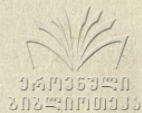


თბილისის უნივერსიტეტის უროგები
ТРУДЫ ТБИЛССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY



224

ISSN 0376—2637

კიბერნეტიკა • გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА • ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS • APPLIED MATHEMATICS

3

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1981

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა



სტატისტიკის მათემატიკა
STATISTICS MATHEMATICS
APPLIED MATHEMATICS



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИСЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

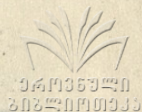
ბიბლიოთეკის მისამართი
BIBLIOTEKA

თბილისის უნივერსიტეტის უკრძეპი
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

ტ. 224 V.

ქიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS
APPLIED MATHEMATICS

ტბილისი 1981 Tbilisi



**КИБЕРНЕТИКА
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**

Тбилиси 1981

Редакционная коллегия



Г.Л.Арсенишвили, Н.Н.Вахания, Р.В.Гамкrellидзе,
Т. Г. Гачечиладзе, Р. А. Кордзадзе, Р.П.Мегрелишвили
(секретарь), Г.В.Меладзе, В.В.Чавчанидзе (редактор)

სარედაქციო კოლეგია

ვ.არსენიშვილი, რ.გამყრელიძე, ა.გარეჩილაძე, ნ.ვახანაძე,
რ.კორძაძე, რ.მეგრელიშვილი, (მდივანი), შ.მელაძე,
ვ.ჭავჭავანიძე (რედაქტორი)

EDITORIAL BOARD

G.Arsenishvili, V.Chavchanidze (editor), T.Gachechiladze, R.
krelidze, R.Kordzadze, R.Megrellishvili (secretary), H.Meladz
N.Vakhania.

Редактор издательства Л.Абуашвили

Сдано в производство 21.07.81. Подписано в печать
30.10.81. УЭ 15263. Усл.печ.л. 12,75. Уч.-изд.л.
7,38. Тираж 300. Заказ/9/9 Цена 1 руб.10 коп.

224, 1981

თბილისის მშენებლის ნიჭიერი ძროვის სტრუქტურული საბუნების
უნივერსიტეტის მშენებელი

ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВОПРОСУ
МОДЕЛИРОВАНИЯ

Н. В. Бокучава

§1. Постановка задачи. Моделирование сложных систем, в которых детерминированный характер наблюдаемых процессов сочетается с их стохастической природой, является эффективным методом исследования подобных процессов. С целью получения максимальной информации об исследуемой (изучаемой) сложной системе исследователь должен быть в состоянии: 1) из нескольких возможных или предполагаемых моделей выбрать, с определенной точки зрения, наиболее подходящую; 2) провести хотя бы грубую оценку функции распределения как на входе, так и на выходе выбранной модели; 3) минимизировать число независимых параметров и установить минимальную достаточную статистику, необходимую для правильного анализа и интерпретации полученных результатов.

§2. Выбор модели. Предположим, что гипотезы H_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, m$), выдвигаемые относительно рассматриваемых вероятностных моделей, задают для X входных и Y выходных непрерывных случайных величин совместные $f_\ell(x_i, y_j)$ и



условные $f_{\rho}(x_i/y=y_j)$, $f_{\rho}(y_j/x=x_i)$

распределения.

Разобьем множества X и Y на $i = 1, 2, \dots, n$ попарно непересекающиеся множества ($X = \cup_i X_i$, $Y = \cup_i Y_i$ и $X_i \cap X_j = Y_i \cap Y_j$, где $i \neq j$) и определим информационную меру связи для ρ -той гипотезы между X и Y случайными величинами как

$$\mathcal{I}_{\rho}(XY) = \sum_i \sum_j \mu_{\rho}(X_i, Y_j) \ell n \frac{\mu_{\rho}(X_i / Y_j)}{\mu_{\rho}(X_i)} , \quad (2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\rho}(X_i) &= \int_{X_i} f_{\rho}(x_i) dx_i \\ \mu_{\rho}(Y_j) &= \int_{Y_j} f_{\rho}(y_j) dy_j \\ \mu_{\rho}(X_i, Y_j) &= \int_{X_i} \int_{Y_j} f_{\rho}(x_i, y_j) dx_i dy_j \\ \mu_{\rho}(X_i / Y_j) &= \mu_{\rho}(X_i, Y_j) / \mu_{\rho}(Y_j) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Принимая во внимание, что $\sum_i \sum_j \mu_{\rho}(X_i, Y_j) = \sum_i \mu_{\rho}(X_i) = \sum_j \mu_{\rho}(Y_j) = 1$ и выпуклость $\mathcal{I}_{\rho}(XY)$ из (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\rho}(XY) &= \\ &= \sum_i \sum_j \mu_{\rho}(X_i, Y_j) \left[\sum_{\kappa} \mu_{\rho}(Y_{\kappa}) \ell n \frac{\mu_{\rho}(X_i / Y_j) \sum_{\kappa} \mu_{\rho}(Y_{\kappa})}{\sum_{\kappa} \mu_{\rho}(Y_{\kappa}) \mu_{\rho}(X_i / Y_{\kappa})} \right] \leq \quad (2.3) \\ &\leq \sum_i \sum_j \mu_{\rho}(Y_j) \mu_{\rho}(X_i / Y_j) \sum_{\kappa} \ell n \frac{\mu_{\rho}(X_i / Y_j)}{\mu_{\rho}(X_i / Y_{\kappa})} \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием равенства в (2.3) является $\mu_{\rho}(X_1 / Y_1) = \dots = \mu_{\rho}(X_n / Y_n)$.

Предполагая теперь абсолютную сходимость (2.3) и меняя порядок суммирования, получим:

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_p(XY) \leq \\ & \leq \sum_k \sum_j \mu_p(y_j) \mu_p(y_k) \sum_i \mu_p(x_i/y_j) \ell_n \frac{\mu_p(x_i/y_j)}{\mu_p(x_i/y_k)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Это выражение при использовании соотношения (2.2) и следствий (3.1) и (3.2) главы 2 /1/, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_p(XY) \leq \\ & \leq \sum_k \sum_j \left(\int_{y_k} f_p(y_k) dy_k \right) \left(\int_{y_j} f_p(y_j) dy_j \right) I \left[f_p(x/y_j) : f_p(x/y_k) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$I \left[f_p(x/y_j) : f_p(x/y_k) \right] =$$

$$= \sum_i \int_{x_i} f_p(x_i/y_j) \ell_n \frac{f_p(x_i/y_j)}{f_p(x_i/y_k)} dx_i$$

есть кулябаковская условная информационная мера /1/.

Определяя меру трудности различия y_i от y_k как

$$\begin{aligned} & J \left[f_p(x/y_j) : f_p(x/y_k) \right] = \\ & = I \left[f_p(x/y_j) : f_p(x/y_k) \right] + I \left[f_p(x/y_k) : f_p(x/y_j) \right] \end{aligned}$$

и используя её симметричность относительно $f_p(x/y_j)$ и $f_p(x/y_k)$, заменой в (2.5) индекса k на i для $\mathcal{J}_p(XY)$ окончательно получим

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_p(XY) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\int_{y_i} f_p(y_i) dy_i \right) \left(\int_{y_j} f_p(y_j) dy_j \right) J \left[f_p(x/y_i) : f_p(x/y_j) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Необходимым и достаточным условием равенства при переходе от (2.4) к (2.5) является соотношение $\frac{N_p(x_i/y_j)}{N_p(x_i/y_k)} = \frac{f_p(x_i/y_j)}{f_p(x_i/y_k)}$ при $x_i \in X_i, y_j \in Y_j, y_k \in Y_k$.

Из соотношения (2.6) следует, что максимальное значение условного информационного расхождения, обеспечивающее четкое разграничение событий $Y=y_i, Y=y_j$ и надежность l -ой гипотезы (модели) в принятии правильных решений, максимизирует и информационную меру связи $\mathcal{I}_l(XY)$ двух случайных величин X и Y .

Аналогичные соотношения получаются для дискретных случайных величин X и Y и для случая, когда одна из них непрерывна, а другая дискретна.

Таким образом, вопрос выбора наилучшей модели, с точки зрения принятия правильных решений, может считаться решенным, если известны совместные и условные плотности распределений входных и выходных случайных величин.

§3. Выбор функции распределения и ограничение независимых параметров выбранной модели. На практике, за исключением самых простых задач, нулевые гипотезы, выдвигаемые относительно указанных в §2 распределений, являются сложными. Для установления истинного распределения обычно используют /2/:

1) или статистику Колмогорова, основанную на мере расстояния

$$\sup [\tilde{F}_n(x) - F_0(x)],$$

где $\tilde{F}_n(x)$ - выборочная (эмпирическая) функция распределения, а $F_0(x)$ - проверяемая; $x \in X$ (в §3 индексы при x опущены).

2) или функционал

$$\Delta_o(F) = \int g(x) dF(x),$$

где $g(x)$ это такая функция, для которой $\Delta_o(F)$ является разумной мерой расстояния от $F(x)$ до $F_o(x)$ при условии $\Delta_o(F_o) = 0$. Естественно, минимальное значение расстояния влечет за собой максимальное сходство между выбранным и рассматриваемым (теоретическим) распределением.

Допустим $g(x) = \ell n \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, тогда соотношение

$$\Delta_o(F_1) - \Delta_o(F_2) = \int \ell n \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dF_1(x) - \int \ell n \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dF_2(x)$$

будет представлять собой симметричное и положительно определенное расстояние, совпадающее с информационной дивергенцией Кульбака /I/.

Покажем, что если $f_\ell(x)$ ($\ell = 1, 2, \dots, m$ - число гипотез) - плотности распределений, принадлежащие однородному семейству вероятностных мер^{x)}, максимизирующие шенноновскую энтропию, и если $Y_i = T_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - измеримые статистики, для которых существуют соотношения

$$\theta_{i\ell} = \langle T_i(x) \rangle_\ell = \int T_i(x) f_\ell(x) d\lambda(x), \quad (3.1)$$

то при условии

$$\int f_\ell(x) d\lambda(x) = 1 \quad (3.2)$$

x) Семейство мер называется однородным, если любые две меры из этого семейства абсолютно непрерывны одна относительно другой.

информационная дивергенция /1/

$$J(\gamma: \ell) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(\ell)} - \lambda_i^{(\gamma)}) (\theta_{i\gamma} - \theta_{i\ell}). \quad (3.3)$$

Действительно, т.к. для плотностей, максимизирующих шенноновскую энтропию /3/, имеем

$$f_{\ell}(x) = \exp \left[-\lambda_0^{(\ell)} - \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(\ell)} T_i(x) \right], \quad (3.4)$$

различающие информации /1/ $\mathcal{Y}(\ell: \gamma)$ и $\mathcal{Y}(\gamma: \ell)$ получают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\ell: \gamma) &= \int f_{\ell}(x) \rho_{\gamma} \frac{f_{\ell}(x)}{f_{\gamma}(x)} d\lambda(x) = \\ &= \int f_{\ell}(x) \left[(\lambda_0^{(\gamma)} - \lambda_0^{(\ell)}) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(\gamma)} - \lambda_i^{(\ell)}) T_i(x) \right] d\lambda(x) = \\ &= (\lambda_0^{(\gamma)} - \lambda_0^{(\ell)}) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(\gamma)} - \lambda_i^{(\ell)}) \langle T_i(x) \rangle_{\ell}, \\ \mathcal{Y}(\gamma: \ell) &= \int f_{\gamma}(x) \rho_{\ell} \frac{f_{\gamma}(x)}{f_{\ell}(x)} d\lambda(x) = \\ &= \int f_{\gamma}(x) \left[(\lambda_0^{(\ell)} - \lambda_0^{(\gamma)}) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(\ell)} - \lambda_i^{(\gamma)}) T_i(x) \right] d\lambda(x) = \\ &= (\lambda_0^{(\ell)} - \lambda_0^{(\gamma)}) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(\ell)} - \lambda_i^{(\gamma)}) \langle T_i(x) \rangle_{\gamma}. \end{aligned}$$

Непосредственная подстановка их в $J(\ell: \gamma) = \mathcal{Y}(\ell: \gamma) + \mathcal{Y}(\gamma: \ell)$ /1/ доказывает справедливость соотношения (3.3).

Если в качестве $f_{\ell}(x)$ взять функции вида

$$f_j(x) = \exp \left[-\lambda_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i^{(j)} T_i(x) \right] \quad (3.5)$$



$(j=1, 2, \dots, m)$, для которых $\forall \lambda_{i \geq j}^{(j)} = 0$

отношение (3.3), при условии $J(j:j+1) < \epsilon$ (где $\epsilon > 0$ сколь угодно мало), предоставляет возможность довести до минимума число начальных ограничений (3.1) и, тем самым, ограничить число параметров $\lambda_i^{(j)}$.

Далее, учитывая экспоненциальность (3.5) и исходя из теорем 2.6.1 и 5.1.2 /4/, мы можем отыскать правдоподобные оценки оставшихся параметров $\lambda_i^{(j)}$.

Поступила 25.III.1980

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Кульбак. Теория информации и математическая статистика. М., "Наука", 1967.
2. Д.Кокс, Д.Хинкли. Теоретическая статистика. М., "Мир", 1978.
3. Н.В.Бокучава. Об информационной статистике. Сообщения АН ИССР, 1977, т.86, № 3, 585-587.
4. Ш.Закс. Теория статистических выводов. М., "Мир", 1975.

ბ.ბოკუჩავა

ბიზნისის სტატისტიკის ინფორმაციული-სტატისტიკური
ბიბლიოთეკის მუშაკი

რეზიუმე

განხილულია ბიბლიოთეკის მუშაკებისა და მუშაკების განაწილების
მუშაკებისა და მუშაკების რაოდენობის შედარებით ინფორმაციული-
სტატისტიკური მეთოდი.

N. Bokuchava

ON THE INFORMATIONAL-STATISTICAL APPROACH
TO MODELLING

Summary

An informational-statistical method of selecting models and quantitative limiting of the parameters of corresponding distribution functions is considered.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

224, 1981

თბილისის შრომის წითელი გერბის ორდენის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

ТЕОРИЯ ГИББСОВСКИХ СОСТОЯНИИ В ПРОЦЕССАХ
УПОРЯДОЧЕНИЯ СПЛАВОВ

Н. В. Бокучава

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования явлений упорядочения атомно-кристаллической структуры в сплавах, принадлежащих к кооперативным явлениям, показали, что порядок в расположении атомов в сплавах оказываем большее влияние на различные их свойства.

Ввиду многокомпонентности сплава и наличия корреляции со сложными взаимодействиями между составляющими компонентами, изучение явлений упорядочения в сплавах связано с большими математическими трудностями, хотя потенциально можно считать их реализуемыми с помощью системы "человек - машина". Однако, на современном этапе развития техники, и такая система (требующая больших затрат машинного времени) не позволяет провести исчерпывающие комбинаторные или логические расчеты для всех материалов при конструировании сплавов с нужными свойствами. Поэтому для облегчения вычислений строятся различные модели с упрощенными взаимодействиями, сохраняющие максимально кооперативные характеристики исходного ансамбля.



В предлагаемой работе сделана попытка применения новой, интенсивно развивающейся, области теории вероятностей - теории гиббсовских состояний - в изучении процессов упорядочения сплавов.

Пусть S - конечное (или счетное) множество узлов сплава, Z - подмножество, а $\mathcal{P}(S)$ - множество всех подмножеств в S .

Обозначим через $f^Z(A, M)$ условную вероятность заполнения атомами множества $A \subset Z$ узлов, при известном заполнении $M \subset S \setminus Z$ узлов, окружающих множество A . Если функция $f^Z(A, M)$ удовлетворяет условиям

$$a) f^Z(A, M) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{P}(Z), \quad M \in \mathcal{P}(S \setminus Z),$$

$$b) \sum_{A \subset Z} f^Z(A, M) = 1 \quad \text{для} \quad \forall M \in \mathcal{P}(S \setminus Z),$$

$$c) f^Z(A \cup B, M) = f^Z(A, B \cup M) \sum_{\xi \subset Z} f^{\xi'}(\xi \cup B, Z),$$

где $Z \subset Z' \in \mathcal{P}(S)$, $A \subset Z$, $B \subset Z' \setminus Z$ и $M \subset S \setminus Z'$, согласно [1] существует единственный потенциал V на S , описывающий гиббсовское состояние, для которого $f^Z(A, M)$ функция принимает экспоненциальный вид:

$$f^Z(A, M) = Z_{Z, M}^{-1} \exp V(A \cup M), \quad (1)$$

где

$$Z_{Z, M} = \sum_{\xi \subset Z} \exp V(\xi \cup M).$$



$$\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(S), \quad \mathcal{A} = \mathcal{Z} \quad \text{и} \quad \mathcal{M} \in \mathcal{P}(S \setminus \mathcal{Z}).$$

Возьмем в качестве парного потенциала Изинга /1/ потенциал, представляемый следующей билинейной формой:

$$U(xy) = \begin{cases} \log \left[\left(\frac{1-q}{p} \right)^m \left(\frac{1-p}{1-q} \right) \right] & \text{если } x=y \\ \frac{1}{2} \log \left[\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \right] & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (2)$$

$x, y \in \mathcal{Z}$, а $m = \text{const}$ — число ближайших соседей узла x , и свяжем его с энергией упорядочения бинарного сплава

$$U = \frac{1}{2} (v_{AA} + v_{BB}) - v_{AB}, \quad \text{где } v_{AA}, \quad v_{BB} \quad \text{и} \quad v_{AB} \quad - \text{энергия взаимодействия пар ближайших соседей типа } AA, \quad BB \quad \text{и} \quad AB \text{ соответственно. При высоких температурах больцмановский множитель } \epsilon = \exp(-v/KT) \text{ и множитель } X = \exp(-u/KT)$$

где K — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура сплава, U — потенциальная энергия атомов, находящихся в $\mathcal{M} = S \setminus \mathcal{Z}$ узлах, являющихся узлами первой зоны Бете, согласно соотношению (II) работы /2/ связаны между собой следующим образом:

$$X = \left(\frac{\epsilon + X}{1 + \epsilon X} \right)^{z-1}, \quad (3)$$

которое после преобразования

$$X = \left[\frac{\epsilon \left(1 + \frac{X}{\epsilon} \right)}{\epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{X}{\epsilon} \right)} \right]^{z-1} = \frac{1}{\epsilon^{z-1}} \left(\frac{1 + \frac{X}{\epsilon}}{\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{X}{\epsilon}} \right)^{z-1}$$

и ввода обозначений

$$X/\varepsilon = Y, \quad \varepsilon^z = a, \quad \varepsilon^{-z} = b \quad (4)$$

примет следующий вид:

$$aY = \left(\frac{1+Y}{b+Y} \right)^{z-1} \quad (5)$$

Согласно предположению 10.1 /1/ уравнение (5) будет иметь одно решение, если $b \leq \left(\frac{z}{z-2} \right)^2$, и два или три, если $z > 2$ и $b > \left(\frac{z}{z-2} \right)^2$.

Так как при $T \rightarrow T_{кр}$ ($T_{кр}$ - критическая температура процесса перехода порядок - беспорядок), согласно (8), (9) работы /2/, $X \rightarrow 1$, а $\varepsilon \rightarrow \frac{z-2}{z}$, то из (4) следуют:

$$Y_{T \rightarrow T_{кр}} \rightarrow \frac{z}{z-2}, \quad b_{T \rightarrow T_{кр}} \rightarrow \left(\frac{z}{z-2} \right)^2,$$

указывающие на тот факт, что для процессов перехода порядок-беспорядок в бинарных сплавах неравенства $b_{T \rightarrow T_{кр}} \leq \left(\frac{z}{z-2} \right)^2$ и $b_{T \rightarrow T_{кр}} > \left(\frac{z}{z-2} \right)^2$ являются соответственно также условиями существования одной критической температуры с минимальным значением статистической суммы или двух критических температур с максимальным значением статистической суммы.

Из (4) $\ln a = -\frac{zv}{kT}$ и $\frac{1}{2} \ln b = \frac{v}{kT}$, что согласно /1/ равносильно преобразованию билинейной формы (2) в следующий вид:

$$U(xy) = \begin{cases} -\frac{zv}{kT} & \text{если } x=y \\ \frac{v}{kT} & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (6)$$



04935040
002:010933

Используя тот факт, что при $T \rightarrow T_{кр}$ $v/KT \rightarrow \frac{z}{z-2} > 0$

из (6), ввиду положительности энергии упорядочения, следует, что условие $v_{T \rightarrow T_{кр}} > \left(\frac{z}{z-2}\right)^2$ будет (кроме вышесказанного) условием супермодулярности соответствующего потенциала, а, следовательно, и условием наличия фазового перехода в процессах упорядочения.

Поступила 31.III.1980

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

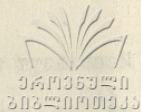
ЛИТЕРАТУРА

1. К.Престон. Гиббсовские состояния на счетных множествах. М., "Мир", 1977.
2. Н.В.Бокучава. ФММ, 1973, т.36, № 4, 877-879.

ბ.ბოკუჩავა

ბიჭვინთის ფიზიკური ინსტიტუტის
სტრუქტურული განყოფილებაში
რეგისტრირებული

ბიჭვინთის ფიზიკური ინსტიტუტის სტრუქტურული განყოფილების
ფიზიკური ინსტიტუტის სტრუქტურული განყოფილების
ფიზიკური ინსტიტუტის სტრუქტურული განყოფილების
ფიზიკური ინსტიტუტის სტრუქტურული განყოფილების



N. Bokuchava

THE THEORY OF GIBBS STATES IN THE PROCESSES
OF ORDERING ALLOYS

Summary

On the basis of the Gibbs theory of accidental fields general conditions of existence of phase transition for ordering alloys are obtained.

224, 1981

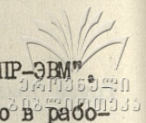
თბილისის შრომის ნიჭიერი რჩობის ორდენის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

ДИАЛОГОВАЯ ПРОЦЕДУРА ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО РЕШЕНИЯ
ПО МНОГИМ КРИТЕРИЯМ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИ НЕПОЛНОЙ
ИНФОРМАЦИИ

В.Е. Жуковин, Ф.В. Бурштейн

Одной из фундаментальных проблем теории принятия решений (ПР) является задача нахождения решения, наилучшего по многим критериям. Обычно, ввиду значительных размеров, множество возможных (конкурсных) решений бывает плохо обозримо, что крайне затрудняет задачу выбора для принимающего решение (ЛПР). Эффективность процесса ПР намного повышается с включением в него ЭВМ. Использование ЭВМ позволяет делать объективный выбор с учетом всей известной информации о задаче за минимальное время. Наиболее удобный для ЛПР способ выбора наилучшего решения представляет собой диалоговый режим работы, т.к. на долю ЭВМ приходится вся нагрузка по перебору большого множества возможных решений и контроль за соблюдением общих принципов, выработанных для данной задачи.

В процессе ПР приходится сталкиваться с неопределенностью, обусловленной тем, что критерии задают лишь частичный порядок на множестве возможных решений.



В работе рассматривается диалоговая процедура "ЛПР-ЭВМ" построенная на основе обобщения подхода, приведенного в работе /1/. С помощью этого подхода изучается процесс ПР по многим критериям при неопределенности и приводится блок-схема программы для реализации разработанного алгоритма на ЭВМ.

I. Теоретическое обоснование алгоритма.

Имеется множество возможных (конкурсных) решений

$X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Для простоты будем считать, что X - конечно, как это бывает в большинстве практических задач ПР. На множестве X задан векторный критерий $K = \{K_1, \dots, K_n\}$, $K_s: X \rightarrow \mathbb{R}^1, s = \overline{1, n}$. В общем случае частные критерии $K_s (s = \overline{1, n})$

неравноценны по важности для процесса ПР. То есть каждому критерию K_s соответствует некоторый коэффициент важности λ_s (вес критерия). Будем предполагать, что $\sum_{s=1}^n \lambda_s = 1, \lambda_s \geq 0, s = \overline{1, n}$.

Пусть все критерии $K_s (s = \overline{1, n})$ являются критериями типа "выигрыш". Для каждого частного критерия K_s множество X можно упорядочить по предпочтению (критерии, для которых это выполняется, называются независимыми по предпочтению /2,3/. Соответствующие отношения нестрогого предпочтения, строгого предпочтения и равноценности (соответственно $R_s, P_s, I_s, s = \overline{1, n}$) определяются следующим образом:

$$R_s = \{(x_i, x_j) / K_s(x_i) \geq K_s(x_j); x_i, x_j \in X\},$$

$$P_s = \{(x_i, x_j) / K_s(x_i) > K_s(x_j); x_i, x_j \in X\},$$

$$I_s = \{(x_i, x_j) / K_s(x_i) = K_s(x_j); x_i, x_j \in X\}.$$

Очевидно, что для $S = \overline{1, n}$ $R_S = P_S \cup I_S$. Отношение не-строгого предпочтения $R = R_1 \cap \dots \cap R_n$ является частичным квазипорядком. Для окончательного выбора из множества возможных наилучшего решения достаточно устранить эту неопределенность и установить на V полный (линейный) квазипорядок. Для этого необходимо дополнительное исследование с привлечением ЛПР (либо группы экспертов), а также учет различия критериев по важности.

С помощью значений частных критериев и их коэффициентов важности определим некоторые специальные скалярные функции на множестве пар возможных решений.

$$\delta_{ij}^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{если } K_s(x_i) > K_s(x_j); \\ 0 & \text{если } K_s(x_i) = K_s(x_j), \quad i, j = \overline{1, m} \\ -1 & \text{если } K_s(x_i) < K_s(x_j); \end{cases}$$

Просуммируем по всем частным критериям: $n_{ij} = \sum_{s=1}^n \delta_{ij}^{(s)}$.

Определение I. Величину

$$\tilde{x}_{ij}^{(1)} = n_{ij} - n_{ji}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (I)$$

назовем степенью превосходства решения x_i над решением x_j (СП₁).

Теперь пусть

$$\tilde{\delta}_{ij}^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{если } K_s(x_i) > K_s(x_j), \\ 0 & \text{если } K_s(x_i) \leq K_s(x_j) \end{cases} \quad i, j = \overline{1, m}$$

Тогда величина

$$m_{ij} = \sum_{s=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

будет равна числу критериев, по которым решение x_i лучше решения x_j , а m_{ji} , соответственно, - числу критериев, по которым решение x_i хуже x_j . Очевидно, $m_{ij} + m_{ji} \leq n$, где n - общее число критериев.

Определение 2. Величина

$$\tilde{z}_{ij}^{(2)} = \frac{m_{ij} - m_{ji}}{m_{ij} + m_{ji}}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

определяет степень превосходства решения x_i над решением x_j . Будем обозначать её $СП_2$.

Теперь вспомним, что частные критерии K_s не равнозначны по важности. Учитывая веса критериев, определим:

$$\tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \lambda_s & \text{если } K_s(x_i) > K_s(x_j), \\ 0 & \text{если } K_s(x_i) = K_s(x_j), \quad i, j = \overline{1, m} \\ -\lambda_s & \text{если } K_s(x_i) < K_s(x_j) \end{cases}$$

Пусть

$$\alpha_{ij} = \sum_{s=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{s=1}^n |\tilde{\alpha}_{ij}^{(s)}|$$

Определение 3. За степень превосходства решения x_i над решением x_j примем

$$\tilde{z}_{ij}^{(3)} = \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

Обозначим её $СП_3$.

В определении степени превосходства можно учесть не только веса критериев, но и величину разности значений. Приняв за степень превосходства решения x_i над решением x_j по частному критерию K_s величину

$$\tilde{z}_{ij}^s = \lambda_s \{K_s(x_i) - K_s(x_j)\}, \quad (*)$$

просуммируем по всем критериям и пронормируем на общее число решений в X , получим:

Определение 4. Степенью превосходства решения x_i над решением x_j по векторному критерию K является

$$\tilde{z}_{ij}^{(4)} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \tilde{z}_{ij}^s$$

или, при подстановке (*):

$$\tilde{z}_{ij}^{(4)} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \lambda_s \{K_s(x_i) - K_s(x_j)\}. \quad (4)$$

Обозначим её $СП_4$.

Далее в утверждениях и теоремах, оправданных для степени превосходства, вычисленной по одной из формул (1)-(4), будем писать просто СП или \tilde{z}_{ij} .

Утверждение 1. Степени превосходства, выраженные формулами (1)-(4), ($СП_1$, $СП_2$, $СП_3$, $СП_4$), обладают следующими свойствами

$$1) \tilde{z}_{ij} = -\tilde{z}_{ji}, \quad i, j = \overline{1, m};$$

$$2) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{z}_{ij} = 0.$$

Различный вид формул для вычисления СП позволяет в разной



степени учитывать начальную информацию о задаче. СП учитывает её в наибольшей степени. Выбор вида СП зависит от ЛПР и представляет собой тот этап ПР, автоматизация которого невозможна, ввиду своей уникальности /4/. Зависимости между различными видами СП будут обсуждены далее.

Определение 5. Величину

$$\tilde{z}_{ij} = \sum_{\gamma=1}^m \frac{z_{i\gamma} - z_{j\gamma}}{m} \quad (5)$$

назовем интегральной степенью превосходства (ИСП) решения

x_i над решением x_j .

По содержанию ИСП соответствует сравнению решения x_i с x_j не непосредственно, а как бы относительно остальных решений из

ИСП обладает всеми свойствами СП:

$$1) \tilde{z}_{ij} = -\tilde{z}_{ji}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

$$2) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{z}_{ij} = 0$$

и, кроме того:

$$3) \tilde{z}_{ij} = \tilde{z}_{i\gamma} + \tilde{z}_{\gamma j} \quad \text{для всех } i, j, \gamma = \overline{1, m},$$

4) $\tilde{z}_{ij} = z_{ij}$, если СП в свою очередь удовлетворяет свойству (3), т.е. $z_{ij} = z_{i\gamma} + z_{\gamma j}$, $i, j, \gamma = \overline{1, m}$.

Так, легко показать, что СП₄ удовлетворяет свойству (3) и, следовательно, $\tilde{z}_{ij}^{(4)} = z_{ij}^{(4)}$.

Таким образом, для СП₄, вычисляемого по формуле (4), справедливы все теоремы и утверждения, формулируемые далее для ИСП.



Теорема I (о представимости). Для ИСП имеет место представление $\tilde{z}_{ij} = \mu_i - \mu_j$, где $\mu_i = \mu(x_i)$ - числовая функция, определенная на X и заданная в шкале интервалов.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из определения ИСП и его свойств. При этом $\mu_i = \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{z}_{ij}}{m}$.

Отметим, что для СП₄:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{z}_{ij}^{(4)}}{m} = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^n \lambda_s \{K_s(x_i) - K_s(x_j)\} = \\ &= \frac{1}{m^2} \{L(x_i) - C\}, \end{aligned}$$

где $L(x_i)$ - известный в теории ПР линейный обобщенный критерий, $C = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_s K_s(x_j)$.

Теорема 2 (об устойчивости). При вариации значений критериев в пределах сохранения знака разности $\{K_s(x_i) - K_s(x_j)\}$, $s = \overline{1, n}$, и $x_i, x_j \in X$, величины СП₁, СП₂, СП₃, СП₄ и соответствующих ИСП₁, ИСП₂, ИСП₃ не изменяются.

Определение 5. Будем говорить, что решения x_i и x_j из X равноценны, если $\tilde{z}_{ij} = 0$ ($x_i \sim x_j$). (6)

Определение 6. Определим отношение предпочтения уровня ℓ на X с помощью ИСП по следующему правилу:

$$\tilde{z}_{ij} \geq \ell \rightarrow x_i \preceq^{\ell} x_j, \quad (7)$$

$$\tilde{z}_{ij} \leq -\ell \rightarrow x_j \preceq^{\ell} x_i,$$

$-\ell < \tilde{z}_{ij} < \ell \rightarrow x_i$ и x_j несравнимы, где $0 \leq \ell \leq \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq m} \tilde{z}_{ij}$

Теорема 3. Отношение предпочтения уровня ℓ является частичным строгим отношением порядка на X . А отношение равноценности (6) задает на X некоторое отношение эквивалентности.

Доказательство. Докажем I часть теоремы. Частичное строгое отношение порядка обладает свойствами асимметричности, антирефлексивности и транзитивности для всех сравнимых пар решений. То есть для любого ℓ и $x_i, x_j \in X$ выполняется:

1. Асимметричность: $x_i \overset{\ell}{\prec} x_j \Rightarrow x_j \not\overset{\ell}{\prec} x_i$ или $\tilde{z}_{ij} \geq \ell \Rightarrow \tilde{z}_{ji} < -\ell$.

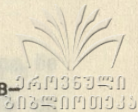
2. Антирефлексивность: $x_i \not\overset{\ell}{\prec} x_i$ или $\tilde{z}_{ii} = 0, \forall i = \overline{1, m}$

3. Транзитивность: $x_i \overset{\ell}{\prec} x_k, x_k \overset{\ell}{\prec} x_j \Rightarrow x_i \overset{\ell}{\prec} x_j$
или $\tilde{z}_{ik} \geq \ell, \tilde{z}_{kj} \geq \ell \Rightarrow \tilde{z}_{ij} > \ell$, т.к. $\tilde{z}_{ij} = \tilde{z}_{ik} + \tilde{z}_{kj}$
(свойство (3) ИСП).

Аналогично доказывается II часть теоремы, т.е. рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения равноценности (6).

Каждому отношению предпочтения уровня ℓ на X соответствует множество максимальных элементов (решений), которое мы по аналогии с многокритериальными задачами ПР в классической постановке будем называть множеством Парето и обозначать $X_n(\ell)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть имеются отношения предпочтения уровня ℓ_1 и ℓ_2 , причем $\ell_1 > \ell_2$. Тогда $X_n(\ell_2) \equiv X_n(\ell_1)$.



Таким образом, выбор числа ℓ в правиле (7), обусловленный характером задачи и предоставляемый ЛПР, позволяет регулировать мощность множества Парето. Величина уровня ℓ может выбираться в зависимости от требований к конечному решению, как это делается в /5/.

Для последовательности $1 > \ell_1 > \dots > \ell_k > 0$ получаем

$$X_n^{(1)} \supseteq X_n(\ell_1) \supseteq \dots \supseteq X_n(\ell_k) \supseteq X_n(0).$$

Теорема 5. (существования). Независимо от вида ИСП существует такое число ℓ , что отношение предпочтения соответствующего уровня совпадает с отношением доминирования по векторному критерию K .

Например, для СП₂ $\tilde{z}_{ij}^{(2)} = \frac{m_{ij} - m_{ji}}{m_{ij} + m_{ji}}$ равенство $m_{ji} = 0$ означает, что x_i не хуже решения x_j ни по одному частному критерию, а это и есть доминирование в традиционном смысле. Т.е. $x_i \stackrel{K}{\succ} x_j$. При $\ell = 1$ соответствующее множество эффективных решений $X_n^{(2)}(1)$ совпадает с множеством Парето, вводимым в теории ПР. Для СП в случае, когда шкалы частных критериев однородны /6/, указанное в теореме $\ell = \sum_{s=1}^n \delta_s$, где δ_s - единица измерения шкалы критерия K_s . В общем виде теорема 5 доказывается использованием понятия конуса доминирования /7/.

Определение 6. Отношения предпочтения уровня ℓ_1 и ℓ_2 называются согласованными, если частичные отношения порядка, соответствующие им, совпадают либо вложены друг в друга.

Теорема 6. Пусть \tilde{z}_{ij} - ИСП, определенная на X . На

её основе построено отношение предпочтения уровня ℓ . Число $\alpha \in [0, 1]$. Если $\tilde{x}'_{ij} = \alpha \cdot \tilde{x}_{ij}$ и $\ell' = \alpha \cdot \ell$, то отношения предпочтения уровня ℓ и ℓ' для \tilde{x}_{ij} и \tilde{x}'_{ij} , соответственно, согласованы.

Для множеств Парето, соответствующих этим отношениям предпочтения, выполняется $X'_n(\ell') \subseteq X_n(\ell)$.

Сравнение $\tilde{x}_{ij}^{(1)}$ и $\tilde{x}_{ij}^{(2)}$ дает следующее соотношение:

$\tilde{x}_{ij}^{(2)} \geq \frac{\tilde{x}_{ij}^{(1)}}{n}$. Т.е. отношения предпочтения, построенные на основе $\tilde{x}_{ij}^{(2)}$ и $\frac{\tilde{x}_{ij}^{(1)}}{n}$ согласованы при ℓ

и $\ell' = \frac{\ell}{n}$, соответственно. Тогда $X_n^{(2)}(\ell) \subseteq X_n^{(1)}(\ell')$.

Утверждение 2. Для согласованных отношений предпочтения большему по абсолютной величине соответствует меньшее число несравнимых решений при $\ell \neq 0$.

II. Программная реализация алгоритма.

Для решения задачи выбора наилучшего по многим критериям решения с помощью ЭВМ нами разработана программа, построенная на основе вышеизложенного алгоритма. Программа написана на алгоритмическом языке PL-1 ОС ЕС. Она реализует диалоговую модель принятия решений. Лицо, принимающее решение (либо группа экспертов) имеет возможность непосредственного контроля за процессом решения и управления им. Так ЛПР выбирает, по какой формуле вычислять СП, задает величину уровня ℓ отношения предпочтения, веса критериев. Программа написана та-



ким образом, что значения критериев могут как вводиться с пульта, так и генерироваться в машине.

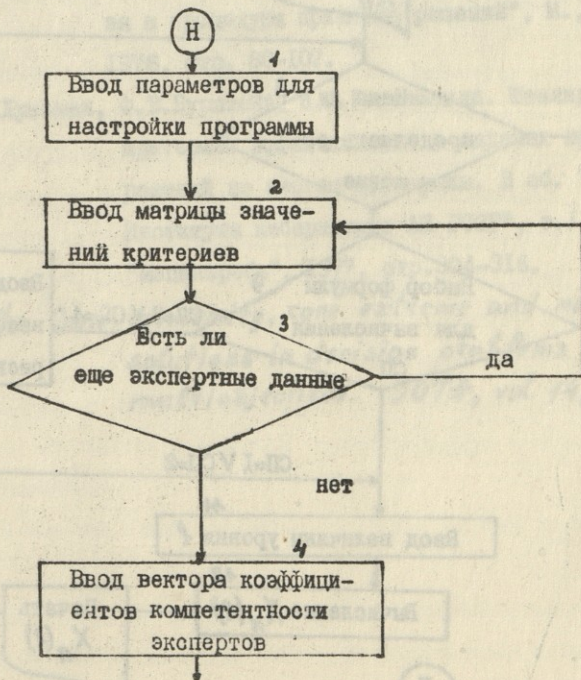
Диалог "ЛПР-ЭВМ" осуществляется посредством пульта оператора ЭВМ или дисплея. Результаты "общения" протоколируются на печатающем устройстве в форме, удобной для восприятия пользователем.

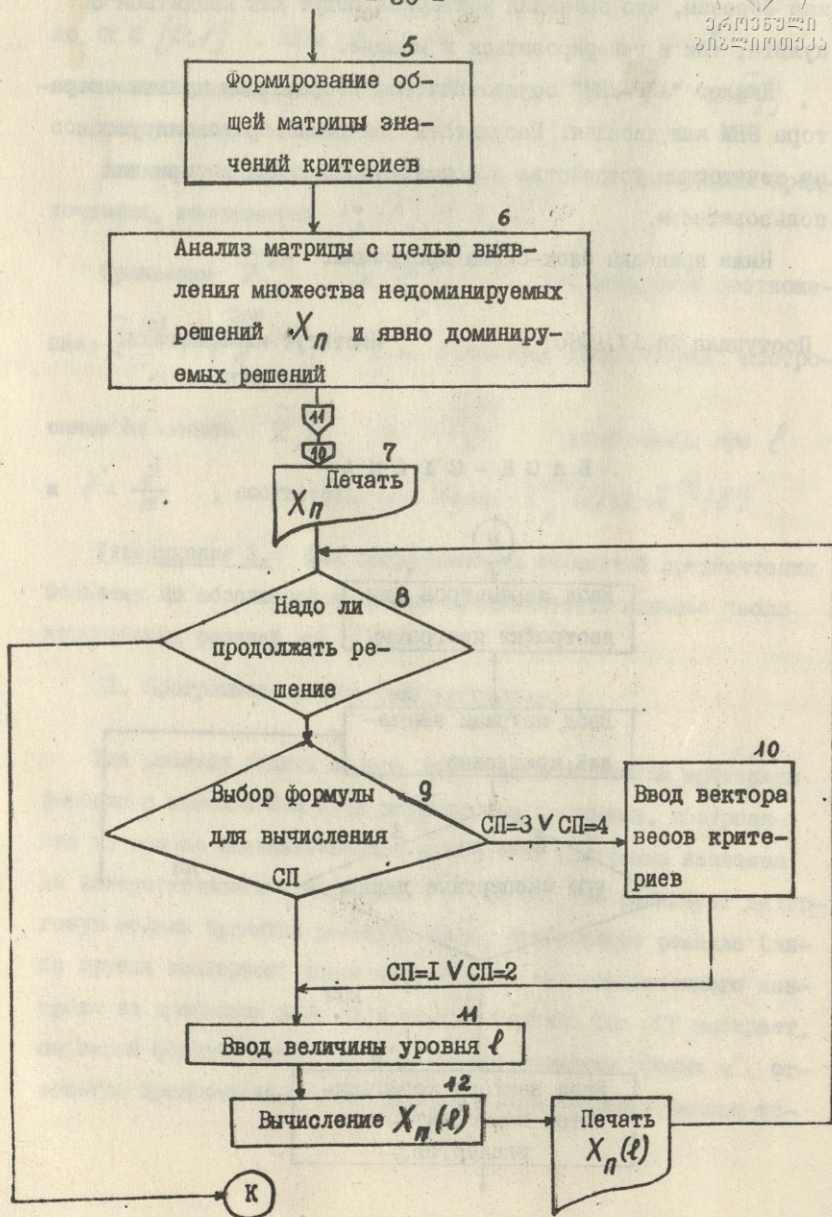
Ниже приводим блок-схема программы.

Поступила 24.IV.1980

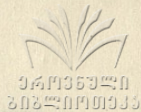
Институт кибернетики
АН СССР

Б Л О К - С Х Е М А

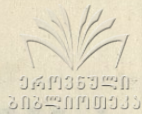




ЛИТЕРАТУРА



1. В.Е.Жуковин. К проблеме группового выбора. Сообщения АН СССР, т. 99, № 2, 1980.
2. "Современное состояние теории исследования операций", под ред. Н.Моисеева, М., "Наука", 1979.
3. P. Keenly, H. Raiffa. *Decisions with multiply objectives: preferences and value tradeoffs*. N-Y: Wiley. 1976.
4. Е.С.Вентцель. Введение в исследование операций, М., "Сов. рад.", 1964.
5. Б.Руа. Классификация и выбор при наличии нескольких критериев (метод Электра). В сб. "Вопросы анализа и процедуры принятия решений", М., "Мир", 1976, стр. 80-107.
6. В.Е.Жуковин, Ф.В.Бурштейн, Н.М.Биниашвили. Шкалирование критериев эффективности в задачах принятия решений по многим критериям. В сб. "Труды Института кибернетики АН СССР", т. I, Тбилиси, "Мецниереба", 1977, стр. 304-316.
7. P. Ju. *Cone convexity, cone extreme and non-dominated solutions in decision problems with multiobjectives*. JOTA, vol. 14, №3, 1974.



Չ. Զուկովին, Գ. Բուրշտեյն

Լատինական խորհրդակցությունների միջոցով ընտրվող լավագույն
ընտրության մեթոդի մասին խոսակցական ընտրության
մեթոդի մասին խոսակցական ընտրության մեթոդի մասին

Խորհրդակցություն

Լատինական խորհրդակցությունների միջոցով ընտրվող լավագույն
ընտրության մեթոդի մասին խոսակցական ընտրության
մեթոդի մասին խոսակցական ընտրության մեթոդի մասին
Լատինական խորհրդակցությունների միջոցով ընտրվող լավագույն
ընտրության մեթոդի մասին խոսակցական ընտրության
մեթոդի մասին խոսակցական ընտրության մեթոդի մասին

V. Zhukovin, F. Burshteln

THE DIALOGUE PROCEDURE OF THE CHOICE OF THE
BEST DECISION WITH RESPECT TO MULTIPLE OBJEC-
TIVES AND NON-COMPLETE INFORMATION

Summary

One variant of the dialogue procedure of decision making with multi-
ple objectives in conditions of non-complete information is discussed in
the paper. The theoretical validity and program realization of the proced-
ure are considered.

224, 1981

მბრძანის მრჩობის ნიშნის მრჩობის სარეზონანსო სახელმწიფო
უნივერსიტეტის მრჩობა

ОБ ОДНОМ УЛУЧШЕННОМ ВАРИАНТЕ СХЕМЫ СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ

Н. Д. Нанобашвили

Введение

В работе /1/ отмечалась возможность выбора различных вариантов и модификаций рассматриваемой схемы сжатия информации. Критерием выбора при этом являлось требование уменьшения времени сжатия при одновременном сохранении или даже при незначительном уменьшении коэффициента сжатия информации.

В отличие от /1/ в данной работе делается попытка решить задачу выбора путем увеличения избыточности в пределах каждого цикла, что приводит к увеличению, почти на порядок, коэффициента сжатия информации. При этом специфические особенности схемы сжатия /1,2,3/ и лежащая в ее основе основная идея, что для сжатия необходимо предварительное расширение, т.е. внесение избыточности в исходную кодово-числовую систему, остаются неизменными.

Однако внесение избыточности в основном служит двум целям:

1. Первоначально в исходную кодовую последовательность перед каждым циклом вносится некоторая минимальная избыточ-



ность, необходимая для однозначного декодирования сжатой информации.

2. Далее, в результате специальной схемы преобразования (теорема 4) полученная кодовая последовательность преобразовывается в последовательность той же длины, но с максимальной избыточностью в каждом кодовом векторе.

Помимо этого, в настоящей работе больше внимания уделяется вопросам формализации и изложению основ схемы сжатия для ее лучшего представления и оценки.

Вопросы формализации

Пусть заданы два n -мерных линейных векторных пространства: одно V_{kn} над полем $GF(2)$, а второе G_{pn} над кольцом $R(4) = \{ \overset{4}{+}, \overset{4}{\times}, M_4 \}$, где $M_4 = \{0, 1, 2, 3\}$; $\overset{4}{+}, \overset{4}{\times}$ - соответственно операции суммирования и умножения по $mod 4$, k и p - максимальное число векторов V_{kn} и G_{pn} .

Допустим далее, что f - функция, отображающая каждый элемент $g_{j,i}$ вектора $\hat{g}_{j,i} = g_{j1} g_{j2} \dots g_{ji} \dots g_{jn} \in G_{pn}$ с областью определения $\theta = \{g_1, g_2\} = \{0, 1\}$ в кообласть $M = \{0, 1, 2, 3\}$; $j = \overline{1, k}$; $i = \overline{1, n}$.

Тогда $I_m f$ - отображением $f: \theta \rightarrow M$ будет являться множество $f(\theta)$ всех значений $f(g_\alpha)$ для всевозможных $g_\alpha \in \{0; 1\}$, чему соответствует преобразование пространства V_{kn} в множество векторов $V_{kp} \subset G_{kp}$, $k < p$.

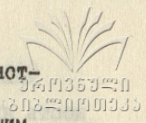


Схема поэлементного преобразования векторов пространства B_{kn} в множество $V_{kn} \subset G_{kn}$ задается следующим предписанием:

$$f: v_{11} \rightarrow v_{11} = v_{11};$$

$$f: v_{12} = \begin{cases} v_{11} & \text{если } v_{12} = 0 \\ v_{12} = v_{11} + 1 & \text{если } v_{12} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f: v_{ji} = \begin{cases} v_{j,i-1} & \text{если } v_{j,i} = 0 \\ v_{ji} = v_{j,i+1} & \text{если } v_{j,i} = 1 \end{cases}$$

Схему преобразования (1) с точностью до эквивалентности можно представить в виде следующего рекуррентного соотношения

$$v_{k_1 n_1} = \sum_{j=1}^{k_1-1} \sum_{i=1}^n v_{j,i} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=k_1}}^{n_1} v_{j,i} \quad (2)$$

$1 \leq k_1 \leq k, 1 \leq n_1 \leq n$, где $v_{k_1 n_1}$ - элемент, стоящий в позиции вектора \hat{g}_{kn} индекса k_1 . Здесь символ \sum означает сумму по $\text{mod } 4$.

Лемма 1. Функция $f: B_{kn} \rightarrow V_{kn} \subset C_{pn}$ биективна.

Справедливость этого утверждения очевидна, т.к. при заданном

f между двумя множествами тогда и только тогда /4/ существует биекция, когда оба множества состоят из одинакового числа элементов, что и выполняется для B_{kn} и V_{kn} .

Следствие I-1. Образованная с помощью (2) последовательность является цепью /4/, в которой согласно (1) определено отношение порядка, удовлетворяющее условиям транзитивности, рефлексивности и антисимметричности. Эта цепь является поэлементно неубывающей монотонной последовательностью, в которой определены следующие свойства:

а) для двух любых смежных букв в произвольном J -том векторе имеет место соотношение

$$v_{J,i} = v_{J,i-1} \pmod{4} \text{ или } v_{J,i} = v_{J,i-1} + 1 \pmod{4};$$

б) в любых двух смежных векторах граничащие крайние буквы связаны зависимостью

$$v_{J,n} = v_{J+1,1} \pmod{4} \text{ или } v_{J,n} = v_{J+1,1} + 1 \pmod{4}.$$

Следствие I-2. Обратная к f биекция $f^{-1}: V_{kn} \rightarrow B_{kn}$, восстанавливающая исходную двоичную последовательность, конструктивно может быть выражена с помощью следующей характеристической функции:

$$b_{Ji}(v_{J,i}) = \begin{cases} 1 & \text{если } v_{J,i} \neq v_{J,i-1} \\ 0 & \text{если } v_{J,i} = v_{J,i-1} \end{cases} \quad (3)$$

или простого рекуррентного соотношения:

$$b_{J,i} = v_{J,i} + 3v_{J,i-1} \quad (4)$$

Пример I-1. Пусть для $n=6$ заданы следующие векторы пространства B_{kn} ($m=4$):

$$\hat{b}_1 = b_{11} b_{12} b_{13} b_{14} b_{15} b_{16} = 110101,$$

$$\hat{b}_2 = b_{21} b_{22} b_{23} b_{24} b_{25} b_{26} = 011011.$$

Используя правило (2), образуем из последовательности $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$ последовательность из векторов $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3 \in V_{Kn}$

$$f: V_{Kn} \rightarrow V_{Kn} \rightarrow f: \hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{b}_3 \rightarrow \hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 =$$

$$= f: 110101.011011.111011 \rightarrow 122330.012230.123301,$$

где

$$f: 110101 \rightarrow 122330; \quad f: 011011 \rightarrow 012230;$$

$$f: 111011 \rightarrow 123301.$$

Введем понятие операции $\rho_1 = X \frac{m}{2}$ и операции

$$\rho_2 = X \frac{m}{2} \quad \text{и рассмотрим отображение } \rho_1: G_{pn} \rightarrow X$$

где в данном случае рассматривается общий случай, когда вектор-

ное пространство G_{pn} задано над $R(p) = \{X, X, M_p\}$,

где $M_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Имеет место следующая

Теорема 2. Результатом отображения $\rho_1: G_{pn} \rightarrow X \frac{m}{2}, n$

является подпространство $X \frac{m}{2}, n \subset G_{pn}$ над кольцом

$\{0, \frac{m}{2}\}$, где m - четное целое неотрицательное число.

Теорема будет считаться доказанной, если покажем, что для любого элемента $g_{\frac{m}{2}}$ произвольного вектора $\hat{g}_{\frac{m}{2}, n}$ справедливо соотношение

$$p_1 : g_{\frac{m}{2}, i} \longrightarrow z_{\frac{m}{2}, i} \in \{0, \frac{m}{2}\}, \quad (5)$$

где

$$z_{\frac{m}{2}, i} \in \hat{z}_{\frac{m}{2}, i} \in z_{\frac{m}{2}, n}$$

Представим $z_{\frac{m}{2}, i}$ как следующую сумму:

$$z_{\frac{m}{2}, i} = K_1 \cdot m + K_2. \quad (6)$$

Здесь $z_{\frac{m}{2}, i} \equiv K_2 \pmod{m}$.

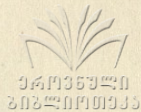
Рассмотрим два случая.

1. K_2 является четной; тогда, представляя $K_2 = 2K_2'$ и умножая (1) на p_1 , получим

$$\frac{m}{2} \cdot z_{\frac{m}{2}, i} = K_1 \cdot m \cdot \frac{m}{2} + 2K_2' \cdot \frac{m}{2} \equiv 0 \pmod{m}.$$

2. K_2 является нечетной; тогда представляя $K_2 = 2K_2' + 1$, получим

$$z_{\frac{m}{2}, i} \cdot \frac{m}{2} = K_1 \cdot \frac{m}{2} \cdot m + 2K_2' \cdot \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \equiv \frac{m}{2} \pmod{m},$$



что и требовалось доказать.

Следствие 2-1. Отображение $\rho_1: G_{pn} \rightarrow \mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, n}$ является эпиморфизмом G_{pn} в $\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, n}$, т.к. функция ρ_1 является суръективной.

Следствие 2-2. По отношению к операции ρ_1 для случая модуля $m=4k$ подпространство $\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, n}$ является ядром гомоморфизма, т.е.

$$\rho_1: \mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, i} \rightarrow 0 \pmod{m}; m=4k \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

В случае модуля нечетной $m \neq 4k$ каждый элемент вектора $\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, i}$ является идемпотентом в отношении самого себя, т.е.

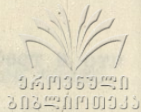
$$\rho_1: \mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, i} = \begin{cases} 0 \pmod{m} & \text{при } m=4k \\ \frac{m}{2} \pmod{m} & \text{при } m \neq 4k \end{cases} \quad (7)$$

Следствие 2-3. Множество векторов пространства G_{pn} по отношению к двум операциям $\{+, \rho_1\}$ является кольцом $R(G)$, а множество векторов подпространства $\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, n}$ - главным идеалом кольца.

Пример 2. Пусть $m=6$, $\hat{e}_1 = 101111$, $\hat{e}_2 = 011011$, $\hat{e}_3 = 101010$.

$$f: 101111.011011.101010 \rightarrow \hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 =$$

$$= 112345.501123.445500.$$



$$\rho_1: \hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 = \frac{m}{2} \times (\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3) = 3 \times (112345.501123.445500)$$

$$\text{mod } 6 = 330303.303303.003300.$$

Теорема 3. Между векторами подпространства $\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, n}$ и множеством V_{kn} существует закон соответствия с точностью до изоморфизма.

В основу доказательства можно положить тот факт, что эпиморфные образы любого кольца можно восстановить с точностью до изоморфизма по идеалам в кольце, аналогично тому, как эпиморфные образы группы восстанавливаются по ее нормальным подгруппам /5/.

Согласно следствию 2-3 и теореме 2 подпространство является идеалом относительно $\{\frac{m}{2}, \rho_1\}$ в G_{pn} , с другой стороны, упорядоченное множество V_{kn} является эпиморфным образом в кольце $R(G)$, т.е.

$$\rho_1: V_{kn} \rightarrow \mathbb{Z}_{\frac{m}{2}, n}.$$

Учитывая также свойство монотонности векторов из V_{kn} , приходим к заключению об однозначности процесса восстановления, что и доказывает теорему.

Следствие 3-1. Значения первого и i -того элементов последовательности, составленной из векторов $\{\hat{v}_{j,i}\}$, восстанавливаются по следующей схеме

$$v_{11} = \begin{cases} 0 & \text{если } \tilde{x}_{11} = 0 \\ 1 & \text{если } \tilde{x}_{11} = \frac{m}{2} \end{cases} \quad (8)$$

$$v_{j,i} = \begin{cases} v_{j,i-1} & \text{если } \tilde{x}_{j,i} = \tilde{x}_{j,i-1} \\ v_{j,i-1} + 1 & \text{если } \tilde{x}_{j,i} \neq \tilde{x}_{j,i-1} \end{cases}$$

в таком

$$v_{j,i} = \begin{cases} v_{j,i} = 2d+1 \text{ (нечетно), если } \tilde{x}_{j,i} = \frac{n}{2} \\ v_{j,i} = 2d \text{ (четно), если } \tilde{x}_{j,i} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Следствие 2-3. Поскольку осуществляется обратное преобразование

$$\rho^{-1}: \tilde{x}_{\frac{m}{2}, n} \rightarrow V_{kn}; \quad f: V_{kn} \rightarrow B_{kn},$$

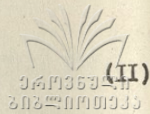
то, следовательно,

$$f^{-1}: (\rho^{-1}: V_{kn}) \rightarrow B_{kn}. \quad (10)$$

Введем понятие множества $S = \{s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_k\}$, каждый элемент которого представляет следующую сумму:

$$s_{j,n} = \hat{v}_{j,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{j+1,n}$$

Теорема 4. Значение суммы



$$S_{j,n} = v_{j,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{(j+1),n}$$

зависит как от значений, так и от перестановкилагаемых

$$v_{j,n} \text{ и } v_{j+1,n}.$$

Доказательство теоремы вытекает из предыдущих теорем и следствий 3-1 и 3-2.

Действительно,лагаемые вида $\frac{m}{2} \cdot v_{j+1,n} \in \tilde{X}_{\frac{m}{2},n}$ являются элементами нормальной подгруппы по отношению к операции $+$, а каждое значение суммы $S_{j,n}$ будет принадлежать смежному классу образующим которого является элемент нормальной подгруппы. Это доказывает первую часть теоремы.

С другой стороны, согласно теореме 3 существует взаимно-однозначное соответствие между $\tilde{X}_{\frac{m}{2},n}$ и V_{kn} , откуда следует, что

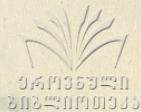
$$v_{j,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{j+1,n} \neq v_{j+1,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{j,n},$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Следствие 4-1. Процесс восстановления $v_{j,n}$ и $v_{j+1,n}$ однозначен, при котором значение суммы $S_{j,n}$ подвергается следующей схеме преобразования и восстановления:

$$S_{j,n} \times 2 = 2 \times v_{j,n} \rightarrow \tilde{X}_{j,n} \in \tilde{X}_{\frac{m}{2},n},$$

$$\rho^{-1}: \tilde{X}_{j,n} \rightarrow v_{j,n},$$



$$(m-1)v_{j,n}^m + S_{j,n}^m = 2v_{j+1,n} \rightarrow \tilde{x}_{j+1,n}.$$

Следствие 4-2. Четырехзначная ($m=4$) числовая система является той минимальной по модулю числовой системой, в которой разложение (II) возможно.

Следствие 4-3. Четырехзначные векторы $\{S_{j,n}\}$, $j=1, 2, 3, \dots$, обладают минимальной длиной, измеренной в битах.

Следствие 4-4. В четырехзначной числовой системе операторы ρ_1 и ρ_2 совпадают.

Следствие 4-5. На основании теоремы 3 можно прийти к более обобщенному утверждению: уравнение типа

$$\pm x_1^m \pm 2x_2^m \pm 2^2x_3^m \pm \dots \pm 2^{n-1}x_n^m = S \pmod{2^n} \quad (12)$$

имеет однозначное решение, где решениями x_1, x_2, \dots, x_n являются неубывающие монотонные последовательности заданной длины $m=2, 3, 4, \dots$, свойства которых определены согласно следствию I-I.

Должно быть справедливым и обратное утверждение: каждому кодовому числу S по $\pmod{2^n}$ с точностью до изоморфизма соответствует одно-единственное уравнение типа (12).

Далее, согласно лемме I, каждой монотонной последовательности x_1, x_2, \dots, x_n соответствует какое-либо число в двоичной системе. Следовательно, корнями уравнения (12) в то же

Можно показать, что эта концепция распространяется также на любые рациональные числа.

время можно считать целые числа, представленные первоначально
но в двоичной системе счисления.



Пример 3. Пусть имеется уравнение от двух неизвестных

$$x_1 + 2x_2 = S \pmod{8}; \tag{I3}$$

определим x_1 и x_2 , если $S = 1467$,

$$x_1 + 2x_2 = 1467. \tag{I4}$$

Умножим обе части (I4) на $\frac{m}{2} = 4$, получим $4x_1 = 4004$;

здесь $2_{J,4} = 4004$.

Согласно следствию 3-I

$$\rho^{-1}: (4004) \rightarrow x_1 = 1223.$$

Далее из (I4) имеем

$$2x_2 = 1467 - 1223 = 0244.$$

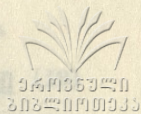
Умножая на $\frac{m}{4} = 2$, получим

$$4x_2 = 0400,$$

чему соответствует

$$\rho^{-1}: (0400) \rightarrow x_2 = 4566.$$

Таким образом $x_1 = 1223$, $x_2 = 4566$, $x, x_2 = 12234566$.



Решением уравнения (14) в двоичных эквивалентах является

$$b_1 = 1101 \rightarrow 13, \quad b_2 = 1110 \rightarrow 14.$$

Развивая рассмотренную концепцию, аналогичным образом можно показать схему решения более общего уравнения, чем (12).

$$\pm a_1 y_1 \pm a_2 y_2 \pm a_3 y_3 \pm \dots \pm a_n y_n = S \pmod{2^n}, \quad (15)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные рациональные числа,

$$y_1 = 2x_1, \quad y_2 = 2^2 x_2, \dots, \quad y_n = 2^n x_n.$$

Для каждого S в (15) решения y_1, y_2, \dots, y_n также являются однозначными.

Поскольку в основе выбора метода скатия данных лежат требования простоты его реализации, то, исходя из следствий 4-3, и 4-4, в дальнейшем без существенного ограничения общности выкладок будут рассматриваться четырехзначные системы кодирования и скатия информации.

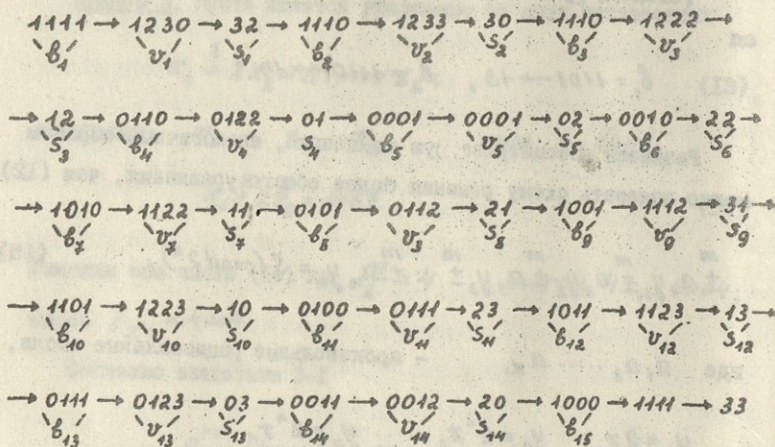
Введем понятие невырожденного линейного оператора ρ_3 преобразующего m -ный вектор в двоичный.

Теорема 5. В четырехзначной системе кодирования, для олучая $n = 2, 4$, последовательность операторов ρ_1, ρ_3 над V_{kn} образует циклические группы порядка 3 и 15.

Доказательство теоремы вытекает из теорем 3 и 4 и их следствий.



Пример 4. Пусть для $m=4$ имеем $n=4$, тогда образуются следующая циклическая группа преобразований



Выбор охемы ожатия

Пусть четырехзначная кодовая последовательность

$$v_{ni}^i = v_1 v_2 \dots v_i \dots v_n \quad (16)$$

при f и f_1 является отображением двоичной последовательности

$$b_{ni}^i = b_1 b_2 \dots b_i \dots b_n \quad (17)$$

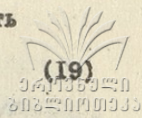
$$v_i \in \{0, 1, 2, 3\}; \quad i = \overline{1, n}.$$

Дальнейшее преобразование v_{ni}^i происходит по (II), т.е.

$$S = v_i v_{i+1} v_{i+2} \dots v_n + \frac{m}{2} \cdot v_{n+1} v_{n+2} \dots v_{2n} \quad (18)$$

в результате которого образовывается последовательность

$$S_N = S_1 S_2 \dots S_N,$$



где $N \geq n$, n — длина вектора V_{kn} .

Если (18) используется через каждый n элемент, т.е. когда шаг операции t по (II) между двумя векторами равен n , то тогда $N=n$.

Однако для дальнейшей оценки коэффициента сжатия ($K_{сж}$) информации наибольший интерес представляет задача определения таких t и n , когда N достигает максимума.

Ввиду очевидности, не требует доказательства тот факт, что самый быстрый рост величины N для любого $n > 1$ происходит когда $t=1$. Более важен вопрос выбора длины n блочного вектора V_{kn} , при которой рост величины N достигает N_{max} .

Введем понятие коэффициента расширения — K_N , — характеризующего рост N в последовательности S_N^t при вариации n , т.е.

$$K_N = \frac{N(S)_{n>2}}{N(S)_{n=2}} \quad \text{при } t=1, \quad (20)$$

где $N(S)_{n=2}$ и $N(S)_{n>2}$ — количество элементов в последовательности S_N^t соответственно, когда $n=2$ и $n>2$ в векторе V_{kn} .

Лемма 2. При $t=1$ $N = N_{max}$, когда n равен или выбран ближе к значению

$$n = \frac{\gamma + 1}{4}$$

Доказательство: Поскольку $t=1$, то количество K блоковых векторов ψ_{kn} в последовательности S_N^t будет равно

$$K = (\gamma - n) - (n - 1) = \gamma - 2n + 1,$$

а количество букв

$$N = \gamma n - 2n^2 + n.$$

Выбор оптимального значения n , обеспечивающего максимум

$N = N_{max}$, определяется как

$$\frac{dN}{dn} = \frac{d}{dn} (\gamma n - 2n^2 + n) = 0,$$

откуда

$$n = \frac{\gamma + 1}{4}.$$

Теорема 6. Для четырехзначной кодовой последовательности

$S_N^t = S_1 S_2 \dots S_N$, $N \geq \gamma$, минимальное значение длины кодового слова n , обеспечивающее заданное значение $N = N_{min}$ при $t=1$, определяется как

$$n = n_{min} = \sqrt{\frac{N}{2}}. \quad (22)$$

Доказательство. Исходя из леммы 2, имеем

$$N = \gamma \cdot n - 2n^2 + n \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{N}{n} + 2n - 1.$$

Для определения $\gamma = \gamma_{\min}$, обеспечивающего $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\max}$, рассмотрим

$$\frac{d\gamma}{dn} = 0,$$

откуда

$$n = n_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{2}}.$$

Пример 6. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\max} = 8$. В последовательности \mathcal{V}_γ определим γ и длину кодового слова n_{\min} , обеспечивающие $\mathcal{N}_{\max} = 8$

$$n = n_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{2}} = 2,$$

$$\gamma = \frac{\mathcal{N}}{n} + 2n - 1 = 7.$$

Следовательно, когда число битов в $\mathcal{V}_\gamma = 7$, то при $t=1$ максимальное количество элементов в последовательности $\mathcal{S}_\mathcal{N}$ образуется, когда $n=2$.

Действительно, пусть $t=1$, $\gamma=7$, $n=2$ и задана некоторая случайная последовательность $\mathcal{V}_{\gamma_i}^i$. Тогда

$$\mathcal{V}_{\gamma_i}^i = 1110111 \rightarrow \mathcal{V}_{\gamma_i}^i = 1233012 \rightarrow 30.03.31.10,$$

для этой же $\mathcal{V}_{\gamma_0}^0$ при $n=7$ $\mathcal{N}=7$, при $n=3$ $\mathcal{N}=6$.

Из леммы 2 и теоремы 5 вытекает

Следствие 5-1. При $t=1$ два смежных кодовых слова длины n имеют равное $n-1$ одинаковых элементов.

Рассмотренные выше алгебраические свойства и особенности

кодовых последовательностей позволяют выбрать и построить циклическую схему сжатия данных, состоящую из следующих этапов:

1⁰) Функция преобразования $f: B \rightarrow V$ переводит исходную двоичную последовательность

$$B_{\chi_i}^i = b_1^0 b_2^0 \dots b_n^0$$

в четырехзначную последовательность

$$V_{\chi_i}^i = b_1^0 b_2^0 \dots b_n^0$$

2⁰) Для $t=1$ последовательность V_{χ}^0 на основании теоремы 3 преобразуется в 4-значную последовательность S_{χ}^2 , в которой длина каждого кодового слова $n=2$.

Примечание: выбор значения $n=2$, т.е. введение избыточности, при которой в двух смежных векторах соседние элементы являются одинаковыми, обуславливается требованиями однозначного декодирования.

3⁰) На основании теоремы 6 по $N = N_{max}$ в S_{χ}^2 определяется минимальная длина χ_1 двоичной последовательности $B_{\chi_i}^i$ и соответствующая длина кодового слова n .

4⁰) На основании теоремы 5 преобразуем по вычисленным значениям χ_1 и n последовательность $S_{\chi_i}^2$ в $S_{\chi_i}^{n-1}$, в результате чего определим конкретный вид двоичной последовательности b_1 .

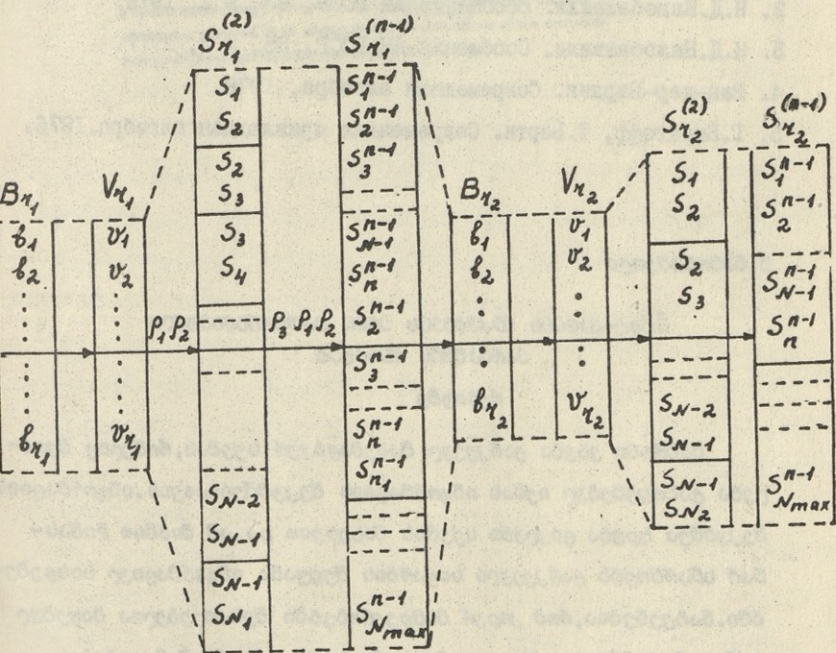
На этом оканчивается первый цикл сжатия информации. Коэффициент сжатия в конце первого цикла

$$K_{сжс}^{-1} = \frac{(4n - 2n^2 + n)2}{4}$$

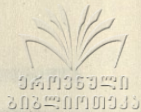
(24)



Если кодовую последовательность $B_{n_1}^i$ представить в виде вертикальной матрицы размера $n_1 \times 1$, то дальнейшее преобразование по схеме ожатия в пределах одного цикла можно представить в виде следующей граф-схемы:



Из граф-схемы видно, что для преобразования n_1 - элементной двоичной последовательности B_{n_1} в более короткую B_{n_2} ($n_2 < n_1$) осуществляется предварительное рас-



ширение информационно-числовой системы.

Поступила 28.V.1980

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Л.Нанобашвили. Труды ТГУ, серия прикладной математики и кибернетики, т.212, 1980
2. Н.Д.Нанобашвили. Сообщения АН ГССР, 93, № 2, 1979.
3. Н.Д.Нанобашвили. Сообщения АН ГССР, 85, № 3, 1977.
4. Ван-дер-Варден. Современная алгебра, 1978.
5. Г.Биркгоф, Т.Барти. Современная прикладная алгебра.1976.

ბ. ნანობაშვილი

ინფორმაციის თეორიის ერთი საკვანძოა
 ვარსკვლავის თეორია
 რეზიუმე

დაძველები უხედავად ვარსკვლავთმცოდნეობის სტრუქტურის, რეზიუმეები შეიქმნა
 და გამოყენებული იქნას ინფორმაციის თეორიის საფუძვლის ინფორმაციის
 თეორიის ხედავად ცენტრის სტრუქტურის თეორიის და ამ თეორიის წინას-
 ნახარისხების ვარსკვლავთმცოდნეობის საფუძვლის ინფორმაციის სისტემის
 თეორიის ნაპირების, რეზიუმეები მიმდებარეობს თეორიის მიმდებარე
 იქნას თეორიის საფუძვლის თეორიის მიმდებარეობს.



N. Nanobashvili

ON AN IMPROVED VARIANT OF DATA COMPRESSION

Summary

The paper deals with a certain mathematical scheme that can be used for data compression. The data compression is realized by using a cyclic scheme and preliminary introduction of redundancy into the information systems. It is shown that maximum values of the compression coefficient can be obtained in code sequences.

224, 1981

მედიცინის მრეწველი ნიშნის მფლობელის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ЧЕТЫРЕХКОМПОНЕНТНЫХ ТВЕРДЫХ
РАСТВОРОВ

Г.Г. Сирбиладзе

Исследование зависимостей структура - состав - дефектность - свойство - одна из основных трудно решаемых задач физики и химии материалов. Построение адекватной модели твердого раствора требует знания зависимости его свойства от структуры, состава и дефектности. Описание этой зависимости проводится в настоящее время в рамках различных полуэмпирических теорий.

В /1/, гл. I, предлагается метод т.н. кластерных компонентов (МКК), который с единой позиции при небольшом числе параметров описывает концентрационную и температурную зависимость многих большого класса металлических и полупроводниковых твердых растворов и дефектных соединений. Кроме того, метод дает возможность прогнозировать свойства соединений, которые используются в качестве гипотетических кластерных компонентов и не могут быть получены в обычных условиях. Основная идея метода заключается в том, что реальная система представляется в виде газа невзаимодействующих подсистем (кластерных компо-

нент), каждая из которых дает определенный вклад в рассматриваемое свойство, которое, согласно основному постулату теории, вычисляется на основе простого алгоритма:

$$g = \sum_i c_i g_i, \quad (1)$$

где g_i - свойство g кластерного компонента i , c_i - концентрация i -го компонента в растворе и

$$\sum_i c_i = 1. \quad (2)$$

Практическое применение МКК, особенно в случае многокомпонентных систем, связано с трудоемкими вычислениями. Поэтому создание машинных моделей, позволяющих на основе введения в ЭВМ начальных данных (значений свойств для простых соединений) получать нужные свойства многокомпонентных систем, представляет собой важную задачу.

Нами разработан алгоритм расчета нужного свойства в т.н. приближении дальнего порядка на основе полного набора параметров, составляющих достаточную статистику для вычисления вероятностей распределения атомов по узлам кристаллической решетки твердого раствора.

1. Объектом нашего исследования являются многокомпонентные сложные твердые растворы. Для характеристики такого раствора при данной температуре T и давлении P недостаточно задать лишь структуру и состав раствора c_i . Необходимо также знать и другие параметры. Такими параметрами, например, являются априорные вероятности P_i^α того, что атом сорта i занимает узел типа α .

При рассмотрении твердых растворов удобно пользоваться

матричными представлениями. Если раствор $G_{K_1}^{(1)} G_{K_2}^{(2)} \dots G_{K_n}^{(n)}$,
 K_1, K_2, \dots, K_n - концентрации, $\sum_{i=1}^n K_i = 1$, содержит n
 сортов атомов и m типов неэквивалентных узлов, то он мо-
 жет быть представлен матрицей

$$G = \begin{matrix} G^{(1)} & & & & G^{(n)} \\ \left[\begin{array}{cccc} d_{11}(x_1, \dots, x_K) & \dots & \dots & d_{1n}(x_1, \dots, x_K) \\ d_{21}(x_1, \dots, x_K) & \dots & \dots & d_{2n}(x_1, \dots, x_K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1}(x_1, \dots, x_K) & \dots & \dots & d_{mn}(x_1, \dots, x_K) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3)$$

где x_1, \dots, x_K - характеризующие параметры, а $d_{\alpha i}$ -
 линейные функции от x_1, \dots, x_K .

В дальнейшем мы будем учитывать только параметры типа
 дальнего порядка, т.е. параметры, зависящие от распределения
 атомов по структурно неэквивалентным узлам решетки раствора
 и связанные с P_i^α .

Если учесть, что $d_{\alpha i}$ имеют физический смысл вероят-
 ностей, то они должны удовлетворять условиям:

$$0 \leq d_{\alpha i} \leq 1. \quad (4)$$

В силу линейности $d_{\alpha i}$ можно положить, что

$$d_{\alpha i} = \sum_{j=0}^K b_j^{\alpha i} x_j, \quad (5)$$

где $b_j^{\alpha i}$ - постоянные. Тогда $d_{\alpha i}$ можно рассматри-
 вать как векторы $(K+1)$ - мерного пространства с ортами:

$$\tau_0 = (x_0, 0, \dots, 0),$$

$$\tau_1 = (0, x_1, \dots, 0),$$

.....

$$\tau_k = (0, 0, \dots, x_k),$$

где $x_0 = 1$.

Можно считать, что

$$M_j^- \leq x_j \leq M_j^+, \quad (7)$$

где M_j^-, M_j^+ - постоянные.

Условия (4)-(7) выделяют в $k+1$ -мерном пространстве некоторую k -мерную область \mathcal{D}_k , которую будем называть областью существования раствора. Можно показать, что \mathcal{D}_k является выпуклым многогранником (см., например, [2]).

$\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k^t(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots, \eta_t^{(0)})$ с t вершинами в точках $\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots, \eta_t^{(0)}$.

Приравнивая k из m выражений $d_{\alpha i}$ нулю и решая (при условии совместности) полученную систему, можно найти одну из вершин многогранника.

В силу того, что $\mathcal{D}_k^t(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots, \eta_t^{(0)})$ - выпуклый

многогранник ясно, что $\sum_{i=1}^t c_i \eta_i^{(0)} \in \mathcal{D}_k^t$ при $c_i \geq 0, \sum_{i=1}^t c_i = 1$.

Обратно, для любого $\mu \in \mathcal{D}_k^t$ найдутся $c_1, \dots, c_t, c_i \geq 0$,

$\sum c_i = 1$, такие, что $\mu = \sum_{i=1}^t c_i \eta_i^{(0)}$. Далее, в силу линейности G будем иметь:



$$G \left(\sum_{i=1}^t c_i \eta_i^{(\alpha)} \right) = \sum_{i=1}^t c_i G(\eta_i^{(\alpha)}).$$

$G(\eta_i^{(\alpha)})$, $i=1, \dots, t$, называются элементарными матрицами кластерных компонентов (ЭМКК). Каждая из них имеет, по определению, только неотрицательные элементы, что имеет определенный физический смысл.

Из матричного равенства (8) нужно составить систему из независимых линейных уравнений

$$d_{\alpha i}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\ell=1}^{k+1} c_i d_{\alpha i}(x_1^{\ell}, \dots, x_k^{\ell}), \quad (9)$$

решение которой и дает явный вид коэффициентов разложения

$c_i = c_i(x_1, \dots, x_k)$. При $t > k+1$, выбирая по-разному наборы, можно получить различные разложения матрицы G раствора на ЭМКК. Это замечание мы используем ниже.

2. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - случайный вектор и

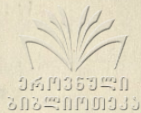
$$\begin{pmatrix} -2, & -1, & 1 & 2 \\ \rho_1^{(\alpha)} & \rho_2^{(\alpha)} & \rho_3^{(\alpha)} & \rho_4^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

-распределение его компоненты ξ_{α} , $\alpha=1, 2, \dots, n$.

Замечая, что

$$\xi_{\alpha}^{2k} = \frac{2^{2k}-1}{3} \xi_{\alpha}^2 + \frac{4-2^{2k}}{3},$$

$$\xi_{\alpha}^{2k+1} = \frac{2^{2k}-1}{3} \xi_{\alpha}^3 + \frac{4-2^{2k}}{3} \xi_{\alpha},$$



получаем:

$$\begin{aligned} \rho^{i t \alpha} \xi_{\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k \xi_{\alpha}^k}{k!} = \\ &= a_0^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)} \xi_{\alpha} + a_2^{(\alpha)} \xi_{\alpha}^2 + a_3^{(\alpha)} \xi_{\alpha}^3, \end{aligned}$$

где

$$a_0^{(\alpha)} = \frac{4}{3} \cos t \alpha - \frac{1}{3} \cos 2 t \alpha,$$

$$a_1^{(\alpha)} = \frac{4}{3} i \sin t \alpha - \frac{1}{6} i \sin 2 t \alpha,$$

$$a_2^{(\alpha)} = \frac{1}{3} \cos 2 t \alpha - \frac{1}{3} \sin t \alpha,$$

$$a_3^{(\alpha)} = \frac{1}{6} i \sin 2 t \alpha - \frac{1}{3} i \sin t \alpha.$$

Характеристическая функция f_{ξ} случайного вектора ξ принимает вид:

$$\begin{aligned} f_{\xi}(t_1, \dots, t_n) &= \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^3 \dots \sum_{\alpha_n=0}^3 \prod_{k=1}^n a_{\alpha_k}^{(\kappa)} \cdot \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \xi_k^{\alpha_k} \right]. \end{aligned}$$

Здесь и всюду ниже \mathbb{E} - символ математического ожидания. Для функции распределения ξ можно получить:

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^3 \dots \sum_{\alpha_n=0}^3 \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k}^{(\kappa)}(\xi_k) \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \xi_k^{\alpha_k} \right], \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_0^{(\kappa)}(\xi_k) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{sign}(1.5 - |\xi_k|)}{|\xi_k|^2},$$

- 60 -

$$A_1^{(K)}(\xi_K) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{sign}(\xi_K - 0,5) \cdot \text{sign}(1,5 - |\xi_K|)}{|\xi_K|^3}$$

$$A_2^{(K)}(\xi_K) = \frac{1}{6} \text{sign}(|\xi_K| - 1,5),$$

$$A_3^{(K)}(\xi_K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\text{sign}(|\xi_K| - 1,5) \cdot \text{sign}(|\xi_K| - 0,5)}{|\xi_K|}$$

В частности,

$$F(\xi_\alpha) = \sum_{\alpha_1=0}^3 A_{\alpha_1}^{(\alpha)}(\xi_{\alpha_1}) E \xi_{\alpha_1}^{\alpha_1} \quad (II)$$

3. Рассмотрим четырехкомпонентный твердый раствор с двумя типами узлов (рассмотрение большего количества неэквивалентных узлов не представляет трудности). Допустим, что концентрация узлов типа α равна ν_α , а типа β — ν_β ($\nu_\alpha + \nu_\beta = 1$).

Каждому узлу типа α и β сопоставим симметричные случайные величины ξ_α и ξ_β соответственно, распределение по закону (10) при соответствующих α и β .

Очевидно, что символы $-2, -1, +1, +2$ можно считать "кодовыми обозначениями" соответственно для атомов сорта A, B, C и D . Поэтому в дальнейшем для вероятностей мы будем использовать другие обозначения, более удобные с физической точки зрения.

$$P(A/\alpha) = P(\xi_\alpha = -2), \quad P(B/\alpha) = P(\xi_\alpha = -1),$$

$$P(A/\beta) = P(\xi_\beta = -2), \quad P(B/\beta) = P(\xi_\beta = -1),$$

$$P(C/\alpha) = P(\xi_\alpha = 1), \quad P(D/\alpha) = P(\xi_\alpha = 2),$$

$$P(C/\beta) = P(\xi_\beta = 1), \quad P(D/\beta) = P(\xi_\beta = 2).$$

При этом имеем следующие условия

$$\begin{aligned} \nu_\alpha P(A/\alpha) + \nu_\beta P(A/\beta) &= C_A, \\ \nu_\alpha P(B/\alpha) + \nu_\beta P(B/\beta) &= C_B, \\ \nu_\alpha P(C/\alpha) + \nu_\beta P(C/\beta) &= C_C, \\ \nu_\alpha P(D/\alpha) + \nu_\beta P(D/\beta) &= C_D, \\ P(A/\alpha) + P(B/\alpha) + P(C/\alpha) + P(D/\alpha) &= 1, \\ P(A/\beta) + P(B/\beta) + P(C/\beta) + P(D/\beta) &= 1, \end{aligned} \tag{12}$$

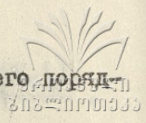
где C_A, C_B, C_C, C_D - концентрации атомов типа A, B, C, D соответственно.

Получаем характеристическую матрицу:

$$G = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline \nu_\alpha & P(A/\alpha) & P(B/\alpha) & P(C/\alpha) & P(D/\alpha) \\ \nu_\beta & P(A/\beta) & P(B/\beta) & P(C/\beta) & P(D/\beta) \end{array}$$

где $\nu_\alpha + \nu_\beta = 1$.

Для данного раствора вероятности $P(\cdot/\cdot)$ зависят от шести параметров $E(\xi_\kappa^\mu)$ ($\mu = \alpha, \beta$; $\kappa = 1, 2, 3$). Так как имеются три независимых уравнения, связывающих эти вероятности (см., напр., первые три уравнения в (12)), то остаются три независимых параметра (или их линейные комбинации), которые



мы будем рассматривать в качестве параметров дальнего порядка.

Выразив $E \xi_\beta$, $E \xi_\beta^2$, $E \xi_\beta^3$ посредством C_A, C_B, C_C, C_D , $E \xi_\alpha$, $E \xi_\alpha^2$, $E \xi_\alpha^3$ и используя (II), нетрудно получить явный вид элементов матрицы G .

Как известно, существует простой метод нахождения координат вершин многогранника. В нашем случае необходимо решить

$C_B^6 = 28$ систем линейных уравнений с шестью неизвестными. Результат проделанной работы приведен в таблице. Строки таблицы представляют собой вершины соответствующего многогранника D . Там же приводятся кластерные компоненты. Первая строка соответствует ЭМКК, описывающей чистый компонент

$A_{\nu\alpha}^{(\alpha)} A_{\nu\beta}^{(\beta)}$; второй строке соответствует ЭМКК, которая описывает стехиометрический бинарный раствор $A_{\nu\alpha}^{(\alpha)} B_{\nu\beta}^{(\beta)}$ и т.д.

Выбирая по-разному наборы КК, можно получить $C_{16}^7 = 1040$ различных разложений матрицы G раствора A_C, B_C, C_C, D_C на ЭМКК, каждое из которых соответствует определенной модели раствора. Нами разработана программа для ЭВМ, которая обеспечивает вычисление нужного свойства g для всех 1040 возможных моделей. Окончательный выбор модели, адекватной реальной физической картине, происходит на основе сравнения результатов моделирования с данными опыта.

Поступила 19.11.1980

Кафедра теории случайных процессов

N°	C_A	C_B	C_C	C_D	$E\xi_{\alpha}$	$E\xi_{\alpha}^2$	$E\xi_{\alpha}^3$	К К
1.	1	0	0	0	-2	4	-8	$A_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $A_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
2.	ν_{α}	$1-\nu_{\alpha}$	0	0	-2	4	-8	$A_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
3.	ν_{α}	0	$1-\nu_{\alpha}$	0	-2	4	-8	$A_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $C_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
4.	ν_{α}	0	0	$1-\nu_{\alpha}$	-2	4	-8	$A_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $D_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
5.	$1-\nu_{\alpha}$	ν_{α}	0	0	-1	1	-1	$B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$ $B_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$
6.	$1-\nu_{\alpha}$	0	ν_{α}	0	1	1	1	$B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$ $C_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$
7.	$1-\nu_{\alpha}$	0	0	ν_{α}	2	4	8	$B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$ $D_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$
8.	0	1	0	0	-1	1	-1	$B_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
9.	0	ν_{α}	$1-\nu_{\alpha}$	0	-1	1	-1	$B_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $C_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
10.	0	ν_{α}	0	$1-\nu_{\alpha}$	-1	1	-1	$B_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $D_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
11.	0	$1-\nu_{\alpha}$	ν_{α}	0	1	1	1	$B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$ $C_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$
12.	0	$1-\nu_{\alpha}$	0	$1-\nu_{\alpha}$	2	4	8	$B_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$ $D_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$
13.	0	0	1	0	1	1	1	$C_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $C_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
14.	0	0	ν_{α}	$1-\nu_{\alpha}$	1	1	1	$C_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $D_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$
15.	0	0	$1-\nu_{\alpha}$	ν_{α}	4	4	8	$C_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$ $D_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$
16.	0	0	0	1	4	4	8	$D_{\nu_{\alpha}}^{(\alpha)}$ $D_{\nu_{\beta}}^{(\beta)}$



ЛИТЕРАТУРА

1. Состав - дефектность - свойство твердых фаз. Метод кластерных компонентов. Под ред. Г.И.Чуфарова, М., "Наука", 1977
2. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольдштейн, Линейное программирование. М., "Физматгиз", 1963.

გ.სირბილაძე

მთავარდამკვეთის მიერ დაფინანსებული სამუშაო

ბრუნვის

რეზიუმე

შემუშავებულია მდარე შენაღობის საჭირო თვისებებს გამოთვლის ალგორითმი ე.წ. მარჯული რიგის მიახლოებით, პარამეტრთა სრულ ერთობლიობაზე, რეზიუმეც მარტივად გვეხმარება სტატისტიკურ-კვანთურების კონსტრუქციის მიხედვით განაწილების აღბეჭედის გამოსათვლელად.

G. Sirbiladze

MODELLING OF THE PROPERTIES OF FOUR-COMPONENT
ALLOYS

Summary

An algorithm has been developed for calculating the necessary properties of a solid solution. It is based on the so-called distant order approximation to the complete set of parameters, the latter constituting sufficient statistics for the calculation of the probability distribution of atoms at the crystal lattice points.

224, 1981

თბილისის შრომის ნიშანი ორდენის მფლობელობა სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШВАРЦА К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ ГРАНИЧНОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. Г. Тхелидзе

В настоящей заметке доказывается сходимость метода Шварца в применении к первой граничной задаче для уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u) \quad (I)$$

и тем самым устанавливается существование решения этой задачи для любого конечного промежутка времени $(0; T)$; предположено, что существует решение соответствующих граничных задач для определенных линейных дифференциальных уравнений параболических типов.

Пусть D - область в n -мерном пространстве E_n ,

ограниченная поверхностью S и образованная сложением двух

областей D_1 , D_2 , ограниченных замкнутыми поверхностями-

ми Ляпунова S_1, S_2 . Обозначим $S_1' + S_1'' = S_1, S_2' + S_2'' = S_2, S_1' + S_1'$

ℓ - линия пересечения поверхностей S_1 и S_2 ; S_1'', S_2'' -

те части границ областей D_1 и D_2 , которые лежат внутри областей D_2 и D_1 соответственно.

Предполагаем, что функция $f(x, t, u)$ непрерывна вместе с

$\frac{\partial f(x, t, u)}{\partial u}$ в 0 , удовлетворяет неравенству $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ при

$x \in D + S, t \geq 0$ при всех конечных u , и, кроме того,

в областях $D_1 + S_1, D_2 + S_2$ она удовлетворяет условию Липшица относительно x_i .

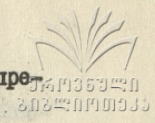
Поставим следующую граничную задачу:

Найти регулярное в области D при $t > 0$ решение $u(x, t)$ уравнения (I), удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x) \quad (x \in D_1), \\ u(x, 0) &= \varphi_2(x) \quad (x \in D_2); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, t) &= \psi_1(\xi, t) \quad (\xi \in S_1', t > 0), \\ u(\xi, t) &= \psi_2(\xi, t) \quad (\xi \in S_2', t > 0); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1(\xi, t)$, $\varphi_2(\xi, t)$ - заданные непрерывные функции.



Теперь рассмотрим следующее линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 (u_m - u_{m-1})}{\partial x_i^2} - \frac{\partial (u_m - u_{m-1})}{\partial t} = \kappa (u_m - u_{m-1}) - \alpha_{m-1}(x, t), \quad (4)$$

где

$$\alpha_{m-1} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} - f(x, t, u_{m-1}) > 0,$$

$$\kappa = \max \frac{\partial t}{\partial u}, \quad x \in \mathcal{D} + S \quad (x \in \ell), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u_0 \leq u,$$

$u_0(x, t)$ - произвольная функция, удовлетворяющая условиям (2) и (3) и неравенству

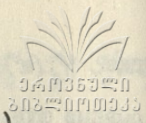
$$\alpha_0 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t, u_0) > 0. \quad (5)$$

Для уравнения (4) в области \mathcal{D} поставим следующие граничные условия:

$$u_m(x, 0) - u_{m-1}(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}), \quad (6)$$

$$u_m(\xi, t) - u_{m-1}(\xi, t) = 0 \quad (\xi \in S, t > 0). \quad (7)$$

В работе [1] доказано, что последовательности решения уравнения (4), удовлетворяющие в области \mathcal{D} , граничным условиям



$$u_m(x, 0) - u_{m-1}(x, 0) = 0 \quad (x \in D_1),$$

$$u_m(\xi, t) - u_{m-1}(\xi, t) = 0 \quad (\xi \in S_1, t > 0),$$

где $u_0 \leq u$, удовлетворяют неравенству (5) в D_1 и граничным условиям

$$u_0(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (x \in D_1), \tag{8}$$

$$u_0(\xi, t) = \overline{\psi}_1(\xi, t) \quad (\xi \in S_1, t > 0), \tag{9}$$

и, аналогично, удовлетворяющие в области D_2 граничным условиям

$$u_m(x, 0) - u_{m-1}(x, 0) = 0 \quad (x \in D_2),$$

$$u_m(\xi, t) - u_{m-1}(\xi, t) = 0 \quad (\xi \in S'_2, t > 0),$$

где $u_0 \leq u$, удовлетворяют неравенству (5) в D_2 и граничным условиям

$$u_0(x, 0) = \varphi_2(x) \quad (x \in D_2), \tag{10}$$

$$u_0(\xi, t) = \overline{\psi}_2(\xi, t) \quad (\xi \in S'_2, t > 0), \tag{II}$$

где $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ суть непрерывные продолжения функции ψ_1 и ψ_2 на S''_1 и S''_2 соответственно, сходятся к решениям граничной задачи (I), (8) и (9) в области D_1 и (I), (10) и (II) в области D_2 .

Поставленную краевую задачу (4), (5), (6) можно легко свести к задаче, аналогичной задачам, исследованным в рабо-



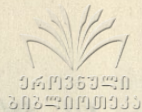
тах /2/, /3/. Таким образом, задача (2)-(3) для нелинейного уравнения (1) сводится к решению первой краевой задачи методом Шварца для линейных уравнений параболического типа.

Поступила 10.VI.1980

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

1. П.К.Зерагия. Решение основных граничных задач для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа методом акад. С.А.Чаплыгина, Сообщения АН Груз.ССР, т.ХУП, № 2, 1956.
2. М.Г.Тхелидзе. Метод Шварца для "слабого" решения первой краевой задачи линейных уравнений параболического типа. Сообщения АН Груз.ССР, т.74, № 3, 1974.
3. М.Г.Тхелидзе. Метод Шварца для "сильного" решения первой краевой задачи линейных уравнении параболического типа. Труды молодых научных работников Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета. Тбилиси, 1974.



მ. თხელიძე

პირველი სასაბჭოეთო ანგარიშს ატარებს შპს-ის მართვით
აკადემიკოსი აკადემიკოსი გიორგი მინაშვილი
საინჟინერო-მეცნიერებათა აკადემია

რეზიუმე

აქტიურად ნაშრომები მიეძღვნება შვარცის მეთოდის აპლიკაციას
პირველი სასაბჭოეთო ანგარიშს ატარებს შპს-ის მართვით
აკადემიკოსი აკადემიკოსი გიორგი მინაშვილი
საინჟინერო-მეცნიერებათა აკადემია

M. Tkhelidze

APPLICATION OF THE SCHWARTZ METHOD TO THE
SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR A PARA-
BOLIC-TYPE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Summary

The summability of the Schwartz method is proved for the first bound-
ary problem in the case of a particular type nonlinear parabolic differen-
tial equation by combining the Schwartz and Chaplygin methods through
linearization.



224, 1981

მბიძისის მიწმის ნიივი რნიის რრენისანი სსხეწნი
უნივერსიივის მიწმის

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ БЛИЖНЕГО ПОРЯДКА В ТРОЙНОМ
СПЛАВЕ Fe_3AlSi

Т.Г.Гаччиладзе, Т.Н.Мгвделадзе

Введение

В работе /1/ на основе метода квантовых характеристических функций была построена модель упорядочивающегося тройного сплава в терминах корреляционных функций "случайного спина", составляющих достаточную статистику для построения парной функции распределения вероятностей (р.в.), установлена связь этих корреляционных функций с параметрами дальнего и ближнего порядка, а также получены соответствующие уравнения равновесия.

В теории ближнего порядка эти уравнения представляют собой систему трех трансцендентных уравнений относительно корреляционных функций. Показано, что решение этой системы сводится к решению алгебраического уравнения четвертой степени общего вида, коэффициенты которого являются сложными функциями энергий упорядочения и температуры, ввиду чего получить решение для конкретного практического использования не удается /2/.

04.08.59 21
Т.Н.ОИИ-

В настоящей работе рассматривается новый приближенный метод решения уравнений равновесия, основанный на вариационной теории возмущений (ИТВ) /3/, в которой, в отличие от обычных теорий возмущений, не требуется малость измеряемой величины; малой должна быть лишь величина, термодинамически сопряженная к ней, т.е. соответствующий множитель Лагранжа в оценке функции р.в. /4/. Возможность применения ИТВ связана с получением дополнительной информации на основе измерений, переопределением начальных данных или изменением точности измерений.

С помощью этого метода получены решения уравнений равновесия выше и ниже критической температуры.

Результаты вычислений используются для построения кривых теплоемкости упорядочивающегося сплава Fe_3AlC_x с малой концентрацией C_x на основе данных работы /5/.

1. Теория ближнего порядка. Общие термодинамические уравнения равновесия

В этом разделе мы введем необходимые обозначения и приведем некоторые результаты работы /1/.

Обозначим через $N_{\alpha\beta}^{(j,k)}(S_{m\alpha}; S'_{n\beta})$ числа заполнения пары узлов типа (j, k) (значения (j, k) зависят от свойств симметрии кристалла); $S_{m\alpha} - \xi$ - компонента "случайного спина Γ ", сопоставляемого узлу типа j с координатами m , $S'_{n\beta}$ - аналогичная случайная величина, сопоставляемая узлу типа k с координатами n ; $\alpha, \beta = \pm 1, 0$

возможные значения S_z . Таким образом,

$$N_{\alpha\beta}^{(j,k)}(S_{mz}; S'_{nz}) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_{mz} = \alpha \text{ и } S'_{nz} = \beta \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Если рассмотреть случайную величину

$$E_{\alpha\beta}^{(j,k)}(S_{mz}; S'_{nz}) = N_{\alpha\beta}^{(j,k)}(S_{mz}; S'_{nz}) \cdot V(\alpha, \beta), \quad (\text{I.2})$$

то конфигурационная энергия кристалла может быть представлена в следующем виде:

$$E_c = \sum_{(j,k)} \sum_{(m,n)} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\{S_{mz}; S'_{nz}\}} E_{\alpha\beta}^{(j,k)}(S_{mz}; S'_{nz}) = \quad (\text{I.3})$$

$$= N \cdot \sum_{\alpha,\beta} V(\alpha, \beta) \cdot W(\alpha, \beta),$$

где $V(\alpha, \beta)$ - энергия взаимодействия пары (α, β) , $W(\alpha, \beta)$ - вероятности пар (α, β) , фигурирующие в теории ближнего порядка /1/, N - полное число пар. Простые вычисления дают:

$$\frac{E_c}{N} = \frac{E_0}{N} + \quad (\text{I.4})$$

$$+ \frac{1}{2} V_1 \sigma_5 + (V_2 - V_3) \sigma_6 + \frac{1}{2} (-V_1 + 2V_2 + 2V_3) \sigma_8,$$

где /1/

$$\sigma_5 = \langle \hat{S}_{jz} \cdot \hat{S}_{kz} \rangle; \quad \sigma_6 = \langle \hat{S}_{jz}^2 \cdot \hat{S}_{kz} \rangle = \langle \hat{S}_{jz} \cdot \hat{S}_{kz}^2 \rangle; \quad (\text{I.5})$$

$$\sigma_8 = \langle \hat{S}_{jz}^2 \cdot \hat{S}_{kz}^2 \rangle$$

$$V_1 = \frac{1}{2} [V(+1, +1) + V(-1, -1)] - V(+1, -1),$$

$$V_2 = \frac{1}{2} [V(+1, +1) + V(0, 0)] - V(+1, 0), \quad (1.6)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} [V(-1, -1) + V(0, 0)] - V(-1, 0).$$

Кроме того, в дальнейшем нам понадобятся следующие величины:

$$\sigma_1 = \langle \hat{S}_{j\bar{j}} \rangle; \quad \sigma_3 = \langle \hat{S}_{j\bar{j}}^2 \rangle. \quad (1.7)$$

Уравнения равновесия, полученные в /1/, имеют вид:

$$\frac{(\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (-\sigma_5 + \sigma_8)^2 \cdot (1 - 2\sigma_3 + \sigma_8)^4}{(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_6 - \sigma_8)^4 \cdot (-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6 - \sigma_8)^4} =$$

$$= \exp \left[- \frac{2(-V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{T} \right],$$

$$\frac{(\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6 - \sigma_8)^2}{(\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_6 - \sigma_8)^2} = \exp \left[- \frac{2(V_2 - V_3)}{T} \right], \quad (1.8)$$

$$\frac{(\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8)}{(-\sigma_5 + \sigma_8)^2} = \exp \left(- \frac{2V_1}{T} \right).$$

2. Информационная теория возмущений (ИТВ) /3/.

Рассмотрим наиболее простой вариант ИТВ, используемый нами в дальнейшем.

Пусть исходная информация о случайной величине

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ извлекается из измерений функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$ $x \in X$ и выражается в знании средних $\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_m \rangle$.



На основе этой информации, согласно принципу максимума информационной энтропии (м.и.э.) /6/, строится оценка функции р.в.:

$$F^{\circ}(x) = \exp \left[-\lambda_0^{\circ} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^{\circ} \cdot f_i(x) \right], \quad (2.1)$$

где λ_k° ($k=0, 1, \dots, m$) - множители Лагранжа, выражающиеся в виде функций от $\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_m \rangle$. Обобщенная статистическая сумма и информационная энтропия выражаются соответственно следующими формулами:

$$Z^{\circ}(\lambda_1^{\circ}, \dots, \lambda_m^{\circ}) = \sum_{x \in X} \exp \left[-\sum_{i=1}^m \lambda_i^{\circ} \cdot f_i(x) \right], \quad (2.2)$$

$$H_{\text{Imax}}^{\circ}(X) = \ln Z^{\circ} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{\circ} \langle f_i \rangle_0; \quad (2.3)$$

символ $\langle \dots \rangle_0$ означает усреднение по "невозмущенному" распределению (2.1) (нулевое приближение).

Измерение дополнительных параметров $\langle f_{m+1} \rangle, \dots, \langle f_{m+n} \rangle$ дает дополнительную информацию, которая "возмущает" исходную функцию р.в. (2.1) следующим образом:

$$F(x) = \exp \left[-\lambda_0^{\circ} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^{\circ} \cdot f_i(x) - \sum_{k=1}^n \lambda_{m+k} \cdot f_{m+k}(x) \right]. \quad (2.4)$$

Согласно /3/, если дополнительная информация мала, то можно написать:

$$\lambda_i = \lambda_i^{\circ} + \ell_i \quad (i=0, 1, \dots, m), \quad (2.5)$$

где ℓ_i - малые величины; малыми будут также дополнитель-



ные множители Лагранжа $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+n}$.

В этом случае обобщенную статистическую сумму, соответствующую (2.4), можно представить в виде разложения:

$$\begin{aligned} Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+n}) &= \sum_{x \in X} \exp \left[- \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i(x) - \sum_{k=1}^n \lambda_{m+k} \cdot f_{m+k}(x) \right] \\ &= Z^{\circ}(\lambda_1^{\circ}, \dots, \lambda_m^{\circ}) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \langle f_i \rangle_0 - \sum_{k=1}^n \lambda_{m+k} \langle f_{m+k} \rangle_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \langle f_i^2 \rangle_0 + \right. \\ &+ \sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^m \lambda_i \cdot \lambda_{i'} \cdot \langle f_i \cdot f_{i'} \rangle_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_i \cdot \lambda_{m+k} \cdot \langle f_i \cdot f_{m+k} \rangle_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_{m+k}^2 \cdot \langle f_{m+k}^2 \rangle_0 + \\ &\left. + \sum_{\substack{k, k'=1 \\ k \neq k'}}^n \lambda_{m+k} \cdot \lambda_{m+k'} \cdot \langle f_{m+k} \cdot f_{m+k'} \rangle_0 + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения для поправок к множителям Лагранжа λ_i ($i=0, 1, \dots, m$) и дополнительных множителей λ_{m+k} ($k=1, \dots, n$) имеют вид (с точностью до членов первого порядка малости):

$$\begin{aligned} \langle f_1 \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln Z = \langle f_1 \rangle_0 - \lambda_1 \cdot \epsilon_{11}^{\circ} - \sum_{i=2}^m \lambda_i \cdot \epsilon_{1i}^{\circ} - \sum_{k=1}^n \lambda_{m+k} \cdot \epsilon_{1m+k}^{\circ}, \\ \langle f_m \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \ln Z = \langle f_m \rangle_0 - \lambda_m \cdot \epsilon_{mm}^{\circ} - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot \epsilon_{mi}^{\circ} - \sum_{k=1}^n \lambda_{m+k} \cdot \epsilon_{mm+k}^{\circ}, \\ \langle f_{m+1} \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \lambda_{m+1}} \ln Z = \langle f_{m+1} \rangle_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \epsilon_{im}^{\circ} - \lambda_{m+1} \cdot \epsilon_{m+1m+1}^{\circ} - \sum_{k=2}^n \lambda_{m+k} \cdot \epsilon_{m+1m+k}^{\circ}, \\ \langle f_{m+n} \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \lambda_{m+n}} \ln Z = \langle f_{m+n} \rangle_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \epsilon_{in}^{\circ} - \lambda_{m+n} \cdot \epsilon_{m+n,m+n}^{\circ} - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{m+k} \cdot \epsilon_{m+n,m+k}^{\circ}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В этих уравнениях $\ln Z$ получается в результате логарифмирования (2.6) и повторного разложения; величины ϵ_{ij}° таковы:

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ji}^0 = \langle f_i f_j \rangle_0 - \langle f_i \rangle_0 \cdot \langle f_j \rangle_0 .$$

(2.8)
 3032010333

В работе /3/ проанализировано решение системы (2.7) и приведены условия применимости ИТВ.

3. Модель для $T > T_c$

Наши основные предположения для $T_c < T < \infty$ заключаются в следующем: изменение T в этом интервале мало влияет на информацию, получаемую при измерении величин σ_5 , σ_6 и σ_8 , что приводит к возможности применения ИТВ; при $T \rightarrow \infty$ корреляции между спинами исчезают, т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_5 = \sigma_1^2; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_6 = \sigma_1 \cdot \sigma_3; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_8 = \sigma_3^2, \quad (3.1)$$

σ_1 и σ_3 не зависят от T , т.е. их измерение при любых температурах дает одну и ту же информацию.

Согласно работе /1/, парная функция р.в., построенная на основе достаточной статистики, имеет вид:

$$W(\alpha, \beta) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 \alpha - \lambda_2 \beta - \lambda_3 \alpha^2 - \lambda_4 \beta^2 - \lambda_5 \alpha \beta - \lambda_6 \alpha^2 \beta - \lambda_7 \alpha \beta^2 - \lambda_8 \alpha^2 \beta^2), \quad (3.2)$$

где

$$\lambda_0 = \ln \bar{z} = -\ln(1 - \sigma_3 - \sigma_4 + \sigma_8); \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_7 - \sigma_8}{\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_7 - \sigma_8};$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{-\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_6 - \sigma_8}{\sigma_2 + \sigma_4 - \sigma_6 - \sigma_8}; \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\bar{z}^2 (\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_7 - \sigma_8) \cdot (-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_7 - \sigma_8)};$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{x^2(6_2 + 6_4 - 6_6 - 6_8) \cdot (-6_2 + 6_4 + 6_6 - 6_8)};$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{4} \ln \frac{(-6_5 + 6_6 - 6_7 + 6_8) \cdot (-6_5 - 6_6 + 6_7 + 6_8)}{(6_5 + 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (6_5 - 6_6 - 6_7 + 6_8)}; \quad (3.2)$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{4} \ln \frac{(-6_5 - 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (6_5 - 6_6 - 6_7 + 6_8) \cdot (6_2 + 6_4 - 6_6 - 6_8)^2}{(6_5 + 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (-6_5 + 6_6 - 6_7 + 6_8) \cdot (-6_2 + 6_4 + 6_6 - 6_8)^2};$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{4} \ln \frac{(-6_5 + 6_6 - 6_7 + 6_8) \cdot (6_5 - 6_6 - 6_7 + 6_8) \cdot (6_1 + 6_3 - 6_7 - 6_8)^2}{(6_5 + 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (-6_5 - 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (-6_1 + 6_3 + 6_7 - 6_8)^2};$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 [(6_1 + 6_3 - 6_7 - 6_8) \cdot (-6_1 + 6_3 + 6_7 - 6_8) \cdot (6_2 + 6_4 - 6_6 - 6_8) \cdot (-6_2 + 6_4 + 6_6 - 6_8)]^2}{(6_5 + 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (-6_5 + 6_6 - 6_7 + 6_8) \cdot (-6_5 - 6_6 + 6_7 + 6_8) \cdot (6_5 - 6_6 - 6_7 + 6_8)}$$

В теории ближнего порядка $6_1 = 6_2$, $6_3 = 6_4$ и $6_6 = 6_7$ /1/.

В качестве нулевого приближения берем

$$W^0(\alpha, \beta) = \lim_{T \rightarrow \infty} W(\alpha, \beta). \quad (3.3)$$

В дальнейшем, для простоты, все конкретные вычисления проводятся для сплава Fe_3MnCr . Согласно (3.1), (3.2) и (3.2) получаем:

$$W^0(\alpha, \beta) = 2 \frac{-\alpha^2 + \beta^2}{2 - \alpha^2 - \beta^2} \cdot n \cdot (1 - 2n)^{\frac{(\alpha^2 - \alpha) + (\beta^2 + \beta)}{2}}, \quad (3.4)$$

где n - концентрация C_A . Заметим, что

$$\zeta_1 = n; \quad \zeta_3 = 1-n$$



и, кроме того, при $T \rightarrow \infty$

$$\zeta_5 \rightarrow n^2; \quad \zeta_6 \rightarrow n(1-n); \quad \zeta_8 \rightarrow (1-n)^2. \quad (3.6)$$

В нашем случае, возмущенная функция р.в. имеет вид:

$$W(\alpha, \beta) = \exp \left[-\lambda_0 - \lambda_1(\alpha + \beta) - \lambda_3(\alpha^2 + \beta^2) - \lambda_5\alpha\beta - \right. \\ \left. - \lambda_6(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) - \lambda_8\alpha^2\beta^2 \right], \quad (3.7)$$

где

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \ell_i \quad (i=0,1,3), \quad (3.8)$$

$$\lambda_0^0 = \ln \frac{1}{n^2}; \quad \lambda_1^0 = \frac{1}{2} \ln(1-2n); \quad \lambda_3^0 = \frac{1}{2} \ln \frac{4n^2}{1-2n}$$

Решение системы (2.7) для нашего случая (с точностью до n^2) дает:

$$\ell_1 = -n + n^2 + \frac{\zeta_6}{n} - \zeta_8; \quad \ell_3 = -\frac{1}{n^2} [(1-n)^2 - \zeta_8]; \\ \ell_5 = 3n^2 - \zeta_5 + 2n\zeta_6 - 4n^2\zeta_8; \quad \lambda_6 = n - n^2 + n\zeta_5 - \frac{\zeta_6}{n} + \zeta_8; \\ \lambda_8 = \frac{1}{n^2} [(1-n)^2 - \zeta_8]. \quad (3.9)$$

Проведя вычисление конфигурационной энергии и информационной энтропии с помощью полученной возмущенной функции р.в., вместо точной системы (1.8) получим приближенную систему, эквивалентную исходной с точностью до членов порядка n^2 при больших T

$$\begin{aligned}
 & \left[2 - \frac{3V(+1,+1) - V(-1,-1) - 2V(0,0)}{2T} \right] \cdot \epsilon_6 - \\
 & - \left[2 + \frac{2(V(+1,+1) + V(-1,-1)) - 3n(V(+1,+1) + V(-1,-1) - 2V(0,0))}{2T} \right] \cdot \epsilon_8 + \\
 & + \frac{V(+1,+1) + V(-1,-1)}{T} \epsilon_6 \cdot \epsilon_8 - \frac{n(V(+1,+1) - V(-1,-1))}{T} \cdot \epsilon_8^2 = \\
 & \qquad \qquad \qquad (3.10) \\
 & = -2 + 6n - \frac{2(V(+1,+1) + V(-1,-1)) - n(5V(+1,+1) + 7V(-1,-1) - 4V(0,0))}{2T}, \\
 & - \frac{V(+1,+1) - V(-1,-1)}{2T} \epsilon_6 - \left[1 + \frac{V(+1,+1) + V(-1,-1) - n(V(+1,+1) + V(-1,-1) - 2V(0,0))}{2T} \right] \epsilon_8 \\
 & + \frac{V(+1,+1) - V(-1,-1)}{2T} \epsilon_6 \epsilon_8 - \frac{n(V(+1,+1) - V(-1,-1))}{2T} \cdot \epsilon_8^2 = \\
 & = -1 + 2n - \frac{V(+1,+1) - V(-1,-1)}{2T} + \frac{n(V(+1,+1) + 2V(-1,-1) - V(0,0))}{T}.
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом приближении $\epsilon_5 = 0$, а третье уравнение системы (1.8) превращается в тождество. Решение приближенной системы (3.10) таково:

$$\epsilon_6 \approx \left(1 + \frac{V(+1,+1) - V(-1,-1)}{4T} \right) \cdot n; \quad \epsilon_8 \approx 1 - 2n. \qquad (3.11)$$

Согласно (1.5) и (3.11) для конфигурационной энергии и теплоемкости получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_c}{N} & \approx \frac{E_0}{N} - \frac{[V(+1,+1) - V(-1,-1)]^2}{8T} \cdot n, \\
 \frac{\Delta C}{N} & \approx \frac{[V(+1,+1) - V(-1,-1)]^2}{8T^2} \cdot n.
 \end{aligned} \qquad (3.12)$$

4. Модель для $T < T_c$

В отличие от рассмотренного случая, при $T < T_c$ в нулевом приближении корреляциями между "случайными спинами" пренебречь нельзя; поэтому мы вынуждены искать другое исходное приближение. Т.к. явление упорядочения в рассматриваемом случае наблюдается лишь при малых концентрациях C_A [5], в качестве невозмущенной функции р.в. мы выбираем точную парную функцию р.в. бинарного сплава Fe_3Al :

$$F^0(\alpha, \beta) = \exp(-\lambda_0^0 - \lambda_5^0 \alpha \beta) \quad (\alpha, \beta = \pm 1),$$

$$\lambda_0^0 = \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \sigma_5^0{}^2}}; \quad \lambda_5^0 = \ln \sqrt{\frac{1 - \sigma_5^0{}^2}{1 + \sigma_5^0{}^2}} \quad (4.1)$$

Естественно предположить, что в качестве возмущенной функции р.в. нужно брать точную парную функцию тройного сплава $W(\alpha, \beta)$ (см. (3.2) или (3.7)), которая при $n \rightarrow 0$ должна перейти в $F^0(\alpha, \beta)$. Однако этот переход происходит не совсем гладко: множители Лагранжа (3.2), за исключением λ_5 в пределе теряют смысл и лишь

$$\lim_{n \rightarrow 0} (\lambda_1 + \lambda_6) = 0; \quad \lim_{n \rightarrow 0} (\lambda_0 + 2\lambda_3 + \lambda_8) = \lambda_0^0; \quad (4.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \lambda_5 = \lambda_5^0.$$

Таким образом, если при выборе возмущенной функции р.в. все-таки исходить из $W(\alpha, \beta)$ (что очень желательно, поскольку

эта функция соответствует достаточной статистике), то, ввиду того, что $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_6$ и λ_8 не являются относительно малыми величинами, возникает задача инвариантной перенормировки этой функции /4/.

С этой целью, точную парную функцию р.в. тройного сплава $W(\alpha, \beta)$ представим в следующем виде:

$$W(\alpha, \beta) = m(\alpha, \beta) \cdot \exp(-\lambda_5 \alpha \beta), \quad (4.3)$$

где

$$m(\alpha, \beta) = \exp[-\lambda_1(\alpha + \beta) - \lambda_3(\alpha^2 - \beta^2) - \lambda_6(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) - \lambda_8\alpha^2\beta^2]. \quad (4.4)$$

Поведение этой функции при $n \rightarrow 0$ характеризуется соотношениями:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{m(\alpha, \beta)}{\bar{z}_p} = \frac{1}{\bar{z}^0} \quad (\alpha, \beta = \pm 1); \quad (4.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{m(\alpha, 0)}{\bar{z}_p} = 0 \quad (\alpha = \pm 1, 0).$$

В этих выражениях

$$\bar{z}_p = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1, 0} m(\alpha, \beta) \cdot \exp(-\lambda_5 \alpha \beta); \quad \bar{z}^0 = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} \exp(-\lambda_5 \alpha \beta) \quad (4.6)$$

Мы видим, что именно канонический характер $W(\alpha, \beta)$ позволил представить это р.в. в виде (4.3). Функция $m(\alpha, \beta)$ напоминает "инвариантную меру" Джейнза /4/ $m(x)$, используемую им с целью инвариантной перенормировки информационной энтропии при переходе от дискретного к непрерывному случаю. Эта

перенормировка интерпретируется Джейнзом как переопределение "начальных данных", мерой которых служит функция $m(x)$ и которая определяется из теоретико-групповых соображений, т.е. свойств симметрии случайной величины x .

Хотя обычно в дискретном случае перенормировка не требуется, однако рассматриваемый нами случай особый: во-первых, при предельном переходе $n \rightarrow 0$ происходит изменение свойств симметрии "случайного спина"; во-вторых, как функция $m(\alpha, \beta)$, так и уравнения равновесия, полученные на основе $W(\alpha, \beta)$, в пределе $n \rightarrow 0$ теряют смысл. В частности, из трех уравнений равновесия одно переходит в уравнение для Fe_3Al , в то время как два других в пределе дают физически бессмысленные соотношения.

Все это приводит к необходимости инвариантной перенормировки меры "начальных значений" $m(\alpha, \beta)$.

Перенормировку проводим следующим образом:

$$m(\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{N}(\alpha, \beta) = \zeta(\alpha, \beta) \cdot \frac{\bar{z}^0}{\bar{z}_p} \cdot m(\alpha, \beta), \quad (4.7)$$

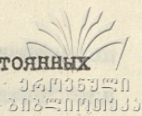
где

$$\zeta(\alpha, \beta) = 1 + \zeta_6(\alpha, \beta) \cdot \Delta \epsilon_6 + \zeta_8(\alpha, \beta) \cdot \Delta \epsilon_8, \quad (4.8)$$

$$\Delta \epsilon_6 = \epsilon_6^0 - \epsilon_6, \quad \Delta \epsilon_8 = \epsilon_8^0 - \epsilon_8.$$

Множитель $\frac{\bar{z}^0}{\bar{z}_p}$ обеспечивает правильное поведение функций р.в. при предельном переходе, а множитель $\zeta(\alpha, \beta)$ - сохранение правильного порядка малости при перенормировке уравнений равновесия и предельном переходе. Для наших целей, как

показывают расчеты, можно ограничиться выбором постоянных



$$\zeta_6(\alpha, \beta) = \zeta_6 \quad \text{и} \quad \zeta_8(\alpha, \beta) = \zeta_8.$$

Согласно ИТВ, с точностью до второго порядка малости, возмущенная функция р.в. имеет вид:

$$F(\alpha, \beta) = \tag{4.9}$$

$$= \mathcal{N}(\alpha, \beta) \cdot \exp(-\lambda_0 - \lambda_5^0 \alpha \beta) \cdot (1 - \ell_5 \alpha \beta + \frac{1}{2} \ell_5^2 \alpha^2 \beta^2),$$

где $\mathcal{N}(\alpha, \beta)$ - перенормированная "инвариантная мера начальных знаний", ℓ_5 - поправка к множителю Лагранжа λ_5^0 .

Решение уравнения ИТВ

$$\epsilon_5^0 - \Delta \epsilon_5 = - \frac{\partial}{\partial \lambda_5} \ln \bar{Z}(\lambda_5), \tag{4.10}$$

где $-\Delta \epsilon_5$ - поправка к ϵ_5^0 , $\bar{Z}(\lambda_5)$ - обобщенная статистическая сумма, соответствующая $F(\alpha, \beta)$, таково:

$$\begin{aligned} \ell_5 = & \frac{\Delta \epsilon_5}{1 - \epsilon_5^0} - \frac{\epsilon_5^0 \Delta \epsilon_8}{1 - \epsilon_5^0} - \frac{\Delta^2 \epsilon_6}{(1 + \epsilon_5^0)^2} - \\ & - \frac{\epsilon_5^0 \cdot \Delta^2 \epsilon_8}{1 - \epsilon_5^0} + \frac{(1 - 2\epsilon_5^0) \Delta \epsilon_5 \Delta \epsilon_8}{(1 - \epsilon_5^0)^2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Как и в случае $T > T_c$, составляем приближенные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{\epsilon_5^0 V_1}{T} \right) \Delta \epsilon_5 + \left[\epsilon_5^0 \frac{V_2 - V_3}{T} - \frac{V(+1,+1) - V(-1,-1)}{2T} \right] \Delta \epsilon_6 + \\ & + \left(1 + \frac{-V_1 + 2V_2 + 2V_3}{2T} - \epsilon_5^0 \frac{V_1}{T} \right) \epsilon_5^0 \Delta \epsilon_8 = - 2\epsilon_5^0 \frac{V(-1,0) - V(0,0)}{T} \cdot \Pi, \end{aligned}$$

$$\left[6_5^0 \frac{V_2 - V_3}{T} - \frac{V(+1, +1) - V(-1, -1)}{2T} \right] (1 + 6_5^0) \Delta 6_5^+ + \left[2 6_5^0 - (1 + 6_5^0)^2 \zeta_6^2 \right] (1 - 6_5^0) \Delta 6_6^- - (1 - 6_5^0)^2 (1 + 6_5^0) \zeta_6 \zeta_8 \Delta 6_8 = 0, \quad (4.12)$$

$$\left(1 + \frac{-V_1 + 2V_2 + 2V_3}{2T} - 6_5^0 \frac{V_1}{T} \right) \cdot 6_5^0 (1 - 6_5^{02}) \Delta 6_5^- - (1 - 6_5^{02})^2 \zeta_6 \zeta_8 \Delta 6_6^- - \left[(1 - 6_5^{02}) \zeta_8^2 + 2 6_5^{02} - 6_5^{03} (1 - 6_5^{02}) \frac{V_1}{T} \right] \Delta 6_8 = 0,$$

где перенормировочные константы

$$\zeta_6 = -\frac{V_2 - V_3}{T}; \quad \zeta_8 = \frac{6_5^{02}}{1 - 6_5^{02}} - \frac{-V_1 + 2V_2 + 2V_3}{2T}. \quad (4.13)$$

С точностью до $n 6_5^{02}$, решение этой системы таково:

$$\Delta 6_5^+ = \frac{16 [V(-1, 0) - V(0, 0)]}{[V(+1, +1) - V(-1, -1)]^2} \cdot T \cdot n \cdot 6_5^{02},$$

$$\Delta 6_6^- = \frac{8 [V(-1, 0) - V(0, 0)]}{[V(+1, +1) - V(-1, -1)]^2} \left[6_5^0 \zeta_6^+ + \frac{V(+1, +1) - V(-1, -1)}{2T} \zeta_8^- - \frac{4T 6_5^0}{V(+1, +1) - V(-1, -1)} \zeta_8^- - \frac{2T 6_5^0}{V(+1, +1) - V(-1, -1)} \zeta_6^- \right] \zeta_8^{-1} \cdot T \cdot n \cdot 6_5^0, \quad (4.14)$$

$$\Delta 6_8 = -\frac{8 [V(-1, 0) - V(0, 0)]}{[V(+1, +1) - V(-1, -1)]^2} \left[6_5^0 \zeta_6^+ + \frac{V(+1, +1) - V(-1, -1)}{2T} \zeta_8^- - \frac{4T \cdot 6_5^0}{V(+1, +1) - V(-1, -1)} \zeta_8^- - \frac{2T 6_5^0}{V(+1, +1) - V(-1, -1)} \zeta_6^- \right] \zeta_6^- \zeta_8^{-2} T n 6_5^0.$$

Легко заметить, что если для $\Delta\epsilon_6$ и $\Delta\epsilon_8$ взять равновесные значения, то

$$\xi_6 \Delta\epsilon_6 + \xi_8 \Delta\epsilon_8 = 0. \quad (4.15)$$

Такое соотношение между константами обеспечивает их отсутствие в конечных перенормированных значениях функции р.в., что естественно, должно иметь место.

Конфигурационная энергия и теплоемкость имеют вид:

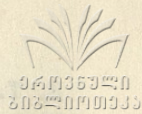
$$\frac{E_c}{N} = \frac{E_0}{N} + \frac{1}{2} V_1 \epsilon_5^0 - \frac{8[V(-1,0) - V(0,0)] \cdot V_1}{[V(+1,+1) - V(-1,-1)]^2} \cdot T \cdot n \cdot \epsilon_5^0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\Delta C}{N} = \left[1 - \frac{32 \cdot [V(-1,0) - V(0,0)]}{[V(+1,+1) - V(-1,-1)]^2} \cdot T \cdot n \cdot \epsilon_5^0 \right] \cdot \frac{\Delta C_{\text{кин}}}{N} - \frac{8[V(-1,0) - V(0,0)] \cdot V_1}{[V(+1,+1) - V(-1,-1)]^2} \cdot n \cdot \epsilon_5^0$$

5. Сравнение с экспериментом

В настоящее время имеется сравнительно мало данных о поведении теплоемкости тройных сплавов. Для сравнения результатов вычислений с экспериментом использованы данные работы /5/; в ней исследована теплоемкость сплавов, составы которых лежат по квазибинарному разрезу $Fe_3Al - Fe_3Cr$ в температурном интервале $470^\circ - 970^\circ K$ и показано, что эффекты упорядочения в сплавах на основе Fe_3Al , легированных Cr , наблюдаются до 5% Cr .

Структура рассматриваемых сплавов хорошо известна /6/: атомы Al и часть атомов Fe (в одинаковых количествах) в вполне упорядоченном состоянии занимают узлы, образующие



упорядоченную структуру типа $Nacr$ ($Z=6$).

В окончательных выражениях для конфигурационной теплоемкости (3.12) и (4.16) фигурируют энергетические параметры

$V_1, |V(+1,+1)-V(-1,-1)|$ и $|V(+1,0)-V(0,0)|$. V_1 было

определено по хорошо известной формуле Бете /6/, причем, согласно /5/.

$T_c = 823^\circ K$, что дает: $V_1 \sim 0,03 eV$; далее, на основе рассмотрения кривых теплоемкости выше T_c было получено значение $|V(+1,+1)-V(-1,-1)| \sim 2 eV$. Эти оценки и кривые теплоемкости ниже T_c дают: $|V(+1,0)-V(0,0)| \sim 50 eV$.

На рисунке сопоставлены данные эксперимента и результаты расчета на основе нашего приближенного метода. Следует считать, что описанные выше теоретические результаты являются по существу качественными, а для количественного сравнения необходимо усовершенствовать как самую модель, так и методику измерения в случае тройных сплавов.

Поступила 10.УП.1980

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе, В.Д.Меладзе. Труды Тбилисского университета, серия "Прикл.математика. Кибернетика", 1978.
2. Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе. Отчет Проблемной лаборатории физической кибернетики Тбилисского университета, отд. прикл.статистики, 1977.



3. Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе, Г.Ш.Киртадзе. *Сообщения АН СССР*, 87, № 2, 1977.
4. 106, 620, 1957.
5. З.Н.Булычева, В.И.Павлов, Н.А.Бирун, С.И.Свежова. Доклады IV Всесоюзного совещания по упорядочению атомов и его влиянию на свойства сплавов, ч. I, Томск, 1974.
6. Т.Муто, Ю.Такаги. Теория явления упорядочения в сплавах. М., 1959; А.Г.Хачатурян. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов. М., 1974.

ժ.Թահրիրևաժյ, Գ.Ճըրքըլաժյ

Fe_3AlSi ածառ թաքտոթառ սեւոն ճանրոճոն ճանրոճոն
 ժոնրոն
 ճըճըճը

Գանիւղընս թոնսնթոնոն ճանրըճոնս սոնսնոն սեւոն
 ժոնսնըճոնոն ժոնոն, ճոնընոն ճանրըճըճընս ճոնոնսնոն ժոն-
 ճոնըճոնս ճոնոնս, սոն ժոնոնս ճանրըճըճոն ժոնըճընս թոնս-
 թոնոնս ճանրըճոնս սոնսնս ճոնոնսնոն ճոնըճըճընս ժոնըճը-
 ճոնոն.

Գանրըճըճոնս ժոնըճըճոն ճանրըճըճընս (ոնոնոնըճըճոնոնս ժոն-
 ոնս սնսնըճոն սանրոն ժոնըճըճոնսնոնս Fe_3AlSi ճոնոնս ժոնըճը
 ճըճըճընոն.

T. Gachechladze, T. Mgvdeladze

APPROXIMATE THEORY OF SHORT-RANGE ORDER IN
TERNARY ALLOY Fe_3AlCr

Summary

A new approximate method of solving equilibrium equations, based on the informational perturbation theory, is considered. With the help of this method the solutions of equilibrium equations above and below the critical temperature are obtained.

The results of calculations are used in the construction of a curve of heat capacity of the ternary alloy Fe_3AlCr with a small concentration of Cr.

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{a \cdot B(x)}{\int_0^x B(x) dx} & x < x_c \\ \frac{c \cdot B(x)}{\int_0^x B(x) dx} & x > x_c \end{cases}$$

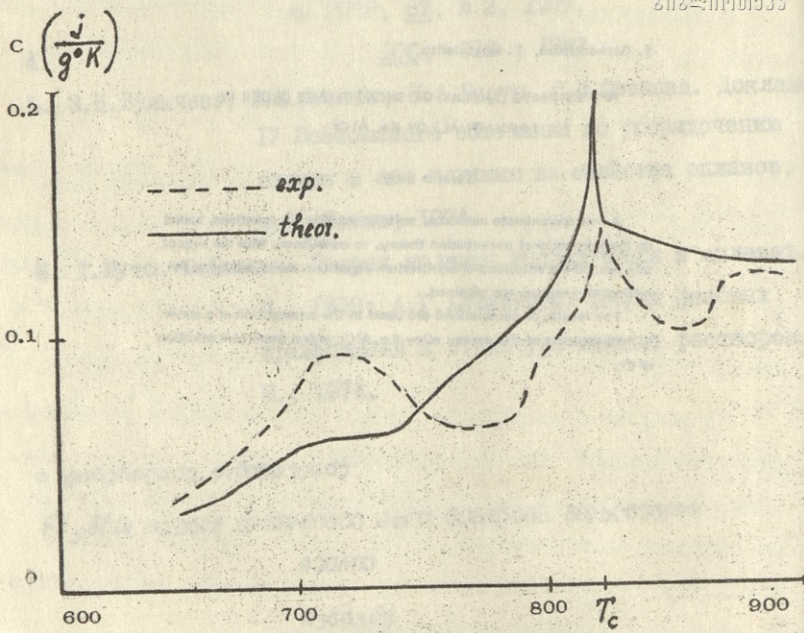
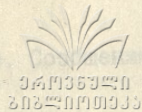


Рис.

224, 1981

შობილისი შრომის ნიშნის მფლობელი საბჭოთაო
უნივერსიტეტის შრომათა

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ
С ПОМОЩЬЮ ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

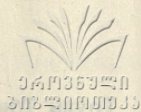
Д. И. Башалейшвили

В работе /I/ приведена одностадийная схема измельчения полезных ископаемых, построена её имитационная модель и с помощью имитационных экспериментов проведена оптимизация процесса по критериям качества продукции.

В данной работе продолжается исследование измельчительной системы, приведенной в /I/, а также изучается часто встречаемая на практике другая одностадийная схема измельчения. Оптимизация процессов проводится не только по критериям качества, но и по критериям производительности.

Имея в виду обозначения и рисунки работы /I/, функциональной модели измельчительной системы (выражение (8) в /I/) можно придать вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{c_1 \theta(x)}{\int_0^x \theta(x) dx} & 0 < x < \eta \\ \frac{c_2 \theta(x)}{\int_{\eta}^{\infty} \theta(x) dx} & \eta \leq x < \infty \end{cases} \quad (I)$$



$$P_1 = c_1 \int_0^{\eta} \theta(x) dx + c_2 \int_{\eta}^{\infty} \theta(x) dx, \quad (2)$$

$$P_2 = c_1 \int_{\eta}^{\infty} \theta(x) dx + c_2 \int_0^{\eta} \theta(x) dx,$$

где
$$\theta(x) = \int_x^{\infty} W(x-y, y) [P_1 f(y) + P_2 \psi(y)] dy$$

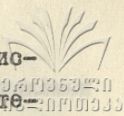
и $c_1 + c_2 = 1.$

Если установлено, что в реальных условиях крупные частицы, размеры которых $\geq \eta$, не попадают в поток мелких частиц, размеры которых $< \eta$, а имеет место обратное явление, то представленную на рис. 2 работы [1] схему надо заменить схемой, представленной на рис. 1 настоящей работы. Последняя получается из предыдущей, если в ней аннулировать (исключить из схемы) делитель $N^{\circ} 1$, смеситель $N^{\circ} 2$ и объединить два оставшихся смесителя в один (объединение смесителей не обязательно. Следует отметить, что если аннулировать делитель $N^{\circ} 1$ и смеситель $N^{\circ} 1$, то мелкие частицы не будут "засорять" крупные. Этот тип классификатора менее реален).

Функциональная модель смесителя, представленная на рис. 1, имеет вид

$$q(x) = P_1 f(x) + P_2 \varphi_u(x) + P_3 \psi_u(x),$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1, \quad 0 < x < \infty.$$



С учетом известных функциональных моделей остальных подсистем (см. /1/), функциональная модель измельчительной системы, представленная на рис.1, принимает вид

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{\theta(x)}{\int_0^x \theta(x) dx} & 0 < x < \tau \\ 0 & \tau \leq x < \infty \end{cases} \quad (3)$$

$$P_1 = c_1 \int_0^{\tau} \theta(x) dx, \quad P_2 = c_2 \int_0^{\tau} \theta(x) dx, \quad P_3 = \int_{\tau}^{\infty} \theta(x) dx, \quad (4)$$

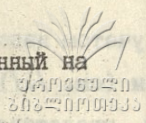
где

$$\theta(x) = \int_x^{\infty} W(x-y, y) [P_1 f(y) + P_2 \psi_u(y) + P_3 \psi_u(y)] dy \quad \text{и} \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Изучим еще одну одностационарную схему измельчения полезных ископаемых в замкнутом цикле /2/. Представим её в виде блок-схемы, данной на рис.2.

В реальной схеме измельчительной системы смеситель как подсистема не фигурирует. Он мыслится как часть классификатора в отличие от ранее изученной схемы /1/, в которой смеситель (без номера) представляется как часть мельницы. Для построения имитационной модели измельчительной системы, представленной на рис. 2, классификатор разбивается на подсистемы. Разбиение зависит от существования двустороннего или одностороннего "засорения", как это было сделано выше для другой схемы измельчительной системы (см. также /1/).

В случае двустороннего "засорения" блок-схема изучаемой



измельчительной системы принимает вид, представленный на рис.3.

В случае одностороннего "засорения" существует два варианта блок-схемы измельчительной системы, однако мы приведем только тот вариант системы, при котором мелкие частицы (часть потока "слив") попадают в поток "пески". Он представлен на рис.4.

Очевидно, что блок-схема, представленная на рис.4, получается из блок-схемы, представленной на рис.3, если исключить из последней делитель №1 и смеситель №2.

Функциональная модель измельчительной системы, представленной на рис.3, имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{c_1 \theta(x)}{\int_0^x \theta(x) dx} & 0 < x < \gamma \\ \frac{c_2 \theta(x)}{\int_{\gamma}^{\infty} \theta(x) dx} & \gamma \leq x < \infty \end{cases} \quad (5)$$

$$P_1 = c_1 \int_0^{\gamma} \theta(x) dx + c_2 \int_{\gamma}^{\infty} \theta(x) dx, \quad (6)$$

$$P_2 = c_1 \int_{\gamma}^{\infty} \theta(x) dx + c_2 \int_0^{\gamma} \theta(x) dx,$$

где $\theta(x) = P_1 f(x) + P_2 \int_x^{\infty} W(x-y, y) \varphi(y) dy$

и $c_1 + c_2 = 1,$

а функциональная модель системы, представленной на рис.4, будет

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\theta(x)}{\int_0^{\eta} \theta(x) dx} & 0 < x < \eta \\ 0 & \eta \leq x < \infty \end{cases} \quad (7)$$

$$P_1 = c_1 \int_0^{\eta} \theta(x) dx, \quad (8)$$

$$P_2 = \int_x^{\infty} \theta(x) dx + c_2 \int_0^{\eta} \theta(x) dx,$$

где

$$\theta(x) = P_1 f(x) + P_2 \int_x^{\infty} W(x-y, y) \varphi(y) dy$$

$$\text{и } c_1 + c_2 = 1.$$

Как видно из приведенных выше функциональных моделей, различных систем, число P_1 определяется, как правило, через P_1 а иногда функция $\varphi(x)$ — через $\varphi(x)$ (см. выражения (3) и (4)), в результате чего измельчительная система становится "сложной" (частичная обратная связь делает систему сложной), и её изучение традиционными аналитическими и численными методами математики принципиально невозможно. Невозможно и потому, что функция $\varphi(x)$ меняется неизвестным образом при изменении параметров η и c_1 или характеристик мельницы по той же причине обратной связи.

Показателями работы измельчительной системы являются плотность распределения $\varphi(x)$ (показатель качества продукции) и вероятность (вес) P_1 (показатель производительности системы). Показателями качества продукции служат также функции от функции $\varphi(x)$ (см. /1/), среди которых мы выделим

$$P(d_1 \leq X \leq d_2) = \int_{d_1}^{d_2} \varphi(x) dx,$$



где $d_2 > d_1$, $d_1 \geq 0$ и X - случайная величина (рамер частицы) на выходе измельчительной системы.

Задачи оптимизации процесса измельчения полезных ископаемых по изменениям параметров классификатора C , и γ и характеристикам мельницы могут быть сформулированы следующим образом:

1) максимизация производительности системы без ограничений на качество продукции

$$\max_{\gamma, C, W} P_1; \quad (9)$$

2) максимизация качества продукции без ограничений на производительность системы

$$\max_{\gamma, C, W} P(d_1 \leq X \leq d_2); \quad (10)$$

3) максимизация производительности системы при заданном качестве продукции

$$\max_{\gamma, C, W} P_1 \text{ при ограничении } P(d_1 \leq X \leq d_2) \geq q, \quad (11)$$

где q - заданное число из $[0, 1]$;

4) максимизация качества продукции при заданной производительности системы

$$\max_{\gamma, C, W} P(d_1 \leq X \leq d_2) \text{ при ограничении } P_1 > P_0, \quad (12)$$

где P_0 - заданное число из $[0,1]$;

5) максимизация производительности системы и качества продукции

$$\max_{r, c, w} P \quad \text{и} \quad \max_{r, c, w} P(d_1 \leq X \leq d_2). \quad (13)$$

Выражения (9), (10), (11) и (12) являются задачами математического программирования, а (13) - задачей векторной оптимизации. Указанные критерии оптимизации являются технологическими. Они могут быть связаны с экономическими критериями /3,4/.

С экономической точки зрения важным критерием является расход энергии на измельчение. В /5/ устанавливается связь между расходом энергии A при измельчении 1 м^3 вещества и функциями $f(y)$ и $\varphi(x)$ в виде

$$A = \int_0^{\infty} \varphi(x) \left[\int_0^{\infty} f(y) f(y, x) dy \right] dx,$$

где $f(y, x)$ - работа, затрачиваемая на измельчение 1 м^3 частиц размером y до x (см. /5/).

В указанных выше критериях 3 и 4 дополнительным ограничивающим условием может быть $A \leq A_0$, где A_0 - заданная энергия квт ч/ м^3 .

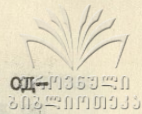
В перечисленных выше критериях оптимизации вместо функции $W(x-y, y)$ могут быть функционалы от неё, то есть более "бедные" характеристики мельницы, чем $W(x-y, y)$. При этом можно надеяться на то, что между этими функционалами и физи-

ческими параметрами мельницы (загрузка шаров, диаметры шаров и т.д.) могут быть легче установлены связи, чем между $W(x-y, y)$ и физическими параметрами. Указанные связи нужны для внедрения результатов имитационного моделирования, то есть для определения оптимальных значений физических параметров реальной системы.

Возникает вопрос, как моделировать на ЭВМ потоки частиц и как проводить имитационное моделирование процесса измельчения полезных ископаемых?

Трудности моделирования одновременного уменьшения размеров большого числа частиц очевидны. Естественно смоделировать уменьшение размера каждой частицы по отдельности, исчерпав таким образом все частицы входного потока. В результате входной поток преобразуется в выходной. В этом суть имитационного моделирования, проводимого на ЭВМ. Очевидно, что если теоретически считать число частиц в потоке равным бесконечности, то такое моделирование никогда не закончится. Поэтому число частиц надо ограничить; в результате вместо теоретических характеристик потока частиц можно получить только их оценки (так как вместо генеральной совокупности изучается только её выборка с объемом n). Таким образом, указанное моделирование может быть проведено только при применении методов математической статистики.

Из сказанного выше следует, что если число частиц входного потока равно n , то и число частиц выходного потока "слив" будет n , то есть сколько "частиц" входит в машинную реализацию измельчительной системы, столько и выходит из неё. Нас интересует количество частиц в потоке "пески". Для



определения этого количества проследим путь прохождения одной "частицы" через машинную реализацию измельчительной системы, представленную на рис.3. В дальнейшем, для упрощения изложения не будем различать измельчительную систему от её машинной реализации и частицу от "частицы", хотя в действительности будем иметь дело только с машинной реализацией и с "частицей".

Процесс имитации начинается с разыгрывания случайной величины Y - размера частицы по заданной плотности вероятностей $f(y)$. В результате получается частица размером y_1 . Далее, частица проходит смеситель и в идеальном классификаторе её размер y_1 сравнивается с заданным числом. После сравнения она попадает или в делитель $N^{\circ}1$ или в делитель $N^{\circ}2$ с вероятностями $\int_0^{\infty} \theta(x) dx$ и $\int_0^y \theta(x) dx$ соответственно. Если частица оказалась в делителе $N^{\circ}1$, то из него она с вероятностью C_2 попадает в поток "слив", то есть выходит из системы, а с вероятностью C_1 через смеситель $N^{\circ}1$ попадает в мельницу. В мельнице разыгрывается случайная величина ξ_y - отрицательное приращение размера с заданной условной плотностью распределения $W(x-y, y)$; $x \leq y$. В результате получается число ξ_{y_1} . Там же вычисляется размер частицы $y_1 - \xi_{y_1}$, и она через смеситель опять попадает в идеальный классификатор и т.д. В мельницу частица могла попасть и вторым путем - через делитель $N^{\circ}2$ и смеситель $N^{\circ}1$. Таким образом, одна входная частица может сделать несколько "кругов", то есть



до выхода из системы несколько раз быть частицей потока "пески" ("циркулирующая нагрузка"). Следовательно, число частиц потока "пески" может быть как больше, так и меньше числа частиц входного потока. Таким образом учитывается тот факт, что циркулирующая нагрузка составляет 50-700% от веса входного потока /2/.

Определение числа P_1 и функции $\varphi(x)$ и, следовательно, определение вероятности $P(d_1 \leq X \leq d_2)$ по математическим моделям, приведенным выше (см. выражения (1) + (8)) невозможно, в то время как с помощью имитационных экспериментов определение их оценок не представляет принципиальных затруднений. Действительно, для измельчительных систем, представленных на рис. 1 данной работы и на рис. 2 работы /1/, вероятность P_1 оценивается выражением $P_1^* = \frac{n}{K}$, а для измельчительных систем, представленных на рис. 3 и 4, -

выражением $P_1^* = \frac{n}{n+K}$, где n - число частиц выходного потока, или, что то же самое, входного потока измельчительной системы, а K - число частиц, выходящих из мельницы (входящих в мельницу). Можно оценить плотность распределения вероятностей $\varphi(x)$, построив гистограмму по размерам частиц выходного потока измельчительной системы, а оценка вероятности

$$P(d_1 \leq X \leq d_2) \text{ имеет вид } P^*(d_1 \leq X \leq d_2) = \frac{n_1}{n},$$

где n_1 - число частиц, выходящих из измельчительной системы, размеры которых попали в сегмент $[d_1, d_2]$. Так же несложно определяются и выборочные оценки других характеристик распределения вероятностей. При желании можно определить



выборочные оценки любых характеристик распределения потока на выходе любой подсистемы, например, потока "пески" и т.д.

После определения методики проведения каждого имитационного эксперимента по вычислению P_1 или $P(d_1 \leq X \leq d_2)$ можно решить задачу оптимизации "процесса измельчения" на имитационной модели измельчительной системы.

Для иллюстрации решения оптимизационных задач рассмотрим случай приведенных выше критериев (9) и (10) при изменении параметров классификатора c_1 и κ , считая характеристики мельницы фиксированными. Изменение переменных c_1 и κ ограничены^X (см. рис. 5). Следовательно, область определения функций P_1 или $P(d_1 \leq X \leq d_2)$ представляет собой выпуклое множество (область, ограниченная прямоугольником $ABCD$ на рис. 5). Область значений указанных функций представляет $[0, 1]$. Поверхности указанных функций в трехмерном пространстве не известны, за исключением их некоторого конечного или счетного числа граничных значений. Однако каждый имитационный эксперимент определяет любую одну точку поверхности (точнее - её приближенное значение в силу конечности числа n). Отсюда следует возможность применения методов поиска оптимума /6,7,8/. Поиск осложняется тем, что κ указанные фун-

^X Теоретически $\kappa_{max} = \infty$, однако размер частицы не бывает равным бесконечности и κ_{max} на практике всегда ограниченное число, которое больше (или равно), чем возможный максимальный размер частицы входного потока.

кции в общем случае не относятся к классу вогнутых или выпуклых функций. Скорее всего они не унимодальные поверхности, в чем нетрудно убедиться даже без проведения имитационных экспериментов. Действительно, из выражений (2) и (6) следует, что при $\gamma = 0$ и $c_1 = 0$ (точка A на рис.5) и при $\gamma = \gamma_{max}$ и $c_1 = 1$ (точка C) максимальное значение функции P_1 равно единице; следовательно, измельчительная система работает в открытом цикле - без классификатора (в точках B и D имеем $P_1 = 0$). В случае точки A ни одна частица не "вращается по кругу"; все частицы выходят из измельчительной системы через делитель $N^{\circ}1$ и смеситель $N^{\circ}2$. Следовательно, в точках A и C выполняются условия $\varphi(x) \neq 0$ и $P(d_1 \leq X \leq d_2) \neq 0$.

В случае точек B и D , ни одна частица не выходит из измельчительной системы и лишь одна единственная частица "вращается по кругу" (см. рис.2 в /1/ и рис.3 данной работы). Следовательно, $\varphi(x) = 0$ и $P(d_1 \leq X \leq d_2) = 0$. "Вращение по кругу" будет иметь место и в случае интервала (AB) , однако число частиц, выходящих из измельчительной системы, будет от-
лично от нуля.

В случае измельчительных систем, представленных на рис.1 и 4, функция P_1 принимает максимальное значение, равное единице в точке C , т.е. когда $c_1 = 1$ и $\gamma = \gamma_{max}$ (измельчительная система работает в открытом цикле). В точке C функция $P(d_1 \leq X \leq d_2) \neq 0$, так как $\varphi(x) \neq 0$. В

точках A , B и D функций $P_1 = 0$ и $P(d_1 \leq X \leq d_2) = 0$.
 Последнее равенство имеет место в силу условия $\varphi(x) = 0$.
 Аналогично на отрезках (AB) и (AD) имеем $P_1 = 0$ и
 $P(d_1 \leq X \leq d_2) = 0$ (см. выражения (4) и (8)). 0 макси-
 мального значения функции $P(d_1 \leq X \leq d_2)$ и о точке её
 определения ничего не известно, кроме случаев $d_1 = 0$ и $d_2 = x_{max}$
 при котором $P(d_1 \leq X \leq d_2) = 1$.

В случаях критериев (II) и (I2) область допустимых реше-
 ний не будет ограниченной прямоугольником $ABCD$. Она будет
 неизвестной частью указанного прямоугольника.

Указанной выше информацией о поверхностях функций P_1 и
 $P(d_1 \leq X \leq d_2)$ можно воспользоваться при выборе начальной
 точки и метода поиска.

Имитационное моделирование измельчительной системы, пред-
 ставленной на рис.2 работы /1/, было проведено на машине БЭСМ-
 6 для заданных плотностей распределения вероятностей

$$f(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y}, \quad y > 0 \quad \text{и} \quad W(x-y, y) = \frac{2(x-y) + 2y}{y^2} = \frac{2x}{y^2},$$

$x \leq y$. Объем выборки был выбран довольно большим ($n = 1000$)
 для того, чтобы избежать влияния "помех" при определении оце-
 нок значений функций P_1 и $P(d_1 \leq X \leq d_2)$.

Задачи оптимизации (9), (10) и (II) были решены градиент-
 ным методом. Предварительно для приближенного изучения "по-
 ведения" поверхностей методом прямого перебора были определе-
 ны значения функций в узлах сетки. Эти значения могут быть



использованы при выборе начальной точки.

В случае задачи (9) градиентным методом был найден максимум функций $\rho_1 = 1$ в точках A и C , что явилось подтверждением теоретического расчета по формуле (2).

В случае задачи (10) для различных пар (d_1, d_2) были найдены максимальные значения функции $P(d_1 \leq X \leq d_2)$.

Если воспользоваться методом штрафных функций, каждую из поставленных задач (11) и (12) с неизвестным допустимым множеством R можно свести к последовательности задач с известным выпуклым допустимым множеством $\{0 < \gamma < \gamma_{max}, 0 < \epsilon_i < 1\}$. Эти задачи решаются на машине БЭСМ-6 с использованием методов двойственных направлений, проекции градиента и пертен в предположении гладкости функции цели и ограничений. Программа указанных задач имеется в библиотеке машины БЭСМ-6.

Поступила 14.XII.1980

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И.Башалейшвили. Сообщения АН ГССР, 96, № 2, 1979.
2. В.И.Кармазин и др. Процессы и машины для обогащения полезных ископаемых. М., "Недра", 1974.



3. Основы управления технологическими процессами. Под редакцией Н.С.Райбмана. М., "Наука", 1978.
4. Л.А.Барский, В.З.Козин. Системный анализ в обогащении полезных ископаемых, М., "Недра", 1978.
5. О.Н.Тихонов. Введение в динамику массопереноса процессов обогатительной технологии. Л., "Недра", 1973.
6. М.Аоки. Введение в методы оптимизации, М., "Наука", 1977.
7. Д.Дж.Уайлд. Методы поиска экстремума. М., "Наука", 1967.
8. В.В.Налимов, Н.А.Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., "Наука", 1965.

რ.ბაშაიშვილი

სასარგებლო წიაღისეულის დატვირთვის პროცესის
 ოპტიმიზაციის მეთოდების სიმულაციური ექსპერიმენტების
 საშუალებით
 რეზიუმე

მაშინდელი მთავრობის ფუნქციონირების მიზნად სასარგებლო
 წიაღისეულის დატვირთვის სისტემებისა. ჩატარებულია მთავრობის-
 უნარის მიზნად აღნიშნული სისტემებისა გამოყენებით მანქანაზე
 БЭСМ-6 პროცესის ოპტიმიზაციის მიზნით. განხილულია მიზნების
 შედეგები,

D. Bashaishvili

OPTIMIZATION OF THE FRAGMENTATION PROCESS OF
 MINERALS BY THE METHOD OF SIMULATION EXPERIMENTS

Summary

Functional models of fragmentation systems of minerals are recei-
 ved. Simulation modelling of these systemes has been carried out on
 the computer БЭСМ-6 in order to optimize the process. The results
 of modelling are considered.

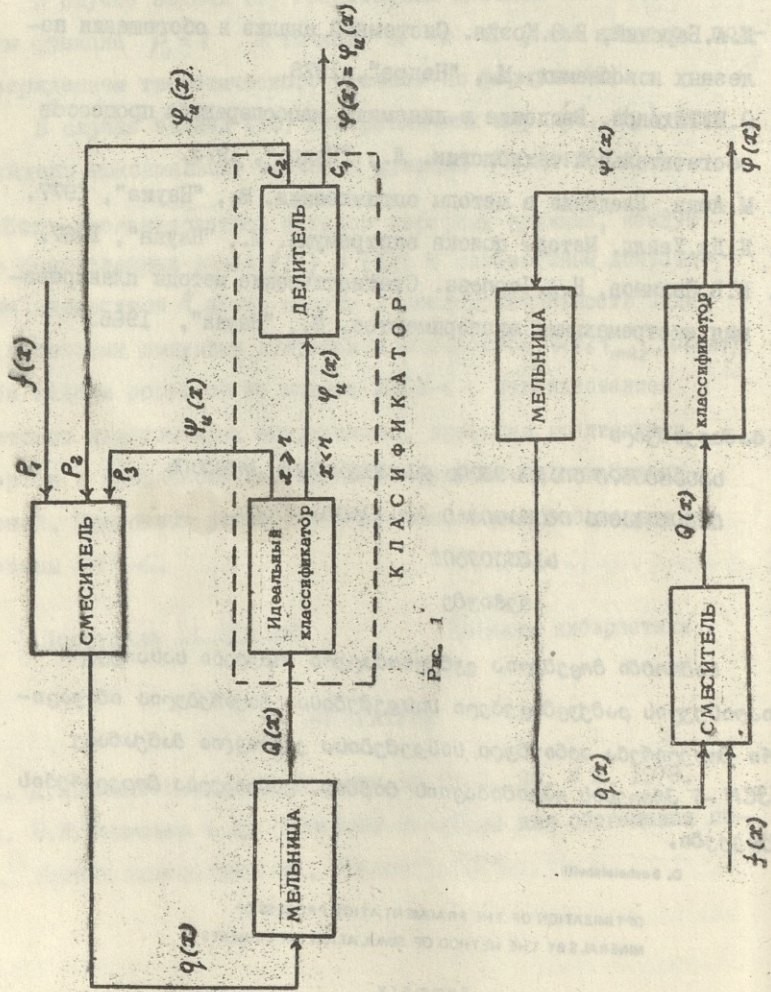


Рис. 1

Рис. 2

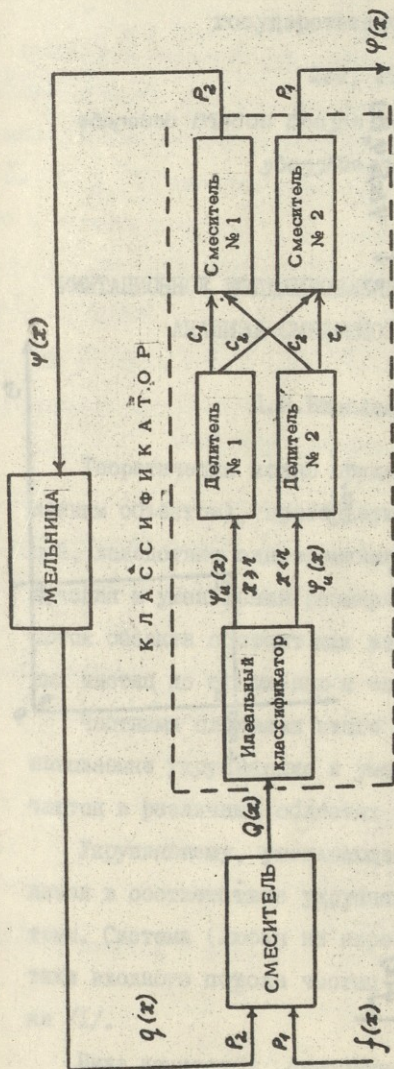


Рис. 3

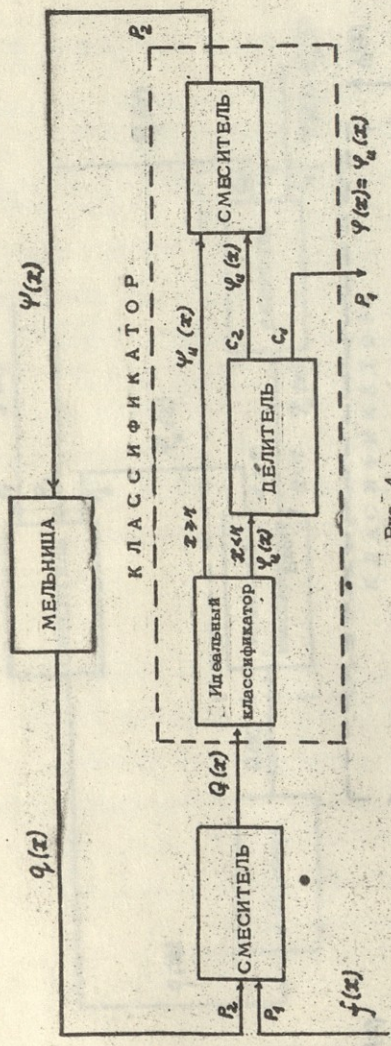
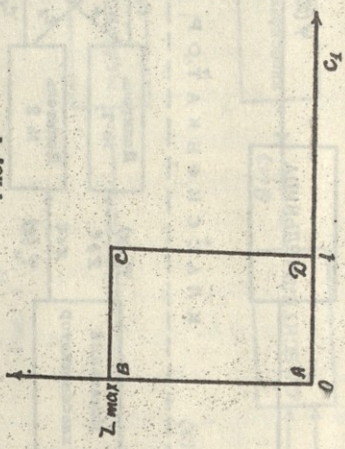


Рис. 4





224, 1981

მბრუნის მრეობის ნიშევი რრეობის რრეობისანი სახეცმნიჭი
უნივერსიტეტის მრეობი

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ И
АНАЛИЗА СМЕШАННОЙ СИСТЕМЫ

Д.И.Башаленишвили

Теоретически можно представить объект (назовем его смешанным объектом), преобразующий входной поток частиц в выходной, вследствие одновременно протекающих в нем процессов увеличения и уменьшения размеров частиц. Следовательно, выходной поток объекта состоит как из укрупненных, так и из уменьшенных частиц по отношению к частицам входного потока.

Частными случаями этого обобщенного объекта являются так называемые укрупняющие и уменьшающие объекты, которые встречаются в различных областях науки и промышленности.

Укрупняющему, уменьшающему и смешанному объектам приводятся в соответствие укрупняющая, уменьшающая и смешанная системы. Система (любая из перечисленных) преобразует характеристики входного потока частиц в характеристики выходного потока /1/.

Ниже изучается смешанная система с точки зрения двух возможных интерпретации – стохастической и механической.



Стохастическая модель смешанной системы имеет вид:

$$X = Y + \zeta_y \quad (1)$$

где Y и X суть положительно определенные случайные величины на входе и выходе смешанной системы. Размеры частиц входного и выходного потоков рассматриваются как реализации (выборочные значения) случайных величин Y и X соответственно. Случайная величина ζ_y , которая зависит в общем случае от Y , определяется следующим образом:

$$\zeta_y = \begin{cases} \xi_y & \text{при увеличении размера,} \\ \zeta_y & \text{при уменьшении размера,} \end{cases} \quad (2)$$

где ξ_y и ζ_y суть положительно и отрицательно определенные случайные величины соответственно. Иначе говоря, ξ_y и ζ_y - случайные приращения (положительные и отрицательные) размеров частиц.

Если факт увеличения размера обозначить событием $U = u_1$, а факт уменьшения - событием $U = u_2$, то выражение (2) примет вид

$$\zeta_y = \begin{cases} \xi_y & \text{при } U = u_1, \\ \zeta_y & \text{при } U = u_2, \end{cases} \quad (3)$$

где U - дискретная случайная величина с законом распределения

$$U \begin{cases} u_1, u_2 \\ p_1, p_2, \end{cases} \quad p_1 + p_2 = 1. \quad (4)$$



Поставленная задача трудно разрешима аналитическими или численными методами. Она не всегда разрешима даже в более простых случаях - при $p_1=1$ или $p_2=1$. В [3] задача идентификации укрупняющих и уменьшающих систем решается аналитически только для узких классов плотностей распределения $f(y)$ и $\varphi(x)$.

Однако поставленная задача легко решается методом имитационного моделирования во всех практически встречаемых случаях. Основой имитационного моделирования является стохастическая модель смешанной системы (выражения (1) и (3)).

Процедура решения задачи идентификации заключается в следующем: разыгрываются случайные величины X и Y с заданными плотностями распределения $\varphi(x)$ и $f(y)$, в результате чего получают реализации x_i и y_i , $i=\overline{1, n}$; затем вычисляются разности $x_i - y_i$, которые являются выборочными значениями η_{y_i} случайной величины η_y . Оценкой вероятности p_1 будет частота появления положительных разностей. Оценки искомых функций определяются с помощью выражений

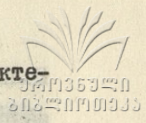
$$K(\xi, y) = \frac{S_1(\xi, y)}{f(y)}, \quad (7)$$

$$W(\xi, y) = \frac{S_2(\xi, y)}{f(y)} \quad (8)$$

и методики, изложенной в [4, 5]. В выражениях (7) и (8)

$S_1(\xi, y)$ и $S_2(\xi, y)$ суть двумерные плотности распределения случайных векторов (ξ_y, Y) и (ξ_y, Y) соответственно.

Задача анализа смешанной системы сводится к определению



характеристик выходного потока частиц по известным характеристикам входного потока и системы.

На языке функциональной модели (5) задача анализа сводится к определению функции $\varphi(x)$ по известным плотностям распределения $f(y)$, $K(x-y, y)$ и $W(x-y, y)$. Заданным считается также число P_1 (следовательно и P_2).

Поставленная задача не всегда решается аналитически, так как при сложных подынтегральных выражениях интегралы выражения (5) не могут быть вычислены в виде элементарных функций. Наряду с численными методами решения задачи анализа может быть использовано имитационное моделирование, основой которого является стохастическая модель смешанной системы.

Методы реализации случайных событий ($U=u_1$ и $U=u_2$), а также формирования реализаций случайных величин (Y, X, ξ_y и ξ_x) приведены в /6/.

Обе задачи (идентификации и анализа) были реализованы на машине БЭСМ-6. Некоторые из полученных результатов оценивались с помощью критерия соответствия χ^2 Пирсона^х.

Функциональная модель смешанной системы (5) имеет и другую механическую интерпретацию.

Определим некоторую функцию $P(x)$ следующим образом:

$$P(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{масса (вес) частиц, размеры которых } \in (x, x + \Delta x)}{\Delta x}$$

^х Программа имитационной модели на языке "Алгол-60" была реализована студенткой ТГУ Л.О.Самадшвили.

Если масса (вес) всех частиц равна единице, то функцию $P(x)$ назовем плотностью распределения массы (веса) по размерам. Следовательно, функция $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(x) \geq 0$ и $\int_0^{\infty} P(x) dx = 1$. По-прежнему на принятом языке, функция $P(x)$ не что иное, как нормированный гранулометрический состав.

Пусть на вход смешанного объекта поступает поток одинаковых частиц с размером y . Этому случаю на входе смешанной системы соответствует плотность распределения массы (веса) по размерам — функция Дирака $\delta(x-y)$, а на выходе — плотность распределения массы по размерам $P_1 K(x-y, y) + P_2 W(x-y, y)$, где функции $K(\dots)$ и $W(\dots)$ удовлетворяют условиям /2/.

$$\begin{aligned} K(x-y, y) &= 0 & \text{при } x < y \\ W(x-y, y) &= 0 & \text{при } x > y \end{aligned} \quad (9)$$

и являются при фиксированных значениях y плотностями распределения массы по размерам, а $P_1 + P_2 = 1$.

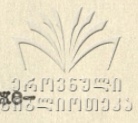
Если обозначить оператор смешанной системы через C_x , то из сказанного следует (см. рис. .):

$$P_1 K(x-y, y) + P_2 W(x-y, y) = C_x \delta(x-y). \quad (10)$$

При линейности оператора C_x имеем

$$\varphi(x) = C_x f(x) = \int_0^{\infty} C_x \delta(x-y) f(y) dy,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть плотности распределения массы по размерам на входе и выходе смешанной системы.



Из предыдущего выражения с учетом (10) следует выражение, формально совпадающее с выражением (5).

Функциональную модель смешанной системы (5) можно рассматривать как предельный случай функциональной модели кинетики той же системы периодического действия.^X

Пусть в момент времени $t=0$ на входе смешанного объекта имеется поток частиц с плотностью распределения $\delta_0(x-y)$. В зависимости от продолжительности процесса изменения размеров частиц t внутри объекта получится совокупность частиц с плотностью распределения массы по размерам $\rho_1 \tilde{K}_t(x-y, y) + \rho_2 \tilde{W}_t(x-y, y)$, где $0 < t < \tau$, а $\tau = const$ - время прохождения входного потока частиц через объект.

При линейности оператора S_x^t получим выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_t(x) = & \rho_1 \int_0^x \tilde{K}_t(x-y, y) f_0(y) dy + \\ & + \rho_2 \int_x^\infty \tilde{W}_t(x-y, y) f_0(y) dy, \quad x > 0, 0 < t < \tau, \rho_1 + \rho_2 = 1, \end{aligned} \quad (II)$$

из которого, как частный случай, получаются модели кинетики укрупняющей и уменьшающей систем.

При $t \rightarrow \tau$ правая часть выражения (II) переходит в правую часть выражения (5), если выполняются условия непрерывности в точке $t = \tau$, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \tilde{K}_t(x-y, y) = \tilde{K}_\tau(x-y, y) = K(x-y, y),$$

^X Этот термин был введен по аналогии с термином "периодическое измельчение" /7/.

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \tilde{W}_t(x-y, y) = \tilde{W}_\tau(x-y, y) = W(x-y, y)$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \tilde{\varphi}_t(x) - \tilde{\varphi}_\tau(x) = \varphi(x).$$

Из стохастической модели кинетики смешанной системы периодического действия, имеющей вид

$$\dot{X}(t) = Y(t) + \gamma_{Y(t)}(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$\gamma_{Y(t)}(t) = \begin{cases} \xi_{Y(t)}(t) & \text{при } U = u_1, \\ \zeta_{Y(t)}(t) & \text{при } U = u_2 \end{cases}$$

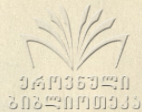
можно получить выражение, формально совпадающее с выражением (II), если ввести обозначение функции распределения на выходе системы $\Phi_t(x) = P(X(t) < x)$.

Поступила 18.УП.1980

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И.Башалейшвили. Сообщения АН ГССР, 78, № 3, 1965.
2. Д.И.Башалейшвили. Автоматика и телемеханика, 12, 1964.
3. Д.И.Башалейшвили. Сообщения АН ГССР, 90, № 1, 1978.
4. И.В.Дунин-Барковский и Н.В.Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Изд-во технико-математической литературы, М., 1955.
5. Н.С.Райбман, В.М.Чацев. Адаптивные модели в системах управления. "Советское радио", М., 1966.



6. Н.П.Бусленко. Моделирование сложных систем. "Наука", М., 1978.

7. 15 лет на службе социалистического строительства, ОНТИ, Л.-М., 1935.

რ.ბაშაიშვილი

სტოქასტიკური და ფუნქციონალური
ანალიზის ნაწილობრივი
დამსაბუთებელი

მიღებულია მერყეული სისტემის სტოქასტიკური და ფუნქციონალური
მიმდევრები. ნაჩვენებია, რომ მერყეული სისტემის იდენტიფიკაციის ამო-
ცანა ატარდება მხოლოდ იმის შემთხვევაში, როდესაც სისტემის ანალიზის
ასევე ნაჩვენებია მერყეული სისტემის ანალიზის ამოცანის ამოხსნის
შესაძლებლობა იმის შემთხვევაში, როდესაც სისტემის ანალიზის ამოცანის ამოხსნის

D. Bashaleishvili

SIMULATION MODELLING OF THE IDENTIFICATION AND
ANALYSIS PROBLEMS OF MIXED SYSTEMS

Summary

Stochastic and functional models of a mixed system are obtained.
It is shown that the problem of identification of a mixed system can be
solved only by way of simulation modelling. The feasibility of solving
a problem of mixed system analysis by the method of simulation model-
ling is also demonstrated.

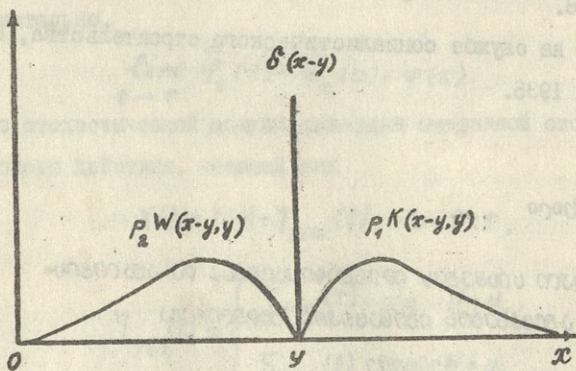


Рис.

1. Д. И. Брусилов, "Известия Академии наук СССР", 1963.
2. Д. И. Брусилов, "Известия Академии наук СССР", 1964.
3. Д. И. Брусилов, "Известия Академии наук СССР", 1970.

224,1981

თბილისის შრომის ნიჭიერი ძალები სსრკ-ის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

О СКОРОСТИ УСТАНОВЛЕНИЯ ФИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Г.Н.Церцвадзе

В настоящей заметке исследуется процесс установления финального распределения состояний атома $T_{2n,2}$, асимптотически оптимального в произвольной стационарной случайной среде. При увеличении емкости памяти автоматов этой конструкции математическое ожидание выплачиваемого ими штрафа стремится к минимально возможному штрафу в этой среде экспоненциально.

Автомат $T_{2n,2}$ во многом сходен с автоматами $G_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$, конструкции которых были предложены в /1/ и /2/ соответственно. Сходство состоит в том, что при штрафе смена состояний автомата $T_{2n,2}$ осуществляется так же, как у автомата $G_{2n,2}$ (автомат с гистерезисной тактикой), а при выигрыше состояния автомата $T_{2n,2}$ изменяются так же, как и у автомата $D_{2n,2}$ (автомат В.И.Кринского). Таким образом, как и автоматы $G_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$, автомат $T_{2n,2}$ имеет $2n$ состояний Y_i^α , $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 1, 2$, и

может совершать два различных действия f_α , причём состоя-
 тоянию y_i^α соответствует действие f_α .

При штрафе ($S=1$) переходы состояний осуществляются
 следующим образом: состояние y_i^α переходит в состояние $y_i^{\alpha-1}$
 для $i=2, 3, \dots, n$, состояние y_1^α переходит в состоя-
 ние $y_n^{\alpha+1}$, $\alpha=1$, состояние y_1^2 переходит в состо-
 яние y_n^1 . При нештрафе ($S=0$) состояние y_i^α , $i=1, 2, \dots$,
 переходит в состояние y_n^α .

Вычисление математического ожидания штрафа $M [T_{2n,2}; C]$
 автомата $T_{2n,2}$ в стационарной случайной среде $C(P_1, P_2)$
 приводит к формуле

$$M [T_{2n,2}; C] = \frac{\frac{1}{P_1^{n-1}} \frac{1-P_1^n}{1-P_1} + \frac{1}{P_2^{n-1}} \frac{1-P_2^n}{1-P_2}}{\frac{1}{P_1^n} \frac{1-P_1^n}{1-P_1} + \frac{1}{P_2^n} \frac{1-P_2^n}{1-P_2}} \quad (I)$$

Обобщение на случай любого числа $K > 2$ действия тривиаль-
 но.

При изучении поведения асимптотически оптимальных после-
 довательностей автоматов в стационарных случайных средах су-
 щественный интерес представляет скорость сходимости к финаль-
 ному распределению, которая определяется значениями собствен-
 ных чисел цепи Маркова, описывающей поведение системы "стаци-
 онарная случайная среда - автомат".

Система уравнений для вычисления значений собственных чи-



сел λ автомата $T_{2n,2}$ в стационарной случайной сре-

де $C(P_1, P_2)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda x_n &= q_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + P_2 y_1 \\ \lambda x_{n-1} &= P_1 x_n \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda x_2 &= P_1 x_3 \\ \lambda x_1 &= P_1 x_2 \\ \lambda y_1 &= P_2 y_2 \\ \lambda y_2 &= P_2 y_3 \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda y_{n-1} &= P_n y_n \\ \lambda y_n &= q_2(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + P_1 x_2 \end{aligned} \right\} (2)$$

Здесь x_i, y_i - вероятности пребывания автомата в состояниях y_i^1 и y_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$, соответственно, а

$P_1 = 1 - q_1$, $P_2 = 1 - q_2$ - вероятности штрафов за первое (f_1) и второе (f_2) действия автомата.

Пользуясь всеми уравнениями системы (2) кроме первого и последнего (связывающих x_i и y_i между собой), можно выразить все x_i через x_1 , а все y_i через y_1 . Подставляя эти выражения в первое и последнее уравнения, приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^n(\lambda - P_1) - q_1(\lambda^n - P_1^n)}{P_1^{n-1}(\lambda - P_1)} x_1 - P_2 y_1 &= 0 \\ P_1 x_1 - \frac{\lambda^n(\lambda - P_2) - q_2(\lambda^n - P_2^n)}{P_2^{n-1}(\lambda - P_2)} y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$



Приравнявая нулю определитель этой системы, получим

$$\left(\lambda^n - q_1 \frac{\lambda^n - P_1^n}{\lambda - P_1}\right) \left(\lambda^n - q_2 \frac{\lambda^n - P_2^n}{\lambda - P_2}\right) = P_1^n P_2^n \quad (4)$$

Этот полином имеет степень $2n+2$. У него имеются два лишних корня $\lambda = P_1$ и $\lambda = P_2$, наличие которых связано с тем, что в системе (3) в первом уравнении дробь можно сократить на $\lambda - P_1$, а во втором - на $\lambda - P_2$. Однако это сокращение не проводится.

Уравнение (4) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} & (\lambda - 1) \left[(\lambda^{2n} - P_1^n P_2^n) (\lambda - 1) + \right. \\ & \left. + (q_1 P_1^n + q_2 P_2^n) \lambda^n - P_1^n P_2^n (q_1 + q_2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что за исключением корня $\lambda = 1$, остальные корни λ , число которых $2n+1$, удовлетворяют уравнению.

$$\begin{aligned} & (\lambda^{2n} - P_1^n P_2^n) (\lambda - 1) + \\ & + \lambda^n (q_1 P_1^n + q_2 P_2^n) - P_1^n P_2^n (q_1 + q_2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Напомним, что это уравнение имеет степень $2n+1$ и со-

держит два лишних корня $\lambda = P_1, \lambda = P_2$.

Введя новую переменную

$$Z = \frac{\lambda}{\max(P_1, P_2)}, \quad (7)$$

уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z^{2n} [1 - \max(P_1, P_2)Z] = \\ = \{q_1 + q_2 - [1 + \max(P_1, P_2)Z]\} \gamma^n - \\ - Z^n [\min(q_1, q_2) + \max(q_1, q_2)\gamma^n], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\gamma = \frac{\min(P_1, P_2)}{\max(P_1, P_2)}.$$

Уравнение (8) относительно переменной Z имеет порядок $2n+1$ и содержит два лишних корня $Z=1, Z=\gamma$.

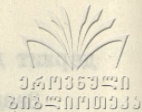
Для определения области локализации корней Z уравнения (8) воспользуемся известной теоремой Руше [3], согласно которой, если функции $f(Z)$ и $g(Z)$ регулярны в конечной области D с жордановой границей Γ и на границе

$$|f(Z)| > |g(Z)|, \quad \text{то функции } f(Z) \text{ и } F(Z) = f(Z) + g(Z)$$

внутри D имеют одинаковое число нулей.

Положим

$$\begin{aligned} f(Z) &= Z^{2n} [1 - \max(P_1, P_2)Z] \\ g(Z) &= Z^n [\min(q_1, q_2) + \max(q_1, q_2)\gamma^n] \\ &\quad - \{q_1 + q_2 - [1 - \max(P_1, P_2)Z]\} \gamma^n. \end{aligned} \quad (9)$$



Тогда на границе $|z| = 1 + \delta$, где $0 < \delta < \frac{\min(Q_1, Q_2)}{\max(P_1, P_2)}$

и при достаточно большом n имеет место соотношение

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{и согласно теореме Руше функции } f(z) \text{ и}$$

$F(z) = f(z) + g(z)$ внутри круга $|z| = 1 + \delta$ имеют одинако-

вое число нулей. Число нулей $f(z)$ внутри круга $|z| = 1 + \delta$ равно $2n$ (нулевой корень кратности $2n$). Таким образом,

уравнение (8) внутри круга $|z| = 1 + \delta$ имеет $2n$ нулей среди которых два лишних. Возвращаясь к переменной λ , получим, что для $2n-2$ корней уравнения (6) имеет место оценка

$$|\lambda| < (1 + \delta) \max(P_1, P_2). \quad (10)$$

Для вычисления оставшегося корня λ_n рассмотрим уравнение (6) в кольце $(1 + \delta) \max(P_1, P_2) \leq |\lambda| < 1$.

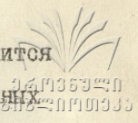
Используя (7) и уравнение (8), легко показать, что при достаточно большом n существует действительный корень

$$\lambda_n = 1 - \varepsilon_n, \quad (11)$$

где

$$\varepsilon_n = q_1 P_1^n + q_2 P_2^n + o(P_1^n + P_2^n)^2.$$

Таким образом, для автомата $T_{2n,2}$ в стационарной случайной среде существует собственное число, которое с ростом



емкости памяти n с экспоненциальной скоростью стремится к единице, при этом модули остальных $2n-2$ собственных чисел при любом n строго меньше единицы и для них справедлива оценка (10).

Поступила 21.УП.1980

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Д.Цетлин. Автоматика и телемеханика, № 10, 1961.
2. В.И.Кринский. Биофизика, 9 вып. 4, 1964.
3. А.О.Гельфонд. Вычеты и их приложения, "Наука", 1966.

Թ.Շերցվաժե

ԵՄՍՏՆԵՐԱՆՈՒՄ
ԲԱՅՄԱՆՈՒՄ ԵՄՍՏՆԵՐԱՆՈՒՄ
ԲԱՅՄԱՆՈՒՄ ԵՄՍՏՆԵՐԱՆՈՒՄ
ԿՐԻՏԻՑԻՄ

Թերցվաժեի միջակայքային ուղղորդման մարկովյան չափվածիկի սահմանափակ
միջակայքային, իրականացված արժեքի սկզբնական արժեքի միջակայքային
արժեքի միջակայքային սահմանափակ միջակայքային թերցվաժեի.

G. Tsertsvadze

ON THE RATE OF ESTABLISHMENT FINAL DISTRIBUTION
IN A STATIONARY RANDOM MEDIUM

Summary

Eigenvalue estimations of markovian chains describing the behaviour
of asymptotically optimal automata in a stationary random medium are ob-
tained.

224, 1981

თბილისის შრომის ნიშნით გრძობის ორდენის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

НЕЧЕТКИЕ ОБОБЩЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Т.Г. Гачечиладзе, Т.В. Манджaparашвили

В работе рассматриваются нечеткие распределения Бернулли и их обобщения. Основными представляются случаи, когда нечеткими являются 1) элементарные события, 2) количество успехов, 3) спектр обобщенного распределения.

Рассмотрение основано на понятиях нечеткого случайного события и его вероятности и независимости нечетких случайных событий /1,2/.

1. Распределения Бернулли с нечеткими элементарными событиями

Обозначим через P_1 и $P_0 = 1 - P_1$ априорные вероятности элементарных четких событий успеха ($Y \equiv (1)$) и неуспеха ($H \equiv (0)$). Если рассмотреть нечеткие подмножества множества этих двух элементарных событий, т.е. упорядоченные по значению функции принадлежности "отрезки" с максимальными элементами, характеризуемыми соответственно \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2

то вероятности нечетких событий $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\sigma}$ согласно

вычисляются по формулам:

$$P(\tilde{\tau}) = \sum_1 p_i \quad \text{и} \quad P(\tilde{\sigma}) = \sum_2 p_o \quad (1)$$

Для последовательностей n повторных четких элементарных испытаний введем обозначения:

$$C_1 \equiv (1, \dots, 1); \quad C_2 \equiv (1, \dots, 1, 0); \dots; \quad (2)$$

$$\dots; C_{2^{n-1}} \equiv (0, \dots, 0, 1); \quad C_{2^n} \equiv (0, \dots, 0).$$

Для описания последовательностей " n повторных нечетких элементарных испытаний"

$$\tilde{C}_1 \equiv (\tilde{\tau}, \dots, \tilde{\tau}); \dots; \quad C_{2^n} \equiv (\tilde{\sigma}, \dots, \tilde{\sigma}) \quad (3)$$

обратимся к понятию нечеткой переменной, введенному в работе /3/.

Пусть имеется нечеткая переменная $\tilde{X} = (X, U, \tilde{R}(X, U))$,

где X - нечеткое элементарное событие, $U = \{0, 1\}$ - универсальное множество, а ограничение $\tilde{R}(X, U) \subset U$:

$$\tilde{R}(X, U) \equiv \tilde{R}(\tilde{X}) = \tilde{\sigma} \cup \tilde{\tau} \equiv \{\tilde{\sigma}; \tilde{\tau}\}, \quad (4)$$

и рассмотрим упорядоченный набор n таких переменных

$(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$. Согласно /3/ универсальным множеством для этой нечеткой составной переменной является декартово произведение $U_1 \times \dots \times U_n$. Предположим теперь, что $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$

- одинаковые невзаимодействующие переменные, т.е. $\tilde{R}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ сепарабельно:

$$\tilde{R}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \tilde{R}(\tilde{x}_1) \prod \dots \prod \tilde{R}(\tilde{x}_n), \quad (5)$$

где $\tilde{R}(\tilde{x}_i)$ - цилиндрическое продолжение маргинального ограничения $\tilde{R}(\tilde{x}_i)$, $i = 1; \dots; n$. Последовательность "n повторных нечетких элементарных испытаний" мы рассматриваем как нечеткую точку $\tilde{R}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$. Согласно (5) имеем

$$\mu_{\tilde{c}_1} = \mu_1, \dots, \mu_{\tilde{c}_{2^n}} = \mu_2, \mu_{\tilde{c}_i} = \mu_1 \wedge \mu_2, \quad (6)$$

$$i = 2; 3; \dots; 2^n - 1,$$

а соответствующие вероятности таковы:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tilde{c}_1) &\equiv \mathcal{P}(\tilde{r}, \dots, \tilde{r}) = \mu_1 P(1; \dots; 1); \quad \mathcal{P}(\tilde{c}_2) \equiv \mathcal{P}(\tilde{r}, \dots, \tilde{r}, \tilde{o}) = \\ &= (\mu_1 \wedge \mu_2) P(1; \dots; 1; 0); \dots; \quad \mathcal{P}(\tilde{c}_{2^{n-1}}) \equiv \mathcal{P}(\tilde{o}, \dots, \tilde{o}, \tilde{r}) = \\ &= (\mu_1 \wedge \mu_2) P(0; \dots; 0; 1); \quad \mathcal{P}(\tilde{c}_{2^n}) \equiv \mathcal{P}(\tilde{o}, \dots, \tilde{o}) = \mu_2 P(0; \dots; 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Вероятности рассматриваемых нечетких событий, нормированные в $\tilde{R}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} \tilde{c}_i$, вычисляются по формулам:

$$\mathcal{P}'(\tilde{c}_i) = \mathcal{P}(\tilde{c}_i) / \left(\sum_{i=1}^{2^n} \mathcal{P}(\tilde{c}_i) \right) \quad (8)$$

Если распределение (8) просуммировать по проекции отношения (5):

$$\begin{aligned}
 & P_{\text{по } i} \tilde{R}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \\
 & u_{i_1} x \dots x u_{i_{n-1}} \\
 & = \tilde{R}_q(\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n-1}}), \\
 & q \equiv (i_1, \dots, i_{n-1}),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

получим:

$$\mathcal{P}'(\tilde{\gamma}) = \frac{N_1 P_1}{\sum_{i=1}^{2^n} \mathcal{P}(\tilde{c}_i)},
 \tag{10}$$

$$\mathcal{P}'(\delta) = 1 - \mathcal{P}'(\tilde{\gamma}) = \frac{N_1 P_0 + (N_2 - N_1) P(0, \dots, 0)}{\sum_{i=1}^{2^n} \mathcal{P}(\tilde{c}_i)}.$$

При выводе распределения Бернулли с нечеткими элементарными событиями мы будем исходить из понятия независимости нечетких событий, введенного в /2/, которое не эквивалентно обычной независимости. Это приводит к некоторым условиям независимости, которые мы и рассматриваем ниже. Для определенности положим $N_1 \leq N_2$. Тогда имеем:

$$\mathcal{P}'(\tilde{c}_1) = [\mathcal{P}'(\tilde{\gamma})]^n, \dots, \mathcal{P}'(\tilde{c}_{2^n}) = [\mathcal{P}'(\delta)]^n.
 \tag{11}$$

После подстановки в эти соотношения (7) и (10), получим:

$$\begin{aligned}
 & P(C_{(k)}) = \\
 & \frac{P_1^k}{\left[1 + \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right) P(0, \dots, 0)\right]^{n-1} \left[1 + \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right) P(0, \dots, 0) - P_1\right]^{n-k}}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$P(C_{2n}) = -130 -$$

$$= \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) P(0; \dots; 0) - P_1\right]^n}{\frac{n_2}{n_1} \left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) P(0; \dots; 0)\right]^{n-1}}, \quad k=1; \dots; n,$$

где учтено, что

$$\sum_{i=1}^{2^n} \mathcal{P}(\tilde{c}_i) = n_1 + (n_2 - n_1) P(0; \dots; 0) \quad (13)$$

и где введено общее обозначение $C_{(k)}$ для тех C_i , которым соответствует одинаковое число успехов k , т.к. вероятности таких C_i равны друг другу.

Здесь необходимо подчеркнуть, что условия (10)–(13) имеют место для данного n , а для $m < n$ они вообще говоря не выполняются. Такая импликация будет иметь место лишь при

$n_1 = n_2$, т.е. когда условия независимости нечетких событий вырождаются в соответствующие условия для четких событий.

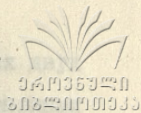
Учет нормировки для вероятностей $P(C_i)$ приводит к соотношению:

$$\frac{n_2}{n_1} = \left[1 + \frac{1 - P_1 \sqrt[n-1]{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)}}}{P(1; \dots; 1) \left(\sqrt[n-1]{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)}} - 1 \right)^n} \right]^{-1} \quad (14)$$

Подставляя в (12) формулу (14) и учитывая, что $n_2 \geq n_1$ и $P(C_i) \geq 0$, получаем систему условий:

$$P(C_{(k)}) = P(1; \dots; 1) \left[\sqrt[n-1]{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)}} - 1 \right]^{n-k}, \quad k=1; \dots; n;$$

$$P(C_{2n}) = P(1; \dots; 1) \left[\sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)} - 1} \right]^{n-1} + 1 - P_1 \sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)}} ;$$



$$0 \leq \frac{P_1 \sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)} - 1}}{P(1; \dots; 1) \left[\sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)} - 1} \right]^{n-1}} < 1 ;$$

(15)

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1 + \frac{-1 + P_1 \sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)}}}{P(0; \dots; 0)}$$

Таким образом, условия (15) эквивалентны наличию n -арной нечетной случайной переменной, являющейся последовательностью n повторных нечетких не взаимодействующих и независимых элементарных событий, распределение которых описывается распределением Бернулли с нечеткими элементарными событиями:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(\tilde{B}_n^\kappa) &= C_n^\kappa \left[\mathcal{P}'(\tilde{1}) \right]^\kappa \left[\mathcal{P}'(\tilde{0}) \right]^{n-\kappa} = \\ &= C_n^\kappa \frac{\mu_1^\kappa \mu_2^{n-\kappa} \left[\mu_1 P_0 + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0) \right]^{n-\kappa}}{\left[\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0) \right]^n}, \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_n^\kappa = \sqcup \tilde{C}_j \quad (16)$$

(по всем j с κ успехами)

При $\mu_1 = \mu_2$ (16) переходит в обычное биномиальное распределение.

Если $\mu_2 < \mu_1$, то во втором равенстве (16) необходимо провести замены:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \leftrightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} ; \quad P(1; \dots; 1) \leftrightarrow P(0; \dots; 0),$$

в результате получаем:

$$\mathcal{P}'(\tilde{\mathcal{B}}_n^K) =$$

$$C_n^K \frac{[\mu_2 P_1 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)]^K \mu_2^{n-K} P_0^{n-K}}{[\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)]^n} \quad (17)$$

Из формул (16) и (17) мы видим, что $\mathcal{P}'(\tilde{\mathcal{B}}_n^K)$ зависит от отношения μ_2 / μ_1 , а условие независимости и не взаимодействия (15) позволяют выразить нормированную вероятность $\mathcal{P}'(\tilde{\mathcal{B}}_n^K)$ четкого сложного события $\tilde{\mathcal{B}}_n^K$ через вероятности для соответствующих четких событий. Действительно, как нетрудно показать,

$$\mathcal{P}'(\tilde{\gamma}) = \begin{cases} \sqrt[n-1]{P_1(1; \dots; 1)} & , \mu_1 < \mu_2 , \\ \sqrt[n-1]{P_0(1; \dots; 1)} & , \mu_1 > \mu_2 , \end{cases}$$

$$\mathcal{P}'(\tilde{\delta}) = \begin{cases} \sqrt[n-1]{P_1(0; \dots; 0)} & , \mu_1 < \mu_2 , \\ \sqrt[n-1]{P_0(0; \dots; 0)} & , \mu_1 > \mu_2 , \end{cases} \quad (18)$$

где $P_\beta(\alpha, \dots, \alpha)$ ($\alpha, \beta = 0; 1$) - условные вероятности. С помощью этих условных вероятностей можем написать:

$$\mathcal{P}'(\tilde{\mathcal{B}}_n^K) = \begin{cases} C_n^K [P_1(1; \dots; 1)]^{\frac{K}{n-1}} [P_1(0; \dots; 0)]^{\frac{n-K}{n-1}} & , \mu_1 < \mu_2 , \\ C_n^K [P(1; \dots; 1)]^{\frac{K}{n-1}} [P_0(0; \dots; 0)]^{\frac{n-K}{n-1}} & , \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad (19)$$

Приведем выражения для производящей функции и первых двух моментов распределения Бернулли с нечеткими элементарными событиями.

Производящая функция:

$$G_{P(\tilde{B}_n)}(y) = \begin{cases} \frac{[\mu_1 P_0 + \mu_1 P_1 y + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0)]^n}{[\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0)]^n}, & \mu_1 < \mu_2, \\ \frac{[\mu_2 P_1 y + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1) y + \mu_2 P_0]^n}{[\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)]^n}, & \mu_1 > \mu_2. \end{cases} \quad (20)$$

Моменты:

$$\bar{K} = \begin{cases} \frac{n \mu_1 P_1}{\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0)}, & \mu_1 < \mu_2 \\ \frac{n [\mu_2 P_1 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)]}{\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)}, & \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{K}^2 = \bar{K} \left(1 + \frac{n-1}{n} \bar{K} \right) = \begin{cases} \frac{n \mu_1 P_1}{\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0)} \left[1 + \frac{(n-1) \mu_1 P_1}{\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) P(0; \dots; 0)} \right], & \mu_1 < \mu_2, \\ \frac{n [\mu_2 P_1 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)]}{\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)} \left[1 + \frac{(n-1) [\mu_2 P_1 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)]}{\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) P(1; \dots; 1)} \right], & \mu_1 > \mu_2. \end{cases} \quad (22)$$

Выражения (16), (17), (21) позволяют доказать существование пуассоновских пределов для биномиального распределения с нечеткими элементарными событиями. Возможны несколько случаев.

1) $\bar{K} = const$. В этом случае, очевидно,



$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \bar{\kappa} = \text{const}}} \mathcal{P}'(\tilde{B}_n^{\bar{\kappa}}) = e^{-\bar{\kappa}} \frac{\bar{\kappa}^{\bar{\kappa}}}{\bar{\kappa}!}, \quad \bar{\kappa} = 0; 1; \dots$$

2) μ_1 и μ_2 - фиксированы, $n\rho_1 = \text{const}$. Легко показать, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\rho_1 = \text{const}}} \mathcal{P}'(\tilde{B}_n^{\mu_1}) = \begin{cases} e^{-c'} \frac{c'^{\mu_1}}{\mu_1!}, c' = \frac{n\rho_1}{1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overbrace{0; \dots; 0}^n)}, \mu_1 < \mu_2, \\ e^{-c''} \frac{c''^{\mu_1}}{\mu_1!}, c'' = n\rho_1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \lim_{n \rightarrow \infty} [n P(\overbrace{1; \dots; 1}^n)], \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad (23)$$

Заметим, что поскольку мы предполагаем, что $n\rho_1 = \text{const}$,

постольку и $n P(\overbrace{1; \dots; 1}^n)$ также будет стремиться к некоторому конечному пределу (т.к. $\rho_1 = \dots + P(\overbrace{1; \dots; 1}^n) + \dots$).

2. Распределения Бернулли с нечетким количеством успехов

Рассмотрим множество $A_n \equiv \{0; 1; \dots; n\}$. Каждому $k \in A_n$

поставим в соответствие отображение A_n в $[0; 1]$, $\mu_{\tilde{\kappa}}(\ell)$

($\ell = 0; 1; \dots; n$). Нечетко определенную величину "приблизительно k из n " мы отождествляем с нечетким подмножеством

1/3.4/ A_n :

$$\tilde{\kappa} \equiv \bigsqcup_{\ell=0}^n [\mu_{\tilde{\kappa}}(\ell) / \ell]. \quad (24)$$

Если A_n - множество возможных количеств успехов в n

испытаниях Бернулли, то каждому элементу A_n соответствует вероятность $P(B_{n;p}^k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Поэтому, согласно для распределения Бернулли с нечетким количеством успехов получаем формулу:

$$\mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{k}}) = \sum_{\ell=0}^n \mu_{\tilde{k}}(\ell) P(B_{n;p}^{\ell}). \quad (25)$$

Здесь $\mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{k}})$ - вероятностная мера нечеткого события $B_{n;p}^{\tilde{k}}$ или множества \tilde{k} .

Заметим, что в рассматриваемой схеме нечеткие события $B_{n;p}^{\tilde{k}}$ не являются взаимно исключающими; поэтому, согласно /1/, имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^n B_{n;p}^{\tilde{k}}\right) &= \sum_{k=0}^n \mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{k}}) - \sum_{k,k'} \mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{k}} \cap B_{n;p}^{\tilde{k}'}) + \\ &+ \sum_{k,k',k''} \mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{k}} \cap B_{n;p}^{\tilde{k}'} \cap B_{n;p}^{\tilde{k}''}) + \dots + (-1)^{n-1} \mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{\delta}} \cap \dots \cap B_{n;p}^{\tilde{\pi}}). \end{aligned} \quad (26)$$

Важной характеристикой распределения (25) является закон композиции:

$$\mathcal{P}(B_{n;p_1,p_2}^{\tilde{k}}) = \sum_{m=0}^n P(B_{n;p_1}^m) \mathcal{P}(B_{m;p_2}^{\tilde{k}}), \quad (27)$$

который легко проверяется простым вычислением:

$$\mathcal{P}(B_{n;p_1,p_2}^{\tilde{k}}) = \sum_{\ell=0}^n \mu_{\tilde{k}}(\ell) P(B_{n;p_1,p_2}^{\ell}) = \sum_{\ell=0}^n \mu_{\tilde{k}}(\ell) C_n^{\ell} (p_1 p_2)^{\ell} (1-p_1 p_2)^{n-\ell};$$

$$\sum_{m=0}^n P(B_{n;p_1}^m) \mathcal{P}(B_{m;p_2}^{\tilde{k}}) = \sum_{m=0}^n P(B_{n;p_1}^m) \sum_{\ell=0}^m \mu_{\tilde{k}}(\ell) P(B_{m;p_2}^{\ell}) =$$

$$= \sum_{l=0}^n \mu_{\tilde{K}}(l) \sum_{m=0}^n C_n^m C_m^l P_1^m (1-P_1)^{n-m} P_2^l (1-P_2)^{m-l} = \sum_{l=0}^n \mu_{\tilde{K}}(l) \frac{n!}{l!(n-l)!} (P_1 P_2)^l$$

$$x(1-P_1, P_2)^{n-l} \sum_{m=0}^n \frac{(n-l)!}{(n-m)!(m-l)!} \frac{P_1^{m-l} (1-P_1)^{n-m} (1-P_2)^{m-l}}{(1-P_1 P_2)^{n-l}} = \sum_{l=0}^n \mu_{\tilde{K}}(l) \frac{n!}{l!(n-l)!} x$$

$$x(P_1 P_2)^l (1-P_1 P_2)^{n-l-j} \sum_{j=0}^{n-l} \frac{(n-l)!}{j!(n-l-j)!} \frac{P_1^j (1-P_1)^{n-l-j} (1-P_2)^j}{(1-P_1 P_2)^{n-l}} = \sum_{l=0}^n \mu_{\tilde{K}}(l) P(\beta_{n; P_1 P_2}^l)$$

В качестве характеристики можно также использовать рассматриваемое ниже свойство инвариантности экспоненциального распределения. В этом случае $\mu_{\tilde{K}}(l)$ ($l = 0; 1; \dots$) будет отображением множества натуральных чисел \mathcal{N} в $[0; 1]$, а \tilde{K} - нечетким подмножеством \mathcal{N} .

Рассмотрим выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(\beta_{n; p}^{\tilde{K}}) f_n(u) = \mathcal{Y}(\tilde{K}), \quad (28)$$

где $f_n(u) = (1-u)u^n$, $0 < u < 1$.

Если положить $v = \frac{pu}{1-u+pu}$ и $g_p(v) = (1-v)v^p$, то

$$\mathcal{Y}(\tilde{K}) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{\tilde{K}}(l) g_p(v). \quad (29)$$

В действительности,

$$\mathcal{Y}(\tilde{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(u) \mathcal{P}(\beta_{n; p}^{\tilde{K}}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(u) \sum_{l=0}^n \mu_{\tilde{K}}(l) P(\beta_{n; p}^l) =$$

$$\begin{aligned}
 &= f_0(u) \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^{\ell}(u) P(\beta_{0;p}^{\ell}) + f_1(u) \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^{\ell}(u) P(\beta_{1;p}^{\ell}) + \\
 &+ f_2(u) \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^{\ell}(u) P(\beta_{2;p}^{\ell}) + \dots = \mu_{\tilde{\kappa}}^0(u) \left[f_0(u) P(\beta_{0;p}^0) + \right. \\
 &+ f_1(u) P(\beta_{1;p}^0) + f_2(u) P(\beta_{2;p}^0) + \dots \left. \right] + \mu_{\tilde{\kappa}}^1(u) \left[f_1(u) P(\beta_{1;p}^1) + \right. \\
 &+ f_2(u) P(\beta_{2;p}^1) + f_3(u) P(\beta_{3;p}^1) + \dots \left. \right] + \mu_{\tilde{\kappa}}^2(u) \left[f_2(u) P(\beta_{2;p}^2) + \right. \\
 &+ f_3(u) P(\beta_{3;p}^2) + \dots \left. \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Если учесть, что для $\kappa < S$ $P(\beta_{\kappa;p}^S) = 0$, то

$$\begin{aligned}
 \psi(\tilde{\kappa}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^n(u) \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(u) P(\beta_{\ell;p}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^n(u) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} x \\
 &\times p^n (1-p)^{\ell-n} (1-u) u^{\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^n(u) (1-u) (pu)^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} [(1-p)u]^{\ell-n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^n(u) (1-u) (pu)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)!}{n! j!} [(1-p)u]^j.
 \end{aligned}$$

Последняя сумма есть разложение функции $[1-(1-p)u]^{-n+1}$ в ряд по степеням $(1-p)u$. Таким образом,

$$\psi(\tilde{\kappa}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\tilde{\kappa}}^n(u) \frac{1-u}{1-(1-p)u} \left[\frac{pu}{1-(1-p)u} \right]^n.$$

Учитывая связь между u и ν , окончательно получаем (29).

Для определения среднего значения нечеткого числа успехов "по мере \mathcal{P} " поступим следующим образом.



Рассмотрим обычное множество событий A_n . Определим функцию множества $E(\cdot)$ так, чтобы любому подмножеству A_n эта функция ставила в соответствие условное среднее. Так, если $A \subset A_n$, то $E(A) = \tilde{K}_A$. Согласно принципу обобщения /3/ область определения $E(\cdot)$ можно продолжить и на нечеткие подмножества. Пусть имеется нечеткое подмножество множества A_n :

$$\tilde{K} = \bigcup \alpha A_\alpha, \quad \alpha \in [0;1], \quad (30)$$

A_α - множества уровня, тогда

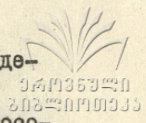
$$E(\tilde{K}) = \bigcup \alpha E(A_\alpha) = \bigcup \alpha \bar{K}_{A_\alpha}, \quad (31)$$

$E(\tilde{K})$ - нечеткое подмножество множества всех условных средних, \mathcal{E} . Соотношения (30) и (31) определяют правило вычисления значения характеристической функции нечетких подмножеств всех условных средних, $\mu_{\tilde{K}}(\bar{l}_A)$, соответствующих обычным подмножествам A_n по $\mu_{A_n}(l)$.

Среднее значение нечеткого числа успехов определим как выпуклую комбинацию /3/ нечетких подмножеств $E(\tilde{K})$ с весами $W_n(\tilde{K}) = \frac{\mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{K}})}{\sum_k \mathcal{P}(B_{n;p}^{\tilde{K}})}$, т.е. как нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\langle \tilde{K} \rangle_p}(\bar{l}_A) = \sum_{\tilde{K}} W_n(\tilde{K}) \mu_{E(\tilde{K})}(\bar{l}_A), \quad \bar{l}_A \in \mathcal{E}. \quad (32)$$

Заметим, что при $\mu_{\tilde{K}}(l) \rightarrow \delta_{lK}$, т.е. при переходе \tilde{K} в обычное множество $\{K\}$ "среднее по мере \mathcal{P} " пере-



ходит в математическое ожидание числа успехов для распределения Бернулли, $\langle \tilde{K} \rangle_{\rho} \rightarrow n\rho$. Только что описанным способом можно вычислить моменты любого порядка $\langle \tilde{K}^n \rangle_{\rho}^*$.

Рассмотрение пуассоновского и нормального приближений для (25) сводится к подстановке в эту формулу приближенных выражений для $P(B_{n;\rho}^{\rho})$.

3. Нечеткое "верхнее" распределение Бернулли

Рассмотрение обычного (четкого) "верхнего" биномиального распределения основано на модели суперпозиции двух процессов: бернуллиевского $B_{n;\rho}^K$ и процесса "увеличения общего количества неуспехов", B_0 , характеризуемого априорной вероятностью $P(B_0) = 1 - \gamma$ /4/.

Если ρ обозначает вероятность элементарного события (1), а ρ_0 и ρ_0' - соответственно значения функции принадлежности, сопоставляемые сложным событиям $(\overbrace{0, \dots, 0}^n)$ при попытке различения событий бернуллиевского и небернуллиевского происхождения, то вероятность i успехов в n испытаниях, как нетрудно убедиться, имеет вид:

* При вычислении моментов высших порядков мы сталкиваемся с необходимостью применения определенного правила умножения нечетких чисел. Наиболее подходящим нам представляется правило, вытекающее из принципа обобщения /3/.

$$\mathcal{P}(\tilde{B}_0 \circ B_{n;p}^k) = \frac{1}{Z} \begin{cases} \mu_0'(1-\gamma) + \mu_0' \gamma (1-p)^n, & k=0, \\ \gamma c_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & k=\overline{1, n} \end{cases} \quad (33)$$

где Z - константа, определяемая из условия нормировки

$$\sum_i \mathcal{P}(\tilde{B}_0 \circ B_{n;p}^i) = 1,$$

$$Z = \mu_0'(1-\gamma) + \mu_0' \gamma (1-p)^n + \gamma [1 - (1-p)^n]. \quad (34)$$

Производящая функция и первый момент, соответствующие этому р.в., таковы:

$$G_{\mathcal{P}(\tilde{B}_0 \circ B_{n;p}^k)}(y) = \frac{1}{Z} \left[\mu_0'(1-\gamma) + \mu_0' \gamma (1-p)^n + \gamma ((1-p+py)^n - (1-p)^n) \right] \quad (35)$$

и

$$\bar{k} = Z^{-1} \gamma n p.$$

Пуассоновский предел ($np=c$)

$$P(k) = \frac{1}{Z} \begin{cases} \mu_0'(1-\gamma) + \mu_0' \gamma e^{-c}, & k=0, \\ \gamma e^{-c} \frac{c^k}{k!}, & k=1; 2; \dots, \end{cases} \quad (36)$$

\bar{k} и c связаны соотношением:

$$\bar{k} = \left[\mu_0'(1-\gamma) + \mu_0' \gamma e^{-c} + \gamma (1 - e^{-c}) \right]^{-1} \gamma c. \quad (37)$$

Практический интерес представляет просуммированное по всем возможным значениям μ_0' и μ_0' выражение (36):

$$\bar{P}(k) = \begin{cases} 1 - (1 - e^{-c}) \xi, & k=0, \\ \xi e^{-c} \frac{c^k}{k!}, & k=1; 2; \dots, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\xi = \int \int_{0 \leq \mu_0, \mu'_0 \leq 1} \gamma Z^{-1} d\mu_0 d\mu'_0. \quad (39)$$

Легко убедиться, что

$$G_{\bar{P}}(y) = 1 - (1 - e^{-c}) \xi + \xi e^{-c} (e^{cy} - 1) \quad (40)$$

и

$$\bar{k} = \xi c.$$

Поэтому, окончательно

$$\bar{P}(k) = \begin{cases} 1 - \left(1 - e^{-\frac{\bar{k}}{\xi}}\right) \xi, & k=0, \\ \xi e^{-\frac{\bar{k}}{\xi}} \frac{\left(\frac{\bar{k}}{\xi}\right)^k}{k!}, & k=1; 2; \dots \end{cases} \quad (41)$$

4. Нечеткие распределения Фукоа

Так же, как и в случае "верхнего" распределения Бернулли, все варианты распределения Фукоа основаны на модели суперпозиции двух процессов, которые в рассматриваемом случае интерпретируются как "детерминированный" и бернуллиевский,

$$\Phi_{n; \nu; \rho}^k = \mathcal{B}_\nu \circ \mathcal{B}_{n-\nu; \rho}^k \quad /5/.$$

Вывод выражений ф.р.в. для рассматриваемых ниже наиболее

характерных случаев фактически совпадает с соответствующим выводом четких р.в., и поэтому мы приведем лишь окончательные результаты. При этом мы будем пользоваться моделью и терминологией Фукса /5/, /6/.

1. Предварительное размещение (детерминированный процесс) является четким, в то время как нечеткость бернуллиевского процесса обусловлена нечеткостью элементарных событий. В этом случае нечеткое элементарное событие характеризуется вероятностью, зависящей от количества заранее размещенных элементов. Для рассматриваемого случая ф.р.в. принимает следующий вид:

$$F'(B_{\nu}^{\circ} B_{n-\nu}^{\tilde{\kappa}}; p) = \sum_{\nu=0}^n P_{\nu} C_{n-\nu}^{k-\nu} [\varphi'_{n-\nu}(\tau)]^{k-\nu} [\varphi'_{n-\nu}(\delta)]^{n-k}, \quad (42)$$

где P_{ν} - доля ячеек с ν заранее размещенными элементами, причем, согласно (15) для $\nu=0; 1; \dots; n-2$ должны выполняться условия:

$$P^{(\nu)}(C(k)) = P(1; \dots; 1) \left[\sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)^{\frac{n-\nu}{k}}}} - 1 \right]^{n-k}, \quad (k=1; \dots; n)$$

$$P^{(\nu)}(C_2^{n-\nu}) = P(1; \dots; 1) \left[\sqrt{\frac{P_2}{P(1; \dots; 1)^{\frac{n-\nu}{2}}}} - 1 \right]^{n-\nu} +$$

$$+ 1 - P_1 \sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)^{\frac{n-\nu}{2}}}},$$

$$0 \leq \frac{P_1 \sqrt{\frac{P_1}{P(1; \dots; 1)^{\frac{n-\nu}{2}}}}}{P(1; \dots; 1) \left[\sqrt{\frac{P_2}{P(1; \dots; 1)^{\frac{n-\nu}{2}}}} - 1 \right]^{n-\nu}} < 1,$$

$$\frac{\mu_2^{(v)}}{\mu_1^{(v)}} = 1 + [P(\overbrace{0; \dots; 0}^{n-v})]^{-1} \left[-1 + \sqrt{\frac{P_1}{P(\overbrace{1; \dots; 1}^{n-v})}} \right]$$

Производящая функция и первые два момента, соответствующие р.в. (42) таковы:

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{F}'}(\beta_y \circ \beta_{n-v}^{\bar{\kappa}}; \rho)(y) &= \\ &= \sum_{\nu=0}^n \rho_{\nu} y^{\nu} \frac{[\mu_1 \rho_0 + \mu_1 \rho_1 y + (\mu_2 - \mu_1) P(\overbrace{0; \dots; 0}^{n-\nu})]^{n-\nu}}{[\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) P(\overbrace{0; \dots; 0}^{n-\nu})]^{n-\nu}}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\bar{\kappa} = n\rho_1 + (1-\rho) \left(\sum_{\nu=0}^n \mu_{\nu} \rho_{\nu} \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=0}^n \nu \mu_{\nu} \rho_{\nu} \right), \quad (45)$$

$$\bar{\kappa}^2 = \left(\sum_{\nu=0}^n \mu_{\nu} \rho_{\nu} \right)^{-1} \left[\sum_{\nu=0}^n \nu^2 \mu_{\nu} \rho_{\nu} + \rho_1 \sum_{\nu=0}^n (n-\nu)(2\nu+1+\rho_1(n-\nu-1)) \mu_{\nu} \rho_{\nu} \right]$$

Аналогичные выражения получаются для случая $\mu_1^{(v)} > \mu_2^{(v)}$

2. Нечетким является предварительное размещение, а бернуллиевский процесс - четким, $\tilde{\mathcal{F}}_{n;\nu;\rho}^{\kappa} = \tilde{\beta}_{\nu} \circ \beta_{n-\nu}^{\kappa}$. В этом случае, очевидно,

$$\mathcal{F}'(\tilde{\beta}_{\nu} \circ \beta_{n-\nu}^{\kappa}; \rho) = \sum_{\nu=0}^n \frac{\mu_{\nu} \rho_{\nu}}{\sum_{\nu=0}^n \mu_{\nu} \rho_{\nu}} P(\beta_{n-\nu}^{\kappa}; \rho). \quad (46)$$

Учитывая субъективный характер спектральных вероятностей

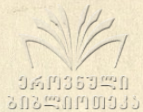
в распределении Фукса, можно утверждать, что в данном случае четкие и нечеткие распределения совпадают.

Поступила 12.XI.1980

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Манджапарашвили. Сообщ. АН СССР, 82, №4, 1979.
2. Т.Манджапарашвили. Всесоюзн. конф. по теории принятия решений, Рига, 1980. Тезисы докладов;
Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили, Т.Цилосани. Всесоюзн. семинар по инженерной лингвистике, Чимкент, 1980. Тезисы докладов.
3. Л.Заде. Понятие лингвистической переменной и ее применение к теории принятия решений, М., "Мир", 1977.
4. Нгуен Хак Фук. Сообщ. АН СССР, 70, №2, 1972.
5. Т.Гачечиладзе, Т.Цилосани. Статистика речи и автоматический анализ текста, Л., "Наука", 1971.
6. Ф.Фукс. Теория передачи сообщений. М., ИЛ, 1956.



მ. შარატიანი, მ. მანჯარაშვილი

აზროვნის მათემატიკის მიხედვითი განმარტების მათემატიკა

რეზიუმე

აზროვნის მათემატიკის მიხედვითი განმარტების მათემატიკის საფუძვლებზე განხილულია ფაზური შემთხვევითი განმარტების თეორია. განხილულია შემთხვევითი: 1) აზროვნის ურთიერთობის ხარისხები, 2) აზროვნის წარმატებათა რიცხვი და 3) აზროვნის სპექტრული პარამეტრები.

T. Gechechiladze, T. Manjaparashvili

FUZZY GENERALIZED BINOMIAL DISTRIBUTIONS

Summary

Fuzzy generalized Binomial distributions are considered on the basis of the fuzzy random event notion.

Cases are considered with: 1) fuzzy elementary events, 2) fuzzy number of successes, and 3) fuzzy spectral parameters.

224, 1981

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მტკიცის სახელობის
უნივერსიტეტის ტრუდები

К ВОПРОСУ ИНФОРМАЦИОННОГО ПОДХОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ИЗБЫТОЧНЫХ КЛАССАХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

Н.Д.Нанобашвили

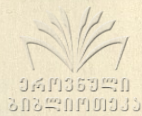
Теоретические предпосылки в /I/ по вопросам сжатия информации позволяют проанализировать одну особенность представления и решения линейных уравнений от n - неизвестных в некотором избыточном классе представителей.

Наличие связи между избыточностью, введенной в исходную формальную систему, и возможностью получения при этом однозначных решений определяет основное положение данной работы и обосновывается на следующих соображениях:

Из неопределенного уравнения

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \quad (I)$$

имеющего в поле рациональных чисел бесконечное число решений, можно получить однозначные решения для переменных x_1, x_2, \dots, x_n путем введения дополнительных условий. В математическом контексте этот хорошо известный факт именуется наложением ограничений на переменные, что в общем случае требует рассмотрения



совместно с (1) ему подобных $(n-1)$ уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы установить далее, что введенные ограничения являются нетривиальными, возникает целесообразность проверки уравнений системы (2) на совместность с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

С указанной точки зрения не менее впечатляющими являются ограничения, вводимые с целью получения экстремума некоторой линейной формы, называемой целевой функцией /2/. Здесь наибольшая доля падает на смысловые ограничения, обусловленные особенностями целевых функций. Помимо этого, среди множества возможных примеров можно указать на интересные схемные решения из приложений математической логики, в которых, в результате предварительного введения избыточности, в математическом контексте расширения заданной нормальной формы до канонической (СДНФ или СКНФ) однозначно можно находить минимальную форму функции алгебры логики /3/.

Уточняя далее, можно указать, на существование теоретической дисциплины, основанной на фундаментальных главах современной алгебры в виде теории корректирующих кодов, где без всяких отклоняющих контекстов прямо указано, что введение избыточности при кодировании является необходимым условием для безошибочного или однозначного декодирования информации.



Развивая такую концепцию, можно полагать, что декартовская система координат по своей природе явилась такой информационно-кодирующей системой, с помощью которой можно формализовать широкий класс разобщенных по своей природе как реальных, так и математических объектов. Такое допущение позволяет рассмотреть уравнение (1) как один из возможных вариантов пространственно-временного кода, а систему (2) - как один из возможных форм введения избыточности для выбранной информационно-кодирующей системы с целью получения однозначных решений.

Если считать такую концепцию правдоподобной, то тогда не исключена возможность разработки таких форм введения избыточности в исходную формальную систему, в том числе и декартовскую, которые бы более удачно реализовали вопрос нахождения однозначных решений, по крайней мере, хотя бы для весьма узких классов математических или реальных объектов.

Попытке показать, что такая постановка задачи является возможной и посвящается настоящая работа.

Специфика введения избыточности

Во избежание повторений выкладок и доказательств будем пользоваться понятиями и следствиями из /1/, что соответствующим образом будет оговорено в ходе изложения материала.

Кроме того, используем из /1/ некоторые обозначения:

B_{kn} - n -мерное линейное векторное пространство над полем $GF(2)$; K - максимальное число элементов в B_{kn} ; $k=2^n$; G_{pn} - n -мерное векторное пространство над

кольцом $R(n) = \left\{ \overset{m}{x}, \overset{m}{y}, M_n \right\}$; $M_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$; $p = n^2$.

Множество V_{kn} , где $f: B_{kn} \rightarrow V_{kn} \subset G_{pn}$.

Каждый элемент $v_{j,i} \in V_{kn}$ является вектором пространства G_{pn} , являющегося поэлементно неубывающей числовой последовательностью.

Подпространство $Z \frac{m}{2} \subset G_{pn}$ над кольцом $R \frac{m}{2}, n$.

Каждая компонента n - мерного вектора $Z \frac{m}{2}, n \in Z \frac{m}{2}, n$ является элементом множества $\left\{ 0, \frac{m}{2} \right\}$.

Схема внесения избыточности характеризуется законом перекодирования (1) и (2) из /1/. Здесь векторы пространства

B_{kn} преобразуются во множество векторов $V_{kn} \subset G_{pn}$, обладающих следующими свойствами:

1.* Элементы вектора $v_{j,i} \in V_{kn}$ образуют цепь, являющуюся неубывающей последовательностью, характеризующейся свойством транзитивности, рефлексивности и антисимметричности.

2.* Преобразование f является взаимно-однозначным

$$f: B_{kn} \rightarrow V_{kn} \subset G_{pn}$$

$$f^{-1}: V_{kn} \rightarrow B_{kn}$$

3.* На основании свойств 1* и 2* выполняется закон взаимно-однозначного соответствия между элементами пространства

$Z \frac{m}{2}, n$ и множества V_{kn} , сформулированного в /1/



в виде теоремы 3.

4.* Векторы множества $V_{kp} \subset G_{rp}$ сумму вида

$$S_{j,n} = v_{j,n} + \frac{m}{2} v_{(j+1),n},$$

где j - порядковый номер в последовательности, $j=1, 2, 3, \dots$. Свойства суммы $S_{j,n}$ сформулированы в виде теоремы 4 в /1/.

Примечание: основная цель внесения избыточности, т.е. преобразования десятичных чисел в двоичные векторы, а двоичных - в m -чные векторы, заключается в создании такой последовательности из упорядоченных векторов множества V_{kp} , которые будут обладать свойствами, указанными в 1^* , 2^* , 3^* и 4^* .

Определение I. Пусть $\{\alpha_i\}$, $i=0, 1, 2, 3, \dots$, - множество неотрицательных десятичных целых чисел. Определим тогда вектор $v_{j,n} \in B_{kp}$ как промежуточный, а вектор $v_{kp} \in V_{kp}$ как прямой представитель числа α_i , если между элементами B_{kp} и V_{kp} установлен закон взаимно-однозначного соответствия по схеме преобразования 2^* .

Согласно определению I множество $V_{kp} \subset G_{rp}$ и пространство B_{kp} будут представлять соответствующие классы прямых и промежуточных представителей элементов множества $\{\alpha_i\}$.

Пример № I. При $n=5$ и $\text{mod } 4$. выберем два произвольных числа $\alpha_1=3$, $\alpha_2=5$. Тогда промежуточными представителями будут векторы $b_1 = 00011 \pmod{2}$ и $b_2 = 00101 \pmod{2}$. Прямыми представителями будут являться векторы v_1 и v_2 , где

$$v_1 \rightarrow f: b_1 = 00012 \pmod{4},$$

$$v_2 \rightarrow f: b_2 = 00112 \pmod{4}.$$

Далее, если рассмотреть сумму I)

$$S_{J,n} = v_{J,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{(J+1),n}, \quad (3)$$

то согласно 4 из /1/ можно показать, что значение суммы (3) зависит также от композиции векторов b_1 и b_2 .

Действительно, если b_1, b_2 , то тогда имеем:

$$\frac{m}{2} \cdot v_{(J+1),n} = \frac{m}{2} \cdot v_{(J+1),n} = 2^4 \times \underbrace{00112}_{v_2} = 00220 \pmod{4},$$

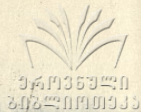
$$S_{J,n} = v_{J,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{(J+1),n} = \underbrace{00012}_{v_1} + 2 \cdot 00112 = 00012 + 00220 = 00232.$$

Рассмотрим теперь композицию $b_2 b_1$, тогда получим:

1) Выражение $\frac{m}{2} \cdot v_{(J+1),n}$ обозначает умножение X по

$\text{mod } m$ двух членов: $\frac{m}{2}$ и $v_{(J+1),n}$.

$$v'_1 \rightarrow f: b_2 = 00112; \quad v'_2 \rightarrow f: b_1 = 00012.$$



$$S'_{J,n} = v'_{J,n} + \frac{m}{2} \cdot v_{(J+1),n} = 00112 + 2 \times 00012 = 00132,$$

т.е.

$$S_{J,n} \neq S'_{J,n}.$$

Рассмотрим схему восстановления:

Согласно следствиям 3 - I из /I/ первую сумму $S'_{J,n} = 00234$ умножаем на $\frac{m}{2} = 2$;

$$2S'_{J,n} = Z \frac{m}{2}, n = 00020.$$

Поскольку в $Z \frac{m}{2}, n = 00020$ каждой двойке соответствует порядковое нечетное число, а нулю - ближайшее четное, то получим

$$v_1 \rightarrow \rho^{-1}: Z \frac{m}{2}, n = 00012.$$

Далее

$$2v_2 = S_{J,n} + v_1 = 00232 + 00012 = 00220,$$

откуда аналогично получается

$$v_2 = 00112.$$

По рассмотренной схеме восстановления так же однозначно восстанавливаются из суммы $S'_{J,n} = 00132$ векторы $v'_2 = 00120$



и $v_1' = 00012$.

Имеет место следующая

Теорема. Неопределенное уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = C \pmod{m}$$

в классе $V_{J,n}$ имеет однозначное решение $m = \rho^n$; $\rho = 2^t$,
 $t = 1, 2, 3, \dots$

Доказательство. Без существенного ограничения общности

допустим $m = 2^n$, т.е. $t = 1$.

Представим уравнение (I) в виде

$$a_1 x_1 + \frac{a_2}{2} \cdot 2 x_2 + \frac{a_3}{4} \cdot 4 x_3 + \dots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} x_n = C \pmod{m}. \tag{2}$$

Согласно следствий теоремы 3 из /1/, легко устанавливается следующая схема однозначного отыскания переменных x_1, x_2, \dots, x_n

а) Для определения x_1 , уравнение (2) умножается на $\frac{m}{2}$. В результате в левой части (2) все слагаемые, кроме первого, становятся равными нулю. После определения значения переменной $x_1 = v_1$ в классе $V_{J,n}$ уравнение (2) представляется как

$$\frac{a_2}{2} \cdot 2 x_2 + \frac{a_3}{4} \cdot 4 x_3 + \dots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} x_n = C - v_1. \tag{3}$$

б) Умножением (3) на $\frac{m}{4}$ как и в предыдущем случае

определяется переменная x_2 .

Далее аналогично отыскиваются переменные x_3, x_4, \dots, x_n .

Следствие. На уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c \pmod{2^n} \quad (4)$$

натянута система из $m \leq n$ линейных уравнений с целыми коэффициентами

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = c_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = c_m \end{cases} \quad (5)$$

Зависимость между коэффициентами уравнения (4) и системы

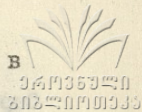
(5) при этом определяется как

$$a_1 = a_{11} + 2a_{21} + 4a_{31} + \dots + 2^{n-1} a_{m1} \pmod{2^{n-1}} \quad (6)$$

$$a_n = a_{1n} + 2a_{2n} + 4a_{3n} + \dots + 2^{n-1} a_{mn} \pmod{2^{n-1}}$$

Пример № 2. Рассмотрим решение уравнения

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 89 \quad (7)$$



в избыточном классе представителей $V_{J,n}$. Поскольку в

(7) количество членов $n=3$, то (7) приводим к виду

$$3x_1 + \frac{5}{2} \cdot 2x_2 + \frac{1}{4} \cdot 4x_3 = 00131 \pmod{2^3}. \quad (8)$$

Умножая обе части уравнения на $\frac{m}{2} = 4$, по mod 8 получим

$$12x_2 = 00444 \quad \text{или} \quad 4x_1 = 00444 \quad \text{или} \quad \bar{z} \frac{m}{2}, n = 00444,$$

откуда

$$\rho^{-1} \left(\bar{z} \frac{m}{2}, n \right) = x_1 = v_1 = 00111,$$

$$b_1 = 00100, \quad \alpha_1 = 4$$

Далее вычисляем $x_2 = v_2$:

$$\frac{5}{2} \cdot 2x_2 + \frac{1}{4} \cdot 4x_3 = 00131 \cdot 8 - 00333 = 00606.$$

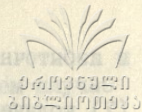
Умножая на $\frac{m}{2} = 2$, имеем

$$\frac{5}{2} \cdot 4x_2 = 00404 \quad \text{или} \quad \frac{5}{2} \cdot \rho^{-1} \left(\bar{z} \frac{m}{2}, n \right) = \rho^{-1}(00404),$$

откуда

$$x_2 = v_2 = \frac{2}{5} \cdot 00123;$$

$$b_2 = 00111, \quad \alpha_2 = 7.$$



Определим x_3 :

$$5 \cdot \frac{2}{5} \cdot (00123) + x_3 = 00606,$$

откуда

$$\rho^{-1} \left(\frac{Z}{2}, n \right) = \rho^{-1}(00440) = x_3 = v_3 = 00112;$$

$$b_3 = 00101, \quad \alpha_3 = 5.$$

Пример № 3. Покажем теперь, что уравнение

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c$$

может представлять в избыточных классах систему линейных уравнений из 3-х неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = c_1, \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = c_2, \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = c_3. \end{cases} \quad (8)$$

Примем следующие значения коэффициентов:

$$a_1 = 7; \quad a_2 = 25; \quad a_3 = 35; \quad c = 49; \quad (9)$$

$$7x_1 + 25x_2 + 35x_3 = 49.$$

Приведем (9) к виду

$$7x_1 + \frac{25}{2} \cdot 2x_2 + \frac{35}{4} \cdot 4x_3 = 00061 \pmod{8}. \quad (10)$$

Умножим (2) на $\frac{m}{2} = 4$, получим:

$$4x_1 = 00004; \quad \rho^{-1}(4x_1) = \rho^{-1}(00004);$$

$$\rho^{-1}\left(\bar{z} \frac{m}{2}, n\right) = \rho^{-1}(00004);$$

$$x_1 = v_1 = 00001; \quad \ell_1 = 00001; \quad \alpha_1 = x = 1.$$

Определим x_2 :

$$\frac{25}{2} \cdot 2x_2 + \frac{35}{4} \cdot 4x_3 = 00061 \frac{8}{4} 00007. \quad (II)$$

Умножая (3) на $\frac{m}{4} = 2$, получим

$$\frac{25}{2} \cdot 4x_2 = 00044; \quad \frac{25}{2} \cdot \rho^{-1}(4x_2) = \rho^{-1}(00044);$$

$$x_2 = v_2 = \frac{2}{25} \cdot 00011; \quad \ell_2 = 00010; \quad \alpha_2 = y = 2.$$

Подставляя значение x_2 в формулу (3), получим:

$$\frac{35}{4} \cdot 4x_3 = 00062 \frac{8}{4} 00022, \quad \text{т.е.} \quad \frac{35}{4} \cdot 4x_3 = 00040.$$

Используя далее оператор восстановления порядка ρ^{-1} , получим

$$\frac{35}{4} \rho^{-1}(4x_3) = \rho^{-1}(00040)$$

$$\text{или} \quad x_3 = v_3 = \frac{4}{35} \cdot 00012; \quad \ell_3 = 00011; \quad \alpha_3 = z = 3.$$



Определим значение коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{13} и т.д. Согласно следствию рассмотренной теоремы, можно написать

$$\begin{aligned} a_{11}^8 + 2a_{21}^8 + 4a_{31}^8 &= 7 \pmod{8}, \\ a_{12}^8 + 2a_{22}^8 + 4a_{32}^8 &= 25 \pmod{8}, \\ a_{13}^8 + 2a_{23}^8 + 4a_{33}^8 &= 35 \pmod{8}. \end{aligned} \tag{12}$$

Решениями этих уравнений являются

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; \quad a_{12} = 1; \quad a_{13} = 1; \quad a_{21} = 1; \quad a_{22} = 2; \\ a_{23} &= 1; \quad a_{31} = 1; \quad a_{32} = 1; \quad a_{33} = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x + 2y + z &= 8, \\ x + y + 3z &= 12 \end{aligned} \tag{9}$$

является однозначным отображением уравнения

$$4x_1 + 25x_2 + 35x_3 = 49, \tag{10}$$

решение которого определяется в избыточном классе прямых представителей.

Представление системы линейных уравнений (5) в виде одного сжатого уравнения (4) представляет также интерес с точки зрения возможности уменьшения числа информационных симво-



лсв при вводе и обработке уравнения (4) вместо (5) на ЦМ.
 Кроме того, поскольку решениями (4) являются цепи числовых последовательностей, то они могут представлять также интерес с точки зрения формализации сетей и графов различных конфигураций и назначений.

Анализируя рассмотренные выше основные положения, можно прийти к следующему выводу: в вводной части настоящей работы возможность получения однозначных решений гипотетически связана с фактором введения символической или смысловой избыточности. В работе эффект однозначности достигается в результате введения числовой (символической) избыточности. Так, например, если $\alpha_i = 5$, то его размерность в классе промежуточных представителей $\beta_i = 101$ равна трем битам информации, а в классе прямых представителей, где $\rho: 101 \rightarrow \nu_i = 112$, для каждой цифры требуется два бита, ν_i выражается шестью битами информации. Именно в результате такого удвоения количества информации, т.е. внесения избыточности, появляются свойства $1^*, 2^*, 3^*, 4^*$, которые и позволяют получать однозначные решения для (4) в классе $V_{J,n}$ избыточных представителей.

Поступила 10.1.1981

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Д.Нанобашвили. Об одном улучшенном варианте схемы сжатия информации. Настоящий сборник, стр.



2. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн. Задачи и методы линейного прог-
раммирования, М., 1961.

3. Д.А.Поспелов. Логические методы синтеза и анализа схем.
М., 1968.

ბ. ნანობაშვილი

ინფორმაციული მიდამოს საკონტინენტური წარმომადგენლის

დასახელების წარმომადგენლობა და მისი

რეზიუმე

განვიხილოთ n - უცნობიანი წრფივი განტოლებათა წარმომადგენლობა და მათი ამოხსნის საკონტინენტური წარმომადგენლობა ინფორმაციული დასახელების მიხედვით. წარმომადგენლობა ინფორმაციული დასახელების წარმომადგენლობა ერთი რეკურენტული n - უცნობიანი განტოლებით შეკუმშული სახეობით შესაძლებელია ავსახოთ მას რეკურენტული n - უცნობიანი წრფივი განტოლებათა სისტემა. ამასთანავე შესაძლებელია ხდება რეკურენტული ხეობის ფორმის ქსელისა და სხვა გეომეტრიის გრაფების ფორმალური დასახელების განხილვა და რეკურენტული ანალიტიკური სახეობით განტოლებების სახით.

N. Nanobashvili

CONCERNING THE INFORMATION APPROACH IN SOLVING
LINEAR EQUATIONS IN REDUNDANCY CLASSES OF REPRESENTATIVES

Summary

Representation of linear simultaneous equations in the form of a compressed single equation is considered. It is shown that a compressed equation in redundancy classes of representatives has a single-valued solution.

224, 1981

თბილისის შრომის ნიშნული ორდენის მრეწველსაბანო სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

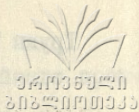
К ВОПРОСУ РАЗРАБОТКИ ДИАЛОГА С ЭВМ НА ЯЗЫКЕ, БЛИЗКОМ
К ЕСТЕСТВЕННОМУ ГРУЗИНСКОМУ ЯЗЫКУ

Н.М.Велишвили, Л.Л.Чхაидзе, Н.В.Шенгелия, Л.В.Шенгелия

Развитие автоматизированных систем управления, внедрение промышленных роботов, создание обучающих систем с помощью ЭВМ, применение ЭВМ в библиотечной работе, в массовом медицинском обслуживании и т.д. требуют разработки сложных программно-технических комплексов, позволяющих общаться с машиной на языке, близком к естественному.

Попытки создания таких систем показали перспективность применения терминальных языков, близких к естественному. Вырисовались и общие черты архитектуры диалоговых систем (ДС), которую можно представить: 1. Блок грамматического анализа. 2. Блок семантического анализа. 3. Решатель и 4. Генерация ответа /1/.

Современный уровень разработки блока семантического анализа позволяет сделать диалоговые системы многоязычными, изменяя при переходе от языка к языку только блоки грамматичес-



кого анализа /2/.

Целесообразно подграмматику выбрать в зависимости от определенного класса "семантической окруженности". Наряду с "моделями мира" структура ДС существенно зависит от базового языка /3/. ДС на базе грузинского языка характеризуется своими особенностями.

Часть комплекса алгоритмов грамматического анализа, которая, используя список аффиксов, выделяет из слов Смысловые Единицы (СЕ) и фиксированные значения морфологических переменных, будем называть Морфологическим Процессором (МП) /4/. Для позиционных языков она выявляет последовательность упорядочения СЕ.

В отличие от существующих систем /3/, /5/, в рассматриваемой ДС на базе грузинского языка основное внимание уделено именно морфологическому процессору, так как грузинский глагол есть "предложение в миниатюре" /6/ и развитая система аффиксов несет основную информацию о семантических отношениях смысловых единиц. Поэтому основой при конструировании подграмматики стал выбор правил морфологии, что со своей стороны вызвало сведение синтаксического анализа к сканированию /7/.

При алгоритмизации системы, упрощением подграмматики, она приводится к рекуррентной форме, описываемой с помощью рефал-предложения /8/. Выбор недопустимых путей по графу запрещается с помощью таблиц решения /9/, тем самым идеальный граф приводится к желаемому. Для эффективного связывания рефалпредложения и таблиц решения введен оператор кодирования $::\rightarrow$, означающий, что выражение с левой стороны от знака вырабатывает код, указанный на правой стороне.

Целью работы морфологического процессора является заполнение информационного вектора и нахождение соответствующего корня, поэтому на структуре Банка Корней (БК) отражается структура предграмматики. С другой стороны, БК отражает классификацию по основным семантическим группам, свойственным естественному языку и используемым в конкретной предметной области. В качестве признака Семантической Группы (СГ) используются семантические множители /1/. Естественный грузинский язык образует несколько таких групп /10/. Возможно и искусственное увеличение количества СГ введением соглашений об использовании СГ. Разбиением файла корней на семантические группы значительно ускоряется поиск, несмотря на то, что эти группы в общем случае характеризуются нечетными границами.

Другой способ ускорения времени ответа на вопрос - самообучение системы с целью адаптации к языку конкретного пользователя и конкретным базам данных. Механизм самообучения основан на использовании идей Частотного Словаря /ЧС/. ЧС имеет структуру: частота использования группы, подгруппы и слова. Они ориентируются на определенный тип работ, который выбирается абонентом. Информация о типе дается при задании пакета задач и настраивает диспетчер МП (ДС). Целесообразна разработка ЧС для грамматических конструкций.

Таким образом, помимо уникального ключа динамического файла /II/ предлагаются вторичные индексы: вероятностный (частотный) и семантический, которые базируются на аффиксных морфемах, входящих в корень. Возможно объединение этих двух подходов созданием вероятностно-семантического ключа, аргументами

ЛИТЕРАТУРА



1. Э.Хант. Искусственный интеллект. М., 1978
2. Проблемы моделирования языковой интеракции. Тарту, 1980
3. Т.Виноград. Программа, понимающая естественный язык. М., 1976
4. А.И.Китов, П.Науман. "Разработка и...": "Проблемы кибернетики", № 32, М., 1977.
5. В.И.Брябрин и др. ДТЛОС - диалоговая система для взаимодействия с ЭВМ на естественном языке. ВЦ АН СССР, М., 1979.
6. А.С.Чикобава. Проблема простого предложения в грузинском языке. Тбилиси, 1968.
7. А.Грис. Конструирование компиляторов для цифровых вычислительных машин, "Мир", М., 1975.
8. В.Ф.Турчин. Программирование на языке РЕФАЛ. Препринт АН СССР, 1971.
9. S.U. Pollak. *Decision tables. Theory and Practice.* J. Wiley Sons, INS, 1971.
10. ა.შახბიძე. *ქანთარის გადასვლის საფუძვლები*, თბილისი, 1959.
11. Дж.Мартин. Организация баз данных в вычислительных системах. "Мир", М., 1978.
12. К.Д. Тоухер. *The art of simulation* Prentice. N-Y. 1963



ნ.ველიაშვილი, ლ.ჩხაიძე, ნ.შენგელია, ლ.შენგელია

საზოგადოებრივი მეცნიერებების აკადემია

ინფორმაციის საკითხების განყოფილება

რეზიუმე

საზოგადოებრივი მეცნიერებების დარგებში გამოყენებული

საზოგადოებრივი მეცნიერებების აკადემიის ინფორმაციის საკითხების განყოფილება.

N. Veliashvili, L. Chkhaidze, N. Shengelia, L. Shengelia

ON DEVELOPING A DIALOGUE WITH A COMPUTER IN
A LANGUAGE CLOSE TO GEORGIAN

Summary

Problems of a dialogue with a digital computer in a language close to Georgian are considered. The discussion is based on currently available methods.

224, 1981

მბრძანის ძეგლის ნიშნის რეგისტრის რეგისტრაციის საბუღალტრო
უნივერსიტეტის ძეგლები

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМАРШРУТНОЙ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

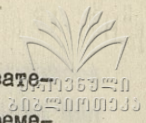
О.И.Кварацхелия

I. В настоящей работе мы исследуем вопросы алгоритмизации многомаршрутной задачи календарного планирования – наиболее сложной задачи теории расписаний.

Задачи составления оптимальных календарных планов для многомаршрутной задачи имеют исключительно широкие сферы приложения. Они возникают всюду, где приходится решать вопросы упорядочения во времени некоторого количества дискретных процессов с помощью ограниченного числа преобразователей (станков).

Вопросы построения оптимальных календарных планов работы оборудования на промышленном предприятии, выпуска деталей и т.д., относящиеся к проблемам календарного планирования и управления производством, достаточно сложны и еще не нашли полного своего разрешения.

Оптимальный календарный план, используя объективные возможности производства, должен давать максимальный эффект, оце-



ниваемы в определенных, в основном, в стоимостных показателях. При этом обычно применяемая оптимизация плана по времени также дает значительный материальный выигрыш производству.

С точки зрения функционирования сложной системы, оптимальный календарный план можно рассматривать как эталон, который служит для настройки работы сложной системы и выработки управляющих воздействий пропорциональных отклонениям отдельных функций системы от эталонных.

Сложность и многовариантность решения всей проблемы в целом заставляет исследователей идти множеством путей, среди которых статистические методы моделирования и поиска занимают важное место и широко используются при разработке оптимизационного алгоритма многомаршрутной задачи календарного планирования. При построении алгоритма решаются следующие основные вопросы:

- выбор адекватной модели производственного процесса;
- выбор метода генерации реальных календарных планов различной длительности;
- выбор метода движения в пространстве планов.

Остановимся на каждом из поставленных вопросов несколько подробнее.

В качестве модели производственного процесса обычно используются стандартные модели типа сетевых, матричных и др., а также имитационные модели различных типов. Каждая из этих моделей имеет свои преимущества и недостатки, которые мы описали выше, но наиболее простой, с точки зрения ее использования, является матричная модель, на которой основывается наш метод решения. Вместе с тем, для такой модели не разработаны

достаточно простые методы построения календарных и отсеивания нереальных планов, что затрудняет ее использование.

Сетевые и имитационные модели и методы разработаны в этом смысле значительно лучше. Для них имеются основные алгоритмы, реализующие расчет и отсеивание недействительных календарных планов.

При организации оптимизационного алгоритма немаловажное значение имеет выбор метода генерации календарных планов, от которого зависит быстродействие модели и возможность ее использования для организации поиска оптимального плана. Так, для сетевой модели, по-видимому, наилучшим методом генерации планов является метод Форда /1/ и его различные модификации, поскольку эти методы обеспечивают максимальное быстродействие алгоритма. При имитационном моделировании метод генерации плана задан при построении модели, поэтому эффективность имитационной модели следует оценить также и по быстродействию при ее реализации на ЭМ.

Для матричных моделей имеются частные алгоритмы для наиболее простых одномаршрутных задач, в то время как для генерации календарных планов в наиболее общем случае многомаршрутной задачи алгоритмы не разработаны.

Весьма важным вопросом построения оптимизационного алгоритма является выбор метода движения в пространстве планов. Дело в том, что от этого зависит эффективность оптимизационного алгоритма, а во многих случаях и его работоспособность.

Действительно, если метод выбран неудачно, то время достижения оптимума может существенно увеличиться, а в ряде случаев может привести к бесконечным блужданиям в пространстве пла-

нов в результате циклических повторений некоторого количества точек при движении в этом пространстве. Поэтому выбранный метод должен надежно гарантировать нас от таких повторений и выбирать неповторяющиеся точки, т.е. некоторый путь без петель.

Кроме того, как указывалось выше, рядом лежащие точки этого пути должны быть близки, в некотором смысле, друг к другу, т.е. в пространстве планов должна быть введена метрика. В частности, полученная в работе /2/ λ -метрика позволяет классифицировать точки этого пространства и расположить их в некоторый путь, ведущий к цели. Однако полное решение задачи классификации и нумерации точек пространства планов весьма далеко от разрешения.

Помимо этого, поскольку в данной задаче мы имеем дело о хунк-лей дискретного аргумента, и путь приходится выбирать из некоторого весьма большого поля точек, то просмотр этого поля для выбора сколько-нибудь удачной точки - весьма трудная задача даже для ЭВМ. По-видимому, здесь необходимо ограничивать просматриваемое поле для выбора очередной точки в пространстве поиска, чтобы уменьшить время работы алгоритма.

Ниже мы рассмотрим подробно решение всех этих вопросов при описании алгоритма, решающего задачу оптимизации календарных планов.

II. Задача оптимального календарного планирования, как отмечалось выше, в общем случае является стохастической задачей, поскольку основные параметры ее имеют вероятностные характеристики. Так, например, работа оборудования и движение



заготовок в цехе характеризуется следующими вероятностными характеристиками: средним межремонтным временем работы оборудования; средним временем выполнения ремонта станков, вероятностными распределениями времени поступления заготовок на обработку и т.д. В случае, если необходимо учесть более тонкие особенности работы производственной системы, приходится включать в исходную модель дополнительные числовые характеристики вероятностных параметров задачи.

Помимо статистической постановки задачи оптимального календарного планирования существует также детерминированная постановка задачи, в которой вероятностные характеристики заменены их средними значениями. При этом детерминированная задача может стать стохастической при включении в нее хотя бы одной вероятностной характеристики. Действительно, достаточно в детерминированной задаче, построенной на усредненных параметрах, моделировать только время выполнения операции по определенному закону распределения вероятностной величины, чтобы задача превратилась в статистическую и вместо одного оптимального времени выполнения всех операций мы получим некоторое распределение времени выполнения этих операций.

Рассмотрим наиболее общую постановку детерминированной многомаршрутной задачи оптимального календарного планирования, в которой движение деталей через обрабатывающие станки осуществляется по различным маршрутам.

Пусть необходимо найти календарный план $G = \{t_H(i, j)\}$ работы некоторого производства, причем задано множество дета-



лей (партий деталей), подлежащих обработке на заданном множестве станков.

План $G = \{t_H(i, j)\}$ должен оптимизировать некоторый функционал $\mathcal{F}(G)$ и удовлетворять ряду ограничений.

Чтобы сформулировать эти ограничения, введем следующие обозначения:

$t_H(i, j)$ - момент начала обработки операции $O(i, j)$;

где i - номер некоторой детали, $i = \overline{1, n}$;

j - номер операции этой детали, $j = \overline{1, m_i}$;

где m_i - общее количество операций детали i ;

$t_K(i, j)$ - момент окончания обработки операции $O(i, j)$;

$t(i, j)$ - продолжительность выполнения операции $O(i, j)$;

$m_{i,j}$ - номер группы оборудования, на которой выполняется данная операция $O(i, j)$;

D_i - технологический маршрут обработки детали (порядок прохождения операций).

С учетом введенных обозначений ограничения для многомаршрутной задачи календарного планирования могут быть сформулированы следующим образом:

1. Каждая операция выполняется только на полном рабочем месте (станке)

$$O(i, j) \in m_j.$$

2. Каждый станок может выполнять не более, чем одну операцию

$$t_K(i_1, j_1) \leq t_H(i_2, j_2).$$

3. Каждая операция, однажды начатая, доводится до конца

$$t_K(i, j) = t_H(i, j) + t(i, j).$$

4. Каждая операция должна быть завершена прежде, чем начнется последующая

$$t_K(i, j) \leq t_H(i, j+1).$$

5. Каждая деталь обрабатывается в строгом технологическом порядке

$$D_i = \{O(i, 1), O(i, 2), \dots, O(i, m)\}.$$

6. Время перехода от одной операции к другой пренебрежимо мало.

Кроме перечисленных, могут существовать дополнительные ограничения, применяемые в каждом конкретном случае.

III. Для решения поставленной задачи необходимо задать некоторую исходную информацию. Исходная информация по технологии обработки деталей задается в виде упорядоченной матрицы, называемой технологической матрицей

$$T = \| m_{i,j}, t(i,j) \|.$$

Каждый элемент матрицы T представляет собой упорядоченную пару или конечное число чисел. В данном случае матрица T состоит из пар чисел, первое из которых указывает группу оборудования или станок, на котором выполняется опе-

рация $O(i, j)$, а второе число дает время обработки операции $O(i, j)$ на этом станке. В это время обычно включается подготовительно-заключительное время на деталь или партию.

Решение задачи представляется в виде некоторой матрицы, характеризующей последовательность запуска деталей,

$$A = \| m_{i,j}, t_n(i,j) \|.$$

В матрице A каждый элемент есть упорядоченная пара чисел. Если элемент матрицы A находится на пересечении i -ой строки и j -го столбца, то это означает, что i -ая по порядку обработки операция i -ой детали запускается в производство в момент времени $t_n(i, j)$ на станке с номером $m_{i,j}$.

Расписание, полученное в виде матрицы A , должно быть оптимальным в смысле принятого критерия оптимизации и в этом смысле

$$A \{ t_n(i,j) \} \sim G \{ t_n(i,j) \}.$$

Кроме того полученное решение G должно удовлетворять принятым ограничениям, сформулированным выше.

Таким образом, нами сформулирована универсальная многомаршрутная задача календарного планирования, которая охватывает ряд конкретных производственных ситуаций.

Следует заметить, что в данной задаче исходная и выходная информация формируется в виде матриц, в связи с чем алгоритм

решения, построенный на преобразовании, матриц должен быть значительно проще, чем такой же алгоритм, основанный на методах преобразования сетевых моделей.

В первом случае значительно уменьшается количество машинных операций на преобразование исходной и выходной информации.

Ниже мы рассмотрим алгоритм оптимизации календарных планов для многомаршрутной задачи общего вида, основанный на матричных методах.

Разработанный нами алгоритм оптимизации календарных планов включает также алгоритм выделения нереализуемых планов, которые возникают при моделировании последовательности обработки деталей на различных станках. Этим значительно ускоряется время работы алгоритма. Другие основные элементы алгоритма описаны нами выше.

Перейдем непосредственно к рассмотрению алгоритма оптимизации календарных планов.

1У. Прежде всего остановимся на вопросах организации хранения информации для оптимизационного алгоритма.

Исходная информация для работы алгоритма задается с помощью технологической матрицы T и матрицы Π последовательности обработки деталей на каждой группе оборудования. Поскольку в многомаршрутной задаче календарного планирования каждому допустимому расписанию можно поставить в соответствие набор из m_i различных последовательностей из n натуральных чисел $1, 2, \dots, n$, каждая из которых указывает порядок обработки деталей на некотором станке, то i -ая последовательность натуральных чисел Π_i укажет порядок обработки деталей на i -ом станке, и матрица Π запишется в виде

$$\Pi = \left\| \begin{array}{cccc} j_1^1 & j_2^1 & \dots & j_{K_1}^1 \\ j_1^2 & j_2^2 & \dots & j_{K_2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_1^m & j_2^m & \dots & j_{K_m}^m \end{array} \right\|$$

где $\mathcal{P}_i = (j_1^i, j_2^i, \dots, j_{K_i}^i)$, а $j_{K_i}^i$ — некоторое натуральное число (номер детали).

Таким образом, последовательность \mathcal{P}_i показывает в каком порядке следуют детали при обработке на i -ом станке.

Алгоритм оптимизации календарных планов состоит из 26 этапов. На первом этапе организуется ввод исходной информации, содержащейся в технологической матрице T . С помощью второго этапа формируется методом Монте-Карло матрица последовательности обработки детали Π .

С помощью этапов с 12 по 22 производится формирование конкретного календарного плана и его расчет. Результатом работы этих этапов является полностью сформированная выходная матрица A .

В последующих этапах 23-26 осуществляется проверка на число реализации n , если заданное число реализаций выполнено, выбирается и печатается наилучший план G , после чего алгоритм оканчивается.

Прежде чем приступить к изложению поэтапной блок-схемы разработанного нами алгоритма, следует определить место пос-



ледного среди аналогичных, ранее разработанных методик и принципиальных подходов. Как известно, в настоящее время алгоритмизация разномаршрутной задачи календарного планирования осуществляется, в основном, на основе эвристических методов с использованием детерминированных либо рандомизированных правил предпочтения. Подобные подходы, несмотря на простоту и удобство алгоритмизации, нередко приводят к выработке квазиоптимального решения, существенно отличающегося от искомого. В классической работе /3/ описан несколько иной подход, сводящийся к комбинации подалгоритмов отсеивания недопустимых планов и построения матрицы расписаний на основе применения метода Форда к сетевой модели. Последняя получается с помощью преобразования матрицы случайным образом смоделированного расписания.

Рассматриваемый ниже комплексный алгоритм использует применяемую в /3/ идею отсеивания, однако представляет собой существенную модификацию разработанных ранее методических подходов, отличаясь от них следующим:

1) подалгоритм построения матрицы расписаний (календарного плана) основан не на использовании сетевых моделей, а на специальной модификации, связанной с преобразованием технологической матрицы и матрицы расписаний. Последнее существенно повышает быстродействие метода;

2) настоящий алгоритм может быть использован в комбинации как с методом ненаправленного, так и с методом направленного (локального) случайного поиска;

3) данный алгоритм, насколько известно автору, является первым опытом комплексной алгоритмизации классической многомаршрутной задачи (ранее опубликованные исследования носят лишь методологический характер и не доведены до машинной ре-



ализации на ЭВМ).

В основном, правила остановки при движении системы в пространстве планов выбираются исходя из качественных и экономических предпосылок работы алгоритма. Действительно, если необходимо быстро завершить поиск и найти приближенное значение оптимального плана, то достаточно обследовать некоторое выбранное заранее количество точек и на этом завершить поиск.

В основном варианте алгоритма мы приняли упомянутый метод поиска, в котором опытным путем назначается число шагов N_1 алгоритма до остановки, а после завершения этого числа шагов движение в пространстве поиска прекращается и печатается информация о достигнутом на этом пути локально-оптимальном плане.

Для этого выполняется проверка на окончание реализации заданного числа шагов N_1 и содержимое счетчика S_1 сравнивается с N_1

$$\langle S \rangle \geq N_1,$$

где фигурные скобки $\langle \rangle$ обозначают содержание счетчика S .

Если условие выполняется, то переходим к следующему этапу. В противном случае, заданное число шагов еще не пройдено, и осуществляется возврат на этап II для моделирования матрицы Π .

Такой метод поиска экономически оправдан, т.к. результат может быть получен через достаточно короткое время.

Вместе с тем, чтобы получить качественно лучший результат, необходимо вести поиск до тех пор, пока не будет получен лучший результат по критерию оптимальности, чем априори заданный.

либо не будет достигнута граница области существования планов. Для этих целей применяются методы поиска, из которых наиболее действенным для моделей календарного планирования является метод случайного поиска.

В целом, задача поиска формулируется следующим образом. Требуется найти в пространстве поиска H точку, определяемую вектором X^* , в которой функция качества достигает экстремума (пусть для определенности минимума)

$$F_{\min} = F(X^*) \leq F(X).$$

На вектор X накладываются определенные ограничения, в которые включается также граница области. Эти ограничения формулируются в виде системы неравенств

$$h_i(X) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots)$$

Точку X^* называют также целью.

Для отыскания X^* необходимо найти путь, которым ведет из начальной точки X_0 в цель. Очевидно, что исходной информации для нахождения этого пути недостаточно и следует собрать дополнительную информацию о поведении $F(X)$ при изменении X . Такую дополнительную информацию дает поиск, который позволяет выбрать целесообразное направление движения.

Наилучший метод поиска должен отличаться от остальных методов минимальными затратами на поиск, которые, в основном, сводятся к временным затратам на вычисление функции и на изменение положения точки в пространстве поиска.



УДК 62-50
СИБИРСКИЙ ЦЕНТР
НАУКИ И ТЕХНИКИ

Чтобы применить алгоритм поиска, необходимо в дискретном пространстве планов задать некоторую метрику.

Как известно, задать метрику - это значит ввести понятие расстояния в пространстве перестановок, которое является областью определения некоторого множества планов и, кроме того, это значит установить соответствие между некоторой матрицей перестановок и вектором определяющим точку в многомерном пространстве перестановок. Или, иначе, имея матрицу перестановок (в нашем случае это матрица Π), необходимо вычислить вектор той же размерности, характеризующий эту матрицу и дающий отображение матрицы в точку многомерного пространства.

Кроме того, получив точку многомерного пространства, необходимо по ней найти соответствующую ей матрицу.

Не останавливаясь на вычислительных процедурах таких преобразований, рассмотрим достаточно эффективный алгоритм непрерывного самообучения, который позволяет пройти область определения исследуемой функции и найти экстремальные точки. Это один из алгоритмов случайного поиска - алгоритм глобального поиска с направляющим конусом /4/. Данный алгоритм уже был рассмотрен нами в /2/ при разработке алгоритма случайного поиска оптимального расписания на основе λ -метрики для одномаршрутной задачи. В случае многомаршрутной задачи идейная сторона вопроса остается без изменения.

Как отмечалось выше, алгоритм сводится к следующему. Из некоторой начальной точки X_0 делается m случайных пробных шагов

$$a\xi^1, a\xi^2, \dots, a\xi^m$$



При этом полагаем

$$a\xi^{\kappa} = (a_1\xi_1^{\kappa}, a_2\xi_2^{\kappa}, \dots, a_n\xi_n^{\kappa}), \quad \kappa = \overline{1, m},$$

где a_i - шаг по i -ой координате.

ξ_i^{κ} - случайное число, равномерно распределенное на интервале $(-1, 1)$.

Первый рабочий шаг делается в направлении наилучшего пробного шага, т.е. такого, которому соответствует значение функции качества

$$\mathcal{F}(X_1) = \mathcal{F}(X_0 + a\xi^*) = \min_{\kappa} \{ \mathcal{F}(X_0 + a\xi^{\kappa}) \}.$$

Второй и последующие шаги делаются следующим образом.

Продолжаем вектор $a\xi^*$ и обозначим его вектором W_1 .

Вектор W_1 определяет в пространстве многомерный конус с вершиной в точке X_1 и углом раскрытия $\psi = \text{const}$.

Из точки X_1 в пределах конуса делается m случайных проб.

Значения функции качества в этих точках сравниваются со значением $\mathcal{F}(X_1)$ и выбирается из них наименьшее; при этом точка, в которой это значение найдено, обозначается как X_2 .

В эту точку делается второй рабочий шаг. Ось конуса совмещается с направлением рабочего шага, после чего снова делается пробных шагов внутри конуса с новым положением оси и т.д.



Попадание некоторой точки O конуса на N -ом шаге определяется условием

$$\cos(W_N, \hat{a} \xi^k) \geq \cos \frac{\psi}{2}.$$

Если в процессе поиска какая-либо точка не удовлетворяет этому условию, то она отбрасывается.

В процессе поиска затмеваются точки с минимальными значениями функции и начальная точка.

Описанный алгоритм обладает рядом свойств, позволяющих ему автоматически "проходить" все пространство поиска от начала до конца. Это, во-первых, сужение конуса при движении вверх: оно позволяет ему двигаться "вверх", не сползая опять "вниз", и, во-вторых, расширение конуса при движении "вниз" (позволяет быстрее спускаться "вниз"). Естественно, что понятия "зверх" и "низ" весьма относительны для многомерного пространства.

Как нетрудно заметить, алгоритм позволяет отыскать некоторый глобальный экстремум или, во всяком случае, выявить место в пространстве, где оно может находиться.

Чтобы применить описанный метод к разрабатываемому алгоритму оптимизации календарных планов, необходимо видоизменить этапы II и XXV.

Вместо этапа II необходимо реализовать вычисление матрицы Π на основании вектора, вычисленного на очередном шаге работы алгоритма поиска.

Вместо этапа XXV производится размещение основной части алгоритма глобального поиска с рядом выходов на этап II.



Такие выходы позволяют после каждого изменения положения тора-точки в пространстве поиска перейти к вычислению конкретной матрицы Π характеризующей эту точку, и вычислить значение оптимизируемой функции. В целом, организация глобального поиска в пространстве планов несколько усложняет алгоритм и увеличивает время его работы. Однако существенно улучшаются качественные характеристики алгоритма оптимизации, что весьма важно для проведения поисковых расчетов при долгосрочном планировании работ и в исследовательских целях.

Поступила 12. II. 1981 г.

Кафедра экономической
кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Форд, Д. Фалкерсон. Потоки в сетях, "Мир", 1966.
2. О. И. Кварацхелия. Модель локальной оптимизации для одномаршрутной задачи календарного планирования. Труды ТГУ, серия Прикл. мат. и киберн., т. 212, 1980.
3. Д. И. Голенко. Статистические методы управления производством, "Статистика", 1973.
4. Ю. Я. Тарнопольский. Алгоритмы глобальной оптимизации методом случайного поиска, сборник "Алгоритмы и программы случайного поиска", Рига, "Зинатне", 1969.



224, 1981

მშენებლის მრეწველობის ნიადაგი რეკონსტრუქციის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის მრეწველობის

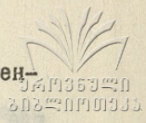
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ОТСЧЕТОВ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ
ХАРАКТЕРИСТИК ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
МИКРОСХЕМ

Н.С.Кобуладзе

Постановка проблемы

Как известно, состояние объекта, при котором он способен выполнять требуемые функции, сохраняя значения основных параметров в установленных пределах, принято называть работоспособностью. Событие же, заключающееся в нарушении работоспособности объекта, трактуется как отказ.

В процессе эксплуатации электронной схемы её элементы испытывают воздействие как внешних факторов (температура, влажность, радиация, вибрация, ускорения и т.п.), так и внутренних (молекулярные изменения, внутренние напряжения и др.). Эти факторы могут варьироваться в довольно широких пределах, что приводит к изменению физических свойств материалов элементов, а, следовательно, и их параметров. В свою очередь это влечет за собой изменение выходной характеристики схемы. По особенностям изменения этой характеристики до момента наруше-



ния работоспособности схемы различают внезапные и постепенные отказы.

Внезапный отказ возникает при скачкообразном изменении значений одного или нескольких параметров схемы, и при этом он является полным, т.е. после возникновения такого отказа использование электронной схемы по назначению невозможно до восстановления ее работоспособности. Кроме того, внезапный отказ нельзя предсказать заранее с абсолютной достоверностью.

Постепенный же отказ схемы связан с постепенным изменением значения её выходного параметра, т.е. с его деградацией, или дрейфом.

Постепенный отказ может быть предотвращен, по крайней мере в принципе, если учитывать возможные изменения параметра за определенное время, в отличие от внезапного отказа, который нельзя ни точно предсказать, ни полностью исключить.

Свойство электронной схемы непрерывно сохранять состояние, при котором отсутствуют постепенные отказы, можно назвать для краткости параметрической безотказностью, а надежность её, определяемую этим свойством, — параметрической.

В качестве количественной меры параметрической надежности электронной схемы часто принимают вероятность $R(t)$ того, что её выходная характеристика $X(t)$, трактуемая как случайный процесс, находится в заданных пределах X_{min} и X_{max} в фиксированный момент времени t .

Легко видеть, что

$$R(t) = \int_{X_{min}}^{X_{max}} \varphi(x, t) dx, \quad (1)$$



где $\varphi(x, t)$ - одномерная плотность распределения случайного процесса $X(t)$ для момента времени t .

Для определения $\varphi(x, t)$, обычно, наблюдают за ансамблем однотипных электронных схем и, производят замеры параметра X у всех образцов в данный момент времени. В результате определяют значение вероятности $R(t)$ в ряде фиксированных точек $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n$. Поэтому, естественно, возникают задачи как интерполяции зависимости $R(t)$ в области $(0; t_n)$, так и её экстраполяции для значений $t > t_n$. Словом, приходим к проблеме прогнозирования параметрической надежности.

В данной работе ставится частная задача, относящаяся к этой проблеме: определение интервалов времени между точками расчета функции $R(t)$.

Совершенно очевидно, что интервал между моментами отсчета должен выбираться таким, чтобы корреляционная связь между значениями случайного процесса на концах этого интервала еще обнаруживалась. Этим будут уменьшены ошибки при расчете функции $R(t)$.

Ограничения

Для решения сформулированной задачи допустим, что случайный процесс $X(t)$ аддитивен и представляется в виде

$$X(t) = d(t) + \xi(t), \quad (2)$$

где $d(t)$ - детерминированная часть процесса, называемая



трендом, а $\xi(t)$ - стационарный эргодический процесс

Тогда определение интервалов между точками сечения функции

$X(t)$ должно проводиться с учетом составляющей $\xi(t)$.

Последнее обстоятельство существенно облегчает решение задачи, поскольку свойства стационарных эргодических процессов хорошо изучены.

Метод решения

За исходную идею при решении задачи целесообразно взять вытекающий из теоремы Котельникова вывод о том, что интервал времени между последовательными моментами отсчета должен составлять не более, чем

$$\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}}, \quad (3)$$

где f_{\max} - максимальная частота в спектре процесса $\xi(t)$.

Для нахождения f_{\max} должна быть известна так называемая функция корреляции $B(\tau)$, являющаяся мерой корреляции между значениями $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ случайного процесса

$\xi(t)$, разделенными интервалом

$$|t_2 - t_1| = \tau, \quad (4)$$

Согласно определению,

$$B(\tau) = M[\xi(t) \cdot \xi(t-\tau)]. \quad (5)$$

Полагают, что для полупроводниковых приборов



где $C = B(0)$; α и β параметры могут быть определены по результатам экспериментальных данных методом наименьших кадров.

Функция $B(\tau)$ необходима для вычисления т.н. статистического спектра $G(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$.

Статистический спектр $G(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$ выражается через $B(\tau)$ формулой Хинчина [2/

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} dt, \quad (7)$$

если процесс $\xi(t)$, во-первых, стационарен в широком смысле и, во-вторых, эргодичен.

Стационарность в широком смысле означает, что:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}[\xi(t)] &= \xi_0 = \text{Const} \\ \mathcal{M}[\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)] &= B(t_1, t_2) = B(\tau). \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где t_1 и t_2 - любые произвольно взятые моменты времени.

Свойство же эргодичности состоит в том, что средние по множеству с вероятностью единицы равны средним по времени, взятым по любой реализации процесса $\xi(t)$. Если усреднение по времени обозначить чертой сверху, то условие эргодичности можно записать в следующем виде:



$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{M}[\xi(t)] &= \overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \\
 \mathcal{B}(\tau) &= \mathcal{M}[\xi(t) \cdot \xi(t-\tau)] = \\
 &= \overline{\xi(t) \xi(t-\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \cdot \xi(t-\tau) dt
 \end{aligned} \right\} (9)$$

Последние формулы могут быть использованы для получения оценок $\hat{\mathcal{M}}[\xi(t)]$ и $\hat{\mathcal{B}}(\tau)$ величин $\mathcal{M}[\xi(t)]$ и $\mathcal{B}(\tau)$ соответственно при достаточно большом интервале T наблюдения за конкретной реализацией $\xi(t)$:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\mathcal{M}}[\xi(t)] &= \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \\
 \hat{\mathcal{B}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \cdot \xi(t-\tau) dt
 \end{aligned} \right\} (9')$$

При практических расчетах, обычно, интегралы в (9') заменяют конечными суммами. Для этого интервал T наблюдения разбивают на m равных частей длиной θ ($T = m\theta$) и за значения случайной функции $\xi(t)$ на отрезках θ принимают её значения в середине участка. Таким образом,

$$\hat{\mathcal{M}}[\xi(t)] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi(t_i), \quad (10)$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\tau) = \frac{1}{m\ell} \cdot \sum_{i=1}^{m-\ell} \xi(t_i) \cdot \xi(t_{i+\ell}), \quad (11)$$

где
$$\ell = \frac{\tau}{\theta} = \frac{m\tau}{T}. \quad (12)$$

Так как функция корреляции $B(\tau)$ стационарного эргодического случайного процесса $\xi(t)$ является четной функцией своего аргумента τ , то формула (7) может быть записана в вещественной форме через косинус-преобразование Фурье:

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (13)$$

Подставляя выражение (6) в последнюю формулу, рассчитаем статистический спектр процесса $\xi(t)$:

$$G(\omega) = \frac{2C}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot \cos \beta\tau \cdot \cos \omega\tau d\tau. \quad (14)$$

После несложных преобразований из (14) получим

$$G(\omega) = \frac{\alpha C}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right].$$

Последнему соотношению можно придать и следующий вид:

$$G(\omega) = \frac{2\alpha C}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}. \quad (15)$$

Из условия

$$\frac{dG(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (16)$$

найдем ту частоту ω_0 , на которой $G(\omega)$ достигает

максимального значения

$$G_{\max} = G(\omega_0).$$

Легко убедиться в том, что условие (16) дает:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \omega_0^2 = 2\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (16^I)$$

откуда

$$\omega_0^2 = 2\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - (\alpha^2 + \beta^2). \quad (17)$$

Следовательно,

$$G_{\max} = \frac{2\alpha c}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega_0^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega_0^2) - 4\beta^2\omega_0^2}. \quad (18)$$

Учитывая здесь (16^I), после несложных преобразований получим:

$$G_{\max} = \frac{\alpha c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\pi\beta [\alpha^2 + \beta^2 - \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}]} \quad (19)$$

Частоту ω_{\max} , ограничивающую статистический спектр процесса $\xi(t)$, найдем из условия

$$G^*(\omega_{\max}) = \eta \cdot G_{\max},$$

где η ($0 < \eta < 1$)

можно задать равным $1/\sqrt{2} = 0,707$.



Таким образом, ω_{max} определяется как корень уравнения

$$G(\omega_{max}) = G_{max} / \sqrt{2}. \quad (20)$$

что в явной форме даёт

$$\frac{2\alpha C}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega_{max}^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega_{max}^2) - 4\beta^2 \omega_{max}^2} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}.$$

После элементарных преобразований отсюда получим:

$$z^2 - \left(4\beta^2 + \frac{2\sqrt{2}\alpha C}{\pi G_{max}}\right) \cdot z + 4\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

где

$$z = \alpha^2 + \beta^2 + \omega_{max}^2; \quad (21)$$

следовательно,

$$\omega_{max} = \left[\left(2\beta^2 + \frac{\sqrt{2}\alpha C}{\pi G_{max}} \right) + \sqrt{\left(2\beta^2 + \frac{\sqrt{2}\alpha C}{\pi G_{max}} \right)^2 - 4\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2)} \right]^{1/2}$$

Поскольку, с другой стороны,

$$\omega_{max} = 2\pi f_{max},$$

из формулы (3) легко получим искомое выражение для интервала

времени между точками расчета функции $R(t)$:

$$\Delta t = \pi \left(2\beta^2 + \frac{\sqrt{2} \alpha C}{\pi G_{max}} \right) +$$

$$+ \sqrt{\left(2\beta^2 + \frac{\sqrt{2} \alpha C}{\pi G_{max}} \right)^2 - 4\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2)}^{-1/2} \quad (22)$$

где G_{max} определяется формулой (19).

Окончательно для Δt получаем следующее соотношение:

$$\Delta t = \pi \left[(\alpha^2 + 1,83\beta^2) + 2,83\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{(-0,83\beta^2 + 2,83\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 - 4\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)} \right]^{-1/2} \quad (23)$$

Обсуждение результатов

На основании соотношений (19) и (22) вытекает, что величина Δt не зависит от параметра C и полностью определяется значениями α и β .

Поскольку условие (20) носит эвристический характер и из каких общих законов не вытекает, то, разумеется, и окончательная формула в какой-то мере является эвристической.

Соотношение (23) было использовано для выходных параметров ИЭС 1ЛВШАВ. На испытание были поставлены 25 приборов и через каждые 250 часов (в течение 7000 ч.) измерялись выходное напряжение, соответствующее логическому нулю $U_{вых}^0$, и ток холостого хода $I_{хх}$.



В результате обработки экспериментальных данных с помощью как одной реализации, так и нескольких реализаций одновременно /1/, для параметров функции корреляции выходного напряжения $U_{\text{вых}}^{\circ}$ были получены следующие значения: $\alpha_u = 2,28 \cdot 10^{-4} 1/\text{ч}$ и $\beta_u = 3,28 \cdot 10^{-3} 1/\text{ч}$, а для тока холостого хода $\alpha_y = 9,89 \cdot 10^{-4} 1/\text{ч}$, $\beta_y = 2,1 \cdot 10^{-3} 1/\text{ч}$.

Применение соотношения (23) дало в первом случае $\Delta t_u = 960$ ч, а во втором $\Delta t_y = 860$ ч., что вполне отвечает характеру дрейфа во времени этих параметров.

Поступила 30.УИ.1980

Кафедра радиотехники

ЛИТЕРАТУРА

1. В.С.Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Госиздат технико-теоретической литературы, 1957.
2. А.А.Харкевич. Спектры и анализ. Изд. четвертое. Госиздат физико-математической литературы. М., 1962.
3. Ю.А.Розанов. Случайные процессы. "Наука", М., 1979.
4. В.Л.Авронов, Я.А.Федотов. Испитание и исследование полупроводниковых приборов. "Высшая школа", М., 1975.
5. В.С.Сапрыкин и др. Измерение динамических параметров интегральных схем. "Советское радио", М., 1979.

6. ექობულაძე



ახალგაზრდობის ფორმითი ინფორმაციათა მანათლიერა პარამეტრული
სამხარურობის მახასიათებლების პრობლემატიკისათვის

რეზიუმე

დაშრობში განხილულია მრავალრიცხოვანი ინფორმაციის მიჯრისქების
პარამეტრული სამხარურობის მახასიათებლების პრობლემატიკისა-
თვის ანათლებების პრობლემატიკის ინფორმაციის დაგვიანის ამოცანა.

ინფორმაციის მიჯრისქების გამოსავალი პარამეტრების
პრობლემატიკის ხასიათი გარკვეული მიხარურობით აკმაყოფი-
ლებს სტატისტიკური და ექსპერიმენტი $\xi(t)$ პროცესის პირობებს,
კოორდინატების მეორისი მანათლიერა, ასევე პროცესისათვის პრობლემატიკის
ინფორმაციის მრავალრიცხოვანი ანათლებების პრობლემატიკის მიხარურობით
გამოსავალი:

$$\Delta t = 1/2 f_{max}$$

სადაც f_{max} არის მანათლიერის სიხარურობა $\xi(t)$ პროცესის
საქეობით.

115 111 A-B ინფორმაციის მიჯრისქების გამოსავალი პარამეტრებისათვის
ექსპერიმენტი მანათლიერა მანათლიერა აკმაყოფილებს ინფორმაციის
განა, რომლის საფუძვლებზეც მიღებულია რომ $\Delta t \approx 1000$ სმ-ს, რაც
საქეობით მანათლიერა ამ პარამეტრების პრობლემატიკის ხასიათის.

N. Kobuladze

DETERMINATION OF TIME INTERVAL COUNTS FOR
PROGNOSIS OF PARAMETER RELIABILITY CHARACTERISTICS

Summary

The problem of time interval count setting for prognosis of the parameter reliability character of some integral microcircuits is investigated.

The character of change of the yield parameters of integral microcircuits in time approximately satisfies the conditions of stationary and ergodic processes.

According to the Kotelnikov theorem for such process the time interval Δt between two successive counts is given by the expression

$$\Delta t = 1/2 f_{\max}$$

where f_{\max} is the maximal frequency in the spectrum process.

For 11B111 integral yield parameters, the autocorrelative function was experimentally selected, yielding $\Delta t = 1000$ hrs, which perfectly corresponds to the character of this change of parameters in time.

СО Д Е Р Ж А Н И Е



Н.В.Бокучава, Информационно-статистический подход к вопросу моделирования 5

Н.В.Бокучава, Теория гиббсовских состояний в процессах упорядочения сплавов 13

В.Е.Жуковин, Ф.В.Бурштейн, Диалоговая процедура выбора наилучшего решения по многим критериям эффективности при неполной информации 19

Н.Д.Нанобашвили, Об одном улучшенном варианте схемы сжатия информации 33

Г.Г.Сирбиладзе, Моделирование свойств четырехкомпонентных твердых растворов 54

М.Г.Тхелидзе, Применение метода Шварца к решению первой граничной задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения параболического типа 65

Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе, Приближенная теория ближнего порядка в тройном сплаве *Fe₃AlSi* 71

Д.И.Башалейшвили, Оптимизация процесса измельчения полезных ископаемых с помощью имитационных экспериментов 91

Д.И.Башалейшвили, Имитационное моделирование задач идентификации и анализа смешанной системы 109

Г.Н.Церцвадзе, О скорости установления финального распределения в стационарной случайной среде 119



Т.Г.Гачечиладзе, Т.В.Манджапарашвили, Нечеткие обобщенные распределения Бернулли	126
Н.Д.Нанобашвили, К вопросу информационного подхода при решении линейных уравнений в избыточных классах представителей	146
Н.М.Велиашвили, Л.Л.Чхадзе, Н.В.Шенгелия, Л.В.Шенгелия, К вопросу разработки диалога с ЭВМ на языке, близком к естественному грузинскому языку	161
О.И.Кварацхелия, Алгоритмизация решения многомаршрутной задачи календарного планирования	168
Н.С.Кобуладзе, Определение временных отсчетов при прогнозировании характеристик параметрической надежности интегральных микросхем	186



- Ե.Ծոփապետ, Ուղղորդիչներն սպորտի և ֆիզիկական կրթության ոլորտում -
 ֆիզիկական կրթության մեթոդները 11
- Ե.Ծոփապետ, Երևանի մարզային մարզաժամանակացույցի մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 17
- Գ.Գրիգորյան, Գ.Բաբայան, Կարգադրողական գործընթացների միջ-
 անկյունը ֆուտբոլի մարզում 32
- Ե.Նանոսյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 52
- Գ.Սարգսյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 64
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 70
- Ե.Մանուկյան, Գ.Բաբայան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների
 մասին ընդհանուր տեղեկություններ 88
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 105
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 117
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 125
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 145
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 160
- Ե.Մանուկյան, Կրթության մեջ կիրառվող մեթոդների մասին
 ընդհանուր տեղեկություններ 167



CONTENTS

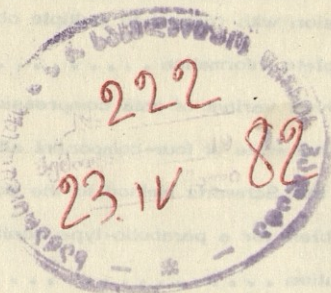
N.Bokuchava, On the informational - statistical approach to modelling	12
N.Bokuchava, The theory of Gibbs in the processes of ordering alloys	18
V.Zhukovin, F.Burshtein, The dialogue procedure of the choice of the best decision with respect to multiple objectives and non-complete information	32
N.Nanobashvili, On an improved variant of data compression.	53
G.Sirbiladze, Modelling of properties of four-component alloys	64
M.Tkheldze, Application of the Schwartz method to the solution of boundary problem for a parabolic-type nonlinear differential equation	70
T.Gachechiladze, T.Mgvdeladze, Approximate theory of short - range order in ternary alloy Fe_3AlCr	89
D.Bashaleishvili, Optimization of the fragmentation process of minerals by the method of simulation experiments	105
D.Bashaleishvili, Simulation modelling of the identification and analysis problems of mixed systems	117
G.Tsertsvadze, On the rate of establishment of final distribution in a stationary random medium	125
T.Gachechiladze, T.Manjaparashvili, Fuzzy generalized binomial distribution	145
N.Nanobashvili, Concerning the information approach in solving linear equation	160
N.Veliashvili, L.Chkhaidze, N.Shengelia, L.Shengelia, On developing a dialogue with a computer in a language close to Georgian	



04.03.57.20
თბ-ილი1933

gian

- Q,Kvaratskhelia, Algorithmization of the solution of the problem of
multiroute calender planning185
- N,Kobuladze, Determination of time interval counts for prognosis
of parameter reliability characteristics



Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр.И. Чавчавадзе,14

Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, просп.И. Чавчавадзе,1.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,

თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი,14

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,

თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი. I.

86-81

82-222

