

თბილისის უნივერსიტეტის უროვები
ТРУДЫ ТБИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

207



ISSN 0376—2637

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა
К И Б Е Р Н Е Т И К А
П Р И К Л А Д Н А Я М А Т Е М А Т И К А

თბილისი 1979 Тбилиси

სტატისტიკა
კიბერნეტიკა
პრიკლადნაა
სტატისტიკა
მათემატიკა



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი
მათემატიკა

**КИБЕРНЕТИКА
ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИКА**

სარედაქციო კოლეგია



მ. ცამცხრელიძე, მ. ტატიანიძე (მდივანი), ნ. ვახანიანი, რ. კორძაძე
(რედაქტორი), რ. მგებრიძე, ა. მელიძე, მ. ნუბუნიანი, ვ. ჭავ-
ჭავანიძე

Редакционная коллегия

Н. Н. Вахания, Т. В. Гамкrelidze, Т. Г. Гачечиладзе (секретарь),
Р. А. Кордзадзе (редактор), Р. П. Мегрелишвили, Г. В. Меладзе,
Т. С. Цуцунава, В. В. Чавчавадзе

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

О РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНКИ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Р. А. Кордзадзе

В работах И. Н. Векуа [1 - 2] построена новая теория упругих оболочек, которая по сравнению с классической обладает рядом преимуществ. Им же доказаны в общем случае существование и единственность решения основных граничных задач [2].

В теории И. Н. Векуа поле смещений пластинки, свободной от внешних нагрузок и постоянной толщины $h = const$, в случае приближения $\nu = 1$ дается следующими формулами [2]:

$$v(z) = \chi(z) - \frac{2\sigma}{3(1+\sigma)} [f_1'(z) + \overline{f_1'(z)}], \quad (1)$$

$$u_+(z) = -\sigma h^2 \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} + \frac{3-\sigma}{1+\sigma} f_1(z) - z \overline{f_1'(z)} - \overline{f_2'(z)}, \quad (2)$$

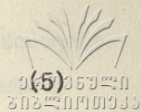
$$v_+(z) = i \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{3} \overline{\phi_1'(z)} + \phi_2(z) + z \overline{\phi_2'(z)} + \frac{8h^2(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} \overline{\phi_2''(z)}, \quad (3)$$

$$u(z) = \phi_1(z) + \overline{\phi_1(z)} - \frac{3}{2} [z \overline{\phi_2'(z)} + \bar{z} \phi_2'(z)], \quad (4)$$

где σ - коэффициент Пуассона, f_j и ϕ_j ($j=1,2$) - произвольные аналитические функции от $z = x + iy$, а $\omega(z)$ и

$\chi(z)$ - произвольные регулярные решения уравнения

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} - \lambda^2 \omega = 0 \quad (\lambda^2 = 3k^2)$$



и

$$\chi_{xx} + \chi_{yy} - \lambda_1^2 \chi = 0 \quad (\lambda_1^2 = \frac{6}{(1-\epsilon)k^2}). \quad (6)$$

соответственно. Следовательно, первая основная граничная задача о нахождении упругого равновесия пластинки при заданных смещениях точек ее границы сводится к краевым задачам с граничными данными (1)-(2) и (3)-(4).

С учетом теоремы единственности этих задач [2] в работе [3] задача (1)-(2) редуцирована к эквивалентной ей системе трех уравнений Фредгольма при помощи специальных интегральных представлений искомых функций. В настоящей работе аналогичным образом решается граничная задача (3)-(4).

Пусть D - конечная односвязная область, содержащая начало координат и ограниченная простым замкнутым гладким контуром Γ , уравнение которого запишем в виде $t(s) = x(s) + iy(s)$, где s - длина дуги; будем считать, что функция $t(s)$ имеет производные по s до третьего порядка включительно, принадлежащие классу H [4].

Будем предполагать, что: 1) функции $V_+(z)$ и $u(z)$ ($z \in \Gamma$) имеют вторые производные из класса H ; 2) функции $\phi_1(z)$ и $\omega(z)$ вместе со своими производными первого порядка, а функция $\phi_2(z)$ вместе со своими производными первого и второго порядка непрерывно продолжимы вплоть до границы Γ и их значения на Γ принадлежат классу H .

Нетрудно показать, что при заданном $u(z)$ и $V_+(z)$ ($z \in D$) из соотношений (3)-(4) функция $\phi_1(z)$ определяется с точ-

ностью до слагаемого вида $(A_1 + iA_2)z + iA_3$, а функция $\phi_2(z)$ определяется с точностью до слагаемого вида $\frac{z}{2}(A_1 - iA_2) + iA_4 z$, где A_j — произвольные вещественные постоянные. Подходящим выбором этих постоянных можно достигнуть того, чтобы по произволу

$$\phi_1'(0) = \Im \phi_1(0) = \Im \phi_2'(0) = 0, \quad (7)$$

или

$$\phi_2(0) = \Im \phi_1(0) = \Im \phi_2'(0) = 0. \quad (8)$$

Любым из этих условий вполне фиксируются обе функции $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$. Ниже мы будем пользоваться нормировками (7).^{*}

Согласно формуле И.Н.Векуа [6], любое вещественное регулярное решение уравнения (5) единственным образом представимо в виде

$$\omega(z) = \operatorname{Re} \left\{ \phi_3(z) - \int_0^z G(z, t_1) \phi_3(t_1) dt_1 \right\} \quad (z, t_1 \in \mathcal{D}), \quad (9)$$

где $\phi_3(z)$ — произвольная голоморфная функция в области \mathcal{D} , причем

$$\phi_3(0) = \overline{\phi_3(0)}, \quad (10)$$

^{*} В работе Г.М.Савина и И.Ю.Хома [5], в которой рассматривается граничная задача (3)–(4), вместо нормировки (7) (или (8)) ошибочно берется нормировка $\phi_1(0) = \phi_1'(0) = 0$ (в наших обозначениях). Вследствие этого, ошибочно утверждение работы [5], что из теоремы единственности [2] граничной задачи (3)–(4) следует разрешимость системы интегральных уравнений, составленных для задачи (3)–(4). Отметим также, что искомые функции неоднозначно определяются через плотности приведенных в работе [5] интегральных представлений.

$G(x, t)$ - комплексная функция Римана уравнения (5), кото-
рая имеет вид

$$G(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} I_0(\lambda \sqrt{x(x-t)}),$$

где I_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка с мнимым аргументом.

В силу того, что $\omega(x), \frac{\partial \omega}{\partial x} \in H(\Gamma)$, функция $\phi_3(x)$ обладает аналогичным свойством [6]. Учитывая это и полагая

$$G_1(x, t) \equiv \frac{\partial G(x, t)}{\partial x}, \quad G_2(x, t) \equiv \frac{\partial G(x, t)}{\partial x^2} \quad (x, t \in \mathcal{D}),$$

при помощи формулы (9) граничные условия (3)-(4) запишем так:

$$\phi_1(t) + \overline{\phi_1(t)} - \frac{3}{2} [\bar{t} \phi_2(t) + t \overline{\phi_2(t)}] = u(t) \quad (t \in \Gamma), \quad (II)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\phi_2(t)} + \bar{t} \phi_2'(t) + \frac{8\lambda^2(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} \phi_2''(t) - \frac{2}{3} \phi_1'(t) + \frac{1}{2t} \{ \phi_1'(t) + \\ & + \frac{\lambda^2}{4} \bar{t} \phi_3(t) + \int_0^t G_1(t, \tau) \phi_3(\tau) d\tau + \int_0^{\bar{t}} \overline{G_2(t, \tau)} \overline{\phi_3(\tau)} d\tau \} = \overline{v_4(t)}. \end{aligned} \quad (I2)$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = & \frac{3}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\omega_1(t) + a_1 \alpha(t) \omega_2(t) - \frac{a_1 \bar{t}}{2\lambda^2} \omega_3(t)] \rho_n(1 - \frac{x}{t}) dt + \\ & + \frac{a_1}{\pi i} \int_{\Gamma} [\omega_3(t) - \frac{\bar{t} \omega_2(t)}{2(1-\sigma)}] \frac{dt}{t-x} + b_2 x + b_1, \end{aligned} \quad (I3)$$

$$\phi_2(x) = \frac{a_2}{3\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_2(t) dt}{t-x} + b_3 x + b_4, \quad (I4)$$

$$\phi_3(x) = -\frac{16a_1}{3\lambda^2 \pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_2(t) dt}{(t-x)^2} + \frac{4a_1}{3\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_3(t) dt}{t-x} + b_5, \quad (I5)$$

где под $\ell_n(1 - \frac{z}{t})$ при данном t подразумевается ветвь, обращаящаяся в нуль при $z=0$, $\omega_j(t)$ ($j=1,2,3$) - вещественные функции точки контура Γ ,

$$a_1 = \frac{3(1-\sigma)}{2(3-4\sigma)}, \quad a_2 = \frac{3(1-2\sigma)}{2(3-4\sigma)}, \quad \alpha(t) = \frac{-\bar{t}'^2}{3(1-2\sigma)} +$$

$$+ \frac{a_1 \bar{t}'^2}{4\lambda^2 a_2} + \frac{1}{2a_2}, \quad b_1 = \int_{\Gamma} \omega_1(t) ds - \frac{a_1}{2(1-\sigma)\pi i} \int_{\Gamma} \omega_2(t) \Upsilon_m \left[\frac{t' \bar{t}'}{it} \right] ds +$$

$$+ \frac{a_1}{\pi i} \int_{\Gamma} \omega_3(t) \Upsilon_m \left[\frac{t'}{it} \right] ds, \quad b_2 = \frac{3}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_1(t) dt}{t} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_2(t)}{t} \left[3a_2 \alpha(t) + \frac{a_1 \bar{t}'}{(1-\sigma)t} \right] dt - \frac{a_1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_3(t)}{t^2} \left(1 + \frac{3\lambda^2}{4\lambda^2} \right) dt,$$

$$b_3 = \frac{a_2}{3\pi i} \int_{\Gamma} \omega_2(t) \Upsilon_m \left[\frac{t'}{it^2} \right] ds, \quad b_4 = \frac{a_2}{3\pi i} \int_{\Gamma} \omega_2(t) \frac{t'(1-t) + it^2}{t^2} ds,$$

$$b_5 = \frac{4a_1}{3\pi i} \int_{\Gamma} \omega_3(t) \left[i + \Upsilon_m \left(\frac{t'}{t} \right) \right] ds - \frac{16a_1}{3\lambda^2 \pi i} \int_{\Gamma} \omega_2(t) \Upsilon_m \left(\frac{t'}{t^2} \right) ds.$$

Будем считать, что $\omega_1(t)$ принадлежит классу H , $\omega_2(t)$ имеет вторую производную из класса H , а $\omega_3(t)$ имеет первую производную, удовлетворяющую условию H . Это, как легко видеть, обеспечивает непрерывную продолжимость функций $\phi_j(z)$, $\phi_j'(z)$ ($j=1,2,3$) и $\phi_2''(z)$ вплоть до границы Γ и их значения на Γ принадлежат классу H . Нетрудно проверить, что функции $\phi_j(z)$ ($j=1,2,3$) удовлетворяют условиям нормировки (7) и (10).

Легко показать, что [3]

$$\int_0^z G_1(z, t_1) \phi_3(t_1) dt_1 = \frac{\lambda^2 a_1 \bar{z}^2}{6\pi} \int \frac{\omega_2(t) dt}{t-z} + \int_{\Gamma} A_{1,1}(z, t) \omega_2(t) ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma} B_{1,1}(z,t) \omega_3(t) ds, \int_0^z G_2(z,t_1) \phi_3(t) dt, = \frac{-4a_1}{3\pi} \int \frac{\omega_2(t) dt}{t-z} + \\
 & + \int_{\Gamma} A_{1,2}(z,t) \omega_2(t) ds + \int_{\Gamma} B_{1,2}(z,t) \omega_3(t) ds, \quad z, t_1 \in \mathcal{D}, \quad (I6)
 \end{aligned}$$

где

$$A_{1,j} = \frac{16a_1}{3\pi^2} \left\{ \frac{G_j(z,0)}{t-t'} + \int_0^z \left[\frac{t'}{t-t'} \frac{\partial G_j(z,t)}{\partial t} + i G_j(z,t) \operatorname{Im} \left(\frac{t'}{t} \right) \right] dt \right\},$$

$$B_{1,j} = \frac{4a_1}{3\pi} \int_0^z G_j(z,t) \left[\frac{t'}{t-t'} + (1 - i \operatorname{Im} \left(\frac{t'}{t} \right)) \right] dt, \quad j=1,2.$$

Подставляя теперь выражения (I3), (I4) и (I5) в граничные условия (II)-(I2), учитывая формулы (I6) и используя предельные свойства интегралов типа Коши [4], получим квази-фредгольмову систему сингулярных интегральных уравнений

$$\omega_3(t_0) - \mathcal{R}(s_0) \omega_2(t_0) + \frac{\mathcal{Y}(s_0)}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_2(t) dt}{t-t_0} + \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} N_{3,j}(t_0,t) \omega_j(t) ds = \frac{1}{2a_1} U(t_0), \quad (I7)$$

$$(t_0 \in \Gamma)$$

$$\omega_1(t_0) + \omega_2(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_1(t) dt}{t-t_0} + \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} N_{2,j}(t_0,t) \omega_j(t) ds = \overline{V_4(t_0)}, \quad (I8)$$

где

$$\begin{aligned}
 N_{1,1}(t_0,t) &= \frac{3-4\delta}{1-\delta} \left\{ \frac{\delta}{\pi} - \operatorname{Re} it' \left[\frac{t_0}{t} + \ln \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) \right] \right\}, \quad N_{1,2}(t_0,t) = \frac{t_0}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{it'}{t-t_0} \right) - \\
 & - \frac{1}{2\pi(1-\delta)} \operatorname{Re} it' \left\{ \frac{t_0 \bar{t}}{t^2} - \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} + 3(1-2\delta) \alpha(t) \left[\frac{t_0}{t} + \ln \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) \right] - \right. \\
 & \left. - (1-2\delta) \frac{\bar{t}_0 [t'(1-t) + it^2]}{t^2 t_0} \right\}, \quad N_{1,3}(t_0,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} it' \left\{ \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \bar{t} \ln \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{t-t_0} + \frac{t_0}{t^2} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 K^2 \right] \}, \quad N_{2,1}(t_0, t) = \frac{it'}{\pi t}, \quad N_{2,2}(t_0, t) = \frac{1}{2i} (A_{1,1}(t_0, t) + \\
& + \overline{A_{1,2}(t_0, t)}) - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{it'}{t-t_0} \right) + \frac{1}{2(3-4\theta)\pi i} \left\{ (1-\theta) \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \frac{t'(\bar{t}^2 - \bar{t}_0^2)}{t-t_0} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} \right) - \right. \\
& \left. - (1-2\theta) \left[\frac{\bar{t}'(1-\bar{t}) - i\bar{t}^2}{\bar{t}^2} - \frac{3\alpha(t)}{\bar{t}'t} \right] - 2i(1-\theta)\bar{t}_0 \operatorname{Re} \left(\frac{it'}{t^2} \right) - \frac{t'\bar{t}}{t^2} \right\}, \\
& N_{2,3}(t_0, t) = \frac{1}{2i} (B_{1,1}(t_0, t) + \overline{B_{1,2}(t_0, t)}) + \frac{1-\theta}{\pi i(3-4\theta)} \left\{ \frac{t'}{t^2} \left(1 + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 K^2 \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \frac{t'(\bar{t}-\bar{t}_0)}{t-t_0} + \frac{\lambda^2}{2} \bar{t}_0 \left[1 - i \operatorname{Im} \left(\frac{t'}{t} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что если $\phi_1(z) \equiv \phi_2(z) \equiv \phi_3(z) \equiv 0$ в области \mathcal{D} , то из формул (I3)–(I4) и (I5) следует, что $\omega_1(t) \equiv \omega_2(t) \equiv \omega_3(t) \equiv 0$ на Γ . Отсюда, из теоремы единственности граничной задачи (II)–(I2) [2] и из того, что индекс системы (I7)–(I8) равен нулю следует разрешимость этой системы при любой правой части. Легко показать, что решение системы (I7)–(I8) обладает требуемой гладкостью.

Из доказанного выше следует, что если произвольные голоморфные в области \mathcal{D} функции $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ и $\phi_3(z)$ удовлетворяют указанным выше условиям гладкости и нормировки, то эти функции единственным образом представимы в виде (I3), (I4) и (I5). Отсюда в свою очередь следует, что квазифредгольмова система интегральных уравнений (I7)–(I8) эквивалентна к граничной задаче (II)–(I2).

Характеристическая часть системы сингулярных интеграль-

ных уравнений (I7)-(I8) в сущности совпадает с характеристической частью системы уравнений, полученной для задачи (I)-(2) в работе [3]. Поэтому, поступая так же, как и в работе [3], систему (I7)-(I8) можно привести к эквивалентной ей системе интегральных уравнений Фредгольма

$$\omega_{\kappa}(t_0) + \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} m_{\kappa,j}(t_0, t) \omega_j(t) ds = g_{\kappa}(t_0), \quad \kappa=1, 2, 3, \\ (t_0 \in \Gamma),$$

где

$$m_{1,j}(t_0, t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha_j i t'}{t-t_0} + i \int \frac{N_{2,j}(t_1, t) dt_1}{t_1 - t_0} \right\} \quad (\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0),$$

$$m_{2,j}(t_0, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta_j t'}{\pi i (t-t_0)} + N_{2,j}(t_0, t) \right\} - m_{1,j}(t_0, t) \quad (\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = 0),$$

$$m_{3,j}(t_0, t) = N_{1,j}(t_0, t) + \mathfrak{X}(s_0) m_{2,j}(t_0, t) - \frac{Y(s_0)}{\pi} \int \frac{m_{2,j}(t_1, t) dt_1}{t_1 - t_0},$$

$$g_1(t_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{V_+(t) dt}{t-t_0}, \quad g_2(t_0) = V_1(t_0) - g_1(t_0),$$

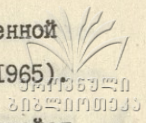
$$g_3(t_0) = \frac{u(t_0)}{2a_1} + \mathfrak{X}(s_0) g_2(t_0) + \frac{Y(s_0)}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{g_2(t) dt}{t-t_0}.$$

Поступила 23.I.1976

Кафедра высшей
математики

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Н.Векуа, Об одном методе расчета призматических оболочек, Труды Тбилисского матем. ин-та, 21 (1955).



2. И.Н.Векуа, Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Труды Тбилисского матем. ин-та, т.30 (1965).
3. Р.А.Кордзадзе, Об одной краевой задаче, встречающейся в теории оболочек. Сообщ. АН Груз. ССР, X III, № 2 (1966).
4. Н.И.Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
5. Г.М.Савин, И.Ю.Хома, ДАН УССР, сер.А, 10 (1970).
6. И.Н.Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948.

რ. კორძაძე

აიკვანი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის
 თასახებ მათემატიკის სისაძის მათემატიკის ფიზიკის ნაშრომების
 გამომცემლობისათვის

რეზიუმე

ძირითადი (3) - (4) ამოცანა მიფრანტილი მის ექვივალენ-
 ტურ ფრეკვილინის ტიპის ინტეგრალურ განვრცობადა სისტემაზე, რეზილის
 ამოხსნაობა გამოდინარეობს ამოცანის ამოხსნის ურთაფრთხობიდან
 [1 - 2].

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ФАКТОРИЗОВАННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОБ
УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

Г.В.Меладзе, Р.Д.Лазаров

I. В работе рассматривается задача об упругих колебаниях бесконечной полосы под воздействием периодических массовых сил и внешних нагрузок при периодических начальных условиях.

Аналогичная задача рассматривалась в работе [1]. Уравнения, описывающие динамические упругие деформации, записывались в виде симметричной гиперболической системы первого порядка. Использовался численный метод, основанный на интегрировании вдоль бихарактеристик.

Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости в прямоугольнике, описываемой системой уравнений в перемещениях, рассматривались многими авторами. Среди них отметим работы [2], [3], где можно найти ссылки на другие источники.

В [4], [5] А.А.Самарским дан общий метод построения устойчивых разностных схем для решения эволюционных уравнений вида

$$\frac{dU}{dt} + AU = f, \quad \frac{d^2U}{dt^2} + AU = f,$$

которые открывает большие возможности для построения экономических разностных схем заданного качества для конкретных задач, если известен способ аппроксимации оператора A .

В настоящей работе метод регуляризации разностных схем применяется для построения абсолютно устойчивых факторизованных разностных схем. Особенность задачи заключается в том, что оператор A только неотрицателен и A^{-1} не существует.

При помощи некоторой модификации методов [4] - [6] доказана абсолютная устойчивость разностной схемы и получена априорная оценка, из которой следует сходимость факторизованной схемы со скоростью $O(\tau^2 + h/\tau^2)$. Доказательство устойчивости по краевым данным проводится по аналогии с [2].

Для решения полученных разностных уравнений можно воспользоваться одним из методов одномерной прогонки.

Основные результаты данной работы были опубликованы в [9].

2. В полосе $Q = \{(x_1, x_2), -\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ при $0 \leq t \leq T$ ищется решение $U(x_1, x_2, t) = U(x, t)$ дифференциального уравнения

$$L U \equiv \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_i} e_k = -F + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$U(x, 0) = U^{(0)}(x), \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = U^{(1)}(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

$$L U \equiv \sum_{k=1}^2 \tau_{2k} \cos(\nu, x_2) e_k = -f, \quad x_2 = 0, l_2, \quad (3)$$

$$-\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < t \leq T,$$

где $U = (U_1, U_2)$ - вектор упругих перемещений, $\ell \geq 0, \mu > 0$ постоянные Ляме, ν - внутренняя нормаль к границе, e_k - единичный вектор оси x_k ,

$$\tau_{ii} = 2\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \lambda \operatorname{div} U, \quad \tau_{ik} = \tau_{ki} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)$$

- компоненты тензора напряжений.

$$F, f, U^{(0)}, U^{(1)} \in \Pi,$$

где Π - множество ограниченных при $0 \leq t \leq T$ функций периодических по переменному x_1 с периодом ℓ_1 .

В силу периодичности данных задачи (1)-(3), решение ее тоже будет периодическим, то есть $U \in \Pi$. Поэтому достаточно найти это решение при $x \in \Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < \ell_1, 0 \leq x_2 \leq \ell_2\}$.

3. В прямоугольнике Ω введем пространственную сетку $\bar{\omega} = \{(x_1, x_2) : x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, 0 \leq i_1 < N_1, 0 \leq i_2 \leq N_2, h_\alpha = \ell_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Обозначим через $\omega = \{(x_1, x_2) : x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, 0 \leq i_1 < N_1, 0 < i_2 < N_2\}$ множество внутренних узлов сетки; $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ - множество граничных узлов. В цилиндре $Q_T = \Omega \times [0 \leq t \leq T]$ построим пространственно-временную сетку $\bar{Q}_{\ell_1 t} = \bar{\omega} \times \bar{\omega}_\tau$, где $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, \tau = T/J\}$.

При фиксированном $0 \leq t < T$ введем гильбертовы пространства H и H' сеточных функций v , определенных на сетках $\bar{\omega}$ и γ , периодических по переменному x_1 с периодом ℓ_1 со скалярными произведениями

$$[v, y] = \sum_{x_1=0}^{\ell_1-h_1} \sum_{x_2=0}^{\ell_2} h_2 h_1 v y, \quad (4)$$

$$|v, y| = \sum_{\gamma} h_1 v y.$$

Скалярным произведениям (4) соответствуют нормы

$$\|v\| = [v, v]^{1/2}, \quad \|v\|' = |v, v|^{1/2}.$$

Воспользуемся обозначениями из [2, 8] и определим точную норму W_2^1 на слое по формуле

$$\|y\|_1^2 = \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = \|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \left[\sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} y_{\alpha x_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} y_{\alpha x_1}^2 h_1 h_2 \right]. \quad (6)$$

4. Сформулируем разностную задачу, соответствующую задаче (1)-(3). В цилиндре $\bar{Q}_{\tau h}$ ищется решение следующей задачи:

$$y_{\bar{t}t} + Ay = \Phi, \quad y = y(t) \in H, \quad t = \tau, \dots, T - \tau, \quad x \in \bar{\omega}, \quad (7)$$

$$y(0) = y^{(0)} = u^{(0)}, \quad y(\tau) = y^{(1)} = u^{(0)} + \tau u^{(1)} + \frac{\tau^2}{2} (Au^{(0)} + F|_{t=0}), \quad (8)$$

$$x \in \bar{\omega},$$

где разностный оператор $A = -\bar{A}$, аппроксимирующий дифференциального оператора из (1), имеет вид (см. [2])

$$\bar{A}y = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^2 (t_{ki}^+ \bar{x}_i + t_{ki}^- x_i) e_k, & x \in \omega, \\ \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{h_2} (t_{2k}^+ + t_{2k}^{-(+1_2)}) + t_{1k}^+ \bar{x}_1 \right] e_k, & x_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{h_2} (t_{2k}^- + t_{2k}^{+(-1_2)}) + t_{1k}^- x_1 \right] e_k, & x_2 = l_2, \end{cases} \quad (9)$$

$$t_{ii}^+ = (2\mu + \lambda) y_{ix_i} + \lambda y_{3-i x_{3-i}}, \quad t_{ii}^- = (2\mu + \lambda) y_{i\bar{x}_i} + \lambda y_{3-i \bar{x}_{3-i}},$$

$$t_{ik}^+ = \mu (y_{ix_k} + y_{kx_i}), \quad t_{ik}^- = \mu (y_{i\bar{x}_k} + y_{k\bar{x}_i}), \quad i, k = 1, 2.$$

Правая часть Φ определяется по формуле

$$\Phi = \begin{cases} F, & x \in \omega \\ F + \frac{2}{h_2} f, & x \in \gamma. \end{cases}$$

5. Наша цель — получить абсолютно устойчивую экономическую разностную схему. Для этого можно воспользоваться методом регуляризации разностных схем [4], при помощи которого получим следующую факторизованную схему:

$$\prod_{\alpha=1}^2 (E + \sigma \tau^2 \overset{\circ}{A}_\alpha) y_{it} + \mathcal{A}y \equiv (E + \tau^2 \mathcal{R}) y_{it} + \mathcal{A}y = \Phi, \quad (\text{II})$$

где $\mathcal{R} = \sigma(\overset{\circ}{A}_1 + \overset{\circ}{A}_2) + \sigma^2 \tau^2 \overset{\circ}{A}_1 \overset{\circ}{A}_2$ — оператор-регуляризатор, выбор σ обеспечивает абсолютную устойчивость схемы (II),

$$\overset{\circ}{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \overset{(1)}{A}_\alpha & 0 \\ 0 & \overset{(2)}{A}_\alpha \end{pmatrix} \quad \overset{\circ}{A}_1 + \overset{\circ}{A}_2 = \overset{\circ}{A}, \quad (\text{I2})$$

оператор $\overset{\circ}{A}_1$, действующий в пространстве периодических по x_1 функций, имеет вид

$$\overset{(1)}{A}_1 v = -(2\mu + \lambda) v_{\bar{x}_1 x_1}, \quad \overset{(2)}{A}_1 v = -\mu v_{\bar{x}_1 x_1},$$

$$\overset{(2)}{A}_2 v = \begin{cases} -a^{(2)} v_{\bar{x}_2 x_2}, & 0 < i_2 < N_2, \\ -\frac{2}{h_2} a^{(2)} v_{x_2}, & i_2 = 0, \\ \frac{2}{h_2} a^{(2)} v_{\bar{x}_2}, & i_2 = N_2, \end{cases}$$

где

$$a^{(1)} = \mu, \quad a^{(2)} = 2\mu + \lambda.$$

При исследовании разностной схемы (II), (8) нам потребуются некоторые свойства операторов \mathcal{A} и $\overset{\circ}{A}$ над \mathcal{H} . Сформулируем их в виде леммы.

Лемма I. Операторы \mathcal{A} и $\overset{\circ}{A}$ над \mathcal{H} являются неотрицательными в смысле

скалярного произведения (4) и самосопряженными операторами.

Для любой функции $v \in H$ выполнены соотношения

$$c_1 [Av, v] \leq [Av, v] \leq c_2 [Av, v], \quad (13)$$

$$\|v\|'^2 \leq M_1 \|v\|_1^2, \quad (14)$$

где $c_1 = \mu / M_0 (2\mu + \lambda)$, $c_2 = 2$, $M_0, M_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от $|R|$ и τ .

Доказательство леммы проводится по аналогии с доказательством соответствующих лемм работ [8, 7].

6. Итак, оператор A только неотрицателен и A^{-1} не существует. Поэтому мы не можем применить непосредственно результаты работ [4] — [6]. Сделаем модификацию методов из [4], [5], которая позволяет получать априорные оценки и теоремы о сходимости разностных схем в случае неотрицательных операторов A .

Разностную задачу (II), (8) запишем в виде

$$y_{\bar{t}\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}\bar{t}} + \tilde{A} y = \Phi + C_0 y = \psi, \quad t \in \omega_\tau, \quad (15)$$

$$y(0) = y^{(0)} \in H, \quad y(\tau) = y^{(1)} \in H, \quad (16)$$

где

$$\tilde{A} = A + C_0 E, \quad C_0 = \text{const} > 0, \quad (17)$$

причем $\tilde{A} \gg C_0 E$, и \tilde{A}^{-1} существует.

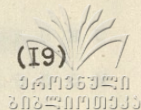
Запишем основное энергетическое тождество (см. [6])

$$\|\hat{y}\|_*^2 = \|y\|_*^2 + 2\tau [y, y_{\bar{t}}] \equiv$$

$$\equiv \|y\|_*^2 + \tau [\Phi, y_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}] + \tau C_0 [y, y_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}], \quad (18)$$

где

$$\|\hat{y}\|_*^2 = \frac{1}{4} \|\hat{y} + y\|_*^2 + \|y_t\|^2 + \tau^2 \left((R - \frac{1}{4}A) y_t, y_t \right).$$



Оценим слагаемые в правой части тождества (18):

$$\begin{aligned} \tau [\Phi, y_t + y_{\bar{t}}] &\leq \tau \varepsilon_1 (\|y_t\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2) + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\Phi\|^2 \leq \\ &\leq \tau \varepsilon_1 (\|\hat{y}\|_*^2 + \|y\|_*^2) + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\Phi\|^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\tau C_0 [y, y_t + y_{\bar{t}}] \leq \tau \varepsilon_1 (\|\hat{y}\|_*^2 + \|y\|_*^2) + \frac{\tau C_0^2}{2\varepsilon_1} \|y\|^2. \quad (20)$$

Подставив эти оценки в (18), получаем

$$(1 - 2\tau \varepsilon_1) \|\hat{y}\|_*^2 \leq (1 + 2\tau \varepsilon_1) \|y\|_*^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} (\|\Phi\|^2 + C_0^2 \|y\|^2).$$

Выбирая $\varepsilon_1 = 1/\tau$, приходим к оценке

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \leq C^2 T \left\{ \|y^0\|_*^2 + \sum_{j'=0}^j \tau (\|\Phi^{j'}\|^2 + C_0^2 \|y^{j'}\|^2) \right\}. \quad (21)$$

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Тогда из (19) следует

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_*^2 &\geq \frac{1}{4} \|y^{j+1} + y^j\|_*^2 + \frac{\varepsilon \tau^2}{4} (A y_t^j, y_t^j) + \left(1 - \frac{C_0 \tau^2}{4}\right) \|y_t^j\|^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} (\|y^{j+1} + y^j\|_*^2 + \|y^{j+1} - y^j\|_*^2) + \left(1 - \frac{C_0 \tau^2}{4}\right) (1+\varepsilon) \|y_t^j\|^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} (\|y^{j+1}\|_*^2 + \|y^j\|_*^2) + \left(1 - \frac{C_0 \tau^2}{4}\right) (1+\varepsilon) \|y_t^j\|^2. \end{aligned}$$

До сих пор C_0 оставалась произвольной константой. Выберем ее так, чтобы $1 - C_0 \tau^2 (1+\varepsilon)/4 \geq \varepsilon/2$. Для этого достаточно взять $C_0 \leq \frac{4}{\tau^2 (1+\varepsilon)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда из этого неравенства

следует

$$\|y_t^j\|^2 + \|y_j^j\|^2 + \|y^{j+1}\|^2 \leq \frac{2}{\varepsilon} \|y^{j+1}\|_*^2.$$

(22)
 0000000000
 2022:010033

Учитывая еще неравенство

$$\|y^j\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \|y_j^j\|^2 \leq \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} \|y^j\|_*^2,$$

которое является следствием (17) и (22), из (21) получим

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \leq M_1 \left\{ \|y^0\|_*^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \|y^{j'}\|_*^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \|\Phi^{j'}\|^2 \right\}. \quad (23)$$

Применяя лемму 2.2 из [5] (разностный аналог леммы Гроула), окончательно получим оценку

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \leq M \left(\|y^0\|_*^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \|\Phi^{j'}\|^2 \right). \quad (24)$$

Итак, установлена следующая

Теорема I. Пусть операторы A и R удовлетворяют условиям

$$A = A^* > 0, \quad R = R^* > 0, \quad R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (25)$$

Тогда для схемы (11), (8) имеет место априорная оценка (24), где норма $\|\cdot\|_*$ определяется по формуле (19), а

$M = M(\tau) > 0$ — постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ .

Условие (25) имеет вид

$$b\hat{A} + b^2\tau^2\hat{A}_1\hat{A}_2 \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A.$$

Учитывая (13), для выполнения этого неравенства достаточно потребовать

$$b\hat{A} \geq \frac{1+\varepsilon}{4} C_2 \hat{A}, \quad \text{т.е. } b \geq \frac{1+\varepsilon}{4} C_2. \quad (26)$$

Оценка (24) не учитывает структуры первой части схемы и при ее помощи можно доказать сходимость схемы только сходимостью $O(|h|^{3/2} + \tau^2)$.

7. Нам понадобится более тонкая оценка, которая устанавливает следующая

Теорема 2. Пусть $b \geq (1 + \varepsilon) C_2 / 4$. Тогда для решения задачи (II), (8) справедлива априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \leq M \left\{ \|y^{(0)}\|_*^2 + \sum_{j'=0}^j \tau (\|F^{j'}\|^2 + \|f^{j'}\|^2) + \sum_{j'=1}^j \tau \|f_{\bar{t}}^{j'}\|^2 \right\}, \quad (27)$$

где $M = M(\tau) > 0$ — постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ .

Доказательство. В основном энергетическом тождестве (18) учтем, что правая часть определяется по формуле (10). Получим

$$\|\hat{y}\|_*^2 = \|y\|_*^2 + 2\tau [F, y_{\bar{t}}] + 2\tau / f, y_{\bar{t}} + 2\tau c_0 [y, y_{\bar{t}}]. \quad (18')$$

Если $f \equiv 0$, тогда справедлива оценка (24) с $\Phi \equiv F$.

Поэтому достаточно рассмотреть случай

$$F \equiv 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\tau) = 0 \quad (\text{т.е. } \|y^{(0)}\|_* = 0).$$

Энергетическое тождество (18') принимает вид

$$\|\hat{y}\|_*^2 = \|y\|_*^2 + \tau / f, \hat{y} + y_{\bar{t}} - \tau / f_{\bar{t}}, y + \check{y} + \tau c_0 [y, y_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}]. \quad (28)$$


Оценим последний член этого тождества при помощи неравенства (20).

Получим

$$(1 - \varepsilon_1 \tau) \|\hat{y}\|_*^2 \leq (1 + \varepsilon_1 \tau) \|y\|_*^2 + \tau / f, \hat{y} + y_{\bar{t}} - \tau / f_{\bar{t}}, y + \check{y} + \frac{\tau c_0^2}{4\varepsilon_1} \|y\|^2$$

Просуммируем это неравенство по $0 < j' \leq j$:

$$(1 - \varepsilon_{re}) \|y^{j+1}\|_*^2 \leq 2\varepsilon_1 \sum_{j'=1}^j \tau \|y^{j'}\|_*^2 + |f_{\bar{\varepsilon}}^{j'} y^{j'+1} + y^j| - \\ - \sum_{j'=1}^j \tau |f_{\bar{\varepsilon}}^{j'} y^{j'+1} + y^{j-1}| + \frac{c_0^2}{4\varepsilon_1} \sum_{j'=1}^j \tau \|y^{j'}\|_*^2.$$


 04.03.57.40
 202.011033
 (29)

Здесь нам нужно еще следующее неравенство:

$$\|y\|_{\bar{g}}^2 = [\hat{A}y, y] = [Ay, y] + c_0 \|y\|^2 \geq c_1 [Ay, y] + c_0 \|y\|^2 \geq c \|y\|_*^2. \quad (30)$$

Слагаемые в правой части (29) оценим следующим образом, используя (14), (22) и (30):

$$|f_{\bar{\varepsilon}}^j \hat{y} + y| \leq \|f_{\bar{\varepsilon}}^j\| \|\hat{y} + y\| \leq \sqrt{M_1} \|f_{\bar{\varepsilon}}^j\| \|\hat{y} + y\|_1 \leq \\ \leq \sqrt{\frac{M_1}{c}} \|f_{\bar{\varepsilon}}^j\| \|\hat{y} + y\|_{\bar{g}} \leq \sqrt{\frac{M_1}{c}} \|f_{\bar{\varepsilon}}^j\| (\|\hat{y}\|_{\bar{g}} + \|y\|_{\bar{g}}) \leq \\ \leq \sqrt{\frac{2M_1}{c\varepsilon}} \|f_{\bar{\varepsilon}}^j\| \|\hat{y}\|_* \leq \varepsilon_2 \|\hat{y}\|_*^2 + M(\varepsilon_2) \|f_{\bar{\varepsilon}}^j\|^2 \\ | \sum_{j'=1}^j \tau |f_{\bar{\varepsilon}}^{j'} y^{j'+1} + y^{j-1}| \leq M \sum_{j'=1}^j \tau (\|f_{\bar{\varepsilon}}^{j'}\|^2 + \|y^{j'}\|_*^2) \\ \sum_{j'=1}^j \tau \|y^{j'}\|_*^2 \leq \frac{2}{c_0 \varepsilon} \sum_{j'=1}^j \tau \|y^{j'}\|_*^2.$$

Выбирая подходящим образом ε_1 и ε_2 , из (29) получим

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \leq M \left(\sum_{j'=1}^j \tau \|y^{j'}\|_*^2 + \sum_{j'=1}^j \tau \|f_{\bar{\varepsilon}}^{j'}\|^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \|f_{\bar{\varepsilon}}^{j'}\|^2 \right).$$

После применения леммы 2.2 из [5] окончательно получается

$$\|y^{j+1}\|_*^2 \leq M \left(\sum_{j'=1}^j \tau \|f_{\bar{\varepsilon}}^{j'}\|^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \|f_{\bar{\varepsilon}}^{j'}\|^2 \right). \quad (31)$$

Оценки (24) и (31) дают искомую оценку (27).

8. Перейдем к оценке скорости сходимости разностной схемы (II), (8).

Положим $\xi = y - u$, где u - решение задачи (I)-(3), y - решение задачи (II), (8). Подставляя $y = \xi + u$ в (II), (8), получим следующую задачу для ξ :

$$(E + \tau^2 R)\xi_{tt} + A\xi = \psi^*,$$

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(\tau) = ay^{(1)} - u(\tau),$$

где

$$\psi^* = \Phi - (E + \tau^2 R)u_{tt} - Au$$

есть погрешность аппроксимации схемы (II), (8) на решении задачи (I)-(3).

Теорема 3. Пусть решение задачи (I)-(3) $u \in C^{(4)}(\bar{Q}_\tau)$. Тогда погрешность ψ^* можно представить в виде

$$\psi^* = \begin{cases} \Psi, & (x, t) \in \omega \times \bar{\omega}_\tau, \\ \frac{2}{h_2} \Psi, & (x, t) \in \gamma \times \bar{\omega}_\tau, \end{cases} \quad (32)$$

причем

$$|\Psi, \Psi| \leq M_1 (\|h\|^2 + \tau^2). \quad (33)$$

Кроме того

$$\|y^{(1)} - u(\tau)\|_* \leq M_2 (\|h\|^2 + \tau^2). \quad (34)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теорем 2 и 3. Тогда решение y задачи (II), (8) сходится к решению u задачи (I)-(3) со скоростью $O(\|h\|^2 + \tau^2)$, так что равномерно по $|h|$ и τ выполняется оценка

$$\|y - u\|_* \leq M (\|h\|^2 + \tau^2).$$

Доказательство теоремы немедленно следует из представления погрешности в (32) – (34) и априорной оценки (27).

Поступила 30.IV.1976

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ.

Математический институт
Болгарской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Дж.Клифтон, Разностный метод в плоских задачах динамической упругости. Сб. пер. "Механика", 1968, I/107/, 103–122.
2. И.Г.Белухина, Разностные схемы решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями. Ж.вычисл.матем. и матем. физ., 1969, 9, №2, 362–372.
3. А.Н.Коновалов, Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 760–764.
4. А.А.Самарский, О регуляризации разностных схем. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 1, 62–93.
5. А.А.Самарский, Классы устойчивых схем. Ж.вычисл.матем. и матем. физ., 1967, 7, № 5, 1096–1133.
6. А.А.Самарский, Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
7. И.Г.Белухина, Разностные схемы для решения некоторых статистических задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 1968, 8, № 2, 808–823.
8. В.Б.Андреев, О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 6, 1218–1231.

9. Р.Д.Лазаров, Г.В.Меладзе, О применении разностных схем для решения динамической задачи об упругих колебаниях бесконечной полосы. Сообщения АН ГССР, 89, №1, 1976, 17-20.

ჭიშკრიძე, რაბაზანი

ფაქტურული სივრცის გამოყენების შესახებ
შასხრული გონის ერთკარი რხევების დინამიური ამოცანისათვის

რეზიუმე

განხილულია ფაქტურული სივრცის სტრუქტურის შესახებ
ერთ გონის ერთკარი რხევების ერთ დინამიური ამოცანის ამოცანის
სხვადასხვა პირობების სანდოების პირობების შემთხვევაში.

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В
ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Т.С.Цуцунава, З.А.Цинцадзе

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение в частных производных эллиптического типа:

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t, u, p, q, v), \quad (I.1)$$

$$u|_s = y(x, t), \quad (I.2)$$

где

$$u \in R^m, \quad f \in R^m, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad s = \partial G.$$

Предположим, что $f \in C^2(G)$, $y \in C^1(\partial G)$, а управление $v(x, t)$ является ограниченным, кусочно непрерывным, определено на области G и принимает свои значения из выпуклого множества $\Omega \in R^r$. Такое управление будем называть допустимым. Кроме того, предполагаем, что стоящие в правой части уравнения (I.1) известные функции удовлетворяют условиям, при которых уравнение (I.1) с краевым условием (I.2) имеет единственное решение.

Задача оптимизации ставится следующим образом:

Требуется найти такое допустимое управление $v(x, t)$ для которого решение уравнения (I.1) с краевым условием (I.2) $u(x, t)$ передаст функционалу J минимальное значение.

$$J = \iint_G f_0(x, t, u, p, q, v) dx dt, \\ f_0 \in C^2(G).$$

§ 2. Составление системы уравнений для вспомогательной функции $\psi(x, t)$

Определим вспомогательную функцию

$$H(x, t, w, v) = \psi f \quad (2.1)$$

$$\psi f \equiv \sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha f_\alpha, \quad w = (\psi, p, q, u)$$

и рассмотрим функционал

$$J = \iint_G [f_0 + \psi(ku - f)] dx dt. \quad (2.2)$$

Придадим v приращение Δv и рассмотрим соответствующее решение $u + \Delta u$ уравнения (I.1) с краевым условием (I.2).

Пусть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial H}{\partial \psi}$$

и Δu удовлетворяет уравнению

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial \psi} = \Delta k u, \quad (2.3)$$

где

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\partial H(x, t, w + \Delta w, v + \Delta v)}{\partial \psi} - \frac{\partial H(x, t, w, v)}{\partial \psi}$$

Ясно, что Δu удовлетворяет уравнению (2.3) с нулевым краевым значением $\Delta u|_S = 0$.

Вычислим приращение функционала:

$$\Delta Y = Y[w + \Delta w, v + \Delta v] - Y(w, v) = \iint_G \{ f_0(x, t, \zeta + \Delta \zeta, v + \Delta v) + (\psi + \Delta \psi) [h(u + \Delta u) - f(x, t, \zeta + \Delta \zeta, v + \Delta v)] - f_0(x, t, \zeta, v) - \psi (hu - f(x, t, \zeta, v)) \} dx dt$$

$$\zeta = (u, \rho, q).$$

Если переставим некоторые члены и применим формулу Тейлора, после целого ряда преобразований будем иметь:

$$(*) \Delta Y = \int_0^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \Psi_{\Delta} \Big|_0^x dt + \int_0^x \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \Psi_{\Delta} \Big|_0^T dx + \iint_G \left\{ L \Psi_{\Delta} - \frac{\partial \bar{H}_{\Delta}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{H}_{\Delta}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{H}_{\Delta}}{\partial q} \right) \right\} \Delta u dx dt - \iint_G \{ \bar{H}(x, t, w, v + \Delta v) - \bar{H}(x, t, w, v) \} dx dt - \bar{\eta},$$

$$\bar{H} = \psi(x, t) f(x, t, \zeta, v) - f_0(x, t, \zeta, v),$$

$$\Psi_{\Delta} = \psi + \frac{1}{2} \Delta \psi,$$

$$H_{\Delta} = H + \frac{1}{2} \Delta H,$$

$$\bar{\eta} = \eta - \eta', \quad \eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta' = \eta'_1 + \eta'_2,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \iint_G \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial H(x, t, w, v + \Delta v)}{\partial w_i} - \frac{\partial H(x, t, w, v)}{\partial w_i} \right) \Delta w_i dx dt,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \iint_G \sum_{i,j=1}^4 \left(\frac{\partial^2 H(x, t, w + \theta \Delta w, v + \Delta v)}{\partial w_i \partial w_j} - \frac{\partial^2 H(x, t, w + \theta \Delta w, v)}{\partial w_i \partial w_j} \right) \Delta w_i \Delta w_j dx dt,$$

$$\eta'_1 = \frac{1}{2} \iint_G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f_0(x, t, \zeta, v + \Delta v)}{\partial \zeta_i} - \frac{\partial f_0(x, t, \zeta, v)}{\partial \zeta_i} \right) \Delta \zeta_i dx dt,$$

$$\eta'_2 = \frac{1}{2} \iint_G \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 f_0(x, t, \zeta + \theta' \Delta \zeta, v + \Delta v)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} - \frac{\partial^2 f_0(x, t, \zeta + \theta' \Delta \zeta, v)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} \right) \Delta \zeta_i \Delta \zeta_j dx dt,$$

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad 0 \leq \theta' \leq 1, \quad 0 \leq \theta'_1 \leq 1.$$

оценка:

$$|\bar{\eta}| \leq \varepsilon M \int_{G_\varepsilon} (\Delta v(x, t))^2 dx dt,$$

где M - некоторое положительное постоянное, а ε является радиусом окружности G_ε .

Потребуем, чтобы Ψ_Δ удовлетворяла условиям

$$\frac{\partial^2 \Psi_\Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_\Delta}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{H}_\Delta}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{H}_\Delta}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{H}_\Delta}{\partial q} \right);$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} \Psi_\Delta \Big|_0^x = \Psi_\Delta(t, x) \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \Big|_x - \Psi_\Delta(t, 0) \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \Big|_0;$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} \Psi_\Delta \Big|_0^T = \Psi_\Delta(T, x) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \Big|_T - \Psi_\Delta(0, x) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \Big|_0;$$

$$\Psi_\Delta(t, x) = \Psi_\Delta(t, 0) = \Psi_\Delta(T, x) = \Psi_\Delta(0, x) = 0.$$

Отсюда для Ψ будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial q} \right) \\ \Psi|_S &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

§ 3. Принцип максимума

Оценка остаточного члена $\bar{\eta}$ по аналогии с [1] и полученное уравнение для вспомогательной функции $\Psi(x, t)$ дают возможность доказать следующую теорему (принцип максимума):

Если $v^0(x, t)$ является оптимальным управлением, а $u^0(x, t)$ и $\psi^0(x, t)$ - соответствующие решения уравнений (1.1), (2.4) с дополнительным условием (1.2), функция $\bar{H}(x, t, u^0(x, t), \psi^0(x, t), p^0(x, t), q^0(x, t), v^0(x, t))$ достигает своего максимального значения на множестве Ω при $v = v^0(x, t)$, т.е. для каждой точки $(x, t) \in G$ выполняется условие

$$\max_{v \in \Omega} \bar{H}(x, t, u^0; \psi^0; p^0; q^0; v) = \bar{H}(x, t, u^0; \psi^0; p^0; q^0; v^0).$$

Доказательство, как легко видеть, непосредственно вытекает из оценки приращения функционала (*) и остаточного члена аналогично [1].

Аналогично [1] можно доказать, что при случае линейного уравнения принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности, что дает возможность решить до конца, например, следующую задачу.

Рассмотрим поставленную § I задачу, где

$$f(x, t, u, p, q, v) = a(x, t)u + b(x, t)p + c(x, t)q + f_1(v),$$

$$f_0(x, t, u, p, q, v) = a_0(x, t)u + b_0(x, t)p + c_0(x, t)q + f_{01}(v),$$

$$f_1, f_{01}, a(x, t), b(x, t), a_0(x, t), b_0(x, t), c_0(x, t)$$

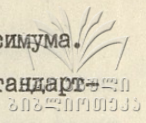
- функции класса $C^2(G)$.

Тогда вместо (2.4) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= a\psi - a_0 - \frac{\partial}{\partial x}[b\psi + b_0] - \frac{\partial}{\partial t}[c\psi + c_0] \\ \psi|_S &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1) не содержит трудности принципиального характера и после решения задачи возможно определение функций $\bar{H} = \psi f - f_0$. Тогда условие максимума, со своей стороны, дает возможность определить управление $v^0(x, t)$, т.к. задача сводится к нахождению для данной известной функции значения того аргумента, на котором эта функция достигает своего максимума.

Таким образом, использование принципа максимума дает возможность свести вышерассмотренную задачу к двум задачам: А и В. Задача А - обыкновенная краевая задача, задача В - задача определения для известной функции значения того аргу-



мента, на котором эта функция достигает своего максимума. Обе задачи хорошо известны и их решение возможно стандартными методами.

Поступила 15.У.1976

Кафедра теории
управления

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И.Егоров, Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности, Известия АН СССР, сер.мат., т.29, № 6, 1965.
2. Л.И.Розеноер, Принцип максимума. Автоматика и телемеханика, т.20, № 10-12.
3. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., Изд-во физ.мат.лит., 1961.

მ.წიქუნიძე, გ. ცინცაძე

მკვლევარნი არჩაბაძე ერთი პლანის ელიფსური ზონის
კარძი წარმოადგენს მათემატიკის
რევიუმი

მაშინვე განხილულია მკვლევარნი მართვის საკითხები ისე-
თი სინტეზის საკითხის, რევიუმიც აღნიშნულია ელიფსური ზონის კარ-
ძი წარმოადგენს განვითარების და მუნიციპალიტეტის წარმომადგენლის პირდა-
პირი შეფასების საკუთარებზე დამატებითი პრინციპების მათემა-
ტიკის პრინციპის ანალიზი.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ШВАРЦА В СЛУЧАЕ
ПОЛУПЛОСКОСТИ

Г.В.Джагани

В полуплоскости $y > 0$ комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим сингулярное дифференциальное уравнение

$$(z - \bar{z}) \partial_{\bar{z}} w - \operatorname{Re}(Aw) = 0, \quad y > 0, \quad (I)$$

где $\partial_{\bar{z}} w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right)$, $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,
 $A = a + ib = \text{const.}$

ЗАДАЧА А. В полуплоскости $y > 0$ найти функцию $w \in C^2(y > 0)$, удовлетворяющую уравнению (I) и граничным условиям

$$\operatorname{Im} w|_{y=0} = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{при } -\infty < a < 1, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{y} \right)^{-1} \operatorname{Im} w = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{при } a = 1, \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{a-1} \operatorname{Im} w = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{при } 1 < a < +\infty, \quad (4)$$

где f — кусочно-непрерывная ограниченная на оси функция.

Из уравнения (I) следует, что мнимая часть функции w удовлетворяет уравнению

Эти результаты в основном были доложены на международной конференции по комплексному анализу в г. Галле (ГДР) в сентябре 1976 г. (см. [1]).

$$y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + a \frac{\partial v}{\partial y} - b \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$



а действительная часть - уравнению

$$y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (a+1) \frac{\partial u}{\partial y} - b \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Как известно (см. [2 - 4]), решение $v \in C^2(y > 0)$ уравнения (5) с граничными условиями

$$v(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{при } -\infty < a < 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\ln \frac{1}{y})^{-1} v(x, y) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{при } a = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{a-1} v(x, y) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{при } 1 < a < +\infty,$$

имеет вид

$$v(x, y) = \frac{y^{1-a}}{\Lambda(-b, a)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-b \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y}} [(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{a}{2}-1} d\xi, \quad a < 1, \quad (6)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{(b^2+1)\Lambda(-b, -1)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-b \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y}} [(x-\xi)^2 + y^2]^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad a = 1, \quad (7)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{\Lambda(-b, 2-a)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-b \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y}} [(x-\xi)^2 + y^2]^{-\frac{a}{2}} d\xi, \quad a > 1, \quad (8)$$

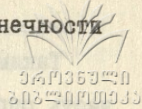
соответственно, где

$$\Lambda(b, a) = \int_0^\pi e^{b\theta} \sin^{-a} \theta d\theta$$

и при $a=1$ f обеспечивает существование интеграла (7).

Когда f - непрерывная ограниченная на оси функция, решение (6) единственно: в классе ограниченных функций, если

$a < 0$ или $a = b = 0$; в классе исчезающих на бесконечности функций, если $0 \leq a < 1$.



Решение (7) единственно при условиях

$$v(x, y) = O(r^{-1}); \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = O(r^{-2}), \quad r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow +\infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \int_y^{+c} y^v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dx = 0 \quad \text{при} \quad \lim_{y \rightarrow 0} (\ln y)^{-1} v(x, y) = 0,$$

для достаточно больших c .

Решение (8) единственно: если $v(x, y) = O(y^{1-a})$ при $r \rightarrow +\infty$ $a > 2$ или $a = 2, b = 0$; если $v(x, y) = o(y^{1-a})$ при $r \rightarrow +\infty, 1 < a \leq 2$. Здесь O и o - символы Ландау.

Нетрудно видеть, что (I) можно переписать в виде системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{y} u - \frac{b}{y} v = 0,$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad y > 0$$

Отсюда легко получить

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b y^{-1} v - \frac{\partial v}{\partial x} - a y_0^{-a} y^{1-a} [C(x) + b y_0^{-a} \int_{y_0}^y y^{\alpha-1} v dy -$$

$$- y_0^{-a} \int_{y_0}^y y^{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} dy], \quad C(x) = u(x, y_0), \quad -\infty < x_0 < +\infty,$$

$$0 < y_0 < +\infty.$$

Далее, обычным путем по частным производным восстанавливаем функцию $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(t, y)}{\partial y} dt + y^{-a} \int_{y_0}^y t^a [b t^{-1} v(x_0, t) - \frac{\partial v(x_0, t)}{\partial x}] dt + (9)$$

$$+ C y^{-a}, \quad C = C(x_0).$$

Таким образом, при заданной мнимой части вещественная часть определяется с точностью до слагаемого Cy^{-a} , где C — произвольная вещественная постоянная.

Если $-\infty < a < 1$, в силу (6), (9) имеет

$$W(z) = \frac{(2i)^a (z - \bar{z})^{-a}}{\Lambda(-b, a)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-b \operatorname{arctg} \frac{z + \bar{z} - 2t}{z - \bar{z}} i} \frac{|t - z|^a}{t - z} dt + \quad (10)$$

$$+ C(2i)^a (z - \bar{z})^{-a},$$

$$f(t) = O(|t|^{-\alpha}), \quad |t| \rightarrow +\infty, \quad \alpha > a \text{ при } 1 > a \geq 0.$$

Если $a = 1$, в силу (7), (9) имеем

$$W(z) = \frac{2i(z - \bar{z})^{-1}}{(b^2 + 1)\Lambda(-b, -1)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-b \operatorname{arctg} \frac{z + \bar{z} - 2t}{z - \bar{z}} i} \frac{|t - z|}{t - z} dt + \quad (11)$$

$$+ 2iC(z - \bar{z})^{-1},$$

$$f(t) = O(|t|^{-\beta}), \quad |t| \rightarrow +\infty; \quad \beta > 1.$$

Если $1 < a < +\infty$, в силу (8), (9) выводится соответствующее выражение для $W(z)$.

Полученные формулы назовем формулами Шварца, ибо при $a = b = 0$ из (10) получаем классическую формулу Шварца в случае полуплоскости.

В заключение заметим, что в основном тем же путем можно решить задачу, когда задана $\operatorname{Re} W$ с соответствующими весами.

Поступила 1.Х.1976

Институт прикладной
математики ТГУ



ՀԱՅԿԱՆԿԱՆ
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

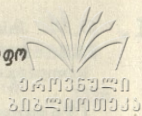
1. G.W. Jaiani, Komplexe Analysis und Anwendungen auf partielle komplexe Differentialgleichungen, Halle (Saale), 1976, (Тезисы докладов).
2. Г.В.Джаиани, Сообщения АН СССР, т.75, № I, 1974.
3. С.А.Терсенов, Сибирский математический журнал, т.VI, №5, 1965.
4. Г.В.Джаиани, ДАН СССР, т.231, № 6, 1976.

Թ.ՃԱՈՍԵՆ

ՅԱՅԿՐԵՆ ՊՈՐՏՅԱՆ ԴՐՈՒ ԸՆԹՈՒՅՈՒՄԻՆ ՄԱՍԽԵՅ
ՃԵՅՅԱՐՍՈՒԹՅՈՒՆ : ՄՈՒՅՅՈՒՄ

ԻՅՈՒՄԻՅ

Յրժժ ՍԵՆԻՆ ՍԻՆԵՅՐԱՐՄԻՆ ԲԻՊՐԻՆԵՆՈՒՐԻ ԸՆԹՈՒՅՈՒՄԻՆՍԻՆ
ՄԻՅՅԱՐՍՈՒԹՅՈՒՆ ՄԵՄԻՅՅՈՒՄԻՆ ԸՆԹՈՒՅՈՒՄԻՆ ԸՆԹՈՒՅՈՒՄԻՆ ՊՈՐՏՅԱՆ
ՄԻՅՅԱՐՍՈՒԹՅՈՒՆ, ԻՅՈՒՄԻՅ ՍԵՆԻՆԻՅ ԻՅՈՒՄԻՅՆ ԵՄԻՆՍԵՆԻՆ ԵՄ ԻՅՐԱՐՄԻՆ, ԵՄ
ԵՄԻՆՍԵՆԻՆ ԵՄԻՆԻՆ,



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МИНИМУМА РАЗЛИЧАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ
В ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕНИЯ СПЛАВОВ

Н. В. Бокучава

Так как на современном этапе своего развития теория информации позволяет не только унифицировать известные результаты, получаемые из общей статистической теории, но и ведет к естественным обобщениям и совершенно новым результатам, то внедрение основных принципов теории информации в различные науки является залогом их дальнейшего развития.

В предлагаемой работе сделана попытка применения Кульбаковской меры информации и принципа минимума различающей информации к теории упорядочения сплавов.

Рассмотрим бинарный сплав АВ с двумя типами узлов (α, β) . Обозначим через $P_{AB}^{kk'}(\rho_e)$ вероятность того, что узел типа k занят атомом А, а находящийся на расстоянии ρ_e от него узел типа k' занят атомом В, через P_A^k и $P_B^{k'}$ - вероятности замещения узлов типа k и k' соответственно атомами А и В ($k, k' = \alpha, \beta$) и определим параметр корреляции следующим образом [1]:

$$E_{AB}^{kk'}(\rho_e) = P_{AB}^{kk'}(\rho_e) - P_A^k P_B^{k'} \quad (I)$$

Вероятность того, что среди n ρ_e - радиусных координат

национальных сфер m окажутся с заполнениями L/A и L'/B ,

мы можем определить двумя способами:

$$P_{mn} = \binom{n}{m} (P_A^L P_B^{L'})^m (1 - P_A^L P_B^{L'})^{n-m} \quad (2)$$

или

$$Q_{mn} = \binom{n}{m} [P_{AB}^{LL'}(\rho_e)]^m [1 - P_{AB}^{LL'}(\rho_e)]^{n-m} \quad (3)$$

Производя замену

$$\left. \begin{aligned} P_A^L P_B^{L'} &\equiv P_1, & 1 - P_A^L P_B^{L'} &\equiv Q_1 \\ P_{AB}^{LL'}(\rho_e) &\equiv P_2, & 1 - P_{AB}^{LL'}(\rho_e) &\equiv Q_2 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

установим, какой должна быть связь между P_1 и P_2 , чтобы параметр корреляции был бы минимальным. Для этого, исходя из принципа минимума различающей информации, будем искать минимум [2]

$$I(1:2) = \sum_{m=0}^n F_{mn} \ln \frac{F_{mn}}{Q_{mn}} \quad (5)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{m=0}^n m F_{mn} \\ \theta_2 &= \sum_{m=0}^n m Q_{mn} \\ \sum_{m=0}^n F_{mn} &= \sum_{m=0}^n Q_{mn} = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Это эквивалентно требованию минимизации выражения

$$U = \sum_{m=0}^n F_{mn} \ln \frac{F_{mn}}{Q_{mn}} + \lambda_1 m F_{mn} + \lambda_2 m Q_{mn} + \lambda_3 F_{mn} + \lambda_4 Q_{mn} \quad (7)$$

при указанных условиях; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ - множители Лагранжа.

Из условий $\frac{\partial U}{\partial F_{mn}} = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial Q_{mn}} = 0$ следует:

$$\ln \frac{P_{mn}}{Q_{mn}} + 1 + \lambda_1 m + \lambda_3 = 0,$$

$$-\frac{P_{mn}}{Q_{mn}} + \lambda_2 m + \lambda_4 = 0. \quad (9)$$

Отсюда находим

$$P_{mn} = Q_{mn} e^{-\lambda_1 m - \lambda_3 - 1}, \quad (10)$$

$$P_{mn} = Q_{mn} (\lambda_2 m + \lambda_4). \quad (11)$$

Суммируя затем обе части выражений (10) и (11) по m и принимая во внимание условия нормировки, получим

$$P_{mn} = \frac{Q_{mn} e^{-\lambda_1 m}}{\sum_{m=0}^n Q_{mn} e^{-\lambda_1 m}}, \quad (12)$$

$$1 - \lambda_4 = \lambda_2 \theta_2. \quad (13)$$

Т.к.

$$\sum_{m=0}^n Q_{mn} e^{-\lambda_1 m} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (P_2 e^{-\lambda_1})^m q_2^{n-m} = (P_2 e^{-\lambda_1} + q_2)^n, \quad (14)$$

$$\theta_2 = \sum_{m=0}^n m \binom{n}{m} P_2^m q_2^{n-m} = n P_2, \quad (15)$$

то из (12) и (13) с учетом (14) и (15) следует

$$P_{mn} = \frac{Q_{mn} e^{-\lambda_1 m}}{(P_2 e^{-\lambda_1} + q_2)^n}, \quad (16)$$

$$1 - \lambda_4 = \lambda_2 n P_2. \quad (17)$$

Выражение (16) эквивалентно соотношению:

$$P_1^m q_1^{n-m} = \left(\frac{P_2 e^{-\lambda_1}}{P_2 e^{-\lambda_1} + q_2} \right)^m \left(\frac{q_2}{P_2 e^{-\lambda_1} + q_2} \right)^{n-m},$$

Откуда имеем

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{P_2 e^{-\lambda_1}}{P_2 e^{-\lambda_1} + q_2} \\ q_1 &= \frac{q_2}{P_2 e^{-\lambda_1} + q_2} \end{aligned} \right\}$$

(18) 479353-20
20230710333

Покажем, что при (18) параметр корреляции (1) получает минимальное значение. Для этого подставим сначала (18) в (5) (т.е. вычислим минимальное значение кульбаковской информации):

$$I^*(1:2) = \sum_{m=0}^n \mathcal{F}_{mn} \ell_n \frac{e^{-\lambda_1 m}}{(P_2 e^{-\lambda_1} + q_2)^n} = \quad (19)$$

$$= -\lambda_1 n P_1 - n \ell_n (P_2 e^{-\lambda_1} + q_2),$$

и т.к. из (18)

$$-\lambda_1 = \ell_n \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1}, \quad (20)$$

то окончательно

$$I^*(1:2) = n \left(P_1 \ell_n \frac{P_1}{P_2} + q_1 \ell_n \frac{q_1}{q_2} \right). \quad (21)$$

Свяжем теперь $I^*(1:2)$ с $\epsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e)$. Поскольку в упорядочивающихся сплавах $\epsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e) > 0$, а при высоких температурах (вблизи критической температуры) $\epsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e) \ll 1$,

то используя соотношения

$$P_2 = P_1 + \epsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e), \quad (22)$$

$$\ell_n(1 \pm x) \approx \pm x \quad (23)$$

легко показать, что

$$I(1:2) \equiv n I_{AB}^{hh'}(1:2) \approx n \epsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e) (q_1 - P_1);$$

откуда

$$\varepsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e) \approx \frac{I_{AB}^{hh'}(1:2)}{q_1 - \rho_1} = \frac{I_{AB}^{hh'}(1:2)}{1 - 2\rho_A^h \rho_B^{h'}} .$$

(24)
 04P05020
 2022010333

Из сравнения (24) с (21) следует, что $\varepsilon_{AB}^{hh'}(\rho_e)$ принимает минимальное значение при выполнении (18).

Таким образом, мы установили, что параметр корреляции прямо пропорционально связан с мерой различающей информации.

Подставляя (24) в (I.12) и (I9.I4) [I], получим соотношения, связывающие информационную меру $I(1:2)$ с параметрами порядка и температурой сплава:

$$\zeta = \eta^2 + 4 \frac{I_{AB}^{hh'}(1:2)}{1 - 2\rho_A^h \rho_B^{h'}} , \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{AB}^{\alpha\alpha}(1:2) &= (\rho_B^\alpha)^2 (1 - e^{-v/kT}) (1 - 2\rho_A^\alpha \rho_B^\alpha) \\ I_{AB}^{\beta\beta}(1:2) &= (\rho_A^\beta)^2 (1 - e^{-v/kT}) (1 - 2\rho_A^\beta \rho_B^\beta) \\ I_{AB}^{\alpha\beta}(1:2) &= \rho_A^\beta \rho_B^\alpha (e^{-v/kT} - 1) (1 - 2\rho_A^\beta \rho_B^\alpha) \end{aligned} \right\} , \quad (26)$$

где ζ, η - соответственно параметры ближнего и дальнего порядка, v - энергия пар ближайших соседей, T - температура сплава.

Поступила 5.IV.1976

Проблемная лаборатория
 физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А.Кривоглаз, А.А.Смирнов, Теория упорядочивающихся сплавов. Физматгиз, 1958.
2. С.Кульбак, Теория информации и статистика. "Наука", 1967.



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԱՊՐԱՅԻՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԱՊՐԱՅԻՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿՈՄԻՏԵ

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿՈՄԻՏԵ

Գրականության կոմիտեի կողմից հրատարակվող գրքերի ցանկի մասին
հայտարարություն
Հայաստանի Հանրապետության Արևիկա համալսարանի
Գրականության կոմիտեի կողմից հրատարակվող գրքերի ցանկի մասին
հայտարարություն

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ

Г.Б.Букия

Среди различных процессов, наблюдаемых в экономических объектах, можно выделить класс процессов, в котором заданы, нами условно названные ФУНКЦИЯ ДОХОДОВ /ФД/ и ФУНКЦИЯ РАСХОДОВ /ФР/ и в котором требуется определить характеристики указанных функций, влияющие на величину среднего уровня ФУНКЦИИ НАКОПЛЕНИЯ /СФН/.

Рассмотрим дискретный вариант.

Обозначим ФД через $a(\tau_k)$, ФР через $b(\tau_k)$, СФН через $d_c(\tau_k)$, где $k = 1, 2, \dots, n$, $n = T/\Delta t$, T - временной интервал исследования, Δt - единица отсчета времени.

Введем ИНТЕГРАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ ДОХОДОВ

$$u(\tau_k) = \sum_{m=1}^k a(\tau_m) \quad (1)$$

и ИНТЕГРАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ РАСХОДОВ

$$H(\tau_k) = \sum_{m=1}^k b(\tau_m), \quad (2)$$

где $m = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$d_c(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k [a(\tau_m) - b(\tau_m)]. \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что СФН зависит от вида функций

$a(\tau_m)$ и $b(\tau_m)$ ($m=1, 2, \dots, n$), т.е. является функционалом.

Исходя из равенства

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \rho(\tau_m) = n \sum_{m=1}^n \rho(\tau_m), \quad (4)$$

нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k \rho(\tau_m) = \sum_{m=1}^n \rho(\tau_m) - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (m-1) \rho(\tau_m). \quad (5)$$

Введем обозначения

$$R_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k \rho(\tau_m), \quad (6)$$

$$\chi_p = \left(\sum_{m=1}^n m \rho(\tau_m) \right) / \sum_{m=1}^n \rho(\tau_m), \quad (7)$$

где $\rho = a, b$.

Величину χ_p можно интерпретировать как "центр тяжести масс" $\rho(\tau_m)$, распределенных по временному отрезку T . Из соотношения (5), воспользовавшись выражениями (6) и (7), получаем

$$R_p = \sum_{m=1}^n \rho_m(\tau_m) \left[1 - \frac{1}{n} (\chi_p - 1) \right]. \quad (8)$$

Из выражения (8) видно, что чем ближе "центр тяжести масс" к началу временного отрезка, тем величина R_p больше и наоборот. Вернувшись к выражению для СФН (3) видим, что указанная функция представляет собой разность величин типа R_p

$$d_c(T) = R_a - R_b, \quad (9)$$
$$d_c(T) = \sum_{m=1}^n a(\tau_m) \left[1 - \frac{1}{n} (\chi_a - 1) \right] - \sum_{m=1}^n b(\tau_m) \left[1 - \frac{1}{n} (\chi_b - 1) \right].$$

Таким образом, при данном суммарном значении доходов и расходов величина среднего уровня ФУНКЦИИ НАКОПЛЕНИЯ зависит только от того, насколько разнесены "центры тяжести" ФУНКЦИИ ДОХОДОВ и ФУНКЦИИ РАСХОДОВ. Следовательно, выражения $\chi_p(\rho = a, b)$ и являются искомыми характеристиками процессов.

Аналогичный результат может быть получен и для непрерывной модели заменой величины $\rho(\tau_m)$ на $\rho_{\tau}(\tau_m)\Delta\tau$ и осуществлением предельного перехода от сумм к интегралам. При осуществлении указанных переходов считаем, что от вспомогательного индекса K значения функции ρ не зависят.

Выражение (5) преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \rho(\tau) d\tau d\tau = \int_0^T \rho(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T \tau \rho(\tau) d\tau, \quad (10)$$

истинность которого может быть также установлена непосредственным применением к левой части равенства (10) формулы Дирихле [1].

Выражения (6) и (7) преобразуются в следующие:

$$R_p = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \rho(\tau) d\tau d\tau, \quad (11)$$

$$\chi_p = \int_0^T \tau \rho(\tau) d\tau / \int_0^T \rho(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Полезность выражения (10) видна и в том, что оно позволяет использовать к качеству функции $\rho(\tau)$ и произведение непрерывной (или имеющей разрыв первого рода в точке τ_0) функции $\chi(\tau)$ на импульсную δ -функцию [2]

$$\rho(\tau) = \chi(\tau) \cdot \delta(\tau - \tau_0).$$

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

К ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕНИЯ ТРОЙНЫХ СПЛАВОВ

Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе

В работе, на основе метода квантовых характеристических функций, рассматриваются некоторые термодинамические условия упорядочения тройных сплавов. Получена точная парная функция распределения, исследуются корреляционные функции и их связь с параметрами дальнего и ближнего порядков. Получены соответствующие уравнения равновесия.

1. Распределение вероятностей собственных значений оператора $\hat{\alpha}$ - компоненты "случайного спина"

Понятие "случайного спина" было введено в работе [1] для бинарного сплава. Для тройных сплавов, очевидно, вместо "случайного спина $\hat{\alpha}$ " надо рассматривать "случайный спин $\hat{\alpha}$ ". Пусть \hat{S}_{jz} ($j=1,2,3$) - оператор $\hat{\alpha}$ - компоненты "случайного спина $\hat{\alpha}$ ", сопоставляемого j -му узлу кристаллической решетки тройного сплава. Нетрудно убедиться, что оператор характеристической функции случайной величины имеет вид:

$$\hat{M}_j(\tau) = \exp(i\tau \hat{S}_{jz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\tau)^n}{n!} \hat{S}_{jz}^n = \hat{S}_{jz} \cos \tau + i \hat{S}_{jz} \sin \tau. \quad (1)$$

Характеристическая функция определяется как квантовомеханическое среднее значение этого оператора:

$$M_j(\tau) = \langle \hat{M}_j(\tau) \rangle = S_p(\hat{\rho} \hat{S}_{jz}^2) \cos \tau + S_p(\hat{\rho} \hat{S}_{jz}) \sin \tau, \quad (2)$$

где $\hat{\rho}$ - матрица плотности.

Функция распределения для собственных значений \hat{S}_{jz} имеет вид:

$$F(S_{jz}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \hat{M}_j(\tau) \rangle \exp(-i\tau S_{jz}) d\tau = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} [(\sigma_j^{(+)}) \delta(S_{jz}; +1) + (-\sigma_j^{(+)} + \sigma_j^{(2)}) \delta(S_{jz}; -1)] + (1 - \sigma_j^{(2)}) \delta(S_{jz}; 0),$$

где $\sigma_j^{(+)} \equiv \langle S_{jz} \rangle$, $\sigma_j^{(2)} \equiv \langle S_{jz}^2 \rangle$,

здесь и ниже $\langle \dots \rangle$ обозначает квантовомеханическое среднее, а $\delta(\cdot)$ - символ Кронекера.

Очевидно, что в случае спина \vec{I} достаточную информацию получаем при измерении $\sigma_j^{(+)}$ и $\sigma_j^{(2)}$; поэтому нетрудно доказать соответствующее экстремальное свойство распределения (3). Оценка функции распределения собственных значений оператора \hat{S}_{jz} на основе принципа максимума информационной энтропии имеет вид:

$$F_{\text{м.н.э.}}(S_{jz}) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 S_{jz} - \lambda_2 S_{jz}^2). \quad (4)$$

Обобщенная статистическая сумма

$$\chi(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\{S_{jz}\}} \exp(-\lambda_1 S_{jz} - \lambda_2 S_{jz}^2) = 1 + 2 \exp(-\lambda_2) \operatorname{ch} \lambda_1. \quad (5)$$

Уравнения, определяющие λ_1 и λ_2 , имеют вид:

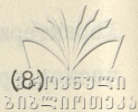
$$\sigma_j^{(+)} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln \chi(\lambda_1, \lambda_2); \quad \sigma_j^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ln \chi(\lambda_1, \lambda_2); \quad \lambda_0 = \ln \chi. \quad (6)$$

Решение этой системы уравнений таково:

$$\lambda_0 = -\ln(1 - \sigma_j^{(2)}); \quad \lambda_1 = \operatorname{arth}\left(-\frac{\sigma_j^{(+)}}{\sigma_j^{(2)}}\right); \quad \lambda_2 = \ln \frac{2(1 - \sigma_j^{(2)})}{\sqrt{-\sigma_j^{(2)} + \sigma_j^{(+)}}}. \quad (7)$$

Таким образом,

$$F_{\text{м.ч.э.}}(S_{jz}) = (1 - \zeta_j^{(2)}) \left[\frac{\sqrt{-(\zeta_j^{(1)})^2 + (\zeta_j^{(2)})^2}}{2(1 - \zeta_j^{(2)})} \right] S_{jz}^2 \cdot \left(\frac{\zeta_j^{(1)} + \zeta_j^{(2)}}{-\zeta_j^{(1)} + \zeta_j^{(2)}} \right) \frac{S_{jz}}{2}.$$



Очевидно, распределения (3) и (8) совпадают.

Теперь рассмотрим совместное распределение собственных значений операторов $\hat{\alpha}$ - компонент двух "случайных спинов".

Соответствующая характеристическая функция:

$$\langle M(\tau_1, \tau_2) \rangle = \frac{1}{2} \left[(\zeta_{jk}^{(2)} + \zeta_{jk}^{(4)}) \cos(\tau_1 + \tau_2) + (-\zeta_{jk}^{(2)} + \zeta_{jk}^{(4)}) \cos(\tau_1 - \tau_2) + i(\zeta_{jk}^{(3)} + \zeta_{kj}^{(3)}) \sin(\tau_1 + \tau_2) + i(-\zeta_{jk}^{(3)} + \zeta_{kj}^{(3)}) \sin(\tau_1 - \tau_2) \right], \quad (9)$$

где $\zeta_{jk}^{(2)} \equiv \langle S_{jz} S_{kz} \rangle$, $\zeta_{jk}^{(3)} \equiv \langle S_{jz}^2 S_{kz} \rangle$, $\zeta_{kj}^{(3)} \equiv \langle S_{jz} S_{kz}^2 \rangle$, $\zeta_{jk}^{(4)} \equiv \langle S_{jz}^2 S_{kz}^2 \rangle$.

Фурье-преобразование этой функции определяется формулой:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{jk}(\langle M \rangle) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \langle M(\tau_1, \tau_2) \rangle \cdot \exp[i(\tau_1 S_{jz} + \tau_2 S_{kz})] d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \zeta_{jk}^{(4)} [\delta(S_{jz}; +1) + \delta(S_{jz}; -1)] \cdot [\delta(S_{kz}; +1) + \delta(S_{kz}; -1)] + \right. \\ &+ \zeta_{jk}^{(3)} [\delta(S_{jz}; +1) + \delta(S_{jz}; -1)] \cdot [\delta(S_{kz}; +1) - \delta(S_{kz}; -1)] + \\ &+ \zeta_{kj}^{(3)} [\delta(S_{jz}; +1) - \delta(S_{jz}; -1)] \cdot [\delta(S_{kz}; +1) + \delta(S_{kz}; -1)] + \\ &\left. + \zeta_{jk}^{(2)} [\delta(S_{jz}; +1) - \delta(S_{jz}; -1)] \cdot [\delta(S_{kz}; +1) - \delta(S_{kz}; -1)] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Формулы (3) и (10) позволяют определить все значения функции распределения:

$$\begin{aligned} F_{jk}(+1; +1) &= \frac{1}{4} (\zeta_{jk}^{(2)} + \zeta_{jk}^{(3)} + \zeta_{kj}^{(3)} + \zeta_{jk}^{(4)}), \\ F_{jk}(+1; -1) &= \frac{1}{4} (-\zeta_{jk}^{(2)} - \zeta_{jk}^{(3)} + \zeta_{kj}^{(3)} + \zeta_{jk}^{(4)}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 F_{jK}(-1; +1) &= \frac{1}{4} (-\sigma_{jK}^{(2)} + \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{Kj}^{(3)} + \sigma_{jK}^{(4)}), \\
 F_{jK}(-1; -1) &= \frac{1}{4} (\sigma_{jK}^{(2)} - \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{Kj}^{(3)} + \sigma_{jK}^{(4)}), \\
 F_{jK}(+1; 0) &= \frac{1}{2} (\sigma_j^{(4)} + \sigma_j^{(2)} - \sigma_{Kj}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}), \\
 F(0; +1) &= \frac{1}{2} (\sigma_K^{(1)} + \sigma_K^{(2)} - \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}), \\
 F(-1; 0) &= \frac{1}{2} (-\sigma_j^{(1)} + \sigma_j^{(2)} + \sigma_{Kj}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}), \\
 F(0; -1) &= \frac{1}{2} (-\sigma_K^{(1)} + \sigma_K^{(2)} + \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}), \\
 F(0; 0) &= 1 - \sigma_j^{(2)} - \sigma_K^{(2)} + \sigma_{jK}^{(4)};
 \end{aligned}$$

доказательство экстремальных свойств распределения (II) элементарно, однако связано с длинными вычислениями. Поэтому мы приведем окончательную форму м.и.э. оценки функции распределения вероятностей:

$$\begin{aligned}
 F_{м.и.э.}(S_{j\bar{2}}; S_{K\bar{2}}) &= \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 S_{j\bar{2}} - \lambda_2 S_{K\bar{2}} - \lambda_3 S_{j\bar{2}} S_{K\bar{2}} - \lambda_4 S_{j\bar{2}}^2 S_{K\bar{2}} - \\
 &\quad - \lambda_5 S_{j\bar{2}} S_{K\bar{2}}^2 - \lambda_6 S_{j\bar{2}}^2 S_{K\bar{2}}^2),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\lambda_0 = -\ln(1 - \sigma_j^{(2)} - \sigma_K^{(2)} + \sigma_{jK}^{(4)}),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{-\sigma_j^{(4)} + \sigma_j^{(2)} + \sigma_{Kj}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}}{\sigma_j^{(4)} + \sigma_j^{(2)} - \sigma_{Kj}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{-\sigma_K^{(4)} + \sigma_K^{(2)} + \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}}{\sigma_K^{(4)} + \sigma_K^{(2)} - \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{jK}^{(4)}},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{-\sigma_{jK}^{(2)} - \sigma_{jK}^{(3)} + \sigma_{Kj}^{(3)} + \sigma_{jK}^{(4)}}{\sigma_{jK}^{(2)} + \sigma_{jK}^{(3)} + \sigma_{Kj}^{(3)} + \sigma_{jK}^{(4)}} + \ln \frac{-\sigma_{jK}^{(2)} + \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{Kj}^{(3)} + \sigma_{jK}^{(4)}}{\sigma_{jK}^{(2)} - \sigma_{jK}^{(3)} - \sigma_{Kj}^{(3)} + \sigma_{jK}^{(4)}} \right),$$



$$\lambda_4 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{-\sigma_{jk}^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} + \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}}{\sigma_{jk}^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} + \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}} + \ln \frac{\sigma_{jk}^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}}{-\sigma_{jk}^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}} + 2 \ln \frac{\sigma_k^{(4)} + \sigma_k^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{jk}^{(4)}}{-\sigma_k^{(4)} + \sigma_k^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{jk}^{(4)}} \right),$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{-\sigma_{jk}^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}}{\sigma_{jk}^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} + \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}} + \ln \frac{\sigma_{jk}^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}}{-\sigma_{jk}^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} + \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}} + 2 \ln \frac{\sigma_j^{(4)} + \sigma_j^{(2)} - \sigma_{kj}^{(3)} - \sigma_{jk}^{(4)}}{-\sigma_j^{(4)} + \sigma_j^{(2)} + \sigma_{kj}^{(3)} - \sigma_{jk}^{(4)}} \right),$$

$$\lambda_6 = \ln 4 + \ln (1 - \sigma_j^{(2)} - \sigma_k^{(2)} + \sigma_{jk}^{(4)}) - \frac{1}{4} \left[\ln (\sigma_{jk}^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} + \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}) + \ln (-\sigma_{jk}^{(2)} + \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}) + \ln (-\sigma_{jk}^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} + \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}) + \ln (\sigma_{jk}^{(2)} - \sigma_{jk}^{(3)} - \sigma_{kj}^{(3)} + \sigma_{jk}^{(4)}) \right].$$

Если в (II) подразумевать, что $\langle \dots \rangle$ соответствует наблюдаемым на опыте значениям, то (12) и (11) совпадают.

II. Связь моментов "случайных спинов" с параметрами дальнего и ближнего порядков в тройных сплавах

Обозначим через ℓ_{ik} относительную долю i - атомов в узлах k -ой подрешетки ($i=1(A), 2(B), 3(C); k=1(\alpha), 2(\beta), 3(\gamma)$). Как известно, в случае тройного сплава стехиометрического состава необходимо ввести четыре параметра дальнего порядка. Определим эти параметры следующим образом:

$$\eta_0 = n_1 \frac{\ell_{11} - n_1}{1 - n_1} + n_2 \frac{\ell_{22} - n_2}{1 - n_2} + n_3 \frac{\ell_{33} - n_3}{1 - n_3}, \quad \eta_1 = \ell_{12} - n_1, \quad \eta_2 = \ell_{23} - n_2, \quad (14)$$

$$\eta_3 = \ell_{31} - n_3.$$

Тогда

$$l_{ik} = \sum_{m=0}^3 a_{ik}^m(n_1, n_2, n_3) \zeta_m + b_{ik}(n_1, n_2, n_3), \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (15)$$

где, как показывают вычисления,

$$a_{12}^0 = a_{12}^1 = a_{12}^2 = a_{12}^3 = a_{31}^0 = a_{31}^1 = a_{31}^2 = a_{31}^3 = a_{23}^0 = a_{23}^1 = a_{23}^2 = a_{23}^3 = 0; \quad a_{12}^1 = a_{31}^2 = a_{23}^3 = 1;$$

$$n_1 a_{11}^0 = -n_1 a_{21}^0 = n_2 a_{22}^0 = n_3 a_{33}^0 = -n_3 a_{13}^0 = -n_2 a_{32}^0 = \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3};$$

$$-\frac{n_2}{n_2} a_{11}^1 = \frac{n_1}{n_2} a_{21}^1 = -a_{22}^1 = \frac{(1-n_1)(1-n_2)}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}; \quad \frac{n_3}{n_2} a_{33}^1 = \frac{n_3}{n_2} a_{13}^1 = -a_{32}^1 = \frac{1-n_3}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3};$$

$$\frac{n_1}{n_3} a_{11}^2 = -\frac{n_1}{n_3} a_{21}^2 = -a_{13}^2 = \frac{1-n_1}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}; \quad -\frac{n_2}{n_3} a_{22}^2 = \frac{n_2}{n_3} a_{32}^2 = -a_{33}^2 = \frac{(1-n_2)(1-n_3)}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3};$$

$$\frac{n_3}{n_1} a_{13}^3 = -\frac{n_3}{n_1} a_{33}^3 = -a_{11}^3 = \frac{(1-n_1)(1-n_3)}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}; \quad \frac{n_2}{n_3} a_{12}^3 = -\frac{n_2}{n_1} a_{32}^3 = -a_{21}^3 = \frac{1-n_2}{1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3};$$

$$b_{12} = n_1; \quad b_{23} = n_2; \quad b_{31} = n_3; \quad (16)$$

$$b_{11} = \frac{n_1(1-n_2 n_3) - n_2^2(1-n_2) - n_3^2(1-n_3) - n_1 n_2(1-n_1)(1-n_2) + n_2 n_3(1-n_1^2) - n_1 n_3(1-n_1)(1-n_3)}{n_1(1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)};$$

$$b_{21} = \frac{n_1^2(1-n_1) + n_2^2(1-n_2) + n_3^2(1-n_3) + 2n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2(1-n_1)(1-n_2) + n_1 n_3(1-n_1^2) - n_2 n_3(1-n_1^2)}{n_1(1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)};$$

$$b_{22} = \frac{n_2(1-n_1 n_3) + n_1^2(1-n_1) + n_3^2(1-n_3) - n_1 n_2(1-n_1)(1-n_2) + n_1 n_3(1-n_1^2) - n_2 n_3(1-n_2)(1-n_3)}{n_2(1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)};$$

$$b_{13} = \frac{n_1^2(1-n_1) + n_2^2(1-n_2) + n_3^2(1-n_3) - n_1 n_2(1-n_1^2) + n_1 n_3(1-n_1)(1-n_3) - n_2 n_3(1-n_1^2) + 2n_1 n_2 n_3}{n_3(1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)};$$

$$b_{32} = \frac{n_1^2(1-n_1) + n_2^2(1-n_2) + n_3^2(1-n_3) - n_1 n_2(1-n_1^2) - n_1 n_3(1-n_1^2) + n_2 n_3(1-n_2)(1-n_3) + 2n_1 n_2 n_3}{n_2(1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)};$$

$$b_{33} = \frac{n_3(1-n_1 n_2) - n_1^2(1-n_1) - n_2^2(1-n_2) + n_1 n_2(1-n_1^2) - n_1 n_3(1-n_1)(1-n_3) - n_2 n_3(1-n_2)(1-n_3)}{n_3(1+n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)}.$$

В распределении (II) моменты $\sigma_j^{(1)}$ и $\sigma_j^{(2)}$ ственно связаны с параметрами дальнего порядка

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} &= -2a_{21}^0 \eta_0 - 2a_{21}^1 \eta_1 - 2a_{21}^2 \eta_2 - (2a_{21}^3 + 1) \eta_3 + 1 - n_3 - 2\epsilon_{21}; \\ \sigma_1^{(2)} &= -\eta_3 + 1 - n_3; \\ \sigma_2^{(1)} &= a_{32}^0 \eta_0 + (a_{32}^1 + 2) \eta_1 + a_{32}^2 \eta_2 + a_{32}^3 \eta_3 - 1 + 2n_1 + \epsilon_{32}; \\ \sigma_2^{(2)} &= -a_{32}^0 \eta_0 - a_{32}^1 \eta_1 - a_{32}^2 \eta_2 - a_{32}^3 \eta_3 + 1 - \epsilon_{32}; \\ \sigma_3^{(1)} &= -a_{33}^0 \eta_0 - a_{33}^1 \eta_1 - (a_{33}^2 + 2) \eta_2 - a_{33}^3 \eta_3 - 2n_2 + 1 - \epsilon_{33}; \\ \sigma_3^{(2)} &= -a_{33}^0 \eta_0 - a_{33}^1 \eta_1 - a_{33}^2 \eta_2 - a_{33}^3 \eta_3 + 1 - \epsilon_{33}. \end{aligned} \tag{I7}$$

Для рассмотрения ближнего порядка на основе функции распределения (II) необходимо ввести вероятности (долю) пар узлов j и k , $P_{jk}(n_1, n_2, n_3; \kappa)$. Эти вероятности зависят от структуры (свойств симметрии) кристалла. Вероятность определенной пары атомов будет определяться формулой:

$$W(s_{\kappa}^j, s_{\kappa}^k) = \sum_{j,k} P_{jk}(n_1, n_2, n_3; \kappa) F(s_{j\kappa}^j, s_{k\kappa}^k), \tag{I8}$$

где κ - координационное число, соответствующее ближайшим соседям. Параметры ближнего порядка выражаются через условные вероятности:

$$W(s_{\kappa}^j / s_{\kappa}^k) = \frac{W(s_{\kappa}^j, s_{\kappa}^k)}{\sum_{\{s_{\kappa}^j\}} W(s_{\kappa}^j, s_{\kappa}^k)} = \frac{\sum_{j,k} P_{jk}(n_1, n_2, n_3; \kappa) F(s_{j\kappa}^j, s_{k\kappa}^k)}{\sum_{\{s_{\kappa}^j\}} \sum_{j,k} P_{jk}(n_1, n_2, n_3; \kappa) F(s_{j\kappa}^j, s_{k\kappa}^k)} \tag{I9}$$

В случае тройного сплава требуется три параметра ближнего порядка, которые определяются следующим образом [3]:



$$x_1 = 2 [W(-1/+1) - W(+1/+1)],$$

$$x_2 = 2 [W(0/-1) - W(-1/-1)],$$

$$x_3 = 2 [W(+1/0) - W(0/0)].$$

Очевидно, что

$$W(+1; +1) = \frac{1}{4} (\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8); \quad (21)$$

$$W(+1; -1) = W(-1; +1) = \frac{1}{4} (-\sigma_5 + \sigma_8);$$

$$W(-1; -1) = \frac{1}{4} (\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8);$$

$$W(+1; 0) = W(0; +1) = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_6 - \sigma_8);$$

$$W(-1; 0) = W(0; -1) = \frac{1}{2} (-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6 - \sigma_8);$$

$$W(0; 0) = 1 - 2\sigma_3 + \sigma_8;$$

$$\sigma_5 \equiv \overline{\sigma_{jk}^{(2)}}; \quad \sigma_6 \equiv \overline{\sigma_{jk}^{(3)}} = \overline{\sigma_{kj}^{(3)}}; \quad \sigma_8 \equiv \overline{\sigma_{jk}^{(4)}},$$

где

$$\langle \dots \rangle \equiv \sum_{j, k} P_{jk}(n_1, n_2, n_3; \bar{x}) \cdot \langle \dots \rangle; \quad (22)$$

кроме того, очевидно, что

$$\sigma_1 \equiv \overline{\sigma_j^{(1)}} = \overline{\sigma_k^{(1)}} = n_1 - n_2; \quad \sigma_3 \equiv \overline{\sigma_j^{(2)}} = \overline{\sigma_k^{(2)}} = 1 - n_3. \quad (23)$$

Мы видим, что усредненные по распределениям $P_{jk}(n_1, n_2, n_3; \bar{x})$ корреляционные функции являются функциями параметров ближнего порядка:

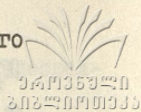
$$\sigma_8 = \frac{1}{18} (n_1 x_1 - 2n_2 x_2 - 5n_3 x_3 + 20n_1 + 14n_2 - 10n_3), \quad (24)$$

$$\sigma_6 = \frac{1}{6} (-n_1 x_1 + 2n_2 x_2 - n_3 x_3 + 6n_1 - 2),$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{6} (-5n_1 x_1 - 2n_2 x_2 + n_3 x_3 - 6n_1 + 2).$$

Заметим, что корреляционные функции $\langle \dots \rangle$ в общем случае через параметры дальнего и ближнего порядков непосредственно не выражаются.

III. Конфигурационная свободная энергия тройного сплава и условия равновесия



Простые вычисления дают следующие выражения для конфигурационной энергии и информационной энтропии тройного сплава:

$$\frac{2}{zN} E_c = \frac{2}{zN} E_0 + \frac{1}{2}(V_1 + 2V_2 + 2V_3)\zeta_8 + (V_2 - V_3)\zeta_6 + \frac{1}{2}V_4 \cdot \zeta_5, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}[V(+1; +1) + V(-1; -1)] - V(+1; -1), \\ V_2 &= \frac{1}{2}[V(+1; +1) + V(0; 0)] - V(+1; 0), \\ V_3 &= \frac{1}{2}[V(-1; -1) + V(0; 0)] - V(-1; 0), \end{aligned} \quad (26)$$

$V(S_x; S'_x)$ - энергия взаимодействия пар ближайших соседей;

$$\begin{aligned} \frac{2}{zN} H_I &= - \sum_{\{S_x\}} \sum_{\{S'_x\}} W(S_x; S'_x) \ln W(S_x; S'_x) = (n_1 - n_2) \ln 4 - \\ &- \frac{1}{4} (\zeta_5 + 2\zeta_6 + \zeta_8) \ln (\zeta_5 + 2\zeta_6 + \zeta_8) - \frac{1}{2} (-\zeta_5 + \zeta_8) \ln (-\zeta_5 + \zeta_8) - \\ &- \frac{1}{4} (\zeta_5 - 2\zeta_6 + \zeta_8) \ln (\zeta_5 - 2\zeta_6 + \zeta_8) - (1 - 2\zeta_3 + \zeta_8) \ln (1 - 2\zeta_3 + \zeta_8) - \\ &- (\zeta_1 + \zeta_3 - \zeta_6 - \zeta_8) \ln (\zeta_1 + \zeta_3 - \zeta_6 - \zeta_8) - \\ &- (-\zeta_1 + \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_8) \ln (-\zeta_1 + \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_8). \end{aligned} \quad (27)$$

Конфигурационная свободная энергия определяется по формуле

$$F_c = E_c - TH_I. \quad (28)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \sigma_8} = 0, \quad \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_6} = 0, \quad \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_5} = 0$$

дают следующую систему уравнений для определения температурной зависимости равновесных усредненных корреляционных функций:

$$\frac{(\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (-\sigma_5 + \sigma_8)^2 \cdot (\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (1 - 2\sigma_3 + \sigma_8)^4}{(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_6 - \sigma_8)^4 \cdot (-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6 - \sigma_8)^4} =$$

$$= \exp \left[- \frac{2(-V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{T} \right],$$

$$\frac{(\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6 - \sigma_8)^2}{(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_6 - \sigma_8)^2 \cdot (\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8)} = \exp \left[- \frac{2(V_2 - V_3)}{T} \right]$$

$$\frac{(\sigma_5 + 2\sigma_6 + \sigma_8) \cdot (\sigma_5 - 2\sigma_6 + \sigma_8)}{(-\sigma_5 + \sigma_8)^2} = \exp \left[- \frac{2V_1}{T} \right].$$
(30)

Решение этой системы сводится к решению алгебраического уравнения 4-ой степени общего вида, коэффициенты которого являются сложными функциями $\frac{V_i}{T}$.

Проще обстоит дело при приближении сплава к состоянию полного разупорядочения. В этих условиях, как известно [4], сплав может себя вести и как чистый тройной сплав, и как квазибинарный.

Мы рассмотрим решение этой системы в случае, когда существует единственная температурная точка T_c , в которой все $\sigma_i \rightarrow 0$; согласно (24),

$$\sigma_{8, T \rightarrow T_c} \rightarrow \frac{1}{9} (10n_1 + 7n_2 - 5n_3),$$
(31)

$$\sigma_{6, T \rightarrow T_c} \rightarrow \frac{1}{3} (3n_1 - 1),$$

$$b_{5T} \rightarrow T_c \rightarrow -\frac{1}{3}(3n_1 - 1).$$

Поэтому левые части уравнений (30) можно разложить вблизи указанных предельных значений корреляционных функций.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &\equiv \sigma_8 - \sigma_8(T_c), \\ \Delta_{12} &\equiv \sigma_6 - \sigma_6(T_c), \\ \Delta_{11} &\equiv \sigma_5 - \sigma_5(T_c) \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\alpha_1 \equiv (3n_1 - 3n_3 + 1)^{-1}; \quad \alpha_2 \equiv (3n_2 - 3n_4 + 1)^{-1}; \quad \alpha_3 \equiv (3n_3 - 3n_2 + 1)^{-1}, \quad (33)$$

то с точностью до членов первого порядка малости можем написать:

$$\begin{aligned} &3(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3)\Delta_{22} + 2(\alpha_1 - 5\alpha_2 + 4\alpha_3)\Delta_{12} + (-\alpha_1 + \alpha_2)\Delta_{11} = \\ &= \frac{4}{9} \left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \exp\left(-\frac{2(-V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{T}\right) - 1 \right], \\ &(\alpha_1 - 5\alpha_2 + 4\alpha_3)\Delta_{22} + 2(\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3)\Delta_{12} + (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta_{11} = \\ &= \frac{4}{9} \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} \exp\left(-\frac{2(V_2 - V_3)}{T}\right) - 1 \right], \\ &(-\alpha_1 + \alpha_2)\Delta_{22} + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta_{12} + (3\alpha_1 + \alpha_2)\Delta_{11} = \\ &= \frac{4}{9} \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \exp\left(-\frac{2V_1}{T}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что условия существования T_c в нашей модели формально можно записать в следующем виде:

$$\frac{V_1}{\ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{V_2}{\ln \frac{\alpha_1^{3/4} \alpha_2^{1/4}}{\alpha_3}} = \frac{V_3}{\ln \frac{\alpha_3}{\alpha_1^{1/4} \alpha_2^{3/4}}}. \quad (35)$$

Решая систему уравнений (34), для корреляционных функций вблизи T_c получим:

$$\begin{aligned} \bar{b}_8 &\approx \frac{9\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3}{9\alpha_2\alpha_3} - \frac{2}{9} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left[-\frac{2(V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{T}\right] - \\ &- \frac{1}{9} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2} \frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left[-\frac{2(V_2 - V_3)}{T}\right] - \\ &- \frac{1}{18} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{-\alpha_1^2 + 5\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left(-\frac{2V_1}{T}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_6 &\approx \frac{3\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 - 2\alpha_3}{9\alpha_2\alpha_3} - \frac{2}{9} \frac{3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} - \\ &- \frac{1}{18} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^2}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left[-\frac{2(-V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{T}\right] + \\ &+ \frac{1}{9} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2} \frac{\alpha_1 + 4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 9\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left(-\frac{2(V_2 - V_3)}{T}\right) + \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{-\alpha_1^2 + \alpha_2 - 7\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left(-\frac{2V_1}{T}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_5 &\approx \frac{-3\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2 + 2\alpha_3}{9\alpha_2\alpha_3} - \frac{2}{9} \frac{-5\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_2^3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} - \\ &- \frac{1}{18} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{-\alpha_1^2 + 5\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left[-\frac{2(-V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{T}\right] + \\ &+ \frac{1}{9} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2} \frac{-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 7\alpha_1\alpha_3 + 7\alpha_2\alpha_3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left[-\frac{2(V_2 - V_3)}{T}\right] + \\ &+ \frac{1}{18} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\alpha_1^2 + 5\alpha_1\alpha_2 - 26\alpha_2^2 + 11\alpha_1\alpha_3 - 7\alpha_2\alpha_3 + 16\alpha_2^3}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \exp\left(-\frac{2V_1}{T}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &\equiv -3\alpha_2^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 - 10\alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_3^2 - 3\alpha_2^2\alpha_3 + \\ &+ 2\alpha_2\alpha_3^2 + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что рассмотренное приближение соответствует одному из возможных типов решений системы уравнений (30). Для примера мы рассмотрим приближение другого типа. Пусть

$n_1 = \frac{1}{2}$, $n_2 = n_3 = \frac{1}{4}$, а расположение атомов в сплаве таково, что нет различия между γ и β узлами. В этом случае поведение сверхструктуры становится похожим на бинарный сплав, который состоит из А и (ВС) атомов в равном количестве (символ (ВС) означает, что В и С атомы ведут себя как одинаковые). Нетрудно показать, что для сверхструктуры рассматриваемого типа

$$\zeta_8 = \frac{1}{9} (5 + \langle \hat{S}_{j_2} \hat{S}_{k_2} \rangle); \quad (37)$$

и

$$\zeta_6 = \frac{1}{6} (1 + 2 \langle \hat{S}_{jk} \hat{S}_{k_2} \rangle), \quad (38)$$

где

$$\zeta_5 = \frac{1}{8} \frac{5 \exp(-\frac{V_1}{T}) - 8}{\exp(-\frac{V_1}{T}) + 2}, \quad (39)$$

что эквивалентно соотношениям $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 1 + \zeta_1$.

Наконец рассмотрим общие термодинамические условия образования сверхструктуры в случае тройного сплава. Воспользовавшись работой [4], получим информационные критерии:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta_8} = \rho_n \frac{(2\rho_{12} - 4\rho_{32} + 8\rho_{31} - n_1 - 7n_2 + 5n_3 + 3)(-4\rho_{12} + 8\rho_{32} + 2\rho_{31} + n_1 + n_2 + 5n_3 - 3)}{(20\rho_{21}^2 + 4\rho_{32}^2 - 8\rho_{31}^2 + 19n_1 + 7n_2 - 5n_3 - 3)^{1/4} (16\rho_{12}^2 + 4\rho_{32}^2 - 8\rho_{31}^2 + 19n_1 + 7n_2 - 5n_3 - 3)^{1/2}} \times \frac{1}{(-8\rho_{21}^2 - 20\rho_{32}^2 + 4\rho_{31}^2 - 17n_1 + 7n_2 - 5n_3 + 9)^{1/4} (\rho_{21}^2 - 2\rho_{32}^2 - 5\rho_{31}^2 - 3n_1 - 6n_2 + 4)}, \quad (40)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta_6} =$$

$$= \ln \frac{(-P_{21} - 20P_{32} + 4P_{31} - 7n_1 + 7n_2 - 5n_3 + 9)^{1/2} (2P_{21} - 4P_{32} + 8P_{31} - n_1 - 7n_2 + 5n_3 + 3)}{(16P_{21}^2 + 4P_{32}^2 - 8P_{31}^2 + 19n_1 + 7n_2 - 5n_3 - 3)^{1/2} (-4P_{12} + 8P_{32} + 2P_{31} - n_1 + 4n_2 + 5n_3 - 3)}$$

04935340
20220101033

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial H_I}{\partial \delta_5} = \ln \frac{(20P_{21} + 4P_{32} - 8P_{31} + 19n_1 + 7n_2 - 5n_3)^{1/2} (-8P_{21} - 20P_{32} + 4P_{31} - 7n_1 + 7n_2 - 5n_3 + 9)^{1/2}}{16P_{21}^2 + 4P_{32}^2 - 8P_{31}^2 + 19n_1 + 7n_2 - 5n_3 - 3}$$

Энергетические критерии вытекают из сопоставления соотношений (29), (30), (40) и нижеследующих:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial E_c}{\partial \delta_8} = \frac{1}{2} (-V_1 + 2V_2 + 2V_3); \quad (41)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial E_c}{\partial \delta_6} = V_2 - V_3; \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial E_c}{\partial \delta_5} = \frac{1}{2} V_1.$$

Например, для квазибинарного сплава с $P_{12} = P_{21} = P_{13} = P_{31} = \frac{1}{4}$ и $P_{23} = P_{32} = 0$ получаем следующие условия образования сверхструктуры:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial H_I}{\partial \delta_8} \rightarrow +\infty; \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial H_I}{\partial \delta_6} \rightarrow \ln \frac{3}{2}; \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial H_I}{\partial \delta_5} \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{10}{9};$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial E_c}{\partial \delta_8} \rightarrow 2V > 0; \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial E_c}{\partial \delta_6} \rightarrow 0; \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial E_c}{\partial \delta_5} \rightarrow 0, \quad (42)$$

где $V \equiv V_2 = V_3$, т.е. в этом случае нет разницы между А и В атомами.

Поступила 10.IX.1976

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПОРЯДОЧИВАЮЩИХСЯ
БИНАРНЫХ СПЛАВОВ С ВАКАНСИЯМИ

Г.Ш.Киртадзе

В настоящей работе мы покажем, что метод спектрального разложения функций распределения [1, 2] и спектральные параметры в совокупности с информационной теорией возмущений (ИТВ) [3] могут быть использованы для построения кластерной модели упорядочивающегося бинарного сплава, аналогичной разработанной в [4] модели. Излагаемая методика, позволяющая рассчитывать распределение вероятностей различных кластерных конфигураций, с точки зрения дальнейшего упрощения вычислений наиболее эффективна в тех случаях, когда в качестве исходных данных кроме параметров Коули [5] и концентраций атомов различного типа и вакансий в бинарном сплаве АВ задаются:

- 1) график температурной зависимости конфигурационной теплоемкости моделируемого сплава;
- 2) средняя энергия взаимодействия вакансий с остальными атомами кластера;
- 3) средняя энергия взаимодействия тех атомов, на месте

которых появляется вакансия, с остальными атомами кластера.

04.10.57 240
202:0110333

Обычно задаются также характеристики исходного сплава без вакансий, из которого образован исследуемый сплав, содержащий вакансии. В противном случае в качестве исходного может служить некоторый гипотетический сплав, для которого выполняются условия:

$$n_A^{\circ} \geq n_A; n_B^{\circ} \geq n_B; n_V = 0; n_A^{\circ} + n_B^{\circ} = 1,$$

где n_A° и n_B° - концентрация атомов типа А и В в гипотетическом сплаве, n_A и n_B - концентрация атомов того же типа в исследуемом сплаве с вакансиями, n_V - концентрация вакансий.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением бинарных сплавов с малой концентрацией вакансий в ОЦК решетке.

Предположим, что на основе измерения в исследуемом реальном сплаве параметров Коули α_m ($m = 1, 2, 3, 5$) по формуле

$$P_0(s_0, k) = \exp[\lambda_0^{\circ} - \lambda_1^{\circ} s_0 - \lambda_2^{\circ} \langle s \rangle_k - \lambda_3^{\circ} \langle s_1 s_2 \rangle_k^{(1)} - \lambda_4^{\circ} \langle s_1 s_2 \rangle_k^{(2)} - \lambda_5^{\circ} \langle s_1 s_2 \rangle_k^{(3)} - \lambda_6^{\circ} \langle s_1 s_2 \rangle_k^{(5)}] \quad (I)$$

рассчитано распределение вероятностей всевозможных восьмизульных кластерных конфигураций для соответствующего исходного (или гипотетического) сплава, т.е. построена модель Ф.Клаша [4,6] (в этих же работах изложена методика расчета множителей Лагранжа $\lambda_0^{\circ}, \lambda_1^{\circ}, \dots, \lambda_6^{\circ}$ и всех фигурирующих в (I) параметров). В отличие от [4] будем считать, что

измерение концентрации вакансий приводит лишь к изменению точности измерений, что, как нетрудно заметить, вполне оправданно с физической точки зрения. Иными словами, измерение концентрации вакансий в сплаве не влечет за собой появления новых слагаемых в распределении (I), которое в дальнейшем будем принимать за "невозмущенное", но вызывает искажение значений множителей Лагранжа $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_6^0$.

Допустим, что "искаженные" значения множителей Лагранжа связаны с $\lambda_1^0, \dots, \lambda_6^0$ соотношениями

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \ell_i, \quad i=1, \dots, 6. \quad (2)$$

Можно показать, что аддитивные поправки ℓ_i пропорциональны концентрации вакансий n_V и тем самым тоже являются малыми величинами.

Согласно основным положениям ИТВ, новое распределение вероятностей, рассматриваемое как "возмущенное" по отношению к "невозможному" распределению (I) и позволяющее рассчитывать вероятности различных кластерных конфигураций сплава с вакансиями в условиях "искаженной" информации, будет иметь следующий вид:

$$\rho(s_0, k) = \exp[-\lambda_0 - \lambda_1 \langle s_0 \rangle_K - \lambda_2 \langle s \rangle_K - \lambda_3 \langle s_1 s_2 \rangle_K^{(1)} - \lambda_4 \langle s_1 s_2 \rangle_K^{(2)} - \lambda_5 \langle s_1 s_2 \rangle_K^{(3)} - \lambda_6 \langle s_1 s_2 \rangle_K^{(5)}]. \quad (3)$$

Логарифмируя и разлагая в ряд по малым параметрам ℓ_i обобщенную статистическую сумму этого распределения по аналогии с [4], получим:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_6) = \ln Z_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_6^0) - \\ - [\ell_1 \langle s_0 \rangle + \dots + \ell_6 \langle \langle s_1 s_2 \rangle_K^{(5)} \rangle_0] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \ell_i^2 \delta_{ii}^0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^6 \ell_i \ell_{i'} \delta_{ii'}^0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\xi_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_6^0)$ и $\xi(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ - обобщенные статистические суммы распределений (1) и (3).

Из (4) в соответствии с [3,4] вытекает система уравнений для определения поправок ℓ_i ($i=1, \dots, 6$):

$$\delta_{11}^0 \ell_1 + \dots + \delta_{16}^0 \ell_6 = \langle S_0 \rangle_0 - \langle S_0 \rangle \quad (5)$$

$$\delta_{61}^0 \ell_1 + \dots + \delta_{66}^0 \ell_6 = \langle \langle S_1 S_2 \rangle_K^{(5)} \rangle_0 - \langle \langle S_1 S_2 \rangle_K^{(5)} \rangle.$$

Символы $\langle \dots \rangle_0$ и $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по "невозмущенному" и "возмущенному" распределениям соответственно.

В отличие от остальных присутствующих в (4) и (5) параметров, которые определяются непосредственно из кластерных конфигураций исходного (или гипотетического) сплава [4,6], величины $\langle \dots \rangle$ следует рассчитывать с помощью параметров Коули для тройных сплавов [7] из соотношений:

$$\langle S_0 \rangle = \langle \langle S \rangle_K \rangle = n_A - n_B, \quad (6)$$

$$\langle \langle S_1 S_2 \rangle_K^{(m)} \rangle = (n_A - n_B)^2 + 4n_A n_B \alpha_m + n_V [n_A \alpha_m^{3(1)} + n_B \alpha_m^{3(2)}],$$

$\alpha_m^{3(1)}$ и $\alpha_m^{3(2)}$ ($m=1,2,3,5$) - параметры Коули, формально соответствующие третьей компоненте сплава. Однако, в отличие от реальной трехкомпонентной системы, где их значения могут быть получены в результате независимого измерения, в данном случае они должны быть выражены через исходные параметры α_m . Эти выражения непосредственно вытекают из условия максимума термодинамической энтропии H [7]:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_m^{3(1)}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \alpha_m^{3(2)}} = 0$$

и имеют следующий вид:

$$\alpha_m^{3(2)} = \frac{n_A (1 - 2n_B)}{n_B (1 - 2n_A)} \alpha_m^{3(1)}, \quad (7)$$

$$\alpha_m^{3(1)} = \frac{(n_V + 2n_A n_B) \alpha_m + \sqrt{(n_V + 2n_A n_B)^2 \alpha_m^2 - 4n_A n_B \alpha_m (1 - 2n_A)(1 - 2n_B)}}{2n_A (1 - 2n_B)} \quad (8)$$

Таким образом, из формул (2) и (4)–(8) определяются значения множителей Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_6$, подстановкой которых в (3) можно вычислить вероятности безвакансионных кластерных конфигураций исследуемого сплава.

С целью вычисления вероятностей отдельных кластерных конфигураций с вакансиями целесообразно воспользоваться методом спектрального разложения функций распределения [1, 2].

Поскольку, согласно модели, концентрация вакансий – заданная величина, естественно считать, что случайные процессы, которые имеют место в сплаве при изменении его температуры и соответствуют его равновесным состояниям, описываются заранее фиксированным значением долей кластеров с j вакансиями ($j = 1, \dots, 8$). Такая точка зрения вполне согласуется с интерпретацией спектра обобщенного распределения как описывающего абсолютно детерминированный процесс.

Если провести спектральное разложение распределения вероятностей кластеров с вакансиями, то среднюю вероятность K -го кластера можно вычислить по формуле

$$P_K = \sum_{S_0} \sum_j P_j F_j(S_0, K) = \sum_{S_0} \sum_j P_j(S_0, K) \quad (9)$$

где ρ_j - доля кластеров с j вакансиями ($j = 1, \dots, 8$),
 $F_j(S_0, K)$ - условная вероятность K -ой конфигурации с j ва-
 кансиями, а

$$\rho_j(S_0, K) = \rho_j F_j(S_0, K) \quad (10)$$

- ее полная вероятность.

В равновесном состоянии сплава, как известно, измерение энергии кластера

$$E_K(j) = E_K(0) + \overline{\Delta E(j)} \quad (11)$$

дает достаточную информацию для расчета искомого распределе-
 ния. В этой формуле $E_K(0)$ - энергия соответствующего клас-
 тера без вакансий, а $\overline{\Delta E(j)}$ - средняя поправка к энергии,
 обусловленная наличием вакансий, причем нетрудно показать,
 что она равна разности между средней энергией взаимодейст-
 вия вакансий с остальными атомами кластера и средней энергией
 взаимодействия тех атомов, на месте которых появилась вакан-
 сия, с остальными атомами кластера.

В работе [8] приводятся соображения, позволяющие считать,
 что

$$\overline{\Delta E(j)} = j \overline{\Delta E}, \quad (12)$$

$\overline{\Delta E}$ - поправка в случае наличия одной вакансии (данные об
 этой величине берутся из эксперимента [9]).

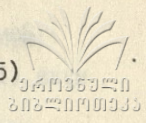
Оценка $F_j(S_0, K)$ по принципу м.и.э. [10] имеет вид:

$$F_j(S_0, K) = \exp[-\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_1(E_K(0) + j\overline{\Delta E})]. \quad (13)$$

Средняя энергия K -го кластера равна

$$\overline{E}_K = \sum_j \rho_j E_K(j) = E_K(0) + \overline{j} \overline{\Delta E}. \quad (14)$$

В этой формуле оба слагаемых известны; поэтому $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{\lambda}_1$
 могут быть определены из следующих соотношений:



$$\bar{E}_\kappa = -\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln \sum_\kappa \exp[-\tilde{\lambda}_1 (E_\kappa(0) + j \bar{\Delta E})], \quad (15)$$

$$\tilde{\lambda}_0 = \ln \sum_\kappa \exp[-\tilde{\lambda}_1 (E_\kappa(0) + j \bar{\Delta E})]. \quad (16)$$

Кроме того, согласно известной теореме Джейнза [10]

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{kT} \quad (17)$$

где k - постоянная Больцмана, T - температура.

Следовательно, полная энергия сплава выражается формулой:

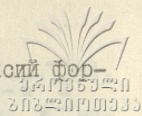
$$\begin{aligned} \langle \bar{E} \rangle &= \sum_{S_0} \sum_\kappa \sum_j \rho_j(S_0, \kappa) E_\kappa(j) = \\ &= \sum_{S_0} \sum_\kappa \sum_j \rho_j [(E_\kappa(0) + j \bar{\Delta E}) \exp[-\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_1 (E_\kappa(0) + j \bar{\Delta E})] = \\ &= \sum_{S_0} \left\{ \sum_\kappa E_\kappa(0) \exp[-\tilde{\lambda}_0 - \frac{E_\kappa(0)}{kT}] \cdot \sum_j \rho_j \exp[-\frac{j \bar{\Delta E}}{kT}] + \right. \\ &+ \left. \sum_\kappa \exp[-\tilde{\lambda}_0 - \frac{E_\kappa(0)}{kT}] \cdot \bar{\Delta E} \cdot \sum_j j \rho_j \exp[-\frac{j \bar{\Delta E}}{kT}] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку значения спектральных параметров ρ_j ($j = 1, \dots, 8$) от температуры не зависят, для их вычисления воспользуемся графиком температурной зависимости конфигурационной теплоемкости моделируемого сплава, которая имеет следующий вид:

$$c = \frac{d \langle E \rangle}{dT} = \sum_{S_0} \left\{ \frac{1}{kT^2} \sum_\kappa \sum_j \rho_j \exp[-\tilde{\lambda}_0 - \frac{1}{kT} (E_\kappa(0) + j \bar{\Delta E})] \times \right. \\ \left. \times [E_\kappa(0) + j \bar{\Delta E}] \right\}. \quad (19)$$

Подбирая на графике в соответствующей области температур восемь значений теплоемкости, на основе (18) можно составить линейную систему из восьми уравнений для определения значений спектральных параметров ρ_j ($j = 1, \dots, 8$).

Заметим, что при очень малой концентрации вакансий формула (18) принимает более простой вид:



$$C = \sum_{S_0} \left\{ \frac{1}{kT^2} \sum_j \rho_j [kT^2 c_0 + 2\langle E_K(0) \rangle + (j \Delta E)^2] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-j \frac{\Delta E}{kT^2} \right] \right\}, \quad (20)$$

где c_0 и $E_K(0)$ - соответственно теплоемкость и полная энергия исходного (гипотетического) сплава без вакансий.

Вероятности кластерных конфигураций с вакансиями рассчитываются подстановкой в формулу (10) спектральных параметров ρ_j и вычисленных по формулам (13)-(16) значений условных вероятностей $F_j(S_0, \kappa)$.

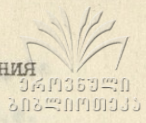
В заключение отметим, что область применимости данной модели гораздо уже области применимости аналогичной модели, разработанной в [4], поскольку для ее построения, как следует из вышеизложенного, требуется большее количество исходных данных. Однако, если эти данные имеются, то с точки зрения упрощения вычислений ее применение вполне оправдано.

Поступила 12.УП.1978

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Г.Гачечиладзе, Т.П.Цилосани, Сб. "Статистика речи и автоматический анализ текста", Л., 1971.
2. В.Фукс, Сб. Теория передачи сообщений, М., 1957.
3. Т.Г.Гачечиладзе, Г.Ш.Киртадзе, Т.Н.Мгвдзеладзе, Сообщения АН СССР, 87, № 2, 1977.



4. Р.Е.Шалин, Т.Г.Гачечиладзе, Г.Ш.Киртадзе, Сообщения
АН СССР, 91 № I, 1978.

5. J.H.Cowley, Phys. Rev., 77, 1950.

6. P.C.Clapp, Phys. Rev., B4, 1971.

7. Т.Г.Гачечиладзе, О.М.Мдивани, Физика металлов и металло-
ведение. УШ, в.3, 1959.

8. Н.В.Бокучава, Кандидатская диссертация, Тбилиси, ТГУ,
1970.

9. М.А.Кривоглаз, А.А.Смирнов, Теория упорядочивающихся
сплавов. М., Физматгиз, 1958.

10. E.T.Jaynes, Phys. Rev., 106, 108, 1957.

შეჯამება

ბუნებრივი და ხელოვნური სპირალური ბუნების
დაკვირვება და მათი მათემატიკური აღწერის
შედეგად შეიქმნა ბუნებრივი სპირალის
მოდელი

შეჯამება

სპირალური მონაცემების მათემატიკური აღწერის
შედეგად შეიქმნა ბუნებრივი სპირალის
მოდელი, რომელიც სხვადასხვა კლასის მონაცემების
აღწერისათვის გამოიყენება.

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

О ПОСТРОЕНИИ АФФИННЫХ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ
КЛАССИФИКАЦИИ n -МЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ
ОБРАЗОВ

А.Г.Мамиствалов

Одной из актуальнейших проблем кибернетики является проблема классификации и распознавания зрительных образов. Настоящая работа посвящена построению инвариантов для автоматической аффинной классификации двух типов изображений любой размерности – точечных изображений и непрерывных изображений.

Среди работ, посвященных распознаванию и идентификации точечных изображений, следует отметить работы [1,2]. В [2], в частности, на комплексной плоскости были получены и использованы инварианты лишь для таких подгрупп аффинного преобразования, при которых сохраняется форма субъекта (переносы, вращения, подобные преобразования). В связи с этим необходимо отметить, что в настоящей статье впервые строятся инварианты для точечных изображений любой размерности, подвергнутых общим аффинным преобразованиям.

Точечным изображением размерности n будем называть набор (вообще говоря, неупорядоченный) конечного числа точек n -мерного евклидова пространства. Подразумевается,

что число \mathcal{N} точек изображения удовлетворяет условию $\mathcal{N} \geq n+1$ и что точки находятся в общем положении, т.е. из \mathcal{N} точек изображения всегда можно выбрать $n+1$ точек, не лежащих на одной гиперплоскости размерности $n-1$.

Пусть точечное изображение задано координатами точек:

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, \quad i = \overline{1, \mathcal{N}}.$$

Тогда n -мерные центральные степенные моменты порядка ρ изображения до и после преобразования

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} x_{ik}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, \mathcal{N}}, \quad (1)$$

будут равны соответственно

$$\mu_{\rho_1 \dots \rho_n} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (x_{i1} - \bar{x}_1)^{\rho_1} \dots (x_{in} - \bar{x}_n)^{\rho_n}, \quad (2)$$

$$\mu'_{\rho_1 \dots \rho_n} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (x'_{i1} - \bar{x}'_1)^{\rho_1} \dots (x'_{in} - \bar{x}'_n)^{\rho_n}, \quad (3)$$

где $\rho_1 \dots \rho_n$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\rho_1 + \dots + \rho_n = \rho$, $0 \leq \rho < \infty$. Очевидно

$$\bar{x}_j = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}$$

— координаты центра тяжести изображения.

Координаты $x_{i1} - \bar{x}_1, \dots, x_{in} - \bar{x}_n$ будем считать ковариантными переменными. Введем контравариантные переменные u^1, \dots, u^n и подвергнем их контрагредиентному преобразованию (1):

$$u^j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} u'^k, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Тогда, ввиду того, что имеет место следующее инвариантное соотношение [3]:

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) u^j = \sum_{j=1}^n (x'_{ij} - \bar{x}'_j) u'^j,$$

справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) u^j \right]^p = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^n (x'_{ij} - \bar{x}'_j) u'^j \right]^p.$$

Раскрывая квадратные скобки в последнем равенстве по формуле

$$\left[\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j) v^j \right]^p = \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} (y_{i1} - \bar{y}_1)^{p_1} (v^1)^{p_1} \dots (y_{in} - \bar{y}_n)^{p_n} (v^n)^{p_n},$$

переставляя знаки суммирования и принимая во внимание (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} \mu_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n} = \\ = \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} \mu'_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n}. \end{aligned}$$

В левой части полученного равенства имеем n -арную алгебраическую форму порядка p с коэффициентами $\mu_{p_1 \dots p_n}$, в правой части этого же равенства имеем n -арную алгебраическую форму, полученную от исходной формы после преобразования (4). Коэффициентами преобразованной формы являются центральные моменты $\mu'_{p_1 \dots p_n}$ преобразованного изображения. Известно [3, 4], что однородный полином $I(a_{p_1 \dots p_n})$ от коэффициентов n -арной алгебраической формы порядка p

$$\sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} a_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n} \quad (5)$$

есть инвариант веса W , если

$$I(a'_{p_1 \dots p_n}) = \Delta^w I(a_{p_1 \dots p_n}),$$

где $a'_{p_1 \dots p_n}$ суть коэффициенты формы, в которую переходит форма (5) при преобразовании (4), а $\Delta \neq 0$ представляет собой определитель этого преобразования. На основе вышеизложенного заключаем, что моменты порядка ρ точечных изображений будут иметь такие же инварианты, как и коэффициенты n -арных алгебраических форм:

$$I(\mu'_{p_1 \dots p_n}) = \Delta^w I(\mu_{p_1 \dots p_n}). \quad (6)$$

Таким образом, имеет место следующее предложение.

Теорема I. Однородный полином

$$\sum_{p_1 + \dots + p_n = \rho} \frac{\rho!}{p_1! \dots p_n!} \mu_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n}$$

при преобразовании (4) преобразуется как n -арная алгебраическая форма порядка ρ , причем коэффициентами преобразованной формы служат моменты (3) изображения, подвергнутого преобразованию (I). Поэтому моменты $\mu_{p_1 \dots p_n}$ порядка ρ точечного изображения имеют такие же инварианты, как и коэффициенты n -арной алгебраической формы порядка ρ .

Как известно, центральные моменты инвариантны относительно переносов, т.е. относительно преобразования

$$x'_{ij} = x_{ij} + \beta_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Суперпозицией преобразований вида (I) и (7) получается аф-



$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} x_{ik} + \beta_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Поэтому имеет место следующее

Следствие теоремы I. Однородные полиномы, построенные от центральных моментов точечных изображений на основе инвариантов n - арных алгебраических форм, инвариантны не только относительно преобразования (I), но и относительно аффинного преобразования (8).

Исключая Δ из двух инвариантов вида (6), получим абсолютный инвариант, т.е. инвариант, не зависящий от Δ . Этот инвариант будет представлять собой отношение степеней двух относительных инвариантов и будет иметь вид

$$i(d) = \frac{I^{\frac{t}{w}}}{I_1^{\frac{t}{w_1}}}, \quad (9)$$

где w и w_1 - веса инвариантов I и I_1 , t - наименьшее общее кратное этих весов, (d) - размерность изображения.

Раскрывая скобки в очевидном неравенстве

$$\sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) u^j \right]^2 > 0$$

и учитывая (2), получаем положительно определенную квадратичную форму

$$\sum_{p_1 + \dots + p_n = 2} \frac{2!}{p_1! \dots p_n!} \mu_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n} > 0.$$

Поэтому её дискриминант будет положительным [5]:

$$D = \begin{vmatrix} \mu_{20\dots 0} & \mu_{11\dots 0} & \dots & \mu_{10\dots 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{10\dots 1} & \mu_{01\dots 1} & \dots & \mu_{00\dots 2} \end{vmatrix} > 0$$

С другой стороны, известно [4], что дискриминант квадратичной формы является её относительным инвариантом веса

2. Поэтому выражение (9) будет иметь смысл для любого точечного изображения, если в знаменателе в качестве I_1 будем брать D . Тогда конструируемые нами абсолютные аффинные инварианты будут иметь вид

$$i_p(d) = \frac{I_1^{\frac{p}{2}}}{D^{\frac{p}{2}}}. \quad (10)$$

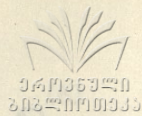
Для одномерных точечных изображений используем инварианты формы от одной переменной. При этом можно показать, что одномерные центральные моменты порядка p являются инвариантами веса p :

$$\mu'_p = \Delta^p \mu_p.$$

Учитывая это, на основе формулы (10) получаем общее выражение для абсолютных аффинных инвариантов одномерных точечных изображений:

$$i_p(d) = \begin{cases} \frac{\mu_{p+2}}{\mu_2^{\frac{p+2}{2}}} & p=2, 4, 6, \dots \\ \frac{\mu_{p+2}^2}{\mu_2^{\frac{p+2}{2}}} & p=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Для двумерных (плоских) точечных изображений, используя инварианты бинарных форм второго, третьего и четвертого порядков [4] и формулу (10), получаем следующие абсолютные аффинные инварианты:



$$i_1^{(2)} = \frac{4(\mu_{30}\mu_{12} - \mu_{21}^2)(\mu_{21}\mu_{03} - \mu_{12}^2) - (\mu_{30}\mu_{03} - \mu_{12}\mu_{21})^2}{(\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2)^3},$$

$$i_2^{(2)} = \frac{\mu_{40}\mu_{04} - 4\mu_{31}\mu_{13} + 3\mu_{22}^2}{(\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2)^2},$$

$$i_3^{(2)} = \frac{\mu_{40}\mu_{22}\mu_{04} + 2\mu_{31}\mu_{22}\mu_{13} - \mu_{22}^3 - \mu_{40}\mu_{13}^2 - \mu_{31}^2\mu_{04}}{(\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2)^3}.$$

Для трехмерных точечных изображений имеем

$$D = \mu_{200}\mu_{020}\mu_{002} + 2\mu_{110}\mu_{101}\mu_{011} - \mu_{200}\mu_{011}^2 - \mu_{110}^2\mu_{002} - \mu_{101}^2\mu_{020}$$

Кроме того, используя символический метод [4], нами вычислены инварианты для тернарных форм третьего и четвертого порядков. Эти инварианты имеют вес, равный 4, и в терминах моментов имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 = & \mu_{300}\mu_{120}\mu_{021}\mu_{003} - \mu_{300}\mu_{120}\mu_{012}^2 + \mu_{300}\mu_{102}\mu_{030}\mu_{012} - \mu_{300}\mu_{111}\mu_{030}\mu_{003} + \\ & + \mu_{300}\mu_{111}\mu_{021}\mu_{012} - \mu_{300}\mu_{021}^2\mu_{102} - \mu_{210}\mu_{120}\mu_{102}\mu_{012} + \mu_{210}\mu_{120}\mu_{111}\mu_{003} + \\ & + \mu_{210}\mu_{201}\mu_{030}\mu_{003} - 2\mu_{210}\mu_{111}^2\mu_{012} + \mu_{210}^2\mu_{012}^2 - \mu_{210}^2\mu_{021}\mu_{003} - \mu_{210}\mu_{102}^2\mu_{030} + \\ & + 3\mu_{210}\mu_{111}\mu_{102}\mu_{021} - \mu_{210}\mu_{201}\mu_{021}\mu_{012} + 3\mu_{201}\mu_{120}\mu_{111}\mu_{012} - \mu_{201}\mu_{120}\mu_{102}\mu_{021} + \\ & + \mu_{201}\mu_{111}\mu_{102}\mu_{030} - \mu_{201}^2\mu_{030}\mu_{012} + \mu_{201}^2\mu_{021}^2 - \mu_{201}\mu_{120}^2\mu_{003} - 2\mu_{201}\mu_{111}^2\mu_{021} + \\ & + \mu_{120}^2\mu_{102}^2 - 2\mu_{120}\mu_{111}^2\mu_{102} + \mu_{111}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \mu_{400}\mu_{040}\mu_{004} + 4\mu_{310}\mu_{103}\mu_{031} + 4\mu_{301}\mu_{130}\mu_{013} - 4\mu_{400}\mu_{031}\mu_{013} - \\ & - 4\mu_{310}\mu_{130}\mu_{004} - 4\mu_{301}\mu_{103}\mu_{040} + 6\mu_{220}\mu_{202}\mu_{022} + 3\mu_{400}\mu_{022}^2 + \\ & + 3\mu_{220}^2\mu_{004} + 3\mu_{202}^2\mu_{040} - 12\mu_{211}\mu_{121}\mu_{112} + 12\mu_{220}\mu_{112}^2 + 12\mu_{211}^2\mu_{022} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +12\mu_{202}\mu_{121}^2 - 12\mu_{310}\mu_{022}\mu_{112} - 12\mu_{220}\mu_{121}\mu_{103} - 12\mu_{211}\mu_{031}\mu_{202} \\
 & - 12\mu_{301}\mu_{121}\mu_{022} - 12\mu_{220}\mu_{211}\mu_{013} - 12\mu_{202}\mu_{130}\mu_{112} + 12\mu_{310}\mu_{121}\mu_{013} \\
 & + 12\mu_{301}\mu_{112}\mu_{031} + 12\mu_{211}\mu_{130}\mu_{103}
 \end{aligned}$$

Отсюда, на основе формулы (10), получаем следующие абсолютные аффинные инварианты для трехмерных точечных изображений:

$$i_1^{(3)} = \frac{I_1}{D^2}, \quad i_2^{(3)} = \frac{I_2}{D^2}.$$

Построенные нами аффинные инварианты можно использовать в различных задачах классификации и распознавания образов. При этом эти инварианты играют роль решающего правила для разбиения заданного множества точечных изображений на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности (образ) состоит из всевозможных точечных изображений, переходящих друг в друга при некотором аффинном преобразовании.

Рассмотрим несколько примеров. Значение функционала $i_2^{(2)}$ для любого трехточечного изображения на плоскости (каждое такое изображение можно рассматривать как вершины некоторого треугольника) одинаково и равно $\frac{1}{3}$. Это является иллюстрацией того известного факта, что группа невырожденных аффинных преобразований действует на трехточечных изображениях транзитивно, т.е. для любых двух трехточечных изображений найдется аффинное преобразование, переводящее их друг в друга. Класс параллелограммов, заданных координатами своих вершин, и класс шестиугольников с попарно равными и параллельными сторонами образуют классы эквивалентности, отлича-

ющие элементы этих классов от других четырехточечных и шести-
 точечных изображений. Для всех изображений этих классов зна-
 чение $i_2^{(2)}$ равно соответственно $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{12}$.

Для любых четырехточечных трехмерных изображений (для
 вершин треугольной пирамиды) значение инварианта $i_2^{(3)}$ рав-
 но $\frac{1}{4}$, а для произвольного параллелепипеда, заданного ко-
 ординатами своих вершин, $i_2^{(3)} = \frac{1}{32}$.

Переходим к изложению методики построения аффинных инва-
 риантов для непрерывных изображений любой размерности. Для
 двумерных (плоских) зрительных образов такого типа эта за-
 дача нами была решена в работе [6], где была показана оши-
 бочность основной теоремы моментных инвариантов, сформулиро-
 ванной в работе [7]. Упомянутая теорема нами была исправ-
 лена и вновь доказана [6]. Теперь будет изложено обобщение
 этой теоремы для непрерывных образов любой размерности.

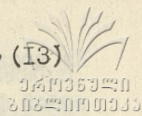
Пусть n -мерные зрительные объекты характеризуются
 в каждой точке пространства финитной функцией $\rho(x_1, \dots, x_n)$,
 выражающей закон изменения яркости объекта. Без ограничения
 общности можно допустить, что центр тяжести объекта совпада-
 ет с началом координат. Тогда n -мерные центральные сте-
 пенные моменты порядка ρ от функции $\rho(x_1, \dots, x_n)$ объ-
 екта до и после преобразования

$$x_i' = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (II)$$

будут равны соответственно

$$m_{\rho_1 \dots \rho_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\rho_1} \dots x_n^{\rho_n} \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad \rho_1 + \dots + \rho_n = \rho, \quad (I2)$$

$$m'_{p_1 \dots p_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \rho'(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad p_1 + \dots + p_n = p, \quad (I3)$$



причем

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \rho'(x'_1, \dots, x'_n). \quad (I4)$$

Введем контравариантные переменные u^1, \dots, u^n и подвергнем их преобразованию, контрагredientному относительно преобразования (II):

$$u^i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} u'^k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (I5)$$

Тогда получаем следующее инвариантное соотношение [3]:

$$\sum_{i=1}^n u^i x_i = \sum u'^i x'_i. \quad (I6)$$

Учитывая (I4) и (I6), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\sum u^i x_i)^p \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\sum u'^i x'_i)^p \rho'(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n \cdot \frac{1}{|J|}, \end{aligned}$$

где J - якобиан преобразования (II). Раскрывая скобки в последнем равенстве по формуле

$$\left(\sum v^i y_i \right)^p = \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} (v^1)^{p_1} (y_1)^{p_1} \dots (v^n)^{p_n} (y_n)^{p_n},$$

переставляя знаки интегрирования и суммирования и принимая во внимание (I2) и (I3), получаем

$$\begin{aligned} |J| \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} m_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n} = \\ = \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} m'_{p_1 \dots p_n} (u'^1)^{p_1} \dots (u'^n)^{p_n} \end{aligned} \quad (I7)$$

Из последнего равенства заключаем, что закон изменения n -арной формы, составленной из n -мерных моментов при преобразовании (15), такой же, как и для коэффициентов алгебраической формы

$$f = \sum_{p_1 + \dots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} a_{p_1 \dots p_n} (u^1)^{p_1} \dots (u^n)^{p_n}, \quad (18)$$

за исключением добавочного множителя $|J|$. Учитывая это, допустим, что n -арная форма (18) имеет алгебраический инвариант степени κ и веса w :

$$I(a'_{p_1 \dots p_n}) = \Delta^w I(a_{p_1 \dots p_n}). \quad (19)$$

Это значит, что существует однородный полином $I(a_{p_1 \dots p_n})$ от коэффициентов формы (18), представляющий собой сумму одночленов вида

$$A a_{i_1 \dots i_n}^{k_1} \dots a_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_2}$$

$$k_1 + \dots + k_2 = \kappa, \quad i_1 + \dots + i_n = p, \dots, \ell_1 + \dots + \ell_n = p$$

(A — некоторый числовой множитель), таких, что при преобразовании (15) формы (18) эти одночлены преобразуются по закону

$$A a'_{i_1 \dots i_n}^{k_1} \dots a'_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_2} = A \Delta^w a_{i_1 \dots i_n}^{k_1} \dots a_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_2}.$$

Тогда каждый одночлен аналогичного полинома, составленного из моментов (I2), согласно (I7) будет преобразоваться по закону

$$A m_{i_1 \dots i_n}^{k_1} \dots m_{l_1 \dots l_n}^{k_2} = A \Delta^W (|J| m_{i_1 \dots i_n})^{k_1} \dots (|J| m_{l_1 \dots l_n})^{k_2} =$$

$$= A \Delta^W |J|^{k_1 + \dots + k_2} m_{i_1 \dots i_n} \dots m_{l_1 \dots l_n} = A \Delta^W |J|^{k_1 + \dots + k_2} m_{i_1 \dots i_n} \dots m_{l_1 \dots l_n}$$

$$k_1 + \dots + k_2 = K, \quad i_1 + \dots + i_n = p, \dots, \quad l_1 + \dots + l_n = p.$$

Таким образом, каждый член правой части равенства, аналогичного равенству (I9) и составленного из моментов, будет содержать множитель $\Delta^W |J|^K$. Вынося этот общий множитель за скобки, получаем

$$I(m_{p_1 \dots p_n}') = \Delta^W |J|^K I(m_{p_1 \dots p_n}).$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Если n -арная форма (I8) имеет алгебраический инвариант (I9), то n -арная форма составленная из моментов (I2) имеет тот же инвариант, но с дополнительным множителем $|J|^K$:

$$I(m_{p_1 \dots p_n}') = \Delta^W |J|^K I(m_{p_1 \dots p_n}) \quad (20)$$

где J - якобиан преобразования (II); K - степень однородных полиномов $I(a_{p_1 \dots p_n})$, $I(a'_{p_1 \dots p_n})$.

Ввиду того, что моменты, входящие в (20), являются центральными, которые инвариантны относительно переносов, относительно преобразования

$$x'_i = x_i + \beta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

то имеет место следующее следствие:

Следствие теоремы 2. Выражение (20) инвариантно не только относительно преобразования (II), но и относительно аффинного преобразования

$$x'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k + \beta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (21)$$

Размерность n распознаваемых объектов определяет размерность пространства той алгебраической формы, по инвариантам которой на основе теоремы 2 можно конструировать абсолютные моментные инварианты. Например, для плоских образов $n=2$ и моментные инварианты для непрерывных плоских изображений можно конструировать с помощью инвариантов бинарных алгебраических форм. Для трехмерных изображений $n=3$ и моментные инварианты можно строить на основе инвариантов тернарных алгебраических форм. Тем не менее, для одного случая n -арных алгебраических форм — n -арных квадратичных форм можно конструировать инвариант, годный при любом n . Выше мы уже отмечали, что дискриминант n -арной квадратичной формы является её инвариантом веса 2. Поэтому на основе (20) можем написать (учитывая, что в данном случае $k=n$)

$$\begin{vmatrix} m'_{20\dots 0} & \dots & m'_{10\dots 1} \\ \dots & \dots & \dots \\ m'_{10\dots 1} & \dots & m'_{00\dots 2} \end{vmatrix} = |J| \Delta^2 \begin{vmatrix} m_{20\dots 0} & \dots & m_{10\dots 1} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{10\dots 1} & \dots & m_{00\dots 2} \end{vmatrix} \quad (22)$$

Легко показать, что между моментами нулевого порядка существует такая зависимость:

$$m'_{00\dots 0} = |J/m_{00\dots 0}| \quad (23)$$

Кроме того, из (II) и (I5) имеем

$$\Delta^2 = |J|^2 \quad (24)$$

Тогда из (22), (23) и (24) получаем, что выражение

$$I_n = \frac{\begin{vmatrix} m_{20\dots 0} & \dots & m_{10\dots 1} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{10\dots 1} & \dots & m_{00\dots 2} \end{vmatrix}}{m_{00\dots 0}^{n+2}} \quad (25)$$

инвариантно относительно аффинного преобразования (2I).

При $n=1$ и $n=3$ из (25) получаем такие инварианты для автоматической аффинной классификации соответственно одномерных и трехмерных непрерывных образов:

$$I_1 = \frac{m_2}{m_0^3}, \quad I_3 = \frac{m_{200} m_{010} m_{002} + 2 m_{110} m_{101} m_{011} - m_{200} m_{011}^2 - m_{110} m_{002}^2 - m_{111}^2 m_{010}}{m_{00}^5}$$

При $n=2$ из (25) получается аффинный инвариант плоских образов:

$$I_2 = \frac{m_{20} m_{02} - m_{11}^2}{m_{00}^4},$$

который нами был найден в работе [6].

Из вышеизложенного следует, что для построения абсолютных моментных инвариантов для непрерывных образов сначала

с помощью известных алгебраических инвариантов на основе теоремы 2 надо составить относительный моментный инвариант вида (20), а затем после исключения Δ и $|J|$ из относительного инварианта по вышеописанному способу получается искомый абсолютный инвариант, зависящий только от центральных моментов изображения. Ниже выписаны абсолютные аффинные инварианты для непрерывных образов, построенные таким методом.

Для одномерных образов:

$$I_{\rho}^{(1)} = \frac{m_{\rho}}{m_0^{\rho+2}}, \quad \rho = 2, 3, \dots$$

Для двумерных образов:

$$I_1^{(2)} = \frac{(4m_{30}m_{12} - m_{21}^2)(m_{21}m_{03} - m_{12}^2) - (m_{30}m_{03} - m_{12}m_{21})^2}{m_{00}^{10}};$$

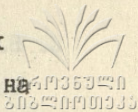
$$I_2^{(2)} = \frac{m_{40}m_{04} - 4m_{31}m_{13} + 3m_{22}^2}{m_{00}^6};$$

$$I_3^{(2)} = \frac{m_{40}m_{22}m_{04} + 2m_{31}m_{22}m_{13} - m_{22}^3 - m_{40}m_{13}^2 - m_{31}^2m_{04}}{m_{00}^9};$$

$$I_4^{(2)} = \frac{m_{40}^2m_{04} - 4m_{40}m_{11}m_{13} + 2m_{40}m_{02}m_{22} + 4m_{11}m_{02}m_{31} - 4m_{11}m_{02}m_{31} + m_{02}^2m_{40}}{m_{00}^7};$$

Инвариант $I_1^{(2)}$ построен на основе инварианта веса 6 бинарной алгебраической формы третьего порядка, а инварианты $I_2^{(2)}$ и $I_3^{(2)}$ - на основе инвариантов бинарной алгебраической формы четвертого порядка, веса которых равны соответственно 4 и 6 [4]. Необходимо подчеркнуть, что теорема 2 справедлива и для такого случая, когда алгебраический ин-

вариант содержит коэффициенты нескольких алгебраических форм. В частности, моментный инвариант $I_4^{(2)}$ построен на основе сконструированного нами совместного инварианта веса 4 бинарных форм второго и четвертого порядков.



Наконец, для трехмерных непрерывных образов нами построены следующие абсолютные инварианты

$$I_1^{(3)} = \frac{I_1}{m_{000}^3}, \quad I_2^{(3)} = \frac{I_2}{m_{000}^4},$$

где I_1 и I_2 - алгебраические инварианты веса 4 тернарных алгебраических форм третьего и четвертого порядков, записанные в терминах моментов непрерывных изображений. Вид этих относительных инвариантов был показан нами в данной работе при построении аффинных инвариантов для трехмерных точечных изображений.

В заключение отметим, что об аффинных инвариантах для точечных изображений было доложено на семинаре Института прикладной математики ТГУ [8], а содержание теоремы 2 настоящей работы было опубликовано (без доказательства) в работе [9].

Поступила 15.VI.1976

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. J.C.Simon, A.Checroun, C.Roche, A method of Comparing two patterns independent of possible transformations and small distortions, Pattern Recognition, 1972, 4, N1, 73-78.

2. В.В.Харичев, А.А.Шмидт, В.А.Якубович., Об одной новой задаче распознавания образов. Автоматика и телемеханика 1973, № 1, 109-122.
3. Г.Вейль, Классические группы, их инварианты и представления. М., 1947.
4. Г.Б.Гуревич, Основы теории алгебраических инвариантов. М., -Л., 1948.
5. И.М.Гельфанд, Лекции по линейной алгебре. М., 1971.
6. А.Г.Мамиствалов, Об основной теореме моментных инвариантов. Сообщения АН СССР, 1970, 59, №2, 297-300.
7. M K Hu, Visual pattern recognition by moment invariants, IRE, Trans on Information theory, 1962, IT-8 N2 179-187.
8. А.Г.Мамиствалов, Построение аффинных инвариантов для точечных изображений, заданных в n - мерном пространстве, и их применение. Семинар Института прикладной математики. Тбилисский университет. Аннотации докладов, 1976, № II, 27-33.
9. А.Г.Мамиствалов, О конструировании аффинных инвариантов n - мерных образов. Сообщения АН СССР, 76, № I, 1974, 61-64.



Վերջին օրերի իրերի մասին խոսքերի և հիշատակների ժողովածուի 11-րդ համարի
հարցազրույցի և հիշատակների ժողովածուի խմբագրող
Վահագն Կարամյանի հետ

Խոսքեր

Թերեզիստիկա և քրիստոնեական իրավունքները և
հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները
և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները
և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները
և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները և հիշատակները

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ИНФОРМАЦИОННОЕ СОДЕРЖАНИЕ ГРАФОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ
РАЗМЫТЫЕ МНОЖЕСТВА

Т.Н.Мгვделадзе

Эта работа, по существу, является иллюстрацией применения теории размытых множеств, разработанной Заде [1], к графам. Путь, который был избран для определения этих множеств, исходит из того факта, что графы можно сравнивать по их т.н. "сложностям" (информационным содержаниям) [2], имеющим форму шенноновской энтропии.

I. Мы вкратце приведем необходимые для дальнейшего основные определения из "теории сложности графов" [2].

Если X - граф с множеством вершин $V(X)$, $n = |V(X)|$ - число вершин X и $G(X)$ - группа автоморфизмов X , то множество

$$\{i\alpha \mid \alpha \in G(X)\},$$

где $i\alpha$ есть образ вершины $i \in V(X)$ при автоморфизме α , называется орбитой $G(X)$. Если A_i $1 \leq i \leq h$ - различные орбиты $G(X)$, то сложностью графа X называется величина

$$I_g(X) = -\sum_i p_i \log p_i,$$

где $p_i = \frac{|A_i|}{n}$.

Известно, что функция I_g , подобно другим энтропийным функциям, имеет максимальное значение $\log n$. Т.о., если для фиксированного n рассмотреть класс всех n -точечных графов, сложность которых гораздо меньше $\log n$, то этот класс окажется неточно заданным из-за наличия в его определении термина "гораздо". Т.е. этот класс будет представлять собой размытое множество, если любой из его элементов наделить функцией принадлежности, выбор которой субъективен и основан на информации, имеющейся в определении этого класса [1].

Для иллюстрации рассмотрим неориентированные графы с $|V(X)| = 4$. В качестве функции принадлежности можно взять

$$\mu(X) = \left\{ 1 + \frac{\log_2 4 \cdot I_g^2(X)}{[\log_2 4 - I_g(X)]^2} \right\}^{-1}$$

Нетрудно проверить, что в этом случае I_g принимает следующие значения: $0; 2 - \frac{3}{4} \log_2 3; 1; \frac{3}{2}$.

Тогда множество значений для μ выглядит так: $1; 0,5; 0,3; 0,05$.

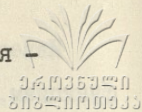
2. Операции над размытыми множествами определяются естественным образом. Например, если для вышерассмотренного случая множества S_1 и S_2 заданы функциями μ_1 и μ_2 соответственно

$$\mu_1(X) = \left\{ 1 + \frac{2 \cdot I_g^2(X)}{[2 - I_g(X)]^2} \right\}^{-1}, \quad \mu_2(X) = \left\{ 1 + \frac{4 \cdot I_g^2(X)}{[2 - I_g(X)]^2} \right\}^{-1},$$

то $S_1 \supset S_2$, т.к. $\mu_1 \geq \mu_2$.

Дополнение S будет задано функцией $1 - \mu$; для объеди-

нения нужно взять $\max(\mu_1, \mu_2)$, а для пересечения $\min(\mu_1, \mu_2)$.



3. В работе [3] была введена невероятностная энтропия для размытых множеств. Этот функционал, имеющий вид $d(\mu) = H(\mu) + H(\bar{\mu})$ для размытого множества μ (мы обозначили размытое множество через свою функцию принадлежности), является внутренней характеристикой системы, т.е. мерой средней информации, получаемой в ситуациях, описываемых размытыми множествами.

$d(\mu)$ обладает следующими свойствами:

P1. $d(\mu) = 0 \iff \mu = \{1\}$,

P2. $d(\mu) = \max \iff \mu = \frac{1}{2}$,

P3. $d(\mu) \geq d(\mu^*)$, где $\mu^*(x) \geq \mu(x)$, если $\mu(x) \geq \frac{1}{2}$, и $\mu^*(x) \leq \mu(x)$, если $\mu(x) \leq \frac{1}{2}$.

Рассмотрим множество всех возможных графов и образуем убывающую последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ размытых множеств на нем. Как известно,

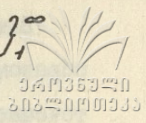
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \bigcup_1^\infty S_n.$$

Т.о. если $\forall x: \mu_1(x) \geq \frac{1}{2}$, то из P3 вытекает, что $\forall n: d(S_n) \geq d(S_{n+1})$ - наименьшую энтропию имеет множество $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

При условии $\forall x: \mu_1(x) \leq \frac{1}{2}$ то же множество имеет наименьшую энтропию для невозрастающей последовательности.

Это означает, что при некоторых условиях размытые множества превращаются (в пределе) в обычные, т.е., быть может, обычное множество удастся представить как предел последовательности размытых множеств.

Для иллюстрации можно взять последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ размытых множеств с функциями



$$\mu_n(X) = \left[1 + \left(\frac{I_g(X)}{\log |V(X)|} \right)^n \right]^{-1}, \quad n=1, 2, \dots$$

Очевидно, что эта последовательность является неубывающей и $\mu_1(X) \geq \frac{1}{2}$. Поэтому $\bigcup_1^\infty S_n$ имеет наименьшую энтропию. Отсюда неверно заключить, что это уже обычное множество - ведь для этого необходимо, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 1,$$

а, например, для последовательности чисел 0,5; 0,53; 0,533; ... это не так.

Заметим, что перечисленные условия не являются необходимыми. Например, рассмотрим следующую последовательность размытых множеств $\{S_n\}_1^\infty$:

$$\mu_n(X) = \theta(1+n^{-1}|V(X)|) \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{\log_2 |V(X)|}{I_g(X)}} \right)^{-1}, \quad \theta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

(т.о. любое размытое множество из этой последовательности можно проинтерпретировать как класс всех простейших графов с числом вершин $\leq n$).

Эта последовательность является неубывающей, но, как легко заметить, $\mu_1 = 1$ для K_1 , а для остальных графов она равна 0. Тем не менее, предел этой последовательности имеет экстремальную энтропию.

4. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли построить размытые множества с выводимыми (а не подбираемыми произвольно) функциями принадлежности?

В нашем случае на этот вопрос можно ответить следующим образом. Пусть задана не максимальная сложность $(m+1)$ точечного графа, т.е. какое-то распределение числа $m+1$:

$$\{m_1, \dots, m_i, \dots, m_h\} \sum_1^h m_i = m+1, \quad h \leq m.$$

Мы утверждаем, что это распределение можно получить из подходящим образом выбранного m -точечного графа путем его объединения с K_1 , т.е. с точкой. В самом деле, если данный $(m+1)$ -точечный граф имеет хотя бы одну изолированную вершину, то все ясно, а если это не так, то просто нужно взять дополнение этого графа и учесть тот факт, что дополнение имеет ту же сложность. (Относительно сложности $\log(m+1)$ заметим, что наименьшим графом с таким распределением является 6-точечный граф. Поэтому это распределение никак нельзя получить с помощью вышеописанной процедуры).

Из сказанного выше следует, что в принципе возможно поэтапное построение размытых множеств графов, написав общую итеративную формулу для вычисления функции принадлежности $(m+1)$ -точечного графа, исходя из подобной функции для какого-то m -точечного графа. Тем самым "порождающий" граф предопределяет (в какой-то степени) значение функции принадлежности "порожденного" им графа. Построенные таким образом графы можно назвать "размытыми множествами с памятью": каждое следующее помнит, как устроено предыдущее.

Очевидно, что построить такие множества можно очень многими способами.

С точки зрения теории очень интересно построить пример



последовательности размытых множеств графов, имеющей своим пределом обычное множество. Интересно также выяснить вопрос о том, как переносится информация из порождающих множеств в порожденные.

Поступила 20.I.1976

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. L.A. Zadeh, Inf. and Control, v. 8, 338-353, 1965.
2. A.Mowshowitz, Bull. Math. Biophysics, v.30, 1968.
3. A. De Luka, S.Termini, Inf. and Control, v.20, N4, 1972.

Յ.ԹԱՅՐՅԱՆԻ

Գրադրոնն ուղարկված էր ԽՍՀՄ-ի Գիտությունների ակադեմիայի
Ֆիզիկական Կիբեռնետիկայի խնամակալին

հղծրով

Մատենագրությունը հարցն արևմտաօտար սովորածը թողնում
գրադրոններին. ժամանակակից աստիճանի սովորածը արևմտաօտար ըն-
դրությունն ճշգրիտ թողնելով. միևնույն պահանջներ, ինչպես արևմտաօտար
սովորածը միջավայրներին ճշգրիտ պղծել ընդհանրապես ընդհանրապես.

207, 1979

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ОБОБЩЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПУАССОНОВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Нгуен Хак Фук

При изучении процесса образования лингвистических элементов из их компонентов [1] и статистической структуры печатной информации [2] возникают новые распределения, тесно связанные с распределением Пуассона. В этой статье приведены некоторые обобщенные биномиальные распределения, связанные с определенными начальными условиями, и рассмотрены их пуассоновские приближения.

I. Обобщенное биномиальное распределение, связанное с начальным условием $P(0) = 0$, и его пуассоновское приближение

Рассмотрим $(n-1)$ испытаний Бернулли, двумя возможными исходами которых являются возникновение единичного элемента и возникновение нулевого элемента.

Нас интересует суммарное число возникновений единичных элементов, достигнутых в последовательности из $(n-1)$ испытаний Бернулли, независимо от порядка их следования. Со-

бытие " $(n-1)$ испытаний привели $(i-1)$ раз к возникновению единичного элемента и $(n-i)$ раз к возникновению нулевого элемента" содержит столько элементарных событий, сколькими способами можно $(i-1)$ единичных элементов распределить по $(n-1)$ местам. Это значит, что наше событие содержит C_{n-1}^{i-1} точек, а каждая точка имеет вероятность $\rho^{i-1}(1-\rho)^{n-i}$. Допустим, что до осуществления испытаний Бернулли возникновение одного единичного элемента заранее определено. Тогда имеем: вероятность возникновения i единичных элементов после $(n-1)$ испытаний Бернулли равна

$$v(i) = C_{n-1}^{i-1} \rho^{i-1} (1-\rho)^{n-i}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (I)$$

Распределение (I) есть обобщенное биномиальное распределение, связанное с начальным условием $P(0) = 0$.

Положив $(n-1)\rho = c_1$, мы имеем $\rho = \frac{c_1}{n-1}$.

Подставив $\frac{c_1}{n-1}$ вместо ρ , перепишем формулу (I) в виде

$$\begin{aligned} v(i) &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{(i-1)!} \left(\frac{c_1}{n-1}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{c_1}{n-1}\right)^{n-i} = \\ &= \frac{c_1^{i-1}}{(i-1)!} \times \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{(n-1)^{i-1}} \left(1 - \frac{c_1}{n-1}\right)^{n-i}. \end{aligned}$$

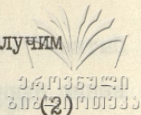
Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ (и $\rho \rightarrow 0$) с условием

$(n-1)\rho = \text{const.}$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(i) = \frac{c_1^{i-1}}{(i-1)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{(n-1)^{i-1}} \left(1 - \frac{c_1}{n-1}\right)^{n-i} = \frac{c_1^{i-1} e^{-c_1}}{(i-1)!}.$$

Введем специальное обозначение для правой части, получим

$$P(i) = \frac{e^{-c_1} c_1^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i=1, 2, \dots$$



Легко видеть, что среднее значение (математическое ожидание) распределения (2) \bar{i} равно

$$\bar{i} = \sum_{i=1}^{\infty} i P(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{e^{-c_1} c_1^{i-1}}{(i-1)!} = c_1 + 1.$$

Отсюда имеем $c_1 = \bar{i} - 1$.

Итак, подставив $(\bar{i} - 1)$ вместо c_1 , получим

$$P(i) = \frac{e^{-(\bar{i}-1)} (\bar{i}-1)^{i-1}}{(i-1)!}. \quad (3)$$

Это пуассоновское приближение для обобщенного биномиального распределения (I).

Аналогичным образом, только теперь вместо события " $(n-1)$ испытаний привели $(i-1)$ раз к возникновению единичного элемента и $(n-i)$ раз к возникновению нулевого элемента" рассмотрим событие " $(n-\nu)$ испытаний привели $(i-\nu)$ раз к возникновению единичного элемента и $(n-i)$ раз к возникновению нулевого элемента", учитывая, что до осуществления испытаний Бернулли возникновение ν единичных элементов заранее определено.

Рассуждая так же, как выше, получим распределение

$$U(i) = C_{n-\nu}^{i-\nu} p^{i-\nu} (1-p)^{n-i}, \quad (4)$$

где ν - целое положительное число, $\nu = 1, 2, \dots$

После предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ (и $p \rightarrow 0$)

с условием $(n - \nu)\mu = \text{const}$ получим следующее пуассоновское приближение для распределения (4):

$$P(i) = \frac{e^{-(\bar{i} - \nu)} (\bar{i} - \nu)^{i - \nu}}{(\bar{i} - \nu)!} \quad (5)$$

В частном случае $\nu = 1$ получим распределение (2).

2. Обобщенное биномиальное распределение, связанное с начальным условием $0 \leq P(0) \leq e^{-\bar{i}}$, и его пуассоновское приближение

В предыдущем параграфе было рассмотрено событие $(n - \nu)$ испытаний Бернулли с допущением, что до осуществления этих $(n - \nu)$ испытаний возникновение ν единичных элементов заранее определено, где $\nu = 1, 2, \dots$. Заметим, что при $\nu = 0$ распределение (4) приводится к биномиальному распределению, а распределение (5) - к известному распределению Пуассона.

Теперь рассмотрим последовательность $(n - \nu)$ испытаний Бернулли, где $0 \leq \nu \leq n$. Допустим, что до осуществления $(n - \nu)$ испытаний Бернулли возникновение ν единичных элементов заранее определено с вероятностью P_ν .

Для случайной величины, принимающей целые значения от 0 до n с вероятностями P_ν , мы имеем $\sum_{\nu=0}^n P_\nu = 1$.

Пусть событие возникновения ν единичных элементов и событие " $(n - \nu)$ испытаний привели $(i - \nu)$ раз к возникновению единичного элемента и $(n - i)$ раз к возникновению нулевого элемента" независимы.

Событие "последовательность $(n-\nu)$ испытаний Бернулли с допущением, что до осуществления этих испытаний возникновение ν единичных элементов заранее определено с вероятностями ρ_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$, привела i раз к возникновению единичного элемента и $(n-i)$ раз к возникновению нулевого элемента" содержит всего $\sum_{\nu=0}^n C_{n-\nu}^{i-\nu}$ точек, а каждая точка имеет вероятность $\rho_\nu p^{i-\nu} (1-p)^{n-i}$. Поэтому вероятность возникновения i единичных элементов последовательности $(n-\nu)$ испытаний Бернулли с допущением, что до осуществления этих испытаний возникновение ν единичных элементов определено с вероятностями ρ_ν , равна

$$\Psi(i) = \sum_{\nu=0}^n \rho_\nu C_{n-\nu}^{i-\nu} p^{i-\nu} (1-p)^{n-i}. \quad (6)$$

Введем новые параметры так, что $\epsilon_0 = 1$, $\rho_\nu = \epsilon_\nu - \epsilon_{\nu+1}$. Тогда для всех $\nu > n$ мы имеем $\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+2} = \dots = 0$. Перепишем формулу (6) в виде

$$\Psi(i) = \sum_{\nu=0}^n (\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu+1}) C_{n-\nu}^{i-\nu} p^{i-\nu} (1-p)^{n-i}, \quad (7)$$

где $\epsilon_0 = 1$.

Распределение (7) есть обобщенное биномиальное распределение, связанное с начальным условием $0 \leq \rho(0) \leq e^{-1}$.

Теперь рассмотрим пуассоновское приближение формулы (7).

Заметим, что среднее значение $\bar{\nu}$ случайной величины, принимающей значения ν от 0 до n с вероятностями ρ_ν , равно

$$\bar{v} = \sum_{v=0}^n v p_v = \sum_{v=0}^n v (\epsilon_v - \epsilon_{v+1}) = \sum_{v=1}^n \epsilon_v,$$

так как $\epsilon_{n+1} = 0$.

Среднее значение \bar{i} распределения (7) равно

$$\bar{i} = (n - \bar{v})\rho + \bar{v}. \quad (8)$$

Чтобы осуществить пуассоновское приближение для (7),

положим

$$\bar{i} - \bar{v} = (n - \bar{v})\rho = A. \quad (9)$$

Отсюда мы имеем $\rho = \frac{A}{n - \bar{v}}$.

Подставив $\frac{A}{n - \bar{v}}$ вместо ρ , перепишем формулу (7) в

виде

$$\Psi(i) = \sum_{v=0}^n (\epsilon_v - \epsilon_{v+1}) C_{n-v}^{i-v} \left(\frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{i-v} \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-i}$$

Рассмотрим

$$\Psi(i) = C_{n-v}^{i-v} \left(\frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{i-v} \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-i}.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi(i) &= \frac{(n-v)(n-v-1)\dots(n-i+1)}{(i-v)!} \times \frac{A^{i-v}}{(n-\bar{v})^{i-v}} \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-i} = \\ &= \frac{A^{i-v}}{(i-v)!} \times \frac{(n-v)(n-v-1)\dots(n-i+1)}{(n-\bar{v})^{i-v}} \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-i} \end{aligned}$$

Для любого фиксированного v

$$\begin{aligned} \frac{(n-v)(n-v-1)\dots(n-i+1)}{(n-\bar{v})^{i-v}} &= \frac{n-v}{n-\bar{v}} \times \frac{n-v-1}{n-\bar{v}} \times \dots \times \frac{n-i+1}{n-\bar{v}} = \\ &= \left(1 - \frac{v-\bar{v}}{n-\bar{v}}\right) \left(1 - \frac{v-\bar{v}-1}{n-\bar{v}}\right) \dots \left(1 - \frac{i-\bar{v}-1}{n-\bar{v}}\right), \end{aligned}$$

и это выражение стремится к единице при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны мы имеем

$$\left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-i} = \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-\bar{v}} \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{\bar{v}-i}$$



Так как при $n \rightarrow \infty$ (и $\mu \rightarrow 0$) с условием $(n-\bar{v})\mu = \text{const}$

$$\left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{\bar{v}-i} \rightarrow 1, \quad \left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-\bar{v}} \rightarrow e^{-A},$$

имеем

$$\left(1 - \frac{A}{n-\bar{v}}\right)^{n-i} \rightarrow e^{-A} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Поэтому мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(i) = e^{-A} \frac{A^{i-v}}{(i-v)!}$$

для всех v .

Итак, из формулы (7), переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ (и $\mu \rightarrow 0$) с условием $\bar{i} - \bar{v} = (n-\bar{v})\mu = A = \text{const}$, мы получим формулу

$$F(i) = e^{-A} \sum_{v=0}^{\infty} (\epsilon_v - \epsilon_{v+1}) \frac{A^{i-v}}{(i-v)!},$$

где $A = \bar{i} - \bar{v} = \bar{i} - \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k$ и $\epsilon_0 = 1$.

Наконец, мы имеем

$$F(i) = e^{-(\bar{i} - \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k)} \sum_{v=0}^{\infty} (\epsilon_v - \epsilon_{v+1}) \frac{(\bar{i} - \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k)^{i-v}}{(i-v)!}, \quad (10)$$

где $\epsilon_0 = 1$.

В работе [3] показано, что формула (10) описывает распределения, связанные с начальным условием $0 \leq P(0) \leq e^{-\bar{i}}$

3. Обобщенное биномиальное распределение, связанное с начальным условием $P(0) \geq e^{-\bar{i}}$, и его пуассоновское приближение

Сначала рассмотрим несовместные события B и B_i

($i = 0, 1, 2, \dots, n$), определяемые следующим образом:

B - событие " n испытаний привели n раз к возникновению нулевого элемента",

B_i - событие " n испытаний Бернулли привели i раз к возникновению единичного элемента и $(n-i)$ раз к возникновению нулевого элемента",

причем вероятность $P(B) = 1 - \gamma$, $\sum_{i=0}^n P(B_i) = \gamma$,
где $0 < \gamma \leq 1$.

Событие B_i содержит C_n^i точек, а каждая точка имеет вероятность $\gamma p^i (1-p)^{n-i}$. Итак, мы имеем

$$\phi(B_i) = \gamma C_n^i p^i (1-p)^{n-i}. \quad (II)$$

Положим $np = \bar{i}_\gamma \rightarrow p = \frac{\bar{i}_\gamma}{n}$ и перепишем формулу (II) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi(B_i) &= \gamma \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!} \left(\frac{\bar{i}_\gamma}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\bar{i}_\gamma}{n}\right)^{n-i} = \\ &= \gamma \frac{(\bar{i}_\gamma)^i}{i!} \times \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \left(1 - \frac{\bar{i}_\gamma}{n}\right)^{n-i} \end{aligned}$$

При условии $np = \text{const}$ при $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ получим

$$P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(B_i) = \gamma \frac{\bar{i}_\gamma^i}{i!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \left(1 - \frac{\bar{i}_\gamma}{n}\right)^{n-i} = \gamma e^{-\bar{i}_\gamma} \frac{(\bar{i}_\gamma)^i}{i!}.$$

Среднее значение распределения

$$\bar{i} = 0 \cdot P(B) + \sum_{i=0}^{\infty} i P(B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \gamma e^{-\bar{i}_\gamma} \frac{(\bar{i}_\gamma)^i}{i!} = \gamma \bar{i}_\gamma,$$

так как $\sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\bar{i}_\gamma} \frac{(\bar{i}_\gamma)^i}{i!} = \bar{i}_\gamma.$

Отсюда следует

$$\bar{i}_\gamma = \frac{\bar{i}}{\gamma}$$

и

$$P(B_i) = \gamma e^{-\frac{\bar{l}}{\gamma}} \frac{(\frac{\bar{l}}{\gamma})^i}{i!}.$$

Обозначив через $P(i)$ вероятность возникновения i ничных элементов, мы имеем

$$P(i) = P(B_i) = \gamma e^{-\frac{\bar{l}}{\gamma}} \frac{(\frac{\bar{l}}{\gamma})^i}{i!}$$

при $i = 1, 2, \dots$

$$P(0) = P(B) + P(B_0) = 1 - \gamma + \gamma e^{-\frac{\bar{l}}{\gamma}}.$$

Таким образом, получим распределение, удовлетворяющее начальному условию $P(0) \geq \exp\{-\bar{l}\}$

$$P(i) = \gamma \exp\{-\frac{\bar{l}}{i}\} \frac{(\frac{\bar{l}}{\gamma})^i}{i!}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (I2)$$

где $\gamma = \frac{1 - P(0)}{1 - \exp\{-\frac{\bar{l}}{\gamma}\}}.$

В частном случае $P(0) = \exp\{-\bar{l}\}$ (следовательно, $\gamma = 1$) распределение (I2) приводит к распределению Пуассона.

4. Обобщенные пуассоновские распределения и их классификация

Распределения (I0) и (I2) являются обобщением распределения Пуассона с некоторыми начальными условиями, налагаемыми на вероятность $P(0)$. Поэтому в зависимости от $P(0)$ можно провести следующую классификацию:

1. Верхнее пуассоновское распределение описывается формулой (I2) при условии $\exp\{-\bar{l}\} \leq P(0) < 1$.

При $P(0) = \exp\{-\bar{l}\}$ распределение (I2) переходит в распределение Пуассона.

2. Нижнее пуассоновское распределение описывается формулой (I0) при условии $0 \leq P(0) < \exp\{-\bar{l}\}$.

В частности, при $P(0) = 0$ (следовательно, $E_1 = 1$) мы имеем распределение Фукса для элементов небескомпонентного класса $[1]$. А при $P(0) = \exp\{-\bar{i}\}$ (следовательно, $E_1 = 0$) распределение (10) переходит в распределение Пуассона.

Начальные условия обобщенного пуассоновского распределения свидетельствуют о некотором заранее определенном распределении до осуществления случайного распределения по закону Пуассона.

Новые распределения могут быть применены не только там, где применяется распределение Пуассона, но и в различных сферах статистики. В частности, они могут быть успешно применены при исследовании процесса образования лингвистических элементов и статистической структуры печатной информации.

Поступила 4.X.1976

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Фукс, Сб. "Теория передачи сообщений", М., 1957.
2. Н.В.Бокучава, Т.Г.Гачечиладзе, Об одном методе изучения статистической структуры печатной информации. Труды Тбилисского государственного университета, том 103, серия физических наук, 1965.
3. Нгуен Хак Фук, Сообщения АН СССР, 62, № 2, 1971.
4. Нгуен Хак Фук, Сообщения АН СССР, 66, № 2, 1972.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

РЕГИСТРАЦИЯ ИМПУЛЬСОВ ОПТИЧЕСКИМ ИНДИКАТОРОМ СО
СВЕТОВОЙ НАКАЧКОЙ

В.В.Митюгов, К.Я.Николадзе

Введение

Оптический индикатор со световой накачкой является типичным квантовым нелинейным преобразователем света, особенно эффективным для приема сигналов и регистрации импульсов в инфракрасном диапазоне. Смысл работы такого устройства сводится к преобразованию несущей частоты сигнальных импульсов ω_s в оптическую частоту $\omega_s + \omega_p = \omega$ за счет нелинейного взаимодействия сигнальных квантов с фотонами накачки энергии $\hbar\omega_p$ в среде с последующей регистрацией оптических фотонов $\hbar\omega$. По существу, индикатор работает как обращенный оптический гетеродин (см. [1]).

Важной характеристикой оптического индикатора является вероятность того, что сигнальный импульс с заданными статистическими свойствами не будет зарегистрирован (вероятность пропуска). Во-первых, по вполне понятным причинам эта характеристика представляет непосредственный интерес для задач локации. Во-вторых, знание вероятности пропуска позволяет подойти к вопросу о реализации пропускной способности квантового канала с малыми числами заполнения, поскольку наиболее выгодной здесь оказывается двоично-импульсная мо-

дуляция. Строго говоря, если в канале присут-
ствуют аддитивные шумы, то необходимо еще вычислить веро-
ятность ложной регистрации импульса (в локации ее называют
"ложной тревогой").

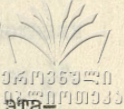
Однако в этой статье аддитивные шумы мы учитывать не
будем, предполагая оценить лишь собственные шумы индикато-
ра с учетом статистических свойств самого импульса.

I. Регистрация n -квантового импульса

На энергетической диаграмме каждый из атомов рабочего
вещества индикатора следует изобразить как трехуровневую
систему (см. рис.1). Переход $1 \rightarrow 3$ происходит при воз-
буждении атомов сигнальными квантами частоты $\omega_s = (E_2 - E_1)/\hbar$,
последующий переход $2 \rightarrow 3$ осуществляется за счет свето-
вой накачки на частоте $\omega_p = (E_3 - E_1)/\hbar$, а регистрации
подлежат кванты энергии $\hbar\omega = E_3 - E_1$, излучаемые при
сигнальном переходе $3 \rightarrow 1$.

Построения вероятностной схемы возбуждения атомов на-
чнем с рассмотрения поглощения сигнальных квантов. Будем
предполагать, что исходно все N атомов находятся в ниж-
нем энергетическом состоянии ($N_1 = N$), а их число всякий
раз велико по сравнению с числом квантов в импульсе $n_s \ll N$.
Тогда процесс можно характеризовать интегральной вероят-
ностью α_1 поглощения одного кванта всем рабочим веществом
и записать условную вероятность возбуждения N_2 атомов до
энергии E_2 по прохождении n_s сигнальных квантов на ос-
новании традиционной схемы Бернулли

$$P(N_2/N_1) = \frac{\alpha_1^{N_2} \beta_1^{N_3 - N_2} n_s!}{(n_3 - N_2)! N_2!} .$$

(1) 

Чтобы описать процесс возбуждения атомов на втором этапе $2 \rightarrow 3$, примем, что вероятность поглощения отдельного кванта частоты ω_p отдельным атомом $\alpha_2 \ll 1$, а число квантов накачки $n_p \gg 1$ и велико в сравнении с N_2 . Вероятность того, что отдельный атом, исходно находившийся на уровне 2, не испытывает дальнейшего возбуждения при взаимодействии с n_p квантами накачки, есть $(1 - \alpha_2)^{n_p}$. При наших допущениях теперь снова можно применить схему Бернулли, но теперь уже считать независимыми не акты поглощения квантов веществом, а наоборот - акты возбуждения отдельных атомов всей совокупностью квантов накачки. В стандартных обозначениях запишем

$$P(N_3/N_2, n_p) = \frac{[1 - (1 - \alpha_2)^{n_p}]^{N_3} (1 - \alpha_2)^{n_p (N_2 - N_3)} N_2!}{N_3! (N_2 - N_3)!} . \quad (2)$$

Теперь нам надлежит учесть статистические свойства источника накачки. Если характеризовать их безусловным распределением $P(n_p)$, то условная вероятность обнаружить N_3 атомов на 3-м уровне после падения на рабочее вещество n_s сигнальных квантов запишется в виде

$$P(N_3/n_s) = \sum_{N_2, n_p} P(N_2/n_s) P(n_p) P(N_3/n_p, N_2) . \quad (3)$$

Если предположить, что вероятность в единицу времени спонтанного перехода $3 \rightarrow 1$ много выше, чем перехода $3 \rightarrow 2$ (вещество именно с такими свойствами целесообразно использовать в индикаторе), то соотношение (3) определит нам ве-

роятность обнаружить на выходе индикатора n оптических квантов при наличии n_s сигнальных - стоит лишь заменить N_s на n . При этом величина $P(0/n_s)$ как раз и будет соответствовать вероятности пропуска n_s -квантового импульса, которым мы в основном интересуемся.

Будем предполагать, что свет накачки имеет тепловое происхождение (но, разумеется, неравновесен по спектральному составу). Тогда статистические свойства накачки характеризуются распределением

$$P(n_p) = \frac{1}{\bar{n}_p + 1} \left(\frac{\bar{n}_p}{\bar{n}_p + 1} \right)^{n_p}$$

или, при $\bar{n}_p \gg 1$ (что мы и будем в дальнейшем предполагать)

$$P(n_p) \approx \frac{1}{\bar{n}_p} e^{-\frac{n_p}{\bar{n}_p}}. \quad (4)$$

Мы пока отвлекаемся от рассмотрения процессов во времени, однако здесь необходимо отметить, что под \bar{n}_p в (4) следует понимать среднее число фотонов накачки, проходящее через рабочее вещество индикатора за время порядка времени жизни атомов на втором уровне.

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), после необходимого суммирования получим

$$P_{np}(n_s) = P(0/n_s) = (1 - \alpha_1)^{n_s} F\left(-n_s, \frac{1}{\bar{n}_p \gamma}; 1 + \frac{1}{\bar{n}_p \gamma}; -\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right), \quad (5)$$

где $F(x, y; z; t)$ - гипергеометрическая функция, а $\gamma = -\ln(1 - \alpha_2)$. В практически интересном случае, когда накачка достаточно сильна, $\bar{n}_p \gamma \gg 1$, а интегральная прозрачность рабочего вещества для сигнальных фотонов $1 - \alpha_1$ невелика, формулу (5) можно несколько упростить, переписав

$$P_{np}(n_s) = (1 - \alpha_1)^{n_s} \left[1 + \frac{1}{\bar{n}_p} \gamma \sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{k} \binom{n_s}{k} \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right)^k \right].$$

(6)
 04.03.53-40
 202-0110333

Эта формула и послужит нам основой для дальнейших оценок, учитывающих величину и статистические свойства регистрируемого импульса.

2. Импульс от теплового источника

Оценим вероятности регистрации и пропуска для импульса, имеющего тепловое происхождение. Говоря о тепловом источнике, мы вовсе не предполагаем равновесного распределения его фотонов по энергиям (частотам) - энергии всех фотонов в импульсе по-прежнему считаются близкими к $\hbar \omega_s$. Речь идет лишь о тепловом (гиббсовском) характере флуктуаций, которые описываются распределением

$$P(n_s) = \frac{1}{\bar{n}_s + 1} \left(\frac{\bar{n}_s}{\bar{n}_s + 1} \right)^{n_s} \quad (7)$$

и характеризуются дисперсией $(\Delta n_s)^2 = \bar{n}_s (\bar{n}_s + 1)$.

Кроме теплового такими же статистическими свойствами обладает излучение лазера, работающего вблизи порога возбуждения [5].

Вероятность пропуска для импульса тепловой природы получается простым усреднением

$$P_{np}^{(\tau)}(\bar{n}_s) = \sum_{n_s=0}^{\infty} P(n_s) P_{np}(n_s) = \frac{1}{\bar{n}_s + 1} \sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{n_s}{\bar{n}_s + 1} \right)^{n_s} \beta_1^{n_s} + \frac{1}{(\bar{n}_s + 1) \bar{n}_p} \gamma \sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}_s}{\bar{n}_s + 1} \right)^{n_s} \beta_1^{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{k} \binom{n_s}{k} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^k, \quad (8)$$

где введено обозначение $\beta_1 = 1 - \alpha_1$ К сожалению, не-

посредственный анализ этого выражения довольно затрудни-
телен, поэтому рассмотрим следующие предельные случаи.

1. Квантовый сигнал $\bar{n}_s \ll 1$. Сохраняя в сумме по n_s лишь два первых члена, получим

$$\rho_{np}(\tau) = \frac{1}{\alpha_1 \bar{n}_s + 1} + \frac{\alpha_1 \bar{n}_s}{\gamma \bar{n}_p (\bar{n}_s + 1)^2} \quad (9)$$

Легко видеть, что первый член в этой формуле есть просто вероятность того, что все фотоны импульса беспрепятственно пройдут сквозь рабочее вещество; второй же учитывает потери при световой накачке. Заметим, что при $\gamma \bar{n}_p \gg 1$ и $\beta_1 \ll 1$ эта формула сохраняет применимость в несколько более широкой области, нежели $\bar{n}_s < 1$, поэтому численные оценки по ней проводились до $\bar{n}_s = 5$ (см. рис.2).

2. Классический сигнал $\bar{n}_s \gg 1$. В этом случае двойная сумма во втором слагаемом формулы (8) вычисляется следующим образом. Преобразуем сумму

$$\sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{k} \binom{n_s}{k} \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \right)^k = \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\beta_1^{-k}}{k} - \frac{1}{k} \right)$$

и заменим $P(n_s) \approx \bar{n}_s^{-1} \exp(-n_s/\bar{n}_s)$. Для оценки гармонического ряда используем асимптотическое выражение

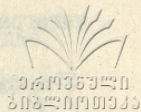
$\sum_{k=1}^{n_s} k^{-1} = C + \ln n_s$ (C - постоянная Эйлера), а сумму по n_s заменим интегралом

$$\sum_{n_s=1}^{\infty} e^{-\frac{n_s}{\bar{n}_s}} \beta_1^{n_s} \ln n_s \approx \int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{\bar{n}_s}} \beta_1^x \ln x dx.$$

Проводя необходимые выкладки, получим

$$\rho_{np}(\tau)(\bar{n}_s) = \frac{1}{\alpha_1 \bar{n}_s + 1} + \frac{\ln \bar{n}_s}{(1 - \bar{n}_s \ln \beta_1) \gamma \bar{n}_p} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{\gamma \bar{n}_p} \left[\frac{c \beta_1}{\alpha_1 \bar{n}_s + 1} + \frac{1}{1 - \bar{n}_s \ln \beta_1} \left(-Ei \left(-\frac{1 - \bar{n}_s \ln \beta_1}{\gamma \bar{n}_p} \right) \right) \right],$$



где $-Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$, ($x > 0$) - интегральная показательная функция.

На рис. 2 в полулогарифмическом масштабе показано поведение функции $P_{np}(\bar{n}_s)$ при $\alpha_1 = 0,9$ двух различных значениях произведения $\gamma \bar{n}_p = 10; 100$.

Значения $P_{np}(\bar{n}_s)$ в точках 0,1; 1; 5 вычислены по формуле (9), а в точках 50; 100; 10^3 - по формуле (10).

3. Когерентный источник

Статистика числа фотонов в импульсе, порожденном когерентным источником, характеризуется распределением Пуассона

$$P(n_s) = \frac{\bar{n}_s^{n_s}}{n_s!} e^{-\bar{n}_s}. \quad (II)$$

При малых \bar{n}_s с теми же оговорками, что и для импульса теплового происхождения получим

$$P_{np}^{(ког)}(\bar{n}_s) = e^{-\alpha_1 \bar{n}_s} + \frac{\alpha_1 \bar{n}_s e^{-\bar{n}_s}}{\gamma \bar{n}_p}. \quad (I2)$$

Сравнение (I2) и (9) с учетом (II) показывает, что физическая природа первого и второго слагаемых опять сводится соответственно к вероятности непоглощения всех фотонов импульса рабочим веществом и учету недостаточности накачки.

Наконец, рассмотрим мощный когерентный импульс $\bar{n}_s \gg 1$. В этом случае целесообразно аппроксимировать пуассоновское распределение (II) гауссовым $P(\bar{n}_s) \approx (2\pi \bar{n}_s)^{-1/2} \exp[-(n_s - \bar{n}_s)^2 / 2\bar{n}_s]$ с той же дисперсией $(\Delta n_s)^2 = \bar{n}_s$. Сумму по n_s заменим

интегралом, записав

$$\sum_{n_s=1}^{\infty} e^{-(n_s - \bar{n}_s)^2 / 2\bar{n}_s} \beta_1^{n_s} \left[\sum_{k=1}^{n_s} \frac{\beta_1^{-k}}{k} - \sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{k} \right] = \int_1^{\infty} e^{-(x - \bar{n}_s)^2 / 2\bar{n}_s} \beta_1^x \int_1^{\infty} \frac{\beta_1^{-t} - 1}{t} dt \quad (I3)$$

Экспонента под интегралом в правой части имеет максимум при $x = \bar{n}_s$, тогда как оставшаяся функция в подинтегральном выражении весьма медленно меняется с x . Поэтому можно без большой погрешности заменить эту функцию ее рядом Тейлора в точке $x = \bar{n}_s$ и ограничиться квадратичным членом разложения по $x - \bar{n}_s$. Кроме того, экспонента очень быстро убывает с увеличением $(x - \bar{n}_s)^2$, поэтому нижний предел интегрирования по x в (I3) можно распространить до $-\infty$. Учитывая сделанные замечания, после несколько утомительных выкладок получим

$$\rho_{np}^{(\kappa\alpha)}(\bar{n}_s) = e^{-\alpha_1 \bar{n}_s} + \frac{\beta_1^{\bar{n}_s} (1 - 2\bar{n}_s \ln \beta_1) + \bar{n}_s \ln \beta_1 - 1}{2\bar{n}_s \gamma \bar{n}_p} + \quad (I4)$$

$$+ \frac{\beta_1^{\bar{n}_s} (2 + \bar{n}_s \ln^2 \beta_1)}{2\gamma \bar{n}_p} [Ei^*(-\bar{n}_s \ln \beta_1) - Ei^*(-\ln \beta_1) - \ln \bar{n}_s]$$

$$Ei^*(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (x > 0).$$

Графически функция $\rho_{np}^{(\kappa\alpha)}(\bar{n}_s)$ представлена на рис. 3 при тех же предположениях и численных значениях параметров α_1 , $\gamma \bar{n}_p$, что и для квазитеплого импульса на рис. 2 (см.).

Сравнение графиков на рисунках 2 и 3 показывает, что вероятность пропуска для когерентного импульса в среднем значительно меньше, чем для теплового, особенно при $\bar{n}_s \gg 1$.

Как уже отмечалось выше, наши результаты можно использовать для оценки пропускной способности и оптимизации кван-

того канала с кодово-импульсной модуляцией. Очевидно, что в отсутствие аддитивных тепловых шумов такой сигнал полностью характеризуется вероятностью пропуска импульса, поскольку вероятность ложной регистрации в этом случае заведомо равна нулю. Проблема оптимизации двойного кодово-импульсного канала возникает в связи с тем, что при заданной средней мощности потока сигналов существуют два конкурирующих фактора, уменьшающих скорость передачи информации: увеличение среднего интервала времени между посылками импульсов и уменьшение числа фотонов в отдельном импульсе, приводящее к возрастанию вероятности пропуска. Однако для анализа подобной проблемы необходимо оценивать уже и время, затрачиваемое индикатором на регистрацию импульса, что выходит за рамки этой небольшой статьи.

Поступила 7.УІ.1976

Горьковский госуниверситет,
кафедра теоретической физики;
Проблемная лаборатория физической
кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Бломберген, Нелинейная оптика. "Мир", М., 1966.
2. В.В.Митюгов, Физические основы теории информации. "Советское радио", М., 1976.
3. С.М.Рытов, Введение в статистическую радиофизику. "Наука", М., 1966.

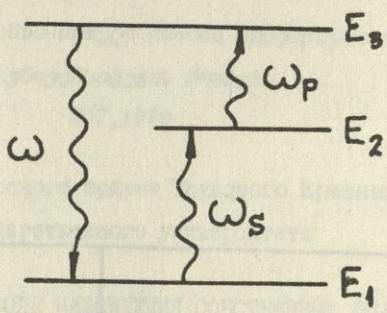


Рис. I

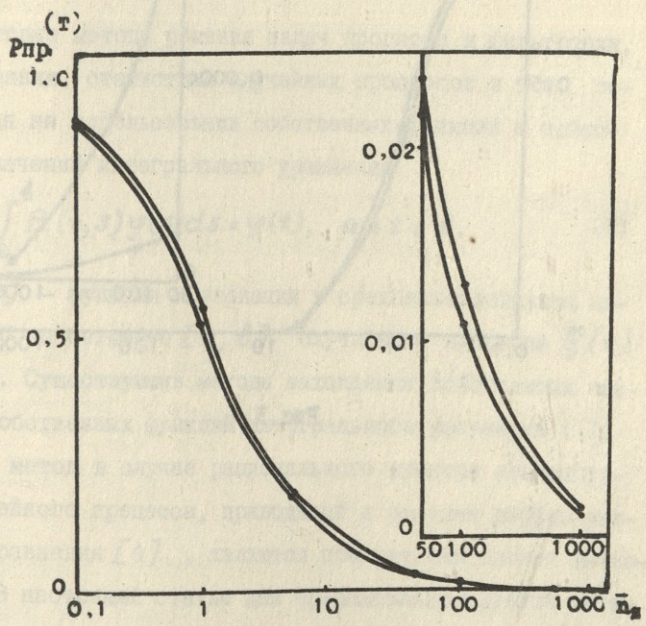
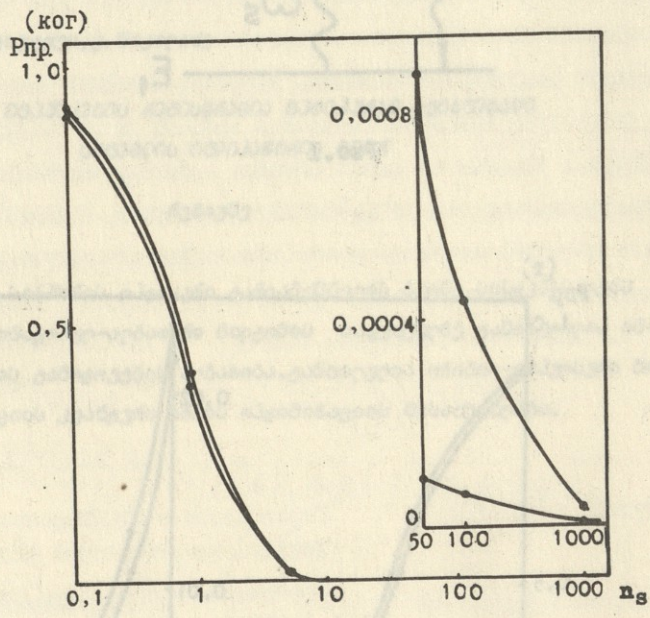
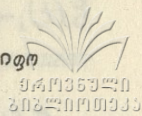


Рис. 2



Քից.3



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

З.А.Пиранашвили, Н.П.Асланиди

Некоторые методы решения задач прогноза и фильтрации, моделирования, статистики случайных процессов и т.д. основываются на использовании собственных функций и собственных значений интегрального уравнения

$$\lambda \int_a^b B(t,s) y(s) ds = y(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (I)$$

где $B(t,s)$ – функция ковариации в среднеквадратичном непрерывного на сегменте $[a, b]$ случайного процесса $\xi(t)$ [1,2,3]. Существующие методы нахождения собственных значений и собственных функций интегрального уравнения (I), например, метод в случае рационального спектра стационарного случайного процесса, приводящий к решению дифференциального уравнения [4], являются практически сложно вычисляемыми. В настоящей статье дан сравнительно простой метод нахождения приближенных собственных значений и собственных функций для некоторого класса стационарных и нестационарных случайных процессов.

Пусть $B(t,s)$ – функция ковариации случайного процесса

$\xi(t), -\infty < t < \infty$, с вещественными или комплексными значениями, второго порядка, для которого справедлива формула:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Условия, которые налагаются на $B(t, s)$ для справедливости представления (2), даны в работе [5]. Если для процесса справедлива формула (2), то для функции ковариации $B(t, s)$ справедливы следующие формулы [5]:

$$B(t, s) = \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\sin \alpha \left(s - \frac{m\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(s - \frac{m\pi}{\alpha}\right)} \quad (3)$$

и

$$B(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, s\right) \cdot \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)} \quad (4)$$

равномерно по s .

Для $\psi(t)$ справедлива аналогичная (2) формула. Действительно, подставив формулу (4) в (1), получим:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \lambda \int_a^b \sum_{k=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, s\right) \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)} \cdot \psi(s) ds = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\lambda \int_a^b B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, s\right) \psi(s) ds \right] \cdot \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \cdot \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{k\pi}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь, подставляя в уравнение (1) вместо левой части представление (5), а в правую часть формулы (3) и (5), получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})} = \lambda \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin \alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \int_a^b \frac{\sin \alpha(s - \frac{m\pi}{\alpha})}{\alpha(s - \frac{m\pi}{\alpha})} \times$$

$$\times \frac{\sin \alpha(s - \frac{n\pi}{\alpha})}{\alpha(s - \frac{n\pi}{\alpha})} ds.$$

Вынося общий множитель за скобки, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})} \cdot \left[\psi\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) - \lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \times \right. \quad (6)$$

$$\left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n} \psi\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \right] = 0,$$

где

$$a_{m,n} = \int_a^b \frac{\sin \alpha(s - \frac{m\pi}{\alpha})}{\alpha(s - \frac{m\pi}{\alpha})} \cdot \frac{\sin \alpha(s - \frac{n\pi}{\alpha})}{\alpha(s - \frac{n\pi}{\alpha})} ds.$$

Так как из равенства $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin \alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t - \frac{k\pi}{\alpha})} = 0$

вытекает $c_k = f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, поэтому для выполнения равенства (6) необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$\psi\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) - \lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n} \psi\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Если бесконечный ряд Котельникова заменить конечным приближением, то тогда вместо бесконечной системы получим конечную систему линейных однородных уравнений:

$$\left[\lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{-N\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,-N}^{-1} \right] \cdot \psi\left(\frac{-N\pi}{\alpha}\right) + \lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{-N\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,-N+1} \times$$

$$\times \psi\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}\right) + \dots + \lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{-N\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,N} \psi\left(\frac{N\pi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$\lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,-N} \psi\left(\frac{-N\pi}{\alpha}\right) + \left[\lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \right] \times$$

$$\times a_{m,-N+1}^{-1} \cdot \psi\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}\right) + \dots + \lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \times$$

$$\times a_{m,N} \psi\left(\frac{N\pi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$\lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{N\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,-N} \psi\left(\frac{-N\pi}{\alpha}\right) + \dots +$$

$$+ \left[\lambda \sum_{m=-N}^N B\left(\frac{N\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,N}^{-1} \right] \cdot \psi\left(\frac{N\pi}{\alpha}\right) = 0.$$

Обозначим

$$\sum_{m=-N}^N B\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) a_{m,n} = b_{\kappa,n}, \quad \kappa, n = \overline{-N, N}.$$

Тогда система примет более компактный вид:

$$(\lambda b_{-N,-N}^{-1}) \cdot \psi\left(\frac{-N\pi}{\alpha}\right) + \lambda b_{-N,-N+1} \cdot \psi\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}\right) + \dots + \lambda b_{-N,N} \psi\left(\frac{N\pi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$\lambda b_{-N+1,-N} \psi\left(\frac{-N\pi}{\alpha}\right) + (\lambda b_{-N+1,-N+1}^{-1}) \psi\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}\right) + \dots + \lambda b_{-N+1,N} \psi\left(\frac{N\pi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$\lambda b_{N,-N} \psi\left(\frac{-N\pi}{\alpha}\right) + \lambda b_{N,-N+1} \cdot \psi\left(\frac{(-N+1)\pi}{\alpha}\right) + \dots + (\lambda b_{N,N}^{-1}) \psi\left(\frac{N\pi}{\alpha}\right) = 0$$

Линейная однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda b_{-N,-N}^{-1} & \lambda b_{-N,-N+1} & \dots & \lambda b_{-N,N} \\ \lambda b_{-N+1,-N} & \lambda b_{-N+1,-N+1}^{-1} & \dots & \lambda b_{-N+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_{N,-N} & \lambda b_{N,-N+1} & \dots & \lambda b_{N,N}^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

Вычисляя определитель, получим полином $P(\lambda)$ степени $(2N+1)$ или меньше относительно λ .

Найдя вещественные положительные корни этого полинома из системы (7), найдем $\Psi\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)$, $\kappa = -N, N$, а затем по формуле (5)-соответствующим собственным значениям собственные функции. Заметим, что вещественные положительные корни уравнения $P(\lambda) = 0$ являются приближенными собственными значениями функции ковариации $B(t, s)$ процесса $\xi(t)$. Точными собственными значениями они являются для функции ковариации случайного процесса

$$\xi_N(t) = \sum_{\kappa=-N}^N \xi\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}\right) \cdot \frac{\sin \alpha\left(t - \frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)}{\alpha\left(t - \frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)}.$$

Приближенные собственные значения тем ближе к точным, чем больше N .

Если для случайного процесса $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, с вещественными или комплексными значениями, второго порядка справедлива формула [5]:

$$\xi(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha\left(t - \frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)}{\alpha\left(t - \frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)} \cdot \left[\frac{\sin \beta\left(t - \frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)}{\beta\left(t - \frac{\kappa\pi}{\alpha}\right)} \right]^q,$$

где $\alpha > \beta$, $0 < \beta < \frac{\alpha - \epsilon}{q}$, q - натуральное число, в среднеквадратичном, тогда аналогичные рассуждения приводят к системе:

$$\Psi\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}\right) - \lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} B\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}, \frac{m\pi}{\alpha}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m,n,q} \Psi\left(\frac{\kappa\pi}{\alpha}\right) = 0$$

$$\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где

$$a_{m,n,q} = \int_a^b \frac{\sin \alpha (s - \frac{m\pi}{\alpha})}{\alpha (s - \frac{m\pi}{\alpha})} \cdot \left[\frac{\sin \beta (s - \frac{m\pi}{\alpha})}{\beta (s - \frac{m\pi}{\alpha})} \right]^q \cdot \frac{\sin \alpha (s - \frac{n\pi}{\alpha})}{\alpha (s - \frac{n\pi}{\alpha})} \cdot \left[\frac{\sin \beta (s - \frac{n\pi}{\alpha})}{\beta (s - \frac{n\pi}{\alpha})} \right]^q$$

Пример. Пусть функция стационарного в широком смысле процесса имеет вид:

$$B(t, s) = \cos\left(\frac{t-s}{2}\right).$$

Так как эта функция является целой экспоненциального типа с показателем $\beta = 1/2$, то можно взять $\alpha = 1$. Тогда

$$b_{k,n} = \sum_{m=-N}^N \cos\left[\frac{(k-m)\pi}{2}\right] \cdot a_{m,n}, \quad k, n = -N, N.$$

Если $a = -\infty$, $b = \infty$, то

$$a_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(s-m\pi)}{(s-m\pi)} \cdot \frac{\sin(s-n\pi)}{(s-n\pi)} ds = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n \\ \pi, & \text{при } m = n \end{cases}$$

Коэффициенты $b_{k,n}$ примут вид

$$b_{k,n} = \pi \cdot \cos\left[\frac{(k-n)\pi}{2}\right] = \begin{cases} 0, & \text{если } (k-n) \text{ - нечетное} \\ (-1)^{\frac{k-n}{2}} \pi, & \text{если } (k-n) \text{ - четное.} \end{cases}$$

Полином $P(\lambda)$ для нахождения собственных значений будет следующий:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\pi - 1 & 0 & -\pi\lambda & 0 & \pi\lambda & 0 & \dots & (-1)^N \pi\lambda \\ 0 & \lambda\pi - 1 & 0 & -\pi\lambda & 0 & \pi\lambda & \dots & 0 \\ -\pi\lambda & 0 & \lambda\pi - 1 & 0 & -\pi\lambda & 0 & \dots & (-1)^{N+1} \pi\lambda \\ 0 & -\pi\lambda & 0 & \lambda\pi - 1 & 0 & -\pi\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^N \pi\lambda & 0 & (-1)^{N+1} \pi\lambda & 0 & (-1)^N \pi\lambda & 0 & \dots & \lambda\pi - 1 \end{vmatrix}$$

Если $N=1$, тогда

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\pi-1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 2\pi-1 & 0 \\ -\pi\lambda & 0 & 2\pi-1 \end{vmatrix} = (2\pi-1) \cdot (-1-2\lambda\pi) = 0,$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Система (7) в нашем примере переписывается следующим образом:

$$(2\pi-1)\psi(-\pi) - 2\pi\psi(\pi) = 0,$$

$$(2\pi-1) \cdot \psi(0) = 0,$$

$$-\pi\lambda \cdot \psi(-\pi) + (2\pi-1) \cdot \psi(\pi) = 0.$$

При $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, решая систему, получим:

$$\psi(-\pi) = \psi(\pi) = 0, \quad \psi(0) = C_1.$$

Соответствующая собственная функция примет вид:

$$\psi_1(t) = C_1 \cdot \frac{\sin t}{t},$$

где C_1 найдем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1^2 \cdot \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = C_1^2 \cdot \pi = 1, \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом,

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin t}{t}.$$

При $\lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$ решением системы будет:

$$\psi(-\pi) = C_2, \quad \psi(\pi) = -C_2, \quad \psi(0) = 0.$$

В этом случае собственная функция равна:

$$\psi_2(t) = C_2 \frac{\sin(t+\pi)}{(t+\pi)} - C_2 \frac{\sin(t-\pi)}{(t-\pi)},$$

где C_2 найдем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[C_2 \frac{\sin(t+\pi)}{(t+\pi)} - C_2 \frac{\sin(t-\pi)}{(t-\pi)} \right]^2 dt = C_2^2 \cdot 2\pi = 1, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом,

$$Y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(t+\pi)}{(t+\pi)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(t-\pi)}{(t-\pi)}.$$

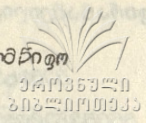
Поступила 10.X.1976

Институт кибернетики

АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И.Гихман, А.В.Скорород, Теория случайных процессов, том I, "Наука", 1971.
2. З.А.Пиранашвили, Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования непрерывных случайных процессов, Вопросы исследования операций, "Мецниереба", 1966.
3. У.Гренандер. Случайные процессы и статистические выводы, ИЛ, Москва, 1971.
4. В.Б.Давенпорт, В.Л.Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, Москва, 1960.
5. З.А.Пиранашвили, Кандидатская диссертация, Тбилиси, 1969.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ, ОСНОВАННОМ
НА ОРТОГОНАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ
ПРОЦЕССОВ

З. А. Пиранашвили, Н. П. Асланиди

Пусть $\xi(t, \omega) = \{\xi_k(t, \omega), \alpha_k \leq t \leq \beta_k\}$, $k = \overline{1, n} - n$ -
мерный случайный процесс (в общем случае с комплексными
значениями) со средним $M \xi(t, \omega) = 0$ и функцией ковари-
ации $R(t, s) = \{R_{km}(t, s)\}_{k, m = \overline{1, n}}$, где $R_{km}(t, s) =$
 $= M \xi_k(t, \omega) \overline{\xi_m(s, \omega)}$.

Подразумеваем, что

$$M |\xi_k(t, \omega)|^2 < \infty, \quad t \in [\alpha_k, \beta_k], \quad k = \overline{1, n}.$$

Требуется наилучшим образом (в смысле среднеквадратичной
метрики) оценить значение случайной величины ζ (в классе
линейных функций) по результатам наблюдений данного мно-
жества случайных величин $\{\xi_k(t, \omega)\}$, $k = \overline{1, n}$. Нахож-
дение такой оценки опирается на следующую теорему [1].

Теорема. Многомерный случайный
процесс $\xi(t, \omega) = \{\xi_k(t, \omega)\}$, $k = \overline{1, n}$, - непрерыв-
ный в ср. кв. на замкнутых интер-
валах $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = \overline{1, n}$, соответствен -

но, тогда и только тогда имеет на $[a_k, b_k]$, $k = \overline{1, n}$, соответствен-
но ортогональное разложение

$$\xi_k(t, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k z_i^k(\omega) y_i^k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где

$$\mu z_i^p(\omega) \overline{z_m^q(\omega)} = \begin{cases} C_{impq}, & \text{когда } p \neq q \\ \delta_{im}, & \text{когда } p = q \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{a_k}^{b_k} y_i^k(t) \overline{y_m^k(t)} dt = \delta_{im}, \quad k = \overline{1, n},$$

и ряды в (1) сходятся в ср. кв. равно-
мерно на $[a_k, b_k]$, когда $|\lambda_i^k|^{1/2}, y_i^k(t)$

являются собственными значения-
ми и собственными функциями ин-
тегральных уравнений с ядрами

$$R_{kk}(t, s), \quad (t, s) \in [a_k, b_k] \times [a_k, b_k], \quad k = \overline{1, n},$$

соответственно и

$$C_{impq} = \frac{1}{\lambda_i^p \lambda_m^q} \int_{a_p}^{b_p} \int_{a_q}^{b_q} R_{pq}(t, s) \overline{y_i^p(t)} y_m^q(s) dt ds, \quad (3)$$

$$z_m^k(\omega) = \frac{1}{\lambda_m^k} \int_{a_k}^{b_k} \xi_k(t, \omega) \overline{y_m^k(t)} dt, \quad k = \overline{1, n}; m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Линейную оценку будем искать в виде

$$\zeta^* = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} z_i^k(\omega) d_i^k, \quad (5)$$

где d_i^k , $k = \overline{1, n}$, $i = 1, 2, \dots$ - неизвестные постоянные, ко-
торые находятся из условия оптимальности, принимающего вид

[2]:

$$M[\overline{5^* x_i^{\kappa}}(\omega)] = M[\overline{5 x_i^{\kappa}}(\omega)], \kappa = \overline{1, n}; i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

04.19350240
202201010333

если $x_i^{\kappa}(\omega)$, $\kappa = \overline{1, n}$; $i = 1, 2, \dots$ — ортонормированная система случайных величин. Система $\overline{x_i^{\kappa}}(\omega)$, $\kappa = \overline{1, n}$; $i = 1, 2, \dots$ не является ортонормированной, но (6) все-таки является необходимым и достаточным условием оптимальности, если упомянутая система не является линейно зависимой с вероятностью I. При выполнении последнего условия из системы $x_i^{\kappa}(\omega)$, $\kappa = \overline{1, n}$; $i = 1, 2, \dots$ с помощью метода Шмидта можно перейти к ортонормированной системе $v_i^{\kappa}(\omega)$, $\kappa = \overline{1, n}$, $i = 1, 2, \dots$ [3]. Так как каждая $v_i^{\kappa}(\omega)$ получается как линейная комбинация соответствующего $x_i^{\kappa}(\omega)$ и предыдущих, из условий

$$M[\overline{5^* v_i^{\kappa}}(\omega)] = M[\overline{5 v_i^{\kappa}}(\omega)], \kappa = \overline{1, n}, i = 1, 2, \dots \text{ легко получается (6). С}$$

другой стороны, система $x_i^{\kappa}(\omega)$, $\kappa = \overline{1, n}$, $i = 1, 2, \dots$ является линейно независимой с вероятностью I, если все её конечномерные ковариационные подматрицы

$$\|B_{\kappa_p \kappa_q}(p, q)\| = \|M \overline{x_{\kappa_p}^{\kappa_p} x_{\kappa_q}^{\kappa_q}}\|$$

невырождены, т.е. если все их конечномерные распределения

$$\text{несобственные. Условие невырожденности подматриц } \|B_{\kappa_p \kappa_q}(p, q)\|$$

вытекает из условия невырожденности всех конечномерных ковариантных подматриц

$$\|R_{\kappa_p \kappa_q}(t_p, t_q)\| \quad \text{Действительно:}$$

для произвольных N чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ и индексов K_1, K_2, \dots, K_N

$$y = \sum_{p, q=1}^N \alpha_p \bar{\alpha}_q B_{\kappa_p \kappa_q}(p, q) \geq 0. \quad (7)$$

Если в (7) подставим формулы (2), (3) и применим теорему о среднем значении, получим:



$$y = \sum_{p,q=1}^N \alpha_p \bar{\alpha}_q \frac{1}{\lambda_p^{k_p} \lambda_q^{k_q}} \int_{a_p}^{b_p} \int_{a_q}^{b_q} R_{k_p k_q}(t,s) \cdot \overline{y_p^{k_p}(t)} \cdot y_q^{k_q}(s) dt ds =$$

$$= \sum_{p,q=1}^N (b_p - a_p) \cdot (b_q - a_q) \cdot \left(\frac{\alpha_p \cdot y_p^{k_p}(t_p)}{\lambda_p^{k_p}} \right) \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}_q \cdot y_q^{k_q}(t_q)}{\lambda_q^{k_q}} \right) \times$$

$$\times R_{k_p k_q}(t_p, t_q) = \sum_{p,q=1}^N \beta_p \bar{\beta}_q R_{k_p k_q}(t_p, t_q),$$

где

$$\beta_p = (b_p - a_p) \cdot \frac{\alpha_p \cdot y_p^{k_p}(t_p)}{\lambda_p^{k_p}},$$

$p = \overline{1, N}$ - произвольные N чисел. Отсюда сразу видно, что

если все подматрицы $\|R_{k_p k_q}(t_p, t_q)\|$, $k, m = \overline{1, n}$, невырождены, то невырождены и подматрицы $\|B_{k_p k_q}(p, q)\|$.

Таким образом, доказана необходимость и достаточность условий оптимальности (6).

Если в (6) подставим формулы (5), (2) и (4), легко получить:

$$d_m^p + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \sum_{i=1}^{\infty} C_{imkp} d_i^k = A_m^p, \quad p = \overline{1, n}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

где

$$A_m^p = \frac{1}{\lambda_m^p} \int_{a_p}^{b_p} R_{\xi \xi_p}(t) y_m^p(t) dt, \quad p = \overline{1, n}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для средней квадратической погрешности δ оценки (5) получим:

$$\delta^2 = M|\xi - \xi^*|^2 = M|\xi|^2 - M|\xi^*|^2 = M|\xi|^2 -$$

$$- \sum_{k_1, k_2=1}^n \sum_{i_1, i_2=1}^{\infty} M[\bar{z}_{i_1}^{k_1}(\omega) \overline{z_{i_2}^{k_2}(\omega)}] d_{i_1}^{k_1} \bar{d}_{i_2}^{k_2} = M|\xi|^2 -$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\substack{\kappa_1, \kappa_2=1 \\ \kappa_1 \neq \kappa_2}}^n \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{\infty} c_{i_1, i_2, \kappa_1, \kappa_2} d_{i_1}^{\kappa_1} \overline{d_{i_2}^{\kappa_2}} - \sum_{\kappa=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} |d_i^{\kappa}|^2 = \\
 & = M|\xi|^2 - \sum_{\substack{\kappa_1, \kappa_2=1 \\ \kappa_1 \neq \kappa_2}}^n \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{\infty} \frac{d_{i_1}^{\kappa_1} \overline{d_{i_2}^{\kappa_2}}}{\lambda_{i_1}^{\kappa_1} \lambda_{i_2}^{\kappa_2}} \chi
 \end{aligned}$$

$$\chi \int_{a_{\kappa_1}}^{b_{\kappa_1}} \int_{a_{\kappa_2}}^{b_{\kappa_2}} R_{\kappa_1, \kappa_2}(t, s) \overline{\psi_{i_1}^{\kappa_1}(t)} \psi_{i_2}^{\kappa_2}(s) dt ds - \sum_{\kappa=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} |d_i^{\kappa}|^2.$$

Резюмируя вышеизложенное, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Если n - мерный случайный процесс $\xi(t, \omega) = \{\xi_{\kappa}(t, \omega), a_{\kappa} \leq t \leq b_{\kappa}\}, \kappa = \overline{1, n}$, с непрерывными в ор.кв. координатами на замкнутых интервалах $[a_{\kappa}, b_{\kappa}]$, $\kappa = \overline{1, n}$ соответственно, в бесконечномерном пространстве имеет собственное распределение, тогда неизвестные постоянные d_i^{κ} , $\kappa = \overline{1, n}, i = 1, 2, \dots$, в линейной оценке случайной величины ξ , получаемой наблюдением данного множества $\{\xi_{\kappa}(t, \omega), a_{\kappa} \leq t \leq b_{\kappa}\}, \kappa = \overline{1, n}$:

$$\xi^* = \sum_{\kappa=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} z_i^{\kappa}(\omega) d_i^{\kappa}, \quad \text{где}$$

$$z_i^{\kappa}(\omega) = \frac{1}{\lambda_i^{\kappa}} \int_{a_{\kappa}}^{b_{\kappa}} \xi_{\kappa}(t, \omega) \overline{\psi_i^{\kappa}(t)} dt, \quad \kappa = \overline{1, n}, i = 1, 2, \dots$$

компоненты ортогональных разложений процессов $\xi_{\kappa}(t, \omega), \kappa = \overline{1, n}$, находятся из линейной алгебраической

(8), где

$$C_{imkr} = \frac{1}{\lambda_i^k \lambda_m^r} \int_{a_k}^{b_k} \int_{a_r}^{b_r} R_{kr}(t, s) \overline{y_i^k(t)} y_m^r(s) dt ds,$$

а средняя квадратическая погрешность δ оценки ζ^* — по формуле (9).

Рассмотрим вопрос существования и единственности решения бесконечной системы (8). Перепишем эту систему в виде [5]:

$$d_m^p = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} C_{imkr} d_i^k + \mathcal{A}_m^p, \quad p = \overline{1, n}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Правую часть этих равенств можно рассматривать как задание оператора \mathcal{A} , переводящего элемент $D = (d_i^k)_{\substack{k=\overline{1, n} \\ i=1, 2, \dots}}$

в элемент $\mathcal{Z} = (\mathcal{z}_m^p)_{\substack{p=\overline{1, n} \\ m=1, 2, \dots}}$ с координатами:

$$\mathcal{z}_m^p = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} C_{imkr} d_i^k + \mathcal{A}_m^p, \quad p = \overline{1, n}, \quad m = 1, 2, \dots$$

где \mathcal{A}_m^p — фиксированные элементы.

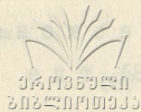
В пространстве ℓ_2 имеем:

$$\rho(\mathcal{A}D, \mathcal{A}D') = \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} |\mathcal{z}_m^p - \mathcal{z}'_m^p|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} |d_i^k - d_i'^k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} |C_{imkr}|^2}$$

где $\alpha = \rho(D, D')$,

$$\rho(D, D') = \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \sum_{i=1}^{\infty} |d_i^k - d_i'^k|^2}$$



Если $\alpha^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \sum_{i=1}^{\infty} |C_{imkp}|^2 < 1$, то в силу прин-

ципа сжатых отображений оператор \mathcal{A} имеет единственную неподвижную точку \bar{D} , $\mathcal{A}\bar{D} = \bar{D}$ - это означает, что наша система имеет решение и притом только одно. Оно может быть найдено по рекуррентным формулам (10).

Вместо бесконечной системы можно рассматривать конечную:

$$d_m^p + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \sum_{i=1}^N C_{imkp} d_i^k = \mathcal{A}_m^p, \quad p = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, N},$$

где $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, а N_1, N_2, \dots, N_n

находятся из условий

$$\begin{aligned} \mathcal{M} |\xi_k(t, \omega) - \sum_{i=1}^{N_k} \lambda_i^k z_i^k(\omega) \varphi_i^k(t)|^2 = \\ = \mathcal{R}_{kk}(t, t) - \sum_{i=1}^{N_k} |\lambda_i^k|^2 \cdot |\varphi_i^k(t)|^2 < \varepsilon, \end{aligned} \quad (II)$$

где $\varepsilon > 0$ - малое фиксированное число, взятое из практических требований к данной задаче.

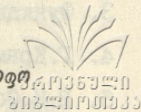
Поступила 12.XI.1976

Институт кибернетики

АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. З.А. Пирнашвили, Об одном классе случайных процессов. Труды ИПМ ТГУ, т. I, 1969.
2. И.И. Гихман, А.В. Скороход, Теория случайных процессов, т. I, М., 1965.



НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСА
МНОГОСЕТЕВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

И. И. Шуштакшвили

При решении ряда важных в практическом отношении задач управления сложными научно-техническими комплексами необходимо уметь прогнозировать ход развития последних. Известно, что современные крупные технические системы проектируются в течение ряда лет. В процессе проектирования ряд операций в сетевых моделях отличается случайной продолжительностью. Помимо этого, сетевые модели имеют ряд вероятностных точек ветвления и по терминологии работ [1] могут быть отнесены к однородным стохастическим сетям. Разумеется, составить для такого рода сетевых моделей какой-либо календарный план не представляется возможным. Это относится как к сетям в целом, так и тем более к составляющим их операциям.

Будем считать, что каждая операция, входящая в сетевые модели, происходит во времени и потребляет один или несколько ресурсов. Разумеется, каждый из ресурсов потребляется с постоянной интенсивностью. Обозначим входящую в K -ую модель работу (i, j) символом $(i, j)_K$, а символом $n^S(i, j)_K$ - интенсивность потребления S -го ресурса в процессе выполнения работы $(i, j)_K$.

При реализации комплекса разработок необходимо рас-
ходовать в течение каждой единицы времени ресурсы опреде-
ленной интенсивности. Разумеется, значения этих ресурсов
носят случайный характер.

Для случая, когда комплекс сетевых моделей охватывает
срок разработки нового сложного объекта (например, несколь-
ко лет), возникает важная задача прогнозирования распреде-
ления случайного значения трудоемкости работ по единичным
календарным периодам (дни, декады, месяцы, кварталы и т.д.)
и сопоставления этого распределения с наличными ресурсами
по каждому виду.

Решение этой задачи позволяет установить не только на-
иболее напряженные по времени пути и работы, составляющие
сетевые модели, но также и наиболее напряженные календар-
ные периоды, характеризующиеся недостатком ресурсов, необ-
ходимых для выполнения разработки. Эта задача, для случая
стохастических сетевых проектов со случайными оценками сос-
тавляющих их работ, может быть эффективно решена методами
статистического моделирования.

Рассмотрим многосетевую модель, состоящую из K сете-
вых проектов k ($1 \leq k \leq K$), выполняемых практически од-
новременно, при выполнении которых используются ресурсы S
видов. Примем, что планируемый интервал разбит на частные
календарные периоды, число которых обозначим через M .
Для каждого календарного периода m ($m = 1, 2, \dots, M$) и
каждого ресурса s ($s = 1, 2, \dots, S$) задается наличная сум-
марная мощность ресурсов F_m^s . Рассмотрим наиболее общий
случай, когда интенсивность работы $n^s(i, j)_k$ есть случай-

ная величина, распределенная равномерно в интервале

$[n_{\min}^s(i, j)_k, n_{\max}^s(i, j)_k]$, а продолжительность $t(i, j)_k$ работы $(i, j)_k$ - случайная величина в распределение которого параметром входит значение $n^s(i, j)_k$. Для каждой работы $(i, j)_k$ предполагается, что трудоемкость работы $q^s(i, j)_k$ распределена равномерно по всей продолжительности ее выполнения и что имеет место равенство

$$q^s(i, j)_k = n^s(i, j)_k t(i, j)_k$$

Каждому сетевому проекту K припишем директивные сроки начала $T_{г.н.}^K$ и окончания $T_{г.о.}^K$ этого проекта. Оценим значение коэффициента доверия ρ_m^s того, что работы, подлежащие выполнению в m -ом ($1 \leq m \leq M$) календарном периоде, могут быть выполнены с помощью наличных ресурсов вида S ($1 \leq S \leq S$).

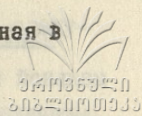
Приведем поэтапную процедуру нахождения коэффициента доверия ρ_m^s .

Этап I. На этом этапе разыгрываем альтернативы для каждой из случайных топологий стохастических сетевых моделей, то есть выделяем детерминированный многосетевой комплекс работ. Методология розыгрыша альтернатив, выявления исходов и оценки вероятностей последних подробно описана в монографии [1].

Этап II. На этом этапе для разыгранного многосетевого детерминированного комплекса методом Монте-Карло моделируется значение интенсивности $n^s(i, j)_k$ для всех входящих во все сетевые модели работ по формуле:

$$n^s(i, j)_k = \left[\left\{ n_{\max}^s(i, j)_k - n_{\min}^s(i, j)_k \right\} \eta(i, j)_k + n_{\min}^s(i, j)_k \right],$$

где $\eta(i, j)_k$ - случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 1]$ и соответствующая работе $(i, j)_k$ ($1 \leq s \leq S, 1 \leq k \leq K$).



Этап III. Ответственный исполнитель, указав интенсивность ресурса, который будет выполнять соответствующую работу, определяет минимальную и максимальную продолжительности этой работы, соответствующие разыгранному $n^s(i, j)_k$. Такого рода зависимость (продолжительность работы от интенсивности ресурсов) для каждой работы представлена на рисунке.

Здесь символами $t''_{min}(i, j)_k$ и $t''_{max}(i, j)_k$, соответственно, обозначены минимальная и максимальная продолжительности работы $(i, j)_k$, соответствующие минимальной интенсивности ресурса $n^s(i, j)_k = n^s_{min}(i, j)_k$, а $t'_{min}(i, j)_k$ и $t'_{max}(i, j)_k$ - аналогичные оценки при $n^s(i, j)_k = n^s_{max}(i, j)_k$.

Варьируя интенсивность ресурса $n^s(i, j)_k$ в пределах $n^s_{min}(i, j)_k \leq n^s(i, j)_k \leq n^s_{max}(i, j)_k$, получаем различные интервалы продолжительности работы $t_{min}(i, j)_k$ и $t_{max}(i, j)_k$.

Таким образом, на этапе III согласно указанной зависимости и разыгранным значениям $n^s(i, j)_k$ для каждой из работ определяются предельные значения $t_{min}(i, j)_k$ и $t_{max}(i, j)_k$.

Этап IV. На данном этапе осуществляется "розыгрыш" продолжительностей $t(i, j)_k$ ($1 \leq k \leq K$) выполнения работ методом статистических испытаний. "Розыгрыш" значений продолжительности каждой из работ $(i, j)_k$ сводится к моделированию принятого для этой работы закона распределения, который формируется с помощью определенных на этапе III временных характеристик

$$t_{min}(i, j)_k = a(i, j)_k \quad \text{и} \quad t_{max}(i, j)_k = b(i, j)_k \quad [1].$$

Этап У. Этот этап, по сути дела, сам является экстремальной задачей. Он заключается в выборе оптимальных сроков начала $t_n(i, j)_k$ и окончания $t_o(i, j)_k$ всех работ $(i, j)_k$ многосетевого комплекса, при котором общее время свершения каждого проекта с переменным индексом k не превосходит $T_{g.o}^k$, а значение функционала

$$Y = \sum_s \sum_m (A_m^s)^2, \quad (1)$$

либо

$$Y = \max_s \sum_m (A_m^s)^2 \quad (2)$$

делается минимальным.

В обеих формулах (1) и (2) A_m^s оценивается следующим образом:

$$A = \begin{cases} 0 & \text{при } Q_m^s \leq F_m^s \\ \frac{Q_m^s - F_m^s}{F_m^s} & \text{при } Q_m^s > F_m^s > 0 \\ C & \text{при } Q_m^s > F_m^s = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где F_m^s - наличная, а Q_m^s - ожидаемая суммарная трудоемкость по S -му шифру специальностей в m -ом календарном периоде.

$$(1 \leq s \leq S, 1 \leq m \leq M)$$

В соответствии с алгоритмом, изложенным в [1], находим набор значений $t_n(i, j)$ и $t_o(i, j)$, который соответствует минимальному значению Y при разыгранных на этапах II и IV значениях $n^s(i, j)_k$ и $t(i, j)_k$.

Этап. VI. Состоит в многократном (N -кратном) повторении этапов I-V, причем число таких повторений обычно фикси-

руется заранее. После этого приступаем к выполнению следующего этапа.

041035040
2023010333

Этап VII. В результате проведения этапа VI мы получаем N минимальных значений J_{min} функционала J , соответствующих результату работы этапа V для каждого розыгрыша. Каждый из N розыгрышей позволяет оценивать смоделированное значение Q_m^S суммарной потребности в ресурсе вида $S (1 \leq S \leq S)$ на интервале времени m . Пусть ℓ - порядковый номер розыгрыша, а символ $Q_{m\ell}^S$ обозначает потребность в ресурсе вида S на m -ом календарном периоде при ℓ -ом розыгрыше. Мы вправе исследовать для любой полосы с номером m эмпирическое распределение значений

$$Q_{m1}^S, Q_{m2}^S, \dots, Q_{mN}^S \quad (1 \leq S \leq S)$$

и получить на основе выборочного анализа необходимые статистические характеристики.

Примем, что ограничения по каждому виду ресурсов на протяжении каждого отдельного календарного периода хода разработки постоянны и равны F_m^S для ресурса вида S и календарного периода m .

Согласно методике [1] мы можем построить коэффициент доверия ρ_m^S распределения ожидаемой трудоемкости Q_m^S , соответствующий значению наличной трудоемкости $F_m^S (1 \leq S \leq S)$, то есть оценить для многосетевой модели вероятность ρ_m^S выполнения всех реализуемых в m -ом периоде работ, требующих ресурса вида S при наличной трудоемкости F_m^S . Значение ρ_m^S для периода с порядковым номером m может быть определено из соотношения

$$P_m^s = P \{ Q_{m\ell}^s \leq F_m^s \}.$$

Коэффициент доверия может быть определен с помощью методики, описанной в [1], на основе статистического анализа эмпирической совокупности $Q_{m1}^s, Q_{m2}^s, \dots, Q_{mN}^s$. Аналогичная процедура должна быть проведена для каждого календарного периода $m (1 \leq m \leq M)$ и каждого ресурса $s (1 \leq s \leq S)$.

В результате получаем последовательность коэффициентов доверия $P_1^1, \dots, P_M^1, P_1^2, \dots, P_M^2, \dots, P_1^S, \dots, P_M^S$, которые определяют наиболее напряженные календарные периоды функционирования АСУР. Последнее позволяет произвести разбиение множества календарных периодов на зоны:

- критическую, соответствующую близким к нулю коэффициентам доверия;
- среднюю, "промежуточную" зону, со значением P_m^s , близким к 0,5;
- резервную зону, соответствующую коэффициентам доверия, близким к единице.

Указанное разбиение может быть проведено с произвольной степенью точности в зависимости от количества произведенных розыгрышей N . Можно предложить несколько видоизмененную модификацию изложенного алгоритма. После каждого однократного розыгрыша альтернатив на этапе I следует R -кратно разыгрывать значение $h^s(i, j)_k$ и $t(i, j)_k$, повторяя этапы II-V K -раз, а розыгрыш на этапе I осуществлять N раз. В результате объем выборочной эмпирической совокупности возрастает в R раз. Такая модификация, хотя и может по-

высить точность оценки коэффициента доверия, приведет к существенному увеличению времени вычислений.



При построении дальнотерспективных автоматизированных систем управления разработками нередко возникает вторая, не менее важная задача определения вероятности выполнения комплекса стохастических проектов в заданные сроки при ограниченном объеме ресурсов по каждому виду, а также задача определения P - квантильных оценок сроков выполнения комплекса разработок при заданной вероятности P их реализации - также при ограниченных ресурсах.

Рассмотрим многосетевую стохастическую модель, состоящую из K проектов, выполняемых практически одновременно. Допустим, что при выполнении этих проектов используется S видов ресурсов, причем мощность ресурса вида s ($1 \leq s \leq S$), следуя условиям предыдущей постановки задачи, ограничена на каждом календарном периоде m ($1 \leq m \leq M$) величиной F_m^s .

Примем, что для каждой работы $(i, j)_k$ ($1 \leq k \leq K$) многосетевого комплекса заданы ее фиксированные продолжительность $t(i, j)_k$ и интенсивность $n^s(i, j)_k$ потребления ресурса вида s . Необходимо определить вероятность выполнения комплекса разработок в заданный срок $T_{дир}$ при ограничении на ресурсы, а также доверительные сроки его реализации при ограниченных ресурсах на основе заданной доверительной вероятности выполнения.

Рассмотрим поэтапную процедуру алгоритма решения поставленной задачи.

Этап. I. На этом этапе разыгрываем альтернативы для

каждой из случайных топологий сетевой модели, то есть для каждой отдельной сети K ($1 \leq K \leq K$) выделяем множество составляющих дерево исходов детерминированных комплексов работ и определяем вероятности выполнения этих комплексов-фрагментов [2]. В результате работы алгоритма на этом этапе для каждого детерминированного фрагмента по каждой исходной стохастической сетевой модели получаем вероятность выполнения соответствующего фрагмента, которому поставлен в соответствие элемент дерева исходов. Иными словами, мы получаем для каждого из K проектов множество детерминированных сетевых моделей с вероятностями их выполнения. Обозначим символом S_i^j - детерминированную сеть, соответствующую элементу дерева исходов с порядковым номером j в i -ой по счету стохастической сетевой модели, а P_{ij} - вероятность реализации этого элемента дерева исходов, то есть детерминированной сети S_i^j .

В результате получаем таблицу I.

Таблица I.

Фрагмент	Вероятность	Фрагмент	Вероятность	...	Фрагмент	Вероятность
S_1^1	P_{11}	S_2^1	P_{21}	...	S_K^1	P_{K1}
S_1^2	P_{12}	S_2^2	P_{22}	...	S_K^2	P_{K2}
S_1^3	P_{13}	S_2^3	P_{23}
...
$S_1^{h_1}$	P_{1h_1}	$S_2^{h_2}$	P_{2h_2}	...	$S_K^{h_k}$	P_{Kh_k}

В результате проведения этапа I мы получаем $R = S_1^{l_1} \cdot S_2^{l_2} \dots S_K^{l_K}$

наборов комбинаций детерминированных фрагментов. Из этого количества выбираем существенно меньшее число наборов таких, для которых сумма произведений вероятностей (то есть вероятность их совместной реализации)

$$P = \sum_{i=1}^r \prod_{q=1}^K P_{qi} \quad (4)$$

достаточно велика и близка к единице ($1 < i_q \leq h_q$, $1 < i \leq r$, $1 < q \leq K$). Практически во всех случаях удастся выделить из полного дерева исходов группу исходов, сумма вероятностей которых близка к единице, а число элементов в группе существенно меньше объема дерева исходов. Отсюда вытекает и возможность выбора такой группы из существующих элементов дерева исходов.

Этап II. Этот этап сам является экстремальной задачей. Для очередного набора $S_1^{i_1}, S_2^{i_2}, \dots, S_K^{i_K}$ отображенного на предыдущем этапе, решаем задачу определения минимального времени выполнения всех проектов в наборе при заданных ограничениях на ресурсы F_m^s . Алгоритм решения этой задачи описан в [I]. В результате работы этапа II получаем значение времен начала $t_H(i, j)_K$ и окончания $t_O(i, j)_K$ для каждой работы, каждой из сетевых моделей $S_1^{i_1}, \dots, S_K^{i_K}$, а также минимальное время T_{min} , за которое можно выполнить все проекты одного набора.

Этап III. Этот этап заключается в повторении этапа II для каждого элемента совокупности наборов $S_1^{i_1}, S_2^{i_2}, \dots, S_K^{i_K}$. В результате проведения этого этапа мы получаем для каждого из r наборов проектов свой оптимальный план-график и свое минимальное время выполнения всех проектов набора

$$T_{min}^f \quad (1 \leq f \leq n).$$



Этап IV. Оцениваем ρ -квантиль случайной величины

T_{min}^f , каждому из значений которой T_{min}^f соответствует вероятность P_f . Располагаем минимальные времена свершения наборов сетевых проектов в вариационный ряд

$$T_{min}^{1*}, T_{min}^{2*}, \dots, T_{min}^{n*}$$

и находим такое K^* , для которого имеет место

$$\sum_{f=1}^{K^*} P_{f^*} \leq \rho \leq \sum_{f=1}^{(K^*+1)^*} P_{f^*}$$

Тогда искомый ρ -квантиль T_ρ определяется по формуле

$$T_\rho = T_{K^*} + \frac{\rho - \sum_{i=1}^{K^*} P_{i^*}}{P_{(K^*+1)^*}} (T_{(K^*+1)^*} - T_{K^*}). \quad (5)$$

Мы в состоянии решить и обратную задачу оценки по заданному директивному сроку $T_{дир}$ реализации всех стохастических разработок вероятности этой реализации. Легко видеть, что если для вариационного ряда имеет место соотношение

$$T_{j^*} \leq T_{дир} \leq T_{(j+1)^*},$$

то искомая величина ρ определяется по формуле

$$\rho = \sum_{f^*} P_{f^*} + P_{(j+1)^*} \frac{T_{дир} - T_{j^*}}{T_{(j+1)^*} - T_{j^*}} \quad (6)$$

Настоящий алгоритм позволяет помимо приведенных выше задач, решить задачу прогнозирования потребности в ресурсах, иными словами, определить распределение минимального

значения функционала от интенсивности ресурсов, при заданном директивном общем сроке окончания разработок *Тзир*
Для этого на этапе II надо решить оптимальную задачу оценки минимальных ресурсов, позволяющих реализовать набор разработок в директивный срок.

Поступила 21.X.1976

Кафедра теоретической
механики

ЛИТЕРАТУРА

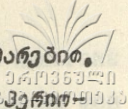
1. Д.И.Голенко, Статистические методы сетевого планирования и управления, М., 1968.
2. И.И.Шуштакашвили, Использование стохастических графов в процессах управления сложными системами с многовариантными исходами (диссертация), Тбилиси, 1977.

ი. შუშტაკაშვილი

მრავალჯაღიანი სტოქასტიკური მიქცევის პრობლემის
აპრობნობის გამოყენების შესახებ

რეზიუმე

განხილულია ერთჯერადი სტოქასტიკური ქსელური მიქცევის პრობლემის ქსელური მიქცევაში შემავალი რესურსების ხანგრძლივობის შემოღობვის მნიშვნელობები. მიწვევა-პრობის მიხედვით დახარისხებული ანგეზა საჭირო რესურსების ემპირიული განსაზღვრა რესურსების სახის მიხედვით და კალენდრული პერიოდების მიხედვით, ასევე განსაზღვრა შეიძლება აგრეთვე იქნეს ხანგრძლივობის პრობლემის ამოცანის ამოხსნის შემთხვევაში შევსებასთან დაკავშირებული პრობლემის ამოცანა.



սոս շնորհակցծոնս սրծսոոծս սրնցծւրոո րըսոոնցծոնս ըսծսոոնցծոնո.
 րոծոնցծոնո ըսծսոոնցծոնոս րըսոնցծոնցծոնոս րըսոնցծոնցծոնոս
 ըսծոնս ըսծոնցծոնո սոնցծոնոնս րըսոնցծոնցծոնոնս սոնցծոնցծոնոնս
 ողոնս ըսծսոնցծոնոնս.

(Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page)

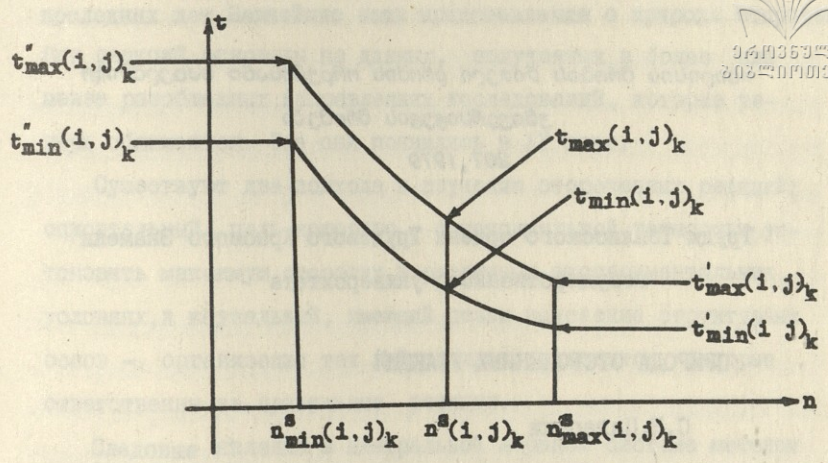


Рис.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ПРИРОДА ОТСРОЧЕННЫХ РЕАКЦИЙ

С.Н.Цагарели

Одним из плодотворных методов изучения памяти у животных является метод отсроченных реакций. С его помощью в последние годы физиология накопила и продолжает накапливать огромное количество сведений об общих и частных вопросах механизма памяти. Тем не менее, на многие важные вопросы еще не получен ответ. Мы еще не знаем, каким образом кодируются свойства стимулов и как мозг расшифровывает этот код, воссоздавая образ внешнего мира. При репродукции образа какого-либо жизненно важного объекта, животные реагируют адекватно. При воспоминании о пище голодное животное подбегает к месту пищи, а в случае воспоминания о враге — убегает в сторону.

Рассматривая в историческом аспекте изучение следовых явлений в центральной нервной системе методом отсроченных реакций, уместно напомнить некоторые концепции и противоречия прошлого, а также основные теории и принципы. Несколько замечаний по поводу ранних работ, возможно, будут не лишены интереса. Во всяком случае, они помогут восстановить пер-

спективу, легко теряющуюся, если ограничить себя периодикой последних лет. Важнейшие наши представления о природе отсроченных реакций основаны на данных, полученных в более или менее разобщенных направлениях исследований, которые теперь сближаются. Все они появились в XX веке.

Существуют два подхода к изучению отсроченных реакций: описательный, цель которого — с максимальной точностью установить максимум отсрочки в различных экспериментальных условиях, и каузальный, имеющий целью выяснение структурных основ — организации тех нейрональных элементов, которые ответственны за правильные реакции.

Следовые явления в центральной нервной системе методом отсроченных реакций на детях и животных (на енотах, крысах и собаках) были исследованы Хантером [48, 49]. Он разработал метод, при котором испытуемый видит, как экспериментатор прячет определенное вознаграждение (чаще всего пищу), после определенного периода времени ему предоставляется возможность добраться до вознаграждения. Если ребенок находил вознаграждение через несколько минут и часов, значит у него сохранилось представление о спрятанном вознаграждении и месте, где оно спрятано.

Надо отметить, что условия опыта в пробах менялись, ребенка помещали в разные места, а иногда между ним и местом, где было спрятано вознаграждение, ставили ширму. Дети хорошо справлялись с задачей, что указывает на их способность к запоминанию в течение интервала времени между моментом, когда вознаграждение было спрятано, и моментом, когда оно было обнаружено.

Опыты на животных (крысах) Хантер [48] проводил в трехдверной камере в условиях ограниченного выбора нужных действий. Животное приучалось находить пищу в освещенном отделении. После этой предварительной тренировки сигнальная лампочка выключалась, а животное насильно удерживалось еще несколько секунд от осуществления реакции выбора. Целью опытов было измерение времени, в течение которого животное может сделать правильный выбор.

Опыты Хантер проводил в психологических лабораториях Чикагского университета, где подобная методика была впервые применена студентами Хэйем и Ридом (цит. по Вапуро, [12]). Однако практическое применение в лабораторных исследованиях эти работы нашли после соответствующих работ Хантера [48, 49] и Кэрра [38].

Нужно отметить, что все эти исследования были проведены под влиянием функциональной психологии, которая развивалась в Чикагском университете. Основные положения этого направления запечатлены в книге Кэрра [39]. В ней функциональная психология определялась как учение о психических операциях, в противовес структуралистскому учению о психических элементах. Это — любое изучение функций сознания, в противовес поэлементному интроспективному анализу. Функционализм стремился рассмотреть все психические проявления под углом зрения их приспособительного, адаптивного характера, что требовало определить их отношение к условиям среды, с одной стороны, к потребностям организма — с другой. Были проведены исследования функций восприятия и памяти, навыков и воли, внимания и мышления. В понятие функциональной пси-

хологии включаются исследования, которые не ограничиваются методом самонаблюдения, а применяют тесты для объективного описания поведения животных, детей, умственно отсталых и психически больных. Поэтому функциональная психология поставила много методических вопросов; считалось целесообразным применять и интроспекцию, и объективное наблюдение.

В связи с этим, были проведены описанные опыты Хантера, в которых устанавливалась возможность появления представлений у детей и животных. Принцип этого метода заключается в том, что во время отсрочки первичный раздражитель отсутствует, его должно заменить нечто другое, вызывающее правильную реакцию. Это нечто Хантер называет идеей или представлением. Следует отметить, что первичная проблема этих исследований — доказать, появляются или нет представления у животных и детей, — осталась нерешенной. Проблема была забыта и исследователи по неизвестным причинам не затрагивали более этого вопроса.

В позднейших исследованиях Хантер изменил методику проведения опытов. Изменение состояло в том, что косвенный сигнал — свет — был заменен видом самой пищи, находящейся в специальном отделении камеры. Таким образом, возникло два метода проведения таких опытов: прямой и непрямой. Прямой (непосредственный) вариант заключается в том, что одна из нескольких одинаковых кормушек наполняется пищей при животном. В последующей реакции выбора животное, следовательно, ориентируется за счет условного натурального раздражения. В случае непрямого (опосредствованного) варианта у животных вырабатывается условный пищевой рефлекс на определен-

ный раздражитель. В дальнейшем животное ориентируется по следу условного раздражителя.



Метод, примененный впервые в зоопсихологических и психологических исследованиях Хантером [48, 49] и названный им методом отсроченной реакции, в дальнейшем постепенно проник в нейрофизиологическую практику. Сущность метода отсроченных реакций, как прямого, так и непрямого, заключается в том, что для получения пищевого подкрепления животное должно выполнять одну из нескольких возможных реакций. Сигнал, определяющий соответствующую реакцию, заканчивается раньше, чем животное может на него ответить. Таким образом определяют максимальное время отсрочки, при котором животное в состоянии произвести правильный выбор кормушки.

На основании многочисленных работ, проведенных на различных видах животных методом отсроченных реакций, была открыта новая страница в экспериментальном изучении высшей нервной деятельности животных. Многие авторы рассматривали способность к выполнению реакций после действия соответствующих раздражителей как проявление интеллектуальной деятельности. Однако другие последователи рассматривают такие отсроченные реакции просто как обычный случай запоминания.

Метод отсроченной реакции используется в качестве специфического теста для установления продолжительности кратковременной памяти [20, 21, 41, 45, 50, 51].

По мнению И.С.Бериташвили [6,8], отсроченные реакции являются хорошим тестом для выявления продолжительности как краткосрочной, так и долгосрочной памяти. Эксперименты с решением задач человеком сильно отличаются от подобных экс-

периментов с животными потому, что в первом случае средством решения задач является вербальное мышление [27, 59].

Изучая влияние повреждения и раздражения той или иной структуры головного мозга на динамику отсроченных реакций, можно получить важные результаты для создания представления о нейрофизиологических механизмах памяти. Поэтому за период, прошедший со времени работы Хантера [48, 49], развитие нейрофизиологических исследований способствовало возникновению множества существенных и несущественных разновидностей методик отсроченных реакций.

Установка для изучения способностей к различению форм у приматов — это, так называемый, висконсинский тестовой аппарат. Обезьяну помещают в подходящую клетку аппарата и с одной стороны клетки предлагают предметы, лежащие на горизонтально стоящем подносе. Эти предметы устанавливаются над небольшими углублениями в подносе, в которых спрятано вознаграждение. Обезьяну обучают сдвигать один из предметов; если выбран предмет, закрывающий углубление с пищей, то обезьяне разрешают ее съесть. Следует отметить, что большинство современных работ по отсроченным реакциям проводится в этом аппарате или в его различных модификациях [45].

После работ Толмена [65, 66] и Эддера, Ниссена [40] широкое применение нашла методика отсроченной альтернации, сущность которой заключается в том, что пищу помещают то в одну, то в другую кормушку с определенным интервалом между отдельными пробами. Животное должно помнить, где находилась пища при предыдущей пробе и выбрать другую кормушку. Надо отметить, что эта задача представляется более трудной,

чем простая отсроченная реакция.

Отсроченные реакции изучаются также по методу свободных движений в больших экспериментальных комнатах [5, 6, 7, 21]. Все эти новейшие разработки методики отсроченных реакций ведут к накоплению обширного экспериментального материала, который отличается значительной вариабельностью.

Достаточно обширную научную литературу, затрагивающую вопросы об отсроченных реакциях можно разделить на три части: к первой относятся более ранние работы, в которых рассматривались разнообразные методологические вопросы проведения опытов по отсроченным реакциям на интактных животных.

Второе направление возникло в результате развития отсроченной техники, когда стали исследовать влияния разрушения и раздражения электрической стимуляции различных глубоких структур головного мозга на формирование отсроченных реакции.

К третьему периоду относятся современные исследования, которые характеризуются беспрецедентными успехами в нейрофизиологическом и психологическом анализе механизмов, лежащих в основе осуществления отсроченных реакций.

Еще в тридцатых-сороковых годах первые исследователи памяти с помощью методики отсроченных реакций отмечали, что прямой метод отсрочки приводит к значительно меньшему утомлению животного и удлинению времени отсрочки, чем при непрямых методах [46, 63]. Но из этого факта не следует, что можно говорить о преимуществе прямого метода. Преимущество того или другого метода зависит от задач исследования.

Разнородны также экспериментальные данные, полученные с помощью одного метода — прямого или непрямого. Для того чтобы установить — сколько времени может удержаться в памяти образ местонахождения пищи и через какое время животное найдет ее безошибочно, необходимо, по И.С.Бериташвили [8], чтобы опыты ставились в совершенно новой обстановке, что в экспериментах, на наш взгляд, трудно осуществимо. Когда одного рода опыты производились систематически в течение нескольких месяцев, максимум отсрочки при зрительных пробах значительно повышался. Аналогичная ситуация наблюдается и в отношении слухового восприятия места пищи [8]. Фолей и Уорден [42] показали, что упражнение удлиняет отсрочку.

При продолжительной работе над условным пищевым поведением одной и той же собаки И.С.Бериташвили [8] заметил, что сначала максимум отсроченной реакции на условный сигнал нарастает, но с определенного периода работы в одной и той же экспериментальной обстановке максимум отсрочки становится все меньше и меньше.

Аналогичные данные были получены на обезьянах-бабуинах Спетом и Харлоу [60]. Они показали, что животные не могли справиться с отсрочками длиннее пяти секунд, если за опытный день на них оставалось 25 проб. С другой стороны, те же животные хорошо справлялись с 15 и 30-секундной отсрочкой, если за опытный день они получали лишь одну пробу. Л.А.Фирсов [31] отмечает, что с увеличением количества условных раздражений на фоне пищевой активности у обезьян устойчивость отсроченного ответа падает. Неустойчивость отсроченных ответов отмечают и другие авторы [2, 30, 43, 54, 69, 70].

Пользуясь методом отсроченных реакций, Н.Ю.Войтонис [15] имел возможность наблюдать некоторые интересные проявления установок у животных. В особой серии опытов он показал воспитуемость установок, которая влияет на продолжительность отсрочки.

Итак, имеющиеся данные позволяют сделать вывод, что время хранения образа, исследуемое при отсроченных реакциях, является флуктуирующей величиной, непрерывно изменяющейся в процессе опыта, — оно меняется от пробы к пробе. Продолжительность отсрочки зависит от многих условий: от адаптации животного к окружающей обстановке, когда угасают ориентировочные реакции; от длительности реверберационного возбуждения, синаптической потенциации или периода повышенной или пониженной возбудимости, а также от длительности многократного проведения однородных опытов, от внешних условий, таких, как знакомая или незнакомая среда; от количества объектов в экспериментальной установке, от длительности экспозиции натурального и искусственного условного раздражения, от характера условного сигнала, от формы избранного подкрепления и так далее [8, 31]. Это значит, что вероятность осуществления отсроченных реакций можно рассматривать, в свою очередь, как случайную функцию времени, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, но какой именно — заранее неизвестно. Изучением подобных случайных явлений, в которых случайность проявляется в форме процесса, занимается специальная отрасль теории — вероятностей — теория случайных функций [13].

Хантер [48] впервые обратил внимание на связь между пра-

вильным выполнением отсроченных реакций и телесной установкой позы животного по отношению к сигнальной кормушке. По мнению Хантера [48], у крыс нет успешных отсроченных реакций, пока они не располагают свое тело по направлению к той точке, от которой получают раздражение и не остаются в таком положении на всем протяжении отсрочки. Однако в дальнейшем сначала Уолтон [67], а потом Лавицка [51], Бериташвили [8], Конорский [21], Адамо [37], Хонзик [47], Маер [52], Викмарк и др. [68] на собаках, кошках и крысах показали, что у нормальных животных правильная отсроченная реакция не зависит от ориентации головы и тела во время периода отсрочки, т.е. для правильного решения не было необходимости в специальной ориентации животного по направлению к кормушке, от которой был подан сигнал. Относительно обезьян, как низших, так и высших, почти все исследователи сходятся во мнении, что успешная отсрочка не предполагает сохранения в период отсрочки позы животного по направлению к кормушке [1, 12, 25, 29, 30, 31, 45, 53, 63, 64].

Конорский [21] на основании опытов по отсроченным реакциям над собаками и кошками приходит к выводу, что отвлечение внимания животного в период отсрочки, поглаживание животного, кормление его на стартовой площадке и даже увод его на некоторое время из помещения не мешали правильному решению. У собак отсроченная реакция не нарушалась и тогда, когда стартовую площадку отгораживали ширмой так, чтобы животное не видело кормушки. И.С.Бериташвили [8] также наблюдал устойчивость отсроченных реакций у собак при действии различных отвлекающих факторов. По опытам И.С.Бериташвили

[8], отсроченные реакции не нарушаются и тогда, когда в период отсрочки животному дают возможность выполнять по условному сигналу какую-либо автоматизированную проблему к определенной кормушке.

За последнее время многие исследователи стали заниматься анализом физиологической природы отсроченных реакций. Несмотря на значительные успехи в этой области, описание природы отсроченных реакций является лишь частичным и весьма ограниченным, так как исследователи не смогли определить наличия тех факторов, на которые реагирует животное в данной ситуации. Иными словами, какой раздражитель направляет животное при выполнении им отсроченной реакции.

Таким раздражителем, по мнению И.С.Бериташвили [5, 6, 8], является "образ местонахождения пищи"; по Ю.Конорскому [21, 22] - "подготовительный раздражитель" и очень распространенное мнение "стимула-ключа", введенное в бихевиористическую психологию. К числу наиболее интересных работ в этой области относятся работы, выполненные в основном американскими авторами.

Естественно, что первостепенное значение при обсуждении природы отсроченных реакций имеет выяснение структурных основ - организации тех нейрональных элементов, которые ответственны за правильное решение. С этой точки зрения определенный интерес представляет концепция И.С.Бериташвили [5, 8], согласно которой правильное решение задачи основывается на восприятии и создании образов внешнего мира. Восприятие пищевого объекта вместе с его окружением производится путем возбуждения особых звездчатых нейронов коры, на которые оканчиваются эфферентные таламические пути,

приносящие информацию от рецепторов. Эти звездчатые нейроны с околоточечной аксонной сетью в зрительной области И.С. Бериташвили называет сенсорными нейронами, которые обуславливают зрительное субъективное переживание. Подобное стремление имеет важное значение, оно обуславливает многократное самовозбуждение, которое приводит к лучшему восприятию воздействующего объекта. Поэтому их возбуждение не прекращается сразу же после восприятия, т.е. после внешнего воздействия. С помощью этих психонервных процессов, которые репродуцируют образ пищи и ее местонахождение, животное совершает правильный выбор.

По мнению Ю.Конорского [21], раздражителем, который регулирует правильное передвижение животного при отсроченных реакциях, является пространственно-кинестетический образ пути к данной кормушке. Ю.Конорский [22] предполагает, что на основе знакомства животного с экспериментальной ситуацией в его пространственно-кинестетическом гностическом поле образуется группа нейронов, которая после сигнализации от подготовительного раздражителя по ассоциации вызывает активацию соответствующей группы пространственно-кинестетических нейронов, а эта активация поддерживается в течение всего периода отсрочки, благодаря реверберирующим импульсам кратковременной памяти. В мозгу программируется соответствующий ответ, который животное и выполняет после того, как его отпускают.

В данное время о природе отсроченных реакций самыми распространенными являются три точки зрения: первая — отсроченные реакции рассматриваются как следовые условные

рефлексы, вторая - отсроченные реакции как частный случай переделки пространственной дискриминации и третья - отсроченные реакции как пример поведения, регулируемого образом ранее воспринятого стимула.

Вторая точка зрения - отсроченные реакции как частный случай переделки пространственной дискриминации - впервые была высказана в работе Нисена с соавторами [55] и поддержана Харлоу [44]. По мнению этих авторов, на каждой пробе отсроченных реакций животное приучается - какая из кормушек приобретает положительное сигнальное значение после приманивания показываемой перед отсрочкой пищей. Ввиду того, что на последующих пробах из двух кормушек приманивает в случайном порядке одна, то животное обучается переделке сигнального значения на одну пробу, т.е. в этих случаях мы имеем дело с научением переделке пространственной дискриминации. В этой гипотезе остается совершенно непонятным вопрос о том, почему в ситуации отсроченных реакций животное оказывается способным к научению переделки дискриминации за одну пробу. Поэтому гипотеза о переделке пространственной дискриминации не характеризует природу отсроченных реакций и вопрос остается открытым [24].

Точка зрения о том, что отсроченные реакции регулируются образом ранее воспринятого стимула, была выдвинута И.С.Бериташвили [5,8], а позже к представлениям, сходным с представлениями И.С.Бериташвили, пришел и Ю.Конорский [21, 22]. Разница во взглядах И.С.Бериташвили и Ю.Конорского заключается в следующем: по мнению И.С.Бериташвили, сенсорные звездчатые нейроны проекционных областей

являются теми нейронами, которые приводят субъективные переживания в виде представлений объектов внешнего мира. По взгляду Ю.Конорского, эти образы образуются не в проекционных, а в гностических областях коры, клетки же проекционной зоны имеют лишь передаточную функцию по пути от периферии к гностической области.

Воитонис [14, 16], Рогинский [25], Шустин [34, 35, 36] рассматривает отсроченные реакции как следовые условные рефлексы. По утверждению Н.А.Шустина [33, 35, 36], самого активного защитника этого направления, между следовыми и условными рефлексами по И.П.Павлову и отсроченными реакциями нет принципиального различия; различие только в методике. Отсроченные реакции по своему существу представляют собой не что иное, как следовые условные рефлексы с характерными двумя фазами, первая — торможение, затем, по мере приближения конца периода отсрочки, — возбуждение.

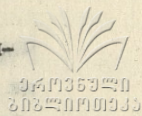
Критика этого взгляда Н.А.Шустина и различие между отсроченными реакциями и следовыми условными рефлексами подробно изложены в работах Ю.Конорского [20] и И.С.Бериташвили [6].

Несмотря на обилие вышеупомянутых работ, вопрос о физиологической природе отсроченных реакций остается нерешенным. Такого же мнения придерживаются Росволд [58], Дембовский [17] и Тоибер [61, 62]. Животные — это многокомпонентные открытые системы, сочетающие в себе поразительную устойчивость с тончайшей чувствительностью к изменениям. Анализ поведения животных, важные характеристики которых определяются именно наличием многих взаимосвязанных перемен-

ных, представляет трудности даже для описания, а их эффективный анализ — дело чрезвычайно сложное. А ведь внутренние переменные организмов вместе с существенными переменными среды исчисляются сотнями. Выбрать среди них те, которые подлежат изучению, и определить минимальное их число, достаточное для объяснения поведения животных, является главной задачей нейрофизиологии. Совершенно справедливо замечает один из активных исследователей отсроченных реакций Л.А.Фирсов [31], что уровень правильных решений о продолжительности отсроченных реакций является весьма изменчивым и поэтому они не могут служить критерием для построения логической схемы эволюционного рассмотрения о выраженности этих реакций у разных видов животных, пока не будет достигнута строгая стандартизация экспериментальных условий.

Из вышесказанного нетрудно заметить, что общепринятая методика оценки отсроченных реакций, с целью выяснения продолжительности памяти, является неточной. Ясно, что при отсроченных реакциях невозможно непосредственное исследование продолжительности памяти. В таких случаях в качестве основных рабочих методов нейрофизиологии применяют не прямые, а косвенные методы исследования памяти. О памяти можно судить лишь косвенно по правильности и неправильности производимых животными реакций выбора. И даже в том случае, когда животное делает правильный выбор, мы не можем с полной уверенностью утверждать, определена эта реакция хранения образа сигнала или выбор является случайным. Животное может не пойти к месту пищи, даже имея ее

образ. Критерий двигательной активности для ответа на вопрос о наличии или отсутствии образа не является точным.



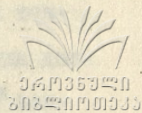
Подходящим математическим аппаратом для точного установления продолжительности памяти при отсроченных реакциях является аппарат теории случайных функций [13].

Именно эта необходимость в новом подходе объясняет, почему за последнее время появилось большое число работ, в которых нейрофизиология заимствует идеи математики и кибернетики [3, 4, 11, 24, 26 и др.]. Математические методы столь глубоко проникли в эксперимент, что появилась возможность создания общей математической теории эксперимента. Если раньше математические методы использовались лишь на последнем этапе исследования — при обработке результатов наблюдений, то теперь они стали применяться при формализации априорных сведений перед постановкой опытов — при планировании эксперимента. Планирование эксперимента — это постановка опыта по некоторой заранее составленной схеме, обладающей какими-то оптимальными свойствами, когда вместо простого собирания фактов основой исследования стал планируемый опыт [28, 32]. Огромный экспериментальный материал, накопившийся о природе отсроченных реакций, вынуждает искать какую-то путеводную нить, без которой дальнейший прогресс становится все более затруднительным.

С этой целью мы стали планировать наши опыты. Чтобы избежать научивания места пищи и исключить предпочтение животным какого-нибудь направления в экспериментах, пищу давали из разных кормушек случайным образом. Случайность

подачи пищи из разных кормушек заранее была определена нами методом статистических испытаний - методом Монте-Карло [9, 10]. Этим же методом были определены времена отсрочек для каждой пробы и продолжительность интервалов между пробами. Интервалы между пробами набирались таким образом, чтобы за время интервала реактивность двигательного аппарата, изменяющаяся под влиянием наносимого раздражения (открытие двери стартовой камеры, пища, свободное хождение по лабиринту), приходила к исходному состоянию. Опыт предварительных исследований показал, что выбранный нами интервал - от одной до шести минут - удовлетворяет этому условию.

Итак, мы заранее составляли временную программу проведения опытов, со случайным чередованием подкрепляемых кормушек, которой строго придерживались в экспериментах (таблица № I). Такая программа давала возможность в одних и тех же условиях исследовать отсроченные реакции у разных животных и сделать статистические выводы. Практика исследования отсроченных реакций показывает, что животное, находящееся в опыте, часто проявляет рефлекс на время, привыкание, кроме того, многократное введение животного в экспериментальную обстановку определенным образом готовит его к той условной реакции, которая вырабатывается у него в этой обстановке, т.е. действие внешней обстановки у животного вызывает установку. Эти факторы, которые всегда сопутствуют отсроченным реакциям и не дают возможности точно установить продолжительность последних, при такой временной программе доведены до минимума.



Программа проведения опытов по прямой методике
отсроченных реакций в условиях предъявления двух кормушек

Дни	Проб	Интервал между пробами (в мин.)	Сигнализируемая кормушка	Продолжительность отсрочки (в сек.)	Дни	Проб	Интервал между пробами (в мин.)	Сигнализируемая кормушка	Продолжительность отсрочки (в сек.)
1	1	1	1	40	4	1	1	1	25
	2	1	1	10		2	1	1	50
	3	1	1	50		3	1	1	30
	4	1	1	20		4	1	1	10
	5	1	1	60		5	1	1	40
	6	1	1	15		6	1	1	05
	7	1	1	05		7	1	1	20
	8	1	1	00		8	1	1	15
	9	1	1	30		9	1	1	00
	10	1	1	25		10	1	1	60
2	1	4	1	10	5	1	6	1	60
	2	4	1	60		2	6	1	00
	3	4	1	40		3	6	1	20
	4	6	1	20		4	6	1	40
	5	6	1	30		5	6	1	10
	6	6	1	15		6	6	1	30
	7	6	1	25		7	6	1	50
	8	6	1	00		8	6	1	25
	9	6	1	05		9	6	1	05
	10	6	2	50		10	6	1	15
3	1	2	1	30	6	1	3	1	60
	2	2	1	25		2	3	1	10
	3	2	1	00		3	3	1	40
	4	2	1	15		4	3	1	20
	5	2	1	50		5	3	1	30
	6	2	1	10		6	3	1	00
	7	2	1	40		7	3	1	05
	8	2	1	05		8	3	1	25
	9	2	1	20		9	3	1	15
	10	2	1	60		10	3	1	50

Создав постоянные условия наблюдений для различных вариантов, мы попытались изучить память у белых крыс на комплексное восприятие места пищи в условиях двух кормушек в простом Т-образном лабиринте. Эти опыты посвящены классу экспериментальных проблем, связанных с выбором между двумя решениями в каждом испытании, т.е. проблем, где имеется альтернатива с определенным типом симметрии.

Голод — это та достаточная мотивировка, которая является сильным раздражителем, устанавливающим активность животного. Значительно более эффективно ставить опыты на тех животных, которые голодали 48 часов. Голод в лабиринте действует гораздо сильнее, чем стремление к свободе [17]. После многократного приема пищи животное насыщается, исчезает мотивация в поведении и оно не выходит из стартовой камеры.

Специальными наблюдениями установлено, что крыса питается регулярно, в среднем через каждые три часа. Продолжительность перерыва между приемами пищи у разных крыс различна. Некоторые едят до десяти раз в сутки, другие только семь раз, но для каждой крысы ее ритм является постоянным [17]. Проводя в день десять проб, мы изучали отсроченные реакции в экспериментальных условиях, приближенных к естественным для животного.

По Петерсону [56, 57], крысы, действующие в равной степени обеими лапками, представляют собой редкое явление, а крысы, действующие преимущественно левой или правой лапкой, встречаются приблизительно одинаково часто. Такая анатомическая и функциональная асимметрия, влияет на характер фор-

мирования отсроченных реакций. У животных появляется тенденция на направление поворотов. В эксперименте всегда должны учитываться подобные факторы. В наших опытах их влияние легко контролируется. За день на животных ставится восемь проб, из которых четыре раза сигнализируется кормушка 1, а четыре раза - кормушка 2. Когда вероятность осуществления правильных реакций в течение двух дней у одной кормушки равнялась единице, а у другой - нулю, то таких крыс из опытов изымали.

Изучение памяти по методу отсроченных реакций сводится к тому, чтобы установить зависимость вероятности осуществления правильных реакций от времени продолжительности отсрочки. Предполагается, что величины P (вероятность осуществления правильных реакций) и t (продолжительность отсрочки) связаны функциональной зависимостью $P = f(t)$. Вид этой зависимости мы определяли из опытов, условия которых описаны выше.

Результаты опытов после групповой статистической обработки материала показаны на графике (рис. 1). Экспериментальные точки на графике расположены не совсем правильным образом, т.е. обнаруживается случайное отклонение от видимой общей закономерности. Это отклонение связано с неизбежными при всяком опыте ошибками измерения и от самой природы отсроченных реакций, о чем мы указывали в литературном обзоре. Поэтому возникает весьма типичная для практики задача сглаживания экспериментальной зависимости. Желательно обработать опытные данные так, чтобы определить общую тенденцию зависимости P от t , и, вместе с тем, сгла-

дить незакономерные, случайные отклонения, связанные неизбежными погрешностями самого наблюдения.

Для решения этой задачи мы применили метод наименьших квадратов [13, 19]. Этот метод дает возможность при заданном типе зависимости выбрать числовые параметры так, чтобы кривая $P = f(t)$, в известном смысле, наилучшим образом отображала экспериментальные данные.

Вычисления проводились на электронно-вычислительной машине ЕС-1020. Программа для расчетов была составлена на алгоритмическом языке Ал/I [18]. Описание стандартной подпрограммы решения системы нормальных уравнений, возникающей при приближении функции, методом наименьших квадратов рассмотрено в работе [23]. Экспериментальные результаты после машинной обработки даны на рис. 1.

Мы кратко обрисовали методику отсроченных реакций, с помощью которой в экспериментальной нейрофизиологии проводилось внушительное количество исследований на всех видах позвоночных животных, начиная с рыб и кончая обезьянами. Мы не пытались охватить здесь обширную литературу по отсроченным реакциям, проявляемым разными видами животных. Мы использовали данные литературы избирательно, не приводя тех результатов, которые представляются нам спорным или не имеющими прямого отношения к нашим опытам. В этом очерке мы стремились рассмотреть некоторые из важнейших работ, выполненных за последние 50 лет, чтобы получить известное представление об этой методике в историческом аспекте. Мы попытались также резюмировать точки зрения, представленные в ряде трудов, теоретические взгляды на природу отсроченных реакций, способствующие расширению наших представлений

о нейрофизиологических механизмах памяти. Эти теоретические взгляды вместе с известными основными закономерностями развития нервных процессов позволяют объяснить широкий диапазон поведенческих актов.

Естественно, этот краткий обзор не может претендовать на исчерпывающую, всестороннюю характеристику отсроченных реакций. Мы сознательно оставили в стороне многие важные проблемы, касающиеся этих реакций. Основное внимание было сосредоточено на тех противоречиях, которые существуют во взглядах на природу отсроченных реакций. Мы показали, также неустойчивость отсроченного ответа, т.е. изменения максимума продолжительности отсрочки.

Из анализа приведенных в настоящем обзоре данных следует, что до сих пор нет опытов, методологически удовлетворяющих всем требованиям, предъявляемым к изучению отсроченных реакций. Одной из главных задач при изучении этих реакций является разграничение памяти обучения, т.е. исследование отсроченных реакций так, чтобы животные не обучались в экспериментальных условиях. Решить данную проблему очень трудно, для этого необходима новая точная методика. С этой целью мы предлагаем исследовать формирование отсроченных реакций с помощью заранее составленной временной программы (таблица I).

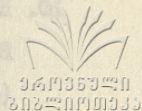
Пользоваться такой программой удобно, т.к. все факторы, влияющие на осуществление отсроченных реакций меняются случайным образом от пробы к пробе, а также изо дня в день. Это давало возможность в условиях опыта, который длится днями, исключить процесс обучения у животных и выработку

рефлекса на время. Вышесказанное подтверждается экспериментально (рис.2). Кривая показывает, что с первого дня до конца опытов в течение десяти дней вероятность осуществления правильных реакций при различной продолжительности отсрочки дня почти не меняется. В случае обучения кривая отсроченных реакций должна была расти.


Кроме того, проведение опытов при такой временной программе дает возможность исследовать отсроченные реакции у разных животных в одинаковых условиях, что позволяет нам делать более точные выводы.

Изучая влияние повреждения и раздражения той или иной структуры головного мозга на динамику отсроченных реакций, можно получить важные результаты для создания представления о нейрофизиологических механизмах памяти. Как было показано в обзоре, получаемое в опытах максимальное время отсрочки не является настоящей мерой отсроченной реакции. Она переменна и может привести к ошибочным выводам. Поэтому при сравнении различных групп животных желательно сравнивать не максимальные значения этих реакций, а динамику их формирования. Это возможно с применением методики, которая описана в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА



1. Абрамова Р.А., К физиологии следовых условных рефлексов у собак и низших обезьян. Диссерт. на соиск. уч. степени канд. биолог. наук. Л., 1956.
2. Айвазшвили И.М., Значение префронтальной коры больших полушарий головного мозга в механизмах памяти. Тбилиси, "Мецниереба", 1974, 8-24.
3. Аминев Г.А., К методике вероятностей оценки отсроченных реакций. Журн. выш. нервн. деят., 24, 6, 1974, 1301-1305.
4. Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э., Введение в математическую теорию обучения. "Мир", М., 1969, 178-295.
5. Беритов И.С., Нервные механизмы поведения высших позвоночных животных. М., Изд. АН СССР, 1961, 17-91.
6. Бериташвили И.С., О структурных и функциональных основах психической деятельности. Материалы симпозиума. Структурные и функциональные основы психической деятельности. Изд. Академии наук СССР, М., 1963, 53-88.
7. Бериташвили И.С., Айвазшвили И.М., О продолжительности краткосрочной памяти у собак в разных условиях опыта. В кн. Современные проблемы деятельности и строения центральной нервной системы. т.2, "Мецниереба", Тбилиси, 1968, 29-49
8. Бериташвили И.С., Память позвоночных животных, ее характеристика и происхождение. М., Изд. "Наука", 1974, II-78.
9. Браун Дж.В., Методы Монте-Карло. В сб. Современная математика для инженеров. Изд. иностранной литературы. М., 275-299.

- 
10. Бусленко Н.А., Голенко Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шреидер Ю.А., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Изд. физ.мат. литературы, М., 1962, 39-72.
11. Буш Р., Мостеллер Ф., Стохастические модели обучаемости. Изд. физико-математической литературы. М., 1962, 335-400.
12. Вацуро Э.Г., Исследование методом отсроченных реакций способности низших обезьян к ретенции следов визуальных раздражений. Тр. физиолог. лаб. им. акад. И.П. Павлова, 1948, 14, 192-200.
13. Вентцель Е.С., Теория вероятностей. Изд. физ.мат. литературы. М., 1962, 300-391.
14. Войтонис Н.Ю., Сравнительно-психологическое изучение памяти методом "отсроченных реакций", сб. Рефлексы, инстинкты и навыки. Гос. спец.-эконом. изд., М., 1936, 195-212.
15. Войтонис Н.Ю., Формы проявления установок у животных и, особенно, у обезьян. В сб. Психология. т.3. Академия наук Грузинской ССР - Институт психологии. Тбилиси, 1945, 121-140.
16. Войтонис Н.Ю., Предыстория интеллекта. Изд. АН СССР М.-Л., 1949, 29-72.
17. Дембовский Я., Психология животных. Изд. иностранной литературы. М., 1959, 299-323.
18. Джермейн К., Программирование на УМ/360. "Мир", М., 1973, 307-406.

19. Идельсон Н.И., Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. Геодиздат. М., 1947, 144-151.
20. Конорский Ю., Являются ли отсроченные реакции следовым рефлексом? Физиолог. Ж. СССР, 1960, 46, 244-246.
21. Конорский Ю., Интегративная деятельность мозга. "Мир", М., 1970, 386-397.
22. Конорский Ю., Проблема памяти в физиологическом аспекте, в сб. "Гагрские беседы", 1972, "Мецниереба", Тбилиси, 1972, 6, 37-48.
23. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Выпуск 4 пакет научных подпрограмм. Часть 4. Институт математики АН БССР, Минск, 1974, 203-210.
24. Натишвили Т.А., О роли височного "ассоциационного" неокортекса в явлениях образной памяти. Автореферат диссерт. на соиск. уч. степ. канд. биолог. наук, Тбилиси, 1974
25. Роговский Г.З., Навыки и зачатки интеллектуальных действий у антропоидов (шимпанзе), Изд. Медгиз, Л., 1948, 14-42.
26. Розенблатт Ф., Принципы нейродинамики перцептроны и теория механизмов мозга. "Мир", М., 1965, 41-88.
27. Слобин Д., Грин Дж., Психоллингвистика. "Прогресс", М., 1976, 61-153.
28. Финин Д., Введение в теорию планирования экспериментов. "Наука", М., 1970, 11-35.
29. Фирсов Л.А., Характеристика следовых (отсроченных) ре-

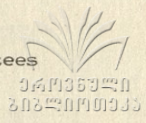
акций у шимпанзе. Тр. Ин-та физиологии им. И.П. Павлова АН СССР. 1962, 152-166.

041935320
303:010333

30. Фирсов Л.А., Формирование отсроченной реакции в условиях стабильности и нестабильности следовой паузы. Ж. высш. нерв. деят., 1969, 19, 6, 976-981.
31. Фирсов Л.А., Память у антропоидов. "Наука", Л., 1972, 142-174.
32. Хикс Ч., Основные принципы планирования эксперимента. "Мир", М., 1967, 85-117.
33. Шустин Н.А., Методика одновременного исследования двигательных следовых и слуховых следовых условных рефлексов. Журн. высш. нерв. деят. 1956, 4, 2, 338-341.
34. Шустин Н.А., К проблеме изучения функции лобных долей больших полушарий головного мозга. Физиологический журнал СССР им. И.М. Сеченова, 1958, 44, II, 234-240.
35. Шустин Н.А., Физиология лобных долей головного мозга. Изд. Медгиз, Л., 1959, 28-94.
36. Шустин Н.А., Отсроченная реакция и следовые рефлексы. Тез. докл. 2-ой конф. по проблемам памяти и следовым процессам. Пушкино, 1970, 218-220.
37. Adams K.D., Experimental studies of adaptive behavior in cats. Comp. Psychol. Monogr., 1929, 6, 122-137.
38. Carr H.A., The Alteration Problem. Journ. Anim. Behav., 1917, 7, 24-36.
39. Carr H.A., Psychology. A study of mental activity. New York, 1925.
40. Elder H.L., Nissen H.W., Delayed Alteration in Raccos, Journ.

41. Fletcher H.L., The delayed-response proble. In: Behavior of non-human primates. Ed. A.M.Schrier, H.F.Harlow, F.Stollnits, New York Academic Press, 1965, 1, 129-169.
42. Foley I.P., Warden C.J., The Effect of Practice on the Delayed Reaction in the Rhesus Monkey. Journ. Genet. Psych., 1934, 44, 2-390.
43. Gleitman H., Wilson W.A., Herma Ir., Rescorla R.A., Massing and delayed-response performance. J.Comp. physiol. Psychol., 1963, 56, 22, 445-451.
44. Harlow H.F., Primate learning. In: Comparative Psychology. Ed. C.P. Stone, New-York, Prentice-Hall, 1961, 183-238.
45. Harlow H.F., Behavioral contributions to interdisciplinary research. In: Biological and biochemical bases of behavior Eds. H.F.Harlow, C.N.Woolsey, Univ. Wisconsin Press, Madison, 1958, 3-23.
46. Harlow H.F., Uehling H., Maslow, A.H., Comparative behavior of primates. Delayed reaction tests on primates from the lemurs to the orang-outan, J. comp. Psychol., 1932, 13, 3, 313-344.
47. Honzik C.H., Delayed reaction in rats, University of California. Publications in Psychology, 1931, 4, 307-318.
48. Hunter W.S., The delayed reaction in animals and children. Behavior Monogr., 1913, 2, 1-86.
49. Hunter W.S., The delayed reaction in child. Psychol. Rev., 1917, 24, 75-87.
50. Jacobson C.F., Studies of cerebral function in primates. The functions of the frontal association area in monkeys. Comp. Psychol., Monogr., 1936, 13, 3, 1-60.
51. Lawicka W., Physiological mechanism of delayed reactions 2. Delayed reactions in dogs and cats to directional stimuli, Acta Biol. Exp. 1959, 19, 199-219.

52. Maier Norman R.F., Delayed reaction and memory in rats, *J. of Genetic Psychology*, 1929, 36, 538- 549.
53. Miles R. The delayed-response learning in the marmosets and the macaque. *J.Comp. Physiol. Psychol.* 1975, 50, 12-352.
54. Morrison John. E., Spevack Abraham A., Yezuerski Robert, The effects of response-dependent and response-independent methods on delayed alteration "Behav. Res Meth. and Instrum", 1973, 54, 361-363.
55. Nissen H.W., Riesen A.H., Nowlis V., Delayed response and discrimination learning by chimpanzees. *J.Comp. Psychol.*, 1938, 26, 361-386.
56. Peterson J., A preliminary report on right and left handedness in the rat., *J.Comp.Psychol.*, 1931, 12, 155-161.
57. Peterson J., Mechanism of handedness in the rat. *Comp. Psychol. Monogr.*, 1934, 9, 254-261.
58. Rosvold H.E., Discussion. In: *Brain mechanism and learning*, Eds. A.Fessard, R.W.Gerard, J.Konorski, Oxford, 1961, 130.
59. Scalet M., The significance of delayed reactions in young children. *Comp. Psychol.Monogr.*, 1931, 7, 4, 74-81.
60. Speat T., Harlow H.F., Problem solution by monkeys following bilateral removal of the prefrontal areas. 2 Delayed reaction problems involving use of the matching-from-sample method. *J. exp. Psychol.*, 1943, 32, 424-445.
61. Teuber H.L., The riddle of frontal lobe function in man. In: *The frontal cortical cortex and behavior*. Eds. M.Warren. K.Akert, McGraw-Hill book Co, 1964, 410-444.
62. Teuber H.L., Unity and diversity of frontal lobe functions. In: *The frontal granular cortex and behavior*. Eds. J.Konorski, H.L.Teu-



63. Tinklepaugh O.L., Multiple delayed reversion with chimpanzees and monkeys. J.Comp. Psychol., 1932, 13, 3, 207-243.

64. Tinklepaugh O.L., An experimental study of representative factors in monkeys J.Comp. Psychol., 1928, 8, 197-236.

65. Tolman E.C., Purposive behavior in animals and man. New York Appleton, 1932, 34-98.

66. Tolman E.C., The determiners of behavior at a choice-point, Psychol. Rev., 1938, 45, 1-41.

67. Walton A.C. The influence of diverting stimul during Delayed reaction in dogs. J. Anom Behav., 1915, 5, 259-281.

68. Wikmark R.G.E., Divak J., Weis R., Retention of spatial delayed alternation in rats with lesions in the frontal lobes. Implications for a comparative neuropsychology of the prefrontal system. "Brain, Behav., and Evolut.", 1973, 5, 329-339.

69. Yerkes R.M., The mind of a gorila. Part 3 Memory Comp. Psychol. Monogr., 5, 1928, 2-92.

70. Yerkes R.M., Yerkes N.D., Concerning memory in the chimpanzee. J.Comp. Psychol., 8, 1928, 237-271.

ს.ცაგარელი

დასწრებაზე რეაქციის ბუნება

რეზიუმე

ნაწილობრივ განხილულია დასწრებაზე რეაქციისა და ნერვული მოწყობის ბუნება თანამედროვე მონაცემების გამოყენებით. აღწერილია დასწრებაზე რეაქციის კვლევის მეთოდური მხარე და კრიტიკულად არის განხილული დასწრების რეაქციის მაქსიმუმის დადგენა, შემოთავაზებულია მრავალნაირი მეთოდიკა დასწრებაზე რეაქციის დინამიკის შესასწავლად.

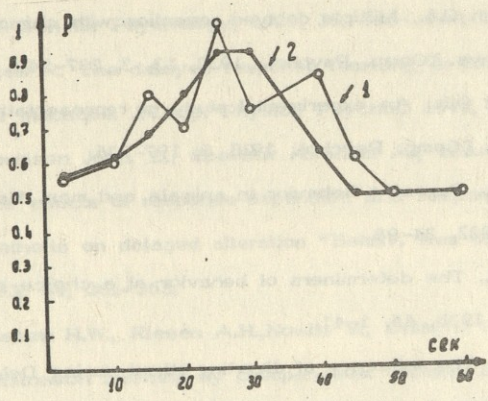


Рис. 1. Динамика вероятностей осуществления правильных реакций на различные отсрочки.

1 - экспериментальные результаты;

2 - результаты, обработанные методом наименьших квадратов. По оси абсцисс - продолжительность отсрочек в сек., по оси ординат - вероятность осуществления отсроченных реакций

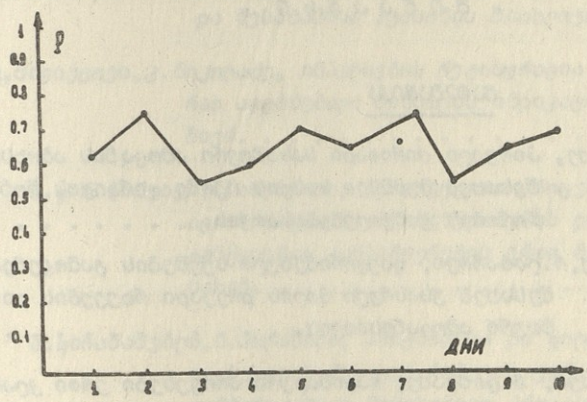


Рис. 2. Динамика отсроченных реакций.

По оси абсцисс - экспериментальные дни, по оси ординат - вероятность осуществления правильных реакций на все отсрочки дня.



საზოგადოებრივი

- რ. კორძაძე, პირველი ძირითადი სასაბჭოთაო ამოცანის ამოხსნის
შესახებ მუდმივი სიხშირის მქონე ფიქციური ნაშრომის
წარმოების განვითარების საკითხი. 13
- კ. მელიძე, რ. ლაბარაძე, ფიქციური გმირის სტრუქტურის გამოყვედნის
შესახებ უსასრულო გზის რეკონსტრუქციის რეკონსტრუქციის
მიზნით ამოცანების საკითხი. 26
- მ. ნუჭიძე, გ. ცინცაძე, მსოფლიო პირველი პირველი პირველი
ქვეყნის ფიქციური გმირის კონსტრუქციის წარმოების განვითარების
საკითხი 32
- ბ. ჯანაშია, შვანციხის ფიქციური გმირის განვითარების შესახებ
ნაბეჭადი ნაშრომის შედგენის საკითხი. 37

პროზა

- ნ. ბოჭორიძე, განვითარების ფიქციური გმირის მიზნით პირველი
ფიქციური გამოყვედნის შედგენის მიზნით ნაშრომის შე-
დგენის საკითხი. 43
- ბ. ბუკია, რეკონსტრუქციის გმირის მიზნით შესახებ. 47
- მ. გარბაშვილი, ვ. მელიძე, სამხატვრო შედგენის მიზნით ნაშრომის
შედგენის საკითხი. 62
- ბ. პირაძე, განვითარების ფიქციური გმირის სტრუქტურის გამოყვედნის
მიზნით ნაშრომის შედგენის საკითხი. 71
- ა. მამისხელიძე, ადგილობრივი ნაშრომის შედგენის საკითხი შესახებ
ნ - განვითარების წარმოების საკითხი და უწყვეტი სა-
ხეობის ავტორიტეტის კლასიფიკაციის საკითხი. 89
- გ. მელიძე, გრაფიკის ნაშრომის ფიქციური შედგენის საკითხი და შესახებ-
მისი ანალიზის საკითხი. 95



ნტუენ ხაკ ჟუკი, განმეგაგებული ბინთბინაღური განაწიღებებინ
 და შესაბამისი პუასტრის ბინაბღებებინ. 106

ვ. ბიგნუგოვი, ვ. ნიკოლაძე, იმპულსების რეგისტრაციის მეთოდური
 რეგულაციები სინათლის ინფრარედურის
 ბიგნ. 116

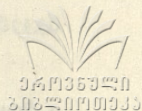
გ. ჟინანაშვილი, ნ. ასლანიძე, შექმნილი პრეცედენტის კვლევით-
 ადრის საკუთარი ბინიშენეღებების და საკუთარი
 ჟინტიციების განსაზღვრების ერთი ბეგოების შე-
 სახებ. 127

გ. ჟინანაშვილი, ნ. ასლანიძე, პრეცედენტის და ჟინტიციების ერთ-
 თი ბეგოების შესახებ, რეგულიცი ეგრენობა ბრავალ-
 განმეგბიღებინა შექმნილი პრეცედენტის რეგულაცი-
 ბაღურ დაშლას. 135

ი. ბუგაშვილი, ბრავალეღური სტრუქტურული ბეგებების
 კომპლექსის პრეცედენტების გეგმეგთი საკით-
 ბი. 147

ს. ბაგარელი, ბეგებებელი რეგულიცი ბუბიბა. 179

СОДЕРЖАНИЕ



МАТЕМАТИКА

- Р.А.Кордзадзе, О решении первой основной граничной задачи для уравнений равновесия пластинки постоянной толщины 5
- Г.В.Меладзе, Р.Д.Лазарев, Факторизованные схемы для динамической задачи об упругих колебаниях бесконечной полосы 14
- Т.С.Цуцунава, Э.А.Цинцадзе, Оптимальные процессы для одного класса уравнений в частных производных эллиптического типа. 27
- Г.В.Джаиани, Об одном обобщении формулы Шварца в случае полуплоскости. 33

КИБЕРНЕТИКА

- Н.В.Бокучава, Применение принципа минимума различающей информации в теории упорядочения сплавов. 38
- Г.Б.Букия, Об одной модели накопления 44
- Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе, К теории упорядочения тройных сплавов 48
- Г.Ш.Киртадзе, Применение метода спектрального разложения функций распределения для моделирования упорядочивающихся бинарных сплавов с вакансиями 63
- А.Г.Мамиствалов, О построении аффинных инвариантов n -мерных точечных и непрерывных образов. 72
- Т.Н.Мгвделадзе, Информационное содержание графов и соответствующие размытые множества 90

Нгуен Хак Фук, Обобщенные биномиальные распределения и соответствующие пуассоновские приближения	96
В.В.Митрогов, К.Я.Николадзе, Регистрация импульсов оптическим индикатором со световой накачкой	107
З.А.Пиранашвили, Н.П.Асланиди, Об одном методе нахождения собственных значений и собственных функций ковариаций случайного процесса	119
З.А.Пиранашвили, Н.П.Асланиди, Об одном методе прогноза и фильтрации, основанном на ортогональном разложении многомерных случайных процессов..	128
И.И.Шуштакшвили, Некоторые вопросы прогнозирования комплекса многоветевых стохастических моделей	136
С.Н.Цагарели, Природа отсроченных реакций	150



Редактор издательства Л.Абуашвили

Корректор В.Долидзе

Подписано в печать 19.7.79.

Формат бумаги 60x84

Усл.печ.л. II,75

Уч.-изд. 7,33

Цена 73 коп.

Заказ 4018

УЭ 01534

Тираж 300

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.
Типография АН Груз. ССР, Тбилиси, 380060,
ул. Кутузова, 19.

86-79

80-6

061035740
2022010333