თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
—189

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

თბილისი 1977

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского университета
Tbilisi University Press

Труды Тбилисского университета

Proceedings of Tbilisi University

189

МАТЕМАТИКА * МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ

MATHEMATICS * MECHANICS ASTRONOMY

Тбилиси 1977 TBILISI

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

189

მათემატიკა
მექანიკა
ასტრონომია

თბილისი 1977

ტომის სარედაქციო კოლეგია

ნ.ვახანია, გ.ლომაძე, ლ.მაღნარაძე, ნ.მაღნარაძე, ლ.ჟიჟიაშვილი, ა. ხარაძე, ჯ.შარიქაძე (რედაქტორი).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ТОМА

Н.В.Вахания, Г.А.Ломадзе, Л.Г.Магнарадзе, Н.Г.Магнарадзе, Л.В.Жижиашвили, А.К. Харадзе, Д.В.Шарикадзе (редактор).

EDITORIAL BOARD OF VOLUM

N.Vakhania, A.Kharadze, G.Lomadze, L.Magnaradze, N.Magnaradze, L.Zhi zhiashvili, D.Sharikadze (editor).

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

189, 1977

НЕКОТОРЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

П.Г.Когония

В работе рассмотрены неопределенные уравнения, связанные с алгоритмом непрерывных дробей, и установлены некоторые достаточные условия разрешимости и неразрешимости этих уравнений.

Пусть $\alpha \in (0,1)$ - любое иррациональное число, а

$$\alpha = [0; x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots] \qquad (I)$$

- его разложение в арифметическую непрерывную дробь.

Как известно, для знаменателей $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_n$ подходящих дробей $\frac{p_n}{q_n}$ числа (I) верны соотношения:

$$q_1(x_1) = q_1 = x_1, \; q_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 1, \; q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2} \; (n \geq 3). \qquad (2)$$

Известно [I], что q_n, как многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеет следующее выражение:

$$q_n = \sum_{k=0}^{n/2} \sum_{\substack{i_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ i_s \not\equiv i_{s+1} (\mathrm{mod}\, 2)}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-2k}}. \qquad (3)$$

Для числа $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, \ldots, 1, \ldots] \; (x_k = 1, k \in N)$, в силу (2), имеем

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 2, \quad q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 3). \qquad (2_I)$$

Таким образом, для этого числа последовательность $\{q_n\}$ совпадает, начиная с $n \geq 1$, с т.н. рядом Фибоначчи $\{V_n\}$, определяемым равенствами

$$V_0 = V_1 = 1, \quad V_n = V_{n-1} + V_{n-2} \quad (n \geq 2), \tag{4}$$

т.е. с последовательностью

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots, \tag{4$_1$}$$

$$q_n(1,1,\ldots,1,1) = V_n \quad (n \geq 1). \tag{5}$$

$q_1(x_1)$ и $q_2(x_1,x_2)$ определяются равенствами (2), а для следующих четырех последовательных значений n, в силу (3), имеем:

$$\begin{gathered}
q_3 = x_1x_2x_3 + x_1 + x_3; \quad q_4 = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_3x_4 + 1; \\
q_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_5 + x_1x_4x_5 + x_3x_4x_5 + x_1 + x_3 + x_5; \\
q_6 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 + \\
+ x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_6 + x_3x_4 + x_3x_6 + x_5x_6 + 1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Пусть m и n - любые фиксированные натуральные числа. Рассмотрим неопределенное уравнение

$$q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m, \tag{7}$$

о котором говорится в начале работы.

Из (3) и (5) непосредственно следует, что уравнение (7) неразрешимо при $m < V_n$, и имеет единственное решение (1,1, ..., 1,1), при $m = V_n$

Легко установить, что многочлен $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражаемый формулой (3), инвариантен относительно подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & n-k+1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(нетрудно показать, что эта подстановка, вместе с единичной подстановкой, образует группу инвариантов многочлена $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$), т.е. верно следующее тождество:

$$q_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = q_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1). \tag{8}$$

Очевидно, что число членов многочлена $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равно V_n — n-ому члену ряда Фибоначчи:

$$q_n(1,1,\dots,1,1) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{\substack{i_1 \equiv 1 \pmod 2 \\ i_s \not\equiv i_{s+1} \pmod 2}} 1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{k}{n-k} = V_n. \tag{9}$$

Обозначим через $t_n(k)$ $(n \in N,\ 1 \le k \le n)$ число членов многочлена $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, содержащих x_k в качестве множителя; в силу тождества (8), верно равенство

$$t_n(k) = t_n(n-k+1) \quad (1 \le k \le n). \tag{I0}$$

<u>ЛЕММА I</u>. Для любого $n \in N$ и k, $1 \le k \le n$ справедливо равенство

$$t_n(k) = V_{k-1} \cdot V_{n-k}. \tag{II}$$

<u>Доказательство</u>. Для n = I,2 справедливость равенства (II) проверяется непосредственно; из (2), (4) и (9) следуют равенства

$$t_n(n) = V_{n-1} = V_0 V_{n-1} = V_{n-1} V_{n-n}, \quad t_n(n-1) = V_{n-2} = V_{n-2} V_1 = V_{n-2} V_{n-(n-1)},$$

которые означают справедливость равенства (II) при $k = n-1, n$

для любого $n \geq 2$. Остается доказать справедливость этого равенства при $k = 1,2,\ldots,n-2$ для любого $n > 2$

Пусть равенство (II) верно для $n-1$ и n :

$$t_{n-1}(k)=V_{k-1}V_{n-1-k}, \quad t_n(k)=V_{k-1}V_{n-k}. \tag{II$_\mathrm{I}$}$$

В силу (2) имеем $q_{n+1}=x_{n+1}q_n+q_{n-1}$. Из этого равенства следует, что число членов многочлена q_{n+1} , содержащих $x_k\ (k<n-1)$ в качестве множителя, равно сумме чисел членов многочленов q_{n-1} , q_n , содержащих x_k в качестве множителя. Отсюда, в силу (4) и (II$_\mathrm{I}$), следует

$$t_{n+1}(k)=t_n(k)+t_{n-1}(k)=V_{k-1}V_{n-k}+V_{k-1}V_{n-k-1}=V_{k-1}(V_{n-k}+V_{n-k-1})= \\ =V_{k-1}V_{n+1-k},$$

что означает справедливость равенства (II) для $n+1$. Лемма доказана.

<u>ЛЕММА 2</u>. Для любого $n \geq 2$ справедливо равенство

$$\min_{1\leq k\leq n} t_n(k)=\min_{1\leq k\leq n} V_{k-1}V_{n-k}=t_n(2)=V_1V_{n-2}=V_{n-2}. \tag{I2}$$

<u>Доказательство</u>. Для $n = 2,3$ справедливость равенства (I2) проверяется непосредственно. Пусть (I2) верно для любого фиксированного $m \geq 2$ для всех чисел $2,3,\ldots,m$, т.е.

$$V_{n-2}\leq V_{k-1}V_{n-k}, \quad 2\leq n\leq m, \quad 1\leq k\leq n$$

Тогда будем иметь:

$$V_{(m+1)-2}=V_{m-1}=V_{m-2}+V_{m-3}=V_{m-2}+V_{(m-1)-2}\leq V_{k-1}V_{m-k}+V_{k-1}V_{m-1-k}= \\ V_{k-1}(V_{m-k}+V_{m-1-k})=V_{k-1}V_{m+1-k}, \quad V_{(m+1)-2}\leq V_{k-1}V_{m+1-k};$$

последнее равенство означает справедливость равенства (I2) для $m+1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\max_{1\le k\le n} t_n(k) = \max_{1\le k\le n} V_{k-1}V_{n-k} = t_n(1) = V_0V_{n-1} = V_{n-1}. \tag{I3}$$

Доказательство. Для n = I,2,3 справедливость равенства (I3) проверяется непосредственно. Как и выше, имеем

$$V_{(m+1)-1} = V_m = V_{m-1} + V_{m-2} \geq V_{k-1}V_{m-k} + V_{k-1}V_{m-1-k} =$$
$$= V_{k-1}(V_{m-k} + V_{m-1-k}) = V_{k-1}V_{m+1-k}, \quad V_{(m+1)-1} \geq V_{k-1}V_{m+1-k}.$$

Последнее равенство означает справедливость (I3) для $m+1$. Лемма доказана.

Пусть $t_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ обозначает число членов многочлена $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, содержащих в качестве множителей $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$. В силу тождества (8), верно следующее равенство

$$t_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = t_n(n-k_1+1, n-k_2+1, \dots, n-k_r+1). \tag{I0$_I$}$$

Пусть далее, $N_n(m) = N(q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = m)$ обозначает число всех решений неопределенного уравнения (7) в целых положительных числах $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$N_n(m) = |\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in N^n / q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = m\}| \tag{I4}$$

($|E|$ - число элементов (мощность) множества E).

Так как значение символа $t_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ не зависит, по определению, от порядка аргументов, будем всюду предполагать, что они расположены по возрастанию. Для значений $k_r > n$ этот символ не определен, но целесообразно его доопределить, полагая $t_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = 0$ при $k_r > n$

Тогда очевидно, что

$$\tau_n(\kappa_1,\kappa_2,\ldots \kappa_r) \begin{cases} = 0 & \text{при } \kappa_r > n \\ \geqslant 0 & \text{при } \kappa_r \leq n \end{cases} \qquad (15)$$

Уравнение (7) при $n=1$, т.е. уравнение $q_1(x_1)=m,\ x_1=m$ тривиально; при $n=2$ имеем: $q_2(x_1,x_2)=m,\ x_1x_2+1=m$, откуда

$$N_2(m)=N(q_2=m)=N(x_1x_2+1=m)=N(x_1x_2=m-1)=\tau(m-1)$$
$$(m\geqslant 2).$$

Рассмотрим случай $n=3$, т.е. уравнение

$$q_3(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3+x_1+x_3=m. \qquad (7_{\mathrm{I}})$$

Пусть $\tau_{1,a}(\ell)$ обозначает число всех делителей числа ℓ, больших I и сравнимых с I по модулю a. Тогда верна

Теорема I. Для любого $m \geqslant V_3 = 3$ имеет место равенство

$$N_3(m)=\tau_{1,1}(m-1)+\tau_{1,2}(m-2)+\tau_{1,3}(m-3)+\ldots \qquad (16)$$

Доказательство. Из (7_{I}) непосредственно следует, что

$$N_3(m)=N(q_3=m)=N(x_1x_2x_3+x_1+x_3=m)=N(q_3(x_1,x_2,1)=m)+$$
$$+N(q_3(x_1,x_2,2)=m)+N(q_3(x_1,x_2,3)=m)+\ldots=N(x_1x_2+x_1=$$
$$=m-1)+N(2x_1x_2+x_1=m-2)+N(3x_1x_2+x_1=m-3)+\ldots=$$
$$=N(x_1(x_2+1)=m-1)+N(x_1(2x_2+1)=m-2)+N(x_1(3x_2+1)=$$
$$=m-3)+\ldots=\tau_{1,1}(m-1)+\tau_{1,2}(m-2)+\tau_{1,3}(m-3)+\ldots$$

Итак, в случае $n=3$ вопрос о разрешимости и числе решений уравнения (7) решается просто: для любого $m \geq V_3 = 3$ уравнение (7_I) разрешимо и число его решений выражается формулой (I6).

Рассмотрим выражение $V_{k-1} V_{n-k} (1 \le k \le n)$. Непосредственно видно (это следует также из равенств (I0) и (II)), что оно не изменяется при замене k на $n-k+1$; поэтому оно принимает все разные значения, когда k пробегает числа I,2, ..., $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, т.е. среди этих чисел все различные суть следующие:

$$V_0 V_{n-1}, V_1 V_{n-2}, V_2 V_{n-3}, \ldots, V_{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} V_{n-\left[\frac{n+1}{2}\right]}. \tag{I7}$$

В силу лемм I и 2, среди этих чисел минимальным является V_{n-2} , максимальным - V_{n-1} :

$$V_{n-2} \le V_{k-1} V_{n-k} \le V_{n-1} \qquad (1 \le k \le n). \tag{I8}$$

Приведем несколько первых членов ряда Фибоначчи:

$$\begin{aligned} &n = 0,\ I,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ I0,\ II,\ I2,\ I3,\ I4,\ \ldots \\ &V_n = I, I, 2, 3, 8, I3, 2I, 34,\ 55,\ 89,\ I44,\ 233,\ 377,\ 6I0,\ \ldots \end{aligned} \tag{I9}$$

Для n = II и I2 последовательность (I7) будет, соответственно:

89, 55, 68, 63, 65, 64 $(V_{n-2} = V_9 = 55,\ V_{n-1} = V_{10} = 89)$;

I44,89, II0,I02, I05,I04 $(V_{n-2} = V_{10} = 89,\ V_{n-1} = V_{11} = 144)$

Как было отмечено, многочлен $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает минимальное значение V_n при единственной системе (I,I, ..., I,I) значений переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$;

$$\underset{x_k\in N}{Min}\, q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=q_n(1,1,\dots,1,1)=V_n \quad (n\geq 1). \qquad (5_I)$$

Очевидно, что значение многочлена $q_n(x_1,x_2,\dots x_n)$ минимально возрастет, если принять, что $x_k=2, x_i=1$ при $i\neq k$. Для такой системы $(1,1,\dots,1,\overset{k}{2},1,\dots,1,1)$ значений переменных $x_1, x_2,\dots x_n$ имеем, в силу леммы I,

$$q_n(1,1,\dots,1,\overset{k}{2},1,\dots,1,1)=V_n-V_{k-1}V_{n-k}+2V_{k-1}V_{n-k}=V_n+V_{k-1}V_{n-k},$$

$$q_n(1,1,\dots,1,\overset{k}{2},1,\dots,1,1)=V_n+V_{k-1}V_{n-k} \qquad (1\leq k\leq n). \qquad (20)$$

Из (I8) и (20) следует, что

$$Min\, q_n(1,1,\dots,1,\overset{k}{2},1,\dots,1,1)=q_n(1,2,1,\dots,1,1)=V_n+V_{n-2},$$

$$Max\, q_n(1,1,\dots,1,\overset{k}{2},1,\dots,1,1)=q_n(2,1,\dots,1,1)=V_n+V_{n-1}=V_{n+1}. \qquad (2I)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $m\in[V_n, V_{n+1}]$, то уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда $m=V_n$ или

$$m=V_n+V_{k-1}V_{n-k}.$$

Доказательство. I) Если $m=V_n$, то уравнение (7) разрешимо в силу (5_I); если $m=V_n+V_{k-1}V_{n-k}$, то уравнение (7) разрешимо в силу (20). 2) Пусть $m\in[V_n, V_{n+1}]$ и не равно ни одному из этих чисел; пусть, далее $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ - любой набор аргументов, отличный от наборов (I, I, ..., I, I) и (I, I, ..., I, $\overset{k}{2}$, I, ..., I, I). Ввиду положительности всех коэффициентов многочлена $q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (все они равны I), последний является возрастающей функцией любого аргумента; поэтому, если

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq(1,1,\dots,1,1) \text{ и } (x_1,x_2,\dots,x_n)\neq(1,1,\dots,1,\overset{k}{2},1,\dots,1,1),$$

то

$$q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq q_n(1,1,\ldots,\overset{k_1}{2},\ldots,\overset{k_2}{2},\ldots,1,1), \tag{22_{I}}$$

или

$$q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq q_n(1,1,\ldots,\overset{k}{3},\ldots,1,1). \tag{22_2}$$

Но, в силу (4), (II) и (I8), имеем:

$$\begin{aligned} q_n(1,1,\ldots,\overset{k_1}{2},\ldots,\overset{k_2}{2},\ldots,1,1) &= V_n - (V_{k_1-1}V_{n-k_1} + V_{k_2-1}V_{n-k_2} - t_n(k_1,k_2)) + \\ &+ 2(V_{k_1-1}V_{n-k_1} - t_n(k_1,k_2)) + 2(V_{k_2-1}V_{n-k_2} - t_n(k_1,k_2)) + 4t_n(k_1,k_2) = \\ &= V_n + V_{k_1-1}V_{n-k_1} + V_{k_2-1}V_{n-k_2} + t_n(k_1,k_2) > V_n + 2V_{n-2} > \\ &> V_n + V_{n-3} + V_{n-2} = V_n + V_{n-1} = V_{n+1}, \end{aligned} \tag{23_{I}}$$

$$\begin{aligned} q_n(1,1,\ldots,\overset{k}{3},\ldots,1,1) &= V_n - V_{k-1}V_{n-k} + 3V_{k-1}V_{n-k} = \\ &= V_n + 2V_{k-1}V_{n-k} \geq V_n + 2V_{n-2} > V_n + V_{n-2} + V_{n-3} = \\ &= V_n + V_{n-1} = V_{n+1}. \end{aligned} \tag{23_2}$$

Из (22_{I})-(23_2) следует, что ни одно значение многочлена $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличное от значений (20), не содержится в интервале (V_n, V_{n+1}). Теорема доказана.

Таким образом, число чисел m в интервале (V_n, V_{n+1}), не представимых многочленом $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равно

$$V_{n-1} - \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Из (22_{I}) - (23_2) следует также, что интервал $(V_{n+1}, V_n + 2V_{n-2})$ не содержит значений многочлена q_n

<u>ТЕОРЕМА 3</u>. Неопределенное уравнение (7) разрешимо для любого $m \geq V_n$, принадлежащего следующим классам вычетов:

$$V_{k-1}V_{n-k}\,x + V_n \quad \left(x \geq 0,\ 1 \leq k \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

<u>Доказательство</u>. Пусть в многочлене $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ один какой-нибудь аргумент x принимает любое целое поло-

жительное значение, а все остальные равны I, т.е. $x_k \in N$, $x_i = 1$ при $i \neq k$. Тогда, в силу леммы I, имеем

$$g_n(1,1,\dots,x_k,\dots,1,1) = V_n - V_{k-1}V_{n-k} + V_{k-1}V_{n-k}x_k =$$
$$= V_{k-1}V_{n-k}(x_k - 1) + V_n.$$

Поступило 30.XII.1976

Кафедра высшей математики
инженерно-экономического
факультета ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

I. П.Г.Когония, Труды ТГУ, том 56, 1955, стр. I05-I20.

პ. კოღონია

ზოგიერთი განუზღვრელი განტოლება უწყვეტ წილადთა თეორიაში

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში დადგენილია უწყვეტ წილადთა ალგორითმთან დაკავშირებულ ზოგიერთ განუზღვრელ განტოლებათა ნატურალურ რიცხვებში ამოხსნადობის და ამოუხსნადობის რამდენიმე საკმარისი პირობა.

P.Kogonia

SOME INDETERMINATE EQUATIONS IN THE THEORY OF CONTINUOUS FRACTIONS

S u m m a r y

Several sufficient conditions are given for the solvability and unsolvability in integers of some indeterminate equations to the algorithm of continuous fractions.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

189, 1977

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Г.Тасоев

Необходимые обозначения, термины и понятия.

α - любое иррациональное число интервала (0,I), а

$$[0; x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots] -$$

его разложение в арифметическую непрерывную дробь;

$$\frac{p_n}{q_n} = [0; x_1, x_2, \ldots, x_n], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Известно, что

$$p_0 = 0,\ p_1 = 1,\ p_n = x_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{I}$$

$$q_0 = 1,\ q_1 = x_1,\ q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Другие необходимые сведения по теории конечных непрерывных дробей см. в [I].

V_n — n-ый член так называемого ряда Фибоначчи $\{V_n\}$, определяемого условиями:

$$V_0 = V_1 = 1, \quad V_n = V_{n-1} + V_{n-2} \qquad (n \geq 2), \tag{3}$$

то есть последовательности

$$\text{I, I, 2, 3, 5, 8, I3, 2I, \ldots}; \tag{3_I}$$

$\varphi(m)$ - функция Эйлера.

Определения. I) Разложение в непрерывную дробь

$\frac{a}{m} = [0; x_1, x_2, \ldots, x_k]$ назовем основным (неосновным), если $x_k \geqslant 2$ $(x_k = 1)$

2) Дробь $\frac{a}{m}$, $(a,m)=1$, $a<m$, назовем основной (неосновной), если в основном разложении

$$\frac{a}{m} = [0; x_1, x_2, \ldots, x_k] \tag{4}$$
$$x_1 \geqslant 2 \quad (x_1 = 1);$$

$L_m(a)$ – длина основного разложения основной дроби (4);

$\Psi_n(m)$ – число основных дробей (4), для которых $L_m(a) = n$.

§ I. Решение рекуррентного равенства (2), как известно [2], дается формулой

$$q_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{(j_1,\ldots,j_{n-2i})} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_{n-2i}}, \tag{5}$$

где внутренняя сумма распространяется на все перестановки $(j_1 j_2 \ldots j_{n-2i})$ из чисел I, 2, ..., n, удовлетворяющие условиям

$$j_1 = 1, \quad j_s \not\equiv j_{s+1} \pmod 2, \quad j_s < j_{s+i}.$$

В частности, для первых шести значений n имеем:

$$q_1(x_1) = x_1 \; ; \; q_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 1 \; ;$$
$$q_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_3 \; ;$$
$$q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4 + 1;$$
$$q_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_5 +$$
$$+ x_3 x_4 x_5 + x_1 x_4 x_5 + x_1 + x_3 + x_5 \; ; \tag{6}$$
$$q_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_6 +$$
$$+ x_1 x_2 x_5 x_6 + x_1 x_4 x_5 x_6 + x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 +$$
$$+ x_1 x_4 + x_1 x_6 + x_3 x_4 + x_3 x_6 + x_5 x_6 + 1$$

Наша задача (она предложена профессором П.Г.Когония) состоит в исследовании вопроса о разрешимости в целых положительных числах уравнения

$$q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m \qquad (7)$$

при произвольных фиксированных натуральных m и n.

Из (2), (3) и (5) следует, что число слагаемых в выражении (7) равно V_n. Отсюда, в силу (2), вытекает

$$q_n(1, 1, \ldots, 1) = V_n. \qquad (8)$$

Итак, уравнение (7) неразрешимо при $m < V_n$, и имеет единственное решение (I,I,...,I) при $m = V_n$. Поэтому ниже всюду будем предполагать, что

$$m > V_n. \qquad (9)$$

Легко проверить, что не при всяком $m > V_n$ уравнение (7) разрешимо. Так, например, никакой набор чисел ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$) не является решением уравнения (7) при $n = 6$, $m = 22$, хотя и $22 > V_6 = 13$.

Пусть уравнение (7) разрешимо; тогда, очевидно, m является знаменателем некоторой рациональной несократимой правильной дроби, для которой имеет место разложение

$$\frac{a}{m} = [0; x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Отсюда следует, что исследование разрешимости уравнения (7) сводится к исследованию вопроса о характере разложений всех чисел вида $\frac{a}{m}$ в непрерывную дробь, точнее о длинах конечных непрерывных дробей, в которые разлагаются все эти числа. Если для некоторой дроби $\frac{a}{m}$, $(a, m) = 1$, имеет место разложение

$$\frac{a}{m} = [0; b_1, b_2, \ldots, b_n], \qquad (10)$$

то, очевидно, одним из решений уравнения (7) является $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, и, наоборот, если $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ - некоторое решение уравнения (7), то существует число $a<m$, $(a,m)=1$, такое, что имеет место разложение (I0).

Таким образом, справедлива

<u>ЛЕММА I</u>. Уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда из $\varphi(m)$ чисел $\frac{a_i}{m}\ (i=1,2,\dots,\varphi(m))$ хотя бы одно разлагается в непрерывную дробь длины n.

<u>Замечание</u>. Так как при $b_k \geq 2$

$$[0; b_1, b_2, \dots, b_k] = [0; b_1, b_2, \dots, b_k - 1, 1],$$

то для разрешимости уравнения (7) достаточно существования хотя бы одной рациональной дроби, разложение которой в непрерывную дробь содержит $n-1$ элементов.

<u>ЛЕММА 2</u>. Для того чтобы дробь $\frac{a_i}{m}, (a_i, m)=1 \cdot (i=1,2,\dots,\varphi(m))$ была основной, необходимо и достаточно, чтобы $i \leq \frac{\varphi(m)}{2}$ (следовательно, число основных дробей для данного m равно $\frac{\varphi(m)}{2}$).

<u>Доказательство.</u> Очевидно, что $\varphi(m)\ (m>2)$ - четное число. Если $1 \leq a \leq m-1$, $(a,m)=1$, то и $(m-a, m)=1$. Поэтому все $\varphi(m)$ чисел приведенной системы наименьших положительных вычетов по модулю m

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\varphi(m)}$$

расположатся по росту следующим образом:

$$a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_{\varphi(m)/2}, m-a_{\varphi(m)/2}, \dots, m-a_j, \dots, m-a_2, m-a_1,$$

то есть сумма двух чисел этой последовательности, отстоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна m. Отсюда следует, что если дробь $\frac{a_i}{m} = [0; x_1, x_2, \dots, x_n]$ - основная, то

$$\frac{m-a_i}{m}=[0;1,x_1-1,x_2,\dots,x_n] \text{ и } i\le\frac{\varphi(m)}{2}.$$

Обратно, если $i\le\frac{\varphi(m)}{2}$, то $\frac{a_i}{m}\le\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x_1\ge 2$, то есть $\frac{a_i}{m}$ - основная дробь.

Таким образом, если $\frac{a}{m}=[0;1,x_1,x_2,\dots,x_n]$ имеет длину $n+1$, то $\frac{m-a}{m}=[0;x_1+1,x_2,\dots,x_n]$ имеет длину n.

В силу этого достаточно ограничиться изучением $\frac{\varphi(m)}{2}$ основных дробей

$$\frac{a_1}{m},\frac{a_2}{m},\dots,\frac{a_{\varphi(m)/2}}{m}. \tag{II}$$

<u>ЛЕММА 3</u>. Если основная дробь $\frac{a_i}{m}$ доставляет решение уравнения (7), то существует основная дробь $\frac{a_j}{m}$, для которой справедливо соотношение

$$a_i a_j\equiv(-1)^{n+1}\pmod m, \tag{I2}$$

причем

$$a_i,\ a_j\ge\sqrt{n}. \tag{I3}$$

<u>Доказательство</u>. Из формулы (5) непосредственно следует, что $q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=q_n(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$. Отсюда в свою очередь, следует, что если $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ - решение уравнения (7), то и $(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$ - решение того же уравнения. Но, как мы уже отмечали выше, $q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ есть знаменатель некоторой рациональной несократимой дроби

$$\frac{a_i}{m}=[0;x_1,x_2,\dots,x_n]; \tag{I4}$$

аналогично, $q_n(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$ является знаменателем несократимой дроби

$$\frac{a_j}{m}=[0;x_n,x_{n-1},\dots,x_1]. \tag{I5}$$

Обозначим через p_i, q_i и p_i', q_i' $(i=0,1,2,\ldots,n)$ соответственно числители и знаменатели подходящих дробей (I4) и (I5). (В силу (II), будем рассматривать только основные дроби). Тогда, как нетрудно доказать, $p_n' = q_{n-1}$. Далее, как известно [I], $a_i = p_n$, $m = q_n$, $a_j = p_n'$,

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n,$$

откуда

$$p_n p_n' \equiv (-1)^{n+1} \pmod{q_n}$$

Подставив значения p_n, p_n', q_n, придем к (I2).

В силу (4), в разложениях (I4) и (I5) $x_1 \geq 2$, $x_n \geq 2$. Поэтому из (I) и (8) следует, что

$$a_i = p_n \geq 2p_{n-1} + p_{n-2} \geq 2V_{n-2} + V_{n-3} = V_n.$$

Аналогично получается, что $a_j \geq V_n$. Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, следует, что если $a < V_n$, то, каково бы ни было $m > a$, максимальная длина разложения дроби $\frac{a}{m}$ не превосходит $n-1$.

Из равенств (2), (3) и (8) вытекает, что, если $m < V_n$, то, каково бы ни было $a < m$, максимальная длина разложения дроби $\frac{a}{m}$ не превосходит $n-1$.

Введем обозначение: $N_n(m) = N(q_n = m)$ – число решений уравнения (7).

<u>ЛЕММА 4.</u> $N_n(m) = \Psi_{n-2}(m) + 2\Psi_{n-1}(m) + \Psi_n(m)$ $(n>2)$ (I6)

<u>Доказательство</u>. Ввиду леммы I и замечания, решения уравнения (7) доставляют те и только те основные дроби из (II), для которых $L_m(a) = n-1, n$.

Пусть $\Psi_k^*(m)$ обозначает число неосновных дробей $\frac{a_i}{m}$, для которых $L^*_m(a)=k$. Тогда, в силу леммы I и замечания, имеем, что из неосновных дробей решения (7) будут доставлять те и только те, для которых $L^*_m(a)=n-1, n$.

Следовательно, число всех решений уравнения (7) равно

$$N_n(m)=\Psi_{n-1}(m)+\Psi_n(m)+\Psi^*_{n-1}(m)+\Psi^*_n(m).$$

Очевидно, что каждой основной дроби $\frac{a}{m}$ соответствует одна и только одна неосновная дробь $\frac{m-a}{m}$, и, наоборот. Поэтому

$$\Psi^*_{n-1}(m)=\Psi_{n-2}(m),\ \Psi^*_n(m)=\Psi_{n-1}(m).$$

Из этих и предыдущего равенств получаем (I6).

Объединяя результаты лемм I,2,3 и 4, приходим к следующему утверждению:

<u>Теорема I</u>. Уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда существует рациональное число $\frac{a}{m}, (a,m)=1, V_{n-2}\leq a\leq$ $\leq a_{\varphi(m)/2}$, разлагающееся в непрерывную дробь одной из следующих длин: $n-2$, $n-1$, n $(n>2)$. Число решений уравнения (7) равно

$$N_n(m)=\Psi_{n-2}(m)+2\cdot\Psi_{n-1}(m)+\Psi_n(m).$$

Итак, мы получили следующий алгоритм решения задачи (7) (при выполнении условия (9)):

I) отбор тех основных дробей $\frac{a_i}{m}$ из (II), которые удовлетворяют условиям (I2) и (I3);

2) нахождение разложений в непрерывную дробь всех отобранных основных дробей.

Тогда цепные дроби длины $n-2$, $n-1$ и n доставляют решения данного уравнения (если, конечно, они существуют).

Пример. Найти хотя бы одно решение уравнения

$$q_6(x, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 100.$$

Здесь $m = 100 > V_6 = 13$; пусть $a_i = 27$; тогда $a_j = 37$ и $27 \cdot 37 \equiv (-1)^{6+1} \pmod{100}$,

$$\frac{27}{100} = [0; 3, 1, 2, 2, 1, 2].$$

Ввиду вышесказанного, система (3,I,2,2,I,2) является решением рассматриваемого уравнения, в чем мы убеждаемся и непосредственной проверкой. Действительно, в силу (6), имеем:

$$q_6(3, I, 2, 2, I, 2,) = 24+I2+6+I2+8+I2+3+6+6+4+4+2+I = I00.$$

Очевидно, и система (2, I, 2, 2, I, 3) есть решение данного уравнения $(a_j = 37)$.

§ 2. Рассмотрим диофантовы уравнения (7) при $n = 4, 5$;

$$q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = m \; ; \qquad (7_I)$$

$$q_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = m. \qquad (7_2)$$

Ниже решается вопрос о разрешимости этих уравнений. Приведенные при этом доказательства конструктивны - в каждом случае рассматривается полная система классов вычетов по определенному модулю и для каждого такого класса строится соответствующее решение, проверяемое непосредственной подстановкой. Выбор того или иного модуля носит несколько случайный характер, хотя следует отметить, что не при всяком модуле, меньшем указанного в каждом из рассматриваемых случаев, можно добиться существенного упрощения.

Теорема 2. Уравнение (7_I) разрешимо при любом целом положительном $m \geq 5$, кроме $m = 6$.

Доказательство. Тот факт, что уравнение (7_I) неразрешимо при $m < 5$ следует из (9). Исходя из приведенного в конце §I алгоритма, легко показать, что число 6 не представимо многочленом q_4. Далее, заметим, что вид решений уравнения (7_I) зависит (при нашем способе доказательства) от класса вычетов по модулю 8. Имеем:

$$m = \begin{cases} q_4(1,1,t-1,1), & \text{если } m = 2t+1, \ t \geq 2; \\ q_4(1,1,2t+1,2), & \text{если } m = 8t+8, \ t \geq 0; \\ q_4(2,t,1,3), & \text{если } m = 8t+10, \ t \geq 1; \\ & q_4(1,2,2,3) = 10; \\ q_4(1,1,2t+2,2), & \text{если } m = 8t+12, \ t \geq 0; \\ q_4(1,1,t+1,4), & \text{если } m = 8t+14, \ t \geq 0. \end{cases}$$

Действительно, если $m = 8t+8$, то, в силу (6):

$$q_4(1,1,2t+1,2) = 2(2t+1)+1+2+2\cdot(2t+1)+1 = 8t+8.$$

Остальные случаи проверяются аналогично.

Теорема 3. Уравнение (7_2) разрешимо для любого $m \geq V_5 = 8$, кроме m = 9 и 10.

Доказательство. Неразрешимость уравнения (7_2) при $m < 8$ следует из (9). На основе упомянутого выше алгоритма легко показать, что числа 9 и 10 действительно не представимы многочленом q_5. Для остальных чисел m вид решения уравнения зависит от класса вычетов по модулю 10, которому принадлежит m.

В самом деле,

$$m=\begin{cases} q_5(2,t,1,1,2), & \text{если } m=10t+11,\ t\geq 1,\\ & q_5(1,1,1,2,1)=11;\\ q_5(1,1,2,2t-1,1), & \text{если } m=10t+2,\ t\geq 1;\\ q_5(2t,1,1,1,1), & \text{если } m=10t+3,\ t\geq 1;\\ q_5(1,1,2,2t,1), & \text{если } m=10t+7,\ t\geq 1;\\ q_5(2,1,1,2t,1), & \text{если } m=10t+8,\ t\geq 1;\\ q_5(2,2,t,1,1), & \text{если } m=10t+9,\ t\geq 1; \end{cases}$$

для остальных случаев имеем:

$$m=10t+10=\begin{cases} q_5\left(1,1,\frac{5t+3}{2},1,1\right), & \text{если } t\equiv 3,3 \pmod 4,\ t\geq 1;\\ q_5\left(1,1,\frac{5t+2}{4},3,1\right), & \text{если } t\equiv 2 \pmod 4,\ t\geq 2;\\ q_5\left(1,1,\frac{5t}{4},1,3\right), & \text{если } t\equiv 0 \pmod 4,\ t\geq 4; \end{cases}$$

$$m=10t+14=\begin{cases} q_5\left(2,\frac{t-1}{2},1,2,3\right), & \text{если } t\equiv 1,3 \pmod 4,\ t\geq 3;\\ q_5\left(1,1,\frac{5t+2}{4},1,3\right), & \text{если } t\equiv 2 \pmod 4,\ t\geq 2;\\ q_5\left(1,1,\frac{5t+4}{4},3,1\right), & \text{если } t\equiv 0 \pmod 4,\ t\geq 0;\\ q_5(1,1,1,3,1)=14; & \end{cases}$$

$$m=10t+5=\begin{cases} q_5\left(3,3,\frac{t-5}{5},1,4\right), & \text{если } t\equiv 0 \pmod 5,\ t\geq 5;\\ q_5\left(1,9,\frac{t-1}{5},4,1\right), & \text{если } t\equiv 1 \pmod 5,\ t\geq 6;\\ q_5\left(3,3,\frac{t-2}{5},4,1\right), & \text{если } t\equiv 2 \pmod 5,\ t\geq 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_5\left(3,3,\frac{t-3}{5},2,2\right), & \text{если } t\equiv 3 \pmod 5,\ t\geq 8; \\ q_5\left(5,\frac{2t-3}{5},1,1,2\right), & \text{если } t\equiv 4 \pmod 5,\ t\geq 4; \end{cases}$$

$$q_5(1,2,1,2,1)=15; \quad q_5(1,1,3,1,2)=25;$$

$$q_5(1,1,1,2,4)=35; \quad q_5(4,1,1,2,2)=55;$$

$$m=10t+16=\begin{cases} q_5\left(1,1,\frac{5t+3}{4},1,3\right), & \text{если } t\equiv 1 \pmod 4,\ t\geq 1; \\ q_5\left(1,1,\frac{t}{2},3,3\right), & \text{если } t\equiv 2,4 \pmod 4,\ t\geq 2; \\ q_5\left(1,3,\frac{5t+5}{4},1,1\right) & \text{если } t\equiv 3 \pmod 4,\ t\geq 3; \end{cases}$$

$$q_5(1,1,3,1,1)=16$$

Вопрос о числе решений уравнений (7_I) и (7_2) остается открытым.

Поступило 25.XII.1976

Кафедра высшей математики

ЛИТЕРАТУРА

I. А.Я.Хинчин, Цепные дроби. Изд-во физико-математической литры. М., 1956.

2. П.Г.Когония, Труды ТГУ, т.56, 1955, стр. 105-120.

ბ.ტასოევი

დიოფანტეს განტოლებათა ერთი კლასის ამოხსნის ერთი ხერხის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში მოცემულია დიოფანტეს განტოლებათა ერთი კლასის ამოხსნის ხერხი და მისი გამოყენებით გამოკვლეულია აღნიშნულ განტოლებათა ზოგიერთი კერძო სახე.

B.Tasoev

ON A CERTAIN WAY OF SOLVING ONE CLASS OF DIOPHANTINE EQUATIONS

S u m m a r y

The paper presents a way of solving one class of Diophantine equations and some particular kinds of these equations are studied with the help of the proposed technique.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

189, 1977

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ, II

Л.А.Сулаквелидзе

§ I. Настоящая работа является непосредственным продолжением предыдущей одноименной работы [5] и в ней сохраняются все прежние обозначения. В предлагаемой работе суммируется сингулярный ряд, соответствующий положительным квадратичным формам вида

$$F=F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz,\ (a,b,c,2d,2e,2f). \quad (\mathrm{I})$$

Для удобства ссылок, наряду с известными результатами, сформулированными в виде лемм в работе [5], будут применяться следующие:

<u>ЛЕММА I</u> (см., напр., [I], стр.II, лемма 2). Если $2 \nmid h$, то

$$S(h,2^r)=\begin{cases} 0 & \text{при } r=1, \\ (1+i^h)2^{\frac{r}{2}} & \text{при } 2/r, \\ e^{\frac{\pi i h}{4}}2^{\frac{1}{2}(r+1)} & \text{при } 2\nmid r,\ r>1. \end{cases}$$

<u>ЛЕММА 2</u> (см., напр., [9], стр.I6). Пусть Δ - определитель формы $F(x_1,\ldots,x_s)$, $(h,q)=1$. Тогда

$$|S(Fh,q)|<(2\Delta q)^{\frac{s}{2}}.$$

ЛЕММА 3 (см., напр., [1], стр. 177, форм. (20)). Пусть $q = p^{\nu}$, $p^{\lambda} \| h$. Тогда

$$c(h,q) = \sum_{g \bmod q}{}' e\left(\frac{hg}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < \nu - 1, \\ -p^{\nu-1} & \text{при } \lambda = \nu - 1, \\ p^{\nu-1}(p-1) & \text{при } \lambda \geq \nu - 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 4 (см., напр., [6], стр. 229, лемма 13). Пусть

$$\mathcal{L}(r,m) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{m}{u}\right) \frac{1}{u^r}$$

и ω – бесквадратное число. Тогда

$$\mathcal{L}(1,-1) = \frac{\pi}{4}, \quad \mathcal{L}(1,-2) = \frac{\pi}{2^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathcal{L}(1,-\omega) = \frac{\pi}{\omega^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \leq h \leq \frac{\omega}{4}} \left(\frac{h}{\omega}\right) \quad \text{при } \omega \equiv 1 \pmod 4, \ \omega > 1,$$

$$= \frac{\pi}{2\omega^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \leq h \leq \omega/2} \left(\frac{h}{\omega}\right) \quad \text{при } \omega \equiv 3 \pmod 4,$$

$$= \frac{\pi}{\omega^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{1 \leq h \leq \omega/16} \left(\frac{h}{\omega/2}\right) - \sum_{3\omega/16 < h \leq \frac{\omega}{4}} \left(\frac{h}{\omega/2}\right) \right\} \quad \text{при } \omega \equiv 2 \pmod 8, \ \omega > 2,$$

$$= \frac{\pi}{\omega^{\frac{1}{2}}} \sum_{\omega/16 < h \leq 3\omega/16} \left(\frac{h}{\omega/2}\right) \quad \text{при } \omega \equiv 6 \pmod 8.$$

ЛЕММА 5 (см., напр., [7], стр. 138, форм. (9)). При действительном σ и $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$ интеграл

$$A(w,r,M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e(-M\sigma)}{(r+\sigma)^{\frac{3}{2}} |r+\sigma|^{w}} \, d\sigma$$

сходится абсолютно. Функция $A(w,r,M)$ обладает следующими свойствами:

I) При $M \neq 0$ она продолжаема во всю w - плоскость;

2) $A(w,\tau,0)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$;

3)
$$A(0,\tau,M) = \begin{cases} 0 & \text{при } M \leq 0, \\ 2^{\frac{3}{2}}(2\pi)e\left(-\frac{3}{8}\right)M^{\frac{1}{2}}e(M\tau) & \text{при } M > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(\tau,w;F) = 1 + \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{q,H=-\infty \\ (q,H)=1}}^{+\infty}{}' \frac{i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn} q - 1)} S(-F'H\operatorname{sgn} q, |q|)}{|q|^{\frac{3}{2}}(q\tau+H)^{\frac{3}{2}}|q\tau+H|^{w}}, \tag{2}$$

где F - квадратичная форма (I), Δ - ее определитель; штрих при знаке суммы обозначает, что отсутствуют члены с $q=0$. Согласно лемме 2, функция $\Psi(\tau,w;F)$ регулярна при фиксированном τ и $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$.

ЛЕММА 6 ([8], стр.425). I) Пусть

$$A_q(M;F) = q^{-3} \sum_{h \bmod q}{}' e\left(\frac{-Mh}{q}\right) S(Fh,q). \tag{3}$$

Тогда при $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$

$$\Psi(\tau,w;F) = 1 + \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} A(w,\tau,M)\, V(M,w;F),$$

где

$$V(M,w;F) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q(M;F)\, q^{-w}.$$

2) Пусть

$$X_p(M,w;F) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{p^\lambda}(M;F)\, p^{-\lambda w}. \tag{4}$$

и

Тогда при $Re\,w > \frac{1}{2}$

$$V(M,w;F) = \prod_p X_p(M,w;F)$$

Из (4) и (3), согласно лемме 2, следует, что функция $X_p(M,w;F)$ регулярна в полуплоскости $Re\,w > -\frac{1}{2}$.

Согласно лемме 5, функция $A(w,\tau,M)$ аналитически продолжаема в полуплоскость $Re\,w > -\frac{1}{2}$ и там регулярна.

Раманатан [8] показал, что и функции $V(M,w;F)$ и $\Psi(\tau,w;F)$, регулярные при $Re\,w > \frac{1}{2}$, также аналитически продолжаемы в полуплоскость $Re\,w > -\frac{1}{2}$ и что

$$\Psi(\tau,0;F) = 1 + \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} A(0,\tau,M)\,V(M,0;F), \tag{5}$$

где

$$V(M,0;F) = \prod_p d_p(M;F), \quad d_p(M;F) = \lim_{\lambda\to\infty} K(p^{\lambda},M;F),$$

а $K(p^{\lambda},M;F)$ – число решений $(mod\,p^{\lambda})$ сравнения

$$F(x,y,z) \equiv M (mod\,p^{\lambda}),$$

деленное на $p^{2\lambda}$.

В работе [4] показано, что $X_p(M,0;F) = \lim_{\lambda\to\infty} K(p^{\lambda},M;F)$.

Таким образом,

$$V(M,0;F) = \prod_p X_p(M,0;F). \tag{6}$$

Отметим также, что аналитическое продолжение функции

$\Psi(\tau,\omega;F)$ построено и в работе А.Б.Воронецкого [2].

§ 2. В настоящем параграфе будут получены значения величин $A_{2\lambda}(M;F)$ и $A_{p\lambda}(M;F)$ $(p>2)$, определенных формулой (3), и с их помощью выведены формулы для нахождения значений $X_2(M,0;F)$ и $X_p(M,0;F)$ $(M\neq 0)$, определенных формулой (4).

Пусть F – заданная форма (I), Δ - ее определитель, p_{t+1} - любое заданное нечетное простое число, не делящее Δ. Согласно лемме 8 работы [5], положив в ней $\nu=4\Delta p_{t+1}$ и $\rho=1$, можно так подобрать квадратичную форму $F_0=a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2+$ $+2e_0xz+2f_0yz$ чтобы она была эквивалентна данной форме F и удовлетворяла условиям:

I) $(a_0, 2\Delta p_{t+1})=1$,

2) $e_0\equiv 0 \pmod{4\Delta p_{t+1}}$, $\tau_0\leq\mu_0+1$, $\tau_0\leq\varkappa_0$, $\tau_s\leq\mu_s$, $\tau_s\leq\varkappa_s$ $(s=1,\dots,t+1)$, где $\Delta=2^{\varkappa}p_1^{l_1}\cdots p_t^{l_t}$ $(l_1,\dots,l_t>0)$, $b_0=2^{\tau_0}p_1^{\tau_1}\cdots p_{t+1}^{\tau_{t+1}}\hat{b}$, $f_0=2^{\mu_0}p_1^{\mu_1}\cdots p_{t+1}^{\mu_{t+1}}\hat{f}$, $c_0=2^{\varkappa_0}p_1^{\varkappa_1}\cdots p_{t+1}^{\varkappa_{t+1}}\hat{c}$, $(\hat{b}\hat{f}\hat{c},\Delta p_{t+1})=1$.

Следовательно, согласно (3) настоящей работы и (4) работы [5], получаем

$$A_{2\lambda}(M;F)=A_{2\lambda}(M;F_0), \tag{7}$$

$$A_{p_s\lambda}(M;F)=A_{p_s\lambda}(M;F_0) \quad (s=1,\dots,t+1), \tag{8}$$

при этом форма F_0 зависит лишь от выбора числа p_{t+1}, не делящего Δ.

Введем обозначения:

$$R=(b_0,f_0,c_0),\quad D=\frac{\Delta}{R^2}.$$

I. Для нахождения значений $A_{2^\lambda}(M;F)$ рассмотрим в отдельности два случая: $\eta_0 < \mu_0+1$ и $\eta_0 = \mu_0+1$.

а) Пусть $\eta_0 < \mu_0+1$. Тогда, согласно (7) и (3) настоящей работы и лемме I3 работы [5], получим

$$A_{2^\lambda}(M;F)=2^{-3\lambda}\sum_{h \bmod 2^\lambda}{}' e\left(-\frac{Mh}{2^\lambda}\right)\prod_{k=1}^{3} S(a_k h, 2^\lambda),$$

где

$$a_1=a_0 b_0 D, \quad a_2=b_0, \quad a_3=a_0 \quad \text{и} \quad (a_1,a_2,a_3)=1, \tag{9}$$

ибо из $\Delta = a_0(b_0c_0-f_0^2)-e_0^2 b_0$ и $(a_0,\Delta)=1$ следует, что $(a_0,b_0)=1$. Поэтому положив

$$M=2^\alpha m\ (\alpha\geq 0, 2\nmid m), \quad a_0b_0D=2^{\gamma_1}b_1, \quad b_0=2^{\gamma_2}b_2, \quad a_0=2^{\gamma_3}b_3, \quad b=\text{О.Н.К}[b_1,b_2,b_3] \tag{I0}$$

(очевидно, что $\gamma_1\geq\gamma_2\geq\gamma_3=0$ и $(b_1,b_2,b_3)=1$), формулы (3.I0)-(3.24) работы [3] останутся в силе и в нашем случае.

в) Пусть теперь $\eta_0=\mu_0+1$. Тогда, согласно (7) и (3) настоящей работы и лемме I3 работы [5], получим

$$A_{2^\lambda}(M;F)=2^{-3\lambda}\varepsilon(\lambda)\sum_{h \bmod 2^\lambda}{}' e\left(-\frac{Mh}{2^\lambda}\right) S(a_0 h, 2^\lambda), \tag{II}$$

где $\varepsilon(\lambda)$ определено формулой (51) работы [5].

Введем новую переменную суммирования g, определенную с помощью равенства $h=2g+1$. Тогда, согласно леммам I и 3, из (II) получим:

I) если $\lambda=1$, то

$$A_{2^\lambda}(M;F)=0; \tag{I2}$$

2) если $2/\lambda$, то

$$A_{2^\lambda}(M;F)=2^{-3\lambda}\varepsilon(\lambda)\sum_{h \bmod 2^\lambda}{}' e\left(-\frac{Mh}{2^\lambda}\right)\left(1+i^{a_0 h}\right)2^{\frac{\lambda}{2}}=$$

$$=2^{-\frac{5}{2}\lambda}\varepsilon(\lambda)\left\{c(2^\alpha m,2^\lambda)+e\left(\frac{a_0}{4}-2^{\alpha-\lambda}m\right)\sum_{g=0}^{2^{\lambda-1}-1}e\left(\frac{a_0 g}{2}-2^{\alpha-\lambda+1}mg\right)\right\},$$

откуда

2 I) в случае, когда $2\le\lambda\le\eta_0$

$$A_{2^\lambda}(M;F)=\begin{cases} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} & \text{при } \lambda<\alpha+1,\\ -2^{\frac{\alpha-1}{2}} & \text{при } \lambda=\alpha+1,\\ 2^{\frac{\alpha}{2}}e\left(\frac{a_0-m}{4}\right) & \text{при } \lambda=\alpha+2,\\ 0 & \text{при } \lambda>\alpha+2, \end{cases} \tag{I3}$$

22) в случае, когда $\lambda>\eta_0$

$$A_{2^\lambda}(M;F)=\begin{cases} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\eta_0-1}\left(\frac{2}{a_0 D}\right)^{\eta_0} & \text{при } \lambda<\alpha+1,\\ -2^{-\frac{\alpha+3}{2}+\eta_0}\left(\frac{2}{a_0 D}\right)^{\eta_0} & \text{при } \lambda=\alpha+1,\\ 2^{-\frac{\alpha+4}{2}+\eta_0}\left(\frac{2}{a_0 D}\right)^{\eta_0}e\left(\frac{a_0-m}{4}\right) & \text{при } \lambda=\alpha+2,\\ 0 & \text{при } \lambda>\alpha+2; \end{cases} \tag{I4}$$

3) если $2\nmid\lambda$, то

$$A_{2^\lambda}(M;F)=2^{-\frac{5}{2}\lambda+\frac{1}{2}}\varepsilon(\lambda)e\left(\frac{a_0}{8}-2^{\alpha-\lambda}m\right)\sum_{g=0}^{2^{\lambda-1}-1}e\left(\frac{a_0 g}{4}-2^{\alpha-\lambda+1}mg\right),$$

откуда

31) в случае, когда $2 < \lambda \le \eta_0$

$$A_{2^\lambda}(M;F) = \begin{cases} 2^{\frac{\alpha+2}{2}} e\left(\frac{a_0-m}{8}\right) & \text{при } \lambda=\alpha+3,\ m\equiv a_0 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (15)$$

32) в случае, когда $\lambda > \eta_0$

$$A_{2^\lambda}(M;F) = \begin{cases} 2^{-\frac{\alpha+4}{2}+\eta_0}\left(\frac{2}{a_0 D}\right)^{\eta_0+1} e\left(\frac{a_0-m}{8}\right) & \text{при } \lambda=\alpha+3,\ m\equiv a_0 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (16)$$

II. Теперь переходим к нахождению значений $A_{p^\lambda}(M;F)$ при $p>2$.

Согласно (8) и (3) настоящей работы и лемме 13 работы [5], имеем

$$A_{p^\lambda}(M;F) = p^{-3\lambda} \sum_{h \bmod p^\lambda}{}' e\left(-\frac{Mh}{p^\lambda}\right) \prod_{k=1}^{3} S(a_k h, p^\lambda),$$

где, как и выше, p - любое из чисел $p_1, \dots, p_t$ при $p | \Delta$ и - число p_{t+1} при $p \nmid \Delta$, $a_1 = a_0 b_0 D$, $a_2 = b_0$, $a_3 = a_0$, $(a_1, a_2, a_3) = 1$. Заметим, что

$$a_1 a_2 a_3 = a_0^2 b_0^2 \frac{\Delta}{(b_0, f_0, c_0)^2} = \begin{cases} a_0^2 \hat{b}^2 \Delta & \text{при } \eta_0 < \mu_0 + 1, \\ 4 a_0^2 \hat{b}^2 \Delta & \text{при } \eta_0 = \mu_0 + 1, \end{cases} \quad (17)$$

ибо $(\hat{b}, \hat{f}, \hat{c}, \Delta) = 1$.

Теперь положим: $p^\beta \| M\ (\beta \ge 0)$, $p^{\bar{\ell}} \| \bar{a}$, $p^{\ell'} \| a'$, $p^{\underline{\ell}} \| \underline{a}$, $\ell = \bar{\ell} + \ell' + \underline{\ell}$,

где $\bar{a} = a_1 = a_0 b_0 D$, $a' = a_2 = b_0$, $\underline{a} = a_3 = a_0$ (очевидно, что $\bar{\ell} \ge \ell' \ge \underline{\ell} = 0$).

Следовательно, формулы (3.26)-(3.39) работы [3] останутся в силе и в нашем случае. При этом, отметим, что так как подбор формы F_0 и тем самым чисел a_0; b_0 и $\mathcal{D}$ зависит лишь от p_{t+1} ($p_{t+1} \nmid \Delta$), то участвующие в упомянутых формулах (3.26)-(3.39) числа $\bar{a}$, a', $\underline{a}$ остаются одними и теми же для всех p , делящих Δ , а для p, не делящих Δ , они могут изменяться.

В дальнейшем, ради сокращения, при $M \neq 0$, полагаем:

$$\chi_p = \chi_p(M, 0; F). \tag{18}$$

<u>ЛЕММА 7</u>. Пусть $F = ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$, $(a,b,c,2d,2e,2f)=1$, $F_0=a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2+2e_0xz+2f_0yz$ – квадратичная форма, эквивалентная F и удовлетворяющая условиям леммы 13 работы [5]*. Далее, пусть $a_1=a_0b_0\mathcal{D}$, $a_2=b_0$, $a_3=a_0$, $M=2^{\alpha}m$ $(\alpha\geq 0, 2\nmid m)$, $a_k=2^{\gamma_k}b_k$ $(k=1,2,3)$, $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, $(b_1,b_2,b_3)=1$.Тогда

I) если $\gamma_0 < \mu_0+1$, то

а) в случае, когда $2|\gamma_2$, $2|\gamma_1$,

$$\chi_2=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{4}}\right)2^{\frac{\alpha}{2}+1} \quad \text{при } 0\leq\alpha\leq\gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m\equiv b_3 \pmod 4;$$

$$=0 \quad \text{при } 0\leq\alpha\leq\gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m\equiv -b_3 \pmod 4 \text{ и при } 0\leq\alpha\leq\gamma_2-3,\ 2\nmid\alpha$$

$$\text{и при } \alpha=\gamma_2-1;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{2}}\right)2^{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{при } \alpha=\gamma_2-2;$$

---

* Согласно лемме 8 работы [5], такую форму F_0 всегда можно найти.

$$X_2=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{2}}\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}} \quad \text{при } \gamma_2\le\alpha\le\gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv b_3 \pmod 4;$$

$$=2^{\frac{\gamma_2}{2}} \quad \text{при } \alpha=\gamma_2\le\gamma_1-2,\ b_2\equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\alpha-\gamma_2)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}+\left(1-(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\cdot 2\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}}$$

$$\text{при } \gamma_2<\alpha\le\gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3-2m}{4}}\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}} \quad \text{при } \gamma_2<\alpha<\gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv b_3 \pmod 4;$$

$$=2^{\frac{\gamma_2}{2}} \quad \text{при } \gamma_2<\alpha=\gamma_1-1,\ b_2\equiv b_3 \pmod 4;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\alpha-\gamma_2-1)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1} \quad \text{при } \gamma_2<\alpha\le\gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}+2^{\frac{\gamma_2}{2}}\cdot 3+\left((-1)^{\frac{m-\sum b_k}{4}}-1\right)2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}$$

$$\text{при } \alpha\ge\gamma_1\ge\gamma_2+2,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv -b_3 \pmod 4,\ m\equiv\sum_{k=1}^{3}b_k \pmod 4;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}+\left(1-2^{-\frac{\alpha-\gamma_1}{2}-1}\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}}\cdot 3$$

$$\text{при } \alpha\ge\gamma_1\ge\gamma_2+2,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv -b_3 \pmod 4,\ m\equiv-\sum_{k=1}^{3}b_k \pmod 4;$$

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}+\left(1-2^{-\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}}\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}}\cdot 3$$

$$\text{при } \alpha\ge\gamma_1\ge\gamma_2+2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$=\left(2^{\frac{\alpha-\gamma_1}{2}+2}+(-1)^{\frac{m-\sum b_k}{4}}-1\right)2^{\gamma_1-\frac{\alpha}{2}-1}$$

при $\alpha \geq \gamma_1 = \gamma_2$, $2/\alpha$, $b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$, $m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4$;

$$X_2 = \left(2^{\frac{\alpha-\gamma_1}{2}+2} - 3\right) 2^{\gamma_1 - \frac{\alpha}{2} - 1}$$

при $\alpha \geq \gamma_1 = \gamma_2$, $2/\alpha$, $b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$, $m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4$;

$$= \left(2^{\frac{\alpha-\gamma_1+3}{2}} - 3\right) 2^{\gamma_1 - \frac{\alpha+1}{2}}$$ при $\alpha \geq \gamma_1 = \gamma_2$, $2 \nmid \alpha$, $b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{\left(1+(-1)^{\frac{b_1+b_3}{2}}\right) 2^{\frac{\alpha-\gamma_1}{2}+1} + (-1)^{\frac{m-\sum b_k}{4}} - (-1)^{\frac{b_1+b_3}{2}}\right\} 2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}$$

при $\alpha \geq \gamma_1 \geq \gamma_2$, $2/\alpha$, $b_2 \equiv b_3 \pmod 4$, $m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4$;

$$= \left\{\left(1+(-1)^{\frac{b_1+b_3}{2}}\right) 2^{\frac{\alpha-\gamma_1}{2}+1} - (-1)^{\frac{b_1+b_2}{2}} \cdot 3\right\} 2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}$$

при $\alpha \geq \gamma_1 \geq \gamma_2$, $2/\alpha$, $b_2 \equiv b_3 \pmod 4$, $m \equiv -\sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4$;

$$= \left\{\left(1+(-1)^{\frac{b_1+b_3}{2}}\right) 2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}} - (-1)^{\frac{b_1+b_3}{2}} \cdot 3\right\} 2^{-\frac{\alpha-\gamma+1}{2}}$$

при $\alpha \geq \gamma_1 \geq \gamma_2$, $2 \nmid \alpha$, $b_2 \equiv b_3 \pmod 4$;

в) в случае, когда $2/\gamma_2$, $2 \nmid \gamma_1$,

$X_2 = 2^{\frac{\gamma_2}{2}}$ при $\alpha = \gamma_2 = \gamma_1 - 1$ и при $\alpha = \gamma_2 < \gamma_1 - 1$, $b_2 \equiv -b_3 \pmod 4$

и при $\gamma_2 < \alpha = \gamma_1 - 1$, $b_2 \equiv b_3 \pmod 4$;

$= \left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{2}}\right) 2^{\frac{\gamma_2}{2}}$ при $\gamma_2 \leq \alpha < \gamma_1 - 1$, $2/\alpha$, $b_2 \equiv b_3 \pmod 4$;

$$X_2=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\alpha-\gamma_2)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}+\left(1-(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\cdot 2\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}}$$

при $\gamma_2<\alpha\le\gamma_1-1,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv-b_3 \pmod 4$;

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3-2m}{4}}\right)2^{\frac{\gamma_2}{2}}$$ при $\gamma_2<\alpha<\gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv b_3 \pmod 4$;

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\alpha-\gamma_2-1)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}$$ при $\gamma_2<\alpha<\gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv-b_3 \pmod 4$;

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}-(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\cdot 2^{-\frac{\alpha-\gamma+1}{2}}\cdot 3$$

при $\alpha\ge\gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv-b_3 \pmod 4$;

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}+\left((-1)^{\frac{m-b_1}{4}}-(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}$$

при $\alpha\ge\gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv-b_3 \pmod 4,\ m\equiv b_1 \pmod 4$;

$$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)2^{\frac{\gamma_2}{2}-1}-(-1)^{\frac{b_2+b_3}{4}}\cdot 2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}\cdot 3$$

при $\alpha\ge\gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv-b_3 \pmod 4,\ m\equiv-b_1 \pmod 4$;

$$=\left\{\left(1+(-1)^{\frac{2b_1+b_2+b_3}{4}}\right)2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}}-(-1)^{\frac{2b_1+b_2+b_3}{4}}\cdot 3\right\}\cdot 2^{-\frac{\alpha-\gamma+1}{2}}$$

при $\alpha\ge\gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_2\equiv b_3 \pmod 4$;

$$=\left\{\left(1+(-1)^{\frac{2b_1+b_2+b_3}{4}}\right)2^{\frac{\alpha-\gamma_1}{2}+1}-(-1)^{\frac{2b_1+b_2+b_3}{4}}\cdot 3\right\}2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}$$

при $\alpha\ge\gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2\equiv b_3 \pmod 4,\ m\equiv b_1 \pmod 4$;

$$X_2=\left\{\left(1+(-1)^{\frac{2b_1+b_2+b_3}{4}}\right)2^{\frac{\alpha-\gamma_1}{2}+1}+\left((-1)^{\frac{b_1+2b_3-m}{4}}-(-1)^{\frac{2b_1+b_2+b_3}{4}}\right)\right\}2^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}$$

при $\alpha\geq\gamma_1$, $2\nmid\alpha$, $b_2\equiv b_3 \pmod 4$, $m\equiv -b_1 \pmod 4$;

при $0\leq\alpha\leq\gamma_2-1$, X_2 принимает те же значения, что и в а);

с) в случае, когда $2\nmid\gamma_2$, $2|\gamma_1$,

$X_2=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{4}}\right)2^{\frac{\alpha}{2}+1}$ при $0\leq\alpha\leq\gamma_2-3$, $2|\alpha$, $m\equiv b_3 \pmod 4$;

$=0$ при $0\leq\alpha\leq\gamma_2-3$, $2|\alpha$, $m\equiv -b_3 \pmod 4$ и при

$0\leq\alpha\leq\gamma_2-3$, $2\nmid\alpha$ и при $\alpha=\gamma_2-2$;

$=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_2}{4}}\right)2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$ при $\gamma_2\leq\alpha<\gamma_1-2$, $2\nmid\alpha$, $m\equiv b_2 \pmod 4$

и при $\alpha=\gamma_1-1$, $b_1\equiv -b_3 \pmod 4$, $m\equiv b_2 \pmod 4$;

$=\left(1+(-1)^{\frac{b_2+2b_3-m}{4}}\right)2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$ при $\gamma_2\leq\alpha<\gamma_1-2$, $2\nmid\alpha$, $m\equiv -b_2 \pmod 4$

и при $\alpha=\gamma_1-1$, $b_1\equiv b_3 \pmod 4$, $m\equiv -b_2 \pmod 4$;

$=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{4}}\right)2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$ при $\gamma_2-1\leq\alpha<\gamma_1-2$, $2|\alpha$, $m\equiv b_3 \pmod 4$;

$=\left(1+(-1)^{\frac{2b_2+b_3-m}{4}}\right)2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$ при $\gamma_2-1\leq\alpha<\gamma_1-2$, $2|\alpha$, $m\equiv -b_3 \pmod 4$;

$=2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$ при $\gamma_2-1\leq\alpha=\gamma_1-2$ и при $\alpha=\gamma_1-1$, $b_1\equiv b_3 \pmod 4$,

$m\equiv b_2 \pmod 4$ и при $\alpha=\gamma_1-1$, $b_1\equiv -b_3 \pmod 4$, $m\equiv -b_2 \pmod 4$

и при $\alpha=\gamma_1$;

$$X_2=\left\{1+(-1)^{\frac{b_1+2b_2+b_3}{4}}\left(1-2^{-\frac{\alpha-\delta_1}{2}}\cdot 3\right)\right\}2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$ при $\alpha>\delta_1,\ 2|\alpha,\ b_1\equiv b_3 \pmod 4$;

$$=\left\{\left(1+(-1)^{\frac{b_1+b_3}{4}}\left(1-2^{-\frac{\alpha-\delta_1}{2}}\cdot 3\right)\right)\right\}2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$ при $\alpha>\delta_1,\ 2|\alpha,\ b_1\equiv -b_3 \pmod 4$;

$$=\left\{1+(-1)^{\frac{b_1+b_3}{4}}+\left((-1)^{\frac{m-b_2}{4}}-(-1)^{\frac{b_1+b_3}{4}}\right)2^{-\frac{\alpha-\delta_1+1}{2}}\right\}2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$

при $\alpha>\delta_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1\equiv -b_3 \pmod 4,\ m\equiv b_2 \pmod 4$;

$$=\left\{1+(-1)^{\frac{b_1+b_3}{4}}\left(1-2^{-\frac{\alpha-\delta_1+1}{2}}\cdot 3\right)\right\}2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$

при $\alpha>\delta_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1\equiv -b_3 \pmod 4,\ m\equiv -b_2 \pmod 4$;

$$=\left\{1+(-1)^{\frac{b_1+2b_2+b_3}{4}}+\left((-1)^{\frac{b_2+2b_3-m}{4}}-(-1)^{\frac{b_1+2b_2+b_3}{4}}\right)2^{-\frac{\alpha-\delta_1+1}{2}}\right\}2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$

при $\alpha>\delta_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1\equiv b_3 \pmod 4,\ m\equiv -b_2 \pmod 4$;

$$=\left\{1+(-1)^{\frac{b_1+2b_2+b_3}{4}}\left(1-2^{-\frac{\alpha-\delta+1}{2}}\cdot 3\right)\right\}2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$

при $\alpha>\delta_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1\equiv b_3 \pmod 4,\ m\equiv b_2 \pmod 4$;

д) в случае, когда $2\nmid\delta_2,\ 2\nmid\delta_1$,

$$X_2=\left(1+(-1)^{\frac{m-b_3}{4}}\right)2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$ при $\alpha=\delta_1-1,\ b_1\equiv -b_2 \pmod 4,\ m\equiv b_3 \pmod 4$;

$$=\left(1+(-1)^{\frac{2b_2+b_3-m}{4}}\right)2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$$ при $\alpha=\delta_1-1,\ b_1\equiv b_2 \pmod 4,\ m\equiv -b_3 \pmod 4$;

$=2^{\frac{\delta_2-1}{2}}$ при $\alpha=\delta_1-1,\ b_1\equiv b_2 \pmod 4,\ m\equiv b_3 \pmod 4$ и при

$\alpha = \gamma_1 - 1,\ b_1 \equiv -b_2 \pmod 4,\ m \equiv -b_3 \pmod 4$ и при $\alpha = \gamma_1$;

$$X_2 = \left\{1 + (-1)^{\frac{b_1+b_2+2b_3}{4}}\left(1 - 2^{-\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}} \cdot 3\right)\right\} 2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$$

при $\alpha > \gamma_1,\ 2/\alpha,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4,\ m \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{1 + (-1)^{\frac{b_1+b_2+2b_3}{4}} + \left((-1)^{\frac{2b_2+b_3-m}{4}} - (-1)^{\frac{b_1+b_2+2b_3}{4}}\right) 2^{-\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}}\right\} 2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$$

при $\alpha > \gamma_1,\ 2/\alpha,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4,\ m \equiv -b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{1 + (-1)^{\frac{b_1+b_2}{4}} + \left((-1)^{\frac{m-b_3}{4}} - (-1)^{\frac{b_1+b_2}{4}}\right) 2^{\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}}\right\} 2^{\frac{\gamma_2-1}{2}}$$

при $\alpha > \gamma_1,\ 2/\alpha,\ b_1 \equiv -b_2 \pmod 4,\ m \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{1 + (-1)^{\frac{b_1+b_2}{4}}\left(1 - 2^{-\frac{\alpha-\gamma_1+1}{2}} \cdot 3\right)\right\} 2^{\frac{\gamma_2-1}{2}} \quad \text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2/\alpha,\ b_1 \equiv -b_2 \pmod 4,\ m \equiv -b_3 \pmod 4;$$

$$= \left\{1 + (-1)^{\frac{b_1+b_2+2b_3}{4}}\left(1 - 2^{-\frac{\alpha-\gamma_1}{2}} \cdot 3\right)\right\} 2^{\frac{\gamma_2-1}{2}} \quad \text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2 \nmid \alpha,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4;$$

$$= \left\{1 + (-1)^{\frac{b_1+b_2}{4}}\left(1 - 2^{-\frac{\alpha-\gamma_1}{2}} \cdot 3\right)\right\} 2^{\frac{\gamma_2-1}{2}} \quad \text{при } \alpha > \gamma_1,\ 2 \nmid \alpha,\ b_1 \equiv -b_2 \pmod 4;$$

при $0 \le \alpha \le \gamma_2 - 2$ и при $\gamma_2 - 1 \le \alpha \le \gamma_1 - 2$ X_2 принимает те же значения, что и в с).

2) если $\gamma_0 = \mu_0 + 1$, то,

21) в случае, когда $2/\gamma_0$,

$$X_2 = \left(1 + (-1)^{\frac{m-a_0}{4}}\right) 2^{\frac{\alpha}{2}+1} \quad \text{при } 0 \le \alpha \le \gamma_0 - 3,\ 2/\alpha,\ m \equiv a_0 \pmod 4;$$

$$= 0 \quad \text{при } 0 \le \alpha \le \gamma_0 - 2,\ 2/\alpha,\ m \equiv -a_0 \pmod 4$$

и при $0\le\alpha\le\eta_0-1,\ 2\nmid\alpha;$

$$X_2=2^{\frac{\alpha}{2}}\left((-1)^{\frac{m-a_0}{4}}\left(\frac{2}{a_0D}\right)+2\right)$$ при $\alpha=\eta_0-2,\ m\equiv a_0\pmod 4;$

$$=2^{\frac{\eta_0}{2}-2}\left\{6+2^{-\frac{\alpha-\eta_0}{2}}\left(\left(\frac{2}{a_0D}\right)(-1)^{\frac{m-a_0}{4}}-1\right)\right\}$$

при $\alpha\ge\eta_0,\ 2|\alpha,\ m\equiv a_0\pmod 4;$

$$=3\cdot 2^{\frac{\eta_0}{2}-1}\left(1-2^{-\frac{\alpha-\eta_0}{2}-1}\right)$$ при $\alpha\ge\eta_0,\ 2|\alpha,\ m\equiv -a_0\pmod 4;$

$$=3\cdot 2^{\frac{\eta_0}{2}-1}\left(1-2^{-\frac{\alpha-\eta_0+1}{2}}\right)$$ при $\alpha>\eta_0,\ 2\nmid\alpha;$

22) в случае, когда $2\nmid\eta_0$,

$$X_2=\left(1+(-1)^{\frac{m-a_0}{4}}\right)2^{\frac{\alpha}{2}+1}$$ при $0\le\alpha\le\eta_0-3,\ 2|\alpha,\ m\equiv a_0\pmod 4;$

$=0$ при $0\le\alpha\le\eta_0-3,\ 2|\alpha,\ m\equiv -a_0\pmod 4$

и при $0\le\alpha\le\eta_0-2,\ 2\nmid\alpha;$

$$=2^{\frac{\eta_0-3}{2}}\left\{2+\left(2-2^{-\frac{\alpha-\eta_0+1}{2}}\right)\left(\frac{2}{a_0D}\right)+2^{-\frac{\alpha-\eta_0+1}{2}}(-1)^{\frac{m-a_0}{4}}\right\}$$

при $\alpha\ge\eta_0-1,\ 2|\alpha,\ m\equiv a_0\pmod 4;$

$$=2^{\frac{\eta_0-3}{2}}\left\{2+\left(2-3\cdot 2^{-\frac{\alpha-\eta_0+1}{2}}\right)\left(\frac{2}{a_0D}\right)\right\}$$ при $\alpha\ge\eta_0-1,\ 2|\alpha,\ m\equiv -a_0\pmod 4;$

$$=2^{\frac{\eta_0-3}{2}}\left\{2+\left(2-3\cdot 2^{-\frac{\alpha-\eta_0}{2}}\right)\left(\frac{2}{a_0D}\right)\right\}$$ при $\alpha\ge\eta_0,\ 2\nmid\alpha.$

<u>Доказательство</u>. I) Пусть $\eta_0<\mu_0+1$. Так как в этом случае для значений $A_{2^\lambda}(M;F)$ справедливы формулы (3.10)-(3.24) из

работы [3], то для величины X_2, также будут иметь место формулы из леммы 8 работы [3] (стр.286-289).

21) Пусть $\tau_0 = \mu_0 + 1$ и $2 | \tau_0$. Тогда из (12)-(16) получим:

а) если $0 \le \alpha \le \tau_0 - 3$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2 \\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + 2^{\frac{\alpha}{2}} + 2^{\frac{\alpha}{2}+1}(-1)^{\frac{m-a_0}{4}} \qquad \text{при } 2|\alpha,\ m \equiv a_0 \pmod 4,$$

$$= 1 + \sum_{\substack{\lambda=2 \\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} - 2^{\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{при } 2|\alpha,\ m \equiv -a_0 \pmod 4,$$

$$= 1 + \sum_{\substack{\lambda=2 \\ 2|\lambda}}^{\alpha-1} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} - 2^{\frac{\alpha-1}{2}} \qquad \text{при } 2 \nmid \alpha;$$

в) если $\alpha = \tau_0 - 2$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2 \\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + 2^{\frac{\alpha}{2}} + 2^{-\frac{\alpha}{2}-2+\tau_0}\left(\frac{2}{a_0\mathcal{D}}\right)(-1)^{\frac{m-a_0}{4}} \qquad \text{при } m \equiv a_0 \pmod 4,$$

$$= 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} - 2^{\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{при } m \equiv -a_0 \pmod 4;$$

с) если $\alpha = \tau_0 - 1$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2 \\ 2|\lambda}}^{\alpha-1} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} - 2^{\frac{\alpha-1}{2}};$$

д) если $\alpha \ge \tau_0$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2 \\ 2|\lambda}}^{\tau_0} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + \sum_{\substack{\lambda=\tau_0+2 \\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\tau_0+1} + 2^{-\frac{\alpha}{2}+\tau_0-2} + 2^{-\frac{\alpha}{2}+\tau_0-2}\left(\frac{2}{a_0\mathcal{D}}\right)(-1)^{\frac{m-a_0}{4}}$$

при $2|\alpha$, $m \equiv a_0 \pmod 4$,

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\gamma_0} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_0+2\\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\gamma_0-1} - 2^{-\frac{\alpha+4}{2}+\gamma_0}$$

при $2\nmid\alpha,\ m\equiv -a_0 \pmod 4$,

$$= 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\gamma_0} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_0+2\\ 2|\lambda}}^{\alpha-1} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\gamma_0-1} - 2^{-\frac{\alpha+3}{2}+\gamma_0}$$

при $2|\alpha$.

22) Пусть $\gamma_0=\mu_0+1$ и $2\nmid\gamma_0$. Тогда из (I2)-(I6) получим:

а) если $0\le\alpha\le\gamma_0-3$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + 2^{\frac{\alpha}{2}} + 2^{\frac{\alpha}{2}+1}(-1)^{\frac{m-a_0}{4}}$$

при $2|\alpha,\ m\equiv a_0 \pmod 4$

$$= 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} - 2^{\frac{\alpha}{2}}$$

при $2|\alpha,\ m\equiv -a_0 \pmod 4$;

в) если $0\le\alpha\le\gamma_0-2$, $2\nmid\alpha$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\alpha-1} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} - 2^{\frac{\alpha-1}{2}};$$

с) если $\alpha\ge\gamma_0-1$, то

$$X_2 = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\gamma_0-1} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_0+1\\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\gamma_0-1}\left(\frac{2}{a_0D}\right) + 2^{-\frac{\alpha+4}{2}+\gamma_0}\left(\frac{2}{a_0D}\right) +$$
$$+ 2^{-\frac{\alpha+4}{2}+\gamma_0}(-1)^{\frac{m-a_0}{4}}$$

при $2|\alpha,\ m\equiv a_0 \pmod 4$,

$$= 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma_0-1} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_0+1\\ 2|\lambda}}^{\alpha} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\gamma_0-1}\left(\frac{2}{a_0D}\right) - 2^{-\frac{\alpha+4}{2}+\gamma_0}\left(\frac{2}{a_0D}\right)$$ при $2|\alpha,\ m\equiv -a_0 \pmod 4$,

$$= 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{\gamma_0-1} 2^{\frac{\lambda}{2}-1} + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_0+1\\ 2|\lambda}}^{\alpha-1} 2^{-\frac{\lambda}{2}+\gamma_0-1}\left(\frac{2}{a_0D}\right) - 2^{-\frac{\alpha+3}{2}+\gamma_0}\left(\frac{2}{a_0D}\right)$$

при $2\nmid\alpha$.

Вычислив суммы во всех приведенных выше равенствах, получим утверждаемое.

ЛЕММА 8. Пусть $F=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$, где $(a,b,c,2d,2e,2f)=1$ – квадратичная форма определителя Δ. $F_0=a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2+2e_0xz+2f_0yz$ – форма, эквивалентная F и удовлетворяющая условиям леммы I3 работы [5]. Далее, пусть $p>2$ – любое из чисел $p_1,\dots,p_{t+1}$, определенных в лемме I3 работы [5], $p^{\beta}\|M\ (\beta\geq 0)$, $p^{\bar\ell}\|\bar a$, $p^{\ell'}\|a'$, $p^{\ell}\|\underline{a}$, где $\bar a=a_0b_0D$, $a'=b_0$, $\underline{a}=a_0$. Тогда

$$\chi_p=\left(1+\left(\frac{p^{-\beta}M\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\frac{\beta}{2}} \qquad \text{при } \ell'\geq\beta+1,\ 2|\beta;$$

$$=0 \qquad \text{при } \ell'\geq\beta+1,\ 2\nmid\beta;$$

$$=\left\{1-\left(\frac{-p^{-\ell'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{-1}+\left(1+\left(\frac{-p^{-\ell'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\beta-\ell'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{\frac{\ell'}{2}}$$

$$\text{при } \ell'\leq\beta<\bar\ell,\ 2|\beta,\ 2|\ell';$$

$$=\left(1+\left(\frac{p^{-\beta}M\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\frac{\ell'-1}{2}} \qquad \text{при } \ell'\leq\beta<\bar\ell,\ 2|\beta,\ 2\nmid\ell';$$

$$\chi_p=\left(1+\left(\frac{p^{-(\beta+\ell')}Ma'}{p}\right)\right)p^{\frac{\ell'-1}{2}} \qquad \text{при } \ell'\leq\beta<\bar\ell,\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\ell';$$

$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-\ell'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\beta-\ell'+1}{2}(1-p^{-1})p^{\frac{\ell'}{2}} \quad \text{при } \ell'\leq\beta<\bar\ell,\ 2\nmid\beta,\ 2|\ell';$$

$$=\left\{1+p^{-1}+\left(1+\left(\frac{-p^{-\ell'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\bar\ell-\ell'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{\frac{\ell'}{2}}+\left(\left(\frac{-p^{-(\beta+\ell)}M\Delta}{p}\right)-1\right)p^{\frac{\ell-\beta}{2}-1}$$

$$\text{при } \beta\geq\bar\ell,\ 2|\beta,\ 2|\bar\ell,\ 2|\ell'; \qquad (19)$$

$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\frac{l'-1}{2}}-\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\left(1+p^{-1}\right)p^{\frac{l-\beta-1}{2}}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2|\beta,\ 2|\bar{l},\ 2\nmid l'$;

$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+(1-p^{-1})\frac{\bar{l}-l'-1}{2}\right)p^{\frac{l'}{2}}-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\left(1+p^{-1}\right)p^{\frac{l-\beta-1}{2}}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2|\beta,\ 2|l',\ 2\nmid\bar{l}$;

$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)\right)p^{\frac{l'-1}{2}}+\left(\left(\frac{p^{-\beta}M\underline{a}}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)\right)p^{\frac{l-\beta}{2}-1}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2|\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2\nmid l'$;

$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)\right)p^{\frac{l'-1}{2}}-\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)\left(1+p^{-1}\right)p^{\frac{l-\beta-1}{2}}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2\nmid l'$;

$$X_p=\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+(1-p^{-1})\frac{\bar{l}-l-1}{2}\right)p^{\frac{l'}{2}}+\left(\left(\frac{p^{-(\beta+\bar{l})}M\bar{a}}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\frac{l-\beta}{2}-1}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2|l'$;

$$=\left(1+\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\frac{l'-1}{2}}+\left(\left(\frac{p^{-(\beta+l')}Ma'}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\frac{l-\beta}{2}-1}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid l',\ 2|\bar{l}$;

$$=\left\{\left(1+p^{-1}\right)\left(1-\bar{p}^{\frac{\beta-\bar{l}+1}{2}}\right)+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\bar{l}-l'}{2}\left(1-p^{-1}\right)\right\}p^{\frac{l'}{2}}$$

при $\beta\geq\bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2|l',\ 2|\bar{l}$. (20)

Доказательство. Так как $p^{l} \| a_0^2 b_0^2 D$, то из (I7) следует, что $p^{l} \| a_1 a_2 a_3$ и $p^{l} \| \Delta$ т.е. $l = \bar{l} + l' + \underline{l}$. Из (I7) также следует, что $\left(\frac{p^{-\bar{l}} \bar{a} a' \underline{a}}{p}\right) = \left(\frac{p^{-l} \Delta}{p}\right)$. Следовательно, ввиду того, что из формул (3.26)-(3.39) работы [3] следуют соответствующие формулы для χ_p, приведенные в лемме 9 работы [3] (стр.292-293), а формулы (3.26)-(3.39) остаются в силе и в нашем случае, получаем утверждаемое.

§ 3. В настоящем параграфе α, β, γ обозначают неотрицательные целые числа, n - фиксированное натуральное число, $\omega, \varkappa$ - бесквадратные числа. Как и выше F - квадратичная форма (I) определителя Δ.

ЛЕММА 9. Ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A_q(n;F)$, где $A_q(n;F)$ определено формулой (3), сходится и

$$V(n,0;F) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q(n;F). \tag{2I}$$

Доказательство дословно такое же, что и леммы I4 работы [3].

Положив

$$\theta(\tau;F) = \Psi(\tau,0;F),$$

из (5), согласно лемме 5 и (2I), получим

$$\theta(\tau;F) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n;F) e^{2\pi i n \tau},$$

где

$$\rho(n;F) = \frac{2\pi}{\Delta^{\frac{1}{2}}} n^{\frac{1}{2}} \sum_{q=1}^{\infty} A_q(n;F). \tag{22}$$

Согласно лемме 9, соответствующий квадратичной форме F сингулярный ряд (22) сходится, но не абсолютно. В следующей лемме дается удобная формула для вычисления его суммы.

<u>ЛЕММА 10.</u> Пусть $2^{\alpha}\|n$, $2^{\gamma}\|\Delta$, $p^{\beta}\|n$, $p^{\ell}\|\Delta\ (p>2)$, $\Delta n = 2^{\alpha+\gamma}uv = r^2\omega$, $u=\prod\limits_{\substack{p|n\\ p\nmid 2\Delta}} p^{\beta} = s^2\varkappa$, $v=\prod\limits_{\substack{p|\Delta n\\ p|\Delta,\, p>2}} p^{\beta+\ell} = s_1^2\varkappa_1$. Тогда

$$\rho(n;F)=2^{\frac{\alpha+\gamma}{2}+4}\,\frac{\varkappa^{\frac12} v^{\frac12}}{\Delta\pi}\,\chi_2\prod_{p|\Delta,\,p>2}\chi_p\prod_{p|\Delta,\,p>2}\left(1-p^{-2}\right)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{p|s_1}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\mathcal{L}(1,-\omega)\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где значения величин χ_2, χ_p и $\mathcal{L}(1,-\omega)$, соответственно, даны в леммах 7, 8 (с натуральным n вместо целого M) и 4.

<u>Доказательство.</u> Подберем форму $F_0=a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2+2e_0xz+2f_0yz$ так, чтобы она была эквивалентна данной форме F и удовлетворяла условиям леммы 13 работы [5]. Положим в этой лемме, что p - одно из чисел $p_1,\dots,p_t$ при $p|\Delta$ и $p=p_{t+1}$ при $p\nmid\Delta$. Тогда, согласно (17), получим, что если $p^{\ell}\|\Delta$, то $p^{\ell}\|a_1a_2a_3$, где $a_1=\bar{a}=a_0b_0D$, $a_2=a'=b_0$, $a_3=\underline{a}=a_0$. Отсюда следует, что $\ell=\bar{\ell}+\ell'+\underline{\ell}$.

Пусть $p>2$, $p^{\beta}\|n$, $p\nmid\Delta$, т.е. $\ell=0$. Тогда $\bar{\ell}=\ell'=\underline{\ell}=0$. Следовательно, дословно так же, как и при доказательстве леммы 25 работы [6], согласно формулам (19) и (20), получим

$$\chi_p=\left(1-\frac{1}{p^2}\right)w(p^{\beta}),\quad w(u)=\sum_{\nu^2|u}\nu^{-1}\prod_{p|u}\left(1-\left(\frac{-\nu^{-2}\Delta n}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

При $p>2$, $p\nmid\Delta n$, т.е. при $\ell=\beta=0$, опять-таки из

(20) вытекает, что

$$X_p = 1 + \left(\frac{-\Delta n}{p}\right)\frac{1}{p}.$$

Далее, принимая во внимание (6) и рассуждая так же, как и при доказательстве леммы I5 работы [3], получаем утверждаемое.

Поступило 25.XII.1976

Кафедра
алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

I. А.З.Вальфиш, Целые точки в многомерных шарах, Тбилиси, I960.
2. А.Б.Воронецкий, Записки научных семинаров ЛОМИ, 50, I975, I56-I68.
3. Г.А.Ломадзе, Acta Arithmetica, I9, I97I, 267-305; 387-407.
4. А.В.Малышев, Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 65, I962, 3-2I2.
5. Л.А.Сулаквелидзе, Труды Тбилисского государственного университета, 185, 1977.
6. G. Lomadse, Acta Arithmetica, 6, 1961, 225-275.
7. H. Maass, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 12, 1938, 133-162.
8. K.G. Ramanatan, Acta Arithmetica, 21, 1972, 423-436.
9. C.L. Siegel, Lectures on the analytical theory of quadratic forms, Third revised edition, Göttingen, 1963.

ლ.სულაქველიძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ დადებითი ტერნარული კვადრატული ფორმებით, II

რეზიუმე

ნაშრომში შეჯამებულია გაუსის დადებითად განსაზღვრული ტერნარული კვადრატული ფორმის შესაბამისი სინგულარული მწკრივი.

L.Sulakvelidze

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS BY POSITIVE TERNARY QUADRATIC FORMS, II

Summary

A singular series of Gaussian positively-defined ternary quadratic forms are summed.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

189, 1977

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ОТСОСОМ

Д.В.Шарикадзе, И.П.Грдзелидзе

В работе /I/ в режиме малых магнитных чисел Рейнольдса $Re_m \ll 1$ была решена нестационарная задача пограничного слоя для двух случаев значения скорости отсоса $W_0 = a\delta^{\pm 1}$, где δ - толщина пограничного слоя, а a - числовой параметр.

В настоящей работе изучается аналогичная задача для общего случая в режиме малых чисел Рейнольдса отсоса $R_0 = \frac{W_0 L}{\nu}$.

Пусть плоскость пластины, совпадающая с плоскостью xOz, обтекается слабопроводящей жидкостью с постоянной электропроводностью σ, скорость внешнего потока направлена по оси x, а магнитная индукция B_0 перпендикулярна пластине и имеет составляющую только по оси y. Через пластину происходит отсос или вдув той же жидкости с заданной скоростью $W(x,t)$.

Уравнения магнитной гидродинамики при $Re_m \ll 1$ в безразмерном виде имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{H^2 a}{Re}(f - u) + \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{I}$$

$$V = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \frac{R_0}{Re}W(x,t), \tag{2}$$

где $H_a^2 = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\nu \rho}$ - число Гартмана, $R_e = \frac{u_0 L}{\nu}$ - обычное число Рейнольдса, $R_0 = \frac{W_0 L}{\nu}$ - число Рейнольдса отсоса, $u_\infty(x,t)$ - скорость потока жидкости на бесконечности, u, v - компоненты скорости в пограничном слое.

Здесь введены безразмерные величины:

$$x = Lx', \; y = \frac{L}{\sqrt{Re}} y', \; t = \frac{L}{u_0} t', \; u_\infty = u_0 f,$$

$$u = u_0 u', \; v = \frac{u_0}{\sqrt{Re}} v', \; W = \frac{W_0}{\sqrt{Re}} W'.$$

(После перехода к безразмерным величинам штрихи опущены).

Подставляя (2) в (I), представим решение полученного уравнения в виде

$$u(x,y,t) = A(x,y,t) + \int\limits_0^{\delta(x,t)} \Big[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{R_0}{Re} W \frac{\partial u}{\partial \eta} - \tag{3}$$

$$- \frac{\partial u}{\partial \eta} \int\limits_0^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} d\alpha - \frac{Ha^2}{Re}(f - u) - \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial f}{\partial x} \Big] G(y, \eta) \, d\eta,$$

где $A(x,y,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющим условиям

$$A(x,0,t) = 0, \quad A[x, \delta(x,t), t] = f(x,t). \tag{4}$$

Решение имеет вид

$$A(x,y,t) = \frac{f(x,t)}{\delta(x,t)} y. \tag{5}$$

Здесь толщина асимптотического пограничного слоя заменена конечной толщиной $\delta(x,t)$, которая определяется из условия непрерывного перехода скорости пограничного слоя в скорость внешнего потока

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta(x,t)}=0. \tag{6}$$

В правой части выражения (3) под знаком интеграла стоит функция Грина, имеющая вид:

$$G(y,\eta)=\begin{cases}\left(\frac{\eta}{\delta}-1\right)y, & 0\le y<\eta,\\ \left(\frac{y}{\delta}-1\right)\eta, & \eta<y\le\delta.\end{cases} \tag{7}$$

Напишем выражение (3) с параметром λ перед интегралом и будем искать решение (3) в виде рядов

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}u_{k}(x,y,t). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим следующие рекуррентные формулы:

$$u_0=A(x,y,t),$$

$$u_1=\int_0^{\delta(x,t)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{R_0}{Re}W\frac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)G\,d\eta, \tag{9}$$

. . . .

$$u_{k+1}=\int_0^{\delta(x,t)}\Big[\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{m=0}^{k}u_k\frac{\partial u_{k-m}}{\partial x}+\frac{R_0}{Re}W\frac{\partial u_k}{\partial \eta}-$$

$$-\sum_{m=0}^{k}\frac{\partial u_k}{\partial \eta}\int_0^{\eta}\frac{\partial u_{k-m}}{\partial x}d\alpha-\frac{Ha^2}{Re}(f-u_k)-\frac{\partial f}{\partial t}-f\frac{\partial f}{\partial x}\Big]G\,d\eta.$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, будем иметь:

$$u \approx u_0 + u_1 = \frac{f}{\delta} y + \frac{1}{6}\left(y^3 - y\delta^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f}{\delta}\right) + \frac{1}{24}\left(y^4 - y\delta^3\right)\frac{f}{\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{\delta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{R_0}{Re}\frac{Wf}{\delta}\left(y^2 - y\delta\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{Re} f\right)\left(y^2 - y\delta\right) + \frac{Ha^2}{6Re}\frac{f}{\delta}\left(y^3 - y\delta^2\right). \tag{10}$$

(Здесь допущено, что $\lambda = 1$).

Используя условие (6), из (10) для определения неизвестной толщины $\delta(x,t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{3}{8} f \frac{\partial \delta^2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial t} + \frac{9}{4}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{Re}\right)\delta^2 - 3\frac{R_0}{Re} W\delta = 6. \tag{11}$$

Считая, что отношение $\frac{R_0}{Re}$ мало, будем искать решение (11) в виде

$$\delta(x,t) = \delta_0(x,t) + \frac{R_0}{Re}\delta_1(x,t). \tag{12}$$

Подставляя последнее в (11) и приравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями $\frac{R_0}{Re}$, для определения $\delta_0(x,t)$ и $\delta_1(x,t)$ получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \delta_0^2}{\partial t} + \frac{3}{8} f \frac{\partial \delta_0^2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial t} + \frac{9}{4}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{Re}\right)\delta_0^2 = 6, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta_0\delta_1\right) + \frac{3}{8} f \frac{\partial(\delta_0\delta_1)}{\partial x} + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial t} + \frac{9}{4}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{Re}\right)\delta_0\delta_1 - \frac{3}{2} W_0\delta_0 = 0. \tag{14}$$

Введем новые функции $\varphi = f\delta_0^2$ и $\varphi_1 = f\delta_0\delta_1$. Тогда (13) и (14) примут вид:

$$\frac{1}{6f}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{16}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{5}{16}\varphi\frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{6Re f}\varphi = 1, \tag{15}$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{3}{8}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{15}{8}\varphi_1\frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{Ha^2\varphi_1}{Re f} = \frac{3}{2} W\delta_0. \tag{16}$$

В случае стационарного пограничного слоя из (I5) и (I6) для δ_0 и δ_1 получим следующие выражения:

$$\delta_0^2 = \frac{16\, e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}\int_0^x \frac{dx'}{f(x')}}}{f^6(x)} \int_0^x f^5(x')\, e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}\int_0^{x'} \frac{dx''}{f(x'')}}\, dx', \tag{I7}$$

$$\delta_1 = \frac{4\, e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}\int_0^x \frac{dx'}{f(x')}}}{f^6(x)\,\delta_0(x,t)} \int_0^x W(x',t) f^5(x')\,\delta_0(x',t)\, e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}\int_0^{x'} \frac{dx''}{f(x'')}}\, dx', \tag{I8}$$

которые при обтекании с постоянной скоростью и при постоянном отсосе $f=1,\ W=1$ приводятся к виду:

$$\delta_0^2 = \frac{6Re}{Ha^2}\left(1 - e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}x}\right), \tag{I9}$$

$$\delta_1 = \frac{4}{\delta_0}\, e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}x} \int_0^x \delta_0(x')\, e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}x'}\, dx' \tag{20}$$

Для расчета нестационарного пограничного слоя напишем характеристики (I5) и (I6); получим

$$6 f dt = 16 dx = \frac{d\varphi}{1 - \left(\frac{15}{16}\frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{6Re}\frac{1}{f}\right)\varphi}, \tag{2I}$$

$$f dt = \frac{8}{3} dx = \frac{d\varphi_1}{\frac{3}{2} W \delta_0 - \left(\frac{15}{8}\frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{Ha^2}{Re f}\right)\varphi_1} \tag{22}$$

Для каждой конкретной внешней скорости $f(x,t)$ можно найти решение полученной системы (20), а для однозначного определения $\varphi(x,t)$ необходимо задать условия /2/:

$$\varphi = \varphi_0(t) \quad \text{при} \quad x = X_0(t),$$

или $$\varphi = \varphi_2(x) \quad \text{при} \quad t = T_0(t). \tag{23}$$

Здесь $\varphi_0(t)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции, а вид $X_0(t)$ и $T_0(t)$ определяется конкретной постановкой физической задачи.

После того как будет найдено $\varphi(x,t)$, можно определить $\delta = \sqrt{\dfrac{\varphi(x,t)}{f(x,t)} + \dfrac{R_0}{Re}\dfrac{\varphi_1(x,t)}{\sqrt{f\varphi}}}$, а затем и другие характеристики пограничного слоя: продольную скорость по формуле (I0), нормальную к контуру компоненту скорости $v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy$, напряжение трения у контура

$$\tau = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\Big(\frac{f}{\delta} + \frac{\delta}{3}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{6}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{11}{24}\delta f\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{f^2}{24}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{Ha^2}{3Re}f\delta - \frac{1}{2}\frac{R_0}{Re}Wf\Big), \tag{24}$$

точку отрыва пограничного слоя (если она существует) $\tau = 0$ или

$$f + \frac{\delta^2}{3}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{12}\frac{\partial \delta^2}{\partial t} + \frac{11}{48}\delta^2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{f^2}{48}\frac{\partial \delta^2}{\partial x} + \frac{Ha^2}{3Re}f\delta^2 - \frac{1}{2}\frac{R_0}{Re}Wf\delta = 0, \tag{25}$$

толщину вытеснения δ^*, характеризующую уменьшение расхода жидкости вследствие сил трения в пограничном слое

$$\delta^* = \int_0^\delta \Big(1 - \frac{u}{f}\Big)dy. \tag{26}$$

Рассмотрим пример, когда можно найти решение (20), (2I) в явном виде.

Пусть скорость внешнего потока $f(x,t)$ и скорость проницаемости $W(x,t)$ можно представить в виде произведения двух функций

$$f(x,t) = f_1(t)\cdot f_2(x), \tag{27}$$
$$W(x,t) = W_1(t)\cdot W_2(x).$$

Тогда (20) и (2I) запишутся в виде:

$$6 f_1(t) f_2(x)\,dt = 16\,dx = \frac{d\varphi}{1-\left(\frac{1}{16}\frac{d\ln f_2^5}{dx}+\frac{Ha^2}{6 Re f_1 f_2}\right)}, \qquad (28)$$

$$dt = \frac{8}{3}dx = \frac{d\varphi_1}{\frac{3}{2}W_1(t)W_2(x)\delta_0-\left(\frac{15}{8}\frac{d\ln f_2}{dx}+\frac{Ha^2}{Re f_1 f_2}\right)\varphi_1}, \qquad (29)$$

где $\varphi_1 = f\delta_0\delta_1$.

Отсюда легко находятся первые интегралы:

$$6\int_0^t f_1(t')\,dt' - 16\int_0^x \frac{dx'}{f_2(x')} = C_1,$$

$$\varphi f_2^5 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2(x')}} - 16\int_0^x f_2^5 e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}\,dx' = C_2,$$

$$t-\frac{8}{3}x = C_3, \quad \varphi_1 f_2 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2}} - 4\int_0^x W\delta_0 f_2 e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}\,dx' = C_4.$$

Общее решение при этом можно написать в виде:

$$\varphi f_2^5 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^x\frac{dx'}{f^2}} - 16\int_0^x f_2^5 e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}\,dx' = \psi\left[6\int_0^t f_1\,dt' - 16\int_0^x\frac{dx'}{f_2}\right], \qquad (30)$$

$$\varphi_1 f_2^5 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2}} - 4\int_0^x W\delta_0 f_2 e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re f_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}\,dx' = \psi_1\left[t-\frac{8}{3}x\right], \qquad (31)$$

где ψ, ψ_1 – произвольные функции своих аргументов. Они определяются из условия (23). Рассмотрим несколько простых случаев.

Пусть $\varphi = \varphi_2 = 0$ при $x = 0$, тогда из (30), (31) найдем, что $\psi \equiv 0$, $\psi_1 = 0$ и придем к выражениям

$$\varphi=\frac{16}{f_2^5}e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2}}\int_0^x f_2^5 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}dx',$$

$$\varphi_1=\frac{4}{f_2^5}e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2}}\int_0^x W\delta_0 f_2^5 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}dx',$$

или

$$\delta_0^2=\frac{\varphi}{f}=\frac{16e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2}}}{f_1f_2^6}\int_0^x f_2^5 e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}dx', \tag{32}$$

$$\delta_1=\frac{\varphi_1}{f\delta_0}=\frac{4e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^x\frac{dx'}{f_2}}}{f_1f_2^6\delta_0}W_1(t)\int_0^x W_2(x')\delta_0(x')f_2^5(x')e^{\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Ref_1}\int_0^{x'}\frac{dx''}{f_2}}dx'. \tag{33}$$

Отсюда следует, что при вдуве $(W>0)$ с увеличением скорости внешнего потока и магнитного поля толщина пограничного слоя увеличивается, а при отсосе $(W<0)$ увеличение скорости внешнего потока и магнитного поля, наоборот, уменьшает её.

Решим краевую задачу обтекания тела без отсоса. Для этого необходимо выполнение условий для функции $\varphi(x,t)$ в точках $t=0$ и $x=0$. Рассмотрим два случая, когда можно написать решение в явном виде.

I. Пусть скорость внешнего потока - степенная функция времени $u_\infty=t^\alpha$.

Тогда уравнение (I5) и соответствующие граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{3}{8}t^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{Ha^2}{Re}\varphi=6t^\alpha,$$

$\varphi=\varphi_0(x)$ при $t=0$, $\varphi=\varphi_2=const$ при $x=0$.

Перейдем к преобразованию Лапласа по переменной x. Тогда для изображения $\tilde{\varphi}(t,p)$ функции $\varphi(x,t)$ будем иметь уравнение

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt}+\left(\frac{3}{8}pt^{\alpha}+\frac{Ha^2}{Re}\right)\tilde{\varphi}=\frac{(6+\frac{3}{8}\varphi_2)t^{\alpha}}{p},$$

$$\tilde{\varphi}\Big|_{t=0}=\tilde{\varphi}_0(p).$$

Его решение имеет вид:

$$\tilde{\varphi}=e^{-\left(\frac{3}{8}p\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{Ha^2 t}{Re}\right)}\left[\tilde{\varphi}_0(p)+\int_0^t\frac{(6+\frac{3}{8}\varphi_2)}{p}t_1^{\alpha}e^{\frac{3}{8}p\frac{t_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{Ha^2}{Re}t_1}dt_1\right].$$

В случае, когда плоская пластинка мгновенно приобретает постоянную скорость

$$\alpha=0 \quad \text{и} \quad \varphi_2=0.$$

Из последнего выражения будем иметь

$$\tilde{\varphi}(p,t)=\frac{6}{p\left(\frac{3}{8}p+\frac{Ha^2}{Re}\right)}\left[1-e^{-\left(\frac{3}{8}p+\frac{Ha^2}{Re}\right)t}\right],$$

которое для оригинала δ_0^2 дает

$$\delta_0^2=\begin{cases}\frac{6Re}{Ha^2}\left(1-e^{-\frac{8}{3}\frac{Ha^2}{Re}x}\right), & x<\frac{3}{8}t,\\ \frac{6Re}{Ha^2}\left(1-e^{-\frac{Ha^2}{Re}t}\right), & x>\frac{3}{8}t.\end{cases}$$

Таким образом, когда непористая пластина мгновенно приобретает постоянную скорость, то, как и в обычной гидродинамике /2/, получается движущийся фронт; для малых моментов времени существенна нестационарность движения, а с увеличением времени стационарный режим распространяется все дальше вдоль x. В области $0 \le x < \frac{3}{8} u_\infty t$ (в безразмерном виде $x < \frac{3}{8} t$) имеем решение соответствующей стационарной задачи /3/ - аналог задачи Блазиуса в магнитной гидродинамике, а в области $x > \frac{3}{8} u_\infty t$ решение описывает обтекание бесконечно длинной пластинки, перпендикулярно которой действует однородное магнитное поле.

2. Пусть $f = x$. В начальный момент зададим функцию φ в виде ax^m . Тогда будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{3}{8} x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{15}{8} + \frac{Ha^2}{Re}\right)\varphi = 6x ,$$

$$t = 0 , \quad \varphi = ax^m ; \quad x = 0 , \quad \varphi = 0 .$$

Применим опять преобразование Лапласа, но уже по переменной t . Для изображения $\tilde{\varphi}(x, p)$ функции $\varphi(x, t)$ получим

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dx} + \frac{5 + \frac{8}{3}\left(\frac{Ha^2}{Re} + p\right)}{x} \tilde{\varphi} = \frac{16}{p} + \frac{8}{3} a x^{m-1} ,$$

$$\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 .$$

Решение полученного уравнения будет

$$\tilde{\varphi} = \frac{6x}{p\left(p + \frac{9}{4} + \frac{Ha^2}{Re}\right)} + \frac{ax^m}{\left[p + \frac{3}{8}(m+5) + \frac{Ha^2}{Re}\right]} ,$$

а соответствующий оригинал имеет вид:

$$\varphi = \frac{6x}{\frac{9}{4} + \frac{Ha^2}{Re}} \left[1 - e^{-\left(\frac{9}{4} + \frac{Ha^2}{Re}\right)t}\right] + ax^m e^{-\left[\frac{3}{8}(m+5) + \frac{Ha^2}{Re}\right]t} ,$$

или

$$\delta_0^2 = \frac{\varphi}{x} = \frac{6}{\frac{9}{4} + \frac{Ha^2}{Re}} \left[1 - e^{-\left(\frac{9}{4} + \frac{Ha^2}{Re}\right)t}\right] + ax^{m-1} e^{-\left[\frac{3}{8}(m+5) + \frac{Ha^2}{Re}\right]t} .$$

При $a=0$ получим

$$\delta_0^2 = \frac{6}{\frac{9}{4}+\frac{Ha^2}{Re}}\left[1-e^{-\left(\frac{9}{4}+\frac{Ha^2}{Re}\right)t}\right].$$

При $a=\frac{6}{\frac{9}{4}+\frac{Ha^2}{Re}}$ и $m=1$ получим

$$\delta_0^2 = \frac{6}{\frac{9}{4}+\frac{Ha^2}{Re}}.$$

Таким образом при заданном магнитном поле толщина пограничного слоя постоянна, но она меньше чем при отсутствии магнитного поля.

Поступило 25.II.1977

Кафедра механики сплошных сред, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

I. З.А.Кереселидзе, Д.В.Шарикадзе, Магнитная гидродинамика, 2, 1974.

2. Е.М.Добрышман, Прикладная математика и механика, т.20, вып.3, 1956.

3. Д.В.Шарикадзе, Труды I респ.конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену, Изд.Киевского университета, 1969.

ჯ.შარიქაძე, ი.გრძელიძე

გამტარი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენის ერთი მიახლოებითი ამოხსნის შესახებ გაჟონვის გათვალისწინებით

რეზიუმე

შესწავლილია სუსტადგამტარი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენის ამოცანა გაჟონვის გათვალისწინებით, როდესაც ძირითადი ნაკადის მოძრაობის მართობულად მოქმედებს ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. განხილულია რამდენიმე კერძო ამოცანა, როდესაც ამონახსნები მიღებულია ცხადი სახით.

J.Sharikadze, I.Grdzelidze

ON AN APPROXIMATE SOLUTION OF UNSTEADY BOUNDARY LAYER CONDUCTIVE FLUID WITH ACCOUNT OF SUCTION

Summary

The problem of unsteady boundary layer weakly conductive fluid is studied with account of suction when a homogeneous magnetic field acts perpendicularly to the basic flow. Some particular problems are considered when the solutions are obtained explicitly.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

189, 1977

ОДНОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МЕНЯЮЩИМИСЯ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ

Г.Л. Арсенишвили

Опишем несколько типов однолинейных систем массового обслуживания, где интенсивности входящего потока или интенсивности обслуживающего устройства зависят от величины очереди.

1^0. Рассмотрим систему $M/M/1$, у которой интенсивность входящего потока меняется в зависимости от величины очереди. Требования поступают в систему с интенсивностью λ_1 до тех пор, пока в очереди не накопится r требований. После этого требования поступают в очередь с интенсивностью $\lambda_2 (\lambda_2 < \lambda_1)$ до тех пор, пока в очереди число требований не станет меньше r. Интенсивность обслуживания равна μ и не зависит от длины очереди.

Обозначим: $P_n^{(1)}(t)$ - вероятность того, что к моменту времени t в системе находится n требований ($n = 0, 1, 2, \ldots r$); $P_n^{(2)}(t)$ - вероятность того, что к моменту времени t в системе n требований ($n = r+1, r+2, \ldots$).

Вероятностные уравнения, описывающие эту систему, имеют следующий вид [1]:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)[1-\lambda_1\Delta t]+P_1^{(1)}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P_n^{(1)}(t+\Delta t)=P_n^{(1)}(t)[1-\lambda_1\Delta t-\mu\Delta t]+P_{n-1}^{(1)}(t)\lambda_1\Delta t+$$
$$+P_{n+1}^{(1)}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t),\qquad n=1,2,\dots r-1$$

$$P_r^{(1)}(t+\Delta t)=P_r^{(1)}(t)[1-\lambda_2\Delta t-\mu\Delta t]+P_{r-1}^{(1)}(t)\lambda_1\Delta t+$$
$$+P_{r+1}^{(2)}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t),\tag{I}$$

$$P_{r+1}^{(2)}(t+\Delta t)=P_{r+1}^{(2)}(t)[1-\lambda_2\Delta t-\mu\Delta t]+P_r^{(1)}(t)\lambda_2\Delta t+P_{r+2}^{(2)}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P_n^{(2)}(t+\Delta t)=P_n^{(2)}(t)[1-\lambda_2\Delta t-\mu\Delta t]+P_{n-1}^{(2)}(t)\lambda_2\Delta t+P_{n+1}^{(2)}(t)\mu\Delta t+$$
$$+o(\Delta t)$$
$$n=r+1,\ r+2,\dots$$

Если перейти к пределу в (I) при $\Delta t\to 0$, легко получить

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda_1P_0(t)+\mu P_1^{(1)}(t),$$

$$\frac{dP_n^{(1)}(t)}{dt}=\lambda_1P_{n-1}^{(1)}(t)-(\lambda_1+\mu)P_n^{(1)}(t)+\mu P_{n+1}^{(1)}(t),\quad n=1,2,\dots r-1,$$

$$\frac{dP_r^{(1)}(t)}{dt}=\lambda_1P_{r-1}^{(1)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_r^{(1)}(t)+\mu P_{r+1}^{(2)}(t),$$

$$\frac{dP_{r+1}^{(2)}(t)}{dt}=\lambda_2P_r^{(1)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_{r+1}^{(2)}(t)+\mu P_{r+2}^{(2)}(t),$$

$$\frac{dP_n^{(2)}(t)}{dt}=\lambda_2P_{n-1}^{(2)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_n^{(2)}(t)+\mu P_{n+1}^{(2)}(t).\tag{2}$$

$$n=r+2,\ r+3,\dots$$

Нас интересует стационарное решение этой системы. Переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем [I] бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mu P_1^{(1)} - \lambda_1 P_0 = 0,$$

$$\mu P_{n+1}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu) P_n^{(1)} + \lambda_1 P_{n-1}^{(1)} = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots r-1)$$

$$\mu P_{r+1}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu) P_r^{(1)} + \lambda_1 P_{r-1}^{(1)} = 0,$$

$$\mu P_{r+2}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu) P_{r+1}^{(2)} + \lambda_2 P_r^{(1)} = 0, \tag{3}$$

$$\mu P_{n+1}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu) P_n^{(2)} + \lambda_2 P_{n-1}^{(2)} = 0.$$

$$n = (r+2, r+3, \ldots).$$

Решим эту систему с помощью производящих функций [2]. Обозначим:

$$F^{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{r} P_n^{(1)} z^n, \quad F^{(2)}(z) = \sum_{n=r+1}^{\infty} P_n^{(2)} z^n.$$

Умножив (3) на z^n и просуммировав, получим следующие выражения:

$$F^{(1)}(z)\left[(z-1)\left(z - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]\lambda_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) P_r^{(1)} z^{r+1} + \lambda_1 P_r^{(1)} z^{r+2} - \mu P_{r+1}^{(2)} z^{r+1} + \lambda_1 z (1-z) P_0, \tag{4}$$

$$F^{(2)}(z)\left[(z-1)\left(z - \frac{\mu}{\lambda_2}\right)\right]\lambda_2 = z^{r+1}\left[\mu P_{r+1}^{(2)} - \lambda_2 P_r^{(1)} z\right]. \tag{5}$$

Если подставить в (4) $z=1$ и $z=\frac{\mu}{\lambda_1}$, получим соответственно

$$P_{r+1}^{(2)}=\rho_2 P_r^{(1)}, \tag{6}$$

$$P_r^{(1)}=\rho_1^r P_0, \tag{7}$$

где $\rho_1=\frac{\lambda_1}{\mu}$, $\rho_2=\frac{\lambda_2}{\mu}$ Далее, легко видеть, что

$$F^{(1)}(z)=\rho_1 z\frac{1-(\rho_1 z)^r}{1-\rho_1 z}P_0=P_0\sum_{n=1}^{r}\rho_1^n z^n. \tag{8}$$

Следовательно,

$$P_n^{(1)}=\rho_1^n P_0 \qquad (n=1,2,\ldots r). \tag{9}$$

Так как $P_{r+1}^{(2)}=\rho_2 P_r^{(1)}$, то

$$F^{(2)}(z)=\rho_2\rho_1^r\frac{z^{r+1}}{1-\rho_2 z}P_0. \tag{10}$$

Вспомнив определение $F^2(z)$, можно написать

$$P_n^{(2)}=\rho_2^{n-r}\rho_1^r P_0 \qquad (n=r+1,r+2,\ldots). \tag{11}$$

Для получения явных выражений вероятностей $P_n^{(1)}$ и $P_n^{(2)}$ надо вычислить P_0. Значение P_0 получаем из нормировочного условия

$$P_0+\sum_{n=1}^{r}P_n^{(1)}+\sum_{n=r+1}^{\infty}P_n^{(2)}=1. \tag{12}$$

Отсюда

$$P_0=\frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2-(\rho_1-\rho_2)\rho_1^r}. \tag{13}$$

Подставляя значение P_0 в (9) и (II), получаем явные выражения для $P_n^{(1)}$ и $P_n^{(2)}$:

$$P_n^{(1)} = \rho_1^n \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1-\rho_2)-(\rho_1-\rho_2)\rho_1^r}, \qquad (n=1,2,\dots,r) \qquad \text{(I4)}$$

$$P_n^{(2)} = \rho_1^r \rho_2^{n-r} \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1-\rho_2)-(\rho_1-\rho_2)\rho_1^r} \qquad (n=r+1,r+2,\dots) \qquad \text{(I5)}$$

2^0. Рассмотрим систему $M/M/1$. Требования поступают в систему с интенсивностью λ_1 до тех пор, пока не накапливается R требований. После этого требования поступают с интенсивностью $\lambda_2 (\lambda_2 < \lambda_1)$ до тех пор, пока в системе не остается r требований ($r < R$). Дальнейшие поступления происходят с начальной интенсивностью λ_1 , пока в системе не накапливается R требований. Интенсивность обслуживания не меняется и равна μ .

Обозначим: $P_n^{(1)}(t)$ – вероятность того, что к моменту времени t в системе находятся n требований (n = 0, I, 2,.., R - I); $P_n^{(2)}(t)$ – вероятность того, что к моменту времени t в системе находятся n требований ($n = r+1$, r + 2, ..., R , ...).

Дифференциальные уравнения, описывающие такую систему, имеют вид:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1^{(1)}(t) - \lambda_1 P_0(t),$$

$$\frac{dP_n^{(1)}(t)}{dt} = \mu P_{n+1}^{(1)}(t) + \lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(t) - (\lambda_1+\mu) P_n^{(1)}(t),$$

$$(n=1,2,\dots r-1)$$

$$\frac{dP_r^{(1)}(t)}{dt} = \mu P_{r+1}^{(1)}(t) - (\lambda_1+\mu) P_r^{(1)}(t) + \mu P_{r+1}^{(2)}(t) + \lambda_1 P_{r-1}^{(1)}(t),$$

$$\frac{dP_n^{(1)}(t)}{dt}=\lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(t)-(\lambda_1+\mu)P_n^{(1)}(t)+\mu P_{n+1}^{(1)}(t), \quad (n=r+1,\dots,R-2)$$

$$\frac{dP_{R-1}^{(1)}(t)}{dt}=\lambda_1 P_{R-2}(t)-(\lambda_1+\mu)P_{R-1}^{(1)}(t),$$

$$\frac{dP_{r+1}^{(2)}(t)}{dt}=\mu P_{r+2}^{(2)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_{r+1}^{(2)}(t),$$

$$\frac{dP_n^{(2)}(t)}{dt}=\lambda_2 P_{n-1}^{(2)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_n^{(2)}(t)+\mu P_{n+1}^{(2)}(t), \quad (n=r+2,\dots R-1) \qquad (16)$$

$$\frac{dP_R^{(2)}(t)}{dt}=\lambda_1 P_{R-1}^{(1)}(t)+\lambda_2 P_{R-1}^{(2)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_r^{(2)}(t)+\mu P_{R+1}^{(2)}(t),$$

$$\frac{dP_n^{(2)}(t)}{dt}=\lambda_2 P_{n-1}^{(2)}(t)-(\lambda_2+\mu)P_n^{(2)}(t)+\mu P_{n+1}^{(2)}(t), \quad (n=R+1,R+2,\dots)$$

Очевидно, что

$$P_0(t)+\sum_{n=1}^{R-1}P_n^{(1)}(t)+\sum_{n=r+1}^{\infty}P_n^{(2)}(t)\equiv 1 \qquad (17)$$

$$P_n^{(1)}(0)=P_n^{(2)}(0)=0, \quad (n=1,2,\dots)$$

$$P_0(0)=1$$

Рассматривая стационарный случай [I], получаем

$$P_1^{(1)}=\rho P_0,$$

$$(1+\rho_1)P_n^{(1)}=\rho_1 P_{n-1}^{(1)}+P_{n+1}^{(1)}, \quad (n=r+1,\dots R-2)$$

$$(I8)$$

$$(1+\rho_1)P_r^{(1)}=\rho_1 P_{r-1}^{(1)}-P_{r+1}^{(1)}+P_{r+1}^{(2)},$$

$$(1+\rho_1)P_n^{(1)}=\rho_1 P_{n-1}^{(1)}+P_{n+1}^{(1)}, \quad (n=r+1,\dots R-2)$$

$$(1+\rho_1)P_{R-1}^{(1)} = \rho_1 P_{R-2},$$

$$(1+\rho_2)P_{r+1}^{(2)} = P_{r+2}^{(2)},$$

$$(1+\rho_2)P_n^{(2)} = \rho_2 P_{n-1}^{(2)} + P_{n+1}^{(2)}, \qquad (n=r+2,\dots R-1)$$

$$(1+\rho_2)P_R^{(2)} = \rho_1 P_{R-1}^{(2)} + \rho_2 P_{R-1}^{(2)} + P_{R+1}^{(2)},$$

$$(1+\rho_2)P_n^{(2)} = \rho_2 P_{n-1}^{(2)} + P_{n+1}^{(2)}, \qquad (n=R+1, R+2,\dots)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}.$$

Введем производящие функции [4]

$$F_{(z)}^{(1)} = \sum_{n=1}^{R-1} P_n^{(1)} z^n, \quad F_{(z)}^{(2)} = \sum_{n=r+1}^{\infty} P_n^{(2)} z^n \tag{I9}$$

Перемножив левые и правые части уравнений (I8) на z^n и просуммировав, получим

$$F_{(z)}^{(1)}(1-z)(1-\rho_1 z) = \rho_1 z(1-z)P_0 - P_{r+1}^{(2)} z^{r+1} + \rho_1 P_{R-1} z^{R+1}, \tag{20}$$

$$F_{(z)}^{(2)}(1-z)(1-\rho_2 z) = P_{r+1}^{(2)} z^{r+1} - \rho_1 P_{R-1}^{(1)} z^{R+1}. \tag{2I}$$

Вычисляя полином (20) для значений $z=1,\ z=\frac{1}{\rho_1}$, приходим к следующим соотношениям:

$$P_{r+1}^{(2)} = \rho_1 P_{R-1}^{(1)} \tag{22}$$

$$P_{R-1}^{(1)} = \rho_1 \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{R-r}} P_0 \tag{23}$$

Внесем значение $P_{R-1}^{(1)}$ в (20), тогда

$$F^{(1)}(z) = P_0 \frac{\rho_1 z}{1-\rho_1 z} - P_0 \rho_1^{R-1} \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{R-r}} \cdot \frac{\rho_1 z^{r+1}}{1-\rho_1 z} \cdot \frac{1-z^{R-r}}{1-z}. \tag{24}$$

Учитывая, что

$$\frac{\rho z^{r+1}}{1-\rho z} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n z^{r+n},$$

из (23) получаем

$$F^{(1)}(z) = P_0 \sum_{n=1}^{r} \rho_1^n z^n + P_0 \sum_{n=r+1}^{R-1} \left(\rho_1^n - \rho_1^R \frac{1-\rho_1^{n-r}}{1-\rho_1^{R-r}} \right) z^n. \tag{25}$$

Аналогичные преобразования позволяют вычислить

$$F^{(2)}(z) = P_0 \rho_1^{R-1} \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{R-r}} \cdot \rho_2 \left\{ \sum_{n=r+1}^{R-1} \frac{1-\rho_2^{n-r}}{1-\rho_2} z^n + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\rho_2^{R-r}}{1-\rho_2} \sum_{n=r}^{\infty} \rho_2^{n-r} z^n \right. . \tag{26}$$

Из (25) и (26) находим все значения вероятностей для стационарных состояний рассматриваемой системы:

$$P_n^{(1)} = \rho_1^n P_0, \qquad (n = 1, 2, \ldots r)$$

$$P_n^{(1)} = \rho_1^n \frac{1-\rho_1^{R-n}}{1-\rho_1^{R-r}} \cdot \frac{1-\rho_2^{n-r}}{1-\rho_2} P_0, \quad (n = r+1, \ldots, R-1) \tag{27}$$

$$P_n^{(2)} = \rho_1^{(R-1)} \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{R-r}} \cdot \frac{1-\rho_2^{n-r}}{1-\rho_2} P_0 \qquad (n = r+1, \ldots, R-1)$$

$$P_n^{(2)} = \rho_1^{R-1}\frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{R-r}}\cdot\frac{1-\rho_2^{R-r}}{1-\rho_2}\rho_2^{n-R+1}. \quad (n=R, R+1, \dots)$$

Нетрудно вычислить значение P_0, которое входит в уравнения (27):

$$P_0 = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2-(\rho_1-\rho_2)Q}, \tag{28}$$

где

$$Q = (R-r)\rho_1^{R-1}\frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{R-r}}.$$

3°. Обозначим через $\xi(t)$ случайный процесс, значения которого K^+ и K^-, где K = 0,I,2,... . Символ K^+ надо понимать так: в очереди K требований, а перед этим было $K+1$; K^- – в очереди K требований, а перед этим было $K-1$. Пусть возможные изменения состояний этого процесса и соответствующие им вероятности за достаточно малый промежуток времени Δt имеют вид:

$$0^+ \xrightarrow{\Delta t} \begin{cases} 0^+ : 1-\lambda^+\Delta t + o(\Delta t) \\ 1^- : \lambda^+\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$$K^+ \xrightarrow{\Delta t} \begin{cases} K^+ : 1-(\lambda^+ + \mu^+)\Delta t + o(\Delta t) \\ (K+1)^+ : \lambda^+\Delta t + o(\Delta t) \\ (K-1)^+ : \mu^+\Delta t + o(\Delta t) \end{cases} \tag{29}$$

$$K^- \xrightarrow{\Delta t} \begin{cases} K^- : 1-(\lambda^- + \mu^-)\Delta t + o(\Delta t) \\ (K+1)^- : \lambda^-\Delta t + o(\Delta t) \\ (K-1)^+ : \mu^-\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

Очевидно, что $\xi(t)$ - однородный процесс Маркова. Обозначим через

$$P_k^+(t) = P\{\xi(t) = k^+\}, \quad k \geq 0,$$
$$P_k^-(t) = P\{\xi(t) = k^-\}, \quad k \geq 1. \tag{30}$$

После некоторых преобразований [I] получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_0^+(t)}{dt} = -\lambda^+ P_0^+(t) + \mu^+ P_1^+(t) + \mu^- P_1^-(t),$$
$$\frac{dP_k^+(t)}{dt} = -(\lambda^+ + \mu^+) P_k^+(t) + \mu^+ P_{k+1}^+(t) + \mu^- P_{k+1}^-(t), \tag{31}$$
$$\frac{dP_k^-(t)}{dt} = -(\lambda^- + \mu^-) P_k^-(t) + \lambda^+ P_{k-1}^+(t) + \lambda^- P_{k-1}(t).$$

Рассмотрение стационарного случая приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda^+ P_0^+ = \mu^+ P_1^+ + \mu^- P_1^-,$$
$$(\lambda^+ + \mu^+) P_k^+ = \mu^+ P_{k+1}^+ + \mu^- P_{k+1}^-, \quad k \geq 1, \tag{32}$$
$$(\lambda^- + \mu^-) P_k^- = \lambda^+ P_{k-1}^+ + \lambda^- P_{k-1}^+, \quad k \geq 1.$$

Применяя метод производящих функций [I], после многочисленных преобразований получим

$$P_k^- = \frac{\lambda^+}{\mu^+} \cdot \frac{\mu^- \mu^+ - \lambda^- \lambda^+}{(\lambda^+ + \mu^-)(\lambda^- + \mu^-)} \left[\frac{\lambda^-(\lambda^+ + \mu^+)}{\mu^+(\lambda^- + \mu^-)}\right]^{k-1},$$

$$\rho_k^+ = \frac{\lambda^-\lambda^+}{\mu^{+2}} \frac{\mu^-\mu^+ - \lambda^-\lambda^+}{(\lambda^+ + \mu^-)(\lambda^- + \mu^-)} . \qquad (33)$$

4. Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченной очередью и неординарным потоком требований. Как и прежде, $\xi(t)$ - случайный процесс, значения которого обозначаются через n^+ и n^-, где $n = 0,1,2,\ldots$ Пусть возможны следующие изменения состояний процесса за малое время Δt :

$$0^+ \xrightarrow{\Delta t} \begin{cases} 0 : 1-\lambda^+\Delta t + o(\Delta t) \\ k^- : \rho_k^+ \lambda^+ \Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$$n^+ \xrightarrow{\Delta t} \begin{cases} n^+ : 1-\lambda^+\Delta t - \mu^+\Delta t + o(\Delta t) \\ (n-1)^+ : \mu^+\Delta t + o(\Delta t) \\ (n+k)^- : \lambda^+\rho_k^+\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$$n^- \xrightarrow{\Delta t} \begin{cases} n^- : 1-\lambda^-\Delta t - \mu^-\Delta t + o(\Delta t) \\ (n-1)^+ : \mu^-\Delta t + o(\Delta t) \\ (n+k)^- : \lambda^-\rho_k^-\Delta t + o(\Delta t) \end{cases},$$

где λ^-, λ^+ - интенсивности входящего потока; μ^-, μ^+ - интенсивности обслуживания требований; $\rho_k^\pm$ - вероятность одновременного поступления групп из k требований. Очевидно, что и здесь $\xi(t)$ - однородный марковский процесс.

Применяя (34), можно написать следующие вероятностные соотношения:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0^+(t)(1-\lambda^+\Delta t) + P_1^+(t)\mu^+\Delta t + P_1^-(t)\mu^-\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_m^+(t+\Delta t) = P_m^+(t)[1-(\lambda^+ + \mu^+)\Delta t] + P_{m+1}^+(t)\mu^+\Delta t + P_{m+1}^-(t)\mu^-\Delta t + o(\Delta t) \qquad m \geq 1 \qquad (35)$$

$$P_m^-(t+\Delta t) = P_m^-(t)[1-(\lambda^- + \mu^-)\Delta t] + \sum_{r=1}^{m-1} P_r^-(t)\lambda^-\rho_{m-r}^-\Delta t + o(\Delta t). \qquad m \geq 1.$$

После целого ряда преобразований [1] приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda^+P_0^+ = \mu^+P_1^+ + \mu^-P_1^-,$$

$$P_1^- = \frac{\lambda^+}{\lambda^- + \mu^-}\rho_1^+P_0^+,$$

$$(\lambda^+ + \mu^+)P_m^+ = \mu^+P_{m+1}^+ + \mu^-P_{m+1}^-, \qquad (36)$$

$$(\lambda^- + \mu^-)P_m^- = \lambda^+\sum_{r=0}^{m-1}\rho_{m-r}^+P_r^+ + \lambda^-\sum_{r=1}^{m-1}P_r^-\rho_{m-r}^-.$$

Для этой системы возможно выписать в явном виде производящие функции $R^+(z)$ и $R^-(z)$, а, следовательно, судить о некоторых характеристиках процесса $\xi(t)$, [2].

5. Для систем массового обслуживания, рассмотренных в 1° и 2° пунктах, важно знать распределение времени достижения за-

данного уровня процессом, описывающим эту систему. Такие системы могут быть описаны однородным процессом Маркова $\{\xi(t),$ $\eta(t)\}$, где $\xi(t)$ – величина очереди в момент t , а $\eta(t)$ – время обслуживания требования.

Допустим $\{\xi(t_0), \eta(t_0)\} = (k, x)$, где $k<r$.

Обозначим через $\tau = t_0 + \xi(k,x)$ тот первый после t_0 -го момент времени, когда $\xi(\tau)=r$. $\xi(k,x)$ – время, нужное для достижения состояния r начиная с момента t_0 . Случайные величины $\xi(k,x)$ связаны следующими соотношениями:

$$\xi(0,0)=\Delta t + \begin{cases} \xi(0,0) : 1-\lambda_1\Delta t + o(\Delta t) \\ \xi(1,0) : \lambda_1\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$$\xi(1,x)=\Delta t + \begin{cases} \xi(1,x+\Delta t) : 1-\lambda_1\Delta t-\mu\Delta t + o(\Delta t) \\ \xi(2,x+\Delta t) : \lambda_1\Delta t + o(\Delta t) \\ \xi(0,0) : \mu\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$$\xi(k,x)=\Delta t + \begin{cases} \xi(k,x+\Delta t) : 1-\lambda_1\Delta t-\mu\Delta t + o(\Delta t) \\ \xi(k+1,x+\Delta t) : \lambda_1\Delta t + o(\Delta t) \\ \xi(k-1,0) : \mu\Delta t + o(\Delta t) \end{cases} \qquad (37)$$

$$\xi(r-1,x)=\Delta t + \begin{cases} \xi(r-1,x+\Delta t) : 1-\lambda_1\Delta t-\mu\Delta t + o(\Delta t) \\ 0 : \lambda_1\Delta t + o(\Delta t) \\ \xi(r-2,0) : \mu\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

Введя преобразование Лапласа для случайных величин $\xi(\kappa, x)$ и обозначая $M\exp\{-s\xi(\kappa,x)\}$ через $\varphi_\kappa(s,x)$ после ряда преобразований [3] можно прийти к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial\varphi_\kappa(s,x)}{\partial x} = \varphi_\kappa(s,x)(\lambda_1+\mu+s) - \varphi_{\kappa+1}(s,x)\lambda_1 - \varphi_{\kappa-1}(s,0)\mu, \quad (\kappa=1,2,\dots,r-2)$$

$$\frac{\partial\varphi_{r-1}(s,x)}{\partial x} = \varphi_{r-1}(s,x)(s+\lambda_1+\mu) - \varphi_{r-2}(s,0)\mu \tag{38}$$

Решение дифференциальных уравнений, подобных (38), даны в работе [3].

Поступило 10.II.1977.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Я.Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, "Физматгиз", Москва, 1963.
2. А.Т.Баруча-Рид, Элементы теории марковских процессов и их приложение, "Наука", Москва, 1969.
3. И.И.Ежов, Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс. УМЖ, №1, 1966.
4. K.H.F. Meyer, Wartesysteme mit variabler Bearbeitungsrate, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

გ.არსენიშვილი

ერთარხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემები ცვალებადი ინტენსივობით

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია სხვადასხვა ტიპის ერთარხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემები, რომელთა შემავალი ნაკადისა და მომსახურე ხელსაწყოების ინტენსივობა დამოკიდებულია რიგის სიგრძეზე.

G.Arsenishvili

SINGLE-LINE QUEUEING SYSTEMS WITH CHANGING INTENSITIES

Summary

Single-line queueing systems with changing intensities of input and service are considered.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

189, 1977

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МНОГОЭТАПНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

А.П.Лурсманашвили

Во многих случаях для производства конечной продукции кроме производственных мощностей, непосредственного сырья и трудовых ресурсов необходимы промежуточные продукты других производств или отраслей.

Социалистическая экономика от планируемых органов, наряду с выполнением других задач, требует учитывания максимального удовлетворения потребностей народного хозяйства.

Для того, чтобы не имели места диспропорции в удовлетворении потребностей народного хозяйства, необходимо чтобы объемы отдельных видов выпускаемой продукции были в определенных соотношениях, т.е. отвечали условиям ассортимента.

Следовательно, одна из задач оптимального управления отраслью заключается в следующем: при заданных ресурсах выпускать максимальный объем продукции так, чтобы он был в заданных соотношениях, т.е. удовлетворял условиям ассортимента.

В дальнейшем под мощностью мы будем понимать совокупность производственных мощностей, непосредственного сырья и трудовых ресурсов, а под промежуточным сырьем - промежуточные продукты других отраслей или производства.

Планировать отдельную отрасль или народное хозяйство в целом- значит оптимально определять выпуск не только конечной продукции, но и промежуточных продуктов всех подотраслей.

С подобной задачей встречаемся, например, при оптимальном планировании выпуска шерстяных изделий в легкой промышленности.

Производство шерстяных изделий проходит в основном четыре этапа: подготовительное, прядильное, ткацкое и отделочное производства. Каждое из названных производств имеет свои производственные мощности и выпускает продукцию, промежуточную для последующего этапа производства. Например, продукция подготовительного этапа является сырьем для прядильного производства, продукция прядильного производства является сырьем для ткацкого производства и, наконец, продукция ткацкого производства является сырьем для отделочного производства, дающего конечный продукт - разные виды шерстяных изделий.

Из дальнейших рассуждений видно, что методика решения такой многоэтапной задачи планирования не зависит от количества этапов. Увеличение количества этапов увеличивает лишь объем вычислений. Поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением трехэтапной задачи.

Задачу первого этапа, т.е. случай, когда производство не пользуется промежуточным продуктом других производств, назовем начальным этапом, задачу второго этапа - задачей промежуточного этапа и, наконец, задачу третьего этапа, заканчивающегося выпуском конечной продукции - задачей конечного этапа.

§ I. Математическая модель трехэтапного планирования оптимального ассортмента

а) Задача начального этапа.

Предположим, что имеем m различных ресурсов - производственные мощности, непосредственное сырье, трудовые ресурсы и т.д. в объеме $A_i, i=1,2,\dots,m$. Из данных ограниченных ресурсов производим n различных продуктов в объеме x_j, $j=1,2,\dots,n$.

Пусть $a_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ обозначает норму расхода i-го ресурса на производство единицы j-го продукта.

Тогда задача начального этапа с учетом общей задачи заключается в следующем:

Найти неотрицательные $x_j, j=1,2,\dots,n$, которые, с одной стороны, удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq A_i, \qquad i=1,2,\dots,m \tag{I.I}$$

и, с другой стороны, обеспечивают выпуск максимального объема конечной продукции в заданном ассортименте.*

---

* В этой модели предполагаем, что вся продукция начального этапа является промежуточной.

Ниже приводим задачу, по условиям которой одна часть продукции будет промежуточной, другая часть - конечной.

б) Задача промежуточного этапа.

Предположим, имеем ресурсы - промежуточные продукты начального этапа в объеме x_j, $j=1,2,\dots,n$, и мощности в объеме B_i, $i=1,2,\dots,k$.

Пусть y_i, $i=1,2,\dots,q$ обозначает объем i-го вида промежуточной продукции, выпускаемой на втором этапе и полностью предназначенной для третьего - конечного - этапа.

Обозначим через b_{ij}, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,q$ норму расхода i-го вида сырья - промежуточного продукта - для изготовления единицы j-ой продукции, а через $\bar{b}_{ij}$, $i=1,2,\dots,\ell$, $j=1,2,\dots,n$ - норму расхода i-ой мощности на единицу j-ой продукции.

В этом случае задача второго - промежуточного этапа - сведется к следующему: найти неотрицательные y_j, $j=1,2,\dots,q$, которые удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij} y_j \le x_i, \quad i=1,2,\dots,n, \tag{I.2}$$

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij} y_j \le B_i, \quad i=1,2,\dots,k, \tag{I.3}$$

и вместе с тем обеспечивают выпуск максимального объема конечной продукции в заданном ассортименте.

в) Задача конечного этапа.

Предположим, имеем ресурсы - промежуточные продукты второго этапа в объеме y_j, $j=1,2,\dots,q$, и мощности (в том числе непосредственное сырье) в объеме D_i, $i=1,2,\dots,\ell$.

Обозначим через z_j, $j=1,2,\dots,N$ объем j-го вида конечной продукции.

Пусть C_{ij}, $i=1,2,\ldots,q$, $j=1,2,\ldots,N$ обозначает норму расхода i-го вида сырья - промежуточного продукта - на единицу j-го вида конечной продукции, а через $\bar{C}_{ij}$, $i=1,2,\ldots,\ell$, $j=1,2,\ldots,N$ - норму расхода i-ой мощности на единицу j-го продукта.

Наша задача заключается в следующем: при данных ограниченных ресурсах выпустить максимльный объем продукции Z_j, $j=1,2,\ldots,N$ заданного ассортимента.

Предположим, что ассортимент выпускаемой продукции выражается отношениями

$$Z_1 : Z_2 : \ldots Z_N = W_1 : W_2 : \ldots W_N, \tag{I.4}$$

т.е.

$$Z_j = \lambda_j Z_1, \quad j=1,2,\ldots,N, \tag{I.5}$$

где

$$\lambda_j = \frac{W_j}{W_1}, \quad j=1,2,\ldots,N. \tag{I.6}$$

В этом случае задача конечного типа сведется к следующему:

Найти неотрицательные Z_j, $j=1,2,\ldots,N$, которые удовлетворяют ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij} Z_j \le Y_i, \quad i=1,2,\ldots,q, \tag{I.7}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{C}_{ij} Z_j \le D_i, \quad i=1,2,\ldots,\ell, \tag{I.8}$$

$$Z_j = \lambda_j Z_1, \quad j=1,2,\ldots,N, \tag{I.9}$$

и для которых

$$Z_1 \to max. \tag{I.10}$$

Очевидно, что выпуск максимального объема конечной продукции $z_j,\ j=1,2,\dots,N$ заданного ассортимента, кроме мощностей конечного этапа, всецело зависит от мощностей и количественного соотношения продукции промежуточного этапа ($y_1, y_2, \dots y_q$), которые, со своей стороны, зависят от мощностей и количественного соотношения продукции начального этапа ($x_1, x_2, \dots, x_n$).

Следовательно, выпуск максимального объема конечной продукции в заданном ассортименте функционально зависит от мощностей и количественного соотношения продуктов конечного и всех предшествующих этапов производства.

§ 2. Алгоритм решения задачи многоэтапного планирования с заданным ассортиментом

Решение задачи многоэтапного планирования с заданным ассортиментом мы осуществим на примере трехэтапного планирования, математическая модель которого приведена в предыдущем параграфе.

Решение модели начнем с третьего - конечного - этапа. Из (I.7) - (I.9) находим

$$z_1 \leq \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\lambda_j}, \qquad i=1,2,\dots,q$$

и

$$z_1 \leq \frac{D_k}{\sum_{j=1}^{N} \bar{C}_{kj}\lambda_j}, \qquad k=1,2,\dots,\ell.$$

Отсюда

$$Z_1 \le \min_{\substack{i\in J_1 \\ k\in J_2}} \left(\frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij}\lambda_j}, \frac{D_k}{\sum\limits_{j=1}^{N} \bar{C}_{kj}\lambda_j} \right),$$

где $J_1 = \{1,2,\dots,q\}$ и $J_2 = \{1,2,\dots,\ell\}$.

Если взять

$$Z_1 = \min_{\substack{i\in J_1 \\ k\in J_2}} \left(\frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij}\lambda_j}, \frac{D_k}{\sum\limits_{j=1}^{N} \bar{C}_{kj}\lambda_j} \right); \qquad (2.1)$$

на основе (1.10) и (1.9) получаем максимальный объем производимой продукции в заданном ассортименте.

Из (2.1) следует, что максимальный объем выпускаемой продукции т.е. максимальный уровень удовлетворения потребностей народного хозяйства всецело зависит от величины правой стороны формулы (2.1).

В этой формуле величины $\frac{D_k}{\sum\limits_{j=1}^{N} \bar{C}_{kj}\lambda_j}$, $k=1,2,\dots,\ell$ – постоянные параметры, которые зависят от мощностей D_k, от норм расхода мощностей на единицу продукции $\bar{C}_{kj}$ и от количественного соотношения продуктов производства λ_j.

Так как на данном этапе мы изучаем вопрос об оптимальном использовании имеющихся ресурсов, то эти величины считаем постоянными.

Введем обозначения:

$$\gamma_i = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij}\lambda_j}, \qquad i=1,2,\dots,q. \qquad (2.2)$$

Тогда, согласно вышесказанному и формулам (2.I) и (I.9), для увеличения объема выпускаемой конечной продукции заданного ассортимента необходимо на промежуточном этапе планирования так подобрать неотрицательные величины $y_1, y_2, \dots, y_q$, чтобы величина

$$\min(\gamma_1 y_1, \gamma_2 y_2, \dots \gamma_q y_q)$$

принимала максимальное значение.

Следовательно, задачу второго - промежуточного - этапа оптимального планирования можно сформулировать так: найти неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, \dots, y_q$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij} y_j \le x_i, \quad i=1,2,\dots,n, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij} y_j \le B_i, \quad i=1,2,\dots,k, \tag{2.4}$$

и для которых

$$\min(\gamma_1 y_1, \gamma_2 y_2, \dots, \gamma_q y_q) \to \max. \tag{2.5}$$

Заметим, что в этой задаче $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ - постоянные величины, зависящие от мощностей конечного этапа, от норм расхода мощностей и количественного соотношения продуктов ассортимента конечной продукции.

Оптимальное решение задачи (2.3) - (2.5) получим методом /I/. Для этого достаточно найти жесткий план задачи (2.3)-(2.5): $y=(y_1, y_2, \dots, y_q)$, который удовлетворяет условию:

$$\gamma_1 y_1 = \gamma_2 y_2 = \cdots = \gamma_q y_q . \tag{2.6}$$

Обозначим

$$y_j = \delta_j y_1 , \quad \delta_j = \frac{\gamma_1}{\gamma_j} , \quad j = 1,2,\dots q \tag{2.7}$$

В этом случае оптимальный план задачи (2.3) - (2.5) получим при

$$y_1 = \min_{\substack{i \in J_3 \\ v \in J_4}} \left(\frac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^{q} b_{ij} \delta_j} , \frac{B_v}{\sum\limits_{j=1}^{q} \bar{b}_{vj} \delta_j} \right), \tag{2.8}$$

где $\quad J_3 = \{1,2,\dots,n\} \quad$ и $\quad J_4 = \{1,2,\dots,k\}$.

Рассуждая так же, как при изучении формулы (2.I), заключаем что максимальный объем выпускаемой продукции в заданном ассортименте зависит от

$$\min (\beta_1 x_1 , \beta_2 x_2 , \dots , \beta_n x_n), \tag{2.9}$$

где

$$\beta_i = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{q} b_{ij} \delta_j} , \quad i = 1,2,\dots,n .$$

Следовательно, для получения оптимального решения задачи второго этапа следует так подобрать неотрицательные величины x_j, $j=1,2,\dots,n$, в начальном этапе, чтобы (2.9) принимало максимальное значение.

Итак, задача начального этапа принимает следующий вид: Найти неотрицательные x_j, $j = 1,2,\dots,n$, которые удовлетворяют ограничениям (I.I)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i , \quad i = 1,2,\dots,m , \tag{2.10}$$

и для которых

$$\min(\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \ldots, \beta_n x_n) \longrightarrow \max. \qquad (2.11)$$

Задача (2.10) - (2.11) имеет тот же вид, что и задача (2.3) - (2.5). Поэтому оптимальный план этой задачи находим также методом /1/.

Оптимальный план задачи будет:

$$x_j = \Delta_j x_1, \qquad \Delta_j = \frac{\beta_1}{\beta_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.12)$$

где

$$x_1 = \min_{i \in J_3} \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_j}. \qquad (2.13)$$

Правая сторона формулы (2.13) зависит от мощностей начального этапа производства, от норм их расхода и количественного соотношения продуктов ассортимента конечной продукции.

Как известно /1/, задача (2.10) - (2.11) имеет единственный оптимальный план $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, представленный формулами (2.12) - (2.13).

Используя оптимальный план начального этапа $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, на основе формул (2.7) - (2.8), получим оптимальный план задачи промежуточного этапа (2.3) - (2.5): $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_q)$.

Далее, используя оптимальный план задачи промежуточного этапа $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_q)$, получим оптимальный план конечной задачи (1.7) - (1.10), представленный формулами (2.1) и (1.9).

§ 3. Задача максимальной выручки многоэтапной задачи планирования

При составлении народнохозяйственного плана наряду с определением максимума выпускаемой продукции в заданном ассортименте важную роль играет выполнение финансового плана.

В условиях стабильности цен потребность ассортимента сильно влияет на доход или выручку от производимой продукции. Если бы цены не были стабильны, потребность народного хозяйства можно было бы выразить в ценах. Поэтому составление плана максимума дохода или выручки без учета потребности ассортимента может вызвать диспропорции в производстве, в результате чего образуется избыток одного и недостаток другого вида продукции.

Поэтому потребности ассортимента не снимают, но заменяют другими, более слабыми ограничениями, что дает возможность варьирования плана и вместе с тем учета потребностей народного хозяйства.

Ограничениями такого вида являются нижние и верхние границы выпускаемой продукции.

В некоторых случаях часть продукции промежуточного этапа предназначена для реализации, т.е. является конечным продуктом, а оставшаяся часть является промежуточным продуктом для последующего этапа.

Составим математическую модель многоэтапной задачи, которую мы рассмотрели в предыдущих параграфах.

Введем новые обозначения:

Пусть x_j'', $j=1,2,\dots,n$ обозначает часть продукции начального этапа j-го вида x_j, предназначенную для реализации, а другая часть x_j' предназначена для последующего этапа.

Аналогично, пусть y_j'', $j=1,2,\ldots,q$ обозначает часть продукции промежуточного этапа j-го вида y_j, предназначенную для реализации, а другая часть y_j' предназначена для последующего - конечного этапа.

Предположим, c_j, $j=1,2,\ldots,n$ обозначает выручку с единицы продукции начального этапа, d_j, $j=1,2,\ldots,q$ - выручку с единицы продукции промежуточного этапа и l_j, $j=1,2,\ldots,N$ - выручку с единицы продукции конечного этапа.

В этом случае задача максимальной выручки примет следующий вид:

Найти неотрицательные x_j, x_j', x_j'', $j=1,2,\ldots,n$; y_j, y_j', y_j'', $j=1,2,\ldots,q$; z_j, $j=1,2,\ldots,N$, которые удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$x_j = x_j' + x_j'', \quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij} y_j \le x_i', \quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij} y_j \le B_i, \quad i=1,2,\ldots,k,$$

$$y_j = y_j' + y_j'', \quad j=1,2,\ldots,q,$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij} z_j \le y_i', \quad i=1,2,\ldots,q,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{ij} z_j \le D_i, \quad i=1,2,\ldots,l,$$

$$\alpha_i \le x_i'' \le \bar{\alpha}_i, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$\beta_i \le y_i'' \le \bar{\beta}_i, \quad i=1,2,\ldots,q,$$

$$\gamma_i \le z_i \le \bar{\gamma}_i, \quad i=1,2,\ldots,N$$

и для которых

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j'' + \sum_{j=1}^{q} d_j y_j'' + \sum_{j=1}^{N} l_j z_j \rightarrow max.$$

Таким образом, получаем задачу линейного программирования, которая решается симплексным методом.

§ 4. Задача выполнения производственной программы с наименьшими затратами

Одной из задач планирования народного хозяйства является выполнение производственной программы с наименьшими затратами.

Производственную программу составляют планирующие или директивные органы с учетом потребностей народного хозяйства.

Нашей задачей является выполнение этой программы с наименьшими затратами.

Пусть обозначения остаются прежними, но на этот раз они будут выражены в денежных единицах. Так, например, на начальном этапе планирования A_i, $i=1,2,\dots,m$ обозначает объем i-го ресурса в денежных единицах, а a_{ij} - затраты i-го ресурса на единицу j-го продукта тоже в денежных единицах и т.д.

Введем дополнительные обозначения:

W_j, $j=1,2,\dots,N$ - наименьший объем j- ой продукции на конечном этапе производства;

$\mathfrak{W}_j$, $j=1,2,\dots,n$ - наименьший объем j- ой продукции x_j'' на начальном этапе планирования, предназначенной для реализации;

N_j, $j=1,2,\dots,q$ – наименьший объем j-ой продукции на промежуточном этапе планирования, предназначенной для реализации;

c_j, $j=1,2,\dots,n$ – затраты на единицу продукции x_j на начальном этапе планирования;

d_j, $j=1,2,\dots,q$ – затраты на единицу продукции y_j на промежуточном этапе планирования;

l_j, $j=1,2,\dots,N$ – затраты на единицу продукции z_j на конечном этапе планирования.

В результате, задача выполнения производственной программы с наименьшими затратами примет следующий вид:

Найти неотрицательные x_j, x_j', x_j'', $j=1,2,\dots,n$; y_j, y_j', y_j'', $j=1,2,\dots,q$; z_j, $j=1,2,\dots,N$, которые отвечают ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{4.1}$$

$$x_j = x_j' + x_j'', \quad j=1,2,\dots,n, \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij} y_j \le x_i', \quad i=1,2,\dots,n, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij} y_j \le B_i, \quad i=1,2,\dots,k, \tag{4.4}$$

$$y_j = y_j' + y_j'', \quad j=1,2,\dots,q, \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij} z_j \le y_i', \quad i=1,2,\dots,q \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{ij} z_j \le D_i, \quad i=1,2,\dots,l, \tag{4.7}$$

$$x_j'' \ge M_j, \quad j=1,2,\dots,n, \tag{4.8}$$

$$y_j'' \ge N_j, \quad j=1,2,\dots,q, \tag{4.9}$$

$$z_j \ge W_j, \quad j=1,2,\dots,N, \tag{4.10}$$

и для которых

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j'' + \sum_{j=1}^{q} d_j y_j'' + \sum_{j=1}^{N} l_j z_j \to \min.$$

Таким образом, получили задачу линейного программирования, решаемую симплексным методом.

Если задача не будет совместимой, то в этом случае потребуются капиталовложения для устранения "узких" мест.

Задача распределения капиталовложений для выполнения производственной программы будет изучена в следующем параграфе.

§ 5. Определение минимального капиталовложения для выполнения производственной программы

Предположим, что производство продукции состоит из трех этапов - начального, промежуточного и конечного - и при этом часть продукции начального и промежуточного этапов предназначена для реализации.

Пусть производственная программа предусматривает конечную продукцию всех этапов.

Сохраняя обозначения предыдущих параграфов, допустим, что производственная программа определяется неравенствами:

$$Z_j \geq W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.I}$$

$$x_j'' \geq \mathcal{M}_j, \quad j = 1, 2, \ldots n, \tag{5.2}$$

$$y_j'' \geq \mathcal{N}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, q. \tag{5.3}$$

Требуется определить минимальный объем капитального вложения для выполнения производственной программы (5.I)-(5.3).

Предположим, что $x_j,\ j=1,2,\dots,n$, $y_j,\ j=1,2,\dots,q$ обозначают не всю продукцию начального и промежуточного этапов, а лишь часть ее, предназначенную для следующего этапа. Тогда вся продукция начального и промежуточного этапов соответственно будет не менее $\mathfrak{M}_j+x_j,\ j=1,2,\dots,n$ и $\mathfrak{N}_j+y_j,\ j=1,2,\dots,q$.

Предположим, что производственная программа начального и промежуточного этапов выполняется точно. В этом случае для выполнения производственной программы и конечной продукции $x_j,\ j=1,2,\dots,n$, $y_j,\ j=1,2,\dots,q$ и $z_j,\ j=1,2,\dots,N$ должны быть подобраны так, чтобы имели место неравенства (см. модель (4.I) - (4.I0))

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \bar{A}_i, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij}y_j \le x_i - \sum_{j=1}^{q} b_{ij}\mathfrak{N}_j, \quad i=1,2,\dots,n, \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij}y_j \le \bar{B}_i, \quad i=1,2,\dots,k, \tag{5.6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij}z_j \le y_i, \quad i=1,2,\dots,q, \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{ij}z_j \le D_i, \quad i=1,2,\dots,l, \tag{5.8}$$

$$z_j \ge W_j, \quad j=1,2,\dots,N, \tag{5.9}$$

где

$$\bar{A}_i = A_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathfrak{M}_j, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{5.I0}$$

$$\bar{B}_i = B_i - \sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij}\mathfrak{N}_j, \quad i=1,2,\dots,k. \tag{5.II}$$

Прежде всего исследуем систему (5.4) - (5.9) на совместимость. Если $\bar{A}_i$ и $\bar{B}_i$ не положительные, то на основе формул (5.10) - (5.11) система будет несовместима.

Отсюда, в частности, будет следовать, что мощности начального и промежуточного этапов будет недостаточно даже для выполнения производственной программы по продукции первых двух этапов, не говоря уже о конечном этапе.

Следовательно, нужно выделить капиталовложения для тех ресурсов начального и промежуточного этапов, для которых $\bar{A}_i$ и $\bar{B}_i$ неположительные.

Предположим, что $\bar{A}_i,\ i=1,2,\ldots,m$ и $\bar{B}_i,\ i=1,2,\ldots,k$, положительны.

На основе (5.9) можем допустить, что

$$Z_1 : Z_2 : \ldots : Z_N = W_1 : W_2 : \ldots : W_N \tag{5.12}$$

Отсюда

$$Z_j = \frac{W_j}{W_1} Z_1 = \lambda_j Z_1, \quad j=1,2,\ldots,N \tag{5.13}$$

Очевидно, что если $Z_1 \geq W_1$, тогда $Z_j \geq W_j,\ j=1,2,\ldots,N$, т.е. производственная программа будет выполнена и в превышении производственной программы будет соблюдена пропорциональность.

Из (5.7) - (5.8), (5.12) - (5.13) по методу /I/ получаем оптимальный план

$$Z_1 = \min\left(\frac{y_i}{\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\lambda_j},\ \frac{D_v}{\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{vj}\lambda_j} \right), \tag{5.14}$$

где $J_1 = \{1,2,\ldots,q\}$ и $J_2 = \{1,2,\ldots,\ell\}$.

В целях оптимального решения производственной программы решаем задачу второго этапа:

Найти неотрицательные $y_1, y_2, \ldots, y_q$, которые удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij} y_j \le x_i - \sum_{j=1}^{q} b_{ij} \mathcal{N}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij} y_j \le \bar{B}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

и для которых

$$\min(\gamma_1 y_1, \gamma_2 y_2, \ldots, \gamma_q y_q) \longrightarrow \max,$$

где $\gamma_j, \; j = 1, 2, \ldots, q$ определяются по формуле (2.2).

Оптимальным решением этой задачи является

$$y_j = \delta_j y_1, \quad \delta_j = \frac{\gamma_1}{\gamma_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, q, \tag{5.15}$$

$$y_1 = \min_{\substack{i \in J_3 \\ v \in J_4}} \left(\frac{x_i - \sum_{j=1}^{q} b_{ij} \mathcal{N}_j}{\sum_{j=1}^{q} b_{ij} \delta_j}, \; \frac{\bar{B}_v}{\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{ij} \delta_j} \right). \tag{5.16}$$

Введем обозначения:

$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} \mathcal{N}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$b_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} \delta_j \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В этом случае приходим к решению следующей задачи: найти неотрицательные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют ограничениям (5.4) и для которых

$$\min\left(\frac{x_1 - a_1}{b_1}, \frac{x_2 - a_2}{b_2}, \ldots, \frac{x_n - a_n}{b_n} \right) \longrightarrow \max.$$

Оптимальным решением этой задачи является

$$\bar{x}_j = P_j + Q_j \bar{x}_1, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{5.17}$$

где $P_j = \dfrac{a_j b_1 - b_j a_1}{b_1}, \quad Q_j = \dfrac{b_j}{b_1}, \quad j = 1,2,\dots,n,$

и

$$\bar{x}_1 = \min_{i \in J_3} \left(\frac{\bar{A}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j} \right). \tag{5.18}$$

Определив оптимальный план начального этапа согласно (5.I7)-(5.I8) и подставив их в (5.I6), получим оптимальный план задачи промежуточного этапа:

$$\bar{y}_j = \delta_j \bar{y}_1, \tag{5.19}$$

где

$$\bar{y}_1 = \min_{\substack{v \in J_3 \\ i \in J_4}} \left(\frac{\bar{x}_i - \sum_{j=1}^{q} b_{ij} \gamma_j}{\sum_{j=1}^{q} b_{ij} \delta_j}, \frac{\bar{B}_v}{\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{vj} \cdot \delta_j} \right). \tag{5.20}$$

Далее, используя оптимальный план промежуточного этапа (5.I9) - (5.20) $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_q)$, на основе (5.I4) и (5.I3) получим оптимальный план конечной задачи $\bar{Z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_N)$, где

$$\bar{z}_j = \lambda_j \bar{z}_1, \quad j = 1,2,\dots,N, \tag{5.21}$$

и

$$\bar{z}_1 = \min_{\substack{i \in J_1 \\ v \in J_2}} \left(\frac{\bar{y}_i}{\sum_{j=1}^{N} c_{ij} \lambda_j}, \frac{D_v}{\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{vj} \lambda_j} \right). \tag{5.22}$$

Если по формуле (5.22) окажется, что $\bar{z}_1 \geq W_1$, то согласно (5.2I) и (5.I3) $\bar{z}_j \geq W_j$, $j = 1,2,\dots,N$, и намеченная производственная программа выполняется без капитальных вложений.

Пусть $\overline{Z}_1 < W_1$. Тогда $W_1 - \overline{Z}_1$ будет характеризовать меру отставания от производственной программы.

Пусть E_3 обозначает множество индексов $\nu \in J_2$, для которых

$$\frac{D_\nu}{\sum\limits_{j=1}^{N} \overline{C}_{\nu j} \lambda_j} < W_1 , \quad \nu \in E_3 ,$$

т.е.

$$\frac{D_\nu}{\sum\limits_{j=1}^{N} \overline{C}_{\nu j} \partial M_j} < 1 , \quad \nu \in E_3 .$$

Отсюда

$$D_\nu < \sum_{j=1}^{N} \overline{C}_{\nu j} W_j .$$

Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{N} \overline{C}_{\nu j} W_j$ есть ν-ая мощность, которая требуется для выполнения производственной программы. Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{C}_{\nu j} W_j - D_\nu$$

будет дефицитом ν - ой мощности.

Если через $t_{3\nu}$ обозначим объем капиталовложений, который требуется для увеличения ν- ой мощности на единицу, то для выполнения производственной программы на конечном этапе потребуется капиталовложения не менее $\overline{I}_3$, где

$$\overline{I}_3 = \sum_{\nu \in E_3} \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{C}_{\nu j} W_j - D_\nu \right) t_{3\nu} . \tag{5.23}$$

На основе метода построения оптимального плана /I/ величины

$$\frac{\bar{y}_i}{\sum\limits_{j=1}^{N} C_{ij}\lambda_j}$$

одинаковы для всех индексов $i,\ i=1,2,\ldots,q$. Поэтому для выполнения производственной программы требуется, чтобы

$$\frac{\bar{y}_1}{\sum\limits_{j=1}^{N} C_{1j}\lambda_j} \geqslant W_1,$$

т.е.

$$\frac{\bar{y}_1}{\sum\limits_{j=1}^{N} C_{1j}W_j} \geqslant 1.$$

Следовательно, требуется, чтобы

$$\bar{y}_1 \geqslant \sum_{j=1}^{N} C_{1j}W_j. \tag{5.24}$$

Поэтому, в силу формул (5.20) и (5.24), если

$$\frac{\bar{B}_\nu}{\sum\limits_{j=1}^{q} \bar{b}_{\nu j}\delta_j} < \sum_{j=1}^{N} C_{1j}W_j, \tag{5.25}$$

то ν - ая мощность второго - промежуточного - этапа недостаточна. Пусть E_2 обозначает множество всех индексов ν из множества $\{1,2,\ldots,k\}$, для которых имеет место неравенство (5.25)

Из (5.25), в силу (5.15) и (2.2), получим

$$\bar{B}_\nu < \sum_{j=1}^{q}\bar{b}_{\nu j}\sum_{k=1}^{N} C_{jk}W_k,\quad \nu\in E_2.$$

Поэтому дефицит ν - ой мощности на промежуточном этапе планирования выполнения производственной программы будет:

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{\nu j} \sum_{k=1}^{N} C_{jk} W_k - \bar{B}_\nu , \quad \nu \in E_2 .$$

Если через $t_{2\nu}$, $\nu \in E_2$ обозначим объем капиталовложений, который требуются для увеличения ν ой мощности на единицу, потребность общей суммы капиталовложений на промежуточном этапе будет не менее

$$\bar{I}_2 = \sum_{\nu \in E_2} \Big(\sum_{j=1}^{q} \bar{b}_{\nu j} \sum_{k=1}^{N} C_{jk} W_k - \bar{B}_\nu \Big) t_{2\nu} . \qquad (5.26)$$

Согласно формулам (5.20) и (5.24) от величин $\bar{x}_i$ требуется, чтобы

$$\frac{\bar{x}_i - \sum_{j=1}^{q} b_{ij} \gamma_j}{\sum_{j=1}^{q} b_{ij} \delta_j} \geq \sum_{j=1}^{N} C_{1j} W_j , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Для этого достаточно

$$\frac{\bar{x}_1 - \sum_{j=1}^{q} b_{1j} \gamma_j}{\sum_{j=1}^{q} b_{1j} \delta_j} \geq \sum_{j=1}^{N} C_{1j} W_j ,$$

т.е.

$$\bar{x}_1 \geq \sum_{j=1}^{q} b_{1j} \gamma_j + \Big(\sum_{j=1}^{N} C_{1j} W_j \Big) \sum_{j=1}^{q} b_{1j} \delta_j .$$

На основе (5.I5), (2.2) и (5.I3) получим

$$\bar{x}_1 \geqslant \sum_{j=1}^{q} b_{1j} \mathcal{N}_j + \sum_{j=1}^{q} b_{1j} \sum_{k=1}^{N} C_{jk} W_k = \lambda. \tag{5.27}$$

На основании (5.27) и (5.18), если

$$\frac{\bar{A}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathcal{D}_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j} < \lambda, \tag{5.28}$$

Тогда на начальном этапе i - ая мощность недостаточна для выполнения производственной программы. Обозначим через E_1 множество индексов i, $i = 1, 2, \ldots, m$, для которых имеет место неравенство (5.28). Тогда

$$\bar{A}_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda Q_j + \mathcal{D}_j), \quad i \in E_1,$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda Q_j + \mathcal{D}_j) - \bar{A}_i \quad , \quad i \in E_1,$$

будет дефицитом i -ой мощности на начальном этапе для выполнения производственной программы.

Если через $t_{1\nu}$ обозначаем объем капиталовложений, которые требуются для увеличения ν - ой мощности на единицу, то потребность капиталовложений на начальном этапе для выполнения производственной программы будет не менее I_1 , где

$$I_1 = \sum_{i \in E_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda Q_j + \mathcal{D}_j) - \bar{A}_i \right\} t_{1\nu}. \tag{5.29}$$

На основании (5.23), (5.26) и (5.29) минимальная потребность капиталовложений для выполнения производственной программы будет

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 .$$

Поступило 25.XII.1976 ВЦ Госплана ГССР

ЛИТЕРАТУРА

I. А.П.Лурсманашвили, Об одном классе экстремальных задач. Сообщения АН ГССР, 86, №I, 1977.

ა. ლურსმანაშვილი

მრავალსტადიანი დაგეგმვის ამოცანის ოპტიმალური ამოხსნის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში შესწავლილია სახალხო მეურნეობის ოპტიმალური დაგეგმვის ისეთი ამოცანები, სადაც ერთი დარგის პროდუქცია, ან მისი ნაწილი, გამოიყენება მეორე დარგში, როგორც ნედლეული.

შესწავლილია ამოცანა: არსებული რესურსებით გამოშვებული იქნეს მაქსიმალური მოცულობის პროდუქცია ისე, რომ დაცული იყოს სახალხო-მეურნეობისათვის საჭირო პროპორციები.

შესწავლილია აგრეთვე საკითხი: განისაზღვროს მინიმალური მოცულობის კაპიტალდაბანდება, რომელიც საჭიროა წინასწარ მოცემული საწარმოო პროგრამის შესასრულებლად.

A.Lursmanashvili

ON OPTIMUM SOLUTION OF PROBLEMS OF MANYS-TAGE PLANNING

S u m m a r y

The paper considers a many-stage problem of planning of the national economy. In this problem one part of the product of a branch is the final production and the other part appears to be an intermediate product for the next stage of production.

The paper considers the model of a three-stage problem of planning. An optimal production plan is worked out and the minimal capital investments is determined in order to carry out the given program of production.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერ-

სიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

189, 1977

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

Кристина Домирска-Цесельска

Для разработки планов капитального строительства необходимо провести большую исследовательскую и расчетную работу, обработать обширный материал, сравнить множество вариантов планов и выбрать из них наилучший. Эту работу невозможно провести без применения экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники.

В связи с этим большое значение имеет составление математических моделей распределения капитальных вложений и разработка алгоритмов их решения.

В зависимости от цели используются различные критерии оптимальности и различные ограничивающие условия. Главным образом используются критерии минимума производственных затрат, максимума ввода основных фондов, максимума прибыли, максимума введенных мощностей. Основными ограничениями являются: лимиты капитальных вложений, объемы строительно-монтажных работ, обеспечение ввода в действие производственных мощностей и т.д. [2].

В этой статье рассмотрены модели оптимального распределения капиталовложений между объектами строительства в одной отрасли промышленности и представлен алгоритм решения этих моделей методом линейной аппроксимации.

Под объектами строительства понимаем новостройки и предприятия, подлежащие реконструкции.

Модель I.

Имеется m объектов строительства. Между этими объектами надо в каждом году планового периода оптимально распределить общую сумму капиталовложений.

Параметры модели.

T - количество лет планового периода;

m - количество объектов строительства;

S_t - запланированный объем капиталовложений для m объектов в году t.

Искомые величины:

x_i^t - объем капиталовложений, выделенный i-ой стройке в году t.

Целевая функция.

Целью задачи является максимализация дохода, полученного из всех объектов за весь период T. Известно, что доход с данного объекта в году t зависит от капиталовложений, выделенных от начала планового периода по год t включительно, т.е. является функцией от суммы капиталовложений: $-f_i^t\left(\sum_{\tau=1}^{t} x_i^\tau\right)$.

Весь доход определяет функционал:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} f_i^t\left(\sum_{\tau=1}^{t} X_i^\tau\right).$$

У с л о в и я   м о д е л и.

Сумма распределенных капиталовложений в году t должна равняться запланированному лимиту S_t :

$$\sum_{i=1}^{m} X_i^t = S_t\ ; \qquad t = 1,2,..T.$$

М а т е м а т и ч е с к а я   п о с т а н о в к а   з а д а ч и.

Найти числа X_i^t ($i = 1,2,...m$; $t = 1,2,... T$), для которых функционал

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} f_i^t\left(y_i^t\right), \text{ где } y_i^t = \sum_{\tau=1}^{t} X_i^\tau \qquad (1.1)$$

достигает своего максимума при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i^t = S_t \qquad t = 1,2,\dots,T, \qquad (1.2)$$

$$X_i^t \geq 0 \qquad i = 1,2,\dots,m,\ t = 1,2,\dots,T. \qquad (1.3)$$

Р е ш е н и е   м о д е л и.

Рассматриваемая задача является задачей нелинейного программирования. Если предположим, что (I.I) имеет непрерывные частные производные, тогда задачу эту можно решать методом линейной аппроксимации.

Метод линейной аппроксимации является основой большинства непосредственных способов решения задачи типа

$$\max f(\bar{x})$$

при условиях:

$$A\bar{x} = Б,$$
$$\bar{x} \geq 0,$$

где А - матрица размерности $m \times n$,

$\bar{x}$ - вектор n- мерного пространства,

$Б$ - вектор m-мерного пространства.

Алгоритм решения:

Пусть $\bar{X}^k$ - любой план задачи.

Линейной аппроксимацией функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{X}^k$ является функция $f_L(\bar{y})$, определенная следующим образом:

$$f_L(\bar{y}) = f(\bar{x}^k) + \nabla f(\bar{x}^k)(\bar{y} - \bar{X}^k).$$

Алгоритм решения состоит из двух частей. В первой части для функции $f_L(\bar{y})$ и фиксированного $\bar{x}^k$ определяем решение $\bar{y}^k$ следующей приблизительной задачи:

$$\max \left[f(\bar{x}^k) + \nabla f(\bar{x}^k)^T (\bar{y} - \bar{x}^k) \right]$$

при условиях:

$$A\bar{y} = Б,$$
$$\bar{y} \geq 0.$$

Поскольку некоторые элементы целевой функции постоянны, то можно решать простейшую задачу:

$$\max \left[\nabla f(\bar{x}^k)^T \cdot y \right],$$

при условиях:

$$A\bar{y} = Б,$$
$$\bar{y} \geq 0.$$

Во второй части алгоритма используется направление

$$\bar{d}^k = \bar{y}^k - \bar{x}^k,$$

при помощи которого определяется следующий пункт:

$$x^{k+1} = x^k + \tau(\bar{y}^k - \bar{x}^k), \quad \tau \in [0,1]$$

τ принимает то значение из интервала $[0,1]$, для которого

$$f[x^k + \tau(\bar{y}^k - \bar{x}^k)] = \max_{0 \le \tau \le 1} f[x^k + \tau(\bar{y}^k - \bar{x}^k)].$$

План задачи $\bar{X}^*$ является оптимальным, если $\bar{y}^*$, являющийся решением соответствующей линейной задачи для $\bar{x} = \bar{x}^*$, удовлетворяет неравенству:

$$\nabla f(\bar{x}^*)(\bar{y}^* - \bar{x}^*) \le 0.$$

Доказательство сходимости процесса дается в работе В.Зангвилла [1].

Представленную модель можно применять в случаях, когда:

1. Нет необходимости строить все рассматриваемые объекты, т.е. возможным является случай $\sum_{t=1}^{T} x_i^t = 0$, для некоторого i.

2. Оптимальный объем капиталовложений для каждого объекта не ниже годовых лимитов, т.е. возможным является случай $x_i^t = S_t$

Обычно при разработке перспективного плана развития отрасли определяются объекты строительства. Если для этих объектов даны их сметные стоимости и границы, в пределах которых надо выделять капиталовложения, тогда модель 1 следует смодернизировать. Такой случай рассмотрен в модели 2.

<u>Модель 2</u>.

К параметрам модели 1 добавим следующие параметры:

a_i^t – нижняя граница, меньше которой нельзя выделить капиталь-
b_i^t ные вложения для i-го объекта в году t.

b_i^t – верхняя граница, больше которой нельзя выделить капитальные вложения для i-го объекта в году t.

D_i – сметная стоимость i-го объекта.

Искомые величины и целевая функция будут такие же, как и в модели I.

Возникнут добавочные ограничивающие условия:

Капитальные вложения, выделенные каждому объекту за весь период, должны равняться сметной стоимости объекта:

$$\sum_{t=1}^{T} X_i^t = D_i, \qquad i = 1,2,\dots,m.$$

Выделение капитальных вложений каждому объекту должно удовлетворять реальным условиям:

$$a_i^t \le X_i^t \le b_i^t, \qquad i = 1,2,\dots,m, \quad t = 1,2,\dots,T.$$

Математическая постановка задачи:

Найти числа X_i^t ($i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots T$), для которых функционал:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} f_i^t(y_i^t), \qquad \text{где} \quad y_i^t = \sum_{\tau=1}^{t} X_i^\tau, \tag{2.1}$$

достигает своего максимума при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i^t = S_t \qquad t = 1,2,\dots,T, \tag{2.2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} X_i^t = D_i \qquad i = 1,2,\dots m \qquad (2,3)$$

$$a_i^t \le X_i^t \le b_i^t \qquad i = 1,2,\dots,m, \qquad t = 1,2,\dots,T. \quad (2,4)$$

Экономический анализ модели.

Из условий (2.2) и (2.3) вытекает

$$\sum_{i=1}^{m} D_i = \sum_{t=1}^{T} S_t ,$$

т.е. выделенный на весь плановый период объем капитальных вложений должен равняться сумме сметной стоимости объектов строительства.

Из условий (2.3) и (2.4) вытекает:

$$\sum_{t=1}^{T} a_i^t \le D_i \le \sum_{t=1}^{T} b_i^t ,$$

т.е. нижние ограничения должны быть такими, чтобы выделенный объекту объем капиталовложений мог не превышать сметной стоимости объекта, а верхние ограничения должны дать возможность завершить строительство.

При несоблюдении условий

$$\sum_{i=1}^{m} D_i = \sum_{t=1}^{T} S_t ,$$

$$\sum_{t=1}^{T} a_i^t \le D_i \le \sum_{t=1}^{T} b_i^t$$

задача будет несовместимой.

Решение модели.

Задачу можно написать в виде:

Найти максимум формы

$$f(\bar{x}) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} f_i^t \left(\sum_{\tau=1}^{t} X_i^\tau \right),$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^t = S_t \ ; \qquad t = 1,2,\ldots,T,$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_i^t = D_i \ ; \qquad i = 1,2,\ldots,m,$$

$$-a_i^t + x_i^t - z_i^t = 0 \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad t = 1,2,\ldots,T;$$

$$b_i^t - x_i^t - \omega_i^t = 0 \ ; \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad t = 1,2,\ldots,T;$$

$$x_i^t \geq 0, \ z_i^t \geq 0 \ ; \ \omega_i^t \geq 0,$$

где z_i^t, ω_i^t – дополнительные переменные.

Если предположить, что функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные, тогда задачу можно решать методом линейной аппроксимации.

Дальнейшей модернизацией модели 2 является следующая модель.

Модель 3.

Предположим, что проблема представлена так же, как и в модели 2, но имеются еще ограничения на отдельные виды ресурсов.

Введем добавочные параметры:

n – количество ресурсов,

j – номер ресурса,

W_j^t – лимитное ограничение j-го ресурса в году t,

C_{ij}^t – коэффициент потребления j-го ресурса на i-ом объекте в году t на одну денежную единицу.

Искомые величины и целевая функция будут такие же, как и в моделях I и 2, расширится только система условий модели. Итак, лимитные ограничения на отдельные виды сырья в каждом году планового периода не могут быть превышены:

$$\sum_{i=1}^{m} C_{ij}^{t} X_i^t \leq W_j^t, \qquad j=1,2,\ldots,n, \qquad t=1,2\ldots,T. \quad (3.1)$$

М а т е м а т и ч е с к а я п о с т а н о в к а з а д а ч и :

Найти такие числа X_i^t ($i=1,2,\ldots m$; $t=1,2\ldots,T$)

для которых функционал

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} f_i^t(y_i^t), \qquad \text{где } y_i^t = \sum_{\tau=1}^{t} X_i^\tau, \quad (3.2)$$

достигает своего максимума при условиях: (2.2), (2.3), (2.4) и (3.1).

Пример.

Имеется три объекта капиталовложений. Между этими объектами надо в первом году распределить сумму 18 миллионов денежных единиц, а во втором - 17 миллионов денежных единиц. Зависимость дохода от объема выделенных капиталовложений определяется функциями:

$f_1^1(X_1^1) = \frac{1}{3}(X_1^1)^3$ - для первого объекта в первом году

$f_2^1(X_2^1) = 5(X_2^1)^2$ - для второго объекта в -"-

$f_3^1(X_3^1) = 14X_3^1$ - для третьего объекта в -"-

$f_1^2(X_1^1+X_1^2) = (X_1^1+X_1^2)^2$ - для первого объекта во втором году

$f_2^2(X_2^1+X_2^2) = \frac{2}{3}(X_2^1+X_2^2)^3$ - для второго объекта во -"-

$f_3^2(X_3^1+X_3^2) = 11(X_3^1+X_3^2)$ - для третьего объекта во -"-

Задачу можно поставить следующим образом:

Найти максимум формы

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{3}(x_1^1)^3 + 5(x_2^1)^2 + 14x_3^1 + (x_1^1 + x_1^2)^2 + \frac{2}{3}(x_2^1 + x_2^2)^3 + 11(x_3^1 + x_3^2)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^1 = 18,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 17,$$

$$x_i^t \geq 0; \; i = 1,2,3, \quad t = 1,2.$$

Решение.

Пусть $\bar{X}^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (6,6,6,5,7,5)$

тогда $\nabla f(\bar{x}^1)^T = (58, 398, 25, 22, 338, 11)$

Соответствующая задача линейного программирования:

$$\max(58y_1^1 + 398y_2^1 + 25y_3^1 + 22y_1^2 + 338y_2^2 + 11y_3^2)$$

при условиях:

$$\begin{cases} y_1^1 + y_2^1 + y_3^1 = 18 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 17 \end{cases}$$

Решением этой задачи является вектор

$$\bar{y}^1 = (0,18,0,0,17,0).$$

Определяем вектор

$$\bar{d} = \bar{y}^1 - \bar{x}^1 = (-6, +12, -6, -5, 10, -5).$$

Для определения $\bar{X}^2$ надо вычислить

$$\max_{0\le\tau\le1} f(\bar{x}^1+\tau\bar{d}^1)=\max_{0\le\tau\le1}\Big[\frac{1}{3}(6-6\tau)^3+5(6+12\tau)^2+$$
$$+14(6-6\tau)+(11-11\tau)^2+\frac{2}{3}(13+22\tau)^3+11(11-11\tau)\Big]$$

Эта функция возрастающая и максимума достигает для $\tau=1$

Отсюда:

$$\bar{x}^2=\bar{x}^1+(\bar{y}^1-\bar{x}^1)=\bar{y}^1=(0,18,0,0,17,0)$$
$$\nabla f(\bar{x}^1)^T(\bar{y}^1-\bar{x}^1)>0$$

Вторая итерация.

Линейная задача для $\bar{x}^2=(0,18,0,0,17,0)$

$$\max\left(2630y_2^1+25y_3^1+2450y_2^2+11y_3^2\right)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{3}y_i^1=18,$$
$$\sum_{i=1}^{3}y_i^2=17,$$
$$y_i^t\ge 0$$

Отсюда $\bar{y}^2=(0,18,0,0,17,0)$,

$$\bar{d}^2=\bar{y}^2-\bar{x}^2=0\ ;$$

далее $\nabla f(x^2)^T(\bar{y}^2-\bar{x}^2)=0$,

оптимальное решение $\bar{x}=(0,18,0,0,17,0)$.

Это значит, что для максимализации дохода целую имеющуюся сумму капиталовложений, как в первом, так и во втором году, надо выделить для второго объекта.

Полученное решение соответствует принципу концентрации, представленному Т.Пыкой в работе [3]. Этот принцип говорит, что если ресурсы не выше наименьших оптимальных автономных инвестиций, то оптимальное распределение капиталовложений заключается в концентрации всех ресурсов на одном объекте, с которого получают наибольший доход. В нашем случае в первом году - на объекте, для которого $\frac{\partial f_i^1(S_1)}{\partial x_i^1}$ является наибольшим, а во втором году - на объекте, для которого $\frac{\partial f_i^2(S_2)}{\partial x_i^2}$ является наибольшим.

Поступило 25.XII.1976

Кафедра
экономической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Х.И.Зангвилл, Нелинейное программирование. Москва, 1973.
2. А.В.Крушевский, Автоматизированные системы управления отраслью. Киев, 1973.
3. Т.Рука, Programowanie optymalnych podziałów inwestycyjnych, Warszawa, 1975.

ქ.დომირსკა-ცესელსკა

კაპიტალდაბანდებათა განაწილების ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში შესწავლილია ცალკე აღებული დარგის კაპიტალდაბანდებათა ოპტიმალური განაწილება საწარმოთა მშენებლობისა და რეკონსტრუქციისათვის.

წარმოდგენილია სამი სხვადასხვა არაწრფივი მოდელი,სადაც მიზნის ფუნქციებს წარმოადგენენ: დაყვანილი დანახარჯების მინიმუმი,ძირითადი ფონდების მაქსიმუმი,მოგების მაქსიმუმი და სხვა.

მიღებული არაწრფივი მოდელების ოპტიმალური ამოხსნების მისაღებად გამოყენებულია წრფივი აპროქსიმაციის მეთოდი.

K.Domirska- Ciesielska

ECONOMICAL-MATHEMATICAL MODELS OF DISTRIBUTION OF INVESTMENTS

S u m m a r y

The paper considers mathematical models of optimum distribution of investments in national economy the target of which is to gain income to the maximum.

The algorithm of this model is presented.

ХРОНИКА

С 20 по 22 мая 1976 года на механико-математическом факультете Тбилисского государственного университета проводилась научная конференция профессоров и преподавателей. На секции математики, механики и астрономии (руководитель секции доц. Д.В.Шарикадзе) были заслушаны 28 докладов.

Было проведено пять заседаний секции.

На первом заседании (председатель - проф. Ф.И.Харшиладзе) были заслушаны доклады:

1. Л.Г.Замбахидзе - О некоторых свойствах двумерных пространств.
2. Л.Г.Замбахидзе, Седхом Фараг Тадрос - О размерности в смысле Д.Адналжевича.
3. Г.Лайтадзе - Об одной точной теории гомологии.
4. М.Т.Кванчилашвили - О некоторых теоремах распространения отображений.
5. Ф.И.Харшиладзе - Об одном элементарном методе введения тригонометрических функций.

На втором заседании (председатель - проф. В.Г.Челидзе) были заслушаны доклады:

1. В.Г.Челидзе - Логарифмический метод суммирования двойных интегралов.
2. Н.Р.Тевзадзе - О сходимости сферических частных сумм для функции класса L_2.
3. Г.А.Чхаидзе - Об универсальных рядах.

4. Л.К.Панджакидзе - Об одной теореме типа вложения.

На третьем заседании (председатель - проф. Г.А.Ломадзе) были заслушаны доклады:

I. Г.А.Ломадзе - О параболических формах простой ступени и главного типа.

2. П.Г.Когония - Некоторые неопределенные уравнения в теории непрерывных дробей.

3. Л.А.Сулаквелидзе - О сингулярном ряде тернарных квадратичных форм.

4. Р.Ш.Гонгадзе - О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с восемью переменными.

5. В.Т.Симония - О законе умножения в центре группового кольца унимодулярной группы.

6. Л.Эсакия - О булевых алгебрах с сопряженными замыканиями.

На четвертом заседании (председатель - проф. Г.М.Мания) были заслушаны доклады:

I. Н.Н.Вахания - О ковариационном операторе вероятностных мер.

2. Г.Л.Арсенишвили - Системы массового обслуживания с интенсивностями, зависящими от величины очереди.

3. С.Г.Каландаришвили - Об эквивалентных мерах соответствующих нестационарных гауссовым процессам.

4. З.Г.Горгадзе - Случайные элементы и случайные процессы.

На пятом заседании (председатель - доц. Д.В.Шарикадзе) были заслушаны доклады:

I. Н.Н.Патарая - Некоторые вопросы турбулетного движения жидкости.

2. Д.В.Шарикадзе - Метод функции Грина в теории пограничного слоя.

3. И.А.Зоненашвили - Расчет гибких пластин, подкрепленных не симметричными ребрами.

4. И.А.Зоненашвили, М.Кац - Задача изгиба пластинки с ребрами переменного сечения.

5. М.П.Григолия - О задаче Гурса для квазилинейных гиперболических систем.

6. Г.М.Джанджалашвили - О численном решении интегро-дифференциального уравнения частного вида.

7. Ш.А.Сабашвили - Сечение однородного шара в спектральной линии.

8. И.Н.Чхиквадзе - Определение спектрофотометрических градиентов и скачков компонент двойной звезды и суммарного распределения энергии в континууме.

Работу секции подытожил доц. Д.В.Шарикадзе.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

189, 1977

ნიკო მუსხელიშვილის საპროფესორო მოღვაწეობის პირველი პერიოდი თბილისის უნივერსიტეტში

(1920-1925 წწ.)

ს.ჯორბენაძე

ნიკო მუსხელიშვილის საპროფესორო მოღვაწეობა ახალდაარსებულ ქართულ უნივერსიტეტში 1920 წლის შემოდგომიდან დაიწყო. პეტროგრადიდან იგი სამშობლოში დაბრუნდა როგორც უკვე მომწიფებული მეცნიერი და გამოცდილი პედაგოგი.

1914 წლის მაისში ნიკო მუსხელიშვილი პირველი ხარისხის დიპლომით ამთავრებს პეტროგრადის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მათემატიკურ განყოფილებას. საგამოცდო კომისიამ მოიწონა მის მიერ წარდგენილი ნაშრომი, ამასთან ყველა საგანი მან კომისიას "ფრიად დამაკმაყოფილებლად" ჩააბარა. ამით გზა გაეხსნა საპროფესორო მოსამზადებლად, ე.ი. ასპირანტურისათვის.

უნივერსიტეტთან დატოვება საპროფესორო მოსამზადებლად მისაღები გამოცდების გარეშე ხდებოდა. საჭირო იყო კათედრის პროფესორის რეკომენდაცია. ნიჭიერი კურსდამთავრებული შეუმჩნეველი არ დარჩენიათ.

პეტროგრადის უნივერსიტეტის პრივატ-დოცენტი, ადრე იურიევის უნივერსიტეტის ორდინარული პროფესორი და იმ დროს საიმპერატორო ელექტროტექნიკური ინსტიტუტის ორდინარული პროფესორი გ.ვ. კოლოსოვი

უაღრესად მაღალ შეფასებას აძლევდა საპროფესორო მოსამზადებ-
ლა დასატოვებელი კანდიდატის აკადემიურ მონაცემებს. იგი წერდა:

"Я познакомился с Н.И. Мусхеловым в весеннем полугодии 1914 года, когда я читал курс теории упругости 8-му семестру математического отделения. Он обнаружил при этом живой интерес к этому предмету, недюжинные математические способности и значительную математическую эрудицию. В конце семестра он обратился ко мне с просьбою дать ему тему для работы, представляемой в Испытательную Комиссию, и я рекомендовал ему изучить плоскую задачу математической теории упругости в применении к многосвязным контурам, что и было им выполнено с большим успехом, причем, исходя из данных мною в моей докторской диссертации формул для решения плоской задачи теории упругости, Н.И. Мусхелов вывел ряд интересных следствий для случая многосвязных контуров. Я предложил ему заняться вместе со мной изучением равновесия упругих круглых дисков под влиянием напряжений, приложенных в точках их обвода, и применить к этому случаю его рассуждение о равновесии многосвязных контуров, если к этим дискам приложены, кроме того, силы в точках внутри дисков, действующие в их плоскости. Результаты оказались настолько интересны, что я решил их опубликовать и печатаю вместе с Н.И. Мусхеловым по этому поводу исследование, которое выйдет в конце апреля в Известиях Электротехнического Института и корректору которого при сем прилагаю.

В этом исследовании мне принадлежит разработка общего способа исследования, а Н.И. мусхелову - все детальные расчеты и примеры, которые, по-моему мнению, выбраны весьма удачно и тщательно разобраны.

На этом основании я считаю, что из Н.И.Мусхелова может выработаться дельный ученый и могу рекомендовать его для оставления при университете с целью приготовления к профессорскому званию, причем на первых порах Н.И.Мусхелов не просит никакого пособия или стипендии. В ближайшем будущем, если только на это будет возможность, я предполагаю сделать Н.И.Мусхелова своим помощником в Электротехническом Институте. გ.ვ.კოლოსოვის ამ დასკვნას 1915 წლის 31 მარტს მხარს უჭერს დამსახურებული პროფესორი დ.ვ.ბობილევი, როგორც კათედრის გამგე. 1915 წლის 1 აპრილიდან ნ.ი. მუსხელიშვილს ტოვებენ გამოყენებითი მათემატიკის კათედრაზე პროფესორობისათვის მოსამზადებლად ჯერ უსტიპენდიოდ და შემდეგ სტიპენდიით.

უკვე 1915 წელს პეტროგრადის ელექტროტექნიკური საიმპერატორო ინსტიტუტის შრომებში გ.ვ. კოლოსოვთან თანაავტორობით ნ.ი. მუსხელიშვილი აქვეყნებს პირველ გამოკვლევას.

1916-1919 წლებში ნ.ი. მუსხელიშვილის ავტორობით სამი შრომა იბეჭდება. ერთ-ერთი მათგანი რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მოამბეში აკად. ვ.სტეკლოვის რეკომენდაციით ქვეყნდება.

1917 წლის 2 მარტიდან 1919 წლის 2 ივნისამდე პერიოდში იგი აბარებს ყველა სამაგისტრო გამოცდას.

პეტროგრადში ნიკო მუსხელიშვილი ფართო პედაგოგიურ მუშაობას ეწეოდა.

1917 წელს არჩეული იყო ასისტენტად პეტროგრადის უნივერსიტეტის თეორიული მექანიკის კათედრაზე. 1917-1918 წწ. უნივერსიტეტის მასწავლებლის სახელწოდებით წმინდა /თეორიული/ მათემატიკის განყოფილებაზე აწარმოებდა სტუდენტებთან პრაქტიკულ ვარჯიშებს მათემატიკასა და მექანიკაში. 1919-1920 წლებში არჩეული იყო თანამდებობაზე, რომელიც დოცენტის თანამდებობას უდრიდა.

/Преподаватель с поручением чтения обязательного курса/ და იგი კითხულობდა მათემატიკის ძირითად კურსს ფიზიკურ განყოფილებაზე. ამასთან ერთად იგი ლექციებს კითხულობდა და ასწავლიდა პეტროგრადის ელექტროტექნიკურ, სამთო, ტექნოლოგიურ ინსტიტუტებში. 1919 წლის დამლევს მას გერცენის სახელობის პედაგოგიური ინსტიტუტის პროფესორად ირჩევენ.

1920 წელს ნიკო მუსხელიშვილი წევრად მიიწვიეს ატომურ კომისიაში, რომლის თავმჯდომარე იყო აკადემიკოსი დ.ს.როჟდესტვენსკი, ხოლო წევრები – აკადემიკოსები ა.ნ.კრილოვი, ა.თ.იოფე, ო.დ.ხვოლსონი და სხვ.

ნიკო მუსხელიშვილი სამშობლოს სიყვარულის ბუნებრივი გრძნობის კარნახით მოდის ნორჩ უნივერსიტეტში, სადაც ყველაფერი თავიდან უნდა დაწყებულიყო.

1920 წლის აგვისტოში იგი პირველად ხვდება უნივერსიტეტის რექტორს ივანე ჯავახიშვილს, რომელიც დიდად უწონებს მას სამშობლოში დაბრუნებას. ნიკო მუსხელიშვილი განსაკუთრებული სითბოთი იგონებს ამ შეხვედრას. აღნიშნავს, რომ მან თხოვნით მიმართა რექტორს, დასაწყისში ნება დაერთო ტერმინოლოგიური სიძნელეების გამო ლექციები რუსულად წაეკითხა და როცა ახალი ტერმინოლოგია მკვეთრად გაიკაფავდა გზას, უკვე ქართულად დაიწყებდა ლექციების კითხვას. ივანე ჯავახიშვილი ამაზე არ დათანხმდა. უთქვამს, რომ შეცდა, როცა ერთხელ დაეთანხმა ერთ-ერთ გამოჩენილი ქართველი მეცნიერის ასეთ თხოვნას; თუმცა მან ძველი ქართულიც კარგად იცის, მაგრამ დღემდე ვერ გაბედა ქართულად ლექციის პირველად წაკითხვის შიში დაეძლიათ.

მათი პირველი გულთბილი საუბრის დროს ახალგაზრდა მეცნიერი ივანე ჯავახიშვილს უზიარებს თავის განზრახვას გვარად ატაროს

მუსხელი. ივანე ჯავახიშვილი არ უწონებს ამ განზრახვას და უმტკიცებს,რომ თუ მეცნიერული ფსევდონიმი გნებავთ,შეგიძლიათ,რასაკვირველია,აგაროთ მუსხელი,თქვენ კი ძველთაძველი და სახელოვანი გვარი მუსხელიშვილი გაქვთო.

სულ მალე ნიკო მუსხელიშვილმა არა თუ ქართულად დაიწყო ლექციების კითხვა,არამედ ინტენსიურად ჩაება მათემატიკური,ფიზიკური და ტექნიკური სამეცნიერო ტერმინოლოგიის შემუშავებაში.

1920 წლის 1 სექტემბერს სამათემატიკო - საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭო ნიკო მუსხელიშვილს ირჩევს დოცენტად და მექანიკის კათედრის გამგედ. იმავე წლის 29 ოქტომბერს უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭო ადგენს: "დაენიშნოს დოცენტ ნიკო მუსხელიშვილს,ვითარცა კათედრის გამგეს,პროფესორის ჯამაგირი".

თბილისის უნივერსიტეტში პროფესორად არჩევისათვის კი დოქტორის ხარისხი იყო საჭირო.მიუხედავად ამისა,ნიკო მუსხელიშვილი ამ მოვალეობას წარმატებით ასრულებს.

1922 წლის გაზაფხულზე თბილისის უნივერსიტეტი ფრანგულად აქვეყნებს ნიკო მუსხელიშვილის მონოგრაფიას -"კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი პრობლემის შესასწავლად".

წინასიტყვაობაში იგი აღნიშნავს,რომ განზრახული ჰქონდა წიგნი პირველად ქართულად გამოეცა და შემდეგ კი უცხოეთის ერთ-ერთ ჟურნალში დაებეჭდა,მაგრამ ეს ვერ მოხერხდა მრავალი დაბრკოლების გამო,რამაც აიძულა ავტორი იმ ენაზე (ე.ი.ფრანგულზე) გამოეცა წიგნი,რომელიც ყველა მათემატიკოსისათვის გასაგებია.

ნიკო მუსხელიშვილის პირველსავე მონოგრაფიას უდიდესი მეცნიერული აღიარება მოჰყვა.ამ წიგნმა საერთაშორისო მასშტაბით დაადასტურა სრულიად ახალგაზრდა თბილისის უნივერსიტეტის მაღალი აკადემიური დონე და მსოფლიო სახელი მოუხვეჭა ავტორს.

ეს მონოგრაფია 1922 წელს წარადგინა ნიკო მუსხელიშვილმა როგორც სადოქტორო დისერტაცია, თუმცა მისი დაცვა ვერ შედგა. სამათემატიკო - საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტმა მიიღო ეს დისერტაცია, მაგრამ როგორც აღნიშნულია უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭოს 1922 წლის 16 ივნისის ოქმში, "საჯარო დაცვა გადადებულ იქნა, ვინაიდან უნივერსიტეტში არ აღმოჩნდა გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალისტი."

საბჭოთა რუსეთის უნივერსიტეტში 1918-1933 წლებში საერთოდ გაუქმებული იყო დისერტაციის დაცვა, ხოლო საამისოდ ევროპაში ავტორის წასვლა ვერ მოხერხდა. ნიკო მუსხელიშვილმა თავის მხრივ სავსებით დააკმაყოფილა ის მოთხოვნები, რომლებსაც პროფესორად ასარჩევ პირს უყენებდნენ, ამიტომ იმავე სხდომაზე უნივერსიტეტის საბჭო მას პროფესორად ირჩევს.

ნიკო მუსხელიშვილის პროფესორად ასარჩევად წარდგინებაში უნივერსიტეტის საბჭოს წინაშე პროფ. ანდრია რაზმაძე მიუთითებდა ნიკო მუსხელიშვილის სამეცნიერო და პედაგოგიურ მოღვაწეობაზე პეტროგრადში და დაასკვნიდა: "პეტერბურგის სამეცნიერო წრეები სრულის ნდობით უყურებდა ნიკოლოზ მუსხელიშვილის მოღვაწეობას, როგორც მეცნიერისას და უმაღლესი სკოლის მასწავლებლისა.

ჩვენში ნიკოლოზ მუსხელიშვილი ჩამოვიდა 1920 წ. შემოდგომაზე და უნივერსიტეტის სამეცნიერო საბჭოს მიერ არჩეულ იქნა დოცენტად და მექანიკის კათედრის გამგედ. აქ ყოფნის დროს მან დაბეჭდა მშვენიერი მონოგრაფია "კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი პრობლემის შესასწავლად".

დოც. ნიკო მუსხელიშვილს მინდობილი აქვს ძირითადი საუნივერსიტეტო კურსი. მას აბარია ძირითადი კათედრის გამგებლობა, ის ჩინებულად ასრულებს თავის მოვალეობას".

ნიკო მუსხელიშვილი ანდრია რაზმაძესთან, გიორგი ნიკოლაძესთან და არჩილ ხარაძესთან ერთად საქართველოში მათემატიკური მეცნიერების განვითარების სათავესთან დადგა.

თბილისის უნივერსიტეტში ახალი ძალით გაიშალა პროფესორ ნიკო მუსხელიშვილის მეცნიერული და მეცნიერულ-ორგანიზატორული მოღვაწეობა. იმედითა და რწმენით სავსე, იგი უღევი ენთუზიაზმით წარმოაჩენდა, წვრთნიდა და აწინაურებდა ხალხის გულიდან გამოსულ ახალგაზრდა ნიჭიერ მეცნიერულ ძალებს.

განუსაზღვრელად დიდია ნიკო მუსხელიშვილის ღვაწლი ქართველ მათემატიკოსთა, ფიზიკოსთა და ინჟინერთა კადრების აღზრდაში. თანაც ყველაზე სასიხარულო ის იყო, რომ მათი აღზრდა მშობლიურ ენაზე ხდებოდა. ფასდაუდებელია ნიკო მუსხელიშვილის პირადი წვლილი მათემატიკური, ფიზიკური და ტექნიკური ტერმინოლოგიის შექმნაში.

ქართული მეცნიერული ტერმინოლოგიის შექმნა კი ეროვნული სკოლის არსებობის აუცილებელი პირობა იყო. სხვანაირად საფუძველი ეცლებოდა მშობლიურ ენაზე როგორც საშუალო, ისე უმაღლესი სკოლის არსებობას. თბილისის უნივერსიტეტის დაარსების მოწინააღმდეგენი ხომ სწორედ ამას ამტკიცებდნენ, რომ ქართული მეცნიერული ტერმინოლოგიის შექმნა არარეალურიაო. ივანე ჯავახიშვილის სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს იყო. მათი "მთავარი საბუთი, რომელიც მოწინააღმდეგებს ხელთ ჰქონდათ და პირში ბურთივით სჩრიდნენ ყოველ ჩვენთაგანსო".

ჭეშმარიტად ძნელია სამეცნიერო ტერმინოლოგიის თავიდან შექმნა. მათ ევროპის სხვადასხვა დაწინაურებული ხალხები თანდათანობით და ათეული და ასეული წლების მანძილზე ქმნიდნენ. ჩვენში კი არც დრო ითმენდა და მეცნიერული ტერმინოლოგიის შექმნა არც ვინმე კაბინეტური გზით შეიძლებოდა. ამ ვითარებაში არ იყო გამორი-

ცხული საკითხი დასმულიყო მათემატიკაში, ფიზიკაში,ბუნებისმეტყველებასა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებში საზოგადოდ უარი გვეთქვა ეროვნული ტერმინოლოგიის შექმნაზე. უკეთეს შემთხვევაში ეს ნიშნავდა დარჩენილიყო ქართული ენა მარტოოდენ პოეზიის, საზოგადოდ ლიტერატურის,უფრო სწორად ჰუმანიტარული მეცნიერების ენად.ეს ენას გააღარიბებდა,დაამჭლევებდა,მისი მოქმედების არეს თანდათან შეავიწროვებდა და გამოდევნიდა. ნებაყოფლობით უარის თქმა ენის ყველა ფუნქციის ამოქმედებაზე,როცა ერს 15 საუკუნოვანი წერილობითი ძეგლები აქვს და როცა მისი წინაპრები მათემატიკური აზროვნების მაღალ დონეს ამჟღავნებდნენ,ერის წინაშე ღალატის ტოლფასოვანი იქნებოდა.მხოლოდ ენის ყველა ფუნქციის ამოქმედებით შეიძლება მისი წინსვლა და აყვავება.ასეც ესმოდა ახალგაზრდა უნივერსიტეტის სახელოვან შემადგენლობას თავისი წმინდა ეროვნული მოვალეობა,სიძნელეების წინაშე კაპიტულაცია მათთვის უცხო იყო.პრინციპულობამ,შეუპოვრობამ,დაჟინებამ და მიზნის ერთიანობამ თავისი გაიტანა.

ლექციებზე, ლექციების შემდეგაც სტუდენტთა მონაწილეობით პროფესურა არჩევდა ახალ ტერმინოლოგიას.ამ საშვილიშვილო საქმეში ჩააბეს საშუალო სკოლის პედაგოგებიც.იქმნებოდა სხვადასხვა კურსები და სატერმინოლოგიო საბჭოები. სახელდახელო შეთანხმებით ადგენდნენ ტერმინებს.ქართული მეცნიერული ენა აფართოებდა თავის სავარჯიშო მოედანს.რა ვუყოთ,რომ ამ მოედანს შემდგომი გაწმენდა ესაჭიროებოდა ზოგიერთი უმწიფარი და უდღეური ტერმინებისაგან.მაშინ ხომ ბევრი ისეთი ტერმინი შეიქმნა,რომელთაც მოხდენილობა,სიმარჯვე,სიზუსტე,ხალხურობა და კეთილხმოვნება დღემდე შეინარჩუნეს. მეცნიერების სხვადასხვა დარგის სპეციალისტთა მიერ ჩატარებული ტერმინოლოგიური მუშაობა ყველაზე სწრაფი და საუკეთესო გზა

აღმოჩნდა ადეკვატური ტერმინების მიგნებისა. ამ საქმეში დიდი ინტენსიურობით ჩაება ნიკო მუსხელიშვილი.

განსაკუთრებულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული მათემატიკური ტერმინოლოგიის შექმნა. პირველ რიგში მათემატიკური ენა მისი ტერმინოლოგიური ფონდის მნიშვნელოვანი ნაწილის ინტერნაციონალობას უნდა ითვალისწინებდეს. ლინგვისტურ ანეგდოტად რჩება ყოველი ცდა მათემატიკური ენიდან ლათინიზმის, საზოგადოდ საერთაშორისო სიტყვების სრული განდევნისა. ამასთან ქართული ენის ბუნების ღრმა ცოდნა იყო საჭირო ამ ტერმინოლოგიის სწორად შემუშავებისათვის.

ლუი დე ბროილის სიტყვებით, "მათემატიკური ენა წმინდა დედუქციურია, იგი საშუალებას იძლევა წინამძღვრიდან მკაცრად გამოვიყვანოთ შედეგი." დედუქციურად აზრის გამოხატვა თავისთავად საკმარისი როდია. ლუი დე ბროილის სიტყვებით, ენა უნდა იყოს "ზუსტი იმისათვის, რომ უზრუნველყოს უხარვეზოდ მსჯელობის უწყვეტობა და საკმარისად მოქნილი იმისათვის, რომ ზუსტად გადმოსცეს მრავალი ნიუანსი". ეს თვისებები ქართულ ენას მთლიანად აღმოაჩნდა. ენის ბუნებისა და კანონების დაურღვევლად ქართულმა მეცნიერულმა ენამ სრულიადაც არა თქვა უარი საერთაშორისო მეცნიერულ ტერმინოლოგიაზე, როცა ეს გამართლებულია და საერთაშორისო ტერმინიც უფრო მოხდენილია.

1924 წელს ივანე ჯავახიშვილი მოხსენებით ბარათში საქართველოს სახალხო განათლების კომისარიატში მათემატიკური ტერმინოლოგიის დამტკიცების შესახებ წერდა, რომ საშუალო და უმაღლესი სკოლის მათემატიკური ტერმინოლოგიის შემუშავებისათვის შედგა კომისია, რომლის წევრი იყო პროფ. ნ. მუსხელიშვილი და რომლის შემადგენლობაში პროფ. ალ. რაზმაძის, დოცენტების ა. ხარაძისა და გ. ნიკოლაძის გარდა, მონაწილეობდნენ პროფესორები გ. ახვლედიანი და

დ.უზნაძე. "თუმცა ამ კომისიამ სრულ თანხმობამდე ვერ მიაღწია, მაგრამ ტერმინოლოგია მაინც შემუშავებულ იქნა და სამეცნიერო საბჭოში შემოვიდა განსახილველად და დასადასტურებლად.სამეცნიერო საბჭომ უნივერსიტეტის კომისიის წევრების თანდასწრებით განიხილა მათემატიკის მთელი ტერმინოლოგია და 40 სხდომამდე მოანდომა ამ რთულ საქმეს". როგორც ივანე ჯავახიშვილი აღნიშნავს, თავის მუშაობაში კომისიაც და სამეცნიერო საბჭო სამი დებულებით ხელმძღვანელობდა,რომელიც ყველას თანხმობით იქნა მიღებული:"1.როდესაც ორი ტერმინია ერთი საერთაშორისო,მეორე ქართულად ნათარგმნი,მაგრამ უვარგისი ენის კანონებისა თუ მნიშვნელობის თვალსაზრისით,რჩება საერთაშორისო და ქართული უარყოფილი უნდა იყოს.

2. როდესაც მეორე ქართული ტერმინი წესიერად არის ნაწარმოები და შეეფერება ცნებას,ორივე ტერმინი რჩება.

3. თუ რამდენიმე ქართული ტერმინია,უპირატესობა ეძლევა იმას, რომელიც ენის კანონების თვალსაზრისით წესიერად არის ნაწარმოები".

1925 წელს პროფესორმა ნ.მუსხელიშვილმა, დოცენტებმა გ.ნიკოლაძემ და არ.ხარაძემ წიგნად გამოაქვეყნეს "მათემატიკური ტერმინების ლექსიკონი.რუსულ-ქართული და ქართულ რუსული. წმინდა და გამოყენებითი მათემატიკა თეორიული მექანიკით."

ეს ლექსიკონი უმნიშვნელოვანესი ნიშანსვეტი გახდა ქართული სამეცნიერო ტერმინოლოგიის განვითარებაში.მისი ავტორები მეცნიერების უახლესი მიღწევების ტერმინოლოგიასაც ქმნიდნენ. ამ ლექსიკონის წარმატებას იმანაც შეუწყო ხელი, რომ ქართული ენის ბუნების კარგად ცოდნასთან ერთად,გარდა რუსული ენისა,ავტორები იყენებდნენ ფრანგული,გერმანული,ინგლისური და იტალიური ენების ტერმინოლოგიურ მონაპოვრებს.

სალექსიკოგრაფიო-ტერმინოლოგიური მუშაობა მართლაც ქვის კოდვას ჰგავს,ამიტომ მით უფრო უდიდესი სიხარულის მომგვრელია თქვენს მიერ მიგნებული მარჯვე ტერმინი,როცა იცით,რომ ამ ტერმინით მარტო თანამედროვენი კი არ სარგებლობენ,არამედ ქართველთა მომავალი თაობები მას მილიონჯერ გაიმეორებენ,კარგად ამბობს ტერმინოლოგიური გამარჯვებით მინიჭებულ სიხარულზე თვით ნიკო მუსხელიშვილი.

"პირადად მე,- აღნიშნავს გაზეთ "თბილისის უნივერსიტეტის" კორესპონდენტთან საუბარში ნიკო მუსხელიშვილი 1971 წლის 1 იანვარს, - წლების მანძილზე დიდ დროს ვუთმობდი ტერმინოლოგიურ საკითხებზე მუშაობას და, უნდა გამოგიტყდეთ,მეამაყება,რომ ბევრი ტერმინი,რომელიც ამჟამად იხმარება,თავის დროზე ჩემს მიერ იყო შემოთავაზებული.

განსაკუთრებით ვამაყობ ჩემს მიერ შემოღებული ტერმინებით-ტოლობა და განტოლება,რომლებმაც შეცვალეს მანამდე არსებული ძველი ტერმინები-თანასწორობა და შეთანასწორება".

თბილისის უნივერსიტეტში მოსვლისთანავე ნ.მუსხელიშვილი აქტიური წევრია პროფესორთა საბჭოსი.მას პროფესორთა საბჭო სხვადასხვა დავალებებს აკისრებს,რომელთა შორის ყველაზე მთავარია ორგანიზაციული პირობების მომზადება უნივერსიტეტის პოლიტექნიკური ფაკულტეტის შესაქმნელად.

ნ.მუსხელიშვილი იმ კომისიის წევრი იყო,რომელმაც 1921 წელს შეიმუშავა უნივერსიტეტთან "სატექნიკო" ინსტიტუტის სასწავლო გეგმა. 1921 წლის 16 ნოემბერს უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭომ დაადგინა სატექნიკო ინსტიტუტის ნაცვლად სატექნიკო ფაკულტეტის დაარსება,ამის მიუხედავად ადრე შემუშავებულ სასწავლო გეგმას არსებითი ცვლილება არ განუცდია.პროფ.ნ.მუსხელიშვილი

შევიდა იმ კომისიაშიც,რომელსაც დაევალა უნივერსიტეტის სატექნიკო ფაკულტეტის დაარსება.ამ ფაკულტეტის შექმნის პირველ დღიდანვე,1922 წლის 16 იანვრიდან პროფესორი ნიკო მუსხელიშვილი აქტიურ მონაწილეობას იღებს ფაკულტეტის სასწავლო და სამეცნიერო საქმიანობაში,აქ იგი კითხულობს რამდენიმე მეცნიერულ დისციპლინას,

ნიკო მუსხელიშვილი 1922-1925 წლებში აქვეყნებს გამოკვლევებს,მათ შორის იტალიურ,ფრანგულ ენებზეც.

1923 წელს იგი სამეცნიერო მივლინებით გაემგზავრება პარიზსა და ბერლინში.

1925 წლის 3 ივლისს პროფესორთა საბჭო პროფ.ნ.მუსხელიშვილს ამტკიცებს უნივერსიტეტის საგამომცემლო კომისიის წევრად.

პროფ.ნ.მუსხელიშვილი არ კმაყოფილდებოდა უნივერსიტეტში მხოლოდ სასწავლო-სამეცნიერო მუშაობით, იგი ეწეოდა მეცნიერულ-პოპულარიზატორულ მოღვაწეობას,რათა ცოდნასა და განათლებას მოწყურებული მასისათვის გაეცნო მსოფლიო მეცნიერების მიღწევები. ასე,1924 წელს ჟურნალში "ჩვენი მეცნიერება",N 1,პროფ. ნ.მუსხელიშვილი აქვეყნებს წერილს "როგორ გავეცნოთ აინშტაინის ფარდობითობის თეორიას?"

პროფ.ნ.მუსხელიშვილი აღნიშნავდა,რომ არც ერთ ფიზიკურ თეორიას არასოდეს იმდენად არ მიუზიდავს მთელი განათლებული საზოგადოების ინტენსიური ყურადღება,როგორც ამას აინშტაინის თეორიის გამოქვეყნებისთანავე ვხედავთ,იგი ქართველ მკითხველს აცნობდა,რომ ამჟამად აინშტაინის თეორიით გატაცებულია მრავალი პირველხარისხოვანი მათემატიკოსი,ფიზიკოსი და ასტრონომი, რომ უკვე რამდენიმე წელია აინშტაინის თეორია მსოფლიოს მოწინავე უნივერსიტეტებში ცალკე კურსად იკითხება (თბილისის უნი-

ვერსიტეტში თვითონ ნ.მუსხელიშვილი კითხულობდა ამ კურსს).თავის სტატიაში ნ.მუსხელიშვილი მისაწვდომი ენით და შესანიშნავი მეცნიერული სიღრმით აცნობს მკითხველს აინშტაინის თეორიას.ავტორი მოუწოდებს მკითხველებს: "ვისაც აინშტაინის თეორიის ნამდვილი შესწავლა სურთ,ნუ ჩაკარგავენ ზედმეტ დროს პოპულარულ ლიტერატურის კითხვაზე,არამედ პირველად შეავსონ თავისი ცოდნა მათემატიკაში (განსაკუთრებით დიფერენციალურ გეომეტრიაში); თეორიულ ფიზიკაში (ელექტრომაგნიტურ მოვლენათა თეორიაში) და მექანიკაში", ამის შემდეგ იგი ურჩევდა მკითხველს,თუ რა სახელმძღვანელოები უნდა შეესწავლა ამ თეორიის სრული გაგებისათვის.

თბილისის უნივერსიტეტში ნიკო მუსხელიშვილის მოღვაწეობის პირველივე პერიოდი ადასტურებდა,რომ მისი სახით პროფესორთა საბჭოში მსოფლიო სახელის ახალი წევრი მოვიდა.

Ш.Е.Микеладзе

(1895-1976гг.)

Ш.Е.Микеладзе

Грузинская советская наука понесла большую утрату - скончался выдающийся ученый, основоположник грузинской школы вычислительной математики, лауреат Государственной премии СССР, академик АН Грузинской ССР Шалва Ефимович Микеладзе.

Ш.Е.Микеладзе родился 29 марта 1895 г. в г.Телави Груз.ССР. После окончания в 1915 г. Бакинского среднего механико-строительного технического училища он поступил в Петроградский электро-технический институт. Будучи студентом, Ш.Е.Микеладзе в 1916 г. был призван на военную службу, которую проходил до 1924 года. С 1924 по 1926 г. работал в Тбилисском управлении электрических сооружений. В 1926-29 гг. - инженером на Земо-Авчальской гидроэлектростанции. Параллельно с работой Ш.Е.Микеладзе учился на математическом отделении Тбилисского гос.университета, который закончил в 1927 году.

В 1929-33 гг. Ш.Е.Микеладзе одновременно работает в Тбилисском гос.университете, в Тбилисском институте инженеров железнодорожного транспорта и в Грузинском политехническом институте.

В 1933 году Ш.Е.Микеладзе был командирован в г.Ленинград для проведения научно-исследовательских работ, где он работал в течение двух лет.

Огромное влияние на творческие успехи Ш.Е.Микеладзе - математика оказало личное общение с прославленным советским ученым академиком А.Н.Крыловым.

В 1935 году Ш.Е.Микеладзе защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук и в том же году был утвержден в звании профессора.

С 1935 года Ш.Е.Микеладзе работал в Математическом институте им. А.М.Размадзе АН Грузинской ССР в должности руководителя отдела вычислительной математики.

Наряду с научной работой Ш.Е.Микеладзе вел плодотворную педагогическую деятельность в разных ВУЗ-ах Тбилиси. В разное время он заведовал кафедрами высшей математики, математического анализа, теоретической механики в Грузинском политехническом институте, Тбилисском институте инженеров железнодорожного транспорта, Тбилисском педагогическом институте.

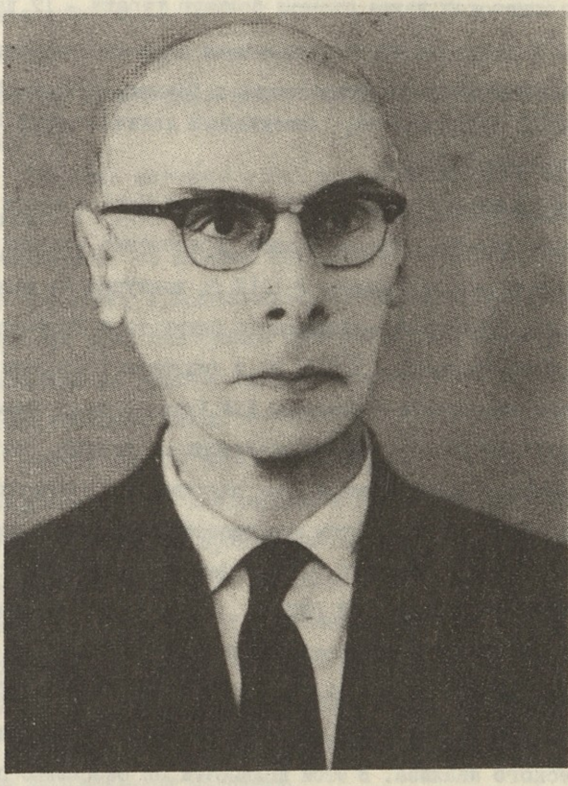
В 1955 году Ш.Е.Микеладзе организовал в Тбилисском государственном университете кафедру приближенного анализа и вычислительной техники, которой заведовал до 1970 года. В 1962 году при этой кафедре была создана проблемная лаборатория, на базе которой впоследствии был организован Институт прикладной математики Тбилисского гос.университета.

Ш.Е.Микеладзе был одним из организаторов создания Вычислительного центра АН Грузинской ССР.

Ш.Е.Микеладзе является автором свыше ста научных работ, среди которых шесть монографий. Некоторые из этих монографий были переведены и изданы за рубежом. В работах Ш.Е.Микеладзе даны оригинальные исследования по теории интерполирования и приближения функций; численному дифференцированию и интегрированию и смежным вопросам; разработаны итерационные методы решения численных уравнений; разработаны эффективные методы решения краевых задач и задач о собственных значениях для обыкновенных дифференциальных уравнений; изучены вопросы численного решения интегральных уравнений типа Вольтерра; исследованы вопросы численного решения дифференциальных уравнений с частными производными; даны математические методы решения задач строительной механики; разработаны эффективные методы расчета брусьев и пластинок переменной толщины; исследованы вопросы теории устойчивости прямолинейных и криволинейных стержней переменной жесткости.

Плодотворная научная и педагогическая деятельность Ш.Е.Микеладзе была высоко оценена. В 1952 году ему была присуждена Государственная премия СССР. Он награжден орденами Трудового Красного Знамени, Дружбы народов, двумя орденами "Знак почета" и медалями.

Ушел из жизни прославленный ученый и педагог, принципиальный и чуткий человек, вся деятельность которого была проникнута большой любовью к своему народу.



А.К.Харадзе

(1895-1976гг.)

А.К.Харадзе

Грузинская советская наука понесла большую утрату - 17 декабря 1976 года в возрасте 81 года скончался один из основоположников высшего математического образования в Грузии, старейший профессор Тбилисского университета, заслуженный деятель науки Груз. ССР Арчил Кириллович Харадзе.

А.К.Харадзе родился 21 апреля 1895 г. на ст.Ципа в семье железнодорожного служащего. Первоначальное образование получил в с.Молити, а среднее - в г.Тбилиси. В 1912 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, которое окончил в 1917 г. с дипломом I степени и по представлению известного профессора Д.Ф.Егорова был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Однако, ввиду тяжелых материальных условий, был вынужден возвратиться в Тбилиси, где в мае 1918 г. Советом профессоров только что основанного Тбилисского университета был приглашен ассистентом кафедры математического анализа. В 1922 г., после сдачи докторских экзаменов, А.К.Харадзе утверждается доцентом той же кафедры, а в 1930 г., после смерти проф. А.М.Размадзе, Ученым советом Тбилисского университета избирается профессором и заведующим кафедрой математического анализа. В этой должности он бессменно работал вплоть до сентября 1975 г., когда по болезни был переведен на должность профессора-консультанта. В 1932 г. он был утвержден в ученом звании профессора. С 1935 г. по 1938 г. работал деканом физико-математического факультета, а с 1938 г. по 1944 г.- проректором по учебной работе Тбилисского университета. С 1922 г. по 1947 г. в разное время преподавал также в Грузинском политехническом институте и Тбилисском институте инженеров железнодорожного транспорта и по совместительству работал в Математическом институте АН ГССР. С 1947 г. по 1952 г. был ректором Тбилисского государственного педагогического института им. А.С. Пушкина, продолжая педагогическую и научную деятельность в университете.

Развитие математических наук и высшее математическое образование в Грузии было заложено в Тбилисском университете немногочисленной, но сильной группой математиков, в которую входили А.М.Размадзе, Г.Н.Николадзе, Н.И.Мусхелишвили и А.К.Харадзе. За короткий срок они сумели обеспечить преподавание математических дисциплин на родном, грузинском языке на уровне современной математической науки.

Первая лекция по высшей математике на грузинском языке была прочитана именно А.К.Харадзе в Тбилисском университете в 1918 году и с тех пор на протяжении более полувека он в разное время с большим увлечением читал курсы высшей алгебры, теорий функций комплексного переменного и математического анализа. Все математики Грузии, окончившие Тбилисский университет, являются его учениками. Он является автором трех и соавтором двух учебников для ВТУЗ-ов и университетов. На этих учебниках воспитывалось нескольке поколений студенческой молодежи.

Свою первую научную работу, удостоенную Ученым советом Московского университета "Похвального отзыва", А.К.Харадзе выполнил в 1915 году будучи студентом IУ курса. С тех пор им опубликовано свыше 50 научных работ по специальным вопросам теории полиномов и теории функций, как в республиканских и всесоюзных, так и зарубежных научных журналах. Так, например, им дано своеобразное обобщение классических ортогональных полиномов, что позволило уточнить различные специальные теоремы о среднем значении; доказано несколько теорем о расположении на комплексной плоскости нулей некоторых полиномов; получена некоторая модификация формулы Кардано, дающая возможность находить рациональные корни полиномов в тех случаях, когда это не удается при помощи классической формулы Кардано; дано обобщение чисел Бернулли и Эйлера и для обобщенных чисел Эйлера доказана теорема, аналогичная известной теореме Сильвестра; введены и изучены свойства полиномов, являющихся обобщением классических полиномов Бернулли и Эйлера; установлено, что теорема Йенча о круге сходимости степенного ряда распространяется и на так называемые ряды полиномов Фабера; обобщена классическая формула Симпсона; он ввел и исследовал свойства одного класса алгебраических поверхностей, родственных семейству синус-спиралей Бельтрами; ввел понятие кривизны в смысле Аппеля и установил общую формулу для криволинейного элемента в смысле Аппеля; исследовал свойства полиномов типа Аппеля. Часть результатов этих исследований приведены в его монографии "Теоремы о среднем значении в применении к полиномам" (Тбилиси, 1947).

А.К.Харадзе принимал активное участие в общественной жизни Тбилисского государственного университета, всей нашей республики. Был редактором физико-математической серии "Трудов Тбилисского государственного университета"; членом Ученых советов механико-математического факультета Тбилисского университета и Тбилисского математического института АН Грузинской ССР; на протяжении ряда лет был президентом Математического общества Грузии;

состоял членом президиума Республиканского общества по распространению политических и научных знаний; четырежды избирался депутатом Тбилисского городского Совета депутатов трудящихся. В 1944 году ему было присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки Грузинской ССР. Советское правительство высоко оценило заслуги А.К.Харадзе перед страной. Он был награжден орденом Ленина, двумя орденами Трудового Красного Знамени, орденом "Знак почета" и тремя медалями.

Ушел от нас последний представитель старшего поколения грузинских математиков, один из организаторов нынешнего механико-математического факультета Тбилисского государственного университета. Его высокая трудовая дисциплина, исключительно добросовестное отношение к своим обязанностям, безукоризненная честность и скромность, большая культура должны служить примером для грядущих поколений.

Светлый образ А.К.Харадзе навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег и учеников.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

СОДЕРЖАНИЕ

ეროვნული ბიბლიოთეკა

CONTENTS

გამომცემლობის რედაქტორი ლ.აბუაშვილი

გადაეცა წარმოებას 31/X-77

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 24/X-77

ქაღალდის ფორმატი 60 X 84

ნაბეჭდი თაბახი 9,75

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 5,24

შეკვეთა 4161 უე 09508 ტირაჟი 300

ფასი 57 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 380028,

ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

საქ.სსრ მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380028,

კუტუზოვის 19.