გ. მანია

წრფივი პროგრამირება

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ პოლიტექნიკური ინსტიტუტის სტუდენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება“
თბილისი — 1967

6П2.15
681.142.2
8-272

1—8—5
257—67

ავტორისაგან

წიგნი ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველ ნაწილში განხილულია მათემატიკის ის აპარატი, რომელიც საჭიროა წრფივი პროგრამირების მეთოდების გასარჩევად, სახელდობრ, წრფივი ალგებრის ელემენტები (დეტერმინანტები, განტოლებათა სისტემები, მატრიცები, ვექტორები და სხვ.) და ცნობები ამოზნექილი სიმრავლეების შესახებ.

მეორე ნაწილში მოცემულია წრფივი პროგრამირების ზოგიერთი ძირითადი მეთოდი: თანდათანობით მიახლოების მეთოდი, რომელიც სიმპლექსური მეთოდის სახელითაა ცნობილი; მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის მეთოდი; მოდის მეთოდი, რომელიც განმანაწილებელ და პოტენციალთა მეთოდების მოდიფიკაციას წარმოადგენს; აკად. ლ. კანტოროვიჩის მიერ დამუშავებული ე. წ. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდი. დეტალურადაა ნაჩვენები ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნა.

სახელმძღვანელო ძირითადად შედგენილია იმ ლექციების მიხედვით, რომელსაც ავტორი წლების განმავლობაში კითხულობდა საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის წარმოების ეკონომიკისა და ორგანიზაციის კათედრის ლექტორ-მასწავლებლებისათვის.

ჟორდანისეული გარდაქმნის გამოყენება ძლიერ ამარტივებს წრფივი პროგრამირების ზოგიერთი მეთოდის შესწავლას, ამიტომ საჭიროდ ვცანით პირველი ნაწილის ბოლოში მისი თეორია დაგვემატებინა, ხოლო ამ თეორიის გამოყენება გვეჩვენებინა სიმპლექსური და მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის მეთოდებისათვის. ასე, მაგალითად, სიმპლექსური მეთოდი დამუშავებულია როგორც ვექტორული ალგებრის საშუალებით, ისე ჟორდანისეული გარდაქმნის გამოყენებით. მკითხველს შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი გზა, რომელიც მას გაუადვილებს საკითხის შესწავლას. სიმპლექსური მეთოდის ორივე გზით დამუშავება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეიძლება.

როგორც გამოცდილებამ გვიჩვენა, ამა თუ იმ მეთოდის შესწავლისას სასარგებლო აღმოჩნდა წინასწარ რომელიმე კონკრეტული ამოცანის ან მაგალითის ამოხსნა, ხოლო შემდეგ მასალის თეორიული დასა-

ბუთების მოცემა. ამიტომ წიგნში გამოყენებულია წრფივი პროგრამირების მეთოდების გარჩევის ასეთი მეთოდი. ამოცანები და მაგალითები მასალის თეორიულად დამუშავების შემდეგაც არის მოყვანილი.

წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების მანქანათმშენებლობის წარმოების ეკონომიკა-ორგანიზაციისა და მშენებლობის ეკონომიკა-ორგანიზაციის სპეციალობათა სტუდენტებისათვის; იგი სარგებლობას მოუტანს აგრეთვე იმათ, ვინც დაინტერესებულია წრფივი პროგრამირების მეთოდების შესწავლით.

ხელნაწერის ორივე ნაწილი გულდასმით წაიკითხა და რიგი სასარგებლო შენიშვნა გააკეთა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტთან არსებული გამოყენებითი მათემატიკის პრობლემური ლაბორატორიის მეცნიერმა თანამშრომელმა რ. სარჩიმელიამ. წიგნის ტექნიკურად მომზადებაში დახმარება გაგვიწია ასპირანტმა ბ. დოჭეირმა.

წრფივი პროგრამირების მეთოდების შესახებ ქართულ ლიტერატურაში ჯერჯერობით ცოტა რამ არის დაბეჭდილი. ეს სახელმძღვანელო წარმოადგენს ამ ხარვეზის შევსების პირველ ცდას და, რა თქმა უნდა, მასთან დაკავშირებული ყოველი საქმიანი შენიშვნა უდიდესი მადლობის გრძნობით იქნება მიღებული.

შესავალი

მათემატიკის ახალი დარგი — მათემატიკური პროგრამირება სწავლობს მართვისა და დაგეგმვის ამოცანათა ამოხსნის თეორიულ საფუძვლებს.

წრფივი პროგრამირება წარმოადგენს მათემატიკური პროგრამირების ერთ-ერთ დარგს, რომელიც ამუშავებს ისეთი პირობით ექსტრემალურ ამოცანათა ამოხსნის თეორიასა და მეთოდებს, რომლებშიც პროდუქციის ხარისხის მაჩვენებელი წრფივად დამოკიდებულია მართვის პარამეტრებზე, ხოლო შეზღუდვები მოცემულია წრფივი ტოლობებისა და უტოლობების სახით.

სიტყვა „პროგრამირება" აქ იხმარება ექსტრემალურ ამოცანათა ამოხსნის მეთოდების დამუშავების აზრით, ხოლო „წრფივობა" მიუთითებს იმაზე, რომ ხარისხის მაჩვენებელი და ის შეზღუდვანი, რომლებიც ედება საძებნ უცნობებს, წრფივად გამოისახებიან.

მათემატიკური პროგრამირება და მისი განყოფილება — წრფივი პროგრამირებაც მხოლოდ სამიოდე ათეული წლის ისტორიას ითვლის. წრფივი პროგრამირების საკითხებთან დაკავშირებული პირველი ნაშრომები გამოქვეყნებულ იქნა ამ საუკუნის 30-იან წლებში. მაგალითად, 1931 წ. უნგრეთში გამოქვეყნდა ეგერვარის ნაშრომი, რომელიც ტრანსპორტის ამოცანის ერთ-ერთი კერძო შემთხვევის ამოხსნას იძლეოდა.

ამერიკის შეერთებულ შტატებში წრფივი პროგრამირების საკითხებთან დაკავშირებული ნაშრომები გამოქვეყნებულ იქნა ორმოციან წლებში. საბჭოთა კავშირში ამ მიმართულებით რიგი მნიშვნელოვანი შედეგები მიღებულ იქნა ლ. კანტოროვიჩის მიერ ჯერ კიდევ ოცდაათიან წლებში. თავის პირველ ნაშრომში კანტოროვიჩმა მოგვცა იდეა ამომხსნელ მამრავლთა შესახებ, რაც მჭიდროდაა დაკავშირებული წრფივი პროგრამირების ე. წ. ორადობის პრობლემასთან. ამომხსნელ მამრავლთა გამოყენებით ძალზე მოხერხებული ხდება წრფივ ამოცანათა ოპტიმალობის პირობათა ფორმულირება.

ყველა იმ ალგორითმის ერთობლიობას, რომელიც იყენებს ამომხსნელ მამრავლებს, ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდს უწოდებენ.

1956 წელს დანციგმა, ფორდმა და ფულკერსონმა დაამუშავეს წრფივი პროგრამირების ზოგადი მეთოდები. მანამდე, 1949 წელს, დანციგმა გამოაქვეყნა თავისი ნაშრომი წრფივი პროგრამირების ერთი მეთოდის შესახებ, რომელიც იძლეოდა გეგმის თანდათანობით გაუმჯობესების იდეას და ლიტერატურაში ცნობილია სიმპლექსური მეთოდის სახელწოდებით.

1954 წელს ლემკეს მიერ შემოტანილ იქნა წრფივი პროგრამირების კიდევ ერთი ზოგადი მეთოდი, რომელსაც ეწოდება შეფასებათა თანდათანობით დაზუსტების მეთოდი.

უკანასკნელ ხანებში გამოქვეყნდა რიგი შრომები, წრფივი პროგრამირების ისეთ ამოცანებზე, რომლებშიც ცვლადები თავიანთი ფიზიკური შინაარსის მიხედვით მთელი რიცხვები უნდა იყოს. ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნის მეთოდს მთელრიცხვა პროგრამირების მეთოდი ეწოდება.

ტრანსპორტის ამოცანის ამოსახსნელად შექმნილია მთელი რიგი ეფექტური მეთოდები, სახელდობრ, განმანაწილებელი მეთოდი (სიმპლექსური მეთოდი გადატანილი ტრანსპორტის ამოცანისათვის), პოტენციალთა მეთოდი, მოდის მეთოდი და სხვ. ასეთი სახის მეთოდები საშუალებას იძლევა დასაშვები ამონახსნების საშუალებით თანდათანობით მივუახლოვდეთ ოპტიმალურ გეგმას.

წრფივი პროგრამირების შესასწავლად აუცილებელია წრფივი ალგებრის ცოდნა და ამიტომ პირველ რიგში ეს უკანასკნელი უნდა შევისწავლოთ. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, ამისათვის განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანა:

ვთქვათ, 3 ქარხანა, რომლებიც ერთსა და იმავე პროდუქციას ამზადებენ, მოთავსებულია სხვადასხვა ქალაქში. დავუშვათ, რომ პირველი მათგანი ყოველდღიურად ამზადებს $N_1=10$ ტონა პროდუქციას, მეორე — $N_2=12$ ტონას და მესამე — $N_3=18$ ტონას. დამზადებული პროდუქცია გადასატანია 4 სხვადასხვა პუნქტში შემდეგი რაოდენობით: პირველ პუნქტში — $n_1=9$ ტონა, მეორეში — $n_2=13$ ტონა, მესამეში — $n_3=11$ ტონა და მეოთხეში — $n_4=7$ ტონა.

ერთი ტონა პროდუქციის თითოეული ქალაქიდან სათანადო პუნქტამდე გადატანის ღირებულება აღვნიშნოთ a_{ij}-ით, სადაც პირველი ინდექსი უჩვენებს, თუ რომელი ქალაქიდან გამოაქვთ პროდუქცია, ხოლო მეორე ინდექსი — რომელ პუნქტში მიაქვთ.

დავუშვათ, რომ ერთი ტონა პროდუქციის გადატანის ღირებულება მანეთობით შემდეგია:

$$\begin{array}{lll} a_{11}=5, & a_{21}=12, & a_{31}=15, \\ a_{12}=6, & a_{22}=11, & a_{32}=14, \\ a_{13}=9, & a_{23}=17, & a_{33}=19, \\ a_{14}=8, & a_{24}=14, & a_{34}=21. \end{array}$$

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ განვსაზღვროთ, რამდენი ტონა პროდუქცია უნდა გაიგზავნოს თითოეული ქალაქიდან თითოეულ პუნქტში, რომ გადატანის საერთო ხარჯი მინიმალური იყოს.

x_{ij}-ით ავღნიშნოთ i-ური ქალაქიდან j-ურ პუნქტში გადატანილ ტონობით გამოსახული პროდუქციათა რაოდენობა. ამგვარად, საჭიროა სათანადოდ განისაზღვროს შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$
\begin{array}{llll}
x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, \\
x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, \\
x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34}.
\end{array}
$$

ამოცანის პირობის თანახმად, დავწეროთ:

$$
\left.
\begin{array}{r}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=10, \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=12, \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=18, \\
x_{11}+x_{21}+x_{31}=9, \\
x_{12}+x_{22}+x_{32}=13, \\
x_{13}+x_{23}+x_{33}=11, \\
x_{14}+x_{24}+x_{34}=7.
\end{array}
\right\} \quad (1)
$$

ყველა გადატანის ხარჯი ავღნიშნოთ X-ით. მაშინ,

$$
\begin{aligned}
X=5x_{11}+6x_{12}+9x_{13}+8x_{14}+12x_{21}+11x_{22}+17x_{23}+14x_{24}+ \\
+15x_{31}+14x_{32}+19x_{33}+21x_{34}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

საჭიროა შევარჩიოთ x_{ij}-ს ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (1) განტოლებებს და X-ს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა. გარდა ამისა, x_{ij} მნიშვნელობანი უნდა იყოს არაუარყოფითი მთელი რიცხვითი სიდიდეები.

როგორც ვხედავთ, (1) განტოლებები წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, სადაც უცნობთა რიცხვი მეტია განტოლებათა რიცხვზე. ასეთი ტიპის განტოლებების შესწავლა ხდება წრფივ ალგებრაში, ხოლო თუ მას მინიმუმის პირობას დავადებთ, მაგალითად (2)-ს, მივიღებთ წრფივი პროგრამირების ამოცანას.

ნაწილი პირველი

წრფივი ალგებრის ელემენტები

თავი I

წრფივ განტოლებათა სისტემა

§ 1. შესავალი

განტოლებათა სისტემას ეწოდება წრფივი, თუ მასში შემავალი უცნობები პირველ ხარისხშია და განტოლების არც ერთი წევრი რამდენიმე უცნობის ნამრავლს არ წარმოადგენს.

განტოლებათა სისტემის ამონახსენი ეწოდება ისეთ რიცხვთა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ სისტემაში შემავალ ყველა განტოლებას, მაგალითად,

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+4z=4, \\ x+2y-5z=2 \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსენია $x=3$, $y=2$, $z=1$.

განტოლებათა სისტემა იქნება თავსებადი, თუ მას ერთი ამონახსენი მაინც აქვს. მაგალითად, (1.1) სისტემა თავსებადია და აგრეთვე

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5, \\ 7x-4y=3 \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

სისტემაც თავსებადია, რადგანაც აქვს ამონახსენი $x=1$, $y=1$.

თუ განვიხილავთ

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3, \\ 3x+3y=7 \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

განტოლებათა სისტემას, ის არ იქნება თავსებადი, რადგანაც ნებისმიერი (x_0, y_0) უცნობების წყვილი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირველ განტოლებას $x_0+y_0=3$, ვერ დააკმაყოფილებს მეორე განტოლებას, რადგან $3x_0+3y_0=9$ და არა 7-ს.

თავსებად წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება განსაზღვრული, თუ მას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსენი, წინააღმდეგ შემთხვევაში ის იქნება განუსაზღვრელი.

მაგალითად,

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=8, \\ 2x-y&=3 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

განტოლებათა სისტემა განსაზღვრულია, რადგანაც მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი: $x=2$, $y=1$.

თუ განვიხილავთ

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3, \\ 4x+4y&=12 \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

განტოლებათა სისტემას, ის იქნება განუსაზღვრელი, რადგანაც მას უამრავი ამონახსენი აქვს. მაგალითად, ამ სისტემის ამონახსენია: $x=2$, $y=1$; $x=1$, $y=2$ და სხვ.

§ 2. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა

ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ზოგადი სახეა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

ამ სისტემაში მუდმივი კოეფიციენტების პირველი ინდექსი გვიჩვენებს, თუ რომელ განტოლებას ეკუთვნის ის, ხოლო მეორე ინდექსი — თუ რომელ უცნობთან დგას ის.

საშუალო სკოლის კურსში ცნობილია ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა კოეფიციენტთა გათანაბრების მეთოდით. ამ მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს: პირველი განტოლების ორივე მხარეს ვამრავლებთ მეორე განტოლებაში შემავალი x_1-ის a_{21} კოეფიციენტზე, ხოლო მეორე განტოლების ორივე მხარეს ვამრავლებთ პირველ განტოლებაში შემავალი x_1 უცნობის კოეფიციენტზე. მიღებულ ახალ განტოლებებს ერთმანეთს ვაკლებთ, რის შედეგად ვღებულობთ ერთუცნობიან განტოლებას x_2 უცნობის მიმართ, რომლის ამოხსნა მარტივად შეიძლება. ანალოგიურად ვიპოვით x_1 უცნობსაც.

ამგვარად, ვღებულობთ:

$$a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21},$$
$$a_{21}a_{11}x_1+a_{22}a_{11}x_2=b_2a_{11}.$$

მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი, მივიღებთ:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{2.2}$$

ასევე დავწერთ:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \tag{2.3}$$

გამოსახულებას

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

მეორე რიგის კვადრატული მატრიცა ეწოდება, ხოლო

$$|C|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

გამოსახულებას — მეორე რიგის დეტერმინანტი. ეს დეტერმინანტი ნიშნავს

$$c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}$$

რიცხვს.

თუ ვისარგებლებთ (2.4) სიმბოლოთი, (2.3) განტოლება x_1-ის მიმართ შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

ანალოგიურად x_2 უცნობისთვის გვექნება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისგან შემდგარ დეტერმინანტს სისტემის დეტერმინანტი ეწოდება და აღინიშნება Δ-თი. ამგვარად,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

თუ სისტემის დეტერმინანტში x_1 უცნობის კოეფიციენტები შეცვლილია თავისუფალი წევრებით, ასეთი დეტერმინანტი აღვნიშნოთ Δ_1-ით,

ხოლო თუ x_2 უცნობის კოეფიციენტებია შეცვლილი თავისუფალი წევრებით, მაშინ ის აღვნიშნოთ Δ_2-ით, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta x_2 &= \Delta_2 \end{aligned}\right\}. \quad \text{და} \tag{2.5}$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \tag{2.6}$$

და

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{2.7}$$

აქ შეიძლება განვიხილოთ 3 შემთხვევა:

1) $\Delta \neq 0$.

ამ შემთხვევაში x_1 და x_2 უცნობთათვის ვღებულობთ:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

ამგვარად, ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამონახსნები x_1 და x_2 წარმოადგენს წილადებს, რომლებსაც მნიშვნელად აქვთ ერთი და იმავე სისტემის დეტერმინანტი Δ; x_1-ის მრიცხველად აქვს იმავე სისტემის დეტერმინანტი, რომლის პირველი სვეტი შეცვლილია თავისუფალი წევრებით, ხოლო x_2-ის მრიცხველი არის სისტემის დეტერმინანტი, რომლის მეორე სვეტი შეცვლილია თავისუფალი წევრებით.

განხილულ შემთხვევაში სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. მიღებულ ამონახსენს თუ შევიტანთ სისტემის განტოლებებში, ცხადია, ის მას დააკმაყოფილებს.

მართლაც,

$$a_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_{11}(b_1a_{22} - b_2a_{12}) + a_{12}(b_2a_{11} - b_1a_{21})}{a_{11}b_{22} - a_{12}a_{21}} =$$

$$= \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_2a_{11}a_{12} + b_2a_{11}a_{12} - b_1a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} =$$

$$= \frac{b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = b_1.$$

ანალოგიურად შემოწმდება მეორე განტოლებაც.

2) $\Delta = \Delta_1 = 0.$ (2.8)

ამგვარად,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$
$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0.$$

საიდანაც

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

და

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

ამ უკანასკნელ დამოკიდებულებათა ერთობლიობა გვაძლევს:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (2.9)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ სისტემის განტოლებათა კოეფიციენტები პროპორციული სიდიდეებია. ამგვარად, ერთი განტოლება მიიღება მეორე განტოლებიდან მისი წევრების რაიმე ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებით. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში ერთ-ერთი განტოლების ამონახსენი მთელი სისტემის ამონახსენი იქნება. ამგვარად, გვექნება ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. ამონახსენს მივიღებთ უბრალოდ, თუ x_1-ს მივცემთ რაიმე ნებისმიერ მნიშვნელობას და მის შესაბამისად გამოვთვლით x_2-ს. მაშასადამე, განხილულ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემა თავსებადია და განუსაზღვრელი.

ცხადია, (2.8)-დან გამომდინარეობს,

$$\Delta_2 = 0.$$

მართლაც,

$$\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

(2.9)-დან დავწერთ:

$$b_1 = \frac{b_2a_{11}}{a_{21}},$$

მაშინ Δ_2-თვის გვექნება:

$$\Delta_2 = b_2a_{11} - b_2a_{11} = 0.$$

ასევე, როცა

$$\Delta = \Delta_2 = 0,$$

მივიღებთ:

$$\Delta_1=0.$$

3) $\Delta=0, \quad \Delta_1\neq 0.$ (2.10)

რადგანაც $\Delta_1\neq 0$, ცხადია, მაშინ $\Delta_2\neq 0$. მართლაც,

$$\Delta_2=b_2a_{11}-b_1a_{21};$$

რადგან $\Delta=0$, გვექნება:

$$a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21},$$

საიდანაც

$$a_{11}=\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{22}}\ .$$

თუ ამას შევიტანთ Δ_2-ის გამოსახულებაში, გვექნება:

$$\Delta_2=b_2\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{22}}-b_1a_{21}=-\frac{a_{21}}{a_{22}}(b_1\,a_{22}-b_2a_{12})=-\frac{a_{21}}{a_{22}}\Delta_1.$$

მაგრამ $\Delta_1\neq 0$, ამიტომ $\Delta_2\neq 0$.

(2.10) პირობის შესრულებისას (2.5) დამოკიდებულებების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია, ხოლო მარჯვენა — ნულისგან განსხვავებული. ეს იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემა უთავსებადია. (2.10) პირობა იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემის უცნობთა კოეფიციენტები პროპორციულია, ხოლო თავისუფალი წევრები ამ უცნობთა კოეფიციენტების პროპორციულები არ არიან.

ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის განხილვისას საქმე ყოველთვის განხილული 3 შემთხვევიდან რომელიმე ერთთან მაინც გვექნება. შეგვიძლია შემდეგი საბოლოო დასკვნა გავაკეთოთ.

ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსენი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta\neq 0$. თუ $\Delta=0$, მაშინ სისტემა იქნება უთავსებადი იმ შემთხვევაში, როცა $\Delta_1\neq 0$, ხოლო განუსაზღვრელი, თუ Δ_1 დეტერმინანტიც ნულია.

სავარჯიშო

1) გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

ა) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$, ბ) $\begin{vmatrix} \frac{5}{7} & 2 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$, გ) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$,

დ) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$, ე) $\begin{vmatrix} x+1 & x^3 \\ -1 & x^3-x+1 \end{vmatrix}$, ვ) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-x}{1+x} & 1-x^2 \\ 1+x^2 & \dfrac{1+x}{1-x} \end{vmatrix}$.

2) დეტერმინანტების გამოყენებით ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

ა) $\left.\begin{aligned} 3x+5y&=8, \\ 7x-3y&=4. \end{aligned}\right\}$ პასუხი. $(1,1)$.

ბ) $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=2, \\ 5x-6y&=0,5. \end{aligned}\right\}$ პასუხი. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

გ) $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=-1, \\ 4x-15y&=-7. \end{aligned}\right\}$ პასუხი. $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$.

3) შეამოწმეთ, თუ რომელი ტიპისაა ქვემოთ დაწერილი სისტემები:

ა) $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=5, \\ 4x+6y&=7. \end{aligned}\right\}$

ბ) $\left.\begin{aligned} 5x-4y&=2, \\ 10x-8y&=9. \end{aligned}\right\}$

გ) $\left.\begin{aligned} x+7y&=19, \\ 9x-5y&=12. \end{aligned}\right\}$

§ 8. სამუცნობიან განტოლებათა სისტემა

სამუცნობიან განტოლებათა სისტემა ზოგადად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

ამ სისტემაში შემავალი განტოლებების ორივე მხარე გავამრავლოთ შესაბამისად შემდეგ დეტერმინანტებზე:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

და შემდეგ მიღებული განტოლებანი წევრობრივ შევკრიბოთ; გვექნება:

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ &- a_{31}a_{13}a_{22})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - \\ &- b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.1) სისტემის განტოლებები გავამრავლოთ შესაბამისად

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტებზე და მიღებული შედეგი წევრობრივ შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\Delta x_2 = b_2 a_{11} a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + b_3 a_{13} a_{21} - b_2 a_{13} a_{31} - b_1 a_{21} a_{33} - \\ - b_3 a_{11} a_{23}, \tag{3.4}$$

სადაც Δ არის (3.3) განტოლებაში x_1 უცნობის კოეფიციენტი. ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\Delta \cdot x_3 = b_3 a_{11} a_{22} + b_2 a_{12} a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - b_3 a_{12} a_{21} - \\ - b_2 a_{11} a_{32} - b_1 a_{22} a_{31}. \tag{3.5}$$

ვთქვათ,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

არის მესამე რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ მესამე რიგის დეტერმინანტი ვუწოდოთ შემდეგ გამოსახულებას:

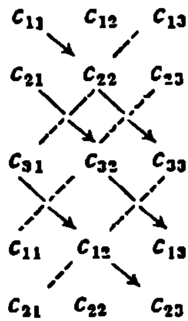
$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

ეს უკანასკნელი გამოსახულება რიცხობრივად იქნება:

$$c_{11} c_{22} c_{33} + c_{12} c_{23} c_{31} + c_{13} c_{21} c_{32} - c_{13} c_{22} c_{31} - \\ - c_{12} c_{21} c_{33} - c_{11} c_{23} c_{32}. \tag{3.7}$$

საინტერესოა ვიცოდეთ, თუ როგორ მიიღება ეს უკანასკნელი რიცხვი. როგორ უნდა გამოვთვალოთ მესამე რიგის დეტერმინანტი? ამისთვის საჭიროა გადმოვწეროთ მესამე რიგის დეტერმინანტი, მას ქვემოთ მივუწეროთ მისი პირველი ორი სტრიქონი, ავიღოთ დადებითი ნიშნით სამ-სამი ნამრავლი იმ ელემენტებისა, რომლებიც მდებარეობენ დეტერმინანტის მთავარ დიაგონალზე და მის პარალელურ ხაზებზე და უარყოფითი ნიშნით—მეორე დაიგონალზე და მის პარალელურ ხაზებზე.

გამოსათვლელ სქემას შემდეგი სახე აქვს:



აქ ისრებით ნაჩვენებია იმ ელემენტთა ნამრავლი, რომლებიც დადებითი ნიშნით აიღებიან, ხოლო პუნქტირებით—იმ ელემენტთა ნამრავლი, რომლებიც უარყოფითი ნიშნით აიღებიან.

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება აგრეთვე მისი მეორე რიგის დეტერმინანტზე დაყვანით. სახელდობრ, ავიღოთ პირველი სვეტის ელემენტები. დეტერმინანტიდან ამოვშალოთ პირველი სტრიქონი და პირველი სვეტი, დაგვრჩება

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

მეორე რიგის დეტერმინანტი. შემდეგ აღებული მესამე რიგის დეტერმინანტიდან ამოვშალოთ პირველი სვეტი და მეორე სტრიქონი, მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

მეორე რიგის დეტერმინანტს. დაბოლოს, ამოვშალოთ პირველი სვეტი და მესამე სტრიქონი, გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

მეორე რიგის დეტერმინანტი. მიღებული დეტერმინანტებიდან პირველი გავამრავლოთ a_{11}-ზე, მეორე a_{21}-ზე, მესამე a_{31}-ზე და ავიღოთ მათი ალგებრული ჯამი. ნიშანი პლუსი ჩავსვათ იმ ნამრავლის წინ, რომლის a_{ij} თანამამრავლის ინდექსთა ჯამი ლუწია, ხოლო მინუსი,— რომლის ინდექსთა ჯამი კენტია. გვექნება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$
$$- a_{31}a_{13}a_{22}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ამ უკანასკნელ გამოსახულებას, მაშინ (3.3), (3.4) და (3.5) განტოლებები შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta x_2 &= \Delta_2, \\ \Delta x_3 &= \Delta_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

სადაც

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ, Δ_1, Δ_2 და Δ_3 იმავე (3.1) სისტემის დეტერმინანტია რომელშიც სათანადოდ x_1, x_2 და x_3 უცნობთა კოეფიციენტები შეცვლილია თავისუფალი წევრებით. თუ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

თუ უცნობთა მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3.1) სისტემის განტოლებებში, ვნახავთ რომ ისინი დაკმაყოფილდებიან.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა. ვთქვათ, ვიხილავთ ისეთ მეურნეობას, რომელიც წარმოების ორი დარგისაგან შედგება.

a_{ij} ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) იყოს რომელიმე დარგის პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა რომელიმე დარგის ერთეული პროდუქციის დასამზადებლად. მაგალითად, a_{21} ნიშნავს მეორე დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა პირველი დარგის ერთეული პროდუქციის დასამზადებლად.

დავუშვათ, რომ პირველი დარგის ერთეული პროდუქციის დასამზადებლად საჭიროა a_{31} რაოდენობის შრომა, ხოლო მეორე დარგის ერთეული პროდუქციის დასამზადებლად a_{32} რაოდენობის შრომა.

a_{13} და a_{23} აღნიშნავს I და II დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა ერთი ერთეული შრომისათვის; ვინაიდან განხილულ მაგალითში I და II დარგის პროდუქცია არ არის საჭირო შრომისათვის, ამიტომ მათი მნიშვნელობა აიღება ნულის ტოლად. a_{33}, ცხადია, მიიღება ერთის ტოლად.

U და V-თი აღვნიშნოთ სათანადოდ პირველ და მეორე დარგში პროდუქციის საბოლოო მოთხოვნილება. W იყოს შრომის ის რაოდენობა, რომელიც იხარჯება წარმოების სფეროს გარეშე.

ზემოთ მოყვანილი მონაცემები წარმოვიდგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

	I დარგი	II დარგი	შრომა	საბოლოო მოთხოვნილება
I დარგი	a_{11}	a_{12}	0	U
II დარგი	a_{21}	a_{22}	0	V
შრომა	a_{31}	a_{32}	1	W

Z-ით აღვნიშნოთ ყველა შრომათა რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მთელი მეურნეობისათვის. X და Y-ით აღვნიშნოთ სათანადოდ I და II დარგში გამოშვებულ პროდუქციათა მთელი რაოდენობა.

ზემოთ ჩამოთვლილ მოცემულობათა საფუძველზე შევადგინოთ განტოლებანი. ცხადია, მთელი მეურნეობისათვის საჭირო შრომის რაოდენობა იქნება პირველ დარგში დამზადებული პროდუქციის საერთო რაოდენობა გამრავლებული ერთეულის დამზადებისთვის საჭირო შრომაზე პლუს მეორე დარგში დამზადებული პროდუქციის მთელი

რაოდენობა გამრავლებული ერთეულის დამზადებისათვის საჭირო შრომაზე და პლუს წარმოების სფეროს გარეშე დახარჯული შრომა. ამგვარად,

$$Z=a_{31}X+a_{32}Y+W.$$

პირველ დარგში გამოშვებული პროდუქციის მთლიანი რაოდენობა X იქნება პირველი დარგის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა პირველი დარგის ერთეული პროდუქციის დასამზადებლად, გამრავლებული პირველი დარგის მიერ გამოშვებული მთლიანი პროდუქციის რაოდენობაზე, პლუს პირველი დარგის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მეორე დარგის ერთეული პროდუქციის დასამზადებლად, გამრავლებული მეორე დარგის მიერ დამზადებული მთლიანი პროდუქციის რაოდენობაზე და პლუს პირველ დარგში პროდუქციაზე საბოლოო მოთხოვნილება. ამგვარად,

$$X=a_{11}X+a_{12}Y+U.$$

ანალოგიურად შევადგენთ, რომ

$$Y=a_{21}X+a_{22}Y+V.$$

ამგვარად, მივიღეთ სამუცნობიან განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X+a_{12}Y+U&=X, \\ a_{21}X+a_{22}Y+V&=Y, \\ a_{31}X+a_{32}Y+W&=Z. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

თუ ტექნოლოგიური კოეფიციენტები მუდმივ სიდიდეებად რჩება, მაშინ U, V და W-ს მოცემით შეიძლება განისაზღვროს X, Y და Z. ანდა, პირიქით, X, Y და Z-ის მოცემით შეიძლება U, V და W-ს განსაზღვრა. მაგალითად, (3.10) განტოლებათა სისტემა X, Y და Z-ის მიმართ რომ ამოვხსნათ, ამისათვის ის შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\left.\begin{aligned} (1-a_{11})X-a_{12}Y&=U, \\ -a_{21}X+(1-a_{22})Y&=V, \\ -a_{31}X-a_{32}Y+Z&=W. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

სისტემის დეტერმინანტი იქნება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & 1-a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{vmatrix}.$$

(3.11) განტოლებათა სისტემის ამონახსენს შემდეგი სახე ექნება:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} U & -a_{12} & 0 \\ V & 1-a_{22} & 0 \\ W & -a_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & 1-a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & U & 0 \\ -a_{21} & V & 0 \\ -a_{31} & W & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & 1-a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & U \\ -a_{21} & 1-a_{22} & V \\ -a_{31} & -a_{32} & W \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & 1-a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{vmatrix}}.$$

X, Y და Z-ის გამოსახულებაში თუ რიცხვით მონაცემებს ჩავსვამთ, გავიგებთ ამა თუ იმ კონკრეტულ შემთხვევაში როგორც დარგების მიხედვით დამზადებულ პროდუქციათა საერთო რაოდენობას, ისე იმ შრომის რაოდენობასაც, რომელიც იხარჯება მთლიანად მეურნეობაში.

§ 4. n-ური რიგის დეტერმინანტი

ვთქვათ, გვაქვს ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, n$$

თუ ასეთ მიმდევრობაში რომელიმე ელემენტს ადგილს შევუცვლით სხვა რომელიმე ელემენტთან, მაშინ ისინი ისეთ ადგილას აღმოჩნდებიან, რომ ზოგიერთი მათზე მეტი სიდიდის ელემენტი მიმდევრობაში უფრო წინ მოხვდება. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ისინი ქმნიან ინვერსიას.

თუ მიმდევრობაში n ელემენტია, მაშინ, როგორც ცნობილია, გადანაცვლებათა რიცხვი n ელემენტისგან იქნება $n!$, გადანაცვლება-

ში ინვერსიათა რიცხვი შემდეგნაირად უნდა გავიგოთ: ვთქვათ, 1-ის წინ დგას რიცხვთა s_1 რაოდენობა. შემდეგ ამოვშალოთ 1. დავუშვათ, აგრეთვე, რომ 2-ის წინ დგას რიცხვთა s_2 რაოდენობა და ა. შ. ინვერსიათა რიცხვი მიმდევრობაში ეუწოდოთ

$$s=\sum_{i=1}^{n-1} s_i$$

ჯამს. ასე, მაგალითად,

$$4,\ 7,\ 1,\ 5,\ 3,\ 2,\ 6$$

მიმდევრობაში ინვერსიათა რიცხვი შემდეგნაირად იანგარიშება:

$$s_1=2,\ s_2=4,\ s_3=3,\ s_4=0,\ s_5=1,\ s_6=1$$

და, მაშასადამე, ინვერსიათა რიცხვი მთელ მიმდევრობაში იქნება $s=11$.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

გამოსახულებას n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება. n-ური რიგის დეტერმინანტში იგულისხმება რიცხვი, რომელიც მიიღება დეტერმინანტის ისეთ n ელემენტთა ნამრავლების ალგებრული ჯამისაგან, რომლის თითოეულ შესაკრებში დეტერმინანტის ყოველი სტრიქონის და სვეტის მხოლოდ ერთი ელემენტია წარმოდგენილი. თითოეული შესაკრების ნიშანს განსაზღვრავს მასში ინვერსიათა რაოდენობა. თუ ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, ნიშანი ექნება პლუსი, ხოლო თუ ინვერსიათა რიცხვი კენტია, მაშინ ნიშანი ექნება მინუსი.

როგორც ვიცით, დეტერმინანტის ელემენტებს ორმაგი ინდექსი აქვს. ინვერსიათა რიცხვის გასაგებად ნამრავლი უნდა დავალაგოთ პირველი ინდექსის ზრდადობით და ინვერსიები ვიანგარიშოთ მეორე ინდექსთა მიხედვით.

მაგალითად, ვთქვათ, მეექვსე რიგის დეტერმინანტის ერთ-ერთი შესაკრებია

$$a_{66}a_{14}a_{51}a_{32}a_{43}a_{25}$$

ნამრავლი. ინვერსიათა რიცხვის გასაგებად ის გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}.$$

ახლა ინვერსიათა რიცხვს თუ ვიანგარიშებთ მეორე ინდექსების მიხედვით, გვექნება: $s=4+2+2+0+0=8$. მაშასადამე, აღებულ შესაკრებს დაეწერება ნიშანი $+$.

თუ ნამრავლი არ არის დალაგებული პირველი ინდექსის ზრდადობით და ვიანგარიშებთ ინვერსიათა რიცხვს როგორც პირველი, ისე მეორე ინდექსის მიხედვით, ხოლო შემდეგ ნამრავლს დავალაგებთ და ვიანგარიშებთ მეორე ინდექსების მიხედვით ინვერსიათა რიცხვს, ვნახავთ, რომ ინვერსიათა რიცხვი ორივე შემთხვევაში იქნება ერთდროულად ლუწი ან კენტი.

თუ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობის პირველ n წევრს განვიხილავთ, გვექნება $n!$ გადანაცვლება, რომლებშიც კენტი და ლუწი რაოდენობის ინვერსიათა რიცხვის მქონე მიმდევრობანი ერთმანეთის ტოლი იქნება და ედრება $\frac{n!}{2}$-ს.

გარკვეული ნიშნით აღებული დეტერმინანტის ელემენტთა ნამრავლი, რომლებიც ყოველი სტრიქონის და სვეტის წარმომადგენელ თითო ელემენტს შეიცავს, დეტერმინანტის წევრად იწოდება.

თუ A დეტერმინანტის სვეტებს შევცვლით სტრიქონებით ანდა, პირიქით, მივიღებთ ე. წ. A-ს მიმართ ტრანსპონირებულ დეტერმინანტს.

განვიხილოთ n-ური რიგის დეტერმინანტის თვისებები:

1. დეტერმინანტის მნიშვნელობა ტრანსპონირებით არ შეიცვლება. მართლაც, ორივე დეტერმინანტის წევრები თავიანთი ნიშნებით ერთმანეთს დაემთხვევა. ამგვარად, დეტერმინანტში სტრიქონებს და სვეტებს ერთი და იგივე უფლება აქვთ და ამიტომ დებულებები, რომლებიც მტკიცდება სტრიქონების მიმართ, ძალაში რჩება სვეტებისთვისაც.

2. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ელემენტები ნულის ტოლია, ასეთი დეტერმინანტის მნიშვნელობა ნული იქნება.

ამ თვისების მართებულება, იქიდან ჩანს, რომ თუ განვიხილავთ დეტერმინანტის წევრებს, მათში ერთი თანამამრავლი მაინც იქნება ნული, რაც მათ ნულად აქცევს.

3. თუ დეტერმინანტის ორ სტრიქონს ადგილებს შევუცვლით, ამით დეტერმინანტს ნიშანი შეეცვლება.

4. თუ დეტერმინანტს ორი სტრიქონი ერთმანეთის ტოლი აქვს, ასეთი დეტერმინანტი ნულია.

მართლაც, ეს ასე რომ არ იყოს, მაშინ ტოლ სტრიქონთა ადგილების შეცვლა დეტერმინანტს ნიშანს შეუცვლიდა და მივიღებდით, რომ უარყოფითი რიცხვი ემთხვევა დადებით რიცხვს. ეს მხოლოდ ნულის ტოლი რიცხვის მიმართაა მართებული.

5. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტს

გავამრავლებთ ერთსა და იმავე რიცხვზე, ამით მთელი დეტერმინანტი გამრავლდება იმავე რიცხვზე.

ეს თვისება იქიდან გამომდინარეობს, რომ დეტერმინანტის ყოველ წევრში ერთ-ერთი თანამამრავლი გამრავლებული იქნება ამ რიცხვზე და, მაშასადამე, მისი გამოტანა შეიძლება ფრჩხილებს გარეთ მთელი ჯამიდან.

6. თუ დეტერმინანტის ორი სტრიქონი პროპორციულია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ნულია.

მართლაც, თუ პროპორციულობის კოეფიციენტს დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გავიტანთ, დაგვრჩება დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონი ერთმანეთის ტოლია და, როგორც ვნახეთ, ასეთი დეტერმინანტი ნულია.

7. თუ დეტერმინანტის მთავარი დიაგონალის წევრები ნულისგან განსხვავებულია, ხოლო მისი ზემოთ ან ქვემოთ მდებარე ყველა ელემენტი ნულია, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა მთავარ დიაგონალზე მდგომ ელემენტთა ნამრავლის ტოლია.

ცხადია, რომ ნული შეიძლება იყოს დეტერემინანტის ის წევრი, რომელიც პირველი სტრიქონიდან a_{11} მამრავლს შეიცავს, ხოლო მეორე სტრიქონიდან a_{22} ელემენტს (a_{21} არ შევა თანამამრავლად, რადგან ის იმავე სვეტზეა მოთავსებული, რომელზედაც a_{11}-ია). ასევე მესამე სტრიქონიდან თანამამრავლად შევა მხოლოდ a_{33} და ა. შ. ამგვარად მივიღებთ, რომ დეტერმინანტის მნიშვნელობა ტოლია მთავარ დიაგონალზე მდგომ ელემენტთა ნამრავლის. თუ ანალოგიურ მდგომარეობას ადგილი აქვს მეორე გვერდითი დიაგონალის მიმართ, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა ამ დიაგონალზე მდგომ ელემენტთა ნამრავლი იქნება, მხოლოდ ნიშანი სათანადოდ უნდა შეირჩეს.

8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტი ორ სიდიდეთა ჯამს წარმოადგენს, მაშინ ასეთ დეტერმინანტს წარმოადგენენ ორი ისეთი დეტერმინანტის ჯამის სახით, რომლებიც აღებული დეტერმინანტისაგან მიიღება, თუ პირველში იმ სტრიქონის მაგივრად, რომელშიაც ორ-ორი შესაკრებია პირველ შესაკრებებს დავტოვებთ, ხოლო მეორეში — მეორე შესაკრებებს.

მაგალითად, ზემომოყვანილი თვისება შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ მეორე რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს ერთსა და იმავე მუდმივ რიცხვზე, ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

მაგალითად,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მართლაც, ზემოთ დამტკიცებული თვისების თანახმად დავწერთ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მაგრამ, თუ მეორე შესაკრები დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტიდან საერთო თანამამრავლ k-ს გავიტანთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, დაგვრჩება ისეთი დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონი ერთი და იგივეა. როგორც ვნახეთ, ასეთი დეტერმინანტი ნულია და დაგვრჩება მხოლოდ Δ დეტერმინანტი. ამგვარად, მე-9 თვისება მართებულია.

10. თუ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს დავუმატებთ შესაბამისად რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების წრფივ კომბინაციას, ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

მაგალითად, განვიხილოთ იგივე მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

მაშინ, ჩამოყალიბებული თვისების თანახმად

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21}+\beta a_{31} & a_{12}+\alpha a_{22}+\beta a_{32} & a_{13}+\alpha a_{23}+\beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

მაგრამ, თუ მე-8 თვისებას ორჯერ ზედიზედ გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta a_{31} & \beta a_{32} & \beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მეხუთე თვისების ძალით კი დავწერთ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

უკანასკნელი ორი დეტერმინანტი კი მეოთხე თვისების თანახმად ნულია. ამგვარად, გვრჩება ისევ მხოლოდ Δ დეტერმინანტი და ამრიგად, მე-10 თვისებაც მართებული ყოფილა.

§ 6. მინორები. დეტერმინანტის ელემენტების ალგებრული დამატება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n-ური რიგის დეტერმინანტი. თუ მისგან გამოვყოფთ ნებისმიერ k სტრიქონს და ამდენსავე სვეტს ($k<n$) მაშინ მათი საერთო ელემენტები შექმნიან k^2 რიგის მატრიცას. ამ მატრიცისგან შედგენილ დეტერმინანტს აღებულის მიმართ მინორი ეწოდება. n-ური რიგის დეტერმინანტს შეიძლება ჰქონდეს მინორები დაწყებული პირველი რიგიდან $n-1$-მდე.

ვთქვათ,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ავიღოთ, რომელიმე a_{ik} ელემენტი. Δ დეტერმინანტიდან ამოვშალოთ ის სვეტი და სტრიქონი, რომელშიც a_{ik} ელემენტი შედის. ამის შედეგად მივიღებთ $n-1$ რიგის მინორს, რომელიც a_{ik} ელემენტს შეესაბამება.

თუ მიღებულ $n-1$ რიგის მინორს გავამრავლებთ $(-1)^{i+k}$ მამრავლზე, მაშინ მიღებულ ნამრავლს ეწოდება a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება. აღვნიშნოთ იგი A_{ik}-თი.

ალგებრულ დამატებათა გამოყენებით n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება. სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს:

I. დეტერმინანტის მნიშვნელობა მისი რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ელემენტთა შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის ტოლია.

მაგალითად,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}.$$

მართლაც, თუ დეტერმინანტს წარმოვადგენთ მისი წევრების ჯამის სახით და ისეთი წევრებიდან, რომლებშიც მამრავლად შედის a_{ik} ელემენტი, ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ საერთო მამრავლ a_{ik}-ს, მაშინ ფრჩხილებს შიგნით დარჩენილი გამოსახულება აბსოლუტური მნიშვნელობით დაემთხვევა a_{ik} ელემენტის შესაბამის მინორს. თუ $i+k$ ლუწია, მაშინ ფრჩხილებს შიგნით გამოსახულებას და მინორს ერთი და იგივე ნიშანი ექნება; თუ $i+k$ კენტია, მაშინ მათ საწინააღმდეგო ნიშნები ექნებათ.

II. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებს სხვა სვეტის ან სტრიქონის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე გავამრავლებთ და მიღებულ სიდიდეებს შევკრებთ, ნულს მივიღებთ.

მართლაც, Δ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტები შევცვალოთ ახალი რიცხვებით: $b_1, b_2, \ldots, b_n$, მაშინ, თუ დეტერმინანტს ამ სტრიქონის ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის სახით წარმოვადგენთ, გვექნება:

$$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}.$$

ახლა i-ური სტრიქონის ელემენტები შევცვალოთ k-ური სტრიქონის შესაბამისი ელემენტებით. რადგანაც ახალი დეტერმინანტის ორი სტრიქონი ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ ასეთი დეტერმინანტი იქნება ნულის ტოლი. მეორე მხრივ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, დეტერმინანტის მნიშვნელობა იქნება:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}.$$

მაშასადამე, ნული ყოფილა დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ელემენტთა სხვა სვეტის ან სტრიქონის ელემენტთა შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი.

§ 6. ლაპლასის თეორემა

ვთქვათ, Δ დეტერმინანტი n-ური რიგისაა და მისგან შევარჩიოთ k-ური რიგის მინორი. k-ური რიგის დამატებითი მინორი ვუწოდოთ

$n-k$ რიგის ისეთ დეტერმინანტს, რომელიც Δ დეტერმინანტისგან მიიღება იმ k სტრიქონისა და k სვეტის ამოშლით, რომლებთაგან თავიდან შერჩეული k-ური რიგის მინორია შედგენილი. k-ური რიგის მინორის ალგებრული დამატება ვუწოდოთ დამატებით მინორს გამრავლებულს $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$-ზე, სადაც $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k$ არის Δ დეტერმინანტის იმ სტრიქონების და სვეტების ნომრები, რომლებისგანაც k-ური რიგის მინორია შედგენილი.

დავუშვათ, გვაქვს მეექვსე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

აქედან შევარჩიოთ მესამე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{16} \\ a_{31} & a_{33} & a_{36} \\ a_{41} & a_{43} & a_{46} \end{vmatrix},$$

მაშინ ამ მინორის დამატებითი მინორი იქნება

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{62} & a_{64} & a_{65} \end{vmatrix},$$

ხოლო ალგებრული დამატება იქნება

$$(-1)^{1+3+6+1+3+4} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{62} & a_{64} & a_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{62} & a_{64} & a_{65} \end{vmatrix}.$$

ლაპლასის თეორემის შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ, n-ური რიგის Δ დეტერმინანტში შევარჩიეთ k სტრიქონი, მაშინ ამ სტრიქონების შემცველ k-ური რიგის მინორების თავიანთ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი გვაძლევს Δ-ს.

მაგალითად, ვთქვათ, მოცემულია

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

მაშინ, თუ შევარჩევთ პირველ და მეოთხე სტრიქონებს, ლაპლასის თეორემის თანახმად დავწერთ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+1+2} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{41} & a_{45} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+1+5} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{53} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+2+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+2+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+2+5} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+3+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+3+5} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} (-1)^{1+4+4+5} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}.$$

ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

მაშინ ლაპლასის თეორემის ძალით გვექნება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

ცხადია, რომ პირველი ორი სტრიქონის დანარჩენი მინორი ნულის ტოლი ხდება.

§ 7. n-უცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

ვთქვათ, მოცემულია n წრფივ განტოლებათა სისტემა n უცნობით

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (7.1)$$

(7.1) სისტემის თითოეული განტოლება გავამრავლოთ სათანადოდ i-ური სვეტის ალგებრულ დამატებებზე, რომლებიც შედგენილია ამ სისტემის უცნობთა კოეფიციენტებისგან და მიღებული განტოლებანი წევრობრივ შევკრიბოთ. გვექნება:

$$\begin{array}{l} (a_{11}A_{1i}+a_{21}A_{2i}+\ \dots\ +a_{n1}A_{ni})x_1+ \\ +(a_{12}A_{1i}+a_{22}A_{2i}+\ \dots\ +a_{n2}A_{ni})x_2+ \\ +\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ + \\ +(a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\ \dots\ +a_{ni}A_{ni})x_i+ \\ +\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ + \\ +(a_{1n}A_{1i}+a_{2n}A_{2i}+\ \dots\ +a_{nn}A_{ni})x_n= \\ =b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ \dots\ +b_nA_{ni}. \end{array} \qquad (7.2)$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებს შესაბამისად გავამრავლებთ სხვა რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე და მიღებულ ნამრავლებს შევკრებთ, მივიღებთ ნულს. ამიტომ (7.2) განტოლების მარცხე-

ნა მხარეს მდგომი უცნობთა კოეფიციენტები, გარდა x_i-ისა, იქნებიან ნულის ტოლი და, მაშასადამე, დაგვრჩება

$$(a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\dots+a_{ni}A_{ni})x_i=$$
$$=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\dots+b_nA_{ni}. \tag{7.3}$$

აქ x_i-ის კოეფიციენტი არის უცნობთა კოეფიციენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი, ე. წ. სისტემის დეტერმინანტი, რომელიც აღვნიშნოთ D-თი, ხოლო მარჯვენა მხარე წარმოადგენს იმავე სისტემის დეტერმინანტს, რომლის i-ური სვეტი შეცვლილია თავისუფალი წევრებით. ეს უკანასკნელი აღვნიშნოთ D_i-თი, მაშინ დავწერთ

$$Dx_i=D_i; \tag{7.4}$$

ან, თუ $D\neq 0$, მაშინ

$$x_i=\frac{D_i}{D}, \tag{7.4'}$$

სადაც $i=1, 2, \dots, n$.

მიღებული (7.4′) ფორმულა პირველად კრამერმა მიიღო და ამიტომ მას კრამერის ფორმულებს უწოდებენ. ანალოგიური ფორმულები ჩვენ მიღებული გვქონდა ორ და სამუცნობიან განტოლებათა სისტემების ამოხსნის დროს.

ცხადია, ამონახსენს რომ აზრი ჰქონდეს, სისტემის დეტერმინანტი D უნდა იყოს ნულისგან განსხვავებული.

ამგვარად, (7.4′) კრამერის ფორმულები გვეუბნებიან, რომ n-უცნობიანი n განტოლებათა სისტემის ამონახსენი უდრის წილადს, რომლის მნიშვნელია სისტემის დეტერმინანტი (რომელიც განსხვავებულია ნულისგან), ხოლო მრიცხველი, მაგალითად, x_k უცნობისთვის იქნება იმავე სისტემის დეტერმინანტი, რომლის k-ური სვეტის ელემენტები შეცვლილია თავისუფალი წევრებით.

§ 8. უცნობთა გამორიცხვის გაუსის მეთოდი

თუ განტოლებათა და უცნობთა რიცხვი n საკმაოდ დიდია, მაშინ კრამერის ფორმულებით სარგებლობა ბევრ და ხანგრძლივ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში ხშირად მიმართავენ უცნობთა გამორიცხვის მეთოდს, რომელიც გაუსის მიერ იყო დამუშავებული.

განვიხილოთ n-უცნობიანი n განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

როგორც ცნობილია, ჯერ კიდევ ელემენტარული მათემატიკის კურსში ამ სისტემის ამოსახსნელად რომელიმე ერთ-ერთი განტოლებიდან განსაზღვრავენ x_1 უცნობს და მის მნიშვნელობას ჩასვამენ ყველა დანარჩენ განტოლებაში. ღებულობენ $n-1$ განტოლებას $n-1$ უცნობით. შემდეგ ასევე განსაზღვრავენ ერთ-ერთიდან x_2-ს, ჩასვამენ მიღებულ მნიშვნელობას დანარჩენ განტოლებებში და ღებულობენ $n-2$ განტოლებას $n-2$ უცნობით და ა. შ. განისაზღვრება x_n უცნობი. x_n-ის მნიშვნელობა ჩაისმება წინა ორუცნობიან განტოლებათა სისტემაში და განისაზღვრება x_{n-1} და ა. შ. x_1 უცნობი.

პირველ რიგში განვიხილოთ ე. წ. „სამკუთხა" განტოლებათა სისტემა, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{nn}x_n&=b_n, \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

სადაც $a_{ii}\neq 0$. ამიტომ, რადგანაც ასეთი სისტემის დეტერმინანტი $\Delta=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, ცხადია, ის განსხვავებულია ნულისგან. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (8.2) სისტემა განსაზღვრულია.

(8.2) სისტემის უკანასკნელი განტოლებიდან დავწერთ:

$$x_n=\frac{b_n}{a_{nn}}. \tag{8.3}$$

x_n-ის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (8.2) სისტემის უკანასკნელის წინა განტოლებაში. მივიღებთ

$$a_{n-1,n-1}\,x_{n-1}+a_{n-1,n}\frac{b_n}{a_{nn}}=b_{n-1},$$

საიდანაც

$$x_{n-1}=\frac{b_{n-1}-\dfrac{a_{n-1,n}\,b_n}{a_{nn}}}{a_{n-1,\,n-1}},$$

ამგვარად, თუ მივყვებით ქვემოდან ზევით, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ სისტემაში შემავალი ყველა უცნობი.

ახლა ვნახოთ, თუ (8.1) ჩვეულებრივი სისტემიდან, როგორ შეიძლება მივიღოთ (8.2) სამკუთხა სისტემა.

ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11}\neq 0$; პირველი განტოლება გავამრავლოთ $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ზე და მიღებული დავუმატოთ მეორე განტოლებას, მაშინ მეორე განტოლების მაგივრად გვექნება შემდეგი წრფივი განტოლება:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}}\right)x_2+\left(a_{23}-\frac{a_{13}\,a_{21}}{a_{11}}\right)x_3+\cdots+$$

$$+\left(a_{2n}-\frac{a_{1n}\,a_{21}}{a_{11}}\right)x_n=b_2-\frac{a_{21}b_1}{a_{11}}. \tag{8.4}$$

ანდა, რაც იგივეა,

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2+(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_3+$$

$$+\cdots+(a_{11}a_{2n}-a_{1n}a_{21})x_n=a_{11}b_2-a_{21}b_1. \tag{8.5}$$

ეს უკანასკნელი განტოლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}x_3+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2n}\end{vmatrix}x_n=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}. \tag{8.6}$$

სავსებით ანალოგიურად პირველი და მესამე განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}x_3+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{31} & a_{3n}\end{vmatrix}x_n=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{31} & b_3\end{vmatrix}. \tag{8.7}$$

და ა. შ.

საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომლის მხოლოდ პირველ განტოლებაში შედის x_1 და დანარჩენებში არა.

სავსებით ანალოგიურად, როგორც x_1 გამოვრიცხეთ ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა, ასევე, გარდაქმნილი სისტემის პირველი ორი განტოლების გარდა, სხვებისგან გამოვრიცხავთ x_2-ს და ა. შ. რის შედეგად ბოლოს და ბოლოს (8.1) განტოლებათა სისტემა გადაიქცევა სამკუთხა სისტემად.

მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა და ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით:

$$
\left.\begin{array}{r}
2x+3y-2z+t-4u=-3, \\
x-y+3z-t+2u=1, \\
3x-y+2z+5t-3u=1, \\
2x+2y+3z+t-u=0, \\
x-4y-z+3t-2u=-2.
\end{array}\right\}
$$

პირველი განტოლება დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო დანარჩენი განტოლებანი შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.
$$

ანდა, თუ დეტერმინანტების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ, დავწერთ:

$$
\left.\begin{array}{l}
2x+3y-2z+t-4u=-3, \\
-5y+8z-3t+8u=5, \\
-11y+10z+7t+6u=11, \\
-y+5z+0t+3u=3, \\
-11y+0\cdot z+5t+0\cdot u=-1.
\end{array}\right\}
$$

მიღებული სისტემის პირველი ორი განტოლება დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო დანარჩენები ანალოგიურად შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$
\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -11 & 10 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 7 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -11 & 6 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -11 & 11 \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -11 & 0 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} t+\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -11 & 0 \end{vmatrix} u=\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -11 & -1 \end{vmatrix}.
$$

ანდა ჩვენი სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left.\begin{aligned}&2x+3y-2z+t-4u=-3,\\&-5y+8z-3t+8u=5,\\&19z-34t+29u=0,\\&-17z-3t-7u=-10,\\&44z-29t+44u=30.\end{aligned}\right\}$$

ახლა კი მიღებული სისტემის პირველი სამი განტოლება დავტოვოთ უცვლელად და დანარჩენი ორი წინას ანალოგიურად გარდავქმნათ:

$$\begin{vmatrix}19 & -34\\-17 & -3\end{vmatrix}t+\begin{vmatrix}19 & 29\\-17 & -7\end{vmatrix}u=\begin{vmatrix}19 & 0\\-17 & -10\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}19 & -34\\44 & -29\end{vmatrix}t+\begin{vmatrix}19 & 29\\44 & 44\end{vmatrix}u=\begin{vmatrix}19 & 0\\44 & 30\end{vmatrix}.$$

თუ მიღებულ დეტერმინანტებს გამოვთვლით და სათანადო მნიშვნელობებს შევიტანთ, ჩვენი სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left.\begin{aligned}&2x+3y-2z+t-4u=-3,\\&-5y+8z-3t+8u=5,\\&19z-34t+29u=0,\\&-127t+72u=-38,\\&189t-88u=114.\end{aligned}\right\}$$

ახლა კი უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ t უცნობი

$$\begin{vmatrix}-127 & 72\\189 & -88\end{vmatrix}u=\begin{vmatrix}-127 & -38\\189 & 114\end{vmatrix}$$

ან, რაც იგივეა,

$$2432u=7296$$

ანდა

$$u=3.$$

ამგვარად, საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ სამკუთხა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-2z+t-4u&=-3,\\-5y+8z-3t+8u&=5,\\19z-34t+29u&=0,\\127t-72u&=38,\\u&=3.\end{aligned}\right\}$$

თავი II

მატრიცები

§ 1. წრფივი გარდაქმნები

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის დროს ხშირია შემთხვევა, როცა განტოლებაში ან განტოლებათა სისტემაში შემავალ უცნობებს გამოსახავენ სხვა ახალი უცნობებით. ძველი უცნობებიდან ახალზე გადასვლა ხშირად ხდება განტოლებათა სისტემის მოცემით, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ახალსა და ძველ უცნობებს; მას ცვლადთა გარდაქმნას უწოდებენ. ასეთ გარდაქმნათა შორის ერთ-ერთი ყველაზე მარტივია ე. წ. წრფივი გარდაქმნა.

ცვლადთა წრფივი გარდაქმნა ეწოდება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადთა სისტემიდან $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ცვლადთა სისტემაზე გადასვლას, რომელიც შემდეგი დამოკიდებულებებით განისაზღვრება:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m, \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

სადაც a_{ij} $(i=1, 2, \ldots, n,\ j=1, 2, \ldots, m)$ მუდმივი კოეფიციენტებია.

მაგალითად, კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა კოორდინატთა ღერძების φ კუთხით მობრუნების შედეგად იქნება წრფივი გარდაქმნა. სახელდობრ, წერტილის ძველი კოორდინატები x და y, ახალი კოორდინატების x' და y'-ის მიმართ შემდეგ წრფივ დამოკიდებულებაში იქნებიან:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

(1.1) წრფივ დამოკიდებულებას ფაქტიურად უცნობთა წინ მდგომი კოეფიციენტები განსაზღვრავს. შევადგინოთ ამ კოეფიციენტებისაგან შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{matrix}$$

შევთანხმდეთ და ამგვარ ცხრილს ჩასმულს მრგვალ ფრჩხილებში ვუწოდოთ მატრიცა. ამგვარად, გვექნება

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ & & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

მატრიცა. თუ ცნობილი იქნება A მატრიცა ამით გვეცოდინება (1.1) წრფივი გარდაქმნაც..

A მატრიცას n სტრიქონი და m სვეტი აქვს. იმ შემთხვევაში, როდესაც $n=m$, გვექნება კვადრატული მატრიცა. პირველ რიგში განვიხილოთ სწორედ კვადრატული მატრიცა და ვაჩვენოთ მისი რამდენიმე თვისება. ჩვენ მიერ დაწერილ A მატრიცს ექნება n სტრიქონი და m სვეტი. საზოგადოდ, ორი მატრიცა ტოლია, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთს ემთხვევა.

ვთქვათ, რაიმე წრფივი გარდაქმნის შედეგად გვაქვს კვადრატული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix},$$

რომელსაც x_i უცნობებიდან გადავყავართ y_i უცნობებზე ($i=1, 2, \ldots, n$). ვიგულისხმოთ, რომ მეორე

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & & \cdot & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

კვადრატულ მატრიცას y_i უცნობები გადაყავთ z_i უცნობებზე. ისმება კითხვა შეიძლება თუ არა, ვაწარმოოთ ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომ x_i უცნობებიდან პირდაპირ გადავიდეთ z_i უცნობებზე. ე. ი. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ისეთი C მატრიცა, რომელიც განსაზღვრავს x_i უცნობთა z_i უცნობებზე გადასვლას. ცხადია, გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n, \\ y_i &= b_{j1}z_1+b_{j2}z_2+\cdots+b_{jn}z_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} x_i = & a_{i1}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n) + \\ & + a_{i2}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n) + \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \\ & + a_{in}(b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n) \end{aligned} \tag{1.3}$$

ან

$$\begin{aligned} x_i = & (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1})z_1 + \\ & + (a_{i2}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2})z_2 + \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \\ & + (a_{in}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \ldots + a_{in}b_{1n})z_n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

ახლა გასაგებია, თუ როგორ უნდა შევადგინოთ C მატრიცის ელემენტები:

$$\begin{aligned} c_{i1} &= a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1}, \\ c_{i2} &= a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2}, \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

შევთანხმდეთ და C მატრიცას ვუწოდოთ A და B მატრიცათა ნამრავლი, თუ C-ს ელემენტები გამოისახებიან (1.5) ფორმულის საშუალებით.

ამგვარად, A და B მატრიცათა ნამრავლი ეთანადება წრფივ გარდაქმნას, რომელიც ტოლფასია, მიმდევრობით ორი წრფივი გარდაქმნის: პირველი A მატრიცით, მეორე კი B მატრიცით. ამას სიმბოლურად შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$C = AB. \tag{1.6}$$

საზოგადოდ,

$$AB \neq BA, \tag{1.7}$$

ხოლო

$$ABC = A(BC) = (AB)C. \tag{1.8}$$

C მატრიცის c_{ij} ელემენტის მისაღებად საჭიროა ავიღოთ A მატრიცის i-ური სტრიქონის B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე წყვილ-წყვილად ნამრავლთა ჯამი (a_{ik} ელემენტის შესაბამისი იქნება b_{kj}).

ვთქვათ, მაგალითისათვის გვაქვს მატრიცები:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

მაშინ C მატრიცის ელემენტები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\begin{aligned}
c_{11}&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31},\\
c_{12}&=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32},\\
c_{13}&=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33},\\
c_{21}&=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31},\\
c_{22}&=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{32},\\
c_{23}&=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33},\\
c_{31}&=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31},\\
c_{32}&=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32},\\
c_{33}&=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}.
\end{aligned}$$

§ 2. მოქმედებანი მატრიცებზე

მატრიცებთან დაკავშირებით შემოვიყვანოთ რიგი საჭირო განსაზღვრანი:

1. დიაგონალური მატრიცა ეწოდება ისეთ კვადრატულ მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი, რომელიც მთავარ დიაგონალზე არ მდებარეობს, ნულის ტოლია.

მაგალითად, დიაგონალურ მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22}, 0 & & 0 \\ & \cdot & & \\ 0 & 0 \,. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. ერთეული მატრიცა ეწოდება ისეთ დიაგონალურ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი ერთის ტოლია.

ერთეული მატრიცა, რომელსაც E-თი აღვნიშნავთ, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ადვილად შეიძლება იმის შემოწმება, რომ როგორიც არ უნდა იყოს კვადრატული მატრიცა A, თუ ის იმავე რიგისაა, რა რიგისაც არის E, მაშინ

$$AE=EA=A.$$

3. კვადრატულ მატრიცას ეწოდება გადაუგვარებელი, თუ მისი შესაბამისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცა იქნება გადაგვარებული.

თუ რომელიმე მატრიცის ერთი სვეტის ან სტრიქონის ელემენტები ნულია, მაშინ ასეთი მატრიცა, ცხადია, იქნება გადაგვარებული. პირიქით გარემოებას შესაძლებელია ადგილი არ ჰქონდეს. შესაძლებელია მატრიცა გადაგვარებული იყოს, მაგრამ მისი არც ერთი სტრიქონის და სვეტის ყველა ელემენტი არ იყოს ნულის ტოლი.

თუ გვაქვს ორი მატრიცა: A და B, რომელთა ნამრავლია C, მაშინ მათ შესაბამის დეტერმინანტთა ნამრავლი ტოლი იქნება C-ს შესაბამისი დეტერმინანტის:

$$|C|=|A||B|.$$

ცხადია, რომ მატრიცათა ნამრავლი მაშინ იქნება გადაგვარებული, თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი მატრიცა გადაგვარებულია.

4. ვთქვათ, მოცემულია A მატრიცა და n რაიმე ნატურალური რიცხვი, მაშინ

$$A^n=\underbrace{A\cdot A\ \cdot\ \cdot\ \cdot A}_{n\text{-ჯერ}}$$

გამოსახულებას ეწოდება A მატრიცის n-ური ხარისხი.

ადვილად შეიძლება შემოწმება იმისა, რომ

$$A^n\cdot A^m=A^{n+m}.$$

დიაგონალური მატრიცა, რომ ავახარისხოთ რაიმე ხარისხში, მისი მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი უნდა ავახარისხოთ იმავე ხარისხში.

მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & b^k & 0 & 0\\ 0 & 0 & c^k & 0\\ 0 & 0 & 0 & d^k\end{pmatrix}.$$

მართლაც,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d^2\end{pmatrix}$$

და ნებისმიერი k-თვის გვექნება:

$$\begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^{k+1} \end{pmatrix}.$$

აგრეთვე, თუ გვაქვს რამდენიმე დიაგონალური მატრიცა, მაშინ მათი ნამრავლი მოგვცემს ისევ დიაგონალურ მატრიცას, რომლის მთავარი დიაგონალის ელემენტები თანამამრავლ მატრიცათა მთავარ დიაგონალზე მდგომ შესაბამის ელემენტთა ნამრავლის ტოლი იქნება.

მაგალითად, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$C=AB=\begin{pmatrix} 9-4 & 12-10 \\ 15-8 & 20-20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

აგრეთვე, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$C=AB=\begin{pmatrix} 0-5 & 0+0 \\ 3-2 & 6+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A^3=AA^2=A\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე A მატრიცა და k მუდმივი რიცხვი, მაშინ მათი ნამრავლი იქნება ისეთი B მატრიცა, რომლის ელემენტები იქნება A მატრიცის შესაბამისი ელემენტები, გამრავლებული k მუდმივ რიცხვზე.

მაგალითად, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

და $k=4$, მაშინ

$$B=kA=4\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \\ -4 & 16 & 4 \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ თუ მატრიცის ყველა ელემენტს აქვს საერთო მამრავლი, მაშინ მისი გამოტანა შეიძლება მატრიცის ნიშნის გარეთ.

აგრეთვე, ცხადია, რომ თუ რაიმე მატრიცას გავამრავლებთ ნულზე მივიღებთ ისეთ მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, ე. ი. მივიღებთ ნულოვან მატრიცას.

ვთქვათ, A და B ერთი და იმავე რიგის მატრიცაა, მაშინ მათი ჯამი C იქნება ისეთი მატრიცა, რომლის ელემენტები A და B მატრიცათა შესაბამისი ელემენტების ჯამის ტოლია.

მაგალითად, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ რაიმე A მატრიცას რომ დავუმატოთ ნულოვანი მატრიცა, მივიღებთ იგივე A მატრიცას.

მატრიცებზე მოქმედების დროს ადგილი აქვს შემდეგ კანონებს:

$$A+B=B+A$$

და

$$(A+B)C=AC+BC$$

A მატრიცის და -1 რიცხვის ნამრავლი გვაძლევს $-A$ მატრიცას. ცხადია, რომ

$$A+(-A)=O,$$

სადაც O აღნიშნავს ნულოვან მატრიცას.

ორი, A და B, მატრიცის სხვაობა განისაზღვრება, როგორც A და $-B$ მატრიცათა ჯამი. სახელდობრ:

$$A - B = A + (-B).$$

როგორც ვიცით, ურთიერთშებრუნებული რიცხვები ისეთებს ეწოდებათ, რომელთა ნამრავლი ერთის ტოლია

$$a \cdot \frac{1}{a} = aa^{-1} = 1.$$

ასევე ანალოგიურად განიმარტება შებრუნებული მატრიცის ცნებაც.

თუ A რაიმე მატრიცაა და E კი —ერთეული მატრიცა, მაშინ, როგორც ვნახეთ

$$AE = EA = A.$$

აქ E ასრულებს იმავე ერთეულის როლს მატრიცათა ალგებრაში, რასაც ერთიანი ასრულებს ჩვეულებრივ ალგებრაში.

ვთქვათ, A რაიმე მატრიცაა, მაშინ A-ს შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება A^{-1}-ით და მართებულია ტოლობა:

$$A^{-1}A = E.$$

ცხადია, რომ თუ A გადაგვარებული მატრიცაა, მაშინ A^{-1} შებრუნებული მატრიცა არ იარსებებს.

ვთქვათ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მაშინ A-ს მიმართ „მიკავშირებული" მატრიცა ვუწოდოთ

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას, სადაც A_{ij} არის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება $|A|$ დეტერმინანტში.

თუ A გადაუგვარებელი მატრიცაა, მაშინ მისი შებრუნებული მატრიცა იქნება $\dfrac{A^{*}}{|A|}$ და ასეთი მატრიცა იქნება ერთადერთი და ის აღინიშნება A^{-1}-ით.

მართლაც, ცხადია, რომ

$$\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

ვაჩვენოთ, რომ სწორედ ეს იქნება A^{-1} შებრუნებული მატრიცა.

(2.1) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A მატრიცაზე, გვექნება:

$$A\cdot\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{|A|}(a_{11}A_{11}+a_{12}+A_{12}+\cdots a_{1n}A_{1n}) & \frac{1}{|A|}(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n}) & \cdots & \frac{1}{|A|}(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn}) \\ \frac{1}{|A|}(a_{21}A_{12}+a_{22}+A_{22}\cdots+a_{2n}A_{2n}) & \frac{1}{|A|}(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}) & \cdots & \frac{1}{|A|}(a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\cdots+a_{2n}A_{nn}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{|A|}(a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\cdots+a_{nn}A_{1n} & \frac{1}{|A|}(a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}+\cdots+a_{n2}A_{2n}) & \cdots & \frac{1}{|A|}(a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}) \end{pmatrix}.$$

მაგრამ, თუ გამოვიყენებთ I თავის § 5-ის II დებულებას, ვნახავთ, რომ

$$A \cdot \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & & \cdot \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E.$$

ამგვარად მივიღეთ, რომ

$$\frac{A^*}{|A|} = A^{-1}.$$

მიღებული შედეგი გამოდგება რიგი მატრიცული განტოლებების ამოსახსნელად. მაგალითად, ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი მატრიცული განტოლება:

$$XA = B.$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A მატრიცის შებრუნებულ A^{-1} მატრიცაზე, გვექნება:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

ან, რაც იგივეა,

$$X = BA^{-1}$$

ახლა გავარკვიოთ თუ რა აზრი აქვს იმ წრფივ გარდაქმნას, რომლის შესაბამისი მატრიცაა A^{-1}.

ვთქვათ, A მატრიცა შეესაბამება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებიან სისტემიდან $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობებიან სისტემაზე გადასვლას. ცხადია, E მატრიცა შეესაბამება იგივურ გარდაქმნას, ე. ი. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობიან სისტემიდან იგივე უცნობებიან სისტემაზე გადასვლას. რადგანაც $E = A \cdot A^{-1}$ შეესაბამება ისეთ წრფივ გარდაქმნას, რომელიც ტოლფასია, მიმდევრობით ორი წრფივი გარდაქმნის შესრულებისა, ამიტომ A^{-1} შეესაბამება $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობებიან სისტემიდან $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებიან სისტემაზე გადასვლას. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \ldots & & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$y_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ A^{-1}.

როგორც ვხედავთ, A მატრიცა გადაუგვარებელია და მისი შესაბამისი დეტერმინანტი უდრის 12-ს.

ვიპოვოთ $|A|$ დეტერმინანტის ალგებრული დამატებანი, გვექნება:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=6, \quad A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}=2, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-22,$$

$$A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}=-74, \quad A_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=16, \quad A_{24}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}=50,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad A_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=12,$$

$$A_{34}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}=42, \quad A_{41}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{42}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad A_{43}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad A_{44}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

მაშასადამე,

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -22 & 16 & 12 & 0 \\ -74 & 50 & 42 & 6 \end{pmatrix},$$

ხოლო

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{37}{6} & \frac{25}{6} & \frac{21}{6} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

სავარჯიშო

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ იპოვეთ ABC.

პასუხი. $ABC=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, იპოვეთ A^5.

პასუხი. $A^5=\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, იპოვეთ A^n.

პასუხი. $A=\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & -\cos n\alpha \end{pmatrix}$.

4) ვთქვათ, $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, იპოვეთ A^{-1}.

პასუხი. $A^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$

5) ამოხსენით შემდეგი მატრიცული განტოლებანი:

ა) $X\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ პასუხი. $X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

ბ) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

პასუხი. $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

§ 8. მოქმედებანი მართკუთხა მატრიცებზე

შეკრების, გამოკლების, მატრიცის რიცხვზე გამრავლების, მატრიცის მატრიცაზე გამრავლების ოპერაციები მართკუთხა მატრიცებისათვის ისეთნაირადვე ტარდება, როგორც კვადრატული მატრიცების შემთხვევაში ვატარებდით. მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ მართკუთხა მატრიცების შეკრებისას მათი რიგი ერთი და იგივე უნდა იყოს. A მატრიცის გამრავლება B მატრიცაზე მხოლოდ მაშინ იქნება შესაძლებელი, თუ A მატრიცის სვეტების რაოდენობა ემთხვევა B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას.

მაგალითად, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} m \\ n \\ k \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} am+bn+ck \\ dm+en+fk \end{pmatrix},$$

განხილულ შემთხვევაში B მატრიცის A მატრიცაზე გამრავლება შეიძლება.

განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} 2+6+16 \\ 10-3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ, AB ნამრავლ მატრიცაში იმდენი სტრიქონია, რამდენი სტრიქონიცაა A მატრიცაში და იმდენი სვეტია, რამდენიც B მატრიცაში. ცხადია, ეს წესი ზოგადია.

განვიხილოთ კიდევ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} 6+6+20 & 0+3+16 \\ 9+10+35 & 0+5+28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 19 \\ 54 & 33 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3 & 4\\ 0 & 3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\\ -1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix}0+5+3+16 & 4+25-9+4\\ 0+3-1-8 & 0+15+3-2\\ 0+2+2+12 & 8+10-6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 24\\ -6 & 16\\ 16 & 15\end{pmatrix}.$$

§ 4. დარგთა შორის ბალანსის განტოლება

სამდარგიანი პროდუქციის გამოშვებისა და ხარჯების ბალანსის სქემა შემდეგ განტოლებათა სისტემის საშუალებით ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}(1-a_{11})x_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3&=y_1,\\ -a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2-a_{23}x_3&=y_2,\\ -a_{31}x_1-a_{32}x_2+(1-a_{33})x_3&=y_3,\end{aligned} \tag{4.1}$$

სადაც a_{ij} პირდაპირი ხარჯვის კოეფიციენტებია, ხოლო y_i — საბოლოო მოთხოვნილებაა.

წრფივ განტოლებათა მოცემული სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი მატრიცული განტოლების:

$$\begin{pmatrix}1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

თუ აქ მოვახდენთ მატრიცათა გამრავლებას და გამოვიყენებთ მატრიცათა ტოლობის პირობას, მივიღებთ ჩვენ მიერ აღებულ განტოლებათა სისტემას.

შებრუნებული მატრიცის მონახვის წესიდან გამომდინარეობს, რომ ძირითადად წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება უცნობთა წინ მდგომი კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცის შებრუნებული მატრიცის პოვნაზე.

მართლაც, ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3,\end{aligned}$$

როგორც ვიცით,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

სადაც A არის უცნობთა წინ მდგომი კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცა.

აგრეთვე, ცხადია, რომ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3 \end{pmatrix}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} |A_1|&=A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3, \\ |A_2|&=A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3, \\ |A_3|&=A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, $|A_i|$ ($i=1,\ 2,\ 3$) არის დეტერმინანტი, რომელიც $|A|$ დეტერმინანტისაგან იმით განსხვავდება, რომ მასში i-ური სვეტი შეცვლილია თავისუფალი წევრებით.

ამგვარად, დავწერთ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{|A_1|}{|A|} \\[2ex] \dfrac{|A_2|}{|A|} \\[2ex] \dfrac{|A_3|}{|A|} \end{pmatrix},$$

საიდანაც მატრიცათა ტოლობის თვისების თანახმად დავწერთ:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},$$

$$x_2=\frac{|A_2|}{|A|},$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}.$$

როგორც ვხედავთ, მიღებული ფორმულები კრამერის ცნობილი ფორმულებია.

პროდუქციის გამოშვებისა და ხარჯების ბალანსისათვის ზოგად შემთხვევაში გვაქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$x_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)=y_1,$$
$$x_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n)=y_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n)=y_n,$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$(1-a_{11})x_1-a_{12}x_2-\dots-a_{1n}x_n=y_1,$$
$$-a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2-\dots-a_{2n}x_n=y_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\dots+(1-a_{nn})x_n=y_n.$$

ამ უკანასკნელი სისტემის მატრიცულ ფორმაში ჩაწერა გვაძლევს:

$$\begin{pmatrix}1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

ან ეს უკანასკნელი მატრიცული განტოლება მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$(E-A)X=Y, \tag{4.2}$$

სადაც E ერთეული მატრიცაა, A კი — ტექნოლოგიური კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცა, ხოლო

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

$(E-A)$ მატრიცას ხშირად ტექნიკურ მატრიცას უწოდებენ.

(4.2) სისტემის ამონახსენი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$X=(E-A)^{-1}Y.$$

გავარკვიოთ თუ რა ეკონომიური აზრი აქვს $(E-A)^{-1}$ მატრიცის ელემენტებს.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

მაშინ (4.3) ტოლობის დახმარებით დავწერთ:

$$x_i=c_{i1}y_1+c_{i2}y_2+\ldots+c_{ij}y_j+\ldots+c_{in}y_n. \tag{4.4}$$

დავუშვათ, რომ ჩვენ გავადიდეთ j-ური დარგის მოთხოვნილება ერთი ერთეულით, ხოლო წარმოების სხვა დარგის მოთხოვნილება დავტოვეთ უცვლელად. ამ პირობებში i-ური დარგის მთლიან პროდუქციათა გამოშვების რაოდენობა აღვნიშნოთ x_i'-ით, გვექნება:

$$x_i'=c_{i1}y_1+c_{i2}y_2+\ldots+c_{ij}(y_j+1)+\ldots+c_{in}y_n \tag{4.5}$$

ანდა, თუ ამას გამოვაკლებთ (4.4)-ს, მივიღებთ:

$$x_i'-x_i=c_{ij},$$

ე. ი. c_{ij}, რომელსაც სრული ხარჯვის კოეფიციენტი ეწოდება, გვიჩვენებს, თუ რამდენი ერთეულით უნდა გავადიდოთ წარმოების i-ური დარგის მთლიანი პროდუქციის გამოშვება იმისათვის, რომ წარმოების j-ური დარგის მოთხოვნილების გადიდება უზრუნველვყოთ ერთი ერთეულით.

ყურადღება უნდა მიექცეს იმ გარემოებას, რომ (4.4) სისტემიდან x_i უცნობების გამოთვლა უმჯობესია დავიწყოთ ტექნიკური მატრიცის შებრუნებული $(E-A)^{-1}$ მატრიცის განსაზღვრით. მართლაც, თუ გამოთვლას აქედან დავიწყებთ, მაშინ, y_i საბოლოო მოთხოვნილებათა ნაგულისხმევ მნიშვნელობებში ცვლილებების შეტანა, თავის მხრივ, არ გამოიწვევს მთელ გამოთვლით სამუშაოთა განმეორების აუცილებლობას. $(E-A)^{-1}$ მატრიცა უცვლელი დარჩება და x_i-ის გამოთვლა, თუ $(E-A)^{-1}$ შებრუნებული მატრიცა ცნობილია, არ იქნება შრომატევადი.

§ 8. მეურნეობის სხვადასხვა დარგის მთელი პროდუქციის გამოშვებათა შორის კავშირი წარმოების ცალკეულ დარგებში ზოგიერთ შემთხვევაში ტექნოლოგიური პროცესების ცვლილებისას

ვთქვათ, თავიდანვე გვაქვს ტექნოლოგიური კოეფიციენტებისგან შემდგარი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცა.

დავუშვათ, რომ i-ურ დარგში ტექნოლოგიური ცვლილების გამო შეიცვალა a_{ji} $(j=1, 2, \ldots, n)$ ტექნოლოგიური კოეფიციენტები, რომლებიც გვიჩვენებენ j-ური დარგის მასალის ხარჯვის რაოდენობას, რომელიც საჭიროა i-ური დარგის პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად. ვთქვათ, ახალი ტექნოლოგიური კოეფიციენტებია $a_{ji}+b_j$, მაშინ, ცხადია, ახალი ტექნოლოგიური მატრიცა იქნება

$$A'=A+B,$$

სადაც

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & b_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & & b_{2i} & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ni} & 0 \end{pmatrix}.$$

ახლა, ვთქვათ, ტექნოლოგია იცვლება წარმოების k-ურ დარგში, რომლის შედეგად იცვლება A ტექნოლოგიური მატრიცა. მაშინ ახალი მატრიცა იქნება

$$A''=A+C,$$

სადაც

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & c_{1k} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & c_{2k} & 0 \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \ldots & c_{nk} & \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ კავშირი ძველი ტექნოლოგიის დროს ყველა დარგის მთლიანი პროდუქციის გამოშვებასა და ერთი i-ური დარგის ტექნოლოგიის ცვლილებისას გამოშვებულ მთლიან პროდუქციას შორის; შემდეგ მოვახდინოთ შედარება ძველი ტექნოლოგიის დროს ყველა

დარგის მთლიანი პროდუქციის გამოშვებასა და ერთი k-ური დარგის ტექნოლოგიის ცვლილებისას გამოშვებული მთლიანი პროდუქციის გამოშვებას შორის და აგრეთვე მოვახდინოთ შედარება იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც ორივე i-ური და k-ური დარგის ტექნოლოგია ერთდროულად იცვლება. სამივე შემთხვევაში ვიგულისხმოთ, რომ მოთხოვნილება ყველა დარგში უცვლელია.

პროდუქციის მთლიანი გამოშვება ძველი ტექნოლოგიის დროს იყოს X_j, ერთი i-ური დარგის ტექნოლოგიის ცვლილებისას X'_j, ერთი k-ური დარგის ტექნოლოგიის ცვლილებისას X_j'' და ორივე i-ური და k-ური დარგის ტექნოლოგიის ცვლილებისას X_j''', სადაც $j=1, 2, \ldots, n$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთდროულად ვცვლით ტექნოლოგიურ პროცესებს i-ურ და k-ურ დარგში, ტექნოლოგიური მატრიცა იქნება

$$A'''=A+B+C.$$

პროდუქციის გამოშვების ხარჯების ბალანსის განტოლებანი სათანადოდ იქნება:

$$(E-A)X=Y, \tag{5.1}$$

$$(E-A-B)X'=Y, \tag{5.2}$$

$$(E-A-C)X''=Y, \tag{5.3}$$

$$(E-A-B-C)X'''=Y. \tag{5.4}$$

მეორეს თუ გამოვაკლებთ პირველს, მივიღებთ:

$$(E-A)\ (X'-X)=BX' \tag{5.4'}$$

მესამეს თუ გამოვაკლებთ პირველს, გვექნება:

$$(E-A)\ (X''-X)=CX'', \tag{5.4''}$$

ხოლო მეოთხეს თუ გამოვაკლებთ პირველს, დავწერთ:

$$(E-A)\ (X'''-X)=(B+C)X'''. \tag{5.5}$$

მიღებული სამი განტოლებიდან, თუ პირველს გაშლილად დავწერთ, გვექნება:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'-x_1 \\ x_2'-x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n'-x_n \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_{1l} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{2l} & \cdots & 0 \\ & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nl} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

თუ მატრიცათა გამრავლებას მოვახდენთ, მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11})(x_1'-x_1) & -a_{12}(x_2'-x_2) & -\cdots- & a_{1n}(x_n'-x_n) \\ -a_{21}(x_1'-x_1) & +(1-a_{22})(x_2'-x_2) & -\cdots- & a_{2n}(x_n'-x_n) \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ -a_{n1}(x_1'-x_1) & -a_{n2}(x_2'-x_2) & -\cdots+ & (1-a_{nn})(x_n'-x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1l}\ x_l' \\ b_{2l}\ x_l' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{nl}\ x_l' \end{pmatrix}.$$

თუ აქ უცნობებად მივიღებთ $x_1'-x_1$, $x_2'-x_2$, . . ., $x_n'-x_n$ სხვაობებს, მაშინ კრამერის ფორმულების დახმარებით მათი ამონახსენი ადვილად დაიწერება. მაგალითად,

$$x_1'-x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_{1l}x_l' & -a_{12} & & -a_{1n} \\ b_{2l}x_l' & 1-a_{22} & & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{nl}x_l' & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{1}{|E-A|}\begin{vmatrix} b_{1l}\,x_l' & -a_{12} & -a_{1n} \\ b_{2l}\,x_l' & 1-a_{22} & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{nl}x_l' & -a_{n2} & 1-a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

ანალოგიურად ვიპოვით, რომ

$$x_1''-x_1=\frac{1}{|E-A|}\begin{vmatrix} x_k''c_{1l} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ x_k''c_{2l} & 1-a_{22} & & -a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k''c_{nl} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

(5.5) განტოლების მარჯვენა მხარე გაშლილად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$BX'''+CX'''=\begin{pmatrix} b_{1l}\, x_l''' \\ b_{2l}\, x_l''' \\ \cdots \\ b_{nl}\, x_l''' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{1k}\, x_k''' \\ c_{2k}\, x_k''' \\ \cdots \\ c_{nk}\, x_k''' \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_{1l}\, x_l'''+c_{1k}\, x_k''' \\ b_{2l}\, x_l'''+c_{2k}\, x_k''' \\ \cdots \\ b_{nl}\, x_l'''+c_{nk}\, x_k''' \end{pmatrix}.$$

ამგვარად, (5.5) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'''-x_1 \\ x_2'''-x_2 \\ \cdots \\ x_n'''-x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_{1l}\, x_l'''+c_{1k}\, x_k''' \\ b_{2l}\, x_l'''+c_{2k}\, x_k''' \\ \cdots \\ b_{nl}\, x_l'''+c_{nk}\, x_k''' \end{pmatrix},$$

საიდანაც დავწერთ:

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11})(x_1'''-x_1)- & a_{12}(x_2'''-x_2) & & -a_{1n}(x_n'''-x_n) \\ -a_{21}(x_1'''-x_1)+ & (1-a_{22})(x_2'''-x_2) & \cdots & -a_{2n}(x_n'''-x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1}(x_1'''-x_1)- & a_{n2}(x_2'''-x_2) & \cdots & +(1-a_{nn})(x_n'''-x_n) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_{1i}\, x_i'''+c_{1k}\, x_k''' \\ b_{2l}\, x_i'''+c_{2k}\, x_k''' \\ \cdots \\ b_{nl}\, x_i'''+c_{nk}\, x_k''' \end{pmatrix}.$$

ამ უკანასკნელიდან ისევ კრამერის ფორმულების დახმარებით დავწერთ:

$$x_1'''-x_1=\frac{1}{|E-A|}\begin{vmatrix} b_{1i}x_i'''+c_{1k}x_k''' & -a_{12} & & -a_{1n} \\ b_{2i}x_i'''+c_{2k}x_k''' & 1-a_{22} & & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{nl}x_i'''+c_{nk}x_k''' & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (5.8)$$

(5.6) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{x_i'''}{x_i'}$-ზე, (5.7) განტოლების ორივე მხარე კი $\frac{x_k'''}{x_k''}$-ზე, გვექნება:

$$(x_1'-x_1)\frac{x_i'''}{x_i'}=\frac{x_i'''}{|E-A|}\begin{vmatrix} b_{1i} & -a_{12} & & -a_{1n}\\ b_{2i} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{ni} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn}\end{vmatrix}$$

და

$$(x_1''-x_1)\frac{x_k'''}{x_k''}=\frac{x_k'''}{|E-A|}\begin{vmatrix} c_{1k} & -a_{12} & -a_{1n}\\ c_{2k} & 1-a_{22} & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{nk} & -a_{n2} & 1-a_{nn}\end{vmatrix}.$$

ორი უკანასკნელი განტოლება შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$(x_1'''-x_1)\frac{x_i'''}{x_i'}+(x_1''-x_1)\frac{x_k'''}{x_k''}=\frac{x_i'''}{|E-A|}\begin{vmatrix} b_{1i} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ b_{2i} & 1-a_{22} & & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{ni} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{x_k'''}{|E-A|}\begin{vmatrix} c_{1k} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ c_{2k} & 1-a_{22} & & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ c_{nk} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|E-A|}\begin{vmatrix} b_{1i}x_i'''+c_{1k}x_k''' & -a_{12} & & -a_{1n}\\ b_{2i}x_i'''+c_{2k}x_k''' & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{ni}x_i'''+c_{nk}x_k''' & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn}\end{vmatrix},$$

მაგრამ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე, როგორც (5.8)-დან ჩანს, არის $x_1'''-x_1$.

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ

$$(x_1'-x_1)\frac{x_i'''}{x_i'}+(x_1''-x_1)\frac{x_k'''}{x_k''}=x_1'''-x_1.$$

უკანასკნელი გამოსახულება წარმოადგენს სწორედ პირველი დარგისათვის მთლიანი პროდუქციის გამოშვებათა ცვლილებებს შორის სა-

ძებნ დამოკიდებულებას. ცხადია, რომ სხვა დარგისათვის შესაძლებელია ანალოგიური ფორმულების მიღება.

A მატრიცას ვუწოდოთ დადებითი, თუ მისი ყველა ელემენტი დადებითია. მას ვუწოდოთ არაუარყოფითი, თუ მისი ყველა ელემენტი არაუარყოფითია. A მატრიცა იქნება უარყოფითი, თუ მისი ყველა ელემენტი უარყოფითია. აგრეთვე მას ვუწოდოთ არადადებითი თუ მისი ყველა ელემენტი არადადებითია.

ვთქვათ, A, B, C მატრიცებს იგივე აზრი აქვთ, რაც ამ პარაგრაფში დასმული ამოცანის ამოხსნისას ჰქონდა და, აგრეთვე, X, X', X'' და X''' იგივე მთლიან პროდუქციათა გამოშვების რაოდენობას აღნიშნავს შესაბამისად ძველი ტექნოლოგიის, i-ური დარგის ტექნოლოგიური პროცესის ცვლილების, k-ური დარგის ტექნოლოგიური პროცესის ცვლილებისა და ორივე დარგში ერთდროულად ტექნოლოგიური პროცესის ცვლილების დროს.

დავუშვათ, რომ

$$(E-A)^{-1}>0, \quad (E-A-B)^{-1}>0, \quad (E-A-C)^{-1}>0,$$
$$(E-A-B-C)^{-1}>0$$

და აგრეთვე

$$X>0, \quad X'>0, \quad X''>0, \quad X'''>0.$$

თურმე, თუ B და C მატრიცა არაუარყოფითია ($B\geqslant 0$, $C\geqslant 0$), მაშინ

$$X-X'<0, \quad X-X''<0 \text{ და } X-X'''<0;$$

ხოლო, თუ B და C მატრიცები არადადებითია, ე. ი.

$$B\leqslant 0, \quad C\leqslant 0,$$

მაშინ

$$X-X'>0, \quad X-X''>0 \text{ და } X-X'''>0.$$

მართლაც, თუ (5.1)-ს გამოვაკლებთ სათანადოდ (5.2)-ს, (5.3)-სა და (5.4)-ს, მივიღებთ:

$$(E-A)(X-X')+BX'=0;$$
$$(E-A)(X-X'')+CX''=0;$$
$$(E-A)(X-X''')+(B+C)X'''=0.$$

საიდანაც დავწერთ:

$$X-X'=-(E-A)^{-1}BX';$$
$$X-X''=-(E-A)^{-1}CX'';$$
$$X-X'''=-(E-A)^{-1}(B+C)X'''.$$

უკანასკნელ გამოსახულებათა მარცხენა მხარეების უარყოფითობა რომ ვაჩვენოთ, საჭიროა ვაჩვენოთ, BX', CX'' და $(B+C)X'''$ გამოსახულებების არაუარყოფითობა.

მართლაც, აზრობრივად $B\neq 0$, დავუშვათ $B\geqslant 0$, მაშინ

$$BX'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_{1l} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{2l} & \cdots & 0 \\ & & & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nl} & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=x_l'\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{nl} \end{pmatrix} \qquad (5.9)$$

არის ერთსვეტიანი არაუარყოფითი მატრიცა. პირობის თანახმად, $(E-A)^{-1}>0$ და $X'>0$, მაშასადამე, $x_l'>0$ და, ამგვარად, $X-X'<<0$. ანდა თუ (5.9)-ს გაშლილად დავწერთ, მატრიცათა გადამრავლებას მოვახდენთ და ორივე მხარის შესაბამის ელემენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, გვექნება:

$$x_k-x_k'=-x_l'\{d_{k1}b_{1l}+d_{k2}b_{2l}+\ldots+d_{kn}b_{nk}\},$$

სადაც d_{ij} არის $(E-A)^{-1}$ მატრიცის ელემენტები. უკანასკნელ გამოსახულებაში, პირობის თანახმად, $x_l'>0$, აგრეთვე $d_{kj}b_{lj}\geqslant 0$, ისე, რომ ყველა $d_{kj}b_{lj}$ არ შეიძლება ერთდროულად ნული იყოს, რადგანაც ყველა $d_{kj}>0$ და b_{lj}-თა შორის ერთი მაინც ურევია დადებითი. მაშასადამე, თუ $B\geqslant 0$, ცხადია, რომ $X-X'<0$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ როცა $B\leqslant 0$ და $C\leqslant 0$, მაშინ ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობებს:

$$X-X'>0, \quad X-X''>0 \text{ და } X-X'''>0.$$

ცხადია, რომ აქაც იგულისხმება

$$(E-A)^{-1}>0, \quad (E-A-B)^{-1}>0, \quad (E-A-C)^{-1}>0,$$
$$(E-A-B-C)^{-1}>0,$$

$$X>0, \; X'>0, \; X''>0 \text{ და } X'''>0.$$

ამავე პირობებში აგრეთვე თუ $B\geqslant 0$ და $C\geqslant 0$, მაშინ

$$X-X'''<(X-X')+(X-X'').$$

ამის დასამტკიცებლად (5.1)-ს, (5.2)-სა და (5.3)-ს გამოვაკლოთ (5.4), გვექნება:

$$(E-A)\;(X-X''')+(B+C)X'''=0,$$
$$(E-A-B)\;(X'-X''')+CX'''=0,$$
$$(E-A-C)\;(X''-X''')+BX'''=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$X - X''' = -(E - A)^{-1}(B + C)X''',$$

$$X' - X''' = -(E - A - B)^{-1}CX''',$$

$$X'' - X''' = -(E - A - C)^{-1}BX'''.$$

რადგანაც პირობის თანახმად $B \geqslant 0$ და $C \geqslant 0$, ცხადია, რომ

$$X - X''' < 0, \quad X' - X''' < 0 \text{ და } X'' - X''' < 0,$$

მეორე მხრივ, (5.4′), (5.4″) და (5.5)-ის თანახმად

$$(X - X') + (X - X'') - (X - X''') = -(E - A)^{-1}\left[B(X' - X''') + C(X'' - X''')\right].$$

აგრეთვე, ცხადია, რომ თუ $B \geqslant 0$ და $C \geqslant 0$, მაშინ

$$B(X' - X''') < 0 \qquad \text{და } C(X'' - X''') < 0.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$(X - X') + (X - X'') > (X - X''').$$

იგივე პირობებში, თუ $B \leqslant 0$ და $C \leqslant 0$, მაშინ ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$X - X''' > (X - X') + (X - X'').$$

როგორც დამტკიცებული დებულებიდან ჩანს, იმ შემთხვევაში, როდესაც i-ურ და k-ურ დარგში ტექნოლოგიური პროცესის შეცვლა არ იწვევს რომელიმე a_{ji} და a_{jk} ტექნოლოგიური კოეფიციენტის გადიდებას (ანდა, პირიქით, შესაძლებელია ამ კოეფიციენტების შემცირება), მაშინ, თუ მოთხოვნილება უცვლელია, წარმოების ყველა დარგის მთლიანი პროდუქციის გამოშვება მცირდება. ამასთან ერთად, თურმე ცალკეულ დარგში მთლიანი პროდუქციის შემცირება ერთდროულად ორ i-ურ და k-ურ დარგში ტექნოლოგიური პროცესების შეცვლით უფრო მეტია, ვიდრე მთლიან პროდუქციათა გამოშვების შემცირებათა ჯამი i-ურ და k-ურ დარგში ცალ-ცალკე ტექნოლოგიურ პროცესების ცვლილებასთან დაკავშირებით.

§ 6. მატრიცების ქვემატრიცებად დაყოფა

ვთქვათ, მოცემულია

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} & a_{1,k+1} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} & a_{k,k+1} & & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

მატრიცა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{1,k+1} & & a_{1n} \\ a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,k+1} & & a_{kn} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & & a_{k+1,k} \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & & a_{k+2,k} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} \end{pmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix} a_{k+1,k+1} & & a_{k+1,n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

მიღებულ A_{11}, A_{12}, A_{21} და A_{22} მატრიცას ვუწოდოთ A მატრიცის ქვემატრიცები და A მატრიცა შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

ვთქვათ, აგრეთვე გვაქვს A მატრიცის რიგის მქონე მეორე B მატრიცა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

სადაც B_{11}, B_{12}, B_{21} და B_{22} მატრიცას იგივე რიგი აქვს შესაბამისად, რაც A_{11}, A_{12}, A_{21} და A_{22} მატრიცას.

თურმე A და B მატრიცებზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების ჩატარების დროს ისე შეიძლება მოქმედება, თითქოს ქვემატრიცები მატრიცის ელემენტები იყოს. სახელდობრ:

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

და

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

მატრიცების ქვემატრიცების სახით წარმოდგენა შებრუნებული მატრიცების ადვილად პოვნის შესაძლებლობას იძლევა.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე A მატრიცა და ვეძებთ მის შებრუნებულ A^{-1} მატრიცას.

დავუშვათ,

$$B=A^{-1}.$$

ვიპოვოთ B მატრიცის ქვემატრიცები B_{11}, B_{12}, B_{21} და B_{22}, თუ ცნობილია A მატრიცა.

ცხადია, AB მატრიცა იქნება n რიგის ერთეული მატრიცა. როგორც ვიცით, AB ნამრავლი (6.6)-ის საშუალებით გამოიხატება.

E ერთეულ მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

თუ ამას წარმოვადგენთ ქვემატრიცების სახით, დავწერთ:

$$E=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix},$$

სადაც E_{11} და E_{22} არის k და $(n-k)$ რიგის ერთეული მატრიცები, ხოლო E_{12} და E_{21} იქნება ნულოვანი მატრიცები.

თუ AB მატრიცას გავუტოლებთ E ერთეულ მატრიცას, შესაბამის ელემენტთა ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&=E_{11}; \\ A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}&=E_{12}=0; \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&=E_{21}=0; \\ A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}&=E_{22}. \end{aligned}$$

პირველი ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A_{11}^{-1}-ზე და განვსაზღვროთ B_{11}, მივიღებთ:

$$B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$$

B_{11}-ის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ მესამე განტოლებაში, დავწეროთ:

$$A_{21}A_{11}^{-1}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}+A_{22}B_{21}=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$A_{21}A_{11}^{-1}=(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{22})B_{21},$$

საიდანაც

$$B_{21}=(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{22})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}.$$

B_{21}-ის მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ B_{11}-ის გამოსახულებაში, გვექნება:

$$B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{22})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}.$$

ანალოგიურად მეოთხე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ

$$B_{22}=A_{22}^{-1}(E_{22}-A_{21}B_{12}).$$

B_{22}-ის მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ მეორეში, დავწეროთ:

$$A_{11}B_{12}+A_{12}A_{22}^{-1}(E_{22}-A_{21}B_{12})=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$(A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}-A_{11})B_{12}=A_{12}A_{22}^{-1},$$

საიდანაც

$$B_{12}=(A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}-A_{11})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}.$$

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ვთქვათ, მოცემულია

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

ვიპოვოთ A^{-1}.

ამ შემთხვევაში

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ A_{11}^{-1} და A_{22}^{-1}. რადგანაც $|A_{11}|=1$ და $|A_{22}|=1$, ამიტომ

$$A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix};$$

რადგანაც A_{12} ნულოვანი მატრიცაა, მივიღებთ:

$$B_{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3-8 & -3+4\\ -2-6 & -2+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 1\\ -8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-22+3 & -11+2\\ -16+3 & -8+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19 & -9\\ -13 & -6\end{pmatrix}.$$

$$B_{11}=A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix};$$

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$B_{22}=A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

ამგვარად, A^{-1}-თვის მივიღებთ:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ -19 & -9 & 3 & 4\\ -13 & -6 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

§ 7. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგიერთი მიახლოებითი მეთოდი

ვთქვათ, მოცემულია

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

განტოლებათა სისტემა. ვიგულისხმოთ, რომ სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. თუ n საკმაოდ დიდია, მაშინ უცნობთა გამორიცხვის გაუსის მეთოდით სარგებლობა ბევრ შრომას მოითხოვს. ამ შემთხვევაში ეძებენ რაიმე მიახლოებით მნიშვნელობას უცნობებისათვის და შემდეგში საჭიროებისდა მიხედვით თანდათან უფრო უახლოვდებიან ზუსტ მნიშვნელობებს. ჩვეულებრივ იტყვიან, რომ ჩვენ ვიყენებთ მიმდევრობითი მიახლოების ან, როგორც მას უწოდებენ, იტერაციის მეთოდს,

გავარჩიოთ ორი მარტივი მეთოდი: უბრალო იტერაციისა და ზეიდელის მეთოდი.

I. უბრალო იტერაციის მეთოდი. დავუშვათ, რომ $a_{ii}\neq 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) და ამოვხსნათ პირველი მეორე და ა. შ. მე-n განტოლებანი შესაბამისად $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების მიმართ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\beta_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n,\\ x_2&=\beta_2+\alpha_{21}x_1+\alpha_{23}x_3+\ldots+\alpha_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=\beta_n+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

სადაც

$$\beta_i=\frac{b_i}{a_{ii}},\quad \alpha_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\,(i\neq j).$$

ე. წ. ნულოვან მიახლოებად შეიძლება მივიღოთ:

$$x_1^{(0)}=\beta_1,\quad x_2^{(0)}=\beta_2,\ \ldots,\ x_n^{(0)}=\beta_n.$$

ამას ვღებულობთ (7.2) სისტემის მარჯვენა მხარეში უცნობების მაგივრად ნულების შეტანით.

შემდეგი, პირველი მიახლოების მისაღებად (7.2) სისტემის მარჯვენა მხარეში უნდა შევიტანოთ უცნობთა ნულოვანი მიახლოების დროს მიღებული მნიშვნელობანი, გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)}&=\beta_1+\alpha_{12}x_2^{(0)}+\cdots+\alpha_{1n}x_n^{(0)},\\ &\ldots\ldots\\ x_n^{(1)}&=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(0)}+\cdots+\alpha_{n,n-1}x_n^{(0)}. \end{aligned}\right\}$$

საზოგადოდ, k-ური მიახლოებისათვის გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k)}&=\beta_1+\alpha_{12}x_2^{(k-1)}+\cdots+\alpha_{1n}x_n^{(k-1)},\\ x_2^{(k)}&=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k-1)}+\cdots+\alpha_{2n}x_n^{(k-1)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n^{(k)}&=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(k-1)}+\cdots+\alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}. \end{aligned}\right\}$$

მიახლოებით ამოხსნად ჩაითვლება ის მნიშვნელობანი, რომლებიც უკანასკნელი მიახლოების შედეგად მიიღებიან. რაც შეეხება მიახლოებათა რაოდენობას, ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა სიზუსტე მოგვეთხოვება.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია საშუცნობიან განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} 7x-2y+3z&=23,\\ 2x+5y-z&=14,\\ 3x-4y+8z&=34. \end{aligned}\right\}$$

ამ სისტემის ზუსტი ამონახსენია: $x=2$, $y=3$, $z=5$. ახლა ვიპოვოთ მოცემული სისტემის ამონახსენი უბრალო იტერაციის მეთოდით.

განვსაზღვროთ x, y და z უცნობი, გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{23}{7}+\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z,\\ y&=\frac{14}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}z,\\ z&=\frac{34}{8}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}y. \end{aligned}\right\}$$

მაშასადამე, ნულოვანი მიახლოება იქნება:

$$x^{(0)}=\frac{23}{7},$$

$$y^{(0)}=\frac{14}{5},$$

$$z^{(0)}=\frac{34}{8}=\frac{17}{4}.$$

შემდეგი, პირველი მიახლოება იქნება:

$$x^{(1)}=\frac{23}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{5}-\frac{3}{7}\cdot\frac{17}{4}=\frac{23}{7}+\frac{4}{5}-\frac{51}{28}=\frac{317}{140},$$

$$y^{(1)}=\frac{14}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{23}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{17}{4}=\frac{327}{140},$$

$$z^{(1)}=\frac{17}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{23}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}=\frac{1237}{280}.$$

ახლა ვიპოვოთ შემდეგი მეორე მიახლოება, დავწერთ:

$$x^{(2)}=\frac{23}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{327}{140}-\frac{3}{7}\cdot\frac{1237}{280}=\frac{4037}{1960},$$

$$y^{(2)}=\frac{14}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{317}{140}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1237}{280}=\frac{3889}{1400},$$

$$z^{(2)}=\frac{17}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{317}{140}+\frac{1}{2}\cdot\frac{327}{140}=\frac{5117}{1120}$$

და ა. შ.

როგორც ამოხსნილი მაგალითიდან ჩანს, ყოველი შემდეგი მიახლოებით უფრო და უფრო ვუახლოვდებით ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს.

ცხადია, თუ გვაქვს რამდენიმე მიახლოებითი ამონახსენი, მაშინ მათ შორის უკეთესი იქნებიან ისეთები, რომელთა ჭეშმარიტ ამონახსნებთან სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობის მაქსიმუმი უფრო მცირეა.

უბრალო იტერაციის მეთოდით სარგებლობა მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როდესაც სისტემის თანდათანობითი მიახლოებითი ამოხსნის პროცესი კრებადია.

ამოხსნის პროცესის კრებადობას კი მაშინ ექნება ადგილი, თუ

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i^{*}\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{7.3}$$

სადაც $x_i^{(m)}$ არის x_i-ისმნიშვნელობა m-ური მიახლოებისას, ხოლო x_i^{*} კი არის ამონახსნის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა. თუ (7.3) პირობა არ სრულდება, მაშინ პროცესი განშლადი იქნება. მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდის გამოყენებას მხოლოდ იმ შემთხვევაში აქვს აზრი, როდესაც მოცემული სისტემისათვის ეს პროცესი კრებადია.

ცხადია, რომ უბრალო იტერაციის პროცესი ყველა სისტემისათვის როდია კრებადი. ეს პროცესი მაშინ იქნება კრებადი, თუ

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\leqslant |a_{ii}|$$

უტოლობა მართებულია ყველა $i(i=1, 2, \ldots, n)$ მნიშვნელობათათვის.

თუ განტოლებათა სისტემა ისეთია, რომ ეს პირობა არ სრულდება, მაშინ უნდა მოხდეს მისი გარდაქმნა; სახელდობრ, შეიძლება სის-

ტემის რომელიმე განტოლება, რომლისთვისაც პროცესის კრებადობის პირობა არ არის დაცული, შეიცვალოს ამავე სისტემის განტოლებათა წრფივი კომბინაციით ისე, რომ მოთხოვნილი პირობა შესრულდეს და მიღებული ახალი სისტემის ამონახსნები ემთხვეოდეს ადრე განხილულ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს.

II. **ზეიდელის იტერაციის მეთოდი.** ვთქვათ, გვაქვს (7.1) განტოლებათა სისტემა და, როგორც უბრალო იტერაციის მეთოდის გამოყენების დროს, ის წარმოვადგინოთ (7.2) სახით. ამჯერად ნულოვან მიახლოებად მივიღოთ:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(0)}=\beta_1,\\
&x_2^{(0)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(0)},\\
&x_3^{(0)}=\beta_3+\alpha_{31}x_1^{(0)}+\alpha_{32}x_2^{(0)},\\
&\cdot\quad\cdot\\
&x_i^{(0)}=\beta_i+\alpha_{i1}x_1^{(0)}+\alpha_{i2}x_2^{(0)}+\cdots+\alpha_{i,i-1}x_{i-1}^{(0)},\\
&\cdot\quad\cdot\qquad\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&x_n^{(0)}=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(0)}+\cdots+\alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)}.
\end{aligned}
$$

საზოგადოდ, x_j უცნობისათვის k-ური მიახლოების დროს გამოიყენება შემდეგი ფორმულა:

$$
x_j^{(k)}=\beta_j+\alpha_{j1}x_1^{(k)}+\alpha_{j2}x_2^{(k)}+\cdots+\alpha_{j,j-1}x_{j-1}^{(k)}+\alpha_{j,j+1}x_{j+1}^{(k-1)}+
$$
$$
+\cdots+\alpha_{jn}x_n^{(k-1)}.
$$

ახლა ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ იგივე მაგალითი, რომელიც უბრალო იტერაციის მეთოდით ამოვხსენით. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$x^{(0)}=\frac{23}{7};$$

$$y^{(0)}=\frac{14}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{23}{7}=\frac{52}{35};$$

$$z^{(0)}=\frac{17}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{23}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{52}{35}=\frac{1053}{280}.$$

შემდეგ, პირველი მიახლოებისათვის გვექნება:

$$x^{(1)}=\frac{23}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{52}{35}-\frac{3}{7}\cdot\frac{1053}{280}=\frac{4113}{1960};$$

$$y^{(1)}=\frac{14}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{4113}{1960}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1053}{280}=\frac{26585}{9800};$$

$$z^{(1)}=\frac{17}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4113}{1960}+\frac{1}{2}\cdot\frac{26585}{9800}=\frac{376845}{78400}$$

და ა. შ.

საზოგადოდ, ზეიდელის მეთოდის გამოყენებით უფრო ჩქარა ვუახლოვდებით ამონახსენთა ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს, ვიდრე უბრალო იტერაციის მეთოდით სარგებლობისას, მაგრამ შესაძლებელია შეგვხვდეს ისეთი შემთხვევაც, როდესაც რაიმე სისტემის იტერაციის მეთოდით ამოხსნის პროცესი კრებადია, ხოლო იმავე სისტემის ზეიდელის მეთოდით ამოხსნის პროცესი კი — განშლადი.

თუ სისტემის ზეიდელის მეთოდით ამოხსნის პროცესი განშლადია, მაშინ შესაძლებელია სისტემის ისეთნაირი გარდაქმნა, რომ ზეიდელის მეთოდით მიახლოებით ამონახსენთა პროცესი კრებადი გახდეს.

თურმე, თუ (7.1) განტოლებათა სისტემას ჩავწერთ მატრიცული სახით

$$AX=b,$$

სადაც

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

და ორივე მხარეს გავამრავლებთ A მატრიცის (იგულისხმება, რომ ის გადაუგვარებელი მატრიცაა) ტრანსპონირებულ A' მატრიცაზე, მიღებული მატრიცული განტოლება

$$A'AX=A'b \tag{7.4}$$

შეიძლება იყოს ისეთი, რომლისთვისაც ზეიდელის მეთოდით მიმდევრობითი ამოხსნების პოვნის პროცესი კრებადი იქნება. ცხადია, (7.4) მატრიცული განტოლების გაშლილი სახით ჩაწერა მოგვცემს წრფივ განტოლებათა სისტემას.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია სამუცნობიან განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6, \\ 2x+y+z&=7, \\ x-2z&=-5. \end{aligned}\right\}$$

ამ შემთხვევაში

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}6\\ 7\\ -5\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A'A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}, \quad A'B=\begin{pmatrix}15\\ 13\\ 23\end{pmatrix}.$$

ანდა, თუ ამას დავწერთ გაშლილი სახით, გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} 6x+3y+z&=15,\\ 3x+2y+2z&=13,\\ x+2y+6z&=23. \end{aligned}\right\}$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემის ზეიდელის მეთოდით ამოხსნის პროცესი კრებადი იქნება.

იტერაციის მეთოდებს შეცდომათა თვითგასწორების შესანიშნავი თვისება აქვს. თუ მიმდევრობითი მიახლოების რომელიმე ეტაპზე რაიმე შეცდომა დავუშვით, შემდეგში ამ პროცესის დიდ რიცხვჯერ განმეორებისას ჩვენ მაინც უფრო და უფრო ვუახლოვდებით ჭეშმარიტ მნიშვნელობას. ეს თვისება იქიდან გამომდინარეობს, რომ ნულოვანი მიახლოების აღება შეგვიძლია ნებისმიერად. არ არის სავალდებულო ნულოვანი ამონახსნის აღება ისე, როგორც ამას ზემოთ ვაკეთებდით.

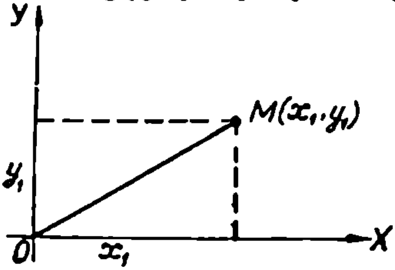
თავი III

ვექტორები

§ 1. ზოგადი ცნებები

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ყოველი M წერტილი სიბრტყეზე განისაზღვრება ორი კოორდინატით, x-ით და y-ით, რომლებიც გვიჩვენებენ წერტილის დაშორებას საკოორდინატო ღერძებიდან. M წერტილის გარდა, x_1 და y_1 რიცხვებით ვექტორის მოცემაც შეიძლება. M წერტილის მოცემა ტოლფასია $\overline{OM}$ ვექტორის მოცემისა. M წერტილის კოორდინატები იქნებიან $\overline{OM}$ ვექტორის ე. წ. მდგენელები.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ და გვინდა ვიპოვოთ მათი ჯამ-ვექტორი. ამისათვის სიბრტყეზე იღებენ რომელიმე ერთს და მას მიუდგამენ მეორეს (პირველის ბოლოს შეუერთებენ მეორის სათავეს). მიღებული ვექტორი, რომლის სათავეა პირველის სათავე, ხოლო ბოლო კი მეორის ბოლო, იქნება ორივეს ჯამი.



ნახ. 1.

ვექტორის გადატანა შეიძლება ნებისმიერ ადგილას, თუ მას მიმართულებას არ შევუცვლით.

ორი ვექტორი ერთმანეთის ტოლია, თუ მათ ერთი და იგივე სიგრძე და მიმართულება აქვთ.

ვექტორთა შეკრების წესი უცვლელია იმ შემთხვევაშიც, როცა შესაკრებთა რიცხვი ორზე მეტია.

ანალიზურად ეს ასე გამოისახება, თუ გვაქვს:

$$\vec{P}_1=(X_1,\ Y_1)$$

და

$$\vec{P}_2=(X_2,\ Y_2),$$

მაშინ

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=(X_1+X_2,\ Y_1+Y_2).$$

ე. ი. ორი ვექტორის ჯამი რომ მივიღოთ, საჭიროა ავიღოთ ისეთი ვექტორი, რომლის მდგენელები შესაკრებ ვექტორთა შესაბამისი მდგენელების ჯამის ტოლია. იგივე წესი მართებულია შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

n-განზომილებიანი ვექტორი ეწოდება $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს განხილული ვექტორის მდგენელს. ამ სიმრავლეს აგრეთვე n-განზომილებიანი წერტილიც ეწოდება. $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ სიმრავლეში შემავალ ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა ერთობლიობას n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე ეწოდება.

ორი ვექტორი მაშინ იქნება ტოლი, თუ ტოლია მათი ყველა შესაბამისი მდგენელი.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}_1(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ და $\vec{P}_2(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n)$, მაშინ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა ჯამი იქნება:

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{P}(X_1+Y_1,\ X_2+Y_2,\ \ldots,\ X_n+Y_n).$$

ვთქვათ, გვაქვს $\overline{P}$ ვექტორი და k რაიმე მუდმივი რიცხვია, მაშინ მათი ნამრავლი გვაძლევს ისეთ ვექტორს, რომელსაც $\overline{P}$ ვექტორის მიმართულება ექნება და k-ჯერ იქნება „წაგრძელებული" თუ $k>0$, თუ $k<0$, მაშინ $k\overrightarrow{P}$ ნამრავლი იქნება ისეთი ვექტორი, რომლის სიგრძე k-ჯერ მეტი იქნება P-ის სიგრძეზე, მიმართულება კი მისი საწინააღმდეგო ექნება.

ანალიზურად ვექტორის ნამრავლი რიცხვზე გვაძლევს ისეთ ვექტორს, რომლის მდგენელებია სათანადოდ აღებული ვექტორის მდგენელები გამრავლებული მოცემულ მუდმივ რიცხვზე. სახელდობრ,

$$k\overrightarrow{P}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=\overrightarrow{P}(kX_1,\ kX_2,\ \ldots,\ kX_n).$$

იმ შემთხვევაში, როცა $k=-1$, $\overrightarrow{P}$ ვექტორს მიმართულება ეცვლება:

$$-\overrightarrow{P}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=\overrightarrow{P}(-X_1,\ -X_2,\ \ldots,\ -X_n).$$

ვექტორთა გამოკლება ნიშნავს პირველს დავუმატოთ მეორე გამრავლებული -1-ზე სახელდობრ,

$$\overrightarrow{P}-\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{P}+(-\overrightarrow{Q}).$$

ანალიზურად ვექტორთა გამოკლების დროს ვღებულობთ ისეთ ვექტორს, რომლის მდგენელებია საკლებისა და მაკლები ვექტორების შესაბამის მდგენელთა სხვაობა. მაგალითად,

$$\overrightarrow{P}=(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)-\overrightarrow{Q}(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n)=$$
$$=\overrightarrow{R}(X_1-Y_1,\ X_2-Y_2,\ \ldots,\ X_n-Y_n).$$

კერძოდ,

$$\overrightarrow{P}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)-\overrightarrow{P}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=$$
$$=\overrightarrow{R}(0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

ე. ი. ტოლ ვექტორთა სხვაობა გვაძლევს ნულოვან ვექტორს.

ორი P და Q ვექტორთა სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორთა სიგრძეების მათ შორის კუთხის კოსინუსზე ნამრავლს:

$$(\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{Q})=|\overrightarrow{P}|\cdot|\overrightarrow{Q}|\cos(\overrightarrow{P},\widehat{\ \overrightarrow{Q}}).$$

თუ მოცემულია $\overrightarrow{P}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ და $\overrightarrow{Q}(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n)$ ვექტორი, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ანალიზურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$(\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{Q})=X_1Y_1+X_2Y_2+\ldots+X_nY_n.$$

კერძოდ,

$$\vec{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\vec{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n)= \\ =X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2.$$

როგორც ვიცით, $\vec{P}$ ვექტორის თავისთავზე გამრავლებისას კუთხე 0-ის ტოლია, ამიტომ დავწერთ:

$$(\vec{P}\vec{P})=|\vec{P}|^2,$$

საიდანაც

$$|\vec{P}|=\sqrt{(\vec{P}\cdot\vec{P})}=\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის გამოსახულებას, ამ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელად მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=\frac{(\vec{P}\cdot\vec{Q})}{|\vec{P}||\vec{Q}|},$$

ანალიზურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$\cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=\frac{X_1Y_1+X_2Y_2+\cdots+X_nY_n}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2}}$$

თუ ორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია, ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი ერთმანეთის პერპენდიკულარულნი არიან.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1. ვთქვათ, მოცემულია:

$$\vec{P}(0, 1, 0, 2)$$

და

$$\vec{Q}(1, 0, 1, 0)$$

ვექტორები. ვიპოვოთ მათი სკალარული ნამრავლი, სიგრძეები და მათ შორის კუთხე.

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=0,$$

მაშასადამე, ისინი ურთიერთპერპენდიკულარულნი არიან და მათ შორის კუთხე იქნება $\frac{\pi}{2}$.

$$|\vec{P}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

და

$$|\vec{Q}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

2. ვთქვათ, მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{P}(-3,\ 1,\ 0,\ 2) \text{ და } \vec{Q}(1,\ 0,\ -3,\ -1)$$

ვიპოვოთ მათი სკალარული ნამრავლი

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=-3+0-0-2=-5,$$

ე. ი.

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=-5.$$

სავარჯიშო

მონახეთ სკალარული ნამრავლი და მათ შორის კუთხე შემდეგი ვექტორებისა:

1) $\vec{P}(1, 1, -2, 0)$ და $\vec{Q}(0, 1, 1, 2)$;

პასუხი. $(\vec{P}\cdot\vec{Q})=-1,\quad \cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=-\frac{1}{6}.$

2) $\vec{P}\left(\frac{1}{2}, 1, -4\right)$ და $\vec{Q}(0, -1, 2)$,

პასუხი. $-9,\quad \cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=-\frac{9}{\sqrt{5}\sqrt{17,25}}.$

3) $\vec{P}(0, 5;\ 2, -2)$ და $\vec{Q}(1, -0,5;\ 3)$;

პასუხი. $1,5,\quad \cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=\frac{1,5}{\sqrt{33}\sqrt{35}}.$

4) $\vec{P}(0, 0, 5, 1, -1)$ და $\vec{Q}(1, -1, 0, 2, -2)$;

პასუხი. $4,\quad \cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=\frac{4}{\sqrt{27}\sqrt{10}}.$

5) $\vec{P}(2, 1, 3, -1)$ და $\vec{Q}(4, 5, 3, -1)$.

პასუხი. $23;\quad \cos(\widehat{\vec{P},\vec{Q}})=\frac{23}{\sqrt{15}\sqrt{51}}.$

§ 8. ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება

ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე ვექტორი, რომლებიც ერთსა და იმავე წრფეზე ან ერთმანეთის პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი აღებული ვექტორთაგანის გამოსახვა შეიძლება მეორის საშუალებით, თუ მას გავამრავლებთ რაიმე მუდმივ რიცხვზე.

მაგრამ, თუ ვექტორები ერთმანეთთან რაიმე კუთხეს ქმნიან, მაშინ ერთის გამოსახვა მეორეს მუდმივზე გამრავლებით არ შეიძლება.

ჩვეულებრივ, გეომეტრიაში ორ ვექტორს ეწოდება კ ო ლ ი ნ ე ა რ უ ლ ი, თუ ერთ-ერთი მათგანი მიიღება მეორისაგან ამ უკანასკნელის რაიმე რიცხვზე გამრავლებით.

ანალოგიურად, თუ სამი $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორის სათავე ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული, მაშინ მათ ეწოდებათ კ ო მ პ ლ ა ნ ა რ უ ლ ნ ი. ანალიზურად კომპლანარობა იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ერთის წარმოდგენა შეიძლება დანარჩენების საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\vec{P}=k_1\vec{Q}+k_2\vec{R},$$

სადაც k_1, k_2 რიცხვებია.

საზოგადოდ, $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს n-განზომილებიან სივრცეში ეწოდება კოლინეარული, თუ არსებობს ისეთი k რიცხვი, რომ

$$\vec{P}=k\vec{Q}.$$

აგრეთვე $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებს n-განზომილებიან სივრცეში ეწოდებათ კომპლანარულნი, თუ ერთ-ერთი მათგანის გამოსახვა შეიძლება დანარჩენების წრფივი კომბინაციით. ამ ცნებათა განზოგადება შეიძლება ვექტორთა ნებისმიერი რიცხვისათვის, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, . . ., $\vec{P}_n$ ვექტორები n-განზომილებიან სივრცეში იქნებიან წრფივად დამოკიდებულნი, თუ არსებობს ისეთ მუდმივთა მიმდევრობა k_1, k_2, . . ., k_n, რომელთა შორის ზოგიერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ldots+k_n\vec{P}_n=0, \tag{2.1}$$

სადაც მარჯვენა მხარეში 0 ნიშნავს ნულოვან ვექტორს. თუ უკანასკნელ ტოლობას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$, მაშინ აღებული ვექტორები იქნებიან წრფივად დამოუკიდებელნი.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, რომლებიც ნათლად გაგვარკვევენ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის არსში.

ვთქვათ, მოცემულია ვექტორები: $\vec{P}_1$ (1, 0, 0), $\vec{P}_2$ (0, 1, 0) და $\vec{P}_3$ (0, 0, 1). ვნახოთ არიან თუ არა ესენი წრფივად დამოკიდებულნი. ისინი რომ წრფივად დამოკიდებულნი იყვნენ, ამისათვის საჭიროა k_1, k_2, k_3 ისეთი მუდმივების არსებობა, რომელთაგან ერთი მაინც იქნება განსხვავებული ნულისაგან და ადგილი ექნება ტოლობას:

$$k_1\vec{P}_1(1,\ 0,\ 0)+k_2\vec{P}_2(0,\ 1,\ 0)+k_3\ \vec{P}_3(0,\ 0,\ 1)=0 \tag{2.2}$$

ეს უკანასკნელი შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\vec{P}_1(k_1,\ 0,\ 0)+\vec{P}_2(0,\ k_2,\ 0)+\vec{P}_3(0,\ 0,\ k_3)=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{P}(k_1,\ k_2,\ k_3)=\vec{O}(0,\ 0,\ 0),$$

რადგანაც ვექტორთა შეკრებისას სათანადო მდგენელები იკრიბებიან და მარჯვნივ კი გვაქვს ნულოვანი ვექტორი.

როგორც ვიცით, ორი ვექტორი ერთმანეთის ტოლია, თუ მათი შესაბამისი მდგენელები ტოლია. მაშასადამე, მივიღებთ:

$$k_1=0,\quad k_2=0,\quad k_3=0.$$

ამგვარად, განხილული ვექტორები ყოფილან წრფივად დამოუკიდებელნი, რადგანაც არ არსებობს ისეთი მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და რომელთათვისაც ადგილი აქვს (2.2) ტოლობას.

ახლა განვიხილოთ ვექტორები: $\vec{P}_1(1,\ 1)$, $\vec{P}_2(-1,\ -1)$ და $\vec{P}_3(0,\ 1)$. მაშინ წრფივად დამოკიდებულების შესამოწმებლად დავწეროთ:

$$k_1\vec{P}_1(1,\ 1)+k_2\vec{P}_2(-1,\ -1)+k_3\vec{P}_3(0,\ 1)=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{P}_1(k_1,\ k_1)+\vec{P}_2(-k_2,\ -k_2)+\vec{P}_3(0,\ k_3)=0,$$

ან

$$\vec{P}(k_1-k_2,\ k_1-k_2+k_3)=0(0,0),$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$k_1-k_2=0; \qquad K_1=K_2$$
$$\cancel{k_1}-\cancel{k_2}+k_3=0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$k_3=0$$

და

$$k_1=k_2,$$

ე. ი. თუ k_1-ს ან k_2-ს მივცემთ ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობას, წრფივად დამოკიდებულების პირობა სრულდება. ამგვარად, განხილული ვექტორები ყოფილან წრფივად დამოკიდებულნი.

წრფივად დამოკიდებულების ცნებასთან დაკავშირებით ჩამოვაყალიბოთ რიგი თეორემები, რომლებსაც შემდგომში გამოვიყენებთ.

თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r, \ldots, \vec{P}_n$ ვექტორთა სისტემა. თუ $\vec{P}_1\ \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r$ ვექტორები, რომლებიც აღებულ ვექტორთა სისტემის ქვესისტემას წარმოადგენენ, არიან წრფივად დამოკიდებულნი, მაშინ მთლიანად განხილული სისტემაც იქნება წრფივად დამოკიდებული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: რადგანაც $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r$ ქვესისტემა, პირობის თანახმად წრფივად დამოკიდებულია, მაშასადამე, არსებობს ისეთი $k_1, k_2, \ldots, k_r$ მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ \ldots\ +k_r\vec{P}_r=0, \tag{2.3}$$

მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია შემდეგი ტოლობის დაწერაც:

$$k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ \ldots\ +k_r\vec{P}_r+0\cdot\vec{P}_{r+1}+\ \ldots\ +0\cdot\vec{P}_n=0 \tag{2.3'}$$

მაშასადამე, არსებობს რიცხვთა მიმდევრობა $k_1, k_2, \ldots, k_r, 0, \ldots, 0$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს (2.3′) ტოლობას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r, \ldots, \vec{P}_n$ ვექტორთა განხილული სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

თეორემა. $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულებისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთ-ერთი მათგანის წარმოდგენა შეიძლებოდეს დანარჩენების წრფივი კომბინაციის საშუალებით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ მოცემული ვექტორები წრფივად დამოკიდებულნი არიან, მაშინ ერთ-ერთი ყოველთვის წარმოიდგინება დანარჩენების წრფივი კომბინაციით (ამას ეწოდება პირობის აუცილებლობა). მართლაც, დავუშვათ, რომ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ არიან წრფივად დამოკიდებულნი, მაშინ, განმარტების თანახმად, არსებობენ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ \ldots\ +k_n\vec{P}_n=0.$$

ზოგადობის შეუზღუდველად დავუშვათ, რომ $k_1\neq 0$, მაშინ

$$\vec{P}_1=-\frac{k_2}{k_1}\vec{P}_2-\frac{k_3}{k_1}\vec{P}_3-\cdots-\frac{k_n}{k_1}\vec{P}_n.$$

ამგვარად, P_1 ვექტორი გამოისახება დანარჩენების წრფივი კომბინაციით.

ახლა დავუშვათ, რომ ერთი ვექტორთაგანის წარმოდგენა შეიძლება დანარჩენების წრფივი კომბინაციით და ვაჩვენოთ, რომ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია (ეს იქნება პირობის საკმარისობა).

დავუშვათ, რომ

$$\vec{P}_1=k_2\vec{P}_2+k_3\vec{P}_3+\dots+k_n\vec{P}_n,$$

მაშინ

$$\vec{P}_1-k_2\vec{P}_2-k_3\vec{P}_3-\dots-k_n\vec{P}_n=0.$$

ცხადია, რომ აქ მოცემულ 1, $-k_2, \dots, -k_n$ მუდმივთაგან ყველა არ არის ნულის ტოლი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

დამტკიცებული თეორემის შედეგად შეგვიძლია შემდეგი დასკვნა გავაკეთოთ: კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორები წრფივად დამოკიდებული არიან.

§ 3. ბაზისები n-განზომილებიან სივრცეში

ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიან ვექტორთა სისტემა: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$. ცხადია, რომ თუ მათ შორის რომელიმე ნულოვანი ვექტორია, მაშინ მოცემული სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული, რადგანაც ყოველთვის შეიძლება ისეთი $k_1, k_2, \dots, k_m$ მუდმივების შერჩევა, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს და ადგილი ექნება ტოლობას:

$$k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\dots+k_m\vec{P}_m=0. \tag{3.1}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში, ვთქვათ, ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, გარდა იმისა, რომელიც ნულოვანი ვექტორის წინ დგას, მაშინ ადგილი ექნება (3.1) ტოლობას და სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული. საზოგადოდ კი მართებულია შემდეგი

თეორემა. **ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიან ვექტორთა სისტემები:**

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$$

და

$$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_r.$$

დავუშვათ, რომ $r<m$; თუ პირველი სისტემის ყოველი ვექტორი შეიძლება გამოისახოს მეორე სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაციით, მაშინ ვექტორთა პირველი სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვიგულისხმოთ, რომ ვექტორთა განხილული სისტემები ნულოვან ვექტორს არ შეიცავენ, რადგანაც მაშინ თეორემა ტრივიალურია.

თეორემის პირობის თანახმად დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_1&=a_{11}\vec{Q}_1+a_{12}\vec{Q}_2+\ldots+a_{1r}\vec{Q}_r,\\ \vec{P}_2&=a_{21}\vec{Q}_1+a_{22}\vec{Q}_2+\ldots+a_{2r}\vec{Q}_r,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{P}_m&=a_{m1}\vec{Q}_1+a_{m2}\vec{Q}_2+\ldots+a_{mr}\vec{Q}_r. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

რადგანაც ყველა $\vec{P}_i\neq 0$, ამიტომ უკანასკნელი სისტემის პირველი ტოლობის მარჯვენა მხარის რომელიმე ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ე. ი. რომელიღაც $a_{1j}\neq 0$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$. დავუშვათ $a_{11}\neq 0$. მაშინ ამავე პირველი ტოლობიდან დავწერთ:

$$\vec{Q}_1=\frac{\vec{P}_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\vec{Q}_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}\vec{Q}_3-\cdots-\frac{a_{1r}}{a_{11}}\vec{Q}_r\,.$$

Q_1-ის მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ იმავე სისტემის მეორე განტოლებაში, გვექნება:

$$\vec{P}_2=a_{21}\frac{\vec{P}_1}{a_{11}}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\vec{Q}_2-\frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\vec{Q}_3-\ldots-\frac{a_{21}a_{1r}}{a_{11}}\vec{Q}_r+$$

$$+a_{22}\vec{Q}_2+\cdots+a_{2r}\vec{Q}_r.$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{P}_2=\frac{1}{a_{11}}[a_{21}\vec{P}_1+(a_{22}-a_{21}a_{12})\vec{Q}_2+(a_{23}-a_{21}a_{13})\vec{Q}_3+\cdots+$$

$$+(a_{2r}-a_{21}a_{1r})\vec{Q}_r].$$

აქ თუ მარჯვენა მხარის ყველა კოეფიციენტი ნულია, გარდა $\vec{P}_1$-ის კოეფიციენტისა, მაშინ, ცხადია, $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ იქნებიან წრფივად დამოკიდებულნი და თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ რომელიმე კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაგალითად, $a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, მაშინ ამ უკანასკნელი ტოლობიდან შეიძლება განვსაზღვროთ $\vec{Q}_2$, შემდეგ $\vec{Q}_1$-ისა და $\vec{Q}_2$-ის განსაზღვრული მნიშვნელობანი ჩავსვათ (3.2) სისტემის მომდევნო განტოლებაში, რის შედეგად მივიღებთ:

$$\vec{P}_3=c'_{31}\vec{P}_1+c'_{32}\vec{P}_2+a'_{33}\vec{Q}_3+\ldots+a'_{3r}\vec{Q}_r$$

ტოლობას. თუ ანალოგიურ მსჯელობას გავაგრძელებთ, ბოლოს და. ბოლოს დავწერთ:

$$\vec{P}_{r+1}=c'_{r+1,1}\vec{P}_1+c'_{r+1,2}\vec{P}_2+\ldots+c'_{r+1,r}\vec{P}_r.$$

რადგანაც $r<m$-ზე, ამიტომ ეს უკანასკნელი ჩვენს თეორემას ამტკიცებს.

ვექტორთა მოცემულ ორ სისტემას ე ქ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი ეწოდება, თუ ერთი სისტემის ნებისმიერი ვექტორი გამოისახება მეორე სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაციით და, პირიქით.

ცხადია, რომ თუ n-განზომილებიან სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ორი სისტემა ეკვივალენტურია, მაშინ ისინი შეიცავენ ვექტორთა ერთსა და იმავე რაოდენობას.

ვთქვათ n-განზომილებიან სივრცეში მოცემულია ვექტორთა რაიმე სისტემა. ამ სისტემას ვექტორთა ქვესისტემას ეწოდება მ ა ქ ს ი მ ა ლ უ რ ა დ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი სისტემა, თუ ქვესისტემის ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია და ქვესისტემის ვექტორებს ვერ დავუმატებთ სისტემიდან სხვა ვექტორს ისე, რომ ქვესისტემის ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა არ დაირღვეს. მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემასთან დაკავშირებით, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა. **ვექტორთა ერთი და იმავე სისტემის ორი მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა ვექტორთა ტოლ რაოდენობას შეიცავს.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ,

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r$$

და

$$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_m$$

არიან ვექტორთა ერთი და იმავე სისტემის მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემები, მაშინ

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r, \vec{Q}_1$$

ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებული იქნება, ე. ი. არსებობენ ისეთი მუდმივები $k_1, k_2, \ldots, k_r, k_{r+1}$, რომელთა შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ldots+k_r\vec{P}_r+k_{r+1}\vec{Q}_1=0 \qquad (3.3)$$

ცხადია, რომ $k_{r+1} \neq 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\vec{P}$ ვექტორთა ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელი იქნებოდა. მაშასადამე,

$$\vec{Q}_1 = -\frac{k_1}{k_{r+1}}\vec{P}_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}}\vec{P}_2 - \cdots - \frac{k_r}{k_{r+1}}\vec{P}_r.$$

თუ ამგვარ მსჯელობას გავაგრძელებთ სისტემის სხვა $\vec{Q}$ ვექტორების მიმართ, ჩვენ ვნახავთ, რომ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა სისტემა ეკვივალენტურია. მაგრამ ეკვივალენტურ ვექტორთა სისტემები შეიცავენ ვექტორთა ტოლ რაოდენობას და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

აგრეთვე მართებულია შემდეგი

თეორემა. **n-განზომილებიან სივრცეში ნებისმიერი ვექტორთა სისტემა, რომელიც n-ზე მეტ ვექტორს შეიცავს, წრფივად დამოკიდებულია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავაგოთ ვექტორთა შემდეგი სისტემა:

$$\vec{l}_1(1, 0, 0, \ldots, 0), \vec{l}_2(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$$
$$\vec{l}_i(0, 0, \ldots 1, \ldots 0), \ldots \vec{l}_n(0, 0, \ldots, 0, 1) \quad (3.4)$$

ცხადია, რომ n-განზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი ვექტორი შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\vec{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1\vec{l}_1 + X_2\vec{l}_2 + \ldots + X_n\vec{l}_n.$$

მაშასადამე, თუ n-განზომილებიან სივრცეში ჩვენ გვაქვს ნებისმიერი სისტემა, რომელიც n-ზე მეტ ვექტორს შეიცავს, მაშინ როგორც მისი, ისე (3.4) ვექტორების მიმართ მართებული იქნება ზემოთ დამტკიცებული თეორემა: თუ პირველის ვექტორები მეორის წრფივი კომბინაციით წარმოიდგინება, მაშინ ის წრფივად დამოკიდებული სისტემა იქნება. ეს კი ჩვენს თეორემას ამტკიცებს.

აგრეთვე მართებულია შემდეგი

თეორემა. **თუ n-განზომილებიან სივრცეში მოცემულია ვექტორთა ისეთი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა:**

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m, \quad (3.5)$$

რომ n-განზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი ვექტორი გამოისახება ამ სისტემის ვექტორთა კომბინაციით, მაშინ $m = n$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აღებული (3.5) წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა და (3.4) სისტემა ეკვივალენტურია და, როგორც ვნახეთ,

ეკვივალენტური სისტემები ვექტორთა ერთნაირ რაოდენობას შეიცავენ. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

n-განზომილებიანი სივრცის n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას ამ სისტემის ბ ა ზ ი ს ი ეწოდება.

n-განზომილებიანი სივრცის ყოველი ვექტორი შესაძლებელია გამოისახოს ბაზისის ვექტორთა წრფივი კომბინაციით.

თუ ვექტორთა სისტემა $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ წარმოადგენს n-განზომილებიანი სივრცის ბაზისს, ხოლო ამ სისტემის რომელიმე ვექტორი შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\vec{Q}=k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ldots+k_n\vec{P}_n,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ წარმოადგენენ $\vec{Q}$ ვექტორის კოორდინატებს ზემოხსენებულ ბაზისზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{P}_1(1, 1, 1)$, $\vec{P}_2(1, 1, 2)$, $\vec{P}_3(1, 2, 3)$ და $\vec{R}(6, 9, 14)$. დავადგინოთ, რომ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ ვექტორები ბაზისს წარმოადგენენ და ვიპოვოთ $\vec{R}$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისზე.

საძებნია ისეთი k_1, k_2, k_3 რიცხვები, რომ

$$k_1\vec{P}_1(1, 1, 1)+k_2\vec{P}_2(1, 1, 2)+k_3\vec{P}_3(1, 2, 3)=0(0, 0, 0)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{P}_1(k_1, k_1, k_1)+\vec{P}_2(k_2, k_2, 2k_2)+\vec{P}_3(k_3, 2k_3, 3k_3)=0(0, 0, 0).$$

აქედან დავწერთ:

$$\vec{P}(k_1+k_2+k_3, k_1+k_2+2k_3, k_1+2k_2+3k_3)=0(0, 0, 0),$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} k_1+k_2+k_3&=0,\\ k_1+k_2+2k_3&=0,\\ k_1+2k_2+3k_3&=0. \end{aligned}$$

რადგანაც სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

ამიტომ, კრამერის თეორემით, მიღებულ სისტემას აქვს ერთადერთი ნულოვანი ამონახსენი: $k_1=k_2=k_3=0$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ ნამდვილად ბაზისს ქმნის.

ახლა $\vec{R}$ ვექტორი გამოვსახოთ ბაზისის ვექტორთა წრფივი კომბინაციით:

$\vec{R}(6,\ 9,\ 14)=a_1\vec{P}_1(1,\ 1,\ 1)+a_2\vec{P}_2(1,\ 1,\ 2)+a_3\vec{P}_3(1,\ 2,\ 3)$

ან, რაც იგივეა,

$\vec{R}(6,\ 9,\ 14)=\vec{P}_1(a_1,\ a_1,\ a_1)+\vec{P}_2(a_2,\ a_2,\ 2a_2)+\vec{P}_3(a_3,\ 2a_3,\ 3a_3)$

ანდა

$\vec{R}(6,\ 9,\ 14)=\vec{P}(a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+2a_3,\ a_1+2a_2+3a_3)$.

აქედან კი შევადგენთ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3=6, \\ a_1+a_2+2a_3=9, \\ a_1+2a_2+3a_3=14. \end{array}\right\}$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$a_1=1,$$
$$a_2=2,$$
$$a_3=3.$$

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ

$$\vec{R}=\vec{P}_1+2\vec{P}_2+3\vec{P}_3$$

და მისი მდგენელებია ბაზისზე 1, 2 და 3.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, მოცემულია $\vec{P}(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ ვექტორი $\vec{l_1},\ \vec{l_2},\ \dots,\ \vec{l_n}$ ბაზისზე, ე. ი.

$$\vec{P}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=x_1\vec{l}_1+x_2\vec{l}_2+\dots+x_n\vec{l}_n$$

დავუშვათ, აგრეთვე, რომ $\vec{l_1}',\ \vec{l_2}',\ \dots,\ \vec{l_n}'$ ვექტორთა სისტემა ქმნის მეორე ბაზისს, რომელზედაც $\vec{P}$ ვექტორის მდგენელებია $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$, ე. ი., გვაქვს:

$$\vec{P}(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)=y_1\vec{l}_1'+y_2\vec{l}_2'+\dots+y_n\vec{l}_n'$$

აგრეთვე, ვიგულისხმოთ, რომ განხილულ ბაზისთა ვექტორები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი თანაფარდობებით:

$$
\left.\begin{aligned}
\vec{l}_1&=a_{11}\vec{l}_1{}'+a_{12}\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +a_{1n}\vec{l}_n{}',\\
\vec{l}_2&=a_{21}\vec{l}_1{}'+a_{22}\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +a_{2n}\vec{l}_n{}',\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\vec{l}_n&=a_{n1}\vec{l}_1{}'+a_{n2}\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +a_{nn}\vec{l}_n{}'.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.6)
$$

საჭიროა პირველ და მეორე ბაზისზე $\vec{P}$ ვექტორის მდგენელთა შორის დამოკიდებულების დადგენა.

პირობის თანახმად

$$\vec{P}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=x_1\vec{l}_1+x_2\vec{l}_2+\ \dots\ +x_n\vec{l}_n.$$

ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში შევიტანოთ პირველი ბაზისის ვექტორთა მნიშვნელობანი, რომლებიც მოცემულია (3.6) დამოკიდებულებებით. მაშინ დავწერთ:

$$
\begin{aligned}
\vec{P}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)&=(a_{11}\vec{l}_1{}'+a_{12}\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +a_{1n}\vec{l}_n{}')x_1+(a_{21}\vec{l}_1{}'+\\
&+a_{22}\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +a_{2n}\vec{l}_n{}')x_2+\ \dots\ +(a_{n1}\vec{l}_1{}'+a_{n2}\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +\\
&+a_{nn}\vec{l}_n{}')x_n=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ \dots\ +a_{n1}x_n)\vec{l}_1{}'+(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\\
&+\ \dots\ +a_{n2}x_n)\vec{l}_2{}'+\ \dots\ +(a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n)\vec{l}_n{}'
\end{aligned}
$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\vec{P}$ ვექტორის მდგენელები მეორე ბაზისზე ყოფილა:

$$
\begin{aligned}
y_1&=a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ \dots\ +a_{n1}x_n,\\
y_2&=a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{n2}x_n,\\
&\cdots\cdots\\
y_n&=a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n.
\end{aligned}
$$

მიღებული უკანასკნელი დამოკიდებულება ჩავწეროთ მატრიცულად, გვექნება:

$$
\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}=
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}.\qquad(3.7)
$$

(3.6) დამოკიდებულება ბაზისებს შორის მატრიცულად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$
\begin{pmatrix} \vec{l}_1\\ \vec{l}_2\\ \vdots\\ \vec{l}_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \vec{l}_1{}'\\ \vec{l}_2{}'\\ \vdots\\ \vec{l}_n{}' \end{pmatrix},
$$

სადაც

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ არიან ერთი და იმავე ვექტორის მდგენელები შესაბამისად პირველ და მეორე ბაზისზე, (3.7) მატრიცული განტოლება შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

სადაც A' არის A-ს ტრანსპონირებული მატრიცა. მიღებული უკანასკნელი დამოკიდებულება ამყარებს კავშირს $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებს შორის პირველსა და მეორე ბაზისზე.

შევამოწმოთ არის თუ არა ბაზისი თითოეული $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ და $\vec{l}_1', \vec{l}_2', \dots, \vec{l}_n'$ სისტემა.

ვთქვათ $k_1, k_2, \dots, k_n$ ისეთი მუდმივებია, რომ

$$k_1\vec{l}_1+k_2\vec{l}_2+\dots+x_n\vec{l}_n=0,$$

ე. ი.

$$\vec{l}_1(k_1, 0, \dots, 0)+\vec{l}_2(0, k_2, 0, \dots, 0)+\dots+$$
$$+\vec{l}_n(0, \dots, 0, k_n)=0.$$

თუ ვექტორთა შეკრებას მოვახდენთ, ვნახავთ, რომ

$$\vec{l}(k_1, k_2, \dots, k_n)=0(0, 0, \dots, 0),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$k_1=k_2=\dots=k_n=0.$$

ამგვარად, $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ ვექტორთა სისტემა ბაზისს წარმოადგენს, ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\vec{l}_1', \vec{l}_2', \dots, \vec{l}_n'$ ვექტორთა სისტემაც ბაზისს წარმოადგენს.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული მაგალითი: ვთქვათ, მოცემულია ვექტორთა ორი სისტემა:

$$\vec{P}_1(1, 1, 1); \quad \vec{P}_2(1, 2, 1), \quad \vec{P}_3(1, 1, 2)$$

და

$$\vec{Q}_1(1, 0, 3), \ \vec{Q}_2(-2, -3, -5); \ \vec{Q}_3(2, 2, 5),$$

ვნახოთ, არიან თუ არა ისინი ბაზისის ვექტორები და თუ არიან მაშინ ვიპოვოთ ერთი და იმავე $\overrightarrow{P}$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისებზე.

ადვილად შემოწმდება, რომ განხილულ ვექტორთა სისტემები ბაზისებს წარმოადგენს. ცხადია, რომ ისინი წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემებს.

მართლაც,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{და} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ორივე სისტემა ბაზისია.

$\overrightarrow{P}$ ვექტორები გამოვსახოთ $\overrightarrow{Q}$ ვექტორების საშუალებით, გვექნება:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P}_1 &= a_{11}\overrightarrow{Q}_1 + a_{12}\overrightarrow{Q}_2 + a_{13}\overrightarrow{Q}_3, \\ \overrightarrow{P}_2 &= a_{21}\overrightarrow{Q}_1 + a_{22}\overrightarrow{Q}_2 + a_{23}\overrightarrow{Q}_3, \\ \overrightarrow{P}_3 &= a_{31}\overrightarrow{Q}_1 + a_{32}\overrightarrow{Q}_2 + a_{33}\overrightarrow{Q}_3. \end{aligned}$$

ამ სისტემის პირველი განტოლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$\overrightarrow{P}_1(1,\ 1,\ 1) = \overrightarrow{Q}_1'(a_{11},\ 0,\ 3a_{11}) + \overrightarrow{Q}_2'(-2a_{12},\ -3a_{12},\ -5a_{12}) +$$
$$+ \overrightarrow{Q}_3'(2a_{13}, 2a_{13}, 5a_{13}) = \overrightarrow{Q}(a_{11} - 2a_{12} + 2a_{13},\ -3a_{12} + 2a_{13},\ 3a_{11} - 5a_{12} + 5a_{13}),$$

საიდანაც დავწერთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{11} - 2a_{12} + 2a_{13} &= 1, \\ -3a_{12} + 2a_{13} &= 1, \\ 3a_{11} - 5a_{12} + 5a_{13} &= 1. \end{aligned}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

და

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 1\end{vmatrix}=5,$$

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ

$$a_{11}=-3,\quad a_{12}=3,\quad a_{13}=5.$$

ასევე ვიპოვით, რომ

$$a_{21}=-3,\qquad a_{22}=2,\qquad a_{23}=4,$$
$$a_{31}=-1,\qquad a_{32}=1,\qquad a_{33}=2.$$

ამგვარად, მივიღებთ, რომ

$$\vec{P_1}=-3\vec{Q}_1+3\vec{Q}_2+5\vec{Q}_3,$$
$$\vec{P_2}=-3\vec{Q}_1+2\vec{Q}_2+4\vec{Q}_3,$$
$$\vec{P_3}=-\vec{Q}_1+\vec{Q}_2+2\vec{Q}_3.$$

ახლა დავუშვათ, რომ პირველ ბაზისზე $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებია x_1, x_2, x_3, ხოლო მეორე ბაზისზე იმავე ვექტორის კოორდინატებია: y_1, y_2, y_3. მაშინ, როგორც ვიცით:

$$\vec{P}(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1\vec{P}_1+x_2\vec{P}_2+x_3\vec{P}_3$$

და

$$\vec{P}(y_1,\ y_2,\ y_3)=y_1\vec{Q_1}+y_2\vec{Q_2}+y_3\vec{Q_3},$$

მაშინ

$$\vec{P}(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1(-3\vec{Q}_1+3\vec{Q}_2+5\vec{Q}_3)+x_2(-3\vec{Q}_1+2\vec{Q}_2+4\vec{Q}_3)+$$
$$+x_3(-\vec{Q}_1+\vec{Q}_2+2\vec{Q}_3)=(-3x_1-3x_2-x_3)\vec{Q_1}+(3x_1+2x_2+x_3)\vec{Q}_2+$$
$$+(5x_1+4x_2+2x_3)\vec{Q}_3,$$

მაგრამ, რადგან $\vec{P}$-ს მდგენელები მეორე ბაზისზე არის y_1, y_2, y_3, ამიტომ დავწერთ:

$$y_1=-3x_1-3x_2-x_3,$$
$$y_2=3x_1+2x_2+x_3,$$
$$y_3=5x_1+4x_2+2x_3.$$

§ 4. მატრიცის რანგი

ვთქვათ, მოცემულია

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

მატრიცა. მატრიცის სვეტები განვიხილოთ როგორც ვექტორები, მაშინ გვექნება n-განზომილებიანი k ვექტორი:

$(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}); (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}); \ldots, (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$
ამ უკანასკნელი სისტემიდან შეიძლება გამოიყოს მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემები, რომლებიც, როგორც ზემოთ ვნახეთ, შეიცავენ ვექტორთა ერთსა და იმავე რაოდენობას.

მატრიცის რანგი ეწოდება ქვესისტემაში მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რიცხვს.

A მატრიციდან გამოვყოთ, რომელიმე r სვეტი და r სტრიქონი და ამოვწეროთ მათგან შედგენილი მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} \\ . & . & & . \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

ამ მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს ეწოდება A მატრიცის r რიგის მინორი. შევნიშნოთ, რომ თუ r რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, მაშინ ნულის ტოლი იქნება ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი. ეს იქიდან ჩანს რომ, მაგალითად, $r+1$ რიგის მინორი წარმოიდგინება როგორც r რიგის მინორთა წრფივი კომბინაცია.

მატრიცის იმ მინორთა უმაღლესი რიგი, რომლებიც ნულისაგან განსხვავებულია, ემთხვევა მატრიცის რანგს.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია A მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1r} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2r} & & a_{2k} \\ & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rr} & & a_{rk} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nr} & & a_{nk} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

და იმ მინორების უმაღლესი რიგი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან იყოს r. ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.4}$$

პირველად ვაჩვენოთ, რომ

$$(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{n1}), \quad (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2}, \ldots, a_{n2}), \ldots, (a_{1r}, a_{2r}, \ldots, a_{rr}, \ldots, a_{nr}) \ldots$$

ვექტორთა ქვესისტემები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. დავუშვათ, რომ, პირიქით, ისინი ურთიერთდამოკიდებულნი არიან, მაშინ ერთ-ერთი ამ ვექტორთაგანი შესაძლებელია დანარჩენის წრფივი კომბინაციით გამოისახოს. ვთქვათ, მაგალითად,

$$\begin{aligned}(a_{1r}, a_{2r}, \ldots, a_{rr}, \ldots, a_{nr}) &= k_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1}, \ldots, a_{n1}) + \\ &+ k_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2}, \ldots, a_{rn}) + \ldots + \\ &+ k_{r-1}(a_{1,r-1}, a_{2,r-1}, \ldots, a_{r2,r-1}, \ldots, a_{n,r-1}).\end{aligned}$$

აქედან კი დავწერთ:

$$\begin{aligned} a_{1r} &= k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + \ldots + k_{r-1} a_{1,r-1}, \\ a_{2r} &= k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + \ldots + k_{r-1} a_{2,r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr} &= k_1 a_{r1} + k_2 a_{r2} + \ldots + k_{r-1} a_{r,r-1}. \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი სისტემა იმას გვიჩვენებს, რომ (4.4) მინორის r სვეტი არის დანარჩენი სვეტების წრფივი კომბინაცია. მაშინ, როგორც ვიცით, ასეთი მინორის მნიშვნელობა უნდა იყოს ნულის ტოლი. მაგრამ პირობის თანახმად ეს მინორი არ უდრის ნულს. მაშასადამე, განხილული ქვესისტემის ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. ამით ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ მატრიცის რანგი r-ზე ნაკლები არ არის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ A მატრიცის რანგი r-ზე მეტი არ იქნება. ამისათვის (4.4) მინორი შევავსოთ A მატრიცის i-ური სვეტით ($i>r$) და j-ური სტრიქონით, სადაც $1<j<n$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2i} \\ & & & \cdot & \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{ri} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jr} & a_{ji} \end{vmatrix} = 0.$$

მართლაც, თუ $j<r$, მაშინ ამ დეტერმინანტში j-ური სტრიქონი გვხვდება ორჯერ, თუ $j>r$ მაშინ ეს დეტერმინანტი იქნება მატრიცის $r+1$ რიგის მინორი. პირველ შემთხვევაში, ცხადია, დეტერმინანტი ნული იქნება; მეორე შემთხვევაშიც, რადგანაც განმარტების თანახმად ნულისგან განსხვავებული მინორის უმაღლესი რიგი r-ია, ამიტომ დეტერმინანტი იქნება ნული, ე. ი., როგორც ვხედავთ, A მატრიცის რანგი არ შეიძლება მეტი ან ნაკლები იყოს r-ზე, მაშასადამე, A მატრიცის რანგი ყოფილა r.

პრაქტიკულად, თუ განვიხილავთ რომელიმე მატრიცას, რომელიც ჰარანულოვანი მატრიცაა, მაშინ, ცხადია, მისი რანგი ერთის ტოლი მაინც იქნება; თუ მას უფრო მაღალი რიგის რანგი აქვს, უნდა შევამოწმოთ განხილული მატრიცის მეორე რიგის მინორები, თუ მათ შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ მატრიცის რანგი იქნება ორი მაინც და ა. შ. თუ რომელიმე რიგის მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ხოლო უფრო მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულია, მაშინ მატრიცის რანგი იქნება ნულისგან განსხვავებული უმაღლესი რიგის მინორის რიგის ტოლი.

მატრიცის რანგი ემთხვევა სტრიქონების მიხედვით წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალურ რაოდენობას.

თუ რომელიმე დეტერმინანტი ნულია, მაშინ მისი ერთ-ერთი ან სვეტი ან სტრიქონი მაინც წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას.

თუ ასეთი დეტერმინანტის რიგია n, მაშინ შესაბამისი მატრიცის რანგი იქნება n-ზე ნაკლები.

აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ ორი მატრიცის ნამრავლ მატრიცას არ შეიძლება ჰქონდეს უფრო მაღალი რიგის რანგი, ვიდრე ცალ-ცალკე თანამამრავლ მატრიცებს.

თუ $C=AB$ ანდა $C=BA$, სადაც A გადაუგვარებელი კვადრატული მატრიცაა, მაშინ C მატრიცის რანგი ემთხვევა B მატრიცის რანგს.

თუ რომელიმე მატრიცას გავამრავლებთ რაიმე რიცხვზე ან რომელიმე სვეტს ან სტრიქონს დავუმატებთ მეორე სვეტს ან სტრიქონს გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე ან ორ სვეტს ან ორ სტრიქონს ადგილს შევუცვლით, ამით მატრიცის რანგი არ შეიცვლება.

ვთქვათ, მოცემულია მატრიცა

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

ვიპოვოთ ამ მატრიცის რანგი.

ცხადია, რომ აღებული მატრიცის რანგი ერთი მაინც იქნება. თუ მისი რანგი უდრის 2-ს, მაშინ ერთ-ერთი მეორე რიგის მინორი მაინც

უნდა იყოს ნულისაგან განსხვავებული. მაგალითად, ნულისაგან განსხვავებული ერთ-ერთი მინორი იქნება:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 56 = -54 \neq 0.$$

ახლა აღებული მატრიცის მეშვეობით შევადგინოთ ყველა მესამე რიგის ისეთი მინორი, რომლებიც ჩვენ მიერ დაწერილ მეორე რიგის მინორს შეიცავენ, თუ ერთ-ერთი მათგანი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ მატრიცის რანგი იქნება 3, თუკი ყველანი ნულის ტოლია, მაშინ რანგი იქნება 2. განხილულ მატრიცას 3-ზე მეტი რანგი არ ექნება. მართლაც,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-56) - 5(-4-32) + (-14-4) = -162 + 180 - 18 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -(2-56) + 2(-4-32) - (-14-4) = 54 - 72 + 18 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2(-54) - 4(-4-32) + 2(-14-4) = -108 + 144 - 36 = 0.$$

როგორც ვხედავთ, ყველა მესამე რიგის მინორი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულ მეორე რიგის მინორს შეიცავს, ნულის ტოლია. ამგვარად, დავასკვნით, რომ ჩვენ მიერ განხილული მატრიცის რანგი უდრის 2-ს.

სავარჯიშო

მონახეთ შემდეგ მატრიცათა რანგი:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$, პასუხი. 2.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, პასუხი. 3.

3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, პასუხი: 3.

თავი IV

განუსაზღვრელ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

§ 1. განტოლებათა სისტემა, რომელიც n უცნობს და m განტოლებას შეიცავს

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე $m<n$.

განხილული სისტემის შესაბამისი მატრიცა იქნება

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ცხადია, A მატრიცის რანგი არ შეიძლება იყოს m-ზე მეტი. დავუშვათ, რომ მატრიცის რანგი $r=m$.

ეს იმას ნიშნავს, რომ A მატრიცაში არის m წრფივად დამოუკიდებელი სვეტი და ამდენივე წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონი.

რადგანაც მატრიცის რანგია m, ცხადია, რომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}\neq 0,$$

ჩვენი სისტემის განტოლებებში ის წევრები, რომლებიც m-ზე მეტინდექსიან უცნობებს შეიცავენ, გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს, გვექნება:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1-(a_{1,\,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{1n}x_n), \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=b_2-(a_{2,\,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{2n}x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mm}x_m=b_m-(a_{m,\,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{mn}x_n) \end{aligned}$$

მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ უცნობებს, მაშინ უკანასკნელი სისტემის მარჯვენა მხარეს მივიღებთ სავსებით გარკვეულ რიცხვებს და გვექნება ისეთი სისტემა, რომელშიც უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვს ემთხვევა. ასეთი სისტემის ამოხსნა, როგორც ვნახეთ კრამერის ფორმულებით შეიძლება.

ამგვარად, როგორც ვხედავთ, თუ წრფივ განტოლებათა სისტემაში უცნობთა რიცხვი მეტია განტოლებათა რიცხვზე $(n>m)$, ხოლო უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი განტოლებათა რიცხვის ტოლია, მაშინ სისტემა თავსებადია, მაგრამ განუზღვრელი, ე. ი. მას აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე, რადგანაც ჩვენ შეგვიძლია უცნობების მნიშვნელობანი ნებისმიერად ვცვალოთ.

როგორც ვხედავთ, (1.1) სისტემაში შედის m განტოლება n უცნობით. ვთქვათ, სისტემის კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცის რანგია r, რომელიც ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, n-ზე. ცხადია, რომ აგრეთვე $r \leqslant m$.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $r<m$.

განვიხილოთ პირველი r განტოლებათა სისტემა. ყველა განტოლების ის უცნობი, რომლის ინდექსი მეტია r-ზე გადავიტანოთ მარჯვნივ, დავწეროთ:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r &= b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r &= b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n,\\
&\ldots\\
a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r &= b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n.
\end{aligned}
$$

თუ $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობებს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს, მაშინ ჩვენ მივიღებთ თავსებად წრფივ განტოლებათა სისტემას r განტოლებით და r უცნობით, რომლის მიმართ კრამერის ფორმულების გამოყენება შეიძლება.

ცხადია, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობთა ერთობლიობის გარკვეულ მნიშვნელობათათვის სისტემას ექნება ერთადერთი ამოხსნა.

დავუშვათ, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობებს მივეცით შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობანი: $x_{r+1}^{(0)}, x_{r+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ და სისტემის ამოხსნის შედეგად $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობებისათვის მივიღეთ მნიშვნელობანი $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}$. უნდა გავარკვიოთ $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x^{(0)}_{r+1}, \ldots, x_n^{(0)}$ მნიშვნელობათა ერთობლიობა აკმაყოფილებს თუ არა თავიდან განხილულ (1.1) წრფივ განტოლებათა სისტემას.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\vec{A}_1=(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}),$$
$$\vec{A}_2=(a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{A}_m=(a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn}).$$

როგორც ცნობილია, ყოველი ვექტორი, რომლის ინდექსი მეტია r-ზე, რადგანაც მატრიცის რანგია r, გამოისახება დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციით. სახელდობრ:

$$\vec{A}_{r+1}=k_{11}\vec{A}_1+k_{12}\vec{A}_2+\ldots+k_{1r}\vec{A}_r,$$
$$\vec{A}_{r+2}=k_{21}\vec{A}_1+k_{22}\vec{A}_2+\ldots+k_{2r}\vec{A}_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{A}_m=k_{m-r,1}\vec{A}_1+k_{m-r,2}\vec{A}_2+\ldots+k_{m-r,r}\vec{A}_r.$$

ამ უკანასკნელი დამოკიდებულების პირველი ტოლობა შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$(a_{r+1,1},\ a_{r+1,2},\cdots,\ a_{r+1,n})=k_{11}(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})+$$
$$+k_{12}(a_{21},\ a_{22},\ldots,a_{2n})+\cdots+k_{1r}(a_{r1},\ a_{r2},\cdots,\ a_{rn})=$$
$$=(k_{11}\,a_{11},\ k_{11}\,a_{12},\cdots,k_{11}\,a_{1n})+(k_{12}\,a_{21},\ k_{12}\,a_{22},\cdots,k_{12}\,a_{2n})+$$
$$+\cdots+(k_{1r}\,a_{r1},\ k_{1r}\,a_{r2},\cdots,\ k_{1r}\,a_{rn})=(k_{11}\,a_{11}+k_{12}\,a_{21}+\cdots+$$
$$+k_{1r}\,a_{r1},\ k_{11}\,a_{12}+k_{12}\,a_{22}+\cdots+k_{1r}\,a_{r2},\cdots,k_{11}\,a_{1n}+k_{12}\,a_{2n}+\cdots+k_{1r}a_{rn})$$

საიდანაც

$$a_{r+1,1}=k_{11}a_{11}+k_{12}a_{21}+\ldots+k_{1r}a_{r1},$$
$$a_{r+1,2}=k_{11}a_{12}+k_{12}a_{22}+\ldots+k_{1r}a_{r2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{r+1,n}=k_{11}a_{1n}+k_{12}a_{2n}+\ldots+k_{1r}a_{rn}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მე-$r+1$ განტოლების მარცხენა მხარე შესაძლებელია მივიღოთ, თუ პირველი განტოლების მარცხენა მხარეს k_{11}-ზე გავამრავლებთ, მეორე განტოლებას k_{12}-ზე გავამრავლებთ და ა. შ. მე-r განტოლებას k_{1r}-ზე გავამრავლებთ და მიღებულ შედეგებს შევკრებთ. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მე-$r+1$ განტოლებაში უცნობთა კოეფიციენტები წარმოადგენს პირველ r განტოლებაში იმავე უცნობთა კოეფიციენტების წრფივ კომბინაციას. ცხადია, იმისათვის, რომ $r+1$ განტოლება დაკმაყოფილდეს აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ განტოლების მარჯვენა მხარე იყოს იგივე წრფივი კომბინაცია პირ-

ველი r განტოლების მარჯვენა მხარის, ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას

$$b_{r+1}=k_{11}b_1+k_{12}b_2+\ldots+k_{1r}b_r.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, იმისათვის, რომ დაკმაყოფილდეს $r+2, \ldots, m$ განტოლება, აუცილებელი და საკმარისია, რომ:

$$\left.\begin{aligned} b_{r+2}&=k_{21}b_1+k_{22}b_2+\ldots+k_{2r}b_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m&=k_{m-r,1}b_1+k_{m-r,2}b_2+\ldots+k_{m-r,r}b_r. \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

ამგვარად, თუ ეს უკანასკნელი თანაფარდობა სრულდება, სისტემა თავსებადია, წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემა უთავსებადია.

თუ A მატრიცას შევავსებთ თავისუფალი წევრებით, მივიღებთ ახალ მატრიცას:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}, & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

რომელსაც გაფართოებული მატრიცა ეწოდება.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ (1.2) პირობათა შესრულება იმას ნიშნავს, რომ A და B მატრიცას ერთი და იგივე რანგი აქვს. ხოლო თუ ეს პირობები არ სრულდება, მაშინ მათი რანგიც განსხვავებულია, ე. ი. ამ შემთხვევაში B მატრიცის რანგი ერთით მეტი იქნება A მატრიცის რანგზე.

ჩამოყალიბებული დებულება გამოხატავს კრონეკერ-კაპელის თეორემის შინაარსს, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს:

იმისათვის, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი ემთხვეოდეს გაფართოებული მატრიცის რანგს.

თავსებად წრფივ განტოლებათა სისტემას მაშინ აქვს ერთადერთი ამოხსნა, როცა უცნობთა რიცხვი უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგს ემთხვევა და აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე, უცნობთა რიცხვი კი მატრიცის რანგზე მეტია.

უცნობების ნებისმიერი რიცხვის შემცველი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას პირველ რიგში უნდა დადგინდეს არის თუ არა სისტემა თავსებადი, თუ სისტემა თავსებადია, საჭიროა ამონახსენთა

რიცხვის პოვნა და შემდეგ კი საკუთრივ ამონახსნის მოძებნა. მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$
\begin{aligned}
&2x_1+x_2+x_3=2,\\
&x_1+3x_2+x_3=5,\\
&x_1+x_2+5x_3=-7,\\
&2x_1+3x_2-3x_3=14.
\end{aligned}
$$

ამ სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა იქნება

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 1\\
1 & 3 & 1\\
1 & 1 & 5\\
2 & 3 & -3
\end{pmatrix}.
$$

მიღებული მატრიცის მაქსიმალური რანგი შეიძლება იყოს 3. მართლაც,

$$
\begin{vmatrix}
1 & 3 & 1\\
1 & 1 & 5\\
2 & 3 & -3
\end{vmatrix}=(-3-15)-(-9-3)+2(15-1)=
$$

$$
=-18+12+28=22\neq 0
$$

მაშასადამე, მატრიცის რანგი ყოფილა 3.

შევადგინოთ გაფართოებული მატრიცა:

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 1 & 2\\
1 & 3 & 1 & 5\\
1 & 1 & 5 & -7\\
2 & 3 & -3 & 14
\end{pmatrix}
$$

მიღებული მატრიცის შესაბამისი მეოთხე რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა იქნება ნული

$$
\begin{vmatrix}
2 & 1 & 1 & 2\\
1 & 3 & 1 & 5\\
1 & 1 & 5 & -7\\
2 & 3 & -3 & 14
\end{vmatrix}=0.
$$

ეს იქიდან ჩანს, რომ მეოთხე სტრიქონი წარმოადგენს პირველი ორი სტრიქონის ჯამს გამოკლებული მესამე სტრიქონი. მაშასადამე, გაფართოებული მატრიცის რანგიც 3 ყოფილა. ამგვარად, აღებული სისტემა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსენი,

მოცემული სისტემიდან გამოვწეროთ პირველი სამი განტოლება:

$$2x_1+x_2+x_3=2,$$
$$x_1+3x_2+x_3=5,$$
$$x_1+x_2+5x_3=-7.$$

აქ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=2(15-1)-(5-1)+(1-3)=28-4-2=22\neq 0,$$

ხოლო

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ -7 & 1 & 5\end{vmatrix}=2(15-1)-5(5-1)-7(1-3)=28-20+14=22,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & -7 & 5\end{vmatrix}=2(25+7)-(10+7)+(2-5)=64-17-3=44,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 1 & -7\end{vmatrix}=2(-21-5)-(-7-2)+(5-6)=$$
$$=-52+9-1=-44.$$

ამგვარად, კრამერის ფორმულების დახმარებით ვნახავთ, რომ

$$x_1=\frac{22}{22}=1,\quad x_2=\frac{44}{22}=2,\quad x_3=-\frac{44}{22}=-2.$$

მიღებული ამონახსენი ცხადია, დააკმაყოფილებს მეოთხე განტოლებასაც. მართლაც, გვქონდა

$$2x_1+3x_2-3x_3=14.$$

აქ შევიტანოთ უცნობთა მიღებული მნიშვნელობანი, დავწერთ:

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3(-2)=14$$

ანდა

$$2+6+6=14,$$

ე. ი.

$$14=14,$$

მივიღეთ იგივობა, ე. ი. უცნობთა მიღებული მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ სისტემის მეოთხე განტოლებასაც.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$2x_1+x_2-x_3+x_4=1,$$
$$3x_1-2x_2+2x_3-8x_4=2,$$
$$2x_1-x_2+x_3-3x_4=4.$$

უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა იქნება:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

რადგანაც აქ არიან მეორე რიგის მინორები, რომლებიც ნულისაგან განსხვავებულია, ამიტომ შეიძლება ამ მატრიცის რანგი 2-ზე მეტი იყოს. მართალია,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2(2-2)-3(1-1)+2(-2+2)=0,$$

მაგრამ, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=2(-6-8)-3(-3+1)+2(-8-2)=$$
$$=-28+6-20=-42\neq 0,$$

ამიტომ მატრიცის რანგი იქნება 3.

ამგვარად, მოცემული სისტემა თავსებადია და, რადგანაც უცნობთა რიცხვი მატრიცის რანგზე მეტია, სისტემას ექნება ამოხსენთა უსასრულო სიმრავლე. რადგანაც მატრიცის რანგი არის 3, სისტემის განტოლებების მარცხენა მხარეს დავტოვოთ მხოლოდ x_1, x_2 და x_4 —სამი უცნობი, ხოლო x_3 გადავიტანოთ მარჯვნივ, მივიღებთ:

$$2x_1+x_2+x_4=1+x_3,$$
$$3x_1-2x_2-8x_4=2-2x_3,$$
$$2x_1-x_2-3x_4=4-x_3.$$

x_3-ს მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა; ვთქვათ, $x_3=1$, მაშინ მივიღებთ შემდეგ სამუცნობიან განტოლებათა სისტემას:

$$
\begin{aligned}
2x_1+x_2+x_4&=2,\\
3x_1-2x_2-8x_4&=0,\\
2x_1-x_2-3x_4&=3.
\end{aligned}
$$

მიღებული სისტემის დეტერმინანტი, როგორც ზემოთ გამოვთვალეთ, იქნება:

$$
\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-42\neq 0.
$$

ახლა ვიპოვოთ Δ_1, Δ_2 და Δ_4:

$$
\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=2(6-8)+3(-8+2)=-4-18=-22,
$$

$$
\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot 24-3(-6-3)+2(-16)=48+27-32=43,
$$

$$
\Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=2(-6)-3(3+2)+2\cdot 4=-12-15+8=-19.
$$

ამგვარად, მივიღებთ, რომ

$$
x_1=\frac{22}{42}=\frac{11}{21},\qquad x_2=-\frac{43}{42}=-1\frac{1}{42},\qquad x_4=\frac{19}{42},
$$

თუ x_3-ს მივანიჭებთ სხვა მნიშვნელობას, x_1, x_2 და x_4-თვის მივიღებთ სხვა ახალ მნიშვნელობებს.

თუ განხილულ სისტემიდან x_4-უცნობებიან წევრებს გადავიტანთ მარჯვენა მხარეს, მაშინ მარცხნივ დარჩენილი სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება და მიღებულ განტოლებათა სისტემას ამონახსენი არ ექნება.

§ 2. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა

წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ ამ სისტემის განტოლებათა მარჯვენა მხარე ყველგან ნულია, სახელდობრ,

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0
\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)
$$

არის ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა. ცხადია, რომ ნებისმიერ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ე. წ. ტრივიალური ამონახსენი:

$$x_1=x_2=\quad .=x_n=0.$$

საინტერესოა როდის აქვს ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას არატრივიალური ამონახსენი.

აქ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ორ შემთხვევას: 1. უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის r რანგი უდრის უცნობთა რიცხვს, n-ს. ეს იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნულ მატრიცას აქვს ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული n რიგის მინორი. მაშინ ჩვენ გვექნება n-უცნობიან n განტოლებათა სისტემა, რომელიც კრამერის ფორმულებით ამოიხსნება. ცხადია, ასეთ სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი ექნება, რადგანაც კრამერის ფორმულებში მრიცხველში ყველგან გვექნება ნული.

2. მატრიცის რანგი $r<n$, ე. ი. მატრიცა შეიცავს ერთს მაინც ნულისაგან განსხვავებული r რიგის მინორს.

ვთქვათ, მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} \\ . & . \; . & & . \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ამოვწეროთ ამ დეტერმინანტის შესაბამისი r განტოლება, გვექნება:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\quad .+a_{1r}x_r+a_{1,r+1}x_{r+1}+\quad .+a_{1n}x_n=0,$$

$$. \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \quad .$$

$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\;.\;.\;.+a_{rr}x_r+a_{r,r+1}x_{r+1}+\;.\;.\;.+a_{rn}x_n=0$$

r-ზე მეტი ნომრის მქონე უცნობები გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს, მივიღებთ:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\quad .+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\quad .-a_{1n}x_n,$$

$$. \;.\; . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \;.\; .\; .$$

$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\;.\quad .+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\;.\quad .-a_{rn}x_n.$$

თუ მივცემთ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ უცნობებს ნებისმიერ მნიშვნელობებს, მაშინ მიღებულ სისტემას კრამერის ფორმულებით ამოვხსნით. ამ შემთხვევაში სისტემას ექნება არატრივიალური ამონახსენი.

ამგვარად, აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს არატრივიალური ამონახსენი იმაში მდგომარეობს, რომ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი ნაკლები იყოს უცნობთა რიცხვზე.

§ 8. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალური ამონახსენი

ცხადია, რომ n-უცნობიან განტოლებათა სისტემის ამონახსენი ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ n-განზომილებიან სივრცეში ვექტორის სახით.

თუ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსენია ვექტორი $\overline{P}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ და λ რაიმე მუდმივი რიცხვია, მაშინ $\lambda\overline{P}$ იქნება აგრეთვე სისტემის ამონახსენი.

მართლაც, თუ $\overline{P}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ამონახსენია, მაშინ ნებისმიერი i-თვის $(i=1, 2, \ldots, n)$

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\ldots+a_{in}c_n=0,$$

მაშინ, ცხადია, რომ

$$a_{i1}\lambda c_1+a_{i2}\lambda c_2+\ldots+a_{in}\lambda c_n=\lambda(a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\ldots+a_{in}c_n)=0,$$

ე. ი. $\lambda\overline{P}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ამონახსენს წარმოადგენს. აგრეთვე, ცხადია, რომ რამდენიმე ამონახსენთა ჯამი წარმოადგენს ისევ ამონახსენს. მართლაც, ვთქვათ, ამონახსნებია $\overline{P}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ და $Q(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, მაშინ

$$a_{i1}(c_1+d_1)+a_{i2}(c_2+d_2)+\ldots+a_{in}(c_n+d_n)=a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\ldots+$$
$$+a_{in}c_n+a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\ldots+a_{in}d_n=0,$$

ე. ი.

$$\overline{P}(c_1, c_2, \ldots, c_n)+\overline{Q}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

ჯამი წარმოადგენს ამონახსენს.

აგრეთვე, ცხადია, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსენთა წრფივი კომბინაცია იქნება იმავე სისტემის ამონახსენი. რადგანაც სისტემის ყოველი ამონახსენი ვექტორს წარმოადგენს n-განზომილებიან სივრცეში, ამიტომ ამონახსენთა შორის იქნებიან წრფივად დამოკიდებული და წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები. განსაკუთრებით საინტერესოა, თუ რამდენი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენი აქვს (2.1) სახის ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას.

ერთი მხრივ, ცხადია, რომ რადგანაც n-განზომილებიან სივრცეში ნებისმიერი სისტემა, რომელიც n-ზე მეტ ვექტორს შეიცავს წრფივად დამოკიდებულია, ამიტომ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსენთა რიცხვი არ შეიძლება n-ზე მეტი იყოს.

თურმე, თუ მატრიცის რანგი არის r, მაშინ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსენთა რიცხვი იქნება $n-r$.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ ნებისმიერი სხვა ამონახსნის წარმოდგენა შეიძლება $n-r$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსენთა წრფივი კომბინაციის სახით.

(2.1) ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსენთა ერთობლიობას ეწოდება ამონახსენთა ფ უ ნ დ ა მ ე ტ ა ლ უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ა.

ვთქვათ, მოცემულია არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

მაშინ (2.1) ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, რომელიც არაერთგვაროვანისაგან მიიღება თავისუფალი წევრების ნულებით შეცვლისას, იწოდება არაერთგვაროვანის მიმართ დაყვანილად.

თურმე არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ორი ამონახსნის სხვაობა დაყვანილის ამონახსენს წარმოადგენს. აგრეთვე, არაერთგვაროვანის და ერთგვაროვანის ნებისმიერ ამონახსენთა ჯამი არის არაერთგვაროვანის ამონახსენი.

არაერთგვაროვანის ყოველი ამონახსენი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მისი რომელიმე კერძო ამონახსნის და ერთგვაროვანის ამონახსნის ჯამი.

თუ მატრიცის რანგი არის r და r-ზე მეტი ინდექსის მქონე უცნობებს სისტემის პირველ r განტოლებაში მარჯვნივ გადავიტანთ, ხოლო $x_{r+1}, \ldots, x_n$ უცნობებს განვიხილავთ როგორც პარამეტრებს, მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობებს ჩვენ გამოვსახავთ, როგორც ამ პარამეტრების წრფივ ფუნქციას:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ x_2=f_2(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r=f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n), \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ რომ $(f_1, f_2, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ ერთობლიობა არის (3.1) სისტემის ზოგადი ამონახსენი ან, მოკლედ, (3.2) არის (3.1) სისტემის ზოგადი ამონახსენი.

არაერთგვაროვანი წრფივი სისტემის კერძო ამონახსნისა და ერთგვაროვანის ზოგადი ამონახსნის ჯამი იწოდება არაერთგვაროვანი წრფივი სისტემის ზოგად ამონახსნად.

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ არაერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი კერძო ამონახსენი შეიძლება ზოგადიდან მივიღოთ, თუ არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემაში $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$ სათანადოდ შევარჩევთ პარამეტრების მნიშვნელობებს.

თავი V

ამოზნექილი სიმრავლეები

ვთქვათ,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

არის არაუარყოფითი რიცხვები, რომელთა ჯამია 1, ე. ი.

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

ხოლო $U_1, U_2, \ldots, U_n$ მოცემული წერტილებია, მაშინ ამ წერტილთა ამოზნექილი კომბინაცია ეწოდება

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n$$

წერტილს.

აქ n დალაგებულ რიცხვთა მიმდევრობას წერტილი ან ვექტორი ეწოდება.

n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცეს, რომელშიც განსაზღვრულია ვექტორთა სკალარული ნამრავლი, ეწოდება ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცე და აღინიშნება E_n-ით.

C სიმრავლეს, რომელიც შედის E_n-ში, ეწოდება ამოზნექილი, თუ ის თავის ორ ნებისმიერ U_1 და U_2 წერტილებთან ერთად შეიცავს მათ ნებისმიერ ამოზნექილ კომბინაციასაც

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2.$$

ამოზნექილ სიმრავლეთა მაგალითებია თვითონ ევკლიდეს n-გან-

ზომილებიანი სივრცე E_n, წრე, კუბი. წრეწირი არ იქნება ამოზნექილი სიმრავლე.

თუ C ამოზნექილი სიმრავლეა, მაშინ მასში მოინახება ნებისმიერი ამოზნექილი კომბინაცია ამ სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვ წერტილებისაგან.

დავუშვათ, U_1, U_2 და U_3 ეკუთვნიან C-ს და ვაჩვენოთ, რომ

$$U=\alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\alpha_3U_3,$$

სადაც $\alpha_i\geqslant 0$ და $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, ეკუთვნის C-ს.
შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\lambda_i=\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2}\quad(i=1,\ 2).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{2}\lambda_i=1\quad \text{და}\quad \lambda_i\geqslant 0.$$

გვექნება:

$$U=\alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\alpha_3U_3=(\alpha_1+\alpha_2)\ (\lambda_1U_1+\lambda_2U_2)+\alpha_3U_3.$$

ამოზნექილი სიმრავლის განმარტების თანახმად, $\lambda_1U_1+\lambda_2U_2$ ეკუთვნის C-ს.

ვთქვათ,

$$U_4=\lambda_1U_1+\lambda_2U_2,$$

მაშინ

$$U=(\alpha_1+\alpha_2)U_4+\alpha_3U_3$$

იქნება ამოზნექილი კომბინაცია C სიმრავლიდან ორი წერტილის და, მაშასადამე, ის ეკუთვნის C-ს.

ცხადია, ამ დებულების დამტკიცება მართებული იქნება შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

მართებულია შემდეგი

თეორემა. **მონაკვეთის ნებისმიერი წერტილი, რომელიც ორ წერტილს აერთიანებს E_n-დან, წარმოადგენს ამ წერტილთა ამოზნექილ კომბინაციას.**

მართლაც, დავუშვათ, განსახილველი წერტილებია U და V. ვთქვათ, W ძევს იმ მონაკვეთზე, რომელიც აერთებს U და V-ს. ეს მონაკვეთი

იმ წრფის პარალელური იქნება, რომელსაც $U-V$ ვექტორი განსაზღვრავს (ნახ. 2).

ვექტორთა შეკრების წესის მიხედვით გვექნება:

$$V+\gamma(U-V)=W$$

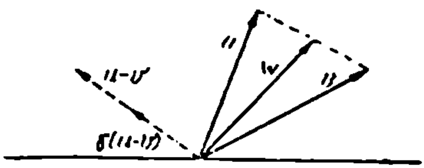
ან

$$(1-\gamma)V+\gamma U=W,$$

სადაც

$$0\leqslant\gamma\leqslant1.$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ W წარმოადგენს U და V-ს ამოზნექილ კომბინაციას.



ნახ. 2.

აგრეთვე, მართებულია დამტკიცებული თეორემის

შებრუნებული თეორემა. **ნებისმიერი წერტილი, რომელიც შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს E_n-დან ორი წერტილის ამოზნექილი კომბინაციის სახით, ძევს იმ მონაკვეთზე, რომელიც ამ წერტილებს აერთიანებს.**

სინამდვილეში, პირობის თანახმად, გვაქვს:

$$W=(1-\gamma)V+\gamma U$$

ან

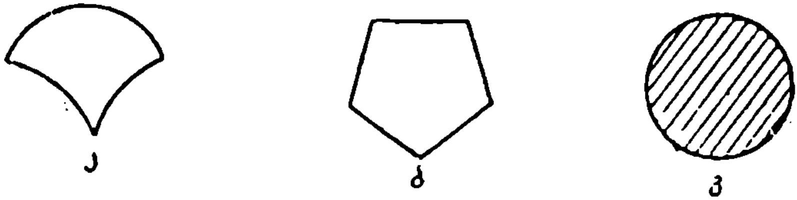
$$W-V=\gamma(U-V),$$

სადაც $0\leqslant\gamma\leqslant1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $W-V$ ვექტორი მიიღება $U-V$ ვექტორის γ-ზე გამრავლებით, და, მაშასადამე, მათ ორივეს ერთი და იგივე მიმართულება ექნება, რადგანაც ის მონაკვეთები, რომლებიც აერთებენ U-ს V-თან და W-ს V-თან პარალელურნი არიან იმ წრფეების, რომელთა მიმართულებას შესაბამისად $U-V$ და $W-V$ ვექტორები განსაზღვრავენ, ცხადია, რომ W წერტილი იქნება იმ მონაკვეთზე, რომელიც U-სა და V-ს აერთიანებს.

ორივე ზემოთ მოყვანილი თეორემა განსაზღვრავს ამოზნექილ სიმრავლეთა გეომეტრიულ მახასიათებლებს. ამოზნექილი სიმრავლე აუ-

ცილებლად უნდა შეიცავდეს იმ მონაკვეთს, რომელიც აერთებს მის ორ წერტილს.

ამოზნექილ სიმრავლეთა მაგალითებია ა, ბ და გ (ნახ. 3)



ნახ. 3.

არაამოზნექილი სიმრავლეებია ა და ბ (ნახ. 4).

ნახ. 4.

C ამოზნექილი სიმრავლის U წერტილს ეწოდება კიდური წერტილი, თუ მისი გამოსახვა არ შეიძლება ამ სიმრავლის რომელიმე ორი განსხვავებული წერტილის ამოზნექილი კომბინაციით.

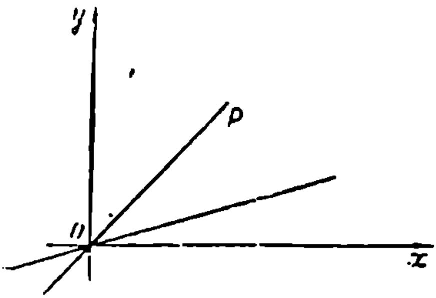
წრის საზღვრის (წრეწირის) ნებისმიერი წერტილი არის მისი კიდური წერტილი. ამოზნექილ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ საზღვრის წერტილს არ შეიძლება ჰქონდეს კიდური წერტილი. სამკუთხედის კიდური წერტილებია მისი წვეროები.

ვთქვათ, S რაიმე სიმრავლეა. S სიმრავლის ამოზნექილი გარსი ეწოდება ამ სიმრავლის ყველა წერტილის მიერ შედგენილ შესაძლო ამოზნექილ კომბინაციათა ერთობლიობას და აღინიშნება $C(S)$-ით. $C(S)$ ამოზნექილი გარსი წარმოადგენს უმცირეს ამოზნექილ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს S-ს. თუ S შედგება კუბის რვა წვეროსაგან, მაშინ $C(S)$ ემთხვევა მთელ კუბს. თუ S წრეწირია, მაშინ $C(S)$ იქნება სრული წრე.

თუ S სიმრავლე შედგება წერტილთა სასრული რიცხვისაგან, მაშინ მის ამოზნექილ გარსს $C(S)$-ს ეწოდება ამოზნექილი მრავალწახნაგა. მაგალითად, კუბი, რომელიც წარმოადგენს თავისი რვა წვეროს ამოზნექილ გარსს, არის ამოზნექილი მრავალწახნაგა.

$\overline{P}$ ვექტორთა სიმრავლეს ეწოდება კონუსი, თუ ამ სიმრავლიდან აღებულ ნებისმიერ $\overline{P}_i$ ვექტორთან ერთად ამავე სიმრავლეს ეკუთვ-

ნის $\lambda \vec{P}_i$ ნამრავლიც, სადაც λ ნებისმიერი არაუარყოფითი რიცხვია. კონუსის მაგალითებია, მთელი სივრცე, კოორდინატთა სათავე და $\vec{P}$ ვექტორთა სიმრავლე, რომელიც მე-5 ნახაზზეა გამოსახული. ცხადია, რომ რადგანაც λ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ამიტომ ყველა კონუსი შეიცავს კოორდინატთა სათავეს.



ნახ. 5.

კონუსს, რომელიც წარმოადგენს ამოზნექილ სიმრავლეს, უწოდებენ ამოზნექილ კონუსს.

მე-5 ნახაზზე გამოსახული კონუსი არ არის ამოზნექილი. ამოზნექილი იქნება მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც ხვდება პირველ მეოთხედში.

n-განზომილებიან ამოზნექილ მრავალწახნაგას, რომელსაც ზუსტად $n+1$ წვერო აქვს, სიმპლექსი ეწოდება. სიმპლექსის საზღვარი შეიცავს დაბალი რიგის სიმპლექსებს, რომელთაც წახნაგები ეწოდება. ასეთ წახნაგთა რიცხვი, რომელთაც აქვთ განზომილება გამოისახება, ჯუფთებით C_{n+1}^{k+1}. ნულოვანი განზომილების სიმპლექსია წერტილი, ერთგანზომილებიანი სიმპლექსია მონაკვეთი, ორგანზომილებიანი სიმპლექსია სამკუთხედი, სამგანზომილებიანია ტეტრაედრი.

სიმპლექსის განტოლებას, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე ერთეულის ტოლ მონაკვეთებს მოჰკვეთს, ექნება შემდეგი სახე:

$$x_h \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

როცა $n=3$, მაშინ მივიღებთ სამკუთხედს, რომლის წვეროებია (1, 0, 0), (0, 1, 0) და (0, 0, 1).

თავი VI

წრფივი უტოლობანი

წრფივ უტოლობათა არსის გარკვევა კონკრეტული მაგალითის გარჩევით შეიძლება და ამ მიზნით პირველ რიგში განვიხილოთ შემდეგი უტოლობათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ x\geqslant 0,\\ &2)\ y\geqslant 0,\\ &3)\ x+y\geqslant 1,\\ &4)\ x-y\geqslant 1,\\ &5)\ -x+2y\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

გვაქვს ორუცნობიანი 5 წრფივ უტოლობათა სისტემა. უნდა განისაზღვროს ევკლიდეს ორგანზომილებიანი სივრცის რომელი (x, y) წერტილები აკმაყოფილებენ ამ სისტემას. პირველ რიგში, ცხადია, რომ პირველი ორი უტოლობის თანახმად ასეთი წერტილები მდებარეობენ კოორდინატთა სისტემის პირველ დადებით კვადრანტში, ე. ი. უნდა განვიხილოთ ისეთი წერტილები, რომელთა კოორდინატები მხოლოდ დადებითი რიცხვებია.

ახლა განვიხილოთ უტოლობა

$$x+y\geqslant 1.$$

ამის შესაბამისი ტოლობა იქნება წრფე:

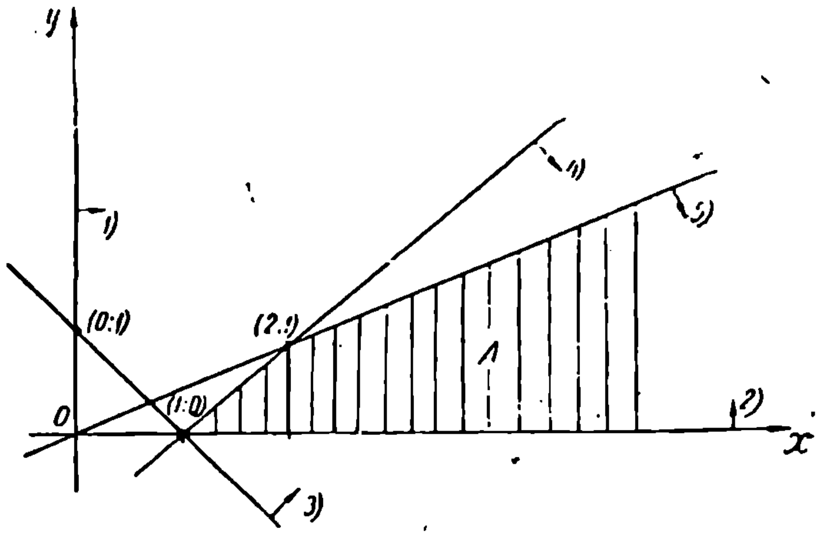
$$x+y=1.$$

ამ წრფის წერტილებისათვის 3) უტოლობა გადადის ტოლობაში. ცხადია, რომ 3) უტოლობის ყველა ამონახსენი მდებარეობს $x+y=1$ წრფის ზემოთ და მარჯვნივ. ცხადია, აგრეთვე, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავე 3) უტოლობას არ აკმაყოფილებს. ჩვენი სისტემის პირველ 3 უტოლობას აკმაყოფილებს პირველი დადებითი კვადრანტის ის ნაწილი, რომელიც ერთდროულად აკმაყოფილებს პირველ სამივე უტოლობას. მეოთხე უტოლობისათვის ვატარებთ $x-y=1$ წრფეს. ის ნახევარსიბრტყე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას, არ შეიცავს კოორდინატთა სისტემის სათავეს; მეხუთე უტოლობის შესაბამისი წრფეა: $-x+2y=0$, რომელიც კმაყოფილდება კოორდინატთა სისტემის სათავის კოორდინატებით. იმისათვის რომ დავადგინოთ ამ უკანასკნელი წრფის მიერ შექმნილი ნახევარსიბრტყეებიდან რომელია ამონახსენთა ნახევარსიბრტყე, ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი, ვთქვათ, (1, 0) და ვნახოთ აკმაყოფილებს თუ არა ის 5) უტოლობას. ადვილად შემოწმდება, რომ (1,0) წერტილი ჩვენი სისტემის უკანასკნელ უტოლობას აკმაყოფილებს, ამიტომ ის ნახევარსიბრტყე, რომელიც ამ წერტილს შეიცავს, იქნება ამონახსენთა ნახევარსიბრტყე.

სურათი რომ ნათლად წარმოვიდგინოთ, ამისათვის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაზე ავაგოთ ხუთივე უტოლობის შესაბამისი ტოლობებით მიღებული წრფეები (ნახ. 6). ხუთივე უტო-

ლობას აკმაყოფილებს ის წერტილები, რომლებიც მოთავსებულია ნახაზის დაშტრიხულ ნაწილში.

ამგვარად, აღებული სისტემის ამონახსენთა ერთობლიობა არის ისეთი A სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს ამობურცულ მრავალწახნაგა არეს, შემოსაზღვრულს წრფეებით, რომლებიც სისტემის 2), 4) და 5) უტოლობებს შეესაბამებიან. 1) და 3) უტოლობანი ამონახსენთა არის განსაზღვრაში არ მონაწილეობენ. ამგვარად, ესენი სისტემაში ზედმეტნი არიან. მაგრამ ეს სათანადო გამოკვლევის შემდეგ იქნა დადგენილი.



ნახ. 6.

განხილულ უტოლობათა სისტემა შეიძლება მატრიცულად ჩაიწეროს. სისტემის მატრიცა იქნება:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

დავწეროთ მატრიცული უტოლობა, მას შემდეგი სახე ექნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

(1) სისტემის მეხუთე უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლეთ —1-ზე, რათა გვქონოდა უტოლობათა ერთნაირი ნიშნები.

A მატრიცის პირველი სვეტი აღვნიშნოთ $\overrightarrow{P}_1$ ვექტორით, მეორე კი $\overrightarrow{P}_2$ ვექტორით, ე. ი.

$$\overrightarrow{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{P}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

აგრეთვე აღვნიშნოთ:

$$\overrightarrow{P}_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

მაშინ (2) სისტემა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\overrightarrow{P}_1x+\overrightarrow{P}_2y\geqslant\overrightarrow{P}_0.$$

აქ $\overrightarrow{P}_1$, $\overrightarrow{P}_2$, $\overrightarrow{P_0}$ ვექტორები განიხილებიან, როგორც 5-განზომილებიანი სივრცის წერტილები და ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ განისაზღვროს x და y უცნობთა ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) სისტემაში მოცემულ ყველა პირობას.

საზოგადოდ,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geqslant b_1$$

სახის წრფივი უტოლობა n-განზომილებიან სივრცეში ჰიპერსიბრტყეს განსაზღვრავს:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geqslant b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\geqslant b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\geqslant b_m. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

(3) უტოლობათა სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე არის n-განზომილებიან სივრცეში ამოზნექილი სიმრავლე.

ნებისმიერ უტოლობათა სისტემა შეიძლება (3) სახით ჩაიწეროს. (3) უტოლობათა სისტემის გარდაქმნა ყოველთვის შეიძლება წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით, თუ უტოლობათა მარცხენა მხარეებს გამოვაკლებთ უცნობ არაუარყოფით რიცხვებს, რომელთაც დამატებითი უცნობები ეწოდებათ.

(3) უტოლობათა სისტემიდან მიიღება შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n-x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+\ldots-x_{n+2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+\ldots-x_{n+m}=b_m, \end{array}\right\} \quad (4)$$

სადაც $x_{n+i}\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

იმდენად რამდენადაც ყოველი x_i უცნობის წარმოდგენა შეიძლება ორი არაუარყოფითი ცვლადის სახით, ამიტომ (4) სისტემა შეიძლება შემდეგნაირადაც ჩაიწეროს.

$$a_{11}(x_1'-x_1'')+a_{12}(x_2'-x_2'')+\ldots+a_{1n}(x_n'-x_n'')-x_{n+1}= \\ =b_1,$$

$$a_{21}(x_1'-x_1'')+a_{22}(x_2'-x_2'')+\ldots+a_{2n}(x_n'-x_n'')+\ldots- \\ -x_{n+2}=b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}(x_1'-x_1'')+a_{m2}(x_2'-x_2'')+\ldots+a_{mn}(x_n'-x_n'')+\ldots- \\ -x_{n+m}=b_m,$$

სადაც

$$x_j=x_j'-x_j'',\ x_j'\geqslant 0,\ x_j''\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$x_{n+i}\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

აგრეთვე, ცხადია, რომ

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$$

სახის უტოლობის წარმოდგენა შეიძლება ტოლობის სახით, თუ მის მარცხენა მხარეს დავუმატებთ უცნობ არაუარყოფით რიცხვს:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1,$$

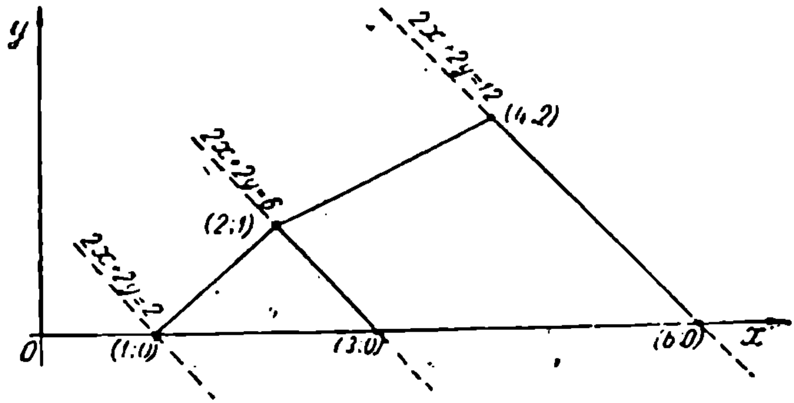
სადაც $x_{n+1}\geqslant 0$.

შესაძლებელია, რომ უტოლობათა სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელი იყოს; მაგალითად,

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\leqslant 5, \\ 4x+2y\geqslant 7 \end{array}\right\} \quad (5)$$

უტოლობათა სისტემას არა აქვს ამონახსენი და, მაშასადამე, ამ სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

წრფივი პროგრამირება, როგორც მათემატიკური პრობლემა შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: მოცემულია ამოზნექილი სიმრავლე, რომელიც n-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში წრფივ შეზღუდვათა სისტემით განისაზღვრება; ამოცანა მდგომარეობს ისეთი წერტილების მოძებნაში, რომლებიც ისეთ ამოზნექილ სიმრავლეს ეკუთვნიან, რომელზედაც ამოცანის წრფივი ფორმა (მიზნის ფუნქცია) ოპტიმუმს აღწევს (ასეთი წერტილი შეიძლება იყოს ერთი, შეიძლება იყოს უსასრულო რაოდენობაც).



ნახ. 7.

გამოთქმული აზრის ნათელსაყოფად განვიხილოთ ორი განზომილების შემთხვევა და გამოვსახოთ ის ნახაზზე.

(5) სისტემის ამონახსენთა არე წარმოადგენს A ამოზნექილ სიმრავლეს. მოვენახოთ წერტილთა სიმრავლე რომელთათვისაც $2x+2y$ წრფივი ფორმა, რომელიც A სიმრავლეზეა განსაზღვრული, აღწევს თავის მინიმუმს.

მე-7 ნახაზზე პუნქტირით გავლებულია

$$2x+2y=a$$

წრფე, $a=12$, 6, 2 მნიშვნელობათათვის. ამ წრფეთა A სიმრავლესთან გადაკვეთა მთლიანი ხაზებითაა გამოსახული. როცა $a=2$-ს წრფეს A სიმრავლესთან მხოლოდ ერთი წერტილი აქვს საერთო.

პირველი წრფის გადაკვეთის ყოველ (x, y) წერტილს ეთანადება წრფივი ფორმის მნიშვნელობა, რომელიც 12-ის ტოლია, მეორე წრფის გადაკვეთის წერტილებს ეთანადება წრფივი ფორმა, რომელიც 6-ის ტოლია, დაბოლოს, უკანასკნელი წრფის გადაკვეთაში მხოლოდ ერთი (1,0) წერტილია, რომელიც ეთანადება მინიმალურ მნიშვნელო-

ბას წრფივი ფორმისას, რომელიც 2-ის ტოლია. მაშასადამე, წერტილთა უსასრულო სიმრავლიდან, რომლებიც შედის A-ში, მხოლოდ ერთი ხდის განხილულ წრფივ ფორმას მინიმუმად. სწორედ ეს წერტილია A ამოზნექილი სიმრავლის კიდური წერტილი.

თუ გვაქვს, საზოგადოდ, რაიმე A ამოზნექილი სიმრავლე, მასზე შეგვიძლია ყოველთვის ვიპოვოთ სხვა ნებისმიერი წრფივი ფორმის მაქსიმუმი ან მინიმუმი. ამისათვის საჭიროა პირველ რიგში გავატაროთ ერთ-ერთი წრფე, რომელიც წრფივი ფორმის რომელიმე კერძო მნიშვნელობას ეთანადება და შემდეგ მოვახდინოთ მისი გადაადგილება თავისი საწყისი მდებარეობის პარალელურად მანამ, სანამ ამ წრფის გადაკვეთა A სიმრავლესთან არ მოხდება მარტო ერთ წერტილში ან მანამ, სანამ ეს წრფე A სიმრავლის მოსაზღვრე წრფეს არ დაემთხვევა, დაბოლოს, მანამ, სანამ არ გაირკვევა, რომ წრფივი ფორმა შემოუსაზღვრელია. ორი უკანასკნელი შემთხვევა შესაძლებელია გვქონდეს, მაგალითად, როცა ვეძებთ $2x-2y$ წრფივი ფორმის მინიმუმს და $2x+2y$ წრფივი ფორმის მაქსიმუმს მე-7 ნახაზზე გამოსახულ A სიმრავლეზე. როცა $2x-2y$ წრფივი ფორმის მინიმუმს ვეძებთ, ვნახავთ, რომ ის დაემთხვევა A სიმრავლის ზღვარით ხაზს, ხოლო როცა $2x+2y$ წრფივი ფორმის მაქსიმუმს ვეძებთ, მაშინ, ცხადია, ის შემოუსაზღვრელია ზემოდან და მისი A-სთან გადაკვეთის შესაბამისი მონაკვეთი უსაზღვროდ იზრდება.

თუ ამოზნექილი სიმრავლე არის ამოზნექილი მრავალწახნაგა, მაშინ ნებისმიერ წრფივ ფორმას მასზე სასრული მაქსიმუმი და მინიმუმი ექნება.

თავი VII

ჟორდანისეული გამორიცხვა და მათი გამოყენება წრფივ ალგებრაში

ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ &\cdots\\ y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები ურთიერთდამოუკიდებელნი არიან. (1) სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ცხრილის სახით:

$$
\begin{array}{r|ccccccc|}
 & x_1 & \cdot & \cdot & x_s & \cdot & \cdot & x_n \\
\hline
y_1= & a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1s} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & & & \cdot \\
y_r= & a_{r1} & \cdot & \cdot & a_{rs} & \cdot & \cdot & a_{rn} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & & & \\
y_m= & a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{ms} & \cdot & \cdot & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
\tag{2}
$$

დავუშვათ, რომ $a_{rs}\neq 0$ და ის მივიღოთ ამომხსნელ ელემენტად. ამომხსნელი სტრიქონი იყოს მე-r სტრიქონი, ხოლო ამომხსნელი სვეტი კი მე-s სვეტი. ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯი ვუწოდოთ (2) ცხრილზე a_{rs} ამომხსნელი ელემენტით მე-r ამომხსნელი სტრიქონით და მე-s ამომხსნელი სვეტით ჩატარებულ სქემატიზებულ ოპერაციას, რომელიც მდგომარეობს y_r დამოკიდებული და x_s დამოუკიდებელი ცვლადების როლების შეცვლაში, ე. ი. ნიშნავს:

$$y_r=a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+a_{rn}x_n \tag{3}$$

განტოლების x_s-ის მიმართ ამოხსნის ოპერაციას, x_s-ის მიღებული მნიშვნელობის (1) სისტემის ყველა სხვა განტოლებაში ჩასმას და მიღებული სისტემის (2)-ის ანალოგიური ცხრილის სახით ჩაწერას.

ამოვხსნათ (3) განტოლება x_s-ის მიმართ, გვექნება:

$$x_s=\frac{1}{a_{rs}}\,(y_r-a_{r1}x_1-a_{r2}x_2-\cdots-a_{r,s-1}x_{s-1}-a_{r,s+1}x_{s+1}-\cdots-a_{rn}x_n).$$

x_s-ის მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ (1) სისტემის ყველა სხვა განტოლებაში. კერძოდ, თუ მას შევიტანთ y_k-ს გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$
\begin{gathered}
y_k=a_{k1}x_1+\cdots+a_{k,s-1}x_{s-1}+a_{ks}\frac{1}{a_{rs}}\,(y_r-a_{r1}x_1-\cdots-a_{r,s-1}x_{s-1}-\\
-a_{r,s+1}x_{s+1}-\cdots-a_{rn}x_n)+a_{k,s+1}x_{s+1}+\cdots+a_{kn}x_n=\\
=\frac{1}{a_{rs}}\,[(a_{k1}a_{rs}-a_{ks}a_{r1})x_1+(a_{k2}a_{rs}-a_{ks}a_{r2})x_2+\cdots+(a_{k,s-1}a_{rs}-\\
-a_{ks}a_{r,s-1})x_{s-1}+(a_{ks}y_r+a_{k,s+1}a_{rs}-a_{ks}a_{r,s+1})x_{s+1}+\cdots+\\
+(a_{kn}a_{rs}-a_{ks}a_{rn})x_n].
\end{gathered}
$$

თუ ამ უკანასკნელს მივიღებთ მხედველობაში, (1) სისტემა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{rs}y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+a_{1s}y_r+\cdots+b_{1n}x_n,\\
a_{rs}y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+a_{2s}y_r+\cdots+b_{2n}x_n,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{rs}y_k=b_{k1}x_1+b_{k2}x_2+\cdots+a_{ks}y_r+\cdots+b_{kn}x_n,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{rs}x_s=-a_{r1}x_1-a_{r2}x_2+\cdots+1\cdot y_r-\cdots-a_{rn}x_n,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{rs}y_m=b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+a_{ms}y_r+\cdots+b_{mn}x_n,
\end{array}\right\}\tag{4}$$

სადაც

$$b_{ij}=a_{ij}a_{rs}-a_{is}a_{rj}\quad (i\neq r,\ j\neq s)\tag{5}$$

მაშინ (4) სისტემა სიმბოლურად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{array}{r|ccccccc|l}
 & x_1 & x_2 & \ldots & y_r & \ldots & x_n & \\
\hline
y_1= & b_{11} & b_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots & b_{1n} & \\
y_2= & b_{21} & b_{22} & \ldots & a_{2s} & \ldots & b_{2n} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
y_k= & b_{k1} & b_{k2} & \ldots & a_{ks} & \ldots & b_{kn} & :a_{rs} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
x_s= & -a_{r1} & -a_{r2} & \ldots & 1 & \ldots & -a_{rn} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
y_m= & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & a_{ms} & \ldots & b_{mn} & \\
\hline
\end{array}\tag{6}$$

ამგვარად, ჩატარებული ბიჯი ჟორდანისეული გამორიცხვისა (2) ცხრილს აქცევს (6) ცხრილად.

როგორც (1) და (6) ცხრილების შედარებიდან ჩანს ამომხსნელი ელემენტი a_{rs} უკანასკნელ ცხრილში შეცვლილია 1-ით, მე-s ამომხსნელი სვეტის დანარჩენი ელემენტები უცვლელია, ხოლო ამომხსნელი მე-r სტრიქონის დანარჩენ ელემენტებს ეცვლებათ მხოლოდ ნიშანი; ის ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნიან არც ერთ ამომხსნელ სტრიქონსა და სვეტს, განისაზღვრებიან (5) ტოლობებით, დაბოლოს, ახალი ცხრილის ყველა ელემენტი სიმბოლურად იყოფა a_{rs} ამომხსნელ მამრავლზე.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1=x_1-2x_2+3x_3,\\
y_2=2x_1+3x_2+x_3,\\
y_3=-x_1+2x_1+2x_3.
\end{array}\right\}$$

ეს სისტემა ჩავწეროთ (2) ცხრილის სახით, გვექნება:

$$
\begin{array}{r|rrr|}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
y_1= & 1 & -2 & 3 \\
y_2= & 2 & 3 & 1 \\
y_3= & -1 & 2 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

ვთქვათ, ამომხსნელი ელემენტია $a_{32}=2$, ამომხსნელი სტრიქონია მესამე სტრიქონი, ხოლო ამომხსნელი სვეტია მეორე სვეტი. მაშინ ახალ ცხრილში x_2 და y_3 ერთმანეთს ადგილს შეუცვლიან, მეორე ამომხსნელი სვეტის დანარჩენი ელემენტები უცვლელი იქნება (გარდა a_{32} ამომხსნელი ელემენტისა, რომელიც შეიცვლება 1-ით). მესამე ამომხსნელი სტრიქონის დანარჩენ ელემენტებს მხოლოდ ნიშანი შეეცვლება. თუ დანარჩენ ელემენტებს ვიანგარიშებთ (5) ფორმულებით, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

$$
\begin{array}{r|rrr|l}
 & x_1 & y_3 & x_3 & \\
\hline
y_1= & 0 & -2 & 10 & \\
y_2= & 7 & 3 & -4 & :2 \\
x_2= & 1 & 1 & -2 & \\
\hline
\end{array}
$$

აქ

$$
\begin{aligned}
b_{11}&=a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}=2-2=0,\\
b_{13}&=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}=6+4=10,\\
b_{21}&=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}=4+3=7,\\
b_{23}&=a_{23}a_{32}-a_{22}a_{33}=2-6=-4.
\end{aligned}
$$

ამგვარად, ჟორდანისეული გარდამქმნელი ბიჯის შემდეგ, განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგი ცხრილის სახით:

$$
\begin{array}{r|rrr|}
 & x_1 & y_3 & x_3 \\
\hline
y_1= & 0 & -1 & 5 \\
y_2= & 7/2 & 3/2 & -2 \\
x_2= & 1/2 & 1/2 & -1 \\
\hline
\end{array}\,.
$$

ჟორდანისეულ გამორიცხვას შემდეგი გეომეტრიული აზრი აქვს. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადთა ერთობლიობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც n-განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის წერტილის კოორდინატები, ხოლო (1) სისტემაში შემავალი განტოლებები, როგორც კოორდინატთა სისტემის სათავეში გამავალი $n-1$-განზომილებიანი სიბრტყის განტოლებანი.

ყოველი $x'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ წერტილისათვის

$$y_i(x')=a_{i1}x_1'+\ldots+a_{in}x_n'$$

ნიშნავს გარკვეული ნიშნით აღებულ აწონილ მანძილს x' წერტილიდან $y_i=0$ სიბრტყემდე, სადაც აწონილი მანძილია თვითონ მანძილი გამრავლებული $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$ წონაზე.

$y_i(x')$ სიდიდეს ეწოდება x' წერტილის გადახრა $y_i=0$ სიბრტყიდან.

$x_1=0$, $x_2=0$, . . ., $x_n=0$ ორთოგონალური საკოორდინატო სიბრტყეებით მოცემულ მართკუთხა სისტემაში ყოველი $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილი მოცემა ყველა საკოორდინატო სიბრტყიდან თავისი n გადახრით, ე. ი. იმ x_1, x_2, . . ., x_n რიცხვებით, რომლებიც ტოლია გარკვეული ნიშნით აღებული სათანადო საკოორდინატო სიბრტყეებამდე მანძილის. აქ წონა ერთის ტოლია.

ჟორდანისეული გამორიცხვის ერთი ბიჯი ამომხსნელი a_{rs} მამრავლით ნიშნავს $x_s=0$ საკოორდინატო სიბრტყის $y_r=0$ სიბრტყით შეცვლას, რომელიც, საზოგადოდ, არ არის ორთოგონალური დანარჩენი საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ, ასე რომ, სივრცის ყოველი წერტილის გადახრა $x_s=0$ ძველი საკოორდინატო სიბრტყიდან შეიცვლება $y_r=0$ ახალი საკოორდინატო სიბრტყიდან გადახრით.

ამგვარად, ჟორდანისეული გამორიცხვა შესაძლებლობას იძლევა შემთხვევით აღებული საკოორდინატო სიბრტყეების დეკარტის სისტემა შევცვალოთ ახალი სისტემით, რომელშიაც წერტილის კოორდინატებია მათი გადახრა ამა თუ იმ ამოცანისათვის უფრო საინტერესო სიბრტყეთა სისტემიდან, სადაც (1) სისტემის ყველა სხვა სიბრტყიდან წერტილის გადახრები ახალ ცხრილში გამოსახულია მისი გადახრებით ძირითადი სიბრტყეებიდან, რომლებიც ცხრილის ზემოთ არიან განლაგებულნი.

სწორედ ამით აიხსნება ის უდიდესი როლი, რომელსაც ასრულებს ჟორდანისეული გამორიცხვები წერტილების სიბრტყიდან გადახრებთან დაკავშირებულ ყველა ამოცანაში, რომელთაც ეკუთვნის წრფივ განტოლებათა სისტემების და უტოლობების ჩებიშევური მიახლოების ამოცანები და წრფივი პროგრამირების ამოცანები.

ჟორდანისეულ გამორიცხვებს დიდი გამოყენება აქვს წრფივ ალგებრაში. ამ გამოყენების ერთ-ერთ მაგალითს წარმოადგენს სტეინიცის

თეორემა. **თუ (1) სისტემის ყველა წრფივი ფორმა წრფივად დამოუკიდებელია ($m \leqslant n$), მაშინ თუ ჩავატარებთ ზუსტად ჟორდანისეული გამორიცხვის m შესაბამის ბიჯს, შესაძლებელია ყველა m დამოკიდებული ცვლადი y_1, y_2, . . ., y_n გადავაქციოთ დამოუკიდებელ ცვლადებად, ე. ი. შესაძლებელია ყველა მათი გადატანა ცხრილის ზემოთ.**

ამ თეორემის დამტკიცება მარტივად შეიძლება. სინამდვილეში, თუ დამოკიდებული ცვლადების ნაწილს ცხრილის ზემოთ ვერ გადავიტანთ, ეს იმის მაჩვენებელი იქნება, რომ ამ ცვლადების შესაბამის სტრიქონზე იმ დამოუკიდებელი x_i ცვლადების ქვემოთ წერია ნულები, ე. ი. ცხრილს ექნება, მაგალითად, შემდეგნაირი სახე:

$$\begin{array}{r|ccccccc|}
 & y_1 & \cdots & y_k & x_{k+1} & \cdots & & x_n \\
\hline
x_1= & c_{11} & & c_{1k} & c_{1,k+1} & \cdots & & c_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
x_k= & c_{k1} & & c_{kk} & c_{k,k+1} & \cdots & & c_{kn} \\
y_{k+1}= & c_{k+1,1} & \cdots & c_{k+1,k} & 0 & & & 0 \\
\cdots & \cdot & & & \cdots & \cdots & & \cdots \\
y_m= & c_{m1} & \cdots & c_{mk} & 0 & \cdots & & 0 \\
\hline
\end{array}.$$

მაგრამ მაშინ გამოდის, რომ ყველა დარჩენილი დამოკიდებული ცვლადი: $y_{k+1}, \ldots, y_m$ წარმოადგენს $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ცვლადების წრფივ კომბინაციას, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას დამოკიდებულ ცვლადთა წრფივად დამოუკიდებლობის შესახებ და ამით სტეინიცის თეორემა დამტკიცებულია.

ჟორდანისეული გამორიცხვა გამოიყენება, აგრეთვე, მატრიცის შესაბრუნებლად. დავუშვათ, რომ (1) სისტემაში $m=n$ და მისი სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ეს უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ (1) სისტემის ყველა წრფივი ფორმა წრფივად დამოუკიდებელია.

(2) ცხრილის მიმართ მიმდევრობით ჩავატაროთ ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯები n-ჯერ, რათა ყველა დამოკიდებული ცვლადი y_1, $y_2, \ldots, y_n$ გადავაქციოთ დამოუკიდებელ ცვლადებად.

გარდაქმნის შედეგად მიღებულ ცხრილს საბოლოოდ შემდეგი სახე ექნება:

$$\begin{array}{r|cccc|}
 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
\hline
x_1= & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
x_2= & c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
x_n & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\
\hline
\end{array}$$

ამ ცხრილის მატრიცა აღინიშნება A^{-1}-ით და წარმოადგენს

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

არის გადაუგვარებელი მატრიცა, ე. ი. მისი შესაბამისი დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომლის უცნობთა კოეფიციენტებია მოცემული მატრიცის ელემენტები:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x_1+x_2-3x_3, \\ y_2&=2x_1+x_2+2x_3, \\ y_3&=x_1+2x_2-x_3. \end{aligned}\right\}$$

ახლა ეს სისტემა ჩავწეროთ ცხრილის სახით

$$\begin{array}{r|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1= & 1 & 1 & -3 \\ y_2= & 2 & 1 & 2 \\ y_3= & 1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$

ამომხსნელ სტრიქონად მივიღოთ პირველი სტრიქონი, ხოლო ამომხსნელ სვეტად პირველი სვეტი, მაშინ ამომხსნელი ელემენტი იქნება $a_{11}=1$. თუ გავაკეთებთ ჟორდანისეული გამორიცხვის პირველ ბიჯს, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

$$\begin{array}{r|ccc|l} & y_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline x_1= & 1 & -1 & 3 & \\ y_2= & 2 & -1 & 8 & :1 \\ y_3= & 1 & 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

ახლა გავაკეთოთ ჟორდანისეული გამორიცხვის კიდევ ერთი ბიჯი. ამომხსნელ ელემენტად მივიღოთ $a_{22}=-1$, მივიღებთ:

$$
\begin{array}{r|rrr|l}
 & y_1 & y_2 & x_3 & \\
\hline
x_1= & -3 & -1 & 5 & \\
x_2= & -2 & 1 & -8 & :(-1) \\
y_3= & -3 & 1 & -10 & \\
\hline
\end{array}
\quad \text{ან} \quad
\begin{array}{r|rrr|}
 & y_1 & y_2 & x_3 \\
\hline
x_1 & 3 & 1 & -5 \\
x_2 & 2 & -1 & 8 \\
y_3 & 3 & -1 & 10 \\
\hline
\end{array}
$$

დაბოლოს, კიდევ ჩავატაროთ ჟორდანისეული გამორიცხვის მორიგი ბიჯი ამომხსნელი ელემენტით $a_{33}=10$, მაშინ გვექნება:

$$
\begin{array}{r|rrr|l}
 & y_1 & y_2 & y_3 & \\
\hline
x_1 & 45 & 15 & 5 & \\
x_2 & -44 & -2 & -8 & :10 \\
x_3 & 3 & -1 & 1 & \\
\hline
\end{array}
\quad \text{ან} \quad
\begin{array}{r|rrr|}
 & y_1 & y_2 & y_3 \\
\hline
x_1 & {}^{45}/_{10} & {}^{15}/_{10} & {}^{5}/_{10} \\
x_2 & -{}^{44}/_{10} & -{}^{2}/_{10} & -{}^{8}/_{10} \\
x_3 & {}^{3}/_{10} & -{}^{1}/_{10} & -{}^{1}/_{10} \\
\hline
\end{array}
$$

ამით გამოთვლები მთავრდება და მიღებული მატრიცა იქნება სწორედ A მატრიცის შებრუნებული

$$
A^{-1}=\begin{pmatrix} {}^{9}/_{2} & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} \\ -{}^{22}/_{5} & -{}^{1}/_{5} & -{}^{4}/_{5} \\ {}^{3}/_{10} & -{}^{1}/_{10} & {}^{1}/_{10} \end{pmatrix}.
$$

ჟორდანისეული გამორიცხვა გამოიყენება აგრეთვე მართკუთხა მატრიცის რანგის გამოსათვლელად. ვთქვათ, მოცემულია მართკუთხა მატრიცა

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$
\begin{array}{r|cccc|}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
\hline
y_1= & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
y_2= & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & & & & \\
y_m= & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

დავიწყოთ ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯების ჩატარება მანამ, სანამ მათი ჩატარება შესაძლებელია. მაგალითად, პროცესის გაგრძელება მანამ შეიძლება, სანამ არ გვექნება შემდეგი სახის ცხრილი:

$$
\begin{array}{r|ccccccc|}
 & y_1 & \ldots & y_k & x_{k+1} & \ldots & x_n \\
\hline
x_1= & b_{11} & \ldots & b_{1k} & b_{1,k+1} & \ldots & b_{1n} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & & & \ldots \\
x_k= & b_{k1} & \ldots & b_{k,k} & b_{k,k+1} & \ldots & b_{kn} \\
y_{k+1}= & b_{k+1,1} & \ldots & b_{k+1,k} & 0 & & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_m= & b_{m1} & \ldots & b_{mk} & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

ცხადია, რომ A მატრიცის რანგი იქნება წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა რაოდენობა, რომელიც ცხრილის ზემოთ გადატანილ y_r ცვლადთა რაოდენობის ტოლია. გარდა ამისა, ცხრილი შეიცავს კოეფიციენტებს, რომელთა საშუალებებით გადაუტანელი y_l ცვლადები გამოისახებიან ცხრილის ზემოთ გადატანილ y_r ცვლადთა წრფივი კომბინაციით.

განვსაზღვროთ

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
$$

მატრიცის რანგი. შევადგინოთ ცხრილი

$$
\begin{array}{r|ccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
y_1= & 1 & 2 & 3 \\
y_2= & 4 & 5 & 6 \\
y_3= & 7 & 8 & 9 \\
\hline
\end{array}
$$

ამომხსნელ ელემენტად მივიღოთ $a_{11}=1$, გვექნება:

$$
\begin{array}{r|ccc|}
 & y_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
x_1= & 1 & -2 & -3 \\
y_2= & 4 & -3 & -6 \\
y_3= & 7 & -6 & -12 \\
\hline
\end{array}
$$

ახლა ამომხსნელი ელემენტი იყოს $a_{22}=-3$. მივიღებთ:

$$
\begin{array}{r|ccc|}
 & y_1 & y_2 & x_3 \\
\hline
x_1= & 5 & -2 & -3 \\
x_2= & -4 & 1 & 6 \\
y_3= & 3 & -6 & 0 \\
\hline
\end{array}
:(-3) \text{ ან, რაც იგივეა, }
\begin{array}{r|ccc|}
 & y_1 & y_2 & x_3 \\
\hline
x_1= & -5/3 & 2/3 & 1 \\
x_2= & 4/3 & 1/3 & -2 \\
y_3= & -1 & 2 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

დარჩენილი y_3-ის გადატანა არ შეიძლება ცხრილის ზემოთ. წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალური რიცხვი გვაქვს 2. ამ-

გვარად, განხილული მატრიცის რანგი ყოფილა 2. მიღებული უკანასკნელი ცხრილიდან ჩანს, რომ y_3 არის y_1 და y_2 ცვლადების წრფივი კომბინაცია. სახელდობრ,

$$y_3 = -y_1 + 2y_2.$$

ჟორდანისეული გამორიცხვა გამოიყენება აგრეთვე წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად. პირველ რიგში განვიხილოთ n წრფივი განტოლება n უცნობით:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \tag{7}$$

ვთქვათ, სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი არის n. ამ სისტემის ამოსახსნელად შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{array}{r|cccc|} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline b_1 = & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 = & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & & \ldots \\ b_n = & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ \hline \end{array} \tag{8}$$

თუ ჩავატარებთ ჟორდანისეული გამორიცხვის n ბიჯს, მივიღებთ:

$$\begin{array}{r|ccc|} & b_1 & b_2 \ldots & b_n \\ \hline x_1 = & & & \\ x_2 = & & A^{-1} & \\ \ldots & & & \\ x_n = & & & \\ \hline \end{array} \tag{9}$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(9) გვაძლევს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მნიშვნელობებს. (7) სისტემის ამოსახსნელად ჟორდანისეული გამორიცხვის გამოყენება სხვანაირადაც შეიძლება. სახელდობრ, (7) სისტემა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$
\begin{array}{r|cccc|c|}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\
\hline
0= & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -b_1 \\
0= & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -b_2 \\
\dots & & & & & \\
0= & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -b_n \\
\hline
\end{array}
$$

რიგრიგობით ჩავატაროთ ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯები. ამომხსნელ სვეტებად მივიღოთ სვეტები, რომლებიც თავისუფალწევრებიანი სვეტისაგან განსხვავდებიან. ყოველი ბიჯის შემდეგ ამოვშალოთ ის სვეტი, რომლის თავზედაც გადაიტანება ნული, მაშინ ამონახსენი შემდეგი ცხრილის სახით ჩაიწერება:

$$
\begin{array}{r|c|}
 & 1 \\
\hline
x_1= & c_1 \\
x_2= & c_2 \\
\dots & \dots \\
x_n= & c_n \\
\hline
\end{array}
$$

განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3&=3,\\
2x_1-x_2+3x_3&=4,\\
3x_1+4x_2-5x_3&=2.
\end{aligned}
$$

გადავწეროთ ის შემდეგი ცხრილის სახით:

$$
\begin{array}{r|ccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
0= & 1 & 1 & 1 & -3 \\
0= & 2 & -1 & 3 & -4 \\
0= & 3 & 4 & -5 & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

გავაკეთოთ ჟორდანისეული გამორიცხვის ერთი ბიჯი $a_{13}=1$ ამომხსნელი ელემენტით, მივიღებთ:

$$
\begin{array}{r|cc|c|}
 & x_1 & x_2 & 1 \\
\hline
x_3= & -1 & -1 & 3 \\
0= & -1 & -4 & 5 \\
0= & 8 & 9 & -17 \\
\hline
\end{array}
$$

ახლა ამომხსნელ ელემენტად მივიღოთ $a_{22}=-4$, გვექნება:

$$
\begin{array}{r|c|c|}
 & x_1 & 1 \\
\hline
x_3= & 3 & -7 \\
x_2= & 1 & -5 \\
0= & -23 & 23 \\
\hline
\end{array}
:(-4) \text{ ან, რაც იგივეა, }
\begin{array}{r|c|c|}
 & x_1 & 1 \\
\hline
x_3= & -3/4 & 7/4 \\
x_2= & -1/4 & 5/4 \\
0= & 23/4 & -23/4 \\
\hline
\end{array}
$$

საბოლოოდ, ამომხსნელ ელემენტად თუ მივიღებთ $a_{31}=\frac{23}{4}$-ს, მივიღებთ:

$$\begin{array}{r|c|l} & 1 & \\ \hline x_3= & {}^{23}/_4 & \\ x_2= & {}^{23}/_4 & :\ \frac{23}{4} \\ x_1= & {}^{23}/_4 & \\ \hline \end{array}$$

ან, რაც იგივეა, ამოხსნა საბოლოოდ იქნება

$$\begin{array}{r|c|} & 1 \\ \hline x_3= & 1 \\ x_2= & 1 \\ x_1= & 1 \end{array}$$

ჟორდანისეული გამორიცხვა გამოიყენება გაუსის მეთოდით განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დროსაც. ამ შემთხვევაში ჟორდანისეული გამორიცხვის ყოველი ბიჯის ჩატარების შემდეგ ცხრილიდან ამოიშლება როგორც ამომხსნელი სვეტი, ისე სტრიქონიც და ამოიწერება ცალკე შესაბამისი x_i უცნობის გამოსახულება. უკანასკნელი ბიჯის დროს კი მოინახება ერთ-ერთი უცნობის მნიშვნელობა, ხოლო დანარჩენები შემდეგ მიმდევრობით გამოითვლებიან წინა მიღებულ მნიშვნელობათა სათანადო ჩასმით. ზემოთ ამოხსნილი სამუცნობიან განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით. ამ სისტემის შესაბამის ცხრილს ჰქონდა შემდეგი სახე:

$$\begin{array}{r|ccc|c|} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 0= & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0= & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0= & 3 & 4 & -5 & -2 \\ \hline \end{array}$$

გავაკეთოთ ჟორდანისეული გამორიცხვის ერთი ბიჯი $a_{13}=1$ ამომხსნელი ელემენტით, გვექნება:

$$\begin{array}{r|cc|c|} & x_1 & x_2 & 1 \\ \hline 0= & -1 & -4 & 5 \\ 0= & 8 & 9 & -17 \\ \hline \end{array}$$

ცალკეული გამოსახულება x_3-თვის იქნება

$$x_3=-x_1-x_2+3.$$

მეორე ბიჯი გავაკეთოთ $a_{12}=-4$ ამომხსნელი ელემენტით, მივიღებთ:

$$0=\begin{array}{|c|c|}\multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline -23 & 23 \\ \hline\end{array} : (-4)$$

ან

$$0=\begin{array}{|cc|}\multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{1} \\ \hline \frac{23}{4} & -\frac{23}{4} \\ \hline\end{array}$$

ცალკეული გამოსახულება x_2-თვის იქნება:

$$-4x_2=x_1-5$$

ან

$$x_2=-\frac{x_1}{4}+\frac{5}{4}$$

უკანასკნელი ცხრილიდან ვღებულობთ:

$$x_1=1.$$

თუ x_1-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ x_2-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ $x_2=1$; თუ x_1 და x_2-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ x_3-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ აგრეთვე $x_3=1$.

ახლა ვნახოთ როგორ გამოიყენება ჟორდანისეული გამორიცხვები განტოლებათა ზოგადი სისტემის ამოსახსნელად.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l} y_1\equiv a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n-b_1=0,\\ y_2\equiv a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n-b_2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_m\equiv a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n-b_m=0.\end{array}\right\}\tag{10}$$

დავუშვათ, მოცემული განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგია r. (10) განტოლებათა სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი ცხრილის სახით:

$$\begin{array}{r|cccc|c|} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ \hline y_1= & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -b_1 \\ y_2= & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & -b_2 \\ \ldots & \ldots & & & \ldots & \ldots \\ y_m= & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & -b_m \\ \hline\end{array}\tag{11}$$

როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, რადგანაც მატრიცის რანგია r, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯები გავაკეთოთ მხოლოდ r-ჯერ, რის შემდეგ გვექნება, მაგალითად, შემდეგი ცხრილი:

$$
\begin{array}{r|cccccccc|c|}
 & y_1 & \cdots & y_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & & 1 \\
\hline
x_1= & c_{11} & & c_{1r} & c_{1,r+1} & & c_{1n} & & d_1 \\
\cdot & & & & & & \cdots & & \cdots \\
x_r= & c_{r1} & & c_{rr} & c_{r,r+1} & & c_{rn} & & d_r \\
y_{r+1}= & c_{r+1,1} & \cdots & c_{r+1,r} & 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\
\cdots & & & & & & \cdots & & \cdots \\
y_m= & c_{m1} & \cdots & c_{mr} & 0 & \cdots & 0 & & d_m \\
\hline
\end{array} \qquad (12)
$$

ცხადია, (10) სისტემა თავსებადია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათა რომელიმე სისტემისათვის ყველა $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ნულის ტოლია. ამას ადგილი მაშინ ექნება, როდესაც $c_{r+1}=c_{r+2}=\ldots=c_m=0$. ამ შემთხვევაში, თუ ამოვშლით პირველ r სვეტს (რადგანაც $y_1=y_2=\ldots=y_r=0$) და $x_{r+1}, \ldots, x_n$ სიდიდეებს ჩავთვლით პარამეტრებად, რომელთაც შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობანი, ჩვენ პარამეტრების ნებისმიერ მნიშვნელობათა სისტემისათვის $x_{r+1}=l_{r+1}, \ldots, x_n=l_n$, მივიღებთ (12) ცხრილიდან სხვა უცნობ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ სიდიდეთათვის შესაბამის მნიშვნელობათა სისტემას:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_{1,r+1}\, l_{r+1} + \ldots + c_{1n} l_n + d_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r &= c_{r,r+1}\, l_{r+1} + \ldots + c_{rn} l_n + d_r,
\end{aligned}
$$

(12) ცხრილის $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir}$ $(i=r+1, r+2, \ldots, m)$ ელემენტები წარმოადგენენ პირველი r განტოლების იმ წრფივი კომბინაციის კოეფიციენტებს, რომელიც ტოლია i-ური განტოლების.

ზემოთ ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა სისტემა:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + 2x_2 - 5 = 0, \\
y_2 &= 2x_1 - 3x_2 + 4 = 0, \\
y_3 &= 3x_1 - x_2 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

ეს სისტემა ჩავწეროთ ცხრილის სახით შემდეგნაირად:

$$
\begin{array}{r|cc|c|}
 & x_1 & x_2 & 1 \\
\hline
y_1= & 1 & 2 & -5 \\
y_2= & 2 & -3 & 4 \\
y_3= & 3 & -1 & -1 \\
\hline
\end{array}.
$$

გავაკეთოთ ჟორდანისეული გამორიცხვის პირველი ბიჯი $a_{11}=1$ ამომხსნელი ელემენტით, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

$$\begin{array}{r|rr|r|} & y_1 & x_2 & 1 \\ \hline x_1= & 1 & -2 & 5 \\ y_2= & 2 & -7 & 14 \\ y_3= & 3 & -7 & 14 \\ \hline \end{array}$$

შემდეგი ბიჯი გავაკეთოთ $a_{22}=-7$ ამომხსნელი ელემენტით, გვექნება:

$$\begin{array}{r|rr|r|} & y_1 & y_2 & 1 \\ \hline x_1= & -3 & -2 & -7 \\ x_2= & -2 & 1 & -14 \\ y_3= & -7 & -7 & 0 \\ \hline \end{array} :(-7)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{array}{r|rr|r|} & y_1 & y_2 & 1 \\ \hline x_1= & 3/7 & 2/7 & 1 \\ x_2= & 2/7 & -1/7 & 2 \\ y_3= & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

როგორც უკანასკნელი ცხრილიდან ჩანს, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი

$$x_1=1, \quad x_2=2.$$

უკანასკნელი სტრიქონიდან ჩანს, რომ y_3 არის y_1 და y_2-ის წრფივი კომბინაცია კოეფიციენტებით 1 და 1, ე. ი.

$$y_3=y_1+y_2.$$

არსებობს აგრეთვე ე. წ. მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვები.

ზოგიერთი გამოთვლითი პროცესების ჩატარებისას, ხანდახან საჭირო ხდება, რომ ამომხსნელი სტრიქონების ელემენტები გარდაქმნის შემდეგ უცვლელი დარჩეს, ხოლო ამომხსნელი სვეტის ელემენტებს კი ნიშანი შეეცვალოს. სწორედ ასეთი შემთხვევების დროს მიმართავენ მოდიფიცირებულ ჟორადანისეულ გამორიცხვებს.

მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვისას წრფივ განტოლებათა სისტემას შემდეგნაირად ჩაწერენ:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=-a_{11}(-x_1)-a_{12}(-x_2)-\ldots-a_{1n}(-x_n), \\ y_2=-a_{21}(-x_1)-a_{22}(-x_2)-\ldots-a_{2n}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m=-a_{m1}(-x_1)-a_{m2}(-x_2)-\ldots-a_{mn}(-x_n) \end{array}\right\}$$

და ადგენენ ამის შესაბამის ცხრილს

$$
\begin{array}{r|cccccccc|}
 & -x_1 & -x_2 & \ldots & -x_s & \ldots & -x_n \\
\hline
y_1= & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1s} & \ldots & \alpha_{1n} \\
y_2= & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2s} & \ldots & \alpha_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_r= & \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rs} & \ldots & \alpha_{rn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_m= & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{ms} & \ldots & \alpha_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

სადაც მოხერხებულად ჩაწერის მიზნით $\alpha_{ik}=-a_{ik}$ ($i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, n$).

მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვის ერთი ბიჯის გაკეთება α_{rs} ამომხსნელი ელემენტით ნიშნავს შემდეგ ახალ ცხრილზე გადასვლას:

$$
\begin{array}{r|cccccc|l}
 & -x_1 & -x_2 & \ldots & -y_r & \ldots & -x_n & \\
\hline
y_1= & b_{11} & b_{12} & \ldots & -\alpha_{1s} & \ldots & b_{1n} & \\
y_2= & b_{21} & b_{22} & \ldots & -\alpha_{2s} & \ldots & b_{2n} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & :\alpha_{rs} \\
x_s= & \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & 1 & \ldots & \alpha_{rn} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
y_m= & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & -\alpha_{ms} & \ldots & b_{mn} & \\
\hline
\end{array}
$$

ეს ცხრილი ისევე მიიღება, როგორც ვღებულობდით ანალოგიურ ცხრილებს ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გამორიცხვის დროს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვისას ამომხსნელი სტრიქონების ელემენტები უცვლელი რჩება, ხოლო ამომხსნელი სვეტის ელემენტებს კი ნიშანი ეცვლება. ამომხსნელი ელემენტის ადგილას ისევე იწერება 1.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$
\left.
\begin{aligned}
y_1&=x_1+2x_2+3x_3,\\
y_2&=2x_1-x_2+x_3,\\
y_3&=3x_1+2x_2-x_3.
\end{aligned}
\right\}
$$

ეს სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი ცხრილის სახით:

$$
\begin{array}{r|ccc|}
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\
\hline
y_1= & -1 & -2 & -3 \\
y_2= & -2 & 1 & -3 \\
y_3= & -3 & -2 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

გავაკეთოთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ერთი ბიჯი $a_{23} = -3$ ამომხსნელი ელემენტით, მივიღებთ:

$$
\begin{array}{r|ccc|l}
 & -x_1 & -x_2 & -y_2 & \\
\hline
y_1 = & -3 & 9 & 3 & \\
x_3 = & -2 & 1 & 1 & :(-3) \\
y_3 = & 11 & 5 & -1 & \\
\hline
\end{array}
$$

ან, რაც იგივეა,

$$
\begin{array}{r|ccc|}
 & -x_1 & -x_2 & -y_2 \\
\hline
y_1 = & 1 & -3 & -1 \\
x_3 = & {}^2/_3 & -{}^1/_3 & -{}^1/_3 \\
y_3 = & -{}^{11}/_3 & -{}^5/_3 & {}^1/_3 \\
\hline
\end{array}
$$

ნაწილი მეორე

წრფივი პროგრამირების მეთოდები

შესავალი

1. წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა. ვთქვათ, მოცემულია

$$Z=P_1x_1+P_2x_2+\dots+P_nx_n \qquad (1)$$

წრფივი ფორმა, რომელსაც მიზნის ფუნქცია ეწოდება და აგრეთვე

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{array}\right\} \qquad (2)$$

წრფივ უტოლობათა სისტემა, რომელსაც სათანადო შეზღუდვებს უწოდებენ. უკანასკნელი უტოლობათა სისტემა (2) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{array}{l} y_1\equiv -a_{11}x_1-a_{12}x_2-\dots-a_{1n}x_n+b_1\geqslant 0, \\ y_2\equiv -a_{21}x_1-a_{22}x_2-\dots-a_{2n}x_n+b_2\geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m\equiv -a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\dots-a_{mn}x_n+b_m\geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოინახოს (1) წრფივი ფორმის მაქსიმუმი (ან მინიმუმი), როდესაც სრულდება (2) ან, რაც იგივეა, (3) შეზღუდვები. სხვანაირად (3) სისტემის ამონახსენთა შორის, რომლებიც მრავალწახნაგას ქმნიან, უნდა მოინახოს ისეთი, რომლისთვისაც (1) ფორმა მიიღებს უდიდეს (ან უმცირეს) მნიშვნელობას.

ჩამოყალიბებული ამოცანა არის წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა, რომელიც უამრავი მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს.

2. წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. (3) სისტემის ყოველი

$$y_i\equiv -a_{i1}x_1-\dots-a_{in}x_n+b_i\geqslant 0$$

უტოლობა ევკლიდეს n-განზომილებიან სივრცეში განსაზღვრავს ნახევარსივრცეს, რომელიც შედგება ისეთი $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილებისაგან, რომლებიც მოთავსებულია

$$y_i \equiv - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n + b_i = 0$$

სიბრტყის ერთ მხარეს ან თვით მასზე. წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ყველა (3) ნახევარსივრცეს (ე. ი. წერტილები, რომლებიც (3) სისტემის ამონახსენს წარმოადგენს), როგორც ამოზნექილ სიმრავლეთა თანაკვეთა, ქმნის ზოგიერთ Ω ამოზნექილ მრავალწახნაგას.

მიზნის

$$Z(x) = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n$$

ფუნქციის მნიშვნელობა $x'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ წერტილში შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ამ წერტილის გადახრა

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = 0$$

სიბრტყიდან.

მოცემული წერტილის გადახრა მოცემული სიბრტყიდან არის რიცხვი, რომელსაც მივიღებთ, თუ სიბრტყის განტოლების მარცხენა ნაწილში უცნობების მაგივრად მოცემული წერტილის კოორდინატებს ჩავსვამთ. ასე, მაგალითად, (3, 2, —4) წერტილის გადახრა

$$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

სიბრტყიდან იქნება

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5(-4) = 25.$$

x წერტილის გადახრა

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = 0$$

სიბრტყიდან პროპორციულია მანძილისა x წერტილიდან ამავე სიბრტყემდე.

ამრიგად, წრფივი პროგრამირების ამოცანის გეომეტრიული აზრი მდგომარეობს Ω მრავალწახნაგას იმ წერტილის მონახვაში, რომელიც უფრო მეტად (ან უფრო ნაკლებად) გადახრილია

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = 0$$

სიბრტყიდან.

3. წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნის მეთოდის შესახებ. ადვილი მისახვედრია, რომ კლასიკური მათემატიკური ანალიზის მეთოდი პირობით ექსტრემუმზე ამოცანის ამოსახსნელად არ გამოდგება წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოსახსნელად. საქმე იმაშია, რომ

(2) უტოლობებით მოცემულ Ω არეში განსაზღვრული (1) წრფივი ფორმა თავის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს აღწევს ამ არის საზღვრებზე (წვეროებში), ე. ი. იმ წერტილებში, სადაც, საზოგადოდ, კერძო წარმოებულები განსხვავებულია ნულისაგან; დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდები შესაძლებლობას გვაძლევენ მოვნახოთ ისეთი ექსტრემალური წერტილები, რომლებიც მდებარეობენ ფუნქციის განსაზღვრის არის შიგნით, იმ შემთხვევაში, როდესაც ცვლადთა რაოდენობა არ არის დიდი და შეზღუდვები მოცემულია არა უტოლობათა, არამედ ტოლობების სახით. (1) ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა Ω მრავალწახნაგას ყველა წვეროზე, რომელთა რაოდენობა უამრავია, პრაქტიკულად შეუძლებელია.

ძირითადი მეთოდი წრფივი პროგრამირების ზოგადი ამოცანის ამოსახსნელად, რომელიც ზემოაღნიშნულ სიძნელეებს გადალახავს არის ე. წ. სიმპლექსური მეთოდი, რომელსაც გეგმის თანდათანობითი, მიახლოების მეთოდიც ეწოდება. პირველად იგი დამუშავებულ იქნა გ. დანციგის მიერ.

სიმპლექსური მეთოდი შედგება ალგორითმისაგან, რომლის მეშვეობით ხდება (2) უტოლობათა სისტემის ამონახსენთა შორის ერთ-ერთი საყრდნობი ამონახსნის პოვნა, ე. ი. Ω მრავალწახნაგას ერთ-ერთი წვეროს პოვნა, ხოლო შემდეგ ახალ საყრდნობ ამონახსენზე გადასვლა, რომლისთვისაც (1) წრფივ ფორმას აქვს უფრო მეტი (ან უფრო ნაკლები) მნიშვნელობა, და ამ გაუმჯობესების პროცესის გაგრძელება ხდება მანამ, სანამ არ მივიღებთ საუკეთესო ოპტიმალურ ამონახსენს.

თავი I

სიმპლექსური მეთოდი

§ 1. ნარევის ამოცანა

სიმპლექსური მეთოდის საშუალებით და დასაშვები გეგმების დახმარებით თანდათანობით ვუახლოვდებით ოპტიმალურ გეგმას. ცხადია, რომ ამ მეთოდით სარგებლობისას აუცილებელია ერთ-ერთი დასაშვები ამონახსნის ცოდნა. ყოველი ახალი გარდაქმნა ან იტერაცია წარმოადგენს წინა ამონახსნიდან ახალი ამონახსნის პოვნის ოპერაციას, რომელსაც ეთანადება წრფივი ფორმის უფრო მცირე მნიშვნელობა, ვიდრე მას ჰქონდა წინა გარდაქმნის ან იტერაციის დროს. ასეთი პროცესი გრძელდება მანამ, ვიდრე ოპტიმალური ამონახსენი არ მიიღება. როგორც ცნობილია, ყოველი დასაშვები ამოხსნა და, კერძოდ, ოპტიმალურიც დაკავშირებულია m წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა

სისტემასთან. ამიტომ, ბუნებრივია, განვიხილოთ ისეთი ამონახსნები, რომლებიც დაკავშირებული იქნებიან m წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემასთან, რომელსაც საბაზისო ამონახსენი ეწოდება.

პირველ რიგში ვაჩვენოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნა სიმპლექსური მეთოდის გამოყენებით შემდეგ კონკრეტულ მაგალითზე.

ვთქვათ, დღის განმავლობაში წარმოება ამუშავებს 100 კგ ნუშს, ამდენივე თხილს და 60 კგ ნიგოზს, ე. ი. სულ 260 კგ-მდე მასალას. კგ ნუში ღირს 6,5 მანეთი, თხილი — 2,5 მანეთი, ხოლო ნიგოზი — 3,5 მან.

ამ მასალიდან მზადდება სამი სხვადასხვა სახის ნარევი, რომელთაც პირობითად დავარქვათ A, B და D.

A ნარევში ნუში უნდა იყოს არანაკლები 50%-სა, ხოლო თხილი არა უმეტეს 25%-სა.

B ნარევში უნდა იყოს ნუში არა ნაკლებ 25%-სა, ხოლო თხილი არაუმეტესი 50%-სა.

D ნარევში კი სამივე მათგანი შეიძლება იყოს განუსაზღვრელი რაოდენობით.

ვთქვათ, ერთი კგ A, B და D ნარევების ღირებულებაა შესაბამისად 5; 3,5 და 2,5 მანეთი. ნარევში c იყოს ნუშის აღმნიშვნელი სიმბოლო, h — ნიგოზის, ხოლო თხილისა — p. მაშინ A_c გვიჩვენებს A ნარევში ნუშის რაოდენობას, B_p ნიშნავს B ნარევში თხილის რაოდენობას, D_h არის D ნარევში ნიგოზის რაოდენობა და ა. შ.

ზემოთ მოცემული პირობების დაცვით საჭიროა ისე განისაზღვროს A, B და D ნარევების შემადგენლობა, რომ წარმოების შემოსავალი იყოს მაქსიმალური.

ასეთი ამოცანის გადაწყვეტა უბრალო მოსინჯვებით შეუძლებელია, ამიტომ მის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ მათემატიკური მოდელი, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$\left.\begin{array}{ll} A_c\geqslant\frac{1}{2}A, & \\ A_p\leqslant\frac{1}{4}A, & A_c+A_p+A_h=A, \\ B_c\geqslant\frac{1}{4}B, & B_c+B_p+B_h=B, \\ & D_c+D_p+D_h=D. \\ B_p\leqslant\frac{1}{2}B, & \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

აქ პირველი უტოლობა ნიშნავს, რომ A ნარევში ნუშის რაოდენობა 50%-ზე მეტია. ანალოგიურადაა შედგენილი დანარჩენი უტოლობანი. უკანასკნელი სამი ტოლობა გვიჩვენებს ნარევებში მასალათა განაწილებას.

A და B-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ ზემოთ დაწერილ უტოლობებში, გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} A_c &\geqslant \frac{1}{2}(A_c+A_p+A_h), \\ A_p &\leqslant \frac{1}{4}(A_c+A_p+A_h), \\ B_c &\geqslant \frac{1}{4}(B_c+B_p+B_h), \\ B_p &\leqslant \frac{1}{2}(B_c+B_p+B_h) \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

ან

$$\frac{1}{2}A_p+\frac{1}{2}A_h-\frac{1}{2}A_c\leqslant 0,$$

$$\frac{1}{4}A_c+\frac{1}{4}A_h-\frac{3}{4}A_p\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{4}B_p+\frac{1}{4}B_h-\frac{3}{4}B_c\leqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}B_c+\frac{1}{2}B_h-\frac{1}{2}B_p\geqslant 0,$$

ანდა, რაც იგივეა,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}A_p+\frac{1}{2}A_h-\frac{1}{2}A_c\leqslant 0, \\ &\frac{3}{4}A_p-\frac{1}{4}A_c-\frac{1}{4}A_h\leqslant 0, \\ &\frac{1}{4}B_p+\frac{1}{4}B_h-\frac{3}{4}B_c\leqslant 0, \\ &\frac{1}{2}B_p-\frac{1}{2}B_c-\frac{1}{2}B_h\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

მოცემულობის თანახმად,

$$\left.\begin{array}{r}c=A_c+B_c+D_c\leqslant 100,\\ p=A_p+B_p+D_p\leqslant 100,\\ h=A_h+B_h+D_h\leqslant 60,\\ A_c+B_c+D_c+A_p+B_p+D_p+A_h+B_h+D_h\leqslant 260.\end{array}\right\}\quad(1.3)$$

წარმოების სიმძლავრედ შეიძლება მივიღოთ ზუსტი შეზღუდვა, რომელიც შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$A_c+B_c+D_c=100,$$

$$A_p+B_p+D_p=100,$$

$$A_h+B_h+D_h=60.$$

ამ შემთხვევაში უტოლობების დროს არსებულ „თავისუფლებას“ ჩვენ ესპობთ. გარდა ამისა, ზოგიერთი მასალის ფასი შეიძლება გახდეს უმნიშვნელო. გამოყენებული მასალის რაოდენობა უტოლობების დროს წარმოადგენდა ცვლად სიდიდეს. ამჟამად იქნება მკაცრად განსაზღვრული სიდიდე, რადგანაც განტოლებებს ზუსტი რიცხვები აკმაყოფილებს. ასეთ შემთხვევას მხოლოდ მაშინ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი, თუ წარმოება დადებს ხელშეკრულებას ყოველდღიურად მასალათა განსაზღვრული რაოდენობით მიღებაზე.

შემდგომისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ადგილი აქვს (1.3) შეზღუდვას. ზოგადობისათვის შემოვიყვანოთ უფრო გავრცელებული აღნიშვნები, რომლებიც ქვემომოყვანილ ცხრილშია ნაჩვენები.

ცხრილი 1

პროდუქცია \ მასალა	c	p	h
A	λ_1	λ_2	λ_3
B	λ_4	λ_5	λ_6
D	λ_7	λ_8	λ_9

აქ λ_1 გამოხატავს c მასალის რაოდენობას, რომელიც საჭიროა A პროდუქციის დასამზადებლად, λ_5 არის p მასალის რაოდენობა, რომელიც იხარჯება B პროდუქციის დასამზადებლად.; λ_6 არის h მასალის ის რაოდენობა, რომელიც მიდის B პროდუქციის დასამზადებლად და ა. შ.

მხედველობაში მივიღოთ ეს უკანასკნელი აღნიშვნები; მაშინ (1.2) და (1.3) შეზღუდვების გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_3\leqslant 0,\\
&-\frac{1}{4}\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_3\leqslant 0,\\
&-\frac{3}{4}\lambda_4+\frac{1}{4}\lambda_5+\frac{1}{4}\lambda_6\leqslant 0,\\
&-\frac{1}{2}\lambda_4+\frac{1}{2}\lambda_5-\frac{1}{2}\lambda_6\leqslant 0,\\
&\lambda_1+\lambda_4+\lambda_7\leqslant 100,\\
&\lambda_2+\lambda_5+\lambda_8\leqslant 100,\\
&\lambda_3+\lambda_6+\lambda_9\leqslant 60.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

მივიღეთ უტოლობათა სისტემა, რომელშიაც შედის 7 უტოლობა 9 უცნობით. ჩვენი ადრინდელი მოთხოვნები რომ შესრულდეს, ამისათვის საჭიროა ყველა ამ უტოლობის დაცვა.

საზოგადოდ, წრფივი პროგრამირების ამოცანებში დაცული უნდა იქნეს შემდეგი სამი წესი: ა) წარმოების ტექნოლოგიური პირობები გამოისახებიან λ-ს კოეფიციენტებით (1.4) სისტემაში; ბ) სპეციფიკური პირობები, რომლებიც ზღუდავენ შესაძლო ალტერნატიულ ამონახსნებს, იმყოფება (1.4) სისტემის მარჯვენა მხარეს; გ) ხდება რომელიმე ისეთი ოპტიმალური ამოხსნის საერთო კრიტერიუმის დადგენა, როგორიცაა მაგალითად შემოსავალი, რომლის მიხედვით ხდება შერჩევა სხვადასხვა ალტერნატიულ პროგრამებს შორის. განხილულ ამოცანაში ტექნოლოგიური პირობები გამოსახავს სხვადასხვა ხარისხის ნარევის ღირებულებას. სპეციფიკური შემზღუდველი პირობები ამოცანის ამოხსნისათვის არის ისეთი შეზღუდვები, რომლებიც დაკავშირებულია წარმოების სიმძლავრესთან და გამოისახება (1.3) უტოლობებით. ამოხსნის ოპტიმალობის კრიტერიუმად აქ მიიღება მიღებული მაქსიმალური შემოსავალი.

იმისათვის, რომ მიღებულ ამონახსენს ჰქონდეს ეკონომიური აზრი, მათ უნდა დააკმაყოფილონ კიდევ ერთი პირობა. სახელდობრ, არ შეიძლება ამონახსენი იყოს უარყოფითი სიდიდეები, რადგანაც არ შეიძლება წარმოება იყოს უარყოფითი, როგორც დანახარჯის, ისე შედეგის მიხედვით. ეს პირობა მათემატიკურად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lambda_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 9); \qquad (1.5)$$

ნულოვანი პროდუქცია დასაშვებია, უარყოფითი კი არა; ყველა λ_i უნდა იყოს არაუარყოფითი.

თუ შემოვიყვანთ ახალ უცნობებს, (1.4) უტოლობათა სისტემა შეგვიძლია ჩავწეროთ განტოლებათა შემდეგი სისტემის სახით:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_3+\lambda_{10}=0,\\
&-\frac{1}{4}\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_3+\lambda_{11}=0,\\
&-\frac{3}{4}\lambda_4+\frac{1}{4}\lambda_5+\frac{1}{4}\lambda_6+\lambda_{12}=0,\\
&-\frac{1}{2}\lambda_4+\frac{1}{2}\lambda_5-\frac{1}{2}\lambda_6+\lambda_{13}=0,\\
&\lambda_1+\lambda_4+\lambda_7+\lambda_{14}=100,\\
&\lambda_2+\lambda_5+\lambda_8+\lambda_{15}=100,\\
&\lambda_3+\lambda_6+\lambda_9+\lambda_{16}=60.
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

დამატებით შემოყვანილ $\lambda_i(i=10, 11, \ldots, 16)$ უცნობებს ვუწოდოთ „თავისუფალი“ ცვლადები. ჩვენს ამოცანაში ისინი გამოხატავენ მოთხოვნილების გადაჭარბებას ანდა წარმოების ყველა შესაძლებლობათა გამოუყენებლობას. ასე, მაგალითად, თუ საბოლოო პროგრამაში λ_{10}-თვის მივიღებთ დადებით მნიშვნელობას, მაშინ A ნარევში სასარგებლო იქნება 50%-ზე მეტი ნუშის შერევა. ანალოგიური აზრი აქვს λ_{11}, λ_{12} და λ_{13} ცვლადებს. მეორე მხრივ, თუ საბოლოო ამონახსენში $\lambda_{14}>0$, $\lambda_{15}>0$ ანდა $\lambda_{16}>0$, მაშინ სასარგებლო იქნება წარმოების სიმძლავრის ნაწილი გამოუყენებელი დავტოვოთ.

თავისუფალი ცვლადების არაუარყოფითობის მოთხოვნა გულისხმობს იმას, რომ ყველა ცვლადი $\lambda_i(i=1, 2, \ldots, 16)$ იყოს არაუარყოფითი.

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს 16 უცნობი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.6) განტოლებათა სისტემით მოცემულ 7 განტოლებას და (5) უტოლობას. როგორც ცნობილია, ასეთ ამოცანას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, რომელთაგან ჩვენ უნდა შევარჩიოთ საუკეთესო, ე. ი. უნდა შეირჩეს $\lambda_i\geqslant 0$ სიდიდეთა შორის ისეთები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ ყველა ზემომოთხოვნილ პირობას და, ამასთან ერთად, ყველაზე კარგად ეთანადებიან ოპტიმალობის განსაზღვრულ კრიტერიუმს. განხილული ამოცანის დროს ასეთი კრიტერიუმია უდიდესი სუფთა შემოსავალი, რომელიც წარმოადგენს ჩვენთვის ცნობილ სიდიდეთა ფუნქციას.

სუფთა შემოსავალი იქნება ნარევების გაყიდვის შედეგად მიღებულ შემოსავალს გამოკლებული მასალაზე დანახარჯები.

თუ Z-ით აღვნიშნავთ სუფთა შემოსავალს, ის შეიძლება გამოიხატოს შემდეგი წრფივი ფუნქციის საშუალებით:

$$Z=5(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+3,5(\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)+2,5(\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9)-$$
$$-6,5(\lambda_1+\lambda_4+\lambda_7)-2,5(\lambda_2+\lambda_5+\lambda_8)-3,5(\lambda_3+\lambda_6+\lambda_9),$$

ან

$$Z=-1,5\lambda_1+2,5\lambda_2+1,5\lambda_3-3\lambda_4+\lambda_5-4\lambda_7-\lambda_9. \qquad (1.7)$$

Z წრფივი ფუნქცია გამოსახავს A, B და D ნარევების გაყიდვით მიღებულ თანხას გამოკლებული ნუშის, თხილისა და ნიგვზის ის ღირებულებანი, რომლებიც ნაერთთა დასამზადებლად დაიხარჯა. Z წრფივი ფუნქციის მთლიანად გამოსახატავად საჭირო იყო (1.7)-ის მარჯვენა მხარეში დაგვემატებინა „თავისუფალი" წევრები $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{16}$. ჩაწერის კომპაქტურობის თვალსაზრისით ეს წევრები არ არიან ცხადად დაწერილნი. ეს იმით მართლდება, რომ თავისუფალი ცვლადები ფუნქციის გამოსახულებაში ნულოვანი ფასებით შედის და, მაშასადამე, არ არის სავალდებულო სუფთა მოგების განტოლებაში მათი ჩაწერა. ბაზრის მოთხოვნილების გადაჭარბება ანდა წარმოების სიმძლავრის მთლიანად გამოუყენებლობა არ დაემჩნევა არც პროდუქციის გაყიდვიდან მიღებულ შემოსავალს და არც მასალის ღირებულებას.

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ მოინახოს λ_i-ების ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.5) და (1.6) პირობას და რომელთათვისაც

$$Z=f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{16})=max \qquad (1.8)$$

ჩაწერის კომპაქტურობის მიზნით (1.8) განტოლებათა სისტემის მიხედვით შევადგინოთ 138-ე გვერდზე მოცემული ცხრილი 2.

მე-2 ცხრილი დალაგებულია λ_i უცნობების მიმართ. თითოეულ სვეტში მხოლოდ ერთი უცნობია. მაგალითად, განვიხილოთ პირველი სვეტი, ის შეიცავს მხოლოდ λ_1 უცნობს; მისი კოეფიციენტები წარმოადგენენ 7-განზომილებიანი სივრცის წერტილის კოორდინატებს $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 1, 0, 0\right)$, ანდა ვექტორს, რომლის მდგენელებია ამ წერტილის კოორდინატები. ამ ვექტორს დავარქვათ $\vec{P}_1$, ასევე შევადგენთ $\vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_{16}$ ვექტორებს, ხოლო ტოლობათა მარჯვენა მხარეს მდგომ გამოსახულებათა შესაბამი ვექტორი იყოს ე. წ. ნულოვანი ვექტორი $\vec{P}_0$. როგორც ცნობილია, ამ ვექტორების რიცხვზე გამრავლება ნიშნავს მისი მდგენელების იმავე რიცხვზე გამრავლებას. აგრეთვე ვიცით, რომ შეკრების ოპერაციის მიმართ ვექტორები

ცხრილი 2

$$-\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_3+0\cdot\lambda_4+0\cdot\lambda_5+0\cdot\lambda_6+0\cdot\lambda_7+0\cdot\lambda_8+0\cdot\lambda_9+1\cdot\lambda_{10}+0\cdot\lambda_{11}+0\cdot\lambda_{12}+0\cdot\lambda_{13}+0\cdot\lambda_{14}+0\cdot\lambda_{15}+0\cdot\lambda_{16}=0,$$

$$-\frac{1}{4}\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_3+0\cdot\lambda_4+0\cdot\lambda_5+0\cdot\lambda_6+0\cdot\lambda_7+0\cdot\lambda_8+0\cdot\lambda_9+0\cdot\lambda_{10}+1\cdot\lambda_{11}+0\cdot\lambda_{12}+0\cdot\lambda_{13}+0\cdot\lambda_{14}+0\cdot\lambda_{15}+0\cdot\lambda_{16}=0,$$

$$0\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3-\frac{3}{4}\lambda_4+\frac{1}{4}\lambda_5+\frac{1}{4}\lambda_6+0\cdot\lambda_7+0\cdot\lambda_8+0\cdot\lambda_9+0\cdot\lambda_{10}+0\cdot\lambda_{11}+1\cdot\lambda_{12}+0\cdot\lambda_{13}+0\cdot\lambda_{14}+0\cdot\lambda_{15}+0\cdot\lambda_{16}=0,$$

$$0\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3-\frac{1}{2}\lambda_4+\frac{1}{2}\lambda_5-\frac{1}{2}\lambda_6+0\cdot\lambda_7+0\cdot\lambda_8+0\cdot\lambda_9+0\cdot\lambda_{10}+0\cdot\lambda_{11}+0\cdot\lambda_{12}+1\cdot\lambda_{13}+0\cdot\lambda_{14}+0\cdot\lambda_{15}+0\cdot\lambda_{16}=0,$$

$$1\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3+1\cdot\lambda_4+0\cdot\lambda_5+0\cdot\lambda_6+1\cdot\lambda_7+0\cdot\lambda_8+0\cdot\lambda_9+0\cdot\lambda_{10}+0\cdot\lambda_{11}+0\cdot\lambda_{12}+0\cdot\lambda_{13}+1\cdot\lambda_{14}+0\cdot\lambda_{15}+0\cdot\lambda_{16}=100,$$

$$0\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3+0\cdot\lambda_4+1\cdot\lambda_5+0\cdot\lambda_6+0\cdot\lambda_7+1\cdot\lambda_8+0\cdot\lambda_9+0\cdot\lambda_{10}+0\cdot\lambda_{11}+0\cdot\lambda_{12}+0\cdot\lambda_{13}+0\cdot\lambda_{14}+1\cdot\lambda_{15}+0\cdot\lambda_{16}=100,$$

$$0\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+1\cdot\lambda_3+0\cdot\lambda_4+0\cdot\lambda_5+1\cdot\lambda_6+0\cdot\lambda_7+0\cdot\lambda_8+1\cdot\lambda_9+0\cdot\lambda_{10}+0\cdot\lambda_{11}+0\cdot\lambda_{12}+0\cdot\lambda_{13}+0\cdot\lambda_{14}+0\cdot\lambda_{15}+1\cdot\lambda_{16}=60.$$

კომუტატიურები არიან, ე. ი. შესაკრებთა ადგილის გადანაცვლებით ჯამი იგივე რჩება.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია წრფივი პროგრამირების ამოცანა ზოგადად ჩამოვაყალიბოთ: მოსაძებნია λ_i რიცხვების მნიშვნელობანი, რომელიც ანიჭებს მაქსიმუმს ან მინიმუმს

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} C_i\lambda_i \tag{1.9}$$

წრფივ ფუნქციას, სადაც C_i არის მანეთობით გამოსახული ის სუფთა შემოსავალი ყოველ კგ ნარევში გარეული თხილის მასალისაგან, რომელიც (1.7) გარდაქმნებით იყო მიღებული; ხოლო $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ და აკმაყოფილებს პირობას

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{P}_i=\vec{P}_0, \text{ სადაც } \lambda_i\geqslant 0 \quad (i=1, 2,\ldots, n). \tag{1.10}$$

$\vec{P}_i$ არის n-განზომილებიანი სივრცის ვექტორი ($i=1, 2, \ldots, n$), ხოლო $\vec{P}_0$ ნულოვანი ვექტორია.

მაშასადამე, როგორც ზემოთ ვნახეთ, წრფივ პროგრამირებას საქმე აქვს გარკვეული შეზღუდვათა ერთობლიობას დამორჩილებულ ურთიერთდამოკიდებულ ფაქტორთა ოპტიმალურ დაგეგმვასთან. ეს ფაქტორები და შეზღუდვები ჩამოყალიბებულია (1.10)-ში. გეგმის ოპტიმალობის კრიტერიუმი ჩაქსოვილია (1.9)-ში და დაკავშირებულია თითოეული λ_i-თვის C_i სხვადასხვა მნიშვნელობით.

§ 2. სიმპლექსური მეთოდით გამოთვლის ალგორითმი

$\vec{P}_0$ ვექტორს ვუწოდოთ პირობის ვექტორი, „თავისუფალი" ცვლადების შესაბამ ვექტორებს „თავისუფალი" ვექტორები, ხოლო ძირითადი ცვლადების შესაბამის ვექტორებს კი — სტრუქტურული ვექტორები.

უკანასკნელი (2) ცხრილი მატრიცების სახით უფრო მოხერხებულად შემდეგნაირად გადავწეროთ:

ცხრილი 3.

სტრუქტურული ვექტორები									თავისუფალი ვექტორები							პირობის ვექტორები
$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_0$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	100
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	100
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	60

ამ ცხრილში თუ $\vec{P}_i$-ების ($i=1, 2, \ldots, 16$) გვერდით ვიგულისხმებთ შესაბამის λ_i მამრავლებს და $\vec{P}_i$-ის ქვემოთ მოთავსებულ მდგენელებს ამ λ_i-ზე გავამრავლებთ, მიღებულ ნამრავლებს შევკრებთ და გავუტოლებთ $\vec{P}_0$-ს, მივიღებთ იგივე (1.6) სისტემას.

ამგვარად, უკანასკნელი მატრიცული ცხრილის ყოველი სვეტი წარმოადგენს ვექტორს. როგორც ვიცით, ვექტორთა სვეტების ადგილგადანაცვლება შედეგს არ შეცვლის და ამიტომ პირველად თავში დავწეროთ $\vec{P}_0$ ვექტორი, შემდეგ თავისუფალი ვექტორები და, ბოლოს, სტრუქტურული ვექტორები. მივიღებთ ე. წ. სიმპლექსურ ცხრილს, რომელსაც შემდეგი სახე ექნება:

ცხრილი 4

C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	$-1,5$	2,5	1,5	$-3,0$	1,0	0	$-4,0$	0	$-1,0$
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
0	$\vec{P}_{10}$	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
0	$\vec{P}_{11}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0
0	$\vec{P}_{12}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
0	$\vec{P}_{13}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
0	$\vec{P}_{14}$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_{15}$	100	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	$\vec{P}_{16}$	60	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_j-C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	1,5	$-2,5$	$-1,5$	3,0	$-1,0$	0	4,0	0	1,0

მიღებული მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში გამოჩნდა კვადრატული ქვემატრიცი, რომელიც 7 სტრიქონისა და 7 სვეტისაგან შედგება და რომლის მთავარი დიაგონალის ელემენტებია ერთიანები, ხოლო დანარჩენებისა კი 0.

ასეთი „ერთეული", ანუ „დიაგონალური მატრიცა" შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს ისეთი 7-განზომილებიანი სივრცის ბაზისის მისაღებად, რომელიც ჩვენთვისაა საინტერესო. ვექტორები აუცილებლად წრფივად დამოკიდებულნი არიან. იმდენად, რამდენადაც ჩვენს ამოცანაში 7 განტოლება გვაქვს, ჩვენთვის საინტერესო სივრცე 7-განზომილებიანი იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს 7 წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, რომლებითაც ცალსახად გამოისახება სივრცის ნებისმიერი წერტილი და, კერძოდ, შესაძლებელია მათი საშუალებით ამონახსნის გამოსახვაც.

თავისუფალი ვექტორები, რომლებიც მატრიცის პირველ სვეტებშია გადატანილი და რომლებიც ქმნიან დიაგონალურ ქვემატრიცას, წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელ 7 ვექტორთა ისეთ ერთობლიობას, რომელიც შეიძლება იწოდოს „ერთეულ ბაზისად". ასეთი ერთეული ბაზისის შესადგენად არ არის სავალდებულო თავისუფალი ვექტორების აღება, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც პირობები მოცემულია უტოლობების სახით და თავისუფალი ცვლადები, თითოეული ერთის ტოლი კოეფიციენტით, შეჰყავთ სისტემაში (იმისათვის, რომ გადავიდეთ უტოლობებიდან სვეტების განტოლებებზე, რომლებიც შეესაბამებიან თავისუფალ ცვლადებს), ისინი ქმნიან ერთეულ ბაზისს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც თავისუფალი წევრების შეყვანა სისტემაში ერთეული ბაზისის შესადგენად შეუძლებელია, მაშინ შესაძლებელია მატრიცას დაემატოს დამატებითი ვექტორები.

მე-4 ცხრილში, ყოველი სტრუქტურული ვექტორის თავზე, დაწერილია მისი სუფთა ფასი, რომელიც (1.7) განტოლებიდან განისაზღვრება (სუფთა ფასია λ_i-ების წინ მდგომი მამრავლები). თვით ცხრილის შიგნით ჩაწერილია კოეფიციენტები, რომლებიც (1.6) განტოლებებიდან აიღება. იმ სვეტში, სადაც ზემოთ აწერია „ვექტორი", ჩამოწერილია ბაზისის ვექტორები $\vec{P}_{10}, \vec{P}_{11}, \ldots, \vec{P}_{16}$. ყოველი ბაზისის ვექტორის მარცხნივ C_j-ის ქვემოთ ჩაწერილია მისი ფასი. ჩვენს შემთხვევაში ყველა ეს ფასი ნულია.

ჩავწერეთ რა ამგვარად მატრიცა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ გამოთვლის პირველი ეტაპი დამთავრებულია.

ყველა 17 ვექტორი ($\vec{P}_0, \vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_{16}$) გამოისახება ბაზისის ვექტორებით. მაგალითად:

$$\vec{P}_0=0\cdot\vec{P}_{10}+0\cdot\vec{P}_{11}+0\cdot\vec{P}_{12}+0\cdot\vec{P}_{13}+100\vec{P}_{14}+100\vec{P}_{15}+60\cdot\vec{P}_{16} \qquad (2.1)$$

არის ისეთი ამოხსნა, რომელიც მოთხოვნილ პირობებს აკმაყოფილებს ნარევზე დადებული ყველა პირობა შესრულებულია. ბაზრის მოთხოვნილების გადამეტებას ადგილი არა აქვს ($\lambda_{10}=\lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{13}=0$). სიმძლავრის გამოუყენებლობას აქვს ადგილი; სახელდობრ, გამოუყენებელი დარჩა ნუში 100 კგ დღეში, ნიგოზი 60 კგ დღეში და თხილი 100 კგ დღეში ($\lambda_{14}=100$, $\lambda_{15}=100$, $\lambda_{16}=60$). ყველა დანარჩენი $\lambda=0$. (5) პირობა $\lambda_i \geqslant 0$ შესრულებულია, (1.6) განტოლებები კმაყოფილდება.

ამგვარად, აქ პროდუქციის არც ყიდვას აქვს ადგილი და არც გაყიდვას და, მაშასადამე, შემოსავალი Z იქნება ნულის ტოლი. თუმცა შემუშავებული პროგრამა აკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს (განტოლებებს), მაგრამ მოგებას არ იძლევა, ამიტომ ისმება კითხვა ახალი პროგრამის შედგენის შესახებ, რომელიც აგრეთვე მოთხოვნილ პირობებს აკმაყოფილებს და, გარდა ამისა, იძლევა გარკვეულ ნულისგან განსხვავებულ შემოსავალს.

გარდა $\vec{P}_0$-ისა სხვა ვექტორების, როგორც თვითონ ბაზისის ვექტორების, ისე სტრუქტურული ვექტორების, გამოსახვა შეიძლება ბაზისის ვექტორებით. მაგალითად:

$$\vec{P}_{10}=1\cdot\vec{P}_{10}+0\cdot\vec{P}_{11}+0\cdot\vec{P}_{12}+0\cdot\vec{P}_{13}+0\cdot\vec{P}_{14}+0\cdot\vec{P}_{15}+0\cdot\vec{P}_{16} \tag{2.2}$$

და

$$\vec{P}_4=0\cdot\vec{P}_{10}+0\cdot\vec{P}_{11}-\frac{3}{4}\vec{P}_{12}-\frac{1}{2}\vec{P}_{13}+1\cdot\vec{P}_{14}+0\cdot\vec{P}_{15}+0\cdot\vec{P}_{16}. \tag{2.3}$$

ამ უკანასკნელში ბაზისის ვექტორების კოეფიციენტები იმ რიცხვების ტოლია, რომლებიც $\vec{P}_4$ სვეტში დგანან იმ სტრიქონში, რომელშიც ბაზისის ვექტორს დიაგონალურ ქვემატრიცაში ერთიანი უწერია.

თუ ვექტორებს გავხსნით მისი კომპონენტების მიხედვით, მაშინ (2.3) განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად გადაიწეროს:

$$\begin{vmatrix}\vec{P}_4\\0\\0\\-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}\vec{P}_{10}\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}\vec{P}_{11}\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{vmatrix}-\frac{3}{4}\begin{vmatrix}\vec{P}_{12}\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{P}_{13}\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix}\vec{P}_{14}\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}\vec{P}_{15}\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}\vec{P}_{16}\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

თუ გამოვიყენებთ სკალარის ვექტორზე გამრავლების და ვექტორთა შეკრების თვისებას, ვნახავთ რომ (2.4)-ის მარჯვენა მხარე, მართლაც, გვაძლევს $\vec{P}_4$-ს.

იგივეს გამოსახვა შეიძლება 7-უცნობიანი 7 განტოლებით, სახელდობრ:

$$\begin{aligned}
&1\cdot X_1+0\cdot X_2+0\cdot X_3+0\cdot X_4+0\cdot X_5+0\cdot X_6+0\cdot X_7=0,\\
&0\cdot X_1+1\cdot X_2+0\cdot X_3+0\cdot X_4+0\cdot X_5+0\cdot X_6+0\cdot X_7=0,\\
&0\cdot X_1+0\cdot X_2+1\cdot X_3+0\cdot X_4+0\cdot X_5+0\cdot X_6+0\cdot X_7=-\frac{3}{4},\\
&0\cdot X_1+0\cdot X_2+0\cdot X_3+1\cdot X_4+0\cdot X_5+0\cdot X_6+0\cdot X_7=-\frac{1}{2},\\
&0\cdot X_1+0\cdot X_2+0\cdot X_3+0\cdot X_4+0\cdot X_5+1\cdot X_6+0\cdot X_7=1,\\
&0\cdot X_1+0\cdot X_2+0\cdot X_3+0\cdot X_4+0\cdot X_5+1\cdot X_6+0\cdot X_7=0,\\
&0\cdot X_1+0\cdot X_2+0\cdot X_3+0\cdot X_4+0\cdot X_5+0\cdot X_6+1\cdot X_7=0.
\end{aligned}$$

ამ განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებს შემდეგი ამონახსენი:

$$X_1=X_2=X_6=X_7=0;\quad X_3=-\frac{3}{4},\quad X_4=-\frac{1}{2},\quad X_5=1.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყველა $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, . . ., $\vec{P}_{16}$ ვექტორი ბაზისის ვექტორების საშუალებით შეიძლება გამოისახოს. სახელდობრ, ზოგადად შეიძლება დავწეროთ:

$$\vec{P}_j=\sum_{i=1}^{m}X_{ij}\vec{P}_i \qquad (j=1,\,2,\ldots,n), \qquad (2.5)$$

სადაც $\vec{P}_i (i=1,\,2,\,\ldots,\,m)$ ბაზისის ვექტორებია (ჩვენს მაგალითში

$m=7$) და X_{ij} არის ცხრილის i-ური სვეტის ელემენტები, რომლისთვისაც ვეძებთ ამონახსენს.

Z-ის საწყისი მნიშვნელობა ალვნიშნოთ Z_0-ით. ჩვენს შემთხვევაში ის ნულის ტოლია. ჩვენ უნდა მივიღოთ Z-ის სხვა მნიშვნელობა Z_1, რომელიც სხვა ამონახსენს შეესაბამება, სახელდობრ, რომელიც მიიღება ერთ-ერთი ბაზისის ვექტორის ახლი ვექტორით შეცვლისას. აგრეთვე ახალი მნიშვნელობა ისეთი უნდა იყოს, რომ ის ნაკლები ╖არ გახდეს Z_0-ზე ($Z_1 \geqslant Z_0$). ისეთი ვექტორი, რომ მოვნახოთ, რომლითაც შევცვლით ერთ-ერთ ბაზისის ვექტორს, პირველ რიგში საჭიროა გამოვთვალოთ:

$$Z_j = \sum_i X_{ij} C_i \quad (i=10,11,\ldots,16). \tag{2.6}$$

ყოველ $\vec{P}_i$ ბაზისის ვექტორის სუფთა ფასი ნულია, ამიტომ ყველა Z_j იქნება ნულის ტოლი. ყოველ Z_j-ს უნდა გამოვაკლოთ მისი სუფთა ფასი, რომელიც სათანადო სვეტზეა ნაჩვენები. შედეგი მოცემულია მე-4 ცხრილის ბოლო სტრიქონში, რომელიც აღნიშნულია $Z_j - C_j$-ით, სადაც $j=0, 1, 2, \ldots, 16$.

ბაზისის ახალი ვექტორი, რომელმაც უნდა შეცვალოს ერთ-ერთი ძველი ბაზისის ვექტორთაგანი, იქნება სწორედ ის ვექტორი, რომლისთვისაც სხვაობა $Z_j - C_j$ იქნება ყველაზე მცირე. ჩვენს შემთხვევაში ასეთი ვექტორია $\vec{P}_2$, რომლისთვისაც ხსენებული სხვაობა არის — 2,5.

ახლა უნდა განისაზღვროს ბაზისის ის ვექტორი, რომელიც უნდა შეიცვალოს $\vec{P}_2$-ით. ვთქვათ, ის არის $\vec{P}_r$. იმისათვის რომ მოინახოს $\vec{P}_r$, განვიხილოთ ყველა დადებითი X_{ij}, რომლებიც $\vec{P}_2$ სვეტში დგანან, λ_i რიცხვები სტრიქონების მიხედვით გავყოთ $\vec{P}_0$ სვეტიდან სათანადო X_{ik}-ზე და შევადაროთ მიღებული არაუარყოფითი $\frac{\lambda_i}{X_{i2}}$ წილადები. ძველი ბაზისის ვექტორი, რომელიც $\vec{P}_2$-ით უნდა შეიცვალოს იქნება ის, რომლისათვის ფარდობა $\frac{\lambda_i}{X_{i2}}$ იქნება უმცირესი, ე. ი. რომლისთვისაც

$$\Theta = \min_i \frac{\lambda_i}{X_{i2}}. \tag{2.7}$$

ჩვენს შემთხვევაში Θ-ს ორგან აქვს მინიმუმი, ესენია $i=10$, $i=11$ წერტილებზე, სადაც $0 : \frac{1}{2}$ და $0 : \frac{3}{4} = 0$ (ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ე. წ. გადაგვარებულ შემთხვევასთან). აქ შესაძლებელია $\vec{P}_2$ ვექტო-

რით ბაზისის ორი ვექტორი: $\vec{P}_{10}$ და $\vec{P}_{11}$ შევცვალოთ ერთდროულად. $\frac{\lambda_i}{X_{i2}}$-ის უმცირეს მნიშვნელობას იმისათვის ვიღებთ, რომ არ დაირღვეს არაუარყოფითობის პირობა. $\vec{P}_2$-ით შევცვალოთ ჩვენს შემთხვევაში მხოლოდ $\vec{P}_{11}$ ბაზისის ვექტორი.

ვღებულობთ ფუნქციის ახალ მნიშვნელობას:

$$Z_1=Z_0-\Theta(Z_2-C_2), \tag{2.8}$$

მაგრამ, რადგან $\Theta=0$, ამიტომ

$$Z_1=Z_0.$$

სიმპლექსური მეთოდი შესაძლებლობას იძლევა სხვადასხვა ამოხსნების გადასინჯვისას შევადაროთ Z-ის მიღებული მნიშვნელობანი. სიმპლექსური მეთოდის მნიშვნელოვანი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ამ მეთოდის წესების შესრულებისას ფუნქციის მნიშვნელობა არ შეიძლება შემცირდეს, თუმცა შესაძლებელია წინა მნიშვნელობას არ გადააჭარბოს, როგორც ამას ჩვენს მაგალითში აქვს ადგილი.

გამოთვლის ყოველ ეტაპზე ჩვენ შეგვიძლია სამი სხვადასხვა შემთხვევა გვქონდეს: 1) შესაძლებელია ფუნქციის მაქსიმუმი იყოს უსასრულოდ დიდი, 2) შესაძლებელია მიღებულ იქნეს ოპტიმალური ამოხსნა, რომლის დროსაც ფუნქციას აქვს სასრული მნიშვნელობა და 3) შესაძლებელია ოპტიმალური ამოხსნა ჯერ არ იყოს მიღებული, ე. ი. ფუნქციის მნიშვნელობა შეიძლება მიღწეულზე დიდი იყოს და მაქსიმალური მნიშვნელობის მისაღებად საჭიროა შემდგომი გამოთვლების ჩატარება.

ჩამოთვლილი სამივე შემთხვევა ერთმანეთს გამორიცხავს გამოთვლის ყოველ ეტაპზე. თუ რომელ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, ამის გამორკვევა შეიძლება Z_j-C_j სხვაობათა და X_{ij} მნიშვნელობათა მიხედვით.

სიმპლექსური მეთოდის პროცედურას სასრული ბიჯის შემდეგ მივყავართ 1 ან 2 შემთხვევამდე. სანამ Z_j-C_j სხვაობათა შორის ურევია უარყოფითი გამოსახულება, ადგილი ექნება ან 1 ან 3 შემთხვევას. თუკი ყველა Z_j-C_j სხვაობა უარყოფითია და ყველა X_{ij}, რომლებიც სათანადო სვეტში დგანან დადებითი არ არიან, გვექნება 1 შემთხვევა. თუკი ამ სვეტებში მოინახება დადებითი X_{ij}, მაშინ საჭიროა გამოთვლის გაგრძელება — მესამე შემთხვევა. დაბოლოს, თუ ყველა $Z_j-C_j\geqslant 0$, მაშინ მივდივართ მაქსიმუმამდე.

მე-4 ცხრილში ზოგიერთი $Z_j-C_j<0$, მათ შორის ყველაზე პატარაა Z_2-C_2; ამიტომ ჩვენ შევარჩიეთ $\vec{P}_2$ ვექტორი, რომელიც შეც-

ვლის ბაზისის ერთ-ერთ ვექტორს. რადგანაც $\vec{P_2}$-ის სვეტში, ზოგიერთი რიცხვი ნულზე მეტია, ამიტომ უსასრულო მაქსიმუმს არ ექნება ადგილი. დადებითი X_{ij}-ებისათვის ვითვლით $\Theta=\frac{\lambda_i}{X_{ij}}$-ებს. იმ i-თვის, რომლისთვისაც Θ ღებულობს მინიმუმს, ვსაზღვრავთ ვექტორს, რომელიც უნდა ამოვიღოთ ბაზისის ვექტორებიდან. ჩვენს შემთხვევაში ასეთია $\vec{P}_{11}$.

გამოთვლების გასაგრძელებლად შევადგინოთ მე-5 ცხრილი (იხ. გვ. 148). ამ ცხრილში $\vec{P}_{11}$-ს ადგილი „ვექტორის" ვერტიკალურ სვეტში დაკავებული აქვს $\vec{P_2}$-ს, რომელსაც მარცხნივ C_j სვეტზე უწერია თავისი სუფთა ფასი 2, 5, ხოლო დანარჩენი ბაზისის ვექტორების სუფთა ფასია ნული. C_j-ს ჰორიზონტალურ სტრიქონზე ვექტორთა სუფთა ფასებია გადმოწერილი, ხოლო „ვექტორის" სტრიქონზე მე-4 ცხრილის ვექტორთა მიმდევრობაა დაცული.

ახლა საჭიროა ყოველი ვექტორის ახალი ბაზისების საშუალებით გამოსახვა. როგორც (2.5)-ში გვქონდა:

$$\vec{P}_j=\sum_{i=1}^{7} X_{ij}\vec{P}_i \qquad (j=1, 2, \ldots, n); \tag{2.9}$$

პირველ რიგში უნდა განისაზღვროს $X_{kj}=\frac{X_{rj}}{X_{rk}}$ კოეფიციენტები. ჩვენს შემთხვევაში $k=2$ და $r=11$; მაშასადამე,

$$X_{2j}=\frac{X_{11,j}}{X_{11,2}}\ . \tag{2.10}$$

X_{2j}-ის მიღებული მნიშვნელობები ჩაიწერება $\vec{P_2}$ ახალი ბაზისის გასწვრივ. ეს კოეფიციენტები მიიღება მე-4 ცხრილში $\vec{P}_{11}$ ვექტორის გასწვრივ კოეფიციენტების $X_{11,2}=\frac{3}{4}$-ზე გაყოფით. სახელდობრ, გვექნება $\vec{P}_2$-ის გასწვრივ მნიშვნელობანი: 0, 0, $\frac{4}{3}$, 0, 0, 0, 0, 0, $-\frac{1}{3}$, 1, $-\frac{1}{3}$, 0, დანარჩენი კოეფიციენტები კი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$X'_{ij}=X_{ij}-\left(\frac{X_{rj}}{X_{rk}}\right)X_{ik}. \tag{2.11}$$

ცხრილი 5

C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	—1,5	2,5	1,5	—3,0	1,0	0	—4,0	0	—1,0
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
0	$\vec{P}_{10}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0
0	$\vec{P}_{12}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
0	$\vec{P}_{13}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
0	$\vec{P}_{14}$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_{15}$	100	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	1	0
0	$\vec{P}_{16}$	60	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Z_j		0	0	$\frac{10}{3}$	0	0	0	0	0	$-\frac{5}{6}$	2,5	$-\frac{5}{6}$	0	0	0	0	0	0
Z_j-C_j		0	0	$\frac{10}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	3,0	—1,0	0	4,0	0	1,0

ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:

$$X'_{ij}=X_{ij}-\left(\frac{X_{11,j}}{X_{11,2}}\right)X_{i,2}. \tag{2.12}$$

$\frac{X_{11,j}}{X_{11,2}}=X_{2j}$ მნიშვნელობანი ჩვენ უკვე გამოვთვალეთ. ეს რიცხვები დგას $\vec{P}_2$-ის გასწვრივ მე-5 ცხრილში. გამოვითვალოთ, მაგალითად, $X'_{10,1}$. ცხადია, რომ $X_{10,1}=-\frac{1}{2}$ (მე-4 ცხრილი); როგორც ზემოთ გამოვთვალეთ, $\frac{X_{11,1}}{X_{11,2}}=-\frac{1}{3}$ (მე-5 ცხრილი, $\vec{P}_2$ სტრიქონისა და $\vec{P}_1$ სვეტის გადაკვეთა), $X_{10,2}=\frac{1}{2}$ (მე-4 ცხრილი, $\vec{P}_{10}$ სტრიქონისა და $\vec{P}_2$ სვეტის გადაკვეთა). მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (2.12)-ში, გვექნება:

$$X'_{10,1}=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}.$$

ამგვარად, მივიღეთ კოეფიციენტი; რომელიც დგას მე-5 ცხრილში $\vec{P}_{10}$ სტრიქონის გასწვრივ და $\vec{P}_1$-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე. ანალოგიურად იანგარიშება ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი მე-5 ცხრილიდან.

მე-5 ცხრილიდან Z_j შემდეგნაირად გამოითვლება: როგორც ვიცით,

$$Z_j=\sum_i X_{ij}C_i,$$

სადაც i ინდექსი ახალი ბაზისის ვექტორების ინდექსებია. რადგან ყველა ბაზისის ვექტორის ფასი ნულია, ამიტომ ჯამში დაგვრჩება მხოლოდ $X_{2j}C_2$ წევრი. ამგვარად, დავწერთ:

$$Z_j=X_{2j}C_2$$

ანდა, რადგან $C_2=2{,}5$, გვექნება:

$$Z_j=2{,}5X_{2j},$$

საიდანაც, ვწერთ:

$$Z_1=2{,}5\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6},$$

$$Z_2=2{,}5\cdot 1=2{,}5,$$

$$Z_3=2,5\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6}\,,$$

$$Z_4=2,5\cdot 0=0$$

და ა. შ. ყველა სხვა გარდა Z_{11}-ისა, იქნება ნული,

$$Z_{11}=\frac{4}{3}\cdot 2,5=\frac{10}{3}\,,$$

მე-5 ცხრილში ზოგიერთი Z_j-C_j უარყოფითია. ამიტომ საჭიროა ახალი გამოთვლების ჩატარება. უნდა შევადგინოთ მე-6 ცხრილი. Z_j-C_j-ს ყველაზე პატარა მნიშვნელობა შეესაბამება $\overline{P}_3$ ვექტორს, ამიტომ $\overline{P}_3$-ით უნდა შევცვალოთ ერთ-ერთი ბაზისის ვექტორი. სახელდობრ, თუ რომელს შევცვლით ამას გვიჩვენებს გამოსახულება

$$\Theta=\min_i\frac{\lambda_i}{X_{ik}}\,.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$\Theta=\min_i\frac{\lambda_i}{X_{ik}}=\frac{\lambda_{10}}{X_{10,3}}=\frac{0}{\frac{2}{3}}=0$$

და სათანადო ვექტორი იქნება $\overline{P}_{10}$. ახალი ბაზისის ვექტორებს $\overline{P}_2$-სა და P_3-ს, C_j-ს ქვემოთ მიეწერებათ, თავიანთი სუფთა ფასი 2,5 და 1,5, ხოლო დანარჩენებს — 0.

მე-6 ცხრილში (იხ. გვ. 151) ყოველი ვექტრრი უნდა გამოვსახოთ ბაზისის ვექტორებით. ჯერ განვსაზღვროთ კოეფიციენტები

$$X_{3j}=\frac{X_{10,j}}{X_{10,3}}$$

და დავწეროთ ისინი $\overline{P}_3$-ის გასწვრივ. ესენი მე-5 ცხრილიდან იქნებიან:

$$X_{10,1}=-\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\,,$$

$$X_{10,2}=0:\frac{2}{3}=0,$$

$$X_{10,3}=\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=1.$$

ცხრილი 6

C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	−1,5	2,5	1,5	−3,0	1,0	0	−4,0	0	−1,0
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
1,5	$\vec{P}_3$	0	$\frac{3}{2}$	−1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0
0	$\vec{P}_{12}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
0	$\vec{P}_{13}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
0	$\vec{P}_{14}$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_{15}$	100	$-\frac{1}{2}$	−1	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	0	1	0
0	$\vec{P}_{16}$	60	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	1	0
Z_j		0	3,5	1,0	0	0	0	0	0	−2,0	2,5	1,5	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		0	3,5	1,0	0	0	0	0	0	−0,5	0	0	3,0	−1,0	0	4,0	0	1,0

ანარჩენი კოეფიციენტები, გარდა $X_{10,10}$-ისა და $X_{10,11}$-ისა, იქნება ნულები:

$$X_{10,10}=1:\frac{2}{3}=\frac{3}{2},$$

$$X_{10,11}=-\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=-1.$$

დანარჩენ კოეფიციენტებს ვიანგარიშებთ (2.12) ფორმულით, მაგალითად,

$$X_{2,10}=X_{2,10}-\left(\frac{X_{10,10}}{X_{10,3}}\right)X_{2,3}=0-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$X'_{2,11}=X_{2,11}-\left(\frac{X_{10,11}}{X_{10,3}}\right)X_{2,3}=\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}:\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1$$

და ა. შ.

Z_j-ს საანგარიშებლად გვექნება ფორმულა

$$Z_j=X_{2j}C_2+X_{3j}C_3,$$

საიდანაც

$$Z_1=X_{21}C_2+X_{31}C_3=-\frac{1}{2}\cdot 2,5-\frac{1}{2}\cdot 1,5=-2,$$

მაშინ

$$Z_1-C_1=-2+1,5=-0,5.$$

ასევე

$$Z_2=X_{22}C_2+X_{32}C_3=1\cdot 2,5+0\cdot 1,5=2,5,$$

მაშინ

$$Z_2-C_2=2,5-2,5=0,$$

და ა. შ.

მე-6 ცხრილშიც რამდენიმე Z_j-C_j სხვაობა არის უარყოფითი, მაშასადამე, უნდა გაგრძელდეს გამოთვლები. ბაზისის ვექტორად გადავიტანთ $\vec{P}_5$-ს, ხოლო $\vec{P}_5$-ით შევცვლით $\vec{P}_{10}$-ს. ანალოგიურად $\vec{P}_6$-ს, $\vec{P}_2$-სა და $\vec{P}_3$-ს თავიანთ ფასს მივაწერთ. დანარჩენების ფასი იქნება 0. ყველა ვექტორს ბაზისის ვექტორებით გამოვსახავთ. ვიანგარიშებთ Z_j და Z_j-C_j მნიშვნელობებს. Z_j-ის გამოსაანგარიშებლად გვექნება ფორმულა:

$$Z_j=X_{2j}C_2+X_{3j}C_3+X_{5j}C_6.$$

ამგვარად, მივიღებთ შემდეგ მე-7 ცხრილს:

ცხრილი 7

C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	—1,5	2,5	1,5	—3,0	1,0	0	—4,0	0	—1,0
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
1,5	$\vec{P}_3$	0	$\frac{3}{2}$	—1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0
0	$\vec{P}_{12}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
1,0	$\vec{P}_5$	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	—1	1	—1	0	0	0
0	$\vec{P}_{14}$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_{15}$	100	$-\frac{1}{2}$	—1	0	—2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	1	0	1	0
0	$\vec{P}_{16}$	60	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	0	0	1
Z_j		0	3,5	1,0	0	2,0	0	0	0	—2,0	2,5	1,5	—1,0	1,0	—1,0	0	0	0
$Z_j—C_j$		0	3,5	1,0	0	2,0	0	0	0	—0,5	0	0	2,0	0	—1,0	4,0	0	1,0

ცხრილი 8

C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	—1,5	2,5	1,5	—3,0	1,0	0	—4,0	0	—1,0
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
1,5	$\vec{P}_3$	0	$\frac{3}{2}$	—1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0
0	$\vec{P}_6$	0	0	0	2	—1	0	0	0	0	0	0	—1	0	1	0	0	0
1,0	$\vec{P}_5$	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	—2	1	0	0	0	0
0	$\vec{P}_{14}$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_{15}$	100	$-\frac{1}{2}$	—1	—2	—1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	2	0	0	0	1	0
0	$\vec{P}_{16}$	60	$-\frac{3}{2}$	1	—2	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	0	0	1
Z_j		0	3,5	1,0	2,0	1,0	0	0	0	—2,0	2,5	1,5	—2,0	1,0	0	0	0	0
$Z_j—C_j$		0	3,5	1,0	2,0	1,0	0	0	0	—0,5	0	0	1,0	0	0	4,0	0	1,0

ცხრილი 9

C_j		0	0	0	0	0	0	0	0	−1,5	2,5	1,5	−3,0	1,0	0,0	−4,0	0	−1,0
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
1,5	$\vec{P}_3$	50	$\frac{3}{2}$	−1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	50	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	$\vec{P}_6$	0	0	0	2	−1	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	0	0	0
1,0	$\vec{P}_5$	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	−2	1	0	0	0	0
−1,5	$\vec{P}_1$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_{15}$	50	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
0	$\vec{P}_{16}$	10	$-\frac{3}{2}$	1	−2	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
Z_j		50	3,5	1,0	2,0	1,0	0,5	0	0	−1,5	2,5	1,5	−1,5	1,0	0	0,5	0	0
Z_j-C_j		5,0	3,5	1,0	2,0	1,0	0,5	0	0	0	0	0	1,5	0	0	4,5	0	1,0

მე-7 ცხრილშიც ზოგიერთი $Z_j - C_j$ უარყოფითია. გამოთვლა გრძელდება. ბაზისის ვექტორებში შევა $\bar{P}_8$ ვექტორი. $\bar{P}_8$-ით შეიცვლება $\bar{P}_{12}$. ყველა ვექტორი ახალი ბაზისის ვექტორებით გამოისახება, Z_j-ს გამოსაანგარიშებლად გვექნება ფორმულა:

$$Z_j = X_{2j}C_2 + X_{3j}C_3 + X_{5j}C_5 + X_{6j}C_6.$$

ვიანგარიშებთ სათანადოდ $Z_j - C_j$ სხვაობებს და, ამგვარად, მივიღებთ მე-8 ცხრილს (იხ. გვ. 154).

აქაც არის $Z_j - C_j$ სხვაობის ერთი მნიშვნელობა უარყოფითი. საჭიროა გაგრძელდეს გამოთვლა. ამჯერად ბაზისის ვექტორებში შევა $\bar{P}_1$. ის შეცვლის $\bar{P}_{14}$-ს. თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ გამოთვლებს, მივიღებთ მე-9 ცხრილს (იხ. გვ. 155), სადაც ყველა $Z_j - C_j$ სხვაობა იქნება არაუარყოფითი და ამით გამოთვლაც დამთავრდება

მე-9 ცხრილში $\bar{P}_1$-ის კოეფიციენტები შემდეგნაირადაა მიღებული:

$$\frac{X_{14,0}}{X_{14,1}} = \frac{100}{1} = 100, \quad \frac{X_{14,10}}{X_{14,1}} = 0, \quad \frac{X_{14,11}}{X_{14,1}} = 0, \quad \frac{X_{14,12}}{X_{14,1}} = 0,$$

$$\frac{X_{14,13}}{X_{14,1}} = 0, \quad \frac{X_{14,14}}{X_{14,1}} = 1. \quad \frac{X_{14,15}}{X_{14,1}} = 0 \text{ და ა. შ.}$$

$\bar{P}_3$-ის კოეფიციენტები შემდეგნაირად მიიღება. მაგალითად, $\bar{P}_3$-ის კოეფიციენტები იქნება:

$$X_{3,0} = X_{3,0} - \left(\frac{X_{14,0}}{X_{14,1}}\right) X_{31} = 0 - 100\left(-\frac{1}{2}\right) = 50,$$

$$X_{3,10} = \frac{3}{2} - 0 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

და ა. შ.

$$Z_0 = X_{1,0}C_1 + X_{2,0}C_2 + X_{3,0}C_3 + X_{5,0}C_5 + X_{6,0}C_6 = -1,5 \cdot 100 + $$
$$+ 50 \cdot 2,5 + 50 \cdot 1,5 = -150 + 200 = 50,$$

$$Z_{10} = \frac{3}{2} \cdot 1,5 + 2,5 \cdot \frac{1}{2} = 3,5$$

და ა. შ.

$$Z_0 - C_0 = 50,$$
$$Z_{10} - C_{10} = 3,5$$

და ა. შ. უკანასკნელ მე-9 ცხრილში ჩვენ მივაღწიეთ სასრულ მაქსიმუმს; ამას ის გვიჩვენებს, რომ ყველა $Z_j - C_j \geqslant 0$.

ახლა შევადგინოთ ოპტიმალური პროგრამის და Z-ის საბოლოო მნიშვნელობის ცხრილი:

მასალის დანახარჯი / ნარევის გამოშვება	C	P	H	სულ
A	100	50	50	200 კგ/დღეში
B	0	0	0	0 „
D	0	0	0	0 „
სულ	100	50	50	200
სიმძლავრე: საერთოდ ნავარაუდევი,	100	100	60	260
გამოუყენებელი	—	50	10	60

მე-10 ცხრილი იგივეა, რაც 1-ლი ცხრილი, მხოლოდ λ_i-ების მნიშვნელობა შეტანილია მე-9 ცხრილიდან, საიდანაც ჩანს, რომ $\lambda_1=100$, $\lambda_2=50$, $\lambda_3=50$, ხოლო დანარჩენი $\lambda_i=0$ ($i=4, 5, \ldots, 9$). (2.6) ფორმულის თანახმად Z სუფთა მოგებისათვის მივიღებთ:

$$Z=-1{,}5\cdot100+2{,}5\cdot50+1{,}5\cdot50=50.$$

ამგვარად, ყოველდღიური სუფთა შემოსავალი იქნება 50 მანეთი, თუ გამოვუშვებთ მხოლოდ A ნარევს, რომელშიც 10 კგ ნუშია, 50 კგ თხილი და 50 კგ ნიგოზი.

სულ იხარჯება 200 კგ მასალა და გამოუყენებელი რჩება 60 კგ (50 კგ თხილი და 10 კგ ნიგოზი).

§ 8. სიმპლექსურ მეთოდში ხელოვნური ბაზისის გამოყენება

$\vec{P}_{10}, \vec{P}_{11}, \ldots, \vec{P}_{16}$ თავისუფალი ვექტორები, რომლებიც წარმოიშვნენ $\lambda_{10}, \ldots, \lambda_{16}$ თავისუფალი ცვლადების შემოყვანის შედეგად და აუცილებლობას წარმოადგენენ (1.4) უტოლობებიდან (1.6) ტოლობებზე გადასასვლელად, ავტომატურად ქმნიან ბაზისს გამოთვლების დასაწყებად. შემდეგ პროცესი მექანიკურად გრძელდება.

ამგვარად, როცა ამოცანა დაიყვანება უტოლობათა ამოხსნაზე ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ საწყისი ბაზისი. ისმება კითხვა, როგორ უნდა მოვიქცეთ მაშინ, როდესაც არ შეგვიძლია ასეთი თავისუფალი ვექტორების შემოყვანა? ვთქვათ (1.4) უტოლობებში ყველგან უტოლობის ნიშნის მაგივრად გვაქვს ტოლობის ნიშანი. ასეთ შემთხვევაში ამოცა-

ნაში თავისუფლება არა გვაქვს, ე. ი. პირობის გადაჭარბება ანდა სიმძლავრის გამოუყენებლობა დაუშვებელია.

ამ სიძნელის გადალახვა შეიძლება, თუ შემოვიყვანთ ხელოვნურ ვექტორებს. სტრუქტურულ ვექტორებს, რომლებიც განტოლებათა კოეფიციენტებიდან წარმოიქმნებიან, ემატებათ ხელოვნური ვექტორები: $\vec{P}_{10}$, $\vec{P}_{11}$, . . ., $\vec{P}_{16}$. მე-6 ცხრილი ამ შემთხვევაშიც ისევე გამოიყურება როგორც წინა შემთხვევისას, მხოლოდ ბაზისის ვექტორები აქ შევლენ არა ნულოვანი ფასით, არამედ დიდი ფასებით, მაგალითად, M ფასით, სადაც M საკმაოდ დიდია. ყოველთვის, როდესაც ბაზისში ასეთი ვექტორი შედის, ის ასეთი ფასით შევა. (1.4) რომ ყოფილიყო არა უტოლობათა სისტემა, არამედ განტოლებათა სისტემა, მაშინ მე-5 ცხრილის ნაცვლად გვექნებოდა მე-11 ცხრილი (იხ. გვ. 159).

ამ ცხრილში $\vec{P}_{15}$-ისა და $\vec{P}_{16}$-ის პირდაპირ C_j სვეტში დგას $-M$ საკმაოდ დიდი უარყოფითი ფასები. $Z_j—C_j$ სტრიქონში $\vec{P}_0$-ის ქვეშ არის პროგრამის საერთო ფასი, რომელიცაა:

$$50 - 60M = (5{,}0 \times 1{,}5) + (5{,}0 \times 2{,}5) - (10{,}0 \times 1{,}5) - 50M - 10M.$$

M-ის მნიშვნელობა იმდენად დიდია, რომ სხვა ფასი მასთან შედარებით უმნიშვნელოა. მაშასადამე, თუ პროგრამაში შედის ერთი მაინც ისეთი ვექტორი, რომლის ფასია $(-M)$, ეს იმას ნიშნავს, რომ მისი გაუმჯობესება შესაძლებელია. ასეთია სწორედ მე-11 ცხრილი. აქ გამოთვლა წინა შემთხვევის ანალოგიურად ტარდება. რადგანაც M განსაზღვრის თანახმად ძალიან დიდია, ამიტომ ნებისმიერი სვეტი, რომელიც $Z_j—C_j$ სტრიქონში შეიცავს M-ს, გამოდგება ბაზისის ვექტორის შესაცვლელად, სახელდობრ, $\vec{P}_{15}$-ის ან $\vec{P}_{16}$-ის შესაცვლელად; მე-11 ცხრილში $\vec{P}_8$ ვექტორით შევცვალოთ $\vec{P}_{15}$ და ჩვეულებრივად, როგორც ადრე, შევადგინოთ მე-12 ცხრილი (იხ. გვ. 160).

მე-12 ცხრილში $(-M)$ გამოჩნდა $Z_j - C_j$ სტრიქონში, მაშასადამე, პროგრამის შემდგომი გაუმჯობესება შესაძლებელია.

ახლა $\vec{P}_{16}$ ვექტორი შევცვალოთ $\vec{P}_9$-ით, რის შემდეგ ანალოგიურად შევადგენთ მე-13 ცხრილს (იხ. გვ. 161).

მე-13 ცხრილში ახალი ბაზისის ვექტორებში არ შედის $P_{10}, P_{11}, \ldots, \vec{P}_{16}$ ვექტორები; ყველა $Z_j - C_j \geqslant 0$, მაშასადამე, მივიღეთ ოპტიმალური პროგრამა.

ახლა შევადგინოთ Z ფუნქციის საბოლოო მნიშვნელობისათვის მე-10 ცხრილის ანალოგიური მე-14 ცხრილი (იხ. გვ. 162).

ცხრილი 11

C_j		0	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-1,5$	$2,5$	$1,5$	$-3,0$	$1,0$	0	$4,0$	0	$-1,0$
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
$1,5$	$\vec{P}_3$	50	$\frac{3}{2}$	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$1/2$	0	0
$2,5$	$\vec{P}_2$	50	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	$\vec{P}_6$	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0
$1,0$	$\vec{P}_5$	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0
$-1,5$	$\vec{P}_1$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$-M$	$\vec{P}_{15}$	50	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
$-M$	$\vec{P}_{16}$	10	$-\frac{3}{2}$	1	-2	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
Z_j-C_j		$50,0$ $-60M$	$3,5$ $3M$	$1,0$ M	$2,0$ $5M$	$1,0$ M	$0,5$ $2M$	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	$1,5$ $-2M$	0 0	0 0	$4,5$ M	0 $-M$	$1,0$ $-M$

ცხრილი 12

C_j		0	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-1,5$	2,5	1,5	$-3,0$	1,0	0	$-4,0$	0	$-1,0$
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
1,5	$\vec{P}_3$	50	$\frac{3}{2}$	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	50	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	$\vec{P}_6$	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0
1,0	$\vec{P}_5$	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0
$-1,5$	$\vec{P}_1$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_8$	50	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
$-M$	$\vec{P}_{16}$	10	$-\frac{3}{2}$	1	-2	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
Z_j-C_j		50	3,5	1,0	2,0	1,0	0,5		0	0	0	0	1,5	0	0	4,5	0	1,0
		$-10M$	$\frac{5}{2}M$		$3M$		$\frac{3}{2}M$	M					$-\frac{1}{2}M$			$\frac{1}{2}M$		$-M$

ცხრილი 13

C_j		0	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-1,5$	$2,5$	$1,5$	$-3,0$	$1,0$	0	$-4,0$	0	$-1,0$
	ვექ-ტორი	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_{10}$	$\vec{P}_{11}$	$\vec{P}_{12}$	$\vec{P}_{13}$	$\vec{P}_{14}$	$\vec{P}_{15}$	$\vec{P}_{16}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$	$\vec{P}_8$	$\vec{P}_9$
1,5	$\vec{P}_3$	50	$\frac{3}{2}$	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
2,5	$\vec{P}_2$	50	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	$\vec{P}_6$	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
1,0	$\vec{P}_5$	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	-2	1	1	0	0	0
$-1,5$	$\vec{P}_1$	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	$\vec{P}_8$	50	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
$-1,0$	$\vec{P}_9$	10	$-\frac{3}{2}$	1	-2	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
$Z_j - C_j$		40	5 $+M$	0 $+M$	4 $+M$	0 $+M$	1 $+M$	$+M$	-1 $+M$	0	0	0	1	0	0	5	0	0

ცხრილი 14

ნარევის გამოშვება \ დახარჯული მასალა	C	P	H	სულ
A	100	50	50	200
B	0	0	0	0
D	0	50	10	60
სულ	100	100	60	260

თუ ვისარგებლებთ (1.7) ფორმულით, Z-თვის მივიღებთ:

$$Z = -1{,}5 \times 100 + 2{,}5 \times 50 + 1{,}5 \times 50 - 10 = 40.$$

ამგვარად, ყოველდღიური მოგება ამ შემთხვევაში იქნება 40 მან. ნარევებზე დადებულ პირობებში წარმოების სიმძლავრის გამოყენება ხდება ზუსტად. გავიხსენოთ, რომ ამ პირობათა ზუსტად შესრულება იქიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვენ (1.4) უტოლობები შევცვალეთ ტოლობებით. ამით უტოლობების დროს დასაშვები თავისუფლებანი ლიკვიდირებული იქნა. ამ თავისუფლების შედეგად ჩვენ დავკარგეთ 10—10 მანეთი ყოველდღიურად.

მოგება 40 მანეთი იგივეა, რაც მე-13 ცხრილში $Z_j - C_j$ სტრიქონში $\vec{P_0}$-ის ქვემოთ არის მიღებული. C_j სვეტში λ-ს მნიშვნელობებია მოცემული, Z-ის მნიშვნელობის მისაღებად ისინი (λ_1-დან λ_9-მდე) უნდა გამრავლდნენ პირობის $\vec{P_0}$ ვექტორის შესაბამის მდგენელებზე.

თავისუფალ და ხელოვნურ ვექტორებს შორის კავშირი საკმაოდ ცხადია. ხელოვნური ვექტორები განიხილებიან, როგორც თავისუფალი ვექტორები, მხოლოდ მათი გამოყენებისათვის გვიხდება გარკვეული ჯარიმის გადახდა. ხშირად ჯარიმის სიდიდის გამო მათი გამოყენება შეუძლებელია.

თავისუფალი ვექტორების გამოყენება, რომელთათვისაც ჯარიმას არ ვიხდით, უშუალოდ არ ზრდის შემოსავალს, რადგანაც ისინი შედიან ნულოვანი ფასებით, მაგრამ, რამდენადაც მათი შემოყვანა გვაძლევს ამოცანის ამოსახსნელად დამატებით ვარიანტებს, მათ შეუძლიათ არაპირდაპირ დადებითად იმოქმედონ შედეგზე; აქედან ცხა-

და, თუ რა უპირატესობა აქვს თავისუფალი ვექტორების გამოყენებას ოპტიმალური პროგრამირების სისტემაში.

შესაძლებელია ხელოვნური და თავისუფალი ვექტორების ერთდროულად გამოყენება სიმპლექსური მეთოდით ამოცანის ამოხსნის დროს, მაგალითად — (1.4) უტოლობაში, თუ ნაწილს ტოლობებით შევცვლით, ხოლო ნაწილს ისევ უტოლობებად დავტოვებთ. თავისუფალი ვექტორები იქნებიან ნულოვანი ფასებით, ხოლო ხელოვნური ვექტორები კი ($-M$) ფასებით. თავისუფალ და ხელოვნურ ვექტორთა კომბინირებული გამოყენების შესაძლებლობა სიმპლექსურ მეთოდს დიდ მოქნილობას აძლევს.

გამოთვლის სისწორის შემოწმება სხვადასხვანაირად შეიძლება. მაგალითად:

1. ნებისმიერი ბაზისის ვექტორის მისი შესაბამის სვეტთან გადაკვეთაზე ყოველთვის დგას 1;

2. $Z_j - C_j$ სხვაობის გამოთვლა შეიძლება ორნაირად: ა) ერთი ცხრილიდან მეორეზე გადასვლისას ეს სხვაობა ისევე გამოითვლება, როგორც ყველა სხვა X_{ij}. შემდეგ აუცილებელია Z_j-ს გამოთვლა ფორმულით: $Z_j = \sum_i X_{ij} C_i$; ეს წინა რიცხვისაგან განსხვავებული უნდა იყოს C_j-ით, რომელიც სათანადო სვეტის ზემოთ დგას;

3. თუკი $X'_{kj} = \dfrac{X_{rj}}{X_{rk}} = 0$, მაშინ X'_{ij} იგივე იქნება რაც X_{ij};

4. დაბოლოს, თუ $X_{ik} = 0$, მაშინ X'_{ij} ტოლი იქნება ძველი X_{ij}-ის.

საზოგადოდ, პრაქტიკა თვითონ გვიკარნახებს გამოთვლების გამარტივების გზებს და შემოწმების საშუალებებს. მაგრამ შემოწმების უფრო არსებით საშუალებას იძლევა ამ მეთოდის კარგად გააზრება და მისი პრაქტიკული გამოყენება.

§ 4. ოპტიმალური პროგრამა ცვალებადი ფასებით

განხილული მაგალითი განზრახ იყო გამარტივებული, რათა მიღებული შედეგების შემოწმება უშუალოდ შეგვძლებოდა. ამის გაკეთება შეიძლება, თუ ვიანგარიშებთ ღირებულებას სხვადასხვა ნარევისა, რომლებშიც შედის ნუშის მინიმალური და თხილის მაქსიმალური რაოდენობა. A ნარევის წარმოების მინიმალური ღირებულება 47,5 მან.

§ 5. ვექტორთა თანდათანობით გაუმჯობესების მეთოდი, სიმპლექსური მეთოდი

როგორც ვნახეთ, წრფივი პროგრამირების ამოცანაა

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} C_i\lambda_i \tag{5.1}$$

ფუნქციონალის მაქსიმუმის მონახვა, სადაც

$$\lambda_i=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

იმ პირობით, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{P}_i=\vec{P}_0, \tag{5.2}$$

სადაც

$$\lambda_i>0; \; i=1, 2, \ldots, n. \tag{5.3}$$

ამ ამოცანის გადაწყვეტისას თავიდანვე შესაძლებელია (5.3) სისტემის ისეთი ამონახსნის პოვნა, რომელიც $f(\lambda)$ ფუნქციონალის მაქსიმუმს არ იძლევა. თუკი ზუსტად m კოორდინატი λ_i, რომლებიც წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელ $\vec{P}_i$ ვექტორთა კოეფიციენტებს (რომლებიც ბაზისს ქმნიან), განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ შესაბამის ამონახსენს ბაზისური ეწოდება. თუ ეს რიცხვი m-ზე ნაკლებია, მაშინ გვექნება უბრალოდ ამონახსენი.

დავუშვათ, რომ ვიპოვეთ ბაზისური ამონახსენი. ზოგადობის შეუზღუდველად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ λ კუთხური წერტილის პირველი m კოორდინატი დადებითია. მაშინ გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{P}_i=\vec{P}_0, \quad \lambda_i>0, \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i C_i=z_0=f(\lambda). \tag{5.5}$$

რადგანაც $\vec{P}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ ვექტორები ბაზისს ქმნიან, ამიტომ შეგვიძლია ყოველი n ვექტორთაგანი $\vec{P}_i$ გამოვსახოთ ამ ბაზისის საშუალებით. სახელდობრ:

$$\vec{P}_j=\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\vec{P}_i, \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{5.6}$$

თუ რომელიმე ბაზისის ვექტორს შევცვლით მეორეთი, მივიღებთ სხვა ამონახსენს; თუ ეს შესაძლებელია, შეიძლება მივაღწიოთ Z_0-ის გადიდებას. ახლა $\vec{P}_0$ შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\vec{P}_0=\sum_{i=1} \lambda_i\vec{P}_i-\theta\vec{P}_k+\theta\vec{P}_k \tag{5.7}$$

ანდა (2.6)-ის ძალით

$$\vec{P}_0=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{P}_i-\theta\sum_{i=1}^{m} x_{ik}\vec{P}_i+\theta P_k=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\theta x_{ik})P_i+\theta P_k. \tag{5.8}$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მივიღებთ ამონახსენს, თუ $\theta\geqslant 0$ და ყოველი $\lambda_i-\theta x_{ik}$ არაუარყოფითია. თუ სათანადოდ მიღებული ფუნქციონალის მნიშვნელობას აღვნიშნავთ Z_0'-ით, მაშინ (2.8)-ის დახმარებით, თუ $\vec{P}_0$-ს შევცვლით Z_0-ით და $\vec{P}_i$-ს C_i-ით, შეიძლება მისთვის მივიღოთ:

$$Z'_0=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\theta x_{ik})C_i+\theta C_k=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i C_i+\theta\left(C_k-\sum_{i=1}^{m} x_{ik}C_i\right). \tag{5.9}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}C_i. \tag{5.10}$$

როგორც ვხედავთ, Z_j მიიღება, თუ $\vec{P}_j$-ის გამოსახულებაში $\vec{P}_i$-ს შევცვლით C_i-ით. მაშინ (5.9)-დან Z_0'-თვის გვექნება:

$$z_0'=z_0+\theta(C_k-Z_k). \tag{5.11}$$

ამგვარად, ვხედავთ, რომ როცა C_k-Z_k სხვაობა დადებითია, და $\vec{P}_k$ ვექტორს ავიღებთ (5.8) ფორმულით, მაშინ უკანასკნელი ფორმულით ფუნქციონალის უფრო მეტ მნიშვნელობას მივიღებთ, თუკი $\theta>0$.

აქ შესაძლებელია გვქონდეს სამი ერთმანეთისაგან განსხვავებული შემთხვევა, რომლებიც ერთმანეთს გამორიცხავენ. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე:

I. როცა ზოგიერთი j-ისა და ყოველი i-თვის $x_{ij}\leqslant 0$, მაშინ $C_j-Z_j>0$.

ცხადია, რომ (5.8)-ის ძალით ნებისმიერი დადებითი θ-თვის ყველა $(\lambda_i-\theta x_{ij})$ კოეფიციენტი დადებითია. რადგანაც ჩვენ შეგვიძლია θ რაგინდ დიდი ავიღოთ, ამიტომ (5.11)-ის ძალით ფუნქციონალის მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება უსასრულოდ დიდი.

II. $j=1, 2, \ldots, n$ მნიშვნელობათათვის $C_j-Z_j\leqslant 0$.

ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში Z_0 მაქსიმუმია, ე. ი. (5.4) არის მაქსიმალური ამონახსენი.

დავუშვათ, რომ $\lambda'=(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda'_n)$ არის სხვა რომელიმე ამონახსენი, მაშინ გვექნება:

$$P_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i' P_i \tag{5.12}$$

და

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' C_i. \qquad (5.13)$$

ვაჩვენოთ, რომ $Z_0 \geqslant Z_0^*$.

პირობის თანახმად $Z_j > C_j$ და რადგანაც $\lambda_i' \geqslant 0$ (5.13)-ის ძალით დავწერთ:

$$Z_0^* \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i Z_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ji} C_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_{ji} \right) C_j. \qquad (5.14)$$

თუ გავაერთიანებთ (5.6)-სა და (5.12)-ს მივიღებთ:

$$\vec{P}_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ji} \vec{P}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x_{ji} \right) \vec{P}_j. \qquad (5.15)$$

რადგანაც $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს, ამიტომ $\vec{P}_0$-ის წარმოდგენა, როგორც ამ ვექტორების წრფივი კომბინაციისა, შესაძლებელია მხოლოდ ერთნაირად. ამგვარად, თუ ერთმანეთს შევადარებთ (5.4) და (5.15)-ს, დავწერთ:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x_{ji} = \lambda_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

ამგვარად, (5.14)-ის ჩაწერა შემდეგნაირად შეიძლება:

$$Z_0^* \leqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_j = Z_0,$$

ე. ი. მივიღეთ, რომ

$$Z_0^* \leqslant Z_0.$$

როგორც ვნახეთ, Z_0-ის მაქსიმალურობის ჩვენების დროს არ არის სავალდებულო, რომ ყველა λ_j კოეფიციენტი ($j = 1, 2, \ldots, m$) დადებითი იყოს. მაშინ ოპტიმალობის კრიტერიუმის ჩამოყალიბება ზოგადად შემდეგნაირად შეიძლება.

ვთქვათ,

$$\vec{P}_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{P}_i$$

არის r წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორების მიხედვით აგებული ამონახსენი. შევავსოთ ისინი $m-r$ ვექტორებით ბაზისამდე. მაშინ $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ ოპტიმალურია, ე. ი. ის ანიჭებს სასრულ მაქსიმუმს $f(\lambda)$ ფუნქციონალს, თუ ყველა $C_j - Z_j \leqslant 0$.

III. როცა ზოგიერთი j-თვის და ზოგიერთი i-თვის $x_{ij}>0$, ადგილი აქვს $C_j - Z_j>0$ უტოლობას.

ამ შემთხვევაში ბაზისის ერთ-ერთი ვექტორი შეიძლება შეიცვალოს ახალი $\vec{P}$ ვექტორით, მივიღებთ სხვა ამონახსენს, რომელიც Z_0-ის უფრო მეტ მნიშვნელობას იძლევა. ამის მიღწევა შემდეგნაირად შეიძლება. რამდენადაც უკიდურეს შემთხვევაში ერთი რომელიმე i-თვის მაინც $x_{ij}>0$, ამიტომ მივიღოთ, რომ

$$\theta=\min_i \frac{\lambda_i}{x_{ij}} \tag{5.16}$$

ყველა i-სათვის, რომელთათვისაც $x_{ij}>0$.

სიმარტივისათვის მივიღოთ, რომ $j=m+1$. (5.8)-ის ძალით $\vec{P_0}$ ვექტორი არის $\vec{P_2}, \vec{P_3}, \ldots, \vec{P}_{m+1}$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია არაუარყოფითი კოეფიციენტებით, ხოლო (5.11) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციონალს აქვს უფრო მეტი მნიშვნელობა, ვიდრე Z_0-ს. ადვილად მტკიცდება, რომ $\vec{P_2}, \vec{P_3}, \ldots, \vec{P}_{m+1}$ ვექტორები ისევ ბაზისს ჰქმნიან.

ამგვარად, თუ გვაქვს I ან II შემთხვევა ამოცანა ამოხსნილია. თუ გვაქვს III შემთხვევა და კიდევ გვაქვს m ვექტორი დადებით კოეფიციენტებით, მაშინ არსებობს სხვა ბაზისური ამონახსენი. ამ ახალი ამონახსნისათვის ვამოწმებთ I, II და III შემთხვევებს. თუ ასევე გავაგრძელებთ მივიღებთ სულ ახალ და ახალ ბაზისურ ამონახსნებს. ცხადია, რომ რადგანაც $\vec{P_i}$ ვექტორთა რიცხვი n სასრულია, ამიტომ გვექნება სხვადასხვა ბაზისთა სასრული რიცხვი და აგრეთვე ბაზისურ ამონახსენთა სასრული რაოდენობაც. ყოველი ასეთი ამონახსნისათვის ცალსახად განისაზღვრება Z_0 რიცხვი. რადგანაც ასეთი იტერაციების ჩატარებისას Z_0 იზრდება, ამიტომ ჩვენ ვერასოდეს ვერ დავუბრუნდებით ადრე მიღებულ ამონახსენს. მაშასადამე, III შემთხვევას არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს უსასრულო რიცხვჯერ. რადგანაც I, II და III შემთხვევა ერთმანეთს გამორიცხავენ და ერთად მოიცავენ ყველა შესაძლებლობას, მაშინ ადრე თუ გვიან დარჩება I ან II შემთხვევა. თუ მაქსიმუმი უსრულოა, გვექნება I შემთხვევა, ხოლო თუ მაქსიმუმი სასრულია, — II შემთხვევა.

გამოთვლების ჩატარებისას, ზოგიერთ ეტაპზე დადებითკოეფიციენ-

ტებიანი ვექტორების რიცხვი m-ზე ნაკლები რჩება. ასეთ დროს გვექნება ე. წ. „გადაგვარებული“ შემთხვევა, რომელიც სიმპლექსური მეთოდით გამოთვლების ჩატარებას მეტად ართულებს.

§ 6. ჟორდანისეული გამორიცხვის გამოყენება სიმპლექსური მეთოდისათვის

1. საკითხის დასმა. წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა, როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, არის

$$z=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n \tag{6.1}$$

წრფივი ფორმის (მიზნის ფუნქციის) მაქსიმუმის (მინიმუმის) პოვნა, როდესაც ადგილი აქვს შემდეგ შეზღუდვებს:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\leqslant b_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

სადაც $m>n$.

მოცემული შეზღუდვები შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$y_i\equiv-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ldots-a_{in}x_n+b_i\geqslant 0 \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{6.2}$$

ამგვარად, (6.2) უტოლობათა სისტემის ამონახსენთა შორის, რომლებიც ქმნიან Ω მრავალწახნაგას, უნდა მოინახოს ისეთი, რომლისთვისაც (6.1) ფორმა ღებულობს მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას.

(6.1) წრფივი ფორმა და (6.2) პირობები წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილით:

$$\begin{array}{r|cccc|c|} & -x_1 & -x_2 & \ldots & -x_n & 1 \\ \hline y_1= & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & & & & & \ldots \\ y_m= & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ \hline z= & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_n & 0 \\ \hline \end{array} \tag{6.3}$$

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის n. მაშინ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ჟორდანისეული მოდიფიცირებული გამორიცხვის n ბიჯის ჩატარება შეგვიძლია, რის შემდეგ ცხრილში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელი ცვლადები დაიკავებენ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ დამოკიდებული ცვლადების ადგილს, ხოლო ეს უკანასკნელნი კი განლაგდებიან ცხრილის ზემოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადთა ადგილას. ამ შემთხვევაში

ამომხსნელი ელემენტებისაგან მხოლოდ ვითხოვთ, რომ ისინი განსხვავდებოდნენ ნულისაგან.

ასე რომ, გვექნება შემდეგი ცხრილი:

	$-y_1$	$-y_2 \ldots$	$-y_n$	1	
$x_1=$	b_{11}	$b_{12} \cdot$	b_{1n}	a_1	
$\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$		$\cdot\cdot\cdot$	
$x_n=$	b_{n1}	$b_{n2} \ldots$	b_{nn}	a_n	
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2} \ldots$	$b_{n+1,n}$	a_{n+1}	
$\ldots$	$\ldots$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	(6.4)
$y_r=$	b_{r1}	$b_{r2} \ldots$	b_{rn}	a_r	
$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$	
$y_m=$	b_{m1}	$b_{m2} \ldots\ldots$	b_{mn}	a_m	
$z=$	q_1	$q_2 \ldots$	q_n	Q	

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადთა მნიშვნელობანი დაგვჭირდება ამონახსნის მიღების შემდეგ და ამიტომ ისინი ამოვწეროთ:

$$x_1 = -b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - \ldots - b_{1n}y_n + a_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = -b_{n1}y_1 - b_{n2}y_2 \ldots - b_{nn}y_n + a_n.$$

მუშაობა გავაგრძელოთ ცხრილის დარჩენილ ნაწილზე:

	$-y_1 \ldots$	$-y_s \ldots$	$-y_n$	1	
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1} \cdot$	$b_{n+1,s} \cdot$	$b_{n+1,n}$	a_{n+1}	
$\ldots$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	
$y_r=$	b_{r1}	$b_{rs} \cdot$	b_{rn}	a_r	(6.5)
$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$	
$y_m=$	$b_{m1} \ldots$	$b_{ms} \ldots$	b_{mn}	a_m	
$z=$	$q_1 \ldots$	$q_s \ldots$	q_n	Q	

რადგანაც (6.2) პირობის ძალით $y_1 \geqslant 0, \ldots, y_n \geqslant 0$, ამიტომ ჩვენ მივედით წრფივი პროგრამირების შემდეგი ჩვეულებრივი ამოცანის ჩამოყალიბებამდე:

მოცემულია

$$z = -q_1y_1 - q_2y_2 - \ldots - q_ny_n + Q \tag{6.6}$$

წრფივი ფორმა და შეზღუდვები, რომლებიც უტოლობათა შემდეგი სისტემით გამოისახებიან:

$$\left.\begin{array}{c} y_i=-b_{i1}y_1-b_{i2}y_2-\ldots-b_{in}y_n+a_i\geqslant 0 \quad (i=n+1,\ n+2,\ldots,m) \\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ \ldots,y_n\geqslant 0. \end{array}\right\} \quad (6.7)$$

(6.7) სისტემის ყველა ამონახსნიდან უნდა მოინახოს ისეთი, რომელიც წრფივ ფორმას ანიჭებს მაქსიმუმს.

ხშირად (6.2) სისტემაში რთავენ $x_1\geqslant 0, \ldots, x_n\geqslant 0$ უტოლობებს. ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, არ არის საჭირო $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების გამორიცხვა. ვთქვათ, თუ (6.2)-ში მოცემულია, რომ მაგალითად, $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \ldots, x_k\geqslant 0$, სადაც $k<n$, მაშინ საჭირო იქნება მხოლოდ $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ცვლადთა გამორიცხვა.

როცა მიღებულია (6.5) ცხრილი, საყრდნობი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა გავარჩიოთ შემთხვევები, ურევია თუ არა უარყოფითები ამ ცხრილის თავისუფალ წევრებში.

ვთქვათ, (6.5) ცხრილში ყველა თავისუფალი წევრი არაუარყოფითია: $a_{n+1}\geqslant 0,\ a_{n+2}\geqslant 0, \ldots, a_m\geqslant 0$. მაშინ (6.5) ცხრილი მაშინვეგვაძლევს (6.7) სისტემის, ან, რაც იგივეა, (6.2) სისტემის ერთ-ერთ საყრდნობ p ამონახსენს. ეს იქნება ამონახსენი, რომელიც განსაზღვრულია

$$y_1=0,\ y_2=0, \ldots, y_n=0$$

ტოლობებით, რადგანაც მაშინ

$$y_{n+1}=a_{n+1}\geqslant 0, \ldots, y_m=a_m\geqslant 0$$

და, მაშასადამე, ყველა y_i არაუარყოფითია და აკმაყოფილებს (6.2) სისტემას.

დავუშვათ, რამდენიმე თავისუფალი წევრი უარყოფითია. საჭიროა დავადგინოთ, თუ როგორ უნდა შევარჩიოთ ამომხსნელი ელემენტი ასეთ შემთხვევაში.

ვთქვათ, (6.5) სისტემაში უარყოფითი წევრია $a_r<0$, სადაც $r\geqslant n+1$. ასეთ შემთხვევაში

$$y_1=y_2=\ldots=y_n=0$$

მნიშვნელობანი არ იძლევიან (6.7) სისტემის არავითარ ამონახსენს და ამავე დროს არც (6.2) სისტემისას, რადგანაც ამ მნიშვნელობების დროს გვაქვს $y_r=a_r<0$. ისინი განსაზღვრავენ მხოლოდ $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$ n სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთის წერტილს, რომელიც მდებარეობს Ω მრავალწახნაგას გარეთ.

2. საყრდნობი ამონახსნის პოვნა. საყრდნობი ამონახსნის საპოვნელად სიმპლექსური მეთოდის გამოყენება ნიშნავს სპეციალურ წესს მოცემული $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$ წვეროდან ისეთ მეზობელ წვეროზე

გადასვლას, რომელსაც ყოფს Ω მრავალწახნაგადან სიბრტყეთა ნაკლები რიცხვი, ე. ი. რომლისთვისაც შესაბამისი ცხრილი შეიცავს უარყოფით თავისუფალ წევრთა ნაკლებ რაოდენობას.

$y_1=y_2=\dots=y_n=0$ წვეროდან ნაჩვენებ მეზობელ წვეროზე გადასასვლელად ჩავატაროთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯი. ამომხსნელი ელემენტის შესარჩევად მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

1. ვარჩევთ სტრიქონს, რომლის შესაბამისი თავისუფალი წევრი უარყოფითია, თუ ამ სტრიქონის კოეფიციენტებს შორის არ არის უარყოფითი, მაშინ (6.2) სისტემა უთავსებადია.

2. თუ განხილული სტრიქონის კოეფიციენტთა შორის არიან უარყოფითები, მაშინ ვიღებთ რომელიმე მათგანს; მაგალითად, თუ, $a_r<0$, მაშინ ვთქვათ, $b_{rs}<0$ და ის სვეტი რომელიც ამ კოეფიციენტს შეიცავს მივიღოთ ამომხსნელ სვეტად.

3. ვიანგარიშებთ ყველა $\frac{a_i}{b_{is}}\geqslant 0$ არაუარყოფით შეფარდებებს, რომლებიც ამომხსნელ სვეტს შეესაბამებიან, ვიპოვით მათ შორის უმცირესს და მის შესაბამის $b_{i_0 s}$ ელემენტს ვიღებთ ამომხსნელ ელემენტად.

თუ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, ე. ი. როცა

$$\min_i \frac{a_i}{b_{is}}=\frac{a_{i_0}}{b_{i_0 s}}=0,$$

მაშინ ჩვენ ამომხსნელ ელემენტად ვღებულობთ $b_{i_0 s}$-ს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $b_{i_0 s}>0$.

თუ განხილულ შემთხვევაში ($a_r<0$, $a_{i_0}=0$), გარდა $b_{rs}<0$, გვაქვს $b_{rj}\leqslant 0$, აგრეთვე $b_{i_0 j}\leqslant 0$, მაშინ უკეთესია ამომხსნელ ელემენტად ავიღოთ არა მე-s სვეტი, არამედ j-ური სვეტი. მაშინ i_0 სტრიქონი არ იქნება ამომხსნელი, არამედ ამომხსნელი იქნება სტრიქონი, რომლის შესაბამისი თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან (თუ კი b_{i_0} არის ერთადერთი ნული).

თუ გამოვიყენებთ ზემომოყვანილ წესს და ამომხსნელ ელემენტად მივიღებთ b_{rs}-ს, მაშინ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯის ჩატარების შედეგად ახალი თავისუფალი წევრი a_r, რომელიც მე-r სტრიქონს შეესაბამება, გახდება დადებითი.

$$a_r' = -\frac{a_r}{b_{rs}}>0.$$

თუკი ამომხსნელი ელემენტი გახდება b_{ks}, სადაც $k \neq r$, მაშინ მე-r სტრიქონის შესაბამისი ახალი თავისუფალი წევრი a_r' დარჩება ისევ უარყოფითად, ასე რომ, ჩვენი მიზანი უარყოფითი თავისუფალი წევრისაგან განთავისუფლებისა შეუსრულებელია. ასეთ შემთხვევაში ვაგრძელებთ მუშაობას მე-r სტრიქონზე, გამოვიყენებთ წინა წესს და ვატარებთ მოდიფიცირებულ ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯებს მანამ, სანამ ან არ ვუჩვენებთ (6.2) სისტემის უთავსებადობას (ამ სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი გახდება არაუარყოფითი), ანდა არ გავთავისუფლდებით ამ სტრიქონის შესაბამისი უარყოფითი თავისუფალი წევრისაგან. ეს კი მაშინ მოხდება, როცა ამომხსნელი ელემენტი სწორედ ამ სტრიქონში მოხვდება.

ასევე მოვიქცეთ ყველა იმ სტრიქონის მიმართ, რომელთა თავისუფალი წევრი უარყოფითია. სასრული რაოდენობით ჩატარებული ბიჯების შემდეგ დავადგენთ ან (6.2) სისტემის უთავსებადობას ანდა მივალთ ისეთ ცხრილამდე, რომელიც უარყოფით თავისუფალ წევრს არ შეიცავს, ე. ი. მივიღებთ ჩვენი სისტემის საყრდნობ ამონახსენს, გავუტოლებთ ნულს ყველა y-ს, რომლებიც ცხრილის ზემოთ მოექცევიან,

თუ რომელიმე სტრიქონის, რომელიც შეიცავს, მაგალითად, y_k-ს, შესაბამისი თავისუფალი წევრი $a_k=0$, ხოლო ამ სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი არაუარყოფითია, მაშინ საყრდნობი ამონახსნის საპოვნელად შეიძლება ამოვშალოთ ყველა სვეტი, რომლებიც შეიცავს ამ კოეფიციენტებიდან დადებითებს, და თვითონ ეს სტრიქონი. მართლაც ამ შემთხვევაში k-ური განტოლება დაკმაყოფილდება მხოლოდ უცნობთა ნულოვანი მნიშვნელობებით, რომლებშიც დგანან დადებით კოეფიციენტებთან და, მაშასადამე, y_k იქნება ნულის ტოლი.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

1. ვთქვათ, მოცემულია უტოლობათა შემდეგი სისტემა:

$$y_1 = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2 \geqslant 0,$$

$$y_2 = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3 \geqslant 0,$$

$$y_3 = 4x_1 - x_2 - x_3 - 4 \geqslant 0,$$

$$y_4 = 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5 \geqslant 0;$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

აქ, რადგანაც სისტემაში შეყვანილია $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ და $x_3 \geqslant 0$ უტოლობანი, კოორდინატთა გამორიცხვა არ იქნება საჭირო. შევადგინოთ ცხრილი

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	2	-3	1	2
$y_2=$	-5	2	3	-3
$y_3=$	-4	1	1	-4
$y_4=$	-3	4	2	5

მეორე და მესამე სტრიქონების შესაბამისი თავისუფალი წევრები უარყოფითებია. მეორე სტრიქონში ერთი უარყოფითი კოეფიციენტია —5. თავისუფალი წევრების ყველა უარყოფითი ფარდობა შევადაროთ პირველი სვეტის შესაბამის კოეფიციენტებს:

$$\frac{2}{2}, \quad \frac{-3}{-5}, \quad \frac{-4}{-4}.$$

მათ შორის უმცირესია მეორე, ამიტომ $a_{21}=-5$ იქნება ამომხსნელი ელემენტი. ახლა ჩავატაროთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯი ამ ამომხსნელი ელემენტით. მივიღებთ შემდეგ ცხრილს

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1	
$y_1=$	-2	11	-11	-4	
$x_1=$	1	2	3	-3	$:(-5)$
$y_3=$	4	3	7	8	
$y_4=$	3	-14	-1	-34	

ან, რაც იგივეა,

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_1=$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$y_3=$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{8}{5}$
$y_4=$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{34}{5}$

აქ მხოლოდ მესამე სტრიქონის შესაბამისი თავისუფალი წევრია უარყოფითი. გადავაქციოთ ის დადებითად. ამისათვის ამომხსნელ ელემენტად შეიძლება მივიღოთ $a_{31}=-\frac{4}{5}$, რადგანაც დადებითი შეფარ-

დებები $-\frac{8}{5} : -\frac{4}{5}$ და $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$ ერთმანეთის ტოლია. ამ ელემენტით მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის მორიგი ბიჯი მოგვცემს შემდეგ ცხრილს:

$$
\begin{array}{r|ccc|c|}
 & -y_3 & -x_2 & -x_3 & 1 \\
\hline
y_1= & -\frac{2}{5} & 2 & -\frac{6}{5} & 0 \\
x_1= & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\
y_2= & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{8}{5} \\
y_4= & \frac{3}{5} & -\frac{13}{5} & -1 & -\frac{32}{5} \\
\hline
\end{array}
: \left(-\frac{4}{5}\right)
$$

ან, რაც იგივეა,

$$
\begin{array}{r|ccc|c|}
 & -y_3 & -x_2 & -x_3 & 1 \\
\hline
y_1= & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\
x_1= & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\
y_2= & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 2 \\
y_4= & -\frac{3}{4} & \frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

მიღებულ ცხრილში არ არის უარყოფითი თავისუფალი წევრები. ამიტომ საყრდნობი ამონახსნის პოვნა შეგვიძლია. მივიღოთ

$$y_3=x_2=x_3=0,$$

მაშინ

$$x_1=1.$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ შემდეგი საყრდნობი ამონახსენი:

$$x_1=1, \quad x_2=0, \quad x_3=0.$$

2. ვთქვათ, მოცემულია უტოლობათა შემდეგი სისტემა:

$$y_1=-2x_1+x_2-2x_3+2\geqslant 0,$$

$$y_2=2x_1-3x_2-x_3-4\geqslant 0,$$

$$y_3=x_1-x_2-4x_3+8\geqslant 0,$$
$$y_4=3x_1+2x_2-5x_3+3\geqslant 0;$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0.$$

ვიპოვოთ ამ სისტემისათვის საყრდენი ამონახსენი. აქაც, რადგანაც $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$ და $x_3\geqslant 0$ უტოლობები სისტემაში ჩართულია, ამიტომ კოორდინატებს არ გამოვრიცხავთ. ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	2	−1	2	2
$y_2=$	−2	3	1	−4
$y_3=$	−1	1	4	8
$y_4=$	−3	−2	5	3

აქ ერთადერთი მეორე სტრიქონი გვაქვს, რომლის შესაბამისი თავისუფალი წევრი უარყოფითია. ვეცადოთ ის გადავაქციოთ დადებითად, მეორე სტრიქონში ცხრილის პირველი ელემენტია მხოლოდ უარყოფითი. ავიღოთ თავისუფალი წევრის და ამ ელემენტის ფარდობა, რომელიც დადებითია, და შევადაროთ თავისუფალ წევრთა პირველი სვეტის შესაბამის ელემენტებთან ფარდობას, რომლებიც აგრეთვე დადებითია:

$$\frac{-4}{-2}, \quad \frac{2}{2}$$

როგორც ვხედავთ, აქ მეორე ფარდობა უფრო მცირეა, ამიტომ ამომხსნელ ელემენტად მივიღებთ $a_{11}=2$-ს. თუ ამ ელემენტით მოდიფიცირებულ ჟორდანისეული გამორიცხვის პირველ ბიჯს ჩავატარებთ, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	
$x_1=$	1	−1	2	2	
$y_2=$	2	4	6	−4	: 2
$y_3=$	1	1	10	18	
$y_4=$	3	−7	16	12	

ან, რაც იგივეა,

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1=$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1
$y_2=$	1	2	3	-2
$y_3=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	9
$y_4=$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	8	6

აქ ისევ მეორე სტრიქონის შესაბამისი თავისუფალი წევრია უარყოფითი, მაგრამ, რადგანაც ამავე სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი დადებითია, ამიტომ როგორც ზემოთ ვნახეთ, განხილული სისტემა უთავსებადი იქნება.

8. ამომხსნელი ელემენტის შერჩევის წესის დასაბუთება. უარყოფითი თავისუფალი წევრის არსებობა გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ

$$y_1=y_2=\dots=y_n=0$$

წვერო მდებარეობს Ω მრავალწახნაგას გარეთ და მისგან დაშორებულია იმ სიბრტყით, რომლის შესაბამისი განტოლების თავისუფალი წევრია უარყოფითი, ანდა (6.7) სისტემა უთავსებადია და, მაშასადამე, Ω ცარიელია.

თუკი (6.5) ცხრილში ყველა თავისუფალი წევრი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ $y_1=\dots=y_n=0$ წვეროდან გადის ზუსტად n სიბრტყე $y_1=0, \dots, y_n=0$ და, მაშასადამე, ზუსტად n წიბო, რომელთაგან ყოველი იქმნება მათ შორის $n-1$ სიბრტყის თანაკვეთით. თუკი რომელიმე თავისუფალი წევრთაგანი ნულის ტოლია, მაშინ განხილულ წვეროზე, გარდა $y_1=0, \dots, y_n=0$ სიბრტყეებისა, გადიან აგრეთვე $y_i=0$ სიბრტყეები ($i>n$), რომელთა თავისუფალი წევრები ნულია. ასეთ შემთხვევაში, რომელსაც გადაგვარებული ეწოდება, წვეროზე გადის n-ზე მეტი წიბო. ცხრილის ზემოთ მოქცეული $y_1=0, \dots, y_n=0$ სიბრტყეთაგან $n-1$ მათგანის თანაკვეთით მიღებული წიბოს პარამეტრულ განტოლებას მივიღებთ, თუ ერთ-ერთ y-ს გავუტოლებთ ცვლად პარამეტრს, ხოლო დანარჩენებს — ნულს. მაგალითად,

$$y_1=t,\quad y_2=\dots=y_n=0$$

იქნება იმ წიბოს განტოლება, რომელსაც ქმნიან

$$y_2=0, \dots, y_n=0$$

სიბრტყეები.

სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმის ყოველი ბიჯი ნიშნავს მოძრაობას მიღებული $y_1 = \dots = y_n = 0$ წვეროდან ერთ-ერთ მისგან გამომავალ წიბოზე გამყოფი $y_r = 0$ სიბრტყის მიმართულებით მანამ, სანამ ჩვენ პირველად არ შევხვდებით, რომელიმე $y_i = 0$ სიბრტყეს ($i > 0$), ე. ი. სანამ არ მოვხვდებით მეზობელ წვეროზე. მოძრაობის ასეთი მიმართულება აიხსნება იმით, რომ ჩვენ ვეძებთ საყრდნობ ამონახსენს, ე. ი. Ω მრავალწახნაგას რომელიმე წვეროს და, ბუნებრივია, ვეცადოთ ბიჯიდან ბიჯამდე შევამციროთ იმ $y_i = 0$ სიბრტყეთა რიცხვი, რომლებიც მიღებულ წვეროს ყოფენ Ω მრავალწახნაგასაგან.

$$y_1 = \dots = y_{s-1} = 0, \quad y_s = t > 0, \quad y_{s+1} = \dots = y_n = 0 \qquad (6.8)$$

წიბოზე მოძრაობისას გვაქვს

$$y_r = -b_{rs}t + a_r$$

და იმისათვის, რომ მოძრაობა მიმდინარეობდეს $y_r = 0$ გამყოფ სიბრტყეზე საჭირო მიმართულებით, აუცილებელი და საკმარისია რომ $|y_r|$ მნიშვნელობა მცირდებოდეს, როცა გამოვდივართ $y_1 = \dots = y_n = 0$ წვეროდან, რომელშიაც $|y_r| = |a_r|$, ე. ი. უნდა სრულდებოდეს

$$|-b_{rs}t + a_r| < |a_r| \qquad (6.9)$$

უტოლობა საკმარისად მცირე $t > 0$-თვის.

ვთქვათ, a_r თავისუფალი წევრი უარყოფითია, მაშინ (6.9) უტოლობა ნიშნავს

$$-(-b_{rs}t + a_r) < -a_r$$

ანდა

$$-b_{rs}t + a_r > a_r$$

და, რადგანაც $t > 0$, ამიტომ $b_{rs} < 0$. ამგვარად, (6.8) წიბოზე მოძრაობა მხოლოდ მაშინაა საჭირო, როცა მე-s სვეტი, რომლის შესაბამისი $y_s = t$ კოორდინატი განსხვავებულია ნულისაგან, შეიცავს ჩვენი მე-r სტრიქონის უარყოფით კოეფიციენტს.

თუ მე-r სტრიქონში არ არიან უარყოფითი კოეფიციენტები, მაშინ $y_r = 0$ გამყოფ სიბრტყეზე არც ერთი წიბოდან არ შეიძლება მოძრაობა და ეს იქნება (6.2) სისტემის უთავსებადობის ნიშანი, ე. ი. Ω მრავალწახნაგა იქნება ცარიელი. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$y_r = -b_{r1}y_1 - b_{r2}y_2 - \dots - b_{rn}y_n + a_r \leqslant a_r < 0$$

და $y_1, \dots, y_n$ სიდიდეთა არაუარყოფითობა უთავსებადია y_r-ის არაუარყოფითობის მოთხოვნასთან.

დავუშვათ, რომ $b_{rs}<0$, მაშინ (6.9) წიბოთი მოძრაობა დასაშვებია პირველ შესაძლებელ შეხვედრამდე იმ $y_i=0$ სიბრტყესთან ($i>n$), რომელიც არ გამოყოფს ჩვენს წვეროს Ω-სგან (ე. ი. როდესაც $a_i>0$).

თუ ასეთ სიბრტყესთან შეხვედრა შეუძლებელია, მაშინ შეიძლება ვიმოძრაოთ წიბოთი იმ $y_i=0$ სიბრტყის უკანასკნელ შეხვედრამდე, რომელიც ჩვენს წვეროს გამოყოფს Ω-სგან. ცხადია, რომ ერთი მაინც ასეთი სიბრტყე არსებობს. მაგალითად, $y_r=0$ სწორედ ასეთი სიბრტყეა.

სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმის უფრო მარტივ ვარიანტს მივიღებთ, თუკი (6.9) წიბოთი ვიმოძრავებთ მოცემული წვეროდან ახალი სიბრტყის შეხვედრამდე, რომელიც იქნება გამყოფი ან არაგამყოფი. რადგანაც $y_{i_0}=0$ სიბრტყესთან შეხვედრისას გვექნება

$$0=-b_{is}t_0+a_i,$$

ხოლო $b_{is}\neq 0$, ამიტომ

$$\frac{a_i}{b_{is}}=t_0>0.$$

ამგვარად, a_i-სა და b_{is}-ს უნდა ჰქონდეს ერთი და იგივე ნიშანი, და ჩვენ, ცხადია, პირველად შევხვდებით $y_{i_0}=0$ სიბრტყეს, რომლისთვისაც $\frac{a_{i_0}}{b_{i_0s}}=t_0$ ფარდობა უმცირესი დადებითი სიდიდეა. ასეთი ფარდობა აუცილებლად მოინახება, რადგანაც $\frac{a_r}{b_{rs}}>0$, ამიტომ ახალი წვეროს მისაღებად ვაკეთებთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯს b_{i_0s} ელემენტით. მაშინ ახალი $y_{i_0}=0$ სიბრტყე, რომელსაც პირველად გადაკვეთს (6.9) წიბო, აღმოჩნდება ცხრილის ზემოთ $y_s=0$ სიბრტყის მაგივრად.

ახალი წვეროს ყველა კოორდინატი კოორდინატთა ახალი სისტემის მიმართ იქნება ნულის ტოლი: $y_1=0, \ldots, y_{s-1}=0, y_{i_0}=0, y_{s+1}=0, \ldots, y_n=0$; ძველი სისტემის მიმართაც ყველა კოორდინატი იყო ნულის ტოლი, გარდა y_s-ისა:

$$y_s=t_0=\frac{a_{i_0}}{b_{i_0s}}.$$

თუკი უმცირესი დადებითი ფარდობა $\frac{a_{i_0}}{b_{i_0s}}$ მიიღება როცა $b_{i_0s}<0$, $a_{i_0}<0$, მაშინ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვისას ჩვენ

გადავალთ წვეროზე, რომელსაც ყოფს Ω-დან სიბრტყეების ადრინდელზე ნაკლები რაოდენობა. სხვანაირად უარყოფითი თავისუფალი წევრების რიცხვი შემცირდება და აგრეთვე შემცირდება $|a_r|$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც უმცირესი დადებითი ფარდობა მიიღება (მაშინ როცა $b_{i_0 s}>0$ და $a_{i_0}>0$), მაშინ თუმცა ცხრილში უარყოფითი თავისუფალი წევრების რიცხვი იგივე იქნება, ჩვენ მაინც შევამცირებთ $|a_r|$-ს, ე. ი. მივუახლოვდებით გამყოფ $y_r=0$ სიბრტყეს. ვთქვათ, გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, ე. ი. რომელიმე თავისუფალი წევრი ნულია, მაგალითად, $a_k=0$ $(k>n)$, ასე რომ, $y_k=0$ სიბრტყე გადის $y_1= \ . \ . \ .=y_n=0$ წვეროზე. ამ შემთხვევაში (6.9) წიბოთი მოძრაობისას უნდა მოვერიდოთ $y_k<0$ ნახევარსივრციდან გამოსვლას, ე. ი. უნდა ვერიდოთ შემთხვევას, როცა $t>0$-თვის იქნება

$$y_k=-b_{ks}t+a_k=-b_{ks}t<0.$$

ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $b_{ks}>0$ და მაშინ (6.9) წიბოთი მოძრაობა დაუშვებელია.

თუკი $b_{ks}<0$, როცა $a_k=0$, მაშინ $t>0$-თვის მივიღებთ:

$$y_k=-b_{ks}t+a_k=-b_{ks}t>0,$$

და (6.9) წიბოთი მოძრაობა დასაშვებია, მაგრამ b_{ks} კოეფიციენტის ამომხსნელ ელემენტად აღებას აზრი არა აქვს, რადგანაც იმის გამო, რომ $a_k=0$, და, მაშასადამე, $t=0$, წიბოზე მოძრაობა არ მოხდება და ჩვენ იმავე წვეროზე დავრჩებით. თუ ავიღებთ სხვა ამომხსნელ ელემენტს, მაგალითად, b_{ls}-ს ისეთს, რომ $t=\frac{a_l}{a_{ls}}>0$, ჩვენ შეგვიძლია წიბოზე ვიმოძრაოთ მეზობელ წვერომდე.

დავუშვათ $b_{ks}>0$, მაშინ b_{rs}-ის გარდა r სტრიქონის დანარჩენ კოეფიციენტებს შორის არ არის უარყოფითი ანდა არის უარყოფითები, მაგრამ k-ური სტრიქონის შესაბამისი კოეფიციენტები (რომლებიც იგივე სვეტს ეკუთვნიან) დადებითებია, მაშინ არც ერთი ზედა წიბოთი არ შეიძლება მოძრაობა. ასეთ შემთხვევაში უნდა შევამოწმოთ დანარჩენი არაზედა წიბოები, რომელთაც მივიღებთ, თუ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ერთი ბიჯით $y_s=0$ სიბრტყეს შევცვლით $y_k=0$ სიბრტყით, თუმცა ამ ბიჯის შედეგად არავითარ მოძრაობას არ ექნება ადგილი, რადგანაც $t=0$, ე. ი. ამ შემთხვევაში ჩვენ იმავე წვეროზე დავრჩებით.

ამგვარად, ცდათა სასრული ბიჯის შემდეგ ჩვენ ან აღმოვაჩენთ იმ წიბოს, რომლითაც მოძრაობა შესაძლებელია, ანდა დავრწმუნდებით, რომ შეზღუდვათა განხილული სისტემა უთავსებადია.

Ω მრავალწახნაგასკენ მოძრაობის პროცესი იმ წვეროდან, რომელიც მისგან იყოფა რამდენიმე სიბრტყით შეიძლება ხშირად დავაჩქაროთ, თუ ამომხსნელი ელემენტის შერჩევას შემდეგნაირად მოვახდენთ:

1. თუ რომელიმე სტრიქონის შესაბამისი თავისუფალი წევრი უარყოფითია, ხოლო ამ სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი დადებითი, მაშინ (6.2) სისტემა იქნება უთავსებადი.

2. თუ განხილული სტრიქონის კოეფიციენტებს შორის არის უარყოფითები, მაშინ ვიღებთ რომელიმე მათგანს და ის სვეტი, რომელიც მას შეიცავს, იქნება ამომხსნელი.

3. გამოვითვლით ყველა არაუარყოფით ფარდობას $\frac{a_l}{b_{ls}}$ თავისუფალი წევრებისა ამომხსნელი სვეტის შესაბამის დადებით კოეფიციენტებთან. მოვნახავთ მათ შორის უმცირესს და იმ $b_{l_0 s}$ ელემენტს, რომლისთვისაც ამას აქვს ადგილი, მივიღებთ ამომხსნელ ელემენტად.

4. თუ ასეთი ფარდობები არა გვაქვს, მაშინ ვპოულობთ უდიდესს დადებითი შეფარდებებიდან $\frac{a_l}{b_{ls}}$ (უარყოფითი თავისუფალი წევრებისა ამომხსნელი სვეტის შესაბამის უარყოფით კოეფიციენტებთან) და $b_{l_0 s}$ კოეფიციენტს, რომლისთვისაც ეს უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება, ვიღებთ ამომხსნელ ელემენტად.

4. სიმპლექსური მეთოდის გამოყენება წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად. ვთქვათ, ვიხილავთ

$$z=p_1x_1+\ldots+p_nx_n \tag{6.10}$$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანას, როდესაც ადგილი აქვს შემდეგ შეზღუდვებს

$$y_i\equiv -a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ldots-a_{in}x_n+b_i\geqslant 0 \tag{6.11}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

და დავუშვათ, რომ კოორდინატთა გამორიცხვისა და საყრდნობი ამონახსნის მოძებნის შემდეგ მივიღეთ ცხრილი

	$-y_1$	$-y_2$	$\ldots$	$-y_s$	$\ldots$	$-y_n$	1
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$		$b_{n+1,s}$		$b_{n+1,n}$	a_{n+1}
$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$
$y_r=$	b_{r1}	b_{r2}		b_{rs}		b_{rn}	a_r
$\ldots$							$\ldots$
$y_m=$	b_{m1}	b_{m2}	$\ldots$	b_{ms}	$\ldots$	b_{mn}	a_m
$z=$	q_1	q_2		q_s		q_n	Q

(6.12)

ასე რომ, რადგანაც (6.12) საყრდნობ ამონახსენს წარმოადგენს, ამიტომ

$$a_{n+1}\geqslant 0, \ . \ . \ ., \ a_m\geqslant 0.$$

ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად უნდა დავაკვირდეთ z სტრიქონს. თუ ყველა კოეფიციენტი არაუარყოფითია:

$$q_1\geqslant 0, \quad q_2\geqslant 0, \ . \ . \ ., \ q_n\geqslant 0,$$

მაშინ წრფივი პროგრამირების ამოცანა ამოხსნილია. მაშინ

$$\max z = Q$$

და ის მიღწეულ იქნება $y_1=y_2= \ . \ . \ . =y_n=0$ წერტილზე. მართლაც, ამ წერტილში გვაქვს

$$y_{n+1}=a_{n+1}\geqslant 0, \ . \ . \ ., \ y_m=a_m\geqslant 0,$$

ე. ი. (6.11) შეზღუდვები სრულდება და რადგანაც Ω მრავალწახნაგას ნებისმიერ სხვა წერტილში ყველა $y_1, y_2, \ . \ . \ ., y_n$ არაუარყოფითია, ამიტომ

$$z=-q_1y_1- \ . \ . \ . -q_ny_n+Q\leqslant Q,$$

ე. ი. Q იქნება z-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ახლა დავუშვათ, z სტრიქონის ზოგიერთი კოეფიციენტი უარყოფითია. ვთქვათ, მაგალითად, $q_s<0$. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $y_1= \ . \ . \ . =y_n=0$ წერტილში z ფუნქციის Q მნიშვნელობა არ იქნება მაქსიმალური; რადგანაც, თუ $y_1= \ . \ . \ . =y_{s-1}=0, \ \ y_s>0, \ \ y_{s+1}= \ . \ . \ . =y_n=0$ წერტილი აკმაყოფილებს (6.11) შეზღუდვებს (ე. ი. $y_i=-b_{is}y_s+a_i\geqslant 0, \quad i=n+1, \ . \ . \ ., m$), მაშინ ამ წერტილში $z=-q_sy_s+Q>Q$.

ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად სიმპლექსური მეთოდის გამოყენება ნიშნავს სპეციალურ წესს $y_1=y_2= \ . \ . \ . =y_n=0$ მიღებული წერტილიდან, რომელიც Ω მრავალწახნაგას წვეროს წარმოადგენს, ამავე მრავალწახნაგას იმ მეზობელ წვეროზე გადასვლისა, რომელშიც z-ის მნიშვნელობა Q-ზე არანაკლები იქნება; ეს წესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ მოინახება ისეთი წვერო, რომელზედაც z-ის მნიშვნელობა მაქსიმალური იქნება, ე. ი. რომლისთვისაც z სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი იქნება არაუარყოფითი, ანდა მანამ, სანამ არ დავადგენთ, რომ z ფუნქცია ზემოდან შემოუსაზღვრელია.

$y_1= \ . \ . \ . =y_n=0$ წვეროდან მეზობელ წვეროზე გადასასვლელად საჭიროა ჩავატაროთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ერთი ბიჯი, რომლის დროსაც ამომხსნელი ელემენტის არჩევა ხდება შემდეგნაირად:

ამომხსნელ სვეტად ვიღებთ ისეთს, რომელიც შეიცავს z სტრიქონის უარყოფით ელემენტს, ჩვენს შემთხვევაში იქნება მე-s სვეტი. შემდეგ ვიღებთ ამ სვეტის ყველა დადებით კოეფიციენტს და მათ ვყოფთ შესაბამის თავისუფალ წევრებზე, ვადარებთ მიღებულ ფარდობებს ერთმანეთს და ამომხსნელად ვიღებთ იმ კოეფიციენტს, რომლისთვისაც ფარდობას უმცირესი მნიშვნელობა ექნება. თუკი უმცირესი იქნება რამდენიმე ფარდობა, მაშინ ვიღებთ რომელიმე მათგანს.

გადაგვარებულ შემთხვევაში, როდესაც

$$\min \frac{a_i}{b_{is}}=\frac{a_{i_0}}{b_{i_0 s}}=0,$$

თუკი, გარდა $q_s<0$-ისა, აგრეთვე $q_j<0$, მაგრამ $b_{i_0 j}\leqslant 0$, მაშინ ამომხსნელ სვეტად უკეთესია არა მე-s, არამედ j-ური სვეტი ავიღოთ (i_0 სტრიქონი არ იქნება ამომხსნელი).

თუ ზემოთ ჩამოყალიბებული წესით ამომხსნელ ელემენტს შევარჩევთ და ჩავატარებთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯს, მაშინ q_s-ს ნიშანი შეეცვლება და ახალი q_s' იქნება დადებითი. თუ z სტრიქონის ყველა სხვა ელემენტიც დადებითია, ოპტიმალური ამონახსენი ნაპოვნია.

თუ z სტრიქონის ელემენტთა შორის კიდევ არის უარყოფითები, მაშინ ყოველი მათგანის მიმართ მოვიქცევით ისე, როგორც q_s-ის მიმართ და სასრული რიცხვი ბიჯების შემდეგ მივალთ შემთხვევამდე, როცა სტრიქონის ყველა ელემენტი დადებითია, ანდა მივალთ ისეთ შემთხვევამდე, როდესაც z სტრიქონის უარყოფითი ელემენტის შესაბამისი სვეტის არც ერთი კოეფიციენტი არ იქნება დადებითი, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ z ფუნქცია ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $q_s<0$ და s სვეტის კოეფიციენტთა შორის არ არის დადებითები, მაშინ შეგვიძლია, მაგალითად, მივიღოთ:

$$y_1=\ldots=y_{s-1}=0,\quad y_s=t>0,\quad y_{s+1}=\ldots=y_n=0.$$

მაშინ, როცა $i\geqslant n+1$, მივიღებთ

$$y_i=-b_{is}t+a_i\geqslant 0,$$

ე. ი. ნებისმიერი $t\geqslant 0$-თვის (6.11) სისტემა კმაყოფილდება. z ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება

$$z=-q_s t+Q$$

და თუ t-ს ავიღებთ საკმარისად დიდს, z-ც იქნება რაგინდ დიდი. ამგვარად, როცა z სტრიქონის უარყოფითი ელემენტის შესაბამის სვეტ-

ში დადებითი კოეფიციენტები არ არის, მაშინ z წრფივი ფორმის მაქ-სიმუმი არ არსებობს.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ვთქვათ, ვეძებთ

$$z=-3x_1+6x_2$$

წრფივი ფუნქციის მაქსიმუმს, როცა გვაქვს შემდეგი შეზღუდვები:

$$\begin{aligned}
y_1&=x_1+2x_2+1\geqslant 0,\\
y_2&=2x_1+x_2-4\geqslant 0,\\
y_3&=x_1-x_2+1\geqslant 0,\\
y_4&=x_1-4x_2+13\geqslant 0,\\
y_5&=-4x_1+x_2+23\geqslant 0.
\end{aligned}$$

შევადგინოთ ცხრილი

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1=$	-1	-2	1
$y_2=$	-2	-1	-4
$y_3=$	-1	1	1
$y_4=$	-1	4	13
$y_5=$	4	-1	23
$z=$	3	-6	0

გამოვრიცხოთ x_1 კოორდინატი. ამომხსნელი ელემენტი იქნება $a_{11}=-1$. მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

	$-y_1$	$-x_2$	1
$x_1=$	1	-2	1
$y_2=$	2	-3	6
$y_3=$	1	-3	0
$y_4=$	1	-6	-12
$y_5=$	-4	9	-27
$z=$	-3	12	-3

$:(-1)=$

	$-y_1$	$-x_2$	1
$x_1=$	-1	2	-1
$y_2=$	-2	3	-6
$y_3=$	-1	3	0
$y_4=$	-1	6	12
$y_5=$	4	-9	27
$z=$	3	-12	3

გამორიცხული x_1 კოორდინატის მნიშვნელობა ამოვწეროთ, გვექნება:

$$x_1=y_1-2x_2-1.$$

დარჩენილ ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

	$-y_1$	$-x_2$	1
$y_2=$	-2	3	-6
$y_3=$	-1	3	0
$y_4=$	-1	6	12
$y_5=$	4	-9	27
$z=$	3	-12	3

ახლა გამოვრიცხოთ x_2 კოორდინატი. ამომხსნელ ელემენტად მივიღოთ $a_{12}=3$ ელემენტი. მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_2=$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2
$y_3=$	1	-1	6
$y_4=$	3	-2	24
$y_5=$	-2	3	9
$z=$	-5	4	-21

x_2 კოორდინატისათვის დავწერთ:

$$x_2=\frac{2}{3}\,y_1-\frac{1}{3}y_2-2,$$

ხოლო დარჩენილი ცხრილი კი იქნება:

	$-y_1$	$-y_2$	1
$y_3=$	1	-1	6
$y_4=$	3	-2	24
$y_5=$	-2	3	9
$z=$	-5	4	-21

უკანასკნელ ცხრილში ყველა თავისუფალი წევრი დადებითია, მაშასადამე, $y_1=y_2=0$ გვაძლევს ჩვენი შეზღუდვათა სისტემის საყრდნობ ამონახსენს.

ახლა მოვძებნოთ ოპტიმალური ამონახსენი. z-ის შესაბამის სტრიქონში შედის უარყოფითი კოეფიციენტი -5. მის შესაბამის სვეტში

კი გვაქვს ორი დადებითი კოეფიციენტი: 1 და 3, თუ მასზე გავყოფთ შესაბამის თავისუფალ წევრებს გვექნება $\frac{6}{1}$ და $\frac{24}{3}$, რომელთა შორის პირველია უმცირესი. ამიტომ $a_{11}=1$-ს მივიღებთ ამომხსნელ ელემენტად. ჩავატაროთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯი სწორედ ამ ელემენტით, გვექნება

	$-y_3$	$-y_2$	1
$y_1=$	1	-1	6
$y_4=$	-3	1	6
$y_5=$	2	1	21
$z=$	5	-1	9

აქ z-ის შესაბამისი სტრიქონი შეიცავს უარყოფით ელემენტს — 1-ს, რომლის შესაბამ სვეტში ორი დადებითი კოეფიციენტია. თუ ერთმანეთს შევადარებთ შესაბამის თავისუფალ წევრებს გაყოფილს მათზე, ვნახავთ, რომ

$$\frac{6}{1}<\frac{21}{1}.$$

ამგვარად, ამომხსნელ ელემენტად მივიღებთ $a_{22}=1$ ელემენტს. თუ ჩავატარებთ მოდიფიცირებულ ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯს ამ ელემენტით, მივიღებთ:

	$-y_3$	$-y_4$	1
$y_1=$			12
$y_2=$			6
$y_5=$			15
$z=$	2	1	15

ამ ცხრილში წინასწარ გამოვთვალეთ თავისუფალი წევრები და z სტრიქონის ელემენტები; როგორც ვხედავთ, მათ შორის არც ერთი არ არის უარყოფითი, ამიტომ დანარჩენი ელემენტების გამოთვლა არ არის საჭირო, რადგანაც ოპტიმალური ამონახსენი უკვე მიღებულია. უკანასკნელი სტრიქონიდან ვპოულობთ:

$$\max z=15,$$

ის მიიღწევა $y_3=y_4=0$ და $y_1=12$, $y_2=6$, $y_5=15$ წერტილებში. მი-

ღებული მნიშვნელობანი ჩავსვათ x_1 და x_2-ის გამოსახულებებში, დავწერთ:

$$x_1=3, \quad x_2=4.$$

ამგვარად, მივიღეთ x_1 და x_2 კოორდინატთა არაუარყოფითი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჩვენს შეზღუდვათა სისტემას და z წრფივ ფორმას ანიჭებენ მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

5. ოპტიმალური ამონახსნის პოვნისას ამომხსნელი ელემენტის შერჩევის დასაბუთება. ვთქვათ, z სტრიქონის ელემენტთა შორის არის უარყოფითები და, მაშასადამე, $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$ წვერო არ იძლევა z-ის მაქსიმუმს. მეზობელ წვეროზე გადასვლა ნიშნავს მოძრაობას $y_1=\ldots=y_n=0$ წვეროდან რომელიმე

$$y_1=\ldots=y_{s-1}=0, \quad y_s=t>0, \quad y_{s+1}=\ldots=y_n=0$$

წიბოზე, რომელიც ისეთნაირად არის შერჩეული, რომ z-ის მნიშვნელობა დიდდებოდეს, ე. ი. რომ გვქონდეს

$$z=-q_s t+Q>Q.$$

აქედან კი დავწერთ:

$$-q_s t>0,$$

და, მაშასადამე,

$$q_s<0.$$

ამგვარად, z-ის გასადიდებლად საჭიროა მოძრაობა სწორედ იმ წიბოზე, რომლისთვისაც პარამეტრულ განტოლებაში ნულისგან განსხვავებული t პარამეტრი მდებარეობს z სტრიქონის უარყოფითი ელემენტის ზემოთ.

დავუშვათ $q_s<0$. ცხადია, რომ ნაჩვენებ წიბოზე მოძრაობა შეიძლება მხოლოდ Ω მრავალწახნაგას მეზობელ წვეროსთან შეხვედრამდე (რათა არ ავცდეთ Ω-ს), ე. ი. რომელიმე y_i სიბრტყის შეხვედრამდე, სადაც $i>n$, $a_i\geqslant 0$. ამ სიბრტყესთან შეხვედრის ადგილას, თუ $a_i>0$, მივიღებთ

$$0=-b_{is}t+a_i,$$

მაშასადამე, $b_{is}\neq 0$ და რადგანაც $\frac{a_i}{b_{is}}=t>0$, ამიტომ $b_{is}>0$. ცხადია, პირველად შევხვდებით $y_{i_0}=0$ სიბრტყეს ($i_0>n$, $a_{i_0}>0$), რომლისთვისაც $\frac{a_{i_0}}{b_{i_0 s}}$ ფარდობას ექნება უმცირესი დადებითი მნიშვნელობა.

თუ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, ე. ი. როცა ზოგიერთი თავისუფალი წევრი ნულია, მაშინ შესაძლებელია საძებნი მეზობელი

წვერო დაემთხვეს $y_1 = \cdots = y_n = 0$ წვეროს და სინამდვილეში არავითარ მოძრაობას არ ჰქონდეს ადგილი ($t=0$). ეს მოხდება მაშინ, თუ $a_{i_0}=0$, ხოლო $b_{i_0 s}>0$; რადგანაც $y_{i_0} = -b_{i_0 s}t + a_{i_0} = -b_{i_0 s}t$ არაუარყოფითია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $t=0$, ხოლო როცა $t>0$, მაშინ $y_{i_0}<0$ და ჩვენ ავცდებით Ω მრავალწახნაგას.

თუკი $a_{i_0}=0$, ხოლო $b_{i_0 s}<0$, მაშინ $y_{i_0} = -b_{i_0 s}t + a_{i_0} = -b_{i_0 s}t$ იქნება დადებითი, როცა $t>0$. ასე რომ, არ არის აუცილებელი ავიღოთ $t=0$ (დავრჩეთ გამოსავალ წვეროზე), თუ $\min\limits_{i} \frac{a_i}{b_{is}}$ ($i>n$, $b_{is}>0$) დადებითია.

ამგვარად, გადაგვარებულ შემთხვევაში ჩვენ ვამოწმებთ ყველა ზედა წიბოს, ე. ი. ყველა სვეტს, რომლებიც მოთავსებული არიან z სტრიქონის უარყოფითი ელემენტების ზემოთ. ყოველ ასეთ სვეტში ვნახავთ კოეფიციენტებს, რომლებიც ნულოვანი თავისუფალი წევრის გასწვრივ დგანან. თუ ზოგიერთ სვეტში ნულის ტოლი თავისუფალი წევრის გასწვრივ არ არის დადებითი კოეფიციენტები, მაშინ საჭიროა ასეთი სვეტი მივიღოთ ამომხსნელად, რადგანაც შესაბამის წიბოზე მოძრაობა შესაძლებელია. წინააღმდეგ შემთხვევაში არც ერთ ზედა წიბოზე არ შეიძლება მოძრაობა და საჭირო იქნება გვერდითი წიბოების შემოწმება; ამისათვის კი მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯებით მათ გავხდით ზედა წიბოებად ამომხსნელი ელემენტის ზემოთ ნაჩვენები წესით შერჩევით (შესაბამის თავისუფალ წევრებს ვყოფთ აღებული სვეტის დადებით კოეფიციენტებზე; იმ კოეფიციენტს, რომლის შესაბამისი განაყოფი უმცირესია, ვიღებთ ამომხსნელ ელემენტად).

რამდენიმე ბიჯის შემდეგ ჩვენ ან დავტოვებთ განხილულ წვეროს, ან დავრწმუნდებით, რომ ამ წვეროზე მიიღწევა საძებნი მაქსიმუმი, ანდა დავრწმუნდებით, რომ z წრფივი ფუნქცია შემოუსაზღვრელია.

6. სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმი მონოტონური და სასრულია. სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმის მონოტონურობა იქიდან ჩანს, რომ ყოველი ბიჯის ჩატარებისას ჩვენ თანდათან უფრო ვუახლოვდებით z წრფივი ფუნქციის საძებნ მაქსიმუმს.

სინამდვილეში კოორდინატების გამორიცხვისა და სათანადო ცხრილის შედგენის შემდეგ, სადაც ყველა თავისუფალი წევრი არაუარყოფითია, საყრდნობი ამონახსენი იქნება $y_1 = \ldots = y_n = 0$. თუ z სტრიქონში არის უარყოფითი კოეფიციენტი, მაგალითად $q_s<0$, მაშინ მორიგი საყრდნობი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის მორიგი ბიჯის ჩატარება s სვეტი-

დან აღებული ამომხსნელი ელემენტით, მაგალითად, $b_{rs}>0$ კოეფიციენტით. ასეთი კოეფიციენტი აუცილებლად მოინახება, თუკი ამოცანას აქვს შემოსაზღვრული ამონახსენი. Q-ს ახალი Q' მნიშვნელობისათვის, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $q_s<0$, $b_{rs}>0$, $a_r \geqslant 0$, გვექნება:

$$Q' = \frac{Qb_{rs} - q_s a_r}{b_{rs}},$$

რომელიც მიიღება b_{ij} ელემენტების გამოთვლის შესაბამისად. საიდანაც დავწერთ:

$$Q' = Q - \frac{q_s a_r}{b_{rs}} \geqslant Q.$$

ამგვარად, თუ $a_r>0$, მაშინ $Q'>Q$, ე. ი. ალგორითმის განხილული ბიჯის შესრულებისას ადგილი აქვს მკაცრად მონოტონურობას. იმ შემთხვევაში, როდესაც $a_r=0$, გვექნება $Q'=Q$, ე. ი. მაშინ მკაცრად მონოტონურობა არ გვექნება და გვექნება გადაგვარებული შემთხვევა.

თუ გადაგვარებული შემთხვევა არა გვაქვს სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმის სასრულობა მარტივად დადგინდება, რადგანაც Ω მრავალწახნაგას აქვს მხოლოდ წვეროთა სასრული რაოდენობა, ხოლო ერთხელ გამოყენებულ წვეროზე დაბრუნება არ შეიძლება, რადგანაც ალგორითმი მკაცრად მონოტონურია.

როცა გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, მაშინ შესაძლებელია ალგორითმი არ იყოს სასრული, რადგანაც ასეთ შემთხვევაში ალგორითმი არ არის მკაცრად მონოტონური, შესაძლებელია დავუბრუნდეთ წინათ მიღებულ ცხრილს. ასეთ შემთხვევას დაციკლებას უწოდებენ. ამ შემთხვევაში საჭიროა ამომხსნელი ელემენტის შესარჩევად დამატებითი პირობის შემოყვანა და ამით დაციკლების თავიდან აცილება, ამით კი მოხდება ალგორითმის სასრულობის უზრუნველყოფა.

ამგვარად, თუ სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმის რომელიმე ბიჯისას ამომხსნელი ელემენტის შერჩევა არ არის ცალსახა, ე. ი. თავისუფალი წევრების ამომხსნელი სვეტების შესაბამის დადებით კოეფიციენტებთან შეფარდებათა შორის უმცირესი ერთზე მეტია, მაშინ ამ ბიჯის შედეგად ყველა ნახსენები თავისუფალი წევრი, გარდა ამომხსნელი სტრიქონის შესაბამისისა, ცხადია, გახდება ნულის ტოლი. მაშინ Ω მრავალწახნაგას $y_1=y_2= \cdot \cdot \cdot =y_n=0$ წვეროზე, რომელიც საყრდნობ ამონახსენს წარმოადგენს, გადის n-ზე მეტი სიბრტყე.

ე. ი., როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, გვექნება გადაგვარებული შემთხვევა.

გადაგვარებული შემთხვევა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც Ω მრავალწახნაგას ორი ან მეტი წვეროს შეერთება, ე. ი. როცა ამ წვეროების შემაერთებელი წიბო იქცევა წერტილად. ამ შემთხვევაში სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმმა შეიძლება დაკარგოს მკაცრად მონოტონობა. გეომეტრიულად ეს სავსებით ნათელი გახდება, თუ მხედველობაში მივიღებთ იმ გარემოებას, რომ სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმის ბიჯი ნიშნავს გადასვლას წიბოთი ერთი საყრდნობი ამონახსნიდან მეორეზე, ე. ი. გადასვლას Ω მრავალწახნაგას ერთი წვეროდან მეზობელ წვეროზე. გადაგვარების შემთხვევაში კი, როცა ორი მეზობელი წვერო ერთმანეთს ემთხვევა, შესაძლებელია, გაკეთებული ბიჯის შემდეგ ჩვენ ამავე წვეროზე დავრჩეთ, მხოლოდ ეს წვერო მაშინ გამოისახება მასზე გამავალი n სიბრტყეთა სხვა ერთობლიობით.

დაციკლების ასაშორებლად იყენებენ ე. წ. ε-მეთოდს, რომლის არსი შემდგომში მდგომარეობს: ყველა ის სიბრტყე, რომელიც ვერ მოხვდა ცხრილის ზემოთ, პარალელურად გადაიტანება, რის შედეგად წვეროთა თანამთხვევის ადგილი იფარება და იხსნება ახალი გადაუგვარებელი ამოცანა, ხოლო შემდეგ გადაადგილებულ სიბრტყეებს ისევე უკან აბრუნებენ პირვანდელ მდგომარეობაში და ღებულობენ მოცემული ამოცანის ამონახსენს.

ε-მეთოდის გამოყენება იწყება ცვლადების ახალი დანომვრით რომელიმე საყრდნობი ამონახსნის ცხრილში. მაგალითად, ვთქვათ, მივიღეთ შემდეგი საყრდნობი ამონახსენი:

$$\begin{array}{r|ccc|c|}
 & -y_1 & \dots & -y_n & 1 \\
\hline
y_{n+1}= & b_{n+1,1} & \dots & b_{n+1,1} & a_{n+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \\
y_m= & b_{m1} & \dots & b_{mn} & a_m \\
\hline
z= & q_1 & & q_n & Q \\
\hline
\end{array} \qquad (6.13)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$m=p+n,\ y_{n+1}=y'_1,\ y_{n+2}=y'_2,\ \dots,\ y_m=y'_p,$$

$$y_1=y'_{p+1},\ \dots,\ y_n=y'_{p+n}.$$

კოეფიციენტები იმავე ასოებით, მაგრამ სხვა ინდექსებით აღვნიშნოთ, მაშინ (6.13) ცხრილი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$
\begin{array}{r|ccccc|c|}
 & -y'_{p+1} & \dots & -y'_{p+s} & \dots & -y'_{p+n} & 1 \\
\hline
y'_1= & b_{1,p+1} & & b_{1,p+s} & & b_{1,p+n} & a_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y'_i= & b_{i,p+1} & & b_{i,p+s} & & b_{i,p+n} & a_i \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y'_p= & b_{p,p+1} & \dots & b_{p,p+s} & \dots & b_{p,p+n} & a_p \\
\hline
z= & q_{p+1} & & q_{p+s} & & q_{p+n} & Q \\
\hline
\end{array}
$$

ახლა მოვახდინოთ $y_i=0$ $(i=1, \dots, p)$ სიბრტყეთა პარალელური გადაადგილება. ამისათვის ამ განტოლების თავისუფალ წევრს დავუმატოთ

$$P_i(\varepsilon)=\varepsilon^i+b_{i,p+1}\varepsilon^{p+1}+b_{i,p+2}\varepsilon^{p+2}+\dots+b_{i,p+n}\varepsilon^{p+n}\quad (i=1,2,\dots,p),$$

სადაც ε დადებითი რიცხვია და ნაკლებია ყველა იმ რიცხვზე, რომელიც გამოთვლებისას შეგვხვდება.

თავისუფალ წევრზე $P_i(\varepsilon)$ პოლინომის დამატების შემდეგ გვექნება:

$$
\begin{array}{r|ccccc|c|}
 & \varepsilon^{p+1} & \dots & \varepsilon^{p+s} & \dots & \varepsilon^{p+n} & \\
 & -y'_{p+1} & \dots & -y'_{p+s} & \dots & -y'_{p+n} & 1 \\
\hline
y'_1= & b_{1,p+1} & \dots & b_{1,p+s} & \dots & b_{1,p+n} & a_1+\varepsilon+b_{1,p+1}\varepsilon^{p+1}+\dots+b_{1,p+n}\varepsilon^{p+n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y'_i= & b_{i,p+1} & \dots & b_{i,p+s} & \dots & b_{i,p+n} & a_i+\varepsilon^i+b_{i,p+1}\varepsilon^{p+1}+\dots+b_{i,p+n}\varepsilon^{p+n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y'_p= & b_{p,p+1} & \dots & b_{p,p+s} & \dots & b_{p,p+n} & a_p+\varepsilon^p+b_{p,p+1}\varepsilon^{p+1}+\dots+b_{p,p+n}\varepsilon^{p+n} \\
\hline
z= & q_{p+1} & \dots & q_{p+s} & \dots & q_{p+n} & Q \\
\hline
\end{array}
$$

ამ ცხრილში ყველა თავისუფალი წევრი

$$a_i(\varepsilon)=a_i+P_i(\varepsilon)\qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ p)$$

იქნება მკაცრად დადებითი.

სინამდვილეში, თუ $a_i>0$, მაშინ რადგანაც ε მცირეა

$$a_i(\varepsilon)=a_i+P_i(\varepsilon)>0.$$

თუ $a_i=0$, მაშინ რადგანაც $P_i(\varepsilon)$ პოლინომის ნიშანს განსაზღვრავს $\varepsilon^i>0$ შესაკრები, აგრეთვე გვექნება:

$$a_i(\varepsilon)=P_i(\varepsilon)>0.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ახალ ცხრილში ამომხსნელი ელემენტი ცალსახად განისაზღვრება. დავუშვათ, რომ ამომხსნელია მე-s სვეტი, მაშინ თუ

$$\frac{a_k}{b_{k,p+s}} < \frac{a_i}{b_{i,p+s}} \quad (i=1,\ldots,k-1,\ k+1,\ldots,p)$$

და $b_{k,p+s}$ ამომხსნელი ელემენტი ძველ ცხრილში ცალსახად განისაზღვრება, მაშინ ახალ ცხრილში, რადგანაც ε მცირეა, გვექნება:

$$\frac{a_k+P_k(\varepsilon)}{b_{k,p+s}} < \frac{a_i+P_i(\varepsilon)}{b_{i,p+s}} \quad (i=1,\ldots,\ k-1,\ k+1,\ldots,p).$$

თუკი ძველ ცხრილში გვაქვს ერთზე მეტი მინიმალური ფარდობა $\frac{a_i}{b_{i,p+s}}$ $(i=1,\ \ldots,\ p)$ სახის, მაგალითად,

$$\frac{a_k}{b_{k,p+s}} = \frac{a_j}{b_{j,p+s}}$$

და, მაშასადამე, ამომხსნელი ელემენტი ძველ ცხრილში ცალსახად არ განისაზღვრება, მაშინაც ახალ ცხრილში ამომხსნელი ელემენტი ცალსახად განისაზღვრება, რადგანაც იმის გამო, რომ $P_k(\varepsilon)\neq P_j(\varepsilon)$, ადგილი არ ექნება

$$\frac{a_k+P_k(\varepsilon)}{b_{k,p+s}} = \frac{a_j+P_j(\varepsilon)}{b_{j,p+s}}$$

ტოლობას.

ადვილად შეიძლება იმის შემოწმება, რომ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ყოველი ბიჯისას არ არის აუცილებელი ε-ზე დამოკიდებული პოლინომის გამოთვლა, არამედ საკმარისია მხოლოდ თავისუფალი წევრების გამოთვლა პოლინომის გარეშე, ხოლო შემდეგ ამ პოლინომის დამატება, რომელიც წინანდებურადაა შედგენილი; ასე რომ, ახალი პოლინომები არ იქნებიან იგივურად ტოლნი და ამომხსნელი ელემენტის ცალსახად განსაზღვრა ძალაში დარჩება.

აგრეთვე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ რადგანაც ε მცირეა, ახალი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსენს, რომელიც თავისუფალი წევრის $P_i(\varepsilon)$ პოლინომით გადიდების შედეგად მიიღება, შეესაბამება განხილული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსენი, რომელიც მიიღება შეშფოთებული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნიდან, თუ მასში ჩავსვამთ $\varepsilon=0$-ს.

ანალოგიურად საყრდენობი ამონახსნის პოვნისას შეიძლება თავიდან ავიცილოთ დაციკლება.

7. **შეზღუდვათა მოცემის სხვადასხვა ხერხი.** წრფივი პროგრამირების ამოცანის დასმა სხვადასხვანაირად შეიძლება. მაგალითად, მისი ჩამოყალიბება შეიძლება ასე:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ .\ .\ .+a_{in}x_n=b_i\ (i=1,\ .\ .\ .,\ m) \tag{6.14}$$

სისტემის ამონახსენთა შორის ვიპოვოთ ისეთები, რომლებიც არაუარყოფითნი არიან და

$$z=p_1x_1+\ .\ .\ .+p_nx_n \tag{6.15}$$

წრფივ ფორმას ექსტრემუმს ანიჭებენ.

ამ ამოცანას იგივე გეომეტრიული აზრი აქვს, რაც ძირითად ამოცანას; აქ განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ იმ სივრცეს, რომელშიაც ამ ამოცანას ვიხილავთ, ექნება n-ზე ნაკლები განზომილება.

მართლაც, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ & . & & \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას აქვს რანგი r. მაშინ (6.14) სისტემა შეიძლება ამოიხსნას r უცნობის მიმართ, მაგალითად:

$$\begin{aligned} x_1&=b_{1,\,r+1}\,x_{r+1}+\ \ .\ .\ +b_{1n}\,x_n+a_1, \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_r&=b_{r,\,r+1}\,x_{r+1}+\ \ .\ .\ +b_{rn}\,x_n+a_r. \end{aligned}$$

მაგრამ, რადგანაც, პირობის თანახმად, უცნობები არაუარყოფითია, ამიტომ დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=b_{1,\,r+1}\,x_{r+1}+\ .\ .\ .\ b_{1n}\,x_n+a_1\geqslant 0, \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_r&=b_{r,\,r+1}\,x_{r+1}+\ \ \ \ +b_{rn}\,x_n+a_r\geqslant 0, \\ &x_{r+1}\geqslant 0,\ .\ \ \ ,\ x_n\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

მაშასადამე, ამოცანა დავიდა ადრე განხილულ ამოცანამდე —

$$z=c_{r+1}x_{r+1}+\ .\ .\ .+c_nx_n+d \tag{6.17}$$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნამდე, რომელიც (6.15) ფორმიდან მიიღება, მასში $x_1,\ x_2,\ .\ .\ .,x_r$ უცნობთა მნიშვნელობების ჩასმით, როცა ადგილი აქვს (6.16) შეზღუდვებს.

სინამდვილეში სიმპლექსური მეთოდის გამოსაყენებლად არ არის აუცილებელი წინასწარ გადავიდეთ (6.14) და (6.15) ამოცანიდან (6.16)

და (6.17) ამოცანამდე, რადგანაც სიმპლექსური მეთოდის გამოყენება შეიძლება პირდაპირ (6.14) და (6.15) ამოცანისათვის.

ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება მივიღოთ, რომ $b_i \geqslant 0$ ($i=1, \ldots, m$); ასეთ შემთხვევაში კი ზოგიერთი ცვლადი (მაგალითად, $x_1, \ldots, x_k$) თითოეული დადებითი კოეფიციენტით შედის მხოლოდ (6.14)-ის ერთ განტოლებაში, მაშინ შესაბამის განტოლებებს ამოვხსნით ამ ცვლადების მიმართ და ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს (6.15)-ში; თავისუფალი წევრები, ცხადია, იქნება არაუარყოფითები. ამის შემდეგ შევადგენთ ცხრილს:

	$-x_{k+1}$	$-x_{k+2}$	$\ldots$	$-x_n$	1
$x_1=$	$\alpha_{1,k+1}$	$\alpha_{1,k+2}$	$\ldots$	α_{1n}	β_1
$\ldots$		$\ldots$			$\ldots$
$x_k=$	$\alpha_{k,k+1}$	$\alpha_{k,k+2}$	$\ldots$	α_{kn}	β_k
$0=$	$\alpha_{k+1,k+1}$	$\alpha_{k+1,k+2}$	$\ldots$	$\alpha_{k+1,n}$	β_{k+1}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$0=$	$\alpha_{m,k+1}$	$\alpha_{m,k+2}$	$\ldots$	α_{mn}	β_m
$z=$	γ_{k+1}	γ_{k+2}	$\ldots$	γ_n	M

აქ ყველა $\beta_j \geqslant 0$ ($j=1, 2, \ldots, m$).

როგორც ვხედავთ, (6.14) სისტემა უცბად არ ამოიხსნება ნაწილი უცნობების მიმართ. უკანასკნელ ცხრილში გვაქვს ე. წ. 0 სტრიქონები და z სტრიქონი. საყრდნობი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა თავიდან მოვიცილოთ ყველა 0 სტრიქონი. ამისათვის, მაგალითად, თუ გვინდა i-ური 0 სტრიქონის მოცილება, ვნახავთ იმ სვეტს, რომელიც შეიცავს i-ური სტრიქონის დადებით α_{ij} კოეფიციენტს, დავნიშნავთ ამ სვეტის ყველა დადებით კოეფიციენტს α_{ij}-ის ჩათვლით; ვყოფთ დანიშნულ კოეფიციენტებზე შესაბამის თავისუფალ წევრებს და იმ კოეფიციენტს, რომლისთვისაც ეს ფარდობა მინიმალური იქნება, ვიღებთ ამომხსნელად. თუ ასეთი იქნება თვითონ α_{ij}, გვექნება კარგი შემთხვევა და მაშინ, თუკი მოდიფიცირებულ ჟორდანისეულ გამორიცხვის ერთ ბიჯს გავაკეთებთ, 0, რომელიც i-ურ სტრიქონში გვაქვს, გადავა ზემოთ i-ურ სვეტში. ამგვარად, ჩვენ გავთავისუფლდებით ერთი 0 სტრიქონისაგან.

თუკი ამომხსნელი ელემენტი გახდა α_{sj} ($s \neq j$), მაშინ ვაგრძელებთ მოდიფიცირებულ ჟორდანისეულ გარდაქმნებს იმავე i-ურ სტრიქონზე. ამ პროცესებს გავაგრძელებთ მანამ, სანამ არ მოვიშორებთ 0

სტრიქონს ან ვაჩვენებთ განხილული სისტემის უთავსებადობას. როცა 0-ს ზემოთ გადავიტანთ, მისი შესაბამისი სვეტის ამოშლა შეიძლება.

ყოველი მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯის შედეგად მიღებული თავისუფალი წევრი ახალ ცხრილში არაუარყოფითი იქნება. მართლაც, ვთქვათ, ამომხსნელი ელემენტია α_{ij}, მაშინ β_i თავისუფალი წევრის ნიშანი არ იცვლება, ასე რომ, $\beta'_i > 0$, ხოლო სხვა ნებისმიერი თავისუფალი წევრი იანგარიშება შემდეგი ფორმულით:

$$\beta_s' = \frac{1}{\alpha_{ij}} (\beta_s \alpha_{ij} - \beta_i \alpha_{sj}),$$

სადაც $\alpha_i > 0$, $\beta_s \geqslant 0$, $\beta_i > 0$. მაშინ, თუ $\alpha_{sj} < 0$, გვექნება $\beta_s' > 0$; თუ $\alpha_{sj} = 0$, მაშინ გვექნება $\beta_s' \geqslant 0$; თუკი $\alpha_{sj} > 0$, მაშინ $\beta_s' = \alpha_{sj} \left(\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} - \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \right) \geqslant 0$, რადგანაც $\alpha_{sj} > 0$ და $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \geqslant \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$.

ანალოგიურად შემოწმდება ის შემთხვევაც, როდესაც ამომხსნელი იქნება ის α_{rj} ელემენტი, რომელიც 0 სტრიქონს არ ეკუთვნის.

0 სტრიქონთა გამორიცხვის მიღებული წესი გამოდგება მანამ, სანამ ყველა მათ არ გამოვრიცხავთ ან არ ვაჩვენებთ (6.14) სისტემის უთავსებადობას.

თუ საყრდნობი ამონახსნის პოვნისას, რომელიმე r სტრიქონის შესაბამისი თავისუფალი წევრი, რომელიც 0 სტრიქონს შეესაბამება, ნულის ტოლია, ხოლო სხვა ყველა ამ სტრიქონის ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტი ერთი და იმავე ნიშნისაა, მაშინ ამ კოეფიციენტთა შემცველელი სვეტები და აგრეთვე, თვითონ სტრიქონი შეიძლება ამოიშალოს და ამოშლილი x_j უცნობები მივიღოთ ნულად. ამით ცხრილი შემცირდება და გამოთვლები გაადვილდება.

რაც შეეხება ოპტიმალური ამონახსნის პოვნას ის ზუსტად ისევე ხდება, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები.

ხანდისხან შეზღუდვები შეიძლება მოცემული იყოს შერეული სახით: უტოლობებისა და ტოლობების სახით. ამ შემთხვევაში წრფივი პროგრამირების ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

$$\begin{gathered} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leqslant b_i \ (i=1, \dots, r), \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \ (k=r+1, \dots, m), \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \end{gathered} \tag{6.18}$$

სისტემის ამონახსენთა შორის, სადაც $b_k \geq 0$ ($k=r+1, \ldots, m$) მოვნახოთ ისეთი, რომელიც ექსტრემუმს ანიჭებს

$$z=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$$

წრფივ ფორმას.

(6.18)-დან უტოლობებს ცხრილში შევიტანთ შემდეგი სახით:

$$y_i=-(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n)+b_i \quad (i=1, \ldots, r),$$

ხოლო ტოლობებს — შემდეგი 0 განტოლებათა სახით:

$$0=-(a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n)+b_k \quad (k=r+1, \ldots, m).$$

გვექნება შემდეგი ცხრილი:

	$-x_1$	$\ldots$	$-x_n$	1
$y_1=$	a_{11}		a_{1n}	b_1
$\ldots$	$\ldots$			$\ldots$
$y_r=$	a_{r1}		a_{rn}	b_r
$0=$	$a_{r+1,1}$		$a_{r+1,n}$	b_{r+1}
$\ldots$	$\ldots$		$\cdot$	$\ldots$
$0=$	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
$z=$	$-p_1$		$-p_n$	0

ისევე, როგორც ზემოთ, უნდა გამოვრიცხოთ 0 სტრიქონები, რის შემდეგ მივიღებთ საყრდნობ ამონახსენს, ხოლო შემდეგ ოპტიმალურ ამონახსენს.

8. წრფივი ფორმის მინიმუმის პოვნის ამოცანა. ჩვენ განვიხილეთ სიმპლექსური მეთოდის საშუალებით

$$z=p_1x_1+\ldots+p_nx_n \tag{6.19}$$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა, როდესაც ადგილი აქვს შეზღუდვებს:

$$-a_{i1}x_1-\ldots-a_{in}x_n+b_i \geq 0 \quad (i=1, \ldots, m) \tag{6.20}$$

ბევრ ამოცანაში საჭიროა (6.19) ფორმის მინიმუმის პოვნა, როცა ადგილი აქვს (6.20) შეზღუდვებს. ამისათვის საკმარისია მივიღოთ:

$$Z=-z=-p_1x_1-\ldots-p_nx_n$$

და ამოვხსნათ მიღებული ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა, როცა (6.20) შეზღუდვები სრულდება, ცხადია, რომ

$$\min z=\max Z.$$

(6.20) წრფივი ფორმის მინიმუმის პოვნის ამოცანა, როცა (6.20) შეზღუდვებს აქვს ადგილი, უშუალოდ სიმპლექსური მეთოდით უნდა ამოიხსნას. ამისათვის საკმარისია სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმში რამდენადმე სახე შევუცვალოთ მხოლოდ ოპტიმალობის ნიშანს და ამომხსნელი ელემენტის არჩევის წესს. საყრდნობი ამონახსნის ოპტიმალობის ნიშნად მივიღოთ Z სტრიქონში დადებითი კოეფიციენტების უქონლობა და მაშინ

$$\min Z = Q.$$

ამომხსნელი ელემენტი უნდა ავიღოთ Z სტრიქონის დადებითი კოეფიციენტის ზემოთ და არა უარყოფითის ზემოთ, როგორც ეს ხდებოდა წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის დროს.

9. ორადობა წრფივ პროგრამირებაში. პირველ რიგში განვიხილოთ ორადი ცხრილები. ვთქვათ, მოცემულია სისტემა

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1n}(-x_n), \\ y_2 = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2n}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mn}(-x_n) \end{array}\right\} \qquad (6.21)$$

და მისთვის შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{array}{r|ccccc|} & -x_1 & \ldots & -x_s & \ldots & -x_n \\ \hline y_1 = & a_{11} & \ldots & a_{1s} & & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_r & a_{r1} & \ldots & a_{rs} & & a_{rn} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m = & a_{m1} & \cdot & a_{ms} & \cdot & a_{mn} \\ \hline \end{array} \qquad (6.22)$$

ამ ცხრილის მატრიცა იყოს A.

მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვის ერთი ბიჯი, რომლის დროსაც დამოკიდებული y_r ცვლადი და დამოუკიდებელი x_s ცვლადი ერთმანეთს ადგილს უცვლიან, შემდეგი ცხრილის სახით გამოისახება:

$$\begin{array}{r|ccccc|l} & -x_1 & \ldots & -y_r & \ldots & -x_n & \\ \hline y_1 = & b_{11} & & -a_{1s} & & b_{1n} & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_s = & a_{r1} & & 1 & \ldots & a_{rn} & : a_{rs}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ y_m = & b_{m1} & \ldots & -a_{ms} & \ldots & b_{mn} & \\ \hline \end{array} \qquad (6.23)$$

სადაც

$$b_{ij}=a_{ij}\,a_{rs}-a_{is}\,a_{rj}.$$

ვთქვათ, ვიხილავთ შემდეგ წრფივ ფორმებს:

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_{11}u_1+a_{21}u_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+a_{m1}u_m, \\ v_2=a_{12}u_1+a_{22}u_2+\qquad \cdot+a_{m2}u_m, \\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad\qquad \cdot\quad \cdot\ \cdot \\ v_n=a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\qquad \cdot+a_{mn}u_m \end{array}\right\} \tag{6.25}$$

ამ წრფივი ფორმების შესაბამისი მატრიცა A^* არის A მატრიცის ტრანსპონირებული.

(6.25) სისტემისათვის ცხრილი შევადგინოთ ისე, რომ u_i დამოუკიდებელი ცვლადები იდგნენ მარცხნივ, ხოლო v_j დამოკიდებული ცვლადები კი ზემოთ, მაშინ გვექნება ცხრილი:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & v_1= & \cdots & v_s= & \cdots & v_n= \\ \hline u_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} & & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & & \\ u_r & a_{r1} & & a_{rs} & & a_{rn} \\ \cdots & & \cdot & \cdots & & \\ u_m & a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array} \tag{6.26}$$

ამ ცხრილის მატრიცა ემთხვევა (6.22) ცხრილის შესაბამის A მატრიცას.

(6.22) და (6.26) ცხრილებს ეწოდებათ ორადი ანუ შეუღლებული ცხრილები. თუ (6.26) ცხრილში ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გამორიცხვით a_{rs} ამომხსნელი ელემენტით შევუცვლით u_r და v_s ცვლადებს ადგილებს, მივიღებთ:

$$\begin{array}{c|ccccc|l} & v_1= & \cdots & u_r= & \cdots & v_n= & \\ \hline u_1 & b_{11} & \cdots & -a_{1s} & & b_{1n} & \\ \cdot & & & \cdots & & \cdots & \\ v_s & a_{r1} & & 1 & & a_{rn} & :a_{rs} \\ \cdots & \cdot & & & & \cdot\ \cdot & \\ u_m & b_{m1} & \cdots & -a_{ms} & \cdots & b_{mn} & \\ \hline \end{array}$$

ეს უკანასკნელი ცხრილი ემთხვევა (6.23)-ს.

ამგვარად, მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯი ძირითადი (6.22) ცხრილის მიმართ ეკვივალენტურია ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯისა (6.26) ორადი ცხრილის მიმართ.

სწორედ ეს უკანასკნელი მოსაზრება იძლევა შესაძლებლობას ერთი ცხრილის სახით შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ ურთიერთორადი (6.22) და (6.26) ცხრილები:

		$v_1 = -x_1$	...	$v_s = -x_s$	...	$v_n = -x_n$
u_1	$y_1 =$	a_{11}	...	a_{1s}		a_{1n}
u_r	$y_r =$	a_{r1}		a_{rs}		a_{rn}
u_m	$y_m =$	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}

ჟორდანისეული გამორიცხვის ყოველი სათანადო ბიჯი საჭიროების მიხედვით ერთდროულად გარდაქმნის ორივე ცხრილს.

10. წრფივი პროგრამირების ორადი ამოცანები. როგორც ვიცით, წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \tag{6.27}$$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნაში, როდესაც შემდეგი შეზღუდვები სრულდება:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \dots, \ x_n \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

ამ ამოცანასთან ერთად განვიხილოთ მის მიმართ ე. წ. ორადი, ანუ შეუღლებული ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს

$$w = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m \tag{6.29}$$

წრფივი ფორმის მინიმუმის პოვნაში შემდეგ შეზღუდვათა შესრულებისას:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \geqslant p_1, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \geqslant p_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \geqslant p_n, \\ u_1 \geqslant 0; \quad u_2 \geqslant 0, \ \dots, \ u_m \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

რაც მიიღება ძირითადი ამოცანიდან შემდეგნაირად: ძირითადი ამოცანის შემზღუდველი პირობების თავისუფალი წევრები $b_1, b_2, \dots, b_m$

წარმოადგენენ ორადი ამოცანის მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტებს, ხოლო ძირითადი ამოცანის მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტები $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ორადი ამოცანის შემზღუდველ პირობათა თავისუფალი წევრებია; ორადი ამოცანის შემზღუდველ პირობათა მატრიცა წარმოადგენს ძირითადი ამოცანის შემზღუდველ პირობათა მატრიცის ტრანსპონირებულს, ე. ი. A^*-ს, ორად ამოცანაში შემზღუდველ პირობებში უტოლობები საწინააღმდეგო ნიშნით იცვლება ($\leqslant$ იცვლება $\geqslant$-ით), ხოლო ცვლადები ორივე შემთხვევაში არაუარყოფითია.

ძირითადი ამოცანის განხილვა შეიძლება, როგორც ორადისა თავისი ორადი ამოცანის მიმართ. ძირითადი ამოცანის შეზღუდვები შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0,\\
y_2 &= -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m &= -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.
\end{aligned}\right\}$$

ხოლო ორადი ამოცანის შეზღუდვები კი შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - p_1 \geqslant 0,\\
v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - p_2 \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - p_n \geqslant 0,\\
&u_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ u_m \geqslant 0
\end{aligned}\right\}$$

თუ დავაკვირდებით, განხილული ურთიერთორადი ორი ამოცანის პირობები შეიძლება ერთი ცხრილის სახით ჩაიწეროს. სახელდობრ,

$$\begin{array}{cc|ccccc|c|}
 & & v_1= & & v_s= & & v_n= & w= \\
 & & -x_1 & \ldots & -x_s & \ldots & -x_n & 1 \\
\hline
u_1 & y_1= & a_{11} & & a_{1s} & & a_{1n} & b_1 \\
\ldots & & & & \ldots & & & \ldots \\
u_r & y_r= & a_{r1} & & a_{rs} & & a_{rn} & b_r \\
 & \ldots & & & & & & \ldots \\
u_m & y_m= & a_{m1} & \ldots & a_{ms} & \ldots & a_{mn} & b_m \\
\hline
1 & z= & -p_1 & \ldots & -p_s & \ldots & -p_n & 0 \\
\hline
\end{array} \qquad (6.31)$$

მაშასადამე, თურმე ამოვხსნით რა წრფივი პროგრამირების ძირითად (6.27)—(6.28) ამოცანას, ამით ერთდროულად ვხსნით მის მიმართ ორად

(6.29)—(6.30) ამოცანას და, პირიქით. ძირითად ამოცანაში z წრფივი ფორმისათვის მიღებული მაქსიმუმი ემთხვევა ორად ამოცანაში w წრფივი ფუნქციისათვის მიღებულ მინიმუმს.

11. წრფივი პროგრამირების ორადობის ძირითადი თეორემა. ვთქვათ, ვიხილავთ წყვილ ორად ამოცანა (6.31)-ს. თუ ერთ-ერთ მათგანს აქვს ოპტიმალური ამონახსენი, მაშინ მეორესაც ექნება ოპტიმალური ამონახსენი და შესაბამის წრფივ ფორმათა ექსტრემალური მნიშვნელობანი ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\max z = \min w.$$

თუ რომელიმე ერთ-ერთი ამოცანის წრფივი ფორმა არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ მისი შესაბამისი ორადი ამოცანა წინააღმდეგობრივია.

დამტკიცება. დავუშვათ ძირითად ამოცანას აქვს სასრული ამონახსენი და მიღებულია შემდეგი ცხრილი:

	$u_1=$ $-y_1$	$\dots$	$u_s=$ $-y_s$	$v_{s+1}=$ $-x_{s+1}$	$\dots$	$v_n=$ $-x_n$	$w=$ 1
v_1 $x_1=$	b_{11}	$\dots$	b_{1s}	$b_{1,s+1}$	$\dots$	b_{1n}	b_1
$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$
v_s $x_s=$	b_{s1}		b_{ss}	$b_{s,s+1}$	$\dots$	b_{sn}	b_s
u_{s+1} $y_{s+1}=$	$b_{s+1,1}$		$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$	$\dots$	$b_{s+1,n}$	b_{s+1}
$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$
u_m $y_m=$	b_{m1}	$\dots$	b_{ms}	$b_{m,s+1}$	$\dots$	b_{mn}	b_m
1 $z=$	q_1	$\dots$	q_s	q_{s+1}	$\dots$	q_n	Q

(6.32)

რომელშიაც $b_1\geqslant 0, \dots, b_m\geqslant 0$; $q_1\geqslant 0, \dots, q_n\geqslant 0$; $\max z=Q$ და ამას ადგილი აქვს როცა $y_1=\dots=y_s=x_{s+1}=\dots=x_n=0$. (6.32) ცხრილის გაანალიზება უფლებას გვაძლევს, რომ მარცხნივ მოთავსებული ცვლადების მნიშვნელობანი მივიღოთ ნულად:

$$v_1=\dots=v_s=u_{s+1}=\dots=u_m=0,$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u_1=q_1\geqslant 0, \dots, u_s=q_s\geqslant 0;$$
$$v_{s+1}=q_{s+1}\geqslant 0, \dots, v_n=q_n\geqslant 0.$$

მაშასადამე, მივიღეთ საყრდენობი ამონახსენი:

$$u_1=q_1, \dots, u_s=q_s, u_{s+1}=\dots=u_m=0$$

და უკანასკნელი სვეტიდან ჩანს, რომ

$$w=b_1v_1+\ldots+b_sv_s+b_{s+1}u_{s+1}+\ldots+b_mu_m+Q$$

წრფივი ფორმის მნიშვნელობა

$$v_1=\ldots=v_s=u_{s+1}=\ldots=u_m=0$$

წერტილში იქნება მინიმალური, რადგანაც $b_1, b_2, \ldots, b_m$ არაუარყოფითებია. ამგვარად, $min\,w=Q$ და ემთხვევა $max\,z$-ს.

ახლა დავუშვათ, რომ ძირითადი ამოცანის z წრფივი ფორმა არ არის შემოსაზღვრული. ეს იმას ნიშნავს, რომ (6.32)-ში რომელიმე ზედა ცვლადისათვის, მაგალითად, y_s-თვის. შესაბამისი კოეფიციენტი q_s უარყოფითია, ხოლო მისი სვეტის ყველა კოეფიციენტი: $b_{1s}, \ldots, b_{ms}$ არადადებითი სიდიდეებია. მაშინ ორადი ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_s=b_{1s}v_1+\ldots+b_{ss}v_s+b_{s+1,s}u_{s+1}+\ldots+b_{ms}u_m+q_s\leqslant q_s<0,$$

ასე რომ, ორადი ამოცანის შეზღუდვათა სისტემა წინააღმდეგობრივია, ე. ი. u_s-ის არაუარყოფითობა უთავსებადია $v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_m$ სიდიდეთა უარყოფითობასთან.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ერთ-ერთი ამოცანის წინააღმდეგობრივობიდან არ გამომდინარეობს მისი ორადი ამოცანის წრფივი ფორმის შემოუსაზღვრელობა. თურმე შესაძლებელია, რომ ორადი ამოცანაც აგრეთვე იყოს წინააღმდეგობრივი. ეს უკანასკნელი ფაქტი ჩანს თუნდაც შემდეგი მაგალითიდან:

		$v_1=$ $-x_1$	$v_2=$ $-x_2$	$w=$ 1
u_1	$y_1=$	2	-2	1
u_2	$y_2=$	-2	2	-3
1	$z=$	-3	1	0

აქ $z=3x_1-x_2$ წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა

$$y_1=-2x_1+2x_2+1\geqslant 0,$$

$$y_2=2x_1-2x_2-3\geqslant 0,$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ x_2\geqslant 0$$

შეზღუდვათა შესრულებისას წინააღმდეგობრივია, რადგანაც

$$y_1+y_2=-2<0.$$

მის მიმართ ორადი ამოცანა

$$w = u_1 - 3u_2$$

წრფივი ფორმის მინიმუმის პოვნის შესახებ

$$v_1 = 2u_1 - 2u_2 - 3 \geqslant 0,$$
$$v_2 = -2u_1 + 2u_2 + 1 \geqslant 0,$$
$$u_1 \geqslant 0, \quad u_2 \geqslant 0$$

შეზღუდვათა შესრულებისას აგრეთვე წინააღმდეგობრივია, რადგანაც

$$v_1 + v_2 = -2 < 0.$$

აგრეთვე ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ორივე ორადი ამოცანის ამოხსნას მხოლოდ იმ შემთხვევაში მივიღებთ ერთდროულად, როდესაც წრფივი ფორმის იმ ამოცანის მაქსიმუმს ვპოულობთ, რომელშიაც შეზღუდვათა მარცხენა მხარე ნაკლებია მარჯვენაზე: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$ და მინიმუმს ვპოულობთ იმ წრფივი ფორმისა, რომელშიაც შეზღუდვათა მარცხენა მხარე მეტია მარჯვენაზე:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant p_j.$$

12. წყვილი ორადი ამოცანის წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნის ამოცანასთან ეკვივალენტურობა. ვთქვათ, ვიხილავთ წრფივი პროგრამირების წყვილ ორად ამოცანას, რომელთა პირობები მოცემულია (6.31) ცხრილით. ამ წყვილი ორადი ამოცანის ამოხსნა თურმე ეკვივალენტურია შემდეგი წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნისა:

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leqslant a_i \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m),\\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ n),\\ a_{1j}u_1 + \dots + a_{mj}u_m \geqslant p_j \quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ n),\\ u_i \geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m), \end{aligned}\right\} \quad (6.33)$$

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n \geqslant a_1u_1 + \dots + a_mu_m, \qquad (6.34)$$

რომელიც შედგება ორივე ამოცანის ყველა შეზღუდვისაგან და (6.34) დამატებითი უტოლობისაგან, რომელიც ცვლის ოპტიმალობის მოთხოვნას.

ვაჩვენოთ ჩამოყალიბებული დებულების მართებულობა. ვთქვათ,

$$x^*(x_1^*,\ x_2^*,\ \dots,\ x_n^*) \text{ და } u^*(u_1^*,\ u_2^*,\ \dots,\ u_m^*)$$

ჩვენი წყვილი ორადი ამოცანის რაიმე ოპტიმალური ამონახსნებია. მაშინ ორადობის ძირითადი თეორემის თანახმად დავწერთ:

$$p_1x_1^*+p_2x_2^*+\ldots+p_nx_n^*=a_1u_1^*+a_2u_2^*+\ldots+a_mu_m^* \quad (6.35)$$

ე. ი. ეს ოპტიმალური ამონახსნები, გარდა (6.33) უტოლობისა, აკმაყოფილებს (6.34) უტოლობასაც, რადგანაც ოპტიმალურ ამონახსენთა ნებისმიერი შესაბამისი წყვილი აგრეთვე არის (6.33) და (6.34) სისტემათა ამონახსენი.

პირიქით, ვთქვათ, $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $u(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ არის (6.33) და (6.34) სისტემის რომელიღაც ამონახსნები. იმ ფაქტიდან, რომ x და u აკმაყოფილებენ (6.33) სისტემას, გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i\right) x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \quad (6.36)$$

ე. ი.

$$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n \leqslant a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_mu_m.$$

ამგვარად, x და u აკმაყოფილებენ (6.34) და (6.36) უტოლობებს, მაშასადამე, აკმაყოფილებენ (6.35) ტოლობასაც.

ახლა საკმარისია იმის ჩვენება რომ, თუ (6.33) სისტემის u და x ამონახსნები აკმაყოფილებს (6.35) განტოლებას, მაშინ ეს ამონახსნები ოპტიმალურნი იქნებიან.

მართლაც, ვთქვათ, x არ არის ოპტიმალური ამონახსენი, მაშინ, თუ x^* და u^*-ით აღვნიშნავთ ჩვენი წყვილი ორადი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნებს, მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* > \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*,$$

ე. ი. მივიღებთ, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* > \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*,$$

რაც ეწინააღმდეგება ორადობის შესახებ ჩვენ მიერ დამტკიცებულ ძირითად თეორემას.

მაშასადამე, თუ (6.33) სისტემის x და u ამონახსნები აკმაყოფილებენ (6.35) განტოლებას, ისინი იქნებიან ოპტიმალური ამონახსნე-

ბი და ამგვარად, წყვილი ორადი ამოცანის ოპტიმალური ამოხსნა ეკვივალენტური ყოფილა (6.33) და (6.34) წრფივ უტოლობათა სისტემის ამონახსნის პოვნისა.

18. ორადობის მეორე თეორემა. *თუ კი ერთ-ერთი ორადი ამოცანის ერთი მაინც ოპტიმალური ამონახსენი ამავე ამოცანის i-ურ შეზღუდვას აქცევს მკაცრ უტოლობად, მაშინ მეორე ორადი ამოცანის თითოეული ოპტიმალური ამონახსნის i-ური კომპონენტი (x_i ანდა u_i) ნულის ტოლია.*

თუ კი ერთ-ერთი ორადი ამოცანის ერთი მაინც ოპტიმალური ამონახსნის i-ური კომპონენტი დადებითია, მაშინ მეორე ორადი ამოცანის ყოველი ოპტიმალური ამონახსენი ამავე ამოცანის i-ურ შეზღუდვას აქცევს მკაცრ ტოლობად.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, წყვილი ორადი ამოცანის x^* და u^* ოპტიმალური ამონახსნები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$1)\ x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - p_j\right) = 0 \quad (j=1, \ldots, n),$$

$$2)\ u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - a_i\right) = 0 \quad (i=1, \ldots, m).$$

დამტკიცება. წყვილი ორადი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნები x^* და u^* აკმაყოფილებენ (6.33) სისტემას და მისგან გამომდინარე უტოლობებს:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_i^* x_j^* \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*. \tag{6.37}$$

ორადობის პირველი თეორემის თანახმად x^* და u^* ოპტიმალური ამონახსნებისათვის გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*. \tag{6.38}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ზემოთ დაწერილ (6.37) უტოლობებს, რადგანაც (6.38)-ს აქვს ადგილი, ისინი იქცევიან ტოლობებად და დავწერთ:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i^* x_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*$$

ან, რაც იგივეა,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* x_j^* = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^*$$

და

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i^* x_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*.$$

მიღებული ტოლობები შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - p_j \right) = 0$$

და

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_i \right) = 0.$$

რადგანაც ყველა x_j^* და u_i^* დადებითია, აგრეთვე ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი (6.33)-ის თანახმად არაუარყოფითია, ამიტომ მივიღებთ:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - p_j \right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

და

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_i \right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

შებრუნებულ თეორემასაც აქვს ადგილი. სახელდობრ:

წყვილი ორადი ამოცანის საყრდნობი ამონახსნები x^* და u^*, რომლებიც აკმაყოფილებენ 1) და 2) პირობებს, ოპტიმალურნი არიან. მართლაც, თუ აეჯამავთ 1) პირობას j-თი, ხოლო 2)-ს i-თი მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i^* x_j^* = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^*,$$

და

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i^* x_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*,$$

ასე, რომ z და w ფუნქციათა მნიშვნელობა x^* და u^* წერტილებში ერთმანეთს ემთხვევა. z და w ფუნქციათა მნიშვნელობების თანამთხვევიდან გამომდინარეობს x^* და u^* ამონახსენთა ოპტიმალობა, რადგან, როგორც ზემოთ ვნახეთ, წყვილი ორადი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის პოვნა ეკვივალენტურია წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა, რომელიც შედგება ორივე ამოცანის ყველა შეზღუდვისაგან.

14. ძირითადი და ორადი ამოცანების ეკონომიური ინტერპრეტირება. ვთქვათ, ძირითადი და ორადი ამოცანების პირობები ერთდროულად მოცემულია (6.31) ცხრილით.

წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანის ეკონომიური ინტერპრეტირება შეიძლება შემდეგნაირად: დავუშვათ, ერთი პროდუქციის დასამუშავებლად გვაქვს n სხვადასხვა ტექნოლოგია. ვგულისხმობთ, რომ გამოიყენება m სხვადასხვა სახის მასალა და მოქმედებს სხვადასხვა საწარმოო ფაქტორი. ყველა გამოყენებულ მასალათა და საწარმოო ფაქტორთა ერთობლიობას ინგრედიენტი, ანუ შემავალი ეწოდება. ვთქვათ i-ური ტექნოლოგიით დროის ერთეულში იხარჯება i-ური ინგრედიენტის a_{ij} რაოდენობა, რომელთა საერთო მარაგია a_i, და მზადდება p_j ერთეული პროდუქცია. x_j-თი აღვნიშნოთ ის დრო, რომლის განმავლობაში წარმოება ხდება j-ური ტექნოლოგიით. მაშინ $x=(x_1, \ldots, x_n)$ „გეგმით" დამზადდება $z=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$ ერთეული პროდუქცია და დაიხარჯება $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n$ ერთეული i-ური ინგრედიენტისა ($i=1, \ldots, m$). ბუნებრივია ისმება ამოცანა: მოინახოს ისეთი ოპტიმალური გეგმა, რომლის გატარებისას ინგრედიენტთა მარაგიდან გამოიშვება პროდუქციათა მაქსიმალური რაოდენობა. ამ ამოცანის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა: გავხადოთ მაქსიმალური

$$z=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$$

წრფივი ფორმა, როდესაც ადგილი აქვს

$$a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n\leqslant a_i \quad (i=1,\dots,m),$$
$$x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0$$

შეზღუდვებს.

წრფივი პროგრამირების ორადი ამოცანის ეკონომიური ინტერპრეტირებისათვის უფრო მოხერხებულია გამოშვებული პროდუქციის ერთეულის ფასი მივიღოთ ერთეულად. მაშინ j-ური ტექნოლოგიის დროის ერთეულში დამზადდება პროდუქცია p_j ერთეული ფასით. ამისათვის დაიხარჯება a_{1j} პირველი ინგრედიენტი, a_{2j} მეორე ინგრედიენტი და ა. შ. a_{mj} მე-m ინგრედიენტი. აღვნიშნოთ $u_1, u_2, \dots, u_m$-ით სათანადოდ თითოეული ინგრედიენტის ერთეულის ფარდობითი ფასები. დახარჯულ ინგრედიენტთა შესაფასებლად მივიღებთ

$$a_{1j}u_1+\dots+a_{mj}u_m$$

ჯამს და, ცხადია, ის არანაკლები იქნება მიღებული პროდუქციის p_j ფასზე, ე. ი.

$$a_{1j}u_1+\dots+a_{mj}u_m\geqslant p_j \quad (j=1,\dots,n); \tag{6.39}$$

ცხადია, რომ $u_1\geqslant 0,\dots,u_m\geqslant 0$ და თუ ავიღებთ საკმაოდ დიდებს $u_1, u_2,\dots,u_m$ მნიშვნელობებს, ჩვენ დავაკმაყოფილებთ (6.39) ყველა პირობას. თუ არ გვინდა ინგრედიენტთა ფარდობითი ფასის გადიდება, ამისათვის ბუნებრივია, ისინი რაც შეიძლება მცირე ავიღოთ, ე. ი. ისეთნი, რომელთა შემდგომი შემცირება არ იყოს შესაძლებელი, რადგანაც მაშინ (6.39) პირობები არ შესრულდება. ასეთ ოპტიმალურ ფარდობით ფასებში ინგრედიენტთა მთელი მარაგის ფასს ექნება უმცირესი მნიშვნელობა, ე. ი.

$$a_1u_1+\dots+a_mu_m$$

ჯამს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა. ამგვარად, მათემატიკურ მოდელს, იმ ეკონომიური ამოცანისა, სადაც ინგრედიენტთა დასაშვები ფასები ისე დგინდება, რომ მათი მარაგის ფასი იყოს მინიმალური, წარმოადგენს ორადობის ამოცანა:

ვაქციოთ მინიმალურად

$$w=a_1u_1+\dots+a_mu_m$$

წრფივი ფორმა, როდესაც ადგილი აქვს

$$a_{1j}u_1+\dots+a_{mj}u_m\geqslant p_j \quad (j=1,\dots,n)$$
$$u_1\geqslant 0,\dots,u_m\geqslant 0$$

შეზღუდვებს.

მაშინ ორადობის ძირითადი ამოცანა ღებულობს შემდეგ ეკონომიურ აზრს: თუ ამოცანისათვის პროდუქციათა გამოშვების მაქსიმალური გეგმა არსებობს, მაშინ არსებობს აგრეთვე ინგრედიენტთა მინიმალური ფარდობითი ფასების ოპტიმალური გეგმა და ყველა პროდუქტის ღირებულების ფასი, რომლებიც ოპტიმალური გეგმით არიან დამზადებულნი, ემთხვევა ინგრედიენტთა ყველა მარაგის w ღირებულებას.

ორადობის მეორე ამოცანა კი შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: თუკი წარმოების რომელიმე ოპტიმალურ გეგმაში i-ური ინგრედიენტის ხარჯი $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ მკაცრად ნაკლებია მის a_i მარაგზე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < a_i,$$

მაშინ ფარდობით ფასთა ყოველ ოპტიმალურ გეგმაში ამ ინგრედიენტის u_i ფასი ნულის ტოლია. თუკი ფარდობით ფასთა რომელიმე ოპტიმალურ გეგმაში i-ური ინგრედიენტის u_i ფასი ნულზე მეტია, მაშინ წარმოების ყოველ ოპტიმალურ გეგმაში ამ ინგრედიენტის ხარჯი ზუსტად მისი მარაგის ტოლია:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_i.$$

თუკი ფარდობით ფასთა რომელიმე ოპტიმალურ გეგმაში ინგრედიენტთა $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$ ფასი, რომელიც იხარჯება j-ური ტექნოლოგიით, მკაცრად აღემატება ამ ტექნოლოგიით დამზადებულ საბოლოო პროდუქციათა p_j ფასს:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i > p_j,$$

მაშინ წარმოების არც ერთ ოპტიმალურ გეგმაში j-ური ტექნოლოგია არ გამოიყენება, ე. ი. $x_j=0$, თუკი წარმოების რომელიმე ოპტიმალურ გეგმაში j-ური ტექნოლოგია გამოიყენება ($x_j>0$), მაშინ ფარდობით

ფასთა ყოველ ოპტიმალურ გეგმაში ინგრედიენტთა $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$ ფასი, რომელიც j-ური ტექნოლოგიით იხარჯება, ზუსტად ტოლი იქნება ამ ტექნოლოგიით დამზადებულ პროდუქტთა p_j ფასის:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = p_j.$$

ამგვარად, ორადი ამოცანების შემთხვევაში წარმოების ოპტიმალურ გეგმას ეთანადება ფარდობით ფასთა ოპტიმალური გეგმა, რომლითაც გამოყენებული ტექნოლოგია რენტაბელურია, ხოლო მათ, რომელთაც არ ვიყენებთ, საზარალოა და, პირიქით.

16. ორადი ამოცანები შეზღუდვათა შერეული სისტემით. ზემოთ განხილულ წყვილ ორად ამოცანებში შეზღუდვები მხოლოდ უტოლობებით იყო მოცემული. ასეთ ამოცანებს სიმეტრიულს ანდა ერთნაირი ტიპის შეზღუდვებიან ამოცანებს უწოდებენ.

ორადობის დადგენა შეიძლება მაშინაც, როდესაც შეზღუდვები შერეული ტიპისაა, ე. ი. როცა გვაქვს ტოლობები და უტოლობები მხოლოდ $x_j \geqslant 0$ ($u_i \geqslant 0$) ტიპის. ასეთი ტიპის ამოცანების სიმეტრიულზე დაყვანა ყოველთვის შეიძლება.

პირველ რიგში განვიხილოთ შეზღუდვათა შერეული სისტემა. შევისწავლოთ

$z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა, როცა $x_1, \ldots, x_n$ უცნობები აკმაყოფილებენ შემდეგი შერეული ტიპის შეზღუდვებს:

$$\begin{aligned}
y_1 &= -a_{11}x_1 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_r &= -a_{r1}x_1 - \ldots - a_{rn}x_n + b_r \geqslant 0,\\
0 &= -a_{r+1,1}x_1 - \ldots - a_{r+1,n}x_n + b_{r+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= -a_{m1}x_1 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m,\\
&x_1 \geqslant 0, \ldots, x_s \geqslant 0, \quad s \leqslant n.
\end{aligned}$$

ამ ამოცანის ორადი ამოცანა იქნება

$$w = b_1 u_1 + \ldots + b_m u_m$$

წრფივი ფორმის მინიმუმის პოვნა, როდესაც ადგილი აქვს შემდეგ შეზღუდვებს:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1 + \ldots + a_{m1}u_m - p_1 \geqslant 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_s &= a_{1s}u_1 + \ldots + a_{ms}u_m - p_s \geqslant 0, \\
0 &= a_{1,\,s+1}u_1 + \ldots + a_{m,\,s+1}u_m - p_{s+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= a_{1n}u_1 + \ldots + a_{mn}u_m - p_n, \\
&u_1 \geqslant 0, \ldots, u_r \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

ჩამოყალიბებული წყვილი ორადი ამოცანის პირობების წარმოდგენა უფრო მოსახერხებელია იმ ცხრილის სახით, რომლის მსგავსიც გვქონდა ადრე სიმეტრიული ამოცანების გარჩევისას, სახელდობრ:

$$
\begin{array}{cc|ccccccc|c|}
 & & v_1= & \ldots & v_s= & 0= & \ldots & 0= & & w= \\
 & & -x_1 & \ldots & -x_s & -x_{s+1} & \ldots & -x_n & & 1 \\
\hline
u_1 & y_1= & a_{11} & & a_{1s} & a_{1,\,s+1} & & a_{1n} & & b_1 \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\
u_r & y_r= & a_{r1} & & a_{rs} & a_{r,\,s+1} & \ldots & a_{rn} & & b_r \\
u_{r+1} & 0= & a_{r+1,\,1} & & a_{r+1,\,s} & a_{r+1,\,s+1} & \ldots & a_{r+1,\,n} & & b_{r+1} \\
\ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & & & \ldots \\
u_m & 0= & a_{m1} & \ldots & a_{ms} & a_{m,\,s+1} & \ldots & a_{mn} & & b_m \\
\hline
1 & z= & -p_1 & \ldots & -p_s & -p_{s+1} & \ldots & -p_n & & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad (6.40)
$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ არაუარყოფითობის პირობა ედება მხოლოდ იმ $u_i(x_j)$ დამოუკიდებელ ცვლადებს, რომლებიც (6.40) შერეულ ცხრილში მოთავსებულია იმ სტრიქონებში (სვეტებში), რომელთაც ძირითადი (ორადი) ამოცანების უტოლობებით შეზღუდვები ეთანადება, ხოლო იმ $u_i(x_j)$ ცვლადებს, რომლებიც შეესაბამებიან ძირითადი (ორადი) ამოცანის განტოლებებით მოცემულ შეზღუდვებს, არავითარი შეზღუდვა არ ედება.

შევადგენთ რა (6.40) ცხრილს, ამოვხსნით ძირითად ამოცანას; ჩვეულებრივ, ავტომატურად მივიღებთ აგრეთვე ორადი ამოცანის ამოხსნასაც.

ახლა განვიხილოთ შეზღუდვათა შერეული სისტემა, როცა მხოლოდ $x_j \geqslant 0$ ტიპის უტოლობები გვაქვს.

შევისწავლოთ

$$z = x_1p_1 + \ldots + x_np_n$$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა, როცა გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
0 &= -a_{11}x_1-\dots-a_{1n}x_n+b_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= -a_{m1}x_1-\dots-a_{mn}x_n+b_m,\\
&x_1\geqslant 0,\ \dots,\ x_n\geqslant 0
\end{aligned}
$$

სახის შეზღუდვები.

ეს ამოცანა ზემოთ განხილული ამოცანის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს, როდესაც $r=0$, $s=n$. ამოცანაში იგულისხმება, რომ განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე.

ორადი ამოცანა იქნება

$$w=b_1u_1+\dots+b_mu_m$$

წრფივი ფორმის მინიმუმის პოვნა, როცა ადგილი აქვს შემდეგ შეზღუდვებს:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1+\dots+a_{m1}u_m-p_1\geqslant 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_n &= a_{1n}u_1+\dots+a_{mn}u_m-p_n\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

რადგანაც $r=0$, ამიტომ u_i ცვლადებს არავითარი შეზღუდვა არ ედებათ. ჩამოყალიბებული წყვილი ორადი ამოცანის პირობებიც წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილით:

$$
\begin{array}{cc|ccc|c|}
 & & v_1= & & v_n= & w= \\
 & & -x_1 & \dots & -x_n & 1 \\
\hline
u_1 & 0= & a_{11} & & a_{1n} & b_1 \\
\dots & & \dots & & \dots & \dots \\
u_m & 0= & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\
\hline
1 & z= & -p_1 & \dots & -p_n & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

თუ ამოვხსნით ძირითად ამოცანას, ჩვეულებრივ ერთდროულად მივიღებთ ორივე ორადი ამოცანის ამონახსენს.

16. ორადი სიმპლექსური მეთოდი. ვთქვათ, წყვილი ორადი ამოცანის პირობები მოცემულია ცხრილით:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c|}
 & & v_1= & \dots & v_s= & \dots & v_n= & w \\
 & & -x_1 & \dots & -x_s & \dots & -x_n & 1 \\
\hline
u_1 & y_1= & a_{11} & & a_{1s} & & a_{1n} & b_1 \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_r & y_r= & a_{r1} & & a_{rs} & \dots & a_{rn} & b_r \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_m & y_m= & a_{m1} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} & b_m \\
\hline
1 & z= & -p_1 & \dots & -p_s & \dots & -p_n & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad (6.41)
$$

მაშინ, როგორც ზემოთ ენახეთ, z წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანის ამოხსნით იხსნება. აგრეთვე w-ს მინიმუმის პოვნის ამოცანაც.

უფრო მოხერხებულია (6.41) ცხრილის შემდეგნაირად ჩაწერა:

$$
\begin{array}{r|ccccc|c|}
 & u_1 & \dots & u_r & \dots & u_m & 1 \\
\hline
v_1 = & a_{11} & & a_{r1} & \dots & a_{m1} & -p_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
v_s = & a_{1s} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{ms} & -p_s \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
v_n = & a_{1n} & \dots & a_{rn} & \dots & a_{mn} & -p_n \\
\hline
w = & b_1 & \dots & b_r & \dots & b_m & 0 \\
\end{array}
\qquad (6.42)
$$

სწორედ ამ ცხრილით ამოიხსნება w-ს მინიმუმის პოვნის ამოცანა ე. წ. ორადი სიმპლექსური მეთოდით.

იმისათვის, რომ w სტრიქონში უარყოფითი კოეფიციენტები მოვიშოროთ, ამომხსნელი ელემენტის შესარჩევად განვიხილოთ ის სვეტი რომლის შესაბამისი w სტრიქონის ელემენტი უარყოფითია; ვთქვათ, მაგალითად, $b_r<0$. თუკი w სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი არაუარყოფითია, მაშინ 0 იქნება w-ს შეფასება ქვემოდან და გადავალთ ოპტიმალური ამოხსნის პოვნაზე.

ვიპოვით რა მე-r სვეტში რომელიმე უარყოფით კოეფიციენტს, მაგალითად, $a_{rs}<0$, მაშინ ამ ელემენტის შემცველ სტრიქონს ვიღებთ ამომხსნელად. თუკი r სვეტის ყველა კოეფიციენტი არაუარყოფითია, მაშინ w ფორმა შემოუსაზღვრელია ქვემოდან ანდა ამოცანას ამონახსენი არა აქვს.

შემდეგ, ვეძებთ არაუარყოფით ფარდობებს w სტრიქონის კოეფიციენტების ამომხსნელ s სტრიქონის კოეფიციენტებთან: ამომხსნელად მივიღებთ s სტრიქონის იმ კოეფიციენტს, რომლისთვისაც ეს ფარდობა მინიმუმია. თუ უმცირესი ფარდობა ნულია, მის მნიშვნელს მაშინ ვიღებთ ამომხსნელად, როცა ის დადებითია. როცა შევარჩევთ ამომხსნელ ელემენტს, ვაკეთებთ ჩვეულებრივ ჟორდანისეული გამორიცხვის ბიჯს. თუ ზემოთ ჩამოყალიბებული წესის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

$$
\begin{array}{r|ccccc|c|}
 & v_1 & \dots\ v_s & u_{s+1} & \dots & u_m & 1 \\
\hline
u_1 = & b_{11} & \dots\ b_{s1} & b_{s+1,1} & \dots & b_{m1} & q_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_s = & b_{1s} & \dots\ b_{ss} & b_{s+1,s} & \dots & b_{ms} & q_s \\
v_{s+1} = & b_{1,s+1} & \dots\ b_{s,s+1} & b_{s+1,s+1} & \dots & b_{m,s+1} & q_{s+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
v_n = & b_{1n} & \dots\ b_{sn} & b_{s+1,n} & \dots & b_{mn} & q_n \\
\hline
w = & a_1 & \dots\ a_s & a_{s+1} & \dots & a_m & Q \\
\end{array}
\qquad (6.43)
$$

რომელშიც w სტრიქონის ყველა $a_1, \ldots, a_m$ კოეფიციენტი არაუარყოფითია, ხოლო თავისუფალ წევრთა შორის კიდევ ურევია უარყოფითები, მაგალითად, $q_s<0$, მაშინ ოპტიმალური ამონახსენი კიდევ არ არის ნაპოვნი და საჭიროა მისი მონახვა. Q სიდიდე გვაძლევს w-ს ქვემოდან შეფასებას.

ორადი სიმპლექსური მეთოდით ოპტიმალური ამონახსნის პოვნა შემდეგნაირად ხდება: ამომხსნელ სტრიქონად ვიღებთ ისეთს, რომელიც შეიცავს უარყოფით თავისუფალ წევრს, მაგალითად, ვთქვათ, მე-s სტრიქონს ($q_s<0$). შევარჩევთ ამ სტრიქონის ყველა დადებით კოეფიციენტს, მათზე ვყოფთ w სტრიქონის შესაბამის კოეფიციენტებს და ამომხსნელად ვიღებთ s სტრიქონის იმ კოეფიციენტს, რომლისთვისაც ამ ფარდობას ექნება მინიმალური მნიშვნელობა. თუ მე-s სტრიქონში არ არის დადებითი კოეფიციენტები, მაშინ ამოცანის შეზღუდვები წინააღმდეგობრივა.

ჩვეულებრივი ჟორდანისეული ბიჯის რამდენჯერმე განმეორებით ჩვენ ან მივიღებთ w-ს მინიმალურ მნიშვნელობას ანდა დავრწმუნდებით ამოცანის შეზღუდვათა წინააღმდეგობრივობაში.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ვიპოვოთ

$$z=4x_1-x_2$$

წრფივი ფორმის მინიმუმი, როცა სრულდება შემდეგი შეზღუდვები:

$$\begin{aligned}
y_1&=x_2-2\geqslant 0,\\
y_2&=-x_1+x_2+1\geqslant 0,\\
y_3&=x_1-x_2+1\geqslant 0,\\
y_4&=x_1-{}^3/_2\geqslant 0,\\
x_1&\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

შევადგინოთ ცხრილი

	x_1	x_2	1
$y_1=$	0	1	-2
$y_2=$	-1	1	1
$y_3=$	1	-1	1
$y_4=$	1	0	$-{}^3/_2$
$z=$	4	-1	0

z სტრიქონის უარყოფითი ელემენტის — 1-ის ზევით ვპოულობთ უარყოფით კოეფიციენტს — 1-ს, რომელიც მესამე სტრიქონზეა. ამ სტრიქონს მივიღებთ ამომხსნელად. ვიპოვით არაუარყოფით ფარდობებს $\frac{4}{1}$

და $\frac{-1}{-1}$. ამომხსნელ ელემენტად ვიღებთ -1-ს. ჩავატაროთ ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯი, მივიღებთ ცხრილს

	x_1	y_3	1
$y_1=$	1	-1	-1
$y_2=$	0	-1	2
$x_2=$	1	-1	1
$y_4=$	1	0	$-3/2$
$z=$	3	1	-1

ამ ცხრილში z-ის კოეფიციენტები დადებითია. მაშასადამე, შეიძლება ოპტიმალური ამონახსნის პოვნაზე გადასვლა. ამომხსნელად ვიღებთ მეოთხე სტრიქონს, რომლის თავისუფალი წევრი უარყოფითია ($-3/2$). ამ სტრიქონში ამომხსნელი ელემენტი იქნება 1. ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯის შემდეგ გვექნება

	y_4	y_3	1
$y_1=$			$1/2$
$y_2=$			2
$x_2=$			$5/2$
$x_1=$			$3/2$
$z=$	3	1	$7/2$

აქ ყველა თავისუფალი წევრი დადებითია, მაშასადამე, ოპტიმალური ამონახსენი იქნება $\min z=7/2$, რომელიც მიიღება როცა $x_1=3/2$, $x_2=5/2$.

ორადი სიმპლექსური მეთოდით w-ს მაქსიმუმის პოვნის ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ან ზემოთ აღწერილი წესით (მოვნახავთ რა w-ს მინიმუმს, ხოლო შედეგს ავიღებთ საწინააღმდეგო ნიშნით), ან თავიდანვე w-ს მაქსიმუმის მონახვით. ამ შემთხვევაში წინათ გამოყვანებულ წესში w სტრიქონის ყველა კოეფიციენტს არადადებითს გავხდით.

ორად სიმპლექსურ მეთოდში ჩვეულებრივი ჟორდანისეული გარდაქმნის ნაცვლად შეიძლება მოდიფიცირებული გარდაქმნა მოვახდინოთ. რადგანაც ამ შემთხვევაში ცხრილის ზედა სტრიქონში ცვლადები გადმოიწერებიან უარყოფითი ნიშნით, ამიტომ ამომხსნელი ელემენტის არჩევისას უნდა გვახსოვდეს, რომ ცხრილის ყველა კოეფიციენტის ნიშანი, გარდა თავისუფალი წევრების სვეტისა, საწინააღმდეგოა იმ ჩვეულებრივი ცხრილის კოეფიციენტების ნიშნისა, რომლისთვისაცაა ჩამოყალიბებული წესი. ამიტომ w-ს მინიმუმის პოვნას მაშინ შევუდ-

გებით, როცა w სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი გახდება არადადებითი, როგორც ეს გვქონდა ჩვეულებრივი სიმპლექსური მეთოდის დროს, ხოლო ამომხსნელად ვღებულობთ უარყოფით თავისუფალ წევრიან ამომხსნელი სტრიქონის იმ უარყოფით კოეფიციენტს, რომლისთვისაც w სტრიქონის შესაბამისი ამომხსნელი სტრიქონის უარყოფით კოეფიციენტებთან ფარდობა უმცირესია.

w-ს მაქსიმუმის მონახვას მაშინ დავიწყებთ, როდესაც w სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი გახდება არაუარყოფითი, როგორც ამას ვაკეთებდით ჩვეულებრივი სიმპლექსური მეთოდის დროს, ხოლო ამომხსნელად ვიღებთ ამომხსნელი სტრიქონის იმ უარყოფით კოეფიციენტს, რომლისთვისაც აბსოლუტური მნიშვნელობით უმცირესია w სტრიქონების კოეფიციენტების ამომხსნელი სტრიქონის შესაბამის უარყოფით კოეფიციენტებთან ფარდობა. ვთქვათ, სიმპლექსური მეთოდით ვეძებთ z-ის ექსტრემუმს. თუ საყრდნობი ამონახსნის მიღებისას ანდა საწყის ცხრილში z სტრიქონის ყველა კოეფიციენტს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ, მაშინ, ცხადია, უფრო მიზანშეწონილია ამოცანის ამოხსნის გაგრძელება ორადი სიმპლექსური მეთოდით, რადგანაც ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად საჭირო იქნება მხოლოდ უარყოფითი თავისუფალი წევრების მოშორება.

სიძნელის მხრივ, როგორც ჩვეულებრივი, ისე ორადი სიმპლექსური მეთოდი ერთნაირია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ჩვეულებრივი სიმპლექსური მეთოდის დროს ჩვენ ვუახლოვდებით მაქსიმალურ (მინიმალურ) ამონახსენს ქვემოდან (ზემოდან), როცა ვეძებთ საყრდნობ ამონახსენს, ხოლო ორადი სიმპლექსური მეთოდის გამოყენებისას ჩვენ ვუახლოვდებით მაქსიმალურ (მინიმალურ) ამონახსენს ზემოდან (ქვემოდან), ამავე დროს საშუალედო ამონახსენი უკვე არ იქნება საყრდნობი. სინამდვილეში, თუ საშუალედო (6.43) ცხრილში ზევით მოქცეულ ცვლადებს გავუტოლებთ ნულს, მაშინ, რადგანაც ზოგიერთი თავისუფალი წევრი ნულია, ზოგიერთი გვერდითი ცვლადი აგრეთვე უარყოფითი იქნება.

ხშირად, როდესაც ცვლადთა რაოდენობა შეზღუდვებში დიდია, მაშინ ერთი და იმავე ამოცანის ამოხსნა მოხერხებულია ორივე მეთოდის ერთდროულად გამოყენებით, რადგანაც მაშინ z ფორმის ოპტიმალურ მნიშვნელობამდე ჩვენ მივდივართ ერთდროულად ორივე მხრიდან — ზემოდან და ქვემოდან და, თუ წრფივი ფორმის შესაბამის მნიშვნელობათა შორის სხვაობა უმნიშვნელოა, შესაძლებელია გამოთვლის შეწყვეტა და ამოცანის მიღებული საყრდნობი ამონახსენი, რომელიც მიიღება სიმპლექსური მეთოდით, შეიძლება ჩაითვალოს ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად.

მთელრიცხვა პროგრამირების მეთოდი

ვთქვათ, ვეძებთ

$$z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \tag{1}$$

წრფივი ფორმის მაქსიმუმს, როდესაც ადგილი აქვს შეზღუდვებს:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \leqslant b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \end{array}\right\} \tag{2}$$

(2)-ს განსაზღვრავს Ω მრავალწახნაგა. მივიღოთ, რომ a_{ij} და b_i კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია. მთელრიცხვა პროგრამირება ნიშნავს დასმული ამოცანის ისეთნაირი ამონახსნის პოვნას, რომელიც მთელი რიცხვებით გამოისახება. ისეთი ტიპის ამოცანები, რომლებიც კმაყოფილდებიან მხოლოდ მთელრიცხვა ამონახსნებით, უამრავია.

პირდაპირ სიმპლექსური მეთოდის გამოყენება ყოველთვის როდი მიგვიყვანს მთელრიცხვა ამონახსნამდე. (2) პირობებში (1)-ის მაქსიმუმი რომ ვიპოვოთ ისე, რომ ამოხსნა მთელრიცხვა იყოს, სპეციალური მეთოდის გამოყენება იქნება საჭირო. ასეთია სწორედ მთელრიცხვა პროგრამირების მეთოდი.

ამ მეთოდს შემდეგი გეომეტრიული აზრი აქვს: ვიხილავთ შეზღუდვათა Ω მრავალწახნაგას მთელრიცხვა წერტილების სიმრავლეს. თუ მოვახერხებთ Ω მრავალწახნაგას შეცვლას მის მთელრიცხვა წერტილებში ამოზნექილი გარსით, მაშინ სიმპლექსური მეთოდით მიღებული ოპტიმალური ამონახსენი სახეშეცვლილი ამოცანისა იქნება მთელრიცხვა და ის ამავე დროს იქნება თავიდანვე დასმული ამოცანის მთელრიცხვა ოპტიმალური ამონახსენი.

რადგანაც ძალიან ძნელია ამოზნექილი გარსის აგება, ამიტომ აგებენ ისეთ საშუალედო მრავალწახნაგას, რომელიც შეიცავს ამ გარსს და თვითონ შედის Ω-ში. განხილულ მეთოდში ეს ხორციელდება ყოველი ბიჯის დროს დამატებითი შეზღუდვის შემოყვანით, რაც ამცირებს Ω მრავალწახნაგას ისე, რომ არ გამორიცხავს მისგან მთელრიცხვა წერტილებს. გარდა ამისა, დამატებით წრფივ შეზღუდვათა სიბრტყე გადის ერთ მაინც მთელრიცხვა წერტილზე. ბიჯთა სასრული რიცხვის შემდეგ მეთოდს მივყავართ ახალ ამოცანამდე, რომლის ოპტიმალური ამონახსენი ამავე დროს იქნება დასმული ამოცანის მთელრიცხვა ოპტიმალური ამონახსენი.

დასმული ამოცანის სიმპლექსური მეთოდით ამოხსნისას სასრულ რიცხვ ბიჯთა ჩატარების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

$$
\begin{array}{r|cccccccc|c|}
 & -y_1 & \dots & -y_s & -x_{s+1} & \dots & -x_n & & 1 \\
\hline
x_1= & b_{11} & \dots & b_{1s} & b_{1,s+1} & & b_{1n} & & a_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
x_s= & b_{s1} & \dots & b_{ss} & b_{s+1} & & b_{sn} & & a_s \\
y_{s+1}= & b_{s+1,1} & \dots & b_{s+1,s} & b_{s+1,s+1} & \dots & b_{s+1,n} & & a_{s+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
y_m= & b_{m1} & \dots & b_{ms} & b_{m,s+1} & \dots & b_{mn} & & a_m \\
\hline
z= & q_1 & \dots & q_s & q_{s+1} & \dots & q_n & & Q \\
\hline
\end{array}
$$

ამ ცხრილში ყველა თავისუფალი წევრი და z სტრიქონის კოეფიციენტები არაუარყოფითია, ასე რომ,

$$y_1= \dots =y_s=x_{s+1}= \dots =x_n=0, \quad x_1=a_1, \dots, x_s=a_s$$

გვაძლევს ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსენს.

თუ ყველა თავისუფალი წევრი არ არის მთელი რიცხვი, მაშინ ამოხსნა არ იქნება მთელრიცხვა. ასეთ შემთხვევაში პირველ რიგში ზემოთ დაწერილი ცხრილი შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$
\begin{array}{r|ccccc|c|}
 & -\xi_1 & \dots & -\xi_j & \dots & -\xi_n & 1 \\
\hline
\eta_1= & b_{11} & \dots & b_{1j} & & b_{1n} & a_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\eta_l= & b_{l1} & & b_{lj} & & b_{ln} & a_l \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\eta_m= & b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} & a_m \\
\hline
z= & q_1 & \dots & q_j & \dots & q_n & Q \\
\hline
\end{array}
\qquad (3)
$$

დავუშვათ a_l არამთელია. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\beta_{lj}=b_{lj}-[b_{lj}]=b_{lj}-n_{lj} \\
\text{და}\quad & \\
&\alpha_l=a_l-[a_l]=a_l-n_l,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4)
$$

სადაც $[a]$ ნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს, ე. ი. ის იქნება უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება a-ს.

ცხადია, რომ

$$n_{lj}\leqslant b_{lj}<n_{lj}+1, \quad n_l<a_l<n_l+1 \quad \text{და}$$
$$0\leqslant\beta_{lj}<1, \quad 0<\alpha_l<1.$$

შემოვიღოთ დამატებითი შეზღუდვა

$$s_l=-\beta_{l1}(-\xi_1)-\beta_{l2}(-\xi_2)-\dots-\beta_{ln}(-\xi_n)-\alpha_l\geqslant 0. \qquad (5)$$

მიღებული s_i იქნება მთელი არაუარყოფითი, თუკი ξ_j და η_i არიან მთელი და არაუარყოფითები.

მართლაც,

$$s_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) - \alpha_i = -\sum_{j=1}^{n} (b_{ij} - n_{ij})(-\xi_j) - \alpha_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(-\xi_j) - \alpha_i.$$

როგორც (3) ცხრილიდან ჩანს

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(-\xi_j) + a_i.$$

აგრეთვე (4)-დან გვაქვს

$$\alpha_i = a_i - n_i,$$

მაშინ s_i-თვის მივიღებთ

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) - \eta_i + a_i + n_i - a_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i.$$

s_i-ის უკანასკნელი გამოსახულება გვიჩვენებს იმას, რომ ის მთელია, რადგანაც

$$s_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) - \alpha_i.$$

აქ კი β_{ij} და ξ_j არაუარყოფითებია, ამიტომ

$$s_i \geqslant -\alpha_i > -1$$

და რადგანაც s_i მთელია, ცხადია, ის იქნება არაუარყოფითი. თუ განხილულ შემთხვევაში მოცემული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსენი არ არის მთელრიცხვა (რადგანაც $\eta_i = a_i$ არამთელია), მაშინ ის ვერ დააკმაყოფილებს დამატებით (5) შეზღუდვას, რადგანაც როცა $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$, გვექნება:

$$s_i = -\alpha_i = 0;$$

ასე რომ, დამატებითი (5) შეზღუდვა Ω მრავალწახნაგას ჩამოსჭრის

იმ ნაწილს, რომელიც შეიცავს არამთელრიცხვა ოპტიმალურ ამონახსენს და უნარჩუნებს მთელრიცხვა ამონახსნებს.

ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ $s_i=0$ სიბრტყე გადის რომელიმე მთელრიცხვა წერტილზე, რომელიც შეიძლება Ω-ს არც ეკუთვნოდეს.

შევიტანოთ დამატებითი შეზღუდვა ცხრილში და ამოვხსნათ სახეშეცვლილი ამოცანა. ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

	$-\xi_1$	. . .	$-\xi_j$	. . .	$-\xi_n$	1
$\eta_1=$	b_{11}		b_{1j}		b_{1n}	a_1
. .			. .	. . .	. .	. .
$\eta_i=$	b_{i1}	. . .	b_{ij}	.	b_{in}	a_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\eta_m=$	b_{m1}		b_{mj}		b_{mn}	a_m
$s_i=$	$-\beta_{i1}$	. . .	$-\beta_{ij}$	. . .	$-\beta_{in}$	$-\alpha_i$
$z=$	q_1	. . .	q_j	. . .	q_n	Q

ამგვარად, საჭიროა z წრფივი ფორმის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანის ამოხსნა, როდესაც (2) შეზღუდვებთან ერთად გვაქვს დამატებითი (5) შეზღუდვაც.

იმისათვის, რომ z სტრიქონის არაუარყოფითი კოეფიციენტების ნიშნები შევინარჩუნოთ, საჭიროა ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად ვისარგებლოთ ორადი სიმპლექსური მეთოდით. თუკი მიღებული ოპტიმალური ამონახსენი არ იქნება მთელრიცხვა, მაშინ გავიმეორებთ ხელახლა ჩატარებულ პროცედურას და ასეთ ბიჯთა სასრული რიცხვის ჩატარებისას ჩვენ მივიღებთ მთელრიცხვა ოპტიმალურ ამონახსენს ახალი და, მაშასადამე, დასმული ამოცანისა, თუკი ასეთი ამონახსენი საერთოდ არსებობს.

თუ ამოცანას მთელრიცხვა ამონახსენი არა აქვს, ამის ნიშანი ის იქნება, რომ, როდესაც თავისუფალი წევრი წილადი რიცხვია, მაშინ სხვა კოეფიციენტი ყველა მთელია, ასე რომ, ამ შემთხვევაში შესაბამის განტოლებას ამოხსნა არ ექნება მთელ რიცხვებში.

განვიხილოთ რ. გომორის მიერ გარჩეული შემდეგი მაგალითი: მოვნახოთ

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2&\leqslant 10,\\ x_1+4x_2&\leqslant 11,\\ 3x_1+3x_2+x_3&\leqslant 13 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

სისტემის ისეთი მთელრიცხვა ამონახსენი, რომელიც

$$z=4x_1+5x_2+x_3$$

წრფივ ფორმას მაქსიმუმს ანიჭებს.

(6) შეზღუდვები შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$y_1 = -3x_1 - 2x_2 + 10 \geqslant 0,$$
$$y_2 = -x_1 - 4x_2 + 11 \geqslant 0,$$
$$y_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 13 \geqslant 0$$

და შევადგინოთ ცხრილი

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	3	2	0	10
$y_2=$	1	$\boxed{4}$	0	11
$y_3=$	3	3	1	13
$z=$	−4	−5	−1	0

ჩავატაროთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვები. პირველი ბიჯის დროს ამომხსნელ ელემენტად მივიღოთ $a_{22}=4$. გარდაქმნის შედეგად გვექნება:

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	$\boxed{{}^{10}/_4}$	$-{}^2/_4$	0	${}^{18}/_4$
$x_2=$	${}^1/_4$	${}^1/_4$	0	${}^{11}/_4$
$y_3=$	${}^9/_4$	$-{}^3/_4$	1	${}^{19}/_4$
$z=$	$-{}^{11}/_4$	${}^5/_4$	−1	${}^{55}/_4$

თუ ამომხსნელ ელემენტად აქ მივიღებთ $a_{11}=\frac{10}{4}$-ს, მაშინ მორიგი ბიჯი მოგვცემს:

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_1=$	${}^4/_{10}$	$-{}^2/_{10}$	0	${}^{18}/_{10}$
$x_2=$	$-{}^1/_{10}$	${}^3/_{10}$	0	${}^{23}/_{10}$
$y_3=$	$-{}^9/_{10}$	$-{}^3/_{10}$	$\boxed{1}$	${}^7/_{10}$
$z=$	${}^{11}/_{10}$	${}^7/_{10}$	−1	${}^{187}/_{10}$

თუ კიდევ ერთხელ ჩავატარებთ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გამორიცხვის მორიგ ბიჯს $a_{33}=1$ ელემენტით, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1
$x_1=$	$4/_{10}$	$-2/_{10}$	0	$18/_{10}$
$x_2=$	$-1/_{10}$	$3/_{10}$	0	$23/_{10}$
$x_3=$	$-9/_{10}$	$-3/_{10}$	1	$7/_{10}$
$z=$	$2/_{10}$	$4/_{10}$	1	$194/_{10}$

ეს უკანასკნელი გვაძლევს ოპტიმალურ, მაგრამ არა მთელრიცხვა ამონახსენს, სახელდობრ:

$$x_1=\frac{18}{10},\quad x_2=\frac{23}{10},\quad x_3=7/_{10},\quad \max z=\frac{194}{10}.$$

მთელრიცხვა ამონახსნის მისაღებად, როგორც ეს ზემოთ ენახეთ, საჭიროა ახალი დამატებითი შეზღუდვის შემოყვანა. ასეთი შეზღუდვა იქნება:

$$s_3=1/_{10}y_1+7/_{10}\,y_2-7/_{10}\geqslant 0.$$

ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1
$x_1=$	$4/_{10}$	$-2/_{10}$	0	$18/_{10}$
$x_2=$	$-1/_{10}$	$3/_{10}$	0	$23/_{10}$
$x_3=$	$-9/_{10}$	$-3/_{10}$	1	$7/_{10}$
$s_3=$	$-1/_{10}$	$\boxed{-7/_{10}}$	0	$-7/_{10}$
$z=$	$2/_{10}$	$4/_{10}$	1	$194/_{10}$

z სტრიქონის ელემენტებს დადებითი ნიშნები რომ შევუნარჩუნოთ, ამისათვის გამოვიყენოთ ორადი სიმპლექსური მეთოდი. დადგენილი წესის მიხედვით ამომხსნელ ელემენტად ვიღებთ ბოლო სტრიქონის უარყოფით ელემენტს. სახელდობრ, $a_{42}=-7/_{10}$-ს, რადგანაც

$$\left|\frac{4}{10}:-\frac{7}{10}\right|<\left|\frac{2}{10}:-\frac{1}{10}\right|.$$

თუ მოდიფიცირებული ჟორდანისეული გარდაქმნის ბიჯს ჩავატარებთ, გვექნება:

	$-y_1$	$-s_3$	$-y_3$	1
$x_1=$				2
$x_2=$				2
$x_3=$				1
$y_2=$				1
$z=$	$1/7$	$4/7$	1	19

საიდანაც ვღებულობთ დასმული ამოცანის მთელრიცხვა ამონახსნებს

$$x_1=2,\quad x_2=2,\quad x_3=1$$

და, ამრიგად, ოპტიმალური ამონახსენი იქნება

$$\max z=19.$$

თავი III

ტრანსპორტის ამოცანა

§ 1. ამოცანის დასმა

წრფივი პროგრამირების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას ტრანსპორტის ამოცანა წარმოადგენს. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს.

ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots, A_m$ ქარხანაში ყოველდღიურად მზადდება ერთგვაროვანი პროდუქცია შესაბამისად $a_1, a_2, \dots, a_m$ ერთეულის რაოდენობით. საჭიროა მათი გადატანა $B_1, B_2, \dots, B_n$ დანიშნულების ადგილებში; ამასთან თითოეულ პუნქტში უნდა იქნეს გადატანილი შესაბამისად $b_1, b_2, \dots, b_n$ რაოდენობის ერთეული (ამგვარად, გვაქვს m ქარხანა და n გადასატანი პუნქტი). c_{ij}-ით აღვნიშნოთ A_i ქარხნიდან B_j პუნქტში ერთეული პროდუქციის გადატანის ღირებულება და ვიგულისხმოთ, რომ ის ცნობილია.

საჭიროა პროდუქციის გადატანის ისეთი გეგმის შედგენა, რომლის განხორციელებისას სატრანსპორტო ხარჯების რაოდენობა მინიმალური იქნება.

ვიგულისხმოთ, რომ ყველა ქარხანაში დამზადებული პროდუქციის რაოდენობა ემთხვევა ყველა პუნქტში მისატანად მოთხოვნილ პროდუქციათა საერთო ჯამს, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.1}$$

x_{ij}-ით აღვნიშნოთ პროდუქციის ერთეულთა ის რაოდენობა, რომელიც გადაიტანება A_i ქარხნიდან B_j პუნქტში. მაშინ პროდუქციათა ის რაოდენობა, რომელიც ყველა ქარხნიდან B_j პუნქტში მიიტანება იქნება:

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdot\cdot\cdot+x_{mj}=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

მაგრამ, რადგანაც B_j პუნქტში მოთხოვნილება არის b_j, ამიტომ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,$$

საიდანაც ვღებულობთ n-განტოლებიან წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\cdot\cdot\cdot+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\cdot\cdot\cdot+x_{m2}=b_2, \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdot\cdot\cdot+x_{mn}=b_n. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

მეორე მხრივ, A_i ქარხნიდან ყველა B_j პუნქტში გაგზავნილ პროდუქციათა რაოდენობა იქნება

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdot\cdot\cdot+x_{in}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

რომელიც პირობის თანახმად ემთხვევა A_i ქარხანაში დამზადებულ a_i პროდუქციათა საერთო რაოდენობას. ამგვარად, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,$$

საიდანაც მივიღებთ, აგრეთვე, m-განტოლებიან წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$
\left.\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}&=a_1,\\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}&=a_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}&=a_m.
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}
$$

(1.2) და (1.3) განტოლებათა მიღებული სისტემები შეიძლება მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} x_{ij}&=b_j \quad (j=1, 2, \ldots, n),\\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}&=a_i \quad (i=1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

ზემო ნათქვამის წარმოსადგენად შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

დანიშნულების პუნქტი / ქარხნები	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
	...	...	...	...	...	...	
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
მოთხოვნილება	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{i=1}^{m} a_i$

როგორც ამ ცხრილიდან ჩანს, i-ურ სტრიქონში მოთავსებულ ყველა x_{ij}-თა ჯამი არის A_i ქარხანაში დამზადებულ ყველა პროდუქციათა რაოდენობა a_i, ხოლო j-ური სვეტის ყველა x_{ij}-თა ჯამი არის B_j პუნქტში მოთხოვნილებათა b_j რაოდენობის ტოლი.

ამოცანის პირობის თანახმად გადატანის ყველა ხარჯი იქნება:

$$T=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\dots+c_{ij}x_{ij}+\dots+c_{mn}x_{mn}=\sum_{i,j}c_{ij}x_{ij} \qquad (1.5)$$

წრფივი პროგრამირების ამოცანას წარმოადგენს (1.4) სისტემის ყველა არაუარყოფითი ამონახსენთა შორის მოინახოს ისეთი, რომლისთვისაც T ფორმა მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

აქ, საზოგადოდ, შესაძლებელია წრფივი პროგრამირების ცნობილი მეთოდის, სიმპლექსური მეთოდის, გამოყენება. კერძოდ, განხილული ამოცანის ამოხსნისას, რადგანაც (1.4) სისტემები ძალიან მარტივია, გამოიყენება ე. წ. განმანაწილებელი მეთოდი, რომელიც სიმპლექსური მეთოდის გამარტივებული სახეა.

§ ბ. (1.4) სისტემის რანგი

(1.4) სისტემის რანგია $r=m+n-1$.

მართლაც, (1.4) განტოლებათა სისტემაში შედის mn უცნობი x_{ij}, ხოლო განტოლებათა რიცხვია $m+n$. თუ შევკრებთ (1.2) სისტემის ყველა განტოლებას, მივიღებთ:

$$\sum_{i,j} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

თუ შევკრებთ (1.3) სისტემის ყველა განტოლებას, გვექნება:

$$\sum_{i,j} x_{ij}=\sum_{i=1}^{m} a_i,$$

ე. ი., როგორც ზემოთ, დავწერთ:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (1.4) სისტემის განტოლებათა შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, ე. ი. სისტემის რანგი არ იქნება მეტი, ვიდრე $m+n-1$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $r=m+n-1$. როგორც ვიცით, კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად წრფივ განტო-

ლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემის მატრიცის რანგი ტოლი იყოს ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგისა. ამ თეორემის საფუძველზე (1.4) სისტემაში საკმარისია დავასახელოთ ისეთი $m+n-1$ უცნობები, რომლებიც ამ სისტემის დანარჩენი $mn-(m+n-1)$ უცნობებით შეიძლება გამოისახოს. ასეთ $m+n-1$ უცნობებად, რომლებიც დანარჩენებით გამოისახება, განვიხილოთ $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{m1}$, ე. ი. ის უცნობები, რომლებიც მოთავსებულია 1-ლი ცხრილის პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტში, ცხადია, რომ მათი რაოდენობა იქნება ზუსტად $m+n-1$.

(1.2) სისტემის მეორე განტოლებიდან დავწერთ:

$$x_{12}=b_2-x_{22}-x_{32}-\ldots-x_{m2}.$$

ანალოგიურად გვექნება:

$$x_{1j}=b_j-x_{2j}-x_{3j}-\ldots-x_{mj} \quad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n). \qquad (2.1)$$

ანალოგიურად, (1.3) სისტემის განტოლებათა მიხედვით მივიღებთ:

$$x_{i1}=a_i-x_{i2}-x_{i3}-\ldots-x_{in} \quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ m). \qquad (2.2)$$

დაბოლოს, x_{11}-ის გამოსასახავად გამოვიყენოთ (1.2) სისტემის პირველი განტოლება, მასში ჩავსვათ (2.2) სახით მიღებული $x_{i1}(i=2,\ 3,\ \ldots,\ m)$ მნიშვნელობანი, გვექნება:

$$\begin{aligned}x_{11}=b_1-x_{21}-\ldots-x_{m1}=b_1-(a_2-x_{22}-x_{23}-\ldots-\\-x_{2n})-(a_3-x_{32}-x_{33}-\ldots-x_{3n})-\ldots-\\-(a_m-x_{m2}-x_{m3}-\ldots-x_{mn}).\end{aligned}$$

ამგვარად, ჩვენ ფაქტიურად გამოვსახეთ ჩვენ მიერ არჩეული $m+n-1$ უცნობი დანარჩენი $mn-(m+n-1)$ უცნობით. მაშასადამე, (1.4) სისტემის რანგი r ტოლი ყოფილა $m+n-1$ სიდიდისა

$$r=m+n-1.$$

ამ უკანასკნელის დასამტკიცებლად ბაზისის უცნობებად ჩვენ ავარჩიეთ $x_{i1}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ და $x_{1j}(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, რამაც მსჯელობა გაგვიმარტივა. იმ შემთხვევაში, როდესაც ტრანსპორტის ამოცანას ვწყვეტთ ზოგადად სიმპლექსური მეთოდით, მაშინ არ არის სავალდებულო ბაზისის მნიშვნელობებად ავარჩიოთ x_{i1} და x_{1j}. უფრო მეტიც, ის ბაზისური ამოხსნა, რომელიც ბაზისის უცნობების ასეთ არჩევას შეესაბამება, შესაძლებელია დაუშვებელი აღმოჩნდეს.

§ 3. ტრანსპორტის ამოცანისათვის შესაძლო (საყრდენი) ამონახსნის არსებობა

1. ტრანსპორტის ნებისმიერი ამოცანისათვის არსებობს შესაძლო ამონახსენი, ანუ გეგმა. (1.4)-ის ძალით დავწერთ:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

რადგანაც

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

თუკი მათ საერთო მნიშენელობას M-ით აღვნიშნავთ, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M. \tag{3.1}$$

თუ განვიხილავთ

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n)$$

სიდიდეებს, ისინი განხილული ამოცანის ამონახსნები იქნებიან. მართლაც, ცხადია, რომ

$$x_{ij} \geqslant 0,$$

ხოლო

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{1}{M} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

აქ, თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.1)-ს, დავწერთ:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M}=\frac{1}{M} b_j \sum_{i=1}^{m} a_i=b_j.$$

მაშასადამე, x_{ij} სიდიდეთა სისტემა აკმაყოფილებს ტრანსპორტის ამოცანის ყველა პირობას და წარმოადგენს შესაძლო ამონახსენს, ანუ გეგმას.

დავუშვათ, $m=2$ და $n=3$. ამოვწეროთ (1.4)-ის თანახმად სათანადო განტოლებანი. გვექნება:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2,\\
&x_{11}+x_{21}=b_1,\\
&x_{12}+x_{22}=b_2,\\
&x_{13}+x_{23}=b_3.
\end{aligned}$$

სულ გვაქვს 5 განტოლება. ბოლო სამი განტოლება შევკრიბოთ და მას გამოვაკლოთ მეორე განტოლება, გვექნება:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}=b_1+b_2+b_3-a_2=b_1+b_2+b_3-(a_1+a_2)+a_1;$

მაგრამ, რადგანაც

$$\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{i=1}^{m} a_i,$$

მივიღებთ:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,$$

ე. ი. მივიღეთ პირველი განტოლება. ეს იმას ნიშნავს, რომ პირველი განტოლება, საზოგადოდ, ზედმეტია და შესაძლებელია სისტემიდან მისი გამორიცხვა.

საზოგადოდ, რადგანაც, როგორც ენახეთ, (1.4) სისტემის რანგი $r=n+m-1$-ს, ამ სისტემიდან ერთი განტოლების გამორიცხვა შეიძლება და, ამგვარად, გვექნება $n+m-1$ განტოლება nm უცნობით.

კერძო შემთხვევისათვის ($m=2$, $n=3$) მივიღებთ შემდეგ შემოკლებულ მატრიცას:

$$A=\left(\begin{array}{cccccc}
\vec{P}_{11} & \vec{P}_{12} & \vec{P}_{13} & \vec{P}_{21} & \vec{P}_{22} & \vec{P}_{23}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

და

$$\vec{P}_0=\begin{pmatrix} a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{P}_{ij}$ ვექტორი x_{ij} უცნობს შეესაბამება.

$X=(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{mn})$-ით აღვნიშნოთ ის სვეტ-ვექტორი, რომლის mn კომპონენტი ემთხვევა x_{ij} სიდიდეებს, ხოლო $C=(c_{11}, \ldots, c_{ij}, \ldots, c_{mn})$-ით აღვნიშნოთ ის ვექტორ-სტრიქონი, რომლის კომპონენტები ტოლია c_{ij} გადატანის ღირებულებების.

მიღებული აღნიშვნების დახმარებით ტრანსპორტის ამოცანა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\left.\begin{array}{l} AX=\vec{P}_0, \\ X\geqslant 0 \\ CX - \text{minimum} \end{array}\right\}$$

როგორც ალგებრის ელემენტების შესწავლისას ვნახეთ, განტოლებათა სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვი მის რანგს ემთხვევა. ჩვენ მიერ განხილულ განტოლებათა სისტემაში $n+m$ განტოლება შედის, ხოლო მისი რანგი, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, არის $n+m-1$. ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ დასმული ამოცანის ოპტიმალური გეგმა, ანუ ამონახსენი x_{ij} დადებით გამოსახულებათა $n+m-1$ სიდიდეზე არაუმეტეს მნიშვნელობებს შეიცავს.

შევადგინოთ პირველი საწყისი ამონახსენი, ანუ გეგმა. ამისათვის სიმარტივისათვის განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომელშიც შედის 7 განტოლება და 12 უცნობი.

სახელდობრ:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=a_2, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=a_3, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=b_4. \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

შევადგინოთ შესაბამისი ცხრილი.

ცხრილი 1

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	a_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
b_1	b_2	b_3	b_4	

ამ ცხრილის ბოლო სტრიქონში მოთხოვნილებათა რაოდენობაა ნაჩვენები, ხოლო ბოლო სვეტში კი წარმოება (დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა).

გამოსავალი საწყისი ამონახსნის შესადგენად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გამოვიყენოთ ე. წ. ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის წესი. ერთმანეთს შევადაროთ a_1 და b_1. ვთქვათ, $b_1>a_1$, მაშინ x_{11}-ის ადგილას ახალ ცხრილში ჩავწეროთ a_1, ხოლო რადგანაც პირველ სტრიქონში მოთავსებულ ელემენტთა ჯამი უნდა იყოს a_1, ამიტომ დანარჩენებში ჩავწეროთ ნულები. სხვა სტრიქონები დავტოვოთ უცვლელად. გვექნება:

$$\begin{array}{cccc|c} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\ \hline b_1-a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

ახლა ერთმანეთს შევადაროთ a_2 და b_1-a_1. ვთქვათ, $a_2>b_1-a_1$ მაშინ მეორე სტრიქონის პირველ ელემენტის ადგილას ჩავწეროთ b_1-a_1, ე. ი. $x_{21}=b_1-a_1$. მაშინ, ცხადია, რადგანაც პირველი სვეტის ელემენტთა ჯამია b_1, ამიტომ $x_{31}=0$ და უკანასკნელი ცხრილი შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{array}{cccc|c} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2-b_1+a_1 \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\ \hline 0 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

ახლა ერთმანეთს შევადაროთ b_2 და $a_2-b_1+a_1$. ვთქვათ, $a_2-b_1+a_1>b_2$, მაშინ მეორე სტრიქონის მეორე ელემენტს შევცვლით b_2-ით, ე. ი. $x_{22}=b_2$ და გვექნება შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{array}{cccc|c} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1-a_1 & b_2 & x_{23} & x_{24} & a_2-b_2-b_1+a_1 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & a_3 \\ \hline 0 & 0 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

დავუშვათ, რომ $a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$, მაშინ $x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b$ და ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{array}{cccc|c}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_1 - a_1 & b_2 & a_2 - b_1 + a_1 - b_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{33} & x_{34} & a_3 \\
\hline
0 & 0 & b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2 & b_4 &
\end{array}$$

ახლა კი აშკარაა, რომ $x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$ და $x_{34} = b_4$. ამგვარად, გვექნება შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{array}{cccc|c}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_1 - a_1 & b_2 & a_2 - b_1 + a_1 - b_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2 & b_4 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

როცა ამ ცხრილებს ვადგენდით, მაშინ ყოველი x_{ij} მიიღებოდა a_i და b_j სიდიდეთა კომბინაციების შეკრებით და გამოკლებით. რადგანაც ისინი არაუარყოფითი სიდიდეებია და გამოკლების დროს უდიდეს ვაკლებდით უმცირესს, ყველა მიღებული მნიშვნელობანი ცხრილში იქნება არაუარყოფითი. ამგვარად, პირველი საწყისი ამონახსენი შედგება მხოლოდ არაუარყოფითი რიცხვებისაგან, რომელთა რაოდენობა იქნება $3+4-1=6$.

თუ შევადგენთ ამ ამონახსნის შესაბამის ვექტორებს, რომლებიც შეესაბამებიან მიღებულ დადებით რიცხვებს, ვნახავთ, რომ ისინი წრფივად დამოუკიდებელნი იქნებიან, რითაც დადგინდება, რომ აგებული გეგმა წარმოადგენს ამონახსენს.

მართლაც (3.2) განტოლებათა სისტემას თუ განვიხილავთ, პირველი განტოლება დანარჩენების კომბინაციას წარმოადგენს და დარჩენილი 6 განტოლების შესაბამისი ვექტორები იქნებიან:

$$\vec{P}_{11}(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{P}_{12}(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{P}_{13}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$\vec{P}_{14}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1),$$
$$\vec{P}_{21}(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{P}_{22}(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{P}_{23}(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0),$$

$$\vec{P}_{24}(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1),$$
$$\vec{P}_{31}(0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{P}_{32}(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{P}_{33}(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$\vec{P}_{34}(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\ ,\ 1).$$

ცხადია, რომ ჩვენ მიერ პირველი პროგრამის შედგენისას მიღებული არაუარყოფითი მნიშვნელობების შესაბამისი ვექტორები იქნებიან: $\vec{P}_{11}$, $\vec{P}_{21}$, $\vec{P}_{22}$, $\vec{P}_{23}$, $\vec{P}_{33}$ და $\vec{P}_{34}$. ვაჩვენოთ, რომ ესენი წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. ამისათვის საჭიროა, ვაჩვენოთ რომ თუკი

$$C_1\vec{P}_{11}+C_2\vec{P}_{21}+C_3\vec{P}_{22}+C_4\vec{P}_{23}+C_5\vec{P}_{33}+C_6\vec{P}_{34}=0, \tag{3.3}$$

მაშინ ყველა C_i $(i=1,\ .\ .\ .,\ 6)$ უდრის ნულს.
მართლაც, (10) ტოლობის ძალით დავწერთ

$$\vec{P}_{11}(0,0,C_1,0,0,0)+\vec{P}_{21}(C_2,0,C_2,0,0,0)+\vec{P}_{22}(C_3,0,0,C_3,0,0)+$$
$$+\vec{P}_{23}(C_4,0,0,0,C_4,0)+\vec{P}_{33}(0,C_5,0,0,C_5,0)+\vec{P}_{34}(0,C_6,0,0,0,C_6)=0.$$

ანდა აქედან დავწერთ

$$\vec{P}(C_2+C_3+C_4,\ C_5+C_6,\ C_1+C_2,\ C_3,\ C_4+C_5,\ C_6)=\vec{P}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

საიდანაც გვექნება:

$$C_2+C_3+C_4=0,$$
$$C_5+C_6=0,$$
$$C_1+C_2=0,$$
$$C_3=0$$
$$C_4+C_5=0,$$
$$C_6=0.$$

თუ მიღებულ სისტემას ამოვხსნით, გვექნება:

$$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=C_6=0.$$

ამგვარად, პირველი საწყისი გეგმის შედგენისას მიღებული არაუარყოფით მნიშვნელობათა შესაბამისი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელნი ყოფილან. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ შედგენილი გეგმა წარმოადგენს შესაძლო ამონახსენს.

ვთქვათ, მივიღეთ საწყისი ამონახსენი, რომელიც შემდეგი ცხრილის სახითაა მოცემული:

3	0	0	0	0	3
0	2	3	1	0	6
0	0	4	1	2	7
3	2	7	2	2	

ყოველი გეგმა დაკავშირებულია $m+n-1$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემასთან. აღებულ მაგალითში x_{ij} დადებით მნიშვნელობებთან დაკავშირებული ვექტორებია: $\overline{P}_{11}$, $\overline{P}_{22}$, $\overline{P}_{23}$, $\overline{P}_{24}$, $\overline{P}_{33}$, $\overline{P}_{34}$, $\overline{P}_{35}$. ამ ვექტორების მიერ შედგენილი ბაზისი აღვნიშნოთ B-თი, მაშინ $BX=\overline{P}_0$ სისტემის ამონახსენი უნდა დაემთხვეს ჩვენ მიერ მიღებულ საწყის ამოხსნას.

განხილულ შემთხვევაში სვეტ-ვექტორი იქნება

$$X=(x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{33},\ x_{34},\ x_{35}).$$

ჩვენ მიერ შედგენილი გეგმა იქნება ძირითადი შესაძლო ამონახსენი. როგორც ვიცით, ოპტიმალური გეგმა აირჩევა სწორედ ძირითად შესაძლო ამონახსენთა ერთობლიობიდან.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა a_i და b_j მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, მაშინ ძირითად შესაძლო ამონახსნებში შემავალი რიცხვებიც არაუარყოფითი მთელი რიცხვები იქნება.

როგორც ამონახსნის შედგენისას ვნახეთ, მასში შემავალი რიცხვები მიიღებიან a_i და b_j რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების შედეგად ისე, რომ გამოკლებისას ყოველთვის უდიდესს ვაკლებდით უმცირესს (ცალკე აღებული ყოველი სხვაობა არაუარყოფითია) და, ცხადია, რომ ამონახსენში შემავალი რიცხვები იქნებიან მთელი არაუარყოფითი რიცხვები.

2. ტრანსპორტის ნებისმიერ ამოცანას აქვს ოპტიმალური შესაძლო ამონახსენი. როგორც ვნახეთ, ამოცანას აქვს ერთი მაინც შესაძლო ამონახსენი. რადგანაც (1.4) განტოლებათა კოეფიციენტები და a_i, b_j სიდიდეები არაუარყოფითნი და სასრულნი არიან, ამიტომ ყველა x_{ij} შემოსაზღვრულია ზემოდან. მართლაც, x_{ij} არ შეიძლება მეტი იყოს ვიდრე a_i ან b_j.

ამგვარად, ამონახსენთა სიმრავლე არაცარიელია და შემოსაზღვრულია. მაშასადამე, ამოცანის ამოხსნა შეიძლება, ე. ი. ამოცანას აქვს ოპტიმალური შესაძლო ამონახსენი. თუ a_i და b_j მთელი რიცხვებია,

მაშინ ოპტიმალურ შესაძლო ამონახსენი მთელი რიცხვებისაგან შედგება.

ცხადია, რომ იმ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, რომელშიაც $m+n-1$ განტოლებაა და nm უცნობი, შესაძლებელია ჩვეულებრივი სიმპლექსური მეთოდით. მაგრამ იმ შემთხვევაშიაც კი, როდესაც m და n-ის მნიშვნელობანი არც ისე დიდია, სისტემის ამოხსნა ხელით გამოთვლის დროს შრომატევადი და მოუხერხებელია. შესაძლებელია, რომ ასეთი სისტემები მათი სიდიდის გამო მოუხერხებელი იყოს ელექტრონული ციფრული მანქანებისათვისაც. ამ სიძნელეების თავიდან აცილება შეიძლება ტრანსპორტის ამოცანისათვის სიმპლექსური ალგორითმის სახეცვლილებით, რომელიც ცნობილია განმანაწილებელი მეთოდის სახელწოდებით. იტერაციული პროცესის დასაწყებად საჭიროა გვქონდეს ამოცანის შესაძლო ამონახსენი. ვიცით, რომ ის ვექტორები, რომლებიც დაკავშირებულია შესაძლო ამონახსენის ცვლადებთან, წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. თუ შესაძლო ამონახსენი არ არის გადაგვარებული, მაშინ ის პროცესის მოთხოვნილებებს აკმაყოფილებს, მაგრამ თუ შესაძლო ამონახსენი გადაგვარებულია, ე. ი. თუ ამონახსენში დადებით მნიშვნელობათა რაოდენობა ნაკლებია, ვიდრე $n+m-1$, მაშინ პროცესის მოთხოვნილებები დაუკმაყოფილებელი რჩება.

მაგალითად, ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი გადაგვარებული შესაძლო ამონახსენი:

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 1 & 2 &
\end{array}$$

აქ დადებითია მხოლოდ $m+n-2=6$ რიცხვი. ასეთი შემთხვევა გვექნება ყოველთვის, როდესაც რამდენიმე ოპერაციის შემდეგ პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც უნდა იქნეს გატანილი i პუნქტიდან ტოლია j პუნქტში მისატან პროდუქციათა რაოდენობისა, გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც ერთდროულად $i=m$ და $j=n$.

განხილულ მაგალითში ამას აქვს ადგილი x_{23}-თვის. მართლაც,

$$x_{23}=min(a_2-x_{22},\ b_3)=(3,3)=3.$$

ასეთი გადაგვარებული შემთხვევის დროს საჭიროა $n+m-1$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემის შერჩევა.

თუ გადაგვარებული შემთხვევისას შესაძლო ამონახსენი შეიცავს k დადებით რიცხვს, რომელიც ნაკლებია $n+m-1$-ზე, მაშინ დამატე-

ბით უნდა შევარჩიოთ $m+n-1-k$ ნულოვანი რიცხვი. მიღებული k ვექტორი და ნულოვანი ცვლადების შესაბამისი $n+m-1-k$ ვექტორი ურთიერთწრფივად დამოუკიდებელი უნდა იყოს. ნულოვანი რიცხვების შერჩევა ხდება ე. წ. ε-მეთოდის დახმარებით.

განვიხილოთ ცხრილი, რომელიც შევადგინეთ პირველი საწყისი ამონახსნის მისაღებად, როცა $n=3$ და $m=4$. თუ

$$x_{21}=b_1-a_1=a_2,$$

მაშინ არც x_{22} და არც x_{31} არ შეიძლება იყოს დადებითი. ანალოგიურად, თუ შემდეგ იმავე გეგმის შედგენისას

$$x_{22}=b_2=a_2-b_1+a_1,$$

მაშინ არ შეიძლება დადებითი იყოს არც x_{23} და არც x_{32}; ყოველთვის, როცა ასეთი სიტუაცია წარმოიშვება, გეგმაში დადებით რიცხვთა რაოდენობა ერთით მცირდება. ასეთი გადაგვარებული შემთხვევა მაშინ გვექნება, როცა ნაწილი a_i-ების ჯამი ემთხვევა ნაწილ b_j-ების ჯამს. უკანასკნელ მაგალითში გადაგვარებული შემთხვევა იმიტომ გვქონდა რომ

$$x_{23}=min(b_3,\ a_2-b_2+a_1-b_1) \text{ და } b_3=a_2-b_2+a_1-b_1=3.$$

გადაგვარებული შემთხვევის დროს შექმნილი სიტუაციის თავიდან ასაცილებლად საჭიროა არ გვქონდეს a_i და b_j სიდიდეთაგან შემდგარი ნაწილობრივი ჯამების ტოლობა. ამის მიღწევა შეიძლება, თუ უმნიშვნელოდ შევცვლით a_i და b_j სიდიდეებს.

დავუშვათ ε მცირე დადებითი რიცხვია და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_i^*=a_i+\varepsilon \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$
$$b_j^*=b_j \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$
$$b_n^*=b_n+m\varepsilon.$$

გამოვიყენოთ ε-მეთოდი უკანასკნელი მაგალითის შემთხვევაში, გვექნება

1	2+ε	0	0	0	3+ε
0	1—ε	3	2ε	0	4+ε
0	0	0	1—2ε	2+3ε	3+ε
1	3	3	1	2+ε	

შესაძლო ამონახსენი ახლა შეიცავს $x_{24}=2\varepsilon>0$ რიცხვს. ამგვარად, ε-მეთოდი განსაზღვრავს, თუ იმ ორი ცვლადისაგან, რომელთაც ნუ-

ლოვანი მნიშვნელობა აქვთ, რომელი უნდა შევიყვანოთ შესაძლო ამონახსენში. განხილულ მაგალითში აუცილებელი იყო x_{24} და x_{33} შორის ერთ-ერთის შერჩევა. მათგან ერთ-ერთის შერჩევა გვაძლევს $m+n-1$ ვექტორთაგან შედგენილ ბაზისს. შესაძლებელია ორი ნულოვანი მნიშვნელობის მქონე ცვლადიდან იმის არჩევა, რომელსაც ნაკლები c_{ij} შეესაბამება. აქ შეიძლება დაციკლების საშიშროება იყოს. მაგრამ სინამდვილეში ტრანსპორტის არც ერთი ამოცანა არაა ცნობილი, რომელსაც დაციკლებამდე მივყავდეთ.

§ 4. ტრანსპორტის ამოცანა კონკრეტულ მაგალითზე

ვთქვათ, მოცემულია 3 ქარხანა, სადაც ერთგვაროვანი პროდუქცია მზადდება, და 5 ობიექტი, რომლებშიაც უნდა გაიგზავნოს დამზადებული პროდუქცია. სიმბოლურად ქარხნები აღვნიშნოთ A_1, A_2 და A_3-ით, ხოლო ობიექტები B_1, B_2, B_3, B_4 და B_5-ით.

დავუშვათ, რომ A_1 ქარხანაში ყოველდღიურად მზადდება პროდუქციის 40 000 ერთეული, A_2-ში 25 000, ხოლო A_3-ში 35 000. ობიექტების მიხედვით ყოველდღიური მოთხოვნილება შემდეგნაირადაა განაწილებული შესაბამისად: 10 000, 15 000, 20 000, 25 000, 30 000.

შევადგინოთ ე. წ. მოთხოვნილებათა ცხრილი. მას შემდეგი სახე ექნება:

ცხრილი 2

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა
A_1	**10 000**	**15 000**	**15 000**			40 000
A_2			**5 000**	**20 000**		25 000
A_3				**5 000**	**30 000**	35 000
მოთხოვნილება	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000	100 000

განაწილების შედეგად მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობანი შავი შრიფტითაა აღნიშნული.

ვთქვათ, ერთეული პროდუქციის გადატანის ხარჯები (კაპიკობით) სათანადო ქარხნიდან სათანადო ობიექტებში მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ მე-3 ცხრილში.

ცხრილი 3

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	7	6	3	4
A_2	9	8	2	4	3
A_3	6	3	8	5	4

როგორც მე-2 ცხრილიდან ჩანს, სამივე ქარხანაში დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა უდრის ხუთივე ობიექტის საერთო მოთხოვნილებათა რაოდენობას.

მე-2 ცხრილში თავისუფალ უჯრედებში უნდა ჩაიწეროს ქარხნებიდან სათანადო ობიექტებზე გადასატან პროდუქციათა რაოდენობა. კერძოდ, A_2 ქარხნის შესაბამის სტრიქონისა და B_2 ობიექტის შესაბამის სვეტის გადაკვეთაზე ჩაიწერება პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც A_2 ქარხნიდან B_2 ობიექტზე უნდა იქნეს გადატანილი.

მე-2 ცხრილის ზედა მარცხენა უჯრედში ჩავწეროთ B_1 ობიექტის მოთხოვნილება 10 000, იმავე სტრიქონის მეორე უჯრედში კი B_2 ობიექტის მოთხოვნილება 15 000, ხოლო იმავე სტრიქონის მესამე უჯრედში A_1 ქარხანაში დამზადებულ პროდუქციათა საერთო რაოდენობიდან დარჩენილი პროდუქცია, ე. ი. 15 000.

გადავიდეთ A_2-ის შესაბამის სტრიქონზე. აქ B_1 და B_2 ობიექტების მოთხოვნილება დაკმაყოფილებულია; B_3-ს შევუვსოთ მოთხოვნილება 20 000-მდე, ე. ი. A_2-ისა და B_3-ის გადაკვეთაზე დაიწერება 5000. A_2-ისა და B_4-ის გადაკვეთაზე დაიწერება A_2 ქარხანაში დამზადებული პროდუქციიდან დარჩენილი 20 000. A_3-ის შესაბამის სტრიქონზე B_1-ის, B_2-ისა და B_3-ის ქვემოთ არაფერი დაიწერება, რადგანაც მათი მოთხოვნილებანი დაკმაყოფილებულია; B_4-ს შევუვსოთ თავისი მოთხოვნილება 25 000-მდე, ე. ი. A_3-ისა და B_4-ის გადაკვეთაზე დაიწერება 5000, ხოლო A_3-ისა და B_5-ის გადაკვეთაზე კი დაიწერება B_5-ის მოთხოვნილება 30 000.

ამგვარად, მივიღეთ პირველი განაწილება, რომელმაც დაიკავა 7 უჯრედი. საერთოდ, გვაქვს 3 სტრიქონი და 5 სვეტი. მიღებული მატრიცის რანგი იქნება 3+5 — 1=7. სწორედ ამიტომ მივიღეთ განაწილება 7 უჯრედზე.

ახლა ჩვენი მაგალითისათვის შევადგინოთ 1-ლი ცხრილის ანალოგიური ცხრილი.

ც ხ რ ი ლ ი 4

ობიექტები / ქარხნები	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა
A_1	5 10000	7 15000	6 15000	3 —	4 —	40000
A_2	9 —	8	2 5000	4 20000	3 —	25000
A_3	6 —	3 —	8 —	5 5000	4 30000	35000
მოთხოვნილება	10000	15000	20000	25000	30000	100 000 / 100 000

მე-4 ცხრილის დახმარებით ვიანგარიშოთ გადატანის ხარჯების, T ფორმის, მნიშვნელობა:

$$T=5\times10000+7\times15000+6\times15000+2\times5000+4\times20000+$$
$$+5\times5000+4\times30000=480000.$$

მგვარად, მივიღეთ, რომ პირველი პროგრამის მიხედვით გაწეული სატრანსპორტო ხარჯების რაოდენობა ყოფილა 4800 მანეთი.

ახლა ისმება საკითხი მიღებული პირველი პროგრამის გაუმჯობესების შესახებ. შესაძლებელია შედგენილი პირველი პროგრამა საუკეთესოც აღმოჩნდეს, მაშინ, რა თქმა უნდა, მიღებული პროგრამის გაუმჯობესება არ შეიძლება, ე. ი. ქარხნებში დამზადებული პროდუქციის სათანადო ობიექტებში მისატანად უფრო ნაკლები დანახარჯით ვერ დავკმაყოფილდებით.

პირველი პროგრამის შემოწმებისას საჭიროა მე-2 ცხრილში ყველა თავისუფალი უჯრედის შეფასება. ეს კი შესაძლებლობას მოგვცემს ენა-

ხოთ, თუ რამდენად მიზანშეწონილია რომელიმე გადასატანი პროდუქციის ერთ-ერთ თავისუფალ უჯრედში გადასმა. როდესაც რომელიმე თავისუფალ უჯრედში სხვა უჯრედიდან პროდუქციათა გარკვეულ რაოდენობას გადავსვამთ, ცხადია, რომ მისი კომპენსირება უნდა მოხდეს სხვა ქარხნიდან.

თავისუფალი უჯრედების შესაფასებლად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: შესაფასებელი უჯრედიდან ჰორიზონტალურად გავავლოთ სწორი ხაზი უჯრედამდე, რომელიც შეიცავს პირველი შავი შრიფტით ჩაწერილ რიცხვს, შემდეგ ეს ხაზი 90°-იანი კუთხით მოვაბრუნოთ ისევ მორიგი, შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის შეხვედრამდე, რის შემდეგ ანალოგიურ შემთხვევაში ისევ მოვაბრუნოთ სწორი ხაზი მანამ, სანამ არ დავუბრუნდებით შესაფასებელ უჯრედს. დასაშვებია ზოგიერთი შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის შემცველი უჯრედის გამოტოვება, თუკი წინააღმდეგ შემთხვევაში ვერ დავუბრუნდებით შესაფასებელ უჯრედს. როცა გავავლებთ რამდენიმე ჰორიზონტალურ და რამდენიმე ვერტიკალურ ხაზს და დავუბრუნდებით შესაფასებელ უჯრედს, მაშინ შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის შემცველ უჯრედებში, რომლებიც გავიარეთ (გამოტოვებულის გარეშე), ჩავწეროთ ერთეული პროდუქციის სატრანსპორტო ხარჯების რაოდენობანი მე-3 ცხრილიდან. პირველ მათგანს მივაკუთვნოთ დადებითი ნიშანი, ხოლო მომდევნოების ნიშანი ვცვალოთ რიგრიგობით. მიღებული მნიშვნელობანი შევკრიბოთ და მიღებულ რიცხვს გამოვაკლოთ ერთეული პროდუქციის გადატანის ის ღირებულება, რომელიც ეწერა შესაფასებელ უჯრედში მე-3 ცხრილიდან. მიღებული მნიშვნელობა იქნება აღებული თავისუფალი უჯრედის შეფასება. ასევე გაეიმეორებთ ყველა თავისუფალი უჯრედის მიმართ.

მაგალითად, A_1-ისა და B_4-ის გადაკვეთის შესაბამისი უჯრედის შესაფასებლად მისგან ვატარებთ ჰორიზონტალურ ხაზს A_1-ისა და B_3-ის გადაკვეთამდე. რადგან აქ გვხვდება შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი, ხაზს 90°-ით ვაბრუნებთ ქვევით. აქ A_2-ისა და B_3-ის გადაკვეთაზე დგას ისევ შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი, მაშასადამე, აქაც მოვაბრუნებთ ხაზს 90° კუთხით მარჯვნივ (რათა სწრაფად დავუბრუნდეთ შესაფასებელ უჯრედს). აქაც A_2-ისა და B_4-ის გადაკვეთაზე გვხვდება შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი. მოვაბრუნებთ ხაზს ზემოთ 90°-იანი კუთხით და მივალთ შესაფასებელ უჯრედამდე. V რიგი ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ხაზების გავლებისას გავიარეთ 3 შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის შემცველი უჯრედი, რომელთა ადგილას მე-3 ცხრილში შესაბამისად იდგა 6,2 და 4. პირველ მათგანს მივანიჭოთ დადებითი ნიშანი, მეორეს — უარყოფითი, ხოლო მესამეს — ისევ დადებითი. მათი ალგებრული ჯამი იქნება 8. მიღებულ რიცხვს გამოვაკ-

ლოთ ის რიცხვი, რომელიც შესაფასებელ უჯრედში ეწერა მე-3 ცხრილიდან, კერძოდ, 3, მივიღებთ 5-ს, რომელიც იქნება აღებული უჯრედის შეფასება და მას შევიტანთ ცხრილში.

ანალოგიურად შევაფასებთ A_1-ისა და B_5-ის გადაკვეთის უჯრედს. მისგან ვავლებთ ჰორიზონტალურ ხაზს A_1-ისა და B_3-ის გადაკვეთამდე, შემდეგ ვაბრუნებთ მას ვერტიკალურად ქვევით. A_2-ისა და B_3-ის გადაკვეთაზე ვაბრუნებთ მას მარჯვნივ A_2-ისა და B_4-ის გადაკვეთამდე, შემდეგ — ქვევით A_3-ისა და B_4-ის გადაკვეთამდე, შემდეგ — მარჯვნივ A_3-ისა და B_5-ის გადაკვეთამდე, დაბოლოს, ზემოთ — შესაფასებელ უჯრედამდე. ამჯერად გავიარეთ 5 შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის შემცველი უჯრედი, რომელთა შესაბამისი რიცხვები მე-3 ცხრილიდან არის 6, 2, 4, 5 და 4. თუ პირველს მივაწერთ დადებით ნიშანს, დანარჩენს რიგრიგობით შევუცვლით ნიშანს და ალგებრულად შევკრებთ, მივიღებთ 7-ს. მიღებულს გამოვაკლოთ ის რიცხვი, რომელიც იდგა მე-3 ცხრილში შეფასებული უჯრედის შესაბამისად, მივიღებთ 3-ს. ეს იქნება A_1-ის ადა B_5-ის გადაკვეთის შესაბამისი თავისუფალი უჯრედის შეფასება. სავსებით ანალოგიურად შეფასდება ყველა სხვა თავისუფალი უჯრედი. ყველა მათგანის შეფასება მოცემულია მე-5 ცხრილში.

ცხრილი 5

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა
A_1	10000	15000	15000	5	3	40000
A_2	—8	—5	5000	20000	0	25000
A_3	—4	1	—5	5000	30000	35000
მოთხოვნილება	10000	15000	20000	25000	30000	100000

რადგანაც უკანასკნელ ცხრილში ზოგიერთი უჯრედის შეფასება დადებითია, ეს იმას ნიშნავს, რომ ადრინდელი პროგრამის გაუმჯობესება შეიძლება. კერძოდ, ყველაზე დიდი შეფასების მქონე უჯრედში გადატანილ უნდა იქნეს ერთ-ერთი შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი. სახელდობრ, ის იქნება შავი შრიფტით ჩაწერილი ისეთი მინიმალური

რიცხვი, რომელიც მონაწილეობდა აღებული უჯრედის შეფასებაში და ჰქონდა დადებითი ნიშანი. ჩვენს შემთხვევაში მაქსიმალური დადებითი შეფასება მიიღო A_1-ისა და B_4-ის გადაკვეთაზე მოთავსებულმა უჯრედმა (შეფასება $+5$), ხოლო დადებითნიშნიანი შავი შრიფტით ჩაწერილი უმცირესი რიცხვია 15 000. მაშასადამე, 15 000-ს გადავიტანთ A_1-ისა და B_4-ის გადაკვეთაში და ჩავწერთ შავი შრიფტით. სხვაგან, სადაც იყო შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვები, იმ ადგილებს შევავსებთ ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ პირველი ამონახსნის შედგენის დროს. სახელდობრ, პირველ უჯრედში ჩავწერთ 10 000-ს, შემდეგ იმავე სტრიქონის მეორე უჯრედში ჩავწერთ 15 000-ს. A_2-ისა და B_3-ის გადაკვეთაში ჩავწერთ 20 000-ს, A_2-ისა და B_4-ის გადაკვეთაში 5000-ს, A_3-ისა და B_4-ის გადაკვეთაში 5000-ს და A_3-ისა და B_5-ის გადაკვეთაში კი 30 000-ს ამით მივიღებთ მეორე გაუმჯობესებულ ამონახსენს.

მართლაც, თუ ვიანგარიშებთ T ფორმის მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$T = 4050 \text{ მანეთს.}$$

ახლა ხელახლა უნდა შევავსოთ ცარიელი უჯრედები. მათი შეფასების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

ცხრილი 6

ობიექტები / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა
A_1	10000	16000	—5	16000	—2	40000
A_2	—3	0	20000	6000	0	25000
A_3	1	6	—5	6000	80000	35000
მოთხოვნილება	10000	15000	20000	25000	30000	100000 / 100000

როგორც ვხედავთ, მე-6 ცხრილში თავისუფალი უჯრედების შეფასებისას მივიღეთ ზოგიერთი დადებითი რიცხვი. მაშასადამე, შესაძლებელია ამონახსნის გაუმჯობესება.

ყველაზე დიდი მნიშვნელობის მქონე რიცხვი (6) დგას A_3-ისა და

B_2-ის გადაკვეთაზე, რომლის შეფასებაში მონაწილეობდნენ დადებითი ნიშნით აღებული A_1-ისა და B_3-ის გადაკვეთაში მდგომი 15 000 და A_3-ისა და B_4-ის გადაკვეთაში მდგომი 5000. მათგან უმცირესი უნდა გადავიტანოთ A_3-ისა და B_2-ის გადაკვეთაში, ხოლო დანარჩენ, შავი შრიფტით დაწერილი რიცხვის შემცველ უჯრედებში, შევსება წინას ანალოგიურად მოვახდინოთ. პროდუქციის ხელახალი გადანაწილება მოვახდინოთ ისევე, როგორც ამას ადრე ვაკეთებდით. მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

ცხრილი 7

ობიექტები / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა
A_1	10000	10000	—5	20000	4	40000
A_2	—3	0	20000	5000	6	25000
A_3	—5	5000	—11	—6	30000	35000
მოთხოვნილება	10000	15000	20000	25000	30000	100000 / 100000

თუ მე-7 ცხრილის მიხედვით ვიანგარიშებთ T ფორმას, გვექნება:

$$T = 3750 \text{ მან.}$$

რომ დავრწმუნდეთ შეიძლება თუ არა ამონახსნის გაუმჯობესება, ამისათვის უნდა შეფასდეს ყველა თავისუფალი უჯრედი ჩვეულებრივი წესით. სათანადო შეფასებანი შეტანილია იმავე მე-7 ცხრილში. როგორც მე-7 ცხრილიდან ჩანს, აქაც მივიღეთ დადებითი შეფასების მქონე უჯრედები. მათ შორის უდიდესი შეფასება მიიღო A_2-ისა და B_5-ის გადაკვეთაზე მდგომმა უჯრედმა (6). ამ უჯრედში უნდა გადმოვიტანოთ 5000, რომელიც დგას A_2-ისა და B_4-ის გადაკვეთაზე და აღებული უჯრედის შეფასებაში მონაწილე დადებითნიშნიან უჯრედთა შორის უმცირესია.

თუ მოვახდენთ ამონახსნის ხელახალ გადაანგარიშებას და ცარიელ უჯრედებს შევავსებთ, გვექნება შემდეგი ცხრილი:

ცხრილი 8

ობიექტები / ქარხნები	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციის რაოდენობა
A_1	10000	5000	1	25000	4	40000
A_2	—9	—6	20000	—6	5000	25000
A_3	—5	10000	—5	—6	25000	35000
მოთხოვნილება	10000	15000	20000	25000	30000	100000 / 100000

თუ უკანასკნელი ცხრილის მიხედვით ვიანგარიშებთ T ფორმას. გვექნება:

$$T = 3450 \text{ მანეთს.}$$

როგორც მე-8 ცხრილიდან ჩანს აქაც მივიღეთ დადებითი შეფასების მქონე უჯრედები, ე. ი. ამოხსნა კიდევ უფრო გაუმჯობესდება. თუ სათანადო გამოთვლებს ჩავატარებთ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

ცხრილი 9

ობიექტები / ქარხნები	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	დამზადებულ პროდუქციის რაოდენობა
A_1	10000	—4	—3	26000	6000	40000
A_2	—5	—6	20000	—2	6000	25000
A_3	—1	15000	—5	—2	20000	35000
მოთხოვნილება	10000	15000	20000	25000	30000	

თუ ამ უკანასკნელი ცხრილის დახმარებით ვიანგარიშებთ T ფორმას, მივიღებთ:

$$T=3250 \text{ მანეთს.}$$

რადგანაც, როგორც ეს მე-9 ცხრილიდან ჩანს, ყველა შეფასებული თავისუფალი უჯრედი უარყოფითი ნიშნისაა, ამიტომ უკანასკნელი ამონახსნის გაუმჯობესება არ შეიძლება და, ამგვარად, მე-9 ცხრილით მოცემული ამონახსენი საბოლოოა, ე. ი. ოპტიმალური გეგმა.

თუკი ოპტიმალურ გეგმაში თავისუფალი უჯრედების შეფასების შედეგად სადმე დგას ნული, მაშინ შესაძლებელია ახალი გეგმის შედგენა ამ ნულოვან უჯრედში რომელიმე შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის გადატანით. ამ ახალ გეგმასაც ალტერნატიული ოპტიმალური გეგმა ეწოდება. ამ უკანასკნელ გეგმაში ტრანსპორტის ხარჯების უფრო მეტ შემცირებას ვერ ვახერხებთ, მაგრამ ეს გეგმა იმითაა შესანიშნავი, რომ მასში უფრო მიზანშეწონილია გადანაწილებული პროდუქციის მიწოდება და მოთხოვნილების დაკმაყოფილება.

§ 8. ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნა პოტენციალთა მეთოდით

ნებისმიერი საწყისი ამონახსნისათვის შესაძლებელია მოინახოს ისეთი u_i და v_j რიცხვები, რომ საწყისი ამონახსნის ბაზისის ვექტორების შესაბამის ყველა x_{ij} ცვლადისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$u_i+v_j=c_{ij}.$$

თუ ცვლადებისათვის, რომლებიც საწყის ამონახსენში არ შედიან, სრულდება პირობა

$$u_i+v_j=c_{ij}^*$$

და ყველა სხვაობა

$$c_{ij}^*-c_{ij}\leqslant 0,$$

მაშინ შესაძლო ამონახსენი ოპტიმალური იქნება.

თუ ოპტიმალობის ეს პირობა არ სრულდება, მაშინ უნდა მოინახოს სხვა შესაძლო ამონახსენი, რომელიც T ფორმის უფრო ნაკლებ მნიშვნელობას შეესაბამება.

შესაძლო ამონახსნის მისაღებად გამოთვლითი პროცესის ჩატარება შეიძლება ჩვეულებრივი სიმპლექსური ცხრილების შედგენის გარეშე, მხოლოდ საჭირო იქნება მისი ოპტიმალობის შემოწმება, ე. ი. უნდა გამოითვალოს c_{ij}^* მნიშვნელობანი ვექტორებისა, რომლებიც ბაზისში არ შედიან, ბაზისის ვექტორების საშუალებით წარმოდგენის გარეშე. ასეთი პროცესი განვიხილოთ აქ ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული კონკრეტული მაგალითისათვის.

გვქონდა 3 ქარხანა (მიმწოდებელი) და 5 ობიექტი (მომხმარებელი), რომელთათვისაც ადგილი ჰქონდა ტოლობას

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 100000.$$

c_{ij} გადატანის ხარჯები მოცემულია მე-3 ცხრილში პირველი შესაძლო ამონახსენი წარმოვადგინეთ მე-2 ცხრილის საშუალებით, სადაც $x_{11}=10000$, $x_{12}=15000$, $x_{13}=15000$, $x_{23}=5000$, $x_{24}=20000$, $x_{34}=5000$, $x_{35}=30000$, ხოლო დანარჩენი $x_{ij}=0$. აქ წრფივი ფორმის T-ს მნიშვნელობა მივიღეთ 4800 მან; რადგანაც გადაუგვარებელი შემთხვევა გვაქვს, აქ ε-მეთოდის გამოყენება არ არის საჭირო.

გადაგვარებული შემთხვევის დროს ბაზისის ვექტორებიდან გამოიყვანება ის „საეჭვო" ვექტორი, რომელსაც უდიდესი c_{ij} შეესაბამება. განხილულ მაგალითში გვაქვს $m+n-1=7$ არაუარყოფითი სიდიდე, რომელიც ბაზისის ვექტორებს შეესაბამება.

შესაძლო ამონახსენში დადებითი ცვლადებისათვის განვსაზღვროთ $(m, n)=(3,5)$ რაოდენობის u_i და v_j რიცხვები შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} &u_1+v_1=c_{11}=5, && u_2+v_4=c_{24}=4,\\ &u_1+v_2=c_{12}=7, && u_3+v_4=c_{34}=5,\\ &u_1+v_3=c_{13}=6, && u_3+v_5=c_{35}=4\\ &u_2+v_3=c_{23}=2, && \end{aligned} \tag{5.1}$$

აქ გვაქვს 7 განტოლება 8 უცნობით. გვაქვს განუსაზღვრელი სისტემა, საჭიროა რომელიმე ცვლადს მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა და მაშინ დანარჩენები ცალსახად ამოიხსნებიან. ვთქვათ, $u_1=5$, მაშინ ადვილად ვიპოვით დანარჩენსაც:

$$v_1=0,\ \ v_2=2,\ \ v_3=1,\ \ u_2=1,\ \ v_4=3,\ \ u_3=2,\ \ v_5=2.$$

შევადგინოთ სათანადო ცხრილი

$u \backslash v$	0	2	1	3	2
5	5	7	6		
1			2	4	
2				5	4

აქ შავი შრიფტით ჩაწერილია დადებითი ცვლადების შესაბამისი გადტანის ხარჯები.

რადგანაც (5.1) სისტემა u_i და v_j ამოხსნილი მნიშვნელობებით კმაყოფილდება, ამიტომ შესაძლო ამონახსენში შემავალი ყველა x_{ij}-თვის გვექნება

$$u_i+v_j=c_{ij}.$$

ყველა დანარჩენი კომბინაციისათვის ვიანგარიშოთ

$$c^*_{ij}=u_i+v_j$$

სიდიდეები.

მაგალითად,

$$u_1+v_4=8,\ \ u_1+v_5=7 \text{ და ა. შ.}$$

მიღებული მნიშვნელობანი შევიტანოთ ცხრილში, გვექნება

u \ v	0	2	1	3	2
5	5	7	6	8	7
1	1	3	2	4	3
2	2	4	3	5	4

ე. ი. აქ საწყის ამონახსენში შავი შრიფტით ჩაწერილია არაუარყოფითი ცვლადების შესაბამისი c_{ij}-ები, ხოლო დანარჩენები შეესაბამებიან დარჩენილ მნიშვნელობებს. ცხადია, რომ c_{ij} და c^*_{ij} მნიშვნელობანი, შესაძლო ამონახსენში არაუარყოფითი რიცხვების შესაბამისნი, ერთმანეთს ემთხვევიან. დანარჩენებისათვის ვნახოთ, თუ რას წარმოადგენს მათი სხვაობანი:

$$c^*_{ij}-c_{ij};$$

თუ ყველა სხვაობა $\leqslant 0$, მაშინ განხილული ამონახსენი იქნება ოპტიმალური; თუკი ერთი მათგანიც კი დადებითია, მაშინ ამოხსნა არ იქნება დამთავრებული.

მართლაც,

$$c^*_{14}-c_{14}=5>0,$$

$$c^*_{15}-c_{15}=3>0,$$

$$c^*_{21} - c_{21} = 8 > 0,$$

$$c^*_{22} - c_{22} = -5 < 0,$$

$$c^*_{25} - c_{25} = 0,$$

$$c^*_{31} - c_{31} = -4 < 0,$$

$$c^*_{32} - c_{32} = 1 > 0,$$

$$c^*_{33} - c_{33} = -5 < 0,$$

როგორც ვხედავთ, ზოგიერთი $c^*_{ij} - c_{ij} > 0$, ე. ი. ამოხსნა უნდა გაგრძელდეს. ჩვენ უნდა მივიღოთ ახალი შესაძლო ამონახსენი, რომელიც შეიცავს იმ ცვლადს, რომლისთვისაც $c^*_{ij} - c_{ij} > 0$. აქ ვარჩევთ ვექტორს, რომელსაც ეს სხვაობა უდიდესი აქვს. ჩვენ შემთხვევაში ასეთი იქნება x_{14}-ის შესაბამისი ვექტორი.

პირველ საწყის ამონახსენში x_{14}-ის ადგილას ჩავწეროთ რაიმე დადებითი რიცხვი d_1. მაგრამ მოთხოვნილებათა და წარმოებათა რაოდენობა რომ არ დაირღვეს, ზოგიერთ ადგილას უნდა გამოაკლდეს და დაემატოს იგივე d_1 რიცხვი. მაშინ პირველი შესაძლო ამონახსენი ცხრილის სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10000	15000	$15000-d_1$	d_1	
A_2			$5000+d_1$	$20000-d_1$	
A_3				5000	30000

წონასწორობის აღსადგენად აქ x_{13}-ს და x_{24}-ს გამოვაკლეთ, ხოლო x_{23}-ს დავუმატეთ d_1. ცხადია, d_1 არ უნდა აღემატებოდეს 15 000-ს, რადგანაც ჩვენ ერთ-ერთის გამორიცხვა გვინდა ადრინდელი ამონახსნიდან; მივიღოთ $d_1 = 15000$, მაშინ მივიღებთ იგივე მე-6 ცხრილს, რომელიც ზემოთ გვქონდა.

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10000	15000	0	15000	
A_2			20000	5000	
A_3				5000	30000

რამდენიმე უჯრედში ტოლი მნიშვნელობანი რომ გვქონოდა, მაშინ შესაძლო იყო რამდენიმე ადგილას სხვაობას ნულები მოეცა და გვექნებოდა გადაგვარებული შემთხვევა. მაშინ ნულოვანი მნიშვნელობებიდან ამონახსენში დავტოვებდით იმათ, რომელთაც ნაკლები c_{ij} შეესაბამებოდა.

T-ს მნიშვნელობა ამ შემთხვევაში იქნება 4050 მან. მართლაც,

$$4800-\left[\max\left(c^{*}_{ij}-c_{ij}>0\right)\right]d_1=4800-5\cdot150=$$
$$=4800-750=4050 \text{ მან.}$$

ახლა თუ ისევ (u_i, v_j) მნიშვნელობებს ვიპოვით, ვიანგარიშებთ c^{*}_{ij} სიდიდეებს და მათ შევადარებთ c_{ij}-ებს; ენახავთ, რომ

$$max\left(c^{*}_{ij}-c_{ij}>0\right)=c^{*}_{32}-c_{32}=6,$$

მაშინ წინას ანალოგიურად შემოვიყვანთ d_2 რიცხვს, ჩავწერთ მას x_{32}-ის ადგილას, წონასწორობის აღსადგენად დანარჩენ უჯრედებში სათანადო შესწორებებს შევიტანთ და d_2-ს გავუტოლებთ შემცირებულთაგან უმცირესს. ჩვენს შემთხვევაში ის იქნება 5000. შესაბამისი T ფორმა იქნება ის, რაც ადრე გვქონდა: 3750 მან. მართლაც,

$$T=4050-\left[max\left(c^{*}_{ij}-c_{ij}>0\right)\right]d_2=4050-6\cdot50=3750.$$

ახალი ამონახსენი მიიღებს მე-7 ცხრილში მოცემულ სახეს.

ისევ ვიპოვით (u_i, v_j) სიდიდეებს, შევადგენთ c^{*}_{ij}-ების შესაბამის მატრიცას, ენახავთ რომ $c^{*}_{25}-c_{25}=6>0$. სწორედ x_{25}-ის შესაბამის უჯრედში ჩავსვამთ d_3-ს და იგივე პროცედურას გავიმეორებთ, რაც ადრე გვქონდა. შემდეგ ეტაპზედაც გვექნება $c^{*}_{15}-c_{15}=4>0$ და თუ x_{15}-ის ადგილას d_4-ს ჩავსვამთ და იგივე პროცედურას გავიმეორებთ

ვნახავთ, რომ ყველა $c^*_{ij} - c_{ij}$ სხვაობა უარყოფითია და მიღებული ამონახსენი იქნება ოპტიმალური.

ოპტიმალური გეგმისათვის წრფივი ფორმა $T=3250$ მან. თუკი ყველა $c^*_{ij} - c_{ij}$ სხვაობა უარყოფითია და ერთ-ერთი რომელიმე ნულია, მაშინ გადაგვარებული შემთხვევა გვექნება. თუ იმ ნულოვანი უჯრედის შესაბამის ადგილას გადავიტანთ, რომელიმე რიცხვს, მივიღებთ ახალ გეგმას (ალტერნატიულს), მაგრამ T წრფივი ფორმა იგივე დარჩება, ე. ი. ამ შემთხვევაში გადატანის ხარჯებს ვერ შევამცირებთ, ხოლო უფრო რაციონალური განაწილება გვექნება.

იმ შემთხვევაში, როდესაც სარეალიზაციოდ დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა ყველა მოთხოვნილებათა ჯამს არ ემთხვევა, ე. ი. როცა $\sum\limits_i a_i \neq \sum\limits_j b_j$, შეიძლება გვქონდეს ორი შემთხვევა:

I. $\sum\limits_i a_i < \sum\limits_j b_j$;

ამ შემთხვევაში, ცხადია, ყველა მოთხოვნილებას ვერ დავაკმაყოფილებთ. ასეთ დროს ამონახსნის პოვნა შეიძლება. დავუშვათ არსებობს რომელიმე ფიქტიური ქარხანა, რომელშიაც მზადდება $\sum\limits_j b_j - \sum\limits_i a_i$ რაოდენობის ერთგვაროვანი პროდუქცია. ამ ფიქტიური ქარხნიდან მომხმარებელ ობიექტებამდე გადატანის ხარჯები მივიღოთ ნულის ტოლად. მაშინ გადატანის ხარჯების ცხრილში ერთი ახალი სტრიქონი დაემატება ნულოვანი ფასებით. მაგალითად, გვექნება შემდეგი სახის ცხრილი:

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	a_3
(ფიქტიური) A_4	0	0	0	0	0	$\sum\limits_j b_j - \sum\limits_i a_i$
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

სადაც ყველა: $c_{m+1,j}=c_{4j}=0$.

$$\text{II.} \sum_i a_i > \sum_j b_j;$$

ამ შემთხვევაში გვექნება ფიქტიური მისაწოდებელი ობიექტი და ამონახსნის ცხრილში ერთი სვეტი მოგვემატება. მაგალითად, გვექნება შემდეგი ცხრილი:

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6 ფიქტიური	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	0	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	0	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	0	a_3
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\sum\limits_i a_i-\sum\limits_j b_j$	

ორივე შემთხვევაში ამოხსნა ხდება ჩვენ მიერ უკვე გადმოცემული ამოხსნის მეთოდით, რომელიც მართებულია ორივე შემთხვევაში.

§ 6. ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის ზოგიერთი ხერხი

წრფივი პროგრამირების ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნისას, ბუნებრივია, ვიფიქროთ, რომ ოპტიმალურ ამონახსენს მით უფრო სწრაფ მივიღებთ, რამდენადაც ახლოს იქნება მასთან პირველი შესაძლო ამონახსენი. პირველი ამონახსნის შედგენის დროს მხედველობაში არ მიიღება c_{ij} მნიშვნელობანი და სწორედ ამიტომ ძნელია იმის მოთხოვნა, რომ შესაბამისი წრფივი ფორმის მნიშვნელობა იყოს მინიმალურთან ახლოს.

არსებობს რიგი სხვა მეთოდები, რომლებიც ძირითადად ამოცანის ელექტრონული მანქანების დახმარებით გამოთვლისას გამოიყენება. ისინი თავიდან მინიმალურთან უფრო ახლოს მდგომი ამონახსნების მიღების შესაძლებლობას იძლევიან.

ისევ მივმართოთ ჩვენ მიერ ზემოთ განხილულ მაგალითს და ამოვ-

წეროთ c_{ij} მნიშვნელობათა ცხრილი, სათანადო წარმოებათა და მოთხოვნილებათა ჩვენებით.

ობიექტი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	7	6	3	4	40000
A_2	9	8	2	4	3	25000
A_3	6	3	8	5	4	35000
	10000	15000	20000	25000	30000	

ჩვენ მიერ ნაპოვნი პირველი შესაძლო ამონახსნის შესაბამისი წრფივი ფორმა T უდრიდა 4800 მანეთს. ამ მაგალითისათვის ოპტიმალურ ამონახსენთან უფრო ახლოს მდგომი ამონახსენთა შედგენის ზოგიერთი მეთოდი განვიხილოთ.

1. სტრიქონის მიხედვით მინიმუმის წესი. ვთქვათ, პირველი სტრიქონის უმცირესი, ელემენტია c_{1j}. თუ რამდენიმე ელემენტია ერთდროულად უმცირესი, ავიღოთ ის, რომლისთვისაც j უფრო პატარაა. ჩვენ მაგალითში უმცირესი ელემენტია $c_{14}=3$. მივიღოთ $x_{1j}=a_1$, თუ $a_1<b_j$ ანდა $x_{1j}=b_j$, თუ $a_1>b_j$. პირველ შემთხვევაში მივიღოთ $x_{ij}=0$, როცა $i\neq j$ და გადავიდეთ მეორე სტრიქონზე, b_j შევცვალოთ b_j-a_1-ით. ამის შემდეგ მოვნახოთ მეორე სტრიქონის უმცირესი ელემენტი და ა. შ. გავაგრძელოთ პროცესი. მეორე შემთხვევაში a_1-ს ცვლიან a_1-b_j-ით, ხოლო b_j-ს — ნულით და საზღვრავენ პირველი სტრიქონის უმცირეს ელემენტს c_{1j}-ის გამოკლებით და შემდეგ პროცესს იმეორებენ. განხილულ მაგალითში, რადგანაც $b_4=25000$, $a_1=40000$, გვაქვს მეორე შემთხვევა. მაშასადამე, $x_{14}=b_4=25000$. პირველი სტრიქონის უმცირესი ელემენტი c_{14}-ის შემდეგ არის c_{15}. აქ ერთმანეთს უნდა შევადაროთ a_1-b_4 და b_5. როგორც ვხედავთ, $a_1-b_4=$ $=15000<b_5=30000$, მაშასადამე, $x_{15}=15000$. ახლა მოვნახოთ მეორე სტრიქონის უმცირესი ელემენტი; ის იქნება $c_{23}=2$. ერთმანეთს შევადაროთ a_2 და b_3. როგორც ჩანს, $a_2=25000>b_3=20000$, ამიტომ $x_{23}=20000$. დაგვრჩება 25000. შემდეგი უმცირესი ელემენტი იმავე

სტრიქონში იქნება $c_{23}=3$. აქ ჩავწერთ 5000 და ა. შ. პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ შემდეგ შესაძლო ამონახსენს:

			25000	15000	40000
		20000		5000	25000
10000	15000			10000	35000
10000	15000	20000	25000	30000	

მიღებული ამონახსნის შესაბამისი წრფივი ფორმა იქნება

$$T=750+600+400+150+600+450+400=3350 \text{ მან.}$$

როგორც ვხედავთ, ეს მხოლოდ 100 მანეთით განსხვავდება ოპტიმალური ამონახსნისაგან.

2. სვეტის მიხედვით მინიმუმის წესი. აქ იგივე პროცედურა მეორდება მხოლოდ სტრიქონის მაგივრად ვიხილავთ სვეტს. პირველი სვეტის უმცირესი ელემენტია c_{11}, მაშინ $x_{11}=10000$. შემდეგი მნიშვნელობანი იმავე სვეტში იქნება ნულები. მეორე სვეტში უმცირესია $c_{32}=3$, მაშინ $x_{32}=15000$. ამ სვეტში სხვა ელემენტები იქნება 0. გადავიდეთ მესამე სვეტზე. იქ უმცირესია $c_{23}=2$, მაშინ $x_{23}=20000$, და ა. შ. შესაძლო ამონახსენი წარმოიდგინება შემდეგი ცხრილის სახით:

10000	0	0	25000	5000	4000
0	0	20000	0	5000	25000
0	15000	0	0	20000	35000
10000	15000	20000	25000	30000	

ამ ამონახსნის შესაბამისი წრფივი ფორმა იქნება:

$$T=500+450+400+750+200+150+800=3250 \text{ მან.}$$

3. მატრიცის უმცირესი ელემენტის წესი. გადატანის ღირებულებათა ცხრილში მოინახება უმცირესი c_{ij}, რის შემდეგ მისი შესაბამისი

x_{ij} ტოლია $\min(a_i, b_j)$. პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ ყველა პროდუქტი არ გადაიტანება. თუ შევადგენთ შესაბამის ამონახსენს, გვექნება შემდეგი ცხრილი:

10000	0	0	25000	5000	40000
0	0	20000	0	5000	25000
0	15000	0	0	20000	35000
10000	15000	20000	25000	30000	

მიღებული ამონახსნის წრფივი ფორმა იქნება

$$T = 500 + 450 + 400 + 750 + 200 + 150 + 800 = 3250 \text{ მან.}$$

ამ შემთხვევაში მივიღეთ პირდაპირ ოპტიმალური ამონახსენი. ჩვენ მიერ განხილული მაგალითის შემთხვევაში, როგორც ვხედავთ, სამივე წესის გამოყენება სასარგებლოა. მაგრამ სამწუხაროდ, ეს ასე ყოველთვის როდი ხდება. ხშირად ჩვენ მიერ თავიდან გამოყენებული ხერხი უფრო ხელსაყრელია. ბოლო განხილული სამი წესის გამოყენება მაშინ იქნება ხელსაყრელი, როდესაც როგორც მიმწოდებელთა, ისე მომხმარებელთა რაოდენობა საკმაოდ დიდია.

თავი IV

მოდის მეთოდი

§ 1. მოდის მეთოდის არსი და მისი გარჩევა კონკრეტულ მაგალითზე

მოდის მეთოდი წარმოადგენს ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის მეთოდების — განმანაწილებელი და პოტენციალთა მეთოდების კომბინირებულ გამოყენებას. ამ მეთოდის სახელწოდება წარმოიშვა სიტყვიდან „მოდიფიცირებული-განმანაწილებელი". ასეთი ალგორითმები ლიტერატურაში ზოგჯერ იწოდება მოდიფიცირებული ინდექსური მეთოდის სახელწოდებით. მოდის მეთოდი ანდა ე. წ. მოდიფიცირებული-განმანაწილებელი მეთოდი წარმოადგენს იმის ცდას, რომ წრფივი პროგრამირების მეთოდები რაც შეიძლება უფრო პრაქტიკული გახდეს გამოსაყენებლად. მოდის მეთოდით სარგებლობისას ყველა ინფორმაცია, რომლითაც ვსარგებლობთ, ერთი და იმავე ერთეულით უნდა იყოს წარმოდგენილი, აგრეთვე წარმოებისა და მოთხოვნილების რაოდენობა ერთმანეთს უნდა ემთხვეოდეს. ის შეიძლება გამოვიყენოთ მიახ-

ლოებით ამოსახსნელად განმანაწილებელი ამოცანისათვის, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს:

ვიპოვოთ ისეთი $x_{ij}\geqslant 0$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_{ij}=a_i \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ m), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\leqslant b_j \quad (j=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{1.2}$$

და $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,c_{ij}\,x_{ij}$ მიზნის ფუნქციას ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას, სადაც a_i მოთხოვნილებებია ერთეულებში, b_j — მაქსიმალურად შესაძლო დრო, a_{ij} — დროის ერთეულში წარმოების რაოდენობა, x_{ij} არის დრო, რომელიც გამოიყოფა ყოველი დაზგისათვის, c_{ij} კი — ერთეულის კალკულაციური ღირებულება.

დავუშვათ, $m=5$ და $n=3$ და განტოლებებით მოცემული სიდიდეები წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

მანქანა / შეკვეთა		B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
	მოთხოვნილება						
A_1	a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_{11}	c_{12}	c_{13}
A_2	a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	c_{22}	c_{23}
A_3	a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_{31}	c_{32}	c_{33}
A_4	a_4	a_{41}	a_{42}	c_{43}	a_{41}	c_{42}	c_{43}
A_5	a_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	c_{51}	c_{52}	c_{53}
მაქსიმალურად შესაძლო დრო		b_1	b_2	b_3			

მოდის მეთოდის არსის გასაგებად განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. პირველ რიგში შევამოწმოთ ზოგადად შესაძლებელია თუ არა ამ მაგალითის წრფივი პროგრამირებით ამოხსნა. ამისათვის საჭიროა ძირითადი მოთხოვნილებების და პირობების შემოწმება. უპირველეს ყოვლისა, ამოხსნის მიზანი მკაფიოდ უნდა იყოს განსაზღვრული, უნდა გაირკვეს ხდება თუ არა მიზნის მისაღწევად რესურსების ლიმიტირება ან შეზღუდვა; საჭიროა ვიცოდეთ არსებობს თუ არა შეზღუდულ რესურსთა შერჩევის შესაძლებლობა. უნდა განისაზღვროს რომელიმე ცვლადის ცვლილება მოქმედებს თუ არა დანარჩენებზე ანდა მიზანზე. საჭიროა აგრეთვე ვიცოდეთ ყველა პირობა და შესაძლებელია თუ არა ფაქტის გამოსახვა წრფივი განტოლებების ან უტოლობების სახით.

დავუშვათ, რომ რომელიმე ქარხანაში ერთ-ერთ საამქროში მუშაობს ერთი და იმავე ტიპის, მაგრამ სხვადასხვა შესაძლებლობის მქონე 3 მანქანა. მისაღებია 5 შეკვეთა. ისინი ამ მანქანებს შორის ისე უნდა გავანაწილოთ, რომ დროის გარკვეულ შუალედში მოგება რაც შეიძლება მაქსიმალური გავხადოთ, დავუშვათ, რომ ერთ-ერთი შეკვეთის შესრულება შეიძლება მხოლოდ რომელიმე ერთ მანქანაზე. დანარჩენი 4 შეკვეთის შესრულება შეიძლება სხვადასხვა მანქანაზე. თუკი ყოველი შეკვეთა შესრულდება იმ მანქანაზე, რომელიც უფრო მოსახერხებელია მის შესასრულებლად, მაშინ დანარჩენი მანქანები გამოუყენებელი დარჩება და შემკვეთის მოთხოვნილებანი გარკვეულ დროში არ იქნება დაკმაყოფილებული.

შეკვეთების შესასრულებლად ყველაზე მოხერხებულ მანქანას „იდეალური" ვუწოდოთ.

ვთქვათ, გვაქვს 3 მანქანა: B_1, B_2 და B_3, რომლებზედაც უნდა შესრულდეს 5 შეკვეთა: A_1, A_2, A_3, A_4 და A_5. შეკვეთა ერთეულებში, მანქანათა სიმძლავრე, კალკულაციური ღირებულება და გასაყიდი ფასი (მანეთობით) მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 1

		წარმოება ერთ საათში			ერთეულის კალკულაციური ღირებულება (მანეთობით)			ერთეული პროდუქციის გასაყიდი ფასი (მანეთობით)
შეკვეთა ერთეულებში		B_1	B_2		B_1	B_2	B_3	
A_1	450	27	30	15	5	3	6	8
A_2	300	54	60	30	2	1	3	4
A_3	600	18	20	10	4	2	5	6
A_4	1000	36	40	20	4	3	6	7
A_5	250	—	125	—	—	2	—	5
მაქსიმალურად შესაძლო დრო		42	42	84				

განხილულ მაგალითში a_{61}-ის ნაცვლად გვაქვს: „—“, აქ მისი შესაბამისი c_{61} უნდა ავიღოთ რაგინდ დიდი (M), რაც იმას ნიშნავს, რომ მეხუთე დაზგაზე არ შეიძლება შესრულდეს პირველი შეკვეთა. ანალოგიურად მოვიქცევით a_{63}-თვის და ა. შ.

გარკვეულ შუალედში მოგების მაქსიმალურად მიღება ნიშნავს მაქსიმუმი იყოს მთელ შემოსავლს გამოკლებული პროდუქციის დამზადებისათვის საჭირო ხარჯები; რადგანაც შემოსავალი განხილულ ამოცანაში უკვე განსაზღვრულია, ის მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს, ამიტომ მოგების მაქსიმუმის განსასაზღვრავად საჭიროა ვეძებოთ დანახარჯების მინიმუმი, ე. ი.

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} a_{ij} x_{ij};$$

ყველაზე უფრო მოსახერხებელ „იდეალურ“ B_2 მანქანას ვუწოდოთ სტანდარტული მანქანა და მისი სიმძლავრე მივიღოთ 1-ის ტოლად, მაშინ B_1-ის სიმძლავრე იქნება 0,9, B_3-ის კი 0,5.

ვთქვათ, მანქანათა სიმძლავრეები მანქანურ საათებში მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 2

მანქანა	მაქსიმალურად შესაძლო დრო	გამოყენება (პროცენტობით)	ფაქტიურად შესაძლო გამოსაყენებელი დრო (საათობით)	ინდექსი	სტანდარტული მანქანური საათები
B_1	42	0,94	39,48	0,9	35,53
B_2	42	0,98	41,16	1,0	41,16
B_3	84	0,85	71,4	0,5	35,7
სულ					112,39

ამ ცხრილში B_3 მანქანის ორცვლიანი მუშაობის შესაძლებლობაა მხედველობაში მიღებული. ცხრილში მოცემულია მაქსიმალურად შესაძლო დრო თითოეული მანქანისათვის, ფაქტიურად გამოყენებული დრო პროცენტობით, ინდექსი, რომელიც „იდეალურ“ სტანდარტულ B_2 მანქანის მიხედვითაა შედგენილი და სტანდარტული მანქანური საათები.

ჩვენი მიზანია ხუთივე შეკვეთის 3 მანქანაზე ისეთნაირად განაწილება, რომ შემოსავალი იყოს მაქსიმალური. შესაძლებელია აგრეთვე

მიზნად დავისახოთ პროდუქციის დასამზადებლად მინიმალური ხარჯების გაწევა ანდა მინიმალური დროის დახარჯვა.

ჩვენს ამოცანაში ორი ტიპის შეზღუდვა გვაქვს: ერთი ტიპის შეზღუდვა ეხება სიმძლავრეებს — შესაძლებელია გამოვიყენოთ მხოლოდ განსაზღვრული მანქანური საათები; არ შეიძლება ყველა შეკვეთის ერთი საუკეთესო B_2 მანქანისათვის გადაცემა და, მეორე მხრივ, მიუხედავად ამისა, დათქმულ დროში შეკვეთა უნდა შესრულდეს. მეორე ტიპის შეზღუდვით საჭიროა, რომ პროდუქციის ერთეულთა რაოდენობა ყოველ შესრულებულ შეკვეთაში ზუსტად ეთანადებოდეს შეკვეთის პირობებს.

ახლა ვიანგარიშოთ სტანდარტულ მანქანურ საათში შემოსავალი მანეთობით. მიღებული შედეგი მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 3

შეკვეთა	მანქანა	შემოსავალი
A_1	B_1	(8—5)30=90
	B_2	(8—3)30=150
	B_3	(8—6)30=60
A_2	B_1	(4—2)60=120
	B_2	(4—1)60=180
	B_3	(4—3)60=60
A_3	B_1	(6—4)20=40
	B_2	(6—2)20=80
	B_3	(6—5)20=20
A_4	B_1	(7—4)40=120
	B_2	(7—3)40=160
	B_3	(7—6)40=40
A_5	B_2	(5—2)125=375

აქ 1-ლი ცხრილიდან აიღება გასაყიდი ფასისა და კალკულაციური ღირებულების სხვაობა ყველა მანქანისათვის და მრავლდება სტანდარტული მანქანის სიმძლავრეზე ერთ საათში. ამით მიიღება შემოსავალი სტანდარტულ მანქანურ საათში.

ახლა ვიანგარიშოთ პროდუქციაზე მოთხოვნილება სტანდარტულ მანქანურ საათში. ეს მოთხოვნილება მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 4

შეკვეთა	სტანდარტული მანქანური საათი
A_1	15
A_2	5
A_3	30
A_4	25
A_5	2
სულ	77

აქ 1-ლი ცხრილით მოცემული მოთხოვნილებანი იყოფიან იმავე ცხრილში ნაჩვენები ერთ საათში სტანდარტული მანქანის წარმოების რაოდენობაზე.

ახლა ვიანგარიშოთ მანქანათა ჯგუფების მიხედვით ერთი შეკვეთის შესასრულებლად საჭირო დრო. შედეგი მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 5

შეკვეთა	მოთხოვნილება ერთეულებში	ერთი შეკვეთისათვის საჭირო დრო საათობით		
		B_1	B_2	B_3
A_1	450	16,67	15	30
A_2	300	5,56	5	10
A_3	600	33,33	30	60
A_4	1000	27,78	25	50
A_5	250	—	2	—

აქ მოთხოვნილებანი იყოფიან 1-ლ ცხრილში მოცემულ ერთ საათში წარმოების რაოდენობებზე თითოეული მანქანის მიხედვით.

მოცემულ მაგალითში შესაძლებელია შეკვეთათა შესრულება სხვადასხვა მანქანაზე. ყველა შეკვეთა A_5-ის გამოკლებით შესაძლებელია განაწილებულ იქნეს სხვადასხვა მანქანაზე. უმრავლესობა შეკვეთებისა შესაძლებელია შესრულდეს სამივე მანქანაზე მათი სხვადასხვა წარმოების დონის შემთხვევაში.

A_5 შეკვეთის გარდა, რომლის მიმაგრება ხდება B_2 მანქანაზე, დანარჩენი შეკვეთები თითქოს ერთმანეთს ეჭიშპებიან მანქანურ დროში. რომელიმე შეკვეთის ერთი მანქანიდან მეორეზე გადატანა იმოქმედებს სხვა დაკვეთაზე, რომელიც შეიძლება შესრულებულიყო ამ მანქანაზე,

ის იმოქმედებს აგრეთვე მანქანათა შრომისუნარიანობაზე საერთოდ და საბოლოო ანგარიშით მოგების რაოდენობაზე.

სანამ პირველ შესაძლო ამონახსენს ვიპოვიდეთ საჭიროა ზოგიერთი რამ წინასწარ გავაკეთოთ, რათა გამოსათვლელი სამუშაოები შემცირდეს. სახელდობრ, დავალაგოთ მანქანები და შეკვეთები შემოსავლის შემცირების მიხედვით. მანქანები განვალაგოთ სტრიქონებში ზევიდან ქვევით, ხოლო შეკვეთები განვალაგოთ სვეტებში მარცხნიდან მარჯვნივ.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ მოთხოვნილება და წარმოება ერთმანეთს ემთხვეოდეს. თუ ეს პირობა არ არის დაცული, მაშინ საჭირო იქნება ფიქტიური მოთხოვნილების შესაბამისი სვეტის შემოყვანა, რათა შევავსოთ თავისუფალი დრო. ასეთ პროდუქციას ექნება ნულოვანი შემოსავალი და არ შევა ამონახსენში. იმ შემთხვევაში, როდესაც დამზადებული პროდუქცია ვერ აკმაყოფილებს მოთხოვნილებას, შესაძლებელია ფიქტიური მიმწოდებლის სტრიქონის შემოყვანა. შემოსავლის რაოდენობა ამ სტრიქონისათვის იქნება გასაყიდ ფასს გამოკლებული ნაყიდი პროდუქციის კალკულაციური ღირებულება.

პირველი შესაძლო ამონახსნის მისაღებად შევადგინოთ სათანადო ცხრილი. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ შემოსავლის შემცირების მიხედვით განვალაგოთ მანქანები და შეკვეთები.

ცხრილი 6

მანქანა	სვეტი / სტრიქონი	A_2	A_4	A_1	A_3	ფიქტიური პროდუქცია	შესაძლო დრო სტანდარტულ მანქანურ საათებში
		180	160	150	100	80	
B_2	0	180 / 6	160 / 26 +	150 / 0,16 −	80 / 100	0 / 80	39,16
B_1	—60	120 / 120	120 / 100 −	90 / 6,84 +	40 / 29,09	0 / 20	35,53
B_3	—80	60 / 100	40 / 80	60 / 70	20 / 0,81	0 / 86,89	35,70
სტანდარტული მანქანური საათების საჭირო მოთხოვნილება		5	25	15	30	35,39	110,39 / 110,39

ამ ცხრილის მიხედვით T ფორმის მნიშვნელობა იქნება:

$$T=5\times180+25\times160+9,16\times150+90\times5,84+40\times29,69+$$
$$+0,31\times20=7993,4.$$

უჯრედების მარჯვენა კუთხის პატარა კვადრატებში მოვათავსოთ ერთ სტანდარტულ საათში თითოეული შეკვეთის თითოეულ მანქანაზე შესრულებისას მიღებული შემოსავალი.

დაწყებული ზედა მარცხენა უჯრიდან გავანაწილოთ შეკვეთები მანქანების მიხედვით. მაგალითად, A_2 შეკვეთას უნდა 5 საათი, ხოლო მანქანაზე მოდის 39,16 საათი. რამდენადაც A_2B_2 კვადრატი დატვირთულია 5 საათით, ამიტომ 34,16 საათი რჩება შემდგომ გასანაწილებლად. გავყვებით რა იმავე პირველ სტრიქონს A_4 შეკვეთას მივცემთ 25 საათს, ხოლო B_2 მანქანაზე დარჩენილ დროს 34,16 — 25=9,16 საათს მივცემთ A_1 შეკვეთას. A_1 შეკვეთისათვის საჭირო დანარჩენი დრო უნდა გამოვართვათ B_1 მანქანას. ეს იქნება 5,84. B_1 მანქანის დანარჩენი დრო გამოიყენება A_3 შეკვეთისათვის და რა დროც მას დააკლდება უნდა შეივსოს B_3 მანქანიდან. ხოლო B_3-ზე დარჩენილი დრო გამოიყენება ფიქტიური პროდუქციის დასამზადებლად. განაწილებისას მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობანი სხვა რიცხვებისგან განსასხვავებლად ჩავწეროთ შავი შრიფტით. ამგვარად, მივიღეთ პირველი შესაძლო ამოხსნა, რომლის მიხედვით შემოსავალია 7993 მან. და 40 კაპ. ეს მიიღება შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვების გამრავლებით უჯრედის ზედა მარჯვენა კუთხის კვადრატში მოთავსებულ შემოსავალზე.

ახლა საჭიროა შევამოწმოთ მიღებული გეგმა და დავადგინოთ, შესაძლებელია თუ არა მისი გაუმჯობესება. ამისათვის პირველ რიგში უნდა გამოვითვალოთ ინდექსები სტრიქონებისა და სვეტების მიხედვით და შევიტანოთ ცხრილში სათანადო ადგილას. ამ ინდექსებს გამოვიყენებთ შეკვეთების რომელიმე თავისუფალ უჯრედზე გადატანისას, რითაც გეგმა გაუმჯობესდება და, მაშასადამე, შემოსავალიც გადიდდება.

ინდექსების გამოთვლისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ სტრიქონის და სვეტის ინდექსთა ჯამი, რომელიც დაკავებულ უჯრედში მათ გადაკვეთაზე ხვდება, იგივე რიცხვია, რაც იმავე უჯრედის ზედა მარჯვენა კუთხის კვადრატში წერია. ამასთანავე რომელიმე ინდექსი სტრიქონისა ან სვეტისა უნდა იქნეს მიღებული ათვლის საწყისად.

ათვლის საწყისად უფრო მოხერხებულია მივიღოთ პირველი სტრიქონის პირველი ელემენტი; მას მივაწეროთ მნიშვნელობა 0. ფაქტიუ-

რად შეიძლება საწყის მნიშვნელობად სხვა რიცხვითი მნიშვნელობა ავიღოთ, მაგრამ ამას არავითარი მნიშვნელობა საბოლოო შედეგისათვის არა აქვს. მთლიანი პროცესი შედარების პრინციპზეა აგებული. ჩვენ გვაინტერესებს ამ რიცხვებით მიღებული განსხვავებანი და არა თვით რიცხვები. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია არსებული გეგმის შემოსავალი მივიღოთ ნულად, სტრიქონებისა და სვეტების ინდექსები შესაძლებელია გამოყენებულ იქნენ შემოსავლის შესაძლო გადიდებისათვის.

მაშასადამე, B_2 მანქანას ვაძლევთ ინდექსად 0-ს. რადგანაც ინდექსების ჯამი დაკავებულ უჯრედებში ზედა კუთხის კვადრატში მოთავსებული რიცხვების ტოლია, ამიტომ ცხადია, რომ A_2, A_4 და A_1 შეკვეთათა ინდექსები უნდა იყოს შესაბამისად 180, 160 და 150.

რადგანაც A_1 შეკვეთის ინდექსია 150, ხოლო B_1 მანქანის რიცხობრივი მახასიათებელი-შემოსავალია 90, ამიტომ B_1 მანქანის ინდექსი იქნება $90 - 150 = -60$. რადგანაც B_1 მანქანის ინდექსი არის -60, ხოლო B_1A_3 უჯრედის რიცხობრივი მახასიათებელია 40, ამიტომ შეკვეთის ინდექსი იქნება $40 - (-60) = 100$. ასევე B_3 მანქანის ინდექსი იქნება $20 - 100 = -80$. ფიქტიური პროდუქციის ინდექსი იქნება $0 - (-80) = 80$.

თავისუფალ უჯრედებში ჩაიწერება იმ ინდექსთა ჯამი, რომლის სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაზედაც არის ეს უჯრედი. მაგალითად, B_1A_4 თავისუფალ უჯრედში ჩაიწერება $160 + (-60) = 100$, ხოლო B_3A_1 თავისუფალ უჯრედში კი $150 + (-80) = 70$ და ა. შ.

თუ ინდექსების ჩაწერა ამ წესით ბოლომდის ვერ მოვახერხეთ, ის იმის მაჩვენებელი იქნება, რომ ადრე განაწილება არასწორად გვიწარმოებია ანდა საქმე გვაქვს ე. წ. გადაგვარებულ შემთხვევასთან. როგორც ადრე ვნახეთ, შავი შრიფტით ჩაწერილ რიცხვების რაოდენობა უნდა იყოს სვეტებისა და სტრიქონების რაოდენობათა ჯამი ერთით შემცირებული, ჩვენს შემთხვევაში $3+5-1=7$. თუკი გვაკლია ასეთი რიცხვი, მაშინ შეიძლება დავუმატოთ შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი, რომლის მნიშვნელობა იქნება 0.

მიღებული გეგმის გასაუმჯობესებლად (თუ ასეთი რამ შეიძლება) საჭიროა ერთმანეთს შევადაროთ სვეტებისა და სტრიქონების გადაკვეთაზე მოთავსებული ინდექსების ჯამი და იმავე უჯრედის ზედა მარჯვენა კუთხის კვადრატში მოთავსებული რიცხობრივი მახასიათებელი. თუკი ინდექსების ჯამი კვადრატში მოთავსებულ რიცხვზე ნაკლებია, ეს იმას ნიშნავს რომ გეგმის გაუმჯობესება შეიძლება.

შესაძლებელია შედარება დავიწყოთ ზედა მარცხენა კუთხიდან და როცა გამოჩნდება გაუმჯობესების შესაძლებლობა, მაშინვე იქიდან

დავიწყოთ. ანდა შესაძლებელია შედარებები გავაგრძელოთ და ენახოთ ბოლომდის კიდევ სად შეიძლება გვქონდეს გაუმჯობესება.

ჩვენს მაგალითში მე-6 ცხრილის თავისუფალ უჯრედებში შესადარებელი რიცხვებია ჩაწერილი. როგორც ცხრილიდან ჩანს, B_1A_4-ში ინდექსების ჯამი (100) ნაკლებია კვადრატში მოთავსებულ რიცხობრივ მახასიათებელზე (120), რომელიც გამოხატავს შემოსავალს 1 სტანდარტულ მანქანურ საათში. სწორედ ამ უჯრედის ხარჯზე შეიძლება გვქონდეს გაუმჯობესება. სიდიდე, რომლითაც კვადრატში მოთავსებული რიცხობრივი მახასიათებელი აღემატება ინდექსების ჯამს, ტოლია დამატებითი შემოსავლის, რომელიც მიიღება 1 საათის სამუშაოს გადატანით აღებულ თავისუფალ უჯრედში.

ახლა ვეცადოთ მიღებული საწყისი გეგმა გავაუმჯობესოთ. გაუმჯობესება შეიძლება B_1A_4 უჯრედის ხარჯზე. ამ უჯრედიდან ვიმოძრაოთ მარცხნივ ან მარჯვნივ შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის მიმართულებით. ამ უჯრედში შესვლის შემდეგ მიმართულება შევცვალოთ ვერტიკალურად ზევით ან ქვევით ისევ შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვის გადაკვეთამდე, საიდანაც შეიძლება ისევ ვიმოძრაოთ ჰორიზონტალური მიმართულებით. გავაგრძელოთ ასეთი ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მოძრაობა მანამ, სანამ ხაზი არ დაუბრუნდება იმ უჯრედს, საიდანაც მოძრაობა დავიწყეთ. ასეთ შემთხვევისას გავლებული ხაზები ქმნიან მართკუთხედს. ზოგიერთ შემთხვევაში მიღებული წირი შეიძლება უფრო რთულიც იყოს. პირველი მოძრაობა უნდა იყოს ჰორიზონტალური და ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ხიჯების რაც შეიძლება მცირე რაოდენობით ხაზი ისევ იმავე უჯრედში დავაბრუნოთ, საიდანაც მოძრაობა დავიწყეთ.

უარყოფითი ნიშანი იმ უჯრედს მივაკუთვნოთ, საიდანაც მოძრაობა დავიწყეთ, ხოლო ყოველ შემდეგ უჯრედს, რომელიც გავიარეთ, მივაკუთვნოთ რიგრიგობით ჯერ დადებითი და შემდეგ უარყოფითი ნიშანი. იმ უჯრედთა შორის, რომელთაც მიეკუთვნათ დადებითი ნიშანი, ავიღოთ შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი, რომელიც უფრო მცირეა. ჩვენს მაგალითში ასეთი რიცხვი იქნება 5,84, რომელიც მოთავსებულია B_1 მანქანისა და A_1 შეკვეთის გადაკვეთაზე. ეს სიდიდე დავუმატოთ უარყოფითნიშნიან უჯრედის ყველა რიცხვს, ხოლო გამოვაკლოთ დადებითნიშნიან უჯრედში მოთავსებულ ყველა რიცხვს. ასეთი ოპერაციის ჩატარება ყოველთვის ათავისუფლებს ერთ უჯრედს მაინც. შესაძლებელია ისეთი შემთხვევაც გვქონდეს, რომ დადებითნიშნიან უჯრედებში რამდენიმე ადგილას შავი შრიფტით ჩაწერილი იყოს უმცირესრიცხვიან უჯრედში მოთავსებული რიცხვის ტოლი სიდიდე,

ცხრილი 7

მანქანა	სვეტი / სტრიქონი	A_2	A_4	A_1	A_3	ფიქტიური პროდუქცია	შესაძლო დრო სტანდარტულ მანქანურ საათებში
		180	160	150	80	60	
B_2	0	180 5	160 19,6	150 15	80 80	0 60	39,16
B_1	—40	120 140	120 6,84	90 110	40 29,69	0 20	35,53
B_3	—60	60 120	40 100	60 90	20 0,81	0 86,89	35,70
სტანდარტული მანქანური საათების საჭირო მოთხოვნილება		5	25	15	30	35,39	

მაშინ თუ ამ უმცირეს რიცხვს გამოვაკლებთ დადებითნიშნიან უჯრედებში მოთავსებულ რიცხვებს, ჩვენ გვექნება რამდენიმე თავისუფალი უჯრედი. ამის გამო, რადგანაც შავი შრიფტით ჩაწერილ რიცხვთა რაოდენობა ნაკლები იქნება, ვიდრე სტრიქონების და სვეტების რაოდენობა ერთით შემცირებული, ჩვენ დაგვჭირდება სტრიქონებისა და სვეტების ინდექსების შედგენა. ასეთი შემთხვევის დროს ერთი დადებითნიშნიანი უჯრედი დავტოვოთ ცარიელი, ხოლო დანარჩენ ცარიელ უჯრედებში შავი შრიფტით ჩავწეროთ 0. შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვი 0 გაანგარიშებისას დაგვჭირდება, მაგრამ ის ბალანსზე არ იმოქმედებს, რადგანაც 0-ს არ სჭირდება მანქანური დროის დახარჯვა და არც შეკვეთის შესრულებას უწყობს ხელს. ახალი დატვირთვა მოცემულია მე-7 ცხრილში. აქ შემოსავალი არის 8110 მან. და 20 კაპ., ე. ი. შემოსავალი გაიზარდა 116 მან. 80 კაპიკით.

ამ შემთხვევაში ჩვენ ჯერ კიდევ არ ვიცით შეიძლება თუ არა ამ გეგმის გაუმჯობესება. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საჭიროა ისევ დავთვალოთ სვეტებისა და სტრიქონების ინდექსები და ამ ახალი ინდექსების ჯამი გამოვიყენოთ თავისუფალი უჯრედების შესაფასებლად. თუკი ვნახავთ, რომ პროგრამის გაუმჯობესება შეიძლება, მაშინ ჩატა-

რებულ პროცესს ვიმეორებთ და ვაუმჯობესებთ პროგრამას (გეგმას), სანამ საუკეთესო პროგრამას არ მივიღებთ.

მე-7 ცხრილში სტრიქონის პირველი ინდექსი ისევ მივიღოთ 0-ის ტოლად, მაშინ A_2, A_4 და A_3 სვეტის ინდექსები იქნებიან შესაბამისად 180, 160 და 150.

რადგანაც A_4 შეკვეთის ინდექსია 160, ხოლო B_1 მანქანის რიცხობრივი მახასიათებელი-შემოსავალია 120, ამიტომ B_1 მანქანის ინდექსი იქნება $120—160 = — 40$. რადგანაც B_1 მანქანის ინდექსია — 40 ხოლო B_1A_3 უჯრედის რიცხობრივი მახასიათებელი 40, ამიტომ A_3 შეკვეთის ინდექსი იქნება $40 — (— 40)=80$, ასევე B_3 მანქანის ინდექსი იქნება $20 — 80= — 60$, ხოლო ფიქტიური პროდუქციის ინდექსი კი 60.

როგორც წინათ, თავისუფალ უჯრედებში ჩაიწერება იმ ინდექსთა ჯამი, რომელი სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაზედაც არის ეს უჯრედი.

ყველა ზემონათქვამი მე-7 ცხრილშია მოცემული. როგორც ამ უკანასკნელი ცხრილიდან ჩანს, ჩვენ მივიღეთ ისეთი პროგრამა, რომელიც მაქსიმალურ შემოსავალს იძლევა, რადგანაც არც ერთი თავისუფალი უჯრედის შემოსავლის მახასიათებელი არ აღემატება სტრიქონისა და სვეტის ინდექსების ჯამს.

ამგვარად, მე-7 ცხრილით მივიღეთ ყველაზე უფრო მომგებიანი გეგმა. ხშირად შეიძლება გვქონდეს ალტერნატიური საუკეთესო ამოხსნა. ეს უკანასკნელი მაშინ გვექნება, როდესაც სტრიქონისა და სვეტის ინდექსების ჯამი ზუსტად ემთხვევა თავისუფალ უჯრედში ზემო კუთხის კვადრატში მოთავსებულ შემოსავლის რიცხობრივ მახასიათებელს. ჩვენს მაგალითში ასეთია B_2A_3 უჯრედი. ამ შემთხვევაში ვიგულისხმოთ, რომ თითქოს უკანასკნელი გეგმის გაუმჯობესება შეიძლება და ვეცადოთ მის გაუმჯობესებას, მაშინ ჩვენ მივიღებთ ახალ ალტერნატიურ საუკეთესო გეგმას. მიღებულ გეგმაში შემოსავალი იგივე იქნება, რაც წინა საუკეთესო გეგმაში. როგორც ვნახავთ, აქ შემოსავალი არ გაიზრდება, მაგრამ მიღებული გეგმა იძლევა წარმოების უფრო მოხერხებულად დაგეგმვის შესაძლებლობას.

ამგვარად, მივიღეთ ოპტიმალური პროგრამა. ახლა საჭიროა შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა, სახელდობრ, მიღებული რაოდენობანი გადავიყვანოთ სტანდარტული ერთეულებიდან თავიდან მოცემულზე და დავადგინოთ მანქანათა სათანადო დატვირთვები.

გამოთვლათა შედეგები მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 8

ოპტიმალურ პროგრამაში მიღებულ მნიშვნელობათა გადაანგარიშება და მისი შედარება თავიდან მოცემულ მნიშვნელობებთან

შეკვეთა	მანქანა	სტანდარტული საათების რაოდენობა	ინდექსი	ფაქტიური მანქანური საათების რაოდენობა	ერთ საათში დამზადებულ პროდუქციათა რაოდენობა	დაგეგმილი პროდუქცია ერთეულებში	დამზადებულ პროდუქციათა მოთხოვნილება ერთეულებში
A_1	B_2	15	1,0	15	30	450	450
A_2	B_2	5	1,0	5	60	300	300
A_3	B_1	29,69	0,9	32,99	18	594	600
	B_3	0,31	0,5	0,62	10	6	
A_4	B_1	5,84	0,9	6,49	36	234	1000
	B_2	19,16	1,0	19,16	40	766	
A_5	B_2	2	1,0	2	125	250	250

ამ ცხრილში სტანდარტული საათების რაოდენობა აღებულია მე-7 ცხრილიდან. ესენი იქნება შავი შრიფტით ჩაწერილი რიცხვები. ფაქტიური მანქანური საათების მისაღებად საჭიროა სტანდარტული საათების რაოდენობა ინდექსზე გაიყოს. ერთ საათში დამზადებული პროდუქციის რაოდენობა ერთეულებში აღებულია 1-ლი ცხრილიდან. დაგეგმილ პროდუქციათა რაოდენობა მიიღება ფაქტიური მანქანური საათების რაოდენობის ერთ საათში დამზადებულ პროდუქციის რაოდენობაზე გამრავლებით. დამზადებულ პროდუქციათა მოთხოვნილება კი მოცემულია 1-ლ ცხრილში.

მიღებულ პროგრამაში მთლიანად გათვალისწინებულია ყველა მოთხოვნილება. A_3 და A_4 შეკვეთა შესრულებულია ორ-ორ მანქანაზე, ხოლო A_1, A_2 და A_5 შეკვეთები კი მხოლოდ თითო მანქანაზე.

ახლა შევადგინოთ მანქანების დატვირთვის ფაქტიური საათების ცხრილი.

ცხრილი 9

მანქანების დატვირთვა (საათობით)

მანქანა / შეკვეთა	B_1	B_2	B_3
A_1		15	
A_2		5	
A_3	32,99		0,62
A_4	6,49	19,16	
A_5		2	
სულ	39,48	41,16	0,62
მთლიანად გვაქვს შესაძლო გამოსაყენებელი საათები	39,48	46,16	71,40

აქ ვსარგებლობთ მე-8 ცხრილით. დატვირთვების მისაღებად სტანდარტული საათების რაოდენობას ვყოფთ შესაბამისი მანქანის ინდექსზე. ბოლო სტრიქონის რიცხვები აღებულია მე-2 ცხრილიდან (ფაქტიურად შესაძლო გამოსაყენებელი დრო საათობით).

როგორც უკანასნელი ცხრილიდან ჩანს, B_1 და B_2 მანქანა მთლიანად დატვირთულია, ხოლო B_3 მანქანაზე გვრჩება 70,78 საათი თავისუფალი დრო.

როგორც ვნახეთ, ამოცანის მოდის მეთოდით ამოსახსნელად საჭირო ზუსტად იქნეს ჩამოყალიბებული როგორც ამოცანა, ისე მისი მიზანი; შეგროვდეს და გაანალიზებულ იქნეს საჭირო ცნობები. პირველ რიგში საჭიროა წარმოდგენილი ცნობების ჩვეულებრივი ზომის ერთეულებით გამოსახვა. შემდეგ რიცხობრივი მონაცემების მოწესრიგება უნდა მოხდეს, რისთვისაც საჭიროა მას მატრიცის ან რაიმე ცხრილის სახე მიეცეს, რათა ისინი გამოვიყენოთ მარაგის გასანაწილებლად ე. წ. „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის" წესით. ყოველივე ამის შემდეგ შესაძლებელია პირველი საწყისი ამოხსნის მიღება. შემდეგ მიღებული ამოხსნის შესაბამისი რიცხვები ცხრილში შავი შრიფტით უნდა ჩაიწეროს და მოხდეს მიღებული პროგრამის რიცხობრივი შეფასება. საჭიროა აგრეთვე სტრიქონებისა და სვეტების ინდექსების გამოთვლა; პირველი სტრიქონის მარცხენა ზედა კუთხის ინდექსად მიიღება 0. შემდეგ უნდა შემოწმდეს პირველი პროგრამა გაუმჯობესების შესაძლებლობის თვალსაზრისით. ამისათვის კი საჭიროა ერთმანეთს შეუდარდეს თავისუფალ უჯრედთა რიცხობრივი მახასიათებლები და შესაბამი სვეტებისა და სტრიქონების ინდექსთა ჯამი. თუ პროგრამის გაუმჯობესება შეიძლება, მაშინ დატვირთვათა ხელახალი გადანაწილება უნდა მოხდეს. ამის შემდეგ სვეტებისა და სტრიქონების ახალი ინდექსების მონახვა იქნება საჭირო. ზემოთ ჩამოყალიბებული წესით, ანალოგიურად შესაძლებელია მიღებულ პროგრამათა გაუმჯობესება მანამ, სანამ ოპტიმალური პროგრამა არ მიიღება. ოპტიმალური პროგრამა კი მაშინ მიიღება, როდესაც ყოველი თავისუფალი უჯრედის რიცხობრივი მახასიათებელი, რომელიც მოთავსებულია ზედა მარჯვენა კუთხის კვადრატში, ტოლი ან ნაკლები იქნება შესაბამისი სტრიქონებისა და სვეტების ინდექსების ჯამზე.

§ 2. მოდის მეთოდის ზოგადი სქემა

ზემოთ მოცემული მაგალითისათვის გამოყენებული მეთოდი ვაჩვენოთ ზოგადი სქემისათვის.

მოცემული ამოცანა ჩვენ დავიყვანეთ ტრანსპორტის ამოცანაზე. ამისათვის შემოვიყვანეთ ცნება „იდეალური", ხოლო ის დაზგა, რომელიც ამაში „ხელს გვიშლის", ცალკე განვიხილეთ.

მანქანა / შეკვეთა		B_1	B_2	B_3
	მოთხოვნილება			
A_1	450	27	30	15
A_2	300	54	60	30
A_3	600	18	20	10
A_4	1000	36	40	20
A_5	250	—	125	—

თუ მოცემულ ცხრილში A_5-ის შესაბამის სტრიქონს უკუვაგდებთ, ვნახავთ, რომ პირველი სვეტის $\frac{10}{9}$-ზე გამრავლებით, ხოლო მესამე სვეტის 2-ზე გამრავლებით მივიღებთ მეორე სვეტს. ეს (1.1) ზოგადი განტოლებისათვის შემდეგს ნიშნავს: მოვნახავთ ისეთ რიცხვებს p_i-სა და q_j-ს, რომ $a_{ij}=p_iq_j$. თუ ეს არ მოხერხდა რომელიმე სვეტისათვის ან სტრიქონისათვის, მაშინ მას უკუვაგდებთ და ცალკე განვიხილავთ. ამგვარად, გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n} p_i q_j x_{ij}=a_i \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

ხოლო, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$q_j x_{ij}=X_{ij},$$

ვღებულობთ ტრანსპორტის ჩვეულებრივ ამოცანას, რომელსაც ამოვხსნით ცნობილი მეთოდებით.

§ 8. დატვირთვის განაწილება იმ შემთხვევაში, როდესაც რამდენიმე მანქანას ერთი ოპერატორი ემსახურება

დავუშვათ, რომ თავიდან განხილული მაგალითის შემთხვევაში B_1 და B_3 მანქანებს ემსახურება ერთი ოპერატორი. ვიგულისხმოთ, რომ ამ ოპერატორს შეუძლია დროის გარკვეულ შუალედში მოემსახუროს

მხოლოდ ერთ მანქანას. ვთქვათ, თითოეულ მანქანას შეუძლია იმუშაოს 40—40 საათი, ხოლო ოპერატორს კი 60 სტანდარტული საათი. ამგვარად, ერთ-ერთი მანქანა ვერ იმუშავებს 20 საათს მაინც.

მოდის მეთოდით შეიძლება ამგვარად გართულებული ამოცანის ამოხსნაც. ამ შემთხვევაში დაგვჭირდება შემდეგი შეზღუდვების შემოყვანა:

1. B_1 და B_3 მანქანებზე უნდა დაიგეგმოს 40—40 საათი მუშაობა;
2. 20 საათი დროის დახარჯვა ერთ-ერთ მანქანაზე უნდა იქნეს გათვალისწინებული ფიქტიური პროდუქციის დასამზადებლად.

ამ მოთხოვნილებების დასაკმაყოფილებლად საჭიროა მეორე ფიქტიური სვეტის შემოყვანა, რომელსაც „მონაცემების დასაბალანსებლად ფიქტიური პროდუქტი" ეწოდება და ამ სვეტში უნდა მოთავსდეს ის 20 საათი, რომლის გამოყენება ოპერატორს არ შეუძლია.

საჭიროა აგრეთვე იმ თავისუფალი უჯრედის შესაფასებლად, რომელიც B_2 მანქანისა და ახალი ფიქტიური სვეტის გადაკვეთაზე იმყოფება, $-M$ სიდიდის გამოყენება (რაც იმას ნიშნავს, რომ ოპერატორი B_2 მანქანას არ მოემსახურება), როგორც რიცხობრივი მახასიათებლისა.

შევადგინოთ პირველი საწყისი ამოხსნა. ის მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 13

შეკვეთა / მანქანა		A_2	A_4	A_1	A_3	ფიქტიური პროდუქცია	მონაცემთა დასაბალანსებელი ფიქტიური პროდუქცია	შესაძლო დრო სტანდარტულ მანქანურ საათებში
მანქანა	სვეტი / სტრიქონი	180	160	150	100	60	60	
B_2	0	180 6	160 25	150 9,16	80 100	0 60	$-M$ 60	39,16
B_1	—60	120 120	120 100	90 6,84	40 30	0 4,16	0 0	40
B_3	—60	60 120	40 100	60 90	20 40	0 20,0	0 20	40
სტანდარტულ მანქანურ საათებში დროის მოთხოვნილება		5	25	15	30	24,16	20	119,16 / 119,16

B_2 მანქანის შესაძლო დროიდან 2 საათი დათმობილი აქვს A_4 შეკვეთას.

მიღებული პროგრამა, რომლის მიხედვით შემოსავალი $T=7999,6$ მან., შესაძლებელია გაუმჯობესებულ იქნეს B_1A_4 უჯრედის ხარჯზე.

გაუმჯობესებული პროგრამა მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

ცხრილი 14

შეკვეთა / მანქანა	სვეტი / სტრიქონი	A_2	A_4	A_1	A_3	ფიქტიური პროდუქცია	მოცდენისათვის ფიქტიური პროდუქცია	შესაძლო დრო სტანდარტულ მანქანურ საათებში
		180	160	150	80	40	40	
B_2	0	18 / 5	160 / 10,10	150 / 15	80 / 80	0 / 40	$-M$ / 40	39,16
B_1	—40	120 / 140	120 / 5,84	90 / 110	40 / 30	0 / 4,16	0 / 0	40
B_3	—40	60 / 140	40 / 120	60 / 110	20 / 40	0 / 20	0 / 20	40
სტანდარტულ მანქანურ საათებში დროის მოთხოვნილება		5	25	15	30	24,16	20	119,16 / 119,16

მიღებული პროგრამა ოპტიმალურია, რომლის მიხედვით შემოსავალი $T=8115,4$ მანეთს.

როგორც უკანასკნელი ოპტიმალური პროგრამიდან ჩანს, B_3 მანქანა დგას 20 საათის განმავლობაში. ოპერატორი B_1 მანქანაზე მუშაობს 40 საათის განმავლობაში, ხოლო B_3 მანქანაზე მხოლოდ 20 საათი, სულ მუშაობს 60 საათის განმავლობაში. მიღებული პროგრამა აკმაყოფილებს ყველა დამატებით მოთხოვნილებას, რომელიც გამოწვეულია ორ მანქანაზე ერთი ოპერატორის მუშაობით.

§ 4. უმცირესი დანახარჯების პოვნა მოდის მეთოდით

თუ დასმული მაგალითისათვის უმცირესი დანახარჯის პოვნის ამოცანას გადავწყვეტთ მოდის მეთოდით, ამისათვის დაგვჭირდება დანახარჯების გამოსახვა, როგორც დანახარჯისა ერთ სტანდარტულ მანქანური საათისათვის. მანქანათა დატვირთვის დაგეგმვისათვის არ არის აუცილებელი ცნობა გასაყიდი ფასის შესახებ. ვიგულისხმებთ, რომ მთელი სამუშაოს დაგეგმვა შეიძლება, რადგანაც წარმოების სიმძლავრე

მოთხოვნილებას აღემატება, და, მაშასადამე, გაყიდვისაგან შემოსავალი ფიქსირებული იქნება.

განაწილებას ვახდენთ ისევ ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის წესით; ამასთან ის შეკვეთები, რომელთაც უფრო მცირე დანახარჯები აქვს და მანქანები, რომლებზედაც ეს დაკვეთები სრულდება, მოთავსდება ცხრილის ზედა მარცხენა კუთხეში. დანახარჯთა მნიშვნელობანი მოთავსდება უჯრედების ზედა მარჯვენა კუთხის კვადრატებში შემოსავლების მაგივრად.

ვთქვათ, დანახარჯთა შესახებ ყველა ინფორმაციას ეწერება დადებითი ნიშანი. გაუმჯობესება შეიძლება მაშინ, როდესაც არსებობს ისეთი თავისუფალი უჯრედები, რომელთათვისაც დანახარჯების რაოდენობა ნაკლებია, ვიდრე შესაბამისი სტრიქონების და სვეტების ინდექსების ჯამი. ამ შემთხვევაში ფიქტიური პროდუქციის შესაბამის სვეტში ნულოვანი შემოსავლის ნაცვლად ჩაისმება ძალიან დიდი მნიშვნელობა *M*. ჩვენს შემთხვევაში არ შეგვიძლია ნულოვანი დანახარჯები ჩავწეროთ, რადგანაც ისინი აღნიშნავენ იმას, რომ ან დანახარჯები არ არის ან ძალიან მცირე დანახარჯებთან გვაქავს საქმე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ საჭიროა ფიქტიური მანქანის პირველ რიგში დატვირთვა. *M*-ის შემოყვანა დაგვეხმარება ყველა რეალური მანქანის მთელი დროის განმავლობაში მაქსიმალურად გამოყენებაში.

ახლა შევადგინოთ სათანადო ცხრილი, რომელშიაც რიცხობრივი მონაცემების მოწესრიგება ხდება „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის“ წესით.

ცხრილი 15

შეკვეთა / მანქანა	სვეტი / სტრიქონი	A_3	A_2	A_1	A_4	ფიქტიური პროდუქცია	შესაძლო დრო სტანდარტულ მანქანურ საათებში
		40	60	90	120	$M-24$	
B_2	0	40 / 80	60 / 6	90 / 4,10	120 / 120	M / $M-24$	39,16
B_1	0	50 / 40	90 / 60	90 / 10,84	120 / 24,09	M / $M-24$	35,53
B_3	24	72 / 64	108 / 84	135 / 114	144 / 0,81	M / 85,80	35,70
სტანდარტულ მანქანურ საათებში დროის მოთხოვნილება		30	5	15	25	15,39	110,39 / 110,39

ამ ცხრილში შეკვეთები და მანქანები, რომლებზედაც მზადდება დაკვეთები დალაგებულია დანახარჯების სიდიდის მიხედვით. იწყება ყველაზე მცირე დანახარჯებით და შემდეგ თანდათან დიდდება. დანახარჯები 1-ლი ცხრილიდან აიღება. მაგალითად, B_2 მანქანაზე საათში მზადდება A_3 შეკვეთით 20 ერთეული. თითოეულის საკალკულაციო ღირებულებაა 2 მანეთი, ე. ი. დანახარჯი იქნება 20×2=40 მან. ასევე B_2 მანქანაზე საათში მზადდება A_2 შეკვეთით 60 ერთეული. თითოეული ჯდება 1 მანეთი, ე. ი. დანახარჯი იქნება 60×1=60 მანეთი და ა. შ.

მე-15 ცხრილის მიხედვით დანახარჯთა რაოდენობაა 5857,44 მანეთი. რადგანაც არც ერთ თავისუფალ უჯრედში დანახარჯები არ არის უფრო მცირე, ვიდრე შესაბამისი სტრიქონებისა და სვეტების ინდექსების ჯამი, ამიტომ მიღებული პროგრამის გაუმჯობესება არ შეიძლება და, ამგვარად, მიღებული პროგრამა არის ოპტიმალური. B_2A_4 უჯრედის ხარჯზე, სადაც დანახარჯები ინდექსთა ჯამს ემთხვევა, შესაძლებელია ალტერნატიური გეგმის შედგენა, მაგრამ მიღებულ გეგმაში დანახარჯთა რაოდენობა არ შეიცვლება.

§ 6. დასკვნა

სამუშაოდ მოდის მეთოდი ძალიან მოხერხებულია. ის მარტივ წესებს ემორჩილება და ადვილად გამოსაყენებელია, თუკი ამოცანა სათანადოდ კარგადაა დასმული და დადგენილია მისი ამოხსნისათვის საჭირო მიმდევრობა.

მოდის მეთოდით გამოთვლისას ხდება თვითკონტროლი, რაც იმას ნიშნავს, რომ არითმეტიკული მოქმედების შესრულებისას დაშვებული შეცდომა მაშინვე იჩენს თავს და ხდება ხელახალი გადაანგარიშება. როდესაც ფიქტიური რესურსები და საჭირო მოთხოვნილება ერთმანეთს არ დაემთხვევა, ეს იმის მაჩვენებელია, რომ გამოთვლისას შეცდომაა დაშვებული.

მოდის მეთოდით სარგებლობისას, როგორც გამოთვლათა რიცხვი, ისე გამოსათვლელი დრო საგრძნობლად მცირდება სხვა ანალოგიური მეთოდების გამოყენებასთან შედარებით. ეს იმით არის გამოწვეული, რომ ინფორმაციის მოწესრიგება ეფექტურად ხდება და გეგმის შედგენა კი — გამარტივებულად. ყველა ეს უპირატესობა, როცა ამოცანის ამოხსნა და პროგრამის შედგენა გვიხდება ხშირ-ხშირად, იძლევა დროის ეკონომიას და, მაშასადამე, მეტ მოგებასაც.

მოდის მეთოდით სარგებლობისას გამოთვლების ჩატარება ძალზე მოკლე დროში ხელითაც შეიძლება. მოდის მეთოდით შეიძლება ამოცანის ამოხსნა უდიდესი შემოსავლის, უმცირესი დანახარჯების, უმცი-

რესი დროის დახარჯვის და სხვა თვალსაზრისით. ამის გამო გვეძლევა შესაძლებლობა გავაანალიზოთ სხვადასხვა პერსპექტივები გარკვეული გადაწყვეტილების მიღებამდე. მოდის მეთოდით შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა ალტერნატიური შესაძლებლობანი.

მოდის მეთოდი სპეციალიზებული მეთოდია, რომელიც მხოლოდ მაშინ გამოდგება, როცა ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო ყველა ინფორმაცია ერთი და იმავე ერთეულებითაა გამოსახული. ყველა ინფორმაციის ერთი და იმავე ერთეულებით გამოსახვა არც ისე, რთულია, მაგრამ, რა თქმა უნდა, დამატებით დროს მოითხოვს. მიუხედავად ამისა, მოდის მეთოდით სარგებლობისას მიღებული დროის ეკონომია დიდად აღემატება იმ დროს, რომელიც საჭიროა ინფორმაციის ერთი და იმავე ერთეულებში გამოსახატავად.

მოდის მეთოდის ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ მისი გამოყენება პრობლემის ამოხსნის რამდენიმე საფეხურზე ერთდროულად არ შეიძლება. მაგალითად, მისი გამოყენება წარმოების დაგეგმვისას არ შეიძლება, თუ მხედველობაში მივიღებთ ცალ-ცალკე ისეთი ოპერაციების ჩატარებას, როგორიცაა სახარატო დაზგაზე დამუშავება, გაჩარხვა და აწყობა. ამ პროცესების პროგრამირება მოდის მეთოდით შეიძლება ჩატარდეს თითოეული ოპერაციისათვის ცალ-ცალკე ანდა ყველასათვის ერთად.

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას სასურველია რიცხვების მიმდევრობის და არა კონკრეტული განსაზღვრული რიცხვების ოპერირება. მოდის მეთოდის გამოყენება არ შეიძლება ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნისას.

მოდის მეთოდის გამოყენება ბევრგან შეიძლება. ის წრფივი პროგრამირების ტიპური მეთოდია.

თავი V

ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდი

§ 1. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის არსი და მისი გამოყენება კონკრეტულ მაგალითზე

ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის საშუალებით რეზერვთა განაწილების ამოცანა დაიყვანება გარკვეული რიცხვების ე. წ. ამომხსნელი მამრავლების მონახვამდე, რომლებიც გამოიყენებიან ოპტიმალური გეგმის მისაღებად. ამ მეთოდის გამოყენება შეიძლება აგრეთვე პროდუქციათა გადატანის დაგეგმვისას. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია: დაზგებსა და მექანიზმებს შორის მუშაობის საუკეთესო განაწილება, ნარჩენების მაქსიმალურად შემცირე-

ბა; მასალის, სათბობის, ტრანსპორტის საუკეთესოდ გამოყენება და სხვ.

რომ გავერკვეთ ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის არსში, ამისათვის პირველ რიგში განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული მაგალითი.

ვთქვათ, ლითონის დამუშავება ხდება სხვადასხვა ტიპის დაზგებზე. დავუშვათ, გვაქვს სამი ტიპის დაზგა №1, №2 და №3. ვიგულისხმოთ, რომ მათზე გვინდა ორი სახის დეტალის დამუშავება. ვთქვათ, № 1 ტიპის სამი დაზგა გვაქვს, № 2 ტიპის — ორი, ხოლო № 3 ტიპის — ერთი.

დავუშვათ, რომ მთელი სამუშაო დღის განმავლობაში №1 ტიპის დაზგაზე შეიძლება დამზადდეს I სახის 15 დეტალი ან II სახის 30 დეტალი; № 2 ტიპის დაზგაზე — I სახის 30 დეტალი, ანდა II სახის 40; № 3 ტიპის დაზგაზე კი — I სახის 40, ანდა II სახის 100 დეტალი.

ამგვარად, მთელი დღის განმავლობაში ექვსივე დაზგაზე შეგვიძლია დავამზადოთ $45+60+40=145$ ერთეული I სახის დეტალი ან $90+80+100=270$ ერთეული II სახის დეტალი.

დაზგათა წარმოებადობა მოცემულია შემდეგ ცხრილში

ორი დეტალის მიხედვით დაზგათა წარმოებადობა

დაზგათა ტიპები	დაზგათა რაოდენობა	თითოეული დაზგის მიხედვით წარმოებადობა		მთლიანი წარმოებადობა	
		I დეტალი	II დეტალი	I დეტალი	II დეტალი
№ 1	3	15	30	45	90
№ 2	2	30	40	60	80
№ 3	1	40	100	40	100

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ სამუშაო დღის განმავლობაში დაზგებს შორის მუშაობა განაწილდეს ისეთნაირად, რომ მოინახოს კომპლექტურ დეტალთა მაქსიმალურად გამოშვების ხერხი (ჩვენს შემთხვევაში კომპლექტში შედის I და II სახის დეტალთა თანაბარი რაოდენობა).

უბრალო გამოთვლებით შეიძლება დაზგათა მუშაობის განაწილება ისეთნაირად, რომ თანაბრად მივიღოთ I და II სახის დეტალების რაოდენობა. მაგალითად, № 1 დაზგაზე დავამზადოთ 30 ერთეული I სახის

და ამდენივე II სახის, № 2 დაზგაზე კი—20 ერთეული I სახის და ამდენივე II სახის, ხოლო № 3 დაზგაზე—28 ერთეული I სახის და ამდენივე II სახის. მაშასადამე, საერთო წარმოებადობა ყველა დაზგის მიხედვით იქნება 78 ერთეული I სახის და ამდენივე II სახის.

ახლა ვიპოვოთ უფრო უკეთესი გეგმა კომპლექტურ დეტალთა დამზადებისა. ჩვენს მაგალითში № 1 დაზგაზე ერთი I სახის დეტალის დამზადება ტოლფასია ორი II სახის დეტალის დამზადებისა; № 2 დაზგაზე სამი I სახის დეტალის დამზადება ტოლფასია ოთხი II სახის დეტალის დამზადებისა, ხოლო № 3 დაზგაზე ოთხი I სახის დეტალის დამზადება ტოლფასია ათი II სახის დეტალის დამზადებისა. როგორც ვხედავთ, I სახის დეტალის დამზადება უფრო ხელსაყრელია № 2 დაზგაზე, ხოლო II სახის დეტალის დამზადება კი № 3 დაზგაზე, მაშასადამე, საჭიროა მთელი დღის განმავლობაში № 2 დაზგა ვამუშაოთ მხოლოდ I სახის დეტალის დამზადებაზე და № 3 დაზგა კი II სახის დეტალის დამზადებაზე, ხოლო № 1 დაზგაზე დავამზადოთ ორივე სახის დეტალები ისე, რომ კომპლექტურობა იქნეს დაცული. სახელდობრ, № 1 დაზგაზე დავამზადოთ 43 ერთეული I სახის დეტალი და 3 ერთეული II სახის დეტალი. ამგვარად, გვექნება ყველა დაზგაზე დამზადებული 103 ერთეული I სახის დეტალი და ამდენივე II სახისა. დაზგათა შორის დამზადებათა ამგვარი გადანაწილებით 78 კომპლექტის ნაცვლად მივიღებთ 103 კომპლექტს, რაც წინას აღემატება 25 კომპლექტით. როგორც ვხედავთ, ეფექტურობა შესამჩნევია. წარმოებადობის გაზრდა მოხდა ყოველგვარი დანახარჯის გარეშე.

დეტალთა დამუშავების განაწილება დაზგების მიხედვით მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში.

დეტალების დამუშავებათა განაწილება დაზგების მიხედვით

დაზგა	ამონახსნი		საუკეთესო ამონახსნი	
	I დეტალი	II დეტალი	I დეტალი	II დეტალი
№ 1	30	30	43	3
№ 2	20	20	60	—
№ 3	28	28	—	100
კომპლექტთა რიცხვი	78	78	103	103

ეს ამოცანა ასე მარტივად იმიტომ ამოიხსნა, რომ აქ დაზგათა ტიპები მხოლოდ სამია და დეტალთა სახეებიც მხოლო ორი გვაქვს დასამზადებელი. იმ შემთხვევაში, როდესაც დაზგათა რიცხვი საკმაოდ დიდია და დეტალთა სახეებიც მრავალია, მაშინ ასე მარტივად ამოცანის ამოხსნა თითქმის შეუძლებელი ხდება.

§ 2. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდით ამოცანების ამოხსნის დაყვანა მათემატიკური ამოცანების ამოხსნაზე

იმისათვის, რომ ვნახოთ, თუ რა სახის მათემატიკური ამოცანის ამოხსნამდე დადის განხილული ტიპის მაგალითების ამოხსნა განვიხილოთ შემდეგი ზოგადი შემთხვევა.

ვთქვათ, გვაქვს n დაზგა, რომლებზედაც ხდება m სხვადასხვა სახის დეტალთა დამზადება. ვიგულისხმოთ, რომ თუ i-ურ დაზგაზე დავამზადებთ k-ური სახის დეტალს, მაშინ მთელი დღის განმავლობაში ჩვენ შეგვიძლია დავამზადოთ a_{ik} ერთეული. თუ i-ურ დაზგაზე არ შეიძლება k-ური სახის დეტალის დამზადება, მაშინ $a_{ik}=0$. ჩვენი მიზანია დაზგათა შორის დეტალთა სახეების დამზადების ისეთნაირი განაწილება ვაწარმოოთ, რომ კომპლექტურობის დაცვით, რაც შეიძლება მეტი რაოდენობით დავამზადოთ დეტალები. h_{ik}-თი აღვნიშნოთ ის დრო (რომელიც სამუშაო დღის ნაწილს წარმოადგენს), რომელიც საჭიროა k-ური დეტალის დასამზადებლად i-ურ დაზგაზე. ეს დრო უცნობია და მისი განსაზღვრა იქნება საჭირო, იმ პირობით, რომ მიღებული პროდუქცია იყოს მაქსიმალური. მაშინ h_{ik}-ს განსასაზღვრავად საჭირო იქნება შემდეგ პირობათა შესრულება:

პირველ რიგში, $h_{ik}\geqslant 0$. აგრეთვე ყოველი ფიქსირებული i-თვის $\sum_{k=1}^{m} h_{ik}=1$. ეს პირობა იმას ნიშნავს, რომ ყველა დეტალის მიმართ i-ური დაზგა დატვირთულია მთელი სამუშაო დღის განმავლობაში. შემდეგ, დამზადებულ k-ურ დეტალთა რაოდენობა აღვნიშნოთ z_k-თი, რომელიც შემდეგნაირად წარმოიდგინება:

$$z_k=\sum_{i=1}^{n} a_{ik} h_{ik},$$

რადგანაც ყოველი ნამრავლი $a_{ik}h_{ik}$ არის i-ურ დაზგაზე დამზადებული k-ური დეტალების რაოდენობა. იმისათვის, რომ დაცულ იქნეს დამზადებულ დეტალთა კომპლექტურობა, საჭიროა შემდეგი ტოლობის შესრულება

$$z=z_1=z_2=\ldots=z_m.$$

ამ რიცხვების საერთო მნიშვნელობა z უნდა იყოს მაქსიმალური.

ამგვარად, ჩვენი ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნამდე:

I. განისაზღვროს h_{ik} ($i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$) შემდეგი პირობებიდან:

$$1) \quad h_{ik} \geqslant 0,$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{m} h_{ik} = 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

3) h_{ik} სიდიდეები ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ ყველა z_k იყოს ერთმანეთის ტოლი და მაქსიმალური, სადაც

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} h_{ik}.$$

ერთი მოცემული დეტალის დასამზადებლად სხვადასხვა ოპერაციის დაზგებზე განაწილების საკითხი დაიყვანება ზუსტად I ამოცანაზე. თუ ამ დეტალის დასამზადებლად საჭიროა რამდენიმე ოპერაცია და ყოველი მათგანის გაკეთება შეიძლება რამდენიმე დაზგაზე, მაშინ a_{ik} იქნება k-ური ოპერაციისათვის i-ური დაზგის გამომუშავება, ხოლო h_{ik}—ის დრო, რომლის განმავლობაში i-ური დაზგა მუშაობს k-ური ოპერაციისათვის.

არსებობს I ამოცანის სხვადასხვა ვარიანტი. მაგალითად, თუ გვაქვს არა ერთი, არამედ ორი ნაწარმი, მაშინ გვექნება დეტალი, რომელიც წარმოადგენს პირველ ნაწარმს და გვექნება ისეთი დეტალიც, რომელიც მეორე ნაწარმს წარმოადგენს. პირველი ნაწარმის დეტალთა რაოდენობა იყოს x, ხოლო მეორე ნაწარმის დეტალთა რაოდენობა კი y. ასეთ შემთხვევაში, თუ ასორტიმენტი არ არის მოცემული და საჭიროა ფასების მიხედვით მხოლოდ პროდუქციის მაქსიმალური რაოდენობის გამოშვება, მაშინ, ცხადია, დაგვჭირდება $ax+by$ სიდიდის მაქსიმუმის პოვნა, სადაც a პირველი ნაწარმის, ხოლო b მეორე ნაწარმის ღირებულებაა.

ახლა წამოვაყენოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, გვაქვს რაიმე მალიმიტირებელი პირობა, მაგალითად, ასეთი — დამუშავების ყოველი პროცესისათვის განკუთვნილია გარკვეული რაოდენობის ელექტროენერგიის ხარჯვა.

ვთქვათ, k-ური დეტალის დასამზადებლად i-ურ დაზგაზე საჭიროა მთელი სამუშაო დღის განმავლობაში c_{ik} კილოვატ-საათი ელექ-

ტროენერგიის რაოდენობა. მაშინ მთელი ელექტროენერგიის რაოდენობა, რომელიც დაიხარჯება, იქნება:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{ik} c_{ik}$$

და ჩვენ შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ ის გარკვეულ C რიცხვს არ აღემატებოდეს, ე. ი. არ უნდა აღემატებოდეს იმ ენერგიას, რომელიც ჩვენს განკარგულებაშია.

ამგვარად, დგება შემდეგი მათემატიკური ამოცანა:

II. მოვნახოთ h_{ik} რიცხვები, რომლებიც I ამოცანის სამივე პირობას აკმაყოფილებს და აგრეთვე ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$4) \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{ik} h_{ik} < C.$$

ცხადია, რომ c_{ik} შეიძლება იყოს სხვა სიდიდეებიც, მაგალითად, მომსახურე პერსონალის რაოდენობა; თუ ჩვენს განკარგულებაშია კაცდღეთა გარკვეული რაოდენობა, მაშინ ეს შეიძლება იყოს შემზღუდველი პირობა და ჩვენ დავდივართ II ამოცანამდე.

გავარჩიოთ III ამოცანა. დავუშვათ ერთსა და იმავე დაზგაზე შესაძლებელია ერთდროულად დავამუშაოთ რამდენიმე დეტალი ანდა ერთ დეტალზე ვაწარმოოთ სხვადასხვა ოპერაცია. ვთქვათ, ჩვენ სხვადასხვანაირად შეგვიძლია წარმოების პროცესის ორგანიზება. დავუშვათ, ერთ რომელიმე დაზგაზე შეიძლება სამი სხვადასხვა დეტალის დამუშავება ანდა შეიძლება იმავე დაზგაზე სხვა ორი დეტალის დამუშავება და ა. შ. ამ შემთხვევაში ამოცანა უფრო რთულ სახეს ღებულობს. მართლაც, ვთქვათ, i-ურ დაზგაზე l-ური ხერხით წარმოების ორგანიზაციით შეგვიძლია დღის განმავლობაში მივიღოთ γ_{ikl} ერთეული k-ური დეტალი, ე. ი. ერთდროულად γ_{i1l} ერთეული პირველი დეტალი, γ_{i2l} — მეორე დეტალი და ა. შ. შესაძლებელია აქ ზოგიერთი γ_{ikl} იყოს ნულის ტოლიც.

დავუშვათ, h_{il} არის i-ური დაზგის l ხერხით მუშაობის დრო, რომელიც ჩვენთვის უცნობია, მაშინ ყველა დაზგაზე დამუშავებული k-ური დეტალების რაოდენობა z_k იქნება:

$$z_k = \sum_{i} \sum_{l} \gamma_{ikl} h_{il}.$$

ამგვარად, ამოცანა ისევ დაიყვანება z მთლიანი კომპლექტების მაქსიმალური რაოდენობის მონახვამდე, როდესაც $z_1=z_2=\dots=z_m$. მიღებული ამოცანის ჩამოყალიბება შეიძლება შემდეგნაირად:

III. მოვნახოთ h_{il} სიდიდეები შემდეგი პირობებიდან:

1) $h_{il} \geq 0$,

2) $\sum_l h_{il}=1$;

3) ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $z_1=z_2=\dots=z_m$ და მათი მნიშვნელობა უნდა იყოს მაქსიმალური, სადაც

$$z_k=\sum_{i,\, l} \gamma_{ikl} h_{il}.$$

ყველა ჩამოთვლილი ამოცანის (I, II, III) და მათი მსგავსი სხვა ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ე. წ. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდით.

§ 8. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის იდეა

მეთოდის იდეა განვიხილოთ I ამოცანისათვის (II და III ამოცანისათვის კი ნათქვამი ძალაში დარჩება). თურმე, არსებობს ისეთი $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლები, რომლებიც ეთანადებიან თითოეულ დეტალს და მივყავართ ამოცანის ამოხსნამდე. სახელდობრ, თუ ყოველი მოცემული i-თვის განვიხილავთ $\lambda_1 a_{i1}, \lambda_2 a_{i2}, \dots, \lambda_m a_{im}$ ნამრავლებს და მოვნახავთ $max\,(\lambda_1 a_{i1}, \lambda_2 a_{i2}, \dots, \lambda_m a_{im})=\lambda_k a_{ik}$, მაშინ შესაბამ h_{ik}-ებს დავტოვებთ ჯერჯერობით უცვლელად, ხოლო დანარჩენ h_{ij}-ებს ($j \neq k$) მივიღებთ ნულის ტოლად. რაც შეეხება რამდენიმე დარჩენილ h_{ik} მნიშვნელობას, ისინი განისაზღვრებიან შემდეგი პირობებიდან:

$$\sum_{k=1}^{m} h_{ik}=1, \quad z_1=z_2=\dots=z_m.$$

თუ ასეთი არაუარყოფითი h_{ik}-ები არსებობენ, მაშინ ისინი ანიჭებენ z-ს მაქსიმუმს და წარმოადგენენ სწორედ ამოცანის ამონახსენს (ისეთი h_{ik}-ების შერჩევა, რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ მოცემულ პირობებს, ხდება $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლთა შერჩევის ხარჯზე).

ამგვარად, ნაცვლად იმისა, რომ ვიპოვოთ h_{ik} უცნობები, რომელთა რაოდენობა საკმაოდ დიდია და უდრის nm-ს, შესაძლებელია ვიპოვოთ λ_k უცნობები, რომელთა რაოდენობა არის m. რაც შეეხება λ_k მამრავლებს მათი პოვნა ადვილად შეიძლება თანდათანობითი მიახლო-

ების გზით. მიღებული ამოხსნის პრაქტიკულად განხორციელება მარტივად შეიძლება. მიღებული ამოხსნის შემოწმებაც ძალიან ადვილია.

რადგანაც h_{ik} უცნობების პოვნისას მათი უმრავლესობა ნულის ტოლია, ამიტომ ერთი ან მხოლოდ ორი დეტალის დასამუშავებლად დაზგის დაკავება ხდება მთელი დღის განმავლობაში, ე. ი. უმრავლესობა დაზგებისა მთელი დღის განმავლობაში შეიძლება მუშაობდეს მხოლოდ ერთი რომელიმე დეტალის დამზადებაზე, ხოლო მხოლოდ ორ-სამ დაზგაზე შესაძლებელია მოხდეს ორი სხვადასხვა დეტალის დამზადება. ეს უკანასკნელი გამოწვეულია იმით, რომ მოითხოვება კომპლექტურობის დაცვა.

ამოხსნა აქ განხილულ ამოცანებისა, რომლებიც კომპლექტურობის დაცვით დამზადებულ პროდუქციათა მაქსიმალურ რაოდენობას იძლევა, ცხადია, შეიძლება და მას აზრი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც სერიული წარმოება გვაქვს.

§ 4. I ამოცანის ამოხსნა

I ამოცანაში დავუშვათ, რომ $m=2$, ე. ი. გვაქვს ორი სახის დეტალი, მაშინ დასმული ამოცანა ღებულობს შემდეგ სახეს:

მოვნახოთ h_{i1} და h_{i2}, თუ

$$1)\ h_{i1}, h_{i2} \geqslant 0;$$

$$2)\ h_{i1}+h_{i2}=1,$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1} h_{i1}=\sum_{i=1}^{n} a_{i2} h_{i2}$$

და მათი საერთო მნიშვნელობა z იქნება შესაძლო მაქსიმალური სიდიდე.

განვიხილოთ $\frac{a_{i2}}{a_{i1}}=k_i$ ფარდობა ყველა i-თვის. ეს შეფარდება გამოხატავს თითოეული დაზგის წარმოებადობას I და II სახის დეტალების მიხედვით. ამგვარად, № 1 დაზგაზე ერთი ერთეული I სახის დეტალი ტოლფასია k_1 ერთეული II სახის დეტალისა. № 2 დაზგაზე ერთი ერთეული I სახის დეტალი ტოლფასია k_2 ერთეული II სახის დეტალისა და ა. შ. შეგვიძლია ზოგადობის შეუზღუდველად მივიღოთ, რომ ფარდობები k_1, k_2, . . . დალაგებულია ზრდადი მიმდევრობით: $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots$; ამის მიღწევა მარტივად შეიძლება, თუ ჯერ k_i შეფარდებებს ვიპოვით, შემდეგ დავალაგებთ ზრდადი მიმდევრობით და

ამისდა მიხედვით მოვახდენთ დაზგათა დანომვრას; პირველი იმ დაზგას ვუწოდოთ, რომლისათვისაც ფარდობა ყველაზე მცირეა და ა. შ., ცხადია, რომ I სახის დეტალის დამუშავება უფრო ხელსაყრელია პირველ დაზგაზე, რადგანაც ამ დაზგაზე I სახის დეტალის არდამუშავება ნიშნავს მისი ერთეულის შეცვლას k_1 ერთეული II სახის დეტალით, მაშინ როდესაც ყველა დანარჩენზე შესაბამისი რიცხვები k_2, k_3, . . . მეტია k_1-ზე. № 2 დაზგაზე I სახის დეტალის დამუშავება არ იქნება უფრო სასარგებლო, ვიდრე პირველზე, მაგრამ უფრო უკეთესია, ვიდრე სხვა ნებისმიერზე. აქედან, ცხადია, რომ პირველი დაზგები უნდა ვამუშაოთ მხოლოდ I სახის დეტალის დამუშავებაზე, ხოლო ბოლო დაზგები II სახის დეტალის დამუშავებაზე, ე. ი. პირველთა შემთხვევაში საჭიროა მივიღოთ: $h_{i1}=1$ და $h_{i2}=0$, ხოლო ბოლოებისათვის კი $h_{i1}=0$ და $h_{i2}=1$. ამასთან მხედველობაში უნდა იყოს მიღებული ის გარემოება, რომ საერთო წარმოებადობა ორივე დეტალისა იყოს ერთი და იგივე. ამ მოთხოვნილებიდან გამომდინარე s რიცხვი ისე უნდა შეირჩეს, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ უტოლობებს:

$$\sum_{i=1}^{s-1} a_{i1} < \sum_{i=s}^{n} a_{i2},$$

$$\sum_{i=1}^{s} a_{i1} \geqslant \sum_{i=s+1}^{n} a_{i2}.$$

უკანასკნელი უტოლობები გვამცნობს, რომ I სახის დეტალის დასამზადებლად პირველი $s-1$ დაზგის გამოყოფა არ არის საკმარისი (მაშინ II სახის დეტალთა წარმოებადობა იქნება მეტი), ხოლო თუ I სახის დეტალის დასამზადებლად გამოვყოფთ პირველ s დაზგას, ეს იქნება საკმარისი და შეიძლება მეტიც. მაშინ, ცხადია, რომ თუ ავიღებთ $h_{i1}=1$, $h_{i2}=0$, როცა $i=1, 2, \ldots, s-1$; ხოლო $h_{i1}=0$, $h_{i2}=1$, როცა $i=s+1, s+2, \ldots, n$ და h_{s1} და h_{s2} სიდიდეებს განვსაზღვრავთ

$$h_{s1}+h_{s2}=1,$$

$$\sum_{i=1}^{s-1} a_{i1}+h_{s1}a_{s1} = \sum_{i=s+1}^{n} a_{i2}+h_{s2}a_{s2}$$

პირობებიდან, მივიღებთ ჩვენი ამოცანის ამოხსნას.

ახლა აქ განხილული პროცესი გამოვიყენოთ ჩვენ მიერ ზემოთ

გარჩეული მაგალითისათვის. წარმოებადობა დაზგათა ჯგუფების მიხედვით იყო შემდეგი:

დეტალი	დაზგები		
	№ 1	№ 2	№ 3
I	45	60	40
II	90	80	100

ფარდობები აქ იქნებიან: $\frac{90}{45}=2$; $\frac{80}{60}=\frac{4}{3}$; $\frac{100}{40}=\frac{5}{2}$. ახლა თუ მათ დავალაგებთ ზრდადი მიმდევრობით გვექნება

$$\frac{4}{3}<2<\frac{5}{2}.$$

წარმოებადობაც დავალაგოთ ასეთივე მიმდევრობით, მაშინ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

დეტალი	დაზგები		
	№ 2	№ 1	№ 3
I	60	45	40
II	80	90	100

მაშინ a_{ik} სიდიდეებისათვის მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$a_{11}=60,\ a_{21}=45,\ a_{31}=40,$$

$$a_{12}=80,\ a_{22}=90,\ a_{32}=100.$$

ავიღოთ $s=2$, გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{s-1} a_{i1}=a_{11}=60<\sum_{i=s}^{n} a_{i2}=a_{22}+a_{32}=90+100=190;$$

$$\sum_{i=1}^{s} a_{i1}=a_{11}+a_{21}=60+45=105>\sum_{i=s+1}^{n} a_{i2}=a_{32}=100.$$

მაშასადამე, $h_{11}=1$; $h_{12}=0$; $h_{31}=0$; $h_{32}=1$. h_{21} და h_{22} სიდიდეთა განსასაზღვრავად გვაქვს განტოლებანი:

$$h_{21}+h_{22}=1,$$
$$a_{11}+h_{21}a_{21}=a_{32}+h_{22}a_{22},$$

ან, რაც იგივეა,

$$h_{21}+h_{22}=1;$$
$$60+45h_{21}=100+90h_{22}.$$

პირველიდან

$$h_{22}=1-h_{21},$$

მაშინ

$$60+45h_{21}=100+90-90h_{21},$$

ანდა

$$135h_{21}=130,$$

ე. ი.

$$h_{21}=\frac{26}{27},$$

ხოლო

$$h_{22}=\frac{1}{27}.$$

თუ h_{ik} სიდიდეთა მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ z-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$z=a_{11}h_{11}+a_{21}h_{21}+a_{31}h_{31}=a_{12}h_{12}+a_{22}h_{22}+a_{32}h_{32},$$

ე. ი. გვაქვს:

$$z=60\cdot1+45\cdot\frac{26}{27}+40\cdot0=80\cdot0+90\cdot\frac{1}{27}+100\cdot1,$$

ანდა

$$z=60+\frac{130}{3}=\frac{10}{3}+100\simeq103.$$

მიღებულ საუკეთესო განაწილების მიხედვით თუ შევადგენთ ცხრილს, გვექნება:

დეტალი	დაზგები		
	№ 2	№ 1	№ 3
I	60	43	—
II	—	3	100

ეს იგივეა, რაც ადრე გვქონდა მიღებული.

ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდი ჩვენ გამოვიყენეთ მაშინ, როცა $m=2$. ცხადია, ამ მეთოდის გამოყენება შეიძლება ნებისმიერი m-თვის. ამოცანის მთლიანად ამოხსნა ეკვივალენტურია k_s ფარდობების პოვნისა, რომლებიც ისეთ s-ებს ეთანადებიან, რომელთათვისაც შერჩევას ვაწარმოებთ. მართლაც, თუ

$$k_s=\frac{a_{s2}}{a_{s1}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

ფარდობა ცნობილია, ყველა ამოხსნა მაშინვე მოინახება, იმ i-თვის, რომელთათვისაც

$$\frac{a_{i2}}{a_{i1}}<\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

ანდა, რაც იგივეა,

$$\lambda_1 a_{i1}>\lambda_2 a_{i2};$$

უპირატესობა უნდა მივანიჭოთ I სახის დეტალს, ე. ი. უნდა ავიღოთ $h_{i1}=1$; $h_{i2}=0$; ხოლო იმ i-თათვის, რომელთათვისაც $\lambda_2 a_{i2}>\lambda_1 a_{i1}$, უპირატესობა II სახის დეტალს უნდა მივანიჭოთ, ე. ი. მივიღოთ $h_{i1}=0$, $h_{i2}=1$; დაბოლოს, იმ i-თათვის, რომელთათვისაც $\lambda_1 a_{i1}=\lambda_2 a_{i2}$, შესაბამისი h შევარჩიოთ

$$\Sigma a_{i1} h_{i1}=\Sigma a_{i2} h_{i2}$$

განტოლებიდან. ეს ამომხსნელი ფარდობა არის იმ წონასწორობის მაჩვენებელი, რომელსაც ადგილი ექნება ორი სახის დეტალს შორის მაქსიმალური განაწილებისას. ჩვენ მიერ განხილულ მაგალითში ეს წონასწორობა მყარდება №1 დაზგაზე და $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{2}{1}$. მიღებული ამომხსნელი ფარდობა განისაზღვრება ყველა პირობათა ერთობლიობით, მაგალითად, მისი გამოსახვა არ შეიძლება მარტო k_1, k_2, სიდიდეებით. ჩვენს მაგალითში № 3 დაზგა, რომ გვქონოდა არა ერთი, არამედ ორი, მაშინ მაქსიმალური განაწილების დროს მოგვიხდებოდა I სახის დეტალზე მთელი დროის განმავლობაში არა მარტო № 2 და № 1 დაზგების მუშაობა, არამედ მის დასამზადებლად ნაწილობრივ № 3 დაზგის ჩართვაც დაგვჭირდებოდა. მაშინ ამომხსნელი ფარდობა იქნებოდა: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{5}{2}$; პირიქით, თუ სამჯერ გავადიდებდით № 2 დაზგათა რაოდენობას, მაშინ ამომხსნელ მამრავლთა ფარდობა იქნებოდა $\frac{4}{3}$.

ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის გამოყენებას ამოცანის ამოსახსნელად ნებისმიერი m-ის შემთხვევაში საფუძვლად სწორედ ზემოთ

მოყვანილი იდეა უძევს. ამ შემთხვევაში, ცხადია, რომ საკმაოდ დიდ h_{ik} სიდიდეთა მონახვის ნაცვლად უმჯობესია იმ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ მამრავლთა მონახვა, რომლებიც მაქსიმალური განაწილებისას წონასწორობის მაჩვენებელია; ამ მამრავლთა მიხედვით, როგორც მაშინ, როცა $m=2$, საზოგადოდაც შეგვიძლია მაშინვე ვაჩვენოთ ისეთი h_{ik} სიდიდეები, რომელთა მნიშვნელობა საჭიროა ნულად მივიღოთ.

§ 5. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის საფუძველი

I ამოცანისათვის ამომხსნელი მამრავლები ეწოდება $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ($\lambda_k \geqslant 0$ და ერთდროულად ყველა არ შეიძლება იყოს ნული) m რიცხვთა ისეთ სისტემას, რომელთა მიმართ ყოველი მოცემული i-თვის ვიხილავთ ნამრავლებს:

$$\lambda_1 a_{i1}, \ \lambda_2 a_{i2}, \ \ldots, \ \lambda_m a_{im},$$

მათ შორის უდიდესს აღვნიშნავთ c_i-ით და თუ მივიღებთ ნულის ტოლად იმ h_{ik}-ებს, რომელთათვისაც შესაბამისი ნამრავლები არ არის მაქსიმალური, ე. ი. $\lambda_k a_{ik} < c_i$, მაშინ დანარჩენი h_{ik} სიდიდეები განისაზღვრება პირობებიდან:

$$1) h_{ik} \geqslant 0; \quad 2) \sum_{k=1}^{m} h_{ik} = 1; \quad 3) \ z_1 = z_2 = \ldots = z_m.$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ ამომხსნელ მამრავლთა პოვნა სინამდვილეში იძლევა I ამოცანის ამოხსნას. ამისათვის საჭიროა იმის ჩვენება, რომ ამომხსნელ მამრავლთა მეშვეობით ნაპოვნი h_{ik} სიდიდეების შესაბამის z^*-ს აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა.

მართლაც, h^*_{ik} რიცხვთა სისტემისათვის გვაქვს:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z^*_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} h^*_{ik} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k a_{ik}) h^*_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_i h^*_{ik} = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{m} h^*_{ik} = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

ახლა დავუშვათ გვაქვს რაიმე სხვა სისტემა h_{ik} სიდიდეებისა, რომელთათვისაც $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_m$, მაშინ დავწერთ:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} h_{ik} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k a_{ik}) h_{ik} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_i h_{ik} = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{m} h_{ik} = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

თუ მიღებულ უტოლობას ზემოთ მიღებულ ტოლობას შევადარებთ, დავწერთ

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) z^{*},$$

ე. ი. მივიღეთ, რომ

$$z \leqslant z^{*}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ z^{*} არის z-ის შესაძლო მაქსიმალური მნიშვნელობა, ე. ი. h_{ik}^{*} რიცხვები, რომლებიც ამომხსნელ მამრავლთა მეშვეობით იყვნენ ნაპოვნი სინამდვილეში იძლევიან I ამოცანის ამოხსნას.

იმისათვის, რომ ვნახოთ, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს ამომხსნელ მამრავლთა შემოყვანას ამოცანის ამოხსნისათვის, გავარჩიოთ, თუ როგორ იხსნება ამოცანა ანალიზურად. I ამოცანის ამოხსნისას საკითხი ისმება z სიდიდის მაქსიმუმის პოვნის შესახებ, რომელიც h_{ik} სიდიდეთა წრფივ ფუნქციას წარმოადგენს სხვა დამატებით პირობებთან ერთად. ცნობილია, რომ წრფივი ფუნქციის მაქსიმუმის საპოვნელად რაიმე შუალედში საჭიროა მისი მნიშვნელობის შედარება შუალედის ბოლოებზე და მათ შორის უდიდესის აღება. იგივე წესი მართებულია მაშინაც, როდესაც გვაქვს მრავალ ცვლადზე დამოკიდებული წრფივი ფუნქცია. ამ შემთხვევაში შუალედის ნაცვლად გვექნება მრავალწახნაგა და საჭირო იქნება წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა შედარება მრავალწახნაგას წვეროებზე.

აქ მოყვანილი წესი იმას ნიშნავს, რომ საჭიროა ზოგადად $n+m-1$ რაოდენობით h_{ik} სიდიდეთა არჩევა, ხოლო დანარჩენ h_{ik}-ების ნულთან გატოლება. შერჩეული h_{ik} სიდიდეები განისაზღვრება $n+m-1$ ტოლობიდან

$$\sum_{k} h_{ik} = 1; \quad z_1 = z_2 = \ldots = z_m;$$

მიღებული z მნიშვნელობებს შეადარებენ ერთმანეთს. ყოველი მოსინჯვისას საჭირო იქნება არც ისე დიდი რაოდენობის განტოლებებისაგან

შემდგარი სისტემის ამოხსნა, მაგრამ იმ სინჯთა რაოდენობა, რომელთა ჩატარება საჭიროა, იქნება:

$$\sum_{i,\,j=0}^{m+n-1} (-1)^{i+j} C_{(m-i)\,(n-j)} C^i_m C^j_n.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ, როცა $n=3$ და $m=3$, საჭირო იქნება 90 სინჯი; როცა $n=4$ და $m=4$, მაშინ 6256 სინჯი; ხოლო, როდესაც $n=8$ და $m=5$, მაშინ საჭირო იქნება თითქმის მილიარდი სინჯი.

ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდით კი ხდება ყველა არასაჭირო სისტემათა უკუგდება და ამოიხსნება მხოლოდ ერთი საჭირო სისტემა.

ამგვარად, როგორც ვხედავთ, ამოცანის ამოხსნა დადის ამომხსნელ მამრავლთა პოვნაზე. საჭიროა მათი პოვნის მეთოდის დადგენა.

ვთქვათ, ამომხსნელ მამრავლთა ნაცვლად შემთხვევით ვიღებთ რაღაც λ_1^0, λ_2^0, . . ., λ_m^0 რიცხვთა ნებისმიერ სისტემას. ამ შემთხვევაშიაც, თურმე ჩვენ ისე შეგვიძლია მოვიქცეთ, თითქოს ნამდვილი ამომხსნელი მამრავლები გვქონდეს. სახელდობრ, შეიძლება განვიხილოთ ნამრავლები:

$$\lambda_1^0 a_{i1};\ \lambda_2^0 a_{i2};\ \ldots;\ \lambda_m^0 a_{im}.$$

მოვნახოთ მათ შორის მაქსიმუმი, ვთქვათ, ის არის $\lambda^0_k a_{ik}$; ამ k-ს შესაბამისი h_{ik} სიდიდეები მივიღოთ ერთის ტოლად და დანარჩენი h_{ik}-ები — ნულად. თუ რიცხვთა ასეთი შემთხვევით არჩევისას მხოლოდ ერთი ნამრავლი იქნება ყველაზე დიდი, მაშინ, ცხადია, მხოლოდ მისი შესაბამისი ერთი $h_{ik}=1$, ხოლო ყველა სხვა დანარჩენი იქნება ნული.

ცხადია, რომ λ_k მამრავლთა ასეთნაირი შემთხვევითი არჩევის დროს h_{ik} სიდიდეები სავსებით განისაზღვრებიან და მათთან ერთად z-ის მნიშვნელობანიც: z_1^0, z_2^0, . . ., z_m^0. ცხადია, ეს მნიშვნელობები არ იქნება ერთმანეთის ტოლი და თუ λ_k-ს მნიშვნელობებს არ შევცვლით მათ ერთმანეთის ტოლებს ვერ გავხდით. როგორც ვხედავთ, საჭიროა ვიცოდეთ, თუ როგორ უნდა მოხდეს λ_k მამრავლთა შეცვლა.

როგორც ვიცით, ამოცანის ამოხსნა მაშინ მიიღება, როდესაც $min(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ მიიღებს შესაძლო მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ეს მინიმუმი განისაზღვრება z_k სიდიდეთა შორის მინიმუმის აღებით, ვთქვათ, ამ სიდიდეთა შორის უმცირესია z_s. ცხადია, უნდა ვეცადოთ მის გადიდებას, მაგრამ აშკარაა, რომ ის გახდება უფრო დიდი სხვებთან შედარებით, თუკი სხვა λ_k მამრავლებს არ გავზრდით და მხოლოდ λ_s-ს გავზრდით. სინამდვილეში, მაშინ უფრო მეტ შემთხვევაში $\lambda_s a_{is}$ ნამრავლი სხვა ნამრავლთან შედარებით ყველაზე დიდი გახდება და

მისი შესაბამისი h_{is} მიიღება ერთის ტოლად, მაშინ, ცხადია, რომ z_s მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მეტი იქნება z^0_s-ზე. აგრეთვე $min(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, საზოგადოდ, მიიღებს წინანდელზე უფრო დიდ მნიშვნელობას.

სწორედ ამაში მდგომარეობს ამომხსნელ მამრავლთა მონახვის ძირითადი პრინციპი. სახელდობრ, λ_k-ს ცვლილებით z_k-ს თანდათან ვუახლოებთ აუცილებელ ექსტრემუმს.

ცხადია, ხანდახან მცირე z_k-ს გადიდების ნაცვლად შეიძლება შესაბამისი λ_k-ს შემცირებით მივუახლოვდეთ სხვა ძალიან დიდ z_k-ს. თუ ამ ოპერაციებს ყოველგვარი სისტემის გარეშე ჩავატარებთ, მაშინ არ შეიძლება გვქონდეს იმის რწმენა, რომ პროცესს როდისმე დავამთავრებთ. სახელდობრ, ზოგიერთი z_k შეიძლება მივუახლოვოთ ექსტრემუმს, მაგრამ ამავე დროს ზოგიერთი სხვა z_k შეიძლება შემცირდეს, რის გამოც სასურველ შედეგს ვერ მივიღებთ. ამიტომ გამოთვლებისას საჭიროა გარკვეულ გზას მივსდიოთ, ეს გზა ქვემოთ იქნება ნაჩვენები ერთ-ერთი კონკრეტული მაგალითის ამოხსნისას.

§ 6. ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდით გამოთვლის სქემა

გამოთვლის სქემის საჩვენებლად განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

ვთქვათ, სამი სხვადასხვა სახის პროდუქციის: I, II და III, დამზადებას ვაწარმოებთ A, B და C სამ სხვადასხვა დაზგაზე. საჭიროა თითოეული სახის პროდუქციის 10000 ერთეულის დამზადება. მოგვეთხოვება სამუშაოთა დაზგათა შორის, რაც შეიძლება უფრო მიზანშეწონილად განაწილება. გამომუშავების ნორმები (ერთ საათში) ცალკეული სახის პროდუქციის, მიმართ მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში.

დაზგათა წარმოებადობა საათში

დაზგა / სამუშაო	A	B	C
I	52	53	32
II	28	33	19
III	28	41	26

ამ ცხრილის მიხედვით დავწერთ:

$$a_{11}=52,\ a_{12}=28,\ a_{13}=28,\ a_{21}=53,\ a_{22}=33,\ a_{23}=41,\ a_{31}=32,$$
$$a_{32}=19 \text{ და } a_{33}=26.$$

λ_k ამომხსნელი მამრავლის საწყის მნიშვნელობად მივიღოთ $\sum_i a_{ik}$ ჯამის უკუპროპორციული სიდიდე. სახელდობრ, მივიღოთ: $\lambda^0_k = \frac{M}{\sum_i a_{ik}}$, სადაც M ნებისმიერი რიცხვია.

დავუშვათ, $M=100$, მაშინ მივიღებთ:

$$\lambda_1^0=\frac{100}{137},\quad \lambda_2^0=\frac{100}{80},\quad \lambda^0_3=\frac{100}{95}.$$

ამგვარად, მივიღეთ: $\lambda_1^0 \simeq 0,73$; $\lambda_2^0 \simeq 1,25$; $\lambda_3^0 \simeq 1,05$. ახლა a_{ik} მნიშვნელობები გადავამრავლოთ λ^0_k-ზე. სახელდობრ, a_{ik} მნიშვნელობათა ცხრილის პირველი სტრიქონი გავამრავლოთ $\lambda^0_1=0,73$-ზე, მეორე სტრიქონი $\lambda^0_2=1,25$-ზე და მესამე სტრიქონი $\lambda^0_3=1,05$-ზე. გვექნება:

$\lambda^0_k a_{ik}$ მნიშვნელობანი

38	39	23
35	41	24
29	43	27

ყოველ მიღებულ სვეტში შევარჩიოთ უდიდესი. ესენი იქნებიან შესაბამისად 38; 43 და 27. ამათთვის მივიღოთ $h_{ik}=1$, ხოლო დანარჩენებისათვის კი $h_{ik}=0$. მაშინ $a_{ik}h_{ik}$ ნამრავლთათვის დავწერთ:

52×1	53×0	32×0	52
28×0	33×0	19×0	0
28×0	41×1	26×1	67

ამგვარად, ნულოვანი მიახლოებისათვის მივიღეთ z_k-ს მნიშვნელობანი: $z^0_1=52$, $z^0_2=0$ და $z^0_3=67$.

აქ ჩამორჩენილია z^0_2, ამიტომ საჭიროა λ_2-ის გაზრდა. λ_2-ის გაზრდა საჭიროა იმდენად, რომ უზრუნველვყოთ პირველი თანამთხვევა, სახელდობრ, ვიხილავთ ჩამორჩენილი მეორე სტრიქონის ელემენტებს და მათ შორის ვარჩევთ იმას, რომელიც შედარებით უფრო ახლოსაა თავისი სვეტის მაქსიმალურ წევრთან. ჩვენს შემთხვევაში ასეთია მეორე სტრიქონის მეორე ელემენტი (41), რომელიც 43-თან ყველაზე ახლოსაა. საჭიროა λ_2-ის გადიდება, სახელდობრ, საჭიროა ე. წ. „შემსწორებელი მამრავლის" შემოყვანა: $\lambda^1_2 : \lambda^0_2 = 43 : 41 = 1{,}05$. λ_1-სა და λ_2-ს უცვლელად ვტოვებთ, ე. ი. მათი, შემსწორებელი მამრავლი მიიღება ერთის ტოლად. ამგვარად, გვექნება:

$$\lambda'_2 = 1{,}05.$$

თუ მეორე სტრიქონს გავამრავლებთ ამ შემსწორებელ მამრავლზე, 1,05-ზე, ხოლო დანარჩენებს დავტოვებთ უცვლელად, გვექნება:

$\lambda'_k a_{ik}$ მნიშვნელობანი

38	39	23
37	43	25
29	43	27

ეს წარმოადგენს $\lambda'_k a_{ik}$ მნიშვნელობებს, რომლებიც პირველ მიახლოებას შეესაბამებიან.

აქ სტრიქონების მიხედვით მაქსიმალური მნიშვნელობანი იქნებიან შესაბამისად 38; 43 და 27. ახლა ყველა h_{ik} განსაზღვრულია: ზოგი ნულია და ზოგი 1, გარდა მეორე სვეტის შესაბამი h_{22}-ისა და h_{23}-ისა, რომლებიც ტოლ ნამრავლებს შეესაბამებიან. მათი განსაზღვრისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ $z_2 = z_3$ და $h_{22} + h_{23} = 1$.

$z_2 = z_3$ ტოლობის ძალით დავწერთ:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i2} h_{i2} = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} h_{i3}$$

ანდა

$$a_{12}h_{12} + a_{22}h_{22} + a_{32}h_{32} = a_{13}h_{13} + a_{23}h_{23} + a_{33}h_{33}.$$

მაგრამ $\lambda'_k a_{ik}$ ნამრავლის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის გვაქვს: $h_{11} = 1$, $h_{12} = h_{13} = 0$, $h_{21} = 0$; $h_{31} = h_{32} = 0$ და $h_{33} = 1$, ამიტომ გვექნება

$$33h_{22} = 41h_{23} + 26.$$

ანდა, რადგანაც

$$h_{23}=1-h_{22},$$

დავწერთ:

$$33h_{22}=41\ \ (1-h_{22})+26,$$

$$74h_{22}=67,$$

საიდანაც

$$h_{22}=\frac{67}{74}\approx 0{,}905.$$

მაშინ

$$h_{23}=0{,}095$$

h_{ik} მიღებული მნიშვნელობანი შევიტანოთ $a_{ik}h_{ik}$ ნამრავლთა გამოსახულებებში, გვექნება:

52×1	53×0	32×0	52
28×0	$33\times0{,}905$	19×0	30
28×0	$41\times0{,}095$	26×1	30

ბოლო სვეტში მოცემულია შესაბამისი სტრიქონების ჯამი. მიღებული მნიშვნელობანი წარმოადგენენ პირველ მიახლოებას. ამგვარად, პირველი მიახლოებისას მივიღეთ $z_1=52$, ხოლო $z_2=z_3=30$.

აქ, როგორც ვხედავთ, ორი უკანასკნელი მნიშვნელობა ჩამორჩება პირველს, ამიტომ საჭიროა λ_2-ისა და λ_3-ის გაზრდა. მაგრამ, რადგან მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ λ_k სიდიდეთა შორის ფარდობას, შესაძლებელია λ_1-ის შემცირება. ამგვარად, λ_1-თვის უნდა შემოვიყვანოთ შემსწორებელი მამრავლი, რომელიც ნაკლები იქნება ერთზე. სახელდობრ, ისეთი მამრავლი უნდა შევარჩიოთ, რომ პირველი სვეტის მაქსიმალური ნამრავლი 38 თანაემთხვეს თავისივე სვეტის ერთ-ერთ ელემენტს. ეს შემსწორებელი მამრავლი იქნება:

$$\lambda_1'' : \lambda_1'=37 : 38=0{,}974.$$

პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ მიღებულ 0,974 მამრავლზე, ხოლო მეორე და მესამე სტრიქონი დავტოვოთ უცვლელად. მივიღებთ $\lambda_k''a_{ik}$ ნამრავლებს, რომლებიც მეორე მიახლოებას გვაძლევენ. სახელდობრ, გვექნება:

$\lambda_k''a_{ik}$ მნიშვნელობანი

37	38	22
37	43	25
29	43	$\overline{27}$

ახლა აქაც ვხედავთ, რომ სვეტების მიხედვით მაქსიმუმებია შესაბამისად 37, 43 და 27. პირველ და მეორე სვეტში ორი ელემენტია მაქსიმალური, საჭიროა მათი შესაბამისი h_{11}, h_{12}, h_{22} და h_{23} სიდიდეთა განსაზღვრა. ისინი ისე უნდა განვსაზღვროთ, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$z_1=z_2=z_3.$$

მაგრამ

$$z_1=52h_{11}+38\times0+22\times0=52h_{11},$$

$$z_2=28h_{12}+33h_{22}+19\times0=28h_{12}+33h_{22},$$

$$z_3=28h_{13}+41h_{23}+26h_{33}=41h_{23}+26,$$

ე. ი. გვექნება:

$$52h_{11}=28h_{12}+33h_{22},$$

$$52h_{11}=41h_{23}+26,$$

$$28h_{12}+33h_{22}=41h_{23}+26.$$

აგრეთვე გვაქვს:

$$h_{11}+h_{12}=1 \quad \text{და} \quad h_{22}+h_{23}=1.$$

ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა

$$h_{12}=1-h_{11},\ \ h_{22}=1-h_{23},$$

მაშინ პირველი განტოლებიდან დავწერთ

$$52h_{11}=28-28h_{11}+33-33h_{23}$$

ანდა

$$80h_{11}+33h_{23}=61.$$

ეს და მეორე განტოლება გვაძლევს შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}80h_{11}+33h_{23}&=61,\\52h_{11}-41h_{23}&=26.\end{aligned}\right\}$$

აქედან

$$h_{11}=\frac{\begin{vmatrix}61 & 33\\26 & -41\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}80 & 33\\52 & -41\end{vmatrix}},\quad h_{23}=\frac{\begin{vmatrix}80 & 61\\52 & 26\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}80 & 33\\52 & -41\end{vmatrix}}$$

ანდა

$$h_{11}=\frac{-3359}{-4996}\approx 0,67; \qquad h_{23}=\frac{-1092}{-4996}\approx 0,22,$$

მაშინ

$$h_{12}=1-0,67=0,33$$

და

$$h_{22}=1-0,22=0,78$$

h_{ik}-ს მიღებული მნიშვნელობანი გვაძლევენ მეორე მიახლოებას. სახელდობრ, გვექნება:

$52\times0,67$	53×0	32×0	35
$28\times0,33$	$33\times0,78$	19×0	35
28×0	$41\times0,22$	26×1	35

მაშასადამე, მიღებული მეორე მიახლოება წარმოადგენს ამავე დროს ამოცანის ამოხსნას.

მეორე მიახლოება წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

მეორე მიახლოება

$\lambda_k a_{ik}$			$a_{ik} h_{ik}$			z_k
37	38	22	$52\times0,67$	53×0	32×0	35
37	43	25	$28\times0,33$	$33\times0,78$	19×0	35
29	43	27	28×0	$41\times0,22$	26×1	35

ნაპოვნი მნიშვნელობა $z=35$ გვიჩვენებს საათში გამომუშავების მაქსიმუმს სამივე სახის პროდუქციის მიმართ იმ პირობით, რომ გამომუშავებები ერთმანეთის ტოლია.

რადგანაც საჭიროა თითოეული სახის პროდუქციის დამზადება 10000 ერთეულის რაოდენობით, ამიტომ მინიმალური აუცილებელი დრო იქნება $10000:35\simeq286$ საათი. თუ h_{ik}-ს ნაპოვნ მნიშვნელობებს გავამრავლებთ 286-ზე, მივიღებთ დროს, რომლის განმავლობაში უნდა იმუშაოს თითოეულმა დაზგამ თითოეული სახის პროდუქციის დასამზადებლად. თუ ამ გადამრავლებას მოვახდენთ, გვექნება შემდეგი საბოლოო ცხრილი:

დაზგა / სამუშაო	გამომუშავების ნორმა (საათობით)	საჭირო დრო (საათობით)	გამომუშავების ნორმა (საათობით)	საჭირო დრო (საათობით)	გამომუშავების ნორმა (საათობით)	საჭირო დრო (საათობით)	Σ
I	52	192	53	—	32	—	10000
II	28	94	33	223	19	—	10000
III	28	—	41	63	26	286	10000
სულ საათების რაოდენობა		286		286		286	

განხილული მაგალითის მიხედვით ვნახეთ ამოცანის ამოხსნის მიმდინარეობის პროცესი. გამოთვლების ჩატარებისას ხშირად რიცხვთა დამრგვალებას ვახდენდით. ასე რომ, გამოთვლების პროცესში მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობანი მიახლოებითი რიცხვებია. მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობანი კი სავსებით საკმარისია პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად.

ფაქტიურად ამოვხსენით ამოცანა I. ამოხსნის სისწორის შესამოწმებლად საკმარისია განვიხილოთ λ_k-სი და $\lambda_k a_{ik}$ და a_{ik}/t_{ik} ნამრავლების საბოლოო მნიშვნელობები და დავრწმუნდეთ იმაში, რომ $h_{ik}>0$ სიდიდეები ეთანადებიან მაქსიმალურ $\lambda_k a_{ik}$ ნამრავლებს და ყველა z_k ერთმანეთის ტოლია. თუ ყველაფერი ეს ასეა, მაშინ დავრწმუნდებით, რომ ამოხსნა სწორია.

სარჩევი

ნაწილი მეორე

წრფივი პროგრამირების მეთოდები

Мания Гванджи Михайлович

Линейное программирование

(на грузинском языке)

საზოგადოებრივი რედაქტორი ჯ. ხავთასი
გამომცემლობის რედაქტორი მ. მრელაშვილი
გარეკანის მხატვარი ზ. გოგოლაძე
მხატვრული რედაქტორი შ. ნიორაძე
ტექრედაქტორი კ. კოროშინაძე
კორექტორი თ. ხატიაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20/I-67 წ.
ქაღალდის ზომა 60×90. ნაბეჭდი თაბახი 18,5.
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 15,44.
ტირაჟი 1000. უე 00218 შეკვეთა № 746.

ფასი 64 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, კამოს ქ. № 18.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Камо, № 18.

1967

სტამბა № 1, თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50.
Типография № 1, Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50.