თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

210

ISSN 0376—2637

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ

MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

8

თბილისი Тбилиси Tbilisi

1980

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
ტ. 210 V.

მათემატიკა • მექანიკა ასტრონომია

MATHEMATICS • MECHANICS ASTRONOMY

8

თბილისი 1980 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 210

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

8

Тбилиси 1980

"თბილისის უნივერსიტეტის შრომების" წინამდებარე ტომი (ტ.210) წარმოადგენს სერიის "მათემატიკა.მექანიკა. ასტრონომია" მე-8 გამოშვებას,რომელიც 1976 წლიდან ცალკე კრებულებად გამოდის.

Настоящий том "Трудов Тбилисского университета" (т.210) представляет собой выпуск 8 серии "Математика.Механика.Астрономия",выходящей с 1976г. в виде отдельных сборников.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

210, 1980

УДК 538

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Дж.В.Шарикадзе

Как известно, для решения нелинейных уравнений пограничного слоя почти не был применен метод функций Грина. В этой статье мы проиллюстрируем применение этого метода для обтекания пластины вязкой слабопроводящей несжимаемой жидкостью, когда перпендикулярно к пластине действует внешнее магнитное поле.

Рассмотрены две задачи. В первой изучено обтекание пористой пластины, когда толщина пограничного слоя конечна. Во втором случае рассматривается автомодельная задача обтекания непроницаемой пластины при условии, что внешнее магнитное поле пропорционально $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и имеется асимптотический пограничный слой.

I. Рассмотрим продольное обтекание полубесконечной пористой пластины вязкой слабопроводящей несжимаемой жидкостью, когда перпендикулярно к пластине действует внешнее однородное магнитное поле H_0. Тогда основное уравнение пограничного слоя, записанное с помощью функций тока $\psi(x,y)$, имеет вид

$$\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - M^2\left(U_\infty - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}, \tag{I}$$

где $U_\infty(x)$ - скорость внешнего потока, $M^2 = \frac{\sigma H_0^2}{\rho}$.

Будем рассматривать пограничный слой конечной толщины $\delta(x)$. Граничные условия для функции $\psi(x,y)$ при этом будут

$$\psi = -v_0 x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty \qquad \text{при} \quad y = \delta(x), \tag{2}$$

где v_0 - скорость вдува через пластину.

Для определения толщины $\delta(x)$ потребуем выполнение условия плавного перехода скорости пограничного слоя в скорость внешнего потока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \quad y = \delta(x). \tag{3}$$

Легко показать, что решение задачи (I)-(2) можно представить в виде:

$$\psi(x,y) = A(x,y) + \frac{1}{\nu}\int_0^\delta \left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - M^2\left(U_\infty - \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}\right] G(x,y,\eta)\, d\eta, \tag{4}$$

где функция $A(x,y)$ дается выражением

$$A(x,y) = -v_0 x + \frac{U_\infty(x)}{2\delta(x)} y^2, \tag{5}$$

которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0 \tag{6}$$

и граничным условиям (2), а $G(x,y,\eta)$ — функция Грина задачи (6) - (2), имеющая вид

$$G(x,y,\eta)=\begin{cases} G_1=\frac{y^2}{2}\left[\frac{\eta}{\delta(x)}-1\right], & 0\le y<\eta \\ G_2=\frac{\eta^2}{2}+\eta\left[\frac{y^2}{2\delta(x)}-y\right], & \eta<y\le\delta(x). \end{cases} \qquad (7)$$

Т.о., определение $\psi(x,y)$ приведено к решению интегро-дифференциального уравнения (4). Если искать решение этого уравнения методом последовательных приближений, и ограничиться только первыми двумя приближениями, получим

$$\psi(x,y)\approx -v_0x+\frac{U_\infty}{2\delta}y^2+\frac{1}{\nu}\left\{\frac{U_\infty}{2\delta}\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right)'\left(\frac{y^5}{60}-\frac{y^2\delta^2}{24}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{v_0U_\infty}{\delta}-U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}-M^2U_\infty\right)\left(\frac{y^3}{\delta}-\frac{y^2\delta}{4}\right)+$$

$$\left.+\frac{M^2U_\infty}{\delta}\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y^2\delta^2}{12}\right)\right\}. \qquad (8)$$

Если сейчас воспользоваться условием (3), получим для определения толщины $\delta(x)$ уравнение

$$\frac{d\delta^2}{dx}+6\left(\frac{d\ln U_\infty}{dx}+\frac{8}{3}\frac{M^2}{U_\infty}\right)\delta^2-\frac{8}{U_\infty}(v_0\delta+2\nu)=0. \qquad (9)$$

Из (9) можно получить разные выражения толщины пограничного слоя $\delta(x)$, соответственно, компонентов скорости $u(x,y)=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v(x,y)=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ и поверхностного трения τ, в зависимости от выбора скорости внешнего потока $U_\infty(x)$, скорости вдува v_0 и внешнего магнитного поля.

Например, если $v_0=0$, $U_\infty=const$, получим

$$\delta^2 = \frac{6\nu}{M^2}\left(1 - e^{-\frac{8}{3}\frac{M^2}{U_\infty}x}\right)$$

Эта формула получена в работах /I,2/ иным путем.

2. Известно, что задача обтекания пластины автомодельна, если внешнее магнитное поле удовлетворяет условию

$$H_0^2 = M^2 \frac{\rho U_\infty}{\sigma x} \tag{I0}$$

где $M^2 = const$, $U_\infty = const$, ρ - плотность жидкости, σ - коэффициент электропроводности. Здесь для простоты рассматриваем случай $v_0 = 0$.

Тогда, вводя, как и в обычной теории пограничного слоя, новую функцию

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty}\, f(\eta), \tag{II}$$

где

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \tag{I2}$$

уравнение (I) примет вид

$$f''' + M^2(1 - f') = \frac{1}{2} f f'', \tag{I3}$$

а граничные условия для асимптотического пограничного слоя будут

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \tag{I4}$$

Введем новую функцию $\varphi(\eta)$ соотношением

$$f(\eta) = \eta - \varphi(\eta). \tag{I5}$$

Тогда задача (I3) - (I4) преобразуется в задачу

$$\varphi''' - M^2\varphi' = \frac{1}{2}(\varphi\varphi'' - \eta\varphi''), \tag{I6}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \varphi'(\infty) = 0. \tag{I7}$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$\varphi(\eta) = A(\eta) + \frac{1}{2}\int_0^\infty (\varphi\varphi'' - \xi\varphi'')\, G(\eta,\xi)\, d\xi, \tag{18}$$

где $A(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$A''' - M^2 A' = 0 \tag{19}$$

и граничным условиям (I7). Решение $A(\eta)$ имеет вид

$$A(\eta) = \frac{1}{M}\left(1 - e^{-M\eta}\right). \tag{20}$$

Функция $G(\eta,\xi)$ – функция Грина задачи

$$G''' - M^2 G' = 0$$
$$G\big|_{\eta=0} = G'\big|_{\eta=0} = G'\big|_{\eta=\infty} = 0. \tag{21}$$

Она представляетс выражением

$$G(\eta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2M^2}\left[2e^{-M\xi} - e^{-M(\xi-\eta)} - e^{-M(\xi+\eta)}\right] & 0 \le \eta < \xi \\ \dfrac{1}{2M^2}\left[2e^{-M\xi} - 2 + e^{-M(\eta-\xi)} - e^{-M(\eta+\xi)}\right] & \xi < \eta < \infty. \end{cases} \tag{22}$$

Будем искать решение (I8) в виде

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \varphi_k \tag{23}$$

Тогда первые два приближения дадут

$$\varphi(\eta) \approx \frac{1}{M}\left(1 - e^{-M\eta}\right) + \frac{1}{48M^3}\Big[(4 - 12M\eta)e^{-3M\eta} - (13 - 18M\eta)e^{-2M\eta} + (14 - 6M\eta + 6M^2\eta^2)e^{-M\eta} - 5\Big].$$

При таком приближении для поверхностного трения на пластине будем иметь

$$\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}}\left(M - \frac{H}{24M}\right).$$

Для местного коэффициента сопротивления получим выражение

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2M - \frac{H}{12M}}{\sqrt{R_x}}$$

Поступила IO.У.1979

Кафедра механики сплошных сред.

ЛИТЕРАТУРА

I. Д.В.Шарикадзе, Труды I респ.конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену, Изд.Киевского университета, 1969.

2. Д.В.Шарикадзе, И.П.Грдзелидзе, Труды Тбилисского университета. Математика,механика, астрономия, I89,I977.

ჯ. შარიქაძე

ბლანტი სითხის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა
გრინის ფუნქციის მიხედვით

რეზიუმე

გრინის ფუნქციის მეთოდის გამოყენებით ამოხსნილია ნახევრად უსასრულო ფოროვანი და არაფოროვანი ფირფიტის გარსდენის ამოცანა შესაბამისად სასრული და ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენის შემთხვევაში.

J.Sharikadze

SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF CONDUCTIVE FLUID BY GREEN'S FUNCTION METHOD

Summary

The some problems of flow around a plate is solved by the Green's function method.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

210, 1980

УДК.532.546

О ФИЛЬТРАЦИИ В ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ ЗЕМЛЯНЫХ ПЛОТИНАХ

А.Р.Цицкишвили

Рассмотрим задачу фильтрации через земляную плотину трапецеидального сечения, которая построена на водонепроницаемом основании. Предположим, что в нижнем бьефе плотины глубина воды равна нулю, капиллярное поднятие грунта, испарение или инфильтрация со свободной поверхности отсутствуют. Схема движения дается на рис.

Ниже, дополнительно к результатам работы / I /, рассматривается случай, когда нижние и верхние откосы плотины соответственно вертикальны и наклонны к горизонту. Случай, когда расположение откосов обратное, был рассмотрен П.Я.Полубариновой-Кочиной / 2,3 /. В конце работы приводятся некоторые результаты расчетов.

Отнесем область течения к комплексной плоскости $z = x+iy$, где x и y направлены согласно схеме (см. рис.). Введем приведенный комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – соответственно потенциал скорости и функция тока, поделенные на коэффициент фильтрации $\varkappa$.

Отобразим конформно верхнюю полуплоскость плоскости $\zeta = t + i\tau$ на область фильтрации z и комплексного потенциала $\omega(\zeta)$. Пусть точки оси t, соответствующие точке перегиба и концам участков границ областей z и ω, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 будут, соответственно, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, при этом $-\infty < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < +\infty$.

Целью данной работы является: найти функции $z = z(\zeta)$, $\omega = \omega(\zeta)$, координаты точки b_2, приведенный расход на фильтрацию Q и уравнение линии депрессии.

Введем аналитический вектор $\Phi(\zeta) = (z, \omega)$ и вектор $f(t) = (f_1, f_2)$. Продолжим вектор $\Phi(\zeta)$ известным способом на нижнюю полуплоскость ζ и обозначим его опять-таки через $\Phi(\zeta)$ / 4 /. Тогда данную задачу можно привести к следующей задаче сопряжения относительно вектора $\Phi(\zeta)$:

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t) + f(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения вектора $\Phi(\zeta)$ с верхней и нижней полуплоскостей соответственно. Матрица $g(t)$ и вектор $f(t)$ на различных участках границы определяются так:

$$g_0(t) = \begin{Vmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{Vmatrix}, f(t) = [0, 0], -\infty \leq t < a_1, \; a_5 < t \leq +\infty;$$

$$g_1(t) = \begin{Vmatrix} e^{-i2\pi\beta}, 0 \\ i(e^{-i2\pi\beta} - 1), -1 \end{Vmatrix}, f(t) = i2L\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}[1, i], \tag{2}$$
$$a_1 < t < a_2;$$

$$g_2(t)=\begin{Vmatrix} 1, & -2i \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad f(t)=2Q[1,i], \quad a_2<t<a_4;$$

$$g_3(t)=\begin{Vmatrix} e^{i2\pi\alpha}, & 0 \\ 0, & -1 \end{Vmatrix}, \quad f(t)=2H[0,-1], \quad a_4<t<a_5;$$

где $\pi\alpha$, $\pi(1-\beta)$ - углы наклонов верхнего и нижнего откосов, L - длина основания плотины, H - глубина воды в верхнем бьефе.

В отличие от известной задачи сопряжения / 4 / , в задаче (I) часть параметров a_k и приведенный расход Q неизвестны, поэтому решение задачи (I) класса $h_k = h_k(a_1, a_2, a_4, a_5)$, удовлетворяющее условию $\Phi(\zeta)=\overline{\Phi(\bar\zeta)}$, не всегда дает решение исходной задачи.

На линии депрессии имеются точка перегиба b_3 , которой на годографе скорости соответствует конец надреза точка B_3 (точкам b_j на годографе соответствуют точки B_j). При наличии надрезов вдоль участков контура годографа скорости между решением исходной задачи и решением задачи (I) класса h_k , т.е. ограниченного во всех неособенных точках, эквивалентность нарушается.

Рассмотрим следующие однородные граничные условия:

$$\Phi_0^+(t)=g(t)\Phi_0^-(t), \quad -\infty<t<+\infty, \tag{3}$$

$$\Phi^{+\prime}(t)=g(t)\Phi^{-\prime}(t), \quad -\infty<t<+\infty. \tag{4}$$

Первое из этих условий получается из (I) при $f(t)=0$, а второе - дифференцированием условия (I) вдоль оси t . Векторы $\Phi^{\pm}(t)$ и матрицу $g(t)$ можно продифференцировать вдоль границы.

Вне интервала (a_1, a_5) $f(t) = 0$, поэтому можно допустить, что элементы искомой канонической матрицы класса h_κ для задачи (3) в точке $t = \infty$ могут иметь полюсы.

Чтобы построить каноническую матрицу / 4 / класса h_κ для задачи (3), пригодной для фильтрационной задачи, мы должны найти функцию, конформно отображающую полуплоскость $Im(\zeta) > 0$ на область годографа скорости данной задачи. С этой целью рассмотрим характеристическое уравнение относительно точки a_j :

$$\det \left\| g_{j-1}\, g_j^{-1} - \lambda I \right\| = 0, \qquad (5)$$

где λ - параметр, а I - единичная матрица.

Обозначим характеристические корни для точки a_j через $\lambda_{\kappa j}$, $\kappa = 1, 2$. Составим выражения $\rho_{\kappa j} = (2\pi i)^{-1} \ln \lambda_{\kappa j}$

Числа $\rho_{\kappa j}$ определяются с точностью до целых слагаемых, которые нужно подбирать так, чтобы разность $|\rho_{2j} - \rho_{1j}| = \nu_j$, где $\pi \nu_j$ - внутренний угол в точке B_j на годографе скорости. Для нашей задачи показатели имеют вид: $\rho_{11} = \beta$, $\rho_{21} = 1/2$; $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 1/2 - \beta$; $\rho_{13} = 0$, $\rho_{23} = 2$; $\rho_{14} = 1/2$, $\rho_{24} = 1 - \alpha$; $\rho_{15} = \alpha$, $\rho_{25} = 1/2$.

Сумма показателей для всех особых точек $t = a_\kappa$, $t = \infty$ должна равняться четырем, поэтому: $\rho_{1\infty} = -1$, $\rho_{2\infty} = 0$.

Символ Римана нашей задачи имеет вид / I /:

$$\mathcal{P}(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_4)(\zeta-a_5)}\,\mathcal{P}_1\begin{Bmatrix} a_j, & a_1 & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \infty \\ \alpha_{1j}, & \beta, & 0, & 0, & 0, & \alpha-1/2, & 0; \zeta \\ \alpha_{2j}, & 1/2, & 1/2-\beta, & 2, & 1/2-\alpha, & 0, & 1 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Решение задачи (4) можно получить из функции (6) делением на выражение $(t-a_1)(t-a_4)(t-a_5)$.

Для символа $\mathcal{P}_1$ уравнение функции имеет вид:

$$U''(\zeta)+P(\zeta)U'(\zeta)+q(\zeta)U(\zeta)=0, \tag{7}$$

$$P(\zeta)=\sum_{j=1}^{5}\frac{1-\alpha_{1j}-\alpha_{2j}}{\zeta-a_j}, \quad q(\zeta)=\sum_{j=1}^{5}\left[\frac{\alpha_{1j}\alpha_{2j}}{(\zeta-a_j)^2}+\frac{c_j}{\zeta-a_j}\right], \tag{8}$$

где c_j - акцессорные параметры, которые удовлетворяют пока трем условиям:

$$\sum_{j=1}^{5}c_j=0, \quad \sum_{j=1}^{5}(a_j c_j+\alpha_{1j}\alpha_{2j})=0, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{5}(a_j^2 c_j+2a_j\alpha_{1j}\alpha_{2j})=0.$$

Уравнение (7) вблизи точки a_j перепишем так:

$$(\zeta-a_j)^2U''(\zeta)+(\zeta-a_j)P_j^*(\zeta)U'(\zeta)+q_j^*(\zeta)U(\zeta)=0, \tag{10}$$

$$P_j^*(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{jn}(\zeta-a_j)^n; \quad P_{j0}=1-\alpha_{1j}-\alpha_{2j},$$

$$P_{jn}=(-1)^{n-1}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{5}\left[\frac{1-\alpha_{1k}-\alpha_{2k}}{(a_j-a_k)^n}\right], \quad n\geq 1, \tag{11}$$

$$q_j^*=\sum_{n=0}^{\infty}q_{jn}(\zeta-a_j)^n, \quad q_{j0}=\alpha_{1j}\alpha_{2j}; \quad q_{j1}=c_j; \tag{12}$$

$$q_{jn} = (-1)^{n-2} \sum_{k=1, k\neq j}^{5} \left[\alpha_{1k}\alpha_{2k}(a_j-a_k)^{-m}(m-1)+C_k(a_j-a_k)^{-(m-1)}\right]$$

Локальные решения уравнения (10) имеют вид:

$$U_{kj}(\zeta)=(\zeta-a_j)^{\alpha_{kj}}\gamma_{oj}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{nj}^{k}(\zeta-a_j)^{n}\right], \quad k=1,\,2. \tag{13}$$

Коэффициенты γ_{nj}^{k} определяются по рекуррентным формулам / 5 /:

$$f_{oj}(\alpha_{kj})=0,$$

$$\gamma_{nj}^{k} f_{oj}(\alpha_{kj}+n)+\gamma_{(n-1)j}^{k}(\alpha_{kj}+(n-1))+\dots+ \tag{14}$$

$$+\gamma_{1j}^{k} f_{(n-1)j}(\alpha_{kj}+1)+f_{nj}(\alpha_{kj})=0,$$

$$f_{oj}(\alpha_{kj}+n)=n\left[n+(-1)^{k}\nu_j\right], \tag{15}$$

$$f_{nj}(\alpha_{kj})=\alpha_{kj}P_{jn}+q_{jn}.$$

Из формул (14) определяются все коэффициенты, а γ_{oj} остается пока неопределенным.

Для точки $\zeta=a_3$ разность $\rho_{23}-\rho_{13}=2$, поэтому формулы (14) позволяют определить только одно решение $v_{23}(t)$, соответствующее корню $\rho_{23}=2$, а второе решение $v_{13}(t)$ определяется по методу Фробениуса /1,6 /.

$$v_{13}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{k3}^{*1}(t-a_3)^{k} \tag{16}$$

при условии:

$$\sum_{k=1, k\neq 3}^{5}\frac{c_k}{a_3-a_k}=-\frac{\beta/2}{(a_3-a_1)^2}-C_3(C_3+P_{31}). \tag{17}$$

Коэффициенты ряда (16) вычисляются по формулам:

$$\gamma^{*1}_{13} = q_{31} = c_3 \; ; \quad \gamma^{*1}_{23} = -\frac{1}{2}\left[p_{31}(p_{31} + 2q_{31}) + p_{32}\right], \tag{18}$$

$$\gamma^{*1}_{n3} f_{03}(\alpha_{13}+n) + \gamma^{*1}_{(n-1)3}(\alpha_{13}+n-1) + \dots +$$
$$+ \gamma^{*1}_{13} f_{(n-1)3}(\alpha_{13}+1) + f_{n3}(\alpha_{13}) = 0 \, , \quad n \geqslant 3 .$$

Для некоторых значений α и β точки a_2 , a_4 могут быть расположены, соответственно, ближе к точкам a_1 , a_5 . Поэтому, чтобы осуществить аналитическое продолжение функции $\mathcal{U}_{kj}(t)$ вдоль оси t , требуется определить решение уравнения (10) для обыкновенной точки. За такую точку возьмем a_6 , для которой ряды $\mathcal{U}_{k6}(t)$ определяются по формулам (14), только следует взять:

$$q_{61} = c_6 = 0, \quad \alpha_{16} = 0 \; ; \quad \alpha_{26} = 1, \; \gamma^{1}_{16} = -p_{61} .$$

Зафиксируем параметры a_k следующим образом: $a_1 = -1, a_2,$ $a_3 = 0, a_4, a_5 = 1, a_6 = a_2/2$. Тогда, решая систему (9) и (17) относительно c_1, c_2, c_4, c_5 (определитель системы (9) и (17) отличен от нуля при $-1 < a_2 < 0$, $0 < a_4 < 1$), имеем:

$$c_1 = \{-c_3[(\alpha-\beta)a_2 a_4 + a_4(1/2-\beta) + a_2(1/2-\alpha)] -$$
$$- c_3^2 a_2 a_4 + (3 + a_2 + a_4 - a_2 a_4)\beta/2\} / [2(1+a_2)(1+a_4)] \, ;$$

$$c_2 = \{-c_3[a_2 a_4(\alpha-\beta-1) - a_4(\beta+1/2) + a_2(1/2-\alpha)] - \tag{19}$$
$$- c_3^2 a_2 a_4 - \beta a_2(1+a_4)\} / [(a_2 - a_4)(1-a_2^2)] \, ;$$

$$C_4=\{-C_3[a_2a_4(\alpha-\beta-1)+a_4(1/2-\beta)-a_2(1/2+\alpha)]+$$
$$+C_3^2a_2a_4+\beta a_4(1+a_2)\}/[(a_2-a_4)(1-a_4^2)];$$

$$C_5=\{C_3[a_2a_4(\alpha-\beta-2)+a_4(1/2-\beta)+a_2(1/2-\alpha)]+$$
$$+C_3^2a_2a_4+\beta(1+a_2)(1+a_4)/2\}/[2(1-a_2)(1-a_4)].$$

Решения уравнения (7) вблизи точки $t=\infty$ имеют вид:

$$U_{k\infty}(t)=t^{1-k}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{n\infty}^{k}t^{-(n+2-k)},\quad k=1,2, \tag{20}$$

где коэффициенты $\gamma_{n\infty}^{k}$ определяются рекуррентными формулами.

Проведем разрез по действительной оси плоскости ζ так, чтобы, при $t>a_j$ имело место $[exp[\alpha_{kj}\ln(t-a_j)]]^+=$ $=[exp[\alpha_{kj}\ln(t-a_j)]]^-$.

Составим матрицы

$$\Theta_j(t)=\begin{Vmatrix}U_{1j}(t), & U'_{1j}(t)\\ U_{2j}(t), & U'_{2j}(t)\end{Vmatrix},\quad t>a_j, \tag{21}$$

$$Q_j^*(t)=\begin{Vmatrix}U_{1j}^*(t), & U_{1j}'^*(t)\\ U_{2j}^*(t), & U_{2j}'^*(t)\end{Vmatrix},\quad t<a_j, \tag{22}$$

$$K_j^{\pm}=\begin{Vmatrix}e^{\pm i\pi\alpha_{1j}}, & 0\\ 0, & e^{\pm i\pi\alpha_{2j}}\end{Vmatrix},\quad T_j=\begin{Vmatrix}p_j, & q_j\\ r_j, & s_j\end{Vmatrix}, \tag{23}$$

$$\Theta_\infty(t)=\begin{Vmatrix}U_{1\infty}(t), & U'_{1\infty}(t)\\ U_{2\infty}(t), & U'_{2\infty}(t)\end{Vmatrix}, \tag{24}$$

$$U_{kj}(t)=(t-a_j)^{\alpha_{kj}}\gamma_{0j}V_{kj}(t),\quad V_{kj}(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{nj}^{k}(t-a_j)^{n},$$

$$U'_{kj}(t)=(t-a_j)^{\alpha_{kj}-1}\gamma_{0j}V^*_{kj}(t),\quad V^*_{kj}(t)=\alpha_{kj}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{nj}^{k}(\alpha_{kj}+n)(t-a_j)^{n}, \tag{25}$$

$$U^*_{kj}(t)=(a_j-t)^{\alpha_{kj}}\gamma_{0j}V_{kj}(t),\quad U'^*_{kj}(t)=-(a_j-t)^{\alpha_{kj}-1}V^*_{kj}(t),$$

где T_j - постоянные действительные матрицы, а

$$\varkappa_0(t)=\sqrt{(t-a_4)(t-a_5)}>0,\quad t>a_5.$$

Между матрицами (21), (22), (13) существуют зависимости /1/ :

$$\Theta_j^*(t)=T_{j-1}\Theta_{j-1}(t),\quad \Theta_j^{\pm}(t)=K_j^{\pm}\Theta_j^*(t),\quad a_{j-1}<t<a_j, \tag{26}$$

где $\Theta_j^+(t)$, $\Theta_j^-(t)$ - предельные значения матриц $\Theta_j(\zeta)$ с верхней и нижней полуплоскостей соответственно, а в матрице $K_j^{\pm}$ знаки $\pm$ выбираются соответственно.

Пользуясь тождеством Лиувилля, для матрицы $\Theta_j(t)$ получим равенство:

$$\gamma_{0j}^2(t-a_j)^{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1}\left[V_{1j}(t)V^*_{2j}(t)-V^*_{1j}(t)V_{2j}(t)\right]=$$

$$=(t-a_j)^{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1}\prod_{k=1,k\neq j}^{5}|t-a_k|^{\alpha_{1k}+\alpha_{2k}-1} \tag{27}$$

Для каждой точки a_j определитель матрицы $\Theta_j(t)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, отличного от нуля. За счет подбора этой постоянной определителю матрицы $\Theta_j(t)$ всегда можно придать вид, выписанный в правой части формулы (27).

Деля обе части (27) на $(t-a_j)^{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1}$, а затем переходя к пределу, когда $t \to a_j$, и учитывая, что

$$\lim_{t\to a_j} [V_{1j}(t)V^*_{2j}(t)-V^*_{1j}(t)V_{2j}]=\nu_j, \qquad (28)$$

для γ_{oj} получим формулу:

$$\gamma_{oj}=\left[\nu_j \prod_{k=1,\,k\neq j}^{5} |a_j-a_k|^{1-\alpha_{1k}-\alpha_{2k}}\right]^{-1/2}. \qquad (29)$$

В случае, когда в одном решении имеется логарифмический член, как это легко проверить, имеет место равенство

$$\lim_{t\to a_j} [V_{1j}(t)V^*_{2j}(t)-V^*_{1j}(t)V_{2j}]=1.$$

Следовательно, формула (29) сохраняется, если вместо ν_j подставить единицу.

На основании формул (26), (29), получим

$$\det T_j=-1, \quad j=1,2,3,4,5. \qquad (30)$$

Рассмотрим матрицу

$$\chi(\zeta)=T_o\,\chi_o(t)\,\Theta_5(t), \quad t>a_5 \qquad (31)$$

С помощью первого столбца матрицы $\chi(\zeta)$ составляется функция $z(t)=u_1(t)/u_2(t)$, где $u_1(t)=\chi_o(t)[P_o u_{15}(t)+q_o u_{25}(t)]$, $u_2(t)=\chi_o(t)[r_o u_{15}(t)+s_o u_{25}(t)]$, которая конформно отображает полуплоскость $I(\zeta)>0$ на область годографа скорости данной задачи, поэтому матрицы $\chi^{\pm}(t)$ должны удовлетворять условию (3) или (4). Из равенства $\chi^+(t)=\chi^-(t)$, $t>a_5$, следует, что T_o - действительная матрица. Продолжив матрицу $\chi(\zeta)$ вдоль оси t, для различных промежутков (a_{j-1}, a_j) матрицы

$\chi^{\pm}(t)$ определятся так:

$$\chi^{\pm}(t)=\pm i|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}\theta_5^*(t),\ \chi^{\pm}(t)=\pm i|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4\theta_4(t),\ a_4<t<a_5;$$

$$\chi^{\pm}(t)=-|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4K_4^{\pm}\theta_4^*(t),\quad a_3<t<a_4;$$

$$\chi^{\pm}(t)=-|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4K_4^{\pm}T_3\theta_3(t),\quad a_3<t<a_4;$$

$$\chi^{\pm}(t)=-|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4K_4^{\pm}T_3T_6\theta_6(t),\quad a_6<t<a_3; \tag{32}$$

$$\chi^{\pm}(t)=-|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4K_4^{\pm}T\theta_2(t),\quad a_2<t<a_6;$$

$$\chi^{\pm}(t)=-|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4K_4^{\pm}TK_2^{\pm}\theta_2^*(t),\quad a_1<t<a_2;$$

$$\chi^{\pm}(t)=-|\chi_0(t)|T_0K_5^{\pm}T_4K_4^{\pm}TK_2^{\pm}T_1\theta_1(t),\quad a_1<t<a_2;$$

$$T=T_3T_6T_2,\quad |\chi_0^*(t)|=\sqrt{|(t-a_4)(t-a_5)|}>0. \tag{33}$$

Условия, полученные при обходе точек a_5, a_4, a_2, a_1, соответственно, имеют вид / 1 /:

$$q_0=0,\quad r_0=0, \tag{34}$$

$$P_0P_4\cos(\pi\alpha)-S_0r_4=0, \tag{35}$$

$$S_4=0, \tag{36}$$

$$P_4q\sin(\pi\alpha)+q_4S=0, \tag{37}$$

$$P_4P\cos\pi(\alpha+\beta)-q_4r\sin(\pi\beta)=0, \tag{38}$$

$$r_1q_3+P_1P_3\sin(\pi\beta)=0, \tag{39}$$

$$q_1P_3+S_1q_3\sin(\pi\beta)=0. \tag{40}$$

Условия совместимости систем (37), (38) и (39), (40) относительно (P_4, q_4) и (P_3, q_3), соответственно, имеют вид:

$$(Pq)/(qr)=-\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)/\cos\pi(\alpha+\beta), \tag{41}$$

$$(P_1 S_1)/(r_1 q_1) = \sin^{-2}(\pi\beta). \qquad (42)$$

Для определения матриц T_j имеем равенства:

$$T_{j-1} = \theta_j^*[t_{(j-1)j}]\,\theta_{j-1}^{-1}[t_{(j-1)j}], \qquad (43)$$

$$j = 2,5,4, \quad a_{j-1} < t_{(j-1)j} < a_j,$$

$$t_{12} = e_1 = a_2 - 0{,}01, \quad t_{34} = e_4 = a_4 - 0{,}01, \quad t_{45} = e_5 = a_4 + 0{,}01$$

$$T_6 = \theta_3^*[t_{63}]\,\theta_6^{-1}[t_{63}], \quad a_6 < t_{63} < a_3, \quad t_{63} = a_3 - 0{,}01, \qquad (44)$$

$$T_2 = \theta_6^*[t_{26}]\,\theta_2^{-1}[t_{26}], \quad a_2 < t_{26} < a_6. \qquad (45)$$

Исследуем систему уравнений (35), (36), (37), (39), (41), (42).

Из уравнений (35) можно определить P_0/S_0 в зависимости от $r_4/(P_4 \cos\pi\alpha)$. Если допустить, что элементы матриц T_4, T_1 известны, тогда из системы (37), (39), (41) определяются элементы матрицы T, а из (35) определяется P_0/S_0. Так как точка $t=\infty$ для уравнения (7) является обыкновенной, поэтому одна матрица, например, T_j, определяется через другие матрицы / 1,5 /. В нашем случае система из двух уравнений (36),(42) зависит от трех параметров c_3, a_2, a_4, при фиксированных α, β, следовательно, нам нужно найти еще одно уравнение, что и будет сделано ниже.

Если допустить, что параметры S_0/P, c_3, a_3, a_4 известны, тогда известны линейно-независимые решения уравнения (7), $U_1(\zeta)$, $U_2(\zeta)$ и, следовательно, $U_1'(\zeta)$, $U_2'(\zeta)$. Локальные представления $U_1(\zeta)$, $U_2(\zeta)$ и связь между ними дается для каждой особой точки по формулам (32).

Для задачи (3) каноническая матрица класса h_K, зависящая от параметров P_0/S_0, c_3, a_3, a_4, имеет вид:

$$\chi_1(\zeta)=T_0\chi_0(\zeta)\begin{Vmatrix} U_1(\zeta), U_1'(\zeta) \\ U_2(\zeta), U_2'(\zeta) \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1, & (\zeta-a_3)^{-1} \\ 0, & \gamma_0 R(\zeta)(\zeta-a_3)^{-1} \end{Vmatrix}, \tag{46}$$

где

$$R(\zeta)=(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)(\zeta-a_4)(\zeta-a_5), \quad \gamma_0=-[R(a_3)c_3]^{-1}. \tag{47}$$

Частные и суммарные индексы задачи класса h_K есть: $\varkappa_1=-1$, $\varkappa_2=-2$, $\varkappa_3=-3$.

Неоднородная задача (I) в классе h_K имеет единственное решение / 4 /:

$$\Phi(\zeta)=\frac{\chi_1(\zeta)}{2\pi i}\int_{a_1}^{a_5}[\chi_1^+(t)^{-1}]f(t)(t-\zeta)^{-1}dt, \tag{48}$$

при условии

$$\int_{a_1}^{a_5}h_2^+(t)dt=0, \quad h^+(t)=[h_1^+(t), h_2^+(t)]=[\chi_1^+(t)]^{-1}f(t). \tag{49}$$

Решение (48) в проекциях можно переписать так:

$$z(\zeta)=P_0F[U_1(\zeta),\zeta], \qquad \omega(\zeta)=S_0F[U_2(\zeta),\zeta], \tag{50}$$

где

$$F[V(\zeta),\zeta]=\frac{\chi_0(\zeta)}{2\pi i}\Big\{V(\zeta)\int_{a_1}^{a_5}h_1^+(t)(t-\zeta)^{-1}dt+$$

$$+(\zeta-a_3)^{-1}[V(\zeta)+R(\zeta)\gamma_0 V'(\zeta)]\int_{a_1}^{a_5} h_2^+(t)(t-\zeta)^{-1}dt\Big\}. \quad (51)$$

Составляющие вектора $h^+(t)$ определяются так:

$$\Delta(t)=\prod_{j=1}^{5}|t-a_j|^{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1},\quad \Delta_1(t)=|t-a_4|^{1/2}|t-a_5|^{1/2}\Delta(t); \quad (52)$$

$$\Delta_2(t)=|t-a_1|\cdot|t-a_2|\cdot|t-a_4|\cdot|t-a_5|\cdot\Delta_1(t); \quad (53)$$

$$\gamma_0=-[c_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)]^{-1}; \quad (54)$$

$$\tilde{U}_{kj}(t)=|t-a_j|^{\alpha_{kj}}V_{kj}(t); \quad (55)$$

$$\tilde{U}'_{kj}(t)=|t-a_j|^{\alpha_{kj}-1}V^*_{kj}(t); \quad (56)$$

$$h_k^+(t)=(-1)^k i2S_0^{-1}H\gamma_{05}\left[\tilde{U}'_{15}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+(t-a_3)^{k-1}\frac{\tilde{U}_{15}(t)}{\gamma_0\Delta_2(t)}\right],\ e_5<t<a_5;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^k i2S_0^{-1}H\gamma_{04}\Big[\Big(q_4\tilde{U}'_{24}(t)+P_4\tilde{U}'_{14}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}\Big)+$$

$$+\frac{(-1)^k(t-a_3)^{k-1}}{\Delta_2(t)\gamma_0}\Big(q_4\tilde{U}_{24}(t)+P_4\tilde{U}_{14}(t)\Big)\Big],\ a_4<t<e_5;$$

$$(57)$$

$$h_k^+(t)=(-1)^k 2iS_0^{-1}Q\gamma_{04}\Big[\Big(q_4\tilde{U}'_{24}(t)+P_4\sin(\pi\alpha)\tilde{U}'_{14}(t)\Big)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}-$$

$$-\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\Delta_2(t)\gamma_0}\Big(q_4\tilde{U}_{24}(t)+P_4\sin(\pi\alpha)\tilde{U}_{14}(t)\Big)\Big],\ e_4<t<a_4;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^{k-1}2iS_0^{-1}Q\gamma_{03}\Big[\Big(P_4 q_3\sin(\pi\alpha)+S_3 q_4\Big)\Big(\tilde{U}'_{23}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{23}(t)\Big)+\left(q_4 r_3+P_3P_4\sin(\pi\alpha)\right)\Big(\tilde{U}'_{13}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{13}(t)\Big)\Big],\quad a_3<t<a_4;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^{k-1}2iS_0^{-1}Q\gamma_{03}\Big[\left(P_4q_3\sin(\pi\alpha)+S_3q_4\right)\Big(\tilde{U}'_{23}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{23}(t)\Big)+\left(q_4r_3+P_3P_4\sin(\pi\alpha)\right)\Big(\tilde{U}'_{13}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{13}(t)\Big)\Big],\quad e_3<t<a_3;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^{k-1}2iS_0^{-1}Q\gamma_{06}\Big[\left(P_4q_4\sin(\pi\alpha)+S_5q_4\right)\Big(\tilde{U}'_{26}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{26}(t)\Big)+\left(q_4r_5+P_4P_5\sin(\pi\alpha)\right)\Big(\tilde{U}'_{16}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{16}(t)\Big)\Big],$$

$$e_2<t<a_3;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^{k}2iS_0^{-1}Q\gamma_{02}\Big[\left(q_4r_6+P_6P_4\sin(\pi\alpha)\right)\times$$

$$\times\Big(\tilde{U}'_{12}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{12}(t)\Big)\Big],\quad a_2<t<e_3;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^{k}2iS_0^{-1}L\sin(\pi\beta)\gamma_{02}\left(r_6q_4+P_4P_6\sin(\pi\alpha)\right)\times$$

$$\times\Big[\tilde{U}'_{12}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}+\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{12}(t)\Big],\quad e_1<t<a_2;$$

$$h_k^+(t)=(-1)^{k-1}2iS_0^{-1}L\sin(\pi\beta)\gamma_{01}\left(r_6q_4+P_4P_6\sin(\pi\alpha)\right)\times$$

$$\times\Big[q_1\Big(\tilde{U}'_{21}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}-\frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0\Delta_2(t)}\tilde{U}_{21}(t)\Big)+P_1\Big(\tilde{U}'_{11}(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)}-\frac{(t-a_3)^{k-1}\tilde{U}_{11}(t)}{\gamma_0\Delta_2(t)}\Big)\Big],$$

$$u_1<t<e_1;$$

$$e_2=a_2+0{,}01,\quad e_3=a_3-0{,}01,$$

$$\delta_{k1}=\begin{cases}1, & k=1\\ 0, & k=2\end{cases}$$

Уравнения свободной поверхности вблизи точек a_4 и a_2, соответственно, имеют вид:

$$x(t_0)=Q-y(t_0)tg(\pi\alpha)-P_0q_4F[U^*_{24}(t_0),t_0],\quad a_3<t_0<a_4, \tag{58}$$

$$y(t_0)=P_0P_4\cos(\pi\alpha)F[U^*_{14}(t_0),t_0]=-\varphi(t_0),\quad a_3<t_0<a_4, \tag{59}$$

$$x(t_0)=Q-S_0r_4Pctg(\pi\beta)F[U_{12}(t_0),t_0],\quad a_2<t_0<a_3, \tag{60}$$

$$y(t_0)=[Q-x(t_0)]tg(\pi\beta)+S_0r_4qF/U_{22}(t_0)t_0],\quad a_2<t_0<a_3 \tag{61}$$

По формулам (58) и (59) можно проверить, что имеет место равенство:

$$\lim_{t_0\to a_4}\frac{d}{dt_0}[x(t_0)]/\frac{d}{dt_0}[y(t_0)]=-tg(\pi\alpha). \tag{62}$$

Если в формулах (60) и (6I) перейти к пределу, когда $t_0\to a_2$, получим:

$$h=(L-L_0)tg(\pi\beta),$$

$$L_0=Q-\frac{1}{2\pi i}|x_0(a_2)|S_0r_4P\gamma_{02}ctg(\pi\beta)\int_{a_1}^{a_5}\frac{\ell_1^+(t)dt}{t-a_2}, \tag{63}$$

где $\ell_1^+(t)=h_1^+(t)+h_2^+(t)(a_2-a_3)^{-1},\ \ell_1^+(a_2)=0$, а L_0, h_0 - координаты точки b_2, которые определяются по формулам (63).

Если продифференцировать (60) и (6I) и составить отношение $y'(t_0)/x'(t_0)$, а затем перейти к пределу, когда $t_0\to a_2$, мы должны получить равенство $\lim y'(t_0)/x'(t_0)=-tg(\pi\beta)$, а для этого необходимо и достаточно потребовать условие:

$$\int_{a_1}^{e_1} \ell_2^+(t)(t-a_2)^{-1}dt+\int_{e_2}^{a_5} \ell_2^+(t)(t-a_2)^{-1}dt+\int_{e_1}^{a_2}[\ell_2^1(t)-\ell_2^1(a_2)]\times$$

$$\times\left(\frac{t-e_1}{a_2-t}\right)^{1/2-\beta}(t-a_2)^{-1}dt+\int_{a_2}^{e_2}[\ell_2^2(t)-\ell_2^2(a_2)]\left(\frac{e_2-t}{t-a_2}\right)^{1/2-\beta}(t-a_2)^{-1}dt+$$

$$+\pi[\cos(\pi\beta)]^{-1}[\ell_2^1(a_2)-\ell_2^2(a_2)]=0, \qquad (64)$$

где

$$\ell_2^+(t)=h_1^+(t)+\lambda_0 h_2^+(t), \quad \ell_2^1(t)=\ell_2^+(t)\left(\frac{a_2-t}{t-e_1}\right)^{1/2-\beta}, \qquad (65)$$

$$\ell_2^2(t)=\ell_2^+(t)\left(\frac{t-a_2}{e_2-t}\right)^{1/2-\beta}, \quad \lambda_0=\left[1-\frac{(1/2-\beta)(a_2-a_1)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}{c_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}\right]\frac{1}{a_2-a_3}.$$

Решая уравненичя (49), (64) относительно H/L , Q/L , получим:

$$H/L=[A_{21}A_{12}-A_{11}A_{22}]/[A_{11}A_{23}-A_{13}A_{21}], \qquad (66)$$

$$Q/L=[A_{22}A_{13}-A_{12}A_{23}]/[A_{11}A_{23}-A_{21}A_{13}], \qquad (67)$$

$$A_{11}=S_0\gamma_0(2iQ)^{-1}\int_{a_2}^{a_4} h_2^+(t)dt, \qquad A_{12}=S_0\gamma_0(2iL)^{-1}\int_{a_1}^{a_2} h_2^+(t)dt,$$

$$A_{13}=S_0\gamma_0(2iH)^{-1}\int_{a_4}^{a_5} h_2^+(t)dt,$$

$$A_{21}=S_0(2iQ)^{-1}\Big[\int_{e_2}^{a_4} \ell_2^+(t)(t-a_2)^{-1}dt+\int_{a_2}^{e_2}[\ell_2^2(t)-\ell_2^2(a_2)]\times \qquad (68)$$

$$\times\left(\frac{e_2-t}{t-a_2}\right)^{1/2-\beta}(t-a_2)^{-1}dt-\frac{\pi\ell_2^2(a_2)}{\cos(\pi\beta)}\Big];$$

$$A_{22}=(2iL)^{-1}S_0\Big[\int_{a_1}^{e_1} \ell_2^+(t)(t-a_2)^{-1}dt+$$

$$+\int_{e_1}^{a_2}[\ell_2^1(t)-\ell_2^1(a_2)]\left(\frac{t-e_1}{a_2-t}\right)^{1/2-\beta}(t-a_2)^{-1}dt+\frac{\pi\ell_2^1(a_2)}{\cos(\pi\beta)}\Big],$$

$$A_{23}=S_0(2iH)^{-1}\int_{a_4}^{a_5}\ell_2^1(t)(t-a_2)^{-1}dt,$$

$$\lim_{t\to a_2}\ell_2^2(t)=\ell_2^2(a_2),\quad \lim_{t\to a_2}\ell_2^1(t)=\ell_2^1(a_2).$$

Уравнение (66) есть искомое третье уравнение относительно C_3 , a_2 , a_4 , а уравнение (67) позволит определить приведенный расход Q.

Уравнение (63) можно переписать так:

$$\frac{L_0}{L}=\frac{Q}{L}-K_0\Big[B_{11}+\frac{Q}{L}B_{12}+\frac{H}{L}B_{12}\Big], \tag{69}$$

где

$$B_{11}=S_0(2iL)^{-1}\int_{a_1}^{a_2}\ell_1^+(t)(t-a_2)^{-1}dt, \tag{70}$$

$$B_{12}=S_0(2iQ)^{-1}\int_{a_2}^{a_4}\ell_1^+(t)(t-a_2)^{-1}dt,$$

$$B_{13}=S_0(2iH)^{-1}\int_{a_4}^{a_5}\ell_1^+(t)(t-a_2)^{-1}dt,$$

$$K_0=\frac{1}{\pi}|a_2-a_4|^{1/2}|a_2-a_5|^{1/2}r_4P_6\,ctg(\pi\beta). \tag{71}$$

Здесь заметим, что пользуясь результатами работы / 7 /, задачу (I) можно решить методом П.Я.Кочиной / 2,3 /. При этом нужно исходить из условия (4).

Из вышеприведенных формул получаются различные частные задачи для соответствующих параметров α , β , H , L за исключением случаев: $\alpha=1/2$, $\beta=1/2$; $\alpha=1/2,\beta$; $0<\alpha<1/2$, $\beta=1/2$. Случаи $\alpha=1/2$, $\beta=1/2$; $\alpha=1/2$, $0<\beta<1/2$, были рассмотрены в работе / 3 /, а случай, когда $\beta = 1/2$, $0 < \alpha < 1/2$, будет рассмотрен ниже.

Когда $\beta = 1/2$, $0 < \alpha < 1/2$, некоторые формулы, приведенные выше, будут изменяться.

Для точек a_1, a_2, для которых $\rho_{11} = \rho_{21} = 1/2$, $\rho_{12} = \rho_{22} = 0$, формулы (14) позволяют определить только по одному решению. Вторые решения, которые получают по формуле Лиувилля, мы найдем по методу Фробениуса / 6 /. По этому методу для точек a_1, a_2 формулу (13) нужно продифференцировать по α_{kj}, а затем подставить в нее соответственно α_{2j}, имеем:

$$U_{2j}(t) = (t-a_j)^{\alpha_{2j}} \gamma_{0j} \Big\{ \tilde{U}_{1j}(t) \ln(t-a_j) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_{nj}^2\right)' (t-a_j)^n \Big\}, \tag{72}$$

где коэффициенты $\left(\gamma_{nj}^2\right)'$ вычисляются по формулам:

$$\left(\gamma_{1j}^2\right)' f_0(\alpha_{2j+1}) + \gamma_{1j}^2 (2+\nu_j) + P_{j1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered} \left(\gamma_{nj}^2\right)' f_{0j}(\alpha_{2j+n}) + \left(\gamma_{(n-1)j}^2\right)' f_{1j}(\alpha_{2j} + (n-1)) + \\ + \left(\gamma_{(n-2)j}^2\right)' f_{2j}(\alpha_{2j+n-2}) + \ldots\ldots + \left(\gamma_{1j}^2\right)' f_{(n-1)j}(\alpha_{2j+1}) + \\ + \gamma_{nj}^2 (2n+\nu_j) + \gamma_{(n-1)j}^2 P_{j1} + \gamma_{(n-1)j}^2 P_{j2} + \\ + \gamma_{(n-3)j}^2 P_{j3} + \ldots\ldots + \gamma_{1j}^2 P_{j(n-1)} + P_{jn} = 0. \\ j = 1, 2, \quad \alpha_{21} = 1/2, \quad \alpha_{22} = 0. \end{gathered} \tag{73}$$

Матрицы $K_j^{\pm}$, для точек $j=1,2$, имеют вид:

$$K_1^{\pm} = \pm i \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ i\pi, & 1 \end{Vmatrix}, \quad K_2^{\pm} = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ \pm i\pi, & 1 \end{Vmatrix}. \tag{74}$$

Уравнения (34), (36), (37) остаются неизменными, а уравнения (38), (39), (46) принимают вид:

$$P_4 q\,(\sin(\pi\alpha) + \pi\cos\pi\alpha) + q_4 r = 0, \tag{75}$$

$$P_1 P_3 + q_3 (r_1 - \pi q_1) = 0, \tag{76}$$

$$P_3 q_1 + q_3 S_1 = 0. \tag{77}$$

Условия совместимости систем (37), (75); (76), (77), соответственно, имеют вид:

$$S q = -\frac{1}{\pi} tg(\pi\alpha), \tag{78}$$

$$\pi^2 q_1^2 = 1. \tag{79}$$

Составляющие вектора $h^+(t)$ сохраняют вид (57) в промежутках $a_2 < t < a_5$, а в промежутке (a_1, a_2) имеют вид:

$$h_k^+(t) = (-1)^{k-1} i\pi S_0^{-1} 2L P_4 q \gamma_{02} \cos(\pi\alpha)\left[\tilde{u}_{12}^*(t)\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(t-a_1)^{k-1}}{\gamma_0 \Delta_2(t)} U_{12}(t)\right], \quad e_1 < t < a_2; \tag{80}$$

$$h_k^+(t) = (-1)^k i 2\pi L P_0^{-1} q \gamma_0 \left\{\left[q_1 \tilde{U}_{21}'(t) + P_1 \tilde{u}_1''(t)\right]\frac{\delta_{k1}}{\Delta_1(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(t-a_3)^{k-1}}{\gamma_0 \Delta_2(t)}\left[q_1 \tilde{u}_{21}(t) + P_1 \tilde{u}_{11}(t)\right]\right\}, \quad a_1 < t < e_1.$$

Уравнения свободной поверхности вблизи точки $t = a_2$ имеют вид:

$$x(t_0) = Q - \pi S_0 \varkappa_4 q F[U_{12}(t_0), t_0], \tag{81}$$

$$y(t_0) = [x(t_0) - Q]P/(\pi q) - S_0 \varkappa_4 q F[U_{22}(t_0), t_0]. \tag{82}$$

При $t_0 < a_2$

$$x(t_0) = L, \tag{83}$$

$$y(t_0) = S_0 \varkappa_4 \{PF[U^*_{12}(t_0), t_0] + qF[U^*_{22}(t_0), t_0]\}. \tag{84}$$

Для случая $\beta = 1/2$ в формуле (63) нужно взять $\ell_2^+(t) = \ell_1^+(t)$ и член, стоящий вне интегралов, принимает вид:

$$\pi[h_2^+(a_2-0) - h_2^+(a_2+0)]\gamma_0(a_2-a_1)(a_2-a_4)(a_2-a_5)(a_2-a_3)^{-1}. \tag{85}$$

Ордината точки b_2 определяется по формуле:

$$h_0 = \frac{P}{\pi q}(L-Q) - \frac{|x_0(a_2)|P_0\cos(\pi\alpha)}{2\pi i} q \frac{\gamma_{02}}{a_2-a_3} \times$$

$$\times \Big[\int_{a_1}^{e_1} h_2^+(t)(t-a_2)^{-1}dt + \int_{e_2}^{a_5} h_2^+(t)(t-a_2)^{-1}dt + \int_{e_1}^{a_2}[h_2^+(t) - h_2^+(a_2-0)](t-a_2)^{-1}dt +$$

$$+ \int_{a_2}^{e_2}[h_2^+(t) - h_2^+(a_2+0)](t-a_2)^{-1}dt\Big]. \tag{86}$$

Параметры A_{1k}, $k = 1, 2, 3$ формально не меняются, а параметры A_{2k} имеют вид:

$$A_{21} = S_0(2iL)^{-1}\Big[\int_{a_1}^{e_1} \ell_1^+(t)(t-a_2)^{-1}dt + \int_{e_1}^{a_2}[\ell_1^+(t) - \ell_1^+(a_2)](t+a_2)^{-1}dt +$$

$$+ \pi h_2^+(a_2-0)\gamma_0(a_2-a_1)(a_2-a_4)(a_2-a_5)(a_2-a_3)^{-1}\Big], \tag{87}$$

$$A_{22}=S_0(2iQ)^{-1}\Big[\int_{a_2}^{a_4}\ell_1^+(t)(t-a_2)^{-1}dt+\int_{a_2}^{\ell_2}[\ell_1^2(t)-\ell_1^2(a_2)](t-a_2)^{-1}dt-$$

$$-\pi h_2^+(a_2+0)\gamma_0(a_2-a_1)(a_2-a_4)(a_2-a_5)(a_2-a_3)^{-1}\Big],$$

$$A_{23}=S_0(2iH)^{-1}\int_{a_1}^{a_5}\ell_1^+(t)(t-a_2)^{-1}dt.$$

Нам следует установить интервал изменения параметра c_3. В работе / I / был установлен интервал изменения для c_3 методом П.Я.Полубариновой-Кочиной применительно к уравнению (9) без доказательства. Этот метод в измененной форме можно изложить так. В случае $\beta=1$ область годографа скорости всегда можно привести к линейному многоугольнику, при этом сохраняется точка перегиба на линии депрессии. В граничных условиях (I) матрица перехода $g(t)$ становится верхнетреугольной. Преобразуем уравнение (7). Введем новую искомую функцию $V_1(\zeta)$ так:

$$U(\zeta)=\chi^*(\zeta)V_1(\zeta), \tag{88}$$

где

$$\chi^*(\zeta)=(\zeta-a_1)^{1/2}(\zeta-a_2)^{-1/2}. \tag{89}$$

Функция $\chi^*(\zeta)$ определяется из однородных граничных условий (3) относительно функции $\omega(\zeta)$. Показатели функции подбираются с таким расчетом, чтобы порядок функции $V_1(\zeta)$ на бесконечности равнялся порядку функции $U(\zeta)$

После подстановки (88) в уравнение (9) получим:

$$V_1''(\zeta)+P_1(\zeta)V_1'(\zeta)+Q_1(\zeta)V_1(\zeta)=0, \tag{90}$$

где

$$P_1(\zeta)=\frac{1/2}{\zeta-a_1}+\frac{1/2}{\zeta-a_2}-\frac{1}{\zeta-a_3}+\frac{1/2+\alpha}{\zeta-a_4}+\frac{3/2-\alpha}{\zeta-a_5}, \tag{91}$$

$$Q_1(\zeta)=q(\zeta)+P_1(\zeta)r^{*\prime}(\zeta)/r^*(\zeta)+r^{*\prime\prime}(\zeta)/r^*(\zeta). \tag{92}$$

После упрощений $Q_1(\zeta)$ принимает вид

$$Q_1(\zeta)=\sum_{k=1}^{5}\frac{c_k}{\zeta-a_k}+\frac{3}{4}\frac{1}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_3)}+$$
$$+\frac{1/2\,(1/2-\alpha)}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_4)}+\frac{1/2\,(3/2-\alpha)}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_5)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\zeta-a_3)(\zeta-a_2)}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1/2-\alpha}{(\zeta-a_2)(\zeta-a_4)}-\frac{1}{2}\frac{3/2-\alpha}{(\zeta-a_2)(\zeta-a_5)}. \tag{93}$$

Для этого случая соответствующая каноническая матрица класса h_k тоже верхнетреугольная и строится с помощью элементарных функций и интеграла типа Коши от элементарных функций из однородных граничных условий, но можно каноническую матрицу строить и с помощью линейно-независимых решений уравнения (90). Чтобы получить треугольную каноническую матрицу, одно из линейно-независимых решений (90) должно быть постоянным. Тогда подставляя постоянную в уравнение (90), получим тождество

$$Q_1(\zeta)=0 \tag{94}$$

относительно ζ.

Из (94) следует, что:

$$c_1=-\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{a_1-a_2}-\frac{1}{a_1-a_3}+\frac{1/2-\alpha}{a_1-a_4}+\frac{3/2-\alpha}{a_1-a_5}\right\}, \tag{95}$$

$$c_2=-\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_2-a_3}-\frac{1/2-\alpha}{a_2-a_4}-\frac{3/2-\alpha}{a_2-a_5}\right\}, \tag{96}$$

$$c_3=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a_3-a_2}-\frac{1}{a_3-a_1}\right\}, \tag{97}$$

$$c_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left\{\frac{1}{a_4-a_1}-\frac{1}{a_4-a_2}\right\}, \tag{98}$$

$$c_5=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\left\{\frac{1}{a_5-a_1}-\frac{1}{a_5-a_2}\right\}. \tag{99}$$

С другой стороны точка перегиба исчезает, когда плотина треугольной формы при некоторых α и β (например, $\alpha+\beta=1/2$) заполняется полностью водой. Для этого случая матрица $g(t)$ и соответствующая каноническая матрица класса h_K будут нижнетреугольными. Для этого случая $a_3\to a_2$, $a_4\to a_2$ и в уравнении (7) коэффициент $P(\zeta)$ принимает вид:

$$P(\zeta)=P_3(\zeta)=\frac{1/2-\beta}{\zeta-a_1}+\frac{1/2}{\zeta-a_2}+\frac{3/2-\alpha}{\zeta-a_5}. \tag{100}$$

Преобразуем уравнение (9) так:

$$U(\zeta)=\tau_1^*(\zeta)V_2(\zeta), \tag{101}$$

где

$$\tau_1^*(\zeta)=(\zeta-a_1)^{\beta}(\zeta-a_5)^{\alpha-1/2}. \tag{102}$$

В этом случае функция $\tau_1^*(\zeta)$ подбирается из однородных граничных условий относительно функции $Z(\zeta)$. Уравнение (7) относительно $V_2(\zeta)$ принимает вид:

$$V_2''(\zeta)+\left(P_3(\zeta)+2\tau_1^{*\prime}(\zeta)/\tau_1^*(\zeta)\right)V_2'(\zeta)+Q_2(\zeta)V_2(\zeta)=0, \tag{103}$$

где

$$P_3(\zeta)+2\tau_1^{*}/\tau_1^*(\zeta)=\frac{1/2-\beta}{\zeta-a_1}+\frac{1/2}{\zeta-a_2}+\frac{3/2-\alpha}{\zeta-a_5}, \tag{104}$$

$$Q_2(\zeta)=\sum_{j=1}^{3}\frac{c_j}{\zeta-a_j}+\frac{1/2\,(1/2-\alpha)}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_5)}+\frac{\beta/2}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)}+$$

$$+\frac{1/2\,(\alpha-1/2)}{(\zeta-a_2)(\zeta-a_5)}. \tag{105}$$

Если строить треугольную каноническую матрицу исходя из уравнения (103), то одно из линейно-независимых решений должно быть постоянной. Подставляя эту постоянную в уравнение (103), получим тождество

$$Q_2(\zeta)=0. \tag{106}$$

Из тождества (106) следует:

$$c_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{1}{a_1-a_5}+\frac{1}{a_1-a_2}\right), \tag{107}$$

$$c_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{1}{a_2-a_1}-\frac{1}{a_2-a_5}\right), \tag{108}$$

$$c_3=0, \tag{109}$$

$$c_4=0, \tag{110}$$

$$c_5=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{1}{a_5-a_1}-\frac{1}{a_5-a_2}\right). \tag{111}$$

Окончательно мы получим неравенство:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_3-a_1}-\frac{1}{a_3-a_2}\right)<c_3<0. \tag{112}$$

Параметры, определенные формулами (95) - (99) и (107) - (III), удовлетворяют условиям (9).

Метод П.Я.Полубариновой-Кочиной, изложенный выше, подходящим образом можно видоизменить и применить для установления интервалов для акцессорных параметров, которые встречаются при конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники.

По формулам (36), (42), мы произвели вычисления в Вычислительном центре АН ГССР.

Для кратности обозначим уравнения (36) и (42) соответственно следующим образом: $F_K(a_2, a_4, c_3) = 0, \quad K = 1, 2.$ Для простоты α и β фиксировали так: $\alpha = \beta = 1/4$. Затем решили систему $F_K(a_2, a_4, c_3) = 0, \quad K = 1, 2$. Фиксируя a_2 и a_4 в допустимых пределах $-1 < a_2 < 0$, $0 < a_4 < 1$, например, $a_2 = -0{,}8$, $a_4 = 0{,}2$, стали менять параметр c_3 в допустимых пределах $-1 < c_3 < 1$, с шагом c_3. Затем строили графики $F_K(-0{,}8;\ 0{,}2;\ c_3)$ в зависимости от c_3. На графике находили нули этих функций. Аналогично поступили для значений: $a_2 = -0{,}8,\ a_4 = 0{,}3;$ $a_2 = -0{,}8,\ a_4 = 0{,}4;\ a_2 = -0{,}8,\ a_4 = 0{,}5; \ldots,\ a_2 = -0{,}8,$ $a_4 = 0{,}8;\ a_2 = -0{,}7,\ a_4 = 0{,}2, \ldots,\ a_2 = -0{,}7,\ a_4 = 0{,}8;$ $a_2 = -0{,}2,\ a_4 = 0{,}2, \ldots,\ a_2 = -0{,}2,\ a_4 = 0{,}8.$

Обозначим нули функции $F_K(a_2, a_4, c_3)$ в указанных пределах так: $a_2^K,\ a_4^K,\ c_3^K$. На основании этих нулей, при фиксированном a_2^K построим графики $a_4^K(c_3^K)$. Найдем координаты пересечения этих графиков, что даст решение системы $F_K(a_2, a_4, c_3) = 0,\ \ K = 1,2$. Таблица некоторых решений системы имеет вид:

$$
\begin{array}{lll}
a_2 = -0{,}685 & a_4 = 0{,}190 & c_3 = -0{,}047 \\
a_2 = -0{,}690 & a_4 = 0{,}195 & c_3 = -0{,}048 \\
a_2 = -0{,}695 & a_4 = 0{,}200 & c_3 = -0{,}049 \\
a_2 = -0{,}700 & a_4 = 0{,}205 & c_3 = -0{,}050 \\
a_2 = -0{,}705 & a_4 = 0{,}210 & c_3 = -0{,}051 \\
a_2 = -0{,}710 & a_4 = 0{,}215 & c_3 = -0{,}052 \\
a_2 = -0{,}715 & a_4 = 0{,}220 & c_3 = -0{,}053
\end{array}
\qquad (113)
$$

$$\alpha = \beta = 1/4 .$$

Для удобства вычислений преобразовали формулы (66),(67),(69), которые здесь не приводим из-за громоздкости. Затем в преобразованные формулы подставили найденные нули (113) и получили значения H/L , Q/L , L_o/L , h/L . Полученные числа близки к ожидаемым числам. Соответствующая таблица чисел имеет вид:

0,404	0,240	0,605	0,395
0,392	0,266	0,662	0,338
0,382	0,230	0,733	0,267
0,371	0,205	0,760	0,240
0,312	0,184	0,802	0,198
0,301	0,178	0,851	0,149
0,275	0,156	0,937	0,063

(114)

где $\tilde{H} = H/L,\ \tilde{Q} = Q/L,\ \tilde{L}_o = L_o/L,\ \tilde{h} = h/L.$ (115)

Результаты вычислений можно использовать для различных целей, например, для построения графиков.

Поступила 15.У.1979.

Тбилисский математический институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Р.Цицкишвили. О фильтрации в плотинах с наклонными откосами. Труды Тбилисского математического института, т.П, 1976.
2. П.Я.Полубаринова-Кочина. Известия АН СССР, серия математическая, № 5-6, 1939.
3. П.Я.Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. М.-Л., 1952.
4. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1970.
5. В.В.Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950.
6. Э.Л.Аайнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
7. А.Р.Цицкишвили. Труды Тбилисского университета, 185, 1977.

ა.ციცქიშვილი

ფილტრაციის შესახებ ტრაპეციის ფორმის მიწის კაშხლებში

რეზიუმე

ეფექტურად ამოხსნილია ფილტრაციის ამოცანა მიწის კაშხალში, რომელსაც კვეთში ტრაპეციის ფორმა აქვს. კაშხლის ფუძე წყალს არ ატარებს. წყლის დონე ქვედა ბიეფში ნულის ტოლია. ამ ამოცანაში განსაკუთრებულ წერტილთა რიცხვი ხუთია. ამოცანა განხილულია იმ შემთხვევაში, როდესაც ფერდები ჰორიზონტთან სხვადასხვა კუთხეს ადგენენ. მიღებულია ფორმულები სითხის ხარჯის გამოსათვლელად, დეპრესიის მრუდის კოორდინატების და გამოჟონვის შუალედის მოსაძებნად. ამოცანის ამოხსნა მიყვანილია რიცხვებამდე.

A. Tsitskishvili

ON A FILTRATION IN TRAPEZOIDAL EARTHEN DAMS

Summary

The solution of the problem of filtration through the trapezoidal cross-section earthen dam is given with account of seepage interspace. The problem with five special points is reduced to the numerical results.

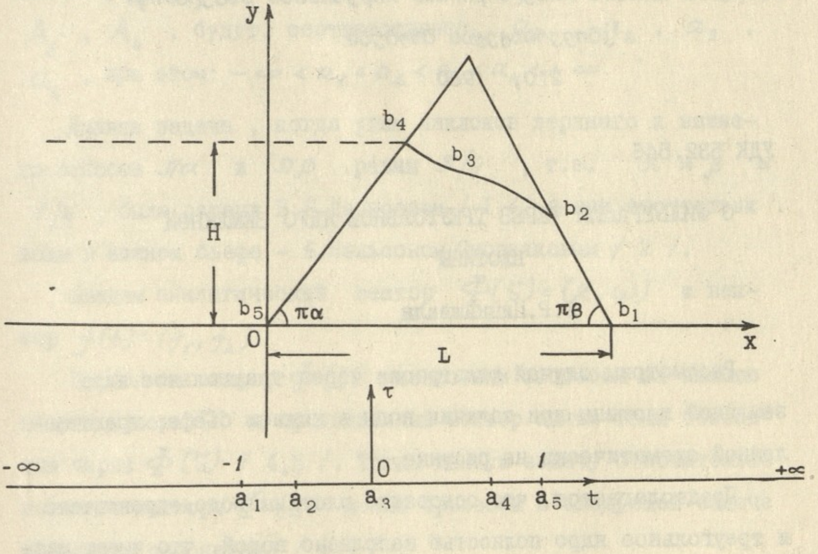


Рис.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
210, 1980

УДК 532.546

О ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ТРЕУГОЛЬНОЕ ЯДРО ЗЕМЛЯНОЙ ПЛОТИНЫ

А.Р.Цицкишвили

Рассмотрим случай фильтрации через треугольное ядро земляной плотины при наличии воды в нижнем бьефе, представленной схематически на рисунке.

Предполагается, что основание плотины водонепроницаемо и треугольное ядро полностью заполнено водой, что имеет место для определенных значений углов наклона верхнего и нижнего откосов. Для этой задачи областью годографа скорости, как известно, является пятиугольник / I / . Целью настоящей работы является решение этой задачи без рассмотрения годографа скорости.

Отнесем область течения в комплексной плоскости $z = x + iy$, где оси x и y направлены согласно схеме (рис.).

Введем комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – соответственно потенциал скорости и функция тока, поделенные на коэффициент фильтрации.

Отобразим конформно область комплексного потенциала и область фильтрации на верхнюю полуплоскость плоскости $\zeta = t + i\tau$. Пусть точки оси t, соответствующие концам участков границ областей z и ω, $-A_1$, A_2, A_3, A_4, будут, соответственно, a_1, a_2, a_3, a_4, при этом: $-\infty < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < +\infty$.

Данная задача, когда углы наклонов верхнего и нижнего откосов $\pi\alpha$ и $\pi\beta$ равны $\pi/4$, т.е. $\alpha = \beta = 1/4$, была решена Б.Б.Девисоном / I /, а при отсутствии воды в нижнем бьефе – Б.Нельсоном-Скорняковым / 2 /.

Введем аналитический вектор $\Phi(\zeta) = (z, \omega)$ и вектор $f(t) = (f_1, f_2)$.

Продолжим вектор $\Phi(\zeta)$ известным способом на нижнюю полуплоскость ζ и продолженный вектор опять-таки обозначим через $\Phi(\zeta)$ / 4,5 /. Тогда данную задачу относительно искомого вектора $\Phi(\zeta)$ можно привести к следующей задаче линейного сопряжения / 3,4 / :

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t) + f(t), \quad -\infty \le t \le +\infty, \tag{I}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения вектора $\Phi(\zeta)$ с верхней и нижней полуплоскостей, соответственно. Матрица $g(t)$ и вектор $f(t)$ на основании граничных условий для различных участков границы определяются так:

$$g_0(t) = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad f(t) = [0, 0], \quad -\infty \le t < a_1, \ a_4 < t \le +\infty,$$

$$g_1(t) = \begin{Vmatrix} e^{-i2\pi\beta}, & 0 \\ 0, & -1 \end{Vmatrix}, \quad f(t) = 2[iL\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}, -h], \tag{2}$$

$$a_1 < t < a_2,$$

$$g_2(t)=\begin{Vmatrix} e^{-i2\pi\beta}, & 0 \\ 2\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}, & -1 \end{Vmatrix} \quad f(t)=i2L\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}[1,i], \quad a_2<t<a_3,$$

$$g_3(t)=\begin{Vmatrix} e^{i2\pi\alpha}, & 0 \\ 0, & -1 \end{Vmatrix} \quad f(t)=2H[0,-1], \quad a_3<t<a_4.$$

Так как вне интервала (a_1, a_4) вектор $f(t)=0$, поэтому можно допустить, что элементы искомой канонической матрицы класса $h_K = h_K(a_1, a_2, a_3, a_4)$ для однородной задачи, соответствующей задаче (1) при $f(t)=0$, могут иметь полюсы в точке $t=\infty$ /4/.

Заметим, что в нашем случае матрица $g(t)$ нижнетреугольная, поэтому каноническая матрица строится элементарными функциями и интегралом типа Коши от элементарных функций.

Обозначим элементы матрицы $g(t)$ через $c_{ij}(t)$, тогда элементы канонической матрицы класса h_K

$$X(\zeta)=\begin{Vmatrix} X_1^1(\zeta), & 0 \\ X_2^1(\zeta), & X_2^2(\zeta) \end{Vmatrix} \tag{3}$$

удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &\overset{+}{X}{}_1^1(t)=c_{11}(t)\overset{-}{X}{}_1^1(t), \quad -\infty\le t\le+\infty, \\ &\overset{+}{X}{}_2^2(t)=c_{22}(t)\overset{-}{X}{}_2^2(t), \quad -\infty\le t\le+\infty, \\ &\overset{+}{X}{}_2^1(t)=c_{21}(t)\overset{-}{X}{}_1^1(t)+c_{22}(t)\overset{-}{X}{}_2^1(t), \quad -\infty\le t\le+\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Из условий (4) элементы матрицы $X(\zeta)$ класса h_K определяются формулами

$$X_1^1(\zeta)=(\zeta-a_1)^{\beta}(\zeta-a_3)^{\gamma}(\zeta-a_4)^{\alpha}, \quad \alpha+\beta+\gamma=1; \tag{5}$$

$$\chi_2^2(\zeta)=(\zeta-a_1)^{1/2}(\zeta-a_4)^{1/2}, \tag{6}$$

$$\chi_2^1(\zeta)=e^{-i\pi\beta}\sin(\pi\beta)\frac{\chi_2^2(\zeta)}{\pi i}\int_{a_2}^{a_3}\frac{\overline{\chi}_1^1(t)\,dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}. \tag{7}$$

Считаем, что $\overset{+}{\chi}{}_j^i(t)=\overline{\chi}_j^i(t)$, когда $t>a_4$. Тогда для различных промежутков оси функции $\chi_j^i(\zeta)$ определяются известным способом $\left(\overline{\chi}_j^i(t)=\overset{+}{\chi}{}_j^i(t)\right)$ / 5 /.

Частные и суммарные индексы канонической матрицы класса h_κ соответственно есть

$$\varkappa_1=-1,\quad \varkappa_2=-1,\quad \varkappa=-2.$$

Решение задачи (I) в проекциях относительно z и ω имеет вид:

$$z(\zeta)=L\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}\frac{\chi_1^1(\zeta)}{\pi}\int_{a_1}^{a_3}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_1^1(t)(t-\zeta)}; \tag{8}$$

$$\omega(\zeta)=\frac{L\sin(\pi\beta)e^{i\pi\beta}}{\pi}\left\{\chi_2^1(\zeta)\int_{a_1}^{a_3}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_1^1(t)(t-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-\chi_2^2(\zeta)\int_{a_1}^{a_3}\frac{\overset{+}{\chi}{}_2^1(t)\,dt}{\overset{+}{\chi}{}_1^1(t)\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}\right\}-\frac{\chi_2^2(\zeta)}{\pi i}\left\{h\int_{a_1}^{a_2}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}+\right. \tag{9}$$

$$\left.+L\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}\int_{a_1}^{a_3}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}+H\int_{a_3}^{a_4}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}\right\}.$$

Решение задачи (I) можно искать другим путем, с этой целью условие (I) в проекциях запишем так:

$$z^+(t)=c_{11}(t)z^-(t)+f_1(t),\qquad -\infty\le t\le+\infty, \tag{10}$$

$$\omega^+(t)=c_{22}(t)\omega^-(t)+c_{21}(t)z^-(t)+f_2(t), \quad -\infty\le t\le+\infty, \tag{11}$$

где c_{ij} – элементы матрицы $g(t)$.

Можно непосредственно проверить, что решение задачи (10) класса h_k будет совпадать с формулой (8). Если считать известной функцию $z^-(t)$, определенную из формулы (8), тогда $\omega(\zeta)$ определяется так:

$$\omega(\zeta)=-\frac{\chi_2^2(\zeta)}{\pi i}\left\{h\int_{a_1}^{a_2}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}+L\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}\int_{a_2}^{a_3}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}+\right.$$

$$\left.+H\int_{a_3}^{a_4}\frac{dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}\right\}+\frac{\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}}{\pi i}\chi_2^2(\zeta)\int_{a_2}^{a_3}\frac{z^-(t)dt}{\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)(t-\zeta)}. \tag{12}$$

Формула (12) совпадает с формулой (9), как это можно непосредственно проверить.

Рассмотрим формулу (12), когда $a_3<t<a_4$ и отделим действительную часть от мнимой части. Получим:

$$\varphi(t_0)=-H, \quad a_3<t<a_4, \tag{13}$$

$$\Psi(t_0)=\frac{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t_0)|}{\pi}\left\{h\int_{a_1}^{a_2}\frac{dt}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|(t-t_0)}+L\,tg(\pi\beta)\int_{a_2}^{a_3}\frac{dt}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|(t-t_0)}+\right.$$

$$\left.+H\int_{a_3}^{a_4}\frac{dt}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|(t-t_0)}-tg(\pi\beta)\int_{a_2}^{a_3}\frac{x(t)dt}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|(t-t_0)}\right\}, \tag{14}$$

где

$$z^-(t)=x(t)-iy(t).$$

Если в формуле (14) перейти к пределу, когда $t_0\to a_3$, получим формулу для определения приведенного расхода Q; имеем:

$$Q/L=\frac{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(a_3)|}{\pi}\left\{\frac{h}{L}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dt}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|(t-a_3)}+tg(\pi\beta)\times\right.$$

$$\times\int_{a_2}^{a_3}\left(|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|^{-1}-|\overset{+}{\chi}{}_2^2(a_3)|^{-1}\right)\frac{dt}{t-a_3}+$$

$$+\frac{H}{L}\int_{a_3}^{a_4}\left(|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|^{-1}-|\overset{+}{\chi}{}_2^2(a_3)|^{-1}\right)\frac{dt}{t-a_3}-$$

$$\left.-tg(\pi\beta)\int_{a_2}^{a_3}\left(\frac{x(t)}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|}-\frac{x(a_3)}{|\overset{+}{\chi}{}_2^2(a_3)|}\right)\frac{dt}{t-a_3}\right\}+ \tag{I5}$$

$$+tg(\pi\beta)\ln(a_3-a_2)-\frac{H}{L}\ln(a_4-a_3)-\frac{H}{L}ctg(\pi\alpha)\ln(a_3-a_2),$$

где

$$|\overset{+}{\chi}{}_2^2(t)|=\sqrt{|t-a_1||t-a_4|}. \tag{I6}$$

Найдем значение функции $Z(\zeta)$ по формуле (8), в точке A_2 получим:

$$L_0+ih=iL\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}+L\sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}\frac{|\overset{+}{\chi}{}_1^1(a_2)|}{\pi}\times \tag{I7}$$

$$\times\int_{a_1}^{a_3}\frac{dt}{|\overset{+}{\chi}{}_1^1(t)|(t-a_2)},$$

где L_0 и h – координаты точки A_2, между которыми имеется связь $h=(L-L_0)tg(\pi\beta)$.

В формуле (I7) отделим действительную часть от мнимой части; имеем:

$$\frac{L_0}{L}=\sin^2(\pi\beta)+\frac{\sin(2\pi\beta)}{2}\left\{\frac{|\overset{+}{\chi}{}_1^1(a_2)|}{\pi}\int_{a_1}^{a_3}\left[|\overset{+}{\chi}{}_1^1(t)|^{-1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-|\overset{+}{\chi}{}_1^1(a_2)|^{-1}\right](t-a_2)^{-1}dt+\frac{1}{\pi}\ln\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}-tg(\pi\beta)\right\}, \tag{I8}$$

$$\frac{h}{L}=\frac{\sin(2\pi\beta)}{2}+\sin^2(\pi\beta)\Big[-ctg(\pi\beta)-\frac{1}{\pi}\ln\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}-$$

$$-\frac{|\overset{+}{\chi}{}_1^{1}(a_2)|}{\pi}\int_{a_1}^{a_3}\Big(|\overset{+}{\chi}{}_1^{1}(t)|^{-1}-|\overset{+}{\chi}{}_1^{1}(a_2)|^{-1}\Big)\frac{dt}{t-a_2}\Big]. \qquad (19)$$

Зафиксируем из четырех параметров a_k , $k=1,2,3,4$, три параметра следующим образом: $a_1=-1$, $a_3=0$, $a_4=1$.

Очевидно, что по формуле (19) для различных a_2 $(-1<a_2<0)$ можно построить график зависимости h/L от a_2 , а если задавать h/L , можно определить a_2 , а затем, по формуле (15) - Q/L , так как H/L определяется по формуле:

$$H/L=\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)/\sin[\pi(\alpha+\beta)]. \qquad (20)$$

Окончательно, для различных α и β , можно построить графики h/L и Q/L в зависимости от a_2 ; затем, по заданому α , β , h/L можно определить a_2 , а по графику для Q/L можно определить расход.

Произвести вычисления по формулам (19), (15), (20) не представляет большого труда.

Если бы мы стали решать эту задачу с помощью годографа скорости, тогда пришлось бы определить еще один параметр. Сейчас очевидно преимущество вышепримененного метода над известными методами. Но, к сожалению, пока это преимущество не удается распространить на случай, когда в матрице $g(t)$ все четыре элемента $c_{ij}(t)$ отличны от нуля. Для этого случая следует учитывать точку перегиба свободной поверхности / 5 /.

Поступила 15.У.1979.

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

I. П.Я.Полубаринова-Кочина, С.В.Фалькович, ПММ, т.XI, в. 6, 1947.

2. Б.Б.Девисон, Движение грунтовых вод. В сборнике С.А. Христианович, С.Г.Михлин и Б.Б.Девисон. Известия АН СССР, 1938.

3. Ф.Б.Нельсон-Скорняков. Расчеты движения грунтовых вод через земляные плотины, М., 1930.

4. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970.

5. А.Р.Цицкишвили. Труды Тбилисского математического института, т. П, 1976.

ა.ციცქიშვილი

ფილტრაციის შესახებ სამკუთხედის ფორმის მიწის კაშხლის ბირთვში

რეზიუმე

ამოხსნილია ფილტრაციის ამოცანა სამკუთხედის ფორმის მიწის კაშხალში, როდესაც კაშხლის ბირთვი მთლიანად ავსილია წყლით. სიჩქარის ჰოდოგრაფზე ხუთი განსაკუთრებული წერტილია. ამოცანა ამოხსნილია სიჩქარის ჰოდოგრაფის გამოყენების გარეშე. მოცემულია ფორმულა სითხის ხარჯის გამოსათვლელად.

A.Tsitskishvili

ON A FILTRATION THROUGH THE TRIANGULAR KERNEL OF AN EARTHEN DAM

Summary

The problem of filtration through the triangular kernel of an earthen dam at presence of lower water is solved. The kernel is fully filled in with water. There are five special points on the rate hodograph. The problem is solved without using the rate hodograph.

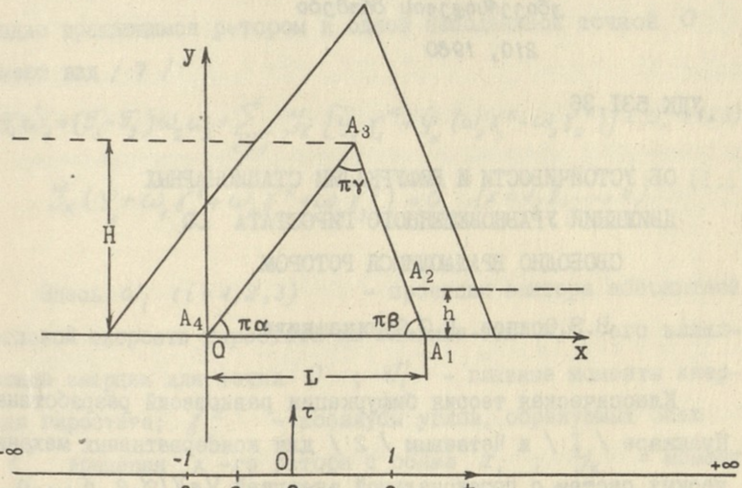


Рис.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
210, 1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ УРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСТАТА СО СВОБОДНО ВРАЩАЮЩИМСЯ РОТОРОМ

В.З.Осипов, Р.С.Суликашвили

Классическая теория бифуркации равновесий разработана Пуанкаре / I / и Четаевым / 2 / для консервативных механических систем с потенциальной энергией $V=V(\alpha, q_1, q_2, \ldots, q_m)$, где $q_1, q_2, \ldots, q_m$ – лагранжевы координаты системы, а α – вещественный параметр. В.В.Румянцев / 3 / распространил эту теорию на системы с циклическими координатами.

Однако во многих задачах, например в динамике твердого тела, вместо лагранжевых координат употребляются квазикоординаты и для исследования устойчивости стационарных движений классическая теория бифуркации непосредственно не применима. В.Н.Рубановский / 4 – 6 / распространил теорию бифуркации равновесий на системы с известными первыми интегралами в любых координатах, в том числе в квазикоординатах, и на основе предложенного им метода исследовал устойчивость и бифуркацию перманентных вращений в ряде задач динамики твердого тела.

Ниже на основе результатов / 4–6 / исследована устойчивость и бифуркация стационарных вращений уравновешенного гиростата со свободно вращающимся ротором.

I. Уравнения движения уравновешенного гиростата со свободно вращающимся ротором и одной неподвижной точкой O имеют вид / 7 /:

$$\mathcal{T}_1\dot{\omega}_1+(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_2)\omega_2\omega_3+\sum_{k=1}^{n}\mathcal{J}_k\left[\ddot{\varphi}_k\gamma_1^k+\dot{\varphi}_k(\omega_2\gamma_3^k-\omega_3\gamma_2^k)\right]=0, \ (123)$$
$$\mathcal{J}_k(\dot{\varphi}_k+\omega_1\gamma_1^k+\omega_2\gamma_2^k+\omega_3\gamma_3^k)^{\cdot}=0 \quad (k=1,2,\dots,n). \qquad (1.1)$$

Здесь $\omega_i \ (i=1,2,3)$ – проекции вектора абсолютной угловой скорости гиростата на главные оси x_i его эллипсоида инерции для точки O; $\mathcal{T}_i$ – главные моменты инерции гиростата; γ_i^k – косинусы углов, образуемых осью ℓ^k вращения k-го ротора с осями x_i; $\mathcal{J}_k$ – момент инерции k-го ротора относительно оси ℓ^k; φ_k – угол поворота k-го ротора вокруг оси ℓ^k; n – число роторов.

Уравнения (1.1) допускают следующие интегралы:

$$U\equiv\frac{1}{2}\sum_{(123)}\Big(\mathcal{T}_1\omega_1+\sum_{k=1}^{n}\mathcal{J}_k\gamma_1^k\dot{\varphi}_k\Big)^2=const,$$
$$U_1\equiv\frac{1}{2}\sum_{(123)}\Big(\mathcal{T}_1\omega_1^2+2\omega_1\sum_{k=1}^{n}\mathcal{J}_k\gamma_1^k\dot{\varphi}_k\Big)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{J}_k\dot{\varphi}_k^2=h=const, \qquad (1.2)$$
$$U_{1+k}\equiv\dot{\varphi}_k+\omega_1\gamma_1^k+\omega_2\gamma_2^k+\omega_3\gamma_3^k=\Omega_k=const, \quad k=1,2,\dots,n.$$

где знак суммирования с символом (123) означает, что остальные слагаемые получаются из написанных круговой перестановкой индексов 1,2,3. Механический смысл интегралов (I.2) очевиден.

Исследуем вопрос о стационарных движениях рассматриваемой механической системы, их устойчивость и бифуркации.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда имеется только один ротор $(n=1)$, и положим $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$, $\varphi_1 = \varphi$, $\Omega_1 = \Omega$, $\gamma_i^1 = \gamma_i \ (i=1,2,3)$

Согласно теореме Рауса-Ляпунова / 9 / для определения стационарных движений системы имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = (\mathcal{T}_1\omega_1 + \mathcal{J}\gamma_1\dot{\varphi})(\mathcal{T}_1 - \lambda) + \mathcal{J}\gamma_1\lambda\mu = 0, \ (123)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} = \mathcal{J}\Big[\sum_{(123)}(\mathcal{T}_1 - \lambda)\omega_1\gamma_1 + (\mathcal{J} - \lambda)\dot{\varphi} + \lambda\mu\Big] = 0, \qquad (I.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = -(U_1 - h) + \mathcal{J}\mu(U_2 - \Omega) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = \mathcal{J}\lambda(U_2 - \Omega) = 0,$$

$$W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dot{\varphi}, \lambda, \mu) = U - \lambda(U_1 - h) + \mathcal{J}\lambda\mu(U_2 - \Omega),$$

где λ и μ – неопределенные множители Лагранжа.

Из первых четырех уравнений (I.3) находим следующие выражения для $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dot{\varphi}$:

$$\omega_1^\circ = \mu\mathcal{J}\gamma_1(\lambda - \mathcal{T}_1)^{-1} \ (123), \quad \dot{\varphi}_0 = \mu. \qquad (I.4)$$

Подставляя эти значения в последние два уравнения (I.3), получаем следующие соотношения между постоянными Ω, h и λ, μ:

$$\Omega = \mu\Big(1 + \mathcal{J}\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda - \mathcal{T}_1}\Big), \quad h = \frac{1}{2}\mathcal{J}\mu^2\Big[1 + \mathcal{J}\sum_{(123)}\frac{(2\lambda - \mathcal{T}_1)\gamma_1^2}{(\lambda - \mathcal{T}_1)^2}\Big]. \qquad (I.5)$$

Из (I.5) находим зависимости h и μ от Ω и λ в виде

$$h=h(\lambda,\Omega)=\frac{1}{2}J\Omega^2\Big[1+J\sum_{(123)}\frac{(2\lambda-\mathcal{T}_1)\gamma_1^2}{(\lambda-\mathcal{T}_1)^2}\Big]\Big[1+J\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda-\mathcal{T}_1}\Big]^{-2},$$

$$\mu=\mu(\lambda,\Omega)=\Omega\Big[1+J\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda-\mathcal{T}_1}\Big]^{-1} \qquad (1.6)$$

Из (I.4) и (I.6) заключаем, что при заданных значениях параметров $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, γ_1, γ_2, γ_3, т.е. для заданной механической системы, значения величин ω_1, ω_2 ω_3, $\dot{\varphi}$, соответствующие стационарным движениям, можно рассматривать как функции двух независимых параметров h и Ω.

В пространстве (h,Ω,λ) движения (I.4) можно представить геометрически в виде поверхности $h=h(\lambda,\Omega)$, определяемой первым из уравнений (I.6).

2. Исследуем устойчивость движений (I.4) по отношению к величинам ω_1, ω_2, ω_3, $\dot{\varphi}$. В возмущенном движении положим

$$\omega_1=\omega_1^\circ+\xi_1\ (123),\quad \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0+\eta .$$

Условия устойчивости получим из теоремы Рауса-Ляпунова / 8-9 / как достаточные условия знакоопределенности второй вариации $\delta^2 W$

$$\delta^2 W=J(J-\lambda)\eta^2+\sum_{(123)}\big[\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1-\lambda)\xi_1^2+2J(\mathcal{T}_1-\lambda)\gamma_1\xi_1\eta\big] \qquad (2.1)$$

на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta U_1\equiv J\Big[\Omega\eta+\lambda\mu\sum_{(123)}(\lambda-\mathcal{T}_1)^{-1}\gamma_1\xi_1\Big]=0, \qquad (2.2)$$

$$\delta U_2\equiv\eta+\gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3=0.$$

Эти условия приводятся к неравенству

$$\Delta = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_3 \Omega (\lambda-\mathcal{T}_1)(\lambda-\mathcal{T}_2)(\lambda-\mathcal{T}_3)\Big(1-\mathcal{J}\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\mathcal{T}_1}\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\mathcal{J}\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda-\mathcal{T}_1}\Big)^{-2}\Big\{\sum_{(123)}\frac{\mathcal{T}_1\gamma_1^2}{(\lambda-\mathcal{T}_1)^3}-\mathcal{J}\sum_{(123)}\Big[\frac{\gamma_1^4}{(\lambda-\mathcal{T}_1)^3}+$$

$$+\frac{2\lambda(\lambda-\mathcal{T}_2)(\lambda-\mathcal{T}_3)-\mathcal{T}_2(\lambda-\mathcal{T}_3)-\mathcal{T}_3(\lambda-\mathcal{T}_2)^2}{(\lambda-\mathcal{T}_2)^3(\lambda-\mathcal{T}_3)^3}\Big]\Big\}>0.$$

Согласно приведенным в / 4-6 / достаточным условиям обратимости теоремы Рауса-Ляпунова условие (2.3) является также и необходимым условием устойчивости движений (I.4). Последнее утверждение следует также из рассмотрения характеристического полинома для уравнений в вариациях.

Вычисляя производную

$$\frac{\partial h}{\partial\lambda}=\mathcal{J}^2\Omega^2\Big(1+\mathcal{J}\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda-\mathcal{T}_1}\Big)^{-3}\Big\{\sum_{(123)}\frac{\mathcal{T}_1\gamma_1^2}{(\lambda-\mathcal{T}_1)^2}-\mathcal{J}\sum_{(123)}\Big[\frac{\gamma_1^4}{(\lambda-\mathcal{T}_1)^3}+$$

$$+\frac{2\lambda(\lambda-\mathcal{T}_2)(\lambda-\mathcal{T}_3)-\mathcal{T}_2(\lambda-\mathcal{T}_3)^2-\mathcal{T}_3(\lambda-\mathcal{T}_2)^2}{(\lambda-\mathcal{T}_2)^3(\lambda-\mathcal{T}_3)^3}\,\gamma_2^2\gamma_3^2\Big]\Big\}$$

и сравнивая это выражение с выражением (2.3), приходим к соотношению

$$\Delta=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3\mathcal{J}^{-2}P[1+\vartheta(\lambda)]\,\sigma(\lambda)\frac{\partial h}{\partial\lambda}, \tag{2.4}$$

где $P=1-\mathcal{J}\sum\limits_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\mathcal{T}_1}$, $\quad\vartheta(\lambda)=\mathcal{J}\sum\limits_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda-\mathcal{T}_1}$,

$$\sigma(\lambda)=(\mathcal{T}_1-\lambda)(\mathcal{T}_2-\lambda)(\mathcal{T}_3-\lambda).$$

Соотношение (2.4) позволяет "привязать" исследование условия устойчивости $\Delta>0$ к анализу функции $h=h(\lambda,\Omega)$. Из (2.4), в частности, заключаем, что если

$$\Big(1+\mathcal{J}\sum_{(123)}\frac{\gamma_1^2}{\lambda-\mathcal{T}_1}\Big)(\mathcal{T}_1-\lambda)(\mathcal{T}_2-\lambda)(\mathcal{T}_3-\lambda)\neq 0,$$

то $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial h / \partial \lambda = 0$.

Следовательно, в точках бифуркации / 4-6 /, для которых $\Delta \doteq 0$, касательная к линиям пересечения поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$ с плоскостями $\Omega = \Omega_0$ параллельна оси λ.

3. Рассмотрим случай, когда

$$(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_3)(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2)\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \neq 0 \quad (\mathcal{T}_1<\mathcal{T}_2<\mathcal{T}_3). \tag{3.1}$$

Вид кривой $\vartheta = \vartheta(\lambda)$ показан на рис. Iа.

Рассмотрим уравнение $\vartheta(\lambda) = -1$; его корни вещественные и равны $\lambda = \lambda_1^*$, λ_2^*, λ_3^*, при этом $\lambda_1^* < \mathcal{T}_1 < \lambda_2^* < \mathcal{T}_2 < \lambda_3^* < \mathcal{T}_3$.

Отметим, что значения λ_i^* $(i = 1, 2, 3)$ не зависят от параметра Ω.

Исследуем распределение устойчивых и неустойчивых движений (I.4) на поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$. Для этого рассмотрим некоторое сечение поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$ с плоскостью $\Omega = \Omega_0 \neq 0$.

На рис. Iб показан вид линии пересечения поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$ с плоскостью $\Omega = \Omega_0 \neq 0$ в случае, когда выполняется условие (3.I), а уравнение $\partial h / \partial \lambda = 0$ имеет только два вещественных корня $\lambda = \lambda_*$, $\lambda = \lambda_{**}$ $(\mathcal{T}_1 < \lambda_* < \mathcal{T}_2 < \lambda_{**} < \mathcal{T}_3)$.

Отметим, что, как следует из выражения для $\partial h / \partial \lambda$, корни $\lambda = \lambda_*$ и $\lambda = \lambda_{**}$ уравнения $\partial h / \partial \lambda = 0$ не зависят от параметра Ω и

$$\lim_{\lambda \to \mathcal{T}_i} h(\lambda, \Omega) = \frac{1}{2} \mathcal{T}_i \Omega^2 \gamma_i^{-2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Пусть $\lambda > \mathcal{T}_3$; тогда (см. рис. Iа,б) $1 + \vartheta(\lambda) > 0$, $\sigma(\lambda) < 0$, $\partial h / \partial \lambda < 0$ и, в силу (2.4), имеем $\Delta > 0$. Следовательно, для значений $\lambda > \mathcal{T}_3$ движения (I.4) устойчивы.

Аналогично, если $\lambda_3^* < \lambda < \mathcal{T}_3$, то $1 + \vartheta(\lambda) < 0, \sigma(\lambda) > 0,$ $\partial h / \partial \lambda < 0$, и, в силу (2.4), имеем $\Delta > 0$.

Если $\lambda_{**} < \lambda < \lambda_3^*$, то $1 + \vartheta(\lambda) > 0$, $\sigma(\lambda) > 0$, $\partial h / \partial \lambda > 0$ и $\Delta > 0$. Для значений $\mathcal{T}_2 < \lambda < \lambda_{**}$ имеем $1 + \vartheta(\lambda) > 0$, $\sigma(\lambda) > 0$, $\partial h / \partial \lambda < 0$ и $\Delta < 0$. Для $\lambda_* < \lambda < \lambda_2^*$ имеем $1 + \vartheta(\lambda) > 0, \sigma(\lambda) < 0, \partial h / \partial \lambda > 0$ и $\Delta < 0$. Для $\lambda_2^* < \lambda < \mathcal{T}_2$ имеем $1 + \vartheta(\lambda) < 0$, $\sigma(\lambda) < 0$, $\partial h / \partial \lambda < 0$ и $\Delta < 0$.

Точно так же можно установить знак величины Δ для других значений параметра λ . Для $\lambda < \lambda_*$, $\lambda \neq \mathcal{T}_1$, $\lambda \neq \lambda_1^*$ имеем $\Delta > 0$.

На рис. Iб и далее ветви кривых $h = h(\lambda, \Omega_0)$, $\Omega = \Omega_0 \neq 0$, которым соответствуют устойчивые и неустойчивые движения (I.4), изображены соответственно непрерывными и пунктирными линиями, при этом цифры (0), (I), (2) указывают на степень неустойчивости $\varkappa$ движений (I.4).

На рис. Iв показан вид сечений поверхности $h = h(\lambda, \Omega_0)$ плоскостями $h = h_0 \neq 0$.

На рис. Iб,в значениям $\lambda = \lambda_*$ и $\lambda = \lambda_{**}$ соответствуют точки бифуркации, в которых происходит смена устойчивости движений (I.4).

На основе проведенного исследования распределения устойчивых и неустойчивых движений (I.4) на ветвях кривых $h = h(\lambda, \Omega_0)$, $\Omega = \Omega_0 \neq 0$ и $h_0 = h(\lambda, \Omega)$, $h = h_0 \neq 0$, можно указать распределение устойчивых и неустойчивых движений (I.4) также на ветвях поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$.

Ветви поверхности, для которых $\lambda > \lambda_{**}$ и $\lambda < \lambda_*$ $(\lambda \neq \lambda_3^*, \mathcal{T}_3,\ \lambda \neq \lambda_1^*, \mathcal{T}_1)$, отвечают устойчивым движениям (I.4), для которых степень неустойчивости $\varkappa$ равна соответственно нулю и двум. Ветви, для которых $\lambda_* < \lambda < \lambda_{**} (\lambda \neq \lambda_2^*, \mathcal{T}_2)$, соответствуют неустойчивым движениям и для них $\varkappa = 1$. Кривые $h = h(\lambda_*, \Omega)$, $\lambda = \lambda_*$ и $h = h(\lambda_{**}, \Omega)$, $\lambda = \lambda_{**}$ целиком состоят из точек бифуркации и отделяют на поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$ устойчивые и неустойчивые движения. Распределение устойчивых и неустойчивых движений на поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$ подчиняется закону смены устойчивости при фиксированных значениях параметров h и Ω , при этом изменение степени неустойчивости $\varkappa$ происходит лишь в точках бифуркации.

Каждое из семейств кривых $h = h(\lambda, \Omega_0)$, $\Omega = \Omega_0 \neq 0$ и $h = h(\lambda, \Omega)$, $h = h_0 \neq 0$ состоит из подобных кривых, показанных на рис. Iб,в.

4. Рассмотрим теперь случай, когда условие (3.1) не выполняется. Предположим сперва, что эллипсоид инерции гирос-

тата трехосный, а ось собственного вращения ротора гиростата находится в одной из главных плоскостей инерции; $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_2 \gamma_3 \neq 0$, $\gamma_1 = 0$. В этом случае для составляющих вектора угловой скорости тела-носителя и угловой скорости ротора в стационарном движении имеем выражения

$$\omega_1^\circ = \mu \mathcal{J} \kappa \delta(\lambda - \mathcal{T}_1), \quad \omega_2^\circ = \frac{\mu \mathcal{J} \gamma_2}{\lambda - \mathcal{T}_3}, \quad \omega_3^\circ = \frac{\mu \mathcal{J} \gamma_3}{\lambda - \mathcal{T}_3}, \tag{4.I}$$
$$\dot{\varphi} = \mu,$$

где $\delta(x) = 0$, если $x \neq 0$, и $\delta(0) = 1$, а κ – вещественный параметр. Постоянные λ, μ, κ, Ω, h связаны соотношениями

$$\mu = \Omega \left(1 + \mathcal{J} \sum_{i=2}^{3} \frac{\gamma_i^2}{\lambda - \mathcal{T}_i}\right)^{-1},$$
$$h = h(\lambda, \kappa, \Omega) = \frac{1}{2} \mathcal{J} \Omega^2 \left(1 + \mathcal{J} \sum_{i=2}^{3} \frac{\gamma_i^2}{\lambda - \mathcal{T}_i}\right)^{-2} \times \tag{4.2}$$
$$\times \left\{1 + \mathcal{J}\left[\sum_{i=2}^{3} \frac{(2\lambda - \mathcal{T}_i)\gamma_i^2}{(\lambda - \mathcal{T}_i)^2} + \mathcal{T}_1 \kappa^2 \delta(\lambda - \mathcal{T}_i)\right]\right\},$$

получаемыми в результате подстановки значений (4.I) в интегралы $U_1 = h$, $U_2 = \Omega$.

Движения (4.I) можно представить геометрически в пространстве $(h, \lambda, \kappa, \Omega)$ в виде трехмерного многообразия $h = h(\lambda, \kappa, \Omega)$, определяемого вторым из уравнений (4.2). Это многообразие состоит из двумерного линейного многообразия $h = h(\lambda, 0, \Omega)$, $\kappa = 0$, $\lambda \neq \mathcal{T}_1$, и двумерного многообразия $h = h(\mathcal{T}_1, \kappa, \Omega)$, $\lambda = \mathcal{T}_1$. Последние два многообразия имеют общие точки, геометрическое место которых представляет собой одномерное многообразие $h = h(\mathcal{T}_1, 0, \Omega)$, $\lambda = \mathcal{T}_1$, $\kappa = 0$.

Зафиксируем некоторое значение $\Omega = \Omega_0 = const$ и рассмотрим в пространстве (h, λ, κ) поверхность $h = h(\lambda, \kappa, \Omega)$, определяемую вторым из уравнений (4.2) при $\Omega = \Omega_0$. При фиксированном значении $\Omega = \Omega_0$ поверхность $h = h(\lambda, \kappa, \Omega_0)$ дает геометрическое представление в пространстве (h, λ, κ) движений (4.I). Эта поверхность состоит из цилиндрической поверхности $h = h(\lambda, 0, \Omega_0), \lambda \neq \mathcal{T}_1$, образующие которой параллельны оси и параболе $h = h(\mathcal{T}_1, \kappa, \Omega_0)$, $\lambda = \mathcal{T}_1$, лежащей в плоскости $\lambda = \mathcal{T}_1$. Принимая во внимание то обстоятельство, что каждой из образующих цилиндрической поверхности $h = h(\lambda, 0, \Omega)$ соответствует одно и только одно движение (4.1), поставим в соответствие образующим этой цилиндрической поверхности точки их пересечения с плоскостью $\kappa = 0$, и для геометрического представления движений (4.I) в пространстве (h, λ, κ) вместо поверхности $h = h(\lambda, 0, \Omega_0)$ введем в рассмотрение пространственную кривую L, состоящую из кривой $h = h(\lambda, 0, \Omega)$, $\kappa = 0$, лежащей в плоскости $\kappa = 0$, и параболы $h = h(\mathcal{T}_1, \kappa, \Omega)$, расположенной в плоскости $\lambda = \mathcal{T}_1$. Эти две ветви кривой L имеют одну общую точку, для которой $h = h(\mathcal{T}_1, 0, \Omega)$, $\lambda = \mathcal{T}_1$, $\kappa = 0$, и задаются соответственно уравнениями:

$$h = \frac{1}{2} J\Omega^2 \left(1 + J\sum_{i=2}^{3} \frac{\gamma_i^2}{\lambda - \mathcal{T}_1}\right)^{-2} \left[1 + J\sum_{i=2}^{3} \frac{(2\lambda - \mathcal{T}_i)\gamma_i^2}{(\lambda - \mathcal{T}_i)^2}\right], \tag{4.3}$$

$$\kappa = 0,$$

$$h=\frac{1}{2}\mathcal{J}\Omega^2\left(1+\mathcal{J}\sum_{i=2}^{3}\frac{\gamma_i^2}{\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_i}\right)^{-2}\times \tag{4.4}$$

$$\times\left\{1+\mathcal{J}\left[\mathcal{T}_1 K^2+\sum_{i=2}^{3}\frac{(2\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_i)\gamma_i^2}{(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_i)^2}\right]\right\},\quad \lambda=\mathcal{T}_1.$$

Выражение (2.4) принимает вид

$$\Delta=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3\mathcal{J}^{-2}P_1\left[1+\vartheta_1(\lambda)\right]\sigma(\lambda)\frac{\partial h}{\partial\lambda}, \tag{4.5}$$

если $\lambda\neq\mathcal{T}_1$,

$$\Delta=\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3 K^2\Omega^2(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)P_1\times \tag{4.6}$$

$$\times\left(1-\frac{\mathcal{J}\gamma_2^2}{\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1}-\frac{\mathcal{J}\gamma_3^2}{\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1}\right)^{-1},$$

если $\lambda=\mathcal{T}_1$,

$$P=1-\mathcal{J}\sum_{i=2}^{3}\frac{\gamma_i^2}{\mathcal{T}_i},\quad \vartheta_1(\lambda)=\mathcal{J}\sum_{i=2}^{3}\frac{\gamma_i^2}{\lambda-\mathcal{T}_i}.$$

Соотношения (4.5), (4.6) позволяют исследовать распределение устойчивых и неустойчивых движений (4.I) на ветвях кривой L ; соответствующие рассуждения аналогичны приведенным выше.

На рис. 2а,б; 3а; 4б показан вид проекций кривой L на плоскости $K=0$ и $\lambda=\mathcal{T}_1$. Здесь $\lambda=\lambda_1^*$ и $\lambda=\lambda_2^*$ – корни уравнения $\vartheta_1(\lambda)=-1$, а $\lambda=\lambda_*$ - корень уравнения $(\partial h/\partial\lambda)_{K=0}=0$.

Здесь возможны следующие подслучаи:

I°. $(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_2)(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)-\mathcal{J}(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)\gamma_2^2-\mathcal{J}(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1)\gamma_3^2>0,$

$$\mathcal{T}_1 < \lambda_1^* < \mathcal{T}_2 \quad \text{(рис. 2а,б)};$$

$$2^0.\ (\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)-\mathcal{Y}(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)\gamma_2^2-\mathcal{Y}(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1)\gamma_3^2<0,$$

$$\lambda_1^* < \mathcal{T}_1 \quad \text{(рис. 3а,б)};$$

$$3^0.\ (\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)-\mathcal{Y}(\mathcal{T}_3-\mathcal{T}_1)\gamma_2^2-\mathcal{Y}(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1)\gamma_3^2=0,$$

$$\lambda_1^* = \mathcal{T}_1 \quad \text{(рис. 4а)}.$$

Рассмотрим, например, первый из этих подслучаев; анализ других аналогичен.

Для исследования знака Δ воспользуемся соотношениями (4.5), (4.6) и графиками (рис.2б,в) кривых (4.3), (4.4)

Пусть $\lambda \neq \mathcal{T}_i$. Тогда из (4.5) следует, что в точках бифуркации, для которых $\Delta = 0$, касательная к кривой (4.3) параллельна оси λ. Значениям $\lambda = \lambda_*$, $\kappa = 0$ соответствует точка бифуркации. Из (4.5) заключаем, что для значений λ из интервалов $-\infty < \lambda < \mathcal{T}_1$, $\lambda_* < \lambda < \lambda_2^*$ и $\lambda_2^* < \lambda < +\infty$ имеем $\Delta > 0$ и движения (4.I) устойчивы; если же $\mathcal{T}_1 < \lambda < \lambda_1^*$ и $\lambda_1^* < \lambda < \lambda_*$, то $\Delta < 0$ и движения (4.I) неустойчивы.

Пусть теперь $\lambda = \mathcal{T}_1$. Из (4.6) и (4.4) следует, что для $\kappa \neq 0$ имеем $\Delta > 0$ и движения (4.I) устойчивы. Значения $\lambda = \mathcal{T}_1$, $\kappa = 0$ соответствуют точке бифуркации.

5. Рассмотрим теперь случаи, когда эллипсоид инерции тела трехосный, а ось собственного вращения ротора совпадает с одной из главных осей инерции, $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$.

Тогда

$$\omega_1^\circ = \mu \mathcal{J} k \delta(\lambda - \mathcal{T}_1), \quad \omega_2^\circ = \mu \mathcal{J} k \delta(\lambda - \mathcal{T}_2), \tag{5.1}$$

$$\omega_3^\circ = \frac{\mu \mathcal{J} \gamma_3}{\lambda - \mathcal{T}_3}, \quad \dot{\varphi}_0 = \mu .$$

Постоянные λ, μ, k, Ω, h связаны соотношениями

$$\mu = \Omega \left(1 + \frac{\mathcal{Y}}{\lambda - \mathcal{T}_3}\right)^{-1}, \tag{5.2}$$

$$h = h(\lambda, k, \Omega) = \frac{1}{2} \mathcal{J} \Omega^2 \left(1 + \frac{\mathcal{Y}}{\lambda - \mathcal{T}_3}\right)^{-2} \left\{1 + \mathcal{J}\left[\mathcal{T}_1 k^2 \delta(\lambda - \mathcal{T}_1) + \mathcal{T}_2 k^2 \delta(\lambda + \mathcal{T}_2) + \frac{2\lambda - \mathcal{T}_3}{(\lambda - \mathcal{T}_3)^2}\right]\right\},$$

получаемыми при подстановке значений (5.I) в интегралы $U_1 = h$, $U_2 = \Omega$.

Движения (5.I) можно представить геометрически в пространстве (h, λ, k, Ω) в виде трехмерного многообразия $h = h(\lambda, k, \Omega)$, определяемого вторым из уравнений (5.2).

Зафиксируем некоторое значение $\Omega = \Omega_0 = const$ и рассмотрим в пространстве (h, λ, k) поверхность $h = h(\lambda, k, \Omega_0)$, определяемую вторым из уравнений (5.2) при $\Omega = \Omega_0$. При фиксированном значении $\Omega = \Omega_0$ поверхность $h = h(\lambda, k, \Omega_0)$ дает геометрическое представление в пространстве (h, λ, k) движений (5.I). Эта поверхность состоит из цилиндрической поверхности $h = h(\lambda, 0, \Omega_0)$, $\lambda \neq \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, образующие которой параллельны оси k, и двум параболам $h = h(\mathcal{T}_1, k, \Omega_0)$, $\lambda = \mathcal{T}_1$, и $h = h(\mathcal{T}_2, k, \Omega_0)$, $\lambda = \mathcal{T}_2$. Принимая во внимание то обстоятельство, что каждой из образующих цилиндрической поверхности $h = h(\lambda, 0, \Omega_0)$ соответствует одно и только одно движение (5.I), поставим в соответствие образующим этой цилиндрической поверхности точки их пересечения с плоскостью $K=0$, и для геометрического представления движений (5.I) в пространстве (h, λ, K) вместо поверхности $h=h(\lambda, 0, \Omega_0)$ для бо́льшего удобства введем в рассмотрение кривую L , отдельные ветви которой лежат в трех плоскостях $\lambda=\mathcal{T}_1$, $\lambda=\mathcal{T}_2$, $K=0$ и задаются соответственно уравнениями

$$h=h(\mathcal{T}_1, K, \Omega_0)=\frac{1}{2}\mathcal{J}\Omega_0^2\left[\frac{\mathcal{J}\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_3)^2}{(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_3+\mathcal{J})^2}K^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_3)^2+\mathcal{J}(2\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_3)}{(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_3+\mathcal{J})^2}\right], \quad \lambda=\mathcal{T}_1;$$

$$h=h(\mathcal{T}_2, K, \Omega_0)=\frac{1}{2}\mathcal{J}\Omega_0^2\left[\frac{\mathcal{J}\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_3)^2}{(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_3+\mathcal{J})^2}K^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_3)^2+\mathcal{J}(2\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_3)}{(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_3+\mathcal{J})^2}\right], \quad \lambda=\mathcal{T}_2;$$

$$h=h(\lambda, 0, \Omega_0)=\frac{1}{2}\mathcal{J}\Omega_0^2\left[1+\frac{\mathcal{J}(\mathcal{T}_3-\mathcal{J})}{(\lambda-\mathcal{T}_3+\mathcal{J})^2}\right],$$

$$K=0, \quad \lambda^*=\mathcal{T}_3-\mathcal{J}.$$

Выражение (2.4) принимает вид

$$\Delta=\Omega^2\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_3-\mathcal{J})\left(1+\frac{\mathcal{J}}{\lambda-\mathcal{T}_3}\right)^{-2}\left\{\frac{(\mathcal{T}_1-\lambda)(\mathcal{T}_2-\lambda)(\mathcal{T}_3-\lambda)}{(\lambda-\mathcal{T}_3)^2}\right. \tag{5.3}$$

$$\left.-(\lambda-\mathcal{T}_3+\mathcal{J})K^2\left[\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2-\lambda)\delta(\lambda-\mathcal{T}_1)+\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1-\lambda)\delta(\lambda-\mathcal{T}_2)\right]\right\}.$$

На рис. 5 показан вид проекции кривой L на плоскость $K=0$, а на рис. 6 – вид проекции на плоскость $\lambda=0, \lambda<\mathcal{T}_3$.

Из выражения (5.3) заключаем, что, когда $K=0$, движения (5.1) устойчивы для значений $\lambda<\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2<\lambda$ и неустойчивы для $\mathcal{T}_1<\lambda<\mathcal{T}_2$. Если $\lambda=\mathcal{T}_1$, $K\neq 0$ и $\lambda^*>\mathcal{T}_1$, то $\Delta>0$ и движения (5.1) устойчивы; если же $\lambda=\mathcal{T}_1$, $K\neq 0$ и $\lambda^*<\mathcal{T}_1$, то $\Delta<0$ и движения (5.1) неустойчивы. Если $\lambda=\mathcal{T}_2$, $K\neq 0$ и $\lambda^*>\mathcal{T}_2$, то $\Delta<0$ и движения (5.1) неустойчивы; если же $\lambda=\mathcal{T}_2$, $K\neq 0$ и $\lambda^*<\mathcal{T}_2$, то $\Delta>0$ и движения (5.1) устойчивы. Значениям $\lambda=\mathcal{T}_1$, $K=0$; $\lambda=\mathcal{T}_2$, $K=0$ и $\lambda=\lambda^*=\mathcal{T}_1$, $K=0$, $\lambda=\lambda^*=\mathcal{T}_2$, $K=0$ соответствуют точки бифуркации, в которых происходит смена устойчивости движений (5.1) на ветвях кривой L.

6. Рассмотрим теперь случаи, когда эллипсоид инерции есть эллипсоид вращений и ось ротора не лежит в главной плоскости инерции. Пусть $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2<\mathcal{T}_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\neq 0$. Тогда имеем

$$\omega_1^\circ=\frac{\mathcal{Y}\mu\gamma_1}{\lambda-\mathcal{T}_1},\quad \omega_2^\circ=\frac{\mathcal{Y}\mu\gamma_2}{\lambda-\mathcal{T}_2},\quad \omega_3^\circ=\frac{\mathcal{Y}\mu\gamma_3}{\lambda-\mathcal{T}_3}, \tag{6.1}$$

$$\dot{\varphi}_0=\mu.$$

Постоянные λ, μ, Ω, h связаны соотношениями

$$\mu=\Omega\left[1+\mathcal{Y}\left(\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\lambda-\mathcal{T}_2}+\frac{\gamma_3^2}{\lambda-\mathcal{T}_3}\right)\right]^{-1},$$

$$h=h(\lambda,\Omega)=\frac{1}{2}\mathcal{J}\Omega^2\left[1+\mathcal{Y}\left(\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\lambda-\mathcal{T}_2}+\frac{\gamma_3^2}{\lambda-\mathcal{T}_3}\right)\right]^{-2}\times \tag{6.2}$$

$$\times\left\{1+\mathcal{Y}\left[\frac{(2\lambda-\mathcal{T}_2)(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}{(\lambda-\mathcal{T}_2)^2}+\frac{(2\lambda-\mathcal{T}_3)\gamma_3^2}{(\lambda-\mathcal{T}_3)^2}\right]\right\},$$

получаемыми при подстановке значений (6.1) в интегралы $U_1 = h$, $U_2 = \Omega$.

Из (6.1) и (6.2) заключаем, что при заданных параметрах $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{Y}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $\dot{\varphi}$, соответствующие стационарным движениям, можно рассматривать как функции двух независимых параметров h и Ω.

В пространстве (h, λ, Ω) движения (6.1) можно представить геометрически в виде поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$, определяемой вторым из уравнений (6.2).

Выражение (4.5) принимает вид

$$\Delta = \mathcal{T}_2^2\mathcal{T}_3\mathcal{Y}^2\left(1-\mathcal{Y}\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\mathcal{T}_2}-\mathcal{Y}\frac{\gamma_3^2}{\mathcal{T}_3}\right)\left[1+\mathcal{Y}\left(\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\lambda-\mathcal{T}_2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma_3^2}{\lambda-\mathcal{T}_3}\right)\right](\mathcal{T}_2-\lambda)^2(\mathcal{T}_3-\lambda)\,\partial h/\partial\lambda\,. \tag{6.3}$$

Из (6.3), в частности, заключаем, что если

$$\left[1+\mathcal{Y}\left(\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\lambda-\mathcal{T}_2}+\frac{\gamma_3^2}{\lambda-\mathcal{T}_3}\right)\right](\mathcal{T}_2-\lambda)^2(\mathcal{T}_3-\lambda)\neq 0, \tag{6.4}$$

то $\Delta = 0$, тогда и только тогда, когда $\partial h/\partial\lambda = 0$.

Вид кривой

$$\vartheta_2 = \mathcal{Y}\left(\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\lambda-\mathcal{T}_2}+\frac{\gamma_3^2}{\lambda-\mathcal{T}_3}\right)$$

показан на рис. 7а.

Рассмотрим уравнение $\vartheta_2(\lambda)=-1$; все его корни вещественны и равны $\lambda=\lambda_1^*$, λ_2^* , при этом $\lambda_1^*<\sigma_2<<\lambda_2^*<\sigma_3$. Отметим, что значения λ_1^* , λ_2^* не зависят от параметра Ω .

Исследуем распределение устойчивых и неустойчивых движений (6.I) на поверхности $h=h(\lambda,\Omega)$. Для этого рассмотрим некоторое сечение поверхности $h=h(\lambda,\Omega)$ плоскостью $\Omega=\Omega_0\neq 0$.

На рис.7б показан вид линии пересечения поверхности $h=h(\lambda,\Omega)$ с плоскостью $\Omega=\Omega_0\neq 0$ в случае, когда выполняется условие (6.4), а уравнение $\partial h/\partial\lambda=0$ имеет только один вещественный корень $\lambda=\lambda_*$ $(\sigma_2<\lambda_*<\sigma_3)$.

Из (6.3) заключаем, что для значений λ из интервалов $-\infty<\lambda<\lambda_1^*$, $\lambda_1^*<\lambda<\sigma_2$, $\lambda_*<\lambda<\lambda_2^*$ и $\lambda_2^*<\lambda<+\infty$ имеем $\Delta>0$ и движения (6.I) устойчивы; если же $\sigma_2<\lambda<\lambda_*$, то $\Delta<0$ и движения (6.I) неустойчивы.

На рис.7б,в значениям $\lambda=\lambda_*$ и $\lambda=\sigma_2$ соответствуют точки бифуркации, в которых происходит смена устойчивости движений (6.I).

На основе проведенного исследования распределения устойчивых и неустойчивых движений (6.I) на ветвях кривых $h=h(\lambda,\Omega)$, $\Omega=\Omega_0\neq 0$, и $h_0=h(\lambda,\Omega)$, $h=h_0\neq 0$, можно указать распределение устойчивых и неувтойчивых движений (6.I) также на ветвях поверхности $h=h(\lambda,\Omega)$.

Ветви поверхности, для которых $\lambda>\lambda_*$ и $\lambda<\sigma_2$ ($\lambda\neq\lambda_2^*,\sigma_3$ и $\lambda\neq\lambda_1^*$), отвечают устойчивым движениям (6.1), для которых степень неустойчивости $\varkappa$ равна соответственно нулю и двум. Ветви, для которых $\mathcal{T}_2 < \lambda < \lambda_*$ соответствуют неустойчивым движениям и для них $\varkappa = 1$. Кривые $h = h(\mathcal{T}_2, \Omega)$, $\lambda = \mathcal{T}_2$ и $h = h(\lambda_*, \Omega)$, $\lambda = \lambda_*$ целиком состоят из точек бифуркации и отделяют на поверхности $h = h(\lambda, \Omega)$ устойчивые и неустойчивые движения.

Аналогично могут быть исследованы остальные возможные случаи:

а) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$;

б) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1\gamma_3 \neq 0$, $\mathcal{T}_2 < \lambda_2^* < \mathcal{T}_3$;

в) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1\gamma_3 \neq 0$, $\mathcal{T}_1 < \lambda_2^* < \mathcal{T}_2$;

г) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1\gamma_3 \neq 0$, $\lambda_2^* = \mathcal{T}_2$;

д) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\lambda^* < \mathcal{T}_2 - \mathcal{Y}$;

е) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\lambda^* = \mathcal{T}_1 - \mathcal{Y}$;

ё) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$, $\lambda^* = \mathcal{T}_3 - \mathcal{Y}$;

ж) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$, $\lambda^* = \mathcal{T}_2 - \mathcal{Y}$;

з) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \neq 0$;

и) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3$ $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\lambda^* = \mathcal{T}_1 - \mathcal{Y}$;

й) $\mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2\gamma_3 \neq 0$, $\lambda^* = \mathcal{T}_2 - \mathcal{Y}$;

к) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \neq 0$, $\lambda^* = \mathcal{T} - \mathcal{Y}$.

Поступила 20.III.1979

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. H.Poincare. Sur l' equilibre d' une masse fluide animée d' un mouvement de rotation. Acta Math., 1887, t.7, 259-380.

2. Н.Г.Четаев. Устойчивость движения, М.-Л., Гостехтеоретиздат, I946.

3. В.В.Румянцев. ПММ, т.30, вып.5, I966, 922-933.

4. В.Н.Рубановский. "Теоретична и приложна механика", София, I974, У, № 3, 55-70.

5. В.Н.Рубановский. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Докл. Болгарской акад. наук, т.27, № 5, I974, 627-629.

6. В.Н.Рубановский. ПММ, т.38, вып.4, I974, 6I6-627.

7. V.Volterra. Sur la theorie des variations des latitudes. Acta Math., t.22. 1899.

8. А.М.Ляпунов. Собр.соч., т.I, М., Изд-во АН ГССР, I954.

9. В.Н.Рубановский., С.Я.Степанов. ПММ, т.33, вып.5, I969, 904-9I2.

ვ.ოსიპოვი, რ.სულიკაშვილი

წონასწორობაში მყოფი გიროსკოპის სტაციონარული მოძრაობის მდგრადობა და ბიფურკაცია, თავისუფლად მბრუნავი როტორით

რეზიუმე

შესწავლილია წონასწორობაში მყოფი გიროსკოპის სტაციონარული მოძრაობის მდგრადობისა და ბიფურკაციის ამოცანა, როცა გიროსკოპზე მოთავსებული როტორი თავისუფლად ბრუნავს საკუთარი ღერძის გარშემო.

გიროსტატის სტაციონარული მოძრაობა წარმოდგენილია გეომეტრიულად სამგანზომილებიანი მრავალსახეობის სახით, რომლის შტოებზეც მდგრადი და არამდგრადი მოძრაობების განაწილება ემორჩილება პუანკარე-ჩეტაევის ბიფურკაციის კლასიკური თეორიის კანონებს.

V. Osipov, R. Sulikashvili

ON THE STABILITY OF STATIONARY MOTIONS OF THE BALANCED GYROSTAT

Summary

The bifurcation and stability of stationary motions of the balanced gyrostat with a freely rotating rotor are studied.

Stationary motions are represented in the form of threedimensional manifolds on the branches of which the distribution of stable and unstable motions obeys the laws of the Poincare-Chetaev theory of bifurcation.

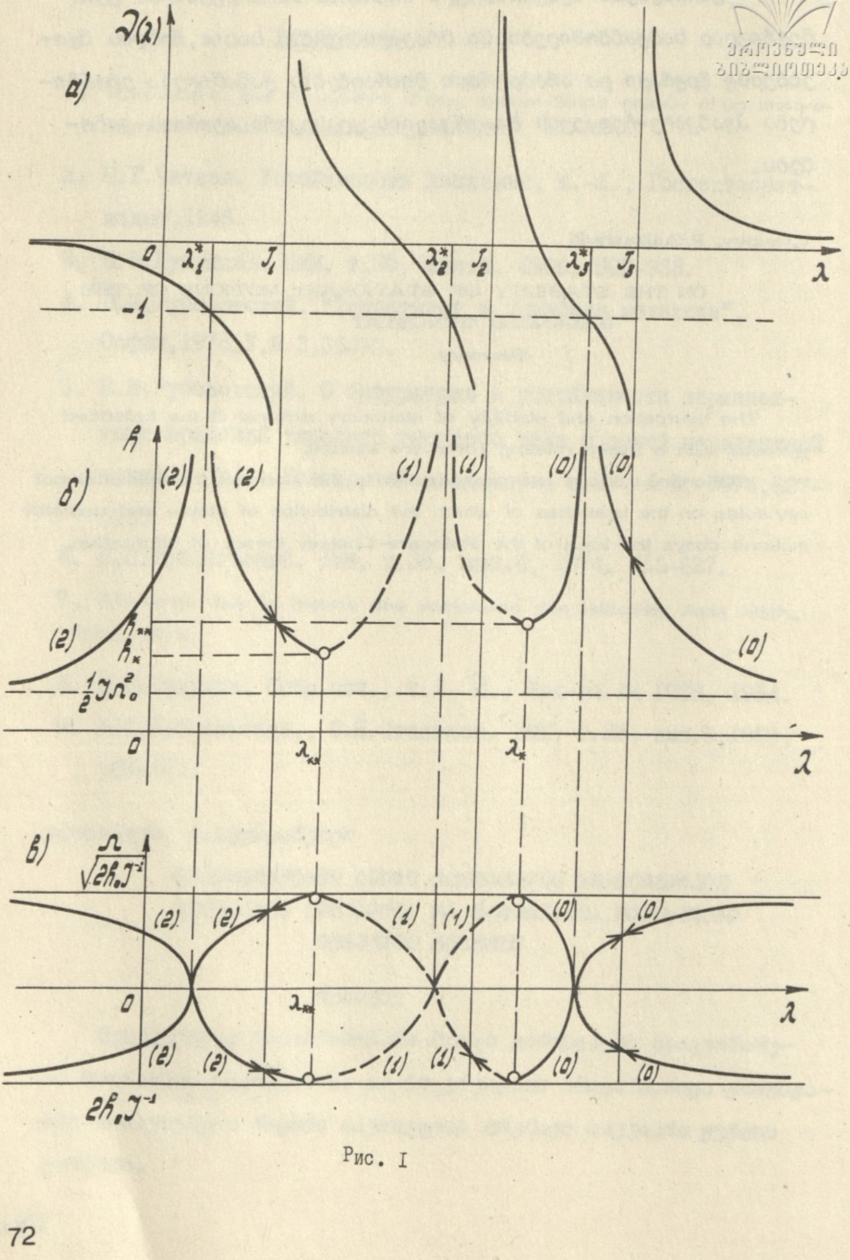

a)
$\vartheta(\lambda)$
0
λ_1^*
J_1
λ_2^*
J_2
λ_3^*
J_3
λ
-1
б)
h
(2)
(1)
(0)
h_{**}
h_*
$\frac{1}{2}J\Omega_0^2$
λ_{**}
λ_*
в)
$\frac{\Omega}{\sqrt{2h_0J^{-1}}}$
$2h_0J^{-1}$

Рис. I

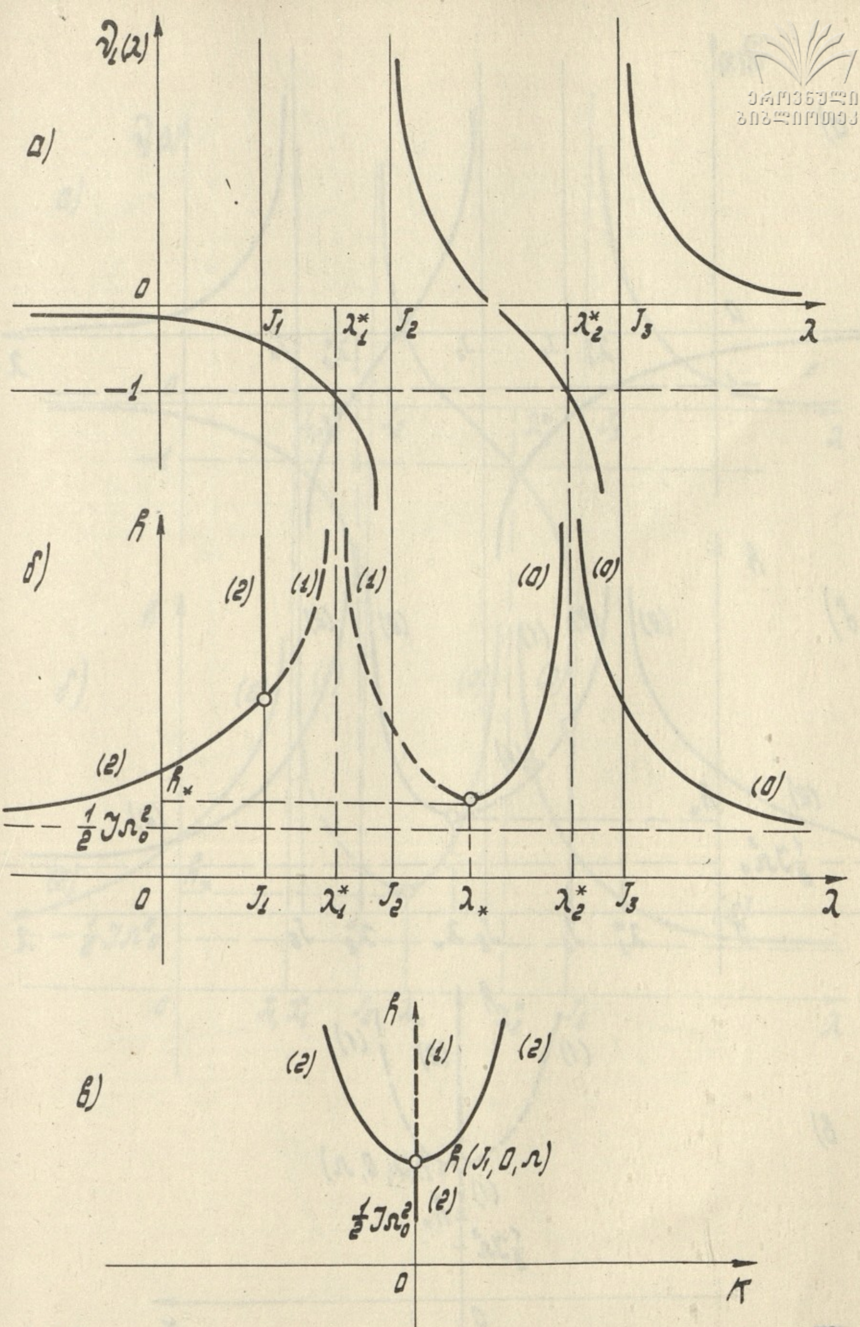
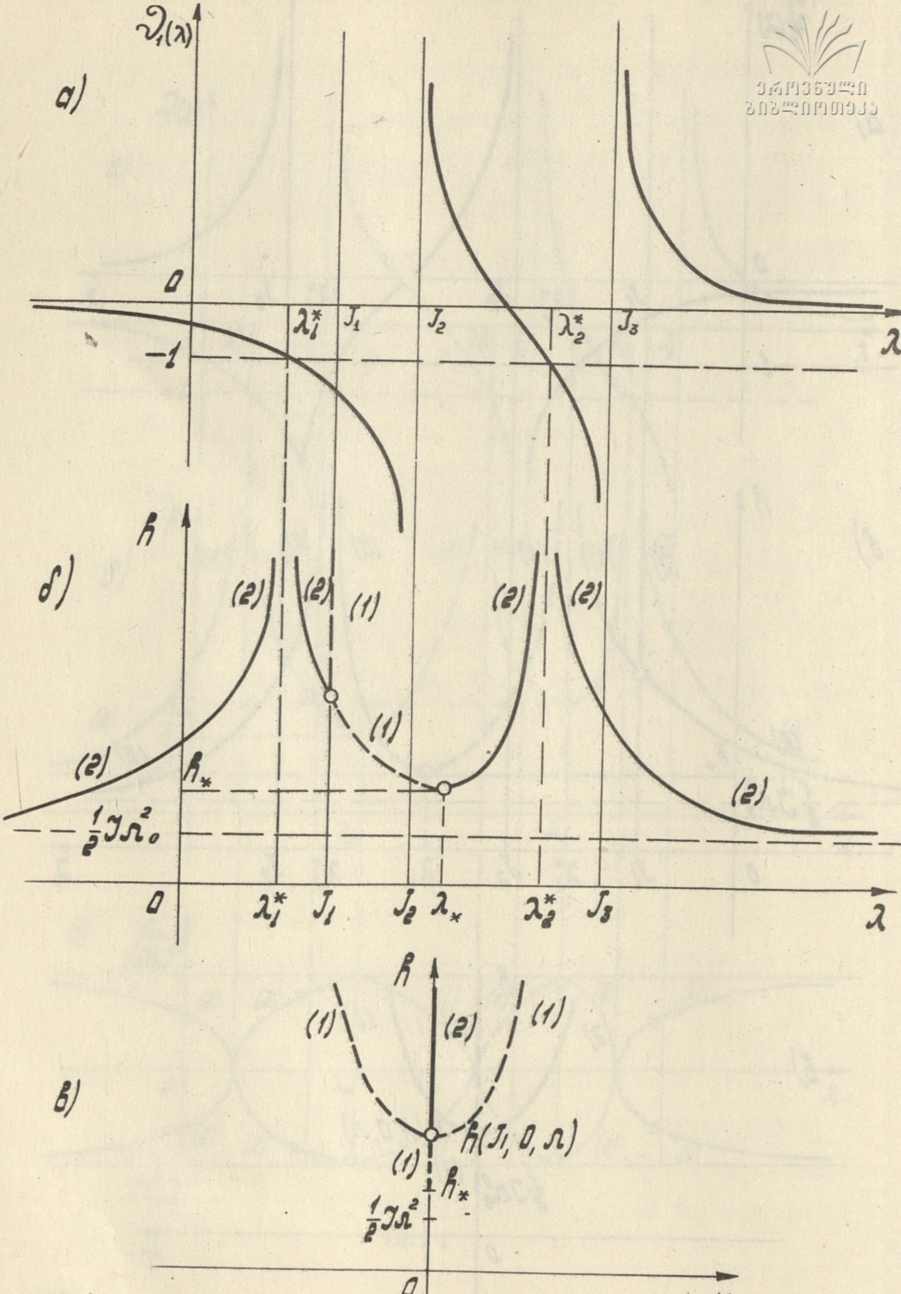

а)
$\vartheta_1(\lambda)$
0
J_1
λ_1^*
J_2
λ_2^*
J_3
λ
-1
б)
h
(2)
(1)
(1)
(0)
(0)
(2)
h_*
$\frac{1}{2}J\Omega_0^2$
(0)
0
J_1
λ_1^*
J_2
λ_*
λ_2^*
J_3
λ
в)
h
(2)
(1)
(2)
$h(J_1, 0, \Omega)$
(2)
$\frac{1}{2}J\Omega_0^2$
0
K

Рис. 2



а)
$\vartheta_1(\lambda)$
0
-1
λ_1^*
J_1
J_2
λ_2^*
J_3
λ
б)
h
(2)
(1)
h_*
$\frac{1}{2}J\Omega_0^2$
0
λ_1^*
J_1
J_2
λ_*
λ_2^*
J_3
λ
в)
h
(1)
(2)
$h(J_1, 0, \Omega)$
h_*
$\frac{1}{2}J\Omega^2$
0
k

Рис.3

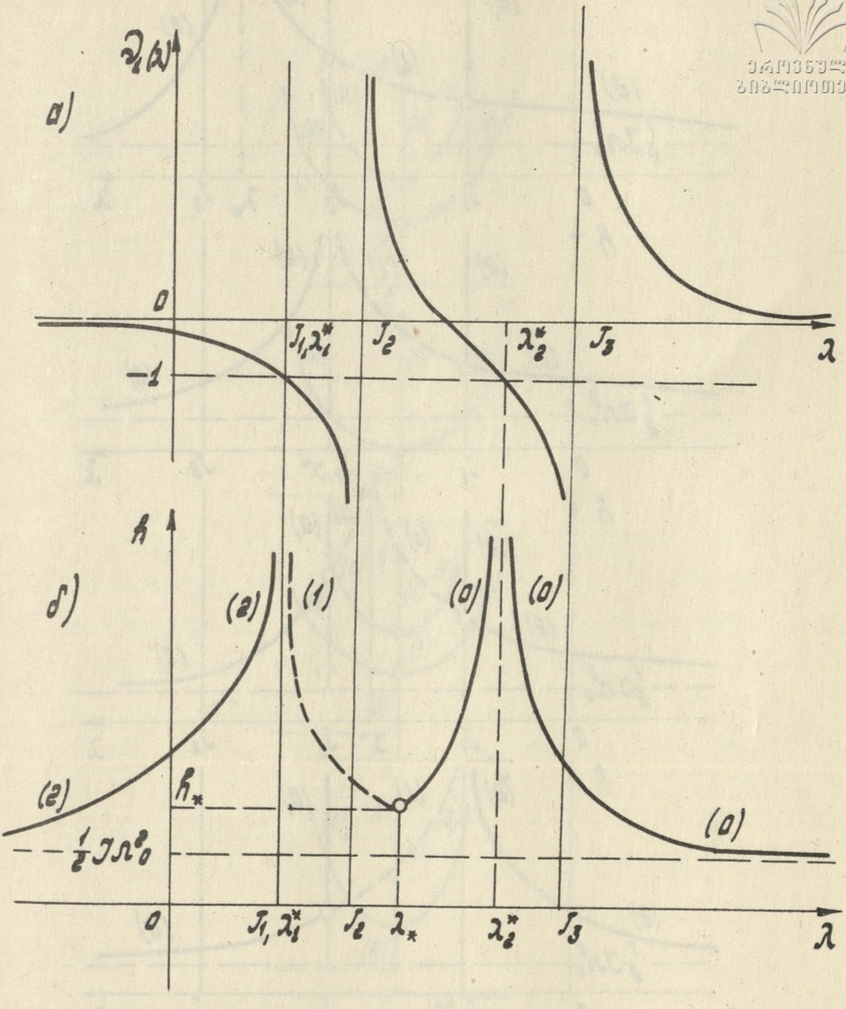


Рис.4

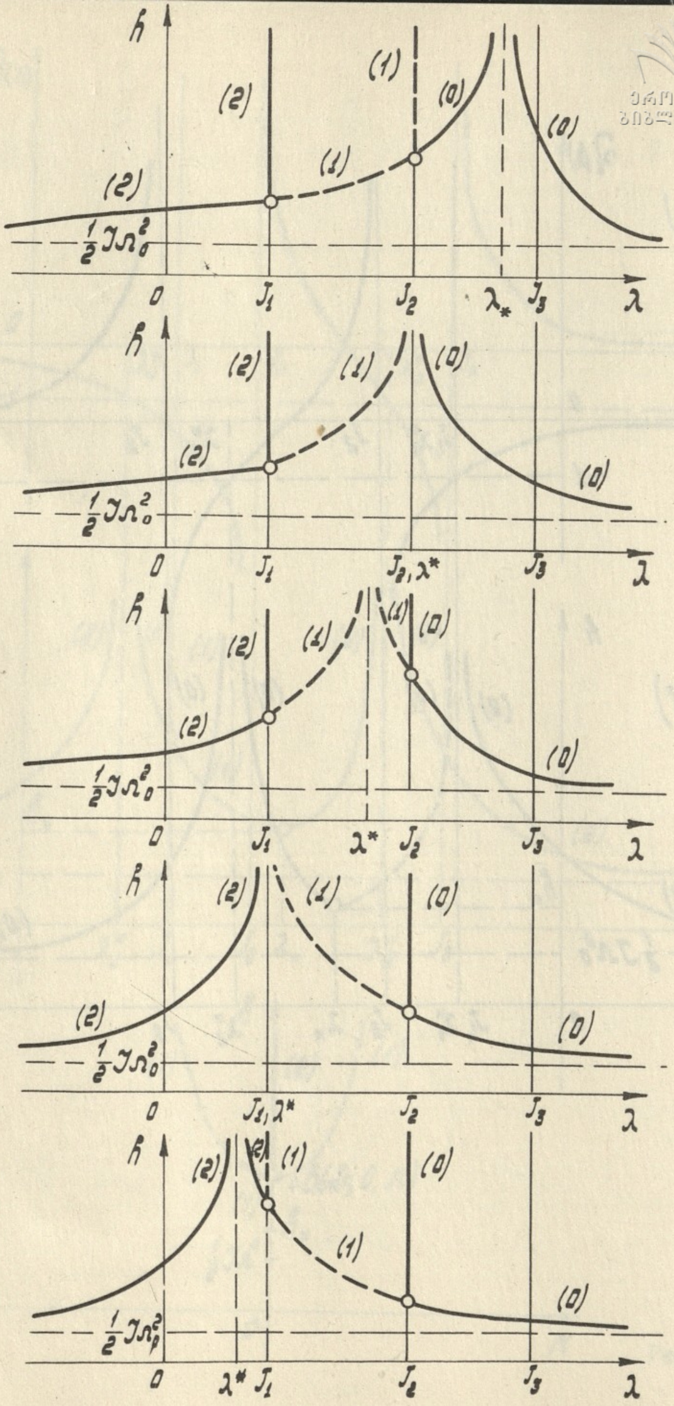


Рис.5

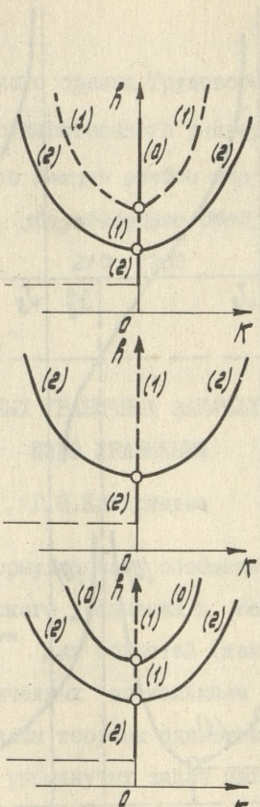


Рис.6

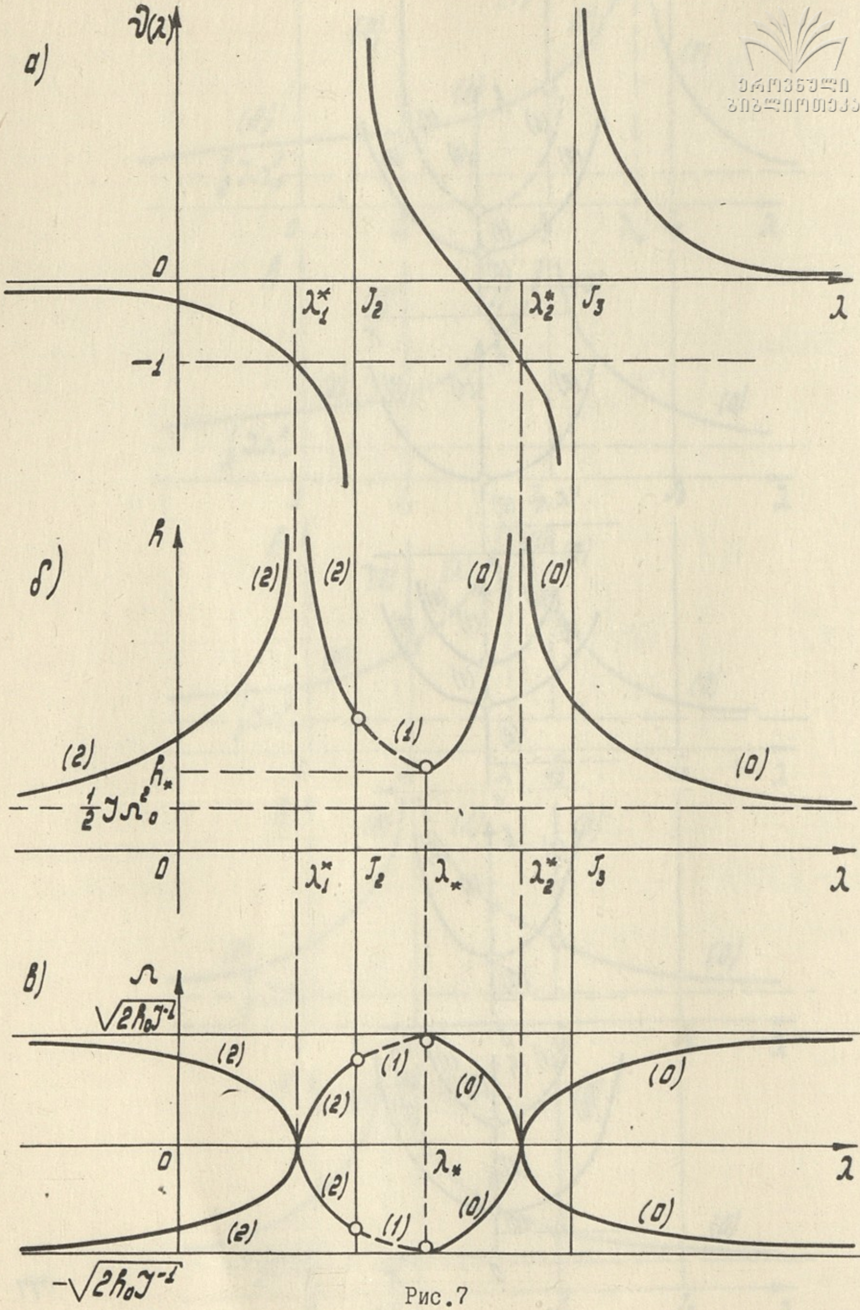

а)
$\vartheta(\lambda)$
0
-1
λ_1^*
J_2
λ_2^*
J_3
λ
б)
h
(2)
(2)
(0)
(0)
(1)
(2)
h_*
(0)
$\frac{1}{2}J\Omega_0^2$
0
λ_1^*
J_2
λ_*
λ_2^*
J_3
λ
в)
Ω
$\sqrt{2h_0J^{-1}}$
(2)
(1)
(2)
(0)
(0)
0
λ_*
λ
(2)
(0)
(0)
(2)
(1)
$-\sqrt{2h_0J^{-1}}$

Рис.7

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
210, 1980

УДК 517.946

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Г.П.Квиникадзе

В работе сформулированы обобщенные граничные задачи для бигармонического уравнения в m-мерном евклидовом пространстве E^m для областей (как внутренних, так и внешних), ограниченных несколькими замкнутыми гиперповерхностями и доказаны теоремы единственности для этих задач. Частным случаем упомянутых задач являются задачи изгиба пластинки / 1 /, а также другие известные граничные задачи для бигармонического уравнения.

1_0. Пусть ℓ -неотрицательное целое число, S_k $(k=\overline{0,\ell})$ - $(m-1)$ - мерные связные замкнутые многообразия в E^m и пусть $\mathcal{D}_k^+$ - конечная область, ограниченная S_k, $\overline{\mathcal{D}}_k^+ = \mathcal{D}_k^+ \cup S_k$, $\mathcal{D}_k^- = E^m \setminus \overline{\mathcal{D}}_k^+$, $\overline{\mathcal{D}}_k^- = \mathcal{D}_k^- \cup S_k$, причем $\mathcal{D}_k^+ \subset \mathcal{D}_0^+$ $(k=\overline{1,\ell})$, $\overline{\mathcal{D}}_k^+ \cap \overline{\mathcal{D}}_j^+ = \varnothing$ $(k,j=\overline{1,\ell})$; нормаль на S_k будем считать внешней по отношению к области $\mathcal{D}_k^+$ и будем предполагать, что $S_k \in \Lambda_2(\gamma)$, $0<\gamma\le 1$ / 2 /. Заметим, при этом, что некоторые рассуждения, проведенные ниже, справедливы и при менее жестких ограничениях относительно S_k.

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{D}^+=\mathcal{D}_0^+ \setminus \bigcup_{k=1}^{e}\bar{\mathcal{D}}_k^+,\ \mathcal{D}^-=E^m \setminus \bar{\mathcal{D}}^+,\ S=S_0 \cup \bigcup_{k=1}^{e} S_k^-,$$

а при $e \geqslant 1$

$$\tilde{\mathcal{D}}^+=\bigcup_{k=1}^{e}\mathcal{D}_k^+,\ \tilde{\mathcal{D}}^-=E^m \setminus \bigcup_{k=1}^{e}\bar{\mathcal{D}}_k^+,\ \tilde{S}=\bigcup_{k=1}^{e} S_k,$$

где S_k^- $(k=\overline{1,e})$ обозначает S_k с противоположной ориентацией.

Очевидно, что $\mathcal{D}^+$ и $\tilde{\mathcal{D}}^+$ – ограниченные (внутренние), а $\mathcal{D}^-$ и $\tilde{\mathcal{D}}^-$ – неограниченные (внешние) области; $\tilde{S}$ – общая граница $\tilde{\mathcal{D}}^+$ и $\tilde{\mathcal{D}}^-$; а S – общая граница $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$, на которой нормаль – внешняя по отношению к области $\mathcal{D}^+$.

Введем следующие дифференциальные операторы:

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M_m}(\partial_x, n(x))=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\sum_{i,j=1}^{m}(1-\alpha_i)n_i(x)n_j(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{I.I}$$

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_x, n(x))=\frac{\partial\Delta_m(\partial_x)}{\partial n(x)}-\sum_{i,j=1}^{m}(1-\alpha_i)K_m(x)n_i(x)\frac{\partial}{\partial n(x)}\frac{\partial}{\partial x_i}+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{m}(1-\alpha_i)\mathcal{D}_j(\partial_x, n(x))\left[n_i(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right], \tag{I.2}$$

где $\Delta_m(\partial_x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $\mathcal{D}_k(\partial_x, n(x))=$ $=\frac{\partial}{\partial x_k}-n_k(x)\frac{\partial}{\partial n(x)}$ – оператор Гюнтера / 3 /,

$\vec{\alpha}(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ – произвольный постоянный вектор,

$$K_m(x)=\sum_{j=1}^{m}\mathcal{D}_j(\partial_x,n(x))n_j(x),\ \vec{n}(x)=(n_1(x),\dots,n_m(x))-$$

– произвольный единичный вектор класса $C^{0,\gamma}(\bar{\mathcal{D}}^{\pm})$ (или $C^{0,\gamma}(\bar{\tilde{\mathcal{D}}}^{\pm})$), который при $x=z\in S$ (или $\tilde{S}$) совпадает с ортом $\vec{n}(z)$ внешней по отношению к $\mathcal{D}^+$ (или $\tilde{\mathcal{D}}^+$) нормали в точке z. Можно проверить, что $K_2(z)$ – кривизна кривой S_κ в точке z, а $K_3(z)$ – средняя кривизна на поверхности S_κ в точке z.

Легко проверяется справедливость следующих формул:

$$\overset{\alpha,\dots,\alpha}{\mathcal{M}}_m(\partial_x,n(x))\equiv\overset{\alpha}{\mathcal{M}}_m(\partial_x,n(x))=\Delta_m(\partial_x)-(1-\alpha)K_m(x)\frac{\partial}{\partial n(x)}-$$
$$-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{m}\overset{m}{\tilde{\mathcal{D}}}_i(\partial_x,n(x))\overset{m}{\mathcal{D}}_i(\partial_x,n(x)),\tag{I.3}$$

$$\overset{\alpha}{\mathcal{M}}_2(\partial_x,n(x))=\Delta_2(\partial_x)-(1-\alpha)K_2(x)\frac{\partial}{\partial n(x)}-(1-\alpha)\frac{\partial^2}{\partial S^2(x)},$$

$$\overset{\alpha}{\mathcal{M}}_3(\partial_x,n(x))=\Delta_3(\partial_x)-(1-\alpha)K_3(x)\frac{\partial}{\partial n(x)}-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial S_i^2(x)},$$

$$\overset{\alpha}{\mathcal{N}}_2(\partial_x,n(x))=\frac{\partial\Delta_2(\partial_x)}{\partial n(x)}+(1-\alpha)\frac{\partial H(\partial_x,n(x))}{\partial S(x)},$$

$$\overset{\alpha}{\mathcal{N}}_3(\partial_x,n(x))=\frac{\partial\Delta_3(\partial_x)}{\partial n(x)}+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial H_i(\partial_x,n(x))}{\partial S_i(x)},$$

где

$$H_i(\partial_x,n(x))=\sum_{e,\kappa=1}^{3}\varepsilon_{ie\kappa}n_e(x)\frac{\partial}{\partial n(x)}\frac{\partial}{\partial x_\kappa},$$

$$\frac{\partial}{\partial S_\kappa(x)}=\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij\kappa}n_i(x)\overset{3}{\mathcal{D}}_j(\partial_x,n(x)),$$

$$H(\partial_x,n(x))\equiv H_3(\partial_x,n(x)),$$

$\frac{\partial}{\partial S(x)} \equiv \frac{\partial}{\partial S_3(x)}$, ε_{ijk} – символ Леви-Чивита. Очевидно $\frac{\partial}{\partial S_K(z)}$ – оператор дифференцирования по направлению, касательному к S в точке z /2/.

Определение 1.1. Функцию u, определенную на некотором ограниченном открытом множестве $\Omega \subset E^m$, назовем бирегулярной в Ω, и будем писать $u \in \mathcal{R}^2(\Omega)$, если $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$ и $\Delta^2_m(\partial_x)u(x) \equiv \Delta_m(\partial_x)\Delta_m(\partial_x)u(x)$ абсолютно интегрируема в Ω.

Определение 1.2. Пусть Ω – открытое множество, содержащее окрестность бесконечно удаленной точки (т.е. множество вида $\{x \in E^m : |x| > R\}$ для некоторого $R > 0$); функцию u определенную на Ω, назовем бирегулярной в Ω и будем писать $u \in \mathcal{R}^2(\Omega)$, если $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$, $\Delta^2_m(\partial_x)u(x)$ абсолютно интегрируема в $\Omega \cap Ш(0,R)$ для любого $R > 0$ и при $|x| \to +\infty$ соблюдаются условия:

при $m = 2$

$$u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + O(\ln|x|),\quad \mathcal{D}^1 u(x) = O(1) + O(|x|^{-1}),$$
$$\mathcal{D}^j u(x) = O(|x|^{-j}) \quad (j = 2, 3);$$

при $m = 3$

$$u(x) = O(1),\quad \mathcal{D}^j u(x) = O(|x|^{-j}) \quad (j = 1, 2, 3); \tag{1.4}$$

при $m = 4$

$$u(x) = O(1) + O(|x|^{-1}),\quad \mathcal{D}^j u(x) = O(|x|^{-1-j}) \quad (j = 1, 2, 3);$$

при $m \geq 5$

$$\mathcal{D}^j u(x) = O(|x|^{-m+4-j}) \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

где a_1, a_2 - постоянные, $|x|=\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}$, $Ш(\xi, \mathcal{R})$ - шар радиуса $\mathcal{R} > 0$ с центром в точке $\xi \in E^m$, а через $\mathcal{D}^j$ обозначена любая производная порядка j по декартовым координатам.

Заметим, что если u - бигармоническая функция в Ω, т.е. $u \in C^4(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω m - мерному бигармоническому уравнению

$$\Delta_m^2(\partial_x)u(x)=0, \tag{I.5}$$

тогда u бирегулярна в Ω, если она дополнительно удовлетворяет условию $u \in C^3(\bar{\Omega})$, а в случае неограниченного Ω еще и условиям (I.4).

<u>Теорема I.I.</u> Пусть $u \in \mathcal{R}^2(\Omega)$, где Ω обозначает одно из множеств $\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-, \tilde{\mathcal{D}}^+, \tilde{\mathcal{D}}^-$, $v \in C^2(\bar{\Omega})$, а в случае неограниченного Ω удовлетворяет еще и условиям (I.4). Тогда справедлива следующая обобщенная формула Грина:

$$\int_{\Omega} v(x)\Delta_m^2(\partial_x)u(x)dx = \varepsilon \int_{\partial\Omega} \Big[\{v(y)\}_{\Omega} \{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N}_m(\partial_y, n(y))u(y)\}_{\Omega} - \left\{\frac{\partial v(y)}{\partial n(y)}\right\}_{\Omega} \{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M}_m(\partial_y, n(y))\}_{\Omega} d_y S + \int_{\Omega} \overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E}_m[v(x), u(x)]dx, \tag{I.6}$$

где $\varepsilon = 1$, если Ω - либо $\mathcal{D}^+$, либо $\tilde{\mathcal{D}}^+$ и $\varepsilon = -1$, если Ω - либо $\mathcal{D}^-$, либо $\tilde{\mathcal{D}}^-$; $\partial\Omega = S$, если $\Omega = \mathcal{D}^{\pm}$ и $\partial\Omega = \tilde{S}$, если $\Omega = \tilde{\mathcal{D}}^{\pm}$;

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[v(x),u(x)]=\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_j\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}+\sum_{i,j=1}^{m}(1-\alpha_j)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j};$$

(I.7)

$$\left\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_y,n(y))u(y)\right\}_{\Omega}=\lim_{\Omega\ni x\to y\in\partial\Omega}\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_x,n(x))u(x);$$

аналогичный смысл имеют остальные обозначения.

Следствие I.I. Пусть u – бирегулярная бигармоническая функция в Ω. Тогда справедлива следующая обобщенная формула Грина:

(I.8)

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[\{u(y)\}_{\Omega}\left\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_y,n(y))u(y)\right\}_{\Omega}-\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)}\right\}_{\Omega}\left\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M_m}(\partial_y,n(y))u(y)\right\}_{\Omega}\right]d_yS=-\varepsilon\int\limits_{\Omega}\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[u(x),u(x)]dx.$$

Следствие I.2. Пусть u – бирегулярная бигармоническая функция в Ω. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_y,n(y))u(y)\right\}_{\Omega}d_yS=0$$

для любого $m\geqslant 2$, если Ω – либо $\mathcal{D}^+$, либо $\widetilde{\mathcal{D}}^+$, и при $m=2,3,4$, если Ω – либо $\mathcal{D}^-$, либо $\widetilde{\mathcal{D}}^-$.

2°. Пусть $G\subset E^m$ – некоторая область. Изучим свойства дифференциального выражения $\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[u(x),u(x)]$, где $u\in C^2(G)$. Легко проверяются следующие тождества:

$$\overset{\alpha,\dots,\alpha}{E_m}[u(x),u(x)] \equiv \overset{\alpha}{E_m}[u(x),u(x)] =$$

$$= (1-\alpha)\sum_{i,j=1}^{m}(1-\delta_{ij})\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{(1-\alpha)[(i-1)\alpha+1]}{(i-2)\alpha+1}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=i+1}^{m}\frac{\alpha}{(i-1)\alpha+1}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}\right]^2,$$

при $\alpha \neq -\frac{1}{k-1}$ $(k=\overline{1,m})$,

$$\overset{-\frac{1}{m-1}}{E_m}[u(x),u(x)] = \frac{m}{m-1}\sum_{i,j=1}^{m}(1-\delta_{ij})\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{m(m-i)}{(m-1)(m-i+1)}\left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}-\frac{1}{m-i}\sum_{j=i+1}^{m}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}\right]^2, \tag{2.1}$$

$$\overset{\alpha_1,\alpha_2}{E_2}[u(x),u(x)] = \left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}\right]^2 +$$

$$+\left[1-\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2}{4}\right]\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}\right)^2+(2-\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2,$$

$$\overset{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}{E_3}[u(x),u(x)] = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}+\gamma_{12}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}+\gamma_{13}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}\right)^2 +$$

$$+(1-\gamma_{12}^2)\left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}+\frac{\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13}}{1-\gamma_{12}^2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}\right]^2+\frac{\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{1-\gamma_{12}^2}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{3}(1-\alpha_j)(1-\delta_{ij})\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2, \quad \text{если } \alpha_1+\alpha_2 \neq \pm 2,$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, $\gamma_{ij}=\gamma_{ji}=\frac{\alpha_i+\alpha_j}{2}$ $(i,j=\overline{1,3})$,

а $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1-\gamma_{13}^2-\gamma_{23}^2-\gamma_{12}^2+2\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23}$.

Построим все решения вспомогательного уравнения

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[u(x),u(x)]=0 \tag{2.2}$$

из класса $C^2(G)$, когда постоянные $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\left.\begin{aligned}&1.\ \alpha_i=\alpha\ (i=\overline{1,m}),\ -\frac{1}{m-1}<\alpha<1;\\ &2.\ m=2,\ -2<\alpha_1+\alpha_2<2;\\ &3.\ m=3,\ \Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)>0,\ \alpha_i\leq 1\ (i=1,2,3),\end{aligned}\right\} \tag{2.3$_I$}$$

причем по крайней мере в двух из этих неравенств имеет место строгое неравенство, а модуль суммы некоторых двух из этих чисел меньше двух;

$$\left.\begin{aligned}&4.\ \alpha_i=\alpha=\frac{-1}{m-1}\ \ (i=\overline{1,m});\\ &5.\ m=2,\ \alpha_1+\alpha_2=-2;\end{aligned}\right\} \tag{2.3$_2$}$$

$$\left.\begin{aligned}&6.\ \alpha_i=\alpha=1\ \ (i=\overline{1,m});\\ &7.\ m=2,\ \alpha_1+\alpha_2=2;\end{aligned}\right\} \tag{2.3$_3$}$$

$$8.\ \ m=3,\ \ -3<\alpha_1<1,\ \alpha_2=\alpha_3=1; \tag{2.3$_4$}$$

$$9.\ \ m=3,\ \ \alpha_1=\alpha_2=-1,\ \alpha_3=1; \tag{2.3$_5$}$$

$$10.\ \ m=3,\ \ \alpha_1=-3,\ \alpha_2=\alpha_3=1. \tag{2.3$_6$}$$

Из формул (2.1) непосредственно следует

<u>Теорема 2.1.</u> Пусть выполняется одно из условий (2.3). Тогда для любого $u\in C^2(G)$

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[u(x),u(x)]\geqslant 0.$$

Теорема 2.2. Пусть $i\in\{1,\cdots,6\}$ и выполняется одно из условий (2.3_i). Тогда общее решение уравнения (2.2) в области G имеет соответственно вид (2.4_i):

$$u(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k x_k+b, \tag{2.4$_1$}$$

$$u(x)=c\sum_{k=1}^{m}(x_k-a_k)^2+b, \tag{2.4$_2$}$$

$$u(x)=v(x), \tag{2.4$_3$}$$

$$u(x)=cx_1+v_1(x_2,x_3), \tag{2.4$_4$}$$

$$u(x)=\sum_{k=1}^{3}a_k x_k+c(x_1^2+x_2^2)+b, \tag{2.4$_5$}$$

$$u(x)=cx_1^2+bx_1+v_2(x_2,x_3), \tag{2.4$_6$}$$

где $a_k\ (k=\overline{1,m})$, b, c – произвольные постоянные, v и v_1 – произвольные гармонические функции, а v_2 – произвольное решение уравнения Пуассона $\Delta_2(\partial_x)v_2(x_2,x_3)=2c$.

3_0. Пусть Ω – одно из множеств $\mathcal{D}^{\pm}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{\pm}$, а $\sigma_i\in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\ (i=1,2;\ 0<\lambda\leq 1)$ – заданные функции, удовлетворяющие условию $\varepsilon\sigma_i>0$ (см. обозначения теоремы I.I).

Исходя из (I.8), введем следующие двумерные векторные дифференциальные операторы в Ω:

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{T_{(I)}}(\partial_x,n(x))u(x)=(u(x),\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M_m}(\partial_x,n(x))u(x)), \tag{3.I$_1$}$$

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{T_{(II)}}(\partial_x,n(x))u(x)=\left(\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_x,n(x))u(x),\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right), \tag{3.I$_2$}$$

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{T}_{(\mathrm{III})}(\partial_x, n(x))u(x) = \left(\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N}_m(\partial_x, n(x))u(x), \overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M}_m(\partial_x, n(x))u(x)\right), \quad (3.\mathrm{I}_3)$$

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{T}_{(\mathrm{IV})}(\partial_x, n(x))u(x) =$$

$$= \left(\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M}_m(\partial_x, n(x))u(x) + \sigma_1(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}, \overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N}_m(\partial_x, n(x))u(x) - \sigma_2(x)u(x)\right). \quad (3.\mathrm{I}_4)$$

Для уравнения (I.5) будем рассматривать следующие (внутренние и внешние) граничные задачи $\overset{(i)}{(A)}_f$ $(i = \mathrm{I}-\mathrm{IV})$.

Найти бирегулярную бигармоническую в Ω функцию u, которая удовлетворяет граничным условиям

$$\left\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{T}_{(i)}(\partial_z, n(z))u(z)\right\}_\Omega = f(z), \quad z \in \partial\Omega,$$

где $f = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 \in C^{0,\lambda}(\partial\Omega)$ – заданная вектор-функция, причем при $i = \mathrm{II}, \mathrm{III}$

$$\int_{\partial\Omega} f_1(z)d_zS = 0$$

для любого $m \geqslant 2$, если Ω – либо $\mathcal{D}^+$, либо $\widetilde{\mathcal{D}}^+$ и при $m = 2,3,4$, если Ω –либо $\mathcal{D}^-$, либо $\widetilde{\mathcal{D}}^-$.

При $f_i \equiv 0$ $(i = 1,2)$ задачу $\overset{(i)}{(A)}_f$ назовем однородной задачей и будем обозначать $\overset{(i)}{(A)}_0$.

Когда $\alpha_j = 1$ $(j = \overline{1,m})$, задачи $\overset{(i)}{(A)}_f$ превращаются в т.н. "вырожденные" задачи. В этом случае граничные условия имеют соответственно вид

$$\left\{(u(z), \Delta_m(\partial_z)u(z))\right\}_\Omega = f,$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u(z)}{\partial n(z)}, \frac{\partial \Delta_m(\partial_z)u(z)}{\partial n(z)}\right)\right\}_\Omega = f,$$

$$\left\{\left(\Delta_m(\partial_z)u(z),\ \frac{\partial \Delta_m(\partial_z)u(z)}{\partial n(z)}\right)\right\}_{\Omega}=f,$$

$$\left\{\left(\Delta_m(\partial_z)u(z)+\sigma_1(z)u(z),\ \frac{\partial \Delta_m(\partial_z)u(z)}{\partial n(z)}-\sigma_2(z)\frac{\partial u(z)}{\partial n(z)}\right)\right\}_{\Omega}=f.$$

Задачи $\overset{(I)}{(A)}_f$ и $\overset{(II)}{(A)}_f$ при $m=2$ и $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ изучались в /1/. Если α - коэффициент Пуассона, они представляют вторую и третью основные граничные задачи изгиба пластинки, когда край пластинки соответственно свободно оперт или свободен.

Теорема 3.1. Пусть $\Omega=\mathcal{D}^+$ и u - решение задачи $\overset{(I)}{(A)}_0$. Тогда

1_0. Если выполняется одно из условий (2.3_I), (2.3_{3-5}), то $u(x)\equiv 0$.

2_0. Если выполняется одно из условий (2.3_2) и $\ell\geqslant 1$ или $\ell=0$, но S_0 не является сферой, то $u(x)\equiv 0$.

3_0. Если $\ell=0$, выполняется одно из условий (2.3_2) и S_0 - сфера радиуса R с центром $x^{(0)}$, то

$$u(x)=C\Big[\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_k^{(0)})^2-R^2\Big], \tag{3.2}$$

где C - произвольная постоянная.

Доказательство. Ввиду того, что

$$\{u(z)\}_{\mathcal{D}^+}=0,\ \{M_m^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(\partial_z,n(z))u(z)\}_{\mathcal{D}^+}=0,\ z\in S, \tag{3.3}$$

в силу формулы (I.8) имеем

$$\int_{\mathcal{D}^+} \overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[u(x),u(x)]\,dx=0.$$

Следовательно, на основании теоремы 2.I получаем

$$\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{E_m}[u(x),u(x)]=0 \quad \text{при} \quad x\in\mathcal{D}^+. \tag{3.4}$$

Пусть соблюдается одно из условий (2.3_I), (2.3_3), (2.3_4), (2.3_5). Тогда в силу (3.4) и теоремы 2.2 u соответственно имеет один из видов (2.4_I), (2.4_3), (2.4_4), (2.4_5). В первом случае $u(x)\equiv 0$, так как из (3.3) следует, что $a_k=0\ (k=\overline{1,m})$, $b=0$; в следующих двух случаях $u(x)\equiv 0$ как гармоническая в $\mathcal{D}^+$ функция, удовлетворяющая однородным граничным условиям Дирихле; что же касается случая (2.4_5), из (3.3) вытекает, что S является частью поверхности

$$\sum_{k=1}^{3} a_k z_k + c(z_1^2+z_2^2)+b=0,$$

которая при $c\neq 0$ является параболоидом вращения, а при $c=0,\ \sum_{k=1}^{3} a_k^2>0$ – плоскостью, но это невозможно, так как $S_j\ (j=\overline{0,e})$ – замкнутые поверхности. Таким образом, и в этом случае $u(x)\equiv 0$.

Пусть теперь соблюдается одно из условий (2.3_2). Тогда u имеет вид (2.4_2), и из граничного условия (3.3) следует, что S является подмножеством поверхности

$$c\sum_{k=1}^{m}(z_k-a_k)^2+b=0.$$

Но это, в случае, когда $\ell \geqslant 1$, либо $\ell = 0$, но S_0 не является сферой, возможно лишь при $c = 0$, $b = 0$, т.е. $u(x) \equiv 0$; а в случае, когда $\ell = 0$, а S_0 – сфера радиуса $\mathcal{R}$ с центром в $x^{(0)}$, будем иметь $b = -c\mathcal{R}^2$, $a_k = x_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, 3)$, т.е. u имеет вид (3.2). Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть $\Omega = \tilde{\mathcal{D}}^+$, а u – решение задачи $\overset{(I)}{(A)}_0$. Тогда

I_0. Если выполняется одно из условий (2.3_I), (2.3_{3-5}), то $u(x) \equiv 0$

2_0. Если выполняется одно из условий (2.3_2) и среди S_j $(j = \overline{1, \ell})$ нет ни одной сферы, то $u(x) \equiv 0$.

3_0. Если выполняется одно из условий (2.3_2), а S_j $(j = \overline{1, \ell'})$ – сферы радиуса $\mathcal{R}_j$ с центром в $x^{(j)} \in E^m$, где $1 \leqslant \ell' \leqslant \ell$, то

$$u(x) = \begin{cases} c_j \left[\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - x_k^{(j)})^2 - \mathcal{R}_j^2 \right] & \text{при } x \in \mathcal{D}_j^+ \ (j = \overline{1, \ell'}) \\ 0 & \text{при } x \in \mathcal{D}_j^+ \ (j = \overline{\ell' + 1, \ell}) \end{cases} \tag{3.5}$$

где c_j $(j = \overline{1, \ell'})$ – произвольные постоянные.

Теорема 3.3. Пусть $\Omega = \mathcal{D}^-$, а u – решение задачи $\overset{(I)}{(A)}_0$. Тогда

I_0. Если выполняется одно из условий (2.3_I), (2.3_5), то $u(x) \equiv 0$.

2_0. Если выполняется одно из условий (2.3_2) и среди S_j $(j=\overline{1,\ell})$ нет ни одной сферы, то $u(x)\equiv 0$.

3_0. Если выполняется одно из условий (2.3_2), а S'_j $(j=\overline{1,\ell'})$ - сферы радиуса $\mathcal{R}_j$ с центром в $x^{(j)}\in E^m$, где $1\leq \ell'\leq \ell$, то u в $\mathcal{D}_j^+$ $(j=\overline{1,\ell})$ имеет вид (3.5) и $u(x)\equiv 0$ при $x\in\mathcal{D}_0^-$.

Теорема 3.4. Пусть $\Omega=\widetilde{\mathcal{D}}^-$, u - решение задачи $\left(\overset{(I)}{\mathcal{A}}\right)_0$ и соблюдается одно из условий (2.3_I), (2.3_2), (2.3_5). Тогда $u(x)\equiv 0$.

Теорема 3.5. Пусть $\Omega=\mathcal{D}^+$, u - решение задачи $\left(\overset{(II)}{\mathcal{A}}\right)_0$ и выполняется одно из условий (2.3_{I-5}). Тогда

$$u(x)\equiv C, \tag{3.6}$$

где C - произвольная постоянная.

Доказательство. Ясно, что u удовлетворяет граничным условиям

$$\left\{\frac{\partial u(z)}{\partial n(z)}\right\}_{\mathcal{D}^+}=0,\ \left\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{\underset{m}{N}}(\partial_z,n(z))u(z)\right\}_{\mathcal{D}^+}=0,\quad z\in S, \tag{3.7}$$

а также условиям (3.4).

Рассмотрим сперва случай, когда соблюдается одно из условий (2.3_{3-4}). Тогда u имеет соответственно вид (2.4_{3-4}) и $u(x)\equiv C$, как гармоническая в $\mathcal{D}^+$ функция, удовлетворяющая однородным граничным условиям Неймана.

Предположим, что уравнение S_j имеет вид

$$F_j(z_1,\dots,z_m)=0,$$

где $F_j\in C^{2,\lambda}$ $(j=\overline{0,\ell})$. Тогда

$$n_k(z)=\frac{\dfrac{\partial F_j(z)}{\partial z_k}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\dfrac{\partial F_j(z)}{\partial z_k}\right)^2}},\quad j=\overline{0,\ell},\ k=\overline{1,m},\quad z\in S_j$$

Пусть соблюдается одно из условий (2.3_I). Тогда, в силу (3.4), u имеет вид (2.4_I) ; следовательно, из (3.7) имеем

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\,n(z)=0,$$

или же

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\frac{\partial F_j(z)}{\partial z_k}=0,\quad j=\overline{0,\ell} \tag{3.8}$$

Допустим, что одно из a_k, скажем a_m, отлично от нуля. Тогда, решая F_j из (3.8), приходим к выводу, что уравнение S_j имеет вид

$$\Phi\left(z_1-\frac{a_1}{a_m}z_m,\dots,z_{m-1}-\frac{a_{m-1}}{a_m}z_m\right)=0,$$

где Φ - произвольная функция класса $C^{2,\lambda}$. Но последнее уравнение определяет неограниченное многообразие, что невозможно. Таким образом, $a_k=0$ $(k=\overline{1,m})$. Значит, имеет место (3.6).

Пусть теперь соблюдается одно из условий (2.3_2). Тогда u имеет вид (2.4_2), и из (3.7) получаем

$$2c\sum_{k=1}^{m}(z_k-a_k)n_k(z)=0,$$

т.е.

$$c\sum_{k=1}^{m}(z_k-a_k)\frac{\partial F_j(z)}{\partial z_k}=0,\quad j=\overline{0,\ell} \tag{3.9}$$

Допустим, что $c\neq 0$. Тогда из (3.9) получаем уравнение S_j:

$$\Phi\left(\frac{z_2-a_2}{z_1-a_1},\ldots,\frac{z_m-a_m}{z_1-a_1}\right)=0;$$

но это вновь неограниченное многообразие, что невозможно. Таким образом, $c=0$ и выполняется (3.6).

Аналогично рассматривается случай, когда выполняется условие (2.3_5). Теорема доказана.

Теорема 3.6. Пусть $\Omega=\tilde{\mathcal{D}}^+$, u – решение задачи $(\overset{(II)}{A})_0$ и выполняется одно из условий (2.3_{I-5}). Тогда $u(x)=C_j$ при $x\in\mathcal{D}_j^+$ $(j=\overline{1,\ell})$, где C_j – произвольные постоянные.

Теорема 3.7. Пусть Ω – либо $\mathcal{D}^-$, либо $\tilde{\mathcal{D}}^-$, выполняется одно из условий (2.3_{I-2}), (2.3_5), а u – решение задачи $(\overset{(II)}{A})_0$. Тогда

$$u(x)=\begin{cases} b_j \text{ при } x\in\mathcal{D}_j^+ & (j=\overline{1,\ell}) \\ b \text{ при } x\in\mathcal{D}_0^- \end{cases},$$

где b_j, b – произвольные постоянные.

Теорема 3.8. Пусть Ω - одно из множеств $\mathcal{D}^{\pm}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{\pm}$, а u - решение задачи $\left(\overset{(IV)}{A}\right)_0$. Пусть, кроме того

1) Если Ω - либо $\mathcal{D}^+$, либо $\widetilde{\mathcal{D}}^+$, выполняется одно из условий (2.3_{1-5});

2) Если Ω - либо $\mathcal{D}^-$, либо $\widetilde{\mathcal{D}}^-$, выполняется одно из условий (2.3_{1-2}), (2.3_5).

Тогда $u(x)\equiv 0$.

Аналогично рассматривается задача $\left(\overset{(III)}{A}\right)_0$. Решение этой задачи в каждой из областей $\mathcal{D}_j^+$ $(j=1,\dots,\ell)$, $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}_0^-$ имеет один из видов (2.4_{1-6}).

4_0. Пусть $\Gamma_m(y,x)$ - фундаментальное решение бигармонического уравнения. Тогда

$$\Gamma_m(y,x)=\begin{cases}\beta_m \mathcal{R}_m(|y-x|), & \text{когда } \Omega \text{ - либо } \mathcal{D}^+, \text{либо } \widetilde{\mathcal{D}}^+\\ \beta_m \mathcal{R}_m^*(y,x), & \text{когда } \Omega \text{ - либо } \mathcal{D}^-, \text{либо } \widetilde{\mathcal{D}}^-\end{cases},$$

где

$\beta_2=\beta_3=(8\pi)^{-1}$, $\beta_4=(4\omega_4)^{-1}$, $\beta_m=[$[illegible]$(m-2)(4-m)]^{-1}$ при $m\geqslant 5$,

ω_m - площадь единичной сферы в n - мерном евклидовом пространстве,

$$\mathcal{R}_m(t)=\begin{cases}t^2-t^2\ln t & \text{при } m=2\\ t & \text{при } m=3\\ \ln t & \text{при } m=4\\ t^{4-m} & \text{при } m\geqslant 5\end{cases},\quad t>0$$

$$\mathcal{R}^*_2(y,x)=\mathcal{R}_2(|y-x|)-|x-y|^2+|y|^2\ln|y|+|x|^2\ln|x|-$$

$$-2\sum_{i=1}^{2}x_i y_i\,(1+\ln|x|\ln|y|),$$

$$\mathcal{R}^*_3(y,x)=|y-x|-|x|-|y|,\quad \mathcal{R}^*_4(y,x)=\ln\frac{|y-x|}{|x|\,|y|},$$

$\mathcal{R}^*_m(y,x)=\mathcal{R}_m(|y-x|)$ при $m\geq 5$.

<u>Теорема 4.I.</u> Если $u\in\mathcal{R}^2(\Omega)$, то при $x\in\Omega$ справедлива обобщенная формула интегрального представления

$$u(x)=\varepsilon\int\limits_{\partial\Omega}\Big[\Gamma_m(y,x)\Big\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_y,n(y))u(y)\Big\}_\Omega-$$

$$-\{u(y)\}_\Omega\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{N_m}(\partial_y,n(y))\Gamma_m(y,x)+\Big\{\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)}\Big\}_\Omega\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M_m}(\partial_y,n(y))\Gamma_m(y,x)-$$

$$-\frac{\partial\Gamma_m(y,x)}{\partial n(y)}\Big\{\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{M_m}(\partial_y,n(y))u(y)\Big\}_\Omega\Big]d_yS-\int\limits_\Omega\Gamma_m(y,x)\Delta^2_m(\partial_y)u(y)\,dy.$$

В заключение заметим, что с помощью функций $\Gamma_m(y,x)$ можно построить обобщенные бигармонические потенциалы, на основании свойств которых можно установить теоремы существования для вышеупомянутых задач, а также построить функции Грина и изучить их свойства.

Поступила 25.XII.1978

Кафедра
дифференциальных и
интегральных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.П.Квиникадзе, Труды Института прикладной математики ТГУ, т.Ш, 1972, 115-126.
2. В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе. Терхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Издательство "Наука", М., 1976.
3. Н.М.Гюнтер. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. М., 1953.

გ.კვინიკაძე

ბიჰარმონიული განტოლებისათვის განზოგადებული სასაზღვრო ამოცანათა შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში ჩამოყალიბებულია m -განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში ბიჰარმონიული განტოლებისათვის განზოგადებული სასაზღვრო ამოცანები ისეთი არეების შემთხვევაში, რომლებიც შემოსაზღვრულია რამდენიმე შეკრული ჰიპერზედაპირით. აღნიშნული ამოცანებისათვის დამტკიცებულია ერთადერთობის თეორემები.

G.Kvinikadze

ON GENERALIZED BOUNDARY PROBLEMS FOR BYHARMONIC EQUATION

Summary

Generalized boundary problems are stated for byharmonic equation in m-dimensional euclidean space for domains bounded by several closed compact manifolds. Uniqueness theorems are proved for these problems.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
210, 1980

УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

З.М.Гогниашвили

Пусть S - поверхность, имеющая сингулярность в изолированной точке, которая является вершиной кругового конуса S^K

$$x_3 = a\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,, \quad 0<a<\infty,$$

в системе $Ox_1Ox_2Ox_3$, O - сингулярная точка, Ox_3 - ось вращения конуса, Ox_1 и Ox_2 выбраны произвольно в плоскости, нормальной к Ox_3 , B - область, ограниченная поверхностью S ; $a = ctg\,\beta$, где 2β - угол раствора конуса.

Приблизимся в некотором смысле к поверхности S поверхностями Ляпунова S_h . Пусть S_h совпадает с S всюду, кроме той части кругового конуса, которая проектируется на плоскость x_1Ox_2 в круг радиуса h с центром в O .

Если $\sqrt{x_1^2+x_2^2} \le h$, то имеем:

$$x_3 = \frac{ax_1^2}{2h} + \frac{ax_2^2}{2h} + \frac{ah}{2}.$$

Эту часть S обозначим S'_h. $S''_h = S^\kappa - S'_h$.

S_h – поверхность Ляпунова при всяком $h \neq 0$, а когда $h \to 0$, постоянная, участвующая в определении поверхности Ляпунова, неограниченно возрастает:

$$\left| n_h(x') - n_h(x'') \right| < \frac{C r^\lambda_{x'x''}}{h^\lambda}, \quad x', x'' \in S'_h, \quad \lambda \leq 1.$$

Вместе с поверхностью S_h рассмотрим S_{h_1}, $h_1 < h$.

Установим некоторым образом взаимно однозначное соответствие между точками S_h и S_{h_1}. Пусть $x(x_1, x_2, x_3) \in S'_h$.

Приведем ей в соответствие точку $y(y_1, y_2, y_3) \in S_{h_1}$, если $x_1 = \frac{h}{h_1} y_1$, $x_2 = \frac{h}{h_1} y_2$; тогда $x_3 = \frac{h}{h_1} y_3$. Если $x(x_1, x_2, x_3) \in S''_h$, приведем ей в соответствие точку $y(y_1, y_2, y_3) \in S''_{h_1}$ на той же образующей, чтобы иметь $y_3 = x_3 - a(h - h_1)\frac{b - x_3}{b - ah}$, где b – высота конуса. Если x соответствует y, то пишем $x \sim y$.

Если $x \in S - S^\kappa$, то $x \sim x$; если $x \sim y$, $x \in S'_h$, $y \in S'_{h_1}$, то $n_h(x) \parallel n_{h_1}(y)$. Назовем $\varphi(x) \in C^{(0,\lambda)}$ функцией класса T, если она определена в $\mathcal{B} + S - O$ и постоянна вдоль каждого луча, выходящего из O. Т.о., если $\varphi \in T$, $x \in S'_h$, $y \in S'_{h_1}$, $x \sim y$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Вектор-функция принадлежит классу T, если её компоненты функций класса T.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ – вектор-функция класса Гёльдера на S. Определим на S_h вектор-функцию $f_h(x)$ следующим образом:

$$f_h(x)=f(z),$$

если x и z проектируются на $x_1 0 x_2$ в одну и ту же точку.

Очевидно, если $f(x)\in C^{(0,\lambda)}$ на S, то $f_h(x)\in C^{(0,\lambda)}$ на S_h.

Обозначим $r(x,0)=\rho(x)$.

Пусть

$$Wf_h=\int_{S_h}\Gamma^*(y-x,n(y))f_h(y)dS_y$$

– потенциал двойного слоя теории упругости.

Справедливы теоремы:

<u>Теорема I</u>. Пусть $f(x)\in C^{(0,\lambda)}$ на S. Тогда $W\varphi_h\in C^{(0,\lambda)}$, коэффициент Гёльдера $H_{W\varphi_h}<C$, где C не зависит от $h,\rho(x)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\rho(x'')<\rho(x')\to r(x',x'')<\rho(x')+\rho(x'')<2\rho(x')$. $\Gamma^*(y-x,n(y))=K(x,y)$,

$$\int_{S_h}[K(x',y)-K(x'',y)]\varphi_h(y)dS_y=\int_{S_h\cap Ц_б(x',2r_{x'x''})}K(x',y)[\varphi_h(y)-\varphi_h(x')]dS_y-$$

$$-\int_{S_h\cap Ц_б(x',2r_{x'x''})}K(x'',y)[\varphi_h(y)-\varphi_h(x'')]dS_y+\int_{S_h-S_h\cap Ц_б(x',2r_{x'x''})}[K(x',y)-K(x'',y)][\varphi_h(y)-\varphi_h(x'')]dS_y+$$

$$+[\varphi_h(x')-\varphi_h(x'')]\int_{S_h\cap Ц_б(x',2r)}K(x',y)dS_y=\sum_{i=1}^{4}J_i.$$

Здесь $Ц_б(x',2r)$ – цилиндр с осью, параллельной $0x_3$.

$$|\mathcal{J}_1| < \int\limits_0^{r_{x'x''}} \frac{r\,dr}{r^{2-\lambda}} < C r^{\lambda}_{x'x''}\,; \quad |\mathcal{J}_2| < C r^{\lambda}_{x'x''}$$

Компоненты $K(x,y)$ представляют комбинацию выражений $\frac{x_k - y_k}{r^3_{xy}} \cos(n_y, x_j)$. Т.к. на множестве $S_h - S_h \cap Ц_b(x', 2r)$

$$r_{x''y} < r_{x'y} + r_{x'x''} < 2 r_{x'y},$$

то

$$|K(x', y) - K(x'', y)| < \frac{C r^{\lambda}_{x'x''}}{r_{x''y}},$$

$$|\mathcal{J}_3| < C r_{x'x''} \left| \int\limits_{2r_{x'x''}}^{A} \frac{r^{\lambda+1}_{x''y}}{r^3_{x''y}} dr \right| < C r^{\lambda}_{x'x''},$$

где A - ограниченное число, а C не зависит от $h, \rho(x)$,

$$|\mathcal{J}_4| < C r^{\lambda}_{x'x''}.$$

В самом деле, для этого достаточно покаазать, что

$$\left| \iint\limits_{S_h \cap Ц_b(x', 2r)} K(x', y)\, dS_y \right| < C,$$

где C не зависит от $h, \rho(x)$. Обозначим $\tau = [S_h \cap Ц_b(x', 2r)] \cap [S_h \cap Ц_b(x', \alpha\rho(x'))]$, $\alpha = \sin\beta$, а проекцию на плоскость $x_1 0 x_2$ через $\sigma(2r, \alpha\rho(x'))$.
Очевидно, σ есть область между двумя концентрическими кругами.

$$\left|Y_4\right| < \left|\int\limits_{\tau} K(x',y)\,dS_y\right| + \left|\int\limits_{S_h \cap U_b(x',\alpha\rho(x'))} K(x',y)\,dS_y\right|.$$

В интеграле по τ перейдем к интегрированию по σ.

Якобиан преобразования $\mathcal{Y}(x) \in T$. Поэтому, как легко видеть:

$$\left|\mathcal{Y}(y) - \mathcal{Y}(x')\right| < \frac{C r^{\lambda}_{x'y}}{\rho^{\lambda}(x')},$$

C не зависит от $\rho(x')$, $\rho(y)$, т.к.

$$\rho(y) > \rho(x') - r_{x'y} > \rho(x') - \alpha\rho(x') = (1-\alpha)\rho(x').$$

При проектировании получим:

$$\left|\int\limits_{\tau} K(x',y)\,dS_y\right| < \left|\mathcal{Y}(x') \int\limits_{\sigma(2r,\alpha\rho(x'))} \frac{g(\xi,\theta)}{\rho^2(\xi,\eta)}\,\rho\,d\rho\,d\theta\right| +$$

$$+ \frac{C}{\rho^{\lambda}(x')}\left|\int\limits_{2r_{x'x''}}^{\alpha\rho(x')} \frac{r^{1+\lambda}}{r^2}\,dr\right| \leq \frac{C}{\rho^{\lambda}(x')}\left(r^{\lambda}_{x'x''} + \rho^{\lambda}(x')\right) < C;$$

$$\int\limits_{S_h \cap U_b(x',\alpha\rho(x'))} K(x',y)\,dS_y \in T.$$

В самом деле, пусть $x, z \in S^K$ принадлежат одному лучу, выходящему из O. Обозначим $\frac{\rho(x)}{\rho(z)} = \lambda$. Требуется показать, что

$$\int\limits_{S \cap U_b(x,\alpha\rho(x))} K(x,y)\,dS_y = \int\limits_{S \cap U_b(z,\alpha\rho(z))} K(z,\bar{y})\,dS_{\bar{y}}.$$

Введем замену переменных:

$$y_i=\lambda\bar{y}_i\,,\quad x_i=\lambda z_i\,,\quad i=1,2,3,$$

$$S\cap Ш_б(x,\alpha\rho(x))\longrightarrow S\cap Ш_б(z,\alpha\rho(z))$$

$$K(x,y)=\frac{\psi(y-x,y)}{r^2(x,y)}=\frac{\psi(\bar{y}-z,y)}{\lambda^2 r^2(z,\bar{y})}=\frac{1}{\lambda^2}K(z,\bar{y}),$$

$$dS_y=\lambda^2 dS_{\bar{y}},$$

$$\int\limits_{S_h\cap Ш_б(x,\alpha\rho(x))}K(x,y)dS_y=\int\limits_{S_h'\cap Ш_б(z,\alpha\rho(z))}\frac{K(z,\bar{y})}{\lambda^2}\cdot\lambda^2 dS_{\bar{y}}=\int\limits_{S_h\cap Ш_б(z,\alpha\rho(z))}K(z,\bar{y})dS_{\bar{y}}\,.$$

Если $x\in S_h'$, $z\in S_{h_1}'$, $x\sim z$, то $y_i=\frac{h}{h_1}\bar{y}_i$, $i=1,2,3$, и

$$\int\limits_{S_h\cap Ш_б(x,\alpha h)}K(x,y)dS_y=\int\limits_{S_h\cap Ш_б(z,\alpha h_1)}K(z,\bar{y})dS_{\bar{y}}\,.$$

Т.о.,

$$\int\limits_{S_h\cap Ш_б(x',\alpha\rho(x'))}K(x',y)dS_y\in T\to\Big|\int\limits_{S_h\cap Ш_б(x',\alpha\rho(x'))}K(x',y)dS_y\Big|<C,$$

$$|y_4|<C r^{\lambda}_{x'x''},$$

$$\Big|\int\limits_{S_h}[K(x',y)-K(x'',y)]\varphi_h(y)dS_y\Big|<C r^{\lambda}_{x'x''}$$

Т.о.,

$$\int\limits_{S_h}K(x,y)\varphi_h(y)dS_y\in C^{(0,\lambda)}$$

и коэффициент Гёльдера не зависит от $h,\ \rho(x)$, ч.т.д.

Аналогичная теорема справедлива для классического потенциала двойного слоя.

Теорема 2. Если $f\in C^{(0,\lambda)}$ на S, Wf_h – потенциал двойного слоя теории упругости и

$$W_{ih}(z)=\begin{cases}Wf_h(z), & z\in B_h,\\ f_h(z)+Wf_h(z), & z\in S_h'\end{cases}$$

то $W_{ih}(z) \in C^{(0,\lambda)}$ в $\mathcal{B}_h + S_h$ и коэффициент Гёльдера не зависит от $h, \rho(z)$.

Эта теорема доказывается с использованием теоремы I аналогично теореме 6.4.1 из /I/.

Пусть $r(z', S_h) = r(z', x') < 2r_{z'z''}$, $x' \in S_h$;

$r(z'', S_h) = r(z'', x'')$, $x'' \in S_h$;

$$\int_{S_h} K(z', y)\, dS_y = -2E, \quad z' \in \mathcal{B}_h; \quad \int_{S_h} K(x', y)\, dS_y = -E, \quad x' \in S_h;$$

$$|W_{ih}(z') - W_{ih}(z'')| \le |W_{ih}(z') - W_{ih}(x')| + |W_{ih}(x') - W_{ih}(x'')| +$$

$$+ |W_{ih}(x'') - W_{ih}(z'')|; \tag{I}$$

$$|W_{ih}(z') - W_{ih}(x')| = |Wf_h(z') + f_h(x') - Wf_h(x')| <$$

$$\left| \int_{S_h} [K(z', y) - K(x', y)][f_h(y) - f_h(x')]\, dS_y \right| + \left| f_h(x') + f_h(x')\left[\int_{S_h} K(z', y)\, dS_y - \int_{S_h} K(x', y)\, dS_y\right] \right| =$$

$$= \left| \int_{S_h} [K(z', y) - K(x', y)][f_h(y) - f_h(x')]\, dS_y \right| \le \left| \int_{S_h \cap C(x', r_{z'z''})} K(z', y)[f_h(y) - f_h(x')]\, dS_y \right| +$$

$$+ \left| \int_{S_h \cap C(x', 2r_{z'z''})} K(x', y)[f_h(y) - f_h(x')]\, dS_y \right| + \left| \int_{\tau} [K(z', y) - K(x', y)][f_h(y) - f_h(x')]\, dS_y \right| <$$

$$< C \int_0^{r_{z'z''}} \frac{r\, dr}{r^{2-\lambda}} + C r_{z'z''} \int_{r_{z'z''}}^{A} \frac{r\, dr}{r^{3-\lambda}} < C r_{z'z''}^{\lambda};$$

$$|W_{ih}(x') - W_{ih}(x'')| < C r_{x'x''}^{\lambda} < C r_{z'z''}^{\lambda}.$$

Разность $W_{ih}(x'') - W_{ih}(z'')$ оценивается так же, как

$$W_{ih}(z')-W_{ih}(x').$$

Т.о.,

$$|W_{ih}(z')-W_{ih}(z'')|<c r^{\lambda}_{z'z''}$$

Аналогично рассматривается случай, когда $r(z'',S)= = r(z'',x'')<2r_{z'z''}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $r(z',x')>2r_{z'z''}$, $r_{z''x''}>2r_{z'z''}$.

Тогда $r_{yx'}<2r_{yz'}<4r_{yz''}$ и получаем:

$$|W_{ih}(z')-W_{ih}(z'')|=\Big|\int_{S_h}[K(z',y)-K(z'',y)][f_h(y)-f_h(x')]dS_y\Big|<$$

$$<Cr_{z'z''}\int_{r_{z'z''}}^{A}\frac{r\,dr}{r^{3-\lambda}}<cr^{\lambda}_{z'z''}$$

Т.о.,

$$\int_{S_h}K(x,y)f_h(y)dS_y\in C^{(0,\lambda)},\ x\in B_h+S_h,$$

если за значения в точках границы принять предельные значения изнутри.

При этом коэффициент Гёльдера не зависит от h и $\rho(x)$, ч. т.д.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $x\in S_h$, $z\in S_{h_1}$, $x\sim z$. $f\in C^{(0,\lambda)}$ на S. Тогда

$$\Big|\int_{S_h}K(x,y)f_h(y)dS_y-\int_{S_{h_1}}K(z,y)f_{h_1}(y)dS_y\Big|<Ch^{\gamma},$$

$h_1<h$, $\gamma>0$, C не зависит от h, h_1, $\rho(x)$, $\rho(z)$.

Действительно,

$$\Big|\int_{S_h} K(x,y) f_h(y)\, dS_y - \int_{S_{h_1}} K(z,y) f_{h_1}(y)\, dS_y \Big| \le \Big| \int_{S_h} K(x,y)[f_h(y)-f_h(x)]\,dS_y -$$

$$- \int_{S_h} K(z,y)[f_{h_1}(y)-f_{h_1}(z)]\,dS_y \Big| + \Big| f_h(x)\int_{S_h}K(x,y)\,dS_y - f_{h_1}(z)\int_{S_{h_1}}K(z,y)\,dS_y\Big| =$$

$$= J_1 + J_2 .$$

$$|J_2| < ch^\lambda .$$

$$\tau = S_h - S_h\cap C(x,\sqrt{h}) - S_h \cap C(0,\sqrt{h}) = S_{h_1} - S_{h_1}\cap C(x,\sqrt{h}) - S_{h_1}\cap C(0,\sqrt{h}).$$

На τ $f_h(y)=f_{h_1}(y)$, $\rho(y)>\sqrt{h}$, $r_{xy}>\sqrt{h}$, $r_{zy}>\sqrt{h}$,

$\frac{1}{2} r_{xy} < r_{yz} < 2r_{xy}$.

$$|K(x,y)-K(z,y)| < \frac{ch}{r_{xy}^3} .$$

$$|J_1| \le \Big|\int_{S_h\cap C(x,\sqrt{h})+S_h\cap C(0,\sqrt{h})} K(x,y)[f_h(y)-f_h(x)]\,dS_y\Big| + \Big|\int_{S_{h_1}\cap C(x,\sqrt{h})+S_{h_1}\cap C(0,\sqrt{h})} K(z,y)[f_{h_1}(y)-f_{h_1}(z)]\,dS_y\Big| +$$

$$+ \Big|\int_\tau \big[(K(x,y)-K(z,y))(f_h(y)-f_h(x)) + K(z,y)(f_{h_1}(z)-f_h(x))\big]\,dS_y\Big| \le$$

$$\le C\int_0^{\sqrt{h}}\frac{dr}{r^{1-\lambda}} + C\int_A^{A+\sqrt{h}}\frac{dr}{r^{1-\lambda}} + cr_{xz}^\lambda \int_{\sqrt{h}}^A \frac{dr}{r} + h\int_{\sqrt{h}}^A \frac{dr}{r_{xy}^{2-\lambda}} < ch^\gamma,\ \gamma>0,$$

C не зависит от h, h_1, $\rho(x)$, $\rho(z)$, ч.т.д.

Легко видеть, что приведенные теоремы остаются в силе, если S^K - произвольный криволинейный конус.

Поступила 9.6.1978

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

I. В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелия, М.О.Башелеишвили, Т.В.Бурчуладзе. Трехмерные задачи математической теории упругости, Тбилиси, 1968.

ზ.გოგნიაშვილი

დრეკადობის თეორიის პოტენციალების ზოგიერთი თვისება არაგლუვი ზედაპირებისათვის

რეზიუმე

შესწავლილია დრეკადობის თეორიის ორმაგი ფენის პოტენციალის ზოგიერთი თვისება ზედაპირისთვის, რომელსაც გააჩნია კონუსური წერტილი.

Z.Gogniashvili

ON SOME PROPERTIES OF POTENTIAL OF ELASTICITY FOR NON-SMOOTH SURFACES

Summary

Some properties of potential of elasticity are studied for surfaces with conic points.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
210, 1980

УДК 517.9.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ НЕКОТОРОЙ НЕГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ж

З.М.Гогниашвили

Поставим для поверхности S и области $\mathcal{B}$ задачу Дирихле для уравнения Лапласа с граничной функцией $f(x)$, а для области $\mathcal{B}_h$ и поверхности S_h – аналогичную задачу с граничной функцией $f_h(x)$. Решение последней задачи ищем в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\varphi_h(x)$. Получаем уравнение:

$$\varphi_h(x)+\int_{S_h} K(x,y)\varphi_h(y)\,dS_y=-f_h(x), \qquad K=\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{r_{xy}} \tag{I}$$

Для всякого $h\neq 0$ для этого уравнения справедлива теория Фредгольма и уравнение имеет единственное решение при любой функции $f_h(x)\in C^{(0,\lambda)}$.

Введем функцию

$$e_1(x)\in C^{(0,\lambda)}, \quad x\in S,$$

ж Обозначения те же, что и в /2/.

$$\ell_1(x)=\begin{cases}1, & x\in S_{h_1}: \rho(x)\le \ell\\ 0, & x\in S_2: \rho(x)\ge 2\ell\\ 0<\ell_1(x)<1, & x\in S_3: \ell<\rho(x)<2\ell\end{cases}\qquad 0<\ell<\frac{b}{4};$$

$$\ell_2(x)=1-\ell_1(x).$$

Рассмотрим сначала уравнение:

$$\varphi_h(x)+\int\limits_{S_h} K(x,y)\,\ell_1(y)\,\varphi_h(y)\,dS=f_h(x). \tag{2}$$

Докажем, что если угол раствора конуса $2\beta>2\beta_0$, β_0 – некоторый угол, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, оно имеет единственное решение.

Легко видеть, что

$$|n(x)-n(y)|<\mathcal{M}_0\, a\,\frac{r_{xy}}{\rho},\quad \rho=\min(\rho(x),\rho(y)),\quad a=\operatorname{ctg}\beta,$$

A_0 – некоторое число, не зависящее от h и β. Тогда

$$\rho^\delta|\cos(r,n)|<\mathcal{M}a\,r^\delta_{xy},\qquad \delta\le 1,$$

$$\rho^\delta(x)|K(x,y)|<\frac{\mathcal{M}a}{r^{2-\delta}_{xy}},\quad \rho^\delta(y)|K(x,y)|<\frac{\mathcal{M}a}{r^{2-\delta}_{xy}}, \tag{3}$$

$$\rho^\delta(y)|K(x',y)-K(x'',y)|<\frac{a\mathcal{M}r^\lambda_{x'x''}}{r^{2-\delta+\lambda}},$$

$\mathcal{M}$ не зависит от h и β.

$\mathcal{M}a$ можно сделать сколь угодно малым, если угол раствора конуса 2β возьмем близким к π.

Рассмотрим сумму

$$R_h(x,y)=K(x,y)+K_1(x,y)+K_2(x,y)+\dots$$

где K_i – повторные ядра. Справедлива

Теорема I. Если $aMA < 1$, где A - ограниченное число, не зависящее от h и β, то

$$R_h(x,y) = \frac{\Psi_h(x,y)}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}},$$

где $|\Psi_h(x,y)| < C$, C не зависит от h, β.

Доказательство.

$$|K_1(x,y)| = \left|\int_{S_h} K(x,t)\ell_1(t)\ell_1(y)K(t,y)dS_t\right| < \frac{M^2 a^2 \ell_1(y)}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)}\left|\int_{S_h'} \frac{dS_t}{r_{xt}^{2-\delta} r_{ty}^{2-\delta}}\right| <$$

$$< \frac{M^2 a^2 A}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}};$$

$$K_2(x,y) = \int_{S_h} K(x,t)\ell_1(t)K_1(t,y)dS_t = \int_{S_h} K_1(x,t)K(t,y)\ell_1(y)dS_t.$$

Пусть $\rho(x) < \frac{1}{2}\rho(y)$,

$$|K_2| < \frac{Aa^2M^2}{\rho^\delta(x)}\left|\int_{S_h} \frac{dS_t}{r_{xt}^{2-2\delta}\rho^\delta(t)} K(t,y)\ell_1(y)\right| < \frac{Aa^3M^3}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)}\int_{S_h} \frac{dS_t'}{r_{xt}^{2-2\delta}\rho^\delta(t) r_{ty}^{2-2\delta}} <$$

$$< \frac{A^2a^3M^3}{\rho^\delta(x)\rho^{2\delta}(y) r_{xy}^{2-2\delta}} < \frac{A^2a^3M^3}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}},$$

$$A < r_{xy}^{2-3\delta}\int_{S_h} \frac{dS_t}{r_{xt}^{2-2\delta}\rho^\delta(t) r_{ty}^{2-2\delta}}$$ и не зависит от h, β.

Пусть

$$\rho(y) < \frac{1}{2}\rho(x),$$

$$\left|K_2\right| < \frac{A a^2 M^2}{\rho^\delta(y)} \left| \int\limits_{S_h} K(x,t) \frac{dS_t}{\rho^\delta(t) r_{ty}^{2-2\delta}} \right| <$$

$$< \frac{a^3 M^3 A}{\rho^\delta(y) \rho^{2\delta}(x)} \int\limits_{S_h} \frac{dS'_t}{r_{xt}^{2-2\delta} \rho^\delta(t) r_{ty}^{2-2\delta}} <' \frac{a^3 M^3 A^2}{\rho^\delta(x) \rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}} .$$

Аналогично

$$\left|K_3\right| < \frac{M^4 a^4 A^3}{\rho^\delta(x) \rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}} .$$

Очевидно, оценки остаются в силе, если

$\frac{1}{2}\rho(x) < \rho(y) < 2\rho(x)$,

$$\left|K + K_1 + K_2 + \cdots\right| < \frac{1}{\rho^\delta(x) \rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}} \left(aM + a^2 M^2 A + a^3 M^3 A^2 + \cdots\right).$$

Ряд сходится, если $aAM < 1$. Поэтому, если возьмем $a = ctg\,\beta$ настолько малым, чтобы $aAM < 1$, резольвентой уравнения (2) будет

$$\mathcal{R}_h(x,y) = K + K_1 + K_2 + \cdots = \frac{\Psi_h(x,y)}{\rho^\delta(x) \rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}} ,$$

$\left|\Psi_h(x,y)\right| < C$, C не зависит от h, β.

Теорема 2.

$$K\varphi_h = \int\limits_{S_h} K(x,y) \ell_1(y) \varphi_h(y)\, dS_y \in C^{(0,\lambda)}, \quad \text{если } \varphi \in C^{(0,\lambda)}$$

и коэффициент Гёльдера $H_{K\varphi_h}$ меньше aAH_{φ_h}, где A не зависит от $h, \rho(x), \beta$.

Это следует из неравенства (3) и из теоремы 1 [2]. При этом оценка $\mathcal{Y}_4$ упрощается.

$$\left|\mathcal{Y}_4\right| < \frac{aMH_\varphi}{\rho^\sigma(x')}\int_0^{r_{x'x''}} \frac{r\,dr}{r^{2-\sigma}} < aMH_\varphi 2^\sigma, \qquad \text{т.к. } r_{x'x''} < 2\rho(x').$$

<u>Теорема 3.</u> Если $\beta < \beta_0$, $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, β_0 – некоторый угол и $f_h \in C^{(0,\lambda)}$, $R_h f_h = \int_{S_h} R_h(x,y) f_h(y)\,dS_y \in C^{(0,\lambda)}$, $H_{R_h f_h}$ не зависит от $h, \rho(x)$.

<u>Доказательство</u>.

$$\int_{S_h} R_h(x,y) f_h(y)\,dS_y = \int_{S_h} K(x,y)\ell_1(y) f_h(y)\,dS_y + \int_{S_h} K_1(x,y)\ell_1(y) f_h(y)\,dS_y +$$

$$+ \int_{S_h} K_2(x,y) f_h(y)\,dS_y + \cdots$$

$$H_{Kf_h} = \left|\int_{S_h} [K(x',y) - K(x'',y)]\ell_1(y) f_h(y)\,dS_y\right| < H_{f_h}\cdot aA r_{x'x''}.$$

$$H_{K_1 f_h} = \left|\int_{S_h} [K_1(x',y) - K_1(x'',y)]\ell_1(y) f_h(y)\,dS_y\right| = \left|\int_{S_h} [K(x',t) - K(x'',t)]\ell_1(t)\,dS_t \int K(t,y)\times\right.$$

$$\left.\times\, \ell_1(y) f_h(y)\,dS_y\right| < H_{K_1 f_h}\cdot aA r^\lambda_{x'x''} < H_{f_h} A^2 a^2 \cdot r^\lambda_{x'x''}.$$

$$H_{K_2 f_h}\Big| < H_{f_h}\cdot A^3 a^3 \cdot r^\lambda_{x'x''}$$

\- -

$$\left|\int_{S_h} [R_h(x',y) - R_h(x'',y)]\ell_1(y) f_h(y)\,dS_y\right| < H_{f_h}\cdot r^\lambda_{x'x''}\,(aA + a^2A^2 + A^3a^3 + \cdots).$$

Если $aA < 1$,

$$\int_{S_h} R_h f_h(y)\,dS_y \in C^{(0,\lambda)}.$$

Возьмем β настолько малым, чтобы

$$ctg\,\beta < \frac{1}{H}.$$

При этом условии теорема 3 справедлива.

Допустим, что приведенные теоремы справедливы при $\beta < \beta_0$. Тогда при $\beta < \beta_0$ для уравнения (2) применим метод последовательных приближений, $\varphi_h \in C^{(0,\lambda)}$ и

$$\varphi_h(x) = f_h(x) + \int_{S_h} R_h(x,y) f_h(y)\, dS_y.$$

Теорема 4.

Если $\rho(x) > h^{\frac{2}{3}}$, $\rho(y) > h^{\frac{2}{3}}$,

$$R_h(x,y) = \frac{\psi_h(x,y)}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y) r_{xy}^{2-2\delta}}, \quad \delta \le 1,$$

то $|\psi_h(x,y) - \psi_{h_1}(x,y)| < ch^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}} < ch^{\frac{1}{3}}$, c не зависит от $h, \rho(x), \rho(y)$.

Доказательство.

$$\psi_{h_1} = r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int_{S_h} K(x,t)K(t,y)\,dS_t = r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int_{S_h'} K(x,t)K(t,y)\,dS_t +$$

$$+ r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int_{S_h''} K(x,t)K(t,y)\,dS_t = \psi_{h1}' + \psi_{h1}'';$$

$$\psi_{h1}''(x,y) = \psi_{h,1}''(x,y), \quad x, y \in S_h''.$$

$$|\psi_{h1}'(x,y)| = \left| r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int_{S_h'} K(x,t)K(t,y)\,dS_t \right| < a^2 M^2 \int_{S_h'} \frac{r_{xt}^{2-2\delta}\, dS_t}{r_{xt}^{2-\delta}\rho^\delta(t) r_{ty}^{2-2\delta}} +$$

$$+a^2M^2\int\limits_{S_h'}\frac{r_{ty}^{2-2\delta}dS_t}{r_{xt}^{2-\delta}\rho^\delta(t)r_{ty}^{2-2\delta}}<\frac{a^2M^2}{h^{\frac{2}{3}(2-\delta)}}h^{2-\delta}<Aa^2M^2h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

$$|\psi'_{1h_1}(x,y)|<Aa^2M^2h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

$$K_2=\frac{\psi_{h2}(x,y)}{r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)};$$

$$\psi_{h2}=r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\left[\int\limits_{S_h}K(x,t)\frac{\psi'_{h1}(t,y)dS_t}{\rho^\delta(t)\rho^\delta(y)r_{ty}^{2-2\delta}}+\int\limits_{S_h'}K(x,t)\frac{\psi''_{h1}(t,y)dS_t}{\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)r_{ty}^{2-2\delta}}\right]+$$

$$+r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int\limits_{S_h''}K(x,t)\frac{\psi''_{h1}(t,y)dS_t}{\rho^\delta(t)\rho^\delta(y)r_{ty}^{2-2\delta}}=\psi'_{h2}(x,y)+\psi''_{h2}(x,y),$$

$$\psi''_{h2}(x,y)=\psi''_{2h_1}(x,y),\qquad x,y\in S_h'',$$

$$r_{xy}^{2-2\delta}\rho_x^\delta\rho_y^\delta\left|\int\limits_{S_h'}K(x,t)\frac{\psi''_{h1}(t,y)dS_t}{\rho^\delta(t)\rho^\delta(y)r_{ty}^{2-2\delta}}\right|<Aa^3M^3\left[\int\limits_{S_h'}\frac{r_{xt}^{2-2\delta}dS_t}{r_{xt}^{2-\delta}\rho^\delta(t)r^{2-2\delta}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{S_h'}\frac{r_{ty}^{2-2\delta}dS_t}{r_{xt}^{2-\delta}\rho^\delta(t)r_{ty}^{2-2\delta}}\right]<A^2a^3M^3\frac{1}{h^{\frac{3}{2}(2-\delta)}}\int_0^h\frac{\rho d\rho}{\rho^\delta}<A^2a^3M^3h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}}$$

$$\left|r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int\limits_{S_h}K(x,t)\frac{\psi'_{h1}(t,y)dS_t}{\rho^\delta(t)\rho^\delta(y)r_{ty}^{2-2\delta}}\right|=\left|r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{S_{h_1}}K(x,t)\int\limits_{S_h'}K(t,t_1)K(t_1,y)dS_{t_1}\right|=\left|r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int\limits_{S_h'}\left(\int\limits_{S_h}K(x,t)K(t,t_1)dS_t\right)K(t_1,y)dS_{t_1}\right|=$$

$$=\left|r_{xy}^{2-2\delta}\rho^\delta(x)\rho^\delta(y)\int\limits_{S_h'}K_1(x,t_1)K(t_1,y)dS_{t_1}\right|<Aa^3M^3\left|\int\limits_{S_h'}\frac{r_{xt_1}^{2-2\delta}dS_{t_1}}{r_{xt}^{2-2\delta}\rho^\delta(t)r_{t_1y}^{2-\delta}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{S_h'}\frac{r_{t_1y}^{2-2\delta}dS_{t_1}}{r_{xt}^{2-2\delta}\rho^\delta(t)r_{t_1y}^{2-\delta}}\right|<A^2a^3M^3h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

$$|\psi'_{h2}(x,y)|<A^2a^3M^3h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

$$\left|\Psi'_{h_1 2}(x,y)\right| < A^2 a^3 M^3 h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

- -

- -

$$\Psi_{hm}(x,y) = r_{xy}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(x)\rho^{\delta}(y)K_{hm}(x,y) = \Psi'_{hm} + \Psi''_{hm},$$

$$\Psi_{h_1 m}(x,y) = \Psi'_{h_1 m} + \Psi''_{h_1 m},$$

$$\Psi''_{hm} = \Psi''_{h_1 m},$$

$$\left|\Psi'_{hm}\right| < A^m a^{m+1} M^{m+1} h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

$$\left|\Psi'_{h_1 m}\right| < A^m a^{m+1} M^{m+1} h^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}}$$

Отсюда следует, что если $AaM < 1$, то

$$R_h(x,y) = \frac{\Psi_h(x,y)}{r_{xy}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(x)\rho^{\delta}(y)}, \quad R_{h_1}(x,y) = \frac{\Psi_{h_1}(x,y)}{r_{xy}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(x)\rho^{\delta}(y)},$$

$$\Psi_h = \Psi'_h + \Psi''_h, \quad \Psi_{h_1} = \Psi'_{h_1} + \Psi''_{h_1}, \quad \Psi''_h = \Psi''_{h_1}$$

$$\left|\Psi'_{h_1}\right| < ch^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}}, \quad \left|\Psi'_h\right| < ch^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}}$$

Тогда при $\rho(x) > h^{\frac{2}{3}}$, $\rho(y) > h^{\frac{2}{3}}$ имеем:

$$\left|\Psi_h(x,y) - \Psi_{h_1}(x,y)\right| < ch^{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{3}},$$

где C не зависит от $h, \rho(x), \rho(y)$, ч.т.д.

Теорема 5. Если $\rho(y) > h^{\frac{1}{3}}$, $r_{xy} > h^{\frac{1}{2}}$,

$$R_h(x,y) = \frac{1}{\rho^{2\delta}(x)} R_{2\delta h}(x,y),$$

то

$$\left|R_{2\delta h}(x,y)\,r_{xy}^{2-2\delta}-r_{zy}^{2-2\delta}\,R_{2\delta h_1}(z,y)\right|<ch^{\gamma},\quad \gamma>0,\quad x\sim z$$

<u>Доказательство.</u> Достаточно рассмотреть разность

$$\mathcal{Y}=r_{xy}^{2-2\delta}\int_{S_h}K_{2\delta}(x,t)R_h(t,y)\,dS_y-r_{zy}^{2-2\delta}\int_{S_{h_1}}K_{2\delta}(z,t)R_{h_1}(t,y)\,dS_t\,,$$

$$K_{2\delta}(x,t)=\rho^{2\delta}(x)K(x,t),$$

$$|\mathcal{Y}|<C\left|\iint\limits_{C(0,\sqrt{h})+C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})+C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})}\frac{r_{xt}^{2-2\delta}+r_{ty}^{2-2\delta}}{r_{xt}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(t)\,r_{ty}^{2-2\delta}}\,dS_t\right|+\left|\int\limits_{C(0,\sqrt{h})+C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})+C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})}\frac{r_{zt}^{2-2\delta}+r_{ty}^{2-2\delta}}{r_{zt}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(t)\,r_{ty}^{2-2\delta}}\,dS_t\right|+$$

$$+\,r_{xy}^{2-2\delta}\left|\iint\limits_{S_h''-C(0,\sqrt{h})-C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})-C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})}\Big(\big[K_{2\delta}(x,t)-K_{2\delta}(z,t)\big]R_h(t,y)+K_{2\delta}(z,t)\big[R_h(t,y)-R_{h_1}(t,y)\big]\Big)dS_t\right|+$$

$$+\left|\left(r_{xy}^{2-2\delta}-r_{zy}^{2-2\delta}\right)\int\limits_{S_h''-C(0,\sqrt{h})-C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})-C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})}K_{2\delta}(z,t)R_{h_1}(t,y)\,dS_t\right|<\frac{c}{h^{\frac{2-2\delta}{3}}}\int_{A}^{A+\sqrt{h}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{\delta}}+$$

$$+\;\frac{c}{h^{\frac{\delta}{3}}}\int_0^{\sqrt{h}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2-\delta}}+\frac{c}{h^{\delta/3}h^{1-\delta}}\int_{A}^{A+\sqrt{h}}\frac{\rho\,d\rho}{h^{\frac{5}{6}\delta}}\int_0^{\sqrt{h}}\frac{r\,dr}{r^{2-2\delta}}+$$

$$+\;\frac{c}{h^{\frac{5}{6}\delta}h^{1-\delta}}\int_0^{\sqrt{h}}r\,dr+ch^{\delta}\int\limits_{S_h''-C(0,\sqrt{h})-C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})-C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})}\frac{r_{xt}^{2-2\delta}+r_{ty}^{2-2\delta}}{r_{xt}^{2-\delta}\rho^{\delta}(t)\rho^{\delta}(y)\,r_{ty}^{2-2\delta}}\,dS_t+$$

$$+\;ch^{\frac{1}{3}}\int\limits_{S_h''-C(0,\sqrt{h})-C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})-C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})}\frac{r_{xt}^{2-2\delta}+r_{ty}^{2-2\delta}}{r_{zt}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(t)\rho^{\delta}(y)\,r_{ty}^{2-2\delta}}\,dS_t+$$

$$+h^{2-2\delta}\int\limits_{S''_h-C(0,\sqrt{h})-C(x,\frac{1}{2}\sqrt{h})-C(y,\frac{1}{2}\sqrt{h})} \frac{dS_t}{r_{zt}^{2-2\delta}\rho^{\delta}(t)\rho^{\delta}(y)r_{ty}^{2-2\delta}} < ch^{\delta/6} + \frac{ch^{\delta}}{h^{\frac{\delta}{3}}}\int\limits_{\sqrt{h}}^{A}\frac{r\,dr}{r^2} +$$

$$+\frac{ch^{\frac{1}{3}}}{h^{\delta/3}}\int\limits_{\sqrt{h}}^{A}\frac{r\,dr}{r^{2-\delta}} + \frac{h^{2-2\delta}}{h^{\frac{\delta}{3}}\,h^{\frac{2-3\delta}{2}}} < ch^{\gamma},\quad \gamma>0,$$

где C не зависит от h, h_1, ρ, ч.т.д.

Теорема 6. Если $x\in S_h$, $z\in S_{h_1}$, $x\sim z$, то

$$\left|R_{2\delta h}f_h(x) - R_{2\delta h_1}f_{h_1}(z)\right| < ch^{\alpha},\quad \alpha>0,$$

C не зависит от $h, h_1, \rho(x), \rho(z)$.

Доказательство.

$$\left|R_{2\delta h}f_h(x) - R_{2\delta h_1}f_{h_1}(z)\right| = \left|\int\limits_{S_h-C(0,\sqrt[3]{h})-C(x,\sqrt{h})}\left[R_{2\delta h}(x,y)-R_{2\delta h_1}(z,y)\right]f_h(y)\,dS_y\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{[C(0,\sqrt[3]{h})+C(x,\sqrt{h})]\cap S_h} R_{2\delta h}(x,y)f_h(y)\,dS_y\right| + \left|\int\limits_{[C(0,\sqrt[3]{h})+C(x,\sqrt{h})]\cap S_{h_1}} R_{2\delta h_1}(z,y)f_{h_1}(y)\,dS_y\right| < ch^{\alpha}\int\limits_{\sqrt{h}}^{A}\frac{r\,dr}{r^{2-2\delta}} +$$

$$+\int\limits_{0}^{\sqrt[3]{h}}\frac{dS_y}{\rho^{\delta}(y)r_{xy}^{2-3\delta}} + \int\limits_{0}^{\sqrt{h}}\frac{r\,dr}{\rho^{\delta}(y)r_{xy}^{2-3\delta}} < ch^{\alpha},\quad \alpha>0,\ \text{ч.т.д.}$$

Теперь легко видеть, что решение уравнения (2) имеет вид:

$$f_h(x)\in C^{(0,\lambda)},\quad \varphi_h(x)\in C^{(0,\lambda)};\quad \varphi_h(x) = f_h(x) + \int\limits_{S_{h1}} R_h(x,y)f_h(y)\,dS_y,$$

коэффициент Гёльдера не зависит от $\rho(x), h$.

$$\left|\rho^{2\delta}(x)\varphi_h(x)-\rho^{2\delta}(z)\varphi_{h_1}(z)\right|<ch^{\gamma},\ \gamma>0,\ x\sim z,$$

C не зависит от $h, h_1, \rho(x), \rho(z)$.

Т.о., для (2) существует резольвента $I-\bar{R}_h(x,y)$. Воздействуем на обе части уравнения (I) оператором $I-\bar{R}_h$. Получим уравнение

$$\varphi_h(x)+\int_{S_h}K(x,y)\varphi_h(y)\ell_2(y)dS_y-\int_{S_h}\left[\int_{S_h}\bar{R}_h(x,t)\ell_1(t)K(t,y)dS_t\right]\ell_2(y)\varphi_h(y)dS_y= \tag{4}$$

$$=-f_h(x)+\int_{S_h}\bar{R}_h(x,y)f_h(y)dS_y\ ,$$

которое эквивалентно (I). Т.к. (I) имеет решение при любой правой части, то и (4) всегда имеет решение. Достаточно найти решение (4) при $x\in S_2+S_3$. При $x\in S_1$

$$\varphi_h(x)=-f_h(x)+\int_{S_h}\bar{R}_h(x,y)f_h(y)dS_y-\int_{S_h}K(x,y)\varphi_h(y)\ell_2(y)dS_y+$$

$$+\int_{S_h}\left[\int_{S_h}\bar{R}_h(x,t)\ell_1(t)K(t,y)dS_t\right]\ell_2(y)\varphi_h(y)dS_y\ . \tag{5}$$

Ядро (4)

$$\bar{K}_h(x,y)=K(x,y)\ell_2(y)-\int_{S_h}\bar{R}_h(x,t)\ell_1(t)K(t,y)dS_t$$

при $x\in S_2+S_3$ есть регулярное ядро $\dfrac{\psi_h(x,y)}{r_{xy}^{\delta}}$, $|\psi_h|<C$, C не зависит от h. При этом из теоремы (5) следует

$$\left|\psi_h(x,y)-\psi_{h_1}(x,y)\right|<ch^{\gamma},\quad \gamma>0.$$

Поэтому, как легко видеть, при $x \in S_2 + S_3$, $|\varphi_h(x) - \varphi_{h_1}(x)| < ch^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $\varphi_h(x) \in C^{(0,\lambda)}$ на $S_2 + S_3$. Тогда из (5) следует, что при $x \in S_{h1}$ для изучения свойств $\varphi_h(x)$ достаточно изучить $\int_{S_h} \bar{R}_h(x,y) f_h(y) dS_y$. Т.о., получаем: если граничная функция $f_h(x) \in C^{(0,\lambda)}$, то $\varphi_h(x) \in C^{(0,\lambda)}$, коэффициент Гёльдера не зависит от h, $\rho(x)$,

$$\left|\rho^{2\delta}(x)\varphi_h(x) - \rho^{2\delta}(z)\varphi_{h_1}(z)\right| < ch^{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad x \sim z.$$

Тогда решением граничной задачи для S_h' и B_h будет:

$$U_h(t) = \int_{S_h'} K(t,y)\varphi_h(y) dS_y, \quad t \in B_h.$$

Пусть

$$U_h(t) = \frac{\bar{U}_h(t)}{\rho^{2\delta}(t)}.$$

Из теоремы 2 /2/ следует, что $U_h(t) \in C^{(0,\lambda)}$ в $B_h + S_h'$ и коэффициент Гёльдера не зависит от h.

$$|\bar{U}_h(x) - \bar{U}_{h_1}(x)| < \Big|\int_{S_h \cap [C(x,\sqrt{h}) + C(0,\sqrt{h})]} r^{2\delta}(x,0) K(x,y)[\varphi_h(y) - \varphi_h(x)] dS_y\Big| + \Big|\int_{S_{h_1} \cap [C(x,\sqrt{h}) + C(0,\sqrt{h})]} r^{2\delta}(x,0) K(x,y) \times$$

$$\times [\varphi_{h_1}(y) - \varphi_{h_1}(x)] dS_y\Big| + \Big|\int_{S_h' - C(x,\sqrt{h}) - C(0,\sqrt{h})} r^{2\delta}(x,0) K(x,y)[\varphi_h(y) - \varphi_{h_1}(y) + \varphi_{h_1}(x) - \varphi_h(x)] dS_y'\Big| +$$

$$+ \rho^{2\delta}(x)|\varphi_h(x) - \varphi_{h_1}(x)| < ch^{\gamma/2} + ch^{\gamma}\Big|\int_{S_h' - C(x,\sqrt{h}) - C(0,\sqrt{h})} \rho^{2\delta}(x) K(x,y) \frac{1}{\rho^{2\delta}(y)} dS_y\Big| +$$

$$+ ch^{\gamma}\Big|\int_{S_h - C(x,\sqrt{h}) - C(0,\sqrt{h})} K(x,y) dS_y\Big| + ch^{\gamma} < ch^{\gamma/2} + ch^{\gamma}\int_{\sqrt{h}}^{A} \frac{d\rho}{\rho} < ch^{\gamma'}, \quad \gamma' > 0.$$

Т.о., получаем:

Теорема 7.

$$U_h(x) = \frac{\bar{U}_h(x)}{\rho^{2\delta}(x)}, \quad \text{где } |\bar{U}_h(x) - \bar{U}_{h_1}(x)| < ch^{\delta'},$$

$$U_h(x) \in C^{(0,\lambda)}$$

Если $x \in S_h$, то $\frac{\bar{U}_h(x)}{\rho^{2\delta}(x)} = f_h(x)$, где $f_h(x)$ – заданная гранична функция на S_h . Если $f(0) = 0$, то $f_h(0) = 0$. $\left|\frac{\bar{U}_h(x)}{\rho^{2\delta}(x)}\right| < c\rho^{\lambda}(x)$. Доопределим функцию $\bar{U}_h(x)$ в $B + S$ таким образом, чтобы она принимала постоянные значения вдоль прямых, параллельных Ox_3 . Обозначим полученную функцию $\bar{\bar{U}}_h$. Тогда, если $x \in S$,

$$\bar{\bar{U}}_h(x) = \rho^{2\delta}(x) f(x),$$

где $f(x)$ – заданная граничная функция на S.

Теорема 8. Последовательность $\bar{\bar{U}}_h(x)$, $h \to 0$, – фундаментальна в $B+S$ в смысле метрики C .

В самом деле, зададим произвольно малое число ε ; требуется доказать, что для ε найдется такое число h , что при $h_1 < h$

$$\left|\bar{\bar{U}}_h(x) - \bar{\bar{U}}_{h_1}(x)\right| < C\varepsilon, \quad x \in B+S,$$

C не зависит от h, h_1, x.

Положим $h=\varepsilon$. Тогда, если $x\in S_h+\mathcal{B}_h$, то $|\bar{\bar{U}}_h(x)-\bar{\bar{U}}_{h_1}(x)|<ch^{\gamma}$ по теореме (7). Если $x\in\mathcal{B}+S-\mathcal{B}_{h_1}$, то $\bar{\bar{U}}_h(x)=\bar{\bar{U}}_{h_1}(x)$ по определению. Пусть $x\in\mathcal{B}_{h_1}-\mathcal{B}_h$ и $x_h\in S'_{h_1}$ – точка, которая проектируется на $x_1 0 x_2$ в ту же точку, что x.

$$|\bar{\bar{U}}_h(x)-\bar{\bar{U}}_{h_1}(x)|\le|\bar{\bar{U}}_h(x)-\bar{\bar{U}}_h(x_h)|+|\bar{\bar{U}}_h(x_h)-\bar{\bar{U}}_{h_1}(x_h)|+|\bar{\bar{U}}_{h_1}(x_h)-\bar{\bar{U}}_{h_1}(x)|<$$

$$<C(h-h_1)^{\lambda}<ch^{\gamma},\quad \gamma>0.$$

Поэтому существует

$$\lim\bar{\bar{U}}_h(x)=\bar{U}(x),\quad x\in\mathcal{B}+S.$$

$|\bar{\bar{U}}_h|<c\rho^{\lambda}(x)\cdot\rho^{2\delta}(x)$. Поэтому $|\bar{U}|<c\rho^{\lambda}(x)\cdot\rho^{2\delta}(x)$.

При $x\in S^k\cap S$ $\bar{\bar{U}}_h(x)=f(x)\rho^{2\delta}(x)$. Поэтому, если $U(x)=\dfrac{\bar{U}(x)}{\rho^{2\delta}(x)}$, то

$$\bar{U}(x)=f(x)\cdot\rho^{2\delta}(x),\ x\in S^k\cap S;\quad U=\frac{U(x)}{\rho^{2\delta}(x)}=f(x),\quad x\in S^k\cap S.$$

Пусть $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$. Очевидно, при $x\in\mathcal{B}'$ последовательности, составленные из производных от $U_h(x)=\int_{S_h}K(x,y)\varphi_h(x)dS_y$, так же фундаментальны в $\mathcal{B}'$. Поэтому и $\Delta^*U=0$ в $\mathcal{B}'$.

Т.о., если $\beta<\beta_c$, то $U(x)=\dfrac{\bar{U}(x)}{\rho^{2\delta}(x)}$ и удовлетворяет условиям: в $\mathcal{B}$ $\Delta^*U=0,\ U\in C^{(0,\lambda)},\ U|_S=f$; если $f(0)=0$, то $|U|<c\rho^{\lambda}(x)$.

Поступила 9.6.1978 Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелия, М.О.Башалеишвили, Т.В.Бурчуладзе, Трехмерные задачи математической теории упругости, Тбилиси, 1968.
2. З.М.Гогниашвили, Некоторые свойства потенциалов теории упругости для негладких поверхностей. Труды Тбилисского университета, т.210, 1979.

ზ. გოგნიაშვილი

დირიხლეს ამოცანა არაგლუვი ზედაპირით შემოსაზღვრული არისათვის

რეზიუმე

შესწავლილია I ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა ჰარმონიული განტოლებისათვის იმ შემთხვევაში, როდესაც არის საზღვარს გააჩნია კონუსური წერტილი.

Z.Gogniashvili

DIRICHLET'S VALUE PROBLEM FOR THE DOMAIN WITH NON-SMOOTH BOUNDARY

Summary

I main boundary value problem for harmonic equation is considered, when the boundary of domain has conic points.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
210, 1980

УДК 539.03

ВЛИЯНИЕ РЕБЕР ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ

И.А.Зоненашвили, Ж.В.Старовойтенко

Рассматривается плоская задача теории упругости о растяжении изотропной пластинки постоянной толщины с эллиптическим или квадратным отверстием, край которой подкреплен тонким кольцом (ребром) переменного сечения.

На основе решения / I /, полученного путем сочетания метода Н.И.Мусхелишвили с методом коллокации, исследуется влияние переменной жесткости ребра на поле напряжений около отверстия.

I. Пусть $z = x + iy = \omega(\zeta)$ - функция, осуществляющая конформное отображение внешности единой окружности γ плоскости $\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho\sigma$ на внутренность или внешность контура L. Основной искомой функцией, определяющей решение задачи, является комплекснозначная функция градиентов перемещений, которая связана с декартовыми компонентами (по осям ox, oy) вектора переменной на L $g(\sigma) = u + iv$ формулой / 2 /

$$W(\sigma)=U(\sigma)+iV(\sigma)=2\mu g'(\sigma)/\omega'(\sigma) \qquad (I)$$

(μ – модель сдвига материала пластинки).

Для выражения компонент напряжений на L в соответствующих криволинейных координатах напомним известные формулы Н.И.Мусхелишвили (см. / 3 / § I25)

$$\widehat{\rho\rho}+i\widehat{\rho\theta}=\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)}-\frac{1}{\sigma^2\omega'(\sigma)}\left\{\omega(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\omega'(\sigma)}\,\overline{\Psi(\sigma)}\right\}, \qquad (2)$$

$$2\mu(u+iV)=\varkappa\varphi(\sigma)-\omega(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}. \qquad (3)$$

Дифференцируя равенство (3) по σ, делим обе его части на $\omega'(\sigma)$, складываем с (2) и, учитывая (I), получаем

$$\widehat{\rho\rho}+i\widehat{\rho\theta}=(1+\varkappa)\Phi(\sigma)-W(\sigma). \qquad (4)$$

Кроме того имеем

$$\widehat{\rho\rho}+\widehat{\theta\theta}=4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\sigma). \qquad (5)$$

Формулы (4), (5) служат для определения компонент напряжений на контуре L. Здесь $\Phi(\sigma)$ граничное значение комплексного потенциала Мусхелишвили $\Phi(\zeta)$, известного из решения второй основной задачи для случая, когда на контуре L такой же пластинки без ребра заданы смешения $g(\sigma)$ / 3 /.

Следуя методу, предложенному в статье / I /, представляем искомую функцию (I) в виде $W(\sigma)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}A_k\sigma^k$.

Для определения комплексных коэффициентов $A_k=a_k+ib_k$

служат краевые условия на контуре пластинки с ребром (см. условия (I) статьи / I /). Используя метод коллокации, удовлетворяем этим условиям лишь в конечном числе точек и получаем сиситему N линейных алгебраических уравнений относительно искомых вещественных величин a_k, b_k.

Результаты исследования полей напряжений в растягиваемой пластинке с эллиптическим или квадратным отверстием, край которого подкреплен ребром, обладающим переменной жесткостью на расстояние $G_1 = 2\mu h R \delta_1(\theta)$ и на изгиб в своей плоскости $G_2 = 2\mu h R^3 \delta_2(\theta)$, частично приведены ниже. Через R обозначен характерный линейный размер контура L.

2. Для случая пластинки с эллиптическим отверстием, испытывающей одноосное растяжение на бесконечности напряжениями $\sigma_x^{(\infty)} = P$ при наличии двух осей симметрии, рассматривались четыре варианта изменения жесткостей равнообъемного ребра, а именно:

Вариант I: $$\delta_1 = \begin{cases} 0, & 0 \le \theta \le \theta_1, \\ a_1 \sin^2 \dfrac{\pi(\theta-\theta_1)}{2(\theta_2-\theta_1)}, & \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \\ a_1 = const., & \theta_2 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Вариант II: $\delta_1 = a_2 \sin^2 \theta$,

Вариант III: $\delta_1 = a_3 = const$,

Вариант IУ: $\delta_1 = a_4 e^{\theta}$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Для всех четырех вариантов безразмерная жесткость на изгиб определялась в виде $\delta_2 = \lambda \delta_1$, где $\lambda = const$. Материал пластинки и ребра один и тот же. Параметры a_k находятся из условия равенства весов, подкрепляющих ребер, при фиксированном значении параметра $m = (a-b)/(a+b)$, где a, b - полуоси эллипса.

Значения наибольших нормальных напряжений σ_{max}/P в пластинке на контуре L приведены в таблице I при N = 80, λ = 0,0004, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$, $a_1 = 0{,}5$ для всех отрицательных значений m. Для положительных m значения a_1 даны в таблице 2. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

а) Если большая ось эллипса совпадает с направлением растяжения пластинки ($m < 0$), целесообразно подкреплять лишь часть контура отверстия (вариант I). В противном случае ($m > 0$) из рассмотренных вариантов наиболее выгодным является в основном второй вариант. Назовем эти варианты соответственно "рациональными".

б) По сравнению с равнообъемным ребром постоянной жесткости (вариант Ш) рациональные ребра приводят к уменьшению напряжений σ_{max} на 3 $\div$ 21% в зависимости от эксцентриситета эллипса.

в) При отрицательных m подкрепление эллиптического отверстия ребром постоянной жесткости является явно невыгодным с точки зрения величины σ_{max}.

3. Для случая квадратного отверстия функция $\omega(\zeta)$ осу-

ществляющая отображение внешности криволинейного квадрата на внутренность единичного круга была взята в виде $z = \omega(\zeta) = R(\zeta^{-1} + m\zeta^3)$ при $|m| < 1$. Эквивалентные напряжения / 4 / на контуре пластинки при её одноосном растяжении определялись соответственно по трем теориям прочности (наибольших нормальных напряжений $(\sigma^{(1)}_{экв})$, наибольших касательных напряжений $(\sigma^{(2)}_{экв})$ и теории энергии формоизменения $(\sigma^{(3)}_{экв})$) для каждого из вариантов изменения жесткости δ_1:

$$1)\ \delta_1 = a_1 = const; \quad 2)\ \delta_1 = a_2\theta \Big/ \left(\theta + \frac{\pi}{36}\right); \quad 3)\ \delta_1 = a_3 \sin 2\theta$$

$$\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \delta_2 = \lambda\delta_1,\ \lambda = const\right).$$

Постоянные параметры a_k $(k = 1, 2, 3)$ подбирались из условия равенства объемов соответствующих подкрепляющих элементов, материал которых одинаков с материалом пластинки. Значения эквивалентных напряжений частично приведены в таблице 3 для $N = 60$, $\lambda = 0,0004$, $a_1 = 0,33$ для двух значений параметра m.

Полученные результаты позволяют заключить, в частности, что для всех трех теорий прочности среди рассмотренных вариантов жесткости третий является наиболее рациональным при отрицательном m (одна из диагоналей квадрата составляет угол $\frac{\pi}{4}$ с направлением растяжения). Для положительных же m (одна из диагоналей квадрата перпендикулярна к направлению растяжения) этот вариант, как и следовало ожидать, является совершенно нерациональным. Оптимальные ребра следует искать с переменным поперечным сечением.

Числовые результаты, приведенные в таблицах 1 и 3, получены с помощью ЭВМ на основе программ, составленных Н.В.Колковой и И.В.Микитюком.

Таблица I

Вари-ант	m									
	−0,6	−0,5	−0,4	−0,3	−0,25	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65
I	4,I0	3,4I	2,85	2,4I	2,24	2,32	2,5I	2,6I	2,62	2,54
П	4,II	3,40	2,88	2,46	2,29	I,40	I,36	I,29	I,28	I,28
Ш	4,3I	3,69	3,29	2,97	2,8I	I,74	I,59	I,45	I,33	I,22
IУ	4,20	3,52	3,00	2,60	2,44	I,57	I,46	I,37	I,27	I,I9

Таблица 2

m	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65
a_1	0,5	0,41856	0,4005I	0,38438	0,36998

Таблица 3

Вариант	m = 0,25			m = −0,25		
	$\sigma^{(1)}_{экв}/P$	$\sigma^{(2)}_{экв}/P$	$\sigma^{(3)}_{экв}/P$	$\sigma^{(1)}_{экв}/P$	$\sigma^{(2)}_{экв}/P$	$\sigma^{(3)}_{экв}/P$
I	5,34	I,88	4,82	6,0I	7,00	7,68
2	5,36	2,3I	4,7I	6,06	6,87	7,46
3	9,8I	2,89	I0,I	5,6I	6,97	6,40

Поступила 7.У.1979.

Кафедра теоретической механики ТГУ,
Львовский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

I. И.А.Зоненашвили, Ж.В.Старовойтенко, Н.П.Флейшман. Деформация пластин с криволинейными ребрами переменной жесткости. Сообщения АН Груз.ССР, т.78, № I, 1975.

2. Н.П.Флейшман, Ж.В.Старовойтенко. Плоская задача теории упругости для пластинки с подкрепленной криволинейной границей. Сб. "Сопротивление материалов и теория сооружений", вып. ХХП, изд-во "Будівельник", Киев, 1974.

3. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

4. С.Д.Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении, Машгиз, т.I, 1956.

ი.ზონენაშვილი, ჟ.სტაროვოიტენკო

ცვლადი სიხისტის მქონე წიბოების გავლენა ძაბვის კონცენტრაციაზე ხვრელის მახლობლობაში

რეზიუმე

შესწავლილია ელიფსური და კვადრატული ხვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტებში ცვლადი სიხისტის წიბოების გავლენა ძაბვის კონცენტრაციაზე.

I.Zonenashvili, Zh.Starovoitenko

THE INFLUENCE OF VARIABLE STIFFNESS RIBS ON STRESS CONCENTRATION CLOSE TO HOLES

Summary

The authors have studied the influence of ribs of variable stiffness on stress concentration in infinite plates having elleptic and square holes.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

УДК 515.2 210, 1980

ო.რუსიშვილი

სივრცის დაგეგმილება სიბრტყეზე წრეწირთა ისეთი შეკვრით, რომელიც გადის სივრცის გარკვეულ წერტილზე და ამ წერტილის ორთოგონალურ გეგმილზე

სივრცის ორთოგონალურ გეგმილებში გამოსახვა, რომელიც დიდიხანია გამოიყენება, გავრცელებულია ტექნიკის ყველა სფეროში. მის პარალელურად წარმატებით გამოიყენება დაგეგმილების ბევრი სხვა მეთოდიც, მაგალითად ცენტრალური დაგეგმილება, გეგმილები რიცხობრივი ნიშნულებით, სტერეოგრაფიული გეგმილები და სხვა.

შრომა ეხება დაგეგმილების ერთ-ერთი სახის შექმნას. იგი ეხება სივრცის ასახვას სიბრტყეზე წრეწირთა ერთი სახის შეკვრის საშუალებით. გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში წრეწირთა შეკვრის მაგივრად შეგვიძლია გამოვიყენოთ გარკვეული განლაგების ურთიერთმსგავსი, რომელიმე ნებისმიერი მეორე რიგის მრუდების შეკვრა, ცხადია იმავე, ორ წერტილზე გამავალი (ანდა არა მსგავსი და არა გარკვეული განლაგების, მაგრამ ოთხ წერტილზე გამავალი მეორე რიგის მრუდების შეკვრა, სადაც ამ ოთხი წერტილიდან ერთი იდებოდა გეგმილთა სიბრტყეზე).

დაგეგმილების საწყისად აღებულია: Π გეგმილთა სიბრტყე, ამ სიბრტყის ნებისმიერი K წერტილი, რომელსაც ძირითადი ანუ მთავარი წერტილი ვუწოდოთ და ამ წერტილიდან ამავე სიბრტყისადმი აღმართულ მართობზე მდებარე ნებისმიერი S წერტილი.

სივრცის ნებისმიერი A წერტილის დასაგეგმილებლად საჭი-

რია: ამ წერტილზე გატარდეს წრეწირი ისე, რომ მან გაიაროს აგრეთვე S და K წერტილზეც (ნახ.1); რადგან ზემოაღნიშნულ წრეწირს გეგმილთა სიბრტყესთან აქვს ერთი საერთო წერტილი, ამიტომ მას ამ სიბრტყესთან ექნება მეორე საერთო წერტილი A'-ც (კერძო შემთხვევაში A' წერტილი შეიძლება დაემთხვეს K წერტილს), რომელსაც ვუწოდოთ A წერტილის წრიული გეგმილი Π - სიბრტყეზე და აღვნიშნოთ პრიმით.

რადგან მხოლოდ A' გეგმილი ვერ განსაზღვრავს სივრცეში წერტილს, ამიტომ საჭიროა სივრცეში აღებულ დასაგეგმილებელ წერტილს კიდევ ჰქონდეს რაიმე დამატებითი გეგმილი. აღნიშნული დამატებითი გეგმილი შეიძლება მივიღოთ ანალოგიური წესითვე ანდა სხვა რომელიმე არსებული დაგეგმილების გამოყენებით, მაგალითად ცენტრალური დაგეგმილებით, ორთოგონალური დაგეგმილებით ანდა სხვა წესით. ჩვენს შემთხვევაში ვიყენებთ ცენტრალურ დაგეგმილებას S ცენტრით - A_0 ან ორთოგონალურს - A_1.

ნახაზიდან ცხადია, რომ ყველა იმ წერტილის წრიული გეგმილი, რომელიც A წერტილის მაგეგმილებელ წრეწირზე მდებარეობს, დაემთხვევა A' გეგმილს.

ნახაზიდანვე ცხადია, რომ სივრცის ნებისმიერი A წერტილის A' წრიული, A_1 ორთოგონალური და A_0 ცენტრალური გეგმილი ყოველთვის კოლინეარულად იქნება განლაგებული ძირითადი K წერტილის მიმართ.

სინგულარული ელემენტების გამოსავლინებლად განვიხილოთ შემდეგი: ნებისმიერ წრეწირს, რომელსაც სიბრტყესთან აქვს ერთი საერთო წერტილი და არ ეხება ამ სიბრტყეს, უეჭველად აქვს მეორე საერთო წერტილიც, ამიტომ უსასრულოდ დიდი რადიუსიანი წრეწირის გეომეტრიულად განხილვისას ის უნდა განვიხილოთ არა როგორც ერთი წრფე, არამედ როგორც გადაგვარებული წრეწირი, ე.ი. ორი გადაკვეთილი წრფე. თუ ორ მუდმივ K და S წერტილზე გამავალ წრეწი-

რის რადიუსს თანდათან უსასრულოდ გავადიდებთ, სადაც სიბრტყესთან წრეწირის გადაკვეთის ერთი წერტილი იქნება K , მაშინ გადაკვეთის მეორე წერტილი თანდათან გადაიწევს ამ სიბრტყის უსასრულეთის წრფისაკენ, რადგან წრეხაზის ცალი მხარე თანდათან უსასრულობაში გადავა. თუ გავითვალისწინებთ ზემოაღნიშნულს და აგრეთვე იმას, რომ S და K წერტილზე გამავალი წრეწირები შესაძლოა მოთავსებულ იქნენ SK სიბრტყეთა კონის ნებისმიერ სიბრტყეში (ნახ.2) მაშინ შეგვიძლია გამოვიტანოთ დასკვნა, რომ S და K წერტილებზე გამავალ და წრფეებად გადაგვარებულ წრეწირად SK წრფესთან ერთად უნდა განვიხილოთ SK სიბრტყეთა კონის ნებისმიერი სიბრტყის უსასრულეთის წრფე, რომელთა რაოდენობა ∞^1 იქნება.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ SK წრფის ნებისმიერი B, C ან სხვა ერთი რომელიმე წერტილის წრიული გეგმილი იქნება გეგმილთ სიბრტყის უსასრულეთის წრფე.

უფრო მეტად სინგულარული ელემენტები იქნება ზემოაღნიშნული წრფის თვით S და K წერტილებით. თითოეულ ამ წერტილს შეესაბამება გეგმილთა სიბრტყე მთლიანად, ე.ი. ∞^2 რაოდენობის წერტილები, ვინაიდან ამ შემთხვევაში სამ წერტილზე გამავალი ერთი წრეწირის მაგივრად მიიღება ორ წერტილზე გამავალი და SK წრფის სიბრტყეთა კონის ყოველ სიბრტყეში მდებარე წრეწირთა კონები.

დაგეგმილების ამ სისტემას სხვა სინგულარული ელემენტები არ ექნება, რადგან S და K წერტილებზე და აგრეთვე დასაგეგმილებელ სხვა ნებისმიერ წერტილზე გამავალი წრეწირი ერთადერთი იქნება. სივრცის რომელიმე უსასრულეთის წერტილის გეგმილიც კი ერთადერთი უსასრულეთის წერტილი იქნება. მაგალითად, A_∞ წერტილის წრიული გეგმილის მისაღებად განისაზღვრება S და K წერტილებზე გამავალი უსასრულო რადიუსიანი ერთადერთი გადაგვარებული წრეწირი, რომლის ერთი წრფე იქნება SK და მეორე კი -

SKA_∞ სიბრტყის უსასრულობის წრფე. ცხადია A'_∞ გეგმილი კოლინეარულად განლაგდება K ძირითადი წერტილისა და დასაგეგმილებელი წერტილის ორთოგონალური A_1 ან ცენტრალური A_0 გეგმილის მიმართ.

დავამტკიცოთ ასეთი დებულება: სივრცის ნებისმიერი A წერტილის წრიული გეგმილი შეგვიძლია აგრეთვე მივიღოთ ამ წერტილის ისეთი წრფივი დაგეგმილებით (ნახ.3), რომლის AA' მაგეგმილებელი წრფე იმყოფება $ASK=\delta$ სიბრტყეში და ამ წერტილის S წერტილთან შემაერთებელ SA მონაკვეთთან შეადგენს მართ კუთხეს.

დამტკიცება: S და K წერტილზე გამავალ რაიმე δ სიბრტყეში, ამ წერტილებზე, გავავლოთ რაიმე ნებისმიერი K^2 წრეწირი და მასზე ავიღოთ ნებისმიერი $A, B, C, \dots$ წერტილები. ამ წერტილების მიერ შექმნილია წრეში ჩახაზული SAA', SBB', SCC',... კუთხეები, სადაც $A', B', C', \dots$ ემთხვევიან ერთმანეთს. ამ კუთხეებიდან ერთნი ეყრდნობიან SKA' რკალს, მეორენი კი მათ 360^0-მდე შემავსებელ რკალს. ორივე რკალი ცალ-ცალკე შეადგენს 180^0-ს, რადგანაც $\angle SKA'$ მართია (დაგეგმილების არსის მიხედვით) და დიამეტრს ეყრდნობა. რადგან წრეში ჩახაზული კუთხე იზომება იმ რკალის ნახევრით, რომელსაც ის ეყრდნობა, ამიტომ კუთხეები $A', B', C', \dots$ მართებია.

ვინაიდან δ სიბრტყე, S და K წერტილებზე შემოხაზული წრეწირი და აგრეთვე მასზე აღებული წერტილები იყვნენ სრულიად ნებისმიერნი, ამიტომ ზემოთ აღნიშნული მსჯელობა ვრცელდება S და K წერტილებზე გამავალ სხვა დანარჩენ წრეწირზე მდებარე წერტილებზეც, რომელნიც შეადგენენ სივრცის ყველა წერტილს და დებულება დამტკიცებულია.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ წრიული გეგმილების მისაღებად ჩვენ შეგვიძლია სრულიად ავუაროთ გვერდი წრეწირებს და თითოეული წერტილის წრიული გეგმილის მისაღებად ჯერ ეს წერ-

ტილი შევუერთოთ S წერტილს, შემდეგ კი ამ წერტილთან შეერთებით მიღებული მონაკვეთის მიმართ მართი კუთხით გავატაროთ მაგეგმილებელი წრფე და ვიპოვოთ გეგმილთა სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი. მიღებული წერტილი იქნება შესაბამისი წერტილის წრიული გეგმილი.

დებულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი: S წერტილზე გამავალი თითოეული წრფის ყველა წერტილი გეგმილდება ერთი გარკვეული მიმართულებით და ეს მიმართულება არის მართობული ამ წრფისა (ნახ.4). თუ ამ წრფეს და მის გეგმილს განვიხილავთ გეომეტრიულად, მაშინ ამ წრფის გეგმილს უნდა მიემატოს მოცემული წრფის შემცველი S წერტილის გეგმილიც (იხ. სინგულარული ელემენტები), რომელიც მთლიან გეგმილთა სიბრტყეს წარმოადგენს.

SK წრფის სიბრტყეთა კონაში მდებარე თითოეულ წერტილთა წრფივი მწკრივის წრიული გეგმილი განლაგდება K მთავარ წერტილზე გამავალ წრფეზე. წრფივი მწკრივის მდებარეობასთან დამოკიდებულებით მისი გეგმილი დაიკავებს მთავარ წერტილზე გამავალ წრფეს მთლიანად (ნახ.5), ან მის ნაწილს (ნახ.6), აგრეთვე ბევრ შემთხვევაში, წერტილთა მწკრივის ორ-ორი წერტილის გეგმილი დაემთხვევა ერთმანეთს. თუ ამ წრფეს და მის გეგმილს განვიხილავთ გეომეტრიულად, მაშინ ამ წრფის გეგმილს უნდა მიემატოს მოცემული წრფის და SK წრფის გადაკვეთის წერტილის (სასრულო ან უსასრულო) გეგმილიც, რომელიც გეგმილთა სიბრტყის უსასრულეთის წრფეს წარმოადგენს.

K მთავარი წერტილის შემცველ წერტილთა წრფივი მწკრივების გეგმილებს, გეომეტრიულად განხილვის დროს, ცხადია მიემატება K წერტილის შესაბამისი გეგმილიც-გეგმილთა სიბრტყის ყველა წერტილი.

SK წრის სიბრტყეთა კონაში არამდებარე წერტილთა წრფივი მწკრი-ვები გეგმილდება მესამე რიგის მრუდებად (ნახ.7,8 და 9. წრიული დაგეგმილების ნახაზები მოცემულია ორთოგონალურ გეგმილებში).

ნახაზებზე: ℓ_1, ℓ_2 და ℓ' – მოცემულ წერტილთა წრფივი მწკრი-ვების შესაბამისი ჰორიზონტალური, ფრონტალური და წრიული გეგმილე-ბია. Π_1 ჰორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყე ამავე დროს წარმოადგენს წრიულ გეგმილთა სიბრტყესაც. ნახაზზე, მაგალითად, A წერტილის A' წრიული გეგმილის მისაღებად ჯერ ის SK წრფივის ირგვლივ მობრუ-ნებულია SK წრფეზე გამავალი დონის სიბრტყემდე ($\bar{A}$ წერტილი), შემდეგ ნაპოვნია მისი $\bar{A}'$ გეგმილი (ორთოგონალურ გეგმილებში) და შემდეგ კი ის დაბრუნებულია უკან, რითაც მიღებულია A წერტილის A' წრიული გეგმილი.

მიღებულია 15.I.1979.

სამრეწველო საწარმოთა ტექნიკისა და საინჟინრო გრაფიკის კათედრა.

О.С.Русишвили

ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА НА ПЛОСКОСТЬ СВЯЗКОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ВНЕ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ И ЕЕ ОРТОГОНАЛЬНУЮ ПРОЕКЦИЮ

Резюме

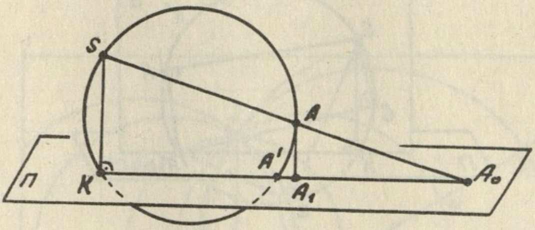
В работе дан новый способ проецирования пространства на плоскость. Выявлены сингулярные элементы проецирования и рассмотрены проекции точечных прямолинейных рядов, которые в общем случае оказались кривыми третьего порядка.

O. Rusishvili

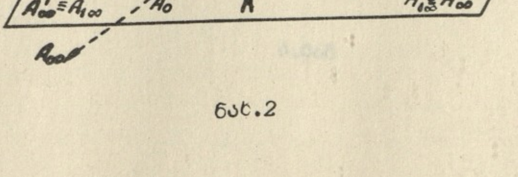
THE PROJECTING OF SPACE ON THE PLANE WITH A BUNCH OF CIRCUMFERENCES PASSING THROUGH THE POINT OUTSIDE THE PLANE OF PROJECTION AND ITS ORTHOGONAL PROJECTION

Summary

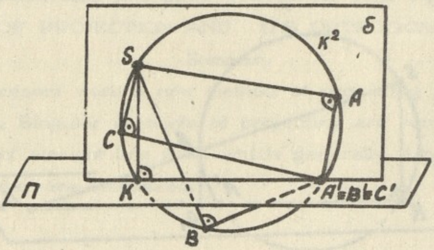
In the present work a new method of projecting space on the plane is given. Singular elements of projecting are revealed and projections of point straight line rows which generally appeared curves of the third order are discussed.



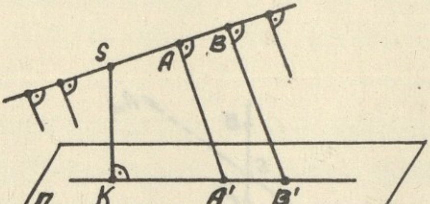
ნახ. 1



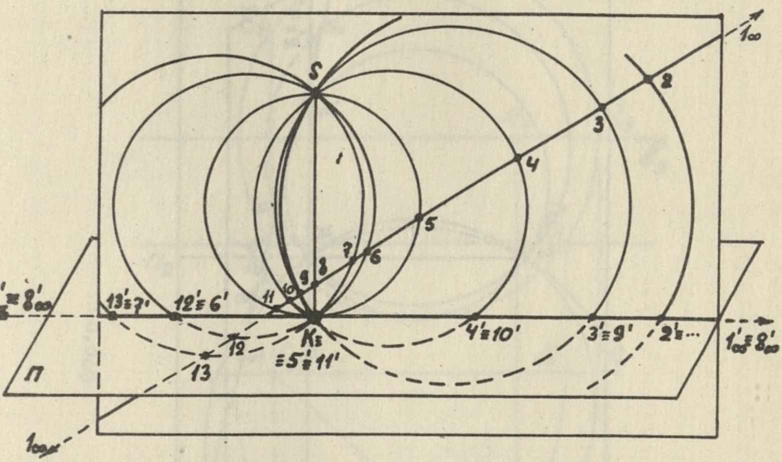
ნახ.2



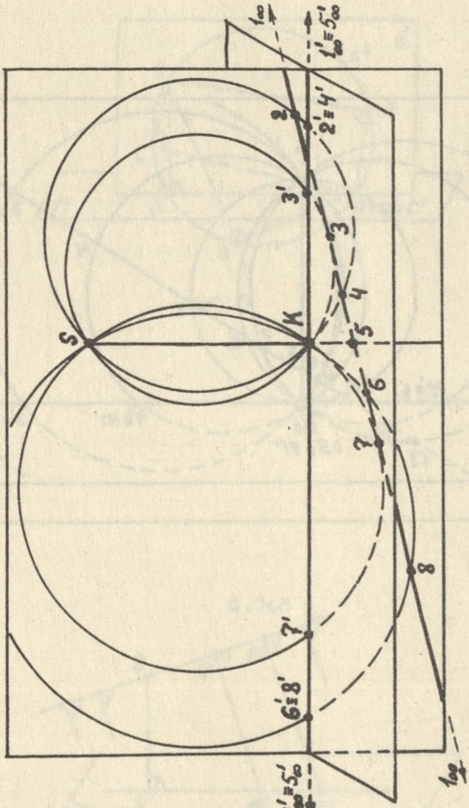
ნახ.3



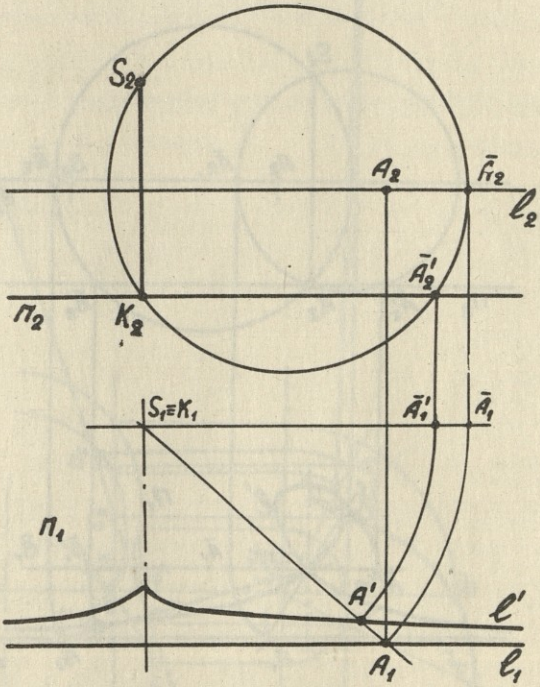
ნახ.4



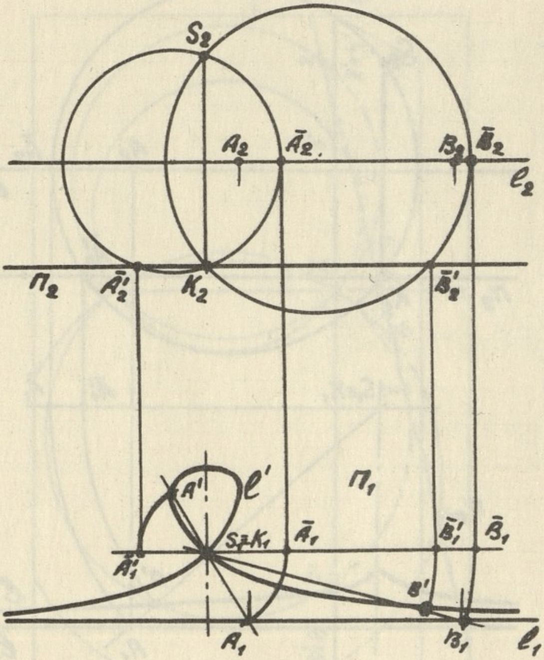
ნახ. 5



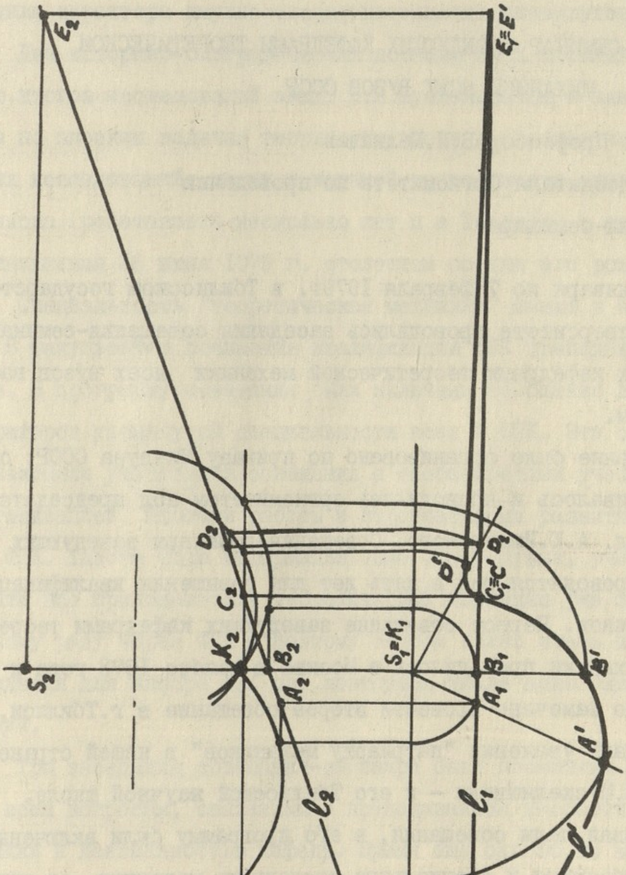
ნახ.6



ნახ. 7



ნახ. 8



ნახ.9

СОВЕЩАНИЕ-СЕМИНАР ЗАВЕДУЮЩИХ КАФЕДРАМИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ВСЕХ ВУЗОВ СССР

Профессор В.Н.Щелкачев

(зам.председателя Оргкомитета по проведению совещания-семинара)

С 25 января по 7 февраля 1979г. в Тбилисском государственном университете проводились заседания совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики всех вузов нашей страны.

Совещание было организовано по приказу Минвуза СССР; оно подготавливалось и проводилось оргкомитетом под председательством акад. А.Ю.Ишлинского. Совещания-семинары заведующих кафедрами проводятся раз в пять лет для повышения квалификации их участников. Первое совещание заведующих кафедрами теоретической механики проводилось в Москве в ноябре 1973 года и тогда же было намечено провести второе совещание в г.Тбилиси, отдавая дань уважения "патриарху механиков" в нашей стране - акад. Н.И.Мусхелишвили - и его Тбилисской научной школе.

Учитывая цели совещания, в его программу были включены научные обзорные и специальные доклады по механике, ее приложениям и по ряду вопросов из родственных наук - физики и математики; доклады по педагогике высшей школы, методике преподавания, методологии и истории развития механики.

Участники совещания были ознакомлены с тематикой четырех крупнейших научно-исследовательских организаций: Института проблем механики АН СССР, Института механики МГУ, Институтов теоретической и прикладной механики и гидродинамики Сибирского отделения АН СССР. С соответствующими докладами выступили директора научно-исследовательских институтов.

Два историко-биографических доклада были посвящены описанию итогов исследований акад. Н.И.Мусхелишвили и акад. И.Н.Векуа по плоским задачам теории упругости и перспективам развития этих исследований; жизни и научной деятельности акад. Л.С.Лейбензона (работавшего несколько лет и в Тбилиси) в связи с исполняющимся 26 июня 1979 г. столетием со дня его рождения.

Специальность "теоретическая механика" имеют в нашей стране 8 факультетов повышения квалификации ФПК преподавателей вузов. В программу совещания были включены сообщения деканов или кураторов упомянутой специальности всех 8 ФПК. Эти сообщения ознакомили участников совещания с особенностями учебных планов, организацией, итогами работы и перспективами развития каждого из ФПК. Такого рода информация была очень нужна, учитывая, что почти все преподаватели теоретической механики уже прошли по одному разу через ФПК и поэтому теперь важно иметь подробные сведения для выбора ФПК при повторном цикле повышения квалификации.

Три заседания совещания-семинара были посвящены дискуссии по всем вопросам, связанным с преподаванием теоретической механики и деятельностью кафедр. Время еще одного из заседаний было отведено встречам участников совещания для установления личных контактов и обменом опытом работы.

Состоялось также открытое заседание Пленума Научно-методического Совета по теоретической механике при Минвузе СССР, ознакомившее участников совещания-семинара с деятельностью и дальнейшими планами работы Совета. Надо заметить, что почти все члены оргкомитета по проведению совещания-семинара были членами президиума Научно-методического Совета; президиум Совета предварительно обсуждал и апробировал программу совещания-семинара и принимал активное участие в его подготовке.

Информационные доклады о работе кафедр теоретической механики Тбилисского государственного университета и Грузинского политехнического института сделали заведующие этих кафедр. Участники совещания посетили институты математики и физики Академии наук Груз.ССР, ознакомились с деятельностью этих институтов.

Четыре специальных доклада были посвящены истории развития механики в Грузии, истории Грузии, истории искусства Грузии, развитию Грузии в десятой пятилетке.

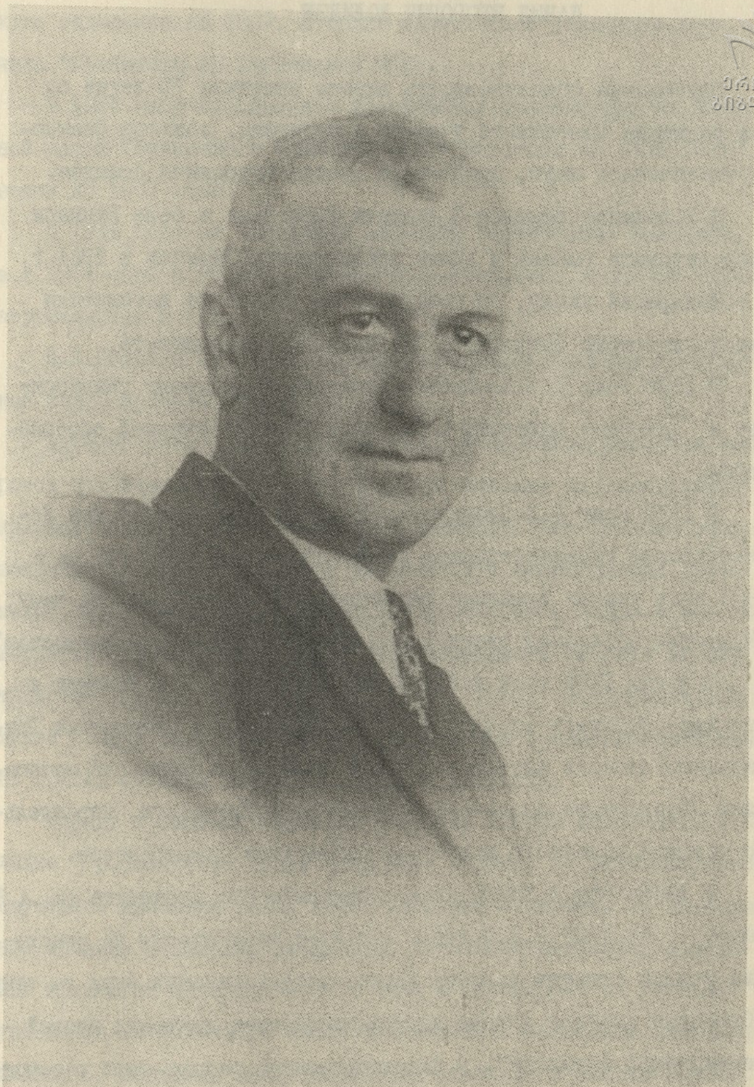
В программу совещания были включены доклад об актуальных проблемах международных отношений и сообщение о международных связях механиков.

Всего на совещании-семинаре было заслушано 56 докладов и сообщений (не считая более 30 выступлений во время дискуссий), 20 из которых были сделаны I4 действительными членами и членами - корреспондентами АН СССР, АПН и академий союзных республик.

В совещании-семинаре приняли участие около 300 заведующих кафедрами теоретической механики (из которых более I00 докторов наук); ведущие преподаватели теоретической механики некоторых вузов, в которых нет самостоятельных кафедр теоретической механики, а также те члены Научно-методического Совета по теоретической механике Минвуза СССР, которые хотя и не заведуют кафедрами, но являются ведущими учеными-механиками и известными педагогами. Общее число всех участников совещания-семинара превысило 360.

Проведенное с многогранной программой весьма представительное совещание заведующих кафедрами теоретической механики можно с полным правом рассматривать как заметное событие в развитии высшего образования в нашей стране. Известно, что сейчас уделяется особенное внимание повышению роли фундаментальных наук в образовании всех специалистов. Теоретическая механика принадлежит к числу трех фундаментальных наук физико-математического цикла (включающих еще математику и физику); значение этих наук особенно велико именно потому, что на них основывается большинство других, преподаваемых в вузах.

Участники совещания-семинара были удовлетворены итогами его проведения и выразили большую благодарность ЦК КП, Совету Министров и Минвузу Грузинской ССР, оказавшим большое содействие в организации совещания, а также ректору Тбилисского университета и коллективам кафедр теоретической механики и родственных кафедр университета и Грузинского политехнического института за активное участие в проведении совещания и проявленное гостеприимство.



Д.Е.Долидзе

(1908-1960)

ДАВИД ЕГОРОВИЧ ДОЛИДЗЕ

Грузинская общественность широко отметила 70-летие со дня рождения известного ученого и педагога, доктора физико-математических наук, профессора Давида Егоровича Долидзе.

Д.Е.Долидзе родился 3 февраля 1908 года в селе Букнари Чохатаурского района в семье крестьянина. Окончив в 1924 г. в г.Махарадзе школу, он поступает на отделение математики педагогического факультета Тбилисского университета.

В 1928 году Д.Е.Долидзе с отличием оканчивает университет и начинает работать в Грузинской геофизической обсерватории.

В 1930 году Д.Е.Долидзе поступает в аспирантуру при Ленинградском государственном гидрологическом институте и в 1933 году там же защищает какндидатскую диссертацию на тему: "К теории обтекания твердых тел вязкой несжимаемой жидкостью".

В конце 1933 года Д.Е.Долидзе возвращается в Тбилиси и начинает работать сначала заведующим кафедрой математики Тбилисского лесного института, затем заведующим кафедрой математики Грузинского сельско-хозяйственного института, параллельно занимая должность доцента в Тбилисском университете.

В 1945 году в Тбилисском математическом институте им. А.Размадзе АН ГССР Д.Е.Долидзе защищает диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему: "Основная краевая задача неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости". В диссертационной работе были рассмотрены вопросы существования и единственности решения основной краевой задачи нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости.

В 1941-45 гг. Д.Е.Долидзе - ученый секретарь математического отделения АН ГССР, а также заместитель редактора журнала "Сообщения АН Грузинской ССР".

В 1947 году Д.Е.Долидзе назначается проректором по учебной части Тбилисского университета и работает на этой должности до 1954 года.

С 1949 года он заведовал кафедрой технической механики, а с 1954 года и до конца жизни был заведующим кафедрой гидроаэромеханики в ТГУ.

Д.Е.Долидзе по праву считается основоположником грузинской гидроаэромеханики.

Научные исследования Д.Е.Долидзе в основном касаются вопросов существования и единственности решения нестационарных краевых задач вязкой несжимаемой жидкости. Для решения этих вопросов он применяет метод потенциала и интегральных уравнений. Большинство полученных ими результатов вошли в его монографию: "Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости" (изд. АН Груз.ССР, Тбилиси, 1960). Монография Д.Е.Долидзе была первой попыткой рассмотрения с классической точки зрения сложных вопросов динамики жидкости.

Наряду с общими вопросами движения вязкой жидкости Д.Е.Долидзе рассмотрены также следующие задачи: 1. Нестационарное двумерное движение между двумя твердыми станками; 2. Радиальное течение в плоском диффузоре; 3. Задачи движения, вызванные вращением цилиндрического слоя и цилиндром; 4. Решение уравнения пограничного слоя; 5. Движения, вызванные вращением диска; 6. Движение между пористыми стенками и многие другие.

Решение этих задач имело большое теоретическое и практическое значение.

Одна часть исследований Д.Е.Долидзе касается вопроса единственности решения основной нестационарной краевой задачи. Результаты, доложенные им в 1952 году на Всесоюзном совещании гидромехаников, были квалифицированы как исключительно важные и значительные.

Основные результаты, полученные Д.Е.Долидзе по вопросам единственности решения уравнения вязкой жидкости, имели большой резонанс как в Советском союзе, так и за рубежом.

Д.Е.Долидзе в течение 30 лет вел педагогическую работу в высших учебных заведениях - сначала в Ленинграде, а затем в Тбилиси. Он читал курс лекций по гидроаэромеханике, по теоретической механике, по аэродинамике, руководил аспирантами и научным семинаром по гидроаэромеханике. В последние годы жизни он создал несколько учебников для студентов университета.

Отзывчивый, дружелюбный и скромный - вот каким помнят ученого его ученики, коллеги и друзья.

Светлая память о прекрасном педагоге и неутомимом исследователе навсегда останется в памяти всех, кто его знал.

УДК 538

Решение некоторых задач проводящей жидкости методом функций Грина. Дж.В.Шарикадзе. Труды Тбилисского университета. 210, 1980. Математика, механика, астрономия.

Методом функций Грина решены задачи обтекания пористой пластины - (I) с учетом конечной и непроницаемой пластины, (2) с учетом асимптотического пограничного слоя в присутствии внешнего магнитного поля. Библ.2 назв.

УДК 532.546

О фильтрации в трапецеидальных земляных плотинах. А.Р. Цицкишвили. Труды Тбилисского университета. 210 , 1980. Математика, механика, астрономия.

В работе решается задача о фильтрации через земляную плотину с наклонными откосами, построенную на непроницаемом основании. Предполагается, что в нижнем бьефе плотины глубина воды равна нулю.

Фильтрационная задача, для которой областью годографа скорости является круговой пятиугольник, решается эффективно. Рассматривается задача при различных наклонах верхнего и нижнего откосов, в том числе, когда нижний откос вертикален.

Проведены расчеты. Результаты расчетов близки ожидаемым.

Библ. 7 назв. Рис.I.

УДК 532.546

О фильтрации через треугольное ядро земляной плотины. А.Р.Цицкишвили, Труды Тбилисского университета. 210, 1980. Математика, механика, астрономия.

В работе решается задача о фильтрации через треугольное ядро земляной плотины при наличии воды в нижнем бьефе. Предполагается, что плотина полностью заполнена водой.

Данная задача решается без рассмотрения годографа скорости, где имеется пять особых точек.

Приведены формулы для определения расхода жидкости и других параметров. Библ. 5 назв. Рис. I.

УДК. 531.36

Об устойчивости и бифуркации стационарных движений уравновешенного гиростата со свободно вращающимся ротором. В.З.Осипов, Р.С.Суликашвили. Труды Тбилисского университета. 210,1980. Математика, механика, астрономия.

В работе исследована бифуркация и устойчивость стационарных движений уравновешенного гиростата со свободно вращающимся ротором.

Стационарные движения представлены геометрически в виде трехмерных многообразий, на ветвях которых распределение устойчивых и неустойчивых движений подчиняется законам теории бифуркации Пуанкаре-Четаева. Библ. 9 назв. Рис. 7.

УДК 517.946

Об обобщенных граничных задачах для бигармонического уравнения. Г.П.Квиникадзе. Труды Тбилисского университета. 210,1980. Математика, механика, астрономия.

В работе сформулированы обобщенные граничные задачи для бигармонического уравнения в m – мерном евклидовом пространстве для областей (как внутренних, так и внешних), ограниченных несколькими замкнутыми гиперповерхностями. Доказаны теоремы единственности для этих задач. Частным случаем рассматриваемых задач при $m = 2$ являются задачи изгиба пластинки. Библ. 3 назв.

УДК 517.9

Некоторые свойства потенциалов теории упругости для негладких поверхностей. З.М.Гогниашвили. Труды Тбилисского университета. 210,1980. Математика, механика, астрономия.

Изучены некоторые свойства потенциала двойного слоя теории упругости для поверхности с конической точкой. Библ. 1 назв.

УДК 517.9

Задача Дирихле для области, ограниченной некоторой негладкой поверхностью. З.М.Гогниашвили. Труды Тбилисского университета. 210,1980 Математика, механика, астрономия.

Рассмотрена I граничная задача для гармонического уравнения в том случае, когда граница области имеет коническую точку. Библ. 2 назв.

УДК 539.03

Влияние ребер переменного сечения на концентрацию напряжений около отверстий. И.А.Зоненашвили, Ж.В.Старовойтенко. Труды Тбилисского университета. 210, 1980. Математика, механика, астрономия.

Путем сочетания метода Н.И.Мусхелишвили с методом коллокации исследуется влияние ребра переменной жесткости на поле напряжений около отверстий. Для пластинок с эллиптическим и квадратным отверстием рассмотрены несколько различных вариантов подкрепления равнообъемными ребрами. Показано, что по сравнению с равнообъемным ребром постоянной жесткости "рациональные" ребра приводят к уменьшению напряжений до 21%. Библ. 4 назв. Табл.3.

УДК 515.2

Проецирование пространства на плоскость связкой окружностей, проходящих через точку вне плоскости проекции и её ортогональную проекцию. О.С.Русишвили. Труды Тбилисского университета. 210, 1980. Математкиа, механика, астрономия.

Дан новый способ проецирования пространства на плоскости. Выявлены сингулярные элементы проецирования и рассмотрены проекции точечных прямолинейных рядов, которые в общем случае оказались кривыми третьего порядка. Рис. 9.

Содержание

შ ი ნ ა ა რ ს ი

Contents

Редактор издательства Л. Абуашвили

Подписано в печать I8.0I.80 УЭ 09032

Бумага 60x84 Усл. печ. л. I0 Уч.-изд. л. 6,47

Тираж 300 Заказ 557 Цена 65 к.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი,

380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14

Издательство Тбилисского университета, Тбилиси,

380028, пр. И. Чавчавадзе, I4.

საქ. სსრ მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი,

380060, კუტუზოვის ქ. 19.

Типография АН ГССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, I9.