

# საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

აღმასხან გუგუშვილი  
აღექსანდრე თოფჩიშვილი  
მინდია სალუქვაძე  
ვახტანგ ჭიჭინაძე  
ნოდარ ჯიბლაძე

## ოპტიკური აპარატის მეთოდები



*დამტკიცებულია სტუ-ს სასწავლო-  
მეთოდური საბჭოს მიერ*

თბილისი  
2002

УДК 519.6

გ 927

ა. გუგუშვილი, ა. თოფჩიშვილი, მ. სალუქვაძე, ვ. ჭიჭინაძე, ნ. ჩიბლაძე. ოპტიმიზაციის მეთოდები. - თბილისი: გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი". - 2002. - 634გვ.

წიგნი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს კურსისათვის - ოპტიმიზაციის მეთოდები. განხილულია ოპტიმიზაციის ამოცანები ევკლიდეს სასრულგანზომილებიან სივრცეში. შეისწავლება ერთკრიტერიული და მრავალკრიტერიული სტატიკური ოპტიმიზაციის მეთოდები, მათ შორის უპირობო ოპტიმიზაციის ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი, დეტერმინირებული და სტოქასტიკური ძებნის ლოკალური და გლობალური მეთოდები, წრფივი, არაწრფივი, ამოზნექილი და არაამოზნექილი დაპროგრამების მეთოდები, ვექტორული ოპტიმიზაციის ფუნდამენტური პრობლემები. განხილულია, აგრეთვე, ოპტიმიზაციის საკითხები განუზღვრელობის პირობებსა და კომპლექსურცვლადიან სისტემებში.

მეთოდების ლოგიკური სტრუქტურის უკეთ გაცნობისა და ათვისების მიზნით, თეორიულ მასალასთან ერთად, მრავლადაა წარმოდგენილი პრაქტიკული მაგალითებისა და ამოცანების გადაწყვეტის რიცხვითი პროცედურები და კომპიუტერული ექსპერიმენტების შედეგები.

სახელმძღვანელო ძირითადად გათვალისწინებულია ტექნიკური უნივერსიტეტების სტუდენტების, მაგისტრებისა და ასპირანტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება, აგრეთვე, მეცნიერი მუშაკების, ინჟინრებისა და ეკონომისტებისათვის.

რეცენზენტები: საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი, ტექნ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი რ. ხუროძე  
ტექნ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი ა. ელიბერიძე

ISBN 99928-944-8-2

© გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2002წ.

GEORGIAN TECHNICAL UNIVERSITY

**ALMASKHAN GUGUSHVILI  
ALEXANDER TOPCHISHVILI  
MINDIA SALUKVADZE  
VAKHTANG CHICHINADZE  
NODAR JIBLADZE**

# **OPTIMIZATION METHODS**



*Approved by the Educational  
Methodical Council of the GTU*

TBILISI  
2002

**ალმასხან შოთას ძე გუგუშვილი** - ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრის გამგე, ინფორმატიზაციისა და კავშირგაბმულობის საერთაშორისო აკადემიების წამდგელი წევრი. სამეცნიერო მოღვაწეობის სფერო: მართვა ტექნიკურ და ადმინისტრაციულ სისტემებში, დინამიკური სისტემების ანალიზი და სინთეზი, არაწრფივი სისტემების მოდელირება და იდენტიფიკაცია, ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები, სტატისტიკური და დინამიკური ოპტიმიზაცია, საინფორმაციო ტექნოლოგიების გამოყენება რთულ ტექნიკურ სისტემებში.

**ალექსანდრე ლევანის ძე თოფჩიშვილი** - ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრის პროფესორი. სამეცნიერო მოღვაწეობის სფერო: მართვა ტექნიკურ სისტემებში, სტატისტიკური და დინამიკური ოპტიმიზაცია, ვექტორული და არასკალარული ოპტიმიზაცია, თამაშთა თეორია, საინფორმაციო ტექნოლოგიების გამოყენება რთულ ტექნიკურ სისტემებში.

**მინდია ეგვენის ძე სალუქვაძე** - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიისა და საქართველოს საინჟინრო აკადემიის აკადემიკოსი, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის გამოყენებითი მექანიკის, მანქანათმშენებლობისა და მართვის პროცესების განყოფილების აკადემიკოს-მდივანი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის დირექტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრის პროფესორი, სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი მეცნიერებისა და ტექნიკის დარგში (1975 წ.). სამეცნიერო მოღვაწეობის სფერო: მართვა ტექნიკურ სისტემებში, სტატისტიკური და დინამიკური ოპტიმიზაცია, ვექტორული და არასკალარული ოპტიმიზაცია, თამაშთა თეორია, საინფორმაციო ტექნოლოგიების გამოყენება რთულ ტექნიკურ სისტემებში.

**ვახტანგ კონსტანტინეს ძე ჭიჭინაძე** - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიისა და საქართველოს საინჟინრო აკადემიის აკადემიკოსი, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის დირექციის მხრეველი. სამეცნიერო მოღვაწეობის სფერო: მართვა ადმინისტრაციულ და ტექნიკურ სისტემებში, სტატისტიკური და დინამიკური ოპტიმიზაცია, თამაშთა თეორია, დაპროექტების ავტომატიზაცია.

**ნოდარ ილარიონის ძე ჯბლაძე** - ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრის პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის წამყვანი მეცნიერი თანამშრომელი, სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი მეცნიერებისა და ტექნიკის დარგში (1986 წ.). სამეცნიერო მოღვაწეობის სფერო: მართვა ტექნიკურ სისტემებში, დაპროექტების ავტომატიზაცია, სტატისტიკური და დინამიკური ოპტიმიზაცია, საინფორმაციო ტექნოლოგიების გამოყენება რთულ ტექნიკურ სისტემებში.

# სარჩევნი

## ენისნიტყვაობა

XXI

## აღნიშვნები

XXIV

### თავი პირველი. ოპტიმიზაციის არსი

1.1	შესავალი	1
1.2	სტატიკური ოპტიმიზაციის ამოცანების კლასიფიკაცია	3
1.3	სტატიკური ოპტიმიზაციის მოდელები მეურნეობის აქტუალური პრობლემების გადასაწყვეტად	6
1.3.1	ოპტიმიზაციის ამოცანები ენერგეტიკაში	7
1.3.2	წარმოების დაგეგმვა	9
1.3.3	წარმოების ოპტიმალური დაგეგმვა	13
1.3.4	წრფივი დაპროგრამება სოფლის მეურნეობაში	14

### თავი მეორე. ერთკრიტიკული ოპტიმიზაციის თეორიული საფუძვლები

2.1	ამოცანის დასმა	16
2.2	ერთკრიტიკული ოპტიმიზაციის ამოცანების კლასიფიკაცია	22
2.3	ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები	25
2.3.1	ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანებში	25
2.3.2	ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები პირობითი ოპტიმიზაციის ამოცანებში	26
2.3.3	კუნ-ტაკერის პირობების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	29
2.4	ერთკრიტიკული ოპტიმიზაციის მეთოდების კლასიფიკაცია	32

### თავი მესამე. წრფივი დაპროგრამება

3.1	წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ზოგადი დასმა	34
3.1.1	ამოცანის სხვადასხვა ფორმები	34
3.1.2	ძირითადი ცნებები და დებულებები	37

3.1.3	ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	38
3.1.4	წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჟორდან-გაუსის გამორიცხვის მეთოდით	40
3.1.5	წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი	50
3.2	სიმპლექს-მეთოდი	60
3.2.1	წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ძირითადი თვისებები	60
3.2.2	კანონიკური ამოცანის საყრდენი გეგმა	60
3.2.3	საყრდენი გეგმის ოპტიმალობის გამოკვლევა	62
3.2.4	ამოცანის ამოხსნა ცნობილი საწყისი საყრდენი გეგმის შემთხვევაში	63
3.2.5	საწყისი საყრდენი გეგმის აგება	68
3.2.6	ამოცანის ამოხსნა უცნობი საწყისი საყრდენი გეგმის შემთხვევაში (ხელოვნური ბაზისის მეთოდი)	69
3.2.7	სიმპლექს-მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	70
3.2.8	სიმპლექს-მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციო მაგალითები	71
3.3	დუალობა წრფივ დაპროგრამებაში	81
3.3.1	წრფივი დაპროგრამების პირდაპირი და დუალური ამოცანები	81
3.3.2	კავშირი პირდაპირ და დუალურ ამოცანებს შორის	83
3.3.3	ამონახსნების განსაზღვრა ამოცანების დუალური წყვილისათვის	85
3.3.4	დუალური ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	86
3.3.5	დუალური ამოცანის ეკონომიკური ინტერპრეტაცია	88
3.4	მთელრიცხვა წრფივი დაპროგრამება	92
3.4.1	მთელრიცხვა დაპროგრამების ამოცანის თავისებურებანი	92
3.4.2	მოკვეთის მეთოდი	94
3.4.3	გომორის მეთოდი	97
3.4.4	საზღვრებისა და განშტოების მეთოდი	101
3.5	წრფივი დაპროგრამების არასაკუთრივი ამოცანა	102
3.5.1	არასაკუთრივი ამოცანების კლასიფიკაცია	103

3.5.2	არასაკუთრივი ამოცანების შინაარსობრივი ინტერპრეტაცია	104
3.5.3	უტოლობათა არათავსებადი სისტემების კორექცია	108
3.5.4	არასაკუთრივი ამოცანის პირდაპირი აპროქსიმაციის მოდელი	109
3.5.5	წრფივი დაპროგრამების სიმეტრიული ამოცანის კორექცია	112
3.5.6	შეზღუდვათა რანჟირების მეთოდი	114
3.5.7	დისკრეტული აპროქსიმაციის მეთოდები	115
3.6	წრფივი დაპროგრამების სატრანსპორტო ამოცანა	117
3.7	ოპტიმიზაცია თამაშთა თეორიის თვალსაზრისით	122
3.7.1	თამაშთა თეორიის ამოცანების ეკონომიკური და გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	122
3.7.2	თამაშთა თეორიის ამოცანის დაყვანა წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე	132

**თავი მეოთხე. უპირობო ოპტიმიზაციის არანრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები** 138

4.1	ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდები	138
4.1.1	ძებნის მეთოდები გაღარჩევის მეთოდი - 142	139
4.1.2	ოქროს კვეთის მეთოდი	144
4.1.3	დიხოტომიის მეთოდი	148
4.1.4	ფიბონაჩის მეთოდი	151
4.1.5	პოლინომიალური აპროქსიმაციის მეთოდები კვადრატული ინტერპოლაციის მეთოდი - 157; კუბური ინტერპოლაციის მეთოდი - 160	157
4.1.6	ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი	164
4.1.7	ბოლცანოს მეთოდი	166
4.1.8	მკვეთთა მეთოდი	167
✓ 4.1.9	უმცირეს კვადრატთა მეთოდი უმცირეს კვადრატთა მეთოდით წრფივი ფუნქციის პარამეტრების შერჩევა - 177; უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მორე რიგის პოლინომის პარამეტრების შერჩევა - 179	170

4.2	მრავალგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდები	186
4.2.1	ნულოვანი რიგის დეტერმინირებული მეთოდები კორდინატული დაშვების მეთოდი - 186; პაულის მეთოდი - 188; სიმლექს-მეთოდი - 188; ნულდერ-შიდის მეთოდი - 192; პუკი-ჯივისის მეთოდი - 195	186
4.2.2	პირველი რიგის დეტერმინირებული მეთოდები გრადიენტული მეთოდი მულმივი ბიჯით - 199; უსწრაფესი დაშვების მეთოდი - 200; შეუღლებული მიმართულებების მეთოდი - 202; ფლეთერ-რივისის მეთოდი - 202; პოლაკ-რიბერის მეთოდი - 202	199
4.2.3	მეორე რიგის დეტერმინირებული მეთოდები ნიუტონის მეთოდი - 205; ნიუტონის მოდიფიცირებული მეთოდი - 206; მარკვარტის მეთოდი - 207; ცვლადი მეტრიკის მეთოდები - 209; სუბგრადიენტული მეთოდები - 212; გელფანდ-ციტილინის მეთოდი - 213; ზოგადი რეკომენდაციები - 214	205
4.3	ოპტიმიზაციის სტოქასტიკური მეთოდები	216
4.3.1	შემთხვევითი ძებნის მეთოდები ძებნა "წრფივი ტაქტიკით" - 216; ძებნა "არაწრფივი ტაქტიკით" - 217; ძებნა სტატისტიკური გრადიენტის მიხედვით - 217	216
4.3.2	სტოქასტიკური აპროქსიმაციის პროცედურები კოფერ-უოლფოვიცის პროცედურა - 223	218
4.3.3	სტოქასტიკური აპროქსიმაციის ტიპის მეთოდები	226
4.4	აბსოლუტური ექსტრემუმის ძებნის მეთოდები	227
4.4.1	შემთხვევითი გადარჩევის მეთოდი	227
4.4.2	ძებნის არის თანდათანობითი შემცირების მეთოდი	227
4.4.3	ძებნის იტერაციული მეთოდი	228
4.4.4	ძებნის კომბინირებული მეთოდები	230
4.4.5	Ψ-გარდაქმნის პრინციპი	230
4.4.6	სიმბიმის ცენტრების მეთოდი	233
4.4.7	Ψ-გარდაქმნის მეთოდი	241
4.5	მეთოდების შედარება გამოთვლითი ექსპერიმენტების საფუძველზე	249

<b>თავი მესუთი. პირმოითი ოპტიმიზაციის არანაწივი ამოსანების გაღანაწივის მეთოდები</b>	<b>262</b>
---	------------



5.1	არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	262
5.2	ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი	267
5.3	ამოზნეილი დაპროგრამების ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები	271
5.4	გრადიენტული მეთოდები	281
5.4.1	შესაძლო მიმართულებების მეთოდი	281
5.4.2	გრადიენტის პროექციის მეთოდი	281
5.4.3	ფრანკ-უულფის მეთოდი	282
5.5	საჯარიმო ფუნქციის მეთოდები	287
5.5.1	თანდათანობითი მიახლოების მეთოდი	288
5.5.2	ფიაკო-მაკკორმიკის მეთოდი	292
5.5.3	ლაგრანჟის მოფიფიცირებული ფუნქციის მეთოდი	293
5.5.4	ეროუ-ჰურვიცის მეთოდი	298
5.6	არაწრფივი დაპროგრამების არამოზნეილი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები	304
5.6.1	კომბინირებული მეთოდი	304
5.6.2	კომპლექსური მეთოდი	307

## **თავი მეექვსე. ართქრიტარული ოპტიმიზაციის გამოყენებით ამოსანები**

		313
6.1	ელექტრონული სქემების ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანა	313
	ამოცანის დსმა - 313; ოპტიმალობის კრიტერიუმები - 314; მათემატიკური მოდელი - 318; ოპტიმიზაციის შუდეგი -329	
6.2	ატომური ელექტროსადგურის თბოგადამცემი აპარატების ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანა	331
6.3	წარმოების დაგეგმვის ზოგადი ამოცანა	335
6.4	წრფივი დაპროგრამების გამოყენება საწარმოს ოპერატიულ მართვასა და გადაწყვეტილების მიღებაში	338
6.5	არაწრფივი განტოლებათა სისტემების ამოხსნა	346

## **თავი მეშვიდე. მრავალკრიტარული ოპტიმიზაცია**

7.1	ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანები	354
7.1.1	მრავალკრიტარული ამოცანების კლასიკური მაგალითები	354

7.1.2	ზოგადი ცნებები	357
7.1.3	უპირატესობის თანადობები. ფასეულობისა და შერჩევის ფუნქციები	363
7.1.4	კრიტერიუმთა დამოუკიდებლობა უპირატესობის მიხედვით	370
7.1.5	ეფექტური, სუსტად ეფექტური შეფასებები და ამონახსნები	375
7.1.6	ბიბლიოგრაფია მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის განვითარებიდან	384
7.2	იდეალური მანძილის მინიმიზაციის მეთოდი	386
7.2.1	მეთოდის მათემატიკური დასაბუთება და არსი	386
7.2.2	ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმის განსაზღვრა	389
7.2.3	ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმის არსებობა	390
7.3	აწონილ ჯამთა მეთოდი წონების წერტილოვანი შეფასებით	391
7.3.1	მეთოდის ინტერპრეტაცია	392
7.3.2	მეთოდის მათემატიკური დასაბუთება	393
7.3.3	წონების შინაარსობრივი დატვირთვა	394
7.3.4	წონების განსაზღვრა	395
7.3.5	კრიტერიული კონუსი	397
7.3.6	კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილი	401
7.3.7	ეფექტური წერტილების აგება შედგენილი გრადიენტების გამოყენებით	403
7.3.8	კრიტერიული კონუსის კავშირი დომინირებადობის სიმრავლესთან	408
7.3.9	დასაშვები არის ეფექტური წახნაგები	410
7.3.10	წონითი ვექტორების სიმრავლიდან ქვესიმრავლეების განსაზღვრა	413
7.4	e-შეზღუდვების მეთოდი	420
7.4.1	e-შეზღუდვების მეთოდის რეალიზაცია	422
7.4.2	შესაძლო შედეგები	423
7.4.3	მგრძნობიარობის ანალიზი	425
7.5	თითქმის-ოპტიმალობის ანალიზი	426
7.6	ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმები	429
7.6.1	მათემატიკური საფუძვლები	430

7.6.2	ვექტორული მაქსიმიზაციის თეორია	432
7.6.3	ვექტორული მაქსიმიზაციის ერთი ალგორითმი	435
7.6.4	მრავალკრიტერიული ამოცანების კლასიფიკაცია	437
7.6.5	საწყისი ეფექტური ბაზისის აგება კუთხის წერტილების ეფექტურობის შესამოწმებელი ქეამოცანა - 438; ეფექტური კუთხის წერტილების პოვნის მეთოდები - 438	437
7.6.6	არაბაზისური ცვლადების ეფექტურობის შესამოწმებელი სტოიერ-ევანსის ტესტი	446
7.6.7	ეფექტური წახნაგებიდან ყველა მაქსიმალურის შერჩევა	447
7.6.8	მრავალკრიტერიული ამოცანის გადაწყვეტა ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმის საფუძველზე	449
7.7	კრიტერიუმების მინიმალური მნიშვნელობები ეფექტურ სიმრავლეზე	450
7.7.1	მოგებათა ცხრილები	450
7.7.2	კრიტერიუმების მინიმალურ მნიშვნელობათა მოძებნის ამოცანის ძირითადი თვისებები	452
7.7.3	სიმპლექს-მეთოდზე დაფუძნებული ალგორითმი	454
7.8	ინტერაქტიული პროცედურები	455
7.8.1	STEM მეთოდი STEM ალგორითმი - 458; კომენტარები STEM მეთოდის შესახებ - 463	457
7.8.2	ჯოფრიონ-დაიერ-ფაინბერგის მეთოდი (GDF) ლოკალურად შესაფერისი წონების განსაზღვრის პროცედურა - 465; GDF ალგორითმი - 467; GDF მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი - 469; კომენტარები GDF მეთოდის შესახებ - 472	464
7.8.3	ზაინც-ვალენიუსის მეთოდი (Z-W) Z-W ალგორითმი - 474; Z-W მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი - 481; $\Lambda^{(h)}$ -ის მიმართ ეფექტური არაბაზისური ცვლადების განსაზღვრა - 484; კომენტარები Z-W მეთოდის შესახებ - 486	473
7.9	დუალობა მრავალკრიტერიულ ოპტიმიზაციაში	487
7.9.1	ვექტორული ფუნქციის უნაგირა წყვილები	487

7.9.2	დუალური ამოცანის ზოგადი კონსტრუქცია	501
7.10	მრავალკრიტიერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები	505
7.10.1	მეტალურგიული წარმოების დაგეგმვის ამოცანები ამოცანა 1 -505; ამოცანა 2 - 509	505
7.10.2	ინდივიდუალური მეწარმე და საბაზრო ეკონომიკა მრავალკრიტიერიული ოპტიმიზაციის თვალსაზრისით	513
<b>თავი მეჩვი. ოპტიმიზაცია კომპლექსურადიან სისტემაში</b>		516
8.1	ფრაქტალების თეორია	516
8.1.1	შესავალი	516
8.1.2	ჰუნკარეს ასახვა	517
8.1.3	ჰამილტონის სისტემები	521
8.1.4	დისიპატიური დინამიკური სისტემები და მათი ატრაქტორები	527
8.1.5	ლიაპუნოვის მაჩვენებლები	530
8.1.6	ლიაპუნოვის მაჩვენებლების ძირითადი თვისებები	534
8.1.7	ფრაქტალური განზომილება	539
8.1.8	კოხის სიმრავლე	543
8.1.9	კანტორის სიმრავლე და სერპინსკის ხალიჩა კანტორის სიმრავლე - 545; სერპინსკის ხალიჩა - 546	545
8.1.10	მსგავსება და სკეილინგი	548
8.1.11	ფრაქტალური განზომილების განსაზღვრა	551
8.1.12	ჟულიას და მანდელბროტის სიმრავლეები ჟულიას სიმრავლე - 553; მანდელბროტის სიმრავლე - 555	553
8.2	ნიუტონის მეთოდი კომპლექსური პოლინომებისათვის: კელის პრობლემა	559
8.3	ნიუტონის მეთოდი ნამდვილი განტოლებებისათვის	565
8.4	ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი კომპლექსური სისტემებისათვის	569
<b>ლიტერატურა</b>		580
<b>საგნობრივი საჩივბელი</b>		598

# CONTENTS

<b>Preface</b>	XXI
<b>Notations</b>	XXIV
<b>Chapter One. The Essence of Optimization</b>	1
1.1 Introduction	1
1.2 Classification of Static Optimization Problems	3
1.3 Static Optimization Models for Solving Vital Problems in Economy	6
1.3.1 Optimization Problems in Power Engineering	7
1.3.2 Planning in Industry	9
1.3.3 Optimal Planning of Industry	13
1.3.4 Linear Programming in Agriculture	14
<b>Chapter Two. Theoretical Foundations of Single-Criteria Optimization</b>	16
2.1 Statement of the Problem	16
2.2 Classification of Single Criteria Optimization Problems	22
2.3 Necessary and Sufficient Optimality Conditions	25
2.3.1 Necessary and Sufficient Optimality Conditions in Unconstrained Optimization Problems	25
2.3.2 Necessary and Sufficient Optimality Conditions in Constrained Optimization Problems	26
2.3.3 Geometric Interpretation of Khun-Tucker Conditions	29
2.4 Classification of Single Criteria Optimization Methods	32
<b>Chapter Three. Linear Programming</b>	34
3.1 General Formulation of Linear Program	34
3.1.1 Different Forms of the Problem	34
3.1.2 Main Notions and Statements	37

3.1.3	Geometric Interpretation of the Problem	38
3.1.4	Solving System of Linear Equations by Jordan-Gauss Elimination Method	40
3.1.5	Graphic Method for Solving Linear Program	50
3.2	Simplex-Method	60
3.2.1	Principal Properties of Linear Program	60
3.2.2	Support Solution of Canonical Problem	60
3.2.3	Optimality Investigation of Support Solution	62
3.2.4	Solving the Problem with a Given Initial Support Solution	63
3.2.5	Construction of an Initial Support Solution	68
3.2.6	Solving the Problem with Unknown Initial Support Solution (Artificial Basis Method)	69
3.2.7	Geometric Interpretation of Simplex-Method	70
3.2.8	Illustrative Examples of Use of Simplex-Method	71
3.3	Duality in Linear Programming	81
3.3.1	Direct and Dual Linear Programs	81
3.3.2	Relationship among Direct and Dual Programs	83
3.3.3	Construction of Solutions for Dual Pair of Problems	85
3.3.4	Geometric Interpretation of Dual Program	86
3.3.5	Economic Interpretation of Dual Problem	88
3.4	Integer Linear Programming	92
3.4.1	Peculiarities of Integer Program	92
3.4.2	Cutting Off Method	94
3.4.3	Gomori Method	97
3.4.4	Branch-and-Bound Method	101
3.5	Improper Linear Program	102
3.5.1	Classification of Improper Problems	103
3.5.2	Interpretation of Improper Problems	104
3.5.3	Correction of Inconsistent Inequality Systems	108
3.5.4	Direct Approximation Model for Improper Program	109
3.5.5	Correction of Symmetric Linear program	112
3.5.6	Constraints Ranking Method	114
3.5.7	Discrete Approximation Methods	115

3.6	Linear Programming Transportation Problem	117
3.7	Optimization from Game Theory Standpoint	122
3.7.1	Economic and Geometric Interpretation of Game Theory Problems	122
3.7.2	Reduction of Game Theory Problem to Linear Program	132

## **Chapter Four. Solving Methods of Nonlinear Unconstrained Optimization Programs** 138

4.1	Deterministic Methods of Single Dimensional Optimization	138
4.1.1	Search Methods	139
	Exhaustive Method - 142	
4.1.2	Golden Section Method	144
4.1.3	Dichotomy Method	148
4.1.4	Fibonacci Method	151
4.1.5	Polynomial Approximation Methods	157
	Quadratic interpolation method - 157; cubic interpolation method - 160	
4.1.6	Newton-Raphson Method	164
4.1.7	Volcano Method	166
4.1.8	Cutting Method	167
4.1.9	Least-Squares Method	170
	Construction of a linear function parameters by least-squares method - 177; construction of a second-order polynom coefficients by least-squares method - 179	
4.2	Deterministic Methods of Multi-Dimensional Optimization	186
4.2.1	Null Order Determinate Methods	186
	Coordinate descent method - 186; Powell method - 188; simplex-method - 188; Nelder-Mead method - 192; Hooke-Jeeves method - 195	
4.2.2	First Order Determinate Methods	199
	Gradient method with a fixed step - 199; the steepest descent method - 200; conjugate direction method - 202; Fletcher-Reeves method - 202; Polak-Ribiere method - 202	
4.2.3	Second Order Determinate Methods	205

	Newton method - 205; Newton modified method - 206; Marquardt method - 207; variable metric method - 209; subgradient methods - 212; Gelfand-Tseitin method - 213; general recommendations - 214	
4.3	Stochastic Optimization Methods	216
4.3.1	Random Search Methods	216
	Search with "linear tactics" - 216; search with "non-linear tactics" - 217; search w.r.t statistical gradients - 217	
4.3.2	Stochastic Approximation Procedures	218
	Kifer-Volfowitch procedure - 223	
4.3.3	Stochastic Approximation Type Methods	226
4.4	Absolute Extreme Search Methods	227
4.4.1	Random Search Method	227
4.4.2	Method of Search Region Sequential Decreasing	227
4.4.3	Iteration Search method	228
4.4.4	Combined Search Method	230
4.4.5	$\Psi$ -Transformation Principle	230
4.4.6	Gravitation Centers Method	233
4.4.7	$\Psi$ -Transformation Method	241
4.5	Comparison of Methods based on Numerical Experiments	249

<b>Chapter Five. Solving Methods of Nonlinear Constrained Optimization Programs</b>		262
5.1	Geometric Interpretation of Nonlinear Programs	262
5.2	Lagrange Multiplier Method	267
5.3	Solving Methods for Convex Programming Problems	271
5.4	Gradient Method	281
5.4.1	Feasible Direction Method	281
5.4.2	Gradient Projection Method	281
5.4.3	Frank-Wolf Method	282
5.5	Penalty Function Method	287
5.5.1	Sequential Approximation Method	288
5.5.2	Fiacco-McCormik Method	292



5.5.3	Modified Lagrange Function Method	293
5.5.4	Arrow-Hurvicz Method	298
5.6	Solving Methods of Nonlinear Programming Non-convex Problems	304
5.6.1	Combined Method	304
5.6.2	Complex Method	307
<b>Chapter Six. Applied Problems of Single Criterion Optimization</b>		<b>313</b>
6.1	Electronic Circuits Optimal Design Problem Statement of the problem - 313; optimality criteria - 314; mathematical model - 318; optimization results -329	313
6.2	Optimal Design Problem of Nuclear Power Station Heat Exchange Apparatus	331
6.3	General Industry Planning Problem	335
6.4	Linear Programming Use for Enterprise Operational Management and Decision Making	338
6.5	Solving Nonlinear Inequality System	346
<b>Chapter Seven. Multiple Criteria Optimization</b>		<b>354</b>
7.1	Vector-Valued Optimization Programs	354
7.1.1	Classic Examples of Multiple Criteria Programs	354
7.1.2	General Notions	357
7.1.3	Preference Relations. The Payoff and Choice Functions	363
7.1.4	Independence of Criteria w.r.t. Preferences	370
7.1.5	Efficient, Weakly Efficient Estimates and Solutions	375
7.1.6	Bibliography on Promotion of Multiple Criteria Optimization	384
7.2	Ideal Distance Minimization Method	386
7.2.1	Mathematical Background and Description of the Method	386
7.2.2	Construction of a Vector-Optimal Solution	389
7.2.3	Existence of a Vector-Optimal Solution	390

## Contents

7.3	Point-Estimate Weighted Sums Method	391
7.3.1	Interpretation of the Method	392
7.3.2	Mathematical Motivation of the Method	393
7.3.3	The Weights Essence	394
7.3.4	Determining the Weights	395
7.3.5	Criterion Cone	397
7.3.6	Relative Interior of the Criterion Cone	401
7.3.7	Construction of Efficient Points Using Composite Gradients	403
7.3.8	Relationship between the Criterion Cone and Domination Set	408
7.3.9	Efficient Facets of the Feasible Region	410
7.3.10	Determining Subsets of Weighting Vector Set	413
7.4	$\epsilon$ -Constraint Reduced Feasible Region Method	420
7.4.1	Realization of $\epsilon$ -Constraint Method	422
7.4.2	Possible Outcomes	423
7.4.3	Sensitivity Analysis	425
7.5	Near Optimality Analysis	426
7.6	Vector-Maximum Algorithms	429
7.6.1	Mathematical Foundations	430
7.6.2	Vector-Maximum Theory	432
7.6.3	A Vector-Maximum Algorithm	435
7.6.4	Classification of Multiple Criteria Programs	437
7.6.5	Constructing an Initial Efficient Basis	437
	Subproblem for extreme point efficiency checking - 438; method for efficient extreme point determining - 438	
7.6.6	Evans-Steuer Subproblem for Nonbasic Variable Efficiency Checking	446
7.6.7	Defining All Maximally Efficient Facets from the Efficient Ones	447
7.6.8	Solving a Multiple Criteria Problem based on Vector- Maximum Approach	449
7.7	Minimum Criterion Values over the Efficient Set	450
7.7.1	Payoff Tables	450

7.7.2	Principal Properties of the Minimum Criterion Value Problem	452
7.7.3	A Simplex-Method Based Algorithm	454
7.8	Interactive procedures	455
7.8.1	STEM Method STEM algorithm - 458; comments on STEM method - 463	457
7.8.2	Geoffrion-Dyer-Feinberg Method (GDF) Procedure of locally relevant weights determining - 465; GDF algorithm - 467; illustrative numerical example on GDF method application - 469; comments on GDF method - 472	464
7.8.3	Zionts-Wallenius Method (Z-W) Z-W algorithm - 474; illustrative numerical example on Z-W method application - 481; determining nonbasic variables efficient w.r.t. $\Lambda^{(h)}$ - 484; comments on Z-W method - 486	473
7.9	Duality in Multiple Criteria Optimization	487
7.9.1	Saddle pairs of Vector-Valued Functions	487
7.9.2	General Structure of Dual Problem	501
7.10	Applied Multiple Criteria Optimization Problems	505
7.10.1	Planning Problems in Metallurgical Industry Problem 1 -505; problem 2 - 509	505
7.10.2	Individual Producer and Market Economy from Multiple Criteria Standpoint	513
<b>Chapter Eight. Optimization in Complex-Valued Systems</b>		516
8.1	Theory of Fractals	516
8.1.1	Introduction	516
8.1.2	Puankare Mapping	517
8.1.3	Hamilton Systems	521
8.1.4	Dissipated Dynamic Systems and their Attractors	527
8.1.5	Liapunov Indices	530
8.1.6	Principal Properties of Liapunov Indices	534
8.1.7	Fractal Dimension	539
8.1.8	Kokh Set	543
8.1.9	Cantor Set and Serpinskiy Carpet	545

## Contents

	Cantor set - 545; Serpinskiy carpet - 546	
8.1.10	Similarity and Scaling	548
8.1.11	Defining Fractal Dimension	551
8.1.12	Julia and Mandelbrot Sets	553
	Julia set - 553; Mandelbrot set - 555	
8.2	Newton Method for Complex Polynoms: Keli Problem	559
8.3	Newton Method for Real-Valued Equation	565
8.4	Newton-Raphson Method for Complex Systems	569
<b>References</b>		<b>580</b>
<b>Subject Index</b>		<b>598</b>

# წინასიტყვაობა

მათემატიკური სიდიდეების უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობების მოძებნასთან დაკავშირებული გეომეტრიული ხასიათის ამოცანები უძველესი დროიდან არის ცნობილი. XVII-XVIII საუკუნეებში მრეწველობის განვითარებამ შედარებით რთული ექსტრემალური ამოცანების გადაწყვეტა მოითხოვა, რასაც ვარიაციული აღრიცხვის საფუძვლების ჩამოყალიბება და განვითარება მოჰყვა. XX საუკუნეში წარმოების განვითარების მასშტაბებმა და დედამიწის რესურსების შეზღუდულმა მარაგმა ახალი პრობლემები წამოჭრა. დადგა საკითხი ენერჯის ოპტიმალური გამოყენებისა და სხვადასხვა სახის პროცესების ოპტიმალური მართვისა ისეთ დარგებში, როგორცაა ფიზიკა, ქიმია, ბიოლოგია, ეკონომიკა, ჰიდროსადგურებისა და წყალსატევების მართვა, მრეწველობა, ეკოლოგია, კოსმონავტიკა, სამხედრო საქმე და სხვ. მათემატიკური თვალსაზრისით აღნიშნული სახის ამოცანები ოპტიმიზაციის კვლევის საგანია და მათი გადაწყვეტა მრავალი ცვლადის ფუნქციის ან ფუნქციონალის ექსტრემუმის მოძებნას უკავშირდება. დღეისათვის ამ მიმართულებით ფუნდამენტური შედეგებია მიღწეული. შემუშავებულია ერთკრიტიკული და მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის თეორია, მათემატიკური დაპროგრამების თეორია, თამაშთა თეორია, ოპტიმალური მართვის თეორია და სხვ. ამასთან, კომპიუტერული ტექნიკის განვითარებამ საფუძველი ჩაუყარა მრავალი პრაქტიკული ამოცანის ეფექტურად გადაწყვეტის საქმეს.

თანამედროვე პირობებში, პრაქტიკული მნიშვნელობის ამოცანების გადაწყვეტის დროს, ინჟინერი, ეკონომისტი თუ სამხედრო საქმის სპეციალისტი ყოველთვის ცდილობს მიიღოს საუკეთესო ანუ ოპტიმალური ამონახსნი. ამ თვალსაზრისით ნებისმიერი დასაბუთებული გადაწყვეტილება ან მოქმედება პროცესის, მოწყობილობის, სისტემის ან ალგორითმის შემუშავების დროს განიხილება როგორც ოპტიმალური, რადგან იგი ყველა სხვა ალტერნატიულ გადაწყვეტილებასა თუ მოქმედებასთან შედარებით საუკეთესოა. ამასთან დაკავშირებით, დღეისათვის, როცა კომპიუტერული ტექნიკა მზარდ აღმავლობას განიცდის, ზოლო ქვეყნის კომპიუტერიზაციამ მასიური ხასიათი მიიღო, თანამედროვე ინჟინრის, ეკონომისტის თუ სამხედრო საქმის სპეციალისტისათვის ოპტიმალური ამოცანების გადაწყვეტის რიცხვითი მეთოდების ცოდნა ისევე აუცილებელია, როგორც სავალდებულო ტრადიციული დისციპლინებისა. ამიტომ მიგვაჩნია, რომ ამ მიმართულებით ქართულ ენაზე შესრულებული სახელმძღვანელო ოპტიმიზაციის პრობლემებით დაინტერესებულ მკითხველს გარკვეულ სარგებლობას მოუტანს.

წინაშე მუშაობის დროს ჩვენ მხედველობაში გვექონდა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო სპეციალობების ბაკალავრისა და მაგისტრის საფეხურების სტუდენტებისათვის ოპტიმიზაციის მეთოდების ზოგადი და სპეციალური კურსების სასწავლო პროგრამები. ამიტომ წინამდებარე სახელმძღვანელოში წარმოდგენილია შესაბამისი მოცულობის მასალა, რომელშიც შევეცადეთ, პედაგოგიური და მეცნიერული კვლევების პირადი გამოცდილების საფუძველზე, ოპტიმიზაციის ამოცანებისა და მათი გადაწყვეტის მეთოდებისათვის დამახასიათებელი ძირითადი ასპექტები გადმოგვეცა. ამასთან, განვიხილეთ არა მარტო საყოველთაოდ ცნობილი, კლასიკური მეთოდები, არამედ ავტორების მიერ ბოლო პერიოდში შემუშავებული ახალი მეთოდები და ალგორითმები.

სახელმძღვანელოში ძირითადად გადმოცემულია ერთკრიტერიული და მრავალკრიტერიული სტატიკური ოპტიმიზაციის მეთოდები, მათ შორის უპირობო ოპტიმიზაციის ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი მინიმიზაციის დეტერმინირებული და სტოქასტიკური ძებნის ლოკალური და გლობალური მეთოდები, წრფივი, არაწრფივი, ამოზნექილი და არაამოზნექილი დაპროგრამების მეთოდები, ვექტორული ოპტიმიზაციის ფუნდამენტური პრობლემები. განხილულია, აგრეთვე, ოპტიმიზაციის საკითხები განუზღვრელობის პირობებსა და კომპლექსურცვლადიან სისტემებში. მეთოდების ლოგიკური სტრუქტურის უკეთ გაცნობისა და ათვისების მიზნით, თეორიულ მასალასთან ერთად, მრავლად წარმოდგენილია პრაქტიკული მაგალითებისა და ამოცანების გადაწყვეტის რიცხვითი პროცედურები და კომპიუტერული ექსპერიმენტების შედეგები.

სახელმძღვანელო ძირითადად გათვალისწინებულია ტექნიკური უნივერსიტეტების სტუდენტების, მაგისტრებისა და ასპირანტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება, აგრეთვე, მეცნიერი მუშაკების, ინჟინრებისა და ეკონომისტებისათვის, ყველასათვის, ვისაც სურვილი აქვს საფუძვლიანად დაეუფლოს ოპტიმიზაციის თანამედროვე თეორიასა და მის გამოყენებას საინჟინრო თუ სამეცნიერო პრაქტიკაში.

დიდ მადლობას ვუცხადებთ ყველა იმ პირს, რომლებმაც ხელი შეუწვევეს სახელმძღვანელოს მომზადებას. უპირველეს ყოვლისა, აღვნიშნავთ საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრისა და საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტის ოპტიმიზაციის მეთოდების განყოფილების თანამშრომლებს ხელნაწერის კრიტიკულ განხილვაში მონაწილეობისათვის; ახალგაზრდა კოლეგებს ი. მოსაშვილს, თ. და თ. ხუციშვილებს, ი. კუცას, დ. გიგაურს, ვ. ჩუბინიძეს, რომლებმაც დიდი რუდუნებით მოამზადეს და კომპიუტერზე დააკაბდონეს ტექსტის ძირითადი ნაწილი. განსაკუთრებით აღნიშვნის ღირსია გ. თოფჩიშვილი, რომლის მიერ შესრულებულმა ნახაზებმა სახელმძღვანელოს მეტი თვალსაჩინოება შემატა.

დიდ მადლობას ვუცხადებთ რეცენზენტებს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტს, პროფ. რამაზ ხუროძესა და პროფ. ალექსანდრე ედიბერიძეს

კრიტიკული შენიშვნებისათვის, რომელთა გათვალისწინების შედეგად წიგნის შინაარსი მნიშვნელოვნად გაუმჯობესდა.

სახელმძღვანელო პირველად გამოდის და, ცხადია, დაზღვეული არ იქნება ნაკლოვანებებისაგან. ამიტომ მკითხველთა საქმიან შენიშვნებსა და მითითებებს ავტორები ყურადღებით მიიღებენ.

ა. გუგუშვილი

ა. თოფჩიშვილი

მ. სალუქვაძე

ვ. ჭიჭინაძე

ნ. ჯიბლაძე

ქ. თბილისი

2002 წლის 4 თებერვალი

# აღნიშვნები

$\emptyset$  - ცარიელი სიმრავლე.

$R (R')$  - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

$R^n$  - ეკლიდეს  $n$ -განზომილებიანი სივრცე.

$0_{(n)} = (0, 0, \dots, 0)$  -  $R^n$  სივრცის ნულოვანი ვექტორი.

$\{x \mid \dots\}$  - სიმრავლე ისეთი  $x$  ელემენტებისა, რომ ...

$\gamma$  - ამოზნექილი კომბინაციის ოპერატორი;  $x^1, x^2, \dots, x^r$  წერტილების ყველა ამოზნექილი კომბინაციის ერთობლიობა ჩაიწერება:  $\gamma(x^1, x^2, \dots, x^r)$  ან  $\gamma^r(x^i)$ .

$\mu$  - ნახევარწრფის ოპერატორი;  $x^1$  წერტილიდან  $y$  მიმართულებით წარმოქმნილი ნახევარწრფე ჩაიწერება  $\mu(x^1, y)$ -ის სახით.

" $T$ " - ტრანსპონირების ოპერაცია (ვექტორებისა და მატრიცებისათვის).

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$  ვექტორებისათვის:

$(x, y)$  -  $x$  და  $y$  ვექტორების სკალარული ნამრავლი:  $(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i, y_i)$ .

$x \geq y \leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n$

$x \geq y \leftrightarrow x \geq y, x \neq y$ .

$x > y \leftrightarrow x_i > y_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

$x \bar{\geq} y \leftrightarrow x = y$  ან  $x_i > y_i$  ერთი მაინც  $i = 1, 2, \dots, n$ -სთვის.

$\|x\|_1$  -  $x$  ვექტორის ნორმა.

$\|x\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p}$  -  $x$  ვექტორის  $L_p$ -ნორმა,  $p = 1, 2, 3, \dots$ .

$\|x\|_\infty = \max_{i=1, 2, \dots, n} \{ |x_i| \}$  -  $x$  ვექტორის  $L_\infty$ -ნორმა.



$\|x - y\|_p^p = \left[ \sum_{i=1}^n |\lambda_i (x_i - y_i)|^p \right]^{1/p}$  -  $x$  და  $y$  ვექტორებს შორის მანძილი აწონილ  $L_p$ -

მეტრიკაში ( $p=1,2,3,\dots$ ), სადაც  $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^n$  არაუარყოფითი წონითი ვექტორია.

$\|x - y\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} \{\lambda_i |x_i - y_i|\}$  -  $x$  და  $y$  ვექტორებს შორის მანძილი აწონილ  $L_\infty$ -

მეტრიკაში, სადაც  $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^n$  არაუარყოფითი წონითი ვექტორია.

$R_+^n$  - დადებითი ორტანტი  $R^n$  სივრცეში:  $R_+^n = \{y \in R^n \mid y > 0_{(n)}\}$ .

$R_-^n$  - არაუარყოფითი ორტანტი  $R^n$  სივრცეში:  $R_-^n = R_+^n = \{y \in R^n \mid y \geq 0_{(n)}\}$ .

$f: R^n \rightarrow R$  ფუნქციისათვის:

$\nabla f(x)$  -  $f$ -ის გრადიენტი  $x$  წერტილში ანუ  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$  კომპონენტებიანი ვექტორი;

$\nabla^2 f(x)$  -  $f$ -ის ჰესიანი  $x$  წერტილში ანუ  $\left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$  მატრიცა;

$z_1, z_2 \in X$  ელემენტებისათვის ( $X$  - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც ნაწილობრივ დალაგებულია ამოზნექილი, ჩაკეტილი, მახვილი  $C$  კონუსით):

$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C$ ;

$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C \setminus \{0\}$ ;

$z_1 > z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in \text{int } C$ ;

$A \subseteq X$  სიმრავლისათვის ( $X$  - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე):

$\overline{A}(\text{cl } A)$  ( $\overline{A}^*$ ) -  $A$  სიმრავლის ჩაკეტვა (სუსტი ჩაკეტვა);

$\text{int } A$  -  $A$  სიმრავლის შიგა ნაწილი;

$\text{Fr } A = \overline{A} - \text{int } A$  -  $A$  სიმრავლის საზღვარი;

$\text{ri } A$  -  $A$  ამოზნექილი სიმრავლის ფარდობითი შიგა ნაწილი;

$2^A$  -  $A$  სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე;

$\text{conv } A$  -  $A$  სიმრავლის ამოზნექილი გარსი;

$\overline{\text{conv } A}$  -  $A$  სიმრავლის ამოზნექილი ჩაკეტვა;

$\text{con } A$  -  $A$  სიმრავლის კონუსური გარსი;

$\text{Max } A$  ( $\text{Min } A$ ) -  $A$  სიმრავლის მაქსიმალურ (მინიმალურ) ელემენტთა სიმრავლე.

$A, B \subseteq X$  სიმრავლეებისათვის ( $X$  - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე):

$A \times B$  -  $A$  და  $B$  სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი.

$h: A \rightarrow B$  -  $h$  ასახვა  $A$  სიმრავლიდან  $B$  სიმრავლეში.

$$A + B = \{y \in X \mid y = a + b, a \in A, b \in B\};$$

$$A - B = \{y \in X \mid y = a - b, a \in A, b \in B\};$$

$$\lambda A = \{\lambda a \in X \mid a \in A\}, \lambda \in R^1;$$

$A \subset B$  -  $B$  სიმრავლე შეიცავს  $A$  სიმრავლეს;

$A \cup B$  -  $A$  და  $B$  სიმრავლეების გაერთიანება;

$A \cap B$  -  $A$  და  $B$  სიმრავლეების თანაკვეთა;

$K$  -  $K$  სიმრავლის შეუღლებული კონუსი.

$X$  -  $X$  ტოპოლოგიური სივრცის დუალური, შეუღლებული სივრცე.

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის:

$\min_{x \in \Omega} f(x) (\max_{x \in \Omega} f(x)) - f(x)$  ფუნქციის მინიმიზაციის (მაქსიმიზაციის) ამოცანა  $\Omega$  სიმრავლეზე.

$x^* = \arg \min_{x \in \Omega} f(x) (x^* = \arg \max_{x \in \Omega} f(x)) - f(x)$  ფუნქციის ნებისმიერი გლობალური მი-

ნიმუმის (გლობალური მაქსიმუმის) წერტილი  $\Omega$  სიმრავლეზე.

$\text{Arg} \min_{x \in \Omega} f(x) (\text{Arg} \max_{x \in \Omega} f(x)) - f(x)$  ფუნქციის ყველა გლობალური მინიმუმის (გლობალური მაქსიმუმის) წერტილის სიმრავლე.

მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის:

$f_1, f_2, \dots, f_m$  - კრიტერიუმები (მიზნის ფუნქციები).

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  - ვექტორული კრიტერიუმი.

$\min_{x \in \Omega} f(x) (\max_{x \in \Omega} f(x)) - f(x)$  ვექტორ-ფუნქციის მინიმიზაციის (მაქსიმიზაციის) ამოცა-

ნა  $\Omega$  სიმრავლეზე (მინიმიზაციას (მაქსიმიზაციას) ერთდროულად ადგილი აქვს ვექტორ-ფუნქციის ყველა კომპონენტისათვის).

$Y_i - f_i$  კრიტერიუმის სკალა.

$\bar{Y}$  - (ვექტორული) შეფასებების სიმრავლე.

$Y = f(\Omega) = \{y \in R^m \mid y = f(x), x \in \Omega\}$  - მიღწევადი (ვექტორული) შეფასებების სიმრავლე.

$\succ, \succsim, \succcurlyeq, \sim, \preccurlyeq$  - თანადობები ამონახსნთა სივრცეში, რომლებიც ინდუცირებულია შესაბამისად  $\succeq, \geq, >, =$  თანადობებით კრიტერიულ სივრცეში.

$\theta \subset R^n$  - ოპტიმალური სიმრავლე (ყველა ოპტიმალური წერტილის სიმრავლე).

$\theta_x \subset R^n$  - ყველა ოპტიმალური კიდურა წერტილის სიმრავლე (წვეროების სიმრავლე წრფივ შემთხვევაში).

$\theta_\mu \subset R^n$  - ყველა შემოუსაზღვრავი ოპტიმალური წიბოს სიმრავლე.

$E$  - ყველა ეფექტური წერტილის სიმრავლე:  $E = \{x \in \Omega \mid x - \text{ეფექტური წერტილი}\}$ .

$E_x$  - ყველა ეფექტური კიდურა წერტილის სიმრავლე:  $E_x = \{x \in \Omega \mid x - \text{ეფექტური კიდურა წერტილი}\}$ .

$E_\mu$  - ყველა შემოუსაზღვრავი ეფექტური წიბოს სიმრავლე:  $E_\mu = \{\mu(x, \nu) \subset \Omega \mid \mu(x, \nu) - \text{შემოუსაზღვრავი ეფექტური წიბო } \Omega\text{-დან}\}$ .

$P(Y) (P(\Omega))$  - ეფექტური, პარეტოს მიხედვით ოპტიმალური შეფასებების (ამონახსნების) სიმრავლე.

$S(Y) (S(\Omega))$  - სუსტად ეფექტური, სლეიტერის მიხედვით ოპტიმალური შეფასებების (ამონახსნების) სიმრავლე.

$M$  - ყველა მკაცრად დადებითი წონითი ვექტორის სიმრავლე:

$$M = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in R_+^m \mid \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\}.$$

$\bar{M}$  - ყველა არაუარყოფითი წონითი ვექტორის სიმრავლე:

$$\bar{M} = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in R_+^m \mid \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\}.$$

$\langle x^*, x \rangle$  -  $x^* \in X^*$  წრფივი ფუნქციონალის მნიშვნელობა  $x \in X$  წერტილში. თუ  $X$  ჰილბერტის სივრცეა, მაშინ სკალარული ნამრავლია.

$\in$  - მიკუთვნების სიმბოლო.

$\subset$  - ჩართვის სიმბოლო.

$\cup$  - გაერთიანების სიმბოლო.

$\cap$  - თანაკვეთის სიმბოლო.

$\forall$  - სიმბოლო "ნებისმიერი".

$\exists$  - არსებობის სიმბოლო.

$\Rightarrow$  - იმპლიკაცია "გამომდინარეობს".

$\Leftrightarrow$  - ეკვივალენტურობის სიმბოლო.

# ოპტიმიზაციის მეთოდები



თანამედროვე ეტაპზე, ინფორმაციის მნიშვნელოვანი ზრდის პირობებში, სახელმძღვანელოს როლი განუსაზღვრელად დიდია.

XX საუკუნის ბოლოს, გაერთიანებული ერების ორგანიზაციის ეგიდით, ჩატარდა ექსპერტული გამოკითხვა იმის შესახებ, თუ მეორე ათასწლეულში კაცობრიობის ცივილიზაციის განვითარებაზე რომელმა გამოგონებამ მოახდინა არსებითი გავლენა. პირველი ადგილი დიდი უპირატესობით დაიკავა წიგნის ბეჭდვამ, ხოლო მეორე - კომპიუტერმა.

კაცობრიობა ინფორმაციული აფეთქების დამლუპველ მორევში რომ არ მოექცეს, საჭიროა კარგად გაეიაზროთ მეცნიერების, ტექნიკისა და კულტურის სფეროში სრულიად ახალი შინაარსისა და ფორმის სახელმძღვანელოების შექმნის აუცილებლობა.

წინამდებარე ნაშრომი ავტორთა მოკრძალებული ცდა და გარკვეულწილად საზოგადოებრივი ინიციატივია, რათა ნათლად წარმოჩნდეს ოპტიმიზაციის სხვადასხვა მიმართულებების განვითარების სამომავლო ტენდენციები, განისაზღვროს ამ მეცნიერების მნიშვნელობა და როლი საინფორმაციო საზოგადოების ფორმირების თვალსაზრისით.

# თავი პირველი

## ოპტიმიზაციის არსი

### 1.1 შესავალი

სტატიკური ოპტიმიზაციის შესწავლის ობიექტს ისეთი ამოცანები შეადგენს, რომელშიც საჭიროა გარკვეული სტრუქტურის მქონე სიმრავლეზე მოცემული ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობის მოძებნა. ტერმინები „სტატიკური ოპტიმიზაცია“ და „მათემატიკური დაპროგრამება“ ხშირად ერთმანეთთან გაიგივებულია.

ტერმინი „დაპროგრამება“ შეიძლება იმით აიხსნას, რომ თავდაპირველი კვლევები ოპტიმიზაციაში და მისი პრაქტიკული გამოყენება უშუალოდ დაკავშირებული იყო ეკონომიკურ დაგეგმვასა და ოპერაციულ აღრიცხვასთან. სწორედ მაშინ იქნა შემოთავაზებული ტერმინი „წრფივი დაპროგრამება“, რომელიც გულისხმობს წრფივი ფუნქციის ექსტრემალური (მაქსიმალური ან მინიმალური) მნიშვნელობის მოძებნას გარკვეული სტრუქტურის მქონე დასაშვებ სიმრავლეზე, რომელიც, აგრეთვე, წრფივ შეზღუდვათა სისტემის სახით აღიწერება.

კუნმა და ტაკერმა იმავე აზრით გამოიყენეს ტერმინი „არაწრფივი დაპროგრამება“ ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების შესწავლისათვის; ტერმინი „მთელრიცხვა დაპროგრამება“ შემოგეთავაზა რ. გომორიმ ოპტიმიზაციის იმ ამოცანებისათვის, სადაც ცვლადებს მხოლოდ მთელრიცხვა მნიშვნელობები მიენიჭება; ხოლო ტერმინი „დინამიკური დაპროგრამება“ შემოტანილ იქნა რ. ბელმანის მიერ და იგი მასში ეტაპობრივ ოპტიმიზაციას გულისხმობდა.

მათემატიკური დაპროგრამება გამოიყენება ადამიანის პრაქტიკული მოღვაწეობის სხვადასხვა სფეროში, უპირველეს ყოვლისა, ტექნიკასა და ეკონომიკაში. მათემატიკური დაპროგრამება გახდა ერთ-ერთი ძირითადი კურსი, რომელიც ეკითხება მათემატიკოსებს, ინჟინრებს, ეკონომისტებს, ფიზიკოსებს, ბიოლოგებს. ჩნდება ახალი იდეები და მიდგომები, რომელთა საფუძველზე ყალიბდება შესაბამისი ალგორითმები და პროცედურები. მათემატიკური დაპროგრამება წარმოადგენს გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთ განვითარებად ნაწილს. ამისათვის არსებობს საფუძვლები. მისი გამოყენება შესაძლებელია როგორც ტექნიკაში, ასევე მეცნიერების სხვა დარგებშიც [28, 30, 31, 50, 76, 91, 110, 111, 125, 136, 138, 151, 152, 153, 166]. მივეუთითოთ გამოყენების ზოგიერთი სფერო:

- ოპერაციათა კვლევა: ტექნიკურ-ეკონომიკური სისტემების ოპტიმიზაცია (დაგეგმვა, ეკონომეტრია), სატრანსპორტო ამოცანები, მართვა (მათ შორის მარაგის) და ა.შ;
- რიცხვითი ანალიზი: აპროქსიმაცია, რეგრესია, წრფივი და არაწრფივი სისტემების ამოხსნა და ა.შ;
- ავტომატური მართვა: სახეთა გამოცნობა, სისტემების ოპტიმალური მართვა, ფილტრაცია, საწარმოს მართვა, რობოტოტექნიკა და ა.შ;
- ტექნიკა: რთული ტექნიკური სისტემების დაგეგმვა, ტექნოლოგიური პროცესების ოპტიმალური მართვა, კოსმოსური დანადგარების ოპტიმალური დაგეგმარება, მართვა და ა.შ;
- მათემატიკური ეკონომიკა: მაკროეკონომიკური და მიკროეკონომიკური მოდულების ამოხსნა, გადაწყვეტილების მიღების თეორია, თამაშთა თეორია და ა.შ.

## 1.2 სტატიკური ოპტიმიზაციის ამოცანების კლასიფიკაცია

უპირველეს ყოვლისა, მათემატიკურად განვსაზღვროთ, თუ, საზოგადოდ, რას წარმოადგენს სტატიკური ოპტიმიზაციის ამოცანა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სტატიკური ოპტიმიზაციის ამოცანა ისეთი ამოცანაა, რომელშიც ვეძებთ მოცემული  $f(\cdot)$  ფუნქციის  $x$  არგუმენტის იმ მნიშვნელობებს, რომლის დროსაც  $f(\cdot)$  გარკვეული სტრუქტურის მქონე  $\Omega$  სიმრავლეზე აღწევს ექსტრემალურ (მაქსიმალურ ან მინიმალურ) სიდიდეს. ეს გარემოება ფორმალურად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\max_{x \in \Omega} \left( \min_{x \in \Omega} \right) f(x) \text{ ან } f(x) \rightarrow \max_{x \in \Omega} \left( \min_{x \in \Omega} \right). \quad (1.1)$$

(აქ იგულისხმება, რომ  $f: R^n \rightarrow R^1$ .)  $\Omega$  სიმრავლის შესაბამისად ოპტიმიზაციის ამოცანები შეიძლება დაიყოს ორ დიდ ჯგუფად: ამოცანები შეზღუდვების გარეშე და ამოცანები შეზღუდვებით.

დავუშვათ, რომ ვეძებთ  $f(\cdot)$  ფუნქციის ექსტრემუმს მთელ  $R^n$  სივრცეში, ე.ი. (1.1) ამოცანაში  $\Omega = R^n$ . მაშინ ლაპარაკია ოპტიმიზაციის ამოცანაზე შეზღუდვების გარეშე, და  $f(\cdot)$ -ის მაქსიმიზაციის შემთხვევაში უნდა მოიძებნოს ისეთი  $x' \in R^n$  ელემენტი, რომ  $f(x') \geq f(x) \forall x \in R^n$ , ხოლო  $f(\cdot)$ -ის მინიმიზაციის შემთხვევაში უნდა მოიძებნოს ისეთი  $x_0 \in R^n$  ელემენტი, რომ  $f(x') \leq f(x) \forall x \in R^n$ . ხშირად, ასეთი ტიპის ოპტიმიზაციის ამოცანას უწოდებენ უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანას და (1.1) მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$\max_{x \in R^n} \left( \min_{x \in R^n} \right) f(x).$$

ასლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (1.1) ამოცანაში  $\Omega \neq R^n$ . მაშინ ლაპარაკია ოპტიმიზაციის ამოცანაზე შეზღუდვებით. ამ შემთხვევაში  $f(\cdot)$ -ის მაქსიმიზაციის დროს  $\Omega$ -ზე უნდა მოიძებნოს ისეთი  $x' \in \Omega$  ელემენტი, რომ  $f(x') \geq f(x) \forall x \in \Omega$ , ხოლო  $f(\cdot)$ -ის მინიმიზაციის დროს უნდა მოიძებნოს ისეთი  $x' \in \Omega$  ელემენტი, რომ  $f(x') \leq f(x) \forall x \in \Omega$ .

დავუშვათ, რომ ოპტიმიზაციის (1.1) ამოცანაში ადგილი აქვს შეზღუდვებს და დასაშვებ ვექტორთა  $\Omega$  სიმრავლე აღიწერება შემდეგი სახით:

$$\Omega = \{x \in D \subseteq R^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, k; g_j(x) = 0, k = k + 1, k + 2, \dots, m\}, \quad (1.2)$$

სადაც ყველა რიცხვითი  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $R^n$  სივრცეში, მაშინ საქმე გვაქვს პირობითი ოპტიმიზაციის ანუ მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანასთან. ასეთ შემთხვევაში განიხილავენ მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანებს უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით, როდესაც  $m=k$ , და მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანებს ტოლობის ტიპის შეზღუდვებით, როდესაც  $k=0$ . ბოლოს, ზოგად შემთხვევაში, განისაზღვრება მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანები შერეული ტიპის შეზღუდვებით, ე.ი. როდესაც მოცემული  $\Omega$  სიმრავლე ერთდროულად აღიწერება ტოლობათა და უტოლობათა სისტემების სახით.

ფორმალურად განვიხილოთ სტატიკური ოპტიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\max_{x \in \Omega} \left( \min_{x \in \Omega} \right) f(x), \quad (1.3)$$

სადაც  $f(\cdot)$  ან ჩვეულებრივი ფუნქცია ან ვექტორ-ფუნქცია, ხოლო  $\Omega$  სიმრავლეს აქვს (1.2) სახე.

იმის მიხედვით, თუ რა პირობებს აკმაყოფილებს  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  ფუნქციები და  $D$  სიმრავლე, ოპტიმიზაციის (1.3) სახის ამოცანების კლასიფიკაცია სტრუქტურულად შეიძლება მოვახდინოთ შემდეგი საკლასიფიკაციო ნიშნების მიხედვით:

- ◆  $f$  და  $g_1, g_2, \dots, g_m$  ფუნქციების ტიპი;
- ◆ ცვლადების  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ვექტორის ტიპი;
- ◆ (1.3) ამოცანის ამოხსნალობა;
- ◆ საოპტიმიზაციო  $f$  კრიტერიუმის (მიზნის ფუნქციის) განზომილება.

მოყვანილი ნიშნების მიხედვით შეიძლება გვექონდეს:

1. წრფივი ან არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანა (თუ (1.3) მოდელში შემავალი ყველა ფუნქცია წრფივია, მაშინ (1.3) ამოცანა წრფივია; თუ (1.3)-ში ერთი ფუნქცია მაინც არაწრფივია, მაშინ (1.3) ამოცანა არაწრფივია);
2. უწყვეტი ან დისკრეტული (კერძოდ, მთელირიცხვით) ოპტიმიზაციის ამოცანა (თუ  $D$  სიმრავლე (1.2)-ში ემთხვევა  $R^n$ -ს, მაშინ (1.3) ამოცანა უწყვეტია; თუ  $x$  ვექტორის ერთი კომპონენტი მაინც, ვთქვათ,  $x_i$ , იღებს მნიშვნელობებს დისკრეტული ან თვლადი სიმრავლიდან, მაშინ (1.3) ამოცანა დისკრეტულია. ამ უკა-



ნასკნელის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მთელრიცხვა ოპტიმიზაციის ამოცანა, რომელშიც ერთი ცვლადი მაინც იღებს მთელ მნიშვნელობებს, ე.ი.  $x_i \in Z$ ;

3. საკუთრივი ან არასაკუთრივი ოპტიმიზაციის ამოცანა (ზოგადად, დაკონკრეტების გარეშე, რომ ვთქვათ, თუ (1.3) ამოცანას გააჩნია ოპტიმალური ამონახსნი, ის საკუთრივია, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არასაკუთრივი);
4. ერთკრიტერიული და მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანა (თუ  $f$  ჩვეულებრივი ფუნქციაა, მაშინ (1.3) ამოცანა ერთკრიტერიულია; თუ  $f$  ვექტორ-ფუნქციაა, მაშინ (1.3) ამოცანა მრავალკრიტერიულია).

მომდევნო ნაწილებში დაწვრილებით განხილულია სტატიკური ოპტიმიზაციის სხვადასხვა ტიპის ამოცანები და მოყვანილია მათი ანალიზისა და გადაწყვეტის ეფექტური მეთოდები.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, თუ (1.1)-(1.2) მოდელში მიხნის  $f$  ფუნქცია და  $g_1, g_2, \dots, g_m$  ფუნქციები წრფივია, ხოლო  $D = R_+^n$ , მაშინ მიიღება ე.წ. წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა:

$$\begin{aligned} (c, x) &\rightarrow \max(\min), \\ (a^j, x) &\leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ (a^j, x) &= b_j, \quad j = k + 1, k + 2, \dots, m, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \quad (n_1 \leq n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.4) ამოცანაში  $c, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}$  ფიქსირებული ვექტორებია  $R^n$  სივრცეში,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვებია,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  საძებნი ვექტორია, ხოლო  $(\cdot, \cdot)$  სიმბოლოთი აღნიშნულია ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

(1.4) ტიპის ამოცანების გამოკვლევას ეძღვნება ოპტიმიზაციის ნაწილი, რომელსაც წრფივი დაპროგრამება ეწოდება. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა გარკვეული აზრით მათემატიკური დაპროგრამების სხვა ამოცანებზე გაცილებით მარტივია და საკმაოდ სრულყოფილადაა შესწავლილი.

### 1.3 სტატისტიკური ოპტიმიზაციის მოდელები მეურნეობის აქტუალური პრობლემების გადასაწყვეტად

მათემატიკური დაპროგრამების მეთოდებისა და იმ საშუალებათა ცოდნა, რომელთა გამოყენებით ოპტიმიზაციის ამოცანა გადაწყდება, საკმარისი არ არის სხვადასხვა პრაქტიკული პრობლემის გადასაჭრელად. არანაკლებ მნიშვნელოვანია შესაბამისი მათემატიკური მოდელების შედგენა და მეურნეობის სხვადასხვა დარგში წამოჭრილი პრობლემების გადატანა მათემატიკურ ენაზე. რაც მთავარია, ფორმულირებული უნდა იყოს ამოცანა - რომელი პარამეტრია განხილვის არეში და რა პრობლემაა გადასაწყვეტი. სხვადასხვა ამოცანის განხილვის დროს მეტად მნიშვნელოვანია მოსამზადებელი საბუთაობის ჩატარება. ამ მიზნით პასუხი უნდა გაეცეს შემდეგ კითხვებს: რაში მდგომარეობს ოპერაციის ძირითადი არსი, ამოხსნის რა ვარიანტები შეიძლება არსებობდეს, რა მონაცემები უნდა შეიკრიბოს, რა სირთულეები უშლის ხელს ამოცანის ამოხსნას, რა სახე ექნება აღებულ კონკრეტულ შემთხვევაში მიზნის ფუნქციას, როგორი იქნება შეზღუდვები და ა.შ. მთავარი პრობლემა ოპტიმალური მნიშვნელობის დადგენის საქმეში არის ამოცანის დასმა, სწორი მათემატიკური მოდელის დადგენა, საჭირო და აუცილებელი გამარტივებების ჩატარება და მხოლოდ ამის შემდეგ შეიძლება შევედგეთ საკუთრივ ამოხსნის პროცესს.

როგორც აღენიშნეთ, პირველ რიგში საჭიროა ამოცანის ზუსტი დასმა, პროცესის ან სისტემის ადეკვატური მათემატიკური მოდელის აგება. ეს ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი და ურთულესი პრობლემაა. ამისათვის საჭიროა თვით ამოცანის ფიზიკური არსის კარგად ცოდნა. ამოცანის სწორად დასმის შემდეგ, ის უნდა მომზადდეს ამოხსნისად. სპეციალისტმა რაც უფრო კარგად იცის პრობლემის არსი, იგი ამ ეტაპზე მით უფრო ნაკლებ შეცდომას დაუშვებს. პირველ რიგში, უნდა აიგოს ე.წ. მიზნის ფუნქცია, რომელიც ასახავს იმ გარემოებას, თუ რა მიზანი გვაქვს დასახული. ამ ფუნქციის მაქსიმიზაციის ან მინიმიზაციის საფუძველზე მივიღებთ პარამეტრების ოპტიმალურ მნიშვნელობებს. ამის შემდეგ უნდა ჩამოყალიბდეს შეზღუდვათა სისტემა, რაც გაცილებით რთული ამოცანაა. აგრეთვე, ყურადღება უნდა მიექცეს ისეთ მნიშვნელოვან გარემოებას, როგორცაა გამარტივება. ცხადია, მოდელში ყველა ფაქტორისა და პარამეტრის გათვალისწინება შეუძლებელია. ამიტომ უნდა დადგინდეს ის პარამეტრები, რომლებიც მნიშვნელოვნად არ მოქმედებს პროცესზე ან სისტემაზე, ან თუ მოქმედებს, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ანალიზი ხორციელდება ზოგიერთი სიდიდის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის.

სტატისტიკური ოპტიმიზაცია, რომელიც მოიცავს წრფივ, მთელირიცხვით და არაწრფივ დაპროგრამებას, ოპტიმიზაციის არასაკუთრივ მოდელებს, ვექტორულ ოპტიმიზაციას

და ა.შ., შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მეურნეობის მრავალი აქტუალური პრობლემის გადასაჭრელად.

ქვემოთ განხილულია სტატისტიკური ოპტიმიზაციის რამდენიმე ამოცანა, რომელსაც ადგილი აქვს მეურნეობის რიგი აქტუალური პრობლემის გადაჭრის შემთხვევაში.

### 1.3.1 ოპტიმიზაციის ამოცანები ენერგეტიკაში

განვიხილოთ ენერგეტიკაში არსებული ოპტიმალური ენერგოსისტემის განსაზღვრის ამოცანის მათემატიკური მოდელის აგების პროცესი. სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ იდეალიზებულ შემთხვევას.

რეგიონის ელექტროენერჯით სრული უზრუნველყოფისათვის საჭიროა დაპროექტებულ იქნეს ახალი ენერგოსისტემა. შეიძლება აშენდეს სხვადასხვა ტიპის ელექტროსადგურები. იმის მიხედვით, თუ რა სახის ენერგიას იყენებს, ელექტროსადგურები შეიძლება დაყვით შემდეგ ტიპებად:

1. მცირე სიმძლავრის ჰიდროსადგურები;
2. კაშხალთან მდებარე ჰიდროსადგურები;
3. ღერივაციული ტიპის ჰიდროსადგურები;
4. წყალსაცავიანი ჰიდროსადგურები;
5. ნახშირზე მომუშავე თბოსადგურები;
6. მაზუთზე მომუშავე თბოსადგურები;
7. ბუნებრივ აირზე მომუშავე თბოსადგურები;
8. ქარის ენერგიაზე მომუშავე ელექტროსადგურები;
9. მზის ენერგიაზე მომუშავე ელექტროსადგურები;
10. ატომური ელექტროსადგურები.

ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: ენერგოსისტემისათვის უნდა დადგინდეს, თუ რა ტიპის და რა რაოდენობით ელექტროსადგური უნდა აშენდეს, რომ ჯამური ფულადი დანახარჯები სისტემის მშენებლობაზე რაც შეიძლება იყოს მცირე. ამასთან, სისტემაში შემაჯავთ ყველა ელექტროსადგურმა ერთად უნდა გამოიმუშაოს გარკვეული  $P$  სიმძლავრე, ჯამური  $W$  ენერგია; პიკური ჯამური სიმძლავრე უნდა აღემატებოდეს  $\Pi$  სიდიდეს; ჯამური ხარჯები სისტემის მშენებლობაზე არ უნდა აღემატებოდეს  $D$  თანხას და სხვ.

შევადგინოთ ამ იდეალიზებული ამოცანის მათემატიკური მოდელი. დავუშვათ, რომ შეგვიძლია ავაშენოთ  $n$  სხვადასხვა ტიპის ელექტროსადგური;  $i$ -ური ტიპის ერთი

ელექტროსადგურის მშენებლობაზე იხარჯება  $c_i$  ლარი ( $i=1,2,\dots,n$ ).  $x_i$ -ით აღვნიშნოთ  $i$ -ური ტიპის ელექტროსადგურების საძებნი რაოდენობა. მაშინ მთლიანად სისტემის მშენებლობაზე დაიხარჯება  $\sum_{i=1}^n c_i x_i$  ლარი. ეს თანხა უნდა იყოს მინიმალური. ამდენად,  $\sum_{i=1}^n c_i x_i$  გამოსახულება წარმოადგენს ოპტიმიზაციის ამოცანის მიზნის ფუნქციას. მაშასადამე, წრფივი დაპროგრამების შესაბამისი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: საჭიროა განისზღვროს

$$\min \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad (1.5)$$

როცა  $x_i, i=1,2,\dots,n$ , აკმაყოფილებს შემდეგ შეზღუდვებს:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq P,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq W,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \geq \Pi, \quad (1.6)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \dots + a_{4n}x_n \leq D,$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,\dots,n. \quad (1.7)$$

$$x_i \text{ მთელი რიცხვია, } i=1,2,\dots,n. \quad (1.8)$$

აქ

1.  $a_{1i}$  არის  $i$ -ური ტიპის ელექტროსადგურის მიერ გამოშვებული სიმძლავრე ( $i=1,2,\dots,n$ );
2.  $a_{2i}$  არის  $i$ -ური ( $i=1,2,\dots,n$ ) ტიპის ელექტროსადგურის მიერ გამოშვებული ენერჯია ( $i=1,2,\dots,n$ );
3.  $a_{3i}$  არის  $i$ -ური ტიპის ელექტროსადგურის მიერ მოცემული პიკური სიმძლავრე ( $i=1,2,\dots,n$ );
4.  $a_{4i}$  ის თანხაა, რომელიც დაიხარჯება  $i$ -ური ტიპის ერთი ელექტროსადგურის მშენებლობაზე ( $i=1,2,\dots,n$ ).

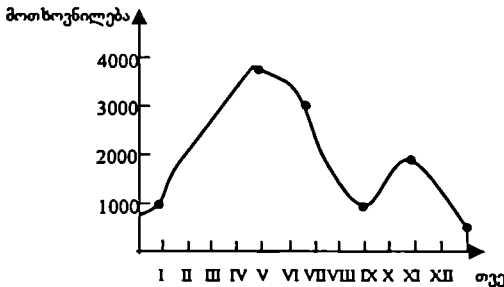
(1.7) და (1.8) პირობები იმას მიგვანიშნებს, რომ ელექტროსადგურების  $x_i$  რაოდენობა უნდა იყოს არაუაროფითი მთელი რიცხვი.

(1.5)-(1.8) ამოცანის ამოხსნა საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ ენერგოსისტემის სპექტრი, რომლის დროსაც მათ მშენებლობაზე ყველაზე მცირე თანხა დაიხარჯება.

### 1.3.2 წარმოების დაგეგმვა

განვიხილოთ წარმოების დაგეგმვის საკმაოდ ტიპური ამოცანა, რომლის მიხედვით საჭიროა თევების მიხედვით რაღაც სეზონური პროდუქციის გამოშვების დაგეგმვა. დაეუშვათ, რომ ცნობილია მოთხოვნილება ამ პროდუქციაზე და იგი აისახება ნახ. 1.1-ზე მოყვანილი ფუნქციის საშუალებით.

მეწარმემ ისე უნდა დაგეგმოს პროდუქციის გამოშვება, რომ დააკმაყოფილოს მასზე მოთხოვნილება თევების მიხედვით. მეწარმეს შეუძლია დააკმაყოფილოს თეიური მოთხოვნილება, თუ გამოუშვებს თვეში იმდენ ნაწარმს, რამდენზეც არის მოთხოვნილება. თუ გამოუშვებს ამ პროდუქციის მხოლოდ ნაწილს, მაშინ განსხვავება დაიფარება იმის ხარჯზე, რომ წინა თევებში მან გამოუშვა უფრო მეტი ნაწარმი, ვიდრე საჭირო იყო. ასეთი სტრატეგია ხელს უწყობს ბაზრის სტაბილიზაციას. სამწუხაროდ ასეთმა სტრატეგიამ შეიძლება არ გაამართლოს, ვინაიდან დაკავშირებულია ზედმეტი პროდუქციის საწყობში შენახვასთან (განსაზღვრული დროის განმავლობაში) და, მასასადამე, დიდ ხარჯებთან. ამგვარად, ამოცანა მდგომარეობს პროდუქციის გამოშვების ისეთი გრაფიკის შედგენაში, როდესაც დანახარჯები მინიმალური იქნება. ეს დანახარჯები განპირობებულია ჯამური ხარჯებით, რომელიც დაკავშირებულია წარმოების რხევასთან და ნაწარმის შენახვაზე გაწეულ ხარჯებთან. ჩვენს შემთხვევაში კარგი დაგეგმვა ნიშნავს ისეთი შუალედური გეგმის შედგენას, რომელიც მოთავსებულია ორ გეგმას შორის. ერთი მათგანი შეესაბამება მინიმალურ დანახარჯებს, ხოლო მეორე - წარმოების რხევებს. ოპტიმალური გეგმა დამოკიდებული იქნება მიღებულ ზარალზე.



ნახ. 1.1

შეკადრებით მოყვანილი ამოცანის მათემატიკური მოდელი. დავიწყეთ პირველი თვით. ვთქვათ, ამ თვის დასაწყისისათვის გვაქვს პროდუქციის  $s_0$  რაოდენობა. თუ წარმოება გადადის ახალი სახის პროდუქციის გამოშვებაზე, მაშინ  $s_0=0$ . ჩავთვალოთ, რომ  $s_0=0$ . შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$x_i$  - პროდუქციის რაოდენობა, რომლის გამოშვება ხორციელდება  $i$ -ურ თვეში.

$r_i$  - პროდუქციაზე მოთხოვნილება  $i$ -ურ თვეში.

$s_i$  - პროდუქციის რაოდენობა, რომლის რეალიზაციას მეწარმე  $i$ -ურ თვეში ვერ ახერხებს (ეს იქნება პროდუქციის მარაგი შემდეგ პერიოდში გამოსაყენებლად).

ცხადია,  $i$ -ს ყველა მნიშვნელობისათვის  $x_i \geq 0, r_i \geq 0, s_i \geq 0$ . მაშინ პირველი თვისთვის მივიღებთ:

$$x_1 + s_0 \geq r_1.$$

თუ მოყვანილი არამკაცრი უტოლობა კმაყოფილდება როგორც ზუსტი ტოლობა, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პირველი თვის მუშაობის შემდეგ მარაგი არ გვექნება დაგროვილი. თუ ადგილი აქვს უტოლობას, მაშინ  $s_1 \geq 0$ . ორივე შემთხვევაში გვექნება:

$$x_1 + s_0 - r_1 = s_1$$

ანუ

$$x_1 + s_0 - s_1 = r_1.$$

ანალოგიურად, მეორე თვისთვის გვექნება:

$$x_2 + s_1 \geq r_2$$

ანუ

$$x_2 + s_1 - s_2 = r_2.$$

ნებისმიერი  $i$ -ური თვისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$x_i + s_{i-1} - s_i = r_i. \tag{1.9}$$

მეწარმე ცდილობს მინიმუმამდე შეამციროს გრაფიკის რხევები. ორ ნებისმიერ მეზობელ თვეს შორის გამოშვებული პროდუქციის სხვაობა გვიჩვენებს, გაიზარდა თუ შემცირდა ნაწარმის წარმოება.

ჩავწეროთ განტოლება:

$$x_i - x_{i+1} = y_i - r_i. \tag{1.10}$$

აქ  $y_i \geq 0$  ასახავს წარმოების ზრდას, ხოლო  $r_i \geq 0$  - წარმოების შემცირებას.

(1.9) და (1.10)-ის გათვალისწინებით, შეგვიძლია შევადგინოთ ამოცანის ძირითად შეზღუდვათა სისტემა:

$$\begin{aligned} x_i + s_{i+1} - s_i &= r_i, \\ x_i - x_{i+1} - y_i + r_i &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$x_i \geq 0, s_i \geq 0, y_i \geq 0, r_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n.$$

თუ წლის ბოლოს არ უნდა იყოს პროდუქციის სიჭარბე, მაშინ მივიღებთ, რომ  $s_n=0$ . იმის მიხედვით, თუ როგორია თავდაპირველი მოთხოვნები და პირობები, შეიძლება აგრეთვე, გვექონდეს შეზღუდვები:  $x_0 \geq 0$  და  $s_0 \geq 0$ .

მეწარმე დაინტერესებულია მიიღოს მაქსიმალური მოგება. მოგება დამოკიდებულია ნაწარმის გამოშვების გრაფიკის რხევაზე და, ამასთან, დაკავშირებულია ნაწარმის ნა-მატთან. თავისი გამოცდილების საფუძველზე მეწარმემ იცის, თუ რა ხარჯებთანაა დაკავშირებული პროდუქციის გაზრდა ( $t-1$ ) და  $t$  თვეების შუალედში, ე.ი. ერთი თვის განმავლობაში. მან, აგრეთვე, იცის, თუ რა ჯდება ერთეული პროდუქტის შენახვა ასევე ერთი თვის განმავლობაში. დავუშვათ, რომ პროდუქციის ერთეულზე ეს ღირებულებებია  $a$  ლარი და  $b$  ლარი შესაბამისად, ამასთან  $a > 0$  და  $b > 0$ .

მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ

$$b \sum_{i=1}^n s_i + a \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.12)$$

ფუნქციის მინიმუმი (1.11) პირობების გათვალისწინებით.

აღვნიშნოთ  $a/b=\lambda$ , ე.ი.  $\lambda$  გამოსახავს ერთი თვის განმავლობაში ერთეული ნაწარმის გამოშვების გაზრდისათვის ხარჯების ფარდობას იგივე ერთეული ნაწარმის შენახვის ხარჯებთან. მაშინ (1.12)-ის მინიმიზაციის ნაკვალად უნდა ვიპოვოთ

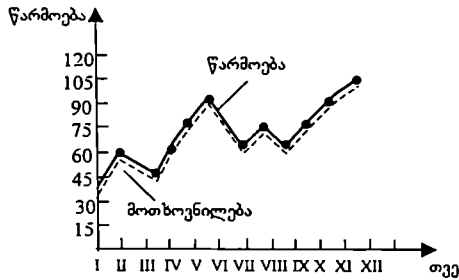
$$\sum_{i=1}^n s_i + \lambda \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.13)$$

ფუნქციის მინიმუმი იგივე (1.11) პირობების გათვალისწინებით.

თუ  $\lambda$  ცნობილია, მაშინ (1.13), (1.11) ამოცანა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანას და შეიძლება ამოიხსნას შესაბამისი მეთოდით. შევნიშნავთ, რომ ოპტიმალურ გეგმაში არ შეიძლება ერთდროულად შედიოდეს  $t$ -ს გარკვეული მნიშვნელობისათვის ორივე დადებითი  $y_i$  და  $r_i$  მნიშვნელობა, ე.ი. მხოლოდ ერთი შეიძლება იყოს დადებითი, ხოლო მეორე აუცილებლად ნულის ტოლია. ამასთან ერთად, ოპტიმალური ამოხსნა შეიძლება შესაბამებოდეს პროდუქციის გამოშვების არა ერთ, არამედ რამდენიმე გრაფიკს. ეს კი ნიშნავს, რომ ოპტიმალური ამოხსნა არ არის ერთადერთი.

იმ შემთხვევაში, თუ  $\lambda$  უცნობია, მაშინ (1.13), (1.11) ამოცანა რამდენიმეჯერ უნდა ამოვხსნათ  $\lambda$ -ს ცვლილების მთელი დიაპაზონისათვის.

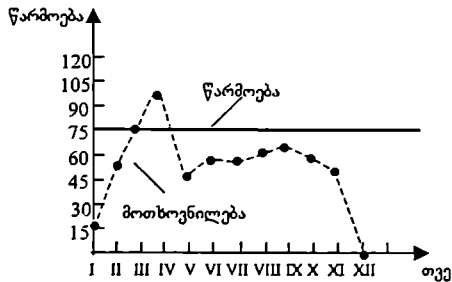
დავუშვათ, რომ  $a$  მცირე სიდიდეა. მაშინ შესაბამისი ოპტიმალური გრაფიკი ხასიათდება ძალზე დიდი რხევებით. ამავე დროს გვექნება ძალზე დიდი მარაგები. თუ  $b$  მცირეა, მაშინ მოვიღებთ გრაფიკს, რომელიც ხასიათდება დიდი მარაგებით; ამავე დროს პროდუქციის გამოშვებისათვის რხევები ძალზე მცირე იქნება. პირველ შემთხვევაში მინიმიზირებული იქნება მარაგები, ხოლო მეორე შემთხვევაში - წარმოების დინამიკის არაერთგვაროვნება. ქვემოთ მოყვანილია ამ პროცესის ერთ-ერთი სახე (იხ. ნახ. 1.2).



ნახ. 1.2

ნახ. 1.2-დან ჩანს, რომ წარმოება უშუაღებს ნაწარმის ისეთ რაოდენობას, რამდენიცაა ბაზრის მზრიდან მასზე მოთხოვნილება.

შესაძლოა სხვა შემთხვევაც, მაგალითად, ისეთი, როგორიც მოყვანილია ნახ. 1.3-ზე.



ნახ. 1.3



ნახ. 1.3-ზე ასევე ნაჩვენებია ორი დამოკიდებულება: გამოშვება და მოთხოვნილება როგორც დროის ფუნქციები. ნახაზიდან ჩანს, რომ მარტამდე საწარმო უშვებდა იმაზე მეტ პროდუქციას, ვიდრე მასზე იყო მოთხოვნილება. ამ პერიოდში შეიქმნა რეზერვი, რომელიც საწყობშია მოთავსებული. მარტის შემდეგ მოთხოვნილებამ წარმოებას გადააჭარბა და დანაკლისი უნდა შეევისოს ზემოთ ხსენებული რეზერვიდან.

არ არის სავალდებულო, რომ ადგილი ჰქონდეს  $\int_0^T Ddt = \int_0^T PDdt$  ტოლობას, სადაც  $D$

მოთხოვნილებაა, ხოლო  $P$  - წარმოება. თუ  $\int_0^T PDdt > \int_0^T Ddt$ , მაშინ დარჩენილი მა-

რავი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მომავალ წელს. უარესია ის შემთხვევა, როცა  $\int_0^T Ddt > \int_0^T PDdt$ ; მაშინ მომხმარებელი გარკვეული დროის განმავლობაში არ იქნება

დაკმაყოფილებული. ამან კი შეიძლება გამოიწვიოს მომხმარებლის დაკარგვა და, გარდა ამისა, წარმოება გარკვეული პერიოდის განმავლობაში იქნება წამგებიანი.

### 1.3.3 წარმოების ოპტიმალური დაგეგმვა

წრფივი დაპროგრამება წარმატებით შეიძლება იქნეს გამოყენებული წარმოების ზოგადი დაგეგმვისათვის. ამაში ვგულისხმობთ თუ რა რაოდენობის და რა სახის პროდუქცია უნდა გამოუშვას წარმოებამ, რომ პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიიღოს მაქსიმალური ფულადი მოგება.

ამოცანის თანახმად, წარმოებას შეუძლია გამოუშვას  $n$  სახის სხვადასხვა ნაწარმი. წარმოებას აქვს ამ ნაწარმის დამზადებისათვის საჭირო  $m$  სახის რესურსი (მხოლოდ შეზღუდული რაოდენობით); თითოეული  $j$ -ური რესურსის მარაგი  $b_j$ -ის ( $j=1,2,\dots,m$ ) ტოლია. ცნობილია ერთი ცალი  $i$ -ური პროდუქციის დამზადებისათვის საჭირო  $j$ -ური რესურსის რაოდენობის  $a_{ij}$ , ნორმა ( $i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m$ ). ცნობილია, რომ  $i$ -ური ტიპის ერთი ნაწარმის რეალიზაცია იძლევა  $c_i$  ლარის მოგებას. საჭიროა დავადგინოთ, თუ რომელი სახის და რაოდენობის პროდუქცია დავამზადოთ ყველა არსებული რესურსის გამოყენებით, რომ პროდუქციის რეალიზაციისას მივიღოთ მოგების მაქსიმალური რაოდენობა.

მარტივად შედგება დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც შეესაბამება წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min,$$



ის ნაწილი, რომელზეც განთავსებულია ყველა კულტურა. ზემოთ აღნიშნულის გათვალისწინებით მივიღებთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის ამოცანას:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.15)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq b_j, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$

(1.15) ამოცანის ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება სავარგულების დათესვის ოპტიმალური გეგმა, რომლის შედეგადაც მეურნეობა ამ პროდუქციის რეალიზაციის შემთხვევაში მაქსიმალურ ფულად მოგებას მიიღებს.

რეალურ ამოცანებში შეზღუდვების რიცხვი გაცილებით მეტია და პრობლემა უფრო რთულია.

წრფივი დაპროგრამების გამოყენებით შეიძლება გადაიჭრას სხვა მნიშვნელოვანი ამოცანებიც. მაგალითად, რაციონის შედგენის ამოცანა, რაც გულისხმობს ადამიანის არსებობისათვის საჭირო და აუცილებელი ყველა ნივთიერების (ცილები, ცხიმები, ნახშირწყლები და სხვ.) უზრუნველყოფის პირობებში შევადგინოთ საკვების ისეთი რაციონი, რომელიც ყველაზე იაფია. წრფივი დაპროგრამების გამოყენებით შეიძლება, აგრეთვე, დადგინდეს საქონლის ჯოგის ოპტიმალური შემადგენლობა, რომლის დროსაც მივიღებთ მაქსიმალური რაოდენობის პროდუქციას (ხორცი, რძე, რძის ნაწარმი, ა.შ.) მაშინ, როდესაც გვაქვს შეზღუდული რაოდენობისა და სახეობის საკვები პროდუქტები.

# თავი მეორე

## ერთკრიტიკრიული ოპტიმიზაციის თეორიული საფუძვლები

### 2.1 ამოცანის დასმა

მათემატიკური თვალსაზრისით ერთკრიტიკრიული ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანები სასრულგანზომილებიანი ამოცანებია, რომელთა გადაწყვეტა, ზოგად შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის რიცხვითი ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნას ითვალისწინებს.

დაეუშვათ, მოცემულია დამოუკიდებელი ცვლადის რიცხვითი ფუნქცია  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , რომელიც განსაზღვრულია ევკლიდეს  $n$ -განზომილებიანი სივრცის რაღაც  $\Omega$  სიმრავლეზე, ე.ი.  $\Omega \subset R^n$ .  $f(x)$ -ს მიზნის ფუნქციას ან, უბრალოდ, საოპტიმიზაციო ფუნქციას უწოდებენ, ხოლო  $\Omega$ -ს დასაშვებ ამონახსნების სიმრავლეს ან, მოკლედ, დასაშვებ სიმრავლეს (არეს).

ოპტიმიზაციის ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: საჭიროა დასაშვები  $\Omega$  სიმრავლის ელემენტებს შორის ისეთი  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  ამონახსნი შევარჩიოთ, რომლის დროსაც მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია თავის ექსტრემალურ (მაქსიმალურ ან მინიმალურ) მნიშვნელობას მიაღწევს. გარკვეულობისათვის დაეუშვათ, რომ ვეძებთ  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმს. ამგვარად, იმისათვის, რომ  $\Omega$  სიმრავლეზე  $f(x)$  ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა გადავწყვიტოთ, საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი  $x^* \in \Omega$  ექვტორი და მისი შესაბამისი  $f^* = f(x^*)$ , რომლის დროსაც ადგილი ექნება შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.1}$$

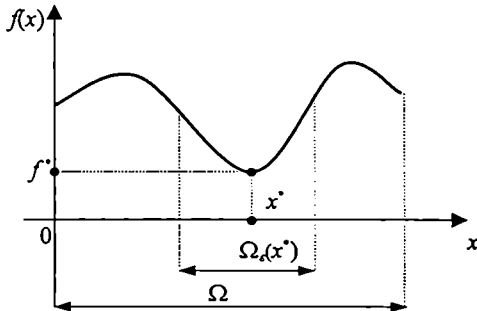
$x^*$ -ს ოპტიმალურ ამონახსნს უწოდებენ, ხოლო  $f(x^*)$  ოპტიმუმს. ის ფაქტი, რომ  $x^*$  ამონახსნი ოპტიმალურია, რომლის დროსაც  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა  $\Omega$  სიმრავლეზე თავის დასაშვებ მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega \subset R^n} f(x), \quad (2.2)$$

ხოლო სასრულგანზომილებიან სივრცეში მინიმიზაციის ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისათვის გვექნება

$$\min \left\{ f(x) \mid x \in \Omega \subset R^n \right\}. \quad (2.3)$$

თუ არსებობს  $x^*$  წერტილის ისეთი მიდამო  $\Omega_\varepsilon(x^*)$ ,  $\varepsilon > 0$ , სადაც (2.1) უტოლობა სამართლიანია აღნიშნული მიდამოს ყველა  $x \in \Omega \cap \Omega_\varepsilon(x^*)$  წერტილისათვის, მაშინ  $x^*$  ლოკალური მინიმუმის წერტილს წარმოადგენს (ნახ. 2.1), ხოლო თუ (2.1) უტოლობას ადგილი აქვს  $\Omega$  სიმრავლის ყველა  $x \in \Omega$  წერტილისათვის, მაშინ - აბსოლუტური (გლობალური) მინიმუმის წერტილს (ნახ. 2.2).

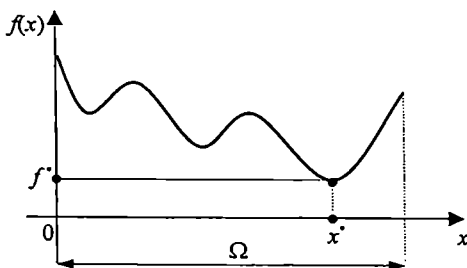


ნახ. 2.1

ლოკალური მინიმუმის წერტილი აბსოლუტური მინიმუმის წერტილს ყოველთვის არ ემთხვევა. ლოკალური და აბსოლუტური მინიმუმის წერტილების დამთხვევას ადგილი აქვს განსაკუთრებულ შემთხვევაში. აღნიშნული შემთხვევის განხილვამდე შემოვიტანოთ რამდენიმე განსაზღვრება.

**ბანსაზღვრება 21**  $f(x)$  მონოტონურ ფუნქციას წარმოადგენს, თუ ნებისმიერი  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებისთვის, სადაც  $x_1 \leq x_2$ , სამართლიანია ერთ-ერთი შემდეგი უტოლობა:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$  - მონოტონურად ზრდადი ფუნქციებისთვის,
- $f(x_1) \geq f(x_2)$  - მონოტონურად კლებადი ფუნქციებისთვის.



ნახ. 2.2

**ბანსაზღვრება 22**  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია  $a \leq x \leq b$  მონაკვეთზე, თუ ამ მონაკვეთის ერთადერთი ოპტიმალური  $x^*$  წერტილის ორივე მხარეს იგი მონოტონურია.

$f(x)$  ფუნქციის უნიმოდალურობის შემთხვევაში ადგილი აქვს ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმების დამთხვევას. თუ ფუნქცია არ არის უნიმოდალური, მაშინ შეიძლება მას რამდენიმე ლოკალური მინიმუმის წერტილი გააჩნდეს.

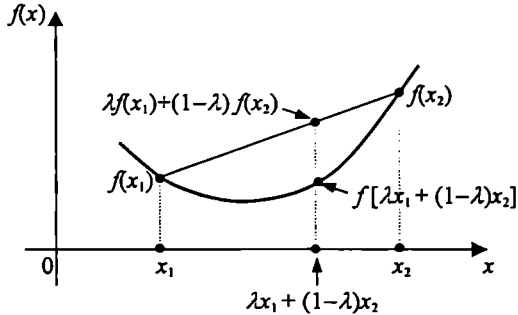
უნიმოდალურობა ფუნქციის განსაკუთრებული თვისებაა, რომელსაც ფართო გამოყენება აქვს საოპტიმიზაციო გამოკვლევებში. სამწუხაროდ, მისი განსაზღვრება საშუალებას არ გვაძლევს ფუნქციის უნიმოდალურობა უშუალოდ შევაამოწმოთ. სამაგიეროდ, ოპტიმიზაციის თეორიაში გამოიყოფა უნიმოდალური ფუნქციების მნიშვნელოვანი კლასი, კერძოდ, ამოზნექილი და ჩაზნექილი ფუნქციების კლასი, რომელიც აღნიშნული შემოწმების ჩატარების საშუალებას იძლევა.

**ბანსაზღვრება 23.**  $\Omega$  სიმრავლე ამოზნექილია, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი  $x^{(1)}$  და  $x^{(2)}$  ვექტორის საშუალებით განსაზღვრული  $x = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$  ვექტორი  $\lambda \in [0; 1]$  პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობის დროს ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,  $\Omega$  სიმრავლე ამოზნექილია, თუ მისი ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებული წრფე ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის.

ბნსაზღვრება 2.4. ამოზნექილ  $\Omega$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ  $n$  ცვლადის  $f(x)$  ფუნქციას ამოზნექილი ეწოდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი  $x^{(1)}$  და  $x^{(2)}$  წერტილისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$f[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}] \leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}), \quad (2.4)$$

სადაც  $0 \leq \lambda \leq 1$ .



ნახ. 2.3

აღნიშნული განსაზღვრება ერთცვლადიანი ფუნქციის შემთხვევაში ილუსტრირებულია ნახ. 2.3-ზე.

ბნსაზღვრება 2.5.  $\Omega$  სიმრავლეზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ჩაზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $-f(x)$  ფუნქცია ამოზნექილია ამავე  $\Omega$  სიმრავლეზე.

ამოზნექილი ფუნქციები გარკვეული თვისებებით ხასიათდება, რომელთაგან აღსანიშნავია:

1. ამოზნექილი ფუნქციის შესაბამისი წირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი ქორდა ამ წერტილებს შორის ინტერვალში ყოველთვის წირის ზემოთ მდებარეობს (ნახ. 2.3).
2.  $f(x)$  ფუნქციის მხების დახრის კუთხის ტანგენსი ( $f(x)$ -ის პირველი რიგის წარმოებული)  $x$ -ის ზრდასთან ერთად იზრდება ან, ყოველ შემთხვევაში მინც, არ მცირდება.

3. მოცემულ ინტერვალში  $f(x)$  ფუნქციის მორე რიგის წარმოებული ყოველთვის არაუარყოფითია.
4.  $x^{(0)}$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციის გრადიენტი ნებისმიერი  $x$ -სთვის აკმაყოფილებს შემდეგი სახის ფუნდამენტურ უტოლობას:

$$f(x) \geq f(x^{(0)}) + \nabla f(x^{(0)})(x - x^{(0)}), \quad (2.5)$$

სადაც  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციის გრადიენტი განისაზღვრება როგორც ვექტორი

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]^T. \quad (2.6)$$

**ბნსაზღვრება 2.6.**  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციის ჰესეს მატრიცა  $n \times n$  განზომილების შემდეგი სახის სიმეტრიული მატრიცაა:

$$G_f(x) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{i,j=1,\dots,n} = \nabla^2 f(x). \quad (2.7)$$

ჰესეს  $G_f$  მატრიცა  $f(x)$  ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა, კერძოდ,  $f(x)$  ფუნქცია ამოზნექილია, თუ მისი ჰესეს მატრიცა დადებითად განსაზღვრული ან დადებითად ნახევრადგანსაზღვრულია  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ყველა მნიშვნელობისთვის, ხოლო თუ ჰესეს მატრიცა უარყოფითად განსაზღვრული ან უარყოფითად ნახევრადგანსაზღვრულია  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ყველა მნიშვნელობისთვის, მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია ჩაზნექილია.

**მაგალიტი 2.1** გამოვიკვლიოთ მოცემული ფუნქცია

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3.$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ ფუნქციის გრადიენტი

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 6 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2x_3 - 4 \\ 2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

და შევადგინოთ მოცემული ფუნქციის ჰესეს მატრიცა



$$G_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ფუნქციის გამოკვლევის მიზნით შევამოწმოთ ჰესეს  $G_f$  მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია თუ დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული. შევნიშნავთ, რომ

- $G_f$  სიმეტრიული მატრიცაა;
- $G_f$  მატრიცის ყველა დიაგონალური ელემენტი დადებითია;
- $G_f$  მატრიცის წამყვანი მთავარი დეტერმინანტები ტოლია

$$|6| > 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0, \quad |G_f| = 16 > 0.$$

მაშასადამე,  $G_f$  დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $f$  ფუნქცია ამოზნექილია. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, თუ  $G_f$  დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, მაშინ  $f$ -ს მკაცრად ამოზნექილი ფუნქცია ეწოდება და მას მინიმუმის ერთადერთი წერტილი გააჩნია.

ამგვარად, ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ლოკალური და აბსოლუტური მინიმუმის წერტილების დამთხვევას ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა  $\Omega \subset R^n$  ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია - ამოზნექილი ფუნქცია.

ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად, ოპტიმიზაციის (2.3) ამოცანას იმ შემთხვევაში გააჩნია ოპტიმალური ამონახსნი, როცა მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ და შემოსაზღვრულ დასაშვებ  $\Omega \subset R^n$  სიმრავლეზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრა შეუძლებელია.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტა ოპტიმალური  $x^*$  წერტილისა და ოპტიმალური  $f^* = f(x^*)$  მნიშვნელობის მოძებნას ითვალისწინებს. თუ  $x^*$  მოძებნილია, მაშინ ოპტიმალური  $f(x^*)$  მნიშვნელობის განსაზღვრა, ცხადია, პრობლემას არ წარმოადგენს. ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა მხოლოდ ოპტიმალური  $f^*$  მნიშვნელობაა ცნობილი, მაშინ ოპტიმალური წერტილის მოძებნად აუცილებელია ამოხსნათ განტოლება  $f(x) = f^*$ , რაც მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში პრაქტიკულად შეუძლებელ ამოცანას წარმოადგენს.

## 2.2 ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანების კლასიფიკაცია

### ამოცანების კლასიფიკაცია

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანების კლასიფიკაცია ძირითადად დაკავშირებულია დასაშვებ ამონახსნების  $\Omega$  სიმრავლესთან, რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება იყოს განსაზღვრული:  $\Omega = R^n$  ან  $\Omega \neq R^n$ .

პირველ შემთხვევაში ადგილი აქვს უპირობო მინიმიზაციის ამოცანას, რომელშიც საჭიროა მოიძებნოს ისეთი  $x^* \in R^n$  წერტილი, სადაც (2.1) უტოლობა სამართლიანია  $R^n$  სიმრავლის ყველა წერტილისთვის შეზღუდვების გარეშე. მეორე შემთხვევაში კი საქმე გვაქვს პირობითი მინიმიზაციის ამოცანასთან, სადაც დასაშვები  $\Omega$  სიმრავლე გარკვეული სახის შეზღუდვებითაა განსაზღვრული.

თუ  $\Omega$  სიმრავლე მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\Omega = \{ x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; h_j(x) = 0, j = \overline{1, k} \}, \quad (2.8)$$

სადაც ყველა რიცხვითი  $g_i$  და  $h_j$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $R^n$ -ზე, მაშინ ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანა მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანას წარმოადგენს. ამ კლასის ამოცანებს შორის განასხვავებენ ამოცანებს უტოლობებით მოცემული შეზღუდვებით, სადაც  $\Omega$  სიმრავლეს აქვს (2.8) სახე და  $k = 0$ ; ამოცანებს ტოლობებით მოცემული შეზღუდვებით, როცა (2.8)-ში  $m = 0$ ; ამოცანებს შერეული სახის შეზღუდვებით, როცა  $m \neq 0$  და  $k \neq 0$ .

ამგვარად, მათემატიკური დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა მდგომარეობს დამოუკიდებელი  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადების ისეთი მნიშვნელობების მოძებნაში, რომლის დროსაც მიზნის  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქცია დასაშვებ  $\Omega$  სიმრავლეზე თავის მინიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს. ფორმულირებული ამოცანა კომპაქტურად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\min \{ f(x) \mid g(x) \leq 0; h(x) = 0; x \in R^n \}. \quad (2.9)$$

მათემატიკური დაპროგრამების (2.9) ამოცანის ძირითად თავისებურებებს, რომელიც მას კლასიკური ანალიზის ექსტრემალური ამოცანებისგან განასხვავებს, შეზღუდვებში არსებული უტოლობათა სისტემა განაპირობებს. აღნიშნულის გამო, შეუძლებელი ხდება პირობითი მინიმიზაციის ამოცანების გადასაწყვეტად ლაგრანჟის თანამართლებების საფუძველზე შემუშავებული ცნობილი მეთოდების გამოყენება.

იმის მიხედვით, თუ როგორი სახითაა წარმოდგენილი  $f(x)$ ,  $g(x)$  და  $h(x)$  ფუნქციები, ადგილი აქვს მათემატიკური დაპროგრამების სხვადასხვა ამოცანას. თუ

$f(x)$ ,  $g(x)$  და  $h(x)$  წრფივი ფუნქციებია, მაშინ (2.9) ამოცანას წრფივი დაპროგრამების ამოცანას უწოდებენ.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანები მათემატიკური დაპროგრამების ყველაზე მარტივი და დეტალურად შესწავლილი ამოცანებია. აღნიშნული ამოცანებიდან პრაქტიკაში განსაკუთრებული ინტერესის საგანს შეადგენს წრფივი დაპროგრამების სტანდარტული ამოცანა:

$$\min\{ f(x) = c^T x \mid Ax \leq b; x \geq 0 \} \quad (2.10)$$

და კანონიკური ამოცანა

$$\min\{ f(x) = c^T x \mid Ax = b; x \geq 0 \}, \quad (2.11)$$

სადაც

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტების ვექტორია;

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  - შეზღუდვების ვექტორი;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - დამოუკიდებელი ცვლადი ვექტორი;

$A = [a_{ij}]$  - მუდმივკოეფიციენტებიანი  $m \times n$  განზომილების მატრიცა.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ წრფივი შეზღუდვებით განსაზღვრული დასაშვები  $\Omega$  სიმრავლე, რომელიც სასრული რაოდენობის ნახევარსივრცეებისა და ჰიპერსიბრტყეების თანაკვეთას წარმოადგენს, ამოზნექილი მრავალწახნაგაიანი ჩაკეტილი სიმრავლეა და მინიმუმის წერტილი ამ სიმრავლის ერთ-ერთ წვეროში მდებარეობს. თუ  $\Omega$  სიმრავლე ცარიელია ან არაა შემოსაზღვრული, მაშინ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია.

წრფივი დაპროგრამების სპეციალური სახის ამოცანებს შეადგენს მთელირიცხვა დაპროგრამების ამოცანები, რომელშიც საჭიროა განსაზღვრულ იქნეს დამოუკიდებელი  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადების ისეთი არაუარყოფითი მთელირიცხვა მნიშვნელობები, რომლის დროსაც მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია დასაშვებ  $\Omega$  არეზე თავის მინიმალური მნიშვნელობას მიაღწევს [83].

მათემატიკური დაპროგრამების ყველაზე უფრო ზოგად და ფართო კლასს არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანები შეადგენს. ამ კატეგორიის ამოცანებს მიეკუთვნება ყველა ის ამოცანა, რომელსაც ერთი მაინც არაწრფივი შეზღუდვა ან არაწრფივი მიზნის ფუნქცია გააჩნია.

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანებიდან ცალკე შეიძლება გამოვყოთ კვადრატული დაპროგრამების ამოცანები. ასეთ ამოცანებში მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული კვადრატული ფორმითაა წარმოდგენილი, ხოლო შეზღუდვები წრფივი ფუნქციებია. ზოგად შემთხვევაში, კვადრატული დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\min\{ f(x) = c^T x + x^T D x \mid Ax \leq b; x \geq 0 \}, \quad (2.12)$$

სადაც  $D = [d_{ij}]$  მუდმივკოეფიციენტებიანი  $n \times n$  განზომილების სიმეტრიული მატრიცაა.

არაწრფივ დაპროგრამებაში განსაკუთრებული ადგილი უკავია ამოზნექილი და არაამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანებს.

ამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანებში  $f(x)$  და  $g(x)$  ამოზნექილი ფუნქციებია, ხოლო  $h(x)$  შეზღუდვა - წრფივი ფუნქცია. აღნიშნული ფუნქციების ამოზნექილობა დასაშვები ამონახსნების  $\Omega$  სიმრავლის ამოზნექილობას განსაზღვრავს, რაც ლოკალური ექსტრემუმის აბსოლუტურობას უზრუნველყოფს.

არაამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანები არაწრფივი დაპროგრამების ყველაზე რთული ამოცანებია. სირთულე ძირითადად განპირობებულია  $f(x)$ ,  $g(x)$  და  $h(x)$  ფუნქციების არაწრფივი, არაამოზნექილი ხასიათით და იგი აბსოლუტური ექსტრემუმის განსაზღვრასთანაა დაკავშირებული. გარდა ამისა, პრობლემას კიდევ უფრო რთულებს და ამძიმებს ის შემთხვევა, როცა მიზნის ფუნქცია არაგლუვია და შეიძლება გააჩნდეს არა მარტო წყვეტის წერტილები, არამედ კრიტიკული წერტილების ისეთი სიმრავლე, როგორცაა „ზევი“, „ქედი“, „პლატო“ და სხვ.

არაწრფივი დაპროგრამების სპეციალური სახის ამოცანებს შეადგენს გეომეტრიული დაპროგრამების ამოცანები [73]

$$\min\{ f(x) \mid g_j(x) \leq 1, i = \overline{1, m}; x_j > 0, j = \overline{1, n} \}, \quad (2.13)$$

სადაც მიზნის ფუნქცია და შეზღუდვები შემდეგი სახის პოზინომებია:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m c_j x_1^{a_{j1}} x_2^{a_{j2}} \dots x_n^{a_{jn}},$$

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^m c_j^{(i)} x_1^{a_j^{(i)1}} x_2^{a_j^{(i)2}} \dots x_n^{a_j^{(i)n}}.$$

უკანასკნელ გამოსახულებებში  $c_j$  და  $c_j^{(i)}$  კოეფიციენტები დადებითი რიცხვებია, ხოლო  $a_{j\alpha}$  და  $a_j^{(i)\alpha}$  ხარისხის მაჩვენებლები - ნამდვილი რიცხვები. აღსანიშნავია, რომ ტექნიკური დაპროექტების მრავალი ამოცანა (2.13) სახის ამოცანაზე დაიყვანება [54, 73].

## 2.3 ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

### 2.3.1 ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანებში

განვიხილოთ უპირობო მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min\{f(x) \mid x \in R^n\}. \quad (2.14)$$

ცხადია, (2.14) ამოცანაში საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი  $x^* \in R^n$  წერტილი, რომლის დროსაც ადგილი აქვს შემდეგი პირობის შესრულებას:  $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in R^n$ . ე.ი. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს  $R^n$  სიმრავლეზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმის განსაზღვრას.

თუ ნებისმიერი  $x \in R^n$  წერტილისათვის, სადაც  $x \neq x^*$ , სრულდება მკაცრი უტოლობა  $f(x^*) < f(x)$ , მაშინ  $x^*$  აბსოლუტური მინიმუმის ერთადერთ წერტილს წარმოადგენს.

ოპტიმიზაციის უპირობო ამოცანების ამოხსნის კლასიკური თეორია აბსოლუტური ექსტრემუმის მოძებნის კონკრეტულ საშუალებებს ვერ განსაზღვრავს. იგი მხოლოდ ლოკალური ექსტრემუმის შეფასების საშუალებას იძლევა. შემოვიტანოთ შემდეგი

ბანსაზღვრება 2.7.  $x^*$  წერტილს დიფერენცირებადი  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონარულ წერტილს უწოდებენ, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (2.15)$$

დავუშვათ, რომ (2.15) ამოცანაში  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია და მას ნებისმიერ  $x \in R^n$  წერტილში უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები გააჩნია:  $\partial f / \partial x$  და  $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ . მაშინ ლოკალური მინიმუმის არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს განსაზღვრავს თეორემები, რომელსაც ქვემოთ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ.

თეორემა 2.1  $R^n$  სიმრავლეზე  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმის  $x^*$  წერტილის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ

ა)  $x^*$  წარმოადგენდეს  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონარულ წერტილს;

ბ)  $\nabla^2 f(x^*) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^*) \right]$  წარმოადგენდეს დადებითად ნახევრადგანსაზღვრულ მატრიცას.

თეორემა 2.2  $R^n$  სივრცეზე  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმის  $x^*$  წერტილის არსებობისათვის საკმარისია, რომ

ა)  $x^*$  წარმოადგენდეს  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონარულ წერტილს;

ბ)  $\nabla^2 f(x^*) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^*) \right]$  წარმოადგენდეს დადებითად განსაზღვრულ მატრიცას.

შენიშნავთ, რომ მატრიცის დადებითად ნახევრადგანსაზღვრულობისა და დადებითად განსაზღვრულობის პირობები შესაბამისად შემდეგია:

$$x^T \nabla^2 f(x^*) x \geq 0 \quad \forall x \in R^n, \quad (2.16)$$

$$x^T \nabla^2 f(x^*) x > 0 \quad \forall x \in R^n. \quad (2.17)$$

თუ  $R^n$  სივრცეზე განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას  $x^*$  წერტილში აბსოლუტური მინიმუმი გააჩნია, მაშინ, ცხადია,  $x^*$  წერტილში იგი ლოკალური ოპტიმალობის ზემოთ განხილულ პირობებსაც დააკმაყოფილებს. ამიტომ  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმის მოსაძებნად საჭიროა მის ყველა სტაციონარულ წერტილში ფუნქციის  $f$  მნიშვნელობის გამოთვლა და მათ შორის უმცირესის შერჩევა.

### 2.3.2 ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები პირობითი ოპტიმიზაციის ამოცანებში

განვიხილოთ პირობითი მინიმიზაციის ამოცანა

$$\min \{ f(x) \mid x \in \Omega \subset R^n \}, \quad (2.18)$$

სადაც დასაშვები  $\Omega$  სივრცე განსაზღვრულია შემდეგი პირობით:

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \right\}. \quad (2.19)$$

(2.18) ამოცანის ოპტიმალობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს განსაზღვრავს კუნ-ტაკერის ცნობილი თეორემა, რომელიც მათემატიკური დაპროგრამების ერთ-ერთ

ცენტრალურ თეორემას წარმოადგენს. იგი ლაგრანჟის მამრავლების კლასიკური მეთოდის გარკვეული განზოგადებაა იმ შემთხვევისთვის, როცა ამოცანის შეზღუდვების სისტემა როგორც ტოლობებით, ისე უტოლობებითაა წარმოდგენილი.

დაეუშვათ, რომ  $f$  და  $g_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , ამოზნექილი ფუნქციებია. მაშინ, როგორც უკვე იყო აღნიშნული,  $\Omega$  სიმრავლეზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი აბსოლუტურ მინიმუმს წარმოადგენს. ამგვარად, თუ  $x^*$  მინიმუმის წერტილია, მაშინ  $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega$ .

განვიხილოთ  $\Omega$  სიმრავლის ქვესიმრავლე  $\Omega_0$  რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი პირობით:

$$\Omega_0 = \left\{ x \in R^n \mid g_i(x) < 0, i = \overline{1, m} \right\} \subset \Omega \quad (2.20)$$

და შემოვიტანოთ შემდეგი

ბანსაზღვრება 2.8. თუ  $\Omega_0$  სიმრავლე არაცარიელია, მაშინ ვიტყვი, რომ (2.18) ამოცანაში დაკმაყოფილებულია სლიეტერის რეგულარობის პირობა.

შემოვიტანოთ ე.წ. ლაგრანჟის განზოგადებული ფუნქცია

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad (2.21)$$

სადაც  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ცვლადები  $\lambda \in R^m$  ვექტორის კომპონენტებია და მათ ლაგრანჟის მამრავლებს უწოდებენ.

ბანსაზღვრება 2.9. ამბობენ, რომ  $L(x, \lambda)$  ფუნქციას  $(x^*, \lambda^*)$  უნაგირა წერტილი გააჩნია, თუ ყველა  $x$ -ისა და  $\lambda$ -სთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*). \quad (2.22)$$

თუ (2.22) პირობა სამართლიანია ყველა  $x$ -ისა და  $\lambda$ -სთვის, მაშინ ამბობენ, რომ  $L(x, \lambda)$  ფუნქციას გააჩნია უნაგირა წერტილი დღემდე ანუ გლობალური უნაგირა წერტილი.

უნაგირა წერტილის განსაზღვრაში იგულისხმება, რომ  $x^*$  უზრუნველყოფს  $L(x, \lambda^*)$  ფუნქციის მინიმიზაციას ყველა  $x$ -ის მიხედვით, ხოლო  $\lambda^*$  უზრუნველყოფს  $L(x^*, \lambda)$  ფუნქციის მაქსიმიზაციას ყველა  $\lambda$ -ს მიხედვით. ასე, მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია  $L(x, \lambda) = x^2 - x + 2\lambda$ , რომელიც განსაზღვრულია  $x$ -ის ყველა ნამდვილი და  $\lambda$ -ს ყველა არაუარყოფითი მნიშვნელობის დროს. ძნელი არ არის

შევაბრუნოთ, რომ აღნიშნულ ფუნქციას გააჩნია უნაგირა წერტილი  $x^* = 2$ ,  $\lambda^* = 4$ , ვინაიდან  $x$ -ის ყველა ნამდვილი და  $\lambda$ -ს ყველა არაუარყოფითი ( $\lambda \geq 0$ ) მნიშვნელობის დროს ადგილი აქვს უტოლობას  $L(2, \lambda) \leq L(2, 4) \leq L(x, 4)$ .

თეორემა 23 (კუნ-ტაკერის თეორემა). ვთქვათ, სლიტერის რეგულარობის პირობა დაკმაყოფილებულია.  $x^*$  წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს (2.18) ამოცანის ამოხსნას, როცა არსებობს ისეთი  $\lambda^*$  ვექტორი, რომ ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

$$x^* \geq 0, \lambda^* \geq 0, \quad (2.23)$$

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*) \quad \forall x \geq 0, \forall \lambda \geq 0. \quad (2.24)$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოპტიმალური  $(x^*, \lambda^*)$  წერტილი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით: ფიქსირებული  $\lambda^*$ -ის დროს  $L(x, \lambda^*)$  ფუნქციას  $x \geq 0$  არეში აბსოლუტური მინიმუმი გააჩნია  $x = x^*$  წერტილში, ხოლო ფიქსირებული  $x^*$ -ის დროს მას  $\lambda \geq 0$  არეში აბსოლუტური მაქსიმუმი გააჩნია  $\lambda = \lambda^*$  წერტილში. ამგვარად, ექსტრემალური  $(x^*, \lambda^*)$  წერტილი, რომელიც აღნიშნული თვისებებით ხასიათდება, უნაგირა წერტილს წარმოადგენს და ამიტომ კუნ-ტაკერის თეორემას ხშირად უწოდებენ თეორემას უნაგირა წერტილის შესახებ.

კუნ-ტაკერის თეორემის დამტკიცება და მისი სხვადასხვა ვარიაციები განხილულია ლიტერატურაში [86, 91].

იმ შემთხვევაში, როცა  $f$  და  $g_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ (2.23) და (2.24) პირობები კუნ-ტაკერის შემდეგი „ლოკალური“ პირობების ექვივალენტურია:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) \geq 0, \quad (2.25)$$

$$x^* \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (2.26)$$

$$x^* \geq 0, \quad (2.27)$$

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) \leq 0, \quad (2.28)$$

$$\lambda^* \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (2.29)$$

$$\lambda^* \geq 0. \quad (2.30)$$



საკიროა აღინიშნოს, რომ წრფივი შეზღუდვების შემთხვევაში კუნ-ტაკერის პირობები სამართლიანია სლეიტერის რეგულარობის პირობის მოთხოვნის გარეშეც.

საგულისხმოა ის ფაქტი, რომ კუნ-ტაკერის პირობები სამართლიანია (2.18) ამოცანის სხვადასხვა ვარიაციის დროსაც. ასე, მაგალითად, როცა ამოცანაში  $x \geq 0$  შეზღუდვის მოთხოვნა არ არის გათვალისწინებული, მაშინ (2.25)-(2.27) პირობების ნაცვლად განიხილება შემდეგი ერთი პირობა:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (2.31)$$

ხოლო როცა  $g_i, i = \overline{1, m}$ , წრფივი შეზღუდვებია, მაშინ (2.28)-(2.30) პირობები შეიცვლება მარტივი პირობით

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0. \quad (2.32)$$

იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს ოპტიმიზაციის შემდეგი სახის ამოცანას:

$$\min \{ f(x) \mid g_i(x) = 0, i = \overline{1, m} \}, \quad (2.33)$$

სადაც  $g_i, i = \overline{1, m}$ , წრფივი ფუნქციებია, მაშინ (2.25)-(2.30) პირობების ნაცვლად განიხილება მხოლოდ ორი პირობა: (2.31) და (2.32), რაც ლაგრანჟის მამრავლების მეთოდის კლასიკურ შემთხვევას შეესაბამება.

ექსტრემალური ამოცანების აუცილებელი და საკმარისი პირობები დაწვრილებითაა განხილული ლიტერატურაში [27, 86, 91].

### 2.3.3 კუნ-ტაკერის პირობების გომომეტრიული ინტერპრეტაცია

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის ამოცანა

$$\min \{ f(x) \mid g_i(x) \leq 0, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}; x \in R^n \}, \quad (2.34)$$

სადაც  $f$  და  $g_i (i \in I)$  უწყვეტი და ლიფერენცირებადი ფუნქციებია.

(2.34) ამოცანის ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე განსაზღვრულა პირობით

$$\Omega = \{ x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in I \}. \quad (2.35)$$

დაეუშვათ, რომ  $\Omega$  სიმრავლე არაცარიელია; თუმცა, ზოგიერთი შეზღუდვის ტოლობის სახით წარმოდგენის შემთხვევაში, მას შეიძლება ცარიელი შიგა ნაწილი გააჩნდეს.

ვთქვათ,  $x^* \in \Omega$  მოცემული ამოცანის მინიმუმის წერტილია. მაშინ მინიმუმის განსაზღვრის საფუძველზე,  $f(x)$  ფუნქცია არ შეიძლება შემცირდეს  $x$ -ის იმ მნიშვნელობებზე, რომლებიც  $x^*$  წერტილიდან გამომავალ და მთლიანად  $\Omega$  სიმრავლეში მოთავსებულ რაღაც  $\Gamma$  წირის რკალს ასახავს.  $\Gamma$  წირის ასეთ რკალს დასაშვებს უწოდებენ და იგი განისაზღვრება  $\theta \geq 0$  პარამეტრის უწყვეტად ღიფერენცირებადი  $\varphi: R^n \rightarrow R^n$  ფუნქციით

$$\varphi(\theta) = [\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \dots, \varphi_n(\theta)],$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- ა)  $\varphi(0) = x^*$ ,
- ბ)  $\varphi(\theta) \in \Omega$  საკმაოდ მცირე  $\theta > 0$ -სთვის.

ბანსაზღვრება 2.10. ნებისმიერ ვექტორს

$$y = \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = \left[ \frac{d\varphi_1}{d\theta}(0), \frac{d\varphi_2}{d\theta}(0), \dots, \frac{d\varphi_n}{d\theta}(0) \right] r, \quad (2.36)$$

რომელიც  $x^*$  წერტილში დასაშვებ  $\varphi(\theta)$  წირის რკალს ეხება,  $x^*$  წერტილში დასაშვები მიმართულება ეწოდება.

$x^*$  წერტილში დასაშვებ მიმართულებათა სიმრავლე წარმოქმნის კონუსს, რომელიც აღვნიშნოთ  $C_{x^*}$ -ით.

ბანსაზღვრება 2.11 უტოლობის სახით მოცემულ  $g_i(x) \leq 0$  შეზღუდვას ეწოდება აქტიური ან გაჭვრებული  $x^*$  წერტილში, თუ  $g_i(x^*) = 0$ .

ბანსაზღვრება 2.12 უტოლობის სახით მოცემულ  $g_i(x) \leq 0$  შეზღუდვას ეწოდება არააქტიური ან გაუჭვრებელი  $x^*$  წერტილში, თუ  $g_i(x^*) < 0$ .

აღვნიშნოთ  $x^*$  წერტილში აქტიური შეზღუდვების ინდექსების სიმრავლე  $I^*$ -ით, ე.ი.

$$I^* = \{i \in I \mid g_i(x^*) = 0\},$$

და განვიხილოთ შემდეგი სახის  $G$  კონუსი:

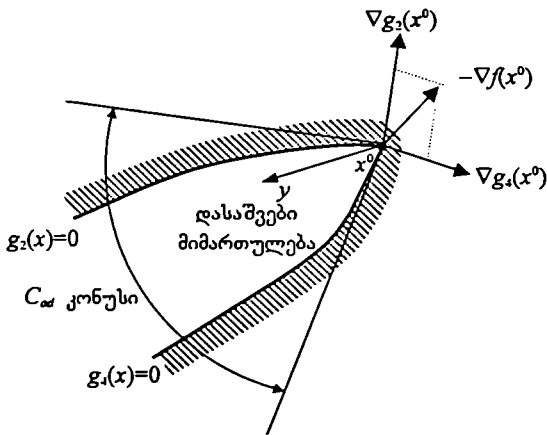
$$G = \{y \mid \nabla g_i^T(x^*)y \leq 0 \quad \forall i \in I^*\}. \quad (2.37)$$

მაშინ სამართლიანია

თეორემა 2.4. თუ  $y$  დასაშვები მიმართულებაა  $x^*$  წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგი პირობების შესრულებას:

$$\nabla g_i^T(x^*)y \leq 0 \quad \forall i \in I^*, \quad (2.38)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ,  $C_{ad} \subset G$ .



ნახ. 2.4

კუნ-ტაკერის პირობების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ილუსტრირებულია ნახ. 2.4-ზე, სადაც განხილულია ორგანზომილებიანი ამოცანა.  $x^*$  წერტილში აქტიური შეზღუდვებია  $g_2$  და  $g_4$ , ხოლო აქტიური შეზღუდვების ინდექსების სიმრავლეა  $I^* = \{2, 4\}$ . ნახაზზე დასაშვებ  $y$  მიმართულებათა სიმრავლე წარმოქმნის  $C_{ad}$  კონუსს, სადაც სრულდება (2.38) პირობები. კუნ-ტაკერის პირობების თანახმად, იმისათვის, რომ  $x^*$  მინიმუმის წერტილი იყოს, აუცილებელია  $-\nabla f(x^*)$  ვექტორმა დასაშვებ  $y$  მიმართულებასთან წარმოქმნას ბლაგვი კუთხე. ასეთ შემთხვევაში,  $-\nabla f(x^*)$  ვექტორი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს დადებითი  $\lambda_i$  კოეფიციენტებიანი  $\nabla g_i(x^*)$  ( $i \in I^*$ ) ვექტორების წრფივი კომბინაციით.

## 2.4 ერთკრიტიკული ოპტიმიზაციის მეთოდების კლასიფიკაცია

საზოგადოდ, გამოთვლითი მეთოდების ამა თუ იმ კლასიფიკაციას ის ამოცანები განსაზღვრავს, რომლის გადაწყვეტისთვისაც ეს მეთოდებია ორიენტირებული. აქედან გამომდინარე, ერთკრიტიკული ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები შეიძლება დაფიქსირდეს ორ დიდ კლასად. პირველი კლასი აერთიანებს ექსტრემუმის ძებნის მეთოდებს, რომელიც განკუთვნილია ოპტიმიზაციის უპირობო ამოცანების გადასაწყვეტად, ხოლო მეორე კლასი - მათემატიკური დაპროგრამების მეთოდებს, რომელიც უზრუნველყოფს პირობითი ოპტიმიზაციის ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანების გადაწყვეტას, როგორცაა წრფივი და არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანები.

ექსტრემუმის ხასიათის მიხედვით განასხვავებენ ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის ძებნის მეთოდებს. ლოკალური მეთოდების გამოყენება მიზანშეწონილია იმ შემთხვევაში, თუ ცნობილია, რომ მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალური ან ამონიექილია. ყველა სხვა შემთხვევაში საჭიროა გლობალური მეთოდების გამოყენება. ვინაიდან ოპტიმიზაციის რეალურ სისტემებში ლოკალური ექსტრემუმის შესახებ აპრიორული ინფორმაცია პრაქტიკულად არ არსებობს, ამიტომ ოპტიმიზაციის ამოცანაში ძებნა ძირითადად მიმართულია აბსოლუტური ექსტრემუმის განსაზღვრისათვის.

ექსტრემუმის ძებნის მეთოდების კლასიფიკაცია შესაძლებელია განვახორციელოთ საოპტიმიზაციო ცვლადების რაოდენობის საფუძველზეც. ამ ნიშნის მიხედვით განარჩევენ ოპტიმიზაციის ერთგანზომილებიან და მრავალგანზომილებიან მეთოდებს.

ექსტრემუმის ძებნის მეთოდების უმრავლესობის არსი საწყისი ამონახსნის თანდათანობით გაუმჯობესებაში მდგომარეობს. იმის მიხედვით, თუ რა წესით ზორციელდება ექსტრემუმთან ყოველი მიახლოება, აღნიშნული მეთოდები შეიძლება ორ ჯგუფში გაავართიანოთ. პირველ ჯგუფს შეადგენს ექსტრემუმის ძებნის დეტერმინირებული (რეგულარული) მეთოდები, ხოლო მეორე ჯგუფს - შემთხვევითი ძებნის (სტოქასტიკური) მეთოდები.

ექსტრემუმის ძებნის დეტერმინირებულ მეთოდებში ექსტრემუმთან ყოველი მიახლოება გარკვეულ კანონზომიერებას ემორჩილება. ამ კანონზომიერების თანახმად, ადგილი აქვს წერტილთა ისეთ  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  მიმდევრობის განსაზღვრას, რომელიც უზრუნველყოფს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების მონოტონურად კლებას

$$f(x^{(0)}) \geq f(x^{(1)}) \geq \dots \geq f(x^{(k)}) \geq \dots$$

ექსტრემუმის ძებნის თითქმის ყველა დეტერმინირებული მეთოდი იტერაციული ხასიათისაა, სადაც ექსტრემუმთან მიახლოების სტრატეგია განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული ფორმულის საფუძველზე:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.39)$$

სადაც  $d^{(k)} \in R^n$  გადაადგილების მიმართულებაა, ხოლო  $\lambda_k$  - გადაადგილების ბიჯის სიდიდე. როგორც (2.39) ფორმულიდან ჩანს,  $x^{(k)}$  წერტილიდან  $x^{(k-1)}$  წერტილში გადაადგილების სიდიდე დამოკიდებულია როგორც  $\lambda_k$  რიცხვზე, ასევე  $d^{(k)}$  ვექტორზე.

ფორმალურად, ექსტრემუმის ძებნის სხვადასხვა დეტერმინირებული მეთოდი ერთმანეთისაგან  $\lambda_k$  რიცხვისა და  $d^{(k)}$  ვექტორის შერჩევის წესით განსხვავდება. თუ  $\lambda_k$  და  $d^{(k)}$ -ს განსაზღვრისათვის საკმარისია მხოლოდ  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა, მაშინ შესაბამის მეთოდებს უწოდებენ ნულოვანი რიგის მეთოდებს ან, უბრალოდ, ძებნის მეთოდებს. პირველი რიგის მეთოდები, აღნიშნულის გარდა, საჭიროებს აგრეთვე  $f(x)$  ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულების განსაზღვრას. თუ მეთოდებში გათვალისწინებულია  $f(x)$  ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულების გამოყენება, მაშინ ასეთი მეთოდები მეორე რიგის მეთოდებს განეკუთვნება.

პირობითი ოპტიმიზაციის ანუ მათემატიკური დაპროგრამების ის მეთოდები, რომელიც უზრუნველყოფს წრფივი ფუნქციის მინიმიზაციას წრფივი შეზღუდვების დროს, შეადგენს წრფივი დაპროგრამების მეთოდებს. მათემატიკური დაპროგრამების ყველა დანარჩენი მეთოდი გაურთინებულია არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდებში.

არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდებიდან საჭიროა ცალკე გამოვყოთ:

- კვადრატული დაპროგრამების მეთოდები, რომელიც წრფივი შეზღუდვების დროს კვადრატული ფორმის მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას უზრუნველყოფს;
- ამოზნექილი დაპროგრამების მეთოდები, რომელიც წრფივი ან არაწრფივი ამოზნექილი შეზღუდვების დროს უნიმოდალური ფუნქციის მინიმიზაციას უზრუნველყოფს;
- არამოზნექილი დაპროგრამების მეთოდები, რომელიც წრფივი ან არაწრფივი შეზღუდვების დროს მულტიმოდალური ფუნქციის მინიმიზაციას უზრუნველყოფს.

# თავი მესამე

## წრფივი დაპროგრამება

### 3.1 წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ზოგადი დასმა

#### 3.1.1 ამოცანის სხვადასხვა ფორმები

ბანსაზღვრება 3.1 ამოცანას, რომელშიც იძებნება წრფივი ფუნქციის

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.1)$$

მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = s+1, s+2, \dots, m, \quad (3.3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l; l \leq n, \quad (3.4)$$

ეწოდება წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა.

(3.1)-(3.4) ამოცანა შეიძლება წარმოდგინოთ მატრიცული სახით

$$c^T x \rightarrow \max (\min), \quad (3.5)$$

$$Ax \leq b, \quad (3.6)$$

$$x' \geq 0. \quad (3.7)$$

(3.5)-(3.7) ამოცანაში  $A = \|a_{ij}\|$  არის  $m \times n$ -განზომილებიანი მოცემული მატრიცა,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  - შესაბამისად,  $n$ - და  $m$ -განზომილებიანი მოცემული ვექტორები,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - საძებნი  $n$ -განზომილებიანი ვექტორი,  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_l)^T$ , ( $l \leq n$ ). აქ სიმბოლო " $\leq$ " აღნიშნავს იმ გარემოებას, რომ (3.5) ვექტორული პირობის პირველი  $s$  შემადგენელი უტოლობის სახისაა, ზოლო დანარჩენი ( $m-s$ ) შემადგენელი კი ტოლობის სახის.

ბანსაზღვრება 3.2. ამოცანას, რომელშიც უნდა მოიძებნოს წრფივი ფუნქციის

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.8)$$

მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.9)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

ეწოდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანა სტანდარტულ (სიმეტრიულ) ფორმაში (ანუ წრფივი დაპროგრამების სტანდარტული (სიმეტრიული) ამოცანა).

(3.8)-(3.10) ამოცანა შეიძლება წარმოვადგინოთ მატრიცული სახით

$$c^T x \rightarrow \max (\min), \quad (3.11)$$

$$Ax \leq b, \quad (3.12)$$

$$x \geq 0, \quad (3.13)$$

სადაც  $A = \|a_{ij}\|$  არის  $m \times n$ -განზომილებიანი მოცემული მატრიცა,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  - შესაბამისად,  $n$ - და  $m$ -განზომილებიანი მოცემული ვექტორები, ზოლო  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - საძებნი  $n$ -განზომილებიანი ვექტორი.

ბანსაზღვრება 3.3. ამოცანას, რომელშიც უნდა მოიძებნოს წრფივი ფუნქციის

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.14)$$

მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით

## წრფივი დაპროგრამება

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (3.15)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (3.16)$$

ეწოდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანა კანონიკურ ფორმაში (ანუ წრფივი დაპროგრამების კანონიკური ამოცანა).

(3.14)-(3.16) ამოცანა შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს მატრიცული სახით

$$c^T x \rightarrow \max (\min), \quad (3.17)$$

$$Ax = b, \quad (3.18)$$

$$x \geq 0, \quad (3.19)$$

სადაც  $A = \|a_{ij}\|$  არის  $m \times n$  განზომილებიანი მოცემული მატრიცა,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  - შესაბამისად  $n$ - და  $m$ -განზომილებიანი მოცემული ვექტორები, ხოლო  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - სამეზბნი  $n$ -განზომილებიანი ვექტორი.

შენიშვნა 3.1 ცხადია, რომ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სხვასხვა ფორმები (ზოგადი, კანონიკური და სტანდარტული) ექვივალენტურია იმ გაგებით, რომ ნებისმიერი ფორმისათვის მარტივი გარდაქმნების საფუძველზე შეიძლება მისი შესაბამისი სხვა სახის ფორმის აგება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ გაგაჩნია რაიმე მეთოდი ერთი სახის ამოცანის ამოსახსნელად, მაშინ ნებისმიერი სხვა ფორმის წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოსხნაც შესაძლებელია.

იმისათვის, რომ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ერთი ფორმიდან სხვა ფორმაზე გადავიდეთ, ზოგადად უნდა ვიცოდეთ, თუ როგორ:

1. დავიყვანოთ მინიმიზაციის ამოცანა მაქსიმიზაციის ამოცანაზე;
2. გადავიდეთ ტოლობის სახის შეზღუდვებიდან უტოლობის სახის შეზღუდვებზე და პირიქით;
3. შევცვალოთ ის ცვლადები, რომლებიც არ ექვემდებარება არაუარყოფითობის პირობას.

იმ შემთხვევაში, როცა წრფივი  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმი იძებნება, შესაძლებელია  $-f(x)$  ფუნქციის მაქსიმუმის მოძებნა, ვინაიდან  $\min f(x) = -\max (-f(x))$ .

წრფივი დაპროგრამების მოცემულ ამოცანაში " $\leq$ " სახის შეზღუდვა-უტოლობა შეიძლება შეიცვალოს შეზღუდვა-ტოლობით, თუ შეზღუდვა-უტოლობის მარცხენა მხარეს ახალ არაუარყოფით ცვლადს დავუმატებთ; ხოლო " $\geq$ " სახის შეზღუდვა-



უტოლობა შეიძლება შეიცვალოს შეზღუდვა-ტოლობით, თუ შეზღუდვა-უტოლობის მარცხენა მხარეს ახალ არაუარყოფით ცვლადს გამოვაკლებთ. გარდა ამისა, ტოლობის სახით მოცემული შეზღუდვა შეიძლება ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო უტოლობით წარმოვადგინოთ.

შეზღუდვა-უტოლობის შეზღუდვა-ტოლობად გარდაქმნის დროს დამატებით შემოტანილი არაუარყოფითი ცვლადების რიცხვი ტოლია იმ უტოლობათა რაოდენობისა, რომლებიც გარდაიქმნება.

შემოტანილ დამატებით ცვლადებს გარკვეული ეკონომიკური აზრიც გააჩნია. ასე რომ, თუ წრფივი დაპროგრამების ძირითადი ამოცანით საწარმოო რესურსების დანახარჯი და არსებული საშუალება აისახება, მაშინ ამოცანის გეგმაში დამატებითი ცვლადის რიცხვითი მნიშვნელობა შესაბამისი გამოუყენებელი რესურსის მოცულობის ტოლია.

ბოლოს, თუ რომელიმე  $x_i$  ცვლადი არაუარყოფითობის პირობას არ ექვემდებარება, მაშინ იგი ორი არაუარყოფითი  $u_i$  და  $v_i$  ცვლადების სხვაობით შეიძლება შეიცვალოს, ე.ი.  $x_i = u_i - v_i$ , სადაც  $u_i \geq 0$ ,  $v_i \geq 0$ .

### 3.1.2 ძირითადი ცნებები და დებულებები

**ბანსაზღვრება 3.4.** წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში ფუნქციას, რომლის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობაც იძებნება, ამოცანის მიზნის ფუნქცია ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 3.5.**  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  ვექტორს, რომელიც წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შეზღუდვებს აკმაყოფილებს, ამოცანის დასაშვები ამონახსნი ან გეგმა ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 3.6.**  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  გეგმას, რომელშიც წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა მიიღწევა, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი ან ოპტიმალური გეგმა (ოპტიმალური ამონახსნი) ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 3.7.**  $A$  მატრიცის  $A_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) სვეტს წრფივი დაპროგრამების ამოცანის პირობის ვექტორი, ხოლო  $b$ -ს - შეზღუდვების ვექტორი ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 3.8.** წრფივი დაპროგრამების ამოცანა ამოხსნადია, თუ მას ოპტიმალური გეგმა გააჩნია, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი ამოუხსნადია.

**ბანსაზღვრება 3.9.** წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შეზღუდვათა სისტემის მიერ განსაზღვრულ სიმრავლეს ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგა ეწოდება.

## წრფივი დაპროგრამება

**ბანსაზღვრება 3.10.**  $\Omega$  სიმრავლეს ეკვლიდეს  $R^n$  სივრცეში ეწოდება ამოზნექილი, თუ მისი ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მთლიანად ამ სიმრავლეში ძეკს.

**ბანსაზღვრება 3.11.**  $x$  წერტილის ეწოდება  $x^1, x^2, \dots, x^k$  წერტილების ამოზნექილი კომბინაცია, თუ 
$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

**ბანსაზღვრება 3.12.** ამოზნექილი  $\Omega$  სიმრავლის წერტილს ეწოდება კუთხის წერტილი, თუ იგი არ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ამ სიმრავლის სხვა წერტილების ამოზნექილი კომბინაციის სახით.

**თეორემა 3.1** წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგა ამოზნექილი სიმრავლეა.

**თეორემა 3.2** (წრფივი დაპროგრამების ძირითადი თეორემა). თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას ოპტიმალური გეგმა გააჩნია, მაშინ ამ ამოცანის მიზნის ფუნქცია თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობას აღწევს ამონახსნთა მრავალწახნაგას კუთხის წერტილში. ამასთან, თუ ექსტრემალური მნიშვნელობა ერთდროულად მიიღწევა რამდენიმე კუთხის წერტილში, მაშინ ამოცანის მიზნის ფუნქცია იგივე მნიშვნელობას მიიღებს ნებისმიერ იმ წერტილში, რომელიც აღნიშნული კუთხის წერტილების ამოზნექილ კომბინაციას წარმოადგენს.

### 3.1.3 ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

მოვიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების (3.8)-(3.10) ამოცანა სტანდარტულ ფორმაში. თუ უტოლობათა (3.9)-(3.10) სისტემას გააჩნია ერთი მინც ამონახსნი, მაშინ მას თავსებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არათავსებადი.

თვალსაჩინოებისათვის, პირველ რიგში, განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ცვლადების რაოდენობა ორის ტოლია. ამგვარად, უნდა მოიძებნოს წრფივი

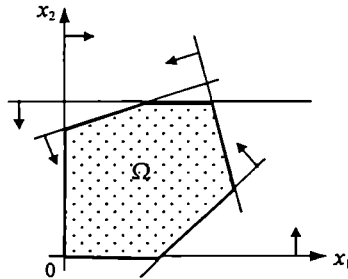
$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (3.20)$$

ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.21)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

(3.21) სისტემის ნებისმიერი  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ , ( $i=1,2,\dots,m$ ) უტოლობა გეომეტრიულად ასახავს ნახევარსიბრტყეს, რომლის სასაზღვრო წრფეა  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ .  $x_1$  და  $x_2$  ცვლადების არაუარყოფითობის პირობები შესაბამისად განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეებს  $x_1=0$  და  $x_2=0$  სასაზღვრო წრფეებით. დაეუშვათ, რომ (3.21) სისტემა თავსებადია. ამიტომ ნახევარსიბრტყეების გადაკვეთა წარმოქმნის გარკვეულ  $\Omega$  სიმრავლეს, რომელიც ამოზნექილია და წარმოადგენს ერთობლიობას ისეთი წერტილებისა, რომელთა კოორდინატები მოცემული (3.21) სისტემის ამონახსნებია (იხ. ნახ. 3.1). ასეთი წერტილების ერთობლიობას ეუწოდებთ ამონახსნთა მრავალკუთხედს. იგი შეიძლება იყოს წერტილი, მონაკვეთი, სხივი, მრავალწახნაგა, შემოუსაზღვრავი მრავალკუთხა არე.



ნახ. 3.1

იმ შემთხვევაში, როცა (3.8)-(3.10) ამოცანის შეზღუდვათა სისტემაში  $n=3$ , მაშინ ნებისმიერი  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leq b_i$ , ( $i=1,2,\dots,m$ ) უტოლობა გეომეტრიულად ასახავს სამგანზომილებიანი სივრცის ნახევარსივრცეს, რომლის სასაზღვრო სიბრტყეა  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ .  $x_1, x_2$  და  $x_3$  ცვლადების არაუარყოფითობის პირობები შესაბამისად განსაზღვრავს ნახევარსივრცეებს  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  და  $x_3=0$  სასაზღვრო სიბრტყეებით. თუ შეზღუდვათა სისტემა თავსებადია, მაშინ ყველა ეს ნახევარსიბრტყე (რომელიც ამოზნექილია) სამგანზომილებიან სივრცეში გადაკვეთისას გვაძლევს გარკვეული სტრუქტურის მქონე სიმრავლეს, ე.წ. ამონახსნთა მრავალწახნაგას. ეს სიმრავლეც ამოზნექილია. ამ შემთხვევაში ამონახსნთა მრავალწახნაგა შეიძლება იყოს წერტილი, მონაკვეთი, სხივი, მრავალწახნაგა, შემოუსაზღვრავი მრავალწახნაგა არე.

ახლა დაეუშვათ, რომ (3.9)-(3.10) სისტემაში  $n>3$ . მაშინ ნებისმიერი  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ , ( $i=1,2,\dots,m$ ) უტოლობა ასახავს  $n$ -განზომილებიანი სივრცის ნახევარსივრცეს, რომლის სასაზღვრო ჰიპერსიბრტყეა  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ . ამასთან,  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) ცვლადის არაუარყოფითობის პირობა განსაზღვრავს ნახევარსივრცეს  $x_j=0$  სასაზღვრო ჰიპერსიბრტყით.

## წრფივი დაპროგრამება

თუ შეზღუდვათა სისტემა თავსებადია, მაშინ, სამგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, იგი წარმოადგენს  $n$ -განზომილებიანი სივრცის საერთო ნაწილს, რომელსაც ამონახსნთა მრავალწახნაგა ეწოდება, ვინაიდან მისი ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები ამონახსნს წარმოადგენს.

ამგვარად, წრფივი დაპროგრამების (3.8)-(3.10) ამოცანის ამოხსნა გეომეტრიულად ამონახსნთა მრავალწახნაგას ისეთი წერტილის მოძებნას ითვალისწინებს, რომლის კოორდინატები წრფივ (3.8) ფუნქციას მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს.

### 3.1.4 წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჟორდან-გაუსის გამორიცხვის მეთოდით

განვიხილოთ  $n$  ცვლადის  $m$  განტოლებათა წრფივი სისტემა

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$
 (3.22)

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

აღნიშნოთ (3.22) სისტემის  $m \times n$ -განზომილებიანი მატრიცა  $A = \|a_{ij}\|$ -თი,  $A_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ -ით - სისტემის თავისუფალი წევრების ვექტორი, ხოლო  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ -ით - საძებნი  $n$ -განზომილებიანი ვექტორი.

მაშინ (3.22) სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი მატრიცული სახით:

$$Ax = A_0. \quad (3.23)$$

იმ შემთხვევაში, როცა  $m=n$ ,  $A$  მატრიცა კვადრატულია. თუ მატრიცის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ არსებობს მისი შებრუნებული  $A^{-1}$  მატრიცა. (3.23) განტოლების მარცხნიდან  $A^{-1}$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$Ix = A^{-1}A_0,$$

სადაც  $I$  ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო  $A^{-1}A_0$  მატრიცების ნამრავლი სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს.

აღებურული დამატებების საშუალებით შებრუნებული მატრიცის მოძებნა საკმაოდ პრომატეკვადი გამოთვლითი პროცესია. ამიტომ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამო-

სასხნელად გამოვიყენებთ რიცხვით მეთოდს, რომელიც სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით ამონახსნის მოძებნის საშუალებას იძლევა (თუ, რასაკვირველია, ამონახსნი არსებობს). ამასთან, შესაძლებელია შებრუნებული მატრიცის განსაზღვრა. ამ მეთოდს ეწოდება ცვლადების სრული გამორიცხვის მეთოდი ანუ ჟორდან-გაუსის მეთოდი. მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. (3.23) სისტემის პირველ განტოლებაში ამოვირჩიოთ ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტის მქონე ცვლადი, რომლის კოეფიციენტებს ვუწოდებთ გარდაქმნის წაშვანს ელემენტს. გაეყვით პირველი განტოლება ამ ელემენტზე და მიღებული განტოლების საშუალებით გამოვირიცხოთ შესაბამისი ცვლადი სისტემის ყველა დანარჩენი განტოლებიდან, გარდა პირველისა. შემდეგ განვიხილოთ მეორე განტოლება და ამოვირჩიოთ ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტის მქონე ცვლადი. გაეყვით მეორე განტოლება ამ ცვლადის კოეფიციენტზე და მიღებული განტოლების საშუალებით გამოვირიცხოთ შესაბამისი ცვლადი სისტემის ყველა დანარჩენი განტოლებიდან, გარდა მეორისა, და ა.შ. ამგვარად, თითოეული განტოლების საშუალებით წარმოებს თითო ცვლადის სრული გამორიცხვა. გამოთვლითი პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ სისტემის ყველა განტოლება არ იქნება გამოყენებული. ამასთან, შესაძლოა ადგილი ჰქონდეს ერთ-ერთ შემთხვევას:

1. გამორიცხვის პროცესის დროს  $i$ -ური განტოლების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია, ხოლო მარჯვენა მხარე ნულისაგან განსხვავებული რაღაც რიცხვის ტოლი. ეს ნიშნავს, რომ სისტემას არ გააჩნია ამონახსნი, ვინაიდან ცვლადის არცერთი მნიშვნელობა არ აკმაყოფილებს  $i$ -ურ განტოლებას;
2.  $i$ -ური განტოლების ორივე - მარცხენა და მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია. ეს ნიშნავს, რომ  $i$ -ური განტოლება სხვა დანარჩენი განტოლებების წრფივი კომბინაციაა და მას სისტემის ნებისმიერი ნაპოვნი ამონახსნი აკმაყოფილებს. ამგვარად, შეიძლება მისი იგნორირება;
3. ცვლადების გამორიცხვის პროცესში ყველა განტოლების გამოყენების შემთხვევაში შეიძლება მიღებულ იქნეს ამონახსნი ან დამტკიცდება, რომ განტოლებათა სისტემა არათავსებადია.

ზემოდ აღწერილი პროცესი მათემატიკურად გამოვსახოთ ზოგადი სახის (3.22) სისტემისათვის.

დავუშვათ, რომ  $a_{11}$  კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია. გაეყვით (3.22) სისტემის პირველი განტოლება  $a_{11}$ -ზე, მიღებული განტოლება თანამიმდევრობით გაეპრავლოთ  $x_1$  ცვლადის ყველა დანარჩენ  $a_{i1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ , კოეფიციენტზე და ახლად მიღებული  $m-1$  განტოლება შესაბამისად გამოვაკლოთ (3.22) სისტემის ყველა დანარჩენ  $m-1$  განტოლებას. შედეგად მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{1}{a_{11}}b_1,$$

$$0 \cdot x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1,$$

..... (3.24)

$$0 \cdot x_1 + \left(a_{m2} - \frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{m3} - \frac{a_{m1}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 + \dots + \left(a_{mn} - \frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n = b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, & i = \overline{2, m}; j = \overline{2, n}; \\ 1, & i = j = 1; \\ \frac{a_{ij}}{a_{11}}, & i = 1; j = \overline{2, n}; \\ 0, & i = \overline{2, m}; j = 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

$$b_i^{(1)} = \begin{cases} b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, & i = \overline{2, m}; \\ \frac{1}{a_{11}}b_1, & i = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

(3.25) და (3.26) ფორმულების გათვალისწინებით (3.24) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

.....

$$a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}.$$

დავუშვათ, რომ (3.27) სისტემაში  $a_{22}^{(1)}$  კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია. სისტემის მეორე განტოლება გავყოთ  $a_{22}^{(1)}$ -ზე. მივიღებთ ახალ სისტემას

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\ x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + \dots + \frac{a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_n &= \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}.$$

(3.28) სისტემის მეორე განტოლება თანმიმდევრობით გავამრავლოთ  $x_2$  ცვლადის ყველა დანარჩენი  $m-1$  განტოლების  $a_{i2}^{(1)}$ ,  $i = 1, 3, \dots, m$ , კოეფიციენტზე და მიღებული განტოლებები შესაბამისად გამოვაკლოთ (3.28) სისტემის ყველა დანარჩენ  $m-1$  განტოლებას. შედეგად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot x_2 + \left( a_{13}^{(1)} - \frac{a_{12}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) x_3 + \dots + \left( a_{1n}^{(1)} - \frac{a_{12}^{(1)}a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) x_n &= b_1^{(1)} - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \\ x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \dots + \frac{a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_n &= \frac{1}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \\ 0 \cdot x_2 + \left( a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) x_3 + \dots + \left( a_{3n}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) x_n &= b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

---


$$0 \cdot x_2 + \left( a_{m3}^{(1)} - \frac{a_{m2}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) x_3 + \dots + \left( a_{mn}^{(1)} - \frac{a_{m2}^{(1)}a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) x_n = b_m^{(1)} - \frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, & i = \overline{1, m}; i \neq 2; j = \overline{3, n}; \\ 1, & i = j = 1 \wedge i = j = 2; \\ 0, & i = \overline{2, m}; j = 1; \\ 0, & i = \overline{1, m}; i \neq 2; j = 2; \\ \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, & i = 2; j = \overline{3, n}; \end{cases} \quad (3.30)$$

$$b_i^{(2)} = \begin{cases} b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, & i = \overline{1, m}; i \neq 2; \\ \frac{1}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, & i = 2. \end{cases} \quad (3.31)$$

(3.30) და (3.31) ფორმულების გათვალისწინებით (3.29) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n &= b_1^{(2)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\ 0 \cdot x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n &= b_3^{(2)}, \\ &\vdots \\ 0 \cdot x_2 + a_{m3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)} x_n &= b_m^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

ანალოგიურად გავაგრძელოთ პროცესი დანარჩენი ცვლადების მიხედვით.  $m$  ბიჯის შედეგად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_m + a_{1, m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + a_{1n}^{(m)} x_n &= b_1^{(m)} \\ x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_m + a_{2, m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + a_{2n}^{(m)} x_n &= b_2^{(m)}, \end{aligned} \quad (3.33)$$



$$x_{m-1} + 0 \cdot x_m + a_{m-1,m-1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + a_{m-1,n}^{(m)} x_n = b_{m-1}^{(m)},$$

$$x_m + a_{m,m-1}^{(m)} x_{m-1} + \dots + a_{m,n}^{(m)} x_n = b_m^{(m)}.$$

(3.33) სისტემიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი  $x_i, i = 1, 2, \dots, m$ , ცვლადი შეიძლება ცალსახად გამოისახოს დანარჩენი  $x_i, i = m+1, 2, \dots, n$ , ცვლადების საშუალებით, რომლებსაც, თავის მხრივ, შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობები. ამით გამორიცხვის პროცესი მთავრდება.

განვიხილოთ ჟორდან-გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა კონკრეტული სისტემების ამოხსნის შემთხვევები.

მაბალაითი 3.1 ამოცხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1,$$

$$2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3,$$

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A_1 = (2; 2; 4)^T, A_2 = (3; 2; -2)^T, A_3 = (-4; -5; 2)^T, A_0 = (1; 3; 1)^T$$

და მოცემული განტოლებათა სისტემა წარმოვადგინოთ ვექტორული სახით

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = A_0.$$

მიღებული განტოლების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება  $A_1, A_2$  და  $A_3$ -ის მიმართ  $A_0$  ვექტორის დაშლის  $x_1, x_2$  და  $x_3$  კოეფიციენტების მოძებნაზე. ამ კოეფიციენტების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ცვლადების სრული გამორიცხვის მეთოდი.

**ბიჯი 1.** პირველ განტოლებაში  $x_1$ -ის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია:  $a_{11} = 2 \neq 0$ . ავირჩიოთ იგი წამყვან ელემენტად. გავყოთ პირველი განტოლება 2-ზე. გამორიცხოთ  $x_1$  ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა. ამისათვის გარდაქმნილი პირველი განტოლება გავამრავლოთ 2-ზე და გამოვაკლოთ მეორეს, გავამრავლოთ 4-ზე და გამოვაკლოთ მესამეს. მივიღებთ სისტემას

$$x_1 + 3/2x_2 - 2x_3 = 1/2,$$

$$- x_2 - x_3 = 2,$$

$$- 8x_2 + 10x_3 = -1.$$

თუ პირველ განტოლებაში  $x_1$ -ის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი განტოლება, რომელშიც  $x_1$ -ის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია, და ამ განტოლების საშუალებით  $x_1$  გამოვრიცხოთ ყველა დანარჩენი განტოლებიდან.

**ბიჯი 2.** გარდაქმნილი სისტემის მეორე განტოლებაში  $x_2$  ცვლადის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია:  $a'_{22} = -1 \neq 0$ ; ავირჩიოთ ეს ელემენტი წამყვან ელემენტად. გავყოთ მეორე განტოლება  $-1$ -ზე. გამოვრიცხოთ  $x_2$  ყველა განტოლებიდან, გარდა მეორისა. ამისათვის გარდაქმნილი მეორე განტოლება გაგამრავლოთ  $3/2$ -ზე და გამოვაკლოთ პირველს, გაგამრავლოთ  $8$ -ზე და მივემატოთ მესამეს. მივიღებთ სისტემას

$$x_1 - 7/2x_3 = 7/2,$$

$$x_2 + x_3 = -2,$$

$$18x_3 = -17.$$

**ბიჯი 3.** ბოლო სისტემაში წამყვან ელემენტად ავირჩიოთ  $x_3$  ცვლადის კოეფიციენტი, ვინაიდან  $a''_{33} = 18 \neq 0$ . გავყოთ მესამე განტოლება  $18$ -ზე. გამოვრიცხოთ  $x_3$  ყველა განტოლებიდან, გარდა მესამისა. ამისათვის გარდაქმნილი მესამე განტოლება გაგამრავლოთ  $7/2$ -ზე და მივემატოთ პირველს. საბოლოოდ მივიღებთ მოცემული სისტემის ამონახსნს

$$x_1 = 7/36, x_2 = -19/18, x_3 = -17/18.$$

ამგვარად, ჟორდან-გაუსის გარდაქმნების საფუძველზე, ერთი მხრივ, საწყისი სისტემის მატრიცა გარდაიქმნება ერთეულ მატრიცად, რაც შეესაბამება მოცემული სისტემის გამრავლებას შებრუნებულ მატრიცაზე, თუ თავდაპირველი მატრიცა კვადრატული და არაგადაგარებულია. მეორე მხრივ,  $A_1, A_2$  და  $A_3$  ვექტორები ერთეულ ვექტორებად გარდაიქმნება, ხოლო  $A_0$  ვექტორის კომპონენტები -  $A_1, A_2$  და  $A_3$  ვექტორების მიმართ  $A_0$  ვექტორის დაშლის კოეფიციენტებად.

$x_1, x_2$  და  $x_3$ -ის მიღებული მნიშვნელობების გათვალისწინებით გვექნება

$$7/36A_1 - 19/18A_2 - 17/18A_3 = A_0.$$

განხილული სისტემისათვის დაშლის  $x_1, x_2$  და  $x_3$  კოეფიციენტებს ერთადერთი მნიშვნელობა გააჩნია, ვინაიდან  $A_1, A_2$  და  $A_3$  ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია და სამგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ქმნის ბაზისს.

ჟორდან-გაუსის მეთოდით გამოთვლების მოხერხებულობისათვის მათ სპეციალურ ცხრილებში აწარმოებენ.

იმისათვის, რომ  $A^{-1}$  მატრიცა მივიღოთ,  $A$  მატრიცას უნდა მივუწეროთ ერთეულოვანი, იგივე განზომილების მქონე  $I$  მატრიცა, რომელზეც  $A$  მატრიცასთან ერთად ყველა გარდაქმნას ვაწარმოებთ სრული გამორიცხვის მეთოდით. მაშინ  $A$  მატრიცა ერთეულოვან მატრიცად გარდაიქმნება, ხოლო  $I$  მატრიცა -  $A^{-1}$  შებრუნებულ მატრიცად.

**მაგალითი 3.2.** ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1,$$

$$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2,$$

ან მოვძებნოთ  $A_1, A_2, A_3$  და  $A_4$  ვექტორების მიმართ  $A_0$  ვექტორის დაშლის კოეფიციენტები

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = A_0. \quad (3.34)$$

ამოხსნა. 3.1 ცხრილში ჩავწეროთ უცნობების შესაბამისი კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები. ცხრილის ელემენტებზე შევასრულოთ სრული გამორიცხვის მეთოდი (ცხრილში წამყვანი ელემენტები აღნიშნულია ორმაგი ხაზგასმით), რის შედეგად საწყისი სისტემა გარდაიქმნება შემდეგი სახის სისტემად:

$$x_1 + 3/7x_4 = 3/7,$$

$$x_2 + 3/56x_4 = -53/56,$$

$$x_3 + 1/4x_4 = 1/4,$$

საიდანაც მივიღებთ.

$$x_1 = 3/7 - 3/7x_4, \quad x_2 = -53/56 - 3/56x_4, \quad x_3 = 1/4 - 1/4x_4.$$

$A_1, A_2$  და  $A_3$  ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია და სამგანზომილებიან სივრცეში ქმნის ბაზისს; ამ ვექტორების შესაბამის  $x_1, x_2$  და  $x_3$  ცვლადებს ბაზისური ცვლადები ეწოდება, ხოლო  $x_4$  ცვლადს, რომელიც  $A_4$  ვექტორს შეესაბამება, - თავისუფალი (არაბაზისური) ცვლადი (მას შეიძლება მივიანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა).

მინორს, რომელიც შედგება წრფივად დამოუკიდებელი განტოლებების ბაზისური ცვლადების კოეფიციენტებისაგან, ბაზისური მინორი ეწოდება. თუ საერთო ამონახსნში თავისუფალ ცვლადებს ნულს გავუტოლებთ, მაშინ ასეთ ამონახსნს ბაზისური ეწოდება. ამგვარად, მაგალითში მოყვანილი სისტემის ბაზისური ამონახსნი შემდეგია:

$$x_1 = 3/7, x_2 = -53/56, x_3 = 1/4, x_4 = 0.$$

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_0$	
<u>5</u>	2	3	3	1	ბიჯი 1 (1-ლი იტერაცია)
2	-2	5	2	4	
3	4	2	2	-2	
1	2/5	3/5	3/5	1/5	ბიჯი 2 (შე-2 იტერაცია)
0	<u>-14/5</u>	19/5	4/5	18/5	
0	14/5	1/5	1/5	-13/5	
1	0	8/7	5/7	5/7	ბიჯი 3 (შე-3 იტერაცია)
0	1	-19/14	-2/7	-9/7	
0	0	<u>4</u>	1	1	
1	0	0	3/7	3/7	
0	1	0	3/56	-53/56	
0	0	1	1/4	1/4	

ცხრილი 3.1

ბაზისური ამონახსნისათვის მივიღებთ  $A_1, A_2$  და  $A_3$  ბაზისური ვექტორების მიმართ  $A_0$  ვექტორის შემდეგ დაშლას:

$$3/7A_1 - 53/56A_2 + 1/4A_3 = A_0.$$

ბაზისურ ამონახსნს, რომელიც შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ  $m$  ცვლადს, სადაც  $m$  წრფივად დამოუკიდებელი განტოლებების რაოდენობაა, ეწოდება არაგადაგვარებულს. თუ ბაზისური ცვლადებიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, მაშინ ბაზისურ ამონახსნს გადაგვარებული ეწოდება. მართლაც, თუ 3.2 მაგალითში 3.1 ცხრილის ბოლო ბიჯზე გამოვრიცხავთ არა  $x_3$ -ს, არამედ 1-ის ტოლ წამყვან ელემენტთან  $x_1$  უცნობს, მაშინ მივიღებთ 3.2 ცხრილში მოყვანილ შედეგს. ასე, რომ  $A_1, A_2$  და  $A_4$  ვექტორები ქმნის ბაზისს;  $x_1, x_2$  და  $x_4$  ბაზისური ცვლადებია, ხოლო  $x_3$  - თავისუფალი ცვლადი. მივანიჭებთ რა  $x_3=0$ , მივიღებთ:

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1.$$

მიღებული ამონახსნი გადაგვარებულია, ვინაიდან  $x_1=0$ . (2.24)-ში ბაზისური ამონახსნის ჩასმით მივიღებთ

$$-A_2 + A_4 = A_0.$$

მოყვანილი მაგალითისათვის გადაგვარებულობის გეომეტრიული არსი მდგომარეობს შემდეგში:  $A_0$  ვექტორი იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული, სადაც  $A_2$  და  $A_4$  ვექტო-

რები, და არ არის არცერთი მათგანის პროპორციული. ამდენად,  $A_0$  მხოლოდ  $A_2$  და  $A_4$ -ის წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. ნებისმიერი განზომილების სივრცისათვის გადაგვარებულია მდგომარეობს იმაში, რომ სივრცის მოცემული ვექტორი წარმოადგენს მხოლოდ ბაზისური ვექტორების წრფივ კომბინაციას და არა სრული ბაზისისა.

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_0$
1	0	8/7	5/7	5/7
0	1	-19/14	-2/7	-3/7
0	0	4	<u>1</u>	1
1	0	-12/7	0	0
0	1	-3/14	0	-1/7
0	0	4	1	1

ცხრილი 3.2

3.2 მაგალითისათვის უფრო დაწერილებით განვიხილოთ სრული გამორიცხვის მეთოდით წარმოებული გარდაქმნები. აღვნიშნოთ  $D$ -თი კვადრატული მატრიცა, რომელიც ბაზისური ვექტორების კომპონენტების საფუძველზეა შედგენილი, ხოლო  $y$ -ით - ვექტორი, რომელიც შეიცავს ბაზისურ ცვლადებს

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad y = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

მაშინ, (3.34)-ის გათვალისწინებით სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$Dy + Ax_4 = A_0.$$

ოპერაციების შედეგად  $D$  მატრიცა ერთეულოვან  $I$  მატრიცად გარდაიქმნა, რასაც შესაბამება გამრავლება  $D^{-1}$  მატრიცაზე. შესაბამისად გარდაქმნების ერთობლიობა, რომელსაც ადგილი აქვს სრული გამორიცხვის მეთოდში, საწყისი სისტემის მარცხენა და მარჯვენა მხარეების  $D^{-1}$ -ზე გამრავლების ექვივალენტურია. მამასადამე, ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = D^{-1}A_0 - D^{-1}Ax_4.$$

თუ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დროს საჭიროა, აგრეთვე, მივიღოთ შებრუნებული  $D^{-1}$  მატრიცა, მაშინ სისტემის მატრიცას უნდა მივუწეროთ ერთეულოვანი მატრიცა, რომლის რიგი განტოლებათა რაოდენობის ტოლია, და სრული

## წრფივი დაპროგრამება

გამორიცხვის მეთოდის გამოყენებით შევასრულოთ აღნიშნული გარდაქმნები. თუ გარდაქმნების შედეგად რომელიმე განტოლებისათვის მიღებულია  $0=0$  იგივეობა, მაშინ განტოლება გამოირიცხება, როგორც დანარჩენი განტოლებების წრფივი კომბინაცია. გარდა ამისა, გამოირიცხება ერთეულოვანი მატრიცის შესაბამისი სვეტი და სტრიქონი. აღნიშნული ვაჩვენოთ მაგალითზე (იხ. ცხრილი 3.3).

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$A_0$
<u>5</u>	2	3	3	1	0	0	1
2	-2	5	2	0	1	0	4
3	4	2	2	0	0	1	-2
1	2/5	3/5	3/5	1/5	0	0	1/5
0	<u>-14/5</u>	19/5	4/5	-2/5	1	0	18/5
0	14/5	1/5	1/5	-3/5	0	1	-13/5
1	0	8/7	5/7	1/7	1/7	0	5/7
0	1	-19/14	-2/7	1/7	-5/14	0	-9/7
0	0	<u>4</u>	1	-1	1	1	1
1	0	0	3/7	3/7	-1/7	-2/7	3/7
0	1	0	3/56	-11/56	-1/56	19/56	-53/56
0	0	1	1/4	-1/4	1/4	1/4	1/4

ცხრილი 3.3

ბოლო იტერაციის საფუძველზე გვექნება

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 & -2/7 \\ -11/56 & -1/56 & 19/56 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

თუ გამოთვლების ჩატარების დროს არ იყო დაშვებული შეცდომა, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას:  $D^{-1}D = I$ .

### 3.1.5 წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი დაფუძნებულია ამოცანის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე. იგი ძირითადად გამოიყენება ორგანზომილებიანი და ზოგ შემთხვევაში სამგანზომილებიანი ამოცანის ამოსახსნელად, ვინაიდან

ამონახსნთა მრავალწახნაგას აგება, თავის მხრივ, ძალზე რთულ ამოცანას წარმოადგენს. შეუძლებელია გრაფიკული ამოხსნა ამოცანისა, რომლის განზომილება სამზე მეტია.

ეთქვათ, მოცემულია წრფივი დაპროგრამების ორგანზომილებიანი ამოცანა, ე.ი. საჭიროა მოიძებნოს წრფივი

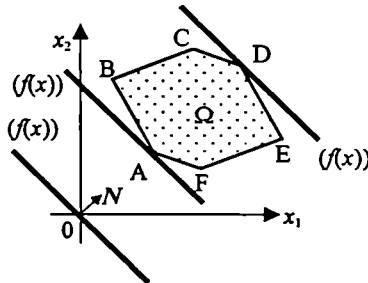
$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (3.35)$$

ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.36)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (3.37)$$

დაეუშვათ, რომ (3.36)-(3.37) შეზღუდვათა სისტემა თავსებადია და მის ამონახსნთა  $\Omega$  მრავალკუთხედი ( $\Omega \subset R^2$ ) შემოსაზღვრულია (როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნებისმიერი (3.36) და (3.37) უტოლობა ნახევარსიბრტყეს განსაზღვრავს თავისი შესაბამისი  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i (i = 1, 2, \dots, m), x_1 = 0, x_2 = 0$ , სასაზღვრო წრფეებით).



ნახ. 3.2

$c$ -ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის განტოლება

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c$$

$R^2$  სიბრტყეზე განსაზღვრავს წრფეს, ხოლო  $N=(c_1, c_2)$  ვექტორი - ამ წრფის ნორმალს. კოორდინატთა სიბრტყეში ავაგოთ (3.36)-(3.37) სისტემის ამონახსნთა  $\Omega$  მრავალკუთხედი და წრფივი (3.35) ფუნქციის გრაფიკი  $c=0$ -სათვის (იხ. ნახ. 3.2). მაშინ წრფივი დაპროგრამების დასმულ ამოცანას შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: უნდა მოიძებნოს ამონახსნთა მრავალკუთხედის ისეთი წერტილი, რომელშიც (3.35) ფუნქციის გრაფიკი ამ მრავალკუთხედის საყრდენ წრფეს წარმოადგენს

**წრფივი დაპროგრამება**

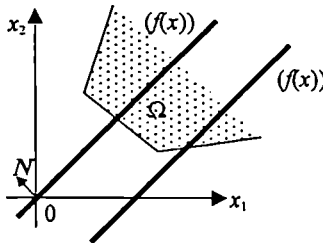
და, ამასთან, საოპტიმიზაციო ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას.

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ -ის მნიშვნელობები იზრდება  $N=(c_1, c_2)$  ვექტორის მიმართულებით, ამიტომ  $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$  წრფე თავის პარალელურად უნდა გადავიტანოთ  $N$  ვექტორის მიმართულებით.

ნახ. 3.2-დან ჩანს, რომ ამონახსნთა მრავალკუთხედიისათვის წრფე ორჯერ ზდება საყრდენი (A და D წერტილებში) და, ამასთან, მინიმალური მნიშვნელობა მიიღება A წერტილში, ხოლო მაქსიმალური მნიშვნელობა - D წერტილში. A წერტილის  $(x_1, x_2)$  კოორდინატების განსაზღვრისათვის უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეესაბამება AB და AF წრფეებს. ანალოგიურად, D წერტილის  $(x_1, x_2)$  კოორდინატების განსაზღვრისათვის უნდა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეესაბამება CD და DE წრფეებს.

თუ ამონახსნთა მრავალკუთხედი წარმოადგენს შემოუსაზღვრავ მრავალკუთხა არეს, მაშინ ადგილი ექნება ორ შემთხვევას:

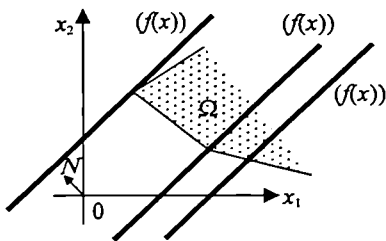
- ა)  $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$  წრფე  $N$  ვექტორის ან მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით გადაადგილებისას მუდმივად გადაკვეთს ამონახსნთა  $\Omega$  მრავალკუთხედს და არც ერთ წერტილში არ არის მისი საყრდენი. ამ შემთხვევაში წრფივი ფუნქცია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან შემოუსაზღვრავია (იხ. ნახ. 3.3).



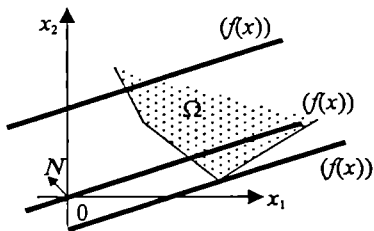
ნახ. 3.3

- ბ)  $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$  წრფე, პარალელური გადატანის დროს, მაინც ზდება საყრდენი  $\Omega$ -ს მიმართ (ნახ. 3.4ა, 3.4ბ, 3.4გ). მაშინ, იმის მიხედვით, თუ როგორია არე, წრფივი ფუნქცია შეიძლება იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული და ქვემოდან შემოსაზღვრავი (ნახ. 3.4ა), ან ქვემოდან შემოსაზღვრული და ზემოდან შემოსაზღვრავი (ნახ. 3.4ბ), ან როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან შემოსაზღვრული (ნახ. 3.4გ).

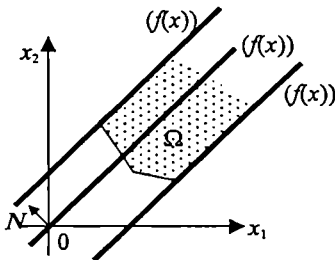




ნახ. 3.4ა



ნახ. 3.4ბ



ნახ. 3.4გ

**მაბალითი 3.3.** გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საფუძველზე გრაფიკულად ამოვხსნათ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max (\min) \{ f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \},$$

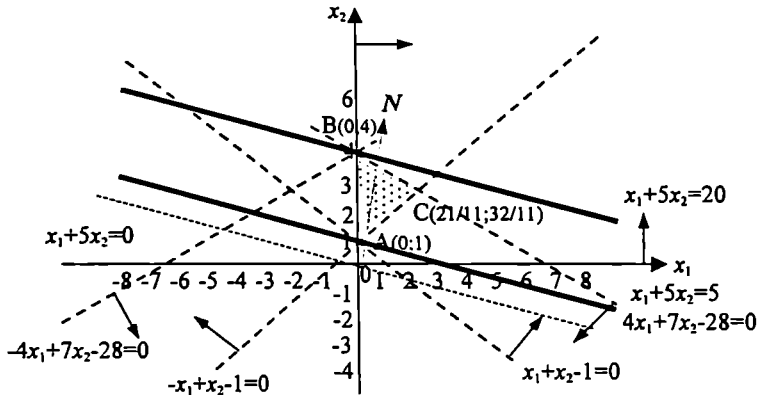
$$4x_1 + 7x_2 - 28 \leq 0,$$

$$-4x_1 + 7x_2 - 28 \leq 0,$$

$$x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$$

$$-x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$



ნახ. 3.5

ამოხსნა. ამოცანის ამოხსნა ფაქტიურად მოყვანილია ნახ. 3.5-ზე. კერძოდ, ამოცანის ამოხსნა მრავალწახნაგა განისაზღვრება ABC ჩაკეტილი სამკუთხედით, რომლის კუთხის B წერტილში მიიღწევა მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ხოლო კუთხის A წერტილში - მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა.  $N = (1; 5)$  ვექტორით განისაზღვრება მიზნის ფუნქციის ნორმალი, რომლის მიმართულებით ან საწინააღმდეგო მიმართულებით წრფის გადაადგილებისას მიზნის ფუნქციის შესაბამისად მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა მიიღება.

ამგვარად,  $x^{\max} = (0; 4)^T$  დასმული ამოცანის მაქსიმუმის წერტილია, სადაც  $f_{\max} = 20$ , ხოლო  $x^{\min} = (0; 1)^T$  - მინიმუმის წერტილი, სადაც  $f_{\min} = 5$ .

**მაბალაიტი 3.4** (მარკო პოლოს ქარაგნის ამოცანა [251]). მარკო პოლოს ქარაგნის ბაღდადიდან მექაში მშრალი ლეღვი გადააქვს. ქარაგანში გამოყენებულია როგორც დრომადერები (ცალკუზიანი აქლემები), ისე ჩვეულებრივი (ორკუზიანი) აქლემები. აქლემს შეუძლია 1000 ფუნტი ტვირთის ტარება, ხოლო დრომადერს - 5000 ფუნტი ტვირთის. მთელი გზის მანძილზე აქლემს სჭირდება 3 ფუთა თივა და 100 გალონი წყალი, ხოლო დრომადერს - 4 ფუთა თივა და 80 გალონი წყალი. გზის გასწვრივ, ოაზისებში განლაგებულია მოსამარაგებელი პუნქტები. პუნქტებში მარაგის საერთო მოცულობაა 1600 გალონი წყალი და 60 ფუთა თივა.

მარკო პოლო ბაღდადის მახლობლად აქლემებსა და დრომადერებს მწყემსებისაგან ქირობს. აქლემის ქირის ფასი შეადგენს 11 მონეტას, ხოლო დრომადერისა - 5 მონეტას.

რამდენი აქლემი და რამდენი დრომადერია საჭირო ბაღდადიდან მექაში 10000 ფუნტი ლეღვის გადასაზიდად, რათა მათი იჯარის ფასი მინიმალური იყოს?

ამოხსნა. ვთქვათ,  $x_1$  დრომადერების რიცხვია, ხოლო  $x_2$  - აქლემების. მაშინ მარკო პოლოს ამოცანა შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვყალიბოთ:

$$\min\{f(x_1, x_2) = 5x_1 + 11x_2\} \quad - \text{ქირის ღირებულება;}$$

$$500x_1 + 1000x_2 \geq 10000 \quad - \text{ქარაგნის ტვირთამწეობა;}$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 60 \quad - \text{თივის რაოდენობა;}$$

$$80x_1 + 100x_2 \leq 1600 \quad - \text{წყლის რაოდენობა;}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

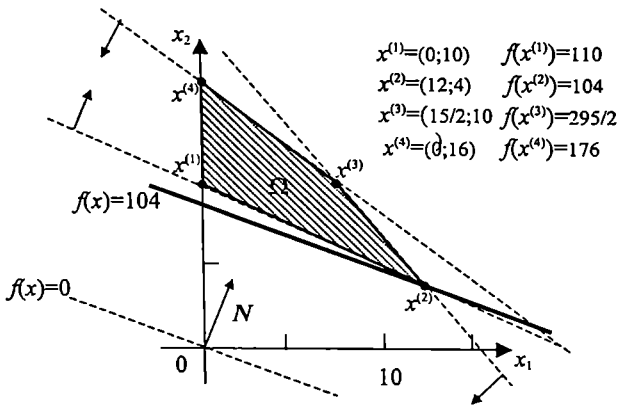
გრაფიკული ამონახსნის მისაღებად თავდაპირველად გამოვსახოთ დასაშვები  $\Omega$  არე (იხ. ნახ. 3.6). დასაშვები  $\Omega$  არე არის ჩაკეტილი, ამონეჭილი მრავალწახნაგა, რომელსაც აქვს შემდეგი ოთხი კუთხის წერტილი:  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$  და  $x^{(4)}$ .

ვინაიდან გვაქვს წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, რომლის მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციაა საჭირო, ამიტომ დასაშვები  $\Omega$  არის ის წერტილი (ან წერტილები) უნდა ვიპოვოთ, რომელშიც  $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 11x_2$  წრფივ ფორმას მინიმალური მნიშვნელობა გააჩნია. ასეთი წერტილის მოსაძებნად უნდა ავაგოთ მიზნის ფუნქციის ისეთი დონის წირი, რომელსაც  $\Omega$  არესთან ექნება ერთადერთი შეხების წერტილი.

მიზნის ფუნქციის დონის წირის დახრილობის განსაზღვრისათვის კოორდინატთა სიბრტყეზე წყვეტილი ზაზით გადავლოთ სათავეზე გამავალი დონის წირი ( $f(x_1, x_2) = 0$ ). მიზნის ფუნქციის გრადიენტის  $N$  ვექტორი მოვათავსოთ კოორდინატთა

**წრფივი დაპროგრამება**

სათავეში. ვინაიდან განიხილება მინიმიზაციის ამოცანა, ამიტომ ოპტიმიზაციის მიმართულება განისაზღვრება როგორც მიზნის ფუნქციის ანტიგრადიენტის მიმართულება. აქედან გამომდინარე, როგორც ეს ნახ. 3.6-დან ჩანს,  $f(x_1, x_2)$ -ის მინიმიზაციას ადგილი აქვს  $x^{(2)}=(12,4)$  კუთხის წერტილში, სადაც  $f(x^*)=104$ . კუთხის  $x^{(2)}$  წერტილი ერთადერთი ოპტიმალური წერტილია, რადგან  $\Omega$  არის ყველა სხვა წერტილი შეესაბამება მიზნის ფუნქციის შებ მნიშვნელობას. ამგვარად, იმისათვის, რომ 10000 ფუნტი ლეღვის გადასაზიდად იჯარის ფასი მინიმალური - 104 მონეტის ტოლი იყოს, საჭიროა 12 დრომადერისა და 4 აქლემისაგან შემდგარი ქარავანი.



ნახ. 3.6

საზოგადოდ, გრაფიკული მეთოდის გამოყენებით შეიძლება ამოიხსნას წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, რომელშიც შეზღუდვათა სისტემა შეიცავს  $n$  უცნობსა და  $m$  წრფივად დამოუკიდებელ განტოლებას, თუ  $n$  და  $m$  დაკავშირებულია შემდეგი თანაფარდობით:  $n-m=2$ . მართლაც, ვთქვათ მოცემულია წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა: საჭიროა განვსაზღვოროთ წრფივი

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{3.38}$$

ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{3.39}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.40)$$

სადაც ყველა განტოლება ერთმანეთისაგან წრფივად დამოუკიდებელია და სრულდება  $n-m=2$  ტოლობა.

ვთქვათ, ჟორდან-გაუსის მეთოდის საფუძველზე შევასრულეთ  $m$  გამორიცხვა, რის შედეგადაც პირველი  $m$  ცვლადი  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ბაზისური გახდა, ხოლო ბოლო ორი  $x_{m+1}$  და  $x_n$  - თავისუფალი, ე.ი. შეზღუდვათა (3.39) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n &= b'_1, \\ x_2 + a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n &= b'_2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n = b'_m.$$

(3.41) სისტემაში შემავალი ყველა ბაზისური ცვლადი არაუარყოფითია. მათი გამორიცხვით ტოლობის სახით მოცემული შეზღუდვათა სისტემა გარდაიქმნება უტოლობების სახით მოცემულ სისტემად. გარდა ამისა, თუ (3.38) წრფივ ფუნქციას თავისუფალი ცვლადების საშუალებით გამოვსახავთ, მივიღებთ საწყისი ამოცანის ეკვივალენტურ ამოცანას: საჭიროა განისაზღვროს

$$f(x) = c'_{m+1}x_{m+1} + c'_n x_n$$

წრფივი ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n \leq b'_1,$$

$$a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n \leq b'_2,$$

$$a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n \leq b'_m,$$

$$x_{m+1} \geq 0, x_n \geq 0.$$

გარდაქმნილი ამოცანა ორცვლადიანია, რომლის გრაფიკული მეთოდით ამოხსნა გვაძლევს  $x_{m+1}$  და  $x_n$ -ის ოპტიმალურ მნიშვნელობებს. მიღებული მნიშვნელობების (3.41)-ში ჩასმით მივიღებთ  $x_1, x_2, \dots, x_m$  პარამეტრების ოპტიმალურ მნიშვნელობებს.

მაგალიტი 3.5. გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საფუძველზე გრაფიკულად ამოვხსნათ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max (\min) \{ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \},$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4,$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22,$$

$$3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38,$$

$$x_j \geq 0, j=1,2,\dots,5.$$

ამოხსნა. ჟორდან-გაუსის მეთოდის გამოყენებით შევასრულოთ ცვლადების სამი სრული გამორიცხვა, რის შედეგად მივიღებთ სისტემას

$$x_1 + x_4 - 3x_5 = 6,$$

$$x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70, \tag{3.42}$$

$$x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20,$$

საიდანც

$$x_1 = 6 - x_4 + 3x_5,$$

$$x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5, \tag{3.43}$$

$$x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5.$$

მიზნის ფუნქციაში ამ მნიშვნელობების ჩასმით და (3.43) სისტემაში ბაზისური ცვლადების გამორიცხვით მივიღებთ ეკვივალენტურ ამოცანას, რომელიც მხოლოდ ორ თავისუფალ  $x_4$  და  $x_5$  ცვლადებზე იქნება დამოკიდებული. ამგვარად, საწყისი ამოცანა დაიყვანება შემდეგ ამოცანაზე: ვიპოვოთ წრფივი  $(6x_4 + 15x_5 - 38)$  ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

$$x_4 - 3x_5 \leq 6,$$

$$7x_4 + 10x_5 \leq 70,$$

$$-4x_4 + 5x_5 \leq 20,$$

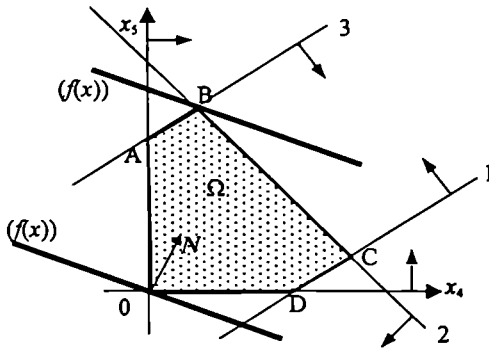
$$x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

$x_4, x_5$  კოორდინატთა სისტემაში ავაგოთ ამონახსნთა მრავალკუთხედი და წრფივი ფუნქცია (ნახ. 3.7). როგორც ნახაზიდან ჩანს, წრფივი ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს კუთხის  $B$  წერტილში, რომელიც ძვეს 2 და 3 წრფეების გადაკვეთაზე. ე.ი. საჭიროა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$7x_4 + 10x_5 = 70;$$

$$-4x_4 + 5x_5 = 20,$$

რის შედეგად განისაზღვრება  $x_4=2, x_5=28/5$ . ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია  $L_{\max}=58$ .



ნახ. 3.7

საწყისი ამოცანის ოპტიმალური გეგმის მოსაძებნად (3.33)-ში ჩავსვათ  $x_4$  და  $x_5$ -ის მიღებული მნიშვნელობები. საბოლოოდ მივიღებთ  $x^{\max}=(104/5; 0; 0; 2; 28/5)^T$ .

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დავასკვნათ, რომ წრფივი  $(6x_4+15x_5-38)$  ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს კუთხის  $O$  წერტილში, რომელიც კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, და ამიტომ  $f_{\min}=-38$ . საბოლოოდ გვექნება:  $x^{\min}=(6; 70; 20; 0; 0)^T$ .

## 3.2 სიმკვლეხს-მეთოდი

### 3.2.1 წრფივი დაპროგრამების ამოცანის პირითადი თვისებები

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების (3.1)-(3.4) ზოგადი ამოცანა.

თეორემა 3.3. იმისათვის, რომ (3.1)-(3.4) ამოცანა იყოს ამოხსნადი, აუცილებელია და საკმარისია, რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

- ა) ამოცანის გეგმების სიმრავლე არაცარიელია;
- ბ) ამოცანის მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია მისი გეგმების სიმრავლეზე.

ბანსაზღვრება 3.13. (3.1)-(3.4) ამოცანის  $x$  გეგმას საყრდენი გეგმა ეწოდება, თუ (3.2)-(3.3) სისტემაში ტოლობებით მოცემული ყველა შეზღუდვა წრფივად დამოუკიდებელია.

ბანსაზღვრება 3.14. (3.1)-(3.4) ამოცანის ოპტიმალურ  $x$  გეგმას საყრდენი ეწოდება, თუ იგი აგრეთვე ამ ამოცანის საყრდენ გეგმას წარმოადგენს.

თეორემა 3.4. წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერ ამოხსნად ამოცანას, რომლის  $A$  მატრიცა  $m$ -რანგისაა, ერთი მინც ოპტიმალური საყრდენი გეგმა გააჩნია.

### 3.2.2 კანონიკური ამოცანის საყრდენი გეგმა

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.16) კანონიკური ამოცანა. დაუშვათ, რომ ვექტორები, რომლებიც (3.15) სისტემის პირობებს აკმაყოფილებს, წრფივად დამოუკიდებელია.

ბანსაზღვრება 3.15. (3.14)-(3.16) ამოცანის  $x$  გეგმას საყრდენი გეგმა ეწოდება, თუ  $A = \|a_i\|_m$  მატრიცის  $A_i$  ვექტორ-სვეტები, რომლებიც მის დადებით კომპონენტებს შეესაბამება, წრფივად დამოუკიდებელია.

ბანსაზღვრება 3.16.  $m$  წრფივად დამოუკიდებელ  $\{A_i\} (i=1,2,\dots,m)$  ვექტორ-სვეტების სისტემას, რომელიც ყველა იმ  $A_i$  ურს შეიცავს, სადაც  $x_i > 0$ , (3.14)-(3.16) ამოცანის საყრდენი  $x$  გეგმის ბაზისი ეწოდება.

საყრდენი  $x$  გეგმის ბაზისი აღვნიშნოთ  $B_i$ -ით.



**ბანსაზღვრება 3.17.** საყრდენი  $x$  გეგმა არაგადაგვარებულია, თუ მისი ყველა კომპონენტი, რომელიც შეესაბამება ბაზისურ ვექტორებს (ბაზისურ კომპონენტებს), დადებითია. წინააღმდეგ შემთხვევაში საყრდენი  $x$  გეგმა გადაგვარებულია.

3.17 განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ არაგადაგვარებულ საყრდენ გეგმას ზუსტად  $m$  დადებითი კომპონენტი გააჩნია, ხოლო გადაგვარებულს -  $m$ -ზე ნაკლები.

**ბანსაზღვრება 3.18.** (3.14)-(3.16) ამოცანას არაგადაგვარებულს უწოდებენ, თუ მისი ყველა საყრდენი გეგმა არაგადაგვარებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში (3.14)-(3.16) ამოცანას გადაგვარებულს უწოდებენ.

**თეორემა 3.5.** თუ წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.16) ამოცანაში  $A$  მატრიცის  $A_j, j = i_1, i_2, \dots, i_m$ , პირობის ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია და, ამასთან, აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{j=i_1}^{i_m} A_j \bar{x}_j = b,$$

სადაც  $\bar{x}_j \geq 0 \forall j = i_1, i_2, \dots, i_m$ , მაშინ  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  წერტილი ( $\bar{x}_j = 0 \forall j \neq i_1, i_2, \dots, i_m$ ) (3.14)-(3.16) ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგას კუთხის წერტილია.

**თეორემა 3.6.** თუ  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  ( $\bar{x}_j > 0 \forall j = i_1, i_2, \dots, i_m$ ) წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.16) ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგას კუთხის წერტილია, მაშინ  $A$  მატრიცის  $A_j, j = i_1, i_2, \dots, i_m$ , პირობის ვექტორები, რომელიც შეესაბამება  $\bar{x}$ -ის დადებით კომპონენტებს, წრფივად დამოუკიდებელია.

**შენიშვნა 3.2** ზემოთ მოყვანილი თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა: თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მიზნის ფუნქცია ამონახსნთა მრავალწახნაგზე შემოსაზღვრულია, მაშინ:

1. მოიძებნება ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგას ისეთი კუთხის წერტილი, რომელშიც ამოცანის მიზნის ფუნქცია აღწევს თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობას;
2. ამოცანის ნებისმიერი საყრდენი გეგმა ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგას კუთხის წერტილს შეესაბამება;
3. ამოცანის ნებისმიერი საყრდენი გეგმა მისი  $m$  წრფივად დამოუკიდებელი  $A_j$  ( $j = i_1, i_2, \dots, i_m$ ) პირობის ვექტორთა სისტემით განისაზღვრება;

## წრფივი დაპროგრამება

4. ამოცანის ოპტიმალური გეგმის დასადგენად საჭიროა მხოლოდ მისი საყრდენი გეგმების გამოკვლევა;
5. ამოცანის ყველა საყრდენი გეგმის რაოდენობა არ აღემატება  $C^m$  რიცხვს, ე.ი.  $C^m$  არის ყველა საყრდენი გეგმის რაოდენობის ზედა ზღვარი. თუ  $m$  და  $n$  დიდი რიცხვებია, ყველა ვარიანტის გადასინჯვა შეუძლებელია და ამოცანის ამოხსნა უნდა განხორციელდეს სპეციალურად შემუშავებული მეთოდების გამოყენებით. ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს ქვემოთ განვიხილავთ.

### 3.2.3 საყრდენი გეგმის ოპტიმალობის გამოკვლევა

დავუშვათ, რომ  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  (3.14)-(3.16) ამოცანის საყრდენ გეგმას წარმოადგენს და  $B_{\bar{x}} = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}\}$  მისი ბაზისია. განვიხილოთ  $A$  მატრიცის ნებისმიერი  $A_j$  ვექტორ-სვეტი და იგი ამ ბაზისის საშუალებით დავშალოთ:

$$A_j = \sum_{i=1}^m A_{j_i} x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

ანალოგიურად, შეზღუდვების  $b$  ვექტორი, რომელსაც მომავალში (აქ და მომდევნო ნაწილებში)  $A_0$ -ით აღვნიშნავთ, შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ბაზისური ვექტორების წრფივი კომბინაცია:

$$A_0 = \sum_{i=1}^m A_{j_i} x_{i0}.$$

შევადგინოთ შემდეგი შეფასებები:

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_{j_i} x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.44)$$

$$\Delta_j = z_j - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.45)$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები.

**თეორემა 3.7** (საყრდენი გეგმის ოპტიმალობის ნიშანი).  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  საყრდენი გეგმა (3.14)-(3.16) ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას წარმოადგენს, თუ მისი ყველა  $\Delta_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , შეფასება არაუარყოფითია (არადადებითია).

**თეორემა 3.8** (შემოუსაზღვრელობის ნიშანი). თუ არსებობს ისეთი  $k$  ინდექსი, რომ  $\Delta_k < 0$  ( $\Delta_k > 0$ ), ხოლო  $x_{ik} \leq 0$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , მაშინ წრფივი (3.14) ფუნქცია (3.14)-(3.16) ამოცანის გეგმების სიმრავლეზე ზემოდან (ქვემოდან) შემოუსაზღვრავია.

**თეორემა 3.9** (საყრდენი გეგმის გაუმჯობესების ნიშანი). დაეუშვათ, რომ (3.14)-(3.16) ამოცანის საყრდენი  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  გეგმა არაგადაგვარებულია და  $\Delta_r < 0$  ( $\Delta_r > 0$ ), მაგრამ არსებობს ერთი მინიცი დადებითი კომპონენტი  $x_{rk} > 0$ . მაშინ არსებობს ამოცანის სხვა საყრდენი  $\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n)^T$  გეგმა, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა:

$$f(\bar{x}') > f(\bar{x}) \quad (f(\bar{x}') < f(\bar{x})).$$

იმისათვის, რომ საყრდენი  $\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n)^T$  გეგმის ბაზისი ავაგოთ, საჭიროა ძველ ბაზისში  $A_r$  ვექტორი  $A_k$  ვექტორით ჩავანაცვლოთ, სადაც  $r$  განისაზღვრება შემდეგი პირობიდან:

$$\theta_0 = \frac{x_{r0}}{x_{rk}} = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}. \quad (3.46)$$

ამასთან, “უკეთესი” საყრდენი  $\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n)^T$  გეგმის კომპონენტები შემდეგი პირობიდან გამოითვლება:

$$x'_{i0} = \begin{cases} x_{i0} - \theta_0 x_{ik}, & i \neq r, \\ \theta_0, & i = r, \end{cases} \quad (3.47)$$

სადაც  $i$  ინდექსი  $A_r$  - ვექტორის პოზიციის ნომერია ძველ ბაზისში.

### 3.2.4 ამოცანის ამოხსნა ცნობილი საწყისი საყრდენი გეგმის შემთხვევაში

**შენიშვნა 3.3.** როგორც ზემოთ უკვე იყო აღნიშნული, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სხვადასხვა ფორმები ეკვივალენტურია იმ გაგებით, რომ ნებისმიერი ფორმისათვის მისი შესაბამისი სხვა სახის ფორმა შეიძლება ისე აიგოს, რომ ოპტიმალური ამონახსნი არ შეიცვალოს.

აქედან გამომდინარე, განვიხილავთ წრფივი დაპროგრამების კანონიკური ამოცანის ამოხსნის მეთოდს - სიმპლექს-მეთოდს, რომელიც ამერიკელი მეცნიერის ჯ. დან-

ცივის მიერ არის შემუშავებული [50, 166]. ეს მეთოდი ცნობილია, აგრეთვე, როგორც გეგმის თანდათანობითი გაუმჯობესების მეთოდი.

**შენიშვნა 3.4.** ქვემოთ მოყვანილია სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმი, რომელიც გამოიყენება წრფივი დაპროგრამების კანონიკური ამოცანის როგორც მაქსიმიზაციის, ისე მინიმიზაციის დროს. მინიმიზაციის შემთხვევაში ალგორითმის ყველა ცვლილება ფრჩხილებშია მოყვანილი.

განვიხილოთ (3.14)-(3.16) ამოცანა. დაეუშვათ, რომ  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  ამ ამოცანის საყრდენ გეგმას წარმოადგენს, ხოლო  $B_x = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  მისი ბაზისია. 3.5-3.7 თეორემების თანახმად შეიძლება გეკონდეს შემდეგი სამი შემთხვევა:

1.  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  გეგმა ოპტიმალურია;
2. (3.14)-(3.16) ამოცანა ამოუხსნადია;
3. შესაძლებელია ახალ საყრდენ გეგმაზე გადასვლა (უფრო ზუსტად, შესაძლებელია ახალი ბაზისის აგება), რომელსაც მიზნის ფუნქციის მეტი (ნაკლები) მნიშვნელობა შეესაბამება.

ამოცანის საყრდენი გეგმების ბაზისებზე თანდათანობით გადასვლა ოპტიმალური ბაზისის (ოპტიმალური გეგმის შესაბამისი ბაზისის) მიღებამდე წარმოადგენს სიმპლექს-მეთოდის ძირითად არსს.

მეთოდის რეალიზაციისათვის საჭიროა ვიცოდეთ შემდეგი პარამეტრები:

- ◆ საკვლევი საყრდენი გეგმის ბაზისური კომპონენტები  $x_{i0}, i = 1, 2, \dots, m$ ;
- ◆  $\|x_{ij}\|_{m,n}$  მატრიცის ელემენტები;
- ◆ შეზღუდვების ვექტორების შესაბამისი შეფასებები  $\Delta_j, j = 1, 2, \dots, n$ , რომლებსაც აღვნიშნავთ  $x_{m+1,j}$ ;
- ◆ წრფივი  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც საყრდენ  $x$  გეგმას შეესაბამება.  $f(x)$  სიდიდეს აღვნიშნავთ  $x_{m+1,0}$ -ით.

განვიხილოთ შემდეგი ორი ბაზისი:  $B^1 = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_m\}$  და  $B^2 = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_m\}$ . ( $B^2$  ბაზისი  $B^1$  ბაზისისაგან იმით განსხვავდება, რომ  $A_k$  ვექტორი  $A_k$  ვექტორითაა შეცვლილი). აღნიშნული ბაზისების შესაბამის  $x_{ij}^{(1)}$  და  $x_{ij}^{(2)}$  პარამეტრებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$x_{ij}^{(2)} = \begin{cases} x_{ij}^{(1)} - \frac{x_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}} x_{ik}^{(1)}, & i \neq r, \\ \frac{x_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}}, & i = r. \end{cases}, i = 1, 2, \dots, m+1; j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.48)$$

გადავიღეთ ალგორითმის აღწერაზე.

I საწყისი (ნულოვანი) იტერაცია. შეივსება ცხრილი ნულოვანი ნომრით (ცხრილი 3.4), რომელიც საწყის  $x^{(0)}$  საყრდენ გეგმას შეესაბამება.

- პირველ სვეტში ცხრილის სტრიქონის ნომრებია  $1, 2, \dots, m+1$ ;
- $B_{\Delta}$ -ის სვეტში  $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, A_m$  ბაზისური ვექტორებია ჩაწერილი;
- $c_{\Delta}$ -ის სვეტში  $c$  ვექტორის ბაზისური  $c_i$  კომპონენტებია წარმოდგენილი;
- $A_j, j=0, 1, 2, \dots, n$ , სვეტები  $x_{ij}^{(0)}, i=1, 2, \dots, m+1$ , პარამეტრებითაა შევსებული;
- პირველი სტრიქონის  $A_j, j=1, 2, \dots, n$ , სვეტების თავზე ამოცანის მიზნის ფუნქციის  $x_j, j=1, 2, \dots, n$ , ცვლადების შესაბამისი კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობებია ჩაწერილი.

$j$	$B_{\Delta}$	$c_{\Delta}$	$A_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_k$	...	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	...	$A_k$	...	$A_n$
1	$A_{s_1}$	$c_{s_1}$	$x_{10}^{(0)}$	$x_{11}^{(0)}$	$x_{12}^{(0)}$	...	$x_{1k}^{(0)}$	...	$x_{1n}^{(0)}$
2	$A_{s_2}$	$c_{s_2}$	$x_{20}^{(0)}$	$x_{21}^{(0)}$	$x_{22}^{(0)}$	...	$x_{2k}^{(0)}$	...	$x_{2n}^{(0)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$r$	$A_{s_r}$	$c_{s_r}$	$x_{r0}^{(0)}$	$x_{r1}^{(0)}$	$x_{r2}^{(0)}$	...	$x_{rk}^{(0)}$	...	$x_{rn}^{(0)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$m$	$A_{s_m}$	$c_{s_m}$	$x_{m0}^{(0)}$	$x_{m1}^{(0)}$	$x_{m2}^{(0)}$	...	$x_{mk}^{(0)}$	...	$x_{mn}^{(0)}$
$m+1$	$\Delta_j$		$f^{(0)}$	$\Delta_1^{(0)}$	$\Delta_2^{(0)}$	...	$\Delta_k^{(0)}$	...	$\Delta_n^{(0)}$

ცხრილი 3.4

II.  $(l+1)$  იტერაცია ( $l$ -ური ცხრილიდან  $l+1$ -ელ ცხრილზე გადასვლა). დაეუშვათ, რომ  $l$ -ური ცხრილი უკვე შევსებულია (იხ. ცხრილი 3.5).

განივილით 3.5 ცხრილის  $m+1$ -ე სტრიქონის ელემენტები, რომლებიც  $A_j, j=1, 2, \dots, n$ , სვეტებს შეესაბამება. ვინაიდან  $x_{m+1,j}^{(l)} = \Delta_j^{(l)}, j=1, 2, \dots, n$ , შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს სამი შემთხვევიდან ერთ-ერთს:

- ა) ყველა  $\Delta_j^{(l)} \geq 0$  ( $\Delta_j^{(l)} \leq 0$ ); მაშინ საყრდენი  $x^{(l)}$  გეგმა, რომელიც  $l$ -ური იტერაციის შედეგად არის მიღებული, ამოცანის ოპტიმალური გეგმაა;
- ბ)  $\Delta_k^{(l)} < 0$  ( $\Delta_k^{(l)} > 0$ ) და " $A_k$ " სვეტის ყველა ელემენტი  $x_k^{(l)} \leq 0$ ; ამ შემთხვევაში ამოცანა ამოუხსნადია;
- გ) არსებობს რამდენიმე  $\Delta_k^{(l)} < 0$  ( $\Delta_k^{(l)} > 0$ ) და ყველა მათგანის შესაბამის სვეტში ერთი მინც დადებითი ელემენტი. ამ შემთხვევაში საყრდენი გეგმის (ბაზისის) გაუმჯობესება შესაძლებელია. ამისათვის ბაზისში ერთ-ერთი ამ უარყოფითი (დადებითი) შეფასებების შესაბამისი  $A_k$  ვექტორი უნდა ჩავანაცვლოთ. უფრო მეტიც, ბაზისში ისეთი  $A_k$  ვექტორი უნდა ჩავანაცვლოთ, რომელსაც შეესაბამება შემდეგი ნამრავლი:

$$\Delta_k^{(l)} \frac{x_{i(k)0}^{(l)}}{x_{i(k)k}^{(l)}} = \min_{j: \Delta_j^{(l)} < 0} \left( \Delta_j^{(l)} \min_{i: x_{ij}^{(l)} > 0} \frac{x_{i0}^{(l)}}{x_{ij}^{(l)}} \right) \quad \left( \Delta_k^{(l)} \frac{x_{i(k)0}^{(l)}}{x_{i(k)k}^{(l)}} = \max_{j: \Delta_j^{(l)} > 0} \left( \Delta_j^{(l)} \min_{i: x_{ij}^{(l)} > 0} \frac{x_{i0}^{(l)}}{x_{ij}^{(l)}} \right) \right)$$

j	$B_{\lambda_j}$	$c_{\lambda_j}$	$A_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_k$	...	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	...	$A_k$	...	$A_n$
1	$A_{s_1}$	$c_{s_1}$	$x_{10}^{(l)}$	$x_{11}^{(l)}$	$x_{12}^{(l)}$	...	$x_{1k}^{(l)}$	...	$x_{1n}^{(l)}$
2	$A_{s_2}$	$c_{s_2}$	$x_{20}^{(l)}$	$x_{21}^{(l)}$	$x_{22}^{(l)}$	...	$x_{2k}^{(l)}$	...	$x_{2n}^{(l)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
r	$A_{s_r}$	$c_{s_r}$	$x_{r0}^{(l)}$	$x_{r1}^{(l)}$	$x_{r2}^{(l)}$	...	$x_{rk}^{(l)}$	...	$x_{rn}^{(l)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	$A_{s_m}$	$c_{s_m}$	$x_{m0}^{(l)}$	$x_{m1}^{(l)}$	$x_{m2}^{(l)}$	...	$x_{mk}^{(l)}$	...	$x_{mn}^{(l)}$
$m+1$	$\Delta_j$		$f^{(l)}$	$\Delta_1^{(l)}$	$\Delta_2^{(l)}$	...	$\Delta_k^{(l)}$	...	$\Delta_n^{(l)}$

ცხრილი 3.5



$l$ -ური ცხრილის  $A_k$  სვეტს მიმართული სვეტი ეწოდება. იმისათვის, რომ განისაზღვროს  $A_k$  ვექტორი, რომელიც ბაზისიდან გამოირიცხება, საჭიროა გამოთვა-

ლოთ  $\frac{x_{i0}^{(l)}}{x_{ik}^{(l)}}$  ფარდობა იმ  $i$  ინდექსებისათვის, რომლებისთვისაც  $x_{ik}^{(l)} > 0$ . აღნიშნოთ

$$\theta_r^{(l)} = \min_i \theta_i^{(l)} = \frac{x_{r0}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}. \text{ ის } A_r, \text{ ვექტორი, რომლისთვისაც უკანასკნელი ფარდობა მინი-}$$

მალურია (მაქსიმალურია), ბაზისიდან გამოირიცხება (იმ შემთხვევაში, როდესაც ამოცანა გადაგვარებულია,  $\min_i \theta_i^{(l)}$  რამდენიმე ვექტორს შეიძლება ერთდროულად შეესაბამებოდეს. ამ შემთხვევაში ბაზისიდან ნებისმიერი ასეთი ვექტორის გამოირიცხება შესაძლებელი). სიმპლექსური ცხრილის  $r$  სტრიქონს მიმპართველი სტრიქონი ეწოდება, ხოლო ელემენტს  $x_{rk}^{(l)}$  - გარდაქმნის წამყვანი ელემენტი.

წამყვანი ელემენტის მოძებნის შემდეგ შეივსება  $(l+1)$ -ე ცხრილი, რომლის საბოლოო სახე წარმოდგენილია 3.6 ცხრილში:

1.  $(l+1)$ -ე ცხრილის პირველი სამი სვეტი განსხვავდება მე- $l$  ცხრილის მხოლოდ  $r$  სტრიქონის ელემენტებით.  $r, A_r, c_r$  ელემენტების ნაცვლად შემოტანილია  $r, A_k, c_k$  ელემენტები;
2. შეივსება ცხრილის ძირითადი ნაწილი.

$j$	$B_{\text{ბა}}$	$c_{\text{ბა}}$	$A_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_k$	...	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	...	$A_k$	...	$A_n$
1	$A_{s_1}$	$c_{s_1}$	$x_{10}^{(l+1)}$	$x_{11}^{(l+1)}$	$x_{12}^{(l+1)}$	...	$x_{1k}^{(l+1)}$	...	$x_{1n}^{(l+1)}$
2	$A_{s_2}$	$c_{s_2}$	$x_{20}^{(l+1)}$	$x_{21}^{(l+1)}$	$x_{22}^{(l+1)}$	...	$x_{2k}^{(l+1)}$	...	$x_{2n}^{(l+1)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$r$	$A_k$	$c_k$	$x_{r0}^{(l+1)}$	$x_{r1}^{(l+1)}$	$x_{r2}^{(l+1)}$	...	$x_{rk}^{(l+1)}$	...	$x_{rn}^{(l+1)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$m$	$A_{s_m}$	$c_{s_m}$	$x_{m0}^{(l+1)}$	$x_{m1}^{(l+1)}$	$x_{m2}^{(l+1)}$	...	$x_{mk}^{(l+1)}$	...	$x_{mn}^{(l+1)}$
$m+1$	$\Delta_j$		$f^{(l+1)}$	$\Delta_1^{(l+1)}$	$\Delta_2^{(l+1)}$	...	$\Delta_k^{(l+1)}$	...	$\Delta_n^{(l+1)}$

ცხრილი 3.6

$(l+1)$ -ე ცხრილის  $r$  სტრიქონის ყველა დანარჩენი ელემენტის მისაღებად ( $A_j, j=0,1,2,\dots,n$ , სვეტებში)  $l$ -ური ცხრილის  $r$  სტრიქონი გარდაქმნის  $x_{rk}^{(l)}$  წამყვან ელემენტზე უნდა გაიყოს.  $(l+1)$ -ე ცხრილის  $i \neq r$  სტრიქონის ყველა დანარჩენი ელემენტის

## წრფივი დაპროგრამება

მისაღებად  $(A_j, j=0,1,2,\dots,n, \text{ სვეტებში})$   $l$ -ური ცხრილის  $i$ -ურ სტრიქონს უნდა გამოვკლოთ  $(l+1)$ -ე ცხრილის  $r$ -ური სტრიქონი გამრავლებული  $x_{ik}^{(l)}$  ელემენტზე. აღნიშნული პროცედურების შესრულების შემდეგ  $(l+1)$ -ე იტერაცია მთავრდება.

იტერაციული პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი არ მიიღება ან არ დაერწმუნებით, რომ ამოცანა ამოუხსნადია.

### 3.2.5 საწყისი საყრდენი გეგმის აგება

დაეუშვათ, რომ წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.16) კანონიკურ ამოცანაში საწყისი საყრდენი გეგმა უშუალოდ არ შეიძლება განისაზღვროს. ვივლისხმობთ, რომ ყველა  $b_1, b_2, \dots, b_m$  არაუარყოფითია (თუ რომელიმე განტოლებისათვის აღნიშნული პირობა არ სრულდება, მაშინ განტოლების ორივე მხარის  $-1$ -ზე გამრავლებით მარტივად შესაძლებელია ამ პირობის შესრულება). (3.14)-(3.16) ამოცანისათვის შევადგინოთ შემდეგი დამხმარე ამოცანა:

$$\tilde{f}(X) = \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min, \quad (3.49)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (3.50)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n+m. \quad (3.51)$$

(3.39)-(3.41) ამოცანაში  $X$  ვექტორი  $(n+m)$ -განზომილებიანია.

შენიშნავთ, რომ (3.49)-(3.51) ამოცანაც წრფივი დაპროგრამების კანონიკურ ამოცანაა. ცხადია,  $\tilde{X}^0 = (0,0,\dots,0,b_1,b_2,\dots,b_m)^T$  (3.49)-(3.51) ამოცანის საყრდენ გეგმას წარმოადგენს. ამ საყრდენი გეგმიდან დაწყებული, გეგმის თანდათანობითი გაუმჯობესების მეთოდით შეიძლება ამოვხსნათ (3.49)-(3.51) ამოცანა.

თეორემა 3.10. (3.49)-(3.51) ამოცანა ყოველთვის ამოხსნადია და, ამასთან,

$$\min \tilde{f}(X) \geq 0.$$

თეორემა 3.11 თუ (3.49)-(3.51) ამოცანაში  $\min \tilde{f}(X) = 0$  და იგი რაღაც  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_{n+m})^T$  ვექტორის შემთხვევაში მიიღწევა, მაშინ  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  ვექტორი (3.14)-(3.16) ამოცანის საყრდენი გეგმაა.



თეორემა 3.12. თუ (3.49)-(3.51) ამოცანაში  $\min \tilde{f}(X) > 0$ , მაშინ (3.14)-(3.16) ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგა ცარიელი სიმრავლეა.

### 3.2.6 ამოცანის ამოხსნა უცნობი საწყისი საყრდენი გეგმის უემთხვევაში (ხელოვნური ბაზისის მეთოდი)

წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.16) სახის მრავალი ამოცანა, რომელსაც ამონახსნი გააჩნია, არ შეიცავს ერთეულოვან მატრიცას და შეუძლებელია მისი დაყვანა ისეთ სახეზე, როცა საწყისი საყრდენი გეგმა უშუალოდ მიიღება. ამ შემთხვევაში ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება ხელოვნური ბაზისის მეთოდი.

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.16) ამოცანა, რომელშიც  $b_i \geq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , და შეზღუდვათა (3.15) სისტემა არ შეიცავს ერთეულოვან მატრიცას. ერთეულოვანი მატრიცის მისაღებად (3.15) სისტემის თითოეულ განტოლებას დაეუმატოთ თითო  $x_{n+i} \geq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , ცვლადი, რომელსაც ეწოდოთ ხელოვნური ცვლადები და განვიხილოთ შემდეგი გაფართოებული ამოცანა: საჭიროა განესაზღვროთ წრფივი

$$\tilde{f}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^m x_{n+i}$$

$$(\tilde{f}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i=1}^m x_{n+i})$$

ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+m.$$

დავუშვათ, რომ  $M$  საკმარისად დიდი დადებითი რიცხვია. ერთეულოვანი  $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$  ექვტორები, რომელიც შეესაბამება ხელოვნურ ცვლადებს, წარმოქმნის ხელოვნურ ბაზისს.

საწყისი ამოცანის ოპტიმალური გეგმის მოსაძებნად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი დებულებით.

თეორემა 3.13. თუ გაფართოებული ამოცანის  $\bar{x} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, 0, \dots, 0)^T$  ოპტიმალურ გეგმაში ყველა ხელოვნური ცვლადი ნულოვანია, ე.ი.  $x_{m+i}^* = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , მაშინ  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  წარმოადგენს საწყისი (3.14)-(3.16) ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას.

(თეორემის დამტკიცება მოცემულია მონოგრაფიაში [84]).

გაფართოებული ამოცანისათვის სიმპლექს-მეთოდის გამოყენება უზრუნველყოფს ისეთი გეგმის აგებას, რომელშიც თითოეული ხელოვნური ცვლადი  $x_{m+i} = 0$ . თუ საწყის ამოცანას არ გააჩნია გეგმები (ე.ი. იგი არასაკუთრივია), მაშინ გაფართოებული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი შეიცავს ერთ მაინც დადებით  $x_{m+i}$ -ს.

იმ შემთხვევაში, როცა წინასწარ უცნობია  $M$  სიდიდის მნიშვნელობა, გაფართოებული ამოცანის ოპტიმალური გეგმის მოსაძებნად გამოიყენება სიმპლექს-მეთოდი, ისეთი სიმპლექსური ცხრილების შედგენით, რომელსაც ჩვეულებრივ სიმპლექსურ ცხრილთან შედარებით ერთი სტრიქონით მეტი გააჩნია.  $(m+2)$ -ე სტრიქონის მიხედვით განისაზღვრება გექტორი, რომელიც ჩაენაცვლება ბაზისში. იტერაციული პროცესი  $(m+2)$ -ე სტრიქონის მიმართ გაშვებულია ბაზისიდან ყველა ხელოვნური ცვლადის გამოსარიცხავად, რის შემდეგ ოპტიმალური გეგმის განსაზღვრის პროცესი გრძელდება  $(m+1)$ -ე სტრიქონის მიხედვით.

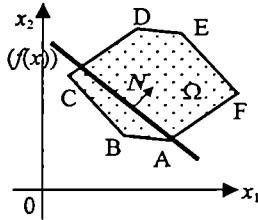
### 3.2.7 სიმპლექს-მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

უმარტივეს შემთხვევაში სიმპლექსური პროცესი შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს როგორც წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგას მეზობელ კუთხის წერტილებზე გადაადგილება, რომელიც დაკავშირებულია მიზნის ფუნქციის ზრდასთან (კლებასთან).

ორ კუთხის წერტილს ეწოდება მომიჯნავე, თუ ისინი განლაგებულია ამონახსნთა მრავალწახნაგას ერთსა და იმავე წიბოზე.

ეთქვათ, მოცემულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანა სიბრტყეზე, სადაც ამონახსნთა  $\Omega$  მრავალწახნაგა ABCDEF მრავალკუთხედიითა წარმოდგენილი (ნახ. 3.8). ამოცანაში საჭიროა  $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$  ფუნქციის მაქსიმუმის განსაზღვრა. დავეშვათ, რომ აგებულია საწყისი საყრდენი გეგმა, რომელიც შეესაბამება  $\Omega$  მრავალკუთხედის A წერტილს. მაშინ  $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$  წრფე გადის A წერტილზე, რომელსაც მიზნის ფუნქციის  $f(A)$  მნიშვნელობა შეესაბამება.

$\min \theta_j (Z_j - c_j)$  პირობის გათვალისწინებით ბაზისში ახალი ვექტორის შემოტანის შედეგად  $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$  წრფე გადაადგილება F წერტილზე და  $f$  მიიღებს  $f(F)$  მნიშვნელობას:  $f(F) > f(A)$ . მომდევნო იტერაციის შედეგად მივიღებთ E წერტილს, სადაც მიზნის ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს.



ნახ. 3.8

იტერაციების რაოდენობა სიმპლექსურ პროცესში განისაზღვრება საწყისი საყრდენი გეგმის შესაბამისი წერტილის მდებარეობით და ამონახსნთა მრავალწახნაგას იმ კუთხის წერტილების რაოდენობით, რომელიც შეეგხდება  $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$  წრფის საწყისი გეგმიდან ოპტიმალურ წერტილამდე გადაადგილების დროს.

### 3.2.8 სიმპლექს-მეთოდის გამოყენების საბაზისური მაგალითები

უპირველეს ყოვლისა, გადავწყვიტოთ ამოცანები, რომელშიც საწყისი საყრდენი გეგმა უშუალოდ განისაზღვრება.

**მაგალითი 3.6.** სიმპლექს-მეთოდით ამოვხსნათ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\min \{ f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \},$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4;$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6;$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

**წრფივი დაპროგრამება**

ამოსნა. ახალი ცვლადების შემოტანის გზით მოცემული ამოცანა შეიძლება დაიყვანოს წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის კანონიკურ ამოცანაზე:

$$\min \{ f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \},$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

მიღებული გაფართოებული ამოცანისათვის შევადგინოთ საწყისი (ნულოვანი) სიმპლექსური ცხრილი (იხ. ცხრილი 3.7).

3.7 ცხრილიდან ჩანს, რომ გვაქვს ორი დადებითი შეფასება  $\Delta_1^{(0)} = 3$ ,  $\Delta_2^{(0)} = 4$ . ამიტომ  $x^{(0)} = (0; 0; 0; 4; 6; 5)^T$  ( $f_1(x^{(0)}) = 0$ ) საწყისი საყრდენი გეგმა არ არის ოპტიმალური. ეინაიდან დადებითი შეფასებების შესაბამის სვეტებში მიმდინარე ბაზისის მიმართ ზოგიერთ ვექტორს გააჩნია დაშლის დადებითი კოეფიციენტები ( $A_1$  სვეტში 2 დადებითი ელემენტი, ხოლო  $A_2$  სვეტში - 3 დადებითი ელემენტი), ამიტომ  $x^{(0)}$  გეგმის გაუმჯობესება შესაძლებელია.

j	$B_{\text{ბაზ}}$	$c_{\text{ბაზ}}$	$A_0$	-3	-4	1	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_4$	0	4	2	1	-1	1	0	0
2	$A_5$	0	6	-4	2	-1	0	1	0
3	$A_6$	0	5	3	1	1	0	0	1
m+1	$\Delta_j$		0	3	4	-1	0	0	0



ცხრილი 3.7

გამოეთვალათ

$$\frac{x_{40}^{(0)}}{x_{41}^{(0)}} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{x_{60}^{(0)}}{x_{61}^{(0)}} = \frac{5}{3}, \quad \theta_1^{(0)} = \min\left(2; \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3},$$

$$\frac{x_{40}^{(0)}}{x_{42}^{(0)}} = \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{x_{50}^{(0)}}{x_{52}^{(0)}} = \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{x_{60}^{(0)}}{x_{62}^{(0)}} = \frac{5}{1} = 5, \quad \theta_2^{(0)} = \min(4; 3; 5) = 3.$$

ვიპოვოთ

$$\Delta_1^{(0)}\theta_1^{(0)} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5, \quad \Delta_2^{(0)}\theta_2^{(0)} = 4 \cdot 3 = 12,$$

$$\max(5; 12) = 12 = \Delta_2^{(0)}\theta_2^{(0)}.$$

უკანასკნელი პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ახალ ბაზისში საჭიროა  $A_2$  ვექტორის შემოტანა. ვინაიდან  $\theta_2^{(0)} = 3 = \frac{x_{50}^{(0)}}{x_{52}^{(0)}}$ , ამიტომ  $A_2$  ვექტორი  $A_5$  ვექტორს ჩაენაცვლება.

შევადგინოთ ახალი სიმპლექსური ცხრილი.

საწყისი 3.7 ცხრილის მიმართეული (მე-2) სტრიქონის  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  სვეტების შესაბამისი ელემენტები  $x_{52}^{(0)} = 2$ -ზე გავყოთ და მიღებული შედეგი 3.8 ცხრილის მე-2 სტრიქონში ჩაწეროთ. შემდეგ ეს სტრიქონი  $x_{42}^{(0)} = 1$ -ზე გაავრავლოთ და მიღებული სტრიქონი საწყისი 3.7 ცხრილის 1-ლ სტრიქონს გამოვაკლოთ. შედეგი 3.8 ცხრილის 1-ლ სტრიქონში ჩაწეროთ (შესაბამის  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  სვეტებში). ანალოგიურად, ახალი ცხრილის მე-2 სტრიქონი  $x_{62}^{(0)} = 1$ -ზე გაავრავლოთ და მიღებული სტრიქონი 3.7 ცხრილის მე-3 სტრიქონს გამოვაკლოთ. შედეგი 3.8 ცხრილის მე-3 სტრიქონში ჩაწეროთ. საბოლოოდ, 3.8 ცხრილის მე-2 სტრიქონი  $\Delta_2^{(0)} = 4$ -ზე გაავრავლოთ და ახალი სტრიქონი 3.7 ცხრილის მე-4 სტრიქონს გამოვაკლოთ. შედეგი 3.8 ცხრილის  $(m+1)$ -ე სტრიქონში ჩაწეროთ. ამგვარად, მივიღებთ 3.8 სიმპლექსურ ცხრილს, საიდანაც ჩანს, რომ მიღებულია ახალი  $x^{(1)} = (0; 3; 0; 1; 0; 2)^T$  საყრდენი გეგმა, რომელსაც მიზნის ფუნქციის ახალი  $f_1(x^{(1)}) = 12$  მნიშვნელობა შეესაბამება. ვინაიდან მიღებულ ცხრილში გვაქვს ორი დადებითი შუფასება:  $\Delta_1^{(1)} = 11$ ,  $\Delta_3^{(1)} = 1$ , ამიტომ  $x^{(1)}$  საყრდენი გეგმა არ არის ოპტიმალური. დადებითი შუფასებების შესაბამის სვეტებში მიმდინარე ბაზისის მიმართ ორ ვექტორს დაშლის დადებითი კოეფიციენტები გააჩნია ( $A_1$  სვეტში 2 დადებითი ელემენტი, ხოლო  $A_3$  სვეტში - 1 დადებითი ელემენტი), ე.ი.  $x^{(1)}$  გეგმის გაუმჯობესება შესაძლებელია.

გამოვთვალოთ

წრფივი დაპროგრამება

$$\frac{x_{40}^{(1)}}{x_{41}^{(1)}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{x_{60}^{(1)}}{x_{61}^{(1)}} = \frac{2}{5}, \quad \theta_1^{(1)} = \min\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{4};$$

$$\frac{x_{30}^{(1)}}{x_{43}^{(1)}} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}, \quad \theta_3^{(1)} = \min\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3};$$

$$\Delta_1^{(1)}\theta_1^{(1)} = \frac{11}{4}, \quad \Delta_3^{(1)}\theta_3^{(1)} = \frac{4}{3};$$

$$\max\left(\frac{11}{4}; \frac{4}{3}\right) = \frac{11}{4} = \Delta_1^{(1)}\theta_1^{(1)}.$$

j	B <sub>ახ</sub>	c <sub>ახ</sub>	A <sub>0</sub>	-3	-4	1	0	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>
1	A <sub>4</sub>	0	1	<u>4</u>	0	-1/2	1	-1/2	0
2	A <sub>2</sub>	-4	3	-2	1	-1/2	0	1/2	0
3	A <sub>6</sub>	0	2	5	0	3/2	0	-1/2	1
m+1	Δ <sub>j</sub>		-12	11	0	1	0	-2	0

↑  
ცხრილი 3.8

უკანასკნელი პირობიდან გამოდინარეობს, რომ ახალ ბაზისში საჭიროა A<sub>4</sub> ვექტორის A<sub>1</sub> ვექტორით ჩანაცვლება

ახალი სიმპლექსური ცხრილი წინა იტერაციის ანალოგიურად შევადგინოთ. მივიღებთ სიმპლექსურ 3.9 ცხრილს.

3.9 ცხრილიდან ჩანს, რომ მიღებულია ახალი საყრდენი  $x^{(2)} = (1/4; 7/2; 0; 0; 0; 3/4)^T$  გეგმა, რომელიც შეესაბამება მიზნის ფუნქციის გაუმჯობესებულ მნიშვნელობას:

$f_1(x^{(2)}) = -59/4$ . ახალ ცხრილში ერთი დადებითი შეფასებაა:  $\Delta_3^{(2)} = \frac{19}{8}$ . ამიტომ  $x^{(2)}$  საყ-

რდენი გეგმა არ არის ოპტიმალური. ვინაიდან დადებითი შეფასების შესაბამის სვეტ-

ში მიმდინარე ბაზისის მიმართ დაშლის მხოლოდ ერთი კოეფიციენტი  $x_{63}^{(2)} = \frac{17}{8}$

დადებითია, ამიტომ  $x^{(2)}$  გეგმის გაუმჯობესება შესაძლებელია. თუ ახალ ბაზისში A<sub>6</sub>

ვექტორს  $A_3$  ვექტორით ჩაენაცვლებთ, მიიღება სიმპლექსური 3.10 ცხრილი 3.9-ის ანალოგიურად.

$j$	$B_{\Delta_j}$	$c_{\Delta_j}$	$A_0$	-3	-4	1	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_1$	-3	1/4	1	0	-1/8	1/4	-1/8	0
2	$A_2$	-4	7/2	0	1	-3/4	1/2	1/4	0
3	$A_6$	0	3/4	0	0	<u>17/8</u>	-5/4	1/8	1
$m+1$	$\Delta_j$		-59/4	0	0	19/8	-11/4	-5/8	0

ცხრილი 3.9



$j$	$B_{\Delta_j}$	$c_{\Delta_j}$	$A_0$	-3	-4	1	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_1$	-3	5/17	1	0	0	3/17	-2/17	1/17
2	$A_2$	-4	64/17	0	1	0	1/17	5/17	6/17
3	$A_3$	1	6/17	0	0	1	-10/17	1/17	8/17
$m+1$	$\Delta_j$		-265/17	0	0	0	-23/17	-13/17	-19/17

ცხრილი 3.10

3.10 სიმპლექსური ცხრილიდან გვაქვს, რომ  $x^{(3)} = (5/17; 64/17; 6/17; 0; 0; 0)^T$  საყრდენი გეგმაა, სადაც  $f_1(x^{(3)}) = -265/17$ . ვინაიდან უკანასკნელ ცხრილში ყველა შუფასება არადადებითია, ამიტომ მიღებული საყრდენი გეგმა წარმოადგენს გაფართოებული კანონიკური ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს, სადაც  $f_1(\min) = -265/17$ .

ამგვარად, მოცემული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია  $x^* = x^{\min} = (5/17; 64/17; 6/17)^T$ ,  $f_{\min} = -265/17$ .

**მაგალითი 3.7.** სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნათ 3.5 მაგალითში მოცემული წრფივი დაპროგრამების ამოცანა მიზნის ფუნქციის მაქსიმიზაციის შემთხვევაში:

$$\max \{f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 - 4x_2 + x_3\},$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6,$$

**წრფივი დაპროგრამება**

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

ამოხსნა. ახალი ცვლადების შემოტანის გზით საწყისი ამოცანა შეიძლება დაიყვანოს წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის კანონიკურ ამოცანაზე:

$$\max \{ f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \},$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 5,$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0,$$

$$x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0.$$

მიღებული გაფართოებული ამოცანისათვის შევადგინოთ საწყისი სიმპლექსური ცხრილი 3.11.

j	B <sub>ბაზ</sub>	c <sub>ბაზ</sub>	A <sub>0</sub>	-3	-4	1	0	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>
1	A <sub>4</sub>	0	4	2	1	-1	1	0	0
2	A <sub>5</sub>	0	6	-4	2	-1	0	1	0
3	A <sub>6</sub>	0	5	3	1	1	0	0	1
m+1	Δ <sub>j</sub>		0	3	4	-1	0	0	0

ცხრილი 3.11

3.11 ცხრილიდან ჩანს, რომ გვაქვს ერთი უარყოფითი შეფასება:  $\Delta_3^{(0)} = -1$ . ამიტომ  $x^{(0)} = (0; 0; 0; 4; 6; 5)^T$ , სადაც  $f(x^{(0)}) = 0$ , საწყისი საყრდენი გეგმა არ არის ოპტიმალური.

ვინაიდან უარყოფითი შეფასების შესაბამის სვეტში მიმდინარე ბაზისის მიმართ A<sub>3</sub> ვექტორს დაშლის დადებითი კოეფიციენტი გააჩნია, ამიტომ x<sup>(0)</sup> გეგმის გაუმჯობესება შესაძლებელია. ბაზისში შემოდის A<sub>3</sub> ვექტორი. რადგან x<sub>63</sub><sup>(0)</sup> = 1 დაშლის ერთადერთი დადებითი კოეფიციენტი, ამიტომ ბაზისიდან A<sub>6</sub> ვექტორი გამოირიცხება.



შევადგინოთ ახალი სიმპლექსური 3.12 ცხრილი. ამისათვის საწყისი 3.11 ცხრილის მიმართველი მე-3 სტრიქონის  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  სვეტების შესაბამისი ელემენტები  $x_{33}^{(0)} = 1$ -ზე გავყოთ და მიღებული მნიშვნელობები 3.12 ცხრილის მე-3 სტრიქონში ჩავწერთ. ეს უკანასკნელი  $x_{43}^{(0)} = -1$ -ზე გავამრავლოთ და მიღებული შედეგი საწყისი 3.11 ცხრილის 1-ლ სტრიქონს გამოვაკლოთ. მიღებული მნიშვნელობები 3.12 ცხრილის 1-ლ სტრიქონში (შესაბამის  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  სვეტებში) ჩავწერთ. ანალოგიურად, ახალი 3.12 ცხრილის მე-3 სტრიქონი  $x_{33}^{(0)} = -1$ -ზე გავამრავლოთ და მიღებული სტრიქონი საწყისი 3.11 ცხრილის მე-2 სტრიქონს გამოვაკლოთ. შედეგი ახალი ცხრილის მე-2 სტრიქონში ჩავწერთ. საბოლოოდ, 3.12 ცხრილის მე-2 სტრიქონი  $\Delta_3^{(0)} = -1$ -ზე გავამრავლოთ და ახალი სტრიქონი საწყისი 3.11 ცხრილის  $(m+1)$ -ე სტრიქონს გამოვაკლოთ. შედეგი 3.12 ცხრილის  $(m+1)$ -ე სტრიქონში ჩავწერთ. ამგვარად, მიიღება სრული სიმპლექსური ცხრილი 3.12, საიდანაც ჩანს, რომ  $x^{(1)} = (0; 0; 5; 9; 11; 0)^T$  საყრდენი გეგმაა, სადაც  $f(x^{(1)}) = 5$ . ვინაიდან მიღებულ ცხრილში ყველა შეფასება არაუარყოფითია, ამიტომ გაფართოებულ კანონიკურ ამოცანას გააჩნია ოპტიმალური ამონახსნი  $(0; 0; 5; 9; 11; 0)^T$ ;  $L_{1(\max)} = 5$ .

j	$B_{\Delta}$	$c_{\Delta}$	$A_0$	-3	-4	1	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_4$	0	9	5	2	0	1	0	1
2	$A_5$	0	11	-1	3	0	0	1	1
3	$A_3$	1	5	3	1	1	0	0	1
$m+1$	$\Delta$		5	6	5	0	0	0	1

ცხრილი 3.12

ამგვარად, მოცემული ამოცანის ოპტიმალური გეგმა  $x^* = x^{\max} = (0; 0; 5)^T$ , სადაც  $f_{\max} = 5$ .

განვიხილოთ ახლა ამოცანა, რომელშიც საწყისი საყრდენი გეგმა თავიდან უცნობია და მისი განსაზღვრისათვის საჭიროა ხელოვნური ბაზისის მეთოდის გამოყენება.

**მაბალნითი 3.8.** ხელოვნური ბაზისის მეთოდით ამოვხსნათ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \},$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

ამოხსნა. ამოცანის შეზღუდვების სისტემა არ შეიცავს ერთეულოვან მატრიცას. ამიტომ თითოეულ განტოლებას დაემატოთ თითო არაუარყოფითი ხელოვნური ცვლადი (შესაბამისად  $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ ) და განვიხილოთ გაფართოებული ამოცანა

$$\max \{ \bar{f}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \},$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

გაფართოებული ამოცანის ძირითადი შეზღუდვები წარმოვადგინოთ ვექტორული ფორმით

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = A_0.$$

საწყის ბაზისად შევარჩიოთ ერთეულოვანი  $A_5, A_6$  ვექტორები, რომლებიც წარმოქმნიან ხელოვნურ ბაზისს. თავისუფალი ცვლადების ნულთან გატოლებით:  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ , მივიღებთ გაფართოებული ამოცანის საწყის საყრდენ  $\bar{x}^{(0)} = (0; 0; 0; 0; 3; 3)^T$  გეგმას, რომელსაც შეესაბამება

$$x_5A_5 + x_6A_6 = A_0$$

ღაშლა.

შევადგინოთ სიმპლექსური 3.13 ცხრილი, რომელშიც  $(m+2)$  სტრიქონია, და შეფასებების მიხედვით გეგმა ოპტიმალობაზე შევამოწმოთ.

3.13 ცხრილის  $(m+1)$ -ე და  $(m+2)$ -ე სტრიქონებში ჩაწერილ შეფასებათა მნიშვნელობები განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\bar{f}(\bar{x}^{(0)}) = c_{\text{ახ}} \bar{x}^{(0)} = -3M - 3M = 0 - 6M,$$

$$\Delta_1 = c_{\text{ახ}} X_1 - c_1 = -M - 2M - 5 = -5 - 3M,$$

$$\Delta_2 = c_{\text{ახ}} X_2 - c_2 = -3M - 2M - 3 = -3 - 5M,$$

და ა.შ. ე.ი. თუ  $M$  წინასწარ არ არის დაფიქსირებული, მაშინ  $\Delta$ , შეფასებები  $M$  სი-  
დიდის წრფივი ფუნქციებია, ამასთან, ფუნქცია შედგება ორი შესაქრებისაგან, რო-  
მელთაგან ერთი დამოკიდებულია  $M$ -ზე, ხოლო მეორე დამოუკიდებელია.

$j$	$B_{\Delta}$	$c_{\Delta}$	$A_0$	5	3	4	-1	$-M$	$-M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_5$	$-M$	3	1	<u>3</u>	2	2	1	0
2	$A_6$	$-M$	3	2	2	1	1	0	1
$m-1$	$\Delta_j$		0	-5	-3	-4	1	0	0
$m-2$			-6	-3	-5	-3	-3	0	0

ცხრილი 3.13

გამოთვლების მოხერხებულობისათვის  $(m+1)$ -ე სტრიქონში ჩაწეროთ  $M$ -საგან  
დამოუკიდებელი შესაქრები, ხოლო  $(m+2)$ -ე სტრიქონში -  $M$ -ის მხოლოდ ის კოეფი-  
ციენტები, რომლებიც შეფასებების ურთიერთშედარების საშუალებას გვაძლევს.  
 $(m-2)$ -ე სტრიქონში გვაქვს უარყოფითი შეფასებები, ამიტომ გაფართოებული ამოცა-  
ნის საყრდენი  $\bar{x}^{(0)} = (0; 0; 0; 3; 3)^T$  გეგმა არ არის ოპტიმალური და შესაძლებელია  
მისი გაუმჯობესება.

გამოვთვალოთ  $\max c_j(Z_j - c_j)$ , რომელიც მიიღწევა  $A_2$  ვექტორისათვის:  
 $\max c_j(Z_j - c_j) = \theta_2(Z_2 - c_2) = 3/3 \cdot (-5) = -5$ . გარდაქმნის წამყვანი ელემენტი არის რიცხ-  
ვი 3. ამიტომ  $A_2$  ვექტორს ვრთავთ ბაზისში, ხოლო  $A_5$  ვექტორს გამოვრიცხავთ.

შუადგინოთ სიმპლექსური ცხრილი 3.14. ამისათვის მიმმართველი სტრიქონის  
ელემენტები გავყოთ 3-ზე და ჩავატაროთ ერთი სრული გამორიცხვა.

მეორე იტერაციის შედეგად გარდაქმნის  $4/3$ -ის ტოლი წამყვანი ელემენტით ბაზი-  
სიდან გამორიცხულია უკანასკნელი ხელოვნური  $A_6$  ვექტორი, ამიტომ მესამე იტერა-  
ციის  $(m+2)$ -ე სტრიქონში ყველა შეფასება, გარდა ორი ხელოვნური ვექტორისა, ნუ-  
ლის ტოლია.

$M$  სიდიდის შერჩევის თანახმად  $A_5$  და  $A_6$  ვექტორი არ მოხვდა ბაზისში, ამიტომ  
ისინი გამოვრიცხოთ შემდგომი განხილვიდან, მაგრამ შევინარჩუნოთ შებრუნებული  
მატრიცის მისაღებად.

**წრფივი დაპროგრამება**

მესამე იტერაციაზე მიღებული საყრდენი  $\bar{x}_0^{(2)} = (3/4; 3/4; 0; 0; 0; 0)^T$  გეგმა წარმოადგენს საწყისი ამოცანის გეგმას, მაგრამ იგი არაოპტიმალურია, ვინაიდან  $(m+1)$ -ე სტრიქონში არის უარყოფითი შეფასება:  $\Delta_3 = -3$ .

მომდევნო იტერაციული პროცესი შეეასრულოთ  $(m+1)$ -ე სტრიქონის მიმართ,  $(m+2)$ -ე სტრიქონი განხილვიდან გამოვრიცხოთ, ხოლო  $M$ -ის მნიშვნელობა ჩაერთოთ ხელოვნური ვექტორების შეფასებებში. მეოთხე იტერაციაზე მიღებული ცხრილის საფუძველზე ვრწმუნდებით, რომ  $x^* = x^{opt} = (1; 0; 1; 0)^T$  ვექტორი ამოცანის ოპტიმალური გეგმაა, ხოლო  $f_{max} = 9$ .  $A_3$  და  $A_6$  სვეტებში მიღებულია მატრიცა, რომლის საშუალებითაც შეგვიძლია ვიპოვოთ შებრუნებული მატრიცა, თუ 1-ლ და მე-2 სტრიქონებს აღვსვამთ შევუნაცვლებთ.

j	$B_{j0}$	$c_{j0}$	$A_0$	5	3	4	-1	-M	-M
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_2$	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	$A_6$	-M	1	<u>4/3</u>	0	-1/3	-1/3	-2/3	1
$m+1$	$\Delta_j$		3	-4	0	-2	3	1	0
$m+2$			-1	-4/3	0	1/3	1/3	5/3	0
1	$A_2$	3	3/4	0	1	<u>3/4</u>	3/4	1/2	-1/4
2	$A_1$	5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
$m+1$	$\Delta_j$		6	0	0	-3	2	-1	3
$m+2$			0	0	0	0	0	1	1
1	$A_3$	4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	$A_1$	5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
$m-1$	$\Delta_j$		9	0	4	0	5	1+M	2+M

ცხრილი 3.14

### 3.3 დუალობა წრფივ დაპროგრამებაში

#### 3.3.1 წრფივი დაპროგრამების პირდაპირი და დუალური ამოცანები

წრფივი დაპროგრამების ყველა ამოცანა დუალური (ორადული) ბუნებისაა, რაც გულისხმობს მოცემული ამოცანის პარალელურად კიდევ ერთი, ანალოგიური შინაარსისა და სტრუქტურის მქონე ამოცანის არსებობას. ამოცანას, რომელსაც პირველად მივიჩნევთ ეწოდება საწყისი ან პირდაპირი ამოცანა, ხოლო მისგან მიღებულ ამოცანას - მეორადი, დუალური ან შეუღლებული ამოცანა. მეორადი ამოცანის ფორმულირება, ამოხსნა და ამონახსნის ანალიზი, უპირველეს ყოვლისა, ინტერესს იწვევს ეკონომიკური თვალსაზრისით, რადგანაც რესურსების განაწილების დროს იგი საშუალებას გვაძლევს გამოვაელინოთ რეზერვები, რომლებიც საწყისი ამოცანის ამონახსნში შეიძლება არ აისახოს. გარდა ამისა, იგი ცალკეული რესურსის ვარიაციის პირობებში მიზნის ფუნქციის კორექტირების საშუალებას იძლევა.

დუალური ამოცანის ეკონომიკურ ინტერპრეტაციაში მდებარეობს იმ აუცილებელი კავშირების ფორმულირება, რომელიც არსებობს წრფივი დაპროგრამების პირველად და მეორად ამოცანებს შორის.

წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანისათვის შემოვიტანოთ დუალური ამოცანის ცნება.

ვთქვათ, წრფივი დაპროგრამების საწყის ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (3.52)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.53)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = s+1, s+2, \dots, m, \quad (3.54)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad l \leq n. \quad (3.55)$$

ამოცანას, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სახითა

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad (3.56)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (3.57)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, \quad j = l+1, 2, \dots, n, \quad (3.58)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.59)$$

ეწოდება (3.52)-(3.55) ამოცანის დუალური წრფივი დაპროგრამების ამოცანა.

(3.52)-(3.55) და (3.56)-(3.59) ამოცანები ქმნის ამოცანათა წყვილს, რომელსაც წრფივ დაპროგრამებაში დუალურ (ორადულ) წყვილს უწოდებენ.

აღნიშნული ამოცანების შედარებით ადვილად ვერაზიარებთ, რომ მოცემული ამოცანის დუალური ამოცანის შესადგენად საჭიროა ვისარგებლოთ შემდეგი წესებით:

1. ცვლადების საერთო რაოდენობა დუალურ (3.56)-(3.59) ამოცანაში და შეზღუდვების რაოდენობა საწყისი (3.52)-(3.55) ამოცანის (3.53)-(3.54) სისტემაში ერთნაირია და იგი  $m$ -ის ტოლია, ხოლო შეზღუდვების რაოდენობა (3.57)-(3.58) სისტემაში ტოლია საწყის ამოცანაში ცვლადების საერთო  $n$  რაოდენობისა.
2. საწყის (3.52)-(3.55) ამოცანაში მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმი იძებნება, ხოლო დუალურ (3.56)-(3.59) ამოცანაში - მიზნის ფუნქციის მინიმუმი.
3. მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

რომელიც შედგენილია (3.52)-(3.55) ამოცანის (3.53)-(3.54) შეზღუდვათა სისტემის ცვლადების კოეფიციენტებისაგან, და დუალური (3.56)-(3.59) ამოცანის ანალოგიური მატრიცა

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

ერთიმეორესაგან ტრანსპონირებით მიიღება (ე.ი. სტრიქონები გარდაიქმნება სვეტებად, ხოლო სვეტები - სტრიქონებად).

4. დუალური (3.56)-(3.59) ამოცანის მიზნის (3.56) ფუნქციის კოეფიციენტები ძირითადი (3.52)-(3.55) ამოცანის შეზღუდვათა თავისუფალი წევრებია, ხოლო (3.56)-(3.59) ამოცანის (3.57)-(3.58) შეზღუდვათა სისტემის თავისუფალი წევრები მიზნის (3.52) ფუნქციის კოეფიციენტების ტოლია.
5. თუ (3.52)-(3.55) ამოცანის  $x_j$  ცვლადმა შეიძლება მიიღოს მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობა, მაშინ მისი შესაბამისი  $j$ -ური შეზღუდვა (3.57)-(3.58) სისტემაში "≥" უტოლობის სახისაა. თუ  $x_j$  ცვლადმა შეიძლება მიიღოს, როგორც არაუარყოფითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობები, მაშინ მისი შესაბამისი  $j$ -ური შეზღუდვა (3.57)-(3.58) სისტემაში ტოლობას წარმოადგენს. ანალოგიური კავშირი არსებობს (3.52)-(3.55) ამოცანის (3.53)-(3.54) შეზღუდვებსა და დუალური (3.56)-(3.59) ამოცანის ცვლადებს შორის. თუ  $i$ -ური შეზღუდვა (3.53)-(3.54) სისტემაში უტოლობაა, მაშინ (3.56)-(3.59) ამოცანის  $y_i$  ცვლადი არაუარყოფითი უნდა იყოს. წინააღმდეგ შემთხვევაში  $y_i$  ცვლადმა შეიძლება მიიღოს როგორც არაუარყოფითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობები.

ჩვეულებრივ, სიმეტრიული და არასიმეტრიული (ასიმეტრიული) დუალური წყვილები განიხილება. დუალური ამოცანების სიმეტრიულ წყვილში პირდაპირი ამოცანის (3.53)-(3.54) სისტემის ყველა შეზღუდვა და დუალური ამოცანის (3.57)-(3.58) სისტემის ყველა შეზღუდვა უტოლობის სახისაა. ამდენად, ორივე ამოცანაში ცვლადმა შეიძლება მიიღოს მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობა.

### 3.3.2 კავშირი პირდაპირ და დუალურ ამოცანებს შორის

განივილით დუალურ ამოცანათა წყვილი, რომელიც შედგება წრფივი დაპროგრამების კანონიკური და მისი მეორადი ამოცანებისაგან:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (3.62)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.63)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.64)$$

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad (3.65)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.66)$$

მატრიცული სახით (3.62)-(3.64) და (3.65)-(3.66) ამოცანათა წყვილი შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\begin{cases} f(x) = c^T x \rightarrow \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\begin{cases} f^*(y) = b^T y \rightarrow \min, \\ A^T y \geq c. \end{cases} \quad (3.68)$$

განვიხილოთ დუალური ამოცანების (3.67) და (3.68) წყვილი. ამ ორი ამოცანიდან თითოეული ფაქტიურად წრფივი დაპროგრამების დამოუკიდებელი ამოცანაა და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეიძლება ამოიხსნას. მაგრამ სიმპლექს-მეთოდით მოძებნილი ერთ-ერთი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი მეორე ამოცანის ამოხსნის საშუალებას იძლევა.

პირდაპირი და დუალური ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნებს შორის კავშირს განსაზღვრავს დუალობის შემდეგი ძირითადი თეორემები (იხილე, მაგალითად, [4, 28, 48, 151]).

**თეორემა 3.14.** თუ  $x_0$  და  $y_0$  შესაბამისად (3.67) პირველადი და (3.68) მეორადი ამოცანების ნებისმიერი დასაშვები ამონახსნებია, ე.ი.  $Ax^0 \leq b$ ,  $x^0 \geq 0$ , და  $A^T y^0 \geq c$ ,  $y^0 \geq 0$ , მაშინ

$$c^T x^0 \leq b^T y^0. \quad (3.69)$$

(3.69) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი დასაშვები ამონახსნისათვის პირდაპირი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა არასოდეს აღემატება დასაშვები ამონახსნისათვის მეორადი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას.

**თეორემა 3.15** (დუალობის ძირითადი თეორემა). თუ  $x^0$  და  $y^0$  შესაბამისად (3.67) პირველადი და (3.68) მეორადი ამოცანების დასაშვები ამონახსნებია და სრულდება პირობა

$$c^T x^0 = b^T y^0, \quad (3.70)$$

მაშინ  $x^0$  და  $y^0$  წრფივი დაპროგრამების დუალური წყვილის ოპტიმალური ამონახსნებია.

**თეორემა 3.16** (ოპტიმალურ ამონახსნთა არსებობის თეორემა - დუალობის პირველი თეორემა). წრფივი დაპროგრამების ამოცანის (3.67) და (3.68) დუალური



წყვილიდან თუ ერთ-ერთს მაინც აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ მეორესაც აუცილებლად ექნება ოპტიმალური ამონახსნი, ამასთან, საწყისი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის რიცხვითი მნიშვნელობა მეორადი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მინიმუმის რიცხვითი მნიშვნელობის ტოლია:

$$f_{\max} = f_{\min}^*, \quad (3.71)$$

სადაც  $f_{\max} = f(x^{\max}) = c^T x^{\max}$ ,  $f_{\min}^* = f(y^{\min}) = b^T y^{\min}$ .

თუ დუალური წყვილის ერთ-ერთი ამოცანის მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრავია (ზემოდან - პირდაპირი (3.67) ამოცანისათვის ან ქვემოდან - (3.68) ამოცანისათვის), მაშინ მეორე ამოცანას ამონახსნი არა აქვს.

თეორემა 3.17 (ოპტიმალურ ამონახსნთა არსებობის თეორემა - დუალობის მეორე თეორემა). (3.67) ამოცანის  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  გეგმა და (3.68) ამოცანის  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^T$  გეგმა ამ ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

### 3.3.3 ამონახსნების განსაზღვრა ამოცანების დუალური წყვილისათვის

განვიხილოთ დუალური ამოცანების (3.67) და (3.68) წყვილი. დავუშვათ, რომ სიმპლექს-მეთოდის საშუალებით ნაპოვნია (3.67) ამოცანის ოპტიმალური  $x^*$  გეგმა და ეს გეგმა განსაზღვრულია ბაზისით, რომელიც  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$  ვექტორებისგან შედგება.

აღვნიშნოთ  $c_{\text{ბაზ}} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})^T$ -ით ვექტორ-სტრიქონი, რომელიც (3.62) მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტებისგან არის შედგენილი, ხოლო  $P^{-1}$ -ით -  $P$  მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, რომელიც შედგენილია ბაზისის  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$  ვექტორების კომპონენტებისაგან. მაშინ სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.18. თუ წრფივი დაპროგრამების (3.67) ამოცანას ოპტიმალური  $x^*$  ამონახსნი გააჩნია, მაშინ  $y^* = (P^{-1})^T c_{\text{ბაზ}}$  ვექტორი დუალური ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას წარმოადგენს.

ამგვარად, თუ სიმპლექს-მეთოდის საშუალებით (3.67) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს ვიპოვით, მაშინ ოპტიმალური (საბოლოო) სიმპლექსური ცხრილის საშუ-

აღებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $c_{k_0}$  და  $P^{-1}$ , რომლის საფუძველზე  $y^* = (P^{-1})^T c_{k_0}$  ფორმულის გამოყენებით (3.68) ამოცანის ოპტიმალური გეგმა გამოითვლება.

იმ შემთხვევაში, როცა  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ვექტორთა სისტემაში, რომელიც შედგენილია განტოლებათა (3.63) სისტემის კოეფიციენტებისაგან,  $m$  რაოდენობის ერთეულოვანი ვექტორია, მაშინ  $P^{-1}$  მატრიცას ის რიცხვები შეადგენს, რომელიც მოთავსებულია ოპტიმალური (საბოლოო) სიმპლექსური ცხრილის  $m$  სტრიქონის აღნიშნული ვექტორების შესაბამის სვეტებში. ამ შემთხვევაში დუალური ამოცანის ოპტიმალური გეგმის გამოსათვლელად არ არის საჭირო  $c_{k_0}$ -ისა და  $P^{-1}$ -ის ნამრავლის გამოყენება. ოპტიმალური გეგმის კომპონენტები  $(m+1)$ -ე სტრიქონის ერთეულოვანი ვექტორების შესაბამის ელემენტებს ემთხვევა, თუ ეს კოეფიციენტი  $c_j = 0$ , და ტოლია ამ სტრიქონის შესაბამისი ელემენტისა და  $c_j$ -ის ჯამისა, თუ  $c_j \neq 0$ .

ზემოთ აღნიშნულს ადგილი აქვს სიმეტრიული დუალური ამოცანების წყვილისთვისაც. ამასთან, ვინაიდან პირველადი ამოცანის შეზღუდვათა სისტემა " $\leq$ " სახის უტოლობებს შეიცავს, დუალური ამოცანის ოპტიმალური გეგმის კომპონენტები პირდაპირი ამოცანის საბოლოო სიმპლექსური ცხრილის  $(m+1)$ -ე სტრიქონში მდებარე შესაბამის რიცხვებს ემთხვევა. მითითებული რიცხვები განლაგებულია იმ ვექტორების სვეტებში, რომლებიც დამატებით ცვლადებს შეესაბამება.

### 3.3.4 დუალური ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

თუ წრფივი დაპროგრამების პირდაპირი და მეორადი ამოცანების წყვილში ცვლადების რიცხვი ორს არ აღემატება, ორივე ამოცანის ამონახსნი ადვილად მოიძებნება გეომეტრიული მეთოდით. ამასთან, შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემდეგ სამ ურთიერთგამომრიცხავ შემთხვევას:

1. ორივე ამოცანას გააჩნია ოპტიმალური ამონახსნი;
2. ერთ-ერთ ამოცანას აქვს დასაშვები ამონახსნები, მაგრამ მიზნის ფუნქციის შემოსაზღვრელობის გამო არა აქვს ოპტიმალური ამონახსნი; მაშინ მეორად ამოცანას ერთი დასაშვები ამონახსნიც არ გააჩნია;
3. ორივე ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

დუალური ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 3.9. ვთქვათ, მოცემულია წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის პირდაპირი ამოცანა:

$$\max \{ f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2 \}, \tag{3.72}$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 14, \quad (3.73)$$

$$x_1 + x_2 \leq 8, \quad (3.74)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.75)$$

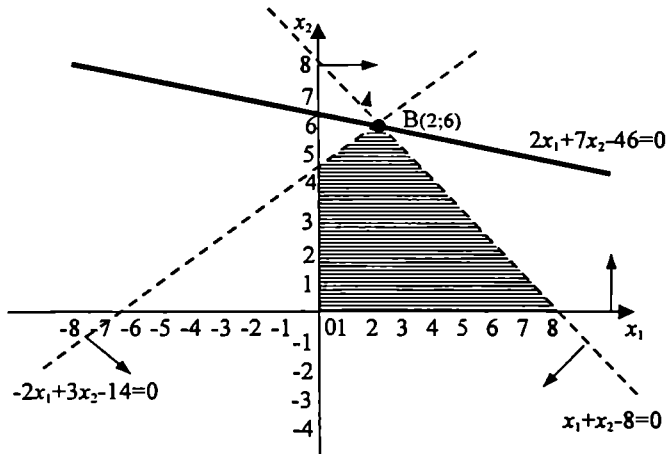
(3.62)-(3.63) ამოცანის შესაბამისი მეორადი ამოცანა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\min \{ f(y_1, y_2) = 14y_1 + 8y_2 \}, \quad (3.76)$$

$$-2y_1 + y_2 \geq 2, \quad (3.77)$$

$$3y_1 + y_2 \geq 7, \quad (3.78)$$

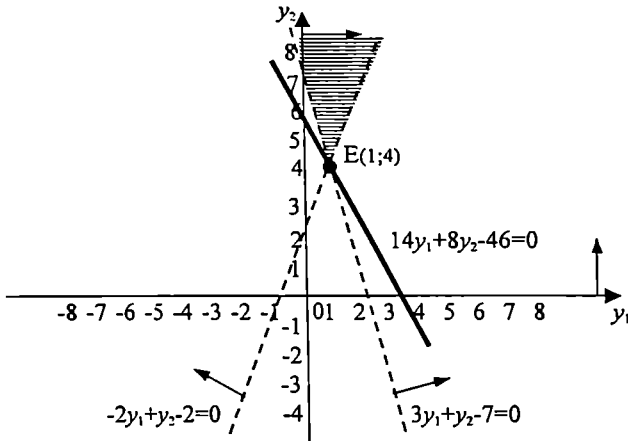
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \quad (3.79)$$



ნახ. 3.9

ამოხსნა. წრფივი დაპროგრამების ზემოთ მოცემული (3.72)-(3.75) და (3.76)-(3.79) ამოცანები ამოხსნათ გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საფუძველზე ანუ გეომეტრიული მეთოდით (იხ. ნახ. 3.9, ნახ. 3.10). 3.9 ნახაზიდან ჩანს, რომ საწყისი (3.72)-(3.75) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი მიიღება B წერტილში, სადაც  $x^* = (2;6)^T$ , და მას შეესაბამება  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა  $f_{\max} = 46$ . მეორადი (3.76)-(3.79) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს შეესაბამება E წერტილი (იხ. ნახ. 3.10), სადაც  $y^* = (1;4)^T$ , და მას შეესაბამება მიზნის ფუნქციის

მინიმალური მნიშვნელობა  $f_{\min}^* = 46$ . ამგვარად, ზემოთ ფორმულირებული 3.16 თეორემის შესაბამისად ოპტიმალურ წერტილებში ადგილი აქვს პირდაპირი და მეორადი ამოცანების მიზნის ფუნქციების მნიშვნელობების ტოლობას.



ნახ. 3.10

### 3.3.5 დუალური ამოცანის ეკონომიკური ინტერპრეტაცია

დუალური ამოცანის ეკონომიკური ინტერპრეტაციის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

**მაგალითი 3.10.** ვთქვათ, სამი სხვადასხვა  $A$ ,  $B$  და  $C$  სახის ნაკეთობის გამოსაშვებად წარმოება იყენებს სამი  $Ne_1$ ,  $Ne_2$  და  $Ne_3$  ტიპის ნედლეულს. თითოეული ნედლეულის რაოდენობა, მათი დანახარჯების ნორმები ერთეული ნაკეთობის წარმოებაზე და თითოეული ერთეული ნაკეთობის გასაყიდი ფასი მოცემულია 3.15 ცხრილში.

წარმოების მიერ გადასაწყვეტია შემდეგი ამოცანა: საჭიროა შედგეს პროდუქციის გამოშვების ისეთი გეგმა, რომ პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული ჯამური შემოსავალი იყოს მაქსიმალური და, ამასთან, უნდა შეფასდეს ის თითოეული  $Ne_1$ ,  $Ne_2$  და  $Ne_3$  ნედლეული, რომელიც საჭიროა პროდუქციის გამოსაშვებად. შეფასებები, რომელიც შესაბამისაა ნედლეულის ყოველ სახეობას, ისეთი უნდა შევარჩიოთ, რომ ყველა ნედლეულის მთლიანად გამოყენების შეფასება იყოს მინიმალური, ხოლო თითოეული  $A$ ,  $B$  და  $C$  ერთეული ნაკეთობის წარმოებაზე ნედლეულის ჯამური შეფასება მოცემული სახეობის პროდუქციის ერთეულის ფასზე ნაკლები არ იქნება.

ნედლეულის სახეობა	ნედლეულის რაოდენობა (კგ)	ნედლეულის დანახარჯები ერთეული ნაკეთობის წარმოებაზე (კგ)		
		A	B	C
Ne <sub>1</sub>	180	4	2	1
Ne <sub>2</sub>	210	3	1	3
Ne <sub>3</sub>	244	1	2	5
ერთეული ნაკეთობის გასაყიდი ფასი (ლარი)		10	14	12

ცხრილი 3.15

ამ(უ)ხსნა. შევადგინოთ დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი. წარმოებული A, B და C პროდუქციის რაოდენობა შესაბამისად აღვნიშნოთ  $x_1, x_2, x_3$ . მაშინ მაქსიმალური მოგება განისაზღვრება შემდეგი სახის მიზნის ფუნქციით:

$$\max \{f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3\}, \quad (3.80)$$

ზოლო ამოცანის შეზღუდვები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180, \quad (3.81)$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210, \quad (3.82)$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244, \quad (3.83)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad (3.84)$$

თითოეული Ne<sub>1</sub>, Ne<sub>2</sub> და Ne<sub>3</sub> ნედლეულის სახეობას შეესაბამოთ დუალური შეფასებები  $y_1, y_2$  და  $y_3$ . მაშინ გამოყენებული ნედლეულის შეფასების მინიმუმაციის ამოცანა დაიყვანება შემდეგი სახის მიზნის ფუნქციის მინიმუმაციაზე:

$$\min \{f^*(y_1, y_2, y_3) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3\}. \quad (3.85)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დუალური შეფასებები უნდა აკმაყოფილებდეს იმ პირობას, რომ ნედლეულის ჯამური შეფასება, რომელიც გამოიყენება ნებისმიერი სახეობის ერთეული ნაკეთობის გამოსაშვებად, ერთეული პროდუქციის ფასზე ნაკლები არ უნდა იყოს. ე.ი. ადგილი აქვს უტოლობათა სისტემას

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10, \quad (3.86)$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14, \quad (3.87)$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12, \quad (3.88)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \quad (3.89)$$

(3.80)-(3.84) და (3.85)-(3.89) ამოცანები ქმნის ოპტიმიზაციის ამოცანების სიმეტრიულ დუალურ წყვილს. პირველადი (3.80)-(3.84) ამოცანის ამოხსნა გაძღვეს A, B და C ნაკეთობის წარმოების ოპტიმალურ გეგმას, ხოლო მეორადი (3.85)-(3.89) ამოცანის ამოხსნა - ოპტიმალურ შეფასებათა სისტემას თითოეული  $Ne_1, Ne_2$  და  $Ne_3$  ნედლეულისათვის. სიმპლექს-მეთოდით ვიპოვოთ ერთ-ერთი ამოცანის, მაგალითად, (3.80)-(3.84) ამოცანის, ამონახსნი. საბოლოო (ოპტიმალური) სიმპლექსური ცხრილი მოყვანილია 3.16 ცხრილში.

j	$B_{j0}$	$c_{j0}$	$A_0$	10	14	12	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_2$	14	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
2	$A_5$	0	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
3	$A_3$	12	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4
$m+1$	$\Delta$		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

ცხრილი 3.16

3.16 ცხრილიდან ჩანს, რომ პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური გეგმის შესაბამისად საჭიროა დამზადდეს B ნაკეთობის 82 ერთეული და C ნაკეთობის 16 ერთეული პროდუქტი. გამოიყენებული რჩება  $Ne_2$  ნედლეულის 80 კგ; გამოშვებული პროდუქციის მთლიანი ღირებულება შეადგენს 1340 ლარს. ამავე ცხრილიდან ადვილად მიიღება დუალური ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი

$$y_1^* = 23/4; y_2^* = 0; y_3^* = 5/4.$$

$y_1^*$  და  $y_3^*$  შესაბამისად განსაზღვრავს პირობით დუალურ შეფასებებს ერთეულ  $Ne_1$  და  $Ne_3$  ნედლეულზე. ეს შეფასებები ნულისგან განსხვავდება, ამიტომ პროდუქციის ოპტიმალური გეგმის რეალიზაციის დროს ადგილი აქვს  $Ne_1$  და  $Ne_3$  ნედლეულის მთლიანად გამოყენებას. ერთეული  $Ne_2$  ნედლეულის შეფასება  $y_2^* = 0$ . პროდუქციის ოპტიმალური გეგმის რეალიზაციის დროს ამ სახეობის ნედლეული არ არის მთლიანად გამოყენებული.

ამგეარად, დადებითი დუალური შეფასება გააჩნია იმ ნედლეულის სახეობას, რომელიც პროდუქციის ოპტიმალური გეგმის რეალიზაციის დროს მთლიანადაა გამოყენებული. მაშასადამე, მეორადი შეფასებები განსაზღვრავს ნედლეულის გამოყენების დეფიციტურობას. ამასთან, დუალური შეფასების სიდიდე გვიჩვენებს რამდენით იზრდება პირდაპირი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა შესაბამისი სახის ნედლეულის რაოდენობის 1 კგ-ით გაზრდისას. მაგალითად,  $Ne_1$  ნედლეულის რაოდენობის 1 კგ-ით გაზრდის შემთხვევაში პროდუქციის წარმოების ისეთი ოპტიმალური გეგმის მიღების შესაძლებლობა იქმნება, როდესაც პროდუქციის დამზადების საერთო ღირებულება იზრდება 5.75 ლარით, ე.ი. ზდება 1345.75 ლარის

ტოლი. ამასთან, ის რიცხვითი მნიშვნელობები, რომელიც 3.16 ცხრილის  $A_4$  სვეტშია მოთავსებული, გვიჩვენებს, რომ გამოშვებული პროდუქციის ჯამური ღირებულების მითითებულ გაზრდას შეიძლება მივაღწიოთ B ნაკეთობის წარმოების 5/8 ერთეულით გაზრდით და C ნაკეთობის წარმოების 1/4 ერთეულით შემცირებით. შედეგად  $Ne_2$  ნედლეულის დანახარჯები შემცირდება 1/8 კგ-ით. ანალოგიურად,  $Ne_3$  ნედლეულის 1კგ-ით გაზრდა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ პროდუქციის წარმოების ახალი ოპტიმალური გეგმა, რომლის დროსაც პროდუქციის საერთო ღირებულება გაიზრდება 1.25 ლარით და გახდება 1341.25 ლარის ტოლი. ეს მიიღწევა C ნაკეთობის წარმოების 1/4 ერთეულით გაზრდით და B ნაკეთობის წარმოების 1/8 ერთეულით შემცირებით, რისთვისაც  $Ne_2$  ნედლეულის გამოყენების მოცულობა გაიზარდება 5/8 კგ-ით.

დაეუბრუნდეთ დუალური შეფასების განხილვას. გამოვითვალოთ დუალური ამოცანის მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა:

$$f_{\min}^* = 180 \cdot \frac{23}{4} + 210 \cdot 0 + 244 \cdot \frac{5}{4} = 1340,$$

რაც ზუსტად ემთხვევა პირველადი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამავე ამონახსნის (3.86)-(3.88) შეზღუდვების მარცხენა მხარეში ჩასმით მიიღება უტოლობათა სისტემა

$$23 + 5/4 > 10, \tag{3.90}$$

$$23/2 + 5/2 = 14, \tag{3.91}$$

$$23/4 + 25/4 = 12. \tag{3.92}$$

(3.90)-დან გამომდინარეობს, რომ დუალური (3.86) ამოცანის შეზღუდვა სრულდება როგორც მკაცრი უტოლობა, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ A ერთეული ნაკეთობის წარმოებაზე დახარჯული ნედლეულის დუალური შეფასება ამ ნაკეთობის ფასზე მეტია. ამიტომ ამ სახის პროდუქციის გამოშვება წამგებიანია. (3.91) და (3.92)-დან გამომდინარეობს, რომ დუალური ამოცანის (3.87) და (3.88) შეზღუდვები სრულდება როგორც ზუსტი ტოლობები. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დუალური შეფასებები იმ ნედლეულისა, რომელიც გამოყენებულია B და C ერთეული ნაკეთობების გამოსაშვებად, შესაბამისად, მათი ფასის ტოლია. ამიტომ, ამ სახეობათა პროდუქციის წარმოება ეკონომიკურად მიზანშეწონილია. ეს შედეგები ზუსტადაა ასახული პირველადი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნში.

**შენიშვნა 3.5.** ამგვარად, განხილულმა მაგალითმა დაგვარწმუნა, რომ დუალური შეფასებები მჭიდროდ დაკავშირებულია პირდაპირი ამოცანის ოპტიმალურ გეგმასთან. საწყისი მონაცემების ნებისმიერი ცვლილება აისახება როგორც პირდაპირი ამოცანის ოპტიმალურ გეგმაზე, ისე ოპტიმალური დუალური შეფასებების სისტემაზე.

### 3.4 მთელრიცხვანო წრფივი დაპროგრამება

#### 3.4.1 მთელრიცხვანო დაპროგრამების ამოცანის ტიპისებურება

სტატეკური ოპტიმიზაციის მრავალ ამოცანაში საჭიროა სოპტიმიზაციო ცვლადების მთელრიცხვანო მნიშვნელობების მიღება. ასეთი ამოცანებია, მაგალითად, სხვადასხვა სახის სატრანსპორტო საშუალებების განაწილება (მანქანების განაწილება მარშრუტების მიხედვით, გემებისა და თვითმფრინავების - რეისების მიხედვით), წარმოებათა შორის საწარმოო დავალებების განაწილება, დაზგა-დანადგარების დატვირთვა, მასალის გამოჭრა, საწარმოს მიერ ისეთი პროდუქციის გამოშვება, რომლის წილადური სახით წარმოდგენა შეუძლებელია და სხვ.

აღნიშნული სახის ამოცანებს მთელრიცხვანო წრფივი დაპროგრამება შეისწავლის, რომელიც ჩვეულებრივი (კლასიკური) წრფივი დაპროგრამების ამოცანებისგან განსხვავებით მოითხოვს ყველა ან ნაწილი ცვლადების მთელ რიცხვად წარმოდგენას. მთელრიცხვანო წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ფორმულირება შემდეგია. საჭიროა ვიპოვოთ

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{3.93}$$

წრფივი ფუნქციის მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.94}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.95}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.96}$$

სადაც  $Z$  მთელი რიცხვების სიმრავლეა.

(3.93)-(3.96) ამოცანა შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს მატრიცული სახითაც

$$c'x \rightarrow \max (\min), \tag{3.97}$$

$$Ax = b, \tag{3.98}$$

$$x \geq 0, \tag{3.99}$$

$$x \in \mathbb{Z}^n, \tag{3.100}$$



სადაც  $A = \|a_{ij}\|$  არის  $m \times n$  განზომილებიანი მოცემული მატრიცა,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ , შესაბამისად  $n$ - და  $m$ -განზომილებიანი მოცემული ვექტორებია,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - საძებნი  $n$ -განზომილებიანი ვექტორი, ხოლო  $Z$  -  $n$ -განზომილებიანი მთელრიცხვა ვექტორთა სივრცე.

ერთი შეხედვით, მთელრიცხვა დაპროგრამების (3.93)-(3.96) ამოცანა შეიძლება ჩვეულებრივ ამოიხსნას, ვთქვათ, სიმპლექს-მეთოდით და შემდეგ მოხდეს მიღებული შედეგის დამრგვალება მთელ რიცხვაძღვე. სამწუხაროდ, ასეთი მიდგომა ზოგ შემთხვევაში არ გამოდგება, ვინაიდან, თუ, მაგალითად, ამონახსნის მნიშვნელობა შეადგენს მთლიანი მოცულობის მნიშვნელოვან ნაწილს, მაშინ ამგვარი დამრგვალება ხშირად შეცდომას განაპირობებს. ამიტომ საჭიროა გამოყენებულ იქნეს ისეთი მეთოდი, სადაც ამოხსნის შედეგი მთელ რიცხვებში გამოიხატება.

**მაბალითი 3.11** ამოცხნათ მთელრიცხვა წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \},$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2,$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$x_1 \in Z, x_2 \in Z, x_3 \in Z.$$

ამოხსნა. მთელრიცხვეული პირობის გარეშე მოცემული ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნა გვაძლევს

$$x_1^* = 0.5; \quad x_2^* = 0; \quad x_3^* = 4.5,$$

ხოლო მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია  $f_{\max} = 14$ .

ვინაიდან  $x_1^* = 0.5$  და  $x_3^* = 4.5$  არ არის მთელი რიცხვები, საჭიროა მოცემული ამოცანა ამოიხსნას მთელრიცხვა დაპროგრამების სპეციალური მეთოდებით. ასეთი ამოხსნა გვაძლევს:

$$x_1^* = 2; \quad x_2^* = 2; \quad x_3^* = 5;$$

ამ შემთხვევაში მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლი იქნება  $f_{\max} = 11$ .

ცხადია, ეს შედეგი უარესია, ვიდრე პირველ შემთხვევაში და ეს ასეც უნდა იყოს; მაგრამ უკანასკნელი ამოხსნა საუკეთესოა ყველა იმ შემთხვევაში, როცა  $x_1$ ,  $x_2$  და  $x_3$  აუცილებლად მთელი რიცხვებია. თუ ჩვენ მივმართავთ დამრგვალების პროცედურას და ჩავთვლით, რომ

$$x_1^* = 1; \quad x_2^* = 0; \quad x_3^* = 4,$$

მაშინ ამოცანის ძირითადი შეზღუდვები არ კმაყოფილდება. ასევე არ დაკმაყოფილდება შეზღუდვები, თუ  $x_1$ -სა და  $x_3$ -ს დავამრგვალებთ საპირისპირო მიმართულებით.

### 3.4.2 მოკვეთის მეთოდი

მთელრიცხვა დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის ძირითადი იდეა დაკავშირებულია ე.წ. მოკვეთის პროცედურასთან, რომლის რეალიზაცია რ. გომორის ალგორითმის თანახმად ხორციელდება.

სანამ გომორის მეთოდს გავეცნობოდეთ, გავარკვიოთ შეიძლება თუ არა მთელრიცხვა წრფივი დაპროგრამების (3.93)-(3.96) ამოცანის დაყვანა წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე და ამ უკანასკნელის ამოსახსნელად ზემოთ განხილული სიმპლექს-მეთოდის გამოყენება.

სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა 3.19.** ვთქვათ,  $\Omega$  არის მრავალწახნაგა,  $\Omega^z$  -  $\Omega$ -ს მთელკომპონენტის წერტილთა სიმრავლე, ხოლო  $H \equiv \text{conv}(\Omega^z)$  -  $\Omega^z$ -ის ამოზნექილი გარსი. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს:

1.  $H$  მთელრიცხვა მრავალწახნაგა;
2.  $H$ -ის მთელკომპონენტის წერტილთა სიმრავლე  $\Omega$ -ს მთელკომპონენტის წერტილთა სიმრავლეს ემთხვევა, ე.ი.

$$H^z = \Omega^z;$$

3.  $H$  მრავალწახნაგას საყრდენი გვებების ანუ ამონახსნთა  $H^*$  სიმრავლე არის  $H^z$  სიმრავლის ქვესიმრავლე, ე.ი.  $H^* \subseteq H^z$ .

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი.

**შედეგი 3.1** ვთქვათ,  $\Omega$  არის მრავალწახნაგა,  $\Omega^z$  -  $\Omega$ -ს მთელკომპონენტის წერტილთა სიმრავლე,  $H \equiv \text{conv}(\Omega^z)$  -  $\Omega^z$ -ის ამოზნექილი გარსი;  $(H, c)$  წრფივი დაპროგრამების ამოცანაა ამონახსნთა  $H$  მრავალწახნაგით და  $c^T x$  მიზნის ფუნქციით, ხოლო  $(\Omega^z, c)$  - მთელრიცხვა წრფივი დაპროგრამების ამოცანა ამონახსნთა  $\Omega^z$  მრავალწახ-

ნავით და იგივე  $c^T x$  მიზნის ფუნქციით. თუ  $x(H, c)$  არის  $(H, c)$  ამოცანის ოპტიმალური გეგმა, მაშინ  $x(H, c)$  ასევე  $(\Omega^-, c)$  ამოცანის ოპტიმალური გეგმაა.

მაშასადამე, მთელირიცხვა დაპროგრამების  $(\Omega^-, c)$  ამოცანის ოპტიმალური გეგმა შეიძლება მივიღოთ წრფივი დაპროგრამების  $(H, c)$  ამოცანის ამოხსნით.

**თეორემა 3.20.** ვთქვათ,  $\Omega$  მრავალწახნაგაა,  $\Omega^-$  -  $\Omega$ -ს მთელკომპონენტიან წერტილთა სიმრავლე, ხოლო  $H \equiv \text{conv}(\Omega^-)$  -  $\Omega^-$ -ის ამოხსნილი გარსი. დაუვშვათ, რომ  $U$  მთელირიცხვა მრავალწახნაგაა და  $U^* = \Omega^-$ . მაშინ  $U = H$ .

(ზემოთ მოყვანილი დებულებების დამტკიცება მოცემულია მონოგრაფიაში [83]).

წრფივი დაპროგრამების იმ ეკვივალენტური ამოცანის განსაზღვრა, რომლის ამონახსნიც იგივეა, რაც მოცემული მთელირიცხვა დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი, საკმარისად დიდ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამჟამად არ არსებობს ეფექტური ალგორითმები აღნიშნული პრობლემის გადასაჭრელად. გომორის მეთოდი დამყარებულია ე.წ. მოკვეთის იდეაზე, რომლის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მარტივი მაგალითი.

**მაგალითი 3.12** ამოეხსნათ მთელირიცხვა წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \}, \quad (3.101)$$

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38, \quad (3.102)$$

$$x_1 + x_2 \leq 9, \quad (3.103)$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 4, \quad (3.104)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (3.105)$$

$$x_1 \in Z, x_2 \in Z. \quad (3.106)$$

ამოხსნა. დასმული ამოცანა გრაფიკულად წარმოდგენილია ნახ. 3.11-ზე. (3.101)-(3.106) ამოცანის ამონახსნთა მრავალწახნაგა განისაზღვრება შემდეგი წრფეების გადაკვეთით:

$$l_1: 2x_1 + 11x_2 = 38,$$

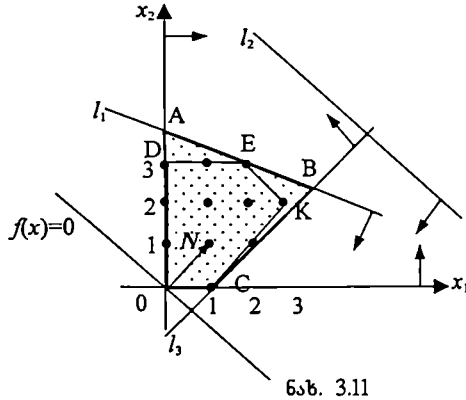
$$l_2: x_1 + x_2 = 9,$$

$$l_3: 4x_1 - 5x_2 = 4,$$

$$l_4: x_1 = 0,$$

$$I_3: x_2 = 0$$

და მას ნახაზზე OABC მრავალკუთხედი შეესაბამება.



ნახ. 3.11

ამოვხსნათ (3.91)-(3.95) წრფივი ამოცანა, მივიღებთ:  $x_1^* = 13/3$ ,  $x_2^* = 8/3$ , სადაც მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაა  $f_{\max} = 7$ . ვინაიდან  $x_1$  და  $x_2$  ცვლადების მიღებული მნიშვნელობები არ არის მთელი რიცხვები, ამიტომ  $(13/3; 8/3)$  ამონახსნი არ გვაკმაყოფილებს.

OABC მრავალკუთხედი შეიცავს 12 მთელი რიცხვი წერტილს. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ (3.91)-(3.96) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი, OABC მრავალკუთხედი შევცვალოთ ODEKC მრავალკუთხედით, რომელიც შეიცავს ყველა დასაშვებ წერტილს მთელი რიცხვით და რომლის თითოეული წვეროს კოორდინატები მთელი რიცხვებია. თუ ODEKC მრავალკუთხედზე ვიპოვით (3.91) ფუნქციის მაქსიმუმს, მაშინ ამ წერტილის კოორდინატებით განისაზღვრება (3.91)-(3.96) ამოცანის ოპტიმალური გეგმა.

ამოცანის ამოსახსნელად ავაგოთ  $x_1 + x_2 = 0$  წრფე და მისი  $N = (1; 1)$  ნორმალი. წრფე  $N$  ნორმალის მიმართულებით პარალელურად გადავიტანოთ მანამ, სანამ იგი არ გაივლის ODEKC მრავალკუთხედთან საერთო ბოლო წერტილზე. მიღებული წერტილის კოორდინატები განსაზღვრავს (3.91)-(3.96) ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას. ჩვენს შემთხვევაში საძებნი აღმოჩნდა ორი წერტილი:  $E = (2; 3)$  და  $K = (3; 2)$ , რომელშიც  $f_{\max} = 5$ .

ფაქტიურად ამოცანის ამოხსნა განხორციელდა მოკვეთის მეთოდით, ვინაიდან OABC მრავალკუთხედს მოკვეთეთ ნაწილი, რომელიც არ შეიცავს მთელირიცხვა წერტილებს.

### 3.4.3 გომორის მეთოდი

მოკვეთის მეთოდის რეალიზაცია შეიძლება განხორციელდეს ე.წ. გომორის მეთოდის საშუალებით.

განვიხილოთ მთელირიცხვა წრფივი დაპროგრამების (3.93)-(3.96) ამოცანა. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ აღგილი აქვს *მაქსიმიზაციის ამოცანას*. აღვნიშნოთ (3.93)-(3.95) ამოცანა  $(\Omega, c)$ -თი და დავუშვათ, რომ  $X(\Omega, c)$  ამოცანის ოპტიმალური საყრდენი გეგმაა, რომლის ბაზისური კომპონენტებია  $x_0, i \in B$ . გამოვსახოთ მიზნის ფუნქცია და ყველა  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადი არაბაზისური  $x_j, j \in N$ , ცვლადების საშუალებით, რომლებიც შეესაბამება  $(\Omega, c)$  ამოცანის ოპტიმალურ საყრდენ გეგმას

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j \in N} x_{ij}(-x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

აქ  $N$  და  $B$  შესაბამისად არაბაზისური და ბაზისური ცვლადების სიმრავლეა ამოცანის საყრდენი  $X(\Omega, c)$  გეგმისათვის,  $x_0, i=1, 2, \dots, n$ , -  $X(\Omega, c)$ -ის კომპონენტები,  $x_{00}$  - მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა  $X(\Omega, c)$ -სათვის, ხოლო  $x_{ij}, i=0, 1, 2, \dots, n, j \in N$ , - ამოცანის ვექტორთა სისტემის არაბაზისური ვექტორების საშუალებით დაშლის კოეფიციენტები (ყველა ელემენტი მიღებულია სიმპლექს-მეთოდის ცხრილიდან).

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი მთელი და წილადი ნაწილისაგან შედგება. დავუშვათ  $a$  ნამდვილი რიცხვია.  $a$  რიცხვის მთელი ნაწილი  $[a]$  არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება  $a$ -ს.  $a$ -ს მთელი ნაწილი აღინიშნება  $[a]$ -თი. მაგალითად,  $[3.5]=3, [10/3]=3, [5]=5, [-3.5]=-4, [-10/3]=-4, [-5]=-5$ .  $a$  რიცხვის წილადური ნაწილი არის  $a$ -სა და მისი მთელი ნაწილის სხვაობა.  $a$ -ს წილადური ნაწილი აღინიშნება  $\beta$ -თი ან  $\{a\}$ -თი, ე.ი.  $\beta = \{a\} = a - [a]$ . მაგალითად,  $\{3.5\}=0.5, \{10/3\}=1/3, \{5\}=0, \{-3.5\}=0.5, \{-10/3\}=2/3, \{-5\}=0$ . ამგვარად, შეგვიძლია მივუთითოთ წილადური ნაწილის ცვლილების დიაპაზონი:  $0 \leq \beta < 1$ .

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

**თეორემა 3.21** ვთქვათ

$$Z_i \equiv Z_i(x) = -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} (-\{x_{ij}\})(-x_j). \quad (3.107)$$

დაეუშვათ, რომ  $x$  არის  $(\Omega^c, c)$  ამოცანის ((3.93)-(3.96)) გეგმა; მაშინ  $Z_i$  მთელი რიცხვია და, ამასთან,

$$Z_i \geq 0, \quad i=0,1,2,\dots,n. \quad (3.108)$$

**შედეგი 3.2** დაეუშვათ, წრფივი დაპროგრამების  $(\Omega, c)$  ამოცანის  $X(\Omega, c)$  ოპტიმალური გეგმა არ აკმაყოფილებს მთელრიცხვულ პირობას, ე.ი. რომელიღაც  $i$ -ური ინდექსისათვის  $x_{i0}$  არ არის მთელი რიცხვი. მაშინ (3.107) და (3.108) გამოსახულებები გვაძლევს წესიერ მოკვეთას.

$X(\Omega, c)$  გეგმა მიესადაგება წრფივი დაპროგრამების დამხმარე ამოცანებს. მოკვეთის მეთოდის ერთერთი მთავარი პრობლემაა შეზღუდვების თანდათანობითი ზრდა.

თუ (3.93)-(3.95) ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნისას ბოლო ცხრილში მივიღეთ, რომ ყველა  $x_{i0}$ ,  $i \in B$ , მთელი რიცხვია, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამოხსნილია არა მარტო წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, არამედ მთელრიცხვა დაპროგრამების ამოცანაც. იმ შემთხვევაში, თუ ცვლადების გარკვეული ნაწილი წილადია, მაშინ ამოხსნის პროცესი უნდა გაგრძელდეს ამოცანაში დამატებითი შეზღუდვების შეტანით. თითოეული შეზღუდვა წესიერ მოკვეთას წარმოადგენს.

შევადგინოთ დამატებითი შეზღუდვა რომელიმე ბაზისური  $x_i$  ცვლადისათვის, რომლის შესაბამისი ოპტიმალური საყრდენი გეგმის კომპონენტი არამთელრიცხვა აღმოჩნდა. ასეთ შეზღუდვას ექნება სახე

$$-\beta_i + \sum_{j \in N} (-\beta_{ij})(-x_j) \geq 0, \quad (3.109)$$

სადაც  $\beta_i$  და  $\beta_{ij}$  განისაზღვრება სიმპლექს-მეთოდის ცხრილის  $i$ -ური სტრიქონიდან:  $\beta_i = \{x_{i0}\}$ ,  $\beta_{ij} = \{x_{ij}\}$ ,  $j \in N$ . (თუ მთელრიცხვული პირობა არ კმაყოფილდება რამდენიმე ცვლადისათვის, მაშინ დამატებითი შეზღუდვები უნდა შედგეს იმ სტრიქონისათვის, რომლის თავისუფალ წევრს აქვს უფრო მეტი წილადური ნაწილი). ზემოთ მოყვანილი (3.109) შეზღუდვა უნდა დაემატოს სიმპლექს-მეთოდის ცხრილს, როგორც ბოლო სტრიქონი, რის შემდეგ ხორციელდება ცვლადების შეცვლა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი.

**მაგალითი 3.13.** ამოხსნათ მთელრიცხვა წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{f(x_1, x_2) = 7x_1 + 3x_2\}, \quad (3.110)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20, \quad (3.111)$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 38, \quad (3.112)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (3.113)$$

$$x_1 \in Z, x_2 \in Z. \quad (3.114)$$

ამოხსნა. (3.110)-(3.113) ამოცანა ამოვხსნათ სიმპლექს-მეთოდით, რომლის შედეგებიც წარმოდგენილია 3.17 ცხრილში.

j	B <sub>ბაზ</sub>	c <sub>ბაზ</sub>	A <sub>0</sub>	7	3	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
1	A <sub>3</sub>	0	20	5	2	1	0
2	A <sub>4</sub>	0	38	8	<u>4</u>	0	1
m+1	Δ <sub>j</sub>		0	-7	-3	0	0
1	A <sub>3</sub>	0	1	<u>1</u>	0	1	-1/2
2	A <sub>2</sub>	3	19/2	2	1	0	1/4
m+1	Δ <sub>j</sub>		57/2	-1	0	0	3/4
1	A <sub>1</sub>	7	1	1	0	1	-1/2
2	A <sub>2</sub>	3	15/2	0	1	-2	5/4
m+1	Δ <sub>j</sub>		59/2	0	0	1	1/4

ცხრილი 3.17

ცხრილიდან ჩანს, რომ (3.110)-(3.113) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია

$$x_1^* = 1; \quad x_2^* = 15/2;$$

$$f_{\max} = 59/2.$$

მაგრამ  $x_2^*$  არ არის მთელირიცხვა სიდიდე და (1;15/2) წერტილი არ წარმოადგენს (3.110)-(3.114) ამოცანის ამონახსნს. ამიტომ (3.109)-ის საფუძველზე შევადგინოთ დამატებითი შეზღუდვა (წესიერი მოკვეთა), რომელიც შეესაბამება  $x_2^* = 15/2$ -ს,

$$-1/2 - (-0x_3 - 1/4x_4) \geq 0.$$

წრფივი დაპროგრამება

იგი დამატებითი არაუარყოფითი  $x_3$  ცვლადის შემოტანით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$0x_3 - 1/4x_4 + x_5 = -1/2. \tag{3.115}$$

(3.115) განტოლების გათვალისწინებით 3.17 ცხრილის ბოლო ოპტიმალურ ქვეცხრილს მიუვამატოთ თითო სტრიქონი და სვეტი. ახალ სტრიქონში ჩაწერეთ შესაბამისი მნიშვნელობები (3.105)-დან, ხოლო ახალ სვეტში - ახალი ბაზისური  $A_5$  კექტორი. მივიღებთ ახალ სიმპლექსურ ცხრილს (იხ. ცხრილი 3.18).

3.18 ცხრილიდან ჩანს, რომ გვაქვს გაფართოებული (3.110)-(3.113), (3.115) ამოცანის ფსევდოგეგმა  $(1; 15/2; 0; 0; -1/2)^T$ , რომელიც ერთი კომპონენტის უარყოფითობის გამო გეგმას არ წარმოადგენს. 3.18 ცხრილისათვის გამოვიყენოთ დუალური სიმპლექს-მეთოდი (მაგალითად, იხ. [28, 84]), გარდაქმნის წამყვანი  $-1/4$  ელემენტით. მაშინ ჟორდან-გაუსის გამორიცხვის მეთოდის საშუალებით მივიღებთ 3.19 ცხრილს.

$j$	$B_{\text{ბაზ}}$	$c_{\text{ბაზ}}$	$A_0$	7	3	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_1$	7	1	1	0	1	-1/2	0
2	$A_2$	3	15/2	0	1	-2	5/4	0
3	$A_3$	0	-1/2	0	0	0	<u>-1/4</u>	1
$m+1$	$\Delta_j$		59/2	0	0	1	1/4	0

ცხრილი 3.18

$j$	$B_{\text{ბაზ}}$	$c_{\text{ბაზ}}$	$A_0$	7	3	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_1$	7	2	1	0	1	0	-2
2	$A_2$	3	5	0	1	-2	0	5
3	$A_4$	0	2	0	0	0	1	-4
$m+1$	$\Delta_j$		29	0	0	1	0	1

ცხრილი 3.19

როგორც 3.19 ცხრილიდან ჩანს, მიღებულია ახალი ფსევდოგეგმა  $(2; 5; 0; 2; 0)^T$ , რომელიც თავისი კომპონენტების არაუარყოფითობის გამო წარმოადგენს (3.110)-(3.113), (3.115) ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას, და მისი ყველა კომპონენტი მთელ-



რიცხვაა. მაშასადამე, (3.110)-(3.114) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:  $x_{max}=(2;5)^T$ ,  $f_{max}=29$ .

### 3.4.4 საზღვრებისა და განშტოების მეთოდი

საზღვრებისა და განშტოების მეთოდი მთელრიცხვა დაპროგრამების ერთ-ერთი გავრცელებული მეთოდია. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს [83].

(3.93)-(3.96) ამოცანა თავდაპირველად ამოიხსნება მთელრიცხვული პირობის გათვალისწინების გარეშე, ე.ი. ამოიხსნება (3.93)-(3.95) ამოცანა. შემდეგ განიხილება ნებისმიერი არამთელრიცხვა ბაზისური ცვლადი  $x_i$ , მაგალითად  $x_2=15/2$ , როგორც ეს მიღებული იყო 3.13 ამოცანაში. მოცემულ შეზღუდვათა სისტემას დაემატება ორი უტოლობა:

$$x_2 \geq 7 \quad (3.116)$$

და

$$x_2 \leq 7, \quad (3.117)$$

და გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების ორი ახალი ამოცანა. ამ ამოცანებს შესაბამისად აქვს სახე: (3.110)-(3.113), (3.116) და (3.110)-(3.113), (3.117). ორივე შეიტაცვს ორ თავდაპირველ ((3.111), (3.112)) და ერთ დამატებით შეზღუდვას.

დავუშვათ, რომ თითოეულ ახალ ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მთელრიცხვულ პირობას. მაშინ ის ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება მიზნის ფუნქციის უფრო მეტ (მინიმიზაციის დროს უფრო ნაკლებ) მნიშვნელობას, ჩაითვლება ოპტიმალურ ამონახსნად.

იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთი ამოცანის ამონახსნი აკმაყოფილებს მთელრიცხვულ პირობას, ხოლო მეორე ამოცანის ამონახსნი არ აკმაყოფილებს, მაშინ პირველი  $L_1$  ამოცანის მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა უნდა მივიღოთ როგორც ზედა ზღვარი, ხოლო მეორე ამოცანის საფუძველზე კვლავ განიხილება ორი დამატებითი შეზღუდვა:  $x_j \geq [b_j]+1$ ,  $x_j \leq [b_j]$ , სადაც  $[b_j]$  იმ ბაზისური  $x_j$  ცვლადის მთელი ნაწილია, რომელიც არ არის მთელრიცხვა. აღნიშნული პროცედურა ანალოგიურად განმეორდება მანამ, სანამ ერთ-ერთ დასაშვებ განშტოებაზე არ მიიღლება მთელრიცხვა ამონახსნი.

### 3.5 წრფივი დაპროგრამების არასაკუთრივი ამოცანა

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$L: \max \{ c^T x: Ax \leq b, x \geq 0 \}, \quad (3.118)$$

სადაც  $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in R^n$ ,  $b=(b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in R^m$ ,  $A=(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $A_i=(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})^T \in R^m$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , და ვთქვათ,  $l$  მისი ოპტიმალური მნიშვნელობაა.  $L$  ამოცანის ჩაწერის (3.118) ფორმა მოსახერხებელია სტანდარტული და სასარგებლო ეკონომიკურ-ტექნოლოგიური ინტერპრეტაციის გამო, რომლის თანახმადაც  $b$  რესურსების ვექტორია,  $c$  - ფასების ვექტორი. მათემატიკური თვალსაზრისით  $A$  მატრიცის (ე.წ. ტექნოლოგიური მატრიცის) სვეტები ტექნოლოგიურ საშუალებებს განსაზღვრავს რესურსების იმ დანახარჯების მოცემის გზით, რომელიც შესაბამისი საშუალებების ერთეულოვანი ინტენსივობის გამოყენებაზე მოდის. ასე, რომ ინტენსივობის  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  ვექტორი ასახავს წარმოების დონეს (წარმოების გეგმას).

(3.118) ამოცანის დუალურია წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$L^*: \min \{ b^T u: A^T u \geq c, u \geq 0 \}, \quad (3.118)^*$$

რომლის ოპტიმალური მნიშვნელობა აღვნიშნოთ  $l^*$ -ით. შემოვიღოთ სიმრავლეები

$$\Omega = \{ x \geq 0: Ax \leq b \},$$

$$\Omega^* = \{ u \geq 0: A^T u \geq c \}.$$

ამ სიმრავლეებს შესაბამისად  $L$  და  $L^*$  ამოცანების დასაშვებ სიმრავლეებს უწოდებენ. ძირითადი ფაქტი, რომელიც  $L$  და  $L^*$  ამოცანებს აკავშირებს, შეიძლება დუალობის თეორემის სახით ჩამოვყალიბოთ [58, 151]:

თეორემა 3.22 თუ  $L$  ამოცანა ამოხსნადია, მაშინ  $L^*$  ამოცანაც, აგრეთვე, ამოხსნადია; ამასთან, ოპტიმალური მნიშვნელობებისათვის სრულდება ტოლობა  $l=l^*$ .

$(L^*)^* = L$  ცნობილი ტოლობის თანახმად მოყვანილი მტკიცება  $L$  და  $L^*$ -ის მიმართ სიმეტრიულია.

თუ  $L$  ამოცანა ამოხსნადია, მაშინ მას საკუთრივ ამოცანას ეუწოდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არასაკუთრივ ამოცანას.

$\Omega \neq \emptyset$  და  $\Omega^* \neq \emptyset$  დაშვება  $L$  ამოცანის ამოხსნადობის ტოლფასია და, აქედან გამომდინარე,  $L^*$  ამოცანის ამოხსნადობის ტოლფასიცაა.

### 3.5.1 არასაკუთრივი ამოცანების კლასიფიკაცია

თუ  $L$  ამოცანა არასაკუთრივია, მაშინ შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევა:

$$1. \quad \Omega = \emptyset, \quad \Omega' \neq \emptyset; \quad (3.119)$$

$$2. \quad \Omega \neq \emptyset, \quad \Omega' = \emptyset; \quad (3.120)$$

$$3. \quad \Omega = \emptyset, \quad \Omega' = \emptyset. \quad (3.121)$$

იმის მიხედვით, (3.119)-(3.121) პირობებიდან თუ რომელი სრულდება, შესაბამისად აღვილი აქვს I, II და III გვარის არასაკუთრივ ამოცანას.

წრფივი დაპროგრამების არასაკუთრივი ამოცანების მოცემული კლასიფიკაციიდან ჩანს, რომ თუ  $L$  I გვარის არასაკუთრივი ამოცანაა, მაშინ  $L'$  არის II გვარის ამოცანა (და პირიქით); თუ  $L$  III გვარის არასაკუთრივი ამოცანაა, მაშინ  $L'$  აგრეთვე III გვარის არასაკუთრივი ამოცანაა (და პირიქით).

დავახასიათოთ თითოეული პირობა. (3.119) პირობა ნიშნავს, რომ როგორც კი რაღაც  $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_m)^T \in R^m$  ნაზრდისათვის უტოლობათა სისტემა

$$Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0 \quad (3.122)$$

თავსებადია, მაშინ ამოცანა

$$\max \{ c^T x : Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0 \} \quad (3.123)$$

ამოხსნადია. მართლაც, (3.122) სისტემის თავსებადობიდან და  $\Omega' \neq \emptyset$  პირობიდან გამომდინარეობს როგორც (3.123) ამოცანის, ისე მისი შეუღლებული ამოცანის

$$\min \{ (b + \Delta b)^T u : A^T u \geq c, \quad u \geq 0 \} \quad (3.123)^\circ$$

ამოხსნადობა.

პირიქით, თუ რაღაც  $\Delta b$  ნაზრდისათვის (3.123) ამოცანა ამოხსნადია, მაშინ (3.123) $^\circ$  ამოცანის ამოხსნადობიდან გამომდინარეობს, რომ  $\Omega' \neq \emptyset$ .

(3.120) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ  $L$  ამოცანაში  $\bar{I}$ -ის ოპტიმალური მნიშვნელობა  $+\infty$ -ის ტოლია. ბოლოს, (3.121) პირობა შემდეგი პირობის ექვივალენტურია: ნებისმიერი  $\Delta b$  ნაზრდისათვის, რომლის დროსაც (3.122) სისტემა ამოხსნადია, (3.123) ამოცანის ოპტიმალური მნიშვნელობა  $+\infty$ -ის ტოლია.

აღნიშნული ტრივიალური შედეგები წრფივი დაპროგრამების ამოცანების დუალობის თეორემიდან გამომდინარეობს.

### 3.5.2 არასაკუთრივი ამოცანების შინაარსობრივი ინტერპრეტაცია

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სიტუაცია, როდესაც წრფივი დაპროგრამების მოდელში რეალური ეკონომიკური ამოცანის შესაბამის შეზღუდვათა სისტემა თავისებურად, საკმაოდ ჩვეულებრივი მოვლენაა. ზშირად,  $b$  ვექტორის  $\Delta b$  ნაზრდით კორექტირება (3.123) ამოცანის ამოხსნადობას განაპირობებს, რომელსაც (3.119) შემთხვევა შეესაბამება.  $b$  ვექტორის კორექტირებას შეიძლება საფუძვლად დაედოს სხვადასხვა მიდგომა, რომელსაც მივყავართ ამოცანის სხვადასხვა მათემატიკურ დასამდე. მაგალითად, მაკორექტირებელი  $\Delta b$  ნაზრდისაგან შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ იგი წარმოადგენდეს არგუმენტს ოპტიმიზაციის შემდეგი ამოცანისათვის:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n \bar{u}_j \Delta b_j : Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0 \right\}, \quad (3.124)$$

სადაც  $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_m)^T \in R^m$ ,  $\bar{u}_j > 0, j = 1, 2, \dots, m$ . ამასთან,  $\bar{u}_j, j = 1, 2, \dots, m$ , კოეფიციენტების ინტერპრეტაცია შესაძლებელია როგორც დანაკარგების ზომა  $b_j, j = 1, 2, \dots, m$ , რესურსის ერთი ერთეულით შეცვლისას (ე.ი.  $b_j$ -ის  $(b_j + 1)$ -ით შეცვლისას). აღწერილი კორექტირების შინაარსის მიხედვით ზოგიერთი  $\Delta b$  ნაზრდი შეიძლება იყოს უარყოფითიც და მაშინ დანაკარგების ჯამურ  $\sum_{j=1}^m \bar{u}_j \Delta b_j$  ფუნქციაში უარყოფითი იქნება შესაბამისი  $\bar{u}_j \Delta b_j$  შესაკრებები.

რამდენადმე განსხვავებული, მაგრამ შინაარსობრივად ცხადია კორექტირება, რომელიც ექვემდებარება ოპტიმიზაციის ამოცანას

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n \bar{u}_j \Delta b_j : Ax \leq b + \Delta b, \quad [x, \Delta b] \geq 0 \right\}. \quad (3.125)$$

$L$  ამოცანისათვის  $I$  გვარის არასაკუთრივობის ზემოთ განხილული ინტერპრეტაცია დაკავშირებულია რესურსის დეფიციტთან. ასეთი ამოცანის კორექციას ვუწოდოთ კორექცია რესურსების დეფიციტის მიმართ. თუმცა, შესაძლებელია, რომ არათავსებადობის მიზეზს ვექტორის მოცემისას დაშვებული უზუსტობა წარმოადგენდეს (საზოგადოდ, თითქმის ყველა ეკონომიკური მაჩვენებელი მიახლოებითია).

შემდეგში ვნახავთ, საწყისი მონაცემების უზუსტობას თუ როგორ მივყავართ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის არასაკუთრივობის სხვადასხვა ფორმებთან.

ჩვეულებრივ, ამა თუ იმ  $\alpha$  მაჩვენებლისათვის შესაძლებელია მივუთითოთ მხოლოდ  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  მონაკვეთი, რომელსაც იგი ეკუთვნის, იშვიათ შემთხვევაში კი - მოცემულ მონაკვეთზე მისი განაწილების კანონი. ამიტომ, თუ  $b$  ვექტორის მნიშვნელობე-

ბის შესაძლო საზღვრებია  $\underline{b}$  და  $\bar{b}$ , რაც მისი მოცემის უზუსტობას განსაზღვრავს, მაშინ მნიშვნელოვანია გამოვარკვიოთ, თავსებადა თუ არა უტოლობათა სისტემა

$$Ax \leq y, \quad \underline{b} \leq y \leq \bar{b}, \quad x \geq 0. \quad (3.126)$$

თუ იგი რაღაც  $\bar{y} \in [\underline{b}, \bar{b}]$  ვექტორისათვის  $x$ -ის მიმართ თავსებადია, მაშინ ყველა საფუძველი გვაქვს, რომ (3.118) ამოცანაში შეზღუდვათა სისტემა შეეცვალოთ შემდეგი სისტემით:

$$Ax \leq \bar{y}, \quad x \geq 0,$$

ხოლო თვით (3.118) ამოცანა - ამოცანით:

$$\max \{ c^T x : Ax \leq \bar{y}, \quad x \geq 0 \}.$$

წრფივი დაპროგრამების II გვარის არასაკუთრივი ამოცანის არსის განხილვა დაკავშირებულია წრფივი დაპროგრამების ამოხსნადი ამოცანის საწყისი მონაცემების ამა თუ იმ ქვესისტემის მიმართ კორექტირების ცნებასთან. (3.118) ამოცანის საწყისი მონაცემები წარმოადგენს სრულ სისტემას

$$I = \{ \{a_{ji}\}_{j,i=1}^m, \{b_j\}_{j=1}^m, \{a_i\}_{i=1}^n \}.$$

ჩვენთვის მოსახერხებელია, რომ შემდგომში გამოვიყენოთ (3.118) ამოცანის  $I'$ -მდგრადობის, სადაც  $I' \subset I$ , შემდეგი განსაზღვრება.

**ბნსაზღვრება 3.19.** (3.118) ამოცანას ეუწოდებთ  $I'$ -მდგრადს, თუ  $I'$ -ის პარამეტრების მცირე ცვლილებების შემთხვევაშიც კი ამოცანა ამოხსნადია, ხოლო მისი ოპტიმალური მნიშვნელობა უწყვეტად დამოკიდებულია ამ ცვლილებებზე.

თუ  $I' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , მაშინ შეგვიძლია ვიმსჯელოთ  $c$ -მდგრადობაზე. ცნობილია, რომ (3.118) ამოცანა  $c$ -მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ოპტიმალური ამონახსნების  $\bar{\Omega}$  სიმრავლე შემოსაზღვრულია. თუ იგი შემოუსაზღვრავია, მაშინ არსებობს რაგინდ მცირე (ნორმით)  $\Delta c$  ვარიაციები, რომლებისთვისაც

$$\sup \{ (c + \Delta c)^T x : x \in \bar{\Omega} \} = +\infty. \quad (3.127)$$

მართლაც, ვინაიდან  $\bar{\Omega}$  სიმრავლე შემოუსაზღვრავია, ამასთან, ამოხნიელი და ჩაკეტილი, ამიტომ ნებისმიერი  $\bar{x} \in \bar{\Omega}$  ვექტორისათვის არსებობს ისეთი  $s \neq 0$  ვექტორი, რომ  $x(t) = \bar{x} + ts \in \bar{\Omega} \quad \forall t > 0$ . რადგან  $c^T x(t) = \bar{l}$ , ამიტომ  $c^T s = 0$ . ავიღოთ  $\Delta c = as$ ,  $a > 0$ . თუ გავითვალისწინებთ  $c^T s = 0$ , მაშინ  $(c + \Delta c)^T x(t) = a(\bar{x}, s) + c^T \bar{x} + t a \|s\|^2$  თანაფარდობიდან გამომდინარეობს  $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((c + \Delta c)^T x(t)) = +\infty$ , რაც გვაძლევს (3.127)-ს.

ზემოთ აღნიშნული გვიჩვენებს, რომ თუ  $L$  ამოცანა თავისი ზუსტი მონაცემებით ამოხსნადია, მაგრამ არ არის  $c$ -მდგრადი, მაშინ  $c$  ვექტორის  $\bar{c} = c + \Delta c$  სახის მიახლოებით წარმოდგენა მიგვიყვანს (3.127) სიტუაციაზე ანუ  $\Pi$  გვარის არასაკუთრივ ამოცანაზე. აქედან გამომდინარე, თუ საქმე გვაქვს რეალურად მოცემულ მოდელთან

$$\max \{ \bar{c}^T x : x \in \Omega \},$$

რომლის ოპტიმალური მნიშვნელობა  $+\infty$ -ის ტოლია, მაშინ ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა ეს მომხდარიყო  $c$  ვექტორის არაზუსტი მოცემის გამო. თუ ნორმით მინიმალური  $\Delta c$  ვარიაცია ( $\bar{c} = c + \Delta c$ ), რომელსაც მივყავართ შემდეგი ამოცანის ამოხსნაზე

$$\max \{ c^T x : x \in \Omega \}, \quad (3.128)$$

$\bar{c}$  ვექტორის მოცემის ცდომილების საზღვრებშია მოქცეული, მაშინ (3.128) მოდელი შეიძლება განვიხილოთ როგორც (3.127) მოდელის არაზუსტი ინფორმაციის კორექციის შედეგი. უკანასკნელი შეიძლება შევცვალოთ (3.128)-ით. ვინაიდან იგი არამდგრადია, ამიტომ მისი ამოხსნისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ რეგულარიზაციის საშუალებები.

ბოლოს, შევჩერდეთ წრფივი დაპროგრამების III გვარის არასაკუთრივ ამოცანების ანალოგიურ ინტერპრეტაციაზე. დაეკავშიროთ იგი იმ ამოცანის განხილვასთან, რომელიც პასუხობს  $L$  ამოცანის სიმეტრიულ კორექციას

$$\max \{ (c - \Delta c)^T x : Ax \leq b + \Delta b, x \geq 0 \}. \quad (3.129)$$

ასეთი კორექცია საინტერესოა იმით, რომ იგი დუალურად სიმეტრიულია, სახელდობრ, თუ  $L$  ამოცანისათვის ანალოგიურ კორექციას ჩავატარებთ, მაშინ მივიღებთ

$$\min \{ (b + \Delta b)^T u : A^T u \geq c - \Delta c, u \geq 0 \}. \quad (3.129)'$$

უკანასკნელი (3.129)-ის დუალური ამოცანაა.

ეტყვათ,

$$K = \{ [\Delta b, \Delta c] \in R^m : (3.129) \text{ ამოცანა ამოხსნადია } \},$$

$$\Omega(\Delta b) = \{ x : Ax \leq b + \Delta b, x \geq 0 \},$$

$$\Omega'(\Delta c) = \{ u : A^T u \geq c - \Delta c, u \geq 0 \},$$

$$K_b = \{ \Delta b : \Omega(\Delta b) \neq \emptyset \},$$

$$K_c = \{ \Delta c : \Omega'(\Delta c) \neq \emptyset \}.$$

ცხადია,  $K_b \neq \emptyset$  და  $K_c \neq \emptyset$ .  $K$ ,  $K_b$  და  $K_c$  სიმრავლეები დაკავშირებულია  $K = K_b \times K_c$  თანაფარდობით. მართლაც,

$$Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0, \quad (3.130)$$

$$A^T u \geq c - \Delta c, \quad u \geq 0, \quad (3.131)$$

სისტემების ერთდროული თავსებადობა რაღაც  $\Delta b$  და  $\Delta c$ -სთვის განაპირობებს (1.129)-ის ამოხსნადობას (და, ამის გამო, (3.129)\*-ის ამოხსნადობასაც). მეორე მხრივ, თუ რომელიმე  $\Delta b$  და  $\Delta c$ -სთვის (3.129) ამოცანა ამოხსნადია, მაშინ ამოხსნადია (3.129)\* ამოცანაც, რის გამოც მათი შეზღუდვათა (3.130) და (3.131) სისტემები თავსებადია.

ვთქვათ,

$$\{\overline{\Delta c}, \overline{\Delta b}\} \in \text{Arg min} \{ \|\Delta b\| + \|\Delta c\| : [\Delta c, \Delta b] \in K \}.$$

თუ  $\overline{\Delta b}$  და  $\overline{\Delta c}$  თავსდება  $b$  და  $c$  ვექტორების მოცემის შესაძლებელ ცდომილებათა საზღვრებში, მაშინ ამოხსნადია ამოცანა

$$\max \{ \overline{c}^T x : Ax \leq \overline{b}, \quad x \geq 0 \},$$

რომელშიც  $\overline{c} = c - \overline{\Delta c}$ ,  $\overline{b} = b + \overline{\Delta b}$  შეიძლება განვიხილოთ როგორც არაზუსტი ინფორმაციის მიხედვით კორექტირებული.  $\Delta b$  და  $\Delta c$  ნაზრდების გათვალისწინებით კორექტირებული ხდება  $L^*$  ამოცანაც.

ზემოთ აღნიშნული შეიძლება გავიმეოროთ, თუ მსჯელობას გავავრცელებთ ყველა მაჩვენებლის სისტემაზე, რომლის საშუალებითაც მოიცემა (3.118) ამოცანა. კერძოდ, ვთქვათ,  $I = [\underline{x}, \overline{s}]$ , სადაც  $\underline{x} = [\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}]$ ,  $\overline{s} = [\overline{A}, \overline{b}, \overline{c}]$ , პარალელეპიპედი, რომლითაც მოიცემა იმ  $s = [A, b, c]$  ინფორმაციული ვექტორის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელიც შესაბამისობაშია (3.118) ამოცანასთან. ამ შემთხვევაში შეიძლება დაისვას ამოცანა უტოლობათა უფრო რთულ სისტემათა

$$Ax \leq b, \quad \underline{A} \leq A \leq \overline{A}, \quad \underline{b} \leq b \leq \overline{b}, \quad x \geq 0 \quad (3.132)$$

მიმართ თავსებადობის გამორკვევის და

$$\max \{ \overline{c}^T x : \overline{A} x \leq \overline{b}, \quad x \geq 0 \} \quad (3.133)$$

ამოცანის ამოხსნადობის შესახებ, სადაც  $\underline{c} \leq \overline{c} \leq \overline{c}$ , ხოლო  $\overline{A}$  და  $\overline{b}$  რაღაც  $\overline{x}$ -სთვის აკმაყოფილებენ (3.132) სისტემას.

თუ (3.133) ამოცანა ფორმირებულია, მაშინ იგი (3.118) ამოცანის ტოლფასად შეიძლება ჩაითვალოს, მიუხედავად იმისა (3.118) ამოცანა საკუთრივია თუ არასაკუთრივი. აქედან გამომდინარე, (3.133) ამოცანები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ინ-

ფორმაციულად ეკვივალენტური იმ აზრით, რომ ისინი არ არიან დალაგებული ინ-ფორმაციული უპირატესობის მიხედვით, თუმცა მათი შემთხვევითი რეალიზაციები არ გვაძლევს თანაბარ განაწილებას (3.133)-დან წარმოებული ამა თუ იმ მახასიათებლისათვის (მაგალითად, ოპტიმალური მნიშვნელობისათვის) მათ მნიშვნელობათა შესაბამის არეებში. ეს უკანასკნელი, ბუნებრივია, შეიძლება საფუძვლად დაედოს ამოხსნად (3.133) ამოცანათა ერთობლიობის ამა თუ იმ დალაგებას, მაგალითად,  $\bar{l}(\bar{c}, \bar{A}, \bar{b})$ -ის ოპტიმალური მნიშვნელობის მიხედვით. ამ შემთხვევაში შეიძლება დაისვას (3.133) მოდელის ამორჩევის პრობლემა, რომელიც გარანტირებული შედეგის პრინციპს ექვემდებარება. ამ უკანასკნელის ფორმალიზაცია ხორციელდება შემდეგი ამოცანით:

$$\min \{ \bar{l}(\bar{c}) : \bar{c} \in \bar{I} \},$$

სადაც  $\bar{I} = \{ \bar{c} \in I : (3.133) \text{ ამოცანა ამოხსნადია} \}$ .

### 3.5.3 უტოლობათა არათავსებადი სისტემების კორექცია

წრფივი ან ამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანების არასაკუთრივობის ერთ-ერთი და, შესაძლოა, ყველაზე მნიშვნელოვანი გამოვლინებაა შეზღუდვათა სისტემის არათავსებადობა. ეს სისტემა ჩაეწეროს შემდეგი სახით:

$$f_j(x) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad x \in \Omega. \quad (3.134)$$

აქ  $\Omega$  ამოზნექილი ჩაკეტილი სიმრავლეა  $R^n$  სივრციდან, უმეტეს შემთხვევაში,  $\Omega = R_+^n$ .

განვიხილოთ (3.134) სისტემის კერძო შემთხვევა, როცა ფუნქციები წრფივია, ხოლო  $\Omega = R_+^n$ :

$$l_j(x) = (a_j, x) - b_j \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad x \geq 0. \quad (3.135)$$

I გვარის არასაკუთრივობის შემთხვევაში შესაბამისი ამოცანის კორექცია მის შეზღუდვათა სისტემის კორექციაზე დაიყვანება. წრფივი დაპროგრამების კორექციის ამოცანა, როგორც ცნობილია, დაიყვანება წრფივ უტოლობათა გარკვეული სისტემის კორექტირებაზე, თუ კი კორექცია ხორციელდება  $c$  და  $b$  ვექტორების ცვლილების ხარჯზე.

ვთქვათ,  $d(y)$  არის  $R^n$ -ზე მოცემული ამოზნექილი ფუნქცია და  $d(0)=0$ ,  $d(y)>0$   $\forall y \geq 0$ ,  $y \neq 0$ . ასეთი  $d(y)$  ფუნქციების მაგალითს წარმოადგენს

- $d_0(y) = \max_{j=1,2,\dots,m} |y_j|,$



- $d_1(y) = \sum_{j=1}^m |y_j|$ ,
- $d_2(y) = \|y\|^2$ ,
- სხვ.

ასეთი ფუნქციის დახმარებით შემოვიღოთ (3.134) სისტემის არათავსებადობის (გად-  
ახრის)  $\mu$  ზომა, კერძოდ,

$$\mu = \inf_{x \in \Omega} d(f_1^+(x), f_2^+(x), \dots, f_m^+(x)). \quad (3.136)$$

აქ ვექტორის თავზე "+" აღნიშნავს მისი უარყოფითი კოორდინატების შეცვლას ნუ-  
ლებით. ოპერაცია "+" ვექტორის  $R_+^n$ -ზე პროექტირებას ახორციელებს.

თუ (3.136)-ში ქვედა ზღვარი მიიღწევა, მაშინ (3.134) სისტემის თავსებადო-  
ბისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ  $\mu=0$ . მიღწევადობა გარანტირებულია,  
მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როცა

1.  $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$  წრფივია, ხოლო  $\Omega$  პოლიედრალურია;
2.  $\Omega$  შემოსაზღვრულია  $R^n$  სივრცეში.

თუ  $d(f_1^+(\bar{x}), f_2^+(\bar{x}), \dots, f_m^+(\bar{x})) = \mu$ , მაშინ (3.134) სისტემიდან

$$f_j(x) \leq f_j(\bar{x}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad x \in \Omega, \quad (3.134)^*$$

სისტემაზე გადასვლას ვუწოდებთ (3.134) სისტემის  $d$ -აპროქსიმაციას.

დისკრეტული არათავსებად უტოლობათა სისტემების კორექციის მეთოდები დაწ-  
ვრილებით განხილულია ნაშრომებში [80, 81, 127, 128].

### 3.5.4 არასაკუთრივი ამოცანის პირდაპირი აპროქსიმაციის მოდელი

მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$C: \sup \{f_0(x): f_j(x) \leq 0, j=1, 2, \dots, m, x \geq 0\}. \quad (3.137)$$

ჩავთოთ იგი პარამეტრულ ამოცანათა ოჯახში:

$$\sup \{f_0[y_0](x): f_j[y_j](x) \leq 0, j=1, 2, \dots, m, x \geq 0\}. \quad (3.138)$$

აქ  $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$  სისტემა იმ ვექტორული პარამეტრებისა, რომლებიც მიეკუთვნება  
რომელიმე სასრულგანზომილებიან სივრცეებს. ეს ნიშნავს, რომ პარამეტრების გან-

საზღვრული  $\{y_0^0, y_1^0, \dots, y_m^0\}$  მნიშვნელობებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:  $f_0[y_0^0](x) = f_0(x)$ ,  $f_j[y_j^0](x) = f_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ . თუ დაუშვებთ, რომ  $y = [y_0, y_1, \dots, y_m]$ , მაშინ (3.138)-ის ნაცვლად შეიძლება გამოვიყენოთ ჩანაწერი

$$C(y): \sup \{f_0[y](x): f_j[y](x) \leq 0, j=1, 2, \dots, m, x \geq 0\}. \quad (3.139)$$

განვიხილოთ ჩართვის ორი ფორმა

$$\sup \{f_0(x) - (\Delta c)^T x: f_j(x) \leq \Delta b, j=1, 2, \dots, m, x \geq 0\}, \quad (3.140)$$

$$\sup \{f_0(x) - \alpha \|x\|^2: f_j(x) \leq \Delta b, j=1, 2, \dots, m, x \geq 0\}, \quad (3.141)$$

სადაც  $\alpha > 0$ .

$\Delta c \in R^m$  და  $\Delta b \in R^n$ -ის მიმართ პარამეტრული (3.129) ამოცანა (3.118) ამოცანის სიმეტრიული ჩართვის შედეგია.

პარამეტრულ ამოცანათა კლასში (3.118) ამოცანის ჩართვის უფრო ზოგადი ფორმის რეალიზაცია შემდეგია:

$$\max \{ (c - \Delta c)^T x: (A + H)x \leq b + \Delta b, x \geq 0 \}. \quad (3.142)$$

ეთქვათ,  $\sigma$  წარმოადგენს  $C$  ამოცანის რაღაც თვისებას (ამოხსნადობას, საკუთრივობას და სხვ.). (3.139)-სათვის შემოვიტანოთ  $K_\sigma = \{y: C(y) \text{ აკმაყოფილებს } \sigma \text{ თვისებას}\}$  სიმრავლე. პირდაპირი აპროქსიმაციის მეთოდები დაკავშირებულია შემდეგი სახის ამოცანის

$$\inf \{ d(y): y \in K_\sigma \} \quad (3.143)$$

ამოხსნასთან, კრიტერიული ამა თუ იმ  $d(y)$  ფუნქციის შერჩევის შემთხვევაში. მოვიყვანოთ მაგალითები.

ეთქვათ,  $\sigma$  არის ამოხსნადობის თვისება ამოცანისა

$$\max \{ (c - \Delta c)^T x: Ax \leq b + \Delta b, x \geq 0 \},$$

სადაც  $[\Delta c, \Delta b] \in R_+^{n+m}$ . შემოვიტანოთ შემდეგი ფუნქცია:  $d(\Delta c, \Delta b) = \|\Delta c\| + \|\Delta b\|$ .

ამ სიტუაციაში  $K_\sigma = \{ [\Delta c, \Delta b] \geq 0: \Omega(\Delta b) \neq \emptyset, \Omega^*(\Delta c) \neq \emptyset \}$ , სადაც

$$\Omega(\Delta b) = \{ x \geq 0: Ax \leq b + \Delta b \},$$

$$\Omega^*(\Delta c) = \{ u \geq 0: A^T u \geq c - \Delta c \}.$$

თვით აპროქსიმაციის (3.143) ამოცანა დაიყვანება წრფივი დაპროგრამების შემდეგ ამოცანებზე:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^m \Delta b_j : Ax \leq b + \Delta b, [x, \Delta b] \geq 0 \right\}, \quad (3.144)$$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta c_i : A^T x \geq c - \Delta c, [u, \Delta c] \geq 0 \right\}. \quad (3.145)$$

თუ  $\tilde{x}$  და  $\tilde{u}$  შესაბამისად (3.144) და (3.145) ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნებია, მაშინ  $[\Delta \tilde{c}, \Delta \tilde{b}]$  ვექტორი, როცა  $\Delta \tilde{c} = (c - A^T \tilde{u})^*$  და  $\Delta \tilde{b} = (A \tilde{x} - b)^*$ , წარმოადგენს ამონახსნს (3.143) ამოცანისა, რომელიც თანადობაშია განხილულ მაგალითთან.

ამ მაგალითში შინაარსობრივად საინტერესოა შემთხვევა, როცა  $d[\Delta c, \Delta b]$  ფუნქციას რამდენადმე უფრო ზოგადი სახე აქვს, სახელდობრ,

$$d(\Delta c, \Delta b) = \sum_{j=1}^m \beta_j \Delta b_j + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta c_i,$$

სადაც  $\beta_j > 0, j=1, 2, \dots, m, \gamma_i > 0, i=1, 2, \dots, n$ . მაშინ (3.144) და (3.145) ამოცანების ანალოგები, ჩაწერილი კომპაქტური სახით, იქნება:

$$\min \{ \beta^T (Ax - b)^* : x \geq 0 \},$$

$$\min \{ \gamma^T (c - A^T u)^* : u \geq 0 \},$$

სადაც  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T, \gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]^T$ . ეს უკანასკნელი მათემატიკური დაპროგრამების ამოზნექილ უბან-უბან წრფივი ამოცანების კლასს მიეკუთვნება.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, (3.118) წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების  $\Pi$  გვარის არასაკუთრივ ამოცანას, ე.ი.  $\Omega \neq \emptyset$  და  $\Omega^* = \emptyset$ . ამ შემთხვევას, როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ეთანადება (3.118) ამოცანის არასაკუთრივი ოპტიმალური მნიშვნელობა.  $\sigma$ -ს მივანიჭოთ  $c$ -ს მიმართ კორექტირებულ

$$\max \{ (c - \Delta c)^T x : Ax \leq b, x \geq 0 \}$$

ამოცანის ამოხსნადობის თვისება. მაშინ  $K_\sigma = \{ \Delta c \geq 0 : \Omega^*(\Delta c) \neq \emptyset \}$ ; აქ  $\Omega^*(\Delta c) = \{ u \geq 0 : A^T u \geq c - \Delta c \}$ . თუ  $d(\Delta c) = \|\Delta c\|^2$ , მაშინ (3.143) ამოცანა ჩაიწერება

$$\min \left\{ \|\Delta c\|^2 : A^T u \geq c - \Delta c, [u, \Delta c] \geq 0 \right\},$$

რაც შემდეგი ამოცანის ეკვივალენტურია:

$$\min \left\{ \|(c - A^T u)^*\|^2 : u \geq 0 \right\}.$$

ეს უკანასკნელი ამოზნექილი უბან-უბან კვადრატული დაპროგრამების გლუვ ამოცანას წარმოადგენს.

### 3.5.5 წრფივი დაპროგრამების სიმეტრიული ამოცანის კორმპცი

(3.129) ამოცანას შევუსაბამოთ უტოლობათა შემდეგი სისტემები

$$Ax \leq b + \Delta b, \quad [x, \Delta b] \geq 0, \quad (3.146)$$

$$A^T u \geq c - \Delta c, \quad [u, \Delta c] \geq 0, \quad (3.147)$$

$$(b + \Delta b)^T u \leq (c - \Delta c)^T x. \quad (3.148)$$

$\Delta b$  და  $\Delta c$  ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის (3.146)-(3.148) სისტემის ამონახსნის პოვნის ამოცანას უწოდებენ სიმეტრიულ ამოცანას, რომელიც პასუხობს (3.129) ამოცანის დასმას. თუ

$$[\bar{x}, \bar{u}, \overline{\Delta c}, \overline{\Delta b}] \quad (3.149)$$

(3.146)-(3.148) სისტემის რაღაც ამონახსნია, მაშინ

$$\bar{x} \in \text{Arg max} \{ (c - \overline{\Delta c})^T x : x \in \Omega(\overline{\Delta b}) \}, \quad (3.150)$$

$$\bar{u} \in \text{Arg min} \{ (b + \overline{\Delta b})^T u : u \in \Omega^*(\overline{\Delta c}) \}. \quad (3.151)$$

ეს უკანასკნელი წრფივი დაპროგრამების დუალობის თეორიის მარტივ ფაქტებს წარმოადგენს. მეორე მხრივ, (3.146)-(3.148) სისტემას ყოველთვის გააჩნია (3.149) სახის რაღაც ამონახსნი.

**თეორემა 3.23.** თუ  $\Delta b$  და  $\Delta c$  შესაბამისად უზრუნველყოფს (3.146) და (3.147) სისტემების თავსებადობას, მაშინ იმავე  $\Delta b$  და  $\Delta c$  ნაზრდებისთვის (3.146)-(3.148) სისტემა თავსებადია  $x$ -სა და  $u$ -ის მიმართ.

(ამ ფაქტის დამტკიცება მოყვანილია მონოგრაფიაში [58], იხ. ლემა 3.1).

თუ  $K = \{ [\Delta c, \Delta b] \geq 0 : \Omega(\Delta b) \neq \emptyset, \Omega^*(\Delta c) \neq \emptyset \}$ , მაშინ მოყვანილი თეორემის საფუძველზე გვექნება:

$$K = \{ [\Delta c, \Delta b] : \text{სისტემა (3.146)-(3.148) თავსებადია} \}. \quad (3.152)$$

თუ  $d[\Delta c, \Delta b]$  სიმეტრიული ამოცანის აპროქსიმაციის ხარისხის ფუნქციაა, მაშინ თვით აპროქსიმაციის ამოცანა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$H: \min \{ d(\Delta c, \Delta b) : (3.146)-(3.148) \}. \quad (3.153)$$

(3.152)-ის თანახმად მიიღება

$$\text{Arg } H = \text{Arg } \min \{ d(\Delta c, \Delta b) : [\Delta c, \Delta b] \in K \}. \quad (3.154)$$

(3.154) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ, მიუხედავად (3.153) ამოცანის ამოხსნის სირთულისა (იმ აზრით, რომ საპოვნელია არა მარტო  $\Delta b$  და  $\Delta c$ , რომელიც (3.153)-ის მინიმუმის პოვნას უზრუნველყოფს, არამედ  $x$  და  $u$ -ც), იგი შეიძლება შეეცვალოთ შემდეგი ორი ამოცანის თანამიმდევრობითი ამოხსნით:

1. ვიპოვოთ  $[\overline{\Delta c}, \overline{\Delta b}] \in \text{Arg } \min \{ d(\Delta c, \Delta b) : [\Delta c, \Delta b] \in K \}$ ;
2. ვიპოვოთ (3.150) და (3.151) გამოსახულებების თანახმად  $\bar{x}$  და  $\bar{u}$ .

$d(\Delta c, \Delta b)$ -ს სახით შეიძლება შევირჩიოთ  $d_i(\Delta c, \Delta b) = \|\Delta c\|_i + \|\Delta b\|_i$  ( $i = 0, 1$ ),  $d_0(\Delta c, \Delta b) = \|\Delta c\|^2 + \|\Delta b\|^2$  და ა.შ. თუ, მაგალითად,  $d(\cdot) = d_1(\cdot)$ , მაშინ (3.153) ამოცანა შემდეგი ორი ამოცანის ამოხსნის ეკვივალენტურია:

$$\min \left\{ \|(Ax - b)^+\| : x \geq 0 \right\}, \quad (3.155)$$

$$\min \left\{ \|(c - A^T u)^+\| : u \geq 0 \right\}. \quad (3.156)$$

(3.155) და (3.156), თავის მხრივ, შესაბამისად (3.144) და (3.145) ამოცანების ეკვივალენტურია. თუ  $\bar{x}$  და  $\bar{u}$  მათი არგუმენტებია, მაშინ  $\overline{\Delta c} = (c - A^T \bar{u})^+$  და  $\overline{\Delta b} = (A\bar{x} - b)^+$  (3.153) ამოცანის არგუმენტებს წარმოადგენს. ანალოგიურ დაყვანას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა  $d(\cdot) = d_2(\cdot)$ .

უნდა აღინიშნოს, რომ სიმეტრიული ამოცანის (3.149) ფორმის მიხედვით კორექცია არ შეესაბამება (3.134) ტიპის არათავსებადი სისტემის კორექციის წესს, რომლის თანახმად მიიღება ამოცანა

$$\min \{ d(\Delta c, \Delta b) : Ax \leq b + \Delta b, x \geq 0; A^T u \geq c - \Delta c, u \geq 0;$$

$$b^T u - c^T x \leq t, u \geq 0, \Delta = [\Delta c, \Delta b, t] \in D \}. \quad (3.157)$$

$D$  სიმრავლე შესაძლებელია სხვადასხვანაირად შეირჩეს, მაგალითად,  $D = \{ \Delta \geq 0 \}$ .

იმ შემთხვევაში, როცა  $D = \{ \Delta \geq 0 \}$ ,  $d(\Delta) = \|\Delta\|_1$ , მაშინ (3.157) ამოცანა შემდეგი ამოცანის ეკვივალენტურია:

$$\min \left\{ g_1(x, u) = \|(Ax - b)^+\|_1 + \|(c - A^T u)^+\|_1 + [(b, u) - (c, x)]^+ : [x, u] \geq 0 \right\}, \quad (3.158)$$

ხოლო როცა  $D = \{ \Delta = [\Delta c, \Delta b, t] \geq 0 \}$ ,  $d(\Delta) = \|\Delta\|^2$ , მაშინ -

$$\min \left\{ g_2(x, u) = \|(Ax - b)^*\|^2 + \|(c - A^T u)^*\|^2 + [(b, u) - (c, x)]^2 : [x, u] \geq 0 \right\} \quad (3.159)$$

ამოცანისა.

თეორემა 324. ვთქვათ,  $\Omega^*$ ,  $\Omega_1^*$ ,  $\Omega_2^*$  შესაბამისად წარმოადგენს (3.158), (3.155), (3.156) ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნთა სიმრავლეებს, ხოლო  $\nu$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  - მათ შესაბამის ოპტიმალურ მნიშვნელობებს. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad (3.160)$$

$$\Omega^* = \Omega_1^* \times \Omega_2^*. \quad (3.161)$$

შედეგი 3.3. თუ  $[x^*, u^*] \in \Omega^*$ , მაშინ

$$|b^T u^* - c^T x^*| \leq (c - A^T u^*)^* \Upsilon x^* + (Ax^* - b)^* \Upsilon u^*.$$

თეორემა 325. თუ  $[x^*, u^*]$  წარმოადგენს (3.159) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს, მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა

$$\begin{aligned} [b^T u^* - c^T x^*]^2 &= \|(Ax^* - b)^*\|^2 + \|(c - A^T u^*)^*\|^2 + \\ &+ ((Ax^* - b)^*)^* \Upsilon b + (c - A^T u^*)^* \Upsilon c. \end{aligned}$$

აღნიშნული სამი დებულების დამტკიცება მოყვანილია მონოგრაფიაში [58] (იხ. თეორემა 3.1, შედეგი 3.1 და თეორემა 3.2).

## 3.5.6 შეზღუდვათა რანჰირების მეთოდი

დაეუშვათ, რომ (3.137) ამოცანის შეზღუდვათა არათავსებადი სისტემა დაყოფილია ორ ჯგუფად

$$f_j(x) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, j_0, \quad x \geq 0; \quad (3.162)$$

$$f_j(x) \leq 0, \quad j=j_0+1, j_0+2, \dots, m. \quad (3.163)$$

პირველი ჯგუფს შეადგენს სავალდებულო (დირექტიული) შეზღუდვები, ხოლო მეორე ჯგუფს - ფაკულტატიური შეზღუდვები. ამასთან, იგულისხმება, რომ (3.162) სისტემის ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე არაცარიელია.

შეზღუდვათა სისტემის რანჰირების შინაარსობრივი აზრი (3.137) ამოცანის ანალიზის საშუალებას იძლევა მისი ოპტიმიზაციის ორსაფეხურიან ამოცანაზე დაყვანის საფუძველზე:

$$\sup \{ f_0(x) : x \in \tilde{\Omega} \}, \quad (3.164)$$

$$\tilde{\Omega} = \text{Arginf} \left\{ \sum_{j=j_0+1}^m \nu_j f_j^+(x) : x \in \Omega \right\}, \quad (3.165)$$

სადაც  $\Omega = \{ x \geq 0 : f_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,j_0 \}, \nu_j > 0, \forall j=j_0+1, j_0+2,\dots, m$ .

(3.164) ამოცანას შეიძლება შევეუსაბამოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\sup \left\{ f_0(x) - \nu_0 \sum_{j=j_0+1}^m \nu_j f_j^-(x) : x \in \Omega \right\}. \quad (3.166)$$

განსაზღვრულ პირობებში (3.164) და (3.166) ამოცანები ეკვივალენტურია. შევნიშნავთ, რომ  $\nu_j > 0, j = j_0+1, j_0+2,\dots, m$ , მუდმივების შერჩევით (წონითი კოეფიციენტების რანჟირებით) შესაძლებელია (3.163) შეზღუდვების უპირატესობის მიხედვით დალაგება.

### 3.5.7 დისკრეტული აპროქსიმაციის მეთოდები

უტოლობათა არათავსებადი სისტემებისათვის არსებობს ამონახსნის ცნების განზოგადება - კომიტეტის ცნება. კომიტეტი ეწოდება ვექტორების (კომიტეტის წევრების) ისეთ სასრულ ერთობლიობას, რომლის დროსაც უტოლობათა სისტემის თითოეულ უტოლობას ვექტორთა ნახევარზე მეტი აკმაყოფილებს.

ვთქვათ,  $\Xi = \{\sigma\}$  წარმოადგენს (3.137) ამოცანას უტოლობათა სისტემის კომიტეტების რაღაც სიმრავლეს, ხოლო  $g(\sigma)$  -  $\sigma$  კომიტეტის შეფასების ფუნქციას კრიტიკრიული  $f_0(x)$  ფუნქციის მიხედვით. მაშინ გვექნება ამოცანა

$$\sup \{ g(\sigma) : \sigma \in \Xi \}. \quad (3.167)$$

თუ  $\Xi$  სიმრავლეა ისეთი კომიტეტებისა, რომლებიც ერთნაირი  $q$  რაოდენობის წევრებისგან შედგება, მაშინ  $g(\sigma)$  ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$g(\sigma) = \sum_{i=1}^q \alpha_i f_0(x^i), \quad (3.168)$$

სადაც  $\sigma = [x^1, x^2, \dots, x^q], x^i \in R^n, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, i=1,2,\dots,q$ . კერძოდ, თუ სისტემა

თავსებადია, მაშინ მისი ნებისმიერი  $x$  ამონახსნი შეადგენს კომიტეტს; ამ შემთხვევაში  $g(\sigma)$  ფუნქცია მიიღებს  $f_0(x)$  სახეს, ე.ი. (3.167) ემთხვევა (3.137) ამოცანას.

აღგორითმული თვალსაზრისით, არასაკუთრივი ამოცანების დისკრეტული აპროქსიმაციის საკითხებში კომიტეტური კონსტრუქციები დაკავშირებულია არათავსებად შეზღუდვათა სისტემებიდან მაქსიმალურად თავსებადი ქვესისტემების ამორჩევასთან.

ამიტომ კომპიტტური მიდგომა შეიძლება დაუკავშიროთ ოპტიმიზაციის დაფარვის მოდელებს ანუ თავსებად ქვესისტემებს, რომელთა გაერთიანება საოპტიმიზაციო ამოცანის შეზღუდვათა მთელ სისტემას გვაძლევს.

ვთქვათ,

$$g_j(x) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad (3.169)$$

უტოლობათა ნებისმიერი სისტემაა,  $N_m = \bigcup_{i=1}^s J_i$  - მისი ინდექსების სიმრავლის ნებისმიერი დაშლა; ამასთან,  $J_i \cap J_j$  თანაკვეთები შეიძლება იყოს არაცარიელიც. მას შესაბამება (3.169) სისტემის დაშლა შემდეგ ქვესისტემებად:

$$g_j(x) \leq 0, \quad j \in J_i, \quad i=1,2,\dots,s. \quad (3.170)$$

(3.170) ქვესისტემების ერთობლიობას (3.169) სისტემის დაფარვა ეწოდება. დაფარვას უწოდებთ თავსებადი, თუ ყველა (3.167) ქვესისტემა თავსებადია. თავსებადი დაფარვის მაგალითია სისტემის დაშლა მაქსიმალურად თავსებად ქვესისტემებად.

ბანსაზღვრებზე 3.20. ვთქვათ,  $\pi$  (3.169) სისტემის რომელიმე თავსებადი დაფარვაა,  $\Omega_i$  - (3.170) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე,  $x^{(i)} \in \Omega_i, i=1,2,\dots,s$ .  $\sigma = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}]$  ვექტორს უწოდებთ (3.169) სისტემის  $\pi$ -ამონახსნს.

აღვნიშნოთ ყველა  $\pi$ -ამონახსნთა სიმრავლე  $\Xi$  სიმბოლოთი და (3.167) და (3.168)-ის ანალოგიურად განვიხილოთ ამოცანა

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^s \alpha_i f_0(x^{(i)}) : [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}] \in \Omega \right\}, \quad (3.171)$$

სადაც  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i=1,2,\dots,s$ ; ხოლო  $f_0(x)$  რაღაც ფუნქცია. (3.171) ამოცანის კერძო რეალიზაციას წარმოადგენს შემდეგი ამოცანები:

$$\sup \{ f_0(x) : x \in \Omega_i \}, \quad i=1,2,\dots,s. \quad (3.172)$$

(3.172)-ის ყოველი ამოცანისათვის ოპტიმალური  $x^*(i)$  ამონახსნის მოძებნა შეიძლება შინაარსობრივად გამართლებული აღმოჩნდეს, ხოლო არათავსებადი  $\sup \{ f_0(x) : g_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,m \}$  ამოცანის  $x^*$  ამონახსნის კონსტრუირება შეიძლება უკვე ნაპოვნი  $x^*(i)$ -ის საშუალებით. ამასთან, თვით კონსტრუირება შეიძლება ატარებდეს საოპტიმიზაციო ხასიათს, მაგალითად, შეიძლება დაუვსვათ, რომ

$$x^* \in \text{Arg min} \left\{ \sum_{j=1}^m g_j \left( \sum_{i=1}^s \alpha_i x^*(i) \right) : \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i=1,2,\dots,s \right\}.$$

ასეთი კონსტრუქციის აზრი საკმარისად ნათელია.



## 3.6 წრფივი დაპროგრამების სატრანსპორტო ამოცანა

საზოგადოდ, სატრანსპორტო ამოცანა მიზნად ისახავს ტვირთნაკადების ოპტიმალურ დაგეგმვას. ჩვენ მიერ განხილული იქნება ყველაზე მარტივი მოდელი, ე.წ. კლასიკური წრფივი დაპროგრამების სატრანსპორტო ამოცანა.

ვთქვათ, გვაქვს ერთგვაროვანი პროდუქციის  $m$  მიმწოდებლის  $A_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) პუნქტი. ეს პროდუქცია უნდა მიეწოდოს  $n$  რაოდენობის  $B_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) მომხმარებელს. თითოეულმა  $A_i$  მიმწოდებელმა შეიძლება უზრუნველყოს  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) ერთეული პროდუქციის მიწოდება. თითოეულ  $B_j$  მომხმარებელს ასევე სჭირდება გარკვეული  $b_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) რაოდენობის პროდუქცია. ცნობილია, თუ რა ჯდება ერთეული პროდუქციის გადაზიდვა  $A_i$ -ური მიმწოდებლისაგან  $B_j$ -ურ მომხმარებელთან; ამ სიდიდეს აღვნიშნავთ  $c_{ij}$ -თი ( $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ ).

ამოცანა მდგომარეობს პროდუქციის გადაზიდვის ისეთი გეგმის ამორჩევაში, რომ:

- ა) ყველა მომხმარებელმა მიიღოს პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც მას სჭირდება;
- ბ) ნებისმიერმა მიმწოდებელმა მთლიანად გადაგზავნოს პროდუქცია, რომელიც მას გააჩნია;
- გ) გადაზიდვის ჯამური ხარჯი იყოს მინიმალური.

მთლიანი ტვირთის გადაზიდვის ჯამური ღირებულება გამოისახება

$$c(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3.173)$$

ფუნქციით, სადაც  $x_{ij}$  არის  $A_i$ -ური მიმწოდებლისაგან  $B_j$ -ური მომხმარებლისათვის გადასაზიდი ტვირთის რაოდენობა, რომელიც მოსაძებნია. ამოცანის ა) და ბ) პირობების თანახმად, უნდა ვიპოვოთ (3.173) ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა შემდეგ შეზღუდვათა გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.174)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.175)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.176)$$

დავუშვათ, რომ ყველა მიმწოდებლის ჯამური მარაგი ტოლია ყველა მომხმარებლის ჯამური მოთხოვნებისა ანუ შესრულებულია ე.წ. ბალანსის პირობა

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.177)$$

ამოცანას, რომელშიც სრულდება (3.177) პირობა, ეწოდება ჩაკეტილი ტიპის სატრანსპორტო ამოცანა.

(3.174) და (3.175) შეზღუდვები შეიცავს  $mn$  უცნობსა და  $m+n$  განტოლებას. თუ (3.174) და (3.175) ქვესისტემების განტოლებებს ცალ-ცალკე შევკრებთ, მივიღებთ ორ ერთნაირ განტოლებას, ე.ი. მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი განტოლებების რაოდენობა ტოლია  $m+n-1$ .

პრაქტიკაში გარდა ჩაკეტილი ამოცანებისა, უფრო ხშირად გვხვდება ღია ტიპის სატრანსპორტო ამოცანები, რომელშიც ბალანსის (3.177) პირობა დარღვეულია. ღია ტიპის ამოცანები შეიძლება იყოს ორი სახის:

1. როდესაც პროდუქციის არსებული ჯამური მარაგი მეტია პროდუქციის ჯამურ მოთხოვნილებაზე, ე.ი.  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  (ე.წ. ბაზრის გადაჭარბებულობა).
2. როდესაც პროდუქციის ჯამური მოთხოვნილება მეტია პროდუქციის არსებულ ჯამურ მარაგზე, ე.ი.  $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$  (ე.წ. ბაზრის დეფიციტი).

თუ შესაბამისად შემოვიტანთ დამატებით

$$b_{\phi} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{და} \quad a_{\phi} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

სიდიდეებს, მაშინ ღია ტიპის სატრანსპორტო ამოცანა შეიძლება მარტივად დავიყვანოთ ჩაკეტილი ტიპის ამოცანაზე.

ჩაკეტილი ტიპის მოდელისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ყველა ძირითადი შეზღუდვა ტოლობის სახითაა მოცემული. თითოეული ცვლადი შედის მხოლოდ ორ განტოლებაში; ამოცანის ამოხსნა ყოველთვის არსებობს. ამასთან, წრფივად დამოუკიდებელი განტოლებების რიცხვი  $(m+n-1)$ -ის ტოლია.

სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნა შედარებით მარტივად სრულდება, ვიდრე ეს ხორციელდება სიმპლექს-მეთოდის საშუალებით, ვინაიდან აღნიშნული ამოცანის შეზღუდვათა მატრიცა სპეციალური სტრუქტურისაა და ელემენტების უმრავლესობა ნულის ტოლია. ასეთ მატრიცას გაიშვიათებულ მატრიცას უწოდებენ.

სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნისათვის თავდაპირველად უნდა შედგეს ცხრილი, რომელშიც შეტანილ იქნება თითოეული  $A_i$ -ური მიწოდებლის პუნქტიდან თითოეულ  $B_j$ -ურ მომხმარებლის პუნქტში ტვირთის ერთეულის გადაზიდვის მოცემული  $c_{ij}$  ღირებულება და საძიებელი ტვირთის  $x_{ij}$  რაოდენობა, თითოეული მიწოდებლის პროდუქციის არსებული  $a_i$  მარაგი და თითოეული მომხმარებლის  $b_j$  მოთხოვნილება (იხ. ცხრილი 3.20). 3.20 ცხრილის თანახმად, მაგალითად, მეორე მიწოდებლიდან პირველ მომხმარებელთან უნდა გადავიტანოთ  $x_{21}$  ერთეული ტვირთი და ერთეული ტვირთის გადაზიდვა ჯდება  $c_{21}$  ლარი.

მიწოდებელი	მომხმარებელი				მარაგი
	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
საჭიროება	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

ცხრილი 3.20

განვიხილოთ სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთი მეთოდის იდეა, რომელიც მინიმალური ღირებულების მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი. მეთოდის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ერთეული პროდუქციის გადაზიდვის ღირებულებათა მნიშვნელობებიდან ამოირჩევა უმცირესი და ცხრილის უჯრედში, რომელიც მას შეესაბამება, ჩაიწერება  $a_i$  და  $b_j$  რიცხვებიდან უმცირესი. ამის შემდეგ, არ განიხილება ან სტრიქონი, რომელიც მიწოდებელს შეესაბამება და რომლის მარაგიც მთლიანად ამოწურულია, ან სვეტი, რომელიც მომხმარებელს შეესაბამება და რომლის საჭიროებაც მთლიანად დაკმაყოფილებულია; თუ მარაგიც მთლიანად ათვისებულია და მომხმარებელიც მთლიანადაა დაკმაყოფილებული, მაშინ ცხრილიდან ამოიშლება ორივე - სტრიქონიც და სვეტიც. ცხრილის დარჩენილ ნაწილში ისევ აირჩევა მინიმალური ღირებულება და პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ მთელი მარაგი არ იქნება განაწილებული და ყველა მოთხოვნილება დაკმაყოფილებული.

მაგალითი 3.14 [29]. რეგიონში არის ცემენტის ორი  $Q_1$  და  $Q_2$  ქარხანა და მათი პროდუქციის სამი მომხმარებელი სახლთმშენებლობის  $K_1$ ,  $K_2$  და  $K_3$  კომბინატების სახით. 3.21 ცხრილში მოცემულია:

წრფივი დაპროგრამება

- ა) ორივე  $Q_1$  და  $Q_2$  ქარხნის მიერ გამოშვებული სადღეღამისო ცემენტის რაოდენობა;
  - ბ) სამივე  $K_1, K_2$  და  $K_3$  კომბინატის ცემენტზე სადღეღამისო მოთხოვნის რაოდენობა;
  - გ) 1-ე ცემენტის გადაზიდვის ფასი თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე.
- საჭიროა შევედგინოთ ცემენტის გადაზიდვის სადღეღამისო გეგმა ტრანსპორტზე ჯამური დანახარჯების მინიმიზაციის მოთხოვნით.

ქარხანა	ცემენტის წარმოება (ტ)	1-ე ცემენტის გადაზიდვის ფასი (ტ/ლარი)		
		კომბინატი		
		$K_1$	$K_2$	$K_3$
$Q_1$	40	10	15	25
$Q_2$	60	20	30	30
	ცემენტზე მოთხოვნა (ტ)	50	20	30

ცხრილი 3.21

ამოხსნა. ვთქვათ,  $x_{ij}$  ( $i=1,2, j=1,2,3$ ) ცემენტის გადაზიდვის მოცულობაა  $Q_i$ -ური ქარხნიდან  $K_j$ -ურ კომბინატამდე. მაშინ ამოცანა დაიყვანება წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის სატრანსპორტო ამოცანაზე:

$$\min \{ c(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 10x_{11} + 15x_{12} + 25x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 30x_{23} \},$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60,$$

$$x_{11} + x_{21} = 50,$$

$$x_{12} + x_{22} = 20,$$

$$x_{13} + x_{23} = 30,$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2, j=1,2,3.$$

(3.178)

(3.178) ამოცანის შეზღუდვათა სისტემაში თითოეული განტოლება დანარჩენი განტოლებების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. ამიტომ შეგვიძლია უგულებელვყოთ, მაგალითად, შეზღუდვების მეორე განტოლება. მაშინ დარჩენილი განტოლებები შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$\begin{aligned}x_{13} &= 40 - x_{11} - x_{12}, \\x_{21} &= 50 - x_{11}, \\x_{22} &= 20 - x_{12}, \\x_{23} &= -10 + x_{11} + x_{12},\end{aligned}\tag{3.179}$$

საბოლოოდ, ამოცანა დაიყვანება წრფივი დაპროგრამების შემდეგ ამოცანაზე:

$$\begin{aligned}\max \{ &x_{11} + 2x_{12} \}, \\x_{11} + x_{12} &\leq 40, \\x_{11} + x_{12} &\geq 10, \\0 \leq x_{11} &\leq 50, \\0 \leq x_{12} &\leq 20.\end{aligned}\tag{3.180}$$

(3.180) ამოცანის სტანდარტული მიდგომით ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება მისი ოპტიმალური ამონახსნი

$$x_{11}^* = 20, \quad x_{12}^* = 20.$$

(3.178) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის დანარჩენი კომპონენტები გამოითვლება (3.179) სისტემიდან:

$$x_{13}^* = 0, \quad x_{21}^* = 30, \quad x_{22}^* = 0, \quad x_{23}^* = 30.$$

ამგვარად, გადაზიდვის ოპტიმალური გეგმა იქნება შემდეგი:  $Q_1$  ქარხანამ ცემენტი უნდა მიაწოდოს მხოლოდ  $K_1$  და  $K_2$  კომბინატს შესაბამისად 20ტ და 20ტ დღეღამეში, ხოლო  $Q_2$  ქარხანამ ცემენტი უნდა მიაწოდოს მხოლოდ  $K_1$  და  $K_3$  კომბინატს, შესაბამისად 30ტ და 30ტ დღეღამეში.

## 3.7 ოპტიმიზაცია თამაშთა თეორიის თვალსაზრისით

### 3.7.1 თამაშთა თეორიის ამოცანების ეკონომიკური და გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ბუნებასა და საზოგადოებაში ხშირად აღვილი აქვს მოვლენებს, რომელშიც ამა თუ იმ მონაწილეს სხვადასხვა ინტერესი გააჩნია და თავიანთი მიზნების მისაღწევად ისინი სხვადასხვა საშუალებებითა და წესებით მოქმედებენ. ასეთ მოვლენებს კონფლიქტურს უწოდებენ და მათ თამაშთა თეორია [20, 56] შეისწავლის, რომელიც შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც კონფლიქტურ სიტუაციებში გადაწყვეტილებების მიღების მათემატიკური მოდელების თეორია.

კონფლიქტის ტიპის მოვლენებს აღვილი აქვს სამხედრო საქმესა და ეკონომიკაში. უმარტივეს ეკონომიკურ მაგალითებს კონფლიქტური სიტუაციებისა, რომელთა მათემატიკური გამოსახვისათვის თამაშთა თეორია გამოიყენება, წარმოადგენს სავაჭრო ფირმებისა და სამრეწველო საწარმოების საკონკურენტო ბრძოლა, გაცვლითი და სავაჭრო ოპერაციები, კოალიციური ყოფაქცევის ანალიზი და სხვ.

საზოგადოდ, კონფლიქტის ძირითადი კომპონენტებია:

1. მონაწილენი, რომლებსაც მოთამაშეები ეწოდება;
2. გადაწყვეტილებები, რომელთა მიღება მოთამაშეებს შეუძლიათ;
3. მოთამაშეთა მიზნები (მაგალითად, მოგება, წაგება და სხვ.).

კონფლიქტისათვის დამახასიათებელია ის, რომ კონფლიქტის არცერთმა მონაწილემ წინასწარ არ იცის დანარჩენი მონაწილეების მიერ მიღებული გადაწყვეტილებების შესახებ ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ისინი იძულებული არიან განუზღვრელობის პირობებში იმოქმედონ. განუზღვრელობის შედეგად ოპერაციის წარმატება დამოკიდებულია არა მხოლოდ ერთი მოთამაშის მიერ მიღებულ გადაწყვეტილებაზე, არამედ დანარჩენი მოთამაშეების გადაწყვეტილებებზეც და მოქმედებებზეც.

ბანსაზღვრვამ 321 სიტუაციას ეწოდება კონფლიქტური, თუ მასში მონაწილეობს რამდენიმე დაინტერესებული მხარე (პირი), რომელთა ინტერესები ერთმანეთს მოლიანად ან ნაწილობრივ არ ემთხვევა.

ბანსაზღვრვამ 322 თამაში ნამდვილი ან ფორმალური კონფლიქტია, რომელშიც ორი მოთამაშე მაინც მონაწილეობს და თითოეული საკუთარი მიზნების მიღწევას ცდილობს.

**ბანსაზღვრება 323.** თითოეული მოთამაშის დასაშვებ მოქმედებებს, რომლებიც მიმართულია გარკვეული მიზნების მისაღწევად, თამაშის წესები ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 324.** თამაშის შედეგის რაოდენობრივი შეფასებას მოგება ან წაგება წარმოადგენს.

**ბანსაზღვრება 325.** თამაშს ეწოდება წყვილთა თამაში, თუ მასში მხოლოდ ორი მხარე (პირი) მონაწილეობს.

**ბანსაზღვრება 326.** წყვილთა თამაშს ნულჯამიანი (ანტაგონისტური) თამაში ეწოდება, თუ რაოდენობრივად ერთი მოთამაშის წაგება მეორე მოთამაშის მოგების ტოლია.

თამაშთა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა სტრატეგია.

**ბანსაზღვრება 327.** თამაშის განმავლობაში მოთამაშის მიერ გადაწყვეტილებების ამორჩევის დადგენილი წესების ერთობლიობას, რომლის მიხედვით მან პირადი სვლა (მოქმედება) უნდა განახორციელოს, მოთამაშის სტრატეგია ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 328.** მოთამაშის სტრატეგიას ოპტიმალური ეწოდება, თუ თამაშის მრავალჯერ განმეორების შემთხვევაში იგი მოთამაშის მაქსიმალურად შესაძლებელ საშუალო მოგებას (ან, რაც იგივეა, მინიმალურად შესაძლებელ საშუალო წაგებას) უზრუნველყოფს.

ეთქვათ, ადგილი აქვს წყვილთა თამაშს, სადაც ერთი მოთამაშე თავისი  $m$  შესაძლო სტრატეგიიდან ირჩევს  $i$ -ურ სტრატეგიას ( $i = \overline{1, m}$ ), ხოლო მეორე მოთამაშე  $n$  შესაძლო სტრატეგიიდან ირჩევს  $j$ -ურ სტრატეგიას ( $j = \overline{1, n}$ ). თამაშის შედეგად პირველმა მოიგო  $a_{ij}$  სიდიდე, ხოლო მეორემ წააგო იგივე სიდიდე.

$a_{ij}$  სიდიდეებიდან შევადგინოთ მატრიცა

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$A$  მატრიცის სტრიქონები შეესაბამება პირველი მოთამაშის სტრატეგიას, ხოლო სვეტები - მეორე მოთამაშის სტრატეგიას. აღნიშნულ სტრატეგიებს სუფთა სტრატეგიები ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 329.**  $A$  მატრიცას თამაშის მატრიცას (ან მოგების მატრიცას) უწოდებენ.

## წრფივი დაპროგრამება

**ბანსაზღვრება 3.30.** თამაშს, რომელიც განსაზღვრულია  $m$  სტრიქონიანი და  $n$  სვეტებიანი  $A$  მატრიცით,  $m \times n$  განზომილებიანი სასრული (მატრიცული) თამაშში ეწოდება.

მატრიცული თამაშში ანტაგონისტური თამაშის კერძო სახეს წარმოადგენს. ამიტომ ანტაგონისტურ თამაშთა ზოგადი თეორიის ყველა ცნება და ფაქტი მატრიცული თამაშებისთვისაც სამართლიანია.

**ბანსაზღვრება 3.31**  $\alpha = \max_j(\min_i a_{ij})$  რიცხვს უწოდებენ თამაშის ქვედა ფასს ან მაქსიმინს, ხოლო მის შესაბამის სტრატეგიას (სტრიქონს) - მაქსიმინურ სტრატეგიას.

**ბანსაზღვრება 3.32**  $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$  რიცხვს უწოდებენ თამაშის ზედა ფასს ან მინიმაქსს, ხოლო მის შესაბამის სტრატეგიას (სვეტს) - მინიმაქსურ სტრატეგიას.

**თეორემა 3.26.** თამაშის ქვედა ფასი თამაშის ზედა ფასს არასოდეს აჭარბებს.

**ბანსაზღვრება 3.33.** თუ  $\alpha = \beta = z$ , მაშინ  $z$ -ს თამაშის ფასი ეწოდება.

**ბანსაზღვრება 3.34.** თუ  $\alpha = \beta$ , მაშინ თამაშს გააჩნია უნაგირა წერტილი - მატრიცის ელემენტი, რომელიც ერთდროულად მინიმალურია თავის სტრიქონში და მაქსიმალურია თავის სვეტში. ასეთ თამაშს უნაგირაწერტილიანი თამაშში ეწოდება.

უკანასკნელი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს  $A$  მატრიცის უნაგირა წერტილის განსაზღვრის ალგორითმი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს.

- მატრიცის სტრიქონებში მოიძებნება მინიმალური ელემენტები და მათ შორის დაფიქსირდება მაქსიმალური ელემენტი ანუ განისაზღვრება მაქსიმინი

$$\alpha = \max_j(\min_i a_{ij});$$

- მატრიცის სვეტებში მოიძებნება მაქსიმალური ელემენტები და მათ შორის დაფიქსირდება მინიმალური ელემენტი ანუ განისაზღვრება მინიმაქსი

$$\beta = \min_j(\max_i a_{ij});$$

- თუ მიღებული ელემენტები ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი.  $\alpha = \beta$ , მაშინ  $A$  მატრიცას უნაგირა წერტილი გააჩნია, წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე.ი. როცა  $\alpha \neq \beta$ ) უნაგირა წერტილი არ არსებობს.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ უნაგირა წერტილი შეიძლება არ იყოს ერთადერთი. ზემოთ აღნიშნულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

**მაგალითი 3.15.** მოცემულია თამაშის მატრიცა



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ უნაგირა წერტილი.

ამოხსნა.

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow 4, \text{ ე.ი. } \alpha = 4;$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow 4, \text{ ე.ი. } \beta = 4.$$

რადგან  $\alpha = \beta = 4$ , ამიტომ უნაგირა წერტილი არსებობს:  $(i^*, j^*) = (2, 2)$ , ხოლო თამაშის ფასია  $z = a_{22} = 4$ .

მაგალითი 3.16. მოცემულია თამაშის მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ უნაგირა წერტილი.

ამოხსნა.

$$\left. \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix} \Rightarrow -2, \text{ ე.ი. } \alpha = -2;$$

$$\left. \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow 2, \text{ ე.ი. } \beta = 2.$$

რადგან  $\alpha \neq \beta$  ( $-2 \neq 2$ ), ამიტომ უნაგირა წერტილი არ არსებობს.

მაგალიტი 3.17. მოცემულია თამაშის მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ უნაგირა წერტილი.  
ამოხსნა.

$$\left. \begin{pmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 12 \\ 9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 12, \text{ ე.ი. } \alpha = 12;$$

$$\left. \begin{pmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow 12, \text{ ე.ი. } \beta = 12.$$

რადგან  $\alpha = \beta = 12$ , ამიტომ უნაგირა წერტილი არსებობს. ამასთან, გვაქვს ორი უნაგირა წერტილი:  $(i_1^*, j_1^*) = (1, 1)$  და  $(i_2^*, j_2^*) = (1, 3)$ ; თამაშის ფასია  $z = a_{11} = a_{13} = 12$ .

უნაგირა წერტილს შესაბამება თამაშში მონაწილე მხარეთა წყვილი ოპტიმალური სტრატეგია ანუ მაქსიმინური და მინიმაქსური სტრატეგიები. ამ სტრატეგიების ერთობლიობას ეწოდება თამაშის ამონახსნი სუფთა სტრატეგიებში.

იმ შემთხვევაში, როცა თამაშის მატრიცას უნაგირა წერტილი გააჩნია, მოთამაშეები ამ წერტილის შესაბამის სტრატეგიებს ირჩევენ. ასეთი გადაწყვეტილება ერთ მოთამაშეს განსაზღვრულ სიდიდეზე (თამაშის  $z$  ფასზე) არანაკლები “მოგების” გარანტიას აძლევს, ხოლო მეორე მოთამაშეს - ამავე სიდიდეზე არაუმეტესი “წაგების” გარანტიას.

როცა  $A$  მატრიცით განსაზღვრულ თამაშს უნაგირა წერტილი არ გააჩნია (ე.ი.  $\alpha \neq \beta$ ), მაშინ მისი ამონახსნის მისაღებად შერეული სტრატეგიები გამოიყენება. აღნიშნული სტრატეგიები მოთამაშეებს საშუალებას აძლევს იმოქმედონ თავიანთი მოგების მაქსიმიზაციისათვის ან წაგების მინიმიზაციისათვის.

**ბანსაზღვრებზე 3.35.** ვექტორს, რომლის თითოეული კომპონენტი მოთამაშის მიერ შესაბამისი სუფთა სტრატეგიის გამოყენების ფარდობით სიხშირეს გამოსახავს, ეწოდება მოცემული მოთამაშის შერეული სტრატეგია.

უკანასკნელი განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ აღნიშნული ვექტორის კომპონენტების ჯამი ერთის ტოლია, ხოლო თვით კომპონენტები არაუარყოფითია.

პირველი მოთამაშის შერეულ სტრატეგიას, ჩვეულებრივ, აღნიშნავენ ვექტორით  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , ხოლო მეორე მოთამაშის შერეულ სტრატეგიას - ვექტორით  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , სადაც  $u_i \geq 0, i = \overline{1, m}; v_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \sum_{i=1}^m u_i = 1, \sum_{j=1}^n v_j = 1$ .

თუ  $U^*$  პირველი მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიაა, ხოლო  $V^*$  - მეორე მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგია, მაშინ რიცხვი

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* v_j^* \quad (3.181)$$

წარმოადგენს თამაშის ფასს.

ოპტიმალური სტრატეგიებისა და თამაშის ფასის განსაზღვრა თამაშის ამონახსნის არსს შეადგენს.

**თეორემა 3.27.** ნებისმიერ მატრიცულ ნულჯამიან თამაშს ამონახსნი გააჩნია შერეულ სტრატეგიებში.

**თეორემა 3.28.** იმისათვის, რომ  $z$  რიცხვი თამაშის ფასს, ხოლო  $U^*$  და  $V^*$  ოპტიმალურ სტრატეგიებს წარმოადგენდეს, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს უტოლობები

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* \geq z, j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^* \leq z, i = \overline{1, m}.$$

**თეორემა 3.29.** თუ ერთი მოთამაშე ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას იყენებს, მაშინ მისი მოგება თამაშის  $z$  ფასის ტოლია მიუხედავად იმისა, მეორე მოთამაშე რა სიხშირეების ოპტიმალურ სტრატეგიას (მათ შორის სუფთა სტრატეგიასაც) გამოიყენებს.

**მაგალითი 3.18.** ვიპოვოთ  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$  მატრიცით განსაზღვრული თამაშის ამონახსნი და განვიხილოთ მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

**ამოხსნა.** უპირველეს ყოვლისა, ვიპოვოთ უნაგირა წერტილი. ამისათვის მოცემული  $2 \times 2$  განზომილებიანი მატრიცის თითოეულ სტრიქონში მოვძებნოთ მინიმალური ელემენტები (2 და 4), ხოლო მატრიცის თითოეულ სვეტში - მაქსიმალური ელემენტები (6 და 5). მაშასადამე, თამაშის ქვედა ფასია  $\alpha = \max(2; 4) = 4$ , ხოლო თამაშის ზედა ფასი -  $\beta = \min(6; 5) = 5$ . რადგან  $\alpha = 4 \neq \beta = 5$ , ამიტომ თამაშის ამო-

ნახსნს წარმოადგენს შერეული ოპტიმალური სტრატეგიები, ხოლო თამაშის  $z$  ფასი მოთავსებულია საზღვრებში  $4 \leq z \leq 5$ .

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, თამაშის მატრიცის სტრიქონები შეესაბამება პირველი მოთამაშის  $A_1$  და  $A_2$  სუფთა სტრატეგიებს, ხოლო მატრიცის სვეტები - მეორე მოთამაშის  $B_1$  და  $B_2$  სუფთა სტრატეგიებს.

განვსაზღვროთ პირველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია. დავეუშვათ, რომ პირველი მოთამაშის შერეული სტრატეგია გამოისახება  $U = (u_1; u_2)$  ვექტორით. მაშინ, 3.29 თეორემის საფუძველზე, მეორე მოთამაშის მიერ  $B_1$  სუფთა სტრატეგიის გამოყენების შემთხვევაში პირველი მოთამაშე მიიღებს საშუალო მოგებას, რომელიც თამაშის ფასის ტოლია

$$2u_1 + 6u_2 = z, \quad (3.182)$$

ხოლო მეორე მოთამაშის მიერ  $B_2$  სუფთა სტრატეგიის გამოყენების შემთხვევაში პირველი მოთამაშე მიიღებს საშუალო მოგებას, რომელიც კვლავ იქნება თამაშის ფასის ტოლი

$$5u_1 + 4u_2 = z. \quad (3.183)$$

გარდა (3.182) და (3.183) განტოლებებისა,  $u_1$  და  $u_2$  სისზიქვებისთვის გვექნება განტოლება

$$u_1 + u_2 = 1. \quad (3.184)$$

ამგვარად, მივიღეთ მესამე რიგის განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} 2u_1 + 6u_2 = z, \\ 5u_1 + 4u_2 = z, \\ u_1 + u_2 = 1, \end{cases} \quad (3.185)$$

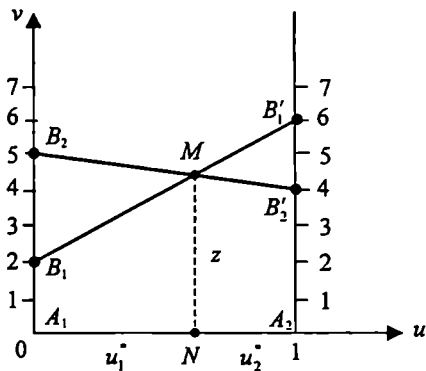
რომლის ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება სისტემაში შემავალი ცვლადები:  $u_1 = 2/5$ ,  $u_2 = 3/5$ ,  $z = 22/5$ .

განვსაზღვროთ მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია. ვთქვათ, მისი სტრატეგია გამოისახება  $V = (v_1; v_2)$  ვექტორით. მაშინ პირველი მოთამაშის ანალოგიურად გვექნება

$$\begin{cases} 2v_1 + 5v_2 = 22/5, \\ 6v_1 + 4v_2 = 22/5, \\ v_1 + v_2 = 1. \end{cases} \quad (3.186)$$

(3.186) სისტემა, რომელშიც ორი  $v_1^*$  და  $v_2^*$  ცვლადია, სამი განტოლებისაგან შედგება. ამიტომ აღნიშნული სისტემიდან ავირჩიოთ ნებისმიერი ორი განტოლება, რომელთა ერთობლივა ამონხნით მივიღებთ:  $v_1^* = 1/5$ ,  $v_2^* = 4/5$ . მაშასადამე, მოცემული თამაშის ამონახსნს წარმოადგენს შერეული სტრატეგიები:  $U^* = (2/5; 3/5)$  და  $V^* = (1/5; 4/5)$ , ხოლო თამაშის ფასია  $z = 22/5$ .

ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის  $uOv$  სიბრტყეზე ავაგოთ კოორდინატთა სისტემა და  $Ou$ -ღერძზე გადავზომოთ ერთეული სიგრძის  $A_1, A_2$  მონაკვეთი, რომლის თითოეულ წერტილს შევეუსაბამოთ რაღაც შერეული სტრატეგია  $U = (u_1; u_2) = (u_1; 1 - u_1)$  (ნახ. 3.12), კერძოდ,  $A_1(0; 0)$  წერტილს შევეუსაბამოთ  $A_1$  სტრატეგია, ხოლო  $A_2(1; 0)$  წერტილს -  $A_2$  სტრატეგია და ა.შ.



ნახ. 3.12

$A_1$  და  $A_2$  წერტილებში აღვმართოთ მართობები და მიღებულ წრფეებზე გადავზომოთ მოთამაშეთა მოგებები. პირველ მართობზე, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში  $Ov$ -ღერძს ემთხვევა, გადავზომოთ პირველი მოთამაშის მოგება  $A_1$  სტრატეგიის დროს, ხოლო მეორე მართობზე -  $A_2$  სტრატეგიის დროს. თუ პირველი მოთამაშე  $A_1$  სტრატეგიას ირჩევს, მაშინ მისი მოგება მეორე მოთამაშის მიერ არჩეული  $B_1$  სტრატეგიის დროს ტოლია 2-ის, ხოლო  $B_2$  სტრატეგიის დროს - 5-ის. 2 და 5 რიცხვებს  $Ov$ -ღერძზე შეესაბამება წერტილები  $B_1$  და  $B_2$ .

იმ შემთხვევაში, როცა პირველი მოთამაშე  $A_2$  სტრატეგიას ირჩევს, მაშინ მისი მოგება მეორე მოთამაშის მიერ  $B_1$  სტრატეგიის ამორჩევის დროს ტოლია 6-ის, ხო-

ლო  $B_2$  სტრატეგიის დროს - 4-ის. 6 და 4 რიცხვებს  $A_2$  წერტილში აღმართულ მართობზე შეესაბამება ორი წერტილი  $B_1'$  და  $B_2'$ . თუ შევართებთ  $B_1$  და  $B_1'$  წერტილებს, აგრეთვე,  $B_2$  და  $B_2'$  წერტილებს, მივიღებთ ორ წრფეს, რომლებიც  $M$  წერტილში გადაიკვეთება. მათი საშუალებით გრაფიკულად შეიძლება განისაზღვროს საშუალო მოგების სიდიდე შესაბამისი სტრატეგიების ამა თუ იმ კომბინაციის დროს. ასე. მაგალითად, მანძილი  $B_1B_1'$  მონაკვეთის ნებისმიერი წერტილიდან  $Ou$ -ღერძამდე განსაზღვრავს საშუალო  $z_1$  მოგებას პირველი მოთამაშის  $A_1$  ( $u_1$  სიხშირით) და  $A_2$  ( $u_2$  სიხშირით) სტრატეგიებისა და მეორე მოთამაშის  $B_1$  სტრატეგიის ნებისმიერი კომბინაციის დროს. აღნიშნული მანძილი ტოლია  $2u_1 + 6u_2 = z_1$ . ანალოგიურად, მეორე მოთამაშის მიერ  $B_2$  სტრატეგიის გამოყენების შემთხვევაში საშუალო მოგება განისაზღვრება  $B_2B_2'$  მონაკვეთის წერტილების ორდინატების საშუალებით.

ამგვარად,  $B_1MB_2'$  ტეხილის ორდინატები პირველი მოთამაშის მინიმალურ მოგებას განსაზღვრავს მის მიერ ნებისმიერი შერეული სტრატეგიის გამოყენების დროს.  $M$  წერტილში მისი მინიმალური მოგება მაქსიმალურია. მაშასადამე, ამ წერტილს შეესაბამება ოპტიმალური  $U^* = (u_1^*; u_2^*)$  სტრატეგია, ხოლო მისი ორდინატა  $z$  ფასის ტოლია.  $M$  წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება როგორც  $B_1B_1'$  და  $B_2B_2'$  წრფეების გადაკვეთის წერტილი. შესაბამის განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = z, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = z, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

უკანასკნელი სისტემის ამოხსნა გვაძლევს  $u_1^* = 2/5$ ,  $u_2^* = 3/5$ ,  $z = 22/5$ .

ანალოგიურად განისაზღვრება მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია. ამ შემთხვევაში გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} 2v_1^* + 5v_2^* = 22/5, \\ v_1^* + v_2^* = 1, \end{cases}$$

საიდანაც  $v_1^* = 1/5$ ,  $v_2^* = 4/5$ . მაშასადამე, თამაშის ამონახსნს წარმოადგენს შერეული სტრატეგიები:  $U^* = (2/5; 3/5)$  და  $V^* = (1/5; 4/5)$ , ხოლო თამაშის ფასია  $z = 22/5$ .

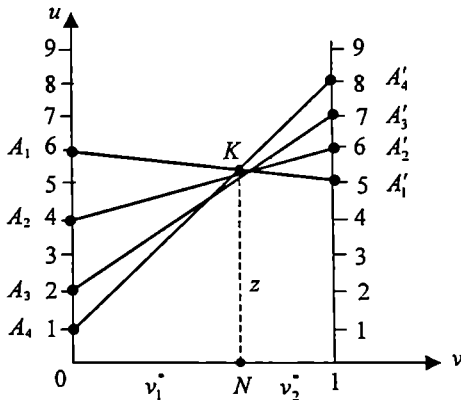
მიღებული შედეგის განზოგადების საფუძველზე ქვემოთ მოცემულია  $2 \times n$  ან  $n \times 2$  თამაშების გრაფიკული ამოხსნის ძირითადი ეტაპები:

1. მეორე (პირველი) მოთამაშის სტრატეგიების შესაბამისი წრფეების აგება;
2. მოგების ქვედა (ზედა) საზღვრის დადგენა;
3. განსაზღვრა მეორე (პირველი) მოთამაშის ორი სტრატეგიისა, რომლებსაც შეესაბამება მაქსიმალურ (მინიმალურ) ორდინატიან წერტილში ურთიერთგადამკვეთი ორი წრფე;
4. ოპტიმალური სტრატეგიისა და თამაშის ფასის განსაზღვრა.

მაგალითი 3.19. ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

მატრიცით განსაზღვრული თამაშის ამონახსნი.



ნახ. 3.13

ამოხსნა. მოცემული მატრიცის განზომილებაა  $2 \times 4$ . ავავოთ პირველი ( $A$ ) მოთამაშის სტრატეგიების შესაბამისი წრფეები (ნახ. 3.13).  $A_1, A_4$  ტეხილი შეესაბამება პირველი მოთამაშის მოგების ზედა საზღვარს, ხოლო  $NK$  მონაკვეთი - თამა-

შის ფასს. თამაშის ამონახსნი შემდეგია:  $U^* = (7/8; 0; 1/8)$ ,  $V^* = (3/8; 5/8)$ ,  $z = 43/8$ .

**მაბალითი 320.** სამკერვალო ფირმა საზაფხულო სეზონისათვის ახალი მოდელის ტანსაცმლის მასიურ გამოშვებას გეგმავს, მაგრამ მასზე მოთხოვნილების ზუსტი განსაზღვრა შეუძლებელია. თუმცა შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მოთხოვნილების მოცულობა სამი შესაძლო მდგომარეობით (I, II, III) შეიძლება დახასიათდეს. აღნიშნული მდგომარეობების გათვალისწინებით, ახალი მოდელის ტანსაცმლის გამოშვების სამი შესაძლო ვარიანტი ( $T_1, T_2, T_3$ ) განიხილება. თითოეული ვარიანტი გარკვეულ დანახარჯებს მოითხოვს და საბოლოო ჯამში სხვადასხვა ეკონომიკურ ეფექტს განაპირობებს.

სამკერვალო ფირმის მოგება (ათას ლარებში), რომელიც გამოსაშვები პროდუქციის სხვადასხვა მოცულობასა და მოთხოვნილებას შეესაბამება, განსაზღვრულია შემდეგი მატრიცით:

	I	II	III
$T_1$	22	22	22
$T_2$	21	23	23
$T_3$	20	21	24

საჭიროა ვიპოვოთ პროდუქციის გამოშვების მოცულობა, რომელიც მოთხოვნილების ნებისმიერი მდგომარეობის დროს საშუალო მოგებას უზრუნველყოფს.

**ამოცნა.** უპირველეს ყოვლისა, მოცემულ მატრიცაში შევამოწმოთ უნაგირა წერტილის არსებობა. ამისათვის ვიპოვოთ მატრიცის სტრიქონებში მინიმალური ელემენტები (22; 21; 20), ხოლო მატრიცის სვეტებში - მაქსიმალური ელემენტები (22; 23; 24). სტრიქონის მინიმალურ ელემენტებს შორის მაქსიმალური რიცხვია  $\alpha = 22$ , ხოლო სვეტის მაქსიმალურ ელემენტებს შორის მინიმალური რიცხვია  $\beta = 22$ . მაშასადამე,  $\alpha = \beta = 22$ . რიცხვი 22 თამაშის ფასია. თამაშს გააჩნია უნაგირა წერტილი, რომელიც პროდუქციის გამოშვების I ვარიანტს შეესაბამება. აღნიშნული ვარიანტი მოთხოვნილების ნებისმიერი მდგომარეობის დროს 22 ათასი ლარის ოდენობით მოგებას უზრუნველყოფს.

### 3.7.2 თამაშთა თეორიის ამოცანის დაყვანა წრფივში დაპროგრამების ამოცანაზე

განვიხილოთ  $m \times n$  განზომილებიანი სასრული თამაში, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი მატრიცით



$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3.187)$$

3.28 თეორემის თანახმად, პირველი მოთამაშის  $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$  ოპტიმალური სტრატეგიისა და თამაშის  $z$  ფასის შემთხვევაში ადგილი აქვს უტოლობას  $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* \geq z, j = \overline{1, n}$ . გარკვეულობისათვის დაეუშვათ, რომ  $z > 0$ . აღნიშნული დამკვეთს გამართლებულია, რადგან თუ  $A$  მატრიცის ყველა ელემენტს ერთიდაიგივე მუდმივ  $C$  რიცხვს დაეუმატებთ, მაშინ მატრიცის ელემენტების ასეთი ცვლილება ოპტიმალური სტრატეგიების ცვლილებას არ გამოიწვევს, მხოლოდ თამაშის ფასი  $C$  სიდიდით შეიცვლება.

უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ  $z$ -ზე, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{u_i^*}{z} \geq 1, j = \overline{1, n}. \quad (3.188)$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{u_i^*}{z} = y_i^*, \quad (3.189)$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq 1, j = \overline{1, n}; y_i^* \geq 0, i = \overline{1, m}. \quad (3.190)$$

თუ (3.189) აღნიშვნას გავითვალისწინებთ, მაშინ  $\sum_{i=1}^m u_i^* = 1$  პირობის ნაცვლად გვექნება

$$\sum_{i=1}^m y_i^* = \frac{1}{z}. \quad (3.191)$$

ვინაიდან პირველი მოთამაშის მიზანს მაქსიმალური მოგების მიღება წარმოადგენს, ამიტომ მან  $\frac{1}{z}$  სიდიდის მინიმუმი უნდა უზრუნველყოს. აღნიშნულის გათვალისწინებით პირველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანე-

ბა  $f^* = \sum_{i=1}^m y_i$  ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანაზე შემდეგი უტოლობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.192)$$

ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება  $f = \sum_{j=1}^n x_j$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანაზე შემდეგი უტოლობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.193)$$

სადაც  $x_j = \frac{v_j}{z}$ .

მაშასადამე,  $A$  მატრიცის საფუძველზე განსაზღვრული თამაშის ამონახსნის მისაღებად საჭიროა შევადგინოთ შემდეგი წყვილი დუალური ამოცანებისა და ვიპოვოთ მათი ამონახსნი.

პირდაპირი ამოცანა: ვიპოვოთ  $f = \sum_{j=1}^n x_j$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

დუალური ამოცანა: ვიპოვოთ  $f^* = \sum_{i=1}^m y_i$  ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

გამოვიყენებთ რა წვეილი დუალური ამოცანების ამონახსნებს, მივიღებთ თამაშის სტრატეგიებისა და ფასის განსაზღვრის ფორმულებს:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^m y_i^*} = zy_i^*;$$

$$v_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = zx_j^* \tag{3.194}$$

$$z = \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^*}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

ამგვარად, წრფივი დაპროგრამების მეთოდების გამოყენების საფუძველზე თამაშთა ამონახსნების განსაზღვრის პროცესი შეიცავს შემდეგ ეტაპებს:

1. მოცემული მატრიცული თამაშის ეკვივალენტური წრფივი დაპროგრამების წვეილი დუალური ამოცანების შედგენა;
2. წვეილი დუალური ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნების განსაზღვრა;
3. (3.194) თანაფარდობების საშუალებით მოცემული მატრიცული თამაშის ამონახსნის განსაზღვრა.

მაგალითი 3.21 ვიპოვოთ  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  მატრიცით განსაზღვრული თამაშის

ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ წრფივი დაპროგრამების წვეილი დუალური ამოცანები.

პირდაპირი ამოცანა: ვიპოვოთ  $f = x_1 + x_2 + x_3$  ფუნქციის მაქსიმუმი შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

დუალური ამოცანა: ვიპოვოთ  $f^* = y_1 + y_2 + y_3$  ფუნქციის მინიმუმი შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + y_3 \geq 1, \\ y_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

განვსაზღვროთ პირდაპირი და დუალური ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნები (იხ. ცხრილი 3.22).

3.22 ცხრილიდან ჩანს, რომ საწყისი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია  $x^* = (0; 1/2; 1)$ , ხოლო დუალური ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს წარმოადგენს  $y^* = (1/2; 1; 0)$ . მაშასადამე, თამაშის ფასია  $z = \frac{1}{1/2+1} = \frac{2}{3}$ , ხოლო მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიებია  $U^* = (1/3; 2/3; 0)$  და  $V^* = (0; 1/3; 2/3)$ .

ზემოთ აღნიშნული იყო, რომ ნებისმიერ მატრიცულ თამაშს წრფივი დაპროგრამების სიმეტრიული წყვილი დუალური ამოცანები შეესაბამება. სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერ სიმეტრიულ წყვილ დუალურ ამოცანებს მატრიცული თამაში შეესაბამება.

ეთქვათ, მოცემულია სიმეტრიული წყვილი დუალური ამოცანები - პირდაპირი ამოცანა:  $\max f = c^T x$ ,  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ ; დუალური ამოცანა:  $\min f^* = b^T y$ ,  $A^T y \geq c$ ,  $y \geq 0$ . მაშინ მოცემულ სიმეტრიულ წყვილ დუალურ ამოცანებს შეიძლება მიეუსადაგოთ კვადრატული

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცით განსაზღვრული თამაში, სადაც  $T$  ზედა ინდექსი ტრანსპონირების ოპერაციას აღნიშნავს.  $D$  მატრიცის განზომილებაა  $(m+n+1) \times (m+n+1)$ .

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერ მატრიცულ თამაშს ოპტიმალური სტრატეგია გააჩნია, მაშინ როცა წრფივი დაპროგრამების ამოცანას ამონახსნი შეიძლება ყოველთვის არ ჰქონდეს.

$i$	პუნსი	$c_{აა}$	$P_0$	1	1	1	0	0	0
				$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
1	$P_4$	0	1	1	2	0	1	0	0
2	$P_5$	0	1	1	0	1	0	1	0
3	$P_6$	0	1	2	1	0	0	0	1
			0	-1	-1	-1	0	0	0
1	$P_4$	0	1	1	2	0	1	0	0
2	$P_3$	1	1	1	0	1	0	1	0
3	$P_6$	0	1	2	1	0	0	0	1
			1	0	-1	0	0	1	0
1	$P_2$	1	1/2	1/2	1	0	1/2	0	0
2	$P_3$	1	1	1	0	1	0	1	0
3	$P_6$	0	1/2	3/2	0	0	-1/2	0	1
			3/2	1/2	0	0	1/2	1	0

ცხრილი 3.22

# თავი მეოთხე

## უპირობო ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

### 4.1 ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდები

ოპტიმიზაციის ამოცანა, რომელშიც საჭიროა ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნა, უმარტივესი ამოცანების კატეგორიას მიეკუთვნება. მიუხედავად ამისა, ასეთი ტიპის ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდებს განსაკუთრებული ადგილი უკავია საინჟინრო პრაქტიკაში. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ძირითადი დანიშნულების გარდა, აღნიშნულ მეთოდებს მნიშვნელოვანი დამხმარე ფუნქციაც აკისრია, რაც მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის ძებნის პროცესში გადაადგილების ბიჯის სიდიდის განსაზღვრაში გამოიხატება.

განვიხილოთ ოპტიმიზაციის შემდეგი ერთგანზომილებიანი ამოცანა:

$$\min\{ f(x) \mid x \in [a, b] \subset R \}. \quad (4.1)$$

დაეუწუთ, რომ მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც უწყვეტი და ღიფერენცირებადია  $[a, b] \subset R$  მონაკვეთზე, ანალიზური სახითაა წარმოდგენილი და შესაძლებელია მისი  $f(x)$  წარმოებულის ცხადი სახით განსაზღვრა.

როგორც მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია,  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმის მოსაძებნად საჭიროა ფუნქციის მნიშვნელობები გამოეთვალოთ მოცემული  $[a, b]$  მონაკვეთის სასაზღვრო წერტილებსა და კრიტიკულ წერტილებში ანუ ისეთ წერტილებში, სადაც  $f'(x) = 0$  და მიღებული მნიშვნელობების შედარების საფუძველზე შევარჩიოთ უმცირესი, რომლის შესაბამისი  $x^* \in [a, b]$  წერტილი (4.1) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს წარმოადგენს.

მაგალითი 4.1 ვიპოვოთ  $f(x) = x^3/3 - x^2$  ფუნქციის მინიმუმი  $[1; 3]$  მონაკვეთზე.

ამოხსნა. განვსაზღვროთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x) = x^2 - 2x .$$

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები, რისთვისაც ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$f'(x) = x^2 - 2x = 0 ,$$

საიდანაც  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .

ვინაიდან  $x_1 \notin [1,3]$ , ამიტომ ანალიზისათვის განვიხილოთ შემდეგი წერტილები:  $a=1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $b = 3$ . აღნიშნულ წერტილებში გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები

$$f(1) = -2/3, \quad f(2) = -4/3, \quad f(3) = 0.$$

მიღებული შედეგების შედარების საფუძველზე გვექნება:  $f_{\min} = f(2) = -4/3$ , ე.ი.  $x^* = 2$ .

განხილულ მაგალითში კრიტიკული წერტილების მოსაძებნად  $f'(x) = 0$  განტოლება უშუალოდ იქნა ამოხსნილი.  $f'(x)$  ფუნქციის შედარებით უფრო რთული გამოსახულების შემთხვევაში საჭიროა გამოყენებულ იქნეს არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები.

დიფერენციალური აღრიცხვის განხილული მეთოდი, რომელიც მიზნის ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლაზეა გათვალისწინებული, მოითხოვს ამ უკანასკნელის ანალიზური სახით წარმოდგენას. იმ შემთხვევაში, როცა  $f(x)$  ფუნქციისა და მისი წარმოებულის ანალიზურად გამოსახვა შეუძლებელია, (4.1) ამოცანის გადასაწყვეტად ძებნის სხვადასხვა მეთოდები გამოიყენება.

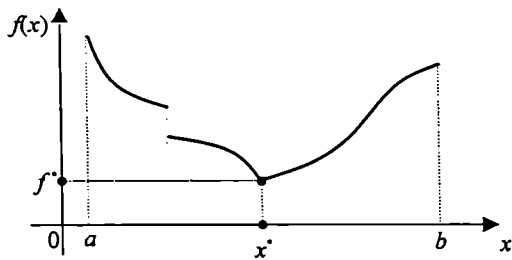
## 4.1.1 კეზნის მეთოდები

ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის ძებნის მეთოდები განვიხილოთ (4.1) ამოცანის მაგალითზე. დავეუშვათ, რომ საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია.

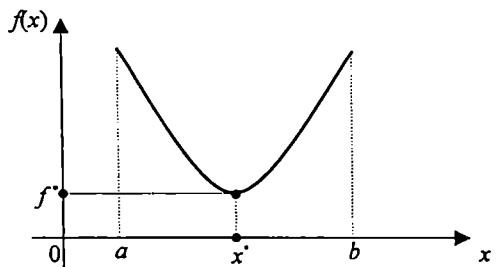
**ბნსაზღვრება 4.1**  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია  $[a, b]$  მონაკვეთზე, თუ მას გააჩნია მინიმუმი  $x^* \in [a, b]$  და  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ , სადაც  $x_1 < x_2$ , ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\begin{aligned} x_2 \leq x^* &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \\ x_1 \geq x^* &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

მაშასადამე, უნიმოდალურ  $f(x)$  ფუნქციას  $[a, b]$  მონაკვეთზე ერთადერთი ლოკალური მინიმუმი გააჩნია, ამასთან, აუცილებელი არაა, რომ იგი ღიფურენცირებადი ან უწყვეტი იყოს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,  $f(x)$  მკაცრად კლებადი ფუნქციაა, როცა  $x \leq x^*$ , და მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, როცა  $x > x^*$  (ნახ. 4.1). უნიმოდალური ფუნქციების კერძო შემთხვევას ამოზნექილი (ჩაზნექილი) ფუნქციები წარმოადგენს (ნახ. 4.2).



ნახ. 4.1



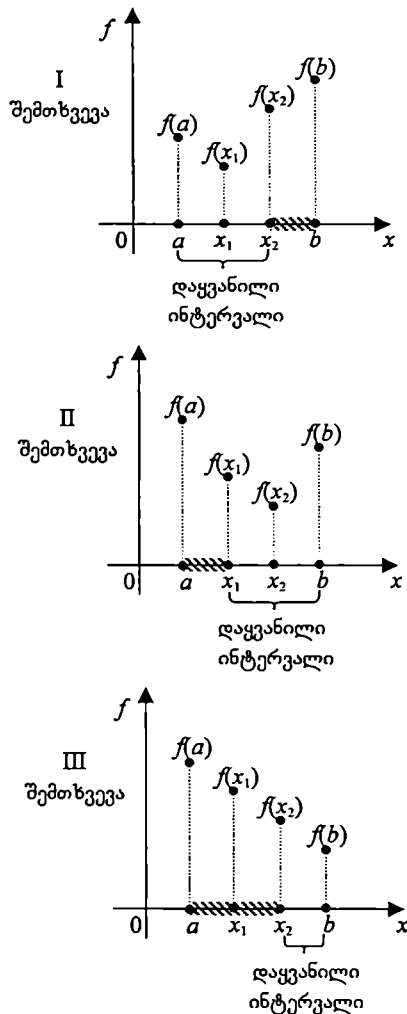
ნახ. 4.2

ფუნქციის უნიმოდალურობის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ  $f(x)$  მნიშვნელობებს  $[a, b]$  ინტერვალის ოთხ  $a, x_1, x_2, b$  წერტილში გამოვთვლით, ყოველთვის იარსებებს ისეთი ქვეინტერვალი, რომელიც არ შეიცავს ექსტრემუმის წერტილს და იგი შეიძლება გამოირიცხოს (ნახ. 4.3).

შემცირებულ ინტერვალში აღნიშნული პროცედურა შეიძლება გავიმეოროთ.

ძებნის მეთოდით ამოცანის ამოხსნის პროცესი  $[a, b]$  ინტერვალის თანდათანობით შევიწროებაში მდგომარეობს. თუ ოპტიმიზაციის პროცესის დასაწყისში მისი სიგრძე ტოლია  $b-a$ , პროცესის დამთავრებისას იგი წინასწარ მოცემულ დასაშვებ  $\epsilon$  სიდი-





ნახ. 4.3

დეზე ნაკლები უნდა გახდეს. ეი ადგილი აქვს საოპტიმიზაციო  $x$  ცვლადის ოპტიმალური მნიშვნელობის ლოკალიზებას  $[x_n, x_{n+1}]$  სეგმენტში, სადაც

$$x_{n+1} - x_n < \varepsilon. \quad (4.3)$$

## გადარჩევის მეთოდი

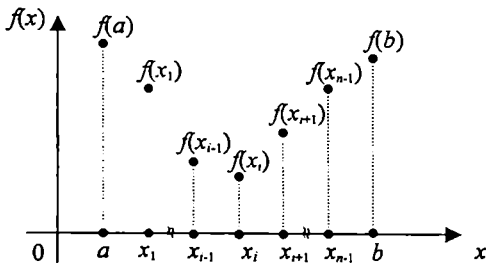
ძებნის მეთოდებს შორის უმარტივესია გადარჩევის მეთოდი, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს. ძებნის  $[a, b]$  ინტერვალი  $h = (b - a) / n$  ბიჯით დაიყოფა  $n$  რაოდენობის ტოლი სიდიდის მონაკვეთებად. ინტერვალის დაყოფის  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  წერტილებში გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქციის მნიშვნელობები  $y_k = f(x_k)$  და მიღებული მნიშვნელობების შედარების საფუძველზე შეირჩევა უმცირესი  $y_i = f(x_i)$ .

რიცხვი  $m_n = y_i$  მიახლოებით შეიძლება ჩაითვალოს  $f(x)$  ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობად  $[a, b]$  მონაკვეთზე. ცხადია,  $m_n$  რიცხვის  $m$  მინიმუმთან სიახლოვე დამოკიდებულია ძებნის ინტერვალის დაყოფის წერტილების რაოდენობაზე. რადგან  $f(x)$  უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m. \quad (4.4)$$

ე.ი. დაყოფის  $x_k$  წერტილების რაოდენობის გაზრდით მინიმუმის განსაზღვრის ცდომილება ნულისკენ მიისწრაფვის.

გადარჩევის მეთოდის ძირითადი სირთულე  $n$  რიცხვის შერჩევასა და ცდომილების შეფასებაში მდგომარეობს. გარდა ამისა, მინიმუმის წერტილის დასაშვები სიზუსტით განსაზღვრა საკმაოდ დიდი რაოდენობის გამოთვლით პროცედურებთანაა დაკავშირებული.



ნახ. 4.4

(4.1) ამოცანის გადასაწყვეტად შედარებით უფრო ეკონომიურია საოპტიმიზაციო ფუნქციის უნიმოდალურობის თვისების გამოყენება, რაც საშუალებას გვაძლევს ძებნის ინტერვალის შევიწროების პროცესი ნაკლები გამოთვლითი შრომატევადობით განსაზღვროთ. ვთქვათ, ისევე როგორც ზემოთ, მოცემული ინტერვალის  $x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , წერტილებზე განსაზღვრულ უნიმოდალური  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნე-

ლობებს შორის უმცირესია  $\gamma_i$ , რაც იმის მანიშნებელია, რომ დამოუკიდებელი  $x$  ცვლადის ოპტიმალური მნიშვნელობა მოთავსებულია  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$  სეგმენტში (ნახ. 4.4), ე.ი. ძებნის ინტერვალი შევიწროვდა და იგი  $h$  ბიჯის გაორკეცებული სიგრძის ტოლია

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 2h. \quad (4.5)$$

თუ  $2h > \varepsilon$ , მაშინ (4.5) ინტერვალი კლავ დაიფოფა  $n$  რაოდენობის ტოლი სიდიდის მონაკვეთებად, საკვანძო წერტილებში გამოითვლება ფუნქციის მნიშვნელობები, რომელთა ურთიერთშედარების საფუძველზე შეირჩევა უმცირესი, განისაზღვრება ძებნის ახალი ინტერვალი და ა.შ. ოპტიმიზაციის პროცესი ანალოგიურად გაგრძელდება მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილდება პირობა

$$x_{n+1} - x_{n-1} < \varepsilon. \quad (4.6)$$

აღწერილ მეთოდში  $h$  ბიჯის გონივრული შერჩევის შედეგად შეიძლება მიღწეულ იქნეს ძებნის მნიშვნელოვან ეფექტურობას. მაგალითად, ეთქვათ, ძებნის ინტერვალის საწყისი სიგრძეა  $b - a = 1$  და აუცილებელია მისი 100-ჯერ შემცირება. აღნიშნული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა მოცემული ინტერვალის 200 ტოლ ნაწილად დაყოფა, საოპტიმიზაციო ფუნქციის  $f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 200$ , მნიშვნელობების გამოთვლა და მინიმალური  $f(x_i)$  მნიშვნელობის მოძებნა. შემცირებული საძებნი ინტერვალი იქნება  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ .

იგივე ამოცანა შეიძლება შემდეგნაირად გადავწყვიტოთ. ძებნის  $[a, b]$  ინტერვალი 20 ნაწილად დავყოთ და განვსაზღვროთ 0.1 სიგრძის ახალი ინტერვალი, რისთვისაც  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობები გამოვთვალოთ წერტილებში  $x_k = a + 0.05k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 20$ . თუ შემცირებულ  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$  მონაკვეთს კვლავ 20 ნაწილად დავყოფთ და დაყოფის  $x_k = x_{i-1} + 0.005k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 19$ , წერტილებში გამოვთვლით ფუნქციის მნიშვნელობებს ( $x_{n-1}$  და  $x_{n+1}$  წერტილებში  $f(x)$  წინა ეტაპზე განისაზღვრა), მაშინ მივიღებთ 0.01 სიგრძის საძებნი ინტერვალს.

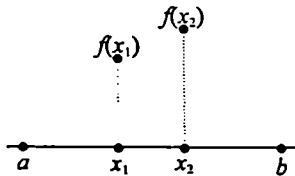
ამგვარად, ოპტიმიზაციის პროცესის მეორე შემთხვევა ბევრად უფრო ეკონომიურია, ვიდრე პირველი. თუ პირველ შემთხვევაში დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭირო გახდა საოპტიმიზაციო ფუნქციის 201-ჯერ გამოთვლა, მეორე შემთხვევაში გამოთვლების რაოდენობა 40-მდე შემცირდა. ე.ი. გამოთვლების ეკონომია ძებნის ინტერვალის დაყოფის არჩეულ წესზეა დამოკიდებული.

არსებობს ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის მთელი რიგი სპეციალური მეთოდები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება საკვანძო წერტილების შერჩევისა და ძებნის ინტერვალის შევიწროების სხვადასხვა წესით: ოქროს კვეთის, დიხოტომიის (ინტერვალის შუაზე გაყოფის), ფიბონაჩის, პოლინომიალური აპროქსიმაციის, ნიუტონ-რაფსონის მეთოდები და სხვ. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

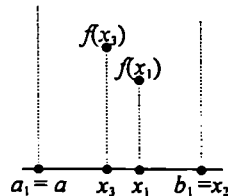
## 4.1.2 ოქროს კვეთის მეთოდი

საზოგადოდ, ოპტიმიზაციის გამოთვლითი სტეპის შემუშავების დროს განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს გამოთვლების მოცულობისა და ექსტრემუმის ძებნაზე დახარჯული კომპიუტერული დროის მინიმიზაციის პრობლემები, რომელთა გადაწყვეტა საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის გამოთვლის (ან ექსპერიმენტის ჩატარების შემთხვევაში - გაზომვის) რაოდენობის შემცირებით არის შესაძლებელი. ოქროს კვეთის მეთოდი ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის ერთ-ერთი ეფექტური მეთოდია, სადაც  $f(x)$  ფუნქციის შეზღუდული რაოდენობის მნიშვნელობების გამოთვლით საუკეთესო სიზუსტე მიიღწევა. მისი ძირითადი არსი მდგომარეობს  $[a, b]$ ,  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ , ..... მონაკვეთების მონოტონურად კლებადი ისეთი მიმდევრობის განსაზღვრაში, რომელიც საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმისკენ მიისწრაფის. თითოეულ ბიჯზე, პირველის გამოკლებით,  $f(x)$  ფუნქცია მხოლოდ ერთხელ გამოითვლება წერტილში, რომელსაც ოქროს კვეთას უწოდებენ. ამ უკანასკნელის შერჩევა გარკვეული წესის საფუძველზე ხორციელდება.

ოპტიმიზაციის პროცესის საწყის ეტაპზე ძებნის  $[a, b]$  ინტერვალში (ნახ. 4.5ა) შეირჩევა ორი წერტილი:  $x_1$  და  $x_2$  და გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქციის მნიშვნელობები  $f(x_1)$  და  $f(x_2)$ .



ნახ. 4.5ა



ნახ. 4.5ბ

ვინაიდან მოცემულ შემთხვევაში  $f(x_1) < f(x_2)$ , ცხადია, მინიმუმი მდებარეობს  $x_1$  წერტილის მოსაზღვრე  $[a, x_1]$  ან  $[x_1, x_2]$  ქვეინტერვალებში. ამიტომ  $[x_2, b]$  მონაკვეთი შეიძლება უგულებელვყოთ და ძებნის საწყისი ინტერვალი შევამციროთ.

მეორე ეტაპზე განვიხილავთ შემცირებულ  $[a_1, b_1]$  ინტერვალს (ნახ. 4.5ბ), სადაც  $a_1 = a$ ,  $b_1 = x_2$ . აღნიშნულ ინტერვალში საჭიროა კვლავ შევარჩიოთ ორი წერტილი, მაგრამ ვინაიდან  $x_1 \in [a_1, b_1]$ , ამიტომ საკმარისია ავირჩიოთ მხოლოდ ერთი  $x_3$  წერტილი, გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა  $f(x_3)$  და მოვახდინოთ შედარება. ვინაიდან  $f(x_3) > f(x_1)$ , ამიტომ, ცხადია, მინიმუმი მდებარეობს  $[x_1, b_1]$  ინტერვალში. აღნიშნოთ ეს უკანასკნელი  $[a_2, b_2]$ , კვლავ შევარჩიოთ ერთი შიგა წერტილი

ტილი და ინტერვალის შემცირების პროცედურა გავიმეოროთ. ოპტიმიზაციის პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილდება პირობა  $[a_n, b_n] < \varepsilon$ .

ოპტიმიზაციის პროცესის თითოეულ ეტაპზე ოქროს კვეთის წერტილების შერჩევა, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, გარკვეული კანონზომიერების საფუძველზე ხორციელდება და იგი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, ძეზნის ინტერვალია  $d$  და დაუშვათ, რომ შესაძლებელია მისი დაყოფა  $d_1, d_2$  ნაწილებად, ისე რომ  $d_1 > d_2, d = d_1 + d_2$ . მოცემული ინტერვალის ოქროს კვეთა ისე უნდა განხორციელდეს, რომ დაკმაყოფილდეს თანაფარდობა

$$d_1 / d = d_2 / d_1. \quad (4.7)$$

ცხადია,  $d$  ინტერვალის ოქროს კვეთის წერტილის მოსაძებნად საჭიროა  $d_2 / d_1$  ფარდობის განსაზღვრა, რისთვისაც (4.7) გამოსახულებაში ჩავატაროთ გარდაქმნები:

$$d_1^2 = d_2 d,$$

$$d_1^2 = d_2 (d_1 + d_2),$$

$$d_1^2 + d_1 d_2 - d_2^2 = 0,$$

$$(d_2 / d_1)^2 + d_2 / d_1 - 1 = 0,$$

$$d_2 / d_1 = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2.$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში მხოლოდ დადებითი ამონახსნი გვიინტერესებს, ამიტომ

$$d_2 / d_1 = d_1 / d = (-1 + \sqrt{5}) / 2 = 0.618034, \quad (4.8)$$

საიდანაც

$$d_1 = 0.618034d, d_2 = 0.381966d. \quad (4.9)$$

ვინაიდან წინასწარ უცნობია თუ როგორი თანამიმდევრობით ( $d_1$  და  $d_2$  ან  $d_2$  და  $d_1$ ) უნდა დაიყოს ძეზნის ინტერვალი, ამიტომ განვიხილავთ წერტილებს, რომლებიც დაყოფის ორივე შემთხვევას შეესაბამება. ნახ. 4.5ა-ზე დაყოფის  $x_1$  და  $x_2$  წერტილები მონაკვეთის ნაწილების მიღებული მნიშვნელობების გათვალისწინებით შეირჩევა. მოცემულ შემთხვევაში გვექნება

$$x_1 - a = b - x_2 = 0.381966d,$$

$$b - x_1 = x_2 - a = 0.618034d,$$

$$d = b - a.$$

**უპირობო ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები**

ოპტიმიზაციის პირველი ბიჯის შემდეგ მიიღება ძებნის ახალი ინტერვალი -  $[a_1, b_1]$  მონაკვეთი (ნახ. 4.5ბ). შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $x_1$  წერტილი ამ მონაკვეთს ყოფს საჭირო თანაფარდობით. ამასთან,

$$b_1 - x_1 = 0.381966d_1,$$

$$d_1 = b_1 - a_1.$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} b_1 - x_1 &= x_2 - x_1 = (b - a) - (x_1 - a) - (b - x_2) = \\ &= d - 0.381966d - 0.381966d = 0.236068d, \end{aligned}$$

$$d_1 = x_2 - a = 0.618034d,$$

$$b_1 - x_1 = 0.236068(d_1 / 0.618034) = 0.381966d_1.$$

დაყოფის მეორე წერტილი  $x_3$  მონაკვეთის მარცხენა საზღვრიდან იმავე მანძილით აღება, ე.ი.  $x_3 - a_1 = 0.381966d_1$  და ძებნის ინტერვალი კვლავ შემცირდება

$$d_2 = b_2 - a_2 = b_1 - x_3 = 0.618034d_1 = 0.618034^2 d.$$

მიღებული თანაფარდობების საფუძველზე შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს ოპტიმიზაციის  $(k+1)$ -ე ბიჯზე  $[a_k, b_k]$  ინტერვალის დაყოფის წერტილების  $x_y$  და  $x_z$  კოორდინატები ( $x_y < x_z$ ):

$$x_y = 0.618034 a_k + 0.381966 b_k, \tag{4.10}$$

$$x_z = 0.381966 a_k + 0.381966 b_k.$$

ამასთან, ძებნის ინტერვალის სიგრძე ტოლია

$$d_k = b_k - a_k = 0.618034^k d. \tag{4.11}$$

ამგვარად, ოპტიმიზაციის პროცესი დამთავრებულად ჩაითვლება, როცა შესრულდება  $d_k < \varepsilon$  პირობა. ამ დროს საოპტიმიზაციო  $x$  ცვლადი ლოკალიზებულია  $a_k < x < b_k$  შუალედში და მის ოპტიმალურ მნიშვნელობად შეიძლება მიღებულ იქნეს  $x^* = a_k$  (ან  $x^* = b_k$ , ან  $x^* = (a_k + b_k) / 2$ ).

**მაბალნიი 4.2** ოქროს კვეთის მეთოდით გადაწყვეითო მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min \{ f(x) = 24 - 2x/3 + x^2/30 \mid x \in [5; 20] \}.$$

ამონსნა. მოცემულ ამოცანაში ძებნის საწყისი ინტერვალის საზღვრებია  $a = 5$  და  $b = 20$ . შევირჩიოთ დასაშვები ცდომილება  $\varepsilon = 0.5$ . გამოთვლები მოცემულია 4.1 ცხრილში.

ქვემოთ მოცემულია გამოთვლების შედეგები პირველი ეტაპისათვის:

$$x_y = 0.618034 \cdot 5 + 0.381966 \cdot 20 = 10.729,$$

$$x_z = 0.381966 \cdot 5 + 0.618034 \cdot 20 = 14.270,$$

$$M = f(x_y) = 24 - (2/3)10.729 + (1/30)10.729^2 = 20.6844,$$

$$N = f(x_z) = 24 - (2/3)14.270 + (1/30)14.270^2 = 21.2746,$$

$$M < N.$$

$n$	$a$	$x_1$	$x_2$	$b$	$M$	$N$	$d$
1	5.000	10.729	14.270	20.000	20.6844	21.2746	15.000
2	5.000	8.541	10.729	14.270	20.7376	20.6844	9.270
3	8.541	10.729	12.082	14.270	20.6844	20.8112	5.729
4	8.541	9.894	10.729	12.082	20.6670	20.6844	3.541
5	8.541	9.377	9.894	10.729	20.6796	20.6670	2.188
6	9.377	9.894	10.213	10.729	20.6670	20.6682	1.352
7	9.377	9.696	9.894	10.213	20.6697	20.6670	0.836
8	9.696	9.894	10.016	10.213	20.6670	20.6667	0.517
9	9.894	10.016	10.091	10.213	20.6667	20.6669	0.319
10	9.894	9.969	10.016	10.091	20.6667	20.6667	0.197
11	9.969	10.016	10.044	10.091	20.6667	20.6667	0.122
	9.969		10.044				0.075

ცხრილი 4.1

როგორც ცხრილიდან ჩანს, ოქროს კვეთის მეთოდით მოცემული ამოცანის  $\varepsilon = 0.1$  სიზუსტით გადაწყვეტას დასჭირდა 11 იტერაცია. ოპტიმიზაციის პროცესის შედეგად მინიმუმის წერტილი ლოკალიზებულ იქნა  $9.969 < x^* < 10.044$  შუალედში, საიდანაც განსაზღვრულ იქნა ოპტიმალური მნიშვნელობა

$$x^* = (9.969 + 10.044) / 2 = 10.0065, \quad f^* = f(x^*) = 20.66667.$$

### 4.1.3 დიხოტომიის მეთოდი

დიხოტომიის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს თითოეულ ბიჯზე ზუსტად ორჯერ შევამციროთ ძებნის ინტერვალის სიგრძე, რომელშიც ექსტრემუმის წერტილია მოთავსებული. ამ მიზნით  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა აუცილებელია ინტერვალის მხოლოდ ორ განსაზღვრულ წერტილში.

დიხოტომიის ანუ მონაკვეთის შუაზე გაყოფის პროცესი იტერაციულია.  $n$  რაოდენობის იტერაციის ჩატარების შედეგად ძებნის ინტერვალის სიგრძე, საწყისი ინტერვალის სიგრძესთან შედარებით,  $2^n$ -ჯერ მცირდება.

დიხოტომიის მეთოდით ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის (4.1) ამოცანის გადაწყვეტა შემდეგი ძირითადი პროცედურების ჩატარებას ითვალისწინებს.

**ბიჯი 1.** განისაზღვრება ძებნის მოცემული  $[a, b]$  ინტერვალის სიგრძე  $d = b - a$  და მისი შუა წერტილი  $x_m = (a + b) / 2$ . გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქციის მნიშვნელობა  $f(x_m)$ ;

**ბიჯი 2.** განისაზღვრება ძებნის მიმდინარე ინტერვალის ორი სიმეტრიული წერტილი, რომელიც სასაზღვრო წერტილებიდან თანაბარი მანძილებითაა დაშორებული:  $x_y = a + d / 4$  და  $x_z = b - d / 4$ . შევნიშნავთ, რომ  $x_y$  და  $x_z$  წერტილებით ძებნის ინტერვალი ოთხ ტოლ მონაკვეთად დაიყოფა. გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქციის მნიშვნელობები  $f(x_y)$  და  $f(x_z)$ ;

**ბიჯი 3.** შემოწმდება პირობა

$$f(x_y) < f(x_m). \quad (4.12)$$

თუ (4.12) უტოლობა სამართლიანია, მაშინ  $b = x_m$ ,  $x_m = x_y$ , გამოირიცხება  $(x_m, b]$  ინტერვალი და გადავალთ მე-4 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავალთ მე-4 ბიჯზე;

**ბიჯი 4.** შემოწმდება პირობა

$$f(x_z) < f(x_m). \quad (4.13)$$

თუ (4.13) უტოლობა სამართლიანია, მაშინ  $a = x_m$ ,  $x_m = x_z$ , გამოირიცხება  $[a, x_m)$  ინტერვალი და გადავალთ მე-5 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში  $a = x_y$ ,  $b = x_z$  და გადავალთ მე-5 ბიჯზე;

**ბიჯი 5.** გამოითვლება  $d = b - a$ . თუ  $|d| < \varepsilon$ , მაშინ გადავალთ მე-6 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-2 ბიჯზე;

**ბიჯი 6.** პროცესის დასასრული.

**მაგალითი 4.3.** დიხოტომიის მეთოდით გადაეწყვიტოს ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის შემდეგი ამოცანა



$$\min \left\{ f(x) = (100 - x)^2 \mid x \in [60; 150] \right\}.$$

ამოხსნა. ძეზნის საწყისი ინტერვალის საზღვრებია  $a = 60$  და  $b = 150$ , ე.ი. ინტერვალის სიგრძეა  $d = 150 - 60 = 90$ . დაუშვათ დასაშვები ცლომილების სიდიდე  $\varepsilon = 0.1$ .

**იტერაცია 1**

$$x_y = a + d/4 = 60 + 90/4 = 82.5,$$

$$x_z = b - d/4 = 150 - 90/4 = 127.5,$$

$$x_m = (60 + 150)/2 = 105,$$

$$f(82.5) = 306.25 > f(105) = 25,$$

$$f(127.5) = 756.25 > f(105) = 25.$$

ამგვარად, (60; 82.5) და (127.5; 150) ინტერვალები გამოირიცხება, ზოლო ძეზნის ინტერვალის სიგრძე 90-დან 45-მდე შემცირდება.

**იტერაცია 2**

$$a = 82.5, \quad b = 127.5, \quad x_m = 105,$$

$$d = 127.5 - 82.5 = 45 > \varepsilon = 0.1,$$

$$x_y = 82.5 + 45/4 = 93.75,$$

$$x_z = 127.5 - 45/4 = 116.25,$$

$$f(93.75) = 39.06 > f(105) = 25,$$

$$f(116.25) = 264.06 > f(105) = 25.$$

ამგვარად, (82.5; 93.75) და (116.25; 127.5) ინტერვალები გამოირიცხება, ზოლო ძეზნის ინტერვალის სიგრძე კვლავ შემცირდება.

**იტერაცია 3**

$$a = 93.75, \quad b = 116.25, \quad x_m = 105,$$

$$d = 116.25 - 93.75 = 22.5 > \varepsilon = 0.1,$$

$$x_y = 99.375,$$

$$x_z = 110.625,$$

$$f(99.375) = 0.39 < f(105) = 25.$$

ამგვარად, (105; 116.25) ინტერვალი გამოირიცხება. ძეზნის ახალი ინტერვალი იქნება (93.75; 105), რომლის სიგრძეა  $d=105-93.75=11.25$ , ხოლო შუა წერტილია  $x_m = x_y = 99.375$ . აღსანიშნავია, რომ სამი იტერაციის შედეგად, რომლის დროსაც საჭირო გახდა  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობის ექვსჯერ გამოთვლა, ძეზნის საწყისი ინტერვალის სიგრძე ( $d = 90$ ) შემცირდა  $2^3$ -ჯერ:  $90/11.25=2^3$ .

ანალოგიურად გაგრძელდება შემდეგი იტერაციებიც, რომელთა რიცხვითი შედეგები წარმოდგენილია 4.2 ცხრილში.

$n$	$a$	$b$	$x_m$	$f$	$d$
0	60.0000	150.0000			90.0000
1	82.5000	127.5000	105.0000	25.0000	45.0000
2	93.7500	116.2500	105.0000	25.0000	22.5000
3	93.7500	105.0000	99.3750	0.390625	11.2500
4	96.5625	102.1875	99.3750	0.390625	5.625000
5	97.9688	100.7813	99.3750	0.390625	2.812500
6	99.3750	100.7813	100.0781	0.006104	1.406250
7	99.7266	100.4297	100.0781	0.006104	0.703125
8	99.9023	100.2539	100.0781	0.006104	0.351562
9	99.9023	100.0781	99.9902	0.000095	0.175781
10	99.9463	100.0342	99.9902	0.000095	0.087889
			99.9902	0.000095	

ცხრილი 4.2

როგორც ცხრილიდან ჩანს, დიზოტომიის ანუ მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდით მოცემული ამოცანის  $\varepsilon = 0.1$  სიზუსტით გადაწყვეტას დასჭირდა 10 იტერაცია. ოპტიმიზაციის პროცესის შედეგად მინიმუმის წერტილი ლოკალიზებულ იქნა  $99.9463 < x^* < 100.0342$  შუალედში და განსაზღვრულ იქნა მისი ოპტიმალური მნიშვნელობა  $x^* = 99.9902$ ,  $f^* = f(x^*) = 0.000095$ .

### 4.1.4 ფიბონაჩის მეთოდი

ფიბონაჩის მეთოდი, ზემოთ განხილულ მეთოდებთან შედარებით, ოპტიმალურია იმ აზრით, რომ საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობების სასრული ფიქსირებული  $n$  რაოდენობის გამოთვლების შედეგად ძებნის საწყისი ინტერვალის მაქსიმალურ შემცირებას უზრუნველყოფს. მეთოდის სახელწოდება გამომდინარეობს ძებნის სტრატეგიიდან და იგი ფიბონაჩის რიცხვების მიმდევრობას უკავშირდება.

როგორც ცნობილია, აღნიშნული მიმდევრობის თითოეული წევრი განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული ფორმულის საფუძველზე:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2, \tag{4.14}$$

$$F_0 = F_1 = 1. \tag{4.15}$$

ფიბონაჩის რიცხვების მე- $n$  წევრის ზოგადი გამოსახულება, რომელიც (4.14) და (4.15) განტოლებების ამოხსნით მიიღება, შემდეგია [42]:

$$F_n = [(1/d)^{n+1} - (-d)^{n+1}] / \sqrt{5}, \tag{4.16}$$

სადაც

$$d = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0.618034.$$

(4.16) გამოსახულებაში  $n$ -ის რაგინდ დიდი მნიშვნელობების დროს  $(-d)^{n+1}$  წევრი შეიძლება უგულებელვყოთ და ამიტომ გვექნება

$$F_n \approx (1/d)^{n+1} / \sqrt{5}. \tag{4.17}$$

ფიბონაჩის რიცხვების მიმდევრობის პირველი თექვსმეტი წევრის მნიშვნელობა მოცემულია 4.3 ცხრილში.

$N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$N$	9	10	11	12	13	14	15	16	
$F_n$	55	89	144	233	377	610	987	1597	

ცხრილი 4.3

ფიბონაჩის მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. დავეშვათ, მოცემულია ძებნის საწყისი ინტერვალი  $[a, b]$  და ცნობილია  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემული ინტერვალის როგორც სასაზღვრო  $a$  და  $b$ , ასევე შუალედურ  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებში:  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ . ფუნქციის უნიმოდალურობის თვისებებს თუ გავითვალისწინებთ, მაშინ ერთ-ერთი ქვეინტერვალი  $[a, x_1]$  ან  $(x_2, b]$  შეიძლება გამოირიცხოს.

ვთქვათ,  $d_1 = b - a$  საწყისი ინტერვალის სიგრძეა. ფუნქციის მნიშვნელობების შედარების საფუძველზე თუ  $(x_2, b]$  გამოირიცხება, მაშინ დაგვრჩება  $x_2 - a$  სიგრძის ქვეინტერვალი, ხოლო თუ გამოირიცხება  $[a, x_1]$ , მაშინ დაგვრჩება  $b - x_1$  სიგრძის ქვეინტერვალი. იმისათვის, რომ მიღებული ქვეინტერვალის სიგრძე ფუნქციაზე არ იყოს დამოკიდებული, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი ტოლობა  $x_2 - a = b - x_1$  ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,  $x_1$  და  $x_2$  წერტილები  $[a, b]$  ინტერვალის შუა წერტილის მიმართ სიმეტრიულად უნდა იყოს განლაგებული.

დავეშვათ, რომ გამოირიცხა  $(x_2, b]$  ქვეინტერვალი. იმისათვის, რომ დაყვანილ  $[a, x_2]$  ინტერვალში ანალოგიური პროცედურები შევასრულოთ, საჭიროა გამოეთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში, რომელიც  $x_1 \in [a, x_2]$  წერტილის სიმეტრიული იქნება. იმ შემთხვევაში, როცა  $[a, x_1)$  ქვეინტერვალი გამოირიცხება, მაშინ დაყვანილ  $[x_1, b]$  ინტერვალში საჭიროა გამოეთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში, რომელიც  $x_2 \in [x_1, b]$  წერტილის სიმეტრიული იქნება. ამგვარად, სტრატეგია თავიდანვე ნათელია. დაყვანილ ინტერვალში ყოველი შემდეგი წერტილი იქ არსებული წერტილის სიმეტრიულად უნდა ავიღოთ. მაგრამ იმისათვის, რომ მეთოდის გამოთვლითი სქემა შევიმუშავოთ, აუცილებელია მისი დამთავრების პროცესიც განვიხილოთ.

ზემოთ აღნიშნული სტრატეგიის თანახმად, გამოთვლების საბოლოო მე- $n$  ეტაპზე ძებნის  $(n-1)$ -ე ინტერვალში  $n$ -ური წერტილი  $(n-1)$ -ე წერტილის სიმეტრიულად აიღება. მოცემულ ეტაპზე, მე- $n$  ინტერვალის მაქსიმალურ შემცირებას რომ მივაღწიოთ, საჭიროა  $(n-1)$ -ე ინტერვალის შუაზე გაყოფა. ამ შემთხვევაში  $x_n$  წერტილი  $x_{n-1}$  წერტილს უნდა დაემთხვეს. მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ  $\varepsilon$  ცდომილებას, რომელიც, ჩვეულებრივ,  $x_{n-1}$  და  $x_n$  წერტილებს შორის არსებობს, მაშინ მე- $n$  და  $(n-1)$ -ე ინტერვალების სიგრძეებს შორის დამოკიდებულება შემდეგი ტოლობით შეიძლება გამოვსახოთ

$$d_{n-1} = 2d_n - \varepsilon.$$

გამოთვლების  $(n-1)$ -ე ეტაპზე ძებნის  $(n-2)$ -ე ინტერვალში  $x_{n-2}$  წერტილი  $x_{n-1}$  წერტილის სიმეტრიულად უნდა ავიდოთ, რომელიც მოცემული ინტერვალის სასაზღვრო წერტილებიდან  $d_{n-1}$  მანძილით იქნება დაშორებული. ამიტომ

$$d_{n-2} = d_{n-1} + d_n .$$

ანალოგიურად გვექნება  $(n-2)$ -ე ეტაპზეც:

$$d_{n-3} = d_{n-2} + d_{n-1} .$$

ზოგად შემთხვევაში კი გვექნება

$$d_{j-1} = d_j + d_{j+1}, \quad 1 < j < n . \quad (4.18)$$

ამგვარად,

$$d_{n-1} = 2d_n - \varepsilon ,$$

$$d_{n-2} = d_{n-1} + d_n = 3d_n - \varepsilon ,$$

$$d_{n-3} = d_{n-2} + d_{n-1} = 5d_n - 2\varepsilon ,$$

$$d_{n-4} = d_{n-3} + d_{n-2} = 8d_n - 3\varepsilon$$

და ა.შ.

ფიბონაჩის რიცხვების გათვალისწინებით აღნიშნული დამოკიდებულებები, ზოგად შემთხვევაში, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$d_{n-j} = F_{j+1}d_n - F_{j-1}\varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 . \quad (4.19)$$

როცა  $j = n-1$ , მაშინ (4.19)-დან მივიღებთ

$$d_1 = F_n d_n - \varepsilon F_{n-2} ,$$

საიდანაც

$$d_n = d_1 / F_n + \varepsilon F_{n-2} / F_n . \quad (4.20)$$

მაშასადამე, ფუნქციის მნიშვნელობების  $n$  რაოდენობის გამოთვლების შედეგად ძებნის ინტერვალის სიგრძე მის თავდაპირველ სიგრძესთან შედარებით  $1/F_n$  უკერძო მცირდება ( $\varepsilon$ -ის უგულებელყოფის შემთხვევაში):

$$d_n / d_1 = 1 / F_n . \quad (4.21)$$

საზოგადოდ, საინჟინრო პრაქტიკაში ოპტიმიზაციის ამოცანების გადასაწყვეტად წინასწარ მოცემულია დასაშვები ცდომილების სიდიდე  $\varepsilon > 0$  და არა საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლის  $n$  რაოდენობა. იმისათვის, რომ განესაზღვროთ  $n$  რიცხვის ის მნიშვნელობა, რომელიც აუცილებელია მოცემული სიზუსტის მისაღწევად, საჭიროა ვისარგებლოთ (4.21) დამოკიდებულებით. ასე, მაგალითად, თუ საწყისი ინტერვალის სიგრძეა  $d_1=1$ , ხოლო 0.001 დასაშვები სიზუსტეა (ანუ ძებნის ინტერვალის საბოლოო სიგრძეა), მაშინ (4.21)-დან გვექნება

$$d_n / d_1 = 1 / F_n = 0.001,$$

საიდანაც  $F_n = 1000$ , რასაც 4.3 ცხრილში შეესაბამება  $n=16$ .

ამგვარად, ფიბონაჩის მეთოდის საფუძველზე შემუშავებული ალგორითმი შემდეგი ძირითადი პროცედურების შესრულებას ითვალისწინებს.

**ბიჯი 1.** დაფიქსირდება ძებნის  $[a, b]$  ინტერვალის პირველი წერტილის მდებარეობა, რომელიც საწყისი ინტერვალის ერთ-ერთი სასაზღვრო წერტილიდან  $d_2$  მანძილზე აიღება. ამასთან, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს თუ რომელი სასაზღვრო წერტილიდან, ვინაიდან სიმეტრიულობის წესის თანახმად მეორე წერტილი ინტერვალის მეორე ბოლოდან კვლავ  $d_2$  მანძილზე დაფიქსირდება, ე.ი.

$$\begin{aligned} x_1 &= a + d_2 = a + F_{n-1}d_n - \varepsilon F_{n-3} = \\ &= a + F_{n-1}d_1 / F_n + \varepsilon(F_{n-1}F_{n-2} - F_n F_{n-3}) / F_n = \\ &= a + F_{n-1}d_n / F_n + (-1)^n \varepsilon / F_n; \end{aligned} \quad (4.22)$$

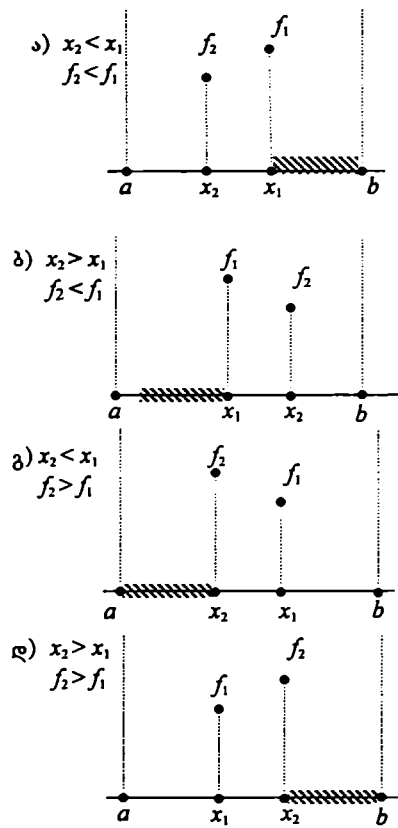
**ბიჯი 2.** დაფიქსირდება  $[a, b]$  ინტერვალის მეორე წერტილის მდებარეობა, რომელიც  $x_1$ -ის სიმეტრიულად აიღება. იგი ყოველთვის ისე უნდა შივრჩეს, რომ დაკმაყოფილდეს პირობა  $b - x_2 = x_1 - a$ , ან  $x_2 - a = b - x_1$ , ე.ი.

$$x_2 - a = b - x_1; \quad (4.23)$$

**ბიჯი 3.**  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებში გამოითვლება ფუნქციის მნიშვნელობები  $f_1 = f(x_1)$ ,  $f_2 = f(x_2)$  და განიხილება ოთხი შემთხვევა (ნახ. 4.6):

ა) როცა  $x_2 < x_1$  და  $f_2 < f_1$ , მაშინ ექსტრემუმის ძებნა გაგრძელდება შემცირებულ  $[a, x_1]$  ინტერვალში;

ბ) როცა  $x_2 > x_1$  და  $f_2 < f_1$ , მაშინ ექსტრემუმის ძებნა გაგრძელდება  $[x_1, b]$  ინტერვალში;



ნახ. 4.6

გ) როცა  $x_2 < x_1$  და  $f_2 > f_1$ , მაშინ ექსტრემუმის ძებნა გაგრძელდება  $[x_2, b]$  ინტერვალში;

დ) როცა  $x_2 > x_1$  და  $f_2 > f_1$ , მაშინ ექსტრემუმის ძებნა გაგრძელდება  $[a, x_2]$  ინტერვალში;

**ბიჯი 4.** იმის მიხედვით თუ რომელ შემთხვევას ექნება ადგილი, დაყვანილ ინტერვალში ოპტიმიზაციის პროცესი ანალოგიურად განმეორდება მანამ, სანამ იტერაციების რიცხვი არ გადააჭარბებს  $n$ -ს.

**მაგალიტი 4.4.** ფიბონაჩის მეთოდით გადავწყვიტოთ ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) = 2x^2 - e^x \mid x \in [0;1] \right\}$$

საოპტიმიზაციო ფუნქციის  $n=10$ -ჯერ გამოთვლის შემთხვევაში.

ამოხსნა. ძებნის საწყისი ინტერვალის საზღვრებია  $a=0$ ,  $b=1$ . დავუშვათ დასაშვები ცდომილების სიდიდე  $\varepsilon=0$ . გამოთვლების შედეგები წარმოდგენილია 4.4 ცხრილში.

როგორც ცხრილიდან ჩანს, მე-10 იტერაციაზე მინიმუმის წერტილი ლოკალიზებულია შუალედში  $0.359550 < x^* < 0.370785$ , რომლის სიგრძეა

$$d_0 = 0.370785 - 0.359550 = 0.011235 \approx 1/89 = 1/F_{10}.$$

$n$	$a$	$b$	$d$
0	0.000000	1.000000	1.000000
1	0.000000	0.617977	0.617977
2	0.235955	0.617977	0.382023
3	0.235955	0.471910	0.235955
4	0.325842	0.471910	0.146068
5	0.325842	0.415730	0.089887
6	0.325842	0.382023	0.056180
7	0.348315	0.382023	0.033707
8	0.348315	0.370788	0.022473
9	0.359550	0.370788	0.011238
10	0.359550	0.370785	0.011235

ცხრილი 4.4

ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია

$$x^* = 0.359550, \quad f^* = f(x^*) = -1.174132.$$



## 4.1.5 ბოლინომიალური აპროქსიმაციის მეთოდები

პოლინომიალური აპროქსიმაციის მეთოდების ძირითადი იდეა პოლინომით გლუვი ფუნქციის აპროქსიმაციისა და მაპროქსიმებელი პოლინომის საშუალებით მინიმუმის წერტილის კოორდინატების განსაზღვრის ამოცანებთანაა დაკავშირებული. ასეთი მიდგომის ეფექტური რეალიზაციის აუცილებელ პირობებს საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის უნიმოდალურობა და უწყვეტობა წარმოადგენს.

### კვადრატული ინტერპოლაციის მეთოდი

პოლინომიალური აპროქსიმაციის მეთოდებიდან კვადრატული ინტერპოლაციის მეთოდი უმარტივესია. მისი საშუალებით ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის (4.1) ამოცანის გადაწყვეტა ითვალისწინებს მოცემულ ინტერვალში  $f(x)$  ფუნქციის აპროქსიმაციას კვადრატული  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$  პოლინომით, რომლის ანალიზურად განსაზღვრული ექსტრემუმის (მინიმუმის ან მაქსიმუმის)  $\bar{x} = -b/2a$  წერტილი საწყისი ამოცანის ამონახსნის გარკვეულ მიახლოებას წარმოადგენს. უკანასკნელ გამოსახულებაში  $a$  და  $b$  კოეფიციენტების გამოსათვლელად შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულები [15], რომლის თანახმად გვექნება

$$a = \frac{f_0}{2h^2} - \frac{f_1}{h^2} + \frac{f_2}{2h^2} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2}, \quad (4.24)$$

$$b = \frac{-f_0(2x_1 + h) + 4f_1x_1 - f_2(2x_1 - h)}{2h^2}, \quad (4.25)$$

სადაც  $x_1$  ოპტიმიზაციის ამოცანის საწყისი მიახლოებაა,  $f_0$ ,  $f_1$  და  $f_2$  მოცემული ინტერვალის სამ  $x_0 = x_1 - h$ ,  $x_1$  და  $x_2 = x_1 + h$  წერტილებში გამოთვლილი საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობები, ხოლო  $h$  ინტერპოლაციის ბიჯია.

$\bar{x}$  წერტილის მიდამოში აღნიშნული პროცედურის განმეორება ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტებას უზრუნველყოფს. იტერაციული პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება პირობა

$$|\bar{x} - x_1| < \varepsilon, \quad (4.26)$$

სადაც  $\varepsilon$  დასაშვები ცდომილების სიდიდეა.

ამგვარად, კვადრატული ინტერპოლაციის მეთოდის ალგორითმი წარმოადგენს შემდეგი გამოთვლითი პროცედურების ერთობლიობას.

ბიჯი 1. შეირჩევა მოცემული ამოცანის საწყისი მიახლოების წერტილი  $x_1$ ;

ბიჯი 2. განისაზღვრება  $x_1$ -ის ორი მეზობელი წერტილის მნიშვნელობა  $x_0 = x_1 - h$  და  $x_2 = x_1 + h$ , სადაც  $h$  ინტერპოლაციის ბიჯია.

ბიჯი 3. გამოითვლება  $f(x)$  ფუნქციის სამი მნიშვნელობა  $f(x_0) = f_0$ ,  $f(x_1) = f_1$ ,  $f(x_2) = f_2$ ;

ბიჯი 4. (4.24) და (4.25) ფორმულების საფუძველზე განისაზღვრება ინტერპოლაციის კვანძებში გამავალი კვადრატული  $\varphi(x)$  პოლინომის ექსტრემუმის წერტილი

$$\bar{x} = -\frac{b}{2a} = \frac{f_0(2x_1 + h) - 4f_1x_1 + f_2(2x_1 - h)}{2(f_0 - 2f_1 + f_2)}; \quad (4.27)$$

ბიჯი 5. შემოწმდება კრებადობის (4.26) პირობა. თუ აღნიშნული პირობა სამართლიანია, მაშინ გადავალთ მე-6 ბიჯზე; წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-2 ბიჯზე;

ბიჯი 6. ბეზნის დასასრული.

**მაბალაიტი 4.5.** კვადრატული ინტერპოლაციის მეთოდით გადაწყვეილოთ ოპტიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min \left\{ f(x) = 2x^2 + (16/x) \mid x \in [1;5] \right\}.$$

ამოხსნა. ეთქვას,  $x_1 = 2$  ამოცანის საწყისი მიახლოებაა, ხოლო  $h = 0.2$  ინტერპოლაციის ბიჯი. დასაშვები ცდომილების სიდიდე შევირჩიოთ ტოლი  $\varepsilon = 0.1$ .

#### იტერაცია 1

ბიჯი 2. განვსაზღვროთ

$$x_0 = x_1 - h = 1.8, \quad x_2 = x_1 + h = 2.2;$$

ბიჯი 3. გამოვთვალოთ

$$f(x_0) = f(1.8) = 15.3689,$$

$$f(x_1) = f(2) = 16.0000,$$

$$f(x_2) = f(2.2) = 16.9527;$$

ბიჯი 4. (4.27) ფორმულის საშუალებით განვსაზღვროთ კვადრატული პოლინომის მინიმუმის წერტილი

$$\bar{x} = \frac{15.3689(2 \cdot 2 + 0.2) - 4 \cdot 16 \cdot 2 + 16.9527(2 \cdot 2 - 0.2)}{2(15.3689 - 2 \cdot 16 + 16.9527)} = 1.5075;$$

ბიჯი 5. ვინაიდან  $|2 - 1.5075| > \varepsilon = 0.1$ , ამიტომ დაეუშვათ  $x_1 = \bar{x} = 1.5075$  და შეხვათ გავაგრძელოთ.

### იტერაცია 2

ბიჯი 2. განვსაზღვროთ

$$x_0 = x_1 - h = 1.5075 - 0.2 = 1.3075,$$

$$x_2 = x_1 + h = 1.5075 + 0.2 = 1.7075;$$

ბიჯი 3. გამოვთვალოთ

$$f(x_0) = f(1.3075) = 15.6561,$$

$$f(x_1) = f(1.5075) = 15.1587,$$

$$f(x_2) = f(1.7075) = 15.2016;$$

ბიჯი 4. განვსაზღვროთ კვადრატული პოლინომის მინიმუმის წერტილი

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{15.6561(2 \cdot 1.5075 + 0.2) - 4 \cdot 15.1587 \cdot 1.5075 + 15.2016(2 \cdot 1.5075 - 0.2)}{2(15.6561 - 2 \cdot 15.1587 + 15.2016)} \\ &= 1.5916; \end{aligned}$$

ბიჯი 5. ვინაიდან  $|1.5075 - 1.5916| < \varepsilon = 0.1$ , ამიტომ ოპტიმიზაციის პროცესი დასრულდა. ამგვარად, ორი იტერაციის შედეგად, რომლის დროსაც საოპტიმიზაციო ფუნქცია ნ-ჯერ განისაზღვრა, მიღებულ იქნა ოპტიმალური ამონახსნი

$$x^* = 1.5916, \quad f^* = f(x^*) = 15.1587.$$

აღსანიშნავია, რომ მინიმუმის წერტილის ზუსტი მნიშვნელობაა  $x^* = 1.5874$ .

### კუბური ინტერპოლაციის მეთოდი

კუბური ინტერპოლაციის მეთოდი შედარებით მაღალი სიზუსტით ხასიათდება. მისი ლოგიკური სქემა კვადრატული ინტერპოლაციის მეთოდის ანალოგიურია. მაგრამ მასპროქსიმებული პოლინომის განსაზღვრისათვის მას ნაელები რაოდენობის საკვანძო წერტილები სჭირდება, ვინაიდან თითოეულ წერტილში შეიძლება გამოთვლილ იქნეს როგორც  $f(x)$  ფუნქციის, ისე მისი  $f'(x)$  წარმოებულის მნიშვნელობები.

ალგორითმის თანახმად შეირჩევა ნებისმიერი ორი  $x_1$  და  $x_2$  წერტილი, სადაც  $f'(x_1)$  და  $f'(x_2)$  წარმოებულს სხვადასხვა ნიშანი გააჩნია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ადგილი აქვს ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილის ლოკალიზებას ( $x_1, x_2$ ) ინტერვალში.

მაპროქსიმებული კუბური ფუნქცია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)^2(x - x_2), \quad (4.28)$$

რომლის გაწარმოებით მივიღებთ

$$d\varphi(x)/dx = a_1 + a_2(x - x_1) + a_2(x - x_2) + a_3(x - x_1)^2 + 2a_3(x - x_1)(x - x_2). \quad (4.29)$$

შევარჩიოთ (4.28) მრავალწევრის კოეფიციენტები ისე, რომ  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებში  $\varphi(x)$ -სა და  $\varphi'(x)$ -ის მნიშვნელობები  $f(x)$ -ისა და  $f'(x)$ -ის მნიშვნელობებს დაემთხვეს. ამისათვის საჭიროა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} f_1 = f(x_1) = a_0, \\ f_2 = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_1), \\ f'_1 = f'(x_1) = a_1 + a_2(x_1 - x_2), \\ f'_2 = f'(x_2) = a_1 + a_2(x_2 - x_1) + a_3(x_2 - x_1)^2. \end{cases} \quad (4.30)$$

(4.30) სისტემის ამოხსნის შედეგად განსაზღვრული  $a_0, a_1, a_2, a_3$  კოეფიციენტების (4.29) გამოსახულებაში ჩასმისა და ამ უკანასკნელის ნულთან გატოლებით მიღებული კვადრატული განტოლების ამოხსნის საფუძველზე განისაზღვრება მასპროქსიმებული კუბური ფუნქციის სტაციონარული  $\bar{x}^*$  წერტილი

$$x^* = \begin{cases} x_2, & \lambda < 0, \\ x_2 - \lambda(x_2 - x_1), & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ x_1, & \lambda > 1, \end{cases} \quad (4.31)$$

სადაც

$$\lambda = \frac{f'_2 + \alpha - \beta}{f'_2 - f'_1 + 2\alpha},$$

$$\beta = \left( \frac{3(f_1 - f_2)}{x_2 - x_1} \right) + f'_1 + f'_2,$$

$$\alpha = \begin{cases} (\beta^2 - f'_1 f'_2)^{1/2}, & x_1 < x_2, \\ -(\beta^2 - f'_1 f'_2)^{1/2}, & x_1 > x_2. \end{cases}$$

თუ გამოთვლილ  $\bar{x}^*$  წერტილში კრებალობის პირობები არ სრულდება, მაშინ კუბური აპროქსიმაციის პროცედურის რეალიზაციისათვის კვლავ აიღება ორი წერტილი  $\bar{x}^*$  და  $x_1$  (ან  $x_2$ ), სადაც გამოსაკვლევი ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობები ნიშნით განსხვავებულია, და პროცესი ანალოგიურად განმეორდება.

ქვემოთ მოცემულია განხილული ალგორითმის ფორმალიზებული აღწერა, სადაც  $x_0$  საწყისი წერტილია,  $\Delta > 0$  - ბიჯის სიდიდე,  $\varepsilon_1$  და  $\varepsilon_2$  - კრებალობის პარამეტრები.

**ბიჯი 1.** გამოითვლება  $f'(x_0)$ . თუ  $f'(x_0) < 0$ , მაშინ განისაზღვრება წერტილები  $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , ხოლო თუ  $f'(x_0) > 0$ , მაშინ განისაზღვრება წერტილები  $x_{k+1} = x_k - 2^k \Delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;

**ბიჯი 2.**  $x_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, x_{m-1}, x_m, \dots$  წერტილებში გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქციის წარმოებულის  $f'(x)$  მნიშვნელობები და შეირჩევა ორი  $x_1 = x_{m-1}$  და  $x_2 = x_m$  წერტილი, სადაც  $f'(x_{m-1})f'(x_m) \leq 0$ ;

**ბიჯი 3.** გამოითვლება მნიშვნელობები  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ ,  $f'(x_1)$ ,  $f'(x_2)$ ;

**ბიჯი 4.** (4.31) ფორმულის საფუძველზე განისაზღვრება მათემატიკური მეთოდი კუბური პოლინომის სტაციონარული წერტილი  $x^*$ ;

ბიჭი 5. თუ  $f(\bar{x}) < f(x_1)$ , მაშინ გადავალთ მე-6 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში  $\bar{x} = x^* + 0.5(\bar{x} - x_1)$  იტერაციული ფორმულის საფუძველზე განისაზღვრება  $\bar{x}$ -ის ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც  $f(\bar{x}) \leq f(x_1)$ ;

ბიჭი 6. შემოწმდება ძებნის დამთავრების პირობები. თუ სრულდება პირობები  $|f(\bar{x})| \leq \varepsilon_1$  და  $|(\bar{x} - x_1)/\bar{x}| \leq \varepsilon_2$ , მაშინ გადავალთ მე-7 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში დავუშვებთ:  $x_2 = x_1$  და  $x_1 = \bar{x}$ , თუ  $f(\bar{x})f(x_1) < 0$ , ან  $x_1 = \bar{x}$ , თუ  $f(\bar{x})f(x_2) < 0$ , და გადავალთ მე-4 ბიჯზე.

ბიჭი 7. ძებნის დასასრული.

მაგალიტი 4.6. კუბური ინტერპოლაციის მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \{ f(x) = 2x^2 + (16/x) \}.$$

ამოხსნა. ვთქვათ, საწყისი წერტილია  $x_0 = 1$ , ხოლო ბიჯის სიგრძეა  $\Delta = 1$ . დავუშვათ, რომ კრებადობის პარამეტრებია  $\varepsilon_1 = 0.01$  და  $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1 = 0.03$ .

$$f'(x) = df/dx = 4x - 16/x^2.$$

### იტერაცია 1

ბიჭი 1.  $f'(1) = -12 < 0$ . მაშასადამე,  $x_1 = 1 + 1 = 2$ ;

ბიჭი 2.  $f'(2) = 4$ . რადგან  $f'(1)f'(2) = -48 < 0$ , ამიტომ სტაციონარული წერტილი მდებარეობს (1;2) ინტერვალში. დავუშვათ  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ;

ბიჭი 3. გამოვთვალოთ

$$f_1 = f(x_1) = 18, \quad f_2 = f(x_2) = 16,$$

$$f'_1 = f'(x_1) = -12, \quad f'_2 = f'(x_2) = 4;$$

ბიჭი 4. გამოვთვალოთ

$$\beta = \frac{3}{1}(18-16) + (-12) + 4 = -2,$$

$$\alpha = +[4 - (-12)(4)]^{1/2} = (52)^{1/2} = 7.211,$$

$$\lambda = \frac{4 + 7.211 - (-2)}{4 - (-12) + 2(7.211)} = 0.4343,$$

$$\bar{x}^* = 2 - 0.4343(2 - 1) = 1.5657;$$

ბიჯი 5.  $f(1.5657) = 15.1219 < f(x_1) = 18$ . მაშასადამე, ძებნა გრძელდება;

ბიჯი 6.  $|\dot{f}(1.5657)| = |-0.2640| > \varepsilon_1 = 0.01$ . ე.ი. ძებნა არ დამთავრებულია. რადგან  $\dot{f}(\bar{x}^*)\dot{f}(x_2) = (-0.2640)(4) < 0$ , დავუშვათ  $x_1 = \bar{x}^* = 1.5657$ ;

#### იტერაცია 2

ბიჯი 4. გამოვთვალოთ

$$\beta = \frac{3}{0.4343} (15.1219 - 16) + (-0.2640) + 4 = -2.3296,$$

$$\alpha = +[(2.3296)^2 - (-0.2640)(4)]^{1/2} = 2.5462,$$

$$\lambda = \frac{4 + 2.5462 - (-2.3296)}{4 - (-0.2640) + 2(2.5462)} = 0.9486,$$

$$\bar{x}^* = 2 - 0.9486(2 - 1.5657) = 1.5880;$$

ბიჯი 5.  $f(1.5880) = 15.1191 < f(x_1) = 15.1219$ , მაშასადამე ძებნა გრძელდება;

ბიჯი 6.  $\dot{f}(1.5880) = 0.0072 < \varepsilon_1 = 0.01$ ,

$$\left| \frac{1.5880 - 1.5657}{1.5880} \right| = 0.0140 < \varepsilon_2 = 0.03.$$

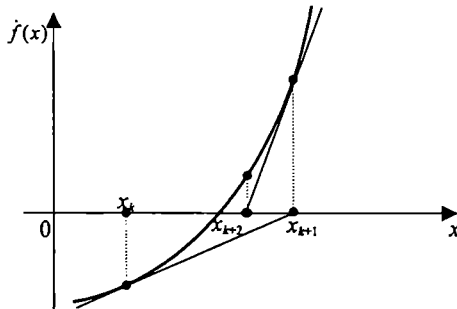
ვინაიდან კრებალობის პირობები შესრულდა, ამიტომ ძებნა დამთავრებულად ჩაითვლება. ამგვარად, კუბური აპროქსიმაციის მეთოდით მოცემული ამოცანის გადაწყვეტის შედეგად მიღებულ იქნა ოპტიმალური ამონახსნი  $\bar{x}^* = 1.5880$ ,  $\bar{f}^* = f(\bar{x}^*) = 15.1191$ .

## 4.1.6 ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი

ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია. აღნიშნული მეთოდით ოპტიმიზაციის (4.1) ამოცანის გადაწყვეტა უშუალოდ დაკავშირებულია  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონარული წერტილის მოძებნაზე, ე.ი. ისეთი  $x^*$  წერტილის მოძებნაზე, რომლის დროსაც ადგილი აქვს შემდეგი განტოლების (ზოგად შემთხვევაში არაწრფივი განტოლების) დაკმაყოფილებას:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = 0.$$

სტაციონარული წერტილის მოძებნის ალგორითმი იტერაციულია. პროცესის გომეტრიული ინტერპრეტაცია წარმოდგენილია ნახ. 4.7-ზე.



ნახ. 4.7

თუ  $x_k$  სტაციონარული  $x^*$  წერტილის  $k$ -ური მიახლოებაა, მაშინ  $x_{k+1}$  მიახლოების მისაღებად  $x_k$  წერტილში აიგება  $f'(x)$ -ის მაპროქსიმებული წრფივი ფუნქცია, რომლის ნულოვანი მნიშვნელობა ( $x$ -ღერძთან გადაკვეთის წერტილი) ჩაითვლება სტაციონარული წერტილის  $(k+1)$ -ე მიახლოებად.  $x_{k+1}$  წერტილიდან ანალოგიურად განისაზღვრება  $x_{k+2}$  მიახლოება და ა.შ. პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილდება კრებადობის პირობა



$$|f'(x_k)| \leq \varepsilon,$$

სადაც  $\varepsilon$  დასაშვები ცდომილების აბსოლუტური ზღვრული მნიშვნელობაა.

როგორც ცნობილია,  $x_k$  წერტილში  $f(x)$ -ის მაპროქსიმებული წრფივი ფუნქცია ტეილორის ფორმულის საფუძველზე შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$f(x, x_k) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k), \quad (4.32)$$

სადაც  $x$  მიმდინარე წერტილია. თუ (4.32) განტოლების მარჯვენა მხარეს გავუტოლებთ ნულს და დავუშვებთ  $x = x_{k+1}$ , მივიღებთ  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონალურ წერტილთან მიახლოების ზოგად ფორმულას

$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k) / f''(x_k)]. \quad (4.33)$$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის კრებადობა სასრული თვისებებით ხასიათდება შემდეგი სახის კვადრატული ფუნქციის შემთხვევაში:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha > 0.$$

მართლაც, ნებისმიერი საწყისი  $x_1$  წერტილისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 2\alpha x_1 + \beta, \\ f''(x_1) &= 2\alpha, \\ x_2 &= x_1 - \frac{2\alpha x_1 + \beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{2\alpha}, \end{aligned}$$

რაც  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმს შეესაბამება.

აღნიშნული ფაქტი საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ ნებისმიერი, მაგრამ რეგულარული (ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი) ფუნქცია კვადრატული ფუნქციის თვისებებს ამჟღავნებს ექსტრემუმის მიღამოში. აქედან გამომდინარე, თუ საწყისი წერტილი მინიმუმის  $x^*$  წერტილთან საკმაოდ ახლოს მდებარეობს, ოპტიმიზაციის პროცესის კრებადობა გარანტირებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლება მივიღოთ განშლადი პროცესი. ამგვარად, მეთოდის კრებადობა საწყისი წერტილის შერჩევაზეა დამოკიდებული.

ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი მოუხერხებელია იმ თვალსაზრისითაც, რომ ყოველი იტერაციაზე საჭიროა  $f(x)$  ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების გამოთვლა. ამიტომ მისი პრაქტიკული გამოყენება მხოლოდ მარტივი სახის ანალიზური ფუნქციების შემთხვევაშია შესაძლებელი.

**მაბალნითი 4.7.** ნიუტონ-რაფსონის მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \{ f(x) = 2x^2 + (16/x) \}.$$

ამოსნა. შევიჩიოთ საწყისი წერტილი  $x_1 = 1$  და დავუშვათ კრებადობის პარამეტრი  $\varepsilon = 0.0001$ .

იტერაცია 1

$$x_1 = 1, f'(x_1) = -12, f''(x_1) = 36,$$

$$x_2 = 1 - (-12/36) = 1.3333 ;$$

იტერაცია 2

$$x_2 = 1.3333, f'(x_2) = -3.6667, f''(x_2) = 17.5000,$$

$$x_3 = 1.333 - (-3.6667/17.5000) = 1.5428$$

და ა.შ. იტერაციები გაგრძელდება მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილდება უტოლობა  $|f'(x_k)| < 0.0001$ . გამოთვლების შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში 4.5.

$n$	$x_k$	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	$x_{k+1}$
1	1.0000	-12.0000	36.0000	1.3333
2	1.3333	-3.6667	17.5000	1.5428
3	1.5428	-0.5501	12.7131	1.5861
4	1.5861	-0.0153	12.0193	1.5874
5	1.5874	-0.00012	12.0000	1.5874

ცხრილი 4.5

როგორც ცხრილიდან ჩანს, მინიმუმის წერტილის  $\varepsilon = 0.0001$  სიზუსტით განსაზღვრას ზუთი იტერაცია დასჭირდა. ამასთან, მიღებულ იქნა შემდეგი ოპტიმალური ამონახსნი:  $x^* = 1.5874$ ,  $f^* = f(x^*) = 15.1190$ .

## 4.1.7 ბოლცანოს მეთოდი

თუ მოცემულ  $[a, b]$  ინტერვალში საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია და, ამასთან, შესაძლებელია როგორც ფუნქციის მნიშვნელობის, ისე მისი წარმო-

ბულის გამოთვლა, მაშინ  $f'(x) = 0$  განტოლების სტაციონარული წერტილის მოსაძებნად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ინტერვალების გამორიცხვის ეფექტური ალგორითმი, რომლის თითოეულ იტერაციაზე მხოლოდ ერთი ცდისეული წერტილი განიხილება. ასე, მაგალითად, თუ  $x_k$  წერტილში ადგილი აქვს  $f'(x_k) < 0$  უტოლობას, მაშინ ფუნქციის უნიმოდალურობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ მინიმუმის წერტილი არ მდებარეობს  $x \leq x_k$  ინტერვალში და ამიტომ ეს უკანასკნელი შეიძლება გამოირიცხოს. მეორე მხრივ, თუ  $f'(x_k) > 0$ , მაშინ, ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე, გამოირიცხება  $x \geq x_k$  ინტერვალი.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა საფუძველად უდევს ბოლცანოს მეთოდის ლოგიკურ სტრუქტურას და იგი შემდეგში მდგომარეობს. განისაზღვრება მოცემული ინტერვალის ორი  $x_a$  და  $x_b$  წერტილი, სადაც  $f'(x_a) < 0$  და  $f'(x_b) > 0$  და დაფიქსირდება ექსტრემუმის ძებნის ინტერვალი  $[x_a, x_b]$ . გამოითვლება ფუნქციის წარმოებული მიღებული ინტერვალის შუა წერტილში  $f'(x_k) : x_k = (x_a + x_b) / 2$ . თუ  $f'(x_k) > 0$ , მაშინ გამოირიცხება  $(x_k, x_b]$  ინტერვალი, ხოლო თუ  $f'(x_k) < 0$ , მაშინ გამოირიცხება  $[x_a, x_k)$  ინტერვალი. შემცირებულ ინტერვალში ზემოთ აღწერილი პროცესი კვლავ განმეორდება და ა. შ.

ქვემოთ მოცემულია ბოლცანოს ალგორითმის ფორმალიზებული აღწერა.

**ბიჯი 1.** დაეუშვათ  $x_a = a$ ,  $x_b = b$ . ამასთან, იგულისხმება, რომ  $f'(a) < 0$  და  $f'(b) > 0$ ;

**ბიჯი 2.** გამოითვლება  $x_k = (x_a + x_b) / 2$  და  $f'(x_k)$ ;

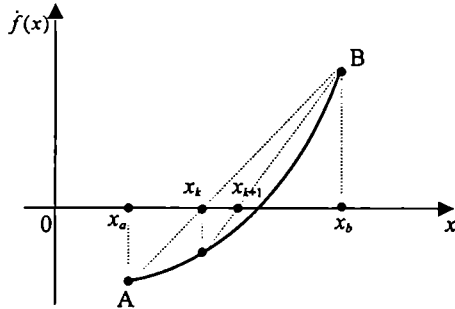
**ბიჯი 3.** თუ  $|f'(x_k)| < \varepsilon$ , მაშინ გადავალთ მე-4 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ  $f'(x_k) < 0$ , მაშინ დაეუშვებთ  $x_a = x_k$  და გადავალთ მე-2 ბიჯზე, ხოლო თუ  $f'(x_k) > 0$ , მაშინ დაეუშვებთ  $x_b = x_k$  და გადავალთ მე-2 ბიჯზე;

**ბიჯი 4.** ძებნის დასასრული.

## 4.1.8 მკვეთთა მეთოდი

მკვეთთა მეთოდი ნიუტონისა და ბოლცანოს მეთოდების საფუძველზე შემუშავებული კომბინირებული მეთოდია და იგი  $[a, b]$  ინტერვალში  $f(x) = 0$  განტოლების ფესვის მოძებნაზეა ორიენტირებული. დაეუშვათ, რომ  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონარუ-

ლი  $x^*$  წერტილის ძებნის პროცესში განსაზღვრულია ორი  $x_a$  და  $x_b$  წერტილი, სადაც შესაბამისი წარმოებულები ნიშნით განსხვავებულია. ამ შემთხვევაში აღნიშნული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს  $f'(x)$  ფუნქციის აპროქსიმაცია განვახორციელოთ მკვეთი ქორდით, რომელიც გადის  $A[x_a, f(x_a)]$  და  $B[x_b, f(x_b)]$  წერტილებზე და ვიპოვოთ აბსცისთა  $Ox$  ღერძთან გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 4.8).



ნახ. 4.8

შევადგინოთ AB ქორდის განტოლება

$$\frac{x - x_b}{x_a - x_b} = \frac{y - f(x_b)}{f(x_a) - f(x_b)}, \quad (4.34)$$

საიდანაც, თუ დავეუქვებთ  $x = x_k$  და  $y = 0$ , მივიღებთ სტაციონარულ  $x^*$  წერტილთან მიახლოების ფორმულას

$$x_k = x_b - \frac{f(x_b)}{[f(x_b) - f(x_a)] / (x_b - x_a)}. \quad (4.35)$$

ისევე როგორც ბოლცანოს მეთოდში, როცა  $|f'(x_k)| < \varepsilon$ , სადაც  $\varepsilon$  დასაშვები ცდომილების სიდიდეა, ძებნის პროცესი მთავრდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში  $x_a$  და  $x_b$  წერტილებიდან შეირჩევა ერთ-ერთი წერტილი, რომელშიც საოპტიმიზაციო ფუნქციის წარმოებულის ნიშანი  $x_k$  წერტილში გამოთვლილი წარმოებულის ნიშნის-

გან განსხვავებულია, (4.35) ფორმულის საშუალებით განისაზღვრება სტაციონარული წერტილის ახალი მიახლოება და ა.შ. ძეზნის პროცესი ანალოგიურად გაგრძელდება.

მაბალაიი 4.8. მკვეთა მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) = 2x^2 + (16/x) \mid x \in [1;5] \right\}.$$

ამოხსნა.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 4x - 16/x^2.$$

იტერაცია 1

ბიჯი 1.  $x_a = 1, x_b = 5,$

$$f'(x_a) = f'(1) = -12 < 0,$$

$$f'(x_b) = f'(5) = 19.36 > 0;$$

ბიჯი 2.  $x_k = 5 - \frac{19.36}{(19.36 + 12)/4} = 2.53;$

ბიჯი 3.  $f'(x_k) = f'(2.53) = 7.62 > 0.$

დავუშვათ  $x_b = 2.53.$

იტერაცია 2

ბიჯი 1.  $x_a = 1, x_b = 2.53;$

ბიჯი 2.  $x_k = 2.53 - \frac{7.62}{(7.62 + 12)/1.53} = 1.94;$

ბიჯი 3.  $f'(x_k) = f'(1.94) = 3.51 > 0.$

დავუშვათ  $x_b = 1.94$  და ა.შ. იტერაციები გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება კრებალობის პირობა  $|f'(x_k)| < \varepsilon.$

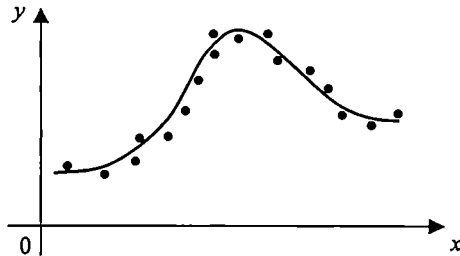
## 4.1.9 უმცირეს კვადრატთა მეთოდი

პრაქტიკაში, ხშირად, ადგილი აქვს შემდეგი სახის ამოცანებს: საჭიროა, ცდის საფუძველზე, ერთი სახის ფიზიკური  $y$  სიდიდის მეორე სახის ფიზიკური  $x$  სიდიდეზე დამოკიდებულების გამოკვლევა (მაგალითად, სხეულის მიერ გავლილი მანძილის დროზე დამოკიდებულება, ტემპერატურის მოდებულ ძაბვაზე დამოკიდებულება და სხვ.). ვთქვათ,  $x$  და  $y$  სიდიდეები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ფუნქციური დამოკიდებულებით:

$$y = \varphi(x). \quad (4.36)$$

ცდის საფუძველზე საჭიროა აღნიშნული დამოკიდებულების ანალიზური სახის განსაზღვრა.

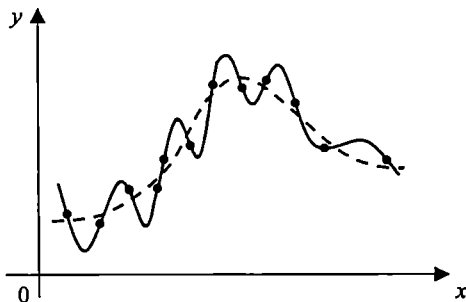
დავუშვათ, რომ ცდის შედეგად მიღებულია ექსპერიმენტული წერტილების რამდენიმე წყვილი და აგებულია  $y$  სიდიდის  $x$  სიდიდეზე დამოკიდებულების გრაფიკი (ნახ. 4.9). ასეთ გრაფიკზე ექსპერიმენტული წერტილების განლაგება, ჩვეულებრივ, ხასიათდება ე.წ. “გაფანტვით” ანუ ხილული კანონზომიერი დამოკიდებულებიდან შემთხვევითი გადახრებით, რაც დაკავშირებულია ნებისმიერი ცდის დროს გაზომვის გარდუეულ ცდომილებებთან. იმისათვის, რომ  $x$ -სა და  $y$ -ს შორის ფუნქციური დამოკიდებულება ანალიზურად განვსაზღვროთ, საჭიროა გადავწყვიტოთ საუკეთესო მიახლოების ამოცანა.



ნახ. 4.9

ცნობილია, რომ ნებისმიერ  $n$  წერტილზე, კოორდინატებით  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ყოველთვის შესაძლებელია ისე გავატაროთ  $(n-1)$  რიგის პოლინომის შესაბამისი წირი, რომ მან ზუსტად ამ წერტილებზე გაიაროს (ნახ. 4.10). მაგრამ საკითხის ასეთი გადაწყვეტა, ჩვეულებრივ, არადაამაკმაყოფილებელია: როგორც წესი, ექსპერიმენტული წერტილების არარეგულარული ყოფაქცევა, რაც ნახ. 4.9-ზე და ნახ. 4.10-

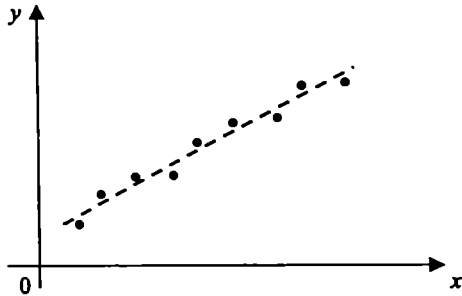
ზე არის ასახული, განპირობებულია  $y$ -ის  $x$ -ზე დამოკიდებულების არა ობიექტური ხასიათით, არამედ მხოლოდ გაზომვის ცდომილებებით. ამიტომ, ასეთ შემთხვევებში, ადგილი აქვს საინჟინრო პრაქტიკისათვის დამახასიათებელი ტიპური ამოცანის - ექსპერიმენტული დამოკიდებულების მოგლუვების ამოცანას, რომელშიც საჭიროა ექსპერიმენტული მონაცემების ისეთი დამუშავება, რომ, ერთი მხრივ, რაც შეიძლება ზუსტად აისახოს  $y$ -ის  $x$ -ზე დამოკიდებულების საერთო ტენდენციები და, მეორე მხრივ, შეძლებისდაგვარად “გასწორდეს” ის არაკანონზომიერი და შემთხვევითი გადახრები, რაც ცდისეული ცდომილებებითაა განპირობებული.



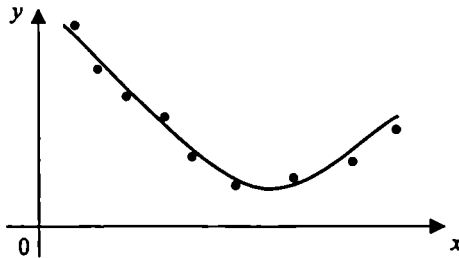
ნახ. 4.10

აღნიშნული ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად, ჩვეულებრივ, გამოიყენება მეთოდი, რომელიც ცნობილია როგორც “უმცირეს კვადრატთა მეთოდი”. იგი საშუალებას გვაძლევს მოცემული  $y = \varphi(x)$  ტიპის დამოკიდებულების დროს ისე შევარჩიოთ მისი რიცხვითი პარამეტრები, რომ შესაბამისმა წირმა გარკვეული აზრით საუკეთესოდ ასახოს ექსპერიმენტული მონაცემები.

საინტერესოა, როგორ შევარჩიოთ  $y = \varphi(x)$  დამოკიდებულების ტიპი? ხშირად, ეს საკითხი უშუალოდ გადაწყდება ექსპერიმენტული დამოკიდებულების გარეგნული სახის მიხედვით. მაგალითად, ნახ. 4.11-ზე გამოსახული ექსპერიმენტული წერტილები აშკარად მიგვანიშნებს  $y = ax + b$  სახის წრფივ დამოკიდებულებაზე. ნახ. 4.12-ზე გამოსახული დამოკიდებულება შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს მეორე რიგის  $y = ax^2 + bx + c$  პოლინომით. პერიოდული ფუნქციების შემთხვევაში, მათი გამოსახვისათვის შეიძლება შევარჩიოთ ტრიგონომეტრიული მწკრივის რამდენიმე ჰარმონიკა და ა.შ.



ნახ. 4.11



ნახ. 4.12

ძალიან ხშირად,  $y$ -ის  $x$ -ზე დამოკიდებულების სახე (წრფივი, კვადრატული, მაჩვენებლიანი და ა.შ.) წინასწარ ცნობილია, გადასაწყვეტი ამოცანის ფიზიკური არსიდან გამომდინარე, და ამ შემთხვევაში საჭიროა ცდის საშუალებით მხოლოდ ამ დამოკიდებულების რამდენიმე პარამეტრის დადგენა. უმცირეს კვადრატთა მეთოდს სწორედ ასეთი პარამეტრების განსაზღვრის საშუალებას იძლევა.

ეთქვათ, მოცემულია  $n$  რაოდენობის დამოუკიდებელი ცდის შედეგები, რომლებიც გაფორმებულია მარტივი სტატისტიკური ცხრილის სახით (ცხრილი 4.6), სადაც  $i$  ცდის ნომერია,  $x_i$ -არგუმენტის მნიშვნელობა,  $y_i$ -ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა.

$(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ , წერტილები გამოსახულია ნახ. 4.13-ზე წარმოდგენილ გრაფიკზე.

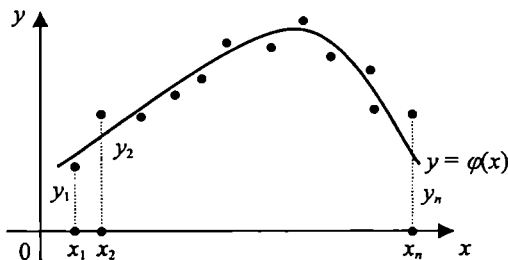
თეორიული ან სხვა მოსაზრების საფუძველზე შერჩეულია  $y = \varphi(x)$  დამოკიდებულების სახე. ფუნქცია  $y = \varphi(x)$  შეიცავს რამდენიმე რიცხვით  $a, b, c, \dots$  პარამეტრს.



საჭიროა ისე შევარჩიოთ ეს პარამეტრები, რომ  $y = \varphi(x)$  წირი გარკვეული აზრით საუკეთესოდ გამოსახავდეს ცდით მიღებულ დამოკიდებულებებს.

$i$	$x_i$	$y_i$
1	$x_1$	$y_1$
2	$x_2$	$y_2$
...	...	...
$i$	$x_i$	$y_i$
...	...	...
$n$	$x_n$	$y_n$

ცხრილი 4.6



ნახ. 4.13

აღნიშნული ამოცანის გადაწყვეტა დამოკიდებულია იმაზე, თუ, სახელდობრ, რას ჩავთვლით “საუკეთესოდ”. შეიძლება, მაგალითად, “საუკეთესოდ” ჩაითვალოს წირისა და ექსპერიმენტული წერტილების ისეთი ურთიერთგანლაგება, რომლის დროსაც მათ შორის მაქსიმალური მანძილი ნულს გაუტოლდება; შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ წირიდან წერტილების გადახრის აბსოლუტური სიდიდეების ჯამი მინიმალური გახდეს და ა.შ. თითოეული ამ მოთხოვნის რეალიზაციის შედეგად მიიღება ამოცანის ამონახსნი -  $a, b, c, \dots$  პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები. მაგრამ მსგავსი ამოცანების გადაწყვეტის დროს საყოველთაოდ მიღებულია უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება, რომლის დროსაც  $y = \varphi(x)$  წირისა და ექსპერიმენტული წერტილების საუკეთესოდ შეთანადების მოთხოვნა დაიყვანება მაგლუკველი (მაპროქსიმებული) წირიდან ექსპერიმენტული წერტილების გადახრების კვადრატების ჯამის მინიმალური მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანაზე. აღნიშნულ მეთოდს, მოგლუკვების არსებულ მე-

თოდებთან შედარებით, არსებითი უპირატესობა გააჩნია: ჯერ-ერთი, იგი გამოთვლების სიმარტივეთ გამოირჩევა და, მეორე, ალბათური თვალსაზრისით მას საფუძვლიანი თეორიული დასაბუთება გააჩნია, რაც შემდეგში მდგომარეობს.

დაეუშვათ, რომ  $y$ -ის  $x$ -ზე ჭეშმარიტი დამოკიდებულება ზუსტად გამოისახება  $y = \varphi(x)$  ფორმულით; ამასთან, ცდისეული გაზომვების გარდუვალი შეცდომების გამო, ადგილი აქვს ექსპერიმენტული წერტილების აღნიშნული დამოკიდებულებიდან გადახრას. როგორც ცნობილია [40], გაზომვის ცდომილებები, როგორც წესი, განაწილების ნორმალურ კანონს ექვემდებარება. განვიხილოთ  $x_i$  არგუმენტის რომელიღაც მნიშვნელობა. ცდისეულ შედეგს წარმოადგენს შემთხვევითი  $Y_i$  სიდიდე. მისი განაწილება, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ექვემდებარება ნორმალურ კანონს, რომლის მათემატიკური მოლოდინია  $\varphi(x_i)$ , ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა -  $\sigma_i$ . დაეუშვათ, რომ გაზომვის ცდომილება ყველა წერტილში ერთნაირია:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$ . მაშინ ნორმალური კანონი, რომლის მიხედვითაც შემთხვევითი  $Y_i$  სიდიდე განაწილდება, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$f_i(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|y_i - \varphi(x_i)|^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.37)$$

ჩვენს ექსპერიმენტში, რომელიც  $n$  რაოდენობის გაზომვას ითვალისწინებს, ადგილი აქვს შემდეგი ხდომილობის რეალიზაციას: შემთხვევით  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  სიდიდეებს ენიჭება  $y_1, y_2, \dots, y_n$  მნიშვნელობები. დავსვათ შემდეგი ამოცანა: მათემატიკური  $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$  მოლოდინები ისე შევარჩიოთ, რომ აღნიშნული ხდომილობის ალბათობა გახდეს მაქსიმალური.

მკაცრად რომ ვთქვათ, თითოეული  $Y_i = y_i$  ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია, რადგან  $Y_i$  უწყვეტია. ამიტომ გამოვიყენოთ არა ალბათობები, არამედ ალბათობების შესაბამისი ელემენტები:

$$f_i(y_i) dy_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|y_i - \varphi(x_i)|^2}{2\sigma^2}} dy_i. \quad (4.38)$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  სიდიდეები მიიღებს იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც მოთავსებულია შემდეგ საზღვრებში:  $(y_i, y_i + dy_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

ვინაიდან ცდები დამოუკიდებელია, ამიტომ საძიებელი ალბათობა ალბათობების (4.38) ელემენტების ნამრავლის ტოლია:

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}} dy_i = Ke^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2}, \quad (4.39)$$

სადაც  $K$  რაღაც კოეფიციენტია, რომელიც  $\varphi(x_i)$ -ზე არ არის დამოკიდებული.

საჭიროა ისე შევარჩიოთ  $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$  მათემატიკური მოლოდინები, რომ (4.39) გამოსახულებამ თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწიოს.

სიდიდე  $e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2}$  ყოველთვის ერთზე ნაკლებია. ცხადია, მას მაქსიმალური მნიშვნელობა გააჩნია მაშინ, როცა ხარისხის მაჩვენებლის აბსოლუტური მნიშვნელობა მინიმალურია, ე.ი.

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 \rightarrow \min.$$

თუ უკანასკნელი გამოსახულებიდან მუდმივ  $\frac{1}{2\sigma^2}$  მამრავლს გამოვიციხავთ, მაშინ მივიღებთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის მოთხოვნას: იმისათვის, რომ ერთობლივად ცდისეული  $y_1, y_2, \dots, y_n$  მნიშვნელობებისა უაღბათესი იყოს, საჭიროა  $\varphi(x)$  ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ  $y_i$  მნიშვნელობების  $\varphi(x_i)$ -სგან გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალური გახდეს:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 = \min. \quad (4.40)$$

ამგვარად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის დასაბუთება გამომდინარეობს გაზომვის ცდომილებების ნორმალური კანონიდან და (4.40) გამოსახულების მინიმიზაციის მოთხოვნიდან.

უმცირეს კვადრატთა პრინციპიდან გამომდინარე, გადავიდეთ მაპროქსიმებელი პოლინომის  $a, b, c, \dots$  პარამეტრების განსაზღვრის ამოცანაზე. ვთქვათ, გვაქვს ექსპერიმენტული მონაცემების ცხრილი (ცხრილი 4.6) და გარკვეული მოსაზრების საფუძველზე შერჩეულია კონკრეტული სახე  $y = \varphi(x)$  ფუნქციისა, რომელიც დამოკიდებულია რიცხვით  $a, b, c, \dots$  პარამეტრებზე. უმცირეს კვადრატთა მეთოდის თანახმად, ეს პარამეტრები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ  $y_i$  წერტილების შესაბამისი  $\varphi(x_i)$  მნიშვნელობებიდან გადახრების კვადრატების ჯამი იყოს მინიმალური. ჩავწეროთ  $y$  როგორც ფუნქცია არა მარტო  $x$  არგუმენტისა, არამედ, აგრეთვე,  $a, b, c, \dots$  პარამეტრებისა:  $y = \varphi(x; a, b, c, \dots)$ . საჭიროა  $a, b, c, \dots$  პარამეტრები ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)]^2 = \min. \quad (4.41)$$

იმისათვის, რომ  $a, b, c, \dots$  პარამეტრების ის მნიშვნელობები ვიპოვოთ, რომლის დროსაც (4.41)-ის მარცხენა მხარე მინიმალური გახდება, საჭიროა იგი გავაწარმოოთ  $a, b, c, \dots$  პარამეტრების მიხედვით და მიღებული გამოსახულებები ნულს გავუტოლოთ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left( \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right)_i = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (4.42)$$

სადაც

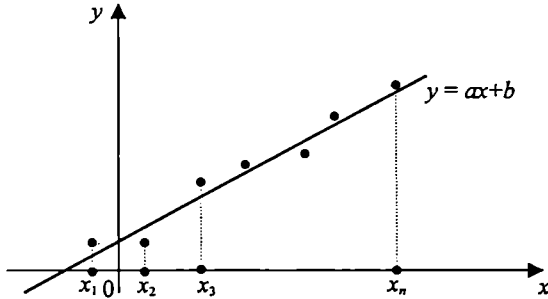
- $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_i = \dot{\varphi}_a(x_i; a, b, c, \dots)$  -  $\varphi$  ფუნქციის  $a$  პარამეტრის მიხედვით კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა  $x_i$  წერტილში;
- $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_i = \dot{\varphi}_b(x_i; a, b, c, \dots)$  -  $\varphi$  ფუნქციის  $b$  პარამეტრის მიხედვით კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა  $x_i$  წერტილში;
- $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right)_i = \dot{\varphi}_c(x_i; a, b, c, \dots)$  -  $\varphi$  ფუნქციის  $c$  პარამეტრის მიხედვით კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა  $x_i$  წერტილში და ა.შ.

განტოლებათა (4.42) სისტემა იმდენ განტოლებას შეიცავს, რამდენიც  $a, b, c, \dots$  უცნობია. აღნიშნული განტოლებათა სისტემის ზოგადი სახით ამოხსნა შეუძლებელია. მისი ამოხსნისათვის საჭიროა, რომ  $\varphi$  ფუნქციას მიეცეთ კონკრეტული სახე.

განვიხილოთ პრაქტიკაში გავრცელებული ორი შემთხვევა, როცა  $\varphi$  ფუნქცია წრფივია და როცა იგი გამოსახულია მეორე რიგის პოლინომით (პარაბოლით).

## შეცირეს კვადრატთა მეთოდით წრფივი ფუნქციის პარამეტრების შერჩევა

ვთქვათ, ექსპერიმენტის შედეგად დაფიქსირებულია შემდეგი მნიშვნელობები:  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (ნახ. 4.14). საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საშუალებით შევარჩიოთ  $a$  და  $b$  პარამეტრები შემდეგი წრფივი ფუნქციისა  $y = ax + b$ , რომელიც მოცემულ ექსპერიმენტულ დამოკიდებულებას გამოსახავს.



ნახ. 4.14

ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:

$$y = \varphi(x; a, b) = ax + b. \quad (4.43)$$

გავაწარმოოთ (4.43) გამოსახულება  $a$  და  $b$  პარამეტრების მიხედვით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_i = x_i;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 1; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_i = 1,$$

რომელთა (4.42) სისტემაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ ორ განტოლებას  $a$  და  $b$  პარამეტრების გამოსათვლელად:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0.$$

უკანასკნელ განტოლებებში ფრჩხილების გახსნის, შეჯამებისა და  $n$ -ზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - b = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

(4.44) სისტემაში შემავალ ჯამებს სტატისტიკურ მომენტებს უწოდებენ [40]. აღვნიშნოთ:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = m_x^* ; \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \alpha_2^*[X] ;$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = m_y^* ; \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} = \alpha_{1,1}^*[X, Y],$$

რომელთა (4.44) სისტემაში გათვალისწინების შედეგად გვექნება:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}^*[X, Y] - a\alpha_2^*[X] - bm_x^* = 0, \\ m_y^* - am_x^* - b = 0, \end{cases} \quad (4.45)$$

საიდანაც მიიღება

$$a = \frac{\alpha_{1,1}^*[X, Y] - m_x^* m_y^*}{\alpha_2^*[X] - (m_x^*)^2}, \quad (4.46)$$

$$b = m_y^* - am_x^*. \quad (4.47)$$

შესაძლებელია (4.46) და (4.47) გამოსახულებების გამარტივება, თუ შემოვიტანთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$\alpha_{1,1}^*[X, Y] - m_x^* m_y^* = K_{xy}^* ; \quad \alpha_2^*[X] - (m_x^*)^2 = D_x^*,$$

საიდანაც გვექნება

$$a = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*}; \quad b = m_y^* - a m_x^*, \quad (4.48)$$

სადაც

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad m_y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n};$$

$$K_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{n}; \quad (4.49)$$

$$D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n}.$$

ამგვარად,  $y$ -ის  $x$ -ზე წრფივი დამოკიდებულების ანალიზურ გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} x + m_y^* - \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} m_x^*$$

ანუ

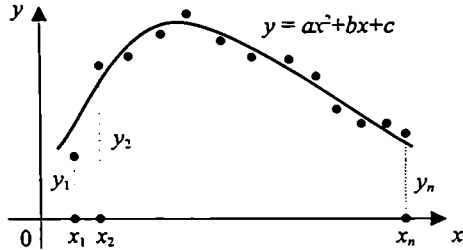
$$y - m_y^* = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} (x - m_x^*). \quad (4.50)$$

### უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მეთორე რიგის პოლინომის პარამეტრების შერჩევა

ვთქვათ, ექსპერიმენტის შედეგად დაფიქსირებულია შემდეგი მნიშვნელობები:  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (ნახ. 4.15). საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საშუალებით შევარჩიოთ პარამეტრები შემდეგი კვადრატული ფუნქციისა - მეორე რიგის  $y = ax^2 + bx + c$  პოლინომისა, რომელიც მოცემულ ექსპერიმენტულ დამოკიდებულებას გამოსახავს.

ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:

$$y = \varphi(x; a, b, c) = ax^2 + bx + c,$$



ნახ. 4.15

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x^2; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right)_i = x_i^2;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = x; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right)_i = x_i;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 1; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right)_i = 1,$$

რომელთა (4.42) სისტემაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ სამ განტოლებას  $a$ ,  $b$  და  $c$  პარამეტრების გამოსათვლელად:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0.$$

უკანასკნელ განტოლებებში ფრჩხილების გახსნის, შეჯამებისა და  $n$ -ზე გაყოფის შედეგად გვექნება:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} - c \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - c \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - c = 0. \end{array} \right. \quad (4.51)$$

შესაძლებელია მიღებული (4.51) სისტემის გამარტივება, თუ შემოვიტანთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &= m_x^* = \alpha_1^*[X]; & \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} &= m_y^* = \alpha_1^*[Y]; \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} &= \alpha_2^*[X]; & \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} &= \alpha_3^*[X]; & \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{n} &= \alpha_4^*[X]; \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} &= \alpha_{1,1}^*[X, Y]; & \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i}{n} &= \alpha_{2,1}^*[X, Y], \end{aligned}$$

რომელთა (4.51) სისტემაში გათვალისწინების შედეგად მივიღებთ მესამე რიგის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_4^*[X] a + \alpha_3^*[X] b + \alpha_2^*[X] c = \alpha_{2,1}^*[X, Y], \\ \alpha_3^*[X] a + \alpha_2^*[X] b + \alpha_1^*[X] c = \alpha_{1,1}^*[X, Y], \\ \alpha_2^*[X] a + \alpha_1^*[X] b + \alpha_0^*[X] c = \alpha_{0,1}^*[X, Y], \end{array} \right. \quad (4.52)$$

სადაც  $\alpha_0^*[X] = 1$  და  $\alpha_{0,1}^*[X, Y] = \alpha_1^*[Y]$ .

განტოლებათა (4.52) სისტემის ნებისმიერი რიცხვითი მეთოდით ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება მაპაროქსიმებული პოლინომის  $a$ ,  $b$  და  $c$  კოეფიციენტები.

**უპირობო ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები**

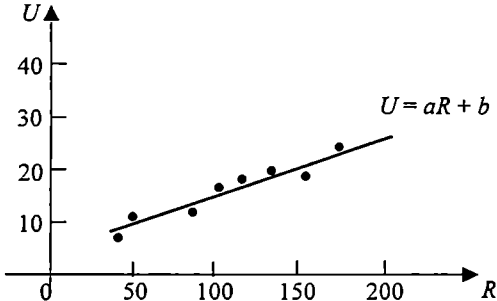
უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ანალოგიურად გადაწყდება ექსპერიმენტული მონაცემების მოგლუვების ამოცანა იმ შემთხვევაშიც, როცა მაგლუვებელი ფუნქცია წარმოადგენს ნებისმიერი რიგის პოლინომს, მაჩვენებლიან ფუნქციას და ა.შ.

განვიხილოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციო მაგალითები.

მაბალაიტი 4.9. მუღმევი დენის მოწყობილობაში გამოკვლეულ იქნა  $U$  ძაბვის  $R$  წინააღმდეგობაზე დამოკიდებულება. ექსპერიმენტული მონაცემები წარმოდგენილია ცხრილში (ცხრილი 4.7) და გრაფიკზე (ნახ. 4.16). საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საშუალებით შევარჩიოთ და ავაგოთ წრფე, რომელიც  $U$  ძაბვის  $R$  წინააღმდეგობაზე დამოკიდებულებას გამოსახავს.

$i$	$R$	$U$
1	41	4
2	50	8
3	81	10
4	104	14
5	120	16
6	139	20
7	154	19
8	180	23

ცხრილი 4.7



ნახ. 4.16

ამოხსნა. (4.50) ფორმულის თანახმად, მაპაროქსიმებული წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y - m_U^* = \frac{K_{RU}^*}{D_R^*} (x - m_R^*). \quad (4.53)$$

განესაზღვროთ სტატისტიკური მომენტები:

$$m_R^* = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{8} = \frac{689}{8} \approx 86.12;$$

$$m_U^* = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{8} = \frac{114}{8} \approx 14.25;$$

$$K_{RU}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - m_R^*)(U_i - m_U^*)}{8} = \frac{2212.75}{8} \approx 276.59;$$

$$D_R^* = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - m_R^*)^2}{8} = \frac{21049.87}{8} = 2631.23,$$

რომელთა (4.53) განტოლებაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$y - 14.25 = \frac{276.59}{2631.23} (x - 86.12)$$

ანუ

$$y - 14.25 = 0.11(x - 86.12). \quad (4.54)$$

**მაბალითი 4.10.** გარკვეული რაოდენობის ცდების ჩატარების დროს აღვილი ჰქონდა  $V$  სიჩქარის სხვადასხვა მნიშვნელობის შემთხვევაში სააეიაციო ბომბის გრუნტში შეღწევის  $N$  გადამეტტივითვის გაზომვას.  $N$ -ის  $V$ -ზე დამოკიდებულების ცდისეული მონაცემები წარმოდგენილია ცხრილში 4.8. უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საშუალებით საჭიროა შევადგინოთ  $N = aV^2 + bV + c$  კვადრატული დამოკიდებულების ანალიზური გამოსახულება, რომელიც საშუალოკვადრატული აზრით საუკეთესოდ ეთანადება ექსპერიმენტულ მონაცემებს.

$i$	$V$	$N$
1	120	540
2	131	590
3	140	670
4	161	760
5	174	850
6	180	970
7	200	1070
8	214	1180
9	219	1270
10	241	1390
11	250	1530
12	268	1600
13	281	1780
14	300	2030

ცხრილი 4.8

ამოხსნა. გამოთვლების გაადვილების მიზნით გაზომვის ერთეულები შეეცვალოთ ისე, რომ ადგილი არ ჰქონდეს დიდ რიცხვებზე არითმეტიკულ მოქმედებებს. ამისათვის გაეპრავლოთ  $V$ -ს მნიშვნელობები  $10^{-2}$ -ზე, ხოლო  $N$ -ის მნიშვნელობები  $10^{-3}$ -ზე და მონაცემები ამ პირობით ერთეულებში დავაშუშავოთ.

განესაზღვროთ განტოლებათა (4.52) სისტემის კოეფიციენტები.

$$\alpha_4^*[V] = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^4}{n} = \frac{362.95}{14} \approx 25.92; \quad \alpha_3^*[V] = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^3}{n} = \frac{148.36}{14} \approx 10.60;$$

$$\alpha_2^*[V] = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^2}{n} = \frac{63.49}{14} \approx 4.54; \quad \alpha_1^*[V] = m_V^* = \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n} = \frac{28.79}{14} \approx 2.06;$$

$$\alpha_{0,1}^*[V, Y] = m_Y^* = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} = \frac{16.23}{14} \approx 1.16; \quad \alpha_{1,1}^*[V, N] = \frac{\sum_{i=1}^n V_i N_i}{n} = \frac{36.81}{14} \approx 2.63;$$

$$\alpha_{2,1}^*[V, N] = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^2 N_i}{n} = \frac{88.02}{14} = 6.29,$$

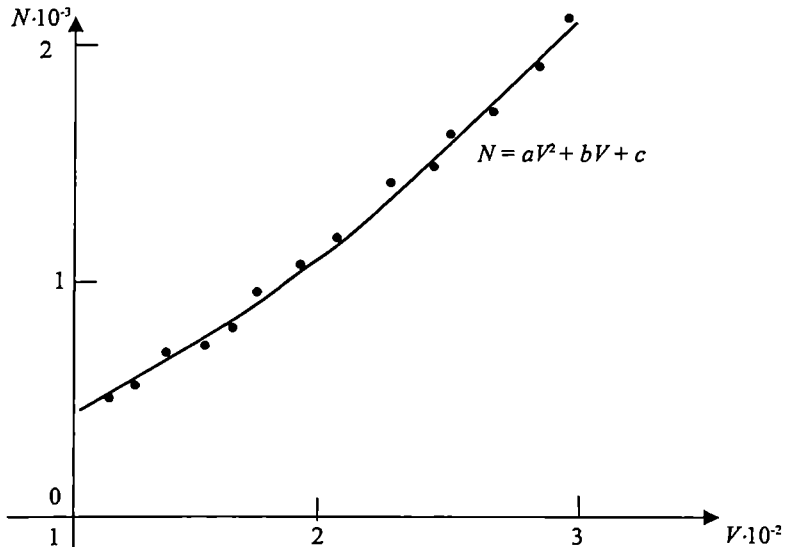
რომელთა გათვალისწინებით (4.52) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} 25.92 a + 10.60 b + 4.54 c = 6.29, \\ 10.60 a + 4.54 b + 2.06 c = 2.63, \\ 4.54 a + 2.06 b + c = 1.16. \end{cases} \quad (4.55)$$

(4.55) სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ მაპაროქსიმებული კვადრატული პოლინომის კოეფიციენტებს:  $a \approx 0.168$ ,  $b \approx 0.102$ ,  $c = 0.187$ , რომლის საფუძველზე კვადრატული პოლინომის ანალიზურ გამოსახულებას ექნება შემდეგი სახე:

$$N = 0.168V^2 + 0.102V + 0.187. \quad (4.56)$$

ნახ. 4.17-ზე გამოსახულია ექსპერიმენტული წერტილები და უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საფუძველზე განსაზღვრული პოლინომის შესაბამისი წირი.



ნახ. 4.17

## 4.2 მრავალგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდები

განვიხილოთ უპირობო ოპტიმიზაციის მრავალგანზომილებიანი ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \right\}, \quad (4.57)$$

სადაც  $x$  საოპტიმიზაციო ცვლადი პარამეტრების  $n$ -განზომილებიანი ვექტორია. იგულისხმება, რომ საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია და, ამასთან, უწყვეტად დიფერენცირებადი.

### 4.2.1 ნულოვანი რიგის მეთოდები

მრავალგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდები, რომლებიც (4.57) ამოცანის გადასაწყვეტად საოპტიმიზაციო ფუნქციის მხოლოდ მნიშვნელობებს იყენებს, შეადგენს ნულოვანი რიგის მეთოდებს.

#### კოორდინატული დაშვების მეთოდი

კოორდინატული დაშვების ანუ რელაქსაციის მეთოდი [96] ნულოვანი რიგის მეთოდებს შორის ალგორითმის სიმარტივეთ გამოირჩევა. ტექნიკურ ლიტერატურაში იგი გაუს-ზეიდელის სახელითაა ცნობილი. ალგორითმის თანახმად, გადაადგილების  $d^{(k)}$  მიმართულებად აირჩევა კოორდინატთა ღერძების პარალელური მიმართულება. თავდაპირველად გადაადგილება განხორციელდება  $Ox_1$  ღერძის მიმართულებით, შემდეგ -  $Ox_2$  ღერძის მიმართულებით და ა.შ. ბოლო  $Ox_n$  ღერძამდე.

აღნიშნოთ  $e^{(i)}$ -ით  $R^n$  სივრცის  $i$ -ური ორტი. ვთქვათ,  $x^{(0)}$  საწყისი წერტილია, ხოლო  $\lambda_0$  - რაღაც დადებითი რიცხვი. მაშინ  $x^{(1)}$  წერტილი შემდგენიარად განისაზღვრება.  $x = x^{(0)} + \lambda_0 e^{(1)}$  წერტილში გამოითვლება  $f(x)$  ფუნქცია და შემოწმდება უტოლობა

$$f(x^{(0)} + \lambda_0 e^{(1)}) < f(x^{(0)}). \quad (4.58)$$

თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ ეს იმის მანიშნებელია, რომ  $Ox_1$  ღერძის მიმართულებით საოპტიმიზაციო ფუნქციის მნიშვნელობა შემცირდა და ამიტომ გვექნება  $x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_0 e^{(1)}$ .  $\lambda_1 = \lambda_0$ . თუ (4.58) უტოლობა მცდარია, მაშინ გადაადგილება განხორციელდება საწინააღმდეგო მიმართულებით და შემოწმდება უტოლობა

$$f(x^{(0)} - \lambda_0 e^{(1)}) < f(x^{(0)}). \quad (4.59)$$

(4.59) უტოლობის სამართლიანობის შემთხვევაში გვექნება  $x^{(1)} = x^{(0)} - \lambda_0 e^{(1)}$ .  $\lambda_1 = \lambda_0$ . იმ შემთხვევაში, როცა (4.58) და (4.59) უტოლობებიდან ორივე მცდარია, მაშინ ჩათვლება  $x^{(1)} = x^{(0)}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_0$ .

მეორე ბიჯი  $Ox_2$  კოორდინატა ღერძის მიმართულებით განხორციელდება: თუ  $f(x^{(1)} + \lambda_1 e^{(2)}) < f(x^{(1)})$ , მაშინ  $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 e^{(2)}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1$ , ხოლო თუ უკანასკნელი უტოლობა მცდარია, მაშინ შემოწმდება უტოლობა  $f(x^{(1)} - \lambda_1 e^{(2)}) < f(x^{(1)})$ , რომლის შესრულების შემთხვევაში ჩათვლება  $x^{(2)} = x^{(1)} - \lambda_1 e^{(2)}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1$ . იმ შემთხვევაში, როცა არც ერთი უტოლობა არ სრულდება, მაშინ  $x^{(2)} = x^{(1)}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1$ . ანალოგიური პროცედურები ჩატარდება კოორდინატთა ღერძების ყველა  $n$  მიმართულებით და ამით პირველი იტერაცია დამთავრდება. ამგვარად, მე- $n$  ბიჯზე მიიღება რაღაც  $x^{(n)}$  წერტილი. თუ  $x^{(n)} \neq x^{(0)}$ , მაშინ ანალოგიურად შესრულდება მეორე იტერაცია, ხოლო თუ  $x^{(n)} = x^{(0)}$ , მაშინ გადაადგილების ბიჯის სიდიდე შემცირდება:  $\lambda_{n+1} = \lambda_n / 2$  და შემდეგი იტერაცია ახალი ბიჯის მნიშვნელობის გათვალისწინებით შესრულდება.

იტერაციები გრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება პროცესის დამთავრების პირობები

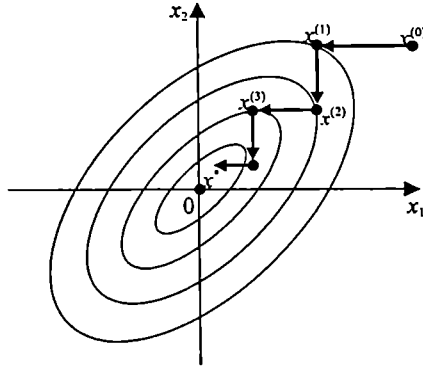
$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \delta \quad \text{ან} \quad |f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| \leq \varepsilon, \quad (4.60)$$

სადაც  $\delta$  და  $\varepsilon$  რაღაც დადებითი რიცხვებია, რომლებიც ახასიათებს მინიმიზაციის (4.57) ამოცანის გადაწყვეტის სიზუსტეს.

განხილული ალგორითმით ოპტიმიზაციის პროცესის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ორცვლადიანი ფუნქციის შემთხვევაში ილუსტრირებულია ნახ. 4.18-ზე. მისი კრებალობის ხასიათს კი შემდეგი მტკიცება განსაზღვრავს.

თქონამდ 4.1 ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია ამოზნექილი და უწყვეტად დიფერენცირებადია ნებისმიერი  $x \in R^n$ -სთვის. ამასთან, საწყისი  $x^{(0)}$  წერტილი შერჩეულია ისე, რომ  $\{x \in R^n \mid f(x) \leq f(x^{(0)})\}$  სიმრავლე შემოსაზღვრულია. მაშინ რელაქსაციის ალგორითმის მიხედვით განსაზღვრული  $\{x^{(k)}\}$  მიმდევრობის ზღვრული წერტილი მინიმუმის წერტილს წარმოადგენს.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ მეთოდის კრებალობა მნიშვნელოვანწილად დამოკიდებულია საწყისი წერტილისა და კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. მიუხედავად ამისა, ალგორითმის სიმარტივე, რაც მის ღირსებას წარმოადგენს, განაპირობებს რელაქსაციის მეთოდის პრაქტიკულ გამოყენებას.



ნახ. 4.18

### პაუელის მეთოდი

პაუელის მეთოდში [15] კოორდინატული დაშვების ანალოგიური იდეაა რეალიზებული, მაგრამ იმ განსხვავებით, რომ  $x^{(k)}$  წერტილიდან  $x^{(k+1)}$  წერტილში გადასვლის მომენტში ადგილი აქვს  $\lambda_k$  სიდიდის ისეთი მნიშვნელობის შერჩევას, რომელიც უზრუნველყოფს საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალურ შემცირებას. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,  $\lambda_k$  განისაზღვრება ერთცვლადიანი  $f(x^{(k)} + \lambda e^{(i)})$  ფუნქციის მინიმიზაციის პირობიდან

$$f(x^{(k)} + \lambda_k e^{(i)}) = \min_{\lambda} f(x^{(k)} + \lambda e^{(i)}), \quad (4.61)$$

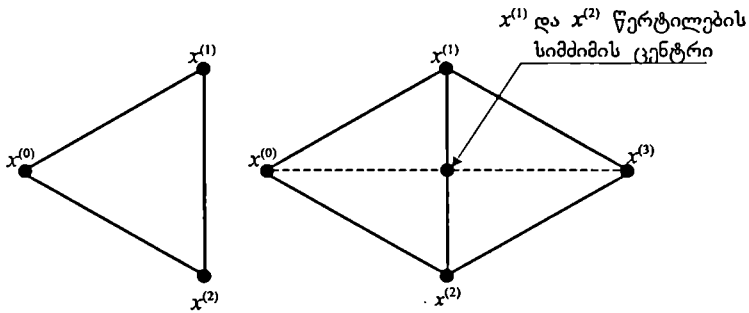
რაც საშუალებას გვაძლევს ექსტრემუმის წერტილს ბიჯების მინიმალური რაოდენობით მივადწიოთ. ვინაიდან თითოეული ბიჯის შესრულება ერთცვლადიანი ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანასთანაა დაკავშირებული, ამიტომ აღნიშნული მეთოდი დამატებითი შრომატევადობით ხასიათდება. შევნიშნავთ, რომ პაუელის მეთოდი კრებადია დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფუნქციების (მკაცრად ამოზნექილი ფუნქციების) შემთხვევაში.

### სიმპლექს-მეთოდი

ნულოვანი რიგის მეთოდებს შორის სპენდლის, ჰექსტის და ჰიმსვორთის მიერ შემუშავებული სიმპლექს-მეთოდი [110] თავისი ორიგინალობით გამოირჩევა. (აღნიშნულ მეთოდს საერთო არაფერი აქვს  $\chi$ . დანცინგის მიერ შემუშავებულ სიმპლექს-მეთოდ-



თან, რომელიც წრფივ დაპროგრამებაში გამოიყენება). როგორც ცნობილია,  $n$ - განზომილებიანი სწორი სიმპლექსი ეწოდება ამოზნექილ მრავალწახნაგას, რომელიც წარმოქმნილია ერთმანეთისაგან ტოლი მანძილებით დაშორებული  $n+1$  წვეროსაგან. ასე, მაგალითად, სიბრტყეზე იგი ტოლგვერდა სამკუთხედს წარმოადგენს, სამგანზომილებიან სივრცეში კი სწორ ტეტრაედრს. ალგორითმს საფუძვლად უდევს სიმპლექსის მნიშვნელოვანი თვისება, რომლის თანახმად მის ნებისმიერ წახნაგზე შეიძლება აიგოს ახალი სიმპლექსი წახნაგის მოპირდაპირე წვეროს გადატანით სიმპლექსის სიმძიმის ცენტრის სიმეტრიულად. სიბრტყეზე ახალი სიმპლექსის აგების პროცესი ილუსტრირებულია ნახ. 4.19-ზე.



ა - საწყისი სიმპლექსი;  
 $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}$

ბ - ახალი სიმპლექსი;  
 $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$

ნახ. 4.19

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ სიმპლექსის წვეროებში  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობებს გამოეთვლით, მაშინ ახალ სიმპლექსზე გადასასვლელად საკმარისია საოპტიმიზაციო ფუნქციის მხოლოდ ერთ წერტილში განსაზღვრა. ამასთან, სიმპლექსის წვეროებში გამოთვლილი ფუნქციის მნიშვნელობების მიხედვით ყოველთვის შეიძლება განისაზღვროს გადაადგილების ის მიმართულება, სადაც ფუნქციის უკეთესი მნიშვნელობა მიიღება. იმ შემთხვევაში, როცა სიმპლექსის გეომეტრიული ზომები მცირეა, აღნიშნული მიმართულება  $f(x)$  ფუნქციის ანტიგრადიენტის მიმართულებას ემთხვევა.

ალგორითმის რეალიზაცია ძირითადად ორ პროცედურას მოიცავს:

- ა) მოცემული საბაზისო წერტილის მიხედვით სწორი სიმპლექსის აგება;
- ბ) სიმეტრიული წერტილის განსაზღვრა.

სიმპლექსის აგება საკმაოდ მარტივ პროცედურას წარმოადგენს. თუ საწყისი (საბაზისო)  $x^{(0)}$  წერტილი და მასშტაბის  $\alpha$  კოეფიციენტი მოცემულია, მაშინ  $n$ -განზომილებიანი სიმპლექსის დანარჩენი  $n$  წვეროს კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$x^{(i)} = \begin{cases} x_j^{(0)} + \delta_1, & j \neq i, \\ x_j^{(0)} + \delta_2, & j = i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.62)$$

სადაც

$$\delta_1 = \left[ \frac{(n+1)^{1/2} + n - 1}{n\sqrt{2}} \right] \alpha, \quad (4.63)$$

$$\delta_2 = \left[ \frac{(n+1)^{1/2} - 1}{n\sqrt{2}} \right] \alpha. \quad (4.64)$$

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ  $\alpha$  კოეფიციენტის სიდიდის შერჩევა კონკრეტულ ამოცანაზეა დამოკიდებული. როცა  $\alpha=1$ , მაშინ სიმპლექსის წიბო ერთეულოვანი სიგრძისაა.

მარტივია აგრეთვე სიმძიმის ცენტრის მიმართ სიმეტრიული წერტილის განსაზღვრის პროცედურაც. ვთქვათ,  $x^{(j)}$  სიმპლექსის წვეროა, რომლის სიმეტრიული წერტილი უნდა განისაზღვროს. სიმპლექსის დანარჩენი  $n$  წვეროს სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია წერტილში

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x^{(i)}. \quad (4.65)$$

$x^{(j)}$  და  $x_c$  წერტილებზე გამავალი წრფის წერტილები განისაზღვრება ფორმულით

$$x = x^{(j)} + \lambda(x_c - x^{(j)}), \quad (4.66)$$

სადაც  $\lambda$  რაღაც მამრაველია. ამასთან,  $\lambda=0$  მნიშვნელობა შეესაბამება საწყის  $x^{(j)}$  წერტილს, ხოლო  $\lambda=1$  მნიშვნელობა შეესაბამება სიმძიმის  $x_c$  ცენტრს. ადვილი მისახვედრია, რომ  $x^{(j)}$  წერტილს შეესაბამება  $\lambda=2$  მნიშვნელობა, ე.ი.

$$x_k^{(j)} = 2x_c - x_{k-1}^{(j)}. \quad (4.67)$$

სიმპლექს-ალგორითმით ექსტრემუმის ძებნის პროცესი იტერაციულია, რომლის თითოეულ ბიჯზე, გარდა პირველისა,  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა მხოლოდ ერთ-

ხელ გამოითვლება. ალგორითმი ეკონომიურობით გამოირჩევა და ზოგიერთ შემთხვევაში ეფექტურ შედეგებსაც იძლევა, რადგან ამოცანის განზომილების გაზრდა ძეზნის პროცესზე გაწეული დანახარჯების მნიშვნელოვან ზრდას არ იწვევს.

ამასთან, განხილული ალგორითმი ზასათდება ისეთი არასასურველი მოვლენით, როგორცაა „დაციკლვა“ ანუ ორი ან მეტი სიმპლექსის ციკლური მოძრაობა. ასეთ შემთხვევაში, როგორც წესი, აუცილებელია სიმპლექსის გეომეტრიული ზომების შემცირება. ძეზნის პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ სიმპლექსის გეომეტრიული ზომები ან მის წვეროებში გამოთვლილი ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის სხვაობა დასაშვებ  $\varepsilon$  სიდიდეზე ნაკლები არ გახდება.

მაბალითი 4.11 სიმპლექს-ალგორითმით გადაეწყვიტოთ ოპტიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min\{ f(x) = (1 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 \}.$$

ამოხსნა. საწყისი სიმპლექსის ასაგებად საჭიროა დაუშვათ საწყისი წერტილი და მასშტაბის კოეფიციენტი. ვთქვათ,  $x^{(0)} = [0; 0]^T$  და  $\alpha = 2$ . მაშინ

$$\delta_1 = \left[ \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right] \alpha = 1.9318, \quad \delta_2 = \left[ \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right] \alpha = 0.5176.$$

$\delta_1$  და  $\delta_2$  პარამეტრების საშუალებით გამოვთვალოთ სიმპლექსის დანარჩენი ორი წვეროს კოორდინატები

$$x^{(1)} = [0 + 0.5176; 0 + 1.9318]^T = [0.5176; 1.9318]^T,$$

$$x^{(2)} = [0 + 1.9318; 0 + 0.5176]^T = [1.9318; 0.5176]^T.$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები საწყისი სიმპლექსის წვეროებში

$$f(x^{(0)}) = 5, \quad f(x^{(1)}) = 0.2374, \quad f(x^{(2)}) = 3.0658.$$

ვინაიდან  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა ყველაზე „უარესია“  $x^{(0)}$  წერტილში, ამიტომ გამოვთვალოთ  $x^{(1)}$  და  $x^{(2)}$  წერტილების სიმძიმის ცენტრი

$$x_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x^{(i)} = \frac{1}{2} (x^{(1)} + x^{(2)})$$

და (4.67) ფორმულის საფუძველზე განვსაზღვროთ  $x^{(0)}$ -ის სიმეტრიული  $x^{(3)}$  წერტილი

$$x^{(3)} = 2x_c - x^{(0)} = x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(0)},$$

$$x^{(3)} = [2.4494; 2.4494]^T.$$

მიღებულ წერტილში  $f(x^{(3)}) = 2.3027$ , ე.ი. ადგილი აქვს საოპტიმიზაციო ფუნქციის შემცირებას.

ახალი სიმპლექსის წვეროებია  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ , რომელთაგან  $x^{(2)}$  წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა უდიდესია. ალგორითმის თანახმად, საჭიროა განესაზღვროთ  $x^{(2)}$  წვეროს სიმეტრიული  $x^{(4)}$  წერტილი

$$x_c = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(3)}),$$

$$x^{(4)} = 2x_c - x^{(2)} = x^{(1)} + x^{(3)} - x^{(2)},$$

$$x^{(4)} = [1.0352; 3.8636]^T$$

და ა.შ. იტერაციები გაგრძელდება მანამ, სანამ ზემოთ აღნიშნული კრებადობის პირობები არ დაკმაყოფილდება.

### ნელდერ-მიდის მეთოდი

ნელდერ-მიდის მეთოდი [110] სიმპლექს-მეთოდის გარკვეული მოდიფიკაციაა, რომელშიც ექსტრემუმისკენ მოძრაობა არასწორი სიმპლექსებით ხორციელდება. მეთოდის დამახასიათებელ თავისებურებას წარმოადგენს ის, რომ ყოველ იტერაციაზე სიმპლექსის კონფიგურაცია იცვლება და იგი დეფორმაციას განიცდის. ამიტომ ტექნიკურ ლიტერატურაში აღნიშნული მეთოდი დეფორმირებადი სიმპლექსის სახელით არის ცნობილი.

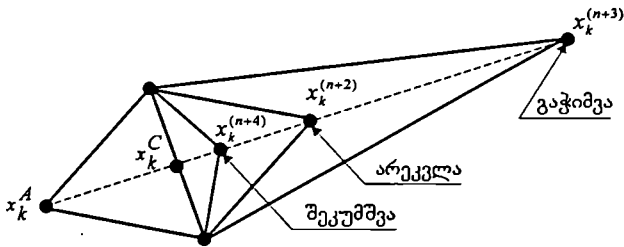
მეთოდის არსის გადმოსაცემად შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები. ვთქვათ,  $x_k^{(j)}$  სიმპლექსის  $j$ -ური წვეროა  $k$ -ურ იტერაციაზე,  $x_k^A$  - სიმპლექსის წვერო, რომელსაც  $k$ -ურ იტერაციაზე  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება,  $x_k^B$  - სიმპლექსის წვერო, რომელსაც  $k$ -ურ იტერაციაზე  $f(x)$  ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება,  $x_k^C$  - სიმპლექსის ცენტრი.

ალგორითმის თანახმად, სიმპლექსზე შემდეგი ძირითადი პროცედურები ხორციელდება (ნახ. 4.20): არეკვლა, გაჭიმვა, შეკუმშვა და რელუქცია.

არეკვლა ითვალისწინებს სიმპლექსის სიმეტრიული წერტილის განსაზღვრას შემდეგი თანაფარდობის საფუძველზე:

$$x_k^{(n+2)} = x_k^C + \alpha(x_k^C - x_k^A), \quad (4.68)$$

სადაც  $\alpha > 0$  არეკვლის კოეფიციენტი (პრაქტიკული გამოთვლებისათვის რეკომენდირებულია  $\alpha = 1$ ).



ნახ. 4.20

გაჭიმვა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა არეკვლა წარმატებულია, ე.ი. როცა ადგილი აქვს შემდეგი პირობის შესრულებას:  $f(x_k^{(n+2)}) \leq f(x_k^C)$ . ამ დროს ვექტორი  $(x_k^{(n+2)} - x_k^C)$  გაიჭიმება და განისაზღვრება ახალი წერტილი

$$x_k^{(n+3)} = x_k^C + \gamma(x_k^{(n+2)} - x_k^C), \quad (4.69)$$

სადაც  $\gamma > 1$  გაჭიმვის კოეფიციენტი (რეკომდირებულია  $\gamma = 2$ ).

შეკუმშვის პროცედურა იმ შემთხვევაში სრულდება, როცა არეკვლის შედეგად ფუნქციის მნიშვნელობა  $x_k^{(n+2)}$  წერტილში მეტია, ვიდრე სიმპლექსის დანარჩენ წერტილებში, გარდა  $x_k^A$  წერტილისა, ე.ი.  $f(x_k^{(n+2)}) > f(x_k^j)$ , როცა  $j \neq A$ . ამ დროს ვექტორი  $(x_k^A - x_k^C)$  იკუმშება და განისაზღვრება ახალი წერტილი

$$x_k^{(n+4)} = x_k^C + \beta(x_k^A - x_k^C), \quad (4.70)$$

სადაც  $0 < \beta < 1$  შეკუმშვის კოეფიციენტი (პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე, მიღებულია  $\beta = 0.5$ ).

რედუქცია სიმპლექსის ორჯერ შეკუმშვას ითვალისწინებს. მას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა  $f(x_k^{(n+2)}) > f(x_k^A)$  და სრულდება შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$x_k^{(j)} = x_k^B + 0.5(x_k^{(j)} - x_k^B), \quad j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (4.71)$$

ნელდერ-მიდის მეთოდში აღნიშნული პროცედურების გათვალისწინება ოპტიმიზაციის პროცესის დაჩქარებას უზრუნველყოფს. ექსპერიმენტებით დადასტურებულია, რომ იგი ლოკალური ოპტიმიზაციის ერთ-ერთი საიმედო და ეფექტური მეთოდია, როცა  $n \leq 6$ , სადაც  $n$  ცვლადების რაოდენობაა. მისი ლოგიკური სტრუქტურა შემდეგია.

ბიჭი 1. საწყისი სიმპლექსის წვეროების კოორდინატების განსაზღვრა და თითოეულ წვეროში  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა.

ბიჭი 2. სიმპლექსის ცენტრისა და იმ წვეროების განსაზღვრა, რომლებსაც  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები შეესაბამება.

ბიჭი 3. (4.68) ფორმულის საფუძველზე არეკვლის პროცედურის შესრულება. არეკვლის  $x_k^{(n+2)}$  წვეროში ფუნქციის  $f(x_k^{(n+2)})$  მნიშვნელობის გამოთვლა.

ბიჭი 4.  $f(x_k^{(n+2)}) > f(x_k^B)$  პირობის შემოწმება. თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავიდვართ მე-7 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-5 ბიჯზე.

ბიჭი 5. (4.69) ფორმულის საფუძველზე გაჭიმვის პროცედურის შესრულება. მიღებულ  $x_k^{(n+3)}$  წერტილში  $f(x_k^{(n+3)})$  მნიშვნელობის გამოთვლა.

ბიჭი 6. შესრულდება მინიჭების პროცედურა

$$x_k^A = \begin{cases} x_k^{(n+3)}, & \text{თუ } f(x_k^{(n+3)}) < f(x_k^B), \\ x_k^{(n+2)}, & \text{თუ } f(x_k^{(n+3)}) \geq f(x_k^B) \end{cases}$$

და ექსტრემუმის ძებნა გაგრძელდება მე-12 ბიჯიდან.

ბიჭი 7. პირობის შემოწმება  $f(x_k^{(n+2)}) > f(x_k^{(j)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $j \neq A$ . თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავიდვართ მე-8 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში შესრულდება მინიჭების პროცედურა  $x_k^A = x_k^{(n+2)}$  და ექსტრემუმის ძებნა მე-12 ბიჯიდან გაგრძელდება.

ბიჭი 8. შესრულდება მინიჭების პროცედურა

$$x_k^A = \begin{cases} x_k^{(n+2)}, & \text{თუ } f(x_k^{(n+2)}) \geq f(x_k^A), \\ x_k^A, & \text{თუ } f(x_k^{(n+2)}) < f(x_k^A). \end{cases}$$

ბიჭი 9. (4.70) ფორმულის საფუძველზე შეკუმშვის პროცედურის შესრულება. მიღებულ  $x_k^{(n+4)}$  წერტილში ფუნქციის  $f(x_k^{(n+4)})$  მნიშვნელობის გამოთვლა.

ბიჭი 10. თუ  $f(x_k^{(n+4)}) \leq f(x_k^A)$ , მაშინ შესრულდება მინიჭების პროცედურა  $x_k^A = x_k^{(n+4)}$  და ექსტრემუმის ძებნა გაგრძელდება მე-12 ბიჯიდან. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავალთ მე-11 ბიჯზე.

ბიჭი 11. (4.71) ფორმულის საფუძველზე შესრულდება რეულქციის პროცედურა.

**ბიჯი 12.** შემოწმდება კრებალობის პირობა

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [f(x_k^{(j)}) - f(x_k^C)]^2 \right\}^{0.5} \leq \varepsilon,$$

სადაც  $\varepsilon > 0$  ცდომილების დასაშვები მნიშვნელობაა. თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავლთ მე-13 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში -  $k$  ინდექსი ერთი ერთეულით გაიზრდება და ექსტრემუმის ძებნა მე-2 ბიჯიდან განმეორდება.

**ბიჯი 13.** ძებნის დასასრული.

### ჰუმი-ჯივისის მეთოდი

წულოვანი რიგის მეთოდებს შორის ჰუმი-ჯივისის მეთოდი [110] ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული და ეფექტური მეთოდია. სიმპლექს-მეთოდისგან განსხვავებით, აქ ადგილი აქვს წინა ეტაპზე მიღებული ინფორმაციის გამოყენებას, რაც კრებალობის დაჩქარებას უზრუნველყოფს. არსებითად მეთოდი შემდეგი ძირითადი პროცედურებისგან შედგება:

- ა) საბაზისო წერტილის მიდამოს გამოკვლევა;
- ბ) ნიშუმის მიხედვით ძებნა.

საბაზისო წერტილის მიდამოს გამოკვლევა ფაქტიურად ორიენტირებულია ძებნის საუკეთესო მიმართულების განსაზღვრაზე, ხოლო აღნიშნული გამოკვლევის საფუძველზე მიღებული ინფორმაცია ექსტრემუმთან საუკეთესო მიახლოების მისაღებად გამოიყენება.

საბაზისო წერტილის მიდამოს გამოკვლევისათვის საჭიროა თითოეული საკოორდინატო მიმართულებისათვის შევირჩიოთ ბიჯის სიდიდე, რომელიც ძებნის პროცესში შეიძლება შეიცვალოს. გამოკვლევა იწყება რომელიმე საწყის წერტილში. თუ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა საცდელ წერტილში არ აღემატება ფუნქციის მნიშვნელობას საწყის წერტილში, მაშინ ძებნის ბიჯი განიხილება როგორც წარმატებული. წინააღმდეგ შემთხვევაში საჭიროა უკან დაებრუნდეთ და ბიჯი საწინააღმდეგო მიმართულებით გადავადგათ. ანალოგიური გამოკვლევა ჩატარდება ყველა  $n$  საკოორდინატო მიმართულებით, რის შედეგად განისაზღვრება მოცემული მიდამოს საუკეთესო წერტილი, რომელსაც საბაზისო წერტილს უწოდებენ.

ნიშუმის მიხედვით ძებნა ითვალისწინებს საბაზისო წერტილიდან გადაადგილებას იმ წრფის მიმართულებით, რომელიც მოცემულ საბაზისო წერტილს წინა ეტაპზე განსაზღვრულ საბაზისო წერტილთან აერთებს. ახალი წერტილი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$x_p^{(k+1)} = x^{(k)} + (x^{(k)} - x^{(k-1)}). \quad (4.72)$$

მიღებული  $x_p^{(k+1)}$  წერტილი დაფიქსირდება როგორც საბაზისო წერტილი და მისი მიღამო. წინა შემთხვევის ანალოგიურად, კვლავ დაექვემდებარება გამოკვლევას და ა.შ. აღნიშნული პროცესის მიმდინარეობის დროს შეიძლება შეიქმნას ისეთი სიტუაცია, როცა საცდელ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა აღარ შემცირდება. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა ბიჯის სიდიდის შემცირება და საბაზისო წერტილის მიღამოს გამოკვლევის განახლება. ძებნის პროცესი დამთავრდება მაშინ, როცა ბიჯის სიდიდე დასაშვებ  $\varepsilon$  სიდიდეზე ნაკლები გახდება.

ამგვარად, პუკი-ჯივისის მეთოდის ლოგიკური სტრუქტურა შემდეგი ძირითადი პროცედურების რეალიზაციას ითვლის წინებს.

**ბიჯი 1.** საჭიროა დაუშვათ:

- საწყისი წერტილი  $x^{(0)}$ ,
- ნაზრდები  $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$ ,
- ბიჯის შემცირების კოეფიციენტი  $\alpha > 1$ ,
- ძებნის დამთავრების პარამეტრი  $\varepsilon > 0$ ;

**ბიჯი 2.** განვახორციელოთ საცდელი ძებნა;

**ბიჯი 3.** თუ საცდელი ძებნა წარმატებულია (ე.ი. ნაპოვნია  $x^{(i)}$  წერტილი, სადაც  $f(x^{(i)}) < f(x^{(i-1)})$ ), მაშინ გადავალთ მე-5 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-4 ბიჯზე;

**ბიჯი 4.** შევამოწმოთ ძებნის დამთავრების პირობა. თუ  $\|\Delta x\| < \varepsilon$ , მაშინ მიმდინარე წერტილი ჩაითვლება მინიმუმის  $x^*$  წერტილად და გადავალთ მე-8 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში ნაზრდი შემცირდება

$$\Delta_i = \Delta_i / \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

და გადავალთ მე-2 ბიჯზე;

**ბიჯი 5.** განვახორციელოთ ძებნა ნიმუშის მიხედვით:

$$x_p^{(k+1)} = x^k + (x^{(k)} - x^{(k-1)});$$

**ბიჯი 6.** განვახორციელოთ საცდელი ძებნა საბაზისო  $x_p^{(k-1)}$  წერტილში. ვთქვათ,  $x^{(k-1)}$  საცდელი ძებნის შედეგან მიღებული წერტილია;

**ბიჯი 7.** შევამოწმოთ უტოლობა



$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}).$$

თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ დაეუშვებთ  $x^{(k-1)} = x^{(k)}$ ,  $x^{(k)} = x^{(k+1)}$  და გადავალთ მე-5 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-4 ბიჯზე;

ბიჯი 8. ძებნის დასასრული.

**მაბალითი 4.12** ჰუკი-ჯეისის მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min \{ f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \},$$

თუ საწყისი წერტილია  $x^{(0)} = [-4; -4]^T$ .

ამოხსნა. დაეუშვათ საწყისი სიდიდეები:

- ნაზრდის ვექტორული სიდიდე  $\Delta x = [1; 1]^T$ ,
- ბიჯის შემცირების კოეფიციენტი  $\alpha = 2$ ,
- ძებნის დამთავრების პარამეტრი  $\varepsilon = 0.0001$ .

გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა საწყის წერტილში  $f(x^{(0)}) = 272$  და გამოვიკვლიოთ  $x^{(0)}$  წერტილის მიდამო. დავაფიქსიროთ  $x_2$  ცვლადი, ხოლო  $x_1$  ცვლადს მივცეთ ნაზრდი:

$$x_2 = -4,$$

$$x_1 = -4 + 1 = -3.$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა საცდელ წერტილში  $f(-3; -4) = 200 < f(x^{(0)}) = 272$ , ე.ი. საცდელი ძებნა  $x_1$  კოორდინატის მიხედვით წარმატებულია.

დავაფიქსიროთ  $x_1$  ცვლადი, ხოლო  $x_2$  ცვლადს მივცეთ ნაზრდი:

$$x_1 = -3,$$

$$x_2 = -4 + 1 = -3.$$

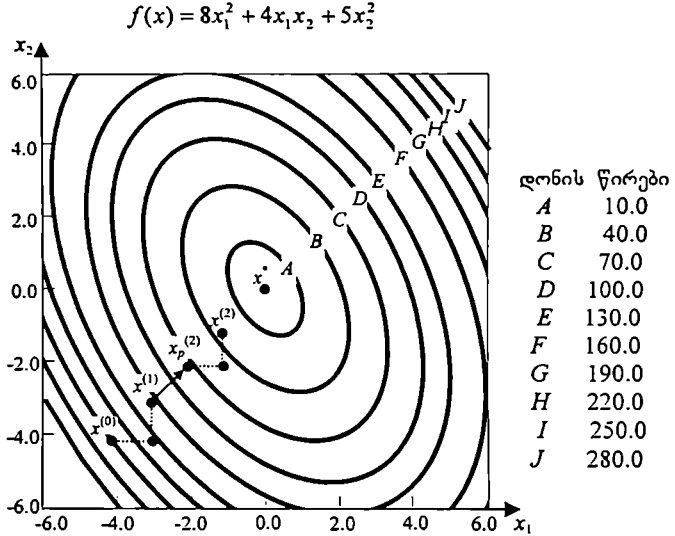
გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა საცდელ წერტილში

$$f(-3; -3) = 153 < f(-3; -4) = 200,$$

ე.ი. საცდელი ძებნა  $x_2$  კოორდინატის მიხედვით წარმატებულია.

ამგვარად, საცდელი ძებნის შედეგად განსაზღვრულ იქნა წერტილი:

$$x^{(1)} = [-3; -3]^T, f(x^{(1)}) = 153.$$



ნახ. 4.21

ვინაიდან საცდელი ძებნა წარმატებული გამოდგა, ამიტომ გადავდივართ ძებნაზე ნიმუშის მიხედვით:

$$x_p^{(2)} = x^{(1)} + (x^{(1)} - x^{(0)}) = [-2; -2]^T, \quad f(x_p^{(2)}) = 68.$$

ზემოთ აღწერილი პროცედურის ანალოგიურად გამოკვლევა ჩატარდება  $x_p^{(2)}$  წერტილის მიდამოში, რის საფუძველზეც განისაზღვრება წერტილი  $x^{(2)} = [-1; -1]^T$ , სადაც  $f(x^{(2)}) = 17$ . რადგან  $f(x^{(2)}) < f(x^{(1)})$ , ამიტომ ძებნა ნიმუშის მიხედვით წარმატებულად ჩაითვლება და ძებნის შემდგომი პროცედურებისთვის ახალ საბაზისო წერტილად  $x^{(2)}$  წერტილი განიხილება. იტერაციები გაგრძელდება მანამ. სანამ ბიჯის შემცირების სიდიდე მინიმუმის  $x^* = [0; 0]^T$  წერტილის მიდამოში ძებნის დამთავრებაზე არ მიგვანიშნებს. მოცემული ამოცანის შემთხვევაში მინიმუმის ძებნის პროცესი ილუსტრირებულია ნახ. 4.21-ზე.

## 4.2.2 პირველი რიგის დეტერმინირებული მეთოდები

ექსტრემუმის ძებნის პირველი რიგის მეთოდებში გადაადგილების მიმართულების  $d^{(k)}$  ვექტორი საოპტიმიზაციო ფუნქციის გრადიენტის საშუალებით განისაზღვრება და აბიტომ მათ გრადიენტულ მეთოდებს [15] უწოდებენ.  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმაციის შემთხვევაში  $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$  და (2.39) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)}), \lambda_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.73)$$

$\lambda_k$  ბიჯის შერჩევის წესის მიხედვით განასხვავებენ გრადიენტული მეთოდის სხვადასხვა მოდიფიკაციას. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ როცა  $\lambda_k$  ძალიან მცირე სიდიდეა, მაშინ, მართალია, ადგილი აქვს საოპტიმიზაციო ფუნქციის კლებას

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)})) < f(x^{(k)}), \quad (4.74)$$

მაგრამ მოთხოვნილი სიზუსტით ექსტრემუმის მისაღწევად იტერაციების ძალიან დიდი რაოდენობა საჭიროა. მეორე მხრივ,  $\lambda_k$  ბიჯის შედარებით დიდ მნიშვნელობას შეუძლია გამოიწვიოს (4.74) პირობის დარღვევა.

### გრადიენტული მეთოდი მუდმივი ბიჯით

გრადიენტული მეთოდი მუდმივი ბიჯით [15] პირველი რიგის მეთოდებს შორის უმარტივესია. აღნიშნულ მეთოდში, სადაც  $\lambda_k = \lambda > 0$ , ექსტრემუმისკენ მოძრაობა ხორციელდება შემდეგი რეკურენტული ფორმულის საფუძველზე:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda \frac{\nabla f(x^{(k)})}{\sqrt{\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

უკანასკნელი ფორმულით გადაადგილებას ადგილი აქვს მანამ, სანამ (4.74) პირობა არ დაირღვევა. პირობის დარღვევის შემთხვევაში ალგორითმით გათვალისწინებულია  $x^{(k)}$  წერტილში დაბრუნება და ამ წერტილიდან ანტიგრადიენტის მიმართულებით გადაადგილება შემცირებული  $\lambda/2$  ბიჯით. ბიჯის შემცირებას ადგილი აქვს მანამ, სანამ მისი მნიშვნელობა რაგინდ მცირე  $\delta > 0$  სიდიდეზე ნაკლები არ აღმოჩნდება.

ზშირად პრაქტიკაში  $\lambda_k$  სიდიდის შერჩევას განაპირობებს, ფუნქციის კლების (4.74) პირობისგან განსხვავებით, უფრო მკაცრი პირობის მოთხოვნა

$$f(x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)})) - f(x^{(k)}) \leq \delta \lambda_k \|\nabla f(x^{(k)})\|, \quad (4.75)$$

სადაც  $\delta \in (0;1]$  რაღაც ფიქსირებული რიცხვია. აქაც, როგორც წინა შემთხვევაში, შეარჩევნებ ბიჯის ფიქსირებულ მნიშვნელობას  $\lambda_k = \lambda > 0$  (მაგალითად,  $\lambda_k = 1$ ) და შემდეგ აუცილებლობის შემთხვევაში მას ამცირებენ მანამ, სანამ (4.75) უტოლობა არ შესრულდება.

გამოთვლის პროცესის დამთავრების კრიტერიუმად, (4.60) უტოლობების გარდა, შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს შემდეგი სახის პირობა:

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| \leq \varepsilon, \quad (4.76)$$

სადაც  $\varepsilon > 0$  დასაშვები ცდომილების აბსოლუტური ზღვრული მნიშვნელობაა.

### უსწრაფესი დაშვების მეთოდი

უსწრაფესი დაშვების მეთოდი [96], რომელიც კოშის სახელთანაა დაკავშირებული, ჩვეულებრივი გრადიენტული მეთოდის გარკვეული სახესხვაობაა და მისგან იმით განსხვავდება, რომ  $\lambda_k > 0$  ბიჯის სიდიდე შეირჩევა შემდეგი პირობიდან:

$$f(x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)})) = \min_{\lambda} f(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)})). \quad (4.77)$$

უკანასკნელი პირობის თანახმად, ანტიგრადიენტის მიმართულებით მოძრაობა გრძელდება მანამ, სანამ  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა მცირდება. როგორც კი ფუნქციის შემცირება შეწყდება, განისაზღვრება ახალი მიმართულება და პროცესი ანალოგიურად წარმართება მანამ, სანამ გამოთვლების დამთავრების (4.60) ან (4.76) პირობები არ დაკმაყოფილდება. ჩვეულებრივი გრადიენტული მეთოდისგან განსხვავებით, აღნიშნულ მეთოდს ექსტრემუმის წერტილის მისაღწევად ნაკლები რაოდენობის იტერაციები სჭირდება, რის გამოც იგი შედარებით უფრო სწრაფქმედია.

საზოგადოდ, ზემოთ განხილული გრადიენტული მეთოდების კრებადობის ხასიათს შემდეგი მტკიცება განსაზღვრავს.

თეორემა 4.2 ვთქვათ,  $f(x)$  ქვევიდან შემოსაზღვრული, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა  $R^n$ -ზე და მისი  $\nabla f(x)$  გრადიენტი აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას

$$\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\| \leq L \|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in R^n, \quad (4.78)$$

სადაც  $L > 0$  რაღაც ფიქსირებული მუდმივაა. გარდა ამისა, დაეუშვათ, რომ  $\lambda_k$  ბიჯის სიდიდე (4.75) ან (4.77) პირობიდან შეირჩევა. მაშინ, როგორც არ უნდა იყოს საწყისი  $x^{(0)}$  წერტილი, გრადიენტული მეთოდი ისეთ  $\{x^{(k)}\}$  მიმდევრობას განსაზღვრავს, რომ  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x^{(k)})\| = 0$ . ამასთან, თუ  $f(x)$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა და

$$\exists M \geq m > 0: m\|y\|^2 \leq (\nabla^2 f(x)y, y) \leq M\|y\|^2 \quad \forall x, \forall y, \quad (4.79)$$

სადაც  $M$  და  $m$  მეორე რიგის წარმოებულების მატრიცის (ჰესეს მატრიცის) საკუთრივი რიცხვების მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობებია, მაშინ  $\{x^{(k)}\}$  მიმდევრობის ზღვარი აბსოლუტური მინიმუმის  $x^*$  წერტილს წარმოადგენს.

ვინაიდან პრაქტიკაში ნაკლებად რეალურია მტკიცებაში მოყვანილი პირობების შესრულება, ამიტომ გრადიენტული მეთოდების გამოყენება, როგორც წესი, საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ საოპტიმიზაციო ფუნქციის მინიმუმის (საზოგადოდ, ლოკალური მინიმუმის) მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ნიშანდობლივია ის ფაქტი, რომ „ხვეის“ ტიპის ცუდად განსაზღვრული სისტემების დროს გრადიენტული მეთოდები შენელებული კრებადობით ხასიათდება.

**მაგალიტი 4.13.** უსწრაფესი დაშვების მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \{ f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \}.$$

ამოხსნა. უპირველეს ყოვლისა, განვსაზღვროთ გრადიენტის კომპონენტები

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 16x_1 + 4x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 4x_1.$$

უსწრაფესი დაშვების მეთოდით მოცემული ამოცანის გადასაწყვეტად დაუშვათ საწყისი მიახლოების წერტილი  $x^{(0)} = [10; 10]^T$  და (4.73) ფორმულის საფუძველზე განვსაზღვროთ ახალი მიახლოება

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \lambda_0 \nabla f(x^{(0)}).$$

შევარჩიოთ  $\lambda_0$ -ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც  $f(x^{(1)}) \rightarrow \min$ . გამოვიყენოთ ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის (კერძოდ, კვადრატული ინტერპოლაციის) მეთოდი და გამოვთვალოთ  $\lambda_0 = 0.056$ . მაშასადამე,  $x^{(1)} = [-1.20; 2.16]^T$ .

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
1	-1.2000	2.1600	24.4800
2	0.1441	0.1447	0.3542
3	-0.0181	0.0309	0.0052
4	0.0021	0.0021	0.0000

ცხრილი 4.9

შემდეგ იტერაციაში,  $x^{(1)}$  წერტილში გრადიენტის გამოთვლისა და  $\lambda_1$ -ის ოპტი-  
მალური მნიშვნელობის მოძებნის შედეგად, განისაზღვრება ექსტრემუმთან მიახლოე-  
ბის ახალი წერტილი

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \lambda_1 \nabla f(x^{(1)})$$

და ა.შ. პროცესი ანალოგიურად გაგრძელდება მანამ, სანამ კრებადობის პირობები არ  
დაკმაყოფილდება. გამოთვლების შედეგები წარმოდგენილია 4.9 ცხრილში.

### შეუღლებული მიმართულებების მეთოდი

პირველი რიგის მეთოდებს შორის შეუღლებული მიმართულებების მეთოდი [92,  
110] ყველაზე გავრცელებული მეთოდია. აღნიშნულ მეთოდში ექსტრემუმთან ყოველი  
მიახლოება შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k \{d^{(k)}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.80)$$

სადაც  $\{d^{(k)}\}$  შეუღლებული მიმართულებების რაღაც სისტემაა, რომელიც შემდეგი  
სახის იტერაციული პროცესით განისაზღვრება:

$$\begin{aligned} d^{(0)} &= -\nabla f(x^{(0)}), \\ d^{(k)} &= -\nabla f(x^{(k)}) + \beta_{k-1} d^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (4.81)$$

სადაც

$$\beta_{k-1} = \frac{(\nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}))}{(\nabla f(x^{(k-1)}), \nabla f(x^{(k-1)}))}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.82)$$

რაც შეეხება  $\lambda_k$  ბიჯის შერჩევას, იგი  $\varphi_k(\lambda) = f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$  ერთცვლადიანი  
ფუნქციის მინიმუმის პირობიდან გამოითვლება. აღსანიშნავია, რომ კვადრატული სა-  
ოპტიმიზაციო ფუნქციის შემთხვევაში, აღნიშნული მეთოდი ოპტიმალური ამონახსნის  
მიღებას დაახლოებით  $n$  რაოდენობის იტერაციის შედეგად უზრუნველყოფს, სადაც  $n$   
დამოუკიდებელი ცვლადების რაოდენობაა.

შეუღლებული მიმართულებების მეთოდი, სადაც  $\beta_{k-1}$  კოეფიციენტი (4.82) ფორ-  
მულით განისაზღვრება, ცნობილია როგორც ფლეთჩერ-რივისის მეთოდი [15].

პოლაკ-რიბერის მეთოდი [15] ზემოთ განხილული მეთოდის მოდიფიკაციას წარმო-  
ადგენს და მისგან იმით განსხვავდება, რომ  $\beta_{k-1}$  პარამეტრის განსაზღვრისათვის  
შემდეგი ფორმულა გამოიყენება:

$$\beta_{k-1} = \frac{(\nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}) - \nabla f(x^{(k-1)}))}{(\nabla f(x^{(k-1)}), \nabla f(x^{(k-1)}))}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.83)$$

აღნიშნული მეთოდები განკუთვნილია არაკვადრატული, არაწრფივი საოპტიმიზაციო ფუნქციების მინიმიზაციისათვის და ასეთ შემთხვევაში მათი კრებალობის ხასიათს შემდეგი მტკიცება განსაზღვრავს.

თეორემა 4.3. ვთქვათ, არაკვადრატული საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია და მისი გრადიენტი აკმაყოფილებს ლიფშიციის პირობას

$$\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\| \leq L\|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in R, \quad (4.84)$$

სადაც  $L > 0$  რაღაც ფიქსირებული მუდმივაა. მაშინ შეუღლებული მიმართულებების მეთოდის მიხედვით განსაზღვრულ წერტილთა  $\{x^{(k)}\}$  მიმდევრობისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x^{(k)})\| = 0. \quad (4.85)$$

ქვემოთ მოცემულია შეუღლებული მიმართულებების მეთოდის ლოგიკური სტრუქტურის ფორმალური აღწერა.

ბიჯი 1. შევირჩიოთ საწყისი მიახლოება  $x^{(0)}$  და დავუშვათ  $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$ ;

ბიჯი 2. ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის ნებისმიერი მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის ამოცანა

$$\min_x f(x^{(k)}) + \lambda d^{(k)} \quad (4.86)$$

და მოვებნოთ ოპტიმალური  $\lambda_k$ ;

ბიჯი 3. გამოვთვალოთ ექსტრემუმთან მიახლოების ახალი წერტილი

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)} \quad (4.87)$$

და განვსაზღვროთ ახალი მიმართულება

$$d^{(k+1)} = -\nabla f(x^{(k+1)}) + \beta_k d^{(k)}, \quad (4.88)$$

სადაც  $\beta_k$  (4.82) ან (4.83) ფორმულით განისაზღვრება;

ბიჯი 4. თუ პროცესის დამთავრების პირობები შესრულებულია, მაშინ გადავალთ მე-5 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში დავუშვებთ  $k = k + 1$  და გადავალთ მე-2 ბიჯზე;

ბიჯი 5. ბეზინის დასასრული.

მაბალნობი 4.14. ფლეთჩერ-რივისის მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min\{ f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \},$$

თუ საწყისი მიახლოების წერტილია  $x^{(0)} = [0; 0]^T$ .

ამ(ო)სსნა. უპირველეს ყოვლისა, ანალიზურად განვსაზღვროთ ფუნქციის წარმოებულობა

$$\nabla f(x) = [8x_1 - 4x_2 + 1; 6x_2 - 4x_1]^T.$$

**ბიჯი 1.** გამოვთვალოთ საწყისი მიმართულების ვექტორი  $x^{(0)}$  წერტილში

$$d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)}) = -[1; 0]^T;$$

#### იტერაცია 1

**ბიჯი 2.** ერთგანზომილებიანი მინიმიზაციის მეთოდით მოვძებნოთ ოპტიმალური  $\lambda_0$  შემდეგი წრფის მიმართულებით:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \lambda_0 \nabla f(x^{(0)}) \Rightarrow \lambda_0 = 1/8;$$

**ბიჯი 3.** (4.87) ფორმულის საფუძველზე გამოვთვალოთ ექსტრემუმთან მიახლოების ახალი წერტილი

$$x^{(1)} = [0; 0]^T - (1/8)[1; 0]^T = [-1/8; 0]^T;$$

**ბიჯი 4.** რადგან  $\nabla f(x^{(1)}) = [0; 1/2]^T$ , ამიტომ ძებნა გრძელდება. (4.88) ფორმულის საფუძველზე განვსაზღვროთ ახალი მიმართულება

$$d^{(1)} = -[0; 1/2]^T - \frac{1/4}{1}[1; 0]^T = -[1/4; 1/2]^T.$$

#### იტერაცია 2

**ბიჯი 2.** ერთგანზომილებიანი მინიმიზაციის მეთოდით მოვძებნოთ ოპტიმალური  $\lambda_1$  შემდეგი წრფის მიმართულებით

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} \Rightarrow \lambda_1 = 1/4;$$

**ბიჯი 3.** გამოვთვალოთ ექსტრემუმთან მიახლოების ახალი წერტილი

$$x^{(2)} = [-1/8; 0]^T - (1/4)[1/4; 1/2]^T = [-3/16; -1/8]^T;$$

**ბიჯი 4.** რადგან  $\nabla f(x^{(2)}) = [0; 0]^T$ , ამიტომ  $x^* = x^{(2)}$ .

ამგვარად, ორცვლადიანი კვადრატული საოპტიმიზაციო ფუნქციის შემთხვევაში ოპტიმალური ამონახსნი ორი იტერაციის შედეგად იქნა მიღებული.



## 4.2.3 მეორე რიგის დეტერმინირებული მეთოდები

მეორე რიგის დეტერმინირებული მეთოდები ოპტიმიზაციის ამოცანების გადასაწყვეტად იყენებს საოპტიმიზაციო ფუნქციის როგორც პირველ, ისე მეორე რიგის წარმოებულებს.

### ნიუტონის მეთოდი

ექსტრემუმის ძებნის მეორე რიგის მეთოდებიდან აღსანიშნავია ნიუტონის მეთოდი [96], რომელიც ზემოთ განხილულ ყველა მეთოდთან შედარებით კრებადობის მაღალი სიჩქარით გამოირჩევა. ექსტრემუმისკენ მოძრაობის ტრაექტორია შემდეგი იტერაციული ფორმულით განისაზღვრება:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.89)$$

სადაც  $[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1}$  მეორე რიგის წარმოებულების მატრიცის (ჰესეს მატრიცის) შებრუნებული მატრიცაა  $x^{(k)}$  წერტილში. (4.89)-ში იგულისხმება, რომ მატრიცა  $\nabla^2 f(x^{(k)})$  არაგანსაკუთრებულია და ამიტომ მისი შებრუნებული მატრიცა არსებობს.

ნიუტონის მეთოდის კრებადობის ხასიათს შემდეგი მტკიცება განსაზღვრავს:

თეორემა 4.4. ვთქვათ,  $f(x)$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა  $R^n$ -ზე,  $x^*$  - საოპტიმიზაციო ფუნქციის სტაციონარული წერტილია, ხოლო ჰესეს მატრიცა  $\nabla^2 f(x^*)$  არაგანსაკუთრებულია. მაშინ არსებობს  $x^*$  წერტილის იხეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ნებისმიერი საწყისი  $x^{(0)}$  წერტილისათვის (4.89) ფორმულით განსაზღვრული  $\{x^{(k)}\}$  მიმდევრობა კრებადია  $x^*$  წერტილში.

ამგვარად, თუ საწყისი  $x^{(0)}$  წერტილი ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილის მიდამოში მდებარეობს, მაშინ ნიუტონის მეთოდის კრებადობა გარანტირებულია. ვინაიდან ასეთი წერტილის შერჩევა პრაქტიკულად შეუძლებელია, ამიტომ შემუშავებულ იქნა ნიუტონის მოდიფიცირებული მეთოდი [96], რომლის კრებადობა საწყისი მიახლოების შერჩევაზე არ არის დამოკიდებული.

მაგალიტი 4.15. ნიუტონის მეთოდით გადავწყვიტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\min \{ f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \},$$

თუ საწყისი მიახლოების წერტილია  $x^{(0)} = [10; 10]^T$ .

ამოხსნა. განვსაზღვროთ

$$\nabla f(x) = [16x_1 + 4x_2; 10x_2 + 4x_1]^T,$$

$$\nabla^2 f(x) = G = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

როცა  $x^{(0)} = [10; 10]^T$ , მაშინ (4.89) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= [10; 10]^T - \left( \frac{1}{144} \right) \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} [200; 140]^T = \\ &= [10; 10]^T - \left( \frac{1}{144} \right) [1440; 1440]^T = [0; 0]^T, \end{aligned}$$

რაც ამოცანის ზუსტ ამონახსნს შეესაბამება.

ამგვარად, ნიუტონის მეთოდით კვადრატული ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა ერთი იტერაციით გადაწყდება.

### ნიუტონის მოდიფიცირებული მეთოდი

ნიუტონის მოდიფიცირებულ მეთოდში ექსტრემუმთან მიახლოების ყოველი წერტილი გამოითვლება შემდეგი განზოგადებული ფორმულით:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k [\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.90)$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში  $\lambda_k$  ბიჯს შემდგენიარად შვირჩევენ. თავდაპირველად დაუშვებენ  $\lambda = 1$  და შემოწმებენ  $f(x)$  ფუნქციის კლების პირობას

$$f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)}) - f(x^{(k)}) \leq \varepsilon \lambda \langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle, \quad (4.91)$$

სადაც  $d^{(k)} = -[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$  დაშვების მიმართულებაა, ხოლო  $\varepsilon \in (0; 0.5)$  - რაღაც რიცხვია. თუ (4.91) უტოლობა სამართლიანია, მაშინ  $\lambda_k = \lambda$  და შესრულდება მეორე იტერაცია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ბიჯის სიდიდე განახევრდება  $\lambda_k = \lambda/2$  და კვლავ შემოწმდება (4.91) უტოლობა. ბიჯის შემცირება გაგრძელდება მანამ, სანამ აღნიშნული უტოლობა არ დაკმაყოფილდება. უტოლობის დაკმაყოფილების შემთხვევაში  $\lambda$ -ს მიმდინარე მნიშვნელობა  $\lambda_k$  ბიჯის სიდიდედ ჩაითვლება.

$\lambda_k$  -ს შერჩევა შესაძლებელია აგრეთვე ფუნქციის მინიმიზაციის პირობიდან

$$f(x^{(k)} - \lambda_k [\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)})) = \min_x \{ f(x^{(k)} - \lambda [\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)})) \}. \quad (4.92)$$

ნიუტონის მოდიცირებული მეთოდის კრებალობის ხასიათს შემდეგი მტკიცება განსაზღვრავს.

თეორემა 4.5. ვთქვათ,  $f(x)$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა  $R^n$ -ზე. ამასთან, ადგილი აქვს (4.79) პირობის შესრულებას. მაშინ საწყისი  $x^{(0)}$  მიახლოების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის (4.90) მიმდევრობა კრებადია აბსოლუტური ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილში.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ნიუტონის მეთოდი და მისი მოდიფიკაცია გარკვეული შრომატევადობით გამოირჩევა, რაც დაკავშირებულია ჰესეს მატრიცის გამოთვლასთან. ვინაიდან პრაქტიკაში საოპტიმიზაციო ფუნქციას საკმაოდ რთული ფორმა გააჩნია, ამიტომ აღნიშნული მატრიცის გამოთვლა მხოლოდ მეორე რიგის სასრული სხვაობებითაა შესაძლებელი, რაც განაპირობებს თითოეულ იტერაციაზე  $f(x)$  ფუნქციის  $n(n+1)/2$  -ჯერ განსაზღვრას [15], სადაც  $n$  დამოუკიდებელი ცვლადების რაოდენობაა.

## მარკვარდტის მეთოდი

მარკვარდტის მეთოდი [110] კოშისა და ნიუტონის მეთოდების გარკვეულ კომბინაციას წარმოადგენს. მის დამახასიათებელ თავისებურებას შეადგენს ის, რომ ძებნის მიმართულება მინიმუმიდან დაშორებულ წერტილებში  $f(x)$  ფუნქციის ანტიგრადიენტის მიმართულებას ემთხვევა, ხოლო მინიმუმის მიდამოში - ნიუტონის მეთოდიტ განსაზღვრულ მიმართულებას.

ძებნის მიმართულება შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$d^{(k)} = -[G_k + \alpha_k I]^{-1} \nabla f(x^{(k)}), \quad (4.93)$$

სადაც  $G_k$  ჰესეს მატრიცაა  $x^{(k)}$  წერტილში, ხოლო  $I$  - ერთეულოვანი მატრიცა. ამასთან, (2.39) ფორმულაში საჭიროა დავეშვათ  $\lambda_k = +1$ , ვინაიდან  $\alpha$  პარამეტრი არა მარტო მიმართულების შეცვლის, არამედ ბიჯის სიდიდის რეგულირების საშუალებასაც იძლევა. საწყის ეტაპზე მისი მნიშვნელობა საკმაოდ დიდი აიღება (მაგალითად,  $10^4$ ), რის გამოც გვექნება

$$[G_0 + \alpha_0 I]^{-1} = [\alpha_0 I]^{-1} = (1/\alpha_0) I. \quad (4.94)$$

მაშასადამე,  $\alpha_0$ -ის დიდ მნიშვნელობას შესაბამეა ძებნის მიმართულება  $d^{(0)} \rightarrow -\nabla f(x^{(0)})$ . (4.93) ფორმულაში  $\alpha$ -ს ნულამდე შემცირებით კი ძებნის მიმართულება ნიუტონის მეთოდით განსაზღვრული მიმართულებით შეიცვლება. თუ პირველი იტერაციის შედეგად ფუნქციის მნიშვნელობა შემცირდა (ე.ი.  $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$ ), მაშინ საჭიროა შევირჩიოთ  $\alpha_1 < \alpha_0$  და იტერაციული პროცესი გაუაგრძელოთ; წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა დავუშვათ  $\alpha_0 = \delta \alpha_0$ , სადაც  $\delta > 1$ , და პროცესი გავიძეოროთ. ქვემოთ წარმოდგენილია განხილული მეთოდის ფორმალიზებული აღწერა.

**ბიჯი 1.** დავუშვათ საწყისი მონაცემები:

$x^{(0)}$  - საწყისი მიახლოება;  $M$  - იტერაციების მაქსიმალური (დასაშვები) რაოდენობა;  $\varepsilon$  - კრებადობის პარამეტრი;

**ბიჯი 2.** დავუშვათ  $k = 0, \alpha_0 = 10^4$ ;

**ბიჯი 3.** გამოვთვალოთ  $\nabla f(x^{(k)})$  გრადიენტის კომპონენტები;

**ბიჯი 4.** შევამოწმოთ პირობა:  $\|\nabla f(x^{(k)})\| < \varepsilon$ . თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავალთ მე-11 ბიჯზე; წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-5 ბიჯზე;

**ბიჯი 5.** შევამოწმოთ პირობა:  $k \geq M$ . თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავალთ მე-11 ბიჯზე; წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-6 ბიჯზე;

**ბიჯი 6.** გამოვთვალოთ  $d^{(k)} = -[G_k + \alpha_k I]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$ ;

**ბიჯი 7.** განვსაზღვროთ მიახლოების ახალი წერტილი  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$ ;

**ბიჯი 8.** შევამოწმოთ პირობა:  $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$ . თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავალთ მე-9 ბიჯზე; წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-10 ბიჯზე;

**ბიჯი 9.** დავუშვათ  $\alpha_{k+1} = 0.5\alpha_k$ ,  $k = k + 1$  და გადავიდეთ მე-3 ბიჯზე;

**ბიჯი 10.** დავუშვათ  $\alpha_k = 2\alpha_k$  და გადავიდეთ მე-6 ბიჯზე;

**ბიჯი 11.** ძებნის დასასრული.

აღსანიშნავია, რომ მარკვარდტის მეთოდი კრებადობის მაღალი სიჩქარით გამოირჩევა. ამასთან, იგი არ საჭიროებს ბიჯის ოპტიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრას. მეთოდის ძირითად ნაკლს  $G_k$  მატრიცის გამოთვლის აუცილებლობა წარმოადგენს.

## ცვლადი მეტრიკის მეთოდები

ცვლადი მეტრიკის ანუ კვაზინიუტონური მეთოდები [91] შემუშავებულ იქნა ჰესეს მატრიცის გამოთვლასთან დაკავშირებული პრობლემების გადასაწყვეტად. აღნიშნულ მეთოდებში  $[\nabla^2 f(x)]^{-1}$  მატრიცა მისი მაპროქსიმებული, დადებითად განსაზღვრული  $H_k$  მატრიცითაა შეცვლილი, რაც საშუალებას გვაძლევს თავიდან ავიცილოთ ჰესეს მატრიცის შებრუნებასთან და მეორე რიგის კვადრატული ფორმების გამოთვლასთან დაკავშირებული შრომატევადი პროცედურები. აღნიშნული ცვლილებების გათვალისწინებით, ექსტრემუმის ძებნის რეკურენტული ფორმულა მიიღებს სახეს

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k H_k \nabla f(x^{(k)}), \quad (4.95)$$

სადაც  $\lambda_k$  ბიჯის სიდიდე  $\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} - \lambda H_k \nabla f(x^{(k)}))$  ფუნქციის მინიმუმის პირობიდან შეირჩევა, ხოლო  $H_k$  მატრიცა შემდეგი იტერატიული ფორმულით განისაზღვრება:

$$H_{k+1} = H_k + H_k^{(c)}, \quad (4.96)$$

სადაც  $H_k^{(c)}$  მაკორექტირებელი მატრიცაა და იგი ტოლია

$$H_k^{(c)} = \frac{(\delta_k - H_k \gamma_k)(\delta_k - H_k \gamma_k)^T}{\gamma_k^T (\delta_k - H_k \gamma_k)}. \quad (4.97)$$

უკანასკნელ გამოთვლებში

$$\delta_k = x^{(k+1)} - x^{(k)},$$

$$\gamma_k = \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}).$$

$H_k$  მატრიცის საწყის მნიშვნელობად შეიძლება მიღებულ იქნეს  $H_0 = I$ , სადაც  $I$  ერთეულოვანი მატრიცაა.

$H_k$  მატრიცის წარმოდგენის პრაქტიკული ფორმულა არსებობს. ძირითადი პირობა, რომელიც ამ უკანასკნელმა უნდა დააკმაყოფილოს, შემდეგია:

$$H_k [\nabla f(x^{(k)}) - \nabla f(x^{(k-1)})] = x^k - x^{k-1}. \quad (4.98)$$

როცა

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{H_k \gamma_k \gamma_k^T H_k}{\gamma_k^T H_k \gamma_k}, \quad (4.99)$$

მაშინ ადგილი აქვს დევიდონ-ფლეთჩერ-პაუელის ალგორითმს [91], ხოლო როცა

$$H_{k+1} = H_k + \left[ 1 + \frac{\gamma_k^T H_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right] \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^T H_k + H_k \gamma_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k}, \quad (4.100)$$

მაშინ გვექნება ბროიდენ-ფლეთჩერ-გოლდფარბ-შენოს ალგორითმი [91].

**მაბალითი 4.16.** დევიდონ-ფლეთჩერ-პაუელის მეთოდით გადაწყვეტოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \{ f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 x_2 + x_1 \},$$

თუ საწყისი მიახლოების წერტილია  $x^{(0)} = [0; 0]^T$ .

ამოხსნა. დავუშვათ  $H_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

და განვსაზღვროთ  $\nabla f(x) = [8x_1 - 4x_2 + 1; 6x_2 - 4x_1]^T$ .

**ბიჯი 1.** გამოვთვალოთ საწყისი მიმართულება  $x^{(0)}$  წერტილში

$$d^{(0)} = -H_0 \nabla f(x^{(0)}) = -[1; 0]^T;$$

**ბიჯი 2.** ერთგანზომილებიანი მინიმიზაციის მეთოდის საშუალებით მოექებნოთ ოპტიმალური  $\lambda_0$  შემდეგი გადაადგილების მიმართულებით

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_0 d^{(0)} \Rightarrow \lambda_0 = 1/8$$

და (4.95) ფორმულის საფუძველზე გამოვთვალოთ ექსტრემუმთან მიახლოების წერტილი

$$x^{(1)} = [-1/8; 0]^T;$$

**ბიჯი 3.**

$$k = 1, \quad H_1 = H_0 + H_0^{(c)},$$

$$H_0^{(c)} = \frac{\delta_0 \delta_0^T}{\delta_0^T \gamma_0} - \frac{H_0 \gamma_0 \gamma_0^T H_0}{\gamma_0^T H_0 \gamma_0},$$

$$\delta_0 = [-1/8; 0]^T - [0; 0]^T = [-1/8; 0]^T,$$

$$\gamma_0 = [0; 1/2]^T - [1; 0]^T = [-1; 1/2]^T,$$

$$H_0^{(e)} = \frac{[-1/8; 0]^T [-1/8; 0]}{[-1/8; 0] [-1; 1/2]^T} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [-1; 1/2]^T [-1; 1/2]}{[-1; 1/2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [-1; 1/2]^T},$$

$$H_0^{(e)} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.325 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix},$$

$$d^{(1)} = -H_1 \nabla f(x^{(1)}) = -[1/5; 2/5]^T;$$

ბიჯი 4. მოკეპნით ოპტიმალური  $\lambda_1$  შემდეგი გადაადგილების მიმართულებით

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} \Rightarrow \lambda_1 = 5/16$$

და განვსაზღვროთ მინიმუმთან მიახლოების ახალი წერტილი

$$x^{(2)} = [-1/8; 0]^T - 5/16 [1/5; 2/5]^T = [-3/16; -1/8]^T,$$

სადაც  $\nabla f(x^{(2)}) = [0; 0]^T$ , ე.ი.  $x^* = x^{(2)}$ .

ზემოთ განხილულ პირველი და მეორე რიგის დეტერმინირებულ მეთოდებში გრადიენტისა და ჰესეს მატრიცის ელემენტები ანალიზურად მოცემული  $f(x)$  ფუნქციის საფუძველზე გამოითვლება. მაგრამ საინჟინრო პრაქტიკაში გრადიენტის ანალიზური გამოსახულების მიღება, ხშირ შემთხვევაში, სერიოზულ პრობლემებთანაა დაკავშირებული. ამიტომ აღნიშნული მეთოდების პრაქტიკული გამოყენებისათვის საჭიროა გრადიენტის მიახლოებითი განსაზღვრა, რისთვისაც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სასრულ-სხვაობიანი ფორმულები

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x_j} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta x_j}, \quad (4.101)$$

სადაც  $\Delta x_j$  არის  $x_j$  პარამეტრის ნაზრდის სიდიდე, რომელზეც უშუალოდ დამოკიდებულია  $\Delta f(x)$  ვექტორ-გრადიენტის განსაზღვრის სიზუსტე. შევნიშნავთ, რომ

$\Delta x$ , -ის განსაზღვრისათვის არავითარი აპრიორული ინფორმაცია არ არსებობს. თი-  
თოეულ კონკრეტულ შემთხვევაში იგი ემპირიულად განისაზღვრება.

### სუბგრადიენტული მეთოდები

ზემოთ განხილული ყველა დეტერმინირებული მეთოდი ლოკალური ექსტრემუმის განსაზღვრის მეთოდს წარმოადგენს. ძირითადი მოთხოვნა, რომელიც განაპირობებს აღნიშნული მეთოდების კრებადობას საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტად დიფერენცირებადობა და ამოზნექილობაა.

როგორც ცნობილია, დიფერენცირებადი და ამოზნექილი ფუნქციების შემთხვევაში ნებისმიერ  $x^{(0)}$  წერტილში  $\nabla f(x^{(0)})$  გრადიენტი აკმაყოფილებს შემდეგი სახის ფუნდამენტურ უტოლობას:

$$f(x) \geq f(x^{(0)}) + \nabla f^T(x^{(0)})(x - x^{(0)}). \quad (4.102)$$

როცა ამოზნექილი ფუნქცია ყველგან დიფერენცირებადი არ არის (ეი უნიმოდალურია), მაშინ ადგილი აქვს გრადიენტის ცნების სუბგრადიენტის ცნებით განზოგადებას.

**ბანსაზღვრება 4.2**  $f(x)$  ფუნქციის სუბგრადიენტი  $x^{(0)}$  წერტილში ეწოდება  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T \in R^n$  ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x) \geq f(x^{(0)}) + \gamma^T(x - x^{(0)}). \quad (4.103)$$

**ბანსაზღვრება 4.3.**  $x^{(0)}$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციის სუბგრადიენტების სიმრავლეს ეწოდება ამავე ფუნქციის სუბდიფერენციალი  $x^{(0)}$  წერტილში და აღინიშნება  $\partial f(x^{(0)})$ .

ცხადია, დიფერენცირებადი ფუნქციის შემთხვევაში, სუბდიფერენციალი  $x^{(0)}$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციის გრადიენტის ტოლია  $x^{(0)}$  წერტილში

$$\partial f(x^{(0)}) = \{ \nabla f(x^{(0)}) \}.$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ოპტიმიზაციის (4.57) ამოცანაში საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია და ნებისმიერ  $x \in R^n$  წერტილში პრაქტიკულად შესაძლებელია  $\gamma$  სუბგრადიენტის გამოთვლა, მაშინ მიმართულების  $d^{(k)}$  ვექტორად ანტიგრადიენტის ნაცვლად ანტისუბგრადიენტის შერჩევის გზით ექსტრემუმთან მიახლოების (4.73) იტერაციული ფორმულა, ზოგად შემთხვევაში, მიიღებს სახეს:



$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \gamma^{(k)}, \quad \lambda_k > 0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (4.104)$$

მტკიცდება, რომ თუ  $\alpha_k \|\gamma^{(k)}\| \equiv const \equiv \mu$  მაშინ არადიფერენცირებადი და ამოზნექილი  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმი  $\mu$  რიგის სიზუსტით შეიძლება განისაზღვროს.

ამგვარად, სუბგრადიენტული მეთოდები გრადიენტული მეთოდების გარკვეული განზოგადებაა არადიფერენცირებადი ფუნქციების შემთხვევაში. აღნიშნული მეთოდების სხვადასხვა მოდიფიკაციები და კრებადობის საკითხები განხილულია ნაშრომებში [152, 153].

სუბგრადიენტული მეთოდების ეფექტურობა არსებითად დამოკიდებულია საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის განსაზღვრულობაზე. განსაზღვრულობის გაუმჯობესება, რაც, თავის მხრივ, მეთოდის კრებადობის სიჩქარის გაზრდას განაპირობებს, შესაძლებელია მეტრიკის შეცვლით. სწორედ ასეთი იდეა რეალიზებული სივრცის დილატაციის („გაჭიმვის“) მეთოდში [91], რომელიც სუბგრადიენტული და ცვლადი მეტრიკის მეთოდების კომბინაციას წარმოადგენს.

ექსტრემუმის ძებნის როგორც გრადიენტული, ისე სუბგრადიენტული მეთოდები „ხვეის“ ტიპის ცულათ განსაზღვრული ფუნქციების მიმართ გარკვეული გრძნობიერებით ხასიათდება, რაც ოპტიმალური წერტილისაკენ მკვეთრად შენელებულ, ზიგზაგისებრ მოძრაობას განაპირობებს. საზოგადოდ, „ხვეის“ ხარისხობრივი მაჩვენებლის შესახებ წარმოდგენას გააძლევს ოპტიმალურ წერტილში გამოთვლილი ჰესეს მატრიცის საკუთრივი რიცხვების მინიმალური ( $m$ ) და მაქსიმალური ( $M$ ) მნიშვნელობები. რაც უფრო ნაკლებია ფარდობა  $|m/M|$ , „ხვეის“ ხარისხობრივი მაჩვენებელი მით უფრო მაღალია. ცხადია, გრძელი და ღრმა „ხვეის“ შემთხვევაში ოპტიმალური წერტილის მიღწევა პრობლემატური ხდება.

## გელფანდ-ცეიტლინის მეთოდი

გელფანდ-ცეიტლინის მეთოდი [44] შემუშავებულია „ხვეიდან თავის დაღწევის“ მიზნით. აღნიშნული მეთოდის თანახმად, ორი სხვადასხვა საწყისი  $\bar{x}^{(0)}$  და  $\bar{x}^{(1)}$  წერტილიდან ახორციელებენ გრადიენტულ დაშვებას „ხვეის“ ფსკერზე, რის შედეგადაც მიიღებენ შესაბამისად წერტილებს  $x^{(0)}$  და  $x^{(1)}$ . ამ წერტილების შემაერთებელ წრფეზე განისაზღვრება  $\bar{x}^{(2)}$  წერტილი შემდეგი ფორმულით:

$$\bar{x}^{(2)} = x^{(1)} - h_1 \frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \operatorname{sign}(f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})), \quad (4.105)$$

სადაც  $h_{(1)} > 0$  რაღაც შედარებით დიდი რიცხვია.  $\bar{x}^{(2)}$  წერტილიდან კვლავ ახორციელებენ გრადიენტულ დაშვებას „ხვეის“ ფსკერზე და მიიღებენ  $x^{(2)}$  წერტილს.  $x^{(1)}$  და  $x^{(2)}$  წერტილების შემაერთებელ წრფეზე, (4.105) ფორმულის ანალოგიურად, განისაზღვრება  $\bar{x}^{(3)}$  წერტილი

$$\bar{x}^{(3)} = x^{(2)} - h_2 \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|} \operatorname{sign}(f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})) \quad (4.106)$$

და ა.შ. მეთოდის ეფექტურობა დამოკიდებულია  $h_1, h_2, \dots$  სიდიდეებზე, რომელთა არჩევის ზუსტი მეთოდები არ არსებობს: მათ ემპირიული წესით შეარჩევენ.

„ხვეის“ ტიპის ფუნქციების მინიმიზაცია შეიძლება განხორციელდეს, აგრეთვე, ზემოთ განხილული კვაზინიუტონური მეთოდებითაც.

## ზოგადი რეკომენდაციები

ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდების მრავალფეროვნება, უპირველეს ყოვლისა, მიუთითებს ექსტრემუმის ძებნის პრობლემის სირთულეზე და იმ სიძნელეებზე, რომელიც დაკავშირებულია კონკრეტულ ამოცანაში ოპტიმიზაციის ამა თუ იმ მეთოდის გამოყენების ეფექტურობის შეფასებასთან. მიუხედავად ამისა, ექსტრემუმის ძებნის მეთოდების გამოთვლითი შესაძლებლობებისა და ეფექტურობის ნებისმიერი შედარებითი ანალიზი მნიშვნელოვან პრაქტიკულ ამოცანას წარმოადგენს, ვინაიდან იგი გარკვეული კრიტერიუმის მიხედვით მათი გამოყენების საზღვრების დადგენის საშუალებას იძლევა.

მეთოდების შედარებისათვის სხვადასხვა კრიტერიუმებს იყენებენ, რომელთა შორის აღსანიშნავია: სწრაფქმედება, ძებნის დანაკარგები, სიზუსტე, მეთოდის რეალიზაციისთვის საჭირო მეხსიერების მოცულობა, ცდომილების მიმართ მდგრადობა და სხვ.

ექსტრემუმის ძებნის დეტერმინირებული მეთოდების შედარებითი ანალიზის შედეგები არაერთმნიშვნელოვანია, რადგან თითოეული მეთოდი მხოლოდ გარკვეული კლასის საოპტიმიზაციო ფუნქციისთვისაა განსაზღვრული. რასაკვირველია, შესაძლებელია დავამყაროთ გარკვეული დამოკიდებულება ამა თუ იმ კლასის მეთოდების ეფექტურობასა და  $f(x)$  ფუნქციის კონკრეტული სახის ზედაპირებს შორის, მაგრამ ზუსტი შესაბამისობის დადგენა საოპტიმიზაციო ფუნქციებსა და ოპტიმიზაციის მეთოდებს შორის ჯერ-ჯერობით შეუძლებელ ამოცანას წარმოადგენს. ამიტომ მეთოდების შერჩევისას შეიძლება შემდეგი ზოგადი რეკომენდაციებით ვიხელმძღვანელოთ:

- თუ საოპტიმიზაციო ფუნქცია არადიფერენცირებადია, მაშინ მიზანშეწონილია გამოყენებულ იქნეს ექსტრემუმის ძებნის ნულოვანი რიგის მეთოდები;
- თუ საოპტიმიზაციო ფუნქცია უნიმოდალურია, მაშინ მიზანშეწონილია ექსტრემუმის ძებნის სუბგრადიენტული მეთოდების გამოყენება;
- თუ საოპტიმიზაციო ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაგრამ პირველი რიგის წარმოებულის ცხადი სახე უცნობია, მაშინ უნდა მიემართოს სუბგრადიენტულ მეთოდებს;
- თუ საოპტიმიზაციო ფუნქცია დიფერენცირებადია და, ამასთან, შესაძლებელია პირველი რიგის წარმოებულების ანალიზური ფორმით გამოთვლა, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ გრადიენტული მეთოდები;
- თუ „ხვეის“ ტიპის საოპტიმიზაციო ფუნქციას უნაგირა წერტილები არ გააჩნია, მაშინ მიზანშეწონილია ცვლადი მეტრიკის ანუ კვაზინიუტონური მეთოდების გამოყენება;
- თუ საოპტიმიზაციო ფუნქციას გააჩნია უნაგირა წერტილი, მაშინ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ნულოვანი რიგის მეთოდები ან ექსტრემუმის ძებნის მეთოდების გარკვეული კომბინაცია, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ;
- თუ საოპტიმიზაციო ფუნქციის ზედაპირის სახე უცნობია, მაშინ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ მეთოდების შემდეგი კომბინაცია: თავდაპირველად საჭიროა კოორდინატული დაშვების ნულოვანი რიგის მეთოდის გამოყენება, რადგან მოძრაობის მიმართულების განსაზღვრისათვის არ სჭირდება რთული გამოთვლების ჩატარება; შემდეგ უნდა გადავიღეთ რომელიმე გრადიენტულ მეთოდზე, ვინაიდან ანტიგრადიენტის მიმართულება უფრო ზუსტად მიუთითებს მინიმუმის წერტილს; და ბოლოს, მინიმუმის წერტილის მიდამოში მოხვედრის შემდეგ, მიზანშეწონილია მეორე რიგის რომელიმე მეთოდის (მაგალითად, ნიუტონის მორდიფიცირებული მეთოდის ან ცვლადი მეტრიკის) გამოყენება;

მრავალგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის დეტერმინირებული მეთოდების შედარებით სრული მიმოხილვა მოცემულია მონოგრაფიებში [15, 30, 31, 32, 91, 96, 138].

## 4.3 ოპტიმიზაციის სტოქასტიკური მეთოდები

სტოქასტიკურ მეთოდებს ის მეთოდები შეადგენს, რომლებიც საოპტიმიზაციო ფუნქციის ექსტრემუმის ძებნის პროცესში შემთხვევითობის ელემენტებს იყენებს. ამიტომ ამ მეთოდებს ხშირად შემთხვევითი ძებნის მეთოდებსაც უწოდებენ.

### 4.3.1 შემთხვევითი ძებნის მეთოდები

შემთხვევითი ძებნის მეთოდებს ძირითადად ოპტიმიზაციის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების გადასაწყვეტად იყენებენ. მათი გამოყენება მიზანშეწონილია აგრეთვე იმ შემთხვევაშიც, როცა საოპტიმიზაციო ფუნქცია არადიფერენცირებადია ან მისი ანალიზური ფორმა უცნობია. აღნიშნული მეთოდების ღირსებად უნდა ჩაითვალოს ისეთი მნიშვნელოვანი თვისება, როგორცაა „ხვეის“ ტიპის ცუდად განსაზღვრული ფუნქციების მიმართ მდგრადობა და, ბოლოს, შემთხვევითი ძებნის მეთოდების პროგრამული რეალიზაცია, დეტერმინირებულ მეთოდებთან შედარებით, საკმაოდ მარტივია. განვიხილოთ უპირობო ოპტიმიზაციის მრავალგანზომილებიანი ამოცანა

$$\min \{ f(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \}. \quad (4.107)$$

შემთხვევითი ძებნის თითქმის ყველა მეთოდში ექსტრემუმთან მიახლოების სტრატეგია შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობით განისაზღვრება:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k \eta^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.108)$$

სადაც  $\lambda_k > 0$  გადაადგილების ბიჯის რაღაც სკალარული სიდიდეა, ხოლო  $\eta^{(k)}$  - გადაადგილების მიმართულების ვექტორი, რომელიც  $x^{(k)}$  წერტილის  $\varepsilon$  მიდამოს ცდისეულ წერტილებში საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის განსაზღვრის საფუძველზე შეირჩევა.  $\eta^{(k)}$  ვექტორის შერჩევის წესის მიხედვით განასხვავებენ შემთხვევითი ძებნის მეთოდების სხვადასხვა მოდიფიკაციებს [109], რომელთაგან მხოლოდ რამდენიმეს აღვნიშნავთ.

### ძებნა "წრფივი ტაქტიკით"

მეთოდში, რომელშიც რეალიზებულია ძებნა „წრფივი ტაქტიკით“, ვექტორის განსაზღვრა შესაძლებელია განხორციელდეს შემდეგი ფორმულის თანახმად:

$$\eta^{(k)} = \begin{cases} \xi^{(k)}, & f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) \leq f(x^{(k)}); \\ -\xi^{(k)}, & f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) > f(x^{(k)}), \end{cases} \quad (4.109)$$

სადაც  $\delta < \lambda_k$ , ხოლო  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ერთეულოვანი შემთხვევითი ვექტორია, რომელიც თანაბარი ალბათობით არის განაწილებული  $[-1; 1]$  მონაკვეთზე.

აღნიშნული მეთოდის მოდიფიცირებულ ვარიანტში მიმართულების  $\eta^{(k)}$  ვექტორი „საუკეთესო ცდის“ მიხედვით შეიჩევა, რისთვისაც  $\xi^{(k)}$  ვექტორი განისაზღვრება შემდეგი პირობიდან:

$$f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) = \min_{1 \leq p \leq l} f(x^{(k)} + \delta\xi^{(kp)}). \quad (4.110)$$

მაშინ გვექნება

$$\eta^{(k)} = \begin{cases} \xi^{(k)}, & f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) \leq f(x^{(k)}); \\ \text{"ძებნის შეწყვეტა"}, & f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) > f(x^{(k)}). \end{cases} \quad (4.111)$$

### ქებნა "არაწრფივი ტაქტიკით"

მეთოდი, რომელშიც რეალიზებულია ქებნა „არაწრფივი ტაქტიკით“, გამოირჩევა ეფექტურობით. აღნიშნულ მეთოდში  $\xi^{(k)}$ -ს წარუმატებელი ცდის შემთხვევაში ადგილი აქვს წინა იტერაციაზე დაბრუნებას

$$\eta^{(k)} = \begin{cases} \xi^{(k)}, & f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) \leq f(x^{(k)}); \\ -\xi^{(k-1)}, & f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k)}) > f(x^{(k)}). \end{cases} \quad (4.112)$$

### ქებნა სტატისტიკური ბრადინტის მიხედვით

შემთხვევითი ძებნის მეთოდებიდან ფართოდ გავრცელებულია მეთოდი, რომელშიც ექსტრემუმის ძებნა სტატისტიკური ბრადინტის მიხედვით ხორციელდება. ალგორითმის თანახმად,  $x^{(k)}$  წერტილის მიდამოში განისაზღვრება  $m$  რაოდენობის შემთხვევითი წერტილი:  $x^{(k)} + \delta\xi^{(k_2)}, \dots, x^{(k)} + \delta\xi^{(k_m)}$ . მიღებულ წერტილებში გამოითვლება საობტიმიზაციო ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდები

$$\Delta f_i^{(k)} = f(x^{(k)} + \delta\xi^{(k_i)}) - f(x^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.113)$$

და განისაზღვრება ვექტორული ჯამი

$$Y^{(k)} = \sum_{i=1}^m \xi^{(k_i)} \Delta f_i^{(k)}, \quad (4.114)$$

რომელიც ზღვარში, როცა  $m \rightarrow \infty$ , ემთხვევა  $f(x)$  ფუნქციის გრადიენტის მიმართულებას, ე.ი. სასრული  $m$ -ის დროს  $Y^{(k)}$  ვექტორი გრადიენტული მიმართულების სტატისტიკურ შეფასებას წარმოადგენს. ამგვარად, მიმართულების  $\eta^{(k)}$  ვექტორისათვის გვექნება

$$\eta^{(k)} = -\frac{Y^{(k)}}{\|Y^{(k)}\|}. \quad (4.115)$$

### 4.3.2 სტოქასტიკური აპროქსიმაციის პროცედურები

ძირითადი მიზეზები, რომლებიც კვლევის პროცესში სტოქასტიკური აპროქსიმაციის პროცედურების გამოყენებას განაპირობებს, ექსპერიმენტების შედეგების ცდომილება და საოპტიმიზაციო ფუნქციის თვისებების შესახებ ინფორმაციის უქონლობაა.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სკალარული არგუმენტის ფუნქციები. დავეუვათ, რომ ექსპერიმენტები (გაზომვები) ოპტიმიზაციის ერთგანზომილებიანი ამოცანების გადასაწყვეტად საშუალებას არ გვაძლევს საოპტიმიზაციო ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობები განვსაზღვროთ. თითოეული  $f$  მნიშვნელობა რაღაც  $\delta_f$  შეცდომას შეიცავს, რომელიც შემთხვევითი სიდიდეა და ადითიური ხასიათი აქვს ( $f$  მნიშვნელობა წარმოადგენს ფუნქციის ჭეშმარიტი  $f_0$  მნიშვნელობისა და  $\delta_f$  შეცდომის ჯამს:  $f = f_0 + \delta_f$ ).

კვლევის პროცესში  $\delta_f$  შეცდომის გათვალისწინება რომ შევძლოთ, საჭიროა მის შესახებ ვფლობდეთ სრულ ინფორმაციას დაწყებული შეცდომათა განაწილების კანონითა და დამთავრებული  $\delta_f$  სიდიდის ისეთი მახასიათებლებით, როგორცაა მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია კონკრეტული ფიქსირებული  $x$  ცვლადის დროს.

ვთქვათ,  $[0; 1]$  ინტერვალში შერჩეულია  $x$  წერტილი და საჭიროა განვსაზღვროთ  $f_0 = f(x)$  შეფასება, როცა მხოლოდ  $M[\delta_f]$  მათემატიკური მოლოდინია ცნობილი. დასმული ამოცანა შეიძლება გადაწყვეტილ იქნეს  $x$  წერტილში ექსპერიმენტის მრავალჯერადი გამეორებით და გარკვეული რაოდენობის სტატისტიკური მონაცემების დაგროვების საფუძველზე საშუალო  $f$  მნიშვნელობის გამოთვლით, რის შედეგად აღვიღად განისაზღვრება  $f_0 = \bar{f} - M[\delta_f]$ . მაგრამ აღნიშნული პროცედურის ჩატარება დაკავშირებულია მნიშვნელოვან დროით დანახარჯებთან, მით უმეტეს თუ შეფასების სიზუსტის მიმართ მოთხოვნა მაღალია.

დროითი დანახარჯების თავიდან აცილება ან, ყოველ შემთხვევაში მაინც, მნიშვნელოვანი შემცირება შესაძლებელია შემდეგი მსჯელობის საფუძველზე: თუ მოცემულ  $x$  წერტილში ჩაატარებთ  $N$  რაოდენობის ექსპერიმენტს (გაზომვას) და განვსაზღ-

ვრავთ  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(N)}$  მნიშვნელობებს, მაშინ, ცხადია, საშუალო მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}. \quad (4.116)$$

$N-1$  რაოდენობის ექსპერიმენტის ჩატარების შემთხვევაში (4.116) ფორმულას ექნება სახე

$$\bar{f} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} f^{(i)}. \quad (4.117)$$

(4.116) და (4.117) ფორმულების ანალიზი საშუალებას გვაძლევს გარკვეული დამოკიდებულება დავამყაროთ  $\bar{f}$  შეფასების გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის, რომლებიც შესაბამისად აღვნიშნოთ  $\bar{f}_N$  და  $\bar{f}_{N-1}$ :

$$\bar{f}_N = [(N-1)/N]\bar{f}_{N-1} + (1/N)f^{(N)}. \quad (4.118)$$

(4.118)-დან გამომდინარეობს, რომ

- $f^{(N)}$  სიდიდე, რომელიც რიგით უკანასკნელი ექსპერიმენტის დროს განისაზღვრება, „ახალი“ ინფორმაციის მატარებელია. მისი წონითი კოეფიციენტია  $1/N$ , რომელიც  $N$ -ის ზრდასთან ერთად მონოტონურად მცირდება;
- $\bar{f}_{N-1}$  სიდიდე „ძველი“  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(N-1)}$  ინფორმაციების საშუალებით განისაზღვრება. მისი წონითი კოეფიციენტია  $(N-1)/N$ , რომელიც  $N = 8 \div 10$  ცდის შემდეგ პრაქტიკულად ერთის ტოლია;
- შესაძლებელია მაღალი ინფორმაციული ეფექტურობის მიღწევა იმ შემთხვევაში, თუ თითოეულ  $x$  წერტილში მხოლოდ ერთ ექსპერიმენტს ჩავატარებთ (ეს უკანასკნელი საშუალებას გვაძლევს უარი ვთქვათ ექსტრემუმის ძებნის დეტერმინირებულ პროცედურებზე, სადაც ადგილი აქვს ექსპერიმენტის შეცდომებს).

საზოგადოდ, ობტიმიზაციის ამოცანების გადაწყვეტის დროს მკვლევარს, როგორც წესი, საობტიმიზაციო ფუნქციის ზუსტი კონფიგურაცია არ აინტერესებს. იგი მხოლოდ ცდილობს წინა ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული ინფორმაციის საფუძველზე ექსტრემუმისკენ  $x$ -ის გადაადგილების ისეთი წესის განსაზღვრას, რომელსაც, საბოლოო ჯამში, ობტიმალურ ამოხსნამდე მივყავართ. იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს  $d_f$  შეცდომებს, აღნიშნული პრინციპის რეალიზაცია შესაძლებელია  $x$ -ის თითოეული „ახალი“ მნიშვნელობის ისეთი შერჩევით, რომლის დროსაც იგი გარკვეულ დამოკიდებულებაშია როგორც  $x$ -ის, ისე შესაბამისი  $f(x)$ -ის „ძველ“ მნიშვნელობებთან. აქედან გამომდინარე,  $x$ -ის „ახალ“ მნიშვნელობაში გათვალისწინებული იქნება ყველა სასარგებლო ინფორმაცია (რომლის მატარებელია  $f$ -ის „ძველი“ მნიშვნე-

ლობები) და ყველა მცდარი ინფორმაცია, რაც განპირობებულია  $\delta_f$ -ის არსებობით), რომლის უარყოფითი გავლენა  $x_i$  მიაზლოებიდან  $x_{i+1}$  ( $i=1,2,\dots$ ) მიაზლოებაზე გადასვლის დროს უნდა შემცირდეს (თუ, რასაკვირველია, აღნიშნული დამოკიდებულება სათანადოდ შერჩეულია).

ვთქვათ,  $x_{i+1} = W_i(x_i, f_i)$  ან  $x_{i+1} = W_i(x_i, f_{0i} + \delta_{f_i})$ . ცხადია,  $W_i$  ფუნქციის სახე გავლენას ახდენს  $x_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) მნიშვნელობათა მიმდევრობის რომელიმე  $\hat{x}$  წერტილში (კერძოდ,  $x^*$  წერტილში) კრებადობის ხარისხზე. თუ, მაგალითად,  $W_i$  ისეთია, რომ

$$x_{i+1} = W_{1i}(x_i, f_{0i}) + W_{2i}(\delta_{f_i}), \quad (4.119)$$

მაშინ  $\delta_{f_i}$ -ის თვისებების შესახებ აპრიორული ინფორმაციის საფუძველზე შეიძლება დამტკიცებულ იქნეს, რომ  $W_{2i}$ -ის წარმატებული ამორჩევის შემთხვევაში  $x_{i+1}$ -ის  $\hat{x}$ -დან გადახრის ალბათობა  $i$  ინდექსის ზრდასთან ერთად რაგინდ მცირე გახდება, ხოლო თვით  $W_{1i}$  და  $W_{2i}$  გარდაქმნების ამორჩევა ოპტიმალური ( $x^*$ ,  $f^*$ ) ამონახსნის ძებნისათვის სტრატეგიის ამორჩევის ტოლფასი იქნება. ამგვარად, ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტისათვის გამოიკვეთა მიდგომა, რომელიც საფუძველად დაედო სტოქასტიკური აპროქსიმაციის მეთოდებს. აღნიშნული მიდგომისათვის დამახასიათებელია ის, რომ თითოეულ  $x$  წერტილში მხოლოდ ერთი ექსპერიმენტი ტარდება, ხოლო შეცდომის ფილტრაციას ადგილი აქვს გადაადგილების ბიჯის სიგრძისა და  $\delta_{f_i}$  შემთხვევითი სიდიდეების თვისებების გონივრული შერჩევით.

გარკვეულობისათვის აღნიშნოთ შემთხვევითი სიდიდეები ლათინური ანბანის დიდი ასოებით (მაგალითად,  $X, R$  და ა.შ.), ხოლო შემთხვევითი სიდიდეების შესაძლო მნიშვნელობები - შესაბამისად პატარა ასოებით. შემთხვევითი რიცხვების მიმდევრობის კრებადობისთვის შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებები.

**ბანსაზღვრმბა 4.4.** შემთხვევით  $X_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) სიდიდეების მიმდევრობა ალბათურად კრებადია რომელიმე არაშემთხვევით  $\hat{x}$  წერტილში, თუ ნებისმიერი  $\mu > 0$ -სთვის  $|X_i - \hat{x}| \geq \mu$  ხდომილობის ალბათობა ნულისკენ მიისწრაფვის, როცა  $i \rightarrow \infty$ , ე.ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(|X_i - \hat{x}| \geq \mu) = 0. \quad (4.120)$$

**ბანსაზღვრმბა 4.5.** შემთხვევითი  $X_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) სიდიდეების მიმდევრობა საშუალოკვადრატული აზრით კრებადია რომელიმე არაშემთხვევით  $\hat{x}$  წერტილში, თუ  $X_i - \hat{x}$  სხვაობის მოდულის კვადრატის მათემატიკური მოლოდინი ნულისკენ მიისწრაფვის, როცა  $i \rightarrow \infty$ , ე.ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M[|X_i - \hat{x}|^2] = 0. \quad (4.121)$$



აღსანიშნავია, რომ საშუალოკვადრატული აზრით კრებადი  $\{X_i\}$  მიმდევრობა ალბათურადაც კრებადია, თუმცა საწინააღმდეგო მტკიცება არ არის სამართლიანი.

ვთქვათ,  $X_{i+1}$ -ის გამოსახულება წარმოდგენილია (4.119) ჯამის სახით. ვინაიდან  $\delta_{f_i}$  შემთხვევითია, ამიტომ  $W_{2i}$  სიდიდე შემთხვევითი იქნება და ამიტომ იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც  $X_{i+1}$ -ის შემთხვევითი შემადგენელი ნაწილი, ხოლო  $W_{1i}$  - რეგულარული შემადგენელი ნაწილი. თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს  $W_{1i} = Y_i$  და  $W_{2i} = R_i$ , მაშინ მივიღებთ ტოლობას

$$X_{i+1} = Y_i + R_i. \quad (4.122)$$

დავუშვათ, რომ შემთხვევითი  $X_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) სიდიდეების მიმდევრობა საშუალოკვადრატული აზრით კრებადია რომელიმე  $\hat{x}$  წერტილში, რაც ფორმალურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M[(Y_i + R_i - \hat{x})^2] = 0. \quad (4.123)$$

(4.123)-ის კვადრატულ ფრჩხილებში მოცემული ჯამის მათემატიკური მოლოდინი შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$(Y_i - \hat{x})^2 + 2(Y_i - \hat{x})M[R_i] + M[R_i^2]. \quad (4.124)$$

ღისპერსიის ზოგადი განმარტების თანახმად გვაქვს

$$D[R_i] = M\{(R_i - M[R_i])^2\} = M[R_i^2] - M^2[R_i],$$

საიდანაც

$$M[R_i^2] = D[R_i] + M^2[R_i]. \quad (4.125)$$

თუ (4.124) გამოსახულებაში (4.125) ტოლობას გავითვალისწინებთ, მაშინ მივიღებთ

$$(Y_i - \hat{x})^2 + 2(Y_i - \hat{x})M[R_i] + M^2[R_i] + D[R_i]. \quad (4.126)$$

ფორმულის გამარტივების მიზნით დავუშვათ  $M[R_i] = 0$ . მაშინ (4.123) გამოსახულების ნაცვლად გვექნება

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{(Y_i - \hat{x})^2 + D[R_i]\} = 0, \quad (4.127)$$

რომელიც, ფიგურულ ფრჩხილებში შესაკრებთა დადებითობის გამო, ორი პირობის სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (Y_i - \hat{x})^2 = 0, \quad (4.128)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D[R_i] = 0. \quad (4.129)$$

ამგვარად, სტოქასტიკური პროცესის კრებადობისათვის აუცილებელია მისი რეგულარული შემადგენელი ნაწილისთვის (4.128) პირობის, ხოლო შემთხვევითი შემადგენელი ნაწილისთვის (4.129) პირობის დაკმაყოფილება.

(4.128) პირობის ანალიზის საფუძველზე შევნიშნავთ, რომ  $Y_i$  ფუნქცია ისე უნდა იყოს კონსტრუირებული, რომ ექსტრემუმის ძებნის პროცესი ერთნაირი წარმატებით ხორციელდებოდეს ორ შემთხვევაში:

I შემთხვევა -  $x_i$  წერტილი  $\hat{x}$  წერტილთან ახლოს მდებარეობს და ამიტომ  $x_{i+1}$  მიახლოებაზე გადასვლის დროს არსებობს  $\hat{x}$ -ზე „გადახტომის“ საშიშროება;

II შემთხვევა -  $x_i$  წერტილი  $\hat{x}$  წერტილიდან იმდენად დაშორებულია, რომ ერთი ბიჯით  $\hat{x}$ -ის მიღწევა შეუძლებელია.

პირველ შემთხვევაში  $\lim_{i \rightarrow \infty} (Y_i - \hat{x}) = 0$  პირობა შესრულდება, თუ მოვითხოვთ, რომ  $Y_i - \hat{x} \leq \alpha_i$ , სადაც  $\alpha_i$  ელემენტია არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობისა, რომლის თითოეული წევრი აკმაყოფილებს პირობას  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$ .

მეორე შემთხვევაში აღნიშნული მოთხოვნა არასაკმარისია, ვინაიდან სასურველია, რომ  $x_i$ -დან  $x_{i+1}$ -ზე ყოველ გადასვლასთან ერთად ადგილი ჰქონდეს  $\hat{x}$  წერტილამდე მანძილის შემცირებას. აქ შეიძლება დავუშვათ  $|Y_i - \hat{x}| \leq |x_i - \hat{x}| - \gamma_i$ , სადაც  $\gamma_i$  რაღაც არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია. უკანასკნელი უტოლობის აზრი შემდეგში მდგომარეობს:  $X_{i+1}$  სიდიდის რეგულარული  $Y_i$  შემადგენელი  $\hat{x}$ -სგან ნაკლებად უნდა განსხვავდებოდეს, ვიდრე  $x_i$ -სგან, რისთვისაც შემოტანილია  $\gamma_i$  შესწორება. იმისათვის, რომ რაღაც სასრული რაოდენობის ბიჯის შემდეგ პროცესი არ გაჩერდეს, საჭიროა დაკმაყოფილდეს პირობა:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty. \quad (4.130)$$

პროცესის კრებადობის განხილული პირობა შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს განზოგადებული სახით

$$|Y_i - \hat{x}| \leq (1 + \beta_i) |x_i - \hat{x}| - \gamma_i, \quad (4.131)$$

სადაც  $\beta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq \infty$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$ .

აღნიშნული შენიშვნები შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნის გაკეთების საშუალებას იძლევა: იმისათვის, რომ პროცესის კრებადობა დავაშთიკოთ (და საბოლოო ჯამში ოპტიმიზაციის ამოცანა გადავწყვიტოთ) აუცილებელია, რომ  $f(x) = f_0$  ფუნქციის შესახებ ვფლობდეთ გარკვეულ ინფორმაციას.

(4.129) პირობის დაკმაყოფილების მოთხოვნის საფუძველზე შეენიშნავთ, რომ  $x_i$ -დან  $x_{i+1}$ -ზე გადასვლის დროს  $\delta_{f_i}$  შეცდომების მახასიათებლები შეიძლება ან შეიცვალოს ან უცვლელი დარჩეს. ასეთ სიტუაციაში აღნიშნული პირობის დაკმაყოფილება დაკავშირებულია  $W_{2i}(\delta_{f_i})$  გარდაქმნის სათანადო შერჩევასთან, რომელიც შემთხვევითი  $\delta_{f_i}$  დაბრკოლებების „ფილტრაციის“ ფუნქციას ასრულებს. ძირითადად აქ აუცილებელია შემდეგი პირობის შესრულება:

$$\sum_{i=1}^{\infty} D[R_i] < \infty. \quad (4.132)$$

ამგვარად, სტოქასტიკური ძებნის პროცედურა შემდეგში მდგომარეობს. ექსპერიმენტების ჩატარების პროცესში, რომელშიც თითოეული  $f = f_0 + \delta_f$  მხოლოდ ერთხელ იზომება,  $X_{i+1}$ -ის მიმდინარე მნიშვნელობის რეგულარული  $Y_i$  მდგენელი, წინა მნიშვნელობებთან შედარებით, სულ უფრო ნაკლებად განსხვავდება რომელიმე ნამდვილი  $\hat{x}$  რიცხვისაგან, ხოლო შემთხვევითი  $R_i$  მდგენელი მისი დისპერსიის ნულთან დაყვანის გამო თანდათანობით გამოირიცხება.

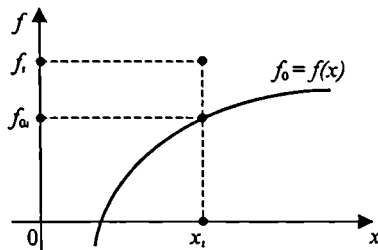
სტოქასტიკური აპროქსიმაციის გამოყენებითი მეთოდების შემუშავება დაკავშირებულია რობინსისა და მონროს სახელთან, რომლებმაც შემოკვთავენ დაბრკოლებების პირობებში ფუნქციის ფესვის მოძებნის გამოთვლითი სქემა. ვინაიდან აღნიშნული სახის ამოცანა უშუალოდ არ არის საოპტიმიზაციო, ამიტომ რობინს-მონროს პროცედურას არ განვიხილავთ.

ქვემოთ განხილულია სტოქასტიკური აპროქსიმაციის გამოყენებითი მეთოდი, რომელიც სპეციალურად  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმუმის მოსაძებნად არის შემუშავებული.

### პიფერ-ვოლფოვიციის პროცედურა

აპრიორულად დავუშვათ, რომ  $f_0 = f(x)$  ფუნქცია უნიმოდალურია, რომელსაც  $x^*$  წერტილში ექსტრემუმი (მაქსიმუმი) გააჩნია. ვთქვათ, ექსპერიმენტის (გაზომვის) დროს ადგილი აქვს  $\delta_{f_i}$  შეცდომებს, რომლებიც ამა თუ იმ  $x_i$  წერტილებზე განსაზღვრულ  $f$ -ის მნიშვნელობებს ამახინჯებს (ნახ. 4.22), და მათ გააჩნია შემდეგი თვისებები:

- $\delta_{f_i}$ -ის ( $i = 1, 2, \dots$ ) მათემატიკური მოლოდინი ნულის ტოლია;
- $\delta_{f_i}$ -ის ( $i = 1, 2, \dots$ ) დისპერსია სასრული და მუდმივია;
- შემთხვევითი  $\delta_{f_i}$  და  $\delta_{f_k}$  სილიდები, სადაც  $i \neq k$ , დამოუკიდებელია და მათ ადითიურობა ახასიათებს.



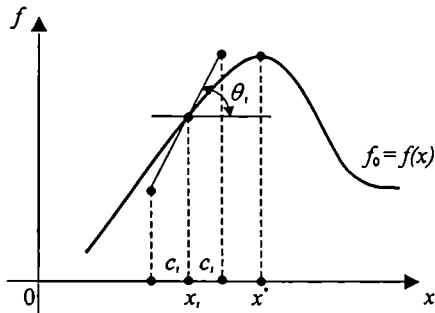
ნახ. 4.22

კიფერისა და ვოლფოვიცის მიერ შემოთავაზებული რეგრესიის ფუნქციის მაქსიმუმის განსაზღვრის შემდეგი სქემა

$$X_{i+1} = x_i + a_i [f(x_i + c_i) - f(x_i - c_i)] / c_i, \quad (4.133)$$

სადაც  $f(x_i + c_i)$  და  $f(x_i - c_i)$  არის  $f$ -ის მნიშვნელობები შესაბამისად  $x_i + c_i$  და  $x_i - c_i$  წერტილებში, ხოლო  $a_i$  და  $c_i$  არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ელემენტებია.

შევაფასოთ (4.133) სქემით რეალიზებული პროცესის კრებალობა.



ნახ. 4.23

განხილული პრობემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია წარმოდგენილია ნახ. 4.23-ზე.  $[f(x_i + c_i) - f(x_i - c_i)] / (2c_i)$  სიდიდე მიახლოებით განსაზღვრავს  $x_i$  წერტილში  $f_0 = f(x)$  წირის დახრის კუთხის ტანგენსს (რისთვისაც ყოველ ბიჯზე საჭიროა ორი ექსპერიმენტის ჩატარება). ამგვარად, მეთოდის იდეა, შემდგომი

„მოდრაობის“ მიმართულების არჩევის მიზნით,  $\theta$ , სიდიდის მიმდევრობით შეფასებაში მდგომარეობს.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$f(x_i \pm c_i) = f_0(x_i \pm c_i) + \delta_{f(x_i \pm c_i)},$$

მაშინ მივიღებთ

$$Y_i = x_i + a_i [f_0(x_i + c_i) - f_0(x_i - c_i)] / c_i, \quad (4.134)$$

$$R_i = a_i [\delta_{f(x_i + c_i)} - \delta_{f(x_i - c_i)}] / c_i. \quad (4.135)$$

შემთხვევითი მდგენელის ანალიზი: (4.135) გამოსახულებიდან და საწყისი წინაპირობებიდან გამომდინარეობს, რომ  $M[R_i] = 0$ ,  $D[R_i] = 2(a_i/c_i)^2 D[\delta_f]$ , სადაც  $D[\delta_f]$  შეცდომის დისპერსიაა, რომელიც  $i$ -ზე არ არის დამოკიდებული.  $\lim_{i \rightarrow \infty} D[R_i] = 0$  მოთხოვნის დაკმაყოფილებას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, თუ  $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_i/c_i)^2 = 0$  ან  $a_i/c_i = a_0 i^{-p/c_0}$ , სადაც  $a_0$  და  $c_0$  რაღაც მუდმივებია,  $p \geq 0.5$ ; აუცილებლობის შემთხვევაში შეიძლება მოვითხოვოთ  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$  და  $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0$  იმ პირობით, თუ განხილული თანაფარდობები არ დაირღვევა.

რეგულარული მდგენელის ანალიზი: აღვნიშნოთ  $f_0(x_i + c_i) - f_0(x_i - c_i) = -\Delta f_{0i}$ , მაშინ  $Y_i = x_i - a_i \Delta f_{0i} / c_i$ . მაშასადამე, გვექნება

$$|Y_i - \hat{x}| = \begin{cases} |x_i - \hat{x}| - a_i |f_{0i}| / c_i, & |x_i - \hat{x}| \geq a_i |\delta_{f_{0i}}| / c_i, \\ a_i |\delta_{f_{0i}}| / c_i - |x_i - \hat{x}|, & |x_i - \hat{x}| < a_i |\delta_{f_{0i}}| / c_i. \end{cases} \quad (4.136)$$

(4.136) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს რეალურად შევაფასოთ  $\lim_{i \rightarrow \infty} (Y_i - \hat{x})^2 = 0$  პირობის შესრულება. მართლაც, თუ დავეშვებით (4.136) ფორმულის ზედა სტრიქონში

$$|\Delta f_{0i}| > \rho_i, \quad a_i \rho_i / c_i = \gamma_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty,$$

ხოლო ქვედა სტრიქონში -

$$|\Delta f_{0i}| < A|x_i - \hat{x}| + B, \quad A < \infty, \quad B < \infty,$$

სადაც  $A$  და  $B$  რაღაც მუდმივებია, მაშინ შეიძლება დავასკვნათ, რომ  $Y_i$ -ის  $\hat{x}$  წერტილში კრებადობა უზრუნველყოფილი იქნება.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ სტოქასტიკური აპროქსიმაციის პროცედურის გამოყენებას მაშინ აქვს აზრი, როცა  $x^*$  წერტილის შესახებ რაღაც მწირი ინფორმაცია მაინც ცნობილია.

### 4.3.3 სტოქასტიკური აპროქსიმაციის ტიპის მეთოდები

ექსტრემუმის განსაზღვრის ორიგინალური იდეებია რეალიზებული მეთოდებში, სადაც ძებნის პროცესში სტოქასტიკური აპროქსიმაციის ტიპის პროცედურებია გამოყენებული [37, 131]. აღნიშნულ მეთოდებში იგულისხმება, რომ საოპტიმიზაციო ფუნქცია, რომელიც ამოზნექილია, მაგრამ არადიფერენცირებადი, თითოეულ წერტილში უშეცდომოდ განისაზღვრება, ხოლო ფუნქციის გრადიენტი და კვაზიგრადიენტი (განზოგადებული გრადიენტი) - შეცდომებით. მიმართულების  $\eta^{(k)}$  ვექტორისათვის გვექნება

$$\eta^{(k)} = -\gamma_k \xi^{(k)},$$

სადაც  $\gamma_k$  სკალარული სიდიდეა, ხოლო  $\xi^{(k)}$  - შემთხვევითი ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$M(\xi^{(k)} | x^{(0)}, \dots, x^{(k)}) = a_k \nabla f_x(x^{(k)}) + b^{(k)}, k = 0, 1, \dots,$$

სადაც  $a_k$  შემთხვევითი სიდიდეა,  $b^{(k)}$  - შემთხვევითი ვექტორი, ხოლო  $\nabla f_x(x^{(k)})$  - საოპტიმიზაციო ფუნქციის განზოგადებული გრადიენტი  $x^{(k)}$  წერტილში ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნებისმიერი ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$f(y) - f(x) \geq (\nabla f_x(x), y - x), \text{ როცა } x = x^{(k)}, y \in R^n.$$

შემოთ განხილული ყველა სტოქასტიკური მეთოდი ასიმპტოტურად კრებადია ლოკალური ექსტრემუმის წერტილში. მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნულ მეთოდებში გამოყენებული ძებნის სტრატეგია მინიმუმის წერტილის სწრაფ ლოკალიზებას უზრუნველყოფს, მინიმუმის მიდამოში მათი კრებადობის სინქარე მკვეთრად შენელებულია. ამიტომ მიზანშეწონილია ოპტიმიზაციის საწყის ეტაპზე შემთხვევითი ძებნის მეთოდები გამოიყენოთ, ხოლო ოპტიმიზაციის დამამთავრებელ ეტაპებზე - დეტერმინირებული მეთოდები. მეთოდების ასეთი კომბინაცია საშუალებას გვაძლევს არა მარტო დავაჩქაროთ ექსტრემუმის ძებნის პროცესის კრებადობა, არამედ გავაუმჯობესოთ მისი ხარისხობრივი მხარეც - გარკვეული სიზუსტით განვსაზღვროთ მრავალი ცვლადის  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი.

ექსტრემუმის ძებნის სტოქასტიკური მეთოდების სრული მიმოხილვა მოცემულია მონოგრაფიაში [109].

## 4.4 აბსოლუტური ექსტრემუმის ძებნის მეთოდები

განვიხილოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \{ f(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n \}, \quad (4.137)$$

სადაც  $f(x)$  მულტიმოდალური ფუნქციაა.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის აბსოლუტური ანუ გლობალური ექსტრემუმის მოძებნის (4.137) ამოცანა ბევრად უფრო რთული და შრომატევადია, ვიდრე ლოკალური ექსტრემუმის განსაზღვრის ამოცანა. ამიტომ აღნიშნული ამოცანები შედარებით ნაკლებადაა შესწავლილი და მათი გადაწყვეტის მეთოდების შემუშავება ჯერ კიდევ აქტუალურ პრობლემათა სფეროს განეკუთვნება.

გლობალური მეთოდების უმრავლესობას სტატისტიკური ხასიათი გააჩნია. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

### 4.4.1 შემთხვევითი გადარჩევის მეთოდი

შემთხვევითი გადარჩევის მეთოდი [45] აბსოლუტური ექსტრემუმის ძებნის უმარტივესი მეთოდია, რომელიც  $\mathcal{E}$  სიზუსტით კრებადობას მხოლოდ  $N \rightarrow \infty$  რაოდენობის სტატისტიკური ცდების საფუძველზე უზრუნველყოფს. აღნიშნული მეთოდი პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტა დიდი რაოდენობის ცდების ჩატარებას ითვალისწინებს, რაც გამოთვლითი ხასიათის მნიშვნელოვან შრომატევადობასთანაა დაკავშირებული. ამიტომ შემთხვევითი გადარჩევის მეთოდს აქვს შეზღუდული გამოყენება.

### 4.4.2 ძებნის არის თანდათანობითი შემცირების მეთოდი

განვიხილოთ მეთოდი, რომლის არსი მულტიმოდალური ფუნქციის განსაზღვრის არის თანდათანობით შემცირებაში მდგომარეობს [15]. ვთქვათ,  $f(x), x \in R^n$ , ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი თავდაპირველად იძებნება  $n$ -განზომილებიან კუბში

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.138)$$

ალგორითმის თანახმად,  $k$ -ურ იტერაციაზე ჩატარდება  $N^{(k)}$  რაოდენობის სტატისტიკური ცდების სერია და საუკეთესო შედეგს დაიმასსოვრებენ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (4.138) არეში შემთხვევითი წესით გენერირებული წერტილებიდან შეირჩევა ის  $x_0^{(k)}$ , რომელსაც საოპტიმიზაციო ფუნქციის მინიმალური  $f_0^{(k)}$  მნიშვნელობა შეესაბამება.  $(k+1)$ -ე იტერაციაზე  $N^{(k+1)}$  რაოდენობის ცდები ჩატარდება ჰიპერკუბში, რომლის ცენტრი დამასსოვრებულ  $x_0^{(k)}$  წერტილშია, ხოლო წიბო  $c > 1$ -ჯერ შემცირებულია. მიღებულ არეში შემთხვევითი წერტილების გენერირება შემდეგი ფორმულის საფუძველზე განხორციელდება:

$$x_j^{(k+1)} = x_{0j}^{(k)} - \frac{1}{c} \cdot \frac{b_j^{(k)} - a_j^{(k)}}{2} (1 - 2\xi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.139)$$

სადაც  $\xi_j$  თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვია  $[0;1]$  ინტერვალში. შემდეგ იტერაციებში,  $c$  კოეფიციენტის გაზრდის საფუძველზე, ძებნის (4.138) არე კვლავ შემცირდება და პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება კრებალობის პირობა

$$|b_j - a_j| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.140)$$

განხილული ალგორითმი ვარკვეული სიზუსტით უზრუნველყოფს აბსოლუტური ექსტრემუმის მოძებნას, მაგრამ იმ პირობით, თუ (4.138) არის შემცირების პროცესში საძებნი აბსოლუტური ექსტრემუმი არ დაიკარგება. ამ პირობის შესრულება მხოლოდ  $N^{(k)} \rightarrow \infty$  რაოდენობის სტატისტიკური ცდების ჩატარებით არის შესაძლებელი.

### 4.4.3 კმბნის იტერაციული მეთოდი

საინჟინრო პრაქტიკაში გამოყენებულია აბსოლუტური მინიმუმის ძებნის იტერაციული მეთოდი [109], რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს.  $k$ -ურ იტერაციაზე ექსტრემუმის ძებნის დასაშვებ არეში განისაზღვრება ჰიპერკონუსი წვეროთი  $x^{(k)}$  წერტილში, წვეროსთან  $\varphi \equiv const$  კუთხით და მიმართულების რაღაც  $\mathcal{W}^{(k)}$  ვექტორით (ნახ. 4.24).  $x^{(k)}$  წერტილში განისაზღვრება აგრეთვე  $r$  რადიუსიანი ჰიპერსფერო. ჰიპერკონუსისა და ჰიპერსფეროს თანაკეთა წარმოქმნის მრავალსახეობას, რომელშიც განხორციელდება თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი წერტილების გენერირება. შემთხვევით მიღებულ წერტილებში გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნ-





#### 4.4.4 ძებნის კომბინირებული მეთოდი

გლობალურ მეთოდებს შორის ფართოდ გავრცელებულია დეტერმინირებული და შემთხვევითი ძებნის კომბინირებული მეთოდები [15]. მეთოდების აღნიშნული კომბინაცია კრებალობის პროცესის დაჩქარების საშუალებას იძლევა.

ბნსაზღვრება 4.6. ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილის მიზიდულობის ზონა ეწოდება  $\Omega$  სივრცის იმ  $\Omega^* \subset \Omega$  ნაწილს, სადაც სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილი მიზიდულობის ზონის წერტილია, ე.ი.  $x^* \in \Omega^*$ ;
2. მიზიდულობის  $\Omega^*$  ზონის ყველა ანტიგრადიენტული წრფეები კრებადია ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილში.

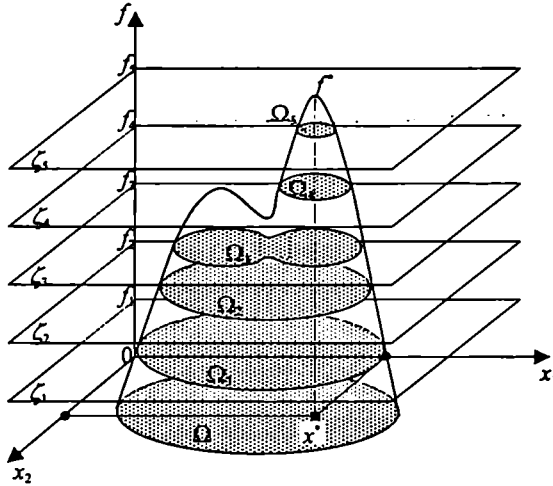
განვიხილოთ აბსოლუტური მინიმუმის ძებნის კომბინირებული მეთოდების ერთ-ერთი მოდიფიკაცია, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს. პირველ ეტაპზე, დასაშვებ  $\Omega$  არეში, შემთხვევითი წესით შეირჩევა  $x_{(1)}$  წერტილი, საიდანაც ძებნის რომელიმე დეტერმინირებული მეთოდით განისაზღვრება ლოკალური მინიმუმის  $x_{(1)}^*$  წერტილი და საოპტიმიზაციო ფუნქციის შესაბამისი  $f_{(1)}^*$  მნიშვნელობა. მეორე ეტაპზე განხორციელდება ჩვეულებრივი შემთხვევითი ძებნა იმ  $x_{(2)}$  წერტილისა, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა  $f_{(2)} < f_{(1)}^*$ . უკანასკნელი იმის მანიშნებელია, რომ  $x_{(2)}$  წერტილი მეორე ლოკალური მინიმუმის მიზიდულობის ზონაშია.  $x_{(2)}$ -დან განხორციელებული დეტერმინირებული ძებნა მიგვიყვანს ახალ  $x_{(2)}^*$  ლოკალურ წერტილამდე, სადაც  $f_{(2)} < f_{(1)}^*$  და ა.შ. რამდენიმე ეტაპის ჩატარების შემდეგ ლოკალური მინიმუმების მიღებული წერტილებიდან შეირჩევა ყველაზე საუკეთესო.

#### 4.4.5 $\Psi$ -ბარდაქმნის პრინციპი

განვიხილოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმიზაციის ამოცანა

$$\max \{ f(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n \}. \quad (4.141)$$

ძირითადი არსი  $\Psi$ -გარდაქმნის პრინციპისა, რომელიც აბსოლუტური ექსტრემუმის მხოლოდ მნიშვნელობის განსაზღვრას უზრუნველყოფს, შემდეგში მდგომარეობს. არაწრფივი  $L$  ოპერატორის გამოყენების საფუძველზე  $n$  ცვლადის  $f(x)$  ფუნქცია გარდაიქმნება ანალიზისათვის შედარებით უფრო მარტივ, ერთი ცვლადის უწყვეტ, მონოტონურად კლებად  $\Psi(\zeta)$  ფუნქციად, სადაც  $\zeta$  არგუმენტი საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის სკალარულ მნიშვნელობას წარმოადგენს, როცა  $x \in \Omega$ , ე.ი.  $L\{f(x)\} \rightarrow \Psi(\zeta)$ .



ნახ. 4.25

აღნიშნული გარდაქმნა ხორციელდება  $f(x)$  ფუნქციის ლევეგის დაყოფით (ნახ. 4.25), რის შედეგად ფუნქციის მნიშვნელობათა ცვლილების  $[\inf f(x), \sup f(x)]$  ინტერვალი დანაწილდება ტოლი სიდიდის შუალედებად ისე, რომ შესრულდეს პირობა:

$$\inf f(x) = \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_p < \dots < \zeta_n = \sup f(x), \quad \zeta_{p+1} - \zeta_p = \Delta\zeta, \quad (4.142)$$

სადაც  $\mathfrak{M}$  ლევეგის დონეების რიცხვია.

$f(x)$  ფუნქციის ლევეგის დაყოფის საფუძველზე მიიღება მიმდევრობა სიმრავლეებისა

$$\Omega_p(\zeta) = \{x \mid f(x) \geq \zeta_p\} \subset \Omega, \quad p = \overline{1, \mathfrak{M}}, \quad (4.143)$$

რომლის თითოეული ელემენტის ზომა შეიძლება განისაზღვროს ფორმულით

$$\Psi(\zeta_p) = \int_{\Omega} [f(x) - \zeta_p]^2 \theta(x, \zeta_p) dx, \quad (4.144)$$

სადაც  $\theta(x, \zeta_p)$  შემდეგი ტიპის მახასიათებელი ფუნქციაა

$$\theta(x, \zeta_p) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_p(\zeta), \\ 0, & x \notin \Omega_p(\zeta). \end{cases} \quad (4.145)$$

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ  $f(x)$  ფუნქციის მინიმიზაციის შემთხვევაში (4.142)-სა და (4.143) გამოსახულებებში უტოლობების ნიშნები საწინააღმდეგო ნიშნით უნდა შეიცვალოს.

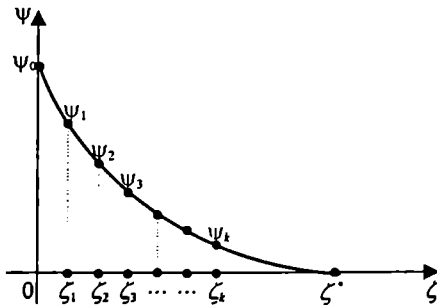
გეომეტრიულად  $\Psi(\zeta_p)$  წარმოადგენს ზომას იმ  $(n+1)$ -განზომილებიანი მოცულობისა, რომელიც  $f(x)$  ფუნქციის ზედაპირსა და  $\zeta_p$  ჰიპერსიბრტყეს შორის წარმოიქმნება.

(4.144) ფორმულის საშუალებით აგებული  $\Psi(\zeta)$ ,  $\zeta \in [\inf f(x), \sup f(x)]$ , ფუნქცია (ნახ. 4.26) უწყვეტი, დიფერენცირებადი და მონოტონურად მკაცრად კლებადი ერთგანზომილებიანი ფუნქციაა. ცხადია, ასეთი ფუნქციის ანალიზი ბევრად უფრო მარტივია, ვიდრე მრავალგანზომილებიანი მულტიმოდალური ფუნქციისა. მტკიცდება [141, 142], რომ  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმიზაციის ან მინიმიზაციის დროს,  $p$  ინდექსის გაზრდის შედეგად,  $\Psi(\zeta)$  მცირდება და თავის მინიმუმს აღწევს  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის მნიშვნელობის დროს, რომლის სიდიდე ტოლია  $\zeta^*$ , ეი.

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta^*} \Psi(\zeta) = 0. \quad (4.146)$$

როგორც ვხედავთ, მრავალი ცვლადის  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის მნიშვნელობის განსაზღვრის ამოცანა გარდაქმნილი  $\Psi(\zeta)$  ფუნქციის ნულის მოძებნის ამოცანაზე დაიყვანება, რაც ერთცვლადიანი  $\Psi(\zeta) = 0$  განტოლების ამოხსნასთანაა დაკავშირებული.

ამგვარად,  $\Psi$ -გარდაქმნის პრინციპის საფუძველზე საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის მხოლოდ სკალარული  $f^*$  მნიშვნელობა განისაზღვრება. მიუხედავად იმისა, რომ გარდაქმნის აღნიშნულ პროცედურაში განსაზღვრა დამოუკიდებელი ცვლადების იმ  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  ვექტორისა, რომლის დროსაც ექსტრემალური  $f^*$  მნიშვნელობა მიიღება, არ არის გათვალისწინებული,  $\Psi$ -გარდაქმნის პრინციპმა ფართო გამოყენება პოვა საინჟინრო პრაქტიკაში [142] და მის საფუძველზე შემუშავებულ იქნა ოპტიმიზაციის მთელი რიგი მეთოდები, რომელთაგან ზოგიერთს ქვემოთ განვიხილავთ.



ნახ. 4.26

### 4.4.6 სიმძიმის ცენტრების მეთოდი

სიმძიმის ცენტრების მეთოდი [14] შემუშავებულია იმ ფაქტის მტკიცების საფუძველზე, რომ მულტიმოდალური  $f(x)$  ფუნქციის ლებეგის დაყოფის შედეგად წარმოქმნილი ერთმანეთში ჩალაგებული შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი  $\Omega_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}$ , სიმრავლეების სიმძიმის ცენტრების  $\{x_p\}$  მიმდევრობა კრებადია აბსოლუტური ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილში.

განვიხილოთ მაქსიმიზაციის შემდეგი ამოცანა:

$$\max\{f(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n\}. \quad (4.147)$$

სადაც  $f(x)$  მულტიმოდალური ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ  $\Omega \subset R^n$  სიმრავლეზე. დაეუშვათ, რომ  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \Omega$  აბსოლუტური ექსტრემუმის წერტილია, სადაც  $f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in \Omega$ .

$f(x)$  ფუნქციის ლებეგის დაყოფით ფუნქციის მნიშვნელობათა ცვლილების  $[\inf f(x), \sup f(x)]$  ინტერვალი დაგანაწილოთ ტოლი სიდიდის შუალედებად ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$\inf f(x) = \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_p < \dots < \zeta_{\mathfrak{M}} = \sup f(x), \quad \zeta_{p+1} - \zeta_p = \Delta \zeta, \quad (4.148)$$

სადაც  $\mathfrak{M}$  ლებეგის დონეების რიცხვია.

აღნიშნული დაყოფის შედეგად წარმოიქმნება სიმრავლეების  $\{\Omega_p(\zeta)\}$  მიმდევრობა,

სადაც

$$\Omega_p(\zeta) = \{x \mid f(x) \geq \zeta_p\} \subset \Omega, \quad p = \overline{1, \mathfrak{M}}. \quad (4.149)$$

ზოგად შემთხვევაში,  $f(x)$ -ის ზედაპირის კონფიგურაციაზე დამოკიდებულებით,  $\Omega_p(\zeta)$  სიმრავლე შეიძლება შედგებოდეს რამდენიმე  $e_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, r_p$ , ქვესიმრავლისგან, სადაც  $r_p$  ლოკალური ექსტრემუმების რიცხვია  $\zeta_p$  დონეზე, ე.ი.

$$\Omega_p(\zeta) = \bigcup_l e_l(\zeta). \quad (4.150)$$

მტკიცდება, რომ როცა  $\zeta \rightarrow \zeta_{\mathfrak{M}}$ , სადაც  $\zeta_{\mathfrak{M}} = \sup f(x)$ , მიიღება უწყვეტი მიმდევრობა ერთმანეთში ჩალაგებული შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი  $\Omega_p(\zeta)$  სიმრავლეებისა, რომელთა ზომა ნულისკენ მიისწრაფვის. მაშინ, ფუნქციონალური ანალიზის ცნობილი თეორემის თანახმად, აღნიშნულ სიმრავლეებს ერთადერთი საერთო წერტილი გააჩნია. რადგან  $x^* \in \Omega^* = \{x \mid f(x) \geq \zeta_{\mathfrak{M}} = \sup f(x)\}$ , ამიტომ ამ ერთა-

ღერტ წერტილს წარმოადგენს  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილი

$$\prod_p \Omega_p(\zeta) = \prod_p \left( \prod_{i=1}^p e_i(\zeta) \right) = x^* . \quad (4.151)$$

ვინაიდან  $\Omega_p(\zeta)$  სიმრავლის ნებისმიერი წერტილიც მიისწრაფვის  $x^*$ -სკენ, ამიტომ ეს უკანასკნელი შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს როგორც  $\Omega_p(\zeta)$ ,  $p = 1, 2, \dots, \mathfrak{P}$ , სიმრავლეების სიმძიმის ცენტრების  $\{x_p(\zeta)\}$  მიმდევრობის ზღვარი, როცა  $\zeta \rightarrow \zeta_{\mathfrak{P}}$ , ე.ი.

$$x^* = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_{\mathfrak{P}}} \{x_p(\zeta)\} , \quad (4.152)$$

სადაც

$$x_p(\zeta) = \frac{\int_{\Omega_p} \dots \int x [f(x) - \zeta_p]^2 dx}{\int_{\Omega_p} \dots \int [f(x) - \zeta_p]^2 dx} . \quad (4.153)$$

(4.153) გამოსახულების ანალიზური გამოთვლა რთულ ამოცანას წარმოადგენს. უმეტეს შემთხვევაში, მისი რეალიზაცია პრაქტიკულად შეუძლებელია, რადგან ინტეგრირების  $\Omega_p$  არის ცხადი სახით განსაზღვრა ვერ ზერხდება. ამიტომ შემოტანილია შემდეგი მახასიათებელი ფუნქცია:

$$\theta(x, \zeta_p) = \begin{cases} 1, & f(x) \geq \zeta_p, \\ 0, & f(x) < \zeta_p, \end{cases} \quad (4.154)$$

რომლის გათვალისწინებით გვექნება

$$x_p(\zeta) = \frac{\int_{\Omega_p} \dots \int x [f(x) - \zeta_p]^2 \theta(x, \zeta_p) dx}{\int_{\Omega_p} \dots \int [f(x) - \zeta_p]^2 \theta(x, \zeta_p) dx} . \quad (4.155)$$

სიმძიმის ცენტრების კოორდინატების გამოსათვლელად გამოყენებულია მონტე-კარლოს მეთოდი. აღნიშნული მეთოდი რიცხვითი მეთოდია, რომელიც მათემატიკურ ამოცანებს შემთხვევითი სიდიდეების მოდელირების საშუალებით გადაწყვეტს. იგი გამოიყენება ყველგან, სადაც, ამოცანის მკაცრად დეტერმინირებული შინაარსის მიუხედავად, შესაძლებელია გამოსაკვლევი პროცესის თეორიულ-ალბათური აღწერა.

მეთოდის პრაქტიკული ღირებულება იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით ნატურალური ექსპერიმენტის ნაცვლად ადვილად აქვს შემთხვევითი სიდიდეებზე გამოთვლების ჩატარებას, რის გამოც პროცესის საჭირო მახასიათებლები ამ პროცესის აღმწერი განტოლებების ამოხსნის გარეშე განისაზღვრება.

მონტე-კარლოს მეთოდს სტატისტიკური ცდების მეთოდსაც უწოდებენ. მის ძირითად ამოცანას მრავალჯერგანმეორებადი ცდების შედეგების საფუძველზე შემთხვევითი სიდიდეების ნებისმიერი ზღომილობის აღბათობებისა და საშუალო მნიშვნელობების განსაზღვრა წარმოადგენს.

მეთოდის ლოგიკური საფუძველია ცენტრალური ზღვრული თეორემა, რომლის თანახმად ნებისმიერი უცნობი  $m$  სიდიდე შეიძლება განვიხილოთ როგორც რომელიღაც შემთხვევითი  $\xi$  სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი, ე.ი.  $M\xi = m$ . აღნიშნული თეორემის საფუძველზე ადვილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i - m\right| < 3\sqrt{\frac{D[\xi]}{N}}\right\} \approx 0.997,$$

სადაც  $\xi_i, i=1,2,\dots,N$ , შემთხვევითი  $\xi$  სიდიდის მნიშვნელობებია, რომელიც მას  $N$  რაოდენობის ცდების ჩატარებისას მიენიჭება, ხოლო  $D[\xi]$  - დისპერსია. უკანასკნელი თანაფარდობა საკმაოდ დიდი  $N$ -სთვის ერთთან მიახლოებული აღბათობით განსაზღვრავს უცნობ  $m$  სიდიდეს და ამავე დროს გვაძლევს ცდომილების შეფასებასაც. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ მონტე-კარლოს მეთოდი, თავისი ზოგადობისა და რეალიზაციის სიმარტივის გამო, თითქმის ერთადერთ საშუალებას წარმოადგენს დიდი განზომილების ჯერადი ინტეგრალების გამოსათვლელად.

სიმძიმის ცენტრების კოორდინატების მონტე-კარლოს მეთოდით გამოსათვლელად საჭიროა (4.155) გამოსახულების სასრული ჯამების სახით წარმოდგენა

$$\overline{x_p(\zeta)} = \frac{\sum_{i=1}^L x^{(i)} [f(x^{(i)}) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p)}{\sum_{i=1}^L [f(x^{(i)}) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p)}, \quad (4.156)$$

სადაც  $L$  რაოდენობაა იმ სტატისტიკური ცდებისა, როცა  $f(x) \geq \zeta_p$ .

(4.156) ფორმულის საშუალებით განსაზღვრული  $\overline{x(\zeta)}$  ფუნქცია შეიძლება ჩათვალოს როგორც სკალარული  $\zeta$  არგუმენტის შემთხვევითი ფუნქცია და დიდი რიცხვების ცენტრალური ზღვრული თეორემის თანახმად, ერთთან მიახლოებული აღბათობით, გვექნება

$$x_p(\zeta) \approx \overline{x_p(\zeta)}. \quad (4.157)$$

ამგვარად, ლებეგის ზოგიერთი ფიქსირებული  $\zeta_p, p=1,2,\dots,M$ , დონეებისთვის მონტე-კარლოს მეთოდით გამოითვლება რა სიმძიმის ცენტრების კოორდინატების მნიშვნელობები  $x_{pj}(\zeta), j=1,2,\dots,n; p=1,2,\dots,M$ , იმ შემთხვევით ამორჩეული ცვლა-

დებისათვის, რომლებიც შეადგენენ  $\Omega_p(\zeta)$  სიმრავლებებს, მიიღება წერტილთა მიმდევრობების შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} \{x_{p1}, \zeta_p\}, \quad p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}, \\ \{x_{p2}, \zeta_p\}, \quad p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}, \end{aligned} \tag{4.158}$$

$$\{x_{pm}, \zeta_p\}, \quad p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M},$$

რომელთა ზღვრულ წერტილს, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული,  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის წერტილის  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  კოორდინატები წარმოადგენს (ნახ. 4.27).

ვინაიდან აბსოლუტური ექსტრემუმის მიდამოში  $f(x) \geq \zeta_p$  ზღომილობის აღბათობა უმნიშვნელოა, ამიტომ (4.158) მიმდევრობების ზღვრული წერტილის ანუ (4.104) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნა დაკავშირებულია შესაბამისი ემპირიული წერტილების აპროქსიმაციასთან. აპროქსიმაციის შედეგად განსაზღვრული  $x_j = x_j(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ანალიზური დამოკიდებულებების საფუძველზე, საწყისი (4.147) ამოცანა დაიყვანება ერთგანზომილებიან ოპტიმიზაციის ამოცანაზე

$$\max\{f[x(\zeta)] \mid \zeta \in [\zeta_{\mathfrak{M}} - \Delta\zeta, \zeta_{\mathfrak{M}} + \Delta\zeta]\}, \tag{4.159}$$

რომელშიც ექსტრემუმის ძებნის სტრატეგია განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული ფორმულით:

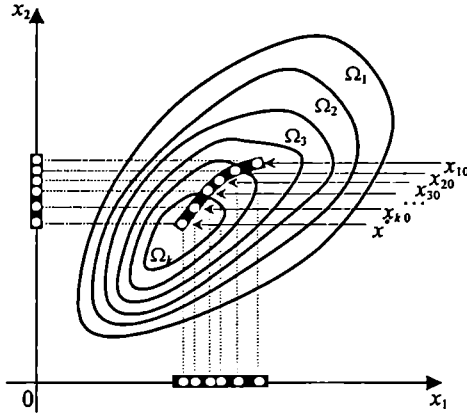
$$\zeta_{i+1} = \zeta_i + \lambda \nabla f[x(\zeta_i)], \quad \zeta_0 = \zeta_{\mathfrak{M}}, \tag{4.160}$$

სადაც  $\lambda$  პროპორციულობის კოეფიციენტი,  $\lambda \in (0, 1]$ .

შეგნიშნავთ, რომ ფუნქციის მინიმიზაციის შემთხვევაში (4.159) ამოცანაში ადგილი ექნება მინიმიზაციის ერთგანზომილებიანი ამოცანის გადაწყვეტას.

სიმძიმის ცენტრების მეთოდი მიახლოებითია. იგი მრავალი ცვლადის მულტიმოდალური ფუნქციის აბსოლუტურ ექსტრემუმს  $\approx 1/\sqrt{N}$  სიზუსტით ეძებს, სადაც  $N$  სტატისტიკური ცდების რაოდენობაა. მეთოდის ცდომილებას ძირითადად  $x_j(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ფუნქციური დამოკიდებულებების ცდისეული წერტილების განსაზღვრა და მათი აპროქსიმაცია განაპირობებს, ვინაიდან  $f(x)$  ფუნქციის ზედაპირის სხვადასხვა კონფიგურაციის დროს აღნიშნული ფუნქციები შეიძლება არასაკმარისი სიგლუვით დახასიათდეს და ემპირიული წერტილების აპროქსიმაციის შედეგად ცდომილებები წარმოიქმნას.





ნახ. 4.27

$x_j(\zeta)$  ფუნქციების აპროქსიმაცია უშუალოდ არის დაკავშირებული ამ ფუნქციების შესაბამისი ემპირიული წერტილების მოგლუვების ამოცანასთან და იგი პოლინომების საშუალებით გადაწყდება. რადგან მოგლუვების ამოცანაში საჭიროა, ერთი მხრივ, რაც შეიძლება ზუსტად აისახოს  $(x_j, \zeta)$  დამოკიდებულების საერთო ტენდენციები და, მეორე მხრივ, შეძლებისდაგვარად „გასწორდეს“ მონტე-კარლოს მეთოდით სიმძიმის ცენტრების გამოთვლის შედეგად გამოწვეული შემთხვევითი გადახრები, ამიტომ აპროქსიმაციისათვის მიზანშეწონილია მეორე რიგის პოლინომების გამოყენება. ეს გამართლებულია იმ მოსაზრებითაც, რომ, მაღალი რიგის პოლინომებისგან განსხვავებით, მათ უკეთესი ექსტრაპოლაციური თვისებები გააჩნია.

ფუნქციების პარაბოლური აპროქსიმაციისათვის ალგორითმში გამოყენებულია უმცირეს კვადრატთა მეთოდი (იხ. ნაწილი 4.1.9), რომელიც შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას ითვალისწინებს:

$$\begin{aligned}
 a_2 \sum_{p=1}^M \zeta_p^4 + a_1 \sum_{p=1}^M \zeta_p^3 + a_0 \sum_{p=1}^M \zeta_p^2 &= \sum_{p=1}^M \zeta_p^2 x_{pj}, \\
 a_2 \sum_{p=1}^M \zeta_p^3 + a_1 \sum_{p=1}^M \zeta_p^2 + a_0 \sum_{p=1}^M \zeta_p &= \sum_{p=1}^M \zeta_p x_{pj}, \\
 a_2 \sum_{p=1}^M \zeta_p^2 + a_1 \sum_{p=1}^M \zeta_p + a_0 M &= \sum_{p=1}^M x_{pj}.
 \end{aligned}
 \tag{4.161}$$

(4.161) სისტემის გასამართლებლად და იმისათვის, რომ გამოირიცხოს დიდ რიცხვებზე მოქმედებები,  $x_j(\zeta)$  ფუნქციების პარაბოლური აპროქსიმაციის ნაცვლად

შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს  $\overline{x_j(p)}$  ფუნქციების აპროქსიმაცია, სადაც არგუმენტი  $p$  განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$p = (\zeta - \zeta_1) / (\Delta\zeta) + 1. \quad (4.162)$$

აქ  $\zeta_1$  აპროქსიმაციის საწყისი კვანძია, ხოლო  $\Delta\zeta$  - აპროქსიმაციის ბიჯი. უკანასკნელი გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ  $\zeta$  სიდიდის სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს  $p$  სიდიდე მიიღებს მთელი რიცხვა მნიშვნელობებს  $p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}$ . (4.162)-ის გათვალისწინებით წრფივ განტოლებათა (4.161) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} a_2 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^4 + a_1 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^3 + a_0 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^2 &= \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^2 x_{pj}, \\ a_2 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^3 + a_1 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^2 + a_0 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p &= \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p x_{pj}, \\ a_2 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p^2 + a_1 \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} p + a_0 \mathfrak{M} &= \sum_{p=1}^{\mathfrak{M}} x_{pj}. \end{aligned} \quad (4.163)$$

ცხადია, გამოთვლების თვალსაზრისით (4.163) სისტემა, (4.161) სისტემასთან შედარებით, უფრო მარტივია და მოსახერხებელი, რაც ალგორითმის პროგრამული რეალიზაციის დროს კომპიუტერში თანრიგების შესაძლო გადავსების არასასურველი შემთხვევების თავიდან აცილების საშუალებას იძლევა.

(4.162) გამოსახულების გათვალისწინებით გარკვეულ კორექციას განიცდის (4.159) ამოცანაც, რომელიც საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\max\{f[x(p)] \mid p \in [\mathfrak{M} - \Delta\mathfrak{M}, \mathfrak{M} + \Delta\mathfrak{M}]\}. \quad (4.164)$$

სტრუქტურული თვალსაზრისით, მულტიმოდალური ფუნქციის ექსტრემუმის ძებნის განხილული ალგორითმი ძირითადად სამ ეტაპს მოიცავს.

პირველ ეტაპზე განისაზღვრება ლებევის დონეების დისკრეტული მნიშვნელობები  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p, \dots, \zeta_{\mathfrak{M}}$ , რისთვისაც საჭიროა შედარებით მცირე  $\Delta$  რაოდენობის წინასწარი სტატისტიკური ცდების ჩატარება. პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე, შეიძლება მივიღოთ  $S = 0.1N$ , სადაც  $N$  ძირითადი სტატისტიკური ცდების რაოდენობაა. წინასწარი ცდების ამ სერიაში ადგილი აქვს ცვლადების სხვადასხვა შემთხვევითი მნიშვნელობების დროს საოპტიმიზაციო ფუნქციის  $f(x^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ , მნიშვნელობების გამოთვლას და მათ შორის მინიმალური  $f_H = \min\{f_i\}$  და მაქსიმალური  $f_B = \max\{f_i\}$  მნიშვნელობების დამახსოვრებას. ეტაპის დასასრულს განისაზღვრება

- ლებევის დონეების ბიჯი

$$\Delta\zeta = \frac{1}{\mu} (f_B - f_H), \quad (4.165)$$

სადაც  $\mu > 0$  კოეფიციენტია, რომელიც ახასიათებს ლებეგის დონეების სიმკვრივეს;  
 - ლებეგის დონეების მნიშვნელობები

$$c_p = \frac{f_B + f_H}{2} + p\Delta c, \quad p = 1, 2, \dots, M, \quad (4.166)$$

სადაც  $M$  ლებეგის დონეების რაოდენობაა,  $M \leq \mu$ .

მეორე ეტაპზე ტარდება  $N$  რაოდენობის ძირითადი სტატისტიკური ცდების სერია, რომელშიც (4.156) ფორმულის საფუძველზე განისაზღვრება  $x_j(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ფუნქციების ემპირიული წერტილები.

მესამე ეტაპზე ადგილი აქვს მიღებული მონაცემების დამუშავებას, კერძოდ, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მაპროქსიმებული პოლინომების განსაზღვრას

$$x_j(p) = \alpha_j p^2 + \beta_j p + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.167)$$

და ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის ნებისმიერი მეთოდით (4.164) ამოცანის გადაწყვეტას, რომლის ამონახსნი გარკვეული მიახლოებით შეესაბამება (4.147) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს.

იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტება, შესაძლებელია განხორციელდეს გამოთვლების მეოთხე ეტაპი, სადაც ექსტრემუმის ძებნის ნებისმიერი დეტერმინირებული მეთოდი გამოიყენება.

ამგვარად, სიმბიომის ცენტრების მეთოდის ალგორითმი წარმოადგენს შემდეგი ოპერაციების და პროცედურების თანმიმდევრობას.

**ბიჭი 1.** შეირჩევა პროგრამული პარამეტრები:

- სტატისტიკური ცდების რაოდენობა  $N$ ;
- ლებეგის დონეების რაოდენობა  $M$ ;
- სიმკვრივის კოეფიციენტი  $\mu$ ;
- დასაშვები ცდომილების აბსოლუტური ზღვრული მნიშვნელობა  $\varepsilon$ ;

**ბიჭი 2.** თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით გამომუშავდება  $x^{(l)} \in \Omega$ ;

**ბიჭი 3.** გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქცია  $f(x^{(l)})$ ;

**ბიჭი 4.** დაფიქსირდება  $f_H = \min\{f_i\}$  და  $f_B = \max\{f_i\}$ ;

**ბიჭი 5.** 2-4 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $N$ -ჯერ, როცა  $i = N$ , მაშინ გადავალოთ მე-6 ბიჯზე;

**ბიჭი 6.** (4.162) ფორმულის საშუალებით განისაზღვრება ლებეგის დონეების მნიშვნელობები  $c_1, c_2, \dots, c_M$ ;

უპირობო ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

ბიჯი 7. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით გამომუშავდება  $x^{(i)} \in \Omega$ ;

ბიჯი 8. გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქცია  $f(x^{(i)})$ ;

ბიჯი 9. ფუნქციის  $f(x^{(i)})$  მნიშვნელობა შემოწმდება პირობაზე  $f(x) \geq c_p$ . თუ უტოლობა სამართლიანია მაშინ გადავალთ მე-10 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-12 ბიჯზე;

ბიჯი 10. გამოითვლება და შეჯამდება

$$\sum_{i=1}^N [f(x^{(i)}) - c_p]^2 \theta(x^{(i)}, c_p),$$

$$\sum_{i=1}^N x_j^{(i)} [f(x^{(i)}) - c_p]^2 \theta(x^{(i)}, c_p), j = 1, 2, \dots, n;$$

ბიჯი 11. 9-10 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $c_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, M$  ბ სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს. როცა  $p = M$ , მაშინ გადავალთ მე-12 ბიჯზე;

ბიჯი 12. 7-11 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $N$ -ჯერ. როცა  $i = N$  ბ მაშინ გადავალთ მე-13 ბიჯზე;

ბიჯი 13. (4.156) ფორმულის საშუალებით გამოითვლება

$$\overline{x_j(c_p)}, p = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, n;$$

ბიჯი 14.  $\{x_1, p\}, \{x_2, p\}, \dots, \{x_n, p\}$  მიმდევრობების ემპირიული წერტილების პარაბოლური აპროქსიმაციის შედეგად განისაზღვრება მაპროქსიმებული (4.167) პოლინომები;

ბიჯი 15. როცა  $p = M$  მაპროქსიმებული პოლინომების საშუალებით გამოითვლება სავარაუდო ექსტრემუმის კოორდინატები

$$\overline{x_j} = x_j(M) = \alpha_j M^2 + \beta_j M + \gamma_j, j = 1, 2, \dots, n,$$

და საოპტიმიზაციო ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა:  $\overline{f} = f[x(M)]$ ;

ბიჯი 16. ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის (4.164) ამოცანის გადაწყვეტის შედეგად განისაზღვრება მაქსიმალური  $p^*$ , რომლის (4.167) პოლინომებში ჩასმის შედეგად გამოითვლება საწყისი (4.147) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  და  $f^* = f(x^*)$ ;

ბიჯი 17. ბეზნის დასასრული.

## 4.4.7 $\Psi$ -გარდაქმნის მეთოდი

ოპტიმიზაციის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების გადაწყვეტა სერიოზულ პრობლემებთანაა დაკავშირებული. ჩვეულებრივ, ეს განპირობებულია, ჯერ-ერთი, ამოცანის საკმაოდ დიდი განზომილებით და მეორე - რეალური პროცესებისათვის დამახასიათებელი არსებითი არაწრფივობით. პრობლემას კიდევ უფრო ამძიმებს ის შემთხვევა, როცა საოპტიმიზაციო ფუნქცია მულტიმოდალურია და საჭიროა აბსოლუტური ექსტრემუმის მოძებნა.

ოპტიმიზაციის ამოცანების აქტუალობამ, ერთი მხრივ, და გამოთვლითი ხასიათის პრობლემებმა, მეორე მხრივ, ოპტიმიზაციის მრავალი მეთოდის შემუშავება განაპირობა. მაგრამ მათი უმრავლესობა ამოხსნის კრებადობას უზრუნველყოფს საკმაოდ არსებითი ხასიათის შემზღვევადი პირობების დროს, როგორცაა საოპტიმიზაციო ფუნქციის უნიმოდალურობა, ამოზნექილობა, უწყვეტობა, დიფერენცირებადობა და ა.შ. ცხადია, აღნიშნული პირობები საინჟინრო პრაქტიკაში ყოველთვის არ სრულდება და ამიტომ ხშირად ადგილი აქვს მცდარი ექსტრემუმის მოძებნას. გარდა ამისა, ამოცანის განზომილების ოდნავ გაზრდის შემთხვევაში მრავალი მეთოდის გამოყენების ეფექტურობა მნიშვნელოვნად მცირდება.

$\Psi$ -გარდაქმნის მეთოდი ყველა ზემოთ აღნიშნული შეზღუდვისაგან თავისუფალია. პრაქტიკულად, იგი ნებისმიერი სირთულისა და განზომილების საოპტიმიზაციო ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის შედარებით მარტივად და სწრაფად მოძებნის საშუალებას იძლევა.

აღნიშნული მეთოდი შემუშავებულია  $\Psi$ -გარდაქმნის პრინციპის [141] საფუძველზე, რომლის ლოგიკური სტრუქტურა საოპტიმიზაციო ფუნქციის ექსტრემუმის კოორდინატების განსაზღვრის სტატისტიკურ ალგორითმთან [52] ერთად მეთოდის არსს შეადგენს.

განვიხილოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმიზაციის ამოცანა

$$\max \left\{ f(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q \subset R^n \right\}, \quad (4.168)$$

სადაც საოპტიმიზაციო  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ  $\Omega \subset R^n$  სიმრავლეზე, მულტიმოდალური ფუნქციაა. საჭიროა ვიპოვოთ დამოუკიდებელი ცვლადების ისეთი  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \Omega$  ვექტორი და მისი შესაბამისი  $f^* = f(x^*)$  მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ადგილი ექნება შემდეგ პირობას:

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.169)$$

ამგვარად, მოცემულ  $f(x)$  ფუნქციას  $\Omega$  სიმრავლეზე ერთადერთი აბსოლუტური ექსტრემუმი წერტილი გააჩნია.

დასმული ამოცანის გადაწყვეტა ხორციელდება  $f(x)$  ფუნქციის ლეგვის დაყოფის საფუძველზე, რომლის თანახმად ადგილი აქვს გარდაქმნას საწყისი საოპტიმიზა-

ციო  $f(x)$  ფუნქციისა  $\Psi(\zeta)$  ფუნქციად, ზოლო დამოუკიდებელი ვექტორული  $x$  ცვლადისა  $x(\zeta)$  ვექტორ-ფუნქციად, სადაც  $\zeta$  არგუმენტი  $f(x)$  ფუნქციის სკალარულ მნიშვნელობას წარმოადგენს.

გარდაქმნილი  $\Psi(\zeta)$  ფუნქციის მნიშვნელობა თითოეულ  $\zeta_r, r = 1, 2, \dots, R$ , წერტილში განისაზღვრება ფორმულით

$$\Psi(\zeta_r) = \int_{\Omega} [f(x) - \zeta_r]^2 \theta(x, \zeta_r) dx, \quad (4.170)$$

სადაც  $\theta(x, \zeta_r)$  შემდეგი ტიპის მახასიათებელი ფუნქციაა:

$$\theta(x, \zeta_r) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } f(x) \geq \zeta_r, \\ 0, & \text{როცა } f(x) < \zeta_r. \end{cases} \quad (4.171)$$

გომეტრიულად (4.170) გამოსახავს  $(n+1)$ -განზომილებიან მოცულობას, რომელიც  $f(x)$  ფუნქციის ზედაპირსა და  $\zeta_r$  ჰიპერსიბრტყეს შორის წარმოიქმნება, და წარმოადგენს  $f(x)$  ფუნქციის ლეგეის დაყოფის შედეგად მიღებული

$$\Omega_r(\zeta) = \{x | f(x) > \zeta_r\} \subset \Omega \quad (4.172)$$

სიმრავლის ზომას.

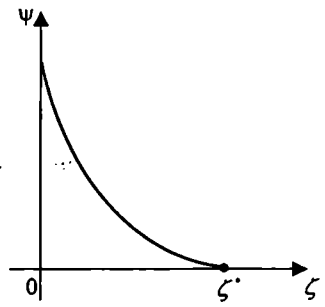
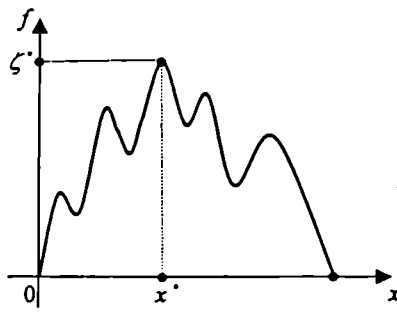
საჭიროა შევნიშნოთ, რომ  $f(x)$  ფუნქციის მინიმიზაციის შემთხვევაში (4.171) და (4.172) გამოსახულებებში უტოლობის ნიშნები საწინააღმდეგო ნიშნით უნდა შეიცვალოს.

აღსანიშნავია  $\Psi(\zeta)$  ფუნქციის ძირითადი თვისებები:

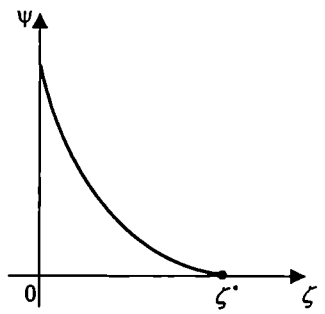
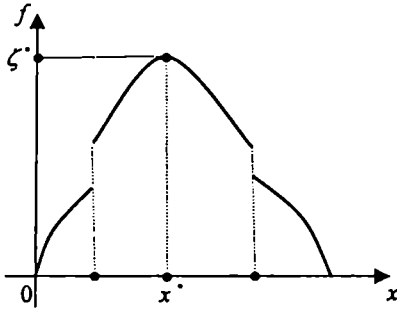
1.  $\Psi(\zeta)$  ერთგანზომილებიანი ფუნქციაა;
2.  $\Psi(\zeta)$  მონოტონურად მკაცრად კლებადია ფუნქციისა (ნახ. 4.28, 4.29, 4.30, 4.31), რომლის ნულოვანი  $\zeta^*$  მნიშვნელობა  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის მნიშვნელობას შეესაბამება;
3.  $\Psi(\zeta)$  უწყვეტი და ღიფერენცირებადი ფუნქციაა (ნახ. 4.28, 4.29, 4.30, 4.31).

ცხადია, ერთგანზომილებიანი, უწყვეტი და ღიფერენცირებადი  $\Psi(\zeta)$  ფუნქციის ანალიზი ბევრად უფრო მარტივია, ვიდრე მრავალგანზომილებიანი რთული სახის მულტიმოდალური  $f(x)$  ფუნქციისა.

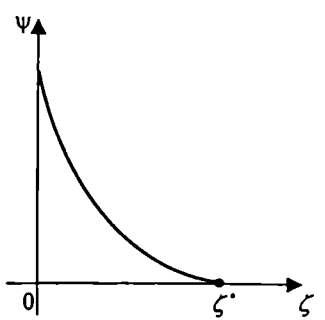
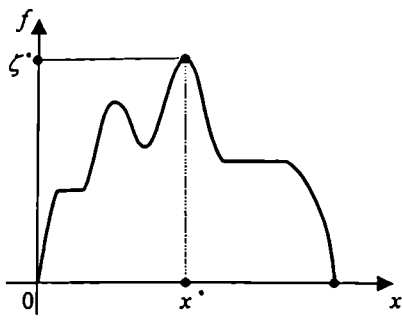
ზოგად შემთხვევაში,  $f(x)$ -ის ზედაპირის კონფიგურაციაზე დამოკიდებულებით,  $\Omega_r(\zeta)$  სიმრავლე შეიძლება შედგებოდეს რამდენიმე  $\Omega_r^{(i)}(\zeta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , ქვესიმრავლისგან, სადაც  $r$ , არის  $\Omega_r(\zeta)$  სიმრავლის ბმულობის რიცხვი, ე.ი.



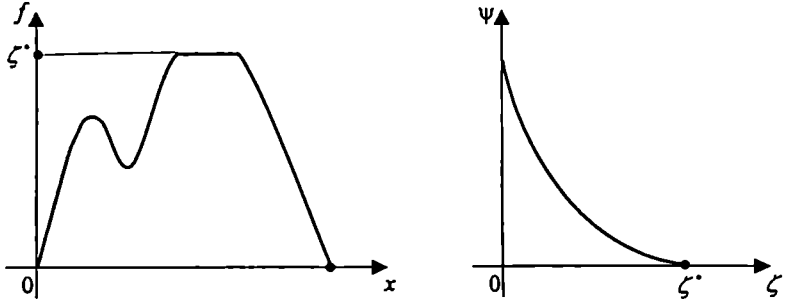
ნახ. 4.28



ნახ. 4.29



ნახ. 4.30



ნახ. 4.31

$$\Omega_v(\zeta) = \bigcup_i \Omega_v^{(i)}(\zeta). \tag{4.173}$$

ცხადია,  $\zeta$  სიდიდის უწყვეტად ზრდის შემთხვევაში, მიიღება უწყვეტი მიმდევრობა ერთმანეთში ჩალაგებული შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი  $\Omega_v(\zeta)$  სიმრავლეებისა. ფუნქციონალური ანალიზის ცნობილი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმის  $\zeta^*$  მნიშვნელობა ერთადერთია, რომელიც  $x^*$  წერტილში მიიღწევა, მაშინ, როცა  $\zeta \rightarrow \zeta^*$ , ბმულობის კოეფიციენტი მცირდება ერთამდე, ე.ი.  $r_v = 1$ , ხოლო  $\Omega_v(\zeta)$  სიმრავლე “შეიკუმშება”  $x^*$  წერტილში და, მასა-სადამე, მისი ზომა ნულისკენ მიისწრაფვის, ე.ი. გვექნება

$$x^* = \bigcap_{\zeta} \Omega_v(\zeta), \tag{4.174}$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta^*} \Psi(\zeta) = 0. \tag{4.175}$$

ვინაიდან  $\Omega_v(\zeta)$  სიმრავლის ნებისმიერი წერტილიც მიისწრაფვის  $x^*$ -სკენ, ამიტომ ეს უკანასკნელი შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს როგორც  $\Omega_v(\zeta)$  სიმრავლეების სიმ-ძიმის  $x_v(\zeta)$  ცენტრების მიმდევრობის ზღვარი, როცა  $\zeta \rightarrow \zeta^*$ , ე.ი.

$$x^* = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta^*} \{x_v(\zeta)\}, \tag{4.176}$$

სადაც



$$x_n(\zeta) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x[f(x) - \zeta_n]^2 \theta(x, \zeta_n) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - \zeta_n]^2 \theta(x, \zeta_n) dx}. \quad (4.177)$$

თუ გავითვალისწინებთ მიღებული დამოკიდებულებების უწყვეტობას, მაშინ (4.174) და (4.175)-დან გვექნება

$$\Psi(\zeta^*) = 0, \quad (4.178)$$

$$x^* = x(\zeta^*). \quad (4.179)$$

ამგვარად, ოპტიმიზაციის დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა ვიპოვოთ  $\Psi(\zeta) = 0$  განტოლების  $\zeta^*$  ფესვი, რომლის (4.176) გამოსახულებაში ჩასმის შედეგად განისაზღვრება გლობალური ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილის კოორდინატები.

$\Psi$ -გარდაქმნის მეთოდში, ისევე როგორც სიმბიზის ცენტრების მეთოდში, (4.170) და (4.177) გამოსახულებებში მრავალჯერადი ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოყენებულია მონტე-კარლოს მეთოდი, რომლის რეალიზაციის შედეგად  $\Psi(\zeta)$  და  $x_j(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , დამოკიდებულებების ემპირიული წერტილები განისაზღვრება. ემპირიული წერტილების აპროქსიმაცია კი უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ხორციელდება.

$\Psi$ -გარდაქმნის ცენტრების მეთოდი მიახლოებითია. იგი მრავალი ცვლადის მულტიმოდალური ფუნქციის აბსოლუტურ ექსტრემუმს  $\approx 1/\sqrt{N}$  სიზუსტით განსაზღვრავს, სადაც  $N$  სტატისტიკური ცდების რაოდენობაა. მეთოდის ცდომილებას ძირითადად  $\Psi(\zeta)$  და  $x_j(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ფუნქციური დამოკიდებულებების ცდისეული წერტილების განსაზღვრა და მათი აპროქსიმაცია განაპირობებს, ვინაიდან  $f(x)$  ფუნქციის ზედაპირის სხვადასხვა კონფიგურაციის დროს აღნიშნული ფუნქციები შეიძლება არასაკმარისი სიგლუვით დახასიათდეს და ემპირიული წერტილების აპროქსიმაციის შედეგად ცდომილებები წარმოიქმნას.

სტრუქტურული თვალსაზრისით  $\Psi$ -გარდაქმნის მეთოდის ალგორითმი ძირითადად მოიცავს სამ ეტაპს.

პირველ ეტაპზე განისაზღვრება ლებეგის დონეების დისკრეტული მნიშვნელობები  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots, \zeta_N$ , რისთვისაც საჭიროა შედარებით მცირე  $S$  რაოდენობის წინასწარი სტატისტიკური ცდების ჩატარება. პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე, შეიძლება მივიღოთ  $S = 0.1N$ , სადაც  $N$  ძირითადი სტატისტიკური ცდების რაოდენობაა. წინასწარი ცდების ამ სერიამი ადგილი აქვს ცვლადების სხვადასხვა შემთხვევითი მნიშვნელობების დროს საოპტიმიზაციო ფუნქციის  $f(x^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ , მნიშვნელობების გამოთვლას და მათ შორის მინიმალური  $f_H = \min\{f_i\}$  და მაქსიმალური  $f_B = \max\{f_i\}$  მნიშვნელობების დამახსოვრებას. ეტაპის ბოლოს განისაზღვრება

- ლებეგის ღონეების ბიჯი

$$\Delta \zeta = \frac{1}{\mu} (f_B - f_H), \quad (4.180)$$

სადაც  $\mu > 0$  კოეფიციენტი, რომელიც ახასიათებს ლებეგის ღონეების სიმკვრივეს;

- ლებეგის ღონეების მნიშვნელობები

$$\zeta_\nu = \frac{f_B + f_H}{2} + \nu \Delta \zeta, \quad \nu = 1, 2, \dots, \mathfrak{R}, \quad (4.181)$$

სადაც  $\mathfrak{R}$  ლებეგის ღონეების რაოდენობა,  $\mathfrak{R} \leq \mu$ .

მეორე ეტაპზე, მონტე-კარლოს მეთოდით მრავალჯერადი ინტეგრალების გამოსათვლელად ვატარებთ  $N$  რაოდენობის ძირითად სტატისტიკურ ცდებს, რისთვისაც (4.170) და (4.177) გამოსახულებებს წინასწარ გარდაექმნით და წარმოვადგენთ სასრული ჯამების შემდეგი სახით:

$$\overline{\Psi_\nu(\zeta)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^L [f(x^{(i)}) - \zeta_\nu]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_\nu), \quad (4.182)$$

$$x_\nu(\zeta) = \frac{\sum_{i=1}^L x^{(i)} [f(x^{(i)}) - \zeta_\nu]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_\nu)}{\sum_{i=1}^L [f(x^{(i)}) - \zeta_\nu]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_\nu)}, \quad (4.183)$$

სადაც  $L$  რაოდენობაა იმ სტატისტიკური ცდებისა, როცა  $f(x) \geq \zeta_\nu$ .

ცდების ამ სურიაში განისაზღვრება  $\Psi(\zeta)$  და  $x_j(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ფუნქციების ემპირიული წერტილები.

მესამე ეტაპზე ადგილი აქვს მიღებული მონაცემების დამუშავებას, კერძოდ, (4.182) და (4.183) ფორმულებით მიღებული წერტილების უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აპროქსიმაციას (აპროქსიმაცია ხორციელდება მეორე რივის პოლინომებით):

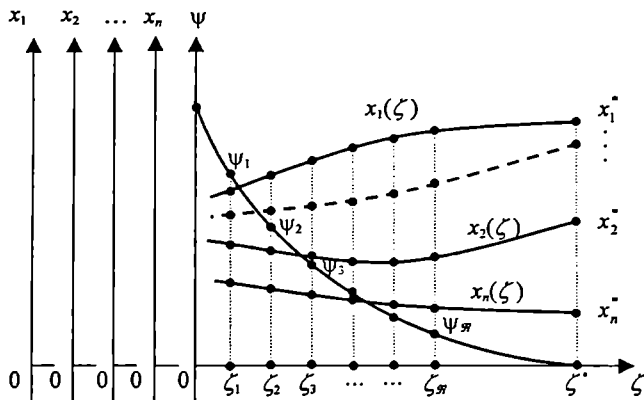
$$\Psi(\zeta) = \alpha_0 \zeta^2 + \beta_0 \zeta + \gamma_0, \quad (4.184)$$

$$x_j(\zeta) = \alpha_j \zeta^2 + \beta_j \zeta + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.185)$$

რის შედეგად განისაზღვრება მაპროქსიმებული პოლინომების კოეფიციენტები:  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

(4.184) სამწვერის ნულთან გატოლებისა და მისი ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება  $\zeta^*$ , ხოლო ამ უკანასკნელის (4.185) გამოსახულებებში ჩასმის შედეგად - ოპტიმალური მნიშვნელობები  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,  $f^* = f(x^*)$ .

ნახ. 4.32-ზე წარმოდგენილია  $\Psi$ -გარდაქმნის მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.



ნახ. 4.32

ამგვარად, განხილული მეთოდის ალგორითმი წარმოადგენს შემდეგი ოპერაციებისა და პროცედურების ერთობლიობას.

ბიჯი 1. შეირჩევა პროგრამული პარამეტრები:

- სტატისტიკური ცდების რაოდენობა  $N$ ;
- ლეგების დონეების რაოდენობა  $\mathfrak{R}$ ;
- სიმკვრივის კოეფიციენტი  $\mu$ ;

ბიჯი 2. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით გამომუშავდება  $x^{(i)} \in \Omega$ ;

ბიჯი 3. გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქცია  $f(x^{(i)})$ ;

ბიჯი 4. დაფიქსირდება  $f_H = \min_i \{f_i\}$  და  $f_B = \max_i \{f_i\}$ ;

ბიჯი 5. 2-4 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $N$ -ჯერ. როცა  $i = N$ , მაშინ გადავალოთ მე-6 ბიჯზე;

ბიჭი 6. (4.181) ფორმულის საშუალებით განისაზღვრება ლებეგის დენების მნიშვნელობები  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ;

ბიჭი 7. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით გამომუშავდება  $x^{(i)} \in \Omega$ ;

ბიჭი 8. გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქცია  $f(x^{(i)})$ ;

ბიჭი 9. ფუნქციის  $f(x^{(i)})$  მნიშვნელობა შემოწმდება პირობაზე  $f(x) \geq \zeta_v$ . თუ უტოლობა სამართლიანია მაშინ გადავალთ მე-10 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-12 ბიჯზე;

ბიჭი 10. გამოითვლება და შეჯამდება

$$\sum_{i=1}^N [f(x^{(i)}) - \zeta_v]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_v),$$

$$\sum_{i=1}^N x_j^{(i)} [f(x^{(i)}) - \zeta_v]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_v), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

ბიჭი 11. 9-10 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $\zeta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, M$ , სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს. როცა  $v = M$ , მაშინ გადავალთ მე-12 ბიჯზე;

ბიჭი 12. 7-11 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $N$ -ჯერ. როცა  $i = N$  მაშინ გადავალთ მე-13 ბიჯზე;

ბიჭი 13. (4.182) და (4.183) ფორმულების საშუალებით გამოითვლება

$$\overline{\Psi(\zeta_v)}, \quad \overline{x_j(\zeta_v)}, \quad v = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

ბიჭი 14.  $\{\Psi, \zeta\}$ ,  $\{x_1, \zeta\}$ ,  $\{x_2, \zeta\}, \dots, \{x_n, \zeta\}$  მიმდევრობების ემპირიული წერტილების პარამოლური აპროქსიმაციის შედეგად განისაზღვრება მაპროქსიმებული (4.184) და (4.185) პოლინომები;

ბიჭი 15. განისაზღვრება  $\Psi(\zeta) = \alpha_0 \zeta^2 + \beta_0 \zeta + \gamma_0 = 0$  კვადრატული განტოლების უმცირესი დადებითი ფესვი  $\zeta^*$ , რომლის (4.185) პოლინომებში ჩასმის შედეგად გამოითვლება აბსოლუტური ექსტრემუმის კოორდინატები:

$$x_j^* = x_j(\zeta^*) = \alpha_j(\zeta^*)^2 + \beta_j(\zeta^*) + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

და საოპტიმიზაციო ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა:  $f^* = f[x(\zeta^*)]$ ;

ბიჭი 16. ძებნის დასასრული.

## 4.5 მეთოდების შედარება გამოთვლითი ექსპერიმენტების საფუძველზე

საზოგადოდ, ნებისმიერი გამოთვლითი მეთოდის ეფექტურობის შეფასებას და მის შედარებას სხვადასხვა მეთოდებთან განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება, რადგან იგი კონკრეტული ამოცანისთვის, ამა თუ იმ აზრით, შესაფერისი მეთოდის არჩევის საშუალებას იძლევა.

მეთოდის შეფასების რამდენიმე კრიტერიუმი არსებობს, მაგალითად, სიზუსტის მიხედვით, სწრაფქმედების მიხედვით, შესაბამისი პროგრამული რეალიზაციის სირთულის მიხედვით და ა.შ. თუ გაითვალისწინებთ იმას, რომ თითქმის ყველა შემთხვევაში საჭიროა ამოცანის შედეგის რაც შეიძლება სწრაფად მიღება, მაშინ მეთოდის შეფასება სწრაფქმედების მიხედვით ყველაზე არსებითია და იგი უნივერსალურ კრიტერიუმს წარმოადგენს.

რაოდენობრივი თვალსაზრისით, სწრაფქმედება შეიძლება დახასიათდეს ძებნის დანაკარგების  $\rho$  რიცხვით, რაც  $f(x)$  ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობასთანაა დაკავშირებული.

ექსტრემუმის ძებნის მეთოდებში საოპტიმიზაციო ფუნქციის გამოთვლა, დანარჩენ ლოგიკურ ოპერაციებთან შედარებით, ყველაზე შრომატევად და მრავალჯერ განმეორებად პროცედურას წარმოადგენს. ამდენად, მისი საშუალებით მეთოდის შრომატევადობის ანუ ძებნის დანაკარგების შეფასება გარკვეულ წილად გამართლებულია. ცხადია, მეთოდი, რომელიც ექსტრემუმის გარკვეული სიზუსტით მოსაძებნად საოპტიმიზაციო ფუნქციის გამოთვლას ნაკლები რაოდენობით საჭიროებს, მეტი სწრაფქმედებითა და ეფექტურობით ხასიათდება.

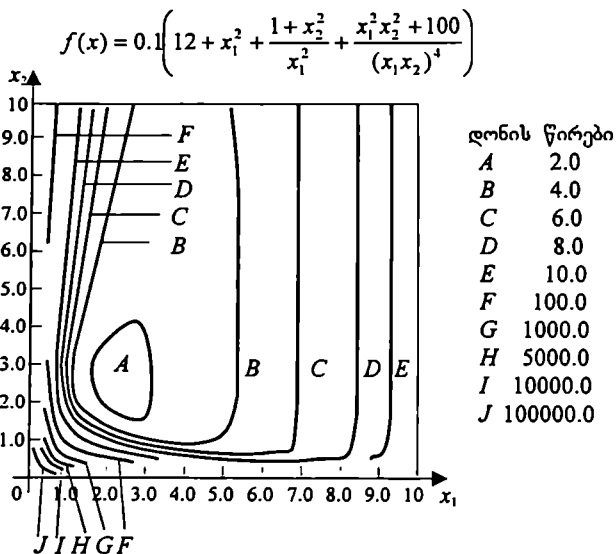
ექსტრემუმის ძებნის მრავალრიცხოვან მეთოდებში  $f(x)$  ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობა მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია ძებნის საწყის  $x^{(0)}$  წერტილზე.  $x^{(0)}$  წერტილი რაც უფრო დაშორებულია ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილიდან, მის მოსაძებნად მით უფრო მეტი რაოდენობის ფუნქციის გამოთვლაა საჭირო; შესაბამისად ძებნის დანაკარგებიც მნიშვნელოვნად იზრდება. ამგვარად,  $\rho = \rho[f(x), x^{(0)}]$  დამოკიდებულია როგორც  $f(x)$  ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობაზე, ისე საწყისი  $x^{(0)}$  წერტილის მდებარეობაზეც.

სწრაფქმედების მიხედვით მეთოდის ეფექტურობის შეფასება შესაძლებელია როგორც თეორიულად, ისე ექსპერიმენტულად. ვინაიდან თეორიული შეფასება შეიძლება განხორციელებულ იქნეს ამოცანების მხოლოდ შეზღუდული კლასისათვის, ამიტომ ოპტიმიზაციის მეთოდების ეფექტურობა ექსპერიმენტების საშუალებით ანუ ტესტური ამოცანების ამოხსნის საფუძველზე შეეაფასოთ.

ექსპერიმენტისათვის შერჩეულია სამი სახის სხვადასხვა სირთულის ტესტური ამოცანა. პირველ შემთხვევაში საოპტიმიზაციო ფუნქციას წარმოადგენს იზონისა და ფენტონის ფუნქცია [110]

$$f(x) = 0.1 \left[ 12 + x_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4} \right], \quad (4.186)$$

რომლის ტოპოლოგია წარმოდგენილია ნახ. 4.33-ზე. აღნიშნული ფუნქციის მინიმუმის წერტილია  $x^* = [1.742; 2.026]$ , სადაც  $f^* = f(x^*) = 1.744$ . იზონისა და ფენტონის ფუნქცია გეომეტრიულად ე.წ. „ასიმეტრიულ ხეობას“ ასახავს.



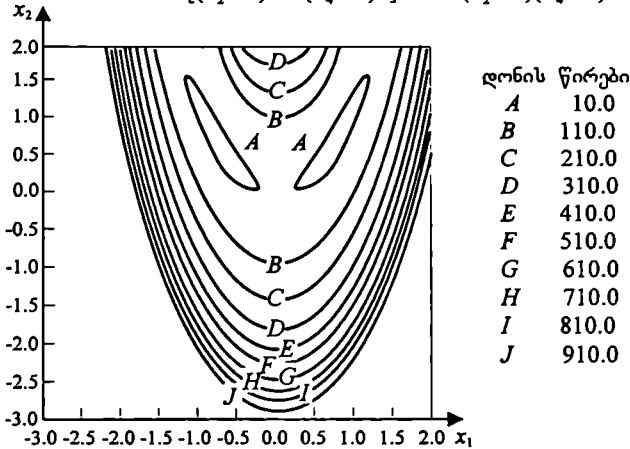
ნახ. 4.33

მეორე შემთხვევაში საოპტიმიზაციო ფუნქციას წარმოადგენს კუდის ფუნქცია [110]

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1), \quad (4.187)$$

რომლის ტოპოლოგია, როცა  $x_3 = x_4 = 1$ , წარმოდგენილია ნახ. 4.34-ზე.

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1)$$



ნახ. 4.34

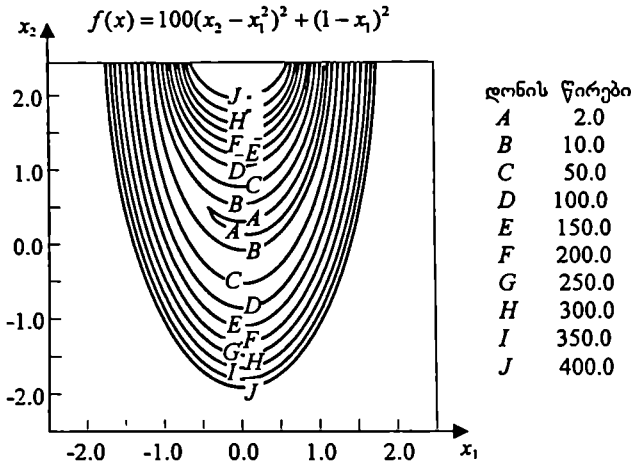
(4.187) ფუნქცია, გარდა იმისა, რომ მკვეთრად გამოხატული „ხვევებით“ ხასიათდება, მულტიმოდალურია. მას მოცემულ არეში ორი ექსტრემუმი გააჩნია, რომელთაგან  $x_1^* = [1; 1; 1; 1]$  აბსოლუტური მინიმუმის წერტილია, სადაც  $f_1^* = f(x_1^*) = 0$ , ხოლო  $x_2^* = [-1; 1; 1; 1]$  - ლოკალური მინიმუმის წერტილი, სადაც  $f_2^* = f(x_2^*) = 4$ .

მესამე შემთხვევაში საოპტიმიზაციო ფუნქციას წარმოადგენს როზენბროკის ფუნქცია [110]

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \quad (4.188)$$

რომლის ტოპოლოგია წარმოდგენილია ნახ. 4.35-ზე. აღნიშნულ ფუნქციას მინიმუმი გააჩნია წერტილში  $x^* = [1; 1]$ , სადაც  $f^* = f(x^*) = 0$ . როზენბროკის ფუნქცია გეომეტრიულად ასახავს ე.წ. „ვიწრო ხევს“, რომელიც  $x_2 = x_1^2$  პარაბოლის გასწვრივ მდებარეობს.

მეთოდების ეფექტურობის შესაფასებლად და მათი შესაძლებლობების გამოვლენის მიზნით, ტესტურ ამოცანებზე ჩატარდა ექსპერიმენტები, რომლის თანახმად  $\rho[f(x), x^{(0)}]$  პარამეტრის მიხედვით ერთმანეთს შედარდა ხუთი სხვადასხვა მეთოდი:



ნახ. 4.35

უსწრაფესი დაშვების, ფლეთიერ-რივისის, დევიდონ-ფლეთიერ-პაუელის, ბროიდენ-ფლეთიერ-შენოსა და სიმძიმის ცენტრების მეთოდები.

უსწრაფესი დაშვების, ფლეთიერ-რივისის, დევიდონ-ფლეთიერ-პაუელის და ბროიდენ-ფლეთიერ-შენოს მეთოდებში გადაადგილების ბიჯის მინიმიზაციისათვის გამოყენებულია ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის სამი სხვადასხვა მეთოდი: დიხოტომის, ოქროს კვეთის და კუბური აპროქსიმაციის მეთოდები. ყველა ძირითად მეთოდში ექსტრემუმის ძებნა ერთი და იგივე საწყისი წერტილიდან იწყება:

პირველ ტესტურ ამოცანაში -  $x^{(0)} = [0.5; 0.5]$  ;

მეორე ტესტურ ამოცანაში -  $x^{(0)} = [-3; -1; -3; -1]$  ;

მესამე ტესტურ ამოცანაში -  $x^{(0)} = [-1.2; 1.0]$ .

პირველი ტესტური ამოცანის გამოკვლევის შედეგები მოცემულია 4.10 ცხრილში, მეორე ტესტური ამოცანის შედეგები - 4.11 ცხრილში, ხოლო მესამე ტესტური ამოცანის გამოკვლევის შედეგები - 4.12 ცხრილში.

სიმძიმის ცენტრების მეთოდში ოპტიმალური ამონახსნის დასაზუსტებლად გამოყენებულია ექსტრემუმის ძებნის პირველი რიგის უმარტივესი დეტერმინირებული მეთოდი - გრადიენტული მეთოდი მუდმივი ბიჯით. მისი საშუალებით გადაწყვეტილი იქნა სამივე ტესტური ამოცანა, რომელთა შედეგები წარმოდგენილია 4.13, 4.14, 4.15 ცხრილებში.



N	მეთოდი		შედეგი	
	ძირითადი	დამხმარე	$f^{\circ}$	$\rho$
1	უსწრაფესი დაშვების მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	1.744	1026
		ოქროს კვეთის მეთოდი	1.744	688
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	1.744	171
2	ფლუთერ-რივისის მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	1.744	249
		ოქროს კვეთის მეთოდი	1.744	199
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	1.744	92
3	დევიდონ-ფლუთერ-პაუელის მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	1.744	232
		ოქროს კვეთის მეთოდი	1.744	184
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	1.744	262
4	ბროიდენ-ფლუთერ-შენოს მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	1.744	226
		ოქროს კვეთის მეთოდი	1.744	176
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	1.744	133
5	სიმძიმის ცენტრების მეთოდი	გრადიენტული მეთოდი მულტიპლი ბიჯით	1.744	215

ცხრილი 4.10

უპირობო ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

N	მეთოდი		შედეგი	
	ძირითადი	დამხმარე	$f^*$	$\rho$
1	უსწრაფესი დაშვების მეთოდი	დინოტომიის მეთოდი	$3.74 \cdot 10^{-9}$	39503
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$1.74 \cdot 10^{-8}$	29692
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$8.36 \cdot 10^{-6}$	20007
2	ფლეთჩერ-რისის მეთოდი	დინოტომიის მეთოდი	$1.3 \cdot 10^{-10}$	1257
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$1.2 \cdot 10^{-6}$	942
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$2.0 \cdot 10^{-7}$	244
3	დევიდონ-ფლეთჩერ-პაუელის მეთოდი	დინოტომიის მეთოდი	$3.9 \cdot 10^{-9}$	2404
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$3.7 \cdot 10^{-9}$	1895
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$9.5 \cdot 10^{-10}$	727
4	ბროიდენ-ფლეთჩერ-შენოს მეთოდი	დინოტომიის მეთოდი	$2.2 \cdot 10^{-9}$	2054
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$2.0 \cdot 10^{-9}$	1650
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$2.3 \cdot 10^{-9}$	410
5	სიმპისის ცენტრების მეთოდი	გრადიენტული მეთოდი მულმივი ბიჯით	$1.75 \cdot 10^{-2}$	984

ცხრილი 4.11

N	მეთოდი		შედეგი	
	ძირითადი	დამხმარე	$f^{\circ}$	$\rho$
1	უსწრაფესი დაშვების მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	$1.10 \cdot 10^{-10}$	38424
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$1.25 \cdot 10^{-10}$	4066
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$6.19 \cdot 10^{-9}$	10685
2	ფლეთერ-რივისის მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	$3.24 \cdot 10^{-6}$	988
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$5.91 \cdot 10^{-6}$	805
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$2.77 \cdot 10^{-7}$	273
3	დევიდონ-ფლეთერ-პაუელის მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	$2.45 \cdot 10^{-8}$	977
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$2.39 \cdot 10^{-8}$	656
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$4.30 \cdot 10^{-8}$	239
4	ბროიდენ-ფლეთერ-შენოს მეთოდი	დიხოტომიის მეთოდი	$5.6 \cdot 10^{-8}$	932
		ოქროს კვეთის მეთოდი	$3.6 \cdot 10^{-8}$	740
		კუბური აპროქსიმაციის მეთოდი	$3.9 \cdot 10^{-9}$	204
5	სიმძიმის ცენტრების მეთოდი	გრადიენტული მეთოდი მულმივი ბიჯით	$1.1 \cdot 10^{-5}$	357

ცხრილი 4.12

უპირობო ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

იზონ-ფუნქციონის ტეს- ტური ამოცანა	$p$	$\zeta$	$x_1$	$x_2$
სტატისტიკური ცდების შედეგები $N = 100$	1	583116.2	0.1855	0.7165
	2	518325.7	0.1855	0.7165
	3	453535.2	0.1855	0.7165
	4	388744.8	0.1855	0.7165
	5	323954.3	0.1855	0.7165
	6	259163.8	0.1855	0.7165
	7	194373.3	0.1855	0.7165
	8	129582.8	0.1855	0.7165
	9	64792.4	0.1855	0.7615
	10	1.8698	1.9324	2.1381
მაპროქსიმებული პო- ლინომები	$x_1 = 0.0397 p^2 - 0.3415 p + 0.7096$ $x_2 = 0.0323 p^2 - 0.2779 p + 1.1430$			
$p^*$	11.00			
ოპტიმალური ამონახსნი	$\bar{x}_1^* = 1.757745$ ; $\bar{x}_2^* = 1.995981$ ; $\bar{f}^* = 1.744402$			
დანაკარგები	139			
ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტება	$x_1^* = 1.743896$ ; $x_2^* = 2.030018$ ; $f^* = 1.744152$			
ჯამური დანაკარგები	215			

ცხრილი 4.13

კულის ტესტური ამოცანა	$P$	$\zeta$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
სტატისტიკური ცდების შედეგები $N = 500$	1	1162.49	1.2834	0.9372	1.2095	0.9595
	2	1035.20	1.2134	0.9602	1.2131	0.9196
	3	907.91	1.1653	1.0298	1.2083	0.9569
	4	780.61	1.1608	1.0952	1.1433	0.9968
	5	653.32	1.0979	1.0976	1.0462	0.9784
	6	526.03	0.9830	1.1264	1.0597	0.9821
	7	398.74	0.8546	1.2146	0.9307	1.0628
	8	271.44	0.7975	1.1826	0.8289	0.9914
	9	144.15	0.7803	0.9254	0.6796	0.9765
	10	16.86	0.5178	0.5706	1.0243	1.2241
მაპაროქსიმებული პოლინომები	$x_1 = -0.0058 p^2 - 0.0135 p + 1.2837$ $x_2 = -0.0198 p^2 + 0.2030 p + 0.6587$ $x_3 = 0.0019 p^2 - 0.0691 p + 1.3406$ $x_4 = 0.0035 p^2 - 0.0194 p + 0.9768$					
$p^*$	5.00					
ოპტიმალური ამონახსნი	$\bar{x}_1^* = 1.070761; \bar{x}_2^* = 1.179384;$ $\bar{x}_3^* = 1.043040; \bar{x}_4^* = 0.967230;$ $\bar{f}^* = 1.64505$					
დანაკარგები	585					
ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტება	$x_1^* = 1.066131; x_2^* = 1.137521;$ $x_3^* = 0.927334; x_4^* = 0.860746;$ $f^* = 0.017499$					
ჯამური დანაკარგები	984					

ცხრილი 4.14

როზენბროკის ტესტური ამოცანა	$p$	$f$	$x_1$	$x_2$
სტატისტიკური ცდების შედეგები $N = 200$	1	4750.81	-0.0152	-1.2358
	2	4223.26	0.4279	-1.0821
	3	3695.70	-0.0725	-0.9574
	4	3168.15	0.2669	-0.8658
	5	2640.59	0.3393	-0.6811
	6	2113.04	0.0618	-0.7252
	7	1585.48	-0.0020	-0.5872
	8	1057.92	-0.0180	-0.0079
	9	530.37	-0.0556	0.2430
	10	2.8124	1.2085	1.5902
მაპროქსიმებული პოლი- ნომები	$x_1 = 0.0212 p^2 - 0.1918 p + 0.4532$ $x_2 = 0.0432 p^2 - 0.2310 p - 0.8228$			
$p^*$	7.9375			
ოპტიმალური ამონახსნი	$\bar{x}_1^* = 0.265899$ ; $\bar{x}_2^* = 0.063984$ ; $\bar{f}^* = 0.543417$			
დანაკარგები	253			
ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტება	$x_1^* = 0.997048$ ; $x_2^* = 0.993955$ $f^* = 0.00001$			
ჯამური დანაკარგები	357			

ცხრილი 4.15

პირველ ტესტურ ამოცანაში სიმძიმის ცენტრების მეთოდის დანაკარგებმა შეადგინა  $\rho = 215$ , რომელიც ეტაპების მიხედვით შემდეგნაირად განაწილდა. გამოთვლების პირველ ეტაპზე ჩატარდა  $N=10$  რაოდენობის წინასწარი სტატისტიკური ცდების სერია და დანაკარგებმა შესაბამისად შეადგინა  $\rho_1 = 10$ .

გამოთვლების მეორე ეტაპზე, სადაც ჩატარდა  $N=100$  რაოდენობის ძირითადი სტატისტიკური ცდა, დანაკარგებმა შეადგინა  $\rho_2 = 100$ , ხოლო მესამე ეტაპზე ექსტრემუმის კოორდინატების მიახლოებით მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის დანაკარგებმა შეადგინა  $\rho_3 = 29$ . სამი ეტაპის ჯამში, სადაც  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 139$ , მიღებულ იქნა მინიმუმის შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობა:  $\bar{x}_1^* = 1.7577$ ,  $\bar{x}_2^* = 1.9960$ ,  $\bar{f}^* = 1.7444$ . მიღებული შედეგის გრადიენტული მეთოდით დაზუსტებისათვის საჭირო გახდა საოპტიმიზაციო ფუნქციის  $\rho_4 = 76$ -ჯერ გამოთვლა, რის შედეგად განსაზღვრულ იქნა ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი  $x_1^* = 1.7439$ ,  $x_2^* = 2.0300$ ,  $f^* = 1.744$ .

ამგვარად, პირველ ტესტურ ამოცანაში სიმძიმის ცენტრების მეთოდის ჯამური დანაკარგები პროცენტულად შემდეგნაირად განაწილდა: ექსტრემუმის მიახლოებითი წერტილის განსაზღვრაზე - 64.4%, ხოლო მის დაზუსტებაზე - 35.4%.

პირველ ტესტურ ამოცანაში მინიმალური დანაკარგების მხრივ განსაკუთრებით გამოირჩევა ფლეთიერ-რივისისა და ბროიდენ-ფლეთიერ-შენოს მეთოდები, რომლებიც გადაადგილების ბიჯის განსაზღვრისათვის კუბური აპროქსიმაციის დამხმარე მეთოდს იყენებს. მათი დანაკარგები შესაბამისად ტოლია  $\rho = 92$  და  $\rho = 133$ . ცხადია, მოცემულ შემთხვევაში, აღნიშნული მეთოდების ეფექტურობა სწრაფქმედების მიხედვით მაღალია. მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ სიმძიმის ცენტრების მეთოდის გარდა, ყველა დანარჩენი მეთოდის დანაკარგების სიდიდე საწყისი  $x^{(0)}$  წერტილის შერჩევაზე დამოკიდებული, მაშინ აღნიშნული მეთოდების ეფექტურობის განსაზღვრაში გარკვეული კორექტივების შეტანა საჭირო.

მეორე ტესტურ ამოცანაში სიმძიმის ცენტრების მეთოდის დანაკარგებმა შეადგინა  $\rho = 984$ , რომელიც ეტაპების მიხედვით შემდეგნაირად განაწილდა:  $\rho_1 = 50$ ,  $\rho_2 = 500$ ,  $\rho_3 = 35$ ,  $\rho_4 = 399$ . ჯამური დანაკარგების 59,4% მოხმარდა მინიმუმის მიახლოებითი მნიშვნელობის განსაზღვრას, ხოლო 40,6% - მის დაზუსტებას. ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, დანაკარგების მხრივ საუკეთესო შედეგები აღმოაჩნდა ფლეთიერ-რივისისა და ბროიდენ-ფლეთიერ-შენოს მეთოდებს, რომლებიც გადაადგილების ოპტიმალური ბიჯის განსაზღვრისათვის კუბური აპროქსიმაციის მეთოდს იყენებს.

მესამე ტესტურ ამოცანაში სიმძიმის ცენტრების მეთოდის დანაკარგებმა შეადგინა  $\rho = 357$ , რომელიც ეტაპების მიხედვით შემდეგნაირად განაწილდა:  $\rho_1 = 20$ ,  $\rho_2 = 200$ ,  $\rho_3 = 33$ ,  $\rho_4 = 104$ . ჯამური დანაკარგების 71% მოხმარდა მინიმუმის მიახლოებითი მნიშვნელობის განსაზღვრას, ხოლო 29% - მის დაზუსტებას. ამ შემთხვევაშიც მინიმალური დანაკარგებით გამოირჩევა ფლეთიერ-რივისისა და ბროიდენ-ფლეთიერ-შენოს მეთოდები.

ამგვარად, ტესტურ ამოცანებზე ჩატარებული ექსპერიმენტების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ შემდეგი. სიმძიმის ცენტრების მეთოდი მიახლოებითი მეთოდია, რომელიც დასაშვები სიზუსტით აბსოლუტური ექსტრემუმის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა. სწრაფქმედების მიხედვით მისი ეფექტურობა არ არის დამოკიდებული საწყისი წერტილის შერჩევაზე და ამიტომ სხვადასხვა სირთულის ამოცანების გადაწყვეტისას მის დანაკარგებს ძირითადად სტატისტიკური ცდების რაოდენობა და ექსტრემუმის ძებნის დამხმარე ალგორითმი განაპირობებს.  $N$  რაოდენობის სტატისტიკური ცდების ჩატარების შედეგად, იგი შედარებით სწრაფად ახდენს აბსოლუტური ექსტრემუმის მიდამოს ლოკალიზებას, რომელშიც ნებისმიერი ლოკალური დეტერმინირებული მეთოდით შესაძლებელია ოპტიმუმის დაზუსტება. ცხადია, ექსტრემუმის ძებნის საბოლოო სტადიაზე შედარებით სწრაფქმედი ალგორითმის გამოყენება მნიშვნელოვნად შეამცირებს დანაკარგების სიდიდეს და მეთოდის ეფექტურობის მაჩვენებლებს კიდევ უფრო გააუმჯობესებს.

სიმძიმის ცენტრების მეთოდის ეფექტურობა განსაკუთრებით თვალსაჩინოა დიდი განზომილების ამოცანებში, სადაც დამოუკიდებელი  $n$  ცვლადების რაოდენობის გაზრდა პირველი და მეორე რიგის დეტერმინირებული მეთოდების შრომატევადობის ზრდას იწვევს დაახლოებით  $n^2$ -ჯერ კვადრატული ფუნქციებისათვის და  $n^3$ -ჯერ არაკვადრატული ფუნქციებისათვის. როგორც ცნობილია, აღნიშნული კლასის მეთოდებში, სადაც ექსტრემუმთან მიახლოების სტრატეგია შესაბამისად (4.73) და (4.90) რეკურენტული ფორმულების საფუძველზე განისაზღვრება,  $k$ -ური იტერაციის თითოეულ წერტილში მიმართულების ვექტორის განსაზღვრისათვის აუცილებელია საოპტიმიზაციო ფუნქციის შესაბამისად  $(n+1)$ -ჯერ და  $n(n+1)/2$ -ჯერ გამოთვლა. თუ იტერაციების რიცხვს აღვნიშნავთ  $m$ -ით, მაშინ მათი საშუალო ჯამური დანაკარგების ტოლი იქნება:

$$\rho' = m(0.25n^2 + 0.75n + 0.5). \quad (4.189)$$

სიმძიმის ცენტრების მეთოდის შრომატევადობა ცვლადის  $n$  რაოდენობის გაზრდით არ იცვლება. იგი მხოლოდ სტატისტიკური ცდების რაოდენობაზეა დამოკიდებული. რადგან, ძირითადი ალგორითმის თანახმად, პირველ ეტაპზე  $f(x)$  ფუნქციის გამოთვლა აუცილებელია  $\rho_1 = 0.1N$  -ჯერ, მეორე ეტაპზე -  $\rho_2 = N$  -ჯერ, მესამე ეტაპზე, (4.158) დამხმარე ამოცანის გადასაწყვეტად, საოპტიმიზაციო ფუნქციის გამოთვლა არ აღებატება  $\rho_3 = 0.3N$  სიდიდეს, ხოლო მეოთხე ეტაპზე, ოპტიმალური ამონახსნის დასაზუსტებლად, შეიძლება დაეუშვათ  $\rho_4 = N$ , ამიტომ ჯამური დანაკარგებისათვის გვექნება

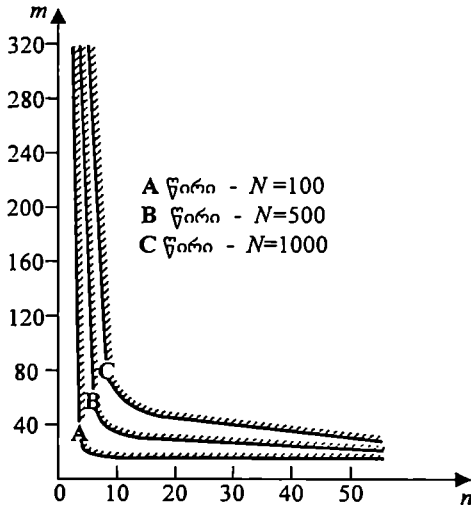
$$\rho'' = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 2.4N. \quad (4.190)$$

მეთოდების სწრაფქმედების მიხედვით შესადარებლად (4.189) და (4.190) გამოსახულებები ერთმანეთს გაუტოლოთ და განესაზღვროთ  $m$ -ის მიმართ:

$$m = \frac{2.4N}{0.25n^2 + 0.75n + 0.5}. \quad (4.191)$$



(4.191) დამოკიდებულების საფუძველზე,  $N$ -ის კონკრეტული მნიშვნელობის დროს,  $n$  ცვლადისა და  $m$  იტერაციის ის რაოდენობა განისაზღვრება, რომლის დროსაც სიმძიმის ცენტრების მეთოდისა და ზემოთ აღნიშნული დეტერმინირებული მეთოდების შრომატევადობა (სწრაფქმედება, დანაკარგები) თანაბარია. (4.191) გამოსახულების საფუძველზე აგებული წირების ოჯახი (ნახ. 4.36) საშუალებას გვაძლევს ვიმსჯელოთ იმის შესახებ, თუ ოპტიმიზაციის მოცემული ამოცანა რომელი მეთოდით უფრო სწრაფად გადაწყდება. ასე, მაგალითად, როცა  $N = 100$ , მაშინ A წირის დაშტრიხული არე ამოცანის ისეთ პარამეტრებს შეესაბამება, რომლის დროსაც სიმძიმის ცენტრების მეთოდის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია. მის საპირისპირო არეში კი უპირატესობა პირველ და მეორე რიგის დეტერმინირებულ მეთოდებს ეკუთვნის. როცა  $N = 500$ , მაშინ B წირის დაშტრიხული არე ამოცანის ისეთ პარამეტრებს შეესაბამება, როცა სიმძიმის ცენტრების მეთოდის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია და ა.შ.



ნახ. 4.36

ამგვარად, ჩატარებული კვლევის საფუძველზე შეიძლება დაეასკნათ, რომ სიმძიმის ცენტრების მეთოდი მისაღები სიზუსტითა და კომპიუტერული დროის უმნიშვნელო დანახარჯებით უზრუნველყოფს ექსტრემალური ამოცანების გადაწყვეტას. მისი ეფექტურობა განსაკუთრებით თვალსაჩინოა მრავალგანზომილებიან ამოცანებში, რაც ესოდენ მნიშვნელოვანია საინჟინრო პრაქტიკაში.

# თავი მესამე

## პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

### 5.1 არაწრფივი დანრობრამების ამოცანების გამომეტრიული ინტერპრეტაცია

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა

$$\max\{f(x) \mid g(x) \leq 0; h(x) = 0; x \in R^n\}, \quad (5.1)$$

სადაც  $f(x)$ ,  $g(x)$  და  $h(x)$  არაწრფივი ფუნქციებია.

მოცემული ამოცანის დასაშვებ ამონახსნების სიმრავლე

$$\Omega = \{x \in R^n \mid g(x) \leq 0; h(x) = 0\} \quad (5.2)$$

გეომეტრიულად წარმოადგენს ამოზნექილ ან არაამოზნექილ შემოსაზღვრულ არეს. ამოცანის თანახმად, საჭიროა მოიძებნოს საოპტიმიზაციო ცვლადი ვექტორის ისეთი დასაშვები  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \Omega$  მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ადგილი ექნება შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (5.3)$$

(5.1) ამოცანის ამოხსნა, ზოგად შემთხვევაში, რთულ პრობლემას წარმოადგენს, რომელიც განპირობებულია  $f(x)$ ,  $g(x)$  და  $h(x)$  ფუნქციების გამოსახულებებში არაწრფივობის არსებობით. განსაკუთრებით სერიოზულ პრობლემებთანაა დაკავშირებული არაწრფივი დაპროგრამების არაამოზნექილი ამოცანების გადაწყვეტა [142, 145], რომელთა ძირითად დამახასიათებელ თავისებურებას, არაწრფივობასთან ერთად, მულტიმოდალურობა ანუ მიზნის ფუნქციაში რამდენიმე ექსტრემუმის არსებობა წარმოადგენს. როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში, საჭიროა  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტური (გლობალური) ექსტრემუმის განსაზღვრა.

ზოგად შემთხვევაში, არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნა დაიყვანება დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლის ისეთი წერტილის განსაზღვრაზე, რომელზეც გაივლის უმაღლესი დონის  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z$  ჰიპერზედაპირი. აღნიშნული წერტილი შეიძლება მდებარეობდეს დასაშვები არის როგორც საზღვარზე, ისე მის შიგნით.

(5.1) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოიცავს შემდეგ ეტაპებს:

1. განისაზღვრება დასაშვებ ამონახსნების  $\Omega$  არე (როცა  $\Omega$  ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია);
2. აიგება ჰიპერზედაპირი  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z$ ;
3. განისაზღვრება უმაღლესი დონის ჰიპერზედაპირი ან დასაშვებ ამონახსნების  $\Omega$  სიმრავლეზე  $f(x)$  ფუნქციის ზემოდან შემოუსაზღვრელობის გამო დადგინდება ის შემთხვევა, როცა ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია;
4. განისაზღვრება  $\Omega$  სიმრავლის ის  $x^*$  წერტილი, რომელზეც გაივლის უმაღლესი დონის ჰიპერზედაპირი და ამ წერტილში გამოითვლება მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა  $f^* = f(x^*)$ .

მაგალითი 5.1 მოცემულია მიზნის ფუნქცია

$$f(x) = 6x_1 - x_1^2 + x_2 \quad (5.4)$$

ვიპოვოთ  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, როცა ადგილი აქვს უტოლობათა შემდეგი სისტემის დაკმაყოფილებას:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_2 \leq 4, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

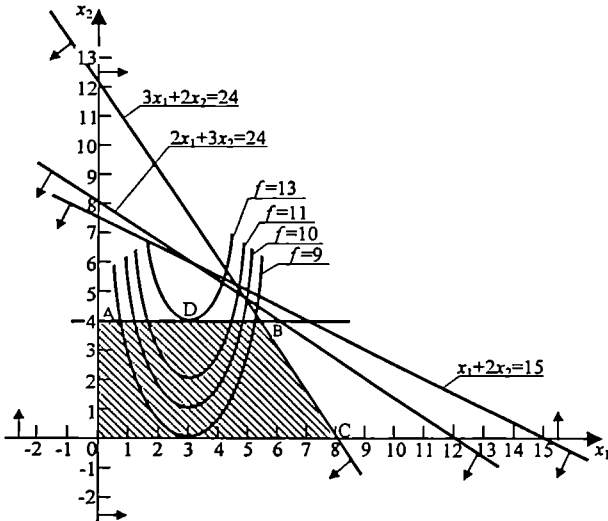
ამოხსნა. ვინაიდან მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია არაწრფივია, ამიტომ (5.4)-(5.5) ამოცანა არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას წარმოადგენს. მოცემული ამოცანის დასაშვებ ამონახსნების არე  $OABC$  მრავალკუთხედი (ნახ. 5.1). მაშასადამე, ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა განვსაზღვროთ  $OABC$  მრავალკუთხედის ისეთი წერტილი, რომელშიც მიზნის ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს. ავგავთ დონის წირი  $f = 6x_1 - x_1^2 + x_2 = z$ , სადაც  $z$  რაღაც მუდმივი სიდიდეა, და  $z$ -ის სხვადასხვა მნიშ-

**პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები**

ენელობის დროს იგი გამოვიკვლიოთ.  $Z$ -ის თითოეულ მნიშვნელობას შეესაბამება პარაბოლა, რომელიც  $Ox_1$  ღერძიდან შიშ უფრო დაშორებულია, რაც უფრო მეტია  $Z$ . ცხადია, ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიღწევს ერთ-ერთი პარაბოლის  $OABC$  მრავალკუთხედთან შეხების წერტილში, ე.ი.  $D$  წერტილში (ნახ. 5.1), სადაც დონის წირი  $f = 6x_1 - x_1^2 + x_2 = 13$   $OABC$  მრავალკუთხედის  $AB$  გვერდს ეხება.  $D$  წერტილის კოორდინატები შეიძლება განისაზღვროს განტოლებათა შემდეგი სისტემაშიდან:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_1^2 + x_2 = 13, \\ x_2 = 4, \end{cases}$$

რომლის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ  $x_1^* = 3$ ;  $x_2^* = 4$ . ოპტიმალურ წერტილში გამოთვლილი ფუნქციის მნიშვნელობაა  $f^* = f(x_1^*, x_2^*) = 13$ .



ნახ. 5.1

როგორც ვხედავთ, (5.4)-(5.5) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი, მართალია, დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედის საზღვარზე მდებარეობს, მაგრამ იგი მის წვეროს არ წარმოადგენს. ამიტომ მრავალკუთხედის წვეროების გადარჩევის პროცე-

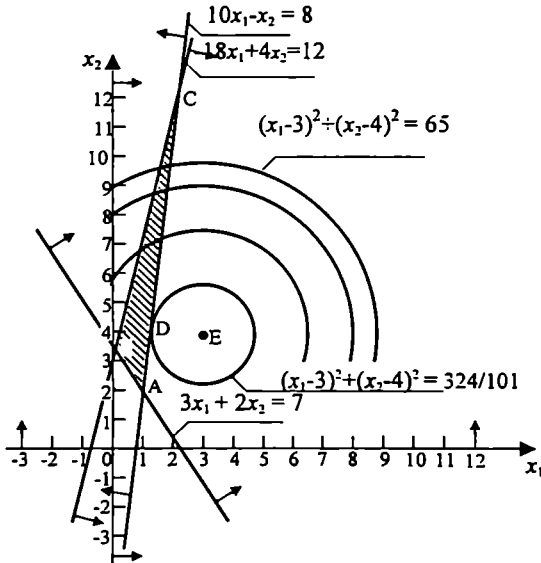
ღერა, რომელსაც ადგილი აქვს წრფივი დაპროგრამებაში, მოცემულ ამოცანაში არ გამოიყენება.

მაბალითი 5.2 მოცემულია მიზნის ფუნქცია

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2. \quad (5.6)$$

ვიპოვოთ  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობა, როცა ადგილი აქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემის დაკმაყოფილებას:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$



ნახ. 5.2

ამოხსნა. მოცემულ ამოცანაში დასაშვებ ამონახსნთა არეს ABC სამკუთხედი წარმოადგენს (ნახ. 5.2), ხოლო ღონის წირებს - წრეწირი  $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = z$  ცენტრით  $E(3;4)$  წერტილში და  $r = \sqrt{z}$  რადიუსით. ცხადია,  $z$  სიდიდის გაზრდის

ან შემცირების შემთხვევაში  $f$  ფუნქციის მნიშვნელობა შესაბამისად გაიზრდება ან შემცირდება.

თუ შემოვხაზავთ სხვადასხვა რადიუსიან წრეწირებს ცენტრით E წერტილში, დაინახავთ, რომ მიზნის ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს D წერტილში, სადაც წრეწირი ეხება დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედს. ამ წერტილის კოორდინატების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ  $10x_1 - x_2 = 8$  წრფისა და D წერტილში წრეწირის მხების საკუთხო კოეფიციენტების ტოლობით.

წარმოვადგინოთ წრფის ზოგადი განტოლება შემდეგი სახით:  $x_2 = 10x_1 - 8$ , საიდანაც ჩანს, რომ მისი საკუთხო კოეფიციენტი ტოლია  $\kappa_1 = 10$ .

D წერტილში წრეწირის მხების საკუთხო კოეფიციენტი განვსაზღვროთ როგორც მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა ამავე წერტილში. (5.6) გამოსახულებაში  $x_2$  განვიხილოთ როგორც  $x_1$  ცვლადის არაცხადი ფუნქცია, რომლის გაწარმოებით მივიღებთ

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2 = 0,$$

საიდანაც

$$x_2 = \kappa_2 = -(x_1 - 2)/(x_2 - 4).$$

რადგან  $\kappa_1 = \kappa_2$ , ამიტომ გვექნება  $x_1 + 10x_2 = 43$ . თუ უკანასკნელ განტოლებასთან ერთად განვიხილავთ იმ წრფის განტოლებას, რომელზეც D წერტილი ძევს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$$

საიდანაც  $x_{1\min}^* = 123/101$ ;  $x_{2\min}^* = 422/101$ . ამგვარად,

$$f_{\min}^* = \left(\frac{123}{101} - 3\right)^2 + \left(\frac{422}{101} - 4\right)^2 = \frac{324}{101}.$$

მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, როგორც ნახ. 5.2-დან ჩანს, BC და AC მონაკვეთების გადაკვეთის C წერტილში მიიღწევა. ამ უკანასკნელის კოორდინატები განისაზღვრება განტოლებათა შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8 \\ -18x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}$$

და იგი ტოლია:  $x_{1\max}^* = 2$ ,  $x_{2\max}^* = 12$ . ამგვარად,

$$f_{\max}^* = (2 - 3)^2 + (12 - 4)^2 = 65.$$

## 5.2 ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის კერძო შემთხვევა

$$\max \left\{ f(x) \mid h_i(x) = b_i, i = \overline{1, m}; x \in R^n \right\}, \quad (5.8)$$

სადაც  $f(x)$  და  $h(x)$  არაწრფივი უწყვეტი ფუნქციებია და ნებისმიერ  $x \in R^n$  წერტილში მათ პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები გააჩნია.

(5.8) ამოცანა, რომელშიც დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე მხოლოდ ტოლობებით მოცემული შეზღუდვებითაა განსაზღვრული, მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია როგორც ოპტიმიზაციის კლასიკური ამოცანა.

აღნიშნული ამოცანის გადასაწყვეტად შემოგვაქვს ცვლადების რაღაც ნაკრები  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , რომელსაც მამრავლებს უწოდებენ, ვადგენთ ლაგრანჟის ფუნქციას

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)], \quad (5.9)$$

ვეძებთ კერძო წარმოებულებს  $\frac{\partial L}{\partial x_j}, j = \overline{1, n}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, i = \overline{1, m}$  და განვიხილავთ  $n+m$

ცვლადის  $n+m$  განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (5.10)$$

(5.10) სისტემის ყოველი ამონახსნი განსაზღვრავს  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  წერტილს, რომელშიც  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციის ექსტრემუმი შეიძლება არსებობდეს. აქედან გამომდინარე, ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით მინიმიზაციის (5.8) ამოცანის გადაწყვეტა ითვალისწინებს განტოლებათა (5.10) სისტემის ამონახსნის საფუძველზე სტაციონარული წერტილების განსაზღვრას და მათ შემდგომ გამოკვლევას ოპტიმალური ამონახსნის დასადგენად.

ამგვარად, ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით ოპტიმიზაციის პროცესი შემდეგ ეტაპებს მოიცავს:

1. ლაგრანჟის ფუნქციის შედგენა;

2.  $x_1$  და  $x_2$  ცვლადების მიხედვით ლაგრანჟის ფუნქციის კერძო წარმოებულების განსაზღვრა;
  3. განტოლებათა (5.10) სისტემის ამოხსნის საფუძველზე სტაციონარული წერტილების განსაზღვრა;
  4. სტაციონარული წერტილების გამოკვლევა და ოპტიმალური ამონახსნის დადგენა.
- მაბალაოთი 5.3. მოცემულია მიზნის ფუნქცია

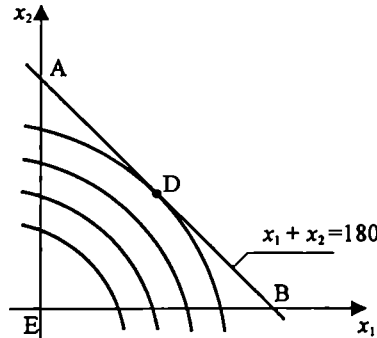
$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2. \quad (5.11)$$

ვიპოვოთ  $f(x)$  ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა, როცა ადგილი აქვს შეზღუდვათა შემდეგი პირობების დაკმაყოფილებას:

$$x_1 + x_2 = 180, \quad (5.12)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5.13)$$

ამოხსნა. თავდაპირველად მოცემული ამოცანა გრაფიკულად ამოვხსნათ. (5.11)-(5.13) ამოცანაში დასაშვებ ამონახსნთა არეს AB მონაკვეთი წარმოადგენს, ხოლო ღონის წირებს - წრეწირები ცენტრით  $E(-2; -4)$  წერტილში (ნახ. 5.3).



ნახ. 5.3

თუ  $E$  წერტილში სხვადასხვა რადიუსიან წრეწირებს შემოვხაზავთ, დავინახავთ რომ მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა  $D$  წერტილშია. ამგვარად, საჭიროა  $D$  წერტილის კოორდინატების განსაზღვრა. ვინაიდან  $x_1 + x_2 = 180$  წრფის სა-



კუთხო კოეფიციენტი, რომელიც ტოლია  $\kappa_1 = -1$ ,  $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = z$  წრეწირის  $D$  წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტს ემთხვევა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\kappa_2 = \dot{x}_2 = -(2 + x_1)/(4 + x_2) = -1,$$

საიდანაც  $x_1 - x_2 = 2$ . თუ უკანასკნელ განტოლებასთან ერთად განვიხილავთ წრეწირის განტოლებას, რომელზეც  $D$  წერტილი ძევს, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180, \end{cases}$$

რომლის ამოხსნის შედეგად გვექნება  $x_1^* = 91$ ;  $x_2^* = 89$  და  $f_{\min}^* = 17\,278$ .

ამოხსნათ იგივე ამოცანა ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით, ე.ი. ვიპოვოთ (5.11) ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა (5.12) პირობის გათვალისწინებით (საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენების დროს საოპტიმიზაციო ცვლადების არაუარყოფითობის (5.13) პირობა უგულებელყოფილია). შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

განვსაზღვროთ მისი კერძო წარმოებულები  $x_1$ ,  $x_2$  და  $\lambda$ -ს მიხედვით და შევადგინოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

რომლის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ  $x_1^* = 91$ ;  $x_2^* = 89$ ;  $\lambda^* = 186$ .

ამგვარად, მივიღეთ  $D$  წერტილის კოორდინატები, რომელიც (5.12) პირობას აკმაყოფილებს. თუ გამოვიყენებთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $D$  წერტილი  $f(x)$  ფუნქციის პირობითი მინიმუმის წერტილია.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ იგივე შედეგი შეიძლება მიღებულ იქნეს იმ შემთხვევაშიც, თუ  $f(x)$  ფუნქციის ექსტრემუმის განსაზღვრის ამოცანას  $f(x)$ -ის გარდაქმნის შედეგად მიღებულ  $\tilde{f}(x)$  ფუნქციის უპირობო ექსტრემუმის განსაზღვრის ამოცანაზე

დავიყვანოთ. სახელდობრ, თუ (5.12) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ  $x_2 = 180 - x_1$  და ამ უკანასკნელს (5.11) გამოვსახულებავში შევიტანოთ, მივიღებთ ერთი ცვლადის ფუნქციას

$$\tilde{f} = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2,$$

რომლის სტაციონარული წერტილი განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$\frac{d\tilde{f}}{dx_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0 \Rightarrow 4x_1 - 364 = 0,$$

საიდანაც  $x_1^* = 91$ ;  $x_2^* = 89$ . ზემოთ განხილულის ანალოგიურად შეიძლება დავადგინოთ, რომ მიღებულ წერტილში  $f$  ფუნქციას მინიმალური მნიშვნელობა გააჩნია.

ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს, აგრეთვე, იმ შემთხვევაში, როცა შეზღუდვათა სისტემა უტოლობებითაა წარმოდგენილი. განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის შემდეგი კერძო შემთხვევა:

$$\min \left\{ f(x) \mid g(x) \leq b; x \in R^n \right\}. \quad (5.14)$$

აღნიშნული ამოცანის გადაწყვეტისათვის თავდაპირველად საჭიროა ვიპოვოთ  $f(x)$  ფუნქციის უპირობო მინიმუმის წერტილები, რისთვისაც უნდა ამოიხსნას განტოლება

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.15)$$

მიღებული წერტილებიდან შეირჩევა ის, რომლის კოორდინატები დააკმაყოფილებს მკაცრი უტოლობით განსაზღვრულ შეზღუდვას

$$g(x) < b. \quad (5.16)$$

მეორე ეტაპზე საჭიროა ამოიხსნას განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} = 0, & k = \overline{1, n}, \\ g(x) = b. \end{cases} \quad (5.17)$$

(5.17) სისტემის ამოხსნის შედეგად მიღებული წერტილებისა და პირველ ეტაპზე განსაზღვრული წერტილების გამოკვლევის საფუძველზე დადგინდება (5.14) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი.

## 5.3 ამოზნეკილი დაპროგრამების ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad x \in R^n \right\}, \quad (5.18)$$

სადაც  $f(x)$  და  $g_i(x)$  მრავალგანზომილებიანი ფუნქციებია.

ასეთი ზოგადი ფორმით ფორმულირებული ამოცანის გადაწყვეტისათვის უნივერსალური და ეფექტური მეთოდი არ არსებობს. ეფექტური რიცხვითი მეთოდები შემუშავებულია მხოლოდ ცალკეული კლასის ამოცანებისათვის, სადაც  $f$  და  $g_i$  ფუნქციებზე დამატებითი შემზღუდავი პირობებია გათვალისწინებული. კერძოდ, ეს ეხება არაწრფივი დაპროგრამების ისეთ ამოცანებს, სადაც  $f$  ამოზნეკილი (ჩაზნეკილი) ფუნქციაა, ხოლო დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \mid g_i(x) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \right\}, \quad (5.19)$$

- ამოზნეკილი სიმრავლე.

ბანსაზღვრება 5.1 ამოზნეკილ  $\Omega$  არეში  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქცია ამოზნეკილია, თუ ნებისმიერი ორი  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega$  წერტილისთვის და ნებისმიერი  $\lambda \in [0; 1]$  მამრავლისთვის სრულდება თანაფარდობა

$$f[\lambda x^{(2)} + (1 - \lambda)x^{(1)}] \leq \lambda f(x^{(2)}) + (1 - \lambda)f(x^{(1)}). \quad (5.20)$$

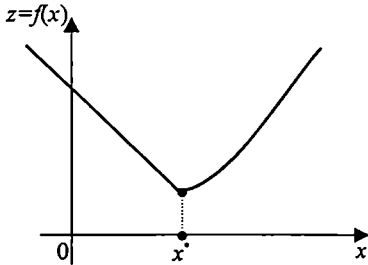
ბანსაზღვრება 5.2 ამოზნეკილ  $\Omega$  არეში  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქცია ჩაზნეკილია, თუ ნებისმიერი ორი  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega$  წერტილისთვის და ნებისმიერი  $\lambda \in [0; 1]$  მამრავლისათვის სრულდება თანაფარდობა:

$$f[\lambda x^{(2)} + (1 - \lambda)x^{(1)}] \geq \lambda f(x^{(2)}) + (1 - \lambda)f(x^{(1)}). \quad (5.21)$$

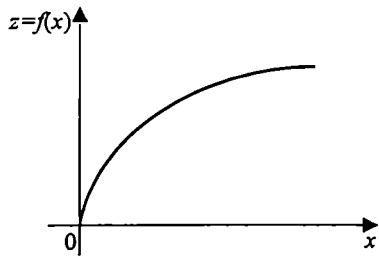
საჭიროა შევნიშნოთ, რომ თუ  $f(x)$  ამოზნეკილია, მაშინ  $-f(x)$  ჩაზნეკილი ფუნქციაა, და შებრუნებით, თუ  $f(x)$  ჩაზნეკილი ფუნქციაა, მაშინ  $-f(x)$  ამოზნეკილია.

**პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები**

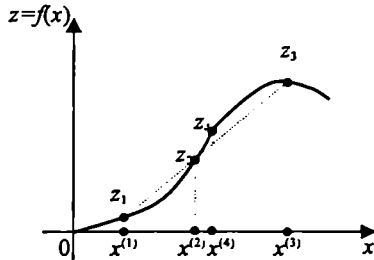
ჩვენ ვიტყვით, რომ  $z = f(x)$  ჰიპერზედაპირი ამოზნექილია, თუ მისი ნებისმიერი ორი  $(x^{(1)}, z_1)$  და  $(x^{(2)}, z_2)$  წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მოცემულ ზედაპირზე ან მის ზემოთ მდებარეობს. ერთცვლადიანი ამოზნექილი ფუნქცია გამოსახულია ნახ. 5.4-ზე. ანალოგიურად,  $z = f(x)$  ჰიპერზედაპირი ჩაზნექილია, თუ მისი ნებისმიერი ორი  $(x^{(1)}, z_1)$  და  $(x^{(2)}, z_2)$  წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მოცემულ ზედაპირზე ან მის ქვემოთ მდებარეობს. ერთცვლადიანი ფუნქცია, რომელიც გამოსახულია ნახ. 5.5-ზე ჩაზნექილია, როცა  $x \geq 0$ . ნახ. 5.6-ზე წარმოდგენილი ფუნქცია კი არც ამოზნექილია და არც ჩაზნექილი, ვინაიდან მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია  $(x^{(1)}, z_1)$  და  $(x^{(3)}, z_3)$ ,  $x^{(1)}$  და  $x^{(2)}$  უბანზე  $f(x)$ -ის ზემოთ მდებარეობს, ხოლო  $x^{(2)}$  და  $x^{(3)}$  უბანზე -  $f(x)$ -ის ქვემოთ. მაგრამ, ამავე დროს, იგივე ფუნქცია ამოზნექილია, როცა  $0 \leq x \leq x^{(2)}$ , და ჩაზნექილია, როცა  $x \geq x^{(2)}$ .



ნახ. 5.4



ნახ. 5.5



ნახ. 5.6

**ბანსაზღვრება 5.3.** თუ  $f(x)$  ამოზნეილი (ჩაზნეილი) ფუნქციაა, ხოლო  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , - ამოზნეილი ფუნქციები, მაშინ ოპტიმიზაციის (5.18) ამოცანა ამოზნეილი დაპროგრამების ამოცანას წარმოადგენს.

**თქორება 5.1** ამოზნეილი დაპროგრამების ამოცანაში ნებისმიერი ლოკალური მინიმუმი (მაქსიმუმი) გლობალურ მინიმუმს (მაქსიმუმს) წარმოადგენს.

**ბანსაზღვრება 5.4.** ამოზნეილი დაპროგრამების (5.18) ტიპის ამოცანებში ლაგრანჟის ფუნქციას უწოდებენ შემდეგი სახის გამოსახულებას:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)], \quad (5.22)$$

სადაც  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ლაგრანჟის მამრავლებია.

ამოზნეილი დაპროგრამების ამოცანებისთვის ოპტიმალობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს განსაზღვრავს კუნ-ტაკერის ცნობილი თეორემა, რომლის ანალიზური დასაბუთება მეორე თავში იყო განხილული. აღნიშნული თეორემის თანახმად, თუ  $f(x)$  და  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ  $(x^*, \lambda^*)$  წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს ამოზნეილი დაპროგრამების (5.18) ამოცანის ამონახსნს, როცა ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.23)$$

პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

$$x_j^* \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.24)$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.26)$$

$$\lambda_i^* \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.27)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.28)$$

სადაც  $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j}$  და  $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i}$  ლაგრანჟის ფუნქციის შესაბამისი კერძო წარმო-

ებულების მნიშვნელობებია უნაგირა წერტილში. საჭიროა აღინიშნოს, რომ  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმიზაციის შემთხვევაში (5.23) და (5.26) გამოსახულებებში უტოლობის ნიშანი საწინააღმდეგო ნიშნით უნდა შეიცვალოს.

ზემოთ აღნიშნულ ყველა იმ მოთხოვნას, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წერტილის აუცილებელი და საკმარისი პირობები (5.23)-(5.28) გამოსახულებების სახით ჩაეწეროს, აკმაყოფილებს კვადრატული დაპროგრამების ამოცანა, რომლის მათემატიკურ ფორმულირებამდე შემოვიტანოთ ზოგიერთი განსაზღვრება.

**ბანსაზღვრება 5.5.**  $n$  ცვლადის შემდეგი სახის რიცხვით  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციას კვადრატულ ფორმას უწოდებენ, თუ

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj} x_k x_j = x^T D x, \quad (5.29)$$

სადაც  $D_{nn} = [d_{kj}]$ ,  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**ბანსაზღვრება 5.6.** კვადრატული  $F$  ფორმა დადებითად (უარყოფითად) განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადის ნებისმიერი  $x \neq 0$  მნიშვნელობისთვის  $x^T D x > 0$  ( $x^T D x < 0$ ).

**ბანსაზღვრება 5.7.** კვადრატული  $F$  ფორმა დადებითად (უარყოფითად) ნახევრადგანსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის  $x^T D x \geq 0$  ( $x^T D x \leq 0$ ) და ამავე დროს არსებობს ისეთი  $x \neq 0$ , რომ  $x^T D x = 0$ .

**თეორემა 5.2** კვადრატული ფორმა ამოზნეკილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი დადებითად ნახევრადგანსაზღვრულია, და ჩაზნეკილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი უარყოფითად ნახევრადგანსაზღვრულია.

**ბანსაზღვრება 5.8.** შემდეგი სახის ამოცანა:

$$\min(\max) \left\{ f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj} x_k x_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}; x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right\} \quad (5.30)$$

კვადრატული დაპროგრამების ამოცანას წარმოადგენს, თუ კვადრატული ფორმა  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj} x_k x_j$  დადებითად (უარყოფითად) ნახევრადგანსაზღვრულია.

კვადრატული დაპროგრამების ფორმულირებული ამოცანისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj} x_k x_j + \lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j). \quad (5.31)$$

თუ  $(x^0, \lambda^0)$  წერტილი  $L$  ფუნქციის უნაგირა წერტილია, მაშინ ამ წერტილში ადგილი აქვს (5.23)-(5.28) პირობების დაკმაყოფილებას. (5.23) და (5.26) უტოლობების ტოლობებად გარდაქმნის მიზნით შემოვიტანოთ დამატებითი  $v_j, j = \overline{1, n}$ , და  $w_i, i = \overline{1, m}$ , ცვლადები. მაშინ კვადრატული დაპროგრამების ამოცანების ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები შემდეგნაირად ჩაიწერება:

პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} + v_j = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.33)$$

$$x_j^* v_j = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.34)$$

$$\lambda_i^* w_i = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.35)$$

$$x_j^* \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad w_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.36)$$

ამგვარად, კვადრატული დაპროგრამების (5.30) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრისათვის საჭიროა მოძებნილ იქნეს (5.32) და (5.33) წრფივ განტოლებათა სისტემის არაუარყოფითი ამონახსნი, რომელიც (5.34) და (5.35) პირობებს დააკმაყოფილებს. აღნიშნული ამოცანის გადასაწყვეტად კი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ხელოვნური ბაზისის მეთოდი, რომელიც მესამე თავში განვიხილეთ. ეს უკანასკნელი საშუალებას გვაძლევს სასრული რაოდენობის იტერაციული პროცედურების შედეგად დავადგინოთ საწყისი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი.

ამგვარად, კვადრატული დაპროგრამების (5.30) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის ძებნის პროცესი შემდეგ ეტაპებს მოიცავს:

1. ლაგრანჟის ფუნქციის შედგენა;
2. ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წერტილის აუცილებელი და საკმარისი პირობების (5.32)-(5.36) გამოსახულებების სახით ჩაწერა;
3. ხელოვნური ბაზისის მეთოდის გამოყენების საფუძველზე ლაგრანჟის ფუნქციაში უნაგირა წერტილის არარსებობის დადგენა ან მისი არსებობის შემთხვევაში შესაბამისი კოორდინატების მოძებნა.
4. საწყისი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის დაფიქსირება და მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის განსაზღვრა.

**მაბალითი 5.4.** მოცემულია კვადრატული მიზნის ფუნქცია



$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2. \quad (5.37)$$

ვიპოვოთ  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \end{cases} \quad (5.38)$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ამოხსნა. მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია წრფივი  $f_1 = 2x_1 + 4x_2$  და უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული  $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$  ფუნქციების ჯამს წარმოადგენს.  $f_1$  შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჩაზნექილი ფუნქცია, ხოლო  $f_2$  უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა. ამიტომ  $f(x)$  ჩაზნექილი ფუნქციაა. ამოცანის შეზღუდვების სისტემა მხოლოდ წრფივ უტოლობებს შეიცავს. მაშასადამე, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს კუნ-ტაკერის თეორემა. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

და შედგენილი  $L$  ფუნქციისათვის, (5.32)-(5.36) გამოსახულებების მიხედვით, ჩაეწეროთ უნაგირა წერტილის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \geq 0; \end{cases} \quad (5.39)$$

პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0, \\ x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \quad (5.40)$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \quad (5.41)$$

წრფივი უტოლობათა (5.39) სისტემა გადაწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases} \quad (5.42)$$

შემოვიტანოთ არაუარყოფითი დამატებით ცვლადები  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $w_1$  და  $w_2$ , რათა (5.39) უტოლობები ტოლობებად გარდაექმნათ. მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12, \end{cases} \quad (5.43)$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0. \quad (5.44)$$

(5.43) ტოლობების გათვალისწინებით (5.40)-დან გვექნება

$$v_1 x_1 = 0, v_2 x_2 = 0, w_1 \lambda_1 = 0, w_2 \lambda_2 = 0. \quad (5.45)$$

(5.45) ტოლობების გათვალისწინებით წრფივ განტოლებათა (5.43) სისტემის საბაზისო ამონახსნის საფუძველზე მიიღება ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წერტილი ანუ განისაზღვრება საწყისი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი.

წრფივ განტოლებათა (5.43) სისტემის საბაზისო ამონახსნის მისაღებად გამოვიყენოთ ხელოვნური ბაზისის მეთოდი (იხ. ნაწილი 3.2.6), რისთვისაც (5.43) სისტემის პირველ და მეორე განტოლებებში შესაბამისად შემოვიტანოთ არაუარყოფითი დამატებითი  $z_1$  და  $z_2$  ცვლადები და განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$F = -Mz_1 - Mz_2 \rightarrow \max, \quad (5.46)$$

როცა

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12, \end{cases} \quad (5.47)$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0. \quad (5.48)$$

(5.46)-(5.48) ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე ((5.45) დამოკიდებულებების დაკმაყოფილების პირობებში) განისაზღვრება წრფივ განტოლებათა (5.47) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნი (ცხრილი 5.1)

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad w_1 = 5, \quad w_2 = 11, \quad \lambda_1^* = \lambda_2^* = v_1 = v_2 = 0.$$

ვინაიდან

$$x_1^* v_1 = 0, \quad x_2^* v_2 = 0, \quad \lambda_1^* w_1 = 0, \quad \lambda_2^* w_2 = 0,$$

ამიტომ  $(x^*, \lambda^*) = [1; 1; 0; 0]$  ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წერტილს წარმოადგენს. მაშასადამე,  $x^* = [1; 1]$  საწყისი (5.37) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია, რომლის დროსაც  $f^* = f(x^*) = 3$ .

პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

i	პარამეტრი	$C_3$	$P_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M
				$P_{1,1}$	$P_{2,1}$	$P_{3,1}$	$P_{4,1}$	$P_{5,1}$	$P_{6,1}$	$P_{7,1}$	$P_{8,1}$	$P_{9,1}$	$P_{10,1}$
1	$P_{1,1}$	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	$P_{2,1}$	-M	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	$P_{3,1}$	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	$P_{4,1}$	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0
1	$P_{1,2}$	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	$P_{2,2}$	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	0	0	1/4
3	$P_{3,2}$	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	1	0	0	-1/2
4	$P_{4,2}$	0	13	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1	0	1/4
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	1
1	$P_{1,3}$	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	0	0	1/2	0
2	$P_{2,3}$	0	1	0	1					0	0		
3	$P_{3,3}$	0	5	0	0					1	0		
4	$P_{4,3}$	0	11	0	0					0	1		
5			0	0	0					0	0		

ცხრილი 5.1

## 5.4 ბრადიენტული მეთოდები

გრადიენტული მეთოდების საშუალებით შეიძლება გადაწყვეტილ იქნეს არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანები. მაგრამ, ზოგად შემთხვევაში, აღნიშნული მეთოდებით შესაძლებელია მხოლოდ ლოკალური ექსტრემუმის მოძებნა. ამიტომ გრადიენტული მეთოდების გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია ამოზნექილი დაპროგრამების ისეთი ამოცანების გადასაწყვეტად, სადაც ნებისმიერი ლოკალური ექსტრემუმი იმავდროულად გლობალური ექსტრემუმს წარმოადგენს.

### 5.4.1 შესაძლო მიმართულებების მეთოდი

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; x \in R^n \right\}, \quad (5.49)$$

სადაც  $f(x)$  და  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , არაწრფივი ფუნქციებია.

შესაძლო მიმართულებების მეთოდი [152, 153], რომელიც გ.ზოიტენდეიკის მიერ არის შემუშავებული, უსწრაფესი დაშვების მეთოდის გარკვეული მოდიფიკაციაა.

**ბანსაზღვრვამ 5.9.**  $d^{(k)}$  მიმართულებას შესაძლო მიმართულებას უწოდებენ წერტილში  $x^{(k)} \in \Omega = \left\{ x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \right\}$ , თუ მოიძებნება ისეთი დადებითი ელემენტი  $\lambda > 0$ , რომ  $[x^{(k)}, x^{(k)} + \lambda d^{(k)}] \subset \Omega$ .

**ბანსაზღვრვამ 5.10.** შესაძლო  $d^{(k)}$  მიმართულებას შესაფერისი ეწოდება, თუ ადგილი აქვს შემდეგ პირობას:  $\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} < 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ მიზნის ფუნქცია  $d^{(k)}$  მიმართულებით მცირდება.

შესაძლო მიმართულებების მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. ნებისმიერ დასაშვებ  $x^{(k)} \in \Omega$  წერტილში განისაზღვრება შესაძლო მიმართულებების კონუსი, რომელშიც აირჩევა შესაფერისი  $d^{(k)}$  მიმართულება. გამოითვლება გადაადგილების ბიჯის სიღიდე და განისაზღვრება ისეთი  $x^{(k+1)} \in \Omega$  წერტილი, სადაც  $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$  და ა.შ. პროცესი ანალოგიურად გაგრძელდება მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილდება ძებნის დამთავრების პირობები.

### 5.4.2 ბრადიენტის პროექციის მეთოდი

ჯ. როზენის მიერ შემუშავებული გრადიენტის პროექციის მეთოდი [152, 153] შესაძლო მიმართულებების მეთოდის ერთ-ერთ სახესხვაობას წარმოადგენს. მეთოდის

თანხმად,  $x^{(k)}$  წერტილში გამოითვლება რა მიზნის ფუნქციის  $-\nabla f(x^{(k)})$  ანტიგრადიენტი, ექსტრემუმისკენ გადაადგილება განხორციელებულია არა  $-\nabla f(x^{(k)})$ -ს მიმართულებით, არამედ შეზღუდვის ზედაპირზე მისი პროექციის მიმართულებით. ძეზნის ასეთი სტრატეგია უზრუნველყოფს დასაშვები  $\Omega$  არის საზღვარზე მოძრაობას. ცხადია, შეზღუდვის ზედაპირზე მოძრაობა გაგრძელდება მანამ, სანამ შესრულდება პირობა  $(\nabla f(x^{(k)}), \nabla g_i(x^{(k)}) < 0)$ . საჭიროა აღინიშნოს, რომ გრადიენტის პროექციის მეთოდის კრებადობა სასურველ შედეგს წრფივი შეზღუდვების დროს იძლევა. არაწრფივი შეზღუდვების დროს კი აღნიშნული მეთოდი ნაკლები ეფექტურობით ხასიათდება, რადგან ამ შემთხვევაში ანტიგრადიენტის პროექციის განსაზღვრას ადგილი აქვს შეზღუდვის ზედაპირის  $x^{(k)}$  წერტილში გამავალ მხებ ჰიპერსიბრტყეზე, რაც განაპირობებს  $x^{(k+1)}$  წერტილის გამოსვლას დასაშვებ  $\Omega$  არიდან. კორექცია დასაშვებ წერტილის მისაღებად დამაკმაყოფილებელ შედეგს ყოველთვის არ იძლევა.

### 5.4.3 ფრანკ-ვულფის მეთოდი

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \left\{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}; x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right\}. \quad (5.50)$$

მოცემული ამოცანის დამახასიათებელ თავისებურებას შეადგენს ის, რომ შეზღუდვათა სისტემა მხოლოდ წრფივი უტოლობებითაა წარმოდგენილი. მამასადამე, დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}; x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right\} \quad (5.51)$$

ამოზნეილი მრავალწახნაგაა. აღნიშნული თავისებურება საშუალებას გვაძლევს გამოსაკვლევი წერტილის მიდამოში მიზნის არაწრფივი ფუნქცია წრფივი გამოსახულებით შევცვალოთ და საწყისი ამოცანის ამოხსნა წრფივი დაპროგრამების ამოცანების თანამიმდევრობით გადაწყვეტაზე დავიყვანოთ.

ფრანკ-ვულფის მეთოდით [20, 86] (5.50) ამოცანის ამოხსნის საწყის ეტაპზე შეირჩევა რაღაც დასაშვები  $x^{(k)} \in \Omega$  წერტილი. ამ წერტილში გამოითვლება მიზნის ფუნქციის გრადიენტი

$$\nabla f(x^{(k)}) = \left( \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \right), \quad (5.52)$$

განისაზღვრება წრფივი ფუნქცია

$$F(x) = \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} x_n \quad (5.53)$$

და გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \left\{ F(x) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}; x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right\}. \quad (5.54)$$

დაეუშვათ, რომ (5.54) ამოცანის ამონახსნია  $z^{(k)}$ . მაშინ საწყისი ამოცანის ახალი დასაშვები წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულით

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k (z^{(k)} - x^{(k)}), \quad (5.55)$$

სადაც  $\lambda_k \in [0; 1]$  პროპორციულობის რაღაც კოეფიციენტი. მისი მნიშვნელობა აიღება ნებისმიერად ან განისაზღვრება მისი ისეთი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც  $f(x^{(k+1)})$  მაქსიმალური იქნება. ამისათვის აუცილებელია  $\frac{\partial f}{\partial \lambda_k} = 0$  განტოლების ამო-

ხსნა და მისი უმცირესი ფესვის შერჩევა. იმ შემთხვევაში, როცა  $\lambda_k > 1$ , საჭიროა დაეუშვათ  $\lambda_k = 1$ . პროპორციულობის კოეფიციენტის დადგენის შემდეგ განისაზღვრება ექსტრემუმთან მიახლოების ახალი  $x^{(k+1)}$  წერტილის კოორდინატები, მიღებულ წერტილში გამოითვლება მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა  $f(x^{(k+1)})$  და ძებნის დამთავრების პირობის შესრულების მიხედვით გაირკვევა მიახლოების ახალ  $x^{(k+2)}$  წერტილზე გადასვლის აუცილებლობა. თუ ასეთი აუცილებლობა არსებობს, მაშინ  $x^{(k+1)}$  წერტილში გამოითვლება მიზნის ფუნქციის გრადიენტი, გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების შესაბამისი ამოცანა, რომლის ამონახსნის მიხედვით განისაზღვრება  $x^{(k+2)}$  წერტილის კოორდინატები, და ა.შ. პროცესი იტერაციულად განმეორდება მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილება უტოლობა

$$\left| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right| < \varepsilon, \quad (5.56)$$

სადაც  $\varepsilon$  დასაშვები ცდომილების აბსოლუტური ზღვრული მნიშვნელობაა.

ამგვარად, ფრანკ-უულფის მეთოდით არაწრფივი დაპროგრამების (5.50) ტიპის ამოცანის გადაწყვეტის ლოგიკური სტრუქტურა შემდეგი ეტაპების შესრულებას ითვალისწინებს.

- ბიჯი 1. განისაზღვრება ამოცანის საწყისი დასაშვები  $x^{(k)}$  ამონახსნი;
- ბიჯი 2. დასაშვებ  $x^{(k)}$  წერტილში გამოითვლება მიზნის ფუნქციის გრადიენტი და (5.53) ფორმულის საფუძველზე განისაზღვრება წრფივი  $F(x)$  ფუნქცია;
- ბიჯი 3. გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების (5.54) ამოცანა;

ბიჯი 4. განისაზღვრება პროპორციულობის  $\lambda_k$  კოეფიციენტი;

ბიჯი 5. (5.55) ფორმულის საფუძველზე გამოითვლება ექსტრემუმთან მიახლოების ახალი დასაშვები წერტილის კოორდინატები;

ბიჯი 6. შემოწმდება ძებნის დამთავრების (5.56) პირობა. თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ მიახლოების მიღებული წერტილი ოპტიმალურ ამონახსნად ჩაითვლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოთვლითი პროცესი ანალოგიურად განმეორდება მე-2 ბიჯიდან.

**მაგალითი 5.5.** მოცემულია მიზნის ფუნქცია

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2. \quad (5.57)$$

ფრანკ-კულფის მეთოდით ვიპოვოთ  $f(x)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, როცა ადგილი აქვს შემდეგი უტოლობების დაკმაყოფილებას:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \end{cases} \quad (5.58)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5.59)$$

ოპტიმალური ამონახსნი  $\varepsilon = 0.01$  სიზუსტით განვსაზღვროთ.

ამოხსნა. უპირველეს ყოვლისა, ანალიზურად განვსაზღვროთ  $f(x)$  ფუნქციის გრადიენტი

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = [2 - 2x_1, 4 - 4x_2]$$

და შევარჩიოთ საწყისი მიახლოების დასაშვები წერტილი  $x^{(0)} = [0; 0]$ , სადაც  $f(x^{(0)}) = 0$ .

### I იტერაცია

საწყის  $x^{(0)}$  წერტილში გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის გრადიენტი  $\nabla f(x^{(0)}) = [2; 4]$  და შევადგინოთ წრფივი ფუნქცია

$$F_1(x) = 2x_1 + 4x_2. \quad (5.60)$$

სიმპლექს-მეთოდით გადავწყვიტოთ (5.60) წრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანა, როცა ადგილი აქვს (5.58)-(5.59) შეზღუდვების დაკმაყოფილებას. მივიღებთ  $z^{(0)} = [0; 4]$ .

(5.55) ფორმულის საფუძველზე, საწყისი ამოცანისათვის განვსაზღვროთ ახალი დასაშვები ამონახსნი



$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_1(z^{(0)} - x^{(0)}), \quad \lambda_1 \in [0;1]. \quad (5.61)$$

(5.61) გამოსახულებაში შევიტანოთ  $x^{(0)}$ -ისა და  $z^{(0)}$ -ის მნიშვნელობები. მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 0 = 0, \\ x_2^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 4 = 4\lambda_1. \end{cases} \quad (5.62)$$

განვსაზღვროთ  $\lambda_1$ -ის მნიშვნელობა. (5.62)-ის გათვალისწინებით  $x_1$ -ისა და  $x_2$ -ის მნიშვნელობები შევიტანოთ (5.57) გამოსახულებაში. გვექნება

$$f(\lambda_1) = 16\lambda_1 - 32\lambda_1^2. \quad (5.63)$$

ვიპოვოთ (5.63) ფუნქციის წარმოებული  $\lambda_1$ -ის მიხედვით და იგი ნულს გავუტოლოთ:  $f'(\lambda_1) = 16 - 64\lambda_1 = 0$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\lambda_1 = 0.25$ .

ამგვარად,  $x^{(1)} = [0;1]$ ,  $f(x^{(1)}) = 2$ .

ვინაიდან  $|f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})| = 2 > \varepsilon = 0.01$ , ამიტომ გადავდივართ მეორე იტერაციაზე.

## II იტერაცია

$x^{(1)}$  წერტილში გამოვთვალოთ საწყისი ამოცანის მიზნის ფუნქციის გრადიენტო  $\nabla f(x^{(1)}) = [2; 0]$ , შევადგინოთ წრფივი ფუნქცია  $F_2(x) = 2x_1$  და სიმპლექს-მეთოდით გადავწყვიტოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ F_2(x) \mid x_1 + 2x_2 \leq 8; 2x_1 - x_2 \leq 12; x_1, x_2 \geq 0 \}. \quad (5.64)$$

მივიღებთ  $z^{(1)} = [6.4; 0.8]$ .

(5.55) ფორმულის საფუძველზე, საწყისი ამოცანისათვის განვსაზღვროთ მიახლოების ახალი წერტილი

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_2(z^{(1)} - x^{(1)}),$$

რომელიც,  $x^{(1)}$ -ისა და  $z^{(1)}$ -ის კოორდინატების გათვალისწინებით, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0 + \lambda_2(6.4 - 0) = 6.4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} = 1 + \lambda_2(0.8 - 1) = 1 - 0.2\lambda_2. \end{cases} \quad (5.65)$$

(5.65)-ის გათვალისწინებით  $x_1$ -ისა და  $x_2$ -ის მნიშვნელობები შევიტანოთ (5.57) გამოსახულებაში, რომელიც გავაწარმოთ  $\lambda_2$ -ის მიხედვით და ნულს გავუტოლოთ. გვექნება

$$f(\lambda_2) = 2 + 12.8\lambda_2 - 41.76\lambda_2^2;$$

$$\dot{f}(\lambda_2) = 12.8 - 83.52\lambda_2 = 0,$$

საიდანაც  $\lambda_2 \approx 0.15$ .

ამგვარად,  $x^{(2)} = [0.96; 0.97]$ ,  $f(x^{(2)}) = 2.9966$ .

ენიდან  $|f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})| = 2.9966 - 2 = 0.9966 > \varepsilon = 0.01$ , ამიტომ გადავდივართ შემდეგ იტერაციაზე.

### III იტერაცია

$x^{(2)}$  წერტილში მიზნის  $f(x)$  ფუნქციის გრადიენტი ტოლია  $\nabla f(x^{(2)}) = [0.08; 0.12]$ , რომლის საფუძველზეც შევადგინოთ წრფივი ფუნქცია  $F_3(x) = 0.08x_1 + 0.12x_2$ .

გადავწყვიტოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ F_3(x) = 0.08x_1 + 0.12x_2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 8; 2x_1 - x_2 \leq 12; x_1, x_2 \geq 0 \}. \quad (5.66)$$

მივიღებთ  $z^{(2)} = [6; 0]$ .

განვსაზღვროთ მიახლოების ახალი წერტილი

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_3(z^{(2)} - x^{(2)});$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.96 + \lambda_3(6 - 0.96) = 0.96 + 5.04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0.97 + \lambda_3(0 - 0.97) = 0.97 - 0.97\lambda_3; \end{cases}$$

$$f(\lambda_3) = 2.9384 + 0.4032\lambda_3 - 27.3416\lambda_3^2;$$

$$\dot{f}(\lambda_3) = 0.4032 - 54.6832\lambda_3 = 0,$$

საიდანაც  $\lambda_3 \approx 0.007$ .

ამასადაბე,  $x^{(3)} = [0.99528; 0.96321]$ ,  $f(x^{(3)}) = 2.99957$ .

ენიდან  $|f(x^{(3)}) - f(x^{(2)})| = 2.99957 - 2.9966 = 0.00297 < \varepsilon = 0.01$ , ამიტომ  $x^{(3)} = [0.99528; 0.96321]$  წერტილი წარმოადგენს საწყისი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს, რომელიც განსაზღვრულია  $\varepsilon = 0.01$  სიზუსტით.

## 5.5 საჭარიმო ფუნქციის მეთოდები

საჭარიმო ფუნქციის მეთოდები არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანების გადაწყვეტის პოპულარული მეთოდებია. მათი მნიშვნელოვანი ღირსება პრინციპის სიმარტივე და პრაქტიკული ეფექტურობაა. აღნიშნული მეთოდის შესახებ მრავალი ნაშრომი გამოქვეყნებული, რომელთა სრული ბიბლიოგრაფია წარმოდგენილია ა. ფიაკოსა და გ. მაკ-კორმიკის ნაშრომში [133]. მეთოდის ძირითადი იდეა შემდეგში მდგომარობს. საჭარიმო ფუნქციის შემოტანის გზით პირობითი მინიმიზაციის საწყისი ამოცანა დაიყვანება უპირობო მინიმიზაციის ამოცანაზე, რომლის გადასაწყვეტად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ექსტრემუმის ძებნის შესაბამისი მეთოდები.

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა:

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, m}; h_k(x) = 0, k = \overline{1, q}; x \in R^n \right\}, \quad (5.67)$$

სადაც  $f, g_i, i = \overline{1, m}$ , და  $h_k, k = \overline{1, q}$ , უწყვეტი ფუნქციებია, და დაუშვათ, რომ ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია ვექტორი  $x^* \in \Omega = \{x \in R^n \mid g(x) \geq 0; h(x) = 0\}$ .

ბანსაზღვრვება 5.11 უწყვეტ  $P\{\gamma, g(x), h(x)\}$  ფუნქციას, სადაც  $\gamma > 0$ , რაღაც კოეფიციენტია, ეწოდება საჭარიმო ფუნქციად, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} 1. & P\{\gamma, g(x), h(x)\} = 0 \quad \forall x \in \Omega, \\ 2. & P\{\gamma, g(x), h(x)\} > 0 \quad \forall x \notin \Omega. \end{aligned} \quad (5.68)$$

განმარტების თანახმად საჭარიმო  $P\{\gamma, g(x), h(x)\}$  ფუნქციას, ოპტიმიზაციის მოცემული შეზღუდვების გათვალისწინებით,  $R^n$  სივრცეში სხვადასხვა მნიშვნელობა გააჩნია. კერძოდ, მისი მნიშვნელობა დასაშვები  $\Omega \in R^n$  არის ნებისმიერ წერტილში, სადაც ადგილი აქვს შეზღუდვების დაკმაყოფილებას, ნულის ტოლია, ხოლო იმ  $x \in R^n$  წერტილებში, სადაც შეზღუდვების პირობები დარღვეულია - რაგინდ დიდი დადებითი რიცხვი. ამასთან, უკანასკნელი სიდიდე მით უფრო მეტია,  $x \in R^n$  წერტილი რაც უფრო დაშორებულია დასაშვები  $\Omega$  არისგან.

(5.68) თვისებებით ხასიათდება, მაგალითად, შემდეგი სახის ფუნქციები:

$$P = \gamma \left\{ \left[ \frac{g(x) - |g(x)|}{2} \right]^2 + [h(x)]^2 \right\}, \quad (5.69)$$

$$P = \gamma \left\{ (g(x))^2 + [h(x)]^2 \right\}, \quad (5.70)$$

სადაც

$$\langle g(x) \rangle = \begin{cases} g(x), & g(x) < 0, \\ 0, & g(x) \geq 0, \end{cases} \quad (5.71)$$

და სხვ.

საჯარიმო ფუნქციის გათვალისწინებით განვიხილოთ შემდეგი სახის დამხმარე მიზნის ფუნქცია:

$$F(x, \gamma) = f(x) + P\{\gamma, g(x), h(x)\}. \quad (5.72)$$

ცხადია, დასაშვებ  $\Omega$  არეში, სადაც ადგილი აქვს მოცემული შეზღუდვების დაკმაყოფილებას,  $f(x)$  და  $F(x, \gamma)$  ფუნქციებს ერთიდაიგივე მინიმუმი გააჩნია. იმ წერტილებში, სადაც ერთი ან რამდენიმე შეზღუდვის პირობა დარღვეულია, დამხმარე მიზნის  $F(x, \gamma)$  ფუნქცია „ჯვარობდება“ უსასრულოდ დიდი სიდიდეებით და ამიტომ მისი მნიშვნელობა  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმისგან საგრძნობლად განსხვავებულია.

ამგვარად, (5.72)-ის გათვალისწინებით, არაწრფივი დაპროგრამების (5.67) ამოცანის ნაცვლად გვექნება

$$\min \{ F(x, \gamma) \mid x \in R^n, \gamma \in R \}. \quad (5.73)$$

(5.73) ამოცანა უპირობო მინიმიზაციის ამოცანას წარმოადგენს. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ საჯარიმო  $\gamma$  კოეფიციენტს შევირჩევთ ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$\|\nabla F(x, \gamma)\| \geq \|\nabla f(x)\|, \quad (5.74)$$

მაშინ (5.73) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი საწყისი (5.67) ამოცანის  $x^*$  ამონახსნს შეესაბამება.

## 5.5.1 თანდათანობითი მიახლოების მეთოდი

საჯარიმო  $P\{\gamma, g(x), h(x)\}$  ფუნქციის გამოსახულების მიხედვით თანდათანობითი მიახლოების მეთოდის [31] სხვადასხვა მოდიფიკაციას განასხვავებენ, მაგრამ მათი უმრავლესობის გამოთვლითი სქემა ერთ ლოგიკურ სტრუქტურას ექვემდებარება, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. შეირჩევა დადებითი რიცხვების რაღაც  $\{\gamma_i\}$  მიმდევრობა, რომელიც ხასიათდება თვისებებით

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_i < \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \infty. \quad (5.75)$$

ასეთი მიმდევრობებია, მაგალითად,  $\{t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ ;  $\{10^{t-1}\}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , და ა.შ.  $\gamma_i$  კოეფიციენტის თითოეული მნიშვნელობისათვის უპირობო მინიმიზაციის ნებისმიერი

მეთოდით განისაზღვრება (5.73) ამოცანის ამონახსნთა მიმდევრობა  $\{x^{(t)}\}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . გამოთვლითი პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება კრებადობის პირობა

$$|F(x^{(t)}, \gamma_t) - F(x^{(t-1)}, \gamma_{t-1})| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.76)$$

მტკიცდება [57], რომ როცა  $f$ ,  $g$ ,  $h$  უწყვეტი ფუნქციებია, (5.67) ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე არაატარიელი, ხოლო სიმრავლე  $\Omega_p = \{x \in R^n \mid F(x, \gamma_t) \leq f(x^*) + \gamma_t\}$  არატარიელი და შემოსაზღვრული, მაშინ სტაციონარულ წერტილთა მიღებული  $\{x^{(t)}\}$  მიმდევრობის ზღვრული წერტილი საწყისი ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს, ე.ი.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^{(t)} = x^*. \quad (5.77)$$

მაგალითი 5.6. საჯარიმო ფუნქციების მეთოდით გადაეწყვიტოთ არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \mid h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0 \right\} \quad (5.78)$$

და გამოვიკვლიოთ მინიმიზაციის პროცესის მიმდინარეობაზე საჯარიმო კოეფიციენტის გავლენა.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ კვადრატული საჯარიმო ფუნქცია და განვიხილოთ შემდეგი სახის დამხმარე მიზნის ფუნქცია:

$$F(x, \gamma) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \gamma(x_1 + x_2 - 5)^2. \quad (5.79)$$

(5.79) ფუნქციის სტაციონარული წერტილის მოსაძებნად შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + 2\gamma(x_1 + x_2 - 5) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + 2\gamma(x_1 + x_2 - 5) = 0, \end{cases} \quad (5.80)$$

საიდანაც გვექნება

$$x_1 = x_2 = (5\gamma + 4)/(2\gamma + 1). \quad (5.81)$$

უკანასკნელი გამოსახულების ზღვარი, როცა  $\gamma \rightarrow \infty$ , ტოლია

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} [(5\gamma + 4)/(2\gamma + 1)] = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} [(5 + 4/\gamma)/(2 + 1/\gamma)] = 2.5. \quad (5.82)$$

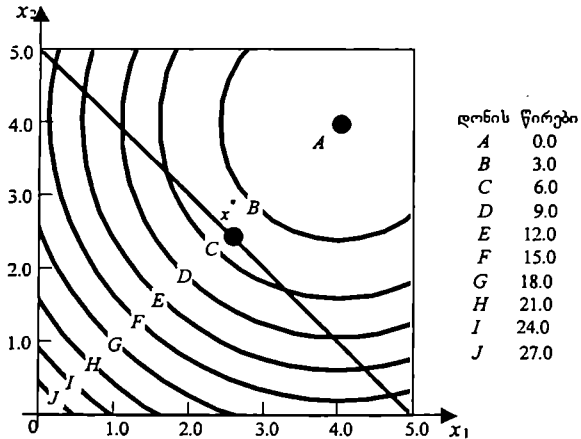
ამგვარად, მინიმიზაციის (5.78) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია (ნახ. 5.7)

$$x^* = [2.5; 2.5]^T, f(x^*) = 4.5.$$

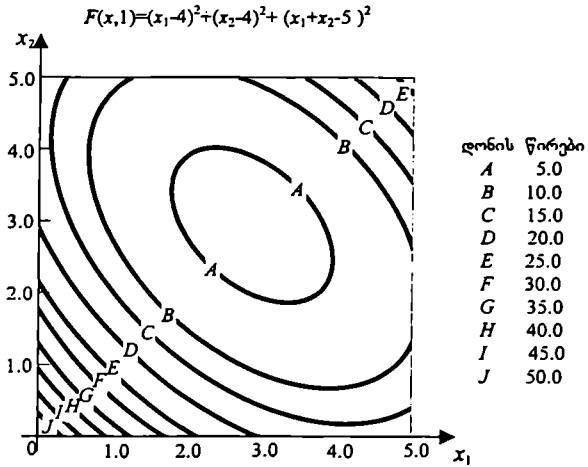
საჯარიმო  $\gamma$  კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის (5.79) ფორმულით განსაზღვრული დამხმარე მიზნის  $F(x, \gamma)$  ფუნქციის ღონის წირები წარმოდგენილია 5.8-5.10 ნახაზებზე, ხოლო (5.81) ფორმულით გამოთვლილი სტაციონარული წერტილის კოორდინატები მოცემულია 5.2 ცხრილში, საიდანაც ნათლად ჩანს, რომ როცა  $\gamma \rightarrow \infty$ , მაშინ  $F(x, \gamma)$  ფუნქციის მინიმუმი  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმისკენ მიისწრაფვის.

$\gamma$	0.1	1	10	100	1000
$x_1 = x_2$	3.7500	3.0000	2.5714	2.5075	2.5007
$F(x, \gamma)$	0.7500	3.0000	4.2857	4.4776	4.4978

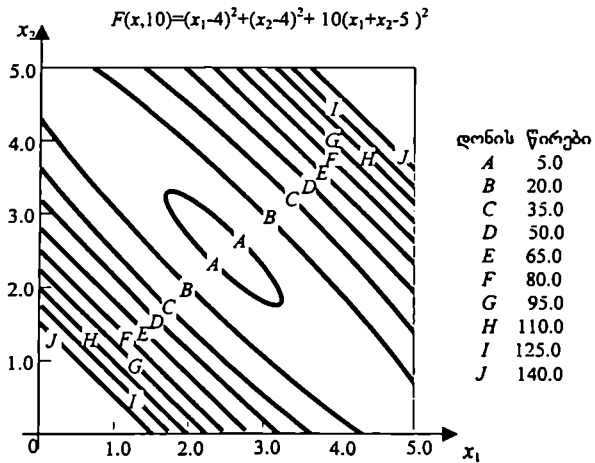
ცხრილი 5.2.



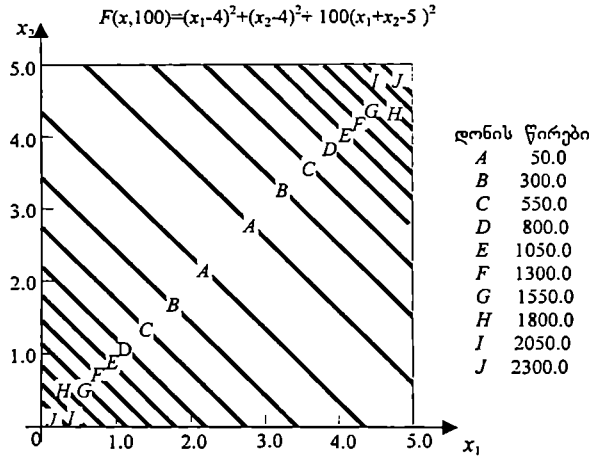
ნახ. 5.7



ნახ. 5.8



ნახ. 5.9



ნახ. 5.10

## 5.5.2 ფიაკო-მაკორმიკის მეთოდი

ა. ფიაკოსა და გ. მაკორმიკის მეთოდი საჯარიმო ფუნქციების მეთოდის, კერძოდ, თანდათანობითი მიახლოების მეთოდის, ერთ-ერთი საინტერესო სახესხვაობაა, რომელსაც ფართო გამოყენება აქვს საინჟინრო პრაქტიკაში.

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, m}; x \in R^n \right\}, \quad (5.83)$$

სადაც  $f$  და  $g_i$  არაწრფივი უწყვეტი ფუნქციებია.

პირობითი მინიმიზაციის (5.83) ამოცანის გადასაწყვეტად ფიაკო-მაკორმიკის მეთოდში გამოყენებულია შემდეგი სახის საჯარიმო ფუნქცია:

$$P\{\gamma, g(x)\} = \gamma \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}, \quad (5.84)$$

სადაც  $\gamma > 0$  საჯარიმო კოეფიციენტია.



(5.84)-ის გათვალისწინებით მიზნის დაშხმარე ფუნქციისათვის გვექნება

$$F(x, \gamma) = f(x) + \gamma \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_i(x)}. \quad (5.85)$$

ცხადია, დასაშვები  $\Omega$  არის იმ  $x$  წერტილებში, სადაც  $g_i(x) < 0$ , მიზნის დაშხმარე  $F(x, \gamma)$  ფუნქციის მნიშვნელობები  $f(x)$  ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებისგან განსხვავებულია. ფუნქციებს შორის წარმოქმნილი სხვაობის სიდიდე  $\gamma$  კოეფიციენტის სიდიდესა და მოკიდებული. საჯარიმო კოეფიციენტი რაც უფრო მცირეა, აღნიშნული ფუნქციების მნიშვნელობები მით უფრო ნაკლებად განსხვავებულია.

ნიშანდობლივია ის ფაქტი, რომ დასაშვები არის სასაზღვრო წერტილებში საჯარიმო  $P\{\gamma, g(x)\}$  ფუნქციის მნიშვნელობები (და, მასასადამე,  $F(x, \gamma)$  ფუნქციის მნიშვნელობებიც) უსასრულოდ იზრდება, რაც თითოეული შეზღუდვის გასწვრივ "ციცაბო ფერდობიანი" ხევის ეფექტს ქმნის. ამიტომ თუ მინიმუმის ძებნა დასაშვები წერტილიდან განხორციელდება, მაშინ მეთოდის კრებადობა გარანტირებულია.

ფიაკო-მაკკორმიკის მეთოდის ლოგიკური სქემა იტერაციულია და მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს. შეირჩევა საჯარიმო კოეფიციენტის საწყისი მნიშვნელობა  $\gamma = \gamma_0$  და დევიდონ-ფლეთინერ-პაუელის ალგორითმის საფუძველზე განისაზღვრება ფორმირებული  $F(x, \gamma_0)$  ფუნქციის მინიმუმი  $x_{(0)}^*$ .

გამოთვლების შემდეგ ეტაპზე საჯარიმო კოეფიციენტის მნიშვნელობა შემცირდება და მიიღება ტოლი  $\gamma_1 = \gamma_0 / 10$ . დევიდონ-ფლეთინერ-პაუელის ალგორითმით კვლავ განისაზღვრება ფორმირებული  $F(x, \gamma_1)$  ფუნქციის მინიმუმი  $x_{(1)}^*$  და ა.შ. პროცესი იტერაციულად გაგრძელდება.

ამგვარად,  $k$ -ურ ბიჯზე,  $F(x, \gamma_k)$  ფუნქციის მინიმიზაციის შედეგად, მიიღება  $x_{(k)}^*$  წერტილი, რომელიც  $(k+1)$ -ე ბიჯზე,  $F(x, \gamma_{k+1})$  ფუნქციის მინიმიზაციის პროცესში, სადაც  $\gamma_{k+1} = \gamma_k / 10$ , საწყის წერტილად გვევლინება. ცხადია, საჯარიმო კოეფიციენტის თანდათანობითი შემცირების პროცესი მინიმუმის წერტილების  $\{x_{(k)}^*\}$  მიმდევრობის კრებადობას უზრუნველყოფს, რომლის ზღვრული წერტილი საწყისი (5.83) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს შეესაბამება.

### 5.5.3 ლაგრანჟის მოდიფიცირებული ფუნქციის მეთოდი

საჯარიმო ფუნქციების მეთოდში კოეფიციენტების საკმაოდ დიდი მნიშვნელობების დროს  $F(x, \gamma)$  ფუნქცია ცუდად განსაზღვრულობის თვისებას იძენს. კერძოდ, მისი

დონის წირები დეფორმაციას განიცდის (იხილე ნახ. 5.8-5.10), რაც ექსტრემუმის ძებნის პროცესს მნიშვნელოვნად აფერხებს. ამ არასასიამოვნო მოვლენის თავიდან ასაცილებლად შემუშავებულია ლაგრანჟის მოდიფიცირებული ფუნქციის მეთოდი [110], რომელიც შემდეგი სახის დამხმარე მიზნის ფუნქციას განიხილავს:

$$F(x, \sigma, \tau) = f(x) + \gamma \sum_{i=1}^m \{ \langle g_i(x) + \sigma_i \rangle^2 - \sigma_i^2 \} + \gamma \sum_{k=1}^q \{ [h_k(x) + \tau_k]^2 - \tau_k^2 \}, \quad (5.86)$$

სადაც  $\gamma$  მუდმივი სიდიდის წონითი კოეფიციენტი, ხოლო  $\sigma_i$  და  $\tau_k$  პარამეტრებია, რომელთა მნიშვნელობა ყოველ  $(i+1)$ -ე იტერაციაზე შემდეგი რეკურენტული ფორმულების საშუალებით განისაზღვრება:

$$\sigma_i^{(i+1)} = \langle g_i(x^{(i)}) + \sigma_i^{(i)} \rangle, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sigma_i^{(0)} = 0, \quad (5.87)$$

$$\tau_k^{(i+1)} = h_k(x^{(i)}) + \tau_k^{(i)}, \quad k = \overline{1, q}, \quad \tau_k^{(0)} = 0. \quad (5.88)$$

(5.86) გამოსახულებაში  $\sigma_i$  და  $\tau_k$  პარამეტრების შემოტანა საჯარიმო ფუნქციაში მონაწილე შესაკრებების „ძერას“ განაპირობებს. მათი მნიშვნელობა ყოველ იტერაციაზე ზუსტდება, რაც იტერაციული პროცესის კრებადობის გაუმჯობესებას უზრუნველყოფს.

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის ზედაპირის სიმრუდის რადიუსი ამ ფუნქციის ჰესეს მატრიცის საშუალებით განისაზღვრება. ამიტომ  $\sigma$  და  $\tau$  პარამეტრების გავლენა (5.86) კონსტრუქციის დამხმარე ფუნქციის ზედაპირის ფორმაზე შეიძლება დადგინდეს იქნეს  $F(x, \sigma, \tau)$  ფუნქციის  $\nabla^2 F$  მატრიცის ანალიზის საფუძველზე. მართლაც, (5.86) ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირება გვაძლევს

$$\begin{aligned} \nabla^2 F = & \nabla^2 f(x) + 2\gamma \sum_{i=1}^m \{ \langle g_i(x) + \sigma_i \rangle \nabla^2 g_i(x) + (\nabla g_i(x))^2 \} + \\ & + 2\gamma \sum_{k=1}^q \{ (h_k(x) + \tau_k) \nabla^2 h_k(x) + (\nabla h_k(x))^2 \}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

იმ შემთხვევაში, როცა  $g(x)$  და  $h(x)$  შეზღუდვები წრფივი ფუნქციებია, მაშინ (5.89)-დან გვექნება

$$\nabla^2 F = \nabla^2 f(x) + 2\gamma \sum_{i=1}^m \{ \nabla g_i(x) \}^2 + 2\gamma \sum_{k=1}^q \{ \nabla h_k(x) \}^2. \quad (5.90)$$

ე.ი.  $\nabla^2 F$  მატრიცა არ არის დამოკიდებული  $\sigma$  და  $\tau$  პარამეტრებზე. ეს კი ნიშნავს, რომ წრფივი შეზღუდვების დროს ერთი იტერაციიდან მეორე იტერაციამდე გადასვლისას  $F$  ფუნქციის ღონის ზედაპირები ფორმას არ იცვლის. ამგვარად, მეთოდის კრებალობა საჯარიმო პარამეტრების უსაზღვრო გაზრდაზე არ არის დამოკიდებული და, ამასთან, ადგილი არ აქვს  $F$  ფუნქციის ღონის ზედაპირების არასასურველ დეფორმაციებს. იმ შემთხვევაში, როცა  $g(x)$  და  $h(x)$  შეზღუდვები არაწრფივი ფუნქციებია, მაშინ, მართალია,  $F$  ფუნქციის ზედაპირის ფორმა შეიცვლება, მაგრამ ეს ცვლილება მეორე რიგისა და ამიტომ იგი საბოლოო შედეგებზე მნიშვნელოვან გავლენას ვერ მოახდენს.

**მაგალიტი 5.7.** ლაგრანჟის მოდულირებული ფუნქციის საშუალებით გადაეწყვიტოთ მინიმიზაციის ამოცანა

$$\min \{ f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \mid h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0 \} \quad (5.91)$$

და გამოვიკვლიოთ ოპტიმიზაციის პროცესის მიმდინარეობაზე  $\tau$  პარამეტრის გავლენა, თუ მისი საწყისი მნიშვნელობაა  $\tau^{(0)} = 0$ .

ამოხსნა. განვიხილოთ შემდეგი სახის დამხმარე მიზნის ფუნქცია:

$$F(x, \tau) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \gamma \{ (x_1 + x_2 - 5 + \tau)^2 - \tau^2 \}. \quad (5.92)$$

განვსაზღვროთ  $F(x, \tau)$  ფუნქციის წარმოებულები  $x_1$  და  $x_2$  ცვლადების მიმართ და ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + 2\gamma(x_1 + x_2 - 5 + \tau) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + 2\gamma(x_1 + x_2 - 5 + \tau) = 0, \end{cases}$$

საიდანაც  $x_1 = x_2 = (4 + 5\gamma - \gamma\tau)/(1 + 2\gamma)$ . როცა  $\gamma = 1$ , მაშინ უკანასკნელი გამოსახულებიდან გვექნება

$$x_1 = x_2 = (9 - \tau)/3. \quad (5.93)$$

რადგან  $\tau^{(0)} = 0$ , ამიტომ (5.93)-დან განისაზღვრება  $F(x, \tau)$  ფუნქციის სტაციონარული წერტილის კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობები

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = (9 - \tau^{(0)})/3 = 3.$$

მიღებულ წერტილში გამოვთვალოთ  $f(x^{(0)}) = 2$  და  $F(x^{(0)}, \tau^{(0)}) = 3$ .

### I იტერაცია

(5.88) ფორმულის საფუძველზე გადავიანგარიშოთ  $\tau$  პარამეტრის მნიშვნელობა  $\tau^{(1)} = h(x^{(0)}) + \tau^{(0)} = 1$  და (5.93) ფორმულის საშუალებით გამოვთვალოთ  $F(x, \tau)$  ფუნქციის სტაციონარული წერტილის კოორდინატების ახალი მნიშვნელობები

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = (9 - \tau^{(1)})/3 = 2.6667.$$

მიღებულ წერტილში განვსაზღვროთ

$$f(x^{(1)}) = 3.5556 \text{ და } F(x^{(1)}, \tau^{(1)}) = 4.3333.$$

### II იტერაცია

(5.88) ფორმულის საფუძველზე გადავიანგარიშოთ  $\tau$  პარამეტრის მნიშვნელობა  $\tau^{(2)} = h(x^{(1)}) + \tau^{(1)} = 1.3333$  და გამოვთვალოთ  $F(x, \tau)$  ფუნქციის სტაციონარული წერტილის კოორდინატების ახალი მნიშვნელობები

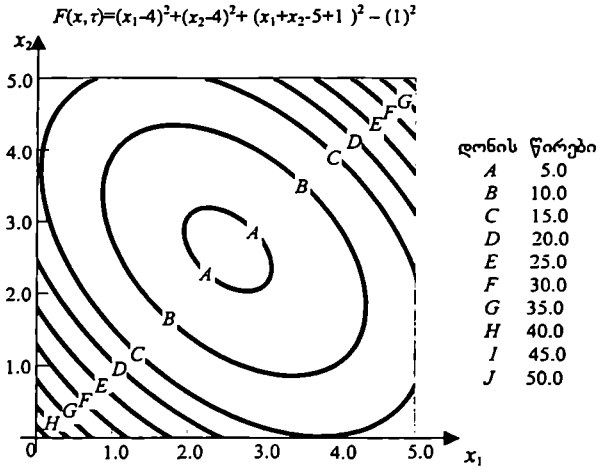
$$x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = (9 - \tau^{(2)})/3 = 2.5556$$

და ა.შ. გამოთვლები გაგრძელდება მანამ, სანამ კრებადობის (5.76) პირობა არ დაკმაყოფილდება. გამოთვლების შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში 5.3.

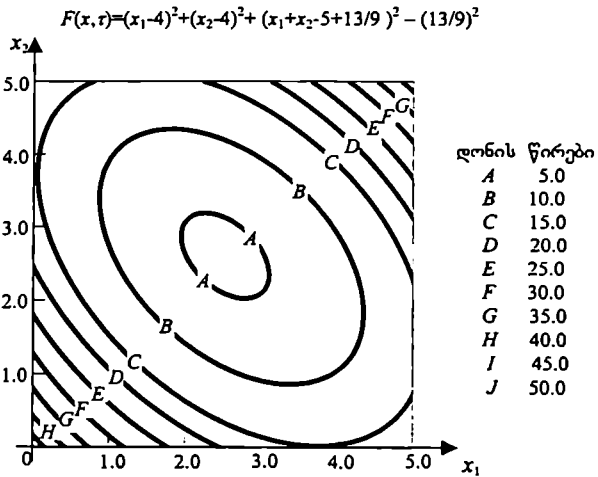
$t$	$\tau$	$x_1 = x_2$	$f(x)$	$F(x, \tau)$
0	0	3.0000	2.0000	3.0000
1	1.0000	2.6667	3.5556	4.3333
2	1.3333	2.5556	4.1728	4.4814
3	1.4444	2.5185	4.3896	4.4979
4	1.4818	2.5062	4.4629	4.4997
5	1.5000	2.5000	4.5000	4.5000

ცხრილი 5.3

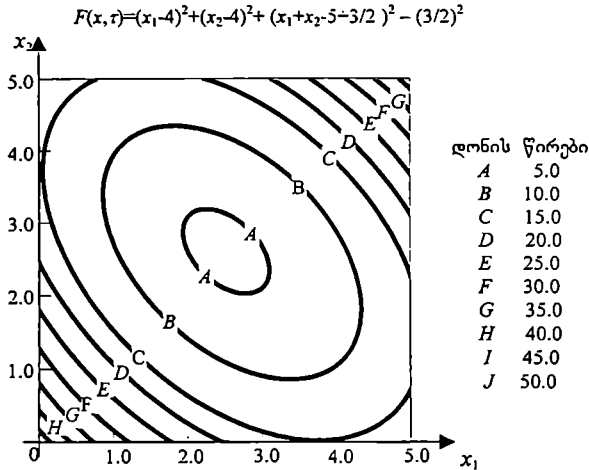
როგორც ცხრილიდან ჩანს,  $F(x, \tau)$  ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა იტერაციების რაოდენობის გაზრდასთან ერთად იზრდება. ამგვარად, ლაგრანჟის მოდულიციკრებული ფუნქცია ერთდროულად განიცდის როგორც მინიმიზაციას  $x$  ცვლადის მიხედვით, ისე მაქსიმიზაციას  $\tau$  პარამეტრის მიხედვით. ე.ი. ფაქტიურად ადგილი აქვს მისი უნაგირა წერტილის განსაზღვრას.  $F(x, \tau)$  ფუნქციის ღონის წირები  $\tau$ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს წარმოდგენილია 5.11-5.13 ნახაზებზე, საიდანაც ნათლად ჩანს, რომ  $\tau$  პარამეტრის ცვლილება ღონის წირების ცვლილებას არ იწვევს.



გახ. 5.11



გახ. 5.12



ნახ. 5.13

### 5.5.4 მროუ-ჰურვიციის მეთოდი

საჯარიმო ფუნქციების საფუძველზე აგებულ მეთოდებს შორის საჭიროა გამოეყოთ ეროუ-ჰურვიციის მეთოდი [20], რომელშიც უპირობო ოპტიმიზაციის (5.73) ამოცანის გადასაწყვეტად გრადიენტული ძებნის იდეოლოგიაა გამოყენებული. აღნიშნულ მეთოდში ექსტრემუმთან მიახლოების სტრატეგია შემდეგი რეკურენტული ფორმულით განისაზღვრება:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda \nabla f(x^{(k)}) + \gamma^{(k)} \nabla g(x^{(k)}), \quad (5.94)$$

სადაც  $\lambda$  გრადიენტული ბიჯის პროპორციულობის კოეფიციენტი, ხოლო  $\gamma$  - საჯარიმო ფუნქციის კოეფიციენტი, რომლის გამოთვლის სქემა ზემოთ განხილულ მეთოდებში გამოყენებული სქემებისგან პრინციპულად განსხვავებულია.

ალგორითმის თანახმად, ექსტრემუმთან მიახლოების ყოველ ბიჯზე,  $\gamma$  კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\gamma^{(k)} = \begin{cases} 0, & g(x) \geq 0, \\ \gamma^{(k-1)} - \lambda g(x^{(k-1)}), & g(x) < 0, \end{cases} \quad (5.95)$$

სადაც საჯარიმო კოეფიციენტის საწყის  $\gamma^{(0)}$  მნიშვნელობად შეიძლება შერჩეულ იქნეს ნებისმიერი არაუარყოფითი რიცხვი.

მაბალნითი 5.8. ეროუ-ჰურვიცის მეთოდით გადაწყვეტოთ არაწრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

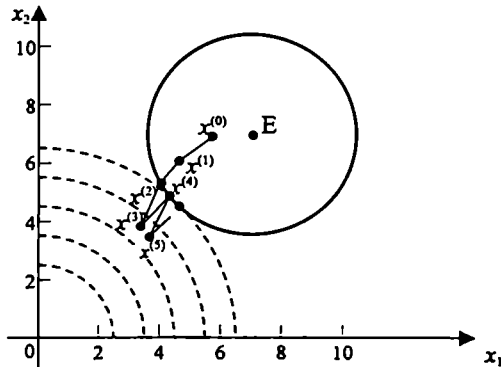
$$\max \{ f(x) = -x_1^2 - x_2^2 \mid g(x) = 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geq 0, x_1, x_2 \geq 0 \}, \quad (5.96)$$

თუ საწყისი მიახლოების წერტილია  $x^{(0)} = [4.8; 5.6]$ .

ამოხსნა. მოცემული ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე

$$\Omega = \{ x \in R^2 \mid (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \leq 18; x_1, x_2 \geq 0 \},$$

რომელიც გეომეტრიულად წარმოადგენს წრეს ცენტრით  $E(7;7)$  წერტილში და რადიუსით  $r = 3\sqrt{2}$ , ამოზნექილი არეა (ნახ. 5.14), ხოლო მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია, რომლის დონის წირები წრეწირებია ცენტრით  $O(0;0)$  წერტილში, - უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა. მაშასადამე, მოცემული ამოცანა წარმოადგენს ამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანას, რომლის ოპტიმალური ამონახსნი ერთ-ერთი წრეწირის დასაშვებ  $\Omega$  არესთან შეხების  $D$  წერტილშია.



ნახ. 5.14

ეროუ-ჰურვიცის მეთოდით (5.96) ამოცანის გადასაწყვეტად შევირჩიოთ პროპორციულობის კოეფიციენტი  $\lambda = 0.1$  და ანალიზურად განვსაზღვროთ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციების კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14.$$

### I იტერაცია

საწყის წერტილში გამოთვალეთ  $g(x^{(0)}) = 18 - 4.84 - 1.96 = 11.2$ . ვინაიდან  $g(x^{(0)}) > 0$ , ამიტომ  $x^{(0)} = [4.8; 5.6]$  დასაშვები წერტილია, სადაც  $f(x^{(0)}) = -54.4$ , და  $\gamma^{(1)} = 0$ .

ვისარგებლოთ (5.94) ფორმულით და განვსაზღვროთ მიახლოების ახალი წერტილის კოორდინატები

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 4.8 + 0.1(-2)4.8 = 3.84;$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = 5.6 + 0.1(-2)5.6 = 4.48.$$

შევამოწმოთ ეკუთვნის თუ არა მიღებული წერტილი დასაშვებ  $\Omega$  არეს, რისთვისაც გამოვთვალოთ

$$g(x^{(1)}) = 18 - 9.9856 - 6.3504 = 1.664 > 0; \quad f(x^{(1)}) = -34.816.$$

### II იტერაცია

ვინაიდან  $x^{(1)} = [3.84; 4.48]$  დასაშვები წერტილია, ამიტომ  $\gamma^{(2)} = 0$ . განვსაზღვროთ მიახლოების ახალი წერტილის კოორდინატები

$$x_1^{(2)} = 3.84 + 0.1(-2)3.84 = 3.072;$$

$$x_2^{(2)} = 4.48 + 0.1(-2)4.48 = 3.584.$$

შევამოწმოთ ეკუთვნის თუ არა მიღებული წერტილი დასაშვებ  $\Omega$  არეს

$$g(x^{(2)}) = 18 - 15.429184 - 11.669056 \approx -9.0981.$$

### III იტერაცია

რადგან  $g(x^{(2)}) < 0$ , შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მიღებული წერტილი არ ეკუთვნის  $\Omega$  არეს. ამიტომ ვისარგებლოთ (5.95) ფორმულით და გამოვთვალოთ



$$\gamma^{(3)} = \gamma^{(2)} - \lambda g(x^{(2)}) = 0 - 0.1(-9.0981) \approx 0.91.$$

განვსაზღვროთ მიახლოების ახალი წერტილის კოორდინატები

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= x_1^{(2)} + \lambda \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} + \gamma^{(3)} \frac{\partial g(x^{(2)})}{\partial x_1} = \\ &= 3.072 + 0.1(-2)3.072 + 0.91[(-2)3.072 + 14] \approx 3.172; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^{(3)} &= x_2^{(2)} + \lambda \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} + \gamma^{(3)} \frac{\partial g(x^{(2)})}{\partial x_2} = \\ &= 3.584 + 0.1(-2)3.584 + 0.91[(-2)3.584 + 14] \approx 3.489. \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ:  $g(x^{(3)}) \approx -8.981$ .

#### IV იტერაცია

მიღებული  $x^{(3)} = [3.172; 3.489]$  წერტილი არ ეკუთვნის დასაშვებ ამონახსნების  $\Omega$  არეს. ამიტომ საჯარიმო კოეფიციენტის ახალი მნიშვნელობა (5.95) ფორმულის საფუძველზე განვსაზღვროთ

$$\gamma^{(4)} = \gamma^{(3)} - 0.1g(x^{(3)}) = 0.91 - 0.1(-8.981) \approx 1.81.$$

გამოვთვალოთ მიახლოების ახალი წერტილის კოორდინატები

$$x_1^{(4)} = 3.172 + 0.1(-2)3.172 + 1.81[(-2)3.172 + 14] \approx 3.923;$$

$$x_2^{(4)} = 3.489 + 0.1(-2)3.489 + 1.81[(-2)3.489 + 14] \approx 4.062.$$

გამოვთვალოთ  $g(x^{(4)}) \approx -0.1$ .

#### V იტერაცია

$$\gamma^{(5)} = 1.81 - 0.1(-0.1) \approx 1.82;$$

$$x_1^{(5)} = 3.923 + 0.1(-2)3.923 + 1.82[(-2)3.923 + 14] \approx 4.258;$$

$$x_2^{(5)} = 4.062 + 0.1(-2)4.062 + 1.82[(-2)4.062 + 14] \approx 4.319;$$

$$g(x^{(5)}) \approx 1.294; \quad f(x^{(5)}) = -36.784.$$

#### VI იტერაცია

$$\gamma^{(6)} = 0;$$

$$x_1^{(6)} = 4.258 + 0.1(-2)4.258 \approx 3.406;$$

$$x_2^{(6)} = 4.319 + 0.1(-2)4.319 \approx 3.455;$$

$$g(x^{(6)}) \approx -7.484.$$

#### VII იტერაცია

$$\gamma^{(7)} = 1.82 - 0.1(-7.484) \approx 2.57;$$

$$x_1^{(7)} = 3.406 + 0.1(-2)3.406 + 2.57[(-2)3.406 + 14] \approx 4.572;$$

$$x_2^{(7)} = 3.455 + 0.1(-2)3.455 + 2.57[(-2)3.455 + 14] \approx 4.586;$$

$$g(x^{(7)}) \approx 6.278; \quad f(x^{(7)}) \approx -41.935.$$

#### VIII იტერაცია

$$\gamma^{(8)} = 0;$$

$$x_1^{(8)} = 4.572 + 0.1(-2)4.572 \approx 3.658;$$

$$x_2^{(8)} = 4.586 + 0.1(-2)4.586 \approx 3.669;$$

$$g(x^{(8)}) \approx -4.265.$$

#### IX იტერაცია

$$\gamma^{(9)} = 2.57 - 0.1(-4.265) \approx 3.0;$$

$$x_1^{(9)} = 3.658 + 0.1(-2)3.658 + 3.0[(-2)3.658 + 14] \approx 4.931;$$

$$x_2^{(9)} = 3.669 + 0.1(-2)3.669 + 3.0[(-2)3.669 + 14] \approx 4.934;$$

$$g(x^{(9)}) \approx 9.451; \quad f(x^{(9)}) \approx -48.659.$$

#### X იტერაცია

$$\gamma^{(10)} = 0;$$

$$x_1^{(10)} = 4.931 + 0.1(-2)4.931 \approx 3.945;$$

$$x_2^{(10)} = 4.934 + 0.1(-2)4.934 \approx 3.947;$$

$$g(x^{(10)}) \approx -0.654.$$

### XI იტერაცია

$$\gamma^{(11)} = 3.0 - 0.1(-0.654) \approx 3.06;$$

$$x_1^{(11)} = 3.945 + 0.1(-2)3.945 + 3.06[(-2)3.945 + 14] \approx 5.026;$$

$$x_2^{(11)} = 3.947 + 0.1(-2)3.947 + 3.06[(-2)3.947 + 14] \approx 5.026;$$

$$g(x^{(11)}) \approx 10.207; f(x^{(11)}) \approx -50.521.$$

### XII იტერაცია

$$\gamma^{(12)} = 0;$$

$$x_1^{(12)} = 5.026 + 0.1(-2)5.026 \approx 4.021;$$

$$x_2^{(12)} = 5.026 + 0.1(-2)5.026 \approx 4.021;$$

$$g(x^{(12)}) \approx 0.251; f(x^{(12)}) \approx -32.337.$$

გამოვიკვლიოთ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციების ვექტორ-გრადიენტები  $x^{(12)}$  წერტილში

$$\nabla f(x^{(12)}) = [-8.042; -8.042], \nabla g(x^{(12)}) = [5.958; 5.958].$$

თუ გამოვითვლით ამ ვექტორების ერთსახელა კოორდინატების ფარდობებს, დავინახავთ, რომ ისინი ერთმანეთის ტოლია, რაც იმას ადასტურებს, რომ  $\nabla f(x^{(12)})$  და  $\nabla g(x^{(12)})$  კოლინეარული ვექტორებია. გარდა ამისა,  $x^{(12)}$  დასაშვები წერტილია, რომელიც დასაშვები არის საზღვართან ახლოს მდებარეობს (ვინაიდან  $g(x^{(12)}) \approx 0.251$ ). აღნიშნულის საფუძველზე  $x^* = x^{(12)} = [4.021; 4.021]$  წერტილი გარკვეული სიზუსტით შეიძლება ჩაითვალოს მოცემული ამოცანის ამონახსნად. საჭიროების შემთხვევაში, იტერაციული პროცესის გაგრძელებით, შესაძლებელია მიღებული შედეგის გაუმჯობესება.

## 5.6 არაწრფივი დაპროგრამების არაამოზნეპილი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

არაწრფივი დაპროგრამების ზემოთ განხილული ყველა მეთოდი ლოკალური ხასიათისაა და ამიტომ მათი გამოყენება მიზანშეწონილია ამოზნეპილი დაპროგრამების ამოცანების გადასაწყვეტად. არაწრფივი დაპროგრამების არაამოზნეპილ ამოცანებში კი აუცილებელია გამოვიყენოთ აბსოლუტური ექსტრემუმის ძებნის მეთოდები, თუ, რასაკვირველია, საჯარიმო ფუნქციის საფუძველზე წინასწარ მოვახდენთ საწყისი ამოცანის უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანაზე დაყვანას [15].

### 5.6.1 კომბინირებული მეთოდი

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის ამოცანა:

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, m}; x \in R^n \right\}, \quad (5.97)$$

სადაც  $f(x)$  მულტიმოდალური ფუნქციაა, ხოლო დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \mid g_i(x) \geq 0; i = \overline{1, m} \right\} \quad (5.98)$$

- ამოზნეპილი ან არაამოზნეპილი სიმრავლე.

ამოცანის თანახმად საჭიროა მოიძებნოს საოპტიმიზაციო ცვლადი ვექტორის ისეთი  $x^* \in \Omega$  მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს მიზნის  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტურ მინიმალურ მნიშვნელობას მოცემული არაწრფივი შეზღუდვების დაკმაყოფილების დროს.

საჯარიმო ფუნქციების მეთოდის საშუალებით პირობითი ოპტიმიზაციის (5.97) ამოცანა დაეყვანათ უპირობო ოპტიმიზაციის შემდეგი სახის ამოცანაზე:

$$\min \left\{ F(x, \gamma) = f(x) + \gamma \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} \mid x \in R^n, \gamma \in R \right\}, \quad (5.99)$$

სადაც  $F(x, \gamma)$ , ისევე როგორც  $f(x)$ , მულტიმოდალური ფუნქციაა;  $\gamma > 0$  საჯარიმო კოეფიციენტი,

განსახილველი კომბინირებული მეთოდი მონტე-კარლოსა და ფიაკო-მაკკორმიკის მეთოდების ერთობლივ გამოყენებას ითვალისწინებს. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს. (5.97) ამოცანის დასაშვებ  $\Omega$  არეში შემთხვევითი წესით შეირჩევა  $N$  რაოდენობის საწყისი წერტილი, საიდანაც ფიაკო-მაკკორმიკის იტერაციული ალგორითმით მოიძებნება (5.99) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნები  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(S)}$ . მიღებული წერტილებიდან საუკეთესო ჩათვლება (5.97) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნად.

**მაბალნოი 5.9.** კომბინირებული მეთოდის საშუალებით გადავწყვიტოთ არაამოზნეკილი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\min \{ f(x) = (x_1 - 1)(x_1 - 2)(x_1 - 3) + x_3 \mid x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \geq 0, 5 - x_3 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \}.$$

ამოხსნა. მოცემულ ამოცანაში როგორც მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია, ისე შეზღუდვებით განსაზღვრული დასაშვები  $\Omega$  არე არაამოზნეკილია. აბსოლუტური მინიმუმის წერტილია  $(0; \sqrt{2}; \sqrt{2})$ , რომელშიც ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლია  $f = -6 + \sqrt{2}$ .

ამოცანა გადაწყვეტილ იქნა კომპიუტერული პროგრამის საშუალებით, რისთვისაც გაითვალისწინეთ პროგრამული პარამეტრების შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობები:

- დამოუკიდებელი ცვლადების სავარაუდო ცვლილებების საზღვრები  $0 \leq x_j \leq 7$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;
- ცდების რაოდენობა  $N = 6$ ;
- დასაშვები ცდომილების ზღვრული მნიშვნელობა  $\epsilon = 0.000001$ .

მიღებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში 5.4.

როგორც ცხრილიდან ჩანს, დასაშვებ არეში მიზნის ფუნქციას ორი ლოკალური მინიმუმის წერტილი გააჩნია, რომელთაგან უმცირესი -

$$x^* = [0.000000; 1.414213; 1.414215], \quad f^* = -4.585783$$

ექვსი ცდიდან მხოლოდ ერთხელ იქნა მოძებნილი.

პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

S	დასაშვები საწყისი წერტილი	ოპტიმალური ამონახსნი	ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობა	იტერაციის რაოდენობა
1	$x_{(1)} = [2.1988; 0.6162; 4.5838]$	$x_1^* = 2.010874$ $x_2^* = 0.000590$ $x_3^* = 2.010874$ $f^* = 2.000002$	189	56
2	$x_{(2)} = [1.4068; 1.3617; 3.7385]$	$x_1^* = 2.010899$ $x_2^* = 0.000630$ $x_3^* = 2.010899$ $f^* = 2.000002$	194	57
3	$x_{(3)} = [1.4683; 1.2054; 4.9977]$	$x_1^* = 2.010558$ $x_2^* = 0.000933$ $x_3^* = 2.010559$ $f^* = 2.000002$	218	60
4	$x_{(4)} = [1.7332; 0.0349; 2.6371]$	$x_1^* = 2.010838$ $x_2^* = 0.000518$ $x_3^* = 2.010839$ $f^* = 2.000002$	201	56
5	$x_{(5)} = [0.6814; 1.1110; 4.7706]$	$x_1^* = 0.000000$ $x_2^* = 1.414213$ $x_3^* = 1.414215$ $f^* = -4.585784$	215	64
6	$x_{(6)} = [1.8170; 2.6167; 3.8912]$	$x_1^* = 2.010874$ $x_2^* = 0.000585$ $x_3^* = 2.010875$ $f^* = 2.000002$	181	53

ცხრილი 5.4

## 5.6.2 კომპლექსური მეთოდი

არაამოზნეკილი დაპროგრამების რთული ამოცანების გადასაწყვეტად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სიმძიმის ცენტრების მეთოდის საფუძველზე შემუშავებული კომპლექსური ალგორითმი, რომლის არსს ქვემოთ განვიხილავთ [17].

ვთქვათ, მოცემულია არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, m}; h_k(x) = 0, k = \overline{1, q}; x \in R^n \right\}, \quad (5.100)$$

სადაც  $f(x)$  მულტიმოდალური ფუნქციაა, რომელსაც ერთადერთი გლობალური მინიმუმის წერტილი გააჩნია, ხოლო დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \mid g_i(x) \geq 0; i = \overline{1, m}; h_k(x) = 0, k = \overline{1, q} \right\} \quad (5.101)$$

- ამოზნეკილი ან არაამოზნეკილი სიმრავლეა.

ამოცანის თანახმად საჭიროა მოიძებნოს საოპტიმიზაციო ცვლადი ვექტორის ისეთი  $x^* \in \Omega$  მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს მიზნის  $f(x)$  ფუნქციის აბსოლუტურ მინიმალურ მნიშვნელობას მოცემული არაწრფივი შეზღუდვების დაკმაყოფილების დროს.

შემოვიტანოთ შემდეგი სახის საჯარიმო ფუნქცია:

$$P = \gamma \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{g_i(x) - |g_i(x)|}{2} \right]^2 + \sum_{k=1}^q [h_k(x)]^2 \right\}, \quad (5.102)$$

რომლის გათვალისწინებით არაამოზნეკილი დაპროგრამების (5.100) ამოცანა დავიყვანოთ უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანაზე

$$\min \left\{ F(x, \gamma) = f(x) + P \mid x \in R^n, \gamma \in R \right\}, \quad (5.103)$$

სადაც მიზნის დამხმარე  $F(x, \gamma)$  ფუნქცია, ისევე როგორც  $f(x)$ , მულტიმოდალურია.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, (5.103) ამოცანის გარკვეული სიზუსტით გადაწყვეტა  $\gamma$  პარამეტრის შერჩევაზეა დამოკიდებული. საჯარიმო კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს  $F(x, \gamma)$  ფუნქციის მინიმუმი „ძვრას“ განიცდის და იმისათვის, რომ იგი  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმს დაემთხვეს, საჭიროა  $\gamma$  კოეფიციენტის ოპტიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრა.

აღნიშნული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოყენებულია შემდეგი გამოთვლითი სქემა. საჯარიმო კოეფიციენტებისათვის შეირჩევა დადებითი რიცხვების რაღაც ზრდადი

მიმდევრობა  $\{\gamma_t = 10^{-t}\}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , და სიმბიძის ცენტრების მეთოდის საშუალებით თითოეული  $\gamma_t$ -სთვის გადაწყდება უპირობო მინიმიზაციის (5.103) ამოცანა, რის შედეგად მიიღება ამონახსნები  $x^{(t)}$ ,  $t = 1, 2, \dots$  გამოთვლითი პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება კრებადობის პირობა

$$|F(x^{(t)}, \gamma_t) - F(x^{(t-1)}, \gamma_{t-1})| \leq \varepsilon, \quad (5.104)$$

სადაც  $\varepsilon$  დასაშვები ცდომილების აბსოლუტური მნიშვნელობაა. მიღებული  $\{x^{(t)}\}$  მიმდევრობის ზღვრული წერტილი საწყისი (5.100) ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს შეესაბამება.

გამოთვლის შემოთავაზებული სქემა იტერაციულია და იგი  $\gamma_t$ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს სიმბიძის ცენტრების მეთოდის რამდენჯერმე გამოყენებას ითვალისწინებს. ყოველი მომდევნო იტერაცია ამონახსნის გაუმჯობესებას უზრუნველყოფს. ალგორითმის იტერაციულობა მეთოდის კრებადობის დანქარების დამატებით შესაძლებლობას იძლევა, რისთვისაც განხილულ სქემაში გამოყენებულია ძებნის დასაშვები არის თანდათანობით შემცირების ალგორითმი: თუ მიმდინარე  $t$ -ურ იტერაციაში სტატისტიკური ცდები განხორციელდება  $n$  განზომილებიან კუბში  $a_j^{(t)} \leq x_j \leq b_j^{(t)}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , სადაც  $a_j$  და  $b_j$  შესაბამისად  $x_j$  კოორდინატის ცვლილების მარცხენა და მარჯვენა საზღვრებია, მაშინ მომდევნო  $(t+1)$ -ე იტერაციაში ცდები ჩატარდება შემცირებულ ჰიპერკუბში ცენტრით  $x^{(t)}$  წერტილში და შემდეგი საზღვრებით:

$$\begin{aligned} a_j^{(t+1)} &= x_j^{(t)} - (b_j^{(t)} - a_j^{(t)})/2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ b_j^{(t+1)} &= x_j^{(t)} + (b_j^{(t)} - a_j^{(t)})/2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.105)$$

ცხადია, დასაშვები არის შემცირება გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება პირობა

$$\|a^{(t+1)} - b^{(t+1)}\| \leq \delta, \quad (5.106)$$

სადაც  $\delta > 0$  რაღაც მინიმალური სიდიდეა.

ამგვარად, შემოთავაზებული ალგორითმი წარმოადგენს შემდეგი ოპერაციებისა და პროცედურების თანმიმდევრობას.

**ბიჯი 1.** შეირჩევა პროგრამული პარამეტრები:

- სტატისტიკური ცდების რაოდენობა  $N$ ;
- ლებეგის დონეების რაოდენობა  $M$ ;
- ძებნის დასაშვები არის საწყისი საზღვრები  $a_j^{(0)}$ ,  $b_j^{(0)}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;



- ჯარიმის კოეფიციენტის რეგულირების საწყისი პარამეტრი  $t$ ;
- დასაშვები ცდომილებების ზღვრული მნიშვნელობები  $\varepsilon, \delta$ .

ბიჭი 2. გამოითვლება საჯარიმო კოეფიციენტი  $\gamma_i = 10^{i-1}$ ;

ბიჭი 3. (5.102) გამოსახულების საფუძველზე ფორმირდება მიზნის დამხმარე ფუნქცია  $F(x, \gamma_i)$ ;

ბიჭი 4. შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით ძებნის დასაშვებ არეში გამომუშავდება შემთხვევითი  $x^{(i)} = a^{(i)} + (b^{(i)} - a^{(i)})\xi^{(i)}$  ვექტორი, სადაც  $\xi^{(i)}$  თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი ვექტორია ერთეულოვან კუბში;

ბიჭი 5. გამოითვლება მიზნის დამხმარე ფუნქცია  $F(x^{(i)}, \gamma_i)$ ;

ბიჭი 6. 4-5 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $S$ -ჯერ, რომლის დროსაც ადგილი აქვს მიზნის დამხმარე ფუნქციის მინიმალური  $F_H = \min\{F_i\}$  და მაქსიმალური  $F_B = \max\{F_i\}$  მნიშვნელობების დამახსოვრებას. როცა  $i = S$ , მაშინ გადავალთ მე-7 ბიჯზე;

ბიჭი 7. განისაზღვრება ლებეგის ღონეების  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M$  მნიშვნელობები შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$\zeta_p = \frac{F_B + F_H}{2} - p\Delta\zeta, \quad p = 1, 2, \dots, M, \quad (5.107)$$

სადაც  $\Delta\zeta = 0.05(F_B - F_H)$ ;

ბიჭი 8. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით ძებნის დასაშვებ არეში გამომუშავდება შემთხვევითი ვექტორი  $x^{(i)} = a^{(i)} + (b^{(i)} - a^{(i)})\xi^{(i)}$ ;

ბიჭი 9. გამოითვლება ფუნქცია  $F(x^{(i)}, \gamma_i)$ ;

ბიჭი 10. მიზნის ფუნქციის  $F(x^{(i)}, \gamma_i)$  მნიშვნელობა შემოწმდება პირობაზე  $F \leq \zeta_p$ . თუ უტოლობა სამართლიანია მაშინ გადავალთ მე-11 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მე-13 ბიჯზე;

ბიჭი 11. გამოითვლება და შევამდგა:

$$\sum_{i=1}^N [F(x^{(i)}, \gamma_i) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p), \quad (5.108)$$

$$\sum_{i=1}^N x_j^{(i)} [F(x^{(i)}, \gamma_i) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.109)$$

**ბიჭი 12.** 10-11 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $\zeta_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}$  სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს. როცა  $p = \mathfrak{M}$ , მაშინ გადავალოთ მე-13 ბიჯზე;

**ბიჭი 13.** 8-12 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $N$ -ჯერ. როცა  $i = N$ , მაშინ გადავალოთ მე-14 ბიჯზე;

**ბიჭი 14.** (5.108) და (5.109) სასრული ჯამების გამოყენებით საფუძველზე გამოითვლება

$$\overline{x_j(\zeta_p)}, \quad p = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

**ბიჭი 15.**  $\{x_1, p\}, \{x_2, p\}, \dots, \{x_n, p\}$  მიმდევრობების ემპირიული წერტილების პარაბოლური აპროქსიმაციის შედეგად განისაზღვრება მათაპროქსიმებული პოლინომები

$$x_j(p) = \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.110)$$

**ბიჭი 16.** ფორმირდება ოპტიმიზაციის ერთგანზომილებიანი ამოცანა

$$\min \left\{ F(x(p), \gamma_i) \mid p \in [\mathfrak{M} - \Delta \mathfrak{M}, \mathfrak{M} + \Delta \mathfrak{M}] \right\} \quad (5.111)$$

და ოპტიმიზაციის ნებისმიერი უმარტივესი მეთოდით განისაზღვრება ოპტიმალური  $p_i^*$ ;

**ბიჭი 17.** (5.110) პოლინომების საშუალებით გამოითვლება ოპტიმალური ამონახსნი

$$x_j^{(i)} = x_j(p_i^*), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$F^{(i)} = F(x(p_i^*), \gamma_i);$$

**ბიჭი 18.** შემოწმდება კრებალობის (5.104) პირობა;

**ბიჭი 19.** თუ (5.104) უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავალოთ 23-ე ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მე-20 ბიჯზე;

**ბიჭი 20.** (5.105) ფორმულების საშუალებით განისაზღვრება დასაშვები არის ახალი საზღვრები;

**ბიჭი 21.** შემოწმდება დასაშვები არის შემცირების (5.106) პირობა;

ბიჯი 22. თუ (5.106) უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავალთ 23-ე ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში  $t$  პარამეტრი ერთი ერთეულით გაიზარდება ( $t = t + 1$ ) და გადავალთ მე-2 ბიჯზე;

ბიჯი 23. ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტების საჭიროების შემთხვევაში შეიძლება გამოყენებულ იქნეს დეტერმინირებული ძებნის ნებისმიერი მეთოდი;

ბიჯი 24. ძებნის დასასრული.

მაგალითი 5.10. კომპლექსური მეთოდის საშუალებით გადავწყვიტოთ არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$\min \left\{ f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \mid g(x) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

ამოხსნა. საჯარიმო ფუნქციების მეთოდის გამოყენებით არაწრფივი დაპროგრამების მოცემული ამოცანა დავიყვანოთ უპირობო მინიმიზაციის შემდეგი სახის ამოცანა-ზე:

$$\min \left\{ F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + 10^{T-1} \left[ \left( \frac{5 - x_1 - x_2 - |5 - x_1 - x_2|}{2} \right)^2 + \left( \frac{x_1 - |x_1|}{2} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - |x_2|}{2} \right)^2 \right] \right\}.$$

ამოცანა გადაწყვეტილ იქნა კომპიუტერული პროგრამის საშუალებით, რისთვისაც გავითვალისწინეთ პროგრამული პარამეტრების შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობები:

- სტატისტიკური ცდების რაოდენობა  $N = 100$ ;
- დამოუკიდებელი ცვლადების სავარაუდო ცვლილების საზღვრები  $0 \leq x_j \leq 10$ ,  $j = 1, 2$ ;
- საჯარიმო კოეფიციენტის სიდიდის რეგულირების საწყისი პარამეტრი  $T = 3$ ;
- დასაშვები ცდომილებების მნიშვნელობები  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2$ .

გამოთვლების შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში 5.5. როგორც ცხრილიდან ჩანს,  $\varepsilon = 0.5$  სიზუსტით ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრისათვის საჭირო გახდა ორი იტერაციის ჩატარება. მიღებული შედეგი  $x^* = [2.534662; 2.466918]^T$ ,  $f^* = 4.500052$  დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით ეთანადება ანალიზურად გამოთვლილ რიცხვით მნიშვნელობებს, რომელიც ტოლია  $x^* = [2.5; 2.5]$ ,  $f^* = f(x^*) = 4.5$ .

პირობითი ოპტიმიზაციის არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები

იტერაცია	I	II
ძებნის არე	$0 \leq x_1 \leq 10$ $0 \leq x_2 \leq 10$	$1.306650 \leq x_1 \leq 6.306650$ $1.207715 \leq x_2 \leq 6.207715$
საჯარიმო კოეფიციენტი	$\gamma_1 = 100$	$\gamma_2 = 1000$
სტატისტიკური ცდების რაოდენობა	100	100
ობიექტური ამონახსნი	$x_1^{(1)} = 2.613300$ $x_2^{(1)} = 2.415430$ $F_1 = 4.516339$	$x_1^{(2)} = 2.534662$ $x_2^{(2)} = 2,466918$ $F_2 = 4.500052$
ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობა	142	147

ცხრილი 5.5

# თავი მეექვსე

## ერთპრიტივიანი ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები

მოცემულ თავში განხილულია გამოყენებითი ამოცანები, რომელსაც ადგილი აქვს ოპტიმალური დაპროექტების სისტემებში. კერძოდ, განხილულია კონკრეტული დასაპროექტებელი ობიექტების - არაწრფივი ელექტრონული სქემისა და ატომური ელექტროსადგურის თბოგადამცემი აპარატის - ოპტიმალური დაპროექტების საინჟინრო ამოცანები, რომელთა მათემატიკური მოდელი არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანებზე დაიყვანება. გარდა ამისა, ოპტიმიზაციის მეთოდების გამოყენებითი ასპექტები ილუსტრირებულია წარმოების ოპტიმალური დაგეგმვისა და არაწრფივ განტოლებათა სისტემების გადაწყვეტის მაგალითებზე.

### 6.1 ელექტრონული სქემების ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანა

ამოცანის დასმ. მოცემული კონფიგურაციის ელექტრონული სქემების ოპტიმალური პარამეტრების განსაზღვრის ამოცანას ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ელექტრონულ ნაკეთობათა სქემოტექნიკური დაპროექტების ციკლში. აღნიშნული ამოცანა ითვალისწინებს სქემის ელემენტების ისეთი მნიშვნელობების განსაზღვრას, რომლის დროსაც ოპტიმალობის შერჩეული კრიტერიუმი - მიზნის ფუნქცია თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობას მიაღწევს ტექნიკური დავალების კონკრეტული მოთხოვნების დაკმაყოფილების პირობებში. მათემატიკური თვალსაზრისით ფორმულირებული ამოცანა დაიყვანება არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე

$$\min \left\{ f(x) \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; a_j \leq x_j \leq b_j, j = \overline{1, n} \right\}, \quad (6.1)$$

სადაც  $f(x)$  და  $g_i(x)$  არაწრფივი, ზოგად შემთხვევაში, მულტიმოდალური ფუნქციებია, ხოლო  $a_j$  და  $b_j$  - საოპტიმიზაციო  $j$ -ური ცვლადის მნიშვნელობები, რომლებიც მის შესაძლო ცვლილებათა დიაპაზონს ახასიათებს.

ოპტიმალობის კრიტერიუმები. ოპტიმალობის კრიტერიუმის შერჩევა და მისი ექსტრემალური მნიშვნელობის განსაზღვრა ოპტიმიზაციის პრობლემის არსს შეადგენს. ცხადია, კრიტერიუმი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ოპტიმიზაციის შედეგად მან პროცესის საუკეთესო მართვა უზრუნველყოს. ელექტრონული ციფრული სქემების დაპროექტების ამოცანებში ოპტიმალობის კრიტერიუმად გამოიყენება გამოსახულებები, რომლებიც სქემის ისეთ დინამიკურ პარამეტრებს ახასიათებს, როგორცაა: გადართვის დრო, გამოსავალი იმპულსის სასურველ იმპულსთან მაქსიმალური მიახლოება, სქემის მიერ მოხმარებული სიმძლავრე და სხვ. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

1. გადართვის დრო  $t^{1.0}$  განისაზღვრება როგორც გამოსავალი ძაბვის იმპულსის წინა ფრონტის  $u'_K$  და  $u'_H$  დონეების შესაბამისი დროის მომენტების სხვაობა (ნახ. 6.1):

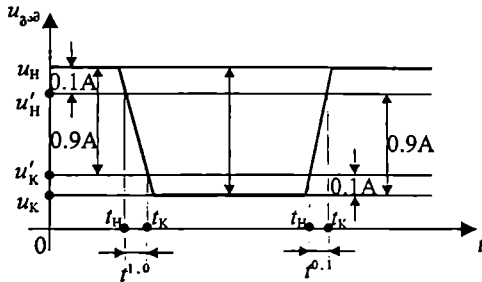
$$t^{1.0} = t_K - t_H, \quad (6.2)$$

სადაც

$$u'_H = u_H + 0.1(u_K - u_H), \quad (6.3)$$

$$u'_K = u_K + 0.9(u_K - u_H). \quad (6.4)$$

უკანასკნელ გამოსახულებებში  $u_K - u_H = A$  სიდიდე გამოსავალი იმპულსის ამპლიტუდის ალგებრული მნიშვნელობაა.



ნახ. 6.1

ანალოგიურად განისაზღვრება გადართვის დრო  $t^{0,1}$  საწინააღმდეგო პოლარობის იმპულსის დროს. ცხადია, ამ შემთხვევაში ოპტიმალობის კრიტერიუმში გამოისახება შემდეგი ინტეგრალით:

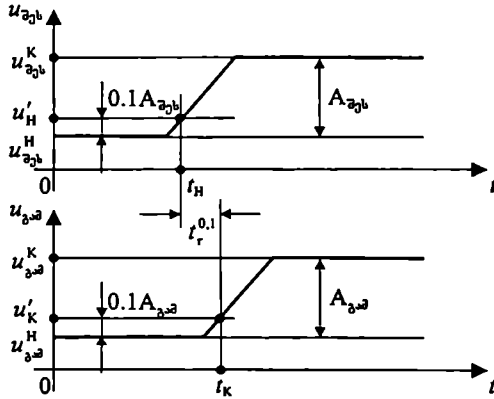
$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt \rightarrow \min.$$

2. გადართვის საშუალო დრო  $\bar{t}$  განისაზღვრება ფორმულით:

$$\bar{t} = 0.5(t^{1,0} + t^{0,1}), \quad (6.5)$$

სადაც  $t^{1,0}$  იმპულსის გადართვის დროა ჩართვის დროს, ხოლო  $t^{0,1}$  - იმპულსის გადართვის დრო გამორთვის დროს (ნახ. 6.1).

3. დაუოვნების დრო  $t_r^{0,1}$  განისაზღვრება როგორც შესავალი  $u_{\text{პეს}}^H$  და გამოსავალი  $u_{\text{გამ}}^H$  იმპულსების წინა ფრონტების  $u_K^H$  და  $u_H^H$  დონეების შესაბამისი დროის მომენტების სხვაობა (ნახ. 6.2):



ნახ. 6.2

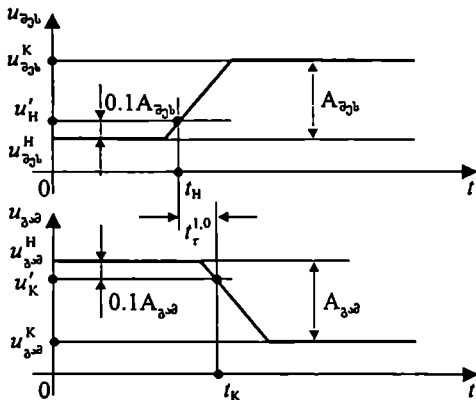
$$t_r^{0,1} = t_K - t_H, \quad (6.6)$$

სადაც

$$u_H^H = u_{\text{პეს}}^H + 0.1(u_{\text{პეს}}^K - u_{\text{პეს}}^H), \quad (6.7)$$

$$u'_K = u_{გაბ}^H + 0.1(u_{გაბ}^K - u_{გაბ}^H). \quad (6.8)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება დაყოვნების დრო  $t_r^{1,0}$  საწინააღმდეგო პოლარობის გამოსავალი იმპულსის დროს (ნახ. 6.3).



ნახ. 6.3

4. დაყოვნების საშუალო დრო  $\bar{t}_r$  განისაზღვრება ფორმულით

$$\bar{t}_r = 0.5(t_r^{1,0} + t_r^{0,1}). \quad (6.9)$$

5. იმპულსის გავრცელების დაყოვნების დრო  $t_{გაბ}^{1,0}$  განისაზღვრება (დაყოვნების  $t_r^{1,0}$  დროის ანალოგიურად) როგორც შესავალი და გამოსავალი იმპულსების წინა ფრონტების  $u'_H$  და  $u'_K$  დონეების შესაბამისი დროის მომენტების სხვაობა, მხოლოდ იმ განსხვავებით რომ

$$u'_H = u_{გაბ}^H + 0.5(u_{გაბ}^K - u_{გაბ}^H), \quad (6.10)$$

$$u'_K = u_{გაბ}^H + 0.5(u_{გაბ}^K - u_{გაბ}^H). \quad (6.11)$$

6. იმპულსის გავრცელების დაყოვნების საშუალო დრო  $\bar{t}_{გაბ}$  განისაზღვრება ფორმულით

$$\bar{t}_{გაბ} = 0.5(t_{გაბ}^{1,0} + t_{გაბ}^{0,1}), \quad (6.12)$$

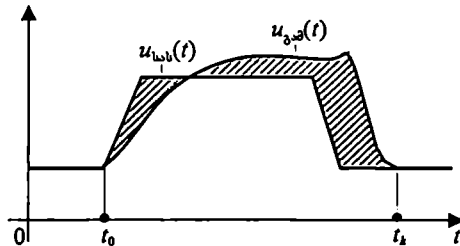


სადაც  $I_{\Sigma}^{1,0}$  იმპულსის გავრცელების დაყოვნების დროა ჩართვის დროს, ხოლო  $I_{\Sigma}^{0,1}$  - გამორთვის დროს.

7. გამოსავალი  $u_{გაგ}(t)$  იმპულსის სასურველ  $u_{სს}(t)$  იმპულსთან მაქსიმალური მიახლოების კრიტერიუმში განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$F(t) = \int_{t_0}^{t_k} [u_{გაგ}(t) - u_{სს}(t)]^2 dt \rightarrow \min, \quad (6.13)$$

სადაც  $t_0$  და  $t_k$  გარდამავალი პროცესის საწყისი და საბოლოო მომენტებია. აღნიშნული კრიტერიუმის მინიმიზაცია ნახ. 6.4-ზე დაშტრიხული ფართის მინიმიზაციას განაპირობებს, რაც, თავის მხრივ, გამოსავალი სიგნალის სასურველ სიგნალთან მაქსიმალურ მიახლოებას უზრუნველყოფს. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ იმპულსის გავრცელების დაყოვნების კრიტერიუმები (6.13) გამოსახულების კერძო შემთხვევებს წარმოადგენს.



ნახ. 6.4

8. ელექტრონული სქემის მიერ მოხმარებული საშუალო სიმძლავრე  $\bar{P}$  განისაზღვრება როგორც სიგნალის ლოგიკურ „1“ და ლოგიკურ „0“ მდგომარეობებში სქემის მიერ შესაბამისად მოხმარებული  $P^1$  და  $P^0$  სიმძლავრეების საშუალო არითმეტიკული

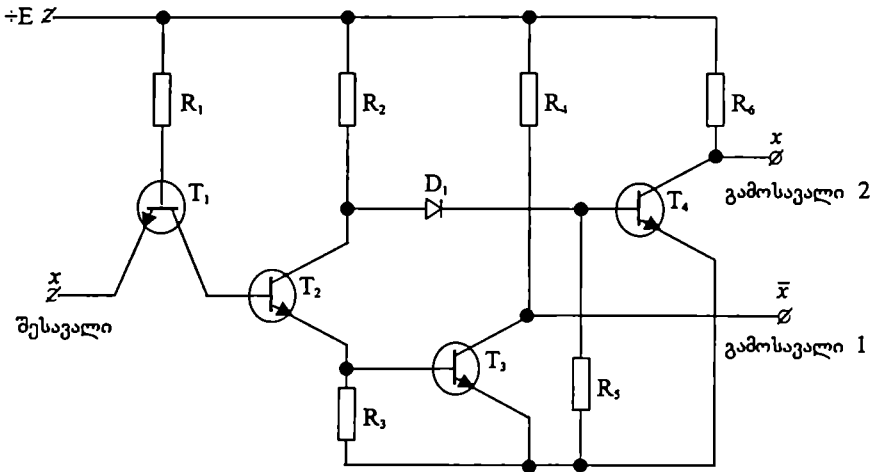
$$P = 0.5(P^0 + P^1). \quad (6.14)$$

(6.14) გამოსახულებაში  $P^1$  და  $P^0$  სიდიდეები გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P^{0(1)} = \sum_{i=1}^M \left( E_i \sum_{j=1}^{N_i} I_{ij} \right), \quad (6.15)$$

სადაც  $E_i$  მუდმივი კვების  $i$ -ური წყაროს ძაბვაა  $I_{ij}$  - კვების  $i$ -ურ წყაროსთან უშუალოდ მიერთებულ  $j$ -ურ ელემენტში გამავალი დენი,  $M$  - სქემაში კვების წყაროების რაოდენობა,  $N_i$  - კვების  $i$ -ურ წყაროსთან უშუალოდ მიერთებული ელემენტების რაოდენობა.

**მათემატიკური მოდელი.** დასაპროექტებელ ობიექტს მესხიერების მოწყობილობის სამისამართო დეშიფრატორის მართვის ელექტრონული ნაკეთობა წარმოადგენს, რომლის პრინციპიული სქემა მოცემულია ნახ. 6.5-ზე.



ნახ. 6.5

მოცემული სქემის მათემატიკური მოდელის შედგენისას გათვალისწინებულია ტექნიკური დავალების შემდეგი კონკრეტული მოთხოვნები:

1. სქემა საიმედოდ უნდა მუშაობდეს ტემპერატურის ფართო დიაპაზონში:  $-60^{\circ}C \leq t \leq +125^{\circ}C$ ;
2. შესავალი სიგნალის მინიმალური დონე (ლოგიკური „0“) უნდა იყოს არაუმეტეს  $+0.4$  ვოლტი;
3. შესავალი სიგნალის მაქსიმალური დონე (ლოგიკური „1“) უნდა იყოს არანაკლებ  $+2.4$  ვოლტი;
4. გამოსავალი სიგნალის მინიმალური დონე - არაუმეტეს  $+0.4$  ვოლტი;

5. გამოსავალი სიგნალის მაქსიმალური დონე - არანაკლებ +2.4 ვოლტი;
6. გამოსავალი სიგნალის დაყოვნების საშუალო დრო - არაუმეტეს 40 ნანოწამი;
7. სქემის მიერ მოთხოვნილი სიმძლავრე სტატიკურ რეჟიმში - არაუმეტეს 40 მილივოლტი.

ელექტრონული სქემის მოცემული კონფიგურაციისა და მასში შემავალი აქტიური ელემენტების მოცემული პარამეტრების დროს ოპტიმიზაციის მათემატიკური მოდელი, სქემის სტატიკური და დინამიკური პარამეტრების გათვალისწინებით, შედგენილ იქნა ორ ვარიანტად. მიზნის ფუნქციის სახით პირველ ვარიანტში შერჩეულია სქემის მიერ მოხმარებული სტატიკური სიმძლავრე, ხოლო მეორე ვარიანტში - სქემის გადართვის დაყოვნების დრო.

მათემატიკური მოდელის გამარტივების მიზნით, აქტიური ელემენტების არაწრფივი მოდულების ნაცვლად გამოყენებულია ტრანზისტორისა და დიოდის უბან-უბან წრფივი მოდულები და შედგენილია ეკვივალენტური სქემები, რომლებიც შეესაბამება მოცემული ნაკეთობის ორ სტატიკურ მდგომარეობას:

- **H მდგომარეობა**, როცა სქემის შესავალზე დაბალი დონის სიგნალი (ლოგიკური „0“) მიეწოდება (ნახ. 6.6);
- **B მდგომარეობა**, როცა სქემის შესავალზე მაღალი დონის სიგნალი (ლოგიკური „1“) მიეწოდება (ნახ. 6.7).

ვინაიდან მოცემულ სქემას ორი მდგომარეობა გააჩნია, ამიტომ სტატიკური სიმძლავრე განისაზღვრება როგორც  $P^1$  და  $P^0$  მდგომარეობების საშუალო არითმეტიკული

$$P = 0.5(P^0 + P^1). \quad (6.16)$$

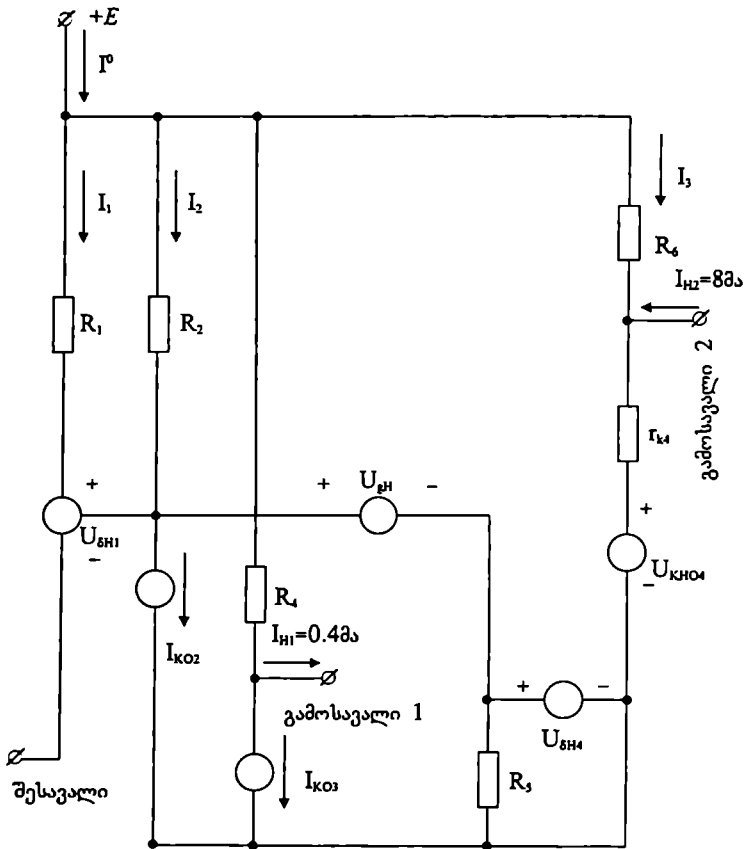
სქემის მიერ H მდგომარეობაში მოხმარებული სიმძლავრე გამოისახება შემდეგნაირად:

$$P^0 = (I_1^0 + I_2^0 + I_3^0)E, \quad (6.17)$$

სადაც E კვების ძაბვაა, ხოლო

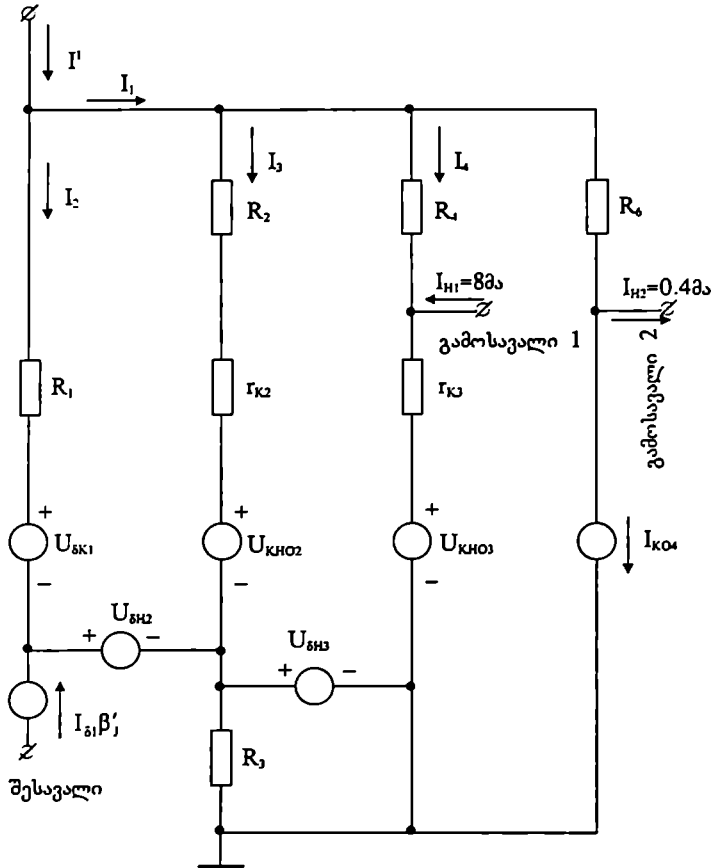
$$I_1^0 = \frac{E - U_{\delta H1} - U_{\delta \text{ეს}}}{R_1}, \quad (6.18)$$

$$I_2^0 = \frac{E - U_{\delta H4} - U_{\delta H} - I_{K02}R_2}{R_2}, \quad (6.19)$$



ნახ. 6.6

$$I_3^0 = \frac{E - U_{KHO4}}{R_6 + r_{K4}}, \quad (6.20)$$



ნახ. 6.7

- ◆  $U_{\delta H1}$  და  $U_{\delta H4}$  შესაბამისად  $T_1$  და  $T_4$  ტრანზისტორების ძაბვის ვარდნაა ბაზა-ემიტერის გადასავალზე გაჯერების რეჟიმში;
- ◆  $U_{\delta H}$  - დიოდის გადასავალზე ძაბვის ვარდნა გაჯერების რეჟიმში;
- ◆  $I_{K2}$  -  $T_2$  ტრანზისტორის უკუდენის ძალა წაკვეთის რეჟიმში;

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითა ამოცანებში

- ◆  $U_{KHM}$  - გაჯერებული  $T_4$  ტრანზისტორის კოლექტორული ძაბვა;
- ◆  $U_{ჰჰ}$  - შესავალი ძაბვა;
- ◆  $r_{K4}$  -  $T_4$  ტრანზისტორის კოლექტორის წინაღობა.

$I_1^0$ ,  $I_2^0$  და  $I_3^0$  მნიშვნელობების (6.17) გამოსახულებაში შეტანის შედეგად მივიღებთ

$$P_0 = \left( \frac{E - U_{\delta H1} - U_{ჰჰ}}{R_1} + \frac{E - U_{\delta H4} - U_{eH} - I_{K02} R_2}{R_2} + \frac{E - U_{KHM}}{R_6 + r_{K4}} \right) E. \quad (6.21)$$

II მდგომარეობაში  $T_4$  ტრანზისტორი მუშაობს გაჯერებულ რეჟიმში, რაც შემდეგი თანაფარდობით შეიძლება გამოვსახოთ:

$$\frac{\beta_4 I_{\delta H}}{I_{KHM}} \geq S, \quad (6.22)$$

სადაც

- ◆  $\beta_4$  ტრანზისტორის გაძლიერების სტატიკური კოეფიციენტი;
- ◆  $I_{\delta H}$  - ბაზური დენის ძალა გაჯერების რეჟიმში;
- ◆  $I_{KHM}$  - გაჯერებული ტრანზისტორის კოლექტორული დენის ძალა;
- ◆  $S$  - გაჯერების კოეფიციენტი,  $S = 1.2$ .

განვსაზღვროთ  $T_4$  ტრანზისტორის  $I_{\delta H}$  და  $I_{KHM}$ :

$$I_{\delta H} = I_2^0 - \frac{U_{\delta H4}}{R_5} = \frac{E - U_{\delta H4} - U_{eH} - I_{K02} R_2}{R_2} - \frac{U_{\delta H4}}{R_5}, \quad (6.23)$$

$$I_{KHM} = I_3^0 + I_{H2}^0 = \frac{E - U_{KHM}}{R_6 + r_{K4}} + I_{H2}^0, \quad (6.24)$$

სადაც  $I_{H2}^0 = 8$  მილიამპერი დენის ეკვივალენტური გენერატორია. უკანასკნელი მონაცემების (6.22) გამოსახულებაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ ტრანზისტორის გაჯერების პირობას

$$\beta_4 \left( \frac{E - U_{\delta H} - U_{\delta H4} - I_{K02} R_2}{R_2} - \frac{U_{\delta H4}}{R_5} \right) \geq 1.2. \quad (6.25)$$

$$\frac{E - U_{KH04} + I_{H2}^0}{R_6 + r_{K4}}$$

ტექნიკური მოთხოვნების შესაბამისად, დატვირთვის სქემის ნორმალური მუშაობისათვის აუცილებელია გამოსავალი ძაბვების გარკვეული ღონეები შევინარჩუნოთ. ამიტომ პირობები, რომელიც ამ შეზღუდვებს ითვალისწინებს, შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:

$$U_{\alpha 1} = E - (I_{H1}^0 + I_{K03}) R_4 \geq 2.4, \quad (6.26)$$

$$U_{\alpha 2} = U_{KH04} + \left( I_{H2}^0 + \frac{E - U_{KH04}}{R_6 + r_{K4}} \right) r_{K4} \leq 0.4, \quad (6.27)$$

სადაც  $I_{H1}^0 = 0.4$  მილიამპერი.

B მდგომარეობაში სქემის მიერ მოთხოვნილი სიმძლავრე (6.17) გამოსახულების ანალოგიურად განისაზღვრება:

$$P^1 = (I_2^1 + I_3^1 + I_4^1) E, \quad (6.28)$$

სადაც

$$I_2^1 = \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3}}{R_1}, \quad (6.29)$$

$$I_3^1 = \frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}}, \quad (6.30)$$

$$I_4^1 = \frac{E - U_{KH03}}{R_4 + r_{K3}}, \quad (6.31)$$

სადაც

- ♦  $U_{\delta K1}$  ძაბვის ვარდნა  $T_1$  ტრანზისტორის ბაზა-კოლექტორის გადასავალზე;
- ♦  $U_{\delta H2}$  და  $U_{\delta H3}$  - შესაბამისად გაჯერებული  $T_2$  და  $T_3$  ტრანზისტორების ბაზა-ემიტერის გადასავალზე მოღებულ ძაბვის ვარდნა;

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები

- ◆  $r_{K2}$  და  $r_{K3}$  - შესაბამისად  $T_2$  და  $T_3$  ტრანზისტორების კოლექტორის წინაღობები.
- ◆  $I_2^1$ ,  $I_3^1$  და  $I_4^1$  მნიშვნელობების (6.28) გამოსახულებაში შეტანის შედეგად მივიღებთ

$$P^1 = \left( \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3}}{R_1} + \frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}} + \frac{E - U_{KH03}}{R_4 + r_{K3}} \right) E. \quad (6.32)$$

B მდგომარეობაში  $T_2$  და  $T_3$  ტრანზისტორები გაჯერებულია, ამიტომ გაჯერების პირობები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{\beta_2 I_{\delta 2}}{I_{KH2}} \geq 1.2, \quad \frac{\beta_3 I_{\delta 3}}{I_{KH3}} \geq 1.2. \quad (6.33)$$

ეკვივალენტური სქემიდან განვსაზღვროთ:

$$I_{\delta 2} = I_{K1} = I_{\delta 1} (1 + \beta_1') = I_2 (1 + \beta_1') = \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3}}{R_1} (1 + \beta_1'), \quad (6.34)$$

$$I_{KH2} = I_3 = \frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}}, \quad (6.35)$$

$$I_{\delta 3} = I_{\delta 2} + I_{KH2} - \frac{U_{\delta H3}}{R_3} = \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3}}{R} (1 + \beta_1') + \frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}} - \frac{U_{\delta H3}}{R_3}, \quad (6.36)$$

$$I_{KH3} = \frac{E - U_{KH03}}{R_4 + r_{K3}} + I_{H1}^1, \quad (6.37)$$

სადაც  $\beta_1'$  არის  $T_1$  ტრანზისტორის გაძლიერების ინვერსიული კოეფიციენტი, ხოლო  $I_{H1}^1 = 8$  მილიამპერი.

უკანასკნელი მონაცემების (6.33) გამოსახულებებში ჩასმის შედეგად მივიღებთ



$$\beta_2 \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3} (1 + \beta_1')}{R_1} \geq 1.2, \quad (6.38)$$

$$\frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}}$$

$$\beta_3 \left[ \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3} (1 + \beta_1')}{R_1} + \frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}} - \frac{U_{\delta H3}}{R_3} \right] \geq 1.2. \quad (6.39)$$

$$\frac{E - U_{KH03} + I_{HI}'}{R_4 + r_{K3}}$$

**B** მდგომარეობაში გამოსავალი სიგნალების გარკვეულ ღონეებზე შენარჩუნების პირობები (6.26) და (6.27) გამოსახულებების ანალოგიურია:

$$U_{\alpha\alpha1} = U_{KH03} + \left( I_{HI}' + \frac{E - U_{KH03}}{R_4 + r_{K3}} \right) r_{K3} \leq 0.4, \quad (6.40)$$

$$U_{\alpha\alpha2} = E - (I_{H2}' + I_{K04}') R_6 \geq 2.4, \quad (6.41)$$

სადაც  $I_{H2}' = 0.8$  მილიამპერი.

(6.21) და (6.32) გამოსახულებების (6.16)-ში შეტანის შედეგად მივიღებთ სტატიკურ რეჟიმში სქემის მიერ მოხმარებული სიმძლავრის ანალიზურ გამოსახულებას

$$P = 0.5 \left( \frac{E - U_{\delta H1} - U_{\alpha\alpha1}}{R_1} + \frac{E - U_{\delta H4} - U_{\delta H} - I_{K02}' R_2}{R_2} + \frac{E - U_{KH04}}{R_6 + r_{K4}} \right) E +$$

$$+ 0.5 \left( \frac{E - U_{\delta K1} - U_{\delta H2} - U_{\delta H3}}{R_1} + \frac{E - U_{KH02} - U_{\delta H3}}{R_2 + r_{K2}} + \frac{E - U_{KH03}}{R_4 + r_{K3}} \right) E. \quad (6.42)$$

როგორც ცნობილია, იმპულსურ რეჟიმში არაწრფივი სქემების მუშაობის ძირითად მახასიათებელს გადართვის დაყოვნების საშუალო დრო წარმოადგენს, რომელიც განისაზღვრება როგორც ძაბვის სიგნალის წინა და უკანა ფრონტების საშუალო არითმეტიკული

$$t_r = 0.5(t_1 + t_2). \quad (6.43)$$

ლოგიკური სქემებისათვის წინა ფრონტის დაყოვნების  $t_1$  დრო განისაზღვრება როგორც სხვაობა დროის იმ მომენტებს შორის, როცა შესავალი და გამოსავალი ძაბვის

სიგნალები თავისი მაქსიმალური დონის 50%-სიდიდეს მიაღწევს, ხოლო უკანა ფრონტის დაყოვნების  $t_2$  დრო განისაზღვრება როგორც სხვაობა დროის იმ მომენტებს შორის, როცა შესავალი და გამოსავალი ძაბვის სიგნალები თავისი მაქსიმალური დონიდან 50%-სიდიდით შემცირდება.

$t_r$ -ის ანალიზურად გამოთვლა დიდ სიძნელებთანაა დაკავშირებული, რადგან იგი მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას საჭიროებს. ამიტომ მისი განსაზღვრისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ტეილორის დაშლის ფორმულა

$$t_r \approx \tilde{t}_r + \sum_{i=1}^n \frac{\partial t_r}{\partial R_i} (R_i - \tilde{R}_i), \quad (6.44)$$

სადაც  $\tilde{t}_r = t_r(R_1 = \tilde{R}_1, R_2 = \tilde{R}_2, \dots, R_n = \tilde{R}_n)$ , ხოლო  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \dots, \tilde{R}_n$  რეზისტორების ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებია.

რადგან მოცემულ სქემას ორი გამოსავალი გააჩნია და, ამასთან, ადგილი აქვს შემდეგ მიახლოებით ტოლობას

$$\frac{\partial t_r}{\partial R_i} \approx \frac{\Delta t_r}{\Delta R_i},$$

ამიტომ გვექნება

$$t_{r1} = \tilde{t}_{r1} + \sum_{i=1}^6 \frac{\Delta t_{r1}}{\Delta R_i} (R_i - \tilde{R}_i) \leq \bar{t}_{r1}, \quad (6.45)$$

$$t_{r2} = \tilde{t}_{r2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\Delta t_{r2}}{\Delta R_i} (R_i - \tilde{R}_i) \leq \bar{t}_{r2}, \quad (6.46)$$

სადაც  $\tilde{t}_{r1}$  და  $\tilde{t}_{r2}$  შესაბამისი პარამეტრების ზღვრული დასაშვები მნიშვნელობებია.

$\Delta t_{r1} / \Delta R_i$  და  $\Delta t_{r2} / \Delta R_i$  კოეფიციენტები ექსპერიმენტის საფუძველზე განისაზღვრება, რისთვისაც საჭიროა გამოყენებულ იქნეს ელექტრონული სქემების ანალიზის ნებისმიერი კომპიუტერული პროგრამა. ექსპერიმენტის შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში 6.1.

მიღებული შედეგების (6.45) და (6.46) გამოსახულებებში ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$t_{r1} = 28.62 - 0.2(R_2 - 3) + 0.525(R_3 - 2) + 3.76(R_4 - 2.4) \leq \bar{t}_{r1}, \quad (6.47)$$

$$t_{r_2} = 36 - (R_1 - 4) + 3.333(R_2 - 3) + 0.7(R_5 - 5) + 5(R_6 - 2.4) \leq \bar{t}_{r_2}. \quad (6.48)$$

ზემოთ მოყვანილ გამოსახულებებში დამოუკიდებელ ცვლადებს სქემის პასიური ელემენტები  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  წარმოადგენს, რომელთა მნიშვნელობების შესაძლო ცვლილების დიაპაზონი სქემოტექნიკური მოსაზრებებით შეზღუდულია:

$$1.0 \text{ (კომი)} \leq R_i \leq 5.0 \text{ (კომი)}, \quad i = \overline{1,6}. \quad (6.49)$$

შეზღუდულია, აგრეთვე, ტრანზისტორების კოლექტორული დენის ძალების მნიშვნელობები. ასე, მაგალითად,  $T_2$  ტრანზისტორისათვის მაქსიმალურად დასაშვები კოლექტორული დენის ძალის მნიშვნელობაა 3 მილიამპერი, ხოლო  $T_3$  და  $T_4$  ტრანზისტორებისათვის - 15 მილიამპერი.

№	$R_1$ კომი	$R_2$ კომი	$R_3$ კომი	$R_4$ კომი	$R_5$ კომი	$R_6$ კომი	$\Delta t_{r_1}$ წწამი	$\Delta t_{r_2}$ წწამი	$\frac{\Delta t_{r_1}}{\Delta R_i}$	$\frac{\Delta t_{r_2}}{\Delta R_i}$
1	4.0	3.0	2.0	2.4	5.0	2.4	28.62	36.0	—	—
2	4.8	3.0	2.0	2.4	5.0	2.4	28.62	35.2	0.0	-1.0
3	4.0	3.6	2.0	2.4	5.0	2.4	28.50	38.0	- 0.2	3.333
4	4.0	3.0	2.4	2.4	5.0	2.4	28.83	0.0	0.525	0.0
5	4.0	3.0	2.0	2.9	5.0	2.4	30.50	0.0	3.760	0.0
6	4.0	3.0	2.0	2.4	6.0	2.4	28.62	36.7	0.0	0.7
7	4.0	3.0	2.0	2.4	5.0	2.9	28.62	38.5	0.0	5.0

ცხრილი 6.1

ტემპერატურის მოცემულ დიაპაზონში სქემის ნორმალური ფუნქციონირების შესაფასებლად საჭიროა ვისარგებლოთ ზღვრული გამოცდების მეთოდით [53], რომლის თანახმად, სქემის მუშაობის უნარი შესავალი პარამეტრებისა და გარე პირობების ყველაზე უარესი მნიშვნელობების დროს განისაზღვრება.

ზღვრული გამოცდების შედეგებისა და აქტიური ელემენტების ელექტრო-ფიზიკური პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზემოთ მიღებული თანაფარდობების საფუძველზე, შედგენილ იქნა დასაპროექტებელი ელექტრონული სქემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც შეიძლება შემდგენიარად იქნეს ფორმულირებული: საჭიროა განისაზღვროს  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  რეზისტორების ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც სქემის სტატიკური სიმძლავრე

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებით ამოცანები

$$P = \frac{19.55}{R_1} + \frac{12.3}{R_2 + 0.011} + \frac{15.0}{R_4 + 0.005} + \frac{9.63}{R_2} + \frac{15.0}{R_6 + 0.005} \quad (6.50)$$

თავის მინიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს უტოლობათა შემდეგი სისტემის დაკმაყოფილების დროს:

$$\frac{(23.4/R_1) + [48.3/(R_2 + 0.011)] - (14/R_3)}{4.45/(R_4 + 0.005) + 8} \geq 1.2, \quad (6.51)$$

$$7.3(R_2 + 0.011)/R_1 \geq 1.2, \quad (6.52)$$

$$\frac{(35.4/R_2) - (14/R_5)}{4.45/(R_6 + 0.005) + 8} \geq 1.2, \quad (6.53)$$

$$4.8/(R_2 + 0.017) \leq 3, \quad (6.54)$$

$$5.45/(R_4 + 0.005) + 8 \leq 15, \quad (6.55)$$

$$5.45/(R_6 + 0.005) + 8 \leq 15, \quad (6.56)$$

$$4.5 - 0.8R_4 \geq 2.4, \quad (6.57)$$

$$4.5 - 0.8R_6 \geq 2.4, \quad (6.58)$$

$$0.114 + 0.044/(R_4 + 0.008) \leq 0.4, \quad (6.59)$$

$$0.114 + 0.044/(R_6 + 0.008) \leq 0.4, \quad (6.60)$$

$$28.62 - 0.2(R_2 - 3) + 0.525(R_3 - 2) + 3.76(R_4 - 2.4) \leq 40, \quad (6.61)$$

$$36 - (R_1 - 4) + 3.333(R_2 - 3) + 0.7(R_5 - 5) + 5(R_6 - 2.4) \leq 40, \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} & (23.6/R_1) + 13.3/(R_2 + 0.017) + 12.3/(R_4 + 0.008) + \\ & + (11.7/R_2) + 12.3/(R_6 + 0.008) \leq 40, \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$0 \leq R_4 - R_6 \leq 0.01, \quad (6.64)$$

$$1.0 \leq R_i \leq 5.0, i = \overline{1,6}. \quad (6.65)$$

უტოლობათა სისტემაში (6.64) შეზღუდვის შემოტანა განპირობებულია  $R_4$  და  $R_6$  წინაღობების მიახლოებითი ტოლობის შესანარჩუნებლად:  $R_4 \approx R_6$ .

ამგვარად, მოცემული ელექტრონული სქემის პარამეტრული ოპტიმიზაციის ამოცანა დაყვანილ იქნა არაწრფივი დაპროგრამების (6.50)-(6.65) ამოცანაზე.

მათემატიკური მოდელის მეორე ვარიანტი შედგენილ იქნა პირველის საფუძველზე, რისთვისაც ამ უკანასკნელში შემდეგი ცვლილებები განხორციელდა: მიზნის ფუნქცია, რომლის მინიმიზაციაა საჭირო, წარმოდგენილ იქნა (6.62) გამოსახულების საფუძველზე

$$t_r = 36 - (R_1 - 4) + 3.333(R_2 - 3) + 0.7(R_3 - 5) + 5(R_6 - 2.4), \quad (6.66)$$

ხოლო უტოლობათა სისტემაში, (6.62) შეზღუდვის ნაცვლად, გამოყენებულ იქნა შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{19.55}{R_1} + \frac{12.3}{R_2 + 0.011} + \frac{15.0}{R_4 + 0.005} + \frac{9.63}{R_3} + \frac{15.0}{R_6 + 0.005} \leq 40. \quad (6.67)$$

**ოპტიმიზაციის შედეგი.** დასაპროექტებელი სქემის ოპტიმალური პარამეტრების განსაზღვრისათვის გამოყენებულ იქნა სიმძიმის ცენტრების მეთოდი, რომლის საშუალებით გადაწყვეტილ იქნა არაწრფივი დაპროგრამების ზემოთ ფორმულირებული ამოცანები.

პირველ შემთხვევაში, (6.50)-(6.65) ამოცანის გადაწყვეტისას, მიღებულ იქნა რეზისტორების ოპტიმალური მნიშვნელობები  $R_1^* = 4.2$  კომი,  $R_2^* = 2.7$  კომი,  $R_3^* = 3.6$  კომი,  $R_4^* = 2.1$  კომი,  $R_5^* = 3.7$  კომი,  $R_6^* = 2.1$  კომი, რომლებიც განსაზღვრავენ სქემის მიერ მოთხოვნილ მინიმალურ  $P^* = 27.01$  მილივატ სიმძლავრეს.

ოპტიმიზაციის მათემატიკური მოდელის მეორე ვარიანტის გადაწყვეტის შემთხვევაში, სადაც მიზნის ფუნქცია წარმოდგენილია (6.66) გამოსახულებით, ხოლო შეზღუდვები (6.50)-(6.61), (6.63)-(6.66), (6.67) უტოლობებით, მიღებულ იქნა შემდეგი ოპტიმალური ამონახსნი:  $R_1^* = 3.7$  კომი,  $R_2^* = 1.6$  კომი,  $R_3^* = 3.6$  კომი,  $R_4^* = 1.4$  კომი,  $R_5^* = 3.0$  კომი,  $R_6^* = 1.4$  კომი, რომლის დროსაც სქემის გადართვის დაყვანების დრო ტოლია  $t_r^* = 25.25$ წამი. რეზისტორების მიღებული ოპტიმალური მნიშვნელობების მიხედვით ჩატარდა მოცემული ელექტრონული სქემის გარდამავალი პროცესის კომპიუტერული ანალიზი, რომლის შედეგები წარმოდგენილია ნახ. 6.8-ზე. ნახაზზე გამოსავალი  $U_{კა2}$  სიგნალის გრაფიკი შეესაბამება სქემის პასიური ელემენ-

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები

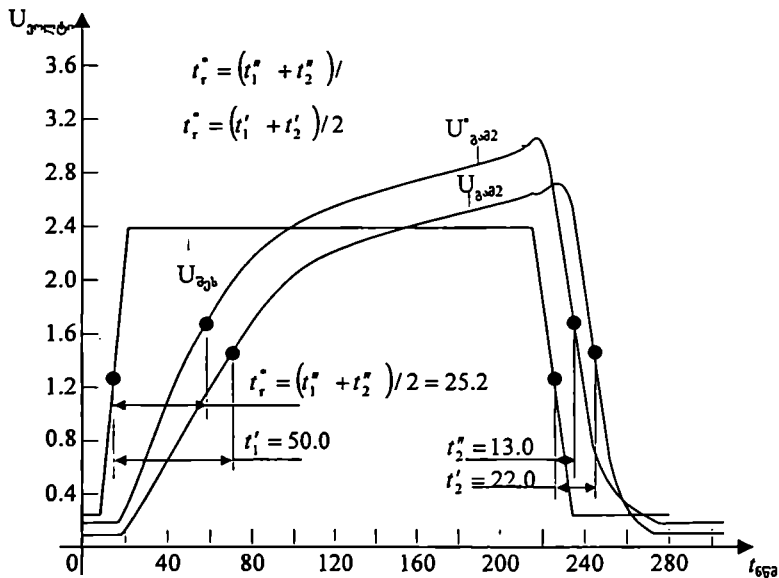
ტების ნებისმიერად აღებულ მნიშვნელობებს  $R_1=4$ კომი,  $R_2=3$ კომი,  $R_3=2$ კომი,  $R_4=R_5=2.4$ კომი,  $R_6=5$ კომი, რომლის დროსაც გადართვის დაყოვნების დრო ტოლია

$$t_r = \frac{t'_1 + t'_2}{2} = \frac{50 + 22}{2} = 36 \text{ წმამი,}$$

ხოლო  $U_{\text{გა2}}$  სიგნალის გრაფიკი შეესაბამება რეზისტორების ოპტიმალურ მნიშვნელობებს, რომლის დროსაც

$$t_r^* = \frac{t_1'' + t_2''}{2} = \frac{37.4 + 13.0}{2} = 25.2 \text{ წმამი.}$$

ამგვარად, პარამეტრული ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტის შედეგად მოცემული სქემის გადართვის დრო შემცირდა 10.8 წმამით.



ნახ. 6.8

## 6.2 ატომური ელექტროსადგურის თბოგადამცემი აპარატების ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანა

ბირთვულ ენერგეტიკაში ატომური ელექტროსადგურების შექმნა რეაქტორებზე, რომელიც სწრაფ ნეიტრონებზე მუშაობს, პერსპექტიულ მიმართულებად ითვლება, რადგან ასეთი ელექტროსადგურების დამახასიათებელი თავისებურებაა სათბობის ღირებულების ძალიან დაბალი ხვედრითი წილი, რაც გამოუმუშავებული ელექტროენერჯის ღირებულების 0.1 ნაწილით განისაზღვრება.

ატომური ელექტროსადგურების ერთ-ერთ ძირითად მოწყობილობას თბოგადამცემი აპარატი წარმოადგენს. აღნიშნული მოწყობილობის ზედაპირი ათობით ათას კვადრატულ მეტრ ფართს შეადგენს და მის დამზადებაზე ათასობით ტონა ფოლადი იხარჯება. ამიტომ თბოგადამცემი აპარატის კონსტრუქციული პარამეტრების ოპტიმიზაციას ატომური ელექტროსადგურების ტექნიკურ-ეკონომიკური მახასიათებლების გაუმჯობესებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია.

მცირე ბირთვული ენერგეტიკის განვითარებასთან დაკავშირებით აქტუალობა შეიძინა ისეთი კომპაქტური თბოგადამცემი აპარატების შემუშავებამ, რომელთა გაცივების სისტემის ფუნქციონირება ჰაერის საშუალებით ხორციელდება. კონსტრუქციულად ასეთი აპარატები წარმოადგენს ჭადრაკულად განლაგებული შეწიბოებული მილების კონას, რომელშიც სითბოს მატარებელი (აზოტის ტეტრაჰიდრიდი) კონდენსაციას განიცდის; მილებს შორის სივრცეში კი მოძრაობს მაცივებელი ჰაერის ნაკადი. აღნიშნულ აპარატებს კორპუსი არ გააჩნია და ამიტომ მათ ღირებულებას, მასას და მოცულობას შესაბამისად განსაზღვრავს შეწიბოებული მილების კონის ღირებულება, მასა და მოცულობა, ხოლო მათი თბოგადაცემის ეფექტურობა დამოკიდებულია ისეთ ფაქტორებზე, როგორცაა მილების შეწიბოების პარამეტრები, მილების კონსტრუქცია, გეომეტრიული ზომები, ჰაერის ნაკადის ჰიდროდინამიკა და სხვ.

აღნიშნული თბოგადამცემი აპარატის ოპტიმიზაციის მათემატიკური მოდელი შემუშავებულ იქნა თბოგადაცემის განტოლებების საფუძველზე [73]. საოპტიმიზაციო ცვლადებად შერჩეულ იქნა შემდეგი პარამეტრები:

- ◆  $x_1$  - მილებში სითბოს მატარებლის საწყისი სიჩქარე, მ/წმ;
- ◆  $x_2$  - მაცივებელი ჰაერის ნაკადის სიჩქარე ვიწრო კვეთში, მ/წმ;
- ◆  $x_3$  - მილების დიამეტრი, მ;

- ◆  $x_4$  - მილის წიბოების სიმაღლე, მ;
- ◆  $x_5$  - წიბოებს შორის მანძილი, მ.

თბოგადამცემი აპარატის დანარჩენი გეომეტრიული ზომები და მახასიათებლები ცალსახად განისაზღვრება აღნიშნული პარამეტრების საფუძველზე.

საოპტიმიზაციო ცვლადი პარამეტრების გათვალისწინებით მიზნის ფუნქცია, რომელიც 10 მეგავატი სიმძლავრის ატომური ელექტროსადგურის თბოგადამცემი აპარატის საერთო წონას შეესაბამება, შემდეგი პოზინომიალური ფუნქციით გამოისახება [54]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^6 A_i x_1^{\beta_{i1}} x_3^{\beta_{i3}} x_4^{\beta_{i4}} x_5^{\beta_{i5}} + \frac{\sum_{i=7}^9 A_i x_3^{\beta_{i3}} x_4^{\beta_{i4}} x_5^{\beta_{i5}}}{\sum_{i=10}^{13} A_i x_2^{\beta_{i2}} x_3^{\beta_{i3}} x_4^{\beta_{i4}} x_5^{\beta_{i5}}}, \quad (6.68)$$

სადაც  $A_i$  კოეფიციენტებია, რომელთა სიდიდე დამოკიდებულია სითბოს მატარებლის ფიზიკურ-ქიმიურ თვისებებზე, მის ხარჯზე, მილებში წნევის სიდიდეზე, ტემპერატურაზე და ა.შ.

საოპტიმიზაციო ცვლადებზე გათვალისწინებულია შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (6.69)$$

სადაც  $a_j$  და  $b_j$  მოცემული სიდიდეებია.

$A_i$  კოეფიციენტების, ხარისხის  $\beta_{ij}$  მაჩვენებლების და საოპტიმიზაციო პარამეტრების ცვლილების  $a_j$  და  $b_j$  საზღვრების რიცხვითი მნიშვნელობები წარმოდგენილია ცხრილში 6.2.

ოპტიმიზაციის (6.68)-(6.69) ამოცანა, რომელშიც მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციაა საჭირო, გეომეტრიული დაპროგრამების ამოცანას წარმოადგენს, სადაც დასაშვებ ამონახსნების სიმრავლე წრფივი უტოლობებითაა წარმოდგენილი. მიზნის  $f(x)$  ფუნქცია იმდენად რთულია, რომ შეუძლებელია მისი თვისებების დადგენა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ოპტიმალური  $x_j^*$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , პარამეტრების დასადგენად ლოკალური მეთოდების გამოყენება არ არის გამართლებული.

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოყენებულ იქნა სიმძიმის ცენტრების მეთოდი, რისთვისაც დაუშვით პროგრამული პარამეტრების შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობები:  $N = 200$ ,  $M = 10$ ,  $\mu = 12.5$ ,  $\varepsilon = 0.01$ .

ვინაიდან (6.69) უტოლობებით განსაზღვრული დასაშვებ ამონახსნების სიმრავლე ხუთგანზომილებიან პარალელეპიპედს წარმოადგენს, ამიტომ ამ სიმრავლეში ცვლად-



ბის შემთხვევითი მნიშვნელობების გენერირება რეალიზებულ იქნა შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$x_j = a_j + (b_j - a_j)\xi_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (6.70)$$

სადაც  $\xi_j$  თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა  $[0;1]$  ინტერვალში.

სტატისტიკური ცდების შედეგები წარმოდგენილია 6.3 ცხრილში.

ინდექსი $i$	$A_i$	$\beta_{ji}$ მნიშვნელობები $j$ ინდექსის დროს				
		1	2	3	4	5
1	$1.3 \cdot 10^8$ კგ/მ <sup>2</sup>	0	0	2	0	0
2	$5 \cdot 10^7$ კგ/მ <sup>2</sup>	0	0	2	1	-1
3	$5 \cdot 10^7$ კგ/მ <sup>2</sup>	0	0	1	2	-1
4	$1 \cdot 10^7$ კგ/მ <sup>0.4</sup> წმ <sup>0.8</sup>	-0.8	0	1.2	0	0
5	$0.4 \cdot 10^7$ კგ/მ <sup>0.4</sup> წმ <sup>0.8</sup>	-0.8	0	1.2	1	-1
6	$0.4 \cdot 10^7$ კგ/მ <sup>0.4</sup> წმ <sup>0.8</sup>	-0.8	0	0.2	2	-1
7	$1.4 \cdot 10^9$ კკალ.კგ/სთ.მ <sup>3</sup> გრად.	0	0	1	0	0
8	$0.5 \cdot 10^9$ კკალ.კგ/სთ.მ <sup>3</sup> გრად.	0	0	1	1	-1
9	$0.5 \cdot 10^9$ კკალ.კგ/სთ.მ <sup>3</sup> გრად.	0	0	0	2	-1
10	$7.25$ კკალ.წმ <sup>0.65</sup> /მ <sup>2.3</sup> სთ.გრად.	0	0.65	-0.54	-0.14	0.33
11	$-0.22$ კკალ.წმ <sup>0.65</sup> /მ <sup>2.3</sup> სთ.გრად.	0	0.65	0.46	-0.14	-0.67
12	$13.5$ კკალ.წმ <sup>0.65</sup> /მ <sup>2.3</sup> სთ.გრად.	0	0.65	-0.54	0.86	-0.67
13	$13.5$ კკალ.წმ <sup>0.65</sup> /მ <sup>2.3</sup> სთ.გრად.	0	0.65	-1.54	1.86	-0.67
	$a_j$	0.1 მ/წმ	1.0 მ/წმ	0.008 მ	0.002 მ	0.002 მ
	$b_j$	10 მ/წმ	50 მ/წმ	0.03 მ	$0.65 x_3$ მ	0.02 მ

ცხრილი 6.2

შემთხვევითი  $\overline{x_j(p)}$  ფუნქციების ემპირული წერტილების პარაბოლური აპროქსიმაციის შედეგად განისაზღვრა მააპროქსიმებელი პოლინომები:

$$x_1(p) = 0.00910p^2 - 0.06201p + 4.981490,$$

$$x_2(p) = 0.14045p^2 + 0.05709p + 18.30693,$$

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები

$$x_3(p) = -0.00025p + 0.00151p + 0.01974,$$

$$x_4(p) = -0.00004p^2 + 0.00008p + 0.00799,$$

$$x_5(p) = 0.00004p^2 + 0.00006p + 0.00924.$$

ლიბრტომის მეთოდით  $p = 10$  წერტილის მიდამოში განხორციელებული ძებნის შედეგად განისაზღვრა ცვლადი პარამეტრების მიახლოებითი ოპტიმალური მნიშვნელობები

$$\bar{x}_1^* = 10 \text{ მ/წმ}, \quad \bar{x}_2^* = 50 \text{ მ/წმ}, \quad \bar{x}_3^* = 0.008 \text{ მ}, \quad \bar{x}_4^* = 0.002 \text{ მ}, \quad \bar{x}_5^* = 0.02 \text{ მ},$$

რომელიც შეესაბამება თბოგადამცემი აპარატის მინიმალურ წონას  $\bar{f}^* = 94\,179.63$  კგ.

$p$	$\zeta$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	2 926934	4.6562	18.5519	0.0219	0.0083	0.0093
2	2 622829	5.0246	18.5099	0.0216	0.0078	0.0095
3	2 318724	5.0722	19.3549	0.0209	0.0076	0.0098
4	2 014619	4.8633	20.5231	0.0208	0.0075	0.0104
5	1 710514	5.0565	23.2525	0.0209	0.0072	0.0104
6	1 406409	5.2481	25.4649	0.0202	0.0073	0.0109
7	1 102305	4.7208	27.0941	0.0193	0.0066	0.0115
8	7 89199.6	4.7792	24.7644	0.0155	0.0056	0.0129
9	494 094.8	4.6773	26.5063	0.0121	0.0052	0.0124
10	189 989.9	5.8139	36.2626	0.0092	0.0045	0.0140

ცხრილი 6.3

მიღებული შედეგის დაზუსტების მიზნით გამოყენებულ იქნა რელაქსაციის მეთოდი და განსაზღვრულ იქნა ოპტიმალური ამონახსნი

$$x_1^* = 10 \text{ მ/წმ}, \quad x_2^* = 50 \text{ მ/წმ}, \quad x_3^* = 0.008 \text{ მ}, \quad x_4^* = 0.042 \text{ მ}, \quad x_5^* = 0.02 \text{ მ};$$

$$f^* = 91126.81 \text{ კგ.}$$

## 6.3 წარმოების დაგეგმვის ზოგადი ამოცანა

საწარმო, სამი ტექნოლოგიური პროცესის ბაზაზე, ორი სახის A და B პროდუქციას უშვებს. ამასთან, პირველი ტექნოლოგიური პროცესის 1 საათში ამზადებს A პროდუქციის 20 ნაწარმს, ხოლო B პროდუქციის 20 ნაწარმს; მეორე ტექნოლოგიური პროცესის 1 საათში - A პროდუქციის 25 ნაწარმს, ხოლო B პროდუქციის 10 ნაწარმს. მესამე ტექნოლოგიური პროცესის 1 საათში - A პროდუქციის 30 ნაწარმს, ხოლო B პროდუქციის 5 ნაწარმს. საწარმო დღეღამეში 24 საათში მუშაობს. პირველი ტექნოლოგიური პროცესის 1 საათში იხარჯება 3კგ ნედლეული, მოწყობილობის მუშაობის 2 ნორმა/სთ და შრომითი რესურსების 6 ადამიან/სთ; მეორე ტექნოლოგიური პროცესის 1 საათში - 4კგ ნედლეული და შრომითი რესურსების 3 ადამიან/სთ; ხოლო მესამე ტექნოლოგიური პროცესის 1 საათში - 2კგ ნედლეული, მოწყობილობის მუშაობის 3 ნორმა/სთ და შრომითი რესურსების 4 ადამიან/სთ. რესურსების ლიმიტი შეზღუდულია და შესაბამისად შეადგენს 90კგ ნედლეულს, მოწყობილობის მუშაობის 70 ნორმა/სთ და შრომითი რესურსების 80 ადამიან/სთ. მოგება A პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციის შედეგად შეადგენს 10 ლარს, ხოლო B პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციის შედეგად - 20 ლარს.

საჭიროა განვსაზღვროთ დღეღამის განმავლობაში რომელი ტექნოლოგიური პროცესით და რა ხანგრძლივობით უნდა იმუშაოს საწარმომ, რომ მიიღოს მაქსიმალური ჯამური მოგება. ამგვარად, წარმოების დაგეგმვის აღნიშნულ ამოცანაში გაერთიანებულია რესურსების განაწილებისა და მოწყობილობა-დანადგარების ოპტიმალური დატვირთვის წრფივი ამოცანები.

აღნიშნოთ პირველი ტექნოლოგიური პროცესით მუშაობის ხანგრძლივობა  $x_1$  (სთ), მეორე ტექნოლოგიური პროცესით მუშაობის ხანგრძლივობა -  $x_2$  (სთ), ხოლო მესამე ტექნოლოგიური პროცესით მუშაობის ხანგრძლივობა -  $x_3$  (სთ) და შევადგინოთ საწყისი მონაცემების მატრიცა (ცხრილი 6.5).

ვინაიდან ამოცანაში საჭიროა მოგების მაქსიმიზაცია, ამიტომ ოპტიმიზაციის წრფივი მათემატიკური მოდელი მიიღებს შემდეგ სახეს:

მიზნის ფუნქცია -

$$\begin{aligned} f(x) &= (20 \cdot 10 + 20 \cdot 20)x_1 + (25 \cdot 10 + 10 \cdot 20)x_2 + (30 \cdot 10 + 5 \cdot 20)x_3 = \\ &= 600x_1 + 450x_2 + 400x_3 \rightarrow \max; \end{aligned} \quad (6.71)$$

შეზღუდვები -

რესურსების მიხედვით:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 90, \quad (6.72)$$

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებით ამოცანებში

$$2x_1 + 3x_3 \leq 70, \quad (6.73)$$

$$6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 80, \quad (6.74)$$

დროის მიხედვით:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 24, \quad (6.75)$$

სასაზღვრო პირობები:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad (6.76)$$

რესურსი	ტექნოლოგიური პროცესი			მარაგი
	I	II	III	
ნედლეული, კგ	3	4	2	90
მოწყობილობა, ნორმა/სთ	2	0	3	70
შრომითი რესურსები, ად./სთ	6	3	4	80
პროდუქცია	ტექნოლოგიური პროცესი			მოგება ერთი ერთეული ნაწარმიდან
	I	II	III	
A	20	25	30	10
B	20	10	5	20
მუშაობის ხანგრძლივობა	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\sum_{j=1}^3 x_j = 24$

ცხრილი 6.4

წრფივი დაპროგრამების (6.71)-(6.76) ამოცანა ამოხსნათ ხელოვნური ბაზისის მეთოდით (იხ. ნაწილი 3.2), რისთვისაც ახალი ცვლადების შემოტანის გზით საწყისი ამოცანა დაიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის კანონიკურ ამოცანაზე:

$$\max \{ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 600x_1 + 450x_2 + 400x_3 - Mx_7 \}, \quad (6.77)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 90, \quad (6.78)$$

$$2x_1 + 3x_3 + x_5 = 70, \quad (6.79)$$

$$6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 80, \quad (6.80)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 24, \quad (6.81)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, \quad (6.82)$$

სადაც  $M$  რაგინდ დიდი დადებითი რიცხვია.

(6.77)-(6.82) ამოცანის ამოხსნის პროცესი ასახულია გაერთიანებულ 6.5 ცხრილში.

j	B <sub>ბაზ</sub>	c <sub>ბაზ</sub>	A <sub>0</sub>	600	450	400	0	0	0	-M
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
1	A <sub>4</sub>	0	90	3	4	2	1	0	0	0
2	A <sub>5</sub>	0	70	2	0	3	0	1	0	0
3	A <sub>6</sub>	0	80	6	3	4	0	0	1	0
4	A <sub>7</sub>	-M	24	1	1	1	0	0	0	1
m+1	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		0	-600	-450	-400	0	0	0	0
m+2	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		-24	-1	-1	-1	0	0	0	0
1	A <sub>2</sub>	450	45/2	3/4	1	1/2	1/4	0	0	0
2	A <sub>5</sub>	0	70	2	0	3	0	1	0	0
3	A <sub>6</sub>	0	25/2	15/4	0	5/2	-3/4	0	1	0
4	A <sub>7</sub>	-M	3/2	1/4	0	1/2	-1/4	0	0	1
m+1	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		10125	-525/2	0	-175	225/2	0	0	0
m+2	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		-3/2	-1/4	0	-1/2	1/4	0	0	0
1	A <sub>2</sub>	450	21	1/2	1	0	1/2	0	0	-1
2	A <sub>5</sub>	0	61	1/2	0	0	3/2	1	0	-6
3	A <sub>6</sub>	0	5	5/2	0	0	1/2	0	1	-5
4	A <sub>3</sub>	400	3	1/2	0	1	-1/2	0	0	2
m+1	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		10650	-175	0	0	25	0	0	350
m+2	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		0	0	0	0	0	0	0	1
1	A <sub>2</sub>	450	20	0	1	0	2/5	0	-1/5	0
2	A <sub>5</sub>	0	60	0	0	0	7/5	1	-1/5	-5
3	A <sub>1</sub>	600	2	1	0	0	1/5	0	2/5	-2
4	A <sub>3</sub>	400	2	0	0	1	-3/5	0	-1/5	3
m+1	Δ <sub>j</sub> = Z <sub>j</sub> - c <sub>j</sub>		11000	0	0	0	60	0	70	M

ცხრილი 6.5

როგორც ცხრილიდან ჩანს, საოპტიმიზაციო ცვლადების ოპტიმალური მნიშვნელობებია  $x_1^* = 2$ ;  $x_2^* = 20$ ;  $x_3^* = 2$ , რასაც შეესაბამება მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა  $f^* = f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 11000$ .

ამგვარად, ჩატარებული გამოთვლების შედეგად განისაზღვრა წარმოების დაგეგმვის ოპტიმალური გეგმა, რომლის საფუძველზე მაქსიმალური მოგების მისაღებად, რაც 11000 ლარს შეადგენს, საჭიროა პირველი ტექნოლოგიური პროცესის 2 საათის ხანგრძლივობით, მეორე ტექნოლოგიური პროცესის 20 საათის ხანგრძლივობით, ხოლო მესამე ტექნოლოგიური პროცესის კვლავ 2 საათის ხანგრძლივობით წარმართვა.

## 6.4 წრფივი ღირებულების ფუნქციის მაქსიმუმის საპროგრამო პრობლემის მათემატიკური მოდელი და მისი რეალური გამოყენების მიხედვითი ამოცანები

ნებისმიერი საწარმო ორგანიზაციულ-საქმიან გარემოში ფუნქციონირებს. შესაბამისი მიზნების მისაღწევად საწარმოს ხელმძღვანელობა ოპერატიულად იღებს გადაწყვეტილებებს წარმოების დაგეგმვისა და მისი რესურსებით მომარაგების შესახებ. ოპტიმალური გადაწყვეტილება წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნისა და მისი ანალიზის შედეგად მიიღება.

ვთქვათ, საწარმო ოთხი სახის  $P_1, P_2, P_3, P_4$  პროდუქციას უშვებს, რისთვისაც გამოყენებულია სხვადასხვა რესურსი. რესურსების სახეობები, დანახარჯის ნორმები და ერთეულოვანი პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება მოცემულია 6.6 ცხრილში. საჭიროა შევარჩიოთ პროდუქციის გამოშვების ისეთი გეგმა, რომ მისი რეალიზაციის შედეგად საწარმომ მაქსიმალური ჯამური მოგება მიიღოს.

რესურსი	პროდუქცია				რესურსის მარაგი
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
შრომითი რესურსი	1	1	1	1	16
ნედლეულის რესურსი	6	5	4	3	110
მოწყობილობის რესურსი	4	6	10	13	100
ერთეულოვანი პროდუქციიდან მიღებული მოგება	60	70	120	130	-

ცხრილი 6.6

აღნიშნოთ  $P_j$  პროდუქციის ( $j=1, 2, 3, 4$ ) საძებნი რაოდენობა  $x_j$ -ით.

ამოცანის მათემატიკური მოდელი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით [143]:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16,$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110, \tag{6.83}$$

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

წრფივი დაპროგრამების (6.83) ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით გადასაწყვეტად იგი წინასწარ წარმოვადგინოთ კანონიკური ფორმით, რისთვისაც შემოვიტანოთ სამი დამატებითი ცვლადი  $x_j$ ,  $j=5, 6, 7$ . მივიღებთ ამოცანას:

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16,$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 110, \quad (6.84)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + x_7 = 100,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

(6.84) ამოცანა შეიძლება, აგრეთვე, გადავწეროთ შემდეგი სახითა:

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_5 = 16 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$x_6 = 110 - (6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4), \quad (6.85)$$

$$x_7 = 100 - (4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4),$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

(6.84) ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით გადაწყვეტის პროცესი (იხ. ნაწილი 3.2.6) მოყვანილია გაერთიანებულ სიმპლექსურ 6.7 ცხრილში.

როგორც 6.7 ცხრილის ბოლო ნაწილიდან ჩანს, (6.83) ამოცანის ოპტიმალური გეგმა შემდეგია:  $x_1^* = 10$ ;  $x_2^* = 0$ ;  $x_3^* = 6$ ;  $x_4^* = 0$ . ამ გეგმის გათვალისწინებით საწარმო მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას, რომელიც განისაზღვრება  $f^* = 1320$  სიდიდით.

საწარმოს ფუნქციონირების დროს წამოიჭრება ოპერატიული მართვის სხვადასხვა დამატებითი საკითხი. ასე, მაგალითად, საინტერესოა რა შედეგს მივიღებთ, თუ

ერთკრიტიერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები

- ა) 16 მომუშავე პერსონალიდან 6 მუშას სხვა სამუშაო ადგილზე გადავიყვანო;
- ბ) რესურსების მოწოდებას 15%-ით შევამცირებთ;
- გ) მოწყობილობის წარმადობა 15%-ით გაიზრდება და იგი როგორ აისახება პროდუქციის გამოშვების გეგმაზე და ა.შ.

j	B <sub>ახ</sub>	C <sub>ახ</sub>	A <sub>0</sub>	60	70	120	130	0	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
1	A <sub>5</sub>	0	16	1	1	1	1	1	0	0
2	A <sub>6</sub>	0	110	6	5	4	3	0	1	0
3	A <sub>7</sub>	0	100	4	6	10	13	0	0	1
m+1	Δ <sub>1</sub>		0	-60	-70	-120	-130	0	0	0
1	A <sub>5</sub>	0	6	3/5	2/5	0	-3/10	1	0	-1/10
2	A <sub>6</sub>	0	70	22/5	13/5	0	-11/5	0	1	-2/5
3	A <sub>7</sub>	120	10	2/5	3/5	1	13/10	0	0	1/10
m+1	Δ <sub>2</sub>		1200	-12	2	0	26	0	0	12
1	A <sub>1</sub>	60	10	1	2/3	0	-1/2	5/3	0	-1/6
2	A <sub>6</sub>	0	26	0	-1/3	0	0	-22/3	1	-1/3
3	A <sub>7</sub>	120	6	0	1/3	1	3/2	-2/3	0	1/6
m+1	Δ <sub>3</sub>		1320	0	10	0	20	20	0	10

ცხრილი 6.7

არსებობს აღნიშნული პრობლემების გადაწყვეტის სხვადასხვა საშუალებები, რომლებიც წრფივი დაპროგრამებიდან გამომდინარეობს.

როგორც ცნობილია, წრფივი დაპროგრამების თითოეულ საწყის ამოცანას შეესაბამება დუალური ამოცანა (იხ. ნაწილი 3.3). დუალური ცვლადის საშუალებით (რომელსაც ხშირად დუალურ შეფასებას უწოდებენ) ფასდება მიზნის ფუნქციაზე ყოველი სახის რესურსის ცვლილების გავლენა. შევინშნავთ, რომ დუალური შეფასებების მოძებნისათვის არ არის საჭირო დუალური ამოცანის ამოხსნა. დუალური ცვლადები შემდეგნაირად განისაზღვრება. თუ რომელიმე  $i$ -ური რესურსი მთლიანად არ გამოიყენება, მაშინ ამ რესურსის შესაბამისი დამატებითი ცვლადი დადებითია. ჩვენს შემთხვევაში  $b_2 = 110$  და მისი რეზერვია  $x_6 = 26$ .

როგორც ცნობილია, დუალური ამოცანის ძირითადი თვისების თანახმად, საწყისი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა დუალური ამოცანის მიზნის ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობას ემთხვევა, ე.ი.  $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = \min \sum_{i=1}^m b_i z_i$ , სადაც



დუალური  $z_i$  ცვლადი განსაზღვრავს მიზნის ფუნქციის დამოკიდებულებას  $b_i$  რესურსის ერთი ერთეულით ცვლილების მიმართ.

ამგვარად, თუ არსებობს გარკვეული რესურსის რეზერვი, მაშინ დამატებითი ცვლადი ბაზისურია, ხოლო ასეთი ცვლადის დუალური შეფასება ნულის ტოლია. ჩვენს მაგალითში შრომითი და მოწყობილობების რესურსები მთლიანად გამოყენებულია, ამიტომ შესაბამისი დამატებითი ცვლადები ნულის ტოლია. 6.7 ცხრილის ბოლო ნაწილში  $x_5$  და  $x_7$  თავისუფალი ცვლადებია, ე.ი.  $x_5 = x_7 = 0$ . თუ რესურსი მთლიანადაა გამოყენებული, მაშინ მისი ცვლილება (გაზრდა ან შემცირება) გავლენას მოახდენს გამოშვებული პროდუქციის მოცულობაზე და მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაზე. მიზნის ფუნქცია გაიზრდება ან შემცირდება დუალური შეფასების გათვალისწინებით. დუალური შეფასება მოიძებნება ბოლო სიმპლექსური 6.7 ცხრილის  $m+1$  სტრიქონიდან. ასე, მაგალითად, შრომითი  $x_5 = 0$  რეზერვის დროს დუალური შეფასებაა  $z_1 = 20$ , ხოლო მოწყობილობის  $x_7 = 0$  რეზერვის დროს დუალური შეფასებაა  $z_3 = 10$ .

6.7 ცხრილის ბოლო ნაწილიდან ნათლად ჩანს, აგრეთვე, რომ თუ შრომითი რესურსები ერთი ერთეულით მოიმატებს, მაშინ მიზნის ფუნქცია 20 ერთეულით გაიზრდება და გახდება ტოლი  $f = 1320 + 20 = 1340$ , ხოლო შრომითი რესურსების ერთი ერთეულით შემცირებისას მიზნის ფუნქცია 20 ერთეულით შემცირდება და გახდება ტოლი  $f = 1320 - 20 = 1300$ . ანალოგიურად, მოწყობილობის რესურსის ერთი ერთეულით მომატება იწვევს მიზნის ფუნქციის 10 ერთეულით გაზრდას ( $f = 1320 + 10 = 1330$ ), ხოლო მისი ერთი ერთეულით შემცირება - მიზნის ფუნქციის 10 ერთეულით შემცირებას ( $f = 1320 - 10 = 1310$ ).

განვიხილოთ რესურსების გადახრის სიტუაციები, რასაც ხაწარმოს ოპერატიული მართვის დროს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება. უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა გადახრის გათვალისწინება ამოცანის მოდელში.

თავდაპირველად განვიხილოთ ნედლეულის გადახრის შემთხვევა. გადახრის პარამეტრი აღვნიშნოთ  $\Delta b_2$ -ით. მაშინ (6.83) მოდელის ნაცვლად გვექნება:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16,$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110 + \Delta b_2, \quad (6.86)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100,$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად სიმპლექს-მეთოდით გადაეწყვიტოთ (6.86) ამოცანა. გამოთვლითი პროცესი ასახულია 6.8 ცხრილში.

j	B <sub>აბ</sub>	c <sub>აბ</sub>	A <sub>0</sub>	60	70	120	130	0	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
1	A <sub>5</sub>	0	16	1	1	1	1	1	0	0
2	A <sub>6</sub>	0	110+Δb <sub>2</sub>	6	5	4	3	0	1	0
3	A <sub>7</sub>	0	100	4	6	10	13	0	0	1
m+1	Δ <sub>j</sub>		0	-60	-70	-120	-130	0	0	0
1	A <sub>5</sub>	0	6	3/5	2/5	0	-3/10	1	0	-1/10
2	A <sub>6</sub>	0	70+Δb <sub>2</sub>	22/5	13/5	0	-11/5	0	1	-2/5
3	A <sub>3</sub>	120	10	2/5	3/5	1	13/10	0	0	1/10
m+1	Δ <sub>j</sub>		1200	-12	2	0	26	0	0	12
1	A <sub>1</sub>	60	10	1	2/3	0	-1/2	5/3	0	-1/6
2	A <sub>6</sub>	0	26+Δb <sub>2</sub>	0	-1/3	0	0	-22/3	1	-1/3
3	A <sub>3</sub>	120	6	0	1/3	1	3/2	-2/3	0	1/6
m+1	Δ <sub>j</sub>		1320	0	10	0	20	20	0	10

ცხრილი 6.8

როგორც 6.8 ცხრილის ბოლო ნაწილიდან ჩანს  $x_6^* = 26 + \Delta b_2$ . ვინაიდან ოპტიმალური ვექტორის ყველა კოორდინატი უნდა იყოს არაუარყოფითი, ამიტომ  $x_6^* = 26 + \Delta b_2 \geq 0$ , საიდანც  $\Delta b_2 \geq -26$ . ამგვარად, ნედლეულის რესურსის მინიმალურად დასაშვები სიდიდე ტოლია  $110 - 26 = 84$ .

მაშასადამე, ნედლეულის მაქსიმალურად 26 ერთეულით შემცირება (ე.ი. საწყისი 110 ერთეულის მაქსიმალურად 23,6%-ით შემცირება) გავლენას არ მოახდენს გეგმის შესრულებაზე.

ანალოგიურად განვიხილოთ შრომითი რესურსების გადახრის შემთხვევა. გადახრის პარამეტრი აღვნიშნოთ  $\Delta b_1$ -ით. მაშინ (6.83) მოდელის ნაცვლად გვექნება

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 + \Delta b_1,$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110, \tag{6.87}$$

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად სიმპლექს-მეთოდით გადავწყვიტოთ (6.87) ამოცანა. გამოთვლითი პროცესი ასახულია 6.9 ცხრილში.

j	B <sub>გაბ</sub>	c <sub>გაბ</sub>	A <sub>0</sub>	60	70	120	130	0	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
1	A <sub>5</sub>	0	16+Δb <sub>1</sub>	1	1	1	1	1	0	0
2	A <sub>6</sub>	0	110	6	5	4	3	0	1	0
3	A <sub>7</sub>	0	100	4	6	10	13	0	0	1
m+1	Δ <sub>1</sub>		0	-60	-70	-120	-130	0	0	0
1	A <sub>5</sub>	0	6+Δb <sub>1</sub>	3/5	2/5	0	-3/10	1	0	-1/10
2	A <sub>6</sub>	0	70	22/5	13/5	0	-11/5	0	1	-2/5
3	A <sub>7</sub>	120	10	2/5	3/5	1	13/10	0	0	1/10
m+1	Δ <sub>1</sub>		1200	-12	2	0	26	0	0	12
1	A <sub>1</sub>	60	10+ +(5/3)Δb <sub>1</sub>	1	2/3	0	-1/2	5/3	0	-1/6
2	A <sub>6</sub>	0	26- -(22/3)Δb <sub>1</sub>	0	-1/3	0	0	-22/3	1	-1/3
3	A <sub>7</sub>	120	6- -(2/3)Δb <sub>1</sub>	0	1/3	1	3/2	-2/3	0	1/6
m+1	Δ <sub>1</sub>		1320+ +20Δb <sub>1</sub>	0	10	0	20	20	0	10

ცხრილი 6.9

როგორც 6.9 ცხრილის ბოლო ნაწილიდან ჩანს,  $x_1^* = 10 + (5/3)\Delta b_1$ ,  $x_2^* = 6 - (2/3)\Delta b_1$ ,  $x_3^* = 26 - (22/3)\Delta b_1$ . ვინაიდან ოპტიმალური ვექტორის ყველა კოორდინატი უნდა იყოს არაუარყოფითი, ამიტომ მიიღება უტოლობათა სისტემა

$$x_1^* = 10 + (5/3)\Delta b_1 \geq 0,$$

$$x_2^* = 6 - (2/3)\Delta b_1 \geq 0, \tag{6.88}$$

$$x_3^* = 26 - (22/3)\Delta b_1 \geq 0.$$

(6.88) სისტემის ამოხსნის შედეგად გვექნება:  $-6 \leq \Delta b_1 \leq 3\frac{6}{11}$ . მაშასადამე, შრომითი რესურსის დასაშვები დიაპაზონია  $[16 - 6; 16 + 3\frac{6}{11}] = [10; 19\frac{6}{11}]$ .

6.9 ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ შრომითი რესურსის გადახრის  $[-6; 3\frac{6}{11}]$  შუალედში მიიღება პროდუქციის გამოშვების ოპტიმალური გეგმა:  $P_1$ -ის რაოდენობა  $10 + 5/3(\Delta b_1)$ ,  $P_3$ -ის რაოდენობა  $6 - 2/3(\Delta b_1)$ , ხოლო  $P_2$  და  $P_4$ -ის გამოშვებას ადგილი არ აქვს. ამგვარად, პროდუქციის ოპტიმალური გამოშვების გეგმა მთლიანად დამოკიდებულია შრომითი რესურსის გადახრაზე. ამასთან, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაა  $f = 1320 + 20\Delta b_1$ .

წინა შემთხვევის მსგავსად, განვიხილოთ მოწყობილობის რესურსების გადახრის შემთხვევა. გადახრის პარამეტრი აღვნიშნოთ  $\Delta b_3$ -ით. მაშინ (6.83) მოდელის ნაცვლად გვექნება

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16,$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110, \quad (6.89)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100 + \Delta b_3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად სიმპლექს-მეთოდით გადაეწყვიტოთ (6.89) ამოცანა. გამოთვლითი პროცესი ასახულია 6.10 ცხრილში.

როგორც 6.10 ცხრილის ბოლო ნაწილიდან ჩანს,  $x_1^* = 10 - (1/6)\Delta b_3$ ,  $x_3^* = 6 + (1/6)\Delta b_3$ ,  $x_6^* = 26 + (1/3)\Delta b_3$ . ვინაიდან ოპტიმალური ვექტორის ყველა კოორდინატი უნდა იყოს არაუარყოფითი, ამიტომ მიიღება უტოლობათა სისტემა

$$x_1^* = 10 - (1/6)\Delta b_3 \geq 0,$$

$$x_3^* = 6 + (1/6)\Delta b_3 \geq 0, \quad (6.90)$$

$$x_6^* = 26 + (1/3)\Delta b_3 \geq 0.$$

(6.90) სისტემის ამოხსნის შედეგად გვექნება:  $-36 \leq \Delta b_1 \leq 60$ . მაშასადამე, მოწყობილობის რესურსის დასაშვები დიაპაზონია  $[100 - 36; 100 + 60] = [64; 160]$ .

j	B <sub>აა</sub>	c <sub>აა</sub>	A <sub>0</sub>	60	70	120	130	0	0	0
				A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
1	A <sub>3</sub>	0	16	1	1	1	1	1	0	0
2	A <sub>6</sub>	0	110	6	5	4	3	0	1	0
3	A <sub>7</sub>	0	100+Δb <sub>3</sub>	4	6	10	13	0	0	1
m+1	Δ <sub>3</sub>		0	-60	-70	-120	-130	0	0	0
1	A <sub>3</sub>	0	6- -(1/10)Δb <sub>3</sub>	3/5	2/5	0	-3/10	1	0	-1/10
2	A <sub>6</sub>	0	70- -(2/5)Δb <sub>3</sub>	22/5	13/5	0	-11/5	0	1	-2/5
3	A <sub>3</sub>	120	10+ +(1/10)Δb <sub>3</sub>	2/5	3/5	1	13/10	0	0	1/10
m+1	Δ <sub>3</sub>		1200+ +12Δb <sub>3</sub>	-12	2	0	26	0	0	12
1	A <sub>1</sub>	60	10- -(1/6)Δb <sub>3</sub>	1	2/3	0	-1/2	5/3	0	-1/6
2	A <sub>6</sub>	0	26+ +(1/3)Δb <sub>3</sub>	0	-1/3	0	0	-22/3	1	-1/3
3	A <sub>3</sub>	120	6+ +(1/6)Δb <sub>3</sub>	0	1/3	1	3/2	-2/3	0	1/6
m+1	Δ <sub>3</sub>		1320+ +10Δb <sub>3</sub>	0	10	0	20	20	0	10

ცხრილი 6.10

6.10 ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ მოწყობილობის რესურსის გადახრის  $[-36; 60]$  შუალედში მიიღება პროდუქციის გამოშვების ოპტიმალური გეგმა: P<sub>1</sub>-ის რაოდენობა  $10 - (1/6)\Delta b_3$ , P<sub>3</sub>-ის რაოდენობა  $6 + (1/6)\Delta b_3$ , ხოლო P<sub>2</sub> და P<sub>4</sub>-ის გამოშვებას ადგილი არ აქვს. ამგვარად, ვხედავთ, რომ პროდუქციის ოპტიმალური გამოშვების გეგმა ამ შემთხვევაში მთლიანად დამოკიდებულია მოწყობილობის რესურსის გადახრაზე. ამასთან, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაა  $f = 1320 + 10\Delta b_3$ .

განხილული სიტუაციების ანალიზი მიუთითებს იმაზე, რომ სხვადასხვა სახის რესურსის გარკვეულ შუალედში გადახრის დროს (როცა ოპტიმალური გეგმის სტრუქტურა არ იცვლება) დუალური ცვლადები თავიანთ მნიშვნელობებს ინარჩუნებს.

## 6.5 არაწრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა

მართვისა და საინჟინრო დაპროექტების მრავალი ამოცანა დაკავშირებულია არაწრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნასთან [57, 97, 98]. მიუხედავად იმისა, რომ არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მრავალი მეთოდია შემუშავებული, მათი გამოყენება დიდი განზომილების ამოცანების გადასაწყვეტად რიგ შემთხვევაში შეზღუდულია. დიდი განზომილების სისტემების ამოხსნის პრაქტიკულმა აუცილებლობამ განაპირობა საოპტიმიზაციო მეთოდების საფუძველზე ალგორითმების შემუშავება, რომელთაგან ერთ-ერთს ქვემოთ განვიხილავთ [16].

ეთქვით, მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{6.91}$$

ზოგად შემთხვევაში,  $f_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , შეიძლება იყოს ალგებრული (წრფივი, არაწრფივი) ან ტრანსცენდენტური ფუნქცია. დავუშვათ, რომ (6.91) სისტემას მხოლოდ იზოლირებული ამონახსნი გააჩნია.

განვიხილოთ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2, \tag{6.92}$$

რომელიც განსაზღვრულია რაღაც  $\Omega \subset R^n$  სიმრავლეზე. ცხადია, თუ წერტილი  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  განტოლებათა სისტემის ამონახსნია, მაშინ  $\Phi(x^*) = 0$ , სხვა წერტილებში  $\Phi(x) > 0$ .

ამგვარად,  $\Phi(x)$  ფუნქციის ნულოვანი მინიმუმის კოორდინატები განტოლებათა (6.91) სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს და ამ უკანასკნელის განსაზღვრის ამოცანა  $n$ -განზომილებიან სივრცეში დადებითად განსაზღვრული (6.92) ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმის  $x^*$  წერტილის მოძებნის ამოცანაზე დაიყვანება, ე.ი.

$$\min \left\{ \Phi(x) = \sum_{i=1}^n [f_i(x)]^2 \mid x \in [a, b] \subset R^n \right\}. \tag{6.93}$$

მინიმიზაციის (6.93) ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია არაწრფივი ოპტიმიზაციის ნებისმიერი მეთოდით. განვიხილოთ აღნიშნული ამოცანის სიმძიმის ცენტრების მეთოდით გადაწყვეტის შესაძლებლობები.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, სიმძიმის ცენტრების მეთოდი შემუშავებულია იმ ფაქტის მტკიცების საფუძველზე, რომლის თანახმად საოპტიმიზაციო  $\Phi(x)$  ფუნქციის ლებეგის დაყოფის შედეგად წარმოქმნილი  $\Omega_p(\zeta) \subset \Omega$ ,  $p = 1, 2, \dots, k$  სიმრავლეების სიმძიმის  $x_p(\zeta)$  ცენტრების მიმდევრობა კრებადია აბსოლუტური ექსტრემუმის  $x^*$  წერტილში, ე.ი.

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta^*} \{x_p(\zeta)\} = x^*, \quad (6.94)$$

სადაც  $\zeta^* = \inf \Phi(x)$ . ვინაიდან  $\Phi(x^*) = 0$ , ამიტომ (6.94) პირობის ნაცვლად გვექნება

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta^*} \{x_p(\zeta)\} = x^*. \quad (6.95)$$

დასმული ამოცანის გარკვეული სიზუსტით გადაწყვეტისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სიმძიმის ცენტრების მეთოდის იტერაციული ალგორითმი, რომლის თანახმად ყოველ იტერაციაზე აღვილი აქვს ძებნის დასაშვები არის თანდათანობით შემცირებას: თუ მიმდინარე  $t$ -ურ იტერაციაში სიმძიმის ცენტრების მეთოდით გათვალისწინებული სტატისტიკური ცდები განხორციელდება  $n$ -განზომილებიან კუბში  $a_j^{(t)} \leq x_j \leq b_j^{(t)}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , სადაც  $a_j$  და  $b_j$  შესაბამისად  $x_j$  კოორდინატის ცვლილების ქვედა და ზედა საზღვრებია, ხოლო  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  - სიმძიმის ცენტრების მეთოდის საშუალებით განსაზღვრული მინიმუმის მიახლოებითი მნიშვნელობა, მაშინ მომდევნო  $(t+1)$ -ე იტერაციაში სტატისტიკური ცდები ჩატარდება შემცირებულ ჰიპერკუბში საზღვრებით

$$\begin{aligned} a_j^{(t+1)} &= (x_j^{(t)} + a_j^{(t)}) / 2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ b_j^{(t+1)} &= (x_j^{(t)} + b_j^{(t)}) / 2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.96)$$

ცხადია, დასაშვები არის შემცირება გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება პირობა

$$\|a^{(t+1)} - b^{(t+1)}\| \leq \delta, \quad (6.97)$$

სადაც  $\delta > 0$  რაღაც მინიმალური სიდიდეა.

ალგორითმის ლოგიკური სტრუქტურა ძირითადად სამ ეტაპს მოიცავს. პირველ ეტაპზე განისაზღვრება ლებეგის დონეების დისკრეტული  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p, \dots, \zeta_n$  მნიშვნელობები, რისთვისაც საჭიროა შედარებით მცირე  $S = 0.1N$  რაოდენობის წინასწარი

სტატისტიკური ცდების ჩატარება, სადაც  $N$  ძირითადი სტატისტიკური ცდების რაოდენობაა. წინასწარი ცდების ამ სერიაში ადგილი აქვს ცვლადების სხვადასხვა შემთხვევითი მნიშვნელობების დროს საოპტიმიზაციო ფუნქციის  $\Phi(x^{(i)})$ ,  $i = \overline{1, S}$ , მნიშვნელობების გამოთვლას და შეჯამებას:  $\Phi_S = \sum_{i=1}^S \Phi(x^{(i)})$ . ეტაპის ბოლოს განისაზღვრება:

- ლებეგის დონეების ბიჯი

$$\Delta_S = \Phi_S / S\mathfrak{M}; \quad (6.98)$$

- ლებეგის დონეების მნიშვნელობები

$$\zeta_p = \Phi_S / S - (p-1)\Delta_S, \quad p = \overline{1, \mathfrak{M}}, \quad (6.99)$$

სადაც  $\mathfrak{M}$  ლებეგის დონეების რაოდენობაა.

მეორე ეტაპზე ტარდება  $N$  რაოდენობის ძირითადი სტატისტიკური ცდების სერია, რომელშიც შემდეგი გამოსახულების საფუძველზე:

$$\overline{x(p)} = \frac{\sum_{i=1}^N x^{(i)} [\Phi(x^{(i)}) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p)}{\sum_{i=1}^N [\Phi(x^{(i)}) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p)}, \quad (6.100)$$

სადაც

$$\theta(x^{(i)}, \zeta_p) = \begin{cases} 1, & \Phi(x^{(i)}) \leq \zeta_p, \\ 0, & \Phi(x^{(i)}) > \zeta_p, \end{cases} \quad (6.101)$$

განისაზღვრება შემთხვევითი  $\overline{x_j(p)}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , ფუნქციების ემპირიული წერტილები. მიღებული მონაცემების უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აპროქსიმაციის შედეგად განისაზღვრება მაპროქსიმებული პოლინომები

$$\overline{x_j(p)} = \alpha_{2j} p^2 + \alpha_{1j} p + \alpha_{0j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.102)$$

და ფორმირდება ოპტიმიზაციის ერთგანზომილებიანი ამოცანა

$$\min \{ \Phi[x(p)] \mid p \in [\mathfrak{M} - \Delta\mathfrak{M}, \mathfrak{M} + \Delta\mathfrak{M}] \}, \quad (6.103)$$

რომლის ოპტიმალური ამონახსნი მოცემულ განტოლებათა სისტემის მიახლოებით ამონახსნს შეესაბამება.

ამონახსნის შედარებით მაღალი სიზუსტით განსაზღვრის საჭიროების შემთხვევაში გამოთვლების ორივე ეტაპი რამდენჯერმე განმეორდება (6.96) ფორმულების საშუა-



ლებით შემცირებულ დასაშვებ არეში და განისაზღვრება განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მეორე, მესამე და ა.შ. მიხედვით. იტერაციები გაგრძელდება მანამ, სანამ არ შესრულდება კრებადობის პირობა

$$|\Phi_i(x^{(i)})| < \varepsilon, \quad (6.104)$$

სადაც  $i$  მიმდინარე იტერაციის ნომერია, ხოლო  $\varepsilon$  - რაღაც მცირე დადებითი რიცხვი.

გამოთვლების მესამე ეტაპზე ადგილი აქვს მინიმიზაციის (6.93) ამოცანის ანუ განტოლებათა (6.91) სისტემის ამონახსნის დაზუსტებული მნიშვნელობის განსაზღვრას ნებისმიერი დეტერმინირებული ალგორითმის საფუძველზე.

აღსანიშნავია, რომ განხილული ალგორითმის კრებადობა იმ შემთხვევაში იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგს, როცა (6.91) განტოლებათა სისტემას მოცემულ არეში ერთადერთი იზოლირებული ამონახსნი გააჩნია. რამდენიმე ამონახსნის შემთხვევაში კი საჭიროა წინასწარ მათი განცალკება.

ამგვარად, სიმძიმის ცენტრების მეთოდით არაწრფივ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტის ალგორითმი შემდეგი ოპერაციებისა და პროცედურების თანმიმდევრობას წარმოადგენს.

**ბიჭი 1.** შეირჩევა პროგრამული პარამეტრები:

- სტატისტიკური ცდების რაოდენობა  $N$ ;
- ლებევის ღონეების რაოდენობა  $M$ ;
- ძებნის დასაშვები არის საწყისი საზღვრები  $a_j^{(0)}, b_j^{(0)}, j = \overline{1, n}$ ;
- დასაშვები ცდომილების აბსოლუტური ზღვრული მნიშვნელობები  $\varepsilon, \delta$ .

**ბიჭი 2.** შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით გამოძე-შავლება  $x_j^{(i)} = a_j + (b_j - a_j)\xi_j$ , სადაც  $\xi_j$  თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვია ინტერვალში  $[0; 1]$ ;

**ბიჭი 3.** გამოითვლება საოპტიმიზაციო ფუნქცია  $\Phi(x^{(i)})$ ;

**ბიჭი 4.** 2-3 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $S = 0.1N$  -ჯერ, რომლის დროსაც ადგილი აქვს ფუნქციის გამოთვლილი მნიშვნელობების შეჯამებას

$$\sum_{i=1}^S \Phi(x^{(i)}) = \Phi_S.$$

როცა  $i = S$ , მაშინ გადავალთ მე-5 ბიჯზე;

ბიჭი 5. (6.94) და (6.95) ფორმულების საშუალებით განისაზღვრება ლებეგის დონეების მნიშვნელობები  $\zeta_p$ ,  $p = \overline{1, M}$ ;

ბიჭი 6. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების პროგრამული გენერატორის საშუალებით გამომუშავდება  $x_j^{(l)} = a_j + (b_j - a_j)\xi_j$ ;

ბიჭი 7. გამოითვლება ფუნქცია  $\Phi(x^{(l)})$ ;

ბიჭი 8. შემოწმდება პირობა  $\Phi(x^{(l)}) \leq \zeta_p$ . თუ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ გადავალოთ მე-9 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-11 ბიჯზე;

ბიჭი 9. გამოითვლება და შეჯამდება:

$$\sum_{i=1}^N [\Phi(x^{(i)}) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p), \quad (6.105)$$

$$\sum_{i=1}^N x_j^{(i)} [\Phi(x^{(i)}) - \zeta_p]^2 \theta(x^{(i)}, \zeta_p), \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.106)$$

ბიჭი 10. 8-9 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება სხვადასხვა  $\zeta_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, M$ , მნიშვნელობების დროს. როცა  $p = M$ , მაშინ გადავალოთ მე-11 ბიჯზე;

ბიჭი 11. 6-10 ბიჯებით გათვალისწინებული ოპერაციები განმეორდება  $N$ -ჯერ. როცა  $i = N$ , მაშინ გადავალოთ მე-12 ბიჯზე;

ბიჭი 12. (6.105) და (6.106) სასრული ჯამების გამოყენებით, (6.100) ფორმულის საფუძველზე გამოითვლება:

$$\overline{x_j(p)}, \quad p = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, n};$$

ბიჭი 13.  $\{x_1, p\}, \{x_2, p\}, \dots, \{x_n, p\}$  მიმდევრობების ემპირიული წერტილების პარაბოლური აპროქსიმაციის შედეგად განისაზღვრება მათაპროქსიმებელი პოლინომები

$$x_j(p) = \alpha_{2j} p^2 + \alpha_{1j} p + \alpha_0, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

ბიჭი 14. დიხტომიის მეთოდის გამოყენებით გადაწყდება ერთგანზომილებიანი მინიმიზაციის ამოცანა

$$\min\{\Phi[x(p)] \mid p \in [M - \Delta M, M + \Delta M]\}$$

და განისაზღვრება  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ ,  $\Phi_i^* = \Phi(x^{(i)})$ . (საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებელია ექსტრემუმის ძებნის ნებისმიერი დეტერმინირებული მეთოდით მინიმუმის წერტილის დაზუსტება).

- ბიჭი 15. შემოწმდება კრებადობის (6.104) პირობა. თუ იგი სამართლიანია, მაშინ გადავალთ მე-18 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-16 ბიჯზე;
- ბიჭი 16. (6.96) ფორმულების საშუალებით განისაზღვრება დასაშვები არის ახალი საზღვრები;
- ბიჭი 17. შემოწმდება დასაშვები არის შემცირების (6.97) პირობა. თუ აღნიშნული პირობა შესრულდა, მაშინ გადავალთ მე-18 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მე-2 ბიჯზე;
- ბიჭი 18. ალგორითმის დასასრული.

განვიხილოთ საილუსტრაციო მაგალითი.

მაგალითი 6.1 მოცემულია არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} f_1 \equiv x_1^2 + x_2 - 11 = 0, \\ f_2 \equiv x_1 + x_2^2 - 7 = 0. \end{cases} \quad (6.107)$$

საჭიროა ეიპოვოთ მისი ფესვები, თუ  $-6 \leq x_1 \leq 6$ ,  $-6 \leq x_2 \leq 6$ .

ამოხსნა. მოცემული განტოლებების საფუძველზე შევადგინოთ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა

$$\Phi(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \quad (6.108)$$

რომლის ტოპოლოგია წარმოდგენილია ნახ. 6.9-ზე. აღნიშნული ფუნქცია ცნობილია როგორც ჰიმელბლაუს ტესტური ფუნქცია [138]. როგორც ნახაზიდან ჩანს, იგი მულტიმოდალურია და მოცემულ არეში მას ოთხი ლოკალური მინიმუმის წერტილი გააჩნია, სადაც  $\Phi(x^*) = 0$ .

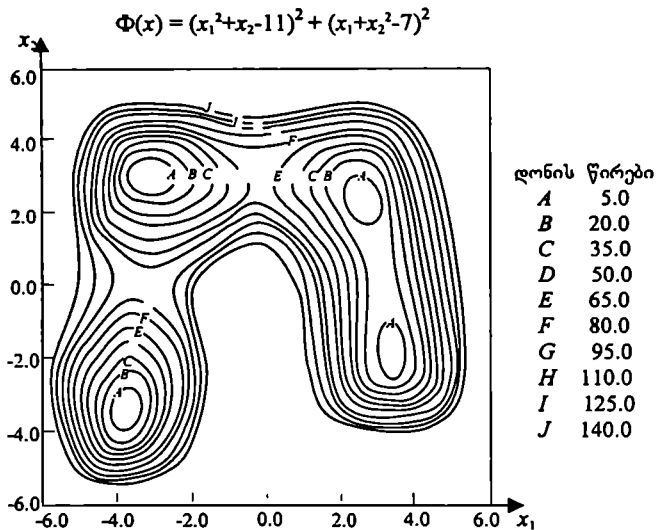
(6.108) კვადრატული ფუნქციის გათვალისწინებით განვიხილოთ მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანა

$$\min \{ \Phi(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \mid x_1, x_2 \in [-6; 6] \}. \quad (6.109)$$

სიძიმის ცენტრების მეთოდით მოცემული ამოცანის გადასაწყვეტად დავეუშვათ პროგრამული პარამეტრების შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$N = 100; \quad \mathfrak{R} = 10; \quad a_1^0 = a_2^0 = -6, \quad b_1^0 = b_2^0 = 6; \quad \varepsilon = 10^{-6}; \quad \delta = 10^{-2}.$$

გამოთვლების შედეგები წარმოდგენილია 6.11 ცხრილში.



ნახ. 6.9

იტერაცია	I	II
დასაშვები არე	$-6 \leq x_1 \leq 6$ $-6 \leq x_2 \leq 6$	$-1.5 \leq x_1 \leq 4.5$ $-2.0 \leq x_2 \leq 4.0$
$N$	100	100
ოპტიმალური ამონახსნი	$x_1^{(1)} = 1.849976$ $x_2^{(1)} = 2.725206$ $\Phi_1^* = 28.72910$	$x_1^{(2)} = 3.686888$ $x_2^{(2)} = -1.375946$ $\Phi_2^* = 3.497638$
დანაკარგები	140	141
ოპტიმალური ამონახსნის დაზუსტება	$x_1^{(1)} = 2.999954$ $x_2^{(1)} = 2.000730$ $\Phi_1^* = 8.46 \cdot 10^{-6}$	$x_1^{(2)} = 3.584260$ $x_2^{(2)} = -1.848187$ $\Phi_2^* = 1.62 \cdot 10^{-6}$
ჯამური დანაკარგები	$\rho_1 = 328$	$\rho_2 = 204$

ცხრილი 6.11

პირველი იტერაცია განხორციელდა დასაშვებ არეში  $-6 \leq x_j \leq 6, j = 1, 2$ , და ალგორითმის თანახმად მიღებულ იქნა შემდეგი ამონახსნი:

$$x^{(0)} = [1.849976; 2.725206], \quad \Phi_1 = \Phi(x^{(0)}) = 28.72910.$$

$x^{(0)}$  ამონახსნი მიღებულია ძალიან დიდი ცდომილებით (28.7%), რაც იმიტომ აიხსნება, რომ მოცემულ არეში სიმძიმის ცენტრების მეთოდის კრებადობისთვის გლობალური მინიმუმის ერთადერთობის პირობა დარღვეულია:  $\Phi(x)$  ფუნქციას მოცემულ არეში ერთის ნაცვლად ოთხი ერთნაირი ნულოვანი დონის ლოკალური მინიმუმი გააჩნია. საჭიროა აღინიშნოს, რომ მსგავს შემთხვევებში ამონახსნის დიდი ცდომილებით განსაზღვრა სიმპტომატური მოვლენაა და იგი იმას მიგვანიშნებს, რომ ფესვების განცალკევების მიზნით საჭიროა დასაშვები არის კონფიგურაციის შეცვლა.

$x^{(0)}$  წერტილიდან, რომელიც ერთ-ერთი ლოკალური მინიმუმის მიზიდულობის ზონაშია, განხორციელდა გრადიენტული მოძრაობა და მიღებულ იქნა მოცემული განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი ფესვი  $x_1^* = [2.999954; 2.000730]$ , სადაც  $\Phi(x_1^*) = 8.46 \cdot 10^{-6}$ .

რადგან  $\Phi(x_1^*) > \varepsilon = 10^{-6}$ , ამიტომ გამოთვლები გაგრძელდა და მეორე იტერაცია განხორციელდა შემცირებულ არეში  $-1.5 \leq x_1 \leq 4.5, -2.0 \leq x_2 \leq 4.0$ , სადაც ოთხის ნაცვლად ორი ერთნაირი ნულოვანი მნიშვნელობის ლოკალური მინიმუმია. სიმძიმის ცენტრების მეთოდით განისაზღვრა ამონახსნი

$$x^{(0)} = [3.686888; -1.375946], \quad \Phi(x^{(0)}) = 3.497638,$$

რომლის დაზუსტების შედეგად მიღებულ იქნა მეორე ფესვი

$$x_{II}^* = [3.584260; -1.848187], \quad \text{სადაც } \Phi(x_{II}^*) = 1.62 \cdot 10^{-6}.$$

რადგან  $|\Phi(x_1^*) - \Phi(x_{II}^*)| < \delta = 10^{-2}$ , ამიტომ გამოთვლების პროცესი დამთავრდა დანაკარგებით  $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 532$ .

განტოლებათა სისტემის დანარჩენი ფესვების მოსაძებნად ექსპერიმენტი განმეორდა იმავე პროგრამული პარამეტრებით, მაგრამ დასაშვები არის შეცვლილ საზღვრებში. როცა  $-6 \leq x_1 \leq 0, -6 \leq x_2 \leq 6$ , მაშინ მიღებულ იქნა მესამე ფესვი (დანაკარგებით  $\rho = 281$ )

$$x_{III}^* = [-2.805172; 3.131258], \quad \text{სადაც } \Phi(x_{III}^*) = 2.16 \cdot 10^{-7},$$

ხოლო როცა  $-6 \leq x_1 \leq 0, -6 \leq x_2 \leq 0$ , მიღებულ იქნა მეოთხე ფესვი (დანაკარგებით  $\rho = 412$ )

$$x_{IV}^* = [-3.779245; -3.283191], \quad \text{სადაც } \Phi(x_{IV}^*) = 2.56 \cdot 10^{-7}.$$

# თავი მეშვიდე

## მრავალკრიტიკრიული ოპტიმიზაცია

### 7.1 ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანები

იმ პრობლემებისგან განსხვავებით, რაც განზილული გვექონდა წინა ნაწილში, სადაც გარკვეული სტრუქტურის მქონე შეზღუდვათა სიმრავლეზე ერთი ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობა უნდა მოგვეძებნა, ამ ნაწილში განვიხილავთ ოპტიმიზაციის მრავალკრიტიკრიულ ანუ ვექტორულ ამოცანებს. ასეთ ამოცანებში საჭიროა განზორციელდეს რამდენიმე კრიტიკრიული ფუნქციის ერთდროული ოპტიმიზაცია ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, საოპტიმიზაციო ფუნქციას უნდა ჰქონდეს ვექტორული სახე.

#### 7.1.1 მრავალკრიტიკრიული ამოცანების კლასიკური მაგალითები

მათემატიკური დაპროგრამების ერთკრიტიკრიულ ამოცანებში საჭიროა განვსაზღვროთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც, მაგალითად, მინიმალურ ხარჯს ან მაქსიმალურ მოგებას შეესაბამება. მაგრამ პრაქტიკულად ნებისმიერ რეალურ სიტუაციაში ადგილი აქვს ერთდროულად რამდენიმე ურთიერთდაპირისპირებულ და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიზნების არსებობას. ვაჩვენოთ რამდენად ფართოა იმ პრობლემების სპექტრი, რომელიც ადეკვატურად შეიძლება იყოს ფორმულირებული როგორც მრავალკრიტიკრიული ამოცანა და ამასთან, გამოვიყენოთ მახასიათებლები, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ საოპტიმიზაციო კრიტერიუმებად.

ნავთობის გაწმენდის დაგეგმვა

$\min$  {ხარჯები},

$\min$  {იმპორტირებადი ნედლი ნავთობის რაოდენობა},

$\min$  {ცოვირდის მაღალი შემცველობის ნედლეულის რაოდენობა},

min {მოცემული შემადგენლობიდან გადახრა},

min {გაზების წვა}.

**წარმოების დაგეგმვა**

max {ჯამური სუფთა შემოსავალი},

max {ნებისმიერ პერიოდში მინიმალური სუფთა შემოსავალი},

min {შეუსრულებელი შეკვეთების რაოდენობა},

min {ზედნაღები დრო},

min {მზა პროდუქციის მარაგი}.

**ფასიანი ქაღალდების პორტფელის ამორჩევა**

max {შემოსავალი},

min {რისკი},

max {დივიდენდები},

min {ქაღალდების მრავალფეროვნების სასურველი დონიდან გადახრა}.

**კაპიტალდაბანდების ხარჯთაღრიცხვის შედგენა**

max {საშუალებათა არსებობა},

min {კაპიტალურ დაბანდებაზე მოთხოვნა},

min {ყოველწლიური საექსპლუატაციო ხარჯები},

max {ინვესტიციები გარემოს დაცვასთან დაკავშირებულ პროექტებში},

max {ინვესტიციები მოცემულ რეგიონთან დაკავშირებულ პროექტებში},

max {ინვესტიციები მოცემულ სასაქონლო სპეციალიზაციებთან დაკავშირებულ პროექტებში}.

**სატყეო მეურნეობის მართვა**

max {ხე-ტყის მდგრადი მოსავალი},

max {ტყეში დასვენების კაც-დღეები},

max {ტყეში ნადირობის კაც-დღეები},

max {ველური ცხოველების გავრცელების არეალი},

max {შინაური ცხოველების მწყემსობის თვეების რაოდენობა},

min {ბიუჯეტის გადაჭარბება}.

წყალსაცავების დონის კლების პართვა

max {პირველი წყალსაცავის აღდგენიდან მოგება},

max {პირველი წყალსაცავის დონის ქვემოთ საგუბარის დარეგულირებიდან მოგება},

max {მდინარის აუზიდან გამომუშავებული ენერჯის რაოდენობა},

min {მდინარის აუზში კომუნალურ მოთხოვნილებებზე წყლის უკმარისობა},

max {მეორე წყალსაცავის აღდგენიდან მოგება},

max {მეორე წყალსაცავის დონის ქვემოთ სარწყავი მიწებიდან მოგება}.

ფირმაში სარევიზიო სამსახურის ფორმირება

max {შემოსავალი},

min {სამსახურის პერსონალის რიცხოვრივი ზრდა},

min {სამსახურის პერსონალის რიცხოვრივი შემცირება},

min {ზედნადები ხარჯები},

min {კადრების კვალიფიკაციის არასრული გამოყენება},

max {პროფესიონალურ ზრდაზე გამოყოფილი დრო}.

ტრანსპორტირება

min {ღირებულება},

min {პრიორიტეტულ კლიენტებთან ტვირთის მიტანის საშუალო დრო},

max {მოცემული ტექნოლოჯის მიხედვით წარმოება},

min {საწვავის ხარჯი}.

სოსისების, შებოლილი ძეხვებისა და სალიამისათვის ნარევის მომზადება

min {ღირებულება},

min {ცხიმინობა},

min {მისაღები ფერისაგან გადახრა},

max {პროტეინი},

min {ტენის დასაშვები შემცველობიდან გადახრა},



$\min$  {ლორისა და საქონლის ხორცის დასაშვები პროპორციიდან გადახრა}.

## 7.1.2 ზოგადი ცნებები

1 გადაწყვეტილების (როგორც ინდივიდუალურის, ისე ჯგუფურის) მიღების დროს გადაწყვეტილების მიმღებ პირს მრავალ ურთიერთსაწინააღმდეგო მაჩვენებელთან აქვს საქმე. ისინი ახსნათებენ ამა თუ იმ სისტემის მდგომარეობას ან მიმდინარე პროცესის ვითარებას, რაც სისტემის მათემატიკურ მოდელს მრავალკრიტერიულობის (ვექტორულ ან არასკალარულ) თვისებას ანიჭებენ. ამასთან დაკავშირებით, უკანასკნელი წლების მანძილზე ფართოდ ვითარდება გადაწყვეტილების მიღების თეორია მრავალი კრიტერიუმის გათვალისწინებით.

გადაწყვეტილების მიღების კონცეფცია, როგორც აზროვნების პირველადი საფუძველი, გადაწყვეტას განიხილავს როგორც გარკვეული სიმრავლიდან ალტერნატივითა გონივრულ ამორჩევას. აღნიშნულ ალტერნატივებს, მათი კონკრეტული შინაარსის შესაბამისად, უწოდებენ სტრატეგიებს, გეგმებს, ვარიანტებს და ა.შ. ამორჩევას ის პირი ახორციელებს, რომელიც გადაწყვეტილებას იღებს და მისწრაფვის გარკვეული მიზნის მისაღწევად. ასეთი პირი შეიძლება იყოს ერთი ადამიანი ან ადამიანთა მთელი ჯგუფი, რომელიც უფლებამოსილია მიიღოს გადაწყვეტილება და აგოს პასუხი მიღებული გადაწყვეტილების შედეგზე.

გადაწყვეტილების მიღების დროს მათემატიკური მეთოდების გამოყენება გულისხმობს სათანადო მათემატიკური მოდელის შედგენას, რომელიც ფორმალურად პრობლემურ სიტუაციას ანუ გადაწყვეტილების მიღების სიტუაციას გამოსახავს. განსაზღვრულობის პირობებში, როცა შემთხვევით და განუსაზღვრულ ფაქტორებს ადგილი არა აქვს, გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებში (ოპტიმიზაციის ამოცანებში) მათემატიკური მოდელის კომპონენტებს წარმოადგენს ალტერნატიულ ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე, საიდანაც ამორჩევა ერთი საუკეთესო ანუ ოპტიმალური ამონახსნი, და გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ პრიორიტეტების (უპირატესობების) აღწერა. იმისათვის, რომ უზრუნველყოფილ იქნეს ამორჩევის შესაძლებლობა (თავისუფლება),  $\Omega$  სიმრავლე ორ ალტერნატიულ ამონახსნს მაინც უნდა შეიცავდეს.

2. ოპტიმიზაციის მრავალკრიტერიულ ამოცანებში უპირატესობის მიხედვით ამონახსნთა შედარება ხორციელდება არა უშუალოდ, არამედ  $\Omega$  სიმრავლეზე განსაზღვრული რიცხვითი  $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$  ფუნქციების საშუალებით, რომლებსაც ეწოდება კრიტერიუმები (ზარისხის ანუ ეფექტურობის მაჩვენებლები, კრიტერიალური ფუნქციები. მიზნის ფუნქციები და ა.შ.). იგულისხმება, რომ  $m \geq 2$ ; როცა  $m=1$ , მაშინ ოპტიმიზაციის ამოცანა ერთკრიტერიულია.

ყოველ  $f_i$  კრიტერიუმს რიცხვთა  $R$  ღერძზე შეესაბამება  $Y_i$  ქვესიმრავლე, საიდანაც იგი თავის მნიშვნელობებს მიიღებს. პრაქტიკულად,  $Y_i$  ქვესიმრავლე, რომელსაც

შპირად,  $f_1$  კრიტიკიუმის სკალას უწოდებენ, ამ უკანასკნელის შინაარსის მიხედვით განისაზღვრება. ასე, მაგალითად, თუ წინასწარ ცნობილია, რომ  $f_1$  კრიტიკიუმის მნიშვნელობა დადებითი ან არაუარყოფითია (რაც ახასიათებს მასას, ღირებულებას და ა.შ.), მაშინ შეიძლება მივიღოთ  $Y_1 = (0, +\infty)$  ან  $Y_1 = [0, +\infty)$ . თუ  $f_2$  კრიტიკიუმის მნიშვნელობები ქვემოდან და ზემოდან რაღაც  $a$  და  $b$  სიდიდეებით შემოსაზღვრულია, მაშინ  $Y_2 = [a, b]$  (მაგალითად, თუ  $f_2$  - რესურსების მარაგის ხარჯვის წილია, მაშინ  $Y_2 = [0, 1]$ ). თუ კრიტიკიული  $f_3$  ფუნქციის მნიშვნელობები მხოლოდ ნული და ნატურალური რიცხვებია (მაგალითად,  $f_3$  განისაზღვრება რაღაც ობიექტების დათვლის შედეგად), მაშინ  $Y_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$ . თუ  $f_4$  ფუნქციის მნიშვნელობებზე შინაარსობრივი შეზღუდვა არ არსებობს, მაშინ  $Y_4 = (-\infty, +\infty) = R$  და ა.შ.

$f_i, i=1, 2, \dots, m$ , კრიტიკიუმები, რომლებსაც კერძო (ლოკალური) კრიტიკიუმები ეწოდება, წარმოქმნის ვექტორულ კრიტიკიუმს  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . იგულისხმება, რომ თითოეული  $x$  ამონახსნი შეიძლება სრულად დახასიათდეს შესაბამისი ვექტორული შეფასებით ანუ  $f(x)$  ვექტორით. ამიტომ ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლიდან ოპტიმალური ამონახსნის ამორჩევა დაიკვანება მიღწევადი შეფასებების სიმრავლიდან

$$Y = f(\Omega) = \{ y \in R^m \mid y = f(x), x \in \Omega \}$$

ოპტიმალური შეფასების ამორჩევაზე, სადაც  $R^m$  არის  $m$ -განზომილებიანი რიცხვითი სივრცე და მას კრიტიკიული სივრცე ეწოდება. აუცილებლობის შემთხვევაში ეს სივრცე შეიძლება ეკლიდეს სივრცედ ჩაითვალოს, რომლის მეტრიკა განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$\|y - y'\| = (y - y', y - y')^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^m (y_i - y'_i)^2 \right]^{1/2}.$$

პრაქტიკულად,  $Y$  სიმრავლის განსაზღვრა, შპირად, რთულ ან საერთოდ შეუძლებელ ამოცანას წარმოადგენს. ამიტომ განსახილველად შემოაქვთ, შედარებით უფრო ფართო, რაღაც  $\hat{Y} \subseteq R^m$  სიმრავლე, რომლის ელემენტებს (ვექტორებს) შესაძლებელია მივცეთ შინაარსობრივი აზრი. უმეტეს შემთხვევაში, ამონახსნთა სიმრავლე  $\hat{Y} \supseteq Y$  მრავალგანზომილებიანი  $Y^* = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$  პარალელებიპედი. ზოგჯერ  $\hat{Y}$  სიმრავლე ამა თუ იმ შეზღუდვის მეშვეობით  $Y^*$ -საგან მიიღება, რაც დაკავშირებულია მიუღწევადი ან შინაარსობრივი დატვირთვის არმქონე ვექტორების უგულებელყოფასთან.

$\hat{Y}$  სიმრავლის შემოტანა მთელი რიგი უპირატესობით ხასიათდება. ასე, მაგალითად, იქმნება გამოკვლევის შესაძლებლობა არა ერთი ამოცანის, არამედ ამოცანათა მთელი ოჯახისა, რომელთა მიღწევადი შეფასებების თითოეული სიმრავლე  $\hat{Y}$  სიმრავლეში შედის. კერძოდ, შესაძლებელი ხდება შევისწავლოთ ოპტიმალური ამონახსნის ამოცანის ამა თუ იმ პარამეტრზე დამოკიდებულების ხასიათი.

შემდგომში ამონახსნს ყოველთვის აღვნიშნავთ  $x$  ასოთი, რომელსაც შეიძლება გააჩნდეს სხვადასხვა ინდექსი, ხოლო მის შესაბამის შეფასებას -  $y$  ასოთი და იმავე ინდექსით. მაგალითად:  $y=f(x)$ ,  $y'=f'(x)$  და ა.შ. თუ მოცემული ვექტორული  $y^0$  შეფასება მიღწევადია და მას რამდენიმე ამონახსნი შეესაბამება, მაშინ  $x^0$ -ით აღინიშნება ნებისმიერი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას  $f(x^0) = y^0$ .

3. ინდივიდუალურ გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანებში კრიტერიუმების დანიშნულება ამონახსნთა არსებით ნიშანთვისებათა "ინტენსიურობის" გამოსახვეა. ასე, მაგალითად, ზოგიერთ ნაკეთობათა შედარების დროს შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ისეთი კრიტერიუმები, როგორიცაა მასა, ღირებულება, გამოშვების თარიღი, გარეგნული (სასაქონლო) სახე და ა.შ. ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანებში  $f_i$  კრიტერიუმი ახასიათებს ამონახსნთა "ხარისხს" (ან უპირატესობას)  $\{1, 2, \dots, m\}$  ჯგუფში შემავალი  $i$ -ური ინდივიდის თვალსაზრისით. ასე, მაგალითად, თუ ამონახსნების რიცხვი სასრულია და  $i$  ინდივიდმა მათი რაჩეობა (უპირატესობის მიხედვით დალაგება) განახორციელა, მაშინ შეიძლება დავეუშვათ  $f_i(x) = 1$  ყველაზე მაღალი პრიორიტეტის  $x$  ამონახსნისათვის,  $f_i(x) = 2$  - უპირატესობის მიხედვით მომდევნო  $x$  ამონახსნისათვის და ა.შ.

თავისი ხასიათის მიხედვით კრიტერიუმები შეიძლება დავეთვათ რაოდენობრივ და თვისებრივ კრიტერიუმებად. უხეშად რომ ვთქვათ, კრიტერიუმი რაოდენობრივია, როცა აზრი აქვს მისი მნიშვნელობების შედარებას, მიუთითებთ რა, თუ რამდენით ან რამდენჯერ მეტია ერთი მნიშვნელობა მეორეზე, და თვისებრივია, როცა აღნიშნულ შედარებებს აზრი არა აქვს. რაოდენობრივი  $f_i$  კრიტერიუმის მაგალითს წარმოადგენს მასა. თუ მასის გაზომვის ერთეული დაფიქსირებულია, მაშინ შესაძლებელია მსჯელობა იმის შესახებ, თუ ერთი ნაკეთობა რამდენჯერ (ან რამდენით) მძიმეა მეორეზე. გაზომვის სხვა ერთეულზე გადასვლის ანუ  $f_i$ -ის  $kf_i$ -ად გარდაქმნის შემთხვევაში, სადაც  $k > 0$ , ნაკეთობათა მასების შეფარდება არ იცვლება. გასაგებია, რომ ყველა სხვა გარდაქმნის შემთხვევაში, რომელიც დადებით  $k$  რიცხვზე გამრავლებას არ წარმოადგენს,  $f_i$  მნიშვნელობების საწყისი თანაფარდობა შესაძლებელია შეიცვალოს.

განხილულ მაგალითში  $f_i$  კრიტერიუმის დასაშვები გარდაქმნებია მხოლოდ დადებითი წრფივი გარდაქმნები და მხოლოდ ისინი. ზოგად შემთხვევაში,  $\varphi$  ფუნქციას  $f_i$  კრიტერიუმის დასაშვებ გარდაქმნას უწოდებენ, თუ  $\varphi(f_i)$  ფუნქცია კვლავ იმავე თვისების შეფასების კრიტერიუმი აღმოჩნდება.  $f_i$  კრიტერიუმის  $f_i' = \varphi(f_i)$ -ით შეცვლით  $Y_i$  სიმრავლე  $Y_i' = \varphi(Y_i)$  სიმრავლით იცვლება.

ამგვარად, თითოეულ კრიტერიუმს უკავშირებენ დასაშვებ გარდაქმნათა  $\Phi$  სიმრავლეს და ამბობენ, რომ ამ კრიტერიუმს აქვს  $\Phi$  ტიპის სკალა ან შეფასება (გაზომვა)  $\Phi$  ტიპის სკალის მიხედვით ხორციელდება. ჩვეულებრივ,  $\Phi$  სიმრავლე კრი-

ტერიუმის ფორმირების დროს მოიცემა, მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში სკალის ტიპის განსაზღვრა დამოუკიდებელ, საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში  $\Phi = \Phi_0 = \{ \varphi \mid \varphi(z) = kz, k > 0 \}$ . ასეთი ტიპის სკალას ფარდობის სკალას უწოდებენ, რადგან შენარჩუნებულია შემდეგი სიდიდეების ფარდობა:

$$\text{ბა: } \frac{kz^1}{kz^2} = \frac{z^1}{z^2} = C = \text{const.}$$

გავრცელებულია, აგრეთვე,  $\Phi = \Phi_{int} = \{ \varphi \mid \varphi(z) = kz + l, k > 0 \}$  ტიპის სკალის მიხედვით გაზომვის შემთხვევები. აქ დასაშვებ გარდაქმნას დადებით  $k$  რიცხვზე გამრავლება და ნებისმიერი  $l$  რიცხვის დამატება წარმოადგენს. ასეთ სკალას ინტერვალთა სკალას უწოდებენ. ეს სახელწოდება გამომდინარეობს თვისებიდან, რომლის თანახმად შენარჩუნებულია ინტერვალთა ფარდობა

$$\frac{z^1 - z^2}{z^3 - z^4} = \frac{(kz^1 + l) - (kz^2 + l)}{(kz^3 + l) - (kz^4 + l)} = \text{const.}$$

ინტერვალთა სკალის მქონე კრიტერიუმის მაგალითია "ნაკეთობის გამოშვების თარიღი": დროის შესაფასებლად აუცილებელია დაფიქსირდეს მასშტაბი და აღრიცხვის დასაწყისი.

სკალა მით უფრო სრულყოფილია, რაც უფრო ვიწროა დასაშვებ გარდაქმნათა  $\Phi$  სიმრავლე. ინტერვალთა სკალაზე არანაკლებ სრულყოფილი სკალის მქონე კრიტერიუმებს რაოდენობრივს უწოდებენ. უმეტეს შემთხვევაში რაოდენობრივი კრიტერიუმები ობიექტური ("ფიზიკური") თვისებების ობიექტურ გაზომვებს შეესაბამება. მაგრამ პრაქტიკულ ამოცანებში ფართოდ გავრცელებულია ინტერვალთა სკალაზე ნაკლებად სრულყოფილი სკალის მქონე კრიტერიუმებიც.

ნაკლებად სრულყოფილი სკალის მაგალითია რიგობითი სკალა, რომლისთვისაც დასაშვებ გარდაქმნათა  $\Phi_{ord}$  სიმრავლე შედგება მონოტონურად ზრდადი ყველა ფუნქციისაგან:  $\Phi = \Phi_{ord} = \{ \varphi \mid z^1 > z^2 \Rightarrow \varphi(z^1) > \varphi(z^2) \}$ . რიგობითი სკალის მქონე კრიტერიუმებს თვისებრივს უწოდებენ. თვისებრივი კრიტერიუმი თავის მნიშვნელობებს მხოლოდ მონოტონური გარდაქმნების შემთხვევაში ინარჩუნებს. ამასთან, მნიშვნელობების შედარებას აზრი აქვს მხოლოდ "მეტე", "ნაკლები" და "ტოლი" თანადობისათვის. მაგრამ აზრი არა აქვს იმის გარკვევას, თუ რამდენჯერ ან რამდენით მეტია ერთი მნიშვნელობა მეორეზე. რიგობითი სკალის მქონე კრიტერიუმების გამოყენებას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ამონახსნები რანჟირებულია ანუ განლაგებულია რომელიმე თვისების ინტენსიურობის ზრდადობის ან კლებადობის მიხედვით და შემდეგ საჭიროა მათთვის რიცხვითი მნიშვნელობების მინიჭება ისე, რომ მეტ ინტენსივობას მეტი (ან, პირიქით, ნაკლები) რიცხვი შეესაბამებოდეს. ჩვეულებრივ, ასეთი რანჟირება სუბიექტური "გაზომვების" დროს მიიღება, მაგალითად, ამონახსნთა უპირატესობის შესახებ  $i$ -ური სუბიექტის მიერ აზრის გამოხატვის დროს.

საკმაოდ ხშირად, სუბიექტური გაზომვები ხორციელდება ქულებიანი სკალის მიხედვითაც. ასე, მაგალითად, ექსპერტს შეუძლია ქულებით შეაფასოს ნაკეთობის გარეგნული სახე. ქულებიანი სკალის მქონე კრიტერიუმებს "შუალედური" მდგომარეობა უკავია რაოდენობრივ და თვისებრივ კრიტერიუმებს შორის.

მოცემული ტიპის სკალების მქონე კრიტერიუმების მნიშვნელობების შესახებ მტკიცებას უწოდებენ ადეკვატურს, თუ მისი ჭეშმარიტება არ იცვლება კრიტერიუმების მიმართ სკალის ტიპებით განსაზღვრული ნებისმიერი დასაშვებ გარდაქმნათა გამოყენების შემთხვევაში. ამიტომ ოპტიმიზაციის პრაქტიკული მრავალკრიტერიული ამოცანების ანალიზისა და ამოხსნისათვის გამოყენებულ უნდა იქნეს მხოლოდ ის განსაზღვრებები და ცნებები, მეთოდები და პროცედურები, რომლებსაც ადეკვატური დასკვნებისა და რეკომენდაციების მიღებისაკენ მივყავართ.

ასე, მაგალითად, საყოველთაოდ ცნობილია მრავალკრიტერიული ამოცანების ამოხსნის მეთოდი, რომელიც ემყარება ვექტორული  $f$  კრიტერიუმის ერთი განზოგადებული  $F(f_1, f_2, \dots, f_m)$  ფუნქციით ანუ "ნახვევის" სახით წარმოდგენას. ძნელი არ არის დაერწმუნდეთ იმაში, რომ აღნიშნული მეთოდი თვისებრივი კრიტერიუმებიანი ამოცანების გადასაწყვეტად არ გამოადგება. განვიხილოთ ყველაზე უფრო გავრცელებული განზოგადებული კრიტერიუმი - წრფივი "ნახვევი"  $F_x = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i$ , სადაც  $\mu_i$

რაღაც დადებითი რიცხვია, რომელიც ახასიათებს კრიტერიუმების ფარდობით მნიშვნელობას (ე.წ. წონითი კოეფიციენტი). ვთქვათ, მაგალითად,  $m = 2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $f(x) = (2, 8)$ ,  $f(x^*) = (1, 27)$ . მაშინ  $F_x$  მიგვანიშნებს, რომ  $x^*$  უკეთესია, ვიდრე  $x$ , რადგანა  $2 + 8 < 1 + 27$ . მაგრამ, თუ პირველი კრიტერიუმისათვის გამოვიყენებთ დასაშვებ გარდაქმნას  $\varphi(x) = x^2$ , ხოლო მეორესთვის  $\varphi_2(z) = z^{1/3}$  (ე.ი.  $f_1$  შევცვალეთ  $f_1^2$ -ით, ხოლო  $f_2 - f_2^{1/3}$ -ით), მაშინ დასკვნა მცდარი აღმოჩნდება, რადგანაც  $32 + 2 > 1 + 3$ .

სხვადასხვა ტიპის სკალებში გაზომვის საკითხები და გაზომვათა მათემატიკური თეორია სრულად მოცემულია მონოგრაფიაში [107].

4. როგორც უკვე იყო აღნიშნული,  $\Omega$  სიმრავლიდან ოპტიმალური ამონახსნის გამოყოფა უნდა მოხდეს გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ უპირატესობის არჩევის საფუძველზე, რაც  $f_1, f_2, \dots, f_m$  კრიტერიუმების საშუალებით უნდა იყოს ფორმალურად აღწერილი. გადაწყვეტილების მიღებათა თეორიაში უპირატესობების აღსაწერად შემუშავებულია სპეციალური მეთოდები. აღნიშნული საკითხები გაშუქებულია მონოგრაფიაში [147].

5. მოცემულ თავში განხილულია სასრულგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანები ანუ ამოცანები, სადაც  $\Omega$  არის  $R^n$  სივრცის ქვესიმრავლე. ასეთ ამოცანებში  $\Omega$  სიმრავლე, როგორც წესი, უფრო ფართო  $D \subseteq R^n$  სიმრავ-

ლიდან გამოიყოფა სპეციალური შეზღუდვების საშუალებით, რომლებიც, უმეტეს შემთხვევაში, წარმოადგენილია უტოლობათა სახით

$$\Omega = \{ x \in D \mid g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0, \dots, g_k(x) \geq 0 \}, \quad (7.1)$$

სადაც  $g(x)$ ,  $j=1, \dots, k$ , არის  $D$  სიმრავლეზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციები და ისინი შეზღუდვათა  $g(x) = g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$  ვექტორ-ფუნქციას შეადგენენ. ამასთან, იგულისხმება, რომ  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , აგრეთვე, განსაზღვრულია  $D$ -ზე.

ჩვეულებრივ,  $D$  სიმრავლე შეიძლება წარმოადგენდეს მთლიანად  $R^n$  სივრცეს ან მის სპეციფიკურ ქვესიმრავლეს, მაგალითად, არაუარყოფით  $R_+^n$  ორტანტს, რომელიც შედგება არაუარყოფითკომპონენტებიანი ყველა ვექტორისაგან

$$R_+^n = \{ x \in R^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \}.$$

პრაქტიკულად,  $D$  სიმრავლე  $R^n$  სივრციდან  $x$ , ცვლადებზე გათვალისწინებულ უმარტივესი შეზღუდვების საშუალებით გამოიყოფა. ასე, მაგალითად, თუ  $x_i$  წარმოადგენს  $i$ -ური ტიპის რესურსის საჭირო რაოდენობას, მაშინ  $x_i \geq 0$  და შეიძლება ჩაითვალოს  $D = R_+^n$ .

6.  $\Omega$  (ან  $D$ ) სიმრავლის სტრუქტურისა და  $f(x)$  (აგრეთვე  $g(x)$ ) ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, შეიძლება გამოვეყოთ მრავალკრიტერიული ამოცანების სხვადასხვა კლასები. ასე, მაგალითად, თუ  $\Omega (D)$  სიმრავლე შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას, მაშინ ამოცანას ეწოდება სასრული, ხოლო თუ  $\Omega (D)$  აღრიცხვადია, ე.ი. სასრული ან თვლადი, მაშინ - დისკრეტული. კერძოდ, თუ  $\Omega (D)$  სიმრავლის თითოეული  $x$  ვექტორის ყველა  $x_i$  კომპონენტი მთელი რიცხვია, მაშინ ამოცანას ეწოდება მთელირიცხვია, ხოლო თუ  $\Omega (D)$  სიმრავლის ვექტორები ბულისაა (ე.ი. შედგება მხოლოდ ნულებისა და ერთიანებისგან), მაშინ - ბულის ამოცანა (ან ბულის ტიპის ამოცანა).

თუ  $\Omega$  (ან  $D$ ) სიმრავლე ამოზნექილია, ხოლო ყველა  $f(x)$  (აგრეთვე,  $g(x)$ ) - ჩაზნექილი ფუნქციებია, მაშინ ამოცანას ეწოდება ჩაზნექილი. კერძოდ, თუ  $\Omega$  პოლიედრული სიმრავლეა (ე.ი.  $R^n$ -დან "ამოჭრილია" წრფივი უტოლობათა და ტოლობათა სისტემის საშუალებით), ხოლო ყველა  $f(x)$  წრფივია, მაშინ მრავალკრიტერიული ამოცანა წრფივია.

სპეციალურ კლასს შეადგენს ამოცანები, რომლებშიც ყველა  $f(x)$  (აგრეთვე,  $g(x)$ ) ფუნქცია დიფერენცირებადია (ზოგჯერ მოითხოვება უწყვეტად დიფერენცირებადობაც). ამასთან, ჩვეულებრივ, იგულისხმება, რომ  $D$  ღია სიმრავლეა (მაგალითად, აღნიშნულ სიმრავლეს შეიძლება წარმოადგენდეს  $R^n$  სივრცე ან დადებითი ორტანტი  $R_+^n = \text{int } R_+^n = \{ x \in R^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0 \}$ ) ან  $\Omega \subseteq \text{int } D$ .

### 7.1.3 უპირატესობის თანადობები. ფასეულობისა და შერჩევის ფუნქციები

1 უპირატესობათა აღწერის წესი საკმაოდ ზოგადად და კარგადა არის დამუშავებული ბინარული თანადობების "ენაზე". საზოგადოდ, ბინარული თანადობები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს არა მარტო უპირატესობების, არამედ ნებისმიერი ბუნების ობიექტებს შორის სხვადასხვა ხასიათის წყვილ-წყვილი კავშირების აღწერისთვისაც.

როგორც ცნობილია,  $A$  სიმრავლეზე  $\rho$  ბინარული თანადობა ეწოდება  $A^2 = A \times A$  სიმრავლის ქვესიმრავლეს ანუ  $(a, b)$  დალაგებულ წყვილთა ერთობლიობას, სადაც  $a, b \in A$ . თუ  $(a, b) \in \rho$ , მაშინ ამბობენ, რომ  $a$  არის  $\rho$  თანადობაში  $b$ -სთან და ამ ფაქტს შემდეგნაირად აღნიშნავენ:  $a \rho b$ .

შეიძლება განხილულ იქნეს  $n$ -ური თანადობებიც, როგორც  $A^n$  სიმრავლის ქვესიმრავლეები. ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ ბინარულ თანადობებს. ამასთან დაკავშირებით, შევნიშნავთ, რომ ზედსართავი სახელი "ბინარული" ხშირად გამოტოვებულ იქნება.

ბინარული თანადობებისადმი, როგორც სიმრავლეებისადმი, ყველა თეორიულ-სიმრავლური ოპერაცია გამოიყენება, მათ შორის თანაკვეთის  $\cap$ , გაერთიანების  $\cup$ , სხვაობის  $\setminus$  ოპერაციები და სხვ. თანადობებისათვის შემოღებულია სპეციფიკური ოპერაციებიც. ასე, მაგალითად,  $\rho^{-1}$  აღნიშნავს  $\rho$ -ს შებრუნებულ თანადობას, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\rho^{-1} = \{ (a, b) \in A^2 \mid (b, a) \in \rho \},$$

ე.ი.  $(a, b)$  წყვილი  $\rho^{-1}$ -ს ეკუთვნის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $(b, a)$  წყვილი ეკუთვნის  $\rho$ -ს.

ვთქვათ,  $B \subset A$ .  $\rho_B = \{ (a, b) \in \rho \mid a, b \in B \}$  თანადობას ეწოდება  $\rho$ -შეზღუდვა  $B$ -ზე.

$\rho$  თანადობას ეწოდება რეფლექსური, თუ  $(a, a) \in \rho \forall a \in A$ , და  $\rho$  თანადობას ეწოდება ირრეფლექსური, თუ  $(a, a) \notin \rho$ , ე.ი.  $a \rho a$  არ არის მართებული არც ერთი  $a$ -სთვის,  $a \in A$ .

$\rho$  თანადობას ეწოდება სიმეტრიული, თუ  $(a, b) \in \rho$  პირობიდან გამომდინარეობს  $(b, a) \in \rho$ ;  $\rho$  თანადობას ეწოდება ასიმეტრიული, თუ  $(a, b) \in \rho$  პირობიდან გამომდინარეობს  $(b, a) \notin \rho$ , და  $\rho$  თანადობას ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ  $(a, b) \in \rho$  და  $(b, a) \in \rho$  პირობიდან გამომდინარეობს  $a = b$ . ცხადია, ასიმეტრიული თანადობა ამავე დროს ირრეფლექსურიცაა.

$\rho$  თანადობას ეწოდება ტრანზიტული, თუ  $a \rho b$  და  $b \rho c$ -დან გამომდინარეობს  $a \rho c$ .

$A$  სიმრავლის  $a$  და  $b$  ელემენტებს ეწოდება შედარებადი  $\rho$  თანადობის მიმართ, თუ სამართლიანია  $a \rho b$  ან  $b \rho a$ , და არაშედარებადი  $\rho$  თანადობის მიმართ - საწინ-

ნაღმდევო შემთხვევაში.  $\rho$  თანადობას ეწოდება სრული (ან ბმული), თუ ნებისმიერი ორი  $a, b \in A$  ელემენტი შედარებადია (მათ შორის იმ შემთხვევაშიც, როცა  $a=b$ ). თანადობას, რომელიც არ არის სრული, ეწოდება ნაწილობრივი (ან  $\rho$  თანადობის მიმართ არაბმული).

ასე, მაგალითად, ნაღმდელ რიცხვთა სიმრავლეზე  $\geq$  თანადობა ("არანაკლები") რეფლექსური, ანტისიმეტრიული, ტრანზიტული და სრულია, ხოლო თანადობა  $>$  ("შეტი") ირრეფლექსური, ასიმეტრული და ტრანზიტულია, მაგრამ არ არის სრული (რადგანაც  $a > a$  არ არის სამართლიანი).

რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ თანადობას ეწოდება ეკვივალენტობა. ეკვივალენტობის მაგალითს წარმოადგენს  $R^m$  სივრცის ვექტორთა ტოლობის თანადობა  $=$ . მათემატიკაში ეკვივალენტობა დიდ როლს თამაშობს, რაც იმით აიხსნება, რომ იგი მჭიდროდ დაკავშირებულია სიმრავლეების დაყოფასთან.  $A$  სიმრავლის არაციკლიკ ქვესიმრავლეთა  $\{A_j\}$  ერთობლიობას ეწოდება  $A$  სიმრავლის დაყოფა, თუ ადგილი არა აქვს ამ სიმრავლეების წყვილ-წყვილად გადაკვეთას ( $A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k$ ) და ერთობლიობაში ისინი მთელ  $A$  სიმრავლეს შეადგენენ (ე.ი.  $\bigcup_j A_j = A$ ). თვით  $A_j$  სიმრავლეებს დაყოფის კლასები ეწოდება.

თუ  $\rho$  ეკვივალენტობაა, მაშინ იგი  $A$  სიმრავლის დაყოფას შემდგენიარად წარმოქმნის:  $a$  და  $b$  ერთი და იმავე კლასს (ე.წ. ეკვივალენტობის კლასს) ეკუთვნის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ  $(a,b) \in \rho$ . პირიქით, თუ მოცემულია  $A$  სიმრავლის დაყოფა  $\{A_j\}$ , მაშინ  $\rho$  თანადობა, რომელიც განსაზღვრულია შემდგენიარად:  $(a,b) \in \rho$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $a$  და  $b$  დაყოფის ერთი და იმავე კლასს ეკუთვნის, წარმოადგენს ეკვივალენტობას.

ირრეფლექსურ, ტრანზიტულ (და ამიტომ ასიმეტრიულ) თანადობას ეწოდება მკაცრი (ნაწილობრივი) დალაგება, ხოლო რეფლექსურ და ტრანზიტულ თანადობას - (ნაწილობრივი) კვაზიდალაგება. ანტისიმეტრიულ კვაზიდალაგებას (ნაწილობრივი) დალაგება ეწოდება.

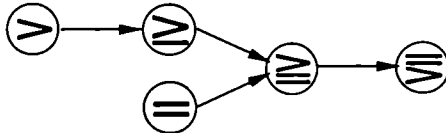
განეხილოთ  $\geq, \geq, >, \gg$  თანადობები, რომლებიც  $R^m$ -ზე შემდგენიარად არის განსაზღვრული:

- $a \geq b \leftrightarrow a_i \geq b_i, i=1,2,\dots,m;$
- $a \geq b \leftrightarrow a \geq b$  და  $a \neq b$  (ე.ი. სამართლიანია  $m$  რაოდენობის  $a_i \geq b_i$  უტოლობა, რომელთაგან ერთი-ერთი მაინც მკაცრია);
- $a > b \leftrightarrow a_i > b_i, i=1,2,\dots,m;$
- $a \gg b \leftrightarrow a = b$  ან  $a_i > b_i$  თუნდაც ერთი  $i \in \{1,2,\dots,m\}$ -სთვის.



ადელი დასანახავია, რომ  $\geq$  თანადობა ნაწილობრივი დალაგებაა,  $\geq$  და  $>$  - მკაცრი ნაწილობრივი დალაგება, ხოლო  $\succ$  რეფლექსურია (მაგრამ არც სიმეტრიულია და არც ტრანზიტული).

განხილული ოთხი თანადობისა და ტოლობის თანადობის ურთიერთკავშირი სქემატურად გამოსახულია ნახ. 7.1-ზე. სქემის თანახმად, მაგალითად,  $a > b$  უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია  $a \geq b$ ,  $a \geq b$ ,  $a \succ b$  უტოლობებიც, ამიტომ  $> \supset \geq \supset \succ$ . შევნიშნავთ, აგრეთვე, რომ  $\geq$  და  $=$ -ის გაერთიანება არის  $\geq$ . ამასთან, საჭიროა გავითვალისწინოთ ის ფაქტი, რომ  $a \succ b$  სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $b \geq a$  მცდარია.



ნახ. 7.1

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

**თეორემა 7.1.** ვთქვათ  $M = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in R_+^m \mid \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\}$ .  $a \succ b$  თანა-

დობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს  $M$  სიმრავლის ისეთი  $\mu$  ვექტორი, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა  $\langle \mu, a \rangle \geq \langle \mu, b \rangle$ .

აღნიშნული თეორემის დამტკიცება მოცემულია ნაშრომში [95].

ვთქვათ,  $\psi$  ფუნქციაა, რომელიც  $A$ -ს ასახავს  $U$  სიმრავლეში, ხოლო ამ უკანასკნელზე განსაზღვრულია  $\delta$  თანადობა. აღნიშნული თანადობა  $A$ -ზე  $\rho$  თანადობას შემდეგნაირად ინდუცირებს:  $(a, b) \in \rho \leftrightarrow (\psi(a), \psi(b)) \in \delta$ . ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ  $\delta$  თანადობა არის რეფლექსური (ირრეფლექსური, სიმეტრიული, ტრანზიტული), მაშინ ასეთნაირი იქნება  $\rho$  თანადობაც. მაშასადამე, თუ  $\delta$  არის ეკვივალენტობა (კვაზიდალაგება, მკაცრი დალაგება), მაშინ იგივე ტიპის იქნება  $\rho$  თანადობაც.

2 უპირატესობების აღწერისათვის ფართოდ გამოიყენება შემდეგი ბინარული თანადობები, რომლებიც შესაძარებელი ობიექტების  $A$  სიმრავლეზე მოიცემა (მრავალკრიტერიულ ამოცანებში ასეთ სიმრავლეებს წარმოადგენს ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე და შეფასებათა  $\tilde{Y}$  სიმრავლე).

უპირატესობის (მკაცრი უპირატესობის) თანადობა  $P: aPb$  ნიშნავს, რომ  $a$  ობიექტი უპირატესია (მკაცრად უპირატესია), ვიდრე  $b$ .

განურჩევლობის თანადობა  $I: aIb$  ნიშნავს, რომ  $a$  და  $b$  ობიექტები უპირატესობის თვალსაზრისით ერთნაირია (თუ ამორჩევას შეეზღუდავთ მხოლოდ ორი ობიექტით, მაშინ სულერთია რომელს ამოვირჩევთ).

არამკაცრი უპირატესობის თანადობა  $R: aRb$  ნიშნავს, რომ  $a$  ობიექტი არანაკლებ უპირატესია, ვიდრე  $b$ , ანუ ადგილი აქვს  $aPb$  ან  $aIb$  თანადობას; ფორმალურად  $R$  არის  $P$  და  $I$ -ის გაერთიანება:  $R = P \cup I$ .

უპირატესობათა თანადობებს ყოველთვის უნდა ახასიათებდეს შემდეგი თვისებები:  $P$  ასიმეტრიულია (და ირრეფლექსურია);  $I$  რეფლექსური და სიმეტრიულია,  $R$  რეფლექსურია;  $P$  და  $I$  არ გადაიკვეთება (ერთდროულად არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს  $aPb$  და  $aIb$ -ს). სასარგებლოა მხედველობაში გვექონდეს, რომ  $P$  და  $I$  შეიძლება აღდგენილ იქნეს  $R$ -ის მიხედვით:

$$aIb, \text{ როცა ერთდროულად ჰქმმარია } aRb \text{ და } bRa, \text{ ე.ი. } I = R \cap R^{-1};$$

$$aPb, \text{ როცა } aRb \text{ ჰქმმარია, ხოლო } bRa \text{ მცდარია: } P = R \setminus R^{-1} = R \setminus I.$$

ამგვარად,  $I$  არის  $R$ -ის "სიმეტრიული ნაწილი", ხოლო  $P$  - "ასიმეტრიული ნაწილი".

ზოგად შემთხვევაში,  $R$ ,  $P$  და  $I$  თანადობები არატრანზიტულია. თუ  $R$  აღმოჩნდება ტრანზიტული, მაშინ ტრანზიტული იქნება  $P$  და  $I$ ; ამ შემთხვევაში  $R$  კვაზიდალაგებაა,  $P$  - მკაცრი დალაგება,  $I$  - ეკვივალენტობა, ამასთან,  $P$  ტრანზიტულია  $I$ -ს მიხედვით:  $aPb$  და  $bIc$ , აგრეთვე,  $aIb$  და  $bPc$  პირობებიდან გამომდინარეობს  $aPc$ .

3. ეთქვას,  $A$ -ში მოცემულია არამკაცრი უპირატესობის  $R$  თანადობა, ხოლო  $B$  არის  $A$ -ს ქვესიმრავლე.  $a' \in B$  ობიექტს (ელემენტს) ეწოდება საუკეთესო (ოპტიმალური)  $R$ -ის მიხედვით ( $B$ -ში), თუ იგი არანაკლებ უპირატესია, ვიდრე  $B$ -დან ნებისმიერი სხვა ობიექტი ანუ თუ  $a'Ra$  სამართლიანია ნებისმიერი  $a \in B$  ელემენტი-სათვის. საუკეთესო ობიექტი  $I$  ეკვივალენტობის სიზუსტით ერთადერთია, ე.ი. თუ, აგრეთვე,  $b'$  საუკეთესოა  $B$ -ში, მაშინ  $a'Ib'$ . იმ შემთხვევაში, როცა აუცილებელია  $B$ -დან ერთი ელემენტის ამორჩევა, მაშინ საუკეთესო ობიექტებიდან ერთერთი უნდა შევირჩიოთ (თუ, რასაკვირველია, ისინი  $B$ -ში არსებობენ). თუ  $R$  წარმოადგენს რიგს, მაშინ საუკეთესო ელემენტი ერთადერთია.

სამწუხაროდ, თუ  $R$  თანადობა არ არის ბმული კვაზიდალაგება, მაშინ საუკეთესო ელემენტი შეიძლება სასრულ  $B$  სიმრავლეშიც არ აღმოჩნდეს. ასე, მაგალითად, თუ  $B = \{a, b, c\}$  და  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c)\}$ , მაშინ  $B$ -ში საუკეთესო ელემენტი არ არსებობს ( $a$  და  $b$  არაშედარებადი ელემენტებია  $R$ -ის მიხედვით). ამიტომ საჭირო ხდება მაქსიმალური ობიექტის შედარებით სუსტი ცნების გამოყენება. აღნიშნული განსაზღვრება უფრო მოსახერხებელია განხილულ იქნეს ზოგადი შემთხვევისათვის, როცა არ იგულისხმება, რომ მაქსიმალური ობიექტი  $B$  სიმრავლეშია.

$a^0 \in A$  ობიექტს ეწოდება  $P$ -ს მიხედვით მაქსიმალური  $B$ -ს მიმართ, თუ  $B$ -ში არ არსებობს  $a^0$  ობიექტზე მკაცრად უპირატესი  $a$  ობიექტი ანუ თუ არცერთი  $a \in B$  ელემენტისათვის ადგილი არა აქვს  $aPa^0$  პირობას. თუ  $a^0$  ობიექტი ეკუთვნის  $B$ -ს, მაშინ მას უწოდებენ  $P$ -ს მიხედვით მაქსიმალურს  $B$ -ში. ზემოთ განხილულ მაგალითში  $B$ -ში მაქსიმალური ელემენტებია  $a$  და  $b$ . ადგილი შესაძლოაა, რომ  $B$ -ში საუკეთესო ობიექტი მაქსიმალურიცაა. შებრუნებული მტკიცება, რასაკვირველია, მცდარია.

აღნიშნოთ  $P$ -ს მიხედვით  $B$ -ში მაქსიმალური ობიექტების სიმრავლე  $\text{Max}_P B$ -თი. აღნიშნული სიმრავლე შინაგანად მდგრადია იმ გაგებით, რომ თუ  $a, b \in \text{Max}_P B$ , მაშინ შეუძლებელია შესრულდეს  $aPb$  ან  $bPa$ , ხოლო იგი გარეგნულად მდგრადია [135], თუ ყოველი  $a \in B$  ობიექტისათვის, რომელიც არ არის მაქსიმალური, მოიძებნება უპირატესობით უფრო მაქსიმალური ობიექტი, ე.ი. ნებისმიერი  $a^0 \in \text{Max}_P B$ -სთვის სამართლიანია  $a^0Pa$ . გარეგნულად (და, რასაკვირველია, შინაგანადაც) მდგრად  $\text{Max}_P B$  სიმრავლეს ეწოდება  $B$ -ში  $P$  თანადობის ბითვი [267, 268]. (საჭიროა აქვე აღნიშნოთ, რომ თამაშთა თეორიაში შინაგანად და გარეგნულად მდგრად ქვესიმრავლეებს უწოდებენ ნეიმან-მორაგენშტერნის ამონახსნებს, ხოლო ბირთვად მიღებულია მაქსიმალური ელემენტების სიმრავლე).

მდგრადობის ცნებას აქვს დიდი მნიშვნელობა. მართლაც, თუ  $\text{Max}_P B$  სიმრავლე გარეგნულად მდგრადია, მაშინ ოპტიმალური ობიექტი (ანუ ის, რომელიც გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ სრული უპირატესობათა გამოვლენის შემდეგ ჩაითვლება საუკეთესოდ) ამ სიმრავლიდან უნდა იქნეს ამორჩეული. თუ  $\text{Max}_P B$  არ არის გარეგნულად მდგრადი, მაშინ არავითარი საფუძველი არ გვაქვს ოპტიმალური ობიექტის ამორჩევისათვის მხოლოდ ამ სიმრავლით შემოვიზღუდოთ. რთული არ არის შევამოწმოთ, რომ თუ  $R$  კვაზიდალაგებაა, ხოლო  $B$  სიმრავლე სასრულია, მაშინ  $\text{Max}_P B$  სიმრავლე არაცარიელია და, უფრო მეტიც, გარეგნულად მდგრადი; ამასთან,  $\text{Max}_P B$  შეიძლება განესაზღვროთ "პირდაპირი გადარჩევის" გზით, თუ  $B$ -ს თითოეულ ობიექტს დანარჩენს შევადარებთ და ყველა მაქსიმალურს ამოვირჩევთ. ამგვარად, თუ  $R$  კვაზიდალაგებაა, მაშინ  $\text{Max}_P B$  სიმრავლე შეიძლება არ აღმო-

ჩნდეს გარეგნულად მდგრადი (კერძოდ, იყოს ცარიელი) მხოლოდ  $B$ -ს უსასრულობის დროს. მაქსიმალური ელემენტების სიმრავლის არაცარიელობისა და გარეგნულად მდგრადობის სხვადასხვა სახის პირობები განხილულია შრომებში [36, 158, 219].

**შენიშვნა 7.1** ზემოთ განიხილებოდა ერთი ოპტიმალური ობიექტის ამორჩევის ამოცანა. მაგრამ არსებობს ამოცანები, სადაც საჭიროა არა ერთი, არამედ რამდენიმე საუკეთესო ობიექტის ამორჩევა ან ყველა ობიექტის უპირატესობის მიხედვით დალაგება და ა.შ. ასეთ ამოცანებში მაქსიმალური ობიექტისა და ბირთვის ცნება თავის მნიშვნელობას კარგავს. ასე, მაგალითად, თუ საჭიროა საუკეთესო  $r$  ობიექტის ამორჩევა ("საკონკურსო" ამოცანა), მაშინ შეუძლებელია ვამტკიცოთ, რომ ყველა ობიექტი  $P$ -ს მიხედვით მაქსიმალურია. განვიხილოთ უმარტივესი მაგალითი:  $B = \{a, b, c\}$ ,  $P = \{(a, c)\}$ . აქ  $\text{Max}_P B = \{a, b\}$ , მაგრამ თუ საჭიროა ორი საუკეთესო ობიექტის ამორჩევა, მაშინ  $c$ -ს იგნორირება არ შეიძლება: თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირი დამატებით გვაცნობებს, რომ  $c$ -ს უპირატესობა გააჩნია  $b$ -სთან, მაშინ საძებნი ობიექტები აღმოჩნდება  $a$  და  $c$ . ამოცანებში, სადაც აუცილებელია დადგენილი  $r$  რაოდენობის საუკეთესო ობიექტის ამორჩევა, მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ  $P$ -ს მიხედვით  $r$ -მაქსიმალური ობიექტის ცნება [102].

**შენიშვნა 7.2** ხშირად ადგილი აქვს უარესი და მინიმალური ობიექტის ცნების გამოყენებას.  $a \in B$  ობიექტს ეწოდება  $B$ -ში უარესი, თუ ნებისმიერი  $a \in B$  ელემენტისათვის სამართლიანია  $a R a_0$ .  $a_0 \in B$  ობიექტს ეწოდება  $B$ -ს მიმართ  $P$ -ს მიხედვით მინიმალური, თუ არც ერთი  $a \in B$  ელემენტისათვის არ სრულდება  $a_0 P a$ .  $B$ -ში  $P$ -ს მიხედვით ყველა მინიმალური ობიექტების სიმრავლე აღვნიშნოთ  $\text{Min}_P B$ .

4.  $A$ -ზე განსაზღვრულ რიცხვით  $\psi$  ფუნქციას ეწოდება  $P$ -ს მიხედვით ზრდადი (არაკლებადი), თუ ნებისმიერი  $a, b \in A$ -სთვის  $a P b$ -დან გამომდინარეობს  $\psi(a) > \psi(b)$  (შესაბამისად  $\psi(a) \geq \psi(b)$ ) უტოლობა. სამართლიანია შემდეგი დებულება

**თეორემა 7.2** ვთქვათ,  $B \subseteq A$  და  $a^0 \in B$  წერტილი შეესაბამება  $B$ -ზე  $P$ -ს მიხედვით არაკლებადი  $\psi$  ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. იმისათვის, რომ  $a^0$  ობიექტი  $P$ -ს მიხედვით იყოს მაქსიმალური, საკმარისია შესრულდეს ერთი-ერთი პირობა ქვემოთ მოცემული შემდეგი ორი პირობიდან:

- ა)  $\psi$  ზრდადია  $B$ -ზე  $P$ -ს მიხედვით;
- ბ)  $a^0$  წერტილი  $\psi$  ფუნქციის ერთადერთი მაქსიმუმის წერტილია  $B$ -ზე.

აღნიშნული თეორემის დამტკიცება მოცემულია ნაშრომში [101].

$B \subseteq A$  ქვესიმრავლეს ეწოდოთ  $R$ -ის მიხედვით ( $P$ -ს მიხედვით) ზემოდან ჩაკეტილი  $A$ -ს მიმართ, თუ ნებისმიერი  $a \in A$  და  $b \in B$  ელემენტებისათვის  $a R b$ -დან ( $a P b$ -დან) გამომდინარეობს  $a \in B$ .

სამართლიანია შემდეგი დებულებები (იხ. [104, გვ. 22]).

თეორემა 7.3. თუ  $B, \subseteq A$ ,  $j \in J$ , ქვესიმრავლეები  $R$ -ის ( $P$ -ს) მიხედვით ზემოდან ჩაკეტილია  $A$ -ს მიმართ, მაშინ ასეთივე თვისება ექნება  $B = \bigcap_{j \in J} B_j$ , სიმრავლესაც.

თეორემა 7.4. თუ  $\psi$  ფუნქცია  $P$ -ს მიხედვით არაკლებადია  $A$ -ზე, მაშინ ნებისმიერი  $t$  რიცხვისათვის  $B = \{a \in A \mid \psi(a) \geq t\}$  ქვესიმრავლე  $P$ -ს მიხედვით ზემოდან ჩაკეტილია  $A$ -ს მიმართ.

თეორემა 7.5. ვთქვათ,  $B \subseteq A$  ქვესიმრავლე  $P$ -ს მიხედვით ზემოდან ჩაკეტილია  $A$ -ს მიმართ. მაშინ  $a \in B$  ობიექტი  $P$ -ს მიხედვით მაქსიმალურია  $B$ -ს მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი  $P$ -ს მიხედვით მაქსიმალურია  $A$ -ს მიმართ.

ამბობენ, რომ  $\psi$  რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს  $R$  სრულ კვაზიდალაგებას  $A$ -ზე, თუ  $a R b$  სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $\psi(a) \geq \psi(b)$ .  $\psi$  ფუნქციას, რომელიც არამკაცრი უპირატესობის თანადობას ქმნის, ფასეულობის ან სარგებლიანობის ფუნქციას უწოდებენ. ეს სახელწოდება შემორჩა იმ დროიდან, როცა შეცდომით თვლიდნენ, რომ ყოველ ობიექტს გააჩნია რაღაც ობიექტური ფასეულობა (სარგებლიანობა), რაც ადამიანების მიერ უპირატესობების მინიჭებაში პოვნებს ასახვას. თანამედროვე თვალსაზრისით სარგებლიანობის ფუნქცია წარმოადგენს მხოლოდ "ტექნიკურად მოსახერხებელ" საშუალებას უპირატესობების ასაწერად: სუბიექტს მიეწერება ისეთი რიცხვითი ფუნქცია, რომლის მაქსიმიზაციას მისი ქმედებები განაპირობებს. გასაგებია, რომ ფასეულობის ფუნქცია წარმოადგენს თვისებრივ კრიტერიუმს: იგი განსაზღვრულია ნებისმიერი ზრდადი გარდაქმნის სიზუსტით. ფასეულობის ფუნქციის არსებობის პირობები განხილულია ნაშრომში [134]. აქ აღვნიშნავთ მხოლოდ იმ ფაქტს, რომ ფასეულობის ფუნქცია არსებობს ნებისმიერი სრული კვაზიდალაგებისათვის, როცა  $A$  სიმრავლე აღრიცხვადია, ე.ი. სასრული ან თვლადია.

თუ  $A$  სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფასეულობის  $\psi$  ფუნქცია, რომელიც წარმოქმნის არამკაცრი უპირატესობის  $R$  თანადობას, მაშინ ნებისმიერი  $B \subseteq A$  ქვესიმრავლისთვის, ცხადია, გვექნება

$$\text{Max}_P B = \left\{ b \in B \mid \psi(b) = \max_{a \in B} \psi(a) \right\},$$

ამასთან,  $P$ -ს მიხედვით ყველა მაქსიმალური ობიექტი  $B$ -დან საუკეთესოა.

5. ბინარულ თანადობათა "ენის" დამახასიათებელ თავისებურებას წარმოადგენს დაშვება იმის შესახებ, რომ ორი ობიექტის უპირატესობის მიხედვით შეთანასწორების შედეგი არ არის დამოკიდებული ალტერნატივათა  $A$  სიმრავლის შედგენილობაზე. თუმცა, რაც შემთხვევაში ასეთ დამოკიდებულებას ადგილი აქვს და მის გასათვალისწინებლად იძულებული ვართ მივმართოთ უპირატესობათა აღწერის შედარებით უფრო მდიდარ "ენას", რომელიც ამორჩევის ფუნქციის გამოყენებაზეა დაფუძნებული.

ეთქვათ,  $W$  არის  $A$  სიმრავლის არაკარიელ ქვესიმრაველთა ფიქსირებული ერთობლიობა. ამორჩევის ფუნქცია ( $W$ -ზე) ეწოდება  $C$  ასახვას, რომელიც ყოველ  $B \in W$  სიმრავლეს უთანადებს  $C(B) \subseteq B$  ქვესიმრავლეს. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა მოცემულია მკაცრი უპირატესობის  $P$  თანადობა, ამორჩევის ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით  $C(B) = \text{Max}_P B$ ,  $B \in W$ . ამორჩევის მოცემული ფუნქციის მიხედვით უპირატესობის ბინარული თანადობის შემოტანის საკითხი გაცილებით უფრო ფაქიზია. ამორჩევის ფუნქციის მათემატიკური აპარატი წარმოადგენს საფუძველს ამორჩევის ზოგადი თეორიისა, რომელიც უკანასკნელ პერიოდში ინტენსიურად ვითარდება [19].

## 7.1.4 კრიტერიუმთა დამოუკიდებლობა უპირატესობის მიხედვით

1 მრავალკრიტერიულ ამოცანაში ყოველი  $x \in \Omega$  ამონახსნი სრულად ხასიათდება თავისი  $\mathcal{F}(x)$  შეფასებით, ამიტომ ოპტიმალური ამონახსნის ამორჩევა დაიყვანება მიღწევადი შეფასებების  $Y$  სიმრავლიდან ოპტიმალური შეფასების ამორჩევაზე. ამასთან დაკავშირებით, გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ უპირატესობათა აღწერა თავდაპირველად ხორციელდება ყველა შეფასებათა  $\hat{Y}$  სიმრავლეში. პრაქტიკულად, ასეთი აღწერა ჩვეულებრივ ხორციელდება უპირატესობის ბინარული თანადობის ან ფასეულობის ფუნქციის საშუალებით.

უპირატესობათა შესახებ სრული ინფორმაციის არარსებობის შემთხვევაში ( $f_1, f_2, \dots, f_m$  კრიტერიუმების ჩამოთვლის გარდა),  $\hat{Y}$  სიმრავლეში შეიძლება განხილულ იქნეს მხოლოდ განურჩევლობის თანადობა, რომელიც წარმოადგენს შეფასებათა ექვტორების, როგორც  $R^m$  სივრცის ვექტორების, ტოლობის ( $=$ ) თანადობას (ამასთან, არამკაცრი უპირატესობის თანადობა ემთხვევა  $=$ -ს, ხოლო მკაცრი უპირატესობის

თანადობა აღმოჩნდება (ცარიელი). ამონახსნთა სიმრავლეში  $x \sim x'$ , როცა  $f(x) = f(x')$ , განურჩევლობის = თანადობა განაპირობებს განურჩევლობის  $\sim$  დამოკიდებულებას, ე.ი. ტოლი შეფასებების მქონე ამონახსნები ეკვივალენტურია უპირატესობის მიხედვით.  $\sim$  თანადობა წარმოადგენს ეკვივალენტურობას და  $\Omega$  სიმრავლეს ჰყოფს კლასებად, რომლებიც უპირატესობის მიხედვით ერთნაირი ამონახსნებისაგან შედგება.

ამგვარად, თუ ამოცანა არატრივიალურია ანუ თუ  $Y$  სიმრავლე ერთზე მეტ შეფასებას შეიცავს, მაშინ გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ ოპტიმალური ამონახსნის ამორჩევა უპირატესობათა შესახებ ინფორმაციის გარეშე შეუძლებელია.

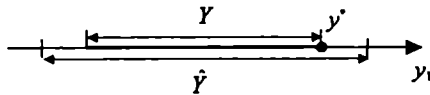
2 ერთკრიტერიუმან ამოცანებში (როცა  $m=1$ ) ამ სახის სრული ინფორმაცია, ჩვეულებრივ, მდგომარეობს  $\bar{Y}=Y$  სიმრავლეზე, როგორც რიცხვითი წრფის ქვესიმრავლეზე, შეფასებათა უპირატესი ცვლილების მიმართულების მითითებაში. ეს იმით აიხსნება, რომ გამოყენებით ამოცანებში კრიტერიუმად შერჩეულია ისეთი ფუნქცია, რომლისთვისაც მეტ მნიშვნელობას უპირატესობა აქვს ნაკლებთან ან პირიქით, ნაკლებ მნიშვნელობას უპირატესობა გააჩნია მეტ მნიშვნელობასთან შედარებით.

პირველ შემთხვევაში კრიტერიუმი ძირითადად გამოსახავს მოგებას, შემოსავალს, დასახული მიზნის მიღწევის ხარისხს (მაგალითად, გეგმიური დავალების პროცენტულ შესრულებას) და სხვ.

მეორე შემთხვევაში კრიტერიუმი გამოსახავს რაღაც რესურსის დანახარჯს, აღწერს "ტექნიკურ" მახასიათებლებს, რომელთა მინიმიზაცია აუცილებელია (მაგალითად, გარემოს დაბინძურება) და სხვ.

ენიდან მეორე შემთხვევა ადვილად დაიყვანება პირველზე, მაგალითად,  $f_i$  კრიტერიუმის  $-f_i$ -ით შეცვლით, ამიტომ ორივე შემთხვევაში ერთკრიტერიული ამოცანა შეიძლება ფორმულირებულ იქნეს როგორც მაქსიმიზაციის ამოცანა ანუ ამოცანა, რომელშიც კრიტერიუმის მეტ მნიშვნელობას უპირატესობა ენიჭება ნაკლებთან შედარებით.  $f_i$  კრიტერიუმის მაქსიმიზაციის ამოცანაში  $\bar{Y}$  სიმრავლეზე განსაზღვრული მკაცრი უპირატესობის თანადობა წარმოადგენს რიცხვებს შორის ჩვეულებრივ "შეტოვის" ( $>$ ) თანადობას. ამგვარად, მაქსიმიზაციის ამოცანაში  $f_i$  კრიტერიუმი ფასეულობის ფუნქციაა: ნებისმიერი ორი  $x, x'$  ამონახსნი შედარებადი უპირატესობის მიხედვით და მათ შორის საუკეთესოა ის, რომლისთვისაც კრიტერიუმის მნიშვნელობა მეტია. მაშასადამე, ოპტიმალური  $y'$  შეფასება უდიდესია  $Y$ -ში (ნახ. 7.2), ხოლო ოპტიმალურია ნებისმიერი  $x' \in \Omega$  ამონახსნი, რომელსაც  $f_i$  კრიტერიუმის მაქსიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება  $\Omega$ -ზე:

$$f_1(x^*) = \max_{x \in \Omega} f_1(x) = y^*$$



ნახ. 7.2

თუ ასეთი ამონახსნი არ არსებობს, მაშინ განიხილება ამონახსნთა მაქსიმომიზირებადი  $\{x^*\} \subseteq \Omega$  მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_1(x^r) = \sup_{x \in \Omega} f_1(x).$$

თუ კრიტერიუმი ზემოდან შემოსაზღვრულია  $Y$ -ზე, მაშინ ნებისმიერი  $\xi > 0$ -სთვის (ე.ი. ნებისმიერი მოცემული სიზუსტისათვის) მოიძებნება ისეთი რიცხვი  $N$ , რომ ნებისმიერი  $r > N$ -სთვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$\sup_{x \in \Omega} f_1(x) - f_1(x^r) \leq \xi.$$

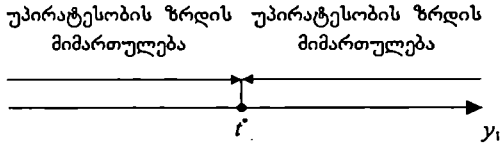
შევნიშნავთ, რომ არადინამიკური ხასიათის გამოყენებით ამოცანებში კრიტერიუმის ზემოდან ან ქვემოდან შემოსაზღვრელობა ჩვეულებრივ მიუთითებს პრობლემური სიტუაციისათვის შედგენილ შესაბამის მათემატიკურ მოდელში დაშვებულ შეცდომაზე (მაგალითად, არ არის გათვალისწინებული რესურსების შეზღუდული მარაგი).

ადგილი დასანახავია, რომ ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრა ადეკვატურია  $f_1$  კრიტერიუმისათვის, რომელსაც მხოლოდ რიგობითი სკალა გააჩნია. მაქსიმომიზირებადი მიმდევრობის განსაზღვრა კი ადეკვატურია, როცა ამ კრიტერიუმის უწყვეტი მონოტონური გარდაქმნები დასაშვებია.

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ნებისმიერი ერთკრიტერიული ამოცანის მაქსიმომიზაციის ამოცანის სახით წარმოდგენა ადვილად განხორციელდება უპირატესობათა ერთიანი მიმართულებით ზრდადობის მოცემის შემთხვევაში. ამისათვის, ზოგჯერ, საჭიროა უპირატესობათა შესახებ უფრო სრული ინფორმაციის არსებობა. ილუსტრაციისათვის განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი [112]. ვთქვათ,  $f_1$  შეკვეთის შესრულების დროა, ამასთან, კლიენტისათვის არასასურველია, დადგენილ  $t^*$  ვადასთან შედარებით, შეკვეთის როგორც დაგვიანებით, ისე ვადამდე შესრულება. ამ შემთხვევაში  $Y_1$  სკალაზე გვაქვს უპირატესობის ზრდის ორი მიმართულება (ნახ. 7.3). ამასთან, სხვადასხვა ნიშნის  $f_1 - t^*$  გადახრების შესადარებლად აუცილებელია დამატებითი ინფორმაცია. კერძოდ, თუ დადგენილია, რომ მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული გადახრები უპი-



რატესობის მიხედვით ერთნაირია, მაშინ საწყისი ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ახალი  $|f_1 - t^*|$  კრიტერიუმით მინიმიზაციის ამოცანაზე.



ნახ. 7.3

3. მრავალკრიტერიულ ამოცანებში ადგილი აქვს ვექტორული შეფასებების ანუ  $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$  ვექტორული კრიტერიუმის მნიშვნელობების უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთთან შედარებას. ცხადია, უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთთან შედარება ყველაზე მარტივია იმ ვექტორული შეფასებებისათვის, რომლებიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ ერთი კომპონენტით განსხვავდება. ამიტომ ინფორმაცია ერთი კერძო კრიტერიუმის მნიშვნელობის შეცვლის უპირატესობის შესახებ, ყველა სხვა დანარჩენი კრიტერიუმის ფიქსირებული მნიშვნელობის დროს, შედარებით უფრო ხელმძიმეა საწვდომი და საიმედოა. ამიტომ მიზანშეწონილია, პირველ რიგში, მისი მიღება და ამოცანის ანალიზისათვის გამოყენება.

ზოგად შემთხვევაში,  $f_i$  კრიტერიუმის მნიშვნელობები უპირატესობის მიხედვით შეიძლება ერთმანეთს სხვადასხვანაირად შეეფარდებოდეს, იმის მიხედვით, თუ რომელი მნიშვნელობებია დაფიქსირებული ყველა დანარჩენ კრიტერიუმში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,  $Y_i$  სიმრავლის  $s$  და  $t$  რიცხვებისათვის შეიძლება აღმოჩნდეს, მაგალითად, რომ  $(y_{1s}, y_{2s}, \dots, y_{1t}, s, y_{1s+1}, \dots, y_{ms})$  შეფასება უპირატესია, ვიდრე  $(y_{1s}, y_{2s}, \dots, y_{1t}, t, y_{1s+1}, \dots, y_{ms})$ , მაგრამ  $(y'_{1s}, y'_{2s}, \dots, y'_{1s+1}, s, y'_{1s+1}, \dots, y'_{ms})$  ნაკლებად უპირატესია  $(y'_{1s}, y'_{2s}, \dots, y'_{1s+1}, t, y'_{1s+1}, \dots, y'_{ms})$  შეფასებასთან შედარებით. მაშინ, მტკიცება იმისა, თუ  $f_i$  კრიტერიუმის ორი  $s$  და  $t$  მნიშვნელობიდან რომელია უპირატესი, დანარჩენი კრიტერიუმების მნიშვნელობების მითითების გარეშე შეუძლებელია.

$f_i$  კრიტერიუმს, რომლისთვისაც ზემოთ აღნიშნულ გარემოებას აქვს ადგილი, დანარჩენ კრიტერიუმებზე უპირატესობის მიხედვით დამოკიდებულს უწოდებენ. ასე, მაგალითად, თუ  $f_1$  და  $f_2$  შესაბამისად ოთახის სიგრძე და სიგანეა, ხოლო  $f_3$  - ჭერის სიმაღლე, მაშინ მოზინადრის თვალსაზრისით  $f_3$  უპირატესობის მიხედვით დამოკიდებულია  $\{f_1, f_2\}$  წყვილზე. მეორე მაგალითი:  $f_1$  (ჰაერის ტემპერატურა) და  $f_2$  (მისი ტენიანობა) კრიტერიუმებიდან თითოეული უპირატესობის მიხედვით ერთმანეთზე დამოკიდებული (მხედველობაშია კომფორტი ადამიანისათვის).

ხშირად გვხვდება ისეთი კრიტერიუმები, რომელთა მნიშვნელობები უპირატესობის მიხედვით შეიძლება დავალაგოთ დანარჩენი კრიტერიუმების მნიშვნელობების გათვალისწინების გარეშე. აღნიშნული კრიტერიუმების მაგალითს წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილი შემოსავლის, ხარჯისა და სხვა კრიტერიუმები. ასეთ კრიტერიუმებს დანარჩენ კრიტერიუმებზე უპირატესობის მიხედვით დამოუკიდებელს უწოდებენ [207]. უფრო ზუსტად,  $f_i$  კრიტერიუმი უპირატესობის მიხედვით დამოუკიდებელია დანარჩენი  $m-1$  კრიტერიუმებისაგან, თუ ქვემოთ მოცემული ნებისმიერი ოთხი შეფასებისათვის

$$(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \dots, y_m), (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \dots, y_m),$$

$$(y'_1, y'_2, \dots, y'_{i-1}, s, y'_{i+1}, \dots, y'_m), (y'_1, y'_2, \dots, y'_{i-1}, t, y'_{i+1}, \dots, y'_m),$$

თანადობიდან

$$(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \dots, y_m) R (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \dots, y_m)$$

ყოველთვის გამომდინარეობს თანადობა

$$(y'_1, y'_2, \dots, y'_{i-1}, s, y'_{i+1}, \dots, y'_m) R (y'_1, y'_2, \dots, y'_{i-1}, t, y'_{i+1}, \dots, y'_m).$$

თუ  $f_i$  კრიტერიუმი უპირატესობის მიხედვით დამოუკიდებელია დანარჩენ კრიტერიუმთა ერთობლიობისაგან, მაშინ  $Y_i$  სიმრავლეზე შეიძლება შემოვიტანოთ არამკაცრი უპირატესობის  $R_i$  თანადობა, მივიჩნევთ რა  $s R_i t$ , როცა

$$(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \dots, y_m) R (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \dots, y_m)$$

პირობას ადგილი აქვს აღნიშნული სახის ნებისმიერი ორი შეფასებისათვის. გარდა ამისა,  $\hat{Y}_i$  სიმრავლეზეც შეიძლება შემოვიტანოთ არამკაცრი უპირატესობის  $R_{(i)}$  თანადობა, მივიჩნევთ რა  $y R_{(i)} y'$ , როცა  $y_i = y'_i$  ყველა  $i \neq l$ -სთვის და  $y_i R_{(i)} y'_i$ .

ამოცანებს, რომლებშიც ყველა კრიტერიუმი უპირატესობის მიხედვით დამოუკიდებელია ანუ თითოეული კრიტერიუმი ყველა დანარჩენი კრიტერიუმის სიმრავლისაგან უპირატესობის მიხედვით დამოუკიდებელია, ზოლო თითოეული კრიტერიუმის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე არამკაცრი უპირატესობის თანადობას  $\geq$  ("არანაკლები") თანადობა წარმოადგენს, მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანები ეწოდება. ასეთ ამოცანებში თითოეული კრიტერიუმის მიხედვით სასურველია გვექონდეს რაც შეიძლება მეტი სიდიდის მნიშვნელობა ანუ, როგორც ამბობენ, სასურველია მისი მაქსიმიზაცია. იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა თითოეული კრიტერიუმის მინიმიზაცია, მაშინ ამოცანას მინიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა ეწოდება.

## 7.1.5 ეფექტური, სუსტად ეფექტური შეფასებები და ამონახსნები

1 მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიულ ამოცანაში მხოლოდ ერთი კომპონენტი განსხვავებული ორი ვექტორული შეფასებიდან უპირატესობა ენიჭება იმას, რომლისთვისაც ეს კომპონენტი უფრო მეტია. მაგრამ რა შეიძლება ითქვას  $y$  და  $y'$  ვექტორულ შეფასებებზე, რომლებისთვის სამართლიანია უტოლობები

$$y_i \geq y'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m? \quad (7.2)$$

თავდაპირველად განვიხილოთ ინდივიდუალური გადაწყვეტილების მიღების მრავალკრიტერიული ამოცანის შემთხვევა. დაეშვათ, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ უპირატესობა აღიწერება  $\hat{Y}$  სიმრავლეზე არამკაცრი უპირატესობის  $R$  თანადობით, ამასთან, ცნობილია, რომ იგი არა მარტო რეფლექსურია, არამედ ტრანზიტულიცაა (ე.ი. წარმოადგენს კვაზიდალაგებას). თუ ჩავთვლით, რომ  $\hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$ , მაშინ ვექტორული შეფასებებისათვის, თანმიმდევრულად გამოიყენებთ რა მათი კომპონენტებისათვის  $\geq$  თანადობას, შეიძლება ჩავეწეროთ შემდეგი თანაფარდობები:

$$(y_1, y_2, \dots, y_m)R(y'_1, y'_2, \dots, y'_m),$$

$$(y'_1, y_2, \dots, y_m)R(y'_1, y'_2, y_3, \dots, y_m),$$

$$(y'_1, y'_2, \dots, y'_{m-1}, y_m)R(y'_1, y'_2, \dots, y'_m).$$

ამ თანაფარდობებისა და  $R$ -ის ტრანზიტულობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ სამართლიანია  $yRy'$  ანუ ვექტორული  $y$  შეფასება არანაკლებ უპირატესია, ვიდრე  $y'$ .

თუ  $R$ -ის ტრანზიტულობის შესახებ მტკიცება შეუძლებელია ან თუ  $\hat{Y}$  არ წარმოადგენს  $Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$  დეკარტეს ნამრავლს, მაშინ ფორმულირებულ  $yRy'$  მტკიცებაზე ფორმალური გზით მისვლა, ზოგად შემთხვევაში, შეუძლებელია. მაგრამ ნებისმიერ შემთხვევაში იგი იმდენად ბუნებრივია, რომ ინდივიდუალური გადაწყვეტილებების მიღების ყველა მოდელში შემოდის როგორც აქსიომა. მიღება ამ აქსიომისა, რომელსაც ხშირად პარეტოს (ძლიერ) აქსიომას უწოდებენ, ნიშნავს შეფასებათა  $\hat{Y}$  სიმრავლეში არამკაცრი უპირატესობის თანადობის შემოტანას, რომელიც  $R^m$  სივრცის ვექტორების  $\geq$  (ნაწილობრივ) დალაგებას ემთხვევა.

არამკაცრი უპირატესობის  $\geq$  თანადობას შესაბამება განურჩევლობის = თანადობა და მკაცრი უპირატესობის  $\geq$  თანადობა ( $y \geq y'$  ნიშნავს, რომ სამართლიანია (7.2) უტოლობები, რომელთაგან ერთ-ერთი მაინც მკაცრია).

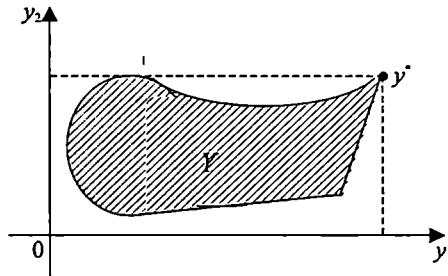
2 განვიხილოთ ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების მრავალკრიტიკული ამოცანის შემთხვევა, როცა  $f_i$  წარმოადგენს  $\{1, 2, \dots, m\}$  ჯგუფში შემავალი  $i$ -ური ინდივიდის ფასეულობის ფუნქციას.  $i$ -ური ინდივიდის თვალსაზრისით  $f_i(x) \geq f_i(x')$  ნიშნავს, რომ  $x$  გადაწყვეტილება არ არის  $x'$  გადაწყვეტილებაზე უარესი. ასეთ ამოცანაში  $\hat{Y}$  შეფასებათა სიმრავლეზე განსაზღვრულმა უპირატესობის თანადობამ უნდა ასახოს "ჯგუფური თვალსაზრისი", რომელიც აგრეგირებას გაუწევს ინდივიდუალურ თანადობას. თუ  $y \succ y'$  ანუ  $f(x) \neq f(x')$ , მაშინ  $x$  და  $x'$  გადაწყვეტილებათა ეკვივალენტობის შესახებ დასკვნა შეიძლება გაკეთდეს მთელი ჯგუფისთვისაც. გასარკვევი დარჩა საკითხი: თუ (7.2)-ში ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია, შეიძლება ჩაითვალოს თუ არა, რომ  $x$  გადაწყვეტილება უპირატესია  $x'$ -ზე?

სამწუხაროდ, ყველა რეალურ შემთხვევაში ამ უკანასკნელ კითხვაზე დადებითი პასუხის გაცემა შეუძლებელია. მართლაც, თუ (7.2)-ში მხოლოდ ერთი მკაცრი უტოლობაა, ეს ნიშნავს, რომ  $x$  უპირატესია  $x'$ -ზე ჯგუფის მხოლოდ ერთი წევრისათვის, ხოლო ყველა დანარჩენისათვის ორივე გადაწყვეტილება ტოლფასია. მაგრამ ზოგიერთ სიტუაციაში შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ "ერთი ხმა" ძალიან ცოტაა, და მაშინ ჯგუფი მთლიანობაში ვალდებული არაა ჩათვალოს, რომ  $x$  გადაწყვეტილებას უპირატესობა გააჩნია  $x'$ -სთან შედარებით.

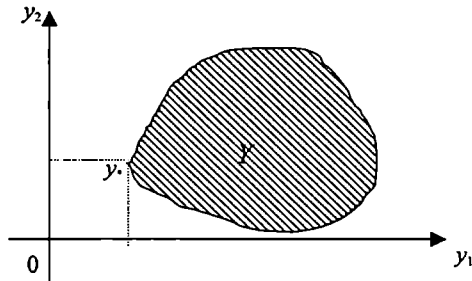
როგორც ჩანს, სხვადასხვა სიტუაციაში  $y$  და  $y'$  შეფასებათა შედარების შედეგი შეიძლება დამოკიდებული იყოს იმაზე, თუ რამდენი მკაცრი უტოლობა სრულდება (7.2)-ში. მაგრამ ყველაზე სუსტი დაშვება მდგომარეობს იმაში, რომ მთელი ჯგუფისათვის  $y$  შეფასებას უპირატესობა გააჩნია  $y'$ -თან შედარებით, თუ (7.2)-ში ყველა უტოლობა მკაცრია. ამ დაშვებას, რომელსაც ადგილი აქვს ჯგუფური გადაწყვეტილებათა მიღების თითქმის ყველა ცნობილ მოდელში (რომელსაც პარეტოს "სუსტ" აქსიომას უწოდებენ),  $\hat{Y}$ -ზე შემოაქვს მკაცრი უპირატესობის თანადობა, რომელიც ემთხვევა  $R^m$  სივრცის ვექტორებისათვის განსაზღვრულ  $>$  თანადობას (უფრო ზუსტად, მის შეზღუდვას  $\hat{Y}$ -ზე):  $y > y'$  ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $y_i > y'_i \quad \forall i=1, 2, \dots, m$ . ამგვარად, ამოცანის სპეციფიკიდან გამომდინარე, მკაცრი უპირატესობის  $P$  თანადობა სხვადასხვანაირად შეიძლება შემოვიღოთ, მაგრამ იგი აუცილებლად უნდა შეიცავდეს  $>$  თანადობას. განსხვავებული შეიძლება იყოს აგრეთვე არამკაცრი უპირატესობისა და განურჩევლობის თანადობები. საზოგადოდ, თანადობების განსაზღვრის საკითხი საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს და იგი ჯგუფური გადაწყვეტილებათა თეორიის კვლევის საგანია [120].

3. ამგვარად, მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანებისათვის  $\bar{Y}$  სიმრავლეზე შემოტანილია არამკაცრი უპირატესობის  $\geq$  თანადობა, მკაცრი უპირატესობის ორი  $\geq$  და  $>$  თანადობა და განურჩევლობის  $=$  თანადობა. ზოგადი განსაზღვრების თანახმად,  $y' \in Y$  შეფასებას ეწოდება საუკეთესო  $\geq$ -ის მიმართ ( $Y$ -ში), თუ ნებისმიერი  $y \in Y$  შეფასებისათვის სამართლიანია  $y'' \geq y$ . რადგან  $\geq$  თანადობა წარმოადგენს (ნაწილობრივ) დალაგებას, ამიტომ შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ ერთი ასეთი  $y'$  წერტილი (ნახ. 7.4ა).

ანალოგიურად, მინიმიზაციის ვექტორული ამოცანისათვის, შეიძლება არსებობდეს ერთადერთი  $y_* \in Y$ , რომლისთვისაც  $y \geq y_*$ . ნებისმიერი  $y \in Y$ -სთვის (ნახ. 7.4ბ).



ნახ. 7.4ა



ნახ. 7.4ბ

4. თუ პრაქტიკულ მრავალკრიტერიულ ამოცანაში არსებობს  $\geq$  თანადობის მიხედვით უდიდესი მიღწევადი  $y^*$  შეფასება, მაშინ სწორედ იგი უნდა ჩაითვალოს ამოცანის ოპტიმალურ შეფასებად. სამწუხაროდ, ასეთი შემთხვევის რეალიზაცია ძალზე იშვიათია: როგორც წესი,  $y^*$  შეფასება არ არსებობს [161]. ეს დაკავშირე-

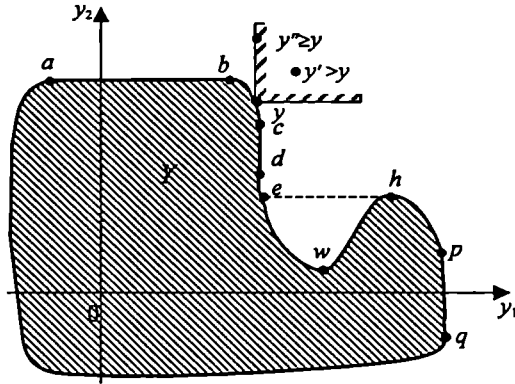
ბუნია იმასთან, რომ  $\geq$  დალაგება არ არის სრული. ასე, მაგალითად, თუ  $y_i > y'_i$ , მაგრამ  $y_j > y'_j$ , მაშინ  $\geq$  თანადობის მიხედვით  $y$  და  $y'$  არ არის შედარებადი. ამიტომ, ამოცანის არსიდან გამომდინარე, საჭიროა გამოყენებულ იქნეს  $\geq$  და  $>$  თანადობების მიხედვით მაქსიმალური შეფასებები.

$y \in Y$  შეფასებას  $\geq$  თანადობის ( $>$  თანადობის) მიხედვით მაქსიმალური ეწოდება  $Y$ -ის მიმართ, თუ არ არსებობს ისეთი  $y \in Y$  შეფასება, რომ  $y \geq y^0$  ( $y > y^0$ ). ასეთი შეფასებებისათვის, ჩვეულებრივ, სპეციალური სახელწოდებები გამოიყენება.  $\geq$  თანადობის მიხედვით მაქსიმალური შეფასებას უწოდებენ ეფექტურს (ან პარეტოს მიხედვით ოპტიმალურს, პარეტო-ოპტიმალურს, პარეტოს ოპტიმუმს).  $Y$ -ის ყველა ასეთ შეფასებათა სიმრავლეს უწოდებენ ეფექტურს ან პარეტოს სიმრავლეს და მას აღნიშნავენ  $P(Y)$ -ით.

$>$  თანადობის მიხედვით მაქსიმალური შეფასებას უწოდებენ სუსტად ეფექტურს (ან პარეტოს მიხედვით სუსტად ოპტიმალურს, პარეტოს სუსტ ოპტიმუმს, სლიტიერის მიხედვით ოპტიმალურს).  $Y$ -ის ყველა ასეთ შეფასებათა სიმრავლეს უწოდებენ სუსტად ეფექტურს და მას აღნიშნავენ  $S(Y)$ -ით.

ვინაიდან  $y > y'$ -დან გამომდინარეობს  $y \geq y'$ , ამიტომ  $Y$ -ის მიმართ ყველა ეფექტური ვექტორული შეფასება სუსტად ეფექტურიცაა. მაშასადამე,  $P(Y) \subseteq S(Y)$ . მართლაც, თუ  $y^0$  არ არის სუსტად ეფექტური, მაშინ რომელიღაც  $y \in Y$ -სთვის უნდა შესრულდეს როგორც  $y > y^0$ , ისე  $y \geq y^0$  თანაფარდობაც. მაშასადამე,  $y^0$  შეუძლებელია იყოს ეფექტური.

როცა  $m=2$ , მაშინ  $P(Y)$  წარმოადგენს, მხატვრული გამოთქმა რომ ვიხმაროთ,  $Y$  სიმრავლის ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვარს (მისი იმ ნაწილების გარეშე, რომლებიც ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის პარალელურია ან მდებარეობს საკმაოდ ციცაბო და ღრმა ღრმულებში), ხოლო  $S(Y)$  დამატებით შეიძლება შეიცავდეს  $P(Y)$ -ის მომიჯნავე საზღვრის ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ უბნებს. ასე, მაგალითად, ნახ. 7.5-ზე  $P(Y)$  სიმრავლე ( $Y$ -ის ეფექტური საზღვარი) წარმოქმნილია  $bc, de$  ( $d$  და  $e$  წერტილების გარეშე) და  $hp$  წირებით, ხოლო  $S(Y)$  შედგება ორი ნაწილისგან -  $abcde$  ( $e$ -ს ჩათვლით) და  $hpq$ . ამაში ადვილად დავერწმუნდებით, თუ შევნიშნავთ, რომ  $\geq$  თანადობის მიხედვით  $y$ -ზე უკეთესი წერტილები ავსებს მართ კუთხეს, რომლის გვერდებიც საკოორდინატო ღერძების პარალელურია, ხოლო წვეროს  $y$  წერტილი წარმოადგენს (თვით  $y$  წერტილი გამოირიცხება); ხოლო  $>$  თანადობის მიხედვით  $y$ -ზე უკეთესი წერტილები შეადგენს ამ კუთხის შიდა ნაწილს.



ნახ. 7.5

5. შეფასებათა სიმრავლეზე განსაზღვრული  $\leq, \geq, >$  თანადობები ამონახსნათა სიმრავლეში წარმოქმნის აზრობრივად ანალოგიურ  $\leq_f, \geq_f, >_f$  თანადობებს. ასე, მაგალითად,  $x \geq x' \leftrightarrow f(x) \geq f(x')$ .  $\leq_f$  თანადობა წარმოადგენს (ნაწილობრივ) კვაზიდალაგებას, ხოლო  $\leq$  და  $\leq_f$  - მკაცრ (ნაწილობრივ) დალაგებებს. საჭიროა გაეცხენოთ, რომ  $=$  ტოლობის თანადობით წარმოქმნილი განურჩევლობის  $\sim_f$  თანადობა წარმოადგენს ეკვივალენტობას.

$\leq_f$ -ის მიხედვით უდიდეს ამონახსნს შეესაბამება  $\geq$ -ის მიხედვით უდიდესი შეფასება  $Y$ -ზე. მაშასადამე,  $\leq_f$ -ის მიხედვით  $\Omega$ -ზე უდიდესი ამონახსნი მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს თითოეულ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  კრიტერიუმს. როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ასეთი ამონახსნები უთუოდ შეიძლება ჩაითვალოს ოპტიმალურ ამონახსნებად, მაგრამ, პრაქტიკულად, ისინი თითქმის არასდროს არსებობენ.

$\leq_f$ -ის მიხედვით ( $\leq$ -ის მიხედვით) მაქსიმალურ ამონახსნს  $\geq$ -ის მიხედვით ( $>$ -ის მიხედვით) მაქსიმალური შეფასება შეესაბამება  $Y$ -ზე. ჩვეულებრივ, ამ ამონახსნებისათვის გამოიყენებულია სახელწოდებები, რომლებიც შესაბამისი შეფასებები სახელწოდებების ანალოგიურია. შემდგომში გამოყენებული იქნება ტერმინები "ეფექტური" და "სუსტად ეფექტური", აგრეთვე, "პარეტოს მიხედვით ოპტიმალური" და "პარეტოს მიხედვით სუსტად ოპტიმალური" ამონახსნები (შენიშნავთ, რომ ზოგჯერ

აღნიშნულ ამონახსნებს შესაბამისად უწოდებენ  $f$ -ეფექტურსა და სუსტად  $f$ -ეფექტურ ამონახსნებს).

ამგვარად,  $x^0 \in \Omega$  ამონახსნი ეფექტურია, თუ არ არსებობს ისეთი  $x \in \Omega$  ამონახსნი, რომ  $x \succ_f x^0$  ანუ რომლისთვისაც სრულდება  $f(x) \geq f(x^0)$  პირობა.  $x^0 \in \Omega$  ამონახსნი სუსტად ეფექტურია, თუ არ არსებობს ისეთი  $x \in \Omega$  ამონახსნი, რომ  $x \succ_f x^0$  ანუ რომლისთვისაც სრულდება  $f(x) > f(x^0)$  პირობა. ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლე აღნიშნით  $P_f(\Omega)$ -თი, ხოლო სუსტად ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლე  $S_f(\Omega)$ -თი. ცხადია,  $P_f(\Omega) \subseteq S_f(\Omega)$ . შევნიშნავთ, რომ  $P_f(\Omega)$  სიმრავლის აგების ამოცანას ვექტორული მაქსიმიზაციის ამოცანა უწოდებენ [75].

**შენიშვნა 7.3.** ეფექტური ამონახსნის ცნება კარგავს თავის აზრს, როცა დასმულ ამოცანაში მოითხოვება რამდენიმე საუკეთესო ამონახსნის ამორჩევა.

6. ზემოთ აღნიშნული გარეგნული მდგრადობის განმარტების თანახმად, ეფექტურ შეფასებათა  $P(Y)$  სიმრავლეს (სუსტად ეფექტურ შეფასებათა  $S(Y)$  სიმრავლეს) ეწოდება გარეგნულად მდგრადი, თუ ნებისმიერი  $y \in Y \cap P(Y)$ -სთვის (შესაბამისად  $y \in Y \cap S(Y)$ -სთვის) მოიძებნება ისეთი  $y^0 \in P(Y)$  (შესაბამისად  $y^0 \in S(Y)$ ) შეფასება, რომ  $y^0 \geq y$  (შესაბამისად  $y^0 > y$ ). ბუნებრივია, შეიძლება ვიმსჯელოთ ეფექტურ (სუსტად ეფექტურ) ამონახსნთა გარეგნულად მდგრად სიმრავლეზე, როგორც ამონახსნთა სიმრავლეზე, რომელსაც ეფექტურ (სუსტად ეფექტურ) შეფასებათა გარეგნულად მდგრადი სიმრავლე შეესაბამება.

შემდგომში უფრო მოსახერხებელია გამოვიყენოთ ეფექტურ შეფასებათა სიმრავლის გარეგნულად მდგრადობის რამდენადმე განსხვავებული განსაზღვრება:  $P(Y)$  სიმრავლე გარეგნულად მდგრადია, თუ ნებისმიერი  $y \in Y$ -სთვის მოიძებნება ისეთი  $y^0 \in P(Y)$ , რომ  $y^0 \geq y$ . ადვილი საჩვენებელია, რომ უკანასკნელი განსაზღვრება ზემოთ მოცემულის ეკვივალენტურია.

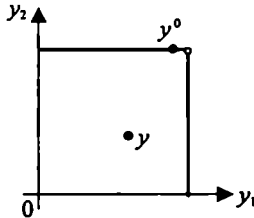
მართლაც, ვთქვათ,  $P(Y)$  გარეგნულად მდგრადია პირველი განსაზღვრების თანახმად და განვიხილოთ ნებისმიერი  $y \in Y$  შეფასება. თუ  $y \in P(Y)$ , მაშინ  $y^0 = y$ -სთვის სამართლიანია  $y^0 \geq y$ . თუ  $y \notin P(Y)$ , მაშინ არსებობს ისეთი  $y^0 \in P(Y)$  შეფასება, რომ  $y^0 \geq y$ , საიდანაც გამომდინარეობს  $y^0 \geq y$ . ვთქვათ, ახლა პირიქით,  $P(Y)$  გარეგნულად მდგრადია მეორე განსაზღვრების თანახმად და განვიხილოთ ნებისმიერი  $y \in Y \setminus P(Y)$  შეფასება. მისთვის მოიძებნება ისეთი  $y^0 \in P(Y)$  შეფასება, რომ  $y^0 \geq y$ . მაგრამ, რადგან  $y$  არ არის ეფექტური, ხოლო  $y^0$  ეფექტურია, ამიტომ  $y^0 \geq y$ .

7.1.3 ნაწილში მოყვანილი 7.1 შენიშვნის (სასრულ სიმრავლეზე კვაზიდალაგების ბირთვის არსებობის შესახებ) თანახმად, შეიძლება იმის მტკიცება, რომ თუ  $Y$  სიმრავლე შედგება შეფასებათა სასრული რაოდენობისაგან, მაშინ ეფექტურ და სუსტად



ვექტორ შეფასებათა და ამონახსნთა სიმრავლეები გარეგნულად მდგრადია. თუ  $Y$  უსასრულოა, მაშინ აღნიშნული სიმრავლეები შეიძლება არ იყოს გარეგნულად მდგრადი, მაგრამ ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის დამახასიათებელი ჩვეულებრივი დაშვებების პირობებში ( $\Omega$  კომპაქტია, ხოლო ყველა  $f_i$  ზემოდან ნახევრადუწყვეტია) ისინი გარეგნულად მდგრადი აღმოჩნდებიან.

**მაგალიტი 7.1** ეთქვას,  $Y$  ერთეულოვანი კვადრატია, რომლისგანაც "ამოგლეჯილია" მარჯვენა ზედა წვერო (ნახ. 7.6). ამ  $Y$ -სთვის  $P(Y)$  სიმრავლე, ცხადია, ცარიელია, ხოლო  $S(Y)$  წარმოქმნილია კვადრატის ზედა და მარჯვენა გვერდებისაგან  $((1,1)$  წერტილის გარეშე).  $S(Y)$  სიმრავლე გარეგნულად მდგრადია: თითოეულ  $y = (y_1, y_2) \in Y$  წერტილს, რომლისთვისაც  $y_1 < 1, y_2 < 1$ , შეიძლება შეეუსაბამოთ, მაგალითად,  $y^0 = \left(y_1 + \frac{1}{2}, 1\right)$  წერტილი, ამასთან  $y^0 > y$ .



ნახ. 7.6

აღნიშნულთან დაკავშირებით საინტერესოა იმის გარკვევა, თუ  $P(Y)$  სიმრავლის გარეგნული მდგრადობა რა შემთხვევაშია ტოლფასი  $S(Y)$  სიმრავლის ანალოგიურ თვისებასთან. ამ კითხვის პასუხი მოცემულია შემდეგ მტკიცებაში.

**თეორემა 7.6.** თუ  $P(Y)$  სიმრავლე გარეგნულად მდგრადია, მაშინ  $S(Y)$ -იც გარეგნულად მდგრადია. იმ შემთხვევაში, როცა  $R(y) = \{y' \in Y \mid y' \geq y\}$  სიმრავლე ჩაკეტილი და შემოსაზღვრულია ნებისმიერი  $y \in S(Y)$ -სთვის, მაშინ  $S(Y)$ -ის გარეგნული მდგრადობიდან გამომდინარეობს  $P(Y)$ -ის გარეგნული მდგრადობა.

აღნიშნული თეორემის დამტკიცება მოცემულია ნაშრომში [104].

7. ეთქვას,  $R$  ნებისმიერი კვაზიდალაგებაა  $\Omega$  სიმრავლეზე.  $\Omega$ -ზე განსაზღვრული ვექტორული  $f$  კრიტერიუმი წარმოქმნის  $R$  კვაზიდალაგებას, თუ  $\succ_f$  თანალობა  $R$ -ს ემთხვევა. რა პირობებში არსებობს ვექტორული კრიტერიუმი, რომელიც წარმოქმნის ნებისმიერ კვაზიდალაგებას? როგორია ასეთი კრიტერიუმის მინიმალური განზომილება-

ბა? როგორ ავაგოთ იგი? ამ საკითხების შესწავლას აქვს არამართო თეორიული, არამედ პრაქტიკული მნიშვნელობაც. მაგალითად, დასახელებული კრიტერიუმის მითითება შეიძლება წარმოადგენდეს კვაზიდალაგების მოცემის ეკონომიურ საშუალებას. რადგან ჩამოთვლილი საკითხები სახელმძღვანელოს თემასთან არ არის პირდაპირი კავშირში, ამიტომ მათ არ განვიხილავთ, მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ ეს საკითხები გაშუქებულია ლიტერატურაში [274].

8. მრავალკრიტერიულ ამოცანებში უპირატესობის თანადობების მოცემის ერთ-ერთი წესი შემდეგში მდგომარეობს:  $R^m$  სივრცეში გამოვყოფთ რაღაც  $C$  კონუსს (დომინირების კონუსს) და დავუშვებთ, რომ  $y \succ^C y'$ , როცა  $y - y' \in C$ . ცხადია,  $C = R^m_+$ -სთვის მიიღება  $\geq$  თანადობა, ხოლო  $C = R^m_>$ -სთვის მიიღება  $>$  თანადობა. მაშასადამე, მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა წარმოადგენს კონუსის მიხედვით ოპტიმიზაციის ამოცანის კერძო შემთხვევას [274].

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც  $C$  კონუსი პოლიედრალურია (მრავალწახნაგაა):  $C = \{y \in R^m \mid By \geq 0_{(l)}\}$ , სადაც  $B$  არის  $l \times m$ -განზომილებიანი რიცხვითი მატრიცა. ასეთი კონუსისათვის  $y - y' \in C$  ჩართვა ტოლფასია  $B(y - y') \geq 0_{(l)}$  ანუ, რაც იგივეა,  $By \geq By'$ . მაშასადამე, საწყისი ამოცანა ვექტორული  $f$  კრიტერიუმით, რომელშიც უპირატესობები მოცემულია პოლიედრალური კონუსის საშუალებით, ახალი ვექტორული  $f^B = (f_1^B, f_2^B, \dots, f_l^B) = Bf$  კრიტერიუმის შემოტანის შემდეგ გარდაიქმნება "ჩვეულებრივ" მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიულ ამოცანად [275].

9. (სუსტად) ეფექტური ამონახსნის განსაზღვრება "სტატიკურია" იმ თვალსაზრისით, რომ იგი ამონახსნთა წყვილ-წყვილად შედარებაზეა დამყარებული და არ არის დაკავშირებული საკითხთან: შესაძლებელია თუ არა ერთი ამონახსნიდან მეორეზე, უფრო უპირატესზე, "მდორედ" გადასვლა "ინფინიტეზიმალურად" ("დადებითი სიჩქარით") გაეზრდით რა თითოეულ კრიტერიუმს. ზოგიერთ მოდელში ასეთი გადასვლის განხორციელების შესაძლებლობა დიდ ინტერესს იწვევს. აღნიშნული ტიპის მაგალითს წარმოადგენს პირდაპირი გაცვლის მოდელი, რომლის თანახმად გაცვლაში მონაწილეობს თითოეული მომხმარებელი, ისწრაფვის რა თავისთვის შეაგროვოს უდიდესი სარგებლობის მქონე სამრეწველო საქონელი, რაც ფორმალურად დაკავშირებულია ღირებულების ფუნქციის მაქსიმიზაციის ამოცანასთან. ამ სახის მოდელებს ჯერ კიდევ მე-19 საუკუნეში ფ. ეჯვორტი და ვ. პარეტო განიხილავდნენ. გაცვლის მოდელში ეფექტურია მდგომარეობა (მომხმარებელთა შორის საქონლის განაწილება), რომელიც არ შეიძლება გაუმჯობესებულ იქნეს რომელიმე მომხმარებლისათვის საქონლის გადანაწილების გზით, დანარჩენ მონაწილეთა "ინტერესების შელახვის" გარეშე. მაშასადამე, პარეტოს მიხედვით ოპტიმალობა ასახავს ეკონომიკური წონასწო-

რობის იდეას: თუ მდგომარეობა არ არის ეფექტური, მაშინ საჭიროა განზორციელებულ ვაჭრობა, რომელიც მივიყვანს ეფექტურ მდგომარეობამდე.

თუ ვაკცილის პროცესი განიხილება როგორც წერილ გარიგებათა მიმდევრობა, რომელიც ყველა მონაწილესათვის ხელსაყრელია, მაშინ ფორმალიზებულად იგი შეიძლება აღვწეროთ გლუვი წირით, რომლის გასწვრივ მოძრაობისას ყველა კრიტიკულში ინფინიტიზიმალურად იზრდება. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება გამოვყოთ ის მდგომარეობები, რომელთაც აღნიშნული ტიპის არც ერთი წირი არ შეესაბამება. ასეთ მდგომარეობებს ს. სმეილმა პარეტოს კრიტიკული წერტილები უწოდა. ცხადია, კრიტიკული წერტილების ერთობლიობა (პარეტოს კრიტიკული სიმრავლე) შეიცავს სუსტად ეფექტური წერტილების მთელ სიმრავლეს, მაგრამ, ზოგად შემთხვევაში, ამ უკანასკნელზე ფართოა (პარეტოს კრიტიკული წერტილის განსაზღვრების "ლოკალური ხასიათის" გამო). ასე, მაგალითად, ნახ. 7.5-ზე პარეტოს კრიტიკულ წერტილთა სიმრავლე, სუსტად ეფექტურ ყველა ამონახსნთან ერთად, შეიცავს ისეთ ამონახსნებსაც, რომელთა შეფასებები საზღვრის  $EW$  უბანზე ძეგს.

პარეტოს კრიტიკული წერტილის ცნება გლუვი ფუნქციის სტაციონარული (კრიტიკული) წერტილის (ანუ წერტილისა, რომელშიც ფუნქციის გრადიენტი ნულის ტოლია) ცნების განზოგადებას წარმოადგენს. პარეტოს მიხედვით ოპტიმალობის განსაზღვრის აღწერილი "ღინამიკური" მიდგომის დაწვრილებით განიხილება სახელმძღვანელოს ფარგლებს სცილდება; დანტერესებულ მკითხველს შეუძლია მამართოს ს. სმეილის შრომებს [119, 248].

10.  $Y$ -დან ეფექტური და სუსტად ეფექტური შეფასებების სიმრავლეები გამოყოფილ იქნა უპირატესობის თანადობათა ზოგიერთი მარტივი მახასიათებელი თვისებების საფუძველზე. მაგრამ ეს სიმრავლეები მიზანშეწონილია განვიხილოთ უფრო ზოგად სიტუაციაშიც, როცა იგულისხმება მხოლოდ, რომ უპირატესობები აღიწერება ამორჩევის  $C$  ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია  $\hat{Y}$  სიმრავლის  $W$  ქვესიმრავლების საკმარად "ფართო" ნაკრებზე (ცხადია,  $Y \in W$ ).

განხილულ შემთხვევაში მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა განისაზღვრება შემდეგი პირობით: თუ  $y' \in Z$ ,  $y'' \in Z$ ,  $Z \in W$  შეფასებები ისეთია, რომ  $y'_i > y''_i$  და  $y'_i = y''_i$  ყველა  $m-1$  დანარჩენი  $i \in M$ -სთვის, მაშინ  $y' \notin C(Z)$ .

ძლიერ (სუსტ) ვარიანტში პარეტოს აქსიომა შემდეგნაირად ფორმულირდება: თუ  $y' \in Z$ ,  $Z \in W$  შეფასებისათვის  $Z$  სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი  $y''$  შეფასება, რომ  $y'_i \geq y''_i$  ყველა  $i \in M$ -სთვის და, ამასთან, ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია ( $y'_i > y''_i$  ყველა  $i \in M$ -სთვის), მაშინ  $y' \notin C(Z)$ .

აღნიშნული აქსიომა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $C(Y) \subseteq P(Y)$  (შესაბამისად  $C(Y) \subseteq S(Y)$ ), ხშირად გამოიყენება ამორჩევის ფუნქციების საშუალებით უპირატესობათა აღწერის დროს [120].

## 7.1.6 ბიბლიოგრაფია მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის განვითარებიდან

მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის თეორიის ძირითადი საფუძვლები მოცემულია მონოგრაფიებში [73, 113, 232]. ვექტორული ოპტიმიზაციის პრობლემატიკა სასრულგანზომილებიან სივრცეში ფართოდაა გამოკვლეული და მისი ძირითადი შედეგები განხილულია სხვადასხვა მონოგრაფიებში, კერძოდ, [104, 212, 242, 251]-ში. ამ შრომებში წარმოდგენილია მრავალკრიტიკული ამოცანის ამოხსნის მრავალი ალგორითმი და მეთოდი. დაინტერესებული მკითხველი აქვე ნახავს მრავალ ბიბლიოგრაფიულ მითითებას ვექტორული ოპტიმიზაციის სხვადასხვა თანამედროვე საკითხზე. სტატიკური მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის პრობლემების შესწავლას ეძღვნება [237]. ვექტორული ამოცანების სხვადასხვა კლასიფიკაცია მოცემულია შრომებში [78, 212, 251].

უფრო მოვიანებით შეიქმნა მრავალკრიტიკულ ამოცანათა ისეთი კლასები, რომლებშიც ვექტორულ მიზნობრივ ფუნქციათა და ალტერნატივათა სიმრავლის სტრუქტურის მიმართ სპეციალური მოთხოვნები იქნა წამოყენებული [60, 280]. კრებადი მრავალკრიტიკული ამოცანების მიმართ სპეციფიკური მიდგომა შემოთავაზებულია ნაშრომში [236]. საინტერესო შედეგები იქნა მიღებული მონოგრაფიაში [274], რომელიც ეხება მრავალკრიტიკული ამოცანების ამონახსნთა სხვადასხვა კლასების სტრუქტურის შესწავლასა და გამოკვლევას. რიგი საკითხებისა, რომლებიც დაკავშირებულია ოპტიმიზაციის მრავალკრიტიკული ამოცანებისათვის ამონახსნთა სიმრავლეების აგებასთან, განხილულია შრომებში [61, 63, 65, 66]. ზოგადი დომინანტური კონუსის შემთხვევაზე განზოგადებული კონუსური ექსტრემალური წერტილების ზოგიერთი თვისება გამოკვლეულია ნაშრომებში [256, 273]. ნაშრომებში [255, 257] დამტკიცებულია თეორემები ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებში მინიმუმებისა და უნაგირა წერტილების შესახებ. მართვის ზოგიერთი ვექტორული ამოცანა გამოკვლეულია [156]-ში, ხოლო ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში ვექტორული აპროქსიმაციის ამოცანები დაწვრილებით განხილულია [90, 206, 254]-ში. ოპტიმიზაციის მრავალკრიტიკული სტოქასტიკური ამოცანები საკმაოდ ფართოდ განხილულია [193]-ში.

ამასთან, უკანასკნელ პერიოდში მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის თეორიაში შეისწავლება ამოცანების ახალი კლასები, რომლებიც რეალური პრაქტიკიდან გამომდინარეობს. აქ შეგვიძლია აღვნიშნოთ: მრავალკრიტიკული არასაკუთრივი ამოცანები [115, 234, 235], მრავალკრიტიკული ამოცანები განუსაზღვრელობის გათვალისწინებით [60, 64], მრავალკრიტიკული ამოცანები არასრული ინფორმაციის პირობებში [59] და მრავალი სხვა.

ამჟამად, მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის თეორიაში ერთ-ერთ პრიორიტეტულ მიმართულებას წარმოადგენს ამოცანები განუსაზღვრელობის გათვალისწინებით. ეს

უკანასკნელი ამოცანების ისეთი კლასია, რომელშიც სისტემის შესაბამის მოდელში გათვალისწინებულია გარე ფაქტორების ზეგავლენა. სისტემაზე ზეგავლენას ახდენს ბუნების რაღაც შეფოთებები, ცდომილებები და სხვა მოქმედი ფაქტორები. განუსაზღვრელობის ფაქტორების შესახებ არავითარი სტატისტიკური (ალბათური) ხასიათის ინფორმაცია არ არის მოცემული; ცნობილია მხოლოდ განუსაზღვრელი ფაქტორების დიაპაზონის არე. ამასთან დაკავშირებით, ვექტორული მაქსიმიზის არსებობის საკმარისი პირობები შედარებით ღრმად არის შესწავლილი [233, 241]-ში. უფრო ზოგად, ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში, განუსაზღვრელობის პირობებში მრავალკრიტიერიული ამოცანების კონუსურად ოპტიმალური წერტილების თვისებები გამოკვლეულია [261]-ში.

შენიშნავთ, რომ მრავალკრიტიერიული ოპტიმიზაციის თეორია მჭიდროდაა დაკავშირებული კლასიკურ თამაშთა თეორიასთან. ამ თეორიების ზოგიერთი კავშირი გამოკვლეულია [265]-ში. რიგი მომიჯნავე საკითხების შესწავლას ეძღვნება ნაშრომი [264]. თამაშთა თეორიაზე დაყრდნობით მრავალკრიტიერიული პრობლემები ნაწილობრივ დალაგებულ სივრცეებში გამოკვლეულია [214]-ში. აქვე საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ მრავალკრიტიერიულ თამაშთა თეორია დღეისათვის მეცნიერების ერთ-ერთი თანამედროვე მიმართულებაა. მისი ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა - ანტაგონისტური მრავალკრიტიერიული თამაშები უნაგირა წერტილებთან დაკავშირებით შეისწავლება [62, 114]-ში.

სტატიკური ვექტორული ამოცანების კვლევამ განუსაზღვრელობის გათვალისწინებით საფუძველი ჩაუყარა მრავალკრიტიერიული დინამიკური ამოცანების შესწავლას განუსაზღვრელობის პირობებში, რომლის ფუნდამენტური კონცეფციაც მკაფიოდაა ჩამოყალიბებული რიგ მონაგრაფიაში [67, 280].

სხვადასხვა სახის მრავალკრიტიერიული ამოცანების ამონახსნთა სიმრავლეების დადგენისათვის ეფექტური მეთოდები გამოიყენება. მაგრამ, ხშირ შემთხვევაში, შესაბამისი პროცედურები შრომატევადია. ამასთან, ხშირად, გადაწყვეტილების მიძღებ პირს აინტერესებს მიიღოს არა ზუსტ ამონახსნთა სიმრავლე, არამედ გარკვეული თვალსაზრისით მისი მიახლოება. ამისათვის შეისწავლება ე.წ. ზღვრული ამოცანები. ამასთან დაკავშირებით, კრებადი მრავალკრიტიერიული ამოცანები, როგორც კლასიკური შემთხვევისათვის, ისე განუსაზღვრელობის გათვალისწინებით, შესწავლილია [116-118, 236, 238-240]-ში. ეს შედეგები განზოგადებულია, აგრეთვე, დინამიკურ ამოცანებზეც [263].

მრავალკრიტიერიული ამოცანების ერთ-ერთი გამოყენება  $N$  წერტილის მიახლოების ამოცანებისათვის გამოკვლეულია [129]-ში.

## 7.2 იდეალური მანძილის მიწიმიწაციის მეთოდი

### 7.2.1 მეთოდის მათემატიკური დასაბუთება და არსი

განვიხილოთ ვექტორული კრიტერიუმის მიხედვით წრფივი (არაწრფივი) დაპროგრამების ამოცანის დასმა, რომელსაც საფუძვლად უდევს თანდათანობითი მიახლოების იდეა [73, 113].

ვთქვათ, მოცემულია წრფივი ფორმების სისტემა

$$L_i(x) = c_i'x = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j, \quad i=1,2,\dots,k, \quad (7.3)$$

და წრფივი შეზღუდვები

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,s, \quad (7.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=s+1,s+2,\dots,m, \quad (7.5)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,l; l \leq n, \quad (7.6)$$

რომლებითაც განისაზღვრება  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადების მნიშვნელობათა არე. იგი აღენიშნოთ  $\Omega$ -თი. შევნიშნავთ, რომ  $L_1(x), L_2(x), \dots, L_k(x)$  ფორმებს შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა განზომილება.

(7.4)-(7.6) სისტემის ამონახსნთა შორის საჭიროა მოვებნოთ ისეთი  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$  ვექტორი, რომლის დროსაც წრფივი (7.3) ფორმები ერთდროულად მიიღებს ექსტრემალურ (მინიმალურ ან მაქსიმალურ) მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ (7.3)-ის თითოეული ცალკეული ფორმა როგორც სკალარული ფუნქცია და დაუშვათ, რომ ყოველი ფიქსირებული  $i$ -სთვის ( $i=1,2,\dots,k$ ) გადაწყვეტილია წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა. ვთქვათ, შესაბამისი ოპტიმალური გეგმები ხასიათდება  $x_i^0 = (x_{i1}^0, x_{i2}^0, \dots, x_{in}^0), i=1,2,\dots,k$ , ვექტორებით, რომლებზედაც განსაზღვრულია წრფივი (7.3) ფორმების შესაბამისი მნიშვნელობები

$$L_1^0 = L_1(x_1^0), L_2^0 = L_2(x_2^0), \dots, L_k^0 = L_k(x_k^0). \quad (7.7)$$

ასე, მაგალითად,  $x_a^0(x_{a1}^0, x_{a2}^0, \dots, x_{am}^0)$  ვექტორი წარმოადგენს (7.3) სისტემის წრფივი  $L_a(x)$  ფორმის მინიმუზაციის ამოცანის ამონახსნს (7.4)-(7.6) შეზღუდვების დაკმაყოფილების პირობებში და ამ ფორმას ანიჭებს რიცხვით მნიშვნელობას, რომელიც  $L_a^0 = L_a(x_a^0)$ -ის ტოლია. ცხადია,  $x_i^0(x_{i1}^0, x_{i2}^0, \dots, x_{im}^0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , ვექტორები, რომლებსაც  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადების სივრცეში წერტილები შეესაბამება, სხვადასხვა; ზოგიერთი მათგანი შეიძლება ერთმანეთს დაემთხვეს.

განვიხილოთ  $\frac{L_i(x)}{L_i^0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , კომპონენტებიანი  $L(x)$  ვექტორი, რომელსაც განზომილება არ გააჩნია, და დასაშვებ წერტილებზე განსაზღვრული  $L(x) - L^0$  ვექტორისათვის შევადგინოთ ევკლიდეს ნორმის კვადრატი

$$\Phi(x) = \|L(x) - L^0\|^2 = \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{j=1}^n \frac{C_{ij}}{L_j^0} x_j - 1 \right]^2. \quad (7.8)$$

შენიშნავთ, რომ  $L^0$  წარმოადგენს  $L(x)$  ვექტორის კომპონენტების სივრცეში ერთეულოვან ვექტორს. ეუწოდოთ მას  $L(x)$  ვექტორის იდეალური ან უტოპიური მნიშვნელობა.

**ბანსაზღვრება 7.1.** ვიტყვი, რომ  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \Omega$  გვემა (7.3) სახის წრფივი ფორმის კომპონენტებიან ხარისხის ვექტორულ მაჩვენებელს ანიჭებს ოპტიმალურ მნიშვნელობას, თუ სამართლიანია უტოლობა

$$\Phi(x^*) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (7.9)$$

წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში ასეთ გვემას ეუწოდოთ ვექტორულ-ოპტიმიზური.

ზემოთ დასმული ამოცანა შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს ფორმულირებული: მოცემულია წრფივ ფორმათა (7.3) სისტემა და შეზღუდვათა (7.4)-(7.6) პირობები. საჭიროა განვსაზღვროთ  $x^* \in \Omega$  წერტილი, რომელშიც  $\Phi(x)$  ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს.

ამოცანის გომეზტრიული ინტეგრატატი. განვიხილოთ

$$L\left(\frac{L_1}{L_1^0}, \frac{L_2}{L_2^0}, \dots, \frac{L_k}{L_k^0}\right)$$

ვექტორის ევკლიდეს სივრცე. ამ სივრცეში (7.8) ჯამი წარმოადგენს ნებისმიერი  $x \in \Omega$  გეგმის შესაბამისი წერტილიდან  $(1, 1, \dots, 1)$  კოორდინატების მქონე უტოპიურ წერტილამდე მანძილის კვადრატს. ამოცანა მდგომარეობს ვექტორულ-ოპტიმალური ისეთი  $x^* \in \Omega$  გეგმის შერჩევაში, რომლის დროსაც აღნიშნული მანძილი იქნება მინიმალური.

ამოცანის ფიზიკური ინტერპრეტაცია. თუ  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \in \Omega$  ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმა მოძებნილია, მაშინ ადგილი აქვს  $L_1(x^*), L_2(x^*), \dots, L_k(x^*)$  რიცხვების შესაბამის  $L_1^0, L_2^0, \dots, L_k^0$  რიცხვებთან მაქსიმალურ მიახლოებას.

მიახლოების აზრი შემდეგში მდგომარეობს. დაეუშვათ ამოვიჩიეთ (7.3) სისტემის რაღაც  $L_\alpha(x)$  წრფივი ფორმა და განვსაზღვრეთ მისი ოპტიმალური მნიშვნელობა  $\Omega$  არეში.  $L_\alpha^0 = L_\alpha(x_\alpha^0)$  რიცხვს განვიხილავთ როგორც სისტემის ხარისხის მაჩვენებელს, რომელიც მიიღწევა (7.3)-ის თითოეული, ცალკე აღებული ფორმის ოპტიმიზაციის შედეგად. ეთქვას, ახლა გადავწყვიტეთ ხარისხის რამდენიმე მაჩვენებლის ერთდროულად გაუმჯობესება. ასეთ შემთხვევაში, ოპტიმალური  $x^* \in \Omega$  გეგმის განსაზღვრის პროცესში, ადგილი ექნება თითოეული, ცალკე აღებული ხარისხის მაჩვენებლის გაუარესებას, თუმცა ეს გაუარესება ნაწილდება (7.3) მაჩვენებლების მთელ სიმრავლეზე და იგი მინიმალურია.

შენიშვნა 7.4. იმ შემთხვევაში, როცა (7.7) მნიშვნელობებიდან რომელიღაც ნულის ტოლი აღმოჩნდება, საჭიროა  $\Omega$  არე გარდაეკმნათ ისე, რომ კვლავ განსაზღვრული (7.7)-ის ყველა მნიშვნელობა ნულისგან განსხვავდებოდეს.

შენიშვნა 7.5. ამოცანა შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს როგორც არათავსებადი წრფივი ალგებრული

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_{ij}}{L_j^0} x_j - 1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

სისტემის მიახლოებითი ამონახსნი (არასაკუთრივი ოპტიმიზაციის ამოცანები 3.5 ნაწილში განვიხილეთ).

შენიშვნა 7.6. ცხადია,  $k$  რაოდენობის წრფივი ფორმის შემთხვევაში შეიძლება ავეყრჩია ამოცანის გადაწყვეტის ჩვეულებრივი გზა, რომლის თანახმად, საჭირო იქნებოდა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის გადაწყვეტა შემდეგი ჯამისათვის:



$\sum_{a=1}^k \lambda_a L_a(x)$ , სადაც  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  რაღაც რიცხვითი მამრავლებია. მაგრამ აღნიშნული მიდგომა, რომელიც სხვადასხვა განზომილების წრფივი  $L_a (a = 1, 2, \dots, k)$  ფორმების ერთი განზომილების ქვეშ მოქცევის საშუალებას იძლევა, შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა  $\lambda_a (a = 1, 2, \dots, k)$  კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობები წინასწარ ზუსტად იქნება მოცემული.

**შენიშვნა 7.7.** (7.8) სახის ეკვილეს კვადრატული ნორმა არ არის მიახლოების ერთადერთი საშუალება. მიახლოების უფრო ზოგად სახეს წარმოადგენს შემდეგი გამოსახულება:

$$\Phi(x) = \|L(x) - L^0\|^2 = \left[ \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{j=1}^n \frac{c_{ij}}{L_j^0} x_j - 1 \right]^p \right]^{1/p}.$$

ამასთან, საჭიროა აგრეთვე აღნიშნოთ, რომ, როგორც პრაქტიკამ გვიჩვენა, როცა  $p=2$ , მაშინ შედარებით უკეთესი შედეგები მიიღება.

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანებში ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმის ზემოთ განხილული იდეა უცვლელად გადაიტანება, მაგრამ ამ შემთხვევაში (7.3) სახის წრფივი ფორმების ნაცვლად გვექნება  $f(x)$  ვექტორ-ფუნქცია თავისი კომპონენტებით  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ , ხოლო წრფივი შეზღუდვების ნაცვლად - პირობები  $g_a(x) \geq 0 (a = 1, 2, \dots, m)$ . მაშასადამე, შეიცვლება (7.8) გამოსახულებაც და გვექნება

$$\Phi(x) = \sum_{a=1}^k \left( \frac{f_a(x)}{f_a^0} - 1 \right)^2,$$

სადაც  $f_a^0$  არის  $\Omega$ -ზე განსაზღვრული  $f_a(x)$  ფუნქციის მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა შეზღუდვების დაკმაყოფილების პირობებში.

## 7.2.2 ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმის ბანსაზღვრა

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში ვექტორულ-ოპტიმალური  $x^* \in \Omega$  გეგმის მოძებნა დაიყვანება წრფივი (7.4)-(7.6) შეზღუდვების დაკმაყოფილების პირობებში (7.8) გამოსახულების მინიმიზაციაზე ამოცანაზე. რადგან

$\Phi(x)$  წარმოადგენს  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადების კვადრატულ ფუნქციას, ამიტომ ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება ამოზნექილი დაპროგრამების, ან უფრო ზუსტად, კვადრატული დაპროგრამების ამოცანაზე.

მათემატიკური თვალსაზრისით, ამოცანა შემდგენიად შეიძლება იქნეს ფორმულირებული. მოცემულია ამოზნექილი  $\Phi(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია  $\Omega$  სიმრავლეზე. საჭიროა მოიძებნოს ისეთი  $x^* \in \Omega$  წერტილი, რომლის დროსაც შესრულდება პირობა

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in \Omega} \Phi(x).$$

როგორც ცნობილი, ამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანაში ლოკალური მინიმუმი გლობალურს ემთხვევა. ამიტომ ამოზნექილი დაპროგრამების ამოცანის გადასაწყვეტად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ყველა ის მეთოდი, რომლის საშუალებითაც ლოკალური ექსტრემუმი მოიძებნება.

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანებში კი, სადაც ვექტორულ-ოპტიმალური  $x^* \in \Omega$  გეგმის განსაზღვრა დაკავშირებულია არაწრფივი ვექტორ-ფუნქციებისთვის ეკვილდეს კვადრატული ნორმის მინიმიზაციის ამოცანასთან, საჭიროა გამოყენებულ იქნეს არაწრფივი ოპტიმიზაციის ის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს გადავწყვიტოთ რთული ექსტრემალური ამოცანები.

## 7.2.3 ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმის არსებობა

განვიხილოთ ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმის არსებობის საკითხი წრფივი დაპროგრამების ამოცანებში.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივი (7.4)-(7.6) შეზღუდვები, რომლითაც განსაზღვრულია დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  არე, და წრფივი მიზნის ფუნქციების (7.3) სისტემა. ამ შემთხვევაში დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  არე წარმოადგენს ამოზნექილ მრავალწახნაგას არაუარყოფით ორტანტში.  $L_1^0, L_2^0, \dots, L_k^0$  მნიშვნელობები მიიღწევა ამ მრავალწახნაგას წვეროებში. მიახლოების  $\Phi(x)$  ზომის, როგორც ამოზნექილი გლუვი ფუნქციის, განსაზღვრის შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნი არსებობს და იგი მდებარეობს დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  არის წახნაგზე ან მის შიგნით.

## 7.3 აწონილ ჯამთა მეთოდი წონების წერტილოვანი შეფასებით

წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანების გადასაწყვეტად საკმაოდ ხშირად გამოიყენება მეთოდი, რომელიც ცნობილია როგორც აწონილ ჯამთა მეთოდი წონების წერტილოვანი შეფასებით. მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. თითოეული  $Cx$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , კრიტერიუმი მრავლდება მკაცრად დადებით სკალარულ  $\lambda_i$  წონაზე, ხოლო შემდეგ ყველა  $k$  აწონილი კრიტერიუმი შეჯამდება და წარმოქმნის შედგენილ მიზნის ფუნქციას (ან აწონილი ჯამის მიზნის ფუნქციას). თუ  $C$  არის  $k \times n$ -განზომილებიანი და  $c^i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , სტრიქონების მქონე კრიტერიული მატრიცა, მაშინ შედგენილი მიზნის ფუნქცია ჩაიწერება როგორც  $\lambda^T Cx$ .

დაეუშვათ, რომ ყველა  $\lambda \in R^k$  წონითი ვექტორი ნორმალიზებულია ისე, რომ თითოეული ვექტორის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია. აღვნიშნოთ  $\Lambda$  სიმბოლოთი ყველა ასეთი წონითი ვექტორის სიმრავლე

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

წონითი  $\lambda \in \Lambda$  ვექტორის შეფასების შემთხვევაში მიიღება წრფივი დაპროგრამების შედგენილი ("აწონილი") ამოცანა

$$\max \{ \lambda^T Cx \mid x \in \Omega \},$$

რომლის გადაწყვეტა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ოპტიმალური ან ოპტიმალურთან საკმაოდ მიახლოებული ამონახსნი. ამგვარად, აწონილი ჯამების მეთოდი წონების წერტილოვანი შეფასებით შეიძლება ჩაითვალოს როგორც გამოთვლითი ექსპერიმენტი კრიტერიუმების მკაცრად ამოზნექილი კომბინაციით.

**მაგალითი 7.2** განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

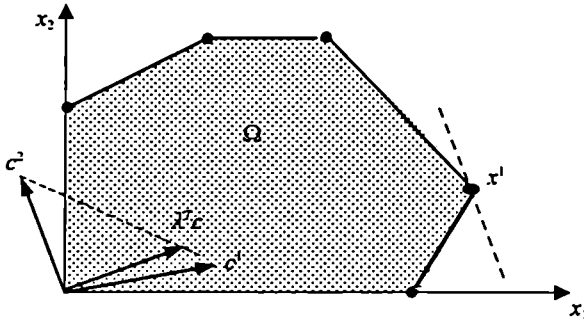
$$\text{როცა } x \in \Omega.$$

აღნიშნული ამოცანისათვის, როგორც ნაჩვენებია ნახ. 7.7-ზე, გამოყენებულია წონითი  $\lambda = (0.8; 0.2)$  ვექტორი. წრფივი დაპროგრამების "აწონილი" ამოცანის

$$\max \{ \lambda^T Cx \mid x \in \Omega \}$$

გადაწყვეტის შედეგად მიიღება კუთხის  $x^1$  წერტილი, რომელიც ეფექტურია. თუ რამდენად კარგია  $x^1$  წერტილი დამოკიდებულია ამ უკანასკნელსა და ოპტიმალურ წერტილში სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის სხვაობის სიდიდეზე.

აწონილი ჯამების მეთოდი წონების წერტილოვანი შეფასებით საკმაოდ მარტივი მეთოდია. წონების ვექტორის გამოყენებით წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა დაიყვანება წრფივი დაპროგრამების ერთკრიტერიულ ამოცანაზე, რომელიც შეიძლება გადაწყვეტილ იქნეს წრფივი დაპროგრამების ცნობილი ალგორითმებით. იმისათვის, რომ აღნიშნული მეთოდი გამოვიყენოთ, საკმარისია გვექონდეს შესაფერისი წონითი ვექტორი. მეთოდის ძირითადი სირთულე სწორედ შესაფერისი წონითი ვექტორის შერჩევაში მდგომარეობს.



ნახ. 7.7

### 7.3.1 მეთოდის ინტერპრეტაცია

იმ შემთხვევაშიც კი, როცა საწყისი  $c^i, i=1,2,\dots,k$ , კრიტერიუმების  $z^i$  მნიშვნელობების ფიზიკური არსი ნათელია, ჩვეულებრივ, ადვილი არ არის მივცეთ შედეგნილ კრიტერიულ  $L^T Cx$  ფუნქციის მნიშვნელობას გონიერული ფიზიკური ინტერპრეტაცია. შესაძლოა, ასეთი ინტერპრეტაციის საუკეთესო საშუალებად გამოდგეს ის, რომ შედეგნილი კრიტერიული ფუნქციის მნიშვნელობა ჩაითვალოს ე.წ. "ხარისხის კოეფიციენტად". მაშინ აწონილი ჯამების მეთოდი წონების წერტილოვანი შეფასებით წარმოადგენს დასაშვები სიმრავლის წერტილების უბრალო რანჟირებას მათი ხარისხის კოეფიციენტების შესაბამისად. რაც უფრო მაღალია ხარისხის კოეფიციენტი, მით უფრო უპირატესია ამონახსნი. ცხადია, ხარისხის კოეფიციენტთან დაკავშირებული ინტერპრეტაციის წარმატება არსებითად დამოკიდებულია იმაზე, თუ თითოეული წონა რამდენად შესაბამება კრიტერიუმის მნიშვნელოვნებას.

### 7.3.2 მეთოდის მათემატიკური დასაბუთება

აწონილ ჯამთა მეთოდისადმი ინტერესი გამოძინარეობს შემდეგი ორი თეორემიდან.

**თეორემა 7.7.** ვთქვათ, წრფივი დაპროგრამების  $\max\{\bar{\lambda}^T Cx \mid x \in \Omega\}$  ამოცანაში, სადაც  $\bar{\lambda} \in \Lambda$ , ამონახსნი  $\bar{x} \in \Omega$  აწონილი ჯამების მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს. მაშინ  $\bar{x}$  ეფექტური წერტილია.

**თეორემა 7.8.** ვთქვათ,  $\bar{x} \in \Omega$  ეფექტური წერტილია, მაშინ არსებობს ისეთი  $\bar{\lambda} \in \Lambda$  ვექტორი, რომ  $\bar{x}$  წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების  $\max\{\bar{\lambda}^T Cx \mid x \in \Omega\}$  ამოცანის ამონახსნს.

აღნიშნული თეორემების დამტკიცება მოცემულია მონოგრაფიაში [251].

7.7 თეორემის თანახმად, ყველა წერტილი, რომელიც წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში აწონილი ჯამების მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს, ეფექტურია, თუ წონების ვექტორი მკაცრად დადებითია.

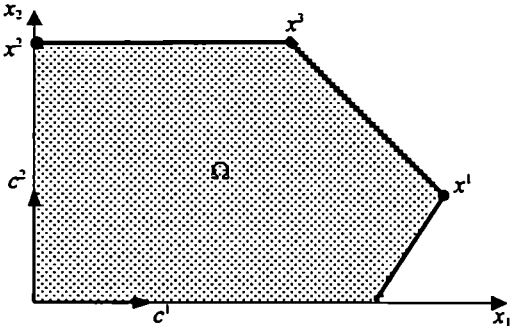
7.8 თეორემის მიხედვით ყოველ ეფექტურ წერტილს შეიძლება შეესაბამებოდეს ერთი მაინც მკაცრად დადებითი წონითი ვექტორი, რომლისთვისაც აწონილი ჯამების მაქსიმიზაციის წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი თვით ეს ეფექტური წერტილია.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა წრფივი დაპროგრამების "აწონილ" ამოცანაში რომელიღაც წონითი ვექტორისათვის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შემოუსაზღვრავია. ასეთ შემთხვევაში აღნიშნულ წონით ვექტორს არც ერთი ეფექტური წერტილი არ შეესაბამება. მაგრამ ეს სულაც არ ნიშნავს, რომ ეფექტურ წერტილთა  $E$  სიმრავლე ცარიელია, რადგან შეიძლება არსებობდეს მკაცრად დადებითი სხვა წონითი ვექტორები, რომლებისთვისაც წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში "აწონილი" ჯამები შემოსაზღვრული იქნება.

იმ შემთხვევაში, როცა წონითი ვექტორის ერთი ან რამდენიმე კომპონენტი ნულია, არ შეიძლება იმის მტკიცება, რომ წრფივი დაპროგრამების მოცემული ამოცანის ყველა წერტილი, სადაც შედგენილი მიზნის ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს, ეფექტურია. განვიხილოთ საილუსტრაციო მაგალითი.

**მაგალითი 7.3.** წრფივი დაპროგრამირების მრავალკრიტერიულ ამოცანაში (ნახ. 7.8)  $E = \gamma(x^1, x^2)$ . თუ დაეუშვებდით წონითი  $\lambda$  ვექტორის კოორდინატებს  $(0,1)$ , მაშინ სიმრავლეს იმ წერტილებისა, რომლებიც წრფივი დაპროგრამების "აწონილი" ამოცანის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფდა, შეადგენდა მხოლოდ  $\gamma(x^2, x^2)$  წახნაგის წერტილები, რომელთა შორის ეფექტური მხოლოდ  $x^2$  წერტილია.

თუ მოცემული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენებდით წრფივი დაპროგრამების სტანდარტულ პროგრამულ პაკეტს, მაშინ ჩანაცვლების გზით შესაძლებელი იქნებოდა გადაადგილება კოორდინატთა სათაეიდან  $x^2$  წერტილში, რომელიც არაეფექტურია, რაც განაპირობებდა გამოთვლების შეწყვეტას. ამ შემთხვევაში  $x^2$  წერტილი, როგორც წესი, ვერ იქნებოდა მოძებნილი, ვინაიდან არც ერთი კომერციული პროგრამული პაკეტი არ ეძებს ყველა კუთხის წერტილს, რომელშიც მიზნის ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს. აღნიშნული პროგრამული პაკეტებით შესაძლებელია მხოლოდ ერთი (გამოთვლით პროცესში პირველი შემხვედრი) შესაფერისი წერტილის მოძებნა.



ნახ. 7.8

### 7.3.3 წონების უინაარსობრივი ლატვირთვა

ეთქვათ, გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის  $U:R^t \rightarrow R$  ფუნქცია დიფერენცირებადია, სადაც

$$U(z_1, z_2, \dots, z_t) \equiv U(c^1x, c^2x, \dots, c^tx).$$

განვიხილოთ ნებისმიერი  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილი. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად,  $\bar{x}$  წერტილში  $U$ -ს გრადიენტს აქვს სახე

$$\nabla_x U = \sum_{i=1}^t \left( \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) \nabla_x z_i,$$

სადაც  $\nabla_x z_i$  არის  $i$ -ური კრიტერიუმის გრადიენტი, ხოლო კერძო წარმოებულები  $(\partial U / \partial z_i)$  გამოითვლება  $\bar{x}$  წერტილში. ამიტომ

$$\nabla_x U = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) c^i.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ, პირველი კრიტერიუმი ისეთია, რომ  $\bar{x}$  წერტილში  $(\partial U / \partial z_i) > 0$ . ამ შემთხვევაში პირველ კრიტერიუმს ბაზური ეუწოდოთ. ვინაიდან დადებით რიცხვზე გამრავლება ვექტორის მიმართულებას არ ცვლის,  $\bar{x}$  წერტილში  $U$  ფუნქციის გრადიენტის მიმართულება შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად

$$\nabla_x U = \sum_{i=1}^k w_i c^i,$$

სადაც  $w_i = (\partial U / \partial z_i) / (\partial U / \partial z_1)$  გამოითვლება  $\bar{x}$  წერტილში.  $w_i$ -ის ნორმირებით მივიღებთ

$$\nabla_x U = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^i,$$

სადაც

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^k w_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

ამგვარად, აწონილი ჯამების მეთოდი წარმოადგენს მეთოდს, რომლის საშუალებით ადგილი აქვს კრიტერიუმებისათვის ისეთი წონის მინიჭებას, რომლის დროსაც "აწონილი" მიზნის  $\lambda^T C$  ფუნქციის გრადიენტი მიმართულებით სარგებლიანობის  $U$  ფუნქციის გრადიენტს დაემთხვევა.

### 7.3.4 წონების განსაზღვრა

ზოგად შემთხვევაში,  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, k$ , წონების განსაზღვრის პრობლემა  $U$  ფუნქციის არაწრფივობასთანაა დაკავშირებული. ამიტომ, მოსალოდნელია, რომ ერთი წერტილიდან მეორეში გადასვლის დროს  $(\partial U / \partial z_i)$  სიდიდეები შეიცვლება. იმისათვის, რომ  $\bar{x}$  წერტილში ლოკალურად მისაღები  $\lambda_i$  წონა შევაფასოთ, განვიხილოთ  $U$  ფუნქციის მხები ჰიპერსიბრტყე  $\bar{x}$  წერტილში. ჰიპერსიბრტყის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} (\bar{z}_1 - c^1 x) + \frac{\partial U}{\partial z_2} (\bar{z}_2 - c^2 x) + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_k} (\bar{z}_k - c^k x) = 0,$$

სადაც  $\bar{z}_i = c^i \bar{x}$ ,  $i=1,2,\dots,k$ . თუ ამ განტოლებას  $(\partial U/\partial z_i)$ -ზე  $((\partial U/\partial z_i) > 0)$  გავყოფთ, მივიღებთ

$$1 \cdot (\bar{z}_1 - z_1) + w_2 (\bar{z}_2 - z_2) + \dots + w_k (\bar{z}_k - z_k) = 0,$$

სადაც  $z_i = c^i x$ ,  $i=1,2,\dots,k$ .  $w_i$  წონას ეუწოდოთ ნომერ  $i$ -ური კრიტერიუმით ნომერ 1-ლი კრიტერიუმის შენაცვლების ზღვრული ნორმა. იმისათვის, რომ შევაფასოთ  $w_i$ , შემოვიტანოთ  $\Delta_i$  სიდიდე - "რაოდენობა" (რაღაც ერთეულებში), რომელიც უნდა დაემატოს  $i$ -ურ კრიტერიუმს, რათა მოხდეს კომპენსაცია პირველი კრიტერიუმის "დანაკარგის" ( $\Delta_i$ ) გამო, მაგრამ იმ პირობით, თუ ყველა დანარჩენი კრიტერიუმის სიდიდე ღარჩება მუდმივი. ამიტომ  $\Delta_i/\Delta_i$  სიდიდე, გამოთვლილი  $\bar{x}$  წერტილში, წარმოადგენს  $w_i$ -ის შეფასებას და მას შემდეგი თვისება გააჩნია:

$$w_i = \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_i}{\Delta_i}.$$

როცა  $\Delta_i=1$ , მაშინ გვექნება

$$w_1=1;$$

$$w_2 \text{ შეფასდება } 1/\Delta_2 \text{ სიდიდით};$$

$$w_3 \text{ შეფასდება } 1/\Delta_3 \text{ სიდიდით};$$

.....

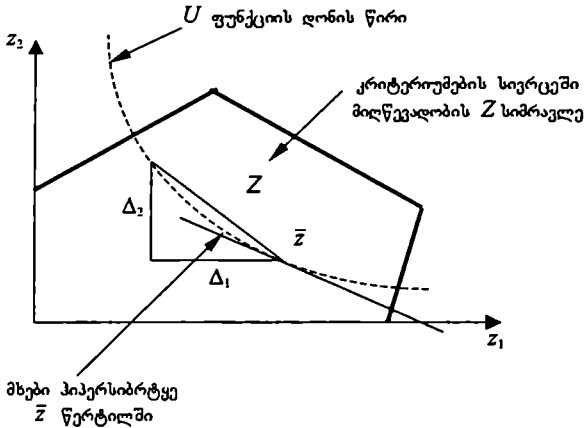
$$w_k \text{ შეფასდება } 1/\Delta_k \text{ სიდიდით}.$$

$\bar{x}$  წერტილში  $w_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , შეფასებების ნორმირებით მივიღებთ  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , სიდიდეების შეფასებას  $\bar{x}$  წერტილში.

**მაგალიტი 7.4.** განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა ორი კრიტერიუმითა და კრიტერიუმთა სივრცეში მიღწევადი  $Z$  სიმრავლით, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.9-ზე. ვთქვათ,  $\bar{x}$  წერტილში, სადაც კრიტერიუმთა ვექტორის მნიშვნელობა  $\bar{Z}$ -ის ტოლია, საჭიროა შევაფასოთ წონების ლოკალური მნიშვნელობა. იმისათვის, რომ პირველი კრიტერიუმის  $\Delta_1$  ერთეულით "დანაკარგის" კომპენსაცია მოვახდინოთ, საჭიროა მეორე კრიტერიუმის  $\Delta_2$  ერთეულით გაზრდა. ასეთი მსჯელობის შედეგად მივიღებთ წონების მნიშვნელობების ისეთ შეფასებებს, რომლის დროსაც წრფივი დაპროგრამების შედგენილი ამოცანის მიზნის ფუნქციის გრადიენტის მიმართულება სამკუთხედის ჰიპოტენუზის მიმართ გავლებული ნორმალის მიმართულებას დაემთხვევა. მაგრამ წონების "წესიერი" (ე.ი. ზუსტი) მნიშვნელობების დროს წრფივი დაპროგრამების შედგენილი ამოცანის მიზნის ფუნქციის გრადიენტი  $\bar{x}$  წერტილში მიმართულია  $\bar{x}$  წერტილში გავლებული მხები ჰიპერსიბრტყის ნორმალის გასწვრივ. ცხადია, შემოთავაზებული მეთოდი თეორიულად გვაძ-



ლევს იმის საშუალებას, რომ  $\Delta_1$  უსასრულოდ მცირე სიდიდედ გადავაქციოთ, თუმცა რეალურად  $\Delta_1$  სიდიდე საკმაოდ დიდი უნდა იყოს, რათა გადაწყვეტილების მიმღებ პირს პრაქტიკულ საკითხებზე წარმატებითი პასუხის გაცემის შესაძლებლობა ჰქონდეს. ამგვარად, აღნიშნული მეთოდი წონების ზუსტ შეფასებას არ უზრუნველყოფს.



ნახ. 7.9

### 7.3.5 კრიტიკული კონუსი

მრავალკრიტერიულ დაპროგრამებაში კრიტერიული კონუსის ცნება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია. მისი ზომა ეფექტური სიმრავლის ზომის ინდიკატორია. გარდა ამისა, იგი იმ სირთულეების მახასიათებელიცაა, რომელსაც ადგილი აქვს მრავალკრიტერიული ამოცანების გადაწყვეტის დროს. განვიხილოთ ორი განსაზღვრება, რომელიც დაკავშირებულია წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ზოგად ამოცანასთან:

$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

.....

$$\max \{ c^t x = z_t \},$$

როცა  $x \in \Omega$

ბანსაზღვრება 72 კრიტერიული კონუსი ეწოდება  $k$  რაოდენობის მიზნის ფუნქციის  $\{c^1, c^2, \dots, c^k\}$  გრადიენტებით განსაზღვრულ ამოზნექილ კონუსს.

აღნიშნოთ კრიტერიული  $C$  კონუსის განზომილება  $r(C)$ -ით.

ბანსაზღვრება 7.3. ნულ-ვექტორული პირობა ეწოდება მიზნის ფუნქციების გრადიენტების მკაცრად დადებითი ისეთი წრფივი კომბინაციის არსებობის პირობას, რომლის დროსაც იგი ნულის ტოლია. ე.ი. ნულ-ვექტორული პირობა შესრულებულია, თუ არსებობს ისეთი  $\alpha \in R^k$  ვექტორი  $\alpha_i > 0, i=1, 2, \dots, k$ , კომპონენტებით, რომლის დროსაც ადგილი აქვს შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i c^i = 0 \in R^n.$$

კრიტერიული კონუსი ყოველთვის ამოზნექილი და ჩაკეტილია, ხოლო კოორდინატთა  $0 \in R^n$  სათავე ყოველთვის ამ კონუსს ეკუთვნის. კრიტერიული კონუსი აუცილებელი არაა იყოს წაწვეტებული, თუმცა იგი, როგორც წესი, წაწვეტებულია წვეროთი კოორდინატთა სათავეში. ერთადერთი წაწვეტებული კონუსი, რომლისთვისაც ნულ-ვექტორული პირობა სრულდება, არის  $\{0 \in R^n\}$ . ვინაიდან კრიტერიული კონუსი მიზნის ფუნქციის გრადიენტებისაგან წარმოიქმნება, ამიტომ იგი მრავალწახნაგა კონუსია, რომელსაც  $k$  რაოდენობის განაპირა სხივი გააჩნია. კრიტერიული  $\{0 \in R^n\}$  კონუსის გარდა, ყველა დანარჩენი კონუსი შემოუსაზღვრავ სიმრავლეს წარმოადგენს. კრიტერიული კონუსის განზომილება კრიტერიუმების  $C$  მატრიცის რანგით მოიცემა.

ქვემოთ მოცემულ მაგალითებში განხილულია კრიტერიული კონუსები, რომლებისთვისაც ნულ-ვექტორული პირობა არ სრულდება, რაც მრავალკრიტერიულ წრფივ დაპროგრამებაში ტიპიურ შეთხვევას წარმოადგენს.

მაგალითი 7.5 (წრფივი დაპროგრამების ჩვეულებრივი ამოცანა ერთი კრიტერიუმით.) წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში

$$\max \{ c^T x = z \},$$

როცა  $x \in \Omega$

ნულ-ვექტორული პირობა არ სრულდება მანამ, სანამ  $c \in R^n$  ნულის ტოლი არ გახდება. როცა  $c \neq 0$ , მაშინ კრიტერიული კონუსი ერთგანზომილებიანია და იგი შემოუსაზღვრელ  $\mu(0, c)$  ნახევარწრფეს წარმოადგენს.

**მაგალითი 7.6** (შემთხვევა, როცა  $r(C)=2$ , ხოლო  $k>2$ .) განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

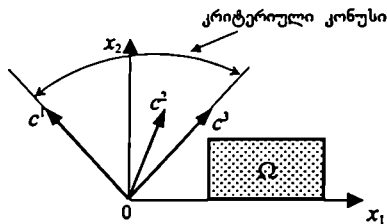
$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

$$\max \{ c^3 x = z_3 \},$$

$$\text{როცა } x \in \Omega,$$

რომლის შესაბამისი კრიტერიული კონუსი გამოსახულია ნახ. 7.10-ზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს, იგი ორგანზომილებიანია. მოცემულ მაგალითში  $c^1$  და  $c^2$  ვექტორები არსებითი გრადიენტებია, რადგან მათ გარეშე კრიტერიული კონუსის წარმოქმნა შეუძლებელია, ხოლო  $c^3$  ვექტორი არაარსებითი გრადიენტია, რადგან კრიტერიული კონუსი მასთან ერთად და მის გარეშეც ერთი და იგივეა.



ნახ. 7.10

**მაგალითი 7.7** (შემთხვევა, როცა განაპირა სხივების რიცხვი  $r(C)$ -ზე მეტია.) განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

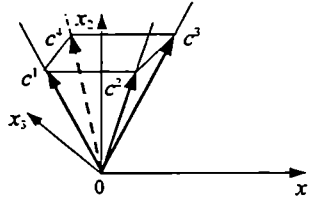
$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

$$\max \{ c^3 x = z_3 \},$$

$$\max \{ c^4 x = z_4 \},$$

$$\text{როცა } x \in \Omega.$$

შესაბამისი კრიტერიული კონუსი გამოსახულია ნახ. 7.11-ზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს, კრიტერიული კონუსი სამგანზომილებიანია, მაგრამ აქვს ოთხი განაპირა სხივი. მიუხედავად იმისა, რომ  $c^1, c^2, c^3, c^4$  ვექტორები წრფივად დამოკიდებელია, ყველა გრადიენტი არსებითია.

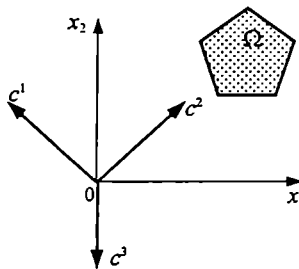


ნახ. 7.11

ქვემოთ მოცემულ მაგალითებში ილუსტრირებულია შემთხვევები, სადაც კრიტერიული კონუსებისათვის ნულ-ვექტორული პირობა სრულდება.

**მაგალითი 7.8** (შემთხვევა, როცა  $r(C) > 0$ .) განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა (ნახ. 7.12). ამოცანაში ნულ-ვექტორული პირობა სრულდება, რადგან არსებობს მკაცრად დადებითი ისეთი  $\alpha \in R^3$  ვექტორი, რომლის დროსაც ადგილი აქვს შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i c^i = 0 \in R^n.$$

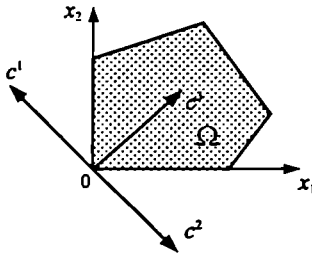


ნახ. 7.12

მიუხედავად იმისა, რომ  $r(C)=2$ , სამივე გრადიენტი არსებითია. შეგნიშნავთ, რომ თუ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანაში სამი კრიტერიუმიდან ნებისმიერი ორი იქნებოდა ჩართული, მაშინ არ შესრულდებოდა ნულ-ვექტორული პირო-

ბა, ხოლო ორგანზომილებიანი ამოზნექილი კრიტერიული კონუსი ორი გრადიენტით წარმოიქმნებოდა.

**მაბალითი 7.9** (შემთხვევა, როცა ნულ-ვექტორული პირობის შესრულება დამოკიდებულია იმაზე, თუ ამოცანის ფორმულირებაში, სახელდობრ, რომელი კრიტერიუმი მონაწილეობს.) განვიხილოთ მიზნის ფუნქციის გრადიენტები, რომლებიც გამოსახულია ნახ. 7.13-ზე. როცა ამოცანაში ერთადერთი  $c^1$  გრადიენტი მონაწილეობს, მაშინ ნულ-ვექტორული პირობა არ სრულდება, ხოლო კრიტერიული კონუსი შემოუსაზღვრავი  $\mu(0, c^1)$  ნახევარწრფეა. ამოცანაში  $c^2$  ვექტორის ჩართვა განაპირობებს ნულ-ვექტორული პირობის შესრულებას, შემდეგი  $c^2$  ვექტორის ჩართვით კი ისევ ეუბრუნდებით სიტუაციას, როცა აღნიშნული პირობა არ სრულდება. სამკრიტერიუმიან ამოცანაში კრიტერიული კონუსი წარმოადგენს ორგანზომილებიან  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid c^1 x \geq 0\}$  ნახევარსივრცეს, რომელსაც წვეროები არ გააჩნია. მიუხედავად იმისა, რომ ნახევარსივრცეს აქვს ორი განაპირა სხივი, სამივე გრადიენტი არსებითია.



ნახ. 7.13

ამგვარად, წრფივი დაპროგრამების ამოცანიდან წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანაზე გადასვლის ტიპიური სიტუაცია შემდეგში მდგომარეობს. კოორდინატთა სათავიდან გამოძავალი ერთი სხივის ნაცვლად კრიტერიული კონუსი ხდება მრავალგანზომილებიანი, ამასთან, მისი განზომილება, ამოცანაში ახალი კრიტერიუმების შემოტანასთან ერთად, იზრდება.

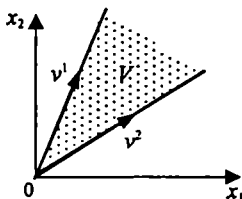
### 7.3.6 კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილი

განვიხილოთ კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილის ცნება. ეთქვას  $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$  ჩაკეტული ამოზნექილი  $V$  კონუსის არსებითი წარმოქმნელების სიმრავლეა.  $V$ -ს ფარდობითი შიგა ნაწილი (აღნიშნება  $\text{rel } V$ -თი) შედგება  $v^i, i=1, 2, \dots, k$ , ვექტორების

მკაცრად დადებითი ყველა წრფივი კომბინაციისაგან.  $V$ -ს ფარდობითი საზღვარი განისაზღვრება როგორც  $V$ -სა და მისი ფარდობითი შიგა ნაწილის სხვაობა.

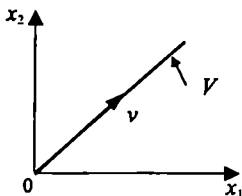
**მაბალითი 7.10.** კრიტერიული კონუსი  $V$ , რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.14-ზე, წარმოქმნილია  $\{v^1, v^2\}$  წყვილით. მისი ფარდობითი შიგა ნაწილი უბრალოდ  $V$  კონუსის შიგა ნაწილია, ხოლო  $V$ -ს ფარდობითი საზღვარი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\mu(0, v^1) \cup \mu(0, v^2).$$



ნახ. 7.14

კრიტერიული კონუსი  $V$ , რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.15-ზე, წარმოქმნილია  $\{v\}$  ვექტორით. მისი ფარდობითი შიგა ნაწილი თვით  $V$  კონუსია კოორდინატთა სათავის გარეშე, ხოლო კოორდინატთა სათავე მისი საზღვარია.



ნახ. 7.15

შეგნიშნავთ, რომ  $\text{rel} V = V$  მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ნულ-ვექტორული პირობა სრულდება. კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილის მიმართ ინტერესი გამოწვეულია იმით, რომ ფარდობითი შიგა ნაწილი წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელიც  $v^i, i=1, 2, \dots, k$ , ვექტორების მკაცრად ამოზნექილი ყველა კომბინაციის ყოველნაირ შესაძლო დადებით სკალარულ მამრავლზე გამრავლებით მიიღება. აქედან გამოძინარეობს შემდეგი

**შედეგი 7.1** იმისათვის, რომ  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილი იყოს ეფექტური, აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს ისეთი  $\beta \in R^n$  ვექტორი, რომელიც კრიტერიული კონუსის შიგა ნაწილს მიეკუთვნება და რომ  $\bar{x}$  წერტილი წრფივი დაპროგრამების  $\max \{ \beta^T x \mid x \in \Omega \}$  ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენდეს.

ამ ფაქტის დამტკიცება მოცემულია მონოგრაფიაში [148].

7.1 შედეგის მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ ეფექტური სიმრავლე მოიცავს წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ოჯახის

$$\{ \max [ \beta^T x \mid x \in \Omega ] \}$$

ყველა ამონახსნის გაერთიანების სახით, სადაც  $\beta$  კრიტერიული კონუსის ფარდობით შიგა ნაწილის ვექტორია. თუ  $\beta$  კრიტერიული კონუსის ფარდობით საზღვარს მიეკუთვნება, მაშინ  $\max \{ \beta^T x \mid x \in \Omega \}$  ამოცანის ამონახსნი შეიძლება არაეფექტური აღმოჩნდეს.

### 7.3.7 ეფექტური წერტილების აგება შედგენილი ბრადინენტების გამოყენებით

განვიხილოთ მეთოდი, რომელშიც ეფექტური წერტილების გრაფიკულად განსაზღვრისათვის კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილია გამოყენებული. აღნიშნულმა მეთოდმა განსაკუთრებით ფართო გამოყენება პოვა წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანებში. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს.

ამბობენ, რომ  $v \neq 0$  ვექტორი მიმართულია  $V$  კონუსის შიგნით, თუ  $v \in V$ . ასევე ამბობენ, რომ  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილში  $\beta$  გრადიენტი აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, თუ  $\bar{x}$  წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების  $\max \{ \beta^T x \mid x \in \Omega \}$  ამოცანის ამონახსნს. 7.1 შედეგის თანახმად, ეფექტური სიმრავლე შედგება წერტილებისაგან, რომლებიც კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილის ყველა წერტილისათვის მაქსიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტის საფუძველზე მიიღება. აღნიშნულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

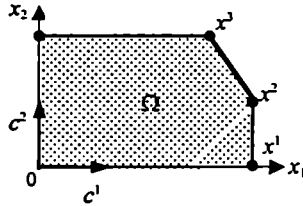
**მაგალიტი 7.1.** წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანაში კრიტერიული კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია (ნახ. 7.16). კრიტერიული კონუსის შიგა ნაწილს წარმოადგენს  $\{ x \in R^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0 \}$  სიმრავლე და

$$E = \{ x^1, x^2 \},$$

$$E_x = \{ x^1, x^2 \},$$

$$E_y = \emptyset.$$

შეიძლება დაგვებადოს კითხვა: რატომ არის არაეფექტური  $(x^1, x^2)$  წიბოს გასწვრივ მდებარე ყველა წერტილი, გარდა  $x^2$  წერტილისა? საქმე იმაშია, რომ აღნიშნული წერტილები კრიტერიული კონუსის შიგნით მიმართული არც ერთი ვექტორის მაქსიმიზაციას არ უზრუნველყოფს (თუმცა ისინი  $c^1$  გრადიენტის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფენ მიუხედავად იმისა, რომ  $c^1$  კრიტერიული კონუსის ფარდობით შიგა ნაწილს არ ეკუთვნის).



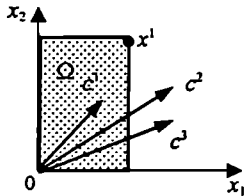
ნახ. 7.16

**მაგალითი 7.12** წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანაში (ნახ. 7.17) კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილი  $\{c^1, c^2\}$  წყვილით წარმოქმნილი კონუსის ამოზნექილი შიგა ნაწილია, ხოლო

$$E = \{x^1\},$$

$$E_x = \{x^1\},$$

$$E_p = \emptyset.$$



ნახ. 7.17

მოცემულ ამოცანაში  $c^2$  არაარსებითი გრადიენტი, ხოლო  $x^1$  ყველა იმ გრადიენტის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს, რომელიც კრიტერიული კონუსის შიგნითაა მიმართული. ვინაიდან  $x^1$  ერთადერთი ეფექტური წერტილია, ამიტომ ოპტიმალურ წერტილთა სიმრავლეა  $\theta = \{x^1\}$ .



**მაბალითი 7.13.** განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი მრავალკრიტერიული ამოცანა (ნახ. 7.18):

$$\max \{ 4x_1 = z_1 \},$$

$$\max \{ -x_1 + 4x_2 = z_2 \},$$

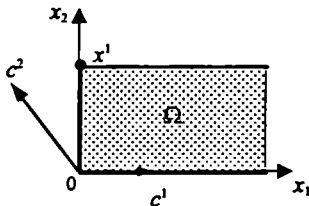
როცა  $x \in S$ .

ეთქვათ,  $\lambda \in \Lambda$  წონითი ვექტორია, რომელიც მონაწილეობს წრფივი დაპროგრამების შედგენილი  $\max \{ \lambda^T Cx \mid x \in \Omega \}$  ამოცანის ფორმულირებაში. როცა  $\lambda_1 \in (0; 1/5)$ , მაშინ  $x^1$  ერთადერთი წერტილია, რომელიც წრფივი დაპროგრამების შედგენილი ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს. როცა  $\lambda_1 = 1/5$ , მაშინ ამონახსნს წარმოადგენს შემოუსაზღვრავი წიბო  $\mu(x_1, v)$ , სადაც  $v = (1, 0)$ . როცა  $\lambda_1 \in (1/5; 1)$ , მაშინ მოცემულ ამოცანაში მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შემოუსაზღვრავია. ამგვარად,

$$E = \mu(x^1, v),$$

$$E_x = \{x^1\},$$

$$E_\mu = \{\mu(x^1, v)\}.$$



ნახ. 7.18

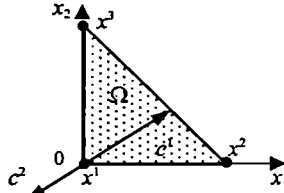
**მაბალითი 7.14.** თუ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანაში კრიტერიუმების გრადიენტები ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებისაა (ნახ. 7.19), მაშინ ნულ-ვექტორული პირობა სრულდება. მოცემულ ამოცანაში

$$E = \Omega,$$

$$E_x = \{x^1, x^2, x^3\},$$

$$E_\mu = \emptyset,$$

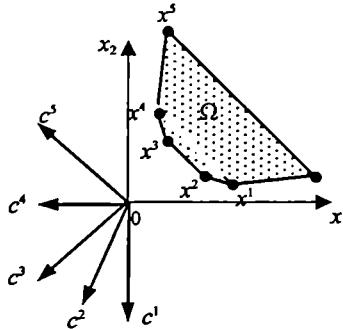
ვინაიდან ნულოვანი ვექტორი კრიტერიული კონუსის ფარდობით შიგა ნაწილს ეკუთვნის.



ნახ. 7.19

როგორც წესი, რაც უფრო ფართოა კრიტერიული კონუსი, მით უფრო ფართოა ეფექტური სიმრავლეც. 7.15 მაგალითში სწორედ ასეთი, საკმაოდ ტიპური, შემთხვევაა განხილული. ამასთან, კრიტერიული კონუსის უწყვეტად გაფართოების დროს  $E$  სიმრავლე ნახტომისებურად ფართოვდება. აღნიშნული წესიდან გამონაკლისი შემთხვევები ილუსტრირებულია 7.16 და 7.17 მაგალითებში.

**მაგალითი 7.15.** განვიხილოთ კრიტერიუმების გრადიენტები და  $\Omega$  სიმრავლე, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.20-ზე. ოთხივე კრიტერიული კონუსისათვის, რომელთაგან თითოეული ყველა წინას მოიცავს, მიიღება ეფექტური სიმრავლეები (ცხრილი 7.1). ეფექტური სიმრავლეები ერთმანეთში "ჩალაგებული" სიმრავლეების მწკრივს წარმოქმნის, ვინაიდან კრიტერიული კონუსების ფარდობითი შიგა ნაწილები



ნახ. 7.20

შესაბამისად ერთმანეთშია "ჩალაგებული".

კრიტერიული კონუსის წარმომქმნელები	ეფექტური სიმრავლე
$\{c^1, c^2\}$	$\gamma(x^1, x^2)$
$\{c^1, c^1\}$	$\gamma(x^1, x^2) \cup \gamma(x^2, x^1)$
$\{c^1, c^1\}$	$\bigcup_{i=1}^3 \gamma(x^i, x^{i-1})$
$\{c^1, c^1\}$	$\bigcup_{i=1}^4 \gamma(x^i, x^{i-1})$

ცხრილი 7.1

მაგალითი 7.16. განვიხილოთ ნახ. 7.21-ზე გამოსახული  $\Omega$  სიმრავლე. ამოცანებში

$$\max \{ 0^T x = z \},$$

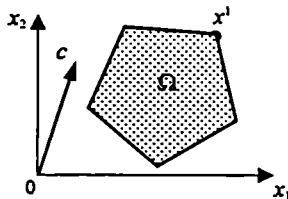
$$\text{როცა } x \in \Omega$$

და

$$\max \{ c^T x = z \},$$

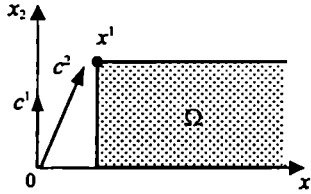
$$\text{როცა } x \in \Omega$$

რეალიზებულია შემთხვევა, როცა ეფექტური სიმრავლე კრიტერიული კონუსის გაფართოების მიხედვით იკუმშება. წრფივი დაპროგრამების პირველ ამოცანაში კრიტერიული კონუსი წარმოადგენს  $\{0 \in R^2\}$  სიმრავლეს,  $E = \Omega$ . მეორე ამოცანაში კრიტერიული კონუსი  $\mu(0, c)$  სიმრავლეა,  $E = \{x_1\}$ . ამ ფაქტს აქვს ძალიან მარტივი ახსნა: პირველი ამოცანის კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილი მეორე ამოცანის კრიტერიული კონუსის ფარდობითი შიგა ნაწილის ქვესიმრავლეს არ წარმოადგენს.



ნახ. 7.21

**მაბალითი 7.17.** წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტიკულ ამოცანაში (ნახ. 7.22) ეფექტური სიმრავლე, კრიტიკული კონუსის გაფართოებასთან ერთად, უჩინარდება. თუ ამოცანაში მხოლოდ  $c'$  გრადიენტი მონაწილეობს, მაშინ  $E = \mu(x', v)$ , სადაც  $v = (1, 0)$ , ხოლო თუ  $c'$  გრადიენტიც დაემატება, მაშინ  $E = \emptyset$ . ამ ფაქტს ადგილი აქვს იმიტომ, რომ  $c'$  გრადიენტი წარმოქმნილი კრიტიკული კონუსის ფარდობით შიგა ნაწილი და  $\{c', c''\}$  წყვილი წარმოქმნილი კრიტიკული კონუსის ფარდობით შიგა ნაწილი გადაუკვეთავი სიმრავლეებია.



ნახ. 7.22

ამგვარად, წონითი ვექტორების გამოყენებით ეფექტური სიმრავლის გრაფიკული გამოსახვისათვის კრიტიკული კონუსის ფარდობით შიგა ნაწილი ფრიად სასარგებლო ინსტრუმენტს წარმოადგენს.

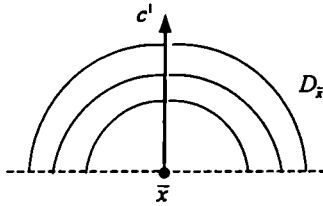
### 7.3.8 კრიტიკული კონუსის კავშირი ღომინირებადობის სიმრავლესთან

თუ ნულ-ვექტორული პირობა შესრულებულია, მაშინ ალტერნატივის შესახებ შტიმკეს თეორემის თანახმად [251], არ არსებობს ისეთი  $y \in R^n$  ვექტორი, რომლის დროსაც  $c'_i y \geq 0$  ყველა  $i = 1, 2, \dots, k$  მნიშვნელობისთვის და  $c'_i y > 0$  ერთი  $i$ -სთვის მაინც. ამგვარად, კონუსი  $C^2 = \emptyset$  და ღომინირებადობის სიმრავლე  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილში არის  $\{\bar{x}\}$ . მაშასადამე, თუ შესრულებულია ნულ-ვექტორული პირობა, მაშინ  $E = \Omega$ . იმ შემთხვევაში, როცა აღნიშნული პირობა არ სრულდება, მაშინ ღომინირებადობის სიმრავლე ვიწროვდება ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, იგი თავის ქვესიმრავლედ გარდაიქმნება კრიტიკული კონუსის გაფართოების მიხედვით.

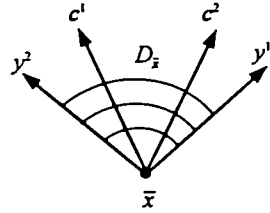
**მაბალითი 7.18.** ნახ. 7.23-ზე გამოსახულია  $c'$  ვექტორით წარმოქმნილი კრიტიკული კონუსი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ღომინირებადობის  $D_{\bar{x}}$  სიმრავლე წარმოადგენს ღია ნახევარსივრცეს, მაგრამ იმ განსხვავებით, რომ შეიცავს  $\bar{x}$  წერტილსაც.  $\{c', c''\}$  ვექტორებით წარმოქმნილი კრიტიკული კონუსის გაფართოების მიხედვით

(ნახ. 7.24, 7.25)  $\{y^1, y^2\}$  ვექტორებით წარმოქმნილი  $D_{\bar{x}}$  დომინირებადობის სიმრავლე იკუმშება. 7.26 ნახაზის მიხედვით  $D_{\bar{x}} = \mu(\bar{x}, c^1)$ , რადგან კრიტერიული კონუსი (მოცემულ შემთხვევაში ჩაკეტილი ნახევარსივრცე) წარმოქმნილია  $\{c^1, c^2, c^3\}$  ვექტორებით.

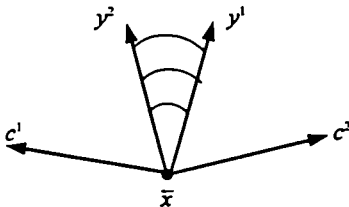
ნახ. 7.23-7.26-ზე ილუსტრირებული სიტუაციების საპირისპიროდ არსებობს შემთხვევები, როცა დომინირებადობის სიმრავლე არ იკუმშება კრიტერიული კონუსის გაფართოების მიხედვით.



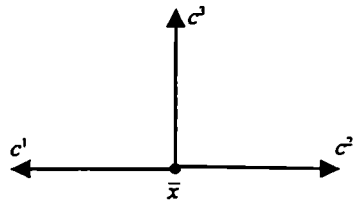
ნახ. 7.23



ნახ. 7.24



ნახ. 7.25



ნახ. 7.26

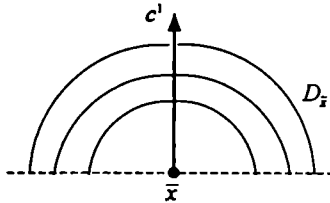
**მაგალიტი 7.19.** ნახ. 7.27-7.28-ზე გამოსახული დომინირებადობის სიმრავლე შეესაბამება 7.17 მაგალიტს. თუ კრიტერიუმი ერთი  $c^1$  გრადიენტის საშუალებით მოიცემა, მაშინ დომინირებადობის სიმრავლეს აქვს შემდეგი სახე:

$$\{\bar{x}\} \cup \{x \mid c^1 x > c^1 \bar{x}\}.$$

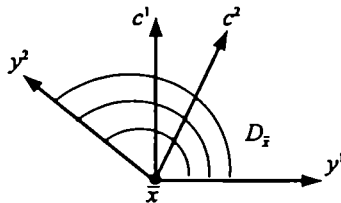
ორი  $c^1$  და  $c^2$  გრადიენტის შემთხვევაში დომინირებადობის სიმრავლე, როგორც 7.28 ნახაზიდან ჩანს, წარმოიქმნება  $\{y^1, y^2\}$  ვექტორების წყვილით. ვინაიდან  $y^1$  ვექტორით წარმოქმნილი განაპირა სხივი 7.28 ნახაზზე გამოსახულ დომინირებადობის სიმრავლეს ეკუთვნის, ამიტომ იგი 7.27 ნახაზზე გამოსახული დომინირებადობის სიმრავლის ქვესიმრავლეს არ წარმოადგენს. სწორედ ამაში მდგომარეობს 7.17 მაგალიტში

კრიტერიული კონუსის გაფართოების დროს ევექტური სიმრავლის "გაუჩინარების" მიზეზი.

ამგეარად, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ მთავარია არა კრიტერიული კონუსი, არამედ მისი ფარდობითი შიგა ნაწილი და მისი დუალური მოქმედება ღომინირებადობის სიმრავლის მიმართ.



ნახ. 7.27



ნახ. 7.28

### 7.3.9 დასაშვები არის ევექტური წახნაგები

ვთქვათ,  $F \subset \Omega$  და  $H$  საყრდენი ჰიპერსიბრტყეა  $\Omega$  სიმრავლის მიმართ.  $F$  სიმრავლე  $\Omega$ -ის წახნაგს წარმოადგენს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი საყრდენი  $H$  ჰიპერსიბრტყე, რომ  $H \cap \Omega = F$ . ამბობენ, რომ  $F$  წარმოადგენს  $\Omega$  სიმრავლის  $f$ -წახნაგს, თუ  $F$ -ს აქვს  $f$ -ის განზომილება. კუთხის წერტილები წარმოადგენს 0-წახნაგებს, წიბოები - 1-წახნაგებს, ხოლო  $R^2$  სივრცეში 2-წახნაგები - ჩვეულებრივ ბრტყელ წახნაგებს.

მაგალითი 7.20. ნახ. 7.29-ზე გამოსახულ სიმრავლეს ექვსი 0-წახნაგი გააჩნია:

$$\{x^1\}, \{x^2\}, \{x^3\},$$

$$\{x^2\}, \{x^4\}, \{x^6\},$$

ცხრა 1-წახნაგი:

$$\chi(x^1, x^2), \chi(x^2, x^3), \chi(x^3, x^4),$$

$$\chi(x^1, x^4), \chi(x^2, x^6), \chi(x^4, x^6),$$

$$\chi(x^1, x^6), \chi(x^3, x^4), \chi(x^3, x^6),$$

და ხუთი 2-წახნაგი:

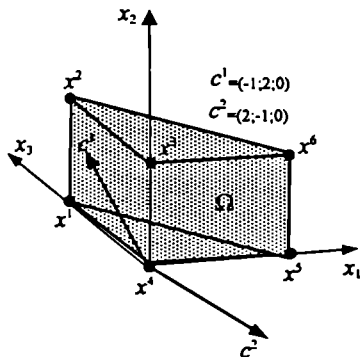
$$\gamma(x^1)_{i=1}^4,$$

$$\gamma(x^1)_{i=3}^6,$$

$$\chi(x^1, x^2, x^5, x^6),$$

$$\chi(x^1, x^4, x^5),$$

$$\chi(x^2, x^3, x^6).$$



ნახ. 7.29

შემოვიტანოთ მაქსიმალური წახნაგისა და მაქსიმალური ეფექტური წახნაგის ცნებები. მაქსიმალური ეფექტური წახნაგის ცნება ფრიად სასარგებლოა, ვინაიდან თუ

ნულ-ვექტორული პირობა არ სრულდება, მაშინ ეფექტური სიმრავლე ყველა მაქსიმალური ეფექტური წახნაგის გაერთიანების სახით მოიცემა.

**ბანსაზღვრება 7.4.** ვთქვათ,  $F$  არის  $\Omega$  სიმრავლის  $f$ -წახნაგი.  $F$  სიმრავლე მაქსიმალურ წახნაგს წარმოადგენს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ არსებობს  $\Omega$  სიმრავლის ისეთი  $g$ -წახნაგი  $G$ , რომლისთვისაც  $F \subset G$  და  $f < g$ .

**ბანსაზღვრება 7.5.** ვთქვათ,  $F$  წარმოადგენს  $\Omega$  სიმრავლის ეფექტურ  $f$ -წახნაგს.  $F$  წახნაგს უწოდებენ მაქსიმალურ ეფექტურ წახნაგს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ არსებობს  $\Omega$  სიმრავლის ისეთი ეფექტური  $g$ -წახნაგი  $G$ , რომლისთვისაც  $F \subset G$  და  $f < g$ .

**მაგალიტი 7.21** განვიხილოთ დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენილია ნახ. 7.29-ზე. ვთქვათ, მიზნის ფუნქციის გრადიენტებია  $c^1 = (-1, 2, 0)$  და  $c^2 = (2, -1, 0)$ .  $(x_1, x_2)$  სიბრტყეში მოთავსებული  $c^1$  და  $c^2$  ვექტორებისათვის ეფექტური  $E$  სიმრავლე ნაჩვენებია ნახ. 7.30-ზე. მაშასადამე, მოცემულ მაგალითში გვაქვს ოთხი ეფექტური 0-წახნაგი

$$\{x^2\}, \{x^3\}, \{x^4\}, \{x^6\},$$

ოთხი ეფექტური 1-წახნაგი

$$\gamma(x^2, x^3), \gamma(x^2, x^6),$$

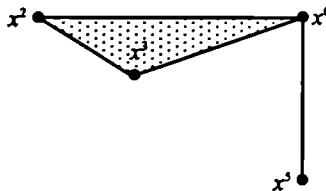
$$\gamma(x^2, x^6), \gamma(x^3, x^6)$$

და ერთი ეფექტური 2-წახნაგი

$$\gamma(x^2, x^3, x^6).$$

თუმცა მხოლოდ ორი წახნაგია ეფექტურებს შორის მაქსიმალური: 1-წახნაგი  $\gamma(x^2, x^6)$  და 2-წახნაგი  $\gamma(x^2, x^3, x^6)$ . ამიტომ  $E$  სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$E = \gamma(x^2, x^6) \cup \gamma(x^2, x^3, x^6).$$



ნახ. 7.30



როგორც 7.21 მაგალითიდან ჩანს, მაქსიმალური ეფექტური წახნაგი (მოცემულ შემთხვევაში  $\gamma(x^1, x^2)$ ) შეიძლება არ იყოს  $\Omega$  სიმრავლის მაქსიმალური წახნაგი. ეფექტური სიმრავლის ნახტომისებურ გაფართოებას ადგილი აქვს იმის მიხედვით, თუ  $\Omega$  სიმრავლის ახალი წახნაგები როგორ გარდაიქმნება მაქსიმალურ ეფექტურ წახნაგებად.

### 7.3.10 წონითი ვექტორების სიმრავლიდან ქვესიმრავლეების განსაზღვრა

თითოეულ ეფექტურ წახნაგს ერთი ისეთი  $\bar{\lambda} \in \Lambda$  ვექტორი მინც შეესაბამება, რომ ეფექტური წახნაგის ყველა წერტილი წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში  $\max\{\bar{\lambda}^T Cx \mid x \in \Omega\}$  აწონილი ჯამების მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს. ქვემოთ მოცემულ 7.22-7.24 მაგალითებში ილუსტრირებულია  $\Lambda$ -ს ქვესიმრავლეები, რომლებიც სხვადასხვა ეფექტურ წახნაგებს შეესაბამება.

მაგალითი 7.22 განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტიკული ამოცანა

$$\max \{ -x_1 - 2x_2 = z_1 \},$$

$$\max \{ \quad \quad 2x_2 = z_2 \},$$

როცა  $-x_1 + x_2 \leq 3,$

$$x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

რომელიც წარმოდგენილია ნახ. 7.31-ზე.

მოცემულ ამოცანაში

$$E = \gamma(x^1, x^2) \cup \mu(x^1, v),$$

სადაც  $v = (1; 1)$ .

აქ გვაქვს ორი ეფექტური  $\{x^1\}$  და  $\{x^2\}$  0-წახნაგი და ორი ეფექტური  $\gamma(x^1, x^2)$  და  $\mu(x^1, v)$  1-წახნაგი. თუ  $a^1$  და  $a^2$  ძირითადი შეზღუდვების გრადიენტებია, მაშინ  $c^1$  და  $c^2$  ვექტორების ამოზნექილი კომბინაცია, რომელიც მიმართულებით  $a^1$  და  $-a^2$  ვექტორებს ემთხვევა, შესაბამისად წყვილი  $(2/5; 3/5)$  და  $(2/3; 1/3)$  წონითი ვექტორების საშუალებით მოიცემა. მაშასადამე, შეიძლება გამოვყოთ  $\Lambda$ -ს შემდეგი ქვესიმრავლეები:

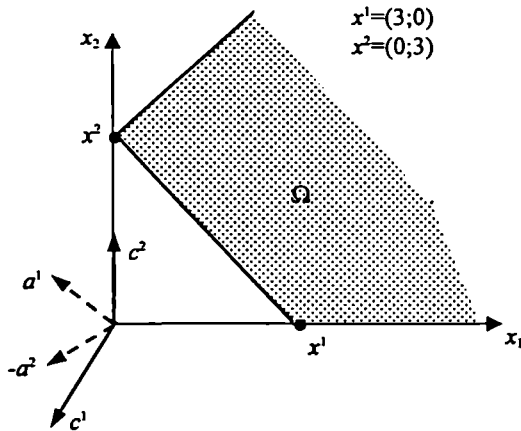
$$\Lambda_{\gamma} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \in [2/3; 1], \lambda_2 \in (0, 1/3) \},$$

$$\Lambda_{r(x^1, x^2)} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 1/3 \},$$

$$\Lambda_{x^1} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \in [2/5; 2/3], \lambda_2 \in [1/3; 3/5] \},$$

$$\Lambda_{\mu(x^2, \nu)} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 = 2/5, \lambda_2 = 3/5 \},$$

$$\Lambda_\emptyset = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \in (0; 2/5), \lambda_2 \in (3/5; 1) \}.$$



ნახ. 7.31

$\Lambda$  სიმრავლე შედგება ხუთი ქვესიმრავლისგან, თუმცა ეფექტური წახნაგი მხოლოდ ოთხია. "ზედმეტ" ქვესიმრავლეს წარმოადგენს  $\Lambda_\emptyset$ . ეს ინდექსი აღნიშნავს, რომ წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიან ამოცანაში  $\Lambda_\emptyset$ -ს ყველა წონითი ვექტორისათვის მიზნის ფუნქციას შემოუსაზღვრავი მნიშვნელობა აქვს.

**მაგალიტი 7.23.** განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

$$\max \{ x_1 + 2x_2 = z_1 \},$$

$$\max \{ -2x_1 = z_2 \},$$

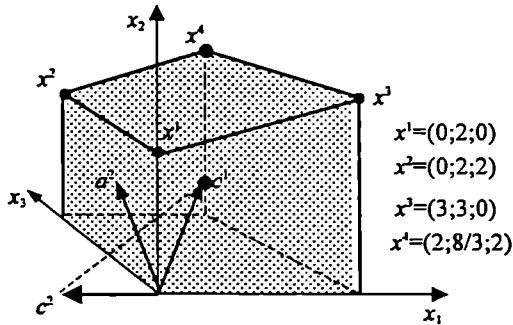
$$\text{როცა } 2x_1 + x_3 \leq 6,$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$x_3 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.32-ზე.



ნახ. 7.32

მოცემულ ამოცანაში  $E = \chi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . რადგან  $c^1$  და  $c^2$  წრფივი კომბინაციის წონითი ვექტორი, მიმართული  $a^2$  გრადიენტის გასწვრივ, ტოლია  $(6/11; 5/11)$ , ამიტომ გვექნება

$$\Lambda_{\gamma(x^1, x^2)} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \in (0; 6/11], \lambda_2 \in [5/11; 1) \},$$

$$\Lambda_{\gamma(x^3)} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 = 6/11, \lambda_2 = 5/11 \},$$

$$\Lambda_{x^4} = \{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \in [6/11; 1), \lambda_2 \in (0; 5/11) \}.$$

როგორც ვხედავთ,

$$\Lambda_{x^1} = \Lambda_{x^2} = \Lambda_{\gamma(x^1, x^2)}$$

და

$$\Lambda_{x^4} = \Lambda_{\gamma(x^1, x^2)} = \Lambda_{\gamma(x^2, x^4)} = \Lambda_{\gamma(x^1, x^4)} = \Lambda_{\gamma(x^1)}$$

ამგვარად, სხვადასხვა ეფექტურ წახნაგს შეიძლება შეესაბამებოდეს  $\Lambda$  სიმრავლის ერთი და იგივე ქვესიმრავლებები. შესაძლებელია ისეთი შემთხვევა, როცა ეფექტურ კუთხის წერტილს (მაგალითად,  $x^4$ ) ერთადერთი წონითი ვექტორი შეესაბამება.

**მაგალითი 7.24.** განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

$$\max \{ x_1 = z_1 \},$$

$$\max \{ x_2 = z_2 \},$$

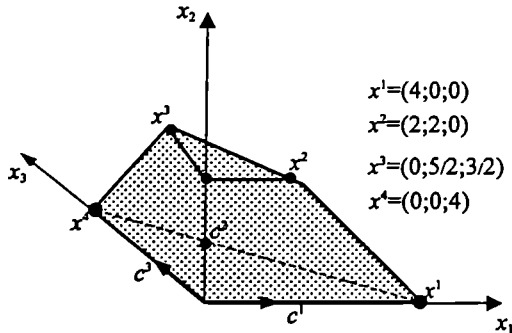
$$\max \{ x_3 = z_3 \},$$

$$\text{როცა } x_1 + x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$3x_2 - x_3 \leq 6,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.33-ზე.



ნახ. 7.33

მოცემულ ამოცანაში  $E = \gamma(x^1, x^2, x^3, x^4)$ .

განივილილი სიმპლექსური ცხრილი 7.2, რომელიც შეესაბამება  $x^1$  წერტილს (7.2 ცხრილში ელემენტების ზედა 1, 2 და 3 ინდექსი მიუთითებს იმ გარემოებაზე, რომ შესაბამისად განივილება ამოცანის პირველი, მეორე ან მესამე კრიტერიული ფუნქცია, მისი შესაბამისი კოეფიციენტები ან მასთან დაკავშირებული შეფასებები).

$j$	$B_{\lambda_j}$	$c_{\lambda_j}$	$A_0$	$(1)^1$	$(0)^1$	$(0)^1$	$(0)^1$	$(0)^1$
				$(0)^2$	$(1)^2$	$(0)^2$	$(0)^2$	$(0)^2$
				$(0)^3$	$(0)^3$	$(1)^3$	$(0)^3$	$(0)^3$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_1$	$(1)^1$ $(0)^2$ $(0)^3$	4	1	1	1	1	0
2	$A_5$	$(0)^1$ $(0)^2$ $(0)^3$	6	0	3	-1	0	1
$(m+1)^1$	$\Delta_j$		4	0	1	1	1	0
$(m+1)^2$	$\Delta_j$		0	0	-1	0	0	0
$(m+1)^3$	$\Delta_j$		0	0	0	-1	0	0

ცხრილი 7.2

დავადგინოთ  $\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda \in R^3 \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \right\}$  სიმრავლის  $\Lambda_{x^1}$  ქვესიმრავლის სტრუქტურა (და, აგრეთვე,  $\Lambda_{x^2}, \Lambda_{x^3}, \Lambda_{x^4}$  ქვესიმრავლეების სტრუქტურაც) რ. სტოიერის მონოგრაფიაში [148, ნაწილი 5.3] შემოთავაზებული მიდგომის საფუძველზე. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა მოცემული სიმპლექსური ცხრილისათვის განესაზღვროთ ფარდობითი შეფასებების დამატებითი სტრიქონი:

$$\begin{aligned} & \text{ფარდობითი შეფასებების } (z_j^+ - c_j^+) \text{ სტრიქონი} = \\ & = \sum_{i=1}^3 \lambda_i [\text{ფარდობითი შეფასებების } (z_j^i - c_j^i) \text{ სტრიქონი}]. \end{aligned}$$

$x^1$  წერტილში  $(z_j^+ - c_j^+)$  სტრიქონის ყველა არაბაზისური კომპონენტი უნდა აკმაყოფილებდეს არაუარყოფითობის პირობას  $\Lambda_{x^1}$  სიმრავლის ყველა  $\lambda$  ვექტორისათვის,

რომელიც შეესაბამება  $\{x^1\}$  წერტილს და წარმოადგენს  $\bar{\Lambda}$  სიმრავლის ნაწილს. აღნიშნულის გათვალისწინებით  $\Lambda_{x^1} \subset \Lambda$  შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0,$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 \geq 0,$$

$$\lambda_1 \geq 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

უკანასკნელი სისტემიდან კი გამოვძინარეობს შემდეგი უტოლობები:

$$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0,$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1,$$

$$\lambda_1 \geq 0.$$

ანალოგიურად, სიმპლექსური ცხრილების არაბაზისური სვეტებისათვის, რომლებიც სხვა დანარჩენ ეფექტურ კუთხის  $x^2, x^3, x^4$  წერტილს შეესაბამება, მივიღებთ, რომ  $\Lambda_{x^2} \subset \Lambda$  განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$7\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 3,$$

$$-\lambda_1 \leq 0,$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0.$$

$\Lambda_{x^3} \subset \Lambda$ -ს აქვს შემდეგი სახე:

$$7\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 3,$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 3,$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 1.$$

$\Lambda_{x^4} \subset \Lambda$  მოიცემა უტოლობათა შემდეგი სისტემით:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1,$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1.$$

ამგვარად, წარმოდგენილი უტოლობების საშუალებით  $\Lambda_{x^1}, \Lambda_{x^2}, \Lambda_{x^3}, \Lambda_{x^4}$  სიმრავლეები აღიწერება. მათი გამოყენების საფუძველზე მიიღება ე. წ. პარამეტრული დიაგრამა, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.34-ზე.

ნახ. 7.34-ზე  $\Lambda$  სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომელიც ეფექტურ  $\gamma(x^2, x^3)$  წიბოს შეესაბამება, მოიცემა შემდეგი სახით:

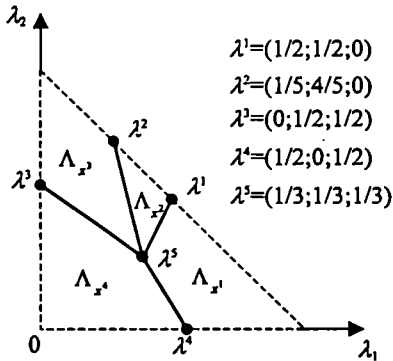
$$\Lambda_{\gamma(x^2, x^3)} = \gamma(\lambda^2, \lambda^5) - \{\lambda^2\}.$$

$\Lambda$  სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომელიც ეფექტურ  $\gamma(x_1)$  წახნაგს შეესაბამება განიხილურება შემდეგნაირად:

$$\Lambda_{\gamma(x^1)} = \{\lambda^5\},$$

და ა.შ.

იმის მიხედვით, თუ ერთმანეთთან როგორ არის დაკავშირებული  $\Lambda$  სიმრავლის სხვადასხვა ქვესიმრავლეები, შესაძლებელია დადგენილ იქნეს  $E$ -ს სხვადასხვა ეფექტურ წახნაგებს შორის არსებული კავშირები.



ნახ. 7.34

## 7.4 *e*-შეზღუდვების მეთოდი

*e*-შეზღუდვების მეთოდი წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრის ერთ-ერთი მეთოდია. მისი ძირითადი არსი დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის შეკუმშვაში მდგომარეობს.

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა, რომელიც მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

$$\max \{ c^k x = z_k \},$$

$$\text{როცა } x \in \Omega.$$

შემოთავაზებულ მეთოდში მაქსიმიზაციის ამოცანისათვის ამოირჩევა ერთ-ერთი *i*-ური კრიტერიუმი, ხოლო ყველა დანარჩენი  $z_j, j=1,2,\dots,k, j \neq i$ , კრიტერიუმი ქვემო-დან შემოისაზღვრება რაღაც  $e_j (j=1,2,\dots,k, j \neq i)$  რიცხვებით, რის შედეგადაც ფორმირდება *e*-შეზღუდვების მქონე *i*-ური კრიტერიუმის მაქსიმიზაციის წრფივი დაპროგრამების ჩვეულებრივი (ერთკრიტერიული) ამოცანა:

$$\max \{ c^i x = z_i \},$$

$$\text{როცა } c^j x \geq e_j, j=1,2,\dots,k, j \neq i,$$

$$x \in \Omega.$$

ვინაიდან  $(k-1)$  კრიტერიუმი შეზღუდვებად გარდაიქმნა, ამიტომ *e*-შეზღუდვების მქონე *i*-ური კრიტერიუმის მაქსიმიზაციის ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა არე წარმოადგენს საწყისი  $\Omega$  არის ქვესიმრავლეს. მაშასადამე, შემდეგ ეტაპზე საჭიროა არჩეული კრიტერიუმის მაქსიმიზაცია დასაშვებ ამონახსნთა შეკუმშულ არეზე.

**მაგალიტი 7.25.** განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა:

$$\max \{ \text{მოგება} \},$$

$$\max \{ \text{საბაზრო წილი} \},$$



$$\max \{ \text{დასაქმებულობა} \},$$

როცა  $x \in \Omega$ .

ოპტიმალურთან მიახლოებული ამონახსნის მისაღებად დაეუშვათ, რომ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს საბაზრო წილისა და დასაქმებულობის კრიტერიუმები გადააქვს შეზღუდვებში, რომელთა მარჯვენა მხარეები შესაბამისად არის  $e_m$  და  $e_r$ . აღნიშნულის შედეგად მივიღებთ მოგების მაქსიმიზაციის ამოცანას  $e$ -შეზღუდვებით:

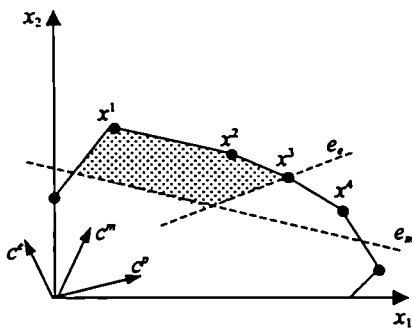
$$\max \{ \text{მოგება} \},$$

როცა  $\{ \text{საბაზრო წილი} \} \geq e_m,$

$\{ \text{დასაქმებულობა} \} \geq e_r,$

$x \in \Omega$ .

დაეუშვათ, რომ ამოცანას  $e$ -შეზღუდვებით აქვს ნახ. 7.35-ზე წარმოდგენილი სახე, სადაც  $c^r, c^m, c^p$  კრიტერიუმების გრადიენტებია.



ნახ. 7.35

ნახ. 7.35-დან ჩანს, რომ

- ა) დასაშვებ ამონახსნთა შეკუმშულ არეში მოგების მაქსიმიზაციას  $x^1$  წერტილი უზრუნველყოფს, მიუხედავად იმისა, რომ  $\Omega$  სიმრავლის  $x^1$  წერტილი მოგების მაქსიმიზაციის წერტილია;

- ბ)  $x^*$  წერტილი ეფექტურია, რადგან  $E = \gamma(x^1, x^*) \cup \gamma(x^2, x^*) \cup \gamma(x^4, x^*)$ ;
- გ) თუმცა  $x^*$  წერტილი შეკუმშული დასაშვები არის კუთხის წერტილია, იგი არ წარმოადგენს  $\Omega$  არის კუთხის წერტილს;
- დ)  $x^*$  წერტილი თავის მდებარეობას იცვლის  $e_2$ -ს მცირე ცვლილების დროს, მაგრამ  $e_3$ -ის მცირე ცვლილება მასზე არ მოქმედებს.

შენიშვნა გ)-ში არსებითად შემოთავაზებულია ამონახსნის მგრძობიარობის ანალიზის გარკვეული შესაძლებლობები, რომლებსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

### 7.4.1 e-შეზღუდვების მეთოდის რეალიზაცია

სამწუხაროდ, e-შეზღუდვების მეთოდის გამოყენების მკაცრად დადგენილი პროცედურა არ არსებობს, ვინაიდან ზუსტად არასოდეს არის ცნობილი, თუ როგორ უნდა განხორციელდეს ამოცანის ფორმულირება. ის, თუ რომელი კრიტერიუმი უნდა გადავიტანოთ შეზღუდვებში და რა e სიდიდით შემოვსაზღვროთ, ძირითადად დამოკიდებულია ამოცანის შინაარსზე და მომხმარებლის მიერ მის სწორად გააზრებაზე.

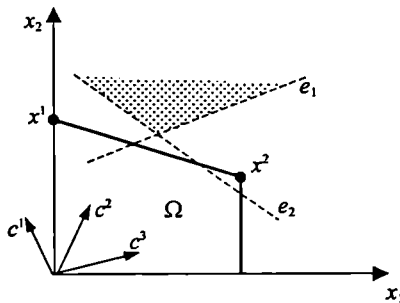
ამოცანის ფორმულირების ამორჩევის ძირითადი იდეა ამონახსნის კარგი მიახლოების მიღებაში მდგომარეობს. საწყისი მიახლოების საფუძველზე შესაძლებელია ახალი ფორმულირების შერჩევა, რომელიც შედარებით უკეთესი ამონახსნის მიღებას უზრუნველყოფს. თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირი ამ მიმართულებით გააგრძელებს ექსპერიმენტებს, იგი, ადრე თუ გვიან, მიიღებს წერტილს, სადაც გაჩერდება (შესაძლოა აღნიშნულმა პროცედურამ მას, უბრალოდ, წონასწორობა დააკარგინოს). მიღებული ამონახსნების სიმრავლიდან გადაწყვეტილების მიმღები პირი ამოარჩევს წერტილს, რომელიც მისი აზრით საბოლოო ამონახსნს ყველაზე უკეთ შეესაბამება. მიუხედავად იმისა, რომ e-შეზღუდვების მეთოდს ნაკლოვანებები გააჩნია, მან მაინც მოიპოვა გარკვეული პოპულარობა, რადგან ადვილად აღიქმევა და იყენებს სტანდარტულ მათემატიკურ უზრუნველყოფას.

e-შეზღუდვების მეთოდთან დაკავშირებით საჭიროა აღინიშნოს ორი მომენტი. პირველი - გამოთვლების პროცედურას აქვს ინტერაქტიული ხასიათი. გამოთვლების ყოველი ციკლის შემდეგ ადგილი აქვს შედეგების შეფასებას და მხოლოდ ამის შემდეგ ფორმულირდება ახალი ამოცანა გამოთვლების შემდეგი ციკლისათვის. მეორე - მეთოდი საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ მთელი სერია ამონახსნებისა, საიდანაც შესაძლებელია ამოვარჩიოთ საბოლოო ამონახსნი.

## 7.4.2 უმსაძლო შედეგები

ჩვეულებრივ, როცა  $E \neq \emptyset$ ,  $e$ -შეზღუდვების მქონე წრფივი დაპროგრამების ამოცანას ეფექტური ამონახსნი გააჩნია, ხოლო როცა  $E = \emptyset$ , მაშინ ამოცანის მიზნის ფუნქცია შემოუსაზღვრავია. თუმცა შესაძლებელია სხვა არაორდინალური შედეგებიც, რომლებსაც ქვემოთ მოცემულ მაგალითებში განვიხილავთ.

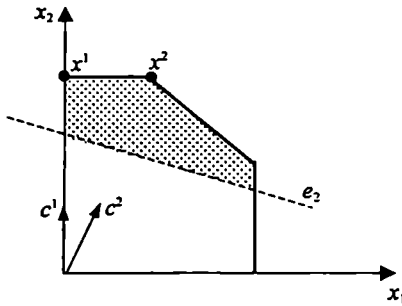
**მაგალიტი 7.26** (შემთხვევა, როცა  $e$ -შეზღუდვებიანი ამოცანა არათავსებადია). განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა, რომელიც წარმოდგენილია ნახ. 7.36-ზე. აღნიშნულ ამოცანაში  $E = \gamma(x^1, x^2)$ . მაგრამ  $e$ -შეზღუდვებიანი ამოცანა, რომელშიც  $e_1$  და  $e_2$  პირველი ორი კრიტერიუმის შეზღუდვათა მარჯვენა მხარეს წარმოადგენს, არათავსებადია. ეს უკანასკნელი გამოწვეულია იმით, რომ ნახ. 7.36-ზე დაშტრიხულ არეს  $\Omega$  სიმრავლესთან საერთო წერტილები არ გააჩნია. მისი აღმოფხვრა შესაძლებელია  $e_j$ -ის მნიშვნელობების შემცირებით.



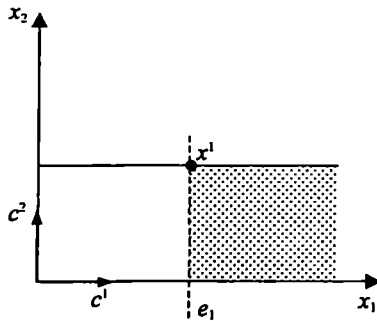
ნახ. 7.36

**მაგალიტი 7.27** (შემთხვევა, როცა მიღებული ამონახსნი არაეფექტურია, მაშინაც კი, როცა  $E \neq \emptyset$ ). განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა, რომელიც წარმოდგენილია ნახ. 7.37-ზე. აღნიშნულ ამოცანაში  $E = \{x^2\}$ . დაეუშვათ, რომ  $e$ -შეზღუდვებიანი ამოცანის ფორმირება განხორციელებულია შეზღუდვების რიგში მეორე კრიტერიუმის გადატანითა და მისი ქვედა საზღვრისათვის  $e_2$  მნიშვნელობის მინიჭებით (როგორც ნაჩვენებია ნახ. 7.37-ზე). თუ შემცირებულ დასაშვებ არეზე პირველი კრიტერიუმის მაქსიმიზაციის ამოცანას წრფივი დაპროგრამების სტანდარტული მეთოდებით ამოვხსნით, მივიღებთ  $x^1$  წერტილს. შევნიშნავთ, რომ  $x^1$  წერტილი არაეფექტურია. განხილული სიტუაციის წარმოქმნა დაკავშირებულია

წრფივი დაპროგრამების ფორმულირებულ ამოცანაში ალტერნატიული ოპტიმუმების არსებობასთან.



ნახ. 7.37



ნახ. 7.38

**მაბალნითი 7.28** (შემთხვევა, როცა მაქსიმუმის წერტილის გენერირებას ადგილი აქვს მაშინაც კი, როცა  $E = \emptyset$ ). ვთქვათ,  $e$ -შეზღუდვებიანი ამოცანა ფორმირდება პირველი კრიტერიუმის შეზღუდვების რიგში გადატანითა და ქვემოდან  $e_1$  სიდიდით შემოსაზღვრით, როგორც ნაჩვენებია ნახ. 7.38-ზე. თუ დასაშვებ ამონახსნთა შეკუმშულ არეზე მეორე კრიტერიუმის მიხედვით მაქსიმიზაციის ამოცანა გადაწყდება, მივიღებთ არაუეფექტურ  $x^1$  წერტილს. ისევე, როგორც 7.27 მაგალითში,  $e$ -შეზღუდვების მეთოდის საშუალებით მიიღება წერტილი, რომელიც არ შეიძლება იყოს ამონახსნი.

ამგვარად, შეიძლება გამოვიტანოთ შემდეგი დასკვნა. როცა  $E \neq \emptyset$ , მაშინ  $e$ -შეზღუდვებიან ამოცანაში, თუ იგი თავსებადია, მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ამონახსნთა სიმრავლე ერთ ეფექტურ წერტილს მაინც შეიცავს. როცა  $E = \emptyset$ , მაშინ  $e$ -შეზღუდვებიან ამოცანას, თუ იგი თავსებადია, შეიძლება ჰქონდეს შემოსაზღვრული მიზნის ფუნქცია, მაგრამ თუ ეს ასეა, მაშინ შემოსაზღვრავე იქნება ამონახსნთა სიმრავლე.

### 7.4.3 მბრძნობიარობის ანალიზი

ეთქვას,  $\bar{x}$  ეფექტური წერტილია, ხოლო  $\bar{z}$  მისი შესაბამისი არადომინირებული კრიტერიუმების ვექტორი. მაშინ, გამოვიყენებთ რა  $e$ -შეზღუდვებიან ამოცანას, თუ მისი ამონახსნი არ არის გადაგვარებული, შეიძლება გამოვთვალოთ  $i$ -ური კრიტერიუმის  $j$ -ური კრიტერიუმით ჩანაცვლების კერძო  $\left. \frac{\partial z_i}{\partial z_j} \right|_{\bar{x}}$  ნორმა არადომინირებული

სიმრავლის  $\bar{x}$  წერტილში იმ პირობის გათვალისწინებით, რომ  $\bar{x}$  წერტილში დანარჩენი კრიტერიუმები დაფიქსირებულია. ამასთან,  $(i, j)$ -ური ჩანაცვლების კერძო ნორმა განსაზღვრება ორადული (დუალური) ცვლადის მნიშვნელობით, რომელიც წრფივი დაპროგრამების ქვემოთ მოცემულ ამოცანაში შეესაბამება  $j$ -ური კრიტერიუმის შეზღუდვას:

$$\max \{ c'x = z, \},$$

$$\text{როცა } c'x \geq z_j, \quad j=1,2,\dots,k, \quad j \neq i,$$

$$x \in \Omega.$$

ჩანაცვლების კერძო ნორმა ახასიათებს არადომინირებულ სიმრავლეს იმ აზრით, რომ  $j$ -ური შეზღუდვის შესწოთების შემდეგ კრიტერიუმების მარეზულტირებელი ვექტორი ჩანაცვლების კერძო ნორმის გამოყენებით შეიძლება გადავითვალოთ ისე, რომ იგი დარჩება არადომინირებულ სიმრავლეში. ამგვარად,  $e$ -შეზღუდვების აპარატის საშუალებით შესაძლებელია არადომინირებულ სიმრავლეზე კრიტერიუმების ჩანაცვლების შესახებ ლოკალური ინფორმაციის მიღება.

## 7.5 თითქმის-ოპტიმალობის ანალიზი

თითქმის-ოპტიმალობის ანალიზი დასაშვებ ამონახსნთა არის  $\epsilon$ -შეზღუდვების მეთოდისაგან განსხვავებული შეკუმშვის საშუალებაა. აწონილ ჯამთა მეთოდის საშუალებით მიღებული (ეფექტური) წერტილის თითქმის-ოპტიმალობის ანალიზის ლოგიკური სტრუქტურა შემდეგში მდგომარეობს.

**ბიჭი 1.** გადავწყვიტოთ წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი ამოცანა

$$\max \{ \lambda^T Cx = z \},$$

როცა  $x \in \Omega$

და ჩვეულებრივად განვსაზღვროთ  $z^*$  სიდიდე - "ხარისხის მაჩვენებლის" მნიშვნელობა.

**ბიჭი 2.** ამოვიჩინოთ  $z^*$ -ზე ნაკლები რომელიღაც  $\bar{z}$  სიდიდე და დასაშვებ ამონახსნთა შეკუმშული არისათვის გადავწყვიტოთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანა ნულოვანი კრიტერიუმით

$$\max \{ 0^T x \},$$

როცა  $x \in \Omega,$

$$\lambda^T Cx \geq \bar{z}.$$

ამასთან, გამოვთვალოთ ყველა კუთხის წერტილი, რომელიც მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს (ე.ი. ვიპოვოთ ყველა კუთხის წერტილი დასაშვებ ამონახსნთა შეკუმშული არისა, რომელიც დამატებითი  $\lambda^T Cx \geq \bar{z}$  შეზღუდვის გათვალისწინებით განისაზღვრება).

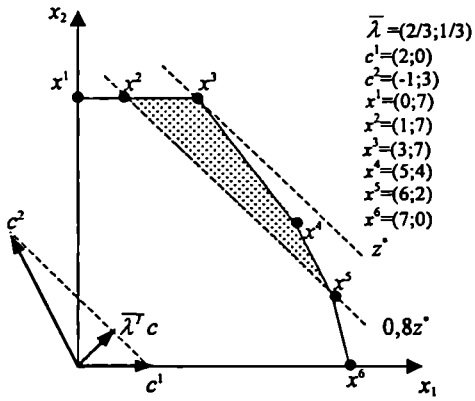
**ბიჭი 3.** გამოვთვალოთ ყველა კრიტერიალური  $z' \in R^1$  ვექტორი, რომელიც შეზღუდული არის კუთხის  $x'$  წერტილებს შესაბამება.

**ბიჭი 4.** წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანის საბოლოო ამონახსნის განსაზღვრისათვის ამოვიჩინოთ ყველაზე უპირატესი კრიტერიალური ვექტორის შესაბამისი  $x'$  წერტილი.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ თუ წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი ამოცანის გადასაწყვეტად (რომელიც გათვალისწინებულია ალგორითმის 1-ლი ბიჯით) საკ-

მარისია სტანდარტული მათემატიკური უზრუნველყოფის გამოყენება, შეკუმშული დასაშვები არის კუთხის წერტილების გამოსათვლელად (რომელიც გათვალისწინებულია ალგორითმის მე-2 ბიჯით) საჭიროა გამოყენება სპეციალური მათემატიკური უზრუნველყოფისა, რომელსაც ყველა ალტერნატიული ოპტიმუმის განსაზღვრის შესაძლებლობა გააჩნია.

**მაბალაიტი 7.29.** დაეუშვათ, რომ ნახ. 7.39-ზე მოცემული  $x^1$  წერტილი წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი ამოცანის ამონახსნია. თუ "ხარისხის მაჩვენებელს"  $z^1$ -დან  $0.8z^1$ -მდე შევამცირებთ, მაშინ წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, რომელიც ზემოთ მოცემული ალგორითმის მე-2 ბიჯის თანახმად დასაშვებ ამონახსნთა შეკუმშულ არეს შეესაბამება, ამოხსნადია და მისი ამონახსნებია კუთხის  $x^2, x^3, x^4$  და  $x^5$  წერტილები. შევნიშნავთ, რომ ყველა აღნიშნული წერტილი ეფექტურია, ვინაიდან  $E = \chi(x^1, x^2) \cup \chi(x^2, x^3) \cup \chi(x^3, x^4) \cup \chi(x^4, x^5) \cup \chi(x^5, x^6)$ .



ნახ. 7.39

შემდეგ ეტაპზე გამოითვლება კრიტერიული ვექტორების მნიშვნელობები:

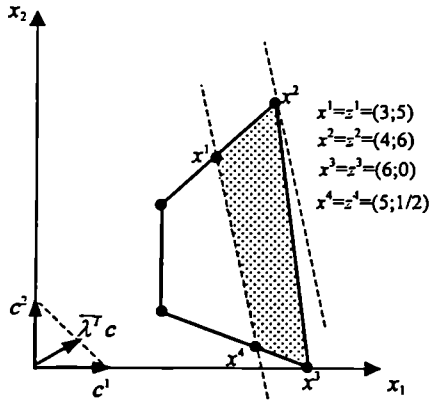
$$z^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad z^3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad z^4 = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad z^5 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ამორჩევა ყველაზე უპირატესი კრიტერიუმში, მაგალითად,  $z^4$  და ჩაითვლება, რომ  $x^4$  საბოლოო ამონახსნია.

განხილულ მაგალითში შეკუმშული დასაშვები არის ყველა კუთხის წერტილი ეფექტურია, მაგრამ ყოველთვის ასე არ ხდება, რაც ილუსტრირებულია შემდეგ მაგალითში.

მაბალნითი 7.30. განვიხილოთ ნახ. 7.40. მიუხედავად იმისა, რომ  $x^1, x^2, x^3, x^4$  შეკუმშული დასაშვები არის კუთხის წერტილებია, ეფექტურია მხოლოდ  $x^2$  და  $x^3$  წერტილები, ვინაიდან  $E = \chi(x^2, x^3)$ .

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ყველა არაეფექტური კუთხის წერტილის გამოსარიცხავად არადომინირებული კრიტიკული ვექტორების წყვილ-წყვილად შედარება არასაკმარისია. ვინაიდან  $z^2$  დომინირებს  $z^1$ -ზე, ამიტომ არაეფექტური  $x^1$  წერტილი უნდა გამოირიცხოს. მაგრამ ამ წესით შეუძლებელია გამოირიცხოს, მაგალითად,  $x^4$  წერტილი, ვინაიდან  $z^4$  არ დომინირებს დანარჩენ არცერთ კუთხის წერტილის შესაბამის კრიტიკულ ვექტორზე. ამგვარად, გადაწყვეტილების მიძიება პირის მიერ არაეფექტური წერტილებიც შეიძლება იყოს განხილული (თუ მათ გამოსარიცხავად არ გამოიყენება უფრო მგრძნობიარე მეთოდი).



ნახ. 7.40



## 7.6 ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმები

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

⋮

$$\max \{ c^k x = z_k \},$$

$$\text{როცა } x \in \Omega = \{ x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0, b \in R^m \},$$

სადაც  $A$  სრული რანგის მატრიცაა. აღნიშნული ამოცანა კომპაქტური ფორმით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\text{"max" } \{ Cx = z \mid x \in \Omega \}.$$

აქ  $C$  არის  $k \times n$ -განზომილებიანი მატრიცა, რომლის სტრიქონებს  $c^1, c^2, \dots, c^k$  ვექტორ-სტრიქონები წარმოადგეს.

წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანები ვექტორული მაქსიმიზაციის ამოცანებია იმ გაგებით, რომ საჭიროა მოიძებნოს  $\Omega$  სიმრავლის წერტილი ან წერტილები, რომლებიც კრიტერიული

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_k \end{bmatrix}$$

ვექტორის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს.

სამწუხაროდ, ვექტორის მაქსიმიზაციის იდეა არასაკმარისად ნათელია. რასაკვირველია, პრობლემას ადგილი არ ექნებოდა წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერ მრავალკრიტერიულ ამოცანაში  $\Omega$  სიმრავლის ისეთი წერტილის არსებობის შემთხვევაში, როცა იგი ყველა კრიტერიუმს ერთდროულად მიანიჭებდა მაქსიმალურ მნიშვნელობას. რადგან ასეთი რამ იშვიათია, ამიტომ აღნიშნულ ამოცანებში გამოიყენება ამონახსნის უფრო ზოგადი კონცეფცია, რომელიც ვექტურობის ცნებას ეყრდნობა.

**ბანსაზღვრება 7.6.**  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილი ეფექტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ არსებობს სხვა ისეთი  $x \in \Omega$  წერტილი, რომ

$$Cx \geq C\bar{x}, Cx \neq C\bar{x}.$$

ე.ი.  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილი ეფექტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ არსებობს სხვა ისეთი  $x \in \Omega$  წერტილი, რომ  $z_i(x) \geq z_i(\bar{x})$  ყველა  $i$ -სთვის და  $z_i(x) > z_i(\bar{x})$  ერთი  $i$ -სთვის მაინც. მაშასადამე, როცა ვსაუბრობთ მრავალკრიტერიული წრფივი დაპროგრამების ვექტორული მაქსიმიზაციის რომელიღაც ამოცანის ამონახსნაზე, მხედველობაში გვაქვს ეფექტური სიმრავლის აღწერის პრობლემა. ამასთან დაკავშირებით, შედარებით უფრო მოსახერხებელია წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანის ჩაწერა ე.წ. ვექტორული მაქსიმიზაციის ფორმით

$$\text{eff} \{ Cx = z \mid x \in \Omega \},$$

სადაც  $\text{eff}$  აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ ამოცანის ყველა ამონახსნთა სიმრავლე ეფექტურია.

ვექტორული კრიტერიუმის მაქსიმიზაციის წრფივ ამოცანაში ეფექტური სიმრავლის აღწერის მრავალი, ერთმანეთისგან განსხვავებული ალგორითმი არსებობს, ასე, მაგალითად, არსებობს ალგორითმები, რომლებიც ყველა ეფექტურ კუთხის წერტილს ითვლის; ალგორითმები, რომლებიც განსაზღვრავს ყველა ეფექტურ კუთხის წერტილსა და არაშემოსაზღვრულ ეფექტურ წიბოებს; და ბოლოს, ალგორითმები, რომლებიც ითვლის ეფექტური წახნაგებიდან ყველა მაქსიმალურს.

### 7.6.1 მათემატიკური საფუძვლები

განვიხილოთ ძირითადი დებულებები, რომლებიც საფუძვლად უდევს ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმების შესწავლას.

**თეორემა 7.9** (ტაკერის თეორემა ალტერნატივის შესახებ). ვთქვათ  $L$ ,  $M$  და  $N$  შესაბამისად  $p^2 \times n$ ,  $p^3 \times n$ - და  $p^4 \times n$ -განზომილებიანი მოცემული მატრიცებია და, ამასთან,  $L$  არანულოვანია. მაშინ

$$Lx \geq 0, Lx \neq 0, Mx \geq 0, Nx = 0$$

ამოცანის ამონახსნია  $x \in R^n$  ან

$$L^T y^2 + M^T y^3 + N^T y^4 = 0, y^2 > 0, y^3 \geq 0$$

ამოცანის ამონახსნია  $y^2 \in R^{p^2}$ ,  $y^3 \in R^{p^3}$ ,  $y^4 \in R^{p^4}$ , მაგრამ ერთდროულად ორივე ამოცანა არასდროს არ არის ამონახსნი.

თეორემა 7.10 (მოცულის თეორემა ალტერნატივის შესახებ). ვთქვათ,  $K$ ,  $M$  და  $N$  შესაბამისად  $p^1 \times n$ -,  $p^2 \times n$ - და  $p^3 \times n$ -განზომილებიანი მოცემული მატრიცებია და, ამასთან,  $K$  არანულოვანია. მაშინ

$$Kx > 0, \quad Mx \geq 0, \quad Nx = 0$$

ამოცანის ამონახსნია  $x \in R^n$  ან

$$K^T y^1 + M^T y^2 + N^T y^3 = 0, \quad y^1 \geq 0, \quad y^1 \neq 0, \quad y^3 \geq 0$$

ამოცანის ამონახსნია  $y^1 \in R^{p^1}$ ,  $y^2 \in R^{p^2}$ ,  $y^3 \in R^{p^3}$ , მაგრამ ერთდროულად ორივე ამოცანა არასდროს არ არის ამოხსნადი.

თეორემა 7.11 ვთქვათ,  $\bar{x} \in \Omega$ , ხოლო  $D$  წარმოადგენს  $n \times n$ -განზომილებიან დიაგონალურ მატრიცას, ამასთან,

$$d_{jj} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \bar{x}_j = 0, \\ 0, & \text{თუ } \bar{x}_j \neq 0. \end{cases}$$

მაშინ იმისათვის, რომ  $\bar{x} \in E$ , სადაც  $E$  ეფექტურობის სიმრავლეა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$Cu \geq 0, \quad Cu \neq 0, \quad Du \geq 0, \quad Au = 0$$

სისტემას არ ჰქონდეს  $u \in R^n$  ამონახსნი.

თეორემა 7.12 ვთქვათ,  $\bar{x} \in \Omega$ , ხოლო  $D$  წარმოადგენს  $n \times n$ -განზომილებიან დიაგონალურ მატრიცას, ამასთან,

$$d_{jj} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \bar{x}_j = 0, \\ 0, & \text{თუ } \bar{x}_j \neq 0. \end{cases}$$

მაშინ, იმისათვის, რომ  $\bar{x}$  წერტილი იყოს ეფექტური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს ისეთი  $\pi \in R^k$ ,  $y^2 \in R^n$  და  $y^3 \in R^m$ , რომ

$$C^T \pi + D^T y^2 + A^T y^3 = 0, \quad \pi > 0, \quad y^3 \geq 0.$$

თეორემა 7.13. იმისათვის, რომ  $\bar{x} \in \Omega$  წერტილი იყოს ეფექტური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს ისეთი ვექტორი

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\},$$

რომ  $\bar{x}$  წერტილი წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების შედგენილი (აწონილჯამ-ბიანი) ამოცანის

$$\max \{ \lambda^T Cx \mid x \in \Omega \}$$

ამონახსნს.

აღნიშნული თეორემების დამტკიცება მოცემულია მონოგრაფიაში [148].

## 7.6.2 ვექტორული მაქსიმიზაციის თეორია

განვიხილოთ ზოგიერთი თეორიული დებულება, რომელიც გამოყენებულია ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმების შემუშავების პროცესში (ყველა დებულების დამტკიცება მოცემულია მონოგრაფიაში [148]).

**თეორემა 7.14.** თუ  $\Omega$  სიმრავლეს ეფექტური წერტილი გააჩნია, მაშინ  $\Omega$ -ს კუთხის წერტილებიდან ერთი მაინც ეფექტურია.

აღნიშნული დებულების დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 7.13 თეორემიდან და იმ მტკიცებიდან, რომ თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას ოპტიმალური ამონახსნი გააჩნია, მაშინ მას ოპტიმალური კუთხის წერტილიც გააჩნია.

**ბანსაზღვრება 7.7.** ვთქვათ,  $C_B$  და  $C_N$  შესაბამისად  $C$  მატრიცის ბაზისური და არაბაზისური სვეტებია, ხოლო  $N$  არის  $A$  მატრიცის არაბაზისური სვეტები. მაშინ  $W = C_B B^{-1} N - C_N$  მატრიცას, რომლის განზომილებაა  $k \times (m-n)$ , ვუწოდებთ **ფარდობითი შეფასებების მატრიცას**.

**ბანსაზღვრება 7.8.**  $B$  ბაზისის ეფექტურს ვუწოდებთ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ოპტიმალურ ბაზისის წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების შედგენილ ამოცანაში რაღაც  $\lambda \in \Lambda$ -თი.

ვინაიდან წრფივი დაპროგრამების შედგენილ ამოცანაში ფარდობითი შეფასებების სტრიქონი  $\lambda^T W$  ნამრავლით მოიცემა, ამიტომ  $B$  ბაზისი ეფექტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თავსებადია უტოლობათა სისტემა

$$\lambda^T W \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

**თეორემა 7.15.** ვთქვათ,  $x \in \Omega$  კუთხის წერტილია, რომელიც ეფექტურ  $B$  ბაზის შესაბამეა. მაშინ  $x$  ეფექტურია.

**თეორემა 7.16.** ვთქვათ,  $x \in \Omega$  ეფექტური კუთხის წერტილია. მაშინ არსებობს მისი შესაბამისი ეფექტური ბაზისი.

ამგვარად, თუ ყველა ეფექტური ბაზისი მოძებნილია, მაშინ 7.15 და 7.16 თეორემების საფუძველზე განსაზღვრული იქნება ყველა ეფექტური კუთხის წერტილიც.

**ბანსაზღვრება 7.9.**  $\bar{B}$  და  $\hat{B}$  ბაზისებს მოსაზღვრეს უწოდებენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესაძლებელია ერთ-ერთი მათგანის მეორისგან ერთი ჩანაცვლებით მიღება.

**ბანსაზღვრება 7.10.** ვთქვათ,  $B$  ეფექტური ბაზისია.  $x$ , ცვლადს ეწოდება ეფექტური არაბაზისური ცვლადი  $B$  ბაზისის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი  $\lambda \in \Lambda$ , რომ

$$\lambda^T W \geq 0, \quad \lambda^T w^j = 0,$$

სადაც  $w^j$  არის  $W$  მატრიცის  $j$ -ური სვეტი.

**ბანსაზღვრება 7.11.** ვთქვათ,  $B$  ეფექტური ბაზისია და  $x$ , არაბაზისური, ბაზისში შესაყვანი, ეფექტური ცვლადი. მაშინ  $B$ -ში ნებისმიერ დასაშვებ ჩანაცვლებას (მათ შორის უარყოფითი წამყვანი ელემენტით, რომელსაც გადაგვარებული ბაზისური ცვლადი შეესაბამება) ეწოდება  $B$  ბაზისისა და  $x$ , ცვლადის მიმართ ეფექტური ჩანაცვლება.

**თეორემა 7.17.** ვთქვათ,  $B$  ეფექტური ბაზისია. მაშინ  $B$ -ში ნებისმიერი ეფექტური ჩანაცვლების შედეგად მოსაზღვრე ეფექტურ  $\hat{B}$  ბაზისი მიიღება.

**თეორემა 7.18.** ვთქვათ,  $\bar{B}$  და  $\hat{B}$  მოსაზღვრე ეფექტური ბაზისებია, ამასთან, შესაძლებელია ერთ-ერთი მათგანის მეორისგან ერთი ეფექტური ჩანაცვლებით მიღება. დაეუწვათ, რომ  $\bar{x}$  და  $\hat{x}$  შესაბამისად  $\bar{B}$  და  $\hat{B}$  ბაზისების კუთხის წერტილებია. მაშინ  $\gamma(\bar{x}, \hat{x})$  წიბო ეფექტურია.

აღსანიშნავია, რომ შემოუსაზღვრავ ეფექტურ წიბოებს ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს ეფექტური არაბაზისური ცვლადები, რომლის სვეტებში შეუძლებელია დადებითი წამყვანი ელემენტების მოძებნა.

განვიხილოთ ეფექტური  $B$  ბაზისი. იმისათვის, რომ  $B$ -ს მიმართ არაბაზისური ცვლადის ეფექტურობა რიცხობრივად განვსაზღვროთ, საჭიროა გამოვიყენოთ 7.19 თეორემაში მოყვანილი ქვეამოცანა-ტესტი, სადაც  $e$  აჯამვის ერთეულოვანი ვექტორია.

**თეორემა 7.19.** ვთქვათ,  $x$ , ეფექტური  $B$  ბაზისის მიმართ არაბაზისური ცვლადია, ხოლო  $W$  არის  $B$  ბაზისის შესაბამისი ფარდობითი შეფასებების მატრიცა. მაშინ, იმისათვის, რომ ყველა დასაშვები ჩანაცვლება (მათ შორის უარყოფითი წამყვანი

ელემენტებისთვისაც), რომელიც შეიძლება განხორციელებულ იქნეს  $x$ , სვეტის შემოტანით, იყოს ეფექტური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ქვემოცანას

$$\max \{ e^T v \},$$

$$\text{როცა } Wy - w'\delta + Iv = 0,$$

$$0 \leq y \in R^{n-m}, \quad 0 \leq \delta \in R, \quad 0 \leq v \in R^k,$$

სადაც  $I$  ერთეულოვანი მატრიცაა, გააჩნდეს მიზნის ფუნქციის ნულოვანი ოპტიმალური მნიშვნელობა.

შენიშნავთ, რომ ქვემოცანა ყოველთვის თავსებადია. ამიტომ თუ  $x$ , არაეფექტური არაბაზისური ცვლადია, მაშინ ქვემოცანაში მიზნის ფუნქციას აქვს დადებითი შემოსაზღვრავი ოპტიმალური მნიშვნელობა. ამგვარად, 7.19 თეორემის ძირითადი არსი შემდეგში მდგომარეობს:

- $x$ , ეფექტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ქვემოცანის მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია;
- $x$ , არაეფექტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ქვემოცანის მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრავია.

ვინაიდან ქვემოცანაში ყოველთვის ზუსტად იმდენი შეზღუდვაა, რამდენი სტრიქონიცაა კრიტერიულ მატრიცაში, ამიტომ ქვემოცანას, ჩვეულებრივ, აქვს "მცირე" განზომილება, რადგან  $k$ , როგორც წესი, ბევრად ნაკლებია  $m$ -ზე. გადაუგვარებელი კუთხის ეფექტური წერტილის შემთხვევაში, 7.19 თეორემის საფუძველზე შეიძლება განისაზღვროს ამ წერტილიდან გამომავალი წიბოების ეფექტურობა.

ბანსაზღვრვამ 7.12 ვთქვათ,  $\bar{B}$  და  $\hat{B}$  ეფექტური ბაზისებია. თუ შესაძლებელია ერთ-ერთი მათგანი ბეორისგან მხოლოდ ეფექტური ჩანაცვლებების გზით მივიღოთ, მაშინ  $\bar{B}$  და  $\hat{B}$  ბაზისებს გადაბმულს უწოდებენ.

თეორემა 7.20. ყველა ეფექტური ბაზისი გადაბმულია.

თეორემა 7.21 ვთქვათ,  $\mu(x, v)$  არის  $\Omega$  სიმრავლის შემოსაზღვრავი ეფექტური წიბო. მაშინ  $x$  ეფექტური კუთხის წერტილია და მას მისი შესაბამისი ეფექტური  $B$  ბაზისი გააჩნია.

თეორემა 7.22 გამოიყენებთ რა 7.19 თეორემის ქვემოცანა-ტესტს და ყველა ეფექტურ ბაზისს შორის ჩანაცვლებას გავახორციელებთ, შეიძლება განვსაზღვროთ

Ω სიმრავლის ყველა ეფექტური კუთხის წერტილი და ყველა შემოუსაზღვრავი ეფექტური წიბო.

**ბანსაზღვრება 7.13.** Ω სიმრავლის ორ ეფექტურ კუთხის წერტილს წიბოების საშუალებით გადაბმულს უწოდებენ, თუ ისინი  $\Omega$ -ის ეფექტური წიბოებისაგან შედგენილი ტრაექტორიით არიან დაკავშირებული.

7.18 და 7.20 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

**თეორემა 7.23.** Ω სიმრავლის ყველა ეფექტური კუთხის წერტილი წიბოების საშუალებით გადაბმულია.

## 7.6.3 ვექტორული მაქსიმიზაციის პირტი ალგორითმი

ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმი, რომელიც განკუთვნილია ყველა ეფექტური კუთხის წერტილისა და ყველა შემოუსაზღვრავი ეფექტური წიბოს გამოსათვლელად, შედგება შემდეგი სამი ძირითადი ეტაპისაგან.

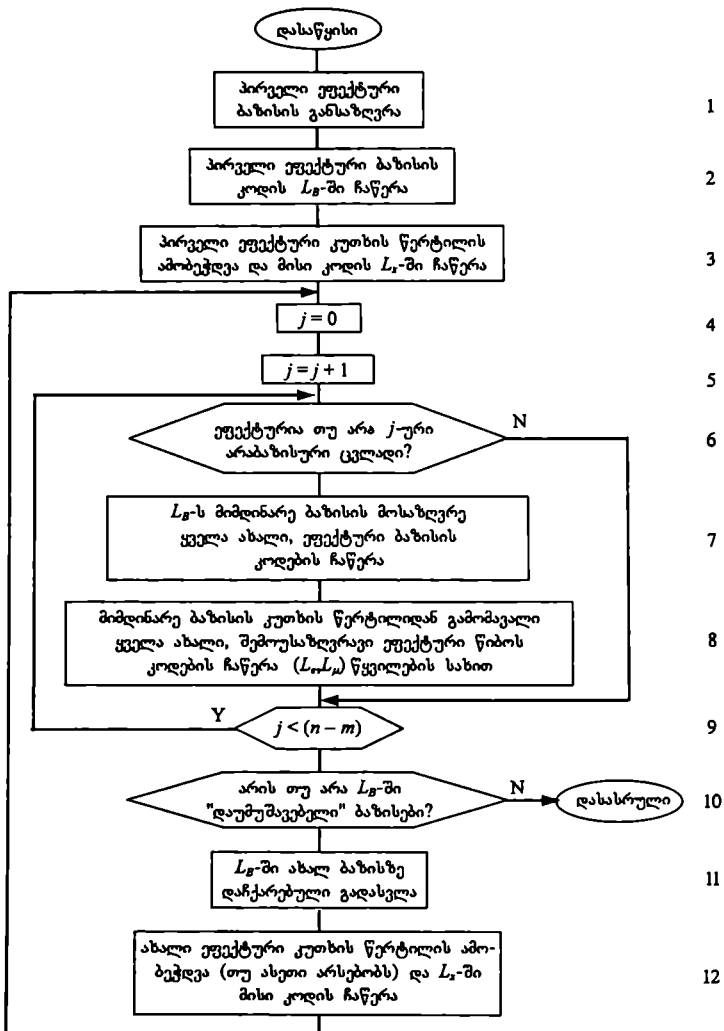
**ეტაპი I** განვსაზღვროთ რომელიღაც კუთხის წერტილი ან შევწყვიტოთ ამოცანის ამოხსნა, თუ  $\Omega = \emptyset$  (არათავსებადობა).

**ეტაპი II** განვსაზღვროთ საწყისი ეფექტური ბაზისი ან, თუ ასეთი არ არსებობს როცა  $E = \emptyset$  (ე.ი. ეფექტური სიმრავლე ცარიელია), შევწყვიტოთ ამოცანის ამოხსნა.

**ეტაპი III** გამოვთვალოთ ყველა ეფექტური კუთხის წერტილი და ყველა შემოუსაზღვრავი ეფექტური წიბო.

ალგორითმის I ეტაპი წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ჩვეულებრივი, ერთკრიტერიული ამოცანის ამოხსნის პირველ ეტაპს. საწყისი ეფექტური ბაზისის განსაზღვრის (II ეტაპი) ზოგიერთი მიდგომა განვიხილეთ 7.6.5 ნაწილში. ამ ეტაპზე აუცილებელია ვიპოვოთ ერთი ეფექტური ბაზისი მაინც, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში III ეტაპის რეალიზაცია შეუძლებელია.

ყველა ეფექტური კუთხის წერტილისა და ყველა შემოუსაზღვრავი ეფექტური წიბოს გამოსათვლელი ალგორითმის ბლოკ-სქემა წარმოდგენილია ნახ. 7.41-ზე.



ნახ. 7.41



## 7.6.4 მრავალკრიტერიული ამოცანების კლასიფიკაცია

ეთქვათ,  $E$  ეფექტური სიმრავლეა. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანების შემდეგი კლასიფიკაცია (კლასიფიკაციაში განხილული შემთხვევები ურთიერთგამომრიცხავი და სიტუაციის მთლიანად ამომწურავია):

1.  $\Omega = \emptyset$ ;
2.  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $E = \emptyset$  და ერთი კრიტერიუმის მნიშვნელობა მაინც შემოსაზღვრულია;
3.  $\Omega = \emptyset$ ,  $E = \emptyset$  და ყველა კრიტერიუმის მნიშვნელობა შემოუსაზღვრავია;
4.  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $E$  შედგება მხოლოდ ერთი წერტილისაგან;
5.  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $E$  შემოსაზღვრულია და შეიცავს წერტილთა უსასრულო რაოდენობას;
6.  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $E$  შემოუსაზღვრავია და ერთი კრიტერიუმის მნიშვნელობა მაინც შემოსაზღვრულია;
7.  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $E$  შემოუსაზღვრავია და ყველა კრიტერიუმის მნიშვნელობა შემოუსაზღვრავია.

კლასიფიკაციის პირველი შემთხვევა აღნიშნავს არათავსებადობას; კლასიფიკაციის 2-5 შემთხვევების საილუსტრაციო მაგალითები მოცემულია მონოგრაფიაში [148], ხოლო 6-7 შემთხვევების შესატყვისი სიტუაციები განხილულია 7.33 და 7.34 მაგალითებში.

## 7.6.5 საწყისი ეფექტური ბაზისის აგება

ზემოთ განხილული ალგორითმის III ეტაპის რეალიზაციისათვის აუცილებელია ეფექტური ბაზისის პოვნა. განვიხილოთ საშუალებები, რომლებიც II ეტაპზე გამოიყენება საწყისი ეფექტური კუთხის წერტილის განსაზღვრისათვის. თუ საწყისი კუთხის ეფექტურ წერტილს არაეფექტური ბაზისი შეესაბამება, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ ეფექტურ ბაზისზე გადასვლის ეკერისა და ხენგერის მიერ 1978 წელს შემოთავაზებული მეთოდის ანალოგიური მეთოდი.

## კუთხის წერტილების ეფექტურობის შესამოწმებელი კვამოცანა

იმისათვის, რომ განესაზღვროთ არის თუ არა  $\Omega$  სიმრავლის კუთხის წერტილი ეფექტური, შეიძლება გამოვიყენოთ 7.24 თეორემის კვამოცანა-ტესტი. უკანასკნელი თეორემა შეიძლება ფორმულირებულ იქნეს განსახილველი წერტილის შესაბამისი სიმპლექსური ცხრილის საფუძველზე.

თეორემა 7.24 [148]. ვთქვათ,  $x$  არის  $\Omega$  სიმრავლის კუთხის წერტილი,  $(B^{-1}N)_d$  არის  $B^{-1}N$  მატრიცის სტრიქონები, რომლებიც შეესაბამება გადაგვარებულ ბაზისურ ცვლადებს, ხოლო  $d$  - გადაგვარებულობის ხარისხის მახასიათებელი რიცხვი  $x$  წერტილში. მაშინ იმისათვის, რომ  $x$  წერტილი იყოს ეფექტური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ კუთხის წერტილის ეფექტურობის შესამოწმებელ კვამოცანას

$$\max \{ e^T v \},$$

$$\text{როცა } -W y + I v = 0,$$

$$(B^{-1}N)_d y + I s = 0,$$

$$0 \leq y \in R^{n-m}, \quad 0 \leq v \in R^t, \quad 0 \leq s \in R^d$$

გააჩნდეს ნულის ტოლი მიზნის ფუნქციის შემოსაზღვრული ოპტიმალური მნიშვნელობა.

თუ  $x$  წერტილი არაეფექტურია, მაშინ, 7.24 თეორემის საფუძველზე, შესაბამისი კვამოცანა-ტესტის მიზნის ფუნქციებს აქვს დადებითი შემოსაზღვრავი მნიშვნელობები.

### ეფექტური კუთხის წერტილის პოვნის მეთოდები

საწყისი ეფექტური კუთხის წერტილის მოსაძებნად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი მეთოდები:

1. აწონილ ჯამთა მეთოდი;
2. აწონილ ჯამთა მეთოდი კვამოცანა-ტესტის გამოყენებით;
3. ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდი;
4. ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდი კვამოცანა-ტესტის გამოყენებით;
5. კერ-კუადას მეთოდი;

6. ბენსონის მეთოდი.

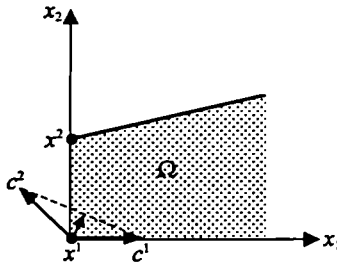
აწონილ ჯამთა მეთოდი. აღნიშნულ მეთოდში ამოიჩვენა რაღაც ვექტორი

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

და გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$\max \{ \lambda' Cx \mid x \in \Omega \}.$$

ამოცანის ამონახსნი, განსაზღვრის შემთხვევაში, ეფექტური იქნება 7.13 თეორემის საფუძველზე. თუ  $\Omega$  არე შემოსაზღვრულია და  $\Omega \neq \emptyset$ , მაშინ მეთოდი "დაზღვეულია წარუმატებლობისაგან" და ეფექტური კუთხის წერტილი მიიღება. თუმცა, როგორც 7.31 მაგალითიდან დაეინახავთ,  $\Omega$  არის შემოსაზღვრელობის შემთხვევაში მეთოდისაგან არაფრის გარანტიას არ უნდა მოველოდეთ.

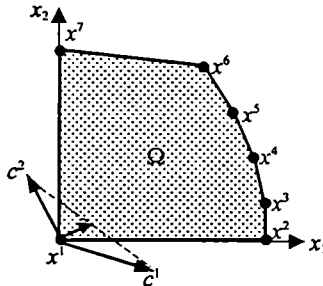


ნახ. 7.42

მაგალითი 7.31 ნახ. 7.42-ზე ეფექტური  $E$  სიმრავლე წარმოადგენს  $x^2$  წერტილიდან გამომავალ შემოსაზღვრავ წიბოს. დავუშვათ, რომ შევარჩიეთ ისეთი  $\lambda \in \Lambda$ , რომ შედგენილი ამოცანის მიზნის ფუნქციის გრადიენტი სწორედ ამ მიმართულებას ემთხვევა. წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი ამოცანის მაქსიმიზაციის დროს ჩანაცვლება, უპირველეს ყოვლისა, განხორციელდება  $x^1$  წერტილიდან  $x^2$  წერტილში, ამასთან, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა  $x^2$  წერტილში აღმოჩნდება შემოსაზღვრავი. საინტერესოა, რომ ამ შემთხვევაში აწონილ ჯამთა მეთოდი უშედეგოდ მთავრდება: ეფექტურ წერტილში "ჯდება"  $x^2$ , მაგრამ ამ ფაქტის აღმოჩენა შეუძლებელია.

აწონილ ჯამთა მეთოდი მკვამროცანა-ტესტის გამოყენებით. ვინაიდან აწონილ ჯამთა მეთოდი ეფექტურ კუთხის წერტილებს მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის მოძებნაზე პოულობს, ამიტომ შესაძლებელია დროის გარკვეულ ეკონომიას მივალწიოთ, თუ მეთოდის მუშაობის პროცესში კუთხის წერტილებს შევამოწმებთ. განვიხილოთ საილუსტრაციო მაგალითი.

მაგალითი 7.32 ნახ. 7.43-ზე  $x^2, x^3, \dots, x^7$  კუთხის წერტილები ეფექტურია. წრფივი დაპროგრამების შედგენილი ამოცანის მაქსიმიზაციის დროს ჩანაცვლებები, ცხადია, განხორციელდება  $x^2, x^3, x^4, x^5$  წერტილებში (რომლებიც ყველა ეფექტურია) და დამთავრდება  $x^6$  წერტილში, მაგრამ ქვეამოცანა-ტესტის გამოყენების შემთხვევაში, შეეჩერდებათ  $x^7$  წერტილში.



ნახ. 7.43

ამგვარად, ქვეამოცანა-ტესტის გამოყენებით აწონილ ჯამთა მეთოდს გარკვეული უპირატესობა აქვს და იგი შემდეგში მდგომარეობს. ჯერ-ერთი, შესაძლებელია დროის ეკონომია და მეორე - შემოსუსაზღვრავი  $\Omega$  არის შემთხვევაში მცირდება აწონილ ჯამთა მეთოდის წარუმატებლობის ალბათობა. რადგან შემოწმებაზეც დრო იხარჯება, ამიტომ დროის ჯამური დანაკარგების ეკონომიის ხარისხი მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული მეთოდის კონკრეტულ რეალიზაციაზე, ე.ი. იმაზე, თუ როდის იწყება და რა სიხშირით გამოიყენება ტესტირება.

ლემსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდი. ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის პროცესში ადგილი აქვს დასაშვები არის შეკუმშვის რეკურსიულად განსაზღვრულ შემდეგ პროცედურას:

$$\Omega_0 = \Omega,$$

$$\Omega_1 = \{ y \in \Omega \mid c^1 y = \max[c^1 x : x \in \Omega_0] \},$$

⋮

$\Omega_k$  - დასაშვები არის შეკუშვის არე  $h$  რაოდენობის მაქსიმიზაციის შემდეგ,

⋮

$$\Omega_k = \{ y \in \Omega \mid c^k y = \max[c^k x : x \in \Omega_{k-1}] \}.$$

პროცესი იწყება  $\Omega_0$  არეში მიზნის  $c^1 x$  ფუნქციის მაქსიმიზაციით. ამის შემდეგ, შემოვიფარგლებით რა  $\Omega_0$ -ის იმ წერტილებით, რომლებიც  $j_1$ -ური კრიტერიუმის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს, მივიღებთ  $\Omega_1$  არეს.  $\Omega_1$  არეში განხორციელდება მეორე  $c^2 x$  კრიტერიუმის მაქსიმიზაცია; შემოვიფარგლებით რა  $\Omega_1$ -ის იმ წერტილებით, რომლებიც  $j_2$ -ური კრიტერიუმის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს, მივიღებთ  $\Omega_2$  არეს. პროცესი ანალოგიურად გაგრძელდება მანამ, სანამ არ მიიღება  $\Omega_k \neq \emptyset$  ან, რომელიღაც  $l$ -დან ( $1 \leq l \leq k$ ) დაწყებული,  $\Omega_l, \Omega_{l+1}, \dots, \Omega_k = \emptyset$ . ამ უკანასკნელს ადგილი აქვს მაშინ, თუ ყველა დარჩენილი მიზნის ფუნქცია შემოუსაზღვრელია  $\Omega_{l-1}$ -ზე. ლექსიკოგრაფიულ მაქსიმიზაციასთან დაკავშირებული მიდგომის დასაბუთებისათვის დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი თეორიული დებულებები [148].

**თეორემა 7.25.** ვთქვათ,  $E \neq \emptyset$ ,  $\bar{x}$  არაუფექტური წერტილია,  $T = \{x \in \Omega \mid Cx \geq C\bar{x}\}$ ,  $E_T$  - წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული  $\text{eff}\{Cx = z \mid x \in T\}$  ამოცანის ეფექტური სიმრავლე. მაშინ  $E_T \neq \emptyset$  და  $E_T \subset E$ .

**თეორემა 7.26.** ვთქვათ  $E \neq \emptyset$ . მაშინ თითოეული არაუფექტური წერტილის კრიტერიული ვექტორი დომინირებულია რომელიღაც ეფექტური წერტილის კრიტერიული ვექტორით.

**თეორემა 7.27.**  $\Omega_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) არის კუთხის წერტილები  $\Omega$  არის კუთხის წერტილებს წარმოადგენს.

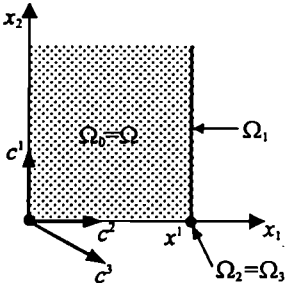
**თეორემა 7.28.** ვთქვათ,  $E \neq \emptyset$ . თუ  $\Omega_k \neq \emptyset$  რომელიღაც  $l$ -სთვის ( $1 \leq l \leq k$ ), მაშინ  $\Omega_l$  შეიცავს  $\Omega$  არის ეფექტურ კუთხის წერტილს.

**თეორემა 7.29.** ვთქვათ,  $\Omega_k \neq \emptyset$ . მაშინ, ჯერ-ერთი,  $\Omega_k \subset E$  და მეორე -  $\Omega_k$  არის თითოეული კუთხის წერტილი  $\Omega$  არის ეფექტურ კუთხის წერტილს წარმოადგენს.

7.33 და 7.34 მაგალითებში ილუსტრირებულია ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდის გამოყენების წარმატებული და წარუმატებელი შემთხვევები.

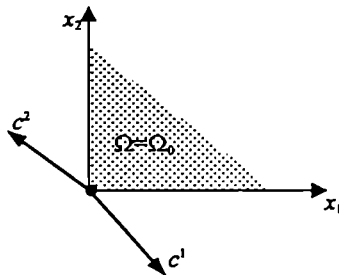
**მაგალიტი 7.33.** ნახ. 7.44-ზე  $E = \mu(x^1, \nu)$ , სადაც  $\nu = (0; 1)$ . მოცემულ ამოცანაში ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდის გამოყენების საფუძველზე ეფექტური კუთხის წერტილი შემდგენიად განისაზღვრება:

- ა)  $\Omega_0$  არეზე განხორციელდება მიზნის  $c^1 x$  ფუნქციის მაქსიმიზაციის მცდელობა, მაგრამ უშედეგოდ.
- ბ)  $\Omega_1$  არის განსაზღვრისათვის  $\Omega_0$ -ზე განხორციელდება მიზნის  $c^2 x$  ფუნქციის მაქსიმიზაცია. ამ შემთხვევაში  $j_1=2$ . (მაქსიმიზაციის პირველი ბიჯი დამთავრდება  $x^1$  წერტილში).
- გ)  $\Omega_1$  არეზე განხორციელდება მიზნის  $c^1 x$  ფუნქციის მაქსიმიზაციის უშედეგო მცდელობა.
- დ)  $\Omega_1$  არეზე განხორციელდება მიზნის  $c^2 x$  ფუნქციის მაქსიმიზაცია და განისაზღვრება  $\Omega_2 = \{x^1\}$ . ამ შემთხვევაში  $j_2=3$  (მაქსიმიზაციის მეორე ბიჯი დამთავრდება  $x^1$  წერტილში).
- ე)  $\Omega_2$  არეზე განხორციელდება  $c^1 x$  ფუნქციის მაქსიმიზაცია და განისაზღვრება  $\Omega_3 = \{x^1\}$ . ამ შემთხვევაში  $j_3=1$ . ამგვარად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ  $x^1$  ეფექტური კუთხის წერტილია.



ნახ. 7.44

**მაბალითი 7.34.** ნახ. 7.45-ზე გამოსახულ მაგალითში  $E$  სიმრავლე არაუარყოფითი ორტანტის საზღვარია. მოცემულ ამოცანაში ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაცია ვერ განხორციელდება, რადგან არ ხერხდება  $\Omega$ -ზე შემოსაზღვრული მიზნის ფუნქციის პონა რეკურსიული პროცესის დასაწყებად.

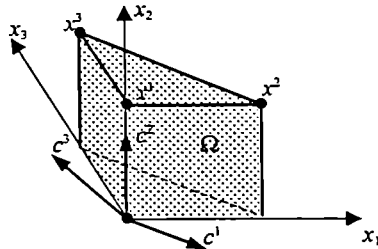


ნახ. 7.45

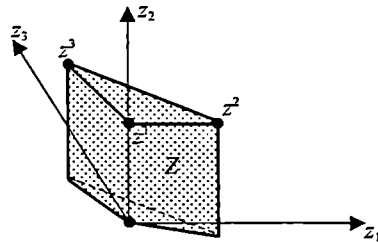
7.28 თორემასთან დაკავშირებით ისმის კითხვა: შემოსაზღვრული  $\Omega$  არის შემთხვევაში რატომ უნდა გამოვიყენოთ ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაცია? რატომ არ შეიძლება განვახორციელოთ ერთ-ერთი კრიტერიუმის მაქსიმიზაცია, გამოვიტოვოთ რა მის ყველა კუთხის წერტილს, რომელიც აღნიშნული კრიტერიუმის მაქსიმიზაციას უზრუნველყოფს, და შემდეგ, ეფექტური კუთხის წერტილის განსაზღვრის მიზნით, მათ წვეილ-წვეილად შევადარებთ? როგორც ქვემოთ მოცემული 7.35 მაგალითიდან ჩანს, აღნიშნულმა სქემამ შეიძლება არ იმუშაოს.

**მაბალითი 7.35.** განვიხილოთ ნახ. 7.46, სადაც  $c'$  და  $c''$  ვექტორები  $(x_1, x_2)$  სიბრტყეში ძვეს. ნახ. 7.47-ზე გამოსახულია  $Z$  არე - კრიტერიუმების სივრცეში მიღწევადობის არე.  $x^1, x^2$  და  $x^3$  წერტილები მეორე კრიტერიუმის მიმართ მაქსიმიზაციის კუთხის წერტილებია, ხოლო  $z^1, z^2$  და  $z^3$  - მათი შესაბამისი კრიტერიული ვექტორები.  $z^1, z^2$  და  $z^3$  ვექტორების წვეილ-წვეილად შედარების შედეგად არც ერთი მათგანი არ შეიძლება დაწუნებულ იქნეს როგორც დომინირებული, თუმცა  $z^1$  დომინირებული ვექტორია, რადგან  $E = \gamma(x^2, x^3)$ .

ამგეარად, ზემოთ განხილული მაგალითების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდი ეფექტური კუთხის წერტილის წარმატებით განსაზღვრის საშუალებას იძლევა, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა  $\Omega$ -ზე ყველა კრიტერიუმი შემოსაზღვრავია.



ნახ. 7.46



ნახ. 7.47

ლემსიკობრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდი ქვეამოცანა-ტესტის გამოყენებით. იმისათვის, რომ რაც შეიძლება სწრაფად მოვებნოთ ეფექტური კუთხის წერტილი და ყველა კრიტერიუმის  $\Omega$  არეზე შემოუსაზღვრელობის შემთხვევაში გააუმჯობესოთ ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდის თვისებები, საჭიროა ეფექტურობის შემოწმება. ამასთან, შესაძლებელია საწყის კუთხის წერტილში ქვეამოცანა გამოვიყენოთ და მაქსიმიზაციის ყოველი ბიჯის შემდეგ შემოწმება გავიმეოროთ ან შევამოწმოთ თითოეული კუთხის წერტილი. მიუხედავად იმისა, რომ ქვეამოცანა-ტესტის გამოყენების შემთხვევაში ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის მეთოდი კარგი საიმედოობით გამოირჩევა, იგი გარანტირებულ შედეგს ვერ უზრუნველყოფს იმ შემთხვევაში, როცა ყველა კრიტერიუმი  $N$ -ზე შემოუსაზღვრავია და  $E \neq \emptyset$ .

ქვე-აქსელს მეთოდი. განვიხილოთ ეკერისა და კუდას მიერ დამტკიცებული თეორემა [171].

თეორემა 7.30. ვთქვათ,  $x^0 \in \Omega$  და ადგილი აქვს ე.წ.  $E$ - $K$  პროგრამას



$$\max\{e^T s\},$$

$$\text{როცა } Cx = Is + Cx^0, \quad (7.10)$$

$$Ax = b,$$

$$0 \leq x \in R^n, \quad 0 \leq s \in R^k.$$

მაშინ, ჯერ-ერთი, თუ  $(\bar{x}, \bar{s})$  არის (7.10) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ  $\bar{x} \in E$  და მეორე - თუ (7.10) ამოცანაში მიზნის ფუნქცია ზემოდან შემოუსაზღვრავია, მაშინ  $E = \emptyset$ .

მაშასადამე, (7.10)  $E$ - $K$ -პროგრამა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ეფექტური წერტილი, როცა  $E \neq \emptyset$ , და ეფექტური წერტილების არარსებობის შემთხვევაში დავადგინოთ, რომ  $E = \emptyset$ . ეკერ-კუადის მეთოდის ნაკლს შეადგენს გარანტიის არარსებობა, რომ განსაზღვრული ეფექტური წერტილი ეკუთვნის  $\bar{N}$  არეს.

ბენსონის მეთოდი. ბენსონის ნაშრომში [157] საწყისი ეფექტური კუთხის წერტილის განსაზღვრისათვის შემოთავაზებულია შემდეგი სამბიჯიანი პროცედურა.

ბიჯი 1. ვთქვათ,  $\Omega \neq \emptyset$ . ვიპოვოთ ნებისმიერი  $x^0 \in \Omega$  წერტილი.

ბიჯი 2. გადავწყვიტოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\min\{-z^T Cx^0 + u^T b\},$$

$$\text{როცა } z^T C - u^T A + w^T = -e^T C,$$

$$w \geq 0, \quad z \geq 0.$$

თუ მოცემული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი არ არსებობს, მაშინ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანას ეფექტური წერტილები არ გააჩნია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვთქვათ,  $(z^0, u^0, w^0)$  ოპტიმალური ამონახსნია, უნდა გადავიდეთ მესამე ბიჯზე.

ბიჯი 3. დავუშვათ  $\bar{\lambda} = (z^0 + e)$ . ეფექტური კუთხის წერტილის განსაზღვრისათვის გადავწყვიტოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\max\{\bar{\lambda}^T Cx \mid x \in \Omega\}.$$

მიუხედავად იმისა, რომ ბენსონის მეთოდი წრფივი დაპროგრამების ორი ამოცანის გადაწყვეტას ითვალისწინებს, იგი საწყისი კუთხის ეფექტური წერტილის მოძებნის გარანტიას იძლევა.

## 7.6.6 არაბაზისური ცვლადების ეფექტურობის შესამოწმებელი სტოიქრ-ეგანსის ტესტი

ზემოთ განხილული ექვტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმის მესამე ეტაპზე განისაზღვრება ყველა კუთხის ეფექტური წერტილი, რისთვისაც თითოეულ ეფექტურ სიმპლექსურ ცხრილში (სიმპლექსურ ცხრილს ეფექტური ეწოდება, თუ იგი შეიცავს ეფექტურ  $B$  ბაზისს) განხორციელდება თითო ეფექტური ჩანაცვლება, შემოვიტანთ რა ბაზისში სვეტს, რომელიც თითოეულ ეფექტურ არაბაზისურ ცვლადს შეესაბამება.

არაბაზისური ცვლადების ეფექტურობის შემოწმების რამდენიმე წესი არსებობს, რისთვისაც გამოიყენება სპეციალური ხასიათის ქვეამოცანა-ტესტები:

1. ევანს-სტოიერის ტესტი [176, 177];
2. აიზერმანის ტესტი [204];
3. ეკერის ტესტი [172];
4. ზაინც-ვალენიუსის პროცედურა [279].

შენიშნავთ, რომ თუ კუთხის წერტილი, რომელიც აღიწერება ეფექტური სიმპლექსური ცხრილის საშუალებით, გადაუგვარებელია, მაშინ არაბაზისური ცვლადის ეფექტურობის შესამოწმებელი ქვეამოცანა ამ წერტილიდან გამომავალი წიბოს ეფექტურობის შემოწმების საშუალებას წარმოადგენს.

ზემოთ აღნიშნული ტესტებიდან განვიხილოთ მხოლოდ ევანს-სტოიერის ტესტი [176, 177], რომელიც 7.19 თეორემის ქვეამოცანა-ტესტს წარმოადგენს. იგი შემდეგში მდგომარეობს. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ეფექტურია თუ არა  $j$ -ური არაბაზისური ცვლადი, საჭიროა გადავწყვიტოთ სტოიქრ-ეგანსის შემდეგი ქვეამოცანა:

$$\max\{e^T v\},$$

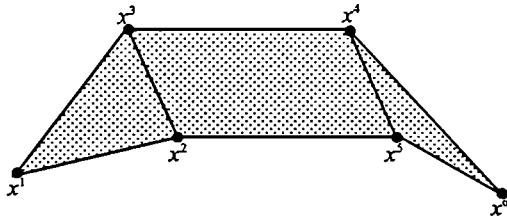
$$\text{როცა } Wy - w^j \delta + Iv = 0,$$

$$0 \leq y \in R^{n-m}, \quad 0 \leq \delta \in R, \quad 0 \leq v \in R^k,$$

სადაც  $W$  ეფექტური ბაზისის ფარდობითი  $\Delta_j = z_j - c_j$  შეფასებების მატრიცაა, ხოლო  $w^j$  არის  $W$  მატრიცის  $j$ -ური სვეტი. თუ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა ნულის ტოლია, მაშინ  $j$ -ური არაბაზისური სვეტი ეფექტურია; ხოლო თუ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა დადებითი და შემოუსაზღვრავია, მაშინ  $j$ -ური არაბაზისური სვეტი არაეფექტურია. ყველა ეფექტური არაბაზისური ცვლადის დასადგენად აუცილებელია გადავწყვიტოთ სტოიერ-ევანსის ქვეამოცანა  $W$  მატრიცის თითოეული სვეტისათვის.

### 7.6.7 ეფექტური წახნაგებიდან ყველა მაქსიმალური უპრჩევა

ეფექტურ წახნაგებს შორის მაქსიმალურით დაინტერესება გამოწვეულია იმით, რომ ეფექტური წახნაგებიდან ყველა მაქსიმალურის გაერთიანება სრულ ეფექტურ სიმრავლეს წარმოადგენს.



ნახ. 7.48

მაგალითი 7.36. დავეუშვათ, რომ ნახ. 7.48-ზე წარმოდგენილია დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის ზედაბირის ნაწილი, რომელიც ეფექტურია. მაშინ ეფექტური სიმრავლე შეიძლება დახასიათდეს ეფექტური კუთხის წერტილების შემდეგი ქვესიმრავლეებით:

- $\{ x^1, x^2, x^3 \},$
- $\{ x^2, x^3, x^4, x^5 \},$
- $\{ x^4, x^5, x^6 \}.$

ეფექტური წახნაგებიდან ყველა მაქსიმალურის გამოთვლის პროცედურა შემოგთავაზა მრავალმა ავტორმა - იუმ და ზელენმა [276], გალმა [185], ეკერმა, ხვენერმა და კუადამ [170], აიზერმანმა [204].

მაბალითი 7.37. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა 7.3 ცხრილიდან.

ცვლადები	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
კრიტერიუმები	1	3	-2	0	1	max	
	3	-1	0	3	1	max	
	1	0	2	0	3	max	
შეზღუდვები	2	4	0	0	3	$\leq$	27
	0	0	2	5	4	$\leq$	35
	5	0	0	0	0	$\leq$	26
	0	0	0	2	0	$\leq$	24
	5	5	2	0	0	$\leq$	36

ცხრილი 7.3

მოცემულ ამოცანაში 11 ეფექტური კუთხის წერტილია და ეფექტური წახნაგებიდან 4 მაქსიმალური. ნახ. 7.49-ზე წარმოდგენილ გრაფზე ნაჩვენებია, თუ რომელი ეფექტური კუთხის წერტილები განსაზღვრავს ეფექტური წახნაგებიდან ამა თუ იმ მაქსიმალურს.

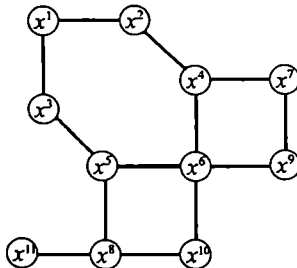
კრიტერიულ ვექტორს 11 ეფექტური კუთხის წერტილისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$z^1 = (20.25; 14.25; 0.00); z^2 = (19.80; 17.40; 0.90); z^3 = (9.31; 8.56; 26.25);$$

$$z^4 = (14.06; 30.58; 13.80); z^5 = (9.12; 9.87; 26.25); z^6 = (10.73; 28.85; 21.80);$$

$$z^7 = (11.20; 34.60; 5.20); z^8 = (-1.26; 20.26; 34.04); z^9 = (5.20; 36.60; 5.20);$$

$$z^{10} = (0.73; 22.85; 31.80); z^{11} = (-34.80; 0.60; 35.20).$$



ნახ. 7.49

## 7.6.8 მრავალკრიტიკული ამოცანის ბადაწყვეტა ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმის საფუძველზე

წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტიკული ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია მიდგომით, რომელიც ყველა ეფექტური კუთხის წერტილის გამოსათვლელად ითვალისწინებს ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმების გამოყენებას. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს. გადაწყვეტილების მიმღები პირი, გადახდავს რა ეფექტური კუთხის წერტილების შესაბამისი არადომინირებული კრიტიკული ვექტორების სიას, აირჩევს იმ წერტილს, რომელიც მის მოთხოვნებს პასუხობს უდიდესი სარგებლიანობის თვალსაზრისით. შერჩეული წერტილი, შესაძლებელია, იქნება ოპტიმალური ან საკმაოდ ახლოს ოპტიმალურთან და ამით დამთავრდება ამონახსნის ამორჩევის პროცესი.

ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმის გამოყენების შემთხვევაში ადგილი აქვს სირთულეებს, რომლებიც დაკავშირებულია

1. კომპიუტერული დროის დანახარჯებთან;
2. ეფექტური კუთხის წერტილების რაოდენობასთან;
3. იმ ფაქტთან, რომ საუკეთესო ეფექტური კუთხის წერტილი ოპტიმალური წერტილის აპროქსიმაციისათვის, შესაძლებელია, მიუღებელი აღმოჩნდეს.

ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმებში კომპიუტერული დრო ძირითადად იხარჯება თითოეული ეფექტური ბაზისისათვის არაბაზისური ცვლადების ეფექტურობის შეფასებაზე. ასე, მაგალითად, წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტიკულ ამოცანაში, რომლის განზომილებაა  $5 \times 25 \times 100$ , თითოეული ეფექტური ბაზისისათვის უნდა შეფასდეს 100 რივის არაბაზისური ცვლადი. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ წრფივი დაპროგრამების აღნიშნულ მრავალკრიტიკულ ამოცანას შეიძლება 1000-ზე მეტი ეფექტური კუთხის წერტილი გააჩნდეს, მაშინ ცხადი გახდება, რომ ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმი, გარდა იმისა, რომ დიდი მოცულობის გამოთვლებს საჭიროებს, გადაწყვეტილების მიმღებ პირს სირთულეებს უქმნის "ინფორმაციული გადატვირთვის" გამო. იმ შემთხვევაშიც კი, როცა საჭიროა ყველა ეფექტური კუთხის წერტილის სიმრავლიდან რაღაც ქვესიმრავლის გამოყოფა და მიღებულ კუთხის წერტილებს შორის ინტერაქტიული ძებნის განხორციელება, ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმის გამოყენება დიდი განზომილების ამოცანებში არ არის მიზანშეწონილი. უფრო მეტიც, სავსებით შესაძლებელია, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირის თვალსაზრისით ოპტიმალური ამონახსნი მდებარეობდეს დიდი ეფექტური წახნაგის შიგნით. ასეთ შემთხვევაში, სასურველია, დამატებით ისეთი მეთოდებით ვისარგებლოთ, რომლებიც ეფექტური წახნაგების ფარდობითი შიგა ნაწილების განსაზღვრის საშუალებას მოგვცემს.

## 7.7 კრიტერიუმების მინიმალური მნიშვნელობები ეფექტურ სიმრავლეზე

ეფექტურ სიმრავლეზე  $i$ -ური კრიტერიუმის მაქსიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის ადგილი ჰქონდა ამონახსნთა სივრცის დასაშვებ წერტილთა სიმრავლეზე  $i$ -ური კრიტერიუმის მაქსიმიზაციას. იმისათვის, რომ ეფექტურ სიმრავლეზე  $i$ -ური კრიტერიუმის მინიმალური მნიშვნელობა განისაზღვროს, საჭიროა ამოიხსნას შემდეგი ამოცანა:

$$\min \{ cx = z, \mid x \in E \}.$$

სამწუხაროდ, აღნიშნული ამოცანის უშუალოდ ამოხსნა შეუძლებელია, რადგან ეფექტური  $E$  სიმრავლე ცხადი სახით უცნობია. უფრო მეტიც, ხშირ შემთხვევაში იგი არაამოზნეკილია.

### 7.7.1 მოგებათა ცხრილები

მოგებათა ცხრილის (ცხრილი 7.4) სტრიქონები კრიტერიული ვექტორებია, რომლებიც ცალკეული კრიტერიუმების მაქსიმიზაციის შედეგად არის მიღებული. იმ შემთხვევაში, როცა ოპტიმუმი არ არის ერთადერთი, საჭიროა სპეციალური ზომების მიღება, რათა სტრიქონებში მდგომი ყველა კრიტერიული ვექტორის არადომინირებულობა გარანტირებული იყოს. მთავარ დიაგონალზე მდგომი  $z_i^*$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , სიდიდეები წარმოქმნის კრიტერიუმების მაქსიმალურ მნიშვნელობათა ვექტორს (ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე). მოგებათა ცხრილის  $i$ -ურ სვეტში მინიმალური მნიშვნელობა წარმოადგენს  $i$ -ური კრიტერიუმის მინიმალური მნიშვნელობის რაღაც შეფასებას  $E$  სიმრავლეზე. თუ სვეტის მიხედვით მინიმალური მნიშვნელობა რიგით დაემთხვა იმ სტრიქონს, რომელშიც დომინირებული კრიტერიული ვექტორია, მაშინ სვეტის მიხედვით მინიმალური მნიშვნელობა  $E$  სიმრავლის საძებნ მინიმუმზე ნაკლები შეიძლება აღმოჩნდეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში (როცა სტრიქონი, რომელშიც მოთავსებულია სვეტის მიხედვით მინიმალური მნიშვნელობა, შეიცავს არადომინირებულ კრიტერიულ ვექტორს) სვეტის მიხედვით მინიმალური მნიშვნელობა ან სწორად განსაზღვრავს კრიტერიუმის მინიმალურ მნიშვნელობას  $E$  სიმრავლეზე ან წარმოადგენს მის ზემოდან შეფასებას.

	$z_1$	$z_2$	...	$z_k$
$z^1$	$z_{11}^*$	$z_{12}^*$	...	$z_{1k}^*$
$z^2$	$z_{21}^*$	$z_{22}^*$	...	$z_{2k}^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z^k$	$z_{k1}^*$	$z_{k2}^*$	...	$z_{kk}^*$

ცხრილი 7.4

**მაბალითი 7.38.** წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტიკიულ ამოცანაში (ცხრილი 7.5) 12 ეფექტური წერტილია. მოცემული ამოცანის მოგებათა ცხრილი წარმოდგენილია 7.6 ცხრილის სახით. მიუხედავად იმისა, რომ მოგებათა ცხრილში სვეტების მიხედვით მინიმუმები შესაბამისად ტოლია  $-2.75$ ;  $-1.25$ ;  $-5.33$  და  $-6.67$ , ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე კრიტიკიუმების მინიმუმები შესაბამისად ტოლია  $-7.50$ ;  $-7.50$ ;  $-5.33$  და  $-7.20$ . ამგვარად, მოცემული ამოცანის სვეტებში ოთხი მინიმალური მნიშვნელობიდან სამი არასწორად განსაზღვრავს კრიტიკიუმების მინიმუმს ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე. ასე, მაგალითად, ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე მეორე კრიტიკიუმის მნიშვნელობათა დიაპაზონის 57.7% მოგებათა ცხრილის მეორე სვეტში მინიმუმის ქვემოთ მდებარეობს.

ცვლადები	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
კრიტიკიუმები	3	-2	0	0	-2	0	Max
	0	-2	-2	0	-2	1	Max
	-2	2	0	2	0	2	Max
	1	0	0	-2	1	-2	Max
შეზღუდვები	0	2	0	0	0	1	$\leq$ 10
	2	0	1	5	0	0	$\leq$ 9
	3	0	4	5	4	2	$\leq$ 8
	3	1	4	0	4	1	$\leq$ 10
	3	4	0	0	0	3	$\leq$ 10
	0	0	3	5	4	0	$\leq$ 5

ცხრილი 7.5

მიუხედავად იმისა, რომ მოგებათა ცხრილის საშუალებით ინფორმაცია ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე კრიტიკიუმების მნიშვნელობათა დიაპაზონის შესახებ ადვილად მიიღება, აღნიშნული მიდგომის გამოყენება კრიტიკიუმების მინიმალური მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის არასაიმედოობით ხასიათდება. მრავალრიცხოვანი გა-

მოთვლითი ექსპერიმენტების საფუძველზე დადგინილია, რომ, მოგებათა ცხრილის სვეტების მიხედვით მინიმალური მნიშვნელობების გამოყენების შემთხვევაში, მრავალკრიტერიული წრფივი დაპროგრამების უმეტეს ამოცანებში  $E$  სიმრავლეზე კრიტერიუმების ერთი ან მეტი როდენობის მინიმალური მნიშვნელობა არასწორად განისაზღვრება.

	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$z^1$	8.00	0.00	-5.33	2.67
$z^2$	0.00	3.33	6.67	-6.67
$z^3$	-2.75	-1.25	7.75	-5.00
$z^4$	8.00	0.00	-5.33	2.67

ცხრილი 7.6

### 7.7.2 კრიტერიუმების მინიმალურ მნიშვნელობათა მოქმედების ამოცანის კირიტადი თვისებები

$\bar{x} \in E$  წერტილი, რომელშიც  $i$ -ური კრიტერიუმი ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე თავის მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს, წარმოადგენს ამონახსნს წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი შემდეგი ამოცანის:

$$\max \{ \lambda^T Cx \},$$

$$\text{როცა } Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

რომელიდაც  $\bar{\lambda}$ -სთვის. დუალობის თეორიის თანახმად, არსებობს ისეთი  $\bar{\mu}$  წერტილი, რომელიც წარმოადგენს ამონახსნს ამოცანისა

$$\min \{ \mu^T b \},$$

$$\text{როცა } A^T \mu \geq C^T \lambda$$

და, ამასთან, აკმაყოფილებს  $\bar{\lambda}^T Cx = \bar{\mu}^T b$  პირობას. მაშასადამე,  $E$  სიმრავლეზე  $i$ -ური კრიტერიუმის მინიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანაზე

$$\min \{ c^T x = z_i \},$$

$$\text{როცა } Ax = b,$$

$$x \geq 0,$$



$$A^T \mu - C^T \lambda \geq 0,$$

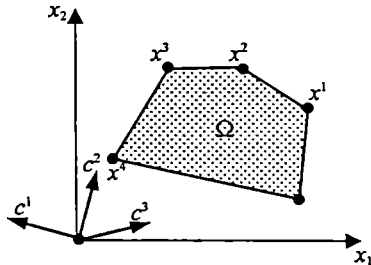
$$\lambda \geq \delta,$$

$$\mu^T b - \lambda^T Cx = 0,$$

სადაც  $\delta \in R^k$  საკმარის მცირე მკაცრად დადებითი ვექტორია. უკანასკნელი ამოცანა მხელი გადასაწყვეტია, რადგან იგი დიდი განზომილებისა და  $\mu^T b - \lambda^T Cx = 0$  შეზღუდვა არაწრფივია.

$E$  სიმრავლეზე კრიტიკულების მინიმალური მნიშვნელობების განსაზღვრის ამოცანასთან დაკავშირებით აიზერმანისა და სტოიერის ნაშრომიდან [205] ცნობილია შემდეგი:

1. ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე კრიტიკულების მინიმალური მნიშვნელობა კუთხის წერტილში მიიღწევა;
2. ვთქვათ,  $x^*$  ეფექტური კუთხის წერტილია, რომელშიც  $i$ -ური კრიტიკუმი  $E$ -ზე თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს, ხოლო  $x^1$  - ეფექტური კუთხის წერტილი, რომელშიც  $i$ -ური კრიტიკუმი  $E$ -ზე აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას. მაშინ არსებობს  $x^*$  და  $x^1$  წერტილების შემაერთებელი ეფექტური წიბოებისაგან შედგენილი ისეთი ტრაექტორია, რომლის გასწვრივ  $x^*$ -დან  $x^1$ -მდე  $z$ , არაზრდად სიდიდეს წარმოადგენს;
3. რომელიდაც წერტილი შეიძლება იყოს მოცემული კრიტიკულების ლოკალური მინიმუმი და ამავე დროს  $E$  სიმრავლეზე არ წარმოადგენდეს მის გლობალურ მინიმუმს.



ნახ. 7.50

**მაბალითი 7.39.** წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტიკულ ამოცანაში, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.50-ზე,

$$E = \chi(x^1, x^2) \cup \chi(x^2, x^3) \cup \chi(x^3, x^4).$$

მოცემულ ამოცანაში  $x^2$  წერტილი მეორე კრიტიკუმიის მაქსიმუმის წერტილია  $E$ -ზე,  $x^1$  - მისი მინიმუმის წერტილი  $E$ -ზე, ხოლო  $\gamma(x^2, x^3) \cup \gamma(x^3, x^4)$  ტრაექტორია  $x^2$ -ისა და  $x^4$ -ის შემართებულ ეფექტურ წიბოებზე გადის და მის გასწვრივ  $z_2$  სიდიდე არაზრდადია. გარდა ამისა,  $x^1$  წერტილი მეორე კრიტიკუმიის ლოკალური მინიმუმის წერტილია  $E$ -ზე, რომელიც არ წარმოადგენს გლობალურ მინიმუმს.

### 7.7.3 სიმპლექს-მეთოდზე დაფუძნებული ალგორითმი

განვიხილოთ ალგორითმი, რომელშიც ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე  $i$ -ური კრიტიკუმიის მინიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნად გამოყენებულია სიმპლექს-მეთოდი.

ალგორითმის თანახმად, თითოეული კრიტიკუმიის რიგრიგობითი ლექსიკოგრაფიული მაქსიმუმი შედეგად შევადგენთ მოგებათა ცხრილს. ვთქვათ,  $z_i^m$  მოგებათა ცხრილის  $i$ -ურ სვეტში კრიტიკუმიის მინიმალური მნიშვნელობაა. მოცემული ამოცანის შეზღუდვათა სისტემას დავემატებთ  $c^1 x \leq z_i^m$  უტოლობას. დავიწყებთ თვლას  $z_i^m$ -ის შესაბამისი კუთხის წერტილიდან. გამოვიკვლიებთ დასაშვებ წერტილთა ახალი (შეკუმშული) სიმრავლის  $c^1 x = z_i^m$  წახნაგს, რათა ვიპოვოთ ისეთი კუთხის წერტილი, საიდანაც გამოდის ეფექტური წიბო, რომლის გასწვრივ  $i$ -ური კრიტიკუმიის მნიშვნელობა მცირდება. თუ ასეთი წიბო არ არსებობს, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ  $z_i^m$ -ის მიმდინარე მნიშვნელობა  $i$ -ური კრიტიკუმიის მინიმალური მნიშვნელობაა  $E$ -ზე და გამოთვლითი პროცესი დამთავრებულად ჩაითვლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში (თუ წიბო არსებობს), ადგილი აქვს წიბოს გასწვრივ ჩანაცვლებას და გადასვლას მის მეორე ბოლოში მდებარე კუთხის წერტილში.  $z_i^m$  სიდიდეს მიენიჭება  $i$ -ური კრიტიკუმიის ახალი (ნაკლები) მნიშვნელობა, რომელიც მას გააჩნია ახალ კუთხის წერტილში. შეზღუდვათა სისტემას დაემატება  $c^1 x \leq z_i^m$  უტოლობა, სადაც  $z_i^m$ -ს აქვს ახალი მნიშვნელობა, და პროცედურა განმეორდება.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ განხილულ ალგორითმში თითოეული კრიტიკუმიის ლექსიკოგრაფიული მაქსიმუმი იმისათვის ზორციელდება, რომ მოგებათა ცხრილის ყოველი სტრიქონი ეფექტურ კუთხის წერტილში გამოთვლილ კრიტიკულ ვექტორს წარმოადგენდეს. როგორც უკვე იყო აღნიშნული,  $c^1 x = z_i^m$  სახის თითოეული წახნაგი  $x^1$  და  $x^2$  წერტილებს შორის გადაკეთავს ეფექტური წიბოებისაგან შედგენილ თითოეულ ტრაექტორიას, რომლის გასწვრივ  $z_i$  არაზრდადია, ამიტომ სანამ მინიმუმი არ იქნება მოძებნილი, შესაძლებელია იტერაციების გაგრძელება. ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე  $i$ -ური კრიტიკუმიის მინიმუმის წერტილის მოძებნის შემთხვევაში, ალგორითმი წყვეტს მუშაობას.

## 7.8 ინტერაქტიული პროცედურები

მრავალკრიტერიული დაპროგრამების მომავალი ამოცანების ინტერაქტიულ რეჟიმში გადაწყვეტას ეკუთვნის. ინტერაქტიული პროცედურების გამოყენების დროს ადგილი აქვს გამოკვლევას დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლისა და ამ უკანასკნელიდან ოპტიმალური (ან ოპტიმალურთან მიახლოებული) ამონახსნის მოძებნას. ინტერაქტიული პროცედურების დამახასიათებელ თავისებურებას გამოთვლებისა და გადაწყვეტილებების მიღების ეტაპების თანმიმდევრობითი მონაცვლეობა წარმოადგენს. აღნიშნული პროცედურის თითოეულ იტერაციაზე ყოველი შემდგომი გამოკვლევის ჩატარების მიზნით ადგილი აქვს ამონახსნისა ან ამონახსნთა ჯგუფის გენერირებას. გამოკვლევის ბოლოს, გადაწყვეტილების მიმღებ პირს ამოცანის ამოხსნის პროცედურაში შეაქვს რაღაც გარკვეული ინფორმაცია.

აღამიანსა და მოდელს შორის უკუკავშირის არსებობა გადაწყვეტილების მიმღებ პირს შესაძლებლობას აძლევს მის წინაშე მდგომი პრობლემის შესახებ ახალი ინფორმაცია მიიღოს. ამასთან, გადაწყვეტილების მიმღებ პირს საშუალება ეძლევა უფრო სრულად შეაფასოს დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლით მოცემული შესაძლებლობათა დიაპაზონი, რის საფუძველზეც უკეთ უნდა გაერკვეს სად ეძებოს უფრო წარმატებული ამონახსნები, როგორ გამოიყენოს საბოლოო ამონახსნი (თუ იგი არსებობს) და მიიღოს შესაბამისი გადაწყვეტილებები. ამგვარად, ინტერაქტიული მიდგომის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ამონახსნის მოძებნის პროცესში აღამიანის მონაწილეობა გაადვილოს.

ინტერაქტიული პროცედურები შრომის ეფექტური დანაწილების შესაძლებლობას იძლევა. ისინი კომპიუტერს საშუალებას აძლევენ აკეთოს ის, რაც მას უკეთ გამოუდის (მონაცემების დამუშავება, პროგრამების შესრულება), ხოლო გადაწყვეტილების მიმღებ პირს - აკეთოს ის, რასაც იგი ყველაზე უკეთ აკეთებს (ახალი ინფორმაციის საფუძველზე მიიღოს გაუმჯობესებული ან შესწორებული დასკვნები და გადაწყვეტილებები).

მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანების გადასაწყვეტად შემუშავებული მთელი რიგი ინტერაქტიული პროცედურები, რომელთაგან შეიძლება გამოვყოთ

- STEM მეთოდი [155];
- ჯოფურიონ-დაიერ-ფაინბერგის მეთოდი GDF [187];
- ზაინც-ვალენიუსის მეთოდი Z-W [277, 278];
- ინტერვალურ-კრიტერიულ წონათა მეთოდი ვექტორული მაქსიმიზაციის ალგორითმით [250];

- აწონილ ჯამთა ინტერაქტიული მეთოდი ფილტრაციით [252];
- კორხონენისა და ლააკსონ ვიზუალური ინტერაქტიული მეთოდი [209].

ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ მხოლოდ პირველ სამ მეთოდს. დანარჩენი მეთოდების გასაცნობად დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია ისარგებლოს შესაბამისი ლიტერატურით.

აღნიშნული ალგორითმები შეიძლება დაიყოს შემდეგ ტიპებად:

- ◆ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის შევიწროების მეთოდები;
- ◆ შევიწროების მეთოდები წონითი ვექტორების სივრცეში;
- ◆ კრიტერიული კონუსის შევიწროების მეთოდები;
- ◆ ერთგანზომილებიანი ძეხნის მეთოდები.

მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული მეთოდები ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავდება, ისინი სწრაფი კრებადობით ხასიათდებიან. თითოეული მათგანი კრებადობას დაახლოებით  $k$  იტერაციაში აღწევს, სადაც  $k$  კრიტერიუმების რიცხვია.

ინტერაქტიული პროცედურების შესადარებლად და მათი შერჩევის შემთხვევაში სწორი არჩევანის გასაკეთებლად გარკვეული რეკომენდაციების გამომუშავებისათვის საჭიროა შემდეგი საკითხების განხილვა:

1. მოცემული ალგორითმი გადაწყვეტილების მიმღები პირისაგან მოითხოვს თუ არა სპეციალურ მათემატიკურ მომზადებას ან დაპროგრამების საფუძვლიან ცოდნას?
2. მოცემული ალგორითმის რეალიზაციისათვის საჭიროა თუ არა კვალიფიციური ოპერატორი?
3. გადაწყვეტილების მიმღებ პირს მოსწონს თუ არა მოცემული ალგორითმის ინტერფეისი?
4. მოცემული ალგორითმის საშუალებით თითოეულ იტერაციაზე ერთი ამონახსნი თუ ამონახსნთა მთელი ჯგუფი განისაზღვრება?
5. მოცემული ალგორითმი სხვადასხვა იტერაციაზე ერთი და იგივე თუ განსხვავებული ტიპის შეკითხვებს გვისვამს?
6. მოცემული ალგორითმი გადაწყვეტილების მიმღები პირისაგან მოითხოვს თუ არა შეაფასოს წონები, დაუშვას რელაქსაციის პარამეტრები ან განახორციელოს წვეილ-წვეილად შედარებები?
7. მოცემული ალგორითმი არის თუ არა ევრისტიკული? (პროცედურა ევრისტიკულია, თუ ალგორითმში დასმულ შეკითხვებზე მომხმარებელმა ცალსახა პასუხი

არ იცის მაშინაც კი, როცა გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის ფუნქცია ზუსტად ცნობილია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ევრისტაიკული პროცედურის შესრულების დროს ადამიანი ძირითადად ინტუიციას ეყრდნობა).

8. იტერაციული ძებნის პროცესში გადაწყვეტილების მიმღებ პირს შეუძლია თუ არა მაშინვე გამოთქვას თავისი მოსაზრებები, თუ მას რამდენიმე დღე სჭირდება თითოეული გადაწყვეტილების მოსაფიქრებლად?
9. ალგორითმი კრებადია თუ არა იტერაციების წინასწარ მოცემული რაოდენობის შემთხვევაში?
10. მოცემული ალგორითმი გადაწყვეტილების მიმღებ პირს აძლევს თუ არა შესაძლებლობას ამოცანის გადაწყვეტის პროცესში შეცვალოს უპირატესობათა სისტემა თუ მოითხოვს ამოცანის ხელშეორედ გაშვებას?
11. მოცემული ალგორითმი მხოლოდ ეფექტური წერტილების (არადომინირებულ კრიტერიული ვექტორების) გენერირებას უზრუნველყოფს?
12. მოცემულ ალგორითმში ადგილი აქვს თუ არა სპეციალურ დაშვებებს გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის ფუნქციის შესახებ?
13. დამტკიცებულია ალგორითმის კრებადობა თუ კრებადობის შესახებ არსებობს მხოლოდ ევრისტაიკული ან ინტუიციური წარმოდგენები?
14. მოცემული ალგორითმი მოითხოვს თუ არა სპეციალიზირებულ (და არა წრფივი დაპროგრამებისათვის ჩვეულებრივ) მათემატიკურ უზრუნველყოფას?
15. მოცემული ალგორითმი მოითხოვს თუ არა კომპიუტერული დროის მნიშვნელოვან დანახარჯებს?
16. მოცემული ალგორითმი გამოდგება მხოლოდ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანების გადასაწყვეტად თუ შესაძლებელია მისი გამოყენება მთელრიცხვა და არაწრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანებშიც?

## 7.8.1 STEM მეთოდი

STEM დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის შევიწროების მეთოდია, რომელიც 1971 წელს შემოთავაზებულ იქნა ბენაიუნის, მონგოლფიეს, ტერნისა და ლარიჩვეის მიერ [155] წრფივი დაპროგრამების შემდეგი მრავალკრიტერიული ამოცანების გადასაწყვეტად:

$$\max \{ c^T x = z_1 \},$$

$$\begin{aligned} \max \{ c^1 x = z_1 \}, \\ \vdots \\ \max \{ c^k x = z_k \}, \\ \text{როცა } x \in \Omega, \end{aligned}$$

სადაც ყველა კრიტერიუმი შემოსაზღვრულია  $\Omega$ -ზე. STEM-ის თითოეულ იტერაცი-  
აზე ადგილი აქვს ევექტურ წერტილთა სიმრავლის ერთადერთ ზონდირებას, რაც  
ზორციელდება მოცემული იტერაციისათვის შესაბამის დასაშვებ ამონახსნთა შევიწ-  
რობულ სიმრავლეზე ისეთი წერტილის განსაზღვრის გზით, რომელსაც შეესაბამება  
იდეალურ კრიტერიულ  $z^* \in R^k$  ვექტორთან  $L_\infty$  (ჩებიშევის) მეტრიკაში უახლოესი  
კრიტერიული ვექტორი. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ STEM იყო პირველი ინტერაქ-  
ტიული პროცედურა, რომელმაც დიდი გავლენა მოახდინა მრავალკრიტერიული დაპ-  
როგრამების განვითარებაზე. მეთოდი, რომელიც თავდაპირველად შემუშავებულ იქნა  
წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანების გადაწყვეტის მიზნით, შე-  
იძლება გამოყენებულ იქნეს მთელრიცხვა და არაწრფივი დაპროგრამების მრავალკრი-  
ტერიული ამოცანების გადასაწყვეტად.

### STEM ალგორითმი

**ბიჭი 1.** განვახორციელოთ თითოეული კრიტერიუმის ცალ-ცალკე ოპტიმიზაცია და  
ავაგოთ მოგებათა ცხრილი იდეალური კრიტერიული  $z^* \in R^k$  ვექტორის გან-  
საზღვრისათვის.  
როგორც უკვე იყო აღნიშნული, მოგებათა ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

	$z_1$	$z_2$	...	$z_k$
$z^1$	$z_{11}^*$	$z_{12}^*$	...	$z_{1k}^*$
$z^2$	$z_{21}^*$	$z_{22}^*$	...	$z_{2k}^*$
...	...	...	...	...
$z^k$	$z_{k1}^*$	$z_{k2}^*$	...	$z_{kk}^*$

ცხრილის სტრიქონები შეიცავს კრიტერიული ვექტორების იმ მნიშვნელო-  
ბებს, რომლებიც მიიღება თითოეული კრიტერიუმის ცალ-ცალკე ოპტიმი-  
ზაციის შედეგად. მთავარი დიაგონალის  $z_i^*$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) ელემენტები წარ-  
მოქმნის იდეალურ კრიტერიულ ვექტორს.

ბიჭი 2. იტერაციის  $h$  მთვლელს მივანიჭოთ ნულის ტოლი მნიშვნელობა:  $h = 0$ . ვთქვათ,  $m_i$  მოგებათა ცხრილის  $i$ -ური სვეტის მინიმალური რიცხვია. გამოვთვალოთ მნიშვნელობები

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{z_i^* - m_i}{z_i^*} \left[ \sum_{j=1}^n (c_{ji})^2 \right]^{-1/2}, & \text{როცა } z_i^* > 0, \\ \frac{m_i - z_i^*}{z_i^*} \left[ \sum_{j=1}^n (c_{ji})^2 \right]^{-1/2}, & \text{როცა } z_i^* \leq 0. \end{cases}$$

სამრავლი მამრავლი

სამრავლის ფიზიკური არსი შემდეგია: უმაღლესი წონა მივანიჭოთ უდიდესი ფარდობითი გაფანტულობის მქონე კრიტერიუმებს. მამრავლი კი მიზნის ფუნქციის გრადიენტების ნორმალიზებას უზრუნველყოფს  $L_2$  სივრცის ნორმით.

ბიჭი 3. დავუშვათ  $\Omega^{(1)} = \Omega$  და  $J = \emptyset$  (ინდექსების სიმრავლე ცარიელია).

$\Omega^{(1)} = \Omega$  ტოლობა აღნიშნავს, რომ ალგორითმი მუშაობას იწყებს დასაშვებ მნიშვნელობათა საწყისი (შეუვიწროებელი) სიმრავლიდან. ინდექსთა  $J$  სიმრავლე შეიცავს ნომრებს იმ კრიტერიუმებისა, რომელთა მნიშვნელობებიც შემდეგ იტერაციაზე შეიძლება შემცირებულ იქნეს, რათა მათ ხარჯზე სხვა კრიტერიუმების მნიშვნელობები გაიზარდოს. საწყისი მომენტისათვის  $J$  ცარიელია, ვინაიდან ჯერ კიდევ არ არის მიღებული ამონახსნები, რომელთა საშუალებითაც კრიტერიუმების მნიშვნელობების შემდგომი შემცირება განხორციელდება.

ბიჭი 4. იტერაციების  $h$  მთვლელის მნიშვნელობა ერთი ერთეულით გაეზარდოს ანუ განვახორციელოთ მინიჭების ოპერაცია:  $h = h + 1$ . გამოვთვალოთ მინიმალური (ჩებიშევის)  $\lambda_i^{(h)}$  წონები შემდეგი გამოსახულების საფუძველზე:

$$\lambda_i^{(h)} = \begin{cases} 0, & i \in J^*, \\ \frac{\pi_j}{\sum_{j=1}^k \pi_j}, & i \notin J^*. \end{cases}$$

აღნიშნული სიდიდეები განსაზღვრავს ჩებიშევის აწონილ მეტრიკას

$$\|z^* - z\|_{\infty}^{k^{(h)}} = \max_{i=1,2,\dots,k} \{ \lambda_i^{(h)} | z_i^* - z_i | \},$$

რომელიც ალგორითმის მეხუთე ბიჯზე  $h$ -ურ იტერაციაზე ამონახსნის გენერირებისათვის გამოიყენება. შევნიშნავთ, რომ პირველ იტერაციაზე  $\lambda_i^{(h)}$  წონების ჯამი ერთის ტოლია, ხოლო შემდეგ იტერაციებზე  $\lambda_i^{(h)}$  წონათა ჯამი ერთზე ნაკლებია, რადგან  $J^*$  სიმრავლე არაცარიელია.

**ბიჯი 5.** ამონახსნთა სივრცეში  $x^{(h)}$  ამონახსნის განსაზღვრისათვის გადავწყვიტოთ აწონილი მინიმაქსური ამოცანა

$$\min \{ \alpha \},$$

$$\text{როცა } \alpha \geq \lambda_i^{(k)} (z_i^{(h)} - c^i x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$x \in \Omega^{(h)}, \quad \alpha \in R.$$

ამ ბიჯზე დასაშვებ მნიშვნელობათა შედარებით უფრო ვიწრო  $\Omega^{(h)}$  სიმრავლეზე იძებნება წერტილი, რომელიც  $\lambda^{(h)} \in R^k$  წონებით განსაზღვრულ ჩები-შევის აწონილ მეტრიკაში უახლოესია  $z^*$ -თან.

**ბიჯი 6.** დაუშვათ  $z^{(h)} = z(x^{(h)})$ .  $z^{(h)}$ -ის მნიშვნელობა შევადაროთ  $z^*$ -ს, რადგან კრიტერიუმთა სივრცეში  $z^{(h)}$  ამონახსნის ხარისხის შესაფასებლად იგი კარგი ათვლის წერტილია.

**ბიჯი 7.** თუ  $z^{(h)}$  ვექტორის ყველა კომპონენტი მისაღებია, მაშინ გამოთვლები შეწყდება და  $(z^{(h)}, x^{(h)})$  ჩაითვლება საბოლოო ამონახსნად. წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა გადავიდეთ მე-8 ბიჯზე.

სანამ კრიტერიული ვექტორის ზოგიერთი კომპონენტი უფრო მისაღებია ვიდრე სხვები, იტერაციული პროცესი გაგრძელდება, რადგან კომპრომისების ხარჯზე შესაძლებელია სიტუაციის გაუმჯობესება. თუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს არ სურს კომპრომისზე წასვლა  $z^{(h)}$  ვექტორის ზოგიერთი კომპონენტის შემცირებისა და სხვა კომპონენტების გაზრდის ხარჯზე, მაშინ პროცესი დამთავრებულად ჩაითვლება და გამოვლივართ ალგორითმიდან.

**ბიჯი 8.** გამოვყოთ ნომრების  $J^*$  სიმრავლე იმ კრიტერიუმებისა, რომელთა მნიშვნელობები შეიძლება შემცირებულ იქნეს, და დაუშვათ ის  $\Delta_j, j \in J^*$ , სიდიდეები (დათმობები), რომლებიც გვიჩვენებს, თუ რამდენით შეიძლება კრიტერიუმების მნიშვნელობების შემცირება.



აღნიშნულ მომენტამდე მხოლოდ მაშინ მივაღწევთ, თუ აღმოჩნდება  $x^{(h)}$  ვექტორის ის კომპონენტები, რომლებსაც გადაწყვეტილების მიმღები პირი "შესწირავს", რათა სხვა კომპონენტები გააუმჯობესოს. თითოეულ  $j$ -ურ კომპონენტს, რომლის მნიშვნელობის შემცირებისათვის გადაწყვეტილების მიმღები პირი თანახმაა, შევუსაბამოთ  $\Delta_j$  სიდიდე (ე.ი.  $x_j$ -ის მაქსიმალური რაოდენობა, რომლის დათმობაც შესაძლებელია).

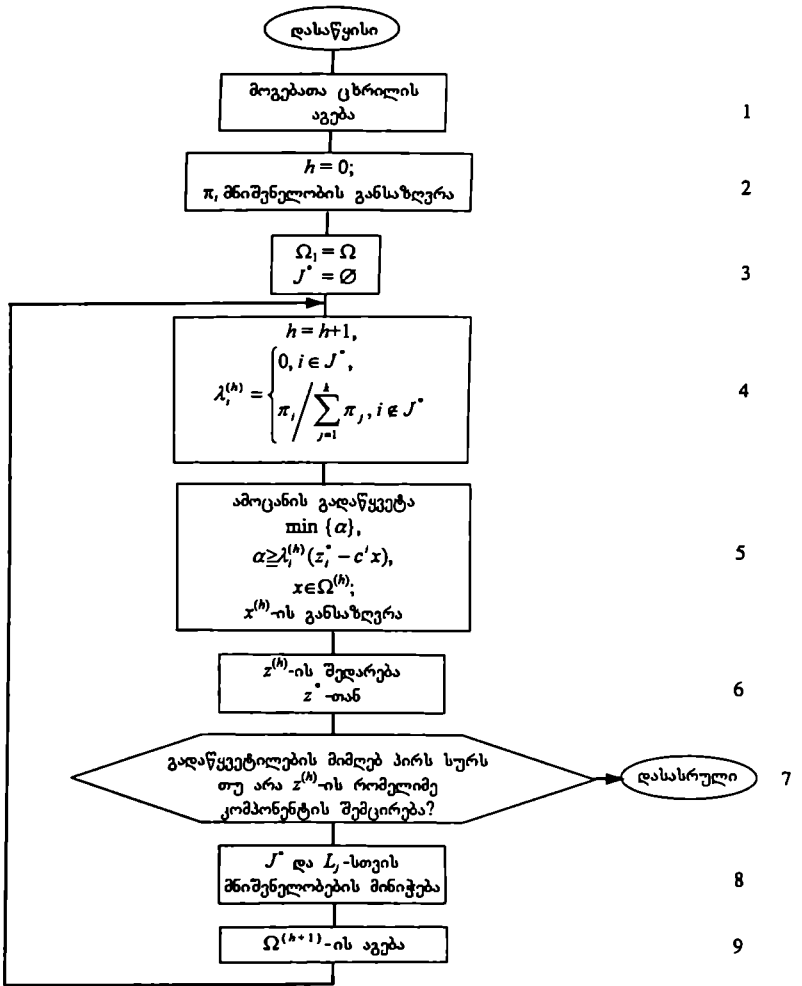
**ბიჯი 9.** ავაგოთ დასაშვებ მნიშვნელობათა შევიწროებული სიმრავლე

$$\Omega^{(h+1)} = \left\{ x \in \Omega \left| \begin{array}{ll} c^j x \geq z_j(x^{(h)}) - \Delta_j, & j \in J^* \\ c^j x \geq z_j(x^{(h)}), & j \notin J^* \end{array} \right. \right\}$$

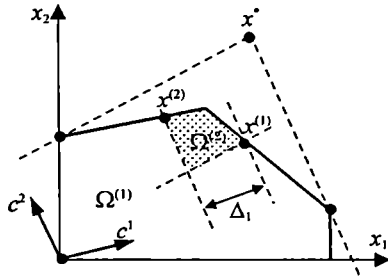
და გადავიდეთ მე-4 ბიჯზე.

ალგორითმის თანახმად, მე-9 ბიჯზე გათვალისწინებულია შეზღუდვების დამატება, რაც  $\Omega$  სიმრავლის ქვესიმრავლეებზე ამონახსნების მოძებნის მიზნით იტერაციული პროცესის შესრულებას განაპირობებს. იტერაციების რაოდენობასთან დაკავშირებით ნაშრომში [155] აღნიშნულია, რომ თუ რომელიღაც  $j$  კრიტერიუმის მიხედვით, რომლის მნიშვნელობა ერთხელ უკვე "შევიწიეთ", დათმობებს ადგილი აღარ ექნება, მაშინ ალგორითმი მუშაობას  $k$  იტერაციის შემდეგ დაამთავრებს. მაგრამ პრაქტიკულად, რასაკვირველია, ყოველთვის გეინდება სურვილი გექონდეგ გარკვეული თავისუფლება იმის არჩევისა, რომ კრიტერიუმების რამდენიმე მნიშვნელობა ერთდროულად შევამციროთ ან კრიტერიუმების ზოგიერთი მნიშვნელობა ერთზე მეტჯერ შევამციროთ. გრაფიკულად დასაშვებ მნიშვნელობათა შევიწროებული არის აგების პროცესი ილუსტრირებულია 7.40 მაგალითში, ხოლო STEM ალგორითმის ბლოკ-სქემა წარმოდგენილია ნახ. 7.51-ზე.

**მაგალიტი 7.40.** განვიხილოთ ნახ. 7.52, სადაც  $x^*$  არის  $z^*$  წერტილის პირველსაზე. ვთქვათ, პირველ იტერაციაზე (ალგორითმის მე-5 ბიჯზე) მიიღება  $x^{(1)}$  ამონახსნი. თუ დავუშვებთ, რომ  $J^* = \{1\}$  და ავირჩევთ  $\Delta_1$ -ს, მივიღებთ დასაშვებ წერტილთა შედარებით უფრო ვიწრო  $S^{(2)}$  სიმრავლეს, რომლის ფორმირება განხორციელდება მე-9 ბიჯზე. ალგორითმის მე-4 და მე-5 ბიჯებზე გამოვივლით რა  $\lambda_1^{(2)} = 0$  და  $\lambda_2^{(2)} > 0$ , მივიღებთ  $x^{(2)}$ -ს და ა.შ.



ნახ. 7.51



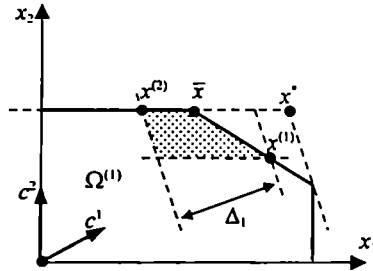
ნახ. 7.52

### კომენტარები STEM მეთოდის შესახებ

1. STEM ევრისტოკული მეთოდია, რადგან მაშინაც კი, ცნობილი რომ ყოფილიყო გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის ფუნქცია, გაურკვეველი იქნებოდა, ჯერ-ერთი, თუ რომელი კრიტერიუმები უნდა ჩაგვეერთო მათი მნიშვნელობების შემცირების პროცესში და, მეორე - რა სიდიდით შეგვემცირებინა. მაშასადამე, STEM მეთოდი განიხილება როგორც სუსტად სტრუქტურისზებული მიდგომა გაუმჯობესებული ამონახსნების გენერირებისადმი.
2. STEM მეთოდი შემუშავებულ იქნა წრფივი დაპროგრამების ერთკრიტერიული ამოცანების გადაწყვეტის ჩვეულებრივი მათემატიკური უზრუნველყოფის გამოყენების საფუძველზე. მოგებათა ცხრილის შედგენის შემდეგ ყოველ იტერაციაზე საჭიროა მხოლოდ ერთი საოპტიმიზაციო პროცედურის (აღლორითმის მე-5 ბიჯზე) ჩატარება. STEM მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ნებისმიერი განზომილების მთელიცხვა და არაწრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანებშიც, თუ, რასაკვირველია, არსებობს მათემატიკური უზრუნველყოფა შესაბამისი ერთკრიტერიული ამოცანების გადასაწყვეტად.
3. მოგებათა ცხრილთან დაკავშირებული სირთულეების გამო, ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეზე კრიტერიუმთა მნიშვნელობების ცვლილების დიაპაზონები შესაძლებელია შევამციროთ ან გაუზარდოთ. თუ დიაპაზონები არასწორადაა გამოთვლილი, მაშინ ამ ფაქტმა შეიძლება გავლენა მოახდინოს  $\lambda_i^{(h)}$  წონებზე.
4. ძირითადად, STEM მეთოდი კრებადია იმ ამონახსნის მიმართ, რომელიც  $\Omega$  სიმრავლის კუთხის წერტილს არ წარმოადგენს.

5. საესებით შესაძლებელია, რომ ალგორითმის მე- $n$  ბიჯზე ადგილი ჰქონდეს შედარებისთვის წარმოდგენილ კრიტერიულ  $x^{(n)}$  ვექტორზე დომინირებას (როგორც 7.41 მაგალითში).

მაგალითი 7.41. განვიხილოთ ნახ. 7.53. ვთქვათ,  $x^{(1)}$  პირველ იტერაციაზე მიღებული ამონახსნია, ხოლო პირველი კრიტერიუმი შემცირებულია  $\Delta_1$  სიდიდით. მაშინ მეორე იტერაციაზე მიღებული  $x^{(2)}$  კანონიერი ამონახსნია. მაგრამ  $x^{(2)}$  წერტილში განსაზღვრული კრიტერიული ვექტორი  $\bar{x}$  წერტილის კრიტერიული ვექტორის მიერ დომინირებულია.



ნახ. 7.53

## 7.8.2 ჯოფრიონ-დაიერ-ფაინბერგის მეთოდი (GDF)

ჯოფრიონის, დაიერისა და ფაინბერგის მიერ შემუშავებული GDF მეთოდი [187] ერთგანზომილებიანი ძებნის მეთოდებს მიეკუთვნება და გამოიყენება შემდეგი სახის ამოცანის გადასაწყვეტად:

$$\max \{ f_1(x) = z_1 \},$$

$$\max \{ f_2(x) = z_2 \},$$

⋮

$$\max \{ f_k(x) = z_k \},$$

როცა  $x \in \Omega$ ,

სადაც  $\Omega$  სიმრავლე შემოსაზღვრულია და განისაზღვრება წრფივი შეზღუდვებით. GDF მეთოდში ქვებროცედურის სახით გამოყენებულია ფრანკ-ულფის გრადიენ-

ტული მეთოდი, რომელიც 5.4.3 ნაწილში განვიხილეთ. ავტორებმა აღნიშნული მეთოდი მისი სიმარტივისა და სწრაფი კრებალობის გამო აირჩიეს. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ მრავალკრიტიერიულ ამოცანებში ფრანკ-კულფის მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში საოპტიმიზაციო ფუნქცია სარგებლიანობის  $U$  ფუნქციით იცვლება. მიუხედავად იმისა, რომ  $U$  ფუნქციის ანალიზური სახე უცნობია, GDF მეთოდის საშუალებით გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ ნაბიჯ-ნაბიჯ გამოვლინდება ინფორმაცია მინიჭებული უპირატესობების შესახებ, რათა ძეზნის მიმართულებების განსაზღვრისათვის შეფასდეს  $U$  ფუნქციის გრადიენტები. საჭიროა აღინიშნოს, რომ მრავალკრიტიერიული ამოცანების შემთხვევაში GDF მეთოდი ოპტიმალური ამონახსნის მიმართ კრებადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის  $U$  ფუნქცია დიფერენცირებადი და ჩახეკილია  $\Omega$ -ზე.

### ლოკალურად შესაფერისი წონების განსაზღვრის პროცედურა

GDF მეთოდში  $U$  ფუნქციის გრადიენტების შესაფასებლად გამოყენებულია კრიტიერიული ვექტორების წყვილ-წყვილად შედარების პროცედურა, რომელშიც გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ მინიჭებული უპირატესობების ამსახველი წონები განისაზღვრება. ზოგადობის შეუზღუდავად პირველი კრიტიერიუმი ჩათვალოთ ეტალონად (ათელის წერტილად). როგორც უკვე იყო აღნიშნული 7.3.4 ნაწილში,  $i$ -ური კრიტიერიუმის წონა გამოითვლება  $\frac{\Delta_1}{\Delta_i}$  ფარდობით, სადაც  $\Delta_i$  წარმოადგენს

$i$ -ური კრიტიერიუმის მნიშვნელობის ნაზრდს, რომელიც აკომპენსირებს პირველი (ეტალონური) კრიტიერიუმის მნიშვნელობის  $\Delta_1$  სიდიდით შემცირებას, იმ პირობით, თუ ყველა დანარჩენი კრიტიერიუმის მნიშვნელობა არ შეიცვლება. ფიქსირებული  $\Delta_1$ -ის დროს წყვილ-წყვილად შედარების პროცედურის არსი მდგომარეობს  $\Delta_i$ , ( $i=2,3,\dots,k$ ) მნიშვნელობებისა და, მაშასადამე, უპირატესობის ამსახველი  $w_i = \frac{\Delta_1}{\Delta_i}$

წონების განსაზღვრაში.  $\Delta_i$  ( $i=2,3,\dots,k$ ) სიდიდეების განსაზღვრისათვის შემოთავაზებულია შემდეგი ალგორითმი, რომელშიც გამოყენებულია შუაზე გაყოფისა და გაორკეცების პროცედურები.

**ბიჯი 1.** ეთქვას,  $Z^l = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_k)$  მიმდინარე კრიტიერიული ვექტორია. შემოვიტანოთ  $\Delta_1$  სიდიდე და დავეშვათ  $i=2$  და  $w_1=1$ .

**ბიჯი 2.** დავეშვათ  $l=0$  და  $\Delta_i^l$ -ს მივანიჭოთ საწყისი მნიშვნელობა.

**ბიჯი 3.** განვაზორციელოთ მინიჭების ოპერაცია  $l=l+1$ . შევადაროთ  $Z^l$  და  $Z^{l-1}=(z_1-\Delta_1, z_2, \dots, z_i+\Delta_i^{(l)}, \dots, z_k)$ .

ბიჯი 4. თუ  $z^*$  უპირატესია, მაშინ, დავეშვებით რა  $\Delta_i^{(i+1)} = 2\Delta_i^{(i)}$ , უნდა გავზარდოთ  $z^*$ -ის "სასურველობა" და გადავიღეთ მე-3 ბიჯზე. თუ  $z^*$  უპირატესია  $z^*$ -ზე, მაშინ დავეშვათ  $\theta^{(i)} = \Delta_i^{(i)}/2$  და გადავიღეთ მე-8 ბიჯზე. თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირი  $z^*$ -სა და  $z^*$ -ს შორის არჩევანს ვერ აკეთებს, მაშინ გადავიღეთ მე-8 ბიჯზე.

ბიჯი 5. დავეშვათ  $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)}/2$  და განვახორციელოთ მინიჭების ოპერაცია  $i=i+1$ . შევადაროთ  $z^*$  და  $z^*$ . თუ  $z^*$  უპირატესია, მაშინ გადავიღეთ მე-8 ბიჯზე, ხოლო თუ  $z^*$  უპირატესია, მაშინ - მე-7 ბიჯზე. იმ შემთხვევაში, როცა გადაწყვეტილების მიმღები პირი  $z^*$ -სა და  $z^*$ -ს შორის არჩევანს ვერ აკეთებს, მაშინ გადავალთ მე-8 ბიჯზე.

ბიჯი 6. დავეშვებით რა  $\Delta_i^{(i+1)} = \Delta_i^{(i)} - \theta^{(i)}/2$ , უნდა შევამციროთ  $z^*$ -ის სასურველობა და გადავიღეთ მე-5 ბიჯზე.

ბიჯი 7. დავეშვებით რა  $\Delta_i^{(i+1)} = \Delta_i^{(i)} + \theta^{(i)}/2$ , უნდა გავზარდოთ  $z^*$ -ის სასურველობა და გადავიღეთ მე-5 ბიჯზე.

ბიჯი 8. დავეშვათ  $w_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_i^{(i)}}$ . თუ  $i \neq k$ , მაშინ განვახორციელოთ მინიჭების ოპერაცია  $i=i+1$  და გადავიღეთ მე-2 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში - გადავიღეთ მე-9 ბიჯზე.

ბიჯი 9. დასასრული.

მაბალაიში 7.42 იმისათვის, რომ შევაფასოთ  $w_i$  წონები, რომლებიც შეესატყვისება გადაწყვეტილების მიმღები პირის წარმოდგენებს კრიტიერიუმების ურთიერთჩანაცვლების შესახებ, როცა  $z^* = (100, 50)$ , საჭიროა შუაზე გაყოფისა და გაორკეცების პროცედურაში დავეშვათ  $\Delta_1 = 10$  და  $\Delta_1^{(1)} = 4$ .

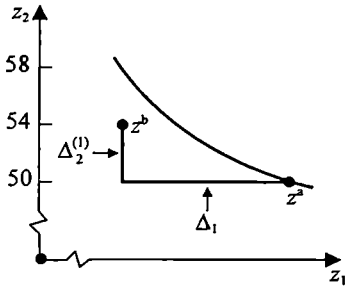
ნახ. 7.54-ზე  $z^*$  უპირატესია  $z^* = (90, 54)$ -ზე. იმისათვის, რომ გავზარდოთ  $z^*$ -ის სასურველობა,  $\Delta_2^{(1)}$  გავზარდოთ 4 ერთეულით, ე.ი.  $\Delta_2^{(2)} = 8$ .

ნახ. 7.55-ზე  $z^* = (90, 58)$  უპირატესია  $z^*$ -ზე. იმისათვის, რომ შევამციროთ  $z^*$ -ის სასურველობა,  $\Delta_2^{(2)}$  შევამციროთ 2 ერთეულით, ე.ი.  $\Delta_2^{(3)} = 6$ .

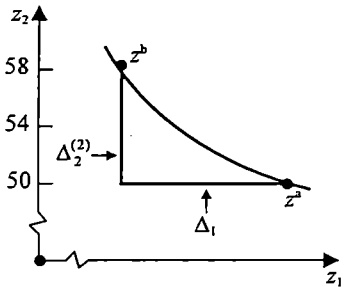
ნახ. 7.56-ზე  $z^*$  უპირატესია  $z^* = (90, 56)$ -ზე. იმისათვის, რომ გავზარდოთ  $z^*$ -ის სასურველობა,  $\Delta_2^{(3)}$  გავზარდოთ 1 ერთეულით, ე.ი.  $\Delta_2^{(4)} = 7$ .

ნახ. 7.57-ზე  $z^*$  და  $z^* = (90, 57)$  წერტილებს ერთმანეთის მიმართ არ აქვს უპირატესობა. მაშასადამე,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 10/7$ . შევნიშნავთ, რომ მიღებული წონები არ არის ყველაზე საუკეთესო, რადგანაც ისინი შეესაბამებიან ნახ. 7.57-ზე პუნქტირით წარ-

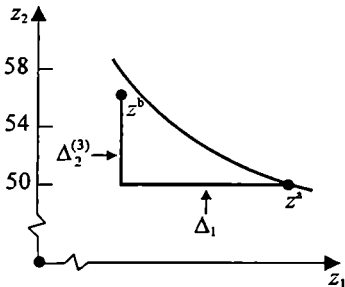
მოდგენილ ვრფეს და არა  $z^a$  წერტილში სარგებლიანობის ფუნქციის ღონის წირის მხებს.



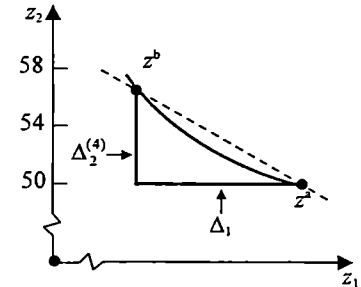
ნახ. 7.54



ნახ. 7.55



ნახ. 7.56



ნახ. 7.57

### GDF ალგორითმი

**ბიჯი 1.** მივანიჭოთ იტერაციის მთვლელს ნულოვანი მნიშვნელობა, ე.ი.  $h=0$ . განვსაზღვროთ საწყისი  $x^{(0)} \in \Omega$  წერტილი.

თუ  $\Omega$  განსაზღვრულია წრფივი შეზღუდვებით, მაშინ საწყისი ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოვიყენოთ წრფივი დაპროგრამების სიმპლექს-მეთოდი და შევასრულოთ მისი პირველი ეტაპი. თუ, ამასთან, კრიტერიუმებიც წრფივია, მაშინ  $x^{(0)}$ -ის განსაზღვრისათვის შეიძლება გამოვიყენებულ იქნეს მეორე გზაც, კერძოდ, ვთხოვით გადაწყვეტილების მიძღებ პირს შეგვატყობინოს რომელიმე კრიტერიული  $\bar{z}$  ვექტორია თუ არა, საჭიროა გადავწყვიტოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ 0^T x \},$$

$$\text{როცა } c^T x = \bar{z}_i, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$x \in \Omega.$$

თუ ამოცანა თავისებურად (საკუთრივად), მაშინ მისი ამონახსნი ჩათვლება საწყის  $x^{(0)}$  მნიშვნელობად.

**ბიჭი 2.** იტერაციების მთვლელის მნიშვნელობა ერთი ერთეულით გაზარდოთ ანუ შევასრულოთ მინიჭების ოპერაცია  $h = h+1$ .

**ბიჭი 3.** იმისათვის, რომ  $x^{(h)}$  წერტილში  $U$  ფუნქციის გრადიენტის მიმართულება შეეაფასოთ, საჭიროა გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა პროგრამაში შემოიტანოს ლოკალური წონითი ვექტორი ან კრიტიკიუმების წყვილ-წყვილად შედარების თაობაზე უპასუხოს კითხვების სერიას, რის შედეგადაც კომპიუტერს საშუალება ექნება განსაზღვროს ლოკალური წონების ერთობლიობა.

პრაქტიკული მნიშვნელობის ამოცანების გადაწყვეტის დროს გადაწყვეტილების მიმღებ პირს, როგორც წესი, არ შეუძლია (ან არ სურს) წონების უშუალოდ განსაზღვრა. მაშასადამე, მის წინაშე საჭირო იქნება დაისვას რიგი კითხვები კრიტიკიუმების წყვილ-წყვილად შედარების შესახებ, რის შედეგად წონები პროგრამულად დაითვლება.

**ბიჭი 4.** ვთქვათ,  $\nabla_x f(x^{(h)})$  არის  $i$ -ური მიზნის ფუნქციის გრადიენტი  $x^{(h)}$  წერტილში. გადაწყვეტილთ მიმართულების განსაზღვრის ამოცანა

$$\max \{ g^T x \mid x \in \Omega \},$$

სადაც  $g = \sum_{i=1}^k w_i \nabla_x f_i(x^{(h)})$ . ამოცანის ოპტიმალური  $y^{(h)} \in S$  ამონახსნის

საშუალებით განვსაზღვროთ მიმართულების ვექტორი  $d^{(h)} = y^{(h)} - x^{(h)}$ .

თუ მე-3 ბიჭზე მიღებულია წონების საკმაოდ შესაფერისი მნიშვნელობები, მაშინ  $g$  ვექტორი  $x^{(h)}$  წერტილში  $U$  ფუნქციის გრადიენტის მიმართულებას მიახლოებით განსაზღვრავს და იგი საკმარისი იქნება ერთგანზომილებიანი ძებნის სავსებით მისაღები  $d^{(h)}$  მიმართულების მისაღებად.

**ბიჭი 5.** თუ  $y^{(h)} = x^{(h)}$ , მაშინ დაეუშვათ  $x^{(h)} = x^{(h)}$  და გადავიღეთ მე-10 ბიჭზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიღეთ მე-6 ბიჭზე.

**ბიჭი 6.** დაეუშვათ  $\gamma(x^{(h-1)}, y^{(h)})$  მონაკვეთის დაყოფის წერტილების  $P$  რიცხვი, სადაც  $P > 1$ .

**ბიჭი 7.** კომპიუტერის ეკრანზე გამოვიტანოთ  $P$  კრიტიკიული ვექტორი.



იმისათვის, რომ  $d^{(h)}$  მიმართულებით ერთგანზომილებიანი ძებნა განუახორციელოთ, საჭიროა ამოვბეჭდოთ (ან კომპიუტერის ეკრანზე გამოვიტანოთ) კრიტერიული ვექტორები  $\gamma(x^{(h-1)}, y^{(h)})$  მონაკვეთის თანაბრად დაყოფის კვანძებისათვის. ამასთან,  $z(x^{(h-1)})$  იქნება პირველი კრიტერიული ვექტორი,  $z(y^{(h)})$  - უკანასკნელი, ხოლო შუალედური  $P-2$  კრიტერიული ვექტორი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$z(x^{(h-2)} + C_{P-1}^{-1}d^{(h)}), \quad j = 2, 3, \dots, P-1.$$

**ბიჯი 8.** გადაწყვეტილების მიმღები პირი  $P$  კრიტერიული ვექტორებიდან ირჩევს მისი თვალსაზრით ყველაზე უპირატესს, განსაზღვრავს რა ამ ვექტორისა და მისი შესაბამისი პირველსაზედან შედგენილ  $(z^{(h)}, x^{(h)})$  წყვილს.

მე- $n$  ბიჯზე  $P$  რიცხვის მოცემით მომხმარებელი მართავს კრიტერიული ვექტორების შესახებ ყოველ იტერაციაზე მიღებული ინფორმაციის მოცულობას.

**ბიჯი 9.** თუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს იტერაციების გაგრძელება სურს, მაშინ უნდა გადავიდეთ მე-2 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავალოთ მე-10 ბიჯზე.

**ბიჯი 10.**  $(z^{(h)}, x^{(h)})$  ჩაითვლება საბოლოო ამონახსნად. დასასრული.

ალგორითმის ბლოკ-სქემა წარმოდგენილია ნახ. 7.58-ზე.

### GDF მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა (ნახ. 7.59)

$$\max \{ x_1 = z_1 \},$$

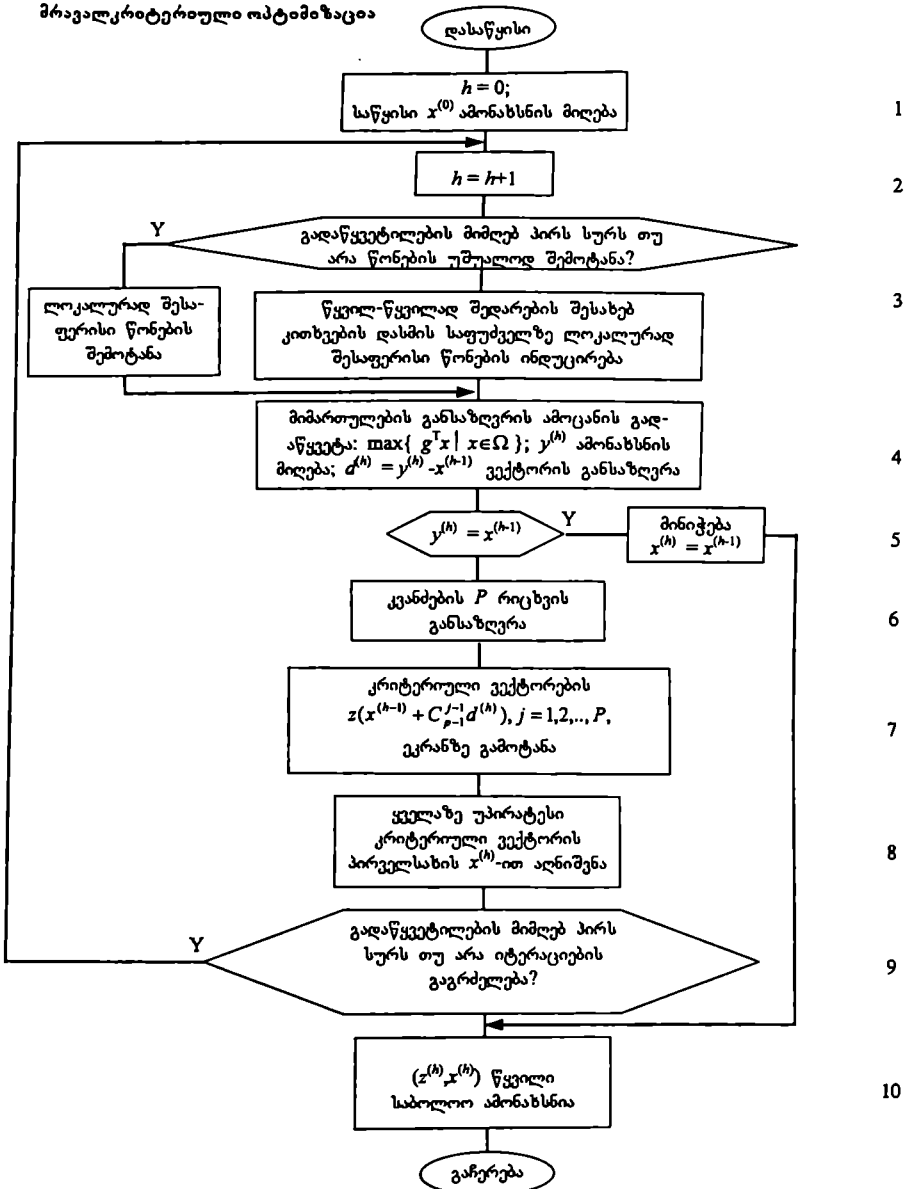
$$\max \{ x_2 = z_2 \},$$

$$\text{როცა } x_1 + x_2 \leq 10,$$

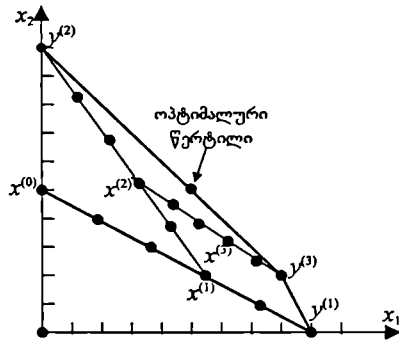
$$2x_1 + x_2 \leq 18,$$

$$5x_1 + 9x_2 \geq 45,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



ნახ. 7.58



ნახ. 7.59

ალგორითმის მუშაობის უნარის საილუსტრაციოდ დავუშვათ  $U = (z_1+1)^2(z_2+1)^2$ . მაშასადამე,  $z=(5;5)$  ოპტიმალური ამონახსნია, ხოლო  $U_{opt}=U(z)=1296$  - სარგებლიანობის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა. ეთქვას, **GDF** ალგორითმის მიხედვით შესრულდა სამი იტერაცია, ამასთან, ყველა იტერაციაში  $P=6$ . იმის ნაცვლად, რომ მე-3 ბიჯზე წონები დაეადგინოთ და მათი საშუალებით მე-4 ბიჯზე გ მიმართულება განესაზღვროთ, მოცემულ მაგალითში გ ვექტორს თავიდანვე ენიჭება მიმდინარე  $x^{(h-1)}$  წერტილში  $U$  ფუნქციის გრადიენტის მნიშვნელობა, ე.ი.  $g = \nabla_x U(x^{(h-1)})$ .

	$h = 1$		$h = 2$		$h = 3$	
$x^{(h-1)}$	(0;5)		(5.4;2)		(3.24;5.2)	
$g$	(72;12)		(115.2;245.8)		(3.26;223)	
$y^{(h)}$	(9;0)		(0;10)		(8;2)	
$d^{(h)}$	(9;-5)		(-5.4;8)		(4.76;-3.2)	
	კვანძებში გამოთვლილი კრიტერიული ვექტორები	$U$	კვანძებში გამოთვლილი კრიტერიული ვექტორები	$U$	კვანძებში გამოთვლილი კრიტერიული ვექტორები	$U$
	(0;5)	36.0	(5.4;2)	368.6	(3.24;5.2)	691.1
	(1.8;4)	196.0	(4.32;3.6)	598.9	(4.192;4.56)	833.3
	(3.6;3)	338.6	(3.24;5.2)	691.1	(5.144;3.92)	913.8
	(5.4;2)	368.6	(2.16;6.8)	607.5	(6.096;3.28)	922.4
	(7.2;1)	269.0	(1.08;8.4)	382.3	(7.048;2.64)	858.2
	(9;0)	100.0	(0;10)	121.0	(8;2)	729.0
$z^{(h)}$	(5.4;2)		(3.24;5.2)		(6.096;3.28)	
$U(z^{(h)})$	368.6		691.1		922.4	

ცხრილი 7.7

ეთქვათ,  $x^{(0)} = (0; 5)$  საწყისი წერტილია. როცა  $g = \nabla_x U(x^{(0)}) = (72; 12)$ , მაშინ მიმართულების განსაზღვრის ამოცანის (მე-4 ბიჯი) ამონახსნია  $y^{(1)} = (9; 0)$ . მაშასადამე, ძებნის მიმართულების ვექტორია  $d^{(1)} = (9; -5)$ , ხოლო კვანძებში კრიტერიული ვექტორის ექვსი მნიშვნელობა შეადგენს:  $(0; 5)$ ,  $(1.8; 4)$ ,  $(3.6; 3)$ ,  $(5.4; 2)$ ,  $(7.2; 1)$  და  $(9; 0)$ . ვექტორებს შორის კი საუკეთესოა  $x^{(1)} = (5.4; 2)$ , რადგან მის შესაბამის  $U$  ფუნქციას გააჩნია უდიდესი მნიშვნელობა  $U_{\max} = 368.6$ .

თუ მეორე იტერაციას  $x^{(1)} = (5.4; 2)$  წერტილიდან დავიწყებთ, მაშინ მივიღებთ  $g = \nabla_x U(x^{(1)}) = (115.2; 245.8)$  და ამ შემთხვევაში მიმართულების განსაზღვრის ამოცანის ამონახსნი იქნება  $y^{(2)} = (0; 10)$ . მაშასადამე, ერთგანზომილებიანი ძებნის მიმართულებაა  $d^{(2)} = (-5.4; 8)$  და ა.შ. **GDF** ალგორითმის პირველი სამი იტერაციის შედეგები მოცემულია 7.7 ცხრილში. როგორც ცხრილიდან ჩანს, თითოეულ იტერაციაში კვანძებში გამოთვლილი ყველა კრიტერიული ვექტორი (გარდა ერთისა) დომინირებულია. ცხრილიდან ჩანს, აგრეთვე, რომ მეთოდის კრებადობა არ არის საკმაოდ სწრაფი.

### კომენტარები GDF მეთოდის შესახებ

1. **STEM** მეთოდისგან განსხვავებით, **GDF** მეთოდი არ არის ევრისტიკული. იგი ტესტირებადია, თუ ცნობილია გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის ფუნქციის მათემატიკური აღწერა. ე.ი. კრიტერიუმების წყვილ-წყვილად შედარება და ბადური კრიტერიუმების შერჩევა შესაძლებელია განხორციელდეს სრულიად დეტერმინირებულად, გავითვალისწინებთ რა განსახილველ კრიტერიულ ვექტორებს სარგებლიანობის ფუნქციაში.
2. პრაქტიკულ შემთხვევებში, **GDF** ალგორითმის მე-3 ბიჯის შემდეგ გადაწყვეტილების მიმღები პირი მიიღებს ჭეშმარიტი წონების მხოლოდ მიახლოებით მნიშვნელობებს, ხოლო მე-8 ბიჯის შემდეგ - ბიჯის ოპტიმალური სიგრძის მხოლოდ მიახლოებით მნიშვნელობას. თუმცა არსებობს შედეგები, რომლებიც გვიჩვენებს, რომ უსასრულობაში ადგილი აქვს ოპტიმუმისკენ კრებადობას, თუ იტერაციების რაოდენობის ზრდასთან ერთად ზემოთ აღნიშნული სიდიდეები საკმაოდ ზუსტ მნიშვნელობას მიიღებს [187].
3. მიუხედავად იმისა, რომ **GDF** ალგორითმის ავტორების მიერ ფრანკ-ვულფის მეთოდი შერჩეულია არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანებში პროცესის დასაწყისში სწრაფი კრებადობის გამო, შესაძლებელია აღნიშნულმა ალგორითმმა ვერ უზრუნველყოს ინტერაქტიული პროცედურებისათვის კრებადობის ისეთი სიჩქარე, რომელიც აუცილებელია მრავალკრიტერიული ამოცანების გადასაწყვეტად.
4. მიუხედავად იმისა, რომ თითოეულ იტერაციაზე ადგილი აქვს ოპტიმიზაციის მხოლოდ ერთ პროცედურას (მე-4 ბიჯი), თუ **GDF** ალგორითმის მე-3 ბიჯზე

კრიტერიუმების წყვილ-წყვილად შედარების პროცედურას გამოვიყენებთ, მაშინ თითოეულ იტერაციაზე განხორციელდება ხანგრძლივი დიალოგი ადამიანსა და კომპიუტერს შორის.

5. GDF ალგორითმის მე-7 ბიჯზე წარმოდგენილი კრიტერიული ვექტორების უმრავლესობა, შესაძლებელია, იქნება დომინირებული.
6. GDF მეთოდი, შესაძლებელია, გამოყენებულ იქნეს იმ შემთხვევაშიც, როცა  $\Omega$  სიმრავლე არაწრფივი შეზღუდვებით იქნება განსაზღვრული, თუ, რასაკვირველია, ალგორითმის მე-4 ბიჯზე მიმართულების განსაზღვრისათვის არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდებს გამოვიყენებთ.

### 7.8.3 ზაინც-გალენიუსის მეთოდი (Z-W)

ზაინც-გალენიუსის მეთოდი [277, 278] წონითი ვექტორების სიმრავლის შევიწროების მეთოდების რიცხვს მიეკუთვნება და გამოიყენება მრავალკრიტერიული წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის ამოცანის გადასაწყვეტად:

$$\max \{ c^1 x = z_1 \},$$

$$\max \{ c^2 x = z_2 \},$$

⋮

$$\max \{ c^k x = z_k \},$$

როცა  $x \in \Omega$ ,

სადაც მიზნის ფუნქციები ნორმირებულია (მაგალითად,  $L_1$  სივრცის ნორმაში). მეთოდი კრებადია უდიდესი სარგებლიანობის ეფექტურ კუთხის წერტილში, თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის  $U: R^k \rightarrow R$  ფუნქცია ფსევდოჩაზნეკილია.

მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. მომხმარებელს მუშაობის პროცესში ეძლევა შეკითხვები მოსაზღვრე კუთხის წერტილების ან ჩანაცვლების ვექტორების შესახებ. მიღებული პასუხების საფუძველზე მოიკვეთება წონითი ვექტორების

$\Lambda = \left\{ \lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$  სიმრავლის ზოგიერთი ნაწილი. პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ  $\Lambda$  არე არ შემცირდება იმ სიდიდემდე, რომ საბოლოო ამონახსნის განსაზღვრა შესაძლებელი გახდეს.

## Z-W ალგორითმი

**ბიჭი 1.** დაეუშვათ  $\Lambda^{(0)} = \Lambda$ . შევარჩიოთ ნებისმიერი  $\lambda \in \Lambda^{(0)}$  და გადავწყვიტოთ წრფივი დაპროგრამების შედგენილი ამოცანა

$$\max \{ \lambda' Gx \mid x \in \Omega \}.$$

ვთქვათ,  $x^{(h)}$  კუთხის წერტილი ამოცანის ამონახსნია, ხოლო  $z^{(h)}$  - შესაბამისი კრიტერიული ვექტორი. იტერაციების  $h$  მოვლელს მივანიჭოთ ნულის ტოლი მნიშვნელობა,  $h=0$ .

მიუხედავად იმისა, რომ ამოცანის გადაწყვეტისათვის 1-ლ ბიჯზე საკმარისია ავიღოთ ნებისმიერი  $\lambda \in \Lambda$ , რეკომენდირებულია, რომ შევარჩიოთ ერთნაირკომპონენტებიანი  $\lambda$  ვექტორი.

**ბიჭი 2.** ეფექტური არაბაზისური ცვლადების სიმრავლე დაეყოთ  $A$  და  $B$  სიმრავლეებად, სადაც

$A$  არის  $\Lambda^{(h)}$ -ს მიმართ ეფექტური არაბაზისური ცვლადების სიმრავლე;

$B$  არის სიმრავლე იმ ეფექტური არაბაზისური ცვლადებისა, რომლებიც  $A$  სიმრავლეს არ ეკუთვნის.

შემოვიღოთ ინდიკატორული  $I = A$  სიმრავლე.

ზაინც-ვალენიუსის მოდიფიცირებული პროცედურა, რომელიც წარმოადგენს  $x^{(h)}$  წერტილის შესაბამისი ბაზისის მიმართ ეფექტური არაბაზისური ცვლადების გამოვლენის საშუალებას,  $A$  და  $B$  სიმრავლეების ასაგებად გამოიყენება. მაგალითი ზაინც-ვალენიუსის მოდიფიცირებული პროცედურის გამოყენებისა, რომელიც განკუთვნილია ალგორითმის მე-2 ბიჯის შესასრულებლად, განხილულია ქვემოთ.

**ბიჭი 3.** ავაგოთ კრიტერიული ვექტორები, რომლებიც შეესაბამება ყველა იმ მოსაზღვრე კუთხის წერტილს, რომელთა ახალი ცვლადები  $I$  სიმრავლეს ეკუთვნის. დროებით არ განიხილება ის კრიტერიული ვექტორები, რომლებიც  $z^{(h)}$ -სგან არ განსხვავდება. გადაწყვეტილების მიმღებ პირთან დავაზუსტოთ:  $z^{(h)}$ -სგან საკმაოდ განსხვავებული თითოეული კრიტერიული ვექტორი არის თუ არა  $z$  ვექტორზე უპირატესი? შესაძლებელია პასუხის საში ვარიანტი:

1. კი (მოსაზღვრე კრიტერიული ვექტორი უპირატესია);
2. არა ( $z^{(h)}$  უპირატესია);
3. არ ვიცი (ვერ ახერხებს უპირატესობის მინიჭებას).

თუ ერთი მინც საკმაოდ განსხვავებული მოსაზრებე კრიტიკული ვექტორი  $Z^{(h)}$ -ზე უპირატესი აღმოჩნდა, მაშინ იგი დავიმახსოვროთ, ალენიშნოთ  $Z$ -თი და გადავიდეთ მე-7 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიდეთ მე-4 ბიჯზე.

ამავე ბიჯზე ადგილი აქვს კრიტიკიუმების წყვილ-წყვილად შედარებას.  $Z^{(h)}$ -სთან შედარება მოსაზრებე კუთხის წერტილის შესაბამისი თითოეული, საკმაოდ განსხვავებული, კრიტიკული ვექტორი, რომლის ახალი ცვლადები  $I$  სიმრავლეს მიეკუთვნება. ზაინცისა და ვალენიუსის მიერ შემოთავაზებულია ზოგიერთი წესი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს კრიტიკული ვექტორების განსხვავების ხარისხი განვსაზღვროთ, რათა შევძლოთ მათი წყვილ-წყვილად შედარება. კერძოდ, ვექტორები განსხვავებულად ჩაითვლება, თუ არსებობს 10%-იანი სხვაობა ერთი კომპონენტის მნიშვნელობებს შორის მინც. მე-3 ბიჯის რეალიზაციისათვის შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს ორი სხვადასხვა წესი. პირველი წესი მდგომარეობს საკმაოდ განსხვავებული ყველა მოსაზრებე კრიტიკული ვექტორის წყვილ-წყვილად შედარებაში, ხოლო მეორე წესი ითვალისწინებს გადაწყვეტილების მიმღები პირის მისამართით შეკითხვების დასმას დაღებიო პასუხის ("კი") მიღებადღე.

#### ბიჯი 4.

$I$  სიმრავლის ყველა არაბაზისური ცვლადისათვის, რომლის მიმართ მე-3 ბიჯზე შეკითხვები არ იყო დასმული, ავაგოთ ჩანაცვლების ვექტორი. ჩანაცვლების თითოეული ვექტორის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირის მისამართით უნდა დაისვას შეკითხვა: მოსწონს იგი თუ არა? შესაძლებელია პასუხის სამი ვარიანტი:

1. კი (ჩანაცვლება მოსაწონია);
2. არა (ჩანაცვლება არ არის მოსაწონი);
3. არ ვიცი (არ შემიძლია შევაფასო).

თუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს მოსწონს შემოუსაზღვრავ წიბოსთან დაკავშირებული ჩანაცვლება, მაშინ პროცესი დავამთავროთ და შევჩერდეთ შემოუსაზღვრავ ამონახსნზე. თუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს მოსწონს შემოსაზღვრული წიბოს შესაბამისი ერთი მინც ჩანაცვლება, მაშინ გადავიდეთ მე-7 ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიდეთ მე-5 ბიჯზე.

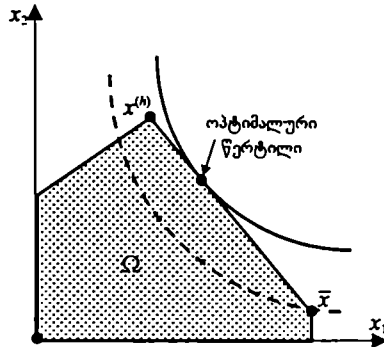
ჩანაცვლების ვექტორები ფარდობით შეფასებათა მატრიცის სვეტებიდან მიიღება. მოცემულ ბიჯზე საშუალება გვაქვს შევაფასოთ კრიტიკიუმების წყვილ-წყვილად შესადარებლად ერთმანეთთან ძალიან ახლოს მდებარე ეფექტური კუთხის წერტილების შემაერთებელი წიბოები.

ბიჯი 5. გამოვიყენოთ  $I$  სიმრავლე და გადაწყვეტილების მიმღებ პირს შევეცით-ხოთ: მოსწონს თუ არა ჩანაცვლების ვექტორები, მახასიათებელი იმ წი-ბოებისა, რომლებიც დაკავშირებულია იმ მოსაზღვრე ეფექტურ კუთხის წერტილებთან, რომლებიც ალგორითმის მე-3 ბიჯზე დაფიქსირდა რო-გორც არაუპირატესი? ჩანაცვლების თითოეული ასეთი ვექტორის მიმართ შესაძლებელია პასუხის სამი ვარიანტი:

1. კი (ჩანაცვლება მოსაწონია);
2. არა (ჩანაცვლება არ არის მოსაწონი);
3. არ ვიცი (არ შემიძლია შეეფასა).

თუ მიღებულია ერთი მაინც დადებითი პასუხი ("კი"), მაშინ გადავი-დეთ მე-7 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიდეთ მე-6 ბიჯზე.

მოცემული ბიჯი საშუალებას გვაძლევს გამოვყოთ წიბოები, რომელთა გასწვრივ სასურველია რაღაც წანაცვლება, მაგრამ შემდგომი გადაადგი-ლება მიგვიყვანს ისეთ კუთხის წერტილამდე, რომელიც ნაკლებად უპი-რატესია, ვიდრე მიმდინარე კუთხის წერტილი.



ნახ. 7.60

მაგალითი 7.43. ვთქვათ,  $z^{(h)}=z(z^{(h)})$ ,  $\bar{z} = z(\bar{x})$  და ოპტიმალური წერტილი განლა-გებულია ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახ. 7.60-ზე. ალგორითმის მე-3 ბიჯზე  $z^{(h)}$  და  $\bar{z}$  წერტილების წვეილ-წვეილად შედარებისას გადაწყვეტილების მიმღებ პირის პასუხი იქნებოდა "არა" ( $\bar{z}$  წერტილი  $z^{(h)}$  წერტილთან შედარებით არ არის უპირატესი). მაგრამ ალგორითმის მე-5 ბიჯზე გადაწყვეტილების მიმღებ პირის პასუხი ჩანაცვ-ლების თაობაზე შესაძლებელია ყოფილიყო "კი" (ანუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს



ჩანაცვლება მოეწონებოდა), რადგან  $\gamma(x^{(h)}, \bar{x})$  წიბოს გასწვრივ გადაადგილება (მის გარკვეულ მონაკვეთზე) სარგებლიანობის ფუნქციის უკეთესი მნიშვნელობების მიღებას განაპირობებს.

**ბიჯი 6.** თუ  $I = A$ , მაშინ დაეუშვათ  $I = B$  და გადავიდეთ მე-3 ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში საჭიროა გამოთვლების შეწყვეტა და  $(z^{(h)}, x^{(h)})$  ჩაითვლება ოპტიმალურ ამონახსნად.

$B$  სიმრავლე,  $A$  სიმრავლესთან ერთად, გადაწყვეტილების მიმღებ პირს საშუალებას აძლევს პროცესის დამთავრებამდე შეამოწმოს ჩანაცვლების ვექტორები და/ან  $x^{(h)}$  წერტილიდან გამოშვებული ყველა ეფექტური წიბოს შესაბამისი მოსაზღვრე კუთხის წერტილები (მიუხედავად იმისა, აღნიშნული ვექტორები გადაწყვეტილების მიმღები პირის პასუხებს ეთანადება თუ არა).

**ბიჯი 7.** გადაწყვეტილების მიმღები პირის პასუხების საფუძველზე შევადგინოთ ახალი  $\lambda$ -შეზღუდვები და ავაგოთ  $\Lambda^{(h+1)}$  სიმრავლე.

იმის მიხედვით, მოსაზღვრე კრიტიკული  $\bar{z}$  ვექტორი  $z^{(h)}$  ვექტორზე უპირატესი იყო თუ არა ალგორითმის მე-3 ბიჯზე, შევადგინოთ  $\lambda$ -შეზღუდვები:

$$\lambda^T (\bar{z} - z^{(h)}) \geq \varepsilon \text{ თითოეული "კი" პასუხისათვის,}$$

$$\lambda^T (\bar{z} - z^{(h)}) \leq -\varepsilon \text{ თითოეული "არა" პასუხისათვის,}$$

სადაც  $\varepsilon$  რაღაც მცირე დადებითი რიცხვია.

იმის მიხედვით, მოსწონს თუ არა გადაწყვეტილების მიმღებ პირს ჩანაცვლების  $\bar{w}$  ვექტორი ალგორითმის მე-4 და მე-5 ბიჯებზე, შევადგინოთ  $\lambda$ -შეზღუდვები:

$$\lambda^T \bar{w} \geq \varepsilon \text{ თითოეული "კი" პასუხისათვის,}$$

$$\lambda^T \bar{w} \leq -\varepsilon \text{ თითოეული "არა" პასუხისათვის.}$$

გამოვიყენებთ რა შედგენილ  $\lambda$ -შეზღუდვებს  $\Lambda^{(h)}$  სიმრავლის მოკვეთისათვის, მივიღებთ  $\Lambda^{(h+1)}$  სიმრავლეს. შევნიშნავთ, რომ მოცემულ ალგორითმში "არ ვიცი" ტიპის პასუხის შემთხვევაში  $\lambda$ -შეზღუდვების ფორმირებას აღვიღებთ არა აქვს.

**ბიჯი 8.** ვიპოვოთ  $\lambda^{(h+1)} \in \Lambda^{(h+1)}$ . თუ ასეთი  $\lambda^{(h+1)}$  არ არსებობს, მაშინ აქტიური  $\lambda$ -შეზღუდვების ყველაზე "მკვლ" სიმრავლეს გამოვირიცხავთ, განვაახლებთ  $\Lambda^{(h+1)}$ -ს და მე-8 ბიჯს განმეორებით შევასრულებთ.

აქტიური ენობა ისეთ  $\lambda$ -შეზღუდვას, რომელიც არ ყოფილა გამორიცხული. აქტიური  $\lambda$ -შეზღუდვები განსაზღვრავს  $\Lambda$  სიმრავლის მოკვეთას. შეცდომის ან გადაწყვეტილების მიმღები პირის მიერ უპირატესობების შეცვლის შედეგად აქტიური  $\lambda$ -შეზღუდვები იმდენად წინააღმდეგობრივი შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ  $\Lambda^{(k+1)} = \emptyset$ . ამ შემთხვევაში აქტიური  $\lambda$ -შეზღუდვებიდან ყველაზე "ძველი" შეზღუდვების გამორიცხვას გავაგრძელებთ მანამ, სანამ არ მოიძებნება  $\lambda^{(k+1)} \in \Lambda^{(k+1)}$ .  $\Lambda^{(k+1)}$  სიმრავლის მახასიათებელი წერტილის მისაღებად ვიპოვოთ ისეთი წერტილი, რომელიც უზრუნველყოფს  $\Lambda^{(k+1)}$  სიმრავლის განსაზღვრელი  $\lambda$ -შეზღუდვების ღონის ზედაპირებიდან მინიმალური გადახრის მაქსიმიზაციას.

**მაგალიტი 7.44.** დაუშვათ  $k=1$ . ვთქვათ, პირველი იტერაციის შემდეგ აქტიური  $\lambda$ -შეზღუდვებია  $2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \geq \varepsilon$  და  $\lambda_1 - 3\lambda_3 \leq -\varepsilon$ . ვთქვათ,  $\bar{z} = (9; 7; 1)$  უპირატესია  $z^{(k)} = (6; 8; 2)$ -ზე, ხოლო ჩანაცვლების  $\bar{w} = (0; -1; 2)$  ვექტორი გადაწყვეტილების მიმღებ პირს არ მოსწონს. მაშინ  $\lambda^{(k+1)} \in \Lambda^{(k+1)}$  მახასიათებელი წერტილის განსაზღვრისათვის საჭიროა გადაწყვეტილით წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max \{ \varepsilon \},$$

$$\text{როცა } 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \geq \varepsilon,$$

$$\lambda_1 - 3\lambda_3 \leq -\varepsilon,$$

$$3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \geq \varepsilon,$$

$$-\lambda_2 + 2\lambda_3 \leq -\varepsilon,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

$$\lambda_i \geq \varepsilon, \quad i=1,2,3,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i=1,2,3, \quad \varepsilon \geq 0.$$

**ბიჯი 9.**  $z^k$  ვექტორის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ  $\lambda^{(k+1)}$  და გადაწყვეტილით წრფივი დაპროგრამების შედეგინილი ამოცანა.

**ბიჯი 10.** თუ ალგორითმის მე-3 ბიჯის შემდეგ  $z^k$  ვექტორი არ არსებობს, მაშინ გადაწყვეტილების მიმღები პირი  $z^{(k)}$  და  $z^k$  ვექტორებიდან ირჩევს უპირატესს.

1. თუ  $z^k$  უპირატესია, მაშინ ამ უპირატესობის გამომსახველი  $z^{(k+1)} = z^k$  შეზღუდვა დაუშვათ  $\lambda$ -შეზღუდვებს და გადავიდეთ მე-13 ბიჯზე.

2. თუ  $z^{(h)}$  უპირატესია, მაშინ გადავიდეთ მე-11 ბიჯზე.

თუ ალგორითმის მე-3 ბიჯის შემდეგ  $z^*$  ვექტორი არსებობს, მაშინ გადავიდეთ მე-12 ბიჯზე.

ალბათობა იმისა, რომ ალგორითმის მე-3 ბიჯზე  $z^*$  ვექტორი არ მოიძებნება, იტერაციების რიცხვის გაზრდასთან ერთად იზრდება. თუ  $z^*$  არ მოიძებნა, მაშინ გადავდივართ შემდეგ იტერაციაზე, როცა  $z^*$  უპირატესია  $z^{(h)}$ -ზე.

**ბიჯი 11.** ამონახსნად ჩაითვლება ( $z^{(h)}$ ,  $x^{(h)}$ ) და გამოთვლითი პროცესი დამთავრდება. შესაძლებელია უკეთესი ამონახსნი არსებობდეს ეფექტური წახნაგის ფარდობით შიგა არეში. ოპტიმუმის მოსაძებნად საჭიროა გამოვიყენოთ ძებნის რომელიმე პროცედურა.

ვინაიდან  $Z-W$  ალგორითმის ძირითადი ოპერაციები დაკავშირებულია კუთხის წერტილებთან, ამიტომ მისი საშუალებით შეუძლებელია ოპტიმალური ამონახსნის მოძებნა, თუ ეს უკანასკნელი წახნაგების შიგნით ძვეს. ამ შემთხვევაში პრობლემის გადასაწყვეტად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ფილტრაციის ან სიმრავლეთა დისკრეტიზაციის ზოგიერთი მეთოდი, რაც, ცხადია, გაზრდის იტერაციების საერთო რაოდენობას.

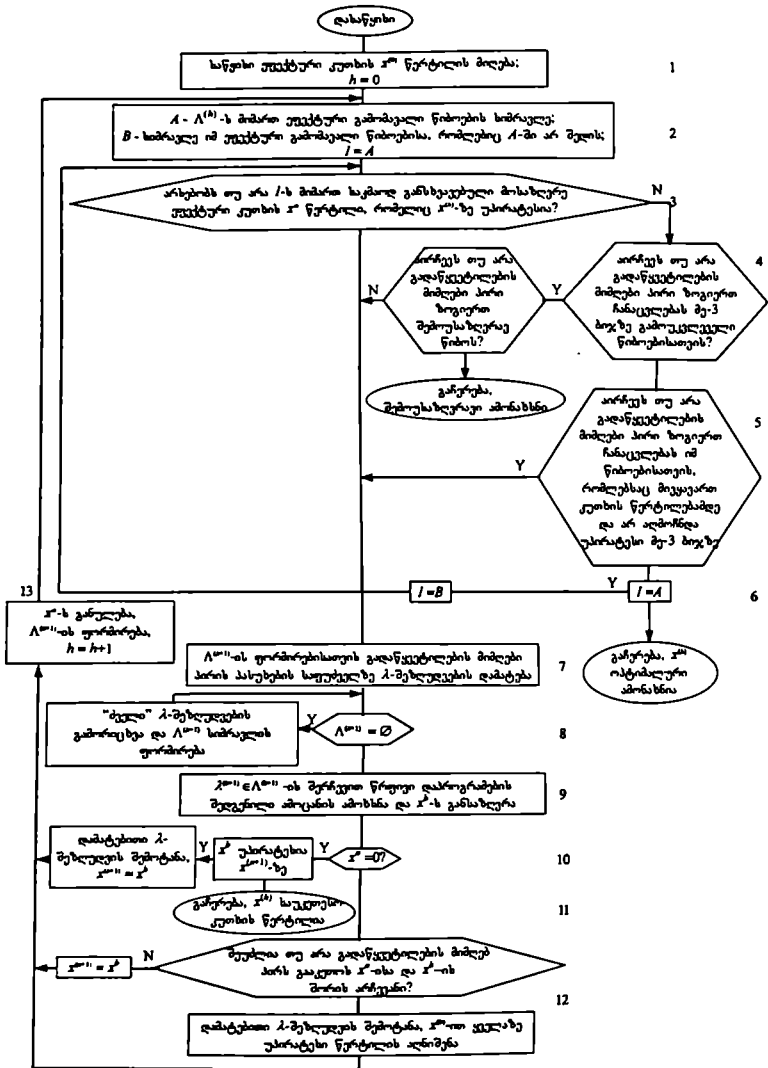
**ბიჯი 12.** თუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს შეუძლია გააკეთოს არჩევანი  $z^*$  და  $z^*$  ვექტორებს შორის, მაშინ აღვნიშნოთ  $z^{(h+1)}$ -ით უპირატესი კრიტერიული ვექტორი, რომელიც დაკუმატოთ  $h$ -შეზღუდვებს, და გადავიდეთ მე-3 ბიჯზე. თუ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს არ შეუძლია გააკეთოს არჩევანი, მაშინ  $z^{(h+1)} = z^*$  და გადავიდეთ მე-13 ბიჯზე.

**ბიჯი 13.** განხილვიდან გამოვრიცხოთ ( $z^*$ ,  $x^*$ ) წყვილი, თუ საჭიროა განვაახლოთ  $\Lambda^{(h+1)}$ , განვახორციელოთ მინიჭების ოპერაცია  $h = h+1$  და გადავიდეთ მე-2 ბიჯზე.

$\Lambda^{(h+1)}$  სიმრავლის განახლება აუცილებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მე-10 ან მე-12 ბიჯზე ადგილი ექნება  $h$ -შეზღუდვების ფორმირებას.

$Z-W$  ალგორითმის ბლოკ-სქემა მოცემულია ნახ. 7.61-ზე.

პრაქტიკული მათემატიკის ალგორითმი



ნახ. 7.61

## Z-W მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა

$$\max \{ x_1 = z_1 \},$$

$$\max \{ x_2 = z_2 \},$$

$$\max \{ x_3 = z_3 \},$$

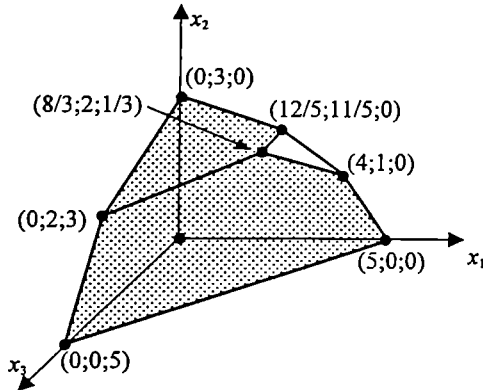
$$\text{როცა } x_1 + x_2 + x_3 \leq 5,$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9,$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 16,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

რომელიც გრაფიკულად გამოსახულია ნახ. 7.62-ზე, სადაც დაშტრიხული წახნაგები ქმნის ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეს. ალგორითმის მუშაობის უნარის საილუსტრაციოდ გამოვიყენოთ სარგებლიანობის შემდეგი ფუნქცია  $U = 0.45z_1 + 0.50z_2 + 0.05z_3$ . მაშასადამე, ოპტიმალურ ამონახსნს წარმოადგენს  $z^* = (4; 1; 0)$  წერტილი და მისი შესაბამისი ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა  $U_{\text{opt}} = U(z^*) = 2.30$ .



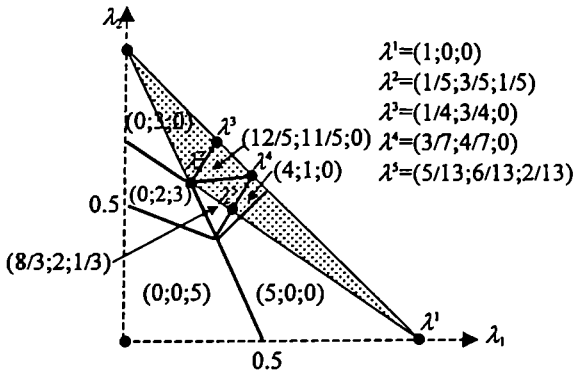
ნახ. 7.62

**მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაცია**

1. ბიჯი 1. შევიჩინოთ ნებისმიერი  $\lambda$  ვექტორი; დავუშვათ, რომ მივიღეთ  $x^{(0)} = (0; 2; 3)$ , ამასთან  $U = 1.15$ .
2. ბიჯი 3.  $x^{(0)}$  წერტილს გააჩნია სამი მოსაზღვრე კუთხის წერტილი. ესენია  $(0; 3; 0)$  წერტილი ფუნქციის  $U = 1.50$  მნიშვნელობით და  $(8/3; 2; 1/3)$  წერტილი ფუნქციის  $U = 2.22$  მნიშვნელობით, რომლებიც უპირატესია  $x^{(0)}$  წერტილზე. ამავე დროს,  $x^{(0)}$  წერტილი უპირატესია მესამე  $(0; 0; 5)$  წერტილზე, რომელშიც ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლია  $U = 0.25$ . აღენიშნოთ  $x^* = (0; 3; 0)$ .
3. ბიჯი 7. მოკვეთოთ  $\Lambda^{(0)}$  სიმრავლის ნაწილი, რისთვისაც შემოვიტანოთ შემდეგი შეზღუდვები:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 3\lambda_3 \geq \varepsilon \\ \frac{8}{3}\lambda_1 - \frac{8}{3}\lambda_3 \geq \varepsilon \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 \leq -\varepsilon \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 3 + \varepsilon \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 + \frac{3}{8}\varepsilon \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}.$$

წრფივი დაპროგრამების განხილული მრავალკრიტერიული ამოცანის ილუსტრაცია პარამეტრების სივრცეში მოყვანილია ნახ. 7.63-ზე, სადაც დაშტრიხული არე წარმოადგენს წონითი ვექტორების მოკვეთილ  $\Lambda^{(1)}$  სიმრავლეს ზემოთ მოცემული  $\lambda$ -შეზღუდვების გათვალისწინების შემთხვევაში.



ნახ. 7.63

4. ბიჯი 9. თუ  $\lambda^{(1)} = (0.25; 0.65; 0.10)$  წერტილს განვიხილავთ როგორც  $\Lambda^{(1)}$  სიმრავლის წარმომადგენელ წერტილს, მაშინ წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი ამოცანის ამონახსნი იქნება  $x^b = (12/5; 11/5; 0)$ , რომელსაც შესაბამება  $U = 2.18$ .

5. ბიჯი 12. ვინაიდან  $x^b$  უპირატესია  $x^c$ -ზე, ამიტომ დაეუშვათ, რომ  $x^{(1)} = (12/5; 11/5; 0)$  და შემოვიტანოთ ახალი  $\lambda$ -შეზღუდვა

$$\lambda^T (x^b - x^c) \geq \varepsilon \Leftrightarrow 3\lambda_1 - \lambda_2 \geq \frac{5}{4}\varepsilon.$$

6. ბიჯი 13.  $\Lambda^{(1)}$ -ის განახლების შემდეგ გვექნება  $\Lambda^{(1)} = \chi(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ .

7. ბიჯი 3.  $x^{(1)}$  წერტილს ერთადერთი მოსაზღვრე კუთხის წერტილი გააჩნია, რომელიც ეფექტურია  $\Lambda^{(1)}$ -ის მიმართ. ეს წერტილია  $(8/3; 2; 1/3)$  ფუნქციის მნიშვნელობით  $U = 2.22$  და იგი უპირატესია  $x^{(1)}$ -ზე. ალგორითმის მე-2 ბიჯის შესაბამისად კუთხის  $(4; 1; 0)$  წერტილი არ არის  $x^{(1)}$  წერტილის მოსაზღვრე, რადგან  $x^{(1)}$  წერტილის  $(4; 1; 0)$  წერტილთან შემაერთებელი წიბო არაეფექტურია. აღვნიშნოთ  $x^c = (8/3; 2; 1/3)$ .

8. ბიჯი 7. დაეუმატოთ  $\lambda$ -შეზღუდვა

$$\frac{4}{15}\lambda_1 - \frac{1}{5}\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 \geq \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_1 + 8\lambda_2 \leq 5 - 15\varepsilon.$$

ამიტომ გვექნება  $\Lambda^{(2)} = \chi(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4)$ .

9. ბიჯი 9. როცა  $\lambda^{(2)} = (0.45; 0.50; 0.05)$  და იგი  $\Lambda^{(2)}$  სიმრავლეს წარმოადგენს, მაშინ წრფივი დაპროგრამების აწონილჯამებიანი ამოცანის ამონახსნი იქნება  $x^b = (4; 1; 0)$  სარგებლიანობის ფუნქციის  $U = 2.30$  მნიშვნელობით.

10. ბიჯი 12. ვინაიდან  $x^b$  უპირატესია  $x^c$ -ზე, ამიტომ დაეუშვათ, რომ  $x^{(2)} = (4; 1; 0)$  დაეუმატოთ შეზღუდვა

$$\frac{4}{3}\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 \geq \varepsilon \Leftrightarrow 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 1 + 3\varepsilon.$$

11. ბიჯი 13.  $\Lambda^{(2)}$  სიმრავლის განახლებით მიიღება  $\Lambda^{(2)} = \chi(\lambda^1, \lambda^4, \lambda^5)$ .

12. ბიჯი 2.  $x^{(2)}$  წერტილს  $\Lambda^{(2)}$ -ის მიმართ ეფექტური ერთადერთ მოსაზღვრე კუთხის  $(5; 0; 0)$  წერტილი გააჩნია, რომელშიც ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლია  $U = 2.25$ .  $x^c$  წერტილი არ არსებობს.

13. ბიჯი 6. დაეუშვათ,  $I = B$ .

14. ბიჯი 3.  $x^{(2)}$  წერტილის მოსაზღვრე ეფექტურ კუთხის წერტილებს შორის არ არსებობს  $x^{(2)}$  წერტილზე უპირატესი წერტილები.

15. ბიჭი 6.  $x^{(2)} = (4; 1; 0)$  წარმოადგენს საბოლოო ამონახსნს. დასასრული.

### $\Lambda^{(4)}$ -ის მიმართ ეფექტური არაბაზისური ცვლადების განსაზღვრა

$Z-W$  ალგორითმის მე-3 ბიჯზე განვიხილოთ  $x^{(4)}$ . თუ გამოვიყენებთ ზაინც-ვალენიუსის პროცედურას [279], მაშინ შეიძლება განვსაზღვროთ  $\Lambda^{(4)}$ -ის მიმართ ეფექტური არაბაზისური ცვლადები. ამასთან, წრფივი სისტემის განტოლებები შეიძლება დავყოთ ორ ტიპად. პირველ ტიპს მიეკუთვნება განტოლებები, რომლებიც ფარდობით შეფასებათა  $W$  მატრიცის არაბაზისური სვეტებიდან ჩვეულებრივ ფორმირდება. აღნიშნულ განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\lambda^T w_j + v_j = 0.$$

მეორე ტიპის განტოლებები წარმოადგენს აქტიურ  $\lambda$ -შეზღუდვებს. მათ აქვთ სახე

$$\lambda^T (\bar{z} - z) + v_j = 0, \text{ თუ } \bar{z} \text{ უპირატესია } \bar{z} \text{-ზე.}$$

$$-\lambda^T \bar{w} + v_j = 0, \text{ თუ } \bar{w} \text{ ჩანაცვლების უპირატესი ვექტორია.}$$

$$\lambda^T \bar{w} + v_j = 0, \text{ თუ } \bar{w} \text{ ჩანაცვლების უპირატესი ვექტორი არ არის.}$$

შემოთავაზებული პროცედურის მიზანია გამოარკვიოს პირველი ტიპის განტოლებებში  $v_j$  ცვლადების ეფექტურობა იმ შემთხვევაში, როცა მეორე ტიპის განტოლებები სრულდება. მაშასადამე, ზაინც-ვალენიუსის პროცედურის მე-2 ბიჯზე მხოლოდ ის  $v_j$  ცვლადები, რომლებიც მიეკუთვნება პირველი ტიპის განტოლებებს, საწყის სიმპლექს-ცხრილში აღინიშნება როგორც გაურკვეველი სტატუსის მქონე ცვლადები.

ზაინც-ვალენიუსის პროცედურის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ წინა ნაწილში მოცემული რიცხვითი მაგალითი და გამოვთვალოთ  $\Lambda^{(1)}$  სიმრავლის მიმართ ეფექტური არაბაზისური ცვლადები. ფარდობით შეფასებათა მატრიცის სვეტები  $x^{(1)} = (12/5; 11/5; 0)$  წერტილში, რომლებიც შეესაბამება სამ მოსაზღვრე  $(0; 3; 0)$ ,  $(8/3; 2; 1/3)$  და  $(4; 1; 0)$  კუთხის წერტილს, განსაზღვრავს პირველი ტიპის შემდეგ განტოლებებს:

$$-3\lambda_1 + \lambda_2 + v_1 = 0,$$

$$4\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 + v_2 = 0,$$



$$4\lambda_1 - 3\lambda_2 + \nu_7 = 0.$$

მეორე ტიპის განტოლებები გადაწყვეტილების მიმღები პირის წინა პასუხების საფუძველზე ფორმირდება და მათ აქვს სახე

$$-\lambda_2 + 3\lambda_3 + \nu_4 = 0,$$

$$-\lambda_1 + \lambda_3 + \nu_5 = 0,$$

$$-\lambda_2 + \lambda_3 + \nu_6 = 0,$$

$$-3\lambda_1 + \lambda_2 + \nu_7 = 0.$$

აღვნიშნავთ რა  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  ცვლადებს, როგორც უცნობი სტატუსის მქონე ცვლადებს, მივიღებთ

1-ლი იტერაცია (ბიჯი 9)

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
$\nu_1$	-3	1	
$\nu_2$	4	-3	5
$\nu_3$	4	-3	
$\nu_4$		-1	3
$\nu_5$	-1		1
$\nu_6$		-1	1
$\nu_7$	-3	1	

მე-2 იტერაცია (ბიჯი 3, ბიჯი 4 და ბიჯი 9)

	$\lambda_1$	$\nu_7$	$\lambda_3$
არაფუქტური $\nu_1$		-1	
$\nu_2$	-5	3	5
$\nu_3$	-5	3	
$\nu_4$	-3	1	3
$\nu_5$	-1		1
$\nu_6$	-3	1	1
$\lambda_2$	-3	1	

მე-3 იტერაცია (ბიჯი 5 და ბიჯი 9)

	არაუფექტური		
	$\lambda_1$	$\nu_3$	$\lambda_2$
$\nu_2$		-1	5
$\nu_7$	-5/3	1/3	
$\nu_4$	-4/3	-1/3	<u>3</u>
$\nu_5$	-1		1
$\nu_6$	-4/3	-1/3	1
$\lambda_2$	-4/3	-1/3	

მე-4 იტერაცია (ბიჯი 7)

	არაუფექტური		
	$\lambda_1$	$\nu_3$	$\nu_4$
ვექტორი $\nu_2$	20/9	-4/9	-5/3
$\nu_7$	-5/3	1/3	
$\lambda_3$	-4/9	-1/9	1/3
$\nu_5$	-5/9	1/9	-1/3
$\nu_6$	-8/9	-2/9	-1/3
$\lambda_2$	-4/9	-1/3	

კომენტარები Z-W მეთოდის შესახებ

1. Z-W მეთოდი არ არის ევრისტიკული, ვინაიდან, თუ ცნობილია გადაწყვეტილების მიმღები პირის სარგებლიანობის ფუნქცია, ყველა კითხვას, რომელიც წამოიჭრება მისი მუშაობის პროცესში, შეიძლება სრულიად განსაზღვრული პასუხი გაეცეს.
2. ზოგიერთ შემთხვევაში, Z-W მეთოდი ფრიად ეფექტურია, ვინაიდან წონითი ვექტორების სიმრავლე იტერაციების დასაწყისშივე საკმაოდ სწრაფად ვიწროვდება. მაგრამ, ამავე დროს, საჭიროა აღინიშნოს, რომ იგი კრებადობას ვერ უზრუნველყოფს ისეთი ამონახსნებისათვის, რომლებიც კუთხის წერტილებს არ წარმოადგენს.
3. გადაწყვეტილების მიმღებ ზოგიერთ პირს შეიძლება შეექმნას დისკომფორტის შეგრძნება, როცა ალგორითმის მე-4 და მე-5 ბიჯებზე ჩანაცვლების ვექტორების შესახებ კითხვებზე მოუწევს პასუხის გაცემა.
4. Z-W ალგორითმს თან ერთვის შეცდომების გასწორების ბლოკი, რომელიც, გადაწყვეტილების მიმღები პირის არათანმიმდევრული პასუხების შემთხვევაში, ყველაზე ძველ  $\lambda$ -შეზღუდვებს "ანადგურებს" ( $A^{(k)} = \emptyset$ ).
5. როგორც ალგორითმის ბლოკ-სქემიდან (ნახ. 7.61) ჩანს, Z-W მეთოდი გაცილებით რთულია, ვიდრე STEM და GDF მეთოდები.

## 7.9 დუალობა მრავალკრიტიკულ ოპტიმიზაციაში

ამ ნაწილში განიხილება ზოგადთეორიული საკითხები ვექტორული ფუნქციების უნაგირა წერტილების, მაქსიმიზებისა და მინიმაქსების შესახებ. შემოთავაზებულია მრავალკრიტიკიული ოპტიმიზაციის დუალური ამოცანების ზოგადი კონსტრუქცია [104]. ეკვილიბრუმი კრიტიკიული სივრცეების რიგი ცნობილი ფაქტი ნებისმიერი სტრუქტურის მქონე დალაგებული ტოპოლოგიური სივრცისთვის განზოგადოებულია მონოგრაფია [11]-ის მიხედვით. ყველა დებულება მოყვანილია დამტკიცების გარეშე. დაინტერესებულ მკითხველს აღნიშნული მასალა შეუძლია მოიძიოს [11, 104] მონოგრაფიებში.

### 7.9.1 ვექტორული ფუნქციის უნაგირა წერტილები

დუალობის საკითხები მრავალკრიტიკიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის გაცილებით რთულია, ვიდრე ანალოგიური საკითხები ერთკრიტიკიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის. აღნიშნული გამოწვეულია იმით, რომ ჩვეულებრივი ოპტიმიზაციის თეორიის დუალობისაგან განსხვავებით [49], სადაც დუალობა დაკავშირებულია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე წრფივად დალაგებული სიმრავლის მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტების დამთხვევასთან, დუალობის ცნება მრავალკრიტიკიულ ოპტიმიზაციაში დაფუძნებულია ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლეებში მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტების ცნებებზე. დუალობის შესწავლისას, ღერძზე წრფივად დალაგებული სიმრავლეებიდან ეკვილიბრუმი სივრცის სიმრავლეებზე გადასვლა არ არის ტრივიალური. უხეშად რომ ვთქვათ, იმისათვის, რომ სკალარულ შემთხვევაში მივიღოთ პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნთა დამთხვევა, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნთა სახეებს შორის "წყვეტა" არ არსებობს. წყვეტის არარსებობის შემთხვევაში აღნიშნულ სახეთა სიმრავლეები "შეწყდება" წერტილში, რომელიც ერთდროულად იძლევა პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნებს. მრავალკრიტიკიულ შემთხვევაში პირდაპირი და დუალური სიმრავლეების "შეწყება" საკმარისი არ არის; დუალური კონსტრუქცია ისეთი უნდა იყოს, რომ პირდაპირი და დუალური სიმრავლეები "შეწყდეს" თავიანთი მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტების სიხუსტით.

მრავალკრიტიკიული ოპტიმიზაციის დუალობისადმი მიძღვნილი პუბლიკაციები პირობითად შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად. ნაშრომა პირველ ჯგუფში [95, 203, 259] დუალობა, ასე თუ ისე, დაკავშირებულია ლაგრანჟის ტიპის ფუნქციებთან. ნაშრომა მეორე ჯგუფში [192, 258] დუალობა შეისწავლება შეუღლებული ფუნ-

ქციების აპარატის გამოყენებით, სადაც მიღებული შედეგები წარმოადგენს ფენხელის დუალობის თეორიის შემდგომ განზოგადებას. რომ არ შეეხებოდნენ მეორე მიმართულების ნაშრომებს, მოცემულ ნაწილში შემოთავაზებულია დუალობის ისეთი კონსტრუქცია, რომლის ჩარჩოებშიც ჯდება ნაშრომთა პირველი ჯგუფის მიდგომა. განხილული მასალა ძირითადად ეყრდნობა [95, 103, 104] კუბლიკაციებს.

მათემატიკურ დაპროგრამებაში დუალობის კლასიკური თეორია ფართოდ იყენებს რიცხვითი ფუნქციების უნაგირა წვეილების, მაქსიმიზებისა და მინიმაქსების ცნებებს. მოცემულ ნაწილში მრავალკრიტიერიული ოპტიმიზაციის დუალობის თეორიის ანალიტიკური ცნებები შემოდის ვექტორული ფუნქციებისთვის.

1 ვთქვათ,  $\Omega$  და  $\Xi$  ნებისმიერი ბუნების ორი არაკარიელი სიმრავლეა,  $Z$  - ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც დალაგებულია  $C$  ამოზნექილი, ჩაკეტბილი, სხეულოვანი და შეერილოვანი ( $C \cap -C = \{0\}$ ) კონუსის საშუალებით, ხოლო  $K: \Omega \times \Xi \rightarrow Z$  - მოცემული ასახვა. ყველა აღნიშნული დაშვება გამოყენებული იქნება მხოლოდ ამ ნაწილში.

განსაზღვრის სახით მივიღოთ, რომ თუ  $z_1, z_2 \in Z$ , მაშინ

$$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C,$$

$$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in C \setminus \{0\},$$

$$z_1 \geq z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \notin C \setminus \{0\},$$

$$z_1 > z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \in \text{int } C,$$

$$z_1 \not> z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 \notin \text{int } C,$$

$$z_1 \overline{>} z_2 \leftrightarrow z_2 \geq z_1.$$

ბანსაზღვრება 7.14.  $(x^0, y^0) \in \Omega \times \Xi$  ვექტორს ეწოდება  $f(x, y)$  ვექტორ-ფუნქციის ძლიერი უნაგირა წვეილი, თუ სრულდება პირობა

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y) \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \Xi. \quad (7.11)$$

ბანსაზღვრება 7.15.  $(x^0, y^0) \in \Omega \times \Xi$  ვექტორს ეწოდება  $f(x, y)$  ვექტორ-ფუნქციის ძლიერი-სუსტი უნაგირა წვეილი, თუ სრულდება პირობა

$$f(x, y^0) \overline{\leq} f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y) \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \Xi. \quad (7.12)$$

ბანსაზღვრება 7.16.  $(x^0, y^0) \in \Omega \times \Xi$  ვექტორს ეწოდება  $f(x, y)$  ვექტორ-ფუნქციის სუსტი-ძლიერი უნაგირა წვეილი, თუ სრულდება პირობა

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \overline{\leq} f(x^0, y) \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \Xi. \quad (7.13)$$

ბანსაზღვრება 7.17.  $(x^0, y^0) \in \Omega \times \Xi$  ვექტორს ეწოდება  $f(x, y)$  ვექტორ-ფუნქციის სუსტი უნაგირა წყვილი, თუ სრულდება პირობა

$$f(x, y^0) \bar{\leq} f(x^0, y^0) \bar{\leq} f(x^0, y) \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \Xi. \quad (7.14)$$

$\geq$  და  $\bar{\geq}$  თანადობების განსაზღვრის თანახმად,  $f(x, y^0) \bar{\leq} f(x^0, y^0)$  პირობის შესრულება ყველა  $x \in \Omega$ -სთვის ნიშნავს იმას, რომ  $f(x^0, y^0) \geq f(x, y^0)$  თანაფარდობა არ სრულდება არც ერთი  $x \in \Omega$ -სთვის. ანალოგიურად,  $f(x^0, y^0) \bar{\leq} f(x^0, y)$  პირობის შესრულება ყველა  $y \in \Xi$ -სთვის ნიშნავს, რომ პირობა  $f(x^0, y^0) \geq f(x^0, y)$  არ სრულდება არცერთი  $y \in \Xi$ -სთვის.

ცხადია, ნებისმიერი ძლიერი უნაგირა წყვილი უნაგირაა (7.12)-(7.14)-ის აზრით და ყოველი ნახევრადძლიერი (ძლიერი-სუსტი და სუსტი-ძლიერი) უნაგირა წყვილი, ასევე, სუსტ წყვილს წარმოადგენს. თუ  $Z$  სივრცის სახით განვიხილავთ ჩვეულებრივ  $R^m$  სივრცეს სტანდარტული დალაგებით ( $C$  კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია), მაშინ ძლიერი უნაგირა წყვილი ჩვეულებრივი უნაგირა წერტილია  $f$  ვექტორ-ფუნქციის ყველა კომპონენტისათვის ერთდროულად: (7.11) სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული  $i=1, 2, \dots, m$ -ისთვის სრულდება  $f_i(x, y^0) \leq f_i(x^0, y^0) \leq f_i(x^0, y)$  უტოლობები ყველა  $x \in \Omega, y \in \Xi$ -სთვის. ამასთან დაკავშირებით, ცხადია, ძლიერი უნაგირა წერტილები საკმაოდ იშვიათად არსებობს.

განსახილველად შემოვიტანოთ ოთხი სიმრავლე

$$Q^1 = \bigcup_{x \in \Omega} \bigcap_{y \in \Xi} \{q \in Z \mid q \leq f(x, y)\},$$

$$Q^2 = \bigcup_{y \in \Xi} \bigcap_{x \in \Omega} \{q \in Z \mid q \geq f(x, y)\},$$

$$H^1 = \bigcup_{x \in \Omega} \bigcap_{y \in \Xi} \{h \in Z \mid h \bar{\leq} f(x, y)\},$$

$$H^2 = \bigcup_{y \in \Xi} \bigcap_{x \in \Omega} \{h \in Z \mid h \bar{\geq} f(x, y)\}.$$

აღნიშნულ სიმრავლეებს თამაშთა თეორიის ტერმინოლოგიაში აქვს ბუნებრივი ინტერპრეტაცია, თუ  $f$  აღნიშნავს მოგების ვექტორულ ფუნქციას, ხოლო  $\Omega$  და  $\Xi$  - შესაბამისად, პირველი და მეორე მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლეს (პირველი მოთამაშე ესწრაფვის მოგების ფუნქციის "მაქსიმიზაციას"). ამ შემთხვევაში  $Q^1$  წარმოადგენს მოგებათა სიმრავლეს, რომელიც პირველ მოთამაშეს შეუძლია თავისთვის უზრუნველყოს (გარანტირებული მოგებები), ხოლო  $H^1$  - მოგებათა სიმრავლეს, რომლის გაუარესების შესაძლებლობაც მას შეუძლია მეორე მოთამაშეს არ მისცეს ("და-

ცული" მოგებები). ანალოგიური აზრი გააჩნია  $Q^2$  და  $H^2$  სიმრავლეებს მეორე მოთამაშისთვის.

შემოტანილ სიმრავლეთა განსაზღვრებებიდან უშუალოდ შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ სამართლიანია  $Q^1 \subseteq H^1$  და  $Q^2 \subseteq H^2$  ჩართვები, რომლებსაც, ასევე, ცხადი თეორიული სათამაშო შინაარსი გააჩნია.

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ სრულდება  $Q^1 \subseteq H^1$  ჩართვა. დაუშვათ, რომ  $q \in Q^1$ . მაშინ არსებობს ისეთი  $x^1 \in \Omega$  ელემენტი, რომ  $f(x^1, y) - q \in C \ \forall y \in \Xi$ . მეორე მხრივ,  $C \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$ . ამიტომ  $f(x^1, y) - q \notin -C \setminus \{0\} \ \forall y \in \Xi$ , ე.ი.  $q - f(x^1, y) \notin C \setminus \{0\} \ \forall y \in \Xi$ . მაშასადამე,  $q \notin f(x^1, y) \ \forall y \in \Xi$ . მაშინ

$$q \in \bigcap_{y \in \Xi} \{q \in Z \mid q \not\leq f(x^1, y)\} \subset \bigcup_{x \in \Omega, y \in \Xi} \{q \in Z \mid q \not\leq f(x^1, y)\} = H^1.$$

უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ  $Q^1 \subseteq H^1$ .

ანალოგიურად მტკიცდება  $Q^2 \subseteq H^2$  ჩართვის სამართლიანობაც.

თეორემა 7.31 [11]. სამართლიანია ჩართვები

$$Q^2 - Q^1 \subseteq C, \tag{7.15}$$

$$(Q^1 - H^2) \cap (C \setminus \{0\}) = \emptyset, \tag{7.16}$$

$$(H^1 - Q^2) \cap (C \setminus \{0\}) = \emptyset. \tag{7.17}$$

თუ  $Z$  სივრცის სახით კვლავ განვიხილავთ ჩვეულებრივ  $R^m$  სივრცეს სტანდარტული დალაგებით ( $C$  კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია), მაშინ 7.31 თეორემა გვიჩვენებს, რომ მაქსიმიზის (მინიმაქსის) ანალოგია  $Q^1$  და  $H^1$  სიმრავლეების წყვილი (შესაბამისად  $Q^2$  და  $H^2$ ), ხოლო უტოლობას ( $m=1$ )

$$\max_{x \in \Omega} \min_{y \in \Xi} f(x, y) \leq \min_{y \in \Xi} \max_{x \in \Omega} f(x, y)$$

შეესაბამება ამ სიმრავლეთა (7.15)-(7.17) თვისებები.

2 უმარტივესი მაგალითები გვიჩვენებს, რომ  $(x^1, y^1)$  და  $(x^2, y^2)$  წყვილები, რომლებიც (7.12), (7.13) ან (7.14)-ის აზრით უნაგირა წყვილებს წარმოადგენს, შეიძლება იყოს არაშეღარებადი (ე.ი. არ არის სამართლიანი არც  $f(x^1, y^1) \geq f(x^2, y^2)$  და არც  $f(x^1, y^1) \leq f(x^2, y^2)$  უტოლობები) ან დომინირებდეს ერთი მეორეზე (მაგალითად,  $f(x^1, y^1) \geq f(x^2, y^2)$ ), ხოლო  $(x^1, y^2)$  და  $(x^2, y^1)$  წყვილები შეიძლება არც იყოს უნაგირა. თუმცა, ქვემოთ მოცემული მტკიცების თანახმად, ძლიერი უნაგირა წყვილის არსებობა არსებით შეზღუდვებს ადებს ნახევრადძლიერ უნაგირა წყვილების სტრუქტურას.

ეთქვას,  $W^{\mu}$  (შესაბამისად  $W^{\mu*}$ ,  $W^{\mu}$ ,  $W^{\mu\mu}$ ) ძლიერი (შესაბამისად, ძლიერი-სუსტი, სუსტი-ძლიერი, სუსტი დანარჩენი სამი ტიპისთვის) უნაგირა წყვილების სიმრავლეა, ხოლო  $W_0^{\mu}$  და  $W_0^{\mu*}$  ( $W_0^{\mu\mu}$ ) - (7.12) და (7.13) ((7.14)) ტიპის სიმრავლეთა წყვილები, რომლებიც არ არის ძლიერი (ნახევრადძლიერი). სამართლიანია დებულება.

თეორემა 7.32 თუ  $W^{\mu} \neq \emptyset$ , მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$W^{\mu} = \Omega' \times \Xi', W_0^{\mu} = \Omega' \times \Xi', W_0^{\mu*} = \Omega'' \times \Xi'.$$

(იმ შემთხვევაში, როცა  $W_0^{\mu} = \emptyset$  ან  $W_0^{\mu*} = \emptyset$ , მაშინ  $\Xi'' = \emptyset$  ან  $\Omega'' = \emptyset$ ). ამასთან, ყველა ძლიერი უნაგირა წყვილი ეკვივალენტურია, ხოლო თითოეული სუსტი უნაგირა წყვილი ან ძლიერის ეკვივალენტურია ან მასთან არაშედარებადია.

საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ  $(x, y)$  და  $(x', y')$  წყვილები ეკვივალენტურია, თუ ისინი აკმაყოფილებენ  $f(x, y) = f(x', y')$  ტოლობას.

3. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\text{Ex } [A | C] = \{ z \in A \mid (z+C) \cap A = \{z\} \}$$

-  $A$  სიმრავლის  $C$ -ექსტრემალურ წერტილთა სიმრავლე.

ურთიერთკავშირს უნაგირა წყვილებზე  $K$  ვექტორ-ფუნქციის მნიშვნელობებსა და  $Q^1, Q^2, H^1$  და  $H^2$  სიმრავლეებს შორის ადგენს შემდეგი დებულება.

თეორემა 7.33 [11]. სამართლიანია ჩართვა

$$f(W^{\mu\mu}) \subseteq H^1 \cap H^2 \tag{7.18}$$

და ტოლობები

$$f(W^{\mu\mu}) = Q^1 \cap Q^2, \tag{7.19}$$

$$f(W^{\mu\mu}) = Q^1 \cap H^2, \tag{7.20}$$

$$f(W^{\mu\mu}) = H^1 \cap Q^2. \tag{7.21}$$

თეორემა 7.34. სამართლიანია ჩართვა

$$f(W^{\mu\mu}) \subseteq \text{Ex } [H^1 | C \setminus \{0\}] \cap \text{Ex } [H^2 | -C \setminus \{0\}]. \tag{7.22}$$

თეორემა 7.35. სამართლიანია ტოლობა

$$f(W^{\mu\mu}) = \text{Ex } [Q^1 | C] \cap \text{Ex } [Q^2 | -C].$$

თეორემა 7.36. სამართლიანია ტოლობა

$$f(W^*) = \text{Ex } [Q^1 | C] \cap \text{Ex } [H^1 | -C \setminus \{0\}]. \quad (7.23)$$

თეორემა 7.37. სამართლიანია ტოლობა

$$f(W^*) = \text{Ex } [Q^2 | -C] \cap \text{Ex } [H^1 | C \setminus \{0\}].$$

7.34-7.37 თეორემების დამტკიცება მოცემულია ნაშრომში [11]. თეორემებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

შედეგი 7.2 ვთქვათ,  $Z = R^m$ , ხოლო  $C$  კონუსი არაუარყოფითი ორტანტია. მაშინ

- ა)  $f(W^*)$  სიმრავლე ემთხვევა  $\geq$  თანადობის მიმართ  $H^1$ -ში მაქსიმალური და  $H^2$ -ში მინიმალური ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას და, აგრეთვე,  $f(W^*)$  სიმრავლე ემთხვევა  $Q^1$ -ში უდიდესი და  $Q^2$ -ში უმცირესი ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას.
- ბ)  $f(W^*)$  სიმრავლე ემთხვევა  $\geq$  თანადობის მიმართ  $Q^1$ -ში მაქსიმალური და  $H^2$ -ში მინიმალური ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას.
- გ)  $f(W^*)$  სიმრავლე ემთხვევა  $\geq$  თანადობის მიმართ  $Q^2$ -ში მინიმალური და  $H^1$ -ში მაქსიმალური ელემენტების ერთობლიობის თანაკვეთას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ზემოთ აღნიშნული  $Q^1$ ,  $Q^2$ ,  $H^1$  და  $H^2$  სიმრავლეები შეიძლება წარმოვადგინოთ იქნეს შემდეგი სახით:

$$Q^1 = \bigcup_{x \in \Omega} \bigcap_{y \in E} \{f(x, y) - C\},$$

$$Q^2 = \bigcup_{y \in E} \bigcap_{x \in \Omega} \{f(x, y) + C\},$$

$$H^1 = \bigcup_{x \in \Omega} \bigcap_{y \in E} \{f(x, y) + C' \cup \{0\}\},$$

$$H^2 = \bigcup_{y \in E} \bigcap_{x \in \Omega} \{f(x, y) - C' \cup \{0\}\},$$

სადაც  $C' = Z \setminus C$ .

მაგალითების განხილვისათვის შემდეგში ვისარგებლებთ მარტივი ფაქტით, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. სამართლიანია ჩართვები:

$$C \subset -C' \cup \{0\}. \quad (7.24)$$

$$-C \subset C' \cup \{0\}. \quad (7.25)$$

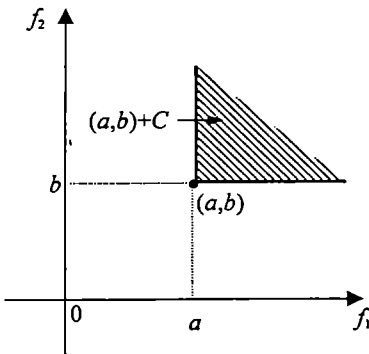


ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (7.24) ჩართვა. ვთქვათ,  $z \in C$ . თუ  $z=0$ , მაშინ  $z \in -C \cup \{0\}$ . დაუშვათ, რომ  $z \neq 0$  და  $z \notin -C' \cup \{0\}$ . მაშასადამე,  $z \in -C'$ , ე.ი.  $z \in -C$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ  $z \in C \cap (-C)$ . უკანასკნელი ჩართვა შეუძლებელია, რადგან  $C$  შვერილოვანი კონუსია, ე.ი.  $C \cap (-C) = \{0\}$ . მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (7.24)-ის სამართლიანობას. ანალოგიურად დამტკიცდება (7.25)-ის სამართლიანობაც.

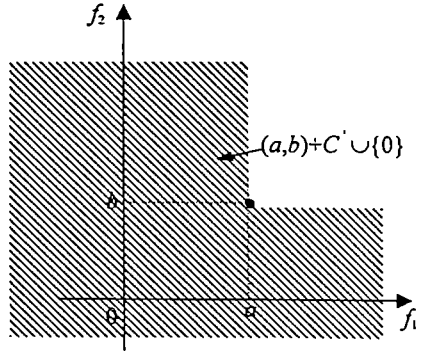
საჭიროა შევნიშნოთ შემდეგი ფაქტი. თუ  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  და  $\Xi = \{1, 2, \dots, k\}$ , ხოლო  $f: \Omega \times \Xi \rightarrow R^m$  ცალსახა ვექტორ-ფუნქციაა, მაშინ  $f$  ასახვის შემთხვევაში  $f(\Omega \times \Xi)$ , როგორც  $\Omega \times \Xi$  დეკარტული ნამრავლის სახე  $R^m$ -ში, შეიძლება წარმოდგეს იმ  $n \times k$ -განზომილებიანი მატრიცის სახით, რომლის ელემენტებსაც შეადგენს  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y))$  ვექტორ-ფუნქციის მნიშვნელობები  $R^m$ -ში, როცა  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  და  $y \in \{1, 2, \dots, k\}$ . თუ მივიღებთ, რომ  $f(x, y) = a_{ij}$ , როცა  $x = i \in \{1, 2, \dots, n\}$  და  $y = j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , მაშინ გვექნება

$$f(\Omega \times \Xi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

შევნიშნავთ, რომ (7.26) მატრიცის თითოეული  $a_{ij}$  ელემენტი  $m$ -განზომილებიანი ვექტორია, რომელსაც ყოველი კონკრეტული  $f$  ასახვის შემთხვევაში შეიძლება ჰქონდეს კონკრეტული სახე. კერძოდ, თუ  $n=k=m=2$ , მაშინ  $\Omega = \{1, 2\}$ ,  $\Xi = \{1, 2\}$  და

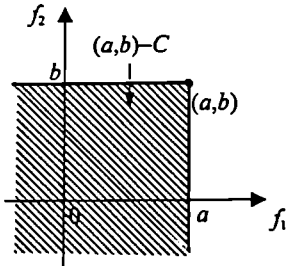


ნახ. 7.64

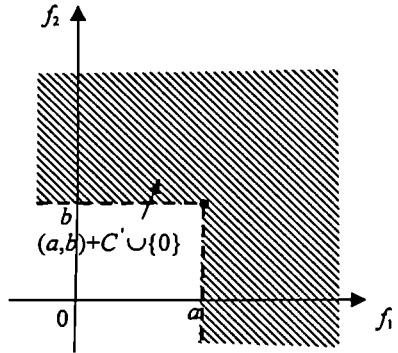


ნახ. 7.65

$$f(\Omega \times \Xi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$



ნახ. 7.66



ნახ. 7.67

გეომეტრიული თვალსაჩინოების მიზნით  $R^2$  სივრცეში  $(a,b)$  ვექტორით დაპრული  $C = \{z \in R^2 \mid z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\}$ ,  $C' \cup \{0\}$ ,  $-C$  და  $-C' \cup \{0\}$  კონუსები, შესაბამისად, გამოსახულია ნახ. 7.64, 7.65, 7.66 და 7.67-ზე.

განვიხილოთ რამდენიმე საილუსტრაციო მაგალითი. ყველა მაგალითში  $\Omega = \Xi = \{1,2\}$ , ხოლო  $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$  ვექტორ-ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია (7.27) მატრიცის სახით, ამასთან,  $x$  სტრიქონია, ხოლო  $y$  - სვეტი.

**მაგალითი 7.45.** ვთქვათ,  $f$  ვექტორ-ფუნქცია მოცემულია შემდეგი მატრიცის საშუალებით:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3,0) & (0,1) \\ (2,0) & (1,0) \end{pmatrix}.$$

მაშინ

$$\mathcal{Q}^1 = \bigcup_{i=1,2} \bigcap_{j=1,2} \{a_{ij} - C\}, \quad (7.28)$$

$$\mathcal{Q}^2 = \bigcup_{j=1,2} \bigcap_{i=1,2} \{a_{ij} + C\}, \quad (7.29)$$

$$H^1 = \bigcup_{i=1,2} \bigcap_{j=1,2} \{a_{ij} + C' \cup \{0\}\}, \quad (7.30)$$

$$H^2 = \bigcup_{j=1,2} \bigcap_{i=1,2} \{a_{ij} - C' \cup \{0\}\}. \quad (7.31)$$

(7.28)-(7.31)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} Q^1 &= [(3,0) - C] \cap [(0,1) - C] \cup [(2,0) - C] \cap [(1,0) - C] = \\ &= (-C) \cup [(1,0) - C] = (1,0) - C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= [(3,0) + C] \cap [(2,0) + C] \cup [(0,1) + C] \cap [(1,0) + C] = \\ &= [(3,0) + C] \cup [(1,1) + C], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^1 &= [[(3,0) + C' \cup \{0\}] \cap [(0,1) + C' \cup \{0\}]] \cup \\ &\cup [[(2,0) + C' \cup \{0\}] \cap [(1,0) + C' \cup \{0\}]] = \\ &= [[(3,0) + C' \cup \{0\}] \cap [(0,1) + C' \cup \{0\}]] \cup [(1,0) + C' \cup \{0\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^2 &= [[(3,0) - C' \cup \{0\}] \cap [(2,0) - C' \cup \{0\}]] \cup \\ &\cup [[(0,1) - C' \cup \{0\}] \cap [(1,0) - C' \cup \{0\}]] = \\ &= [(2,0) - C' \cup \{0\}] \cup [(1,0) - C' \cup \{0\}] = (1,0) - C' \cup \{0\}. \end{aligned}$$

$Q^1$ ,  $H^1$ ,  $Q^2$  და  $H^2$  სიმრავლეები წარმოდგენილია ნახ. 7.68 და 7.69-ზე, საიდანაც ჩანს, რომ ადგილი აქვს თანადობებს

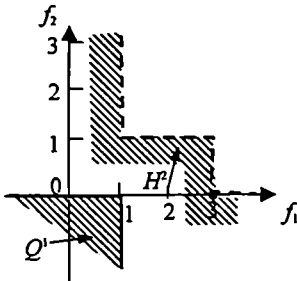
$$Q^1 \supset \{(1,0)\},$$

$$Q^2 \supset \{(3,0)\},$$

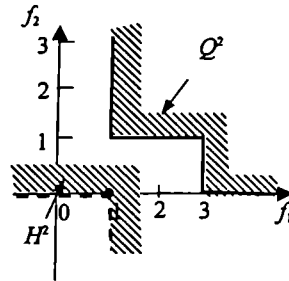
$$H^1 \supset \{(0,1); (1,0); (2,0); (3,0)\},$$

$$H^2 \supset \{(0,1); (1,0); (2,0); (3,0)\}.$$

უკანასკნელი ჩართვებიდან გამომდინარეობს, რომ



ნახ. 7.68



ნახ. 7.69

$$Q^1 \cap Q^2 = \emptyset,$$

$$H^1 \cap Q^1 = \{(1,0)\},$$

$$H^1 \cap Q^2 = \{(3,0)\},$$

$$H^1 \cap H^2 \supseteq \{(0,1); (1,0); (2,0); (3,0)\}.$$

მიღებულის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ: (2,2) წერტილი წარმოადგენს ძლიერ-სუსტ უნაგირა წვეილს ((7.20) ტოლობის საფუძველზე), (1,1) წერტილი - სუსტ-ძლიერ უნაგირა წვეილს ((7.21) ტოლობის საფუძველზე), ხოლო (7.19) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $f(H^*) = \emptyset$ , ე.ი. განხილულ შემთხვევაში ძლიერი უნაგირა წვეილი არ არსებობს.

ვაჩვენოთ, რომ (1,2) წერტილი წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წვეილს. მართლაც,

$$f(1,2) - f(1,2) = (0,1) - (0,1) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(1,2) = (1,0) - (0,1) = (1,-1) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,2) - f(1,1) = (0,1) - (3,0) = (-3,1) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,2) - f(1,2) = (0,1) - (0,1) = (0,0) \notin C \setminus \{0\}.$$

სუსტი უნაგირა წვეილის განსაზღვრის თანახმად, უკანასკნელი თანადობების საფუძველზე (1,2) წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წვეილს. ამასთან, სხვა სუსტი უნაგირა წვეილები არ არსებობს. როგორც ვაჩვენეთ  $H^1 \cap H^2 \supseteq \{(0,1); (1,0); (2,0); (3,0)\}$ , ე.ი. გარდა (0,1) წერტილისა  $H^1 \cap H^2$  მოიცავს სხვა წერტილებსაც, ამიტომ (7.18) ჩართვა სინამდვილეში მკაცრია.

მაგალითი 7.46. განვიხილოთ  $f(x, y)$  ფუნქცია, რომელიც მოცემულია შემდეგი მატრიცის სახით:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (1,1) & (3,0) \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

მაშინ (7.28)-(7.31)-დან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} Q^1 &= [(2,2) - C] \cap [(2,3) - C] \cup [(1,1) - C] \cap [(3,0) - C] = \\ &= [(2,2) - C] \cup [(1,0) - C] = (2,2) - C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= [(2,2) + C] \cap [(1,1) + C] \cup [(2,3) + C] \cap [(3,0) + C] = \\ &= [(2,2) + C] \cup [(3,3) + C] = (2,2) + C, \end{aligned}$$

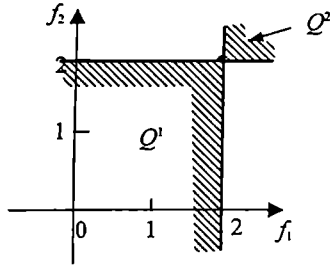
$$\begin{aligned} H^1 &= [(2,2) + C' \cup \{0\}] \cap [(2,3) + C' \cup \{0\}] \cup \\ &\cup [(1,1) + C' \cup \{0\}] \cap [(3,0) + C' \cup \{0\}] = \\ &= [(2,2) + C' \cup \{0\}] \cup [(1,1) + C' \cup \{0\}] \cap [(3,0) + C' \cup \{0\}] = \\ &= (2,2) + C' \cup \{0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^2 &= [(2,2) - C' \cup \{0\}] \cap [(1,1) - C' \cup \{0\}] \cup \\ &\cup [(2,3) - C' \cup \{0\}] \cap [(3,0) - C' \cup \{0\}] = \\ &= [(2,2) - C' \cup \{0\}] \cup [(2,3) - C' \cup \{0\}] \cap [(3,0) - C' \cup \{0\}] = \\ &= (2,2) - C' \cup \{0\}. \end{aligned}$$

ნახ. 7.70-ზე წარმოდგენილია  $Q^1$  და  $Q^2$  სიმრავლეები.

ადვილი მისახვედრია, რომ  $H^1$  მოიცავს (7.32) ტოლობით განსაზღვრული  $f(\Omega \times \Xi)$  მატრიცის ყველა ელემენტს, გარდა  $f(1,2) = a_{12} = (2,3)$ -ისა, ხოლო  $H^2$  მოიცავს ამ მატრიცის მხოლოდ ორ  $f(1,1) = a_{11} = (2,2)$  და  $f(2,2) = a_{22} = (3,0)$  ელემენტს. აქედან გამომდინარე, გვექნება

$$H^1 \cap H^2 = \{(2,2), (3,0)\}.$$



ნახ. 7.70

ამიტომ (7.18) ჩართვის თანახმად, თუ ამოცანას სუსტი უნაგირა წყვილი გააჩნია, მაშინ იგი შეიძლება იყოს მხოლოდ (1,1) ან (2,2). თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ (1,1) წერტილი წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს. მართლაც,

$$f(1,1) - f(1,1) = (2,2) - (2,2) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,1) - f(1,1) = (1,1) - (2,2) = (-1,-1) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,1) - f(1,1) = (2,2) - (2,2) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,1) - f(1,2) = (2,2) - (2,3) = (0, -1) \notin C \setminus \{0\}.$$

სუსტი უნაგირა წყვილის განსაზღვრის თანახმად, უკანასკნელი თანადობების საფუძველზე (1,1) წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (2,2) წერტილი წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს. მართლაც,

$$f(1,2) - f(2,2) = (2,3) - (3,0) = (-1, 3) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(2,2) = (3,0) - (3,0) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(2,1) = (3,0) - (1,1) = (2, -1) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(2,2) = (3,0) - (3,0) = (0,0) \notin C \setminus \{0\}.$$

სუსტი უნაგირა წყვილის განსაზღვრის თანახმად, უკანასკნელი თანადობების საფუძველზე (2,2) წარმოადგენს სუსტ უნაგირა წყვილს.

გარდა ამისა, როგორც  $Q^1$  და  $Q^2$  სიმრავლეების სტრუქტურებიდან ჩანს (რასაც ადასტურებს ნახ. 7.70),

$$Q^1 \cap Q^2 = \{(2,2)\}.$$

ამიტომ  $(1,1)$  წარმოადგენს ძლიერ უნაგირა წყვილს (იხ. (7.19) ფორმულა).

**მაგალითი 7.47.** ვთქვათ,  $f$  ვექტორ-ფუნქცია მოცემულია შემდეგი მატრიცის საშუალებით:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,2) & (1,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

მაშინ (7.28)-(7.31)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} Q^1 &= [(0,2) - C] \cap [(1,0) - C] \cup [(0,1) - C] \cap [(2,0) - C] = \\ &= -C \cup [-C] = -C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= [(0,2) + C] \cap [(0,1) + C] \cup [(1,0) + C] \cap [(2,0) + C] = \\ &= [(0,2) + C] \cup [(2,0) + C], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^1 &= [(0,2) + C' \cup \{0\}] \cap [(1,0) + C' \cup \{0\}] \cup \\ &\cup [(0,1) + C' \cup \{0\}] \cap [(2,0) + C' \cup \{0\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^2 &= [(0,2) - C' \cup \{0\}] \cap [(0,1) - C' \cup \{0\}] \cup \\ &\cup [(1,0) - C' \cup \{0\}] \cap [(2,0) - C' \cup \{0\}] = \\ &= [(0,2) - C' \cup \{0\}] \cup [(2,0) - C' \cup \{0\}] = \end{aligned}$$

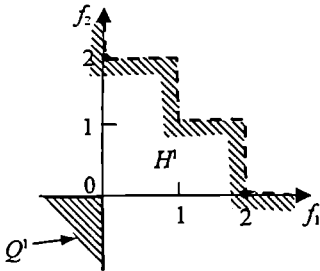
$$= -C'.$$

ნახ. 7.71-ზე წარმოდგენილია  $Q^1$  და  $H^1$  სიმრავლეები, ხოლო ნახ. 7.72-ზე -  $Q^2$  და  $H^2$ .

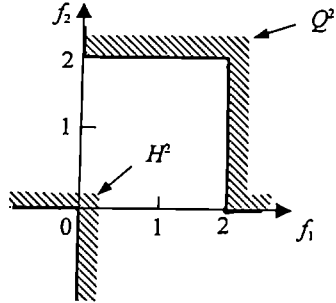
ვინაიდან  $Q^1 \cap Q^2 = \emptyset$ , ამიტომ (7.19) ტოლობის თანახმად,  $f$  ვექტორ-ფუნქციას არა აქვს ძლიერი უნაგირა წყვილი. (7.20)-ის გათვალისწინებით,  $Q^1 \cap H^2 = \emptyset$  ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $f$  ვექტორ-ფუნქციას არც ძლიერი-სუსტი უნაგირა წყვილი გააჩნია. (7.21)-ის გათვალისწინებით,  $H^1 \cap Q^2 = \{(0,2); (2,0)\}$  ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ გვაქვს ორი სუსტი-ძლიერი უნაგირა წყვილი -  $(1,1)$  და  $(2,2)$ .

ადვილი მისახვედრია, რომ ორივე  $H^1$  და  $H^2$  სიმრავლე მოიცავს (7.33) ტოლობით განსაზღვრული  $f(\Omega \times \Xi)$  მატრიცის ოთხივე ელემენტს, ე.ი.

$$H^1 \cap H^2 = \{(0,2); (1,0); (0,1); (2,0)\}.$$



ნახ. 7.71



ნახ. 7.72

შევაშროშოთ, შეესაბამება თუ არა აღნიშნული თანაკვეთის რომელიმე წერტილს სუსტი უნაგირა წვეილი, რისთვისაც ყველა წვეილისათვის შევაშროშოთ (7.14) პირობის შესრულება. გამოეთვალათ:

(1,1) წერტილისათვის -

$$f(1,1) - f(1,1) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,1) - f(1,1) = (0,1) - (0,2) = (0,-1) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,1) - f(1,1) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,1) - f(1,2) = (0,2) - (1,0) = (-1, 2) \notin C \setminus \{0\};$$

(1,2) წერტილისათვის -

$$f(1,2) - f(1,2) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(1,2) = (2,0) - (1,0) = (1,0) \in C,$$

$$f(1,2) - f(1,1) = (1,0) - (0,2) = (1, -2) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(1,2) - f(1,2) = (0,0) \notin C \setminus \{0\};$$

(2,1) წერტილისათვის -



$$f(1,1) - f(2,1) = (0,2) - (0,1) = (0, 1) \in C,$$

$$f(2,1) - f(2,1) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,1) - f(2,1) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,1) - f(2,2) = (0,1) - (2,0) = (-2,1) \notin C \setminus \{0\};$$

(2,2) წერტილისათვის -

$$f(1,2) - f(2,2) = (1,0) - (2,0) = (-1,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(2,2) = (0,0) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(2,1) = (2,0) - (0,1) = (2, -1) \notin C \setminus \{0\},$$

$$f(2,2) - f(2,2) = (0,0) \in C \setminus \{0\}.$$

მიღებული შედეგების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ (7.33) მატრიცით მოცემული ვექტორ-ფუნქციისათვის (1,1) და (2,2) სუსტ უნაგირა წყვილებს წარმოადგენს.

## 7.9.2 დუალური ამოცანის წობადი კონსტრუქცია

მოცემულ ნაწილში ნაჩვენებია, რომ მრავალკრიტერიულ ამოცანაში ეფექტურ ამონახსნთა მოძებნის პრობლემა მჭიდროდ დაკავშირებულია ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წყვილების აგების ამოცანასთან. ფორმულირდება წყვილი დუალური ამოცანებისა, რომლებიც შესაბამისად თავდაპირველი სიმრავლის მაქსიმალური ელემენტებისა და დუალური სიმრავლის მინიმალური ელემენტების მოძებნაში მდგომარეობს. მტკიცდება, რომ სიმრავლე ამონახსნებისა, რომლებიც ერთდროულად წარმოადგენს პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნებს, პირდაპირი და დუალური სიმრავლეების თანაკვეთაა და იგი ლაგრანჟის ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს ემთხვევა მის უნაგირა წყვილებზე.

1 ვთქვათ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  და  $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$  ვექტორ-ფუნქციები მოცემულია  $D \subseteq R^n$  სიმრავლეზე, ხოლო

$$\Omega = \left\{ x \in D \mid g(x) \geq 0_{(k)} \right\}.$$

შემოვიტანოთ ლაგრანჟის ვექტორული ფუნქცია

$$L(x, \lambda) = (f_1(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle, f_2(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle, \dots, f_m(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle) \quad (7.34)$$

და განვიხილოთ ამ ფუნქციის სხვადასხვა ტიპის უნაგირა წვეილების თვისებები  $D \times R_+^k$  სიმრავლეზე.

თეორემა 7.38. ლაგრანჟის (7.34) ფუნქციისათვის  $D \times R_+^k$  სიმრავლეზე განსაზღვრული ძლიერი და სუსტად ძლიერი, ძლიერ სუსტი და სუსტი უნაგირა წვეილების ცნებები ეკვივალენტურია, ე.ი.

$$\mathcal{W}^s = \mathcal{W}^{*s}, \quad \mathcal{W}^{**} = \mathcal{W}^{***}.$$

თუ  $(x^0, \lambda^0)$  ნებისმიერი ტიპის უნაგირა წვეილია, მაშინ

$$g(x^0) \geq 0_{(k)}, \quad \langle \lambda^0, g(x^0) \rangle = 0,$$

ისე, რომ  $x^0 \in \Omega$ . ამასთან, თუ  $(x^0, \lambda^0) \in \mathcal{W}^{**}$ , მაშინ  $x^0$  ეფექტური ამონახსნია (ე.ი.  $x^0 \in P_f(x)$ ) და თუ  $(x^0, \lambda^0) \in \mathcal{W}^{*s}$ , მაშინ  $x^0$  მაქსიმუმის წერტილია  $\Omega$ -ზე თითოეული  $f_1, f_2, \dots, f_m$  ფუნქციისათვის.

თეორემა 7.38 გვიჩვენებს, რომ  $L$  ფუნქციის სუსტი უნაგირა წვეილები უშუალო კავშირშია საწყისი მრავალკრიტიერიული ამოცანის ეფექტურ ამონახსნებთან. შემდგომში განვიხილავთ  $L$  ფუნქციის მხოლოდ სუსტ უნაგირა წვეილებს და მათ შემოკლებით ვუწოდებთ უნაგირა წვეილებს, ხოლო ყველა ასეთი წვეილების სიმრავლეს აღვნიშნავთ  $\mathcal{W}$ -თი.

2 შემოვიტანოთ ისევე, როგორც წინა ნაწილში, სიმრავლები  $Q = Q'$  და  $H = H'$ , რომლებსაც შესაბამისად ვუწოდოთ პირდაპირი და დუალური:

$$Q = \bigcup_{x \in D} Q(x), \quad Q(x) = \bigcap_{\lambda \in R_+^k} \{q \in R^m \mid q \leq L(x, \lambda)\},$$

$$H = \bigcup_{\lambda \in R_+^k} H(\lambda), \quad H(\lambda) = \bigcap_{x \in D} \{h \in R^m \mid h \leq L(x, \lambda)\}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ  $x \in D \setminus \Omega$ , მაშინ  $Q(x) = \emptyset$ . ამიტომ

$$Q = \bigcup_{x \in \Omega} Q(x) = \bigcup_{x \in \Omega} \{q \in R^m \mid q \leq f(x)\} = Y, \quad (7.35)$$

სადაც  $Y = Y - R_+^m$ .

შენიშნავთ, რომ  $H(\lambda)$  სიმრავლე შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახითაც [104]:

$$H(\lambda) = \bigcap_{x \in D} \bigcup_{\mu \in M} \{h \mid \langle \mu, h \rangle \geq \rho(\mu, x, \lambda)\},$$

სადაც  $\rho$  ლაგრანჟის სკალარული ფუნქციაა, რომელსაც აქვს სახე

$$\varphi(\mu, x, \lambda) = \langle \mu, L(x, \lambda) \rangle.$$

$Q$  სიმრავლის ( $H$  სიმრავლის)  $\geq$  თანადობის მიმართ მაქსიმალურ (მინიმალურ) ელემენტთა სიმრავლე აღნიშნოთ  $\text{Max } Q$ -თი ( $\text{Min } H$ -ით). თეორემა 7.33 და ტოლობა (7.23) გვიჩვენებს, რომ ლაგრანჟის  $L$  ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე უნაგირა წყვილების  $W$  სიმრავლეზე მჭიდრო კავშირშია  $\text{Max } Q$  და  $\text{Min } H$  სიმრავლეებთან.

თეორემა 7.39. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\text{Max } Q \cap \text{Min } H = Q \cap H = L(W).$$

აღნიშნული თეორემის თამაზმად, თუ  $\text{Max } Q \subseteq \text{Min } H$ , მაშინ

$$\text{Max } Q = Q \cap H = L(W);$$

თუ  $\text{Max } Q \supseteq \text{Min } H$ , მაშინ

$$\text{Min } H = Q \cap H = L(W);$$

საბოლოოდ, თუ  $\text{Max } Q = \text{Min } H$ , მაშინ

$$\text{Max } Q = \text{Min } H = Q \cap H = L(W).$$

3. (7.35) ტოლობისა და [104] ნაშრომში დამტკიცებული 2.2.1 ლემის საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\text{Max } Q = \text{Max} \bigcup_{x \in \Omega} Q(x) = \text{Max } Y. = P(Y),$$

სადაც  $P(Y)$  საწყისი მრავალკრიტერიული ამოცანის ეფექტურ შეფასებათა სიმრავლეა.

ამგვარად, შემდეგი ორი ამოცანა ეკვივალენტურია:

პირდაპირი ამოცანა 1 ეიპოვოთ სიმრავლე  $\text{Max } Q$ .

პირდაპირი ამოცანა 2. ეიპოვოთ სიმრავლე  $P(Y)$ .

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\text{Inf}_\lambda L(x, \lambda) = \left\{ \text{inf}_\lambda L_1(x, \lambda), \text{inf}_\lambda L_2(x, \lambda), \dots, \text{inf}_\lambda L_m(x, \lambda) \right\},$$

მაშინ, ადვილი შესამჩნევია, რომ  $Q(x)$  სიმრავლე შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$Q(x) = \left\{ q \in R^m \mid q \leq \text{Inf}_{\lambda \in R_+^m} L(x, \lambda) \right\}.$$

აღნიშნულთან დაკავშირებით პირდაპირი ამოცანა მდგომარეობს

$$\text{Max}_{x \in D} \text{Inf}_{\lambda \in R_+^k} L(x, \lambda) = \text{Max} \left\{ x \in \bar{R}^m \mid z = \text{Inf}_{\lambda \in R_+^k} L(x, \lambda), x \in D \right\} \quad (7.36)$$

სიმრავლის მოძებნაში. აქ  $\bar{R}^m = \bar{R} \times \bar{R} \times \dots \times \bar{R}$  და  $\bar{R}$  გაფართოებული რიცხვითი ღერძია, რომელიც მიიღება  $R$ -დან  $-\infty$  და  $+\infty$  სიმბოლოების დამატებით. პირდაპირი ამოცანის ეს ფორმულირება ზემოთ მოყვანილის ეკვივალენტურია (რამდენადაც მაქსიმალური ელემენტები, მათი განსაზღვრის თანახმად, უნდა ეკუთვნოდეს  $R^m$ -ს).

პირდაპირ ამოცანას შევეუსაბამოთ შემდეგი დუალური ამოცანა.

დუალური ამოცანა. ვიპოვოთ  $\text{Min } H$  სიმრავლე.

დუალური მრავალკრიტერიული ამოცანების კონსტრუქცია შემოთავაზებულია ვ. ნოვინის ნაშრომში [95]; იმავე ნაშრომში დადგენილია სამართლიანობა შემდეგი ტოლობისა:

$$\text{Max } Q \cap \text{Min } H = Q \cap H .$$

სკალარული ამოცანის შემთხვევაში, როცა  $m=1$ , პირდაპირი ამოცანა მიიღებს ჩვეულებრივ სახეს (იხ. (7.36)): ვიპოვოთ

$$\max_{x \in D} \inf_{\lambda \in R_+^k} L(x, \lambda) .$$

მაგრამ, რადგან  $H(\lambda)$  სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$H(\lambda) = \left\{ h \in R \mid h \geq \sup_{x \in D} L(x, \lambda) \right\}$$

ტოლობის სახით, ამიტომ დუალური ამოცანა შეიძლება ფორმულირებულ იქნეს შემდეგნაირად: ვიპოვოთ

$$\min_{\lambda \in R_+^k} \sup_{x \in D} L(x, \lambda) .$$

დუალური მრავალკრიტერიული ამოცანების, ისევე, როგორც სკალარული დუალური ამოცანების, შესწავლის პროცესში პრინციპულად მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როცა ადგილი აქვს  $\text{Max } Q = \text{Min } H$  ტოლობას ანუ იმ შემთხვევას, როცა პირდაპირი ამოცანის ყოველი ამონახსნი იმავედროულად დუალური ამოცანის ამონახსნიცაა და პირიქით. ამასთან, თითოეული  $\text{Max } Q, \text{Min } H, Q \cap H$  და  $L(W)$  სიმრავლე საწყისი მრავალკრიტერიული ამოცანის ეფექტური შეფასებების  $P(Y)$  სიმრავლეს ემთხვევა.

ჩაზნეილი და წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიულ ამოცანებში პირობები, როცა პირდაპირი და დუალური ამოცანების ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა, დაწვრილებით შესწავლილია მონოგრაფიაში [104].

## 7.10 მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის გამოყენებითი ამოცანები

### 7.10.1 მეტალურგიული წარმოების ლაგეჰმის ამოცანები

განვიხილოთ მეტალურგიული წარმოების დაგეგმვის ამოცანები მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თვალსაზრისით და იდეალური მანძილის მინიმიზაციის მეთოდით მათი გადაწყვეტის შესაძლებლობები [113].

ამოცანა 7.1 დავეუვათ, რომ, დროის გარკვეულ პერიოდში სილიკომანგანუმის  $n$  ტონა შენადნობის გამოდნობის მიზნით, ფეროშენადნობ ქარხანას შესაძლებლობა აქვს მადანი (მანგანუმისა და მანგანუმის კარბონატის ნარევი) შეუკვეთოს  $A$  და  $B$  მადარობებს, რომლებიც ქარხნიდან  $I_A$  და  $I_B$  კმ მანძილებით დაშორებულ სხვადასხვა ადგილას მდებარეობს. ამ მადარობებში ქარხნის მიერ შეკვეთილი მადნის რაოდენობა ტონებში შესაბამისად აღვნიშნოთ  $x_A$  და  $x_B$ .

ვთქვათ,  $A$  მადარობი მოპოვებული 1 ტონა მადნის მახასიათებლებია: რელიზაციის ღირებულება -  $c_A$  ლარი; მის გადამუშავებაზე დახარჯული ელექტროენერგია -  $t_A$  კვტ.სთ; მასში ფოსფორის შემცველობა -  $m_A\%$ ; მისგან წარმოებული სილიკომანგანუმის შენადნობის რაოდენობა -  $n_A$  ტონა. ანალოგიური პარამეტრები გააჩნია  $B$  მადარობი მოპოვებულ 1 ტონა მადანსაც:  $c_B$  ლარი,  $t_B$  კვტ.სთ,  $m_B\%$ ,  $n_B$  ტონა.

დავეუვათ, რომ ქარხნის მწარმოებლურობა დროის მოცემულ შუალედში  $n_1$  ტონა მადნის გადამუშავებას უზრუნველყოფს. გარდა ამისა, ქარხნის მიერ მოხმარებული ელექტროენერგიის რესურსი შეზღუდულია და ამიტომ მისთვის არარენტაბელურია 1 ტონა შენადნობის გამოდნობაზე  $t$  კვტ.სთ-ზე მეტი ენერგიის დახარჯვა. 1 ტონა შენადნობის მისაღებად დახარჯული ელექტროენერგიის რაოდენობა შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფარდობის საფუძველზე:

$$\frac{t_A x_A + t_B x_B}{n_A x_A + n_B x_B}$$

ტექნოლოგიური დავალების თანახმად, შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა

$$\frac{m_A x_A + m_B x_B}{n_A x_A + n_B x_B}$$

არ უნდა აღმატებოდეს მოცემულ  $m$  რიცხვს.

ზემოთ აღნიშნული მონაცემების საფუძველზე, მეტალურგიული წარმოების დაგეგმვის ამოცანა საჭიროა გადაწყვეტილი იქნეს ქვემოთ მოცემული უტოლობების სახით წარმოდგენილი შეზღუდვების გათვალისწინებით

$$n_A x_A + n_B x_B \geq n,$$

$$x_A + x_B \leq n_1,$$

$$l_A x_A + l_B x_B \leq l(n_A x_A + n_B x_B), \quad (7.37)$$

$$m_A x_A + m_B x_B \leq m(n_A x_A + n_B x_B),$$

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0.$$

(7.37) უტოლობები შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც წრფივი დაპროგრამების პირობები. პირველი უტოლობა დაგეგმილი რაოდენობის შენადნობის გამოდნობას უზრუნველყოფს, მეორე უტოლობა მადნის გადამუშავების პროცესში ქარხნის შესაძლებლობებს გამოსახავს, მესამე უტოლობა ელექტრონერჯის დასაშვებ საზღვრებში ხარჯვას ითვალისწინებს, მესამე უტოლობა შენადნობში ფოსფორის საჭირო პროცენტულ შემადგენლობას უზრუნველყოფს. აღნიშნული უტოლობები  $(x_A, x_B)$  სიბრტყეზე დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  არეს განსაზღვრავს.

ქარხნის მიერ შეკვეთილი მადნის ღირებულება განისაზღვრება წრფივი  $c_A x_A + c_B x_B$  ფორმით, რომლის ფარდობა გამოდნობილი შენადნობის  $n_A x_A + n_B x_B$  რაოდენობასთან განსაზღვრავს 1 ტონა შენადნობის მისაღებად საჭირო ნედლეულის საშუალო ღირებულებას. შენადნობის გაყიდვის შემთხვევაში ქარხანა გარკვეულ მოგებას მიიღებს.

მადნის შესყიდვის დაგეგმვის არსი, ერთი მხრივ, მდგომარეობს საერთო მოგების მაქსიმალურ გაზრდაში და იგი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$L_1(x_A, x_B) = c(n_A x_A + n_B x_B) - c_A x_A - c_B x_B - p(l_A x_A + l_B x_B), \quad (7.38)$$

სადაც  $c$  აღნიშნავს 1 ტონა შენადნობის რეალიზაციის ღირებულებას, ხოლო  $p$  გამოსახავს 1 ტონა მადნის 1 კმ მანძილზე ტრანსპორტირების ხარჯებს.

მეორე მხრივ, მადნის შესყიდვის დაგეგმვის მიზნით, მის მიმართ შეიძლება წაყენებულ იქნეს მოთხოვნები მადნის მაღაროდან ქარხანაში მიტანისათვის სატრანსპორტო საშუალებების მინიმალური განარბენის შესახებ. აღნიშნული მოთხოვნები განისაზღვრება მადნის ტრანსპორტირების დროს ტონა-კილომეტრების საერთო რიცხვით და იგი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$L_2(x_A, x_B) = l_A x_A + l_B x_B. \quad (7.39)$$

ამგვარად, მიღებულია წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა (7.38) და (7.39) მიზნის ფუნქციებით. ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს. (7.37) შეზღუდვების დაკმაყოფილების პირობებში საჭიროა მადნის ისეთი  $x_A$  და  $x_B$  რაოდენობის განსაზღვრა, რომელიც ერთდროულად უზრუნველყოფს ქარხნის საერთო მოგების გამოსახველი მიზნის (7.38) ფუნქციის მაქსიმიზაციას და მადნის გადაზიდვისათვის სატრანსპორტო საშუალებების განარბენის გამოსახველი მიზნის (7.39) ფუნქციის მინიმიზაციას.

ოპტიმალური დაგეგმვის მიღებული მრავალკრიტერიული ამოცანა გადავწყვიტოთ იდეალური მანძილის მინიმიზაციის მეთოდით, რისთვისაც დაუშვათ პარამეტრების კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობები. ვთქვათ,  $n = 350$  ტ,  $n_1 = 1000$  ტ,  $n_A = 0.5$  ტ,  $n_B = 0.3$  ტ,  $t = 4000$  კვტ.სთ/ტ,  $t_A = 1500$  კვტ.სთ/ტ,  $t_B = 1300$  კვტ.სთ/ტ,  $c_A = 32.5$  ლარი/ტ,  $c_B = 12.5$  ლარი/ტ,  $c = 150$  ლარი/ტ,  $m_A = 0.18\%$ ,  $m_B = 0.17\%$ ,  $m = 0.5\%$ ,  $p = 0.1$  ლარი/ტ.კმ,  $l_A = 50$  კმ,  $l_B = 25$  კმ. მაშინ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა მიიღებს კონკრეტულ სახეს და მათემატიკური თვალსაზრისით იგი შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს ფორმულირებული.

საჭიროა ვიპოვოთ წრფივი ფუნქციების

$$L_1(x_A, x_B) = 37.5x_A + 30x_B, \quad (7.40)$$

$$L_2(x_A, x_B) = 50x_A + 25x_B, \quad (7.41)$$

შესაბამისად, მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები შემდეგი წრფივი შეზღუდვების

$$0.5x_A + 0.3x_B \geq 350,$$

$$x_A + x_B \leq 1000, \quad (7.42)$$

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0$$

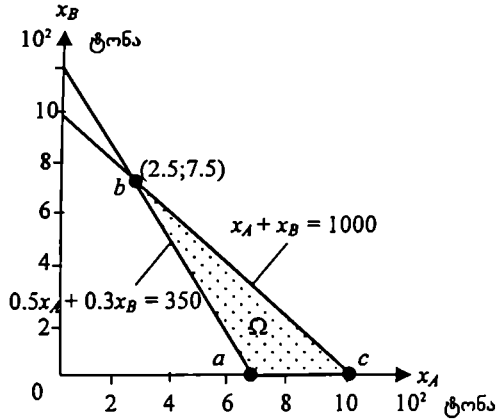
დაკმაყოფილების შემთხვევაში.

(7.42) უტოლობები ( $x_A, x_B$ ) სიბრტყეზე განსაზღვრავს  $\Omega$  არეს, რომელსაც ნახ. 7.73-ზე  $abc$  სამკუთხედი შეესაბამება.

ადვილი გამოსათვლელია, რომ მიზნის წრფივი (7.38) ფუნქცია თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს  $c$  წერტილში, რომელსაც შეესაბამება ცვლადების შემდეგი მნიშვნელობები:

$$x_A = 1000 \text{ ტ}, \quad x_B = 0 \text{ ტ}.$$

მიღებულ წერტილში (7.38) და (7.39) ფუნქციების მნიშვნელობებია



ნახ. 7.73

$$L_1^0 = 37500 \text{ ლარი, } L_2 = 50000 \text{ ტ.კმ.}$$

ამასთან, ამ შემთხვევაში, ადგილი აქვს  $n_A x_A + n_B x_B = 0.5 \cdot 1000 + 0.3 \cdot 0 = 500$  ტონა შენადნობის გამოდნობას.

წრფივი (7.39) ფუნქცია თავის მინიმუმს აღწევს  $b$  წერტილში (ნახ. 7.73), რომლის კოორდინატებია

$$x_A = 250 \text{ ტ, } x_B = 750 \text{ ტ.}$$

მიღებულ წერტილში მიზნის (7.38) და (7.39) ფუნქციების მნიშვნელობებია

$$L_1 = 31875 \text{ ლარი, } L_2^0 = 31250 \text{ ტ.კმ.}$$

ამასთან, ამ შემთხვევაში, ადგილი აქვს  $n_A x_A + n_B x_B = 0.5 \cdot 250 + 0.3 \cdot 750 = 350$  ტონა შენადნობის გამოდნობას.

ამგვარად, მიღებული მნიშვნელობების საფუძველზე შეიძლება ადასკვნათ, რომ მოგების  $37500 - 31875 = 5625$  ლარით გაზრდას თან ახლავს სატრანსპორტო საშუალებების განარბენის  $50000 - 31250 = 18750$  ტონა-კილომეტრით გაზრდა.

განვსაზღვროთ ამოცანის ვექტორულ-ობტიმალური გეგმა.

(7.8) ფორმულის საფუძველზე შევადგინოთ საობტიმალური ფუნქცია

$$\Phi(x) = \left( \frac{37.5x_A + 30x_B}{37500} - 1 \right)^2 + \left( \frac{50x_A + 25x_B}{31250} - 1 \right)^2 \quad (7.43)$$



და (7.42) უტოლობებით განსაზღვრულ  $\Omega$  არეში ვიპოვოთ ცვლადების ის  $x_A^*$  და  $x_B^*$  სიდიდეები, რომლის დროსაც (7.43) ფუნქცია თავის მინიმალურ მნიშვნელობას მიღწევს.

$\Omega$  არეში შესაბამისი გამოთვლების ჩატარების შედეგად განისაზღვრება წერტილი

$$x_A^* = 294 \text{ ტ, } x_B^* = 706 \text{ ტ,} \quad (7.44)$$

რომელიც  $bc$  მონაკვეთზე ძვეს (ნახ. 7.73). მიღებულ წერტილში მიზნის (7.38) და (7.39) ფუნქციების მნიშვნელობებია

$$L_1^* = 32205 \text{ ლარი, } L_2^* = 32350 \text{ ტ.კმ.} \quad (7.45)$$

ამასთან, ამ შემთხვევაში, ადგილი აქვს  $n_A x_A + n_B x_B = 0.5 \cdot 294 + 0.3 \cdot 706 = 358.8$  ტონა შენადნობის გამოდნობას.

ამგვარად, (7.40)-(7.42) ამოცანის ვექტორულ-ოპტიმალური (7.44) გეგმა  $32205 - 31875 = 330$  ლარით მეტ მოგებას უზრუნველყოფს, მიუხედავად იმისა, რომ სატრანსპორტო საშუალებების განარბენი, წინა შემთხვევასთან შედარებით,  $32350 - 31250 = 1100$  ტონა-კილომეტრით გაიზარდა. განხილულ ამოცანაში შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა და ელექტროენერგიის ხარჯები არ იყო გათვალისწინებული. ცხადია, შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობის შემცირება, რაც შენადნობის ხარისხის გაუმჯობესებას ემსახურება, და, ამასთან, ელექტროენერგიის ხარჯების შემცირებაც საერთო მოგების გაზრდას უზრუნველყოფს.

**ამოცანა 72.** განვიხილოთ ამოცანის მეორე ვარიანტი, რომელშიც საერთო მოგების გაზრდის მიზნით ადგილი აქვს როგორც 1 ტონა შენადნობის მისაღებად საჭირო მადნის ღირებულების, ისე შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობის ერთდროულად მინიმიზაციას.

დავუშვათ, რომ ფეროშენადნობ ქარხანას 1 ტონა მადნის შესყიდვა და მისი  $A$  და  $B$  მადაროებიდან ტრანსპორტირება შესაბამისად უჯდება  $c_A$  და  $c_B$  ლარი. დავუშვათ, აგრეთვე, რომ  $A$  და  $B$  მადაროები დროის გარკვეულ შუალედში მხოლოდ  $x_A$  და  $x_B$  რაოდენობის (ტონებში) ნედლეულის მიწოდებას უზრუნველყოფს. დანარჩენ პარამეტრებს იგივე აზრი გააჩნია, რაც წინა ამოცანაში.

აღნიშნულის გათვალისწინებით (7.37) შეზღუდვათა სისტემა მიიღებს სახეს

$$n_A x_A + n_B x_B \geq n,$$

$$t_A x_A + t_B x_B \leq t(n_A x_A + n_B x_B),$$

$$m_A x_A + m_B x_B \leq m(n_A x_A + n_B x_B), \quad (7.46)$$

$$0 \leq x_A \leq \bar{x}_A, \quad 0 \leq x_B \leq \bar{x}_B,$$

რომელიც  $(x_A, x_B)$  სიბრტყეზე განსაზღვრავს დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  არეს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ქარხნის მიერ დაგეგმილია  $n$  ტონა შენადნობის გამოღობა და ამ ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა წარმოების ისეთი დაგეგმვა, რომლის დროსაც მაღნის შესყიდვასთან დაკავშირებული ხარჯები მინიმალური იქნება, ხოლო შესყიდული მაღნიდან სილიკომანგანუმის რაც შეიძლება ხარისხიანი შენადნობი მიიღება. როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ხარისხიანი შენადნობის მიღება დამოკიდებულია მასში ფოსფორის შემცველობაზე; შენადნობში რაც უფრო ნაკლებია ფოსფორის შემცველობა, იგი მით უფრო ხარისხიანია. მათემატიკური თვალსაზრისით დაგეგმვის აღნიშნული მოთხოვნები შემდეგი წრფივი ფორმებით ჩაიწერება

$$L_1(x_A, x_B) = c_A x_A + c_B x_B. \quad (7.47)$$

$$L_2(x_A, x_B) = 0.01 m_A x_A + 0.01 m_B x_B. \quad (7.48)$$

(7.47) ფუნქცია განსაზღვრავს შესყიდული მაღნის საერთო ღირებულებას ლარებში, ხოლო (7.48) ფუნქცია - წარმოებულ შენადნობში ფოსფორის რაოდენობას ტონებში.

ამგვარად, მივიღეთ წრფივი დაპროგრამების მრავალკრიტერიული ამოცანა, რომელშიც საჭიროა ვიპოვოთ შეზღუდვათა (7.46) სისტემით განსაზღვრული დასაშვები  $\Omega$  არის ისეთი ამონახსნი, რომელიც მიზნის (7.47) და (7.48) ფუნქციების ერთდროულად მინიმიზაციას უზრუნველყოფს.

მიღებული ამოცანა გადაეწყვიტოთ პარამეტრების კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობების გათვალისწინებით. ვთქვათ,  $n = 150000$  ტ,  $n_A = 0.6$  ტ,  $n_B = 0.3$  ტ,  $t = 4000$  კვტ.სთ/ტ,  $t_A = 1650$  კვტ.სთ/ტ,  $t_B = 1450$  კვტ.სთ/ტ,  $c_A = 52.5$  ლარი/ტ,  $c_B = 15$  ლარი/ტ,  $m_A = 0.174\%$ ,  $m_B = 0.19\%$ ,  $m = 0.5\%$ ,  $\bar{x}_A = 300000$  ტ,  $\bar{x}_B = 400000$  ტ. მაშინ წრფივი დაპროგრამების მოცემული მრავალკრიტერიული ამოცანა მიიღებს კონკრეტულ სახეს და იგი შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს ფორმულირებული.

საჭიროა ვიპოვოთ მიზნის წრფივი ფუნქციების

$$L_1(x_A, x_B) = 52.5 x_A + 15 x_B, \quad (7.49)$$

$$L_2(x_A, x_B) = 0.00174 x_A + 0.0019 x_B \quad (7.50)$$

მინიმალური მნიშვნელობები შემდეგი წრფივი შეზღუდვების

$$2x_A + x_B \geq 500000,$$

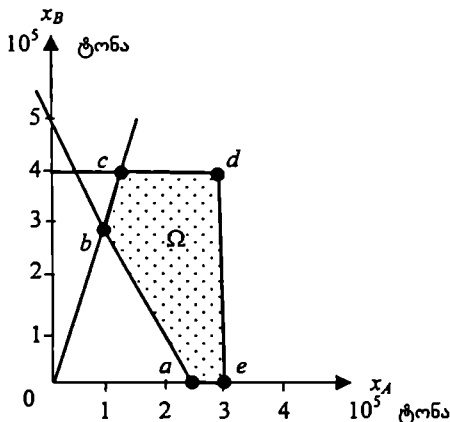
$$3x_A - x_B \geq 0,$$

$$3.14x_A - x_B \geq 0, \tag{7.51}$$

$$0 \leq x_A \leq 300000, \quad 0 \leq x_B \leq 400000$$

დაკმყოფილების შემთხვევაში.

(7.51) უტოლობებით განსაზღვრული დასაშვებ ამონახსნთა  $\Omega$  არე წარმოდგენილია ნახ. 7.74-ზე.



ნახ. 7.74

ამოცანის ოპტიმალური გეგმა, რომლის დროსაც ადგილი აქვს მხოლოდ მადნის ღირებულების მინიმიზაციას, შეესაბამება საოპტიმიზაციო ცვლადების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$x_A = 100000 \text{ ტ}, \quad x_B = 300000 \text{ ტ}.$$

აღნიშნული გეგმის შემთხვევაში მიიღება მიზნის (7.49) და (7.50) ფუნქციების მნიშვნელობები

$$L_1^0 = 9750000 \text{ ლარი}, \quad L_2 = 744 \text{ ტ},$$

რომლის საშუალებითაც განისაზღვრება შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა  $\frac{744}{150000} \cdot 100 = 0.496\%$ , რაც დასაშვების ფარგლებშია.

ამოცანის ოპტიმალური გეგმა, რომლის დროსაც ადგილი აქვს მხოლოდ შენადნობში ფოსფორის შემცველობის მინიმიზაციას, შეესაბამება საოპტიმიზაციო ცვლადების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$x_A = 250000 \text{ ტ}, \quad x_B = 0 \text{ ტ}.$$

აღნიშნული გეგმის შემთხვევაში მიიღება მიზნის (7.49) და (7.50) ფუნქციების მნიშვნელობები

$$L_1 = 13125000 \text{ ლარი}, \quad L_2^0 = 435 \text{ ტ},$$

რომლის საშუალებითაც განისაზღვრება შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა  $\frac{435}{150000} \cdot 100 = 0.29\%$ .

განვსაზღვროთ ამოცანის ვექტორულ-ოპტიმალური გეგმა, რისთვისაც (7.8) ფორმულის საფუძველზე შევადგინოთ საოპტიმიზაციო ფუნქცია

$$\Phi(x) = \left( \frac{52.5x_A + 15x_B}{9750000} - 1 \right)^2 + \left( \frac{0.00174x_A + 0.0019x_B}{435} - 1 \right)^2 \quad (7.52)$$

და (7.51) უტოლობებით განსაზღვრულ დასაშვებ არეში ვიპოვოთ ცვლადების ის  $x_A^*$  და  $x_B^*$  მნიშვნელობები, რომლის დროსაც (7.52) ფუნქცია თავის მინიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს. გამოთვლების შედეგად მიიღება ოპტიმალური ამონახსნი

$$x_A^* = 221217 \text{ ტ}, \quad x_B^* = 57566 \text{ ტ}, \quad (7.53)$$

რომელიც ერთდროულად უზრუნველყოფს როგორც 1 ტონა შენადნობის მისაღებად საჭირო მადნის ღირებულების, ასევე შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობის მინიმიზაციას.

ოპტიმალური (7.53) გეგმის მიხედვით მიიღება მიზნის (7.49) და (7.50) ფუნქციების შემდეგი მნიშვნელობები:

$$L_1^* = 12477382.5 \text{ ლარი}, \quad L_2^* = 494.293 \text{ ტ},$$

რომლის საშუალებითაც განისაზღვრება შენადნობში ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა  $\frac{494.293}{150000} \cdot 100 = 0.33\%$ .

## 7.10.2 ინდივიდუალური მუშარამე და საბაზრო ეკონომიკა მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის თვალსაზრისით

ინდივიდუალურმა მეწარმემ თავისი სამეწარმეო საქმიანობა შემდეგნაირად ააწყო [130]. გარკვეული თანხის საფასურად იგი იძენს მამაკაცის არანაკლებ 60 ცალ და ქალის არანაკლებ 40 ცალ სვიტრს, რომლებსაც შემდეგ ოდნავ ჩეჩავს და მიღებულ ხაოიან სვიტრებს ბაზარში ყიდის. მეწარმე მამაკაცისა და ქალის სვიტრებს შესაბამისად 10 და 20 ლარად ყიდულობს, ხოლო დაჩეჩვის შემდეგ მათ ყიდის შესაბამისად 20 და 40 ლარად. დროის რომელიღაც ერთეულთან ინტერვალში იგი მხოლოდ 80 ცალ სვიტრს ჩეჩავს.

მეწარმის სურვილია, რომ პოზიციები შეინარჩუნოს როგორც მამაკაცის, ისე ქალის სვიტრების ბაზარზე. ამიტომ იგი დაინტერესებულია არა მაქსიმალური შემოსავლით ან მაქსიმალური მოგებით, არამედ რამდენიმე კრიტერიუმის ერთდროული შეფასებით.

თუ მეწარმის მიერ შესყიდულ მამაკაცისა და ქალის სვიტრების მოცულობას შესაბამისად აღვნიშნავთ  $x_M$  და  $x_W$  სიმბოლოებით,  $x = (x_M, x_W)$ , მაშინ საოპტიმიზაციო ამოცანა შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს ფორმულირებული:

$$\begin{aligned} \max\{f_1(x) = 20x_M\}, \\ \max\{f_2(x) = 40x_W\}, \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\min\{f_3(x) = 10x_M + 20x_W\},$$

$$\text{როცა } 0 \leq x_M \leq 60,$$

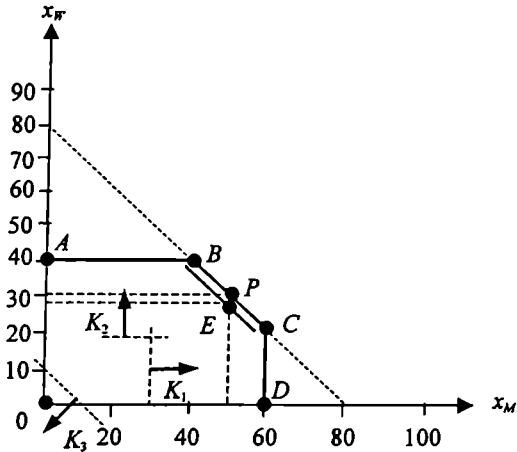
$$0 \leq x_W \leq 40, \quad (7.55)$$

$$x_M + x_W \leq 80.$$

ამგვარად, მიღებული (7.54)-(7.55) ამოცანა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების პრაქტიკური ამოცანის, რომელშიც საჭიროა (7.55) უტოლობებით განსაზღვრულ დასაშვებ მნიშვნელობათა არეში მიზნის  $f_1(x)$  და  $f_2(x)$  ფუნქციების მაქსიმიზაცია, ხოლო  $f_3(x)$  ფუნქციის - მინიმიზაცია.

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენოთ კრიტერიუმების ლექსიკოგრაფიული მოწესრიგების საფუძველზე შემუშავებული მეთოდი, რომელიც, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, შემდეგში მდგომარეობს. ცალ-ცალკე, თითოეული კრიტერიუმის მიხედვით, გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანები და განისაზღვრება მიზნის  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  და  $f_3(x)$  ფუნქციების ექსტრემალური მნიშვნელობები. მიღ-

ბული მნიშვნელობების გათვალისწინებით, თითოეული კრიტერიუმისათვის, დაწყებული ყველაზე უპირატესით, დაიშვება ის ზღვრული სიდიდე, რომელიც არ უნდა დაირღვეს. პირველი კრიტერიუმის მიხედვით ზღვრული სიდიდის დაურღვევლობის პირობა ჩათვლება რა შეზღუდვად, დაემატება საწყისი ამოცანის უტოლობათა (7.55) სისტემას და გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანა მეორე კრიტერიუმისათვის. შემდეგ მეორე კრიტერიუმის მიხედვით ზღვრული სიდიდის დაურღვევლობის პირობა ჩათვლება რა შეზღუდვად, დაემატება უტოლობათა სისტემას და გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანა მესამე კრიტერიუმისათვის და ა.შ..



ნახ. 7.75

7.75 ნახაზზე წარმოდგენილია (7.54)-(7.55) ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა  $OABCD$  არე  $f_1, f_2, f_3$  კრიტერიუმების ცვლილების ხელსაყრელი მიმართულებებით. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ამოცანის ამონახსნები ცალ-ცალკე, თითოეული კრიტერიუმის მიხედვით, ადვილად მოიძებნება და ისინი ტოლია:

- $f_1$  კრიტერიუმის მიხედვით:  $x_M^{(1)} = 60, x_F^{(1)} \in [0;20], f_1^{(1)} = 1200$ ;
- $f_2$  კრიტერიუმის მიხედვით:  $x_M^{(2)} \in [0;40], x_F^{(2)} = 40, f_2^{(2)} = 1600$ ;
- $f_3$  კრიტერიუმის მიხედვით:  $x_M^{(3)} = x_F^{(3)} = 0, f_3^{(3)} = 0$ .

მეწარმემ იცის რა ერთკრიტერიულ ამოცანებში მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები, სიტუაცია ბაზარში და თავისი ფინანსური შესაძლებლობები, იგი ირჩევს შემდეგ

ზღვრულ სიდიდეებს  $e_1 = 1000$  (ე.ი. მას სურს, რომ ჰქონდეს  $f_1(x) \geq e_1 = 1000$ ),  $e_2 = 1120$  (სურს, რომ ჰქონდეს  $f_2(x) \geq e_2 = 1120$ ) და  $e_3 = 1200$  ( $f_3(x) \leq e_3 = 1200$ ).

თავდაპირველად გადაწყდება წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა:

$$\max\{f_2(x) = 40x_M\},$$

$$\text{როცა } 0 \leq x_M \leq 60,$$

$$0 \leq x_W \leq 40,$$

$$x_M + x_W \leq 80,$$

$$20x_M \geq 1000,$$

რომლის ამონახსნია  $x'_M = 50$ ,  $x'_W = 30$ ,  $f_2(x') = 1200 \geq 1120$ . მეორე კრიტერიუმის მიხედვით ფორმირდება ზღვრული სიდიდის დაურღვევლობის პირობა  $40x_M \geq 1120$ , რომელიც დაემატება შეზღუდვათა სისტემას, და გადაწყდება ახალი ამოცანა

$$\min\{f_3(x) = 10x_M + 20x_W\},$$

$$\text{როცა } 0 \leq x_M \leq 60,$$

$$0 \leq x_W \leq 40,$$

$$x_M + x_W \leq 80,$$

$$20x_M \geq 1000,$$

$$40x_W \geq 1120.$$

ცხადია, უკანასკნელი ამოცანის ამონახსნია  $x_M^* = 50$ ,  $x_W^* = 28$ ,  $f_3(x^*) = 1060 \leq 1200 = e_3$ , რაც მრავალკრიტერიული (7.54)-(7.55) ამოცანის ეფექტურ ამონახსნს წარმოადგენს. შევნიშნავთ, რომ განხილულ ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია, როცა  $e_3 = 950$ .

საზოგადოდ, მრავალკრიტერიული ამოცანების გადაწყვეტის პროცესში თავს იჩენს გარკვეული სპეციფიკური პრობლემები, რომლებიც ერთკრიტერიულ ამოცანებში არ გვხვდება, რის გამოც ეფექტური ამონახსნის მიღება ხშირად არ ზერხდება. თავისი სირთულის გამო მრავალკრიტერიული ამოცანების ამოხსნა მკვლევარის მაღალ კვალიფიკაციას მოითხოვს.

# თავი მერვე

## ოპტიმიზაცია კომპლექსურცვლადიან სისტემებში

### 8.1 ფრაქტალების თეორია

#### 8.1.1 უსასვალი

ფრაქტალები ჩვენ გარშემო ყველგანაა, მთების აღწერილობაში, ზღვის ნაპირის კლაკნილ ზაზებში და ა.შ. ზოგი ფრაქტალი უწყვეტად იცვლება მოძრავი ღრუბლების ან ცეცხლის ციმციმის მსგავსად, ზოგი კი ინარჩუნებს სტრუქტურას, რომელიც ევოლუციის შედეგად შეიძინა. ასეთი ფრაქტალებია, მაგალითად, ხეები, ჩვენი სისხლძარღვთა სისტემა და სხვ. შეიძლება მკითხველს გაუკვირდეს, თუ რატომ მოექცა თანამედროვე მეცნიერების კვლევის არეალში ასეთი ჩვეულებრივი ობიექტები. რაღაც მოვლენის ჩვეულებრივობა არ ნიშნავს, რომ მეცნიერებას შეუძლია მისი ახსნა. ბევრი ფრაქტალია ჩვენთვის ცნობილი, მაგრამ მათი სრულყოფილი მათემატიკური ასახვა უკანასკნელ დრომდე არ არსებობდა.

სამყაროს მეცნიერულ წარმოდგენაში, რომელიც სათავეს იღებს გალილეო გალილეიდან, სხვადასხვა მოვლენის აღწერისათვის გამოიყენებოდა ისეთი მათემატიკური ობიექტები, როგორცაა სამკუთხედი, წრეწირი, კონუსი და სხვა გეომეტრიული ფიგურები. მათ გარეშე ადამიანი სიბნელეში მოხეტილეს ემსგავსებო, წერდა იტალიელი მეცნიერი.

სამყაროს შესახებ გალილეის წარმოდგენებიდან თითქმის 350 წელი გავიდა მანამ, სანამ ბენუა მანდელბროტმა არ დაამუშავა ფრაქტალის ცნება. 1984 წელს იგი წერდა: “რატომ უწოდებენ ხშირად გეომეტრიას ცივსა და მშრალს? ერთ-ერთი მიზეზი მდგომარეობს მის უუნარობაში აღწეროს ღრუბლების, მთების, ხეების ან ზღვის სანაპიროს ფორმები. ღრუბელი არ არის სფერო, მთა არ არის კონუსი, ზღვის ნაპირი არ არის წრეწირი, ქერქი არაა გლუვი და ელვა არ ვრცელდება სწორხაზოვნად. ბუნება არა მარტო მაღალი ზარისხის, არამედ სხვა დონის სირთულის დემონსტრირებას ახდენს. სტრუქტურებში სივრცის სხვადასხვა მასშტაბის რიცხვი უსასრულოა. ამ



სტრუქტურების არსებობა გვაიძულებს გამოვიკვლიოთ რთული ამოცანები იმ ფორმების შესასწავლად, რომლებიც ეკლიდემ უკუაგლო როგორც უფორმოები - ამორფულის მორფოლოგიის შესწავლის ამოცანები. თავის დროზე მათემატიკოსებმა არ მიიღეს ეს გამოწვევა და ბუნებისაგან სულ უფრო მეტად დაშორება არჩიეს, დაიწყეს რა ისეთი თეორიების შემუშავება, რომლებიც არ შეესაბამება იმას, რასაც ჩვენ ვხედავთ და ვგრძნობთ“.

ფრაქტალის მათემატიკური ცნება გამოყოფს ობიექტებს, რომლებსაც გააჩნია სხვადასხვა სტრუქტურის მასშტაბები, როგორც დიდი, ისე მცირე, და, ამგვარად, ასახავს ორგანიზაციის იერარტიულ პრინციპს. ამ ცნების საფუძველს წარმოადგენს სინამდვილის ერთი მნიშვნელოვანი იდეალიზაცია: ფრაქტალური ობიექტები თვითმსგავსია, ე.ი. მიკროსკოპში ნებისმიერი გადიდების ან შემცირების შემთხვევაში მათი სახე არსებითად არ იცვლება. მიუხედავად სინამდვილის ასეთი გამარტივებული იდეალიზაციისა, იგი მაინც ხელს უწყობს ბუნების სიღრმისეულ აღწერას.

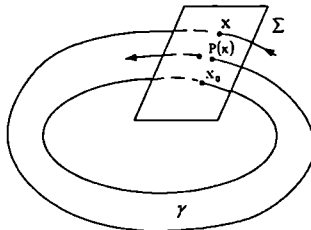
ბ. მანდელბროტის ნაშრომებმა დიდი აღიარება პოვა. მის მიერ აღმოჩენილია პრინციპი, რომლის საფუძველზეც წარმოიქმნება თვითმსგავსი სტრუქტურების მთელი სამყარო [10, 23, 34, 47, 70, 87, 93, 99, 105, 106, 132, 137, 149, 227].

### 8.1.2 ჰსენკარმს ასახვა

ვთქვათ,  $\gamma$  შეკრული ტრაექტორიაა შემდეგი სისტემისა:

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in R \quad . \quad (8.1)$$

ამოვიჩინოთ  $x_0 \in \gamma$  და მასზე გავატაროთ  $\Sigma$  კვეთი, რომელიც წარმოადგენს ჰიპერსიბრტყის რაღაც მცირე ნაწილს. იგი ტრანსვერსალურად (არანულოვანი კუთხით) გადაკვეთს  $\gamma$  ტრაექტორიას  $x_0$  წერტილში (ნახ. 8.1).



ნახ. 8.1

(8.1) სისტემის ტრაექტორიები, რომლებიც შეკრულ  $\gamma$  ტრაექტორიის მახლობლობაში გაივლის,  $\sum$  კვების თავისთავზე  $P$  ასახვას განაპირობებს. მართლაც, ავიღოთ  $x \in \sum$  წერტილი, რომელზეც გაივლის  $\gamma(x)$  ტრაექტორია.  $\gamma(x)$  ტრაექტორიის  $\sum$  კვეთთან გადაკვეთის პირველი წერტილი, რომელიც  $x$ -ს მოჰყვება, აღვნიშნოთ  $P(x)$ -ით. ამგვარად, განისაზღვრა ასახვა

$$P: \sum \rightarrow \sum ,$$

რომელსაც შეკრული  $\gamma$  ტრაექტორიის პუნქტარეს ასახვას უწოდებენ [121, 139, 140, 226].

პუნქტარეს ასახვა (8.1) სისტემის ტრაექტორიების თვისებრივ ყოფაცემებს განსაზღვრავს შეკრული  $\gamma$  ტრაექტორიის მახლობლობაში. კერძოდ:

1. ეთქვათ,  $x_0$  წერტილი  $P$  ასახვის უძრავი წერტილია, ე.ი.  $P(x_0) = x_0$ . მაშინ  $\gamma(x_0)$  ტრაექტორია შეკრულია. ამგვარად,  $P$  ასახვის უძრავ წერტილებს შესაბამება (8.1) სისტემის შეკრული ტრაექტორიები, რომლებიც  $\gamma$  ტრაექტორიის მახლობლობაში მდებარეობს.
2. ეთქვათ,  $x_1 \in \sum$ .  $P$  ასახვის საშუალებით განვსაზღვროთ  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $x_k \in \sum$  წერტილების თანამიმდევრობა შემდეგნაირად:

$$x_2 = P(x_1), \quad x_3 = P(x_2) = P(P(x_1)) = P^2(x_1), \quad x_{k+1} = P^k(x_1),$$

სადაც  $P^k(x)$  სიმბოლოთი აღნიშნულია  $P$  ასახვის  $k$ -ური იტერაცია. ე.ი.

$$P^k = \underbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}_{k-\text{ჯერ}}.$$

თუ უძრავი  $x_0$  წერტილის მიდამოში ნებისმიერი  $x \in \sum$  წერტილისათვის ადგილი აქვს ფორმულას

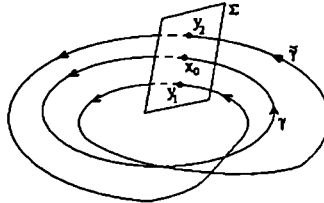
$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x_0,$$

მაშინ  $x_0$  არის  $P$  ასახვის მდგრადი უძრავი წერტილი, ხოლო  $x_0$ -ის შესაბამისი შეკრული  $\gamma$  ტრაექტორია - მდგრადი ტრაექტორია.

$P$  ასახვის უძრავი  $x_0$  წერტილის მდგრადობა განისაზღვრება იაკობის  $P'(x_0)$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვებით (თუ აღნიშნული მატრიცის ყველა სა-

კუთრივი რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა ერთზე ნაკლებია, მაშინ  $x_0$  მდგრადი უძრავი წერტილია).

- ვთქვათ, არსებობს ისეთი  $y_1 \in \Sigma$  წერტილი, რომ  $P(y_1) = y_2$ ,  $P(y_2) = y_1$  და, მაშასადამე,  $P^2(y_1) = y_1$ ,  $P^2(y_2) = y_2$ . მაშინ  $\tilde{\gamma} = \gamma(y_1)$  ტრაექტორია შეიკვრება  $\gamma$  ტრაექტორიის მხოლოდ ორი „შემოვლის“ შემდეგ (ნახ. 8.2).



ნახ. 8.2

ამგვარად, პუნქარეს ასახვის მეორე ( $k$ -ური) იტერაციის უძრავ წერტილებს შეესაბამება (8.1) სისტემის შეკრული ტრაექტორიები, რომლებიც  $\gamma$  ტრაექტორიის მხოლოდ ორი (შესაბამისად  $k$ ) შემოვლის შემდეგ შეიკვრება.

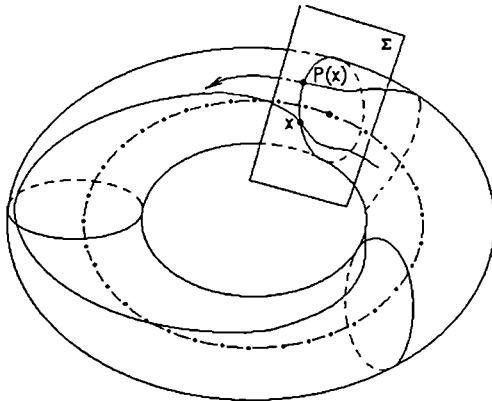
- თუ შეკრული  $\gamma$  ტრაექტორიის გარშემო არსებობს ინვარიანტული ტორი (ნახ. 8.3), მაშინ  $\Sigma$  კვეთი ტორს გადაკვეთს რომელიღაც შეკრულ წირზე -  $K$  „წრეწირზე“. აღნიშნული  $K$  წირი პუნქარეს  $P$  ასახვის საშუალებით გადადის თავისთავში: ნებისმიერი  $x \in K$  წერტილისათვის გვაქვს  $P(x) \in K$  ან  $P(K) = K$ . ამგვარად, პუნქარეს ინვარიანტულ „წრეწირებს“ შეესაბამება (8.1) სისტემის ინვარიანტული ტორი.

პუნქარეს ასახვის საშუალებით სისტემის შეკრული ტრაექტორიის ბიფურკაციის პრობლემა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ამ ასახვის უძრავი წერტილის ბიფურკაციის პრობლემაზე.

საბოლოოდ შეიძლება დავასკვნათ, რომ

- შეკრული ტრაექტორიების წყვილის წარმოქმნა ან გაქრობა შეესაბამება პუნქარეს ასახვის წყვილი უძრავი წერტილების წარმოქმნას ან გაქრობას;

2. პერიოდის გორაკების ბიფურკაციას შეესაბამება  $P$  ასახვის უძრავი  $x_0$  წერტილის ბიფურკაცია, რომლის დროსაც  $x_0$  წერტილიდან განშტოვდება  $P$  ასახვის მეორე იტერაციის წყვილი უძრავი  $y_1, y_2$  წერტილები. შევნიშნავთ, რომ  $x_0$  არის, აგრეთვე,  $P^2$  ასახვის უძრავი წერტილი;
3.  $\gamma$  ტრაექტორიის მახლობლობაში წარმოქმნილ  $T^2$  ინვარიანტულ ტორს შეესაბამება  $P$  ასახვის უძრავი  $x_0$  წერტილის ბიფურკაცია, რომლის დროსაც  $x_0$ -სგან განშტოვდება  $P$  ასახვის ინვარიანტული „წრეწირი“ (შეკრული ინვარიანტული წირი);
4. ბიფურკაციას, რომლის დროსაც ადგილი აქვს სიმეტრიის დაკარგვას, შეესაბამება ჰუანკარეს ასახვის უძრავი წერტილის ბიფურკაცია, რომლის დროსაც ამ წერტილიდან განშტოვდება ჰუანკარეს ასახვის ორი სხვა უძრავი წერტილი.



ნახ. 8.3

**შენიშვნა 8.1** ჰუანკარეს ასახვა ჩვენ განვიხილეთ შედარებით მცირე  $\sum$  კვეთის დროს. იგი შეიძლება განზოგადებულ იქნეს უფრო ზოგად შემთხვევაშიც, როცა ადგილი აქვს სისტემის გლობალური ყოფაქცევის გამოკვლევას.

ქვემოთ განხილულია ჰუანკარეს ასახვა ჰამილტონის სისტემებში.

### 8.1.3 ჰამილტონის სისტემები

მრავალი სისტემის ყოფაქცევის აღმწერი დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს ჰამილტონის ფორმაში [10, 70, 87]

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.2)$$

სადაც  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$  კოორდინატებია ფაზურ  $R^{2n}$  სივრცეში ან ღია  $R^{2n}$  ქვესივრცეებზე. ამგვარად,  $H$  ფუნქცია ვექტორულ  $X_H$  ველს შემდეგნაირად განსაზღვრავს:

$$X_H = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

ნებისმიერი  $F$  ფუნქციისათვის გამოსახულება

$$X_H F = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial y_k} \right) = \{F, H\}$$

ანტისიმეტრიულია  $F$  და  $H$ -ით. მიღებულ ფუნქციას ეწოდება  $F$  და  $H$ -ის პუანსონის ფრჩხილი.

$F_1, F_2, \dots, F_r$  ფუნქციებს ეწოდება მაკომუტირებელი ანუ ინვოლუციაში მყოფი, თუ

$$\{F_k, F_j\} = 0, \quad (k, j = 1, 2, \dots, r).$$

განსაზღვრება 8.1.  $D \subset R^{2n}$  არეზე განსაზღვრულ (8.2) ჰამილტონის სისტემას ინტეგრირებადი (ასევე სრულად ინტეგრირებადი ან ინტეგრირებადი ლიუვილით) ეწოდება, თუ არსებობს  $n$  ინტეგრალი  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ინვოლუციაში წრფივად დამოუკიდებელი გრადიენტებით, ე.ი.  $D$ -ში გვაქვს:

1.  $\{H, F_j\} = 0$ ,
2.  $\{F_k, F_j\} = 0$ ,
3.  $dF_1, dF_2, \dots, dF_n$  წრფივად დამოუკიდებელია.

გაბალითი 8.1  $H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k^2 + y_k^2)$  განსაზღვრავს ინტეგრირებად სისტემას

$$R^{2n} \text{-ში } F_k = x_k^2 + y_k^2 \text{-ით } (k=1, 2, \dots, n).$$

მრავალი სისტემა, რომელიც პრაქტიკაში გვხვდება, ძალიან ახლოსაა ინტეგრირებადთან [26]. აღნიშნული საკითხი უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ.

კონსერვატიული ოსცილატორის (რხვეითი რგოლის) განტოლებაა

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a, \quad a = \text{const}.$$

შემოვიტანოთ ფაზური კოორდინატები

$$x_1 = x \quad \text{და} \quad x_2 = \dot{x}.$$

ჩავეწეროთ საწყისი განტოლება

$$\dot{x} = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \tag{8.3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2. \tag{8.4}$$

(8.4) გამოსახულება წარმოადგენს პირველ ინტეგრალს და სისტემის მოძრაობა წრეწირზე ხორციელდება. ამასთან, (8.4) წარმოადგენს ჰამილტონიანს და ასახავს ენერგიის შენახვის კანონს. ჰამილტონის სისტემებისათვის (8.3) განტოლება, რომელშიც  $H(x)$  დროზე არ არის დამოკიდებული, შეიძლება დავიყვანოთ დროზე დამოკიდებულ ჰამილტონურ სისტემაზე, რომელშიც ცვლადების რიცხვი ორი ერთეულით ნაკლებია და საწყისი სისტემის ამონახსნი შეიძლება კვადრატურის დახმარებით რედუცირებული სისტემის ამონახსნის საფუძველზე მივიღოთ.

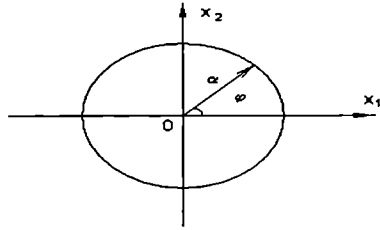
კონსერვატიული სისტემისათვის მეორე რიგის მოძრაობის ინტეგრალის არსებობა მოცემულ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს იგი პირველი რიგის განტოლებით დახმარებით აღვწეროთ. მართლაც, ახალი  $\varphi$  ცვლადის შემოტანით

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = a \sin \varphi,$$

მივიღებთ განტოლებებს

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{a} = 0, \tag{8.5}$$

რომლებიც განსაზღვრავს ფაზური წერტილის მოძრაობის კანონს. ოსცილატორის ჰარმონიულ რხევას პასუხობს გამომსახველი წერტილის თანაბარი მოძრაობა  $a$  რადიუსის მქონე წრეწირზე (ნახ. 8.4).



ნახ. 8.4

ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $\{H, F_j\} = 0$ .

**მაბალაიტი 8.2.** ვთქვათ,  $H(x, y)$  - ჰამილტონიანი  $R^{2n}$ -ში ინვარიანტულია ძერე-ბის  $x_k \rightarrow x_k + s$ ,  $y_k \rightarrow y_k$  მიმართ, ე.ი. აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} H = 0. \tag{8.6}$$

მაშინ, ცხადია,  $F = \sum_{k=1}^n y_k$  არის ინტეგრალი და აკმაყოფილებს პირობას  $\{F, H\} = 0$ .

**მაბალაიტი 8.3.** წრფივ სისტემას, რომელიც აღწერს  $n$  რიგის ოსცილატორს

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2), \quad \omega_j > 0, \tag{8.7}$$

გააჩნია ინტეგრალი  $F_j = p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2$ . იგი აკმაყოფილებს 8.1 განსაზღვრებაში მოცემულ პირობებს, რომელიც დარღვეულია  $S_k = \{(p, q) \in R^n : p_k = q_k = 0\}$  სიმრავლეზე, მაგრამ დაკმაყოფილებულია შემდეგ სიმრავლეზე:

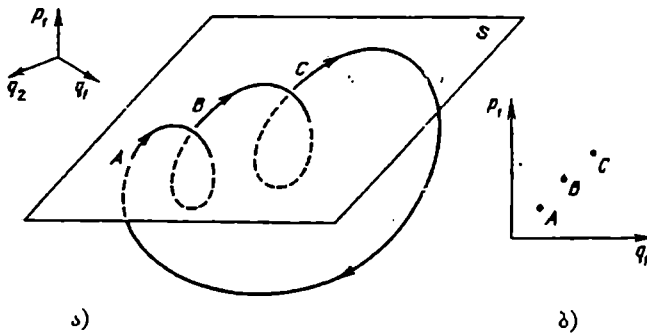
$$\Omega = R^{2n} \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n S_k \right). \tag{8.8}$$

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სისტემა ორი თავისუფლების ხარისხით. ამ შემთხვევაში, თუ ჰამილტონიანი დროზე არ არის დამოკიდებული, მაშინ ტრაექტორია იმყოფება ოთხგანზომილებიანი ფაზური  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  სივრცის სამგანზომილებიანი რომელიც ენერგეტიკულ  $H(q, p) = const$  ჰიპერსიბრტყეზე.

ბოლო ტოლობა საშუალებას გვაძლევს ოთხი ცვლადიდან ლოკალურად გამოვსახოთ ნებისმიერი მათგანი, როგორც დანარჩენის ფუნქცია (მაგალითად,  $P_2$ ;  $P_2 = P_2(q_1, q_2, P_1, E)$ ). ამგვარად, იმ შემთხვევაში, როცა მოძრაობის დამატებითი ინტეგრალები არ არსებობს, საწყისი სისტემის წაკვეთილი ფაზური სივრცე იქნება სამგანზომილებიანი  $(q_1, q_2, P_1)$ .

ამოვიჩინოთ აღნიშნულ სივრცეში რომელიღაც ორგანზომილებიანი  $S$  ზედაპირი და განვიხილოთ მისი თანამიმდევრული გადაკვეთა ფაზურ ტრაექტორიასთან მხოლოდ ერთი მიმართულებით (ნახ. 8.5). ასეთ  $S$  ზედაპირს, იმის დაშვებით რომ იგი ფაზურ წირებს შეხების გარეშე გადაკვეთს, უწოდებენ დინამიკური სისტემის ნაკადის მკვეთრ ზედაპირს. მოძრაობის შედეგად გადაკვეთის რომელიღაც  $A$  წერტილი ამორჩეული  $S$  მკვეთრი ზედაპირიდან ფაზური ტრაექტორიით გადადის სხვა  $B = P(A)$  წერტილში. ამავე ზედაპირზე  $P$  ფუნქცია გადაკვეთის წერტილებს თანამიმდევრობით ერთიმეორეში გადაიყვანს (ნახ. 8.5ა)

$$A \rightarrow B = P(A) \rightarrow C = P(B) \rightarrow A \dots \quad (8.9)$$



ნახ. 8.5

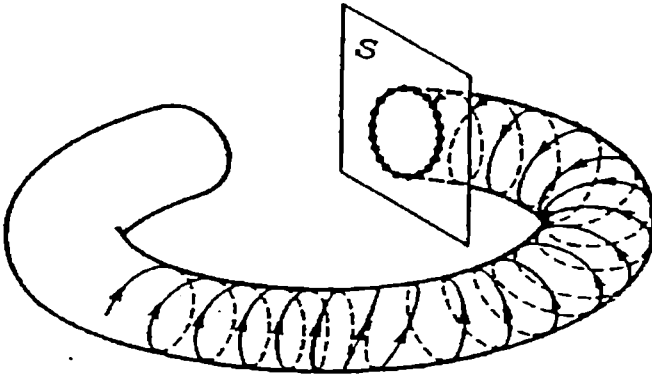
$P$  ფუნქციას ბუნებრივად ასახვას უწოდებენ.

ზმირად,  $S$  მკვეთრ ზედაპირის სახით აიღებენ რომელიღაც სიბრტყეს. მაშინ სამგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში ტრაექტორიის ყოფაქცევის შესწავლა დაიყვანება ორგანზომილებიანი სიბრტყის  $S$  ნაკვეთის თავისთავის  $P$  ასახვაში. ამის ნათელი მაგალითია სისტემის ყოფაქცევის წარმოდგენა მოცემული კვეთის  $(q_1, P_1)$  პროექციისა ფაზურ სივრცეში (ნახ. 8.5ბ).

ბუნებრივად ასახვის გამოყენება ძალიან ამარტივებს დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემის ყოფაქცევის შესწავლას. მაგრამ (8.1) დინამიკური სისტე-



ჩის დაყვანა ასახვაზე ხშირ შემთხვევაში მხოლოდ რიცხობრივადაა შესაძლებელი. ხიუხედავად ამისა, თუ  $P$  აგებულია ან თუ ცნობილია ფაზური წირების კვალი  $S$  ჰკვეთ სიბრტყეზე, მაშინ იგი საშუალებას იძლევა ცხადად წარმოვიდგინოთ სისტემაში მიმდინარე პროცესების დინამიკა. მაგალითად, როცა პუანკარეს ასახვას აქვს სახე  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  (ნახ. 8.5ა), მაშინ ფაზურ სივრცეში მას შეესაბამება მოძრაობა შეკრულ ტრაექტორიაზე და სისტემის ყოფაქცევა იქნება პერიოდული; თუ წერტილთა სიმრავლის პუანკარეს ასახვა მჭიდროდ ავსებს გარკვეულ შეკრულ წირს, მაშინ იგი კვაზიპერიოდულ მოძრაობას შეესაბამება (ნახ. 8.6).

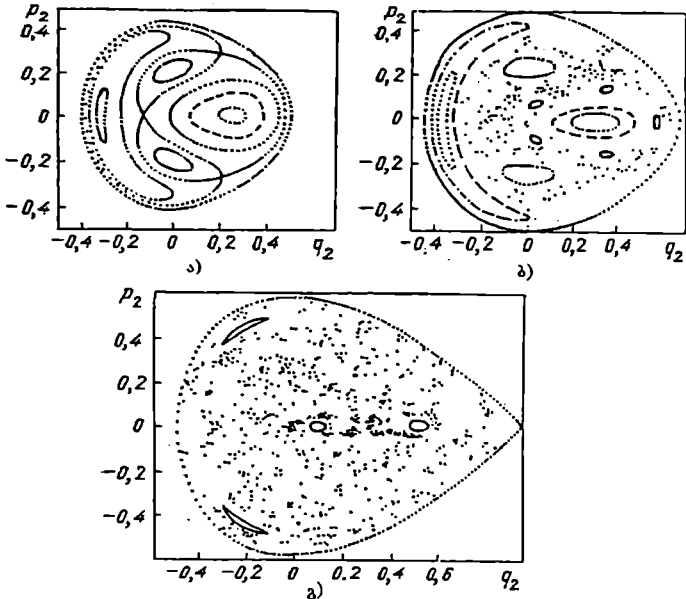


ნახ. 8.6

მაგალითისათვის განვიხილოთ ენო-ვილესის მოდელი, რომლის ჰამილტონიანს აქვს სახე

$$H = \left(\frac{1}{2}\right)(p_1^2 + p_2^2) + \left(\frac{1}{2}\right)(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \left(\frac{1}{3}\right)q_2^3. \quad (8.10)$$

ასეთი სისტემისათვის არსებობს ენერჯის ინტეგრალი  $H = E$ , რომლის საშუალებითაც გამოითვლება ერთ-ერთი  $p_1 = p_1(q_1, q_2, p_2, E)$  ცვლადი. ენო-ვილესის ექსპერიმენტი (8.6) ჰამილტონიანისათვის პუანკარეს ასახვის გამოყენებით მოცემულია ნახ. 8.7-ზე.



ნახ. 8.7

მცირე ენერგიებისთვის გვექნება მოძრაობა მჭიდრო გრაგნილების მქონე ტორის ზედაპირზე. ენერგიის ზრდასთან ერთად სურათი მკვეთრად იცვლება: ზოგიერთი ინვარიანტული წირი დაიშლება და მივიღებთ წერტილების ხშირ სიმრავლეს.

ზოგად შემთხვევაში, ჰამილტონის განტოლებები არ არის მთლიანად ინტეგრირებადი (სისტემისათვის  $n$  თავისუფლების ხარისხით).

აღნიშნული პრობლემის გადასაწყვეტად შემუშავებულია რამდენიმე მეთოდი, რომელთაგან პირველ რიგში საჭიროა გამოვყოთ კოლმოგოროვ-არნოლდ-მოზერის თეორემა, მოკლედ, კამ-თეორია. მისი ფორმულირება და დამტკიცება ძალიან რთულია. ამ თეორიის გაცნობა შეიძლება სპეციალურ ლიტერატურაში [10, 26, 87].

## 8.1.4 დისიპატიური დინამიკური სისტემები და მათი ატრაქტორები

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ჰამილტონის ზოგიერთი სისტემა ხასიათდება მოძრაობის არარეგულირებადი ან ქაოსური რეჟიმებით. ასეთი რეჟიმების წარმოქმნა თვით სისტემის თვისებაა და იგი არ არის დამოკიდებული მის დინამიკაზე, გარეშე შემთხვევითი ძალების მოქმედებაზე. ჰამილტონის სისტემები საკმაოდ ვიწრო კლასია. შესასწავლი სისტემების უმრავლესობა (მათ შორის ბიოლოგიური, ქიმიური, ეკოლოგიური, ფიზიკური და სხვ.) დისიპატიურია ანუ ისეთი სისტემებია, რომლებსთვის არ არის სამართლიანი ლიუვილის თეორემა [10]. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აღნიშნულ სისტემებში ფაზური მოცულობა დროის მიხედვით არ არის მუდმივი და იგი იკუმშება. ფაზური მოცულობის შემცირება კი იმას განაპირობებს, რომ, როცა  $t \rightarrow \infty$ , დისიპატიური სისტემის ყველა ამონახსნი თავს მოიყრის ფაზური სივრცის რომელიღაც ქვესიმრავლეში, რომელსაც ატრაქტორს უწოდებენ.

დისიპატიური სისტემის დინამიკური თვისებების შესწავლა გვიჩვენებს, რომ მათ მოძრაობის რთული რეჟიმები გააჩნია, რაც დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორია ატრაქტორი - მარტივი თუ რთული. ამ უკანასკნელის მიხედვით განასხვავებენ რეგულარულ ან ქაოსურ მოძრაობებს.

**ბანსაზღვრება 8.2.** ატრაქტორი ეწოდება  $M$  ფაზური სივრცის  $B$  ქვესიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- $B$  ინვარიანტულია ნაკადის მიმართ;
- არსებობს  $U$  არე, რომელიც ნაკადის მოქმედებით  $B$ -სკენ იკუმშება;
- $B$  არ შეიძლება დაეშალოს ორ არამკვეთ ინვარიანტულ სიმრავლედ.

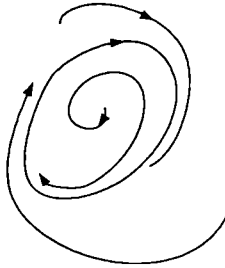
საჭიროა აღინიშნოს, რომ დღეისათვის არ არსებობს ერთიანი აზრი ატრაქტორის განსაზღვრის საუკეთესო ფორმულირებაზე. ზემოთ აღნიშნული განმარტება ეკუთვნის ლენფორდს. არსებობს სხვა ექვივალენტური განსაზღვრებებიც.

**ბანსაზღვრება 8.3.** ატრაქტორის მიზიდულობის  $B$  არე წარმოადგენს ისეთი  $x_0$  საწყისი წერტილების ერთობლიობას, რომ, როცა  $t \rightarrow \infty$ , აღნიშნული წერტილებიდან გამოსული ფაზური ტრაექტორიები  $B$  ატრაქტორისკენ მიისწრაფვის.

ჩვეულებრივ, დინამიკური სისტემის ატრაქტორების რაოდენობა სასრული რიცხვია  $B_1, \dots, B_k$ , თუმცა ცნობილია მარტივი სისტემები, რომლებსაც უსასრულო რაოდენობის სხვადასხვა სახის ატრაქტორი გააჩნია. ნებისმიერი დინამიკური სისტემა, რომელსაც ფაზურ სივრცეში აქვს ატრაქტორების ყველა საწყისი წერტილი, გარდა ნულ-განზომილების სიმრავლისა, ერთიმეორის მიზიდულობის არეში მდებარეობს [9].

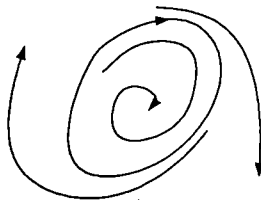
ადვილი დასანახავია, რომ მიზიდვის განსაკუთრებული წერტილები, როგორცაა მდგრადი კვანძი და მდგრადი ფოკუსი, ატრაქტორებს წარმოადგენს, მაგრამ დისიპატიურ სისტემებში ატრაქტორი შეიძლება იყოს არა მარტო მდგრადი სტაციონარუ-

ლი წერტილი, არამედ შეკრული ფაზური ტრაექტორია, რომელიც პერიოდულ მოძრაობებს შეესაბამება. როგორც ცნობილია, ასეთ იზოლირებულ შეკრულ ტრაექტორიას ზღვრულ ციკლს უწოდებენ. მდგრადი ზღვრული ციკლი ატრაქტორს წარმოადგენს. მას ის თვისება გააჩნია, რომ მის მახლობლობაში, საკმაოდ მცირე არეში, სხვა შეკრული ტრაექტორია არ არსებობს, ხოლო აღნიშნული მიდამოს ყველა სხვა ფაზური წირი ამ ერთადერთ შეკრულ ტრაექტორიას დაეხვევა (ნახ. 8.8).



ნახ. 8.8

იმ შემთხვევაში, როცა ყველა ტრაექტორია ზღვრული ციკლიდან გადაუხვევს, მაშინ ისინი აბსოლუტურად არამდგრადია (ნახ. 8.9) და ზღვრული ციკლი არ იქნება ატრაქტორი.



ნახ. 8.9

ზემოთ ჩამოთვლილი ატრაქტორები - მდგრადი სტაციონარული წერტილები, მდგრადი ზღვრული ციკლები და ინვარიანტული ტორები მარტივ ატრაქტორებს წარმოადგენს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში დინამიკური სისტემა არ არის ქაოსური და

იგი ყველაზე რთული - ერგოდიკული ხასიათის მატარებელია. მარტივი ატრაქტორი დინამიკური სისტემის ფაზური სივრცის ქვემრავალსახეობას წარმოადგენს.  $M$  სივრცის ქვემრავალსახეობა ეწოდება  $M' \subseteq M$  სივრცის ისეთ  $W$  ქვესიმრავლეს, რომელიც ლოკალურად გამოიყურება როგორც  $M'$  სივრცის ნაჭერი და ყოველ წერტილში აქვს ერთადერთი ჰიპერსიბრტყე, ე.ი.  $W$  გლუვად ჩადებულია  $M$ -ში. მაგალითად, ზღვრული ციკლი და ორგანზომილებიანი ინვარიანტული ტორი შესაბამისად ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი ქვემრავალსახეობებია; თუმცა დისიპატიურ დინამიკურ სისტემებში, რომელთა ფაზური სივრცის განზომილებაა  $n \geq 3$ , არსებობს შემოსაზღვრული მიმზიდავი სიმრავლეები, რომლებიც ატრაქტორებს წარმოადგენს, მაგრამ არ არის ქვემრავალსახეობები. ასეთ ატრაქტორებს უწოდებენ "უცნაურ ატრაქტორებს". ეს ტერმინი შემოიტანეს დ. რიუელმა და ფ. ტაქენსმა [10, 121]. იგი აღნიშნავს ატრაქტორს, რომელიც განსხვავებულია როგორც სტაციონარული წერტილისაგან, ისე ზღვრული ციკლისაგან. დისიპატიური დინამიკური სისტემის ფაზური მოცულობის შეკუმშვის შედეგად ფაზური წირები დროთა განმავლობაში მიიზიდება ზღვრული სიმრავლისაკენ - უცნაური ატრაქტორისაკენ და, მოხვედრა რა მასზე, სამუდამოდ იქ დარჩება. მოძრაობა უცნაურ ატრაქტორზე არამდგრადია: სისტემის ნებისმიერი ორი ტრაექტორია ექსპონენციალურად სწრაფად გაიშლება და, რასაკვირველია, დარჩება უცნაურ ატრაქტორზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, უცნაური ატრაქტორის შემთხვევაში სისტემის ყოფაქცევა ხასიათდება ფაზური მოცულობის გლობალური შეკუმშვით ფაზური ტრაექტორიის ლოკალურ არამდგრადობასთან შეთავსებით.

ვინაიდან უცნაურ ატრაქტორზე ფაზური წირები განიშლება, ამიტომ ასეთი ატრაქტორის შემთხვევაში სისტემის დინამიკა ანალოგიურია შეზღუდულ მოცულობაში ჰამილტონის შერეული სისტემის დინამიკისა. ე.ი. იგი ქაოსურია. დისიპატიურ დინამიკურ სისტემებში ქაოსური მოძრაობის მათემატიკურ სახეს უცნაური ატრაქტორი წარმოადგენს. სისტემის მცირე შემფოთებებს უცნაური ატრაქტორის სტრუქტურის შეცვლა შეუძლია. ისინი მას შლიან: ყველა მახლობელი დინამიკური სისტემის მოძრაობა იქნება ქაოსური. სისტემის ევოლუციის გრძელვადიანი პროგნოზირება შეუძლებელია, ვინაიდან იგი დამოკიდებულია საწყისი პირობებისა და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობების კომბინაციაზე. ეს უკანასკნელი სამგანზომილებიანი არაწრფივი სისტემებისთვისაც კი პრაქტიკულად შეუძლებელია.

1963 წელს ე. ლორენცმა გამოთქვა მოსაზრება იმის შესახებ, რომ ატმოსფეროს დინამიკა ძალიან მგრძობიარეა საწყისი პირობების მიმართ. ამ ჰიპოთეზიდან გამომდინარეობს სერიოზული შედეგები ამინდის პროგნოზირებისათვის იმ შემთხვევაშიც კი, თუ შევძლებდით მეტერეოლოგიური მოდელის გაუმჯობესებასა და მონაცემების შეკრებას.

ე. ლორენცმა დაადგინა, რომ ნაეიე-სტოქსის განტოლების (რომელიც უსასრულო თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემას აღწერს) რიგის მნიშვნელოვანი შემცირებით შეიძლება მივიღოთ სამცკლადიანი არაწრფივი სისტემა, რომელიც საწყისი სისტემის მრავალ დამახასიათებელ განსაკუთრებულობას ინარჩუნებს [10, 87, 94, 99].

## 8.1.5 ლიმიტის მახვილები

ეთქვას, ნამდვილი  $\varphi(t)$  ფუნქცია განსაზღვრულია დადებით ნახევარღერძზე  $t_0 \leq t < +\infty$ . მაშინ, განსაზღვრის თანახმად,  $\alpha$  რიცხვს უწოდებენ  $\varphi(t)$  ფუნქციის ზედა ზღვარს, როცა  $t \rightarrow \infty$ , და მას აღნიშნავენ

$$\alpha = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t), \quad (8.11)$$

თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  სიდიდისთვის არსებობს ისეთი  $T(\varepsilon)$ , რომ

$$\varphi(t) < \alpha + \varepsilon, \quad t > T(\varepsilon); \quad (8.12)$$

2. ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  სიდიდისთვის არსებობს ისეთი უსასრულო შემოსაზღვრავი ზრდადი მიმდევრობა

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k \rightarrow +\infty,$$

რომ

$$\varphi(t_k) > \alpha - \varepsilon. \quad (8.13)$$

ანალოგიურად, განსაზღვრის თანახმად,  $\beta$  რიცხვს უწოდებენ  $\varphi(t)$  ფუნქციის ქვედა ზღვარს, როცა  $t \rightarrow \infty$ , და მას აღნიშნავენ

$$\beta = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t), \quad (8.14)$$

თუ სრულდება პირობები:

1. ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  სიდიდისთვის არსებობს ისეთი  $T_1(\varepsilon)$ , რომ

$$\varphi(t) > \beta - \varepsilon, \quad t > T_1(\varepsilon);$$

2. ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  სიდიდისთვის არსებობს ისეთი შეუზღუდავად ზრდადი მიმდევრობა  $t_1 < t_2 < \dots < t_k \rightarrow +\infty$ , რომ

$$\varphi(t_k) < \beta + \varepsilon.$$

მაგალითი 8.4. განვიხილოთ ფუნქცია  $\varphi(t) = \sin t$ . მოცემული ფუნქციისათვის გვაქვს  $-1 \leq \sin t \leq 1$ , ამასთან,  $t = t_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . რადგან  $\sin t_n = 1$ ,  $t = t'_n = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ ,  $\sin t'_n = -1$ , ამიტომ  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \sin t = 1$ ,  $\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \sin t = -1$ .

მაგალითი 8.5. ცხადია, გვაქვს  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \sin^2 t = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \cos^2 t = 1$ . ამ შემთხვევაში

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sin^2 t + \cos^2 t) = 1 < \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \sin^2 t + \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \cos^2 t = 2.$$

მაგალითი 8.6.  $\varphi(t, \tau) = \sin t \sin \tau$  ფუნქციისათვის ადვილად გამოითვლება, რომ

$$\overline{\lim}_{t, \tau \rightarrow +\infty} \varphi(t, \tau) = 1, \quad \underline{\lim}_{t, \tau \rightarrow +\infty} \varphi(t, \tau) = -1.$$

განვიხილოთ კომპლექსური ფუნქცია

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t),$$

სადაც  $f_1(t)$  და  $f_2(t)$  ნამდვილი ფუნქციებია, რომლებიც განსაზღვრულია  $t_0 \leq t_n \leq t < t_k$  შუალედში, და ისინი ერთდროულად ნულს არ უტოლდებიან. მაშასადამე,

$$|f(t)| = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} > 0, \quad t_0 \leq t < +\infty,$$

და შემოსაზღვრულია ნებისმიერ სასრულ  $t_0 \leq t_n \leq 1 \leq t_k$  ინტერვალზე.

(კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის ძირითად ცნებებსა და დებულებებს 8.4 ნაწილში განვიხილავთ).

ბნსაზღვრება 8.4.  $\chi$  რიცხვს ეწოდება  $f(t)$  ფუნქციის ლიაპუნოვის მახასიათებელი მაჩვენებელი, როცა  $t \rightarrow +\infty$ , თუ სრულდება პირობები:

1. ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  სიდიდისთვის

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\chi+\varepsilon)t}} = 0;$$

2. ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  სიდიდისთვის  $\frac{|f(t)|}{e^{(\chi-\varepsilon)t}}$  ფუნქცია შემოუსაზღვრავია, ე.ი. არსებობს ისეთი შეუზღუდავი  $t_1 < t_2 < \dots < t_k \rightarrow +\infty$  ქვემიმდევრობა, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|f(t_k)|}{e^{(x-t_k)/t_k}} = +\infty.$$

აღნიშნოთ ლიაპუნოვის მახასიათებელი

$$\chi^+[f(t)] \text{ ან } \chi^+[f].$$

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

**თეორემა 8.1** მახასიათებელი მაჩვენებელი  $\chi^+[f]$  განისაზღვრება ფორმულით

$$\chi^+[f] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t}.$$

**განსაზღვრება 8.5.**  $\chi^+[f]$  მახასიათებელ მაჩვენებელს ეწოდება მკაცრი, თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t} = \chi^+[f].$$

ლიაპუნოვის მაჩვენებელი ლიტერატურაში აღინიშნება, აგრეთვე, როგორც  $\lambda$ , რომელსაც შემდეგში ჩვენც გამოვიყენებთ.

**მაგალიტი 8.7.** განვიხილოთ  $f(t) = e^{\lambda t}$  ფუნქცია, სადაც  $\lambda$  კომპლექსური რიცხვია. როცა  $t \rightarrow +\infty$ , მაშინ გვექნება მკაცრი მახასიათებელი მაჩვენებელი

$$\chi^+[e^{\lambda t}] = \operatorname{Re} \lambda,$$

რაც გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან:

$$\frac{\ln|e^{\lambda t}|}{t} = \frac{\ln e^{\operatorname{Re} \lambda t}}{t} = \operatorname{Re} \lambda.$$

**მაგალიტი 8.8.** განვიხილოთ

$$\chi^+[t^m] = 0,$$

სადაც  $m$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში

$$\frac{\ln|t^m|}{t} = m \frac{\ln|t|}{t}, \text{ ამიტომ გვექნება } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln|t^m|}{t} = 0, \text{ რაც უნდა დაგვემტკიცებინა. ამას-}$$

თან, გვაქვს მკაცრი მახასიათებელი მაჩვენებელი.



მაბალითი 8.9. განვიხილოთ  $\chi^+[e^{sin t}] = 1$ . მართლაც,  $|e^{sin t}| = e^{sin t}$ ,  $\ln|e^{sin t}| = t$  და ამიტომ  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \sin t = 1$ ,  $\underline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} \sin t = -1$  გათვალისწინებით გვექნება  $\chi^+[e^{sin t}] = 1$ . ამ შემთხვევაში მახასიათებელი მაჩვენებელი არ არის მკაცრი.

თუ კომპლექსური  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$  ფუნქცია მოცემულია უარყოფით  $-\infty < t \leq t_0$  ნახევარღერძზე, მაშინ შეიძლება შემოვიტანოთ მახასიათებელი მაჩვენებელი  $\chi^-[f(t)]$ , როცა  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\chi^-[f] = \underline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t},$$

$$\chi^-[f] = \chi^-[f] = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln|f(-t)|}{t} \right); \quad \chi^-[f(t)] = -\chi^+[f(-t)].$$

მაბალითი 8.10. თუ  $\lambda$  კომპლექსური რიცხვია, მაშინ  $\chi^-[e^\lambda] = \operatorname{Re} \lambda$ . ამასთან, მაჩვენებელი არის მკაცრი. ამ შემთხვევაში  $f(t) = e^\lambda$ ,  $f(-t) = e^{-\lambda}$ ,  $\chi^+[e^\lambda] = \operatorname{Re} \lambda$  გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\chi^-[e^\lambda] = \operatorname{Re} \lambda.$$

მაბალითი 8.11. განვიხილოთ  $\chi^-[t^m] = 0$ ,  $m = \text{const}$ . ამ შემთხვევაში მაჩვენებელი არის მკაცრი.

მაბალითი 8.12. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & t > 0, \\ e^{-\lambda t}, & t < 0. \end{cases}$$

მოცემული ფუნქციისთვის გვექნება:

$$\chi^+[f] = \operatorname{Re} \lambda_1, \quad \chi^-[f] = \operatorname{Re} \lambda_2.$$

ვთქვათ, მოცემულია  $A = ||q_{ik}(t)||$  მატრიცა (ან ვექტორი), რომლის ელემენტები დადებით  $t_0 \leq t < +\infty$  ნახევარღერძზე შეიძლება იყოს კომპლექსური. როცა  $t \rightarrow +\infty$ , მაშინ  $A$  მატრიცის მახასიათებელი მაჩვენებელი ეწოდება სიდიდეს

$$\chi^+[A] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln|A(t)|}{t} = \chi^+[|A(t)|] = \chi^+[f].$$

თუ მოცემულია ობიექტის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

მაშინ  $A(t)$  მატრიცა უბან-უბან უწყვეტი და შემოსაზღვრულია, ე.ი.  $|A(t)| \leq c = \text{const}$ ,  $t \in J$ , სადაც  $J$  სისტემის მოცემული დროის ინტერვალია.

თეორემა 8.2 თუ დადებით და უარყოფით ნახევარღერძზე სრულდება პირობა

$$|A(t)| \leq c = \text{const}, \quad t \in J,$$

მაშინ არსებობს ისეთი  $K_A$ ,  $K'_A$  მუდმივი სიდიდეები, რომ შესაბამისად ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

$$-K_A \leq \chi^+[Y] \leq K_A, \quad -K'_A \leq \chi^-[Y] \leq K'_A.$$

მაგალითი 8.13. ვთქვათ, მოცემულია სკალარული დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dt} = ty, \quad -\infty < t < +\infty,$$

რომლის ამონახსნს აქვს სახე

$$y(t) = -ce^{t^2/2}, \quad c = \text{const}.$$

მაშინ ნებისმიერი  $y(t) \neq 0$ -სთვის გვექნება:

$$\chi^+[y] = +\infty, \quad \chi^-[y] = +\infty.$$

## 8.1.6 ლიაპუნოვის მაჩვენებლების პირითადი თვისებები

ვთქვათ, მოცემულია რაღაც სისტემა

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n. \tag{8.15}$$

დაუშვათ, რომ  $\Gamma(x_0)$  ტრაექტორიაა, რომელიც (8.15) დიფერენციალური განტოლების  $p(t) = \varphi_{x_0}(t)$  ამონახსნს შეესაბამება.

$\gamma(x_0)$ -ის მახლობლობაში მდებარე ტრაექტორიების ასიმპტოტური ყოფაქცევა განისაზღვრება  $p(t)$  ამონახსნისათვის ვარიაციული განტოლების ფუნდამენტური  $U_{x_0}(t)$  მატრიცით. ლიაპუნოვის მაჩვენებლები წარმოადგენს ინსტრუმენტს  $U_{x_0}(t)$  მატრიცის ასიმპტოტური ყოფაქცევის ასაწერად.

განვიხილოთ  $x_0$  წერტილიდან გამომავალი  $n$  წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . მათგან შევარჩიოთ  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) ვექტორი, რომლებიც აღვნიშნოთ  $e_1 = b_{i_1}, e_2 = b_{i_2}, \dots, e_k = b_{i_k}$ . ფაზურ  $R^n$  სივრცეში  $e_1, \dots, e_k$  ვექტორები განსაზღვრავს რომელიღაც  $k$ -განზომილებიან  $P^{(k)}$  პარალელეპიედს (იხ. ნახ. 8.10, სადაც  $k = 3$ ).



ნახ. 8.10

ფაზური ნაკადი  $x_0$  წერტილს  $t$  დროში  $\varphi(x_0)$  წერტილში გადაადგილებს. ამასთან,  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ვექტორები გარდაიქმნება  $u_{x_0}(t)e_1, \dots, u_{x_0}(t)e_k$  ვექტორებად, რომელიც, თავის მხრივ,  $\varphi'(P^{(k)})$  პარალელეპიედს წარმოქმნის. საჭიროა განვსაზღვროთ  $P^{(k)}$  პარალელეპიედის მოცულობის ცვლილება ანუ, უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ,  $\varphi'(P^{(k)})$  და  $P^{(k)}$  მოცულობების ფარდობა.  $P^{(k)}$  პარალელეპიედის მოცულობა აღვნიშნოთ  $\|e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k\|$ . იგი შემდეგნაირად გამოითვლება.

$e_i$  და  $e_j$  ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღვნიშნოთ  $(e_i, e_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . მაშინ

$$\|e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k\| = [\det A]^{1/2},$$

სადაც  $A = [a_{ij}]$  მატრიცაა,  $a_{ij} = (e_i, e_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ .  $\|U_{x_0}(t)e_1 \wedge \dots \wedge U_{x_0}(t)e_n\|$  გამოსახულება აღნიშნავს  $\varphi^t(P^{(n)})$  პარალელეპიპედის მოცულობას.

ბანსაზღვრება 8.6. ზღვარს (თუ იგი არსებობს)

$$\lambda(x_0, e^{(k)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|U_{x_0}(t)e_1 \wedge \dots \wedge U_{x_0}(t)e_k\|}{\|e_1 \wedge \dots \wedge e_k\|} \quad (8.16)$$

ეწოდება  $\Gamma(x_0)$  ტრაექტორიის ლიაპუნოვის  $k$ -განზომილებიანი მაჩვენებელი.

$\Gamma(x_0)$  ტრაექტორიის ლიაპუნოვის  $k$ -განზომილებიანი მაჩვენებელი წარმოადგენს  $P^{(k)}$  პარალელეპიპედის მოცულობის ცვლილების სიჩქარის “ზომას”  $\Gamma(x_0)$  ტრაექტორიის გასწვრივ მისი გადაადგილების დროს. მნიშვნელოვანია შემდეგი დებულება.

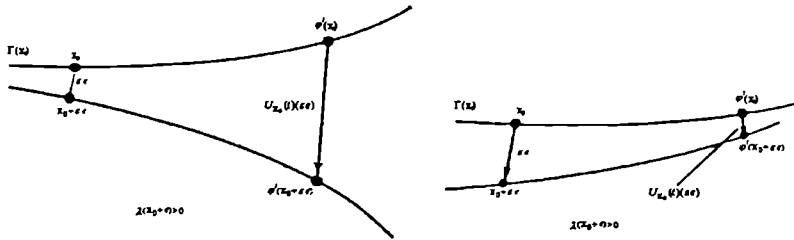
**თეორემა 8.3.**

- ლიაპუნოვის ერთგანზომილებიან მაჩვენებლებს შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს  $n$  სხვადასხვა მნიშვნელობა  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$ .
- ლიაპუნოვის  $k$ -განზომილებიან მაჩვენებლებს შეიძლება ჰქონდეს  $\binom{n}{k}$  სხვადასხვა მნიშვნელობა, ამასთან, თითოეული წარმოადგენს ლიაპუნოვის  $k$  ერთგანზომილებიანი მაჩვენებლის ჯამს.
- თუ წრფივად დამოუკიდებელი  $b_1, \dots, b_n$  ვექტორები შერჩეულია შემთხვევითი წესით, მაშინ (8.16) ფორმულის მარჯვენა მხარის გამოსახულება ერთის ტოლი ალბათობით კრებადია ლიაპუნოვის  $k$ -განზომილებიანი მაქსიმალური  $\lambda_{\max}^{(k)}$  მაჩვენებლის მიმართ.

**შენიშვნა 8.2** დაწვრილებით განვიხილოთ ლიაპუნოვის ერთგანზომილებიანი მაჩვენებლის ცნება. ვთქვათ,  $e \in R^n$ . როცა  $k=1$ , მაშინ (8.16) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\lambda(x_0, e) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|U_{x_0}(t)e\|}{\|e\|}. \quad (8.17)$$

ლიაპუნოვის  $\lambda(x_0, e)$  მაჩვენებელი  $x_0 + \varepsilon e$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ , წერტილში გამავალი ტრაექტორიების ყოფაქცევას აღწერს  $\Gamma(x_0)$  ტრაექტორიის მიმართ (ნახ. 8.11).



ნახ. 8.11

თუ  $\lambda(x_0, e) < 0$ , მაშინ, როცა  $t \rightarrow +\infty$ , აღნიშნული ტრაექტორიები  $\Gamma(x_0)$ -ს მიუახლოვდება, ხოლო თუ  $\lambda(x_0, e) > 0$ , მაშინ - დაშორდება. თუ ამ შემთხვევაში საწყის  $x_0$  მდგომარეობას შეეცვლით ვექტორით  $x_0 + \varepsilon e$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , მაშინ  $\varphi_{x_0 + \varepsilon e}(t) - \varphi_{x_0}(t)$  სხვაობა დროში ექსპონენციალური სიჩქარით გაიზრდება, მაშასადამე, დინამიკური სისტემის ყოფაქცევა ძალიან მგრძნობიარეა საწყის პირობების მიმართ.

**შენიშვნა 8.3.** თუ (8.17) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ  $e = f(x_0)$ , ე.ი. ამოვირჩევთ  $\Gamma(x_0)$ -ის მხებ ვექტორს, მაშინ  $U_{x_0}(t)e$  ვექტორი ყოველთვის იქნება მხები და ადგილი ექნება  $U_{x_0}(t)f(x_0) = f(\varphi_{x_0}(t))$  თანაფარდობას. თუ ვექტორული  $f(x)$  ველი შემოსაზღვრულია ( $\|f(x)\| < K \quad \forall x \in R^n$ ), მაშინ (8.17)-დან გამომდინარეობს, რომ  $\lambda(x_0, f(x_0)) = 0$ .

**შენიშვნა 8.4.** თეორემა 8.3-ის მეორე მტკიცების საილუსტრაციოდ სამგანზომილებიან სივრცეში განვიხილოთ ტრაექტორია. აღნიშნული თეორემის 1-ლი პუნქტის მიხედვით არსებობს ლიაპუნოვის სამი ერთგანზომილებიანი მაჩვენებელი; მე-2 პუნქტის თანახმად, ლიაპუნოვის ორგანზომილებიანი მაჩვენებლების რიცხვი ტოლია  $\binom{3}{2} = 3$  და მათი ჰოვნა შესაძლებელია ლიაპუნოვის ერთგანზომილებიანი მახასიათებლების საშუალებით:

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\lambda_2^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_3,$$

$$\lambda_3^{(2)} = \lambda_2 + \lambda_3;$$

ლიაპუნოვის სამგანზომილებიანი მაჩვენებელი მხოლოდ ერთია

$$\lambda_1^{(3)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

**შენიშვნა 8.5.** თეორემა 8.3-ის მე-3 პუნქტი იმაზე მიუთითებს, რომ ლიაპუნოვის ერთგანზომილებიანი მაჩვენებლების გამოთვლა შეიძლება შემდეგნაირად განხორციელდეს: შემთხვევითი წესით შევარჩევთ  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ვექტორებს და შემდეგ კომპიუტერის საშუალებით მოვძებნით ლიაპუნოვის  $k$ -განზომილებიან ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) მაქსიმალურ მაჩვენებლებს  $\lambda_{\max}^{(1)}, \lambda_{\max}^{(2)}, \dots, \lambda_{\max}^{(n)}$ . მაშინ ლიაპუნოვის ყველა ერთგანზომილებიანი მაჩვენებელი განისაზღვრება შემდეგი თანაფარდობების საშუალებით:

$$\lambda_1 = \lambda_{\max}^{(1)},$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}^{(2)} - \lambda_{\max}^{(1)},$$

$$\lambda_3 = \lambda_{\max}^{(3)} - \lambda_{\max}^{(2)},$$

.....

$$\lambda_n = \lambda_{\max}^{(n)} - \lambda_{\max}^{(n-1)}.$$

**შენიშვნა 8.6.** სტაციონარული ამონახსნის შემთხვევაში ( $p(t) \equiv x_0$ ), ლიაპუნოვის ერთგანზომილებიანი  $\lambda_j^{(1)}$  მაჩვენებლები იაკობის  $J = f'(x_0)$  მატრიცის საკუთრივ  $\mu_j$  მნიშვნელობებთან დაკავშირებულია  $\lambda_j = \operatorname{Re} \mu_j$  თანაფარდობით, ხოლო  $T$  პერიოდიანი პერიოდული  $p(t)$  ამონახსნის შემთხვევაში ლიაპუნოვის  $\lambda_j^{(1)}$  მაჩვენებლები გამოისახება მისი  $\mu_j$  მულტიპლიკატორების საშუალებით

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{1}{T} \ln |\mu_j|. \quad (8.18)$$

ცხადია, კომპიუტერის გარეშე ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოთვლა შეუძლებელია.

## 8.1.7 ფრაქტალური განზომილება

არაპერიოდული მოძრაობების ასაწერად, რომელიც თავისი სირთულით შემთხვევით მოძრაობებს ჰგავს, გამოყენებული იყო ტერმინები „ქაოსური“ და „უცნაური ატრაქტორები“. როდესაც ატრაქტორს ქაოსურს ვუწოდებთ, ჩვენ ვგულისხმობთ ინფორმაციის კარგვას ან პროგნოზირების უუნარობას. ვუწოდებთ რა ატრაქტორს უცნაურს, უპირველეს ყოვლისა, გვინდა ხაზი გაუვსვათ არანეგულბრივობას გეომეტრიული სტრუქტურებისა, რომელზედაც ფაზურ სივრცეში ტრაექტორიები გადის.

დინამიკური რეჟიმი ფურიეს ანალიზის საშუალებით შეიძლება დავახასიათოთ. მაგრამ ფურიეს ანალიზი დეტერმინირებულ ქაოსსა და თეთრ ხმაურს ერთმანეთისაგან ვერ ასხვავებს. თეთრი ხმაურის ქვეშ, დეტერმინირებული ქაოსისგან განსხვავებით, ჩვენ გვესმის ქაოსური რეჟიმი, რომლის საფუძველია ძალიან დიდი დამოუკიდებელი მოდელების ან თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. ამ შემთხვევაში ფაზური ტრაექტორიების გამოსაკვლევად იყენებენ პუანკარეს ასახვის მეთოდს, რომლის საშუალებითაც მხოლოდ თვისებრივი ინფორმაცია მიიღება. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკაში პუანკარეს ასახვის გამოყენება შეზღუდულია სამგანზომილებიანი ფაზური სივრცით.

რაოდენობრივად ქაოსური რეჟიმი შეიძლება შეფასდეს, თუ განისაზღვრება ლიაპუნოვის მაქსიმალური მაჩვენებელი. უცნაური ატრაქტორები თავისი სტრუქტურით ახლოსაა კანტორის სიმრავლესთან. მოსალოდნელია, რომ უცნაური ატრაქტორის განზომილება იქნება წილადური. ამგვარად, განზომილების მნიშვნელობა შეიძლება კრიტიკულად გამოვიყენოთ, რათა მარტივი ატრაქტორები უცნაური ატრაქტორებისაგან განვასხვაოთ [87, 121, 149, 227].

დ. რიუელმა და ტაკენსმა თავიანთ ფუნდამენტურ ნაშრომში ტერმინი „უცნაური ატრაქტორი“ იმის ხაზის გასასმელად შემოიტანეს, რომ ისინი არ არიან გლუვი მრავალსახეობები.

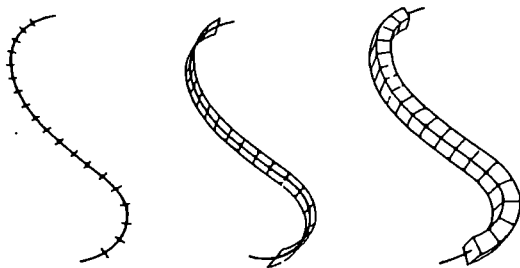
ფრაქტალური განზომილება მნიშვნელოვანი საკითხია დინამიკური სისტემების ამა თუ იმ ატრაქტორის განსაზღვრისათვის.

ბ. მანდელბროტმა მოგვცა ფრაქტალის შემდეგი განსაზღვრება [132]: ფრაქტალი ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის განზომილება მკაცრად მეტია მის ტოპოლოგიურ განზომილებაზე. აღნიშნული განსაზღვრება თავისთავად ითხოვს ტერმინების - ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის  $D$  განზომილებისა და ტოპოლოგიური  $D_T$  განზომილების განსაზღვრას, რომელიც ყოველთვის მთელი რიცხვია.

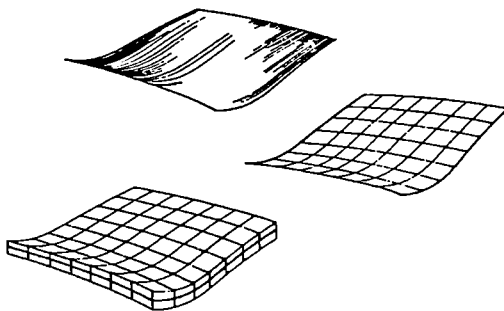
შემდგომში ბ. მანდელბორტმა შეცვალა ფრაქტალის განსაზღვრება და იგი შემდეგნაირად ჩამოაყალიბა: ფრაქტალი ეწოდება სტრუქტურას, შედგენილს ნაწილებისაგან, რომლებიც გარკვეული აზრით მთელის მსგავსია. დღეისათვის ფრაქტალის მკაცრი და სრული განსაზღვრება არ არსებობს.

ცენტრალური ადგილი ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის განზომილების განსაზღვრებაში და, მამასადამე, ფრაქტალური  $D$  განზომილების განსაზღვრებაში უკავია სივრცეში წერტილებს შორის მანძილის ცნებას. სივრცეში როგორ გავზომოთ წერტილთა  $\xi$

სიმრავლის "სიდიდე"? წირის სიგრძის, ზედაპირის ფართის ან სხეულის მოცულობის გაზომვის უმარტივესი მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ სივრცე უნდა დაიყოს  $\delta$  წიბოიან მცირე კუბებად, როგორც ეს მოცემულია ნახ. 8.12-ზე. კუბების ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ  $\delta$  დიამეტრის მცირე სფეროებიც. თუ სფეროს ცენტრს მოვათავსებთ  $\delta$  სიმრავლის რომელიღაც წერტილში, მაშინ ყველა წერტილი, რომელიც ცენტრიდან  $r < (\frac{1}{2}\delta)$  მანძილზე მდებარეობს, ამ სფეროთი იქნება დაფარული. თუ დავითვლით სფეროების რიცხვს, რომელიც საჭიროა სიმრავლის დასაფარავად, მაშინ მივიღებთ სიმრავლის ზომის სიდიდეს. წირი შეიძლება გაიზომოს, თუ განვსაზღვრავთ  $\delta$  სიგრძის წრფივი მონაკვეთების  $N(\delta)$  რაოდენობას, რომელიც აუცილებელია მის დასაფარავად.



ნახ. 8.12



ნახ. 8.13



ცხადია, ჩვეულებრივი წირისათვის  $N(\delta) = L_0 / \delta$ . წირის სიგრძე განისაზღვრება ზღვრული გადასვლით

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0.$$

ზღვარში, როცა  $\delta \rightarrow 0$ ,  $L$  ზომა ასიმპტოტურად წირის სიგრძის ტოლი გახდება და იგი  $\delta$ -ზე არ იქნება დამოკიდებული.

წერტილების სიმრავლეს შეიძლება შევესაბამოთ ფართიც. მაგალითად, წირის ფართი შეიძლება განისაზღვროს, თუ მივეუთითებთ წრეების ან კვადრატების რიცხვს, რომელიც საჭიროა მის დასაფარავად. თუ  $N(\delta)$  კვადრატების რიცხვია, ხოლო  $\delta^2$  - თითოეული მათგანის ფართი, მაშინ წირის ფართი ტოლი იქნება

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1. \quad (8.19)$$

ანალოგიურად, წირის  $V$  მოცულობა განისაზღვრება ფორმულით

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2. \quad (8.20)$$

რასაკვირველია, ჩვეულებრივი წირებისათვის როგორც  $A$  ფართი, ისე  $V$  მოცულობა, როცა  $\delta \rightarrow 0$ , ნულის ტოლია.

განვიხილოთ სიმრავლე წერტილებისა, რომლებიც ზედაპირს წარმოქმნის (ნახ. 8.13). ასეთი სიმრავლეების ნორმალურ ზომად გვევლინება  $A$  ფართი და ამიტომ გვექნება:

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^0. \quad (8.21)$$

ჩვეულებრივი ზედაპირისათვის კვადრატების რიცხვი, რომელიც აუცილებელია მის დასაფარავად, განისაზღვრება გამოსახულებით, რომელიც ზღვარში, როცა  $\delta \rightarrow 0$ , ტოლია

$$N(\delta) = A_0 / \delta^2,$$

სადაც  $A_0$  ზედაპირის ფართია.

ზედაპირს შეიძლება შევესაბამოთ მოცულობა, თუ განვიხილავთ იმ კუბების მოცულობების ჯამს, რომელიც აუცილებელია ზედაპირის დასაფარავად:

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^1. \quad (8.22)$$

როცა  $\delta \rightarrow 0$ , მაშინ ეს მოცულობა, როგორც მოსალოდნელია, გახდება ნულის ტოლი.

შეიძლება თუ არა ზედაპირს შევესაბამოთ რომელიმე სიგრძე? ფორმალურად ასეთ სიგრძედ შეგვიძლია ავიღოთ სიდიდე

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^{-1}, \quad (8.23)$$

რომელიც, როცა  $\delta \rightarrow 0$ , განზღავდა, ამ შედეგს გარკვეული აზრი გააჩნია, ვინაიდან ზედაპირი შეუძლებელია დაიფაროს სასრული რაოდენობის წრფივი მონაკვეთებით. აღნიშნულიდან გამომდინარე, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ერთადერთ შინაარსობრივ ზომას იმ წერტილტა სიმრავლისა, რომელიც სამგანზომილებიან სივრცეში ქმნის ზედაპირს, ფართი წარმოადგენს.

ძნელი არ არის იმის დანახვა, რომ სიმრავლე წერტილებისა, რომლებიც ქმნის წირებს, შეიძლება ისე ძლიერად იყოს დაკლავილი, რომ მათი სიგრძე უსასრულო გახდეს. მართლაც, არსებობს წირები (ჰენანოს წირები), რომლებიც სიბრტყეს ავსებს.

ზემოთ ესაზღვრავდით რა წერტილტა  $\delta$  სიმრავლის ზომას, ჩვენ ვირჩევდით რა-ღაც სასინჯ  $h(\delta) = \gamma(d)\delta^d$  ფუნქციას - წრფის მონაკვეთს, კვადრატს, წრეს, სფეროს ან კუბს - და ვფარავდით სიმრავლეს. ამგვარად გამოითვლებოდა ზომა  $M_d = \sum h(\delta)$ . ამასთან, წრფივი მონაკვეთების, კვადრატებისა და კუბებისთვის გეომეტრიული კოეფიციენტი აიღება  $\gamma(d) = 1$ , წრეებისათვის -  $\gamma = \pi/4$ , ხოლო სფეროებისათვის -  $\gamma = \pi/6$ . შეიძლება დავასკვნათ, რომ, ზოგად შემთხვევაში, ზომის  $d$ -განზომილების ამორჩევის მიხედვით  $M_d$ , როცა  $\delta \rightarrow 0$ , ნულის ან უსასრულობის ტოლია.  $\delta$  სიმრავლის ჰუსდორფ-ბეზიკოვიჩის  $D$  განზომილება კრიტიკული განზომილებაა, რომლის დროსაც  $M_d$  ზომა თავის მნიშვნელობას ნულიდან უსასრულობამდე იცვლის:

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \text{როცა } d > D; \\ \infty, & \text{როცა } d < D. \end{cases} \quad (8.24)$$

$M_d$ -ს უწოდებენ სიმრავლის  $d$ -ზომას.  $M_d$ -ს მნიშვნელობა, როცა  $d = D$ , ხშირად სასრული რიცხვია, მაგრამ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი ან უსასრულოც. არსებითია იმის განსაზღვრა, თუ  $d$ -ს რომელი მნიშვნელობის დროს იცვლება  $M_d$  ნახტომისებურად. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ჰუსდორფ-ბეზიკოვიჩის ზემოთ მოცემული განსაზღვრება არის ლოკალური იმ აზრით, რომ ეს განზომილება ახასიათებს წერტილების სიმრავლეს ზღვარში სასინჯი ფუნქციის  $\delta$  სიდიდის უსასრულო შემცირების შემთხვევაში. მაშასადამე, ფრაქტალური  $D$  განზომილება შეიძლება იყოს სიმრავლის ლოკალური მახასიათებელიც. შევნიშნავთ, რომ დაფარვის ელემენტები შეიძლება იყოს სხვადასხვა ზომის.

არსებობს კაპლანის და იორკეს მიერ შემოთავაზებული ჰიპოთეზა, რომლის მიხედვით ფრაქტალური განზომილება დაკავშირებულია ლიაპუნოვის  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , მაჩვენებლებთან. აღნიშნული ჰიპოთეზა უშვებს, რომ ფრაქტალური განზომილება  $d_F$  ლიაპუნოვის  $d_L$  განზომილებას თანხვდება და განისაზღვრება როგორც

$$d_L = j + \sum_{i=1}^d \lambda_i / \lambda_{i+1}, \quad (8.25)$$

სადაც  $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$ , მაჩვენებლები დალაგებულია არაზრდადობის მიხედვით:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  ( $n$  ფაზური სივრცის განზომილება), ხოლო  $j$  რიცხვი განისაზღვრება შემდეგი პირობიდან:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{j+1} < 0. \quad (8.26)$$

სამგანზომილებიანი დინამიკური სისტემებისათვის (ე.ი. სისტემებისათვის, რომლის ფაზური სივრცის განზომილებაა  $n=3$ ), იმ დაშვებით, რომ მოძრაობა უცნაურ ატრაქტორზე ხორციელდება,  $d_L$ -ის ფორმულა დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$d_L = 2 + \lambda_1 / \lambda_3. \quad (8.27)$$

ვინაიდან ასეთი სისტემებისათვის ადგილი აქვს პირობას  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , ამიტომ გვექნება  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ .

ქაოსური რეჟიმის შესასწავლად საინტერესო მახასიათებელს წარმოადგენს, აგრეთვე, ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება. იმისათვის, რომ პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად გამოვიყენოთ კომპლექსური დინამიკური სისტემების კვლევის ახალი მიღწევები, საჭიროა განვიხილოთ ზოგიერთი მარტივი ფრაქტალური წირები და სიმრავლეები, როგორცაა, კოხის წირი, კანტორის სიმრავლე და სერპინსკის ხალიჩა [34, 87, 93, 149, 227].

## 8.1.8 კოხის სიმრავლე

ნახ. 8.14-ზე წარმოდგენილია ტრიადული კოხის წირის აგების პროცესი. აღნიშნული წირი იმის ერთ-ერთი სტანდარტული მაგალითია, რომელიც გვიჩვენებს, რომ ფრაქტალური განზომილება  $D > 1$  [34, 87, 93].

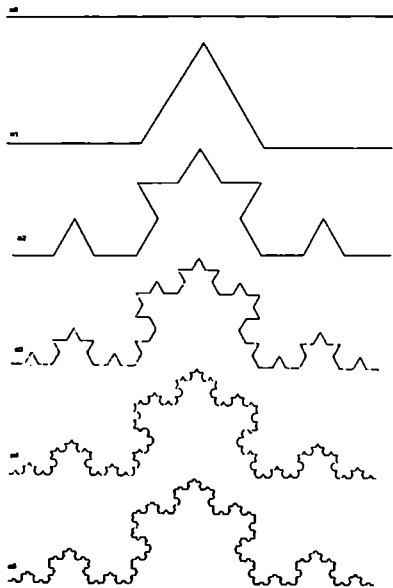
კოხის წირის აგება იწყება ერთეულოვანი სიგრძის  $L(1)=1$  წრფივი მონაკვეთით. ამ საწყისს ელემენტს ეწოდება საფალიე. იგი შეიძლება შეიცვალოს რომელიმე მრავალკუთხედით, მაგალითად, ტოლგვერდა სამკუთხედით, კვადრატით და ა.შ. საფალიე ნულოვანი თაობის კოხის წირია.

ვაგრძელებთ კოხის წირის აგებას. საფალიეს თითოეული რგოლი უნდა შეცვალოთ წარმომქმნელი ელემენტით, რომელიც ნახ. 8.14-ზე აღნიშნულია  $n=1$ -ით. ასეთი შეცვლის შედეგად მიიღება წირის პირველი თაობა, რომელიც ოთხი წრფივი რგოლისაგან შედგება. თითოეული რგოლის სიგრძეა  $1/3$ . პირველი თაობის წირის საერთო სიგრძეა  $L(1/3)=4/3$ . შემდეგი თაობა მიიღება თითოეული წრფივი რგოლის წარმომქმნელი ელემენტის შემცირებით, რომლის საფუძველზე მიღებული მეორე თაობის წირი შედგება  $N=4^2=16$  რგოლისაგან თითოეული  $\delta=3^{-2}=1/9$  სიგრძით. მეორე თაობის წირის საერთო სიგრძე ტოლია  $L(1/9)=(4/3)^2=16/9$  და

ა.შ.  $n$  თაობის წირს, ნებისმიერი  $n$ -ის სასრული მნიშვნელობის შემთხვევაში, უწოდებენ წინა ფრაქტალს.  $n$ -ური თაობის წინაფრაქტალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L(\delta) = (4/3)^n,$$

სადაც თითოეული რგოლის სიგრძეა  $\delta = 3^{-n}$ .



ნახ. 8.14

თუ თაობათა  $n$  რიცხვს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით  $n = -\ln \delta / \ln 3$ , მაშინ წინაფრაქტალის სიგრძე შეიძლება გამოისახოს ფორმულით

$$L(\delta) = (4/3)^n = \exp\left(-\frac{\ln \delta [\ln 4 - \ln 3]}{\ln 3}\right) = \delta^{1-D},$$

სადაც  $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,2628$ .

სეგმენტების რიცხვი ტოლია  $N(\delta) = 4^n = 4^{-\ln \delta / \ln 3}$  და ამიტომ შეიძლება ჩაიწეროს  $N(\delta) = \delta^{-D}$ , სადაც  $D$  კოხის ტრიადული წირის ფრაქტალური განზომილებაა.

შეენიშნავთ, რომ კოხის წირის აგება საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერ თაობისათვის მივიღოთ სასრული სიგრძის ნორმალური წირი.

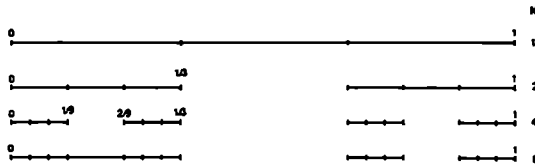
### 8.1.9 კანტორის სიმრავლე და სერპინსკის ხალი

#### კანტორის სიმრავლე

განვიხილოთ ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთი  $[0,1]$  (ნახ. 8.15). დავეყოთ იგი სამ ტოლ ნაწილად და ამოვჭრათ მისი შუა ნაწილი  $-\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  ინტერვალი. ანალოგიურად მოვიქცეთ ყველა დარჩენილი მონაკვეთისათვის. მაშინ მივიღებთ სიგრძით კლებადი მონაკვეთების ერთობლიობას. აგების პირველ ეტაპზე გვექნება ერთი მონაკვეთი, მეორეზე - ორი, მესამეზე - ოთხი;  $K$  ეტაპზე გვექნება  $2^K$  ერთმანეთთან დაუკავშირებელი მონაკვეთი, თითოეული სიგრძით  $3^{-K}$ . როცა  $k \rightarrow \infty$ , მაშინ მივიღებთ წერტილების სიმრავლეს, რომელსაც კანტორის სიმრავლეს უწოდებენ (ნახ. 8.15) [132]. ყველა ამოჭრილი მონაკვეთების ჯამური სიგრძე ტოლია ერთის:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

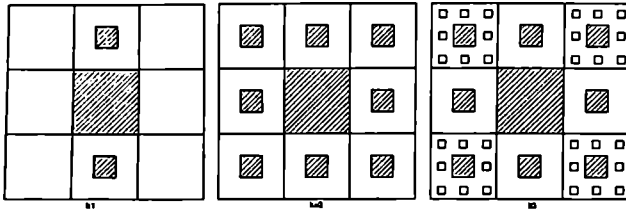
საჭიროა შეენიშნოთ, რომ კანტორის სიმრავლის აგების დროს არ არის აუცილებელი მონაკვეთის სამ ნაწილად დაყოფა და თანაც ტოლ ნაწილებად. კანტორის სიმრავლის მიღება შესაძლებელია მონაკვეთის ნებისმიერ ნაწილებად დაყოფის შემთხვევაში ( $i \geq 3$ ).



ნახ. 8.15

### სერპინსკის ხალიჩა

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. იგი კანტორის სიმრავლის უშუალო განზოგადებაა ბრტყელი ფიგურების შემთხვევაში და ცნობილია როგორც “სერპინსკის ხალიჩა”. ავიღოთ ერთეულოვანი კვადრატის და იგი წრფეებით, რომლებიც გვერდების პარალელურია, 9 ტოლ კვადრატად დავყოთ.



ნახ. 8.16

პირველ იტერაციაზე ( $k=1$ ) ცენტრალური კვადრატის ყველა შიგა წერტილი გამოერიცხოთ. მეორე იტერაციაზე ( $k=2$ ) ანალოგიურად მოვექცეთ ყველა დარჩენილ 8 კვადრატს და ა.შ. (ნახ. 8.16).

$k \rightarrow \infty$  შემთხვევაში მიღებულ სიმრავლეს უწოდებენ სერპინსკის ხალიჩას. იგი, უხეშად რომ ვთქვათ, “დახვეტილ” კანტორის სიმრავლეს წარმოადგენს. აღმოჩნდა, რომ დინამიკური სისტემებისათვის უცნაურ ატრაქტორებს და წერტილოვან ასახვებს ყველგან აქვს კანტორის სიმრავლის სტრუქტურა. ისინი გეომეტრიული თვალსაზრისით განსხვავდებიან მარტივი ატრაქტორებისაგან, რომლებიც გლუვი ქვემრავალსახეობებია.

კანტორის სიმრავლის მნიშვნელოვანი რაოდენობრივი მახასიათებელია წილადური განზომილება, რომელიც მიუთითებს ამ სიმრავლის სიახლოვეს შესაბამის გლუვ ქვემრავალსახეობასთან. არსებობს წილადური განზომილების რამდენიმე განმარტება, რომლებიც სიმრავლეების მეტრიკულ თვისებებს ემყარება. უცნაური ატრაქტორებისათვის იყენებენ ალბათურ განზომილებას, რომლის გამოთვლაც სიხშირეზეა დამოკიდებული. გავრცელებულია, აგრეთვე, მეტრიკული განზომილება - სიმრავლის ტეჟადობა, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

განვიხილოთ დინამიკური სისტემის  $n$ -განზომილებიან ფაზურ სივრცეში რომელიღაც  $A$  სიმრავლე. დაეფაროს იგი  $n$ -განზომილებიანი კუბებით, რომელთა გვერდებია  $\varepsilon$ , ისე, რომ კუბები შეიცავდეს  $A$  სიმრავლის ყველა წერტილს. ვთქვათ,  $N$  კუბების მინიმალური რაოდენობაა  $A$  სიმრავლის დასაფარავად. განვიხილოთ შემდეგი ზღვარი [132]:

$$d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)]. \quad (8.28)$$

$d(A) \equiv d_F$  სიდიდე მეტრიკულ განზომილებას წარმოადგენს და მას ტევეადობას ან ფრაქტალურ განზომილებას უწოდებენ. ლიტერატურაში იგი ცნობილია, აგრეთვე, როგორც ჰაუსდორფის განზომილება (ან ენტროპიული განზომილება).

რეგულარული სიმრავლეებისათვის (მაგალითად, ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის “ნაწილისათვის“, ზედაპირისათვის ან წირისათვის)  $d_F$  ფრაქტალური განზომილება მთელია რიცხვია და ჩვეულებრივ განზომილებას ემთხვევა. მართლაც, მცირე  $\varepsilon$ -სთვის მივიღებთ  $\varepsilon$ -გვერდიანი კუბების რიცხვს

$$N \sim k\varepsilon^{-d}, \quad (8.29)$$

რომელიც აუცილებელია რაღაც მოცულობის დასაფარავად. სამგანზომილებიან სივრცეში იგი პროპორციულია  $1/\varepsilon^3$ . ზედაპირის დაფარვისათვის კუბების რიცხვი ტოლია  $N \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$ , ხოლო წრფისათვის -  $N \sim \frac{1}{\varepsilon}$ . მაშასადამე, თუ გვაქვს მარტივი ატრაქტორი, მაგალითად, ზღერული ციკლი, მაშინ მისი ფრაქტალური განზომილება ტოლია ერთის; ინვარიანტული ტორისათვის  $d_F = 2$  და ა.შ.

არარეგულარული სიმრავლეებისათვის, რომლებსაც მასშტაბურ-ინვარიანტული სტრუქტურა გააჩნია, ფრაქტალურ განზომილებას აქვს წილადური სახე. დაწერილებით შევჩერდეთ ამ საკითხზე.

განვიხილოთ სერპინსკის ხალიჩა. გვაქვს

$$k = 1, \quad N = 8 = 8^1, \quad \varepsilon = \frac{1}{3^1},$$

$$k = 2, \quad N = 8 \cdot 8 = 8^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{3^2},$$

$$k = 3, \quad N = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3, \quad \varepsilon = \frac{1}{3^3},$$

.....

$$k = m, \quad N = 8^m, \quad \varepsilon = \frac{1}{3^m}.$$

საიდანაც

$$d_F = \lim_{m \rightarrow 0} (\ln 8^m / \ln 3^m) = \ln 8 / \ln 3 = 1.893.$$

ამგვარად, სერპინსკის ხალიჩა არ არის წრფე, რომლის განზომილება ერთის ტოლია, მაგრამ არ არის ზედაპირი, რომლის განზომილება ორის ტოლია. იგი რაღაც

შუალედურია წრფესა და სიბრტყეს შორის. საკვირველია ის, რომ ბუნებაში მართლაც არსებობს ობიექტები, რომლებიც სერპინსკის ხალიჩის ანალოგიურია იმ აზრით, რომ მათი  $d_f$  განზომილება ერთზე მეტი და ორზე ნაკლებია.

## 8.1.10 მსგავსება და სკეილინგი

წრფე სივრცის განსაკუთრებული სიმრავლეა: მასშტაბის ნებისმიერი ცვლილების დროს წერტილების იგივე სიმრავლე მიიღება. გარდა ამისა, წრფის პარალელური გადატანის შემთხვევაში, კვლავ წერტილების იგივე სიმრავლე მიიღება. წრფე ინვარიანტულია პარალელური გადატანებისა და მასშტაბის ცვლილების ანუ სკეილინგის მიმართ. შეიძლება ითქვას, რომ წრფე თვითმსგავსია.

დავაზუსტოთ ჩვენი მსჯელობა.

ეთქვათ, მოცემულია სივრცის წერტილები თავისი კოორდინატებით  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . წრფე, რომელიც  $x_0$  წერტილზე  $a = (a_1, a_2, a_3)$  მიმართულებით გაივლის, წერტილების  $\rho$  სიმრავლეა და იგი განსაზღვრულია შემდეგი თანაფარდობით:

$$x = x_0 + ta, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (8.30)$$

სადაც  $t$  პარამეტრი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. თუ ყველა  $x$ -სთვის სივრცის მასშტაბს ერთი და იგივე  $r$  რიცხვზე გავამრავლებთ, მაშინ  $x$  აისახება ახალ წერტილებში:  $x' = rx = (rx_1, rx_2, rx_3)$  და მივიღებთ წერტილების ახალ  $r(\rho)$  სიმრავლეს, რომელიც განსაზღვრული იქნება თანაფარდობით

$$x' = r(x_0 + ta) = x_0 + t'a - (1-r)x_0, \quad (8.31)$$

სადაც  $t' = rt$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. თუ  $r(\rho)$  წერტილების სიმრავლეს პარალელურად გადავიტანთ  $(1-r)x_0$  სიდიდით, მაშინ მივიღებთ საწყისი წერტილების  $\rho$  სიმრავლეს. ამგვარად, წრფე ინვარიანტულია სივრცის მასშტაბის ცვლილების მიმართ. წრფე ინვარიანტულია, აგრეთვე, პარალელური გადატანების მიმართ  $x \rightarrow x + a \cdot n$ , სადაც  $n$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყე ინვარიანტულია ნებისმიერი მიმართულებით პარალელური გადატანებისა და ინვარიანტულია სივრცის მასშტაბის ცვლილების მიმართ. ასევე შეგვიძლია დავამტკიცოთ სივრცის ინვარიანტულობა აღნიშნული პარამეტრების მიმართ.

არსებობს ისეთი მათემატიკური ობიექტები, რომლებისთვის ზემოთ აღნიშნული მსჯელობა არასწორია. წრეწირი არ არის ინვარიანტული პარალელური გადატანებისა და სკეილინგის მიმართ, იგი ინვარიანტულია საკუთარი ცენტრის გარშემო მობრუნებისა. ფრაქტალებსაც, აგრეთვე, არ ახასიათებს ზემოთ ჩამოთვლილი ყველა ან ზოგიერთი ინვარიანტულობა.



განვიხილოთ შეზღუდული სიმრავლეები, როგორცაა, მაგალითად, წრფის სასრული მონაკვეთი. წრფის მონაკვეთს არ ახასიათებს ტრანსლაციური სიმეტრია - ნებისმიერი მისი ძეგრა წარმოქმნის წერტილთა ახალ სიმრავლეს. მაგრამ, თუ სიგრძეს შევცვლით  $r$ -ჯერ,  $r < 1$ , მაშინ მივიღებთ წერტილთა ახალ სიმრავლეს  $\varphi' = r(\varphi)$ , რომელიც წრფის რაღაც ნაწილს შეადგენს. თუ წრფის ამ მონაკვეთით პარალელურ გადატანას განვახორციელებთ, მაშინ საწყისი წრფივი  $\varphi$  მონაკვეთის ნაწილი შეიძლება დაიფაროს.  $r$  რიცხვის სათანადო შერჩევით შესაძლებელია საწყისი მონაკვეთის დაფარვა  $N$  რაოდენობის გადაუკვეთავი მონაკვეთებით. შეიძლება ითქვას, რომ  $\varphi$  თვითმსგავსია მსგავსების  $r$  კოეფიციენტით.

წრფის ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთისათვის შეიძლება შევარჩიოთ  $r(N) = \frac{1}{N}$ , სადაც  $N$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. სიბრტყის მართკუთხოვანი უბანი შეიძლება დაფაროთ მისი შემცირებული ასლებით, თუ მათი სიგრძე შეიცვლება  $r(N) = (1/N)^{1/2}$ -ჯერ. ანალოგიურად, მართკუთხა პარალელებიანი შეიძლება დაფაროთ მისი შემცირებული ასლებით, თუ შევარჩევთ  $r(N) = (1/N)^{1/2}$ . ზოგად შემთხვევაში, საჭიროა მასშტაბის კოეფიციენტი შევარჩიოთ ტოლი  $r(N) = (1/N)^{1/d}$ .

მსგავსების  $d$  განზომილება წრფეების, სიბრტყისა და კუბებისათვის შესაბამისად ტოლია 1, 2 და 3.

განვიხილოთ ახლა კოხის წირი, რომელიც წარმოდგენილია ნახ. 8.14-ზე. მასშტაბის  $r = 1/3$  კოეფიციენტით მივიღებთ წირის პირველ მესამედს. ჩვენთვის აუცილებელია  $N = 4$  ასეთი ფრაგმენტი, რათა საწყისი სიმრავლე დაფაროთ შემცირებული ასლებით, მოვახდინოთ რა მათზე განმეორებით პარალელურ გადატანებს და მობრუნებებს.

ზოგად შემთხვევაში, მსგავსების  $D_S$  განზომილება გამოითვლება შემდეგი ფორმულით [132]:

$$D_S = -\ln N / \ln r(N). \quad (8.32)$$

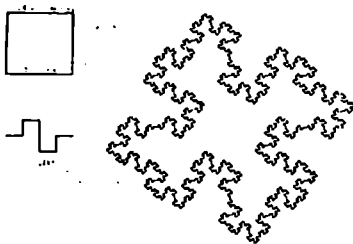
თვითმსგავსი ფრაქტალებისთვის ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის  $D$  განზომილება ტოლია  $D_S$ . ამიტომ ასეთი ფრაქტალებისთვის მსგავსების განზომილება შეიძლება  $S$  ინდექსის გარეშე ჩავწეროთ.

განვიხილოთ კოხის წინაფრაქტალი, აგებული საფალიედ აღებული ერთეულოვანი კვადრატით (ნახ. 8.17). მისი წარმოქმნელი შედეგაა  $N = 8$  ტეხილისაგან მასშტაბის  $r = \frac{1}{4}$  კოეფიციენტით. აღნიშნული წირის მსგავსების განზომილებაა

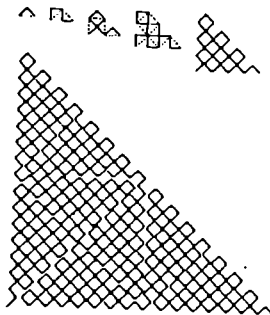
$$D = -\frac{\ln 8}{\ln(1/4)} = \frac{3}{2},$$

რომელიც ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის სიმრავლის განზომილების ტოლია და იგი უსასრულოდ დიდი რაოდენობის იტერაციების შედეგად არის მიღებული.

ნახ. 8.18-ზე გამოსახულია კოხის წირი, რომელიც აგებულია სამკუთხა ბადით. მისი განზომილებაა  $D = 1.944$ . რამდენიმე პირველი თაობა ცალკეა გამოსახული და თანაც გადიდებულია, რათა თვალყური მივადევნოთ წირის სტრუქტურას.



ნახ. 8.17



ნახ. 8.18

## 8.1.11 ფრაქტალური განზომილების განსაზღვრა

კომპლექსურცვლადიან სისტემებში დინამიკურ მოვლენებთან დაკავშირებით დავსვით შეკითხვა: რამდენად პრაქტიკულია არაწრფივ დინამიკაში ფრაქტალური განზომილების გამოყენება? უმეტეს შემთხვევაში, საკმარისია დავადგინოთ, რომ განზომილება არამთელი რიცხვია და ატრაქტორი მართლაც უცნაურია. მაგრამ ზოგიერთი ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება ახლოსაა მთელ რიცხვთან (მაგალითად, ლორენცის ატრაქტორისათვის  $d = 2.06$ ), ამიტომ ფრაქტალური განზომილება ჯერ კიდევ არ ნიშნავს მოძრაობის ქაოსურ ხასიათს. ხშირად, ექსპერიმენტის ზუსტად ჩატარებისათვის, იყენებენ არამარტო ფრაქტალურ განზომილებას, არამედ ჰუნკარეს ასახვას, ფურიეს სექტრს და ლიაპუნოვის მაჩვენებელსაც. ეს საშუალებას გვაძლევს სისტემაში ქაოსური მოძრაობის არსებობა დავადგინოთ.

ფრაქტალური განზომილების გამოთვლა საკმაოდ რთული ამოცანაა. ყველაზე თბიქტური მახასიათებელია ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის განზომილება, რადგან იგი ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნების მიმართ. მთელი რიგი ატორების მიერ შემუშავებულია ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის განზომილების განსაზღვრის რამდენიმე მეთოდი, მაგრამ ერთი და იგივე სისტემისათვის სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობა მიიღება. ამიტომ აუცილებელია იგი ისე განვსაზღვროთ, რომ გაბნევას ადგილი არ ჰქონდეს.

ვთქვათ, არსებობს  $N$  წერტილი, რომელიც მოთავსებულია უცნაურ ატრაქტორზე.  $i$ -ური წერტილიდან მეზობელ წერტილამდე მანძილი აღვნიშნოთ  $\delta$  სიბზოლოთი და შემოვიტანოთ გასაშუალების წესი. მახლობელ წერტილამდე საშუალო მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე

$$\delta(\gamma, N) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \gamma \right]^{1/N}, \quad (8.33)$$

სადაც  $\gamma$  გასაშუალების მაჩვენებელია.

$N$ -ის დიდი მნიშვნელობისათვის  $\delta(\gamma, N)$ -ს გააჩნია ასიმპტოტიკური წარმოდგენა

$$\delta(\gamma, N) \sim N^{-\frac{1}{D_s(\gamma)}}. \quad (8.34)$$

აღნიშნული დამოკიდებულების გამოთვლა დაკავშირებულია გარკვეულ სიძნელებთან, რომელთაგან ძირითადია შემდეგი:

1. ხშირად ადგილი აქვს მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახიდან  $\delta(\gamma, N)$ -ის გადახრას;
2.  $\delta(\gamma, N)$ -ის დიდი სიზუსტით გამოთვლისათვის საჭიროა  $N$  წერტილების საკმაოდ დიდი რაოდენობით გამოყენება. ამასთან, აუცილებელია მათ შორის მანძილების გამოთვლა (დაახლოებით  $N^2$ -ის რიგის), რაც დაკავშირებულია კომპიუტერული დროის მნიშვნელოვან დანახარჯებთან.

აღნიშნულის თავიდან ასაცილებლად ზოგიერთი ავტორის მიერ შემოთავაზებულია შემდეგი გამოსახულება [34, 93, 132, 149]:

$$D_B(\gamma) = - \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d[\ln \delta(\gamma, N)]}{d(\ln N)} \right]^{-1}, \quad \delta(\gamma, N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (8.35)$$

რომელშიც  $\delta(\gamma, N)$  გამოითვლება შემდეგი ფორმულების საფუძველზე

$$\delta(\gamma, N) = \left\{ \gamma \int_0^{\delta_{\max}} [1 - F(\delta)]^{N-1} \delta^{r-1} d\delta \right\}^{1/r},$$

$$F(r) = \iint_{\delta} F'_x(x') F'_y(x'') dx' dx'', \quad (8.36)$$

სადაც  $F(r)$  წარმოადგენს იმის ალბათობას, რომ შემთხვევით შერჩეული წერტილი  $r$ -რადიუსიანი სფეროს შიგნით არის მოთავსებული, ხოლო  $F'_x = \frac{dF}{dr_x}$ ,  $F'_y = \frac{dF}{dr_y}$

ალბათობის განაწილების სიმკვრივეებია.

აღნიშნული ფორმულები საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ  $D_B(\gamma)$  ფუნქცია და  $D_H$  მნიშვნელობა  $F(r)$ -ის გათვალისწინებით:

$$D_H = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[\inf N(\epsilon)]}{\ln \epsilon},$$

როცა  $\gamma = D_r$ ,  $D_B(D_H) = D_H$ ,  $D_B(\gamma_0) = \gamma_0$ .

განხილული ალგორითმის ძირითადი უპირატესობა შემდეგში მდგომარეობს:

1. იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს წერტილების გენერირებას და ისინი უცნაურ ატრაქტორზე მდებარეობენ, მაშინ  $D_B(\gamma)$  ფუნქციის განსაზღვრისათვის გამოიყენება კონკრეტული წერტილებისათვის  $F(r)$ -ის წინასწარ გამოთვლილი მნიშვნელობა, რაც  $D_H$ -ის ფლუქტუაციას გამორიცხავს.
2. შემოთავაზებული ალგორითმი  $F(r)$ -ის ლოკალურ თვისებებს იყენებს, ვინაიდან (8.36) გამოსახულებაში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია  $\delta$ , რომელიც ახლოსაა ინტეგრალქვეშა გამოსახულებასთან, მაშინ როცა  $D_r$ -ს გამოთვლისათვის საჭიროა  $r$ -ის ცვლილების შედარებით დიდი ინტერვალი, რაც ატრაქტორების თვითმომუსგავსებლობას განაპირობებს. ამიტომაც ხელსაყრელია ის მეთოდი, სადაც გამოიყენება  $F(r)$ -ის ლოკალური თვისება, როცა  $r \rightarrow 0$ .

## 8.1.12 ჟულიას და მანდელბროტის სიმრავლეები

### ჟულიას სიმრავლე

კომპლექსური რიცხვების გაუსის სიბრტყე აღვნიშნოთ  $C$ -თი, ხოლო რიმანის  $C \cup \{\infty\}$  სფერო -  $\bar{C}$ -თი. ვთქვათ, რომ  $R$  რაციონალური ფუნქციაა, ე.ი.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \bar{C}, \quad (8.37)$$

სადაც  $P$  და  $Q$  პოლინომებია, რომლებსაც საერთო გამყოფი არ გააჩნია. დავუშვათ, რომ  $R$  ფუნქციის ხარისხი  $\deg R = \max\{\deg P, \deg Q\}$  ერთზე მეტია.

ჟულიას  $J_R$  სიმრავლე წარმოადგენს განსაკუთრებული წერტილების სიმრავლეს  $R: R^n(x) = R(\dots(R(R(x))))\dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ფუნქციის იტერაციისათვის.  $J_R$  სიმრავლის დამატებას ეწოდება ფაქტუს  $F_R = \frac{\bar{C}}{J_R}$  სიმრავლე.

ჟულიას სიმრავლის ასეთი განსაზღვრება ინტუიციური აღთქმისათვის მოუხერხებელია. ამიტომ გამოვიყენოთ შემდეგი განსაზღვრება. ვთქვათ, გვაქვს გამოსახულება

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (8.38)$$

სადაც  $c$  რაღაც კომპლექსური მუდმივაა. რიცხვების (8.38) თანამიმდევრობა დამოკიდებულია საწყის  $z_0$  მნიშვნელობაზე და  $c$  პარამეტრზე. თუ  $c$ -ს დავაფიქსირებთ და კომპლექსური რიცხვების ველში ცვლით  $z_0$ -ს, მაშინ მივიღებთ ჟულიას სიმრავლეს, ხოლო თუ დავაფიქსირებთ  $z_0 = 0$ -ს და ცვლით  $c$  პარამეტრს, მაშინ მივიღებთ მანდელბროტის სიმრავლეს [105, 227].

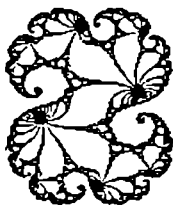
იმ შემთხვევაში, როცა  $z_0$  ნულისგან მნიშვნელოვნად განსხვავებულია, მაშინ  $\{z_n\}$  მიმდევრობა სწრაფად მიისწრაფვის უსასრულობისკენ. მაგრამ არსებობს  $z_0$ -ის ისეთი მნიშვნელობებიც, რომლებისთვისაც  $\{z_n\}$  მიმდევრობა ყოველთვის შემოსაზღვრული რჩება. მოცემული  $c$  პარამეტრის დროს აღნიშნული მნიშვნელობები წარმოქმნის ჟულიას შევსებულ  $K_c$  სიმრავლეს შემდეგი პოლინომისათვის  $f_c: z \mapsto z^2 + c$ . ჟულიას ნამდვილი სიმრავლე  $K_c$  სიმრავლის მხოლოდ სასაზღვრო წერტილებისგან შედგება. რასაკვირველია, შესაძლებელია, რომ  $K_c$ -ს შიგა წერტილები არ გააჩნდეს. ასეთ შემთხვევაში იგი თავის საზღვარს დაემთხვევა (სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჟულიას სიმრავლე ჟულიას შევსებულ სიმრავლეს დაემთხვევა).

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ჟულიას სიმრავლე დამოკიდებულია  $c$  პარამეტრზე.  $c$ -ს ცვლილებისას სობრტყეზე მიიღება ჟულიას სიმრავლის სხვადასხვა განუმეორებელი სურათები, რომლებიც შეიძლება მივამსგავსოთ სქელ ღრუბლებს, მაყვლის ბუჩქებს, ფიერვერკის ნაპერწყლებს და ა.შ. ნახ. 8.25-ზე წარმოდგენილია მანდელბროტის სიმრავლე  $x \rightarrow x^2 + c$  პროცესისათვის. სურათი შესაბამება  $c$  პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებს. ნახ. 8.19 - 8.24-ზე მოცემულია ჟულიას სიმრავლის ტიპური მაგალითები  $x \rightarrow x^2 + c$  პროცესისათვის.

ნახ. 8.19-ზე მოცემულია პარაბოლური შემთხვევა, სადაც  $c$ -ს მცირე ცვლილებისას მდგრადი უძრავი წერტილი გადაიქცევა 20-პერიოდის მიმზიდავ ციკლად.

ნახ. 8.20-ზე ასახულია პარაბოლური შემთხვევა, როცა  $c = -1.25$ ,  $c > -1.25$  (მიმზიდავი ციკლი 2-ის პერიოდით),  $c < -1.25$  (მიმზიდავი ციკლი 4-ის პერიოდის).

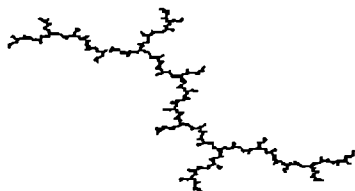
ნახ. 8.21-ზე წარმოდგენილია ჟულიას ბმული სიმრავლე, რომელიც შემდეგში გადაიქცევა კანტორის სიმრავლედ, ნახ. 8.22-ზე - ფატუს სიმრავლე, ნახ. 8.23-ზე - დენტრიტი ( $c = i$ ), ნახ. 8.24-ზე - კანტორის სიმრავლე, რომელიც 8.21 ნახაზიდან მიიღება  $c$  პარამეტრის მცირე ცვლილების დროს.



ნახ. 8.19



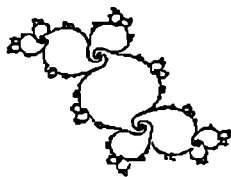
ნახ. 8.20



ნახ. 8.21



ნახ. 8.22



ნახ. 8.23



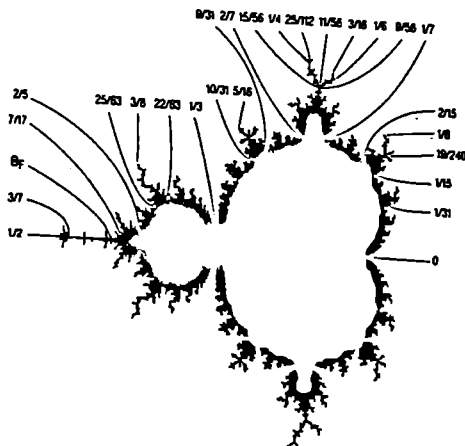
ნახ. 8.24

### მანდელბროტის სიმრავლე

განვიხილოთ სიმრავლე

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \tag{8.39}$$

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, თუ დაეუშვებთ, რომ  $z_0 = 0$ , და ვცვლით  $c$  პარამეტრს, მაშინ მივიღებთ მანდელბროტის  $M$  სიმრავლეს (ნახ. 8.25).



ნახ. 8.25

თუ დაუეკვირდებით მანდელბროტის სიმრავლეს, პირველი, რაც მოგეხვება თვალში, ეს არის არე, რომელიც შემოსაზღვრულია კარდიოიდის წვეროთი 0.25 წერტილში და მომრგვალებული მწვერვალით  $-0.75$  წერტილში. შემდეგ ჩანს კარდიოიდიდან შეხებული წრეწირი 0.25 რადიუსით და ცენტრით  $-1$  წერტილში, ხოლო ბოლოს - უთვალავი სიმრავლე მცირე არეებისა, რომლებიც ფორმით წრეს წარმოადგენს და ასევე ეხება კარდიოიდს [105].

ყოველ კომპონენტს, თავის მხრივ, მიმაგრებული აქვს უთვალავი სიმრავლე მცირე არეებისა, რომლებიც ასევე წრეს ჰგავს, და ყოველ მცირეს ისევ უერთდება კიდევ უფრო მცირე არეების უსასრულო ნაკრები და ა. შ. თუ გამოვალთ დიდი კარდიოიდიდან და ვიმოძრავეთ მარცხნივ, მოვხვებით წრეში, შემდეგ მოვხვდებით სხვა არეში და თუ გაავარძლებთ მოძრაობას, მაშინ მიუახლოვდებით მირბერგ-ფეიგენბაუმის წერტილს, რომელსაც აქვს კოორდინატი  $-1.401\dots$  ამ წერტილიდან  $-2$  წერტილამდე მონაკვეთი ეკუთვნის  $M$ -ს და მას აქვს პატარა, კარდიოიდის მსგავსი არე წვეტიანი წვეროთი წერტილში  $-1.75$ .

აღმოჩნდა, რომ ასეთი "კარდიოიდის" კომპონენტების რაოდენობა უსასრულოდ დიდია. გარდა ამისა, ისინი გვხვდება არა მარტო ნამდვილ ღერძზე. ასე, მაგალითად, ბმანდელბროტმა აღმოაჩინა კარდიოიდი ცენტრით  $-0.1565201668 + i1.032247109$  წერტილში და კიდევ სხვა მრავალი. ფაქტიურად, მან დაამტკიცა, რომ არსებობს კარდიოიდების უსასრულო სიმრავლე. ისინი ისეთი მცირე ზომის არიან, რომ კომპიუტერულ ნახატებზე მათი გარჩევა ძალიან ძნელია, მაგრამ თუ სურათს გავადიდებთ, მაშინ თითოეულ შემთხვევაში აღმოვაჩნთ როგორც კარდიოიდს, ისე მისი თანამგზავრი მრგვალი არეების ერთობლიობას.

კარდიოიდის მსგავსი კომპონენტები "მაფების" საშუალებით დაკავშირებულია მთავარ კარდიოიდიდან, რომელიც საკვსა კარდიოიდის ტიპის მცირე არეებით. ეს "მაფები" იქსაქსება და წარმოიქმნება ძალიან რთული მოხატულობა.

როგორც ცნობილია, ყულას სიმრავლე ყველაზე შესანიშნავი ფრაქტალია. მიკროსკოპში მისი სურათი, ჯერ-ერთი, არაფრით არ განსხვავდება იმ სურათისგან, რომელსაც მიკროსკოპის გარეშე ვხედავთ, და, მეორე მხრივ, არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ სურათის რა ადგილს ვაკვირდებით. ბმანდელბროტის  $M$  სიმრავლეს არ გააჩნია აღნიშნული თვისებები. მართალია,  $M$  შეიცავს თავისი თავის ასლების უსასრულო რაოდენობას, მაგრამ ისინი ჩაქსოვილია "მაფების" ბაღეში და მათი სახე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ წერტილს ვაკვირდებით.

მანდელბროტის სიმრავლის მთავარი ელემენტი, როგორც აღვნიშნეთ, დიდი კარდიოიდი (ნახ. 8.25). მის შიგნით,  $c$ -ს მნიშვნელობისთვის,  $f_c$  პოლინომს აქვს უძრავი მიმზიდავი წერტილი. შემდეგ არის წრე ცენტრით  $(-1)$ -ში; ამ წრის  $c$ -სთვის  $f_c$ -ს აქვს მეორე რიგის მიმზიდავი ციკლი. კიდევ არსებობს 3 კომპონენ-



ტი, რომლებშიც  $f_c$ -ს გააჩნია მესამე რიგის მიმზიდავი ციკლი - ორი მათგანი (ყველაზე დიდი) მიმაგრებულია კარდიოიდთან, ხოლო ერთი, წვეტიანი წვეროთი წერტილში  $-1.75$ , მიმაგრებულია ნამდვილ ლერძზე. ასევე გვაქვს 6 კომპონენტი პერიოდით 4, 15 კომპონენტი პერიოდით 5, 27 კომპონენტი პერიოდით 6, 63 კომპონენტი პერიოდით 7, 120 კომპონენტი პერიოდით 8, 252 კომპონენტი პერიოდით 9 და ა.შ. თითოეულ კომპონენტში  $c$ -ს ერთი ისეთი მნიშვნელობაა (მას ცენტრს უწოდებენ), რომლის დროსაც 0 წერტილი  $f_c$ -სთვის პერიოდულია. გარდა ამისა, თითოეული კომპონენტის საზღვარზე არის წერტილი, რომელსაც ფესვს უწოდებენ, და იგი მოცემული კომპონენტის დიდ კომპონენტთან მიმაგრების წერტილს წარმოადგენს.

ცენტრებისა და ფესვების გარდა, არსებობს სხვა განსაკუთრებული წერტილებიც, რომლებიც მანდელბროტის სიმრავლეს ეკუთვნის. მათ მისურვეიანის წერტილები ეწოდება. ეს უკანასკნელი  $c$ -ს ისეთი მნიშვნელობებია, რომლის დროსაც 0 წერტილი  $f_c$ -ს მიმართ წინააღიწოდელი წერტილია. აღნიშნული წერტილები, ჩვეულებრივ, განშტოების ან „დაფის“ ბოლო წერტილებია.

რა შეიძლება ითქვას  $M$  სიმრავლის წერტილების გარე არგუმენტზე? გარე არგუმენტების კომპონენტებს ცენტრი არა აქვს, რადგან ისინი შიგა წერტილებია. ყოველი კომპონენტის ფესვს აქვს ორი (ძირითადი) გარე არგუმენტი - რაციონალური რიცხვი კენტი მნიშვნელით. მისურვეიანის ყოველ წერტილს აქვს ერთი ან რამდენიმე გარე არგუმენტი - რაციონალური რიცხვები ლუწი მნიშვნელებით.

გამოვარკვიოთ, როგორ გამოვთვალოთ გარე არგუმენტი და როგორ გამოვიყენოთ მიღებული ინფორმაცია. თუ დავაკვირდებით ჟულიას სიმრავლეს და განვსაზღვრავთ მის დინამიკას, მაშინ ნებისმიერი წერტილისათვის ადვილად გამოვთვლით გარე კუთხეს.  $f_c$  ასახვას ორი უძრავი წერტილი გააჩნია; აღვნიშნოთ მარცხენა წერტილი  $\alpha$ -თი, ხოლო მარჯვენა  $\beta$ -თი.  $\beta$  წერტილის გარე არგუმენტი 0-ის ტოლია, ხოლო  $\alpha$  წერტილს აქვს რამდენიმე გარე არგუმენტი.  $\beta$  წერტილის 0-ის მიმართ სიმეტრიული ( $-\beta$ ) წერტილის გარე არგუმენტი ტოლია  $1/2$ . გავატაროთ ( $-\beta$ ) და  $\beta$  წერტილების შემაერთებელი წირი, რომელიც  $K_c$  სიმრავლის საზღვრებშია და მას  $K_c$  სიმრავლის ღერძი ვუწოდოთ. ავირჩიოთ  $K_c$ -ს საზღვარზე  $x$  წერტილი. თუ არსებობს  $K_c$  სიმრავლის გარე წერტილებიდან  $x$  წერტილამდე მიღწევის რამდენიმე საშუალება, უნდა ავირჩიოთ ერთ-ერთი მათგანი, რის შედეგადაც  $K_c$  სიმრავლის თითოეულ  $x$  წერტილში მოხვდება ერთი გარე სხივი. ჩამოვაცალიბოთ მისი არგუმენტის გამოთვლის წესი. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თუ  $x$  წერტილი ღერძის ზემოთ მდებარეობს, მაშინ არგუმენტი, ცხადია, 0-სა და  $1/2$ -ს შორის ძევს,

ხოლო თუ  $x$  ღერძის ქვემოთ მდებარეობს, მაშინ მისი არგუმენტი მოთავსებულია  $1/2$ -სა და  $1$ -ს შორის. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა არგუმენტი ძვეს  $0$ -სა და  $1/2$ -ს შორის, და გამოვარკვიოთ - იგი მოთავსებულია  $0$ -სა და  $1/4$ -ს შორის თუ  $1/4$ -სა და  $1/2$ -ს შორის. ამისათვის გამოვიყენოთ  $f_c$  ასახვა, რომელიც აორმაგებს არგუმენტებს, და ვნახოთ სად გადავა  $x$  წერტილი მის მიმართ გამოყენებული მიდგომის შედეგად. თუ იგი ღერძის ზემოთ აღმოჩნდება, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ ორმაგი არგუმენტი ძვეს  $0$ -სა და  $1/2$ -ს შორის, ხოლო თვით არგუმენტი მოთავსებულია  $0$ -სა და  $1/4$ -ს შორის. შესაბამისად, თუ  $x$  ღერძის ქვემოთ აღმოჩნდება, მაშინ მისი არგუმენტი მოთავსებულია  $1/4$ -სა და  $1/2$ -ს შორის. ამგვარად, თუ  $x$  წერტილის ტრანკტორიას გავყვებით და იმის მიხედვით, წერტილი ღერძის ზემოთ თუ ქვემოთ აღმოჩნდება, შესაბამისად ჩავეწერთ  $0$ -ს ან  $1$ -ს, მაშინ ათობითი წერტილის შემდეგ მივიღებთ ორობით სისტემაში ჩაწერილი ციფრების მიმდევრობას, რომელიც საბენი არგუმენტის სიდიდეს წარმოადგენს. თუ  $x$  პერიოდული ან წინაპერიოდულია, მაშინ ციფრების მიმდევრობაც პერიოდული იქნება.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული გამოთვლების შესრულება შესაძლებელია იმ შემთხვევაშიც, როცა ყულის სიმრავლის დეტალური სტრუქტურა უცნობია. მხოლოდ საჭიროა ვფიქრობდეთ კომბინატორული ხასიათის ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ ამ სიმრავლის სხვადასხვა ნაწილები როგორ არის ერთმანეთთან დაკავშირებული.

მანდელბროტის სიმრავლის წერტილების გარე არგუმენტები შედარებით მარტივად გამოითვლება, მიუხედავად იმისა, რომ ამ სიმრავლეს დინამიკა არ გააჩნია და არსებითად იგი საკონტროლოა. განსაკუთრებით მარტივია მისურვეიჩის წერტილების გამოთვლა: ვთქვათ,  $c$  მისურვეიჩის წერტილია, მაშინ  $M$  სიმრავლეში  $c$ -ს გარე არგუმენტები ემთხვევა ამავე წერტილის გარე არგუმენტებს  $K_c$  სიმრავლეში. აღნიშნულის ახსნა, თუ რატომ ხდება, შეუძლებელია. მაგრამ იგი შეიძლება დავუკავშიროთ მოვლენას, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს. თუ მიკროსკოპში ერთმანეთს შევადარებთ  $c$  წერტილში ფოკუსირებულ მანდელბროტის  $M$  და იმავე  $c$  წერტილში ფოკუსირებულ ყულის  $K_c$  სიმრავლეებს, მაშინ დავინახავთ, რომ მათი სურათები მსგავსია. მსგავსება მით უფრო შთაბეჭდავია, რაც უფრო მაღალია მიკროსკოპის გამაღიდეებლობა. ვინაიდან ყულის თითოეული სიმრავლე თვითმსგავსია (თუმცა ისინი ერთმანეთისგან დიდად განსხვავდებიან), ამიტომ გასაოცარი არ უნდა იყოს, რომ მანდელბროტის სიმრავლის სხვადასხვა ნაწილები სხვადასხვანაირად გამოიყურება.

$$A(x^*) = \{x \in \bar{C} : N^k(x) \rightarrow x^*, \text{ როცა } k \rightarrow \infty\}, \quad (8.41)$$

სადაც  $N(x) = x - p(x)/p'(x)$  და  $N^k = \underbrace{N \circ \dots \circ N}_k$ . შევნიშნავთ, რომ

$$N'(x) = \frac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}, \quad (8.42)$$

სადაც  $' = \frac{d}{dx}$ . მაშასადამე, იმ შემთხვევაში, როცა  $x^*$  არის  $p$ -ს მარტივი ფესვი (ე.ი.  $p'(x^*) \neq 0$ ), ადგილი აქვს ტოლობას  $N'(x^*) = 0$ , ე.ი.  $x^*$  წარმოადგენს ზემომზიდავ უძრავ წერტილს  $N$ -სთვის. თუ  $x^*$  ფესვი  $k$ -ჯერადია, ე.ი.  $p(x) = (x - x^*)^k q(x)$  და  $q(x^*) \neq 0$ , მაშინ ძნელი არ იქნება მივეუთოთ მეთოდი, რომლისთვისაც  $x^*$  კვლავ ზემომზიდავი უძრავი წერტილი იქნება:

$$N_k(x) = x - \frac{hp(x)}{p'(x)}. \quad (8.43)$$

(8.43) მეთოდს ნიუტონის შესუსტებულ მეთოდს უწოდებენ. მისი ფუნქციონირებისათვის საჭიროა  $h = k$  პარამეტრის შერჩევა და  $N'_k(x^*) = 0$  ტოლობის შემოწმება. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ (8.43) შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს, როგორც საწყისი ამოცანის ამოხსნის ეილერის მეთოდი  $h$  ბიჯით:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{p(x(t))}{p'(x(t))}, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (8.44)$$

განვიხილოთ კელის პრობლემა შემდეგი პოლინომისათვის:

$$p(x) = x^2 - c. \quad (8.45)$$

$p$ -სთვის ნიუტონის მეთოდით მიიღება მეორე რიგის რაციონალური ასახვა

$$N(x) = \frac{x^2 + c}{2x}. \quad (8.46)$$

ამ შემთხვევაში ყულიას  $J_N$  სიმრავლე წარმოადგენს პერპენდიკულარს, რომელიც გაივლის  $\pm\sqrt{c}$  ფესვების შემაერთებული მონაკვეთის შუა წერტილში:

$$J_N = \{\alpha i\sqrt{c} : \alpha \in \mathbb{R}\}, \text{ სადაც } i = \sqrt{-1}.$$

ამგვარად,  $A\sqrt{c}$  და  $A(-\sqrt{c})$  ფესვების მიზიდულობის აუზებს  $J_N$ -ის საშუალებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეები წარმოადგენს. იმისათვის, რომ ეს უკანასკ-

## 8.2 ნიუტონის მეთოდი კომპლექსური პოლინომებისათვის: კელის პრობლემა

ნიუტონის მეთოდი არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის ერთ-ერთი გავრცელებული იტერაციული მეთოდია. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, მოცემულია  $f(x)=0$  განტოლება და ცნობილია მისი საწყისი  $x_0$  მიახლოება, რომელიც ძალიან ახლოსაა  $x^*$  ამონახსნთან. შესაძლებელია როგორც  $f(x)$  რიცხვი, ისე  $f'(x)$  წარმოებული დიდი სიზუსტით გამოვთვალოთ. მაშინ  $x^*$  ამონახსნის მისაღებად რეკურენტულ ფორმულას აქვს სახე

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

რომელიც სწრაფი კრებადობით ხასიათდება.

ანალოგიურ სიტუაციაში ნიუტონის მეთოდი არანაკლებ ეფექტურია კომპლექსური ცვლადების შემთხვევაშიც

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.40)$$

სადაც  $p$  კომპლექსური პოლინომია. მაგრამ როცა საწყისი მიახლოება ნებისმიერად არის შერჩეული, მაშინ პრობლემა ძალიან რთულდება. განტოლების ამოხსნის პროცესში მიახლოების ზოგიერთი წერტილი გარკვეული ფესვისკენ მიიზიდება, ზოგიც შემთხვევითი წესით მოძრაობს მანამ, სანამ არ მოხვდება რომელიმე ფესვის მიზიდულობის არეში. დამტკიცებულია, რომ ზოგიერთი წერტილი ქაოსურად მოძრაობს. ხშირად ადგილი აქვს წერტილის მიზიდვას ციკლისაკენ, რომელიც არ არის დაკავშირებული პოლინომის ფესვთან.

აღნიშნული საკითხები თავდაპირველად, XIX საუკუნეში, დასვა ა. კელიმ, მაგრამ პრობლემა დაწერილებით შესწავლილ იქნა მხოლოდ კომპიუტერული ტექნიკის დაწერების შემდეგ.

როგორც ცნობილია, ნიუტონის მეთოდში განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა კრებადობის საკითხს. მაგრამ ამ პრობლემის გარდა არსებობს სხვა პრობლემებიც, რომელთაგან ერთ-ერთს - კელის პრობლემას [105] ქვემოთ განვიხილავთ.

რიცხვითი მეთოდების თეორიის თვალსაზრისით, ნიუტონის მეთოდის კრებადობისათვის მნიშვნელოვანია საწყისი  $x_0$  მიახლოების  $p(x)=0$  განტოლების  $x^*$  ფესვის მიდამოში მდებარეობა. კელის პრობლემა მდგომარეობს  $x^*$  ფესვის მიზიდულობის გლობალური აუზის განსაზღვრაში:

ნელი დავინახოთ, საჭიროა შევნიშნოთ, რომ  $N$  დაკავშირებული იქნება შედარებით მარტივ  $R(u) = u^2$  ასახვასთან, თუ განვახორციელებთ კოორდინატების შეცვლა

$$\psi(x) = \frac{x + \sqrt{c}}{x - \sqrt{c}}, \quad (8.47)$$

$$\psi^{-1}(u) = \frac{\sqrt{c}(u+1)}{u-1}, \quad (8.48)$$

ანუ

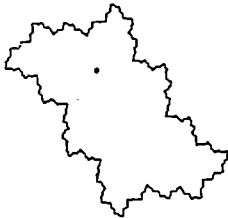
$$R(u) = \psi \circ N \circ \psi^{-1}(u). \quad (8.49)$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სულერთია რას შევისწავლით - (8.46) ტრანსფორმაციებს თუ  $R$  ტრანსფორმაციებს. ქვემოთ მოცემულია შესაბამისი ობიექტების სია:

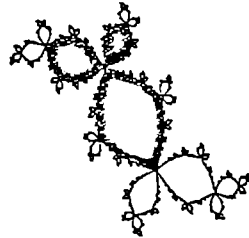
$$\frac{\text{სიბრტყე } x + \sqrt{c} \quad -\sqrt{c} \quad \infty \quad 0 \quad J_N}{\text{სიბრტყე } u \quad \infty \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad S^1},$$

სადაც  $S^1$  ერთეულოვანი წრეწირია  $\{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$ .

$u = 0$  და  $u = \infty$  წარმოადგენს  $R$ -ის მიმზიდავ უძრავ წერტილებს მიზიდულობის შემდეგი აუზებით  $A(0) = \{u \in \mathbb{C} : |u| < 1\}$ ,  $A(\infty) = \{u \in \mathbb{C} : |u| > 1\}$ . აუზებს შორის საზღვარს და, მაშასადამე,  $R$ -სთვის ყულისა სიმრავლეს წარმოადგენს  $S^1$ . ასე, მაგალითად, ნახ. 8.26-ზე მოცემულია მიმზიდავი უძრავი წერტილის აუზი, ხოლო ნახ. 8.27-ზე - აუზი, მიზიდული 3 პერიოდის ციკლის მიერ.



ნახ. 8.26



ნახ. 8.27

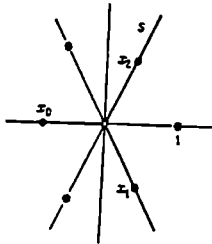
ადვილი დასანახავია, რომ  $\psi^{-1}$  ასახავს  $A(0)$  და  $A(\infty)$  აუზებს  $J_N$  სიმრავლით განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეებში. ასეთი შესაბამისობა გვიჩვენებს, რომ  $J_N$

მართლაც წარმოადგენს  $N$  ასახვის ჟულიას სიმრავლეს. შევნიშნავთ, რომ  $R(u) = u^2$  ასახვა ნიუტონის მეთოდის რეალიზაციას ახორციელებს  $u \rightarrow u/(1-u)$ -ის შემთხვევაში.

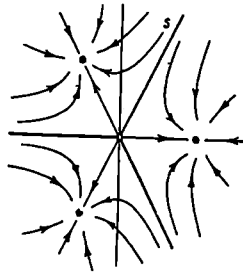
კუბური  $x^3 - 1$  პოლინომის შემთხვევაში ნიუტონის მეთოდის თანახმად გვექნება:

$$N(x) = x - \frac{x^3 - 1}{3x^2} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2}, \quad (8.50)$$

რომლისთვისაც ჟულიას სიმრავლეს ნახ. 8.28-ზე გამოსახული  $N$  სიმრავლე წარმოადგენს.



ნახ. 8.28



ნახ. 8.29

ნახ. 8.29-ზე მოცემულია (8.44)-ის ფაზური პორტრეტი, სადაც  $N$  სიმრავლე მდგრადობის სამი უბნისათვის სეპარატრისას წარმოადგენს და განსაზღვრულია სამი ფესვით. მართლაც, (8.44) ეკვივალენტურია საწყისი ამოცანისა

$$\begin{cases} \alpha \dot{x}(t) = -p(x(t)) \cdot \overline{p'(x(t))}, & \alpha = |p'(x(t))|^2, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (8.51)$$

სადაც  $\overline{a+ib} = a-ib$ . ამიტომ ნულოვანი წერტილი განსაკუთრებულია იმ აზრით, რომ იგი წარმოადგენს ერთადერთ სამმხრივ წერტილს (8.44) ამოცანის მდგრადობის უბნების მიმართ.

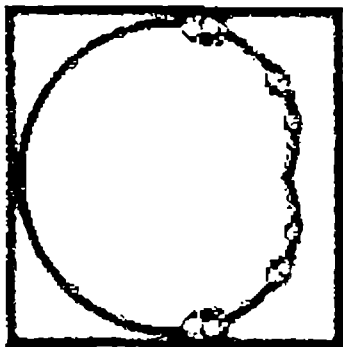
ზოგად შემთხვევაში, კომპლექსური პოლინომებისათვის არსებობს ისეთი შემთხვევებიც, როცა ნიუტონის მეთოდით კრებალობა არც ერთი ფესვისათვის არ მიიღწევა.

განვიხილოთ ახლა მესამე რიგის პოლინომის შემთხვევა. ცვლადების წრფივი ჩანაცვლების შედეგად ნებისმიერი კუბური პოლინომი შეიძლება გარდაიქმნას შემდეგი სახის პოლინომად:

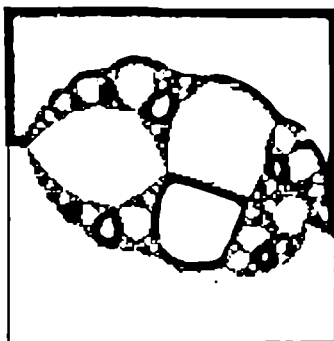
$$p_\lambda(x) = x^3 + (\lambda - 1)x - \lambda, \quad (8.52)$$

სადაც  $\lambda$  სპეციალური წესით შერჩევა, კერძოდ, მისი ისეთი მნიშვნელობა უნდა შევარჩიოთ, რომ კრიტიკული 0 წერტილი  $p_\lambda$ -ს სამი ფესვიდან არც ერთის მიზიდულობის აუზს არ უნდა ეკუთვნოდეს.

ნახ. 8.30-ზე მოცემულია კრიტიკული 0 წერტილის კომპლექსურ  $\lambda$  სიბრტყეში გამოკვლევის შედეგები; თუ  $\lambda$  მდებარეობს შავ სიმრავლეში, მაშინ  $0 \in A(1)$ . ნახ. 8.31-ზე წარმოდგენილია ნახ. 8.30-ზე მოცემულია გამოსახულების გადიღებული ხედი.



ნახ. 8.30



ნახ. 8.31

გამოვიკვლიოთ ნიუტონის შესუსტებული მეთოდი  $h$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს. განვიხილოთ მეორე რიგის პოლინომი

$$p(x) = x^2 - c, \quad (8.53)$$

რომლისთვისაც აღნიშნული მეთოდის თანახმად გვექნება

$$N_h(x) = x - h \frac{x^2 - c}{2x}. \quad (8.54)$$

როცა  $h=0$  და  $h=2$ , მაშინ მიიღება ტრივიალური ფუნქციები  $N_0(x)=x$  და  $N_2(x)=\frac{c}{x}$ . ამიტომ დავუშვათ, რომ  $h \in C \setminus \{0; 2\}$ . შემოვიტანოთ ახალი კოორდინატები

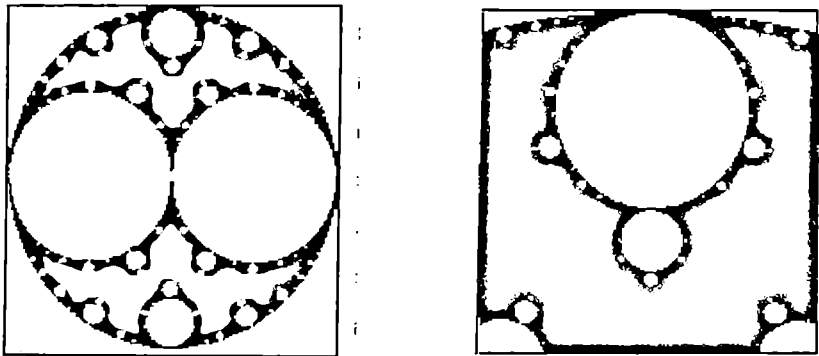
$$x = -i\sqrt{c} \sqrt{\frac{h}{h-2}} u. \quad (8.55)$$

მივიღებთ

$$N_\lambda(u) = \lambda \left( u + \frac{1}{u} \right), \quad (8.56)$$

სადაც  $\lambda = \left( 1 - \frac{h}{2} \right)$ .

ნახ. 8.32-ზე მოცემულია  $N_\lambda$  ფუნქციის კრიტიკული  $u = \pm 1$  წერტილების ყოფაქცევის რიცხვითი გამოკვლევის შედეგები. პარამეტრის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლის დროსაც აღნიშნული კრიტიკული წერტილები რომელიმე მიმზიდავ ტრაექტორიისაკენ არ მიისწრაფვის, შეფერადებულია შავი ფერით. ამ შემთხვევაში ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ თეთრ უბანში არსებობს მიმზიდავი პერიოდული ტრაექტორია.



ნახ. 8.32



### 8.3 ნიუტონის მეთოდი ნამდვილი განტოლებებისათვის

ცნობილია, რომ კომპლექსური ანალიზური  $f(x)$  ფუნქცია შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ორი ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია, სახელდობრ,

$$f(x) = \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}, \quad (8.57)$$

რომლისთვისაც სრულდება კოში-რიმანის პირობა

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \quad (8.58)$$

ეთქვათ,  $H: R^n \rightarrow R^n$  ასახვა, სადაც  $R^n$  ევკლიდეს  $n$ -განზომილებიანი სივრცეა, გლუვი ასახვაა. მაშინ ნიუტონის მეთოდის შესუსტებული ვარიანტით  $H(x) = 0$  განტოლების ამონახსნის მისაღებად გამოყენებულია რეკურენტული ფორმულა

$$\begin{cases} x_{k+1} = N(x_k) = x_k - h \frac{H(x_k)}{H'(x_k)}, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_k \in R^n, \end{cases} \quad (8.59)$$

სადაც  $h \in R$ .

შევნიშნავთ, რომ (8.59) შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს როგორც საწყისი ამოცანის ამოხსნის ეილერის მეთოდი  $h$  ბიჯით

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -h \frac{H(x(t))}{H'(x(t))}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (8.60)$$

ისევე, როგორც კომპლექსური განტოლებების შემთხვევაში, განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს კავშირი (8.59) და (8.60) გამოსახულებებს შორის, კერძოდ, გამოვიკვლიოთ (8.59)-ის დამოკიდებულება  $h$  სიდიდებზე.

შევარჩიოთ  $H$  შემდეგი სახით

$$H(x) = Mx - \mu F(x), \quad (8.61)$$

სადაც  $\mu$  ნამდვილი პარამეტრია,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $F(x) = (f(x_1), \dots, f(x_n))^T$ ,  $f: R \rightarrow R$ , ხოლო  $M$  შემდეგი სახის მატრიცაა:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

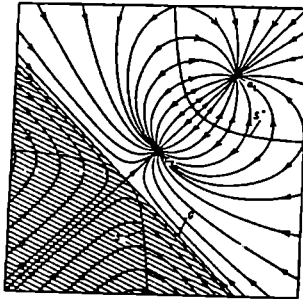
(8.61) გამოსახულება წარმოადგენს სასრულსხვაობიან აპროქსიმაციას შემდეგი ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანისა [105]:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda f(u(t)) = 0, \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases} \quad (8.62)$$

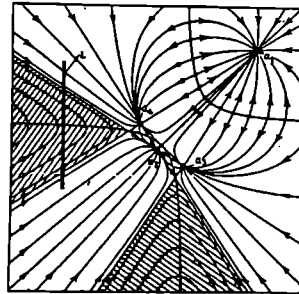
როცა  $(0;1)$  შუალედი თანაბრად დაყოფილია  $n$  შივთა წერტილით  $1/(n+1)$  ბიჯისა და  $\mu = \lambda(n+1)^2$  შნიშვნელობის გათვალისწინებით. თუ  $f$  სათანადო ტიპის არა-წრფივობით ხასიათდება, მაშინ  $\lambda$  სასაზღვრო ამოცანის ბიფურკაციულ პარამეტრს წარმოადგენს. განვიხილოთ  $f$ -ის ორი შესაძლო ვარიანტი

$$f(S) = S - S^2, \quad f(S) = S - S^3.$$

თუ  $H$  შერჩეულია (8.61) გამოსახულების მიხედვით, მაშინ (8.59) ასახვა დამოკიდებული იქნება  $h$  და  $\mu$  პარამეტრებზე. ცხადია,  $H(x) = 0$  განტოლების თითოეული ამონახსნი (8.60) გამოსახულებისთვის მდგრად ცენტრს წარმოადგენს.



ნახ. 8.33



ნახ. 8.34

ნახ. 8.33-ზე და ნახ. 8.34-ზე წარმოდგენილია (8.59) უწყვეტი ნაკადის ფაზური პორტრეტები, როცა  $f(S) = S - S^2$  და  $n = 2$ . ამასთან, პირველი შეესაბამება შემთხვევას, როცა  $1 < \mu < 3$ , ხოლო მეორე - შემთხვევას, როცა  $\mu > 3$ .

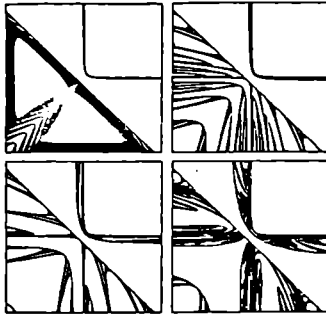
როცა  $1 < \mu < 3$ , მაშინ  $H(x) = 0$  განტოლებას ორი ამონახსნი გააჩნია  $x = a_1$  და  $x = a_2$ , ამასთან,  $a_2 \equiv 0$ .  $\mu$ -ს ზრდის შემთხვევაში, როცა მისი მნიშვნელობა 3-ს მიაღწევს,  $a_2 \equiv 0$  ამონახსნი იყოფა 3 ამონახსნად, ე.ი. როცა  $\mu > 3$ , მაშინ გვექნება 4 ამონახსნი.  $S = \{x \in R^n : \det(DH(x)) = 0\}$  სიმრავლის განსაკუთრებული წერტილები დამოკიდებულია  $\mu$ -ზე, მაგრამ იგი ყოველთვის შედგება წყვილი  $S^-$  და  $S^+$  ჰიპერბოლასგან, რომლებიც შესაბამისად ქვედა და ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს. როცა  $1 < \mu < 3$ , მაშინ  $S^-$  ჰიპერბოლა ტრაექტორიებს შთანთქმავს, ხოლო  $S^+$  ჰიპერბოლა - განიზიდავს, მაშინ როცა  $\mu > 3$  შემთხვევაში  $S^+$  ტრაექტორიებს კვლავინდებურად განიზიდავს, ხოლო  $S^-$  თავის ერთ ნაწილში ტრაექტორიებს შთანთქმავს, ხოლო მეორე ნაწილში - განიზიდავს. ეს გადასვლა შეიძლება დახასიათდეს როგორც ბიფურკაცია. ამასთან, განსაკუთრებული როლი ენიჭება  $G$  წრფეს (ნახ. 8.33). როცა  $1 < \mu < 3$ , მაშინ (8.60)-ის ყველა ტრაექტორია, რომელთა საწყისი წერტილები აღნიშნული წრფის ქვემოთ მდებარეობს, სასრულ დროში აღწევს  $S^-$ -ს, ხოლო თვით  $G$  აღმოჩნდება ინვარიანტული, ე.ი.  $x(t) \in G$ , როცა  $x_0 \in G$ . ანალოგიურად, როცა  $\mu > 3$ , მაშინ გვექნება წრფეებით შემოსაზღვრული ორი ისეთი კონუსური სექტორი, რომ (8.60)-ის ყველა ტრაექტორია, რომელთა საწყისი წერტილები ამ სექტორებშია,  $S^-$ -ში მიისწრაფვის. ამგვარად, აღნიშნული სექტორები, რომლებიც ნახაზებზე დაშტრიხულია,  $H(x) = 0$  განტოლების ფესვების მიზიდულობის აუზებს არ მიეკუთვნება.

როგორც ნახ. 8.33-დან ჩანს,  $H(x) = 0$  განტოლების  $a_1$  ამონახსნი (8.60) ნაკადის იმ ტრაექტორიებს მიიზიდავს, რომელთა საწყისი წერტილები  $S^+$  ჰიპერბოლის ზემოთ მდებარეობს, მაშინ როცა  $a_2$  ამონახსნი იმ ტრაექტორიებს მიიზიდავს, რომელთა საწყისი წერტილი  $S^+$ -ისა და  $G$ -ს შორის მდებარეობს.

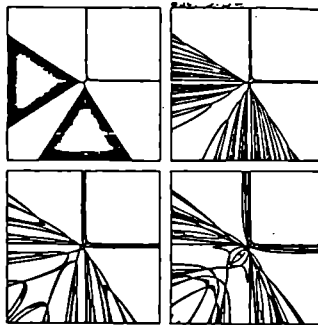
ნახ. 8.35-ზე წარმოდგენილია  $\{x \in R^n : N^k(x) \in S, \text{ როცა } k \geq 0\}$  „ჟულიას ფსევდოსიმრავლე“  $h$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს.

ნიუტონის მეთოდით კომპლექსური პოლინომების კვლევის გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ მიზიდულობის ოთხი აუზის არსებობის შემთხვევაში „ჟულიას ფსევდოსიმრავლე“ უნდა შედგებოდეს ოთხმხრივი წერტილებისგან.

ნახ. 8.35-ზე წარმოდგენილ ჟულიას სიმრავლეს შეესაბამება  $x^*$  ფესვის მიზიდულობის გლობალური აუზი  $A(x^*) = \{x \in \bar{C} : N^k(x) \rightarrow x^*, \text{ როცა } k \rightarrow \infty\}$ , როცა  $f(S) = S - S^2$  და  $\mu = 2.1$ . ზემოდან მარცხნივ:  $h = 0.3$ ; ზემოდან მარჯვნივ:  $h = 1.0$ ; ქვემოდან მარცხნივ:  $h = 1.4$ ; ქვემოდან მარჯვნივ:  $h = 1.7$ .



ნახ. 8.35



ნახ. 8.36

ნახ. 8.36-ზე წარმოდგენილ ფულიას სიმრავლეს შეესაბამება  $x^*$  ფესვის მიზიდულობის გლობალური აუზი  $A(x^*) = \{x \in \bar{C} : N^k(x) \rightarrow x^*, \text{ როცა } k \rightarrow \infty\}$ , როცა  $f(S) = S - S^2$  და  $\mu = 3.2$ . ზემოდან მარცხნივ:  $h = 0.3$ ; ზემოდან მარჯვნივ:  $h = 1.0$ ; ქვემოდან მარცხნივ:  $h = 1.4$ ; ქვემოდან მარჯვნივ:  $h = 1.7$ .

## 8.4. ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი კომპლექსური სისტემებისათვის

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ნიუტონის მეთოდის საშუალებით განისაზღვრება  $H(x) = 0$  განტოლების ფესვი, რომლის  $(k+1)$ -ე მიახლოება გამოითვლება შემდეგი იტერაციული ფორმულის საფუძველზე:

$$x_{k+1} = x_k - h \frac{H(x_k)}{\dot{H}(x_k)}. \quad (8.63)$$

თუ აღნიშნულ მეთოდს გამოვიყენებთ შემდეგი სახის  $dH/dx = \dot{H}(x) = 0$  განტოლების ფესვის ან, რაც იგივეა,  $H(x)$  ფუნქციის სტაციონარული წერტილის მოსაძებნად, მაშინ (8.63) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$x_{k+1} = x_k - h \frac{\dot{H}(x_k)}{\ddot{H}(x_k)}. \quad (8.64)$$

(8.64) ფორმულით განსაზღვრული იტერაციული პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ სტაციონარული წერტილის ორ მეზობელ მიახლოებას შორის სხვაობის მოდული დასაშვებ  $\varepsilon$  სიდიდეზე ნაკლები არ გახდება. აღსანიშნავია, რომ მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა  $H(x)$  გლუვი ფუნქციაა.

ოპტიმიზაციის მიღებული ალგორითმი ნიუტონ-რაფსონის სახელითაა ცნობილი (იხ. ნაწილი 4.1.6). მისი კრებადობა საწყისი წერტილის შერჩევაზე დამოკიდებული. თუ საწყისი წერტილი ექსტრემუმის მიდამოებშია, მაშინ მეთოდი სწრაფი კრებადობით ხასიათდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება განშლადი პროცესი.

კომპლექსურცვლადიან სისტემებში ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის გამოყენება დაკავშირებულია საინტერესო შედეგებთან, რომლის ძირითადი ასპექტები წარმოდგენილია ქვემოთ. აღნიშნული საკითხის განხილვამდე შემოვიტანოთ ზოგიერთი ძირითადი ცნებები და დებულებები ანალიზური ფუნქციის თეორიიდან [89].

ნებისმიერ კომპლექსურ რიცხვს აქვს სახე  $z = x + iy$ , სადაც  $x$  და  $y$  ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო  $i = \sqrt{-1}$  წარმოსახვითი ერთეულია.  $x$ -ს კომპლექსური  $z$  რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება და აღინიშნება  $\operatorname{Re} z$  (ლათინური სიტყვიდან *realis* - ნამდვილი), ხოლო  $y$ -ს კომპლექსური  $z$  რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება და აღინიშნება  $\operatorname{Im} z$  (ლათინური სიტყვიდან *imaginarius* - წარმოსახვითი). თუ  $y = \operatorname{Im} z = 0$ , მაშინ  $z = x$  ნამდვილი რიცხვია, ხოლო თუ  $\operatorname{Re} z = x = 0$  და  $y \neq 0$ , მაშინ  $z = iy$  სუფთა წარმოსახვით რიცხვს წარმოადგენს.  $z$  რიცხვი ნულის ტოლია, თუ  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$ .

კომპლექსური  $z = x + iy$  რიცხვი კომპლექსურ სიბრტყეზე გამოსახავს ვექტორს, რომლის საკოორდინატო ღერძებზე გვემიღები ტოლია:  $x$  და  $y$ .  $z$  ვექტორის სიგრძე ეწოდება  $z$  კომპლექსური რიცხვის მოდულს და აღინიშნება  $|z|$ -ით. ცხადია,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

ყოველ კომპლექსურ  $z = x + iy$  რიცხვს მისი კომპლექსურად შუედღებული  $\bar{z} = x - iy$  რიცხვი შეესაბამება. ცხადია,  $z$  და  $\bar{z}$  სიმეტრიული წერტილებია აბსცისთა ღერძის მიმართ.

**ბანსაზღვრება 8.7.** თუ გაფართოებული რიცხვითი სიბრტყის  $D$  სიმრავლის ნებისმიერ  $z = x + iy$  ცვლადს, რაღაც  $f$  წესის საფუძველზე, გაფართოებული რიცხვითი სიბრტყის  $W$  სიმრავლის გარკვეული  $w = u + iv$  ცვლადი შეესაბამება, მაშინ  $f$ -ს უწოდებენ  $z$  კომპლექსური ცვლადის ფუნქციას და აღინიშნავენ  $w = f(z)$ . აქ  $D$  განსაზღვრის არეა, ხოლო  $f(D) \subset W$  წარმოადგენს  $f$  ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს.

კომპლექსური ცვლადისა და ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებს შორის არსებობს გარკვეული კავშირი. რადგან  $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$ , ამიტომ თითოეულ რიცხვით  $(x, y)$  წყვილს, სადაც  $x + iy \in D$ , ფუნქციური  $f$  დამოკიდებულების საფუძველზე შეესაბამება  $(u, v)$  წყვილი, სადაც  $u + iv \in W$ , ანუ  $u$  და  $v$  წარმოადგენს ნამდვილი  $x$  და  $y$  ცვლადების ნამდვილ ფუნქციებს:  $u = u(x, y)$  და  $v = v(x, y)$ . აღნიშნულის გათვალისწინებით  $w = f(z)$  ფუნქცია შეიძლება შემდგენიარად ჩაიწეროს

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z). \quad (8.65)$$

ანალიზური ფუნქციის თეორიასა და პრაქტიკაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის მოდულს, რომელიც შემდგენიარად გამოისახება

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2}. \quad (8.66)$$

$|w|$ -ს უწოდებენ  $z = x + iy$  წერტილის აბლიკატს, ხოლო მის შესაბამის ზედაპირს - ფუნქციის რელიეფს.

**ბანსაზღვრება 8.8.**  $f$  ფუნქციის ნული ეწოდება დამოკიდებელი  $z$  ცვლადის ისეთ  $z_0$  მნიშვნელობას, რომლისთვისაც  $|f(z_0)| = 0$  და, მაშასადამე,  $f(z_0) = 0$ .

**ბანსაზღვრება 8.9.** რომელიღაც  $z_0$  წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ  $w = f(z)$  ფუნქციას  $z_0$  წერტილში დიფერენცირებადი ეწოდება, თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (8.67)$$

(8.67) ზღვარს უწოდებენ  $w = f(z)$  ფუნქციის წარმოებულს  $z_0$  წერტილში და აღნიშნავენ  $f'(z_0)$  (ან  $\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0}$ ).

**ბანსაზღვრვა 8.10.** თუ  $w = f(z)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $D$  არის თითოეულ  $z$  წერტილში, მაშინ მას  $D$  არეში დიფერენცირებადს უწოდებენ და მის წარმოებულს შემდეგნაირად აღნიშნავენ  $\dot{w}$  (ან  $f'(z)$  ან  $df/dz$  და ა.შ.)

ანალიზური ფუნქციის თეორიაში მნიშვნელოვანია შემდეგი თეორემა.

**თეორემა 8.4.** (კოში-რიმანის დიფერენცირებადობის პირობა)  $D$  არეზე განსაზღვრული  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ფუნქციის  $z \in D$  წერტილში დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილში  $u(x, y)$  და  $v(x, y)$  ფუნქციებს  $x$ -ითა და  $y$ -ით უწყვეტი კერძო წარმოებულები გააჩნდეს და აკმაყოფილებდეს კოში-რიმანის (უფრო ზუსტად, დალაშხერ-ეილერის) დიფერენცირებადობის პირობებს

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.68)$$

აღნიშნული თეორემის პირობების შესრულების შემთხვევაში  $w$  ფუნქციის  $z$ -ით წარმოებული შეიძლება შემდეგნაირად გამოვთვალოთ:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.69)$$

**ბანსაზღვრვა 8.11** ცალსახა  $f(z)$  ფუნქციას ეწოდება ანალიზური, გოლომორფული ან რეგულარული  $z = z_0$  წერტილში, თუ იგი დიფერენცირებადია  $z_0$  წერტილის მიდამოში.

**მაბალითი. 8.14.** განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადის  $w = z|z|$  ფუნქცია. მოცემული ფუნქციისათვის გვექნება:

$$u = \operatorname{Re} w = x\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$v = \operatorname{Im} w = y\sqrt{x^2 + y^2};$$

თუ  $w \neq 0$ , მაშინ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

როგორც ვხედავთ, კომი-რიმანის პირობები მხოლოდ  $z = 0$  წერტილში სრულდება, ხოლო ნულისგან განსხვავებულ ( $z \neq 0$ ) წერტილებში აღნიშნული პირობები არ არის სამართლიანი. მაშასადამე, მოცემული ფუნქცია არ არის ანალიზური.

**ბანსაზღვრვებ 8.12** ფუნქციას  $D$  არეში ანალიზური ეწოდება, თუ იგი ანალიზურია ამ არის ნებისმიერ წერტილში.

**ბანსაზღვრვებ 8.13.** წერტილებს, რომლებშიც  $f(z)$  ფუნქცია ანალიზურია, ეწოდება რეგულარული (ან წესიერი). თუ  $f(z)$  ფუნქცია ზოგიერთი წერტილების გამოკლებით  $D$  არეში ანალიზურია, მაშინ ამ წერტილებს  $D$  არის განსაკუთრებულ წერტილები ეწოდება.

ვთქვათ,  $f(z) = u + iv$  ფუნქცია ანალიზურია  $z_0$  წერტილში (და, მაშასადამე, რომელიღაც  $D_{z_0}^{\rho}$  მიდამოში), ე.ი. იგი აკმაყოფილებს კომი-რიმანის პირობებს.  $f(z)$  დაეშალოთ ტეილორის მწკრივად

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z), \quad (8.70)$$

სადაც

$$\varphi(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \dots$$

ანალიზურია  $D_{z_0}^{\rho}$  მიდამოში და  $\varphi(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$ .  $k$ -რიცხვს ეწოდება  $z_0$  წერტილში  $f(z)$  ფუნქციის ჭერადობა ან ნულოვანი რიგი. როცა  $k=1$ , მაშინ  $z_0$  წერტილის ეწოდება  $f(z)$  ფუნქციის მარტივი ნული, ხოლო როცა  $k>1$  - ჭერადი ნული. თუ  $k=0$ , მაშინ  $f(z_0) \neq 0$ . განსაზღვრის თანახმად, მარტივი ნული ზასიათდება იმით, რომ  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ , ხოლო როცა  $k \geq 2$ , მაშინ ჯერადი ნულისათვის გვექნება

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$



მაბალითი 8.15.

ა)  $f(z) = \sin z$  ფუნქციისათვის ყველა ნული  $z_k = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ , მარტივია, ვინაიდან

$$f(z_k) = \sin z_k = 0, \quad f'(z_k) = \cos z_k = (-1)^k \neq 0.$$

ბ)  $\varphi(z) = \cos z - 1$  ფუნქციას  $\xi_k = 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ , წერტილებში აქვს მეორე რიგის ნულები, ვინაიდან

$$\varphi(\xi_k) = 0, \quad \varphi'(\xi_k) = -\sin \xi_k = 0, \quad \varphi''(\xi_k) = -\cos \xi_k = -1 \neq 0.$$

ბანსაზღვრემა 8.14 რომელიც  $E$  სიმრავლეზე განსაზღვრული  $f(z)$  ფუნქციის ანალიზური გაგრძელების ამოცანა ამ ფუნქციის განსაზღვრის უფრო ფართო  $D \supset E$  სიმრავლეზე გავრცელებაში მდგომარეობს, ამასთან  $f(z)$  ფუნქცია  $D$  არეშიც უნდა იყოს ანალიზური. ანალიზური გაგრძელების უმარტივესი მაგალითებია ნამდვილი ცვლადის  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  ფუნქციების გადასვლა კომპლექსური ცვლადის  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  ფუნქციებზე, რომლებიც ანალიზურია მთელ სიბრტყეზე და ნამდვილი ცვლადის შესაბამისი ფუნქციების თანხვედრილია  $E$  სიმრავლეზე. აღნიშნული გადასვლა შეიძლება განხორციელდეს, თუ მოცემული ფუნქციების შესაბამის მწკვრივებში

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

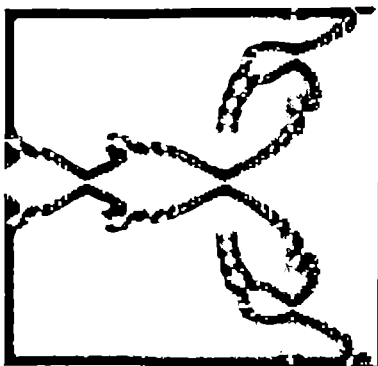
ნამდვილ  $x$  ცვლადს კომპლექსური  $z$  ცვლადით შევცვლით. შევინშნავთ, რომ, ცვლადების შეცვლის მიუხედავად, მწკვრივები კრებადობას ინარჩუნებს.

ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, საესებით სამართლიანია ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის წარმოდგენა ანალიზური გაგრძელების ამოცანის სახით

$$F_k : z \rightarrow z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \tag{8.71}$$

რომელიც გაცილებით უფრო რთულია, ვიდრე  $z \rightarrow z^2 + c$ , საიდანაც მანდელბროტის სიმრავლე იქნა მიღებული.

8.2 და 8.3 ნაწილების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ნიუტონის ნაკადის შემთხვევაში ადგილი აქვს სიბრტყეზე სამხრთივი წერტილის უსასრულო რაოდენობის ასლების გაბნევას, რითაც წარმოიქმნება სეპარატრისა (საერთო მიზიდულობის სამივე აუზისათვის) (ნახ. 8.29), რაც განაპირობებს ფულიას  $J_N$  სიმრავლეს (ნახ. 8.37).



ნახ. 8.37

8.37 ნახაზზე თეთრი ფერით ნაჩვენებია ყულის სიმრავლის ნაწილი.

$c$  პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის და პორტრეტის შესაბამისი წერტილისათვის ისმის კითხვა: ნიუტონის მეთოდი კრებადია თუ არა რომელიმე ფესვის მიმართ, როცა მოძრაობას წინასწარ განსაზღვრული საწყისი წერტილიდან ვიწყებთ? დადებითი პასუხის შემთხვევაში შეიძლება დავსვათ ახალი შეკითხვა: რომელი ფესვის მიმართ არის კრებადი? კითხვებზე პასუხის გასაცემად მოვიქცეთ შემდეგნაირად.

მიღებული პასუხების საფუძველზე შევაფერადოთ პორტრეტის სხვადასხვა უბნები სხვადასხვა ფერით. საჭიროა გავითვალისწინოთ, აგრეთვე, პროცესის ხანგრძლივობა. საკონტროლო (მიმდინარე) წერტილის ფესვებთან მიახლოების მიხედვით ფერის ტონალობა ან გაუაძლიეროთ ან შევასუსტოთ. ამგვარი მოქმედებების შედეგად მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს მნიშვნელოვან ინფორმაციას. ნიუტონის (ან ნიუტონ-რაფსონის) მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში მივიღებთ სურათს, რომელიც მიესადაგება  $f_c : z \rightarrow z^2 + c$  ფუნქციას. აღნიშნული შედეგი ექსპერიმენტულად შეინიშნა ჰ. პაიტგენმა [105].

$c$ -ს მნიშვნელობა, რომელიც ეკუთვნის მანდელბროტის სიმრავლეს, ხასიათდება იმით, რომ ნულოვანი წერტილი წარიტაცება რომელიმე შეზღუდული მიდამოს მიერ. ეს პროცესი ნიუტონის მეთოდში საკონტროლო წერტილის რომელიმე უბნით წატაცებას შეესაბამება და, ასეთ შემთხვევაში, ამ უბანში მღებარე ნებისმიერ წერტილს არ შეუძლია მიუახლოვდეს განტოლების რომელიმე ფესვს.

$f_c$ -სა და  $F_c$ -ს შორის უხეში მსგავსება სიმრავლეების საოცარ მსგავსებას განაპირობებს, როგორც ცვლადების მნიშვნელობათა სიბრტყეში (ყულის სიმრავლე), ისე პარამეტრების მნიშვნელობათა სიბრტყეში (მანდელბროტის სიმრავლე). აღნიშ-

ნული მსგავსებით დასაშვებია მასშტაბის რაღაც ცვლილება და მცირედენი დამახინჯებები, მაგრამ შენარჩუნებულია ყველა ის კომბინატორული თვისებები, რომლებიც გამოვილინდება გარე არგუმენტების გამოთვლის დროს.

გარე არგუმენტის არსის გასაგებად გამოვიყენოთ მისურვეიჩის წერტილის ცნება. როგორც ცნობილია, მისურვეიჩის წერტილი  $c$ -ს ისეთი მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც  $0$  (ნული) არა პერიოდული, არამედ წინაპერიოდული წერტილია  $f_c$ -ს მიმართ ( $f_c: z \rightarrow z^2 + c$ ). მისურვეიჩის წერტილისგან განსხვავებით,  $c$ -ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც  $0$  წერტილი პერიოდულია  $f_c$ -ს მიმართ, წარმოადგენს ცენტრს. მათ საზღვარზე არსებობს წერტილი, რომელსაც ფესვი ეწოდება. ეს არის მოცემული კომპონენტის მიმავრების წერტილი დიდთან ან მახვილი (გამახვილებული წვერი), რომელზედაც გადის ძაფი. ცენტრს არა აქვს გარე არგუმენტები, ვინაიდან იგი შიგა წერტილია. ყოველი კომპონენტის ფესვს აქვს ორი გარე არგუმენტი - რაციონალური რიცხვები კენტი მაჩვენებლით. მისურვეიჩის წერტილს აქვს ერთი ან რამდენიმე გარე არგუმენტი (ერთი, თუ ძაფის ბოლოა, სამი ან მეტი, თუ დატოტეა) - რაციონალური რიცხვები ლუწი მაჩვენებლით.

გარე არგუმენტის გამოთვლის მეთოდია დაწერილებით მოცემული პ.პაიტგენის და პ. რიხტერის შესანიშნავ წიგნში [105].

ფაზურ სიბრტყეზე მანდელბროტის სიმრავლის სტრუქტურული მდგრადობა აღნიშნავს შემდეგს. თუ მოცემული ალგებრული ფუნქციების ოჯახი რომელიღაც არეში  $z \rightarrow z^2 + c$  მრავალწევრების ოჯახს ემსგავსება, მაშინ ამ ოჯახით წარმოქმნილ სიმრავლეს ისეთივე ფორმა გააჩნია, როგორც მანდელბროტის სიმრავლეს. ეს უკანასკნელი ამიტომაც იწვევს მკვლევართა ცხოველ დაინტერესებას. საჭიროა აღინიშნოს, რომ ნიუტონის მეთოდის გამოყენება კომპლექსურცვლადიან სისტემებში გარკვეული თავისებურებებით ხასიათდება, რაც იმაში გამოიხატება, რომ აქ შეუძლებელია პროცესის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის გამოსახვა. იქმნება მხოლოდ ფერადი გამოსახულება, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ფერების შერჩევით განტოლების ფესვის მნიშვნელობა განვსაზღვროთ. გარდა ამისა, ნებისმიერი ასახვა შეიძლება  $z \rightarrow z^2 + c$  გამოსახულებაზე დაეყვანოს.

პ. პაიტგენის ექსპერიმენტული მოსაზრებისაგან განსხვავებით, აღნიშნულ იდეას შეიძლება შემდეგი თეორია მიუყვანდეს.

ბანსაზღვრვამ 8.15.  $f(z)$  ფუნქციას, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad (h(z) \neq 0),$$

უწოდებენ მერომორფულ ფუნქციას სასრულ სიბრტყეში (ბერძნული სიტყვებისაგან „მეროს“ - ნაწილი, წილადი, „მორფი“ - ფორმა, სახე).

განსაზღვრების თანახმად, მთელ ფუნქციას (რომელიც ცალსახა და ანალიზურია სასრულ სიბრტყეში) არა აქვს განსაკუთრებული წერტილი სასრულ სიბრტყეში. მაშასადამე, მას განსაკუთრებული წერტილი გააჩნია უსასრულოდ დაცილებულ წერტილში.

მერომორფული ფუნქციებია მთელი (როცა  $h(z)=1$ ) და რაციონალური ფუნქციები. მთელ ფუნქციას სასრულ სიბრტყეში განსაკუთრებული წერტილები არ გააჩნია, ხოლო რაციონალურს სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული წერტილები-პოლუსები გააჩნია (ისინი მხოლოდ მნიშვნელის ნულებია). ნებისმიერ მერომორფულ ფუნქციას სასრულ სიბრტყეში განსაკუთრებული წერტილები შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ პოლუსები  $h(z)$  ნულებში.

ცნობილია, რომ  $f(z)$  ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ  $\Phi(z)$  მთელი ფუნქციის და  $\sum_{j=1}^N G_j(z)$  რაციონალური ფუნქციების ჯამის სახით

$$f(z) = \Phi(z) + \sum_{j=1}^N G_j(z).$$

ეთქვათ,  $f(z)$  ფუნქციას უსასრულობაში წესიერი წერტილი ან  $m$  რიგის პოლუსი გააჩნია. მაშინ მთელი  $\Phi(z)$  ფუნქცია იქნება რალაც მუდმივი ( $\Phi(z) = A_0$ ) ან  $m$ -ური ხარისხის მრავალწევრი  $\Phi(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m$ , სადაც  $A_1 z + \dots + A_m z^m$  არის  $f(z)$  ფუნქციის დაშლის ძირითადი ნაწილი უსასრულობის მიდამოში. აღენიშნოთ იგი  $G_0(z)$ -ით (ამასთან, თუ უსასრულობა წესიერ წერტილს წარმოადგენს, მაშინ  $G_0(z) = 0$ ). გვექნება:

$$f(z) = A_0 + \sum_{j=1}^N G_j(z).$$

მიღებული შედეგი შეიძლება ჩამოვყავალიბოთ თეორემის სახით [89].

**თეორემა 8.16.** თუ მერომორფულ  $f(z)$  ფუნქციას გაფართოებულ სიბრტყეში განსაკუთრებულ წერტილებად მხოლოდ პოლუსები გააჩნია, მაშინ  $f(z)$  რაციონალური ფუნქციაა და იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც სასრული პოლუსების მქონე ძირითადი  $G_j(z)$ ,  $j=1\dots N$ , ნაწილისა და  $A_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ f(z) - \sum_{j=1}^N G_j(z) \right]$  მუდმივის ჯამი.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული თეორემის საფუძველზე შესაძლებელია ნებისმიერი რაციონალური წილადის მარტივ წილადებად დაშლა:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{A_{-\beta_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{A_{-1}^{(j)}}{z - z_j} \right].$$

როგორც ცნობილია, ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი ნიუტონის მეთოდის საფუძველზეა შემუშავებული. ამიტომ ამ შემთხვევაშიც ანალოგიურად უნდა მოვიქცეთ: ოპტიმიზაციის ალგორითმი უნდა დავიყვანოთ  $z \rightarrow z^2 + c$  ასახვის ფერად გამოსახულებაზე და ფერების ტონალობის შერჩევით გადაწყვეითით ოპტიმიზაციის ამოცანა.

ამოცანის გადაწყვეტის შედეგად მიიღება რაღაც ფაზური პორტრეტი, რომელზედაც გამოსახულია კონკურენტული უბნები. მათი შერჩევა, თუ რომელი უკეთესი, მკვლევარზეა დამოკიდებული. ქაოსის თეორიის თანახმად სისტემას, რომლის დინამიკა მისთვის დამახასიათებელი პარამეტრის მნიშვნელობის დროს სტაბილიზირდება, ატრაქტორი აქვს წერტილის სახით. შესაძლებელია პარამეტრის რომელიღაც მნიშვნელობის დროს ორწერტილიანი, ოთხწერტილიანი, რვაწერტილიანი, თექვსმეტწერტილიანი და ა.შ. ატრაქტორები. როცა პარამეტრის სიდიდე 4.6692 მნიშვნელობას მიაღწევს, მაშინ სისტემაში დამკვიდრდება ქაოსი. აღნიშნულ რიცხვს ფეიგენბაუმის უნივერსალურ მუდმივას უწოდებენ. იგი ასახვის არჩევაზე და მის განზომილებაზე არ არის დამოკიდებული. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, გარკვევების ბიფურკაციის თანამიმდევრობა არის უნივერსალური. სისტემის ეს უცნაური ყოფაქცევა ატრაქტორზეა დამოკიდებული. აღმოჩნდა, რომ ატრაქტორი ერთგანზომილებიანი ფრაქტალია. როგორც ყველა ფრაქტალი, მას აქვს თვითმსგავსების თვისება: თუ მის ნებისმიერ მცირე ფრაგმენტს ცალკე გავადიდებთ, იგი მთელი ფრაქტალის მსგავსი იქნება.

ორწერტილიანი ატრაქტორის შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, სისტემა ორ წერტილს შორის რხევით რეჟიმში გადადის და შემდგომი ციკლების გაორკეცებისას ადგილი აქვს ქაოსს. ქაოსი შეიძლება ლიაპუნოვის ფორმულით დავახსნათ. ნებისმიერი დინამიკური სისტემისათვის ფორმულა გვაძლევს ერთადერთ რიცხვს - ლიაპუნოვის მაჩვენებელს. თუ იგი ნულზე ნაკლებია, მაშინ სისტემა სტაბილურია. როცა აღნიშნული რიცხვი ნულზე მეტია, მაშინ სისტემაში წარმოიქმნება ქაოსი. ლიაპუნოვის დადებითი მაჩვენებლისათვის თუ შემოვიღებთ შავ ფერს, მაშინ ქაოსი შავი ფერით გამოისახება. ერთი ფერის სხვადასხვა ტონალობა ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ნულიდან მინუს უსასრულობამდე ცვლილებას აღნიშნავს. ნულის დროს ადგილი აქვს ფერების მკვეთრ ცვლილებას, მაგალითად, ღია ფერი შავით იცვლება ან პირიქით.

საზოგადოდ, ლიაპუნოვის მაჩვენებელი წარმოადგენს იმის ზომას, თუ ფაზურ სივრცეში რა სისწრაფით გაქანდება მახლობელი ტრაექტორიები. ფაზური სივრცის ყოველი განზომილებისათვის არსებობს თითო მაჩვენებელი.

დადებითი მაჩვენებელი ფაზური სივრცის გაჭიმვას შეესაბამება და იგი ახლომდებარე წერტილების გაშლის სისწრაფეს გამოსახავს. ლიაპუნოვის უარყოფითი მაჩვენებელი კი შეესაბამება ფაზური სივრცის შეკუმშვას და მისი საშუალებით შეიძლება

განისაზღვროს სისტემაზე შემოთვლების შემოქმედების შემდეგ წონასწორული მდგომარეობის დამყარების პერიოდი.

ლიაპუნოვის უარყოფითი მაჩვენებლით განისაზღვრება, აგრეთვე, ტრაექტორიების რაოდენობა ან დრო, რომელიც საჭიროა ფაზური ტრაექტორიის მის ატრაქტორზე დასაბრუნებლად.

ლიაპუნოვის მაჩვენებელი საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ ატრაქტორების კლასიფიკაცია. წერტილოვანი ატრაქტორები ყოველთვის ინტეგრირებს ფიქსირებული წერტილისაკენ. მაშასადამე, სამგანზომილებიანი წერტილოვანი ატრაქტორი ხასიათდება ლიაპუნოვის სამი უარყოფითი მაჩვენებელით (-,-,-); სამივე განზომილება ფიქსირებულ წერტილში შეიკუმშება.

სამგანზომილებიან ზღვრულ ციკლებს ორი უარყოფითი და ერთი ნულის ტოლი მაჩვენებელი გააჩნია (0,-,-). ზღვრულ ციკლებს აქვს ორი განზომილება, რომლებიც ერთმანეთში კონვერგირებს, და ერთი განზომილება, რომელშიც წერტილის ფარდობითი მდგომარეობის მიმართ ცვლილებებს არ აქვს ადგილი. აღნიშნულის გამო წარმოიქმნება შეკრული ტრაექტორიები.

უცნაური ატრაქტორების შემთხვევაში ადგილი აქვს დადებით, უარყოფით და ნულის ტოლ მაჩვენებლებს (+,0,-). დადებითი მაჩვენებელი მგრძობიარობის საწყის პირობებზე დამოკიდებულების ხარისხს ასახავს. უარყოფითი მაჩვენებელი კონვერგირებად წერტილებს აიძულებს დარჩეს ატრაქტორის მიდამოში. უცნაური ატრაქტორის შემთხვევაში სისტემის წონასწორობა განისაზღვრება იმით, თუ რა სიძირით კონვერგირდება წერტილები, სანამ ისინი ზომიერ ზღვრებს დაუბრუნდებიან.

ფაზურ სივრცეში ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გაზომვა სფეროს სიდიდის დროში ცვლილების საშუალებით ხორციელდება. თუ მოძრაობას ადგილი აქვს სამგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში, მაშინ სფერო, რომელიც თავისთავში შეიცავს ახლომდებარე საწყის წერტილებს, დროის განმავლობაში ელიფსოიდად გარდაიქმნება. რალაც პერიოდის შემდეგ იგი გაიჭიმება და წარმოიქმნება ნაკეცები. სფეროს მოცულობის ცვლილების ექსპონენციალური სიჩქარე ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ზომას წარმოადგენს. ლიაპუნოვის  $i$ -ური მაჩვენებელი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \log_2 \left( \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right),$$

სადაც  $P_i(t)$  ტრაექტორიებს შორის მიმდინარე მანძილია, ხოლო  $P_i(0)$  - ტრაექტორიებს შორის საწყისი მანძილი. სფეროს გრძივი განზომილება იზრდება  $2^{L_i t}$  სიჩქარით.

მიღებული ფაზური პორტრეტის საერთო გამოსახულება წარმოადგენს ქაოსის რუქას, რომელშიც ატრაქტორის ესა თუ ის სახე დამოკიდებულია  $z_0$ -ის საწყის მნიშვნელობაზე. იგი აღწერს სისტემაში მიმდინარე დინამიკურ პროცესებს. აღნიშ-

ნულ პორტრეტზე შეიძლება დავაკვირდეთ პერიოდულ იძულებით რხევებს, რაც საშუალებას გვაძლევს ვებრძოლოთ ქაოსის გამომწვევ მიზეზებს და ამოვიჩინოთ გარკვეული აზრით საუკეთესო უბნები.

ცხადია, რომ კომპიუტერის გამოყენების გარეშე როგორც ნიუტონის, ისე ნიუტონ-რაფსონის ალგორითმით განხილული პრობლემის გადაწყვეტა შეუძლებელია.

# ლიტერატურა

1. გოგიაშვილი გ.გ., შონია ო.ბ., ქართველიშვილი ი.შ. ოპერაციათა კვლევა. ნაწილი პირველი. - თბილისი: გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი". - 1996. - 83გვ.
2. გოგიაშვილი გ.გ., შონია ო.ბ., ქართველიშვილი ი.შ. ოპერაციათა კვლევა. ნაწილი მეორე. - თბილისი: გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი". - 1997. - 111გვ.
3. გუგუშვილი ა.შ., იმედაძე თ.გ., გარგი დ.ფ. ავტომატური მართვის თეორია. მდგომარეობათა სივრცის მეთოდი. - თბილისი: გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი". - 1994. - 111გვ.
4. გუგუშვილი ა., სალუქვაძე მ., ჭიჭინაძე ვ. ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები. წიგნი პირველი. - თბილისი: გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი". - 1997. - 290გვ.
5. კურტანიძე დ. ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები დაგეგმვაში. - თბილისი: გამომცემლობა "თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი". - 1988. - 195გვ.
6. ლურსმანაშვილი ა. მათემატიკური დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი. - თბილისი: გამომცემლობა "თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი". - 1977. - 328გვ.
7. ლურსმანაშვილი ა. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება. - თბილისი: გამომცემლობა "თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი". - 1967. - 310გვ.
8. მანია გ. წრფივი პროგრამირება. - თბილისი: გამომცემლობა "განათლება". - 1967. - 295გვ.
9. მართვის თეორია. არაწრფივი სისტემები. წიგნი 2. ა. გუგუშვილის და რ. ხუროძის რედაქციით. - თბილისი: სტუ-ს გამომცემლობა. - 1999. - 300გვ.
10. მართვის თეორია. სინერგეტიკა. წიგნი 3. ა. გუგუშვილის და რ. ხუროძის რედაქციით. - თბილისი: სტუ-ს გამომცემლობა. - 2000. - 839გვ.
11. სალუქვაძე მ., თოფჩიშვილი ა., მაისურაძე ვ. დუალობა არასკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებში. - თბილისი: გამომცემლობა "მოდესტა". - 2000. - 170გვ.
12. სარჩიშელია რ., წუწუნავა თ. ოპტიმალურობის პირობები მათემატიკური პროგრამირების ამოცანებში. - თბილისი: გამომცემლობა "თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი". - 1988. - 58გვ.



13. ქადაგიძე კ. მათემატიკური პროგრამირება (ლექცია წრფივი პროგრამირების მათემატიკურ საფუძვლებში). - თბილისი: გამომცემლობა "თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი". - 1981. - 134გვ.
14. ჯიბლაძე ნ. ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანების გადაწყვეტა სიმძიმის ცენტრების მეთოდით // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ფონდის სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი "ინტელექტი". - № 3. - 1998. - გვ. 106-109.
15. ჯიბლაძე ნ., თოფჩიშვილი ა. სტატიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები. - თბილისი: მართვის სისტემების ინსტიტუტის გამომცემლობა. - 2001. - 422გვ.
16. ჯიბლაძე ნ., ლომთაძე ს. ალგებრულ და ტრანსცენდენტურ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა სიმძიმის ცენტრების მეთოდით // პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი "ინტელექტი". - 2 (10). - 2001. - გვ. 81-84.
17. ჯიბლაძე ნ., ლომთაძე ს. არაწრფივი დაპროგრამების არამონეკილი ამოცანების გადაწყვეტა სიმძიმის ცენტრების მეთოდით // სტუ-ს შრომები. - 1 (434). - 2001. - გვ. 80-84.
18. ჯღამაძე ო. მათემატიკური პროგრამირების გამოყენება საშენი მასალების რეწვევაში. - თბილისი: გამომცემლობა "საბჭოთა საქართველო". - 1967. - 91გვ.
19. Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов / Препринт. - М.: Институт проблем управления. - 1980. - 30с.
20. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах (Учебное пособие для вузов). - М.: Высшая школа. - 1986. - 319с.
21. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. - М.: Наука. - 1984. - 288с.
22. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М: Наука. - 1981. - 568с.
23. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. - М.: Наука. - 1990. - 312с.
24. Анциферов Е.Г. Методы оптимизации и их приложения. - Новосибирск: Наука (Сибирское отделение). - 1990. - 160с.
25. Аоки М. Введение в методы оптимизации. - М.: Наука. - 1977. - 344с.
26. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: РХД. - 2000. - 400с.
27. Арутюнов А.В. Условия экстремума. - М.: Факториал. - 1997. - 240с.
28. Ашманов С.А. Линейное программирование. - М.: Наука. - 1981. - 340с.

29. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. - М.: Наука. - 1991. - 448с.
30. Банди Б. Основы линейного программирования. - М.: Радио и связь. - 1989. - 176с.
31. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. - М.: Радио и связь. - 1988. - 128с.
32. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. - М.: Радио и связь. - 1984. - 248с.
33. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. - М.: Наука. - 1987. - 363с.
34. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. - М.: Мир. - 1991. - 368с.
35. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. - М.: Радио и связь. - 1987. - 400с.
36. Бондарева О.Н. Сходимость пространств с отношением и теоретико-игровые следствия // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1979. - № 3. - С. 84-92.
37. Вазан В.Н. Стохастическая аппроксимация. - М.: Мир. - 1972. - 275с.
38. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука. - 1988. - 552с.
39. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. - Иркутск: Издательство Иркутского университета. - 1994. - 147с.
40. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука. - 1969. - 576 с.
41. Вероятность и математическая статистика. Гл. редактор Прохоров Ю.В. - М.: Большая Российская энциклопедия. - 1999. - 910с.
42. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука. - 1969. - 110с.
43. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. - М.: Эдиториал УРСС. - 2001. - 238с.
44. Гельфанд И.М., Цейтлин М.Л. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации // ДАН СССР. - Т. 137, № 2. - 1961. - С. 295-298.
45. Геминтер В.И., Каган Б.М. Методы оптимального проектирования. - М.: Энергия. - 1980. - 160с.
46. Гильф Ф., Мьюррей У. Практическая оптимизация. - М.: Мир. - 1985. - 509с.
47. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. - М.: Мир. - 1991. - 240с.
48. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Советское радио. - 1966. - 534с.

49. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. - М.: Наука. - 1989. - 400с.
50. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. - М.: Прогресс. - 1966. - 600с.
51. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир. - 1988. - 440с.
52. Джибладзе Н.И. О нахождении координат экстремума функции многих переменных при использовании  $\Psi$ -преобразования // Сообщения АН ГССР. - Т. 59, № 3. - 1970. - С. 665-668.
53. Джибладзе Н.И., Вепхვადзе Т.М. Оптимальный расчет параметров ИС методом  $\Psi$ -преобразования // Электронная техника, серия 3, Микроэлектроника. Выпуск 1(67). - 1977. - С. 36-41.
54. Джибладзе Н.И., Иоселиани А.Н., Михалевич А.А., Салуквадзе М.Е. Оптимизация параметров конденсатора с воздушным охлаждением (задача с линейными ограничениями) // Известия АН БССР, серия физико-энергетических наук. - № 4. - 1970. - С. 48-55.
55. Дьяконов В. MATLAB-6. - СПб.: Питер. - 2001. - 540с.
56. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. - М.: Наука. - 1981. - 334с.
57. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - М.: Наука. - 1982. - 432с.
58. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. - М.: Наука. - 1983. - 335с.
59. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. - М.: Международный научно-исследовательский институт проблем управления. - 1990. - 112с.
60. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности. - М.: Международный научно-исследовательский институт проблем управления. - 1988. - 131с.
61. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Гарантии в линейных многокритериальных задачах при неопределенности / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1991. - 43с.
62. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Игровые линейно-квадратические задачи / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1992. - 64с.
63. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Метод решения одного класса многокритериальных линейных задач / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 28с.

64. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. - Тбилиси: Мецნიერება. - 1991. - 128с.
65. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в линейных многокритериальных задачах / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1991. - 38с.
66. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 139, № 3. - 1990. - С. 549-552.
67. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. - Тбилиси: Мецნიერება. - 1996. - 475с.
68. Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике. - М.: МГУ. Изд-во "Дело и сервис". - 1999. - 368с.
69. Занг В.Б. Синергетическая экономика. - М.: Мир, 1999. - 335с.
70. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. - М. - 1991. - 357с.
71. Зедгинидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. - М.: Наука. 1976. - 390с.
72. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. - М.: Мир. - 1963. - 176с.
73. Иоселиани А.Н., Михалевич А.А., Нестеренко В.Б., Салуквадзе М.Е. Методы оптимизации параметров теплообменных аппаратов АЭС. - Минск: Наука и техника. - 1981. - 139с.
74. Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. - М.: Наука. - 1994. - 305с.
75. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. - М.: Мир. - 1964. - 838с.
76. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука. - 1986. - 288с.
77. Карумидзе Г.В. Метод случайного поиска для решения многоэкстремальных задач // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. - № 6. - 1969. - С. 31-35.
78. Киласония Н.А., Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Об одном классификационном подходе к методам многокритериальной оптимизации / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 18с.
79. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. - М.: Наука. - 1988. - 280с.
80. Ковалев М.М., Топчишвили А.Л. Вопросы анализа и аппроксимации систем выпуклых неравенств на решетках. - Труды 33 международного научного коллоквиума (ГДР, г. Ильменау, октябрь 1988 г.). - Германия, Ильменау. - 1988. - С. 57-59.

81. Ковалев М.М., Топчишвили А.Л. Несобственные задачи выпуклой дискретной оптимизации // Труды Белорусского государственного университета, Серия: Физика-Математика-Механика. - № 1. - 1991. - С. 39-41.
82. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. - Таганрог: ТРГУ. - М.: Энергоатомиздат. - 1994 - 240с.
83. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. - М.: Наука. - 1969. - 368с.
84. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. - М.: Высшая школа. - 1976. - 352с.
85. Курицкий Б. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. - СПб: BHV -. - 1997. - 384с.
86. Кюнзи Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование. - М.: Советское радио. - 1965. - 300с.
87. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. - М.: Наука. - 1990. - 321с.
88. Лоусон Ч., Хенсен Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. - М.: Наука. - 1986. - 232с.
89. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. - М.: Просвещение. - 1977. - 321с.
90. Майсурадзе В.Г., Чернявский И.В. Аппроксимация парето-оптимальных решений / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 24с.
91. Мину М. Математическое программирование. - М.: Наука. - 1990. - 488с.
92. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - М.: Наука. - 1978. - 352с.
93. Мун Ф. Хаотические колебания. - М.: Мир. - 1990. - 312с.
94. Николлис Дж. Динамика иерархических систем. - М.: Мир. - 1989. - 488с.
95. Ногин В.Д. Двойственность в многоцелевом программировании // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1977. - № 1. - С. 254-258.
96. Ногин В.Д., Протодяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации. - М.: Высшая школа. - 1986. - 383с.
97. Норенков И.П., Маничев В.Б. Основы теории и проектирования САПР. - М.: Высшая школа. - 1990. - 335с.
98. Норенков И.П., Мулярчик С.Г., Иванов С.Р. Экстремальные задачи при схемотехническом проектировании в электронике. - Минск: Издательство БГУ. - 1976. - 240с.

99. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. - М.: Мир. - 2000. - 333с.
100. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. - М.: Наука. - 1983. - 384с.
101. Подиновский В.В. Методы многокритериальной оптимизации. Вып. 1. Эффективные планы. - М. - 1971.
102. Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В кн.: Многокритериальные задачи принятия решений. - М.: Машиностроение. - 1978. - С. 48-92.
103. Подиновский В.В. Общие антагонистические игры // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1981. - № 5. - С. 1140-1153.
104. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука. - 1982. - 254с.
105. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. - М.: Мир. - 1993. - 176с.
106. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. - М.: Эдиториал УРСС. - 2001. - 312с.
107. Пфанцгалль И. Теория измерений. - М.: Мир. - 1976. - 247с.
108. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. - Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет". - 2000. - 200с.
109. Растрингин Л.А. Системы экстремального управления. - М.: Наука. - 1974. - 630с.
110. Реклейтис Г., Рейвендран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Т.1. - М.: Мир. - 1986. - 350с.
111. Реклейтис Г., Рейвендран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Т.2. - М.: Мир. - 1986. - 320с.
112. Руа Б. К общей методологии выработки и принятия решений / В кн.: Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. - М.: Статистика. - 1979. - С. 123-167.
113. Салуквадзе М.Е. Задача векторной оптимизации в теории управления. - Тбилиси: Мецниереба. - 1975. - 197с.
114. Салуквадзе М.Е., Майсурадзе В.Г. К-седловые точки в антагонистической игре // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 141, # 3. - 1991. - С. 509-512.
115. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Несобственные многокритериальные задачи линейного программирования // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 133, № 1. - 1989. - С. 53-55.
116. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Об одном свойстве седловых точек по Слейтеру многокритериальных задач при неопределенности // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 144, № 2. - 1991. - С. 257-260.

117. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Об одном свойстве слабо эффективных решений многокритериальной задачи // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 140, № 1. - 1990. - С. 37-40.
118. Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л. Слабо эффективные решения последовательности многокритериальных задач // Сообщения Академии Наук Грузии. - Т. 141, № 3. - 1991. - С. 501-504.
119. Смейл С. Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса // Успехи математических наук. - 1972. - Т. 27, вып. 3 (165). - С. 177-187.
120. Современное состояние исследования операций / Под редакцией Моисеева Н.Н. - М.: Наука. - 1979.
121. Станные аттракторы. Сб. статей. Под редакцией Я. Синая. - М.: Мир. - 1981. - 253с.
122. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. - М.: Наука. - 1978. - 240с.
123. Сухарев А.Г. Минимаксные задачи в задачах целочисленного анализа. - М.: Наука. - 1989. - 299с.
124. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. - М.: Наука. - 1986. - 352с.
125. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т1. - М.: Мир. - 1991. - 360с.
126. Тимохов А. Введение в методы оптимизации. - М.: Издательство МГУ. - 1989. - 70с.
127. Топчишвили А.Л. К вопросу использования координатно-вогнутых функций для анализа разрешимости систем линейных диофантовых неравенств // Труды института систем управления Академии Наук Грузии "Теория и устройства систем автоматического управления". - Тбилиси: Мецниереба. - Т. XXVI:1. - 1988. - С. 26-31.
128. Топчишвили А.Л. О применении порядково-выпуклых функций для анализа разрешимости систем сепарабельных диофантовых неравенств // Сообщения Академии наук Грузии. - 1987. - Т. 127, № 1. - С. 49-52.
129. Топчишвили А.Л., Чернявский И.В. Задача сближения с N целевыми точками с учетом помех / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1992. - 18с.
130. Трояновский В.М. Математические моделирования в менеджменте. - М.: Русская деловая литература. - 1999. - 240с.
131. Уайльд Д.Дж. Методы поиска экстремума. - М.: Наука. - 1967. - 267с.
132. Федер Е. Фракталы. - М.: Мир. - 1991. - 254с.

133. Фиацко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. - М.: Мир. - 1972. - 240с.
134. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. - М.: Наука. -1978. - 351с.
135. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука. - 1970. - 707с.
136. Фрадков А.Л., Фомин В.Н. Адаптивное управление динамическими объектами. - М.: Наука. - 1981. - 423с.
137. Хакен Г. Сянергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. - М.: Мир. - 1985. - 423с.
138. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир. - 1975. - 534с.
139. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. - М.: Мир. - 1991. - 368с.
140. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. - М.: Мир. - 1985. - 280с.
141. Чичинадзе В.К. Об одном способе использования случайного поиска для определения экстремума функции нескольких переменных // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. - № 1. - 1967. - С. 111-120.
142. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. - М.: Наука. - 1983. - 256с.
143. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. - М.: ЮНИТИ - ДАНА. - 2000. - 367с.
144. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели. - М.: Дело. - 2000. - 440с.
145. Шор Н.З. Методы минимизации невыпуклых функций и их приложения. - Киев: Наукова Думка. - 1979. - 199с.
146. Шор Н.З., Степенко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. - Киев: Наукова Думка. - 1989. - 203с.
147. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. - М.: Наука. -1971. - 254с.
148. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: Теория, вычисления и приложения. - М.: Радио и связь. - 1992. - 504с.
149. Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир. - 1988. - 240с.
150. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений. - М.: Фудит, ЮНИТИ. - 1997. - 352с.
151. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. - М.: Наука. - 1969. - 424с.



152. Bazaraa M.S., Shetty C.M. and Sherali H.D. Nonlinear Programming: Theory and Applications. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1994.
153. Bazaraa M.S., Sherali H.D. and Shetty C.M. Nonlinear Programming - Theory and Algorithms. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1993.
154. Beasley J.E. Advances in Linear and Integer Programming. - Oxford University Press. - 1996.
155. Benayoun R., de Montgolfier J., Tergny J. and Laritchev O. Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM) // Mathematical Programming. - 1971. - Vol. 1, No. 3. - Pp. 366-375.
156. Benker H. and Kossert S. Remarks on Quadratic Optimal Control Problems in Hilbert Spaces // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. - Vol. 1, No. 3. - 1982. - Pp. 13-21.
157. Benson H.P. Finding an Initial Efficient Extreme Point for a Linear Multiple Objective Program // Journal of the Operational Research Society. - 1981. - Vol. 32, No. 6. - Pp. 495-498.
158. Bergström T.C. Maximal Elements of Acyclic Relations on Compact Sets // Journal of Economy Theory. - 1975. - Vol. 10, No. 3. - Pp. 403-404.
159. Bertsekas D.P. Nonlinear Programming. - Athena Scientific. - 1999.
160. Bertsimas D. and Tsitsiklis J. Introduction to Linear Optimization. - Athena Scientific. - 1997.
161. Bod P. On Closed Sets Having a Least Element // Optimization and Operations Research. - Springer-Verlag, Berlin. - 1976. - Pp. 23-24.
162. Bryson A.E. Dynamic Optimization. - Prentice-Hall. - 1998.
163. Chandru V. and Hooker J. Optimization Methods for Logical Inference. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1999. - 365p.
164. Coleman T.F. and Li Y. Large Scale Numerical Optimization. - SIAM Books. - 1990.
165. Cook W.J., Cunningham W.H., Pulleyblank W.R. and Schrijver A. Combinatorial Optimization. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1997.
166. Dantzig G.B. and Thapa M.N. Linear Programming 1: Introduction. - Springer Verlag. - 1997.
167. Dennis J.E., Jr. and Schnabel R.B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. (Classics in Applied Mathematics, Vol. 16.) - Prentice Hall. - 1996.
168. Du D.D., Pardalos P.M. and Du D.-Z. - Minimax and Applications. (Nonconvex Optimization and Its Applications, Vol 5). - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1995.

169. Du D. and Sun J. *Advances in Optimization and Approximation. (Nonconvex Optimization and Its Applications, Vol. 1).* - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1994.
170. Ecker J.G., Hegner N.S. and Kouda I.A. *Generating All Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs // Journal of Optimization Theory and Applications.* - 1980. - Vol. 30, No. 3. - Pp. 353-381.
171. Ecker J.G. and Kouda I.A. *Finding Efficient Points for Linear Multiple Objective Programs // Mathematical Programming.* - 1975. - Vol. 8, No. 3. - Pp. 375-377.
172. Ecker J.G. and Kouda I.A. *Finding All Efficient Extreme Points for Multiple Objective Linear Programs // Mathematical Programming.* - 1978. - Vol. 14, No. 2. - Pp. 249-261.
173. Ehrgott M. *Multicriteria Optimization.* - Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, Germany. - 2000. - 244p.
174. Ehrgott M. *Multiple Criteria Optimization - Classification and Methodology.* - Shaker Verlag, Aachen, Germany. - 1997.
175. Eschenauer H., Koski J. and Osyczka A. *Multicriteria Design Optimization.* - Springer-Verlag, Berlin. - 1990.
176. Evans J.P. and Steuer R.E. *A Revised Simplex Method for Multiple Objective Programs // Mathematical Programming.* - 1973. - Vol. 5, No. 1. - Pp. 54-72.
177. Evans J.P. and Steuer R.E. *Generating Efficient Extreme Points in Linear Multiple Objective Programming: Two Algorithms and Computing Experience // In: J.L. Cochrane and M. Zeleny (eds.). Multiple Criteria Decision Making.* - University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina. - 1973. - Pp. 349-365.
178. Fang S.-C. and Puthenpura S. *Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms.* - Prentice Hall. - 1993.
179. Fletcher R. *Practical Methods of Optimization.* - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1987.
180. Floudas C.A. *Deterministic Global Optimization: Theory, Algorithms and Applications.* - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1999.
181. Floudas C.A. and Pardalos P.M. *Recent Advances in Global Optimization. (Princeton Series in Computer Sciences)* - Princeton University Press. - 1992.
182. Fourer R. *Linear Programming Frequently Asked Questions.* - Optimization Technology Center of Northwestern University and Argonne National Laboratory. - 2000. - <http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html>.
183. Fourer R. *Nonlinear Programming Frequently Asked Questions.* - Optimization Technology Center of Northwestern University and Argonne National Laboratory. - 2000. - <http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/nonlinear-programming-faq.html>.

184. Fourer R., Gay D.M. and Kernighan B.W. AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming. - Duxbury Press. - 1993.
185. Gal T. A General Method for Determining the Set of All Efficient Solutions to a Linear Vectormaximum Problem // European Journal of Operational Research. - 1977. - Vol. 1, No. 5. - Pp. 307-322.
186. Gass S.I. Linear Programming: Methods and Applications. - International Thomson Publishing. - 1985.
187. Geoffrion A.M., Dyer J.S. and Feinberg A. An Interactive Approach for Multicriterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department // Management Science. - 1972. - Vol. 19, No. 4. - Pp. 357-368.
188. Gill P.E., Murray W. and Wright M.H. Numerical Linear Algebra and Optimization. - Addison-Wesley. - 1991.
189. Gill P., Murray W. and Wright M.H. Practical Optimization. - Academic Press. - 1982.
190. Gopfert A. and Nehse R. Vector Optimization. - B.G. Teubner, Leipzig, Germany. - 1990 (in German).
191. Greenberg H.J. A Computer-Assisted Analysis System for Mathematical Programming Models and Solutions: A User's Guide for ANALYZE. - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1993.
192. Gros C. Generalization of Fenchel's Duality Theorem for Convex Vector Optimization // European Journal of Operations Research. - 1979. - Vol. 2. - Pp. 368-376.
193. Guddat J., Guerra Vasquez F., Tammer K. and Wendler K. Multiobjective and Stochastic Optimization Based on Parametric Optimization. - Akademie-Verlag, Berlin, Germany. - 1985.
194. Haimes Y., Hall W. and Freedman H. Multiobjective Optimization in Water Resources Systems. - Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam. - 1975.
195. Held M., Wolfe P., Crowder H.P. Validation of Subgradient Optimization // Mathematical Programming. - No. 6. - 1974.
196. Hock W. Test Examples for Nonlinear Programming Codes. - Springer-Verlag. - 1981.
197. Horst R. and T. Hoang. Global Optimization: Deterministic Approaches. - Springer-Verlag. - 1992.
198. Horst R. and Pardalos P.M. Handbook of Global Optimization. (Nonconvex Optimization and Its Applications, Vol 2). - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1995.
199. Horst R., Pardalos P.M. and Thoai N.V. Introduction to Global Optimization. - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1995. - 332p.

200. Hooker J. Logic-Based Methods for Optimization. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 2000. - 488p.
201. Ignizio J.P. Goal Programming and Extensions. - Lexington Books, Lexington, Mass. - 1976.
202. Ignizio J.P. and Cavalier T.M.. Linear Programming. - Prentice Hall. - 1994.
203. Isermann H. Duality in Multiple Objective Linear Programming // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. - 1978. - Vol. 155. - Pp. 274-285.
204. Isermann H. The Enumeration of the Set of All Efficient Solutions for a Linear Multiple Objective Program // Operational Research Quarterly. - 1977. - Vol. 28, No. 3. - Pp. 711-725.
205. Isermann H. and Steuer R.E. Payoff Tables and Minimum Criterion Values over the Efficient Set. - College of Business Administration, University of Georgia, Athens, Georgia. - 1985.
206. Jahn J. Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Spaces. - Lang Verlag Frankfurt, Bern, New York. - 1986.
207. Keeney R.L. and Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. - Wiley, New York, New York. - 1976.
208. Kennington J.L. Algorithms for Network Programming. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1980.
209. Korhonen P. and Laakso J. A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem // European Journal of Operational Research. - 1985. - Vol. 24, No. 2. - Pp. 277-287.
210. Koski J. Multicriteria Truss Optimization. Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences (Edited by W. Stadler). - Plenum Press, New York. - 1988.
211. Lau H.T. A Numerical Library in C for Scientists and Engineers. - CRC Press. - 1994.
212. Lieberman E.R. Multi-Objective Programming in the USSR. - Academic Press Limited, London, UK. - 1991. - 368p.
213. Luenberger D.G. Linear and Nonlinear Programming. - Addison-Wesley Publishing Co. - 1984. - 491p.
214. Maisuradze V., Salukvadze M. and Topchishvili A. Investigation of Multicriteria Problems in Partially Ordered Spaces Based on Game Theory // Proceedings of A. Eliashvili Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences. - Modesta, Tbilisi, Georgia. - 1998. - Pp. 17-28.
215. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. - W.H. Freeman, N.Y. - 1982.
216. Marquardt D.W. An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters // SIAM J. - No. 11. - 1963. - Pp. 431-441.

217. Miettinen K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. (International Series in Operations Research and Management Science.) - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. - 1999.
218. Moré J.J. and Wright S.J. *Optimization Software Guide*. (Frontiers in Applied Mathematics, Vol 14). - Society for Industrial and Applied Mathematics. - 1993.
219. Mukherji A. The Existence of Choice Functions // *Econometrica*. - 1977. - Vol. 45, No. 4. - Pp. 889-894.
220. Murtagh B. *Advanced Linear Programming: Computation and Practice*. - McGraw-Hill. - 1981.
221. Nash S. and Sofer A. *Linear and Nonlinear Programming*. - McGraw-Hill. - 1996.
222. Nazareth J.L. *Computer Solution of Linear Programs*. - Oxford University Press, New York and Oxford. - 1987.
223. Nemhauser G.L. and Wolsey L.A. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons, New York, NY. - 1988.
224. Nering E.D. and Tucker A.W. *Linear Programs and Related Problems*. - Academic Press. - 1993.
225. Nocedal J. and Wright S.J. *Numerical Optimization* (Springers Series in Operations Research). - Springer Verlag. - 1999.
226. Parker T.S., Chua L.O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. - Springer-Verlag, N.Y. - Berlin - London. - 1992. - 331p.
227. Peitgen H.O., Jürgens H., Soupe D. *Chaos and Fractals*. - Springer-Verlag, N.Y. - London - Paris. - 1992. - 505p.
228. Pinter J.D. *Global Optimization in Action: Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications*. - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1996.
229. Polak E., Ribiere G. Note sur la Convergence de Methods de Directions Conjugues // *Rev. Fr. Inform. Rech. Operat.* - No. 16. - 1969. - Pp. 35-43.
230. Roos C., Vial J.-Ph and Terlaky T. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach*. - John Wiley and Sons, Chichester. - 1997. - 508p.
231. Saigal R. *Linear Programming: A Modern Integrated Analysis*. - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1995.
- ✓ 232. Salukvadze M.E. *Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory*. - Academic Press, New York, New York. - 1979. - 219p.
233. Salukvadze M.E. and Bardin A. *Vector-Valued Risk in Multicriteria Problems // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (R. Caballero, F. Ruiz, R.E. Steuer (eds.). *Advances in Multiple Objective and Goal programming*. Proceedings of the 2nd International Conference on Multi-Objective Programming

- and Goal Programming (Torrimolinos, Spain, May 1996)). - Springer, Germany. - Vol. 455. - 1997.- Pp. 235-244.
234. Salukvadze M.E. and Topchishvili A.L. Improper Linear Programming Problems with Vector-Valued Criteria // Abstracts of the International Conference "Multi-criteria Problems of Mathematical Programming" (Jalta, USSR, October-November 1988). - Institute of Cybernetics, Kiev, Ukraine. - 1988. - P. 16.
235. Salukvadze M.E. and Topchishvili A.L. Insoluble Multi-criteria Linear Programming Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 61, No. 3. - 1989. - Pp. 487-491.
236. Salukvadze M.E. and Topchishvili A.L. Some Properties of Multicriteria Optimization Problems // Proceedings of the 10th International Conference on Multiple Criteria Decision Making (Taipei, Taiwan, July 1992). - Vol. IV. - Taipei, Taiwan, R.O.C.- 1992. - Pp. 77-86.
237. Salukvadze M. and Topchishvili A. Static Multicriteria Optimization Problems in Conditions of Uncertainty // Proceedings of A. Eliashvili Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences. - Modesta, Tbilisi, Georgia. - 1997. - Pp. 15-22.
238. Salukvadze M.E. and Topchishvili A.L. Weakly-Efficient Solutions of Limiting Multicriteria Optimization Problems // INFOR. - Vol. 30, No.2. - 1992. - Canada. - Pp. 148-159.
239. Salukvadze M.E. and Topchishvili A.L. Weakly-Efficient Solutions of Limiting Multicriteria Optimization Problems // Multiple Criteria Decision Making: Theory, Computation and Applications in Business, Industry and Government (eds. A. Goicoechea, L. Duckstein, S. Zionts). Proceedings of the 9-th International Conference (Fairfax, Virginia, USA, August 1990). - Springer-Verlag. - 1992. - Pp. 373-386.
240. Salukvadze M.E. and Topchishvili A.L. Weakly-Efficient Solutions of Limiting Multicriteria Optimization Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 77, No. 2. - 1993. - Pp. 373-386.
241. Salukvadze M.E. and Zhukovskiy V.I. Sufficient Conditions in the Vector-Valued Maximin Problems // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (G. Fandel, T. Gal (eds.). Multiple Criteria Decision Making. Proceedings of the 12th International Conference (Hagen, Germany, June 1995)). - Springer, Germany. - Vol. 448. - 1997.- Pp. 74-82.
242. Sawaragi Y., Nakayma H. and Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization. - Academic Press, New York, New York. - 1985.
243. Schittkowski K. Nonlinear Programming Codes: Information, Tests, Performance. - Springer-Verlag. - 1980.

244. Schittkowski K. More Test Examples for Nonlinear Programming Codes. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 282). - Springer Verlag. -1987.
245. Schrienderjans M.J. Goal Programming: Methodology and Applications. - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1995.
246. Schrage L. Optimization Modeling with LINDO. - Duxbury Press. - 1997.
247. Schrijver A. Theory of Linear and Integer Programming. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1986.
248. Smale S. Global Analysis and Economics, V. Pareto Theory with Constraints // Journal of Mathematical Economics. -1974. - Vol.1. - Pp. 213-221.
249. Statnikov R.B. and Matusov J.B. Multicriteria Optimization and Engineering. - Chapman and Hall, New York. - 1995.
250. Steuer R.E. An Interactive Programming Multiple Objective Linear Programming Procedure // TIMS Studies in the Management Sciences. - 1977. - Vol. 6. - Pp. 225-239.
251. Steuer R.E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. - John Wiley and Sons, New York, New York. - 1986. - 546p.
252. Steuer R.E. and Wood E.F. A Multiple Objective Markov Reservoir Release Policy Model. - College of Business Administration, University of Georgia, Athens, Georgia. - 1986.
253. Taha H.A. Operations Research: An Introduction. - 1996. - 916p.
254. Tanaka T. Approximately Efficient Solutions in Vector Optimization // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. - Vol. 5. - 1996.
255. Tanaka T. Minimax Theorems and Saddle Point Theorems in Vector Optimization // Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making (Taipei, Taiwan, July 19-24, 1992). - Vol. III. - Taipei, Taiwan, R.O.C. - 1992. - Pp. 341-350.
256. Tanaka T. On Cone-Extreme Points in  $R^n$  // Science Reports of Niigata University. - Vol. 23. - 1987. - Pp. 13-24.
257. Tanaka T. Two Types of Minimax Theorems for Vector-Valued Functions // Journal of Optimization Theory and Applications. - Vol. 68, No. 2. - 1991. - Pp. 321-334.
258. Tanino T. and Sawaragi Y. Conjugate Maps and Duality in Multiobjective Optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1980. - Vol. 31, No. 4. - Pp. 473-499.
259. Tanino T. and Sawaragi Y. Duality Theory in Multiobjective Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1979. - Vol. 27, No. 4. - Pp. 509-529.

260. Thie P.R. An Introduction to Linear Programming and Game Theory. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1988.
261. Topchishvili A.L. Conic Optimal Solutions for Multicriteria Problems under Uncertainties // Abstracts of the Seventh Workshop of the DGOR Working Group "Decision Theory and Decision Support" (Bad Liebenzell, Germany, March 1997). - Hohenheim, Germany. - 1997. - P. 14.
262. Topchishvili A.L. Introduction into Static Linear Optimization. - Technical University, Tbilisi, Georgia. - 2001. - 304p.
263. Topchishvili A.L. Limiting Solution Set Structure for Converging Multiple Objective Dynamic Problems Sequence // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (G. Fandel, T. Gal (eds.). Multiple Criteria Decision Making. Proceedings of the 12th International Conference (Hagen, Germany, June 1995)). - Springer, Germany. - Vol. 448. - 1997. - Pp. 103-111.
264. Topchishvili A.L. and Beltadze G.N. Multicriteria Noncooperative Games with Strictly Ordered Criteria // A. Göpfert, J. Seeländer, Chr. Tammer (eds.). Methods of Multicriteria Decision Theory. Proceedings of the 6-th Workshop of the DGOR Working Group "Multicriteria Optimization and Decision Theory" (Alexisbad (Harz), Germany, March 1996). - Verlag Hänsel-Hohenhausen, Egelbach | Frankfurt | Washington. - 1997. - Pp. 69-86.
265. Topchishvili A.L., Maisuradze V.G. and Salukvadze M.E. Connection of Multicriteria Problems under Uncertainties and Antagonistic Games with Vector-Valued Payoff Function / Preprint. - Institute of Control Systems of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi, Georgia. - 1996. - 26p.
266. Vanderbei R.J. Linear Programming: Foundations and Extensions. - Kluwer Academic Publishers, Boston. - 1996.
267. White D.J. Optimality and Efficiency. I // European Journal of Operations Research. - 1980.- Vol. 4. - Pp. 346-355.
268. White D.J. Optimality and Efficiency. II // European Journal of Operations Research. - 1980.- V. 6. - Pp. 426-427.
269. Wiecek M. Multicriteria Optimization / Lecture Notes. - University of Kaiserslautern, Germany. - 1995.
270. Williams H.P. Model Building in Mathematical Programming. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1993.
271. Wright S.J. Primal-Dual Interior-Point Methods. - SIAM Publications. - 1997.
272. Ye Y. Interior Point Algorithms: Theory and Analysis. - John Wiley and Sons, New York, NY. - 1997.



273. Yu P.L. Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives // *Journal of Optimization Theory and Applications*. - 1974. - Vol. 14, No. 3. - Pp. 319-377.
274. Yu P.L. *Multiple-Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*. - Plenum, New York, New York. - 1985.
275. Yu P.L. and Zeleny M. *The Techniques of Linear Multiobjective Programming* // *RAIRO*. - 1974. - Vol. 8, No. V-3. - Pp. 51-71.
276. Yu P.L. and Zeleny M. *The Set of All Non-Dominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method* // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. - 1975. - Vol. 49, No. 2. - Pp. 430-468.
277. Zionts S. and Wallenius J. *An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem* // *Management Science*. - 1976. - Vol. 22, No. 6. - Pp. 652-663.
278. Zionts S. and Wallenius J. *An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Nonlinear Utility Functions* // *Management Science*. - 1983. - Vol. 29, No. 5. - Pp. 519-529.
279. Zionts S. and Wallenius J. *Identifying Efficient Vectors: Some Theory and Computational Results* // *Operations Research*. - 1980. - Vol. 28, No. 3. - Pp. 785-793.
280. Zhukovskiy V.I. and Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin*. - Academic Press, New York, New York. - 1993. - 404p.

# საბნობრივი საქმიანობები

## ა

ალგორითმები ვექტორული მაქსიმიზაციის - 429

ალგორითმი

GDF - 467

STEM - 458

Z-W - 474

ამონახსნი

ბაზისური - 47

არაგადაგვარებული - 48

გადაგვარებული - 48

დასაშვები - 37

ფუნქტორი - 375, 380

ნიუმან-ჰორგენშტერნის - 367

ოპტიმალური - 17, 37

სუსტად ფუნქტორი - 375, 380

ამოცანა

არაგადაგვარებული - 61

არასაკუთრივი ოპტიმიზაციის - 5, 102

არაწრფივი ოპტიმიზაციის - 4

ამოზნექილი დაპროგრამების - 24, 273

არაამოზნექილი დაპროგრამების - 24

არაწრფივი დაპროგრამების - 23

ატომური ელექტროსადგურის თბოგადამცემი

აპარატების ოპტიმალური დაპროექტების - 331

გამოყენებითი

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის - 313

მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის - 505

გეომეტრიული დაპროგრამების - 24

დისკრეტული

დაპროგრამების - 4

ოპტიმიზაციის - 4

დუალური

ერთკრიტერიულ ოპტიმიზაციაში - 81

მრავალკრიტერიულ ოპტიმიზაციაში - 504

ელექტრონული სქემების ოპტიმალური დაპროექტების - 313

ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის - 5

ვექტორული ოპტიმიზაციის - 354

ინდივიდუალური მეწარმე და საბაზრო ეკონომიკა - 513

კაპიტალდაბანდების ხარჯთაღრიცხვის  
შუღვნა - 355

კვადრატული დაპროგრამების - 23,  
275

მათემატიკური დაპროგრამების - 22

მარკო პოლოს ქარაენის - 55

მეორადი - 81

მეტალურგიული წარმოების დაგეგმვის  
- 505

მთელირიცხვა

დაპროგრამების - 23

ოპტიმიზაციის - 4

მოგულებების - 171

მრავალკრიტერიული

მაქსიმიზაციის - 374

მინიმიზაციის - 374

ოპტიმიზაციის - 5

ბულის - 362

დისკრეტული - 362

მთელირიცხვა - 362

სასრული - 362

ჩაზნექილი - 362

წრფივი - 362

ნავთობის გაწმენდის დაგეგმვა - 354

პირობითი ოპტიმიზაციის - 3, 22

საკუთრივი ოპტიმიზაციის - 5, 102

სატრანსპორტო - 117

ლია ტიპის - 118

ჩაკეტული ტიპის - 118

სატყეო მეურნეობის მართვა - 355

სოხისების, შებოლილი ძეხვების და  
სალიამისათვის ნარევის

მოზზადება - 356

ტრანსპორტირება - 356

უპირობო ოპტიმიზაციის - 3, 22

ფასიანი ქაღალდების პორტფელის

ამორჩევა - 355

ფირმაში სარევიზიო სამსახურის ფორ-

მირება - 356

ფუნქციის ანალიზური გავრცელების -  
573

შეუღლებული - 81

წარმოების დაგეგმვის - 9, 13, 335, 338, 355  
წრფივი

დაპროგრამების - 23, 34

ზოგადი - 5, 34

კანონიკური - 36

სტანდარული - 35

სიმეტრიული - 35, 112

ობტიმიზაციის - 4

წყალსაცავების დონის კლების მართვა - 356

აპლიკატი - 570

აპროქსიმაცია - 236

პარაბოლური - 237

არე

დასაშვები - 16

მიზიდულობის ატრაქტორის - 527

არეკლა - 192

არაწრფივ განტოლებათა სისტემა -

ასახვა პუანკარეს - 518, 524

ატრაქტორი - 527

უცნაური - 529

აქსიომა პარეტოს

"სუსტი" - 376

"ბლიერი" - 375

## ბ

ბაზისი

გადაბმული - 434

ეფექტური - 432

მოსაზღვრე - 433

საყრდენი გემის - 60

ხელოვნური - 69

ბირთვი - 367

## გ

განზომილება

ენტროპიული - 547

ფრაქტალური - 539, 547

ჰაუსდორფის - 547

ატრაქტორის - 543

გაჭიმვა - 193

გემა - 37

არაგადაგვარებული - 61

ეპქტორულ-ობტიმალური - 387

ობტიმალური - 37

საყრდენი - 60

გლობალური

ექსტრემუმი -

მინიმუმის წერტილი -

გრადიენტი - 20

არაარსებითი - 399

არსებითი - 399

## დ

დალაგება

შეკერი - 364

ნაწილობრივი - 364

დაპროგრამება - 1

მათემატიკური - 4

წრფივი - 1, 34

მთელიცხვა - 92

სოფლის მეურნეობაში - 14

დაფარვა თავსებადი - 116

დაყოფა სიმრავლის - 364

დაცვამა პარამეტრული - 419

დეკლარა - 81

მრავალკრიტიკულ ობტიმიზაციაში - 487

წრფივ დაპროგრამებაში - 81

d-აპროქსიმაცია - 109

## ე

ელემენტი

არაშედარებადი - 363

ობტიმალური - 366

საკუთესო - 366

შედარებადი - 363

წამყვანი - 41, 67

ეკვივალენტობა - 364

ექსტრემუმი

აბსოლუტური - 17

გლობალური - 17

ლოკალური - 17

## ვ

ვექტორი

პირობის - 37

შეზღუდვების - 37

წონითი - 391

## ზ



მატრიცა

- გაიშვიათებული - 118
- თამაშის - 123
- ბოგების - 123
- ტექნოლოგიური - 102
- ფარდობითი შეფასებების - 432
- პესეს - 20

მაქსიმიზირება

- ლიაპუნოვის - 530
- მატრიცის მახასიათებელი - 533

მდგრადობა

მეთოდები

- ასოლუტური ექსტრემუმის ძებნის - 227
- ამოზნეული დაპროგრამების - 33, 271
- არამოზნეული დაპროგრამების - 33, 304
- არაწრფივი დაპროგრამების - 33
- გლობალური ექსტრემუმის ძებნის - 32
- გრადიენტული - 199, 281
- დეტერმინირებული ძებნის - 32
- დისკრეტული აპროქსიმაციის - 115
- ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის - 32
- დეტერმინირებული - 138
- ეფექტური კუთხის წერტილების პოვნის - 438
- ექსტრემუმის ძებნის - 32
- კვადრატული დაპროგრამების - 33
- ლოკალური ექსტრემუმის ძებნის - 32
- მათემატიკური დაპროგრამების - 32
- მეორე რიგის დეტერმინირებული - 33, 205
- მრავალგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის - 32
- დეტერმინირებული - 186
- სტოქასტიკური - 216
- შემთხვევითი - 216
- ნულოვანი რიგის დეტერმინირებული - 33, 186
- ოპტიმიზაციის სტოქასტიკური - 216
- პირველი რიგის დეტერმინირებული - 33, 199
- პირობითი ოპტიმიზაციის - 262
- პოლინომიალური აპროქსიმაციის - 157
- რეგულარული ძებნის - 32
- საჯარიმო ფუნქციის - 287
- სტოქასტიკური - 32, 216
- სტოქასტიკური აპროქსიმაციის ტიპის - 226
- სუბგრადიენტული - 212
- უპირობო ოპტიმიზაციის - 138
- შემთხვევითი ძებნის - 32, 216
- შუალედული მიმართულებების -

- ცვლადი მეტრიკის - 209
- წრფივი დაპროგრამების - 33
- ძებნის - 139

კომბინირებული

მეთოდი

- აწონილ ვამთა - 439
- წონების წერტილოვანი შეუასებით - 391
- ქვამოცანა-ტესტის გამოყენებით - 440
- ბენსონის - 445
- ბოლცანოს - 166
- ბროიდენ-ფლოიბერ-გოლდფარბ-შენის - 210
- გადარჩევის - 142
- გაუს-ზეიდელის - 186
- გვემის თანდათანობითი გაუმჯობესების (სიმპლექს-მეთოდი) - 60, 63
- გელფანდ-ციტილინის - 213
- გომორის - 97
- გრადიენტის პროექციის - 281
- გრადიენტული მუდმივი ბიჯით - 199
- გრავიკული წრფივი დაპროგრამების აპოკანის ამოხსნის - 50
- დევიდონ-ფლოიბერ-პუელის - 210
- დისკრეტული აპროქსიმაციის - 115
- დიხტომის - 148
- ეკერ-კუადას - 444
- ეროუ-პურეციის - 298
- თანდათანობითი მიახლოების - 288
- იდეალური მანძილის მინიმიზაციის - 386
- ზაინც-ვალენიუსის - 473
- კვადრატული ინტერპოლაციის - 157
- კომბინირებული - 304
- კომპლექსური - 307
- კოორდინატული დაშვების - 186
- კუბური ინტერპოლაციის - 160
- ლაგრანჟის
  - მამრავლთა - 267
  - მოდიფიცირებული ფუნქციის - 293
- ლექსიკოგრაფიული მაქსიმიზაციის - 440
- ქვამოცანა-ტესტის გამოყენებით - 444
- მარკვარდტის - 207

მინიმალური ღირებულების - 119  
 მინიმუსი - 124  
 მკვეთა - 167  
 მოკეთის - 94  
 მონტე-კარლოს - 234  
 ნელდერ-შიდის - 192  
 ნოუტონის - 205  
 კომპლექსური პოლინომებისათვის - 559  
 მოდიფიცირებული - 206  
 ნამდვილი განტოლებებისათვის - 565  
 ნოუტონ-რაფსონის - 164, 569  
 ოქროს კეთის - 144  
 პაუელის - 188  
 პოლაკ-რიბერის - 202  
 ჟორდან-გაუსის - 40  
 რელაქსაციის - 186  
 საზღვრებისა და განშტოების - 101  
 სივრცის დილატაციის - 213  
 სიმპლექს-მეთოდი - 188  
 სიმპიზის ცენტრების - 233  
 სტატისტიკური ცდების - 235  
 უსწრაფესი დაშვების - 200  
 უმცირეს კვადრატთა - 170  
 უსწრაფესი დაშვების - 200  
 ფიაკო-მაკკორმიკის - 292  
 ფიბონაჩის - 151  
 ფლეთერ-რევისის - 202  
 ფრანკ-უელფის - 282  
 შეზღუდვათა რანჟირების - 114  
 შემთხვევითი  
 გაღარჩევის - 227  
 შესაძლო მიმართულებების - 281  
 შეუღლებული მიმართულებების - 202  
 ძებნა  
 "არაწრფივი ტაქტიკით" - 217  
 სტატისტიკური გრადიენტის მიხედვით - 217  
 "წრფივი ტაქტიკით" - 216  
 ძებნის  
 არის თანდათანობითი შემცირების - 227  
 იტერაციული - 228  
 კომპინირებული - 230  
 ხელოვნური ბაზისის - 69  
 ჯოფრიონ-დაიერ-ფაინბერგის - 464  
 ჰუკი-ჯეისის - 195  
 e-შეზღუდვების - 420

GDF - 464  
 STEM - 457  
 Z-W - 473  
 Ψ-გარდაქმნის - 241  
 მიმართულება  
 დასაშვები - 30  
 შესაძლო - 281  
 შესაფერისი - 281  
 მინორი ბაზისური - 47  
 მნიშვნელობა  
 იდეალური - 387  
 უტოპიური - 387  
 მოგება - 123  
 მოდელი პირდაპირი აპროქსიმაციის - 109  
 მოდელები სტატისტიკური ოპტიმიზაციის - 6  
 მოდული

კომპლექსური  
 რიცხვის - 570  
 ფუნქციის - 570  
 მოკვეთა წესიერი - 98  
 მოძრაობა  
 რეგულარული - 527  
 ქაოსური - 527  
 მრავალკუთხედი ამონახსნთა - 39  
 მრავალწახნაგა ამონახსნთა - 37, 39, 40  
 მსგავსება - 548  
 მულტიპა ფიგენბაუმის უნივერსალური - 577

**6**

ნაწილი  
 მთელი - 97  
 ფარდობითი შიგა - 401  
 წილადი - 97  
 ნორმა შენაცვლების ზღვრული - 396  
 ნული ფუნქციის - 570  
 მარტივი - 572  
 ჯერადი - 572

**მ**

ობიექტი  
 მაქსიმალური - 367  
 მინიმალური - 367  
 უარესი - 367  
 ოპტიმალობა საყრდენი გეგმის - 62

ობტიმიზაცია

- ერთკრიტიკული - 16, 22
- კომპლექსურცვლადიან სისტემებში - 516
- მრავალკრიტიკული - 354
- სტატიკური - 3, 6

კ

პირობა

- ბალანსის - 118
- დალაშქრ-ეილერის - 571
- კოში-რიმანის - 571
- ნულ-ვექტორული - 398
- სლიტერის რეგულარობის - 27

პირობები

- კენ-ტაკერის - 29
- ობტიმილობის აუცილებელი და საკმარისი - 25, 26

პოზიციები - 24

პრინციპი  $\Psi$ -გარდაქმნის - 230

პრობლემა კელის - 559

პროცედურა

- კიფერ-ვოლფოვიცის - 223
- ლოკალურად შესაფერისი წონების განსაზღვრის - 465
- რობინს-შონროს - 223

პროცედურები

- ინტერაქტიული - 455
- სტოქასტიკური აპროქსიმაციის - 218

რ

რელუქცია - 193

რელიეფი ფუნქციის - 570

რიგი ნულოვანი - 572

რიცხვი

- კომპლექსური - 569
- შეუღლებული - 570
- ფიბონაჩის - 151

ს

საზღვარი ფარდობითი - 402

სიმპლექს-მეთოდი - 60, 63

სიმრავლე

- ამონხეილი - 18, 38
- გარეგნულად მდგრადი - 367, 380
- დასაშვებ ამონახსნების - 16

დასაშვები - 16, 102

ზემოდან ჩაკეტილი - 369

კანტორის - 545

კოხის - 543

მანდელბროტის - 553, 555

მიღწეადი შუფასების - 358

ფულიას - 553

შეესებული - 553

შინაგანად მდგრადი - 367

სისტემა

არათავსებადი - 38

არაწრფივ განტოლებათა - 346

ღისიატორი ღინამიკური - 527

თავსებადი - 38

კომპლექსურცვლადიანი - 516

ჰამილტონის - 521

სიტუაცია კონფლიქტური - 122

სეცტი მიმმართველი - 66

სკალა

ინტერვალთა - 360

რიგობითი - 360

ფარდობის - 360

ქულებიანი - 361

სკეილინგი - 548

სტრატეგია - 123

მაქსიმიზური - 124

მინიმაქსური - 124

ობტიმალური - 123

სუფთა - 123

შერეული - 126

სტრიქონი მიმმართველი - 67

სუბგრადიენტი - 212

სუბდიფერენციალი - 212

ტ

ტევალობა - 547

ტესტი სტოიერ-ჟეანისი - 446

უ

უპირატესობა - 375, 376

ფ

ფასი თამაშის - 124

ზედა - 124

ჰედა - 124

ფესვი - 557, 575

ფორმა

კვადრატული - 274, 346

ლაღებთად

განსაზღვრული - 275

ნახევრადგანსაზღვრული -275

ურყფითად

განსაზღვრული - 275

ნახევრადგანსაზღვრული -275

ფრაქტალი - 539

ფრჩხილი ჰუასონის - 521

ფუნქცია

ამორჩევის - 370

ანალიზური - 571, 572

არაკლებადი - 368

ამოზნეილი - 19, 271

გოლომორფული - 571

ეულის - 250

ზრდადი - 368

იზონ-ფენტონის - 250

ინვოლუციაში მყოფი - 521

კომპლექსური ცვლადის - 570

ლაგრანჟის - 273

განზოგადებული - 27

ვექტორული - 501

მოდულიცირებული - 293

მაკომუტირებული - 521

მერომორფული - 575

მიზნის - 16, 37

აწონილი ჯამის - 391

შედგენილი - 391

მონოტონური - 18

რეკულარული - 571

როზენბროკის - 251

საოპტიმიზაციო - 16

სარგებლიანობის - 369

საჯარიმო - 287

უნიმოდალური - 18

ფასეულობის - 369

შერჩევის - 363

ჩაზნეილი - 19, 271

ჰიმელებლუს - 351

## ჟ

შედარება მეთოდების - 249

შეზღუდვა

604

არააქტიური (გაუჯერებელი) - 30

აქტიური (გაჯერებული) - 30

ლირექტიული - 114

ფაკულტატიური - 114

სავალდებულო - 114

შეკუმშვა - 193

შეფასება

ეფექტური - 375, 378

პარეტო-ოპტიმალური - 378

პარეტოს მიხედვით ოპტიმალური - 378

პარეტოს მიხედვით სუსტად ოპტი-  
მალური - 378

სუსტად ეფექტური - 375, 378

## ჩ

ჩანაცვლება ეფექტური - 433

## ც

ცვლადი

არაბაზისური - 47

ეფექტური - 433

ბაზისური - 47

თავისუფალი - 47

ხელოვნური - 69

ცენტრი - 557, 575

ციკლი ზღვრული - 528

ცხრილი

მოგებათა - 450

სიმპლექსური - 65, 66

ეფექტური - 446

## ფ

წაგება - 123

წახნაგი - 410

ეფექტური - 412

მაქსიმალური - 412

ეფექტური - 412

წერტილი

აბსოლუტური მინიმუმის - 17

განსაკუთრებული - 572

გლობალური მინიმუმის - 17

ეფექტური - 429

კუთხის - 38

ლოკალური

მაქსიმუმის - 17



- მინიმუმის - 17
- ოპტიმუმის - 17
- მისურვევის - 557
- მოძივნავე - 70
- რეგულარული - 572
- სტაციონარული - 25
- უნაგირა - 27, 124
- წესიერი - 572
- C-ექსტრემალური - 491
- წესი თამაშის - 123
- წინაფრაქტალი - 543
- წვეილი
  - ღუალური - 82
  - ორადული - 82
  - უნაგირა - 487
  - სუსტი - 489
  - სუსტი-ძლიერი - 488
  - ძლიერი - 488
  - ძლიერი-სუსტი - 488

**ს**

- ხალიჩა სერპინსკის - 546

**ჟ**

- ჯერადობა ფუნქციის - 572

UDC 519.6

**Almaskhan Gugushvili, Alexander Topchishvili, Mindia Salukvadze,  
Vakhtang Chichinadze, Nodar Jibladze**

**OPTIMIZATION METHODS**

(in Georgian)

This is a textbook in optimization methods. Optimization problems in Euclidean finite-dimensional spaces are considered. Optimization methods for static single objective and multiple criteria problems are widely discussed. Among them determined and stochastic, local and global search methods for single-dimensional and multi-dimensional unconstrained optimization, linear, nonlinear, convex and nonconvex programming methods, fundamental problems of vector optimization are investigated. Optimization problems under uncertainty and for systems with complex variables are considered as well.

The theoretical material is accompanied by numerical decision procedures and results of computer experiments of many practical examples and problems, so that the reader can understand in a better way and adopt the logical structure of different methods.

The textbook mainly is oriented to students, master students and PhD students of technical universities. It will be useful for scientists, researchers, engineers and economists too.

Tbilisi, Georgia

Publishing House "Technical University"

2002

УДК 519.6

**Алмасхан Шотаевич Гугушвили, Александр Леванович Топчшвили,  
Миндия Евгеньевич Салуквадзе, Вахтанг Константинович Чичинадзе,  
Нодар Илларионович Джибладзе**

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

(на грузинском языке)

Книга является учебником по курсу "Методы оптимизации". Рассматриваются задачи оптимизации в конечномерных евклидовых пространствах. Исследуются различные методы решения однокритериальных и многокритериальных задач статической оптимизации. Среди них детерминированные и стохастические, локальные и глобальные методы поиска для одномерных и многомерных задач безусловной оптимизации, методы линейного, нелинейного, выпуклого и невыпуклого программирования, фундаментальные проблемы векторной оптимизации. Также рассмотрены задачи оптимизации в условиях неопределенности и для систем с комплексными переменными.

Для лучшего понимания и освоения логической структуры методов теоретический материал сопровождается численными процедурами решения и результатами компьютерных экспериментов целого ряда практических примеров и задач.

В основном, учебник ориентирован на студентов, магистров и аспирантов технических университетов. Он также окажется полезным для научных работников, инженеров и экономистов.

Грузия, Тбилиси

Издательство "Технический университет"

2002

ალმასხან გუგუშვილი  
ალექსანდრე თოფჩიშვილი  
მინდია სალუქვაძე  
ვანტანგ ჭიჭინაძე  
ნოდარ ჩიბლაძე

## ოპტიმიზაციის მეთოდები

სახელმძღვანელო

კომპიუტერული დიზაინი: გ. თოფჩიშვილი

ტექნიკური რედაქტორები: თ. იმედაძე, ო. კოტრიკაძე

კორექტორები: მ. გიორგაძე, ნ. მჭედლიშვილი

იბეჭდება ავტორების მიერ წარმოდგენილი სახით.

გადაეცა წარმოებას 01.02.2002. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.02.2002.  
ბეჭდვა ოფსეტური. ქალაქის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი  
38,00. საალრიცხო-საგამომცემლო თაბახი 30. ტირაჟი 100 ეგზ. შეკვეთა №

გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი"  
თბილისი, კოსტავას 77

სტუ-ს სტამბა, თბილისი, კოსტავას 75