა ფუნქციისა, ორთოგონალური იქნება მეორე სისტემის ყველა ფუნქციისაც.

მაგალითი. ფუნქციათა სისტემა

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots$$

წრფივად დამოუკიდებელია $[-1, +1]$ სეგმენტზე. მისთვის, თეორემაში მოყვანილი ორთოგონალიზაციის პროცესის გამოყენებით, მივიღებთ $[-1, +1]$ სეგმენტზე პოლინომთა ორთონორმირებულ სისტემას

$$L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x), \ldots, \tag{10}$$

სადაც $L_n(x)$ არის n ხარისხის პოლინომი[1]. (10) პოლინომებს ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდებათ.

თეორემა 6. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემა ჩაკეტილია.

[1] თეორემის მიხედვით, $L_n(x)$-ის ხარისხი n-ს არ აღემატება. მაგრამ იგი n-ზე ნაკლებიც არ არის, რადგან

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x).$$

დამტკიცება. შმიდტის თეორემის მიხედვით

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x). \tag{14}$$

მაგრამ § 3-ის დასაწყისში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ასეთ შემთხვევაში a_k კოეფიციენტები წარმოადგენენ x^n-ის ფურიეს კოეფიციენტებს $\{L_k(x)\}$ სისტემაში.

(11)-ის x^n-ზე გამრავლებითა და $[-1, +1]$ საზღვრებში ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\| x^n \|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2,$$

ე. ი. პარსევალის ტოლობა შესრულებულია ყოველი x^n ფუნქციისათვის ($n = 0, 1, 2, \dots$). სტეკლოვ-სევერინის თეორემის 1-ლი შედეგის ძალით, ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ფუნქციათა $1, x, x^2, \dots$ სისტემა სავსე.

სავარჯიშო VII თავისათვის

1. ვთქვათ, $\{f_n(x)\}$ არის L_2 კლასის ფუნქციათა ისეთი სისტემა, რომელიც ზომით კრებადია $F(x)$-საკენ. თუ $\| f_n \| \leqslant K$, მაშინ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $F(x)$-საკენ (ფ. რისი).

2. თუ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $F(x)$-საკენ, მაშინ $\| f_n \| \leqslant K$ (ა. ლებეგი).

3. $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობის სუსტი კრებადობიდან $F(x)$-საკენ ამ მიმდევრობის ზომით კრებადობა გამომდინარეობს.

4. თუ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია $F(x)$-საკენ, და, გარდა ამისა, $\| f_n \| \to \| F \|$, მაშინ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $F(x)$-საკენ (ფ. რისი).

5. თუ $\int_a^b f(x)g(x)dx$ ინტეგრალი არსებობს ყოველი $f(x) \in L_2$ ფუნქციისათვის, მაშინ $g(x) \in L_2$ (ა. ლებეგი).

6. თუ $\{\omega_k(x)\}$ წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტის ჩაკეტილ ორთონორმირებულ სისტემას, მაშინ გვექნება $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2(x) = +\infty$ თითქმის ყველგან $[a,b]$-ზე (ვ. ორლიჩი).

7. იმავე პირობებში, ნებისმიერი ზომადი e სიმრავლისათვის ზომით $me > 0$ გვექნება $\sum_{k=1}^{\infty} \int_e \omega_k^2 dx = +\infty$ (ვ. ორლიჩი).

8. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ყველა ჯამებად ფუნქციათა L სიმრავლეში შემოვიღებთ $\| f \| = \int\limits_a^b | f(x) | \, dx$ ნორმას, მაშინ L სივრცეს ექნება სისრულის თვისება.

9. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტ ფუნქციათა C სიმრავლეში შემოვიღებთ $\| f \| = \max | f(x) |$ ნორმას, მაშინ მიღებულ სივრცეს სისრულის თვისება ექნება.

10. ფუნქციათა $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემას ეწოდება სრული ფუნქციათა A კლასში, თუ ამ უკანასკნელში არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი ფუნქცია, რომელიც ორთოგონალური იქნება ყოველი $\varphi_k(x)$-ისა. ორთონორმირებული სისტემის სისრულიდან (R) კლასში რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყველა ფუნქციებისა, არ გამომდინარეობს ამ სისტემის ჩაკეტილობა (გ. ფიხტენგოლცი).

11. ვთქვათ, $[-\pi, +\pi]$-ზე მოცემულია $f(x) \in L_2$ ფუნქცია; და ვუშვათ $f(x+2\pi) = f(x)$ და ვთქვათ, რომ

$$g_n(x) = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \, dt.$$

$g_n(x)$ ფუნქციები საშუალოდ კრებადია $q(x) \in L_2$ ფუნქციისაკენ; ამასთან

$$\| q \| \leqslant \| f \| \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

და $\| f \|$-ის მამრავლის შემცირება არ შეიძლება (ი. ნატანსონი).

12. ვთქვათ, $[a, b]$-ზე, $f(x) \in L_2$, ხოლო $[a, b]$-ს გარეთ $f(x) = 0$. თუ

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t) \, dt,$$

მაშინ $\| \varphi \| \leqslant \| f \|$ (ა. კოლმოგოროვი).

13. იმავე აღნიშვნებში, $h \to 0$-სათვის $\varphi(x)$ ფუნქცია საშუალოდ კრებადია $f(x)$-საკენ (ა. კოლმოგოროვი).

14. ვთქვათ, $\{\omega_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ორთონორმირებული სისტემაა და $f(x) \in L_2$. ყოველგვარი წრფივი $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \omega_k(x)$ კომბინაციებიდან $\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \omega_k \|$ სხვაობის ნორმის მინიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს ის, რომლისათვისაც $A_k = (f, \omega_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (ა. ტოეპლერი).

თ ა ვ ი VIII

ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით. სტილტიესის ინტეგრალი

§ 1. მონოტონური ფუნქციები

როგორც ცნობილია, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზ რ დ ა დ ი, თუ იქედან, რომ

$$x < y, \qquad (1)$$

გამომდინარეობს

$$f(x) \leqslant f(y).$$

თუ (1)-დან გამომდინარეობს, რომ $f(x) < f(y)$, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ა რ ს ე ბ ი თ ა დ ზრდადი ფუნქციაა. ანალოგიურად, $f(x)$ ფუნქცია კლებადია (არსებითად კლებადია), თუ (1)-დან გამომდინარეობს, რომ $f(x) \geqslant f(y)$ $[f(x) > f(y)]$. ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური (არსებითად მონოტონური) ეწოდებათ. თუ $f(x)$ ფუნქცია კლებადია, მაშინ $-f(x)$ ზრდადია. ეს მარტივი შენიშვნა ჩვენ საშუალებას მოგვცემს განვიხილოთ მხოლოდ ზრდადი ფუნქციები. შევნიშნოთ ბოლოს, რომ როდესაც მონოტონურ ფუნქციაზე ვლაპარაკობთ, ჩვენ ყ ო ვ ე ლ თ ვ ი ს ვიგულისხმებთ, რომ იგი ს ა ს რ უ ლ ი ა.

ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი ფუნქცია და

$$a \leqslant x_0 < b.$$

ანალიზის კურსში მტკიცდება, რომ x_0 წერტილის მარჯვნივ მოთავსებული წერტილების x_0-საკენ როგორი კრებადი $x_1, x_2, x_3, \ldots$ მიმდევრობაც არ უნდა ავიღოთ

$$x_n \to x_0, \quad x_n > x_0,$$

არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

ეს ზღვარი სხვა არაფერია, თუ არ

$$\inf\{f(x)\} \qquad (x_0 < x \leqslant b),$$

და ამიტომ იგი არ არის დამოკიდებული $\{x_n\}$ მიმდევრობის არჩევაზე. მას

$$f(x_0+0)\text{-ით}$$

აღნიშნავენ.

ანალოგიურად აღინიშნება სიმბოლო

$$f(x_0-0) \qquad (a<x_0\leqslant b).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0) \qquad (a<x_0<b)$$

$$f(a)\leqslant f(a+0),\ f(b-0)\leqslant f(b).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ გვქონდეს

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0).$$

[თუ x_0 ემთხვევა რომელიმე წერტილს — a-ს ან b-ს, მაშინ უნდა ვილაპარაკოთ მხოლოდ ცალმხრივ ზღვარზე $f(a+0)$ ან $f(b-0)$].

$$f(x_0)-f(x_0-0) \ \text{და}\ f(x_0+0)-f(x_0)$$

რიცხვებს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომები, სათანადოდ მარცხნიდან და მარჯვნიდან x_0 წერტილში, ხოლო მათ ჯამს $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ ჰქვია $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში (a და b წერტილებისათვის მხოლოდ ცალმხრივ ნახტომებს განიხილავენ).

ლემა. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია ზრდადი $f(x)$ ფუნქცია. თუ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ წარმოადგენენ $[a,b]$ სეგმენტის შიგნით მოთავსებულ ნებისმიერ წერტილებს, მაშინ

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(b)-f(b-0)]\leqslant f(b)-f(a). \tag{2}$$

დამტკიცება. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b.$$

დავუშვათ $a=x_0$, $b=x_{n+1}$ და განვიხილოთ $y_0,y_1,\ldots,y_n$ წერტილები, სადაც

$$x_k<y_k<x_{k+1} \qquad (k=0,1,2,\ldots,n).$$

მაშინ

$$f(x_k+0)-f(x_k-0)\leqslant f(y_k)-f(y_{k-1}) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$
$$f(a+0)-f(a)\leqslant f(y_0)-f(a)$$
$$f(b)-f(b-0)\leqslant f(b)-f(y_n).$$

ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ (2) უტოლობას.

შედეგი. $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ ზრდად $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობა ისეთი წყვეტის წერტილებისა, რომლებშიაც ფუნქციის ნახტომი მოცემულ დადებით σ რიცხვს აღემატება.

მართლაც, თუ $[a,b]$ სეგმენტის შიგნით მოთავსებული $x_1,x_2,\ldots,x_n$ წერტილები წარმოადგენენ წყვეტის წერტილებს σ-ზე უფრო მეტი ნახტომით, მაშინ (2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$n\sigma \leqslant f(b)-f(a)$$

და, მაშასადამე, n არ შეიძლება რაგინდ დიდი იყოს.

თეორემა 1. *$[a,b]$ სეგმენტზე ზრდადი $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე სასრული ან თვლადია. თუ $x_1,x_2,x_3,\ldots$ წყვეტის ყველა შიგა წერტილია, მაშინ*

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(b)-f(b-0)]\leqslant f(b)-f(a). \tag{3}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ H-ით $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის ყველა წერტილთა სიმრავლე, ხოლო H_k იყოს იმ წყვეტის წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც ამ ფუნქციის ნახტომი აღემატება $\frac{1}{k}$-ს. აშკარაა, რომ

$$H=H_1+H_2+H_3+\cdots$$

და H-ის თვლადობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ ყოველი H_k-სასრულია.

(3) უტოლობა გამომდინარეობს (2)-დან ზღვარზე გადასვლის შემწეობით.

ვთქვათ, $f(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. შემოვიღოთ ფუნქცია $s(x)$ შემდეგნაირად

$$s(a)=0,$$

$$s(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(x)-f(x-0)] \qquad (a<x\leqslant b).$$

ეს ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციის *ნახტომთა ფუნქციის* სახელწოდებას ატარებს. ცხადია, რომ ის აგრეთვე ზრდადი ფუნქციაა.

თეორემა 2. *სხვაობა*

$$\varphi(x)=f(x)-s(x)$$

ზრდად ფუნქციასა და მის ნახტომთა ფუნქციას შორის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $a\leqslant x<y\leqslant b$. თუ (3) უტოლობას გამოვიყენებთ $[x,y]$ სეგმენტისათვის, ნაცვლად $[a,b]$ სეგმენტისა, მაშინ მივიღებთ

$$s(y)-s(x)\leqslant f(y)-f(x), \tag{4}$$

საიდანაც

$$\varphi(x)\leqslant\varphi(y),$$

და ფუნქცია $\varphi(x)$ ზრდადი ყოფილა.

შემდეგ, თუ (4) უტოლობაში y-ს მივასწრაფებთ x-საკენ, მაშინ ზღვარში მივიღებთ, რომ

$$s(x+0)-s(x) \leqslant f(x+0)-f(x). \qquad (5)$$

მეორეს მხრივ, $s(x)$ ფუნქციის თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $x<y$-სათვის გვექნება

$$f(x+0)-f(x) \leqslant s(y)-s(x),$$

საიდანაც, თუ ზღვარში გადავალთ, როცა $y \rightarrow x$, მივიღებთ

$$f(x+0)-f(x) \leqslant s(x+0)-s(x).$$

აქედან და (5)-დან აშკარაა, რომ

$$f(x+0)-f(x)=s(x+0)-s(x),$$

და, მაშასადამე,

$$\varphi(x+0)=\varphi(x).$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $\varphi(x-0)=\varphi(x)$.

§ 2. უწყვეტი ასახვები. მონოტონური ფუნქციის განარმოება

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია.

ეს ფუნქცია ყოველ $E \subset [a,b]$ სიმრავლეს შეუსაბამებს $f(E)$ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა ისეთი y წერტილებისაგან, რომლების ათვისაც E სიმრავლეში მოიძებნება

$$f(x)=y$$

განტოლების x ფესვი.

$f(E)$ სიმრავლეს E სიმრავლის **სახე** ეწოდება, ხოლო E-ს $f(E)$ სიმრავლის **წინასახე**. E სიმრავლიდან $f(E)$ სიმრავლეზე გადასვლის ოპერაციას **ასახვის** ოპერაციას უწოდებენ.

თუ $m=\min\{f(x)\}$, $M=\max\{f(x)\}$, მაშინ $[m, M]$ წარმოადგენს $[a,b]$ სეგმენტის სახეს.

თეორემა 1. თუ

$$1)\ A \subset B, \qquad 2)\ A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

მაშინ, სათანადოდ,

$$1)\ f(A) \subset f(B), \ 2)\ f(A)=\sum_{k=1}^{\infty} f(A_k).$$

ეს თეორემა აშკარაა.

ასახვათა თეორია განსაკუთრებით მარტივია იმ შემთხვევაში, როცა გადამსახავი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია. ასეთ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქცია E და $f(E)$ სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა დამოკი-

დებულებას ამყარებს. თუ შებრუნებულ $g(y)$ ფუნქციას შემოვიყვანთ (რომელიც, როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში ცალსახა, უწყვეტი და არსებითად ზრდადია), მაშინ $g(y)$ მოახდენს $f(\mathrm{E})$ გადასახვას E სიმრავლეზე.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის არსებითად ზრდადობის პირობებში

$$f\left(\prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty} f(\mathrm{E}_k)$$

და, კერძოდ, თუ E_1 და E_2 სიმრავლეები არ იკვეთებიან, მაშინ არ იკვეთებიან არც მათი სახეები.

ცნება ასახვის შესახებ ჩვენ დიდ სამსახურს გაგვიწევს მონოტონური ფუნქციის დიფერენციალური თვისებების შესწავლის დროს.

განმარტება. λ (სასრული ან უსასრულო) რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული რიცხვი x_0 წერტილზე, თუ არსებობს ისეთი ნულისაკენ კრებადი $h_1, h_2, h_3, \ldots$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda.$$

იმ ფაქტს, რომ λ არის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული რიცხვი x_0 წერტილში, ჩვენ ასე ჩავწერთ:

$$\lambda = Df(x_0).$$

შევნიშნოთ, რომ განმარტებაში ლაპარაკია სავსებით ნებისმიერ $f(x)$ ფუნქციაზე და არა მაინცა და მაინც უწყვეტ ან მონოტონურ ფუნქციაზე.

თუ x_0 წერტილზე არსებობს (სასრული ან უსასრულო) წარმოებული $f'(x_0)$, მაშინ იგი წარმოადგენს წარმოებულ რიცხვს $Df(x_0)$ და არავითარი სხვა წარმოებული რიცხვები ამ წერტილში არ არსებობს.

მეორე მაგალითის სახით განვიხილოთ დირიხლეს $\psi(x)$ ფუნქცია, რომელიც ერთის ტოლია რაციონალურ წერტილებზე და ნულისა ირაციონალურ წერტილებზე.

თუ x_0 რაციონალური წერტილია, მაშინ

$$\frac{\psi(x_0+h_n)-\psi(x_0)}{h_n}$$

ფარდობა ტოლია ნულისა რაციონალური h_n-სათვის და ტოლია $-\frac{1}{h_n}$ ირაციონალური h_n-სათვის. ამის გამო, x_0 წერტილში არსებობს სამი წარმოებული რიცხვი

$$0, +\infty, -\infty.$$

სხვა წარმოებული რიცხვები ამ წერტილში არ არსებობს. სავსებით ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს ირაციონალურ x_0 წერტილზედაც.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ზრდადი ფუნქციის ყოველი წარმოებული რიცხვი არაუარყოფითია.

თეორემა 2. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე. ამ სეგმენტის ყოველ წერტილში არსებობს წარმოებული რიცხვები.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x\in[a,b]$ და $\{h_n\}$ ისეთი ნულისაკენ კრებადი მიმდევრობაა, რომ $x_0+h_n\in[a,b]$.

აღვნიშნოთ

$$\sigma_n=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

თუ $\{\sigma_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ, ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის ძალით, მისგან ამოირჩევა კრებადი $\{\sigma_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა,

$$\sigma_{n_k}\to\lambda$$

და $\lambda=Df(x_0)$. თუ კი ეს მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული, მაგალითად არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან, მაშინ მისგან ამოირჩევა ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, და, მაშასადამე $+\infty=Df(x_0)$.

თეორემა 3. იმისათვის რომ x_0 წერტილში არსებობდეს ჩვეულებრივი $f'(x_0)$ წარმოებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა წარმოებული რიცხვი ამ წერტილში ერთმანეთს ემთხვეოდენ.

ამ პირობის აუცილებლობა, რომელიც უკვე ზემოთ იყო აღნიშნული, სავსებით ტრივიალურია. პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა წარმოებული რიცხვი x_0 წერტილზე ტოლია λ რიცხვისა.

აღვნიშნოთ

$$\sigma(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ როგორი ნულისაკენ კრებადი $\{h_n\}$ მიმდევრობა არ უნდა ავიღოთ, გვექნება ყოველთვის

$$\sigma(h_n)\to\lambda.$$

ვთქვათ რომ ეს ასე არ არის და რაიმე $\{\sigma(h_n)\}$ $(h_n\to 0)$ მიმდევრობა არ მიისწრაფვის λ-საკენ. მაშინ (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\lambda\neq\pm\infty$, თუ $\lambda=\pm\infty$, მაშინ მსჯელობა კიდევ უფრო მარტივდება) მოიძებნება ისეთი $\varepsilon>0$, რომ $\sigma(h_{n_1})$, $\sigma(h_{n_2})$, $\sigma(h_{n_3})$,... რიცხვთა უსასრულო სიმრავლე მოხვდება $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ ინტერვალის გარეთ. მაგრამ $\{\sigma(h_{n_k})\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება ამოვირჩიოთ ისეთი $\{\sigma(h_{n_{k_i}})\}$ მიმდევრობა, რომელსაც აქვს (სასრული ან უსასრულო) ზღვარი μ. ცხადია, რომ $\lambda\neq\mu$ და μ არის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული რიცხვი x_0 წერტილზე. ეს ეწინააღმდეგება პირობას და თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია არსებითად ზრდადი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. თუ E სიმრავლის ყო-

ველ x წერტილში არსებობს თუნდაც ერთი ისეთი წარმოებული $Df(x)$ რიცხვი, რომ

$$Df(x) \geqslant q \qquad (q>0),$$

მაშინ

$$m^* f(E) \geqslant q \cdot m^* \mathrm{E}.$$

დამტკიცება. ავიღოთ დადებითი q_0 რიცხვი, $q_0<q$ და რაიმე $\varepsilon>0$. ვინაიდან $f(E)$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია (იგი მოთავსებულია $[f(a), f(b)]$ სეგმენტში), ამიტომ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლე, რომ

$$f(\mathrm{E}) \subset G, \; mG < m^* f(\mathrm{E}) + \varepsilon.$$

თუ $x_0 \in \mathrm{E}$, მაშინ არსებობს ისეთი $\{h_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$h_n \to 0, \; \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \to Df(x_0) \geqslant q.$$

$\mathrm{f}(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ძალით, საკმარისად დიდი n-სათვის მთელი $\Delta_n(x_0) = [\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_0+h_n)\}$ სეგმენტი მოთავსებული აღმოჩნდება G სიმრავლეში. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ამას ადგილი აქვს ყველა n-სათვის.

გარდა ამისა, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ყველა n-სათვის გვაქვს

$$\frac{\mathrm{f}(x_0+h_n)-\mathrm{f}(x_0)}{h_n} > q_0.$$

აქედან, თუ $[x_0, x_0+h_n]$ სეგმენტს აღვნიშნავთ $d_n(x_0)$-ით, გამომდინარეობს, რომ

$$m\Delta_n(x_0) > q_0 \, m d_n(x_0).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ E სიმრავლე დაფარულია ყველა $d_n(x)$ (სადაც $x \in E$) სეგმენტებით ვიტალის აზრით. ამის გამო, ამ სეგმენტების სიმრავლიდან შეიძლება ამოვირჩიოთ წყვილწყვილად არაგადამკვეთი

$$d_1, \; d_2, \; d_3, \ldots$$

სეგმენტების ისეთი თვლადი მიმდევრობა, რომ

$$m^*\left[\mathrm{E} - \sum_{k=1}^{\infty} d_k\right] = 0.$$

მაშინ აშკარაა, რომ

$$m^* E \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m d_k < \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k,$$

სადაც Δ_k, როგორც ზემოთ, წარმოადგენენ d_k-ს სახეებს. აქედან

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k > q_0 \cdot m^* \mathrm{E}.$$

მაგრამ Δ_k სეგმენტები (ისევე როგორც d_k სეგმენტები) წყვილწყვილად არ იკვეთებიან და შედიან G სიმრავლეში. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k \leqslant m\,G < m^* \mathrm{f}(\mathrm{E}) + \varepsilon.$$

აქედან

$$m^* \mathrm{f}(E) + \varepsilon > q_0 m^* E,$$

და თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია ε მივასწრაფოთ 0-საკენ, q_0 კი q-საკენ და გადავიდეთ ზღვარზე უკანასკნელ უტოლობაში.

შედეგი. იმ სიმრავლის ზომა, რომლის ყოველ წერტილშიაც უწყვეტი არსებითად ზრდადი $\mathrm{f}(x)$ ფუნქციის თუნდაც ერთი წარმოებული რიცხვი უსასრულოა, ნულის ტოლია.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ სიმრავლის სახეს უსასრულო გარე ზომა ექნებოდა, ეს კი უაზრობაა, რადგანაც ეს სახე $[\mathrm{f}(a), \mathrm{f}(b)]$ სეგმენტშია მოთავსებული.

ლემა 2. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია უწყვეტი არსებითად ზრდადი $\mathrm{f}(x)$ ფუნქცია. თუ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე არსებობს თუნდაც ერთი ისეთი წარმოებული $D\mathrm{f}(x)$ რიცხვი, რომ

$$D\mathrm{f}(x) \leqslant p \qquad (p \geqslant 0),$$

მაშინ

$$m^* \mathrm{f}(E) \leqslant p m^* E.$$

დამტკიცება. ჯერ-ჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ $p > 0$. ვთქვათ, $g(y)$ არის $\mathrm{f}(x)$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია; იგი აგრეთვე უწყვეტია და არსებითად ზრდადი. ეს ფუნქცია $A = \mathrm{f}(\mathrm{E})$ სიმრავლეს ასახავს $g(A) = E$ სიმრავლეში.

ვაჩვენოთ, რომ ყოველ $y_0 \in A$ წერტილზე არსებობს თუნდაც ერთი ისეთი წარმოებული $Dg(y_0)$ რიცხვი, რომელიც არაა $\frac{1}{p}$-ზე ნაკლები,

$$\mathrm{D}\,g(y_0) \geqslant \frac{1}{p}. \tag{1}$$

მართლაც, თუ $g(y_0) = x_0$, მაშინ $x_0 \in \mathrm{E}$ და არსებობს ისეთი $\{h_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$h_n \to 0, \ \frac{\mathrm{f}(x_0 + h_n) - \mathrm{f}(x_0)}{h_n} \to D\mathrm{f}(x_0) \leqslant p.$$

აღვნიშნოთ

$$\mathrm{f}(x_0 + h_n) - \mathrm{f}(x_0) = k_n,$$

მაშინ $\mathrm{f}(x_0 + h_n) = y_0 + k_n$ და $g(y_0 + k_n) = x_0 + h_n = g(y_0) + h_n$. მაშასადამე,

$$\frac{g(y_0 + k_n) - g(y_0)}{k_n} = \frac{h_n}{\mathrm{f}(x_0 + h_n) - \mathrm{f}(x_0)} \to \frac{1}{D\mathrm{f}(x_0)} \geqslant \frac{1}{p},$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1).

$g(y)$ ფუნქციისათვის და A სიმრავლისათვის 1-ლი ლემის გამოყენებით ვიპოვით

$$m^* g(A) \geqslant \frac{1}{p} m^* A,$$

ან, რაც იგივეა,

$$m^* E \geqslant \frac{1}{p} m^* f(E).$$

ამგვარად, $p > 0$-სათვის ლემა დამტკიცებულია. მაგრამ მაშინ იგი დამტკიცებულია $p = 0$-სათვისაც, რადგან, თუ E სიმრავლის ყოველ წერტილში გვექნება

$$D f(x) = 0,$$

მით უფრო გვექნება ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის

$$D f(x) < \frac{1}{n},$$

საიდანაც

$$m^* f(E) \leqslant \frac{1}{n} m^* E$$

და

$$m^* f(E) = 0.$$

შედეგი. ვთქვათ, $p < q$. თუ $E_{p,q}$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე არსებობს ისეთი ორი წარმოებული $D_1 f(x)$ და $D_2 f(x)$ რიცხვი, რომ

$$D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x),$$

მაშინ

$$m E_{p,q} = 0.$$

მართლაც, 1-ლი ლემის ძალით, გვექნება

$$m^* f(E_{p,q}) \geqslant q m^* E_{p,q},$$

ხოლო, მე-2 ლემის ძალით,

$$m^* f(E_{p,q}) \leqslant p m^* E_{p,q},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$q m^* E_{p,q} \leqslant p m^* E_{p,q}$$

და, მაშასადამე,

$$m^* E_{p,q} = 0.$$

თეორემა 4 (ა. ლებეგი). თუ ზრდადი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ მას თითქმის ყველგან $[a,b]$-ზე აქვს სასრული $f'(x)$ წარმოებული.

დამტკიცება. ჯერ-ჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია. აღვნიშნოთ E-თი $[a,b]$ სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც არ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ჩვეულებრივი $f'(x)$

წარმოებული. მე-3 თეორემის ძალით, ყოველ $x_0 \in E$ წერტილში ჩვენს ფუნქციას აქვს ორი სხვადასხვა წარმოებული რიცხვი

$$D_1 f(x_0) < D_2 f(x_0).$$

მაგრამ მაშინ შეიძლება მივუთითოთ ორი ისეთ რაციონალური p და რიცხვზე, რომ

$$D_1 f(x_0) < p < q < D_2 f(x_0).$$

ამის გამო, E სიმრავლე წარმოიდგინება

$$E = \sum_{(p,q)} E_{p,q}, \tag{2}$$

სახით, სადაც $E_{p,q}$-თი აღნიშნულია ისეთი x წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც

$$D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x),$$

ხოლო p და q რაციონალური რიცხვებია.

ყოველ შესაკრებ სიმრავლეს (2)-ში ნული ზომა აქვს, და ასეთი შესაკრები სიმრავლეები თვლადია, საიდანაც

$$mE = 0.$$

ამგვარად, არსებითად ზრდად $f(x)$ ფუნქციას თითქმის ყველგან აქვს ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმოებული. ეს წარმოებული $+\infty$ შეიძლება გახდეს 1-ლი ლემის შედეგის ძალით, მხოლოდ ნული ზომის სიმრავლეზე.

ახლა დაგვრჩა იმ შემთხვევის განხილვა, როცა $f(x)$ ზრდადი (მაგრამ, არა აუცილებლად არსებათად) უწყვეტი ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში

$$f_1(x) = f(x) + x$$

ფუნქცია უწყვეტი და არსებითად ზრდადია, ასე რომ თითქმის ყველგან არსებობს და სასრულია $f'_1(x)$, მაგრამ ყველგან, სადაც ეს ასეა, არსებობს $f'(x)$-იც. თეორემა დამტკიცებულია სავსებით.

შემდეგში, ვილაპარაკებთ რა უწყვეტი ზრდადი $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებულის შესახებ, ვიგულისხმებთ, რომ მისი განმარტება შევსებულია ისე, რომ $f'(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან $[a,b]$-ზე. ამისათვის მივიღებთ თუნდაც $f'(x) = 0$ ისეთ x წერტილებზე, რომლებზედაც $f(x)$ არ არის წარმოებადი.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ არის $[a,b]$-ზე მოცემული ზრდადი უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ მისი $f'(x)$ წარმოებული ზომადია და

$$\int_a^b f'(x)dx \leqslant f(b) - f(a), \tag{3}$$

ასე რომ $f'(x)$ ჯამებადია.

დამტკიცება. შევავსოთ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრა შემდეგნაირად

$$f(x) = f(b), \text{ როცა } b < x \leqslant b + 1.$$

მაშინ ყველა ისეთ წერტილებზე, რომლებზედაც $f'(x)$ წარმოადგენს $f(x)$-ის წარმოებულს (გარდა, შესაძლებელია, $x=b$ წერტილისა), გვექნება

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],$$

და $f'(x)$, როგორც ზომადი ფუნქციების თითქმის ყველგან კრებადი მიმდევრობის ზღვარი, ზომადია. გარდა ამისა, რადგანაც $f'(x)$ არაუარყოფითია, ინტეგრალი (ლებეგის აზრით)

$$\int_a^b f'(x)dx$$

არსებობს.

შემდეგ, ფატუს თეორემის ძალით,

$$\int_a^b f'(x)dx \leqslant \sup\left\{ n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\right\}.$$

მაგრამ

$$\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx=\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-\int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

(ცვლადის გარდაქმნა აქ სავსებით დასაბუთებულია. $f(x)$ — ხომ უწყვეტი ფუნქციაა და ინტეგრალი $\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx$ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც რიმანის ინტეგრალი).

(4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx=\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx -$$

$$-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\left[f(b)-f(a)\right]$$ [1],

[1] ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx=\frac{1}{n}f(b),\quad \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx > \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,dx=\frac{1}{n}f(a).$$

და ამის გამო

$$n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\leqslant f(b)-f(a),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3) უტოლობა.

ჩვენ მიჩვეული ვართ, რომ წარმოებულის ინტეგრება აღადგენს პირველყოფილს, ე. ი. რომ (3) დამოკიდებულებაში დგას ტოლობის ნიშანი, ასე რომ ეს დამოკიდებულება ცოტა არ იყოს „თვალს გვჭრის". მიუხედავად ამისა, მიღებული შედეგის გაუმჯობესება არ შეიძლება—არსებობს შემთხვევები, როცა (3)-ში ნამდვილად უტოლობა გვაქვს.

მაგალითი. ვთქვათ, P_0 კანტორის სრულყოფილი სიმრავლეა. მისი დამატებითი ინტერვალები შეიძლება გავანაწილოთ ჯგუფებად: პირველ ჯგუფს მივაკუთვნოთ $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ინტერვალი, მეორე ჯგუფს — ორივე $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ და $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ ინტერვალები, მესამე ჯგუფს—ოთხი შემდეგი ინტერვალი $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$ და ა. შ. n-ურ ჯგუფს მივაკუთვნოთ 2^{n-1} ინტერვალი:

შემოვიღოთ $\Theta(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად;

$$\Theta(x)=\frac{1}{2},\ \text{როცა}\ x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),$$

$$\Theta(x)=\frac{1}{4},\ \text{როცა}\ x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\ \Theta(x)=\frac{3}{4},\ \text{როცა}\ x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right).$$

მესამე ჯგუფის ოთხ ინტერვალზე $\Theta(x)$ მივიღოთ მიმდევრობით $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$-ის ტოლად და, საზოგადოდ, n-ური ჯგუფის 2^{n-1} ინტერვალზე $\Theta(x)$ მივიღოთ მიმდევრობით

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\ldots,\ \frac{2^n-1}{2^n}\text{-ის}$$

ტოლად.

$\Theta(x)$ ფუნქცია მოცემულია კანტორის ღია G_0 სიმრავლეზე. იგი მუდმივია ამ სიმრავლის ყოველ შემადგენელ ინტერვალზე და ზრდადია G_0 სიმრავლეზე მთლიანად[1]. შევავსოთ $\Theta(x)$ ფუნქციის განმარტება, მისი მოცემით P_0 სიმრავლის წერტილებზედაც. ამისათვის მივიღოთ

$$\Theta(0)=0,\ \Theta(1)=1.$$

[1] აქაში ყველაზე მარტივად ინდუქციის გზით დავრწმუნდებით. დაწერილებით მტკიცების ჩატარებას მკითხველს ვანდობთ.

P_0 სიმრავლის იმ $x_0 \in P_0$ წერტილებზე კი, რომლებიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის, მივიღოთ

$$\Theta(x_0) = \sup\{\Theta(x)\} \qquad (x \in G_0,\ x < x_0).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განმარტება ინარჩუნებს $\Theta(x)$ ფუნქციის მონოტონობას, რომელიც ახლა მოცემულია მთელს [0,1] სეგმენტზე.

დავადგინეთ რა $\Theta(x)$-ის მონოტონობა, ჩვენ ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტია. ეს იმ ფაქტიდან გამომდინარეობს, რომ $\Theta(x)$ ფუნქციის მიერ G_0 სიმრავლეზე მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლე ყველგან მკვრივია [0,1] სეგმენტზე (მართლაც, თუ ზრდად $f(x)$ ფუნქციას აქვს x_0 წყვეტის წერტილი, მაშინ ერთერთი $(f(x_0-0),\ f(x_0))$ ან $(f(x_0),\ f(x_0+0))$ ინტერვალი მაინც თავისუფალია ფუნქციათა მნიშვნელობებისაგან).

ამგვარად, $\Theta(x)$ უწყვეტი ზრდადი ფუნქციაა. ამასთან ერთად, თითქმის ყველგან [0,1]-ზე გვექნება

$$\Theta'(x) = 0$$

(ამ დამოკიდებულების შესრულება უეჭველია G_0 სიმრავლის ყოველ წერტილზე). მაშასადამე,

$$\int_0^1 \Theta'(x)\,dx = 0 < 1 = \Theta(1) - \Theta(0).$$

ქვემოთ ჩვენ დავადგენთ პირობებს იმისა, რომ (3)-ში ტოლობის ნიშანი გვქონდეს.

§ 3. ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით ფუნქციათა მნიშვნელოვან კლასს — კლასს ფუნქციებისა შემოსაზღვრული ვარიაციით, რომლებიც მტკიცედ არიან დაკავშირებული მონოტონურ ფუნქციებთან.

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია სასრული $f(x)$ ფუნქცია. გავყოთ $[a,b]$ ნაწილებად

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

წერტილებით და შევადგინოთ ჯამი

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

განმარტება. 1. ყოველგვარი V ჯამების სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს $f(x)$ ფუნქციის სრული ვარიაცია ეწოდება $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$-ით. თუ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty,$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით $[a,b]$ სეგმენტზე.

ცნება ფუნქციისა შემოსაზღვრული ვარიაციით შემოიღო მათემატიკაში ჟ. ჟორდანმა.

თეორემა 1. მონოტონური ფუნქცია არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

ეს თეორემა საკმარისია დამტკიცდეს ზრდადი ფუნქციისათვის. თუ $f(x)$ ზრდადია $[a,b]$-ზე, მაშინ ყველა $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ არაუარყოფითია და

$$V = \sum_{k=1}^{n-1} \{f(x_{k+1}) - f(x_k)\} = f(b) - f(a),$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

მეორე მაგალითს ფუნქციისა შემოსაზღვრული ვარიაციით წარმოადგენს ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს „ლიპშიცის პირობას“:

განმარტება 2. $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული სასრული $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, თუ არსებობს ისეთი k მუდმივი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ორი x და y წერტილისათვის გვაქვს

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|.$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე აქვს $f'(x)$ წარმოებული და თუ ეს უკანასკნელი შემოსაზღვრულია, მაშინ, როგორც ეს ჩანს ლაგრანჟის ფორმულიდან

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y), \qquad (x < z < y)$$

$f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობის.

თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, მაშინ

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant k\,(x_{k-1} - x_k),$$

საიდანაც

$$V \leqslant K(b - a)$$

და, მაშასადამე, $f(x)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

ისეთი უწყვეტი ფუნქციის მაგალითს, რომლის სრული ვარიაცია უსასრულოა, წარმოადგენს ფუნქცია

$$f(x) = x\cos\frac{\pi}{2x} \quad (0 < x \leqslant 1,\ f(0) = 0).$$

თუ გაყოფის წერტილებად ავიღებთ

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \ < 1$$

წერტილებს, მაშინ ადვილად შევამოწმებთ, რომ

$$V = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

საიდანაც

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{V}}}(f) = +\infty.$$

თეორემა 2. ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით შემოსაზღვრულია.

მართლაც, როცა, $a \leqslant x \leqslant b$ გვაქვს

$$V = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f).$$

საიდანაც

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f).$$

თეორემა 3. ორი შემოსაზღვრული ვარიაციით ფუნქციის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი, არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ არიან ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით $[a,b]$-ზე და $S(x)$ არის მათი ჯამი. მაშინ

$$|S(x_{k+1}) - S(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(S) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(g),$$

და S არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით. სხვაობისათვის მტკიცება ანალოგიურია.

ვთქვათ ახლა, რომ

$$p(x) = f(x)g(x).$$

აღვნიშნოთ

$$A = \sup\{|f(x)|\}, \quad B = \sup\{|g(x)|\}.$$

მაშინ

$$|p(x_{k+1}) - p(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_{k+1})| + |f(x_k)g(x_{k+1}) -$$
$$- f(x_k)g(x_k)| \leqslant B|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + A|g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

საიდანაც

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(p) \leqslant B \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + A \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(g),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ არიან ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით, და თუ, გარდა ამისა, $g(x) \geqslant \sigma > 0$, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადი არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 5. ვთქვათ, $[a,b]$-ზე მოცემულია სასრული $f(x)$ ფუნქცია და $a < c < b$. მაშინ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{1}$$

დამტკიცება. თითოეული $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად

$$y_0 = a < y_1 < \dots < y_m = c; \quad z_0 = c < z_1 < \dots < z_n = b$$

წერტილებით და შევადგინოთ ჯამები

$$V_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|, \quad V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|.$$

$\{y_k\}$ და $\{z_k\}$ წერტილები ყოფენ ნაწილებად აგრეთვე მთელს $[a,b]$ სეგმენტსაც. თუ V-თი აღვნიშნავთ ამ დანაწილების შესაბამ ჯამს, მაშინ გვექნება

$$V = V_1 + V_2.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$V_1 + V_2 \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

და, მაშასადამე,

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f). \tag{2}$$

ახლა $[a,b]$ სეგმენტი დავანაწილოთ წერტილებით

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b,$$

მხოლოდ ისე, რომ c წერტილი მონაწილეობდეს დაყოფის წერტილთა შორის. თუ $c = x_m$, მაშინ V ჯამი, რომელიც ჩვენს დანაწილებას შეესაბამება, ასეთი სახისაა

$$V = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{i=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

ან, მოკლედ

$$V = V_1 + V_k,$$

სადაც V_1 და V_2 არიან $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტების შესაბამი ჯამები.
აქედან

$$V \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{3}$$

ეს უტოლობა, ჯერჯერობით, დადგენილია მხოლოდ ისეთი V ჯამებისათვის, რომლებიც იმგვარ დანაწილების წესს უპასუხებენ, როცა c წერტილი მონაწილეობს დაყოფის წერტილთა შორის. მაგრამ, რადგანაც ახალი დაყოფის წერტილის დამატება, აშკარაა, არ ამცირებს V ჯამებს, ამიტომ (3) სამართლიანია, საზოგადოდ, ყველა V ჯამებისათვის. აქედან ცხადია, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{4}$$

(2)-ის და (4)-ის დაპირისპირებით მივიღებთ (1)-ს.

შედეგი 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას, თეორემის პირობებში, შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ მას აგრეთვე შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს თითოეულ $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტზე და პირიქით.

შედეგი 2. თუ $[a,b]$ სეგმენტი შეიძლება დავანაწილოთ ისეთი სეგმენტების სასრული რაოდენობად, რომელთაგან თითოეულზედაც $f(x)$ მონოტონურია, მაშინ $f(x)$-ს $[a,b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს.

თეორემა 6. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი წარმოიდგინებოდეს ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.

დამტკიცება. პირობის საკმარისობა 1-ლი და მე-3 თეორემებიდან გამომდინარეობს. მისი აუცილებლობის დამტკიცებისათვის, ვთქვათ

$$\pi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \qquad (a < x \leqslant b),$$

$$\pi(a) = 0.$$

მე-5 თეორემის ძალით, $\pi(x)$ ფუნქცია ზრდადია. თუ აღვნიშნავთ

$$v(x) = \pi(x) - f(x), \tag{5}$$

მაშინ $v(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ზრდადი აღმოჩნდება. მართლაც, თუ $a \leqslant x < y \leqslant b$, მაშინ, მე-5 თეორემის ძალით,

$$v(y) = \pi(y) - f(y) = \pi(x) + \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) - f(y)$$

და, მაშასადამე,

$$v(y) - v(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) - [f(y) - f(x)].$$

მაგრამ სრული ვარიაციის თვით განმარტებიდან ცხადია, რომ

$$f(y) - f(x) \leqslant \overset{y}{\underset{x}{V}}(f),$$

ასე რომ

$$v(y) - v(x) \geqslant 0$$

და $v(x)$ ფუნქცია ზრდადია. ამის შემდეგ დაგვრჩენია (5) ტოლობა ასე გადავწეროთ

$$f(x) = \pi(x) - v(x),$$

იმისათვის რომ მივიღოთ საძებნი წარმოდგენა $f(x)$ ფუნქციისა.

შედეგი. ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაციით აქვს სასრული ან თვლადი სიმრავლე წყვეტის წერტილებისა. წყვეტის ყოველ x_0 წერტილზე არსებობს ორივე ზღვარი

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad (x > x_0)$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad (x < x_0)$$

ვთქვათ,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (a < x_n < b) \qquad (6)$$

მიმდევრობა შედგება ყველა იმ წერტილებისაგან, რომლებიც წარმოადგენენ წყვეტის წერტილებს თუნდაც ერთი $\pi(x)$ ან $v(x)$ ფუნქციისათვის. შემოვიღოთ ნახტომთა ფუნქციები

$$S_\pi(x) = [\pi(a+0) - \pi(a)] + \sum_{x_k < x} [\pi(x_k+0) - \pi(x_k-0)] + [\pi(x) - \pi(x-0)]$$

$$(a < x \leqslant b)$$

$$S_\nu(x) = [\nu(a+0) - \nu(a)] + \sum_{x_k < x} [\nu(x_k+0) - \nu(x_k-0)] + [\nu(x) - \nu(x-0)]$$

$$S_\pi(a) = S_\nu(a) = 0.$$

(თუ x_k წერტილი უწყვეტობის წერტილია ერთერთი $\pi(x)$ ან $\nu(x)$ ფუნქციისათვის, მაშინ შესაბამი შესაკრები ისპობა თავისით. შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ $\nu(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი არ შეიძლება იყოს უწყვეტობის წერტილი $\pi(x)$ ფუნქციისათვის, მაგრამ ეს ჩვენთვის იმდენად საინტერესო არ არის).

ვთქვათ,

$$S(x) = S_\pi(x) - S_\nu(x).$$

ეს ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$S(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(x)-f(x-0)]$$

$$(a<x<b)$$

$$S(a)=0.$$

ეს ფუნქცია აგრეთვე წარმოადგენს ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაციით და მას $f(x)$ ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია ეწოდება. თავისთავად ცხადია, რომ $S(x)$ ფუნქციის განსაზღვრა არ შეიცვლება, თუ ჩვენ (6) მიმდევრობას ჩამოვაშორებთ ყველა იმ წერტილებს, რომლებშიაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია[1], ასე რომ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ (6) შედგება მხოლოდ $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებისაგან.

ჩვენ ვნახეთ (§ 1, მე-2 თეორემა), რომ

$$\pi(x)-S_\pi(x) \text{ და } \nu(x)-S_\nu(x)$$

ფუნქციები უწყვეტი და ზრდადი არიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(x)=f(x)-S(x)$$

სხვაობა წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაციით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 7. ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი მისი ნახტომთა ფუნქციისა და უწყვეტი ფუნქციისა შემოსაზღვრული ვარიაციით.

§ 4. ე. ჰელის ამორჩევის პრინციპი

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით გამოყენებისათვის მნიშვნელოვან თეორემას, რომელიც ე. ჰელის ეკუთვნის.

წინასწარ დავამტკიცოთ ორი ლემა.

ლემა 1. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია ფუნქციათა უსასრულო $H=\{f(x)\}$ ოჯახი. თუ ოჯახის ყველა ფუნქცია შემოსაზღვრულია ერთი და იგივე რიცხვით

$$|f(x)|\leqslant k, \tag{1}$$

მაშინ ყოველი თვლადი $E\subset[a,b]$ სიმრავლისათვის H ოჯახიდან შეიძლება ამოვირჩიოთ ისეთი $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია E სიმრავლის ყოველ წერტილზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $E=\{x_k\}$. განვიხილოთ იმ მნიშვნელობათა

$$\{f(x_1)\}$$

[1] შეიძლება დაწტუნდეს, რომ (6)-ში ასეთი წერტილები საერთოდ არ იყვნენ.

სიმრავლე, რომლებსაც იღებენ H ოჯახის ფუნქციები x_1 წერტილზე. (1)-ის ძალით ეს სიმრავლე შემოსაზღვრულია და, ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემით, მისგან შეიძლება ამოვირჩიოთ კრებადი მიმდევრობა

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ldots;\quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1. \tag{2}$$

განვიხილოთ ახლა

$$f_1^{(1)}(x_2),\ f_2^{(1)}(x_2),\ f_3^{(1)}(x_2),\ldots$$

მიმდევრობა, $\{f_n^{(1)}(x)\}$ სიმრავლის ფუნქციათა მნიშვნელობებისა x_2 წერტილზე.

ეს მიმდევრობა აგრეთვე შემოსაზღვრულია და მისთვის ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა (მისი მეორე ფორმით), რასაც მივყევართ კრებად

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ldots,\ \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2 \tag{3}$$

მიმდევრობამდე, რომელიც გამოყოფილია $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ მიმდევრობიდან. საყურადღებოა, რომ ორი $f_n^{(2)}$ და $f_m^{(2)}$ ფუნქციის ურთიერთ განლაგება (3) მიმდევრობაში ისეთივეა, როგორც (2) მიმდევრობაში.

ამ პროცესის უსაზღვრო გაგრძელებით ჩვენ ავაგებთ კრებადი მიმდევრობების თვლად სიმრავლეს

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1)\ldots,\ \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1.$$

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ldots,\ \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2.$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$f_1^{(k)}(x_k),\ f_2^{(k)}(x_k),\ f_3^{(k)}(x_k),\ldots,\ \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k) = A_k.$$

ამასთან, ფუნქციათა ყოველი შემდეგი მიმდევრობა გამოყოფილია (ელემენტების მიმდევრობის დაურღვევლად) წინა მიმდევრობებისაგან.

შევნიშნეთ რა ეს, შევადგინოთ აგებული მატრიცის დიაგონალური ელემენტების მიმდევრობა, ე. ი.

$$\{f_n^{(n)}(x)\} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

მიმდევრობა.

ეს საძიებელი, ე. ი. E სიმრავლის ყოველ წერტილზე კრებადი, მიმდევრობაა. მართლაც, ყოველი ფიქსირებული k-სათვის

$$\{f_n^{(n)}(x_k)\} \qquad (n \geqslant k)$$

მიმდევრობა არის ქვემიმდევრობა $\{f_n^{(k)}(x_k)\}$ მიმდევრობისა და ამიტომ კრებადია A_k-საკენ, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ლემა 2. ვთქვათ, $F=\{f(x)\}$ ისეთი ზრდადი ფუნქციების უსასრულო ოჯახია, რომლებიც მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ ამ ოჯახის ყველა ფუნქცია შემოსაზღვრულია ერთი და იგივე რიცხვით

$$|f(x)|\leqslant K,$$

მაშინ F-დან შეიძლება ამოვარჩიოთ ისეთი $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომელიც $[a,b]$-ს ყოველ წერტილზე, კრებადია რაიმე ზრდადი $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ $\{f(x)\}$-სათვის 1-ლი ლემა, და E სიმრავლედ ავიღოთ $[a,b]$ სეგმენტის ყველა რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე და წერტილი a, თუ ის ირაციონალურია. ყოველ $x_k\in E$ წერტილზე არსებობს F-დან გამოყოფილი

$$F_0=\{f^{(n)}(x)\}$$

მიმდევრობის სასრული ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k). \tag{4}$$

შემოვიღოთ $\psi(x)$ ფუნქცია, რომელიც E სიმრავლის ყოველ წერტილზე ტოლია (4) ზღვრისა:

$$\psi(x_k)=\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)\qquad (x_k\in E).$$

ამით $\psi(x)$ ფუნქცია ჯერ-ჯერობით მხოლოდ E სიმრავლეზეა მოცემული, ამასთან ადვილი შესამჩნევია, რომ იგი ზრდადი ფუნქციაა, ე. ი., თუ x_k და x_i არიან E სიმრავლის ისეთი წერტილები, რომ $x_k<x_i$, მაშინ

$$\psi(x_k)\leqslant\psi(x_i).$$

გავავრცელოთ $\psi(x)$ ფუნქციის განმარტება მთელს $[a,b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად:

$$\psi(x)=\sup_{x_k<x}\{\psi(x_k)\}\qquad (x_k\in E)$$

$(a,b]$ მონაკვეთის ყოველი ირაციონალური წერტილისათვის.

ცხადია, რომ $\psi(x)$ ფუნქცია ზრდადია მთელს $[a,b]$ სეგმენტზე. ასეთ შემთხვევაში $\psi(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა Q სიმრავლე სასრულია ან თვლადია.

ვაჩვენოთ, რომ ყოველ ისეთ x_0 წერტილზე, რომელზედაც $\psi(x)$ უწყვეტია, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0)=\psi(x_0). \tag{5}$$

მართლაც, ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის შეიძლება ვიპოვოთ E სიმრავლის ისეთი x_k და x_i წერტილები, რომ

$$x_k<x_0<x_i,\qquad \psi(x_i)-\psi(x_k)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ წერტილების ფიქსაციის შემდეგ, ვიპოვოთ ისეთი n_0, რომ როცა $n > n_0$, გვქონდეს

$$|f^{(n)}(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f^{(n)}(x_i) - \psi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ასეთი n რიცხვებისათვის გვექნება

$$\psi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_k) \leqslant f^{(n)}(x_i) < \psi(x_0) + \varepsilon,$$

და რადგან

$$f^{(n)}(x_k) \leqslant f^{(n)}(x_0) \leqslant f^{(n)}(x_i),$$

ამიტომ, $n > n_0$-სათვის, გვექნება

$$\psi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_0) < \psi(x_0) + \varepsilon,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5).

ამგვარად, ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \psi(x) \qquad (6)$$

შესაძლებელია არ შესრულდეს $\psi(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა თვლად Q სიმრავლეზე.

ამის შემდეგ კვლავ გამოვიყენოთ 1-ლი ლემა F_0 მიმდევრობისათვის, მასთან E სიმრავლედ მივიღოთ იმ წერტილთა Q სიმრავლე, სადაც არ სრულდება (6). ეს მიგვიყვანს F_0-დან ამორჩეულ ისეთ

$$\{f_n(x)\}$$

მიმდევრობაზე, რომელიც კრებადია უკვე $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე (რადგან იქ, სადაც კრებადი იყო $\{f^n(x)\}$ მიმდევრობა, კრებადი იქნება მისი $\{f_n(x)\}$ ქვემიმდევრობაც). თუ ახლა დავუშვებთ

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

მაშინ ცხადია, რომ $\psi(x)$ აღმოჩნდება ზრდადი.

თეორემა 2 (ე. ჰელი). ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია ფუნქციათა უსასრულო $F\{f(x)\}$ ოჯახი. თუ ამ ოჯახის ყველა ფუნქცია და მათი სრული ვარიაციები შემოსაზღვრული არიან ერთიდაიგივე რიცხვით

$$|f(x)| \leqslant K, \quad \bigvee_a^b (f) \leqslant K,$$

მაშინ F ოჯახიდან შეიძლება ამოვარჩიოთ ისეთი $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე კრებადია რაიმე ფუნქციისაკენ შემოსაზღვრული ვარიაციით.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ F ოჯახის ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\pi(x)=\bigvee_a^x(f), \qquad \nu(x)=\pi(x)-f(x).$$

ორივე ეს ფუნქცია ზრდადია. ამასთან

$$|\pi(x)|\leqslant K, \ |\nu(x)|\leqslant 2K.$$

გამოვიყენებთ რა $\{\pi(x)\}$ ოჯახისათვის მე-2 ლემას, ჩვენ მისგან გამოვყოფთ კრებად $\{\pi_k(x)\}$ მიმდევრობას

$$\lim_{n\to\infty}\pi_k(x)=\alpha(x).$$

ყოველ $\pi_k(x)$ ფუნქციას შეესაბამება $\nu_k(x)$ ფუნქცია, რომელიც ავსებს მას F ოჯახის $f_k(x)$ ფუნქციამდე. $\{\nu_k(x)\}$ ოჯახისათვის მე-2 ლემის გამოყენებით, ჩვენ მისგან გამოვყოფთ კრებად $\{\nu_{k_i}(x)\}$ ქვემიმდევრობას

$$\lim_{i\to\infty}\nu_{k_i}(x)=\beta(x).$$

მაგრამ მაშინ ფუნქციათა

$$f_{k_i}(x)=\pi_{k_i}(x)-\nu_{k_i}(x)$$

მიმდევრობა, რომელიც გამოყოფილია F-დან, კრებადია

$$\varphi(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

ფუნქციისაკენ.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. უწყვეტი ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით

თეორემა 1. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით. თუ $f(x)$ უწყვეტია რაიმე x_0 წერტილზე, მაშინ ამავე წერტილზე უწყვეტია

$$\pi(x)=\bigvee_a^x(f)$$

ფუნქციაც.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $x_0<b$, და ვაჩვენოთ, რომ $\pi(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილზე მარჯვნიდან. ამ მიზნით, ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$, და $[x_0,b]$ სეგმენტი დავყოთ წერტილებით

$$x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

ისეთ ნაწილებად, რომ აღმოჩნდეს

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^{b}(f) - \varepsilon. \qquad (1)$$

რადგანაც V ჯამი მხოლოდ იზრდება ახალი წერტილების დამატებით, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

ამ შემთხვევაში, (1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\bigvee_{x_0}^{b}(f) < \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 2\varepsilon +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b}(f).$$

მაშასადამე,

$$\bigvee_{x_0}^{x_1}(f) < 2\varepsilon,$$

და ამიტომ

$$\pi(x_1) - \pi(x_0) < 2\varepsilon.$$

აქედან, მით უფრო

$$\pi(x_0 + 0) - \pi(x_0) < 2\varepsilon.$$

მაგრამ ε ნებისმიერია; მაშასადამე

$$\pi(x_0 + 0) = \pi(x_0).$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\pi(x_0 - 0) = \pi(x_0)$, ე. ი. რომ $\pi(x)$ უწყვეტია *მარცხნიდან* x_0 წერტილზე (თუ $x_0 > a$).

შედეგი 1. *უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით წარმოიდგინება როგორც ორი ზრდადი უწყვეტი ფუნქციის სხვაობა.*

მართლაც, თუ $[a,b]$-ზე მოცემული $f(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, მაშინ უწყვეტია მისი ორივე ზრდადი კომპონენტი

$$\pi(x) = \bigvee_{a}^{x}(f) \quad \text{და} \quad \nu(x) = \pi(x) - f(x).$$

შედეგი 2. *თუ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული $f(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, მა-*

შინ $[a,b]$ სეგმენტის თითქმის ყოველ წერტილზე არსებობს სასრული $f'(x)$ წარმოებული, რომელიც ჯამებად ფუნქციას წარმოადგენს.

ეს დებულება გამომდინარეობს წინა შედეგისა და § 2-ის მე-4 და მე-5 თეორემების დაპირისპირებიდან.

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. დავანაწილოთ $[a,b]$ წერტილებით

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \qquad [\max(x_{k+1} - x_k) = \lambda]$$

და შევადგინოთ ჯამები

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|,$$

$$\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k,$$

სადაც ω_k აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის რხევას $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე.

თეორემა 2. თუ $\lambda \to 0$, მაშინ თითოეული ჯამი V და Ω მიისწრაფვის $f(x)$ ფუნქციის სრული ვარიაციისაკენ $\bigvee\limits_a^b (f)$.

შევნიშნოთ, რომ $\bigvee\limits_a^b (f)$ ვარიაციას ჩვენ არ ვგულისხმობთ აუცილებლად სასრულად.

დამტკიცება. როგორც უკვე ზემოთ აღვნიშნავდით, ახალი დაყოფის წერტილთა დამატებით V ჯამი არ მცირდება. მეორეს მხრივ, თუ დამატებული წერტილი მოხვდა x_k-სა და x_{k+1}-ს შორის, მაშინ V ჯამის ამ დამატებული წერტილით გამოწვეული ნაზრდი არ გადააჭარბებს $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტში $f(x)$ ფუნქციის გაორკეცებულ ω_k რხევას.

ამ შენიშვნის შემდეგ, ავიღოთ რაიმე $A < \bigvee\limits_a^b (f)$ რიცხვი და ვიპოვოთ ისეთი V^* ჯამი, რომ

$$V^* > A.$$

ვთქვათ, ეს ჯამი შეესაბამება $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილების შემდეგ წესს:

$$x_0^* = a < x_1^* < \dots < x_m^* = b.$$

ავირჩიოთ იმდენად მცირე $\delta > 0$, რომ როგორც კი $|x'' - x'| < \delta$, გვქონდეს

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - A}{4m}.$$

ვაჩვენოთ, რომ დანაწილების ყოველი ისეთი წესისათვის, როცა λ გვექნება

$$V > A. \tag{1}$$

მართლაც, თუ დანაწილების ასეთი (I) წესი გვაქვს, შეგვიძლია შევადგინოთ (II) წესი, რომელიც მიიღება (I) წესიდან ყველა $\{x_k^*\}$ წერტილების დამატებით. თუ (II) წესს შეესაბამება V_0 ჯამი, მაშინ

$$V_0 \geqslant V^*. \tag{2}$$

მეორეს მხრივ, (II) წესი მიიღება (I) წესიდან თითო წერტილის m-ჯერ დამატებით, მაგრამ, რადგანაც თითო წერტილის დამატებით გამოწვეული ნაზრდი V ჯამისა არ აღემატება $\frac{V^*-A}{2m}$, ამიტომ

$$V_0 - V < \frac{V^*-A}{2}.$$

აქედან და (3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$V > V_0 - \frac{V^*-A}{2} \geqslant \frac{A+V^*}{2} > A.$$

ამგვარად, როცა $\lambda < \delta$, (2) შესრულებულია, და რადგანაც

$$V = \bigvee_a^b (f),$$

ამიტომ

$$\lim_{\lambda \to 0} V = \bigvee_a^b (f).$$

ახლა უკვე ადვილია დამტკიცების ჩატარება Ω ჯამებისათვისაც. ერთის მხრივ ცხადია, რომ

$$\Omega \geqslant V. \tag{4}$$

მაგრამ თუ ჩვენ ვიპოვით დაყოფის რაიმე წესის შესაბამ Ω ჯამს და შემდეგ ახალი დაყოფის წერტილებად დავამატებთ ისეთ წერტილებს, სადაც $f(x)$ ღებულობს

$$m_k = \min\{f(x)\}, \ M_k = \max\{f(x)\} \qquad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}),$$

მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ ისეთ V' ჯამს, რომელიც, ცხადია, არ იქნება ნაკლები Ω-ზე, საიდანაც

$$\Omega \leqslant \bigvee_a^b (f). \tag{5}$$

(4) და (5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\lambda \to 0} \Omega = \bigvee_a^b (f).$$

დამტკიცებული თეორემა საფუძვლად უდევს იმ საინტერესო მიდგომას შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტ ფუნქციების მიმართ, რომელიც ეკუთვნის ბანახს.

ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრულია და უწყვეტი $[a,b]$ სეგმენტზე და

$$m = \min\{f(x)\}, \quad M = \max\{f(x)\}.$$

შემოვიყვანოთ $[m, M]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $N(y)$ ფუნქცია: $N(y)$ იყოს $f(x) = y$ განტოლების ფესვთა რიცხვის ტოლი.

თუ ამ ფესვთა სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ

$$N(y) = +\infty.$$

$N(y)$ ფუნქციას ბანახის ინდიკატრისს ვუწოდებთ.

თეორემა 3 (ს. ბანახი). ბანახის ინდიკატრისი ზომადია და

$$\int_m^M N(y)dy = \bigvee_a^b (f).$$

დამტკიცება. დავანაწილოთ $[a,b]$ სეგმენტი 2^n თანასწორ ნაწილად და მივიღოთ

$$d_1 = \left[a, \quad a + \frac{b-a}{2^n}\right]$$

$$d_k = \left(a + (k-1)\frac{b-a}{2^n}, \quad a + k\frac{b-a}{2^n}\right] \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2^n).$$

ვთქვათ შემდეგ, რომ $L_k(y)$ ფუნქცია ($k = 1, 2, \ldots, 2^n$) ტოლია 1-სა, თუ

$$f(x) = y \tag{6}$$

განტოლებას აქვს ერთი მაინც ფესვი d_k შუალედში და $L_k(y) = 0$, თუ d_k-ში არაა მოთავსებული ამ განტოლების არცერთი ფესვი. თუ m_k და M_k წარმოადგენენ, შესაბამად, $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ ქვედა და ზედა საზღვრებს d_k შუალედში, მაშინ $L_k(y)$ ტოლია 1-სა (m_k, M_k) ინტერვალში, და ტოლია ნულის $[m_k, M_k]$ სეგმენტის გარეთ, ასე რომ ამ ფუნქციას აქვს არა უმეტეს ორი წყვეტის წერტილისა და, ცხადია, იგი ზომადია. შევნიშნოთ, გარდა ამისა, რომ

$$\int_m^M L_k(y)\,dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

სადაც ω_k არის $f(x)$ ფუნქციის რხევა d_k სეგმენტზე.

ბოლოს შემოვიყვანოთ ფუნქცია

$$N_n(y) = L_1(y) + L_2(y) + \dots + L_{2^n}(y),$$

რომელიც ტოლია იმ d_k შუალედთა რიცხვისა, რომლებშიაც არის მოთავსებული

$$f(x) = y$$

განტოლების ერთი მაინც ფესვი. ცხადია, რომ $N_n(y)$ ფუნქცია ზომადია. ამასთან

$$\int_m^M N_n(y)\,dy = \sum_{k=1}^{2^n}$$

ასე რომ, მე-2 თეორემის ძალით,

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$N_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant N_3(y) \leqslant \dots$$

და, მაშასადამე, არსებობს, სასრული ან უსასრულო, ზღვარი

$$N^*(y) = \lim_{n\to\infty} N_n(y),$$

რომელიც ზომად ფუნქციას წარმოადგენს. ბ. ლევის თეორემის ძალით

$$\int_m^M N^*(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ

$$N^*(y) = N(y), \tag{7}$$

მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება.

პირველად ყოვლისა სავსებით ცხადია, რომ

$$N_n(y) \leqslant N(y),$$

საიდანაც

$$N^*(y) \leqslant N(y). \tag{8}$$

ვთქვათ ახლა, q ნატურალური რიცხვია, რომელიც არ აღემატება $N(y)$-ს. მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ (6) განტოლების q სხვადასხვა

$$x_1 < x_2 < \dots < x_q$$

ფესვი. თუ n იმდენად დიდია, რომ

$$\frac{b-a}{2^n} < \min(x_{k+1} - x_k),$$

მაშინ ყოველი x_k ფესვი სხვადასხვა d_k შუალედში მოხვდება, ასე რომ

$$N_n(y) \geq q,$$

საიდანაც, მით უფრო,

$$N^*(y) \geq q. \tag{9}$$

თუ $N(y) = +\infty$, მაშინ q შეიძლება ავიღოთ რაგინდ დიდი, ასე რომ აგრეთვე $N^*(y) = +\infty$; თუ $N(y)$ სასრულია, შეგვიძლია ავიღოთ $q = N(y)$ და მაშინ (9) მიიღებს სახეს

$$N^*(y) \geq N(y).$$

აქედან და (8)-დან გამომდინარეობს (7).

შედეგი 1. *იმისათვის რომ უწყვეტ* $f(x)$ *ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაცია ჰქონდეს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ბანახის ინდიკატრისი* $N(y)$ *ჯამებადი იყოს.*

შედეგი 2. *თუ* $f(x)$ *წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაციით, მაშინ იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლებსაც ფუნქცია უსასრულოდ ბევჯერ იღებს, (ორდინატთა ღერძზე) ნული ზომა აქვს.*

მართლაც, ამ შემთხვევაში ჯამებადია რა ბანახის ინდიკატრისი, ის თითქმის ყველგან სასრული უნდა იყოს.

§ 6. სტილტიესის ინტეგრალი

აქ ჩვენ შევისწავლით რიმანის ინტეგრალის ცნების მეტად მნიშვნელოვან განზოგადებას — სტილტიესის ინტეგრალს.

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია ორი სასრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქცია. დავანაწილოთ $[a,b]$ სეგმენტი წერტილებით

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b,$$

ყოველი ნაწილაკ $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტში ამოვარჩიოთ თითო ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right].$$

თუ, როცა

$$\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \to 0\text{-ს},$$

σ ჯამი მიისწრაფვის სასრული I ზღვრისაკენ, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც სეგმენტის დანაწილების წესისა და არც ξ_k წერტილთა არჩევისაგან, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ *ფუნქციის სტილტიესის ინტეგრალი* $g(x)$ *ფუნქციით* და ასე აღინიშნება

$$\int_a^b f(x)dg(x), \quad \text{ან} \quad (S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

განმარტების ზუსტი შინაარსი ასეთია: I რიცხვი f(x) ფუნქციის სტილტიესის ინტეგრალია $g(x)$ ფუნქციით, თუ ყოველ $\varepsilon>0$-ს შეესაბამება ისეთი $\delta>0$, რომ დანაწილების ყოველი ისეთი წესისთვის, რომლისთვისაც $\lambda<\delta$, გვექნება

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

როგორც არ უნდა ავირჩიოთ ξ_k წერტილები.

ცხადია, რომ რიმანის ინტეგრალი სტილტიესის ინტეგრალის კერძო შემთხვევაა, რომელიც მიიღება $g(x) = x$-სათვის.

აღვნიშნოთ სტილტიესის ინტეგრალის რამოდენიმე აშკარა თვისება:

$$1.\quad \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dg(x) = \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \int_a^b f_2(x)\,dg(x).$$

$$\int_a^b f(x)\,d[g_1(x)+g_2(x)] = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \int_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

3. თუ k და l მუდმივებია, მაშინ

$$\int_a^b k f(x)\,d\,lg(x) = kl\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

სამივე შემთხვევაში, მარჯვენა ნაწილის არსებობიდან გამომდინარეობს მარცხენა ნაწილის არსებობა.

4. თუ $a<c<b$ და არსებობს

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x)$$

ტოლობაში შემავალი სამივე ინტეგრალი, მაშინ ეს ტოლობა სამართლიანია.

ინტეგრალის ამ თვისების დასამტკიცებლად უნდა ვიზრუნოთ მხოლოდ იმაზე, რომ წერტილი c მოხვდეს $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილთა შორის $\int_a^b f\,dg$ ინტეგრალის შესაბამი σ ჯამის შედგენის დროს.

ადვილია დამტკიცება იმისა, რომ $\int_a^b f\,dg$ ინტეგრალის არსებობიდან გამომდინარეობს ორივე $\int_a^c f\,dg$ და $\int_c^b f\,dg$ ინტეგრალის არსებობა, მაგრამ ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით. უფრო საინტერესოა შევნიშნოთ ის, რომ შებრუნებული დებულება სამართლიანი არ არის.

მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $[-1,+1]$ სეგმენტზე, ამასთან

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } -1 \leqslant x \leqslant 0,\\ 1, \text{ როცა } \quad 0 < x \leqslant 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } -1 \leqslant x < 0,\\ 1, \text{ როცა } \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x) \text{ და } \int_{0}^{1} f(x)\,dg(x)$$

ინტეგრალები არსებობენ (რადგან σ ჯამები ნულის ტოლია). ამავე დროს

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dg(x)$$

ინტეგრალი არ არსებობს. მართლაც, დავანაწილოთ $[-1, +1]$ სეგმენტი ისე, რომ 0 წერტილი არ მოხვდეს დაყოფის წერტილთა შორის, და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)].$$

ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ $x_i < 0 < x_{i+1}$, მაშინ σ ჯამში დარჩება მხოლოდ i-ური შესაკრები, რადგან, თუ x_k და x_{k+1} წერტილები მოთავსებული არიან ერთ მხარეს 0-დან, მაშინ $g(x_k)=g(x_{k+1})$.

მაშასადამე,

$$\sigma = f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)] = f(\xi_i).$$

იმისდა მიხედვით $\xi_i \leqslant 0$ თუ $\xi_i > 0$, გვექნება

$$\sigma = 0 \text{ ან } \sigma = 1,$$

ასე რომ σ-ს არა აქვს ზღვარი.

5. ერთერთი $\int_a^b f(x)dg(x)$ და $\int_a^b g(x)\,df(x)$ ინტეგრალის არსებობიდან გამომდინარეობს არსებობა მეორე ინტეგრალისა და ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = [f(x)g(x)]_a^b, \tag{1}$$

სადაც, როგორც საზოგადოდ, მიღებულია

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = [f(x)g(x)]_a^b \tag{2}$$

(1) ფორმულას ეწოდება **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.**

დავამტკიცოთ ინტეგრალის ეს თვისება. ვთქვათ, არსებობს $\int_a^b g(x)\,d\,f(x)$ ინტეგრალი. დავანაწილოთ $[a,b]$ და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)].$$

ეს ჯამი შეიძლება ასედაც წარმოვადგინოთ

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,g(x_k),$$

საიდანაც

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})] + f(\xi_{n-1})\,g(x_n) - f(\xi_0)\,f(x_0).$$

თუ მარჯვენა მხარეს დავუმატებთ და გამოვაკლებთ (2)-ს, მივიღებთ

$$\sigma = [f(x)\,g(x)]_a^b -$$

$$-\{g(a)[f(\xi_0)-f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_n)-f(\xi_{k-1})] + g(b)[f(b)-f(\xi_{n-1})]\}.$$

ნაკვთურ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არის $\int_a^b g\,df$ ინტეგრალისათვის შედგენილი ჯამი, ამასთან $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილებს წარმოადგენენ

$$a \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant b$$

წერტილები, ხოლო $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ წერტილები $[a,\xi_0], [\xi_0,\xi_1], \ldots, [\xi_{n-1},b]$ სეგმენტების წერტილებია.

თუ $\max(x_{k+1}-x_k)$ ნულისაკენ მიისწრაფვის, ნულისაკენ მიისწრაფვის აგრეთვე

$$\max(\xi_{k+1}-\xi_k)\text{-ც},$$

ასე რომ ნაკვთურ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი მიისწრაფვის $\int_a^b g(x)\,d\,f(x)$ ინტეგრალისაკენ, საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი დებულება.

ბუნებრივია დაისვას საკითხი სტილტიესის ინტეგრალის არსებობის პირობების შესახებ. ჩვენ ამ მიმართულებით მხოლოდ ერთი თეორემით დავკმაყოფილდებით.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და $g(x)$-ს აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

ინტეგრალი არსებობს.

დამტკიცება. ცხადია, საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, რადგან ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით წარმოადგენს ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობას.

დავანაწილოთ $[a,b]$ სეგმენტი

$$x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$$

წერტილებით და m_k და M_k-თი აღვნიშნოთ, სათანადოდ, $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე.

ვთქვათ,

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k[g(x_{k+1})-g(x_k)],\quad S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k[g(x_{k+1})-g(x_k)].$$

ცხადია, რომ ξ_k წერტილების ყოველნაირი არჩევის დროს $[x_k,x_{k+1}]$ სეგმენტში გვექნება

$$s\leqslant\sigma\leqslant S. \qquad (3)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ დაყოფის ახალი წერტილის მიმატებისას s ჯამი არ კლებულობს, ხოლო S ჯამი არ მატულობს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ არცერთი s ჯამი არ აღემატება არცერთ S ჯამს. მართლაც, თუ გვაქვს დაყოფის ორი წესი I და II, რომელთაც s_1, S_1 და s_2, S_2 ჯამები შეესაბამებიან, ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ დაყოფის III წესი, I და II წესის დაყოფის წერტილთა გაერთიანებით. თუ III წესს შეესაბამება s_3 და S_3 ჯამები, მაშინ

$$s_1\leqslant s_3\leqslant S_3\leqslant S_2,$$

ასე რომ $s_1\leqslant S_2$.

შევნიშნეთ რა ეს, ყველა ქვედა ჯამთა $\{s\}$ სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს დავარქვათ I,

$$I=\sup\{s\}.$$

დაყოფის ყოველგვარი წესისათვის გვექნება:

$$s\leqslant I\leqslant S,$$

და, მაშასადამე, (3)-ის ძალით

$$|\sigma-I|\leqslant S-s.$$

თუ ავიღებთ ნებისმიერ $\varepsilon>0$-ს და ვიპოვით ისეთ $\delta>0$-ს, რომ $|x''-x'|<\delta$ უტოლობა იწვევდეს $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ უტოლობას, მაშინ $\lambda<\delta$-სათვის გვექნება

$$M_k-m_k<\varepsilon \qquad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

და მაშასადამე,

$$S-s<\varepsilon[g(b)-g(a)].$$

აქედან, $\lambda < \delta$-სათვის, მით უფრო, გვექნება

$$|\sigma - I| < \varepsilon[g(b) - g(a)].$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I,$$

ასე რომ I არის $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ ინტეგრალი.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით ინტეგრებადია ყოველი უწყვეტი ფუნქციით.

საკითხი სტილტიესის ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ დაწვრილებით გარჩეული იქნება IX თავის 5-6 §-ში. ახლა ჩვენ მხოლოდ ორი ელემენტარული შემთხვევით დავკმაყოფილდებით.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ზე, ხოლო $g(x)$-ს $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე აქვს $g'(x)$ წარმოებული, რომელიც (R) ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{4}$$

დამტკიცება. თეორემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $g(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, და ამის გამო მას აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია, ასე რომ (4)-ის მარცხენა ნაწილის ინტეგრალი არსებობს. მეორეს მხრივ, $g'(x)$ ფუნქცია და მასთან $f(x)g'(x)$ ნამრავლიც თითქმის ყველგან უწყვეტია, ასე რომ არსებობს (4)-ის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალიც. საჭიროა დავრწმუნდეთ მათ ტოლობაში.

ამ მიზნით $[a,b]$ დავანაწილოთ წერტილებით

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b,$$

და ყოველი $g(x_{k+1}) - g(x_k)$ სხვაობისათვის გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) \qquad (x_k < \bar{x}_k < x_{k+1}).$$

თუ $\int_a^b f\,dg$ ინტეგრალის σ ჯამის შედგენის დროს ξ_k წერტილებად სწორედ იმ $\bar{x}_k$ წერტილებს ავიღებთ, რომლებიც ლაგრანჟის ფორმულაში მონაწილეობენ, მაშინ σ ჯამი მიიღებს სახეს

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)\,g'(\bar{x}_k)\,(x_{k+1} - x_k),$$

ე. ი. აღმოჩნდება $f(x)g'(x)$ ფუნქციის რიმანის ჯამად. დანაწილების „გაწვრილებით“ და ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ (4) ტოლობას.

თეორემა 3. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, ხოლო $g(x)$ მუდმივია ყოველ $(a,c_1),(c_1,c_2),\ldots,(c_m,b)$ ინტერვალებზე, სადაც

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b,$$

მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] +$$

$$+ f(b)[g(b)-g(b-0)]. \tag{5}$$

დამტკიცება. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) = |g(a+0)-g(a)| + \sum_{k=1}^{m}\{|g(c_k)-g(c_k-0)|+|g(c_k+0)-g(c_k)|\} +$$

$$+|g(b)-g(b-0)|,$$

ასე რომ $g(x)$ ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს $[a,b]$-ზე და, მაშასადამე, $[a,b]$-ს ყოველგვარ ნაწილზედაც. ამის გამო

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x), \tag{6}$$

სადაც მიღებულია $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$.

დაგვრჩა $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)$ ინტეგრალის გამოთვლა. მაგრამ $[c_k, c_{k+1}]$-ის დანაწილებისა და ჩვენთვის საინტერესო ინტეგრალისათვის σ ჯამის შედგენით, აშკარაა რომ მივიღებთ

$$\sigma = f(\xi_0)[g(c_k+0)-g(c_k)] + f(\xi_{n-1})[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)],$$

რადგან ყველა სხვა შესაკრები ისპობა. მაშასადამე, ზღვარში გვექნება

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x) = f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k)] + f(c_{k+1})[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)],$$

საიდანაც, (6)-თან დაკავშირებით, გამომდინარეობს (5).

§ 7. ზღვარზე გადასვლა სტილტიესის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a,b]$-ზე უწყვეტია, ხოლო $g(x)$-ს აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია ამ სეგმენტზე, მაშინ

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant M(f)\bigvee_a^b(g), \tag{1}$$

სადაც $M(f)=\max|f(x)|$.

დამტკიცება. $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილების ყოველგვარი წესისათვის და ξ_k წერტილთა ნებისმიერი შერჩევისათვის გვექნება

$$|\sigma| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]\right| \leqslant M(f)\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)| \leqslant M(f)\cdot\bigvee_a^b(g),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1).

თეორემა 2. ვთქვათ, $[a,b]$-ზე მოცემულია $g(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით და უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია (უწყვეტ) $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$M(f_n-f)=\max|f_n(x)-f(x)|.$$

მაშინ, (1)-ის ძალით

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dg(x)-\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant M(f_n-f)\cdot\bigvee_a^b(g),$$

და დაგვრჩენია მხოლოდ შევნიშნოთ, რომ პირობის ძალით

$$M(f_n-f)\to 0.$$

თეორემა 3 (ე. ჰელი). ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია და ისეთ ფუნქციათა $\{g_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია სასრული $g(x)$ ფუნქციისაკენ $[a,b]$-ს ყოველ წერტილში. თუ ყოველი n-სათვის

$$\bigvee_a^b(g_n)<K,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{2}$$

დამტკიცება. უპირველეს ყოვლისა ვაჩვენოთ, რომ

$$\bigvee_a^b (g) \quad K, \tag{3}$$

ასე რომ ზღვარით ფუნქციას აგრეთვე შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს. მართლაც, თუ ჩვენ ნებისმიერად დავანაწილებთ $[a,b]$ სეგმენტს, გვექნება

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| < K, \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

საიდანაც ზღვარში ($n \to \infty$-სათვის) მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \quad K.$$

აღებული დაყოფის ნებისმიერობის ძალით აქედან გამომდინარეობს (3).

ამის შემდეგ ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და $[a,b]$ დავანაწილოთ $\{x_k\}$ წერტილებით ($k = 0,1,\ldots,m$) იმდენად მცირე $[x_k, x_{k+1}]$ ნაწილებად, რომ ყოველ მათგანში $f(x)$ ფუნქციის რხევა ნაკლები იყოს ვიდრე $\frac{\varepsilon}{3K}$. მაშინ

$$\int_b^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dg(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x).$$

მაგრამ

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x) = g(x_{k+1}) - g(x_k).$$

მეორეს მხრივ, $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე გვექნება

$$|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3K},$$

საიდანაც

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K} \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} (g);$$

და, მაშასადამე,

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]\, dg(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K} \bigvee_a^b (g) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

ამგვარად,

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right] + \Theta\,\frac{\varepsilon}{3} \qquad (|\Theta| \leqslant 1).$$

ანალოგიურად,

$$\int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\left[g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)\right] + \Theta_n\,\frac{\varepsilon}{3} \qquad (|\Theta_n| \leqslant 1).$$

მაგრამ $n > n_0$-სათვის გვექნება

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\left[g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)\right] - \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right] \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

და, მაშასადამე ასეთი n-სათვის აღმოჩნდება, რომ

$$\left| \int_a^b f(x)\,dg_n(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x) \right| < \varepsilon,$$

და ეს ამტკიცებს თეორემას.

დამტკიცებული თეორემის საშუალებით საკითხი $\int_a^b f(x)dg(x)$ ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ (სადაც $f(x)$ განუწყვეტელია და $g(x)$-ს შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს) ჩვენ შეგვიძლია დავიყვანოთ იმ შემთხვევაზე, როდესაც $g(x)$ უწყვეტია.

მართლაც, ვთქვათ, $g(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა შემოსაზღვრული ვარიაციით. შემოვიყვანოთ $g(x)$ ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია $s(x)$

$$s(x) = [g(a+0) - g(a)] + \sum_{x_k < x} [g(x_k+0) - g(x_k-0)] + [g(x) - g(x-0)].$$

როგორც ნაჩვენები იყო § 3-ის მე-7 თეორემაში,

$$g(x) = s(x) + \gamma(x),$$

სადაც $\gamma(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა შემოსაზღვრული ვარიაციით. აქედან

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,ds(x) + \int_a^b f(x)\,d\gamma(x).$$

ვაჩვენოთ, რომ $\int_a^b f(x)\,ds(x)$ ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება. ამ

მიზნით, შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\}.$$

მწკრივი კრებადია[1]. ამის შემდეგ შემოვიღოთ $s_n(x)$ ფუნქციები ასე: $s_n(a)=0$;

$$s_n(x)=[g(a+0)-g(a)]+\sum_{x_k<x}[g(x_k-0)-g(x_k)-0]+[g(x)-g(x-0)],$$

როცა $a<x\leqslant b$, ამასთან მიმდევრობაში მიიღებიან მხოლოდ ისეთი წყვეტის x_k წერტილები $g(x)$ ფუნქციისა, რომელთათვისაც $k\leqslant n$.

ცხადია, რომ ყოველი x-სათვის $[a,b]$-დან

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x).$$

მეორეს მხრივ,

$$\bigvee_a^b(s_n)=|g(a+0)-g(a)|+\sum_{k=1}^{n}\{|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\}+$$
$$+|g(b)-g(b-0)|,$$

ასე რომ ყველა $s_n(x)$ ფუნქციების ვარიაციები შემოსაზღვრული არიან ერთი-დაიგივე რიცხვით.

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,ds_n(x)=\int_a^b f(x)\,ds(x).$$

მაგრამ $s_n(x)$ ფუნქცია მუდმივია ინტერვალებში $a,x_1,\ldots,x_n,b$ წერტილებს შორის. მაშასადამე, § 6-ს მე-3 თეორემის ძალით

$$\int_a^b f(x)\,ds_n(x)=f(a)[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=1}^{n}f(x_k)[g(x_k+0)-g(x_k-0)]+$$
$$+f(x)[g(b)-g(b-0)]$$

---

[1]. მართლაც, თუ $g(x)=\pi(x)-\nu(x)$, სადაც $\pi(x)$ და $\nu(x)$ ზრდადი ფუნქციებია, მა-შინ თითოეული (დადებითი) მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)],\quad \sum_{k=1}^{\infty}[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)],$$

აშკარაა, კრებადია, და საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\leqslant[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)]+[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)].$$

(ცხადია, რომ $s_n(x)$ ფუნქციების ნახტომები $a, x_1, \dots, x_n, b$ წერტილებში ემთხვევიან $g(x)$ ფუნქციის ნახტომებს). აქედან

$$\int_a^b f(x)ds(x) = f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[g(x_k+0)-g(x_k-0)] +$$

$$+ f(b)[g(b)-g(b-0)],$$

და $\int_a^b f(x)dg(x)$ ინტეგრალის გამოსათვლელად დაგვრჩენია გამოვითვალოთ

$\int_a^b f(x)\,d\gamma(x)$, სადაც $\gamma(x)$ არის $g(x)$ ფუნქციის უწყვეტი კომპონენტი

§ 8. წრფივი ფუნქციონალები

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია $g(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით. ეს ფუნქცია საშუალებას გვაძლევს $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ ყოველ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას შევუსაბამოთ რიცხვი

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{1}$$

ამასთან, დაკმაყოფილებულია შემდეგი პირობები.

1) $\Phi(f_1+f_2)=\Phi(f_1)+\Phi(f_2)$,

2) $|\Phi(f)| \leq K\cdot M(f)$, სადაც $M(f)=\max|f(x)|$, ხოლო $K=\bigvee_a^b(g)$.

თუ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ ყოველ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას შეესაბამება რიცხვი $\Phi(f)$ ისე, რომ დაცულია 1) და 2) პირობები, მაშინ ამბობენ, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ უწყვეტ ფუნქციათა C სიმრავლეზე მოცემულია *წრფივი ფუნქციონალი*. თურმე არავითარი სხვა წრფივი ფუნქციონალები, გარდა (1)-სა, C სიმრავლეზე არ არსებობენ.

სანამ დავამტკიცებთ ამ დებულებას, შევნიშნოთ, რომ C სიმრავლეზე მოცემული ყოველი წრფივი $\Phi(f)$ ფუნქციონალისათვის გვაქვს

$$\Phi(kf) = k\Phi(f),$$

რაც მტკიცდება სავსებით ისევე, როგორც L_2-ზე მოცემული ფუნქციონალების შემთხვევაში (იხ. თავი VII, § 4).

თეორემა (ფ. რისი). თუ $[a,b]$ *სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების C სიმრავლეზე მოცემულია წრფივი $\Phi(f)$ ფუნქციო-*

ნალი. მაშინ არსებობს ისეთი $g(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, რომ ყოველი $f(x) \in C$-სათვის გვექნება

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\, dg(x). \tag{1}$$

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა

$$a = 0, \; b = 1,$$

რადგან ზოგადი შემთხვევა მიიყვანება ამ შემთხვევაზე არგუმენტის წრფივი გარდაქმნის საშუალებით. აღნიშნული მარტივი შემთხვევისათვის რისის თეორემის მეტად მოხდენილი დამტკიცება მოცემული იყო ტ. ჰილდებრანდტისა და ი. შოენბერგის მიერ. ჩვენ სწორედ ამ დამტკიცებას მოვიყვანთ.

IV თავის § 5-ში აღნიშნული იყო, რომ

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

გარდა ამისა, როცა $x \in [0, 1]$, ამ ჯამის არც ერთი შესაკრები არ არის უარყოფითი. მაშასადამე, თუ

$$\varepsilon_k = \pm 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

მაშინ

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq 1. \tag{2}$$

ამ შენიშვნის შემდეგ, განვიხილოთ $[0, 1]$-ზე აღებულ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციათა სიმრავლეზე მოცემული $\Phi(f)$ წრფივი ფუნქციონალი. წრფივი ფუნქციონალის განმარტების მიხედვით, არსებობს ისეთი K, რომ

$$|\Phi(f)| \leq K \; M(f).$$

აქედან და (2)-დან

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right] \right| \leq k.$$

თუ ახლა ε_k ნიშნებს ისე შევარჩევთ, რომ უკანასკნელი ჯამის არც ერთი წევრი არ იყოს უარყოფითი, აღმოვაჩენთ, რომ

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right] \right| \leq K. \tag{3}$$

შემოვიღოთ ახლა $g_n(x)$ ფუნქცია შემდეგი დაშვებით:

$g_n(0) = 0$

$$g_n(x) = \Phi[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}] \qquad \left(0 < x < \frac{1}{n}\right)$$

$$g_n(x) = \Phi[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}] + \Phi[C_n^1 x^1 (1-x)^{n-1}] \qquad \left(\frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n}\right)$$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}] \qquad \left(\frac{n-1}{n} \leqslant x < 1\right)$$

$$g_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \Phi[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}].$$

(3)-ს ძალით, თვით $g_n(x)$ ფუნქციები და მათი სრული ვარიაციები შემოსაზღვრული არიან ერთიდაიგივე რიცხვით. ამიტომ, ჰელის ამორჩევის პრინციპის საფუძველზე, $\{g_n(x)\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება ამოვირჩიოთ ისეთი $\{g_{n_i}(x)\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც [0,1]-ის ყოველ წერტილზე იკრიბება $g(x)$ ფუნქციისაკენ შემოსაზღვრული ვარიაციით.

თუ $f(x)$ წარმოადგენს [0,1]-ზე მოცემულ უწყვეტ ფუნქციას, მაშინ § 6-ს მე-3 თეორემის ძალით

$$\int_0^1 f(x) dg_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \Phi[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}],$$

საიდანაც

$$\int_0^1 f(x)\, dg_n(x) = \Phi[B_n(x)],$$

სადაც

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ბერნშტეინის პოლინომს.

ს. ბერნშტეინის თეორემის ძალით (თავი IV, § 5)

$$M(B_n - f) \to 0,$$

ხოლო წრფივი ფუნქციონალის განმარტებიდან

$$|\Phi(B_n) - \Phi(f)| = |\Phi(B_n - f)| \leqslant K \cdot M(B_n - f) \to$$

მაშასადამე, $n \to \infty$-სათვის გვაქვს

$$\Phi(B_n) \to \Phi(f),$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \Phi(f).$$

მაგრამ, თუ n მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, ისე რომ გაირბენს $n_1, n_2, n_3, \ldots$ მიმდევრობას, მაშინ ჰელის თეორემის ძალით (§ 7-დან) გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \int_0^1 f(x)\,dg(x).$$

მაშასადამე,

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)\,dg(x),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

სავარჯიშო VIII თავისათვის

1. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაცია ჰქონდეს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს ისეთი ზრდადი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ, როცა $x' < x''$, მაშინ

$$f(x'') - f(x') \leqslant \varphi(x'') - \varphi(x').$$

2. თუ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე არსებობს უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$, და ამასთან $|f'(x)| \leqslant K$, მაშინ

$$m^* f(E) \leqslant K \cdot m^* E.$$

3. $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას $\alpha > 0$ მაჩვენებლით, თუ $|f(x'') - f(x')| \leqslant K|x'' - x'|^{\alpha}$. აჩვენეთ, რომ $\alpha > 1$-სათვის $f(x) \equiv \mathrm{const}$. ააგეთ მაგალითი ფუნქციისა შემოსაზღვრული ვარიაციით, რომელიც არ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას არც ერთი α-სათვის. ააგეთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას მოცემული $\alpha < 1$ მაჩვენებლით და რომელსაც უსასრულო სრული ვარიაცია აქვს.

4. $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ ინტეგრალი არსებობს, თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას α მაჩვენებლით, ხოლო $g(x)$ — ლიპშიცის პირობას β მაჩვენებლით, და ამასთან $\alpha + \beta > 1$ (ვ. კონდურარი).

5. თუ $f(x)$ უწყვეტია, ხოლო $g(x)$-ს აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია, მაშინ ფუნქციას $\int_a^x f(x)\,dg(x)$ შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს და ის უწყვეტია

$g(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ყოველ წერტილზე.

6. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ მიმდევრობა. აღვნიშნოთ $\Delta^0\mu_n = \mu_n$. $\Delta^{k+1}\mu_n = \Delta^k\mu_n - \Delta^k\mu_{n+1}$. იმისათვის რომ არსებობდეს ისეთი ზრდადი $g(x)$ ფუნქცია რომლისათვისაც

$$\int_0^1 x^n dg_n(x) = \mu_n \quad (n = 0,1,2,\ldots), \tag{1}$$

აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი k-სა და n-სათვის გვქონდეს

$$\Delta^k\mu_n \geqslant 0$$

(ფ. ჰაუსდორფი).

7. იმავე აღნიშვნებში, რომ არსებობდეს ისეთი $g(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, რომელიც (1)-ს დააკმაყოფილებს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა n-სათვის გვქონდეს

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant K$$

(ფ. ჰაუსდორფი).

8. დაამტკიცეთ, რომ § 8-ს რისის თეორემა წარმოადგენს ზემოთ ჩამოყალიბებული ჰაუსდორფის თეორემის შედეგს.

9. $F = \{f(x)\}$ სიმრავლე შედგება ე რ თ ო ბ ლ ი ვ უ წ ყ ვ ე ტ ი ფუნქციებისაგან, თუ ყოველ $\varepsilon > 0$-ს შეესაბამება ისეთი $\delta > 0$, რომ $|x'' - x'| < \delta$ უტოლობა იწვევს $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ უტოლობას ყველა ფუნქციისათვის F-დან. თუ ასეთი უსასრულო F სიმრავლის ყველა ფუნქცია შემოსაზღვრულია ერთიდაიგივე რიცხვით, მაშინ F-დან შეიძლება ამოვარჩიოთ თანაბრად კრებადი მიმდევრობა (ც. არცელა — ჯ. ასკოლი).

10. § 5-ის ბანახის თეორემაზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)$$

ტოლობა უწყვეტი ფუნქციისათვის.

თავი IX

აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§31. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები

შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე ფუნქციათა კლასთან მჭიდრო კავშირშია უფრო ვიწრო, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების კლასი, რომელიც პირველად ჯ. ვიტალიმ განიხილა.

განმარტება. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია სასრული $f(x)$ ფუნქცია. თუ ყოველ $\varepsilon > 0$-ს შეესაბამება ისეთი $\delta > 0$, რომ ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალთა ნებისმიერი სასრული $(a_1, b_1) \ldots, (a_n, b_n)$ სისტემისათვის, რომლისათვისაც

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta, \tag{1}$$

გვექნება

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{ f(b_k) - f(a_k) \} \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია.

ცხადია, რომ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, უწყვეტია ჩვეულებრივი აზრით, რადგან კერძოდ შეგვიძლია მივიღოთ $n = 1$. ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, რომ შებრუნებულ მდგომარეობას ადგილი არა აქვს.

განმარტების აზრის შეუცვლელად, (2) პირობის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ უფრო მძიმე პირობა

$$\sum_{k=1}^{n} | f(b_k) - f(a_k) | < \varepsilon. \tag{3}$$

მართლაც, ვთქვათ, $\delta > 0$ ისეთია, რომ (1)-დან გამომდინარეობს

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{ f(b_k) - f(a_k) \} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშინ, თუ ჩვენ ავიღებთ ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების $\{(a_k, b_k)\}$ სისტემას ($k = 1, 2, \ldots, n$), რომლისათვისაც შესრულებულია (1), ჩვენ შეგვიძლია გავყოთ ეს სისტემა ორ A და B ნაწილად შემდეგი წესის მიხედვით: A-ში შევიყვანოთ ის (a_k, b_k) ინტერვალები, რომელთათვისაც $f(b_k)-f(a_k)\geqslant 0$, ყველა დანარჩენები კი B-ში. აშკარა

$$\sum_A |f(b_k)-f(a_k)| = \left|\sum_A \{f(b_k)-f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_B |f(b_k)-f(a_k)| = \left|\sum_B \{f(b_k)-f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

დამოკიდებულებების ძალით, ცხადია, რომ (3) შესრულებული იქნება.

რამდენადაც (3)-ის ყველა შესაკრები არაუარყოფითია და მათი რიცხვი ნებისმიერია, ამიტომ ცხადია, რომ ყოველ $\varepsilon > 0$-ს შეესაბამება ისეთი $\delta > 0$, რომ ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების როგორი $\{(a_k, b_k)\}$ სასრული ან თ ვ ლ ა დ ი სისტემაც არ უნდა ავიღოთ, რომლისათვისაც

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

გვექნება

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon.$$

ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური ნაზრდების ნაცვლად შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მის რხევაზე. მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი $[a_k, b_k]$ სეგმენტზე m_k და M_k არიან, მაშინ $[a_k, b_k]$ სეგმენტში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი α_k და β_k წერტილები, რომ

$$f(\alpha_k) = m_k, \quad f(\beta_k) = M_k.$$

რამდენადაც (α_k, β_k) ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი არ აღემატება (a_k, b_k) ინტერვალების სიგრძეთა ჯამს, ცხადია, რომ

$$\sum_k |f(\beta_k)-f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

ამგვარად, თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის შეიძლება ისეთი $\delta > 0$ ვიპოვოთ, რომ ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების ყოველგვარი თვლადი $\{(a_k, b_k)\}$ სისტემისათვის, რომლისათვისაც

$$\sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon,$$

გვექნება

$$\sum_k \omega_k < \varepsilon,$$

სადაც, როგორც ჩვეულებრივ, ω_k აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის რხევას $[a_k, b_k]$-ზე.

აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს ნებისმიერი ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას.

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant k\,|x''-x'|.$$

თეორემა 1. თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია მათი ჯამი, მათი სხვაობა და ნამრავლი. გარდა ამისა, თუ $g(x)$ ნულად არ იქცევა, აბსოლუტურად უწყვეტია $\frac{(f)\,x}{g(x)}$ ფარდობაც.

დამტკიცება. ჯამისა და სხვაობის აბსოლუტური უწყვეტობა ერთბაშად გამომდინარეობს იქედან, რომ

$$|\{f(b_k)\pm g(b_k)\}-\{f(a_k)\pm g(a_k)\}|\leqslant|f(b_k)-f(a_k)|+|g(b_k)-g(a_k)|.$$

შემდეგ, თუ A და B წარმოადგენენ $|f(x)|$ და $|g(x)|$-ის ზუსტ ზედა საზღვრებს, მაშინ

$$|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)|\leqslant|g(b_k)||f(b_k)-f(a_k)|+|f(a_k)||g(b_k)-g(a_k)|\leqslant$$
$$\leqslant B|f(b_k)-f(a_k)|+A|g(b_k)-g(a_k)|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს $f(x)g(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური უწყვეტობა.

დაბოლოს, თუ $g(x)$ ნულად არ იქცევა, მაშინ $|g(x)|\geqslant\sigma>0$, საიდანაც

$$\left|\frac{1}{g(b_k)}-\frac{1}{g(a_k)}\right|\leqslant\frac{|g(b_k)-g(a_k)|}{\sigma^2}$$

და ფუნქცია $\frac{1}{g(x)}$ აბსოლუტურად უწყვეტია; ამიტომ აბსოლუტურად უწყვეტია $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ ფუნქციაც.

ორი აბსოლუტურად უწყვეტი $F(y)$ და $f(x)$ ფუნქციის სუპერპოზიცია $F[f(x)]$ შესაძლებელია არ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი. ქვემოთ ჩვენ დავუბრუნდებით ამ საკითხს; ჯერ-ჯერობით კი მოვიყვანთ ორ მარტივ პირობას, რომლებიც უზრუნველყოფენ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების სუპერპოზიციის აბსოლუტურ უწყვეტობას.

თეორემა 2. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ისეთი აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობანიც მოთავსებულია $[A, B]$ სეგმენტში. თუ $[A, B]$-ზე მოცემული $F(y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, მაშინ რთული $F[f(x)]$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია.

დამტკიცება. თუ $|F(y'')-F(y')|\leqslant K|y''-y'|$, მაშინ როგორი ურთიერთ არაგადამკვეთი (a_k, b_k) ინტერვალების სისტემაც არ უნდა ავიღოთ,

$$\sum_{k=1}^{n}|F[f(b_k)]-F[f(_k)]|\leqslant K\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|,$$

მაგრამ ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი რაგინდ მცირე ხდება

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\text{-სთან}$$

ერთად.

თეორემა 3. ვთქვათ, აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $F(y)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[f(a), f(b)]$ სეგმენტზე, მაშინ $F[f(x)]$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ ყოველი ურთიერთ არაგადამკვეთი (A_k, B_k) ინტერვალებისათვის, რომელთათვისაც

$$\sum_{k=1}^{n} (B_k - A_k) < \delta,$$

გვქონდეს

$$\sum_{k=1}^{n} \mid F(B_k) - F(A_k) \mid < \varepsilon.$$

ამის შემდეგ, ასეთი δ-სათვის ვიპოვოთ ისეთი $\eta > 0$, რომ

$$\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) < \eta$$

უტოლობა იწვევდეს უტოლობას

$$\sum_{k=1}^{m} [f(b_k) - f(a_k)] < \delta,$$

თუ კი (a_k, b_k) ინტერვალები არ იკვეთებიან.

ამის შემდეგ, ამოვირჩიოთ ნებისმიერი წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთი (a_k, b_k) ინტერვალების ისეთი სისტემა, რომელთა სიგრძეების ჯამი ნაკლებია η-ზე. $[f(a_k), f(b_k)]$ ინტერვალები აგრეთვე არ იკვეთებიან (ამაშია მტკიცების აზრი) და მათი სიგრძეების ჯამი ნაკლებია δ-ზე, ხოლო ამის გამო

$$\sum_{k=1}^{m} \mid F[f(b_k)] - F[f(a_k)] \mid < \varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

§ 2. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების დიფერენციალური თვისებები

თეორემა 1. აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით[1].

დამტკიცება. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ ურთიერთ არაგადამკვეთი

[1] აქედან უკვე გამომდინარეობს ისეთი უწყვეტი ფუნქციების არსებობა, რომლებიც არ არიან აბსოლუტურად უწყვეტი (მაგალითად, ასეთია ფუნქცია $x \cos \frac{\pi}{2x}$; იხ. თავი VIII, § 3).

ინტერვალების ყოველი ისეთი $\{(a_k, b_k)\}$ სისტემისათვის, რომლისათვისაც $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, გვქონდეს უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{n} | f(b_k) - f(a_k) | < 1.$$

დავანაწილოთ $[a, b]$ სეგმენტი

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_N = b$$

წერტილებით ისეთ ნაწილებად, რომ

$$c_{k+1} - c_k < \delta \qquad (k = 0, 1, \dots, N-1).$$

მაშინ, $[c_k, c_{k+1}]$ სეგმენტის ნაწილებად ყოველგვარი დაყოფის დროს, $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური ნაზრდების ჯამი ამ ნაწილებისათვის 1-ზე ნაკლები იქნება, საიდანაც

$$\bigvee_{c_k}^{c_{k+1}} (f) \leqslant 1,$$

და მაშინ

$$\bigvee_{a}^{b} (f) \leqslant N,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$-ზე, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის თითქმის ყველა წერტილზე ამ ფუნქციას აქვს $f'(x)$ წარმოებული, რომელიც ჯამებადი ფუნქციაა.

თეორემა 2. თუ აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული თითქმის ყველგან უდრის ნულს, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E-თი (a, b) ინტერვალის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც $f'(x) = 0$. ვთქვათ, $\varepsilon > 0$. თუ $x \in E$, მაშინ ყოველი საკმარისად მცირე $h > 0$-სათვის გვექნება

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon. \qquad (*)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $[x, x+h]$ სეგმენტები [სადაც $h > 0$ აკმაყოფილებს (*) პირობას] ფარავენ E სიმრავლეს ვიტალის აზრით. ამიტომ მათგან ჩვენ შეგვიძლია ამოვარჩიოთ წყვილწყვილად არაგადამკვეთი სეგმენტების

$$d_1 = [x_1, x_1 + h_1], \quad d_2 = [x_2, x_2 + h_2], \dots, \quad d_n = [x_n, x_n + h_n]$$

ისეთი სასრული სიმრავლე, რომ ისინი მოთავსებული იყვნენ (a, b)-ში და მათ

მიერ E სიმრავლის დაუფარავი ნაწილის გარე ზომა ნაკლები იყოს წინასწარ მოცემულ $\delta > 0$ რიცხვზე. ვთქვათ, ეს გაკეთებულია და $x_k < x_{k+1}$.

თუ

$$[a, x_1), \quad (x_1 + h_1, x_2), \ldots, (x_{n-1} + h_{n-1}, x_n), \quad (x_n + h_n, b] \qquad (1)$$

წარმოადგენენ $[a, b]$ სეგმენტის იმ მონაკვეთებს, რომლებიც დარჩებიან მასზე, ყველა d_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ სეგმენტის ამოღების შემდეგ, მაშინ ამ მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი აუცილებლად ნაკლებია δ-ზე. ეს იქედან გამომდინარეობს, რომ

$$b - a = mE \leq \sum_{k=1}^{n} md_k + m^* \left[E - \sum_{k=1}^{n} d_k \right] < \sum_{k=1}^{n} md_k + \delta,$$

საიდანაც

$$\sum_{k=1}^{n} md_k > b - a - \delta.$$

მაგრამ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია. ამის გამო, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ δ იმდენად მცირედაა არჩეული, რომ (1) მონაკვეთებზე $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდთა ჯამი ნაკლებია ε-ზე

$$\left| \{f(x_1) - f(a)\} + \sum_{k=1}^{n-1} \{f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)\} + \{f(b) - f(x_n + h_n)\} \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

მეორეს მხრივ, d_k სეგმენტების თვით განმარტებიდან გვექნება

$$| f(x_k + h_k) - f(x_k) | < \varepsilon h_k,$$

საიდანაც, მით უფრო (რამდენადაც $\sum h_k = \sum md_k \leq b - a$)

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{ f(x_k + h_k) - f(x_k)\} \right| < \varepsilon(b - a). \qquad (3)$$

(2) და (3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$| f(b) - f(a) | < \varepsilon(1 + b - a)$$

და, ε-ის ნებისმიერობის გამო,

$$f(b) = f(a).$$

ეს მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ ყოველი $[a, x]$ სეგმენტისათვის, სადაც $a < x \leq b$. ამის გამო, ყოველი x-სათვის $[a, b]$-დან, გვექნება

$$f(x) = f(a),$$

და $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია[1].

[1] დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ VIII თავის მე-2 §-ში აგებული $\Theta(x)$ ფუნქცია ა რ ა რ ი ს აბსოლუტურად უწყვეტი.

შედეგი. თუ ორი აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ და $g'(x)$ წარმოებულები ეკვივალენტური არიან, მაშინ ამ ფუნქციათა სხვაობა მუდმივია.

მართლაც, თუ $[a, b]$ სეგმენტს მოვაშორებთ ნულოვან ზომის სიმრავლეს იმ წერტილებისა, რომლებშიაც ერთს მაინც $f(x)$ ან $g(x)$ფუნქციათაგან არა აქვს სასრული წარმოებული, ან ეს წარმოებულები არ არიან ერთმანეთის ტოლი, მაშინ ყოველ დარჩენილ წერტილზე გვექნება

$$[f(x) - g(x)]' = 0.$$

§ 3. უწყვეტი ასახვები

VIII თავის § 2-ში ჩვენ შემთხვევა გვქონდა შევჩერებულიყავით წერტილოვანი სიმრავლის უწყვეტი ფუნქციის საშუალებით მოხდენილი ასახვის ცნებაზე. აქ ჩვენ გავაგრძელებთ ამ საკითხის შესწავლას. იმისათვის რომ ავიცილოთ თავიდან ერთიდაიგივეს გამეორება, შევთანხმდეთ ერთხელ და სამუდამოდ, რომ $f(x)$ აღნიშნავს $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ ფუნქციას.

თეორემა 1. ჩაკეტილი F სიმრავლის $f(F)$ სახე ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, y_0 ზღვარითი წერტილია $f(F)$ სიმრავლისათვის

$$y_0 = \lim_{n \to \infty} y_n \qquad [y_n \in f(F)].$$

ყოველ y_n წერტილს შევუსაბამოთ ისეთი $x_n \in F$ წერტილი, რომ

$$f(x_n) = y_n.$$

რადგანაც $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მისგან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0,$$

ამასთან, F სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო,

$$x_0 \in F,$$

და, მაშასადამე,

$$f(x_0) \in f(F).$$

მეორეს მხრივ, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

ასე, რომ

$$y_0 = f(x_0)$$

და $y_0 \in f(F)$. ამგვარად, $f(F)$ სიმრავლე შეიცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს.

ამ თეორემის დაპირისპირებიდან VIII თავის § 2-ის 1-ლი თეორემასთან გამომდინარეობს:

შედეგი. თუ F არის F_σ ტიპის სიმრავლე, მაშინ მისი $f(E)$ სახე აგრეთვე F_σ ტიპის სიმრავლეა.

შევისწავლოთ საკითხი იმის შესახებ, შენარჩუნდება თუ არა სიმრავლის ზომადობის თვისება მისი უწყვეტი ასახვის დროს. ამ საკითხის გადასაწყვეტად დაგვჭირდება შემდეგი, აკად. ნ. ლუზინის მიერ შემოღებული განმარტების გაცნობა:

განმარტება. თუ ნებისმიერი ნულზომიანი e სიმრავლის $f(e)$ სახეს აგრეთვე ნულის ტოლი ზომა აქვს, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$-ს აქვს (N) თვისება.

თეორემა 2. იმისათვის რომ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლის $f(E)$ სახე ზომადი სიმრავლე იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ ფუნქციას (N) თვისება ჰქონდეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$-ს აქვს (N) თვისება და E არის $[a, b]$-ზე მოთავსებული ზომადი სიმრავლე. მაშინ

$$E = A + e,$$

სადაც A წარმოადგენს F_σ ტიპის სიმრავლეს, ხოლო e — ნულზომიანი სიმრავლეა[1].

მაშასადამე,

$$f(E) = f(A) + f(e)$$

და ამის გამო $f(E)$ ზომადია.

დავუშვათ ახლა, რომ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს (N) თვისება. მაშინ მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის ისეთი e_0 ქვესიმრავლე, რომლის ზომა უდრის ნულს, მაგრამ მისი სახის გარე ზომა დადებითია

$$m^* f(e_0) > 0.$$

მაგრამ მაშინ $f(e_0)$ სიმრავლიდან შეიძლება ამოვარჩიოთ არაზომადი B ქვესიმრავლე[2]. თუ ყოველ $y \in B$-ს შევუსაბამებთ ისეთ $x \in e_0$-ს, რომლისათვისაც $f(x) = y$, მივიღებთ B სიმრავლის A წინასახეს, ამასთან $A \subset e_0$. ცხადია, რომ A ზომადია, რადგან $m^*A \leqslant me_0 = 0$. ამავე დროს $f(A) = B$ სიმრავლე არ არის ზომადი, ე. ი. ჩვენი $f(x)$ ფუნქცია ზომად სიმრავლეს ასახავს არაზომად სიმრავლეში.

თეორემა 3. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციებს აქვთ (N) თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია და E სიმრავლეს აქვს ნულის ტოლი ზომა. დავამტკიცოთ, რომ

$$mf(E) = 0.$$

---

[1] იმისათვის რომ დავამტკიცოთ ეს დებულება, საკმარისია ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შევუსაბამოთ ისეთი F_n ჩაკეტილი სიმრავლე, რომლის ზომა $mF_n > mE - \frac{1}{n}$ და დავუშვათ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} F_n.$$

[2] თუ $f(e_0)$ არაზომადია, მივიღებთ $B = f(e_0)$, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოვიყენებთ III თავის § 6-ის ბოლოში დამტკიცებულ დებულებას.

ამისათვის დავუშვათ ჯერ-ჯერობით, რომ a და b წერტილები არ ეკუთვნიან E-ს, ასე რომ

$$E\subset(a, b).$$

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ ნებისმიერი ასრული ან თვლადი სისტემისათვის არაგადამკვეთი ინტერვალებისა $\{(a_k, b_k)\}$, რომელთა სიგრძეების ჯამი ნაკლებია δ-ზე, გვქონდეს

$$\sum_k (M_k - m_k) < \varepsilon,$$

სადაც, როგორც ჩვეულებრივ,

$$m_k = \min\{f(x)\},\ M_k = \max\{f(x)\}\quad (x \in [a_k, b_k]).$$

რამდენადაც $mE=0$, შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლე, რომ

$$E\subset G,\quad mG < \delta.$$

ამასთან, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $G=(a, b)$ (რადგან E შედის ამ ინტერვალში). მაგრამ G წარმოადგენს ჯამს თავისი შემადგენელი (a_k, b_k) ინტერვალებისა, რომელთა სიგრძეების ჯამი, მაშასადამე, ნაკლებია δ-ზე. ამიტომ

$$f(E)\subset f(G) = \sum_k f[(a_k, b_k)]\subset \sum_k f([a_k, b_k]),$$

საიდანაც

$$m^*f(E)\leqslant \sum_k m^*f([a_k, b_k]).$$

მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ

$$f([a_k, b_k]) = [m_k, M_k]$$

და, მაშასადამე,

$$m^*f(E)\leqslant \sum_k (M_k - m_k) < \varepsilon.$$

აქედან, ε-ს ნებისმიერობის გამო, გამომდინარეობს, რომ $mf(E)=0$.

გადავდივართ რა ზოგად შემთხვევაზე, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ E სიმრავლიდან a და b წერტილების ამოღება გამოიწვევს $f(E)$ სიმრავლიდან არა უმეტეს ორი წერტილის $f(a)$-ს და $f(b)$-ს ჩამოშორებას, რაც, როგორც ცნობილია, არ ახდენს გავლენას $f(E)$ სიმრავლის ზომაზე.

შედეგი. აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ზომად სიმრავლეს ასახავს ზომად სიმრავლეში.

ჩვენ ვნახეთ, რომ ყოველ აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია და (N) თვისება. თურმე ეს ორი თვისება აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციებს ახასიათებს.

თეორემა 4 (ს. ბანახი — მ. ზარეცკი). თუ $f(x)$ წარმოადგენს (N) თვისების მქონე ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაციით, მაშინ იგი აბსოლუტურად უწყვეტია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $f(x)$ არ არის აბსოლუტურად უწყვეტი. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\varepsilon_0 > 0$, რომ არავითარი $\delta > 0$-სათვის

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

უტოლობა [ურთიერთ არაგადამკვეთი (a_k, b_k) ინტერვალებისათვის] არ უზრუნველყოფს, საზოგადოდ,

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) < \varepsilon_0$$

უტოლობის შესრულებას.

ამის შემდეგ ავიღოთ კრებადი დადებითი მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_i$$

და ყოველი δ_i-სათვის ვიპოვოთ $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების ისეთი სისტემა $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$, რომ

$$\sum_{k=1}^{n_i} (b_k^{(i)} - a_k^{(i)}) < \delta_i, \quad \sum_{k=1}^{n_i} (M_k^{(i)} - m_k^{(i)}) \geqslant \varepsilon_0,$$

სადაც $M_k^{(i)}$ და $m_k^{(i)}$ წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს $[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$-ში.

დავუშვათ

$$E_i = \sum_{k=1}^{n_i} (a_k^{(i)}, b_k^{(i)}),$$

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} E_i.$$

ადვილი აღმოსაჩენია, რომ $mA = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$mf(A) = 0. \tag{1}$$

შემოვიღოთ $L_k^{(i)}(y)$ ფუნქცია, რომელიც ტოლია 1-ს ან 0-სა იმისდამიხედვით, არის თუ არა მოთავსებული ერთი მაინც ფესვი

$$f(x) = y \tag{2}$$

განტოლებისა $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ ინტერვალში. ეს ფუნქცია ტოლია ერთის ისეთი

y-სათვის, რომლებიც მოთავსებულია $(m_k^{(i)},\ M_k^{(i)})$ ინტერვალში, და უდრის ნულს $[m_k^{(i)},\ M_k^{(i)}]$ სეგმენტის გარეთ მოთავსებული y-სათვის, ასე რომ

$$\int_m^M L_k^{(i)}(y)\,dy = M_k^{(i)} - m_k^{(i)}. \tag{3}$$

ვთქვათ,

$$\mathrm{N}_i(y) = \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(i)}(y),$$

ცხადია, რომ $N_i(y)$ ტოლია იმ $(a_k^{(i)},\ b_k^{(i)})$ ინტერვალების რიცხვისა, რომლებშიაც მოთავსებულია (2) განტოლების თუნდაც ერთი ფესვი. ამიტომ

$$N_i(y) \leqslant N(y), \tag{4}$$

სადაც $N(y)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ბანახის ინდიკატრისს. (3)-ის ძალით

$$\int_m^M \mathrm{N}_i(y)\,dy \geqslant s_0. \tag{5}$$

თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისი იქნება ალმოვაჩინოთ, რომ $[m,\ M]$ სეგმენტის თითქმის ყოველი y-სათვის გვექნება

$$\lim_{i\to\infty} N_i(y) = 0, \tag{6}$$

რადგან ბანახის $N(y)$ ინდიკატრისი ჯამებადია, და (4) და (6)-დან მივიღებთ, რომ

$$\lim_{i\to\infty} \int_m^M N_i(y)\,dy = 0,$$

და ეს კი ეწინააღმდეგება (5) უტოლობას.

აღვნიშნოთ B-თი იმ y წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც (6) არ სრულდება, ხოლო C იყოს იმ y წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც $N(y) = +\infty$. რამდენადაც $N(y)$ ჯამებედი ფუნქციაა, $mC = 0$, და თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია ალმოვაჩინოთ, რომ

$$B - C \subset f(A). \tag{7}$$

ვთქვათ, $y_0 \in B - C$. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\{i_r\}$ მიმდევრობა, რომ

$$N_{i_r}(y_0) \geqslant 1 \qquad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი r-სათვის არსებობს ისეთი x_{i_r} წერტილი, რომ

$$f(x_{i_r}) = y_0, \qquad x_{i_r} \in E_{i_r}.$$

მაგრამ, იმის გამო, რომ $N(y_0) < +\infty$, x_{i_r} წერტილთა შორის შესაძლებელია აღმოჩნდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობა ერთმანეთისაგან განსხვა-

ვებული წერტილებისა. ამის გამო ერთერთი მათგანი — დავარქვათ მას x_0 — გვხდება $\{x_{i_k}\}$ მიმდევრობაში უსასრულოდ ბევრჯერ.

ამგვარად, ჩვენ ისეთი x_0 წერტილი ვიპოვეთ, რომელიც ეკუთვნის E_k სიმრავლეთა უსასრულო სიმრავლეს და რომელშიაც

$$f(x_0) = y_0.$$

მაგრამ მაშინ, აშკარაა, რომ $x_0 \in A$ და, მაშასადამე, $y_0 \in f(A)$. ამით (7) ჩართვა, და მასთან ერთად თეორემაც, დამტკიცებულია.

თეორემა 5 (გ. ფიხტენგოლცი). *ვთქვათ, $F(y)$ და $f(x)$ ორი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა, ამასთან $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი მოხვდებიან იმ სეგმენტში, რომელშიაც მოცემულია $F(y)$ ფუნქცია. იმისათვის, რომ $F[f(x)]$ სუპერპოზიცია აბსოლუტურად უწყვეტი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მას შემოსაზღვრული ვარიაცია ჰქონდეს.*

დამტკიცება. თეორემის პირობის აუცილებლობა აშკარაა. მისი საკმარისობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ ორი ისეთი ფუნქციის სუპერპოზიციას, რომლებსაც აქვთ (N) თვისება, თითონაც, აშკარაა, აქვს (N) თვისება.

§ 4. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ჯამებადი $f(t)$ ფუნქცია.

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt$$

ფუნქციას $f(t)$ ფუნქციის (ლებეგის) *განუსაზღვრელი ინტეგრალი* ეწოდება, ასე რომ $f(x)$ ფუნქციას განუსაზღვრელი ინტეგრალების უსასრულო სიმრავლე აქვს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მუდმივი შესაკრებით.

თეორემა 1. *$\Phi(x)$ განუსაზღვრელი ინტეგრალი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა.*

დამტკიცება. ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ (იხ. VI თავის § 2-ის მე-8 თეორემა), რომ ყოველი ზომადი e სიმრავლისათვის ზომით $me < \delta$ გვექნება

$$\left| \int_e f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

კერძოდ, თუ ურთიერთ არაგადამკვეთი ინტერვალების სასრული $\{(a_k, b_k)\}$ სისტემისათვის ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი ნაკლებია δ-ზე, მაშინ

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt \right| < \varepsilon,$$

და დაგვრჩენია შევნიშნოთ, რომ

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k),$$

საიდანაც

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{\Phi(b_k) - \Phi(a_k)\} \right| < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi(x)$-ს თითქმის ყველგან აქვს სასრული წარმოებული, რომელიც ჯამებად ფუნქციას წარმოადგენს. შეიძლება დავამტკიცოთ უფრო ზუსტი დებულება.

თეორემა 2. განუსაზღვრელი

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ინტეგრალის წარმოებული თითქმის ყველგან უდრის ინტეგრალქვეშა $f(t)$ ფუნქციას.

დამტკიცება. ვთქვათ, $p < q$ ორი ნამდვილი რიცხვია. აღვნიშნოთ $E_{p,q}$-თი $[a, b]$ სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც $\Phi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და $\Phi'(x)$ წარმოებული აკმაყოფილებს

$$\Phi'(x) > q > p > f(x)$$

უტოლობას. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $E_{p,q}$ სიმრავლე ზომადია. ჩვენს უახლოეს ამოცანას შეადგენს იმის დამტკიცება, რომ

$$mE_{p,q} = 0. \tag{1}$$

ამ მიზნით, ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ $me < \delta$ უტოლობას მოსდევდეს უტოლობა

$$\left| \int_e f(t)dt \right| < \varepsilon$$

და ავაგოთ ისეთი ღია $G \subset [a, b]$[1] სიმრავლე, რომ

$$G \supset E_{p,q}, \qquad mG < mE_{p,q} + \delta.$$

თუ $x \in E_{p,q}$, მაშინ ყოველგვარი საკმარისად მცირე $h > 0$-სათვის გვექნება

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} > q. \tag{2}$$

[1] შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ a და b წერტილები არ ეკუთვნიან $E_{p,q}$-ს, გარდა ამისა, $\delta < \varepsilon$.

ცხადია, რომ $E_{p,q}$ სიმრავლე $[x, x+h]$ სეგმენტებით [სადაც $h>0$ აკმაყოფილებს (2) უტოლობას] დაფარულია ვიტალის აზრით. გარდა ამისა, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ყველა $[x, x+h]$ სეგმენტი მოთავსებულია G-ში. ამის გამო შეიძლება გამოიყოს ამ სეგმენტების ისეთი თვლადი

$$[x_1, x_1+h_1], \quad [x_2, x_2+h_2], \dots$$

მიმდევრობა, რომ ისინი წყვილწყვილად არ იკვეთებოდენ და რომ გვქონდეს ტოლობა:

$$m\left\{E-\sum_{k=1}^{\infty}[x_k, x_k+h_k]\right\}=0.$$

(2)-ის ძალით აღმოჩნდება, რომ

$$\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k} f(t)\,dt>q.$$

თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[x_k, x_k+h_k]$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_S f(t)\,dt> q\cdot mS,$$

ან, რაც იგივეა,

$$\int_S f(t)\,dt>q\cdot[mE_{p,q}+\Theta\varepsilon] \qquad (0\leqslant\Theta\leqslant 1). \tag{3}$$

მეორეს მხრივ, $S\subset G$ და ამიტომ

$$S-E_{p,q}\subset G-F_{p,q}$$

და $m[S-E_{p,q}]<\delta$, ასე რომ

$$\int_{S-E_{p,q}} f(t)\,dt<\varepsilon,$$

და მაშასადამე[1]

$$\int_S f(t)\,dt<\int_{E_{p,q}} f(t)\,dt+\varepsilon. \tag{4}$$

მაგრამ $E_{p,q}$ სიმრავლეზე გვექნება $f(t)\leqslant p$ და, მაშასადამე,

$$\int_{E_{p,q}} f(t)\,dt\leqslant p\cdot mE_{p,q}. \tag{5}$$

---

[1] ყურადღების ღირსია ის გარემოება, რომ $m(E_{p,q}-S)=0$ და, მაშასადამე,

$$\int_{S_{p,q}} f\,dt=\int_{SE_{p,q}} f\,dt.$$

(3), (4) და (5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$q[mE_{p,q}+\theta\varepsilon] < pm\,E_{p,q}+\varepsilon,$$

საიდანაც, ε-ის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ

$$qmF_{p,q} \leqslant pmE_{p,q};$$

ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ, მაშინ, როცა $mE_{p,q}=0$.

ამგვარად, (1) ტოლობა დამტკიცებულია.

ვთქვათ ახლა, E აღნიშნავს $[a, b]$ სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებშიაც $\Phi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და

$$\Phi'(x) > f(x).$$

მაშინ

$$E=\sum_{(p,q)} Ep,q,$$

სადაც შეჯამება გავრცელებულია ყველა ისეთ რაციონალურ რიცხვთა (p, q) წყვილებზე, რომელთათვისაც $p<q$. (1)-ის ძალით გვექნება

$$mE = 0.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ A არის იმ წერტილთა სიმრავლე, სადაც არსებობს $\Phi'(x)$ წარმოებული, მაშინ თითქმის ყველგან A-ზე გვექნება

$$\Phi'(x) \leqslant f(x). \tag{6}$$

ამის შემდეგ, მივიღოთ

$$g(x) = -f(x), \qquad \Gamma(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\Gamma(x) = -\Phi(x)$, ასე რომ $\Gamma'(x)$ არსებობს A სიმრავლის ყოველ წერტილზე. თუ ახლა თეორემის დამტკიცებულ ნაწილს გამოვიყენებთ $\Gamma(x)$ ფუნქციისათვის, მივიღებთ, რომ თითქმის ყველგან A-ზე

$$\Gamma'(x) \leqslant g(x),$$

ან, რაც იგივეა,

$$\Phi'(x) \geqslant f(x). \tag{7}$$

(6) და (7)-დან გამომდინარეობს, რომ თითქმის ყველგან A-ზე, და მაშასადამე, თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე

$$\Phi'(x) = f(x),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია წარმოადგენს თავისი წარმოებულის განუსაზღვრელ ინტეგრალს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მისი $F'(x)$ წარმოებული არსებობს თითქმის ყველგან და იგი ჯამებადია.

მივიღოთ

$$\Phi(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt.$$

ეს ფუნქცია აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტია და თითქმის ყველგან

$$\Phi'(x) = F'(x).$$

მაშასადამე (§ 2-ის მე-2 თეორემის შედეგი), $F(x) - \Phi(x)$ სხვაობა მუდმივია, მაგრამ რადგანაც ეს სხვაობა ტოლია ნულის $x = a$-სათვის, ამიტომ $F(x)$ და $\Phi(x)$ იგივურად ტოლი არიან.

მე-2 თეორემა შეიძლება შესამჩნევად გავაძლიეროთ. ამისათვის შემოვიყვანოთ

განმარტება. თუ x წერტილში გვაქვს

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt = 0,$$

მაშინ x-ს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

თეორემა 4. თუ x არის $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი, მაშინ ამ წერტილზე ლებეგის განუსაზღვრელი $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ინტეგრალის წარმოებული $f(x)$ რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება. ადვილი აღმოსაჩენია, რომ

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt,$$

საიდანაც

$$\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) \right| \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას. შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, სამართლიანი არ არის.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$-ზე, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის თითქმის ყველა წერტილი მისი ლებეგის წერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, r რაციონალური რიცხვია. $|f(t) - r|$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$-ზე, და, ამის გამო, თითქმის ყოველი $x \in [a, b]$-სათვის გვექნება

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\, dt = |f(x) - r|. \tag{8}$$

აღვნიშნოთ $E(r)$-ით $[a, b]$ სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომ-

ლებშიაც (8) არაა შესრულებული. ცხადია, რომ $mE(r) = 0$. გადავნომროთ ყველა რაციონალური რიცხვები და დავუშვათ

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E(r_n) + E(|f| = +\infty).$$

მაშინ $mE = 0$ და საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ $[a, b] - E$ სიმრავლის ყოველი წერტილი ლებეგის წერტილია $f(t)$ ფუნქციისა.

ვთქვათ, $x_0 \in [a, b] - E$. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი რაციონალური r_n რიცხვი, რომ

$$|f(x_0) - r_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$\Big| |f(t) - r_n| - |f(t) - f(x_0)| \Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

და, მაშასადამე,

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| \, dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ (რამდენადაც $x_0 \overline{\in} E$) $|h| < \delta(\varepsilon)$-სათვის გვექნება

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| \, dt - |f(x_0) - r_n| \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ე. ი.

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| \, dt < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

და, მაშასადამე, ასეთი h-სათვის გვექნება

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \, dt < \varepsilon.$$

თეორემა 6. ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციის ყოველი უწყვეტობის წერტილი მისი ლებეგის წერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(t)$ უწყვეტია x წერტილზე. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ, როცა $|t - x| < \delta$, მაშინ

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

მაგრამ $|h| < \delta$-სათვის გვექნება

$$\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt < \varepsilon,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

1-ლი და მე-3 თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ იმისათვის, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია წარმოადგენდეს ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი აბსოლუტურად უწყვეტი იყოს. ამასთან დაკავშირებით, ბუნებრივია დაისვას საკითხი იმ დამახასიათებელი ნიშნის შესახებ, რომელიც უნდა ჰქონდეს კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს. ამ კითხვის პასუხს წარმოადგენს.

თეორემა 7 (ფ. რისი). იმისათვის, რომ $F(x)$ ფუნქცია $(a \leqslant x \leqslant b)$ წარმოიდგინებოდეს სახით

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt, \tag{9}$$

სადაც $f(t) \in L_2$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილების დროს

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \quad < x_n = b$$

წერტილებით, გვქონდეს

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{[F(x_{k+1}) - F(x_k)]^2}{x_{k+1} - x_k} \leqslant K; \tag{10}$$

სადაც K დამოუკიდებელია დანაწილების წესისაგან.

დამტკიცება. რისის პირობის აუცილებლობა თითქმის აშკარაა. მართლაც, ბუნიაკოვსკი-შვარცის უტოლობის ძალით

$$[F(x_{k+1}) - F(x_k)]^2 = \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt\right]^2 \leqslant (x_{k+1} - x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^2(t)\,dt,$$

საიდანაც

$$\frac{[F(x_{k+1}) - F(x_k)]^2}{x_{k+1} - x_k} \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^2(t)\,dt,$$

და K რიცხვად შეგვიძლია $\int_a^b f^2(t)\,dt$ ინტეგრალი მივიღოთ.

საკმარისობის დამტკიცება უფრო რთულია. უპირველესად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ (10) უტოლობა მხოლოდ გაძლიერდება, თუ ჩვენ ჩამოვაშორებთ მარცხენა ნაწილის ზოგიერთ შესაკრებს. ამიტომ არაგადამკვეთი (a_k, b_k) ინტერვალების ნებისმიერი სასრული სისტემისათვის გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{[F(b_k) - F(a_k)]^2}{b_k - a_k} \leqslant K.$$

აქედან

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

უტოლობის ძალით [იხ. თავი VII, § 4, (1)] გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k)-F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|F(b_k)-F(a_k)|}{\sqrt{b_k-a_k}}\cdot\sqrt{b_k-a_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{[F(b_k)-F(a_k)]^2}{b_k-a_k}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)}$$

და, მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k)-F(a_k)| \leqslant \sqrt{K}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)}.$$

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $F(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია და წარმოიდგინება (9) სახით, სადაც $f(t)\in L$. დაგვრჩენია აღმოვაჩინოთ, რომ $f(t)\in L_2$.

ამ მიზნით, დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n თანასწორ $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ნაწილად და შემოვიღოთ $f_n(t)$ ფუნქცია

$$f_n(t)=\frac{F(b_k^{(n)})-F(a_k^{(n)})}{b_k^{(n)}-a_k^{(n)}} \qquad (a_k^{(n)}<t<b_k^{(n)}).$$

დაყოფის წერტილებზე მივიღოთ $f_n(t)=0$.

ადვილია შემჩნევა იმისა, რომ თითქმის ყველგან (გამონაკლისს შეიძლება შეადგენდეს დაყოფის წერტილები და ის $x\ldots$, სადაც $F'(x)\neq f(x)$) გვექნება [1]

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=f(t).$$

[1] მართლაც, თუ ისეთ x წერტილზე, რომელიც არ არის დაყოფის წერტილი, არსებობს სასრული $F'(x)$ წარმოებული, მაშინ x მოთავსებულია $(a^{(n)}_{k_n}, b^{(n)}_{k_n})$ ინტერვალთა ყოველ უსასრულო მიმდევრობაში, რომელთა სიგრძეები მიისწრაფვიან ნულისაკენ. ასეთ შემთხვევაში

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(b^{(n)}_{k_n})-F(x)}{b^{(n)}_{k_n}-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)-F(a^{(n)}_{k_n})}{x-a^{(n)}_{k_n}}=F'(x).$$

მაგრამ აშკარაა, რომ $f_n(x)=\dfrac{F(b^{(n)}_{k_n})-F(a^{(n)}_{k_n})}{b_{k_n}^{(n)}-a_{k_n}^{(n)}}$ მოთავსებულია აღნიშნული ფარდობებს შორის და ამიტომ მიისწრაფვის იმავე ზღვრისაკენ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F'(x).$$

მაშასადამე, ფატუს თეორემის ძალით,

$$\int_a^b f^2(t)\,dt \leqslant \sup\left\{\int_a^b f_n^2(t)\,dt\right\}.$$

მაგრამ

$$\int_a^b f_n^2 dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k^{(n)}}^{b_k^{(n)}} f_n^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{[F(b_k^{(n)})-F(a_k^{(n)})]^2}{b_k^{(n)}-a_k^{(n)}} \leqslant K,$$

საიდანაც

$$\int_a^b f^2(t)\,dt < +\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. სიმკვრივის წერტილები. აპროქსიმატული უწყვეტობა.

ვთქვათ, მოცემულია ზომადი E სიმრავლე. ავიღოთ ნებისმიერი x_0 წერტილი და $h>0$; დავუშვათ

$$E(x_0,\ h) = E\cdot[x_0-h,\ x_0+h].$$

ეს აგრეთვე ზომადი სიმრავლეა. განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{mE(x_0,\ h)}{2h}. \tag{1}$$

ის ბუნებრივია ჩავთვალოთ E სიმრავლის „საშუალო სიმკვრივედ" $[x_0-h,\ x_0+h]$ სეგმენტში.

განმარტება 1. (1) შეფარდების ზღვარს, როცა $h\to 0$ ეწოდება E სიმრავლის *სიმკვრივე* x_0 წერტილზე და აღინიშნება

$$Dx_0E\text{-თი.}$$

თუ $Dx_0E=1$, მაშინ x_0 წერტილი წარმოადგენს E სიმრავლის *სიმკვრივის წერტილს*, ხოლო თუ $Dx_0E=0$, მაშინ x_0 არის E *სიმრავლის გაიშვიათების* წერტილი.

შევნიშნოთ, რომ ამ განმარტებაში არ იგულისხმება, რომ $x_0\in E$. შემდეგ, აშკარაა, რომ ზომადი სიმრავლისათვის არაა სავალდებულო, რომ მას ყოველ წერტილზე გარკვეული სიმკვრივე ჰქონდეს.

მიუხედავად ამისა, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1 (ა. ლებეგი). *ზომადი E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილი მისი სიმკვრივის წერტილია.*

დამტკიცება. ვთქვათ, E სიმრავლე ზომადია. ავიღოთ რაიმე $[\alpha,\beta]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს E-ს და დავუშვათ $a=\alpha-1$, $b=\beta+1$. მაშინ $x\in E$-სათვის და $h\leqslant 1$-ს დროს ჩვენ უზრუნველყოფილი ვართ იმით, რომ

$[x-h, \ x+h]$ სეგმენტი არ გამოვა $[a,b]$-დან. ამის შემდეგ, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $h<1$.

შემოვიყვანოთ E სიმრავლის მახასიათებელი $\varphi(x)$ ფუნქცია

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, \text{ როცა } x \in E \\ 0, \text{ როცა } \overline{x \in E} \end{cases}$$

და განვიხილოთ იგი მხოლოდ $[a, b]$-ზე. ეს ფუნქცია ზომადი და შემოსაზღვრულია. ვთქვათ,

$$\Phi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე გვექნება

$$\Phi'(x)=\varphi(x)$$

და, კერძოდ, თითქმის ყველგან E-ზე გვექნება

$$\Phi'(x)=1. \tag{2}$$

ვაჩვენოთ, რომ ის წერტილები, რომლებშიაც სამართლიანია (2), წარმოადგენენ E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილებს. მართლაც, ასეთ წერტილზე

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x-h)}{h}=1,$$

საიდანაც

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x-h)}{2h}=1.$$

მაგრამ

$$\Phi(x+h)-\Phi(x-h)=\int_{x-h}^{x+h}\varphi(t)\,dt=mE(x, \ h),$$

ასე რომ

$$D_x E=\lim_{h\to 0}\frac{mE(x, \ h)}{2h}=1,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

სიმკვრივის წერტილის ცნებასთან, მჭიდრო კავშირში იმყოფება ფუნქციის უწყვეტობის ცნების ერთი მნიშვნელოვანი განზოგადება.

განმარტება 2. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე და $x_0 \in [a, b]$-ზე. თუ არსებობს $[a, b]$-ზე მოთავსებული ისეთი ზომადი E სიმრავლე, რომელსაც x_0 წერტილი სიმკვრივის წერტილად აქვს[1] და რომელზედაც

[1] თუ $x_0=a$, მაშინ ნაცვლად იმისა, რომ E-სათვის x_0 სიმკვრივის წერტილი იყოს, უნდა მოვითხოვოთ, რომ x_0-ზე 1-ის ტოლი იყოს E სიმრავლის მარჯვენა სიმკვრივე ე. ი. რომ გვქონდეს

$$\lim_{h\to 0}\frac{m\{E\cdot[a, \ a+h]\}}{h}=1.$$

b წერტილისათვის აპროქსიმატული უწყვეტობის განმარტება აგრეთვე უნდა ერთნაირად შეიცვალოს მარცხენა სიმკვრივის დახმარებით.

$f(x)$ ფუნქცია E სიმრავლის მიმართ უწყვეტია x_0 წერტილზე. მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ აპროქსიმატულად უწყვეტია x_0 წერტილზე.

ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყოველი უწყვეტობის წერტილი მით უფრო წარმოადგენს ამ ფუნქციის აპროქსიმატული უწყვეტობის წერტილს. ზომად ფუნქციას შესაძლებელია სრულებით არ ჰქონდეს უწყვეტობის წერტილები. ასეთია, მაგალითად, დირიხლეს ფუნქცია, რომელიც ტოლია 0-ისა ყოველ ირაციონალურ და ტოლია ერთის ყოველ რაციონალურ წერტილზე.

პირიქით, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა პ (ა. დანჟუა). თუ $f(x)$ არის $[a, b]$-ზე მოცემული ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქცია, მაშინ იგი აპროქსიმატულად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტის თითქმის ყოველ წერტილზე.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ნ. ლუზინის თეორემის საფუძველზე ვიპოვოთ ისეთი უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ

$$mE(f \neq \varphi) < \varepsilon.$$

ვთქვათ, A არის $E(f = \varphi)$ სიმრავლის იმ სიმკვრივის წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნიან ამ E-ს. წინა თეორემის ძალით

$$mA = mE(f = \varphi) > b - a - \varepsilon.$$

თუ $x_0 \in A$, მაშინ აშკარაა, რომ $f(x)$ აპროქსიმატულად უწყვეტია ამ წერტილზე, რადგან E სიმრავლედ, რომელიც მონაწილეობს მე-2 განმარტებაში, შეიძლება ავიღოთ $E(f = \varphi)$ სიმრავლე. ამის გამო $f(x)$ ფუნქციის აპროქსიმატული უწყვეტობის ყველა წერტილთა H სიმრავლეს აქვს შიგა ზომა

$$m_* H \geqslant mA > b - a - \varepsilon,$$

საიდანაც (ε ნებისმიერია!)

$$m_* H \geqslant b - a.$$

მაგრამ $H \subset [a, b]$, ასე რომ

$$b - a \leqslant m_* H \leqslant m^* H \leqslant b - a.$$

მაშასადამე, H ზომადია და $mH = b - a$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შენიშვნა. ზემოთ მოცემული სიმკვრივის ცნება შეიძლება განვაზოგადოთ. სახელდობრ, დავარქვათ E სიმრავლის სიმკვრივე x_0 წერტილზე

$$\frac{mE(x_0, h_1, h_2)}{h_1 + h_2}$$

ფარდობის ზღვარს, როცა $h_1 > 0$ და $h_2 > 0$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მიისწრაფვიან ნულისაკენ, ამასთან $E(x_0, h_1, h_2)$ არის E სიმრავლის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია $[x_0 - h_1, x_0 + h_2]$ სეგმენტში. მაგრამ ეს განზოგადება არ ცვლის სიმრავლის გაიშვიათების წერტილთა კლასს და, მაშასადამე, არ ცვლის არც E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილთა კლასსაც. მართლაც, ვთქვათ x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის გაიშვიათე-

პის წერტილს 1 განმარტების აზრით. ავიღოთ $h_1 > 0$ და $h_2 > 0$ რიცხვები და დავარქვათ h უდიდესს მათ შორის. მაშინ

$$E(x_0, h_1, h_2) \subset E(x_0, h)$$

და, ამის გამო,

$$\frac{mE(x_0, h_1, h_2)}{h_1 + h_2} \leqslant 2 \frac{mE(x_0, h)}{2h}.$$

მაგრამ, რადგან ამ უტოლობის მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის ნულისაკენ h-თან ერთად, ამიტომ

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{mE(x_0, h_1, h_2)}{h_1 + h_2} = 0$$

და x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილს განზოგადებული განმარტების აზრით. შებრუნებული დასკვნა აშკარაა. სწორედ ამის გამო ჩვენ ზემოთ მოვიყვანეთ სიმკვრივის განმარტება მისი კერძო სახით. აშკარაა, მაგალითად, რომ აპროქსიმატული უწყვეტობის განმარტება არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ სიმკვრივის რომელი განმარტება აიღება მის საფუძვლად.

§ 6. დამატებანი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა და სტილტიესის ინტეგრალთა თეორიისათვის

ვთქვათ, $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციაა. მისი $f'(x)$ წარმოებული არსებობს თითქმის ყველგან და ჯამებადია. დავუშვათ

$$\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \quad r(x) = f(x) - \varphi(x).$$

მაშინ

$$f(x) = \varphi(x) + r(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა [ამასთან $\varphi(a) = f(a)$], ხოლო $r(x)$ ისეთი უწყვეტი ფუნქციაა შემოსაზღვრული ვარიაციით, რომლის წარმოებულიც თითქმის ყველგან ნულის ტოლია. ცხადია, რომ $r(x)$ ისპობა მხოლოდ მაშინ, როდესაც თვით $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია.

განმარტება. მუდმივისაგან განსხვავებულ ისეთ შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტ ფუნქციას, რომლის წარმოებულიც თითქმის ყველგან ტოლია ნულისა, **სინგულარული** ფუნქცია ეწოდება.

ცხადია, რომ სინგულარული ფუნქცია არ შეიძლება აბსოლუტურად უწყვეტი იყოს, ვინაიდან (§ 2, თეორემა 2) მაშინ იგი მუდმივი იქნებოდა. სინგულარული ფუნქციის მაგალითს წარმოადგენს VIII თავის § 2-ის ბოლოში აგებული $\theta(x)$ ფუნქცია.

თეორემა 1. *შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ცალსახად წარმოიდგინება*

$$f(x) = \varphi(x) + r(x)$$

ფორმით, სადაც $\varphi(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია და $\varphi(a)=f(a)$, ხოლო $r(x)$ სინგულარული ფუნქციაა (ან ნული).

დამტკიცება. ასეთი წარმოდგენის შესაძლებლობა დამტკიცებული იყო ზემოთ. დავამტკიცოთ მისი ერთადერთობა. ორი ასეთი წარმოდგენა რომ გვქონოდა

$$f(x)=\varphi(x)+r(x)=\varphi_1(x)+r_1(x),$$

მაშინ მივიღებდით

$$\varphi(x)-\varphi_1(x)=r_1(x)-r(x).$$

აქედან, $\varphi(x)-\varphi_1(x)$ ფუნქციის წარმოებული თითქმის ყველგან უდრის ნულს და, რადგანაც ეს სხვაობა აბსოლუტურად უწყვეტია, ამიტომ იგი მუდმივის ტოლია. მაგრამ $\varphi(a)=\varphi_1(a)=f(a)$, მაშასადამე,

$$\varphi(x)\equiv\varphi_1(x),$$

საიდანაც $r(x)\equiv r_1(x)$.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ მისი ორივე $\varphi(x)$ და $r(x)$ კომპონენტი აგრეთვე ზრდადია.

დამტკიცება. ცხადია, რომ სადაც კი წარმოებული არსებობს, იქ $f'(x)\geq 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$$

ზრდადია. შემდეგ, VIII თავის § 2-ის მე-5 თეორემა გვაძლევს, რომ

$$\int_x^y f'(t)\,dt\leqslant f(y)-f(x),\qquad (y>x),$$

საიდანაც

$$\varphi(y)-\varphi(x)\leqslant f(y)-f(x),$$

ანუ $r(x)\leqslant r(y)$.

შედეგი. იმისათვის, რომ ზრდადი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a). \tag{1}$$

(1) ტოლობის აუცილებლობა აშკარაა. პირიქით, ვთქვათ, $f(x)$ არ არის აბსოლუტურად უწყვეტი და $\varphi(x)$ და $r(x)$ არიან $f(x)$-ის აბსოლუტურად უწყვეტი და სინგულარული კომპონენტები. მაშინ

$$f(b)-f(a)=\varphi(b)-\varphi(a)+r(b)-r(a),$$

ანუ,

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx+r(b)-r(a). \tag{2}$$

მაგრამ $r(x)$ ზრდადია და განსხვავდება მუდმივისაგან. მაშასადამე, $r(b) > r(a)$ და (!) არ არის შესრულებული, საიდანაც გამომდინარეობს პირობის საკმარისობა.

VIII თავის § 3-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით წარმოიდგინება თავისი ნახტომთა ფუნქციისა და შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე უწყვეტი ფუნქციის ჯამის სახით.

ამ თეორემის 1-ლ თეორემასთან დაპირისპირებით მივიღებთ ყოველი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) + s(x)$$

სახით წარმოდგენის შესაძლებლობას, სადაც $\varphi(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა, $r(x)$ სინგულარული ფუნქციაა, ხოლო $s(x)$ ნახტომთა ფუნქციაა (ამასთან, ზოგიერთი შესაკრები შესაძლებელია მოისპოს).

VIII თავის § 7-ში საკითხი სტილტიესის

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ დაყვანილი იყო იმ შემთხვევაზე, როდესაც $g(x)$ უწყვეტია. თურმე, ის შემთხვევა, როცა $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია, დაიყვანება ინტეგრებაზე ლებეგის აზრით.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ უწყვეტია, ხოლო $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი $[a, b]$-ზე, მაშინ

$$(S) \int_a^b f(x)\, dg(x) = (L) \int_a^b f(x) g'(x)\, dx.$$

დამტკიცება. ორივე ინტეგრალის არსებობა აშკარაა. დავამტკიცოთ მათი ტოლობა.

ამისათვის შევაფასოთ სხვაობა

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

ჯამსა და

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

ინტეგრალს შორის.

იმის გამო, რომ

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(x)\, dx,$$

ვექნება

$$\sigma-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(\xi_k)-f(x)]\,g'(x)\,dx. \qquad (3)$$

თუ ω_k არის $f(x)$ ფუნქციის რხევა $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე, მაშინ (3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\omega_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}|g'(x)|\,dx\leqslant\alpha\int_a^b|g'(x)|\,dx,$$

სადაც $\alpha=\max\{\omega_k\}$. თუ $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტების სიგრძეები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, მაშინ $\alpha\to 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ σ მიისწრაფვის $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ ინტეგრალისაკენ. მაგრამ, რადგან $\lim\sigma$ განმარტებით არის $\int_a^b f(x)dg(x)$ ინტეგრალი, ამიტომ თეორემა დამტკიცებულია.

ამგვარად, საკითხი სტილტიესის ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ არ დაიყვანება ინტეგრებაზე ლებეგის აზრით და მწკრივის შეჯამებაზე მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ ფუნქციის შემადგენლობაში შედის სინგულარული ფუნქცია.

მე-3 თეორემის დახმარებით შესაძლებელია ლებეგის ინტეგრალების რამოდენიმე თვისების დამტკიცება. მაგალითად:

თეორემა 4 (ნაწილობითი ინტეგრება). თუ $f(x)$ და $g(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტი არიან, მაშინ

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx+\int_a^b g(x)f'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b.$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია მარცხენა მხარე გადავწეროთ ასეთი სახით

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)+\int_a^b g(x)\,df(x)$$

და გამოვიყენოთ VIII თავის § 6-ს (1) ფორმულა.

§ 7. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა

V თავის § 5-ში ჩვენ უკვე გადავწყვიტეთ საკითხი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის აღდგენის შესახებ მისი $f'(x)$ წარმოებულის საშუალებით, თუ ეს უკანასკნელი არსებობს ყველგან და შემოსაზღვრულია. აქ ჩვენ განვიხილავთ საკითხს იმის შესახებ, გამომდინარეობს თუ არა

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt \qquad (1)$$

ტოლობა იქიდან, რომ $f'(x)$ არსებობს ყველგან, მაგრამ არ არის აუცილებლად შემოსაზღვრული. სავსებით აშკარაა, რომ ეს ასეა, თუ $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია. ამ შემთხვევაში საკმარისი იქნებოდა დაგვეშვა, რომ $f'(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან, რაც, საზოგადოდ[1], არ არის საკმარისი (1) ტოლობისათვის, მაშინაც კი, როცა $f(x)$ უწყვეტი ზრდადი ფუნქციაა, რომლის $f'(x)$ წარმოებულიც თითქმის ყველგან უდრის ნულს. მაგრამ ჩვენ მიზნად ვისახავთ ჩამოვაყალიბოთ (1) ტოლობის შესრულების პირობები ისეთ ტერმინებში, რომლებიც შეეხებიან არა თვით $f(x)$ ფუნქციას, არამედ მის $f'(x)$ წარმოებულს.

თეორემა 1. *თუ $f'(x)$ არსებობს ყველგან, სასრული და ჯამებადია, მაშინ (1) სამართლიანია.*

ამ თეორემის დამტკიცება აგებული იქნება ორ ლემაზე.

ლემა 1. *ვთქვათ, $[a, b]$-ზე მოცემულია სასრული $\Phi(x)$ ფუნქცია. თუ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე $\Phi(x)$-ის ყველა წარმოებული რიცხვი არაუარყოფითია, მაშინ $\Phi(x)$ ზრდადია.*

დამტკიცება. ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და მივიღოთ

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) + \varepsilon x.$$

დავუშვათ, რომ

$$\Phi_1(b) < \Phi_1(a). \tag{2}$$

მაშინ, თუ $c = \frac{a+b}{2}$, ერთერთი სხვაობა მაინც

$$\Phi_1(b) - \Phi_1(c), \quad \Phi_1(c) - \Phi_1(a)$$

უარყოფითია. დავარქვათ $[a_1, b_1]$ იმ სეგმენტს $[a, c]$ და $[c, b]$-ს შორის, რომლისათვისაც

$$\Phi_1(b_1) < \Phi_1(a_1)$$

და დავუშვათ $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. ერთერთი სხვაობა მაინც

$$\Phi_1(b_1) - \Phi_1(c_1), \quad \Phi_1(c_1) - \Phi_1(a_1)$$

უარყოფითია. დავარქვათ $[a_2, b_2]$ იმ სეგმენტს $[a_1, c_1]$ და $[c_1, b_1]$-ს შორის, რომლისათვისაც

$$\Phi_1(b_2) < \Phi_1(a_2).$$

ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ ავაგებთ ჩადგმული სეგმენტების ისეთ $\{[a_n, b_n]\}$ მიმდევრობას, რომლისათვისაც

$$\Phi_1(b_n) < \Phi_1(a_n).$$

ვთქვათ, x_0 ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტთა საერთო წერტილია. მაშინ ყოველი n-სათვის ერთერთი სხვაობა

$$\Phi_1(b_n) - \Phi_1(x_0), \quad \Phi_1(x_0) - \Phi_1(a_n)$$

[1] როგორც ეს ჩანს თუნდაც $\Theta(x)$ ფუნქციის მაგალითიდან, § 2, თავი VIII.

-უარყოფითია. დავუშვათ $h_n = b_n - x_0$, თუ $\Phi_1(b_n) < \Phi_1(x_0)$, და $h_n = a_n - x_0$, თუ $\Phi_1(b_n) \geqslant \Phi_1(x_0)$. ცხადია, რომ

$$\Delta_n = \frac{\Phi_1(x_0 + h_n) - \Phi_1(x_0)}{h_n} < 0.$$

თუ ახლა ამოვირჩევთ ისეთ $\{\Delta_{n_k}\}$ მიმდევრობას, რომელსაც აქვს (სასრული ან უსასრულო) ზღვარი, ჩვენ ისეთ წარმოებულ რიცხვს მივიღებთ, რომ

$$D\Phi_1(x_0) \leqslant 0,$$

რაც შეუძლებელია, რადგანაც ცხადია, რომ ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილზე

$$D\Phi_1(x) \geqslant \varepsilon.$$

ამგვარად, (2) შეუძლებელია. მაშასადამე,

$$\Phi_1(b) \geqslant \Phi_1(a),$$

ან, რაც იგივეა,

$$\Phi(b) + \varepsilon b \geqslant \Phi(a) + \varepsilon a.$$

აქედან (ε ნებისმიერია!)

$$\Phi(b) \geqslant \Phi(a),$$

რაც ამტკიცებს ლემას, რადგან $[a, b]$ სეგმენტის ნაცვლად შეიძლებოდა აგვეღო ნებისმიერი $[x, y]$ სეგმენტი.

ლემა 2. *ვთქვათ, $[a, b]$-ზე მოცემულია სასრული $\varphi(x)$ ფუნქცია. თუ $\varphi(x)$-ის ყველა წარმოებული რიცხვი არაუარყოფითია თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე და $[a, b]$-ს არცერთ წერტილზე არც ერთი წარმოებული რიცხვი არ უდრის $-\infty$-ს, მაშინ $\varphi(x)$ ზრდადია.*

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E-თი $[a, b]$ სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიაც $\varphi(x)$-ის თუნდაც ერთი წარმოებული რიცხვი უარყოფითია. პირობის მიხედვით

$$mE = 0.$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და ყოველი ნატურალური n-სათვის ავაგოთ ისეთი ღია შემოსაზღვრული G_n სიმრავლე, რომ

$$G_n \supset E, \quad mG_n < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

ვთქვათ,

$$\psi_n(x) = m\{G_n \cdot [a, x]\}.$$

$\psi_n(x)$ ფუნქცია, ცხადია, ზრდადია, არაუარყოფითია და

$$\psi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

საკმარისად მცირე $|h|$-სათვის G_n სიმრავლის ყოველ x წერტილზე გვექნება (რამდენადაც G_n ღიაა)

$$\psi_n(x + h) - \psi_n(x) = h,$$

-და, მაშასადამე,

$$\psi_n'(x) = 1.$$

კერძოდ ეს ასეა E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

ვთქვათ,

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_n(x).$$

ეს არაუარყოფითი, ზრდადი ფუნქციაა და

$$\sigma(x) < \varepsilon.$$

თუ $x \in E$, მაშინ საკმარისად მცირე $|h|$-სათვის გვექნება

$$\frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(x+h) - \psi_n(x)}{h} = N;$$

აქედან, ყოველი $D\sigma(x)$ წარმოებული რიცხვისათვის გვექნება

$$D\sigma(x) \geqslant N,$$

და, მაშასადამე, E-ს ყოველ წერტილზე გვექნება

$$D\sigma(x) = +\infty.$$

ამის შემდეგ, დავუშვათ

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \sigma(x)$$

და ვაჩვენოთ, რომ $[a, b]$-ს არცერთ წერტილზე $\Phi(x)$ ფუნქციის არცერთი წარმოებული რიცხვი არ შეიძლება უარყოფითი იყოს. მართლაც, უპირველესად ყოვლისა, $\sigma(x)$ ფუნქციის ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \geqslant \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

ასე რომ, როცა $x \overline{\in} E$,

$$D\Phi(x) \geqslant 0.$$

მაგრამ, თუ $x \in E$, მაშინ $\Phi'(x)$ არსებობს და უდრის $+\infty$-ს, რადგან $h_n \to 0$-სათვის

$$\frac{\varphi(x+h_n) - \varphi(x)}{h_n}$$

შეფარდება შემოსაზღვრულია ქვევიდან (წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსებებდა $D\varphi(x) = -\infty$ წარმოებული რიცხვი), ხოლო $\sigma'(x) = +\infty$.

ამგვარად, ყოველთვის

$$D\Phi(x) \geqslant 0.$$

აქედან, წინა ლემით, $\psi(x)$ ზრდადია, ე. ი., როცა $x < y$,

$$\psi(x) \leqslant \psi(y)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\varphi(x) + \sigma(x) \leqslant \varphi(y) + \sigma(y).$$

ε-ს ნულისაკენ მისწრაფებით და ზღვარზე გადასვლით, მივიღებთ

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა

1-ლი თეორემის დამტკიცება. შემოვიღოთ $\varphi_n(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{თუ } f'(x) \leqslant n \\ n, & \text{თუ } f'(x) > n. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|\varphi_n(x)| \leqslant |f'(x)|, \tag{3}$$

ასე რომ $\varphi_n(x)$ ჯამებადია. აღვნიშნოთ

$$R_n(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_n(t)\,dt,$$

და ვაჩვენოთ, რომ $R_n(x)$ ზრდადი ფუნქციაა.

ამისათვის შევნიშნოთ უპირველესად ყოვლისა, რომ

$$R'_n(x) = f'(x) - \varphi_n(x) \geqslant 0$$

თითქმის ყველგან, ასე რომ იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებზედაც $R_n(x)$ ფუნქციის თუნდაც ერთი წარმოებული რიცხვი უარყოფითია, ნული ზომისაა.

მეორეს მხრივ, $\varphi_n(x) \leqslant n$, ასე რომ

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi_n(t)\,dt \leqslant n$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \geqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - n,$$

საიდანაც ცხადია, $R_n(x)$ ფუნქციის არცერთი წარმოებული რიცხვი არ უდრის $-\infty$-ს. ამის გამო, წინა ლემის ძალით, $R_n(x)$ ზრდადია. მაშასადამე,

$$R_n(b) \geqslant R_n(a)$$

ან, რაც იგივეა,

$$f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x),$$

საიდანაც, (3)-თან დაკავშირებით, მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx$$

და, მაშასადამე,

$$f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b f'(x)\,dx.$$

მაგრამ იგივე მოსაზრებები, $-f(x)$-სათვის გამოყენებული, გვაძლევს, რომ

$$f(b) - f(a) \leqslant \int_a^b f'(x)\,dx.$$

მაშასადამე,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას, ვინაიდან b-ს როლი შეუძლია შეასრულოს ნებისმიერმა x-მა, სადაც $a < x \leqslant b$.

დასასრულს, მოვიყვანოთ ორი მაგალითი.

I. ვთქვათ $[0, 1]$-ზე მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

$$f(0) = 0.$$

ამ ფუნქციას ყველგან აქვს სასრული წარმოებული

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

$$f'(0) = 0.$$

ეს წარმოებული ჯამებადია, რადგან

$$|f'(x)| \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

ამის გამო $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 1-ლი თეორემის ყველა პირობას. მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ $f'(x)$ არ არის შემოსაზღვრული, ასე რომ V თავის § 5-ის თეორემა მისთვის არ გამოიყენება.

II. ვთქვათ, [0, 1]-ზე მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} \qquad (x > 0)$$

$$f(0) = 0.$$

მას აგრეთვე ყველგან აქვს სასრული წარმოებული $f'(x)$, მაგრამ ეს უკანასკნელი არ არის ჯამებადი. მართლაც, თუ $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, მაშინ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტში $f'(x)$ წარმოებული შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\, dx = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

კერძოდ, თუ

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}, \quad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

გვექნება

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(x)\, dx = \frac{1}{2n}.$$

მაგრამ $[\alpha_n, \beta_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ სეგმენტები წყვილწყვილად არ იკვეთებიან. მაშასადამე, თუ

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n],$$

მაშინ

$$\int_E |f'(x)|\, dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$$

და $f'(x)$ არ არის ჯამებადი. ამგვარად, ინტეგრების პროცესი ლებეგის მიხედვით არ შეიძლება ჩაითვალოს ისეთ მოქმედებად, რომელსაც შეეძლოს მოცემული წარმოებულის მიხედვით მისი პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის სრული ამოხსნა. ამ ამოცანის სრულ ამოხსნას იძლევა ინტეგრების დანჟუას პროცესი, რომელიც ლებეგის პროცესის განზოგადებას წარმოადგენს. ჩვენ ამ საკითხის განხილვის საშუალება არ გვაქვს.

სავარჯიშო IX თავისათვის

1. ჯამებადი ფუნქცია აპროქსიმატულად უწყვეტია თავის ყოველ ლებეგის წერტილზე. შებრუნებული დებულება სამართლიანი არ არის.

2. შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციისათვის ლებეგის წერტილისა და აპროქსიმატული უწყვეტობის წერტილის ცნებები ემთხვევიან.

3. იქიდან, რომ x_0 წერტილზე $f(x)$ წარმოადგენს თავისი განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულს, არ გამომდინარეობს, რომ იგი აპროქსიმატულად უწყვეტია ამ წერტილზე.

4. თუ $f(x)$ ფუნქციის ყველა წარმოებული რიცხვი აკმაყოფილებს $|Df(x)| \leqslant K$ უტოლობას, მაშინ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას.

5. თუ $F[f(x)]$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია ყოველგვარი აბსოლუტურად უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის, მაშინ $F(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას (გ. ფიხტენგოლცი).

6. ვთქვათ, $[a, b]$-ზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ ინტერვალთა ყოველი ისეთი სასრული $\{(a_k, b_k)\}$ სისტემისათვის, რომელთა სიგრძეების ჯამი ნაკლებია δ-ზე, გვექნება

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k)-f(a_k)\}\right| < \varepsilon,$$

მაშინ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას[1] (გ. ფიხტენგოლცი).

7. დაამტკიცეთ პირდაპირი გზით ბანახ-ზარეცკის თეორემის შემდეგი კერძო შემთხვევა: თუ უწყვეტ და არსებითად ზრდად ფუნქციას აქვს (N) თვისება, მაშინ იგი აბსოლუტურად უწყვეტია.

8. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$-ზე და E არის იმ წერტილთა სიმრავლე, სადაც $f(x)$-ს თუნდაც ერთი არადადებითი წარმოებული რიცხვი აქვს. თუ E სიმრავლის $f(E)$ სახე არ შეიცავს არავითარ სეგმენტს, მაშინ $f(x)$ ზრდადი ფუნქციაა (ა. ზიგმუნდი).

9. წინა შედეგის გამოყენებით, მოახდინეთ § 7-ს მე-2 ლემის შემდეგნაირი განზოგადება: თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$-ზე, თითქმის ყველგან $fD(x) \geqslant 0$, და იმ წერტილთა სიმრავლე, სადაც $Df(x) = -\infty$, სასრულია ან თვლადი, მაშინ $f(x)$ ზრდადი ფუნქციაა.

10. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია, $f'(x)$ არსებობს ყველგან და ჯამებადია. თუ $E(|f'| = +\infty)$ სიმრავლე სასრული ან თვლადია, მაშინ $f(x)$ აბსოლუტურად უწყვეტია (გამოიყენეთ წინა სავარჯიშოს შედეგი).

11. ფუნქციას, რომელსაც ყველგან სასრული წარმოებული აქვს, აქვს (N) თვისება.

12. იმისათვის, რომ უწყვეტი არსებითად ზრდადი $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იმ წერტილთა E სიმრავლის $f(E)$ სახეს, რომელშიაც $f'(x) = +\infty$, ნულის ტოლი ზომა ჰქონდეს (მ. ზარეცკი).

13. იმისათვის, რომ უწყვეტი და არსებითად ზრდადი $f(x)$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ გვქონდეს $mE(f' = 0) = 0$. (მ. ზარეცკი).

---

[1] ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ აბსოლუტური უწყვეტობის ცნების განმარტებაში იმ პირობის ჩამოშორება, რომ (a_k, b_k) ინტერვალები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან, არ შეიძლება.

თ ა ვ ი X

სინგულარული ინტეგრალები. ტრიგონომეტრიული მწკრივები

§ 1. საკითხის დასმა

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi_n(t,x) = \frac{1}{\pi} \; \frac{n}{1+n^2(t-x)^2} \tag{1}$$

თუ n და x ფიქსირებულია, ხოლო t იცვლება 0-დან 1-მდე, მაშინ ეს ფუნქცია უწყვეტია t-ს მიმართ. მაშასადამე, ყოველი ჯამებადი $f(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ ფუნქციისათვის შეიძლება განვიხილოთ სიდიდე

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{1+n^2(t-x)^2}. \tag{2}$$

დავამტკიცოთ, რომ ყოველ ისეთ x წერტილზე $(0 < x < 1)$, სადაც $f(t)$ უწყვეტია, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{3}$$

ამისათვის, უპირველესად ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ $n \to \infty$-სათვის

$$\int_0^1 \Phi_n(t,x)\,dt = \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-nx}^{n(1-x)} \frac{dz}{1+z^2} \to \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 1. \tag{4}$$

ამიტომ იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (3), საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $n \to \infty$-სათვის სხვაობა

$$r_n = f_n(x) - f(x) \int_0^1 \Phi_n(t,x)\,dt = \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt$$

მიისწრაფვის ნულისაკენ.

ამ მიზნით ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$, და ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ, როცა $|t-x| < \delta$, გვქონდეს $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$. ვიგულისხმოთ, რომ $0 < x - \delta < x + \delta < 1$ და r_n ასე წარმოვადგინოთ

$$r_n = \frac{n}{\pi} \int_0^{x-\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\, dt + \frac{n}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\, dt +$$

$$+ \frac{n}{\pi} \int_{x+\delta}^{1} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(1-x)^2}\, dt = A_n + B_n + C_n.$$

B_n ინტეგრალი შემდეგნაირად შეფასდება:

$$|B_n| \leqslant \frac{n}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{|f(t)-f(x)|}{1+n^2(t-x)^2}\, dt \leqslant \varepsilon \frac{n}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \varepsilon.$$

რაც შეეხება A_n ინტეგრალს, ამ ინტეგრალში გვექნება $|t-x| \geqslant \delta$, ასე რომ

$$|A_n| \leqslant \frac{n}{\pi(1+n^2\delta^2)} \int_0^{x-\delta} |f(t)-f(x)|\, dt < \frac{A(\delta)}{n},$$

სადაც $A(\delta)$ არ არის დამოკიდებული n-ზე. ანალოგიურად

$$|C_n| < \frac{C(\delta)}{n}$$

და, მაშასადამე,

$$|r_n| < \varepsilon + \frac{A(\delta)+C(\delta)}{n},$$

ასე რომ, საკმარისად დიდი n-სათვის

$$|r_n| < 2\varepsilon,$$

ე. ი. r_n მიისწრაფვის 0-საკენ n-ის ზრდასთან ერთად, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ძნელი არ არის გავერკვეთ იმაში, თუ $\Phi_n(t,x)$-ის რა თვისებები სახელდობრ უზრუნველყოფენ (3) დამოკიდებულებას. საქმე ისაა, რომ n-ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის $\Phi_n(t,x)$-ის ის მნიშვნელობანი, რომლებიც შეესაბამებიან x-დან რამდენადმე შესამჩნევად დაშორებულ t-ს მნიშვნელობებს, ფრიად მცირე არიან, ასე რომ (2) ინტეგრალის სიდიდე ძირითადად განისაზღვრება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის x-თან უშუალო მახლობლობაში

მყოფი მნიშვნელობებით. მაგრამ x-ის მახლობლად $f(t)$ ფუნქცია თითქმის ტოლია $f(x)$-ისა (რადგანაც იგი უწყვეტია, როცა $t = x$). მაშასადამე, როცა n დიდია, (2) ინტეგრალი მცირედ იცვლება, როცა $f(t)$ ს ვცვლით $f(x)$-ით, ე. ი. ის თითქმის უდრის

$$f(x) \cdot \frac{n}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{dt}{1 + n^2(t - x)^2}$$

ინტეგრალს, და, (4)-ის ძალით, თითქმის უდრის $f(x)$-ს.

მსგავსი თვისებების მქონე $\Phi_n(t,x)$ ფუნქციას *გული* ეწოდება. გულის ზუსტი განმარტება ასეთია:

განმარტება. *გული ეწოდება* ($a \leqslant t \leqslant b$, $a < x < b$) *კვადრატზე განსაზღვრულ ისეთ* $\Phi_n(t,x)$ ($n = 1,2,\dots$) *ფუნქციას, რომლისათვისაც*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi_n(t,x)\, dt = 1,$$

როცა $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$. თავისთავად იგულისხმება, რომ $\Phi_n(t,x)$ წარმოადგენს ჯამებად ფუნქციას t-ს მიმართ ნებისმიერი ფიქსირებული x-სათვის.

$$f_n(x) = \int\limits_a^b \Phi_n(t,x) f(t)\, dt$$

სახის ინტეგრალს, სადაც $\Phi_n(t,x)$ წარმოადგენს გულს, *სინგულარული ინტეგრალი* ეწოდება.

ასეთი ინტეგრალების თეორიას მრავალრიცხოვანი გამოყენებები აქვს. ამ თეორიის ძირითადი საკითხი მდგომარეობს იმ კავშირის აღმოჩენაში, რომელიც არსებობს $f_n(x)$ ინტეგრალის ზღვარით მნიშვნელობებსა ($n \to \infty$-სათვის) და $f(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობას შორის x წერტილზე. იმის გამო, რომ $f(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობის შეცვლა ერთ წერტილზე არავითარ გავლენას არ ახდენს $f_n(x)$-ის სიდიდეზე, საჭიროა მოვითხოვოთ, რომ $f(t)$ ფუნქციის $f(x)$ მნიშვნელობა x წერტილზე როგორღაც დაკავშირებული იყოს მის მნიშვნელობებთან მახლობელ წერტილებზე. ასეთი კავშირის უმარტივეს სახეს წარმოადგენს $f(t)$ ფუნქციის უწყვეტობა $t = x$ წერტილზე. ამ კავშირის სხვა სახეებს წარმოადგენენ, მაგალითად, აპროქსიმატული უწყვეტობა, პირობა, რომ x იყოს $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი, და ამის მსგავსი.

მოვიყვანოთ ლებეგის ერთი თეორემა, რომელიც შემდეგში ჩვენთვის სასარგებლო იქნება.

თეორემა 1 (ა. ლებეგი). *ვთქვათ,* $[a,b]$ *სეგმენტზე მოცემულია ზომადი ფუნქციათა* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$,… *მიმდევრობა. თუ არსებობს ისეთი* K *მუდმივი, რომ ყოველი* n-*სა და* t-*სათვის გვექნება*

$$|\varphi_n(t)| < K, \tag{5}$$

და თუ ყოველი c-სათვის ($a \le c \le b$) გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $[a,b]$-ზე ჯამებადი $f(t)$ ფუნქცია, სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt = 0. \tag{7}$$

დამტკიცება. თუ $[\alpha,\beta]$ წარმოადგენს $[a,b]$-ში მოთავსებულ სეგმენტს, მაშინ (6)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

ამ შენიშვნის შემდეგ განვიხილოთ რაიმე უწყვეტი $f(t)$ ფუნქცია და წინასწარ აღებულ $\varepsilon > 0$-სათვის მოვახდინოთ $[a,b]$ სეგმენტის $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ წერტილებით დაყოფა ისეთ მცირე ნაწილებად, რომ თითოეულ მათგანში $f(t)$-ს რხევა ნაკლები იყოს ε-ზე. მაშინ

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t)-f(x_k)]\,\varphi_n(t)dt + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_n(t)dt. \tag{9}$$

მაგრამ

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t)-f(x_k)]\,\varphi_n(t)dt \right| \le K\varepsilon(x_{k+1}-x_k),$$

ასე რომ პირველი ჯამი (9)-ში არ აღემატება $K\varepsilon(b-a)$-ს. (9)-ს მეორე ჯამი კი, (8)-ს ძალით, მიისწრაფვის ნულისაკენ n-ის ზრდასთან ერთად და, მაშასადამე, $n > n_0$-სათვის ნაკლები გახდება ε-ზე. ასეთი n-სათვის გვექნება

$$\left| \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt \right| < \varepsilon[K(b-a)+1],$$

ასე რომ (7) დამტკიცებულია უწყვეტი $f(t)$ ფუნქციისათვის.

ვთქვათ, შემდეგ, რომ $f(t)$ ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციაა.

$$|f(t)| \le M.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და, ნ. ლუზინის თეორემის გამოყენებით, ვიპოვოთ ისეთი უწყვეტი $g(t)$ ფუნქცია, რომ

$$mE(f \ne g) < \varepsilon, \quad |g(t)| \le M.$$

მაშინ

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt + \int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt.$$

მაგრამ

$$\left|\int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_{E(f\neq g)} [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right| < 2KM\varepsilon,$$

ხოლო $\int_a^b g\varphi_n dt$ ინტეგრალი, უკვე დამტკიცებულის მიხედვით, მიისწრაფვის ნულისაკენ და საკმარისად დიდი n სათვის ნაკლები ხდება ε-ზე. მაშასადამე, ასეთი n-სათვის გვექნება

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right| < (2KM+1)\varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს (7)-ს შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციის შემთხვევისათვის.

დასასრულს, ვთქვათ, რომ $f(t)$ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციაა.

ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და, ინტეგრალის აბსოლუტური უწყვეტობის გამოყენებით, ვიპოვოთ ისეთი δ, რომ ნებისმიერი ზომადი $e\subset[a,b]$ სიმრავლისათვის, ზომით $me<\delta$, გვქონდეს

$$\int_e |f(t)|dt < \varepsilon.$$

ამის შემდეგ ვიპოვოთ ისეთი ზომადი შემოსაზღვრული $g(t)$ ფუნქცია (IV თავი, § 4, თეორემა 1), რომ გვქონდეს

$$mE(f\neq g) < \delta.$$

შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $E(f\neq g)$ სიმრავლეზე $g(t)$ ფუნქცია ნულის ტოლია. მაშინ

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt + \int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt.$$

მაგრამ

$$\left|\int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_{E(f\neq g)} f(t)\varphi_n(t)dt\right| \leqslant K\varepsilon,$$

ხოლო $\int_a^b g\varphi_n dt$ ინტეგრალი საკმარისად დიდი n-სათვის ნაკლები იქნება

ε-ზე, და ასეთი n-სათვის გვექნება

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| < (K+1)\varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

მაგალითი. ვთქვათ, $\varphi_n(t) = \cos nt$. მაშინ

$$\int_a^c \varphi_n(t)\,dt = \frac{\sin nc - \sin na}{n} \to 0$$

და აშკარაა, რომ ლებეგის თეორემის ორივე პირობა დაცულია. ანალოგიურად განიხილება ის შემთხვევაც, როცა $\varphi_n(t) = \sin nt$. ამგვარად, დამტკიცებულია

თეორემა 2 (**რიმანი—ლებეგი**). $[a,b]$-ზე ნებისმიერი ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0.$$

კერძოდ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

მიისწრაფვიან ნულისაკენ, როცა $n\to\infty$.

თუ (7) დამოკიდებულება სამართლიანია $[a,b]$-ზე ყოველი ჯამებადი ფუნქციისათვის, ჩვენ ვიტყვით, რომ $\{\varphi_n(t)\}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია ნულისაკენ[1]

§ 2. წარმოდგენა უწყვეტობის წერტილებზე და ლებეგის წერტილებზე

შემდეგში, თუ სპეციალურად არ იქნება ნათქვამი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\Phi_n(t,x)$ გული შემოსაზღვრულია ნებისმიერი ფიქსირებული n-სა და x-სათვის. მაშინ სინგულარულ ინტეგრალს

$$f_n(x) = \int_a^b \Phi_n(t,x)\,f(t)\,dt$$

აზრი აქვს ნებისმიერი ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციისათვის.

თეორემა 1 (**ა. ლებეგი**). თუ ფიქსირებული x-სათვის $(a<x<b)$ და ნებისმიერი $\delta>0$-სათვის $\Phi_n(t,x)$ გული ყოველ

$$[a, x-\delta] \text{ და } [x+\delta, b]$$

[1]. აქ გვაქვს ერთნაირი გადახრა ფუნქციონალური ანალიზის ტერმინოლოგიიდან.

შუალედთაგანში სუსტად კრებადია ნულისაკენ და, გარდა ამისა თუ

$$\int_a^b |\Phi_n(t,x)|\,dt < H(x),$$

სადაც $H(x)$ დამოუკიდებელია n-საგან, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს ჯამებადი f(t) ფუნქცია, უწყვეტი x წერტილზე, სამართლიანია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

დამტკიცება. რადგან $\Phi_n(t,x)$ გულია, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t,x)\,dt = 1,$$

და საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt = 0.$$

ამ მიზნით, ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ, როცა $|t-x| < \delta$, გვქონდეს

$$|f(t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3H(x)}.$$

მაშინ ყოველი n-სათვის

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ თითოეული

$$\int_a^{x-\delta} [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt \quad \text{და} \quad \int_{x+\delta}^{b} [f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)dt$$

ინტეგრალთაგანი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n\to\infty$, ასე რომ $n>n_0$-სათვის თითოეული მათგანი აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები გახდება $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე. და ასეთი n-სათვის, აშკარაა, გვექნება

$$\left| \int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt \right| < \varepsilon,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ეს თეორემა ეხება ჯამებადი ფუნქციების წარმოდგენას უწყვეტობის წერტილებზე, მაგრამ ჯამებად ფუნქციას, საზოგადოდ, არა აქვს არცერთი უწყვეტობის წერტილი, რაც, რა თქმა უნდა, ამცირებს ამ თეორემის ინტერესს.

მეტ ინტერესს წარმოადგენს თეორემა ჯამებადი ფუნქციის წარმოდგენის შესახებ ლებეგის წერტილებზე, ვინაიდან, როგორც უკვე ვიცით, ასეთია იმ სეგმენტის თითქმის ყოველი წერტილი, სადაც მოცემულია ფუნქცია.

ლემა. *ვთქვათ, $\psi(t)$ და $f(t)$ არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციებია, ამასთან $\psi(t)$ ზრდადია. მაშინ*

$$\int_a^b f(t)\psi(t)\,dt \leqslant 4M\int_a^b \psi(t)\,dt,$$

სადაც

$$M = \sup\left\{\frac{1}{h}\int_{b-h}^{b} f(t)\,dt\right\}. \qquad (0 < h \leqslant b-a).$$

დამტკიცება. დავუშვათ

$$a_0 = a, \quad a_{k+1} = \frac{a_k + b}{2}.$$

მაშინ

$$\int_a^b f(t)\psi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\psi(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\psi(a_k)\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,dt.$$

მაგრამ

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)dt \leqslant \int_{a_{k-1}}^{b} f(t)dt \leqslant M(b-a_{k-1}) = 4M(a_{k+1}-a_k).$$

მაშასადამე,

$$\int_a^b f(t)\psi(t)\,dt \leqslant 4M\sum_{k=1}^{\infty}\psi(a_k)(a_{k+1}-a_k)$$

და დაგვრჩენია შევნიშნოთ, რომ

$$\psi(a_k)(a_{k+1}-a_k) \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}}\psi(t)\,dt,$$

ასე რომ

$$\int_a^b f(t)\psi(t)\,dt \leqslant 4M\int_{a_1}^b \psi(t)\,dt \leqslant 4M\int_a^b \psi(t)\,dt,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ჩვენ ვიტყვით, რომ $\Psi(t,x)$ ფუნქცია *მონოტონური მაჟორანტია* $\Phi(t,x)$ ფუნქციისა, თუ

$$|\Phi(t,x)| \leqslant \Psi(t,x)$$

და $\Psi(t,x)$ ფუნქცია ფიქსირებული x-სათვის, როგორ t-ს ფუნქცია, ზრდადია $[a,x]$ შუალედში და კლებადია $[a,b]$-ში.

თეორემა 2 (დ. ფადეევი). თუ $\Phi_n(t,x)$ *გულს ყოველი* n-*სათვის აქვს ისეთი* $\Psi_n(t,x)$ *მონოტონური მაჟორანტი, რომ*

$$\int_a^b \Psi_n(t,x)\,dt < K(x),$$

სადაც $K(x)$ *დამოკიდებულია მხოლოდ* x-*ზე, მაშინ*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(t,x)\,f(t)\,dt = f(x) \quad (a < x < b)$$

ტოლობა სამართლიანია ყოველი ისეთი $f(t)$ *ფუნქციისათვის, რომლისათვისაც* x — *ლებეგის წერტილია.*

დამტკიცება. რადგანაც $\Phi_n(t,x)$ გულია, საკმარისია შევამოწმოთ, რომ $n\to\infty$-სათვის

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt = 0.$$

ჩვენ დავკმაყოფილდებით

$$\int_a^x [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt$$

ინტეგრალის განხილვით, რადგან ინტეგრალი $[x,b]$ მონაკვეთზე შეისწავლება სავსებით ანალოგიურად. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და ვიპოვოთ ისეთი $\delta>0$, რომ, როცა $0<h\leqslant\delta$, გვქონდეს

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} |f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon,$$

ეს შესაძლებელია, რადგანაც x არის $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

ასეთ შემთხვევაში, ლემის ძალით,

$$\left|\int_{x-\delta}^{x} [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt\right| \leqslant \int_{x-\delta}^{x} |f(t)-f(x)|\,\Psi_n(t,x)\,dt < 4\,\varepsilon\,K(x).$$

დაგვრჩა აღმოვაჩინოთ, რომ

$$\int_a^{x-\delta} [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt$$

ინტეგრალი მიისწრაფვის 0-საკენ n-ის ზრდასთან ერთად, ე. ი. რომ $\Phi_n(t,x)$ სუსტად კრებადია ნულისაკენ $[a, x-\delta]$ სეგმენტში. მაგრამ, როცა $t \in [a, x-\delta]$, გვექნება

$$|\Phi_n(t,x)| \leqslant \Psi_n(t,x) \leqslant \Psi_n(x-\delta, x).$$

მეორეს მხრივ,

$$\delta \Psi_n(x-\delta, x) \leqslant \int_{x-\delta}^{x} \Psi_n(t,x)\, dt < K(x),$$

ასე რომ

$$|\Phi_n(t,x)| < \frac{K(x)}{\delta},$$

ე. ი. $\Phi_n(t,x)$ ფუნქციები თანაბრად შემოსაზღვრულია $[a, x-\delta]$ სეგმენტზე და შესრულებულია § 1-ს ლებეგის თეორემის (5) პირობა. მისი მეორე პირობა, ე. ი. (6) პირობა აგრეთვე შესრულებულია, რამდენადაც $\Phi_n(t,x)$ წარმოადგენს გულს. ამით დ. ფადეევის თეორემა დამტკიცებულია [1].

ამ თეორემის გამოყენების მაგალითისათვის მოვიყვანოთ ვეიერშტრასის ინტეგრალი

$$W_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-n^2 (t-x)^2} f(t)\, dt.$$

ფუნქცია

$$W_n(t,x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 (t-x)^2}$$

წარმოადგენს გულს, იმიტომ რომ $\alpha < x < \beta$-სათვის

$$\int_\alpha^\beta W_n(t,x)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{n(\alpha-x)}^{n(\beta-x)} e^{-z^2}\, dz \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = 1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ფუნქცია წარმოადგენს თავისივე მონოტონურ მაჟორანტს, რადგან e^{-z^2} ზრდადია, როცა $z < 0$, და კლებადია $z > 0$-სათვის. ფადეევის თეორემის პირობა შესრულებულია, რადგან

$$\int_a^b W_n(t,x)\, dt < 1.$$

ამგვარად, $[a,b]$-ზე ნებისმიერი ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციისათვის ტოლობა

$$\lim_{n \to \infty} W_n(x) = f(x)$$

შესრულდება ყოველ ლებეგის წერტილზე და, მაშასადამე, თითქმის ყველგან.

[1]. მოყვანილი დამტკიცება ჩვენ გვეკუთვნის (**И. П. Натансон. О суммировании рядов Фурье по способу С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского. Труды ЛИИ, 1937, № 4**).

§ 3. გამოყენება ფურიეს მწკრივთა თეორიაში

VIII თავის § 3-ში ჩვენ განვმარტეთ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ნებისმიერი $\{\omega_k(x)\}$ ორთოგონალური სისტემის მიმართ. თუ, კერძოდ, საკითხი ეხება ტრიგონომეტრიულ სისტემას

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots, \tag{1}$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციისათვის ფურიეს მწკრივს წარმოადგენს

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{2}$$

მწკრივი, სადაც

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx. \tag{3}$$

VII თავში ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $f(x)\in L_2$. ამ დაშვებამ უზრუნველყო $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს

$$c_k=\int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$$

კოეფიციენტების არსებობა ნებისმიერ ორთოგონალურ სისტემაში. მაგრამ (1) სისტემის ფუნქციები შემოსაზღვრულია. ამის გამო (3) კოეფიციენტები და, მათთან ერთად, (2) მწკრივიც, შეიძლება განვიხილოთ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციისათვის.

საკითხი (2) მწკრივის კრებადობის შესახებ მიიყვანება გარკვეული სინგულარული ინტეგრალის გამოკვლევაზე. მართლაც, თუ

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

მაშინ, (3)-ის ძალით,

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]f(t)\,dt.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ ცნობილ ფორმულას [1]

---

[1]. ეს ფორმულა ადვილად გამოიყვანება. ამისათვის შევკრიბოთ ტოლობანი

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha\qquad(k=1,2,\ldots,n)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

$S_n(x)$ ჯამს შეიძლება მივცეთ ასეთი სახე

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{(t-x)}{2}}f(t)dt. \tag{5}$$

ეს ინტეგრალი არის დირიხლეს სინგულარული ინტეგრალი.

ჩვენ არ შევჩერდებით (2) მწკრივის კრებადობის საკითხზე, დაინტერესებულ მკითხველს მივუთითებთ ზიგმუნდის[1] ამომწურავ მონოგრაფიაზე. ჩვენ განვიხილავთ საკითხს (2) მწკრივის შეჯამებადობის შესახებ ჩეზაროს მეთოდით. ეს მეთოდი მდგომარეობს $S_k(x)$ ჯამების პირველი n წევრის

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n} \tag{6}$$

საშუალო არითმეტიკულის ზღვრის მოძებნაში.

ცნობილია[2], რომ x წერტილზე (2) მწკრივის კრებადობის შემთხვევაში, $\sigma_n(x)$ მიმდევრობა კრებადია მწკრივის ჯამისაკენ, მაგრამ ეს მიმდევრობა შესაძლებელია კრებადი იყოს მაშინაც, როცა (2) განშლადია.

$\sigma_n(x)$-ის გამოკვლევის მიზნით იგი გარდავქმნათ (5) ფორმულის გამოყენებით

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2}(t-x)\right]\frac{f(t)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

მაგრამ

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

მართლაც, თუ შევკრებთ

$$\cos 2k\alpha-\cos 2(k+1)\alpha=2\sin\alpha\sin(2k+1)\alpha \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

ეს მოგვცემს;

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right],$$

საიდანაც გამომდინარეობს (4).

[1]. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.

[2]. იხ. მაგალითად, И. И. Привалов. Ряды Фурье, ОНТИ, 1934, ან Л. В. Канторович. Определенные интегралы и ряды Фурье, изд. ЛГУ, 1940.

ტოლობებს, მივიღებთ

$$2\sin\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha = 1-\cos 2n\alpha = 2\sin^2 n\alpha,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (7).

(7)-ის დახმარებით მივიღებთ

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 f(t)dt. \tag{8}$$

(8) ინტეგრალი არის ფეიერის სინგულარული ინტეგრალი. ვაჩვენოთ, რომ მისთვის შესრულებულია ფადეევის თეორემის პირობები.

ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია $f(t)=1$. (3) ფორმულებით მისი ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა გვაძლევს

$$a_0 = 2,\quad a_k = b_k = 0 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

მაშასადამე, ამ ფუნქციისათვის

$$S_n(x) = 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

და ამიტომ

$$\sigma_n(x) = 1.$$

მაგრამ, თუ $\sigma_n(x)$-ს გამოვსახავთ ფეიერის ინტეგრალით, მივიღებთ

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt = 1. \tag{9}$$

შევნიშნეთ რა ეს, განვიხილოთ $x\in(-\pi,+\pi)$ წერტილი. ვთქვათ, $-\pi\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant\pi$. თუ $t\in[-\pi,\alpha]$, მაშინ

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\leqslant\max\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}},\ \frac{1}{\sin^2\frac{\pi-x}{2}}\right\}=A(x,\alpha),$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{1}}\right]^2 dt < \frac{A(x,\alpha)}{n},$$

სადაც $A(x,\alpha)$ არ არის დამოკიდებული n-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt = 0.$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ ნულისაკენ მიისწრაფვის $[\beta, \pi]$ მონაკვეთზე გავრცელებული ინტეგრალიც. თუ ამას დაუპირისპირებთ (9)-ს, მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt = 1,$$

ასე რომ ფუნქცია

$$\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2$$

წარმოადგენს გულს.

ამ გულისათვის მონოტონური მაჟორანტი ადვილი ასაგებია. ამ მიზნით, შევნიშნოთ, რომ $|\sin z| \leqslant |z|$. აქედან

$$\frac{1}{\sin^2 z} \geqslant \frac{1}{z^2}.$$

მაგრამ

$$\frac{1}{\sin^2 z} \geqslant 1.$$

მაშასადამე

$$\frac{1}{\sin^2 z} \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^2+1}{2z^2}$$

და

$$\sin^2\frac{n(t-x)}{2} \leqslant \frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}. \tag{10}$$

მეორეს მხრივ, როცა $|z| \leqslant \frac{\pi}{2}$, მაშინ $|\sin z| \geqslant \frac{2}{\pi}|z|$, ასე რომ

$$\sin^2\frac{t-x}{2} \geqslant \frac{1}{\pi^2}(t-x)^2. \tag{11}$$

(10) და (11)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n\pi}\,\frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}\quad\frac{\pi^2}{(t-x)^2} = \frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}.$$

$\frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}$ ფუნქცია (აშკარაა მონოტონური) წარმოადგენს ფეიერის გულის მაჟორანტს. მაგრამ

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{n\pi\,dt}{n^2(t-x)^2+4} < \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi\,dz}{z^2+4} = \frac{\pi^2}{4},$$

ე. ი. მაჟორანტის ინტეგრალები შემოსაზღვრულია n-საგან დამოკიდებული რიცხვით.

ამგვარად, ფეიერის ინტეგრალი აკმაყოფილებს დ. ფადეევის თეორემის პირობებს. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 1 (ლ. ფეიერი — ა. ლებეგი). თითქმის ყველგან $[-\pi, +\pi]$-ზე გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x). \tag{12}$$

ეს დამოკიდებულება შესრულებულია $f(t)$ ფუნქციის ყოველ ლებეგის წერტილზე; და მით უფრო, მის ყოველ უწყვეტობის წერტილზე $(-\pi, +\pi)$ ინტერვალის შიგნით.

VII თავში დავამტკიცეთ, რომ (1) ტრიგონომეტრიული სისტემა სასრულია. ეს იმას ნიშნავდა, რომ ყოველი ისეთი $f(x) \in L_2$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი (3) ნულს უდრის, ეკვივალენტურია ნულისა. ახლა ჩვენ შეგვიძლია განვთავისუფლდეთ იმ შეზღუდვისაგან, რომ $f(x)$ ჯამებადია კვადრატით. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 2. თუ ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციის ყველა (3) კოეფიციენტი უდრის ნულს, მაშინ $f(x)$ ეკვივალენტურია ნულისა.

მართლაც, ასეთ შემთხვევაში $\sigma_n(x) = 0$, და, მაშასადამე, $f(x) = 0$ ყოველ ისეთ წერტილზე, სადაც სამართლიანია (12), ე. ი. თითქმის ყველგან.

1-ლი თეორემა საშუალებას გვაძლევს გამოვთქვათ ზოგიერთი მოსაზრება $S_n(x)$ ჯამების ყოფაქცევის შესახებ.

ამისათვის შევნიშნავთ, რომ

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ასე რომ

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{13}$$

აქედან

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [S_n(x) - \sigma_n(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} (a_k^2 + b_k^2). \tag{14}$$

განვიხილოთ ნატურალური რიცხვთა ისეთი $n_1, n_2, n_3, \ldots$ მიმდევრობა, რომლისათვისაც

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} > A > 1. \tag{15}$$

ასეთ მიმდევრობას **ლაკუნარული** ჰქვია. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3 (ა. კოლმოგოროვი). ვთქვათ, $f(x)$ კვადრატით ჯამებადია. თუ $\{n_i\}$ ლაკუნარული მიმდევრობაა, მაშინ თითქმის ყველგან $[-\pi,+\pi]$-ზე გვექნება

$$\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x) = f(x).$$

დამტკიცება. ფეიერ-ლებეგის თეორემის ძალით საკმარისი იქნება დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{i\to\infty} [S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)] = 0$$

თითქმის ყველგან.

ამისათვის (თავი VI, § 1, მე-11 თეორემის შედეგი) საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} (S_{n_i} - \sigma_{n_i})^2 dx < +\infty$$

ან, რაც იგივეა, რომ

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n_i^2} \sum_{k=1}^{n_i} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \right] < +\infty.$$

Q ჯამი შეიძლება ასე დაიწეროს

$$Q = \frac{1}{n_1^2} \sum_{k=1}^{n_1} u_k +$$

$$+ \frac{1}{n_2^2} \sum_{k=1}^{n_1} u_k + \frac{1}{n_2^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} u_k +$$

$$+ \frac{1}{n_3^2} \sum_{k=1}^{n_1} u_k + \frac{1}{n_3^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} u_k + \frac{1}{n_3^2} \sum_{k=n_2+1}^{n_3} u_k +$$

$$+ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot +$$

$$,$$

სადაც $u_k = k^2 (a_k^2 + b_k^2)$. ამ მწკრივის შეჯამებით სვეტების მიხედვით მივიღებთ

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} \frac{1}{n_s^2} \right) \left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} u_k \right) \qquad (n_0 = 0)$$

მაგრამ, რადგან

$$\frac{n_i}{n_s} \leqslant \frac{1}{A^{s-i}},$$

ამიტომ

$$\left(\sum_{s=i}^{\infty}\frac{1}{n_s^2}\right)\left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} n_k\right) < \sum_{s=i}^{\infty}\left(\frac{n_i}{n_s}\right)^2 \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2+b_k^2) <$$

$$< \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{A^{2s}} \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2+b_k^2) = \frac{A^2}{A^2-1}\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2+b_k^2).$$

აქედან

$$Q < \frac{A^2}{A^2-1}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2+b_k^2) = \frac{A^2}{A^2-1}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) < +\infty,$$

რადგან $\sum(a_k^2+b_k^2)$ მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

განმარტება. ტრიგონომეტრიულ

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_{n_i}\cos n_i x + b_{n_i}\sin n_i x)$$

მწკრივს *ლაკუნარული* ეწოდება, თუ $\{n_i\}$ მიმდევრობა ლაკუნარულია.

თეორემა 4 (ა. კოლმოგოროვი), *თუ ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ლაკუნარულია, მაშინ*

$$\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x) = f(x)$$

თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ

$$\lim_{i\to\infty}[S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)] = 0.$$

მაგრამ, (13)-ის ძალით,

$$|S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n_i}\frac{k}{n_i}(|a_k|+|b_k|).$$

თუ k არ ემთხვევა ერთერთ რიცხვს $n_1, n_2, n_3, \ldots,$ მაშინ

$$a_k = b_k = 0.$$

მაშასადამე,

$$|S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)| \sum_{m=1}^{i}\frac{n_m}{n_i}(|a_{n_m}|+|b_{n_m}|).$$

რიმან-ლებეგის (§ 1) თეორემის ძალით

$$\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \lim_{m\to\infty} b_{n_m} = 0.$$

შევნიშნეთ რა ეს, ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი m_0, რომ, როცა $m > m_0$, გვქონდეს

$$|a_{n_m}| + |b_{n_m}| < \varepsilon.$$

მაშინ, თუ M-ით აღვნიშნავთ

$$\sum_{m=1}^{m_0} n_m (|a_{n_m}| + |b_{n_m}|)\text{-ს},$$

გვექნება $i > m_0$-სათვის

$$|S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)| < \frac{M}{n_i} + \varepsilon \sum_{m=m_0+1}^{i} \frac{n_m}{n_i}. \tag{16}$$

მაგრამ, რადგან

$$\frac{n_m}{n_i} \leqslant \frac{1}{A^{i-m}},$$

ამიტომ

$$\sum_{m=m_0+1}^{i} \frac{n_m}{n_i} < \sum_{m=m_0+1}^{i} \frac{1}{A^{i-m}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{A^k} = \frac{A}{A-1}.$$

აქედან და (16)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$|S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)| < \frac{M}{n_i} + \frac{A}{A-1}\varepsilon.$$

თუ i-საკმარისად დიდია, მაშინ $\frac{M}{n_i} < \varepsilon$, და ყველა ასეთი i-სათვის გვექნება

$$|S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)| < \left(1 + \frac{A}{A-1}\right)\varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

შენიშვნა. კარგად ცნობილია აგრეთვე[1] ფურიეს მწკრივების შეჯამებადობისათვის აბელი-პუასონის ხერხი. ის მდგომარეობს ისეთი დამხმარე

$$S_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

მწკრივის შედგენაში, რომელიც კრებადია $0 < r < 1$-სათვის. თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი

$$\lim_{r \to 1-0} S_r)x),$$

[1]. И. И. Привалов. Ряды Фурье, გვ. 108; Л. В. Канторович. Определенные интегралы и ряды Фурье, გვ. 217.

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{17}$$

მწკრივის განზოგადებული ჯამი.

ძნელი არ არის ჩვენება იმისა[1], რომ ყოველ ისეთ x წერტილზე, რომელზედაც (17) მწკრივი შეჯამებადია ჩეზარო-ფეიერის პროცესით, ის შეჯამებადია აბელი-პუასონის პროცესითაც იმავე ჯამისაკენ. მაშასადამე, ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეჯამებადია აბელი-პუასონის მეთოდით ამ ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან. ეს ფაქტი შესაძლებელია დამტკიცდეს ფეიერი-ლებეგის თეორემის გამოყენების გარეშე, იმ სინგულმრული ინტეგრალის უშუალო გამოკვლევით, რომლითაც გამოისახება $S_r(x)$:

$$S_r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt$$

(პუასონის ინტეგრალი). ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით.

§ 4. ტრიგონომეტრიული მწკრივებისა და ფურიეს მწკრივების შემდგომი თვისებები

არა ყოველი ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

წარმოადგენს რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივს მაშინაც კი, როდესაც მისი კოეფიციენტები მიისწრაფვიან ნულისაკენ. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ ამაში, დავამტკიცოთ რამოდენიმე დებულება, რომლებსაც დამოუკიდებელი ინტერესიც ექნებათ.

ლემა 1 (ნ. აბელი). ვთქვათ, მოცემულია $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვები. აღვნიშნოთ

$$s_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$$

და ვთქვათ, რომ

$$|s_k|\leqslant A \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

თუ

$$q_1>q_2>\cdots>q_n>0.$$

[1] И. И. Привалов. Ряды Фурье, გვ. 110; Л. В. Канторович. Определенные интегралы и ряды Фурье, გვ. 218.

მაშინ

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k q_k\right| \leqslant A q_1.$$

დამტკიცება. თუ $k>1$, მაშინ $a_k = s_k - s_{k-1}$. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q_k = s_1 q_1 + \sum_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}) q_k = \sum_{k=1}^{n} s_k q_k - \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} q_{k-1}$$

და, ამიტომ,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (q_k - q_{k+1}) + s_n q_n.$$

აქედან

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k q_k\right| \leqslant A\left[\sum_{k=1}^{n-1} (q_k - q_{k+1}) + q_n\right] = A q_1,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

განმარტება. ჩვენ ვიტყვით, რომ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

მწკრივი აკმაყოფილებს აბელის პირობას, თუ

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant A \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

ლემა 2. ფიქსირებული x-სათვის თითოეული

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots \qquad (x \neq 2k\pi)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots \qquad (x \text{ — ნებისმიერია})$$

მწკრივთაგან აკმაყოფილებს აბელის პირობას.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

განმეორების თავიდან აცილების მიზნით, შევაფასოთ ეს ჯამები ისეთი ხერხით, რომელიც განსხვავდება ჩვენს მიერ ანალოგიურ შემთხვევებში გამოყენებული ხერხისაგან.

ეს ჯამები წარმოადგენენ

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kxi} = \frac{e^{xi} - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}}$$

ჯამის ნამდვილსა და წარმოსახვით ნაწილებს.

მაშასადამე, საკმარისია შევაფასოთ უკანასკნელი ჯამის მოდული.

აშკარაა, რომ

$$|C_n| \leqslant \frac{2}{|1-e^{xi}|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

აქედან

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad |B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

და ლემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა $x \neq 2k\pi$. თუ კი $x=2k\pi$, მაშინ სინუსების მწკრივისათვის ლემა ტრივიალურია.

თეორემა 1 (ნ. აბელი). ვთქვათ, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ მწკრივი აკმაყოფილებს აბელის პირობას. თუ

$$q_1 > q_2 > \dots > q_n > \dots, \lim_{n\to\infty} q_n = 0,$$

მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k$ მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k.$$

მაშინ, აბელის ლემის მიხედვით, როცა $m > n$,

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k q_k\right| \leqslant 2Aq_{n+1}$$

და საკმარისად დიდი n-სათვის ეს სიდიდე რაგინდ მცირეა, საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

შედეგი. თუ

$$q_1 > q_2 > \dots > q_n > \dots, \lim_{n\to\infty} q_n = 0,$$

მაშინ თითოეული

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \quad (x \neq 2k\pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx \qquad (x \text{ — ნებისმიერია})$$

მწკრივთაგანი კრებადია.

მაგალითად, მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\lg n} \tag{1}$$

კრებადია ყოველი x-სათვის. ჩვენ ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ (1) არ წარმოადგენს არცერთი ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივს. ამისათვის საჭიროა:

ლემა 3. ვთქვათ,

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

როგორიც არ უნდა იყოს x და n, სამართლიანია შეფასება

$$|\psi_n(x)| < 2\sqrt{\pi}.$$

დამტკიცება. ჯერ-ჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ $0 < x < \pi$. ვთქვათ, q ისეთი მთელი რიცხვია, რომ

$$q \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{x} < q + 1.$$

მაშინ

$$|\psi_n(x)| \leqslant |\psi_q(x)| + \left|\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right|.$$

(თუ $q = 0$, მაშინ ისპობა პირველი, თუ კი $q \geqslant n$, მაშინ — მეორე შესაკრები მარჯვენა მხარეში). რადგან $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$, ამიტომ

$$|\psi_q(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \frac{|\sin kx|}{k} \leqslant qx \leqslant \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

მეორეს მხრივ, აბელის ლემის ძალით,

$$\left|\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{A}{q+1},$$

სადაც $A = \max \left|\sum_{k=q+1}^{i} \sin kx\right|$ $(q + 1 \leqslant i \leqslant n)$. მაგრამ თუ სიტყვასიტყვით გავიმეორებთ იმ მსჯელობას, რომელიც ჩატარებული იყო მე-2 ლემის დამტკიცების დროს, ვნახავთ, რომ

$$\left|\sum_{k=q+1}^{i} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|};$$

ამიტომ $B \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ და, მაშასადამე,

$$\left|\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(q+1)\sin\frac{x}{2}}.$$

მივიღებთ რა მხედველობაში იმას, რომ $\sin\frac{x}{2} \geqslant \frac{x}{\pi}$, ხოლო $q+1 > \frac{\sqrt{\pi}}{x}$, გვექნება

$$\left|\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{x} \cdot \frac{x}{\pi}} = \sqrt{\pi},$$

აქედან, (2)-თან დაკავშირებით, გამომდინარეობს საძიებელი შეფასება. იმის გამო, რომ $|\psi_n(x)|$ ლუწი ფუნქციაა, ეს შეფასება სამართლიანია $-\pi < x < 0$-სათვისაც. $x=0$-სა და π-სათვის ეს შეფასება ტრივიალურია, ე. ი. ის სამართლიანია $-\pi < x \leqslant \pi$-სათვის, მაგრამ მაშინ, $\psi_n(x)$-ის პერიოდულობის ძალით, იგი სამართლიანია ყოველთვის, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2. ვთქვათ, $f(x)$ ჯამებადი ფუნქციაა. თუ

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ კრებადია 1-ლი თეორემის შედეგის მიხედვით. თუ მისი ჯამი არის $\psi(x)$, მაშინ ყოველი x-სათვის

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) f(x) = \psi(x) f(x).$$

მე-3 ლემის ძალით

$$|\psi_n(x) f(x)| \leqslant \sqrt{\pi}\,|f(x)|.$$

მაშასადამე, ლებეგის თეორემის ძალით ზღვარზე გადასვლის შესახებ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x) f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) f(x)\,dx.$$

მაგრამ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi_n(x)\,f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k},$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

ვუბრუნდებით რა (1) მწკრივს, ჩვენ ვხედავთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

განშლადია[1]. მაშასადამე, (1) გვაძლევს ისეთი ყველგან კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივის მაგალითს, რომელიც არ წარმოადგენს არცერთი ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივს (ეს მაგალითი პირველად ნაჩვენები იყო პ. ფატუს მიერ).

იდეათა იმავე განხრით მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 3. ვთქვათ, $[-\pi,+\pi]$ მონაკვეთში მოცემულია ისეთი ჯამებადი $f(x)$ ფუნქცია, რომლისათვისაც

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

მწკრივი წარმოადგენს ფურიეს მწკრივს. თუ $[A,B]\subset[-\pi,+\pi]$, მაშინ

$$\int\limits_A^B f(x)\,dx=\int\limits_A^B\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_A^B(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, შესაძლებელია ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება. ეს ფაქტი მეტად მნიშვნელოვანია, რადგანაც $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შესაძლოა განშლადიც იყოს.

მე-3 თეორემის დასამტკიცებლად,

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x\in[A,B]\\ 0, & \text{როცა } x\,\overline{\in}\,[A,B].\end{cases}$$

---

[1] რადგან ფუნქცია $\dfrac{1}{x\ln x}$ კლებადია, ამიტომ

$$\frac{1}{n\ln n}>\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x\ln x}.$$

აქედან $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n\ln n}>\int\limits_2^N\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln N-\ln\ln 2.$

ეს ფუნქცია, როგორც ეს ცნობილია ანალიზის ელემენტებიდან, იშლება ფურიეს მწკრივად

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

$[-\pi, +\pi]$ სეგმენტის ყველა წერტილზე, გარდა $-\pi, A, B, \pi$ წერტილებისა. ვთქვათ,

$$S_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

ეს ჯამი, თუ ფაქტიურად გამოვითვლით α_k და β_k კოეფიციენტებს, შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვანაირად:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx = \frac{B-A}{\pi}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\, dx = \frac{\sin kB - \sin kA}{k\pi}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin kx\, dx = \frac{\cos kA - \cos kB}{k\pi}.$$

ამ სიდიდეების $S_n(x)$ გამოსახულებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$S_n(x) = \frac{B-A}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin k(B-x)}{k} - \frac{\sin k(A-x)}{k} \right].$$

აქედან, მე-3 ლემის ძალით, ყოველი x და n-სათვის

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{B-A}{2\pi} + \frac{4}{\sqrt{\pi}},$$

ე. ი. $S_n(x)$ ჯამები თანაბრად შემოსაზღვრულია. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ ლებეგის თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, S_n(x)\, dx,$$

რაც შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$\int_A^B f(x)\, dx = \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx + \beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx \right]$$

ან კიდევ ასე:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}(B-A) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \frac{\sin kB - \sin kA}{k} + b_k \frac{\cos kA - \cos kB}{k}\right],$$

ხოლო ეს ტოლობა კი წარმოადგენს დასამტკიცებელ თეორემას.

თეორემა 4 (გ. კანტორი — ა. ლებეგი). *თუ დადებითი ზომის E სიმრავლის ყოველ წერტილზე*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

მაშინ ყოველი n-სათვის არსებობს ისეთი Θ_n კუთხე, რომლისათვისაც

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx + \Theta_n).$$

თუ დავუშვებთ, რომ r_n არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ჩვენ შეგვიძლია ისეთი $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ მიმდევრობის გამოყოფა, რომლისათვისაც $r_{n_k} > \sigma > 0$. მაგრამ $x \in E$-სათვის გვექნება

$$r_n \cos(nx + \Theta_n) \to 0,$$

მაშასადამე, ასეთი x-ებისათვის

$$\cos(n_k x + \Theta_{n_k}) \to 0.$$

აქედან, ლებეგის თეორემის ძალით ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos^2(n_k x + \Theta_{n_k})\,dx = 0. \tag{3}$$

მეორეს მხრივ,

$$\int_E \cos^2(nx + \Theta_n)\,dx = \frac{1}{2}\int_E [1 + \cos(2nx + 2\Theta_n)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}mE + \cos 2\Theta_n \int_E \cos 2nx\,dx - \sin 2\Theta_n \int_E \sin 2nx\,dx.$$

მაგრამ

$$\int_E \cos nx\,dx \quad და \quad \int_E \sin nx\,dx.$$

ინტეგრალები, წარმოადგენენ რა E სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, მიისწრაფვიან ნულისაკენ (რიმან—ლებეგის თეორემის ძალით). აქედან

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos^2(nx+\Theta_n)\,dx = \frac{1}{2}mE,$$

რაც ეწინააღმდეგება (3)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია დადებითი ზომის სიმრავლეზე, მაშინ მისი კოეფიციენტები მიისწრაფვიან ნულისაკენ.

იდეით ამ თეორემასთან ძალიან ახლოა შემდეგი თეორემის დამტკიცება.

თეორემა 5 (ნ. ლუზინი—ა. დანჟუა). თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

აბსოლუტურად კრებადია დადებითი ზომის E სიმრავლეზე, მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<+\infty .$$

დამტკიცება. წინა თეორემის აღნიშვნების შენარჩუნებით, E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n\cos^2(nx+\Theta_n)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} r_n|\cos(nx+\Theta_n)|<+\infty.$$

ვთქვათ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n\cos^2(nx+\Theta_n)=A(x).$$

ეს ფუნქცია ზომადი და სასრულია E-ზე. მაშასადამე, E-დან გამოიყოფა ისეთი E_0 სიმრავლე ($mE_0>0$), რომელზედაც $A(x)$ შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, ჯამებადია.

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n\int_{E_0}\cos^2(nx+\Theta_n)\,dx=\int_{E_0}A(x)\,dx<+\infty.$$

მაგრამ მე-4 თეორემის დამტკიცების დროს ჩვენ ვნახეთ, რომ

$$\int_{E_0}\cos^2(nx+\Theta_n)\,dx\to\frac{mE_0}{2}.$$

მაშასადამე, როცა $n \geqslant n_0$, ეს ინტეგრალი აღემატება $\frac{mE_0}{3}$-ს და, ამიტომ,

$$\frac{mE_0}{3}\sum_{n=n_0}^{\infty} r_n < \sum_{n=n_0}^{\infty} r_n \int\limits_{E_0} \cos^2(nx+\Theta_n)\,dx < +\infty,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

მწკრივის კრებადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო X თავისათვის

1. ინტეგრალი

$$L_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int\limits_0^1 [1-(t-x)^2]^n f(t)\,dt$$

არის ლანდაუს სინგულარული ინტეგრალი. თუ x $(0 < x < 1)$ არის ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი, მაშინ $L_n(x) \to f(x)$ (ფ. რისი).

2. ინტეგრალი

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} f(t)\,dt \qquad (0 < r < 1)$$

არის პუასონის სინგულარული ინტეგრალი. თუ x $(-\pi < x < \pi)$ არის ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი, მაშინ

$$\lim_{r\to 1-0} P_r(x) = f(x)$$

(პ. ფატუ).

3. ინტეგრალი

$$V_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos^{2n}\frac{t-x}{2} f(t)\,dt$$

არის ვალე-პუსენის სინგულარული ინტეგრალი. თუ $x(-\pi < x < \pi)$ არის ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი, მაშინ $V_n(x) \to f(t)$ (შ. ჟ. ვალე-პუსენი).

4. პოლინომი

$$K_n(x) = (n+1)\sum_{n=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt$$

არის კანტოროვიჩის სინგულარული ინტეგრალი. თუ x $(0 < x < 1)$ არის ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციის ლებეგის წერტილი, მაშინ $K_n(x) \to f(x)$ (ლ. კანტოროვიჩი).

5. ვთქვათ, $S_n(x)$ არის ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი და

$$B_n(x) = \frac{1}{2}\left[S_n(x) + S_n\left(x + \frac{2\pi}{2n+1}\right)\right].$$

$B_n(x)$ არის ს. ბერნშტეინის სინგულარული ინტეგრალი. თუ x $(-\pi < x < \pi)$ არის $f(t)$-ს ლებეგის წერტილი, მაშინ $B_n(x) \to f(x)$ (ი. ნატანსონი).

6. თუ $\Phi_n(t, x)$ გული ეთხვევა თავის მონოტონურ მაჟორანტს და

$$\int_a^b \Phi_n(t, x)\, dt < K(x),$$

მაშინ ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t, x) f(t)\, dt = f(x)$$

სამართლიანია ყოველი ისეთი x წერტილისათვის, რომელშიაც $f(t)$ არის თავისი განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული (ვ. რომანოვსკი).

7. გამოიყენეთ წინა შედეგი $L_n(x)$, $P_n(x)$, $V_n(x)$, $K_n(x)$, $W_n(x)$ ინტეგრალებისათვის.

8, იმისათვის, რომ ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t) f(t)\, dt = 0$$

სამართლიანი იყოს ჯამებადი $f(t)$ ფუნქციისათვის, აუცილებელია, რომ ყოველი $\varphi_n(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს ერთიდაიგივე რიცხვით $|\varphi_n(x)| < K$ (ა. ლებეგი).

9. არ შეიძლება ისეთი $\Phi_n(t, x)$ გულის აგება, რომ ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t, x) f(t)\, dt = f(x)$$

სამართლიანი იყოს ნებისმიერი ჯამებადი და x წერტილზე აპროქსიმალურად უწყვეტი $f(t)$ ფუნქციისათვის (ი. ნატანსონი).

10, ააგეთ ისეთი გული, რომელიც აკმაყოფილებს § 2-ის ლებეგის თეორემის პირობებს და არ აკმაყოფილებს ფადეევის თეორემის პირობებს.

თავი XI

ტრანსფინიტური რიცხვები

§ 1. დალაგებული სიმრავლეები. რიგითი ტიპები

III თავიდან დაწყებული ჩვენ საქმე გვქონდა, თითქმის მხოლოდ ფუნქციათა მეტრიკულ თეორიასთან, რომელშიაც ძირითადი იყო წერტილოვანი სიმრავლის *ზომის* ცნება. ამ თეორიის შესასწავლად ჩვენთვის საკმარისი აღმოჩნდა სიმრავლეთა თეორიის ის მცირეოდენი ცნობები, რომლებიც გადმოცემული იყო წიგნის პირველ ორ თავში. გვსურს რა შევჩერდეთ ფუნქციათა დესკრიპტიკული თეორიის ზოგიერთ საკითხზე, ჩვენ უნდა გავაღრმავოთ ჩვენი ცნობები სიმრავლეთა თეორიაში; ამ მიზანს ემსახურება ეს თავი.

I თავში, როცა ვლაპარაკობდით სიმრავლეზე, ჩვენ უგულვებელვყოფდით იმას, თუ როგორი მიმდევრობით არიან დალაგებული მისი ელემენტები. აქ, პირიქით, საკითხი მოცემულ სიმრავლეში მისი ელემენტების დალაგების შესახებ ჩვენთვის ძირითადი იქნება.

განმარტება 1. A *სიმრავლეს დალაგებული ეწოდება, თუ ნაჩვენებია ისეთი* φ *წესი, რომლის მიხედვითაც* A *სიმრავლის ნებისმიერ ორ სხვადასხვა* a *და* b *ელემენტს შორის ერთი მათგანი მეორის წინამორბედია. ამასთან, შესრულებული უნდა იყოს შემდეგი მოთხოვნილებანი:*

1) თუ a *არის* b*-ს წინამორბედი, მაშინ* b *არ არის* a*-ს წინამორბედი.*

2) თუ a *არის* b*-ს წინამორბედი, ხოლო* b *წინამორბედია* c*-სი, მაშინ* a *წინამორბედია* c*-სი.*

თუ a არის b-ს წინამორბედი, მაშინ ამბობენ, რომ b არის a-ს *მომდევნო*. სიმბოლიურად ამას ასე სწერენ:

$$a \prec b, \quad b \succ a.$$

თვით φ წესს, რომელზედაც ლაპარაკია განმარტებაში, ეწოდება *დალაგების ხერხი*. როცა ვიტყვით, რომ მოცემულია დალაგებული A სიმრავლე, ვიგულისხმებთ, რომ იგი განიხილება მისი დალაგების ხერხთან ერთად. თუ

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{b, c, a\}$$

სიმრავლეები დალაგებული არიან მათში ასოების დაწერის მიხედვით, მაშინ ისინი სხვადასხვა დალაგებული სიმრავლეებია.

ამასთან დაკავშირებულია ტერმინის — „დალაგებული სიმრავლის ნაწილი“ — რამდენადმე თავისებური ხმარება. სახელდობრ, თუ A დალაგებული სიმრავლეა, ხოლო B — მისი ქვესიმრავლე, მაშინ B-ს ყოველი ორი ელემენტი A-საც ეკუთვნის და მასში (A-ში) მათ გარკვეული ურთიერთდალაგება აქვთ. ჩვენ ერთხელ და სამუდამოდ შევთანხმდებით, რომ B-ში ამ ელემენტების მიმდევრობის წესი ისეთივეა, როგორც A-ში. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს შეთანხმება წარმოადგენს B სიმრავლის დალაგების ხერხს.

ამგვარად, დალაგებული A სიმრავლის ნაწილს ჩვენ ისეთ დალაგებულ B სიმრავლეს ვუწოდებთ, რომლის ყველა ელემენტი შედის A-ში და რომელთა ურთიერთ დალაგება B-ში ისეთივეა, როგორც A-ში.

თუ, მაგალითად,

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{b, a\},$$

მაშინ A-ს ნაწილს წარმოადგენს B, მაგრამ არა C.

მოვიყვანოთ დალაგებულ სიმრავლეთა რამოდენიმე მაგალითი.

1. უპირველესად ყოვლისა, ნამდვილ რიცხვთა ყოველი A სიმრავლე შეიძლება დავალაგოთ: ამისათვის A-ში შემავალ ორ რიცხვს შორის საკმარისია წინამორბედად ჩავთვალოთ ის, რომელიც ნაკლებია. ასეთ რიგს ჩვენ ბუნებრივს ვუწოდებთ.

2. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი სიმრავლე შეიძლებოდა დაგველაგებინა შებრუნებული რიგითაც, ამისათვის წინამორბედად უნდა ჩაგვეთვალა მეტი რიცხვი. მაგალითად, აღნიშნული ხერხით დალაგებული ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე განლაგდება ასე:

$$\{\ldots, 5, 4, 3, 2, 1\}.$$

3. n ელემენტიანი სასრული სიმრავლე შესაძლებელია დავალაგოთ $n!$ სხვადასხვა ხერხით.

4. ყოველი ნატურალური რიცხვი n ერთადერთი სახით წარმოიდგინება ასე

$$n = 2^k(2m+1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots).$$

შევთანხმდეთ $n = 2^k(m+1)$ რიცხვი ჩავთვალოდ $n' = 2^{k'}(2m'+1)$ რიცხვის წინამორბედად, როცა $k < k'$, ხოლო, თუ $k = k'$, როცა $m < m'$. დალაგების ასეთი ხერხის დროს, ნატურილური რიცხვები განლაგდებიან ასე:

$$\begin{array}{l} 1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9, \ldots \\ 2, \ 6, \ 10, \ 14, \ 18, \ldots \\ 4, \ 12, \ 20, \ 28, \ 36, \ldots \end{array}$$

ამასთან ორი სხვადასხვა სტრიქონის რიცხვს შორის წინამორბედი არის ის,

რომელიც დაწერილია მაღლა, ხოლო თითოეულ სტრიქონში რიცხვები დალაგებულია ბუნებრივი მიმდევრობით. მაგალითად,

$$7 \prec 2,\ 18 \prec 12,\ 28 \prec 36.$$

5. ყოველი კომპლექსური რიცხვი მხოლოდ ერთნაირად[1] წარმოიდგინება ასე

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

სადაც r მოდულია, ხოლო φ — არგუმენტი რიცხვისა. თუ შევთანხმდებით, რომ ორ კომპლექსურ რიცხვს შორის წინამორბედად ჩავთვალოთ ის, რომლის მოდულიც ნაკლებია, ხოლო მოდულების ტოლობის დროს — ის რომელსაც ნაკლები არგუმენტი აქვს, მაშინ ჩვენ დავალაგებთ ყველა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს.

ვთქვათ, A დალაგებული სიმრავლეა და $a \in A$. თუ A-ში არ არსებობს არცერთი a-ს წინამორბედი ელემენტი, მაშინ a-ს A სიმრავლის პირველი ელემენტი ეწოდება. ანალოგიურად შემოიღება უკანასკნელი ელემენტის ცნება. შემდეგ, თუ a, b, c წარმოადგენენ A სიმრავლის ელემენტებს და $a \prec b \prec c$, მაშინ ამბობენ, რომ b მოთავსებულია a-სა და c-ს შორის.

განმარტება 2. ვთქვათ, A და B ორი დალაგებული სიმრავლეა და φ არის ურთიერთცალსახა თანადობა მათ შორის. თუ ყოველი

$$a \prec a'$$

დამოკიდებულება, რომელიც არსებობს A-ს ელემენტებს შორის, სწორი რჩება ამ ელემენტების B-ს შესაბამი ელემენტებით შეცვლის დროს, მაშინ φ-ს ეწოდება A და B სიმრავლეების ურთიერთ დაფარება.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ორი დალაგებული სიმრავლის დაფარება არის ისეთი თანადობა, რომელიც ინარჩუნებს ელემენტების მიმდევრობის წესს.

განმარტება 3. თუ ორი A და B დალაგებული სიმრავლე შესაძლებელია დავაფაროთ ერთმანეთს, მაშინ ამბობენ, რომ ეს სიმრავლეები ერთმანეთის მსგავსია და სწერენ

$$A \simeq B.$$

თეორემა 1. თუ დალაგებული სიმრავლეები ერთმანეთის მსგავსია, მაშინ ისინი ეკვივალენტური არიან.

მართლაც, დაფარება არის ურთიერთცალსახა თანადობის სახე.

ადვილი მისახვედრია, რომ სასრული სიმრავლეებისათვის ეს თეორემა შებრუნებადია, ე. ი. სამართლიანია

თეორემა 2. თუ A და B დალაგებული სასრული სიმრავლეები ელემენტთა ერთიდაიგივე რაოდენობას შეიცავენ, მაშინ ეს სიმრავლეები ერთმანეთის მსგავსი არიან.

ამ ფაქტის დამტკიცებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი ლემა.

[1] $z = 0$-სათვის მივიღოთ $\varphi = 0$.

ლემა. თუ A სასრული დალაგებული სიმრავლეა, მაშინ მასში არსებობს პირველი ელემენტი.

მართლაც, ავიღოთ A-ს რომელიმე ელემენტი. თუ ის პირველია, ლემა დამტკიცებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში A-ში არსებობენ არჩეულ ელემენტზე უფრო წინამორბედი ელემენტები. ავიღოთ რომელიმე მათგანი. თუ ის პირველია A-ში, მაშინ ლემა დამტკიცებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვეძლევა შესაძლებლობა A-დან ახალი ელემენტების შემდგომი ამორჩევისა. ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ უსათუოდ შევხვდებით A-ს პირველ ელემენტს, რადგან სხვანაირად სასრული სიმრავლიდან მოსახერხებელი იქნებოდა სხვადასხვა ელემენტების უსასრულო მიმდევრობის გამოყოფა, რაც შეუძლებელია.

შედეგი. თუ A n ელემენტისაგან შემდგარი დალაგებული სიმრავლეა, მაშინ იგი შეიძლება გადავნომროთ ისე, რომ გვქონდეს

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n.$$

მართლაც ამისათვის საჭიროა a_1-ით აღვნიშნოთ A-ს პირველი ელემენტი, a_2-თ—სასრული $A-\{a_1\}$ სიმრავლის პირველი ელემენტი და ა. შ.

ახლა მე-2 თეორემა აშკარაა. მართლაც, თუ A და B ისეთი დალაგებული სიმრავლეებია, რომელთაგან თითოეული შედგება n ელემენტისაგან, მაშინ ზემომოყვანილი წესით მათ გადავნომრავთ და ერთმანეთს შევუსაბამებთ ერთნაირი ნომრის ელემენტებს.

უსასრულო სიმრავლეებისათვის 1-ლი თეორემა არ შებრუნდება. მაგალითად, თუ

$$A=\{1, 2, 3, \ldots\}, \quad B=\{\ldots, 3, 2, 1\},$$

მაშინ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტური არიან (ისინი ერთიდაიგივე ელემენტებისაგან შედგებიან). მიუხედავად ამისა, ისინი არ არიან მსგავსი, რაც ჩანს თუნდაც იქიდან, რომ A-ში არსებობს პირველი ელემენტი, ხოლო B-ში ასეთი ელემენტი არა გვაქვს, მაშინ როცა დალაგებული სიმრავლეების დაფარების დროს ერთერთი მათგანის პირველ ელემენტს აუცილებლად უნდა შეესაბამებოდეს მეორის პირველი ელემენტი.

თეორემა 3. ვთქვათ, A, B, C დალაგებული სიმრავლეებია. მაშინ

$$1)\ A \simeq A. \quad 2)\ \text{თუ}\ A \simeq B,\ \text{მაშინ}\ B \simeq A. \quad 3)\ \text{თუ}\ A \simeq B,\ \text{ხოლო}\ B \simeq C,\ \text{მაშინ}\ A \simeq C.$$

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

სავსებით ისევე, როგორც ორი სიმრავლის ეკვივალენტობის ცნებამ მიგვიყვანა სიმძლავრის ზოგად განმარტებამდე, ასევე მსგავსების ცნებას მივყავართ რიგითი ტიპის განმარტებამდე.

განმარტება 4. ვთქვათ, ყველა დალაგებული სიმრავლეები განაწილებული არიან კლასებად ისე, რომ ორი სიმრავლე ერთ კლასში მოთავსდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდე-

საც ისინი მსგავსი არიან. შევუსაბამოთ დალაგებულ სიმრავლეთა ყოველ კლასს რაიმე სიმბოლო და ვუწოდოთ მას ამ კლასის ნებისმიერი სიმრავლის რიგითი ტიპი.

დალაგებული A სიმრავლის რიგით ტიპს აღნიშნავენ $\overline{A}$-თი. მსგავსი A და B სიმრავლეების შესახებ ამბობენ, რომ მათ ერთიდაიგივე რიგითი ტიპი აქვთ და სწერენ

$$\overline{A} = \overline{B}.$$

ყველა იმ სიმრავლეებს, რომლებსაც აქვთ მოცემული რიგითი α ტიპი, აქვთ ერთნაირი სიმძლავრე. მას α ტიპის სიმძლავრეს უწოდებენ და $\overline{\alpha}$-თი აღნიშნავენ. თუ $\overline{A} = \alpha$, მაშინ $\overline{\overline{A}} = \overline{\alpha}$.

თუ $\alpha = \beta$, მაშინ $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, მაგრამ როგორც ვნახეთ, შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა.

ზოგიერთ ისეთ რიგით ტიპს, რომლებიც ხშირად გვხვდებიან, საყოველთაოდ მიღებული აღნიშვნა აქვს.

მაგალითად,

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

სიმრავლის რიგით ტიპს (და მაშასადამე, ყველა სხვა n ელემენტიანი დალაგებული სიმრავლისას) აღნიშნავენ ასოთი n. ამგვარად, n სიმბოლო ერთდროულად იხმარება როგორც A სიმრავლის სიმძლავრის, ისე რიგითი ტიპის აღსანიშნავად. აღნიშვნათა ეს ნაკლოვანება არ იწვევს რამდენადმე შესამჩნევ უხერხულებას.

შემდეგისათვის შევთანხმდეთ ცარიელი და ერთელემენტიანი სიმრავლეები ჩავთვალოთ დალაგებულ სიმრავლეებად და მათი ტიპები აღვნიშნოთ შესაბამად 0-ითა და 1-ით.

ბუნებრივი რიგით დალაგებული ყველა ნატურალური რიცხვების

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

სიმრავლის რიგით ტიპს აღნიშნავენ ω-თი, $\overline{N} = \omega$.

ბუნებრივის შებრუნებული რიგით დალაგებული ყველა ნატურალური რიცხვების

$$N^* = \{\ldots, 4, 3, 2, 1\}$$

სიმრავლის რიგითი ტიპი აღინიშნება ω^* სიმბოლოთი.

აშკარაა, რომ $\overline{\omega^*} = \overline{\omega}$, მაგრამ $\omega^* \neq \omega$.

საზოგადოდ, თუ გვაქვს φ დალაგების წესით დალაგებული A სიმრავლე, შესაძლებელია მივიღოთ მეორე დალაგებული სიმრავლე A^*, რომელიც იმავე ელემენტებისაგან შედგება, მაგრამ დალაგების „შებრუნებული“ φ^* წესით. სახელდობრ, თუ $a \in A$, $b \in A$ და φ-ს მიხედვით გვაქვს $a \prec b$, მაშინ φ^*-ის მიხედვით უნდა გვქონდეს $a \succ b$. თუ A-ს ტიპი არის α, მაშინ A^*-ს ტიპი აღინიშნება α^*-თი.

ადვილი გასაგებია, რომ $(\alpha^*)^* = \alpha$. სასრული სიმრავლის რიგითი n ტიპისათვის გვექნება $n^* = n$.

ბუნებრივი რიგით დალაგებული ყველა მთელი რიცხვების

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

სიმრავლის რიგითი ტიპი აღინიშნება π-თი. აშკარაა, რომ $\pi^* = \pi$.

ბუნებრივი რიგით დალაგებულ ყველა რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის რიგით ტიპს აღნიშნავენ η-თი. აშკარაა, რომ $\eta^* = \eta$.

დაბოლოს, ბუნებრივი რიგით დალაგებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლის რიგით ტიპს აღნიშნავენ λ-თი. ცხადია, რომ $\lambda^* = \lambda$. ადვილი მისახვედრია, რომ რიცხვითი წრფის ნებისმიერი ინტერვალის[1] (და არა სეგმენტის!) რიგითი ტიპი არის λ. $(a, b) = \{x\}$ ინტერვალის დაფარება $Z = \{y\}$ სიმრავლეზე შესაძლებელია განხორციელდეს, მაგალითად,

$$y = tg\,\frac{(2x - a - b)\pi}{2(b - a)}$$

ფორმულის მიხედვით.

თეორემა 4. როგორიც არ უნდა იყოს თვლადი დალაგებული A სიმრავლე, ბუნებრივი რიგით დალაგებული ყველა რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლიდან შეიძლება გამოიყოს A სიმრავლის მსგავსი R_0 ნაწილი[2].

დამტკიცება. გადავნომროთ თითოეული (თვლადი) A და R სიმრავლე:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \qquad R = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}.$$

თავისთავად ცხადია, რომ ეს ნუმერაცია არაფრით არ არის დაკავშირებული ელემენტების მიმდევრობასთან A და R სიმრავლეებში (R-ში, საზოგადოდ, შეუძლებელია დავადგინოთ ისეთი ნუმერაცია, რომლის დროსაც გვექნება $r_1 < r_2 < r_3 \ldots$ რადგან R არ შეიცავს პირველ ელემენტს).

დავუშვათ $n_1 = 1$. ამის შემდეგ, დავარქვათ r_{n_2} იმ ელემენტს R-დან, რომელიც: 1) ისეთივე მდებარეობის არის r_{n_1}-ის მიმართ, როგორც a_2 ელემენტი a_1-ს მიმართ (ე. ი. თუ $a_2 > a_1$, მაშინ $r_{n_2} > r_{n_1}$, ხოლო თუ $a_2 < a_1$, მაშინ $r_{n_2} < r_{n_1}$) და 2) ყველა ასეთ ელემენტებს შორის უმცირესი ნომრისა არის. ასეთი r_{n_2} ელემენტის არსებობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ R-ში არ არსებობს არც პირველი და არც უკანასკნელი ელემენტი.

შემდეგ, თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ R-ში ყოველთვის არსებობს საშუალო ელემენტები და აგრეთვე იმით, რომ R-ში არ არის არც პირველი, არც უკანასკნელი ელემენტი, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ R-ში არსებობს ისეთი ელემენტები, რომლებიც ისევე არიან დალაგებული r_{n_1}-სა და r_{n_2}-ს მიმართ, როგორც a_3 ელემენტი a_1 და a_2-ს მიმართ. იმ ელემენტს მათ შორის, რომელსაც აქვს უმცირესი ნომერი, დავარქვათ r_{n_3}.

---

[1] ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ინტერვალის რიცხვები დალაგებული არიან ბუნებრივი რიგით.

[2] ამასთანავე R_0-ის რიცხვები დალაგებული არიან R_0-ში ისეთსავე (ბუნებრივ) რიგით, როგორითაც R-ში.

ამ პროცესის უსასრულოდ გაგრძელებით, ჩვენ ავაგებთ R-ის ელემენტთა

$$r_{n_1},\ r_{n_2},\ r_{n_3},$$

მიმდევრობას, რომელიც წარმოადგენს სადიებელ R_0 სიმრავლეს (კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ $\{r_{n_k}\}$ ელემენტების ურთიერთ. დალაგება განისაზღვრება მათი სიდიდით და არა მათი ნომრის სიდიდით).

დამტკიცებული თეორემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე: η ტიპის სიმრავლე შეიცავს a სიმძლავრის ნებისმიერი α ტიპის ნაწილებს.

განმარტება ნ. *ვთქვათ, A დალაგებული სიმრავლეა და $a \in A$. A-ს ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც წინ უსწრებენ a-ს, ეწოდება A სიმრავლიდან a ელემენტით მოკვეთილი მონაკვეთი და აღინიშნება A_a-თი.*

შევნიშნოთ, რომ თვით a ელემენტი A_a მონაკვეთში არ შედის. თუ a არის A სიმრავლის პირველი ელემენტი, მაშინ A_a ცარიელი სიმრავლეა. დალაგებული სიმრავლის მონაკვეთი ამ სიმრავლის ნაწილია და ის, როგორც ასეთი, თვით დალაგებულ სიმრავლეს წარმოადგენს.

ვთქვათ, $a \in A$ და A_a კი არის a ელემენტით მიღებული A სიმრავლის მონაკვეთი. თუ a' არის A-ს ისეთი ელემენტი, რომელიც წინ უსწრებს a-ს, მაშინ A-დან და A_a-დან მიღებული $A_{a'}$ და $(A_a)_{a'}$ მონაკვეთები იგივური არიან

$$(A_a)_{a'} = A_{a'},$$

ასე რომ დალაგებული სიმრავლის ორი მონაკვეთიდან ერთი არის მეორის მონაკვეთი. ეს საშუალებას გვაძლევს დავალაგოთ A სიმრავლის ყველა მონაკვეთის H სიმრავლე. სახელდობრ, შევთანხმდეთ ორი A_a და $A_{a'}$ მონაკვეთიდან წინამორბედად ჩავთვალოთ $A_{a'}$, თუ $A_{a'} \subset A_a$, ან რაც იგივეა, თუ $a' \prec a$. აშკარაა, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა ნ. *დალაგებული A სიმრავლის ყველა მონაკვეთის H სიმრავლე A სიმრავლის მსგავსია.*

მართლაც, თუ a ელემენტს შევუსაბამებთ მისი საშუალებით მიღებულ A_a მონაკვეთს; მაშინ მივიღებთ A და H სიმრავლეების დაფარებას.

მაგალითად, თუ $A = \{a, b, c\}$, მაშინ $H = \{0, \{a\}, \{a, b\}\}$. ორივე სიმრავლის რიგითი ტიპი არის 3.

დასასრულს, შევჩერდეთ რიგითი ტიპების შეკრების მოქმედებაზე.

ვთქვათ, $L = \{\lambda\}$ არის დალაგებული სიმრავლე და ვთქვათ ყოველ $\lambda \in L$-ს შეესაბამება დალაგებული A_λ სიმრავლე, ამასთან A_λ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან. ასეთ შემთხვევაში ადვილია

$$S = \sum_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

ჯამის დალაგება,

სახელდობრ, ვთქვათ, a და a' S-ის ელემენტებია. მაშინ

$$a \in A_\lambda,\quad a' \in A_{\lambda'}.$$

შევთანხმდეთ ჩავთვალოთ $a \prec a'$ (S სიმრავლეში), თუ $\lambda \prec \lambda'$ (L სიმრავლეში) ან როცა $\lambda = \lambda'$, მაგრამ $a \prec a'$ A_λ სიმრავლეში. შემდეგში ვილაპარაკებთ რა დალაგებულ ჯამზე, ჩვენ. ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ეს ჯამი დალაგებულია ახლახან აღნიშნული წესით.

ნათქვამის ძალით $A + B$ და $B + A$ სიმრავლეები სხვადასხვა დალაგებული სიმრავლეებია.

გთქვათ, $L = \{\lambda\}$ დალაგებული სიმრავლეა, და ყოველ λ-ს შეესაბამება α_λ რიგითი ტიპი. ავიღოთ ყოველი λ-სათვის α_λ ტიპით დალაგებული A_λ სიმრავლე, და ვიგულისხმოთ ეს სიმრავლეები წყვილწყვილად არაგადამკვეთად. შევადგინოთ ჯამი

$$\overline{S} = \sum_{\lambda \in L} \alpha_\lambda.$$

ზემონათქვამის მიხედვით, ეს ჯამი დალაგებული სიმრავლეა. მის რიგით ტიპს, განმარტებით, ეწოდება $\{\alpha_\lambda\}$ რიგითი ტიპების დალაგებული სიმრავლის ჯამი

$$\overline{\overline{S}} = \sum_{\lambda \in L} \alpha_\lambda.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს განმარტება არ არის დამოკიდებული A_λ სიმრავლეების შერჩევაზე, არამედ მხოლოდ α_λ ტიპებზე.

მარტივ შემთხვევებში შესაკრებთა მიმდევრობა ნაჩვენებ იქნება მათი დაწერის ხერხით..

მაგალითები

1) $2 + 3 = 5$, რადგან როცა $\overline{\overline{A}} = 2$, $\overline{\overline{B}} = 3$, მაშინ $\overline{\overline{A + B}} = 5$. ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ საზოგადოდ, შესაკრებთა სასრული რიცხვის შემთხვევებში, როცა ისინი სასრული სიმრავლეთა ტიპებს წარმოადგენენ, ჯამის ახალი განმარტება ემთხვევა ამ ტერმინის ჩვეულებრივ გაგებას.

2) $1 + \omega = \omega$. მართლაც, $1 + \omega$ არის

$$\{a,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\}$$

სიმრავლის ტიპი, რომელიც ისევ ω ტიპისაა.

3) პირიქით, $\omega + 1 \neq \omega$, რადგან $\omega + 1$ არის

$$\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots;\ a\}$$

სიმრავლის ტიპი, რომელშიაც არის უკანასკნელი ელემენტი. ამგვარად, $1 + \omega \neq \omega + 1$ და რიგითი ტიპების შეკრება კომუტატიური არ არის.

4) $\omega^* + \omega = \pi$. აქ აგრეთვე $\omega + \omega^* \neq \omega^* + \omega$.

5) $1 + \lambda + 1$ არის $[a, b]$ სეგმენტის რიგითი ტიპი.

§ 2. სავსებით დალაგებული სიმრავლე

განმარტება. *თუ დალაგებული A სიმრავლის ყოველ არა-ცარიელ ნაწილს აქვს პირველი ელემენტი, მაშინ A-ს ეწოდება სავსებით დალაგებული სიმრავლე.*

გარდა ამისა, ჩვენ შევთანხმდებით ცარიელი სიმრავლე აგრეთვე ჩავთვალოთ სავსებით დალაგებულ სიმრავლედ.

თეორემა 1. *ყოველი სასრული დალაგებული სიმრავლე სავსებით დალაგებულია.*

მართლაც, ასეთი სიმრავლის ყოველი არაცარიელი ნაწილი თვითონ სასრული დალაგებული სიმრავლეა და, § 1-ის ლემის ძალით, მას აქვს პირველი ელემენტი.

სავსებით დალაგებულ სიმრავლეთა სხვა მაგალითებს გვაძლევენ სიმრავლები

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \quad (\overline{N} = \omega)$$

$$M = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2, 4, 6, 8, \ldots\} \quad (\overline{M} = \omega + \omega),$$

დავამტკიცოთ, მაგალითისათვის, რომ N სავსებით დალაგებული სიმრავლეა. ვთქვათ, N^* არის N-ის არაცარიელი ნაწილი. ავიღოთ N^*-ში ნებისმიერი ელემენტი n. თუ n არის N^*-ის პირველი ელემენტი, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში $N^* N_n$ არის არაცარიელი და (N_n-თან ერთად) სასრული სიმრავლე, ამის გამო, მასში არის პირველი ელემენტი n_0, რომელიც, აშკარაა, წარმოადგენს N^*-ის პირველ ელემენტს.

პირიქით, დალაგებული სიმრავლე

$$L = \{\ldots, 4, 3, 2, 1\}$$

არ იქნება სავსებით დალაგებული.

განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

თეორემა 2. 1) *სავსებით დალაგებული სიმრავლის ყოველი ნაწილი სავსებით დალაგებულია.*

2) *არაცარიელ სავსებით დალაგებულ სიმრავლეს აქვს პირველი ელემენტი.*

3) *თუ ორ მსგავს დალაგებულ სიმრავლეს შორის ერთ-ერთი სავსებით დალაგებულია, მაშინ სავსებით დალაგებულია მეორეც.*

4) *სავსებით დალაგებული სიმრავლის ყოველი ელემენტის შემდეგ, გარდა უკანასკნელისა, არსებობს უშუალოდ მომდევნო ელემენტი.*

5) *სავსებით დალაგებული სიმრავლიდან არ შეიძლება კლებადი, უსასრულო მიმდევრობის, ე. ი.*

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots \qquad (1)$$

სახის მიმდევრობის გამოყოფა.

შევჩერდეთ მხოლოდ 5)-ის დამტკიცებაზე. თუ (1) მიმდევრობა არსებობს, მაშინ, წარმოადგენს რა ის (არაცარიელ) ნაწილს სავსებით დალაგებული სიმრავლისა, უნდა შეიცავდეს პირველ ელემენტს. მაგრამ არც ერთი მისი ელემენტი პირველი არაა, რადგან $a_{n+1} \prec a_n$.

შემდეგ თეორემას ფუნდამენტალური მნიშვნელობა აქვს:

თეორემა 3. *ვთქვათ, A სავსებით დალაგებული სიმრავლეა, ხოლო A^* — მისი ნაწილი (რომელიც შესაძლოა A-საც ემთხვეოდეს). არ შეიძლება არსებობდეს A სიმრავლის ისეთი დაფარება[1] A^*-ზე, რომლის დროსაც $a \in A$ ელემენტს შეესაბამება A^*-ში მასზე უფრო წინა (A სიმრავლის გასწვრივ) a^* ელემენტი.*

დამტკიცება. დავუშვათ, პირიქით, რომ A და A^*-ის ასეთი დაფარებანი არსებობენ და φ იყოს ერთერთი მათს შორის. A-ს იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთაც φ თანადობაში შეესაბამებიან A^*-ში მათზე უფრო წინა (A-ს გასწვრივ) ელემენტები, აღვნიშნოთ M-ით. პირობის მიხედვით M ცარიელი არ არის და მასში, ამიტომ, არსებობს *პირველი ელემენტი* a_0. ვთქვათ, a_0 ელემენტს φ დაფარების დროს A^*-ში შეესაბამება a_0^* ელემენტი. აშკარაა, რომ A სიმრავლეში გვექნება

$$a_0^* \prec a_0.$$

მაგრამ φ დაფარების დროს a_0^* ელემენტს, როგორც A-ს ელემენტს, A^* სიმრავლეში აგრეთვე შეესაბამება რაღაც a_1 ელემენტი: რადგანაც φ არის *დაფარება*, ე. ი. ისეთი თანადობა, რომელიც ინარჩუნებს ელემენტთა რიგს, ამიტომ A^* სიმრავლეში, და მაშასადამე, A სიმრავლეშიაც, a_1 ელემენტი არის a_0^*-ს წინამორბედი

$$a_1 \prec a_0^*.$$

ამგვარად, a_0^* ელემენტი აგრეთვე უნდა შედიოდეს M-ში, რაც, ცხადია, შეუძლებელია, რადგან $a_0^* \prec a_0$, ხოლო a_0 არის M-ის პირველი ელემენტი. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. *სავსებით დალაგებული სიმრავლე არ შეიძლება მსგავსი იყოს თავისი მონაკვეთისა ან თავისი მონაკვეთის ნაწილისა.*

მართლაც, თუ A სავსებით დალაგებული სიმრავლეა და A_a — მისი მონაკვეთი, მოკვეთილი a ელემენტით, მაშინ A სიმრავლის A_a-ზე ან მის ნაწილზე ყოველგვარი დაფარების დროს a უნდა შეესაბამებოდეს თავის წინა ელემენტს, რაც, როგორც ვნახეთ, შეუძლებელია.

შედეგი 2. *სავსებით დალაგებული სიმრავლის ორი სხვადასხვა მონაკვეთი არ შეიძლება მსგავსი იყოს ერთმანეთისა.*

---

[1] როგორც ყოველთვის, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ A^* დალაგებულია ისევე როგორც A; ასე რომ A^*-ც სავსებით დალაგებულია.

შედეგი 3. *სავსებით დალაგებული სიმრავლე არ შეიძლება იყოს მსგავსი თავისი ნაწილის მონაკვეთისა.*

თეორემა 4. *ერთმანეთის მსგავსი ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლე შეიძლება დავადაროთ ერთმანეთს მხოლოდ ერთადერთი ხერხით.*

დამტკიცება. ვთქვათ, φ და ψ წარმოადგენენ ორი სავსებით დალაგებული A და B სიმრავლის სხვადასხვა დაფარებებს ერთმანეთზე. აღვნიშნოთ შესაბამისად $\varphi(a)$-თი და $\psi(a)$-თი $a \in A$ ელემენტის სახე B სიმრავლეში ამ დაფარებების დროს, და ვთქვათ, a_0 არის A სიმრავლის ისეთი ელემენტი, რომ

$$\varphi(a_0) \neq \psi(a_0)$$

(ასეთი ელემენტი არსებობს, რამდენადაც φ და ψ *სხვადასხვა* დაფარებებია). თუ $b = \varphi(a_0)$ და $b' = \psi(a_0)$, მაშინ A_{a_0} მონაკვეთი მსგავსია B სიმრავლის ორი სხვადასხვა B_b და $B_{b'}$ მონაკვეთისა. მაგრამ მაშინ ეს მონაკვეთები ერთმანეთის მსგავსი უნდა იყვნენ, რაც, როგორც ვნახეთ, შეუძლებელია.

სავსებით დალაგებული სიმრავლეების თეორიაში შემდეგი თეორემა ძირითადია:

თეორემა 5. *ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლიდან ერთი მსგავსია მეორისა ან მეორის მონაკვეთისა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, A და B ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლეა. შევთანხმდეთ A სიმრავლის რაიმე a ელემენტს ვუწოდოთ „ნორმალური", თუ მის მიერ განსაზღვრული A_a მონაკვეთი მსგავსია B სიმრავლის რაიმე B_b მონაკვეთისა. ნორმალური ელემენტის მაგალითს წარმოადგენს A-ს პირველი ელემენტი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნორმალური a ელემენტის წინა ელემენტი a' აგრეთვე ნორმალურია. მართლაც, თუ ჩვენ A_a მონაკვეთს დავადარებთ მის მსგავს B_b მონაკვეთზე, აშკარაა, რომ ამით $A_{a'} = (A_a)_{a'}$ მონაკვეთს დავადარებთ B_b-ს რომელიღაც მონაკვეთზე, ე. ი. B სიმრავლის მონაკვეთზე.

A სიმრავლის ყველა ნორმალური ელემენტების სიმრავლე M-ით აღვნიშნოთ. M თურმე ან ემთხვევა A-ს, ან წარმოადგენს მის მონაკვეთს. მართლაც, თუ $M \neq A$, მაშინ $A - M$ ცარიელი არ არის და მასში არსებობს პირველი ელემენტი m. ვაჩვენოთ, რომ

$$M = A_m. \tag{2}$$

თუ $a \in M$, მაშინ $a \neq m$. მაგრამ შეუძლებელია აგრეთვე, რომ ადგილი ჰქონდეს $a \succ m$, რადგან ამ შემთხვევაში m ელემენტი, როგორც ნორმალური a ელემენტის წინამორბედი ელემენტი, თვით ნორმალური იქნებოდა და შევიდოდა M-ში, იმ დროს როცა $\overline{m \in} M$. ამგვარად, აუცილებელია $a \prec m$ და მაშასადამე, $a \in A_m$. ამით დამტკიცებულია, რომ

$$M \subset A_m.$$

პირიქით, თუ $a \in A_m$, მაშინ $a \prec m$ და, მაშასადამე, a არ შეიძლება შედიოდეს $A - M$-ში, ასე რომ $a \in M$. ამგვარად,

$$A_m \subset M$$

და (2) დამტკიცებულია.

ახლა, $b \in B$-ს ნორმალური ელემენტი ვუწოდოთ, თუ B_b მონაკვეთი მსგავსია A სიმრავლის რაიმე მონაკვეთისა და, N იყოს B სიმრავლის ყველა ნორმალურ ელემენტების სიმრავლე. წინამდებარის ანალოგიურად მივიღებთ $N = B$ ან $N = B_n$.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ M და N სიმრავლეები ერთმანეთის მსგავსი არიან. ვთქვათ, $a \in M$. მაშინ A_a მონაკვეთი მსგავსია B სიმრავლის B_b მონაკვეთისა, ამასთან აშკარაა, რომ $b \in N$. ჩავთვალოთ a და b ურთიერთ შესაბამ ელემენტებად. ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველ $a \in M$ ელემენტს N სიმრავლეში შეიძლება შეესაბამებოდეს მხოლოდ ერთი b ელემენტი და შებრუნებით (a ელემენტს რომ ორი b და b' ელემენტი შეესაბამებოდეს, B_b და $B_{b'}$ მონაკვეთები, რომლებიც მსგავსი არიან A_a-სი, ერთმანეთის მსგავსი იქნებოდნენ, რაც შეუძლებელია).

ამგვარად, ჩვენს მიერ დამყარებულია ურთიერთცალსახა თანადობა M და N სიმრავლეებს შორის. დაგვრჩენია ალმოვაჩინოთ, რომ ეს თანადობა ინარჩუნებს ელემენტების რიგს, ე. ი. წარმოადგენს დაფარებას.

ვთქვათ, a და a' M სიმრავლის ორი ელემენტია, b და b' კი მათი შესაბამი ელემენტებია N-ში და $a \prec a'$. $A_{a'}$ მონაკვეთის დაფარებით $B_{b'}$ მონაკვეთზე ჩვენ ვპოულობთ $A_a = (A_{a'})_a$ მონაკვეთის დაფარებას $B_{b'}$ მონაკვეთის რაღაც $(B_{b'})_{b_0}$ მონაკვეთზე. მაგრამ $(B_{b'})_{b_0} = B_{b_0}$ და, მაშასადამე, A_a მონაკვეთი მსგავსია B სიმრავლის B_{b_0} მონაკვეთისა. მეორეს მხრივ, B სიმრავლეში A_a მონაკვეთის მსგავსი მხოლოდ ერთი მონაკვეთი არსებობს და ეს არის B_b. მაშასადამე, $b = b_0$, და, რადგანაც $b_0 \in B_{b'}$, ამიტომ $b_0 \prec b'$, ე. ი. $b \prec b'$, რაც ამტკიცებს M და N სიმრავლეების მსგავსებას.

ახლა უკვე ადვილია დამტკიცების დასრულება. მართლაც, შემდეგი ოთხი ლოგიკურად დასაშვები შემთხვევიდან

1. $M = A, \quad N = B,$ 3) $M = A, \quad N = B_n,$

2. $M = A_m, \quad N = B,$ 4) $M = A_m, \quad N = B_n,$

მეოთხე შეუძლებელია, რადგან მისი შესრულება იმას ნიშნავს, რომ m ნორმალური ელემენტია, ხოლო მაშინ გვექნება $m \in M = A_m$, რაც ეწინააღმდეგება მონაკვეთის განმარტებას.

ამგვარად, რჩება პირველი სამი შემთხვევა. 1) შემთხვევაში A და B სიმრავლეები მსგავსი არიან, ხოლო 2) და 3) შემთხვევაში ერთერთი მათგანი მსგავსია მეორის მონაკვეთისა. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ სავსებით დალაგებული სიმრავლე A მსგავსია სავსებით დალაგებული B სიმრავლის მონაკვეთისა, ჩვენ ვიტყვით, რომ სიმრავლე A *უფრო მოკლეა*, ვიდრე B.

თეორემა 6. წყვილწყვილად არამსგავს სავსებით დალაგებულ სიმრავლეთა ყოველ S სიმრავლეში არსებობს ყველაზე უფრო მოკლე სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \in S$. თუ A წარმოადგენს ყველაზე უფრო მოკლე სიმრავლეს S-ში შემავალ სიმრავლეებს შორის, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, S-ში არიან A-ზე უფრო მოკლე სიმრავლეები და ისინი მსგავსი არიან A-ს მონაკვეთებისა. ვთქვათ, $R = \{a\}$ წარმოადგენს A სიმრავლის ისეთ a ელემენტების სიმრავლეს, რომელთა მიერ განსაზღვრული მონაკვეთები მსგავსი არიან S-ში შემავალი სიმრავლეებისა. თუ a^* არის R სიმრავლის პირველი ელემენტი და $A^* \in S$ ის სიმრავლეა, რომელიც მსგავსია A_{a^*} მონაკვეთისა, მაშინ A^* არის ყველაზე უფრო მოკლე სიმრავლე S-ში შემავალთა შორის. მართლაც, A^* მოკლეა ყოველ B სიმრავლეზე, თუ A მოკლეა B-ზე. თუ კი B უფრო მოკლეა ვიდრე A, მაშინ $B \simeq A_a$, სადაც $a \in R$. მაგრამ a^* არის R-ის პირველი ელემენტი, ასე რომ $a^* \leq a$ და A_{a^*} არის A_a-ს მონაკვეთი, საიდანაც ცხადია, რომ A^* მოკლეა B-ზე.

თეორემა 7. სავსებით დალაგებულ სიმრავლეთა სავსებით დალაგებული სიმრავლის ჯამი სავსებით დალაგებული სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$S = \sum_{\lambda \in L} A_\lambda,$$

ამასთან L და A_λ სავსებით დალაგებული სიმრავლეებია. S სიმრავლე დალაგებულია (იხ. § 1). ვთქვათ, S_0 არის S-ის არაცარიელი ნაწილი. დავარქვათ L_0 იმ $\lambda \in L$ ელემენტების სიმრავლეს, რომელთათვისაც

$$A_\lambda S_0 \neq 0,$$

და ვთქვათ, λ_0 არის L_0-ის პირველი ელემენტი. $A_{\lambda_0} S_0$ არის A_{λ_0} სიმრავლის არაცარიელი ნაწილი. თუ a_0 ამ სიმრავლის პირველი ელემენტია, მაშინ ის წარმოადგენს პირველ ელემენტს S_0-შიაც. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. რიგითი რიცხვები

განმარტება 1. სავსებით დალაგებული სიმრავლის რიგით ტიპს რიგითი რიცხვი ეწოდება.

თუ რიგით რიცხვს უსასრულო სიმძლავრე აქვს, მას ტრანსფინიტური რიცხვი ეწოდება.

0 და ყველა ნატურალური რიცხვები წარმოადგენენ სასრულ რიგით რიცხვებს. ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$ რიცხვები ტრანსფინიტური რიცხვები არიან.

ω^*, π, η, λ რიგითი ტიპები არ წარმოადგენენ რიგით რიცხვებს, რადგან ისინი არიან დალაგებული, მაგრამ არა სავსებით დალაგებული სიმრავლეების ტიპები.

განმარტება 2. ვთქვათ, α და β ორი რიგითი რიცხვია. ავიღოთ ორი სავსებით დალაგებული A და B სიმრავლე, რომლებთაც შესაბამად α და β

ტიპები აქვთ. თუ A მოკლეა B-ზე ამბობენ, რომ α ნაკლებია β-ზე, ან რომ β მეტია α-ზე და სწერენ:

$$\alpha < \beta, \quad \beta > \alpha.$$

ეს განმარტება დამოკიდებულია მხოლოდ α და β რიცხვებზე და არ არის დამოკიდებული A და B სიმრავლეებზე. სასრული რიცხვების მიმართ მოცემული განმარტება ტოლფასია ჩვეულებრივისა, ასე რომ

$$0 < 1 < 2 < 3 <$$

ხოლო ტრანსფინიტური რიცხვები აღმოჩნდებიან მეტი ვიდრე ნებისმიერი სასრული რიცხვი.

მეტად მნიშვნელოვანია, რომ რიგითი რიცხვებისათვის სამართლიანია ტრიხოტომია, ე. ი. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1. თუ α და β რიგითი რიცხვებია, მაშინ თითოეული დამოკიდებულება

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta$$

გამორიცხავს დანარჩენს და ერთ-ერთი მათგანი აუცილებლად განხორციელებულია.

მართლაც, ვთქვათ, A და B არიან

$$\overline{A} = \alpha, \qquad \overline{B} = \beta$$

ტიპის სიმრავლეები. თუ ეს სიმრავლეები მსგავსი არიან, მაშინ $\alpha = \beta$. მასთან ერთად $\alpha < \beta$ და $\alpha > \beta$ დამოკიდებულებანი შეუძლებელი არიან, რადგან, თუ $A \simeq B$, მაშინ ერთერთი ამ სიმრავლეთაგანი არ არის მეორეზე მოკლე. თუ კი A და B არ არიან მსგავსი, მაშინ ერთი მათგანი (და მხოლოდ ერთი) აუცილებლად მოკლეა მეორეზე.

შენიშვნა. თუ B არის ნაწილი სავსებით დალაგებული A სიმრავლისა, მაშინ

$$\overline{B} \leqslant \overline{A}.$$

მართლაც, § 2-ს მე-3 თეორემის მე-3 შედეგის ძალით, $\overline{B} > \overline{A}$ დამოკიდებულება შეუძლებელია.

თეორემა 2. წყვილწყვილად არა თანატოლ რიგით რიცხვთა ყოველ S სიმრავლეში არსებობს უმცირესი რიცხვი.

დამტკიცება. ყოველ $\alpha \in S$-ს შეიძლება შევუსაბამოთ ისეთი სავსებით დალაგებული A სიმრავლე, რომლის ტიპი $\overline{A} = \alpha$. თუ A_0 არის ყველაზე უფრო მოკლე სიმრავლე ამ სიმრავლეებს შორის (§ 2-ის მე-6 თეორემა), მაშინ $\alpha_0 = \overline{A_0}$ უმცირესია S-ს რიცხვთა შორის.

შედეგი. რიგითი რიცხვების ყოველი სიმრავლე, თუ იგი დალაგებულია მათი სიდიდის მიხედვით, სავსებით დალაგებულია.

შევთანხმდეთ აღვნიშნოთ W_α-თი ისეთი რიგითი რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც ნაკლები არიან α-ზე. წინა შედეგის ძალით, W_α არის სავსებით დალაგებული სიმრავლე.

თეორემა 3. W_α სიმრავლის ტიპი არის α.

$$\overline{W_\alpha}=\alpha.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, A სიმრავლე α ტიპისაა. აღვნიშნოთ H-ით A სიმრავლის ყველა მონაკვეთების სიმრავლე. მაშინ, § 1-ის მე-5 თეორემის ძალით, H-ის ტიპი არის α, და საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ H და W_α მსგავსი არიან.

ვთქვათ, A_a არის H-ის ელემენტი. მისი რიგითი ტიპი არის α-ზე ნაკლები რიცხვი, ე. ი. W_α-ს ელემენტი. ამგვარად, H-ის ყოველ ელემენტს შეესაბამება W_α-ს გარკვეული ელემენტი. ამასთან, H-ის სხვადასხვა ელემენტს W_α-ს სხვადასხვა ელემენტები შეესაბამება, რადგან H-ის სხვადასხვა ელემენტები არიან A სიმრავლის სხვადასხვა მონაკვეთები, რომლებიც არ შეიძლება აღმოჩნდენ ერთმანეთის მსგავსი. დაბოლოს, W_α-ს ყოველი ელემენტი არის α-ზე ნაკლები რიგითი რიცხვი, ე. ი. წარმოადგენს A სიმრავლის რაიმე მონაკვეთის ტიპს. ამგვარად, H-ის ელემენტებისათვის მათი რიგითი ტიპების შეთანადებით ჩვენ ვამყარებთ ურთიერთცალსახა თანადობას H-სა და W_α-ს შორის.

მაგრამ ეს თანადობა დაფარებას წარმოადგენს. მართლაც, H ხომ ისეა დალაგებული, რომ მასში შემავალი A სიმრავლის ორი მონაკვეთიდან წინამორბედად ითვლება ის, რომელიც წარმოადგენს მეორის მონაკვეთს, ე. ი. ის, რომლის ტიპიც ნაკლებია, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ H-ში ორი ელემენტის ურთიერთ მიმდევრობა ისეთივეა, როგორიც W_α-ში შესაბამი ელემენტებისა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ A არის α ტიპის სავსებით დალაგებული სიმრავლე, მაშინ მისი ელემენტები შეიძლება გადავნომროთ α-ზე ნაკლები რიგითი რიცხვების საშუალებით.

მართლაც, A სიმრავლის W_α-ზე დაფარების განხორციელებით ჩვენ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შევუსაბამებთ რიგით რიცხვს, რომელიც ნაკლებია α-ზე—მას ნომერს. მაშინ A დალაგდება

$$A=\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\beta,\ \ldots\}\qquad (\beta<\alpha)$$

მიმდევრობის სახით.

აღვნიშნოთ, რომ რიცხვი 0 შედის W_α-ში, ასე რომ A-ს პირველ ელემენტს სწორედ ისა აქვს თავის ნომრად. ბოლოს, ზედმეტი არ იქნება იმის გახსენება, რომ A და W_α-ს დაფარება შესაძლებელია ერთადერთ ხერხით.

მე-3 თეორემასთან კავშირი აქვს ბურალი-ფორტის ანტინომიას:

ბურალი-ფორტის ანტინომია. ვთქვათ, W არის ყველა რიგითი რიცხვების სიმრავლე. მე-2 თეორემის შედეგის ძალით, ის სავსებით დალაგებული სიმრავლეა. ვთქვათ, მისი რიგითი ტიპი არის γ. მაშინ იგივე ტიპი აქვს

W_γ-ს. მაგრამ W_γ არის W სიმრავლის γ ელემენტით განსაზღვრული მონაკვეთი. მაშასადამე, W სიმრავლე და მისი W_γ მონაკვეთი მსგავსი არიან ერთმანეთისა, რაც ეწინააღმდეგება § 2-ის მე-3 თეორემის 1-ლ შედეგს.

ეს ანტინომია გვიჩვენებს, რომ თვით ცნება ყ ვ ე ლ ა რიგითი რიცხვების სიმრავლისა შეიცავს თავის შიგნით წინააღმდეგობას. საზოგადოდ, თავის შიგნით წინააღმდეგობის შემცველი ცნების შექმნა ძნელი არ არის,—ასეთია, მაგალითად, „ტოლგვერდა მართკუთხოვანი სამკუთხედის“ ცნება და სხვა მისი მსგავსი.

მაგრამ ამგვარი შემთხვევების უმეტესობისათვის ადვილი აღმოსაჩენია შემოღებული ცნების განხილვის დაუშვებლობის მიზეზი. მაგალითად, ტოლგვერდა სამკუთხედის კუთხეები 60°-ის ტოლია, და ის არ შეიძლება მართკუთხოვანი აღმოჩნდეს. საქმე ასე როდია W სიმრავლის შემთხვევაში: აქ ანტინომია წარმოიშვება სულ მოულოდნელად. მართლაც, ხომ შეიძლება განვიხილოთ თვით რიგითი რიცხვები, განვიხილოთ მათ მიერ შედგენილი ზოგიერთი სიმრავლეები, მაშ რატომ არ შეიძლება ყ ვ ე ლ ა ეს რიცხვები გავაერთიანოთ ერთ სიმრავლეში. ანტინომიის გაჩენის ეს მოულოდნელობა გვინერგავს ბუნებრივ შიშს იმის შესახებ, რომ იქნებ ჩვენს მიერ განხილული სხვა სიმრავლეები ასევე შინაგანად წინააღმდეგობრივი არიან, და მხოლოდ ჯერჯერობით ჩვენ არ წავაწყდით ამ ფაქტს. საქმე მწვავდება იმით, რომ დღესდღეობით ჩვენ არ გაგვაჩნია ის კრიტერიუმები, რომლებიც ყოველი სიმრავლის მიმართ საშუალებას მოგვცემდენ გადაგვეჭრა საკითხი იმის შესახებ, შეიძლება თუ არა მათი განხილვა.

ამგვარად, გვექმნება ისეთი შთაბეჭდილება, თითქოს სიმრავლეთა თეორიის მთელი შენობა აგებულია მერყევ საფუძველზე. ამის შესახებ შეიძლება შევნიშნოთ შემდეგი. ზოგიერთი სიმრავლეები, მაგალითად, ისეთი „მარტივი“ სიმრავლეები, როგორიც არის ყველა კენტი რიცხვების სიმრავლე, მე-5 ხარისხის ყველა პოლინომების სიმრავლე და სხვ., უდავოა, რომ შეიძლება განვიხილოთ. მართალია, აქაც არ გვაქვს დამტკიცება მათი შინაგანი არაწინააღმდეგობრივობისა, მაგრამ მაინც, ჩვენი მათემატიკური ცოდნის მთელი ერთობლიობა გვარწმუნებს ამ სიმრავლეების „კანონიერებაში“. როდესაც ჩვენ გამოვთქვამთ ამა თუ იმ თეორემას რაიმე სიმრავლის შესახებ, ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ ეს სიმრავლე კანონიერია, ე. ი. რომ მისი განხილვა არ მიგვიყვანს წინააღმდეგობამდე. შემდგომი გადმოცემის დროს ეს შენიშვნა ყოველთვის მხედველობაში გვექნება[1].

თეორემა 4. რ ი გ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ს ა ვ ს ე ბ ი თ დ ა ლ ა გ ე ბ უ ლ ი S ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ჯ ა მ ი რ ი გ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ი ა.

---

[1] ძალიან ხშირად, საქმე გვაქვს რა რაიმე სიმრავლეებთან, ჩვენ. მათგან გამოსული ვაგებთ მთელ რიგს ახალი სიმრავლეებისა. ისმება საკითხი, ხომ არ აღმოჩნდებიან უკანონონი ეს ახალი სიმრავლეები. როგორც ჩანს, საჭიროა გვაქვს ვიფიქროთ, რომ

1) კანონიერი სიმრავლის ნაწილი კანონიერია;

2) კანონიერი სიმრავლის ყველა ნაწილების სიმრავლე კანონიერია;

3) კანონიერ სიმრავლეთა კანონიერი სიმრავლის ჯამი კანონიერია.

ეს თეორემა გამომდინარეობს რიგითი ტიპების განმარტებიდან და § 2-ის მე-7 თეორემიდან. თავისთავად ცხადია, რომ S კანონიერ სიმრავლედ ითვლება, კერძოდ

$$S \neq W.$$

თეორემა 5. თუ S $\{\alpha\}$ რიგითი რიცხვების სიმრავლეა, მაშინ არსებობს ისეთი რიგითი რიცხვები, რომლებიც მეტი არიან ყველა $\alpha \in S$-ზე.

დამტკიცება. უპირველესად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ყოველი რიგითი α რიცხვისათვის არსებობს უფრო დიდი რიგითი რიცხვი, მაგალითად $\alpha + 1$. ამიტომ თეორემა აშკარაა, როცა S-ში არსებობს უდიდესი რიცხვი.

დავუშვათ ახლა, რომ S-ში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. მაშინ რიგითი რიცხვი

$$\sigma = \sum_{\alpha \in S} \alpha$$

მეტია ყოველ რიცხვზე S-დან. ამასთან, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ S-ის შესაკრებთა სიმრავლე დალაგებულია მათი სიდიდის მიხედვით, ასე რომ იგი სავსებით დალაგებულია. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ

$$\sigma > \alpha \qquad (\alpha \in S)$$

უტოლობა, ყოველ $\alpha \in S$-ს შევუსაბამოთ სავსებით დალაგებული A_α სიმრავლე $\overline{A_\alpha} = \alpha$ ტიპისა. ვთქვათ,

$$B = \sum_{\alpha \in S} A_\alpha \qquad (\overline{B} = \sigma).$$

მაშინ ყოველი A_α არის იმ B_b მონაკვეთის ნაწილი, რომელიც B სიმრავლიდან მოიკვეთება A_{α^*} სიმრავლის პირველი b ელემენტით, სადაც $\alpha^* \in S$ და $\alpha^* > \alpha$. მაშასადამე, § 2-ს მე-3 თეორემის 1-ლი და მე-3 შედეგების ძალით, σ არ $= \alpha$ და σ არ არის $< \alpha$, საიდანაც $\sigma > \alpha$.

თეორემა 6. $\alpha + 1$ რიცხვი არის α-ს მომდევნო პირველი რიცხვი.

დამტკიცება. ვთქვათ, α რიცხვის მომდევნო პირველი რიცხვი არის β. მაშინ

$$W_\beta = W_\alpha + \{\alpha\}.$$

საიდანაც, რიგითი რიცხვების ჯამის განმარტების ძალით,

$$\beta = \overline{W_\beta} = \overline{W_\alpha} + \overline{\{\alpha\}} = \alpha + 1.$$

იმ დროს, როცა ყოველ რიცხვს აქვს პირველი მომდევნო, არსებობს ისეთი რიცხვები, მაგალითად ω, რომლებსაც არა აქვთ უკანასკნელი წინა. ეს საბაბს გვაძლევს შემდეგი განმარტებისათვის:

განმარტება 3. რიგით რიცხვს პირველი ან მეორე გვარის რიცხვი ეწოდება. იმის და მიხედვით, აქვს მას თუ არა უშუალოდ წინა რიცხვი.

ყველა. სასრული რიცხვები (გარდა 0-სა) პირველი გვარის რიცხვები არიან.

§ 4. ტრანსფინიტური ინდუქცია

ცნობილია, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს მათემატიკაში სრული ინდუქციის მეთოდს. გავიხსენოთ იგი.

თეორემა 1. ვთქვათ, $T(n)$ არის ისეთი დებულება, რომლის ჩამოყალიბებაშიაც შედის ნატურალური n რიცხვი. თუ

1) $T(n_0)$ ჭეშმარიტია,

2) $T(n)$-ის ჭეშმარიტებიდან გამომდინარეობს $T(n+1)$-ის ჭეშმარიტება, მაშინ $T(n)$ ჭეშმარიტია ყოველი $n \geqslant n_0$-სათვის.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი ნატურალური $n \geqslant n_0$ რიცხვები, რომ $T(n)$ ყალბია. ვთქვათ n^* არის უმცირესი მათ შორის. 1)-ის ძალით $n^* > n_0$. მაშინ $n^* - 1 \geqslant n_0$. n^*-ის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $T(n^* - 1)$ ჭეშმარიტია, მაგრამ მაშინ 2)-ის ძალით ჭეშმარიტია $T(n^*)$-ც. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

მკითხველისათვის ცხადია, რომ n^* რიცხვის არსებობა უზრუნველყოფილია ყველა ნატურალურ რიცხვების სიმრავლის სავსებით დალაგებულობით. იგივე იდეა უდევს საფუძვლად თეორემას ტრანსფინიტური ინდუქციის შესახებ.

თეორემა 2. ვთქვათ, $T(\alpha)$ ისეთი დებულებაა, რომლის ჩამოყალიბებაშიაც მონაწილეობს რიგითი α რიცხვი. თუ

1) $T(\alpha_0)$ ჭეშმარიტია,

2) $T(\alpha)$-ს ჭეშმარიტებიდან ყველა ისეთი α-სათვის, რომ $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$, გამომდინარეობს $T(\beta)$-ს ჭეშმარიტება, მაშინ $T(\alpha)$ ჭეშმარიტია ყოველი $\alpha \geqslant \alpha_0$-სათვის.

დამტკიცება. ვთქვათ, არსებობენ ისეთი $\alpha \geqslant \alpha_0$, რომლებისათვისაც $T(\alpha)$ ყალბია. აღვნიშნოთ α^*-თი უმცირესი მათ შორის. მაშინ $\alpha^* > \alpha_0$ [რადგან 1)-ს ძალით $T(\alpha_0)$ ჭეშმარიტია], და ყოველი ისეთი α-სათვის, სადაც $\alpha_0 \leqslant \alpha < \alpha^*$, დებულება $T(\alpha)$ ჭეშმარიტია. აქედან, 2)-ს ძალით, ჭეშმარიტი უნდა იყოს $T(\alpha^*)$-ც. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

§ 5. მეორე რიცხვითი კლასი

განმარტება. მეორე[1] რიცხვითი კლასი K_0 ეწოდება ყველა ისეთ რიგით რიცხვების სიმრავლეს, რომლებიც წარ-

---

[1] პირველი რიცხვითი კლასი არის სიმრავლე $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

მოადგენენ თვლადი სავსებით დალაგებული სიმრავლეების ტიპებს[1].

ცხადია, რომ მეორე კლასის ყველა რიცხვები ტრანსფინიტური არიან.

თეორემა 1. ω რიცხვი წარმოადგენს მეორე კლასის უმცირეს რიცხვს და, საზოგადოდ, უმცირეს ტრანსფინიტურ რიცხვს.

დამტკიცება. განმარტებით, ω არის

$$N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

სიმრავლის ტიპი.

ამ სიმრავლის ყოველი N_n მონაკვეთი სასრული სიმრავლეა. მაშასადამე, ω-ზე ნაკლები რიგითი რიცხვი სასრული რიცხვია, და ამიტომ ω არის უმცირესი ტრანსფინიტური რიცხვი. რამდენადაც $\omega \in K_0$, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. 1) თუ α მეორე კლასის რიცხვია, მაშინ $\alpha+1$-ც მეორე კლასის რიცხვია.

2) თუ S არის მეორე კლასის რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო γ ისეთი უმცირესი რიცხვია, რომელიც აღემატება ყოველ რიცხვს S-დან, მაშინ γ მეორე კლასის რიცხვია.

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილი თითქმის აშკარაა. მართლაც,

$$\overline{\alpha+1} = \overline{W_\alpha + \{\alpha\}},$$

ხოლო $W_\alpha + \{\alpha\}$ თვლადია W_α-სთან ერთად.

გადავდივართ რა თეორემის მეორე ნაწილზე, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ S-ში არ არის უდიდესი რიცხვი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში საქმე დაიყვანება 1)-ზე. მაგრამ ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ დაშვების პირობებში გვექნება

$$W_\gamma = \sum_{\alpha \in S} W_\alpha. \tag{1}$$

მართლაც, თუ რომელიმე რიცხვი შედის (1)-ს მარჯვენა ნაწილში, მაშინ იგი, აშკარაა, შედის მარცხენა ნაწილშიც. პირიქით, თუ

$$\sigma \in W_\gamma,$$

მაშინ σ არ შეიძლება აღემატებოდეს ყველა α-ს S-დან, და, მაშასადამე, S-ში არის ისეთი α_0 რიცხვი, რომ $\alpha_0 \geqslant \sigma$. მაგრამ α_0 არ არის უდიდესი S-დან. მაშასადამე, S-ში მოიძებნება რიცხვი $\alpha > \alpha_0$, და მაშინ $\sigma \in W_\alpha$.

---

[1] აი ზოგიერთი მოსაზრებანი, რომლებიც მიზნად ისახავენ აჩვენონ, რომ K_0 „კანონიერი" სიმრავლეა. ყველა ნატურალური რიცხვების R სიმრავლე მათი ბუნებრივი რიგით, ალბად კანონიერი სიმრავლეა, მაგრამ მაშინ (იხ. შენიშვნა 336 გვ.) კანონიერია ყველა მისი ისეთი ნაწილების სიმრავლე, რომლებიც წარმოადგენენ დალაგებულ სიმრავლეებს, და, კერძოდ, კანონიერია R-ის ყველა სავსებით დალაგებული სიმრავლეების ნაწილების სიმრავლე, რომელთა რიგითი ტიპები (§ 1 თეორემა 4) შეადგენენ K_0-ს.

(1)-ის მარჯვენა ნაწილი თვლადი სიმრავლეა. მაშასადამე, W_γ თვლადია, და γ, როგორც W_γ-ს ტიპი, შედის K_0-ში.

შედეგი. K_0 კ ლ ა ს ი ა რ ა თ ვ ლ ა დ ი ა.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში K_0-ის პირველი მომდევნო რიცხვი შევიდოდა K_0-ში.

K_0 სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_1$-ით (იკითხება: ალეფ[1]-ერთი), ხოლო პირველი მომდევნო რიცხვი K_0-ს შემდეგ — Ω სიმბოლოთი.

თეორემა 3. ა რ ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი ს ი მ ძ ლ ა ვ რ ე, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი ი ყ ო ს თ ვ ლ ა დ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს a ს ი მ ძ ლ ა ვ რ ე ს ა დ ა $\aleph_1$-ს შ ო რ ი ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. W_Ω სიმრავლე არის თვლადი $N=\{0, 1, 2, \dots\}$ სიმრავლისა და K_0-ის ჯამი. მაშასადამე,

$$\overline{\overline{W}}_\Omega = \aleph_1.$$

შევნიშნეთ რა ეს, დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი m სიმძლავრე, რომ

$$a < m < \aleph_1.$$

მაშინ W_Ω-დან გამოიყოფა m სიმძლავრის Q ნაწილი. Q სიმრავლე არ არის W_Ω-ს მსგავსი. მაშასადამე, Q მსგავსია W_Ω-ს მონაკვეთისა. მაგრამ W_Ω-ს ყოველი მონაკვეთი მოიკვეთება რაიმე რიცხვით N-დან ან K_0-დან, ე. ი. წარმოადგენს სასრულ ან თვლად სიმრავლეს. ამიტომ Q-ც სასრულია ან თვლადი, ეს კი ეწინააღმდეგება იმ დაშვებას, რომ $\overline{\overline{Q}} > a$.

თეორემა 4. თ უ $\alpha \in K_0$ მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს რ ი ც ხ ვ ი ა, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს რ ი გ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ი ს ე თ ი ზ რ დ ა დ ი

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots$$

მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა, რ ო მ α ა რ ი ს უ მ ც ი რ ე ს ი მ ა თ შ ო რ ი ს, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ა ღ ე მ ა ტ ე ბ ი ა ნ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ყ ვ ე ლ ა რ ი ც ხ ვ ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გადავნომროთ (აშკარად თვლადი) ყველა α-ზე ნაკლები რიცხვების W_α სიმრავლე:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

α_k რიცხვთა შორის არ არსებობს უდიდესი (რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში α პირველი გვარისა იქნებოდა). შევნიშნეთ რა ეს, მივიღოთ $n_1 = 1$ და აღვნიშნოთ n_2-თ ისეთი უმცირესი ნატურალური n რიცხვი, რომლისათვისაც $\alpha_n > \alpha_{n_1}$, რის შემდეგაც n_3-ით აღვნიშნოთ ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომლისათვისაც $\alpha_n > \alpha_{n_2}$ და ა. შ. შედეგად მივიღებთ ზრდად მიმდევრობას

$$\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_3} < \dots$$

ამასთან $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

---

[1] ალეფ ($\aleph$) — ებრაული ანბანის პირველი ასოა.

ვაჩვენოთ, რომ ეს საძიებელი მიმდევრობაა. ცხადია, რომ α მეტია მიმდევრობის ყოველ რიცხვზე, და, მაშასადამე, დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ α-ზე ნაკლები არც ერთი რიცხვი არ აღემატება ყველა α_{n_k}-ს.

ვთქვათ, $\gamma < \alpha$. მაშინ $\gamma \in W_\alpha$ და, მაშასადამე, $\gamma = \alpha_m$. თუ m ემთხვევა ერთერთ n_k-ს, მაშინ γ შედის $\{\alpha_{n_k}\}$-ში და ამიტომ, არ შეიძლება აღემატებოდეს ყველა რიცხვს $\{\alpha_{n_k}\}$-დან. თუ კი

$$n_k < m < n_{k+1},$$

მაშინ, რამდენადაც n_{k+1} არის უ მ ც ი რ ე ს ი იმ n-თა შორის, რომლებისთვისაც $\alpha_n > \alpha_{n_k}$, ცხადია რომ $\gamma < \alpha_{n_k}$. თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულს მივუთითებთ K_0-ს ზოგიერთი რიცხვის აღნიშვნას. პირველ მათგანს ჩვენ უკვე ვიცნობთ — ეს არის ω. მას მოსდევენ

$$\omega + 1,\ \omega + 2, \ldots,\ \omega + n, \ldots \tag{2}$$

რიცხვები.

(2) რიცხვების მომდევნო პირველი რიცხვი, აშკარაა, იქნება $\omega + \omega$; ეს რიცხვი ჩვეულებრივ $\omega \cdot 2$-ით აღინიშნება. მას მოსდევენ რიცხვები

$$\omega \cdot 2 + 1,\ \omega \cdot 2 + 2, \ldots,\ \omega \cdot 2 + n, \ldots \tag{3}$$

(3) რიცხვების პირველი მომდევნო რიცხვი არის $\omega \cdot 3$.

ამ პროცესის გაგრძელებით, ჩვენ განვსაზღვრავთ ყველა

$$\omega \cdot n + m$$

სახის რიცხვებს.

ასეთი რიცხვები თვლად სიმრავლეს შეადგენენ. პირველი მათი მომდევნო რიცხვი (ჯერ კიდევ K_0-ში შემავალი), აღინიშნება ω^2-ით. მას მოსდევენ

$$\omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2, \ldots,\ \omega^2 + n, \ldots$$

რიცხვები. მათ მოყვება რიცხვი $\omega^2 + \omega$ და შემდეგ რიცხვები

$$\omega^2 + \omega + 1,\ \omega^2 + \omega + 2, \ldots,\ \omega^2 + \omega + n, \ldots$$

ამ რიცხვებს მოსდევს რიცხვი $\omega^2 + \omega \cdot 2$, ხოლო შემდეგ რიცხვები

$$\omega^2 + \omega \cdot 2 + n.$$

პირველი მომდევნო რიცხვი ასეთი რიცხვებისა არის $\omega^2 + \omega \cdot 3$. ამგვარადვე აიგებიან

$$\omega^2 + \omega \cdot n + m$$

სახის რიცხვები.

პირველი მათი მომდევნო რიცხვი არის $\omega^2 \cdot 2$, რის შემდეგაც მიმდევრობით შემოიყვანებიან

$$\omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot n + m$$

სახის რიცხვები.

ამ რიცხვებს მოსდევს $\omega^2 \cdot 3$. ეს პროცესი მიგვიყვანს ჩვენ

$$\omega^2 \cdot n + \omega \cdot m + l$$

რიცხვებამდე.

პირველი მათი მომდევნო რიცხვი აღინიშნება ω^3-ით. მას მოყვებიან რიცხვები

$$\omega^3 + \omega^2 \cdot n + \omega \cdot m + l$$

და მათ შემდეგ $\omega^3 \cdot 2$.

ამ პროცესის გაგრძელებით, ჩვენ განვსაზღვრავთ რიცხვებს ω^4 და ყველა

$$\omega^k \cdot n_0 + \omega^{k-1} \cdot n_1 + \dots + \omega \cdot n_{k-1} + n_k, \qquad (4)$$

სახის „პოლინომებს“.

ამ რიცხვებს მოსდევს რიცხვი

$$\omega^\omega,$$

რომელიც ჯერ კიდევ შედის K_0-ში [რადგან (4) რიცხვები თვლად სიმრავლეს შეადგენენ].

ω^ω-ს მოსდევს $\omega^\omega + 1$ და მთელი პროცესი განმეორდება თავიდან, რაც მიგვიყვანს ჩვენ $\omega^\omega \cdot 2$ რიცხვამდე. შემდეგ — პროცესის ხელმეორედ ჩატარება და მივიღებთ $\omega^\omega \cdot 3$. ამგვარად, ავაგებთ ყველა $\omega^\omega \cdot n$ სახის რიცხვებს. მათ მოსდევს რიცხვი $\omega^{\omega+1}$. შემდეგ ხდება მთელი პროცესის თავიდან გამეორება და გაჩნდება რიცხვი $\omega^{\omega+1} \cdot 2$. ასე იქნება შემოღებული $\omega^{\omega+1} \cdot n$ რიცხვები და მათ მოსდევს $\omega^{\omega+2}$.

ამ გზით შემოიყვანებიან $\omega^{\omega+n}$ რიცხვები და მათ შემდეგ მიიღება რიცხვი $\omega^{\omega \cdot 2}$. ამ რიცხვს მოსდევენ $\omega^{\omega \cdot 2} + 1$, $\omega^{\omega \cdot 2} + 2, \dots$ და ყველაფერი მეორდება თავიდან, რასაც მივყევართ რიცხვამდე $\omega^{\omega \cdot 2} \cdot 2$.

განვმარტეთ რა რიცხვები $\omega^{\omega \cdot 2} \cdot n$, მათს პირველ მომდევნოს ჩავარქმევთ $\omega^{\omega \cdot 2+1}$. ამგვარადვე აიგებიან შემდეგ და შემდეგ რიცხვები

$$\omega^{\omega \cdot 2+n}, \ \omega^{\omega \cdot 3}, \ \omega^{\omega \cdot 3+n}, \ \omega^{\omega \cdot 4}, \dots \omega^{\omega \cdot n}, \dots$$

ხოლო მათ მოსდევს რიცხვი

$$\omega^{\omega^2}$$

ასე შემოიღებიან რიცხვები

$$\omega^{\omega^3}, \ \omega^{\omega^4}, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots$$

პირველი რიცხვი,

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}$$

სახის რიცხვთა მომდევნო აღინიშნება ε-ით. მას მოსდევენ

$$\varepsilon + 1, \quad \varepsilon + 2, \dots$$

და ასე შემდეგ. შევნიშნოთ, მხოლოდ, რომ K_0-ის ყ ვ ე ლ ა რიცხვისათვის ჩვენ მაინც ვერ ვიღებთ აღნიშვნებს, რადგან ასეთი აღნიშვნებით შემოიფარგლება რიცხვთა თვლადი სიმრავლე.

§ 6. ალეფები

განმარტება. სავსებით დალაგებულ სიმრავლის სიმძლავრეს ალეფი ეწოდება.

ყველა ნატურალური რიცხვები (განხილული როგორც სიმძლავრეები) ალეფები არიან. უსასრულო სიმრავლეთა ალეფებს ტრანსფინიტური ალეფები ეწოდებათ.

თეორემა 1. ყოველი ორი ალეფი სადარია.

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b ორი ალეფია. ავილოთ ორი ისეთი სავსებით დალაგებული A და B სიმრავლე, რომ

$$\overline{\overline{A}} = a, \quad \overline{\overline{B}} = b.$$

თუ ეს ორი სიმრავლე ეკვივალენტურია, მაშინ $a = b$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი არ არიან მსგავსი. მაგრამ მაშინ ერთერთი მათგანი უფრო მოკლეა მეორეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ A მოკლეა B-ზე, მაშინ

$$a < b.$$

თეორემა დამტკიცებულია. იგი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეც: თუ a და b ალეფებია, მაშინ სამი (ურთიერთ შორის უთავსადი) დამოკიდებულებიდან

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

ერთერთი აუცილებლად შესრულებულია, ე. ი. ალეფებისათვის ადგილი აქვს ტრიხოტომიას.

თეორემა 2. ვთქვათ, α და β რიგითი რიცხვებია, ხოლო $\overline{\alpha}$ და $\overline{\beta}$ მათი ალეფებია. მაშინ

1) თუ $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$, მაშინ $\alpha < \beta$;

2) თუ $\alpha < \beta$, მაშინ $\overline{\alpha} \leqslant \overline{\beta}$.

დამტკიცება. თეორემის მეორე ნაწილი პირველის შედეგია. პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად ავილოთ α და β ტიპების A და B სავსებით დალაგებული სიმრავლეები. ისინი არ არიან მსგავსი, რადგან მათი ალეფები არ არიან ტოლი და ისინი არ არიან ეკვივალენტურიც კი. B რომ A-ზე მოკლე აღმოჩნდეს, ეს იმის მომასწავებელი იქნებოდა, რომ, პირობის წინააღმდეგ,

$$\overline{\beta} = \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}} = \overline{\alpha}.$$

მაშასადამე, A მოკლეა B-ზე, და ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\alpha < \beta$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თეორემის მეორე ნაწილში ტოლობის ნიშნის მოცილება არ შეიძლება, მაგალითად, $\omega < \omega + 1$, მაგრამ $\overline{\omega} = \overline{\omega + 1}$.

თეორემა 3. წყვილწყვილად განსხვავებული ალეფების ყოველგვარ Q სიმრავლეში არის უმცირესი.

მართლაც, თუ Q-ს ყოველ ალეფს შევუსაბამებთ ისეთ სავსებით დალაგებულ სიმრავლეს, რომელსაც თავის სიმძლავრედ სწორედ ეს ალეფი აქვს, ჩვენ ამ სიმრავლეთა შორის შეგვიძლია უზრუნველვყოთ უმოკლეს სიმრავლის არსებობა. მისი ალეფი იქნება უმცირესი Q-ში.

შედეგი. ალეფების ყოველგვარი სიმრავლე, თუ ის დალაგებულია მათი სიდიდის მიხედვით, სავსებით დალაგებული აღმოჩნდება.

თავისთავად იგულისხმება, რომ ლაპარაკია ალეფების „კანონიერ“ სიმრავლეზე. ყველა ალეფების სიმრავლის განხილვა არ შეიძლება. ეს ჩანს შემდეგი თეორემიდან:

თეორემა 4. 1) *არ არსებობს უდიდესი ალეფი.*

2) *ალეფების როგორი Q სიმრავლეც არ უნდა ავიღოთ, არსებობს ალეფები, რომლებიც აღემატებიან ყველა ალეფებს Q-დან.*

დამტკიცება. ვთქვათ, a ალეფია. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი სავსებით დალაგებული A სიმრავლე, რომლის სიმძლავრეც უდრის a-ს. A-სთან ერთად განვიხილოთ ყველა ისეთი სავსებით დალაგებული სიმრავლეები, რომლებიც შედგებიან იგივე ელემენტებისაგან, მაგრამ დალაგების სხვა ხერხებს უპასუხებენ. ამ სიმრავლეთა რიგითი ტიპები ჰქმნიან რიგითი რიცხვების რაღაც T სიმრავლეს.

ვთქვათ, β არის რიცხვი, რომელიც აღემატება ყველა რიცხვს T-დან, და $b = \overline{\beta}$. მაშინ b ალეფია, და შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$b > a. \tag{1}$$

მართლაც, თუ $\alpha = \overline{A}$, მაშინ $\alpha \in T$ და $\alpha < \beta$. მაგრამ, მაშინ $a \leqslant b$, და დაგვრჩენია მოვხსნათ

$$b = a \tag{2}$$

ტოლობის შესაძლებლობა.

დავუშვათ, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია. მაშინ შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა φ თანადობა A-სა და $W(\beta)$-ს შორის. ვთქვათ, რომ A_0 ის სიმრავლეა, რომელიც შედგება იგივე ელემენტებისაგან, რაც A, მაგრამ დალაგებულია ისე, რომ მის ორ ელემენტს შორის წინა არის ის, რომელსაც φ თანადობაში ნაკლები რიცხვი შეესაბამება. A_0 სიმრავლე მსგავსია $W(\beta)$-სი, მაშასადამე, მისი ტიპი არის β და $\beta \in T$, რაც ეწინააღმდეგება β-ს განმარტებას. ამგვარად, (2) შეუძლებელია და სამართლიანია (1).

გადავდივართ რა თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე, ცხადია შეგვიძლია დავუშვათ, რომ Q-ში არაა უდიდესი ალეფი, და რომ Q-ს ალეფები წყვილწყვილად განსხვავებული არიან. შევუსაბამოთ Q-ს ყოველ ალეფს ისეთი სავსებით დალაგებული A სიმრავლე, რომელსაც ის აქვს სიმძლავრედ, და შევადგინოთ ასეთი სიმრავლეების S ჯამი, ისე რომ შესაკრებთა სიმრავლე ჩავთვალოთ დალაგებულად იმგვარადვე, როგორც არის დალაგებული Q. მაგრამ Q სავსებით დალაგებულია. ამიტომ, წარმოადგენს რა S სავსებით დალაგებულ სიმრავლეების სავსებით დალაგებულ სიმრავლის ჯამს, თვითონ სავსებით დალაგებული სიმრავლეა, და მისი სიმძლავრე არის ალეფი. ცხადია, რომ ეს ალეფი მეტია ყველა ალეფებზე Q-დან. მართლაც, ყოველი ალეფი Q-დან არის S-ის

ნაწილის სიმძლავრე და, მაშასადამე, არ აღემატება $\aleph$-ს, მაგრამ Q-დან რომელიმე ალეფი $\aleph$-ის ტოლი რომ იყოს, ის აღმოჩნდებოდა უდიდესი Q-ში.

შენიშვნა. ყოველი ალეფისათვის არსებობს უშუალო მომდევნო ალეფი. მართლაც, თუ a არის რაიმე ალეფი, მაშინ არსებობს მასზე მეტი ალეფი b. თუ b უშუალოდ მომდევნოა a-სი, მაშინ დებულება დამტკიცებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ჩვენ განვიხილავთ ყველა[1] ისეთ c ალეფებს, რომელთათვისაც $a < c < b$, მათ შორის არსებობს უმცირესი, რომელიც ჩვენთვის საძიებელს წარმოადგენს.

ეს შენიშვნა საშუალებას გვაძლევს შევქმნათ ალეფებისათვის აღნიშვნების რაციონალური სისტემა. სახელდობრ, $\aleph_0$-ით აღვნიშნოთ თვლადი სიმრავლის სიმძლავრე (ცხადია, რომ ეს სიმძლავრე ალეფია). პირველი მომდევნო ალეფი აღინიშნება[2] $\aleph_1$-ით, პირველი მისი მომდევნო $\aleph_2$-ით და ა. შ. პირველი ისეთი ალეფი, რომელიც მომდევნოა ყველა $\aleph_n$ ალეფებისათვის, აღინიშნება $\aleph_\omega$-თი და ა. შ.

თეორემა 5. ყოველი ალეფი მიიღებს $\aleph_\alpha$ აღნიშვნას, სადაც α რიგითი რიცხვია.

დამტკიცება. ვთქვათ, H ალეფია და T არის სიმრავლე, რომელიც შედგება H-ზე ნაკლები ყველა ალეფისაგან. T სიმრავლე სავსებით დალაგებულია. ვთქვათ, მისი ტიპი არის α. T-ს W_α-ზე დაფარებით ჩვენ ყოველ ალეფს T-დან შევუსაბამებთ α-ზე ნაკლებ რიგით ნომერს, რის შემდეგაც დაგვრჩენია H აღვნიშნოთ $\aleph_\alpha$-თი.

ძნელი არ არის იმაში დარწმუნება, რომ აღნიშვნათა დალაგებული სისტემა ისეთია, რომ:

1) $\aleph_{\alpha+1}$ არის პირველი მომდევნო $\aleph_\alpha$-სი.

2) თუ β რიცხვი არის პირველი მომდევნო $S = \{\alpha\}$ სიმრავლის რიცხვებისა, მაშინ $\aleph_\beta$ არის პირველი ალეფი მომდევნო ყველა $\{\aleph_\alpha\}$ $(\alpha \in S)$ ალეფებისა.

ისეთი რიგითი რიცხვების K_α სიმრავლეს, რომლებსაც $\aleph_\alpha$ სიმძლავრე აქვთ, ეწოდება **რიცხვთა კლასი**. უმცირესი რიცხვი K_α კლასის რიცხვებს შორის ჩვეულებრივ Ω_α-თი აღინიშნება. კერძოდ, $\Omega_0 = \omega$, $\Omega_1 = \Omega$. K_1 კლასი არის მესამე რიცხვითი კლასი. ●

§ 7. ცერმელოს აქსიომა და თეორემა

მრავალ მათემატიკურ მსჯელობაში გამოიყენება შემდეგი დებულება:

ცერმელოს აქსიომა. ვთქვათ, $S = \{M\}$ წარმოადგენს არაცარიელი და წყვილწყვილად არაგადამკვეთი სიმრავლეების

[1] თუ b არსებობს, მაშინ არსებობს b სიმძლავრის (კანონიერი) B სიმრავლე. მისი ნაწილები ქმნიან კანონიერ სიმრავლეს, და, კერძოდ, კანონიერია აღმოჩნდება B-ს იმ ნაწილთა სიმრავლე, რომელთა სიმძლავრე c აკმაყოფილებს $a < c < b$ უტოლობას.

[2] ზემოთ $\aleph_1$ ჩვენ განვსაზღვრეთ, როგორც მეორე რიცხვითი K_0 კლასის სიმძლავრე. ორივე განმარტების იგივეობა გამომდინარეობს § 5-ს მე-3 თეორემიდან.

სიმრავლეს. მაშინ არსებობს შემდეგი თვისებების L სიმრავლე:

1) $L \subset \sum\limits_{M \in S} M$.

2) L სიმრავლეს ყოველ $M \in S$ სიმრავლესთან აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი საერთო ელემენტი.

შეიძლება ითქვას, რომ L შედგება ყველა $M \in S$ სიმრავლეთა „წარმომადგენლებისაგან“.

საკითხმა იმის შესახებ, დასაშვებია თუ არა ეს აქსიომა, მათემატიკოსთა შორის გაცხოველებული კამათი გამოიწვია და დღემდე ამ საკითხში აზრთა თანხმობა არ არსებობს. ამ წიგნის ავტორი დგას ცერმელოს აქსიომის უყოყმანო მიღების პოზიციაზე. კერძოდ, ჩვენ ამ აქსიომით უკვე ბევრჯერ ვისარგებლეთ წინა თავებში. ასე, მაგალითად, სავსებით აშკარა იყო მისი გამოყენება III თავში არაზომადი სიმრავლის მაგალითის აგების დროს. მაგრამ კიდევ უფრო ადრეც ჩვენ ვისარგებლეთ ცერმელოს აქსიომით. ყოველ უსასრულო სიმრავლეში თვლადი ნაწილის არსებობა, დაგროვების წერტილის ცნების ეკვივალენტობა, ზომადი სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლის (შემოსაზღვრული) ჯამის ზომადობა — ყველა ეს შედეგები ჩვენს მიერ დამტკიცებული იყო ცერმელოს აქსიომის დახმარებით [1].

რა თქმა უნდა ცერმელოს აქსიომა ისე არ უნდა გავიგოთ, თითქოს ჩვენ შევძლებთ L სიმრავლის ფაქტიურად აგებას. საკითხი ეხება მხოლოდ ისეთი მსჯელობის შესაძლებლობას ამ სიმრავლის შესახებ, რომელსაც წინააღმდეგობის საფრთხე არ ემუქრება.

ცერმელოს აქსიომასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1 (**ამორჩევის ზოგადი პრინციპი**). ვთქვათ, $T = \{N\}$ არაცარიელ სიმრავლეთა სიმრავლეა. მაშინ არსებობს ისეთი $f(N)$ ფუნქცია, რომელიც ყოველ N-ს T-დან შეუსაბამებს $\sum\limits_{N \in T} N$ სიმრავლის გარკვეულ ელემენტს და რომელიც ყოველი $N_0 \in T$-სათვის მოგვცემს

$$f(N_0) \in N_0.$$

სანამ ამ თეორემის დამტკიცებას შევუდგებოდეთ, შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა N სიმრავლეები წყვილ წყვილად არ იკვეთებიან, თეო-

---

[1] ცერმელოს აქსიომის შესახებ გირჩევთ წაიკითხოთ:

1) В. К. Серпинский, Аксиома Цермело, ჟურნ. „Математический сборник“, т. 31, გამ. 1, 1921.

2) В. Молодший, Эффективизм в математике, Соцэкгиз, 1938.

3) А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций (Прибавление III, § 2), ГТТИ, 1931.

რემა ტოლფასია ცერმელოს აქსიომისა. მართლაც, ცერმელოს აქსიომის აღიარებით, ჩვენ პირდაპირ მივიღებთ საძიებელ ფუნქციას, თუ დავუშვებთ

$$f(N) = NL.$$

შებრუნებით, თუ ვცნობთ 1-ლ თეორემას, L სიმრავლეს მივიღებთ, თუ ავიღებთ

$$L\{f(N)\}.$$

გადავიდეთ თეორემის დამტკიცებაზე. აღვნიშნოთ T-ში შემავალი N სიმრავლეთა ელემენტები n-ით, და განვიხილოთ ყველა (n, N) სახის წყვილები, სადაც $n \in N$, ხოლო $N \in T$.

ამასთან (n', N') და (n'', N'') წყვილებს ჩვენ იგივეურად ჩავთვლით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$n' = n'', \quad N' = N''.$$

დავარქვათ $M(N_0)$ ყველა (n, N_0) წყვილების სიმრავლეს, რომლებშიაც $n \in N_0$; ასეთი $M(N)$ სიმრავლე შეიძლება ავაგოთ ყოველი $N \in T$-სათვის. ვთქვათ,

$$S = \{M(N)\} \quad (N \in T).$$

განსხვავებული $M(N)$ სიმრავლეები წყვილწყვილად არ იკვეთებიან (ამაშია მსჯელობის იდეა). მართლაც, ის გარემოება, რომ $M(N')$ და $M(N'')$ სხვადასხვა სიმრავლეებია ნიშნავს იმას, რომ სხვადასხვა არიან N' და N'' სიმრავლეები. მაგრამ მაშინ არცერთი (n, N') წყვილი არ დაემთხვევა არცერთ (n, N'') წყვილს და, მაშასადამე,

$$M(N') \cdot M(N'') = 0.$$

ცერმელოს აქსიომის გამოყენებით, შეგვიძლია დავადასტუროთ ისეთი L სიმრავლის არსებობა, რომელიც (n, N) წყვილებისაგან შედგება, სადაც $n \in N$, და რომელსაც ყოველ $M(N) \in S$-თან თითო საერთო ელემენტი აქვს. ეს სიმრავლე საძიებელი ფუნქციის განსაზღვრის საშუალებას გვაძლევს. სახელდობრ, თუ $N_0 \in T$, მაშინ

$$M(N_0)L$$

სიმრავლე შედგება ერთადერთი (n_0, N_0) ელემენტისაგან, სადაც $n_0 \in N_0$.

თუ მივიღებთ

$$f(N_0) = n_0,$$

ჩვენ დავაკმაყოფილებთ თეორემის პირობებს.

შედეგი. *ვთქვათ, $T = \{M'\}$ არის მოცემული არაცარიელი M სიმრავლის ყველა არაცარიელი ნაწილების სიმრავლე. მაშინ არსებობს ისეთი $f(M')$ ფუნქცია, რომელიც ყოველ $M' \in T$-ს შეუსაბამებს გარკვეულ $m \in M'$ ელემენტს.*

თუ $m = f(M')$ ელემენტს ვუწოდებთ M-ში „დანიშნულ" ელემენტს, მაშინ შედეგი ამტკიცებს, რომ ყოველ $M' \subset M$-ში შეიძლება დავნიშნოთ თითო ელემენტი.

თეორემა 2 (ე. ცერმელო). ყოველი სიმრავლე შეიძლება იყოს სავსებით დალაგებული.

დამტკიცება. ვთქვათ, M რაიმე არაცარიელი[1] სიმრავლეა. აღვნიშნოთ $T = \{M'\}$-ით M-ის ყველა არაცარიელი ნაწილების სიმრავლე და „დავნიშნოთ" ყოველ M'-ში თითო ელემენტი.

M-ის ზოგიერთი ნაწილი შეიძლება სავსებით დავალაგოთ. ასეთებია, მაგალითად, M-ის ყველა სასრული ნაწილები. ვთქვათ, A არის M-ის არაცარიელი ნაწილი, რომელიც სავსებით დალაგებულია რაიმე ხერხით. თუ:

(H) | ყოველი $a \in A$-სათვის M სიმრავლის $M - A_a$ ნაწილში (სადაც A_a არის A სიმრავლის a ელემენტით მოკვეთილი) „დანიშნულ" ელემენტს წარმოადგენს a,

მაშინ ვიტყვით, რომ A არის M-ის წესიერად დალაგებული ნაწილი.

თუ შევთანხმდებით M'-ში „აღნიშნული" ელემენტი აღვნიშნოთ $f(M')$-ით, მაშინ (H) პირობა შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$f(M - A_a) = a \quad (\text{ყოველი } a \in A\text{-სათვის}).$$

დავრწმუნდეთ, რომ M-ის წესიერად დალაგებული ნაწილები არსებობენ. მართლაც, თუ m_1 არის ელემენტი „დანიშნული" თვითონ M სიმრავლეში, და M_1 არის ის ნაწილი, რომელიც შედგება მხოლოდ ამ ელემენტისაგან, მაშინ M_1 წესიერად დალაგებული ნაწილია, რადგანაც მისი ერთად ერთი მონაკვეთი არის ცარიელი სიმრავლე და

$$f[M - (M_1)_{m_1}] = m_1.$$

შემდეგ, თუ $M - M_1$ სიმრავლეში „დანიშნული" ელემენტი არის m_2, მაშინ დალაგებული $\{m_1, m_2\}$ წყვილი M-ის წესიერად დალაგებული ნაწილია.

ყოველ წესიერად დალაგებულ A ნაწილში, პირველ ელემენტს აუცილებლად ის m_1 ელემენტი წარმოადგენს, რომელიც „დანიშნულია" თვითონ M სიმრავლეში. მართლაც, თუ a არის A-ს პირველი ელემენტი, მაშინ

$$a = f(M - A_a) = f(M) = m_1.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ M სიმრაელის A ნაწილისათვის შესაძლებელია წესიერად დალაგების მხოლოდ ერთი ხერხი. მართლაც, დავუშვათ, რომ არსებობს A ნაწილის დალაგების ორი ისეთი φ და ψ წესი, რომლის შედეგადაც იგი წესიერად დალაგებული ნაწილი ხდება. აღვნიშნოთ

[1] ცარიელი სიმრავლისათვის თეორემა ტრივიალურია.

P-თი და Q-თი ის წესიერად დალაგებული ნაწილები, რომლებზედაც გადაიჭრება A სიმრავლე φ და ψ დალაგების დროს.

ერთერთი ამ სიმრავლიდან (მაგალითად P) მსგავსია მეორის ან მისი მონაკვეთის. P დავაფაროთ Q-ს (ან მის მონაკვეთს). $m_1 \in P$ ელემენტი ამ დროს თავისთავს დაეფარება. P-ში რომ არსებობდენ ისეთი ელემენტები, რომლებიც არ დაეფარებიან თავისთავს, მაშინ ერთერთი მათგანი პირველი იქნებოდა. ვთქვათ, ასეთია p ელემენტი, რომელიც ეფარება $q \neq p$ ელემენტს. p-ს ყველა წინამორბედი ელემენტები ეფარებიან თავისთავებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$P_p = Q_q.$$

მაგრამ აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$p = f(M - P_p) = f(M - Q_q) = q,$$

ეს კი ეწინააღმდეგება p-ს განმარტებას. ამგვარად, ყოველი ელემენტი ეფარება თავისთავს, რაც ნიშნავს P-სა და Q-ს სრულ იგივეობას.

ამგვარად, თუ M სიმრავლის არაცარიელი A ნაწილისათვის შესაძლებელია, საზოგადოთ, წესიერად დალაგება, მაშინ ეს მხოლოდ ერთნაირად მოხდება. ვიგულისხმოთ, რომ, ყოველი ისეთი ნაწილი, რომელიც შეიძლება წესიერად დალაგებული გახდეს, უკვე ასეთად განხორციელებულია და ვუწოდოთ მას ამ დაშვებით ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი.

ორი სხვადასხვა ნორმალური ნაწილიდან ერთი წარმოადგენს მეორის მონაკვეთს. მართლაც, თუ A და B ნორმალური ნაწილებია, მაშინ ერთი (ვთქვათ ეს იყოს A) მსგავსია მეორისა ან მისი მონაკვეთის. A-ს დაფარებით B-ზე (ან B-ს მონაკვეთზე), როგორც ზემოთ, დავრწმუნდებით, რომ A-ს ყოველი ელემენტი დაეფარება თავის თავს. A და B რომ მსგავსი ყოფილიყვნენ, ისინი ერთიდაიგივე იქნებოდენ. მაშასადამე, A არის B-ს მონაკვეთი.

ამ დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ M სიმრავლის ორი ელემენტი შედის რამოდენიმე ნორმალურ ნაწილში, მაშინ მათი რიგი ერთიმეორის მიმართ ყველა ამ ნაწილებში ერთნაირია.

ამის შემდეგ, აღვნიშნოთ L-ით M-ის ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც შედიან თუნდაც ერთ ნორმალურ ნაწილში. L სიმრავლე შეიძლება დალაგებული გავხადოთ. მართლაც, ვთქვათ, a და b L-ის ორი ელემენტია. მაშინ არსებობს ისეთი ნორმალური A და B ნაწილები, რომ $a \in A$ და $b \in B$. მაგრამ ერთერთი ამ ნაწილთაგანი აუცილებლად შედის მეორეში. მაშასადამე, ორივე a და b ელემენტი შედის ერთიდაიგივე ნორმალურ ნაწილში. ამ ნაწილში ერთი მათგანი წინამორბედია მეორეზე, ამასთან, თუ

$$a \prec b,$$

მაშინ იგივე რიგი ერთი მეორის მიმართ აქვთ მათ ყველა ისეთ ნორმალურ ნაწილებში, რომლებიც შეიცავენ ორივე მათგანს. ჩვენ შევთანხმდეთ L-ის ამ ელემენტების რიგი ერთი მეორის მიმართ ჩავთვალოთ ისეთივე, როგორიც მათ აქვთ მათ შემცველ ნორმალურ ნაწილებში.

ამგვარად, L სიმრავლე დალაგებულია. მაგრამ ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ იგი სავსებით დალაგებულია. მართლაც, ვთქვათ, L^* არის L-ის არაცარიელი ნაწილი. ავიღოთ L^*-ში ნებისმიერი a ელემენტი. თუ a არ არის პირველი L^*-ში, მაშინ L^*-ში მყოფი ყველა მისი წინამორბედი ელემენტები შედიან ყოველ ისეთ ნორმალურ ნაწილში, რომელშიაც შედის a. ვთქვათ, A ასეთი ნაწილია. იგი სავსებით დალაგებულია და AL^* თანაკვეთას აქვს პირველი ელემენტი. ეს ელემენტი იქნება პირველი L^*-ში.

ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ L არის M-ის სავსებით დალაგებული ნაწილი. ვაჩვენოთ, რომ ის წესიერად დალაგებულია. ვთქვათ, $a \in L$. მაშინ მოიძებნება ისეთი ნორმალური ნაწილი A, რომელიც შეიცავს ამ ელემენტს. სრულებით აშკარაა, რომ

$$L_a = A_a,$$

საიდანაც

$$f(M - L_a) = f(M - A_a) = a,$$

და L წესიერად დალაგებულია.

დამტკიცება თითქმის დასრულებულია. სახელდობრ, ძნელი არ არის იმის დადგენა, რომ

$$L = M.$$

მართლაც, ვთქვათ, რომ ეს ასე არ არის, და ვთქვათ, a არის „დანიშნული“ ელემენტი $M - L$ სიმრავლეში. შევადგინოთ სიმრავლე $A = L + \{a\}$, ისე რომ a ჩავთვალოთ L-ის ყველა ელემენტების მომდევნოდ. ცხადია, რომ ეს სიმრავლე არის M-ის ნორმალური ნაწილი. მაგრამ მაშინ a უნდა შევიდეს L-ში, იმ დროს როცა $a \in M - L$.

მაშ, მართლაც, $L = M$ და M სავსებით დალაგებულია. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგები. 1) ყოველი სიმძლავრე არის ალეფი.

2) ყოველი ორი სიმძლავრე სადარია, ე. ი. სიმძლავრეებისათვის ადგილი აქვს ტრიხოტომიას.

პირველი შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ კონტინუუმის c სიმძლავრე არის ალეფი.

$$c = \aleph_\alpha.$$

ამ α-ს მოძებნა შეადგენს, ჯერ ამოუხსნელ, კონტინუუმის პრობლემას. კონტინუუმის ჰიპოტეზი, რომელზედაც საუბარი იყო I თავში, მდგომარეობს იმაში, რომ $\alpha = 1$. კენიგის მიერ დამტკიცებულია, რომ $\alpha \neq \omega$. შევნიშნოთ, რომ c-სა და $\aleph_1$-ის სადარობა და

$$c \geqslant \aleph_1$$

უტოლობა გამომდინარეობს § 1-ის მე-4 თეორემიდან, ცერმელოს თეორემის გარეშე.

თ ა ვ ი XII

ბერის კლასიფიკაცია

§ 1. ბერის კლასები

განვიხილოთ რაიმე ფიქსირებულ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ყველა უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე, და დავარქვათ მას ფუნქციათა ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი კლასი. თუ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული $f(x)$ ფუნქცია არ შედის ნულოვან კლასში, მაგრამ წარმოიდგინება

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \tag{1}$$

სახით, სადაც ყველა $f_n(x)$ უწყვეტი არიან, მაშინ $f(x)$-ს ეწოდება პ ი რ ვ ე ლ ი კლასის ფუნქცია.

სავსებით ასევე, ისეთ $f(x)$ ფუნქციას, რომელიც არ შედის არც ნულოვან, არც პირველ კლასებში, მაგრამ, რომელიც წარმოიდგინება (1) სახით, სადაც ყველა $f_n(x)$ პირველ კლასში შედიან, ეწოდება მ ე ო რ ე კლასის ფუნქცია.

საზოგადოდ, m კლასის ფუნქცია ეწოდება ისეთ ფუნქციას, რომელიც არ შედის არც ერთ წინა კლასში, მაგრამ წარმოადგენს $m-1$ კლასის ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარს.

ამგვარად განიმარტებიან ყველა კლასები სასრული ნომრებით. აღვნიშნოთ ისინი

$$H_0,\ H_1, \ldots,\ H_m, \ldots \tag{2}$$

მაგრამ ეს კლასიფიკაცია შეიძლება გავაგრძელოთ. სახელდობრ, ვთქვათ რომ $f(x)$ არ შედის არცერთ კლასში (2)-დან და წარმოიდგინება (1) სახით, სადაც ყოველი $f_n(x)$ ფუნქცია შედის რომელიმე H_{m_n} კლასში. მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქცია H_ω კლასის ფუნქციაა.

ისეთ ფუნქციას, რომელიც არ შედის არცერთ H_m კლასში და არც H_ω-ში, მაგრამ რომელიც წარმოადგენს H_ω კლასის ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარს, ეწოდება $H_{\omega+1}$ კლასის ფუნქცია,

ვთქვათ, α არის რიცხვითი მეორე კლასის რიგითი რიცხვი. ვთქვათ, ჩვენს მიერ უკვე განმარტებულია ყველა კლასი H_β, სადაც $\beta < \alpha$.

მაშინ H_α კლასი განიმარტება როგორც ისეთ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც არ შედიან არცერთ H_β $(\beta < \alpha)$ კლასში, მაგრამ რომლებიც წარ-

მოიდგინებიან (1) სახით, სადაც ყოველი $f_n(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის რომელიმე H_{β_n} კლასს ($\beta_n < \alpha$).

ეს კლასიფიკაცია წოდებულია **ბერის კლასიფიკაციათ**, ხოლო ყველა H_α ($\alpha < \Omega$) კლასის ფუნქციებს ბერის ფუნქცია ჰქვია.

ადვილი მისახვედრია, რომ H_α კლასის ნომრებად შეიძლება იყვნენ მხოლოდ პირველი ან მეორე რიცხვითი კლასის რიცხვები, და კერძოდ, არ შეიძლება ამ ხერხით განმარტებულ იქნას H_Ω კლასი. მართლაც, ბერის ფუნქციათა როგორი თვლადი $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობაც არ უნდა ავიღოთ, ყოველი მათგანი მოხვდება რაიმე H_{α_n} კლასში ($\alpha_n < \Omega$):

$$f_n(x) \in H_{\alpha_n} \ (\alpha_n < \Omega).$$

მაგრამ მაშინ არსებობს γ რიცხვი, რომელიც აღემატება ყველა α_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) რიცხვებს და რომელიც ჯერ კიდევ მეორე კლასში შედის. მაშასადამე, თუ $f_n(x)$ მიმდევრობა კრებადია რაიმე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ეს უკანასკნელი შედის კლასში, რომლის ნომერიც არავითარ შემთხვევაში არ აღემატება γ-ს.

შემდეგ, ძნელი არ არის ჩვენება იმისა, რომ თუ α პირველი გვარის რიცხვია, ე. ი. თუ $\alpha = \beta + 1$, მაშინ ყოველი $f(x) \in H_\alpha$ ფუნქცია წარმოიდგინება (1) სახით, სადაც ყველა $f_n(x)$ შედიან H_β კლასში. მართლაც, $f_n(x)$ ფუნქციათა შორის H_γ კლასში რომ ფუნქციათა უსასრულო სიმრავლე შედიოდეს, სადაც $\gamma < \beta$, მაშინ თითონ $f(x)$ შევიდოდა H_β კლასში ან უფრო დაბალი ნომრის კლასში. ამიტომ ყველა $f_n(x)$ ფუნქცია, რომელიღაც მათგანიდან დაწყებული, შედიან H_β-ში.

თუ $f(x) \in H_\alpha$, სადაც α მეორე გვარის რიცხვია, მაშინ $f(x)$-სათვის შესაძლებელია (1) წარმოდგენა, რომელშიაც

$$f_n(x) \in H_{\beta_n} \quad (\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots < \alpha). \tag{3}$$

მართლაც, ვთქვათ, $f_1(x) \in H_{\beta_1}$. $f_2(x), f_3(x), \ldots$ ფუნქციათა შორის აუცილებლად მოიძებნება ისეთი, რომელიც ეკუთვნის H_{β_2} კლასს და $\beta_2 > \beta_1$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x) \in H_{\beta_1 + 1}$). ამ პროცესის გაგრძელებით $\{f_n(x)\}$-დან გამოვყოფთ ისეთ მიმდევრობას, რომელიც დააკმაყოფილებს (3)-ს.

თეორემა 1. ბერის ყოველი ფუნქცია ზომადია.

ეს დებულება გამომდინარეობს იქიდან, რომ ზომადი არიან უწყვეტი ფუნქციები, ხოლო ზღვარზე გადასვლას არ გამოვყავართ ზომადი ფუნქციების კლასიდან.

შებრუნებული დებულება არ არის სწორი, როგორც ამას გვიჩვენებს

თეორემა 2. ბერის ყველა ფუნქციათა სიმრავლეს კონტინუუმის c სიმრავლე აქვს.

დამტკიცება. ყველა უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლის სიმძლავრე არის c. მაშასადამე, H_0 კლასის ფუნქციათა რიცხვი იქნება c. დავამტკიცოთ, რომ ყველა α-სათვის გვექნება

$$\overline{\overline{H_\alpha}} \leqslant c. \tag{4}$$

$\alpha = 0$-სათვის ეს სამართლიანია. დავუშვათ, რომ (4) დამტკიცებულია ყოველი $\alpha<\beta$-სათვის, სადაც β არის პირველი ან მეორე კლასის რაიმე რიცხვი, და ვაჩვენოთ, რომ (4) სამართლიანია $\alpha = \beta$-საც.

ამ მიზნით, დავუშვათ

$$T_\beta = \sum_{\xi<\beta} H_\xi.$$

ყოველ H_ξ-ს აქვს სიმძლავრე არა უმეტესი c-სი, ხოლო შესაკრებები ამ ჯამში არიან სასრული ან თვლადი სიმრავლით. ამიტომ, $\overline{\overline{T_\beta}} \leqslant c$. მეორეს მხრივ, $H_0 \subset T_\beta$, საიდანაც $\overline{\overline{T_\beta}} \geqslant c$ და, მაშასადამე,

$$\overline{\overline{T_\beta}} = c. \tag{5}$$

შევნიშნოთ რა ეს, განვიხილოთ ფუნქციათა ყველა ისეთი მიმდევრობათა სიმრავლე

$$M = \{(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\dots)\},$$

რომლებიც აღებული არიან T_β-დან. M სიმრავლის ელემენტები განისაზღვრებიან ისეთ პარამეტრთა თვლადი სიმრავლით, რომელთაგან ყოველი, (5)-ის თანახმად, იღებს c მნიშვნელობას. ამიტომ (თავი I, § 4, მე-7 თეორემა) M-ის სიმძლავრე უდრის c-ს.

მაგრამ H_β-ს ყოველ $f(x)$ ფუნქციას შეგვიძლია შევუსაბამოთ M-ის გარკვეული ელემენტი, სახელდობრ ის, რომლისათვისაც

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

მაშასადამე, H_β ეკვივალენტურია M-ის ნაწილისა და (4) დამტკიცებულია $\alpha = \beta$-სათვის. ტრანსფინიტური ინდუქციის შესახებ თეორემის ძალით, (4) დამტკიცებულია ყოველი $\alpha < \Omega$-სათვის.

ახლა უკვე ადვილია დამტკიცების დაბოლოება. სახელდობრ, თუ T არის ბერის ყველა ფუნქციათა სიმრავლე, მაშინ

$$T = \sum_{\alpha<\Omega} H_\alpha.$$

თითოეული შესაკრების სიმძლავრე არ აღემატება c-ს, ხოლო შესაკრებთა სიმრავლეს აქვს $\aleph_1$ სიმძლავრე, რომელიც აგრეთვე არ აღემატება c-ს, საიდანაც $\overline{\overline{T}} \leqslant c$. მაგრამ რადგანაც $\overline{\overline{T}} \geqslant \overline{\overline{H_0}} = c$, ამიტომ $\overline{\overline{T}} = c$, და თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, A და B ორი ნამდვილი რიცხვია, ამასთან $A < B$. შევთანხმდეთ $[x]_A^B$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ x-ის შემდეგი ფუნქცია:

$$[x]_A^B = \begin{cases} B, & \text{თუ } x > B \\ x, & \text{თუ } A \leqslant x \leqslant B, \\ A, & \text{თუ } x < A. \end{cases}$$

ლემა 1. თუ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} [x_n]_A^B = [l]_A^B.$$

დამტკიცება. ვთქვათ ჯერ, რომ $l \neq A$ და $l \neq B$, მაგალითად, $A < l < B$. მაშინ საკმარისად დიდი n-სათვის აღმოჩნდება, რომ $A < x_n < B$, ასე რომ

$$[x_n]_A^B = x_n \to l = [l]_A^B.$$

ანალოგიურად ამოიწურება შემთხვევები $l < A$ და $l > B$.

დავუშვათ ახლა, რომ $l = B$. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ ისეთი N, რომ $n > N$-სათვის გვქონდეს

$$x_n > B - \varepsilon,\ x_n > A.$$

ვთქვათ, $n > N$. მაშინ სამართლიანია ერთერთი: ან $x_n \leqslant B$ და მაშინ $[x_n]_A^B = x_n$, ანდა $x_n > B$, და მაშინ $[x_n]_A^B = B$. ორივე შემთხვევაში გვექნება

$$B - \varepsilon < [x_n]_A^B \leqslant B,$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} [x_n]_A^B = B.$$

$l = A$-სათვის დამტკიცება ანალოგიურია.

შედეგი. 1) თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $[f(x)]_A^B$ აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა.

2) თუ $f(x)$ არის ისეთი კლასის ფუნქცია, რომლის ნომერი $\leqslant \alpha$, მაშინ $[f(x)]_A^B$ აგრეთვე არის ისეთი კლასის ფუნქცია, რომლის ნომერი $\leqslant \alpha$.

3) თუ $f(x) \in H_\alpha$ და $A \leqslant f(x) \leqslant B$, მაშინ $f(x)$ წარმოიდგინება ისეთ $f_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრის სახით, რომელთაგან ყოველი შედის H_{α_n} $(\alpha_n < \alpha)$ კლასში და აკმაყოფილებს $A \leqslant f_n(x) \leqslant B$ უტოლობას.

პირველი და მესამე შედეგები აშკარა არიან. მეორე კი მტკიცდება ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდით.

ლემა 2. თუ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} [x_n]_{-n}^{n} = l.$$

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

შედეგი. H_α კლასის ყოველი $f(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

სახით, სადაც $f_n(x)$ წარმოადგენენ H_β კლასის შემოსაზღვრულ ფუნქციებს $\beta < \alpha$-სათვის.

მით უმეტეს $f_n(x)$ ფუნქციები შეგვიძლია ვიგულისხმოთ სასრულ ფუნქციებად.

თეორემა 3. ორი ისეთი ფუნქციის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი, რომლებიც შედიან კლასებში $\leqslant \alpha$, წარმოადგენს ფუნქციას კლასისა $\leqslant \alpha$. შეფარდებისათვის სამართლიანია იგივე, თუ გამყოფი ფუნქცია არ იქცევა ნულად.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ სასრული ფუნქციებია, რომლებიც შედიან კლასებში $\leqslant \alpha$, და ვთქვათ,

$$S(x) = f(x) + g(x),$$

ვაჩვენოთ, რომ $S(x)$ აგრეთვე არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$. თუ $\alpha = 0$, ეს დებულება ტრივიალურია. დავუშვათ, რომ ის უკვე დამტკიცებულია ყველა $\alpha < \lambda$-სათვის, და ვაჩვენოთ, რომ ის სამართლიანია $\alpha = \lambda$—სათვისაც.

ამ მიზნით ავაგოთ სასრული ფუნქციათა ისეთი ორი $\{f_n(x)\}$ და $\{g_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომლებისათვისაც

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

და

$$f_n(x) \in H_{\beta_n}, \quad g_n(x) \in H_{\gamma_n} \quad (\beta_n < \lambda, \ \gamma_n < \lambda).$$

ვთქვათ,

$$S_n(x) = f_n(x) + g_n(x).$$

მაშინ, დაშვების ძალით, $S_n(x) \in H_{\lambda_n}$, სადაც λ_n არ აღემატება უდიდეს რიცხვს β_n-სა და γ_n-ს შორის, და, მაშასადამე, $\lambda_n < \lambda$. მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

საიდანაც ცხადია, $S(x)$ შედის კლასში, ნომრით $\leqslant \alpha$.

სხვაობისა და ნამრავლისათვის მსჯელობა სავსებით ანალოგიურია, ხოლო შეფარდებისათვის უნდა გამოვიყენოთ ფუნქცია

$$\frac{f_n(x)\,g_n(x)}{g_n^2(x) + \dfrac{1}{n}}.$$

ლემა 3. ვთქვათ, მოცემულია კრებადი დადებითი მწკრივი

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$

თუ ყოველი ფუნქცია $\{f_k(x)\}$-დან არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$ $(\alpha > 0)$ და აკმაყოფილებს

$$|f_k(x)| \leqslant A_k \qquad (k = 1,2,3,\ldots),$$

უტოლობას, მაშინ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ მწკრივის ჯამი არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$.

დამტკიცება. ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(x)$$

სახით, სადაც $\varphi_n^{(k)}(x)$ შედის კლასში, რომლის ნომერიც ნაკლებია α-ზე, და

$$|\varphi_n^{(k)}(x)| \leqslant A_k \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

დავუშვათ

$$\Phi_n(x) = \varphi_n^{(1)}(x) + \varphi_n^{(2)} + \cdots + \varphi_n^{(n)}(x).$$

ეს ფუნქცია შედის კლასში ნომრით $< \alpha$, და ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x),$$

სადაც $f(x)$-ით აღვნიშნავთ $\Sigma f_k(x)$ მწკრივის ჯამს.

ამ მიზნით ავიღოთ $\varepsilon > 0$, და ვიპოვოთ ისეთი m, რომ

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k < \varepsilon.$$

მაშინ

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} \varphi_n^{(k)}(x)\right| < \varepsilon \quad (n > m),$$

და ამიტომ

$$|f(x) - \Phi_n(x)| < \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - \varphi_n^{(k)}(x)| + 2\varepsilon.$$

მაგრამ ყოველი ფიქსირებული x-სათვის $f_k(x) - \varphi_n^{(k)}(x)$ სხვაობა n-ის

ზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამიტომ $n > N(x)$-სათვის გვექნება

$$|f(x) - \Phi_n(x)| < 3\varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს ლემას.

თეორემა 4. *ისეთ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი, რომლებიც შედიან კლასებში $\leqslant \alpha$, არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$.*

დამტკიცება. $\alpha = 0$-სათვის თეორემა ტრივიალურია. განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $\alpha > 0$. ვთქვათ,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

სადაც ყოველი $f_n(x)$ ფუნქციის კლასი არ არის α-ზე მაღალი, ხოლო ზღვარზე გადასვლა ხდება თანაბრად x-ის მიმართ.

ამოვარჩიოთ ინდექსთა ისეთი $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ მიმდევრობა, რომ აღმოჩნდეს

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

მაშინ

$$[f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)] + [f_{n_3}(x) - f_{n_2}(x)] + [f_{n_4}(x) - f_{n_3}(x)] + \ldots \tag{6}$$

მწკრივის წევრები არ აღემატებიან დადებით კრებად

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

მწკრივის წევრებს, და ამიტომ, ლემის ძალით, (6) მწკრივის ჯამი, რომელიც აშკარაა უდრის

$$f(x) - f_{n_1}(x)\text{-ს}, \tag{7}$$

არის ფუნქცია α-ზე არა უმაღლესი კლასისა. (7)-თან ერთად $f(x)$ ფუნქციაც შედის კლასში ნომრით $\leqslant \alpha$.

საზოგადოდ, ზღვარზე გადასვლის ოპერაციას მივყევართ უფრო მაღალი კლასის ფუნქციებამდე, ვიდრე კლასები, რომლებსაც ეკუთვნიან მიმდევრობის ფუნქციები. ჩვენ ვნახეთ, რომ მისწრაფების თანაბრობის პირობა *საკმარისია* იმისათვის, რომ არ მოხდეს კლასების ამაღლება. ბ. გაგაევმა[1] იპოვა აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც უნდა მოვთხოვოთ მიმდევრობის ფუნქციებს, იმისათვის, რომ ზღვარითი ფუნქციის კლასი არ აღმოჩნდეს უფრო მაღალი, ვიდრე მიმდევრობის ფუნქციათა შემცველი კლასები.

თეორემა 5. *ვთქვათ, $f(x)$ არის ფუნქცია არა უმაღლეს β კლასისა, ხოლო $\varphi(t)$ ფუნქცია არა უმაღლესი α კლასისა, რომლის ყველა მნიშვნელობანი მოხვდებიან ისეთ $[a,b]$ სეგმენტში, რომელშიაც მოცემულია $f(x)$, მაშინ რთული $f[\varphi(t)]$ ფუნქცია არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha + \beta$.*

---

[1] „Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B". (Fund. Math., t. 18, 1931).

დამტკიცება. ვთქვათ, $\beta = 0$, ე. ი. $f(x)$ უწყვეტია. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\varphi(t)$ არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$, მაშინ $f[\varphi(t)]$ არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$.

$\alpha = 0$-სათვის ეს დებულება ტრივიალურია. თუ ის უკვე დამტკიცებულია ყოველი $\alpha < \gamma$-სათვის და თუ $\varphi(t) \in H_\gamma$, მაშინ

$$\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t),$$

სადაც $\varphi_n(t)$ შედის H_{γ_n} $(\gamma_n < \gamma)$ კლასში, და შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

$$a \leqslant \varphi_n(t) \leqslant b.$$

მაგრამ მაშინ, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ძალით,

$$f[\varphi(t)] = \lim_{n \to \infty} f[\varphi_n(t)]$$

და რამდენადაც $f[\varphi_n(t)]$-ს კლასი არაა γ_n-ზე მაღალი, $f[\varphi(t)]$-ს კლასი არ არის γ-ზე მაღალი.

ამგვარად, თუ $\varphi(t)$ არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$, მაშინ β კლასის ყოველგვარი $f(x)$ ფუნქციისათვის, $\beta = 0$-ს დროს, რთული $f[\varphi(t)]$ ფუნქცია არის კლასისა $\leqslant \alpha + \beta$.

ვთქვათ, ეს დებულება უკვე დამტკიცებულია ყოველი $\beta < \gamma$-სათვის და ვთქვათ, $f(x) \in H_\gamma$.

მაშინ

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

სადაც $f_n(x)$-ის კლასი არის H_{γ_n}, $\gamma_n < \gamma$. მაშასადამე,

$$f[\varphi(t)] = \lim_{n \to \infty} f_n[\varphi(t)]$$

და $f_n[\varphi(t)]$ ფუნქციის კლასი არ არის $\alpha + \gamma_n$-ზე მაღალი, ე. ი. უფრო დაბალია[1], ვიდრე $\alpha + \gamma$. აქედან $f[\varphi(t)]$ ფუნქციის კლასი არ არის $\alpha + \gamma$-ზე მაღალი. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის ძალით თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ ყველა მოყვანილი განმარტებანი და თეორემები სიტყვასიტყვით გადაიტანებიან ისეთი მრავალი ცვლადის ფუნქციების შემთხვევაზე, რომლებიც მოცემული არიან რაიმე პარალელეპიპედზე.

მაგალითად, მე-5 თეორემა, მიიღებს სახეს:

თეორემა 5*. ვთქვათ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \beta$, რომელიც მოცემულია $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ პარალელეპიპედში, ხოლო $\varphi_1(t_1, \ldots, t_m)$, $\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots$ $\varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ არიან $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots, H_{\alpha_n}$ კლასების n ფუნქციათა ისეთი სისტემა,

[1]. ჩვენ ვსარგებლობთ აშკარა ფაქტით, რომ $\sigma < \gamma$-სათვის გვექნება $\alpha + \sigma < \alpha + \gamma$ (შესაკრებთა მიმდევრობა არსებითია!).

რომ $a_k \leqslant \varphi_k(t_1,\ldots,t_m) \leqslant b_k$. მაშინ რთული ფუნქცია $f(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$ შედის კლასში ნომრით $\leqslant \alpha+\beta$, სადაც α არის უდიდესი რიცხვი $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ს შორის.

§ 2. ბერის კლასების არასიცარიელობა

ისმება ბუნებრივი საკითხი იმის შესახებ, არსებობს თუ არა ყოველი $\alpha < \Omega$-სათვის H_α კლასში შემავალი ფუნქციები. ჩვენ ვაჩვენებთ, ა. ლებეგის მიხედვით, რომ ეს მართლაც ასეა. ამისათვის ჩვენ დაგვჭირდება თავისთავადაც მნიშვნელოვანი ცნებები რიცხვთა მიმდევრობის უდიდესი და უმცირესი ზღვრების შესახებ.

ვთქვათ,

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots \tag{1}$$

რიცხვთა მიმდევრობაა. დავუშვათ[1]

$$\overline{x}_n = \sup\{x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ldots\}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \overline{x}_3 \geqslant \cdots,$$

და ამიტომ არსებობს (სასრული ან უსასრულო) ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n.$$

ამ ზღვარს ეწოდება (1) მიმდევრობის უდიდესი ზღვარი და აღინიშნება ასე:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

ანალოგიურად, ზღვარს

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n,$$

სადაც $\underline{x} = \inf\{x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ldots\}$, ეწოდება (1) მიმდევრობის უმცირესი ზღვარი და აღინიშნება

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\text{-ით.}$$

აშკარა

$$\overline{x}_n \leqslant \overline{x}_n$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

---

[1]. შესაძლოა, რომ $\overline{x}_n = +\infty$ და აგრეთვე $\overline{x}_n = -\infty$ (უკანასკნელი დამოკიდებულება იმის მომასწავებელი იქნებოდა, რომ $x_n = x_{n+1} = \ldots = -\infty$, რასაც ჩვენ არ გამოვრიცხავთ).

თეორემა 1. თუ

$$b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

მაშინ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია b-საკენ.

დამტკიცება. თუ $b = -\infty$, თეორემა ტრივიალურია, რადგან მაშინ, როგორც ეს ჩანს $x_n \leqslant \overline{x}_n$ უტოლობიდან, თვით $\{x_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის $-\infty$-საკენ. ვთქვათ, $-\infty < b < +\infty$. მაშინ ყოველი k-სათვის $\overline{x}_n$ რიცხვები აგრეთვე სასრული იქნებიან. შევუსაბამოთ ყოველ k-ს ისეთი m_k, რომ

$$\overline{x}_k - \frac{1}{k} < x_{m_k} \leqslant \overline{x}_k \qquad (m_k \geqslant k).$$

აშკარაა, რომ

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = b.$$

გვსურს რა მივიღოთ ისეთი $\{x_{n_i}\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია b-საკენ, და რომლისათვისაც $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, დავუშვათ $n_1 = m_1$, ხოლო შემდეგ n_2-ით აღვნიშნოთ უმცირესი იმ m_k რიცხვებს შორის, რომლებიც აღემატებიან n_1-ს; n_3-ით აღვნიშნოთ უმცირესი იმ m_k-თა შორის, რომლებიც აღემატებიან n_2 და ა. შ. რამდენადაც $\{x_{n_i}\}$ იქნება ქვემიმდევრობა $\{x_{m_k}\}$-სი, ისიც კრებადია b-საკენ.

დაგვრჩა იმ შემთხვევის განხილვა, როცა $b = +\infty$. ამ შემთხვევაში ყოველი k-სათვის გვექნება $\overline{x}_k = +\infty$, ე. ი. ყველა $\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ სიმრავლეები არაშემოსაზღვრული არიან ზევიდან. ავიღოთ $n_1 = 1$ და ვთქვათ, რომ n_{i+1} შეირჩევა იმ პირობით, რომ

$$x_{n_{i+1}} > x_{n_i} + 1, \qquad n_{i+1} > n_i.$$

ეს პირდაპირ მიგვიყვანს საძიებელ მიმდევრობამდე. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $b^* > b$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\overline{x}_{n_0}$, რომ $\overline{x}_{n_0} < b^*$. $n \geqslant n_0$-სათვის აღმოჩნდება

$$x_n \leqslant \overline{x}_{n_0} < b^*,$$

და b^* რიცხვი არ შეიძლება წარმოადგენდეს $\{x_n\}$-დან გამოყოფილი არავითარი ქვემიმდევრობის ზღვარს. ამგვარად, რიცხვითი მიმდევრობის უდიდესი ზღვარი შეიძლება განვმარტოთ როგორც ისეთი რიცხვი, რომელიც უდიდესია მიმდევრობიდან გამოყოფილი ყველა კრებადი ქვემიმდევრობათა ზღვრებს შორის. ანალოგიური შენიშვნა შეიძლება გაკეთდეს უმცირესი ზღვრის შესახებ.

თეორემა 2. თუ (1) მიმდევრობას აქვს (სასრული ან უსასრულო) ზღვარი l, მაშინ

$$\varliminf x_n = \varlimsup x_n = l.$$

პირიქით, თუ (1) მიმდევრობის უდიდესი და უმცირესი ზღვრები ტოლია, მაშინ მათი საერთო სიდიდე წარმოადგენს მიმდევრობის ზღვარს.

დამტკიცება. თუ (1) მიმდევრობას აქვს l ზღვარი, მაშინ ყოველი მისი ქვემიმდევრობა კრებადია იმავე ზღვრისაკენ, საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის პირველი ნაწილი.

მეორე ნაწილი არის აშკარა

$$\overline{x_n} \leqslant x_n \leqslant \overline{x_n}$$

უტოლობის უშუალო შედეგი.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა. ვთქვათ, $a, b, \ldots, l$ არის რიცხვთა სასრული სისტემა. უდიდესს მათ შორის აღვნიშნავთ ასე

$$\max\{a, b, \ldots, l\}.$$

ლემა 1. თუ

$$x_n \to a,\ y_n \to b, \ldots, z_n \to l$$

მაშინ

$$\max\{x_n, y_n, \ldots, z_n\} \to \max\{a, b, \ldots, l\}.$$

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

შედეგები. 1) თუ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ფუნქციები უწყვეტი არიან, მაშინ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \tag{2}$$

უწყვეტია.

2) თუ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ფუნქციები შედიან კლასებში ნომრებით $\leqslant \alpha$, მაშინ (2) ფუნქციაც არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$.

პირველი შედეგი აშკარაა, ხოლო მეორე მტკიცდება ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდით.

ლემა 2. ვთქვათ, $\{x_n\}$ რიცხვთა მიმდევრობაა. თუ

$$l = \sup\{x_n\},\ y_n = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

მაშინ

$$l = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 3. ვთქვათ,

$$f(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x).$$

თუ ყოველი $f_n(x)$ არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha$, მაშინ $f(x)$ არის ფუნქცია კლასისა $\leqslant \alpha + 2$.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\overline{f}_{n,p}(x) = \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+p}(x)\}.$$

ეს ფუნქცია შედის კლასში ნომრით $\leqslant \alpha$.

მაგრამ მაშინ ფუნქცია

$$f_n(x) = \sup\{f_n(x),\ f_{n+1}(x),\ f_{n+2}(x), \cdots\} = \lim_{p\to\infty} \overline{f}_{n,p}(x)$$

შედის კლასში ნომრით $\leqslant \alpha + 1$ და ბოლოს ფუნქცია

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(x)$$

შედის კლასში ნომრით $\leqslant \alpha + 2$.

აღვნიშნოთ ამ თეორემის ერთი შედეგი, რომელიც რამდენადმე განცალკევებულად დგას გადმოსაცემი თეორიიდან, მაგრამ არ არის მოკლებული ინტერესს.

ვიტალის თეორემა: ყოველი $[a\ b]$-ზე მოცემული ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული $f(x)$ ფუნქცია ეკვივალენტურია რაღაც $g(x)$ ფუნქციისა, რომელიც ისა. არა უმაღლესია ბერის მეორე კლასისა.

მართლაც, ფრეშეს თეორემის ძალით, არსებობს უწყვეტ ფუნქციათა $\{\varphi_n(x)\}$ მიმდევრობა, რომლისათვისაც თითქმის ყველგან $[a, b]$-ზე გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

დავუშვებთ რა

$$g(x) = \overline{\lim}\, \varphi_n(x),$$

მივიღებთ სასურველ ფუნქციას.

დავუბრუნდეთ თემას.

ლემა 3. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის არსებობს ისეთი $P(x)$ პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით, რომ ყოველი x-სათვის $[a,b]$-დან გვექნება

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

მართლაც, ვეიერშტრასის თეორემის ძალით, $f(x)$ შეიძლება იქნას აპროქსიმირებული $\frac{\varepsilon}{2}$-ს სიზუსტით რაღაც $Q(x)$ პოლინომის საშუალებით. მისი კოეფიციენტების შეცვლით საკმარისად ახლო რაციონალური რიცხვებით მივიღებთ საჭირო $P(x)$ პოლინომს.

შედეგი. 1-ლი კლასის ყოველი $f(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

სახით, სადაც $P_n(x)$ — პოლინომია რაციონალური კოეფიციენტებით.

ლემა 4. თუ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ და სასრულ $\psi(x)$ ფუნქციას აქვს წყვეტის წერტილთა სასრული რიცხვი, მაშინ ეს ფუნქცია ბერის პირველ კლასს ეკუთვნის.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\psi(x)$-ის წყვეტის წერტილებია

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_m \qquad (a < c_k < b).$$

მოვათავსოთ თითოეული c_k წერტილი $\left(c_k - \frac{1}{n},\ c_k + \frac{1}{n}\right)$ ინტერვალში, და n ავიღოთ იმდენად დიდი, რომ ეს ინტერვალები არ იკვეთებოდენ და მოთავსებული იყვნენ $[a,b]$-ში. $f_n(x)$ ფუნქცია, რომელიც ტოლია $\psi(x)$-სა ყველა $\left(c_k - \frac{1}{n},\ c_k + \frac{1}{n}\right)$ ინტერვალის გარეთ და c_k წერტილებში, და რომელიც წრფივია $\left[c_k - \frac{1}{n},\ c_k\right]$, $\left[c_k,\ c_k + \frac{1}{n}\right]$ სეგმენტებზე, აშკარაა, რომ უწყვეტია. ამასთან ერთად, $n \to \infty$-სათვის გვექნება

$$f_n(x) \to \psi(x).$$

არაარსებით ცვლილებებს დამტკიცებაში, როცა a ან b აგრეთვე წარმოადგენენ წყვეტის წერტილებს, ვანდობთ მკითხველს.

შედეგი. ისეთი $\Theta(x)$ ფუნქცია, რომელიც უდრის ერთს $[a,b]$-ს ერთ წერტილზე და უდრის ნულს სხვაგან, პირველი კლასის ფუნქციაა.

ლემა 5. თუ $[0,1]$-ს ყოველი x რიცხვი დაშლილია ათწილადად (და ეს დაშლა არ შეიცავს 9-ს პერიოდში 1-ზე ნაკლები რიცხვებისათვის),

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

მაშინ $a_k = a_k(x)$ პირველი კლასის ფუნქციაა.

მართლაც, ყოველ $a_k(x)$, წარმოადგენს რა მუდმივს თითოეულ $\left(\frac{n}{10^k},\ \frac{n+1}{10^k}\right)$ ინტერვალში, წყვეტის წერტილთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა აქვს.

ამ, რამდენადმე სხვადასხვაგვარი, მასალის გადმოცემის შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია გადავიდეთ ძირითად თეორემაზე ყოველ H_α $(\alpha < \Omega)$ კლასში ფუნქციის არსებობის შესახებ. ამისათვის უმნიშვნელოდ შევცვლით ბერის კლასიფიკაციას, სახელდობრ, ნულოვან კლასად H_0^* ჩავთვლით ყველა რაციონალური კოეფიციენტებიანი პოლინომების სიმრავლეს. მაშინ 1-ლი H_1^* კლასი შეიცავს ყველა დანარჩენ უწყვეტ ფუნქციებს და 1-ლ H_1 კლასში შემავალ ფუნქციებს, ხოლო ყველა დანარჩენი კლასები უცვლელი იქნებიან. არსებითად რომ ვთქვათ, ჩვენ უბრალოდ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლის ნაწილი გადავიტანეთ ნულოვანი კლასიდან პირველში. ასეთი შეცვლილი კლასიფიკაციისათვის სამართლიანია

თეორემა 4 (ა. ლებეგი). ყოველი $\alpha > 0$-სათვის რიცხვითი პირველი ან მეორე კლასიდან არსებობს ისეთი ორი ცვლადის

$$F_\alpha(x,t) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

ფუნქცია, რომ 1) $F_\alpha(x,t)$ ბერის ფუნქციაა; 2) ყოველი ბერის $f(x)$ ფუნქცია კლასიდან $<\alpha$, მიიღება $F_\alpha(x,t)$-დან რაღაც t-ს დაფიქსირებით, ე. ი.

$$f(x)=F_\alpha(x,t_0) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

ასეთ $F_\alpha(x,t)$ ფუნქციას ეწოდება **უნივერსალური** ფუნქცია ბერის ფუნქციათა იმ სიმრავლისათვის, რომლებიც მოთავსებულია კლასებში $<\alpha$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Theta_n(t)$ ფუნქცია ტოლია 1-სა, როცა $t=\frac{1}{n}$ და ნულსა ყველა დანარჩენი t-სათვის [0,1]-დან. გადავნომროთ ყველა პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\dots$$

და დავუშვათ

$$F_1(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\Theta_n(t).$$

ეს არის ბერის ფუნქცია. მართლაც, ყოველი მამრავლი $P_n(x)$ და $\Theta_n(t)$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია და ეს ფუნქცია არის ბერის ფუნქცია. მაგრამ მაშინ

$$P_n(x)\Theta_n(t)\text{-ც}$$

(სასრული) ბერის ფუნქციაა, და მასთან ბერის ფუნქციებს წარმოადგენენ მწკრივის ყველა კერძო ჯამები. რადგანაც მწკრივის ყველა წევრი, გარდა, შესაძლებელია ერთისა, ტოლია ნულის, ამიტომ მწკრივი კრებადია $0\leqslant x$, $t\leqslant 1$ კვადრატის ყოველ (x,t) წერტილზე და მისი ჯამი არის ბერის ფუნქცია.

როგორი $f(x)$ ფუნქციაც არ უნდა ავიღოთ H_0^* კლასიდან, იგი წარმოიდგინება

$$f(x)=F_1(x,t_0)$$

სახით. მართლაც, თუ $f(x)$ არის $P_k(x)$ პოლინომი, მაშინ

$$F_1\left(x,\ \frac{1}{k}\right)=P_k(x)=f(x).$$

ამგვარად, ჩვენი თეორემა დადგენილია $\alpha=1$-სათვის. დავუშვათ ახლა, რომ $F_\beta(x,t)$ ფუნქციები აგებული არიან ყველა $\beta<\alpha$-სათვის, და ავაგოთ $F_\alpha(x,t)$.

1) α — პირველი გვარის რიცხვია. მაშინ $\alpha=\beta+1$, და $F_\beta(x,t)$ ფუნქცია არსებობს. განვსაზღვროთ t-ს $(0\leqslant t\leqslant 1)$ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა: დავშალოთ t ათწილადად (გარეშე 9-სა პერიოდში, $t<1$-სათვის)

$$t=0, a_1\,a_2\,a_3\dots$$

და დავუშვათ

$$h_1(t)=0, a_1\,a_3\,a_5\dots$$
$$h_2(t)=0, a_2\,a_6\,a_{10}\dots$$
$$h_3(t)=0, a_4\,a_{12}\,a_{20}\dots$$

$$\cdot\ \cdot$$

რადგანაც $h_n(t)$ არის ისეთი თანაბრად კრებადი

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2^{n-1}(2k-1)}(t)}{10^k}$$

მწკრივის ჯამი, რომლის წევრებიც არიან 1-ლი კლასის ფუნქციები, ამიტომ $h_n(t)$ არის 1-ლი კლასის ფუნქცია.

ვთქვათ,

$$F_\alpha(x,t) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, F_\beta[x, h_n(t)].$$

ცხადია, რომ $F_\alpha(x,t)$ არის ბერის ფუნქცია; ვაჩვენოთ, რომ იგი უნივერსალური ფუნქციაა α-ზე ნაკლები კლასის ფუნქციათა სიმრავლისათვის.

მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქციაა კლასიდან $< \alpha$, მაშინ

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

სადაც ყოველი $f_k(x)$ ფუნქცია შედის კლასში $< \beta$ და, მაშასადამე, წარმოიდგინება

$$f_k(x) = F_\beta(x,t) \qquad (0 \leqslant t_k \leqslant 1)$$

სახით.

ადვილი მოსაძებნია [0,1]-დან ისეთი t^*, რომ ყოველი k-სათვის გვქონდეს

$$h_k(t^*) = t_k \qquad (k = 1,2,3,\ldots).$$

მაგრამ მაშინ

$$F_\alpha(x,t^*) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, F_\beta(x,t_k) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, f_k(x) = f(x),$$

და, მაშასადამე, $F_\alpha(x,t)$ აკმაყოფილებს თეორემის ყველა პირობას.

2) ვთქვათ ახლა, რომ α მეორე გვარის რიცხვია. მაშინ არსებობს ისეთი

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots$$

მიმდევრობა, რომ α წარმოადგენს უმცირეს რიცხვს ჩვენი მიმდევრობის ყველა რიცხვის მომდევნოთა შორის.

დავუშვათ

$$F_\alpha(x,t) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, F_{\beta_k}[x, h_k(t)],$$

სადაც $h_k(t)$ იგივე ფუნქციებია, რაც ზემოთ. $F_\alpha(x,t)$ არის ბერის ფუნქცია.

ვთქვათ, $f(x)$ არის ფუნქცია კლასისა $< \alpha$. მაშინ $f(x)$ შედის H_γ კლასში, სადაც $\gamma < \alpha$. $k > k_0$-სათვის აღმოჩნდება $\beta_k > \gamma$ და მაშასადამე, $f(x)$ წარმოიდგინება

$$f(x) = F_{\beta_k}(x,t) \qquad (k > k_0)$$

სახით.

თუ ახლა [0,1]-ში ავიღებთ ისეთ t^*-ს, რომ

$$h_k(t^*) = t_k \qquad (k > k_0)$$

ქეს, აშკარაა, ადვილი გასაკეთებელია, ამასთან $h_1(t^*),\ldots,h_{k_0}(t^*)$ შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერად), გვექნება

$$F_\alpha(x,t^*)=\overline{\lim}\, F_{\beta_k}(x,t_k)=\overline{\lim}\, f(x)=f(x),$$

საიდანაც ცხადია, რომ $F_\alpha(x,t)$ საძიებელი ფუნქციაა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. არცერთი H_α კლასი ცარიელი არ არის.

დამტკიცება. ვთქვათ, რომელიმე H_α კლასი ცარიელია. მაშინ ყველა შემდეგი კლასები აგრეთვე ცარიელია, და ბერის ყველა ფუნქცია ეკუთვნის კლასებს ნომრით $<\alpha$.

ავაგოთ $F_\alpha(x,t)$ ფუნქცია, რომელზედაც ლაპარაკი იყო წინა თეორემაში.

თუ ჩვენ დავუშვებთ

$$\Phi(x,t)=[F_\alpha(x,t)]_0^1,$$

მაშინ ბერის ყოველი ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობებიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის, წარმოიდგინება

$$f(x)=\Phi(x,t_0)$$

სახით, რაღაც ფიქსირებული t_0-სათვის. შევნიშნეთ რა ეს, ვთქვათ,

$$\varphi(x,t)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,\Phi(x,t)}{1+n\,\Phi(x,t)}.$$

ეს ფუნქცია მხოლოდ ორ მნიშვნელობას იღებს: 0 და 1-ს. იგი ბერის ფუნქციაა და ყოველი ბერის ფუნქცია, რომელიც იღებს 0-სა და 1-ს მნიშვნელობებს, წარმოიდგინება

$$\varphi(x,t_0)$$

სახით. კერძოდ, ასეთი სახით წარმოიდგინება $1-\varphi(x,x)$ ფუნქციაც; მაგრამ ამას პირდაპირ მივყევართ უაზრობამდე, რადგანაც ტოლობა

$$1-\varphi(x,x)=\varphi(x,t_0)$$

$x=t_0$-სათვის გვაძლევს

$$\varphi(t_0,t_0)=\frac{1}{2}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ვუბრუნდებით რა მე-4 თეორემას, ვახსენოთ ლ. კანტოროვიჩის საინტერესო შრომა[1], რომელშიაც, სხვათა შორის, დადგენილია ასეთი შედეგი: ბერის α-ზე ნაკლები კლასების ბერის ფუნქციათა სიმრავლისათვისაც არსებობს ისეთი უნივერსალური $F_\alpha(x,t)$ ფუნქცია, რომელიც თითონ, როგორც ბერის ფუნქცია, შედის H_α კლასში, მაგრამ იმ ფუნქციათა სიმრავლისათვის, რომელთა კლასები $\leqslant\alpha$, ასეთი უნივერსალური ფუნქცია არ არსებობს.

[1]. Л. В. Канторович. Об универсальных функциях. Журн. Ленингр. ФМО, т. II, в. 2, 1929.

§ 3. 1-ლი კლასის ფუნქციები

ამ პარაგრაფში ჩვენ სპეციალურად შევჩერდებით 1-ლი კლასის ფუნქციათა ზოგიერთ თვისებაზე.

ლემა 1. 1) *ჩაკეტილი სიმრავლე არის G_δ ტიპის სიმრავლე;* 2) *ღია სიმრავლე არის F_σ ტიპის სიმრავლე;* 3) *ორი ჩაკეტილი სიმრავლის სხვაობა F_σ ტიპის სიმრავლეა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, F ჩაკეტილი სიმრავლეა, აღვნიშნოთ x წერტილის მანძილი F-იდან $\rho(x,F)$-ით და დავუშვათ

$$G_n = Z\left(\rho(x,F) < \frac{1}{n}\right).$$

ჩვენ ვნახეთ (თავი II, § 4, ლემა 1), რომ G_n ღია სიმრავლეა. მაგრამ ადვილი სანახავია, რომ

$$F=\prod_{n=1}^{\infty} G_n,$$

და F არის G_δ ტიპის სიმრავლე.

გადავდივართ რა 2)-ის დამტკიცებაზე, განვიხილოთ რაიმე ღია G სიმრავლე. თუ მისი დამატება არის CG, მაშინ CG ჩაკეტილია და დამტკიცებულის მიხედვით

$$CG=\prod_{n=1}^{\infty} G_n,$$

სადაც G_n ღია სიმრავლეებია. აქედან

$$G=\sum_{n=1}^{\infty} CG_n,$$

სადაც CG_n არის G_n-ის ჩაკეტილი დამატება. მაშასადამე, G არის F_σ ტიპისა.

ვთქვათ, ბოლოს, F_1 და F_2 ჩაკეტილი სიმრავლეებია. მაშინ $F_1 - F_2$ წარმოიდგინება

$$F_1 - F_2 = F_1 \cdot CF_2$$

სახით, და, წარმოადგენს რა ჩაკეტილი სიმრავლისა და F_σ ტიპის სიმრავლის თანაკვეთას, თითონ არის F_σ ტიპისა.

ლემა 2. *თუ რაიმე M სიმრავლისათვის გვაქვს*

$$M = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

წარმოდგენა, სადაც A_k არის F_σ ტიპის სიმრავლეები, მაშინ არსებობს მეორე წარმოდგენა

$$M = B_1 + B_2 + \dots + B_n,$$

რომელშიაც B_k აგრეთვე F_σ ტიპის სიმრავლეებია, $B_k \subset A_k$ $(k = 1,2,\dots,n)$ და, გარდა ამისა, B_k სიმრავლეები წყვილწყვილად არ გადაიკვეთებიან.

დამტკიცება. ცხადია, რომ თვით M არის F_σ ტიპის სიმრავლე. მაშასადამე,

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} F_k,$$

სადაც F_k ჩაკეტილი სიმრავლეებია, ამასთან თითოეული F_k მთლიანად შედის რომელიმე A_i სიმრავლეში. დავუშვათ

$$S_1 = F_1, \ S_k = F_k - (F_1 + \ldots + F_{k-1}).$$

S_k სიმრავლეები F_σ სიმრავლეები არიან, ისინი წყვილწყვილად არ იკვეთებიან და

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} S_k.$$

გავყოთ $T = \{S_k\}$ სიმრავლე n ნაწილად $T_1, T_2, \ldots, T_n$, მივაკუთვნებთ რა T_1-ს იმ S_k სიმრავლეებს, რომლებიც შედიან A_1-ში, T_2-ს ისეთ $S_k \in T - T_1$, რომლებიც შედიან A_2-ში და ა. შ. თუ დავუშვებთ

$$B_i = \sum_{S_k \in T_i} S_k,$$

მივიღებთ M სიმრავლის საძიებელ დაშლას.

ლემა 3. ვთქვათ, $E = [a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც იღებს სასრულ რიცხვს სასრულ

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n$$

მნიშვნელობათა. თუ ყოველ $E(f = c_k)$ სიმრავლე F_σ ტიპის სიმრავლეა, მაშინ $f(x)$ არის ფუნქცია არა უმაღლეს პირველი კლასისა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E(f = c_k) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^{(k)},$$

სადაც $F_i^{(k)}$ ჩაკეტილი სიმრავლეებია. დავუშვათ

$$\Phi_m^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} F_i^{(k)}, \ \Phi_m = \sum_{k=1}^{n} \Phi_m^{(k)}$$

და შემოვიღოთ $\varphi_m(x)$ ფუნქციები ასე:

$$\varphi_m(x) = c_k \qquad (x \in \Phi_m^{(k)}, \ k = 1, 2, \ldots, n).$$

$\varphi_m(x)$ ფუნქცია მოცემულია ჩაკეტილ Φ_m სიმრავლეზე და, IV თავის § 4-ის 1-ლი ლემის ძალით, უწყვეტი ფუნქციაა. იმავე პარაგრაფის მე-2 ლე-

მის გამოყენებით, შეიძლება ავაგოთ $[a,b]$-ზე ისეთი უწყვეტი $\psi_m(x)$ ფუნქცია, რომელიც Φ_m სიმრავლეზე დაემთხვევა $\varphi_m(x)$-ს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $[a,b]$-ს ყოველ წერტილზე გვექნება

$$\lim_{m\to\infty} \psi_m(x) = f(x),$$

საიდანაც გამომდინარეობს ლემა.

თეორემა 1 (ა. ლებეგი). იმისათვის რომ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული $f(x)$ ფუნქცია იყოს ფუნქცია არა უმაღლეს 1-ლი კლასისა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$E(f > A),\ E(f < A)$$

სიმრავლეები ნებისმიერი A-სათვის F_σ ტიპისა იყვნენ.

დამტკიცება. თუ $f(x)$ არის ფუნქცია არა უმაღლეს 1-ლი კლასისა, მაშინ

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

სადაც $f_n(x)$ უწყვეტი არიან. დავუშვათ

$$F_n^{(k)} = E\left(f_n \leq A - \frac{1}{k}\right),\quad S_m^{(k)} = \prod_{n=m}^{\infty} F_n^{(k)}.$$

IV თავის § 1-ს მე-8 თეორემის დამტკიცების დროს დადგენილი იყო, რომ, თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ სიმრავლე $E(f \leq A)$ ჩაკეტილია. მაშასადამე, $F_n^{(k)}$ და მათთან $S_m^{(k)}$ სიმრავლენი ჩაკეტილი არიან. შევნიშნავთ რა, რომ

$$E(f < A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S_m^{(k)},$$

ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ $E(f < A)$ არის F_σ ტიპის სიმრავლე. $E(f > A)$-სათვის მსჯელობა ანალოგიურია.

გადავედივართ რა თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე, ვიგულისხმოთ ჯერ, რომ $f(x)$ შემოსაზღვრული ფუნციაა

$$l < f(x) < L.$$

დავყოთ $[l, L]$ სეგმენტი

$$c_0 = l < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = L \qquad \left(c_{k+1} - c_k = \frac{L-l}{n} \right)$$

წერტილებით n თანასწორ ნაწილად და დავუშვათ

$$A_k = E(c_{k-1} < f < c_{k+1}) \qquad (k = 1,2,\ldots,n-1)$$

$$A_0 = E(f < c_1),\quad A_n = E(f > c_{n-1}).$$

ყოველი ამ სიმრავლეთაგანი არის F_σ სიმრავლე და

$$E = A_0 + A_1 + \cdots + A_n.$$

მე-2 ლემის საფუძველზე არსებობს მეორე დაშლა

$$E = B_0 + B_1 + \cdots + B_n,$$

რომელშიაც B_k სიმრავლეები, არიან რა აგრეთვე F_σ სიმრავლეები, წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან და $B_k \subset A_k$.

შემოვიღოთ $f_n(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f_n(x) = c_k, \text{ როცა } x \in B_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

მე-3 ლემის ძალით, $f_n(x)$ ფუნქციები არ არიან 1-ლი კლასის მაღლა. ავირჩიოთ ნებისმიერი $x_0 \in E$. მაშინ

$$x_0 \in B_k \subset A_k.$$

მაშასადამე,

$$f_n(x_0) = c_k, \qquad c_{k-1} < f(x_0) < c_{k+1}.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{L - l}{n}.$$

ამგვარად, $n \to \infty$-სათვის $f_n(x)$ ფუნქციები თანაბრად მიისწრაფვიან $f(x)$ ფუნქციისაკენ და, მაშასადამე, უკანასკნელი არის ფუნქცია არა უმაღლეს 1-ლი კლასისა.

გადავდივართ რა ზოგად შემთხვევაზე, ვთქვათ,

$$g(x) = \operatorname{arc} tg f(x).$$

ეს ფუნქცია უკვე შემოსაზღვრულია. მაგრამ $-\frac{\pi}{2} \leqslant A < \frac{\pi}{2}$-სათვის

$$E(g > A) = E(f > tg A),$$

თუ კი $A \geqslant \frac{\pi}{2}$, მაშინ $E(g < A)$ სიმრავლე ცარიელია. დაბოლოს, თუ $A < -\frac{\pi}{2}$, მაშინ $E(g > A) = [a, b]$. ამგვარად, $E(g > A)$ სიმრავლე ყოველი A-სათვის F_σ ტიპის სიმრავლეა. იგივე სამართლიანია $E(g < A)$-თვისაც. მაშასადამე, $g(x)$ არის ფუნქცია არა უმაღლეს 1-ლი კლასისა, და ამიტომ

$$f(x) = tg[g(x)]$$

აგრეთვე არის ფუნქცია არა უმაღლეს 1-ლი კლასისა [1].

---

[1]. $g(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$$

სახით, სადაც $g_n(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}.$$

რ. ბერმა იპოვა 1-ლი კლასის ფუნქციათა, სხვა, მეტად საინტერესო დამახასიათებელი თვისება. მისი თეორემის გადმოსაცემათ ჩვენ დაგვჭირდება ზოგიერთი ახალი ცნებები და ფაქტები.

განმარტებანი. ვთქვათ, A და B ორი წერტილოვანი სიმრავლეა, ამასთან $A \subset B$. 1) თუ B სიმრავლის თუნდაც ერთი წერტილის შემცველი ყოველი ინტერვალი შეიცავს B-ს ისეთ წერტილებს, რომლებიც არ შედიან A სიმრავლის A ჩაკეტვაში, მაშინ ამბობენ, რომ A არსად მკვრივია B სიმრავლეზე. 2) თუ A წარმოიდგინება ისეთ სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლის ჯამის სახით, რომელთაგან ყოველი არსად მკვრივია B სიმრავლეზე, მაშინ ამბობენ, რომ A პირველი კატეგორიის სიმრავლეა B სიმრავლეზე.

თეორემა ჲ. ჩაკეტილი F სიმრავლე არ არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე თავისთავზე.

დამტკიცებაა. დავუშვათ, პირიქით, რომ F შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$F = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$

სახით, სადაც ყოველი A_k სიმრავლე არსად მკვრივია F სიმრავლეზე. მაშინ არსებობს ისეთი $x_1 \in F$ წერტილი, რომელიც არ წარმოადგენს A_1 სიმრავლის $\overline{A}$ ჩაკეტვის წერტილს. ამიტომ მოიძებნება ისეთი $[x_1 - \delta_1,\ x_1 + \delta_1]$ სეგმენტი, რომელიც არ შეიცავს A_1-ს არც ერთ წერტილს, ამასთან შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\delta_1 < 1$.

$(x_1 - \delta_1,\ x_1 + \delta_1)$ ინტერვალში არსებობს ისეთი $x_2 \in F$ წერტილი, რომელიც არ შედის $\overline{A}_2$ სიმრავლეში. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი $[x_1 - \delta_2,\ x_2 + \delta_2]$ სეგმენტი, რომელიც არ შეიცავს A_2-ის არც ერთ წერტილს. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\delta_2 < \frac{1}{2}$ და რომ $[x_2 - \delta_2,\ x_2 + \delta_2] \subset [x_1 - \delta_1,\ x_1 + \delta_2]$.

ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ ავაგებთ F-ში შემავალი წერტილების

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$$

მიმდევრობას და ისეთ ჩადებული სეგმენტების

$$[x_1 - \delta_1,\ x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2,\ x_2 + \delta_2] \supset \ldots \supset [x_n - \delta_n,\ x_n + \delta_n] \supset \ldots$$

მიმდევრობას, რომ $[x_n - \delta_n,\ x_n + \delta_n]$ სეგმენტი არ შეიცავს A_n სიმრავლის არც ერთ წერტილს და $\delta_n < \frac{1}{n}$.

ვთქვათ, x_0 არის $[x_n - \delta_n,\ x_n + \delta_n]$ სეგმენტების საერთო წერტილი.

აშკარაა, რომ

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n,$$

მაშინ

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} tg\,[g_n(x)],$$

ამასთან $tg\,[g_n(x)]$ უწყვეტი ფუნქციაა.

და ამიტომ $x_0 \in F$. ამასთან ერთად, x_0 არ შეიძლება შედიოდეს არცერთ A_n სიმრავლეში. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

შედეგი. თუ არაცარიელი ჩაკეტილი F სიმრავლე არის ჩაკეტილი სიმრავლეების თვლადი სიმრავლის ჯამი

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots,$$

მაშინ არსებობს (λ,μ) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს F სიმრავლის წერტილებს და ისეთი n, რომ

$$(\lambda,\mu)\, F \subset F_n.$$

მართლაც, ერთი მაინც შესაკრები სიმრავლე, ვთქვათ ეს იყოს F_n, არ იქნება არსად მკვრივი F სიმრავლეზე. მაგრამ ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ იმ ინტერვალთა შორის, რომლებიც შეიცავენ F-ის წერტილებს, მოიძებნება ისეთი (λ,μ) ინტერვალი, რომ მასში შემავალი F სიმრავლის ყველა წერტილი შევა F_n-ში, რადგან ეს უკანასკნელი, არის რა ჩაკეტილი, ემთხვევა თავის ჩაკეტვას.

ვთქვათ, რაიმე A სიმრავლეზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია და ვთქვათ, B არის A-ს ქვესიმრავლე. განვიხილოთ $f(x|B)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მხოლოდ B სიმრავლის წერტილებზე და ემთხვევა აქ $f(x)$-ს. ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x|B)$ ფუნქცია ინდუცირებულია B სიმრავლეში $f(x)$ ფუნქციით. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია A სიმრავლეზე, მაშინ ინდუცირებული $f(x|B)$ ფუნქცია უწყვეტია B სიმრავლეზე.

თეორემა 3 (რ. ბერი). ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია 1-ლი კლასის სასრული $f(x)$ ფუნქცია. როგორიც არ უნდა იყოს ჩაკეტილი $F \neq 0$ სიმრავლე, შემავალი $[a,b]$-ში, მასზე მოიძებნება ინდუცირებული $f(x|F)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილები.

დამტკიცება. თუ F-ს აქვს თუნდაც ერთი იზოლირებული წერტილი, მაშინ ეს უკანასკნელი სწორედ იქნება საძიებელი უწყვეტობის წერტილი. დავტოვებთ რა გვერდზე ამ ტრივიალურ შემთხვევას, ვიგულისხმებთ, რომ F სრულყოფილი სიმრავლეა.

ვთქვათ, D არის რაიმე $[a,b]$-ში შემავალი ისეთი სეგმენტი, რომლის შიგნითაც არსებობს ერთი მაინც წერტილი (და მაშასადამე, უსასრულო სიმრავლე) F სიმრავლისა.

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს ისეთი, D-ს შიგნით[1] მოთავსებული, d სეგმენტი, რომელიც შეიცავს თავის შიგნით F სიმრავლის წერტილებს, და ისეთი, რომ $f(x)$ ფუნქციის რხევა Fd სიმრავლეზე ნაკლები იქნება წინასწარ მოცემულ რიცხვზე.

ამისათვის დავრწმუნდეთ ჯერ ისეთი $E \subset D$ სეგმენტის არსებობაში, რომლისათვისაც EF არის (არაცარიელი) სრულყოფილი სიმრავლე. ვთქვათ, D-ს ბოლოები არიან A და B, ასე რომ $D = [A, B]$. უსასრულო DE სიმ-

[1] ჩვენ ვიტყვით, რომ $[\lambda,\mu]$ სეგმენტი მოთავსებულია $[\tau,\sigma]$ სეგმენტის შიგნით, თუ $\sigma < \lambda < \mu < \tau$.

რავლე ჩაკეტილია და არც ერთი მისი წერტილი, გარდა A და B წერტილებისა, არ შეიძლება იზოლირებული გამოდგეს. დავუშვათ, რომ A არის DF სიმრავლის იზოლირებული წერტილი. მაშინ სიმრავლე $DF-\{A\}$, რომელიც მიიღება DF სიმრავლიდან A წერტილის ჩამოშორებით, ჩაკეტილია. ვთქვათ, ამ სიმრავლის ყველაზე უფრო მარცხენა წერტილი არის A_1; დავუშვათ $D_1=[A_1, B]$. ჩაკეტილ D_1F სიმრავლეში იზოლირებული შესაძლებელია იყოს მხოლოდ B წერტილი. თუ ის მართლაც ასეთია, მაშინ ჩვენ მას ჩამოვაშორებთ D_1F სიმრავლეს და B_1-ით აღვნიშნავთ დარჩენილი (ჩაკეტილი) სიმრავლის ყველაზე უფრო მარჯვენა წერტილს. $E=[A_1, B_1]$ სეგმენტი ისეთი იქნება, რომ EF სრულყოფილი სიმრავლეა.

პირობის ძალით $f(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

სახით, სადაც $f_n(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია. ავიღოთ $\varepsilon>0$ და დავუშვათ

$$A_{n,m}=E(|f_n-f_{n+m}|\leqslant\varepsilon)\quad (n=1,2,\ldots,m=1,2,\ldots).$$

აშკარაა, რომ $A_{n,m}$ ჩაკეტილია. შემდეგ ვთქვათ,

$$B_n=\prod_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

ეს აგრეთვე ჩაკეტილი სიმრავლეა. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$E=\sum_{n=1}^{\infty} B_n.$$

მართლაც, თუ $x_0\in E$, მაშინ $\{f_n(x_0)\}$ მიმდევრობა კრებადია და ამიტომ საკმარისად დიდი n-სათვის და ნებისმიერი m-სათვის გვექნება

$$|f_n(x_0)-f_{n+m}(x_0)|<\varepsilon,$$

ასე რომ $x_0\in B_n$ და, მაშასადამე, $E\subset\Sigma B_n$. შებრუნებული ჩართვა ტრივიალურია.

მაგრამ დადგენილი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$EF=\sum_{n=1}^{\infty} FB_n.$$

წინა შედეგის ძალით არსებობს ისეთი (λ,μ) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს EF სიმრავლის წერტილებს და ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ

$$(\lambda,\mu)\,EF\subset FB_n.$$

თუ $x\in(\lambda,\mu)\,EF$, მაშინ ნებისმიერი m-სათვის აღმოჩნდება

$$|f_n(x)-f_{n+m}(x)|\leqslant\varepsilon.$$

m-ის გაზრდითა და ზღვარზე გადასვლით უკანასკნელ უტოლობაში ვიპოვით, რომ

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

E F სიმრმვლე სრულყოფილი სიმრავლეა, (λ,μ) ინტერვალი შეიცავს ამ სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც. მაშასადამე, (λ,μ) E F სიმრავლე უსასრულოა. ვთქვათ, x_0 არის E სეგმენტის ბოლო წერტილებისაგან განსხვავებული წერტილი (λ,μ) E F სიმრავლისა. ავიღოთ ისეთი d სეგმენტი, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს x_0 წერტილს, და იმდენად მცირე, რომ 1) ის შედიოდეს (λ,μ) ინტერვალში, 2) ის მოთავსდეს E სეგმენტის შიგნით (და, მით უმეტეს, D სეგმენტის შიგნით) და 3) (უწყვეტი) $f_n(x)$ ფუნქციის რხევა d სეგმენტზე იყოს ε-ზე ნაკლები.

ვთქვათ, x_1 და x_2 არის Fd სიმრავლის ორი წერტილი. მაშინ

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon, \ |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon, \ |f_n(x_2) - f(x_2) \leqslant \varepsilon,$$

საიდანაც

$$|f(x_1) - f(x_2) < 3\varepsilon,$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის რხევა Fd სიმრავლეზე ნაკლებია 3ε-ზე.

ამგვარად, ჩვენს მიერ დადგენილია, რომ ყოველი ისეთი $D \subset [a, b]$ სეგმენტისათვის, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს F-ის წერტილებს, მოიძებნება მეორე ისეთი d სეგმენტი, რომელიც მოთავსებულია D-ს შიგნით, აგრეთვე შეიცავს თავის შიგნით F-ის წერტილებს და ისეთი, რომ $f(x)$-ის რხევა Fd-ზე სურვილისამებრ მცირეა.

დავამტკიცეთ რა ეს, ავიღოთ ისეთი $d_1 \subset [a,b]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს თავის შიგნით F-ის წერტილებს, სიგრძით $md_1 < 1$, და ისეთი, რომ $f(x)$-ის რხევა Fd_1 სიმრავლეზე ნაკლები იყოს 1-ზე.

შემდეგ ვიპოვოთ d_1-ში მოთავსებული ისეთი d_2 სეგმენტი, რომელიც შეიცავს თავის შიგნით F-ის წერტილებს, რომლის სიგრძე $md_2 < \frac{1}{2}$ და ისეთი, რომ $f(x)$-ის რხევა Fd_2 სიმრავლეზე ნაკლები იყოს $\frac{1}{2}$-ზე.

ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ ვაგებთ სეგმენტების ისეთ

$$d_1 \supset d_2 \supset d_3 \supset \ldots \qquad \left(md_n < \frac{1}{n} \right)$$

მიმდევრობას, რომელთაგან ყოველი მოთავსებულია წინას შიგნით, შეიცავს თავის შიგნით F სიმრავლის წერტილებს და ისეთები, რომ $f(x)$ ფუნქციის რხევა Fd_n სიმრავლეზე ნაკლებია $\frac{1}{n}$-ზე.

ვთქვათ, ξ ყველა d_n სეგმენტების საერთო წერტილია. ის, ცხადია, ეკუთვნის F სიმრავლეს. ადვილი სანახავია, რომ ინდუცირებული ფუნქცია $f(x|\text{F})$ უწყვეტია ξ წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

თურმე შესაძლებელია ამ თეორემის შებრუნება. ამის დასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება:

კანტორ—ბერის სტაციონარობის პრინციპი. *ვთქვათ, რიცხვითი პირველი ან მეორე კლასის ყოველ რიგით α რიცხვს შეესაბამება ჩაკეტილი F_α სიმრავლე, ამასთან $\alpha<\beta$-დან გამომდინარეობს $F_\alpha \supset F_\beta$*

$$F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_\omega \supset \dots \supset F_\alpha \dots \qquad (\alpha < \Omega)$$

მაშინ $\{F_\alpha\}$ ჯაჭვის ყველა სიმრავლეები, რომელიღაც მათგანიდან დაწყებული, ემთხვევიან ერთმანეთს, ე. ი. მოიძებნება ისეთი $\mu<\Omega$, რომ

$$F_\mu = F_{\mu+1} = F_{\mu+2} = \dots$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა გამოსავალი F_0 სიმრავლე (და მასთან ჯაჭვის ყველა სიმრავლეები) შემოსაზღვრულია. ვთქვათ, Δ არის ის ინტერვალი, რომელიც შეიცავს F_0-ს.

აღვნიშნოთ K-თი ჯაჭვის ყველა სიმრავლეთა თანაკვეთა. ის აგრეთვე ჩაკეტილი (შესაძლოა ცარიელი) სიმრავლეა. თუ $x \overline{\in} K$, მაშინ x არ შედის ჯაჭვის ერთერთ სიმრავლეში. აღვნიშნოთ $\alpha(x)$-ით უმცირესი იმ რიცხვებს შორის, რომელთათვისაც

$$x \overline{\in} F_{\alpha(x)}$$

და დავარქვათ $\alpha(x)$-ს x წერტილის ინდექსი.

ვთქვათ, A არის ისეთი წერტილოვანი სიმრავლე, რომელიც არ იკვეთება K-სთან. თუ A სიმრავლის ყველა წერტილთა ინდექსები არ აღემატებიან რიცხვითი პირველი ან მეორე კლასის რაიმე ერთსადაიმავე რიცხვს

$$\alpha(x) < \beta \qquad (x \in A,\ \beta < \Omega),$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ A *წესიერი* სიმრავლეა.

წესიერ სიმრავლეთა სასრული რიცხვის ან თვლადი სიმრავლის ჯამი წესიერია. მართლაც, თუ

$$B = A_1 + B_2 + A_3 + \dots,$$

ამასთან ყოველი n-სათვის მოიძებნება ისეთი β_n, რომ

$$\alpha(x) < \beta_n \qquad (x \in A_n, \beta_n < \Omega),$$

მაშინ მოიძებნება ისეთი γ რიცხვი, რომელიც ჯერ კიდევ რიცხვით პირველ ან მეორე კლასს ეკუთვნის და რომელიც აღემატება $\{\beta_n\}$ სიმრავლის ყველა რიცხვს. მაშინ $x \in B$-სათვის გვექნება

$$\alpha(x) < \gamma,$$

და B წესიერი სიმრავლეა.

ჩაკეტილი შემოსაზღვრული სიმრავლე A, რომელიც არ იკვეთება K-სთან, წესიერია.

მართლაც, ვთქვათ, $x \in A$. მაშინ $x \overline{\in} F_{\alpha(x)}$. მაგრამ $F_{\alpha(x)}$ სიმრავლე ჩაკეტილია, ასე რომ x არ არის მისი დაგროვების წერტილი. ამიტომ არსებობს ისეთი $\delta(x)$ ინტერვალი, რომელიც შეიცავს x წერტილს და არ იკვეთება $F_{\alpha(x)}$-

თან. ინტერვალთა $\{\delta(x)\}$ სისტემა ფარავს A სიმრავლეს. მაშასადამე, ბორელის თეორემის ძალით, შეიძლება მივუთითოთ ამ ინტერვალების ისეთ სასრულ რიცხვზე

$$\delta(x_1),\ \delta(x_2), \ldots,\ \delta(x_n),$$

რომლებიც აგრეთვე ფარავენ A სიმრავლეს.

ვთქვათ, β არის რიცხვითი პირველი ან მეორე კლასის ისეთი რიცხვი, რომელიც მეტია ყოველ $\alpha(x_i)$ რიცხვზე ($i = 1,2,\ldots,n$). თუ $x \in A$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\delta(x_i)$ ინტერვალი, რომ $x \in \delta(x_i)$. მაშინ $x \overline{\in} F_{\alpha(x_i)}$ და, მით უფრო $x \overline{\in} F_\beta$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\alpha(x) \leq \beta$ ყოველი $x \in A$-სათვის და A წესიერია.

ვთქვათ, $G = \Delta - K$. სიმრავლე G ღიაა, მაშასადამე, იგი F_σ ტიპის სიმრავლეა, და წარმოიდგინება ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლეების თვლადი სიმრავლის ჯამად, რომლებიც (G-სთან ერთად) აუცილებლად შემოსაზღვრული არიან.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ G წესიერი სიმრავლეა. ვთქვათ, ყოველი $x \in G$-სათვის გვაქვს

$$\alpha(x) < \mu,$$

სადაც $\mu < \Omega$. ვაჩვენოთ, რომ

$$F_\mu = K.$$

მართლაც, აშკარაა, რომ $K \subset F_\mu$. პირიქით, თუ $x \in F_\mu$, მაშინ $x \in \Delta$. თუ დავუშვებთ, რომ $x \overline{\in} K$, ჩვენ მივიღებთ, რომ $x \in G$ და მაშინ უნდა გვქონოდა

$$x \overline{\in} F_{\alpha(x)}$$

და, მით უფრო, $x \overline{\in} F_\mu$, რადგან $F_\mu \subset F_{\alpha(x)}$. მაშასადამე, $x \in K$ და $F_\mu \subset K$, საიდანაც $F_\mu = K$.

თუ $\mu < \alpha < \Omega$, მაშინ

$$F_\mu \supset F_\alpha \supset K,$$

საიდანაც $F_\alpha = F_\mu$, და თეორემა დამტკიცებულია.

იმისათვის, რომ განვაზოგადოთ თეორემა იმ შემთხვევაზე, როცა F_0 არ არის შემოსაზღვრული, დავუშვათ

$$D_n = [-n,\ n].$$

ყოველი n-სათვის, უკვე დამტკიცებულის მიხედვით, მოიძებნება ისეთი μ_n, რომ $\alpha > \mu_n$-სათვის

$$D_n F_\alpha = D_n F_{\mu_n}.$$

თუ μ-თი აღვნიშნავთ ყველა μ_n-ზე მეტსა და პირველ ან მეორე კლასში შემავალ რიცხვს, მივიღებთ

$$F_\alpha = F_\mu$$

ყოველი $\alpha > \mu$-სათვის. მართლაც, ვთქვათ, $x \in F_\mu$ და $\alpha > \mu$. ავიღოთ იმდენად დიდი n, რომ $x \in D_n$. მაშინ $x \in D_n F_\mu = D_n F_\alpha \subset F_\alpha$ და $F_\mu \subset F_\alpha$.

თეორემა 4 (რ. ბერი) ვთქვათ, $E=[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. თუ ყოველ არაცარიელ ჩაკეტილ F სიმრავლეზე არსებობს ინდუცირებული $f(x|F)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილები, მაშინ $f(x)$ უწყვეტია ან ეკუთვნის 1-ლ კლასს,

დამტკიცება. ლებეგის თეორემის ძალით, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი A-სათვის

$$E(f>A),\ E(f<A)$$

სიმრავლეები F_σ ტიპის სიმრავლეებია.

ვთქვათ, p და q ორი რიცხვია, ამასთან $p<q$. დავუშვათ

$$P=E(f>p),\ Q=E(f<q).$$

აშკარაა

$$E=P+Q.$$

ვთქვათ, F არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლეა E-ში. აღვნიშნოთ x_0-ით ინდუცირებული $f(x|F)$ ფუნქციის რაიმე უწყვეტობის წერტილი. ცხადია, რომ ერთერთი

$$f(x_0)>p,\ f(x_0)<q$$

უტოლობა მაინც შესრულებული იქნება, ვთქვათ, მაგალითად, $f(x_0)>p$. მაშინ არსებობს x_0 წერტილის შემცველი იმდენად მცირე δ ინტერვალი, რომ $F\delta$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის გვექნება $f(x)>p$. დავუშვათ

$$F^*=F-F\delta,$$

ეს ჩაკეტილი სიმრავლეა, რადგანაც $F^*=F\cdot C\delta$. ამასთან $F-F^*=F\delta\subset P$. რომ გვქონოდა $f(x_0)<q$, მაშინ ჩვენ ანალოგიურად ვიპოვიდით ისეთ ჩაკეტილ $F^*\subset F$ სიმრავლეს, რომ $F-F^*\subset Q$. ამგვარად, რანაირი არაცარიელი ჩაკეტილი სიმრავლეც არ უნდა ავიღოთ, მოიძებნება მისივე ისეთი ჩაკეტილი F^* ქვესიმრავლე, რომ $F-F^*$ არაცარიელია და შედის მთლიანად P-ში ან Q-ში.

შევნიშნეთ რა ეს, აღვნიშნოთ $F_0=[a,b]$ და ვიპოვოთ ისეთი ჩაკეტილი $F_1\subset F_0$ სიმრავლე, რომ F_0-F_1 არაცარიელი იყოს და იგი მთლიანად შედიოდეს P-ში ან Q-ში. თუ F_1 აგრეთვე არაცარიელია, ვიპოვით მის ისეთ ჩაკეტილ F_2 ქვესიმრავლეს, რომ F_1-F_2 არაცარიელია და შედის P-ში ან Q-ში. ამ პროცესის გაგრძელებით ჩვენ ან წავაწყდებით ცარიელ F_n სიმრავლეს, ან ყოველი ნატურალური n-სათვის ავაგებთ ისეთ F_n სიმრავლეს, რომ F_n-F_{n+1} არაცარიელია და შედის P-ში ან Q-ში.

უკანასკნელ შემთხვევაში ჩვენ დავუშვებთ

$$F_\omega=\prod_{n=0}^{\infty}F_n.$$

თუ ეს სიმრავლე ისევ არაცარიელია, შესაძლებლობა გვეძლევა შემდგო-

მი $F_{\omega+1}$, $F_{\omega+2}$,... სიმრავლეების აგებისა. ვთქვათ, α მე-2 კლასის რიცხვია და ჩვენ უკვე განვსაზღვრეთ ყველა F_β სიმრავლეები $\beta < \alpha$-სათვის; ამასთან ყველა ისინი არაცარიელი აღმოჩნდება.

თუ α პირველი გვარის რიცხვია, მაშინ F_α-თი აღვნიშნავთ $F_{\alpha-1}$-ს სადაც ($\alpha-1$ არის α-ს უშუალო წინამორბედი რიცხვი) ისეთ ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს, რომ $F_{\alpha-1} - F_\alpha \neq 0$, და მთლიანად შედის P—ში ან Q-ში. თუ კი α მეორე გვარის რიცხვია, დავუშვათ

$$F_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} F_\beta.$$

წარმოვიდგინოთ, რომ ყველა F_α სიმრავლეები $\alpha < \Omega$-სათვის არაცარიელი აღმოჩნდენ. ადვილი დასანახია, რომ ეს დაშვება ეწინააღმდეგება კანტორ-ბერის სტაციონარობის პრინციპს. მართლაც, ამ პრინციპის მიხედვით უნდა მოიძებნებოდეს ისეთი μ, რომ

$$F_\mu = F_{\mu+1},$$

იმ დროს როცა F_μ-ს არასიცარიელედან გამომდინარეობს $F_\mu - F_{\mu+1}$-ის არასიცარიელე.

ამგვარად, F_μ სიმრავლეთა განსაზღვრის პროცესი არ შეიძლება ჩატარებულ იქნას პირველი ორი კლასის ყველა რიცხვისათვის და აუცილებლად არსებობს ისეთი $\lambda < \Omega$, რომ

$$F_\alpha \neq 0 \ (\alpha < \lambda), \ F_\lambda = 0.$$

ასეთ შემთხვევაში გამოსავალი $F_0 = [a,b]$ სეგმენტი წარმოიდგინება ასე

$$[a,b] = \sum_{\alpha<\lambda} [F_\alpha - F_{\alpha+1}].$$

მართლაც, თუ $x \in [a,b]$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\alpha \leqslant \lambda$ რიცხვები, რომ $x \overline{\in} F_\alpha$ (მაგალითად $\alpha = \lambda$). ვთქვათ, β პირველია მათ შორის. ცხადია, რომ β პირველი გვარის რიცხვია (რადგან β რომ მეორე გვარის რიცხვი ყოფილიყო, მაშინ x, შედის რა F_α-ში ყოველი $\alpha < \beta$-სათვის, შევიდოდა მათ F_β თანაკვეთაშიც). მაშასადამე, $x \in F_{\beta-1} - F_\beta$ და

$$[a,b] \subset \sum_{\alpha<\lambda} [F_\alpha - F_{\alpha+1}].$$

შებრუნებული ჩართვა ტრივიალურია. ყოველი $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ სიმრავლე შედის ერთერთ P ან Q სიმრავლეში. აღვნიშნოთ T-თი ყველა ისეთი $\alpha < \lambda$-ს სიმრავლე, რომლისათვისაც

$$F_\alpha - F_{\alpha+1} \subset P,$$

და ვთქვათ, $U = W_\lambda - T$. ცხადია, რომ $UT = 0$ და

$$[a,b] = \sum_T [F_\alpha - F_{\alpha+1}] + \sum_U [F_\alpha - F_{\alpha+1}].$$

ყოველი $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ სიმრავლე F_σ ტიპისაა, ასეთივეა მათი

$$A = \sum_T [F_\alpha - F_{\alpha+1}] \quad \text{და} \quad B = \sum_U [F_\alpha - F_{\alpha+1}]$$

ჯამებიც, რადგან თითოეული T და U სიმრავლე სასრულია ან თვლადი. შევნიშნოთ, რომ $A \subset P$, $B \subset Q$ და რომ A და B წყვილწყვილად არ იკვეთებიან, რადგან არ იკვეთებიან $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ და $F_\beta - F_{\beta+1}$ სიმრავლეები, როცა $\alpha \neq \beta$).

ამგვარად, რიცხვთა ყოველ წყვილს $p < q$ შეესაბამება $[a,b]$ სეგმენტის გაყოფა ისეთ ორ არაგადამკვეთ F_σ ტიპის სიმრავლეებად

$$[a,b] = A + B,$$

მასთან

$$A \subset E(f > p) \qquad B \subset E(f < q).$$

დავადგინეთ რა ეს, დავაფიქსიროთ p და მივცეთ q-ს მნიშვნელობები

$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = p.$$

ყოველი n-სათვის გვაქვს

$$[a,b] = A_n + B_n \qquad (A_n B_n = 0),$$

სადაც A_n და B_n არიან F_σ ტიპის სიმრავლეები და

$$A_n \subset E(f > p), \qquad B_n \subset E(f < q_n).$$

დავუშვათ

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad S = \prod_{n=1}^{\infty} B_n.$$

აშკარაა, რომ $RS = 0$ და

$$[a,b] = R + S.$$

R სიმრავლე არის F_σ. ვაჩვენოთ, რომ

$$E(f > p) = R.$$

მართლაც, თუ $f(x_0) > p$, მაშინ საკმარისად დიდი n-სათვის გვექნება $f(x_0) > q_n$ და $x_0 \overline{\in} B_n$. მაშასადამე, $x_0 \overline{\in} S$ და $x_0 \in R$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$E(f > p) \subset R.$$

შებრუნებული ჩართვა კი აშკარაა. ამგვარად, $E(f > p)$ არის F_σ.

იგივე სამართლიანია $E(f < q)$ სიმრავლისათვისაც. თეორემა დამტკიცებულია.

მოგვყავს ლებეგისა და ბერის თეორემების საილუსტრაციო რამოდენიმე მაგალითი.

I. ჩაკეტილი შემოსაზღვრული F სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია 1-ლი კლასის ფუნქციაა.

ვთქვათ, $F\subset[a,b]=E$ და $f(x)$ ტოლია 1-სა F სიმრავლის წერტილებზე და ტოლია 0-ს $E-F$ სიმრავლის წერტილებზე. მაშინ

$$E(f>A)=\begin{cases} E, & \text{თუ } A<0 \\ F, & \text{თუ } 0\leqslant A<1 \\ 0, & \text{თუ } A\geqslant 1 \end{cases} \qquad E(f<A)=\begin{cases} E, & \text{თუ } A>1 \\ E-F, & \text{თუ } 0<A\leqslant 1 \\ 0, & \text{თუ } A\leqslant 0. \end{cases}$$

ყველა შემთხვევაში $E(f>A)$ და $E(f<A)$ სიმრავლეები F_σ არიან. იმისათვის რომ ეს ცხადვყოთ, საკმარისია აღვნიშნოთ, რომ $E-F=E\cdot CF$, და CF, წარმოადგენს რა ღია სიმრავლეს, არის F_σ.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენი დებულება ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს წინა თეორიის დახმარების გარეშეც. თუ ჩვენ $r(x)$-ით აღვნიშნავთ მანძილს x წერტილიდან F სიმრავლემდე, მაშინ $r(x)$ უწყვეტი აღმოჩნდება. ამავე დროს

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nr(x)}.$$

II. ფუნქცია, რომელსაც წყვეტის წერტილთა თვლადი სიმრავლე აქვს, 1-ლი კლასის ფუნქციაა.

მართლაც, თუ F ჩაკეტილი სიმრავლეა, რომელშიაც არსებობს იზოლირებული წერტილები, მაშინ ისინი იქნებიან ინდუცირებული $f(x\,|\,F)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილები. თუ კი F სრულყოფილი სიმრავლეა, მაშინ ის არათვლადია, და ამიტომ შეიცავს გამოსავალი ფუნქციის უწყვეტობის წერტილებს, რომლებიც, მით უმეტეს, იქნებიან ინდუცირებული ფუნქციის უწყვეტობის წერტილები.

კერძოდ:

III. მონოტონური ფუნქცია და შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია არიან ფუნქციები არა უმაღლეს 1-ლი კლასისა.

შემდეგი მაგალითი მეტად საგულისხმოა.

IV. ვთქვათ, P_0 კანტორის სრულყოფილი სიმრავლეა. განვსაზღვროთ [0,1] სეგმენტში ორი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქცია. $f(x)$ ტოლი იყოს 1-ის P_0 სიმრავლის წერტილებზე, ხოლო 0-ის მისი ღია $G_0=[0,1]-P_0$ დამატების წერტილებზე. $g(x)$ ფუნქცია კი 1-ის ტოლად მივიღოთ P_0-ის იმ და მხოლოდ იმ წერტილებზე, რომლებიც არ წარმოადგენენ მისი დამატებითი ინტერვალების ბოლოებს, [0,1]-ის ყველა დანარჩენ წერტილებზე მივიღოთ $g(x)=0$.

ადვილი მისახვედრია, რომ ორივე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია G_0 სიმრავლის წერტილებზე და წყვეტილია P_0 სიმრავლის წერტილებზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ ფუნქციებს აქვთ წყვეტის წერტილთა ერთი და იგივე ერთობლიობა. ამავე დროს $f(x)$ 1-ლი კლასის ფუნქციაა (როგორც

ჩაკეტილი P_0 სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია), ხოლო $g(x)$ არ არის ასეთი, რადგან $g(x|P_0)$ ინდუცირებული ფუნქცია წყვეტილია P_0-ის ყველა წერტილზე.

V. დირიხლეს ფუნქცია მე 2 კლასის ფუნქციაა.

დირიხლეს ფუნქცია უდრის 1-ს [0,1] სეგმენტის რაციონალურ წერტილებზე და უდრის 0-ს ამ სეგმენტის ირაციონალურ წერტილებზე. ის სავსებით მოკლებულია უწყვეტობის წერტილებს, და ამიტომ არ შეიძლება 1-ლი კლასის ფუნქცია იყოს. ამავე დროს, თუ ჩვენ გადავნომრავთ [0,1] სეგმენტის რაციონალურ წერტილებს

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

და დავუშვებთ

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{როცა } x = r_k \ (k = 1, 2, \ldots, n) \\ 0 & [0,1]\text{-ის სხვა წერტილებზე,} \end{cases}$$

მაშინ $\varphi_n(x)$ ფუნქცია, აქვს რა მას წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა, იქნება 1-ლი კლასის ფუნქცია. რადგან დირიხლეს ფუნქცია არის $\varphi_n(x)$-ის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, ამიტომ ჩვენი დებულება დამტკიცებულია[1].

შევნიშნოთ, რომ დირიხლეს ფუნქცია არის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია. ეს სიმრავლე (არის რა თვლადი) აშკარაა, რომ F_σ ტიპისაა. მაშასადამე, F_σ ტიპის სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია არაა ყოველთვის 1-ლი კლასის ფუნქცია.

---

[1]. ძნელი არ არის აგრეთვე შემოწმება იმისა, რომ დირიხლეს $\psi(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება

$$\psi(x) = \lim_{m \to \infty} \left\{ \lim_{n \to \infty} [\cos(m!\,\pi x)]^{2n} \right\}$$

სახით, საიდანაც კვლავ ჩანს, რომ $\psi(x)$ არის მე-2 კლასის ფუნქცია.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

გვ·

თავი V

ლებეგის ინტეგრალი შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის

თავი VI

ჯამებადი ფუნქციები

თავი VII

კვადრატით ჯამებადი ფუნქციები

თავი VIII

ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით. სტილტიესის ინტეგრალი

თავი IX

აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

თ ა ვ ი X

სინგულარული ინტეგრალები. ტრიგონომეტრიული მწკრივები

თ ა ვ ი XI

ტრანსფინიტური რიცხვები

თ ა ვ ი XII

ბერის კლასიფიკაცია

რედაქტორი ვ. ჭელიძე

გადაეცა წარმოებას 4/XI 1948 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 11/IV 1949 წ. ტირაჟი 2000. უე 02177. ანაწყობის ზომა 7×11. სასტამბო თაბახი 24¼. სააღრიცხვო-საგამომცემლო — 28,45
სტამბის შეკვეთა № 340. გამომცემლობის შეკვეთა № 34.

სტალინის სახელობის. თბილისის სახ. უნივერსიტეტის გამომცემლობის სტამბა, მარის ქ., 1