თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ა. ელიბერიძე, ზ. ნაცვლიშვილი, ა. კვალიაშვილი

წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1985

ნაშრომი შედგენილია წრფივი ალგებრისა და წრფივი დაპროგრამების კურსის პროგრამით გათვალისწინებული საკითხების შესაბამისად. მასში გაშუქებულია წრფივი ალგებრისა და წრფივი დაპროგრამების თეორიის ელემენტები, ამოხსნილია ტიპური ამოცანები და მოცემულა სავარჯიშოები სტუდენტთა დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

წიგნი განკუთვნილია დამხმარე სახელმძღვანელოდ პოლიტექნიკური ინსტიტუტის საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის, აგრეთვე დახმარებას გაუწევს უნივერსიტეტის ეკონომიკური სპეციალობის სტუდენტებსაც.

რედაქტორი ა. ჭვარშეიშვილი
რეცენზენტები: ჯ. გიორგობიანი
ნ. პავლიაშვილი

$E\,\frac{1702030000}{M\,608\,(06)\quad 85}$

შესავალი

გადაწყვეტილების მიღება ადამიანს სჭირდებოდა უხსოვარი დროიდან; გადაწყვეტილებას იღებდა და იღებს თითქმის ყველა პროფესიის ადამიანი ყოველდღიურ საქმიანობაში. რა თქმა უნდა, თუ გვაქვს ასარჩევ ვარიანტთა გარკვეული რაოდენობა ვცდილობთ ავირჩიოთ ის ვარიანტი, რომელიც გარკვეული მოსაზრებით „უკეთესია“ სხვა ვარიანტებთან შედარებით.

„უკეთესობა“ უნდა გვესმოდეს არა როგორც ზოგადი ცნება, არამედ უნდა გვქონდეს საშუალება გამოვხატოთ იგი რაოდენობრივად და შეგვეძლოს შევადაროთ კიდეც ერთმანეთს.

გადაწყვეტილების მიღება უნდა ხდებოდეს სწრაფად, ოპერატიულად. სწორედ მაშინ იქნება ის ეფექტური.

ვარიანტთა რაოდენობა, საიდანაც ხდება საუკეთესოს შერჩევა, როგორც წესი, ძალზე დიდია და თანამედროვე გამომთვლელი მანქანების გარეშე ამ ამოცანის წარმატებით გადაჭრა თითქმის შეუძლებელია. სწორედ ამიტომ ამ ბოლო დროს უფრო გაფართოვდა კლასი ამოცანებისა, რომლებიც წარმატებით იხსნება გამოთვლითი ტექნიკის დახმარებით.

ერთ-ერთი ასეთი კლასი ამოცანებისა დაკავშირებულია დაგეგმვის ამოცანებთან. იყო დრო, როდესაც დაგეგმვაში გამოიყენებოდა მხოლოდ ცალკეულ პირთა გამოცდილება და ინტუიცია. თანამედროვე პირობებში, როდესაც გვაქვს ასარჩევ ვარიანტთა დიდი რაოდენობა, მხოლოდ გამოცდილება და ინტუიცია ვერ მოგვცემს საუკეთესო შედეგს. საჭირო ხდება ზუსტი ეკონომიკური მეცნიერების ჩამოყალიბება. კ. მარქსის აზრით „ეკონომიკა, როგორც მეცნიერება მხოლოდ მაშინ იქნება სრულყოფილი, როდესაც ის გამოიყენებს მათემატიკას“.

მათემატიკური დაპროგრამება, როგორც მეცნიერება, ჩაისახა მე-19 საუკუნის ოცდაათიან წლებში, ხოლო 1931 წელს უნგრეთში გამოქ-

ვეყნდა შრომა, რომელიც ეხებოდა სატრანსპორტო ამოცანის კერძო შემთხვევის ამოხსნას.

ამ მიმართულებით ერთ-ერთი პირველი შრომები მიეკუთვნება ლ. ვ. კანტოროვიჩს, რომელმაც 1939 წელს გამოიყენა წრფივი დაპროგრამების მეთოდები საწარმოო პროცესის ოპტიმალური ვარიანტის შედგენის დროს.

1949 წელს დანცინგმა გამოაქვეყნა შრომა გეგმის თანდათანობითი გაუმჯობესების შესახებ. შემდეგში შეიქმნა და დამუშავდა მეთოდები, რომლებიც იძლევიან ოპტიმალური ამოხსნის ეფექტურ საშუალებებს სხვადასხვა კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისათვის.

წრფივი დაპროგრამება, როგორც მათემატიკური დაპროგრამების ერთ-ერთი დარგი, იყენებს წრფივი ალგებრის საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია წრფივ განტოლებათა და წრფივ უტოლობათა სისტემის შესწავლასთან. წიგნის პირველ ნაწილში მოცემულია წრფივი ალგებრის ელემენტები. მეორე ნაწილში კი ზოგიერთი ისეთი ამოცანაა განხილული, რომლებიც ამოიხსნება წრფივი დაპროგრამების მეთოდებით. აქვე მოცემულია ის მეთოდები, რომლებიც ძირითადად გამოიყენებიან ამ ამოცანების ამოხსნისათვის.

გადმოცემული მასალის გართულების თავიდან აცილების მიზნით ზოგჯერ თეორემა მოყვანილია დაუმტკიცებლად.

წიგნში განხილული ზოგიერთი მაგალითი აღებულია დასახელებული ლიტერატურიდან.

პირველი თავი

დეტერმინანტთა თეორია

§ 1. მატრიცის ცნება

m და n ნატურალური რიცხვებისათვის განვიხილოთ რაიმე რიცხვთა mn ერთობლიობა ჩაწერილი m სტრიქონის და n სვეტის

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მქონე მართკუთხა ცხრილის სახით. ამ ცხრილს ეწოდება $m \times n$ *განზომილებიანი მატრიცა*.

a_{ij} რიცხვები არიან A მატრიცის ელემენტები. i და j არიან შესაბამისად იმ სტრიქონის და სვეტის ნომრები, სადაც მოთავსებულია a_{ij} ელემენტი $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$.

თუ მატრიცაში სტრიქონებს და სვეტებს გადავანაცვლებთ, მივიღებთ მოცემული მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას. A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა აღინიშნება A'-ით:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ცხადია, რომ A' მატრიცის სტრიქონების და სვეტების რიცხვი ტოლი იქნება შესაბამისად A მატრიცის სვეტების და სტრიქონების რიცხ-

ვის, ე. ი. თუ a'_{ij} -ით აღვნიშნავთ A' მატრიცის i-ური სტრიქონის და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომ ელემენტს, მაშინ

$$a'_{ij}=a_{ji},$$

სადაც a_{ji} არის A მატრიცის j-ური სტრიქონის და i-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომი ელემენტი.

თუ $m=n$, მაშინ გვექნება

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

კვადრატული მატრიცა, რომლის a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} ელემენტები ქმნიან ე. წ. მ თ ა ვ ა რ დ ი ა გ ო ნ ა ლ ს, ხოლო $a_{1n}, \dots, a_{n1}$ ელემენტები — ფ ე რ დ ი თ დ ი ა გ ო ნ ა ლ ს.

§ 2. მატრიცათა კლასიფიკაცია

კვადრატული მატრიცებიდან შეიძლება გამოვყოთ: ნულოვანი, ერთეულოვანი, დიაგონალური, სკალარული, სიმეტრიული, შებრუნებული და სამკუთხა მატრიცები.

1. თუ მატრიცის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ მას ეწოდება ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი მ ა ტ რ ი ც ა და აღინიშნება ასე:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. კვადრატულ მატრიცას ეწოდება დ ი ა გ ო ნ ა ლ უ რ ი, თუ მისი მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი ტოლია ნულის.

დიაგონალური მატრიცის მაგალითია:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. თუ დიაგონალური მატრიცის მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია, მაშინ მას ეწოდება სკალარული მატრიცა:

$$B=\begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

4. ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება სკალარული მატრიცის კერძო შემთხვევას, როცა $k=1$ და აღინიშნება E ასოთი:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

5. თუ კვადრატული მატრიცის ელემენტები მთავარი დიაგონალის მიმართ განლაგებული არიან სიმეტრიულად და ამავე დროს მისი ყველა ელემენტისათვის $a_{ik}=a_{ki}$ $(i,k=1,2,\dots,n)$ მაშინ მას ეწოდება სიმეტრიული მატრიცა.

მაგალითად,

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & -2 & 10 \\ 1 & -4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

სიმეტრიული მატრიცაა.

6. ახლა განვიხილოთ ისეთი მატრიცა, რომლის მთავარი დიაგონალის ერთ მხარეს მოთავსებული ყველა ელემენტი ტოლია ნულის:

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ან } N=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ასეთ მატრიცას სამკუთხა მატრიცა ეწოდება.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ mn მატრიცა შეიცავს m სტრიქონს და n სვეტს. ყოველ სტრიქონში არის n ელემენტი და ყოველ სვეტში m ელემენტი.

განვიხილოთ A მატრიცის რაიმე j-ური სვეტი

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ცხადია, ეს სვეტი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთსვეტიანი და m სტრიქონიანი მატრიცა. ასეთი მატრიცების შესწავლის მიზნით გამოვიყენოთ უფრო მარტივი ჩანაწერი:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ყველა $a_k=0$ $(k=1,2,\dots,m)$, მაშინ გვექნება ნულოვანი სვეტი.

ვთქვათ გვაქვს ორი A და

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

სვეტი. თუ $a_k=b_k$ ყველა $k=1, 2,\dots, m$-სათვის, მაშინ ეს მატრიცა-სვეტები ტოლია და წერენ $A=B$.

სვეტებზე შემოვიღოთ ოპერაციები:

1. A სვეტის ყველა ელემენტი გავამრავლოთ რაიმე მუდმივ c რიცხვზე. მივიღებთ ახალ

$$cA = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_m \end{pmatrix}$$

სვეტს, რომელსაც ეწოდება A სვეტის c მუდმივზე ნამრავლი და აღინიშნება cA-თი. ცხადია თუ $c=0$, მაშინ $cA=0$.

2. ორი A და B სვეტის ჯამი იქნება ისეთი სვეტი, რომლის ელემენტები წარმოადგენენ შესაბამის ადგილებზე მდგომი ელემენტების ჯამს, ე. ი.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{pmatrix}.$$

3. ვთქვათ გვაქვს n სვეტი:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

და n ნამდვილი რიცხვი: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. გავამრავლოთ A_1 სვეტი c_1-ზე; A_2 სვეტი c_2-ზე და ა. შ. A_n სვეტი c_n-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$c_1A_1+c_2A_2+ \ldots +c_nA_n \tag{4}$$

სვეტს, რომელსაც ეწოდება $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტების წრფივი კომბინაცია, ხოლო $c_1, c_2, \ldots c_n$-ს წრფივი კომბინაციის კოეფიციენტები.

ვთქვათ $A_1, A_2, \ldots A_n$ სვეტებთან ერთად მოცემულია ისეთი B სვეტი, რომ

$$B=c_1A_1+c_2A_2+ \ldots +c_nA_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

მაშინ B სვეტი არის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტების წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ აც ი ა, ან B წრფივად გამოისახება $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტებით. ცხადია, რომ (5) ტოლობა ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის:

$$\begin{cases} c_1a_{11}+c_2a_{12}+\ \dots\ +c_na_{1n}=b_1 \\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+\ \dots\ +c_na_{2n}=b_2 \\ \\ c_1a_{m1}+c_2a_{m2}+\ \dots\ +c_na_{mn}=b_m \end{cases} \tag{6}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$, მაშინ $B=0$, ე. ი. ნულოვანი სვეტი ყოველთვის გამოისახება წრფივად ხებისმიერი $A_1\ A_2, \ldots, A_n$ სვეტებით.

თუ $c_j=1$, ხოლო ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი ტოლია ნულის, მაშინ (5) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$B=1\cdot A_j.$$

ე. ი. ყოველი A_j სვეტი წრფივად გამოისახება $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტებით.

განსაზღვრება. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტები წრფივად დამოკიდებულია თუ არსებობს ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული c_i კოეფიციენტი, რომლისთვისაც

$$c_1A_1+c_2A_2+\ldots+c_nA_n=0. \tag{7}$$

თუ (7) ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$c_1=c_2=\ldots=c_n=0, \tag{8}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ სამელემენტიანი სვეტები:

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$2A_1-A_2-A_3-0\cdot A_4=0.$$

მართლაც

$$2\cdot1-1\cdot2-1\cdot0-0\cdot3=0,$$

$$2\cdot2-1\cdot3-1\cdot1-0\cdot5=0,$$

$$2(-1)-1\cdot0-1\cdot(-2)-0\cdot1=0,$$

ე. ი. A_1, A_2, A_3, A_4 წრფივად დამოკიდებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოცემულია სამი სვეტი:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$$

ტოლობა, ანუ რაც იგივეა

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0,$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 = 0,$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 = 0$$

ტოლობები. აქედან $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, ე. ი. A_1, A_2, A_3 არიან წრფივად დამოუკიდებელი სვეტები.

თეორემა. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სვეტები წრფივად დამოკიდებული არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთი სვეტი მაინც წრფივად გამოისახება დანარჩენი სვეტებით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ა) ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ წრფივად დამოკიდებული სვეტებია. მაშინ არსებობს $c_1, c_2, \ldots, c_n$ მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც იქნება ნულისაგან განსხვავებული და შესრულდება $c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n = 0$ ტოლობა. დავუშვათ $c_j \neq 0$, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$A_j = -\frac{c_1}{c_j}A_1 - \frac{c_2}{c_j}A_2 - \ldots - \frac{c_{j-1}}{c_j}A_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}A_{j+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_j}A_n,$$

რაც ნიშნავს, რომ A_j წრფივად გამოისახება დანარჩენების საშუალებით. ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ბ) ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ, რომელიმე A_j სვეტი წრფივად გამოისახება დანარჩენი სვეტებით, ე. ი.

$$A_j = c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_{j-1}A_{j-1} + c_{j+1}A_{j+1} + \ldots + c_nA_n.$$

აქედან

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_{j-1}A_{j-1} - A_j + c_{j+1}A_{j+1} + \ldots + c_nA_n = 0$$

$c_1 c_2, \ldots, c_{j-1}, -1, c_{j+1}, \ldots, c_n$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც, კერძოდ — 1, არ უდრის ნულს, მაშასადამე $A_1, A_2, \ldots, A_n$ არიან წრფივად დამოკიდებული. საკმარისობა დამტკიცებულია, თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ სვეტებზე შემოღებული მოქმედებები შეგვიძლია უცვლელად გადავიტანოთ მატრიცა-სტრიქონებზე. საკმარისია მხოლოდ სიტყვა სვეტი შევცვალოთ — სტრიქონით.

§ 4. მოქმედებები მატრიცებზე

სანამ ამ საკითხს უშუალოდ შევეხებოდეთ განვსაზღვროთ ორი მატრიცის ტოლობის ცნება: ორ A და B მატრიცას ეწოდება **ტ ო ლ ი** თუ მათი სტრიქონების და სვეტების რიცხვი შესაბამისად ერთმანეთის ტოლია და გარდა ამისა A მატრიცის ყოველი ელემენტი ტოლია B მატრიცის შესაბამისი ელემენტის.

მაგალითად, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

მაშინ $A = B$.

მატრიცა-სტრიქონებზე და მატრიცა-სვეტებზე შემოღებული მოქმედებების ანალოგიურად შეიძლება შემოვიღოთ მოქმედებები მატრიცებზე:

1. მატრიცის მუდმივ რიცხვზე გამრავლებისათვის, საჭიროა მატრიცის ყოველი ელემენტი გავამრავლოთ ამ რიცხვზე, ე. ი. თუ გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცა და რაიმე c რიცხვი, მაშინ,

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \ldots ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} \ldots ca_{2n} \\ \\ ca_{m1} & ca_{m2} \ldots ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. თუ მოცემულია ორი A და

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცა, მაშინ მათი $A+B$ ჯამი განისაზღვრება ასე:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

ე. ი. $A+B$-ს ყოველი ელემენტი მიიღება A და B მატრიცის შესაბამისი ელემენტების შეკრებით. ცხადია, A მატრიცის სტრიქონების და სვეტების რიცხვი ტოლი უნდა იყოს შესაბამისად B მატრიცის სტრიქონების და სვეტების შესაბამისი რიცხვის.

3. A და B მატრიცების AB ნამრავლი განისაზღვრება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რიცხვი ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რიცხვის. ვთქვათ A მატრიცის განზომილებაა mn, ხოლო B მატრიცის განზომილება — nk, ე. ი.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

მაშინ $AB=C$ იქნება mk განზომილების მატრიცა:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

რომლის ყოველი c_{ij} $(i=1,\ 2,\dots,\ m;\ j=1,\ 2,\dots,\ k)$ ელემენტი მიიღება A მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტების და B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამით, ე. ი.

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ ორი

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ -2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

მატრიცის ნამრავლი.

განსაზღვრის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$AB=\begin{pmatrix} 4\cdot2+7\cdot4-3\cdot2 & -4\cdot1+7\cdot3+3\cdot7 & 4\cdot0+7\cdot8+3\cdot0 \\ -1\cdot2+0\cdot4-2\cdot2 & -1(-1)+0\cdot3+2\cdot7 & -1\cdot0+0\cdot8+2\cdot0 \\ 3\cdot2+1\cdot4+4(-2) & -3\cdot1+1\cdot3+4\cdot7 & 3\cdot0+1\cdot8+4\cdot0 \\ -5\cdot2+0\cdot4-2\cdot2 & -5(-1)+0\cdot3+2\cdot7 & -5\cdot0+0\cdot8+2\cdot0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{matrix} 4\cdot7+7\cdot6+3\cdot5 \\ -1\cdot7+0\cdot6+2\cdot5 \\ 3\cdot7+1\cdot6+4\cdot5 \\ -5\cdot7+0\cdot6+2\cdot5 \end{matrix}\Bigg)=\begin{pmatrix} 30 & 38 & 56 & 85 \\ -6 & 15 & 0 & 3 \\ 2 & 28 & 8 & 47 \\ -14 & 19 & 0 & -25 \end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ: 1) შეიძლება არსებობდეს AB მატრიცა, მაგრამ არ არსებობდეს AB მატრიცა, 2) $AB\neq BA$,

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. თუ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 68 \end{pmatrix} \text{ და } BA=\begin{pmatrix} 22 & -37 & -9 \\ -22 & 49 & -3 \\ 16 & -12 & -12 \end{pmatrix},$$

ე. ი. $AB\neq BA$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. თუ

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad D=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$CD=\begin{pmatrix} 34 \\ -31 \end{pmatrix}$, ხოლო DC არ არსებობს. ეს იმიტომ, რომ C-ს სვეტების რიცხვი უდრის D-ს სტრიქონების რიცხვს და ამიტომ არსებობს CD. რაც შეეხება D-ს სვეტების რიცხვს — იგი არ უდრის C-ს სტრიქონების რიცხვს და ამიტომ არ არსებობს DC მატრიცა.

§ 6. გადანაცვლება

განვიხილოთ რაიმე რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც შეიცავს n ელემენტს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. მოცემულ n რიცხვთა ყოველგვარ დალაგებას, რაიმე განსაზღვრული წესით, ეწოდება n რიცხვთა გ ა დ ა ნ ა ც ვ ლ ე ბ ა:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

ცხადია ასეთ გადანაცვლებათა რიცხვი ტოლია $n!$-ის.

ამბობენ, რომ α და β ქმნიან ინვერსიას რაიმე გადანაცვლებაში თუ $\alpha>\beta$ და გარდა ამისა α წინ უსწრებს β-ს.

თუ გადანაცვლების ელემენტები ქმნიან ლუწი რაოდენობის ინვერსიას, მაშინ გადანაცვლებას ეწოდება ლ უ წ ი. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადანაცვლება — კ ე ნ ტ ი ა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ

3, 2, 7, 1, 5, 4

გადანაცვლება. აქ

3 ინვერსიას ქმნის 2-თან და 1-თან, ე. ი. სულ 2 ინვერსიას;

2 ინვერსიას ქმნის 1-თან, ე. ი. სულ 1 ინვერსიას;

7 ინვერსიას ქმნის 1-თან, 5-თან, 4-თან, ე. ი. სულ 3 ინვერსიას;

5 ინვერსიას ქმნის 4-თან, ე. ი. სულ 1 ინვერსიას.

რადგან, ინვერსიათა რიცხვი უდრის $2+1+3+1=7$-ს (კენტი), ამიტომ მოცემული გადანაცვლება კენტია.

შევნიშნოთ, რომ თუ გადანაცვლების რომელიმე ორ ელემენტს შევუცვლით ადგილს, ამით ლუწკენტოვნება შეიცვლება. მართლაც, ვთქვათ ეს ელემენტები იმყოფებიან ერთმანეთის მეზობლად. მაშინ მათი ადგილების შეცვლით ინვერსიათა რიცხვი შეიცვლება ერთი ერთეულით. თუ მათ შორის მოთავსებულია k რაოდენობის ელემენტი, მაშინ მათი ადგილების შეცვლა შეიძლება ჩავატაროთ თანდათანობით, რისთვისაც საჭირო იქნება ინვერსიათა რიცხვის $k+k+1=2k+1$-ჯერ შეცვლა. ინვერსიათა რიცხვის კენტჯერ შეცვლა, კი გამოიწვევს ლუწკენტოვნების შეცვლას.

§ 6. დეტერმინანტები

განვიხილოთ მეორე რიგის მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

განსაზღვრება 1. A მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ რიცხვს და აღინიშნება ასე:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

ამრიგად, Δ_2-ის გამოსათვლელად საჭიროა მთავარ დიაგონალზე მდგომ ელემენტთა ნამრავლს გამოვაკლოთ ფერდითი დიაგონალის ელემენტთა ნამრავლი.

მაგალითად, გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 4 & -1\end{vmatrix}=3(-1)-(-5)\cdot 4=17.$$

დეტერმინანტის ზოგადი წევრია: $\pm a_{1\alpha}a_{2\beta}$, სადაც პირველი ინდექსები სტრიქონთა ნომრებია, ხოლო მეორე ინდექსები სვეტის ნომრები. α და β ადგენენ ორ გადანაცვლებას:

$$1,\ 2 \text{ და } 2,\ 1$$

მეორე რიგის დეტერმინანტის შესაკრებთა ნიშანი განისაზღვრება შემდეგნაირად: მოცემული შესაკრების ელემენტები დავალაგოთ პირ-

ველი ინდექსების ზრდადობის რიგით. თუ ამ შემთხვევაში სვეტთა ინდექსები შეადგენენ ლუწ გადანაცვლებას, მაშინ ამ შესაკრების წინ იწერება პლუს ნიშანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში — მინუსი.

მაგალითად: 1) $a_{11}a_{22}$ — შესაკრების წინ გვაქვს პლუსი, რადგან პირველი ინდექსები ქმნიან ზრდად მიმდევრობას: 1, 2; ხოლო მეორე ინდექსები ადგენენ ლუწ გადანაცვლებას: 1, 2.

2) $a_{12}a_{21}$ შესაკრებში პირველი პირობა დაცულია, ხოლო მეორე ინდექსები ქმნიან კენტ გადანაცვლებას: 2, 1 და ამიტომ ამ წევრის წინ გვაქვს მინუსი.

ახლა განვიხილოთ მესამე რიგის მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

განსაზღვრება 2. A მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება მისი ელემენტებისაგან შედგენილ შემდეგ ნამრავლთა ჯამს:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (*)$$

და სიმბოლურად აღინიშნება ასე:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

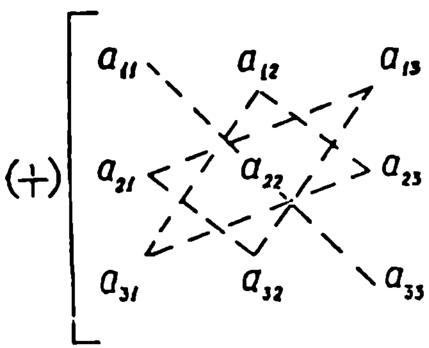
(*) ჯამის ზოგადი წევრია $\pm a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}$, სადაც α, β და γ ქმნიან შემდეგ გადანაცვლებათა სისტემას:

1)	1	2	3,
2)	2	3	1,
3)	3	1	2,
4)	3	2	1,
5)	2	1	3,
6)	1	3	2,

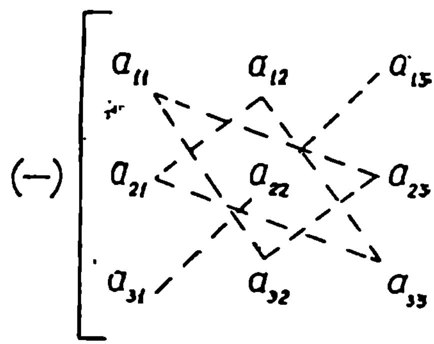
ე. ი. სულ $3!=6$ გადანაცვლებას. ამრიგად Δ_3 შეიცავს 6 შესაკრებს. შევნიშნოთ, რომ პირველი სამი გადანაცვლება ლუწია, ხოლო ბოლო სამი გადანაცვლება — კენტი. ამიტომ, პირველ შემთხვევაში შესაკრებთა ნიშანი — პლუსია, მეორე შემთხვევაში კი — მინუსი.

მიუხედავად იმისა, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოსახულება დიდია, იგი მარტივად მიიღება A მატრიცის ელემენტებისაგან. მართლაც, დეტერმინანტის პირველი სამი შესაკრებიდან, რომლებიც (*) გამოსახულებაში შედიან პლუს ნიშნით, ერთი არის მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლი, ხოლო დანარჩენი ორი — მთავარი დიაგონალის პარალელურ დიაგონალზე და A მატრიცის მოპირდაპირე წვეროებზე მდებარე ელემენტების ნამრავლი. წევრები, რომლებიც (*)-ში შედიან მინუს ნიშნით, მიიღებიან ანალოგიური წესით ფერდითი დიაგონალის მიმართ. ამრიგად, მივიღეთ მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის წესი, რომელსაც ეწოდება დეტერმინანტის გამოთვლის სამკუთხედის წესი.

(1) ცხრილზე სქემატურად ნაჩვენებია მესამე რიგის დეტერმინანტის დადებითი წევრების გამოთვლის წესი, ხოლო (2) ცხრილზე — მისი უარყოფითი წევრების გამოთვლის წესი.



(1)



(2)

ორივე შემთხვევაში მიღებული ჯამების შეკრებით მივიღებთ Δ_3 დეტერმინანტის მნიშვნელობას.

მაგალითად, სამკუთხედის წესით გამოვთვალოთ

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი. ამისათვის შევადგინოთ (1) და (2) სახის ცხრილები:

$$
(+)\left[\begin{array}{ccc} -3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right.
\qquad
(-)\left[\begin{array}{ccc} -3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right.
$$

პირველი ცხრილიდან მივიღებთ ჯამს:

$$(-3)\cdot 0\cdot 5+4\cdot 1\cdot 3+3\cdot 5\cdot(-2)=-18$$

მეორე ცხრილიდან მივიღებთ:

$$-3\cdot 0\cdot 3-4\cdot 5\cdot 5-(-3)\cdot 1\cdot(-2)=-106$$

რომელთა შეკრებით

$$\Delta_3=-124.$$

განვიხილოთ n-ური რიგის მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A მატრიცის პირველი სტრიქონიდან ავირჩიოთ რაიმე $a_{1\alpha_1}$ ელემენტი (იგი ეკუთვნის α_1 სვეტს). მეორე სტრიქონიდან ავირჩიოთ რაიმე ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის α_1 სვეტს. მისი სვეტის ნომერი აღვნიშნოთ α_2-ით, ე. ი. არჩეული ელემენტი იქნება $a_{2\alpha_2}$ და ა. შ. ყოველი სტრიქონიდან და განსხვავებული სვეტებიდან ვირჩევთ თითო ელემენტს. შერჩეული ელემენტები დავალაგოთ ისე, რომ მათმა პირველმა ინდექსებმა შეადგინონ ზრდადი მიმდევრობა:

$$a_{1\alpha_1},\quad a_{2\alpha_2},\quad \dots,\quad a_{n\alpha_n}.$$

მეორე ინდექსები ადგენენ 1, 2,..., n რიცხვების რაიმე

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \dots,\quad \alpha_n \qquad (3)$$

გადანაცვლებას. (3) გადანაცვლების ინვერსიათა რიცხვი აღვნიშნოთ $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ სიმბოლოთი თუ

$$a_{1\alpha_1} \; a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$$

ნამრავლს გავამრავლებთ $(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ, რომ ყველა $n!$ ნამრავლიდან ზოგი იქნება პლუს ნიშნით, ზოგი — მინუს ნიშნით.

შევადგინოთ ასეთ წევრთა ალგებრული ჯამი და მას ვუწოდოთ მოცემული მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი.

განსაზღვრება. n-ური რიგის მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება იმ $n!$ წევრთა ალგებრულ ჯამს, რომლის ყოველი წევრი არის განსხვავებული სტრიქონიდან, და განსხვავებული სვეტებიდან აღებული ელემენტების ნამრავლი, ხოლო ნიშანი განისაზღვრება მეორე ინდექსებით შედგენილი გადანაცვლების ლუწკენტოვნებით თუ პირველი ინდექსები დალაგებულია ზრდადობით (ლუწი გადანაცვლების დროს დადებითია, კენტის დროს კი — უარყოფითი), ე. ი.

$$\Delta_n = detA = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

§ 7. დეტერმინანტის თვისებები

თვისება 1. მატრიცის ტრანსპონირებით დეტერმინანტი არ იცვლება. მართლაც, განვიხილოთ კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

და ტრანსპონირებული მატრიცა

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

გვაქვს $a'_{ij}=a_{ji}\cdot A$ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის ზოგადი წევრია

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}. \tag{1}$$

მაშინ A' მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის ზოგადი წევრი

$$a'_{1\alpha_1}\, a'_{2\alpha_2}\, \dots\, a'_{n\alpha_n}$$

$a'_{ij}=a_{ji}$ პირობის თანახმად მიიღებს სახეს:

$$a_{\alpha_1 1}\, a_{\alpha_2 2}\, \dots\, a_{\alpha_n n},$$

ე. ი. წარმოადგენს A მატრიცის დეტერმინანტის ზოგად წევრსაც. მისი ნიშანი იქნება იგივე, რადგან იგი განისაზღვრება ისევ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ გადანაცვლების ინვერსიათა რიცხვით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თუ

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{მაშინ} \quad \Delta'_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=3\cdot 0\cdot 6+1\cdot 4\cdot 2+2\cdot(-1)\cdot 5-2\cdot 0\cdot 2-1\cdot(-1)\cdot 6-3\cdot 4\cdot 5=-56,$$

$$\Delta'_3=3\cdot 0\cdot 6+(-1)\cdot 5\cdot 2+2\cdot 1\cdot 4-2\cdot 0\cdot 2-3\cdot 5\cdot 4-(1)\cdot 1\cdot 6=-56,$$

ე. ი. $\Delta_3=\Delta'_3$.

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. თუ n-ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ყველა ელემენტი ტოლია ნულის, მაშინ დეტერმინანტიც ტოლია ნულის.

მართლაც, ვთქვათ Δ_n-ის i-ური სტრიქონის ყოველი ელემენტი $a_{ij}=0$, მაშინ Δ_n-ის ყოველ შესაკრებში თანამამრავლად შევა i-ური სტრიქონის ერთი ელემენტი, ამიტომ Δ_n-ის ყოველი შესაკრები ტოლი იქნება ნულის. მაშასადამე $\Delta_n=0$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 0\cdot 5+4\cdot 0\cdot 2+1\cdot 0\cdot(-1)-1\cdot 0\cdot 2-4\cdot 0\cdot 5-$$

$$-3\cdot 0\cdot(-1)=0.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა 3. თუ n-ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე ორ სტრიქონს (ან ორ სვეტს) ადგილებს შევუცვლით, ამით დეტერმინანტი შეიცვლის მხოლოდ ნიშანს (აბსოლუტური სიდიდის შეუცვლელად).

მართლაც, განვიხილოთ ორი დეტერმინანტი:

$$\Delta_n^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

სადაც $\Delta_n^{(2)}$ მიიღება $\Delta_n^{(1)}$-გან ამ უკანასკნელში i-ური და k-ური სტრიქონების ადგილების შეცვლით. ცხადია, ამ შემთხვევაში (1) გადანაცვლებაში გადაადგილდება მხოლოდ ორი ელემენტი რაც გამოიწვევს $\Delta_n^{(1)}$-ის ყოველი წევრის ნიშნის შეცვლას და მაშასადამე $\Delta_n^{(2)}=-\Delta_n^{(1)}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი. მეორე და მესამე სტრიქონებს შევუცვალოთ ადგილები, მივიღებთ

$$\Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

გვაქვს $\Delta_3^{(1)}=1\cdot 4\cdot(-2)+2\cdot 2\cdot 1+0\cdot 3\cdot(-1)-0\cdot 4\cdot 1-1\cdot 2\cdot(-1)-$
$$-2\cdot 3\cdot(-2)=10,$$

და $\Delta_3^{(2)}=1\cdot(-1)\cdot 2+2\cdot(-2)\cdot 3+0\cdot 1\cdot 4-0\cdot(-1)\cdot 3-1\cdot(-2)\cdot 4-$
$$-2\cdot 1\cdot 2=-10,$$

ე. ი. $\Delta_3^{(2)}=-\Delta_3^{(1)}$.

თ ვ ი ს ე ბ ა 4. თუ n-ური რიგის დეტერმინანტს აქვს ორი ერთნაირი სტრიქონი (ან ორი ერთნაირი სვეტი), მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მართლაც, ვთქვათ $\Delta_n^{(1)}$-ის i-ური და k-ური სტრიქონები ერთნაირია. მათი ადგილების შეცვლით, წინა თვისების თანახმად, მივიღებთ $\Delta_n^{(2)} = -\Delta_n^{(1)}$. მეორე მხრივ, ერთნაირი ელემენტებიანი სტრიქონების ადგილების შეცვლით $\Delta_n^{(1)}$ არ შეიცვლება: $\Delta_n^{(1)} = \Delta_n^{(2)}$. ბოლო ორი ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\Delta_n^{(2)} = \Delta_n^{(1)} = 0$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot2\cdot3 + 0\cdot5\cdot4 + 3\cdot1\cdot0 - 3\cdot2\cdot4 - 4\cdot5\cdot0 - 0\cdot1\cdot3 = 0.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა 5. თუ n-ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე, ამით დეტერმინანტიც გამრავლდება ამავე რიცხვზე.

მართლაც, თუ Δ_n-ის რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს გავამრავლებთ $k \neq 0$ რიცხვზე, მაშინ ამ დეტერმინანტის ყველა შესაკრებში თანამამრავლად შევა k რიცხვი. თუ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ k-ს, ფრჩხილებში დაგვრჩება მოცემული დეტერმინანტი. ამით თვისება დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი. $\Delta_3 = 114$. Δ_3-ის მეორე სვეტის ელემენტები გავამრავლოთ -2-ზე, მივიღებთ

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -2 & -16 & 0 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -228.$$

ამრიგად, $\Delta_3^{(1)} = -2\,\Delta_3$.

თ ვ ი ს ე ბ ა 6. თუ n-ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონი (ან ორი სვეტი) პროპორციულია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ტოლია ნულის.

მართლაც, ვთქვათ Δ_n-ის i-ური სტრიქონი k-ური სტრიქონის პროპორციულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ i-ური სტრიქონის ყოველი ელემენტი უდრის k-ური სტრიქონის შესაბამის ელემენტს გამრავლებულს ერთსა და იმავე მუდმივ c რიცხვზე. თუ c-ს გამოვიტანთ დეტერმინანტის ნიშნის წინ, მაშინ მივიღებთ ორ ერთნაირ სტრიქონის მქონე დეტერმინანტს, რომელიც მე-4 თვისების თანახმად ტოლი იქნება ნულის. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა. 7. თუ Δ_n დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის (სვეტის) ყოველი ელემენტი შედგება ორი ელემენტის ჯამისაგან, მაშინ $\Delta_n = \Delta_n' + \Delta_n''$, სადაც Δ_n' დეტერმინანტის i-ური სტრიქონი (სვეტი) შედგება პირველი შესაკრებისაგან, ხოლო Δ_n''-ის i-ური სტრიქონი (სვეტი) მეორე შესაკრებებისაგან. რაც შეეხება დანარჩენ სტრიქონებს (სვეტებს), ისინი ერთნაირია სამივე დეტერმინანტისათვის.

მართლაც, ვთქვათ

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტების

$$a_{i1} = c_{i1} + d_{i1},\ a_{i2} = c_{i2} + d_{i2},\ \ldots,\ a_{in} = c_{in} + d_{in}$$

ჯამები, მაშინ

$$\Delta_n = \sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} (-1)^k a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots (c_{i\alpha_i} + d_{i\alpha_i}) \ldots a_{n\alpha_n},$$

სადაც k არის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ გადანაცვლების ინვერსიათა რიცხვი. თუ: გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ

$$\Delta_n = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} (-1)^k a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots c_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} (-1)^k a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots d_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n},$$

რომლის პირველი შესაკრები არის

$$\Delta_n' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ხოლო მეორე შესაკრები —

$$\Delta_n'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{i1} & d_{i2} & \ldots & d_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— დეტერმინანტი. მაშასადამე $\Delta_n = \Delta_n' + \Delta_n''$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4-7 & 3+2 & 1-8 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -7 & 2 & -8 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \Delta_3' + \Delta_3''.$$

აქედან

$$\Delta_3 = -18, \qquad \Delta_3' = -23, \qquad \Delta_3'' = 5$$

მაშასადამე

$$-18 = -23 + 5.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა 8. თუ Δ_n-ის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ყველა ელემენტს დავუმატებთ ან გამოვაკლებთ სხვა სტრიქონის (ან სვეტის) შესაბამისი ელემენტების რაიმე რიცხვზე ნამრავლს, ამით Δ_n არ შეიცვლება.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი. მეორე სტრიქონის ელემენტებს დავუმატოთ მესამე სტრიქონის ელემენტების m რიცხვზე ნამრავლი, მივიღებთ:

$$\Delta_n^1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21}+ma_{31} & a_{22}+ma_{32} & \dots & a_{2n}+ma_{3n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

წინა თვისების თანახმად $\Delta_n' = \Delta_n'' + \Delta_n'''$, რომელთაგან $\Delta_n'' = \Delta_n$, ხოლო $\Delta_n''' = 0$ (მე-6 თვისების თანახმად), ე. ი. $\Delta_n = \Delta_n'$, რითაც თვისება დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 97$$

დეტერმინანტი. მეორე სტრიქონის ელემენტებს გამოვაკლოთ 3-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონის ელემენტები, მივიღებთ

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1-(-3)\cdot 3 & -2-3\cdot 4 & 3-3\cdot 0 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 10 & -14 & 3 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 97,$$

ამრიგად,

$$\Delta_3 = \Delta_3' = 97.$$

§ 8. მინორი და ალგებრული დამატება

განვიხილოთ n-ური რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

განსაზღვრება 1. Δ_n დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის M_{ij} მინორი ეწოდება დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება Δ_n-დან იმ სტრიქონის და სვეტის ამოშლით რომელთა თანაკვეთაშია a_{ij} ელემენტი.

განსაზღვრება 2. Δ_n-ის a_{ij} ელემენტის A_{ij} ალგებრული დამატება ეწოდება ამავე ელემენტის M_{ij} მინორს აღებულს $(-1)^{i+j}$ ნიშნით, ე. ი.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

მაგალითი.

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & -10 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის a_{43} ელემენტის მინორი იქნება

$$M_{43}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 8 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი, ხოლო ალგებრული დამატება

$$A_{43}=(-1)^{4+3}M_{43}$$

დეტერმინანტი. ცხადია, რომ თუ $i+j$ ლუწი რიცხვია, მაშინ

$$A_{ij}=M_{ij}.$$

თეორემა 1. თუ Δ_n-ის j-ური სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტი გარდა a_{ij} ელემენტისა ტოლია ნულის, ასეთი დეტერმინანტი

ტოლია a_{ij} ელემენტისა და მისი ალგებრული დამატების ნამრავლის, ე. ი.

$$\Delta_n = a_{ij} A_{ij}.$$

მართლაც, ვთქვათ Δ_n-ის მეორე სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა $a_{22} \neq 0$, ტოლია ნულის, ე. ი.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\Delta_n = a_{22} A_{22} = a_{22}(-1)^{2+2} M_{22} = a_{22} M_{22}$. რადგან მეორე სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა $a_{22} \neq 0$, ტოლია ნულის, ამიტომ

$$\Delta_n = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} (-1)^{I(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$$

ჯამის ყოველი შესაკრები ტოლია ნულის, გარდა a_{22}-ის შემცველი შესაკრებებისა. ამიტომ a_{22} საერთო მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ჯამის წინ; მაშინ მიღებული

$$\Delta_n = a_{22} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} (-1)^{I(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} a_{\alpha_3 3} \dots a_{\alpha_n n}$$

ჯამი შეიცავს $(n-1)!$ შესაკრებს. ყოველი მათგანი არის M_{22} მინორის სხვადასხვა სტრიქონისა და სვეტისაგან აღებული $(n-1)$ ელემენტის ნამრავლი. მათი ჯამი არის $(n-1)$ რიგის M_{22} დეტერმინანტი.
ამრიგად,

$$\Delta_n = a_{22} M_{22},$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2. Δ_n დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების მათ შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის მოცემულ დეტერმინანტს:

$$\Delta_n = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \tag{1}$$

მართლაც, Δ_n წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1}+0+\dots+0 & 0+a_{i2}+\dots+0 & \dots & 0+0+\dots+a_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტის მე-7 თვისების თანახმად მივიღებთ:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

პირველი თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. Δ_n დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ტოლია ნულის, ე. ი.

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad k \neq i.$$

ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ორი ერთი და იმავე სტრიქონის მქონე დეტერმინანტის გაშლას. ასეთი დეტერმინანტი, როგორც ვიცით, უდრის ნულს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ მეხუთე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

პირველი ხერხი: მეორე თეორემის თანახმად

$$\Delta_5 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} + a_{15}A_{15} =$$

$$= 5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

მიღებული მეოთხე რიგის დეტერმინანტების მიმართ გამოვიყენოთ ისევ მე-2 თეორემა:

$$\Delta_5 = 5\left\{6(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+ (-3)\left\{4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2})\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3&-1&5\\1&1&4\\4&3&-1\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-3&-1&1\\1&1&0\\4&3&-2\end{vmatrix}\Bigg\}+$$

$$+\Bigg\{4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1&5\\3&0&4\\0&-2&-1\end{vmatrix}+6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3&1&5\\1&0&4\\4&-2&-1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3&1&5\\1&3&4\\4&0&-1\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-3&1&1\\1&3&0\\4&0&-2\end{vmatrix}\Bigg\}+$$

$$+(-2)\Bigg\{4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1&5\\3&1&4\\0&3&-1\end{vmatrix}+6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3&-1&5\\1&1&4\\4&3&-1\end{vmatrix}+$$

$$+0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&1&5\\1&3&4\\4&0&-1\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-3&1&-1\\1&3&1\\4&0&3\end{vmatrix}.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\Delta_5=5(-30+0+29+2)-3(-26+0+17+6)+$$

$$(-76+102-34+16)-2(116-102+0-28)=5-9+8+28=32.$$

მ ე ო რ ე ხ ე რ ხ ი. ვისარგებლოთ პირველი თეორემით და დეტერმინანტის თვისებებით. ნულად გადავაქციოთ მესამე სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა a_{13}-სა, მივიღებთ

$$\Delta_5=\begin{vmatrix}5&3&1&2&0\\4&6&0&1&-2\\2&4&0&3&5\\-4&0&0&-2&4\\-11&-9&0&-8&-1\end{vmatrix},$$

სადაც მესამე სტრიქონის ელემენტები მიღებულია პირველი და მესამე სტრიქონის სათანადო ელემენტების შეკრებით. მეოთხე სტრიქონის ელემენტები მიღებულია მეოთხე და პირველი სტრიქონების სა-

თანადო ელემენტების გამოკლებით. რაც შეეხება მეხუთე სტრიქონს — მის ელემენტებს გამოვაკლეთ პირველი სტრიქონის სათანადო ელემენტების გასამკეცებული ნამრავლი, გვაქვს

$$\Delta_5=a_{13}A_{13}=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 6 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -4 & 0 & -2 & 4\\ -11 & -9 & -8 & -1\end{vmatrix}.$$

შევასრულოთ შემდეგი გარდაქმნები: —2 გავიტანოთ მესამე სტრიქონიდან დეტერმინანტის ნიშნის წინ. პირველი სვეტის ელემენტებს დავუმატოთ მესამე სვეტის სათანადო ელემენტების (—2)-ზე ნამრავლი; მეოთხე სვეტის ელემენტებს დავუმატოთ მესამე სვეტის სათანადო ელემენტების 2-ზე ნამრავლი, მეორე და მესამე სვეტი უცვლელად დავტოვოთ, რის შედეგადაც უკანასკნელი დეტერმინანტიდან მივიღებთ:

$$\Delta_5=-2\begin{vmatrix}4 & 6 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ 2 & 0 & 1 & -2\\ -11 & -9 & -8 & -1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2 & 6 & 1 & -2\\ -4 & 4 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 5 & -9 & -8 & -1\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}2 & 6 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 3 & 11\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -9 & -8 & -17\end{vmatrix}=-2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 6 & 0\\ -4 & 4 & 11\\ 5 & -9 & -17\end{vmatrix}$$

მეორე სვეტის ელემენტებს დავუმატოთ პირველი სვეტის სათანადო ელემენტების (—3)-ზე ნამრავლი, მივიღებთ:

$$\Delta_5=-2\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ -4 & 16 & 11\\ 5 & -24 & -17\end{vmatrix}=-2\cdot 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}16 & 11\\ -24 & -17\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot 8\begin{vmatrix}2 & 11\\ -3 & -17\end{vmatrix}=-32(33-34)+32.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ n-ური რიგის დეტერმინანტი სამკუთხაა, მაშინ იგი ტოლია მთავარი დიაგონალის ელემენტთა ნამრავლის:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & . \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\dots a_{1n}.$$

მაგალითად,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96.$$

§ 9. დეტერმინანტთა გამრავლება

გავეცნოთ ორი, ერთი და იმავე რიგის, დეტერმინანტის გამრავლების წესს. ჯერ განვიხილოთ მეორე რიგის ორი დეტერმინანტის ნამრავლი:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

ნამრავლი დეტერმინანტის ყოველი ელემენტი განისაზღვრება ფორმულით:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{jk} \qquad (i, j = 1, 2).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ ორი

$$\Delta_2' = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{და} \quad \Delta_2'' = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის ნამრავლი.

აღნიშნული წესის თანახმად

$$\Delta_2' \cdot \Delta_2'' = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 5 + (-1)(-4) & 2(-3) + (-1)8 \\ 4 \cdot 5 + 3(-4) & 4(-3) + 3 \cdot 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -14 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 56(3+2) = 280$$

მართლაც,

$$\Delta_2' = 6+4 = 10, \quad \Delta_2'' = 40-12 = 28; \quad \Delta_2' \cdot \Delta_2'' = 10 \cdot 28 = 280.$$

ახლა განვიხილოთ ორი მესამე რიგის

$$\Delta_3' = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{და} \quad \Delta_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი. თუ გავითვალისწინებთ დეტერმინანტის თვისებებს (სტრიქონის შეცვლა შეიძლება სვეტებით და პირიქით), მაშინ გამრავლების ზემოთ მოყვანილი წესი შეგვიძლია შევცვალოთ: სვეტების სვეტებზე გამრავლების ან სტრიქონების სვეტებზე გამრავლების წესით. მოცემული დეტერმინანტებისათვის გამოვიყენოთ სვეტების სვეტებზე გამრავლების წესი, მივიღებთ:

$$\Delta_3' \cdot \Delta_3'' = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-3)1+1\cdot 2+4\cdot 3 & (-3)8+1\cdot 1+4\cdot 7 & (-3)(-2)+1\cdot 4+4\cdot(-3) \\ 0\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot 3 & 0\cdot 8+4\cdot 1+2\cdot 7 & 0(-2)+4\cdot 4+2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1+5\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot 8+5\cdot 1+3\cdot 7 & 2\cdot(-2)+5\cdot 4+3\cdot(-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 5 & -2 \\ 14 & 18 & 10 \\ 19 & 42 & 7 \end{vmatrix}$$

მიღებული დეტერმინანტის ყოველი შესაკრები გამოითვლება

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} b_{kj}$$

ფორმულით, სადაც $i, j = 1, 2, 3$.

ანალოგიურად გამოითვლება ორი, n-ური რიგის, დეტერმინანტის ნამრავლი: თუ მოცემულია ორი დეტერმინანტი $\Delta_n' = |a_{ij}|$ და $\Delta_n'' = |b_{ij}|$, მაშინ $\Delta_n' \cdot \Delta_n'' = |c_{ij}|$, სადაც $i, j = 1, 2, \ldots, n$ და ამ დეტერმინანტის ყოველი ელემენტი გამოითვლება

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk} \quad \text{ან} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}$$

ფორმულით.

შევნიშნოთ, რომ კვადრატული მატრიცების ნამრავლის დეტერმინანტი ტოლია თანამამრავლი მატრიცების დეტერმინანტთა ნამრავლის.

§ 10. შებრუნებული მატრიცები

კვადრატული მატრიცების გამრავლებისას E ერთეულოვანი მატრიცა ასრულებს იგივე როლს, რასაც 1 რიცხვებზე გამრავლებისას, ე. ი. ნებისმიერი A კვადრატული მატრიცისათვის

$$AE = EA = A$$

ვთქვათ A არის n-ური რიგის ნებისმიერი კვადრატული მატრიცა. თუ არსებობს ისეთი X მატრიცა, რომ

$$XA = AX = E,$$

მაშინ X-ს ეწოდება A-ს შებრუნებული მატრიცა და აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი. განსაზღვრის თანახმად

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

შევნიშნოთ, რომ A^{-1} სიმბოლური ჩანაწერი არ ნიშნავს $A^{-1} = \dfrac{1}{A}$ ან $A^{-1} = \dfrac{E}{A}$ ფარდობას. რიცხვის მატრიცზე ან მატრიცის მატრიცზე გაყოფის ოპერაცია არ განიხილება.

შებრუნებული მატრიცა შეიძლება გააჩნდეს მხოლოდ კვადრატულ მატრიცას. ისმება კითხვა: როგორ ვიპოვოთ მოცემული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად შემოვიღოთ გადაგვარებული და გადაუგვარებელი მატრიცების ცნება.

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება გადაგვარებული თუ მისი შესაბამისი დეტერმინანტი ტოლია ნულის. წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცა — გადაუგვარებელი.

განვიხილოთ n-ური რიგის

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცა. ისეთ A^* მატრიცას, რომლის ელემენტებია A მატრიცის a_{ij} ელემენტების A_{ij} ალგებრული დამატებებით შედგენილი ტრანსპონირებული მატრიცა, ეწოდება A-ს მიერთებული მატრიცა:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

§ 8-ის მე-2 და მე-3 თეორემების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ თუ A გადაუგვარებელი მატრიცაა, მაშინ A^* მატრიციც გადაუგვარებელი იქნება, თანაც $|A^*|$ — დეტერმინანტი მიიღება $|A|$ დეტერმინანტის $(n-1)$ ხარისხში აყვანით, ე. ი. $|A^*|=|A|^{n-1}$. მართლაც, თუ (1) ფორმულაში გადავალთ დეტერმინანტთა ტოლობაზე, მივიღებთ: $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$. რადგანაც $|A|\neq 0$, ამიტომ $|A^*|=|A|^{n-1}$.

თუ $|A|\neq 0$, მაშინ (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ A-ს შებრუნებული მატრიცა მიიღება A^* მატრიცისაგან თუ მის ყველა წევრს გავყოფთ $|A|$ დეტერმინანტზე, ე. ი.

$$A^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{A^{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

თეორემა 1. A^{-1} შებრუნებული მატრიცა არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცა გადაუგვარებელია.

მართლაც, ვთქვათ $|A|\neq 0$ და ვაჩვენოთ A^{-1}-ის არსებობა. განვიხილოთ A და B მატრიცა, სადაც B არის (2) მატრიცა. ცხადია $AB=E$ და $BA=E$. აქედან $B=A^{-1}$ (რადგანაც $AA^{-1}=E$). ახლა დავუშვათ არსებობს A^{-1} და ვაჩვენოთ, რომ $|A|\neq 0$. როგორც ცნობილია $AA^{-1}=$ $=A^{-1}A=E$ და $|AA^{-1}|=|A^{-1}A|=|E|=1$, $|A|\cdot|A^{-1}|=|A^{-1}|\cdot|A|=1$, ე. ი. $|A|\neq 0$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2. თუ A არის n-ური რიგის გადაუგვარებელი მატრიცა, მაშინ მისთვის არსებობს ერთადერთი შებრუნებული მატრიცა.

მართლაც, ვთქვათ A-ს აქვს კიდევ ერთი B შებრუნებული მატრიცა. განსაზღვრის თანახმად $AB=E$. ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1}-ზე, მივიღებთ:

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}E.$$

რადგან მატრიცათა ნამრავლი ასოციაციურია და $A^{-1}E=A^{-1}$, ამიტომ

$$(A^{-1}A)B=A^{-1}.$$

თავის მხრივ $A^{-1}A=E$ და $EB=A^{-1}$, ამიტომ $B=A^{-1}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ შებრუნებული მატრიცის დეტერმინანტი ტოლია მოცემული მატრიცის დეტერმინანტის შებრუნებული სიდიდის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა

რადგანაც

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}=24\neq 0,$$

ამიტომ A გადაუგვარებელი მატრიცაა. ვიპოვოთ A-ს ელემენტთა ალგებრული დამატებები:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & -4\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=17;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=4; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-17; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=8;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0.$$

ამრიგად,

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-7 & 17 & -17\\ 4 & 4 & 8\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

შებრუნებული მატრიცის თვისებები:

1) შებრუნებული მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, მოცემული მატრიცის ტოლია, ე. ი.

2) $$(A^{-1})^{-1}=A$$

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

§ 11. მატრიცის რანგი

ვთქვათ მოცემულია mn განზომილების

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n}\\ & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

მატრიცა. ავირჩიოთ აქედან ნებისმიერი k სვეტი და k სტრიქონი. არჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაში მდგომი ელემენტე-

ბისაგან შევადგინოთ კვადრატული მატრიცა. ასეთნაირად შედგენილი მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს ეწოდება k-ური რიგის მ ი ნ ო-რ ი. m სტრიქონისაგან k სტრიქონის არჩევა შეიძლება C_m^k ხერხით და n სვეტიდან k სვეტის არჩევა — C_n^k ხერხით. ამიტომ k-ური მინორების ყველა შესაძლო რიცხვი იქნება $C_m^k C_n^k$. ცხადია $1 \leqslant k \leqslant \min(m; n)$. განვიხილოთ ყველა შესაძლო რიგის მინორი და გამოვყოთ მათი სიმრავლიდან ნულისაგან განსხვავებული მინორები.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. ნულისაგან განსხვავებული მინორების მაქსიმალურ რიგს ეწოდება მატრიცის რ ა ნ გ ი.

ამრიგად, თუ მატრიცის რანგი უდრის r-ს, მაშინ ამ მატრიციდან გამოიყოფა ნულისაგან განსხვავებული ერთი მაინც r-ური რიგის მინორი. r-ზე მაღალი რიგის მინორები ნულის ტოლია. მაგალითად, მესამე რიგის მატრიცის რანგი შეიძლება ტოლი იყოს 1, 2 ან 3-ის. რანგის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს მისი გამოთვლის წესი. ამისათვის საჭიროა დეტერმინანტების გამოთვლა. მაგალითად, მეოთხე რიგის მატრიცის რანგის გამოსათვლელად საჭიროა ჯერ გამოვთვალოთ ამ მატრიცის დეტერმინანტი, თუ იგი არ უდრის ნულს მაშინ რანგი $r=4$. თუ $\Delta_4=0$, მაშინ საჭიროა მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოთვლა (პირველ ნულისაგან განსხვავებულ დეტერმინანტამდე). თუ ამ დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, მაშინ $r=3$. თუ ყველა მათგანი ტოლია. ნულის, მაშინ გამოვთვლით მეორე რიგის დეტერმინანტებს. თუ მეორე რიგის დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, მაშინ $r=2$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $r=1$ (რადგანაც განიხილება არანულოვანი მატრიცა). რანგის გამოთვლის ეს წესი მოითხოვს დიდ დროს და გამოთვლებს. ამიტომ უფრო რაციონალური მეთოდის შემოღების მიზნით გავეცნოთ მატრიცის ელემენტარულ გარდაქმნებს. მატრიცის რანგი არ შეიცვლება თუ:

ა) გადავაადგილებთ რომელიმე ორ სტრიქონს (სვეტს),

ბ) სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით,

გ) მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე,

დ) რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე.

მართლაც, როგორც დეტერმინანტთა თვისებებიდან ვიცით ა) შემთხვევაში დეტერმინანტი შეიცვლის მხოლოდ ნიშანს; ბ) და გ) შემთხვევაში დეტერმინანტი არ შეიცვლება, დ) შემთხვევაში დეტერმინანტი გამრავლდება მუდმივ რიცხვზე. თუ მოცემული დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, მაშინ არც ერთ, ზემოთ ჩამოთვლილ შემთხვევაში დეტერმინანტი არ გახდება ტოლი ნულის და პირიქით. რადგან მატრიცის რანგი დამოკიდებული არ არის მინორის სიდიდეზე და ნიშანზე, ამიტომ ეს ამტკიცებს მატრიცის რანგის დამოუკიდებლობას ზემოთ ჩამოთვლილ გარდაქმნებზე. ამ გარდაქმნებს ეწოდება მატრიცის ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ე ბ ი.

თუ A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით მიიღება B მატრიცი, მაშინ A და B-ს ეწოდება ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი მატრიცები და ჩაიწერება ასე: $A \sim B$.

ცხადია, რომ $r(A) = r(B)$, სადაც $r(A)$ და $r(B)$ არიან შესაბამისად A და B მატრიცების რანგები.

ახლა გავეცნოთ რანგის გამოთვლის რაციონალურ მეთოდს. დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილია, რომ მათი გამოთვლა არსებითად მარტივდება იმის შემდეგ, რაც უფრო მეტია ნულოვანი ელემენტების რიცხვი მის რომელიმე სტრიქონში (სვეტში). ამიტომ რანგის გამოთვლის ეს მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ ელემენტარულ გარდაქმნათა საშუალებით მივაღწიოთ იმას, რომ მივიღოთ ნულოვანი ელემენტების რაც შეიძლება მეტი რიცხვი. შეიძლება მივაღწიოთ იმასაც კი, რომ ყველა ელემენტი, გარდა შესაძლებელი მთავარი დიაგონალის ელემენტებისა, გახდეს ნულის ტოლი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი. ამისათვის მეორე და მესამე სტრიქონები დავტოვოთ უცვლელად; მეოთხე სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ მეორე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები; პირველი სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ მეორე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების 4-ზე ნამრავლი, მივიღებთ:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

პირველი სვეტის ელემენტებს მივუმატოთ მესამე სვეტის შესაბამისი ელემენტები; მეორე სვეტის ელემენტებს მივუმატოთ მესამე სვეტის შესაბამისი ელემენტების 2-ზე ნამრავლი; ხოლო მეოთხე სვეტის ელემენტებს მივუმატოთ მესამე სვეტის შესაბამისი ელემენტების 3-ზე ნამრავლი, მივიღებთ:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-ზე გამრავლებული მეორე სვეტის ელემენტები მივუმატოთ მეოთხე სვეტის შესაბამის ელემენტებს, ხოლო -4-ზე გამრავლებული მეორე სვეტის ელემენტები მივუმატოთ პირველი სვეტის შესაბამის ელემენტებს, მაშინ

$$A_3 = \begin{pmatrix} -29 & 9 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

პირველი სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ — 4-ზე გამრავლებული მეოთხე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები, მივიღებთ:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 43 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

მეორე სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ — 1-ზე და მეორე და მესამე სტრიქონებს შევუცვალოთ ადგილები, გვექნება:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 43 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -18 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

7-ზე გამრავლებული მეორე სტრიქონის ელემენტები მივუმატოთ პირველი სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს; ხოლო — 4-ზე გამრავლებული მეორე სტრიქონის ელემენტები მივუმატოთ მეოთხე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

პირველი სტრიქონი გავამრავლოთ $\frac{1}{43}$-ზე, ხოლო მეოთხე სვეტი $\frac{1}{7}$-ზე:

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ბოლოს, 18-ზე გამრავლებული მეოთხე სვეტის ელემენტები მივუმატოთ პირველი სვეტის შესაბამის ელემენტებს, მივიღებთ:

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მაშასადამე $r(A) = 4$ $(A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4 \sim A_5 \sim A_6 \sim A_7 \sim A_8)$.

§ 12. ბაზისური მინორი

ვთქვათ მოცემულია n-ური რიგის

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცა და ცნობილია მისი $r(A)=r$ რანგი, ე. ი. არსებობს r რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორი.

განსაზღვრება. **ბაზისური მინორი** ეწოდება ყველა იმ ნულისაგან განსხვავებულ მინორს, რომლის რიგი რანგის ტოლია.

ბაზისური მინორის სტრიქონებსა და სვეტებს ეწოდება ბაზისური სტრიქონები და სვეტები, ან საბაზისო სისტემა.

ადვილად მტკიცდება.

თეორემა. მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონი და სვეტი არის შესაბამისად ბაზისური სვეტების და სტრიქონების წრფივი კომბინაცია.

§ 18. სავარჯიშო

1) ვიპოვოთ $5A$ მატრიცი, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) ვიპოვოთ AB, AD და FD მატრიცები, თუ:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 8 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$F=(2 \quad 7 \quad 4 \quad -5).$$

3) ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცების რანგი:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) გამოვთვალოთ დეტერმინანტები:

ა) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ბ) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

გ) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ დ) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

5) ვიპოვოთ შემდეგი დეტერმინანტების ნამრავლი:

ა) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ და $\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$

ბ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ და $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

გ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ და $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$.

მეორე თავი

წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 1. ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები

ცვლადი სიდიდეები, ანუ უცნობები აღვნიშნოთ $x_1, x_2, \dots, x_n$-ით, ხოლო მუდმივი (ცნობილი) სიდიდეები $a_1, a_2, \dots, a_n$, b-თი, მაშინ

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b \tag{1}$$

ტოლობას ეწოდება n-უცნობიანი წრფივი განტოლება.

ცვლადთა მნიშვნელობების რაიმე

$$x_1=\lambda_1, \qquad x_2=\lambda_2, \ \dots, \ x_n=\lambda_n$$

სიმრავლეს ეწოდება (1) განტოლების ამონახსნი თუ ცვლადების ამ მნიშვნელობებით შეცვლის შედეგად (1) განტოლება იგივეობად გადაიქცევა, ე. ი.

$$a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\dots+a_n\lambda_n=b.$$

ვიტყვით, რომ გვაქვს n-უცნობიან m განტოლებათა სისტემა, თუ მოცემულია (1) სახის m რაოდენობის განტოლება:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{2}$$

სადაც $b_1, b_2, \dots, b_m$ თავისუფალი წევრებია. თუ $b_1=b_2=\dots=b_m=0$, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\qquad\cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{3}$$

სისტემას, რომელსაც ეწოდება ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა-თ ა ს ი ს ტ ე მ ა.

უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

მატრიცას ეწოდება სისტემის მატრიცა, ხოლო თუ A მატრიცას მივუერთებთ თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილ სვეტს, მივიღებთ:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{5}$$

მატრიცას, რომელსაც ეწოდება სისტემის გაფართოებული მატრიცა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$X=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n), \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

და გავიხსენებთ მოქმედებებს მატრიცებზე, მაშინ (2) განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება ასე:

$$AX=B, \tag{6}$$

ხოლო (3) სისტემა ასე:

$$AX=0,$$

სადაც 0 არის ნულოვანი ვექტორი. თუ

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

მაშინ (2) სისტემა ვექტორული ფორმით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A_1x_1+A_2x_2+\ \dots\ +A_nx_n=B. \tag{7}$$

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ ვექტორს ეწოდება (2) ან (6), ან (7) სისტემის ამონახსნი თუ ადგილი აქვს პირობებს:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ \dots\ +a_{1n}\lambda_n\equiv b_1, \\ a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\ \dots\ +a_{2n}\lambda_n\equiv b_2, \\ \\ a_{m1}\lambda_1+a_{m2}\lambda_2+\dots+a_{mn}\lambda_n\equiv b_m \end{cases}$$

(ან $A\lambda=B$, ან $A_1\lambda_1+A_2\lambda_2+\ \dots\ +A_n\lambda_n=B$)

განტოლებათა სისტემას ეწოდება *თავსებადი* თუ მას აქვს ერთი ამონახსნი მაინც. წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემას ეწოდება *არათავსებადი*.

ცხადია, რომ განტოლებათა ყოველი ერთგვაროვანი სისტემა თავსებადია, რადგან მას აქვს $\lambda_0=$ (0, 0,..., 0) ამონახსნი.

§ 2. კრამერის თეორემა

ვთქვათ მოცემულია n-უცნობიანი n, განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1}$$

რომლის მატრიცული ფორმა იქნება:

$$AX=B. \tag{2}$$

ამ სისტემის მატრიცა იქნება კვადრატული. მისი დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ, როგორც ვიცით, არსებობს სისტემის A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა. თუ (2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ A^{-1}-ზე, მივიღებთ $A^{-1}AX = A^{-1}B$, $EX = A^{-1}B$, ე. ი.

$$X = A^{-1}B. \tag{4}$$

A^{-1}-ის ერთადერთობის გამო მოცემულ სისტემას აქვს (4) ტოლობით განსაზღვრული ერთადერთი ამონახსნი.

A^{-1} მატრიცის ელემენტები განისაზღვრება

$$\overline{a_{ij}} = \frac{1}{\Delta} A_{ji}$$

ტოლობით. ორი მატრიცის გამრავლების წესის თანახმად $A^{-1}B$ იქნება ვექტორსვეტი, რომლის j-ური C_j კოორდინატი განისაზღვრება

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{jk}} b_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k; \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

ტოლობით. თუ გავიხსენებთ დეტერმინანტის დაშლას სვეტის მიხედვით, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k$$

იქნება დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან თუ j-ურ სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით. აღვნიშნოთ ეს დეტერმინანტი Δ_j-ით, სადაც $j = 1, 2, \dots, n$. ე. ი.

$$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

არის $A^{-1}B$ მატრიც-სვეტის j-ური კოორდინატი. (4) ტოლობით განსაზღვრული X ვექტორის j-ური კოორდინატი x_j (ვექტორების ტო-

ლობის თანახმად) ტოლი იქნება $A^{-1}B$ ვექტორის შესაბამისი კოორდინატის, ე. ი.

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}; \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6}$$

(6) ფორმულებს ეწოდება კრამერის ფორმულები. ამრიგად, თუ n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის მატრიცა გადაუგვარებელია, მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც წარმოადგენს წილადს, რომლის მნიშვნელია სისტემის დეტერმინანტი, ხოლო მრიცხველში დგას დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება სისტემის დეტერმინანტისაგან თუ მასში უცნობების შესაბამის სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრების სვეტით (ამ დეტერმინანტებს დამხმარე დეტერმინანტებს უწოდებენ).

თუ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის კვადრატული მატრიცა გადაუგვარებელია, მაშინ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=-4 \\ x_1+2x_2-2x_3=1 \\ -x_1+x_2+3x_3=6 \end{cases}$$

ჯერ გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=28.$$

ახლა გამოვთვალოთ ე. წ. დამხმარე დეტერმინანტები:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-28,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}=56,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 28,$$

საიდანაც (6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 2; \qquad x_3 = 1.$$

§ 8. წრფივ განტოლებათა ზოგადი სისტემები

ვიგულისხმოთ, რომ $n \neq m$ და განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

ამ სისტემის მატრიცა აღვნიშნოთ $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$-თი, მაშინ გაფართოებული მატრიცა იქნება $\overline{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$.

თეორემა 1. (კრონეკერ — კაპელი). (1) განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემის მატრიცის რანგი ტოლი იყოს გაფართოებული მატრიცის რანგის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. *პირობის აუცილებლობა*. დავუშვათ (1) სისტემა თავსებადია და ვაჩვენოთ, რომ $r(A) = r(\overline{A})$. ვთქვათ $r(A) = r$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $r > 0$. მართლაც, თუ $r = 0$, ე. ი. მატრიცის ყველა ელემენტი არის ნული, მაშინ სისტემის თავსებადობიდან გამომდინარე $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, ე. ი. $B = (0, 0, \ldots, 0)$, რომელიც $r(\overline{A})$-ს არ შეცვლის, ე. ი. $r(\overline{A}) = r = 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვთქვათ A მატრიცის საბაზისო სისტემა არის $A_1, A_2, \ldots, A_r$. სისტემის თავსებადობის თანახმად მოიძებნება ისეთი $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ შემდეგ ვექტორულ ტოლობას:

$$B = k_1A_1 + k_2A_2 + \quad + k_rA_r + \ldots + k_nA_n. \tag{2}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A_{r+1}, \ldots, A_n$ ვექტორები წრფივად გამოისახებიან $A_1, A_2, \ldots, A_r$ ვექტორებით, მაშინ (2) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ B ვექტორი წრფივად გამოისახება $A_1, A_2, \ldots, A_r$ ვექტორებით.

ეს ნიშნავს, რომ გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცის რანგიც r-ის ტოლია, ე. ი. $r(A)=r(\overline{A})$, ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.

პირობის საკმარისობა. დავუშვათ $r(A)=r(\overline{A})$ და დავამტკიცოთ (1) სისტემის თავსებადობა. $A_1, A_2, \ldots, A_r$ იყოს სისტემის მატრიცის საბაზისო სისტემა. რადგანაც $r(\overline{A})=r$, ამიტომ $A_1, A_2, \ldots, A_r$ იქნება გაფართოებული მატრიცის საბაზისო სისტემა. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ,

რომ $$B=k_1A_1+k_2A_2+\cdots+k_rA_r$$

და $$B=k_1A_1+k_2A_2+\quad+k_rA_r+0\cdot A_{r+1}+\cdots+0\cdot A_n.$$

აქედან გამომდინარეობს (1) სისტემის თავსებადობა:

$$x_1=k_1,\ x_2=k_2,\ \ldots,\ x_r=k_r,\ x_{r+1}=0,\ \ldots,\ x_n=0.$$

თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

კრონეკერ-კაპელის თეორემა საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის მხოლოდ თავსებადობის საკითხი.

თეორემა 2. არაერთგვაროვან განტოლებათა (1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი მიიღება მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ამონახსნის და არაერთგვაროვან განტოლებათა (1) სისტემის რაიმე კერძო ამონახსნის შეკრებით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ X_1 არის (1) სისტემის ფიქსირებული ამონახსნი, ხოლო X_2 — ამავე სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი. მაშინ ცხადია, რომ

$$AX_2=B, \qquad AX_1=B,$$

საიდანაც $$A(X_2-X_1)=0, \text{ ე. ი.}$$

$$Y=X_2-X_1 \tag{3}$$

არის ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. (3) განტოლებიდან

$$X_2=X_1+Y$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნის მისაღებად მისივე კერძო ამონახსნს უნდა დავუმატოთ შესაბამისი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის სათანადო ამონახსნი.

შევნიშნოთ პირიქითაც, (1) სისტემის ამონახსნი არის $X+Y$, სადაც X არის (1)-ის რაიმე ამონახსნი, ხოლო Y შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.

მართლაც, ვთქვათ X აკმაყოფილებს (1) სისტემას: $AX=B$, ხოლო Y ერთგვაროვან სისტემას: $AY=0$; მაშინ $X+Y$ დააკმაყოფილებს (1) სისტემას:

$$A(X+Y)=AX+AY=AX=B.$$

ახლა განვიხილოთ სისტემის ამონახსნის მოძებნის საკითხი. ვთქვათ $r(A)=r$, სადაც $r\leqslant min(m,n)$. ვიგულისხმოთ, რომ მატრიცის ბაზისური მინორი, რომლის რანგი უდრის r-ს, მოთავსებულია მარცხენა ზედა კუთხეში. სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი n-უცნობიანი წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნაზე:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \qquad +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \qquad +a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+ \qquad +a_{rn}x_n=b_r \end{array}\right. \tag{7}$$

(7) სისტემის მატრიცის რანგი უდრის r-ს და $r\leqslant n$. თუ $r=n$, მაშინ მივიღებთ ისეთ განტოლებათა სისტემას, რომლის უცნობთა რიცხვი უდრის განტოლებათა რიცხვს და დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. კრამერის თეორემის თანახმად (7) სისტემას და მაშასადამე (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

თუ $r<n$ და r რიგის ბაზისური მინორი შედგენილია პირველი r უცნობის კოეფიციენტებით, მაშინ (7) სისტემის ყოველი განტოლებიდან მარჯვენა ნაწილში გადავიტანოთ $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობთა შემცველი წევრები, მივიღებთ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{array}\right. \tag{8}$$

ამ სისტემაში შემავალი $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ უცნობები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ნებისმიერი მუდმივები. მათ ვუწოდოთ **თავისუფალი უცნობები**, ხოლო $x_1, x_2, \cdots, x_r$ — **საბაზისო უც-**

ნ ო ბ ე ბ ი. რადგანაც (8) სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, ამიტომ კრამერის ფორმულებით, ამ უცნობთა მნიშვნელობები შეგვიძლია გამოვსახოთ n—r რაოდენობის $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ პარამეტრთა საშუალებით. ე. ი. საბაზისო უცნობები შეგვიძლია გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით. ცხადია ამ პარამეტრებს შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობები. მაშასადამე (1) სისტემას ექნება უამრავი ამონახსნი.

ამრიგად, როცა $r<n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია n—r პარამეტრზე.

დ ა ს კ ვ ნ ა: 1) როცა $r(A)=r(\overline{A})$, მაშინ სისტემა თავსებადია (ე. ი. აქვს ერთი მაინც ამონახსნი);

2) თუ სისტემის მატრიცის რანგი უცნობთა რიცხვის ტოლია, მაშინ სისტემა განსაზღვრულია (აქვს ერთი ამონახსნი);

3) თუ სისტემის მატრიცის რანგი უცნობთა რიცხვზე ნაკლებია, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვიკვლიოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4-x_5=6 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4-3x_5=8 \end{cases}$$

შევადგინოთ სისტემის მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ადვილი გამოსათვლელია, რომ $r(A)=2$, ხოლო სისტემის გაფართოებული

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი $r(\overline{A})=3$. მაშასადამე მოცემული სისტემა არათავსებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1+3x_2+2x_3=6 \\ 3x_1-4x_2+x_3=-5 \\ -4x_1+x_2+x_3=7 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი.

მოცემული სისტემის მატრიცის რანგი სამის ტოლია, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 40 \neq 0.$$

გაფართოებული მატრიცის რანგიც სამის ტოლია, რადგანაც არსებობს მხოლოდ ერთი მეოთხე რიგის მინორი, რომელიც უდრის ნულს:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ -4 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

მაშასადამე სისტემა თავსებადია. სისტემის მეოთხე განტოლება პირველი სამი განტოლების შედეგია. პირველი სამი განტოლებათა სისტემის კრამერის ფორმულებით ამოხსნით მივიღებთ: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვიკვლიოთ და ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0 \end{cases}$$

გამოანგარიშებით მივიღებთ, რომ სისტემის რანგი $r=2$, რომელიც ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე. სისტემას ექნება უამრავი ამონახსნი. პირველი ორი განტოლების x_1 და x_2 უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მე-2 რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

შეიძლება მივიღოთ ბაზისურ მინორად. როგორც ჩანს სისტემის მესამე განტოლება წრფივი კომბინაციაა პირველი მეორე განტოლებისა და ამიტომ სისტემის ამოსახსნელად საკმარისია განვიხილოთ პირველი ორი განტოლება. x_3, x_4, x_5 უცნობები მივიღოთ პარამეტრებად:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5, \\ x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5, \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

x_1 და x_2 უცნობთა მნიშვნელობებით განისაზღვრება მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნი. თუ მაგალითად, მივიღებთ, რომ $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$, მაშინ

$$x_1 = \frac{5}{4}; \quad x_2 = -\frac{1}{4}.$$

მაშასადამე, მოცემული სისტემის ერთი ამონახსნი იქნება $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4},\right.$ $\left.0, 0, 0\right)$. თუ გავაგრძელებთ x_3, x_4 და x_5 უცნობებისათვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მიცემას, მივიღებთ მოცემული სისტემის სხვადასხვა ამონახსნებს.

§ 4. გაუსის მეთოდი

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ გაუსის მეთოდი, რაც მდგომარეობს უცნობთა თანამიმდევრობით გამორიცხვაში შემდეგი სქემით: ვთქვათ მოცემულია განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

ამოვიწეროთ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცა:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ & & \cdot \\ a_{n11} & a_{n12}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

და მის მიმართ ჩავატაროთ ელემენტარული გარდაქმნები: შეიძლება შევცვალოთ სტრიქონთა რიგი (რაც შეესაბამება განტოლებათა რიგის შეცვლას), სტრიქონები გავამრავლოთ ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე (რაც ნიშნავს შესაბამისი განტოლებების გამრავლებას ამ რიცხვზე) და ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ სხვა სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების რაიმე რიცხვზე ნამრავლი (რაც გამოიწვევს შესაბამისი განტოლებისადმი სხვა განტოლების რაიმე რიცხვზე ნამრავლის მიმატებას). ასეთ გარდაქმნათა შედეგად მიღებული გაფართოებული მატრიცები საწყისი მატრიცის ტოლფასია. ჩვენი მიზანია $\overline{A}$ მატრიცის ისეთ სახეზე დაყვანა, საიდანაც ნათლად გამოჩნდება სისტემის ამოხსნა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 4x_1-x_2+5x_3=17 \end{cases} \tag{2}$$

განტოლებათა სისტემა. ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცა არის:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

გამოთვლების მარტივად ჩატარების მიზნით ადგილები შევუცვალოთ პირველ და მეორე განტოლებებს, მივიღებთ $\overline{A}$-ის ეკვივალენტურ მატრიცას:

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

ამ მატრიცის პირველი სტრიქონის 3-ზე ნამრავლი გამოვაკლოთ მეორე სტრიქონს, ხოლო პირველი სტრიქონის 4-ზე ნამრავლი გამოვაკლოთ მესამე სტრიქონს, მივიღებთ მის ეკვივალენტურ მატრიცას:

$$\overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

უკანასკნელი მატრიცის მეორე სტრიქონს შევუცვალოთ ნიშანი და მისი 5-ზე ნამრავლი მივუმატოთ მესამე სტრიქონს, მივიღებთ ეკვივალენტურ მატრიცას:

$$\overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{pmatrix},$$

რომელიც წარმოადგენს

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 4x_3 = -10 \\ \quad\quad -11x_3 = -33 \end{cases} \tag{3}$$

განტოლებათა სისტემის გაფართოებულ მატრიცას. (2) და (3) ტოლფასი სისტემებია. (3)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_3 = 3, \quad x_2 = 4x_3 - 10 = 12 - 10 = 2, \quad x_1 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1.$$

ამრიგად, (2) სისტემის ამონახსნია (1, 2, 3).

§ 6. სავარჯიშო

1) ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემები კრამერის წესით:

ა) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -5 \end{cases}$

2) ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ x_2+3x_3+x_4=15 \\ 4x_1+x_3+x_4=11 \\ x_1+x_2+5x_4=23 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=1 \\ 7x_1-4x_2+x_3-2x_4=1 \\ -5x_1-2x_2-3x_3+x_4=-11 \\ x_1-x_2+3x_3+4x_4=18 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+7x_3=7 \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-4 \\ -2x_1+x_2-4x_4=-3 \\ x_2-4x_3+x_4=-4 \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=3 \end{cases}$

3) ამოვხსნათ სისტემები:

ა) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4=1 \\ -x_1-x_2+x_3+2x_4=2 \\ 4x_1+2x_2-x_3+x_4=3. \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4=10. \end{cases}$

მესამე თავი

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები n-განზომილებიან სივრცეში

§ 1. n-განზომილებიანი ვექტორი

როგორც ვიცით სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობას განსაზღვრავს ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილი, ხოლო სივრცეში წერტილი მოიცემა ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულით.

განსაზღვრება 1. n რიცხვთა დალაგებულ $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ სისტემას ეწოდება n-განზომილებიანი ვექტორი. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ რიცხვებს უწოდებენ X ვექტორის კოორდინატებს.

ვექტორები აღინიშნება დიდი ასოებით, ხოლო მათი კოორდინატები — პატარა ასოებით.

როგორც ვექტორის განსაზღვრიდან ჩანს, მატრიცა-სვეტი ან მატრიცა-სტრიქონი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი და ვუწოდოთ მათ შესაბამისად ვექტორ-სვეტი და ვექტორ-სტრიქონი.

ამიტომ ვექტორებისათვის მართებული იქნება ყველა ის თვისება რაც მატრიც-სტრიქონს ან მატრიც-სვეტს ახასიათებს.

განსაზღვრება 2. $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ და $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ვექტორები ტოლია, თუ მათი შესაბამისი კოორდინატები ტოლია, ე. ი. $X=Y$ ნიშნავს, რომ $x_i=y_i$, $i=1, 2, \cdots, n$.

განსაზღვრება 3. $X \geqslant 0$, თუ $x_i \geqslant 0$; $=1, 2, \cdots, n$.

განსაზღვრება 4. თუ $x_i=0$, $i=1, 2, \cdots, n$, მაშინ X-ს ეწოდება ნულოვანი ვექტორი $X=0$, $0=(0, 0, \ldots, 0)$.

განსაზღვრება 5. თუ $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ და $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, მაშინ მათი ჯამი განისაზღვრება ასე:

$$X+Y=(x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ \cdots;\ x_n+y_n).$$

ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ მართებულია ორი კანონი:

1) $X+Y=Y+X$ (კომუტატივობის კანონი)

2) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$ (ასოციატივობის კანონი).

ცხადია, რომ

$$X+0=(x_1+0;\ x_2+0;\ \cdots,\ x_n+0)=(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)=X.$$

განსაზღვრება 6. X ვექტორის k რიცხვზე ნამრავლი მიიღება ამ ვექტორის კოორდინატების k რიცხვზე გამრავლებით, ე. ი.

$$kX=(kx_1,\ kx_2,\ \cdots,\ kx_n).$$

თუ ორი ვექტორის ჯამი არის ნულოვანი ვექტორი, მაშინ მათ უწოდებენ მოპირდაპირე ვექტორებს: X-ის მოპირდაპირე ვექტორია.

$$-X=(-x_1\ -x_2,\ \cdots,\ -x_n).$$

X და Y ვექტორთა სხვაობა განისაზღვრება ასე:

$$X-Y=(x_1-y_1;\ x_2-y_2;\ \cdots;\ x_n-y_n).$$

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

1) $k(X\pm Y)=kX\pm kY,$

2) $(k\pm l)X=kX\pm lX,$

3) $k(lX)=(kl)X,$

4) $1\cdot X=X,$

5) $0\cdot X=0,$

6) $(-1)X=-X,$

7) $k\cdot 0=0.$

განსაზღვრება 7. X და Y ვექტორთა სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს:

$$(X,\ Y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

აღსანიშნავია სკალარული ნამრავლის თვისებები:

1 $(X,\ Y)=(Y,\ X),$

2) $(X+Y,\ Z)=(X,\ Z)+(Y,\ Z),$

$$3)\ (kX,\ Z)=k(X,\ Z),$$

$$4)\ (X,\ X)\geqslant 0.$$

X ვექტორის სიგრძე განისაზღვრება ფორმულით:

$$|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

განსაზღვრება 8. X და Y ვექტორების მიერ შედგენილი α კუთხე განისაზღვრება ფორმულით (როცა $X=0$ ან $Y=0$, მაშინ α განუზღვრელია):

$$\cos\alpha=\frac{(X,\ Y)}{|X|\cdot|Y|}.$$

განსაზღვრება 9. X და Y ვექტორებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$d(X,\ Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

§ 2. ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა

თუ არსებობს ისეთი k რიცხვი, რომ $X=kY$, მაშინ X ვექტორი Y ვექტორის პროპორციულია.

ნულვექტორი ნებისმიერი ვექტორის პროპორციულია: $O=0\,.\,X$.

განსაზღვრება 1. $X_1,\ X_2,\ldots,$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_s$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s=0. \qquad (1)$$

თუ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_s$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_s$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია ეწოდება

$$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\qquad+\alpha_sX_s$$

ჯამს.

განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ამ ვექტორებიდან ერთი მაინც იქ-

ნება დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია. მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $k_2 \neq 0$, მაშინ (1) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2}X_1 - \frac{k_3}{k_2}X_3 - \cdots - \frac{k_s}{k_2}X_s ,$$

ანუ $X_2 = \alpha_1 X_1 + \alpha_3 X_3 + \cdots + \alpha_s X_s$, სადაც $\alpha_1 = -\frac{k_1}{k_2}$, $\alpha_3 = -\frac{k_3}{k_2}, \cdots, \alpha_s = -\frac{k_s}{k_2}$.

მაშასადამე, X_2 ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

თეორემა 1. თუ მოცემული ვექტორთა სისტემის რაიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ძირითადი სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ვექტორთა სისტემა: $X_1, X_2, \ldots, X_s$ და ვიგულისხმოთ, რომ მისი ქვესისტემაა $X_1, X_2, \ldots, X_k$ $(k \leqslant s)$. პირობის თანახმად არსებობს რიცხვთა ისეთი $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ერთობლიობა, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_k X_k = 0.$$

მაგრამ

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_k X_k + 0 \cdot X_{k+1} + \cdots + 0 \cdot X_s = 0,$$

რაც ნიშნავს მოცემული სისტემის წრფივად დამოკიდებულებას, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

განსაზღვრება 2. $X_1, X_2, \ldots, X_s$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ არ არსებობს $k_1, k_2, \ldots, k_s$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ისეთი, რომ

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_s X_s = 0.$$

ცხადია, რომ ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა ან წრფივად დამოკიდებული იქნება, ან წრფივად დამოუკიდებელი. თუ ვექტორთა სისტემა

წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ ნებისმიერი მისი ქვესისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში 1-ლი თეორემის თანახმად, თვით ვექტორთა სისტემაც იქნება წრფივად დამოკიდებული.

განსაზღვრება 3. n-განზომილებიან ყველა ვექტორთა სიმრავლეს, რომელშიაც განსაზღვრულია ვექტორთა შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები, ეწოდება n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე.

განსაზღვრება 4. n-განზომილებიან ვექტორთა რაიმე სიმრავლეს ეწოდება ქვესივრცე, თუ ამ სიმრავლის ორი ნებისმიერი ვექტორის ჯამი და რიცხვზე ნამრავლი ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის. ვექტორული ქვესივრცის მაგალითებია: თვით ძირითადი სივრცე, კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფის წერტილთა სიმრავლისაგან შედგენილი სივრცე, ნულოვანი ვექტორისაგან შედგენილი სივრცე და სხვ.

სამგანზომილებიანი სივრცის ქვესივრცის მაგალითებია: კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ყოველი წრფე და ყოველი სიბრტყე. რადგანაც ყოველი ქვესივრცე უნდა შეიცავდეს ნულვექტორს, ამიტომ ქვესივრცე არ იქნება ის წრფე ან სიბრტყე, რომლებიც არ გადიან კოორდინატთა სათავეზე.

ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორი ვექტორი მდებარეობს ერთ წრფეზე, მაშინ ისინი იქნებიან წრფივად დამოკიდებული. სამი ვექტორი იქნება წრფივად დამოკიდებული თუ ისინი მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე.

ეს მაგალითები გვიჩვენებს, რომ მოცემულ ვექტორთა სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რაოდენობა დამოკიდებული არ არის ამ ვექტორთა სისტემაში შემავალ ვექტორთა რაოდენობაზე. ამიტომ ისმის კითხვა: როგორია მაქსიმალური რაოდენობა ვექტორებისა, რომლებსაც შეიძლება შეიცავდეს n-განზომილებიანი სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა?

ამ კითხვაზე პასუხობს შემდეგი ორი თეორემა:

თეორემა 2. n-განზომილებიან სივრცეში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა.

მართლაც, განვიხილოთ n-განზომილებიანი სივრცის ერთეულოვანი ვექტორები:

$$
\begin{aligned}
e_1&=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\
e_2&=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0)\\
&\ \ \vdots\\
e_n&=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$e_1, e_2, \cdots, e_n$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ

$$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=0, \tag{3}$$

სადაც $k_1, k_2, \cdots, k_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც არ უდრის ნულს. თუ გავიხსენებთ ვექტორთა შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3) ტოლობის მარცხენა ნაწილში არის $K=(k_1,\ k_2,\ldots,\ k_n)$ ვექტორი, ხოლო მარჯვენა ნაწილში $0=(0,0,\ldots,\ 0)$ ვექტორი, ე. ი. $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$, რაც ეწინააღმდეგება იმ პირობას, რომ $k_1,\ k_2,\ldots,k_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ამრიგად, (2) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემა 3. თუ $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ ვექტორები წრფივად გამოისახებიან $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ვექტორებით, მაშინ $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. n-განზომილებიან სივრცეში ყოველი $n+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

შ ე დ ე გ ი 2. თუ მოცემულია ვექტორთა ორი სისტემა:

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_r, \tag{4}$$

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_s, \tag{5}$$

რომელთაგან ვექტორთა (4) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და მისი ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება ვექტორთა (5) სისტემით, მაშინ (4) სისტემის ვექტორთა რაოდენობა არ აღემატება (5) სისტემის ვექტორთა რაოდენობას.

თეორემა 4. n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რაოდენობა არის n.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5. ვექტორული სივრცის მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას ეწოდება ვექტორული სივრცის ბ ა ზ ი ს ი, ხოლო ვექტორთა რაოდენობას, მაქსიმალურ წრფი-

ვად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაში — ვექტორული სივრცის რ ა ნ გ ი.

მე-4 თეორემის თანახმად n-განზომილებიანი სივრცის რანგი უდრის n-ს, ხოლო ამ სივრცის ერთ-ერთი საბაზისო სისტემა არის ერთეულოვან ვექტორთა სისტემა: $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

თეორემა 5. n-განზომილებიან სივრცეში არსებობს საბაზისო სისტემათა უსასრულო სიმრავლე.

თეორემა 6. ვექტორთა სისტემის ყოველი ვექტორი ერთადერთი სახით ჩაიწერება საბაზისო სისტემაში.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6. n-განზომილებიანი სივრცის r-განზომილებიანი წრფივი მრავალსახეობა ეწოდება n-განზომილებიანი სივრცის ყველა იმ ვექტორთა სიმრავლეს, რომელიც წარმოიდგინება $X+Y$ ჯამის სახით, სადაც X არის n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ნებისმიერი ფიქსირებული ვექტორი, ხოლო Y არის r-განზომილებიანი ქვესივრცის ნებისმიერი ვექტორი.

§ 3. ჰიპერსიბრტყეები n-განზომილებიან სივრცეში

ვთქვათ R არის n-განზომილებიანი სივრცე და X ამ სივრცის რაიმე ვექტორი: $X=(x_1, x_2,\dots, x_n)$. აღნიშნული ვექტორის ნაცვლად შეგვიძლია განვიხილოთ M წერტილი იგივე $x_1, x_2,\dots,x_n$ კოორდინატებით. ამ შემთხვევაში $M(x_1, x_2,\dots, x_n)$ არის R სივრცის წერტილი, ხოლო X არის ამ წერტილის რადიუს-ვექტორი. როგორც ვიცით ნამდვილ n რიცხვთა ნებისმიერი დალაგებული $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ სიმრავლე განსაზღვრავს რაღაც X ვექტორს და მაშასადამე n-განზომილებიან წერტილს. ასეთ წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება n-განზომილებიან წერტილთა სივრცე და აღინიშნება T-ასოთი.

O წერტილს, რომლის ყველა კოორდინატი ნულია, ეწოდება კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ა თ ა ვ ე.

$M(0,\cdots 0,\ x_k, 0,\cdots,0)$ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, სადაც k-ური კოორდინატი $x_k\neq 0$, ხოლო ყველა დანარჩენი ნულის ტოლია, ეწოდება x_k კოორდინატთა ღერძი. მაშასადამე T სივრცეში გვაქვს n ღერძი.

ისეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის k-ური კოორდინატი ნულია, ხოლო ყველა სხვა კოორდინატი ნებისმიერი (ე. ი. $N(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \cdots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლე) ეწოდება x_k კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ი ს ჰ ი პ ე რ ს ი ბ რ ტ ყ ე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. n-განზომილებიანი T სივრცის ჰიპერსიბრტყე ეწოდება იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0=0, \tag{1}$$

სადაც $a_i (i=0, 1, 2, \cdots, n)$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

შევნიშნოთ, რომ $a_i (i=1, 2, \cdots, n)$ კოეფიციენტები ერთდროულად არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ $a_0=0$.

თუ $a_0=0$, მაშინ მივიღებთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალ ჰიპერსიბრტყეს, რადგან (1) განტოლებას დააკმაყოფილებს კოორდინატთა სათავის კოორდინატები.

თუ $a_0=0$ და რომელიმე k-სათვის $a_k \neq 0$ და (1) ტოლობის ყველა სხვა კოეფიციენტი უდრის ნულს, მაშინ $x_k=0$, ე. ი. მივიღებთ k-ურ საკოორდინატო ჰიპერსიბრტყეს.

(1) ტოლობასთან ერთად განვიხილოთ მეორე ჰიპერსიბრტყე

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n+b_0=0. \tag{2}$$

იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც ეკუთვნის როგორც (1) ისე (2) ჰიპერსიბრტყეს, ეწოდება ამ ჰიპერსიბრტყეთა თანაკვეთა.

თუ ასეთი წერტილების სიმრავლე ცარიელია, მაშინ ეს ჰიპერსიბრტყეები არ იკვეთებიან, ე. ი. თუ აღნიშნული ჰიპერსიბრტყეები იკვეთებიან, მაშინ იარსებებს

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n+b_0=0 \end{cases} \tag{3}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. წინააღმდეგ შემთხვევაში (3) სისტემას ამონახსნი არ ექნება. სისტემას არ ექნება ამონახსნი თუ სრულდება პირობა:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\neq\frac{a_0}{b_0}. \qquad (4)$$

თუ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_0}{b_0}, \qquad (5)$$

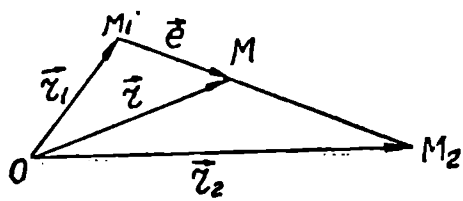
მაშინ ჰიპერსიბრტყეები ემთხვევიან ერთმანეთს.

განსაზღვრება 2. ორი ჰიპერსიბრტყე პარალელურია თუ ისინი ემთხვევიან ერთმანეთს ან არ იკვეთებიან, ე. ი. სრულდება (4) ან (5) პირობა.

§ 4. მონაკვეთის ცნება n-განზომილებიან სივრცეში

განვიხილოთ სიბრტყის ორი M_1 და M_2 წერტილი და მათი შესაბამისი $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}$ და $\vec{r}_2=\overrightarrow{OM_2}$ რადიუს-ვექტორები (ნახ. 1). ცხადია, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$



ნახ. 1.

ვთქვათ ნებისმიერი t რიცხვი მოთავსებულია 0 და 1 შორის: $0\leqslant t\leqslant 1$. განვიხილოთ $\vec{e}=t\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორი. იგი კოლინიალურია $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის, მიმართულია $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის მიმართულებით და მისი სიგრძე $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის სიგრძეზე ნაკლებია. ამიტომ ცხადია, რომ თუ $\vec{e}$ ვექტორის სათავეს მოვათავსებთ M_1 წერტილში, მაშინ მისი ბოლო მოხვდება $[M_1M_2]$ მონაკვეთზე. როცა $t=0$, მაშინ $\vec{e}=0$ და $M\equiv M_1$. t-ს ზრდა იწვევს M წერტილის მოძრაობას M_1M_2 მონაკვეთზე M_1 წერტილიდან M_2 წერტილისაკენ. როცა $t=1$, მაშინ $M\equiv M_2$.
ცხადია, რომ

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{e}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=(1-t)\vec{r}_1+t\vec{r}_2.$$

როცა t გაირბენს $[0,1]$ მონაკვეთს, $\vec{r}$ ვექტორის ბოლო გაირბენს $[M_1M_2]$ მონაკვეთს. ამრიგად,

$$\vec{r}=(1-t)\vec{r}_1+t\vec{r}_2, \tag{6}$$

სადაც $0\leqslant t\leqslant 1$. შევნიშნოთ, რომ ჩვენი მსჯელობა და მაშასადამე (6) ფორმულა შეიძლება განვაზოგადოთ სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში. n-განზომილებიან სივრცეში $[M_1M_2]$ მონაკვეთს უწოდებენ იმ M წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორები განისაზღვრებიან (6) ფორმულით. ამ ფორმულით განსაზღვრულ $\vec{r}$ ვექტორს უწოდებენ $\vec{r}_1$ და $\vec{r}_2$ ვექტორთა წ რ ფ ი ვ ა მ ო ზ ნ ე ქ ი ლ კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა ს.

როგორც ცნობილია, წრფივი ოპერაციები ვექტორების მიმართ დაიყვანება მათი კოორდინატების იმავე წრფივ ოპერაციებზე. მაშასადამე, თუ

$$\vec{r}_1=\{x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n^{(1)}\},$$

$$\vec{r}_2=\{x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(2)}\},$$

$$\vec{r}=\{x_1,\ x_2,\ \quad,\ x_n\},$$

მაშინ

$$x_i=(1-t)x_i^{(1)}+tx_i^{(2)}, \tag{7}$$

სადაც

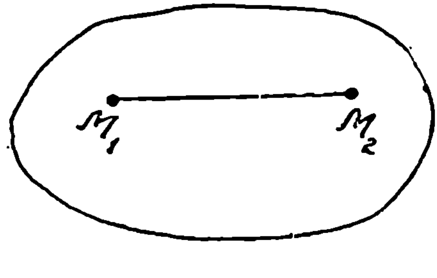
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

§ 6. ამოზნექილი სხეულის ცნება

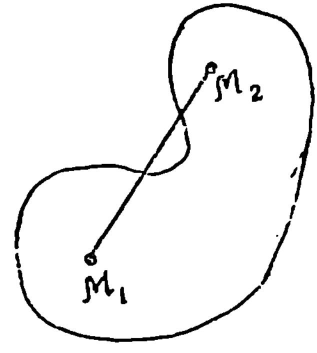
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. თუ n-განზომილებიანი T სივრცის წერტილთა რაიმე სიმრავლე ისეთია, რომ მის ნებისმიერ M_1 და M_2 წერტილებთან ერთად $[M_1M_2]$ მონაკვეთის წერტილებიც მას ეკუთვნის, მაშინ ასეთ სიმრავლეს ეწოდება ა მ ო ზ ნ ე ქ ი ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე.

მაგალითად, მე-2 ნახაზზე მოცემული ბრტყელი ნაკვეთი ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო მე-3 ნახაზზე მოცემული ბრტყელი ნაკვეთი არ არის ამოზნექილი.

თ ე ო რ ე მ ა. ნებისმიერი რაოდენობით აღებულ ამოზნექილ სხეულთა თანაკვეთა ამოზნექილი სხეულია.



ნახ. 2.



ნახ. 3.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ ამოზნექილ სხეულთა თანაკვეთის ორი წერტილია M_1 და M_2. სიმრავლეთა თანაკვეთის განსაზღვრის თანახმად ეს წერტილები მიეკუთვნებიან თანაკვეთში შემავალ ყველა სხეულს. პირობის თანახმად ეს სხეულები ამოზნექილია და მაშასადამე შეიცავენ $[M_1M_2]$ მონაკვეთის ყველა წერტილს. ამრიგად, $[M_1M_2]$ მონაკვეთი მთლიანად შევა სხეულთა თანაკვეთაში. ეს იმას ნიშნავს, რომ თანაკვეთა ამოზნექილი სხეულია. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2. ამოზნექილი სიმრავლის წ ვ ე რ ო, ანუ კ უ თ ხ ი თ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება ისეთ წერტილს, რომელიც არ წარმოადგენს ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი წერტილის ამოზნექილ კომბინაციას.

მაგალითად, სამკუთხედის კუთხითი წერტილია მისი წვერო, წრის კუთხითი წერტილებია მისი შემომსაზღვრელი წრეწირის წერტილები. წრფეს და სიბრტყეს კუთხითი წერტილები არ გააჩნიათ.

§ 6. წრფივი უტოლობები და უტოლობათა სისტემები

განვიხილოთ უტოლობათა სისტემების ამონახსნთა მრავალწახნაგების აგების მაგალითები და მივუთითოთ ამ მრავალწახნაგთა კუთხით წერტილებზე, როცა მათ ასეთი წერტილები ექნებათ. ერთგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში მრავალწახნაგა გადადის მონაკვეთში, ნა-

ნახევარწრფეში ან წრფეში. ორგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში — მრავალკუთხედებში ან სიბრტყის რაიმე ამოზნექილ სხეულში.

ერთცვლადიან უტოლობას აქვს შემდეგი სახე:

$$ax \leqslant b. \tag{1}$$

ამ უტოლობის ამონახსნი არის $x \geqslant \frac{b}{a}$ ნახევარწრფე თუ $a<0$ და $x \leqslant \frac{b}{a}$ ნახევარწრფე თუ $a>0$. ამ ნახევარწრფეებს ექნებათ თითო კუთხითი წერტილი $x=\frac{b}{a}$.

იმისდა მიხედვით თუ როგორი ნიშნები აქვთ a და b რიცხვებს, განიხილება შემთხვევები:

ა) თუ $a>0$, $b>0$, მაშინ (1) უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე იქნება $0 \leqslant x \leqslant \frac{b}{a}$ მონაკვეთი, ორი კუთხითი წერტილით: 0 და $\frac{b}{a}$.

ბ) თუ $a<0$, $b<0$, მაშინ არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლეა სხივი $x \geqslant \frac{b}{a}$, ერთი კუთხითი წერტილით: $\frac{b}{a}$.

გ) თუ $a<0$, $b>0$, მაშინ არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლეა $x \geqslant 0$ ნახევარწრფე. მას აქვს ერთი კუთხითი წერტილი: 0.

დ) თუ $a>0$, $b<0$, მაშინ $x \leqslant \frac{b}{a} < 0$. არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $3x \leqslant 6$ უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლეა $0 \leqslant x \leqslant 2$ მონაკვეთი, ორი კუთხითი წერტილით: 0 და 2.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $-2x \leqslant -7$ უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლეა $x \geqslant \frac{7}{2}$ ნახევარწრფე, ერთი კუთხითი წერტილით: $\frac{7}{2}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $-4x \leqslant 12$ უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე არის $x \geqslant 0$ ნახევარწრფე, ერთი კუთხითი წერტილით: 0.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $5x \leqslant -37$ უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია $\left(x \leqslant -\frac{37}{5}\right)$.

ახლა განვიხილოთ ერთი ცვლადის შემცველი წრფივ უტოლობათა სისტემები:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 3x \leqslant 9 \\ 4x - 8 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

უტოლობათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე. (2) სისტემის პირველი უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლეა $0 \leqslant x \leqslant 3$ მონაკვეთი. მეორე უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე $x \geqslant 2$ ნახევარწრფე. ამრიგად, (2) უტოლობათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე იქნება $2 \leqslant x \leqslant 3$ მონაკვეთი, ორი კუთხითი წერტილით: 2 და 3.

ახლა განვიხილოთ ორი ცვლადის შემცველი წრფივი უტოლობებისა და უტოლობათა სისტემების ამოხსნის საკითხი.

ვთქვათ მოცემულია ორი x_1 და x_2 ცვლადის შემცველი უტოლობა:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b, \tag{3}$$

რომელიც წარმოადგენს ნახევარსიბრტყეს. მისი არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე არის $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ და $a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b$ ნახევარსიბრტყეთა საერთო ნაწილი. იგი შეიძლება იყოს ცარიელი სიმრავლე, სამკუთხედი ან სიბრტყის რაიმე უსასრულო ნაწილი.

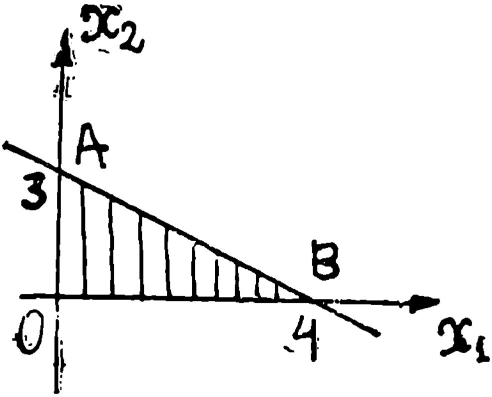
მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიპოვოთ

$$3x_1 + 4x_2 - 12 \leqslant 0 \tag{4}$$

უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

ამისათვის ავაგოთ (3) უტოლობის შესაბამისი წრფე: $3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$ (ნახ. 4). ცხადია, რომ ამ უტოლობის ამონახსნი იქნება აღნიშნული წრფით განსაზღვრული ის ნახევარსიბრტყე, სადაც 0 (0,0) წერ-

ტილია მოთავსებული, ხოლო არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე იქნება AOB სამკუთხედის წერტილთა სიმრავლე, კონტურის წერტილთა ჩათვლით.



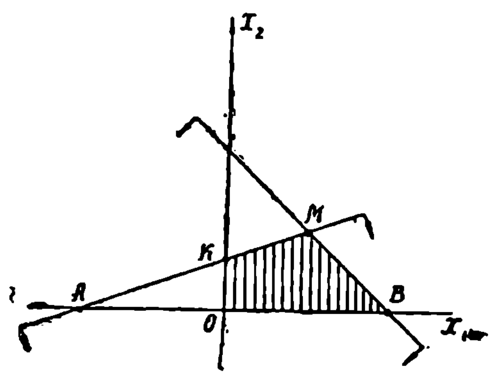
ნახ. 4.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4 \geqslant 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 12 \leqslant 0 \end{cases} \qquad (5)$$

უტოლობათა სისტემის არაუარყოფითი ამონახსნთა სიმრავლე.

ამისათვის ავაგოთ მოცემული სისტემის უტოლობათა (ნახ. 5) შესაბამისი წრფეები და შემდეგ გამოვყოთ (5)-ში შემავალი უტოლობების ამონახსნთა საერთო ნაწილი, მივიღებთ AMB კუთხით განსაზღვრულ სიბრტყის უსასრულო ნაწილს. ამ ნაწილისა და $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ ნახევარსიბრტყეთა თანაკვეთას წარმოადგენს $MKOB$ ოთხკუთხედი, რომელიც იქნება (5) სისტემის არაუარყოფითი ამონახსნთა სიმრავლე —ამოზნექილი ოთხკუთხედი, რომლის კუთხური წერტილებია: $K(0;\ 2)$, $O(0;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ და $M\left(\frac{12}{11}, \frac{28}{11}\right)$



ნახ. 5.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 12 \geqslant 0 & (ა) \\ x_1 + x_2 - 6 \geqslant 0 & (ბ) \\ 4x_1 - x_2 - 16 \leqslant 0 & (გ) \end{cases} \qquad (6)$$

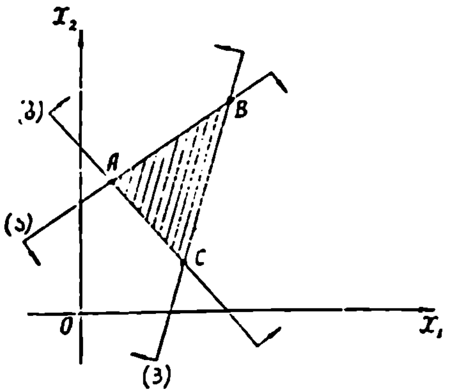
უტოლობათა სისტემის ამონახსნი.

ავაგოთ წრფეები: $2x_1 - 3x_2 + 12 = 0$, $x_1 + x_2 - 6 = 0$ და $4x_1 - x_2 - 16 = 0$. მე-6 ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებია (6) სისტემის უტოლობებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეები, რომლებიც წარმოადგენენ

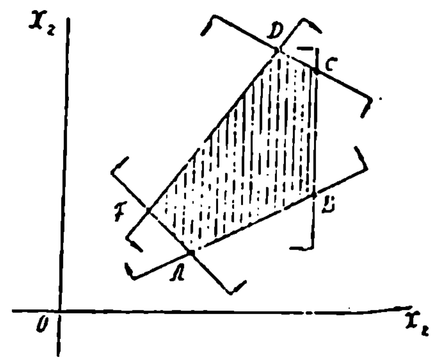
აღნიშნული უტოლობების ამონახსნებს. (6) სისტემის ამონახსნია ABC სამკუთხედი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2+1\geqslant 0 \\ x_1+x_2-8\leqslant 0 \\ x_1-4\leqslant 0 \\ x_1-2x_2\leqslant 0 \\ x_1+x_2-3\geqslant 0 \end{cases} \qquad (6)$$



ნახ. 6.



ნახ. 7.

უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე. თუ გავიმეორებთ წინა მაგალითში მოყვანილ მსჯელობას, ადვილად მივიღებთ (6) სისტემის ამონახსნთა მრავალკუთხედს, კუთხითი წერტილებით:

$A(2; 1)$, $B(4; 2)$, $C(4; 4)$, $D\left(\frac{23}{6}, \frac{25}{6}\right)$ და $F\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (ნახ. 7).

§ 7. წრფივი ფუნქცია

თუ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ცვლადი სიდიდეებია, ხოლო $a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n$ მუდმივი რიცხვები, მაშინ

$$F=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0 \qquad (1)$$

გამოსახულებას ეწოდება წრფივი ფუნქცია.

როგორც აღვნიშნეთ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც n-განზომილებიანი სივრცის M წერტილის კოორდინატები, ამიტომ წრფივი ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც n-განზომილებიანი წერტილის ფუნქცია.

თუ განვიხილავთ სივრცის რაიმე $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ წერტილს და მის კოორდინატებს ჩავსვამთ (1) გამოსახულებაში ცვლადი კოორდინატების ნაცვლად, მაშინ F ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$F_0=a_1x_1^{(0)}+a_2x_2^{(0)}+\cdots+a_nx_n^{(0)}+a_0.$$

F_0-ს ეწოდება F ფუნქციის მნიშვნელობა M_0-წერტილზე.

განვიხილოთ რაიმე c რიცხვი და იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები დააკმაყოფილებენ (1) ტოლობას, ე. ი.

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0=c. \tag{2}$$

(2) ტოლობა განსაზღვრავს გარკვეულ ჰიპერსიბრტყეს.

განსაზღვრება. (2)-ს ეწოდება $F=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0$ ფორმის შესაბამისი ჰიპერსიბრტყე.

თუ $c_1 \neq c_2$, მაშინ ერთი და იგივე ფორმის შესაბამისი ორი

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0=c_1$$

და

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0=c_2.$$

ჰიპერსიბრტყე არ იკვეთება, ე. ი. F ფორმა განსაზღვრავს პარალელურ ჰიპერსიბრტყეთა სიმრავლეს.

§ 8. ნახევარსივრცის ცნება

სიბრტყის ყოველი წრფე ამ სიბრტყეს ჰყოფს ორ ნახევარსიბრტყედ. განვიხილოთ სიბრტყის რაიმე წრფე. თუ სიბრტყის ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი ჰკვეთს ამ წრფეს, მაშინ ვიტყვით, რომ ეს წერტილები მოთავსებულია სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში. წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს ორი წერტილი ერთსა და იმავე ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს. ანალოგიური სურათი გვექნება n-განზომილებიან T სივრცეში.

ვთქვათ Π არის n-განზომილებიანი T სივრცის რაიმე ჰიპერსიბრტყე.

თეორემა 1. T სივრცის ყველა წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც არ მდებარეობენ Π სიბრტყეზე შეიძლება გაიყოს ორ ნაწილად ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობა: მონაკვეთი, რომელიც აერთებს ერთი და იმავე ნაწილის ორ ნებისმიერ წერტილს, არ კვეთს Π ჰიპერსიბრტყეს; მონაკვეთი, რომელიც აერთებს სხვადასხვა ნაწილებიდან აღებულ ნებისმიერ ორ წერტილს, აუცილებლად გადაკვეთს Π ჰიპერსიბრტყეს. ე. ი. ჰიპერსიბრტყე მთელ T სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად.

ბუნებრივია, ამ ნაწილებს ვუწოდოთ ნახევარსივრცეები და თვით Π ჰიპერსიბრტყე შეიძლება მივაკუთვნოთ როგორც ერთს, ისე მეორე ნახევარსივრცეს.

თეორემა 2. რაიმე Π ჰიპერსიბრტყით შემოსაზღვრული ნახევარსივრცე არის ამოზნექილი სხეული.

ცხადია, რომ ნებისმიერი რაოდენობით აღებულ სხვადასხვა ჰიპერსიბრტყეებით შემოსაზღვრულ ნახევარსივრცეთა თანაკვეთა ამოზნექილი სხეულია.

§ 9. წრფივი უტოლობები

ვთქვათ მოცემულია n ცვლადის

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0\geqslant 0 \tag{1}$$

უტოლობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. T სივრცის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ რაიმე უტოლობას, ეწოდება ამ უტოლობის ამონახსნთა არე.

თეორემა 1. წრფივი უტოლობის ამონახსნთა არე ნახევარსივრცეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ მოცემულია (1) უტოლობა. თუ უტოლობის ნიშანს შევცვლით ტოლობით, მივიღებთ

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_0=0, \tag{2}$$

რომელიც განსაზღვრავს რაიმე ჰიპერსიბრტყეს. (1) უტოლობის ამონახსნთა არე იქნება T სივრცის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა-

თვისაც $F = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0$ ფორმა არაუარყოფითია. ეს კი იქნება ერთ-ერთი ნახევარსივრცე, რომელიც შემოსაზღვრულია ჰიპერსიბრტყით.

ახლა განვიხილოთ (1) სახის უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{10} \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{20} \geqslant 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m0} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა არე იქნება T სივრცის იმ წერტილთა სიმრავლე რომელთა კოორდინატები დააკმაყოფილებენ სისტემის ყოველ უტოლობას.

თეორემა 2. უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა არე იქნება ნახევარსივრცეთა რაიმე თანაკვეთა.

შევნიშნოთ, რომ თუ (3) უტოლობათა სისტემა არ არის თავსებადი, მაშინ შესაბამის ნახევარსივრცეთა თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

როგორც ვიცით ნებისმიერი რაოდენობის ნახევარსივრცეთა თანაკვეთა ამოზნექილი სხეულია. ასეთ სხეულს ეწოდება ამოზნექილი მრავალკუთხედი. ე. ი. თავსებადი უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა არე ამოზნექილი მრავალკუთხედია. ეს მრავალკუთხედი შემოსაზღვრულია ჰიპერსიბრტყეებით, რომელთა განტოლებებიც მიიღება (3) სისტემის უტოლობების ნიშნის ტოლობებით შეცვლით. თვით მრავალკუთხედი არის აღნიშნული ჰიპერსიბრტყეებით განსაზღვრული ნახევარსივრცეების თანაკვეთა.

§ 10. სავარჯიშო

1) ვიპოვოთ კუთხე $X = (2, -1, 3, 1)$ და $Y = (0, -3, 1, 2)$ ვექტორებს შორის.

2) როგორი უნდა იყოს k პარამეტრი, რომ $X = (1, k, 0, 4)$ და $Y = (-1, 2, k, 3)$ ვექტორებს შორის კუთხე იყოს $\dfrac{\pi}{3}$.

3) პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის იქნება წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა:

$$X_1=(k,\ 3k,\ 2k,\ 1),\quad X_2=(-1,\ 2k,\ 3k,\ k),$$
$$X_3=(-2,\ 1,\ 3,\ 4),\quad X_4=(0,\ 3,\ 0,\ 2k).$$

4) იქნებიან თუ ამოზნექილი სხეულები შემდეგი უტოლობათა სისტემის ამონახსნები:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 2 \\ x_1-3x_2\leqslant 0 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 7 \\ x_1-2x_2\geqslant 6 \\ x_1\geqslant 0 \\ x_2\leqslant 0 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1+x_2=8 \\ 2x_1+2x_2=15 \end{cases}$ დ) $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1+x_2\leqslant 1 \\ x_1\geqslant 0 \\ x_2\leqslant -1 \end{cases}$

5) ვიპოვოთ უტოლობებისა და უტოლობათა სისტემების არაუარყოფითი ამონახსნები:

ა) $2x_1-x_2\leqslant 7$ ბ) $\begin{cases} x_1\leqslant -3 \\ x_1+2x_2\geqslant 5 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x_1-x_2\leqslant 1 \\ 3x_1+x_2\leqslant -7 \\ x_1+x_2\geqslant 2 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x_1+3x_2\leqslant 7 \\ -7x_1+4x_2\leqslant 1 \\ 8x_1-3x_2\leqslant 2 \\ x_1+x_2>3 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x_1-x_2\leqslant 1 \\ x_1+x_2\leqslant 2 \\ 2x_1-x_2\leqslant 5 \\ x_1+x_3\leqslant -10 \end{cases}$

მეოთხე თავი

წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანები

§ 1. წრფივი დაპროგრამების ზოგიერთი ამოცანა

1. წარმოების დაგეგმვის ამოცანა. განიხილება საწარმო, რომლის განკარგულებაშია n სახის რესურსი: $P_1, P_2, \cdots, P_n$ (რესურსებში იგულისხმება: დაზგა, დანადგარები, მუშახელი, ნედლეული, დროის ფონდი და სხვა). ყოველი რესურსის რაოდენობა შეზღუდულია. ვთქვათ საწარმოს გააჩნია b_i-რაოდენობის P_i-რესურსი, $i=1, 2,..., n$. საწარმოს შეუძლია დაამზადოს გარკვეული სახის პროდუქცია m სხვადასხვა ტექნოლოგიური პროცესით. ყოველი j-სახის ტექნოლოგიური ხერხი მოითხოვს i-სახის რესურსის a_{ij} დანახარჯს. ამოცანა გვეკითხება დასაგეგმავ T პერიოდში რა დრო უნდა დავუთმოთ ამა თუ იმ ტექნოლოგიურ პროცესს, რომ პროდუქციის საერთო გამოშვებული რაოდენობა იყოს მაქსიმალური, თუ ცნობილია, რომ j-ური ტექნოლოგიური პროცესი დროის ერთეულში იძლევა c_j რაოდენობის პროდუქციას.

თუ აღვნიშნავთ $x_1, x_2 \cdots, x_n$-ით შესაბამისად პირველ, მეორე, და ა. შ. n-ური ტექნოლოგიური პროცესისათვის დათმობილ დროს, მაშინ ამოცანა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ცხრილის სახით (ცხრ. 1). რადგან j-ური ტექნოლოგიური პროცესის x_j დროის განმავლობაში გამოყენება იწვევს P_i რესურსის a_{ij} დანახარჯს და ამავე დროს ასეთმა დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს b_i-ს, ყოველი P_i რესურ-

ცხრილი 1

ტექნოლოგიური პროცესი / რესურსები	1	2		m	რესურსების რაოდენობა
P_1 P_2 $\vdots$ P_n	a_{11} a_{21} $\vdots$ a_{n1}	a_{12} a_{22} $\vdots$ a_{n2}	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	a_{1m} a_{2m} $\vdots$ a_{nm}	b_1 b_2 $\vdots$ b_n
დახარჯული დრო	x_1	x_2		x_m	
პროდუქციის რაოდენობა	c_1	c_2		c_m	

სისათვის შეგვიძლია ჩავწეროთ შეზღუდვა, რომელიც შემდეგი უტოლობით ჩაიწერება

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{im}x_m\leqslant b_i,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{1}$$

გარდა ამისა დროის საერთო დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს დასაგეგმი დროის ხანგრძლივობას, ამიტომ

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant T. \tag{2}$$

ბუნებრივია აგრეთვე, რომ

$$x_j\geqslant 0. \tag{3}$$

თუ ვიანგარიშებთ დამზადებული პროდუქციის საერთო რაოდენობას გვექნება:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m. \tag{4}$$

ყოველივე ამის შემდეგ მათემატიკურად ეს ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m \leqslant b_1, \\
\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m \leqslant b_n, \\
x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant T, \\
x_1 \geqslant 0, \\
x_2 \geqslant 0, \\
\vdots \\
x_m \geqslant 0.
\end{cases}
$$

უტოლობათა სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც (4) გამოსახულებას მიანიჭებს უდიდეს მნიშვნელობას.

2. **ნედლეულის გამოყენების ამოცანა.** საწარმო ამზადებს Π_1, $\Pi_2, \cdots, \Pi_n$ სახის პროდუქციას, რისთვისაც მის განკარგულებაშია b_1, $b_2, \cdots, b_m$ რაოდენობის შესაბამისად $s_1, s_2, \cdots, s_m$ სახის ნედლეული. ყოველივე ერთეული Π_j პროდუქცია საწარმოს აძლევს c_j შემოსავალს. ცნობილია, რომ Π_j სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის დამზადებისათვის საჭიროა a_{ij} რაოდენობის S_i სახის ნედლეული.

ამოცანა გვეკითხება რა რაოდენობით უნდა დავამზადოთ ესა თუ ის ნედლეული, რომ ამ გზით მიღებული საერთო შემოსავალი საწარმოსათვის იყოს რაც შეიძლება მეტი.

ამოცანის პირობა შეიძლება წარმოვადგინოთ მე-2 ცხრილის სახით

ცხრილი 2

ნედლეული	ნედლეულის მარაგი	საწარმო			
		Π_1	Π_2		Π_n
s_1 s_2 $\vdots$ s_m	b_1 b_2 $\vdots$ b_m	a_{11} a_{21} $\vdots$ a_{m1}	a_{12} a_{22} $\vdots$ a_{m2}		a_{1n} a_{2n} $\vdots$ a_{mn}
შემოსავალი		c_1	c_2		c_n

თუ აღვნიშნავთ x_j დამზადებულ $\Pi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ პროდუქციის რაოდენობას, მაშინ i-ური სახის ნედლეული დაიხარჯება $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+$ $+a_{in}x_n$ და რადგან საწარმოს განკარგულებაშია ასეთი ნედლეულის b_i რაოდენობა, ამიტომ გვექნება უტოლობათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2, \\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot\quad \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{cases} \tag{1}$$

ცხადია აგრეთვე, რომ

$$x_j\geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2}$$

საერთო შემოსავალი ამ დროს იქნება

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n, \tag{3}$$

ე. ი. მათემატიკურად ეს ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ (1) და (2) სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც (3) გამოსახულებას მიანიჭებს უდიდეს მნიშვნელობას.

8. დიეტის ამოცანა. ვთქვათ ჩვენ განკარგულებაშია Π_1, Π_2, $\cdots$, Π_n სახის პროდუქტი. ყოველი მათგანი შეიცავს B_1, B_2, $\cdots$, B_m ნივთიერებას გარკვეული რაოდენობით. კერძოდ $a_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ იყოს i-ური პროდუქტის ერთ ერთეულში j-ური ნივთიერების რაოდენობა. ცნობილია j-ური ნივთიერების ის მინიმალური რაოდენობა b_1, b_2, $\cdots$, b_m, რომელიც უნდა მიიღოს ცოცხალმა ორგანიზმმა ნორმალური განვითარებისათვის.

ცხრილი 3

პროდუქტები / ქიმიური ნივთიერებები	პროდუქტებში ქიმიურ ნივთიერებათა შემცველობა			
	Π_1	Π_2		Π_n
b_1 b_2 $\vdots$ b_m	a_{11} a_{21} $\vdots$ a_{m1}	a_{12} a_{22} $\vdots$ a_{m2}		a_{1n} a_{2n} $\vdots$ a_{mn}
პროდუქციის რაოდენობა	x_1	x_2	$\cdot\ \cdot$	x_n
პროდუქც. ერთეულის ფასი	c_1	c_2		c_n

ცნობილია, აგრეთვე Π_i-ური პროდუქტის ერთი ერთეულის ღირებულება c_i. ამოცანა მდგომარეობს ისეთი მენიუს შედგენაში, რომელიც ყველა საჭირო ნივთიერებას შეიცავს და დანახარჯი იქნება მინიმალური. თუ x_i-ით აღვნიშნავთ Π_i-ური პროდუქციის რაოდენობას, რომელსაც მენიუ ითვალისწინებს, მაშინ ამოცანის პირობა შეიძლება ჩავწეროთ ცხრილში (ცხრ. 3).

მათემატიკურად დიეტის ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \; \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqslant b_m, \\ x_1 \geqslant 0, \\ \vdots \\ x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

წრფივ ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

4. ტრანსპორტის ამოცანა. ერთი და იმავე სახის პროდუქცია მოთავსებულია A_1, A_2, $\cdots$, A_n გაგზავნის პუნქტებში შესაბამისად a_1, a_2, $\cdots$, a_n რაოდენობით. აღნიშნულ პროდუქციაზე მოთხოვნაა B_1, B_2, $\cdots$, B_m მიმღებ პუნქტებში შესაბამისად b_1, b_2, $\cdots$, b_m რაოდენობით. იგულისხმება, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

(ე. ი. მოთხოვნილებები და არსებული ტოლია).

A_i-ური გასაგზავნი პუნქტიდან B_j მიმღებ პუნქტში ერთი ერთეული პროდუქციის გადატანა დაკავშირებულია დანახარჯთან, რომელიც აღვნიშნოთ c_{ij}-ით, სადაც $i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, m$.

ამოცანის პირობა შეიძლება ჩავწეროთ მე-4 ცხრილის სახით

ცხრილი 4

მიმღები პუნქტი / გაგზავნის პუნქტი	B_1	B_2		B_m	მარაგი
A_1 A_2 $\cdots$ A_n	c_{11} c_{21} $\cdots$ c_{n1}	c_{12} c_{22} $\cdots$ c_{n2}		c_{1m} c_{2m} $\cdots$ c_{nm}	a_1 a_2 $\cdots$ a_n
მოთხოვნები	b_1	b_2		b_m	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

მოგვეთხოვება შევადგინოთ ტვირთის გადაზიდვის ისეთი გეგმა, რომელიც გადაზიდვასთან დაკავშირებულ საერთო ხარჯებს მინიმუმამდე შეამცირებს.

თუ x_{ij}-ით აღვნიშნავთ A_i პუნქტიდან B_j-პუნქტში გადაზიდულ პროდუქციის რაოდენობას, მაშინ ცხადია უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m}=a_1, \\ \\ x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm}=a_n, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{n1}=b_1, \\ \\ x_{1m}+x_{2m}+\cdots+x_{nm}=b_m. \end{cases} \tag{2}$$

(1) სისტემა ნიშნავს რომ ყოველი A_i პუნქტიდან გავიტანოთ მთლიანად იქ მოთავსებული ტვირთი, ხოლო (2) სისტემა ნიშნავს რომ ყოველ B_j პუნქტში მივიტანოთ იმდენი რამდენიც მას ესაჭიროება. საერთო დანახარჯები ამ დროს იქნება:

$$F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{nm}x_{nm}. \tag{3}$$

ამოცანის პირობის თანახმად საჭირო იქნება (1) და (2) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი $x_{ij}\geqslant 0$ ამონახსნების პოვნა, რომელიც (3) გამოსახულებას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

§ 2. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა

ჩვენ განვიხილეთ ამოცანები, რომლებიც შინაარსით ერთმანეთისაგან საკმაოდ განსხვავებულია, მაგრამ მათი მათემატიკური მოდელი თითქმის ერთი და იგივეა. კერძოდ, უცნობებს მოეთხოვებათ რომ ისინი იყვნენ არაუარყოფითები და დააკმაყოფილონ რაიმე განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემები. შევნიშნოთ, რომ უტოლობების დაყვანა განტოლებებზე ადვილი შესაძლებელია თუ შემოვიტანთ დამატებით უცნობებს და მათ დავუმატებთ ან გამოვაკლებთ უტოლობის ერთ-ერთ მხარეს. გარდა ამისა, უცნობებს მოეთხოვებოდათ, რომ მათ რაიმე წრფივი ფუნქციისათვის მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა მიენიჭებიათ. აქაც შევნიშნოთ, რომ მაქსიმუმის მოთხოვნა ყოველთვის შეგვიძლია მივიყვანოთ მინიმუმზე თუ მას გავამრავლებთ მინუს ერთზე. ყოველივე აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია მათემატიკურად დავსვათ ასეთი ამოცანა: მოცემულია n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

და ამავე უცნობების წრფივი ფორმა

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad (2)$$

(როგორც წესი $n>m$, ამიტომ (1) სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი). საჭიროა ვიპოვოთ (1) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომელიც (2) წრფივ ფორმას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ასეთი სახით დასმულ ამოცანას ეწოდება წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა.

(1) სისტემას ეწოდება *შეზღუდვათა სისტემა*, ხოლო (2) წრფივ ფორმას *მიზნის ფუნქცია*.

(1) სისტემის ყველა ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

ეწოდება დ ა ს ა შ ვ ე ბ ი ამონახსნი. ისეთ დასაშვებ ამონახსნს, რომელიც (2) წრფივ ფორმას ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას ეწოდება ო პ ტ ი მ ა ლ უ რ ი ამონახსნი.

წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე: ვიპოვოთ

$$F=CX$$

ფუნქციის მინიმუმი თუ X არის

$$\begin{cases} AX=B \\ X\geqslant 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი, სადაც

$C=(c_1, c_2, \cdots,\ c_n)$ მატრიცა-სტრიქონია; $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ და $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

მატრიცა-სვეტებია, ხოლო

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

არის (1) განტოლების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა შეიძლება ჩავწეროთ ვექტორული სახით:

ვიპოვოთ $F=\vec{C}\vec{X}$ ფუნქციის მინიმუმი თუ $\vec{X}$ არის

$$\begin{cases} x_1\vec{P}_1+x_2\vec{P}_2+\cdots+x_n\vec{P}_n=\vec{P}_0 \\ \vec{X}\geqslant 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნები, სადაც

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \vec{P_i}=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{im}\end{pmatrix},\ i=1,2,\cdots,n;\ \vec{P}_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix};\ \vec{C}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

ვექტორებია.

თეორემა 1. წრფივი დაპროგრამების დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე ამოზნექილია.

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ორი დასაშვები ამონახსნის წრფივი ამოზნექილი კომბინაცია აგრეთვე წარმოადგენს ამონახსნს. ვთქვათ X_1 და X_2 არიან ამოცანის დასაშვები ამონახსნები, ე. ი.

$$\begin{cases} AX_1=B\\ X_1\geqslant 0\end{cases} \text{ და } \begin{cases} AX_2=B\\ X_2\geqslant 0.\end{cases}$$

განვიხილოთ X_1 და X_2-ის წრფივი ამოზნექილი კომბინაცია

$$X=tX_1+(1-t)X_2, \text{ სადაც } 0\leqslant t\leqslant 1.$$

მაშინ

$$AX=A[tX_1+(1-t)X_2]=tAX_1+(1-t)AX_2=tB+(1-t)B=$$
$$=tB+B-tB=B,$$

ე. ი.

$$AX=B.$$

მაშასადამე X-იც წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსნს. დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე განისაზღვრება (1) სისტემაში შემავალი ჰიპერსიბრტყეებით, რომელთა რაოდენობა სასრულია.

დაუმტკიცებლად მივიღოთ შემდეგი:

თეორემა 2. თუ წრფივი დაპროგრამების ზოგად ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ ის იქნება ამონახსნთა სიმრავლის რომელიმე წვეროზე.

ახლა განვიხილოთ საკითხი როდის აქვს ამონახსნი შეზღუდვათა (1) სისტემას. ამისათვის საჭიროა სისტემის მატრიცის r რანგი ტოლი იყოს გაფართოებული მატრიცის რანგის (კრონეკერ-კაპელის თეორემა). იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს რანგი ტოლია უცნობების რაოდენობის (n-ის), მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და რაიმე

ოპტიმალურ ამონახსნზე ლაპარაკი ზედმეტია. თუ ეს ამონახსნი იქნება დასაშვები, მაშინ ის ოპტიმალურიც იქნება. ამიტომ წრფივი დაპროგრამების ამოცანისათვის საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა $r<n$. იმ r უცნობს, რომლის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტიც განსხვავებულია ნულისაგან, ვუწოდოთ **ბაზისური უცნობები**, ხოლო დანარჩენ $k=n-r$ უცნობებს **თავისუფალი უცნობები**. შემდეგისათვის, ზოგადობის შეუზღუდავად, ჩავთვალოთ რომ $x_1, x_2, \cdots, x_k$ არიან თავისუფალი უცნობები, ხოლო $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$—ბაზისური.

პირველი თავის § 3-დან ცნობილია, რომ ბაზისური უცნობები შეიძლება გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით.

ვთქვათ ასეთი გამოსახვის შემდეგ (1) სისტემიდან მივიღეთ

$$\left\{\begin{array}{l} x_{k+1}=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1k}x_k+\beta_1, \\ x_{k+2}=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2k}x_k+\beta_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n=\alpha_{r1}x_1+\alpha_{r2}x_2+\cdots+\alpha_{rk}x_k+\beta_r. \end{array}\right. \tag{3}$$

თუ (3)-ს შევიტანთ (2) ტოლობაში, მაშინ წრფივი ფორმაც შეიძლება გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით. დავუშვათ, რომ მან მიიღო შემდეგი სახე:

$$F=\gamma_0+\gamma_1x_1+\cdots+\gamma_kx_k \tag{4}$$

მაშინ წრფივი დაპროგრამების (1), (2) ამოცანის ნაცვლად, ჩვენ შეგვიძლია დავსვათ (3), (4) ამოცანა. იმის გათვალისწინებით, რომ ამონახსნები დასაშვებიც იყოს საჭიროა შესრულდეს n უტოლობა k უცნობის მიმართ:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\geqslant 0, \\ \vdots \\ x_k\geqslant 0, \\ \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1k}x_k+\beta_1\geqslant 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha_{r1}x_1+\alpha_{r2}x_2+\cdots+\alpha_{rk}x_k+\beta_k\geqslant 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

ცხადია, რომ (3) სისტემის ყველა დასაშვებ ამონახსნს შეესაბამება (5) უტოლობის ამონახსნი და პირიქით, თუ ავიღებთ (5)-ის რაიმე $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}$ ამონახსნს და ვიპოვით (3) სისტემით:

$$x_{k+l}^{(0)}=\alpha_{l1}x_1^{(0)}+\alpha_{l2}x_2^{(0)}+\cdots+\alpha_{lk}x_k^{(0)}+\beta_l;\quad l=1,2,\cdots,n-l$$

ამონახსნებს, იგი დასაშვებიც იქნება, ე. ი. იქნება (1) სისტემის დასაშვები ამოხსნაც.

§ 8. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

როგორც უკვე აღვნიშნეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შეზღუდვათა სისტემის ამონახსნები ქმნიან ამოზნექილ სიმრავლეს, რომელიც შემოსაზღვრულია ჰიპერსიბრტყეებით. იმ შემთხვევაში როცა შესაძლებელია ორი ცვლადით გამოვსახოთ ეს შეზღუდვები, გეომეტრიული წარმოდგენა სიბრტყეზე კარგი საშუალება იქნება თვალსაჩინოებისათვის. დავსვათ ფორმალურად კონკრეტული ამოცანა და ამოვხსნათ იგი გეომეტრიულად.

ვთქვათ ოთხი სახის ნედლეულით შეიძლება დავამზადოთ ორი სახის პროდუქცია. დანახარჯები, შემოსავალი და ნედლეულის რაოდენობები მოცემულია მე-5 ცხრილით:

ცხრილი 5

ნედლეული	მარაგი	პროდუქცია	
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
შემოსავალი		7	5

ცხრილი ასე წაიკითხება: Π_1 პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად საჭიროა S_1-სახის ნედლეულის ორი ერთეული; S_2-სახის ნედლეულის 2 ერთეული; S_3-არ არის საჭირო, ხოლო S_4 ნედლეულის 3 ერთეულია საჭირო.

Π_2 პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად საჭიროა 3, 1, 3, 0 რაოდენობის შესაბამისად S_1, S_2,S_3 და S_4 ნედლეული. Π_1 პროდუქციის ერთი ერთეული იძლევა 7 ერთეულ შემოსავალს, Π_2-კი 5-ერთეულს. გვეკითხებიან. Π_1 და Π_2 პროდუქციის რამდენი ერთეული უნდა დავამზადოთ, რომ მივიღოთ მაქსიმალური შემოსავალი.

აღვნიშნოთ x_1 და x_2-ით შესაბამისად Π_1 და Π_2 პროდუქციის რაოდენობა. მაშინ შეზღუდვათა სისტემა ჩაიწერება ასე:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 19, & S_1 \text{ ნედლეულისათვის} \\ 2x_1+x_2\leqslant 13, & S_2 \text{ ნედლეულისათვის} \\ 3x_2\leqslant 15, & S_3 \text{ ნედლეულისათვის} \\ 3x_1\leqslant 18, & S_4 \text{ ნედლეულისათვის} \end{cases} \tag{1}$$

ხოლო შემოსავალი იქნება:

$$F=7x_1+5x_2. \tag{2}$$

შემოვიღოთ x_3, x_4, x_5, x_6 დამხმარე უცნობები, რომლის საშუალებითაც შეზღუდვათა (1) სისტემა ჩაიწერება დაპროგრამების ძირითადი ამოცანის სახით: საჭიროა ვიპოვოთ

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=19, \\ 2x_1+x_2+x_4=13, \\ 3x_2+x_5=15, \\ 3x_1+x_6=18. \end{cases} \tag{3}$$

სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნები, რომლებიც $F=-7x_1-5x_2$ მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. შევადგინოთ სისტემის მატრიცა

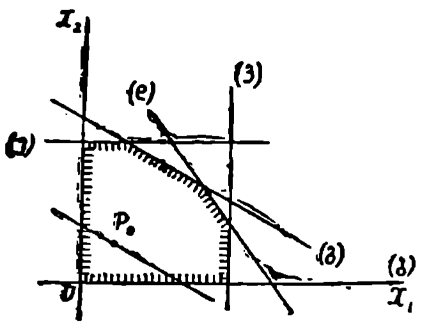
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი $r=4$ (კერძოდ, ბოლო ოთხი სვეტით შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან). ამიტომ ბაზისურ უცნობებად ჩავთვალოთ x_3, x_4, x_5 და x_6-ს, ხოლო თავისუფალ უცნობებად x_1 და x_2. თუ მოვითხოვთ ყველა ცვლადის არაუარყოფითობას, მივიღებთ შეზღუდვათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} x_1\geqslant 0 \\ x_2\geqslant 0 \\ 19-2x_1-3x_2\geqslant 0 \\ 13-2x_1-x_2\geqslant 0 \\ 15-3x_2\geqslant 0 \\ 18-3x_1\geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

რაც შეეხება მიზნის ფუნქციას, ის თავიდანვე გამოსახული იყო თავისუფალი უცნობებით.

x_1Ox_2 სიბრტყეზე ავაგოთ (4) სისტემით განსაზღვრული არე, რისთვისაც პირველ რიგში ავაგოთ მასში შემავალი უტოლობების შესაბამისი წრფეები (ნახ. 8).

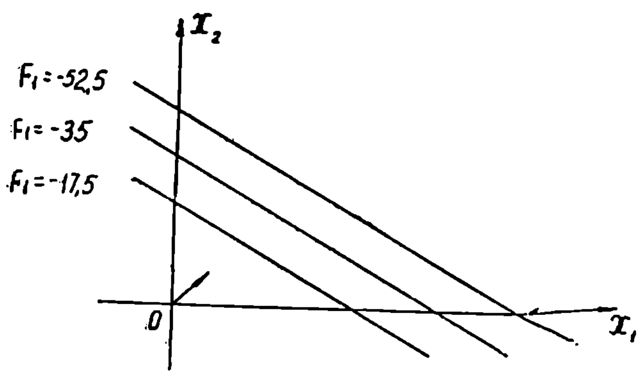


ნახ. 8.

$$
\begin{cases}
x_1=0 & (\text{ა})\\
x_2=0 & (\text{ბ})\\
19-2x_1-3x_2=0 & (\text{გ})\\
13-2x_1-x_2=0 & (\text{დ})\\
15-3x_2=0 & (\text{ე})\\
18-3x_1=0 & (\text{ვ})
\end{cases}
$$

დაშტრიხული ნაწილი იქნება დასაშვები ამონახსნების სიმრავლე.

ახლა ვნახოთ რას წარმოადგენს $F_1=-7x_1-5x_2$ ტოლობით განსაზღვრული წერტილების სიმრავლე. როგორც ცნობილია სხვადასხვა F_1-სათვის ისინი იქნებიან პარალელური წრფეები. მე-9 ნახაზზე მოცემულია $F_1=-17{,}5$; $F_1=-35$ და $F_1=-52{,}5$-ის შესაბამისი წრფეები



ნახ. 9.

ნახაზზე ისარი მიუთითებს F_1-ის კლებადობის დროს წრფის გადაადგილების მიმართულებას. ამიტომ აგებენ F_1-ის რაიმე მნიშვნელო-

ბისათვის წრფეს, ისე, რომ ის გადიოდეს დასაშვები ამონახსნების რომელიმე წერტილზე (ვთქვათ P_0-ზე ნახ. 8) და შემდეგ იგი გადააქვთ პარალელურად კლებადობის მიმართულებით, მანამ, სანამ არ შეეხება უკიდურეს წერტილს, დასაშვები ამონახსნების სიმრავლიდან.

F_1-ის კიდევ ოდნავ შემცირება გამოიწვევს იმას, რომ დასაშვები ამონახსნების სიმრავლიდან აღარ მოიძებნება ერთი ისეთი წერტილიც კი რომელზეც გაივლის მიზნის ფუნქცია. ასეთი დასაშვები ამონახსნის შესაბამისი წერტილია M (5, 3). ეს იმას ნიშნავს, რომ ოპტიმალური ამონახსნი იქნება $x_1=5$ და $x_2=3$ და მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება $F_1=-7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 50$. ე. ი. $F=50$, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებული ნედლეულის გამოყენებით შეიძლება დავამზადოთ 5 ერთეული Π_1 პროდუქცია და 3 ერთეული Π_2 პროდუქცია, რაც მოგვცემს უდიდეს შემოსავალს: 50 ერთეულს.

§ 4. სიმპლექსური მეთოდის იდეა

ჩვენ ზემოთ გეომეტრიული გზით ამოვხსენით წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა. ამ გზით ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როდესაც თავისუფალი უცნობების რაოდენობა $k=2$. სხვა შემთხვევაში ამოცანის გრაფიკული ამოხსნა შეუძლებელია. ამიტომ აუცილებელია შევისწავლოთ ამოცანის ამოხსნის ანალიტიკური მეთოდი. ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს წარმოადგენს ე. წ. სიმპლექსური მეთოდი, ანუ გეგმის თანდათანობით გაუმჯობესების მეთოდი.

სიმპლექსური მეთოდის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ დასაშვები ამონახსნების სიმრავლიდან იღებენ რაიმე ამონახსნს და გარკვეული გარდაქმნების გამოყენებით გადადიან ახალ ამონახსნზე ისე, რომ ახალი ამონახსნის შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა ნაკლები იქნება წინა ამონახსნის შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაზე. ასეთი იტერაციების სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით მიიღება ამონახსნი, რომელიც იქნება ოპტიმალური.

განსაზღვრება. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანის ისეთ დასაშვებ ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება თავისუფალი უცნობების ნულოვან მნიშვნელობებს ეწოდება საბაზისო ამონახსნი.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი:

თეორემა. თუ მოცემულია წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა, რომელსაც გააჩნია ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ოპტიმალური საბაზისო ამონახსნი.

სიმპლექსური მეთოდის გამოყენებით ხდება ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნა სწორედ საბაზისო ამონახსნებში.

ახლა, აღნიშნული მეთოდით, ამოვხსნათ წინა პარაგრაფში გეომეტრიული გზით ამოხსნილი ამოცანა:

ამოვწეროთ შეზღუდვათა სისტემა

$$\begin{cases} x_3=19-2x_1-3x_2 \\ x_4=13-2x_1-x_2 \\ x_5=15-3x_2 \\ x_6=18-3x_1 \end{cases} \tag{1}$$

და მიზნის ფუნქცია

$$F_1=-7x_1-5x_2. \tag{2}$$

აქ თავისუფალ უცნობებად აღებულია x_1 და x_2. მაშინ საბაზისო ამონახსნი იქნება:

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=19,\ x_4=13,\ x_5=15,\ x_6=18.$$

შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება $F_1=0$. (2) გამოსახულებაში ორივე თავისუფალი უცნობი შედის უარყოფითი კოეფიციენტით. ამიტომ ნებისმიერი მათგანის გაზრდა გამოიწვევს წრფივი ფორმის შემცირებას (შევნიშნოთ, რომ არც ერთის შემცირება არ შეგვიძლია რადგან მათ უკვე აქვთ მიღებული უმცირესი მნიშვნელობა). ავიღოთ და გავზარდოთ მაგალითად, x_2 ($x_1=0$ დავტოვოთ უცვლელად).

x_2-ის გაზრდა ჩვენ გვაწყობს უსასრულოდ (მიზნის ფუნქციაც შემცირდება უსასრულოდ), მაგრამ (1) სისტემიდან ჩანს, რომ ეს გამოიწვევს ბაზისური უცნობებისათვის უარყოფითი მნიშვნელობების მიღებას, რაც არ შეიძლება რადგან ამონახსნი აღარ იქნება დასაშვები. ამიტომ x_2-ს მივცეთ ისეთი უდიდესი მნიშვნელობა, რომ ერთ-ერთი ბაზისური უცნობი გახდეს ნულის ტოლი და სხვები დარჩნენ კვლავ

დადებითი. ასეთი მნიშვნელობაა $x_2=5$, მაშინ x_5 გახდება ნულის ტოლი.

ავირჩიოთ ახლა თავისუფალი უცნობების ახალი x_1 და x_5 წყვილი. მაშინ საბაზისო უცნობები იქნებიან x_2, x_3, x_4 და x_6. გამოვსახოთ საბაზისო უცნობები და წრფივი ფორმა ახალი თავისუფალი უცნობებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_2=5-\dfrac{1}{3}x_5 \\ x_3=4-2x_1+x_5 \\ x_4=8-2x_1+\dfrac{1}{3}x_5 \\ x_6=18-3x_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$F_1=-25-7x_1+5x_5. \tag{4}$$

საბაზისო ამონახსნი ამ შემთხვევაში იქნება:

$$x_1=0,\ x_5=0;\ x_2=5,\ x_3=4,\ x_4=8;\ x_6=18.$$

ხოლო მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა

$$F_1=-25.$$

(4) გამოსახულებაში x_1 უცნობი შედის უარყოფითი ნიშნით, ამიტომ მისი გაზრდა გამოიწვევს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის შემცირებას. გავზარდოთ x_1-ის მნიშვნელობა ორამდე. როცა $x_1=2$ ($x_5=0$), მაშინ (3) სისტემის მეორე ტოლობის მარჯვენა მხარე გაუტოლდება ნულს ($x_3=0$), ხოლო სხვა უცნობები რჩებიან ისევ დადებითი. x_1-ის კიდევ უფრო გაზრდა გამოიწვევდა მიზნის ფუნქციის კიდევ უფრო შემცირებას, მაგრამ x_3 გახდებოდა უარყოფითი და ამონახსნი აღარ იქნებოდა დასაშვები.

ამიტომ უნდა ავიღოთ თავისუფალი უცნობების ახალი x_3 და x_5 წყვილი. გამოვსახოთ ამ თავისუფალი უცნობებით სხვა უცნობები და მიზნის ფუნქცია, მივიღებთ

$$
\begin{cases}
x_1=5+\dfrac{1}{4}x_3-\dfrac{3}{4}x_4,\\
x_2=3-\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_4,\\
x_5=6+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{2}x_4,\\
x_6=3-\dfrac{3}{4}x_3+\dfrac{9}{4}x_4.
\end{cases}
\tag{5}
$$

$$
F_1=-50+\frac{3}{4}x_3+\frac{11}{4}x_4. \tag{6}
$$

თავისუფალი უცნობების ასეთი შერჩევა გვაძლევს შემდეგ საბაზისო ამონახსნს:

$$
x_1=5,\ x_2=3,\ x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=6,\ x_6=3.
$$

მიზნის ფუნქცია $F_1=-50$.

(6) ტოლობით განსაზღვრული მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაში ყველა უცნობი შედის დადებითი კოეფიციენტით. ამიტომ ნებისმიერი მათგანის გაზრდა (შემცირება არ შეიძლება) გამოიწვევს მიზნის ფუნქციის გაზრდას. მიღებული საბაზისო ამონახსნი იქნება ოპტიმალური და წრფივი ფორმის მინიმალური მნიშვნელობა $F_{min}=-50$. მივიღეთ იგივე ამონახსნი რაც გრაფიკული მეთოდით ამოხსნის დროს.

§ 6. სიმპლექს-მეთოდის ალგებრა

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა და შევისწავლოთ შეზღუდვათა სისტემისა და მიზნის ფუნქციის ალგებრულ გარდაქმნათა კანონები, ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნის შემთხვევაში.

ვთქვათ, შეზღუდვათა სისტემასა და მიზნის ფუნქციას აქვს სახე:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
\cdot \qquad \cdot\ \cdot \qquad \cdot\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{cases}
\tag{1}
$$

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad (2)$$

დავუშვათ, რომ (1) სისტემის რანგი $r<n$. შეგვიძლია უცნობთა ისეთი დანომვრა, რომ თავისუფალ უცნობებად აღმოჩნდეს პირველი k უცნობი: $x_1, x_2, \cdots, x_k$ (მათი რიცხვია $k=n-r$). ამ შემთხვევაში (1) და (2) გამოსახულებები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{cases} x_{k+1}=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1k}x_k+\beta_1 \\ x_{k+l}=a'_{l1}x_1+a'_{l2}x_2+\cdots+a'_{lk}x_k+\beta_l \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n=a'_{r1}x_1+a'_{r2}x_2+\cdots+a'_{rk}x_k+\beta_r \end{cases} \qquad (3)$$

$$F=\gamma_0+\gamma'_1x_1+\cdots+\gamma'_kx_k. \qquad (4)$$

თავისუფალ უცნობთა ასეთი შერჩევის შესაბამისი საბაზისო ამონახსნია:

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \cdots,\ x_k=0,\ x_{k+1}=\beta_1,\ \cdots,\ x_n=\beta_r. \qquad (5)$$

ვთქვათ (5) ამონახსნი დასაშვებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ არაუარყოფითი რიცხვებია. ამ ამონახსნის შესაბამისი ფორმა $F=\gamma_0$.

ვაჩვენოთ, როგორ უნდა გადავიდეთ (5) დასაშვები საბაზისო ამონახსნიდან სხვა დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე ისე, რომ F ფორმამ მიიღოს γ_0-ზე ნაკლები მნიშვნელობა. (3) და (4) ფორმულები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x_{k+1}=\beta_1-(\alpha'_{11}x_1-\cdots-\alpha'_{1k}x_k) \\ x_{k+l}=\beta_l-(\alpha'_{l1}x_1-\cdots-\alpha'_{lk}x_k) \\ \cdot \qquad \cdot \\ x_n=\beta_r-(-\alpha'_{r1}x_1-\cdots-\alpha'_{rk}x_k), \end{cases} \qquad (3^1)$$

$$F=\gamma_0-(\gamma'_0x_1-\cdots-\gamma'_kx_k). \qquad (4^1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$-\alpha'_{ij}=\alpha_{ij};\ -\gamma'_i=\gamma_i;\ (i=1, 2, \cdots, k;\ j=1, 2, \cdots, r),$$

მაშინ მივიღებთ:

$$
\begin{cases}
x_{k+1}=\beta_1-(\alpha_{11}x_1+\cdots+\alpha_{1k}x_k)\\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\\
x_{k+l}=\beta_l-(\alpha_{l1}x_1+\cdots+\alpha_{lk}x_k)\\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\\
x_{k+i}=\beta_i-(\alpha_{i1}x_1+\cdots+\alpha_{ik}x_k)\\
\qquad\qquad\cdot\qquad\cdot\quad\cdot\\
x_n=\beta_r-(\alpha_{r1}x_1+\cdots+\alpha_{rk}x_k)
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
F=\gamma_0-(\gamma_1x_1+\cdots\gamma_kx_k) \tag{7}
$$

შევნიშნოთ, რომ ყველა შემთხვევაში, სიმპლექს-მეთოდის გამოყენების დროს, შეზღუდვათა სისტემა და წრფივი ფორმა უნდა ჩავწეროთ (6) და (7) ფორმით.

შევადგინოთ (6) და (7) ფორმულების კოეფიციენტებისაგან ცხრილი და მას ვუწოდოთ თავისუფალ უცნობთა მოცემული შერჩევის შესაბამისი სიმპლექს-ცხრილი (ცხრილი 6).

ცხრილი 6

თავისუფალი უცნობები / საბაზისო უცნობები		x_1		x_s		x_j		x_k
x_{k+1}	β_1	a_{11}		a_{1s}		a_{1j}		a_{1k}
$\cdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$
x_{k+l}	β_l	a_{l1}	$\cdot\cdot -$	a_{ls}		a_{lj}		a_{lk}
$\cdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$
x_{k+}	β_l	a_{i1}		a_{ls}		a_{lj}		$a_{\cdot k}$
$\cdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$		$\cdot\cdot$
x_n	β_r	a_{r1}		a_{rs}		a_{rj}		a_{rk}
F	γ_0	γ_1		γ_s		γ_j		γ_k

განვიხილოთ ის თავისუფალი უცნობები, რომლებიც F ფორმის გამოსახულებაში შედიან დადებით γ_j კოეფიციენტებით. და ამ უცნობებიდან განვიხილოთ რომელიმე ერთი, მაგალითად x_j (გარკვეულობისათვის მიღებულია, ავიღოთ ისეთი თავისუფალი x_j უცნობი,

რომლის γ_j კოეფიციენტიც უმცირესი დადებითი რიცხვია, მაგრამ ეს პირობა არ არის აუცილებელი). თუ ყველა თავისუფალი უცნობისათვის შევინარჩუნებთ ნულოვან მნიშვნელობებს, გარდა x_j უცნობისა, მაშინ ამ უკანასკნელის გაზრდა გამოიწვევს F ფორმის შემცირებას. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ x_j-ის გაზრდა შესაძლებელია მანამდე, სანამ $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots x_n$ საბაზისო უცნობებიდან რომელიმე პირველად არ გახდება ნულის ტოლი. მაგრამ როდის შეიძლება მოხდეს ეს? პასუხისათვის მივმართოთ (6) სისტემას. თუ მასში ყველა თავისუფალი უცნობი ნულის ტოლია გარდა x_j-სა, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_{k+1}=\beta-\alpha_{1j}x_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{k+l}=\beta_l-\alpha_{lj}x_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n=\beta_r-\alpha_{rj}x_j. \end{cases} \tag{8}$$

თუ $\alpha_{lj} \leqslant 0$, მაშინ x_j-ის გაზრდა გამოიწვევს x_{k+l}-ის გაზრდას. მაშასადამე, x_{k+l} საბაზისო უცნობი ნულს არ გაუტოლდება როგორც უნდა გავზარდოთ x_j. ამიტომ, როცა $\alpha_{lj} \leqslant 0$, შეგვიძლია x_{k+l} საბაზისო უცნობებზე ყურადღება არ შევაჩეროთ.

ახლა განვიხილოთ მხოლოდ ის საბაზისო x_{k+l} უცნობები, რომელთათვისაც $\alpha_{lj}>0$. (8) სისტემიდან ცხადია, რომ x_{k+l} საბაზისო უცნობი გახდება ნულის ტოლი როცა $x_j=\dfrac{\beta_l}{\alpha_{lj}}$ შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}} \geqslant 0 \tag{9}$$

(რადგან პირობის თანახმად $\beta_l \geqslant 0$). დავუშვათ, რომ

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}=\min_l\left(\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}\right), \quad \alpha_{lj}>0, \tag{10}$$

მაშინ ცხადია, რომ x_j-ის ნულოვანი მნიშვნელობიდან გაზრდით, პირველად ნულის ტოლი გახდება სწორედ x_{k+l} საბაზისო უცნობი. და-

ნარჩენი საბაზისო უცნობები ჯერ კიდევ, შეინარჩუნებენ არაუარყოფით მნიშვნელობებს. α_{lj} კოეფიციენტი დიდ როლს ასრულებს შემდგომ გარდაქმნებში. ამიტომ α_{lj}-ს ვუწოდოთ გ ე ნ ე რ ა ლ უ რ ი ელემენტი. i-ურ სტრიქონს — გ ე ნ ე რ ა ლ უ რ ი ს ტ რ ი ქ ო ნ ი და j-ურ სვეტს — გ ე ნ ე რ ა ლ უ რ ი ს ვ ე ტ ი.

ახლა x_j თავისუფალი უცნობი გავხადოთ საბაზისო უცნობად და მის ნაცვლად თავისუფალ უცნობთა რიცხვს მივაკუთვნოთ x_{k+l} უცნობი. თავისუფალი და საბაზისო უცნობთა კომპლექსებში დანარჩენი უცნობები უცვლელი დავტოვოთ: $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_{k+l-1}, x_j, x_{k+l+1}, \cdots, x_n$. საბაზისო უცნობთა ახალი კომპლექსი გამოვსახოთ თავისუფალ უცნობთა ახალი $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{k+l}, x_{j+1}, \cdots, x_k$ კომპლექსით. (6) სისტემის l-ური განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_{k+l}=\beta_l-\alpha_{l1}x_1-\cdots-\alpha_{lj-1}x_{j-1}-\alpha_{lj}x_j-\alpha_{lj+1}x_{j+1}-\cdots-\alpha_{lk}x_k.$$

აქედან

$$x_j=\frac{1}{\alpha_{lj}}(\beta_l-\alpha_{l1}x_1-\cdots-\alpha_{lj-1}x_{j-1}-x_{k+l}-x_{lj+1}\alpha_{lj+1}-\cdots-\alpha_{lk}x_k),$$

ანუ

$$x_j=\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}-\left(\frac{\alpha_{l1}}{\alpha_{lj}}x_1+\frac{\alpha_{lj-1}}{\alpha_{lj}}x_{j-1}+\frac{1}{\alpha_{lj}}x_{k+l}+\frac{\alpha_{lj+1}}{\alpha_{lj}}x_{j+1}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{\alpha_{lk}}{\alpha_{lj}}x_k\right) \tag{11}$$

დანარჩენი საბაზისო უცნობები, რომ გამოვსახოთ ახალი თავისუფალი უცნობებით საკმარისია (11) ფორმულით განსაზღვრული x_j-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ (6) სისტემის განტოლებებში. l-ური განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_{k+l}=\beta_l-\frac{\alpha_{lj}\beta_l}{\alpha_{il}}\left[\left(\alpha_{l1}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{i1}}{\alpha_{il}}\right)x_1+\cdots+\left(\alpha_{lj-1}-\right.\right.$$

$$-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}}\Big) x_{j-1}-\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ij}} x_{k+l}+\left(\alpha_{lj+1}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}}\right) x_{j+1}+$$

$$+\cdots+\left(\alpha_{lk}-\frac{\alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}\right) x_k\Big], \tag{12}$$

სადაც $l=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ r$. ანალოგიურად

$$F=\gamma_0-\frac{\gamma_j\beta_i}{\alpha_{ij}}-\Big[\left(\gamma_1-\frac{\gamma_j\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}}\right)x_1+\cdots+\Big(\gamma_{j-1}-$$

$$-\frac{\gamma_j\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}}\Big) x_{j-1}-\frac{\gamma_j}{\alpha_{ij}} x_{k+i}+\left(\gamma_{j+1}-\frac{\gamma_j\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}}\right)x_{j+1}+$$

$$+\cdots+\left(\gamma_k-\frac{\gamma_j\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}\right)x_k\Big] \tag{13}$$

თუ ახალი თავისუფალი უცნობები ნულის ტოლია, მაშინ ახალ საბაზისო ამონახსნს და F ფორმას შესაბამისად ექნებათ შემდეგი სახე:

$$x_s=0,\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ j-1,\ k+i,\ j+i,\ \cdots,\ k)$$

$$x_j=\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}};\quad x_{k+l}=\beta_l-\frac{\alpha_{lj}\beta_i}{\alpha_{ij}}\ (l=1,2,\cdots,j-1,i+1,\cdots,r) \tag{14}$$

$$F=\gamma_0-\frac{\gamma_j\beta_i}{\alpha_{ij}}. \tag{15}$$

ის ფაქტი, რომ მიღებული საბაზისო ამონახსნი წარმოადგენს დასაშვებს და რომ მისი შესაბამისი F ფორმა შემცირდა, შეიძლება უშუალო შემოწმებით. მართლაც, პირობის თანახმად ყველა $\beta_l\geqslant 0$, $\alpha_{ij}>0$ (შერჩევის თანახმად), ე. ი. $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\geqslant 0$. შემდეგ, თუ $\alpha_{lj}<0$, მაშინ $\alpha_{lj}\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}<0$ და ამიტომ, როგორც (14)-დან ჩანს $x_{k+l}\geqslant 0$. თუ $\alpha_{lj}>0$, მაშინ (10)-ის თანახმად

$$x_{k+l}=\alpha_{lj}\left(\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}-\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right)\geqslant 0.$$

α_{ij} გენერალური ელემენტისათვის $\gamma_j > 0$. ამიტომ როგორც (15)-დან ჩანს $F = \gamma_0 - \gamma_j \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} < \gamma_0$, ე. ი. F ფორმის მნიშვნელობა არ იზრდება. ხოლო თუ $\beta_i > 0$, მაშინ F მკაცრად მცირდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ჩვენი მსჯელობიდან ჩანს, რომ:

1) გენერალური ელემენტის შერჩევის (10) პირობა უზრუნველყოფს ახალი საბაზისო ამონახსნის დაშვებას.

2) γ_j კოეფიციენტის დადებითობა უზრუნველყოფს F ფორმის არაზრდადობას ახალ საბაზისო ამონახსნზე გადასვლისას. თუ $\gamma_j < 0$, მაშინ ფორმა შეიძლება გაიზარდოს. $\gamma_j = 0$ არ იწვევს F-ის ცვლილებას. ეს ფაქტები უშუალოდ გამომდინარეობს

$$F = \gamma_0 - \frac{\gamma_j \beta_i}{\alpha_{ij}} \tag{16}$$

ფორმიდან.

3) (16) ფორმულიდან ჩანს რომ თუ $\beta_i = 0$, მაშინ γ_j-ს ნიშნის დამოუკიდებლად, ახალ საბაზისო ამონახსნზე გადასვლისას, F არ შეიცვლება.

4) კონკრეტული ამოცანების სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნისას აუცილებელი არ არის ყველა იმ გარდაქმნების ჩატარება, რომლებსაც (3) სისტემა გადაჰყავთ (12)-ში. (12) განტოლების კოეფიციენტთა გამოთვლის მიზნით ჩვენ აღვწერთ მარტივ პროცესს სიმპლექს-ცხრილის საშუალებით.

§ 6. სიმპლექს-მეთოდით მუშაობის ცხრილი

სიმპლექს-ცხრილი დავყოთ უჯრედებად, თავდაპირველი კოეფიციენტები ჩავწეროთ ზედა მარცხენა კუთხეში და ჩავატაროთ შემდეგი მოქმედებები:

1) ამოვარჩიოთ გენერალური ელემენტი. ვიპოვოთ მისი შებრუნებული სიდიდე $\lambda = \frac{1}{\alpha_{ij}}$ და შევიტანოთ იგი მე-7 ცხრილის იმ უჯრედის ქვედა მარჯვენა კუთხეში, რომელშიაც α_{ij} ელემენტია.

ცხრილი 7

		x_1		x_s		x_j		x_k
x_{k+1}	β_1 $-\lambda\beta_i\alpha_{1j}$	α_{11} $-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{1j}$		α_{1s} $-\lambda\alpha_{is}\alpha_{1j}$		α_{1j} $-\lambda\alpha_{ij}$		α_{1k} $-\lambda\alpha_{ik}\alpha_{1j}$
x_{k+l}	β_l $-\lambda\beta_i\alpha_{lj}$	α_{l1} $-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{lj}$		α_{ls} $-\lambda\alpha_{ls}\alpha_{lj}$		α_{lj} $-\lambda\alpha_{ij}$		α_{lk} $-\lambda\alpha_{lk}\alpha_{lj}$
x_{k+i}	β_i $\lambda\beta_i$	α_{i1} $\lambda\alpha_{i1}$		α_{is} $\lambda\alpha_{is}$		$\boxed{\alpha_{ij} \quad \lambda=\frac{1}{\alpha_{ij}}}$		α_{ik} $\lambda\alpha_{ik}$
x_n	β_r $-\lambda\beta_i\alpha_{rj}$	α_{r1} $-\lambda\alpha_{i1}\alpha_{rj}$		α_{rs} $-\lambda\alpha_{is}\alpha_{rj}$		α_{rj} $-\lambda\alpha_{rj}$		α_{rk} $-\lambda\alpha_{ik}\alpha_{rj}$
F	γ_0 $-\lambda\beta_i\gamma_j$	γ_1 $-\lambda\beta_i\gamma_j$		γ_s $-\lambda\alpha_{ij}\gamma_j$		γ_j $-\lambda\gamma_j$		γ_k $-\lambda\alpha_{ik}\gamma_j$

2) i-ური სტრიქონის ზედა განყოფილების ყველა ელემენტი (α_{ij} -ს გარდა) გავამრავლოთ λ რიცხვზე და მიღებული შედეგები ჩავწეროთ ამავე სტრიქონის უჯრედების ქვედა ნაწილში შესაბამისად.

3) j-ური სვეტის ყველა უჯრედის ზედა განყოფილების (α_{ij}-ს გარდა) ელემენტების — λ-ზე ნამრავლი მოვათავსოთ ამავე სვეტის უჯრედების ქვედა ნაწილში შესაბამისად.

4) i-ური სტრიქონის უჯრედების ზედა ნაწილსა და j-ური სვეტის უჯრედების ქვედა ნაწილებში მოთავსებული რიცხვები აღვნიშ-

ნოთ მსხვილი შრიფტით ან სხვა რაიმე განსხვავებული აღნიშვნით (შეიძლება სხვანაირი ფერითაც).

5) l-ური სტრიქონის ($l \neq i$) და s-ური ($s \neq j$) სვეტის გადაკვეთის უჯრედის ქვედა ნაწილში მოთავსებულ რიცხვს ვპოულობთ იმავე სტრიქონის გენერალური სვეტის უჯრედის ქვედა ნაწილში და იმავე სვეტის გენერალური სტრიქონის უჯრედის ზედა ნაწილში მოთავსებული რიცხვების გამრავლებით.

6) მე-7 ცხრილიდან გადავიდეთ თავისუფალ უცნობთა ახალი კომპლექსის შესაბამის მე-8 ცხრილზე. ამ ცხრილში j-ური სვეტი პასუხობს ახალ თავისუფალ x_{k+l} უცნობს, ხოლო i-ური სტრიქონი — ახალ საბაზისო x_j უცნობს. დანარჩენ სტრიქონებსა და სვეტებში უცნობები უცვლელი რჩება.

7) მე-8 ცხრილის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ყველა უჯრედის ზემოთ მოვათავსოთ შესაბამისად მე-7 ცხრილის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის უჯრედების ქვედა ნაწილების რიცხვები.

ც ხ რ ი ლ ი 8

		x_1	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_{k+l}		x_k
x_{k+1}	$\beta_1 - \lambda\beta_i\alpha_{1j}$	$\alpha_{11} - \lambda\alpha_{i1}\alpha_{1j}$	$\cdots$	$\alpha_{1s} - \lambda\alpha_{is}\alpha_{1j}$	$\cdots$	$-\lambda\alpha_{1j}$		$\alpha_{1k} - \lambda\alpha_{ik}\alpha_{1j}$
			$\cdots$		$\cdots$			
x_{k+l}	$\beta_l - \lambda\beta_i\alpha_{lj}$	$\alpha_{l1} - \lambda\alpha_{i1}\alpha_{lj}$	$\cdots$	$\alpha_{ls} - \lambda\alpha_{is}\alpha_{lj}$	$\cdots$	$-\lambda\alpha_{lj}$		$\alpha_{lk} - \lambda\alpha_{ik}\alpha_{lj}$
			$\cdots$		$\cdots$			
x_j	$\lambda\beta_i$	$\lambda\alpha_{i1}$	$\cdots$	$\lambda\alpha_{is}$	$\cdots$	λ		$\lambda\alpha_{ik}$
			$\cdots$		$\cdots$			$\cdots$
x_n	$\beta_r - \lambda\beta_i\alpha_{rj}$	$\alpha_{r1} - \lambda\alpha_{i1}\alpha_{rj}$	$\cdots$	$\alpha_{rs} - \lambda\alpha_{is}\alpha_{rj}$	$\cdots$	$-\lambda\alpha_{rj}$		$\alpha_{rk} - \lambda\alpha_{ik}\alpha_{rj}$
F	$\gamma_0 - \lambda\beta_i\gamma_j$	$\gamma_1 - \lambda\alpha_{i1}\gamma_j$	$\cdots$	$\gamma_s - \lambda\alpha_{is}\gamma_j$	$\cdots$	$-\lambda\gamma_j$		$\gamma_k - \lambda\alpha_{ik}\gamma_j$

8) დანარჩენი უჯრედების ზედა ნაწილებში მოვათავსოთ მე-7 ცხრილის შესაბამისი უჯრედების ზედა და ქვედა ნაწილებში მოთავსებული რიცხვთა ჯამი.

მე-8 ცხრილისა და (12) ფორმულების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ ამ ცხრილში ამოწერილია (12) სისტემის განტოლებათა კოეფიციენტები. მაშასადამე, მე-8 ცხრილი წარმოადგენს $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{k+1}$, $x_{j+1}, \cdots, x_k$ თავისუფალ უცნობთა ახალი კომპლექსის შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს. მე-8 ცხრილი (12) სისტემის მიმართ ასრულებს იგივე როლს, რასაც მე-7 ცხრილი (6) სისტემის მიმართ. ამიტომ სიმპლექს-მეთოდით ძირითადი ამოცანის ამოხსნისას ზემოთ აღწერილი ოპერაციები მე-8 ცხრილით უნდა ჩავატაროთ და გადავიდეთ შემდეგ ცხრილზე და ა. შ. მანამდე, სანამ არ მივიღებთ ოპტიმალურ ამონახსნს.

ისმის კითხვა: რომელიმე ეტაპზე მიღებული ამონახსნი იქნება თუ არა ოპტიმალური? ცხადია, რომ საბაზისო ამონახსნი ოპტიმალურია მაშინ, როცა ნებისმიერი თავისუფალი უცნობის გაზრდა არ გამოიწვევს F ფორმის შემცირებას. მაგრამ, ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა F ფორმის (7) გამოსახულებაში

$$\gamma_i < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

რადგანაც $\gamma_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ რიცხვები შეტანილია სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში, ამიტომ ოპტიმალური ამონახსნი მიიღება მაშინ, როცა სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონის ყველა რიცხვი გახდება არადადებითი (γ_0 მხედველობაში არ მიიღება).

§ 7. სიმპლექს-მეთოდით სარგებლობის წესი

1) შევარჩიოთ თავისუფალი უცნობები. ჩავთვალოთ ისინი ნულის ტოლად მოცემულ სისტემაში და ვიპოვოთ შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი. თუ იგი არ აღმოჩნდება დასაშვები, მაშინ უნდა ვიპოვოთ თავისუფალ უცნობთა ისეთი კომპლექსი, რომლისთვისაც საბაზისო ამონახსნი დასაშვებია.

2) დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნის შემდეგ საბაზისო უცნობები და წრფივი ფორმა გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით და ჩავწეროთ ისინი (6) და (7) სახით.

3), (6) და (7)-დან α_{ij} და γ_j რიცხვები შევიტანოთ სიმპლექს-ცხრილში.

4) გენერალური ელემენტის შესარჩევად ვისარგებლოთ შემდეგი წესით:

ა) სიმპლექს-ცხრილის ბოლო სტრიქონში ვიპოვოთ რაიმე დადებითი ელემენტი, მაგალითად, γ_j (γ_0 არ განიხილება). თუ უკანასკნელ სტრიქონში დადებითი ელემენტები არ არის, მაშინ მოცემულ სიმპლექს-ცხრილში ჩაწერილი საბაზისო ამონახსნი წარმოადგენს ოპტიმალურს.

ბ) შევადგინოთ $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ ფარდობა, იმ i სტრიქონებისა j-ური სვეტიდან, რომელთათვისაც $\alpha_{ij} > 0$.

გ) ამ ფარდობიდან ავიღოთ უმცირესი $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ (თუ უმცირესი მნიშვნელობა მიიღება i-ის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერი). α_{ij} არის გენერალური ელემენტი.

5) სიმპლექს-ცხრილთან მუშაობის წესის დაცვით მოცემული ცხრილიდან გადავიდეთ შემდეგ ცხრილზე.

6) თუ ვერ მივაღწევთ ოპტიმალურ ამონახსნს, მაშინ უნდა გავიმეოროთ მე-4 წესიდან დაწყებული მსჯელობა და ა. შ. ოპტიმალური ამონახსნის მიღებამდე (ოპტიმალური ამონახსნის ნიშანი მითითებულია მე-4 წესის ა) — პუნქტში).

§ 8. ამოცანების ამოხსნა სიმპლექსური მეთოდის გამოყენებით

1. ვთქვათ ორ პუნქტს შორის საჭიროა უმცირესი დანახარჯებით განვახორციელოთ კავშირი, რომელსაც ექნება „a" სატელეფონო, „b" სატელეგრაფო და „c" ფოტოტელეგრაფის არხები. კავშირისათვის გამოიყენება ორი ტიპის კაბელი შემდეგი მახასიათებლებით $a=4{,}8$; $b=4{,}95$; $c=2{,}08$. კაბელის საჭირო რაოდენობა და ღირებულება მოცემულია მე-9 ცხრილით.

ცხრილი 9

არხების ტიპები	კაბელის ტიპები	
	I	II
სატელეფონო	0,12	0,72
სატელეგრაფო	0,54	1,8
ფოტოტელეგრაფი	0,8	0,24
1 კმ. კაბელის ღირებულება	1,33	0,95

დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის პირველ რიგში საჭიროა შევადგინოთ შეზღუდვათა სისტემა და მიზნის ფუნქცია, რისთვისაც შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: x_1-ით აღვნიშნოთ I ტიპის კაბელის საჭირო რაოდენობა; x_2-ით კი II ტიპის კაბელის საჭირო რაოდენობა; მაშინ:

$0,12\,x_1+0,72\,x_2$ — იქნება სატელეფონო არხების რაოდენობა,

$0,54\,x_1+\ 1,8\,x_2$ — „ სატელეგრაფო არხების რაოდენობა,

$0,8\,x_1\ +0,24\,x_2$ — „ ფოტოტელეგრაფის არხების რაოდენობა.

ცხადია შეზღუდვათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0,12\,x_1+0,72\,x_2 \geqslant 4,8 \\ 0,54\,x_1+1,8\,x_2 \geqslant 4,95 \\ 0,8\,x_1+0,24\,x_2 \geqslant 2,08 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+6x_2 \geqslant 40 \\ 6\,x_1+20\,x_2 \geqslant 55 \\ 10\,x_1+3\,x_2 \geqslant 26 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ამ შემთხვევაში საერთო დანახარჯები იქნება

$$F=1,33\,x_1+0,95\,x_2 \qquad (2)$$

საჭიროა ვიპოვოთ (1) სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც (2) მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. თუ (1) უტოლობათა სისტემას გადავაქცევთ ტოლობებად, რისთვისაც შემოვიღებთ x_3, x_4 და x_5 ცვლადებს, გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_1+6x_2-x_3=40 \\ 6x_1+20x_2-x_4=55 \\ 10x_1+3x_2-x_5=26 \end{cases} \qquad (3)$$

(3) სისტემის რანგი ტოლია 3-ის, ამიტომ ბაზისურ უცნობებად გვექნება რომელიმე სამი უცნობი, ხოლო თავისუფალი უცნობები იქნება დანარჩენი ორი უცნობი.

ავირჩიოთ ბაზისურ უცნობებად x_2, x_3 და x_4 და გამოვსახოთ ისინი x_1 და x_5 თავისუფალი უცნობების საშუალებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_3=12-(19\,x_1-2\,x_5) \\ x_4=158{,}33-(60{,}66\,x_1-6{,}66\,x_5) \\ x_2=8{,}6-(3{,}33\,x_1-0{,}33\,x_5) \end{cases} \qquad (4)$$

მიზნის ფუნქცია იქნება

$$F=8{,}23-(1{,}83\,x_1-0{,}31\,x_5). \qquad (5)$$

შევადგინოთ სიმპლექსური ცხრილი (ცხრ. 10)

ც ხ რ ი ლ ი 10

		x_1	x_5
x_3	12	19	—2
x_4	158,33	60.66	—0,66
x_2	8,66	3,33	—0,33
F	8,23	1,83	—0,31

გენერალური ელემენტი უნდა ვეძებოთ x_1-ის შესაბამის სვეტში, კერძოდ, $\frac{12}{19}$, $\frac{158{,}33}{60{,}66}$ და $\frac{8{,}66}{3{,}333}$ რიცხვებს შორის უმცირესი. ეს იქნება

$\frac{12}{19}$, ამიტომ გენერალური ელემენტი იქნება 19 და $\lambda = \frac{1}{19}$. შეგვიძლია მივიღოთ სიმპლექსური ცხრილის უჯრედების ზედა და ქვედა ნაწილში ჩაწერილი შემდეგი რიცხვები (ცხრ. 11).

ცხრილი 11

		x_1	x_5
x_3	12 0,63	19 $\frac{1}{19}$	−2 −0,1
x_4	158,33 $-\frac{12\cdot 3,33}{19}$	60,66 $-\frac{60,66}{19}$	−0,66 $-\frac{2\cdot 60,66}{19}$
x_2	8,66 $-\frac{12\cdot 3,33}{19}$	3,33 $-\frac{3,33}{19}$	−0,33 $-\frac{2\cdot 3,33}{19}$
F	8,23 $-\frac{12\cdot 1,83}{19}$	1,83 −0,09	−0,31 $\frac{2\cdot 1,83}{19}$

თუ გადავალთ შემდეგ სიმპლექსურ ცხრილზე გვექნება (ცხრ. 12).

ცხრილი 12

		x_3	x_5
x_1	0,63	1	−0,1
x_4	120,02	−3,19	−0,28
x_2	6,56	−0,17	−0,33
F	7,08	−0,09	−0,12

მიღებული ცხრილის ბოლო სტრიქონში ყველა უცნობის კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიტომ გეგმის კიდევ უფრო გაუმჯობესება შეუძლებელია, ე. ი. საბოლოოდ მივიღებთ.

$$x_3=0,\ x_5=0,\ x_1=0{,}63,\ x_2=6{,}56,\ x_4=120{,}02,\ F=7{,}08.$$

2. ვთქვათ საწარმომ 6 საათის განმავლობაში უნდა დაამზადოს ორი Π_1 და Π_2 სახის პროდუქციის შესაბამისად 30 და 96 ერთეული. თითოეული ეს პროდუქცია შეიძლება დავამზადოთ ორ A და B დაზგაზე, რომლებსაც აქვთ განსხვავებული სიმძლავრეები და, რომელიც მოცემულია მე-13 ცხრილის სახით.

ცხრილი 13

	Π_1	Π_2
A	6	13
B	24	13

ეს ცხრილი შეიძლება წავიკითხოთ ასე: ერთი საათის განმავლობაში A დაზგაზე შეიძლება დამზადდეს Π_1 პროდუქციის 6 ერთეული და Π_2 პროდუქციის 13 ერთეული; ხოლო B დაზგაზე Π_1-ის 24 ერთეული და Π_2-ის 13 ერთეული პროდუქცია. კიდევ მოცემულია მე-14 ცხრილი, სადაც ჩაწერილია დანახარჯები დაზგის ერთი საათის მუშაობის დროს შესაბამისად Π_1 და Π_2 პროდუქციის ერთი ერთეულის დამზადების დროს.

ცხრილი 14

	Π_1	Π_2
A	4	47
B	13	26

ამ მონაცემების საფუძველზე უნდა შევადგინოთ ისეთი გეგმა, რომ საერთო დანახარჯი იყოს მინიმალური. ამისათვის შემოვიღოთ

ცვლადები x_1, x_2, x_3 და x_4, სადაც x_1 იყოს ის დრო, როდესაც A დაზგა დაკავებული იქნება Π_1 პროდუქციის დამზადებაზე, x_2 დროის განმავლობაში კი A დაზგა იმუშავებს Π_2 — პროდუქციის გამოშვებაზე. ასევე x_3 და x_4 იქნება B დაზგისათვის შესაბამისად Π_1 და Π_2 პროდუქციის დამზადებისათვის გამოყოფილი დრო. გეგმის შედგენა ფაქტიურად ნიშნავს x_1, x_2, x_3 და x_4 ცვლადების რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობების აღებას. ცხადია შეზღუდვათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_3+x_4\leqslant 6 \\ 6\,x_1+13\,x_3=30 \\ 24\,x_2+13\,x_4=96 \end{cases} \qquad (6)$$

ხოლო მიზნის ფუნქცია იქნება

$$F=4\,x_1+47\,x_2+13\,x_3+26\,x_4. \qquad (7)$$

იმისათვის, რომ (6) სისტემაში შემავალი უტოლობები გადავაქციოთ ტოლობებად, შემოვიღოთ დამატებით კიდევ ორი ცვლადი $x_5=6-x_1-x_2$ და $x_6=6-x_3-x_4$. მაშინ შეზღუდვათა (6) სისტემა შეიცვლება ახალი (6^1) სისტემით:

$$\begin{cases} x_5=6-x_1-x_2 \\ x_6=6-x_3-x_4 \\ 6x_1+13\,x_3=30 \\ 24\,x_2+13\,x_4=96 \end{cases} \qquad (6^1)$$

ამის შემდეგ, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანა:

საჭიროა ვიპოვოთ (6^1) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომელიც (7) ტოლობით განსაზღვრულ მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

(6^1) სისტემის რანგი $r=4$, უცნობთა რიცხვი $n=6$. მაშასადამე, თავისუფალ უცნობთა რიცხვი $k=n-r=2$. თავისუფალ უცნობებად ავიღოთ x_1 და x_4. თავისუფალ უცნობთა ამ წყვილის შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი იქნება:

$$x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=\frac{30}{13},\ x_4=0,\ x_5=2,\ \ x_6=\frac{48}{13},$$

რომელიც, ცხადია წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსნს.

ახლა საბაზისო უცნობები და F ფორმა გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \dfrac{13}{24}x_4 \\ x_3 = \dfrac{30}{13} - \dfrac{6}{13}x_1 \\ x_5 = 2 - \left(x_1 - \dfrac{13}{24}x_4\right) \\ x_6 = \dfrac{48}{13} - \left(-\dfrac{6}{13}x_1 + x_4\right) \end{cases} \tag{8}$$

$$F = 218 - \left(2x_1 - \frac{13}{24}x_4\right) \tag{9}$$

შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 15) და ვიპოვოთ გენერალური ელემენტი.

ცხრილი 15

		x_1	x_4
x_2	4 / 0	0 / 0	$\frac{13}{24}$ / 0
x_3	$\frac{2,0}{13}$ / $-\frac{12}{13}$	$\frac{1}{13}$ / $-\frac{6}{13}$	0 / $\frac{1}{4}$
x_5	2 / 2	$\boxed{1 \;/\; 1}$	$-\frac{13}{24}$ / $-\frac{13}{24}$
x_6	$\frac{48}{13}$ / $\frac{12}{13}$	$-\frac{6}{13}$ / $\frac{6}{13}$	1 / $-\frac{1}{4}$
F	218 / -4	2 / -2	$-\frac{13}{24}$ / $\frac{26}{24}$

ცხრილი 16

		x_5	x_4
x_2	4 / -3	0 / 1	$\frac{13}{24}$ / $-\frac{13}{6}$
x_3	$\frac{18}{13}$ / $\frac{72}{13}$	$-\frac{6}{13}$ / $-\frac{24}{13}$	$\boxed{-\frac{1}{4} \;/\; 4}$
x_1	2 / 3	1 / -1	$-\frac{13}{24}$ / $\frac{13}{6}$
x_6	$\frac{60}{13}$ / $-\frac{54}{13}$	$\frac{6}{13}$ / $\frac{18}{13}$	$\frac{3}{4}$ / -3
F	214 / -3	-2 / 1	$\frac{13}{24}$ / $-\frac{13}{6}$

მე-15 ცხრილის ბოლო სტრიქონში 2 და $-\frac{13}{24}$ წარმოადგენენ თავისუფალ უცნობთა კოეფიციენტებს. აქედან ამოვარჩიოთ x_1 სვეტის შესაბამისი დადებითი კოეფიციენტი 2. შევადგინოთ თავისუფალ წევრთა ფარდობა x_1 სვეტის შესაბამის დადებით ელემენტებთან, მივიღებთ: $\frac{30}{13}:\frac{6}{13}=5$; $2:1=2$; მათ შორის უმცირესი არის $2:1=2$, რომელიც შეესაბამება x_5 სტრიქონს. მაშასადამე, აღნიშნული „1“ წარმოადგენს გენერალურ ელემენტს. უჯრედების ქვედა ნაწილები შევავსოთ სიმპლექს-ცხრილზე მოქმედების წესის მიხედვით. x_1 და x_5-თან ისრებით ნაჩვენებია ის ფაქტი, რომ: x_1 თავისუფალი უცნობებიდან გადადის საბაზისო უცნობებში, ხოლო x_5 საბაზისო უცნობებიდან გადადის თავისუფალ უცნობებში. სიმპლექს-ცხრილზე მოქმედების წესის მიხედვით მე-15 ცხრილიდან გადავიდეთ მე-16 ცხრილზე. ამ უკანასკნელ ცხრილში გენერალურ ელემენტს წარმოადგენს $\frac{1}{4}$ (რომელიც აღნიშნულია ცხრილში). x_4 თავისუფალი უცნობებიდან გადადის საბაზისო უცნობებში, ხოლო x_3 — პირიქით. ცნობილი წესის მიხედვით მე-16 ცხრილიდან გადავიდეთ მე-17 ცხრილზე. ამ ცხრილის ბოლო სტრიქონის უცნობთა კოეფიციენტები უარყოფითი რიცხვებია. მაშასადამე x_3 და x_5 თავისუფალ უცნობთა შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი ოპტიმალურია. რადგან საბაზისო ამონახსნში თავისუფალი უცნობები ნულის ტოლია ($x_3=x_5=0$), ამიტომ საბაზისო უცნობებისა და F ფორმის მნიშვნელობა თავისუფალ წევრთა ტოლია. ოპტიმალური ამონახსნი იქნება:

$$x_1=5, \quad x_2=1 \quad x_3=0,$$

$$x_4=\frac{72}{13}, \quad x_5=0, \quad x_6=\frac{6}{13},$$

ხოლო $F_{min}=211$.

ცხრილი 17

		x_5	x_3
x_2	1	1	$-\frac{13}{6}$
x_4	$\frac{72}{13}$	$-\frac{24}{13}$	4
x_1	5	0	$\frac{17}{6}$
x_6	$\frac{6}{13}$	$\frac{24}{13}$	-3
F	211	-1	$-\frac{13}{6}$

§ 9. სიმპლექს-მეთოდით მუშაობის ანალიზი

ვთქვათ, წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad (2)$$

ვიგულისხმოთ, რომ თავისუფალ უცნობთა ჩვენ მიერ შერჩეული კომპლექსის შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი დასაშვებია. ამ შემთხვევაში უკვე შეგვიძლია ამოცანის ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდით. ამისათვის საჭიროა შევადგინოთ ძირითადი სიმპლექს-ცხრილი და შემდეგ ცნობილი წესის მიხედვით გადავიდეთ სხვა ცხრილებზე, სანამ მივიღებდეთ ოპტიმალურ ამონახსნს. აქ შესაძლებელია წავაწყდეთ შემდეგ გართულებებს:

1) ერთი ცხრილიდან მეორეზე გადასვლის პროცესი შეწყდება, მიუხედავად იმისა, რომ ოპტიმალური ამონახსნი ჯერ კიდევ არ არის მიღებული.

2) ერთი ცხრილიდან მეორე ცხრილზე გადასვლისას არავითარ წინააღმდეგობას არა აქვს ადგილი და ეს პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ, მაშინ ოპტიმალურ ამონახსნს ვერ მივაღწევთ.

შევისწავლოთ თითოეული ეს წინააღმდეგობა.

1) ერთი სიმპლექს-ცხრილიდან მეორეზე გადასვლა შეუძლებელია მაშინ, როცა მასში შეუძლებელია გენერალური ელემენტის შერჩევა. ეს შეიძლება მოხდეს შემდეგ შემთხვევებში:

ა) სიმპლექს-ცხრილის ბოლო სტრიქონში არა გვაქვს დადებითი ელემენტები (თავისუფალი წევრი არ ითვლება);

ბ) სიმპლექს-ცხრილის ბოლო სტრიქონში გვაქვს დადებითი ელემენტი, მაგრამ გენერალური ელემენტის საპოვნელად შერჩეულ სვეტში დადებითი წევრები არ შედიან.

როგორც ვიცით ა) შემთხვევა მოწმობს ოპტიმალური ამონახსნის მიღებაზე, ხოლო ბ) შემთხვევა მოწმობს იმაზე, რომ მინიმიზირებული F ფორმა შემოუსაზღვრელია ქვემოდან. მართლაც, x_j სვეტის ელე-

მენტთა არადადებითობა ნიშნავს, რომ x_l თავისუფალი უცნობი შედის საბაზისო უცნობებთან არაუარყოფითი კოეფიციენტებით. ამიტომ შეიძლება x_l სიდიდის უსასრულოდ გაზრდა ისე, რომ საბაზისო უცნობები უარყოფითი არასდროს არ გახდნენ. მაგრამ F-ის გამოსახულებაში x_l სიდიდე შედის უარყოფითი ნიშნით (სიმპლექს-ცხრილში დადებითია). ამიტომ მისი უსაზღვროდ გაზრდა გამოიწვევს F-ის უსაზღვროდ შემცირებას. მაშასადამე, ოპტიმალური ამონახსნი არ არსებობს.

2) წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერ ამოცანაში უცნობთა n რიცხვი სასრულია. მაშასადამე, თავისუფალ უცნობთა სხვადასხვა კომპლექსიც სასრული რიცხვი იქნება. თავისუფალ უცნობთა ყოველ კომპლექსს შეესაბამება თავისი სიმპლექს-ცხრილი და პირიქით, ყოველ სიმპლექს-ცხრილს შეესაბამება თავისუფალ უცნობთა გარკვეული კომპლექსი. ამიტომ 2) შემთხვევა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მორიგი სიმპლექს-ცხრილი მიგვიყვანს თავისუფალ უცნობთა ისეთ კომპლექსთან, რომელსაც ადგილი ჰქონდა ადრე. მაშასადამე, ერთი ცხრილიდან გამომდინარე, შეიძლება გავიმეოროთ გამოთვლათა მთელი გზა და მივიდეთ იმავე სიმპლექს-ცხრილთან და ა. შ. ასეთი შემთხვევები იშვიათია, მაგრამ მაინც გვხვდება. მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს ც ი კ ლ ი ს შ ე კ ვ რ ა ს. ციკლის შეკვრის თავიდან აცილება შეიძლება მარტივად, ამისათვის სიმპლექს-ცხრილში (მაგალითად, იმაში, რომელშიაც დაიწყო გამეორების ციკლი, ან ამ ციკლის სხვა, რომელიმე ცხრილში) გენერალური ელემენტის შესარჩევად მივმართოთ სხვა სვეტს, რომლისთვისაც ეს შერჩევა დასაშვებია.

F ფორმის ქვემოდან შემოუსაზღვრელობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ:

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ შეზღუდვათა სისტემა და F ფორმა მოცემულია შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1-2x_2+x_4=2 \\ x_1+x_2-x_5=5 \end{cases}$$

$$F=x_2-x_1.$$

თავისუფალ უცნობებად მივიღოთ x_4 და x_5. დავუშვათ $x_4=x_5=0$. მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი

დასაშვებია. ამრიგად, ჩვენი შერჩევა მართებულია. საბაზისო უცნობები და F ფორმა გამოვსახოთ x_4 და x_5 საშუალებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \left(\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5\right) \\ x_2 = 1 - \left(-\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) \\ x_3 = 9 - (x_4 - x_5) \end{cases}$$

$$F = -3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5.$$

შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 18). გენერალური ელემენტი უნდა ვეძებოთ x_5 თავისუფალი უცნობის შესაბამის სვეტში. რადგან ამ სვეტის ყველა რიცხვი უარყოფითია, ამიტომ გენერალური ელემენტის პოვნა შეუძლებელია. მაშასადამე, F ფორმა ქვემოდან შემოუსაზღვრელია და ოპტიმალური ამონახსნი არ არსებობს.

ცხრილი 18

		x_4	x_5
x_1	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	9	1	-1
F	-3	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

§ 10. დასაშვები მნიშვნელობის მოძებნა

წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნის დასაწყისში (სიმპლექს-მეთოდით) უნდა გვქონდეს შეზღუდვათა სისტემის რაიმე დასაშვები საბაზისო ამონახსნი. უმარტივეს შემთხვევებში შეიძლება დასაშვები საბაზისო ამონახსნის უშუალო შერჩევა, შეზღუდვათა სისტემის მატრიცის რანგის განსაზღვრითა და რაიმე წესით თავისუფალ უცნობთა შერჩევით. მაგრამ, როცა სისტემის უცნობთა და განტოლებათა რიცხვი დიდია, მაშინ ასეთი მეთოდით საბაზისო ამონახსნის შერჩევა გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ აქ

ჩვენ გავეცნობით დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნის მოხერხებულ მეთოდს. აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ თვით ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს სიმპლექს-მეთოდი.

ვთქვათ მოცემულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i=1,\ 2,\ \cdots, m. \tag{1}$$

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $b_i \geqslant 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში i-ურ განტოლებას გავამრავლებთ -1-ზე).

შემოვიღოთ დამხმარე $\xi_i (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ უცნობები, რომლებიც $x_j (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ უცნობებთან დაკავშირებულნი არიან

$$\xi_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{2}$$

ტოლობებით და დამხმარე ფორმით

$$f = \sum_{i=1}^{m} \xi_i. \tag{3}$$

ამის შემდეგ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი

ა მ ო ც ა ნ ა. ვიპოვოთ (2) წრფივი ფორმის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი ($x_j \geqslant 0,\ \xi_i \geqslant 0$), რომელიც (3) წრფივ ფორმას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

შევნიშნოთ, რომ გვაქვს $(n+m)$ უცნობი: $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_m,\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ და m განტოლება.

სისტემის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

რომლის რანგი ტოლი იქნება m-ის, ამიტომ გვექნება m საბაზისო უცნობი და n თავისუფალი უცნობი. საბაზისო უცნობებად ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$. მაშინ ისინი განისაზღვრებიან $x_1, x_2, \cdots, x_n$ თავისუფალი უცნობებით (2) ტოლობების საშუალებით.

რადგან ყველა $b_i \geqslant 0$, ამიტომ ამ კომპლექსის შესაბამისი

$$\xi_i = b_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

საბაზისო ამონახსნი წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსნს. რადგან $\xi_i \geqslant 0$, ამიტომ ცხადია, რომ $\min f \geqslant 0$. ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა $\xi_i = 0$. მაშასადამე, თუ $\min f = 0$, მაშინ ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს x_j-ის არაუარყოფით მნიშვნელობათა სისტემა, რომლებიც ყველა ξ_i-ს გადააქცევენ ნულად, ე. ი. დააკმაყოფილებენ (1) სისტემას. მეორე მხრივ, ცხადია, მართებულია შებრუნებული დებულებაც: (1) სისტემის ყოველი დასაშვები ამონახსნი ξ_i-ს გადააქცევს ნულებად, ე. ი. $\min f = 0$.

ამრიგად, (1) სისტემის დასაშვები მნიშვნელობის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\min f = 0$. ეს საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წესი: (1) სისტემის დასაშვები ამონახსნის მოსაძებნად საჭიროა f ფორმის მინიმუმზე დაყვანა. თავისუფალ უცნობებად ავიღოთ $x_j (j=1, 2, \cdots, n)$, საბაზისო უცნობებად $\xi_i (i=1, 2, \cdots, m)$ და სიმპლექს-მეთოდით ჩავატაროთ f ფორმის მინიმიზაცია.

შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემთხვევას:

1) თუ $\min f = 0$, მაშინ ყველა $\xi_i = 0$ და x_j-ს მიღებული მნიშვნელობები შეადგენენ (1) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს.

2) თუ $\min f > 0$, მაშინ (1) სისტემას დასაშვები ამონახსნი არ გააჩნია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია შეზღუდვათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2 - x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5 - x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

და ფორმა

$$F=6-2x_1+x_2-3x_3+2x_4+10x_5.$$

ვიპოვოთ დასაშვები ამონახსნი, ამისათვის შემოვიღოთ დამხმარე უცნობები

$$\begin{cases} \xi_1=2-x_1+x_2-2x_3+2x_4+6x_5 \\ \xi_2=5-x_1-2x_2+x_3-7x_4-3x_5 \\ \xi_3=4+x_1-x_2-x_3+x_4 \end{cases} \tag{5}$$

(5) შეზღუდვებითა და სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით მოვახდინოთ

$$f=\xi_1+\xi_2+\xi_3 \tag{6}$$

ფორმის მინიმიზაცია. თავისუფალ უცნობებად ავიღოთ: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; ხოლო საბაზისო უცნობებად ξ_1, ξ_2, ξ_3. შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 19) და ვიმოქმედოთ ჩვეულებრივი წესით.

ცხრილი 19

		x_1	x_2	x_3	x_4	x^5
ξ_1	2 2	$\boxed{\underline{1}}$ 1	−1 −1	2 2	−2 −2	−6 −6
ξ_2	5 −2	1 −1	2 1	−1 −2	7 2	3 6
ξ_3	4 2	−1 1	1 −1	1 2	−1 −2	0 −6
f	11 −2	1 −1	2 1	2 −2	4 2	−3 6
F	6 −4	2 −2	−1 2	3 −4	−2 4	−10 12

ამ ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში ამოწერილია F ფორმიდან თავისუფალი უცნობების კოეფიციენტები. შემდეგში ყველა გარდაქმნები ჩავატაროთ ამ უკანასკნელი სტრიქონისთვისაც. თუ x_1 უცნობს გადავიყვანთ თავისუფალ უცნობებში, ხოლო ξ_1-ს საბაზისო უცნობებში, მაშინ მე-19 ცხრილიდან შეგვიძლია გადავიდეთ მე-20 ცხრილზე.

ცხრილი 20

		ξ_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2 1	1 $-\frac{1}{3}$	-1 $\frac{1}{3}$	2 -1	-2 3	-6 3
x_2	3 1	-1 $-\frac{1}{3}$	$\boxed{3 \quad \frac{1}{3}}$	-3 -1	9 3	9 3
ξ_3	6 0	1 0	0 0	3 0	-3 0	-6 0
f	9 -3	-1 1	3 -1	0 3	6 -9	3 -9
F	2 -1	-2 $\frac{1}{3}$	1 $-\frac{1}{3}$	-1 1	2 -3	2 -3

მე-20 ცხრილიდან 21-ე ცხრილზე გადასვლა გამოწვეულია ξ_2-ის თავისუფალ უცნობებში, ხოლო x_2-ის საბაზისო უცნობებში გადასვლით. მესამე ეტაპზე ξ_3 გადადის თავისუფალ უცნობებში და x_3 საბაზისო უცნობებში (ცხრ. 22). ამ გარდაქმნათა შედეგად თავისუფალ უცნობებად მივიღებთ: ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4 და x_5; ხოლო საბაზისო უცნობებად: x_1, x_2, x_3.

ცხრილი 21

		η_1	ξ_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3 -2	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0	1 $-\frac{1}{3}$	1 1	-3 2
x_2	1 2	$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0	-1 $\frac{1}{3}$	3 -1	3 -2
ξ_3	6 2	1 $\frac{1}{3}$	0 0	$\boxed{3}$ $\boxed{\frac{1}{3}}$	-3 -1	-6 -2
f	6 -6	0 -1	-1 0	3 -1	-3 3	-6 6
F	1 0	$-\frac{5}{3}$ 0	$-\frac{1}{3}$ 0	0 0	-1 0	-1 0

ცხრილი 22

		η_1	η_2	ξ_3	x_4	x_5
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	1
x_2	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	1
x_3	2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	-2
f	0	-1	-1	-1	0	0
F	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	-1

როგორც 22-ე ცხრილიდან ჩანს f ფორმამ მიაღწია ნულოვან მინიმუმ მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$ და მივიღეთ (4) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი.

$$x_4=0, \quad x_5=0, \quad x_1=1, \quad x_2=3, \quad x_3=2.$$

უფრო მეტიც, რადგან სათანადო გარდაქმნებს ვატარებდით F ფორმის მიმართაც, საბოლოო ცხრილში მივიღეთ მისი გამოსახვა ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4 და x_5 თავისუფალი უცნობების საშუალებით.

ცხადია, რომ თუ 22-ე ცხრილში უკუვაგდებთ ξ_1, ξ_2, ξ_3 დამხმარე უცნობთა სვეტებს და f ფორმის შესაბამის სტრიქონს, მივიღებთ ცხრილს (ცხრ. 23), რომელიც საშუალებას მოგვცემს x_1, x_2, x_3 და F ფორმა გამოვსახოთ x_4 და x_5 თავისუფალი უცნობებით.

ცხრილი 23

		x_4	x_5
x_1	1	2	-1
x_2	3	2	1
x_3	2	-1	-2
F	1	-1	-1

23-ე ცხრილიდან უნდა დავიწყოთ F ფორმის მინიმუმზე დაყვანა. როგორც ამ ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონიდან ჩანს F ფორმის შემცირება მეტად აღარ შეიძლება, ე. ი. $\min F=1$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 23-ე ცხრილში არ შედიან ξ_1, ξ_2, ξ_3-ის შესაბამისი სვეტები. უფრო მეტიც, თუ დასაშვები ამონახსნის მოძებნის პროცესში ξ_i დამხმარე უცნობი გახდა თავისუფალი, მაშინ მის შესაბამის

სვეტში გენერალური ელემენტის ამორჩევას არ მოვახდენთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში შემდეგ ნაბიჯზე ξ_i გადავა საბაზისო ამონახსნთა რიცხვში და ეს გარემოება ვერ მიგვაახლოებს დასაშვები ამონახსნისაკენ. ამიტომ ცხადია, რომ ξ_i-ს სვეტები არავითარ გავლენას არ მოახდენენ უკანასკნელ ცხრილზე, ამიტომ შეიძლება ცხრილიდან მათი ამოშლა.

§ 11. დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნა

წინა პარაგრაფში ჩვენ მივუთითეთ შეზღუდვათა სისტემის დასაშვები ამონახსნის მოძებნის მეთოდზე. ერთი მხრივ სიმპლექს-მეთოდზე მუშაობა მოითხოვს დასაშვები საბაზისო ამონახსნის ცოდნას. ამ პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენებთ როგორც დასაშვები ამონახსნის, ასევე დასაშვები საბაზისო ამონახსნის მოძებნის გზას.

დავუშვათ, რომ § 2-ში სიმპლექს-მეთოდით, დამხმარე f ფორმის მინიმიზაციით უკვე ვიპოვეთ

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1}$$

სისტემის დასაშვები ამონახსნი. თუ ამ შემთხვევაში ξ_i დამხმარე უცნობებიდან ყველა გახდა თავისუფალი უცნობი, მაშინ ამოცანა ამოხსნილად ჩაითვლება. მართლაც, ამ შემთხვევაში საბაზისო ამონახსნებად აღმოჩნდებიან x_j უცნობები და მაშასადამე,

$$\xi_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{2}$$

დამხმარე სისტემისათვის ნაპოვნი დასაშვები საბაზისო ამონახსნი მოგვცემს აგრეთვე (1) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსნს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ შეზღუდვათა

$$\begin{cases} 3+6x_1-x_2-x_3-4x_4-x_5+3x_6=0 \\ 6+3x_1-x_2+4x_4-2x_5+5x_6=0 \\ 3+7x_1+2x_2+5x_3+6x_4-x_5=0 \end{cases} \qquad (3)$$

სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი. ამისათვის შემოვიღოთ დამხმარე უცნობები:

$$\begin{cases} \xi_1=3+6x_1-x_2-x_3+4x_4-x_5+3x_6 \\ \xi_2=6+3x_1-x_2+4x_4-2x_5+5x_6 \\ \xi_3=3+7x_1+2x_2+5x_3+6x_4-x_5 \end{cases} \qquad (4)$$

და ფორმა

$$f=\xi_1+\xi_2+\xi_3. \qquad (5)$$

(4) სისტემისა და (5) ფორმისათვის შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 24).

ცხრილი 24

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
ξ_1	3 -3	-6 $\frac{3}{2}$	1 $-\frac{1}{2}$	1 0	-4 2	1 $-\frac{1}{2}$	-3 $\frac{5}{2}$
ξ_2	6 3	-3 $-\frac{3}{2}$	1 $\frac{1}{2}$	0 0	-4 -2	$\boxed{2}$ $\frac{1}{2}$	-5 $-\frac{5}{2}$
ξ_3	3 -3	-7 $\frac{3}{2}$	-2 $-\frac{1}{2}$	-5 0	-6 2	1 $-\frac{1}{2}$	0 $\frac{5}{2}$
f	12 -12	-16 6	0 -2	-4 0	-14 8	4 -2	-8 10

გენერალურ ელემენტად შევარჩიეთ მე-2 სტრიქონისა და მე-5 სვეტის გადაკვეთაში მდგომი რიცხვი „2“. 25-ე ცხრილზე გადასვლისას გადადის თავისუფალ უცნობად ξ_2.

ც ხ რ ი ლ ი 25

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
ξ_1	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-2	$-\frac{1}{2}$
x_5	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-2	$-\frac{5}{2}$
ξ_3	0	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-5	-4	$\frac{5}{2}$
f	0	-10	-2	-4	-6	2

როგორც ჩანს f ფორმამ უკვე მიაღწია თავის მინიმუმს, მიუხედავად ამისა (3) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი ჯერ კიდევ არ მიგვიღია, რადგან მხოლოდ ξ_2 გადავიდა თავისუფალ უცნობთა რიცხვში, ხოლო ξ_1 და ξ_3 დანარჩენ საბაზისო უცნობთა რიცხვში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. შევნიშნოთ, რომ 25-ე ცხრილში ξ_1 და ξ_2 დამხმარე უცნობებისათვის შენარჩუნებული თავისუფალი წევრები ნულის ტოლია. მართლაც, $f=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ ფორმამ უკვე მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას. მაგრამ პირობის თანახმად ყველა $\xi_i \geqslant 0$. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $\xi_i = 0$. ახლა 25-ე ცხრილიდან გადავიდეთ შემდეგ ცხრილზე. თუ მკაცრად დავიცავთ სიმპლექს-ცხრილზე მუშაობის წესს, მაშინ გენერალურ ელემენტად უნდა ავიღოთ ξ_3 სტრიქონის და x_6 სვეტის შესაბამისი რიცხვი, ე. ი. $\frac{5}{2}$. ერთი მხრივ ნაწილობრივ გადავუხვევთ ამ წესს და ვაჩვენებთ, რომ განსახილველ შემთხვევაში შეიძლება გადავიდეთ (4) სისტემის ახალ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე გენერალური ელემენტის სხვანაირი შერჩევითა და f ფორმის მნიშვნელობის გაზრდის გარეშე. მართლაც, გენერალურ ელემენტად ავირჩიოთ ξ_1 სტრიქონისა და x_2 სვეტის შესაბამისი ელემენტი, ე. ი. $\frac{1}{2}$. ამ შემთხვევაში გენერალური ელემენ-

ტის შერჩევის პირობა შესრულებულია: $0 : \frac{1}{2} = 0$ წარმოადგენს მინიმალურს. მაშასადამე, ჩვენ მიერ შერჩეული გენერალური ელემენტის შესაბამისი ახალი საბაზისო ამონახსნი დასაშვებია. მეორე მხრივ, რადგან 25-ე ცხრილში ξ_1-სათვის თავისუფალი წევრი $\beta_1 = 0$, ამიტომ f ფორმის მნიშვნელობა არ შეიცვლება იმ γ_i კოეფიციენტისაგან დამოუკიდებლად, რომელიც დგას f ფორმის სტრიქონსა და გენერალური ელემენტის შესაბამის სვეტში. ამრიგად, გენერალური ელემენტის აღნიშნული შერჩევით მართლაც გადავალთ ახალ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე f ფორმის მნიშვნელობის შენარჩუნებით. ამ გზით შევავსოთ 25-ე სიმპლექს-ცხრილი იმ დაშვებით რომ გენერალურ ელემენტად არჩეულია $\frac{1}{2}$. მივიღებთ 26-ე ცხრილს.

ცხრილი 26

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	0 0	$-\frac{9}{2}$ -9	$\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{2}$	1 2	-2 -4	$-\frac{1}{2}$ -1
x_5	3 0	$-\frac{3}{2}$ $\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$ -1	0 -1	-2 2	$-\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$
ξ_3	0 0	$-\frac{11}{2}$ $-\frac{45}{2}$	$-\frac{5}{2}$ 5	-5 5	-4 -10	$\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{2}$
f	0 0	-10 -18	-2 4	-4 4	-6 -8	2 -2

შემდეგი ცხრილის შედგენის მიზნით ξ_1 გადავიყვანოთ თავისუფალ უცნობებში, მივიღებთ 27-ე ცხრილს (იხ. § 5-ის შენიშვნა).

ც ხ რ ი ლ ი 27

		x_1	x_3	x_4	x_6
x_2	0	−9	2	−4	−1
x_5	3	3	−1	0	−2
ξ_3	0	−28	0	−14	0
f	0	−28	0	−14	0

(3) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი ჯერ კიდევ არ არის მიღებული, მაგრამ 27-ე ცხრილში დამხმარე უცნობთა რიცხვი შემცირდა 26-ე ცხრილთან შედარებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან ცხადია, რომ გენერალურ ელემენტად შეგვიძლია შევარჩიოთ არა მარტო ჩვენ მიერ შერჩეული $\frac{1}{2}$, არამედ ის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, რომელიც ξ_l დამხმარე უცნობის სტრიქონშია. 27-ე ცხრილში ξ_3 წარმოადგენს საბაზისო უცნობს. ξ_3 სტრიქონში რომ ყოფილიყო ერთი მაინც დადებითი ელემენტი, მაშინ შეგვეძლო მისი მიღება გენერალურ ელემენტად. ამ შემთხვევაში ξ_3-ს გადავიყვანთ თავისუფალ უცნობთა რიცხვში და ამით მივალთ (3) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსნთან. მაგრამ ξ_3 სტრიქონში არც ერთი დადებითი წევრი არ არის. როგორ მოვიქცეთ ამ შემთხვევაში? ამოვიწეროთ ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება

$$\xi_3 = 0 - (-28\,x_1 - 14\,x_4)$$

(3) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნისათვის $\xi_3 = 0$. მაშასადამე, რადგან $x_1 \geqslant 0$ და $x_4 \geqslant 0$, ამიტომ (3) სისტემის ნებისმიერი დასაშვები ამონახსნისათვის $x_1 = x_4 = 0$. ამიტომ შეგვიძლია ამოვშალოთ x_1-ის და x_4-ის შესაბამისი სვეტები, მივიღებთ (ცხრ. 28).

ცხრილი 28

		x_3	x_6
x_2	0	2	—1
x_5	3	—1	—2
ξ_3	0	0	0
f	0	0	0

ცხრილი 29

		x_3	x_6
x_2	0	2	—1
x_5	3	—1	—2

28-ე ცხრილის ξ_3 სტრიქონში ნულოვანი ელემენტებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება სრულდება იგივურად, ამიტომ შეიძლება ცხრილიდან ამ სტრიქონის ამოშლა. თუ ასევე ამოვშლით f ფორმის შესაბამის სტრიქონს, მივიღებთ (3) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნებიდან ერთ-ერთ ამონახსნის შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს (ცხრ. 29).

შენიშვნა 3. იმის შემდეგ რაც f ფორმამ მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას, 26-ე და მის მომდევნო ცხრილებში f-ის შესაბამის სტრიქონებს არავითარი გავლენა არ მოუხდენიათ არც გენერალური ელემენტის შერჩევაზე და არც (4) სისტემისათვის მიღებულ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნზე. ამ მიზეზის გამო, როგორც კი f მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, შეიძლება ცხრილში f-ის შესაბამისი სტრიქონის ამოშლა.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა. ვთქვათ მოცემულია შეზღუდვათა (1) სისტემა. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ მისი დასაშვები საბაზისო ამონახსნი. შემოვიღოთ ξ_i დამხმარე უცნობები და დამხმარე f ფორმა. f-ის მინიმიზაციით ვიპოვით (1)-ის დასაშვებ ამონახსნს, ეს მოხდება მაშინ, როცა $\min f=0$. პირიქით $f=0$-ის შესაბამისი (2) სისტემის ყოველი დასაშვები ამონახსნი გვაძლევს (1) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს.

f-ის მინიმიზაციის დროს სიმპლექს-ცხრილიდან ამოვშლით იმ სვეტებს, რომელთა შესაბამისი დამხმარე ξ_i უცნობები გადავლენ თა-

ვისუფალ უცნობებში. თუ (1) სისტემის დასაშვები ამონახსნის მოძებნის დროს ყველა ξ_i უცნობი აღმოჩნდება თავისუფალ უცნობთა რიცხვში, მაშინ ამოცანა ამოხსნილია და ნაპოვნი დასაშვები ამონახსნი იქნება (1) სისტემის საბაზისო ამონახსნი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ზოგიერთი ξ_i დარჩება საბაზისო უცნობთა რიცხვში. (1) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნის პოვნა შეიძლება იმ შემთხვევაში როცა ყველა დამხმარე უცნობს გადავიყვანთ თავისუფალ უცნობთა რიცხვში ისე, რომ f დარჩეს ნულის ტოლი.

დამხმარე უცნობებიდან განვიხილოთ ნებისმიერი, ვთქვათ ξ_k. რადგან f ფორმამ მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ ξ_k-სათვის თავისუფალი წევრი ტოლი უნდა იყოს ნულის. სიმპლექს-ცხრილში განვიხილოთ ξ_k-ს შესაბამისი სტრიქონი. თუ ამ სტრიქონში ერთი მაინც დადებითი ელემენტია, მაშინ მისი მიღება შეიძლება გენერალურ ელემენტად. შემდეგ ნაბიჯზე ξ_k გადავა თავისუფალ უცნობთა რიცხვში და დამხმარე უცნობთა რიცხვი ცხრილში შემცირდება.

მსგავს გარდაქმნათა თანმიმდევრული ჩატარებით მივალთ შემდეგი ორი შემთხვევიდან ერთ ერთზე.

ა) ყველა დამხმარე უცნობი ამოვარდება,

ბ) ნებისმიერი დარჩენილი დამხმარე უცნობის შესაბამის სტრიქონში ყველა ელემენტი არადადებითია. ა) შემთხვევაში ამოცანა ამოხსნილია. განვიხილოთ ბ) შემთხვევა: დარჩენილი დამხმარე უცნობებიდან ნებისმიერი მათგანი აღვნიშნოთ ξ_k-თი. როგორც აღვნიშნეთ ξ_k-სათვის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია. ამიტომ ξ_k სტრიქონის შესაბამის განტოლებას ექნება სახე:

$$\xi_k = 0 - \sum_l a_{lk} x_l + \cdots, \tag{6}$$

სადაც ყველა $a_{lk} \geqslant 0$. მრავალწერტილში ვგულისხმობთ ξ_i თავისუფალი უცნობების შესაბამის $\beta_i \xi_i$ წევრებს, რომლებიც ადრე ჩატარებული გარდაქმნების შედეგად გადავიდნენ თავისუფალ უცნობებში.

(1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნისათვის ყველა დამხმარე უცნობი ტოლია ნულის. ამიტომ, თუ x_j სიდიდეები დააკმაყოფილებენ (1) სისტემას, მაშინ (6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-\sum_j a_{jk}x_j=0, \qquad a_{jk}\leqslant 0.$$

ცხადია, რომ ამ განტოლებაში შეგვიძლია დავტოვოთ მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებული წევრები:

$$\sum_j a_{jk}x_j=0, \qquad a_{jk}<0. \tag{7}$$

ახლა ვთქვათ x_j რიცხვები ქმნიან (1) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს, მაშინ ყველა $x_j\geqslant 0$. მაგრამ რადგან ყველა $a_{jk}<0$, ამიტომ (7) განტოლება დაკმაყოფილდება მხოლოდ მაშინ როცა ყველა $x_j=0$. ამრიგად, (1) სისტემის ნებისმიერი დასაშვები ამონახსნისათვის

$$x_j=0 \qquad (a_{jk}<0) \tag{8}$$

ჩანაწერი $a_{jk}=0$ გვიჩვენებს, რომ (8) ტოლობები გავრცელებულია მხოლოდ იმ x_j-ზე, რომლებიც შედიან (7)-ში.

თუ გავითვალისწინებთ (8) ტოლობებს, მაშინ შეგვეძლება (8)-ში შემავალი x_j უცნობების შესაბამისი სვეტების ამოშლა სიმპლექს-ცხრილიდან. ამის შემდეგ ξ_k სტრიქონის ყველა ელემენტი აღმოჩნდება ნულის ტოლი და ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება იქნება იგივური და მაშასადამე მისი ამოშლაც შეიძლება სიმპლექს-ცხრილიდან. ამით ჩვენ ისევ შევამცირებთ დარჩენილ ცხრილში დამხმარე უცნობთა რიცხვს. მსგავს ოპერაციათა ჩატარების შედეგად მივიღებთ, რომ სიმპლექს-ცხრილში დამხმარე უცნობები აღარ გვექნება და მაშასადამე მივიღებთ (1) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსნს. ამ შემთხვევაში უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ცხრილიდან გამორიცხული x უცნობები ნულის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ 1 - x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 - 4 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

ეს სისტემა გადავწეროთ ისე, რომ თავისუფალი წევრები იყვნენ არა-უარყოფითი, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2 - 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 1 - x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ 4 - 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0, \end{cases}$$

შემოვიღოთ დამხმარე უცნობები:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2 - (2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4) \\ \xi_2 &= 1 - (x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5) \\ \xi_3 &= 0 - (x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5) \\ \xi_4 &= 4 - (4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5) \end{aligned} \tag{10}$$

ამ შემთხვევაში

$$f = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4. \tag{11}$$

ცნობილი წესის მიხედვით შევადგინოთ 30-ე ცხრილი.

ცხრილი 30

			↑				
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	ξ_1	2 / —2	2 / —2	—4 / 4	3 / —2	1 / 8	0 / —4
←	ξ_2	1 / 1	$\boxed{\underline{1} \;/\; 1}$	—2 / —2	1 / 1	—4 / —4	2 / 2
	ξ_3	0 / 0	0 / 0	1 / 0	—1 / 0	3 / 0	1 / 0
	ξ_4	4 / —4	4 / —4	—7 / 8	4 / —4	—4 / 16	5 / 8
	f	7 / —7	7 / —7	—12 / 14	7 / —7	—4 / 28	8 / —14

ξ_2 -ის თავისუფალი უცნობთა რიცხვში გადასვლის შედეგად მივიღებთ 31-ე ცხრილს (x_1-ის შესაბამისი სვეტი ამოიშლება).

ცხრილი 31

		x_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	0	0	1	9	—4
x_1	1	—2	1	—4	2
ξ_3	0	1	—1	3	1
ξ_4	0	1	0	12	—3
f	0	2	0	24	—6

როგორც ჩანს f ფორმამ უკვე მიაღწია ნულოვან მინიმალურ მნიშვნელობას. მიუხედავად ამისა ჯერ კიდევ არ არის მიღებული (9) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი (რადგან მარტო ξ_1 გადავიდა თავისუფალ უცნობთა რიცხვში). გენერალურ ელემენტად ავირჩიოთ ξ_3 სტრიქონისა და x_2 სვეტის გადაკვეთაში მდგომი რიცხვი „1“ და შევავსოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 32). აქედან ადვილად გადავალთ 33-ე ცხრილზე, სადაც ამოშლილია x_2-ის შესაბამისი სვეტი. გენერალურ ელემენტად ავიღოთ ξ_1 სტრიქონისა და x_3 სვეტის გადაკვეთაში მდგომი რიცხვი „1“, მივიღებთ 33-ე ცხრილს:

ცხრილი 32

		↑ x_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	0 0	0 0	1 0	9 0	—4 0
x_1	1 0	—2 2	1 —2	—4 6	2 2
← ξ_3	0 0	$\boxed{1}$ $\boxed{1}$	—1 —1	3 3	1 1
ξ_4	0 0	1 —1	0 1	12 —3	—3 1
f	0	2	0	24	—6

x_3-ის შესაბამისი სვეტის ამოშლით გადავალთ 34-ე ცხრილზე, რომლის ბოლო სტრიქონის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

ცხრილი 33

		x_3	x_4	x_5
← ξ_1	0 0	$\boxed{1 \quad 1}$	9 9	—4 4
x_1	1 0	—1 1	2 9	4 —4
x_2	0 0	—1 1	3 9	1 —4
ξ_4	0 0	1 —1	9 —9	—4 4

ცხრილი 34

		x_4	x_5
x_3	0	9	—4
x_1	1	11	0
x_2	0	12	—3
ξ_4	0	0	0

ამ სტრიქონის შესაბამისი განტოლება იგივურად შესრულდება, ე. ი. ყველა ξ_i დამხმარე უცნობი გადავიდა თავისუფალ უცნობთა რიცხვში. მაშასადამე, უკანასკნელი ცხრილი წარმოადგენს (9) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნის შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს, რომელსაც შეესაბამება შემდეგი დასაშვები ამონახსნი: $x_1=1$, $x_2=x_3=0$.

მეხუთე თავი

წრფივი დაპროგრამების ორადული ამოცანის ცნება

§ 1. ორადული ამოცანის მაგალითი

მე-3 თავის § 3-ში ჩვენ განვიხილეთ ამოცანა ნედლეულის გამოყენებაზე. Π_1 და Π_2 სახის პროდუქციათა დამზადებაზე გამოიყენება ოთხი N_1, N_2, N_3 და N_4 სახის ნედლეული. თითოეული სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად ნედლეულთა მარაგი და გასავალი მოცემულია მე-2 ცხრილით. ამ ცხრილის ბოლო სტრიქონში მოცემულია თითოეული სახის ნედლეული ერთეულის დამზადებით საწარმოს მიერ მიღებული შემოსავალი. ამ ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება ასეთია: მოცემულია სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 19 \\ 2x_1+x_2\leqslant 13 \\ 0x_1+3x_2\leqslant 15 \\ 3x_1+0x_2\leqslant 18 \end{cases} \tag{1}$$

და ფორმა

$$F=7x_1+5x_2. \tag{2}$$

მოგვეთხოვება (1) სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა შორის შევარჩიოთ ისეთი ამონახსნი, რომლისთვისაც F მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას. ისმის კითხვა: როგორ შევაფასოთ ნედლეულის ღირებულება იმ შემოსავლის მიხედვით რასაც Π_1 და Π_2 პროდუქციათა დამზადებით მიიღებს საწარმო?

აქ საუბარია არა ნედლეულის ღირებულებაზე საწარმოს მიერ მისი შეძენის დროს (ეს ღირებულება არსებითად ჩართულია იმ შე-

მოსავალში, რომელსაც ღებულობს საწარმო დამზადებული პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად) არამედ, ჩვენ გვაინტერესებს ნედლეულის ფარდობითი ღირებულება, იმ შემოსავალთა თვალსაზრისით, რომელსაც ღებულობს საწარმო ამ ნედლეულთა Π_1 და Π_2 პროდუქტებად გადამუშავებისას. ამ ამოცანის ზუსტად დასმის მიზნით გავითვალისწინოთ შემდეგი თვალსაზრისი: ვთქვათ, რომელიმე ორგანიზაციას სურს შეიძინოს საწარმოში არსებული ნედლეული. ისმის კითხვა: რა ფასში იყიდიდა ორგანიზაცია აღნიშნულ ნედლეულს? N_1, N_2, N_3, N_4 სახის ნედლეულთა ერთეულების ფასი აღვნიშნოთ შესაბამისად y_1, y_2, y_3, y_4-ით. Π_1 სახის პროდუქციის ერთეულის წარმოება საწარმოს აძლევს შემოსავალს 7 ერთეულის რაოდენობით. ამასთან იხარჯება N_1 ნედლეულის 2 ერთეული, N_2 ნედლეულის 2 ერთეული, N_3 ნედლეულის 0 ერთეული და N_4 ნედლეულის 3 ერთეული. Π_1 სახის პროდუქციის ერთეულზე დახარჯული მთელი ნედლეულის გაყიდვით მიღებული შემოსავალი $y_i (i=1, 2, 3, 4)$, ფასების მიხედვით შეადგენს:

$$2y_1+2y_2+0y_3+3y_4\text{-ს}.$$

ცხადია, რომ საწარმო არ გაყიდის ნედლეულს, თუ ამ გაყიდვით მიღებული შემოსავალი აღმოჩნდება იმ შემოსავალზე ნაკლები, რომელსაც იგი ღებულობს ნედლეულის გადამუშავებისას. მაშასადამე, უნდა შესრულდეს უტოლობა:

$$2y_1+2y_2+0y_3+3y_4\geqslant 7.$$

ანალოგიური მსჯელობა, Π_2 სახის პროდუქციის ერთეულისათვის მოგვცემს უტოლობას:

$$3y_1+1\cdot y_2+3y_3+0\cdot y_4\geqslant 5.$$

მეორე მხრივ, საწარმოს მიერ შეძენილი ნედლეულის მთელი მარაგის საერთო Φ ღირებულება შეადგენს ჯამს:

$$\Phi=19y_1+13y_2+15y_3+18y_4.$$

ცხადია, რომ საწარმო მიისწრაფვის რაც შეიძლება, იაფ ფასებში შეიძინოს ნედლეული, ე. ი. ცდილობს Φ ფორმის მინიმუმზე დაყვანას.

მაშასადამე, მივედით წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე: მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} 2y_1+2y_2+3y_4 \geqslant 7 \\ 3y_1+y_2+3y_3 \geqslant 5 \end{cases} \tag{3}$$

და ფორმა:

$$\Phi = 19y_1+13y_2+15y_3+18y_4. \tag{4}$$

მოგვეთხოვება (3) სისტემის არაუარყოფითი ამონახსნებიდან ავარჩიოთ ისეთი, რომლისთვისაც Φ მიაღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ დასმული ამოცანის (y_1, y_2, y_3, y_4) ოპტიმალური ამონახსნი განსაზღვრავს N_1, N_2, N_3, N_4 ნედლეულთა ფარდობით ღირებულებას იმ შემოსავალთა თვალსაზრისით, რომელსაც ღებულობს საწარმო, Π_1 და Π_2 პროდუქტებად ნედლეულთა გადამუშავების შედეგად. ახლა შევადაროთ ერთმანეთს ნედლეულის გამოყენების (1) შეზღუდვათა სისტემით და (2) მიზნის ფუნქციით განსაზღვრული ამოცანა, (3) შეზღუდვათა სისტემით და (4) მიზნის ფუნქციით განსაზღვრულ ამოცანას და აღვნიშნოთ შემდეგი თავისებურებანი:

1) (3) სისტემის y_1, y_2, y_3, y_4 უცნობებისაგან შედგენილი

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცა მიიღება (1) სისტემის x_1, x_2 უცნობებისაგან შედგენილი

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცისაგან, ამ უკანასკნელის ტრანსპონირებით.

2) (1) და (3) სისტემის უტოლობები მიმართულნი არიან სხვადასხვა მხარეს.

3) (3) სისტემის თავისუფალ წევრებს წარმოადგენენ F ფორმის კოეფიციენტები, მაშინ, როცა Φ ფორმის კოეფიციენტები წარმოადგენენ (1) სისტემის თავისუფალ წევრებს.

4) ნედლეულის გამოყენებაზე ამოცანაში F ფორმა ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ხოლო ფარდობითი ფასებზე ამოცანაში კი საჭიროა ფორმის მინიმუმის პოვნა.

წრფივი დაპროგრამების ორ ამოცანას, რომლებიც ამგვარი თავისებურებებით არიან დაკავშირებული, უწოდებენ ერთმანეთის მიმართ ო რ ა დ უ ლ ს.

§ 2. უტოლობებით შეზღუდული ორადული ამოცანები

ა მ ო ც ა ნ ა I. მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdot\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{cases} \tag{1}$$

და წრფივი ფორმა

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n. \tag{2}$$

(1) უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც F მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ამ ამოცანის მიმართ ორადული ეწოდება წრფივი დაპროგრამების შემდეგ ამოცანას:

ა მ ო ც ა ნ ა II. მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geqslant c_1, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geqslant c_2, \\ \cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geqslant c_n \end{cases} \tag{3}$$

და ფორმა

$$\Phi=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m. \tag{4}$$

(3) სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლიდან ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც Φ ფორმა მიაღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ორადულობის თეორიის საფუძველს გამოხატავს შემდეგი

თეორემა 1. თუ I და II ორადული ამოცანებიდან ერთ-ერთ მათ-განს აქვს ამონახსნი, მაშინ მეორე ამოცანასაც ექნება ამონახსნი და ამასთან F ფორმის მაქსიმუმი ტოლია Φ ფორმის მინიმუმის:

$$F_{\max}=\Phi_{\min}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ნედლეულის გამოყენებისას და ფარდობით ფასებ-ზე ამოცანებისათვის ეს თეორემა იმაზე მიუთითებს, რომ Π_1 და Π_2 პროდუქციათა რეალიზაციით მიღებული მაქსიმალურად შესაძლებე-ლი $F_{\max}$ შემოსავალი ემთხვევა ნედლეულის მინიმალურად შესაძ-ლებელ $\Phi_{\min}$ ღირებულებას.

თეორემა 1-ის საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ ფარდობით ფასებზე ამოცანა. ამისათვის ამ თავის § 1-ის უტოლობებით შეზღუდული (3) სისტემიდან გადავიდეთ ტოლობებით შეზღუდულ სისტემაზე. თუ შე-მოვიღებთ დამატებით y_5, y_6 ცვლადებს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2y_1+2y_2+3y_4-y_5=7 \\ 3y_1+y_2+3y_3-y_6=5. \end{cases} \tag{5}$$

საბაზისო უცნობებად შევარჩიოთ y_3, y_4 და გამოვსახოთ ისინი თავი-სუფალი უცნობებით:

$$\begin{cases} y_3=\dfrac{5}{3}-\left(y_1+\dfrac{1}{3}y_2-\dfrac{1}{3}y_6\right) \\ y_4=\dfrac{7}{3}-\left(\dfrac{2}{3}y_1+\dfrac{2}{3}y_2-\dfrac{1}{3}y_5\right). \end{cases} \tag{6}$$

უშუალოდ ჩანს, რომ

$$y_3=\frac{5}{3}, \qquad y_4=\frac{7}{3}, \qquad y_1=y_2=y_5=y_6=0.$$

საბაზისო ამონახსნი დასაშვებია. Φ ფორმა გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით:

$$\Phi=67-(8y_1+4y_2-6y_5-5y_6) \tag{7}$$

შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი, შევარჩიოთ გენერალური ელემენტი და შევავსოთ 35-ე ცხრილი.

ცხრილი 35

		y_1	↑ y_2	y_5	y_6
y_3	$\frac{5}{3}$; $-\frac{7}{6}$	1; $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$	0; $\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$; 0
y_4	$\frac{7}{3}$; $\frac{7}{2}$	$\frac{2}{3}$; 1	$\boxed{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$	0; 0
φ	67; -14	8; -4	4; -6	-6; 2	-5; 0

აქედან გადავიდეთ 36-ე ცხრილზე, შევარჩიოთ მასში გენერალური ელემენტი და შევავსოთ მისი ქვედა უჯრედები. შემდეგ შევადგენთ 36-ე და 37-ე ცხრილებს.

ცხრილი 36

		↑ y_1	y_4	y_5	y_6
← y_3	$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$	$\boxed{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{7}{2}$; $-\frac{3}{4}$	1; $-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$	0; $\frac{1}{2}$
φ	53; -3	4; -6	-6; 3	-4; -1	-5; 2

		y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{11}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
φ	50	-6	-3	-5	-3

მივიღებთ ოპტიმალურ ამონახსნს $\Phi_{min}=50$. თუ ამას შევადარებთ მე-4 თავის § 4-ში F ფორმისათვის მიღებულ მაქსიმალურ მნიშვნელობას, დავრწმუნდებით, რომ $F_{max}=\Phi_{min}$.

§ 8. ორადობის ამოცანა წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანისათვის

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა: მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

და

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{2}$$

წრფივი ფორმა. ვთქვათ (1) სისტემის რანგი მასში განტოლებათა რიცხვის ტოლია, ე. ი. $r=m$. ჩვენი მიზანია (1) სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლიდან ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც F ფორმა მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ძირითადი ამოცანის მიმართ ორადულ ამოცანას უწოდებენ შემდეგ ამოცანას:

ა მ ო ც ა ნ ა I I I. მოცემულია უტოლობათა სისტემა:

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqslant c_1\\
a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqslant c_2\\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot\\
a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqslant c_n
\end{cases} \tag{3}
$$

და წრფივი ფორმა

$$\Phi=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m. \tag{4}$$

მოგვეთხოვება (3) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლიდან შევარჩიოთ ისეთი ამონახსნი, რომლისთვისაც Φ ფორმა მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამ ამოცანაში y_i- სიდიდეებმა შეიძლება მიიღონ უარყოფითი მნიშვნელობებიც (მთავარია მათ დააკმაყოფილონ (3) სისტემა).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ძირითადი ამოცანის მიმართ ორადული ამოცანა III შეიძლება მივიღოთ შემდეგი გზით: წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა ჯერ გარდავქმნათ უტოლობებით შეზღუდულ ამოცანად, შემდეგ მიღებული ამოცანისათვის, ამ თავის § 2-ის თანახმად, შევადგინოთ უტოლობებით შეზღუდული ორადული ამოცანა.

თეორემა 2. თუ წრფივი დაპროგრამების ძირითადი, ან მისი ორადული ამოცანიდან ერთ-ერთს გააჩნია ამონახსნი, მაშინ მეორე ამოცანასაც ექნება ამონახსნი და ამასთან F ფორმის მინიმუმი ტოლი იქნება Φ ფორმის მაქსიმუმის.

ამ თეორემას ხშირად უწოდებენ მ ი ნ ი მ ა ქ ს ი ს თეორემას. ეს თეორემა შეიძლება დავიყვანოთ უტოლობებით შეზღუდულ ამოცანებზე მინიმაქსის თეორემა 1-ზე, ამისათვის საკმარისია წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა გარდავქმნათ უტოლობებით შეზღუდულ I ამოცანად. ამ უკანასკნელი ამოცანის ორადული II ამოცანა ეკვივალენტურია III ამოცანის. ხოლო უტოლობებით შეზღუდული ორადული ამოცანებისათვის ადგილი აქვს მინიმაქსის თეორემას.

მეექვსე თავი

შებრუნებული მატრიცის მეთოდი და ორადული სიმპლექს-მეთოდი

§ 1. შებრუნებული მატრიცის მეთოდი

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$F=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n. \tag{2}$$

დავუშვათ, რომ (1) სისტემის რანგი $r=m$. ამ შემთხვევაში საბაზისო უცნობთა რიცხვი უდრის m-ს, ხოლო თავისუფალ უცნობთა რიცხვი $k=n-m$-ს. ამოცანა რომ სიმპლექს-მეთოდით ამოვხსნათ საჭიროა საბაზისო უცნობები გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით. ვთქვათ, x_1, $x_2,\ldots,$ x_k თავისუფალი უცნობებია, ხოლო $x_{k+1},\cdots,x_n$ საბაზისო უცნობები. მაშინ (1) სისტემა შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\begin{cases} a_{1k+1}x_{k+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1-(a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k), \\ a_{2k+1}x_{k+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2-(a_{21}x_1+\cdots+a_{2k}x_k), \\ \quad\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{mk+1}x_{k+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m-(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mk}x_k). \end{cases} \tag{3}$$

(3) სისტემა და (2) ფორმა წარმოვადგინოთ მატრიცული სახით. ამისათვის საბაზისო და თავისუფალ უცნობთა შესაბამისი მატრიცები სათანადოდ აღვნიშნოთ B და S-ით:

$$B=\begin{pmatrix} a_{1k+1} & a_{1k+2}\cdots a_{1n} \\ a_{2k+1} & a_{2k+2}\cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{mk+1} & a_{mk+2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2k} \\ & \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mk} \end{pmatrix}$$

B წარმოადგენს m-ური რიგის კვადრატულ მატრიცას. ხოლო S მატრიცა შედგება m სტრიქონისა და k სვეტისაგან. $|B|$ არის (1) სისტემის საბაზისო მინორი, ამიტომ

$$\det B\neq 0 \tag{4}$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

თუ გავიხსენებთ მატრიცების გამრავლების წესს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ X და b მატრიცების სტრიქონთა რიცხვია m, მაშინ (3) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$BX=b-Sx. \tag{5}$$

რადგან $\det B\neq O$, ამიტომ არსებობს მისი შებრუნებული B^{-1} მატრიცა და შეგვიძლია (5) ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხნიდან გავამრავლოთ B^{-1}-ზე

$$(B^{-1}B)X=B^{-1}b-B^{-1}Sx,$$

სადაც $B^{-1}B=E$ და $EX=X$; ამიტომ გვექნება

$$X=B^{-1}b-B^{-1}Sx. \tag{6}$$

ამით საბაზისო უცნობები გამოვსახეთ თავისუფალი უცნობებით. ახლა F ფორმა გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით, ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$c=(c_1 \quad c_2 \qquad c_k)$$

$$C=(c_{k+1} \quad c_{k+2} \qquad c_n).$$

მაშინ F ფორმა გამოისახება შემდეგი სახით:

$$F=c_0+cx+CX.$$

ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში X შევცვალოთ (6) ფორმულით განსაზღვრული გამოსახულებით, მივიღებთ

$$F=c_0+cx+C(B^{-1}b-B^{-1}Sx),$$

ანუ

$$F=c_0+cB^{-1}b-(CB^{-1}S-c)x.$$

დავუშვათ

$$CB^{-1}=V. \tag{7}$$

შევნიშნოთ, რომ V, როგორც $C=(c_{k+1} \cdots c_n)$ სტრიქონისა და m-ური რიგის B^{-1} კვადრატული მატრიცის ნამრავლი, წარმოადგენს m-ელემენტისაგან შედგენილ სტრიქონს

$$V=(v_1 \ v_2 \qquad v_m).$$

ამის შემდეგ F ფორმა გამოისახება ასე:

$$F=c_0-Vb-(VS-c)x. \tag{8}$$

VS ნამრავლი k ელემენტისაგან შედგენილი სტრიქონია.

$$\gamma=VS-c=(\gamma_1 \ \gamma_2 \qquad \gamma_k)$$

ეს ის რიცხვებია, რომლებიც შედიან სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში. სიმპლექს-ცხრილზე მუშაობის წესის თანახმად თავისუფალი უცნობებიდან უნდა შევარჩიოთ, ვთქვათ x_j, რომლისთვისაც შესაბამისი კოეფიციენტი $\gamma_j>0$. ეს თავისუფალი უცნობი გადავიტანოთ საბაზისო უცნობთა რიცხვში, გენერალური ელემენტი ავიღოთ იმ კოეფიციენტთა α სვეტიდან, რომელიც მიიღება B^{-1} მატრიცის S მატრიცის j-ურ სვეტზე გამრავლების შედეგად, ე. ი.

$$\alpha=B^{-1}\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

გენერალური ელემენტის შესარჩევად უნდა ვიცოდეთ თავისუფალ წევრთა $B^{-1}b$ სვეტის β_i ელემენტის, α სვეტიდან, მის შესაბამის α_{il} ელემენტთან ფარდობა $\frac{\beta_i}{\alpha_{il}}$. სხვა სიტყვებით, გენერალური ელემენტის მოსაძებნად საკმარისია განვსაზღვროთ $\gamma = VS - c$ სტრიქონი და შემდეგი ორი სვეტი

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{1l} \\ \alpha_{2l} \\ \vdots \\ \alpha_{ml} \end{pmatrix}$$

ამ სვეტებიდან პირველი მიიღება B^{-1} და b-ს გამრავლებით, ხოლო მეორე (9) ფორმულით. გენერალური ელემენტის შერჩევა განსაზღვრავს იმას, თუ თავისუფალი უცნობებიდან რომელი გადადის საბაზისო უცნობებში და საბაზისო უცნობებიდან რომელი გადადის თავისუფალ უცნობებში. მაშასადამე, საბაზისო და თავისუფალ უცნობთა ახალი კომპლექსის განსაზღვრისათვის აუცილებელი არ არის მთელი სიმპლექს-ცხრილის ცოდნა, საკმარისია გამოვთვალოთ B^{-1} მატრიცა, V CB^{-1} სტრიქონი და შემდეგ (9)-დან $\gamma = VS - c$ სტრიქონი და ორი სვეტი: $B^{-1}b$ და α. სიმპლექს-ცხრილით სარგებლობის დროს მიღებული საბაზისო უცნობთა ახალი კომპლექსი წინა კომპლექსისაგან განსხვავდება მხოლოდ ერთი უცნობით. ამიტომ საბაზისო უცნობთა ახალი კომპლექსის შესაბამისი B_1 მატრიცა წინა კომპლექსის შესაბამისი B მატრიცისაგან განსხვავდება მხოლოდ ერთი სვეტით. B_1^{-1} შებრუნებული მატრიცა მიიღება B^{-1} მატრიცისაგან იმ ანალოგიური გამოთვლების საშუალებით, რომლითაც გადავდივართ ერთი სიმპლექს-ცხრილიდან მეორეზე.

ამრიგად, შებრუნებული მატრიცის მეთოდით ოპტიმალური ამონახსნის მოსაძებნად გვიხდება არა სიმპლექს-ცხრილის გარდაქმნა, არამედ მატრიცის გარდაქმნა. ეს მეთოდი ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როცა თავისუფალ უცნობთა რიცხვი საგრძნობლად დიდია საბაზისო უცნობთა რიცხვზე.

§ 2. ორადული სიმპლექს-მეთოდი

წრფივი დაპროგრამების ამოცანასთან ერთად განვიხილოთ მისი შესაბამისი ორადული ამოცანა. შემდეგში დავინახავთ, რომ ამ ორი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნებს შორის არსებობს მარტივი კავშირი. ამიტომ სიმპლექს-მეთოდით ორადული ამოცანის ამოხსნა წარმოადგენს ძირითადი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნის რაიმე მეთოდს. სწორედ ამ მეთოდს უწოდებენ ორადულ ს ი მ პ ლ ე ქ ს-მ ე თ ო დ ს.

ამ მეთოდის დაწვრილებით განხილვის მიზნით განვიხილოთ სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdot \qquad \cdot \ \cdot \qquad \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{cases} \tag{1}$$

და ფორმა

$$F=C_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n. \tag{2}$$

მოგვეთხოვება (1) სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც F ფორმა მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ამ ამოცანის ორადულ ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geqslant c_1, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geqslant c_2 \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geqslant c_n \end{cases} \tag{3}$$

$$\Phi=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m. \tag{4}$$

ორივე ამოცანა დავიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების ძირითად ამოცანაზე. ამისათვის შემოვიღოთ დამხმარე უცნობები:

$$x_{n+1}, \quad x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \tag{5}$$

გამოსავალი ამოცანისათვის და

$$y_{m+1}, \quad y_{m+2}, \cdots, y_{m+n} \tag{6}$$

ორადული ამოცანისათვის. მაშინ გამოსავალი ამოცანისათვის ტოლობებით შეზღუდვათა სისტემას ექნება სახე:

$$\begin{cases} b_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)=x_{n+1} \\ b_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)=x_{n+2} \\ \cdot \qquad \cdot \\ b_m-(a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n)=x_{n+m} \end{cases} \tag{7}$$

ამასთან, როგორც ყოველთვის, F ფორმის მაქსიმიზაციის ამოცანა დაიყვანება

$$F_1=-c_0-(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n) \tag{8}$$

ფორმის მინიმიზაციის ამოცანაზე. ორადული ამოცანისათვის ტოლობებით შეზღუდვათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots a_{m1}y_m-c_1=y_{m+1} \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m-c_2=y_{m+2} \\ \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m-c_n=y_{m+n} \end{cases} \tag{9}$$

Φ წრფივი ფორმა დარჩება უცვლელი. როგორც (7)-ში ისე (9)-ში უცნობთა რიცხვი უდრის $m+n$-ს. (7) სისტემაში (5) უცნობები (მათი რიცხვია m) გამოსახული არიან დანარჩენი $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობებით. ამიტომ (7) სისტემის რანგი $r \geqslant m$. მეორე მხრივ (7) სისტემაში m განტოლებაა ამიტომ $r \leqslant m$. მაშასადამე $r=m$. იგივე მიზეზის გამო (9) სისტემის რანგი $r_1=n$.

საბაზისო უცნობებად (7) და (9) სისტემებში შევარჩიოთ შესაბამისად $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ და $y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_{m+n}$. $x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$ და $y_1, y_2, \cdots, y_{m+n}$ უცნობებს შორის შეიძლება დავამყაროთ შემდეგი შესაბამისობა: განვიხილოთ (7) სისტემის x_{n+1} საბაზისო უცნობი. ეს უცნობი გამოსახულია $x_1, x_2, \cdots, x_n$ უცნობებითა და $a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}$ კოეფიციენტებით. სწორედ ამავე კოეფიციენტებით შედის y_1 უცნობი (9) სისტემაში, ე. ი. შეგვიძლია x_{n+1}-ს შევუსაბამოთ y_1. ამის მსგავსად შეგვიძლია $x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ უცნობებს შევუსაბამოთ $y_2, y_3, \cdots, y_m$ უცნობები. იგივე მსჯელობა საშუალებას გვაძლევს (9) სისტემის $y_{m+1}, \cdots, y_{m+n}$ საბაზისო უცნობებს შევუსაბამოთ $x_1\ x_2, \cdots, x_n$ თავისუფალი უცნობები (7) სისტემიდან. ამრიგად, (7) სისტემის საბაზისო უცნობებს შეესაბამებიან (9) სისტემის თავისუფალი უცნობები და პირიქით.

ცხადია, რომ კოეფიციენტები, რომლებითაც თავისუფალი უცნობები შედიან (7) სისტემის x_{n+j} ($j=1, 2,..., m$) საბაზისო უცნობის გამოსახულებაში, მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან იმ კოეფიციენტებისაგან, რომლითაც y_j თავისუფალი უცნობი შედის (9) სისტემის განტოლებებში. შევნიშნოთ, რომ კოეფიციენტთა ეს თვისება ძალაში რჩება თავისუფალი და საბაზისო უცნობების არა მარტო განსახილველი კომპლექტებისათვის, არამედ ნებისმიერი სხვა კომპლექტებისათვისაც. უფრო ზუსტად, ვთქვათ (9) სისტემაში საბაზისო უცნობებად შერჩეულია:

$$y_{\alpha_1},\ y_{\alpha_2},\ \cdots,\ y_{\alpha_n}$$

ხოლო (9) სისტემიდან მათი შესაბამისი

$$x_{\beta_1},\ x_{\beta_2},\ \cdots,\ x_{\beta_n}$$

უცნობები მიღებულია თავისუფალ უცნობებად. კოეფიციენტი, რომლითაც y_l თავისუფალი უცნობი შედის ორადული ამოცანის y_{α_j} საბაზისო უცნობის გამოსახულებაში, მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება იმ კოეფიციენტისაგან, რომლითაც x_{β_j} (მას შეესაბამება y_{α_j}) თავისუფალი უცნობი შედის გამოსავალ ამოცანაში, x_{n+l} საბაზისო უცნობის გამოსახულებაში (x_{n+l}-ს შეესაბამება y_l). ამ ფაქტის მართებულობაში დავრწმუნდებით ასე: ვთქვათ ჩვენ ვცვლით ორადული ამოცანის საბაზისო უცნობთა

$$y_{m+1},\ y_{m+2}\ \cdots,\ y_{m+n} \tag{10}$$

კომპლექსს. დავუშვათ, y_{m+1} საბაზისო უცნობი გადადის თავისუფალ უცნობთა რიცხვში, ხოლო y_2 უცნობი საბაზისო უცნობთა რიცხვში. ე. ი. მივიღებთ საბაზისო უცნობთა ახალ კომპლექსს:

$$y_2,\ y_{m+2},\ \cdots,\ y_{m+n} \tag{11}$$

და თავისუფალ უცნობთა ახალ კომპლექსს:

$$y_1,\ y_{m+1},\ \cdots,\ y_m. \tag{12}$$

გამოსავალ ამოცანაში თავისუფალი და საბაზისო უცნობები იქნებიან შესაბამისად:

$$x_{n+2},\ x_2,\ \cdots,\ x_n \tag{13}$$

და

$$x_{n+1},\ x_1,\ x_{n+3},\ \cdots,\ x_{m+n}. \tag{14}$$

(13) კომპლექსის ახალი თავისუფალი უცნობების საშუალებით (14) კომპლექსის ახალი საბაზისო უცნობების გამოსახულებები მიიღება მე-4 თავის § 5-ის (11) და (12) ფორმულებით.

ანალოგიურად გამოისახებიან (11) კომპლექსის ახალი საბაზისო ამონახსნები (12) კომპლექსის ახალ თავისუფალ უცნობთა საშუალებით ორადულ ამოცანაში. ამ გამოსახულებების შედარებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ გამოსავალ და ორადულ ამოცანათა კოეფიციენტებზე ადრე გამოთქმული მტკიცება მართლაც სრულდება. ანალოგიურად, თუ გადავალთ (11) კომპლექსიდან ორადული ამოცანის საბაზისო უცნობთა ისეთ ახალ კომპლექსზე, რომელიც (11)-საგან განსხვავდება მხოლოდ ერთი ელემენტით, დავრწმუნდებით, რომ ამ ახალი კომპლექსისათვისაც შენარჩუნებული იქნება კოეფიციენტთათვის ადრე აღნიშნული თვისება და ა. შ.

საბოლოოდ, (10) კომპლექსიდან ჩვენ გადავალთ ორადული ამოცანის საბაზისო უცნობთა ნებისმიერ სხვა კომპლექსზე, ამიტომაც კოეფიციენტებზე ადრე გამოთქმული მტკიცება მართებულია საბაზისო უცნობთა ნებისმიერი კომპლექსისათვის.

შევარჩიოთ ორადული ამოცანის რაიმე დასაშვები საბაზისო ამონახსნი და შევადგინოთ მისი შესაბამისი სიმპლექს-ცხრილი.

ორადულ ამოცანაში საბაზისო და თავისუფალ უცნობთა შერჩევა განსაზღვრავს თავისუფალ და საბაზისო უცნობთა შესაბამის კომპლექსებს გამოსავალ ამოცანაში. შევადგინოთ ამ კომპლექსთა სიმპლექს-ცხრილი გამოსავალ ამოცანაში, ცხადია, რომ ორადული ამოცანის სიმპლექს-ცხრილი j-ური სტრიქონის ელემენტები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან გამოსავალი ამოცანის სიმპლექს-ცხრილის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტებისაგან. ორადული ამოცანის სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებიც მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან გამოსავალი ამოცანის სიმპლექს-ცხრილის თავისუფალ წევრთა სვეტის შესაბამისი ელემენტებისაგან. ამავე დროს, გამოსავალი ამოცანის ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონი მიიღება ორადული ამოცანის ცხრილის თავისუფალ წევრთა სვეტისაგან, მისი ყველა წევრის ნიშნის შეცვლით. ახლა დავუშვათ, რომ ორადული ამოცა-

ნის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნისას მივაღწიეთ ოპტიმალურ ამონახსნს. ეს იმას ნიშნავს, რომ მიღებული სიმპლექს-ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონის ყველა ელემენტი არადადებითია. ამავე დროს, შებრუნებული ნიშნით აღებული ეს ელემენტები ტოლია გამოსავალი ამოცანის სიმპლექს-ცხრილის შესაბამის თავისუფალ წევრთა სვეტის ელემენტებისა. მაშასადამე, უკანასკნელი სიმპლექს-ცხრილის შესაბამისი გამოსავალი ამოცანის საბაზისო ამონახსნი აღმოჩნდება დასაშვები. მეორე მხრივ, ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი, ასევე წარმოადგენს ამ ამოცანის დასაშვებ ამონახსნს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორადული ამოცანის სიმპლექს-ცხრილის თავისუფალ წევრთა სვეტის ელემენტები არაუარყოფითი რიცხვებია. ამავე დროს, ეს ელემენტები შებრუნებული ნიშნით გვაძლევენ გამოსავალი ამოცანის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებს. ე. ი. ამ სტრიქონის ყველა ელემენტი არადადებითია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გამოსავალი ამოცანის სიმპლექს-ცხრილში ჩაწერილია ოპტიმალური ამონახსნი.

დ ა ს კ ვ ნ ა. თუ ორადული ამოცანის თავისუფალ უცნობთა რაიმე კომპლექსი განსაზღვრავს მის ოპტიმალურ ამონახსნს, მაშინ გამოსავალი ამოცანის შესაბამისი საბაზისო და თავისუფალ უცნობთა კომპლექსი გვაძლევს გამოსავალ ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს. ამით, გამოსავალი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნა დაიყვანება ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრაზე.

გამოსავალი ამოცანის ამოხსნის ამ ხერხს უწოდებენ ო რ ა დ უ ლ — ს ი მ პ ლ ე ქ ს-მ ე თ ო დ ს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ორადული სიმპლექს-მეთოდის გამოყენება შეიძლება წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანის ამოხსნის დროსაც.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ამოცანა ნედლეულის გამოყენებაზე და მის მიმართ ორადული ამოცანა ნედლეულის ფარდობითი ფასების განსაზღვრაზე. გამოსავალი ამოცანის შეზღუდულობათა სისტემა და მინიმიზირებული ფორმა გამოისახება ასე:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leqslant 19 \\ 2x_1+x_2 \leqslant 13 \\ 3x_2 \leqslant 15 \\ 3x_1 \leqslant 18 \end{cases} \tag{15}$$

$$F=7x_1+5x_2. \tag{16}$$

ამ ამოცანის ძირითად ამოცანაზე დაყვანით მივიღებთ:

$$\begin{cases} 19-(2x_1+3x_2)=x_3 \\ 13-(2x_1+x_2)=x_4 \\ 15-3x_2=x_5 \\ 18-3x_1=x_6 \end{cases} \tag{17}$$

$$F_1=-7x_1-5x_2. \tag{18}$$

ორადული ამოცანის ძირითად ამოცანაზე დაყვანის შედეგად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{cases} 2y_1+2y_2+3y_4-7=y_5 \\ 3y_1+y_2+3y_3-5=y_6 \end{cases} \tag{19}$$

$$\Phi=19y_1+13y_2+15y_3+18y_4. \tag{20}$$

ამ ამოცანათა წყვილში x_1 და x_2 თავისუფალ უცნობებს შეესაბამებიან, შესაბამისად y_5 და y_6 საბაზისო უცნობები, ხოლო x_3, x_4, x_5 და x_6 საბაზისო უცნობებს შეესაბამებიან y_1, y_2, y_3 და y_4 თავისუფალი უცნობები. მოხერხებულობისათვის შევადგინოთ ასეთი ცხრილი:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{cases} \tag{21}$$

ორადული ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნისას ჩვენ ადრე საბაზისო უცნობებად ავიღეთ y_3 და y_4. საბაზიო უცნობები და წრფივი ფორმა თავისუფალი უცნობებით შემდეგნაირად გამოისახებიან:

$$y_3=\frac{5}{3}-\left(y_1+\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_6\right),$$

$$y_4=\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_5\right),$$

$$\Phi=67-(8y_1+4y_2-6y_5-5y_6).$$

35-ე ცხრილი არის შესაბამისი სიმპლექს-ცხრილი. y_3 და y_4 საბაზისო უცნობებს შეესაბამებიან x_5 და x_6 უცნობები. ამიტომ ეს უცნობები უნდა განვიხილოთ თავისუფალ უცნობებად გამოსავალ ამოცანაში, ხოლო დანარჩენი უცნობები მივიღოთ საბაზისო უცნობებად.

თუ გამოსავალ ამოცანაში საბაზისო უცნობებსა და F_1 ფორმას გამოვსახავთ x_5 და x_6-ით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_3 = -8 - \left(-x_5 - \frac{2}{3}x_6\right) \\ x_4 = -4 - \left(-\frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6\right) \\ x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_2 = 5 - \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$F_1 = -67 - \left(-\frac{5}{3}x_5 - \frac{7}{3}x_6\right)$$

შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს ექნება 38-ე სახე. ამ ცხრილში საბაზისო უცნობები ამოწერილია ზუსტად იმ რიგით, როგორც მათი შესაბამისი თავისუფალი უცნობები ამოწერილია 35-ე სიმპლექს-ცხრილში. 35-ე სიმპლექს-ცხრილის 38-ე ცხრილთან შედარებით დავრწმუნდებით, რომ შესრულებულია მათი ელემენტების ზემოთ აღნიშნული თვისებები. ასე მაგალითად, 38-ე ცხრილში x_4 საბაზისო უცნობის შესაბამისი სტრიქონისა და x_6 თავისუფალი უცნობის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთის $-\frac{2}{3}$ ელემენტი მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება 35-ე ცხრილში y_2 თავისუფალი უცნობის შესაბამისი სვეტისა და y_4 საბაზისო უცნობის შესაბამისი სტრიქონის გადაკვეთაში მდგომი $\frac{2}{3}$ ელემენტისაგან ($x_4 \to y_2$, $x_6 \to y_4$). 38-ე ცხრილის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან 35-ე ცხრილის თავი-

ცხრილი 38

		x_5	x_6
x_3	-8	-1	$-\frac{2}{3}$
x_4	-4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	6	0	$\frac{1}{3}$
x_2	5	$\frac{1}{3}$	0
F_1	-67	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$

სუფალ წევრთა სვეტის შესაბამისი ელემენტებისაგან. ორადული ამოცანის ამოხსნით 35-ე ცხრილიდან გადავედით 36-ე ცხრილზე. მასში საბაზისო უცნობებია y_3 და y_2, ხოლო თავისუფალი უცნობები: y_1, y_4, y_5, y_6. (21)-ის თანახმად გამოსავალ ამოცანაში თავისუფალი უცნობები უნდა იყოს x_5 და x_4, ხოლო საბაზისო უცნობები x_3, x_6, x_1, x_2. გამოსავალი ამოცანის სიმპლექს-ცხრილი შეგვიძლია შევადგინოთ 36-ე ცხრილის მიხედვით, მივიღებთ 39-ე ცხრილს.

ცხრილი 39

		x_5	x_4
x_3	-4	-2	-1
x_6	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_1	4	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
x_2	5	$\frac{1}{3}$	0
F_1	-53	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$

ცხრილი 40

		x_3	x_4
x_5	6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_6	3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4}$
x_1	5	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_2	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
F	-50	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$

36-ე ცხრილიდან ორადული ამოცანის ამოხსნისას ჩვენ გადავედით 37-ე ცხრილზე, რომლებშიც საბაზისო უცნობებს წარმოადგენენ y_1 და y_2, ხოლო თავისუფალ უცნობებს y_3, y_4, y_5, y_6. (21)-ის თანახმად გამოსავალ ამოცანაში თავისუფალ უცნობებად უნდა გახდნენ x_3 და x_4, ხოლო საბაზისო უცნობებად x_5, x_6, x_1, x_2. შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს აქვს მე-40 სახე. როგორც ვხედავთ, მე-40 ცხრილში ჩაწერილია დასაშვები საბაზისო ამონახსნი (რადგან ყველა თავისუფალი წევრი დადებითია), რომელიც აგრეთვე ოპტიმალურია (რადგან ბოლო სტრიქონის ყველა ელემენტი უარყოფითია). თუ მიღებულ ამონახსნს შევადარებთ VI თავში ამავე ამოცანის ამოხსნით მიღებულ შედეგს, დავრწმუნდებით მათ დამთხვევაში. 38-ე, 39-ე და მე-40 ცხრილებიდან ჩანს, რომ ერთი მათგანიდან მეორეზე გადასვლისას F_1 ფორმის მნიშვნელობა იზრდება. 38-ე და 39-ე ცხრილებში ისინი ოპტიმალურ-

ზე მცირეც არიან. ეს ფაქტი იმით აიხსნება, რომ 38-ე და 39-ე ცხრილებში ჩაწერილია გამოსავალი ამოცანის არადასაშვები ამონახსნები (მართლაც, თავისუფალ წევრებს შორის არიან უარყოფითი წევრებიც). და მხოლოდ მე-40 ცხრილში, სადაც მიღებულია გამოსავალი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი, ყველა თავისუფალი წევრი დადებითია, ე. ი. მიღებული ამონახსნი დასაშვებია (F_1 ფორმა ღებულობს ოპტიმალურ მნიშვნელობას).

ამ მეთოდის გამოყენებისას ჩვენ გადავდივართ გამოსავალი ამოცანის ერთი არადასაშვები ამონახსნიდან მეორეზე, სანამ მივიღებდეთ მის რაიმე დასაშვებ ამონახსნს. ეს ამონახსნი იქნება ოპტიმალური.

მეშვიდე თავი

ტრანსპორტის ამოცანა

§ 1. საკითხის დასმა

წრფივი დაპროგრამების მეთოდებით წარმატებით ამოიხსნება ტვირთის გადაზიდვასთან დაკავშირებული ამოცანა, რომელიც ცნობილია ტრანსპორტის ამოცანის სახელწოდებით. ჩამოვაყალიბოთ ტრანსპორტის ამოცანა.

ა მ ო ც ა ნ ა: ვთქვათ $A_1, A_2, \cdots, A_m$ პუნქტებში მოთავსებულია შესაბამისად $a_1, a_2, \cdots, a_m$ რაოდენობის ერთგვაროვანი ტვირთი, რომელიც უნდა გადაიზიდოს $B_1, B_2, \cdots, B_n$ პუნქტებში, შესაბამისად $b_1, b_2, \cdots, b_n$ რაოდენობით.

A_i პუნქტიდან B_j პუნქტში ტვირთის ერთეულის გადატანის ღირებულება არის c_{ij}. საჭიროა შევადგინოთ ტვირთის გადაზიდვის ისეთი გეგმა, რომელიც დაკავშირებული იქნება მინიმალურ დანახარჯებთან.

დავუშვათ, რომ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

ამოცანის პირობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგ ცხრილში (ცხრ. 41).

გამგზავნი პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები					
	B_1		B_j		B_n	მარაგი
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}	a_1
⋮					⋮	
A_i	c_{i1} x_{i1}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}	a_i
A_m	c_{m1} x_{m1}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}	a_n
მოთხოვნები	b_1		b_j		b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

ცხრილში A_i გამგზავნი და B_j დანიშნულების პუნქტის შესაბამის უჯრედში ჩაწერილია x_{ij} ცვლადი, რომელიც აღნიშნავს A_i პუნქტიდან B_j-პუნქტში გადასატანი ტვირთის რაოდენობას. ცხადია $x_{ij} \geqslant 0$. თუ A_i პუნქტიდან B_j პუნქტში არ გადაიტანება ტვირთი, მაშინ $x_{ij}=0$. B_j პუნქტში სულ გადაიზიდება

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

რაოდენობის ტვირთი. ამოცანის პირობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}=b_j$$

ანალოგიური ტოლობა მიიღება ყოველი დანიშნულების პუნქტისათვის, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \end{cases} \tag{1}$$

A_i გამგზავნი პუნქტიდან გატანილი იქნება

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

რაოდენობის ტვირთი. ამოცანის პირობის თანახმად

$$x_{i1}+x_{i2}+\qquad +x_{in}=a_i.$$

ანალოგიურ ტოლობებს ადგილი ექნება ყოველი გამგზავნი პუნქტისათვის, რაც მოგვცემს განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \end{cases} \tag{2}$$

(1) და (2) სისტემა ერთად, რომელიც შეიცავს mn ცვლადს და $n+m$ განტოლებას, წარმოადგენს შეზღუდვათა სისტემას. ცხადია ამავე დროს უნდა შესრულდეს $x_{ij}\geqslant 0$ პირობა. რადგან A_i-დან B_j-ში ერთი ერთეული ტვირთის გადაზიდვა იწვევს c_{ij} დანახარჯს, ამიტომ x_{ij} ერთეულის გადაზიდვა გამოიწვევს $c_{ij}x_{ij}$ დანახარჯს; ხოლო სულ მთელი ტვირთის გადაზიდვა გამოიწვევს

$$F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{mn}x_{mn}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

დანახარჯს.

საბოლოოდ, ტრანსპორტის ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: უნდა ვიპოვოთ (1) და (2) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომლისთვისაც (3) ტოლობით განსაზღვრული წრფივი ფორმა (მიზნის ფუნქცია) მიაღწევს მინიმუმს.

ცხადია ტრანსპორტის ამოცანას აქვს რაიმე ამონახსნი. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$c=\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j,$$

მაშინ

$$x_{ij}=\frac{a_i\cdot b_j}{c}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

წარმოადგენს (1) და (2) სისტემის ამონახსნს, მართლაც

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c}=\frac{1}{c}a_i\sum_{j=1}^{n} b_j=a_i$$

და

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_ib_j}{c}=\frac{1}{c}b_j\sum_{i=1}^{m} a_i=b_j,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) და (2) სისტემას აკმაყოფილებს

$$x_{ij}=\frac{a_ib_j}{c}$$

მნიშვნელობები. ცხადია ეს ამონახსნი არ არის ერთადერთი.

ერთ-ერთი ამონახსნის მოძებნა შეიძლება ე. წ. „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის წესით“, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: პირველ რიგში ვცდილობთ დავაკმაყოფილოთ B_1 პუნქტის b_1 მოთხოვნილება A_1 პუნქტის a_1 მარაგით. აქ შეიძლება ადგილი ქონდეს შემდეგ შემთხვევებს:

ა) $a_1>b_1$,

ბ) $a_1<b_1$,

გ) $a_1=b_1$

ა) შემთხვევაში A_1-ის მარაგით შეგვიძლია B_1-ის მოთხოვნილების მთლიანად დაკმაყოფილება. x_{11} უჯრედში ჩავწერთ b_1 რიცხვს და B_1

სვეტს დროებით უკუვაგდებთ. ამით გამგზავნ და დანიშნულების პუნქტთა რაოდენობის ჯამი ერთით შემცირდება. A_1 პუნქტის მარაგი გახდება $a_1'=a_1-b_1$. ბ) შემთხვევაში ვღებულობთ, რომ $x_{11}=a_1$. ამასთან, A_1-ის მარაგი მთლიანად ამოწურულია, ხოლო B_1-ის მოთხოვნილება შემცირებულია $b_1'=b_1-a_1$-მდე. დროებით A_1 სტრიქონის უკუგდებით გამგზავნ და დანიშნულების პუნქტთა რაოდენობის ჯამი ისევ ერთით შემცირდება. გ) შემთხვევაში $x_{11}=a_1=b_1$. ამიტომ A_1-ის მარაგი და B_1-ის მოთხოვნილება მთლიანად ამოწურულია. დროებით უკუვაგდებთ ან A_1 სტრიქონს, ან B_1 სვეტს. მაგალითად, უკუვაგდოთ A_1 სტრიქონი, ამასთან დარჩენილ B_1 პუნქტში მოთხოვნილება ავიღოთ ნულის ტოლად.

მაშასადამე, ყველა განხილულ შემთხვევებში გამოვრიცხავთ ერთ, გამგზავნ ან დანიშნულების პუნქტს. ამით საერთო პუნქტების რიცხვი ერთით შემცირდება და თუ იგივეს გავიმეორებთ დარჩენილი გამგზავნი და მოთხოვნილების პირველი პუნქტებისათვის, კიდევ გამოვრიცხავთ ერთ-ერთ გამგზავნ ან მოთხოვნილების პუნქტს და ა. შ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ ტრანსპორტის ამოცანის პირობები მოცემულია 42-ე ცხრილით. დიაგონალური მეთოდის თანახმად.

ც ხ რ ი ლ ი 42

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1					50
A_2					40
A_3					60
	30	20	50	50	150

ც ხ რ ი ლ ი 43

	B_2	B_3	B_4	
A_1				20
A_2				40
A_3				60
	20	50	50	

ც ხ რ ი ლ ი 44

	B_3	B_4	
A_1			0
A_2			40
A_3			60
	50	50	

შევეცადოთ დავაკმაყოფილოთ B_1-ის მოთხოვნილება A_1-ის მარაგით. $a_1=50$, $b_1=30$; ე. ი. გვაქვს ა) შემთხვევა. მივიღოთ $x_{11}=b_1=30$ და

დროებით გამოვრიცხოთ B_1 სვეტი. ამით A_1-ის მარაგი შემცირდა $a_1' = 20$-მდე, მივიღეთ 43-ე ცხრილი. A_1 და B_2-ის მიმართ გვაქვს ბ) შემთხვევა, ამასთან A_1-ის მარაგი და B_1-ის მოთხოვნილება მთლიანად ამოწურულია. გამოვრიცხოთ მაგალითად, B_2 სვეტი, ხოლო A_1-ში მარაგს ვღებულობთ ნულის ტოლად. მივიღებთ 44-ე ცხრილს. ისევ განვიხილავთ A_1 და B_3 პუნქტებს. ამ შემთხვევაში გვაქვს გ) შემთხვევა, რადგან A_1-ის მარაგი (ნული) ნაკლებია B_3-ის მოთხოვნილებაზე.

ცხრილი 45

	B_3	B_4	
A_2			40
A_3			60
	50	50	

დავუშვათ, $x_{13}=0$ და 44-ე ცხრილიდან გამოვრიცხოთ A_1 სტრიქონი, მივიღებთ 45-ე ცხრილს. $x_{23}=40$ დაშვებითა და ანალოგიური მსჯელობის ჩატარებით მივალთ 46-ე ცხრილამდე (უკუგდებულია A_2 სტრიქონი).

ცხრილი 46

	B_3	B_4	
A_3			60
	10	50	

ცხრილი 47

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	30	20	0		50
A_2			40		40
A_3			10	50	60
	30	20	50	50	

აქ ცხადია, უნდა მივიღოთ $x_{33}=10$ და $x_{34}=50$. მიღებული დასაშვები საბაზისო ამონახსნი მოცემულია 47-ე ცხრილში.

ტრანსპორტის ამოცანას აქვს ის თავისებურება, რომ ყოველი უცნობი შედის მხოლოდ ორ განტოლებაში და განტოლებებში უცნობთა კოეფიციენტებად მოცემულია ერთიანები.

ამის გამო სიმპლექს-მეთოდი საგრძნობლად მარტივდება და დაიყვანება ე. წ. განაწილების მეთოდზე, რომელსაც ჩვენ შემდეგში გავეცნობით.

პირველ რიგში გამოვთვალოთ (1) და (2) სისტემის რანგი. უცნობთა რიცხვი უდრის mn-ს, ხოლო განტოლებათა რიცხვია $m+n$. თუ

შევკრებთ (1) და (2)-ის ყველა განტოლებას, მაშინ მარცხენა ნაწილში მივიღებთ ყველა x_{ij} ელემენტთა ჯამს, ხოლო მარჯვენა ნაწილში ყველა b_j-ების ჯამს, ე. ი.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

(2) სისტემის განტოლებების შეკრებით კი მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

მაგრამ უკანასკნელი ორი ტოლობა ფაქტიურად ერთი და იგივეა, რადგანაც $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ (1) და (2) სისტემის განტოლებებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მაშასადამე, (4) სისტემის რანგი $r \leqslant m+n-1$. ვაჩვენოთ, რომ $r=m+n-1$. $m+n-1$ უცნობებად, რომლებიც გამოისახებიან დანარჩენების საშუალებით, ავიღოთ $x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1n}, x_{21}, x_{31}, \cdots x_{m1}$, ე.ი. 1-ლი ცხრილის პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტში მოთავსებული უცნობები. ცხადია, რომ მათი რაოდენობაა $m+n-1$. (1) სისტემის განტოლებებიდან მივიღებთ $x_{1j}(j=1, 2, \cdots, n)$ უცნობთა გამოსახულებებს:

$$x_{1j} = b_j - x_{2j} - x_{3j} - \cdots - x_{mj} \tag{5}$$

ამის მსგავსად (2) სისტემიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_{i1} = a_i - x_{i2} - x_{i3} - \cdots - x_{in} (i=1, 2, \cdots, m). \tag{6}$$

ბოლოს

$$x_{11} = b_1 - x_{21} - \cdots - x_{m1} = b_1 - (a_2 - x_{22} - x_{23} - \cdots -$$
$$- x_{2n}) - (a_3 - x_{32} - x_{33} - \cdots x_{3n}) - \cdots - (a_m - x_{m2} -$$
$$- x_{m3} - \cdots - x_{mn}).$$

მაშასადამე, ჩვენ მიერ აღებული $m+n-1$ უცნობი გამოვსახეთ დანარჩენი $mn-(m+n-1)$ უცნობის საშუალებით. მაშასადამე, $r=m+n-1$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $r=m+n-1$-ის დასამტკიცებლად საბაზისო უცნობებად შევარჩიეთ $x_{i1}(i=2, \cdots m)$ და $x_{1j}(j=1, 2, \cdots, n)$ უცნობები. ამ შერჩევამ გაამარტივა მსჯელობა. მაგრამ ტრანსპორტის ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნისას აუცილებელი არ არის საბაზისო უცნობებად x_{i1} და x_{1j} უცნობების შერჩევა. უფრო მეტიც, საბაზისო უცნობთა შერჩევის შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი შეიძლება არ აღმოჩნდეს დასაშვები.

§ 2. ზოგიერთი კომბინატორული ამოცანა

(ციკლი მატრიცაში)

განვიხილოთ 1-ლი ცხრილის შესაბამისი გადაზიდვათა მატრიცა. მასში m სტრიქონი და n სვეტია, ხოლო mn არის შექმნილი უჯრედების რიცხვი. გადაზიდვათა მატრიცის ყოველ უჯრედს შეესაბამება თავისი $x_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ უცნობი.

ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია ტრანსპორტის ამოცანის რომელიმე დასაშვები საბაზისო ამონახსნი. მაშინ თავისუფალი უცნობების შემცველ უჯრედებს ვუწოდოთ *თავისუფალი უჯრედები*, ხოლო საბაზისო უცნობების შემცველ უჯრედებს — *საბაზისო უჯრედები*. დასაშვები საბაზისო უცნობთა მნიშვნელობები შევიტანოთ საბაზისო უჯრედებში, ხოლო თავისუფალი უჯრედები დავტოვოთ შეუვსებელი (48-ე ცხრილში გადაზიდვათა ღირებულება არ არის ნაჩვენები). ამ ცხრილის შესაბამის ტრანსპორტის ამოცანაში $m=3$, $n=3$, $r=m+n-1=5$.

ც ხ რ ი ლ ი 48

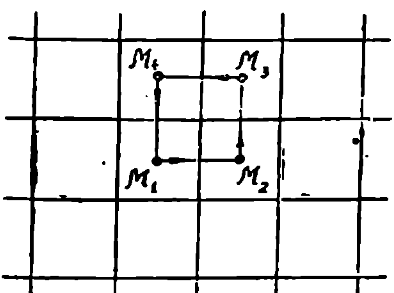
დანიშნულების პუნქტი / გამგზავნი პუნქტი	B_1	B_2	B_3	მარაგი
A_1	20	10		30
A_2		40		40
A_3		10	50	60
მოთხოვნილება	20	60	50	130

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. მატრიცაში ციკლი ვუწოდოთ იმ ტეხილს რომელთა წვეროები მოთავსებული არიან უჯრედებში, ხოლო გვერდები მიმართულია მატრიცის სტრიქონების ან სვეტების გასწვრივ და, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

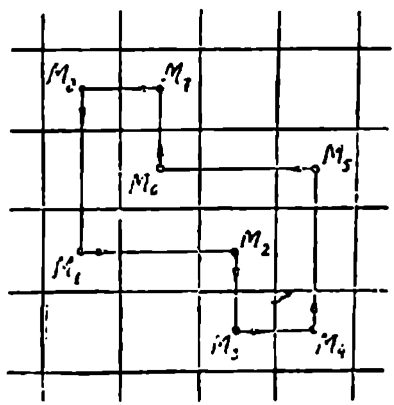
1) ტეხილი უნდა იყოს ბმული იმ აზრით, რომ მისი ნებისმიერი წვეროდან, გვერდის გასწვრივ, შეიძლებოდეს სხვა ნებისმიერ წვეროში მოხვედრა;

2) ტეხილის ყოველ წვეროში ხვდება ზუსტად ორი გვერდი, ამასთან ერთი მათგანი მოთავსდება სტრიქონზე, ხოლო მეორე სვეტზე.

ერთი და იმავე გვერდის ბოლოებს უწოდებენ მეზობელ წვეროებს. მე-2 პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ციკლის ყოველ წვეროს გააჩნია ორი მეზობელი წვერო, რომელთაგან ერთი მოთავსებულია იმავე სტრიქონში, მეორე იმავე სვეტში (სადაც მოცემული წერტილია). მაგალითად, მე-10 ნახაზზე M_1-ის მეზობელ წვეროებს წარმოადგენენ M_2 და M_4 წვეროები.



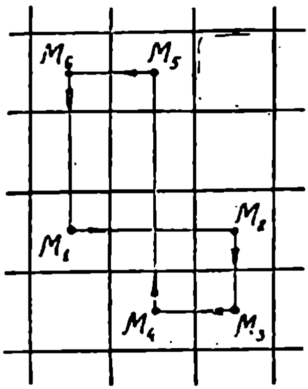
ნახ. 10.



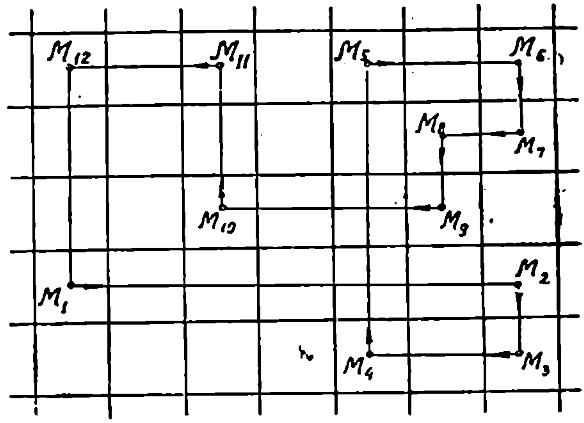
ნახ. 11.

განვიხილოთ ნებისმიერი ციკლის ნებისმიერი M_1 წვერო. ამ წვეროდან გადავიდეთ მის მეზობელ იმ წვეროში, რომელიც იმავე სტრიქონშია, სადაც M_1 . M_2-დან გადავიდეთ იმ მეზობელ M_3 წვეროში, რო-

მელიც იმავე სვეტშია, სადაც M_2 . M_3-დან გადავიდეთ M_4-ში, რომელიც მდებარეობს იმ სტრიქონში, სადაც M_3 და ა. შ. (ნახ. 11, 12, 13). საბოლოოდ მაინც მივალთ საწყის M_1 წერტილში.



ნახ. 12.



ნახ. 13.

შევნიშნოთ, რომ ციკლი შეიძლება იყოს თვითგადამკვეთი ტეხილი, მაგრამ მისი თვითგადაკვეთის წერტილები მე-2 პირობის თანახმად არ შეიძლება იყოს წვეროები.

ლ ე მ ა 1. ვთქვათ m სტრიქონისა და n სვეტისაგან შედგენილ მატრიცაში ნებისმიერად აღნიშნულია $m+n$ უჯრედი. მაშინ არსებობს ციკლი, რომლის წვეროები მოთავსებულია მხოლოდ აღნიშნულ უჯრედებში.

ლ ე მ ა 2. ყოველ ციკლში წვეროთა რიცხვი ლუწია.

განვსაზღვროთ მატრიცაში ნებისმიერი ციკლი. ყოველ წვეროს მივუწეროთ განსაზღვრული ნიშანი, შემდეგი კანონის მიხედვით: დავიწყოთ ნებისმიერი წვეროდან (მას ვუწოდოთ საწყისი წვერო) და მივუწეროთ მას პლუს ნიშანი, შემდეგ, ციკლის რაიმე მიმართულებით შემოვლისას, წვეროებს მივუწერთ მორიგეობით მინუს და პლუს ნიშნებს.

ციკლს, ნიშნების მითითებული განლაგებით ვუწოდოთ ა ღ ნ ი შ ნ უ ლ ი ც ი კ ლ ი.

ლ ე მ ა 3. აღნიშნული ციკლის ყოველ სტრიქონში (და სვეტში) დადებითი წვეროების რიცხვი მისი უარყოფითი წვეროების რიცხვის ტოლია.

§ 8. ტრანსპორტის ამოცანის შეზღუდვათა სისტემის სტრუქტურის შესწავლა, გადათვლის ციკლი

დავუბრუნდეთ ტრანსპორტის ამოცანას. განვიხილოთ მისი გადაზიდვათა მატრიცა და მასში ნებისმიერად აღნიშნული ციკლი. მის წვეროებს შეესაბამება ამ მატრიცის განსაზღვრული x_{ij} ელემენტები. გავადიდოთ დადებით წვეროებში მდგომი ყველა x_{ij} და შევამციროთ უარყოფით წვეროებში მდგომი ყველა x_{ij} მნიშვნელობები ერთი და იმავე x რიცხვით. ამ ოპერაციას ვუწოდოთ ციკლის მიმართ x რიცხვით გ ა დ ა წ ე ვ ა.

დავუშვათ, რომ გადაზიდვათა მატრიცაში შეტანილია ტრანსპორტის ამოცანის შეზღუდვათა სისტემის რაიმე ამონახსნი, ე. ი. x_{ij}-ის ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ VII თავის § 1-ის (1) და (2) სისტემას.

თეორემა 1. გადაზიდვათა მატრიცაში ნებისმიერი აღნიშნული ციკლის მიმართ ნებისმიერი x რიცხვით გადაწევა (1) და (2) სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს გარდაქმნის ამავე სისტემის ამონახსნში.

მართლაც, შეზღუდვათა სისტემა შედგება განტოლებათა (1) და (2) სისტემებისაგან. ავიღოთ (1) სისტემის j-ური განტოლება:

$$x_{1j} + x_{2j} + \quad + x_{mj} = b_j \tag{8}$$

დავუშვათ, რომ x_{ij} რიცხვთა კომპლექსი (1) და (2) სისტემის ამონახსნია. მაშინ ამ რიცხვებით (8) განტოლებაც დაკმაყოფილდება. გადაზიდვათა მატრიცაში ავიღოთ ნებისმიერი აღნიშნული ციკლი. x-ით გადაწევის შემთხვევაში ნებისმიერ დადებით წვეროში მდგომი რიცხვი გადიდდება x-ით, ხოლო ნებისმიერ უარყოფით წვეროში მდგომი რიცხვი შემცირდება x-ით. j-ურ სვეტში დადებითი და უარყოფითი წვეროთა რიცხვი ტოლია, ამიტომ j-ური სვეტის ელემენტთა ჯამი არ შემცირდება, ე. ი. ისევ დაკმაყოფილდება (8) განტოლება. მართებული იქნება ანალოგიური მსჯელობა (2) სისტემის ნებისმიერი განტოლებისათვის, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

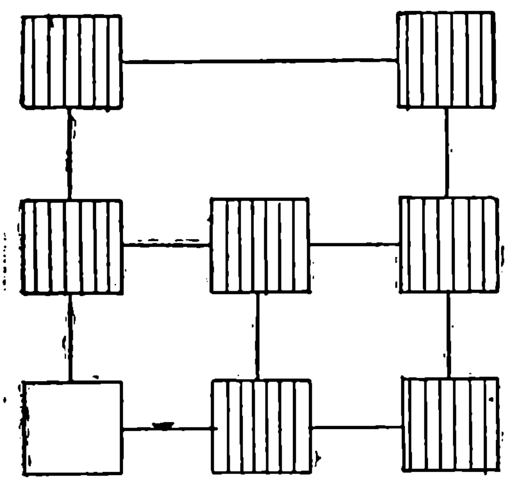
ლ ე მ ა 4. როგორიც უნდა იყოს (1) და (2) სისტემის თავისუფალ უცნობთა კომპლექსი, გადაზიდვათა მატრიცაში არ არსებობს ციკლი, რომლის ყველა წვერო მდებარეობდეს საბაზისო უჯრედებში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. § 1-ის თანახმად (1) და (2) სისტემის რანგია $r=$ $=m+n-1$. მაშასადამე, გადაზიდვათა მატრიცაში საბაზისო უჯრედთა რაოდენობაც $m+n-1$-ის ტოლია.

მე-4 ლემის თანახმად არ არსებობს ციკლი წვეროებით ამ უჯრედებში. მეორე მხრივ თუ გამოვყოფთ $m+n$ უჯრედს, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია ისეთი ციკლის პოვნა, რომელთა წვეროებიც გამოყოფილ უჯრედებშია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. მოცემული თავისუფალი უჯრედის გადათვლის ციკლი ვუწოდოთ ციკლს, რომლის ერთი წვერო მოთავსებულია თავისუფალ უჯრედში, ხოლო ყველა დანარჩენი წვერო საბაზისო უჯრედებში.

მოცემული გადათვლის ციკლის წვეროებმა შეიძლება არ დაიკავონ ყველა საბაზისო უჯრედი. მთავარია მხოლოდ ის, რომ ციკლის ყველა წვერო (გარდა ერთისა) მდებარეობდეს საბაზისო უჯრედებში.



ნახ. 14.

თეორემა 2. გადაზიდვათა მატრიცაში ყოველი თავისუფალი უჯრედისათვის არსებობს ერთადერთი გადათვლის ციკლი.

მართლაც, განვიხილოთ გადაზიდვათა მატრიცის ნებისმიერი თავისუფალი უჯრედი და მასთან ერთად ამ მატრიცის ყველა საბაზისო უჯრედები. მათი რიცხვი $m+n-1$-ის ტოლია (რადგან მატრიცის რანგი $r=m+n-1$). ამრიგად, თავისუფალ უჯრედთან ერთად ჩვენ გამოვყოფთ სულ $m+n$ უჯრედს. ლემა 1-ის თანახმად ვიპოვით ციკლს, რომლის ყველა წვერო მოთავსებულია ჩვენ მიერ გამოყოფილ უჯრედებში. ამ უჯრედებში აუცილებლად იქნება განსახილველი თავისუფალი უჯრედი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიდოდით მე-4 ლემის არამართებულობამდე. ამით გადათვლის ციკლის არსებობა დამტკიცებულია.

ერთადერთობის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, მოცემული თავისუფალი უჯრედისათვის არსებობს გადათვლის ორი სხვადასხვა ციკლი. ასეთ შემთხვევაში ყოველთვის შეგვიძლია გამოვყოთ ციკლი წვეროებით მხოლოდ საბაზისო უჯრედებში (ნახ. 14). ასეთი ციკლის არსებობა კი ეწინააღმდეგება ლემა 4-ს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. საბაზისო უცნობთა გამოსახულებებში თავისუფალ უცნობთა კოეფიციენტების გამოთვლა

შევარჩიოთ თავისუფალ უცნობთა რაიმე კომპლექსი და საბაზისო უცნობები გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობებით. გადაზიდვათა მატრიცაში აღვნიშნოთ შესაბამისი თავისუფალი და საბაზისო უჯრედები. ისმის კითხვა: როგორ განვსაზღვროთ, რა კოეფიციენტით შედის მოცემული თავისუფალი უცნობი მოცემულ საბაზისო უცნობის გამოსახულებაში, თუ ცნობილია თავისუფალ და საბაზისო უცნობთა უჯრედების მხოლოდ განლაგება?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად დავამტკიცოთ.

თეორემა. კოეფიციენტს, რომლითაც ნებისმიერი თავისუფალი უცნობი შედის ნებისმიერი საბაზისო უცნობის გამოსახულებაში, შეუძლია მიიღოს მხოლოდ სამი მნიშვნელობა: 1,0,—1. ამასთან აღნიშნული კოეფიციენტი უდრის:

1) ნულს, თუ შესაბამისი საბაზისო უჯრედი არ წარმოადგენს მოცემული თავისუფალი უჯრედის გადათვლის ციკლის წვეროს.

2) +1-ს, თუ შესაბამისი საბაზისო უჯრედი წარმოადგენს მოცემული თავისუფალი უჯრედის გადათვლის ციკლის დადებით წვეროს.

3) —1-ს, თუ შესაბამისი საბაზისო უჯრედი წარმოადგენს მოცემული თავისუფალი უჯრედის გადათვლის ციკლის უარყოფით წვეროს.

დამტკიცება. შერჩეულ თავისუფალ უცნობებს მივანიჭოთ ნულოვანი მნიშვნელობები. მივიღებთ ამ თავისუფალ უცნობთა შესაბამის საბაზისო ამონახსნს. ამ ამონახსნში x_{kl} საბაზისო უცნობის მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $x_{kl}^{(1)}$-ით. იმის გასაგებად, თუ რა კოეფიციენტით შედის x_{ij} თავისუფალი უცნობი x_{kl} საბაზისო უცნობის გამოსახულებაში, მოვიქცეთ ასე: ვიპოვოთ VII თავის § 1-ის (1) და (2) სისტემის ამონახსნი, რომელშიც ყველა თავისუფალი უცნობი (გარდა x_{ij}

კოეფიციენტისა) ტოლია ნულის, ხოლო x_{ij}-ს მივცეთ ნულისაგან განსხვავებული x_0 მნიშვნელობა. რადგან ნებისმიერი საბაზისო უცნობი დამოკიდებულია თავისუფალ უცნობებზე (წრფივად), ამიტომ მეორე ამონახსნში x_{kl} საბაზისო ამონახსნის $x_{kl}^{(2)}$ მნიშვნელობა $x_{kl}^{(1)}$-საგან განსხვავდება qx_0-ით:

$$x_{kl}^{(2)} = x_{kl}^{(1)} + qx_0, \tag{1}$$

სადაც q არის კოეფიციენტი, რომლითაც x_{ij} შედის x_{kl}-ის გამოსახულებაში.

გადაზიდვათა ცხრილში ამოვიწეროთ (1) და (2) სისტემის ის საბაზისო ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება თავისუფალ უცნობთა ნულოვან მნიშვნელობებს. შემდეგ განვიხილოთ x_{ij} თავისუფალი უჯრედის გადათვლის ციკლი. ამ ციკლის მიხედვით საბაზისო ამონახსნი გადავწიოთ x_0-ით. ამ გადაწევის შედეგად მიღებულ ამონახსნში $x_{ij} = x_0$. მართლაც, მისი პირვანდელი მნიშვნელობა უდრის ნულს, ხოლო რადგან იგი მოთავსებულია ციკლის დადებით წვეროში, ამიტომ გადაწევისას მისი მნიშვნელობა გაიზრდება x_0-ით. რადგან დანარჩენ თავისუფალ უცნობთა უჯრედები არ წარმოადგენენ განსახილველი გადათვლის ციკლის წვეროებს, ამიტომ დანარჩენი თავისუფალი უცნობების მნიშვნელობები დარჩებიან ნულებად.

ნათქვამიდან ცხადია, რომ გადაწევით მიღებულ ამონახსნში თავისუფალ უცნობთა მნიშვნელობები ემთხვევა ამ უცნობების იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც აღნიშნული გვქონდა (1) და (2) სისტემის მეორე ამონახსნში. მაგრამ თუ ორ ამონახსნში თავისუფალი უცნობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მაშინ ერთმანეთს დაემთხვევიან ყველა საბაზისო მნიშვნელობებიც.

ახლა უკვე ცხადია, რომ, თუ x_{kl} საბაზისო უჯრედი არ წარმოადგენს განსახილველი გადათვლის ციკლის წვეროს, მაშინ მეორე ამონახსნში მისი $x_{kl}^{(2)}$ მნიშვნელობა ემთხვევა პირველ საბაზისო ამონახსნში მისსავე $x_{kl}^{(1)}$ მნიშვნელობას, ე. ი.

$$x_{kl}^{(2)} = x_{kl}^{(1)}.$$

თუ ამ ტოლობას შევადარებთ (1)-ს მივიღებთ, რომ $q=0$, რითაც თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ თუ x_{kl} საბაზისო უჯრედი გადათვლის ციკლის დადებითი წვეროა, მაშინ $x_{kl}^{(2)} = x_{kl}^{(1)} + x_0$. ამ პირობით (1)-დან გამომდინარეობს, რომ $q = 1$. მსგავსად ამისა დამტკიცდება თეორემის მესამე ნაწილიც, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

§ 5. მინიმიზირებულ ფორმაში კოეფიციენტების გამოთვლა

გავიხსენოთ, რომ ტრანსპორტის ამოცანაში მინიმიზირებულ ფორმას აქვს შემდეგი სახე:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{1}$$

ვთქვათ შერჩეულია თავისუფალ უცნობთა კომპლექსი და მათი საშუალებით გამოსახულია საბაზისო უცნობები. მაშინ F ფორმის გამოსახვაც შეიძლება თავისუფალ უცნობთა საშუალებით. როგორ გავიგოთ, რა γ_{ij} კოეფიციენტით შევა F-ის გამოსახულებაში x_{ij} თავისუფალი უცნობი?

თეორემა 3-დან გამომდინარეობს γ_{ij} კოეფიციენტის გამოთვლის მარტივი მეთოდი. მართლაც, F-ის გამოსახულებაში x_{ij} შედის უშუალოდ (c_{ij}-ით) და მხოლოდ და მხოლოდ იმ x_{kl} საბაზისო უცნობთა მეშვეობით, რომლებიც წარმოადგენენ თავისუფალი x_{ij} უცნობის გადათვლის ციკლის წვეროებს. ამასთან, იმის მიხედვით თუ რა ნიშანია გადათვლის ციკლის x_{kl} წვეროში, x_{kl}-ის გამოსახულებაში x_{ij} შევა $+1$ ან -1 კოეფიციენტით. მაგრამ (1)-ში x_{kl} შედის c_{kl} კოეფიციენტით. მაშასადამე, x_{kl}-ის მეშვეობით x_{ij} თავისუფალი უცნობი (1) ჯამში აღმოჩნდება $\pm c_{kl}$ კოეფიციენტით. ამრიგად, ვღებულობთ, რომ γ_{ij} უდრის იმ ღირებულებათა ალგებრულ ჯამს, რომლებიც შეესაბამებიან გადათვლის ციკლის წვეროებს, ამასთან ამ ჯამში ღირებულება შედის „+“ ან „—“ ნიშნით, ციკლის შესაბამისი წვეროს ნიშნის მიხედვით. γ_{ij} კოეფიციენტთა გამოთვლის ამ მეთოდს უწოდებენ გადათვლის ციკლის მიხედვით ღირებულებათა ალგებრულ ჯამს.

§ 6. სიმპლექს-მეთოდის გამოყენება ტრანსპორტის ამოცანაში

ახლა შევუდგეთ ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნას სიმპლექს-მეთოდით. ვთქვათ მოცემულობათა ცხრილს აქვს 49-ე სახე. ყოველი

ცხრილი 49

დანიშნულების პუნქტი / გამგზავნი პუნქტი	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_2	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
	20	30	30	10	90

უჯრედის მარცხენა ზედა კუთხეში მითითებულია ტვირთის ერთეულთა გადაზიდვის ღირებულება ($i=1,\ 2,\ 3$; $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$). მაგალითად, მეორე სტრიქონისა და მესამე სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი c_{23} აღნიშნავს A_2 პუნქტიდან B_3 პუნქტში გადატანილი ტვირთის ერთეულის ღირებულებას. ჩვენი ამოცანის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი მოცემულია 50-ე ცხრილით:

ცხრილი 50

დანიშნულების პუნქტი / გამგზავნი პუნქტი	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 20	3 10	2	4	30
A_2	3	2 20	5 20	1	40
A_3	4	3	2 10	6 10	20
	20	30	30	10	90

50-ე ცხრილის თავისუფალი უჯრედები შეესაბამებიან თავისუფალ უცნობებს. ხოლო საბაზისო უცნობთა მნიშვნელობები ჩაწერი-

ლია მათ შესაბამის უჯრედებში. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველ სტრიქონში რიცხვთა ჯამი ტოლია შესაბამის გამგზავნ პუნქტში ტვირთის მარაგის; ანალოგიურად, ყოველ სვეტში რიცხვთა ჯამი ტოლია შესაბამის დანიშნულების პუნქტის ტვირთზე მოთხოვნილების რაოდენობისა (დასაშვები საბაზისო ამონახსნის პოვნას შევუდგებით შემდეგში).

ახლა წარმოვიდგინოთ, რაიმე 50-ე ცხრილთან ერთად, ვავსებთ ჩვენი ამოცანის შესაბამის სიმპლექს-ცხრილს. დავადგინოთ, როგორია რაიმე თავისუფალი უცნობის შესაბამის სვეტში მოთავსებული რიცხვები. გავიხსენოთ, რომ სიმპლექს-ცხრილში რიცხვები (გარდა თავისუფალი წევრებისა) მოიცემა საწინააღმდეგო ნიშნებით, რაც მათ გააჩნიათ შეზღუდვათა სისტემაში, როცა საბაზისო უცნობები გამოისახება თავისუფალი უცნობებით. საბაზისო უცნობთა გამოსახულებებში თავისუფალი უცნობების კოეფიციენტები მოიძებნება მე-3 თეორემის საშუალებით.

დ ა ს კ ვ ნ ა. სიმპლექს-ცხრილის სვეტში x_{ij} თავისუფალი უცნობის შესაბამისმა რიცხვმა შეიძლება მიიღოს მხოლოდ სამი მნიშვნელობა: 1,0, —1. ამასთან მითითებული რიცხვი:

1) უდრის ნულს, თუ შესაბამისი საბაზისო უცნობი (50-ე ცხრილში) არ პასუხობს x_{ij} თავისუფალი უჯრედის გადათვლის ციკლის წვეროს;

2) უდრის —1-ს, თუ შესაბამისი საბაზისო უცნობი პასუხობს x_{ij} -სათვის გადათვლის ციკლის დადებით წვეროს;

3) უდრის $+1$-ს, თუ შესაბამისი საბაზისო უცნობი პასუხობს x_{ij} -სათვის გადათვლის ციკლის უარყოფით წვეროს (F ფორმის სტრიქონს ეს დასკვნა არ ეხება).

მოცემულ ამოცანას ამოვხსნით სიმპლექს-ცხრილების საშუალებით. პირველ რიგში უნდა შევარჩიოთ სიმპლექს-ცხრილის ისეთი სვეტი, რომელიც შეესაბამება რაიმე თავისუფალ უცნობს, მაგალითად, x_{ij} -ს და, რომელშიაც F ფორმის შესაბამისი სტრიქონის რიცხვი დადებითია. როგორც ადრე შევნიშნეთ, ეს რიცხვი უდრის F ფორმის გამოსახულებაში x_{ij}-ის γ_{ij} კოეფიციენტს შებრუნებული ნიშნით, მაგრამ ამ რიცხვის პოვნა შეგვიძლია 50-ე ცხრილითაც, გადათვლის ციკლების მიხედვით ღირებულებათა ალგებრული ჯამის პოვნით (51-ე

ცხრილში თავისუფალ უცნობთა შესაბამის უჯრედებში მსხვილი შრიფტით ჩაწერილია ალგებრული შეჯამების შედეგები შესაბამისი ციკლების მიხედვით, 51-ე და მომდევნო ცხრილებში ჩამოშორებულია A_i და B_j პუნქტთა აღნიშვნები).

ცხრილი 51

2 / 20	3 / 10	2 / —4	4 / —6	30
3	2 / 20	5 / 20	1 / —8	40
4 / 6	3 / 4	2 / 10	6 / 10	20
20	30	30	10	90

ცხრილი 52

2 / 20	3	2 / 10	4	30
3	2 / 30	5 / 10	1 / —8	40
4	3	2 / 10	6 / 10	20
20	30	30	10	90

მაშასადამე, სიმპლექს-ცხრილში სვეტის შერჩევა, სადაც F ფორმის სტრიქონში დგას დადებითი რიცხვი, შეესაბამება იმ თავისუფალი უცნობის შერჩევას, რომლისთვისაც გადათვლის ციკლის მიხედვით ღირებულებათა შეკრება გვაძლევს უარყოფით შედეგს. ასეთ თავისუფალ უცნობად ავიღოთ x_{13} (შეიძლებოდა x_{14} ან x_{24}-ის აღება). ახლა სიმპლექს-ცხრილში ვიპოვოთ გენერალური ელემენტი. იგი ეკუთვნის x_{13}-ის შესაბამის სვეტს. მის საპოვნელად მხედველობაში მივიღებთ ამ სვეტის მხოლოდ დადებით რიცხვებს. დასკვნის თანახმად ყველა ეს რიცხვი უდრის $+1$-ს და პასუხობენ იმ საბაზისო უცნობებს (უჯრედებს), რომლებიც შეესაბამებიან x_{13}-სათვის გადათვლის ციკლის უარყოფით წევროებს. ამიტომ უნდა გამოვთვალოთ x_{13}-სათვის გადათვლის ციკლის უარყოფითი წევროების შესაბამისი საბაზისო უცნობთა მნიშვნელობის 1-თან ფარდობა. მაშასადამე, გენერალური ელემენტი განისაზღვრება იმ საბაზისო უცნობით, რომლის მნიშვნელობაც მინიმალურია. ჩვენს შემთხვევაში ასეთ უცნობს წარმოადგენს $x_{12}=10$.

სიმპლექს-ცხრილზე მუშაობის წესის თანახმად x_{12} უნდა გადავიყვანოთ თავისუფალ უცნობებში, ხოლო x_{13} — საბაზისო უცნობებში. თავისუფალ უცნობთა ახალი კომპლექსის შესაბამისი ამონახსნი განისაზღვრება შემდეგი პირობებით: ყველა ძველი თავისუფალი უცნობი (გარდა x_{13}) უდრის ნულს და გარდა ამისა ახალი თავისუფალი უცნობი

$x_{12}=0$. მაგრამ მოცემული პირობის დამაკმაყოფილებელი ამონახსნის მოსაძებნად მოვახდინოთ x_{12}-ის შესაბამისი გადათვლის ციკლის მიმართ 10-ით გადაწევა. მართლაც, x_{12} შეესაბამება გადათვლის ციკლის უარყოფით წვეროს და ამიტომ მისი მნიშვნელობა შემცირდება 10-ით და გახდება ნულის ტოლი. დანარჩენი თავისუფალი უცნობები შეინარჩუნებენ ნულოვან მნიშვნელობებს იმიტომ, რომ მათი უჯრედები არ წარმოადგენენ გადათვლის ციკლის წვეროებს. გადაწევაში მონაწილე უცნობთა ახალი მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ ტოლობებს:

$$x_{13}=10,\ x_{21}=0,\ x_{22}=30,\ x_{12}=0.$$

ამრიგად, გადაწევას ციკლის მიმართ, მივყავართ ახალ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნთან (ცხრ. 52). ამასთან, ჩვენ ცხადი სახით არ ამოგვიწერია სიმპლექს-ცხრილი, არამედ შემოვისაზღვრეთ მხოლოდ გადაზიდვათა ცხრილით. ცხადია, რომ მსგავსი მსჯელობები მართებულია ტრანსპორტის ამოცანის ნებისმიერი დასაშვები საბაზისო ამონახსნისათვის.

ამ მსჯელობებიდან ასევე ჩანს სიმპლექს-მეთოდით გადაზიდვათა ერთი ცხრილიდან მეორეში გადასვლის სრულად განსაზღვრული წესი.

სიმპლექს-ცხრილის გარეშე მხოლოდ გადაზიდვათა ცხრილით სიმპლექს-მეთოდით მუშაობის ხერხს **განაწილების მეთოდს** უწოდებენ.

განაწილების მეთოდით მუშაობის წესი შემდეგში მდგომარეობს:

1) ვიპოვით ღირებულებათა ალგებრულ ჯამს, თავისუფალ უცნობებისათვის გადათვლის ციკლების მიხედვით;

2) შევარჩევთ ისეთ x_{ij}-ს რომლისთვისაც ეს ჯამი უარყოფითია (თუ ასეთი უცნობი არ არსებობს, ეს იმას ნიშნავს, რომ F ფორმაში თავისუფალ უცნობთა კოეფიციენტები დადებითი რიცხვებია და მაშასადამე, საბაზისო ამონახსნი ოპტიმალურია);

3) შერჩეული x_{ij} თავისუფალი უცნობისათვის განვიხილავთ მის შესაბამის გადათვლის ციკლს და ამ ციკლის უარყოფითი წვეროების შესაბამისი საბაზისო უცნობებიდან ვიპოვით ისეთს, მაგალითად, x_{kl}, რომლის მნიშვნელობაც მინიმალურია;

4) მოვახდენთ მიღებული ციკლის მიმართ გადაწევას x_{kl}-ით. აღნიშნული გადაწევა მიგვიყვანს ახალ საბაზისო ამონახსნამდე, რომ-

ლისთვისაც x_{ij} უკვე წარმოადგენს საბაზისო უცნობს, ხოლო x_{kl}— თავისუფალ უცნობს;

5) 1) — 4) — ოპერაციებს გავიმეორებთ მანამდე, სანამ არ მივალთ ისეთ საბაზისო ამონახსნამდე, როდესაც ყოველი თავისუფალი უცნობისათვის, გადათვლის ციკლის მიხედვით, ღირებულებათა ალგებრული ჯამი აღმოჩნდება არაუარყოფითი. ეს ფაქტი იმას ნიშნავს, რომ მიღებული საბაზისო ამონახსნი ოპტიმალურია.

ჩამოვაყალიბეთ რა განაწილების მეთოდით მუშაობის წესი, გავაგრძელოთ მაგალითის ამოხსნა. გავიხსენოთ, რომ გამოსავალი დასაშვები საბაზისო ამონახსნიდან (ცხრილი 50) უკვე გადავედით ახალ ამონახსნზე (ცხრილი 52). მეორე ამონახსნიდან შემდგომ ამონახსნში გადასასვლელად გამოვიყენოთ განაწილების მეთოდი. 52-ე ცხრილის მიხედვით x_{24}-სათვის ღირებულებათა ალგებრული ჯამი უდრის —8-ს. რადგან x_{23} და x_{34} უცნობთა მნიშვნელობები ერთნაირია: $x_{23}=x_{34}=0$, ამიტომ შეგვიძლია ნებისმიერი მათგანის თავისუფალ უცნობთა რიცხვში გადაყვანა. მათგან ავიღოთ x_{23}. x_{24}-სათვის გადათვლის ციკლის მიმართ მოვახდინოთ გადაწევა 10-ით. მივიღებთ საბაზისო ამონახსნს მოცემულს 53-ე ცხრილით. მასში x_{23} თავისუფალი უცნობის შესაბამისი უჯრედი თავისუფალია. x_{34} საბაზისო უცნობის შესაბამისი

ცხრილი 53

(2) 20	(3) −4	(2) 10		30
(3)	(2) 30	(5)	(1) 10	40
(4)	(3)	(2) 20	(6) 0	20
20	30	30	10	90

ცხრილი 54

(2) 20	(3) 0	(2) 10	(4)	30
(3)	(2) 30	(5)	(1) 10	40
(4)	(3)	(2) 20	(6)	20
20	30	30	10	90

უჯრედი არ არის თავისუფალი, მისი შესაბამისი რიცხვი 0-ის ტოლია. x_{12}-სათვის გადათვლის ციკლის მიმართ ღირებულებათა ალგებრული ჯამის დათვლით მივიღებთ — 4-ს. ციკლის უარყოფითი წვეროებიდან საბაზისო უცნობთა შორის უმცირესია $x_{34}=0$. ამიტომ საჭი-

როა ციკლის 0-ით გადაწევა, რაც არ გამოიწვევს უცნობთა მნიშვნელობების შეცვლას. მაგრამ ესეც საჭიროა რადგან, x_{12} უცნობი გადავა საბაზისო უცნობთა რიცხვში (ნულოვანი მნიშვნელობით) ხოლო x_{34} გახდება თავისუფალი უცნობი. ამრიგად, ვღებულობთ 54-ე ცხრილს. ამ ცხრილში, ყველა გადათვლის ციკლისათვის, ღირებულებათა ალგებრული ჯამი არაუარყოფითია. თავისუფალი უცნობის ციკლისათვის იგი უდრის 0-ს, ხოლო დანარჩენებისათვის დადებითია.

მაშასადამე, ვიპოვეთ ოპტიმალური ამონახსნი.

§ 7. ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის პოტენციალთა მეთოდი

განვიხილოთ ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის კიდევ ერთი მეთოდი, რომელსაც პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ თ ა მ ე თ ო დ ი ეწოდება.

როგორც დანციგმა აჩვენა ნებისმიერი საყრდენი გეგმისათვის შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი u_i და v_j რიცხვები (პოტენციალები), რომ საყრდენი გეგმის ყველა x_{ij} ცვლადისათვის ადგილი ექნება ტოლობას:

$$u_i+v_j=c_{ij}.$$

დანციგმა აჩვენა აგრეთვე, რომ თუ

$$u_i+v_j=\overline{c_{ij}}.$$

იმ ცვლადებისათვის, რომლებიც არ შედიან საყრდენ გეგმაში და ყველა სხვაობა

$$\overline{c_{ij}}-c_{ij}\leqslant 0,$$

მაშინ საყრდენი გეგმა არის ოპტიმალური. თუ ოპტიმალობის ეს პირობა არ სრულდება, მაშინ ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ ახალი საყრდენი გეგმა, რომელიც დაკავშირებულია წრფივი ფორმის უფრო ნაკლებ მნიშვნელობასთან, ვიდრე წინა გეგმა.

დანციგის გამოთვლითი პროცესი საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ საყრდენი გეგმა ჩვეულებრივი სიმპლექს-ცხრილის შედგენის გარეშე და გამოვიკვლიოთ ის ოპტიმალობაზე. ჩვენ ამ პროცესს განვიხილავთ პრაქტიკულ მაგალითზე:

ვთქვათ გვაქვს გაგზავნის ოთხი პუნქტი, რომლებშიაც თავმოყრილია ერთგვაროვანი პროდუქციის შესაბამისად 5, 10, 14, 25 ერთე-

ული. ამ პროდუქციის 7, 11, 15, 21 ერთეული გადასაზიდია შესაბამისად დანიშნულების ოთხ პუნქტში.

შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 54.$$

გადაზიდვაზე დანახარჯები გაგზავნის ყოველი პუნქტიდან დანიშნულების ყოველ პუნქტში ცნობილია და მოცემულია ცხრილით (ცხრ. 55).

დავუშვათ დანახარჯები გამოსახულია მანეთებში. ვთქვათ, მესამე პუნქტიდან მეოთხე პუნქტში პროდუქციის ერთეულის გადაზიდვა ჯდება $c_{34}=2$ მან. საწყისი გეგმის მისაღებად გამოვიყენოთ „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის" წესი (ცხრ. 56).

ცხრილი 55

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	3	6	7
A_2	4	1	0	8
A_3	9	6	7	2
A_4	1	2	4	5

ცხრილი 56

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5				5
A_2	2	8			10
A_3		3	11		14
A_4			4	21	25
	7	11	15	21	

აქ $x_{11}=5$, $x_{21}=2$, $x_{22}=8$, $x_{32}=3$, $x_{33}=11$, $x_{43}=4$, $x_{44}=21$, ხოლო ყველა დანარჩენი $x_{ij}=0$. წრფივი ფორმის მნიშვნელობაა:

$$F=5\cdot5+2\cdot4+8\cdot1+3\cdot6+11\cdot7+4\cdot4+21\cdot5=257.$$

განვსაზღვროთ საყრდენი გეგმის დადებითი ცვლადებისათვის ისეთი m რაოდენობის u_i და n რაოდენობის v_j სიდიდეები, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$
\begin{cases}
u_1+v_1=c_{11}=5 \\
u_2+v_1=c_{21}=4 \\
u_2+v_2=c_{22}=1 \\
u_3+v_2=c_{32}=6 \\
u_3+v_3=c_{33}=7 \\
u_4+v_3=c_{43}=4 \\
u_4+v_4=c_{44}=5
\end{cases}
$$

მივიღეთ 7 განტოლება 8 უცნობით. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი. განვსაზღვროთ ერთ-ერთი უცნობი: მივანიჭოთ მას c_{ij}-ის მნიშვნელობა. ამით უცნობთა მნიშვნელობა ერთით შემცირდება და დაგვრჩება 7 განტოლება 7 უცნობით. ასეთი სისტემის ამოხსნით კი დანარჩენი უცნობები ცალსახად განისაზღვრებიან.

ვთქვათ $u_1=c_{11}=5$, მაშინ დანარჩენთა მნიშვნელობები ჩასმებით ადვილად განისაზღვრება:

$$v_1=0,\ u_2=4,\ v_2=-3,\ u_3=9,\ v_3=-2,\ u_4=6,\ v_4=-1.$$

ამ გამოთვლების ჩატარება უფრო მოსახერხებელია ე. წ. პოტენციალური ცხრილის დახმარებით, რომელიც შეიცავს საყრდენი გეგმის დადებითი ცვლადების შესაბამის გადაზიდვებზე დანახარჯებს (ცხრ. 57).

ცხრილი 57

		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_j / u_i	0	−3	−2	−1
u_1	5	5			
u_2	4	4	1	7	
u_3	9		6	4	
u_4	6				5

u_1-ს ვუშვებთ 5-ის ტოლად, მაშინ $v_1 = c_{11} - u_1 = 0$; v_1-ის დახმარებით ვპოულობთ u_2-ს, $u_2 = c_{21} - v_1 = 4$ და ა. შ. ახლა (i, j)-ს ყველა კომბინაციისათვის გამოვთვლით სიდიდეებს:

$$\overline{c_{ij}} = u_i + v_j,$$

რომლებსაც ირიბ (არაპირდაპირ) დანახარჯებს უწოდებენ.

შევადგენთ ე. წ. ირიბი დანახარჯების ცხრილს (ცხრ. 58). ამ ცხრილში დადებითი x_{ij}-ს შესაბამისი $\overline{c_{ij}} = c_{ij}$.

ცხრილი 58

$\overline{c_{ij}}$	5	2	3	4
	4	1	2	3
	9	6	7	8
	6	3	4	5

გამოვთვლით $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$ სხვაობებს და შევადგენთ 59-ე ცხრილს:

ცხრილი 59

$\overline{c_{ij}} - c_{ij}$	0	—1	—3	—3
	0	0	2	—5
	0	0	0	6
	5	1	0	0

თუ ყველა $\overline{c_{ij}} - c_{ij} \leqslant 0$, მაშინ მოცემული გეგმა ოპტიმალურია, ხოლო თუ ერთი მაინც $\overline{c_{ij}} - c_{ij} > 0$, მაშინ ამოცანის ამონახსნი ჯერ კიდევ არ არის მიღებული. ამ შემთხვევაში ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ ახალი საყრდენი გეგმა, რომელიც შეიცავს დადებითი $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$-ის შესაბამის ცვლადს. როგორც ჩვეულებრივ სიმპლექსურ პროცესში ახალ ბაზისში შესაყვანად აირჩევა ვექტორი, რომელიც შეესაბამება $\max(\overline{c_{ij}} - c_{ij} > 0)$. ამასთან მიიღება ახალი საყრდენი გეგმა, რომელიც დაკავშირებულია წრფივი ფორმის შემცირებულ მნიშვნელობასთან. განსახილავი გეგმისათვის გვაქვს

$$\max(\overline{c_{ij}} - c_{ij}) = 6 = \overline{c_{34}} - c_{34}.$$

მაშასადამე, ახალ საყრდენ გეგმაში უნდა შევიტანოთ x_{34}. თუ ცვლადი ცალსახად არ განისაზღვრება, მაშინ გეგმაში შევიტანთ იმ ცვლადს, რომელსაც შეესაბამება უმცირესი c_{ij}. თუ c_{ij} დანახარჯებიც ტოლია, მაშინ შევიტანთ უმცირესს, პირველი ინდექსის მიხედვით.

პირველ საყრდენ გეგმაში შეგვაქვს x_{34} გადაზიდვა, ჯერჯერობით, რაღაც არაუარყოფითი უცნობი Q_1 ინტენსივობით. ვინაიდან სტრიქონთა და სვეტთა ელემენტების ჯამი ტოლი უნდა იყოს შესაბამისად a_i და b_j მნიშვნელობის, ამიტომ Q_1 უნდა დავუმატოთ და გამოვაკლოთ პირველი ცხრილის ზოგიერთ x_{ij} გადაზიდვებს, რათა აღვადგინოთ წონასწორობა (ცხრ. 60).

ც ხ რ ი ლ ი 60

5			
2	8		
	3	$11-Q_1$	Q_1
		$4+Q_1$	$21-Q_1$

ცხადია, Q_1 შემოისაზღვრება იმ x_{ij}-ით, რომელთაც ის აკლდება (ყველა გადაზიდვა დადებითი უნდა იყოს). Q_1 არ აღემატება ამ გადაზიდვებიდან უმცირესს. ჩვენ შემთხვევაში $Q_1=1$. თუ ჩავსვამთ Q_1-ის მნიშვნელობას, მივიღებთ ახალ გეგმას (გამოირიცხება x_{33} ცვლადი, ცხრ. 61).

ც ხ რ ი ლ ი 61

5			
2	8		
	3		11
		15	10

ამ გეგმის შესაბამისი წრფივი ფორმის მნიშვნელობა იქნება:

$$F=5\cdot5+2\cdot4+8\cdot1+3\cdot6+11\cdot2+15\cdot4+10\cdot5=191.$$

ვადგენთ ახალი გეგმის შესაბამის პოტენციალთა ცხრილს (ცხრ. 62), რომელშიაც შეგვაქვს ირიბი დანახარჯები. ამ შემთხვევაში

$$\max(\overline{c_{ij}} - c_{ij}) = 11 = \overline{c}_{41} - c_{41}.$$

ც ხ რ ი ლ ი 62

		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_j / u_i	0	−3	−8	−7
u_1	5	5	2	−3	−2
u_2	4	4	1	−4	−3
u_3	9	9	6	1	2
u_4	12	12	9	4	5

ახალ საყრდენ გეგმაში x_{41} ცვლადი, ჯერჯერობით, უცნობი Q_2 ინტენსივებითაა, ამიტომ გვექნება 63-ე ცხრილი.

ც ხ რ ი ლ ი 63

5			
$2-Q_2$	$8+Q_2$		
	$3-Q_2$		$11+Q_2$
Q_2		15	$10-Q_2$

$Q_2=2$, ე. ი. გვექნება ახალი ამონახსნი (ცხრ. 64).

ც ხ რ ი ლ ი 64

5			
	10		
	1		13
2		15	8

$$F=5\cdot 5+10\cdot 1+1\cdot 6+13\cdot 2+2\cdot 1+15\cdot 4+8\cdot 5=169.$$

ვადგენთ ახალ პოტენციალთა ცხრილს (ცხრ. 65).

ც ხ რ ი ლ ი 65

		v_1	v_2	v_3	v_4
	$u_i \backslash v_j$	0	8	3	4
u_1	5	5	13	8	9
u_2	−7	−7	1	−4	−3
u_3	−2	−2	6	1	2
u_4	1	1	9	4	5

$$\max_{i,j}(\overline{c_{ij}}-c_{ij})=\overline{c_{12}}-c_{12}=10.$$

გეგმაში შეგვაქვს x_{12} ცვლადი Q_3 ინტენსივობით (ცხრ. 66).

ც ხ რ ი ლ ი 66

$5-Q_3$	Q_3		
	10		
	$1-Q_3$		$13+Q_3$
$2+Q_3$		15	$8-Q_3$

$Q_3=1$, ე. ი. მეოთხე გეგმა იქნება (ცხრ. 67).

ც ხ რ ი ლ ი 67

4	1		
	10		
			14
3		15	7

ამ ამონახსნისათვის ვადგენთ პოტენციალთა ცხრილს (ცხრ. 68).

ც ხ რ ი ლ ი 68

		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_j / u_i	0	-2	3	4
u_1	5	5	3	8	9
u_2	3	3	1	6	7
u_3	-2	-2	-4	1	2
u_4	1	1	-1	4	5

$\max\limits_{i,j} (\overline{c_{ij}} - c_{ij}) = 6 = \overline{c_{23}} - c_{23}$. გეგმაში უნდა შევიტანოთ x_{23} ცვლადი Q_4 ინტენსივობით (ცხრ. 69).

ც ხ რ ი ლ ი 69

$4-Q_4$	$1+Q_4$		
	$10-Q_4$	Q_4	
			14
$3+Q_4$		$15-Q_4$	7

$Q_4 = 4$, ე. ი. გვექნება (ცხრ. 70).

ც ხ რ ი ლ ი 70

		5		
$(x_{ij})^V$		6	4	
				14
	7		11	7

$L_6 = 145$.

შემდეგი პოტენციალთა ცხრილია (ცხრ. 71).

ცხრილი 71

		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_j / u_i	-2	0	1	2
u_1	3	1	3	4	5
u_2	-1	-3	1	0	-1
u_3	0	-2	0	1	2
u_4	3	1	3	4	5

$\max\limits_{i,j}(\overline{c_{ij}} - c_{ij}) = 1 = \overline{c_{42}} - c_{42}$, გეგმაში შეგვაქვს x_{42} ცვლადი Q_5 ინტენსიობით (ცხრ. 72).

ცხრილი 72

	5		
	$6-Q_5$	$4+Q_5$	
			14
7	Q_5	$11-Q_5$	7

$Q_5=6$, ე. ი. გვექნება (ცხრ. 73).

ცხრილი 73

		5		
$(x_{ij})^{VI}$			10	
				14
	7	6	5	7

$L_6 = 117$. ვადგენთ პოტენციალთა ცხრილს (ცხრ. 74).

ცხრილი 74

		v_1	v_2	v_3	v_4
	$u_i \backslash v_j$	−1	0	−2	3
u_1	3	2	3	5	6
u_2	−2	−3	−2	0	1
u_3	−1	−2	−1	1	2
u_4	2	1	2	4	5

ვინაიდან ყველა $\overline{c_{ij}} - c_{ij} \leqslant 0$, ამიტომ გეგმის გაუმჯობესება აღარ შეიძლება, მაშასადამე, მეექვსე გეგმა არის ოპტიმალური.

დასმული ამოცანის ამონახსნია: $x_{12} = 5$, $x_{23} = 10$, $x_{34} = 14$, $x_{41} = 7$, $x_{42} = 6$, $x_{43} = 5$, $x_{44} = 7$, ხოლო წრფივი ფორმის მნიშვნელობაა 117. როგორც ვხედავთ, პირველ გადაზიდვებთან შედარებით დანახარჯები შემცირდა $257 - 117 = 140$ ერთეულით (მან.). მაშასადამე, პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებამ საშუალება მოგვცა დაგვეზოგა 140 მან.

§ 8. ტრანსპორტის ამოცანის პირველი გეგმის მიღების ხერხები

ტრანსპორტის ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნის დროს დიდი მნიშვნელობა აქვს იმას, თუ რამდენად ახლოს არის პირველი გეგმა ოპტიმალურთან. ვინაიდან „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის" წესში c_{ij} დანახარჯთა მნიშვნელობები მხედველობაში არ მიიღება, ამიტომ არ შეიძლება მოველოდეთ, რომ პირველი გეგმის გამოთვლისას მისი წრფივი ფორმის მნიშვნელობა ახლოს იქნება ოპტიმალურთან.

წარმოვადგინოთ რამდენიმე ხერხი, რომლებიც c_{ij} დანახარჯების საფუძველზე გვაძლევენ გეგმას. ამ ხერხების გამოყენებით ამოვხსნათ ზემოთ განხილული მაგალითი:

$$
(c_{ij}) = \begin{array}{c|c|c|c}
5 & 3 & 6 & 7 \\ \hline
4 & 1 & 0 & 8 \\ \hline
9 & 6 & 7 & 2 \\ \hline
1 & 2 & 4 & 5
\end{array}, \qquad
(x_{ij}) = \begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & & & 5 \\ \hline
 & & & & 10 \\ \hline
 & & & & 14 \\ \hline
 & & & & 25 \\ \hline
7 & 11 & 15 & 21 &
\end{array}
$$

„ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის“ წესის გამოყენების შედეგად წრფივი ფორმის მნიშვნელობა მივიღეთ 257-ის ტოლი.

ა) სტრიქონის მინიმალური ელემენტის წესი:

(c_{ij}) ცხრილის პირველ სტრიქონში ეძებენ მინიმალურ ელემენტს (თუ ასეთი ელემენტი ორია. იღებენ ნაკლებ ინდექსთან ელემენტს). $\min c_{ij}=c_{12}=3$ და (x_{ij}) გადაზიდვათა ცხრილში x_{11} გადაზიდვის შესაბამის უჯრედში შეაქვთ $\min(a_1, b_2)=a_1=5$ სიდიდე, ხოლო a_1 და b_2-ს აკლდებათ 5.

$$
(x_{ij}) = \begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 5 & & & 5 \\ \hline
 & & 10 & & 10 \\ \hline
 & & & 14 & 14 \\ \hline
7 & 6 & 5 & 7 & 25 \\ \hline
7 & 11 & 15 & 21 &
\end{array}
$$

ვინაიდან, პირველ სტრიქონში ველარ შევიტანთ გადაზიდვებს, გადავდივართ (c_{ij})-ს მეორე სტრიქონზე. მეორე სტრიქონში მინიმალური ელემენტი $c_{23}=0$, მაშასადამე (x_{ij}) ცხრილში შეგვაქვს x_{23} გადაზიდვა, $x_{23}=\min(a_2, b_3)=a_2=10$. c_{ij}-ს მესამე სტრიქონის მინიმალური ელემენტია $c_{34}=2$, (x_{ij}) ცხრილში შეგვყავს $x_{34}=14$ გადაზიდვა. ვინაიდან ერთი a_4 დაგვრჩა, ბოლო სტრიქონში შეგვაქვს დარჩენილი სიდიდეები. წრფივი ფორმის მნიშვნელობა იქნება 117.

ბ) სვეტის მინიმალური ელემენტის წესი.

გეგმის აგება ხდება ზემოთ აღწერილი წესით, ოღონდ სტრიქონების ნაცვლად ახლა ვეძებთ (c_{ij})-ს სვეტებში მინიმალურ ელემენტებს. ამ შემთხვევაში გეგმა იქნება:

$(x_{ij}) =$

			5	5
	10			10
			14	14
7	1	15	2	25
7	11	15	21	

ხოლო წრფივი ფორმის მნიშვნელობაა 152.

გ) (c_{ij}) მატრიცის მინიმალური ელემენტის წესი.

პოულობენ (c_{ij}) დანახარჯთა მატრიცის მინიმალურ ელემენტს, რომლის შედეგადაც მის შესაბამის x_{ij} გადაზიდვას უტოლებენ $\min\limits_{i,\,j}(a_i,\ b_j)$ სიდიდეს, შემდეგ პოულობენ (c_{ij}) მატრიცის მეორე მინიმალურ ელემენტს და ა. შ. პროცესი მეორდება მანამ, სანამ მთელი პროდუქცია არ გადაიზიდება.

$(x_{ij}) =$

			5	5
		10		10
			14	14
7	11	5	2	25
7	11	15	21	

წრფივი ფორმის მნიშვნელობაა 122.

როგორც ვხედავთ, მოყვანილი ხერხები ამ მაგალითისათვის გვაძლევენ უკეთეს შედეგს, ვიდრე „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის“ წესი, მაგრამ შეგვიძლია შევადგინოთ ისეთი ამოცანები, რომლებშიაც „ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის“ წესს მივყავართ უკეთეს შედეგამდე, ვიდრე აღნიშნულ ხერხებს. მაგრამ, როგორც პრაქტიკამ დაამტკიცა, აღნიშნული ხერხებით პირველი მიახლოების მოძებნას მივყავართ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო იტერაციათა საერთო რიცხვის შემცირებისაკენ. ეს გარემოება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ტრანსპორტის ისეთი ამოცანების ამოსახსნელად, რომლებშიაც გაგზავნისა და დანიშნულების პუნქტების დიდი რაოდენობაა.

§ 0. სავარჯიშო

1. ამოხსენით სიმპლექსური მეთოდით შემდეგი ამოცანები:

ა) ვიპოვოთ $\min L = -3x_2 + x_2 - 4x_3$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leqslant 12 \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leqslant 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

ბ) ვიპოვოთ $\max L = 6x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_4 + x_4 = 12 \\ 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 10 \\ 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

გ) ვიპოვოთ $\max L = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 9 \\ -2x_1 + x_3 - 4x_4 = 6 \\ -5x_2 + 7x_4 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

დ) ვიპოვოთ $\min L = -6x_1 - 7x_2 - 9x_3$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 6 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leqslant 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

ე) ვიპოვოთ $\min L = -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 6x_5 + x_6$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 8x_5 = 10 \\ 3x_2 + 7x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 = 12 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6). \end{cases}$$

პასუხი: ა) $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{14}{11}, \quad x_3 = \frac{21}{11}, \quad \min L = -\frac{70}{11}$;

ბ) $x_1 = -\frac{76}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{10}{3}, \ x_4 = 0, \ \min L = \frac{146}{3}$;

გ) $x_1 = 0, \ x_2 = \frac{7}{6}, \quad x_3 = \frac{47}{3}, \quad x_4 = \frac{11}{6}, \ \max L = \frac{141}{2}$;

დ) $x_1 = \frac{1}{23}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{33}{23}, \quad \min L = -\frac{303}{23}$;

ე) $x_1 = 94, \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0, \quad x_5 = 3, \quad \min L = -86.$

2. ამოხსენით ამოცანები ხელოვნური ბაზისის მეთოდით:

ა) ვიპოვოთ $\min L = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, \ 2, \ 3, \ 4) \end{cases}$$

ბ) ვიპოვოთ $\max L = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

გ) ვიპოვოთ $\max L = x_1 - 2x_2 + 3x_3$,
თუ სრულდება შეზღუდვები:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

დ) ვიპოვოთ $\min L = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5$ თუ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \leqslant 5 \\ x_2 + x_5 \geqslant 3 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

პასუხი: ა) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 0, \quad \min L = 7$;

ბ) $x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3, \quad \max L = -2$;

გ) ამოცანას ამონახსნი არა აქვს;

დ) $x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1, \quad \min L = -2$.

3. ამოხსენით გრაფიკულად:

ა) $L = 2x_1 + 3x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინი მუმი შემდეგ შეზღუდ ვებში:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

ბ) $L = -4x_1 - x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

გ) $L = -3x_1 - x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ 5x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

დ) $L = x_1 - x_2$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

პასუხი:

ა) $x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ \min L = 0; \quad x_1 = \frac{3}{2}, \ x_2 = -\frac{5}{2}, \ \max L = \frac{27}{4}.$

ბ) $x_1 = \infty, \ x_2 = \infty, \ \min L = -\infty; \ x_1 = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{18}{7}, \ \max L = -\frac{34}{7}.$

გ) $x_1 = 3, x_2 = 2, \ \min L = -11; \ x_1 = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{15}{7}, \ \max L = -\frac{27}{7}.$

დ) $x_1 = 0, \ x_2 = 2, \ \min L = -2; \ x_1 = 4, \ x_2 = 0, \ \max L = 1.$

$x_1 - x_2$ ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა (0,2) და მეორე და მესამე უტოლობათა შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის ყველა წერტილში.

4. ამოხსენით ამოცანები პოტენციალთა მეთოდით:

ა)

$$(c_{ij})\quad \begin{array}{c|c|c|c} 5 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1=13, \quad a_2=2, \quad a_3=9 \\ b_1=7, \quad b_2=9, \quad b_3=11, \quad b_4=3. \end{array}$$

ბ)

$$(c_{ij})\quad \begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 5 \\ \hline 0 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1=7, \quad a_2=7, \quad a_3=6 \\ b_1=5, \quad b_2=8, \quad b_3=7. \end{array}$$

გ)

$$(c_{ij})\quad \begin{array}{c|c|c|c} 7 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 6 & 8 \\ \hline 9 & 7 & 4 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1=5, \quad a_2=15, \quad a_3=20, \quad a_4=10; \\ b_1=7, \quad b_2=13, \quad b_3=25, \quad b_4=5. \end{array}$$

დ)

$$(c_{ij})\quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 9 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 5 \\ \hline 6 & 4 & 8 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1=60, \quad a_2=55, \quad a_3=4, \quad a_4=35; \\ b_1=70, \quad b_2=5, \quad b_3=45, \quad b_4=70. \end{array}$$

პასუხი:

ა) $x_{12}=9$, $x_{13}=4$, $x_{23}=7$, $x_{24}=1$, $x_{31}+7$, $x_{34}=2$, $\min L=36$.

ბ) $x_{11}=5$, $x_{12}=2$, $x_{22}=6$, $x_{23}=1$, $x_{33}=6$, $\min L=38$.

გ) $x_{13}=5,\ x_{23}=15,\ x_{31}=7,\ x_{32}=13,\ x_{43}=5,\ x_{44}=5,\ \min L=$
$=104.$

დ) $x_{11}=6,\ x_{21}=10,\ x_{23}=45,\ x_{32}=5,\ x_{34}=35,\ x_{44}=35,$
$\min L=295.$

5. ამოვხსნათ ამოცანები ორადული სიმპლექსური მეთოდით:

ა) ვიპოვოთ $\min L=8x_1+3x_2+5x_3+2x_4+x_5$,
შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=-3 \\ 3x_1+x_2-x_3+x_5=6 \\ -5x_1-3x_2+4x_3+x_6=-10 \\ x_j\geqslant 0 (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6) \end{cases}$$

ბ) ვიპოვოთ $\min L=-2x_1+5x_2-3x_3+13x_4+x_5$,
შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_4=6 \\ -4x_1+x_3+2x_4=-4 \\ -3x_2-x_4+x_5=-6 \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \end{cases}$$

გ) ვიპოვოთ $\max L=-3x_1-10x_2-3x_3-7x_4]-x_5-x_6$,
შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} 2x_1-6x_2+3x_3-2x_4+x_5=-3 \\ x_1-7x_2-2x_3+4x_4+x_6=-4 \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6) \end{cases}$$

დ) ვიპოვოთ $\max L=3x_1+3x_2+x_3-8x_4+2x_5$,
შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+5x_4=-6 \\ -6x_2+7x_3-10x_4+x_5=-2 \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \end{cases}$$

პ ა ს უ ხ ი:

ა) $x_1 = \frac{1}{11}$, $x_2 = \frac{35}{11}$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = \frac{28}{11}$, $\min L = \frac{141}{11}$;

ბ) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $x_4 = 6$, $x_5 = 0$, $\min L = 54$.

გ) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{11}$, $x_3 = \frac{1}{11}$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, $\min L = -\frac{63}{11}$.

დ) ამოცანას ამონახსნი არა აქვს.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Курош А. Г., Курс высшей алгебры. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
2. Гасс С., Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
3. Юдин Д. Б. и Гольштейн Б. Г., Задачи и методы линейного программирования. «Советское радио», 1964.
4. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование. Издательство «Наука», 1963.
5. Засланский Ю. Л., Сборник задач по линейному программированию. Москва, 1965.
6. Ланкастер К., Математическая экономика. Издательство «Советское радио», Москва, 1972.
7. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б., Математическое программирование. Издательство «Высшая школа», Москва, 1976.
8. ლურსმანაშვილი ა. პ., წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1967.
9. ლურსმანაშვილი ა. პ., მათემატიკური დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1977.

შინაარსი

მ ე ო თ ხ ე თ ა ვ ი. წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანები

მ ე ხ უ თ ე თ ა ვ ი. წრფივი დაპროგრამების ორადული ამოცანის ცნება

მ ე ე ქ ვ ს ე თ ა ვ ი. შებრუნებული მატრიცის მეთოდი და ორადული სიმპლექს-მეთოდი

მ ე შ ვ ი დ ე თ ა ვ ი. ტრანსპორტის ამოცანა

გამომცემლობის რედაქტორი დ. მანჯგალაძე
ტექრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ე. თოფჩიაშვილი

სბ 1203

გადაეცა წარმოებას 5.04.84. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 06.06.85.
საბეჭდი ქაღალდი $60\times84^{1}/_{16}$. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 12,25.
სააღრ.-საგამომც. თაბახი 8,78

უე 04580; ტირაჟი 1000; შეკვეთის № 3794;

ფასი 35 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 380028,
ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14

საქართველოს სსრ მ/ა სტამბა, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19.
Типография АН Груз. ССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19.