ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კობა გელაშვილი
დავით დევაძე
ბექან ღვაბერიძე
ლელა ალხაზიშვილი
ფრიდონ დვალიშვილი

მათემატიკური პროგრამირება

თბილისის
უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

სახელმძღვანელო წარმოადგენს იმ კურსის გადამუშავებულ და შევსებულ ვარიანტს, რომელსაც ავტორები წლების განმავლობაში კითხულობენ თბილისის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის და ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტებში. სახელმძღვანელოში შესულია მეთოდები, რომლებსაც გარდა თეორიულისა, გააჩნიათ პრაქტიკული ღირებულება და რომელთა ეფექტიანობა აღიარებულია.

რედაქტორი პროფ. ა. გამყრელიძე

რეცენზენტები: ფიზ.-მათ მეცნიერებათა კანდიდატი
გ. ბოლოთაშვილი

ფიზ.-მათ მეცნიერებათა კანდიდატი
ზ. მაჩაიძე

ISBN 978-9941-13-121-9

სარჩევი

შესავალი

ადამიანის მოღვაწეობის ყველა სფეროში წარმოიშობა მიზნის მიღწევის არსებული საშუალებებიდან საუკეთესოს, ანუ ოპტიმალურის არჩევის პრობლემა. ასეთი ტიპის ამოცანები პირველად ანტიკურ ეპოქაში დაისვა და ისინი მათემატიკის განვითარების მთელი ისტორიის მანძილზე იპყრობდნენ ყურადღებას და ინარჩუნებდნენ აქტუალობას. მათემატიკის ენაზე ოპტიმალურის არჩევა დაიყვანება მაქსიმუმის ან მინიმუმის, ანუ ექსტრემუმის პოვნაზე. ამიტომ, ასეთ ამოცანებს მათემატიკაში ექსტრემალური ამოცანები ეწოდება. არსებობს ექსტრემალური ამოცანები, რომლებსაც არავითარი გამოყენებითი შინაარსი არ გააჩნიათ და მხოლოდ აბსტრაქციის შედეგს წარმოადგენენ. ამათგან განსხვავებით, ისეთ ექსტრემალურ ამოცანებს, რომლებიც რაიმე რეალური ამოცანის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენენ, ოპტიმიზაციის ამოცანები ეწოდება. ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ ტრივიალურ შემთხვევებში არის ადვილი. თითქმის არ არსებობს ისეთი ამოცანა, რომელსაც გამოყენებითი მნიშვნელობა აქვს და უცებ, ერთი ფორმულით იხსნება. მათემატიკური პროგრამირება სწავლობს ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს, რეალური ამოცანის გამოკვლევის ყველა ეტაპის გათვალისწინებით. ამ ეტაპებიდან ძირითადი არის შემდეგი:

1. ამოცანის სიტყვიერი ფორმულირება;
2. ამოცანის მათემატიკური ან კომპიუტერული მოდელის შედგენა;
3. ამონახსნის არსებობის საკითხის გარკვევა;
4. ამონახსნის მოძებნის ალგორითმის (ანუ გეგმის, პროგრამის) განსაზღვრა;
5. უშუალოდ ამონახსნის მოძებნა;
6. შედეგების გააზრება საწყისი ამოცანის ტერმინებში.

ამოცანის სირთულის მიხედვით, ამათგან ერთი ან რამდენიმე ეტაპი შეიძლება შერწყმულიც იყოს. ტერმინი მათემატი-

კური პროგრამირება შემოღებულ იქნა მანამდე, ვიდრე კომპიუტერები შეიქმნებოდა და იგი არ გულისხმობს მაინც და მაინც პროგრამული კოდის შექმნას. იმ დროს პროგრამა უბრალოდ ნიშნავდა ალგორითმს, გეგმას.

მათემატიკური პროგრამირება იყოფა რამდენიმე მიმართულებად: წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური, მთელრიცხვა, გეომეტრიული და სხვა. ამავე დროს, მათემატიკური პროგრამირება წარმოადგენს კიდევ უფრო ვრცელი დისციპლინის — ოპერაციათა კვლევის ნაწილს, რომელიც აგრეთვე ისწავლება კომპიუტერულ მეცნიერებათა მიმართულებებზე. ამიტომ ხშირად მათემატიკური პროგრამირების ზოგიერთი თავი, გარკვეული მოსაზრებების გამო, იკითხება ოპერაციათა კვლევის კურსში (მაგალითად, წრფივი დაპროგრამება).

მათემატიკურ პროგრამირებას ბევრი საერთო აქვს კომპიუტერული მეცნიერების ისეთ ფუნდამენტურ საგანთან, როგორიცაა ალგორითმების აგება. ბევრ რამეში ეს ორი საგანი ავსებს ერთმანეთს. კერძოდ, მათემატიკური პროგრამირების რიცხვითი ალგორითმების მნიშვნელოვანი ნაწილი დამუშავებულია უწყვეტი (და არა დისკრეტული) მათემატიკის მეთოდების საფუძველზე.

დასასრულ, აღვნიშნოთ მათემატიკური პროგრამირების მეთოდების რამდენიმე გამოყენება:

- ოპერაციათა კვლევა: ტექნიკურ-ეკონომიკური სისტემების ოპტიმიზაცია (დაგეგმვა, ეკონომეტრიკა), სატრანსპორტო და მარაგთა მართვის ამოცანები და ა.შ.,

  რიცხვითი ანალიზი: აპროქსიმაცია, რეგრესია, წრფივი და არაწრფივი სისტემების ამოხსნა და ა.შ.,

  ავტომატიკა: სისტემათა ამოცნობა, ფილტრაცია, წარმოების მართვა, რობოტები და ა.შ.,

  ტექნიკა: სტრუქტურათა ოპტიმიზაცია, ინფორმაციული სისტემები, კომპიუტერული ქსელები, სატრანსპორტო, სატელეკომუნიკაციო და კავშირგაბმულობის ქსელების მართვა.

ნ ა წ ი ლ ი   1

ძირითადი ცნებები

თავი 1
ძირითადი აღნიშვნები და განმარტებები

ყოველი კონკრეტული ამოცანის გამოკვლევა შინაარსობრივად განსხვავებული რამდენიმე ეტაპისაგან შედგება. ესენია: ამოცანის მათემატიკური მოდელის შედგენა, მიღებული ექსტრემალური ამოცანისთვის ამოხსნის (ოპტიმიზაციის) მეთოდის შერჩევა, ამოცანის ამოხსნა, შედეგების ანალიზი და ინტერპრეტირება. სხვა სიტყვებით, ყოველ კონკრეტულ ამოცანაში საჭიროა მიზნისა და საშუალებების გარკვევა. მაგალითად, თუ ამოცანაში საქმე ეხება ხარჯებს, მაშინ ბუნებრივი მიზანია ხარჯების მინიმიზაცია, თუ ლაპარაკია მოგებაზე, მაშინ მოგების მაქსიმიზაცია, თუ ვანგარიშობთ საუკეთესო, ანუ უმოკლეს მანძილს, მაშინ ისევ მინიმიზაცია და ა. შ. მათემატიკის ენაზე, ამოცანის მიზანს წარმოადგენს რაიმე ფუნქციონალი (ე.ი. ფუნქცია მნიშვნელობებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში), რომელსაც **მიზნის ფუნქცია** ეწოდება და რომლის ექსტრემალური მნიშვნელობებიც უნდა მოიძებნოს:

$$f(x) \to \min, \text{ ან } f(x) \to \max,$$

ან ორივე ერთად, ანუ

$$f(x) \to \text{extr}.$$

ბუნებრივია, რომ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვებია, რადგან სხვა შემთხვევაში ვერ ავარჩევთ ექსტრემალურ (უკიდურეს) მნიშვნელობას. მაგრამ როგორი უნდა იყოს მისი განსაზღვრის არე? მაგალითისთვის წარმოვიდგინოთ, რომ მიზნის ფუნქცია არის $f : X \to R$ და მის შესახებ მხოლოდ ის ვიცით, რომ X რაღაც სიმრავლეა. ამ შემთხვევაში, f ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობების მოსაძებნად არ გაგვაჩნია არავითარი მეთოდი, გარდა ფუნქციის მნიშვნელობების გადარჩევისა, რაც არავითარ შედეგს არ მოგვცემს თუ f ფუნქციის სახე უსასრულო რაოდენობა წერტილებს შეიცავს;

ამ დროს სასრული რაოდენობა მოქმედებებით ამონახსნს ვერ ვიპოვით. შემთხვევით, ექსტრემალური მნიშვნელობა რომ შეგვხვდეს, ამას მაინც ვერ მივხვდებით, რადგან შესადარებელი მნიშვნელობების რაოდენობა უსასრულოა.

უმეტეს შემთხვევაში, პრაქტიკული შინაარსის მქონე ამოცანების მათემატიკური მოდელის შექმნა არ ამოიწურება მიზნის ფუნქციის შერჩევით. ამ დროს ბუნებრივად ჩნდება შეზღუდვები, რომლებიც გვიჩვენებს, რომ ექსტრემუმი უნდა ვეძიოთ არა არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის, არამედ განსაზღვრის არის რომელიღაც კონკრეტულ ქვესიმრავლეზე, რომელსაც **დასაშვები სიმრავლე** ეწოდება. დასაშვები სიმრავლის ელემენტებს, ჩვეულებრივ, **დასაშვები წერტილები** ეწოდება. საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ პირადი მოხმარების თეორიის უმარტივესი ამოცანა, როდესაც ბაზარზე არის ერთადერთი პროდუქტი და ერთადერთი მყიდველი (ე.წ. მომხმარებელი), პროდუქტის ერთეულის ფასია p, ხოლო მომხმარებლის შემოსავალი, ანუ მის ხელთ არსებული თანხა არის I. მოცემულია აგრეთვე ზრდადი ფუნქცია (ამ ფუნქციის სხვა თვისებები ამჯერად საინტერესო არაა) $U(x)$, რომელიც გამოხატავს x რაოდენობა პროდუქტის სარგებლიანობას მოცემული მყიდველისათვის. ამასთან, შესაძლებელია პროდუქტის ერთეულის დანაწილება ნებისმიერი პროპორციით (მაგალითად, ერთეული შეიძლება იყოს 1კგ შაქარი, ან მილიონი წყვილი ფეხსაცმელი). პირადი მოხმარების თეორიის უმარტივეს ამოცანას წარმოადგენს $U:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ სარგებლიანობის მაქსიმიზაცია, იმის გათვალისწინებით, რომ უნდა შესრულდეს $x>0$ (რადგან x რაოდენობაა და უარყოფითი ვერ იქნება) და აგრეთვე ბიუჯეტური შეზღუდვა $px\le I$, რაც ნიშნავს, რომ დახარჯულმა თანხამ არ უნდა გადააჭარბოს შემოსავალს. საბოლოოდ, მიიღება ამოცანა:

$$U(x)\to\max,\ \text{იმ პირობით, რომ}\ \ x>0\ \ \text{და}\ \ px\le I$$

ამოცანას, რომელშიც მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმებს ვეძებთ და ცვლადები გარკვეულ პირობებს (შეზღუდვებს) აკმაყოფილებენ, **მათემატიკური პროგრამირების** ამოცანა ეწოდება. მათემატიკური პროგრამირების ამოცანები მიზნის, ფუნქციისა და შეზღუდვების სტრუქტურის მიხედვით იყოფა რამდენიმე მიმართულებად: წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური, მთელრიცხვა, გეომეტრიული პროგრამირებები და კიდევ რამდენიმე სხვა. მათემატიკური პროგრამირების ზემოჩამოთვლილ მეთოდებს შორის ყველაზე განვითარებული და თითქმის დასრულებული სახე აქვს მიღებული წრფივი პროგრამირების მეთოდებს. წრფივი პროგრამირების ამოცანები, მათი შესწავლის მეთოდების სპეციფიკურობის გამო, შეისწავლება ოპერაციათა გამოკვლევის კურსში.

წარმოდგენილ კურსში, მისი აუდიტორიის ინტერესების, მეთოდოლოგიური ფაქტორების და კონიუნქტურის გათვალისწინებით, შეტანილია მათემატიკური პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის შედარებით გავრცელებული მეთოდები, რომელთა ეფექტიანობა დადასტურებულია პრაქტიკით. ისინი სხვადასხვა წყაროდანაა აღებული, მაგრამ გადამუშავებულია და გამოყენებულია აღნიშვნების ერთიანი სისტემა. გასათვალისწინებელია ერთი გარემოებაც; რადგან მათემატიკური პროგრამირება შედარებით ახალგაზრდა დისციპლინაა, ზოგჯერ, ერთი და იგივე ცნების გამოსახატავად გამოიყენება სხვადასხვა ტერმინი. ჩვენ ვიმუშავებთ შედარებით გავრცელებული ტერმინებით და აუცილებლობის შემთხვევაში მივუთითებთ სინონიმებს.

აღნიშვნები

R_n – n-განზომილებიანი ნამდვილი ვექტორ-სტრიქონების სივრცე;

R^n – n-განზომილებიანი ნამდვილი ვექტორ-სვეტების სივრცე;

x, y, z, α – კალიგრაფიული მცირე ასოები აღნიშნავენ სკალარულ (რიცხვით) სიდიდეებს;

$\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ – ბეჭდური მცირე ასოები აღნიშნავენ ვექტორებს;

$\mathrm{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in R_n$ – ვექტორ-სტრიქონის სტანდარტული ჩანაწერი;

x^i – x ვექტორის i-ური კომპონენტი (კოორდინატი);

$\left(\mathrm{x}^k\right)^i, \left(\mathrm{y}^j\right)^i, x^i, y^i$ – სკალარული სიდიდე i-ურ ხარისხში;

$\mathrm{x} = (x, y)$ და $\mathrm{x} = (x, y, z)$ – ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ვექტორის ტრადიციული ჩანაწერები, ძირითადად გამოიყენება მაგალითების ამოხსნის პროცესში;

$\mathrm{locmin(i)}$, ან უბრალოდ locmin (locmax, locextr) ლოკალური მინიმუმის (მაქსიმუმის, ექსტრემუმის) წერტილების სიმრავლე (i) ამოცანაში;

$\mathrm{glmin(i)}$, ან უბრალოდ glmin (glmax, glextr) – გლობალური მინიმუმის (მაქსიმუმის, ექსტრემუმის) წერტილების სიმრავლე (i) ამოცანაში;

$\inf\limits_{x \in M} f$ – $f : M \to \mathbb{R}$ ფუნქციის ინფიმუმი, ანუ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის ზუსტი ქვედა ზღვარი.

$\|x\|$ – x ვექტორის ევკლიდური ნორმა:

$$\|\mathrm{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{x}^i\right)^2 \right)^{1/2}$$

$B_r(\mathrm{x})$ – ღია ბირთვი: $B_r(\mathrm{x}) = \left\{ \mathrm{y} \,\middle|\, \|y - x\| < r \right\}$.

$\overline{B}_r(x)$ – ჩაკეტილი ბირთვი: $\overline{B}_r(\mathrm{x}) = \left\{ \mathrm{y} \,\middle|\, \|y - x\| \le r \right\}$.

R_+ – არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ძირითადი განმარტებები

განმარტება. შემდეგ ჩანაწერს:

$$f(x) \to \min, \qquad x \in M, \tag{1.1}$$

სადაც $f : X \to R$, X ღია სიმრავლეა R^n-ში და $M \subset X \subset R^n$, ეწოდება მინიმიზაციის სასრულგანზომილებიანი ამოცანა, ან უბრალოდ **მინიმიზაციის ამოცანა**; f-ს ეწოდება **მიზნის ფუნქცია** ანუ კრიტერიუმი, M-ს ეწოდება **დასაშვები სიმრავლე**. (1.1)-ის ამოხსნა ნიშნავს, რომ უნდა მოვძებნოთ როგორც მინიმუმის წერტილები ანუ **მინიმალები**, ასევე მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობებიც. □

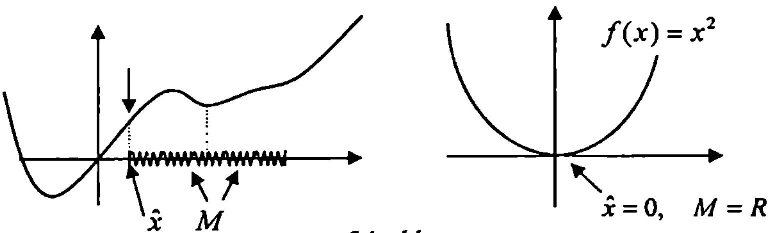
(1.1)-ის ამოხსნა გულისხმობს ორი საკითხის გარკვევას: არსებობს თუ არა მინიმუმის წერტილები (1.1) ამოცანაში, და თუ არსებობს, როგორ მოვძებნოთ ისინი.

მინიმუმის წერტილი შეიძლება იყოს ორი სახის.

განმარტება. დასაშვებ $\hat{x} \in M$ წერტილს ეწოდება **გლობალური მინიმალი** (1.1) ამოცანაში, ან $f(\cdot)$ — ფუნქციის გლობალური მინიმუმის წერტილი M-ზე (იწერება $\hat{x} \in \mathrm{gl}\min(1.1)$), თუ სრულდება:

$$f(\hat{x}) \le f(x), \quad \forall x \in M. \ \square$$

მაგალითად:



ნახ. 1.1.

ნახ. 1.1.-ის მარცხენა გრაფიკზე ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმის წერტილიც.

ზოგიერთ ამოცანაში გლობალური მინიმალი არც არსებობს. მაგალითად, თუ $f(x)=x^3, \quad M=R.$

შენიშვნა. შინაარსობრივად, სამართლიანია შემდეგი ტოლობები: „გლობალური" = „აბსოლუტური", „ლოკალური" = „ფარდობითი", „მინიმუმის წერტილი" = „მინიმალი".

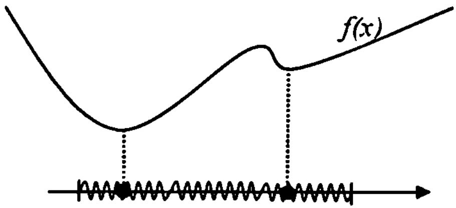
განმარტება. დასაშვებ $\hat{x}\in M$ წერტილს ეწოდება **ლოკალური მინიმალი** (1.1) ამოცანაში და ინერება $\hat{x}\in \operatorname{loc}\min(1.1)$, თუ რომელიღაც $\varepsilon>0$ -ისათვის სრულდება:

$$f(\hat{x})\le f(x), \qquad \forall x\in\left(M\cap \overline{B}_{\varepsilon}(\hat{x})\right).$$

სხვა სიტყვებით, $\hat{x}\in \operatorname{loc}\min(1.1)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\hat{x}\in M$ და არსებობს ისეთი $\varepsilon>0$, რომ

$$\left(x\in M \quad \text{და} \quad \|x-\hat{x}\|\le\varepsilon\right) \;\Rightarrow\; \left(f(\hat{x})\le f(x)\right).$$

ცხადია, $\hat{x}\in \operatorname{gl}\min(1.1) \;\Rightarrow\; \hat{x}\in \operatorname{loc}\min(1.1)$ (ამ დროს $\varepsilon=+\infty$), ხოლო შებრუნებული დებულება სამართლიანი არ არის, რაც ჩანს შემდეგ ნახაზზე:



ნახ. 1.2.

ზოგჯერ, ექსტრემალური ამოცანის ფორმულირებაში მონაწილეობას იღებენ გარკვეული პარამეტრები; მაგალითად, გაჩერების პირობა ექსტრემუმის წერტილის ძიების პროცესში, იტერაციების მაქსიმალური რაოდენობა ან სიზუსტე, რისი მიღწევაც სასურველია მოცემულ ამოცანაში. ასეთ ამოცანებს შევხვდებით მათემატიკური პროგრამირების რიცხვითი მეთოდების განხილვისას.

ზოგჯერ საჭირო ხდება მკაცრი ექსტრემუმის წერტილების განხილვა. მკაცრი მინიმუმის შემთხვევაში, განმარტებები იგივეა რაც ზემოთ, მაგრამ ნიშანი $\le$ იცვლება $<$-ით და აღინიშნება, რომ უტოლობაში x უნდა განსხვავდებოდეს $\hat{x}$ –ისაგან. მაგალითად:

განმარტება. დასაშვებ $\hat{x} \in M$ წერტილს ეწოდება **მკაცრი ლოკალური მინიმალი** (1.1) ამოცანაში, თუ რომელიღაც $\varepsilon > 0$-ისათვის სრულდება:

$$f(\hat{x}) < f(x), \text{ თუ } x \ne \hat{x} \text{ და } x \in \left(M \cap \overline{B}_\varepsilon(\hat{x})\right).$$

მაქსიმიზაციის

$$f(x) \to \max, \qquad x \in M, \tag{1.2}$$

ამოცანისათვის, სადაც $f : X \to R$, X ღია სიმრავლეა R^n-ში და $M \subset X \subset R^n$, f-ს კვლავ **მიზნის ფუნქცია** ეწოდება, M-ს – კვლავ **დასაშვები სიმრავლე** ეწოდება და (1.2)-ის ამოხსნა ნიშნავს, რომ უნდა მოვძებნოთ როგორც მაქსიმუმის წერტილები ანუ **მაქსიმალები**, ასევე მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობებიც.

განმარტება. შემდეგ ჩანაწერს:

$$f(x) \to \text{extr}, \qquad x \in M, \tag{1.3}$$

სადაც $f : X \to R$, X ღია სიმრავლეა R^n-ში, $M \subset X \subset R^n$ და $\text{extr} \in \{\min, \max\}$, ეწოდება სასრულგანზომილებიანი ექსტრემალური ამოცანა, ან უბრალოდ **ექსტრემალური ამოცანა, რომელშიც** f არის **მიზნის ფუნქცია,** M – **დასაშვები სიმრავლე.** მიზნის ფუნქციის მინიმუმებს და მაქსიმუმებს ეწოდებათ მისი ექსტრემუმები, ხოლო (1.1) და (1.2) ამოცანების მინიმალები და მაქსიმალები არის ექსტრემუმის წერტილები (1.3) ამოცანისთვის. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ არ ვხმარობთ ტერმინს **ექსტრემალი.** (1.2) ამოცანის ამოხსნა, ჩვეულებრივ,

ნიშნავს ექსტრემუმის წერტილებისა და ექსტრემუმების მოძებნას.

გავრცელებულია მოსაზრება, რომ მინიმიზაციის (1.1) ამოცანა ზოგადობის თვალსაზრისით არ ჩამოუვარდება (1.3) ამოცანას, რადგან მაქსიმიზაციის (1.2) ამოცანა იგივეა, რაც

$$\left(-f(\mathrm{x})\right) \to \min, \qquad \mathrm{x} \in M, \tag{1.4}$$

სახის მინიმიზაციის ამოცანა. მაგრამ აქ საჭიროა ჯეროვანი სიფრთხილე, რადგან შესაძლოა მინიმიზაციის მეთოდი სამართლიანი იყოს მიზნის ფუნქციების ისეთი კლასისათვის, რომელიც არაა ჩაკეტილი ნიშნის შეცვლის მიმართ. ამის მაგალითებს ჩვენ შევხვდებით უნიმოდალური და ამოზნექილი ფუნქციების მინიმიზაციის ამოცანებში. ამდენად, გამოთქმა „ზოგადობის შეუზღუდავად განვიხილოთ მინიმიზაციის ამოცანა“ ნიშნავს შემდეგს: როდესაც (1.3) ეკვივალენტურია მინიმიზაციის ორი ((1.1) და (1.4)) ამოცანისა ერთობლიობაში, მაშინ, სიმარტივისათვის და გარკვეულობისათვის, მიზანშეწონილია მხოლოდ მინიმიზაციის ამოცანების განხილვა.

გამოყენებითი შინაარსის მქონე ამოცანების უმეტესობისათვის $M \neq R^n$. $\mathrm{x} \in M$ -ს ეწოდება **პირობა**, ან **შეზღუდვა**, ამიტომ როცა $M \neq R^n$, ამბობენ, რომ გვაქვს **პირობიანი** ანუ **შეზღუდვებიანი** ამოცანა. თუ $M = R^n$, მაშინ $\mathrm{x} \in M$ პირობა ავტომატურად სრულდება და შესაბამის ექსტრემალურ ამოცანას ეწოდება **უპირობო**, ანუ **ამოცანა შეზღუდვების გარეშე**.

შეზღუდვათა ტიპები

განვიხილოთ ექსტრემალური ამოცანა:

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \qquad \mathrm{x} \in M. \tag{1.5}$$

რაც უფრო მარტივი სახე აქვს $\mathrm{x} \in M$ შეზღუდვას, მით უფრო ადვილი ამოსახსნელია (1.5). უმარტივეს შემთხვევაში, როცა

$M = R^n$, გვაქვს ამოცანა შეზღუდვების გარეშე. შემდეგში ჩვენ შევხვდებით შემდეგი სახის შეზღუდვებს:

1. ტოლობის ტიპის შეზღუდვები, როდესაც

$$M = \left\{ x \mid f_1(x) = b_1, \ldots, f_m(x) = b_m \right\},$$

სადაც ყოველი $f_i : R_n \to R$ ფუნქცია, როგორც წესი, უწყვეტი მაინცაა, ხოლო $b_1, \ldots, b_m$ მოცემული მუდმივებია.

ტოლობის ტიპის შეზღუდვების შემთხვევაში, (1.5) ექსტრემალური ამოცანის ჩანერა ხელსაყრელია შემდეგი სახით:

$$f(x^1, \ldots, x^n) \to \text{extr}, \qquad f_1(x^1, \ldots, x^n) = b_1, \ldots, f_m(x^1, \ldots, x^n) = b_m.$$

როგორც წესი, იმისათვის, რომ შესრულდეს $M \neq \varnothing$, ვიღებთ $m \leq n$.

2. უტოლობის ტიპის შეზღუდვები, როდესაც

$$M = \left\{ x \mid g_1(x) \leq b_1, \ldots, g_m(x) \leq b_m \right\},$$

სადაც ყოველი $g_i : R_n \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა.

უტოლობის ტიპის შეზღუდვების შემთხვევაში (1.5) ამოცანა იღებს შემდეგ სახეს, რომელსაც ეწოდება მათემატიკური პროგრამირების ამოცანა:

$$f(x^1, \ldots, x^n) \to \text{extr}, \qquad g_1(x^1, \ldots, x^n) \leq b_1, \ldots, g_m(x^1, \ldots, x^n) \leq b_m.$$

შევნიშნოთ, რომ გარკვეულ შემთხვევებში საკმარისია ავიღოთ $b_1 = 0, \ldots, b_m = 0$.

3. კომბინირებული შემთხვევა, როდესაც ერთდროულად გვაქვს ტოლობისა და უტოლობის ტიპის შეზღუდვები. თუმცა, თეორიულად 1. და 3. არის 2.-ის კერძო შემთხვევა, რადგან

$$f(x) = 0 \iff \left(f(x) \leq 0 \;\&\; f(x) \geq 0 \right).$$

სავარჯიშოები

შეადგინეთ ექსტრემალური ამოცანა, რომელშიც:

#1. გლობალური მინიმალებისა და მაქსიმალების რაოდენობა უსასრულოა.

#2. მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია, გლობალური მაქსიმუმი მიიღწევა, მინიმუმი არა.

#3. მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაგრამ გლობალური მინიმუმი და მაქსიმუმი არ მიიღწევა.

#4. მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ზოგიერთ წერტილში მისი წარმოებული ნულის ტოლია, მაგრამ გლობალური მინიმუმი და მაქსიმუმი არ მიიღწევა.

#5. მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია, აქვს ლოკალური მინიმუმები და მაქსიმუმები, მაგრამ გლობალური მინიმუმი და მაქსიმუმი არ მიიღწევა.

#6. არის ერთადერთი ლოკალური ექსტრემუმი, რომელიც არაა გლობალური.

#7. არის ლოკალური მაქსიმუმების უსასრულო რაოდენობა, მაგრამ არ არის არც ერთი გლობალური მინიმუმი.

მითითება: მიზნის ფუნქცია შესაძლოა იყოს ორი ცვლადის ფუნქცია. □

შემდეგი სავარჯიშოებისთვის შეადგინეთ შესაბამისი ექსტრემალური ამოცანები ტოლობის ან უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით.

#8. მოძებნეთ x^2+x+1 ფუნქციის მაქსიმუმი [-1,1000] სეგმენტზე.

#9. მოძებნეთ $xy-x^2+y^2+5y$ ფუნქციის მინიმუმი ერთეულრადიუსიან წრეზე ცენტრით (-1,1)-ში.

#10. მოძებნეთ უმოკლესი მანძილი სიბრტყის მოცემული (1,2) წერტილიდან $2x+3y=1$ წრფემდე.

#11. ჩახაზეთ წრეწირში სამკუთხედი ისე, რომ გვერდების კვადრატების ჯამი იყოს მინიმალური.

#12. მოძებნეთ სიბრტყის ის წერტილი, საიდანაც სამ მოცემულ წერტილებამდე მანძილების ჯამი მინიმალურია.

#13. ჩახაზეთ წრეწირში მაქსიმალური ფართობის მქონე მართკუთხედი.

#14. გაყავით რიცხვი 8 ორ ნაწილად ისე, რომ მათი ნამრავლის ნამრავლი მათ სხვაობაზე იყოს მაქსიმალური (ტარტალიას ამოცანა).

#15. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტების ჯამი ტოლია მოცემული რიცხვის (ფერმას ამოცანა).

#16. l-ს ტოლი პერიმეტრის მართკუთხედებს შორის იპოვეთ მაქსიმალური ფართობის მქონე.

#17. (1.2) ამოცანისთვის განმარტეთ გლობალური და ლოკალური მაქსიმალები.

თავი 2
გლობალური ექსტრემუმის წერტილების არსებობის ვაიერშტრასის საკმარისი პირობა

პირველი კითხვა, რომელიც ისმება ნებისმიერი ექსტრემალური ამოცანის ამოხსნის პროცესში, ეხება მისი ამონახსნის არსებობას, რადგან საკმაოდ ხშირად საუკეთესო ამონახსნი არ არსებობს, ხოლო ამონახსნის არარსებობის შემთხვევაში მისი ძებნა დროის და ენერგიის ფუჭ ხარჯვას ნიშნავს.

საკითხის დიდი მნიშვნელობის გამო, ამჟამად რამდენიმე ეფექტური საკმარისი მეთოდი არსებობს ამონახსნის არსებობის საჩვენებლად. ლოკალური მინიმალების არსებობის დამტკიცება, როგორც წესი, ხდება დიფერენციალური აღრიცხვის საშუალებების გამოყენებით (მაგალითად, მკაცრი მინიმუმის ან მაქსიმუმის არსებობის მეორე რიგის საკმარისი პირობები, რომლებსაც შემდეგში შევისწავლით და გამოვიყენებთ). გლობალური ექსტრემუმის წერტილების არსებობის დასადგენად გამოიყენება ვაიერშტრასის კლასიკური თეორემა.

ამგვარად, ვიდრე დავიწყებთ ექსტრემუმის წერტილების ძიებას, გავარკვიოთ მათი არსებობის საკითხი.

მიზნის ფუნქციის წყვეტილობა და დასაშვები სიმრავლის არაკომპაქტურობა არის ორი ძირითადი ფაქტორი, რაც ხელს უშლის გლობალური მინიმალის არსებობასაც და არსებობის ფაქტის დადგენასაც.

თეორემა */ვაიერშტრასის/.* ვთქვათ, M არის ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული (ანუ კომპაქტური) სიმრავლე R_n-ში, ხოლო $f: M \to R$ უწყვეტია. მაშინ

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \quad \mathrm{x} \in M, \tag{2.1}$$

ამოცანაში არსებობს გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი.

დამტკიცება. ავიღოთ $k = \inf\limits_{x \in M} \{f(\mathrm{x})\}$ და შევნიშნოთ, რომ k-სთვის დასაშვებია $-\infty$ მნიშვნელობაც. ინფიმუმის განმარ-

ტების ძალით არსებობს ისეთი მიმდევრობა $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$, რომ $\lim_{i\to\infty} f(x_i)=k$. რადგან M კომპაქტურია, ამ მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $\left\{x_{i_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset M$, კრებადი M-ის რომელიღაც x_0 წერტილისაკენ, რაც $f(\cdot)$-ის უწყვეტობის ძალით გვაძლევს:

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{i_j})=f(x_0). \tag{2.2}$$

ამავე დროს, ქვემიმდევრობა $\left\{f(x_{i_j})\right\}_{j=1}^{\infty}$ იგივე ზღვრისკენაა კრებადი, საითკენაც $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$, ანუ

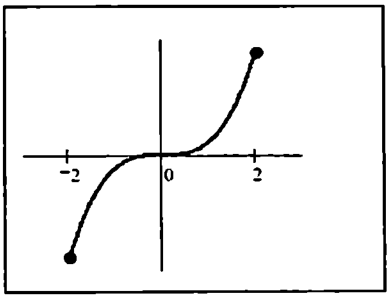
$$\lim_{j\to\infty} f(x_{i_j})=k. \tag{2.3}$$

ზღვრის ერთადერთობის გამო, (2.2) და (2.3) გვაძლევს $k=f(x_0)$, რაც k-ს განმარტების თანახმად ნიშნავს:

$$f(x_0)=k\le f(x),\quad \forall x\in M \quad \Leftrightarrow \quad x_0\in \mathrm{gl}\min(2.1). \ \square$$

ზოგჯერ ვაიერშტრასის თეორემას სიტყვიერად ასე აყალიბებენ: უწყვეტი ფუნქცია კომპაქტურ სიმრავლეზე აღწევს თავის გლობალურ მინიმუმს და მაქსიმუმს.

განვიხილოთ რამდენიმე საილუსტრაციო მაგალითი.

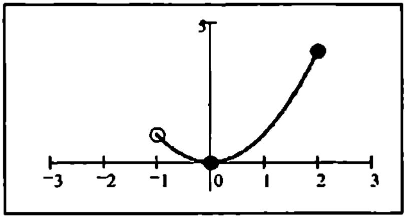


ნახ. 2.1

მაგალითი 1. $M=[-2,2]$, $f(x)=x^3$

ამ მაგალითში M კომპაქტია, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტი, ამიტომ გლობალური მაქსიმალი და მინიმალი მიიღწევა. $\square$

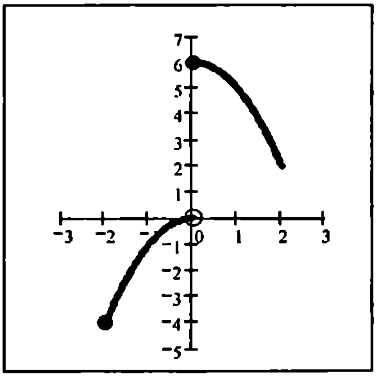
ვაიერშტრასის თეორემა გვაძლევს გლობალური მინიმალის და მაქსიმალის არსებობის საკმარის პირობებს, რაც ნიშნავს, რომ თუ მოცემული პირობები სრულდება, გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი არსებობს. მაგრამ ამ პირობების შესრულება არ არის აუცილებელი გლობალური მინიმალის და მაქსიმალის არსებობისთვის. სხვა სიტყვებით, აუცილებელი პირობები ასრულებენ ფილტრის ფუნქციას, რომელიც გამორიცხავს არგუმენტის აპრიორი არაოპტიმალურ მნიშვნელობებს და ტოვებს მხოლოდ იმ წერტილებს, რომლებიც წარმოადგენს ამონახსნს, ან თავისი გარკვეული თვისებებით ჰგავს მას.



ნახ. 2.2

მაგალითი 2.
$M=(-1,2]$, $f(x)=x^2$

ამ მაგალითში, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო M არ არის კომპაქტი, მაგრამ გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი მიიღწევა (იხ. ნახ. 2.2). □



ნახ. 2.3

მაგალითი 3.
$M=[-2,2]$,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in[-2,0),\\ -x^2+6, & x\in[0,2].\end{cases}$$

ამ მაგალითში M კომპაქტია, მაგრამ $f(x)$ არ არის უწყვეტი. მიუხედავად ამისა, გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი მაინც მიიღწევა, რაც ნაჩვენებია ნახ. 2.3-ზე. □

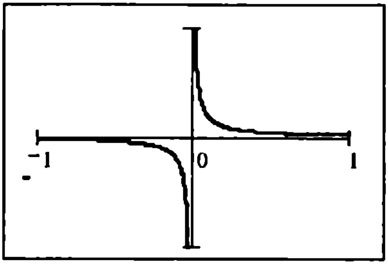
როგორც ვნახეთ, მეორე და მესამე მაგალითებში არ სრულდება ვაიერშტრასის თეორემის ერთ-ერთი პირობა, მაგრამ

გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი მიიღწევა. შემდეგ ორ მაგალითში (4 და 5) ვაიერშტრასის თეორემის ერთ-ერთი პირობის დარღვევა იწვევს იმას, რომ გლობალური მინიმალი, ან მაქსიმალი, ან ორივე ერთად, არ მიიღწევა.

მაგალითი 4. $M=[-1,1]$,

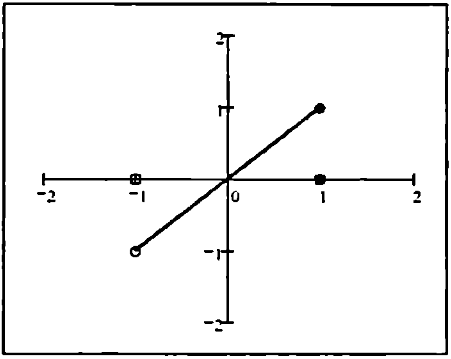
$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

ამ მაგალითში M კომპაქტია, $f(x)$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი. გლობალური მაქსიმალი და მინიმალი არ მიიღწევა (იხ. ნახ. 2.4). □



ნახ. 2.4

მაგალითი 5. $M=(-1,1]$, $f(x)=x$. M არ არის კომპაქტი, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია. გლობალური მაქსიმალი მიიღწევა, გლობალური მინიმალი – არა (იხ. ნახ. 2.5). □



ნახ. 2.5

ჩამოვაყალიბოთ ვაიერშტრასის თეორემის ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი, რომელშიც შესუსტებულია შეზღუდვა დასაშვებ სიმრავლეზე, სამაგიეროდ, დამატებულია შეზღუდვა მიზნის ფუნქციაზე. მას ჩამოვაყალიბებთ ორივე ტიპის ექსტრემუმისათვის, ამასთან, ძირითადი ვერსია ყალიბდება მინიმალისათვის, მაქსიმალის შემთხვევა კი მოყვანილია ფრჩხილებში.

შედეგი. ვთქვათ, M არის ჩაკეტილი სიმრავლე R_n-ში, ხოლო $f:M\rightarrow R$ უწყვეტია და

$$\lim_{x\in M,\,\|x\|\to\infty} f(x)=+\infty \qquad \left(\lim_{x\in M,\,\|x\|\to\infty} f(x)=-\infty\right).$$

მაშინ (2.1) ამოცანაში არსებობს გლობალური მინიმალი (მაქსიმალი).

დამტკიცება. განვიხილოთ მინიმუმის შემთხვევა; მეორე ანალოგიურია.

თავიდანვე აღვნიშნოთ, რომ $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=\infty$ ნიშნავს შემდეგს: ყოველი $\alpha>0$ რიცხვისათვის არსებობს რიცხვი $r>0$, ისეთი რომ

$$\left(x\in M,\quad \|x\|>r\right) \quad\Rightarrow\quad f(x)>\alpha. \tag{2.4}$$

ავიღოთ რომელიმე $x_0\in M$ და რიცხვი $\alpha>f(x_0)$. ახლა რომელიმე $r>0$-ისათვის სრულდება (2.4). შეგვიძლია ავიღოთ $r>0$ იმდენად დიდი, რომ $\|x_0\|\le r$. რადგან $M\cap\overline{B}_r(0)$ კომპაქტური სიმრავლეა, ამიტომ ვაიერშტრასის თეორემის ძალით არსებობს $\hat{x}\in M\cap\overline{B}_r(0)$, ისეთი რომ

$$f(\hat{x})\le f(x), \qquad \forall x\in M\cap\overline{B}_r(0). \tag{2.5}$$

კერძოდ, $f(\hat{x})\le f(x_0)<\alpha$. გარდა ამისა, (2.4)-ის ძალით

$$\alpha<f(x), \quad \text{თუ} \quad \left(x\in M,\quad \|x\|>r\right). \tag{2.6}$$

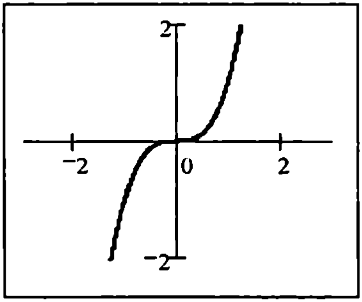
(2.5) და (2.6) ერთად გვაძლევს, რომ

$$f(\hat{x})\le f(x), \qquad \forall x\in M. \quad \square$$

ერთი ცვლადის შემთხვევაში, როდესაც $n=1$, პირობა $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=+\infty(-\infty)$ ნიშნავს, რომ $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty(-\infty)$ და $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty(-\infty)$.

კვლავ განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 6. $M = R$, $f(x) = x^3$



ნახ. 2.6

ამ მაგალითში M ჩაკეტილია, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია.

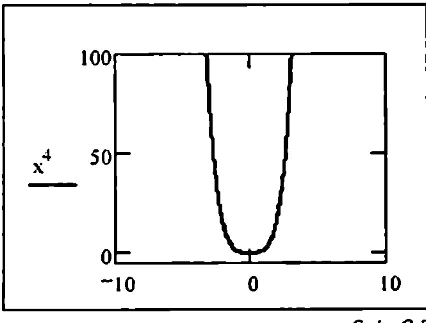
ამ შემთხვევაში არ სრულდება არც $\lim\limits_{x \in M, \|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$, არც $\lim\limits_{x \in M, \|x\| \to \infty} f(x) = -\infty$, გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი არ არსებობს (იხ. ნახ. 2.6). □

მაგალითი 7. $M = R$, $f(x) = x^4$

M ჩაკეტილია, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, სრულდება

$$\lim_{x \in M, \|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$$

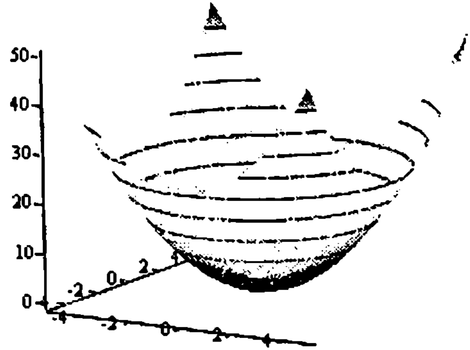
პირობა და ამიტომ არსებობს გლობალური მინიმალი (იხ. ნახ. 2.7). □



ნახ. 2.7

მაგალითი 8. $M = R_2$, $f(\mathrm{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$.

ამ მაგალითში M არის მთელი სიბრტყე, ე.ი. ჩაკეტილი სიმრავლე, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია. ამ შემთხვევაშიც სრულდება $\lim\limits_{x \in M, \|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$ პირობა და ამიტომ არსებობს გლობალური მინიმალი, რაც ნაჩვენებია ნახ. 2.8-ზე. □

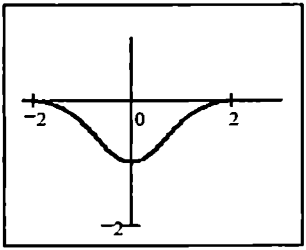


ნახ. 2.8

ბუნებრივად ჩნდება კითხვა, რა ხდება იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)$, მაგრამ იგი სასრული რიცხვია. ეს შედარებით ეგზოტიკური შემთხვევაა, ამიტომ ძალიან მოკლედ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როდესაც სრულდება ვაიერშტრასის თეორემის შედეგის ანალოგიური პირობები, ანუ როდესაც M არის ჩაკეტილი სიმრავლე R_n-ში, $f : M \to \mathbb{R}$ უწყვეტია,

$$\lim_{x\in M,\,\|x\|\to\infty} f(x) = k\,,$$

რაიმე $k \in R$-სთვის, და დამატებით ცნობილია აგრეთვე, რომ $f(x_0) < k \quad \left(f(x_0) > k\right)$ რომელიღაც $x_0 \in M$-ისათვის, მაშინ (2.1) ამოცანაში არსებობს გლობალური მინიმალი (მაქსიმალი).



ნახ. 2.9

მაგალითი 9. $M = R$,

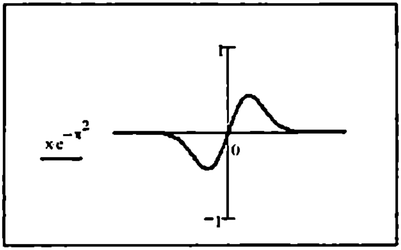
$$f(x) = -e^{-x^2}$$

M ჩაკეტილია, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0,$ და

$f(0) = -1 < 0 = \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)$. ამიტომ არსებობს გლობალური მინიმალი, მაგრამ არ არსებობს გლობალური მაქსიმალი (ნახ. 2.9). □

მაგალითი 10. $M = R$, $f(x) = xe^{-x^2}$

M ჩაკეტილია, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, და $f(0) = 0$. ამასთან არსებობს ისეთი $x_0' \in M$, რომ $f(x_0') < 0$ და არსებობს ისეთი $x_0'' \in M$, რომ $f(x_0'') > 0$, ამიტომ არსებობს გლობალური მინიმალიც და გლობალური მაქსიმალიც (ნახ. 2.10).



ნახ. 2.10

სავარჯიშოები

ამოცანებში #18 – #28 ვაიერშტრასის თეორემისა და მისი შედეგების საფუძველზე დაადგინეთ გლობალური მინიმალებისა და მაქსიმალების არსებობის საკითხი.

#18. $x \to \text{extr}, \quad x \in R.$

#19. $2x^2 - 3x + 5 \to \text{extr}, \quad x \in R.$

#20. $x^{2k+1} + x^{2k} + \cdots + 1 \to \text{extr}, \quad x \in R.$

#21. $x^{2k} + x^{2k-1} + \cdots + x + 1 \to \text{extr}, \quad x \in R.$

#22. $|x| \to \text{extr}, \quad x \in R.$

#23. $e^{xy} \to \text{extr}, \quad 4x + y = 1.$

#24. $4x + 3y \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 \le 1.$

#25. $x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr}, \quad x^8 + y^8 + z^8 \le 1.$

#26. $5x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}, \quad x + y = 1.$

#27. $x^2+y^2+xy+3|x+y-2|\to\min$.

#28. $x^2+y^2+2\max\{x,y\}\to\min$.

#29. ამოცანებში #8 – #15 ფორმალიზებული ექსტრემალური ამოცანებისათვის გამოიკვლიეთ გლობალური მინიმალებისა და მაქსიმალების არსებობის საკითხი ვაიერშტრასის თეორემისა და მისი შედეგების საფუძველზე.

#30. შეადგინეთ ისეთი ექსტრემალური ამოცანა, რომელშიც არ სრულდება ვაიერშტრასის თეორემის არც ერთი პირობა, მაგრამ გლობალური მინიმალი და მაქსიმალი არსებობს.

#31. აჩვენეთ, რომ წრფივი მიზნის ფუნქციის მქონე შემდეგ მინიმიზაციის ამოცანაში

$$f(x)=kx+\beta\to\min,\qquad x\in[a,b]\subset R,$$

როცა $k\neq 0$, არსებობს ერთადერთი გლობალური მინიმალი და იგი არის a ან b.

ნიმუში. გავარჩიოთ ამოცანა:

$$f(x,y)=x^2+y^2+2\max\{x,y\}\to\min.$$

რადგან

$$f(x,y)\geq x^2+y^2-2\left(x^2+y^2\right)^{1/2}=$$

$$=\|(x,y)\|^2-2\|(x,y)\|=\|(x,y)\|\left(\|(x,y)\|-2\right),$$

ამიტომ მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის პლიუს უსასრულობისაკენ, როცა $\|(x,y)\|\to\infty$. ვაიერშტრასის თეორემის შედეგის ძალით არსებობს გლობალური მინიმალი.

ნაწილი 2

ერთ ცვლადზე დამოკიდებული მიზნის ფუნქცია

თავი 3
ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმების ძებნა

ექსტრემალური ამოცანები, რომლებშიც მიზნის ფუნქცია ერთ ცვლადზეა დამოკიდებული, მიეკუთვნება ექსტრემალური ამოცანების ყველაზე მარტივ (ადვილად შესასწავლ) კლასს. ისინი ხშირად გვხვდება, როგორც დამოუკიდებელი ამოცანები, პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის დროს, და როგორც დამხმარე ამოცანა, მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის პროცესში. ამდენად, მათი შესწავლა აქტუალურია. ლოკალური ექსტრემუმის წერტილების მოძებნისთვის გამოიყენება დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები, რაც ბუნებრივად ზღუდავს ექსტრემალური ამოცანის ზოგადობას: მიზნის ფუნქცია უნდა იყოს გლუვი, ხოლო დასაშვები სიმრავლე ღია, ნახევრად ღია ან ჩაკეტილი.

გავრცელებული ტერმინოლოგიით, ექსტრემალურ ამოცანას ეწოდება გლუვი, თუ მიზნის ფუნქცია და დასაშვები სიმრავლის განმსაზღვრავი ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია საჭირო რიგით. ამოცანის სიგლუვე მისი განზომილებისგან დამოუკიდებელი ცნებაა. ამ თავში ყველგან, სადაც საწინააღმდეგო არაა აღნიშნული, ვიგულისხმებთ, რომ მიზნის ფუნქცია ერთი ცვლადის ფუნქციას წარმოადგენს, ხოლო დასაშვები სიმრავლე ღიაა.

ერთი ცვლადის მიზნის ფუნქციისთვის, გლუვი ექსტრემალური ამოცანა ღია დასაშვებ სიმრავლეზე ისმება შემდეგნაირად:

$$f(x) \to \text{extr}, \qquad x \in M \subset R, \tag{3.1}$$

სადაც M ღია სიმრავლეა, ანუ წარმოიდგინება ღია ინტერვალების სასრული ან თვლადი გაერთიანების სახით.

1. მოკლე რეზიუმე

გლუვი ექსტრემალური ამოცანის გამოკვლევა უნდა მოხდეს შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. მათემატიკური მოდელის შედგენა, ანუ ამოცანის ფორმულირება (3.1) სახით;
2. (3.1) ექსტრემალურ ამოცანაში კრიტიკული წერტილების განსაზღვრის მიზნით, $f'(x)=0$ განტოლების ამოხსნა;
3. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა (ვაიერშტრასის თეორემის, განმარტების, ან ექსტრემალურობის საკმარისი პირობის საფუძველზე), მათგან ექსტრემუმის წერტილების ამორჩევის მიზნით.

კრიტიკული წერტილების სიმრავლის (რასაც ჩვენ, ჩვეულებრივ, აღვნიშნავთ K სიმბოლოთი) განსაზღვრა ძალიან მნიშვნელოვანია, რადგან ხშირად ეს სიმრავლე არის სასრული, ან ამ სიმრავლეზე მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების რაოდენობაა სასრული. ნებისმიერ შემთხვევაში, თუ ვიცით კრიტიკული წერტილების K სიმრავლე, მაშინ

$$f(x)\to \text{extr}, \qquad x\in M\subset R,$$

ამოცანა ეკვივალენტურია

$$f(x)\to \text{extr}, \qquad x\in K,$$

ამოცანის, რაც (როგორც უკვე აღვნიშნეთ), უმეტეს შემთხვევაში გაცილებით ადვილი ამოსახსნელია.

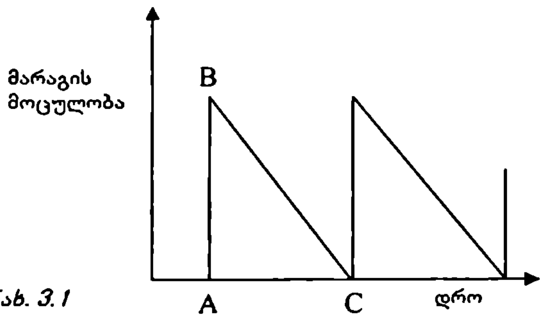
2. მათემატიკური მოდელის შედგენა

ნიმუშად განვიხილოთ მარაგთა მართვის ამოცანის მათემატიკური მოდელი.

მარაგთა მართვის ამოცანა ისმება იმ შემთხვევაში, როცა აუცილებელია შეიქმნას გარკვეული პროდუქციის მარაგი, დროის მოცემულ ინტერვალზე მოთხოვნის დაკმაყოფილების მიზნით. მარაგის უწყვეტი შევსება დაკავშირებულია დროის და რესურსების არარაციონალურად გამოყენებასთან. დიდი მარა-

გის შექმნა (რაც მარაგის პერიოდულად შევსებას მოითხოვს) კი დაკავშირებულია დიდ კაპიტალდაბანდებასთან, რაც ზრდის მისი შენახვის ხარჯებს. ჩვენი მიზანია, შევარჩიოთ მარაგის ოპტიმალური მოცულობა.

განვიხილოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევა. ვთქვათ, მოთხოვნა მუდმივია და უდრის λ ერთ./წელ. ერთი შეკვეთის (მისი სიდიდის მიუხედავად) შესრულების ფასი არის K ლარი. საქონლის ერთეულის საწყისი ფასია c ლარი. ერთეული საქონლის შენახვის ფასია h ლარი/წელ. ვიგულისხმოთ, რომ მოთხოვნა კმაყოფილდება დაუყოვნებლივ და დეფიციტი აკრძალულია (დაკავშირებულია დიდ ჯარიმებთან), მაშინ მარაგის დონის დროში ცვლილების გრაფიკს აქვს სახე:



ნახ. 3.1

ვთქვათ, AB გვერდის სიგრძე წარმოადგენს A წერტილში მარაგის მოცულობას. იგი მცირდება სიჩქარით λ ერთ./წელ. და იწურება C წერტილში. ამ დროს შემოდის საქონლის ახალი შევსება, მარაგის დონე აღდგება და იგი ისევ AB-ს ტოლია. ABC სამკუთხედი, ფაქტობრივად, წარმოადგენს მარაგთა მართვის ერთ ციკლს, რომელიც მეორდება. ჩვენი მიზანია, განვსაზღვროთ შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობა და მარაგის შევსების A და C წერტილებს შორის დროის ოპტიმალური

ინტერვალი. შესაბამისი ცვლადები აღვნიშნოთ Q-თი და T-თი. რადგან T დროში Q მარაგი იცლება λ სიჩქარით, ამიტომ $T = Q/\lambda$.

უნდა აღინიშნოს, რომ როცა Q მცირეა, მაშინ T იღებს მცირე მნიშვნელობებს. ეს ნიშნავს, რომ შეკვეთების სიხშირე იზრდება, რაც იწვევს შეკვეთების შესრულებაზე ხარჯების ზრდას და შენახვის ხარჯების შემცირებას. მეორე მხრივ, როცა Q დიდია, T იზრდება, რაც იწვევს შეკვეთების სიხშირის შემცირებას, ე.ი. მცირდება შეკვეთების შესრულებაზე გაწეული ხარჯები და იზრდება შენახვის ხარჯები. უნდა ვიპოვოთ Q-ს ოპტიმალური მნიშვნელობა, რომელსაც შეესაბამება მინიმალური წლიური ხარჯი.

ერთი ციკლის განმავლობაში მარაგის შენახვაზე გაწეული ხარჯი არის T დროის განმავლობაში საქონლის $Q/2$ ერთეულის შენახვაზე გაწეული ხარჯის ტოლი და მათემატიკურად სამკუთხედის ფართობის და h-ის ნამრავლის ტოლია.

ერთ ციკლში გაწეული ხარჯი არის შეკვეთების შესრულებაზე გაწეული ხარჯისა და შენახვაზე გაწეული ხარჯის ჯამი

$$K + cQ + \frac{Q}{2}hT = K + cQ + \frac{hQ^2}{2\lambda}.$$

ამრიგად, წლიური დანახარჯი იქნება ერთ ციკლზე გაწეული დანახარჯებისა და წელიწადში ციკლების რაოდენობის ნამრავლის ტოლი ($\frac{Q}{\lambda}$ წელს შეესაბამება 1 ციკლი, 1 წელს კი λ/Q). ამრიგად, შემდეგ ექსტრემალურ ამოცანაში

$$, f(Q) \to \text{extr}, \quad Q \in M$$

მიზნის ფუნქციაა $f(Q) = \frac{\lambda K}{Q} + \lambda c + \frac{hQ}{2}$, ხოლო $M = (0, +\infty)$.

3. კრიტიკული წერტილების განსაზღვრა

თეორემა 1 /*ექსტრემალურობის I რიგის აუცილებელი პირობა*/. ვთქვათ, $M \subset R$ არის ღია სიმრავლე, $f: M \to R$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $\hat{x} \in M$ წერტილის რომელი-ღაც მიდამოში და $\hat{x}$ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი

$$f(x) \to \text{extr}, \qquad x \in M \tag{3.1}$$

ამოცანაში. მაშინ, $f'(\hat{x}) = 0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ლოკალური მინიმუმის შემთხვევა. ვთქვათ, $\hat{x}$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი და $f(x)$ ფუნქცია $\hat{x}$ წერტილის მიდამოში უწყვეტად წარმოებადია. მაშინ შეგვიძლია გავშალოთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად ამ წერტილის მიდამოში:

$$f(\hat{x}+\varepsilon) = f(\hat{x}) + \varepsilon \frac{df(\hat{x})}{dx} + o(\varepsilon^2), \tag{3.2}$$

სადაც $o(\varepsilon^2)$-ით აღნიშნულია იმ წევრების ჯამი, სადაც ε-ის ხარისხი 1-ზე მეტია. თუ $\hat{x}$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი M-ში, მაშინ განსაზღვრების თანახმად, არსებობს $\hat{x}$-ის ε-მიდამო, ისეთი, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისთვის სრულდება:

$$f(x) \geq f(\hat{x}). \tag{3.3}$$

(3.2)-დან და (3.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\varepsilon \frac{df(\hat{x})}{dx} + o(\varepsilon^2) \geq 0.$$

საკმარისად მცირე ε-თვის მარცხენა მხარის ნიშანს განსაზღვრავს პირველი შესაკრები, და რადგან ε-მა შეიძლება მიიღოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობები, უტოლობა შესრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

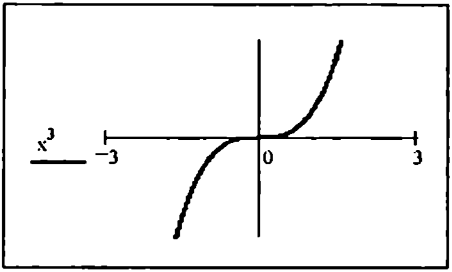
$$\frac{df(\hat{x})}{dx} = 0.$$

ანალოგიურია დამტკიცება ლოკალური მაქსიმუმის შემთხვევაში. □

ზემოთ მოყვანილი თეორემა ეკუთვნის პ. ფერმას. იგი იძლევა ლოკალური მინიმალების და მაქსიმალების არსებობის აუცილებელ პირობებს, ანუ შესაძლებელია თეორემის პირობები შესრულდეს, მაგრამ ფუნქციას არ გააჩნდეს არც მაქსიმალი, არც მინიმალი. ამ შემთხვევის კლასიკური მაგალითია მიზნის ფუნქცია

$$f(x) = x^3,$$

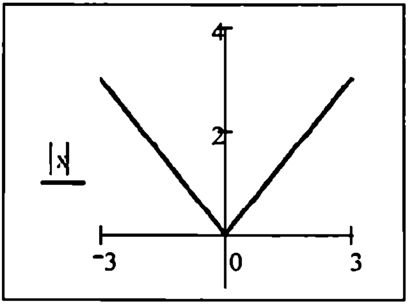
რომლისთვისაც სრულდება პირობა $f'(0) = 0$,



ნახ. 3.2

მაგრამ $x = 0$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი. იგი არის გადაღუნვის წერტილი (ნახ. 3.2).

შენიშვნა. ჩვენ ამ თავში ვიხილავთ გლუვ ფუნქციებს, მაგრამ შესაძლებელია ფუნქცია არ იყოს წარმოებადი და ჰქონდეს ლოკალური მინიმალი ან



ნახ. 3.3

მაქსიმალი. მაგალითად, $f(x) = |x|$. ამ ფუნქციას $x = 0$ წერტილში წარმოებული არ აქვს, თუმცა ეს წერტილი არის მისი ლოკალური მინიმალი (ნახ. 3.3).

განმარტება. განხილული თეორემის პირობებში,

$$f(x) \to \text{extr}, \qquad x \in M,$$

ამოცანისთვის კრიტიკული წერტილების სიმრავლე განისაზღვრება ასე:

$$K=\left\{\hat{x}\in M \;\middle|\; f'(\hat{x})=0\right\}. \;\square$$

მაგალითი. იპოვეთ $f(x)=x^4+x^2+8$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები.

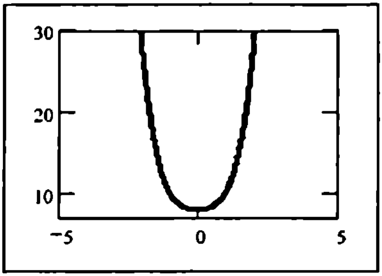
ამოხსნა. ჩავწეროთ ამოცანა სტანდარტული სახით:

$$f(x)=x^4+x^2+8\to \text{extr},\quad x\in R. \qquad (3.4)$$

(3.4) ამოცანისათვის განვსაზღვროთ კრიტიკული წერტილების სიმრავლე. ამისთვის ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{df}{dx}=0\text{, ანუ } 4x^3+2x=0,$$

საიდანაც ვპოულობთ: $x=0$, ანუ $K=\{0\}$. შემდეგ პუნქტებში ვაჩვენებთ, თუ როგორ ხდება კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა და დავასრულებთ ამ მაგალითსაც.



ნახ. 3.4

4. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა ვაიერშტრასის თეორემის საფუძველზე

ვაიერშტრასის თეორემის შედეგის გამოყენება შეგვიძლია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დასაშვები სიმრავლე არის ჩაკეტილი. თუ $M=R$, იგი ერთდროულად ღიაც არის და ჩაკეტილიც.

ვაიერშტრასის თეორემის საფუძველზე თუ დავადგენთ, რომ

$$f(x)\to \text{extr},\qquad x\in R, \qquad (3.5)$$

ამოცანაში $\text{glextr}(3.5)\neq\varnothing$, მაშინ შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ გაცილებით მარტივი

$$f(x)\to \text{extr},\qquad x\in K, \qquad (3.6)$$

ამოცანის განხილვით, რომელსაც აქვს ექსტრემუმის იგივე წერტილი, რაც (3.5)-ს, რადგან

$$\left(\hat{x} \in K \quad \text{და} \quad \hat{x} \in \operatorname{glextr}(3.5)\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{x} \in \operatorname{glextr}(3.6).$$

ანალოგიურად ვმოქმედებთ გლობალური მაქსიმალის ძიების შემთხვევაშიც.

მაგალითი. გავაგრძელოთ (3.4) მაგალითის ამოხსნა:

$$f(x) = x^4 + x^2 + 8 \to \operatorname{extr}, \quad x \in R.$$

როგორც ვნახეთ, $K = \{0\}$. რადგან

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty, \text{ ამიტომ } \operatorname{glextr}(3.4) \neq \varnothing.$$

რადგან K ერთელემენტიანია, ამიტომ $x = 0$ არის გლობალური მინიმალი

$$f(x) \to \operatorname{extr}, \qquad x \in K,$$

ამოცანაში, ე.ი. $0 \in \operatorname{gl}\min(3.4)$.

5. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა განმარტების საფუძველზე

კვლავ განვიხილოთ (3.5). ვთქვათ, სრულდება თეორემა 1-ის პირობები და $\hat{x} \in K$. ყოველი $x \in R$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $x = \hat{x} + \mathrm{h}$ და განვიხილოთ სხვაობა:

$$\Delta f = f(\hat{x} + \mathrm{h}) - f(\hat{x}) \quad \left(= f(x) - f(\hat{x})\right).$$

Δf-ის ნიშნის h-ზე დამოკიდებულების გარკვევა არსებითია, რადგან:

1) თუ $\Delta f \geq 0$ ყოველი შესაძლო h-ისთვის, მაშინ $\hat{x} \in \operatorname{gl}\min(3.5)$;
2) თუ $\Delta f \leq 0$ ყოველი შესაძლო h-ისთვის, მაშინ $\hat{x} \in \operatorname{gl}\max(3.5)$;
3) თუ $\Delta f \geq 0$ ყოველი საკმაოდ მცირე h-ისთვის, მაშინ $\hat{x} \in \operatorname{loc}\min(3.5)$;

4) თუ $\Delta f \le 0$ ყოველი საკმაოდ მცირე h-ისთვის, მაშინ $\hat{x} \in \operatorname{loc}\max(3.5)$.

მაგალითი. კვლავ გავაგრძელოთ

$$f(x) = x^4 + x^2 + 8 \to \text{extr}, \quad x \in R$$

ექსტრემალური ამოცანის განხილვა. აქ $K = \{0\}$. 0 არის ერთადერთი კრიტიკული წერტილი. ჩვენს შემთხვევაში $x = \hat{x} + \text{h}$ წარმოდგენა არის $x = 0 + h$, ამიტომ განვიხილოთ სხვაობა:

$$f(h) - f(0) = h^4 + h^2 + 8 - 8 = h^4 + h^2 \ge 0,$$

რაც x-ის ნებისმიერობის ძალით ნიშნავს, რომ $\hat{x} = 0$ არის გლობალური მინიმალი.

6. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა ექსტრემალურობის II რიგის საკმარისი პირობის საფუძველზე

თეორემა 2. ვთქვათ, $\hat{x} \in R$ წერტილში $f : M \to R$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო II რიგის წარმოებული განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ,

ა. თუ $\dfrac{d^2 f(\hat{x})}{dx^2} > 0$, $\hat{x}$ არის ლოკალური მინიმალი.

ბ. თუ $\dfrac{d^2 f(\hat{x})}{dx^2} < 0$, $\hat{x}$ არის ლოკალური მაქსიმალი.

დამტკიცება. გავშალოთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად $\hat{x}$ წერტილის მიდამოში. რადგან პირველი რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, ამიტომ მივიღებთ:

$$f(\hat{x} + \varepsilon) - f(\hat{x}) = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{d^2 f(\hat{x})}{dx^2} + o(\varepsilon^3) \qquad (3.7)$$

(3.7)-ის მარჯვენა მხარის ნიშანს, საკმარისად მცირე ε-ისთვის, განსაზღვრავს მისი პირველი შესაკრები. თუ $\dfrac{d^2 f(\hat{x})}{dx^2} > 0$,

(3.7)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები დადებითია, ე. ი. $f(\hat{x}+\varepsilon)-f(\hat{x})$ სხვაობაც დადებითია და $\hat{x}$ წერტილი არის ლოკალური მინიმალი. თუ $\frac{d^2 f(\hat{x})}{dx^2}<0$, (3.7)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები უარყოფითია და $f(\hat{x}+\varepsilon)-f(\hat{x})$ სხვაობაც უარყოფითია და $\hat{x}$ წერტილი არის ლოკალური მაქსიმალი. □

მაგალითი. განხილული $f(x)=x^4+x^2+8\to\text{extr}, \quad x\in R$, მაგალითისთვის დავადგინეთ, რომ კრიტიკული წერტილია $x=0$. ამოვწეროთ საკმარისი პირობები.

$$f'(x)=4x^3+2x \text{ და } f'(0)=0,$$
$$f''(x)=12x+2 \text{ და } f''(0)=2,$$

$f''(0)=2$ დადებითია, ე.ი. $x=0$ წარმოადგენს ლოკალურ მინიმალს.

7. გლუვი ექსტრემალური ამოცანა სეგმენტის ტიპის დასაშვები სიმრავლით

განვიხილოთ ამოცანა:

$$f(x)\to\text{extr}, \qquad x\in[a,b]. \tag{3.8}$$

ამ ამოცანის გამოკვლევა ხდება შემდეგი სქემის მიხედვით:

1) მათემატიკური მოდელის შედგენა;
2) კრიტიკული წერტილების განსაზღვრა:
$$K=\{x\in(a,b)\,|\,f'(x)=0\}\cup\{a,b\};$$
3) კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა:
თუ $\hat{x}\in K\cap(a,b)$, მაშინ გამოკვლევა უნდა ჩატარდეს წინა პარაგრაფში განხილული მეთოდებით, ხოლო სეგმენტის ბოლოებისთვის, წარმოებულის განმარტების თანახმად, გვაქვს:

$$f'(a) > 0 \Rightarrow a \in \mathrm{locmin}(3.8),$$

$$f'(a) < 0 \Rightarrow a \in \mathrm{loc\,max}(3.8),$$

$$f'(b) > 0 \Rightarrow b \in \mathrm{locmax}(3.8),$$

$$f'(b) < 0 \Rightarrow b \in \mathrm{locmin}(3.8).$$

სავარჯიშოები

ამოხსენით შემდეგი ექსტრემალური ამოცანები:

#32. $x^3 + 6x \to \text{extr.}$

#33. $x^3 + 18x^2 + 27 \to \text{extr.}$

#34. $x(x-1)^2 \to \text{extr.}$

#35. $e^{x(x-1)} \to \text{extr.}$

#36. $5x^5 - x^4 - \dfrac{x^3}{3} + 2 \to \text{extr.}$

#37. $3x^2 - 4x - 8 \to \text{extr.}$

#38. $-2x^2 + x + 12 \to \text{extr.}$

#39. $(2x+1)^2(x-4) \to \text{extr.}$

#40. $x^3 - x^2 - 3x + 6 \to \text{extr.}$

#41. $x^3 - 6x^2 + 31 \to \text{extr.}$

#42. $(x-2)^2(x-5)^3 \to \text{extr.}$

#43. $x(x-1)^3 \to \text{extr.}$

#44. $x^3 - 2x^2 + x + 1 \to \text{extr.}$

#45. $x(x-1)^2 \to \text{extr}, \ x \in [0.5]$

#46. $(2x+1)^2(x-4) \to \text{extr}, \ x \in [-1,1]$

თავი 4
უნიმოდალური ფუნქციების მინიმიზაცია ინტერვალთა გამორიცხვის მეთოდებით

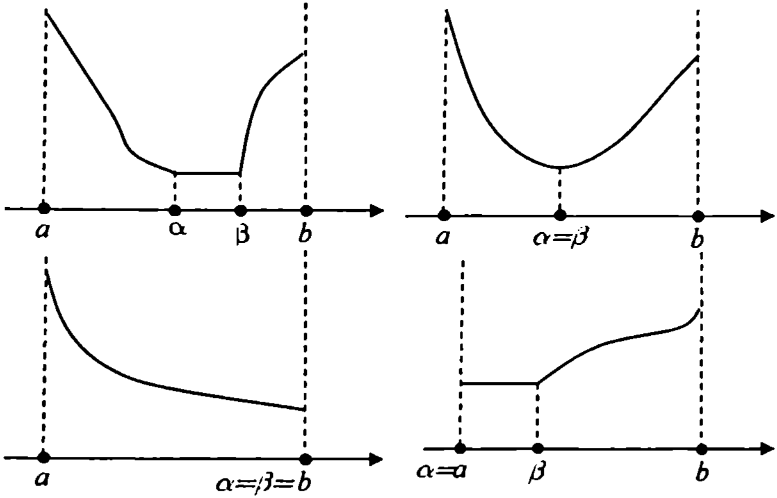
ამ თავში განვიხილავთ უნიმოდალური ფუნქციების მინიმიზაციის ე.წ. პირდაპირ მეთოდებს, რომლებიც იყენებენ მხოლოდ გარკვეულ წერტილებში გამოთვლილი ფუნქციის მნიშვნელობებს. ამ მეთოდებისთვის ფუნქციის უწყვეტობაც არაა აუცილებელი.

1. განმარტებები და ინტერვალთა გამორიცხვის წესი

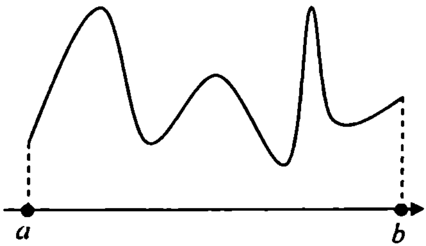
განმარტება. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უნიმოდალური $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია $[a,b]$-ზე და არსებობს რიცხვები α და β, $a \le \alpha \le \beta \le b$, ისეთები, რომ:

1) თუ $a < \alpha$, მაშინ $[a,\alpha]$ სეგმენტზე $f(x)$ მკაცრად კლებადია;
2) თუ $\beta < b$, მაშინ $[\beta,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ მკაცრად ზრდადია;
3) თუ $\hat{x} \in [\alpha,\beta]$, მაშინ, $f(\hat{x}) = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$. □

შევნიშნოთ, რომ შემდეგი სამი სეგმენტიდან: $[a,\alpha]$, $[\alpha,\beta]$, $[\beta,b]$, ერთი ან ორი შეიძლება გადაგვარდეს წერტილში. ნებისმიერ შემთხვევაში, უნიმოდალური ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარე, მისი ლოკალური მინიმალების სიმრავლე ემთხვევა გლობალური მინიმალების სიმრავლეს და ის არის ან ერთი წერტილი ($\alpha = \beta$ შემთხვევაში), ან მთელი $[\alpha,\beta]$ სეგმენტი. ქვემოთ მოყვანილია უნიმოდალური ფუნქციის (ნახ. 4.1) რამდენიმე და ერთი არაუნიმოდალური ფუნქციის მაგალითი (ნახ. 4.2):



ნახ. 4.1



ნახ. 4.2

არსებობს უნიმოდალური ფუნქციების სხვა განმარტებებიც, რომლებიც განსხვავდება აქ მოყვანილისგან (მაგალითად [3]). კერძოდ, ხშირად იხსნება უწყვეტობის მოთხოვნა.

$[a,b]$-ზე უნიმოდალური ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ $Q[a,b]$-თი. ფუნქციის $Q[a,b]$-სადმი მიკუთვნების და-

სადგენად, ხშირად სასარგებლოა შემდეგი ორი კრიტერიუმის გამოყენება:

ა) თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $[a,b]$-ზე და $f'(x)$ არ არის კლებადი ფუნქცია, მაშინ $f(x) \in Q[a,b]$.

ბ) თუ $f(x)$ ფუნქცია ორჯერ წარმოებადია $[a,b]$-ზე და $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, მაშინ $f(x) \in Q[a,b]$.

უნიმოდალური ფუნქციის მინიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები ეფუძნება უნიმოდალური ფუნქციის თვისებას, რომ მინიმალის მარჯვნივ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო მინიმალის მარცხნივ – კლებადი. ამიტომ, ორ განსხვავებულ წერტილში ასეთი ფუნქციის მნიშვნელობების შედარებით შეგვიძლია დავადგინოთ, ამ წერტილებით და სეგმენტის ბოლოებით შედგენილ რომელ ინტერვალში არ არის მოთავსებული მინიმალი, გამოვრიცხოთ იგი და ამით შევამციროთ ძიების ინტერვალი.

როდესაც უნიმოდალური ფუნქცია არ არის წარმოებადი, შეგვიძლია გამოვიყენოთ მხოლოდ **პირდაპირი მეთოდები**, რომლებიც საჭიროებენ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლას სპეციალურად შერჩეულ წერტილებში და არ საჭიროებენ წარმოებულის მნიშვნელობების გამოთვლას.

პირდაპირი მეთოდები ბევრია, ამიტომ მნიშვნელოვანია გვესმოდეს, თუ რას ნიშნავს ერთი პირდაპირი მეთოდის უპირატესობა მეორეზე. საკითხი ისმება ასე: თუ გვაქვს საშუალება მხოლოდ N-ჯერ გამოვთვალოთ $[a,b]$-ზე უნიმოდალური f ფუნქციის მნიშვნელობა, მაშინ უკეთესია ის ალგორითმი, რომელიც ამ პირობებში მოგვცემს მინიმუმის წერტილის უკეთეს მიახლოებას, ანუ მინიმალის შემცველ უმცირეს ინტერვალს, ანუ უმცირეს მაქსიმალურ ცდომილებას. შეიძლება საკითხი ასეც დავსვათ: უკეთესია ის ალგორითმი, რომლისთვისაც მოცემული ცდომილებით მინიმალის მიახლოებითი მნიშვნელობის საპოვნელად, დაგვჭირდება მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების ნაკლები რაოდენობის გამოთვლა. ასეთი მიდგომა პრაგმატული მოსაზრებებით არის მოტივირებული, რადგან

პრაქტიკიდან წამოსულ ამოცანებში ხშირად ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა ნიშნავს გარკვეული პრაქტიკული ექსპერიმენტის ჩატარებას, მაგ. ტემპერატურული ველის გაზომვას, რაც დაკავშირებულია ხარჯებთან.

უმარტივესი პირდაპირი მეთოდი არის **პასიური ძიების** მეთოდი, რომლის მიხედვითაც $[a,b]$ იყოფა N ტოლ ნაწილად წერტილებით $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{N}$, $i = 1,\dots,N-1$. გამოითვლება მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები მათში და სეგმენტის ბოლოებში და სადაც ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება მინიმალური, ის წერტილი გამოცხადდება მინიმალის საუკეთესო მიახლოებად. ამ დროს მაქსიმალური ცდომილება არ აღემატება $\dfrac{b-a}{N}$ სიდიდეს, რაშიც გვარწმუნებს შემდეგი თეორემა, რომელსაც ეწოდება ინტერვალთა გამორიცხვის წესი.

თ ე ო რ ე მ ა */ინტერვალთა გამორიცხვის წესი/*. ვთქვათ, მინიმიზაციის ამოცანაში:

$$f(x) \to \min, \ a \le x \le b, \tag{4.1}$$

$f \in Q[a,b]$ და $a \le x_1 < x_2 \le b$. მაშინ:

1. თუ $f(x_1) > f(x_2)$, მაშინ $\mathrm{gl}\min(4.1) \subset [x_1, b]$,
   თუ $f(x_1) < f(x_2)$, მაშინ $\mathrm{gl}\min(4.1) \subset [a, x_2]$.
2. თუ $f(x_1) = f(x_2)$, მაშინ $\mathrm{gl}\min(4.1) \cap [x_1, x_2] \ne \varnothing$.
3. თუ $f(x_1) \le f(x_2)$, მაშინ $\mathrm{gl}\min(4.1) \cap [a, x_2] \ne \varnothing$,
   თუ $f(x_1) \ge f(x_2)$, მაშინ $\mathrm{gl}\min(4.1) \cap [x_1, b] \ne \varnothing$.

დამტკიცება: განვიხილოთ 1. ვთქვათ, $a \le x_1 < x_2 \le b$ და $f(x_1) > f(x_2)$, მაგრამ $\hat{x} \in \mathrm{gl}\min(4.1)$ ეკუთვნის $[a, x_1)$-ს. მაშინ, უნიმოდალური ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი მინიმალის მარჯვნივ მიზნის ფუნქცია ზრდადია (მკაცრად ზრდადობას არ ვგულისხმობთ). ამიტომ უნდა

გვქონდეს $f(x_1)\le f(x_2)$, რაც ეწინააღმდეგება $f(x_1)>f(x_2)$ პირობას, ე.ი. ნებისმიერი მინიმალი მოთავსებულია x_1-ის მარჯვნივ. 1-ის მეორე ნაწილი ანალოგიურად მტკიცდება.

განვიხილოთ 2. $f(x_1)=f(x_2)$ ნიშნავს, რომ ან $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$, ან $x_1\in[a,\alpha]$ და $x_2\in[\beta,b]$. ვთქვათ $\hat{x}\in \mathrm{gl}\min(4.1)$ ისეთია, რომ $\hat{x}<x_1$, მაშინ, რადგან მინიმალის მარჯვნივ მიზნის ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ (იხ. უნიმოდალური ფუნქციის განმარტება), ამიტომ

$$f(\hat{x})=f(x_1)=f(x_2) \quad\Rightarrow\quad x_1,x_2\in \mathrm{gl}\min(4.1).$$

$\hat{x}>x_2$ შემთხვევა ანალოგიურია.

დაბოლოს, 3 წარმოადგენს 1-ის და 2-ის შედეგს. □

ინტერვალთა გამორიცხვის წესი საფუძვლად უდევს მინიმიზაციის **მიმდევრობით** მეთოდებს, რომლებშიც ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა ხდება უკვე გამოთვლილი მნიშვნელობების საფუძველზე. აღვწეროთ ორი მიმდევრობითი მეთოდი, რომლებიც გამოირჩევიან ეფექტურობით.

2. ინტერვალის სიგრძის განახევრების მეთოდი

ეს მეთოდი ხასიათდება იმით, რომ ყოველ იტერაციაზე (გარდა პირველისა) გვჭირდება ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა ორ წერტილში და ეს ორი მნიშვნელობა საშუალებას გვაძლევს ორჯერ შევამციროთ ძიების ინტერვალის სიგრძე, რომელშიც მოთავსებულია ერთი გლობალური მინიმალი მაინც, რომელსაც $\hat{x}$-ით აღვნიშნავთ. ფუნქციის მნიშვნელობების N-ჯერ გამოთვლის შემდეგ ჩვენ გვრჩება $(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor}$ სიგრძის მონაკვეთი, რომელშიც მოთავსებულია ერთი მაინც მინიმალი და გამოთვლილია აგრეთვე ფუნქციის მნიშვნელობა ბო-

ლო ინტერვალის შუა x_m წერტილში, რომელსაც ვიღებთ $\hat{x}$ -ის საუკეთესო მიახლოებად. ამ მეთოდისათვის მაქსიმალური ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor}$ სიდიდეს, რაც ბევრად უკეთესი შეფასებაა, ვიდრე გვქონდა პასიური ძიების მეთოდისთვის.

ვთქვათ, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ უნიმოდალურია. ჩამოვაყალიბოთ ე.წ. ინტერვალის სიგრძის განახევრების ალგორითმი, რომლის საშუალებითაც მიახლოებით განვსაზღვრავთ $f(x)\to\min$, $x\in[a,b]$, მინიმიზაციის ამოცანის გლობალურ მინიმალს. მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ არსებობს აგრეთვე მონაკვეთის შუაზე გაყოფის ალგორითმი, რომელიც აქ განხილულთან შედარებით ნაკლებეფექტურია.

მეთოდის ფსევდოკოდი ასეთია:

ინტერვალის სიგრძის განახევრების მეთოდი (a, b, ε, $f(x)$)

$x_m=\frac{a+b}{2}$; $L=b-a$; გამოვთვალოთ $f(x_m)$;
while(1)
{
    $x_l=a+\frac{L}{4}$; $x_r=b-\frac{L}{4}$; გამოვთვალოთ $f(x_l)$ და $f(x_r)$;
    if $\left(f(x_l)<f(x_m)\right)$ // გამოირიცხება $(x_m,b]$
    {
        $b=x_m$; $x_m=x_l$; $f(x_m)=f(x_l)$;
    }
    // ჯერ მხოლოდ ინტერვალის მეოთხედის გამორიცხვა შეგვიძლია

```
    else
    {
        if (f(x_r) < f(x_m))  //გამორიცხება [a, x_m)
        {
            a = x_m;   x_m = x_r;   f(x_m) = f(x_l);
        }
        else   //გამორიცხება [a, x_l) და (x_r, b]
        {
            a = x_l;   b = x_r;
        }
    }
    L = b - a;
    if (L < 2ε)
        return (x̂ ≈ x_m,  f(x̂) = f(x_m));
}
```

მაგალითი: უნტერვალის სიგრძის განახევრების მეთოდით მოძებნეთ $f(x)=(100-x)^2$ ფუნქციის მინიმალი $96 \le x \le 102$ შუალედში. $\hat{x}$ განსაზღვრეთ $\varepsilon = 0,5$ სიზუსტით.

ამოხსნა: ვიმოქმედოთ ზემოთ აღწერილი ალგორითმით და შედეგები (იტერაციების მიხედვით) წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით:

ცხრილი 4.1.

n	a	b	L	x_l	x_m	x_r	$f(x_l)$	$f(x_m)$	$f(x_r)$
1	96	102	6	97.5	99	100.5	6.25	1	0.25
2	99	102	3	99.75	100.5	101.25	0.063	0.25	1.563
3	99	100.5	1.5	99.375	99.75	100.125	0.391	0.063	0.016
4	99.75	100.5	0.75	99.938	100.125			0.016	

რადგან მესამე იტერაციის შემდეგ მიღებული მონაკვეთის სიგრძე ნაკლებია 2ε-ზე, ამიტომ $\hat{x} \approx x_m = 100.125$, $f(\hat{x}) \approx 0{,}016$. ε-სიზუსტით მინიმალის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად დაგვჭირდა ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა 7-ჯერ. შედეგად მივიღეთ $6 \cdot 0.5^3 = 0.75$ სიგრძის ინტერვალი.

3. ოქროს კვეთის მეთოდი

მიმდევრობითი მეთოდებიდან ოპტიმალურია ფიბონაჩის მეთოდი. მასთან შედარებით გაცილებით მარტივია ოქროს კვეთის მეთოდი, რომელიც დიდი N-ებისთვის იგივე შედეგს იძლევა, რასაც ფიბონაჩის მეთოდი, ანუ არის ასიმპტოტურად ოპტიმალური. ოქროს კვეთის მეთოდი, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების N-ჯერ გამოთვლის შემდეგ გვიტოვებს $(b-a)\tau^{N-1}$ სიგრძის მონაკვეთს, რომელიც შეიცავს მინიმალს. აქ $\tau \approx 0{,}618$ არის $\tau^2 = 1-\tau$ განტოლების დადებითი ამონახსნი $\tau = \left(\sqrt{5}-1\right)/2.0 \approx 0{,}61803\ldots$ τ და $(1-\tau)$ რიცხვები, განმარტების მიხედვით, ახდენენ $[0,1]$ სეგმენტის ოქროს კვეთას. მონაკვეთის ორ არატოლ ნაწილად ისეთ დაყოფას, როცა მთელი მონაკვეთის სიგრძის შეფარდება მისი დიდი ნაწილის სიგრძესთან ტოლია დიდი ნაწილის სიგრძის შეფარდებისა მცირე ნაწილის სიგრძესთან, ენოდება ამ მონაკვეთის **ოქროს კვეთა**. რაც დიდია N, მით უფრო ვლინდება ოქროს კვეთის მეთოდის უპირატესობა ზემოთ განხილულ მეთოდებთან შედარებით.

კვლავ განვიხილოთ მინიმიზაციის ამოცანა

$$f(x) \to \min \tag{4.2}$$

$[a,b]$-ზე უნიმოდალური f ფუნქციით და ჩამოვაყალიბოთ ოქროს კვეთის მეთოდის ალგორითმი, რაც საშუალებას მოგვ-

ცემს მოცემული ε სიზუსტით დავადგინოთ გლობალური მინიმალის ერთ-ერთი წერტილი (4.2) ამოცანაში.

ოქროს კვეთის მეთოდის ფსევდოკოდი ასეთია:

ოქროს კვეთის მეთოდი (**a**,**b**,**ε**, $f(x)$)

$\tau = \left(\sqrt{5}-1\right)/2.0$, $x_l = b - \tau(b-a)$; $x_r = a + \tau(b-a)$;
გამოვთვალოთ $f(x_l)$ და $f(x_r)$;
while(1)
{
    if$\left(\tau(b-a) \le \varepsilon\right)$
    {
        return ($\hat{x} \approx x_l$ და $f(\hat{x}) \approx f(x_l)$);
    }
    else
    {
        if $\left(f(x_l) < f(x_r)\right)$ //გამოირიცხება $(x_r, b]$ შუალედი
        {
            $b = x_r$; $x_r = x_l$; $f(x_r) = f(x_l)$; $x_l = b - \tau(b-a)$,
            გამოვთვალოთ $f(x_l)$;
        }
        else //ახლა გამოირიცხება $[a, x_l)$
        {
            $a = x_l$; $x_l = x_r$; $f(x_l) = f(x_r)$; $x_r = a + \tau(b-a)$,
            გამოვთვალოთ $f(x_r)$;
        }
    }
}

აუცილებელია ყურადღება გავამახვილოთ შემდეგ მომენტებზე:

!) $\tau > 0,5$, ამიტომ $x_l < x_r$ (ცხადია, განვიხილავთ $a < b$ შემთხვევას).

!!) თუ $\tau(b-a) \le \varepsilon$, მაშინ $\max\limits_{a \le x \le b} |x_l - x| \le \varepsilon$, კერძოდ კი $|x_l - \hat{x}| \le \varepsilon$. ამიტომ შეგვიძლია, რომ ε სიზუსტით ავიღოთ $\hat{x} \approx x_l$.

!!!) თუ სტრიქონ 10-ში შესრულდა $f(x_l) < f(x_r)$, მაშინ ვითვლით მხოლოდ $f(x_l)$, თუმცა ახალ $[a,b]$-ში (ანუ ძველ $[a,x_r]$-ში) ახალი x_r უნდა აგვეღო ჩვეულებრივი წესით: $a+\tau(x_r - a)$, შემდეგ კი დაგვეთვალა $f(x_r)$. მაგრამ ეს მოგვცემდა:

$$
\begin{aligned}
&a+\tau(x_r-a)= \\
&=a+\tau\big(a+\tau(b-a)-a\big)=a+\tau^2(b-a)= \\
&=a+(1-\tau)(b-a)=b-\tau(b-a)=x_l
\end{aligned}
$$

(აქ გარკვეული ანალოგიაა წინა მეთოდის x_m წერტილთან მიმართებაში), რაც ნიშნავს რომ ახალი $f(x_r)$ შეგვიძლია პირდაპირ გავუტოლოთ ძველ $f(x_l)$ -ს.

მაგალითი. ოქროს კვეთის მეთოდის გამოყენებით, $\varepsilon = 0,5$ სიზუსტით განვსაზღვროთ გლობალური მინიმალის წერტილი

$$f(x) = (100-x)^2 \to \min,\ x \in [96;102],$$

მინიმიზაციის ამოცანაში.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ აღწერილი ალგორითმით და შედეგები წარმოვადგინოთ შემდეგ ცხრილში, იტერაციის ნომრის მითითებით:

ცხრ. 4.2.

n	a	b	$\tau(b-a)$	x_l	x_r	$f(x_l)$	$f(x_r)$
1	96	102	3.708	98.292	99.708	2.917	0.085
2	98.292	102	2.292	99.708	100.584	0.085	0.341
3	98.292	100.584	1.416	99.168	99.708	0.692	0.085
4	99.168	100.584	0.875	99.708	100.043	0.085	0.0018
5	99.708	100.584	0.541	100.043	100.249	0.0018	0.062
6	99.708	100.249	0.334				

ამიტომ $\hat{x} \approx x_l = 100.043$, ხოლო $f(\hat{x}) \approx 0.0018$. ცხრ. 4.2-ში ისრებით მითითებულია წერტილების ტრანსფორმაციის და მათი მნიშვნელობის შენარჩუნების ფაქტები. ε-სიზუსტით მინიმალის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად დაგვჭირდა ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა 6-ჯერ. 6-ჯერ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლით მივიღეთ $6 \cdot 0.618^5 = 0.541$ სიგრძის ინტერვალი.

სავარჯიშოები

ამოცანებში #47 – #49 ინტერვალის სიგრძის განახევრების მეთოდით, მოცემული ε სიზუსტით განსაზღვრეთ f ფუნქციის გლობალური მინიმუმის $\hat{x}$ წერტილი.

#47. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$, $x \in [1,5;2]$, $\varepsilon = 0,05$.

#48. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, $x \in [-1;0]$, $\varepsilon = 0,1$.

#49. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x$, $x \in [0;0,5]$, $\varepsilon = 0,01$.

#50. რამდენჯერ უნდა გამოვითვალოთ f ფუნქციის მნიშვნელობა მონაკვეთის სიგრძის განახევრების მეთოდით, რომ გლობალური მინიმუმის წერტილი ვიპოვოთ წინასწარ მოცემული ε სიზუსტით?

#51. იპოვეთ b -ს მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=-x^2+5x-6$ ფუნქცია იქნება უნიმოდალური $[-5,b]$ სეგმენტზე.

#52. იპოვეთ a-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=-x^2-8x+9$ ფუნქცია იქნება უნიმოდალური $[-10,a]$ სეგმენტზე.

#53. იპოვეთ c-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=-3x^2+15x+17$ ფუნქცია იქნება უნიმოდალური $[0,c]$ სეგმენტზე.

#54. ვთქვათ, x_l და x_r არის $[a,b]$ მონაკვეთის ოქროს კვეთის წერტილები. აჩვენეთ, რომ x_l არის $[a,x_r]$ მონაკვეთის ოქროს კვეთის წერტილებიდან მარჯვენა (უდიდესი), ხოლო x_r არის $[x_l,b]$ მონაკვეთის ოქროს კვეთის წერტილებიდან მარცხენა (უმცირესი). იპოვეთ $[a,x_r]$ და $[x_l,b]$ მონაკვეთების სიგრძეები.

#55. რისი ტოლია მაქსიმალური შესაძლო ცდომილება ოქროს კვეთის მეთოდისთვის, თუ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები გამოთვლილ იქნა N -ჯერ?

#56. რამდენჯერ იქნება მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა საჭირო, თუ ვიყენებთ ოქროს კვეთის მეთოდს და გვინდა გლობალური მინიმუმის წერტილის განსაზღვრა ε სიზუსტით?

შემდეგ ამოცანებში ოქროს კვეთის მეთოდით განსაზღვრეთ f ფუნქციის გლობალური მინიმუმის წერტილი $[a,b]$ მონაკვეთზე ε სიზუსტით.

#57. $f(x)=x^4+2x^3+4x+1$, $[-1;0]$, $\varepsilon=0{,}1$.

#58. $f(x)=(x+1)^4-2x^2$, $[-3;-2]$, $\varepsilon=0{,}05$.

#59. $f(x)=x^5-5x^3+10x^2-5x$, $[-3;-2]$, $\varepsilon=0{,}1$

თავი 5
უნიმოდალური ფუნქციების მინიმიზაცია პოლინომიალური აპროქსიმაციით და ნერტილოვანი შეფასებით

იმ განმარტების მიხედვით, რომელსაც ჩვენი კურსი ეყრდნობა, უნიმოდალური ფუნქცია უწყვეტია. ვაიერშტრასის ერთ-ერთი თეორემის თანახმად, სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის აპროქსიმაცია შესაძლებელია პოლინომის საშუალებით ნებისმიერი სიზუსტით:

თეორემა /ვაიერშტრასის/. თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის, არსებობს ალგებრული პოლინომი $p(x)$ ისეთი, რომ

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \text{ , ყოველი } x \in [a,b] \text{-სთვის. } \square$$

თუ აპროქსიმაცია საკმაოდ ზუსტია, მიზნის ფუნქციის მინიმალად შეგვიძლია მივიღოთ პოლინომის გლობალური მინიმალი. გარდა ამისა, ისევ ვაიერშტრასის თეორემის საფუძველზე, მიახლოების სიზუსტე შეგვიძლია გავაუმჯობესოთ ორნაირად: უფრო მაღალი რიგის პოლინომის გამოყენებით ან სააპროქსიმაციო შუალედის შემცირებით. მეორე გზა უფრო ბუნებრივია, რადგან საწყისი შუალედი საკმაოდ სწრაფად შეგვიძლია შევამციროთ (მაგალითად, ოქროს კვეთის მეთოდით), ხოლო შემდეგ გამოვიყენოთ კვადრატულ (ან კუბურ) აპროქსიმაციაზე დაფუძნებული მეთოდები.

1. შეფასების მეთოდი, რომელიც იყენებს კვადრატულ აპროქსიმაციას

განვიხილოთ $[x_1, x_3]$ სეგმენტზე უნიმოდალური f ფუნქციის მინიმალის მოძებნის ამოცანა მოცემული ε სიზუსტით:

$$f(x) \to \min \text{ , } x_1 \le x \le x_3 \text{ .}$$

ვთქვათ, $x_1 < x_2 < x_3$ და ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში არის: $f_i = f(x_i)$, $i = 1,2,3$. განვსაზღვროთ a_0, a_1, a_2 კოეფიციენტები ისე, რომ კვადრატული პოლინომის

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

გრაფიკმა გაიაროს $(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$ წერტილებზე.

პირველ რიგში, რადგან $f_1 = f(x_1) = p(x_1) = a_0$, ამიტომ $a_0 = f_1$. შემდეგ, რადგან

$$f_2 = f(x_2) = p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_1) = f_1 + a_1(x_2 - x_1),$$

ამიტომ

$$a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}.$$

ბოლოს, როცა $x = x_3$, გვაქვს:

$$f_3 = f(x_3) = p(x_3) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

საიდანაც

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right).$$

თუ $a_2 > 0$, მაშინ ვიხილავთ ახალ ამოცანას

$$p(x) \to \min, \ x_1 \le x \le x_3, \tag{5.1}$$

და ვიპოვით $p(x)$-ის მინიმალს მოცემულ სეგმენტზე. ის იქნება, ან

$$p'(x) = a_1 + a_2(x - x_2) + a_2(x - x_1) = 0,$$

განტოლების ამონახსნი

$$\overline{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{a_1}{2a_2}, \tag{5.2}$$

ან სეგმენტის ერთ-ერთი ბოლო: x_1 ან x_3.

როცა x_1, x_2, x_3 წერტილები ისეა შერჩეული, რომ

$$f(x_1) \geq f(x_2), \ \ f(x_3) \geq f(x_2), \tag{5.3}$$

მაშინ $a_2 \geq 0$ და $p(x)$ სააპროქსიმაციო მრავალწევრს, რომელიც გადის $(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$ წერტილებზე აქვს გლობალური მინიმალი $[x_1, x_3]$-ის შიგნით და შეგვიძლია გამოვიყენოთ პაუელის მეთოდი.

თუ (5.3) პირობა არ სრულდება, მაშინ ვიქცევით შემდეგნაირად: ვამცირებთ ძიების ინტერვალს (მაგ, ოქროს კვეთის მეთოდით) და ვამოწმებთ (5.3)-ს (x_2-ის როლში შეიძლება ავილოთ ოქროს კვეთის რომელიმე წერტილი). როგორც კი შესრულდება (5.3) პირობა, ვიყენებთ კვადრატულ აპროქსიმაციაზე დამყარებულ მეთოდს. თუ პირობა არ შესრულდა და ძიების ინტერვალი გახდა მოცემულ ε-ზე ნაკლები, მაშინ ვასრულებთ მინიმალის ძიებას ოქროს კვეთის მეთოდით.

მაგალითი. კვადრატული აპროქსიმაციის გამოყენებით მიახლოებით განსაზღვრეთ მინიმალი

$$f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x} \ \ \to \min, \quad 1 \leq x \leq 5,$$

ამოცანაში $\varepsilon = 0.5$ სიზუსტით.

ამოხსნა. ავილოთ $x_1 = 1, x_3 = 5, x_2 = 3$ (x_2-ად შუა წერტილს ვიღებთ). გამოვითვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები:

$$f_1 = 18, \ f_2 = 23{,}33, \ f_3 = 53{,}2$$

და აგრეთვე მააპროქსიმირებელი პოლინომის კოეფიციენტები:

$$a_1 = \frac{23{,}33 - 18}{3 - 1} = \frac{8}{3},$$

$$a_2 = \frac{1}{5-3}\left(\frac{53{,}2 - 18}{5 - 1} - \frac{8}{3}\right) = \frac{46}{15}.$$

(a_0, ფორმალურად, არ მონაწილეობს $\bar{x}$-ის წარმოდგენაში). ბოლოს,

$$\bar{x} = \frac{1+3}{2} - \frac{8/3}{2(46/15)} = 1,565.$$

რადგან 1<1,565<5, ამიტომ ვიღებთ $\hat{x} \approx 1,565$ (შედარებისათვის, მინიმალის ზუსტი მნიშვნელობა არის $\hat{x} = 1,5874$).

2. პაუელის მეთოდი

ეს მეთოდი მიმდევრობითია და ყოველ იტერაციაზე იყენებს კვადრატულ აპროქსიმაციაზე დაფუძნებულ მეთოდს. ვთქვათ, x_1, x_2, x_3 წერტილები ისეა შერჩეული, რომ $x_1 < x_2 < x_3$ და $f_1 \geq f_2 \leq f_3$ (ამ უტოლობების შედეგად მიიღება $a_2 \geq 0$).

მეთოდის ალგორითმის ფსევდოკოდი ასეთია:

პაუელის მეთოდი ($x_1, x_2, x_3, \varepsilon, f(x)$)

```
while(1)
{
    f_min = min{f_1, f_2, f_3}, და x_min იყოს ის წერტილი,
          სადაც მიიღწევა f_min;
    { x_1, x_2, x_3 -ის მიხედვით გამოვითვალოთ x̄, კვად-
      რატულ აპროქსიმაციაზე დაფუძნებული მეთოდის
      გამოყენებით; }
    { x_opt -ით აღვნიშნოთ x_min და x̄ წერტილებს შორის
      ის, რომელშიც მიზნის ფუნქცია ნაკლებ მნიშვნელობას
      იღებს; }
    if(|f_min - f(x̄)| < ε  &&  |x_min - x̄| < ε)
          return (x̂ ≈ x_opt, f(x̂) ≈ f(x_opt));
    { x_opt წერტილის ორივე მხარეს დავალაგოთ მასთან
      ყველაზე ახლოს მდგომი ორი წერტილი და გადავ-
      ნომროთ ეს წერტილები ზრდადობის მიხედვით;}
}
```

გავაკეთოთ რამდენიმე აუცილებელი შენიშვნა.

1) პირველ იტერაციაზე $f_{\min} = f_2$.

2) ზოგჯერ ითხოვენ, რომ შეჩერების პირობა ზედიზედ შესრულდეს რამდენიმე მომდევნო იტერაციისათვის (მაგალითად, სამჯერ), შემთხვევითობის თავიდან ასაცილებლად.

3) პაუელის მეთოდს მინიმალის სიახლოვეს აქვს კვადრატული კრებადობა. ეს არის მისი უპირატესობა ოქროს კვეთის მეთოდთან, მაგრამ თუ საწყისი ინტერვალი საკმაოდ დიდია, კვადრატული პოლინომით მიახლოება შეიძლება აღმოჩნდეს საკმაოდ უხეში, რაც შეამცირებს პაუელის მეთოდის კრებადობას.

3. წერტილოვანი აპროქსიმაცია. შუა წერტილის მეთოდი

თუ უნიმოდალური მიზნის ფუნქცია წარმოებადიც არის, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წერტილოვან შეფასებაზე დამოკიდებული მეთოდები. ცხადია, თუ $f \in Q[a,b]$ და $a<x<b$, მაშინ:

ა) $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \hat{x} > x$,

ბ) $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \hat{x} < x$,

გ) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{x} = x$,

სადაც $\hat{x}$ აღნიშნავს მინიმალს $f(x) \to \min,\quad a \le x \le b$, ამოცანაში.

შუა წერტილის მეთოდის ალგორითმის ფსევდოკოდი ასეთია:

შუა წერტილის მეთოდი $(a, b, \varepsilon, f(x))$

```
while(1)
{
      გამოვითვალოთ x_m = (a+b)/2 და f'(x_m);
```

```
4        if (|f'(x_m)| ≤ ε)
5              return (x̂ = x_m   f(x̂) ≈ f(x_m));
6        if (f'(x_m) < 0)   a = x_m;
7        if (f'(x_m) > 0)   b = x_m;
8    }
```

მაგალითი. შუა წერტილის მეთოდით მიახლოებით განსაზღვრეთ მინიმალი

$$f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x} \to \min, \quad 1 \le x \le 5,$$

ამოცანაში $\varepsilon = 0,05$ სიზუსტით.

ამოხსნა. $a = 1,\ b = 5,\ f'(x) = 4x - 16/x^2,\quad f'(a) = -12 < 0$, $f'(b) = 20 - 16/5 > 0$, რაც ნიშნავს, რომ მინიმალი $\hat{x}$ არის $[a,b]$ სეგმენტის შიგა წერტილი და შეგვიძლია შუა წერტილის მეთოდის გამოყენება.

I იტერაცია

სტრიქონი 3) $x_m = 3$, და $f'(x_m) = 12 - 16/9 = 10,22$;

სტრიქონი 4) $|f'(x_m)| > \varepsilon$;

სტრიქონი 7) $f'(x_m) > 0$, ამიტომ $a = 1, b = 3$;

II იტერაცია

სტრიქონი 3) $x_m = 2$, $f'(x_m) = 4 \cdot 2 - 16/(2 \cdot 2) = 4$;

სტრიქონი 4) $|f'(x_m)| > \varepsilon$;

სტრიქონი 7) $f'(x_m) > 0$, ამიტომ $a = 1, b = 2$;

III იტერაცია

სტრიქონი 3) $x_m = 3/2$, $f'(x_m) = 4 \cdot (3/2) - 16/(9/4) = 6 - 7,11 = -1,11$;

სტრიქონი 4) $|f'(x_m)| > \varepsilon$;

სტრიქონი 6) $f'(x_m) < 0$, ე.ი. $a = 3/2, b = 2$;

IV იტერაცია

სტრიქონი 3) $x_m = 1{,}75$, $f'(x_m) = 4 \cdot 1{,}75 - 16/3{,}06 = 7 - 5{,}23 = 1{,}77$;

სტრიქონი 4) $|f'(x_m)| > \varepsilon$;

სტრიქონი 7) $f'(x_m) > 0$, ე.ი. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}75$;

V იტერაცია

სტრიქონი 3) $x_m = 1{,}63$,

$$f'(x_m) = 4 \cdot 1{,}63 - 16/2{,}64 = 6{,}52 - 6{,}06 = 0{,}46.$$

სტრიქონი 4) $|f'(x_m)| < \varepsilon$, ამიტომ $\hat{x} \approx 1{,}63$, ხოლო $f(\hat{x}) \approx 40{,}45$.

სავარჯიშოები

#60. ამოცანებში #47 – #49 და #57 – #59, მოძებნეთ მინიმალი კვადრატული აპროქსიმაციის გამოყენებით და შეადარეთ ადრე მიღებულ შედეგებს.

#61. შუა წერტილის მეთოდის გამოყენებით განსაზღვრეთ f ფუნქციის მინიმალი $[a,b]$ სეგმენტზე $\varepsilon = 0{,}5$ სიზუსტით:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 8x + 12, \quad 0 \le x \le 2.$$

#62. ამოცანებში, #47 – #49 და #57 – #59, მოძებნეთ მინიმალი შუა წერტილის მეთოდის გამოყენებით და შეადარეთ ადრე მიღებულ შედეგებს.

თავი 6
ლიფშიცური ფუნქციების მინიმიზაცია ტეხილთა მეთოდით

თუ უნიმოდალური ფუნქციებისთვის რეკომენდებულ მეთოდებს გამოვიყენებთ არაუნიმოდალური ფუნქციებისათვის, უკეთეს შემთხვევაში (უწყვეტი ფუნქციებისათვის) მივიღებთ ლოკალური მინიმალის მიახლოებით მნიშვნელობას. ამავე დროს, უნიმოდალური ფუნქციების სიმრავლე არის ძალიან ვიწრო კლასი უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლიდან.

ტეხილთა მეთოდი საშუალებას იძლევა მივიღოთ გლობალური ექსტრემუმის წერტილების მიახლოებითი მნიშვნელობები ლიფშიცური ფუნქციებისათვის. გავიხსენოთ

განმარტება. ვამბობთ, რომ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $[a,b]$ მონაკვეთზე, თუ არსებობს ისეთი $L>0$ მუდმივი, რომ

$$\left|f(x)-f(y)\right| \leq L\left|x-y\right|, \quad \forall x,y \in [a,b]. \tag{6.1}$$

უმცირესს იმ მუდმივებს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (6.1)-ს, უწოდებენ ლიფშიცის მუდმივს (იგი დამოკიდებულია f-ზე და $[a,b]$-ზე), ხოლო f-ს უწოდებენ ლიფშიცურ ფუნქციას ($[a,b]$-ზე). □

გეომეტრიულად (6.1) ნიშნავს, რომ f ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი ქორდის საკუთხო კოეფიციენტის მოდული არ აღემატება L-ს. (6.1)-დან გამომდინარეობს, რომ ლიფშიცური ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ზე, ამიტომ, ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, იგი აღწევს თავის გლობალურ მინიმუმს და მაქსიმუმს $[a,b]$ -ზე.

არაა აუცილებელი, რომ ლიფშიცური ფუნქცია იყოს წარმოებადი. მაგალითად, $f(x)=|x|, \quad -1 \leq x \leq 1$, მაგრამ თუ ფუნქცია წარმოებადია მონაკვეთზე და წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი ლიფშიცურია.

წინადადება. ვთქვათ f ფუნქცია წარმოებადია $[a,b]$-ზე და $f'(x)$, $a \le x \le b$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა. მაშინ f ფუნქცია $[a,b]$-ზე აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $L = \sup\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$ მუდმივით.

დამტკიცება. ნებისმიერი $x, y \in [a,b]$ წერტილისათვის სასრულ სხვაობათა ფორმულა გვაძლევს:

$$f(y) - f(x) = f'\big(y + \theta(y-x)\big)(y-x),$$

რომელიღაც $\theta \in [0,1]$-ისათვის. აქედან და f'-ის შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს წინადადების დასკვნა. □

ვთქვათ, f არის ლიფშიცური ფუნქცია $[a,b]$ მონაკვეთზე ლიფშიცის L მუდმივით. ცხადია, იგივე იქნება სამართლიანი $-f$ ფუნქციისათვის. ამიტომ, ლიფშიცური ფუნქციებისათვის შეგვიძლია ზოგადობის შეუზღუდავად განვიხილოთ მხოლოდ მინიმიზაციის ამოცანა:

$$f(x) \to \min, \quad x \in [a,b], \tag{6.2}$$

და ვიგულისხმოთ $L>0$ ($L=0$ ნიშნავს $f=\mathrm{const}$).

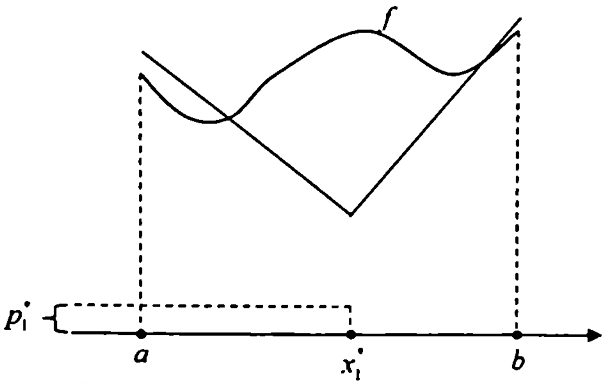
ნებისმიერად ავიღოთ $x_0 \in [a,b]$ და განვსაზღვროთ ფუნქცია:

$$p(x) = f(x_0) - L|x - x_0|, \quad a \le x \le b.$$

ცხადია, ეს არის ორი მონაკვეთისაგან შედგენილი ტეხილი, $p(x_0) = f(x_0)$ და მისი მონაკვეთების საკუთხო კოეფიციენტებია $\mp L$. ტეხილთა მეთოდი ეფუძნება იმ ფაქტს, რომ p-ს გრაფიკი $[a,b]$-ზე მოთავსებულია f-ის გრაფიკის ქვემოთ. მართლაც, (6.1)-ის ძალით, როცა $a \le x \le b$, გვაქვს:

$$f(x) - p(x) = f(x) - f(x_0) + L|x - x_0| \ge -|f(x) - f(x_0)| + L|x - x_0| =$$
$$= \left(L - |f(x) - f(x_0)||x - x_0|^{-1}\right)|x - x_0| \ge 0.$$

ტეხილთა მეთოდი გეომეტრიულად ნიშნავს ტეხილთა ისეთი მიმდევრობის აგებას, რომელიც ქვემოდან უახლოვდება f-ის გრაფიკს და ნებისმიერი ტეხილის ნებისმიერი მდგენელის საკუთხო კოეფიციენტი არის ან $+L$, ან $-L$. ამ ტეხილების წვეროების ერთი ნაწილის კოორდინატების დამახსოვრება ხდება ე.წ. **კრიტიკული წერტილების სიმრავლეში**, რომელიც ყოველ იტერაციაზე ერთი ელემენტით იზრდება. ალგორითმის



ნახ. 6.1

აღწერამდე, მოვიყვანოთ დამხმარე ფაქტები. თუ $(a, f(a))$ წერტილიდან გავატარებთ მონაკვეთს $-L$ საკუთხო კოეფიციენტით და $(b, f(b))$ წერტილიდან გავატარებთ მონაკვეთს $+L$ საკუთხო კოეფიციენტით (ცხადია, ორივეს გრაფიკი f-ის გრაფიკის ქვემოთაა), მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილი არის (x_1^*, p_1^*), სადაც:

$$x_1^* = \frac{1}{2L}\left[f(a) - f(b) + L(a+b)\right], \quad p_1^* = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b) + L(a-b)\right],$$

ანუ ესაა პირველი ტეხილის ყველაზე ქვედა წერტილი (იხ. ნახ. 6.1).

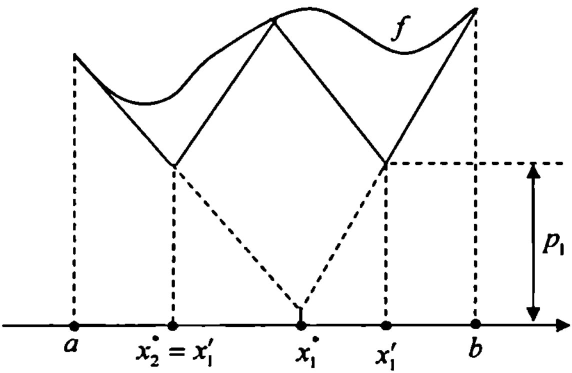
ტეხილთა მეთოდის ალგორითმი შემდეგია.

ბიჯი 1) $\left(x_1^*, p_1^*\right)$ წყვილი გამოვიყვანოთ ***კრიტიკული წერტილების სიმრავლიდან*** და მის ნაცვლად შევიყვანოთ ორი ახალი წყვილი $\left(x_1', p_1\right)$, $\left(x_1'', p_1\right)$ (იხ. ნახ. 6.2) შემდეგნაირად:

$$x_1' = x_1^* - \Delta_1, \quad x_1'' = x_1^* + \Delta_1, \quad p_1 = \frac{1}{2}\left[f\left(x_1^*\right) + p_1^*\right],$$

სადაც $\Delta_1 = \dfrac{1}{2L}\left[f\left(x_1^*\right) - p_1^*\right]$.

ბიჯი 2) მიღებული ორი $\left(x_1', p_1\right)$, $\left(x_1'', p_1\right)$ წყვილიდან ავირჩიოთ ის, რომლის მეორე კოორდინატი მინიმალურია,



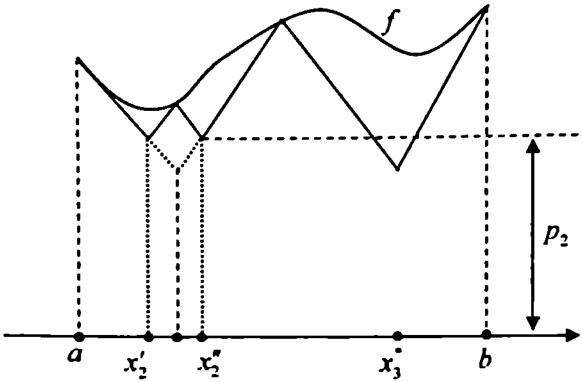
ნახ. 6.2

აღვნიშნოთ იგი $\left(x_2^*, p_2^*\right)$-ით და გამოვრიცხოთ კრიტიკული წყვილების სიმრავლიდან (ცხადია, მოცემულ ბიჯზე $\left(x_2^*, p_2^*\right)$-ად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ამ ორი წყვილიდან). $\left(x_2^*, p_2^*\right)$-ის ნაცვლად, კრიტიკული

წყვილების სიმრავლეში დავამატოთ ორი ახალი წყვილი $\left(x_2', p_2\right)$, $\left(x_2'', p_2\right)$, რომელთა კომპონენტები ითვლება ფორმულებით:

$$x_2' = x_2^{\bullet} - \Delta_2, \quad x_2'' = x_2^{\bullet} + \Delta_2, \quad p_2 = \frac{1}{2}\left[f\left(x_2^{\bullet}\right) + p_2^{\bullet}\right],$$

სადაც $\Delta_2 = \dfrac{1}{2L}\left[f\left(x_2^{\bullet}\right) - p_2^{\bullet}\right]$.



ნახ. 6.3

ამ ბიჯის შედეგად, კრიტიკული წყვილების სიმრავლეში არის სამი წყვილი (იხ. ნახ. 6.3).

ბიჯი *n*). წინა ბიჯების შედეგად, კრიტიკული წყვილების სიმრავლეში არის *n* ცალი (x, p) სახის წყვილი. მათგან ავირჩიოთ ის, რომლის მეორე კომპონენტი მინიმალურია. აღვნიშნოთ იგი $\left(x_n^{\bullet}, p_n^{\bullet}\right)$-ით, გამოვრიცხოთ იგი კრიტიკული წყვილების სიმრავლიდან და მის

ნაცვლად, კრიტიკული წყვილების სიმრავლეში, დავამატოთ ორი ახალი წყვილი $\left(x_n', p_n\right)$, $\left(x_n'', p_n\right)$, რომელთა კომპონენტები ითვლება ფორმულებით:

$$x_n' = x_n^* - \Delta_n, \quad x_n'' = x_n^* + \Delta_n, \quad p_n = \frac{1}{2}\left[f\left(x_n^*\right) + p_n^*\right], \tag{6.3}$$

სადაც $\Delta_n = \dfrac{1}{2L}\left[f\left(x_n^*\right) - p_n^*\right]$.

ჩვეულებრივ, როდესაც $f\left(x_n^*\right)$ საკმაოდ ახლოსაა $f_* = \min\limits_{a \le x \le b} f\left(x\right)$ სიდიდესთან, მაშინ ვიღებთ $\hat{x} \approx x_n^*$ და $f_* \approx f\left(x_n^*\right)$. f_*-თან სიახლოვის განსაზღვრისათვის გამოიყენება შეფასება:

$$0 \le f\left(x_n^*\right) - f_* \le 2L\Delta_n, \tag{6.4}$$

ე.ი. როცა სრულდება (6.4), მაშინ სრულდება ძიების პროცესი.

შენიშვნა. წარმოებადი ფუნქციისთვის $f'\left(\hat{x}\right) = 0$, ამიტომ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები უფრო სწრაფად მიდის მინიმუმისკენ, ვიდრე x_n^* დაუახლოვდება $\hat{x}$-ს. ალგორითმის გაჩერების პირობად (6.4)-თან ერთად შეიძლება $\left|\hat{x} - x_n^*\right|$-ის სიმცირის მოთხოვნაც.

მაგალითი. ტეხილთა მეთოდით $[10;15]$ შუალედზე $\varepsilon = 0.01$ სიზუსტით მოძებნეთ $f\left(x\right) = \dfrac{\sin\left(x\right)}{x}$ ფუნქციის გლობალური მინიმუმი f_* და გლობალური მინიმალი $\hat{x}$.

ამოხსნა. რადგან

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{x\cos\left(x\right) - \sin\left(x\right)}{x^2}\right| < \frac{x\left|\cos\left(x\right)\right| + \left|\sin\left(x\right)\right|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \le 0.11$$

როცა $x \in [10;15]$, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $L = 0{,}11$ (თუმცა ეს მეტობითაა).

თავიდან ვპოულობთ $x_1^* = 12,056$, $p_1^* = -0,281$. შემდეგ აღწერილი სქემის მიხედვით (6.3) ფორმულებით ვატარებთ გამოთვლებს. გამოთვლების შედეგები მოყვანილია ცხრილში 6.1.

ცხრილი 6.1.

n	გამოსარიცხი წყვილი (x, p)		$2L\Delta_n$	დასამატებელი წყვილები		
	x_n^*	p_n^*		x_n'	x_n''	p_n
1	12.056	-0.281	0.240	10.963	13.149	-0.161
2	10.963	-0.161	0.070	10.646	11.280	-0,126
3	13.149	-0.161	0.203	12.227	14.071	-0.096
4	10.646	-0.126	0.038	10,474	10.818	-0.107
5	11.280	-0.126	0.041	11.094	11,466	-0.106
6	10.474	-0.107	0.024	10.364	10.584	-0.095
7	10.818	-0.107	0.160	10.745	10.891	-0.099
8	11.094	-0.106	0.016	11.020	11.168	-0,098
9	11.466	-0.106	0.028	11.338	11.594	-0.092
10	10.891	-0.099	$0.008 < \varepsilon$	–	–	–

ცხრ. 6.1-ის მიხედვით, $\hat{x} \approx 10,891$, $f_* = f(10,891) = 0,091$. შევნიშნოთ, რომ მიზნის ფუნქცია არ არის უნიმოდალური, ამიტომ ადრე განხილული მეთოდები არ გამოგვადგებოდა.

სავარჯიშოები

#63. დაამტკიცეთ, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე ლიფშიცური ფუნქცია უწყვეტია ამავე სეგმენტზე.

#64. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ ფუნქცია ლიფშიცური არის $[0,1]$ და $[0,10]$ შუალედებზე. ორივე შემთხვევაში მოძებნეთ უმცირესი ლიფშიცის მუდმივებს შორის.

შემდეგ ამოცანებში, ტეხილთა მეთოდით იპოვეთ f ფუნქციის მინიმალი და გლობალური მინიმუმი $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული სიზუსტით:

#65. $f(x)=(x-0,9)^2+(x-1,1)^4$, $x\in[0.8;1,2]$, $\varepsilon=0,05$.

#66. $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$, $7\le x\le 11$, $\varepsilon=0,01$.

#67. $f(x)=\left\|x^2-1\right|-1\right|$ ფუნქცია არის თუ არა ლიფშიცური $[-2,2]$-ზე? თუ არის, ჩაატერეთ პირველი 6 იტერაცია ტეხილთა მეთოდით.

ნ ა წ ი ლ ი 3

მრავალ ცვლადზე დამოკიდებული მიზნის ფუნქცია

თავი 7
გლუვი ექსტრემალური ამოცანა ღია დასაშვები სიმრავლით

გამოყენებით ამოცანებში, თითქმის ყოველთვის, მიზნის ფუნქცია მრავალი ცვლადის ფუნქციას წარმოადგენს. ამ ტიპის ამოცანებში ყველაზე ადვილად გამოსაკვლევი არის ღია დასაშვები სიმრავლის შემთხვევა.

1. კრიტიკული წერტილების განსაზღვრა

თეორემა 1 */ექსტრემალურობის I რიგის აუცილებელი პირობა/*. ვთქვათ, $M \subset \mathbb{R}_n$ არის ღია სიმრავლე, $f : M \to \mathbb{R}$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $\hat{x} = \left(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n\right) \in M$ წერტილის რომელიღაც მიდამოში და $\hat{x}$ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი

$$f(x) \to \text{extr}, \qquad x \in M$$

ამოცანაში. მაშინ,

$$f'\left(\hat{x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f\left(\hat{x}\right)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n\right).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $i = 1$. თუ $\hat{x} = \left(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n\right)$ არის f ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $\hat{x}^1$ იქნება $g\left(x^1\right) \equiv f(x^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^n)$ ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, ამასთან, რადგან $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ღია სიმრავლეზე, ამიტომ $g\left(x^1\right)$ ფუნქციაც განსაზღვრულია ღია სიმრავლეზე და მისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფერმას თეორემა, რომლის თანახმად $g'\left(\hat{x}^1\right) = 0$, ანუ

$$\frac{\partial f\left(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^n\right)}{\partial x^1} = \left.\frac{df\left(x^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^n\right)}{dx^1}\right|_{x^1 = \hat{x}^1} = 0$$

ანალოგიურია მტკიცება $i = 2,\dots,n$ -თვის. □

განმარტება. განხილული თეორემის პირობებში,

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \qquad \mathrm{x} \in M\,,$$

ამოცანისთვის კრიტიკული წერტილების სიმრავლე K განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$K = \left\{\tilde{\mathrm{x}} \in M \;\middle|\; f'\left(\tilde{\mathrm{x}}\right) = 0\right\}. \;\square$$

მაგალითი. იპოვეთ $x^2 + y^2 - xy - 2x + y$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები.

ამოხსნა. ჩავწეროთ ამოცანა სტანდარტული სახით:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y \to \mathrm{extr}, \quad \left(x,y\right) \in \mathbb{R}_2\,. \quad (7.1)$$

(7.1) ამოცანისათვის განვსაზღვროთ კრიტიკული წერტილების სიმრავლე. ამ მიზნით შევადგინოთ და ამოვხსნათ სისტემა $\partial f / \partial x = 0, \quad \partial f / \partial y = 0$, ე.ი.:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2 = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0, \end{cases}$$

საიდანაც ვპოულობთ: $x = 1, \quad y = 0,$ ანუ $K = \left\{(1,0)\right\}.$

შემდეგ პუნქტებში ავხსნით, თუ როგორ ხდება კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა და დავასრულებთ ამ მაგალითსაც.

2. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა ვაიერშტრასის თეორემის საფუძველზე

ვაიერშტრასის თეორემის შედეგები საშუალებას გვაძლევს გავარკვიოთ, თუ რომელი კრიტიკული წერტილი არის გლობალური ექსტრემუმის წერტილი.

ვაიერშტრასის თეორემის გამოყენებით თუ დავადგენთ, რომ

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \qquad \mathrm{x} \in M, \tag{7.2}$$

ამოცანაში $\mathrm{gl}\min(7.2) \neq \varnothing$, მაშინ შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ გაცილებით მარტივი

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \qquad \mathrm{x} \in K, \tag{7.3}$$

ამოცანის განხილვით, რომელსაც აქვს იგივე მინიმალი, რაც (7.2)-ს, რადგან

$$\left(\tilde{\mathrm{x}} \in K \quad \text{და} \quad \tilde{\mathrm{x}} \in \mathrm{gl}\min(7.2)\right) \;\Rightarrow\; \tilde{\mathrm{x}} \in \mathrm{gl}\min \qquad (7.3).$$

ანალოგიურად ვმოქმედებთ გლობალური მაქსიმუმის ძიების შემთხვევაშიც.

მაგალითი. გავაგრძელოთ შემდეგი მაგალითის ამოხსნა:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y \to \mathrm{extr}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2.$$

როგორც ვნახეთ, $K = \{(1,0)\}$. რადგან $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$, ამიტომ $\mathrm{gl}\min(7.1) \neq \varnothing$.

რადგან K ერთელემენტიანია, ამიტომ (1,0) არის გლობალური მინიმალი

$$f(x,y) \to \mathrm{extr}, \qquad (x,y) \in K \text{ ამოცანაში.} \quad \square$$

ამ მეთოდში ძირითადი სირთულე მდგომარეობს აბსოლუტური ექსტრემუმის წერტილის არსებობის დადგენაში. ჩვენს მაგალითში, რადგან

$$(x-y)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \geq 2xy \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy,$$

ამიტომ

$$f(x,y) \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2x + y, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_2. \tag{7.4}$$

ახლა ცხადია, რომ $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=+\infty$, რადგან (7.4)-ში კვადრატული წევრების კოეფიციენტები დადებითია.

3. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა განმარტების საფუძველზე

კვლავ განვიხილოთ (7.2). ვთქვათ, სრულდება *თეორემა* 1-ის პირობები და $\tilde{x}\in K$. ყოველი $x\in M$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $x=\tilde{x}+h$ და განვიხილოთ სხვაობა:

$$\Delta f=f\left(\tilde{x}+h\right)-f\left(\tilde{x}\right)\quad\left(=f\left(x\right)-f\left(\tilde{x}\right)\right).$$

Δf-ის ნიშნის h-ზე დამოკიდებულების გარკვევა არსებითია, რადგან:

1) თუ $\Delta f\geq 0$ ყოველი შესაძლო h-ისთვის, მაშინ $\tilde{x}\in \mathrm{gl}\min(7.2)$;
2) თუ $\Delta f\leq 0$ ყოველი შესაძლო h-ისთვის, მაშინ $\tilde{x}\in \mathrm{gl}\max(7.2)$;
3) თუ $\Delta f\geq 0$ ყოველი საკმაოდ მცირე h-ისთვის, მაშინ $\tilde{x}\in \mathrm{loc}\min(7.2)$;
4) თუ $\Delta f\leq 0$ ყოველი საკმაოდ მცირე h-ისთვის, მაშინ $\tilde{x}\in \mathrm{loc}\max(7.2)$;

მაგალითი. კვლავ გავაგრძელოთ

$$f(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y\to \mathrm{extr},\quad \left(x,y\right)\in \mathbb{R}_2$$

ექსტრემალური ამოცანის განხილვა. აქ $K=\left\{\left(1,0\right)\right\}$. (10) არის ერთადერთი კრიტიკული წერტილი. ჩვენს შემთხვევაში $x=\tilde{x}+h$ წარმოდგენა არის

$$\left(x,y\right)=\left(1,0\right)+\left(h^1,h^2\right)=\left(1+h^1,h^2\right),$$

ამიტომ განვიხილოთ სხვაობა:

$$f(x,y)-f(1,0)=$$
$$=\left(1+h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2-\left(1+h^1\right)h^2-2\left(1+h^1\right)+h^2-1+2=$$
$$=\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2-h^1h^2\geq\frac{1}{2}\left[\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2\right]\geq 0,$$

რაც (x,y) -ის ნებისმიერობის ძალით ნიშნავს, რომ $\bar{x}=(1,0)$ არის გლობალური მინიმალი. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ბოლო ფორმულიდან მარტივად ჩანს $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=+\infty$, რაც არსებითია ვაიერშტრასის თეორემის ტიპის შედეგებით სარგებლობისას.

4. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა ექსტრემალურობის II რიგის საკმარისი პირობის საფუძველზე

წინასწარ მოვიყვანოთ რამდენიმე ფაქტი, რაც აუცილებელია ამ მეთოდის გამოყენებისას.

განმარტება. ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ მატრიცა. ამ მატრიცას ეწოდება:

ა) **დადებითად განსაზღვრული**, თუ ნებისმიერი არანულოვანი $y=\left(y^1,\ldots,y^n\right)$ ვექტორისათვის სრულდება:

$$yAy^{T}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y^iy^j>0.$$

ბ) **უარყოფითად განსაზღვრული**, თუ ნებისმიერი არანულოვანი $y=\left(y^1,\ldots,y^n\right)$ ვექტორისათვის სრულდება:

$yAy^{T}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y^iy^j<0$, ანუ თუ $-A$ არის დადებითად განსაზღვრული.

სილვესტრის ცნობილი თეორემა (იხ. [1]), რომელსაც აქ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ, გვაძლევს ადვილად შესამონმებელ კრიტერიუმს კვადრატული მატრიცის განსაზღვრულობის დადგენისთვის. შევნიშნოთ, რომ სილვესტრის თეორემის სხვა, უფრო ინფორმატიული ვერსიებიც არსებობს.

თ ე ო რ ე მ ა */სილვესტრის/.* კვადრატული, სიმეტრიული A მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი ყველა მთავარი მინორი იყოს დადებითი, ანუ ყოველი $k = 1, 2, \dots, n$ -ისათვის უნდა შესრულდეს $\det(A_k) > 0$, სადაც $A_k = (\mathrm{a}_{ij})_{i,j=1}^{k}$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. ჩამოაყალიბეთ კრიტერიუმი A მატრიცის უარყოფითად განსაზღვრულობისათვის.

მითითება. A -ს უარყოფითად განსაზღვრულობა იგივეა, რაც $-A$ -ს დადებითად განსაზღვრულობა.

შემდეგში, $f''(\mathrm{x})$ -ით, ჩვეულებრივ, აღვნიშნავთ $f : M \to \mathbb{R}$ ფუნქციის მეორე წარმოებულებისგან შედგენილ, ანუ **ჰესეს მატრიცას** x წერტილში:

$$f''(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial(\mathrm{x}^1)^2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^1 \partial \mathrm{x}^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^n \partial \mathrm{x}^1} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial(\mathrm{x}^n)^2} \end{bmatrix}.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2 */ექსტრემალურობის II რიგის საკმარისი პირობა/.* ვთქვათ $M \subset \mathbb{R}_n$ არის ღია სიმრავლე, $f : M \to \mathbb{R}$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები. მაშინ, იმისათვის რომ $\hat{\mathrm{x}} = (\hat{\mathrm{x}}^1, \dots, \hat{\mathrm{x}}^n) \in M$ იყოს მკაცრი ლოკალური მაქსიმალი (მინიმალი) ამოცანაში

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \qquad \mathrm{x} \in M,$$

საკმარისია შემდეგი პირობების შესრულება:

$$f'(\hat{x})=0 \quad \text{და} \quad f''(\hat{x}) \text{ უარყოფითადაა განსაზღვრული}$$

$$(f'(\hat{x})=0 \quad \text{და} \quad f''(\hat{x}) \text{ დადებითადაა განსაზღვრული}).$$

დამტკიცება. დამტკიცების იდეა მარტივია. რადგან სამართლიანია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x)-f(\hat{x})=f'(\hat{x})+\frac{1}{2}(x-\hat{x})f''(\hat{x})(x-\hat{x})^{T}+o\left(\|x-\hat{x}\|^{2}\right),$$

ამიტომ როცა $\hat{x}$ და x საკმაოდ ახლოს არიან ერთმანეთთან, მარჯვენა მხარეში, პირველი წევრი ნულია, ხოლო მესამის უგულებელყოფა შეგვიძლია (უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა), ამიტომ მარცხენა მხარის ნიშანი ემთხვევა მარჯვენა მხარის მეორე წევრის ნიშანს, რაც ამტკიცებს თეორემას.

ახლა დავასრულოთ თეორემა 2-ის დამტკიცება ლოკალური მინიმალისათვის. რადგან $f''(\hat{x})$ დადებითადაა განსაზღვრული, ამიტომ $A=f''(\hat{x})$ მატრიცის ყველა მთავარი მინორი დადებითია: $\det(A_k)>0$, $k=1,2,\ldots,n$. დეტერმინანტი არის მატრიცის ელემენტების უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო, თავის მხრივ, მატრიცის ელემენტები $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}$ არის x-ის უწყვეტი ფუნქციები ინდექსების ყოველი i,j წყვილისათვის. ამგვარად, მთავარი მინორები არის $x\in M$-ის უწყვეტი ფუნქციები და ეს ფუნქციები დადებითია $\hat{x}$-ში. ამიტომ $\hat{x}$-ის რაღაც მიდამოში ისინი შეინარჩუნებენ ნიშანს. თუ $\delta>0$ ისე არის შერჩეული, რომ $\hat{x}$-ის $\|x-\hat{x}\|<\delta$ მიდამოში $f''(\hat{x})$-ის მთავარი მინორები ინარჩუნებენ ნიშანს, მაშინ

$$\|x-\hat{x}\|<\delta \;\Rightarrow\; f''(x) \text{ დადებითადაა განსაზღვრული.}$$

$\delta > 0$ იმდენად მცირე შეგვიძლია ავილოთ, რომ აგრეთვე შეს-რულდეს

$$\|x - \hat{x}\| < \delta \;\Rightarrow\; x \in M$$

ტეილორის ფორმულის თანახმად, როცა $\|x - \hat{x}\| < \delta$, გვაქვს

$$f(x) - f(\hat{x}) =$$
$$= f'(\hat{x}) + \frac{1}{2}(x - \hat{x}) f''(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{T} \qquad (7.5)$$

სადაც $\theta \in [0,1]$ დამოკიდებულია x-ზე. შევნიშნოთ, რომ ტეილორის ფორმულის ეს სახე სამართლიანია მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობების მქონე ფუნქციებისათვის. პირობის თანახმად, $f'(\hat{x}) = 0$, ხოლო რადგან

$$\left\|\left[\hat{x} + \theta(x - \hat{x}) - \hat{x}\right]\right\| = \theta\|x - \hat{x}\| \le \delta ,$$

ამიტომ $f''(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))$ დადებითადაა განსაზღვრული, ანუ

$$(x - \hat{x}) f''(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{T} > 0 .$$

ამგვარად (7.5) გვაძლევს:

$$\|x - \hat{x}\| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) - f(\hat{x}) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(\hat{x}). \;\Box$$

სავარჯიშოები

ამოხსენით შემდეგი ექსტრემალური ამოცანები:

#68. $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x - 12y \to$ extr.

#69. $3x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 12y \to$ extr.

#70. $2x^2 + xy + y^2 \to$ extr.

#71. $(1 - x)^2 + 10(y - x^2)^2 \to$ extr.

#72. $x^3 + y^2 + z^2 + yz - 3x + 6y \to$ extr.

#73. $x^2 - 2xy + y^3 + z^2 \to$ extr.

#74. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to$ extr.

#75. $2x^3 - 10xy + y^2 \to$ extr.

#76. $\left(y - x^2\right)^2 + \left(1 - x\right)^2 \to$ extr.

#77. $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \to$ extr.

#78. $x^2 - y^2 - 4x + 6y \to$ extr.

#79. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 27 \to$ extr.

#80. $x^3 + y^3 - 3xy \to$ extr.

#81. $e^{(2x+3y)}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) \to$ extr.

თავი 8
გლუვი ექსტრემალური ამოცანა ტოლობის ტიპის შეზღუდვებით

1. მოკლე რეზიუმე

ვთქვათ, ყოველი $f_i : R_n \to R$, $i = 0,1,\dots,m$ არის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. შემდეგ ექსტრემალურ ამოცანას

$$f_0(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \quad f_1(\mathrm{x}) = 0,\dots, f_m(\mathrm{x}) = 0\,, \tag{8.1}$$

ეწოდება გლუვი ამოცანა ტოლობის ტიპის შეზღუდვებით. აქ, f_0 არის მიზნის ფუნქცია, ხოლო

$$M = \left\{ \mathrm{x} \in R_n \mid f_1(\mathrm{x}) = \cdots = f_m(\mathrm{x}) = 0 \right\}$$

არის დასაშვები სიმრავლე. ცხადია, M არის ჩაკეტილი. განმარტების თანახმად, $\hat{\mathrm{x}}$ არის ლოკალური მინიმალი (8.1)-ში (ე.ი. $\hat{\mathrm{x}} \in \mathrm{locmin}(8.1)$), თუ რომელიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის

$$\left(\|\mathrm{x} - \hat{\mathrm{x}}\| \le \varepsilon \quad \& \quad f_1(\mathrm{x}) = \cdots = f_m(\mathrm{x}) = 0 \right) \Rightarrow f_0(\hat{\mathrm{x}}) \le f_0(\mathrm{x}).$$

(8.1) ამოცანისთვის შემოვილოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$\mathscr{L}(\mathrm{x}, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 f_0(\mathrm{x}) + \lambda_1 f_1(\mathrm{x}) + \cdots + \lambda_m f_m(\mathrm{x})\,,$$

სადაც $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}^1,\dots,\mathrm{x}^n)$, λ_j-ებს ეწოდებათ ლაგრანჟის მამრავლები, λ_0-ს ეწოდება ლაგრანჟის მთავარი მამრავლი. უშუალოდ განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ (8.1) ამოცანის დასაშვებ სიმრავლეზე მიზნის ფუნქცია და ლაგრანჟის ფუნქცია ერთმანეთის ტოლია მუდმივი თანამამრავლის სიზუსტით, ანუ

$$\mathscr{L}(\mathrm{x}, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 f_0(\mathrm{x})\,, \text{ როცა } f_1(\mathrm{x}) = 0,\dots, f_m(\mathrm{x}) = 0.$$

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავასაბუთებთ, რომ ტოლობის ტიპის შეზღუდვებიანი გლუვი ამოცანის გამოკვლევა ხდება შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. მათემატიკური მოდელის შედგენა, ანუ ამოცანის ფორმულირება (8.1) სახით;
2. ლაგრანჟის ფუნქციის შედგენა (8.1) ამოცანის მონაცემების მიხედვით:

$$\mathscr{L}(x,\lambda,\lambda_0)=\lambda_0 f_0(x)+\lambda_1 f_1(x)+\cdots+\lambda_m f_m(x);$$

3. (8.1) ექსტრემალურ ამოცანაში კრიტიკული წერტილების (ანუ ისეთი წერტილების, რომლებიც შესაძლოა წარმოადგენდნენ (8.1)-ის ამონახსნს) განსაზღვრის მიზნით განტოლებათა სისტემის შედგენა

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}(x,\lambda,\lambda_0)}{\partial x^i}=0, & i=1,\ldots,n,\\[2ex] \dfrac{\partial\mathscr{L}(x,\lambda,\lambda_0)}{\partial\lambda_j}=0, & j=1,\ldots,m.\end{cases}\tag{8.2}$$

4. (8.1) ამოცანისათვის კრიტიკული წერტილების სიმრავლის განსაზღვრა:

$$K=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}_n \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{არსებობს არანულოვანი } (\bar{\lambda},\bar{\lambda}_0)\in R_{m+1},\ \text{ ისეთი}\\ \text{რომ } (\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\lambda}_0)\ \text{ არის (8.2)-ის ამონახსნი}\end{array}\right\};$$

გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს, იმას რომ $\{\operatorname{loc}\min(8.2),\operatorname{loc}\max(8.2)\}\subset K.$

5. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა მათგან ექსტრემუმის წერტილების ამორჩევის მიზნით.

შევნიშნოთ, რომ ამოცანის გამოკვლევა მოხდება იგივე სქემით, თუ ყველა ფუნქცია: მიზნის ფუნქციონალი და შეზღუდვები განსაზღვრულნი არიან რაიმე ღია სიმრავლეზე.

2. მათემატიკური მოდელის შედგენა

საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ პირადი მოხმარების ნეოკლასიკური ამოცანა. ვთქვათ, კერძო პირმა ან ფირმამ (ზოგადად *მომხმარებელი*) პირადი მოხმარების მიზნით უნდა შეიძინოს n სხვადასხვა დასახელების პროდუქტის $x^1, x^2, \ldots, x^n$ რაოდენობები ისე, რომ სარგებლიანობის $U(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ფუნქციამ, რომელიც აღწერს მომხმარებლის გემოვნებას, მიიღოს მაქსიმალური მნიშვნელობა. სიმარტივისთვის ვგულისხმობთ, რომ თითოეული სახის პროდუქტის ერთეული არის უსასრულოდ დანაწილებადი (პრაქტიკულად ასეთია 1 კგ. შაქარი ან მილიონი წყვილი ფეხსაცმელი) და რომ ვალის აღება შეუძლებელია. ეს ორი დაშვება გარანტიას გვაძლევს, რომ ყოველი $x^i \in [0, \infty)$. ცნობილია პროდუქტების ფასები $p_1, p_2, \ldots, p_n$ და თანხა I, რომელიც გააჩნია მომხმარებელს. ფორმალურად, მოხმარების ნეოკლასიკური ამოცანა არის ამოცანა უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით:

$$U(x^1, x^2, \ldots, x^n) \to \max, \ (p_1 x^1 + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n \le I \text{ და}$$

$$\text{ყოველი } x^i \ge 0).$$

თუ დავუკვირდებით ამოცანის შინაარსს, დავრწმუნდებით, რომ იგი სინამდვილეში უფრო მარტივია. არსებითია ის გარემოება, რომ ფუნქცია $U(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, რომელიც აღწერს მომხმარებლის გემოვნებას, ვერ იქნება ნებისმიერი. არსებობს ბუნებრივი შეზღუდვები, რომელსაც აკმაყოფილებს მომხმარებლის გემოვნება. ამ შეზღუდვებს მოხმარების თეორიაში *აქსიომებს* უწოდებენ. აღვწეროთ ორი მათგანი.

1. თუ $x^i = y^i, i = 1, \ldots j-1, j+1, \ldots, n$ და $x^j > y^j$, მაშინ

   $$U(x^1, \ldots, x^{j-1}, x^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) > U(x^1, \ldots, x^{j-1}, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n)$$

   ანუ, თუ ერთი პროდუქტის რაოდენობა იმატებს, ხოლო დანარჩენი პროდუქტების რაოდენობა ფიქსირებულია,

მაშინ კრებულის სარგებლიანობა იზრდება. მათემატიკურად, ეს ნიშნავს, რომ $U\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ ფუნქცია ზრდადია თითოეული არგუმენტის მიმართ:

$$U_j'\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} U\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) > 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

ეკონომიკაში ამას უწოდებენ ზღვრული სარგებლიანობების დადებითობის კანონს.

2. თუ $x^i = y^i, i = 1, \ldots j-1, j+1, \ldots, n$ და $x^j > y^j$, მაშინ

$$U_j'\left(x^1, \ldots, x^{j-1}, x^j, x^{j+1}, \ldots, x^n\right) < U_j'\left(x^1, \ldots, x^{j-1}, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n\right)$$

ანუ, თუ ერთი პროდუქტის რაოდენობა იმატებს, ხოლო დანარჩენი პროდუქტების რაოდენობა ფიქსირებულია, მაშინ იმ ერთი პროდუქტის ზღვრული სარგებლიანობა მცირდება:

$$\frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2} U\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) < 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

ეკონომიკაში ამას უწოდებენ კანონს ზღვრული სარგებლიანობის კლებადობის შესახებ.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ზღვრული სარგებლიანობა ყოველთვის დადებითია, თუმცა კლებადია. ეს ნიშნავს, რომ $U\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ ფუნქცია ზრდადია, მაგრამ მისი ზრდის ტემპი მცირდება არგუმენტების გაზრდასთან ერთად.

$p_1 x^1 + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n \le I$ ბიუჯეტურ შეზღუდვაში შეიძლება მხოლოდ ტოლობა გვქონდეს, რადგან თუ თანხა დარჩა, მისი დახარჯვით შეიძლება რაიმე პროდუქტის მცირე დოზის შეძენა მაინც და ამგვარად სარგებლიანობის გაზრდა, ე.ი. მოხმარების ნეოკლასიკურ ამოცანაში რეალურად სრულდება ტოლობის ტიპის შეზღუდვა $p_1 x^1 + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n = I$ მაშასადამე, მოხმარების ამოცანას აქვს სახე:

$$U\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \to \max, \quad p_1 x^1 + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n = I,$$

$$x^i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. კრიტიკული წერტილების განსაზღვრა

იმისათვის, რომ ტოლობის ტიპის შეზღუდვებიან ექსტრემალურ ამოცანაში

$$f_0(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \quad f_1(\mathrm{x}) = 0, \ldots, f_m(\mathrm{x}) = 0 \tag{8.3}$$

განვსაზღვროთ კრიტიკული წერტილები, უნდა ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ექსტრემალურობის პირველი რიგის აუცილებელი პირობა. ამისათვის, წინასწარ დავამტკიცოთ ერთი დამხმარე ფაქტი, რომელსაც დამოუკიდებელი მნიშვნელობაც აქვს.

ლემა 1. ვთქვათ, $W \subset \mathbb{R}_m$, $M \subset \mathbb{R}_n$, $g : W \to M$ *და* $f : M \to \mathbb{R}$ *ფუნქციები უწყვეტებია და* $\hat{\mathrm{x}}$ *არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი*

$$f(\mathrm{x}) \to \mathrm{extr}, \quad \mathrm{x} \in M \tag{8.4}$$

ამოცანაში. მაშინ ყოველი ისეთი $\hat{\mathrm{w}} \in W$ *, რომლისთვისაც სრულდება* $g(\hat{\mathrm{w}}) = \hat{\mathrm{x}}$ *პირობა, წარმოადგენს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს*

$$h(\mathrm{w}) \to \mathrm{extr}, \quad \mathrm{w} \in W \tag{8.5}$$

ამოცანაში, სადაც $h = f \circ g$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\hat{\mathrm{x}} \in \mathrm{locmin}(8.4)$ *. არსებობს* $\varepsilon_1 > 0$ *ისეთი, რომ სრულდება:*

$$\left(\|\mathrm{x} - \hat{\mathrm{x}}\| \le \varepsilon_1 \quad \& \quad \mathrm{x} \in M\right) \Rightarrow f(\hat{\mathrm{x}}) \le f(\mathrm{x}). \tag{8.6}$$

რადგან g უწყვეტია $\hat{\mathrm{w}}$ *-ში, ამ* ε_1 *-ისათვის არსებობს* $\varepsilon > 0$ *ისეთი, რომ*

$$\left(\|\mathrm{w} - \hat{\mathrm{w}}\| \le \varepsilon \quad \& \quad \mathrm{w} \in W\right) \Rightarrow \|g(\mathrm{w}) - g(\hat{\mathrm{w}})\| \le \varepsilon_1.$$

ეს კი $g(\hat{\mathrm{w}}) = \hat{\mathrm{x}}$ *ტოლობისა და (8.6)-ის თანახმად ნიშნავს, რომ*

$$\left(\|\mathrm{w} - \hat{\mathrm{w}}\| \le \varepsilon \quad \& \quad \mathrm{w} \in W\right) \Rightarrow f(\hat{\mathrm{x}}) \le f\left(g(\mathrm{w})\right),$$

ანუ $\hat{\mathrm{w}} \in \mathrm{locmin}(8.5)$ *. შემთხვევა* $\hat{\mathrm{w}} \in \mathrm{locmax}(8.5)$ *ანალოგიურია.* □

თეორემა 1 */ექსტრემალურობის პირველი რიგის აუცილებელი პირობა/*. ვთქვათ, $\hat{\mathrm{x}}$ არის დასაშვები წერტილი (8.3)

ამოცანაში და ყოველი f_i, $i=0,1,\ldots,m$, უწყვეტად წარმოებადია $\hat{x}$-ის რაღაც მიდამოში. თუ $\hat{x}$ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი (8.3) ამოცანაში, მაშინ არსებობენ ერთდროულად ნულის არატოლი ლაგრანჟის მამრავლები $\hat{\lambda}=\left(\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m\right)$ და $\hat{\lambda}_0$, ისეთები რომ

$$\frac{\partial\mathscr{L}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)}{\partial x^i}=0,\qquad i=1,\ldots,n,\tag{8.7}$$

ანუ

$$\hat{\lambda}_0 f_0'\left(\hat{x}\right)+\hat{\lambda}_1 f_1'\left(\hat{x}\right)+\cdots+\hat{\lambda}_m f_m'\left(\hat{x}\right)=0.\tag{8.7'}$$

დამტკიცება. გარკვეულობისთვის ავიღოთ $\hat{x}\in\mathrm{locmin}(8.3)$. თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციით შეზღუდვების რაოდენობის, ანუ m-ის მიმართ. როდესაც $m=0$, მაშინ თეორემა სამართლიანია წინა პარაგრაფის თეორემის /ექსტრემალურობის პირველი რიგის აუცილებელი პირობის/ ძალით. ახლა, დავუშვათ თეორემის სამართლიანობა $m-1$ რაოდენობა შეზღუდვებისთვის და დავამტკიცოთ m-ისთვის.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f_1'\left(\hat{x}\right)$ არანულოვანია (წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღებდით $\hat{\lambda}_1=1$, დანარჩენ მამრავლებს კი ნულის ტოლს და თეორემის დასკვნა ტრივიალურად შესრულდებოდა). ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ $\dfrac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x^1}\neq0$. მაშინ, $f_1(x^1,\ldots,x^n)=0$ განტოლება, რომელიც სრულდება $\hat{x}=(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n)$ წერტილში მაინც, ამოიხსნება x^1 ცვლადის მიმართ. ეს ნიშნავს ისეთი $x^1=g(x^2,\ldots,x^n)$ ფუნქციის არსებობას, რომელიც განსაზღვრულია $(\hat{x}^2,\ldots,\hat{x}^n)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, ამავე მიდამოში ყველგან სრულდება

$$f_1\left(g(x^2,\ldots,x^n),x^2,\ldots,x^n\right)\equiv0\tag{8.8}$$

და $\hat{x}^1=g(\hat{x}^2,\ldots,\hat{x}^n)$.

ჩანაწერების სიმარტივის მიზნით, გამოვიყენოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$ -ით აღვნიშნოთ კერძო წარმოებული $\hat{x}=(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n)$ წერტილში, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$.

$\frac{\partial g}{\partial x^j}$ -ით აღვნიშნოთ კერძო წარმოებული $(\hat{x}^2,\ldots,\hat{x}^n)$ წერტილში, $j=2,\ldots,n$.

მაშინ, რთული ფუნქციის განარმოების წესის თანახმად, (8.8)-ის განარმოება i-ური ცვლადის მიმართ გვაძლევს:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\frac{\partial g}{\partial x^i}+\frac{\partial f_1}{\partial x^i}=0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial g}{\partial x^i}=-\frac{\partial f_1}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1} \tag{8.9}$$

ლემა 1-ის ძალით, (8.3) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F_0(x^2,\ldots,x^n)\to\text{extr},\quad F_2(x^2,\ldots,x^n)=0,\ldots,F_m(x^2,\ldots,x^n)=0, \tag{8.10}$$

სადაც $F_i(x^2,\ldots,x^n)=f_i\left(g(x^2,\ldots,x^n),x^2,\ldots,x^n\right)$.

(8.10) ამოცანაში შეზღუდვების რაოდენობა საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ ინდუქციური დაშვება. ამიტომ, არსებობენ ერთდროულად ნულის არატოლი ლაგრანჟის მამრავლები $\hat{\lambda}_0,\hat{\lambda}_2,\ldots,\hat{\lambda}_m$ და, ისეთები რომ ყოველი $i=2,\ldots,n$ -ისთვის სრულდება:

$$\hat{\lambda}_0\frac{\partial F_0(\hat{x}^2,\ldots,\hat{x}^n)}{\partial x^i}+\hat{\lambda}_2\frac{\partial F_2(\hat{x}^2,\ldots,\hat{x}^n)}{\partial x^i}+\cdots+\hat{\lambda}_m\frac{\partial F_m(\hat{x}^2,\ldots,\hat{x}^n)}{\partial x^i}=0. \tag{8.11}$$

(8.11) იგივეა, რაც:

$$\hat{\lambda}_0\left(-\frac{\partial f_0}{\partial x^1}\frac{\partial f_1}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1}+\frac{\partial f_0}{\partial x^i}\right)+\hat{\lambda}_2\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x^1}\frac{\partial f_1}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1}+\frac{\partial f_2}{\partial x^i}\right)+\cdots+$$

$$+\hat{\lambda}_m\left(-\frac{\partial f_m}{\partial x^1}\frac{\partial f_1}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1}+\frac{\partial f_m}{\partial x^i}\right)=$$

$$=\hat{\lambda}_0\frac{\partial f_0}{\partial x^i}+\hat{\lambda}_1\frac{\partial f_1}{\partial x^i}+\hat{\lambda}_2\frac{\partial f_2}{\partial x^i}+\cdots+\hat{\lambda}_m\frac{\partial f_m}{\partial x^i}=0, \tag{8.12}$$

სადაც

$$\hat{\lambda}_1=-\hat{\lambda}_0\frac{\partial f_0}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1}+-\hat{\lambda}_2\frac{\partial f_2}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1}+\cdots+\hat{\lambda}_m\frac{\partial f_m}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\right)^{-1}$$

ცხადია, (8.12) ამტკიცებს თეორემას. □

ეს თეორემა ძალიან მნიშვნელოვანია როგორც თეორიული, ასევე გამოყენებითი თვალსაზრისით, ამიტომ მისი გააზრებისთვის სასარგებლო იქნება, თუ ყურადღებას გავამახვილებთ შემდეგ ფაქტორებზე.

შენიშვნა 1. (8.7¹) ნიშნავს, რომ n -განზომილებიანი ვექტორების

$$\left\{f_0'(\hat{x}), f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\right\} \tag{8.13}$$

სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. ამგვარად, ეს თეორემა (ექსტრემუმის I რიგის აუცილებელი პირობა) ამტკიცებს, რომ ტოლობის ტიპის შეზღუდვების შემთხვევაში, ლოკალური ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს (8.13) სისტემის წრფივად დამოკიდებულება. ამ კუთხით, ეს თეორემა წარმოადგენს ფერმას თეორემის მრავალგანზომილებიანი ანალოგის განზოგადებას, რადგან როცა $m=0$, მაშინ $\left\{f_0'(\hat{x})\right\}$ -ის წრფივად დამოკიდებულება ნიშნავს, რომ $f_0'(\hat{x})=0$. □

შენიშვნა 2. როცა $m>n$, მაშინ n -განზომილებიანი ვექტორების (8.13) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და თეორემის დასკვნა ტრივიალურად სრულდება. ამიტომ, ხშირად ამოცანის დასმაში გულისხმობენ ხოლმე, რომ $m<n$. □

შენიშვნა 3. დიდი ხნის განმავლობაში თვლიდნენ, რომ როდესაც $\hat{x} \in \mathrm{locmin}(8.3)$ ან $\hat{x} \in \mathrm{locmax}(8.3)$, მაშინ $f_0'(\hat{x})$ გამოისახება $\left\{f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\right\}$ სისტემის ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით რაიმე დამატებითი პირობების გარეშე. ამიტომ იყენებდნენ მხოლოდ მამრავლებს $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m$. შემდეგ მოიძებნა მაგალითები (იხ. შემდეგი შენიშვნა), რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს (8.13) სისტემის წრფივად დამოკიდებულება, მაგრამ

შესაძლოა ამ დროს $\left\{f_1'(\hat{x}),\ldots,f_m'(\hat{x})\right\}$ სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იყოს. ამიტომ ლაგრანჟის ფუნქციის არგუმენტებს დაემატა λ_0 ცვლადიც, ოღონდ ბოლოში: $\mathscr{L}(x,\lambda,\lambda_0)$, რაც არღვევს არგუმენტების მიმდევრობას. □

შენიშვნა 4. ლაგრანჟის შემდეგ ძალიან დიდხანს თვლიდნენ, რომ ყოველთვის სრულდება $\hat{\lambda}_0=1$. ეს უმეტეს შემთხვევებში მართლაც ასეა, მაგრამ თუ შეზღუდვები არის „გადაგვარებული", მაშინ აღმოჩნდება ხოლმე $\hat{\lambda}_0=0$. მაგალითად, განვიხილოთ:

$$x\to\min,\quad x^2+y^2=0.$$

ამ ამოცანაში არის ერთადერთი დასაშვები წერტილი (M გადაგვარდა წერტილში) და, მაშასადამე, იგი არის ამონახსნიც: $(\hat{x},\hat{y})=(0,0)$. მეორე მხრივ, თუ ლაგრანჟის ფუნქციაში $\lambda_0x+\lambda_1\left(x^2+y^2\right)$ ავიღებთ $\lambda_0=1$ და შევადგენთ სისტემას კრიტიკული წერტილის განსაზღვრისათვის, ვნახავთ რომ იგი არათავსებადია:

$$\begin{cases}1+2\lambda_1x=0,\\ 2\lambda_1y=0,\\ x^2+y^2=0.\end{cases}\qquad\square$$

რადგან

$$\frac{\partial\mathscr{L}(x,\lambda,\lambda_0)}{\partial x^i}=\lambda_0\frac{\partial f_0(x)}{\partial x^i}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial f_m(x)}{\partial x^i},\quad i=1,\ldots,n,$$

და

$$\frac{\partial\mathscr{L}(x,\lambda,\lambda_0)}{\partial\lambda_j}=f_j(x),\quad j=1,\ldots,m,$$

ამიტომ თეორემა 1, ლაგრანჟის ფუნქციის ტერმინებში, ამტკიცებს შემდეგს: თუ $\hat{x}$ წარმოადგენს ლოკალური ექსტრემუმის

წერტილს (8.3) ამოცანაში, მაშინ არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი რიცხვები $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m$, ისეთები რომ $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$ სამეული (სადაც $\hat{\lambda} = \left(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m\right)$) წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნს:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}(x, \lambda, \lambda_0)}{\partial x^i} = 0, & i = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}(x, \lambda, \lambda_0)}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{8.14}$$

ეს ნიშნავს, რომ (8.3) სისტემის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ (8.14)-ის ისეთ ამონახსნებს შორის, რომელთა ლაგრანჟის მამრავლები ერთდროულად ნულის ტოლი არ ხდება. ნებისმიერად აღებული ლაგრანჟის მამრავლებისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია დასაშვებ სიმრავლეზე (და კერძოდ ექსტრემუმის წერტილებში) მიზნის ფუნქციის ტოლია მუდმივი თანამამრავლის სიზუსტით, ხოლო თუ ლაგრანჟის მამრავლები შერჩეულია (8.14) სისტემის ამონახსნების საშუალებით, მაშინ ასეთი ლაგრანჟის ფუნქციის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლი ხდება ექსტრემუმის წერტილებში. (შევნიშნოთ, რომ (8.14) სისტემაში გვაქვს $n+m$ განტოლება და $n+m+1$ უცნობი) თუ დასაშვები სიმრავლე ღია არაა, თვითონ მიზნის ფუნქციის წარმოებული შესაძლოა არ გახდეს ნულის ტოლი ექსტრემუმის წერტილებში. როგორც ვხედავთ, ლაგრანჟის მეთოდი (ექსტრემუმის წერტილების განსაზღვრა (8.14)-ის ამონახსნების საშუალებით) წარმოადგენს შეზღუდვათა მოხსნის საშუალებას ექსტრემალურ ამოცანაში ტოლობის ტიპის შეზღუდვებით. ამიტომ, თეორემა 1-ის პირობებში, (8.3) ამოცანისათვის კრიტიკული წერტილების სიმრავლე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$K = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{არსებობს არანულოვანი } \left(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0\right) \in \mathbb{R}_{m+1}, \text{ ისეთი} \\ \text{რომ } (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0) \text{ არის (4.18)-ის ამონახსნი} \end{array} \right\}. \square$$

აგების თანახმად, $\{\text{loc}\min(8.3), \text{loc}\max(8.3)\} \subset K$.

მაგალითი. ამოვხსნათ ამოცანა:

$$xy \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

ამოცანას მივცეთ სტანდარტული სახე:

$$f_0(x, y) = xy, \ f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \text{ და}$$

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_0) = \lambda_0 xy + \lambda_1 \left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

კრიტიკული წერტილების განსაზღვრის მიზნით შევადგინოთ სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = \lambda_0 y + 2\lambda_1 x = 0, \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = \lambda_0 x + 2\lambda_1 y = 0, \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{8.15}$$

აქ სამი განტოლებაა ოთხი უცნობით. რადგან განტოლებები λ_0, λ_1 ცვლადების მიმართ ერთგვაროვნია, ამიტომ ცვლადების რიცხვის შემცირება შეგვიძლია ორი შესაძლო შემთხვევის ცალ-ცალკე განხილვის ხარჯზე.

ა) დავუშვათ $\lambda_0 = 0$. მაშინ $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x = y = 0$ რაც ეწინააღმდეგება (8.15) სისტემის მესამე განტოლებას, ე.ი. ეს შემთხვევა კრიტიკულ წერტილს არ იძლევა.

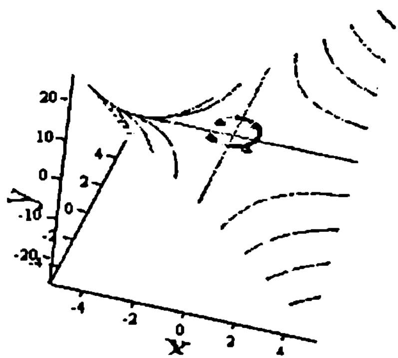
ბ) განვიხილოთ $\lambda_0 \neq 0$ შემთხვევა. შეგვიძლია λ_0-ზე გავყოთ (8.15)-ის პირველი ორი განტოლება, რის შემდეგაც $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ შეგვიძლია ჩავთვალოთ ერთ ცვლადად და ის აღვნიშნოთ λ_1-ით. (8.15) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} y + 2\lambda_1 x = 0, \\ x + 2\lambda_1 y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{8.16}$$

თუ შევკრებთ I და II განტოლებებს, მივიღებთ $(x+y)(2\lambda_1+1)=0$, საიდანაც $\lambda_1=-1/2$, ან $x=-y$.

ჯერ განვიხილოთ $\lambda_1=-1/2$. მაშინ (8.16)- ის I და II განტოლება გვაძლევს $x=y$, ხოლო III განტოლებიდან მივიღებთ: $x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ე.ი. (8.15)-ის ამონახსნებია $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ და რადგან $(-1/2,1)\neq 0$, ამიტომ $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in K$. თუ $x=-y$, წინა შემთხვევის მსგავსად მივიღებთ $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in K$, რადგან $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ არის (8.15)-ის ამონახსნები.

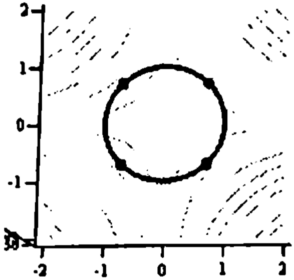
გეომეტრიულად, $f_0(x,y)=xy$-ის გრაფიკი წარმოადგენს ზედაპირს სამგანზომილებიან სივრცეში, ხოლო $f_1(x,y)=x^2+y^2-1=0$ შეზღუდვა – წრეწირს.



ნახ. 8.1

გავიხსენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის დონის წირები ეწოდება შემდეგი სახის სიმრავლეებს: $L_\alpha = \{x \mid f(x) = \alpha\}, \alpha \in R$

სიბრტყეზე გამოვსახოთ დასაშვები სიმრავლე $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, რომელიც წარმოადგენს ერთეულრადიუსიან წრეწირს ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და მიზნის ფუნქციის $f_0(x,y) = xy$ დონის წირები, რომლებიც წარმოადგენენ ჰიპერბოლებს.



ნახ. 8.2

თუ $f_0(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ $f_0'(x)$ გრადიენტს აქვს ფუნქციის უსწრაფესი ზრდის მიმართულება, ხოლო ანტიგრადიენტს უსწრაფესი კლების მიმართულება. (იხ. პუნქტი ფუნქციის უსწრაფესი ცვლილების მიმართულების განსაზღვრის შესახებ). ჩვენს ამოცანაში $f_0'(x) = (y, x)$ (იხ. ნახ. 8.1). გეომეტრიულად, ამ ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს დასაშვებ სიმრავლეზე (ანუ $x^2 + y^2 = 1$ წრეწირზე) იმ წერტილების პოვნას, რომლებიც შეესაბამებიან მინიმალური (მაქსიმალური) α მნიშვნელობის მქონე L_α დონის წირებს. (დონის წირის ყოველ წერტილში მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა ერთი და იგივეა).

ნახ. 8.2-დან ჩანს, რომ, მაგალითად პირველ მეოთხედში, რაც უფრო შორს არის დონის წირი კოორდინატთა სათავიდან მით მეტია მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა, და მათ შორის ყვე-

ლაზე შორს მყოფი, რომელსაც საერთო წერტილი აქვს დასაშვებ სიმრავლესთან, არის ის წირი, რომელიც ეხება წრეწირს (იხ. ნახ. 8.2). შეხების წერტილის კოორდინატები შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგნაირად: შეხების წერტილში ჰიპერბოლის და წრეწირის მხებების საკუთხო კოეფიციენტები ემთხვევიან ერთმანეთს. თუ განვიხილავთ y-ს როგორც x-ის არაცხად ფუნქციას და გავაწარმოებთ $x^2+y^2=1$ და $xy=\alpha$ განტოლებებს მივიღებთ

$$2x+2yy'=0\,,\quad y+xy'=0\,.$$

თუ მათ დავუმატებთ ამოცანის შეზღუდვას, საძიებელი წერტილისთვის მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 2x+2yy'=0, \\ y+xy'=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

მივიღეთ იგივე კრიტიკული წერტილები:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა ვაიერშტრასის თეორემის საფუძველზე

ეს მიდგომა ძალზე ზოგადია, ამიტომ განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე.

მაგალითი. $xy\to \mathrm{extr}$, $x^2+y^2=1$. /ამოხსნის გაგრძელება/. როგორც ზემოთ მივიღეთ, $K=\left\{\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$, ანუ გვაქვს ოთხი კრიტიკული წერტილი. $x^2+y^2=1$ სიმრავლე განსაზღვრავს წრეწირს, რაც კომპაქტური სიმრავლეა, ხოლო $f_0=xy$ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშასადამე, ვაიერშტრასის თეორემის ძალით, ჩვენს ამოცანაში არსებობს გლობალური მაქსიმალები და მინიმალები.

რადგან $\text{glextr} \subset \text{locextr} \subset K$, ამიტომ K-ში არის როგორც გლობალური მაქსიმალი, ასევე გლობალური მინიმალი. შემდეგი ჩასმები:

$$f_0\left(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2\right) = 1/2, \quad f_0\left(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2\right) = -1/2,$$

გვიჩვენებენ, რომ მიზნის ფუნქცია დასაშვებ სიმრავლეზე ღებულობს მხოლოდ ორ განსხვავებულ მნიშვნელობას. ამიტომ,

$$\left(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2\right) \in \text{gl}\max, \ \left(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2\right) = \in \text{gl}\min .$$

5. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა უშუალოდ განმარტების საფუძველზე

გამოვიკვლიოთ, მაგალითად, კრიტიკული წერტილი $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$. წარმოვადგინოთ R_2-ის ნებისმიერი (x, y) წერტილი შემდეგი სახით:

$$(x, y) = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) + \left(\text{h}^1, \text{h}^2\right) \text{ ანუ}$$

$$x = \sqrt{2}/2 + \text{h}^1, \quad y = \sqrt{2}/2 + \text{h}^2$$

თუ (x, y) წერტილი აკმაყოფილებს $x^2 + y^2 = 1$ შეზღუდვას, მაშინ h^1, h^2 აგრეთვე იზღუდებიან, რასაც მალე ვნახავთ. ჯერ შევაფასოთ:

$$\Delta f_0 = f_0(x, y) - f_0\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = \left(\sqrt{2}/2 + \text{h}^1\right)\left(\sqrt{2}/2 + \text{h}^2\right) - \left(\sqrt{2}/2\right)\left(\sqrt{2}/2\right) =$$

$$= \left(\text{h}^1 + \text{h}^2\right)\sqrt{2}/2 + \text{h}^1\text{h}^2 \qquad (8.17)$$

(8.17) მხოლოდ იმ შემთხვევაში მოგვცემს საჭირო ინფორმაციას, თუ გავითვალისწინებთ $x^2 + y^2 = 1$ შეზღუდვას:

$$\left(\sqrt{2}/2 + \text{h}^1\right)^2 + \left(\sqrt{2}/2 + \text{h}^2\right)^2 = 1 \ \Rightarrow \ \left(\text{h}^1 + \text{h}^2\right)\sqrt{2}/2 + \left(\text{h}^1\right)^2 + \left(\text{h}^2\right)^2 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(\text{h}^1 + \text{h}^2\right)\sqrt{2}/2 = -\left[\left(\text{h}^1\right)^2 + \left(\text{h}^2\right)^2\right],$$

რის საფუძველზეც (8.17) გვაძლევს:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2}\left[-\left(h^1\right)^2 - \left(h^2\right)^2 + 2h^1h^2\right] = -\frac{1}{2}\left(h^1 - h^2\right)^2 \le 0,$$

ე.ი. $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) \in \mathrm{gl}\max$.

6. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა ექსტრემალურობის მეორე რიგის საკმარისი პირობის საფუძველზე

კვლავ განვიხილოთ ამოცანა ტოლობის ტიპის შეზღუდვებით

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0,$$

სადაც $f_0, f_1, \dots, f_m$ ფუნქციები ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია. ალვნიშნოთ M -ით დასაშვები სიმრავლე

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}_n \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\right\}.$$

ვიდრე თეორემას (ექსტრემალურობის მეორე რიგის საკმარის პირობას) ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ, მოვიყვანოთ რამდენიმე მარტივი ფაქტი.

ყოველი სასრულგანზომილებიანი $\lambda = \left(\lambda_1, \dots, \lambda_m\right)$ ვექტორისათვის განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$l(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), \quad \forall x \in R_n,$$

რომელსაც, M სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად, აქვს შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება

$$l(x) = f_0(x), \quad \forall x \in M. \tag{8.18}$$

თუ $\hat{x}$ არის ექსტრემუმის წერტილი, ან თუნდაც კრიტიკული წერტილი, ხოლო $(m+1)$-ცალი ლაგრანჟის მამრავლი

$1,\tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_m$ ისეა შერჩეული, რომ ვექტორი $\left(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n,\tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_m,1\right)$ აკმაყოფილებს კრიტიკული წერტილის (8.11) პირობას, მაშინ

$$l(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\tilde{\lambda}_i f_i(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}_n,$$

ფუნქცია, გარდა (8.18)-ისა, აკმაყოფილებს აგრეთვე $l'\left(\tilde{x}\right)=0$ ტოლობას.

თეორემა 2 /*ექსტრემალურობის მეორე რიგის საკმარისი პირობა*/. ვთქვათ, $f_i:R_n\to R$ ფუნქციებს, $i=0,1,\dots,m$, აქვთ უწყვეტი მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, $\hat{x}\in M$ და სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

ა) $\exists\hat{\lambda}=\left(\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m\right)$, ისეთი, რომ $l'\left(\hat{x}\right)=0$, სადაც

$$l(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\hat{\lambda}_i f_i(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}_n;$$

ბ) $h\,l''\left(\hat{x}\right)h^T<0\quad\left(h\,l''\left(\hat{x}\right)h^T>0\right)$ სრულდება ყოველი ისეთი არანულოვანი $h\in\mathbb{R}_n$ ვექტორისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს შეზღუდვებს:

$$f_j'\left(\hat{x}\right)h^T=0,\quad j=1,\dots,m\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j\left(\hat{x}\right)}{\partial\hat{x}^k}h^k=0,\ \ j=1,\dots,m.$$

მაშინ, $\hat{x}$ არის მკაცრი ლოკალური მაქსიმალი (მინიმალი) შემდეგ ექსტრემალურ ამოცანაში:

$$f_0(x)\to\mathrm{extr},\quad f_1(x)=0,\dots,f_m(x)=0\,.$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მკაცრი ლოკალური მაქსიმალის არსებობა. ლოკალური მინიმალის არსებობა ანალოგიურად მტკიცდება.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, თეორემის პირობები სრულდება, მაგრამ $\hat{x}$ არაა მკაცრი ლოკალური მაქსიმალი.

მაშინ, არსებობს ვექტორთა მიმდევრობა $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$ ისეთი, რომ

$$f_0(x_i) \geq f_0(\hat{x}), \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{8.19}$$

და $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \hat{x}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\eta_i = \|x_i - \hat{x}\|, \quad h_i = \frac{1}{\eta_i}(x_i - \hat{x}), \quad \forall i.$$

როგორც ვხედავთ, $x_i = \hat{x} + \eta_i h_i$, $\forall i$. ცხადია, ყოველი h_i ვექტორი ძევს ერთეულოვან სფეროზე, რომელიც კომპაქტური სიმრავლეა და ამიტომ არსებობს $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, კრებადი რომელიღაც h-ისაკენ. რადგან R_n-ის ნორმა უწყვეტადაა დამოკიდებული ვექტორებზე, $\|h\| = 1$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ თვითონ $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ არის კრებადი h -ისაკენ.

ტეილორის ფორმულის თანახმად, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ რიცხვებისთვის გვაქვს:

$$f_j(\hat{x} + \eta_i h_i) - f_j(\hat{x}) = f_j'(\hat{x})(\eta_i h_i)^T + o(\|\eta_i h_i\|). \tag{8.20}$$

პირობის თანახმად, $f_j(\hat{x}) = 0$, $f_j(x_i) = 0$, ამიტომ (8.20) იგივეა, რაც

$$0 = f_j'(\hat{x}) h_i^T + \frac{o(\eta_i)}{\eta_i}. \tag{8.21}$$

თუ (8.21)-ში გადავალთ ზღვარზე როცა $i \to \infty$, მივიღებთ:

$$f_j'(\hat{x}) h^T = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

ანუ ამ h-ისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემის ბ) პირობა, რომლის ძალითაც $h\,l''(\hat{x})h^T < 0$. აღვნიშნოთ

$\alpha = \mathrm{h}\, l''(\hat{\mathrm{x}})\mathrm{h}^T\ (<0)$ და $\varepsilon = |\alpha|/2$. რადგან $l'(\hat{\mathrm{x}}) = 0$, ტეილორის ფორმულა გვაძლევს:

$$l(\mathrm{x}_i) - l(\hat{\mathrm{x}}) = \frac{1}{2}(\eta_i \mathrm{h}_i) l''(\hat{\mathrm{x}})(\eta_i \mathrm{h}_i)^T + o\left(\|\eta_i \mathrm{h}_i\|^2\right).$$

რადგან $\|\eta_i \mathrm{h}_i\| = \eta_i$, ამიტომ

$$\frac{2}{\eta_i^2}\left(l(\mathrm{x}_i) - l(\hat{\mathrm{x}})\right) = \mathrm{h}_i l''(\hat{\mathrm{x}})\mathrm{h}_i^T + 2\frac{o(\eta_i^2)}{\eta_i^2}. \qquad (8.22)$$

რადგან $\lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{h}_i = \mathrm{h}$, ამიტომ არსებობს ნომერი i_0, ისეთი რომ $\mathrm{h}_i l''(\hat{\mathrm{x}})\mathrm{h}_i^T < \alpha + \varepsilon/2$. ჩვენ შეგვიძლია ავილოთ i_0 იმდენად დიდი, რომ როცა $i > i_0$, შესრულდეს

$$2\frac{o(\eta_i^2)}{\eta_i^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{რადგან } \lim_{i\to\infty}\frac{o(\eta_i^2)}{\eta_i^2} = 0\ \right).$$

საბოლოოდ, (8.22)-დან ვიღებთ, რომ ყოველი $i > i_0$-ისათვის

$$\frac{2}{\eta_i^2}\left[l(\mathrm{x}_i) - l(\hat{\mathrm{x}})\right] < \alpha + \varepsilon < 0 \quad \Rightarrow$$

$$l(\mathrm{x}_i) - l(\hat{\mathrm{x}}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_0(\mathrm{x}_i) < f_0(\hat{\mathrm{x}})$$

რაც ეწინააღმდეგება (8.19)-ს. □

მაგალითი. დავასრულოთ $xy \to \mathrm{extr}$, $x^2 + y^2 = 1$ ამოცანის განხილვა, რომელშიც $K = \left\{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ წერტილისათვის გვქონდა $\hat{\lambda}_0 = 1$, $\hat{\lambda}_1 = -1/2$, ამიტომ $l(x,y) = xy - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 - 1\right)$. მატრიცა $l''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ არაა განსაზღვრული არც დადებითად, არც უარყოფითად. $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $f_1'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right)$.

განვსაზღვროთ $h=(h^1,h^2)$ ვექტორები $f_1'(\hat{x})h^T=0$ პირობიდან:

$$\left(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}\right)\begin{bmatrix}h^1\\h^2\end{bmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad h^1=-h^2,$$

ანუ $h=(\alpha,-\alpha),\quad \forall\alpha\neq 0.$ დასასრულ, რადგან

$$(\alpha,-\alpha)\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\-\alpha\end{bmatrix}=-4\alpha^2<0,\quad \forall\alpha\neq 0,$$

ამიტომ $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in \operatorname{loc}\max$.

კრიტიკული წერტილების მეორე წყვილისათვის: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, გვქონდა $\hat{\lambda}_0=1,\ \hat{\lambda}_1=1/2,$ ამიტომ

$$l(x,y)=xy+\tfrac{1}{2}\left(x^2+y^2-1\right),\ l''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

და ვერაფერს ვამბობთ განსაზღვრულობაზე.

$$f_1(x,y)=x^2+y^2-1,\ f_1'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\right).$$

შემდეგ,

$$\left(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\right)\begin{bmatrix}h^1\\h^2\end{bmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad h^1=h^2,$$

ანუ ჩვენთვის საინტერესო ვექტორებს აქვთ სახე:

$h=(\alpha,\alpha),\quad \forall\alpha\neq 0.$ დასასრულ,

$$(\alpha,\alpha)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}=4\alpha^2>0,\quad \forall\alpha\neq 0,$$

ამიტომ $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in \operatorname{loc}\min$. როგორც ვხედავთ, II რიგის პირობების გამოყენება მხოლოდ ლოკალურ ინფორმაციას გვაძლევს კრიტიკული წერტილების შესახებ. მიუხედავად ამისა, ეს ყველაზე მძლავრი მეთოდია და ხშირად გამოიყენება.

7. ლაგრანჟის მამრავლების მათემატიკური და ეკონომიკური ინტერპრეტაციები

განვიხილოთ მინიმიზაციის ამოცანა

$$f_0(\mathrm{x}) \to \min, \quad f_1(\mathrm{x}) = b_1, \ldots, f_m(\mathrm{x}) = b_m,$$

ანუ სტანდარტული სახით:

$$f_0(\mathrm{x}) \to \min, \quad b_1 - f_1(\mathrm{x}) = 0, \ldots, b_m - f_m(\mathrm{x}) = 0 . \qquad (8.23)$$

ცხადია, (8.23)-ის ყოველი ამონახსნი დამოკიდებულია $\mathrm{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ პარამეტრ-ვექტორის მნიშვნელობაზე. მაგალითად, თუ $f_0(x) = f_1(x) = x, \ \ x \in \mathbb{R}$, მაშინ $f_0(x) \to \min, \quad f_1(x) = b$ ამოცანას აქვს ტრივიალური ამონახსნი $\hat{x} = b$.

დავუშვათ, $f_i, \quad i = 1 \ldots, m$, ფუნქციები არის იმდენად კარგი, რომ b ვექტორის ყოველი შესაძლო მნიშვნელობისათვის $(\mathrm{b} \in B)$, (8.23) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\mathrm{x}(\mathrm{b})$, და რომ ცალსახად განისაზღვრებიან ლაგრანჟის მამრავლები $1, \lambda_1(\mathrm{b}), \ldots, \lambda_m(\mathrm{b})$, რომელთათვისაც თეორემა 1-ის ძალით

$$f_0'(\mathrm{x}(\mathrm{b})) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathrm{b}) f_i'(\mathrm{x}(\mathrm{b})) = 0 . \qquad (8.24)$$

რადგან თვითონ ლაგრანჟის ფუნქცია ამ მამრავლებით არის

$$f_0(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathrm{b})(b_i - f_i(\mathrm{x})),$$

ამიტომ ყოველი x-ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (8.23)-ის შეზღუდვებს

$$b_i - f_i(\mathrm{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m , \qquad (8.25)$$

სრულდება

$$f_0(\mathrm{x}) = f_0(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathrm{b})(b_i - f_i(\mathrm{x})) .$$

კერძოდ, როცა $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{b})$, გვაქვს

$$f_0(x(b)) = f_0(x(b)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b)\left(b_i - f_i(x(b))\right). \qquad (8.26)$$

გავაწარმოოთ (8.26)-ის ორივე მხარე b_j -თი:

$$\frac{\partial f_0(x(b))}{\partial b_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_0(x(b))}{\partial x^k}\frac{\partial x^k(b)}{\partial b_j} +$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \lambda_i(b)}{\partial b_j}\left[b_i - f_i(x(b))\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b)\left[\frac{\partial b_i}{\partial b_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x(b))}{\partial x^k}\frac{\partial x^k(b)}{\partial b_j}\right] =$$

(მარჯვენა მხარეს მეორე წევრი ნულის ტოლია (8.25)-ის გამო)

$$= \lambda_j(b) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_0(x(b))}{\partial x^k} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b)\frac{\partial f_i(x(b))}{\partial x^k}\right]\frac{\partial x^k(b)}{\partial b_j} =$$

$$= \text{((8.24)-ის ძალით)} = \lambda_j(b).$$

ამგვარად,

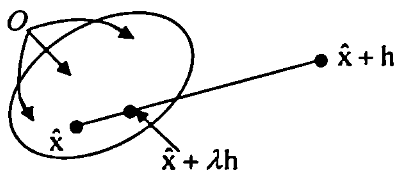
$$\frac{\partial f_0(x(b))}{\partial b_j} = \lambda_j(b), \quad j = 1,\ldots,m. \qquad (8.27)$$

როგორც ვხედავთ, ლაგრანჟის ოპტიმალური მამრავლები გვიჩვენებენ, თუ რამდენადაა მგრძნობიარე მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შეზღუდვის პარამეტრების ცვლილების მიმართ. მაგალითად, თუ ლაგრანჟის რომელიმე მამრავლი ნულის ტოლი აღმოჩნდა, შესაბამისი პარამეტრის მცირე ცვლილება გავლენას არ იქონიებს მიზნის ფუნქციის ექსტრემალურ მნიშვნელობაზე.

ლაგრანჟის მამრავლების ინტერპრეტაცია განსაკუთრებით შინაარსიანია ეკონომიკურ ამოცანებში. მარაგის განაწილების ეკონომიკურ ამოცანებში მიზნის ფუნქციას აქვს ღირებულების განზომილება (ღირებულება არის ფასის ნამრავლი

პროდუქციის მოცულობაზე), ხოლო შეზღუდვების საშუალებით დგინდება პროდუქციის განსაზღვრული მოცულობა. (8.27)-ის მიხედვით, ლაგრანჟის მამრავლს აქვს ფასის განზომილება. ამ მიზეზის გამო, ლაგრანჟის მამრავლებს უწოდებენ ჩრდილოვან ფასს მოცემულ პროდუქციაზე.

8. ფუნქციის უსწრაფესი ცვლილების მიმართულების განსაზღვრა



ნახ. 8.3

ვთქვათ, $O \subset R_n$ ღია სიმრავლეა; $\hat{x} \in O$ და $f: O \to \mathbb{R}$ არის წარმოებადი ფუნქცია $\hat{x}$-ში. ჩვენი ამოცანაა $\hat{x}$ წერტილში f ფუნქციის უსწრაფესი ცვლილების მიმართულებების განსაზღვრა. ჩვეულებრივ, მიმართულება ენოდება R_n-ის ერთეულოვანი სფეროს ელემენტებს. მაგ. თუ $h \in R_n$ არის ერთ-ერთი მიმართულება (ე.ი $hh^T = 1$) მაშინ საკმაოდ მცირე $\lambda > 0$ რიცხვებისათვის $\hat{x} + \lambda h \in O$ და h მიმართულებით f-ის ცვლილების სიჩქარე $\hat{x}$-ში არის:

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda}\left[f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})\right],$$

რადგან f წარმოებადია $\hat{x}$-ში, ამიტომ ეს სიდიდე არის $f'(\hat{x})h^T$. ამგვარად, ჩვენ გვაინტერესებს ის მიმართულებები, რომლისთვისაც $f'(\hat{x})h^T$ იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას.

განმარტება: $\hat{x}$ წერტილში f-ის უსწრაფესი ცვლილების მიმართულებები, წარმოადგენენ შემდეგი ექსტრემალური ამოცანის

$$f'\left(\hat{x}\right)h^T \to extr\,,\quad hh^T = 1\,, \tag{8.28}$$

ექსტრემუმის წერტილებს.

ამოცანა რომ არატრივიალური იყოს, უნდა ვიგულისხმოთ $f'\left(\hat{x}\right) \neq 0$ (არანულოვანი ვექტორია). ახლა ამოვხსნათ (8.28).

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$\mathscr{L}(h,\lambda_1,\lambda_0) = \lambda_0 f'(\hat{x})h^T + \lambda_1\left(hh^T - 1\right).$$

ამოვწეროთ სისტემა კრიტიკული წერტილების განსაზღვრისათვის:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial h^1} = \lambda_0 \dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x^1} + 2\lambda_1 h^1 = 0, \\ \\ \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial h'} = \lambda_0 \dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x'} + 2\lambda_1 h' = 0, \\ \\ \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial h''} = \lambda_0 \dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x''} + 2\lambda_1 h'' = 0, \\ hh^T = 1, \end{cases}$$

ანუ ვექტორულად

$$\begin{cases} \lambda_0 f'(\hat{x}) + 2\lambda_1 h = 0, \\ hh^T = 1. \end{cases} \tag{8.29}$$

შევამციროთ ცვლადების რიცხვი შემთხვევათა რიცხვის ზრდის ხარჯზე.

1. ვთქვათ $\lambda_0 = 0$ მაშინ $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow h = 0$ რაც არაა თავსებადი $hh^T=1$-თან.
2. განვიხილოთ $\lambda_0 \neq 0$ შემთხვევა. შეგვიძლია λ_0-ზე გავყოთ (8.29)-ის პირველი განტოლება, რის შემდეგაც λ_1/λ_0,

შეგვიძლია ჩავთვალოთ ერთ ცვლადად და ის აღვნიშნოთ λ_1 -ით. (8.29) სისტემა იღებს სახეს ($\lambda=0$ გამოიწვევდა $f'(\hat{x})=0$ -ს):

$$\begin{cases} f'(\hat{x})+2\lambda_1 h=0, \\ hh^T=1, \end{cases}$$

საიდანაც,

$$\frac{1}{4\lambda^2}\left\|f'(\hat{x})\right\|^2=1 \text{ ანუ } \lambda_1=\pm\frac{1}{2}\left\|f'(\hat{x})\right\|,$$

ე.ი (8.29)-ის ამონახსნებია $\left(\pm\frac{f'(\hat{x})}{\left\|f'(\hat{x})\right\|},\pm\frac{1}{2}\left\|f'(\hat{x})\right\|,1\right)$, რომლებიც გვაძლევენ ორ კრიტიკულ წერტილს:

$$K=\left\{\pm f'(\hat{x})/\left\|f'(\hat{x})\right\|\right\}.$$

გამოვიკვლიოთ ეს წერტილები. ვაიერშტრასის თეორემის გამოყენება შეგვიძლია, რადგან ერთეულოვანი სფერო კომპაქტურია, ხოლო მიზნის ფუნქცია — უწყვეტი. ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს შორის ერთი არის გლობალური მინიმალი, მეორე გლობალური მაქსიმალი. მიზნის ფუნქციაში ჩასმა გვაძლევს, რომ გრადიენტის მიმართულება, ანუ $f'(\hat{x})/\left\|f'(\hat{x})\right\|$ არის გლობალური მაქსიმალი (8.28)-ში, ანუ f-ის უსწრაფესი ზრდის მიმართულება, ხოლო ანტიგრადიენტის მიმართულება $-f'(\hat{x})/\left\|f'(\hat{x})\right\|$ არის f-ის უსწრაფესი კლების მიმართულება $\hat{x}$ -ში.

სავარჯიშოები

#82. $y^2-x\to\min,\quad x+y^3=0$.

#83. $4x+y\to\text{extr},\quad x^2+y^2=1$

#84. $x^2 + y^2 \to \text{extr}, \quad 4x + 3y = 1$

#85. $e^{xy} \to \text{extr}, \quad x + y = 1$

#86. $5x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}, \quad x + y = 1$

#87. $x \to \min, \quad x^3 - y^2 = 0$

#88. $x^2 + y^2 \to \text{extr}, \quad x^4 + y^4 = 1$

#89. ერთეულოვან წრეში ჩავხაზოთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.

#90. $\mathrm{x}A\mathrm{x}^T \to \text{extr}, \quad \|\mathrm{x}\| = 1$, თუ ცნობილია, რომ

$\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n, \quad A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ -სიმეტრიული მატრიცაა.

#91. რიცხვი 8 გაყავით ორ ნაწილად ისე, რომ მათი ნამრავლის ნამრავლი მათ სხვაობაზე იყოს მაქსიმალური (ტარტალია).

#92. ჩახაზეთ ერთეულოვან წრეში სამკუთხედი, რომლისთვისაც გვერდების კვადრატების ჯამი არის მაქსიმალური.

#93. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$. მოძებნეთ ისეთი x წერტილი, საიდანაც $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ წერტილებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი არის მინიმალური.

თავი 9
გლუვი ექსტრემალური ამოცანა ტოლობისა და უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით

1. მოკლე რეზიუმე

გლუვი ამოცანა ტოლობისა და უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით ეწოდება შემდეგ ექსტრემალურ ამოცანას:

$$g_0(x)\to \mathrm{extr},\quad g_1(x)\le 0,\ \ldots, g_k(x)\le 0,\quad f_1(x)=0,\ldots,f_m(x)=0. \qquad (9.1)$$

სადაც ყოველი $g_j:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R},\ f_i:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R},\quad (j=0,\ldots k, i=1,\ldots,m)$ არის საკმარისად გლუვი ფუნქცია. რადგან ექსტრემუმის განმარტებაში მონაწილეობენ უტოლობები, ამიტომ მიზნის ფუნქცია და უტოლობების განმსაზღვრელი ფუნქციები ერთი და იგივე სიმბოლოთია აღნიშნული. (9.1)-ის ამომწურავ ანალიზს ჩვენ არ მოვიყვანთ, რადგან თავისი სირთულისა და სპეციფიკის გამო ეს უფრო სპეცკურსის თემაა. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ხელსაყრელია (9.1)-ის ნაცვლად განვიხილოთ მინიმიზაციის ორი ამოცანა (1) $g_0(x)\to\min$, 2) $-g_0(x)\to\min$), რადგან მინიმიზაციისა და მაქსიმიზაციის ამოცანებისათვის ალგორითმები განსხვავდება მცირე დეტალებით, რაც ადვილად იწვევს შეცდომას. ზოგადობის შეუზღუდავად, შემდეგში განვიხილავთ მინიმიზაციის გლუვ ამოცანას:

$$g_0(x)\to\min,\quad g_1(x)\le 0,\ldots, g_k(x)\le 0,\quad f_1(x)=0,\ldots,f_m(x)=0. \qquad (9.2)$$

ამ ამოცანაში მიზნის ფუნქციაა $g_0(x)$, ხოლო დასაშვები სიმრავლე არის:

$$M=\{x\in\mathbb{R}_n \mid g_1(x)\le 0,\ \ldots, g_k(x)\le 0,\quad f_1(x)=0,\ldots,f_m(x)=0.\}$$

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავასაბუთებთ, რომ ტოლობის და უტოლობის ტიპის შეზღუდვების მქონე გლუვი ამოცანის გამოკვლევა უნდა მოხდეს შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. მათემატიკური მოდელის შედგენა, ანუ ამოცანის ფორმულირება (9.2) სახით;
2. (9.2) ამოცანისათვის ლაგრანჟის ფუნქციის შედგენა:

$$\mathscr{L}(x,\lambda,\mu,\mu_0)=\sum_{j=0}^{k}\mu_j g_j(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\,, \qquad (9.3)$$

   სადაც λ_i და $\mu_j \in R$ ლაგრანჟის მამრავლებია, ხოლო $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.
3. (9.2) ამოცანისათვის კრიტიკული წერტილების სიმრავლის განსაზღვრა:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i}=0, \quad i=1,\ldots,n,\\ \mu_j g_j(x)=0, \quad j=1,..k,\\ f_S(x)=0, \quad s=1,\ldots,m,\end{cases} \qquad (9.4)$$

   განტოლებათა სისტემის $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\mu}_0)$ ამონახსნებს შორის შევარჩიოთ ისეთები, რომ შესრულდეს:

   ა) $(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\mu}_0)\neq 0,$

   ბ) $(\bar{\mu},\bar{\mu}_0)\geq 0,$

   გ) $g_j(\bar{x})\leq 0, \quad \forall j\in\{1,\ldots,k\}.$

   ასეთი $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\mu}_0)$ ამონახსნების $\bar{x}$-ების სიმრავლე აღვნიშნოთ K-თი და მას ვუწოდოთ (9.2) ამოცანის კრიტიკული წერტილების სიმრავლე. ლაგრანჟის პრინციპის თანახმად $\operatorname{loc}\min(9.2)$ შედის K-ში.
4. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა იმ მიზნით, რომ მათგან ამოვარჩიოთ მინიმუმის წერტილები.

2. მათემატიკური მოდელის შედგენა

საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ ფასიანი ქაღალდების პორტფელის შედგენის ამოცანა.

ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანა, რომლის გადაჭრაც უწევთ საინვესტიციო ფირმებს (ბანკებს, ფონდებს, სადაზღვევო კომპანიებს) არის ფასიანი ქაღალდების ოპტიმალური პორტფელის შედგენის ამოცანა. პორტფელი ნიშნავს სხვადასხვა სახის ფასიან ქაღალდებში (ობლიგაციები, აქციები, საბანკო სადეპოზიტო სერტიფიკატები და სხვა) ჩადებული თანხების მოცულობების ერთობლიობას. ამ ამოცანის გადასაჭრელად, მისი მათემატიკური სირთულისა და ეკონომიკური მნიშვნელობის გამო, დამუშავებულია სხვადასხვანაირი მოდელები.

ვიგულისხმოთ, რომ დამდეგ საინვესტიციო პერიოდში შეიძლება ნაღდი C კაპიტალის ჩადება n სახის ფასიან ქაღალდებში. ვთქვათ, x^j არის j-ური სახის ფასიან ქაღალდში ჩადებული კაპიტალის მოცულობა (დოლარებში), $j=1,\ldots,n$. მაშინ, ცხადია, რომ

$$x^1+x^2+\cdots+x^n\le C,\quad x^j\ge 0,\quad j=1,\ldots,n.$$

ვთქვათ, არსებობს სტატისტიკური მონაცემები ბოლო T წლის განმავლობაში თითოეული სახის კაპიტალდაბანდების შესახებ, რომლებიც ასახავენ ამ პერიოდში ფასების მერყეობას და დივიდენდების გაცემას. ამ მონაცემების საშუალებით, შესაძლებელია შეფასდეს კაპიტალდაბანდებებიდან მიღებული შემოსავალი ფასიანი ქაღალდის ყოველი სახისთვის. ვთქვათ, $r_j(t)$ არის t წელში j სახის ფასიან ქაღალდში დაბანდებული ერთი დოლარისგან მიღებული მთლიანი შემოსავალი. მაშინ:

$$r_j(t)=\frac{\left[p_j(t+1)-p_j(t)+d_j(t)\right]}{p_j(t)},$$

სადაც $p_j(t)$ არის j სახის ფასიანი ქაღალდის ფასი წლის (ზოგადად, საინვესტიციო პერიოდის) დასაწყისში, $d_j(t)$ არის t წელში მიღებული ჯამური დივიდენდები.

შევნიშნოთ, რომ $r_j(t)$ შესაძლოა ძლიერ იცვლებოდეს წლიდან წლამდე და შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი ნიშანი. იმისათვის, რომ შეფასდეს j სახის ფასიან ქაღალდში დაბანდების მიზანშეწონილობა, უნდა შეფასდეს j სახის ფასიან ქაღალდში დაბანდებული ერთი დოლარისგან მიღებული შემოსავლის საშუალო ანუ მოსალოდნელი მნიშვნელობა:

$$\mu_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_j(t).$$

მოსალოდნელი შემოსავლის მთლიანი სიდიდე იქნება:

$$E = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathrm{x}^j = \mu \mathrm{x}^T,$$

სადაც $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{x}^n)$.

(შევნიშნოთ, რომ μ არ არის კავშირში ამავე ასოთი აღნიშნულ ლაგრანჟის მამრავლთან).

მოდელი 1. ამ ამოცანისთვის შედარებით მარტივად გამოსაკვლევ (შესაბამისად, ნაკლებად ადეკვატურ) მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathrm{x}^j \to \max,$$

იმ პირობით, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{x}^j \le C, \quad \forall \mathrm{x}^j \ge 0.$$

სხვა სიტყვებით, გვინდა მოვახდინოთ მთლიანი მოსალოდნელი მოგების მაქსიმიზაცია იმის გათვალისწინებით, რომ შეზღუდულია ინვესტიციების მთლიანი მოცულობა და ვალის აღება არ დაიშვება. ამავე მოდელს შეუძლია დამატებით გაითვალის-

ნინოს სხვა შეზღუდვები. განვიხილოთ შედარებით გავრცელებული ორი მათგანი.

საინვესტიციო ფირმების უმრავლესობა ზღუდავს კაპიტალდაბანდებათა მოცულობას ჩვეულებრივი აქციებისთვის, რადგან მათგან შემოსავალს ახასიათებს მნიშვნელოვანი რხევები (ანუ ძლიერი ცვლილებები). ასეთი შეზღუდვა შეიძლება ჩაიწეროს ფორმულით:

$$\sum_{j \in J_1} x^j \le b_1 ,$$

სადაც J_1 შედგება ჩვეულებრივი აქციების სხვადასხვა სახეების ინდექსებისგან, ხოლო b_1 აღნიშნავს ჩვეულებრივ აქციებში მაქსიმალურ დასაშვებ კაპიტალდაბანდებას.

მრავალი საინვესტიციო ფირმის მმართველობა აუცილებლად მიიჩნევს კაპიტალის ნაწილის შენარჩუნებას ნაღდ ფულად ან მის ეკვივალენტურ რაიმე ფორმად, მეანაბრეთა მოთხოვნილებების დაკმაყოფილების მიზნით. ეს შეზღუდვა შეიძლება ჩაიწეროს ფორმულით:

$$\sum_{j \in J_2} x^j \ge b_2 ,$$

სადაც J_2 სიმრავლის ინდექსები შეესაბამება ფასიან ქაღალდებს, რომლებიც ნაღდი ფულის ეკვივალენტურია (მაგალითად, შემნახველ ანგარიშებს, მიმდინარე ანგარიშებს); b_2 არის აუცილებელი ნაღდი საშუალებების მინიმალური რაოდენობა.

ამ მარტივი მოდელის ძირითადი ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ ინვესტიციებთან დაკავშირებული რისკის გათვალისწინება არ ხდება. ფასიანი ქაღალდების პორტფელი, რომელსაც შევადგენთ ამ მოდელის გამოყენებით, შეიძლება გვპირდებოდეს მაღალ საშუალო მოსალოდნელ შემოსავალს, მაგრამ ინვესტიციებთან დაკავშირებული რისკიც ასევე მაღალი იქნება. მაღალი რისკის გამო, რეალური შემოსავალი შესაძლოა გაცილებით დაბალი აღმოჩნდეს, ვიდრე თეორიულად იყო მოსალოდნელი.

მოდელი 2. ამ მოდელში ხდება ფასიანი ქაღალდების თითოეულ სახესთან დაკავშირებული რისკის გათვალისწინება. ზოგიერთი ფასიანი ქაღალდის, ე.წ. „სპეკულაციურ აქციებს" აქვთ ტენდენცია ძლიერი რხევებისადმი, რაც ზრდის რისკის ფაქტორს, თუმცა საშუალო მოსალოდნელი მოგებაც მაღალია, რადგან ასეთი ქაღალდების კურსმა შესაძლოა ძლიერ აიწიოს. მეორე მხრივ, „უსაფრთხო ინვესტიციები", როგორიცაა მიმდინარე ანგარიშები ან საბანკო დეპოზიტური სერტიფიკატები, იძლევა ნაკლებ შემოსავალს.

საინვესტიციო რისკის ზომად გამოიყენება შემოსავლის გადახრა მისი საშუალო მნიშვნელობიდან ბოლო T წლის განმავლობაში. აღვნიშნოთ σ_{jj} -თი j სახის ფასიანი ქაღალდის დისპერსია (საინვესტიციო რისკი) რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$\sigma_{jj} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[r_j(t) - \mu_j\right]^2$$

გასათვალისწინებელია, რომ ფასიანი ქაღალდების რომელიმე ჯგუფის კურსი შესაძლოა დამოკიდებული იყოს ეკონომიკის გარკვეული სფეროს მდგომარეობაზე; ამ სფეროს ჩავარდნა გამოიწვევს ამ ჯგუფის ფასიანი ქაღალდების კურსის დაცემას. ისეთი ფასიანი ქაღალდების მაგალითებს, რომელთა კურსები ერთდროულ რხევას ექვემდებარება, წარმოადგენენ საავტომობილო და სანავთობო ფირმების აქციები, კომუნალური მომსახურების საწარმოთა აქციები და სხვა. მსგავსი რისკის შესამცირებლად, ინვესტიციები უნდა განაწილდეს ფასიანი ქაღალდების სხვადასხვა ჯგუფებზე. ასეთ განაწილებაში გამოიყენება შემოსავლის დონეთა თანაფარდობის შეფასებები ფასიანი ქაღალდების ყოველი წყვილისთვის. ეს თანაფარდობა გამოისახება კოვარიაციის σ_{ij} კოეფიციენტებით, რომლებიც გამოითვლება ბოლო წლების სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[r_i(t) - \mu_i\right]\left[r_j(t) - \mu_j\right].$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $i=j$, ეს სიდიდე გადადის j სახის ფასიანი ქაღალდის დისპერსიაში. ამგვარად, საინვესტიციო რისკის საზომად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიდიდე:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x^{i}x^{j}=xQx^{T},$$

სადაც $Q=\left(\sigma_{ij}\right)$ არის კოვარიაციის $n\times n$ ზომის მატრიცა, შედგენილი n სახის ფასიანი ქაღალდისათვის.

პორტფელის განსაზღვრის პროცესში ფასიანი ქაღალდების მფლობელი შესაძლოა დაინტერესებული იყოს გარკვეული მოცულობის საშუალო მოსალოდნელი მოგების მიღებით მინიმალური რისკის პირობებში. შესაბამის ოპტიმიზაციის ამოცანას აქვს სახე:

$$V=xQx^{T}\rightarrow\min,$$

იმ პირობით, რომ

$$\sum_{j=1}^{n}x^{j}\le C,\quad \forall x^{j}\ge 0,\quad \mu x^{T}\ge R,$$

სადაც R არის მოგების მინიმალური საშუალო მოსალოდნელი მნიშვნელობა პორტფელის არჩევის დროს. მოდელში, შესაძლოა, აგრეთვე იყოს ფირმის პოლიტიკასთან დაკავშირებული შეზღუდვები, როგორც წინა მოდელში იყო განხილული.

3. კრიტიკული წერტილების განსაზღვრა

შემდეგ თეორემას, რომელიც წარმოადგენს მინიმუმის პირველი რიგის აუცილებელ პირობას მინიმიზაციის

$$g_0(x)\rightarrow\min,\quad g_1(x)\le 0,\ldots,g_k(x)\le 0,\quad f_1(x)=0,\ldots,f_m(x)=0 \qquad (9.5)$$

ამოცანაში, ტრადიციულად უწოდებენ ლაგრანჟის მამრავლთა წესს გლუვი ამოცანებისთვის ტოლობის და უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით.

თეორემა 1 /*მინიმუმის პირველი რიგის აუცილებელი პირობა*/. ვთქვათ, g_j და f_i ფუნქციები $(j=0,\dots,k,\ \ i=1,\dots,m)$ უწყვეტად წარმოებადებია $\hat{x}\in\mathbb{R}_n$ წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $\hat{x}$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი (9.2) ამოცანაში. მაშინ არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი ლაგრანჟის მამრავლები $\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m,\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_k,\hat{\mu}_0$, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) x-ის მიმართ ლაგრანჟის ფუნქციის სტაციონალურობის პირობა:

$$\frac{\partial\mathscr{L}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{\mu}_0)}{\partial x^i}=0,\quad i=1,\dots,n\qquad \left(\hat{\lambda}=\left(\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m\right),\hat{\mu}=\left(\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_k\right)\right);$$

ბ) ნიშნების შეთანხმების პირობა: ყოველი $j\in\{0,\dots,k\}$-სთვის $\mu_j\geq 0$;

გ) $\hat{\mu}_j g_j(\hat{x})=0,\quad j=1,\dots,k.$

დამტკიცება. თუ აღვნიშნავთ: $\hat{b}_i\equiv g_i(\hat{x})$, მაშინ $\hat{x}$ არის ლოკალური მინიმალი შემდეგ ამოცანაში:

$$g_0(x)\to\min,\qquad g_1(x)=\hat{b}_1,\ \dots,\ g_k(x)=\hat{b}_k\quad f_1(x)=0,\dots,f_m(x)=0.$$

ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის ანალოგიური თეორემა და დავასკვნათ, რომ არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი ლაგრანჟის მამრავლები $\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m,\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_k,\hat{\mu}_0$, რომელთათვისაც სრულდება x-ის მიმართ ლაგრანჟის ფუნქციის სტაციონალურობის პირობა:

$$\frac{\partial\mathscr{L}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{\mu}_0)}{\partial x^i}=0,\quad i=1,\dots,n\,.$$

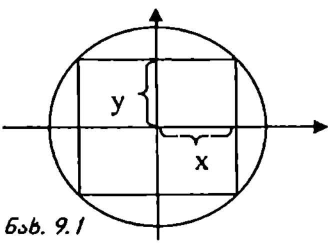
ამგვარად, დასამტკიცებელი რჩება ბ) და გ). სიმარტივისთვის, მათ დავამტკიცებთ კერძო შემთხვევისთვის, რომელიც, პრინციპში, სრულად ამოწურავს თეორემის პრაქტიკულ გამოყენებებს.

დავუშვათ, სრულდება იგივე პირობები, რაც საკმარისია ლაგრანჟის მამრავლების ეკონომიკური შინაარსის გასარკვევად და ვიგულისხმოთ, რომ $\mathrm{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ პარამეტრ-ვექტორის ყოველი მნიშვნელობისთვის, რომელიც მცირედ განხვავდება $\hat{\mathrm{b}}=(\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_m)$ -სგან, შემდეგ ამოცანას

$$g_0(\mathrm{x})\to\min,\quad g_1(\mathrm{x})=b_1,\ \ldots,g_k(\mathrm{x})=b_k,\quad f_1(\mathrm{x})=0,\ldots,f_m(\mathrm{x})=0,$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\mathrm{x}(\mathrm{b})$. ყოველი $j\in\{1,\ldots,k\}$ -სთვის შესაძლებელია ორი შემთხვევა: $\hat{b}_j=0$ (ე.ი. $g_j(\hat{\mathrm{x}})=0$) ან $\hat{b}_j<0$ (ე.ი. $g_j(\hat{\mathrm{x}})<0$). პირველ შემთხვევაში ერთდროულად სრულდება შემდეგი ორი ფაქტი: ერთი მხრივ, $\dfrac{\partial g_0(\hat{\mathrm{x}})}{\partial b_j}=\hat{\mu}_j$, ხოლო მეორე მხრივ ერთი ცვლადის ფუნქცია $g_0\left(\mathrm{x}(b_j)\right)$, განხილული $\left(\hat{b}_j-\eta,\hat{b}_j\right]$ ნახევრადღია შუალედში საკმაოდ მცირე η-სთვის, მაქსიმუმს აღწევს $\hat{b}_j$-ში; ამიტომ, $\mu_j\ge 0$. მეორე შემთხვევაში, $g_0\left(\mathrm{x}(b_j)\right)$, განხილული $\left(\hat{b}_j-\eta,\hat{b}_j+\eta\right)$ ღია შუალედში საკმაოდ მცირე η-სთვის, მაქსიმუმს აღწევს $\hat{b}_j$ -ში და ამიტომ, $\mu_j=0$. □

მაგალითი. ერთეულოვან წრეწირში ჩავხაზოთ მაქსიმალური ფართობის მქონე მართკუთხედი.



ნახ. 9.1

ამოხსნა. x -ით აღვნიშნოთ ჰორიზონტალური გვერდის ნახევარი, y -ით ვერტიკალური გვერდის ნახევარი, მაშინ ფარ-

თობი არის $4xy$, შეზღუდვები არის $x^2+y^2=1$ და $x \geq 0, y \geq 0$. ამგვარად, გვაქვს:

$$\begin{cases} g_0(x,y) = -xy \to \min, \\ g_1(x,y) = -x \leq 0, \\ g_2(x,y) = -y \leq 0, \\ f_1(x,y) = x^2+y^2-1=0. \end{cases} \tag{9.6}$$

ესაა გლუვი ექსტრემალური ამოცანა ტოლობის და უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით. შევადგინოთ მისთვის ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_0) = -\mu_0 xy - \mu_1 x - \mu_2 y + \lambda(x^2+y^2-1).$$

ამოვწეროთ განტოლებები, რომლებიც განსაზღვრავენ კრიტიკულ წერტილებს:

$$\begin{cases} \partial\mathscr{L}/\partial x = -\mu_0 y - \mu_1 + 2\lambda x = 0, \\ \partial\mathscr{L}/\partial y = -\mu_0 x - \mu_2 + 2\lambda y = 0, \\ \mu_1 x = 0, \\ \mu_2 y = 0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{9.7}$$

ეს არის არაწრფივი სისტემა ხუთი განტოლებითა და ექვსი ცვლადით.

მოვძებნოთ კრიტიკული წერტილები. ამ მიზნით ჩვენ ვეძებთ (9.7)-ის ისეთ $(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda},\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2,\bar{\mu}_0)$ ამონახსნებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ აღწერილ ა), ბ), გ) შეზღუდვებს. ვისარგებლოთ ლაგრანჟის ფუნქციის ერთგვაროვნებით მამრავლების მიმართ და შევამციროთ ცვლადების რაოდენობა ((9.7)-ში შემთხვევათა რიცხვის გაზრდის ხარჯზე):

1) ჯერ განვიხილოთ $\mu_0 = 0$. (9.7) მიიღებს სახეს:

$$\mu_1 = 2\lambda x \quad \mu_1 x = 0 \quad x^2 + y^2 = 1, \mu_2 = 2\lambda y \quad \mu_2 y = 0,$$

ე.ი. $\mu_1 x = 2\lambda x^2 = 0$, $\mu_2 y = 2\lambda y^2 = 0$, საიდანაც $2\lambda(x^2 + y^2) = 0$ და რადგან $x^2+y^2 = 1$, ამიტომ $\lambda = 0$. $\mu_1 = \mu_2 = 0$, ე.ი. თუ $\mu_0 = 0$, როგორი $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, 0)$ ამონახსნიც არ უნდა ჰქონდეს (9.7)-ს, ყოველთვის $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, 0) = 0$, რაც წინააღმდეგობაშია ა) შეზღუდვასთან, ე.ი $\mu_0 = 0$ შემთხვევა არც ერთ კრიტიკულ წერტილს არ იძლევა.

2) ავიღოთ $\mu_0 = 1$. ახლა შევეცადოთ (9.7)-ში მოვხსნათ $\mu_j g_j(x, y) = 0$ სახის არაწრფივობები. ამისათვის ცალ-ცალკე უნდა განვიხილოთ შემთხვევები $\mu_j = 0$ და $\mu_j > 0$ ((ბ) პირობის ძალით მეტი შემთხვევა არ არის). თუ $\mu_1 = 0$ მაშინ

$$\begin{cases} y = 2\lambda x, \\ x = 2\lambda y - \mu_2, \\ \mu_2 y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ახლა, თუ $\mu_2 > 0$, მაშინ $y = 0$, $x = -\mu_2 < 0$ და წინააღმდეგობაა გ)-სთან, ე.ი. $\mu_1 = 0$ -ის დროს $\mu_2 = 0$ ქვეშემთხვევა დაგვრჩა განსახილველი.

ავიღოთ $\mu_2 = 0$. მაშინ

$$\left(x = 2y,\, y = 2\lambda x,\, x^2 + y^2 = 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 = 4\lambda^2 y^2, y^2 = 4\lambda^2 x^2, 1 = x^2 + y^2 = 4\lambda^2\left(x^2 + y^2\right)\right),$$

ე.ი. $\lambda^2 = 1/4$, და $x^2 = y^2$, ანუ $x = y$ (გ)-ის ძალით).

საბოლოოდ, $x^2+y^2=1$ გვაძლევს $x=y=1/\sqrt{2}$, ე.ი. (9.7)-ის ამონახსნია $\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/2,0,0,1\right)$, რომლისათვისაც სრულდება:

ა) $(1/2,0,1)\neq 1$

ბ) $(0,0,1)\geq 0$

გ) $-1/\sqrt{2}\leq 0,-1/\sqrt{2}\leq 0$.

ამიტომ $\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)\in K$.

ამით $\mu_2=0$ ქვეშემთხვევის განხილვა დასრულდა.

μ_1 -ის შემთხვევები სიმეტრიულია განხილულისა და იძლევა იგივე კრიტიკულ წერტილს. საბოლოოდ, ჩვენს ამოცანაში არის ერთადერთი კრიტიკული წერტილი: $K=\left\{\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)\right\}$.

4. კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა

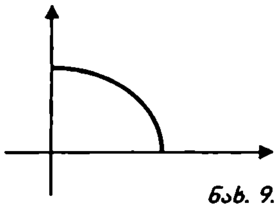
როდესაც ექსტრემალური ამოცანა შეიცავს უტოლობის ტიპის შეზღუდვებს, მისი კრიტიკული წერტილების გამოკვლევა რთულია. ძირითად ინსტრუმენტს წარმოადგენს ვაიერშტრასის თეორემა. უკიდურეს შემთხვევაში, განმარტების შემოწმება უნდა ვცადოთ. თუ ფუნქციებს აქვთ დამატებითი თვისებები (ამოზნექილობა), მაშინ ჩნდება დამატებითი შესაძლებლობებიც.

მაგალითი */გაგრძელება/.*

$-xy\to\min,-x\leq 0,-y\leq 0,x^2+y^2=1$ და უკვე ვიცით, რომ კრიტიკული წერტილი ერთადერთია $K=\left\{\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)\right\}$.

როგორც ვხედავთ, მიზნის ფუნქცია $g_0=-xy$ უწყვეტია, ხოლო დასაშვები სიმრავლე

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 \mid x^2+y^2=1, x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$



ნახ. 9.2

არის ერთეულოვანი წრეწირის ჩაკეტილი ერთი მეოთხედი, ანუ კომპაქტური სიმრავლე (იხ. ნახ. 9.2). ამიტომ ამოცანაში არსებობს გლობალური მინიმალი და იგი მოთავსებულია კრიტიკულ წერტილებს შორის. მაგრამ კრიტიკული წერტილი ერთადერთია, ამიტომ

$$\left\{\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)\right\}=\mathrm{gl}\min(9.6).$$

პასუხი: მაქსიმალური ფართობი აქვს კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt{2}$.

ეს მაგალითი საკმაოდ მარტივია, ამიტომ უშუალოდ განმარტების საფუძველზეც შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ $\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$ კრიტიკული წერტილი. ამისთვის განვიხილოთ

$$\Delta g_0=g_0(1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^1,1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^2)-g_0(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=$$
$$=-(1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^1)(1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^2)+1/2=-1/\sqrt{2}\left(\mathrm{h}^1+\mathrm{h}^2\right)-\mathrm{h}^1\mathrm{h}^2; \quad (9.8)$$

მაგრამ წერტილი $(1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^1,1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^2)$ უნდა აკმაყოფილებდეს შეზღუდვებს:

$$(1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^1)^2+(1/\sqrt{2}+\mathrm{h}^2)^2=1\Rightarrow(\mathrm{h}^1)^2+(\mathrm{h}^2)^2+\sqrt{2}\,(\mathrm{h}^1+\mathrm{h}^2)=0,$$

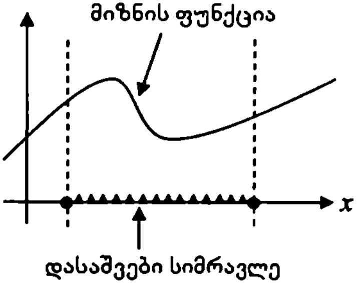
საიდანაც $\mathrm{h}^1+\mathrm{h}^2=-\frac{1}{\sqrt{2}}((\mathrm{h}^1)^2+(\mathrm{h}^2)^2)$. რაც გვაძლევს:

$$\Delta g_0=\frac{1}{2}\left((\mathrm{h}^1)^2+(\mathrm{h}^2)^2-\mathrm{h}^1\mathrm{h}^2\right)=\left(\frac{\mathrm{h}^1}{\sqrt{2}}-\frac{\mathrm{h}^2}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 0.$$

ამიტომ, $\left\{\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)\right\}=\mathrm{gl}\min(6.7)$.

5. ლაგრანჟის მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

როდესაც $n=1$, მაშინ ექსტრემალური ამოცანისათვის თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაციის მიცემა ადვილია, რადგან დასაშვები სიმრავლე და მიზნის ფუნქცია გამოისახება სიბრტყეზე, როგორც ნახ. 9.3-ზე.



ნახ. 9.3

როდესაც $n=2$, გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის ვიყენებთ xoy სიბრტყეს, სადაც დასაშვები სიმრავლე ჩვეულებრივ გამოისახება, მიზნის ფუნქციას კი გამოვსახავთ **დონის წირებისა და უსწრაფესი ზრდის მიმართულების** საშუალებით.

განმარტების მიხედვით, $g:\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ ფუნქციის **დონის წირი** (იგივეს ნიშნავს **განურჩევლობის წირი**) ეწოდება სიბრტყის ისეთი წერტილების ერთობლიობას, სადაც ამ ფუნქციის მნიშვნელობები ერთი და იგივეა, ანუ სიმრავლეს

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 \;\middle|\; g(x,y)=\text{const}\right\},$$

რომელსაც ხშირად აიგივებენ მის განმსაზღვრელ განტოლებასთან:

$$g(x,y)=\text{const}.$$

ამასთან, განსხვავებული კონსტანტები წარმოშობენ განსხვავებული დონის წირებს. დონის წირების კარგად ცნობილ მაგალითებს წარმოადგენენ ერთი და იგივე სიმაღლის დონეები ტოპოგრაფიულ რუკაზე და ერთი და იგივე ბარომეტრული წნევის წირები ამინდის რუკაზე. ეს მაგალითები, კერძოდ,

გვიჩვენებენ რომ ერთი და იგივე c კონსტანტა შეიძლება განსაზღვრავდეს რამდენიმე დონის წირს.

რაც შეეხება ფუნქციის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ იგი ემთხვევა გრადიენტის

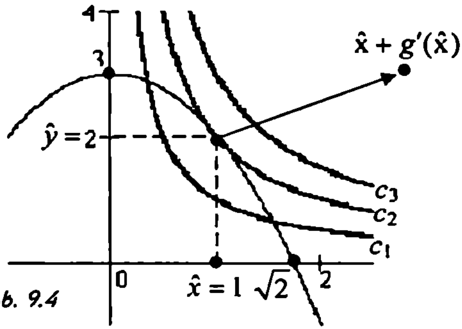
$$g'(x)=\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial g(x)}{\partial x^n}\right)$$

მიმართულებას ყოველი x-ისათვის.

გეომეტრიულად, პირობითი მაქსიმუმის ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს ისეთი წერტილის ან წერტილთა ჯგუფის მოძებნას დასაშვებ სიმრავლეში, რომელზეც გადის ყველაზე მაღალი დონის წირი, განლაგებული ყველაზე შორს უსწრაფესი ზრდის მიმართულებით. ნახ. 9.4-ზე ნაჩვენებია

$$g(x,y)=xy\to\text{extr},\quad f(x,y)=y+x^2-3=0 \qquad (9.9)$$

მაქსიმიზაციის ამოცანის ამონახსნი, რომელშიც დონის წირების კონსტანტები c_1,c_2,c_3 იზრდებიან g-ს უსწრაფესი ზრდის მიმართულებით, ხოლო $(0,3)$ და $\left(\sqrt{3},0\right)$ წერტილებზე გამავალი პარაბოლა წარმოადგენს დასაშვებ სიმრავლეს.



ნახ. 9.4

როგორც ვხედავთ, დასაშვები სიმრავლე და c_2 დონის წირი, რომელიც დასაშვებ სიმრავლეში მიზნის ფუნქციის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებით ყველაზე შორს არის მოთავსებული, ერთ-

მანეთს ეხებიან $\hat{x}=(1,2)$ მაქსიმალში (ტერმინი „წირების შეხება“ ჩვენ ჯერ არ გვაქვს განმარტებული, მაგრამ მას მალე მივანიჭებთ აზრს).

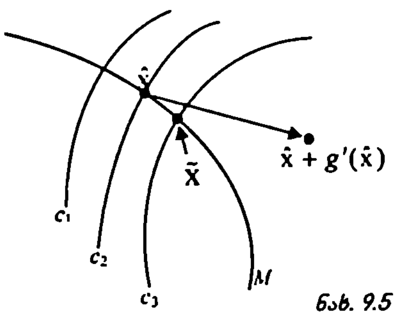
ვაჩვენოთ, რომ დასაშვები სიმრავლისა და დონის წირის შეხება მაქსიმუმის წერტილში (ტოლობის ტიპის შეზღუდვების შემთხვევაში მინიმალისთვისაც იგივე მდგომარეობაა) არის ზოგადი ფაქტი

$$g(x,y)\to\max,\quad f(x,y)=0 \qquad (9.10)$$

სახის ამოცანებში და ეს ფაქტი წარმოადგენს ლაგრანჟის მეთოდის გეომეტრიულ შინაარსს.

იმისათვის, რომ დასაშვები სიმრავლე და დონის წირი მართლაც წირებს წარმოადგენდნენ, უნდა მოვითხოვოთ $g'(\hat{x})\neq 0, f'(\hat{x})\neq 0$, რათა შესრულდეს არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის პირობები.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ არსებობს (9.10) სახის ამოცანა (იხ. ნახ. 9.5), ისეთი, რომ $\hat{x}$ მაქსიმალში იკვეთება დასაშვები სიმრავლე $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 \mid f(x,y)=0\}$ და $\hat{x}$-ზე გამავალი დონის წირი $g(x,y)=c_2$. მაშინ, f და g ფუნქციების სიგლუვის გამო, იარსებებს c_1 დონის წირი $-g'(\hat{x})$ ანტიგრადიენტის მიმართულებით $\hat{x}$-დან, რომელიც საკმაოდ ახლოსაა c_2 დონის წირთან და კვეთს M-ს, და არსებობს c_3 დონის წირი $g'(\hat{x})$ გრადიენტის მიმართულებით $\hat{x}$-დან, რომელიც საკ-



ნახ. 9.5

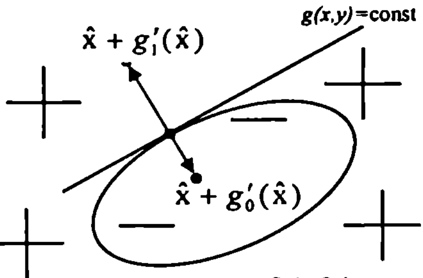
მაოდ ახლოსაა c_2 დონის წირთან და ასევე კვეთს M-ს. ცხადია, $c_1 < c_2 < c_3$ და ამიტომ $g(\tilde{x}) = c_3 > c_2 = g(\hat{x})$, სადაც $\tilde{x}$ არის c_3 დონის წირისა და M-ის გადაკვეთის წერტილი. ამგვარად, მივიღეთ წინააღმდეგობა დაშვებასთან, ე.ი. დონის წირი და დასაშვები სიმრავლე მაქსიმალში არ კვეთენ ერთმანეთს. როდესაც ორ გლუვ წირს აქვს საერთო წერტილი, მაგრამ ისინი არ კვეთენ ერთმანეთს, ეს ნიშნავს, რომ ისინი ეხებიან ერთმანეთს.

(9.9) ამოცანაში, $\hat{x}$ მაქსიმალის განსაზღვრისათვის ლაგრანჟის მეთოდი იძლევა პირობას $g'(x) + \lambda f'(x) = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $g'(\hat{x}), f'(\hat{x})$ ვექტორები მოთავსებულია ერთ წრფეზე, ანუ, დასაშვები სიმრავლე და c_2 დონის წირი კი არ კვეთს ერთმანეთს $\hat{x}$ -ში, არამედ ეხება.

როდესაც შეზღუდვები ტოლობის ტიპისაა, λ-ს ნიშანი შეზღუდული არ არის, $g'(\hat{x})$ და $f'(\hat{x})$ შეიძლება მიმართული იყოს როგორც ერთსა და იმავე, ასევე სხვადასხვა მხარეს.

სხვა მდგომარეობაა უტოლობის ტიპის შეზღუდვის შემთხვევაში, რის გეომეტრიულ ახსნასაც ახლა მოვიყვანთ (იხ. ნახ. 9.6).

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $g_0(x, y)$ არის წრფივი ფუნქცია, $g_1(x, y)$ კი კვადრატული, ისეთი რომ $g_1(x, y) = 0$ წარმოადგენს ელიფსს, რომლის შიგნით (გარეთ) g_1 იღებს უარყოფით (დადებით) მნიშვნელობებს, რასაც



ნახ. 9.6

მიუთითებს შესაბამისად განლაგებული + და – ნიშნები. ამ პირობებში, განვიხილოთ ამოცანა

$$g_0(x,y)\to\min,\quad g_1(x,y)\le 0. \tag{9.11}$$

ვთქვათ, $\hat{x}\in \operatorname{loc}\min\,(9.11)$. მაშინ, ლაგრანჟის მეთოდის თანახმად, $\mu_0>0$, $\mu_1>0$ და ამიტომ $g'(\hat{x})$ და $f'(\hat{x})$ გრადიენტები ერთ წრფეზე სხვადასხვა მხარესაა მიმართული (სხვადასხვა ნიშანი აქვთ). ამათგან, $\hat{x}$-ში მოდებული $g_1'(\hat{x})$ ვექტორი აუცილებლად ელიფსის გარეთ არის მიმართული, რადგან $g_1'(\hat{x})$ უსწრაფესი ზრდის მიმართულებაა, ელიფსი ნულოვანი დონეა, დადებითი დონეები კი მხოლოდ ელიფსის გარეთაა. $\hat{x}$-ში მოდებული $g_0(\hat{x})$ ვექტორი ასევე გარეთ რომ ყოფილიყო მიმართული, მაშინ g_0 მიიღებდა უფრო მცირე მნიშვნელობებს ელიფსის შიგნით.

სავარჯიშოები

განსაზღვრეთ კრიტიკული წერტილები და ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

#94. $xy\to\min,\quad x^2+y^2\le 1.$

#95. $xy\to\operatorname{extr},\quad x^2+y^2\le 50.$

#96. $x^2+y^2\to\min,\quad 2x-y\le 5,\quad x+y=3.$

#97. $x^4+y^4\to\operatorname{extr},\quad x^6+y^6\le 1.$

#98. $x^4+y^4\to\operatorname{extr},\quad x^2+y^2\le 1.$

#99. $x^2+y^2\to\operatorname{extr},\quad x^6+y^6\le 1.$

#100. $x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr}, \quad x^4 + y^4 + z^4 \le 1.$

#101. $x^4 + y^4 + z^4 \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$

#102. $x^6 + y^6 + z^6 \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$

#103. $xyz \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$

ნაწილი 4

ამოზნექილი მიზნის ფუნქცია

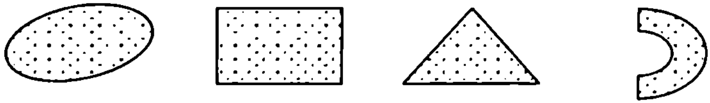
თავი 10
გლუვი ამოზნექილი ექსტრემალური ამოცანები

1. ამოზნექილი სიმრავლეები და ფუნქციები

განმარტება. ვთქვათ X არის წრფივი სივრცე და $M \subset X$. ვიტყვით, რომ M არის **ამოზნექილი სიმრავლე**, თუ იგი თავის ყოველ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს მათ შემაერთებელ მონაკვეთსაც, ანუ:

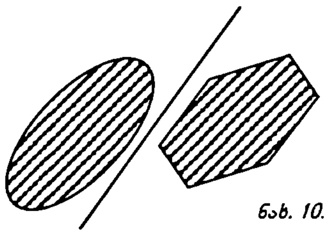
$$\left(\mathrm{x}, \mathrm{y} \in M \text{ და } \alpha \in [0,1]\right) \Rightarrow (1-\alpha)\mathrm{x} + \alpha \mathrm{y} \in M .$$

მაგ., ნახ. 10.1-ზე პირველი სამი ფიგურა ამოზნექილია, მეოთხე – არა.



ნახ. 10.1

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ნებისმიერი რაოდენობა ამოზნექილი სიმრავლეების თანაკვეთა ამოზნექილია. საკმაოდ ძნელი დასამტკიცებელია, რომ $\mathbb{R}_n$-ში ორი თანაუკვეთი ამოზნექილი სიმრავლის განცალკევება შეიძლება ჰიპერსიბრტყით (ნახ. 10.2).



ნახ. 10.2

განმარტება. ამოზნექილ M სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f: M \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება **ამოზნექილი ფუნქცია**, თუ სრულდება ე.წ იენსენის უტოლობა:

$$f\left((1-\alpha)\mathrm{x} + \alpha \mathrm{y}\right) \leq (1-\alpha) f(\mathrm{x}) + \alpha f(\mathrm{y}),$$
$$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in M, \ \alpha \in [0,1]. \qquad (10.1)$$

თუ $\forall x, y \in M$ და $\alpha \in [0,1]$ -ისთვის სრულდება

$$f((1-\alpha)x+\alpha y) \geq (1-\alpha) f(x)+\alpha f(y),$$

მაშინ f -ს ეწოდება **ჩაზნექილი ფუნქცია.**

ზოგჯერ საჭირო ხდება მივუთითოთ, თუ რომელ სიმრავლეზეა ფუნქცია ამოზნექილი ან ჩაზნექილი. მაგალითად, $\sin(x)$ არაა არც ამოზნექილი და არც ჩაზნექილი R -ზე, მაგრამ R -ის გარკვეულ ქვესიმრავლეებზე არის ამოზნექილი ან ჩაზნექილი.

შევნიშნოთ, რომ f -ის ამოზნექილობა M სიმრავლეზე გულისხმობს (განმარტების თანახმად), რომ M თვითონ არის ამოზნექილი.

ამოზნექილ ფუნქციებს აქვთ დიდი პრაქტიკული და გამოყენებითი მნიშვნელობა, მაგრამ ამოზნექილობის შემოწმება ხშირად საკმაოდ რთულია. ამიტომ მნიშვნელოვანია ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის გარკვევისათვის სხვადასხვა კრიტერიუმების გამოყენება. შემდეგი ფაქტი, რომელიც დაუმტკიცებლად მოგვყავს (თუმცა მისი დამტკიცება რთული არაა), გარკვეულ გეომეტრიულ წარმოდგენას გვიქმნის საკითხზე.

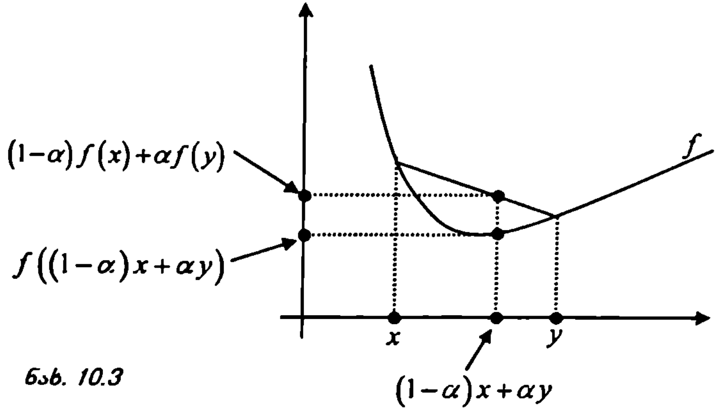
ვთქვათ, M ამოზნექილია და $f: M \to \mathbb{R}$. მაშინ, f -ის ამოზნექილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მისი გრაფიკსზედა სიმრავლის

$$\{(x,\beta)| \quad x \in M, \beta \geq f(x)\}$$

ამოზნექილობა, ხოლო f -ის ჩაზნექილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მისი გრაფიკსქვედა სიმრავლის

$$\{(x,\beta)| \quad x \in M, \beta \leq f(x)\}$$

ამოზნექილობა.



ნახ. 10.3

იენსენის უტოლობა ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი აუცილებლად გრაფიკის ზემოთ არის მოთავსებული, რადგან α ნებისმიერია $[0,1]$-დან (იხ. ნახ. 10.3).

გლუვი ფუნქციების შემოწმება ამოზნექილობაზე ხდება შემდეგი თეორემების საფუძველზე.

თეორემა 1. */გლუვი ფუნქციის ამოზნექილობის I რიგის აუცილებელი და საკმარისი პირობა/*. ვთქვათ, M არის ღია ამოზნექილი სიმრავლე $\mathbb{R}_n$-ში და $f:M\to\mathbb{R}$ არის წარმოებადი ფუნქცია. მაშინ f-ის ამოზნექილობისთვის აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი პირობის შესრულება

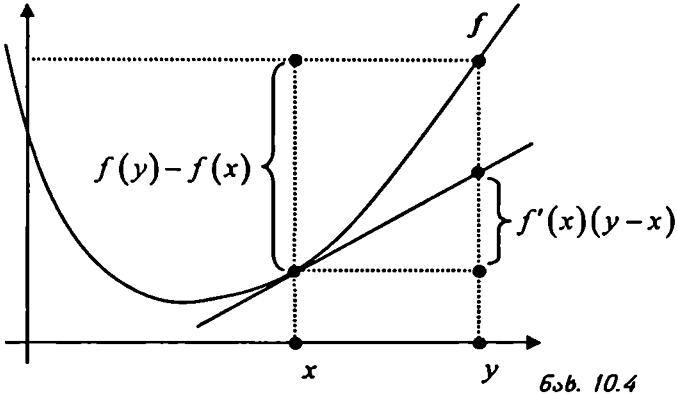
$$f(y)-f(x)\geq f'(x)[y-x]^T,\ \forall x,y\in M. \qquad (10.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, წარმოებადი f ფუნქცია ამოზნექილია M-ზე. გამოვიყენოთ ამოზნექილობის განმარტება და ავიღოთ ძალიან მცირე დადებითი α პარამეტრი, რომელიც ავღნიშნოთ dt-თი:

$$f((1-dt)x+dty)\leq(1-dt)f(x)+dtf(y),$$

ანუ $f\left(x+dt\left(y-x\right)\right)-f\left(x\right)\le dt\left(f\left(y\right)-f\left(x\right)\right)$,
რადგან $dt>0$, ამიტომ

$$\frac{f\left(x+dt\left(y-x\right)\right)-f\left(x\right)}{dt}\le f\left(y\right)-f\left(x\right)$$



ნახ. 10.4

და როცა $dt\to 0+$ ეს უტოლობა f-ის წარმოებადობის ძალით იძლევა (10.2)-ს.

ვთქვათ ახლა, რომ წარმოებადი $f:M\to\mathbb{R}$-ისათვის სრულდება (10.2). ნებისმიერად ავიღოთ $x,y\in M$ და $\alpha\in\left[0,1\right]$. ორჯერ გამოვიყენოთ (10.2), x, $x+\alpha\left(y-x\right)$ და y, $x+\alpha\left(y-x\right)$ წერტილებისათვის:

$$f\left(x\right)-f\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right)\ge\alpha f'\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right)\left(x-y\right)^{T},$$

$$f\left(y\right)-f\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right)\ge\left(\alpha-1\right)f'\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right)\left(x-y\right)^{T}$$

პირველი გავამრავლოთ $\left(1-\alpha\right)$-ზე, მეორე α-ზე და შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$\left(1-\alpha\right)f\left(x\right)+\alpha f\left(y\right)\ge f\left(x+\alpha\left(y-x\right)\right),$$

რაც ამტკიცებს ამოზნექილობას, რადგან

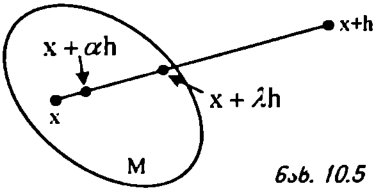
$$x+\alpha(y-x)=(1-\alpha)x+\alpha y. \ \square$$

განმარტება. ვთქვათ, A არის $n\times n$ ზომის კვადრატული სიმეტრიული მატრიცა. ვიტყვით, რომ A არის

1) დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული, თუ $hAh^T\ge 0$, $\forall h\in\mathbb{R}_n$,
2) უარყოფითად ნახევრადგანსაზღვრული, თუ $hAh^T\le 0$, $\forall h\in\mathbb{R}_n$. □

თ ე ო რ ე მ ა 2. */გლუვი ფუნქციის ამოზნექილობის II რიგის აუცილებელი და საკმარისი პირობა/.* ვთქვათ, M არის ღია ამოზნექილი სიმრავლე $\mathbb{R}_n$-ში და $f:M\to\mathbb{R}$ არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი. მაშინ f-ის ამოზნექილობისთვის M-ზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ჰესეს მატრიცა $f''(x)$ იყოს დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული ყოველი $x\in M$-ისთვის.

დამტკიცება. აუცილებლობის დასამტკიცებლად, ნებისმიერად ავილოთ $x\in M$, არანულოვანი $h\in\mathbb{R}_n$ და ვაჩვენოთ, რომ $hf''(x)h^T\ge 0$.



ნახ. 10.5

რადგან M ღიაა და ამოზნექილი, არსებობს $\lambda>0$, ისეთი რომ $0\le\alpha\le\lambda \;\Rightarrow\; x+\alpha h\in M$. ამიტომ, თეორემა 1-ის ძალით

$$0\le f(x+\alpha h)-f(x)-\alpha f'(x)h^T$$

თუ გავითვალისწინებთ f-ის სიგლუვეს და გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას, გვექნება:

$$f(\mathrm{x}+\alpha\mathrm{h})-f(\mathrm{x})-\alpha f'(\mathrm{x})\mathrm{h}^T=\frac{\alpha^2}{2}\mathrm{h}\left[f''(\mathrm{x})\right]\mathrm{h}^T+o\left(\|\alpha\mathrm{h}\|^2\right),$$

სადაც

$$\lim_{\alpha\to 0+}\frac{o\left(\|\alpha\mathrm{h}\|^2\right)}{\alpha^2\|\mathrm{h}\|^2}=0. \qquad (10.3)$$

ამიტომ

$$0\le\frac{\alpha^2}{2}\mathrm{h}\left[f''(\mathrm{x})\right]\mathrm{h}^T+o\left(\|\alpha\mathrm{h}\|^2\right)$$

ანუ ყოველი $\alpha\in\left(0,\lambda\right]$-სთვის სრულდება

$$0\le\mathrm{h}\left[f''(\mathrm{x})\right]\mathrm{h}^T+\frac{2o\left(\|\alpha\mathrm{h}\|^2\right)}{\alpha^2\|\mathrm{h}\|^2}\|\mathrm{h}\|^2,$$

რაც (10.3)-ის ძალით გვაძლევს, რომ $\mathrm{h}\left[f''(\mathrm{x})\right]\mathrm{h}^T\ge 0$.

ახლა ვაჩვენოთ საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი $\mathrm{x}\in M$ და $\mathrm{h}\in\mathbb{R}_n$-ისთვის სრულდება $\mathrm{h}\left[f''(\mathrm{x})\right]\mathrm{h}^T\ge 0$ და ვაჩვენოთ f-ის ამოზნექილობა. თუ $\mathrm{x},\mathrm{y}\in M$, ტეილორის ფორმულის თანახმად არსებობს ისეთი $\theta\in[0,1]$, რომ სრულდება

$$f(\mathrm{y})-f(\mathrm{x})-f'(x)(\mathrm{y}-\mathrm{x})=\frac{1}{2}(\mathrm{y}-\mathrm{x})\left[f''\left(\mathrm{x}+\theta(\mathrm{y}-\mathrm{x})\right)\right](\mathrm{y}-\mathrm{x})^T \qquad (10.4)$$

(ტეილორის ფორმულა ამ სახით, დამატებითი დაშვებების გარეშე, სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში როცა f-ის მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვებია). (10.4)-ის მარჯვენა მხარე არაუარყოფითია, ამიტომ არაუარყოფითია მარცხენა მხარეც, რაც თეორემა 1-ის ძალით ნიშნავს f-ის ამოზნექილობას. □

მაგალითი 1. შევამოწმოთ, ამოზნექილია თუ არა სიმრავლე

$$H=\left\{(x,y)\mid x+2y^2\le 1\right\}.$$

ამოხსნა. ნებისმიერად ავიღოთ

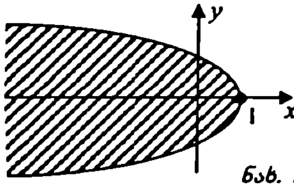
$$\alpha \in [0,1] \text{ და } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H,$$

რაც H-ის განსაზღვრის თანახმად, ნიშნავს

$$x_i + 2y_i^2 \le 1, \quad i = 1,2.$$

ვაჩვენოთ რომ

$$(1-\alpha)(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) \in H$$



ნახ. 10.6

ნახ. 10.6 გვიჩვენებს, რომ პასუხი დადებითი უნდა იყოს. ამიტომ ამოზნექილობის შემოწმება უნდა გავაგრძელოთ. ვექტორებზე ოპერაციების გამოყენებით,

$$(1-\alpha)(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = ((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2).$$

ამ ვექტორისთვის შევამოწმოთ H-ის განმსაზღვრელი პირობა:

$$[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2] + 2[(1-\alpha)y_1 + \alpha y_2]^2 =$$

$$= (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 + 2(1-\alpha)^2 y_1^2 + 2\alpha^2 y_2^2 + 4\alpha(1-\alpha)y_1 y_2 =$$

(დავამატოთ და დავაკლოთ საჭირო წევრები)

$$= [(1-\alpha)x_1 + 2(1-\alpha)y_1^2] + [\alpha x_2 + 2\alpha y_2^2] +$$

$$+2[(1-\alpha)^2 y_1^2 - (1-\alpha)y_1^2] + 2[\alpha^2 y_2^2 - \alpha y_2^2] + 4\alpha(1-\alpha)y_1 y_2 \le$$

$$\le 1 + 2[\alpha(\alpha-1)y_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)y_1 y_2 + \alpha(\alpha-1)y_2^2] =$$

$$= 1 - 2\alpha(1-\alpha)[y_1 - y_2]^2 \le 1,$$

რაც ნიშნავს, რომ H ამოზნექილია. □

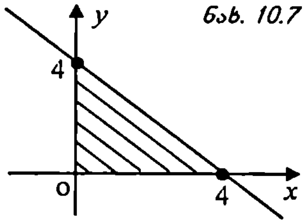
მაგალითი 2. შევამოწმოთ ამოზნექილია თუ არა სიმრავლე

$$H = \{(x, y) \mid xy > 1, x + y < 4, x > 0, y > 0\}.$$

ამოხსნა. შევეცადოთ H წარმოვადგინოთ ამოზნექილი სიმრავლეების თანაკვეთის სახით, რაც მისი ამოზნექილობის ტოლფასი იქნება. ცხადია,

$$H=\{(x,y)\mid xy>1,x>0,y>0\}\cap\{(x,y)\mid x+y<4,x>0,y>0\}.$$

განვიხილოთ მეორე, $H_2=\{(x,y)\mid x+y<4,x>0,y>0\}$, რომელიც სამკუთხედის შიგა ნაწილს წარმოადგენს (იხ. ნახ. 10.7). ცნობილია, რომ სამკუთხედი ამოზნექილი ფიგურაა, მაგრამ ახლა შევამოწმოთ ეს ფაქტი. ვთქვათ,



ნახ. 10.7

$$\alpha\in[0,1] \text{ და}$$

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in H_2.$$

α -ს შესაბამისი წერტილი (x_1,y_1) და (x_2,y_2) ბოლოების მქონე მონაკვეთისა არის:

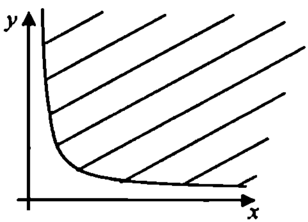
$$(1-\alpha)(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)=((1-\alpha)x_1+\alpha x_2,(1-\alpha)y_1+\alpha y_2)$$

და რადგან $(1-\alpha)x_1+\alpha x_2>0,\ (1-\alpha)y_1+\alpha y_2>0,$

$$(1-\alpha)x_1+\alpha x_2+(1-\alpha)y_1+\alpha y_2=(1-\alpha)(x_1+y_1)+\alpha(x_2+y_2)<4((1-\alpha)+\alpha)=4,$$

ამიტომ H_2 ამოზნექილია.

ახლა განვიხილოთ $H_1=\{(x,y)\mid xy>1,x>0,y>0\}$ სიმრავლე. გეომეტრიული სურათი გვიჩვენებს, რომ H_1 ამოზნექილია (იხ. ნახ. 10.8), ამიტომ ჩავატაროთ ფორმალური შემოწმება, ნებისმიერად ავილოთ $\alpha\in[0,1]$ და $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in H_1$; ე.ი. $x_i>0,y_i>0$ და $x_iy_i>0$, $i=1,2$.



ნახ. 10.8

$$(1-\alpha)(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)=((1-\alpha)x_1+\alpha x_2,(1-\alpha)y_1+\alpha y_2)$$

ვექტორის კომპონენტები დადებითია, ამიტომ საჩვენებელი რჩება რომ მათი ნამრავლი მეტია ერთზე.

$$((1-\alpha)x_1+\alpha x_2)((1-\alpha)y_1+\alpha y_2)=$$
$$=(1-\alpha)^2x_1y_1+\alpha(1-\alpha)(x_1y_2+x_2y_1)+\alpha^2x_2y_2>$$
$$>(1-\alpha)^2+2\alpha(1-\alpha)\sqrt{x_1y_2x_2y_1}+\alpha^2>(1-\alpha)^2+2\alpha+\alpha^2=1.$$

2. ამოზნექილი ამოცანების სპეციფიკა

მინიმიზაციის ამოცანას

$$f(\mathrm{x})\to\min,\quad \mathrm{x}\in M, \tag{10.5}$$

სადაც $M\subset R_n$ ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო $f: M\to R$ – ამოზნექილი ფუნქცია, ენოდება (მინიმიზაციის) ამოზნექილი ამოცანა.

თავისი შინაარსის გამო, შემდეგ თვისებას უწოდებენ გლობალურ-ლოკალურ თვისებას.

წინადადება 1. გლუვ ამოზნექილ ამოცანაში ლოკალური მინიმალი ამავე დროს არის გლობალური მინიმალი.

დამტკიცება. ვთქვათ (10.5) არის ამოზნექილი ამოცანა, ხოლო $\hat{\mathrm{x}}\in\operatorname{loc\,min}(10.5)$ ეს ნიშნავს, რომ რაღაც $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის სრულდება იმპლიკაცია:

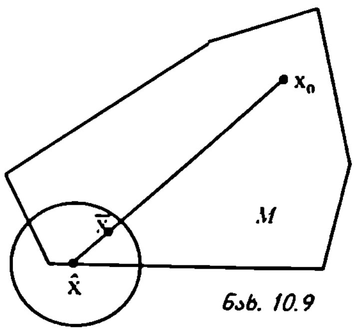
$$(\mathrm{x}\in M\quad \&\quad \|\mathrm{x}-\hat{\mathrm{x}}\|\le\varepsilon)\Rightarrow f(\hat{\mathrm{x}})\le f(\mathrm{x}). \tag{10.6}$$

ახლა ნებისმიერად ავიღოთ დასაშვები $x_0\in M$ წერტილი. საკმაოდ მცირე $\alpha\in[0,1]$-თვის, თუ აღვნიშნავთ

$$\bar{\mathrm{x}}\equiv(1-\alpha)\hat{\mathrm{x}}+\alpha\mathrm{x}_0\in M,$$

მაშინ

$$\|\bar{\mathrm{x}}-\hat{\mathrm{x}}\|\le\varepsilon$$



ნახ. 10.9

რადგან M ამოზნექილია, ხოლო $\bar{\mathrm{x}}\to\hat{\mathrm{x}}$ როცა $\alpha\to0+$,

ამიტომ (10.6)-ის თანახმად $f(\hat{x}) \le f(\overline{x})$. ახლა გავითვალისწინოთ $\overline{x}$-ის სახე და გამოვიყენოთ იენსენის უტოლობა:

$$f(\hat{x}) \le f((1-\alpha)\hat{x} + \alpha x_0) \le (1-\alpha) f(\hat{x}) + \alpha f(x_0),$$

ანუ $f(\hat{x}) \le f(x_0)$, რაც $x_0 \in M$-ის ნებისმიერობის ძალით ამტკიცებს, რომ $f(\hat{x}) \le f(x)$, $x \in M$, ე.ი.

$$\operatorname{loc}\min(10.5) \subset \operatorname{gl}\min(10.5) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{loc}\min(10.5) = \operatorname{gl}\min(10.5). \ \square$$

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა 2. გლუვ ამოზნექილ ამოცანაში მინიმუმის წერტილების სიმრავლე ამოზნექილია.

დამტკიცება. ვთქვათ x_1, x_2 მინიმალებია (10.5)-ში. წინა შედეგის ძალით, $f_0(x_1) = f_0(x_2)$. ახლა ავიღოთ $\alpha \in [0,1]$:

$$f_0((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \le (1-\alpha) f_0(x_1) + \alpha f_0(x_2) = f_0(x_1) = f_0(x_2)$$

ე.ი. მინიმალების ამოზნექილი კომბინაციაც მინიმალია. $\square$

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც ამოზნექილი ამოცანა იმავდროულად არის გლუვიც, რადგან ამ დროს მინიმუმის აუცილებელი პირობები ხდება საკმარისიც.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა 3. ვთქვათ, M არის ღია ამოზნექილი სიმრავლე, $f : M \to \mathbb{R}$ არის წარმოებადი და ამოზნექილი ფუნქცია. მაშინ ყოველი $\hat{x} \in M$ წერტილი, სადაც $f'(\hat{x}) = 0$, წარმოადგენს მინიმალს (10.5)-ში.

დამტკიცება. ნებისმიერად ავიღოთ $x \in M$. ამოზნექილობის I რიგის აუცილებელი და საკმარისი პირობის თანახმად, და $f'(\hat{x}) = 0$-ის გათვალისწინებით,

$$f(x) - f(\hat{x}) \ge f'(\hat{x})(x - \hat{x})^T = 0.$$

ე.ი. $f(x) \ge f(\hat{x})$. $\square$

3. ქუნისა და თაქერის თეორემის ჩამოყალიბება და განხილვა

განვიხილოთ ზოგადი სახის ამოზნექილი ამოცანა უტოლობის ტიპის შეზღუდვებით:

$$g_0(x) \to \min,\ g_i(x) \le 0,\ i=1,\dots,k,\ x \in X_0, \qquad (10.7)$$

სადაც X_0 არის რომელიღაც X წრფივი სივრცის ამოზნექილი ქვესიმრავლე და ყოველი $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,m$ არის ამოზნექილი ფუნქცია.

რადგან g_0-ის ამოზნექილობიდან არ გამომდინარეობს $-g_0$-ის ამოზნექილობა, ამიტომ არსებითია რომ (10.7) არის მინიმიზაციის ამოცანა.

(10.7) ამოცანაში დასაშვები სიმრავლის განსაზღვრაში მონაწილეობენ $g_1,\dots,g_k$ ფუნქციები და X_0 ამოზნექილი სიმრავლე. დასაშვები სიმრავლე აქ არის:

$$M = \{x \in X \mid x \in X_0 \text{ და } g_1(x) \le 0, \dots g_k(x) \le 0\}.$$

g_i-ს ამოზნექილობიდან მარტივად გამომდინარეობს $\{x \in X \mid g_i(x) \le 0\}$ სიმრავლის ამოზნექილობა. ამიტომ M შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ამოზნექილი სიმრავლეების თანაკვეთის სახით:

$$M = X_0 \bigcap \{x \in X \mid g_1(x) \le 0\} \bigcap \dots \bigcap \{x \in X \mid g_k(x) \le 0\}.$$

ზოგადი სახის ამოზნექილი ამოცანისათვის ჩვეულებრივად განისაზღვრება ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$\mathscr{L}(x, \mu, \mu_0) = \sum_{i=0}^{k} \mu_i g_i(x), \text{ სადაც } \mu = (\mu_1, \dots, \mu_k);$$

აღსანიშნავია, რომ იგი ვერ ითვალისწინებს $x \in X_0$ შეზღუდვას.

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია 1951 წელს. იგი მრავალმხრივაა საინტერესო, აღსანიშნავია, რომ თეორემის პირობებში მხოლოდ ამოზნექილობის ცნება მონაწილეობს, არაა ლაპარაკი ნორმირებულ სივრცეებსა და უწყვეტ და წარმოებად ასახვებზე.

საქმე იმაშია, რომ არსებობს შინაგანი კავშირები უწყვეტობასა და ამოზნექილობას, წარმოებადობასა და ამოზნექილობას შორის. მაგალითად, თუ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ამოზნექილია, იგი უწყვეტია (a,b)-ზე, ხოლო ამოზნექილ $g:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}$ ასახვას ყოველ წერტილში გააჩნია მიმართულებითი წარმოებულები.

თ ე ო რ ე მ ა */ქუნი-თაქერი/.* 1). ვთქვათ, X არის წრფივი სივრცე, X_0 ამოზნექილი ქვესიმრავლეა X-ში და $g_i:X\to\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,k$ ამოზნექილი ფუნქციებია X-ზე.

თუ $\hat{\mathrm{x}}$ არის მინიმალი (10.7) ამოცანაში, მაშინ მოიძებნება ისეთი ერთდროულად ნულის არატოლი ლაგრანჟის მამრავლები $\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_k,\hat{\mu}_0$ რომ:

ა) $\min\limits_{\mathrm{x}\in X_0}\mathscr{L}\left(\mathrm{x},\hat{\mu},\hat{\mu}_0\right)=\mathscr{L}\left(\hat{\mathrm{x}},\hat{\mu},\hat{\mu}_0\right)$ (მინიმუმის პრინციპი);

ბ) $\hat{\mu}_i\ge 0,\ \ i=0,1,\dots,k$ (არაუარყოფითობის პირობა);

გ) $\hat{\mu}_i g_i\left(\hat{\mathrm{x}}\right)=0$, $i=1,\dots,k$.

2) თუ $\hat{\mu}_0>0$, მაშინ ა)–გ) პირობები საკმარისია, რათა დასაშვები $\hat{\mathrm{x}}$ წერტილი იყოს მინიმალი (10.7)-ში;

3) იმისათვის რომ $\hat{\mu}_0>0$, საკმარისია მოიძებნოს ისეთი $\overline{\mathrm{x}}\in X_0$, რომლისთვისაც შესრულდება (სლეიტერის) პირობები: $g_i\left(\overline{\mathrm{x}}\right)<0\ \ i=1,\dots,k$.

ამ თეორემის დამტკიცება ჩვენს გეგმაში არ შედის, თვით ქუნი-თაქერის თეორემაც მიმოხილვის მიზნით მოგვყავს, მაგ-

რამ საჭიროდ მიგვაჩნია რამდენიმე სასარგებლო შენიშვნის გაკეთება.

ა) პირობა ნიშნავს, რომ ლაგრანჟის მამრავლების შერჩევის ხარჯზე ზოგადი სახის ამოზნექილი ამოცანა, რომელიც შეიცავს უტოლობის ტიპის შეზღუდვებს, მიიყვანება ამოზნექილ ამოცანაზე უტოლობის ტიპის შეზღუდვების გარეშე:

$$\min \mathscr{L}\left(x,\hat{\mu},\hat{\mu}_0\right) \to \min\,,\ x\in X_0\,. \tag{10.8}$$

სხვა სიტყვებით, ლაგრანჟის ფუნქციის გამოყენებით შეგვიძლია „მოვხსნათ" უტოლობის ტიპის შეზღუდვები, რაც არსებითია, რადგან (10.8)-ის ამოხსნა გაცილებით ადვილია, ვიდრე (10.7)-ისა; მაგალითად, თუ $X = X_0 = \mathbb{R}_n$ და g_i წარმოებადებიც არიან, მაშინ ა) მიიღებს ჩვეულ სახეს

$$\sum_{i=0}^{m}\hat{\mu}_i\frac{\partial g_i\left(\hat{x}\right)}{\partial x^j}=0\,,\ j=1,\dots,n \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{m}\hat{\mu}_i g_i'\left(\hat{x}\right)=0\,,$$

რადგან $\mathscr{L}\left(x,\hat{\mu},\hat{\mu}_0\right)$ ამოზნექილია $\mathbb{R}_n$-ზე x-ის მიმართ (თეორემის პირობებში) და ამიტომ მისთვის უპირობო მინიმუმის აუცილებელი პირობა არის საკმარისიც.

როცა $\hat{\mu}_0>0$, შეგვიძლია ყველა მამრავლი ერთდროულად გავყოთ $\hat{\mu}_0>0$, $\hat{\mu}_0$-ზე და მივაღწიოთ $\hat{\mu}_0=1$-ს. $\hat{\mu}_0=0$ მიგვითითებს დასაშვები სიმრავლის გადაგვარებაზე. მართლაც, თუ სლეიტერის პირობა შესრულდა, მაშინ დასაშვები სიმრავლე არაა გადაგვარებული და $\hat{\mu}_0>0$.

თეორემის დამტკიცება ეფუძნება ამოზნექილი ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად შედეგს – განცალკევების თეორემას, რომლის ფორმულირებას ერთ კერძო შემთხვევაში ახლა მოვიყვანთ.

თ ე ო რ ე მ ა */სიმრავლის და წერტილის განცალკევების შესახებ სასრულგანზომილებიან შემთხვევაში/*. ვთქვათ, M

ამოზნექილია $\mathbb{R}_n$-ში და $0 \notin M$ მაშინ მოიძებნება ისეთი $\alpha_1,...,\alpha_n$ რიცხვები, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i \geq 0, \ \forall x = \left(x^1,...,x^n\right) \in M$$

(სხვა სიტყვებით, 0-ზე გამავალი ჰიპერსიბრტყე $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = 0$ მთლიან სივრცეს ჰყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთში სრულადაა მოთავსებული M).

სავარჯიშოები

#104. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილი სიმრავლეების ნებისმიერი რაოდენობის თანაკვეთა ამოზნექილია.

#105. არსებობს თუ არა ფუნქცია, რომელიც ერთდროულად ამოზნექილია და ჩაზნექილიც.

#106. ვთქვათ, f ამოზნექილია. რა შეგვიძლია ვთქვათ $-f$ ფუნქციაზე?

#107. აჩვენეთ (გეომეტრიულად მაინც), რომ $[a,b]$ მონაკვეთზე ამოზნექილი ფუნქცია უწყვეტია (a,b)-ზე.

#108. მიიღეთ ამ პარაგრაფის შედეგების ანალოგები ჩაზნექილი ამოცანისათვის.

#109. ვთქვათ $g: X \to R$ ამოზნექილია. აჩვენეთ რომ $\left\{x \in X \mid g(x) \leq 0\right\}$ არის ამოზნექილი სიმრავლე.

#110. აჩვენეთ, რომ ამოზნექილ სიმრავლეზე განსაზღვრული ამოზნექილი ფუნქციების ჯამი არაუარყოფითი კოეფიციენტებით არის ამოზნექილი ფუნქცია.

#111. შეამოწმეთ, ამოზნექილია თუ არა სიმრავლე $H \subset R_2$:

ა) $H = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 5\right\}$.

ბ) $H=\{(x,y)\mid xy>1, x>0, y>0\}$.

გ) $H=\{(x,y)\mid e^x<y\}$.

დ) $H=\{(x,y)\mid x-y\le 2, x^2+y^2<4\}$.

ე) $H=\{(x,y)\mid 2x+y\le 2, 2x-y\ge -2, y\ge 0\}$.

#112. აჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების ამოზნექილობა:

ა) $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2yz-6x-4y-2z$,

$(x,y,z)\in R_3$.

ბ) $f(x)=e^x$, $x\in R$,

გ) $f(x,y)=2x^2+y^2+\sin(x+y)$, $x\in R$.

თავი 11
გლუვი ამოზნექილი ფუნქციების მინიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები

განვიხილოთ მინიმიზაციის ამოცანა:

$$f(x) \to \min, \quad x \in R_n, \tag{11.1}$$

სადაც f არის ამოზნექილი ფუნქცია, რომელსაც აქვს პირველი ან მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები. ექსტრემალურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყენებით, რიგ შემთხვევებში ხერხდება (11.1) ამოცანის ამოხსნა, მაგრამ, ხშირად, საჭირო ხდება მინიმალების პოვნა რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. ნებისმიერი რიცხვითი მეთოდი გულისხმობს მისი მახასიათებლების (მიზნის ფუნქციის, დასაშვები სამრავლის განმსაზღვრავი ფუნქციების, მათი წარმოებულების) ზუსტი ან მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოთვლას, და შემდეგ, ამ ინფორმაციის საფუძველზე ამოცანის ამონახსნის ($\hat{x}$ მინიმალის ან მინიმალების წერტილთა სიმრავლის) მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნას.

ისევე, როგორც ერთ ცვლადზე დამოკიდებული მიზნის ფუნქციის მქონე ექსტრემალური ამოცანების შემთხვევაში, აქაც, განასხვავებენ **ნულოვანი, პირველი, მეორე რიგის** (მინიმალის ძებნა ხდება, შესაბამისად, მხოლოდ ფუნქციის მნიშვნელობების, პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების გამოყენებით), აგრეთვე, **პასიურ და მიმდევრობით** რიცხვით მეთოდებს.

მიმდევრობითი რიცხვითი მეთოდით მინიმიზაციის ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს შემდეგი ფორმულით

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k, \quad \alpha_k > 0, \alpha_k \in R, k = 0, 1, \ldots$$

წერტილთა ისეთი მიმდევრობის აგებას, რომელიც კრებადია $\hat{x}$ მინიმალისკენ. ამასთან, სხვადასხვა ალგორითმი ერმანეთისგან განსხვავდება საწყისი მიახლოების x_0 წერტილის, h_k ვექტორის, α_k რიცხვების არჩევით, და აგრეთვე გაჩერების პირობით.

საწყისი მიახლოების – x_0 წერტილის არჩევის რაიმე ზოგადი წესი არ არსებობს. მაგრამ თუ ამოცანის სპეციფიკის ან შინაარსის გათვალისწინებით ცნობილია მინიმალის შესაძლო განლაგება, მაშინ საწყისი მიახლოება, ბუნებრივია, მასთან ახლოს უნდა ავიღოთ.

h_k ვექტორი განსაზღვრავს $(k+1)$-ე ბიჯის მიმართულებას, ხოლო α_k რიცხვი – ბიჯის სიგრძეს.

კონკრეტული რიცხვითი ალგორითმის აღსაწერად უნდა გვქონდეს გაჩერების პირობა. პრაქტიკაში გამოიყენება გაჩერების შემდეგი პირობები:

$$\|x_{k+1}-x_k\| \le \varepsilon_1 ,$$

$$\|f(x_{k+1})-f(x_k)\| \le \varepsilon_2 ,$$

$$\|f'(x_{k+1})\| \le \varepsilon_3 .$$

გამოთვლების დაწყებამდე უნდა დავასახელოთ ε და გაჩერების ერთი ან ორი პირობა.

ვიტყვით, რომ მეთოდი კრებადია, თუ $x_k \to \hat{x}, \quad k \to \infty$, სადაც $\hat{x}$ არის $f(x) \to \min, \quad x \in R_n$ ამოცანის ამონახსნი.

მეთოდის ეფექტურობა ხასიათდება კრებადობის სიჩქარით.

ვიტყვით, რომ x_k კრებადია $\hat{x}$-სკენ წრფივად, თუ არსებობს $q \in (0,1)$ და $k_0 > 0$ ისეთები, რომ

$$\|x_{k+1}-\hat{x}\| \le q\|x_k-\hat{x}\|, \; k \ge k_0 .$$

ვიტყვით, რომ x_k კრებადია $\hat{x}$-სკენ კვადრატულად, თუ არსებობს $C \ge 0$ და $k_0 > 0$ ისეთები, რომ

$$\|x_{k+1}-\hat{x}\| \le C\|x_k-\hat{x}\|^2, \; k \ge k_0 .$$

ამ თავში, განვიხილავთ მინიმიზაციის მიმდევრობით მეთოდებს: გრადიენტულ მეთოდებს, ნიუტონის მეთოდს, გრადიენტის პროექციის მეთოდს, აგრეთვე, შემთხვევითი ძიების მეთოდს.

1. გრადიენტული დაშვების მეთოდი

ვთქვათ, f არის ამოზნექილი, უწყვეტი კერძო წარმოებულების მქონე ფუნქცია, და ვთქვათ $\hat{x} \in R_n$ არის მინიმალი (11.1) ამოცანაში, რომლის მოძებნაც წარმოადგენს ჩვენს მიზანს.

ნებისმიერად ავიღოთ საწყისი მიახლოება $x_0 \in M$ და ავაგოთ მიმდევრობა $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ შემდეგნაირად:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k), \quad k = 0,1,\ldots, \tag{11.2}$$

აქ, h_k ვექტორის როლში ავიღეთ ანტიგრადიენტი, რადგანაც ანტიგრადიენტის მიმართულება $-f'(x_k)$ მოცემულ წერტილში (როცა $f'(x_k) \neq 0$) ემთხვევა ფუნქციის უსწრაფესი კლების მიმართულებას (იხ. თავი 8). α_k სიდიდეები (ბიჯის სიგრძე) შეიძლება ავირჩიოთ იმდენად მცირე, რომ შესრულდეს პირობა

$$f(x_{k+1}) < f(x_k), \quad k = 0,1,\ldots. \tag{11.3}$$

იმ შემთხვევაში, როცა (11.3) პირობა არ სრულდება, ვანახევრებთ α_k სიდიდეს და ახლიდან ვეძებთ x_{k+1} მიახლოებას.

გაჩერების პირობად, ჩვეულებრივ, გამოიყენება პირობა

$$\left|\frac{\partial f(x_k)}{\partial x^i}\right| \leq \varepsilon, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{11.4}$$

სადაც ε წინასწარ მოცემული მცირე რიცხვია. თუ (11.4) სრულდება, ვიღებთ: $\hat{x} \approx x_k, \quad f(\hat{x}) \approx f(x_k)$.

მაგალითი 1. გრადიენტული დაშვების მეთოდით $\varepsilon = 0,05$ სიზუსტით ამოხსენით მინიმიზაციის ამოცანა:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + e^{(x+y)} \to \min, \quad (x,y) \in \Re_2 .$$

ამოხსნა. ავიღოთ: $\mathrm{x}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$, $\alpha_0 = 1$, ავაგოთ (11.2) მიმდევრობა და შედეგები ჩავწეროთ ცხრილში:

ცხრილი 11.1

k	x_k	y_k	$f(\mathrm{x}_k)$	$\frac{\partial f(\mathrm{x}_k)}{\partial x}$	$\frac{\partial f(\mathrm{x}_k)}{\partial y}$	α_k	შენიშვნა
0	0	0	1	1	1	1	
1	−1	−1	3,145	–	–		$\alpha_0 = 1$-სათვის (11.3) პირობა ირღვევა, ამიტომ ვანახევრებთ მას
0	0	0	1	1	1	0,5	
1	−0,5	−0,5	1,118	–	–		(11.3) პირობა ისევ ირღვევა, ამიტომ ისევ ვანახევრებთ α_0-ს
0	0	0	1	1	1	0,25	
1	−0,25	−0,25	0,794	0,106	−0,393	0,25	(11.3) პირობა სრულდება, (11.4) – არ სრულდება.
2	−0,2766326	−0,1516326	0,774	0.0983	0,0451	0,25	(11.3) პირობა სრულდება, (11.4) – არ სრულდება.
3	−0,3012259	−0,1629096	0,772	0,0262	−0,023	–	(11.3), (11.4) – პირობები სრულდება სიზუსტე მიღწეულია.

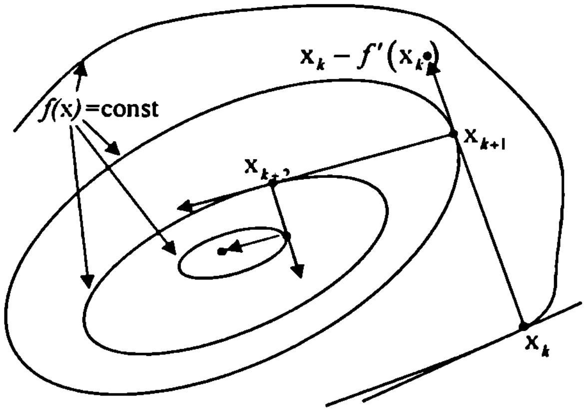
ამგვარად, $\hat{\mathrm{x}} \approx (-0,301, -0,163)$, $f(\hat{\mathrm{x}}) \approx 0,772$. □

2. უსწრაფესი დაშვების მეთოდი

უსწრაფესი დაშვების მეთოდი იმით განსხვავდება გრადიენტული დაშვების მეთოდისაგან, რომ α_k ამჯერად შეირჩევა პირობიდან

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \tag{11.5}$$

სადაც $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha f'(x_k)\right)$. ამგვარად, ყოველ ბიჯზე იხსნება მინიმიზაციის ერთგანზომილებიანი ამოცანა. რადგა-



ნახ. 11.1

ნაც f ამოზნექილი ფუნქციაა, რომელსაც აქვს პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, ამიტომ $\varphi_k'(\alpha_k) = 0$ განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს (11.5) ამოცანის ამონახსნს. ამ ფაქტს აქვს ლამაზი გეომეტრიული გააზრება: ყოველი k-სთვის $f'(x_k)$ და $f'(x_{k+1})$ ვექტორები ურთიერთმართობულნი არიან (ეს გამომდინარეობს

$$\varphi_k'(\alpha_k) = f'\left(x_k - \alpha f'(x_k)\right)(-f'(x_k)) = -f'(x_{k+1})f'(x_k)$$

პირობიდან) (იხ. ნახ. 11.1).

მაგალითი. უსწრაფესი დაშვების მეთოდით $\varepsilon = 0,05$ სიზუსტით ამოხსენით შემდეგი ამოცანა:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + e^{(x+y)} \to \min, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2$$

ამოხსნა.

ბიჯი 1) ავიღოთ $x_0=(0,0)$. მაშინ

$$f'(x_0)=(1;1),\ \varphi_0(\alpha)=f(0-\alpha,0-\alpha)=3\alpha^2+e^{-2\alpha},$$

და φ_0 ფუნქციის მინიმუმის მოსაძებნად, დადებით α-ებს შორის, გამოვიყენოთ გადარჩევის მეთოდი (ეს სიმარტივისათვის, რადგან ასეთი მარტივი სახის ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა პრობლემა არაა) α =0-დან დაწყებული ბიჯით 0,2:

α	0		0,18	0,20	0,22	0,24	0,26
$\varphi_0(\alpha)$	1		0,7949	0,7903	0,7892	0,7916	0,7973

ე.ი. α=0,22, საიდანაც

$$x_1=(0;0)-0,22(1;1)=(-0,22;-0,22).$$

ბიჯი 2) $f'(x_1)=(0,204;-0,236)$,

$$\varphi_1(\alpha)=(-0,22-\alpha\cdot0,204)^2+2(-0,22+\alpha\cdot0,236)^2+$$
$+e^{-0,44+0,032\alpha}$. მოვახდინოთ φ_1-ის მინიმიზაცია:

α		0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$\varphi_1(\alpha)$		0,77401	0,77384	0,77380	0,77387	0,77408

ე.ი. α=0,32 და

$$x_2=(-0,22;-0,22)-0,32(0,204;-0,236)=(-0,2853;-0,1445).$$

ბიჯი 3) $f'(x_2)=(8,007;7,268)\cdot10^{-2}$,

$$\varphi_2(\alpha)=\left(-0,2853-\alpha\cdot9,007\cdot10^{-2}\right)^2+$$
$$+2\left(-0,1445-\alpha\cdot7,268\cdot10^{-2}\right)^2+e^{-0,420-15,275\cdot10^{-2}\cdot\alpha},$$

φ_2 -ის მინიმიზაცია გვაძლევს:

α		0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
$\varphi_2(\alpha)$		0,77273	0,77241	0,77240	0,77241	0,77244

ე.ი. $\alpha=0,24$,

$x_3=(-0,3045;-0,1619)$, $f'(x_3)=(1,821;-2,051)\cdot 10^{-2}$,

ამიტომ $\hat{x}=x_3$ და $f(\hat{x})=f(x_3)$. □

გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა.

1) α_k -ს არჩევა საკმაოდ შრომატევადი პროცესია, ამიტომ სასურველია ერთხელ შეირჩეს α-ს რომელიმე მნიშვნელობა, რომელიც არ იქნება დამოკიდებული იტერაციის ნომერზე და გამოდგება ყოველ იტერაციაზე.

2) როდესაც x_k ძალიან ახლოს არის $\hat{x}$-სთან, გრადიენტული მეთოდების კრებადობის სიჩქარე ნელდება. ამ დროს, რეკომენდებულია უფრო ფაქიზ მეთოდზე გადასვლა, მაგალითად ისეთზე, რომელიც იყენებს f-ის კვადრატულ აპროქსიმაციას.

3. ნიუტონის მეთოდი

თუ ამოზნექილი $f:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}$ ფუნქცია ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია, ხოლო $f'(x), f''(x)$ -ს გამოთვლა არ არის ძნელი. მაშინ შესაძლებელია მეორე რიგის მიმდევრობითი მეთოდების გამოყენება. ვთქვათ, უკვე განსაზღვრული გვაქვს x_k მიახლოება. x_k -ს მიდამოში f -ის ნაზრდს აქვს სახე:

$$f(x)-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)^T+\frac{1}{2}(x-x_k)f''(x_k)(x-x_k)^T+o(\|x-x_k\|^2).$$

განვიხილოთ ნაზრდის კვადრატული ნაწილი:

$$\varphi_k(x) = f'(x_k)(x - x_k)^T + \frac{1}{2}(x - x_k) f''(x_k)(x - x_k)^T \quad (11.6)$$

და განვსაზღვროთ x_{k+1} მიახლოება პირობიდან:

$$\varphi_k(x_{k-1}) = \min_{x \in \mathfrak{R}_n} \varphi_k(x). \quad (11.7)$$

(11.7)-ის ამოსახსნელად გამოიყენება როგორც ანალიზური, ასევე მიახლოებითი (სპეციალურად კვადრატული ფუნქციებისთვის გათვალისწინებული) მეთოდები.

რადგანაც $\varphi_k''(x) = f''(x_k)$, $f(x)$-ს ამოზნექილობის გამო, $f''(x_k)$ დადებითად ნახევრადგანსაზღვრულია, ამიტომ $\varphi_k(x)$ ამოზნექილი ფუნქციაა. მინიმუმის აუცილებელ და საკმარის პირობას (11.7)-თვის აქვს სახე:

$$(x - x_k) f''(x_k) + f'(x_k) = 0.$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას და მის ამონახსნს ჩავთვლით x_{k+1} მიახლოებად, მივიღებთ

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)\left[f''(x_k)\right]^{-1} \quad (11.8)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (11.7) ამოცანის ამოხსნა შეიძლება აღმოჩნდეს საკმაოდ რთული და გამოთვლების სირთულის გათვალისწინებით, საწყისი ამოცანის სადარი. ამიტომ ნიუტონის მეთოდს იყენებენ მაშინ, როცა $f'(x)$, $f''(x)$-ის გამოთვლა და (11.7) განტოლების ამოხსნა არ არის დაკავშირებული სიძნელეებთან. ნიუტონის მეთოდის ღირსებად ითვლება მისი კრებადობის მაღალი სიჩქარე, მაგრამ ამ მეთოდს აქვს მნიშვნელოვანი ნაკლიც, მისი კრებადობისთვის საწყისი მიახლოება საკმარისად ახლოს უნდა იყოს მინიმალთან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მეთოდი შეიძლება არ აღმოჩნდეს კრებადი.

შევნიშნოთ, რომ (11.8)-ში როგორც მიმართულება, ასევე ბიჯის სიგრძე ფიქსირებულია. ნიუტონის მეთოდის სხვადასხვა

მოდიფიკაცია მიმართულია იქითკენ, რომ ამ მეთოდის ძირითადი ღირსების (კრებადობის მაღალი სიჩქარე) შენარჩუნებით, შემცირდეს მისი შრომატევადობა, რაც დაკავშირებულია $f'(x), f''(x)$ -ს გამოთვლასთან და (11.7) განტოლების ამოხსნასთან და შესუსტდეს მოთხოვნა საწყისი მიახლოების ამორჩევაზე.

ნიუტონის მეთოდი ბიჯის რეგულირებით მდგომარეობს შემდეგში:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)\left[f''(x_k)\right]^{-1}$$

როცა $\alpha_k = 1$, ის ემთხვევა ნიუტონის მეთოდს. α_k კოეფიციენტების არჩევა ხდება ან მოცემული მიმართულებით ფუნქციის მინიმიზაციის პირობიდან, ან ბიჯის დაყოფით (11.2) პირობის გათვალისწინებით.

მაგალითი. მაგალითი 1-ის პასუხი ავიღოთ საწყის მიახლოებად და ნიუტონის მეთოდით განვსაზღვროთ მინიმალი შემდეგ ამოცანაში:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + e^{(x+y)} \to \min, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2$$

ამოხსნა. მაგალითი 1-ის შედეგების მიხედვით, გვაქვს:

$$x_0 = (-0{,}3012259, -0{,}1629096),$$

$$f(x_0) = (2{,}622655; -2{,}296005) \cdot 10^{-2},$$

$$f''(x_0) = \begin{bmatrix} 0{,}39319151 & 0{,}62967835 \\ 0{,}62867835 & 0{,}22329787 \end{bmatrix}.$$

აქედან:

$$\left[f''(x_0)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}39319151 & -5{,}3404226 \cdot 10^{-2} \\ -5{,}3404226 \cdot 10^{-2} & 0{,}22329787 \end{bmatrix},$$

და (11.2)-ის თანახმად:

$$x_1 = (x_1, y_1) = (-0{,}3012259; -0{,}1629096) - 10^{-2}(2{,}622655; -2{,}296005) \times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0,39319151 & -5,3404226\cdot 10^{-2} \\ -5,3404226\cdot 10^{-2} & 0,22329787 \end{bmatrix} = (-0,3127641; -0,1563821).$$

რადგან

$$f(x_1) = (7,9\cdot 10^{-6}; 7,9\cdot 10^{-6});$$

ამიტომ სასურველი სიზუსტე მიღწეულია და

$$\hat{x} = (-0,3127641; -0,1563821). \ \square$$

4. გრადიენტის პროექციის მეთოდი

განვიხილოთ მინიმიზაციის ამოცანა:

$$f(x) \to \min, \quad x \in M, \tag{11.9}$$

სადაც $M \subset \mathbb{R}_n$ არის ამოზნექილი ჩაკეტილი სიმრავლე, ხოლო f არის ამოზნექილი წარმოებადი ფუნქცია M-ზე.

ჩაკეტილი M-ის შემთხვევაში უშუალოდ გრადიენტული მეთოდის გამოყენება არ შეიძლება, თუ $M \neq \mathbb{R}_n$, რადგან ზოგიერთი x_k შეიძლება გავიდეს M-იდან. გრადიენტული პროექციის მეთოდის ყოველი იტერაცია ითვალისწინებს შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული გრადიენტული დაშვების მიახლოებების

$$x_{k-1} = x_k - \alpha_k f'(x_k),$$

დაბრუნებას დასაშვებ M სიმრავლეში, თუ $x_{k+1} \notin M$ ასეთი დაბრუნება ხდება x_{k-1}-ის M-ზე პროექტირების საშუალებით, ანუ x_{k+1} იცვლება M სიმრავლის იმ წერტილით, რომელიც მისგან ყველაზე ახლოსაა მოთავსებული.

განმარტება. $x \in \mathbb{R}_n$ წერტილის პროექცია $M \subset \mathbb{R}_n$ სიმრავლეზე ეწოდება ისეთ $P_M(x)$ წერტილს M-იდან, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\|x - P_M(x)\| = \min_{y \in M} \|y - x\|.$$

როგორც ვხედავთ, მარჯვენა მხარე გამოხატავს მანძილს x-დან M-მდე. □

ცხადია, თუ $x \in M$, მაშინ $P_M(x) = x$, ხოლო როცა $x \notin M$, მაშინ M-ის ჩაკეტილობის გამო (ვაიერშტრასის თეორემის შედეგის ძალით) $P_M(x)$ არსებობს და M-ის ამოზნექილობის ძალით კი $P_M(x)$ ერთადერთია (სავარჯიშოს სახით, სასარგებლოა ამ ფაქტის გეომეტრიულ შინაარსში გარკვევა).

ამგვარად, გრადიენტის პროექციის მეთოდში (11.9) ამოცანის $\hat{x}$ მინიმალის მიმდევრობითი მიახლოებები აიგება შემდეგი წესით:

$$x_{k+1} = P_M\left(x_k - \alpha_k f'(x_k)\right), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{11.10}$$

α_k-ს შერჩევა აქაც სხვადასხვანაირად შეიძლება; შესაბამისად მიიღება გრადიენტის პროექციის მეთოდის სხვადასხვა ვარიანტი. მათგან ყველაზე გავრცელებული არის შემდეგი ორი.

1) α_k შეირჩევა ისევე, როგორც უსწრაფესი დაშვების მეთოდში ღია M-ისთვის, ანუ შეირჩევა შემდეგი პირობიდან:

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha>0} \varphi_k(\alpha),$$

სადაც $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha f'(x_k)\right)$.

2) α_k შეირჩევა ისე, რომ შესრულდეს მონოტონურობის პირობა $f_{k+1} < f_k$. ამისთვის თავიდან ირჩევენ რაიმე $\alpha > 0$ და (11.10)-ში იღებენ $\alpha_k = \alpha$. შემდეგ, ამოწმებენ მონოტონურობის პირობას და შეუსრულებლობის შემთხვევაში, ყოფენ მას ამ პირობის შესრულებამდე.

უნდა აღინიშნოს, რომ როცა $x \notin M$, მაშინ $P_M(x)$-ის განსაზღვრა ხდება მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანის

$$g(y) = \|x - y\| \to \min, \quad y \in M,$$

ამოხსნის შედეგად. ზოგიერთი კერძო სახის სიმრავლისათვის (მაგალითად, ბირთვი, ნახევარსიბრტყე და ზოგიერთი სხვა) ეს ამოცანა იხსნება ანალიზურად ლაგრანჟის მეთოდის საფუძველზე.

მაგალითი 1. იპოვეთ $z \in \mathbb{R}_n$ წერტილის პროექცია $P_M(z)$, თუ სიმრავლეს აქვს სახე:

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}_n \,\middle|\, xx^T \le r^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 \le r^2\right\}$$

(ესაა ჩაკეტილი ბირთვი $\mathbb{R}_n$ -ში 0 ცენტრით და r რადიუსით).

ამოხსნა. $P_M(z)$ არის შემდეგი ამოცანის ამონახსნი:

$$\begin{cases} g_0(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(x^j - z^j\right)^2 \to \min, \\ g_1(x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(x^j\right)^2 - r^2\right) \le 0. \end{cases}$$

რომელიც შეიძლება შევცვალოთ ეკვივალენტური ამოცანით:

$$\begin{cases} g_0(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(x^j - z^j\right)^2 \to \min, \\ g_1(x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(x^j\right)^2 - r^2\right) = 0. \end{cases} \tag{11.11}$$

განვიხილოთ არატრივიალური შემთხვევა $z \notin M$, $r > 0$. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(x, \mu, \mu_0) = \lambda_0 (x - z)(x - z)^T + \lambda\left(xx^T - r^2\right)$$

და ამოვწეროთ პირობები კრიტიკული წერტილის განსაზღვრისათვის:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda_0 (x - z) + 2\lambda x = 0 \\ \lambda\left(xx^T - r^2\right) = 0 \end{cases} \tag{11.12}$$

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 0$ იძლევა წინააღმდეგობას II განტოლებაში: $\lambda r^2 = 0$. ე.ი. $\lambda_0 = 1$. ახლა განვიხილოთ ორი შემთხვევა λ-ს მიმართ.

ა) თუ $\lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{z}$, ანუ $(\mathrm{z}, 0, 1)$ არის (11.12)-ის ამონახსნი, მაგრამ მაშინ იგი არ განსაზღვრავს კრიტიკულ წერტილს, რადგან $\mathrm{zz}^T = \|\mathrm{z}\|^2 > r^2$ (რადგან $\mathrm{z} \notin M$).

ბ) თუ $\lambda \neq 0$. მაშინ (11.12) იღებს სახეს:

$$\begin{cases} (\mathrm{x} - \mathrm{z}) + \lambda \mathrm{x} = 0 \\ \mathrm{xx}^\mathrm{T} = r^2 \end{cases}$$

ე.ი. $\mathrm{x} = \dfrac{1}{1+\lambda}\mathrm{z} \Rightarrow \dfrac{1}{(1+\lambda)^2}\mathrm{zz}^T = r^2 \Rightarrow (1+\lambda) = \dfrac{\|\mathrm{z}\|}{r} \Rightarrow \mathrm{x} = \dfrac{r}{\|\mathrm{z}\|}\mathrm{z}$.

მივიღეთ, რომ $\mathrm{x} = \dfrac{r}{\|\mathrm{z}\|}\mathrm{z}$ არის ერთადერთი კრიტიკული წერტილი და, ვაიერშტრასის თეორემის შედეგის ძალით, იგი არის აგრეთვე გლობალური მინიმალი (11.11)-ში. □

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გრადიენტის პროექციის მეთოდით ამოხსენით შემდეგი ამოცანა:

$$g(x, y) = -x + y^2 \to \min, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

გამოთვლები შეწყვიტეთ, თუ შესრულდება $\|g'(\mathrm{x}_k)\| \leq 0{,}01$, ან $\|\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_k\| \leq 0{,}01$.

ამოხსნა. ავიღოთ $\mathrm{x}_0 = (0; 0{,}5) \in M$, სადაც

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

ავიღოთ (11.10)-ში $\alpha_k = 0{,}75 \in (0, 1)$. ახლა შეგვიძლია ავაგოთ მიმდევრობითი მიახლოებები.

ბიჯი 1) $g'(x_0)=(-1;1)$, ამიტომ (11.10) გვაძლევს:

$$x_1=P_M(x_0-\alpha g'(x_0))=P_M((0;0,5)-0,75\cdot(-1;1))=P_M(0,75;-0,25).$$

რადგან $(0,75;-0,25)\in M$, ამიტომ $x_1=(0,75;-0,25)$.

საჭირო სიზუსტე ჯერ არ არის მიღწეული, რადგან

$$g'(x_1)=(-1;-0,5) \text{ და } \|x_1-x_0\|=1,06>0,01.$$

ბიჯი 2) $g'(x_1)=(-1;-0,5)$,

$$x_2=P_M((0,75;-0,25)-0,75\cdot(-1;-0,5))=P_M(1,5;0,125),$$

მაგრამ $(1,5;0,125)\notin M$, რადგან

$$\|(1,5;0,125)\|^2=1,5^2+0,125^2=2,266>1.$$

რადგან M არის ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით 0-ში და რადიუსით $r=1$, შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა მაგალითის შედეგი და ავიღოთ:

$$x_2=P_M(1,5;0,125)=\frac{(1,5;0.125)}{\sqrt{2,266}}=(0,9965;0.08304).$$

საჭირო სიზუსტე ჯერ კიდევ არ არის მიღწეული, რადგან $\|x_2-x_1\|=0,298>0.01$. შემდეგი ბიჯების შედეგები მოყვანილია ცხრ. 11.2-ში.

ცხრ. 11.2

k	x_k	$\|x_{k+1}-x_k\|$	$g'(x_k)$	$x_k-\alpha g'(x_k)$
2	(0,9965;0,08304)	0.298	(-1;0.1661)	(1,7465;-0,0415)
3	(0,9997;0.0238)	0.107	(-1;-0,0476)	(1,7497;0.0119)
4	(0,99998;0.00679)	0.031	(-1;0.0136)	(1.74998;-0.00339)
5	(0.9998;0,00194)	0.0087	სიზუსტე მიღწეულია	

როგორც ვხედავთ,

$$\hat{x}\approx x_5=(0,9998;0,00194),\quad g(\hat{x})\approx g(x_5)=-1.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანის ზუსტი ამონახსნი არის

$$\hat{x} = (1;0), \quad g(\hat{x}) = -1. \quad \square$$

სავარჯიშოები

ამოცანებში, #113 – #115 განახორციელეთ გრადიენტული დაშვების ერთი ბიჯი და შეადარეთ ერთმანეთს $f(\mathrm{x}_0)$ და $f(\mathrm{x}_1)$.

#113. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + e^{x+y} \to \min, \quad \mathrm{x} = (x,y) \in \mathbb{R}_2,$

$\mathrm{x}_0 = (1;1),$

ა) $a_0 = 0,1$, ბ) $a_0 = 0,265$, გ) $a_0 = 0,5$;

#114. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy + x + y \to \min, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2,$

$\mathrm{x}_0 = (0;0),$

ა) $a_0 = 0,1$, ბ) $a_0 = 0,5$, გ) $a_0 = 1$;

#115. $f(x,y,z) = e^{x^2} + (x+y+z)^2 + \to \min, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}_3,$

$\mathrm{x}_0 = (1;1;1),$

ა) $a_0 = 0,1$, ბ) $a_0 = 0,21268$, გ) $a_0 = 1$.

#116 – #117 ამოცანებში, იპოვეთ x_0 წერტილიდან უსწრაფესი დაშვების მეთოდის ბიჯის სიგრძე a_0.

#116. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy + x + y \to \min, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2,$

$\mathrm{x}_0 = (0;0),$

#117. $f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 + xy + yz \to \min, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}_3,$

$\mathrm{x}_0 = (0;1;0).$

ამოცანებში #118 – #120, მოახდინეთ კვადრატული მიზნის ფუნქციების მინიმიზაცია და დაასრულეთ გამოთვლები მაშინ, როდესაც შესრულდება პირობა

$$\left| \frac{\partial f(\mathrm{x}_k)}{\partial \mathrm{x}^j} \right| \le 0,01, \quad j = 1,2,\dots n.$$

#118. $f(x,y)=4x^2+4xy+6y^2-17x\to\min, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_2;$

#119. $f(x,y)=10x^2+3xy+y^2-10y\to\min, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_2;$

#120. $f(x,y)=x^2-2xy+6y^2+x-y\to\min, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_2;$

#121 – #124 ამოცანებში, მოძებნეთ $z\in\mathbb{R}_n$ წერტილის $P_M(z)$ პროექცია შემდეგი სახის სიმრავლეზე:

#121. n-განზომილებიანი სივრცის არაუარყოფით ოქტანტზე:

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}_n \,\middle|\, x^i\geq 0,\quad i=1,\dots,n\right\}$$

#122. n-განზომილებიან პარალელეპიპედზე:

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}_n \,\middle|\, a_i\leq x^i\leq b_i,\quad i=1,\dots,n\right\};$$

#123. ჩაკეტილ r რადიუსიან ბირთვზე ცენტრით x_0 -ში:

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}_n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\left(x^i-x_0^i\right)^2\leq r^2\right\}.$$

#124. ნახევარსივრცეზე:

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}_n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}a^ix^i\geq b,\ a=\left(a^1,\dots,a^n\right)\neq 0\right\}$$

ამოცანებში #125 – #128, გამოიყენეთ წინა ამოცანების პასუხები და გრადიენტის პროექციის მეთოდით ამოხსენით მინიმიზაციის ამოცანები:

#125. $x^2+4y^2+3xy+2x+16y\to\min, \quad x\geq 0,\ y\geq 0.$

#126. $x^2+9y^2-12x-3616y\to\min, \quad -1\leq x\leq 4,\ 1\leq y\leq 2.$

#127. $2x+y\to\min, \quad (x-4)^2+(y-2)^2\leq 1.$

#128. $f(x,y)=x^2+4xy+17y^2+5y\to\min, \quad (x,y)\in\mathbb{R}_2.$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М.Тихомиров. Сборник задач по оптимизации. Москва, Наука, 1984.
2. Э. Маленво. Лекции по микроэкономическому анализу. Москва, Наука, 1985.
3. G.V. Reklaitis, A. Ravindran and K.M. Regsdell. Engineering optimization, Wiley, New York , 1983.
4. А.Б. Горстко, Ю.А. Домбровский, С.В. Жак. Методы оптимизации. Методические указания. Москва, МГУ, 1981.
5. ა. გაგნიძე, კ. გელაშვილი. ოპტიმიზაციის მეთოდები და თამაშთა თეორია. თბილისი, 2002.
6. Сборник задач по математике. Под редакцией А.В. Ефимова. Москва, Наука, 1990.
7. Ф.П. Васильев. Численные методы решения экстремальных задач. Москва, Наука, 1980.
8. Д.В. Кирьянов. MathCad 13 в подлиннике. СПб.: БХВ, 2005.
9. M. Minoux. Mathematical Programming: theory and algorithms. Wiley, New York, 1986.

პასუხები

#1. $f(x)=\sin(x)$

#2. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

#3. $f(x)=arctg(x)$

#4. $f(x)=arctg(x)^3$

#5. $f(x)=\sin(x)arctg(x)$

#6. $f(x)=x^2-y^2+2e^{-x^2}$

#7. $f(x)=\sin(y)-x^2$

#8. $\begin{cases} x^2+x+1\to\max, \\ -1\le x\le 1000. \end{cases}$

#9. $\begin{cases} xy-x^2+y^2+5y\to\min, \\ (x+1)^2+(y-1)^2=1. \end{cases}$

#10. $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\to\min, \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

#11. $\begin{cases} (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2\to\min, \\ x_i^2+y_i^2=1,\quad i=1,2,3. \end{cases}$

#12. $\begin{cases} \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(v-y_2)^2}+\sqrt{(x-x_3)^2\div(y-y_3)^2}\to\min, \\ (x_i,y_i)=1,\quad i=1,2,3,\ \text{მოცემული წერტილებია.} \end{cases}$

#13. $\begin{cases} xy\to\max, \\ x^2+y^2=1, \\ x\ge 0,\ y\ge 0. \end{cases}$

#14. $\begin{cases} xy(x-y) \to \max, \\ x+y=8. \end{cases}$

#15. $\begin{cases} xy \to \max, \\ x+y=const, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$

#16. $\begin{cases} xy \to \max, \\ x+y=\dfrac{l}{2}, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$

#18. $\mathrm{gl}\min=\varnothing, \mathrm{gl}\max=\varnothing.$

#19. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing.$

#20. $\mathrm{gl}\min=\varnothing, \mathrm{gl}\max=\varnothing.$

#21. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing.$

#22. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing.$

#23. $\mathrm{gl}\max \neq \varnothing.$

#24. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing, \mathrm{gl}\max \neq \varnothing.$

#25. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing, \mathrm{gl}\max \neq \varnothing.$

#26. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing.$

#27. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing.$

#28. $\mathrm{gl}\min \neq \varnothing.$

#29. ყველგან არსებობს ამონახსნი.

#30. $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x \in (-10,0), \\ \dfrac{1}{1+x^2} & x \in [0,+\infty). \end{cases} \qquad M=(-10,+\infty).$

#32. $K=\varnothing.$

#33. $0 \in \mathrm{loc\,min}, -12 \in \mathrm{loc\,max}$.

#34. $1 \in \mathrm{loc\,min}, \frac{1}{3} \in \mathrm{loc\,max}$.

#35. $\frac{1}{2} \in \mathrm{loc\,min} = \mathrm{gl\,min}$.

#36. $\frac{2+\sqrt{29}}{25} \in \mathrm{loc\,min}, \frac{2-\sqrt{29}}{25} \in \mathrm{loc\,min}$.

#37. $\frac{2}{3} \in \mathrm{loc\,min} = \mathrm{gl\,min}$.

#38. $\frac{1}{4} \in \mathrm{loc\,max} = \mathrm{gl\,max}$.

#39. $\frac{5}{2} \in \mathrm{loc\,min}, -\frac{1}{2} \in \mathrm{loc\,max}$.

#40. $\frac{1+\sqrt{10}}{3} \in \mathrm{loc\,min}, \frac{1-\sqrt{10}}{3} \in \mathrm{loc\,max}$.

#41. $4 \in \mathrm{loc\,min}, 0 \in \mathrm{loc\,max}$.

#42. $\frac{16}{5} \in \mathrm{loc\,min}, 2 \in \mathrm{loc\,max}$.

#43. $\frac{1}{4} \in \mathrm{loc\,min} = \mathrm{gl\,min}$.

#44. $1 \in \mathrm{loc\,min}, \frac{1}{3} \in \mathrm{loc\,max}$.

#45. $0; 1 \in \mathrm{loc\,min}, \frac{1}{3}; 5 \in \mathrm{loc\,max}$.

#46. $-1; 1 \in \mathrm{loc\,min}, -\tfrac{1}{2} \in \mathrm{loc\,max}$.

#47. $\hat{x} = 1.6030, f(\hat{x}) = -2.1376$.

#48. $\hat{x} = -0.7549, f(\hat{x}) = -3.6347$.

#49. $\hat{x} = 0.3684, f(\hat{x}) = 2.4154.$

#50. $2\ln\dfrac{2\varepsilon}{b-a}(\ln\dfrac{1}{2})^{-1}.$

#51. $b = 2.5.$

#52. $a = -4.$

#53. $c = 2.5.$

#57. $\hat{x} = -0.6823, f(\hat{x}) = -0.5814.$

#58. $\hat{x} = -2.3247, f(\hat{x}) = -7.7290.$

#59. $\hat{x} = -2.2340, f(\hat{x}) = 61.1806.$

#62. $f(\hat{x}) \approx 1.393 \cdot 10^{-3}.$

#63. $f(\hat{x}) \approx 1.152 \cdot 10^{-2}.$

#68. $(20, 46) \in \text{loc}\min.$

#69. $(-16, -26) \in K.$

#70. $(0, 0) \in \text{loc}\min.$

#71. $(1, 1) \in \text{loc}\min.$

#72. $(1, -4, 2) \in \text{loc}\min, (-1, -4, 2) \in K.$

#73. $(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 0) \in \text{loc}\min, (0, 0, 0) \in K.$

#74. $(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1) \in \text{loc}\min.$

#75. $(\dfrac{25}{3}, \dfrac{125}{3}) \in \text{loc}\min, (0, 0) \in K.$

#76. $(1, 1) \in \text{loc}\min.$

#77. $(5, 2) \in \text{loc}\min.$

#78. $(2, 3) \in \text{loc}\min.$

#79. $(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 0) \in \text{loc}\min.$

#80. $(1,1)\in \operatorname{loc}\min, (0,0)\in K$.

#81. $(0,0)\in \operatorname{loc}\min, (-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})\in K$.

#82. $(0,0)\in \operatorname{loc}\min, (\frac{8}{27},-\frac{2}{3})\in \operatorname{loc}\max$.

#83. $(-\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{1}{\sqrt{17}})\in \operatorname{gl}\min, (\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}})\in \operatorname{gl}\max$.

#84. $(\frac{4}{25},\frac{3}{25})\in \operatorname{gl}\min$.

#85. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in \operatorname{loc}\max$.

#86. $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})\in \operatorname{gl}\min$.

#87. არ აქვს ამონახსნი.

#88. $(0,\pm 1),(\pm 1,0)\in \operatorname{gl}\min, (\pm 2^{-1/4},\pm 2^{-1/4}),(\pm 2^{-1/4},\mp 2^{-1/4})\in \operatorname{gl}\max$.

#89. $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\in \operatorname{gl}\min,$

$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\in \operatorname{gl}\max$.

უდიდესი ფართობი აქვს კვადრატს.

#90. უმცირესი (უდიდესი) საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას.

#91. $(4+\frac{4}{\sqrt{3}},4-\frac{4}{\sqrt{3}})\in \operatorname{gl}\max$.

#92. წესიერი სამკუთხედი.

#93. თუ მოცემული წერტილებია x_1, x_2, x_3,

მაშინ ამონახსნია $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

#94. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in gl\min.$

#95. $(5,-5),(-5,5)\in gl\min.$

#96. $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\in gl\min.$

#97. $(0,0)\in gl\min,\quad (0,\pm1),(\pm1,0)\in gl\max.$

#98. $(0,0)\in gl\min,\quad (0,\pm1),(\pm1,0)\in gl\max.$

#99. $(0,0)\in gl\min,\quad \left(\pm2^{-\frac{1}{6}},\pm2^{-\frac{1}{6}}\right)\in gl\max.$

#100. $(0,0,0)\in gl\min,\quad \left(\pm3^{-\frac{1}{4}},\pm3^{-\frac{1}{4}},\pm3^{-\frac{1}{4}}\right)\in gl\max.$

#101. $(0,0,0)\in gl\min,\quad (\pm1,0,0),(0,\pm1,0)\,(0,0,\pm1),\in gl\max.$

#102. $(0,0,0)\in gl\min,\quad (\pm1,0,0),(0,\pm1,0)\,(0,0,\pm1),\in gl\max.$

#103. $\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\in gl\min,$

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\in gl\max$

#105. წრფივი ფუნქცია.

#111. ამოზნექილია ა), ბ), დ), ე).

#113. ა) $x_1=(0.0611;-0.1389)\quad f(x_1)<f(x_0)$

ბ) $x_1=(-1.4881;-2.0187)\quad f(x_1)=f(x_0)$

გ) $x_1=(-3.6945;-4.6983)\quad f(x_1)>f(x_0)$

#114. ა) $x_1=(-0.1;-0.1)\quad f(x_1)<f(x_0)$

ბ) $x_1=(-0.5;0.5)\quad f(x_1)=f(x_0)$

გ) $x_1=(-1;-1)\quad f(x_1)>f(x_0)$

#115. ა) $x_1 = (-0.1437; 0.4; 0.4) \quad f(x_1) < f(x_0)$

ბ) $x_1 = (-1.4323; -0.2761; -0.2761) \quad f(x_1) = f(x_0)$

გ) $x_1 = (-10.4366; -5; -5) \quad f(x_1) > f(x_0)$

#116. $a_0 = 0.25$

#117. $a_0 = 0.236$

#118. $\hat{x} = (2.55; -0.85), f(\hat{x}) = -21.675.$

#119. $\hat{x} = (-0.9677; -6.4516), f(\hat{x}) = -32.2581.$

#120. $\hat{x} = (0.5; 0), f(\hat{x}) = -0.25.$

#121. $P_M(z) = (\tilde{z}^1, \ldots, \tilde{z}^n)$, სადაც $\tilde{z}^j = \max\{0, z^j\}$, $j = 1, \ldots, n.$

#122. $P_M(z) = (\tilde{z}^1, \ldots, \tilde{z}^n)$, სადაც $\tilde{z}^j = \begin{cases} a_j, \text{ თუ } & z^j < a_j, \\ b_j, \text{ თუ } & z^j > b_j, \\ z_j, \text{ თუ } & a_j \le z^j \le b_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n.$

#123. $P_M(z) = \begin{cases} z, \text{ თუ } & z \in M, \\ x_0 + \dfrac{r(z - x_0)}{\|z - x_0\|}, \text{ თუ } & z \notin M. \end{cases}$

#124. $P_M(z) = z + \max\{0, b - az^T\} \dfrac{a}{\|a\|}.$

გამომცემლობის რედაქტორი მაია ეჯიბია
გარეკანი თინათინ ჩირინაშვილი
კომპ. უზრუნველყოფა ლალი კურდღელაშვილი

0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14

0128, Tbilisi, 14, I. Chavchavadze Av.
www.press.tsu.ge (25-14-32)