თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
185

მათემატიკა • მექანიკა ასტრონომია

თბილისი — 1977

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского университета
Tbilisi University Press

Труды Тбилисского университета

Proceedings of Tbilisi University

185

МАТЕМАТИКА * МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

MATHEMATICS * MECHANICS
ASTRONOMY

Тбилиси 1977 TBILISI

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

185

მათემატიკა
მექანიკა
ასტრონომია

თბილისი 1977

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

185, 1977

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ, I

Л.А.Сулаквелидзе

§ I. В настоящей работе рассматривается вопрос о нахождении точных формул для числа представлений натуральных чисел положительно определенными тернарными квадратичными формами вида

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz, \qquad (I)$$

принадлежащими как одноклассным, так и многоклассным родам.

Если не считать большого числа работ, относящихся к представлению чисел суммами трех квадратов целых чисел, впервые этому вопросу были посвящены работы Успенского [I2] и Маасса [8]. В первой из них рассмотрены I6 и во второй - I0 диагональных тернарных квадратичных форм, принадлежащих одноклассным родам. Вопрос о представлении чисел недиагональными тернарными квадратичными формами впервые затронут Поллом [II], которым одновременно получены формулы для числа представлений чисел формами $f=x^2+y^2+16z^2$ и $g=2x^2+2y^2+5z^2-2xz-2yz$, принадлежащими одному и тому же двухклассному роду. Однако этот результат довольно частного характера и его доказательство, основанное на одном тождестве Якоби, не дает никакого подхода к вопросу о нахождении точных формул для числа представлений чисел какой-либо другой тернарной квадратичной формой.

Г.А.Ломадзе [7] с помощью теории целых модулярных форм дал общий подход к нахождению точных формул для числа представлений чисел произвольными положительными тернарными диагональными квадратичными формами, принадлежащими как одноклассным, так и многоклассным родам и, в частности, получил формулы для числа представлений чисел рядом таких форм.

В предлагаемой работе метод работы [7] распространяется на положительные тернарные квадратичные формы вида (I). При этом следует отметить, что используются некоторые соображения из работы Т.В.Вепхвадзе [I].

В настоящей первой части, являющейся вспомогательной, изучаются некоторые свойства форм вида (I) и соответствующих им тернарных сумм Гаусса. Эти результаты будут использованы в следующих частях.

§ 2. В настоящей работе будут применяться следующие обозначения: $D, N, R, j, k, q, r, s, t, \nu, \rho$ — натуральные числа (в некоторых местах, где это указано, q - целое число); u - нечетные натуральные числа; p - простые числа; $\xi, \eta, \lambda, \mu, \varkappa$ - неотрицательные целые числа; $H, a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, v, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ - целые числа; i - мнимая единица. В случае надобности эти обозначения будут сопровождаться индексами, звездочками и штрихами.

$(a_1, a_2, \dots, a_k)$ обозначает общий наибольший делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, если они одновременно не равны нулю.

$p^\lambda \| \nu$ обозначает, что $p^\lambda | \nu$, но $p^{\lambda+1} \nmid \nu$; $p^0 \| \nu$ обозначает, что $p \nmid \nu$. $\left(\frac{h}{u}\right)$ обозначает обобщенный символ Якоби; $\mathcal{J}(u) = i^{\frac{1}{4}(u-1)^2}$.

Теперь, для удобства ссылок, приведем известные определения и в виде лемм сформулируем некоторые известные результаты.

Всюду в дальнейшем, если это особо не будет оговорено, полагаем, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_s) = \sum_{j,k=1}^{s} a_{jk} x_j x_k$$

- положительно определенная квадратичная форма от s переменных.

Пусть

$$S(a,q) = \sum_{x \bmod q} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \quad \text{(простая сумма Гаусса);}$$

$$S(\mathcal{F},q) = \sum_{x_1,\dots,x_s \bmod q} e^{2\pi i \frac{\mathcal{F}}{q}} \quad \text{(кратная сумма Гаусса).}$$

Определение I. (см., напр., [2], стр.844-845). Пусть $\mathcal{A} = (a_{jk})$ - матрица определителя $\mathcal{D}$ формы $2\mathcal{F}$, $\mathcal{A}_{jk}$ - алгебраические дополнения элементов a_{jk} матрицы $\mathcal{A}$, $\delta = \left(\frac{\mathcal{A}_{11}}{2}, \dots, \frac{\mathcal{A}_{jj}}{2}, \dots, \mathcal{A}_{jk}, \dots\right)$. Тогда целое число $\mathcal{N} = \frac{\mathcal{D}}{\delta}$ называется ступенью формы $\mathcal{F}$.

Замечание. Эквивалентные квадратичные формы обладают одной и той же ступенью. В самом деле, как известно (см., напр., [10], стр.120), если Δ и N, соответственно, определитель и ступень формы $\mathcal{F}$, то $N=\prod_{p|\Delta} p^{e_{s(p)}(p)}$, где показатели $e_{s(p)}(p)$ определены в следствии замечания 6 работы [9] и они являются инвариантами относительно эквивалентности квадратичных форм.

Лемма 1 (см., напр., [9], стр.16, теорема1). 1) Если $(a,q)=1$, то

$$S(a^2\mathcal{F},q)=S(\mathcal{F},q). \tag{2}$$

2) Если $\mathcal{F}_1\sim\mathcal{F}_2 \pmod q$, то

$$S(\mathcal{F}_1,q)=S(\mathcal{F}_2,q). \tag{3}$$

3) Имеет место равенство

$$S(r\mathcal{F},rq)=r^s S(\mathcal{F},q). \tag{4}$$

4) Пусть $q=q_1q_2\cdots q_k$, где $q_1,q_2,\ldots,q_k$ попарно взаимно просты; $N_1=\frac{q}{q_1},\ldots,N_k=\frac{q}{q_k}$. Тогда

$$S(\mathcal{F},q)=\prod_{\alpha=1}^{k} S(N_\alpha\mathcal{F},q_\alpha). \tag{5}$$

Лемма 2 (см., напр., [9], стр.22, лемма 4). Пусть Δ - определитель формы $\mathcal{F}$ и $(\Delta,u)=1$. Тогда

$$S(\mathcal{F},u)=\left(\frac{\Delta}{u}\right)\mathcal{J}^s(u)u^{\frac{s}{2}}.$$

Лемма 3 (см., напр., [9], стр.21, лемма 3). Пусть $\varphi=2a'x^2+2a''xy+2a'''y^2$, $2\nmid a''$, $\Delta=4a'a'''-a''^2$. Тогда

$$S(\varphi, 2^r) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)^{r+1} 2^{r+1}.$$

Лемма 4 (см., напр., [6], стр.III, леммы 6 и 7). Пусть $q = 2^\lambda u$, $(h,q)=1$. Тогда

$$S(h,q) = \left(\frac{h}{q}\right) \mathcal{Y}(q) q^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } \lambda = 0,$$

$$= 0 \quad \text{при } \lambda = 1,$$

$$= i^{\frac{hu}{2}} \left(\frac{2}{|h|}\right)^{\lambda+1} \left(\frac{h}{u}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u)} (2q)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } \lambda > 1.$$

Лемма 5 ([I], стр.30, лемма 2I). Пусть $(h,q)=(a,q)=1, \mathcal{F} = ax^2 + 2bxy + cy^2$; $\Delta = ac - b^2$. Тогда

$$S(\mathcal{F}h, q) = S(ah, q)\, S(a\Delta h, q).$$

§ 3. В настоящем параграфе доказываются несколько лемм, которые будут применены в дальнейшем.

Во-первых заметим, что если $K \equiv \pm K_1 \pmod{4\nu}$ и $2 \nmid K$, то

$$\left(\frac{\nu}{K}\right) = \left(\frac{\nu}{K_1}\right). \tag{6}$$

Действительно, пусть $\nu = 2^\eta u$, $(K, \nu) = 1$. Тогда при $\eta = 0$

$$\left(\frac{\nu}{K}\right) = \left(\frac{u}{K}\right) = (-1)^{\frac{u-1}{2} \frac{\pm K_1 - 1}{2}} \left(\frac{\pm K_1}{u}\right) = \left(\frac{u}{K_1}\right) = \left(\frac{\nu}{K_1}\right),$$

а при $\eta > 0$

$$\left(\frac{\nu}{K}\right) = \left(\frac{2}{K_1}\right)^\eta (-1)^{\frac{u-1}{2} \frac{\pm K_1 - 1}{2}} \left(\frac{\pm K_1}{u}\right) = \left(\frac{2}{K_1}\right)^\eta \left(\frac{u}{K_1}\right) = \left(\frac{\nu}{K_1}\right).$$

Далее, при нечетных ℓ и α имеют место равенства:

$$\mathcal{Y}(\alpha)\mathcal{Y}^{-1}(\ell\alpha) = (-1)^{\frac{\ell-1}{2}\frac{\alpha+1}{2}} \mathcal{Y}(\ell), \quad \mathcal{Y}(\alpha)\mathcal{Y}(\ell\alpha) = (-1)^{\frac{\ell+1}{2}\frac{\alpha-1}{2}} \mathcal{Y}(\ell). \tag{7}$$

В самом деле, если $\ell \equiv 1 \pmod 4$, то

$$\mathcal{J}(\alpha)\mathcal{J}^{-1}(\ell\alpha)=1,\ \mathcal{J}(\alpha)\mathcal{J}(\ell\alpha)=\begin{cases}1 & \text{при } \alpha\equiv 1 \pmod 4,\\ -1 & \text{при } \alpha\equiv 3 \pmod 4;\end{cases}$$

если же $\ell \equiv 3 \pmod 4$, то

$$\mathcal{J}(\alpha)\mathcal{J}^{-1}(\ell\alpha)=\begin{cases}-i & \text{при } \alpha\equiv 1 \pmod 4,\\ i & \text{при } \alpha\equiv 3 \pmod 4,\end{cases}\quad \mathcal{J}(\alpha)\mathcal{J}(\ell\alpha)=i.$$

Лемма 6. Пусть целые числа $H, q, q_0, \alpha, \gamma$ удовлетворяют соотношению $\alpha q+\gamma H=q_0$. Тогда

$$\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn} q q_0-\operatorname{sgn}\alpha)=\operatorname{sgn} H(\operatorname{sgn} q-\operatorname{sgn}\alpha q_0).$$

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть $qq_0>0, \alpha>0$ или $qq_0<0, \alpha<0$. Тогда $\operatorname{sgn} qq_0-\operatorname{sgn}\alpha=0$;

2) Пусть $qq_0>0, \alpha<0$. Тогда $\gamma Hq=qq_0-\alpha q^2>0$. Поэтому $\operatorname{sgn}\gamma Hq=1=\operatorname{sgn}\{\gamma Hq(qq_0)\}=\operatorname{sgn}\gamma Hq_0$, т.е. $\operatorname{sgn}\gamma=\operatorname{sgn} Hq_0$.

3) Пусть $qq_0<0, \alpha>0$. Тогда $\gamma Hq<0$. Поэтому $\operatorname{sgn}\gamma Hq=-1=\operatorname{sgn}\{\gamma Hq(-qq_0)\}=-\operatorname{sgn}\gamma Hq_0$, т.е. опять-таки $\operatorname{sgn}\gamma=\operatorname{sgn} Hq_0$.

Таким образом, во всех трех случаях имеем:

$$\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn} qq_0-\operatorname{sgn}\alpha)=\operatorname{sgn} Hq_0(\operatorname{sgn} qq_0-\operatorname{sgn}\alpha)=\operatorname{sgn} H(\operatorname{sgn} q-\operatorname{sgn}\alpha q_0).$$

Лемма 7. Пусть $\mathcal{D}=(a', a'', a''')$. Тогда любое заданное число $\mathcal{N}$ будет иметь такие взаимно простые делители $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, что для любых ℓ и m, удовлетворяющих условиям $(\ell,\mathcal{N})=(m,\mathcal{N})=1$, числа $\frac{1}{\mathcal{D}}\{a'(\ell\mathcal{R}_1)^2+a''\ell\mathcal{R}_1 m\mathcal{R}_2+a'''(m\mathcal{R}_2)^2\}$ будут взаимно просты с $\mathcal{N}$.

Доказательство. Следуя Дирихле ([5], стр.205-206), разобьем все простые делители числа $\mathcal{N}$ на следующие три группы:

$$1.\ p_0\Big|\frac{a'}{\mathcal{D}},\quad p_0\Big|\frac{a'''}{\mathcal{D}},\quad p_0\nmid\frac{a''}{\mathcal{D}};$$

$$2.\ p_1\Big|\frac{a'}{\mathcal{D}},\quad p_1\nmid\frac{a'''}{\mathcal{D}};\tag{8}$$

$$3.\ p_2\Big|\frac{a'}{\mathcal{D}}.$$

Положив $\mathcal{R}_1=\prod p_1$ и $\mathcal{R}_2=\prod p_2$, получаем, что $(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=1$. Далее, так как $(\ell m,\mathcal{N})=(\ell m,\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)=1$, то, согласно (8),

$$p_0\Big|\frac{a'}{\mathcal{D}}(\ell\mathcal{R}_1)^2+\frac{a'''}{\mathcal{D}}(m\mathcal{R}_2)^2,\quad p_0\nmid\frac{a''}{\mathcal{D}}\ell\mathcal{R}_1 m\mathcal{R}_2;$$

$$p_1\Big|\frac{a'}{\mathcal{D}}(\ell\mathcal{R}_1)^2+\frac{a''}{\mathcal{D}}\ell\mathcal{R}_1 m\mathcal{R}_2,\quad p_1\nmid\frac{a'''}{\mathcal{D}}(m\mathcal{R}_2)^2;$$

$$p_2\Big|\frac{a''}{\mathcal{D}}\ell\mathcal{R}_1 m\mathcal{R}_2+\frac{a'''}{\mathcal{D}}(m\mathcal{R}_2)^2,\quad p_2\nmid\frac{a'}{\mathcal{D}}(\ell\mathcal{R}_1)^2.$$

Отсюда следует утверждаемое.

Лемма 8. Пусть

$$\mathcal{F}=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz,\quad (a,b,c,2d,2e,2f)=1.\tag{9}$$

Тогда для любых заданных ρ и $\nu=2^\lambda p_1^{\kappa_1}\dots p_t^{\kappa_t}$ найдется эквивалентная $\mathcal{F}$ форма $\mathcal{F}_0=a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2+2e_0xz+2f_0yz$, обладающая следующими свойствами:

I) $(a_0,\nu\rho)=1$;

2) $e_0 \equiv 0 \pmod{\nu\rho}$, причем, если положить $b_0 = 2^{\eta_0} p_1^{\eta_1} \cdots p_t^{\eta_t} b^*$, $f_0 = 2^{\mu_0} p_1^{\mu_1} \cdots p_t^{\mu_t} f^*$ и $c_0 = 2^{\varkappa_0} p_1^{\varkappa_1} \cdots p_t^{\varkappa_t} c^*$ $((b^* f^* c^*, \nu) = 1)$, то $\eta_0 \leq \mu_0 + 1$, $\eta_0 \leq \varkappa_0$ и $\eta_s \leq \mu_s$, $\eta_s \leq \varkappa_s$ $(s = 1, \dots, t)$.

__Замечание__. Пусть $r = (b_0, f_0, c_0, \nu)$, $b_0 = r b_1$, $f_0 = r f_1$, $c_0 = r c_1$ и $\nu = r \nu_1$. Тогда из утверждения 2) следует, что или $(b_1, \nu_1) = 1$ (в случае, когда $\eta_0 < \mu_0 + 1$ или когда $\eta_0 = \mu_0 + 1$, $\mu_0 \geq \lambda$), или $(b_1, \nu_1) = 2$, $2 \| b_1$, $2 \nmid f_1$, $2 | c_1$ (в случае, когда $\eta_0 = \mu_0 + 1$, $\mu_0 < \lambda$).

__Доказательство.__ I) Пусть Δ –определитель формы $\mathcal{F}$. Разобьем все простые множители числа $2\Delta\nu\rho$ на следующие 6 групп:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ p_1' | a,\ p_1' | b,\ p_1' | c,\ p_1' \nmid 2d; & 4.\ p_4' | a,\ p_4' \nmid b; \\
2.\ p_2' | a,\ p_2' | b,\ p_2' | c,\ p_2' \nmid 2e; & 5.\ p_5' | a,\ p_5' \nmid c; \\
3.\ p_3' | a,\ p_3' | b,\ p_3' | c,\ p_3' \nmid 2f; & 6.\ p_6' \nmid a.
\end{array} \qquad (10)
$$

Введем обозначение

$$\mathcal{P}_m = \prod p_m' \quad (m = 1, 2, \dots, 6).$$

Ввиду того, что $(\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_4 \mathcal{P}_5,\ \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_5 \mathcal{P}_6,\ \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_4 \mathcal{P}_6) = 1$, то, как известно (см., напр., [4], стр. 119, лемма 183), можно так подобрать числа h, h', h'', l, l', l'', чтобы определитель подстановки

$$
\sigma = \begin{pmatrix}
\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_4 \mathcal{P}_5, & h, & l \\
\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_5 \mathcal{P}_6, & h', & l' \\
\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_4 \mathcal{P}_6, & h'', & l''
\end{pmatrix}
$$

равнялся I.

Применяя теперь к форме $\mathcal{F}$ подстановку σ, получим

$$a_0=\mathcal{F}(\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5,\ \mathcal{P}_2\mathcal{P}_5\mathcal{P}_6,\ \mathcal{P}_1\mathcal{P}_4\mathcal{P}_6)=a(\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5)^2+b(\mathcal{P}_2\mathcal{P}_5\mathcal{P}_6)^2+$$
$$+c(\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4\mathcal{P}_6)^2+2d(\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5^2\mathcal{P}_2\mathcal{P}_6)+2e(\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4^2\mathcal{P}_5\mathcal{P}_1\mathcal{P}_6)+2f(\mathcal{P}_2\mathcal{P}_5\mathcal{P}_6^2\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4).$$

Отсюда, приняв во внимание (I0), убеждаемся, что $(a_0, 2\Delta\nu\rho)=1$.

2) Пусть форма (9) подобрана так, что $(a, 2\Delta\nu\rho)=1$.

Применим к ней подстановку (см.,напр., [3], стр.65)

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1, & v_1, & v_2\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix},$$

где v_1 и v_2, соответственно, решения сравнений

$$av_1+d\equiv 0 \pmod{2\Delta\nu\rho} \quad \text{и} \quad av_2+e\equiv 0 \pmod{2\Delta\nu\rho}.$$

Тогда получим

$$\mathcal{F}^*=ax^2+b^*y^2+c^*z^2+2d^*xy+2e^*xz+2f^*yz,$$

где $d^*=av_1+d\equiv 0 \pmod{2\Delta\nu\rho}$ и $e^*=av_2+e\equiv 0 \pmod{2\Delta\nu\rho}$.

Далее, применяя к форме $\mathcal{F}^*$ подстановку

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & \alpha, & \beta\\ 0, & \gamma, & \delta\end{pmatrix}$$

где β, δ - взаимно простые числа, удовлетворяющие условию $d^*\beta+e^*\delta=0$, а числа α, γ подобраны так, что $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, получим форму с коэффициентом при xy кратным $2\Delta\nu\rho$ и не содержащую xz. Поэтому, без ограничения общности, предположим, что

$$\mathcal{F}=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2fyz, \tag{II}$$

где $(a, 2\Delta\nu\rho)=1, \quad d\equiv 0 \pmod{2\Delta\nu\rho}$.

В форме (II) положим:

$$b=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}b_2,\quad f=2^{\beta_0}p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}f_2,\quad c=2^{\gamma_0}p_1^{\gamma_1}\cdots p_t^{\gamma_t}c_2, \tag{I2}$$

где $\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0,\ (b_2 f_2 c_2, \nu)=1$.

Введем обозначение

$$\xi_s=\min(\alpha_s,\beta_s,\gamma_s)\quad (s=0,1,\ldots,t).$$

В лемме 7 положим: $a'=b,\ a''=2f,\ a'''=c,\ \mathcal{D}=(b,2f,c)$,

$N=2p_1\cdots p_t,\ \ell=a,\ m=1$. Так как $(\ell,N)=1$, то можно так подобрать взаимно простые делители R_1 и R_2 числа N, чтобы

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D}}(ba^2R_1^2+2faR_1R_2+cR_2^2), N\right)=1. \tag{I3}$$

Из (I3) следует, что $\left(\frac{1}{\mathcal{D}}(ba^2R_1^2+2faR_1R_2+cR_2^2), p_s\right)=1$, а так как $p_s^{\xi_s}\,\|\,\mathcal{D}\ (s=1,\ldots,t)$, то и $\left(p^{-\xi_s}(ba^2R_1^2+2faR_1R_2+cR_2^2), p_s\right)=1$,

т.е.

$$p_s^{\xi_s}\,\|\, b(aR_1)^2+2faR_1R_2+cR_2^2\quad (s=1,\ldots,t). \tag{I4}$$

Из (I3) также следует, что

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D}}(b(aR_1)^2+2faR_1R_2+cR_2^2), 2\right)=1. \tag{I5}$$

Рассмотрим, теперь, два случая:

I) Пусть $\beta_0\geqslant\min(\alpha_0,\gamma_0)$. Тогда $2^{\xi_0}\,\|\,\mathcal{D}$ и, следовательно, из (I5) получаем, что $(2^{-\xi_0}(ba^2R_1^2+2faR_1R_2+cR_2^2), 2)=1$,

т.е.

$$2^{\xi_0}\| b(ak_1)^2+2fak_1k_2+ck_2^2. \qquad (16)$$

2) Пусть $\beta_0<\min(\alpha_0,\gamma_0)$. Тогда $2^{\xi_0+1}\| \mathcal{D}$. Поэтому, так же, как и в случае 1), получим, что

$$2^{\xi_0+1}\| b(ak_1)^2+2fak_1k_2+ck_2^2. \qquad (17)$$

Подберем теперь числа ω_1 и ω_2 так, чтобы $ak_1\omega_2-k_2\omega_1=1$, и применим к форме (11) подстановку

$$\tau=\begin{pmatrix}1, & -dk_1, & 0\\ 0, & ak_1, & \omega_1\\ 0, & k_2, & \omega_2\end{pmatrix}$$

определителя 1. Тогда получим

где
$$F_0=ax^2+b_0y^2+c_0z^2+2e_0xz+2f_0yz,$$

$$\begin{aligned}&b_0=-ad^2k_1^2+ba^2k_1^2+2fak_1k_2+ck_2^2,\\ &f_0=bak_1\omega_1+ck_2\omega_2-d^2k_1\omega_1+f(2k_2\omega_1+1),\\ &c_0=b\omega_1^2+2f\omega_1\omega_2+c\omega_2^2,\quad e_0=d\omega_1.\end{aligned} \qquad (18)$$

Из (11) следует, что $\Delta=a(bc-f^2)-d^2c$, где $d\equiv 0 \pmod{\Delta}$. Так как $2^{\xi_0}p_s^{\xi_s}|b$, $2^{\xi_0}p_s^{\xi_s}|f$, $2^{\xi_0}p_s^{\xi_s}|c$, то и $2^{\xi_0}p_s^{\xi_s}|d$. Следовательно, из (18) вытекает, что $p_s^{\xi_s}|f_0$ и $p_s^{\xi_s}|c_0$, а, согласно (14), также и что $p_s^{\xi_s}\|b_0$. Таким образом, $\xi_s\le\mu_s$, $\xi_s\le\varkappa_s$ и $\xi_s=\eta_s\ (s=1,\dots,t)$. Далее, если $\beta_0\geqslant\min(\alpha_0,\gamma_0)$, то, согласно (16) и (18), получаем, что $2^{\xi_0}\|b_0$, $2^{\xi_0}\|f_0$, $2^{\xi_0}|c_0$, т.е. $\xi_0=\eta_0$, $\xi_0\le\mu_0$, $\xi_0\le\varkappa_0$; если же $\beta_0<\min(\alpha_0,\gamma_0)$, то $\beta_0+1\le\alpha_0$, $\beta_0+1\le\gamma_0$ и $\xi_0=\beta_0$, т.е., согласно (12), $2^{\xi_0}\|f$, $2^{\xi_0+1}|b$, $2^{\xi_0+1}|c$, $2^{\xi_0+1}|d$.

Следовательно, согласно (I7) и (I8) получаем, что $2^{\xi_0+1} \| b_0$, $2^{\xi_0} \| f_0$, $2^{\xi_0+1} | c_0$, т.е. $\xi_0+1=\eta_0$, $\xi_0=\mu_0$, $\xi_0+1 \le \varkappa_0$.

<u>Лемма 9</u>. Пусть

$$\mathcal{F}=ax^2+by^2+cz^2+2exz+2fyz,$$

где $(a;2\Delta)=1$ и $e\equiv 0 \pmod{2\Delta}$. Далее, пусть $R=(b,f,c)$, $b=2^{\eta_0}u_1$, $f=2^{\mu_0}u_2$, $c=2^{\varkappa_0}u_3$, $\eta_0 \le \mu_0+1$, $\eta_0 < \varkappa_0$. Тогда, обозначив через N ступень формы $\mathcal{F}$, получим

$N=4\frac{\Delta}{R}$ при $\eta_0<\mu_0+1$ и при $\mu_0=0$, $\eta_0=1$,

$N=4\frac{\Delta}{2R}$ при $\eta_0=\mu_0+1$, $\mu_0>0$.

<u>Доказательство</u>. Согласно определению I, имеем

$$N=\frac{8\Delta}{\delta}, \tag{I9}$$

где $\delta=2(bc-f^2, ac-e^2, ab, 2ef, -2be, -2af)$. Так как $\Delta=a(bc-f^2)-e^2b$, то из условий леммы вытекает, что $(a,2e)=1$. Поэтому $\delta=2(f^2, ac-e^2, b, 2f)$. Очевидно, что $R|\Delta$. Следовательно,

$$R=(b,f,c)=(b,f,ac)=(b,f,ac-e^2). \tag{20}$$

Рассмотрим два случая:

I) Пусть $\eta_0<\mu_0+1$ или $\mu_0=0$, $\eta_0=1$. Тогда, согласно (I9) и (20),

$$N=4\frac{\Delta}{(f^2,ac-e^2,b,2f)}=4\frac{\Delta}{(f,ac-e^2,b)}=4\frac{\Delta}{(b,f,c)}.$$

2) Пусть $r_0=\mu_0+1,\ \mu_0>0$. Тогда из соотношений $\Delta=$ $=a(bc-f^2)-e^2b$ и $\Delta\mid e$ будет следовать, что $2^{2\mu_0}\,\|\,\Delta$ и $R^2\mid\Delta$. Отсюда получаем, что $2R\mid\Delta$. Следовательно, согласно (I9) и (20), получим

$$N=4\frac{\Delta}{(b,2f,ac-e^2)}=4\frac{\Delta}{(2b,2f,2(ac-e^2))}=4\frac{\Delta}{2(b,f,ac-e^2)}=4\frac{\Delta}{2(b,f,c)}.$$

Лемма I0. Пусть q - заданное натуральное число, $F=ax^2+$ $+by^2+cz^2+2exz+2fyz,\ (a,q)=(h,q)=1,\ e\equiv 0 \pmod q),\ \Delta=a(bc-f^2)-e^2b$.

Далее, пусть $r=(b,f,c,q),\ b=rb_1,\ f=rf_1,\ c=rc_1,\ q=rq_1$.

Тогда

I) Если $(b_1,q_1)=1$, то, положив $(\Delta,qr)=m,\ \Delta=m\Delta_1,\ qr=mq_2$, $q=2^{\lambda}u,\ q_1=2^{\lambda_1}u_1,\ q_2=2^{\lambda_2}u_2$, будем иметь

$$S(Fh,q)=\left(\frac{ah}{q}\right)\left(\frac{b_1h}{q_1}\right)\left(\frac{ab_1\Delta_1h}{q_2}\right)J(q)J(q_1)J(q_2)m^{\frac12}q^{\frac32} \quad \text{при } \lambda=0,$$

$$=0 \quad \text{при } \lambda=1, \text{ при } \lambda>1,\ \lambda_1=1 \text{ и при } \lambda>1,\ \lambda_2=1,$$

$$=i^{\frac{au}{2}h}\left(\frac{2}{a|h|}\right)^{\lambda+1}\left(\frac{ah}{u}\right)\left(\frac{b_1h}{q_1}\right)\left(\frac{ab_1\Delta_1h}{q_2}\right)i^{\frac12(1-u)}J(q_1)J(q_2)\times$$

$$\times 2^{\frac12}m^{\frac12}q^{\frac32} \quad \text{при } \lambda>1,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=0,$$

$$=i^{\frac{au+b_1u_1}{2}h}\left(\frac{2}{a|h|}\right)^{\lambda+1}\left(\frac{2}{b_1|h|}\right)^{\lambda_1+1}\left(\frac{ah}{u}\right)\left(\frac{b_1h}{u_1}\right)\left(\frac{ab_1\Delta_1h}{q_2}\right)i^{\frac12(2-u-u_1)}\times$$

$$\times J(q_2)\,2m^{\frac12}q^{\frac32} \quad \text{при } \lambda>1,\ \lambda_1>1,\ \lambda_2=0,$$

$$= i^{\frac{au+b_1u_1+ab_1\Delta_1u_2}{2}h}\left(\frac{2}{a|h|}\right)^{\lambda+1}\left(\frac{2}{b_1|h|}\right)^{\lambda_1+1}\left(\frac{2}{ab_1\Delta_1|h|}\right)^{\lambda_2+1}\times$$

$$\times\left(\frac{ah}{u}\right)\left(\frac{b_1h}{u_1}\right)\left(\frac{ab_1\Delta_1h}{u_2}\right) i^{\frac{1}{2}(3-u-u_1-u_2)} \cdot 2^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}}$$

при $\lambda>1,\ \lambda_1>1,\ \lambda_2>1;$

2) Если $(b_1,q_1)=2,\ 2\|b_1,\ 2\nmid f_1$ и $2\mid c_1$, то, положив $q=2^\lambda u$, $q_1=2^{\lambda_1}u_1,\ \Delta=2^{\varkappa}\Delta',\ (\Delta, r^2u_1)=m,\ \Delta=m\Delta_1,\ r^2u_1=mq_2$, будем иметь

$$S(\mathcal{F}h,q)=0 \qquad \text{при } \lambda=1,$$

$$= i^{\frac{au}{2}h}\left(\frac{2}{a|h|}\right)^{\lambda+1}\left(\frac{2}{a\Delta'}\right)^{\lambda_1+1}\left(\frac{ah}{u}\right)\left(\frac{2^{\lambda_1}b_1h}{u_1}\right)\left(\frac{2^{\lambda_1}ab_1\Delta_1h}{q_2}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u)}\times$$

$$\times \mathcal{I}(u_1)\mathcal{I}(q_2)2^{\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} \qquad \text{при } \lambda>1.$$

Замечание. Так как $r\mid q$ и $r^2\mid\Delta$, то $r^2\mid m$. Поэтому из равенств $rq=r\cdot 2^\lambda u=r^2\cdot 2^{\lambda_1}u_1=m\cdot 2^{\lambda_2}u_2$ следует, что $\lambda_2\leq\lambda_1\leq\lambda$.

Доказательство. Согласно (3) и (4), имеем

$$S(\mathcal{F}h,q)=S(ah,q)r^2S((b_1y^2+2f_1yz+c_1z^2)h,q_1). \qquad (21)$$

1) Пусть $(b_1,q_1)=1$. Тогда, в силу леммы 5 и (4), из (21) получим

$$S(\mathcal{F}h,q)=S(ah,q)S(b_1h,q_1)S(r^2b_1\mathcal{D}h,q_1r^2), \qquad (22)$$

где $\mathcal{D}=b_1c_1-f_1{}^2$. Так как $e\equiv 0 \pmod q$, то $\Delta\equiv ar^2\mathcal{D} \pmod{q^2}$. Поэтому, согласно (2) и лемме 3, получаем

$$S(\mathcal{F}h,q)=S(ah,q)S(b_1h,q_1)mS(ab_1\Delta_1h,q_2).$$

Согласно лемме 4, имеем

$$S(ah,q)=\left(\frac{ah}{q}\right)\mathcal{I}(q)q^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при } \lambda=0,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda = 1,$$

$$= i^{\frac{ah}{2}u}\left(\frac{2}{a|h|}\right)^{\lambda+1}\left(\frac{ah}{u}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u)}(2q)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при } \lambda > 1,$$

$$S(b_1 h, q_1) = \left(\frac{b_1 h}{q_1}\right)\mathcal{I}(q_1)\, q_1^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при } \lambda_1 = 0,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda_1 = 1,$$

$$= i^{\frac{b_1 h}{2}u_1}\left(\frac{2}{b_1|h|}\right)^{\lambda_1+1}\left(\frac{b_1 h}{u_1}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u_1)}(2q_1)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при } \lambda_1 > 1,$$

$$S(ab_1\Delta_1 h, q_2) = \left(\frac{ab_1\Delta_1 h}{q_2}\right)\mathcal{I}(q_2)\, q_2^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при } \lambda_2 = 0,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda_2 = 1,$$

$$= i^{\frac{ab_1\Delta_1 h}{2}u_2}\left(\frac{2}{ab_1\Delta_1|h|}\right)^{\lambda_2+1}\left(\frac{ab_1\Delta_1 h}{u_2}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u_2)}(2q_2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при } \lambda_2 > 1.$$

Перемножая эти суммы Гаусса, согласно (22), получаем утверждаемое.

2) Пусть теперь $(b_1, q_1) = 2$, $2\| b_1$, $2\nmid f_1$ и $2|c_1$. В силу (5), лемм 5 и 3, из (21) следует

$$S(Fh,q) = S(ah,q)\, r^2 S(b, h2^{\lambda}, u_1)\, S(b, h2^{\lambda_1}D, u_1)\left(\frac{2}{D}\right)^{\lambda_1+1} 2^{\lambda_1+1}, \tag{23}$$

где $D = b_1 c_1 - f_1^2$. Так как $2|b$, $e \equiv 0 \pmod{q}$, то $ar^2 D \equiv \Delta \pmod{2q^2}$. Поэтому $\frac{\Delta}{r^2} \equiv aD \pmod{2q_1^2}$, т.е. $D \equiv a\Delta' \pmod{8}$. Далее, так как $\left(\frac{\Delta}{r^2}, u\right) = \frac{m}{r^2}$, $2 \nmid \frac{\Delta}{r^2}$, то $2 \nmid \frac{m}{r^2}$, и поэтому $2 \nmid q_2$. Следовательно, из (23) получим

$$S(Fh,q) = S(ah,q)\, S(b, h2^{\lambda_1}, u_1)\, m\, S(ab, h2^{\lambda_1}\Delta_1, q_2)\left(\frac{2}{a\Delta'}\right)^{\lambda_1+1} 2^{\lambda_1+1}.$$

Отсюда, согласно лемме 4 следует утверждаемое.

<u>Лемма II</u>. Пусть $\mathcal{F}=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$, $(a,b,c,2d,2e,2f)=1$. Далее, пусть Δ и $\mathcal{N}$, соответственно, определитель и ступень формы $\mathcal{F}$; α, β, γ, δ - целые числа, удовлетворяющие условиям $\alpha\delta-\beta\gamma=1, \gamma\neq 0$, $\gamma\equiv 0 \pmod{\mathcal{N}}$. Тогда имеют место равенства

$$1.\ S(\mathcal{F}\alpha\,\mathrm{sgn}\,\gamma,|\gamma|)=\left(\frac{\Delta}{|\alpha|}\right)\left(\frac{-\beta\,\mathrm{sgn}\,\alpha}{|\alpha|}\right)i^{\frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha\gamma}\mathcal{J}(|\alpha|)2^{\frac{3}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

$$2.\ S(-\mathcal{F}\delta\,\mathrm{sgn}\,\gamma|\gamma|)S(\mathcal{F}\alpha\,\mathrm{sgn}\,\gamma,|\gamma|)=8\Delta|\gamma|^3. \tag{25}$$

<u>Доказательство</u>. I) Положив в лемме 8 $\nu=|\alpha\gamma|$, $\rho=2\Delta$, без ограничения общности можно предположить, что $(a,2\Delta|\alpha\gamma|)=1$, $d=0$, $e\equiv 0 \pmod{2\Delta|\alpha\gamma|}$. При этом, можно также предположить, что $\eta_0\leq\mu_0+1$, $\eta_0\leq\varkappa_0$ и $\eta_s\leq\mu_s$, $\eta_s\leq\varkappa_s$, где $2^{\eta_0}\| b$, $2^{\mu_0}\| f$, $2^{\varkappa_0}\| c$, $p_s\| |\alpha\gamma|$, $p_s^{\eta_s}\| b$, $p_s^{\mu_s}\| f$, $p_s^{\varkappa_s}\| c$ $(s=1,\dots,t)$.

Введем теперь обозначение $R=(b,f,c)$. Так как $\Delta=a(bc-f^2)-e^2b$, $e\equiv 0 \pmod{\Delta}$, то $R^2|\Delta$. Отсюда, согласно лемме 9 и условию $(\alpha,\gamma)=1$, получим

$$\gamma\equiv 0 \pmod{\frac{\Delta}{R}} \quad \text{и} \quad (\alpha,\gamma)=\left(\alpha,2\frac{\Delta}{R}\right)=(\alpha,2\Delta).$$

Поэтому, из леммы 2 следует

$$S(-\mathcal{F}\beta\,\mathrm{sgn}\,\alpha,|\alpha|)=\left(\frac{-\beta\,\mathrm{sgn}\,\alpha}{|\alpha|}\right)\left(\frac{\Delta}{|\alpha|}\right)\mathcal{J}^3(|\alpha|)|\alpha|^{\frac{3}{2}}. \tag{26}$$

Далее, согласно (5), (3) и (2), имеем

$$S(\mathcal{F}sgn\alpha\gamma,|\alpha\gamma|)=S(\mathcal{F}\alpha sgn\gamma,|\gamma|)S(-\mathcal{F}\beta sgn\alpha,|\alpha|). \tag{27}$$

Пусть теперь $r=(b,f,c,q)$. Так как $R^2|\Delta$ и $\gamma\equiv 0(mod\frac{\Delta}{R})$, то

$$R=(R,\frac{\Delta}{R})=(R,\alpha\gamma)=(b,f,c,\alpha\gamma)=r. \tag{28}$$

Заметим, что если $2^\lambda\|\,|\alpha\gamma|$ и $\eta_0=\mu_0+1$, то $\mu_0<\lambda$. В самом деле, пусть $R=2^\mu R'(2\nmid R')$. Тогда $\mu_0=\mu$ и $2^{2\mu}\|\Delta$. Поэтому, согласно лемме 9, получаем $R|\alpha\gamma|\equiv 0(mod\,2\Delta)$, т.е. $2\mu+1\leq\mu+\lambda$. Отсюда следует, что $\mu_0<\lambda$.

Положим теперь $b=rb_1$, $f=rf_1$, $c=rc_1$, $\nu=r\nu_1$ и рассмотрим два случая:

II) Пусть $\eta_0<\mu_0+1$. Тогда, согласно замечанию к лемме 8, $(b_1,\nu_1)=1$. В лемме I0 положим: $q=|\alpha\gamma|=2^\lambda u=rq_1$, $q_1=2^{\lambda_1}u_1$. Согласно лемме 9 и (28), имеем $m=(\Delta,|\alpha\gamma|r)=\Delta$, $\Delta_1=1$, $|\alpha\gamma|r=\Delta q_2$, $q_2=2^{\lambda_2}u_2$. Далее, так как $\gamma\equiv 0(mod\,4\frac{\Delta}{2})$, то $\lambda_2>1$. Отсюда, согласно замечанию к лемме I0, вытекает, что $\lambda>1$ и $\lambda_1>1$. Следовательно, согласно лемме I0, после простых выкладок, получим

$$S(\mathcal{F}sgn\alpha\gamma,|\alpha\gamma|)=i^{\frac{a+b_1+ab_1}{2}sgn\alpha\gamma}\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{\Delta}{ab_1}\right)2^{\frac{3}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Так как $(a,\Delta|\alpha\gamma|)=1$, то и $(a,\Delta)=1$; следовательно, $(a,b)=1$, ибо $\Delta=a(bc-f^2)-e^2b$. Далее, нетрудно убедиться, что $a+b_1+ab_1=(a-1)(b_1-1)+2(a-1)+2(b_1-1)+3$.

Поэтому, имеем

$$i^{\frac{a+b_1+ab_1}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}=\left(\frac{a}{b_1}\right)\left(\frac{b_1}{a}\right)\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-1}{b_1}\right)i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}. \qquad (30)$$

Из (29) и (30) следует

$$S(\mathcal{F}_{\operatorname{sgn}\alpha\gamma},|\alpha\gamma|)=\left(\frac{-\Delta a}{b_1}\right)\left(\frac{-\Delta b}{a}\right)i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}=$$

$$=i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}.$$

Из (31), (27) и (26) получаем (24).

12) Пусть теперь $\gamma_0=\mu_0+1$, $\mu_0<\lambda$. Тогда, согласно замечанию к лемме 8, имеем $(b_1,\nu_1)=2$, $b_1=2\tilde{b}(2+\tilde{b})$, $2\nmid f_1$ и $2|c_1$. В лемме 10 положим: $q=|\alpha\gamma|=2^{\lambda}u=rq_1$, $q_1=2^{\lambda_1}u_1$. Пусть $r=2^{\mu}r'(2\nmid r')$. Тогда, согласно (28), имеем $\mu_0=\mu$ и $\Delta=2^{2\mu}\Delta'$ $(2\nmid\Delta')$. Отсюда, согласно лемме 9, следует, что $4|\gamma$, т.е. $\lambda>1$. Далее, имеем: $m=(\Delta,r^2u_1)=(\Delta,2^{\lambda_1}u_1r^2)=(\Delta,|\alpha\gamma|r)$. Отсюда, согласно (28), получаем, что $m=\Delta$, т.е. $\Delta_1=1$, $r^2u_1=\Delta q_2$. Из равенств $2^{\lambda}u=2^{\mu+\lambda_1}u_1r'$ и $r'^2u_1=\Delta'q_2$, следует, что $r'\equiv uu_1 \pmod 8$ и $\Delta'\equiv u_1q_2 \pmod 8$. Следовательно, согласно лемме 10, после некоторых преобразований, получим

$$S(\mathcal{F}_{\operatorname{sgn}\alpha\gamma},|\alpha\gamma|)=i^{\frac{au}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}\left(\frac{r}{a}\right)(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{r'-1}{2}}\left(\frac{a\tilde{b}}{u_1q_2}\right)(-1)^{\frac{uu_1q_2-1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\alpha\gamma-1}{2}}\times$$

$$\times i^{\frac{1}{2}(1-u)}\mathcal{I}(u_1)\mathcal{I}(q_2)2^{\frac{3}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $q_2 \equiv u_1\Delta' \pmod 8$, то из (7) следует, что $\mathcal{I}(u_1)\mathcal{I}(q_2)=\mathcal{I}(\Delta')(-1)^{\frac{u_1-1}{2}\frac{\Delta'+1}{2}}$. Далее, $a\Delta' \equiv \mathcal{D}=b_1c_1-f_1^2 \equiv 3 \pmod 4$, т.е. $a \equiv 3\Delta' \pmod 4$. Поэтому, получаем

$$S(\mathcal{F}_{\operatorname{sgn}\alpha\gamma},|\alpha\gamma|)=\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a\tilde{b}}{\Delta'}\right)i^{\frac{u\operatorname{sgn}\alpha\gamma}{2}(a+\Delta')-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}\times \tag{31}$$

$$\times(-1)^{\frac{\Delta'+1}{2}\frac{u-1}{2}}i^{-\frac{u\Delta'}{2}+1-\frac{u}{2}}\mathcal{I}(\Delta')2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}.$$

Так как $a\Delta' \equiv 3,7 \pmod 8$, то $a+\Delta' \equiv 4,0 \pmod 8$. Поэтому

$$i^{\frac{u\operatorname{sgn}\alpha\gamma}{2}(a+\Delta')-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}=i^{\frac{u\operatorname{sgn}\alpha\gamma}{2}(a+\Delta')+\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma-2\operatorname{sgn}\alpha\gamma}=$$

$$=\left(\frac{-1}{a\Delta'}\right)\left(\frac{2}{a\Delta'}\right)i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31), получим

$$S(\mathcal{F}_{\operatorname{sgn}\alpha\gamma},|\alpha\gamma|)=\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a\tilde{b}}{\Delta'}\right)\left(\frac{-1}{a\Delta'}\right)i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}\cdot i^{\frac{1-\Delta'}{2}}\mathcal{I}(\Delta')2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}.$$

Нетрудно проверить, что $i^{\frac{1-\Delta'}{2}}\mathcal{I}(\Delta')=\left(\frac{-1}{\Delta'}\right)\left(\frac{2}{\Delta'}\right)$ и

$$\left(\frac{a\tilde{b}}{\Delta'}\right)=(-1)^{\frac{\Delta'-1}{2}\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Delta'}{a}\right)(-1)^{\frac{\tilde{b}-1}{2}\frac{\Delta'-1}{2}}\left(\frac{\Delta'}{\tilde{b}}\right)=\left(\frac{\Delta'}{a}\right)(-1)^{\frac{\tilde{b}-1}{2}\frac{a-1}{2}+\frac{\tilde{b}-1}{2}}\left(\frac{\Delta'}{\tilde{b}}\right).$$

Следовательно, получаем

$$S(\mathcal{F}\operatorname{sgn}\alpha\gamma, |\alpha\gamma|) = \left(\frac{-\tau b_1\Delta'}{a}\right)\left(\frac{-a\Delta'}{\tilde{b}}\right) 2^{\frac{3}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}} i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma} =$$

$$= \left(\frac{-b\Delta}{a}\right)\left(\frac{-a\Delta}{\tilde{b}}\right) 2^{\frac{3}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}} i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma} = 2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\alpha\gamma|^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}. \quad (33)$$

Из (33), (27) и (26) получаем (24).

2) Так как

$$S(-\mathcal{F}\delta\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|) = S(-\mathcal{F}\delta(\alpha\delta-\beta\gamma)\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|) = S(-\mathcal{F}\alpha\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|),$$

то, подставив в (24) вместо α , δ , β , γ , соответственно $-\alpha$, $-\delta$, β , γ , получим

$$S(-\mathcal{F}\delta\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|) = \left(\frac{\Delta}{|\alpha|}\right)\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\alpha}{|\alpha|}\right) i^{-\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha\gamma}\, \mathcal{J}(|\alpha|)\, 2^{\frac{3}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Перемножив (24) и (34), получим (25).

Лемма II доказана.

Пусть теперь целые числа α , β , γ , δ , q , q_0 , H , H_0 связаны между собой равенствами

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (35)$$

$$\alpha q + \gamma H = q_0,\ \beta q + \delta H = H_0, \text{ т.е. } \delta q_0 - \gamma H_0 = q,\ -\beta q_0 + \alpha H_0 = H. \quad (36)$$

Далее положим, что Δ и $\mathcal{N}$, соответственно, определитель и ступень формы

$$\mathcal{F} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz \quad (a, b, c, 2d, 2e, 2f) = 1. \quad (37)$$

Прежде чем сформулировать лемму I2, относящуюся к суммам Гаусса, заметим, что ввиду инваринтности этих сумм относительно эквивалентности квадратичных форм, согласно лемме 8, положив в ней $\nu=|qq_0|$ и $\rho=2\Delta$, без ограничения общности можно предположить, что $(a,2\Delta qq_0)=1, d=0, e\equiv 0 \pmod{2\Delta|qq_0|}$ и что $r_0\le \mu_0+1, r_0\le \varkappa_0$ и $r_s\le \mu_s, r_s\le \varkappa_s$, где $2^{r_0}\| b, 2^{\mu_0}\| f, 2^{\varkappa_0}\| c$, $p_s^{r_s}\| b, p_s^{\mu_s}\| f, p_s^{\varkappa_s}\| c \ (s=1,\dots,t)$.

Лемма I2. Пусть задана форма (37). Далее, пусть целые числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, q_0, H, H_0$, где $\gamma\ne 0$, $(q,H)=(q_0,H_0)=1$, $2^{\lambda}\| q$, удовлетворяют условиям (35), (36) и

$$\gamma\equiv 0 \pmod{2N} \quad \text{при } r_0=\mu_0+1,\ \mu_0=\lambda>0,$$
$$\gamma\equiv 0 \pmod{N} \quad \text{в остальных случаях.}$$

Тогда

$$S(-FH\,\mathrm{sgn}\,q,|q|)=\frac{|q|^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|q_0|^{\frac{3}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}}\, i^{-\frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,qq_0\gamma}\, S(-FH_0\,\mathrm{sgn}\,q_0,|q_0|)\,S(F\alpha\,\mathrm{sgn}\,\gamma,|\gamma|). \quad (38)$$

Доказательство. Пусть $R=(b,f,c)$. Так как $\Delta=a(bc-f^2)-e^2b$, $e\equiv 0 \pmod{\Delta}$, то $R^2|\Delta$. Поэтому, согласно лемме 9, получаем, что $\gamma\equiv 0 \pmod{R}$, т.е. $(\alpha,R)=1$. Далее, $(R,q_0)=(R,\alpha q)=(R,q)$. Таким образом, $(b,f,c,|q|)=(b,f,c,|q_0|)$.

Так как $\gamma\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,\frac{\Delta}{R}\right)$, то, согласно (36), имеем $(\Delta,q_0R)=(\Delta,\alpha qR)=(\Delta,qr)$. Пусть $r=(b,f,c,|q|)=(R,|q|)$. Тогда, положив $|q|=rq_1$, $R=rR_1$, будем иметь

$$(\Delta,qr)=(bc-f^2,qr)=r\left(R\frac{bc-f^2}{R^2},q_1r\right)=\frac{r(bc-f^2,qR)}{R}=\frac{r(\Delta,qR)}{R}.$$

Аналогично получим, что $(\Delta,q_0r)=\frac{r(\Delta,q_0R)}{R}$. Следовательно,

$(\Delta,|q_0|r)=(\Delta,|q|r)$.

Теперь положим, что $2^\lambda \| |q|$, и рассмотрим два случая:

I) Пусть $\eta_0<\mu_0+1$ или $\eta_0=\mu_0+1, \mu_0\geq\lambda$. Тогда, положив $b=rb_1$, согласно замечанию к лемме 8, будем иметь $(b_1,q_1)=1$. Далее, пусть

$$|q|=rq_1,\quad |q_0|=rq_{01},\quad (\Delta,|q|r)=(\Delta,|q_0|r)=m,\quad \Delta=m\Delta_1,$$

$$|q|r=mq_2,\ |q_0|r=mq_{02},\ |q|=2^\lambda u,\ q_1=2^{\lambda_1}u_1,\ q_2=2^{\lambda_2}u_2, \tag{39}$$

$$|q_0|=2^{\lambda_0}u_0,\ q_{01}=2^{\lambda_{01}}u_{01},\ q_{02}=2^{\lambda_{02}}u_{02},\ r=2^\mu r',\ m=2^\ell m',\ \Delta=2^\varkappa\Delta',$$

где $2\nmid r'm'\Delta'$. Так как $(R,q)=r$, то положив $R=rR_1$, получаем, что $r^2R_1^2|m\Delta_1$, т.е. $R_1^2|(\frac{\Delta}{r^2},q_1)\Delta_1$. Отсюда вытекает, что $R_1^2|\Delta_1$.

II) Пусть $\lambda=0$, т.е. $2\nmid|q|$. Так как $2\nmid\alpha$ и $2|\gamma$, то из (36) видно, что $2\nmid|q_0|$. Далее, из (39) следует, что $\lambda_1=\lambda_2=$ $=\lambda_{01}=\lambda_{02}=0$. Следовательно, согласно лемме I0, получаем

$$S(-\mathcal{F}H\operatorname{sgn}q,|q|)=\left(\frac{-a|H|\operatorname{sgn}qH}{|q|}\right)\left(\frac{-b_1|H|\operatorname{sgn}qH}{q_1}\right)\left(\frac{-ab_1\Delta_1|H|\operatorname{sgn}qH}{q_2}\right)\mathcal{I}(|q|)\mathcal{I}(q_1)\mathcal{I}(q_2)m^{\frac12}|q|^{\frac32};$$

$$S(-\mathcal{F}H_0\operatorname{sgn}q_0,|q_0|)=\left(\frac{-a|H_0|\operatorname{sgn}q_0H_0}{|q_0|}\right)\left(\frac{-b_1|H_0|\operatorname{sgn}q_0H_0}{q_{01}}\right)\left(\frac{-ab_1\Delta_1|H_0|\operatorname{sgn}q_0H_0}{q_{02}}\right)\mathcal{I}(|q_0|)\mathcal{I}(q_{01})\mathcal{I}(q_{02})m^{\frac12}|q_0|^{\frac32}.$$

Поэтому, в силу леммы II, имеем

$$S(-\mathcal{F}H\operatorname{sgn}q,|q|)2^{\frac32}\Delta^{\frac12}|q_0|^{\frac32}|\gamma|^{\frac32}i^{\frac32\operatorname{sgn}qq_0\gamma}=$$

$$=|q|^{\frac32}S(-\mathcal{F}H_0\operatorname{sgn}q_0,|q_0|)S(\mathcal{F}\alpha\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)AMJ,$$

где

$$\mathcal{A}=\left(\frac{a|H|}{|q|}\right)\left(\frac{b_1|H|}{q_1}\right)\left(\frac{ab_1\Delta_1|H|}{q_2}\right)\left(\frac{a|H_0|}{|q_0|}\right)\left(\frac{b_1|H_0|}{q_{01}}\right)\left(\frac{ab_1\Delta_1|H_0|}{q_{02}}\right)\left(\frac{m\Delta_1\beta}{|\alpha|}\right),$$

$$\mathcal{M}=\left(\frac{-\operatorname{sgn} q H}{|q|q_1q_2}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} q_0 H_0}{|q_0|q_{01}q_{02}}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn}\alpha}{|\alpha|}\right)\mathcal{J}^{-1}(|\alpha|)\, i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}\alpha q q_0\gamma-\operatorname{sgn}\alpha\gamma)},$$

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}(|q|)\mathcal{J}(q_1)\mathcal{J}(q_2)\left(\mathcal{J}(|q_0|)\mathcal{J}(q_{01})\mathcal{J}(q_{02})\right)^{-1}.$$

Упростим выражение для $\mathcal{A}$. Из (39) следует, что $q_1 r^2=mq_2$ и $q_{01}r^2=mq_{02}$; следовательно, $r^4 q_1 q_{01} q_2 q_{02}=m^2 q_2^2 q_{02}^2$. Поэтому

$$\mathcal{A}=\left(\frac{|H|}{|q|m}\right)\left(\frac{|H|}{|q_0|m}\right)\left(\frac{\beta m}{|\alpha|}\right)\left(\frac{\Delta_1}{q_2q_{02}|\alpha|}\right). \tag{40}$$

Покажем, что $\left(\frac{\Delta_1}{q_2q_{02}|\alpha|}\right)=1$. В самом деле

а) Если $\eta_0<\mu_0+1$ или $\eta_0=\mu_0+1$ и $\mu_0=0$, то из (36), леммы 9 и (39) следует, что $\alpha q\equiv q_0 \pmod{|\gamma|}$, т.е. $|\alpha||q|\equiv|q_0|\operatorname{sgn}\alpha q q_0 \left(\operatorname{mod} 4\frac{\Delta}{R}\right)$, следовательно, $|\alpha|q_2\equiv q_{02}\operatorname{sgn}\alpha q q_0\left(\operatorname{mod} 4\frac{\Delta_1}{R_1}\right)$. Так как $R_1^2\mid\Delta$, то отсюда следует, что и $|\alpha|q_2\equiv$ $\equiv q_{02}\operatorname{sgn}\alpha q q_0 \pmod{4R_1}$. Поэтому, согласно (6), получаем

$$\left(\frac{\Delta_1}{|\alpha|q_2q_{02}}\right)=\left(\frac{\frac{\Delta_1}{R_1}}{q_2q_{02}|\alpha|}\right)\left(\frac{R_1}{q_2q_{02}|\alpha|}\right)=1.$$

в) Если $\eta_0=\mu_0+1$ и $\mu_0>\lambda=0$, то из соотношений $2^{\mu_0}\| R$, $(R,q)=r$ и $R=rR_1$, следует, что $2R_1\mid\Delta_1$, ибо $R_1^2\mid\Delta_1$. Из (36), леммы 9 и (39), как и выше, следует

$$|\alpha|q_2\equiv q_{02}\operatorname{sgn}\alpha q q_0\left(\operatorname{mod} 4\frac{\Delta_1}{2R_1}\right). \tag{41}$$

Пусть теперь $R_1=2^{\nu_0}R_1^*(2\dagger R_1^*)$. Тогда из (4I), следует, что $|\alpha|q_2\equiv q_{02}\,sgn\,\alpha q q_0 (mod\, 4R_1^*)$. Отсюда, согласно (6) и (4I), получаем

$$\left(\frac{\Delta_1}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)=\left(\frac{\frac{\Delta_1}{2R_1}}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)\left(\frac{2R_1}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)=\left(\frac{R_1^*}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)=1,$$

ибо при $\mu_0=1$ имеем $\left(\frac{2R_1}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)=\left(\frac{4R_1^*}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)=\left(\frac{R_1^*}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)$, а при

$\mu_0>1$, согласно условию $R_1^2 \mid \Delta_1$ и (4I), имеем $|\alpha|q_2\equiv$ $\equiv q_{02}\,sgn\,\alpha q q_0\equiv\pm q_{02} (mod\, 8)$, т.е. опять-таки $\left(\frac{2R_1}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)=\left(\frac{R_1^*}{q_2 q_{02}|\alpha|}\right)$.

Таким образом, из (40) получаем

$$A=\left(\frac{|H|}{|q|}\right)\left(\frac{|H_0|}{|q_0|}\right)\left(\frac{\beta}{|\alpha|}\right)\left(\frac{|HH_0\alpha|}{m}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{|\alpha|-1}{2}}.$$

Пусть $m=v^2m^*$ (m^* -бескв.). Следовательно, так как $m \mid |q_0|r$, то $m^* \mid |q_0|$. С другой стороны, согласно (36), имеем $\alpha H_0\equiv$ $\equiv H (mod\, |q_0|)$, т.е. $|\alpha H_0|\equiv |H|\,sgn\,\alpha H H_0 (mod\, m^*)$. Поэтому

$$\left(\frac{|HH_0\alpha|}{m}\right)=\left(\frac{HH_0\alpha}{m^*}\right)=\left(\frac{sgn\,\alpha HH_0}{m^*}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{sgn\,\alpha HH_0-1}{2}}.$$

Итак

$$A=\left(\frac{|H|}{|q|}\right)\left(\frac{|H_0|}{|q_0|}\right)\left(\frac{\beta}{|\alpha|}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{sgn\,\alpha HH_0-1}{2}+\frac{m-1}{2}\frac{|\alpha|-1}{2}}.$$

Пусть $(\alpha,H)=\omega$. Согласно (36), имеем $(\alpha,H)=(\alpha q+\gamma H,H)=$ $=(q_0,-\beta q_0+\alpha H_0)=(q_0,\alpha)$. Предположим, что $|\alpha|=\omega\alpha'$, $|H|=\omega H'$,

$|q_0| = \omega q_0'$, где α', H', q_0 – попарно взаимно просты. Тогда получим

$$A = \left(\frac{\omega H'}{|q|}\right)\left(\frac{|H_0|}{q_0'\omega}\right)\left(\frac{\beta}{\omega\alpha'}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{\alpha \operatorname{sgn} HH_0 - 1}{2}} = \left(\frac{H'}{|q|}\right)\left(\frac{|qH_0|\beta}{\omega}\right)\left(\frac{|H_0|}{q_0'}\right)\left(\frac{\beta q_0'}{\alpha'}\right)\left(\frac{q_0'}{\alpha'}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{\alpha \operatorname{sgn} HH_0 - 1}{2}} \times$$

$$\times (-1)^{\frac{|q|-1}{2}\frac{\omega - 1}{2}}.$$

Из (36) следует, что $-\beta\frac{q_0}{\omega} + \frac{\alpha}{\omega}H_0 = \frac{H}{\omega}$, т.е.

$-\beta q_0' \operatorname{sgn} q_0 + \alpha H_0 \operatorname{sgn}\alpha = H' \operatorname{sgn} H$; отсюда получаем: $\beta q_0' \equiv -H' \operatorname{sgn} q_0 H \pmod{\alpha'}$ и $|H|\alpha \equiv H' \operatorname{sgn}\alpha HH_0 \pmod{q_0'}$. Далее, так как $H_0 \equiv \beta q \pmod{|H|}$, то $|H_0| \equiv \beta |q| \operatorname{sgn} H_0 q \pmod{\omega}$. Поэтому

$$A = \left(\frac{H'}{|q|\alpha' q_0'}\right)\left(\frac{\operatorname{sgn}\alpha HH_0}{q_0'}\right)\left(\frac{\operatorname{sgn} H_0 q}{\omega}\right)\left(\frac{\operatorname{sgn} q_0 H}{\alpha'}\right)(-1)^{\frac{\alpha'-1}{2}\frac{q_0'+1}{2} + \frac{m-1}{2}\frac{\alpha \operatorname{sgn} HH_0 - 1}{2} + \frac{|q|-1}{2}\frac{\omega-1}{2}}$$

Так как $4 \mid \gamma$, то из (36) следует, что $|q|\alpha' \operatorname{sgn}\alpha q \equiv q_0' \operatorname{sgn} q_0 \pmod{4H'}$.

Отсюда, согласно (6), получаем, что $\left(\frac{H'}{|q|\alpha' q_0'}\right) = 1$. Таким образом

$$A = \left(\frac{\operatorname{sgn}\alpha HH_0}{q_0'}\right)\left(\frac{\operatorname{sgn} H_0 q}{\omega}\right)\left(\frac{\operatorname{sgn} q_0 H}{\alpha'}\right)(-1)^{\frac{\alpha'-1}{2}\frac{q_0'+1}{2} + \frac{m-1}{2}\frac{\alpha \operatorname{sgn} HH_0 - 1}{2} + \frac{\alpha' q_0' \operatorname{sgn}\alpha q q_0 - 1}{2}\frac{\omega-1}{2}}$$

Отсюда, после некоторых преобразований, окончательно получим:

$$A = \left(\frac{-\operatorname{sgn} HH_0\alpha}{m}\right) \quad \text{при } |q_0| \equiv 1, |\alpha| \equiv 1,^{*}$$

$$= -\operatorname{sgn} q_0 H \left(\frac{-\operatorname{sgn} HH_0\alpha}{m}\right) \quad \text{при } |q_0| \equiv 1, |\alpha| \equiv 3, \qquad (42)$$

$$= \operatorname{sgn} HH_0\alpha \left(\frac{\operatorname{sgn} HH_0\alpha}{m}\right) \quad \text{при } |q_0| \equiv 3, |\alpha| \equiv 1,$$

$$= \operatorname{sgn} q_0 H_0\alpha \left(\frac{-\operatorname{sgn} HH_0\alpha}{m}\right) \quad \text{при } |q_0| \equiv 3, |\alpha| \equiv 3.$$

---

* Здесь все сравнения имеют место по модулю 4.

Для вывода формул (42) следует рассмотреть следующие случаи: *

a) $\omega\equiv 1, q_0'\equiv 1, \alpha'\equiv 1$ или $\omega\equiv 3, q_0'\equiv 3, \alpha'\equiv 3$, т.е. в обоих случаях $|\alpha|\equiv 1, |q_0|\equiv 1$;

b) $\omega\equiv 1, q_0'\equiv 1, \alpha\equiv 3$ " $\omega\equiv 3, q_0'\equiv 3, \alpha'\equiv 1$, " $|\alpha|\equiv 3, |q_0|\equiv 1$;

c) $\omega\equiv 1, q_0'\equiv 3, \alpha'\equiv 1$ " $\omega\equiv 3, q_0'\equiv 1, \alpha'\equiv 3$, " $|\alpha|\equiv 1, |q_0|\equiv 3$;

d) $\omega\equiv 1, q_0'\equiv 3, \alpha'\equiv 3$ " $\omega\equiv 3, q_0'\equiv 1, \alpha'\equiv 1$, " $|\alpha|\equiv 3, |q_0|\equiv 3$.

Из (39) следует, что $m|q|q_1q_2=|q|^3$ и $m|q_0|q_{01}q_{02}=|q_0|^3$. Поэтому, согласно лемме 6, получаем

$$\mathcal{M}=\left(\frac{-\operatorname{sgn} n q H}{|q|m}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} n q_0 H_0}{|q_0|m}\right)\left(\frac{\operatorname{sgn} n\alpha}{|\alpha|}\right)\mathcal{J}(|\alpha|)\, i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn} n q H-\frac{3}{2}\operatorname{sgn} n\alpha q_0 H} \tag{43}$$

Из (39) также следует, что $|q|r=q_1r^2=mq_2$ и $|q_0|r=q_{01}r^2=mq_{02}$, т.е. $q_2\equiv mq_1 \pmod 4$ и $q_{02}\equiv mq_{01} \pmod 4$. Ввиду этого, согласно (7), получаем

$$\mathcal{J}(q_1)\mathcal{J}(q_2)=(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{q_1-1}{2}}\mathcal{J}(m),$$

$$\left(\mathcal{J}(q_{01})\mathcal{J}(q_{02})\right)^{-1}=(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{q_{01}-1}{2}}\mathcal{J}^{-1}(m).$$

Следовательно, принимая во внимание, что из равенства $r^2q_1q_{01}=|qq_0|$ следуэт сравнение $q_1q_{01}\equiv|qq_0| \pmod 4$, получаем

---

* Здесь все сравнения имеют место по модулю 4.

$$J=J(|q|)J^{-1}(|q_0|)(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{q_0-1}{2}+\frac{m+1}{2}\frac{q_\alpha-1}{2}}=J(|q|)J^{-1}(|q_0|)(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{|qq_0|-1}{2}} \quad (44)$$

Теперь покажем, что произведение $AMJ=1$. Возможны следующие случаи:

A) Пусть $|q_0|\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $|\alpha|\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$. Тогда, согласно (36), $|q|\equiv |\alpha q_0| \operatorname{sgn}\alpha q q_0 \equiv \operatorname{sgn}\alpha q q_0 (\mathrm{mod}\, 4)$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H=\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_0 \alpha=1$ при $|q|\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ и $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H=-\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_0\alpha=-1$ при $|q|\equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$. Поэтому, согласно (42), (43) и (44), получаем

$$AMJ=\left(\frac{\operatorname{sgn} q q_0 \alpha}{m}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} q H}{|q|}\right) i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn} qH-\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha q_0 H} J(|q|)(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{|q|-1}{2}}=1.$$

B) Пусть $|q_0|\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, $|\alpha|\equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$. Тогда $|q|\equiv 3\operatorname{sgn}\alpha q q_0 (\mathrm{mod}\, 4)$, т.е. $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H=\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_0\alpha=1$ при $|q|\equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ и $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H=-\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_0 \alpha=-1$ при $|q|\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$. Поэтому, получаем

$$AMJ=-\operatorname{sgn} q_0 H\alpha \left(\frac{-\operatorname{sgn} q q_0\alpha}{m}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} q H}{|q|}\right)(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{|q|-1}{2}} i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn} qH-\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha q_0 H+1} J(|q|)=1.$$

C) Пусть $|q_0|\equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, $|\alpha|\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$. Тогда $|q|\equiv 3\operatorname{sgn}\alpha q q_0(\mathrm{mod}\, 4)$, т.е. $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H=\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_0\alpha=1$ при $|q|\equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ и $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H=-\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_0 \alpha=-1$ при $|q|\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$. Поэтому, получаем

$$AMJ=-\operatorname{sgn} q_0 H\alpha\left(-\frac{\operatorname{sgn} q q_0 \alpha}{m}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} q H}{|q|}\right) i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn} qH-\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\alpha q_0 H-1} J(|q|)(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{|q|+1}{2}}=1.$$

D) Пусть $|q_0| \equiv 3 \pmod 4$, $|\alpha| \equiv 3 \pmod 4$. Тогда $|q| \equiv \operatorname{sgn}\alpha q q_0 \pmod 4$, т.е. $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H = \operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_{0\alpha} = 1$ при $|q| \equiv 1 \pmod 4$ и $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H = -\operatorname{sgn} q H$ и $\operatorname{sgn} q q_{0\alpha} = -1$ при $|q| \equiv 3 \pmod 4$. Поэтому, получаем

$$\mathcal{AMJ} = -\left(\frac{-\operatorname{sgn} q q_0 \alpha}{m}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} q H}{|q|}\right) i^{\frac{1}{2}\operatorname{sgn} q H - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\alpha q_0 H} \times$$
$$\times J(|q|)(-1)^{\frac{m+1}{2}\frac{|q|+1}{2}} = 1.$$

I2) Пусть $\lambda = 1$ или $\lambda > 1$ и $\lambda_1 = 1$ или $\lambda > 1$ и $\lambda_2 = 1$. Тогда из (39), (36) и леммы 9 получим, что, соответственно, $\lambda_0 = 1$ или $\lambda_0 > 1$ и $\lambda_{01} = 1$ или $\lambda_0 > 1$ и $\lambda_{02} = 1$. Согласно лемме I0, во всех этих случаях

$$S(-\mathcal{F}H\operatorname{sgn} q, |q|) = (-\mathcal{F}H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|) = 0.$$

Рассуждая почти так же, как и в случае II), убеждаемся в справедливости равенства (38) и в случаях:

I3) $\lambda > 1,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0;$

I4) $\lambda > 1,\ \lambda_1 > 1,\ \lambda_2 = 0;$

I5) $\lambda > 1,\ \lambda_1 > 1,\ \lambda_2 > 1.$

2) Пусть $\eta_0 = \mu_0 + 1$, $\mu_0 < \lambda$. Тогда, согласно замечанию к лемме 8, будем иметь $(b_1, q_1) = 2$, $2 \| b_1$. Так как $\mathcal{R} = (b, f, c)$, $(\mathcal{R}, |q|) = r$ и $\Delta = a(bc - f^2) - e^2 b$, то $2^{\mu_0} \| \mathcal{R}$, $2^{\mu_0} \| r$ и $2^{2\mu_0} \| \Delta$. Следовательно $(\Delta, r^2 u_1) = (\Delta, r^2 2^{\lambda_1} u_1) = (\Delta, |q| r) = (\Delta, |q_0| r) = (\Delta, r^2 u_{01})$. Положим $b_1 = 2\tilde{b}(2 + \tilde{b})$,

$$\begin{gathered} |q| = r q_1,\ |q_0| = r q_{01},\ |q| = 2^{\lambda} u,\ |q_0| = 2^{\lambda_0} u_0, \\ q_1 = 2^{\lambda_1} u_1,\ q_{01} = 2^{\lambda_{01}} u_{01},\ (\Delta, r^2 u_1) = m,\ \Delta = m\Delta_1, \\ r^2 u_1 = m q_2,\ r^2 u_{01} = m q_{02},\ m = 2^{\varepsilon} m',\ \Delta = 2^{\varkappa}\Delta',\ r = 2^{\mu} r'. \end{gathered} \tag{45}$$

Так как $(\mathcal{R}, q) = r$, $\mathcal{R}^2 | \Delta$, то положив $\mathcal{R} = r\mathcal{R}_1$, получим что $r^2 \mathcal{R}_1^2 | m\Delta_1$, т.е. $\mathcal{R}_1^2 | \left(\frac{\Delta}{r^2}, u_1\right)\Delta_1$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{R}_1^2 | \Delta_1$, ибо $(\mathcal{R}_1, u_1) = 1$.

2I) Пусть $\lambda > 1$. Из (36) и леммы 9 следует, что $\lambda_0 > 1$.

Так как $(R, q) = r$, $2^{\mu_0} \| R$ и $\Delta = a(bc - f^2) - e^2 b$, то $2^{\mu_0} \| r$ и $2^{2\mu_0} \| \Delta$. Отсюда вытекает, что $2^{2\mu_0} \| m$, ибо $m = (\Delta, r^2 u_1)$.

Следовательно, $\varkappa = \eta = 2\mu = 2\mu_0$. Далее, из (45) следует, что

$$m' \equiv u_1 q_2 \equiv u_{01} q_{02} \equiv \Delta_1 \Delta' \pmod 8. \tag{46}$$

Согласно лемме 10, получим

$$S(-\mathcal{F} H \operatorname{sgn} q, |q|) = i^{\frac{au}{2} H \operatorname{sgn} q} \left(\frac{2}{a|H|}\right)^{\lambda+1} \left(\frac{2}{a\Delta'}\right)^{\lambda_1+1} \left(\frac{-aH \operatorname{sgn} q}{u}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{-2^{\lambda_1+1} \tilde{b} H \operatorname{sgn} q}{u_1}\right) \left(\frac{-2^{\lambda_1+1} a \tilde{b} \Delta_1 H \operatorname{sgn} q}{q_2}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u)} J(u_1) J(q_2) 2^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} |q|^{\frac{3}{2}},$$

$$S(-\mathcal{F} H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|) = i^{\frac{-au_0}{2} H_0 \operatorname{sgn} q_0} \left(\frac{2}{a|H|}\right)^{\lambda_0+1} \left(\frac{2}{a\Delta'}\right)^{\lambda_{01}+1} \left(\frac{-aH_0 \operatorname{sgn} q_0}{u_0}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{-2^{\lambda_{01}+1} \tilde{b} H_0 \operatorname{sgn} q_0}{u_{01}}\right) \left(\frac{-2^{\lambda_{01}+1} a \tilde{b} \Delta_1 H_0 \operatorname{sgn} q_0}{q_{02}}\right) i^{\frac{1}{2}(1-u_0)} J(u_{01}) J(q_{02}) 2^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} |q_0|^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому, согласно лемме II, получаем

$$S(-\mathcal{F} H \operatorname{sgn} q, |q|) 2^{\frac{3}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} |q_0|^{\frac{3}{2}} |\gamma|^{\frac{3}{2} \operatorname{sgn} q q_0 \gamma} =$$

$$= |q|^{\frac{3}{2}} S(-\mathcal{F} H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|) S(\mathcal{F} \alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) T J,$$

где

$$T = \left(\frac{2}{a}\right)^{\lambda+\lambda_1+\lambda_0+\lambda_{01}} \left(\frac{2}{|H|}\right)^{\lambda+1} \left(\frac{2}{|H_0|}\right)^{\lambda_0+1} \left(\frac{2}{\Delta'}\right)^{\lambda_1+\lambda_{01}} \left(\frac{a}{uu_0}\right) \left(\frac{\tilde{b}}{u_1 u_{01}}\right) \left(\frac{a\tilde{b}}{q_2 q_{02}}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{-H \operatorname{sgn} q}{uu_1 q_2}\right) \left(\frac{-H_0 \operatorname{sgn} q_0}{u_0 u_{01} q_{02}}\right) \left(\frac{2}{u_1 q_2}\right)^{\lambda_1+1} \left(\frac{2}{u_{01} q_{02}}\right)^{\lambda_{01}+1} \left(\frac{\Delta}{q_2 q_{02}}\right) \left(\frac{\Delta}{|\alpha|}\right) \left(\frac{-\beta \operatorname{sgn} \alpha}{|\alpha|}\right), \tag{47}$$

$$J = i^{\frac{u_0 H_0 \operatorname{sgn} q_0 - uH \operatorname{sgn} q}{2} a} \, i^{\frac{3}{2} \operatorname{sgn} q q_0 \gamma - \frac{3}{2} \operatorname{sgn} \alpha \gamma} \, i^{\frac{1}{2}(u_0 - u)} J(u) J(q_2) \left(J(u_{01}) J(q_{02}) J(|\alpha|)\right)^{-1}.$$

Переходим к упрощению выражений для T и $\mathcal{J}$.

Согласно (45), имеем

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{\lambda+\lambda_1+\lambda_0+\lambda_{01}}=\left(\frac{2}{a}\right)^{\lambda-\lambda_1+\lambda_0-\lambda_{01}}=\left(\frac{2}{a}\right)^{2\mu}=1,$$

$$\left(\frac{a}{uu_0}\right)\left(\frac{\tilde{b}}{u_1u_{01}}\right)\left(\frac{a\tilde{b}}{q_2q_{02}}\right)=\left(\frac{a}{r'^2u_1u_{01}}\right)\left(\frac{\tilde{b}}{u_1u_{01}'}\right)\left(\frac{a\tilde{b}}{m'^2q_2q_{02}}\right)=1,$$

$$\left(\frac{-H\operatorname{sgn}q}{uu_1q_2}\right)\left(\frac{-H_0\operatorname{sgn}q_0}{u_0u_{01}q_{02}}\right)=\left(\frac{|H|}{u}\right)\left(\frac{|H_0|}{u_0}\right)\left(\frac{|HH_0|}{m'}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn}q\,H}{uu_1q_2}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn}q_0H_0}{u_0u_{01}}\right).$$

В силу (46), имеем

$$\left(\frac{2}{\Delta'}\right)^{\lambda_1+\lambda_{01}}\left(\frac{2}{u_1q_2}\right)^{\lambda_1+1}\left(\frac{2}{u_{01}q_{02}}\right)^{\lambda_{01}+1}=\left(\frac{2}{\Delta_1}\right)^{\lambda_1+\lambda_{01}}.$$

Согласно этим соотношениям из (47) получаем

$$T=\left(\frac{2}{|HH_0|}\right)\left(\frac{|q|}{|H|}\right)\left(\frac{|q_0|}{|H_0|}\right)(-1)^{\frac{|H|-1}{2}\frac{u-1}{2}+\frac{|H_0|-1}{2}\frac{u_0-1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{m'}{|HH_{0}|}\right)(-1)^{\frac{m'-1}{2}\frac{|HH_0|-1}{2}}\left(\frac{-\operatorname{sgn}q\,H}{uu_1q_2}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn}q_0H_0}{u_0u_{01}q_{02}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2^{\lambda_1+\lambda_{01}}q_2q_{02}|\alpha|}{\Delta_1}\right)(-1)^{\frac{\Delta_1-1}{2}\frac{q_2q_{02}|\alpha|-1}{2}}\left(\frac{-p\operatorname{sgn}\alpha}{|\alpha|}\right).$$

Так как $\gamma\equiv 0\left(\bmod\frac{\Delta}{R}\right)$, то из (36) вытекает, что $|\alpha||q|\operatorname{sgn}\alpha q\equiv$ $\equiv|q_0|\operatorname{sgn}q_0\left(\bmod\frac{\Delta}{R}\right)$. Отсюда, в силу условий $|q|r=2^{\lambda_1}mq_2$, $|q_0|r=2^{\lambda_{01}}mq_{02}$, $\Delta=m\Delta_1$, $R=rR_1$ и $R_1^2|\Delta_1$, получим, что $|\alpha|\frac{|q|r}{m}\equiv\frac{|q_0|r}{m}\operatorname{sgn}\alpha qq_0\left(\bmod\frac{\Delta_1}{R_1^2}\right)$. Следовательно, согласно (45), будем иметь

$$\left(\frac{2^{\lambda_1+\lambda_\alpha} q_2 q_{02} |\alpha|}{\Delta_1}\right)=\left(\frac{\frac{|q|_2}{m}\frac{|q_0|_2}{m}|\alpha|}{\Delta_1}\right)=\left(\frac{\operatorname{sgn}\alpha q q_0}{\Delta_1}\right).$$

Таким образом,

$$T=\left(\frac{2}{|HH_0|}\right)(-1)^{\frac{|H|-1}{2}\frac{u-1}{2}+\frac{|H_0|-1}{2}\frac{u_0-1}{2}}(-1)^{\frac{m'-1}{2}\frac{|HH_0|-1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{-\operatorname{sgn} qH}{uu_1 q_2}\right)\left(\frac{-\operatorname{sgn} q_0 H_0}{u_0 u_{01} q_{02}}\right)(-1)^{\frac{\Delta_1-1}{2}\frac{q_2 q_{02}\alpha \operatorname{sgn} q q_0-1}{2}}\left(\frac{-\operatorname{sgn}\alpha}{|\alpha|}\right)A,$$

где $A=\left(\frac{|q|}{|H|}\right)\left(\frac{|q_0|}{|H_0|}\right)\left(\frac{m'}{|HH_0\alpha|}\right)\left(\frac{\beta}{|\alpha|}\right)$. Рассуждая почти так же, как и в случае II), получаем

$$\begin{aligned} A&=1 &&\text{при} \quad |H|\equiv 1 \pmod 4,\ |\alpha|\equiv 1 \pmod 4,\\ &=-\operatorname{sgn} Hq_0 &&\text{при} \quad |H|\equiv 1 \pmod 4,\ |\alpha|\equiv 3 \pmod 4,\\ &=\operatorname{sgn} qq_0\alpha &&\text{при} \quad |H|\equiv 3 \pmod 4,\ |\alpha|\equiv 1 \pmod 4,\\ &=\operatorname{sgn} qH\alpha &&\text{при} \quad |H|\equiv 3 \pmod 4,\ |\alpha|\equiv 3 \pmod 4. \end{aligned} \tag{48}$$

Так как $\Delta=a(bc-f^2)-e^2b$ и $\eta_0=\mu_0+1$, $\eta_0\leq \varkappa_0$, то $\Delta'\equiv 3a \pmod 4$. Далее, из (36) следует, что $\alpha\equiv HH_0 \pmod 4$. Поэтому, согласно (46) и (45), получим

$$(-1)^{\frac{\Delta_1-1}{2}\frac{\alpha q_{02}q_2 \operatorname{sgn} qq_0-1}{2}}=(-1)^{\frac{3am'-1}{2}\frac{HH_0m'^2 q_2q_{02}\operatorname{sgn} qq_0-1}{2}}=$$

$$=(-1)^{\frac{m'-1}{2}\frac{HH_0uu_0\operatorname{sgn} qq_0-1}{2}}(-1)^{\frac{a+1}{2}\frac{Hu\operatorname{sgn} q-H_0u_0\operatorname{sgn} q_0}{2}}= \tag{49}$$

$$-(-1)^{\frac{m'-1}{2}\frac{HH_0uu_0\operatorname{sgn} qq_0-1}{2}}i^{(a+1)\frac{Hu\operatorname{sgn} q-H_0u_0\operatorname{sgn} q_0}{2}}$$

Пусть теперь $|H_0| \equiv g|H| \pmod 8$ и $u_0 \equiv lu \pmod 8$ $(g, l = 1, 3, 5, 7)$. Тогда, согласно (45), $u_{01} \equiv lu_1 \pmod 8$ и $q_{02} \equiv lq_2 \pmod 8$. Поэтому, принимая во внимание (49), получим

$$T = \left(\frac{2}{g}\right)(-1)^{\frac{g|H|-1}{2}\frac{l-1}{2}+\frac{g-1}{2}\frac{u-1}{2}}(-1)^{\frac{u_1q_2-1}{2}\frac{l\,\mathrm{sgn}\,qq_0HH_0-1}{2}}(-1)^{\frac{u-1}{2}\frac{\mathrm{sgn}\,qq_0HH_0-1}{2}} \times$$

$$\times (-1)^{\frac{u_1q_2-1}{2}\frac{\mathrm{sgn}\,qq_0HH_0-1}{2}}\left(\frac{-\mathrm{sgn}\,q_0H_0}{l}\right) i^{(a+1)\frac{|H|u\,\mathrm{sgn}\,qH - gl|H|u\,\mathrm{sgn}\,q_0H_0}{2}}\left(\frac{-\mathrm{sgn}\,\alpha}{|\alpha|}\right)A.$$

Далее, согласно (7) и лемме 6, имеем

$$J = i^{\frac{gl|H|u\,\mathrm{sgn}\,q_0H_0 - Hu\,\mathrm{sgn}\,q}{2}a}\, i^{\frac{l-1}{2}u}(-1)^{\frac{l-1}{2}\frac{u_1q_2-1}{2}}\, i^{\frac{l-1}{2}\left(\frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,qH - \frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha q_0H\right)}(J)^{-1}(|\alpha|).$$

Следовательно, получаем

$$TJ = \left(\frac{2}{g}\right)(-1)^{\frac{l-1}{2}\frac{g|H|\mathrm{sgn}\,q_0H_0-1}{2}}(-1)^{\frac{u-1}{2}\frac{gl\,\mathrm{sgn}\,qq_0HH_0-1}{2}}\, i^{\frac{l-1}{2}} \times$$

$$\times J^{-1}(|\alpha|)\, i^{\frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,qH - \frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha q_0H}\left(\frac{-\mathrm{sgn}\,\alpha}{|\alpha|}\right)A\, i^{|H|u\frac{\mathrm{sgn}\,Hq - gl\,\mathrm{sgn}\,q_0H_0}{2}} =$$

$$= i^{-|H|\frac{g\,\mathrm{sgn}\,q_0H_0 - \mathrm{sgn}\,qH}{2}}\left(\frac{2}{g}\right)(-1)^{\frac{|\alpha|-1}{2}\frac{\mathrm{sgn}\,\alpha+1}{2}} J^{-1}(|\alpha|)\, i^{\frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,qH - \frac{3}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha q_0H} A.$$

Теперь покажем, что $TJ = 1$. С этой целью рассмотрим следующие случаи:

А) Пусть $|H| \equiv 1 \pmod 4$, $|\alpha| \equiv 1 \pmod 4$. Из (36) следует, что $\alpha H \equiv H_0 \pmod 4$. Отсюда $1 \equiv |\alpha| \equiv |HH_0|\,\mathrm{sgn}\,\alpha HH_0 \equiv g\,\mathrm{sgn}\,\alpha HH_0 \pmod 4$, т.е. $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H = \operatorname{sgn} q_0 H_0$ при $g=1,5$ и $\operatorname{sgn}\alpha q_0 H = -\operatorname{sgn} q_0 H_0$ при $g=3,7$. Поэтому, согласно (48), получаем

$$T\mathcal{J} = i^{-\frac{1}{2}(g\operatorname{sgn} q_0 H_0 + 3\operatorname{sgn}\alpha q_0 H)}\left(\frac{2}{g}\right) = 1.$$

B) Пусть $|H| \equiv 1 \pmod 4$, $|\alpha| \equiv 3 \pmod 4$. Так как $3 \equiv |\alpha| \equiv |HH_0| \operatorname{sgn}\alpha HH_0 \equiv g\operatorname{sgn}\alpha HH_0 \pmod 4$, то $\operatorname{sgn}\alpha HH_0 \equiv 3g \pmod 4$, т.е. $\operatorname{sgn} q_0 H_0 = \operatorname{sgn}\alpha q_0 H$ при $g=3,7$ и $\operatorname{sgn} q_0 H_0 = -\operatorname{sgn}\alpha q_0 H$ при $g=1,5$.

Поэтому, согласно (48), получаем

$$T\mathcal{J} = -i^{-\frac{1}{2}(g\operatorname{sgn} q_0 H_0 + 3\operatorname{sgn}\alpha q_0 H) + \operatorname{sgn}\alpha(\operatorname{sgn}\alpha q_0 H + 1) + 1}\left(\frac{2}{g}\right) = 1.$$

C) Пусть $|H| \equiv 3 \pmod 4$, $|\alpha| \equiv 1 \pmod 4$. Так как $1 \equiv |\alpha| \equiv g\operatorname{sgn}\alpha HH_0 \pmod 4$, то $\operatorname{sgn}\alpha HH_0 \equiv g \pmod 4$, т.е. $\operatorname{sgn} q_0 H_0 = \operatorname{sgn}\alpha q_0 H$ при $g=1,5$ и $\operatorname{sgn} q_0 H_0 = -\operatorname{sgn}\alpha q_0 H$ при $g=3,7$. Поэтому, согласно (48), получаем

$$T\mathcal{J} = -i^{-\frac{3}{2}(g\operatorname{sgn} q_0 H_0 + \operatorname{sgn}\alpha q_0 H) + \operatorname{sgn} qH(1 + \operatorname{sgn}\alpha q_0 H) - 1}\left(\frac{2}{g}\right) = 1.$$

D) Пусть, наконец, $|H| \equiv 3 \pmod 4$, $|\alpha| \equiv 3 \pmod 4$. Так как $3 \equiv |\alpha| \equiv g\operatorname{sgn}\alpha HH_0 \pmod 4$, то $\operatorname{sgn}\alpha HH_0 \equiv 3g \pmod 4$, т.е. $\operatorname{sgn} q_0 H_0 = \operatorname{sgn}\alpha q_0 H$ при $g=3,7$ и $\operatorname{sgn} q_0 H_0 = -\operatorname{sgn}\alpha q_0 H$ при $g=1,5$. Поэтому, согласно (48), получаем

$$T\mathcal{J} = i^{-\frac{3}{2}(g\operatorname{sgn} q_0 H_0 + \operatorname{sgn}\alpha q_0 H) + (1+\operatorname{sgn}\alpha)(1+\operatorname{sgn} qH)}\left(\frac{2}{g}\right) = 1.$$

22) Пусть $\lambda=1$. Из (36) и леммы 9 следует, что и $\lambda_0=1$. Поэтому, согласно лемме I0, получаем

$$S(-\mathcal{F}H\operatorname{sgn} q,|\alpha|)=S(-\mathcal{F}H_0\operatorname{sgn} q_0,|q_0|)=0.$$

Лемма I3. Пусть $\mathcal{F}_0=a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2+2e_0xz+2f_0yz$, $\Delta=a_0(b_0c_0-f_0^2)-e_0^2b_0=2^{\varkappa}p_1^{\ell_1}\cdots p_t^{\ell_t}$ $(\ell_1,\dots,\ell_t>0)$ – определитель формы $\mathcal{F}_0$; p_{t+1} – любое заданное нечетное простое число, удовлетворяющее условиям: $p_{t+1}\nmid\Delta$, $(a_0,2\Delta p_{t+1})=1$, $e_0\equiv 0 \pmod{4\Delta p_{t+1}}$. Далее, пусть $\mathcal{R}=(b_0,f_0,c_0)$, $\mathcal{D}=\frac{\Delta}{\mathcal{R}^2}$, $b_0=2^{\eta_0}p_1^{\eta_1}\cdots p_{t+1}^{\eta_{t+1}}\hat{b}$, $f_0=2^{\mu_0}p_1^{\mu_1}\cdots p_{t+1}^{\mu_{t+1}}\hat{f}$, $c_0=2^{\varkappa_0}p_1^{\varkappa_1}\cdots p_{t+1}^{\varkappa_{t+1}}\hat{c}$ $(\hat{b}\hat{f}\hat{c},\Delta p_{t+1})=1$, $\eta_0\le\mu_0+1$, $\eta_0\le\varkappa_0$, $\eta_s\le\mu_s$, $\eta_s\le\varkappa_s$ $(s=1,\dots,t+1)$.

Тогда, если $(h,2\Delta p_{t+1})=1$, то для любого λ будем иметь

$$1)\ S(\mathcal{F}_0h,p_s^{\lambda})=S(a_0b,p_s^{\lambda})S(b_0h,p_s^{\lambda})S(a_0b_0\mathcal{D}h,p_s^{\lambda})\ (s=1,\dots,t+1); \tag{50}$$

$$2)\ S(\mathcal{F}_0h,2^{\lambda})=S(a_0h,2^{\lambda})S(b_0h,2^{\lambda})S(a_0b_0\mathcal{D}h,2^{\lambda}) \quad \text{при } \eta_0<\mu_0+1,$$
$$=\varepsilon(\lambda)S(a_0h,2^{\lambda}) \quad \text{при } \eta_0=\mu_0+1,$$

где
$$\varepsilon(\lambda)=\left(\frac{2}{a_0\mathcal{D}}\right)^{\lambda+\eta_0}2^{\lambda+\eta_0}, \quad \text{если } \lambda>\eta_0, \tag{5I}$$
$$=2^{2\lambda}, \quad \text{если } \lambda\le\eta_0.$$

Доказательство. Случай, когда $\lambda=0$, тривиален. Поэтому, положим, что λ – натуральное число.

I) Применим к форме $\mathcal{F}_0$ подстановку

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&0&v\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

где v – решение сравнения

$$a_0v+e_0\equiv 0 \pmod{2^{\varkappa+\lambda}p_1^{\ell_1+\lambda}\cdots p_t^{\ell_t+\lambda}p_{t+1}^{\lambda}}. \tag{52}$$

Тогда получим эквивалентную $\mathcal{F}_0$ форму

$$\mathcal{F}'=a_0x^2+b_0y^2+c'z^2+2e'xz+2f_0yz, \tag{53}$$

где $e'=a_0v+e_0$, $c'=(a_0v+e_0)v+e_0v+c_0$. Так как $\Delta=a_0(b_0c_0-f_0^2)-e_0^2b_0$, то $\eta_s\le l_s\ (s=1,\dots,t+1)$ и $\eta_{t+1}=0$. Поэтому, согласно (52), $p_s^{\eta_s}\mid c'\ (s=1,\dots,t+1)$.

а) Пусть $\lambda>\eta_s$. Тогда, согласно (52), (3), (4) и лемме 5, получим

$$S(\mathcal{F}_0h,p_s^\lambda)=S(a_0h,p_s^\lambda)S((b_0y^2+2f_0yz+c'z^2)h,p_s^\lambda)=$$

$$=S(a_0h,p_s^\lambda)p_s^{2\eta_s}S(b_1h,p_s^{\lambda-\eta_s})S(b_1\mathcal{D}_1h,p_s^{\lambda-\eta_s})= \tag{54}$$

$$=S(a_0h,p_s^\lambda)S(b_1h,p_s^{\lambda-\eta_s})S(b_1p_s^{2\eta_s}\mathcal{D}_1h,p_s^{\lambda+\eta_s}),$$

где $b_1=\frac{b_0}{p_s^{\eta_s}}$, $f_1=\frac{f_0}{p_s^{\eta_s}}$, $c_1=\frac{c'}{p_s^{\eta_s}}$, $\mathcal{D}_1=\frac{b_0c'-f_0^2}{p_s^{2\eta_s}}$. Так как $\Delta=a_0(b_0c'-f_0^2)-e'^2b_0$, $p_s^\lambda\mid e$, то $a_0p_s^{2\eta_s}\mathcal{D}_1\equiv\Delta\pmod{p_s^{\lambda+\eta_s}}$.

Следовательно, согласно (2) и (3), из (54) получим

$$S(\mathcal{F}_0h,p_s^\lambda)=S(a_0h,p_s^\lambda)S(b_1h,p_s^{\lambda-\eta_s})S(a_0^2b_1\mathcal{D}_1p_s^{2\eta_s}h,p_s^{\lambda+\eta_s})=$$

$$=S(a_0h,p_s^\lambda)S(b_0h,p_s^\lambda)S\left(a_0b_0\frac{\Delta}{R^2}h,p_s^\lambda\right).$$

в) Пусть $\lambda\le\eta_s$. Тогда, согласно (3) и (4), получим

$$S(\mathcal{F}_0h,p_s^\lambda)=S(a_0h,p_s^\lambda)S((b_0y^2+2f_0yz+c'z^2)h,p_s^\lambda)=$$

$$=S(a_0h,p_s^\lambda)p_s^{2\lambda}=S(a_0h,p_s^\lambda)S(b_0h,p_s^\lambda)S(a_0b_0\mathcal{D}h,p_s^\lambda).$$

2) Если $\eta_0 < \mu_0 + 1$, то, соответствующая формула доказывается так же, как и в случае I).

Пусть теперь $\eta_0 = \mu_0 + 1$. Согласно (53) и (3), имеем

$$S(\mathfrak{F}_0 h, 2^\lambda) = S(a_0 h, 2^\lambda)\, S((b_0 y^2 + 2f_0 yz + c' z^2)h, 2^\lambda). \qquad (55)$$

Ввиду того, что $\Delta = a_0(b_0 c_0 - f_0^2) - e_0^2 b_0$, то $\varkappa = 2\mu_0$. Далее, так как $2^{\varkappa+2} | c_0$, то из (52) следует, что $2 | v$, $2^{\varkappa+3} | e_0 v$ и $2^{\varkappa+3} | (a_0 v + e_0) v$. Следовательно, $2^{\eta_0} | c'$ и $\frac{c'}{2^{\mu_0}} \equiv \frac{c_0}{2^{\mu_0}} \pmod 8$. Поэтому, если $\lambda > \eta_0$, то, согласно (4) и лемме 3, из (55) получаем

$$S(\mathfrak{F}_0 h, 2^\lambda) = S(a_0 h, 2^\lambda)\, 2^{2\mu_0} S((2b_1 y^2 + 2f_1 yz + 2c_1 z^2)h, 2^{\lambda-\mu_0}) = \qquad (56)$$
$$= S(a_0 h, 2^\lambda)\, 2^{2\mu_0} \left(\frac{2}{D'}\right)^{\lambda-\mu_0+1} 2^{\lambda-\mu_0+1},$$

где $b_1 = \frac{b_0}{2^{\mu_0+1}}$, $f_1 = \frac{f_0}{2^{\mu_0}}$, $c_1 = \frac{c'}{2^{\mu_0+1}}$, $D' = 4b_1 c_1 - f_1^2$. Отсюда следует

$$D' = \frac{b_0}{2^{\mu_0}} \frac{c'}{2^{\mu_0}} - \frac{f_0^2}{2^{2\mu_0}} \equiv \frac{b_0 c_0 - f_0^2}{2^{2\mu_0}} \equiv a_0 \frac{a_0(b_0 c_0 - f_0^2)}{2^{2\mu_0}} - a_0 \frac{e_0^2 b_0}{2^{2\mu_0}} = a_0 \frac{\Delta}{2^{2\mu_0}} =$$
$$= a_0 \frac{\Delta}{R^2} \frac{R^2}{2^{2\mu_0}} \equiv a_0 D \pmod 8.$$

Следовательно, из (56) получаем

$$S(\mathfrak{F}_0 h, 2^\lambda) = S(a_0 h, 2^\lambda) \left(\frac{2}{a_0 D}\right)^{\lambda+\eta_0} 2^{\lambda+\eta_0}.$$

Если же $\lambda \le \eta_0$, то, согласно (4), из (55) следует

$$S(\mathfrak{F}_0 h, 2^\lambda) = S(a_0 h, 2^\lambda)\, 2^{2\lambda}.$$

Замечание. Если в настоящей лемме вместо величины p_{t+1} взять единицу, то, рассуждая аналогично, вновь получим равенство (50), но для $s=1,\dots,t$. При этом, очевидно, что величины a_0, b_0 и $\mathcal{D}$ будут зависеть лишь от Δ.

Поступило 26.IУ.1976 Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

I. Т.В.Вепхвадзе, Труды Тбилисского математического института, 40, I97I, 2I-58.

2. E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen, 1959, 789-918.

3. B. W. Jones, The arithmetic theory of quadratic forms, 1950.

4. E. Landau, Vorlesungen uber Zahlentheorie. Erster Band. Leipzig, 1927.

5. П.Г.Лежен-Дирихле, Лекции по теории чисел. Перевод с немецкого А.И. и С.И.Каменецких, М.-Л., I936.

6. Г.А.Ломадзе, Труды Тбилисского государственного университета, 76, I959, I07-I59.

7. Г.А.Ломадзе, Acta Arithmetica, I9, I97I, 267-305; 387-407.

8. H. Maass, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 12, 1938, 133-162.

9. А.В.Малышев. Труды математического института им. В.А.Стеклова, 65, I962, I-2I2.

I0. А.В.Малышев, Сборник "Актуальные проблемы теории чисел", Минск, I974, II9-I37.

II. G. Pall, Canadien journal of mathematics, 1, N 4, 1949, 344-364.

I2. J. V.Uspensky, American journal of mathematics, 51, 1929, 51-60.

ლ.სულაქველიძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ დადებითი სამცვლადიანი კვადრატული ფორმებით, I

რეზიუმე

შრომის წინამდებარე პირველ ნაწილში შესწავლილია დადებითი სამცვლადიანი კვადრატული ფორმებისა და მათი შესაბამისი გაუსის ტერნარული ჯამების ზოგიერთი თვისება.

L.Sulakvelidze

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS BY POSITIVE TERNARY QUADRATIC FORMS, I

Summary

In the first part of the paper some properties of positive ternary quadratic forms and corresponding Gaussian ternary sums are studied.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

18., 1977

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ С НЕЕДИНИЧНЫМИ СЕРДЦЕВИНАМИ ЯВЛЯЮТСЯ ГРУППАМИ ФРОБЕНИУСА

Б.М.Погребинский

В заметке [I] показано: если M - такой нетривиальный собственный нормальный делитель в G, что из $M \leq H \in \Gamma_1$ следует, что H - группа Фробениуса, то либо $M \in \Gamma_1$, либо G - группа Фробениуса. Рассмотрение группы $G = Sym(3) \times C$, $|C| = 5$, показывает, что в этой теореме нельзя заменить Γ_1 на Γ_1^p, p - простое число. Ниже мы предлагаем более частный результат, в некотором смысле двойственный теореме из [2]. Напомним, что Γ_1 означает множество всех максимальных подгрупп группы G, Γ_1^p - множество тех элементов из Γ_1, порядки которых делятся на простое число p:

G_p - силовская p - подгруппа группы G; $\Omega_1(G_p) = \langle g \mid g \in G_p, g^p = 1 \rangle$;

H_G - сердцевина подгруппы H в группе G.

<u>Теорема</u>. Пусть p - наименьший простой делитель порядка непростой группы G. Если все те элементы H из Γ_1^p, для

которых $H_G \neq 1$, являются группами Фробениуса, то справедливо одно из утверждений:

а) G – группа Фробениуса.

б) $G = G_p \leftthreetimes (G_r \leftthreetimes G_q)$, $q \neq r$ – простые числа; $|G_p| = p$, $G_p G_r$ – группа Шмидта с экстраспециальной G_r, $N_G(G_p) = G_p \times Z(G_r)$; подгруппа G_q элементарна.

<u>Доказательство</u>. По теореме из [I] можно считать, что (I) $\Gamma_1^p \neq \Gamma_1$.

По той же теореме, учитывая, что $O_p(G) \notin \Gamma_1$, имеем (2) $O_p(G) = 1$.

Сначала рассмотрим случай:

I. Все элементы из Γ_1^p являются группами Фробениуса.

(3) G – группа с независимыми силовскими p – подгруппами.

Допустим противное: $\mathcal{I} \neq 1$ – максимальное силовское p – пересечение. Пусть $\mathcal{I}_0$ – наименьшая, отличная от единичной, характеристическая подгруппа в $\mathcal{I}$, $N = N_G(\mathcal{I}_0)$. Пусть $N \leq L \in \Gamma_1^p$. По известной лемме Фробениуса L не p – замкнута. Так как L является группой Фробениуса, то L_p – циклическая или обобщенная группа кватернионов. Тогда $|\mathcal{I}_0| = p$, $L_p \in Syl_p(G)$, и по предположению $|L_p| > p$. Но тогда G – неразрешима, так что $p = 2$. По теореме Брауэра-Судзуки [3] $\Gamma_1 = \Gamma_1^2$; противоречие с (I).

(4) Группа G разрешима.

Допустим противное. Тогда по (3) и теореме Судзуки [4] в G найдется такой нормальный делитель G_1 нечетного индекса, что $O(G) < G_1$ и $G_1 / O(G) \cong PSL(2,q)$, $Sz(q)$ или $PSU(3,q)$

q – степень 2. Предположим, что $O(G) \neq 1$, и пусть $G_2 \in Syl_2(G)$

Так как $G_2 O(G)$ разрешима, то по той же теореме Судзуки

$G_2 O(G) = G_2 \times O(G)$. Пусть $C = C_G(O(G))$. Если $C < G$, то, беря элемент из Γ_1, содержащий C, видим, что C - 2 - замкнутая подгруппа, а это влечет разрешимость G, противоречие. Итак, $C = G$. Пусть $G_2 \leq M \in \Gamma_1$. Тогда $G = MO(G)$, и снова получаем противоречие с предположением о неразрешимости G. Итак, $O(G) = 1$. $G_1 < G$, ибо по условию G – непростая. Но тогда G_1 – неполупростая, так как является нормальным делителем группы Фробениуса; противоречие, завершающее доказательство пункта (4).

(5) G - группа Фробениуса.

Так как G разрешима, то G_p элементарна. Отсюда легко следует, что $|G_p| = p$. Но тогда G имеет нормальное p-дополнение. Положим $N = N_G(G_p)$. Пусть $N \leq L \in \Gamma_1^p$. $N \neq L$, так как L - группа Фробениуса, а $Z(N) \geq G_p$. Но тогда L - не p-замкнута, так что N совпадает с дополнительным множителем L. Предположим, что $\pi(G) = \pi(N) \cup \{q_1, \ldots, q_n\}$ с $n > 1$. Пусть $Q_i \in Syl_{q_i}(G)$, $1 \leq i \leq n$, таковы, что подгруппы $N, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ – попарно перестановочны. Если $NQ_i \leq L_i \in \Gamma_1^p$, то N по ранее доказанному нормализует Q_i. Но тогда N нормализует подгруппу $H = Q_1 Q_2 \ldots Q_n$, при этом любой элемент из $N - \{1\}$ индуцирует на Q_i регулярный автоморфизм, $1 \leq i \leq n$. Пусть $x \in N - \{1\}$, $h = a_1 \ldots a_n, a_i \in Q_i$ и $h^x = h$. Тогда $a_i^x = a_i$. Это дает $a_i = 1$ для всех $1 \leq i \leq n$, то есть $h = 1$. Итак, G – группа Фробениуса с дополнительным множителем N.

В дальнейшем считаем, что $G = NG_q$. Если $N = G_p$, то, ввиду (3), G - группа Фробениуса. Пусть $N \neq G_p$. Тогда $|\pi(G)| > 2$. Так как G не содержит элементов порядка pq, $G_p G_q$-

группа Фробениуса (с дополнительным множителем G_p). Допустим, что $|\pi(G)| > 3$ и пусть $r \in \pi(G)-\{p,q\}$, $G_p G_r G_q \le W \in \Gamma_1^p$. Тогда подгруппа $G_p \times G_r$ действует на G_q регулярно, так что, ввиду произвола в выборе r, оказывается, что G – группа Фробениуса с дополнительным множителем G_q. Итак, пусть $|G:G_pG_q|$ – степень простого числа r. Подгруппа $N = G_p \times G_r$ – циклическая ($r > 2$), $N_G(G_r) = N$; поэтому по теореме Бернсайда G_q нормальна в G. Пусть $a \in G_r - \{1\}$ и q делит $|C_G(a)|$. Если $C_G(a) \le L \in \Gamma_1^p$, то, ввиду $|\pi(G)| = 3$, видим, что L – не группа Фробениуса; противоречие, завершающее доказательство пункта (5).

$\underline{II}$ В Γ_1^p имеется элемент H с $H_G = I$.

$\underline{II}$ а. Группа G разрешима.

Пусть M – минимальный нормальный делитель группы G. Тогда $G = H \leftthreetimes M$. Ввиду (2), $|M| = q^\alpha$, $q \ne p$. Из существования H следует, что $C_G(M) = M$, поэтому $|G_p| = p$.

Возвратимся к представлению $G = H \leftthreetimes M$, $H \in \Gamma_1^p$, $H_G = 1$. Очевидно, $M = F(G)$. Если $|\pi(G)| > 3$, то перебор всех тех элементов из Γ_1^p, которые содежат $G_p G_q$, показывает, что G_q в них инвариантна, а так как таких элементов в Γ_1^p не менее двух, $M = G_q$. Так как $C_G(M) = M$, то все элементы из $H - \{1\}$ действуют на G_q регулярно, так что G -группа Фробениуса с инвариантным множителем G_q. Итак, пусть $|\pi(G)| = 3$, $G = G_p G_q G_r$ (множители G_p, G_r, G_q попарно перестановочны). Пусть $M < G_q$. Тогда $M G_p G_r$ – группа Фробениуса с дополнительным множителем $G_p G_r$. Допустим, что $|N_G(G_p)|$ делится на q. Если $G_p G_q \le L \in \Gamma_1^p$, то L содержит элемент порядка pq и не является группой Фробениуса, противоречие. Итак, q не делит $|N_G(G_p)|$, т.е. $N_G(G_p) = G_p \times G_r$. По теореме Бернсайда тогда G_q инвариантна в G, противоречие (ибо $M = F(G) < G_q$). Пусть теперь $M = G_q$. Тогда $G_p G_r \in \Gamma_1^p$, и можно считать $H = G_p G_r$. Если R – собственная G_p-допустимая подгруппа в G_r, $G_p R G_q \leq L \in \Gamma_1^p$, то L – группа Фробениуса с инвариантным множителем G_q. Поэтому R циклическая, при этом $G_p R = G_p \times R$. В частности, $\Phi(G_r)$ циклическая. Пусть G_r неабелева. Тогда $G_r = Z \cdot \Omega_1(G_r)$, где Z циклическая, $\Phi(G_r) \leq Z(G_r)$ [5]. Подгруппа $\Omega_1(G_r)$ нециклическая, поэтому по доказанному выше $\Omega_1(G_r) = G_r$. Так как $cl(G_r) = 2 < r$, то G_r – регулярная группа; поэтому $\exp \Omega_1(G_r) = \exp(G_r) = r$. $G_p G_r$ ненильпотентна, ибо не все подгруппы в G_r циклические. Но тогда $G_p G_r$ – группа Шмидта с экстраспециальной G_r, $N_G(G_p) = G_p \times Z(G_r)$.

Покажем, что G – группа Фробениуса, если G_r циклическая. Пусть $|G_r| > r$. Беря в G подгруппу индекса r, видим, что она группа Фробениуса, так что элемент порядка r из G_r действует на G_q регулярно. Поэтому G – группа Фробениуса. Итак, можем считать, что $|G_r| = r$. Из $C_G(G_q) = G_q$ следует, что $N_G(G_p) = G_p \times G_r$. Так как $N_G(G_r) = G_p \times G_r$, то $G_r G_q$ –группа Фробениуса с дополнительным множителем G_r, так что $G_p G_r$ действует на G_q регулярно.

Пусть, наконец, G_r абелева, нециклическая. Так как $N_G(G_p) > G_p$, то по известному результату Фиттинга [6] $G_r = C \times T$, где $C = C_{G_r}(G_p)$, $T = [G_p, G_r]$. Но тогда $G_p T G_q$ – группа Фробениуса. Это дает $G_p T = G_p \times T$, противоречие, ибо $C \cap T = 1$.

В случае $|\pi(G)| = 2$ легко видеть, что G - группа Фробениуса с дополнительным множителем $\cdot G_p$.

$\underline{II}$ б. Группа G неразрешима.

Пусть M - минимальный нормальный делитель в G. Тогда $G = H \leftthreetimes M$, $C_H(M) = I$. Рассматривая тот элемент из Γ_1^2, который содержит $M G_2$, видим, что G_2 - обобщенная группа кватернионов. По теореме Брауэра-Судзуки [3] $\Gamma_1 = \Gamma_1^2$, что противоречит (I). Теорема доказана.

<u>Следствие</u> I. Пусть p - наименьший простой делитель составного порядка группы G. Если все элементы множества Γ_1^p являются группами Фробениуса, то либо G - группа Фробениуса, либо $G \cong PSL(2, 2^r)$, $Sz(2^q)$, $q > 2$ и r - простые числа.

<u>Следствие</u> 2. Пусть G - непростая группа. Если все элементы H из Γ_1, для которых $H_G \neq 1$, являются группами Фробениуса, то и G - группа Фробениуса.

Замечание, Рассмотрение группы Sym (4) показывает, что в теореме наименьший простой делитель нельзя заменить произвольным простым делителем $|G|$.

Поступило I5.Ш.I976

Новочеркасский
политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

I. Б.М.Погребинский, Всесоюзный алгебраический симпозиум, Гомель, I975, 5I-52.

2. Б.М.Погребинский, Сообщения АН ГССР, 77, №I, I975, 2I-24.

3. R. Brauer, M.Suzuki, On finite groups of even order, whose 2-sylow

group is a quaternion group. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45, N 12, 1959, 1757-1759.

4. M.Suzuki, Finite groups of even order, in which sylow 2-groups are independent, Ann. Math., 80, 1964, 58-77.

5. Я.Г.Беркович, ДАН СССР, 182, № 2, 1968, 247-250.

6. Н.Джекобсон, Теория колец, Москва, ИЛ, 1947.

ბ.პოგრებინსკი

სასრული ჯგუფები, რომელთა ყველა არაერთეულოვანი ბირთვის მქონე მაქსიმალური ქვეჯგუფი ფრობენიუსის ჯგუფია

რ ე ზ ი უ მ ე

მოცემულია კლასიფიკაცია იმ ჯგუფების, რომელთა ნებისმიერი მაქსიმალური ქვეჯგუფი $H \in \Gamma_1^p$ /p-მინიმალური გამყოფია /G// და $H_G \neq 1$, წარმოადგენს ფრობენიუსის ჯგუფს. გარკვეული აზრით ორადული შედეგი დამტკიცებულია ადრე ავტორის მიერ /საქ.სსრ მოამბე, 77/1975/, 21-24/

B.Pogrebinski

FINITE GROUPS IN WHICH ALL MAXIMAL SUBGROUPS WITH NON-IDENTITY CORES ARE FROBENIUS GROUPS

S u m m a r y

The paper presents a full classification of whose any maximal subgroup $H \in \Gamma_1^p$ (P is the smallest prime divisor of the order G) and $H_G \neq 1$ it follows that H is a Frobenius group. The dual result was proved by the author earlier (Soobsh.Akad. Nauk Gruz. SSR, 77 (1975), 21-24).

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

185, 1977

О НЕРАВЕНСТВЕ УРЫСОНА-МЕНГЕРА

А.Ч.Чигогидзе

Целью настоящей работы является уточнение классического неравенства Урысона-Менгера $\dim(A\cup B)\leq \dim A+\dim B+1$ для любых множеств A, B, лежащих в наследственно нормальном пространстве. Как известно, это неравенство, доказанное П.С.Урысоном и К.Менгером для пространств со счетной базой, потом было обобщено Ю.М.Смирновым для наследственно нормальных [I], а А.В.Зарелуа - для произвольных нормальных пространств [2].

Пусть X - вполне регулярное топологическое пространство. Систему всех конуль-множеств пространства X обозначим через $Z(X)$. Рассмотрим теперь любое подпространство X_1 пространства X. Через $Z(X_1,X)$ обозначим систему тех конуль-множеств подпространства X_1, каждое из которых есть пересечение некоторого элемента системы $Z(X)$ с множеством X_1. Ясно, что $Z(X_1,X)\subseteq Z(X_1)$.

<u>Замечание I</u>. Если X_1 - подпространство вполне регулярного пространства X такого, что каждая непрерывная функция

$f_1: X_1 \to [0,1]$ может быть непрерывно продолжена до функции $f: X \to [0,1]$, то имеет место равенство $Z(X_1, X) = Z(X_1)$. Это равенство выполняется и в том случае, когда X – совершенно нормальное пространство, а X_1 – любое подпространство пространства X.

Определение. Пусть X_1 – нормальное подпространство нормального пространства X. Скажем, что размерность пространства X_1 относительно пространства X не больше числа n, если в любое конечное покрытие пространства X_1 множествами из системы $Z(X_1, X)$ можно вписать конечное, открытое / в X_1 / покрытие пространства X_1 кратности $\leq n+1$. Этот факт запишем так: $\dim(X_1, X) \leq n$.

Замечание 2. Из замечания I следует, что $\dim(X_1, X) = \dim X_1$, где X_1 – замкнутое подпространство нормального пространства X. Это же равенство верно, если X – совершенно нормально, а X_1 – любое подпространство пространства X. Отметим также, что для любого нормального пространства имеем $\dim(X, X) = \dim X$.

Как известно, размерность $\dim$ не обладает свойством полной монотонности даже в наследственно нормальных пространствах [3]. В связи с этим приобретает интерес

Теорема I. Если X_1 – нормальное подпространство нормального пространства X, то $\dim(X_1, X) \leq \min\{\dim X_1, \dim X\}$.

Доказательство. Неравенство $\dim(X_1, X) \leq \dim X_1$ очевидным образом следует из данного выше определения. Остается доказать неравенство $\dim(X_1, X) \leq \dim X$. Пусть $\omega = \{O_1, \dots, O_s\}$ – конечное покрытие пространства X_1 множествами из системы $Z(X_1, X)$.

В силу определения системы $Z(X_1, X)$, для каждого O_i $(i=\overline{1,s})$ найдется конуль-множество U_i в X такое, что $O_i = U_i \cap X_1$. Ясно, что $X_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} U_i \equiv U$. Множество U, как конечное объединение конуль-множеств U_i, само является конуль-множеством в X и по одной лемме Веденисова представляет собой множество типа F_σ в X; следовательно, $\dim U \leq \dim X$. Итак, в покрытие $\{U_1, \dots, U_s\}$ множества U можно вписать конечное, открытое в U (а значит и в X) покрытие $\{V_1, \dots, V_k\}$ множества U кратности $\leq \dim X + 1$.

Таким образом, покрытие $\{V_1 \cap X_1, \dots, V_k \cap X_1\}$ пространства X_1 открыто в X_1, вписано в покрытие ω и имеет кратность $\leq \dim X + 1$. Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы I и замечания 2 следует известная теорема Чеха о монотонности размерности $\dim$ в совершенно нормальных пространствах.

В дальнейшем нам понадобятся несколько вспомогательных предложений.

Лемма I. Пусть нормальное пространство X_1 является подпространством нормального пространства X. Если существует гомеоморфное отображение пространства X на пространство Y, переводящее пространство X_1 в подпространство Y_1 пространства Y, то $\dim(X_1, X) = \dim(Y_1, Y)$.

Лемма 2. Пусть нормальные пространства X_1, X', X таковы, что $X_1 \subseteq X' \subseteq X$ и $Z(X', X) = Z(X')$, тогда $\dim(X_1, X) = \dim(X_1, X')$.

Доказательство этих лемм не представляет затруднений.

Как известно, бикомпактное расширение пространства X – это пара (Y, c), где Y – бикомпакт, а c – гомеоморфное вложение пространства X в бикомпакт Y такое, что $\overline{c(X)} = Y$.

Лемма 3. Если нормальное пространство X_1 является подпространством нормального пространства X, то $\dim(X_1, X) = \dim(\beta(X_1), \beta X)$, где $(\beta X, \beta)$ – Стоун-Чеховское расширение пространства X.

Доказательство. Существует гомеоморфное отображение $\beta: X \to \beta(X) \subset \beta X$. Из леммы I следует, что $\dim(X_1, X) = \dim(\beta(X_1), \beta(X))$. В силу замечаний I, 2 и леммы 2, имеем $\dim(X_1, X) = \dim(\beta(X_1), \beta(X)) = \dim(\beta(X_1), \beta X)$, ч. т.д.

Приведем несколько примеров.

I. Пусть пространство X_1 является подпространством наследственно нормального пространства X и пусть имеет место неравенство $\dim X_1 > \dim X$. Из теоремы I следует, в частности, что $\dim X \geq \dim(X_1, X)$. Таким образом, существует такое наследственно нормальное пространство X и такое его подпространство X_1, что $\dim(X_1, X) < \dim X_1$.

II. Покажем, что существуют гомеоморфные наследственно нормальные пространства X и Y, лежащие в одном и том же бикомпакте Z и имеющие различные размерности относительно этого бикомпакта.

Рассмотрим наследственно нормальные пространства X_1 и X из примера I. Обозначим вес пространства X через τ. Ясно, что вес пространства X_1 не больше чем τ. Таким образом всякое бикомпактное расширение как пространства X, так и пространства X_1 можно считать подпространством тихоновского кирпича веса 2^τ. Тогда в обозначениях леммы 3 имеем, что $\dim(\beta(X_1),\beta(X)) = \dim(\beta(X_1),\beta X)$. Но так как бикомпакт βX замкнут в бикомпакте I^{2^τ}, то, по замечанию 2, $\dim(\beta(X_1),\beta(X)) = \dim(\beta(X_1), I^{2^\tau})$.

С другой стороны, если $(\alpha X_1, \alpha)$ – Стоун-Чеховское расширение пространства X_1, то имеем $\dim(\alpha(X_1),\alpha X_1) = \dim(\alpha(X_1), I^{2^\tau})$. Но $\dim(\alpha(X_1),\alpha X_1) = \dim \alpha(X_1)$ по замечанию 2. α –гомеоморфизм, следовательно, $\dim\alpha(X_1) = \dim X_1 > \dim X = \dim\beta(X) \geq \dim(\beta(X_1),\beta(X))$. В заключение получим, что $\dim(\beta(X_1), I^{2^\tau}) < \dim(\alpha(X_1), I^{2^\tau})$. Пространства $\alpha(X_1)$ и $\beta(X_1)$, гомеоморфные пространству X_1, следовательно, сами являются гомеоморфными. Пример построен.

<u>Замечание 3</u>. С использованием примера II можно показать, что существует пара нормальных пространств X, Y $(X \subseteq Y)$, для которых $\dim(X,Y) < \min\{\dim X, \dim Y\}$.

Допустим, что такой пары не существует; тогда для любых нормальных пространств имели бы $\dim(X,Y) = \min\{\dim X, \dim Y\}$. Следовательно, это равенство выполнилось бы и для нормальных пространств из примера II. Итак, должны иметь

$$\dim(X,Z) = \min\{\dim X, \dim Z\}$$
$$\dim(Y,Z) = \min\{\dim Y, \dim Z\}.$$

Но по построению пространства X и Y гомеоморфны, следовательно, $\dim(X,Z) = \dim(Y,Z)$. Противоречие. Таким образом, существует пара нормальных пространств, для которых $\dim(X,Y) < \min\{\dim X, \dim Y\}$.

В [I] Ю.М.Смирнов для любых множеств A и B, лежащих в наследственно нормальном пространстве, доказал неравенство

$$\dim(A \cup B) \leq \dim A + \dim B + 1. \qquad (I)$$

Следуя схеме доказательства этого неравенства [I] , можно показать, что имеют место следующие предложения.

Теорема 2. Пусть множество M лежит в наследственно нормальном пространстве X . Для того, чтобы было $\dim(M,X) \leq n$, необходимо и достаточно, чтобы в любую конечную систему $\omega = \{G_1, \dots, G_s\}$ конуль-множеств в X , покрывающую множество M , можно было /комбинаторно/ вписать систему $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$ кратности $\leq n+1$ открытых в X множеств, также покрывающую множество M .

Теорема 3. Для любых множеств A и B , лежащих в произвольном наследственно нормальном пространстве X , имеет место неравенство

$$\dim(A \cup B, X) \leq \dim(A, X) + \dim(B, X) + 1.$$

В обозначениях теоремы 3 допустим, что $A \cup B = X$. Тогда, по замечанию 2, имеем неравенство

$$\dim(A \cup B) \leq \dim(A, X) + \dim(B, X) + 1. \qquad (2)$$

Из теоремы I следует, что правая часть неравенства (2) не больше правой части неравенства (I); более того, пример I показывает, что оценка, полученная неравенством (2), может быть и строго точнее оценки, полученной неравенством (I).

Замечание 4. Заметим, что если X – совершенно нормальное пространство, то по замечанию 2 правые части неравенств (I) и (2) в точности совпадают.

Поступило 25.IУ.1976.

Кафедра
алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю.М.Смирнов, Матем. сб., 29/7I/:I, 195I.

2. А.В.Зарелуа, Матем. сб., т.62, № 3, 1963.

3. В.В.Филиппов, ДАН СССР, 209, № 4, 1973.

ა.ჩიგოგიძე

ურისონ-მენგერის უტოლობის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში შემოტანილია ფარდობითი განზომილების ახალი სახეობა $\dim(X_1,X)$. ამ განზომილებისათვის დამტკიცებულია უტოლობა $\dim(A\cup B)\leq\dim(A,X)+\dim(B,X)+1$, სადაც A და B მემკვიდრეობით ნორმალური X სივრცის ნებისმიერი ქვესიმრავლეებია. მოყვანილია მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ აღნიშნულ ფორმულას აქვს უპირატესობა კლასიკურ უტოლობასთან $\dim(A\cup B)\leq \dim A+\dim B+1$, რადგან უტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეებს შორის სხვაობა ამ მაგალითში ნაკლებია ვიდრე კლასიკურ უტოლობაში.

A.Chigogidze

ON THE URYSOHN-MENGER INEQUALITY

S u m m a r y

The paper introduces a new variety of the relative dimension $\dim(X_1,X)$. The inequality $\dim(A\cup B)\leq\dim(A,X)+\dim(B,X)+1$ is proved for any subsets A,B of the hereditary normal space X. An example is given showing that the indicated formula has an advantage over the one $\dim(A\cup B)\leq\dim A+\dim B+1$, for the difference between the right and left sides in the example is less than in the classical inequality.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

185, 1977

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ГАУССОВСКИМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССАМ

С.Г.Каландаришвили

Пусть $\xi_1(t)$, $t\in T=[0,\tau]$, $\tau<\infty$ - измеримый гауссовский случайный процесс с нулевым средним и непрерывной корреляционной функцией $R(t,s)$, $(t,s)\in T\times T$. $\xi_2(t)=a(t)+\xi_1(t)$, где $a(t)$ - некоторая непрерывная функция на T. В этих ограничениях почти все выборочные функции $\xi(\omega,\cdot)=\xi(\omega,t)$ от $t\in T$ принадлежат гильбертову пространству $L_2(T)$.

Пусть μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} - вероятностные меры на $L_2(T)$, соответствующие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Согласно [I], для эквивалентности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее соотношение:

$$a(t)=\int_T \phi(t,u)x(u)du \qquad (I)$$

где $x(u)$, $u\in T$ принадлежит пространству $L_2(T)$, а $\phi(t,u)\in L_2(T\times T)$ - положительно определенная функция, которая удовлетворяет следующему соотношению:

$$R(t,s)=\int_T \phi(t,u)\phi(u,s)du. \qquad (2)$$

В том случае, когда процесс $\xi_1(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ является стационарным гауссовским процессом, можно обойтись без уравнений (I) и (2). Например, если процесс $\xi_1(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ обладает спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda\in(-\infty,+\infty)$, которая для достаточно больших λ удовлетворяет условию $f(\lambda)\asymp\asymp\lambda^{-2n}$, $n>0$, то имеет место (см. [I]) следующая

Теорема I. Для эквивалентности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} необходимо и достаточно, чтобы функция $a(t)$ имела на T абсолютно непрерывную $(n-1)$-ю производную $a^{(n-1)}(t)$ такую, что

$$\int_T [a^{(n)}(t)]^2 dt < \infty. \tag{3}$$

Существуют и другие эффективные результаты (см. [I], [2]), которые не требуют решения интегральных уравнений типа (I) и (2). Мы постараемся распространить результаты такого типа на случаи, когда процесс $\xi_1(t)$, $t\in T$ – нестационарный. Для этого заметим следующий факт:

Пусть (H, B) – измеримое гильбертово пространство и $\tau_j=\mu_j*\nu_j$, $j=1,2$, где μ_j и ν_j, $j=1,2$ – гауссовские меры на (H, B); тогда из определения свертки мер следуют следующие предложения:

а) Если $\nu_1\sim\nu_2$ и $\mu_1\sim\mu_2$, то $\tau_1\sim\tau_2$.

б) Если $\nu_1\sim\nu_2$ и $\tau_1\perp\tau_2$, то $\mu_1\perp\mu_2$.

Если функция $R(t,s)$ имеет вид $R(t,s)=B(t-s)+R_1(t,s)$, где $R_1(t,s)$ – непрерывная положительно определенная функция на $T\times T$, а функция $B(t)$, $t\in[-\tau,\tau]$ допускает такое продолжение на $(-\infty,+\infty)$, что

$$B(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda,$$

где $f(\lambda)$, $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ - положительная интегрируемая функция, тогда имеет место следующее представление:

$$\mu_{\eta_1}=\mu_{\xi_1} * \nu_1, \tag{4}$$

где μ_{η_1} соответствует гауссовскому стационарному процессу $\eta_1(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$, ν_1 - тоже гауссовская мера на $L_2(T)$. Заметим, что если имеет место (4), то имеет место и следующее представление:

$$\mu_{\xi_2}=\mu_{\eta_2} * \nu_1, \tag{5}$$

где μ_{η_2} соответствует гауссовскому процессу $\eta_2(t)=a(t)+\eta_1(t)$, $t\in T$ на $L_2(T)$.

Из предложения а) следует, что достаточные условия эквивалентности мер μ_{η_1} и μ_{η_2} являются достаточными и для эквивалентности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}. Если наложим на $f(\lambda)$ некоторые условия, получим достаточные условия эквивалентности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}, аналогичные теореме I.

Следующая теорема дает условия, при выполнении которых имеет место следующее соотношение:

$$\mu_{\psi_1}=\mu_{\xi_1} * \nu_2, \tag{6}$$

где мера μ_{ψ_1} соответствует гауссовскому стационарному процессу $\psi_1(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ на пространстве $L_2(T)$.

<u>Теорема 2</u>. Если функция $R(t,s)$ допускает следующее представление:

$$R(t,s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda t-\mu s)} B(\lambda,\mu)\,d\lambda\, d\mu,\quad t,s\in T\times T,$$

где $B(\lambda,\mu)$ - положительно определенная функция с интегрируемым квадратом на $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B^{\frac{1}{2}}(\lambda,\lambda)\,d\lambda<\infty,$$

тогда имеет место формула (6), где $\psi_1(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ - гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $cB^{\frac{1}{2}}(\lambda,\lambda)$, где c - некоторая постоянная.

Заметим, что, если имеет место (6), имеет место и следующее соотношение:

$$\mu_{\psi_2}=\mu_{\xi_2}*\nu_2,$$

где μ_{ψ_2} соответствует гауссовскому процессу $\psi_2(t)=a(t)+\psi_1(t)$ на $L_2(T)$.

Из предложения б) следует, что достаточные условия ортогональности мер μ_{ψ_1} и μ_{ψ_2} являются достаточными и для ортогональности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}.

Так как необходимые условия эквивалентности гауссовских мер являются достаточными для ортогональности этих мер, то, если положим на $B^{\frac{1}{2}}(\lambda,\lambda)$ некоторые условия, получим достаточные условия ортогональности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}.

Пусть $\xi_1(t)$ - гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и спектральной мерой $\mathcal{F}(d\lambda)$. Допустим, что существуют положительные и интегрируемые на $(-\infty,+\infty)$ функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ такие, что $2f_1(\lambda)d\lambda<\mathcal{F}(d\lambda)<\frac{1}{2}f_2(\lambda)d\lambda$. Тогда имеют место равенства (4) и (6), где $\eta_1(t)$ и $\psi_1(t)$ $t\in(-\infty,+\infty)$ - гауссовские стационарные процессы с нулевыми средними и спектральными плотностями $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$. А это позволяет получить некоторые условия эквивалентности мер μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}, аналогичные теореме I.

С помощью теоремы 2 можно сформулировать достаточные условия состоятельности оценок произвольного линейного непрерывного функционала $\varphi(Q)$ от неизвестного среднего $Q = Q(t)$, по наблюдениям процесса $\xi(t) = Q(t) + \psi_1(t)$, $t \in T$, когда область наблюдения T расширяется, но остается конечным интервалом.

Кафедра теории
вероятностей и математической
статистики

Поступило II.УI.1976

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю.А.Розанов, Труды МИАН СССР, I08, I968.

2. И.А.Ибрагимов, Ю.А.Розанов, Гауссовские случайные процессы, М., I970.

ს. კალანდარიშვილი

გაუსის არასტაციონარული პროცესების შესაბამისი ზომების ეკვივალენტობის შესახებ

რეზიუმე

დამტკიცებულია რამდენიმე თეორემა გაუსის არასტაციონარული პროცესების შესაბამისი ზომების ეკვივალენტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების შესახებ.

S.Kalandarishvili

ON THE EQUIVALENCE OF MEASURES CORRESPONDING TO GAUSSIAN NON-STATIONARY PROCESSES

Summary

Several theorems on the equivalence of measures corresponding to Gaussian non-stationary processes differing in mean values are obtained.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

185, 1977

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

А.Р.Цицкишвили

Рассмотрим задачу отыскания функции $z = z(\zeta)$, где $z = x + iy$, $\zeta = t + i\tau$, конформно отображающей полуплоскость $I_m(\zeta) > 0$ на внутренность ограниченного кругового m многоугольника с вершинами и внутренними углами, соответственно, $b_k, \pi\nu_k, k = 1,2,\ldots,m$ (b_k обозначает комплексную координату вершины). Точки плоскости ζ, которые переходят в вершины кругового многоугольника, обозначим через a_k, причем: $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < +\infty$.

Неполную библиографию по этим вопросам можно найти в работах [I-6].

Отыскание функции $z(\zeta)$ приводится к решению уравнения [4-6]:

$$2V''(\zeta) + R(\zeta)V(\zeta) = 0, \tag{I}$$

$$R(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} \left[(1-\nu_k^2)(\zeta - a_k)^{-2}/2 + c_k(\zeta - a_k)^{-1}\right], \tag{2}$$

где c_1 , c_2 , ... , c_m - акцессорные параметры, которые должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k=0,\ \sum_{k=1}^{m}[a_k c_k+(1-\nu_k^2)/2]=0,\ \sum_{k=1}^{m}[a_k^2 c_k+a_k(1-\nu_k^2)]=0. \tag{3}$$

Функция $z(\zeta)$ находится по формуле $z(\zeta)=u_1(\zeta)/u_2(\zeta)$, где $u_1(\zeta)=p_m v_1(\zeta)+q_m v_2(\zeta)$, $u_2(\zeta)=r_m v_1(\zeta)+s_m v_2(\zeta)$, $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$ - линейно независимые решения уравнения (I), а p_m, q_m, r_m, s_m - постоянные, причем $p_m s_m - r_m q_m=1$.

Сначала рассмотрим случай, когда все $\nu_k \neq 0$ $(0<\nu_k<2)$.

Уравнение контура кругового многоугольника имеет вид:

$$z(t)=\frac{B_k\overline{z(t)}-iD_k}{iA_k\overline{z(t)}+\overline{B}_k},\quad k=1,2,\dots,m, \tag{4}$$

где A_k, B_k, D_k - заданные постоянные (A_k, D_k - действительные), удовлетворяющие условию $B_k\cdot\overline{B}_k-A_k\cdot D_k=1$, а $\overline{z(t)}=x(t)-iy(t)$.

Уравнение (4) можно ещё записать так:

$$z(t)=\frac{B(t)\overline{z(t)}-iD(t)}{iA(t)\overline{z(t)}+\overline{B(t)}}, \tag{5}$$

где $A(t), B(t), D(t)$ - заданные кусочно-постоянные функции.

Введем вектор $\Phi(\zeta)=[u_1(\zeta),u_2(\zeta)]$ и матрицу

$$G(t)=\begin{Vmatrix} B(t), & -iD(t)\\ iA(t), & \overline{B(t)}\end{Vmatrix} \tag{6}$$

Если продолжить вектор $\Phi(\zeta)$ для $I_m(\zeta)<0$, тогда граничное условие (6) можно записать так [7-10] :

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ t\in(-\infty,+\infty), \tag{7}$$

где $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$ – предельные значения вектора $\Phi(\zeta)$ из верхней S^+ и нижней S^- полуплоскостей.

Для промежутка $(a_k; a_{k+1})$ матрица $G(t)$ определяется так [8]:

$$G_k(t) = \begin{Vmatrix} B_k, & -iD_k \\ iA_k, & \overline{B}_k \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

матрицы G_k пока определены с точностью до знака.

Как известно, при помощи дробно-линейного преобразования можно отобразить плоскость z на плоскость $z_1 = x_1 + iy_1$ так, чтобы стороны $b_m b_1$ и $b_{m-1} b_m$ превратились в две прямые, из которых первая идет по действительной оси плоскости z_1 с началом координат в точке b_m [6].

Не меняя обозначений матриц G_j и плоскости z, будем подразумевать, что сторонам кругового многоугольника (b_{m-1}, b_m), (b_m, b_1) соответствуют матрицы:

$$G_{m-1} = (-1)\begin{Vmatrix} e^{i\pi\nu_m}, & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\nu_m} \end{Vmatrix}, \qquad G_m = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

Заметим, что две соседние окружности пересекаются в двух точках b_j и b_j', где точки b_j' находятся вне контура кругового многоугольника.

Целью этой работы является нахождение функции $z(\zeta)$, т.е. функций $u_1(\zeta), u_2(\zeta)$, с помощью локальных решений уравнений (I).

Рациональная функция $R(\zeta)$ содержит $2(m-3)$ независимых параметров: a_k, c_k. Для определения этих параметров будут составлены $2(m-3)$ уравнений. Ниже будут указаны способы решения такой системы для некоторых m.

Уравнения (I) вблизи точки a_j перепишем так:

$$(\zeta - a_j)^2 v''(\zeta) + q_j^*(\zeta) v(\zeta) = 0, \tag{10}$$

где

$$q_j^*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{jn} (\zeta - a_j)^n, \quad q_{j0} = \alpha_{1j}\alpha_{2j}, \quad q_{j1} = c_j/2,$$

$$q_{jn} = (-1)^{n-2} \sum_{k=1, k\neq j}^{m} \left[\alpha_{1k}\alpha_{2k}(a_j - a_k)^{-n}(n-1) + \frac{c_k (a_j - a_k)^{-(n-1)}}{2}\right], \tag{11}$$

$$\alpha_{kj} = [1 + (-1)^k \nu_j]/2.$$

Локальные решения уравнения (I0) имеют вид:

$$u_{kj}(t) = (t - a_j)^{\alpha_{kj}} \gamma_{0j} \tilde{u}_{kj}(t), \quad k = 1, 2, \tag{12}$$

$$\tilde{u}_{kj}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nj}^k (t - a_j)^n.$$

Коэффициенты γ_{nj}^k определяются по рекуррентным формулам:

$$f_{0j}(\alpha_{kj}) = 0,$$

$$\gamma_{nj}^k f_{0j}(\alpha_{kj} + k) + \gamma_{(n-1)j}^k q_{j1} + \dots + q_{jn} = 0, \tag{13}$$

где

$$f_{0j}(\alpha_{kj}) = (\alpha_{kj} - \alpha_{1j})(\alpha_{kj} - \alpha_{2j}), \tag{14}$$

$$f_{0j}(\alpha_{kj} + n) = n[n + (-1)^k \nu_j].$$

Из формул (I3) определяются все коэффициенты, а γ_{0j} - остается пока неопределенным.

Проведем разрез на действительной оси и плоскости ζ так, чтобы при $t > a_j$ имело место $\exp[\alpha_{jk} \ln(t - a_j)] > 0$.

Составим матрицы:

$$\theta_j(t)=\begin{Vmatrix} u_{1j}(t), u'_{1j}(t) \\ u_{2j}(t), u'_{2j}(t) \end{Vmatrix}, \quad t>a_j, \quad \theta^*_j(t)=\begin{Vmatrix} u^*_{1j}(t), u'^*_{1j}(t) \\ u^*_{2j}(t), u'^*_{2j}(t) \end{Vmatrix}, \quad t<a_j \tag{I5}$$

$$\vartheta^{\pm}_j=\begin{Vmatrix} \exp[\pm i\pi\alpha_{1j}], & 0 \\ 0, & \exp[\pm i\pi\alpha_{2j}] \end{Vmatrix}, \qquad T_j=\begin{Vmatrix} p_j, & q_j \\ r_j, & s_j \end{Vmatrix} \tag{I6}$$

$$\theta_\infty(t)=\begin{Vmatrix} u_{1\infty}(t), u'_{1\infty}(t) \\ u_{2\infty}(t), u'_{2\infty}(t) \end{Vmatrix} \qquad t\,\overline{\in}\,(a_1, a_m) \tag{I7}$$

$$u^*_{kj}(t)=(a_j-t)^{\alpha_{kj}}\gamma_{0j}\check{u}_{kj}(t); \quad u'^*_{kj}(t)=-(a_j-t)^{\alpha_{kj}-1}\tilde{u}'^*_{kj}(t);$$

$$\tilde{u}'^*_{kj}(t)=\alpha_{kj}\check{u}_{kj}(t)+(t-a_j)\check{u}'_{kj}(t); \quad u'_{kj}(t)=\frac{d}{dt}u_{kj}(t);$$

$$\tilde{u}'_{kj}(t)=\frac{d}{dt}\check{u}_{kj}(t); \tag{I8}$$

$$u_{k\infty}(t)=t^{k-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{k}_{n\infty}t^{-(n+2-k)}; \quad \theta^{\pm}_j(t)=\vartheta^{\pm}_j\theta^*_j(t);$$

где $\gamma^{k}_{n\infty}$ - определяются рекуррентными формулами, а $\theta^+_j(t)$, $\theta^-_j(t)$ - предельные значения матриц $\theta_j(s)$, соответственно, из S^+ и S^- полуплоскостей.

Уравнение (I) можно привести к системе [9]

$$[v(t), v'(t)]'=[v(t), v'(t)]\begin{Vmatrix} 0, & -\frac{1}{4}R(t) \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{I9}$$

Матрицы $\theta_{j-1}(t)$, $\theta^*_j(t)$ являются локальными решениями системы (I9) вблизи точек a_{j-1}, a_j, соответственно. Тогда очевидно, что между матрицами $\theta_{j-1}(t)$, $\theta^*_j(t)$ существует зависимость:

$$\theta^*_j(t)=T_{j-1}\theta_{j-1}(t). \tag{20}$$

Матрицы T_k, $k=1,\dots,m-1$, действительные согласно нашему выбору однозначных ветвей для матриц $\theta_j(t)$.

Пользуясь тождеством Лиувилля и равенством (20), можно показать, что если

$$\gamma_{oj}=[\nu_j]^{-1/2} \quad \text{, тогда} \quad det\, T_j=-1,\ j=1,2,\ldots,m-1. \tag{21}$$

Пусть в точке $t_{(j-1)j}$ матрицы $\theta_{j-1}(t)$, $\theta_j^*(t)$ сходятся; тогда из равенства (20) можно определить матрицу T_{j-1}. Имеем:

$$T_{j-1}=\theta_j^*[t_{(j-1)j}]\,\theta_{j-1}^{-1}[t_{(j-1)j}]. \tag{22}$$

Параметры p_j, q_j, r_j, s_j, определенные из формулы (22), являются целыми функциями относительно акцессорных параметров c_k [8], [11].

Чтобы установить промежуток изменения параметров c_k с этой целью, преобразуем уравнение (1) по формуле $v(\zeta)=r(\zeta)v_*(\zeta)$, $r(\zeta)=exp[\sum_{k=1}^{m}(1-\nu_k)\ln(\zeta-a_k)/2]$. Если круговой многоугольник превращается в линейный многоугольник, при этом будут меняться параметры ν_k в вершинах b_k, то дифференциальное уравнение относительно $v_*(\zeta)$ должно иметь вид:

$$v_*''(\zeta)+v_*'(\zeta)2r'(\zeta)/r(\zeta)=0, \tag{23}$$

а это может случиться только при выполнении равенств:

$$c_m=-(1-\nu_m)\sum_{k=1,\,k\neq m}^{m}(1-\nu_k)/[2(a_m-a_k)]. \tag{24}$$

Из формулы (24) грубо можно определить промежуток изменения параметров c_m, который можно уточнить в процессе вычисления.

Рассмотрим матрицу

$$\chi(t)=T_m \theta_m(t), \quad t>a_m. \tag{25}$$

С помощью элементов первого столбца матрицы (25) составляется функция $\varkappa(t)$, которая должна удовлетворять условию (7); поэтому, как это легко проверить, матрица T_m должна быть действительной.

Переходя из промежутка (a_m,∞) в промежуток (a_{m-1},a_m), матрицы $\chi^{\pm}(t)$ принимают вид

$$\chi^{\pm}(t)=T_m \vartheta_m^{\pm} \theta_m^{*}(t), \tag{26}$$

где знаки + и – берутся для предельных значений, соответственно, из S^+ и S^- областей.

Матрицы (26) должны удовлетворять условию (7). Имеем

$$T_m \vartheta_m^{+} = G_{m-1} T_m \vartheta_m^{-}. \tag{27}$$

Из равенства (27) следует, что $P_m=S_m=0$.

Для промежутка (a_{m-2},a_{m-1}) матрицы $\chi^{\pm}(t)$ имеют вид:

$$\chi^{\pm}(t)=T_m \vartheta_m^{\pm} T_{m-1} \vartheta_{m-1}^{\pm} \theta_{m-1}^{*}(t), \quad t\in(a_{m-2},a_{m-1}), \tag{28}$$

матрицы (28) должны удовлетворять условию:

$$T_m \vartheta_m^{+} T_{m-1} \vartheta_{m-1}^{+} = G_{m-2} T_m \vartheta_m^{-} T_{m-1} \vartheta_{m-1}^{-}. \tag{29}$$

Равенство (29), с учетом (27), можно переписать так:

$$T_{m-1}(\vartheta_{m-1}^{+})^2 T_{m-1}^{-1} = (\vartheta_m^{+})^{-1} T_m^{-1} G_{m-2} G_{m-1}^{-1} T_m \vartheta_m^{+}. \tag{30}$$

Из равенства (30) следует, что матрицы $G_{m-2}G_{m-1}^{-1}$, $(\vartheta_{m-1}^{+})^2$ – подобны. Продолжая далее так, можно показать, что матрицы $G_{k-1}G_k^{-1}$ и $(\vartheta_k^{+})^2$, где $k=1,2,\ldots,m$, подобны.

Как было сказано в начале, матрицы G_k определены с точностью до знака. Знак матрицы G_k можно определить так. Будем исходить из решения уравнения (I4) для точки a_k. Рассмотрим уравнение:

$$\det \left\| G_{k-1} G_k^{-1} - \lambda I \right\| = 0, \quad I = \left\| \begin{matrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{matrix} \right\| \tag{31}$$

Обозначим корни уравнения (3I) через λ_{jk} и потребуем, чтобы имело место равенство

$$\alpha_{jk} = (2\pi i)^{-1} \ln \lambda_{jk}. \tag{32}$$

Правая часть (32), как известно, определяется с точностью до целых слагаемых чисел. За счет подбора этих чисел не всегда возможно обеспечить выполнение равенства (32), так как матрицы определены с точностью до знака. Поэтому справедливость (32) нужно обеспечить за счет подбора знаков матриц G_k последовательно для точек $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1$.

Матрицы $\chi^{\pm}(t)$ для промежутка (a_{m-k-1}, a_{m-k}) вблизи точки a_{m-k} имеют вид:

$$\chi^{\pm}(t) = T_m \vartheta_m^{\pm} T_{m-1} \vartheta_{m-1}^{\pm} \cdots T_{m-k+1} \vartheta_{m-k+1}^{\pm} T_{m-k} \vartheta_{m-k}^{\pm} \theta_{m-k}^{*}(t). \tag{33}$$

Матрицы (33) должны удовлетворять граничному условию (7):

$$T_n \vartheta_n^{+} \theta_n^{*}(t) = g_n T_n \vartheta_n^{-} \theta_n^{*}(t), \quad n = m-k, \tag{34}$$

где

$$g_{m-k} = \vartheta_{m-k+1}^{-} T_{m-k+1}^{-1} \cdots \vartheta_{m-1}^{-} T_{m-1}^{-1} \vartheta_m^{-} T_m^{-1} G_{m-k-1} \times$$

$$\times T_m \vartheta_m^{-} T_{m-1} \vartheta_{m-1}^{-} \cdots T_{m-k+1} \vartheta_{m-k+1}^{-} = \left\| g_{m-k}^{ij} \right\|, \tag{35}$$

где g_{m-k}^{ij} – элементы матрицы g_{m-k}.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицы g_{m-k}, при $k = 1, 2, \dots, m-1$, по своей структуре совпадают со структурой матриц G_{m-k-1}, т.е. на главной диагонали матрицы g_{m-k} стоят числа, взаимно сопряженные, а на второй диагонали стоят числа, чисто мнимые:

$$g^{22}_{m-k} = \overline{g^{11}_{m-k}}, \quad Re\, g^{12}_{m-k} = Re\, g^{21}_{m-k} = 0.$$

Матричное равенство (34) можно переписать так:

$$T_n (\vartheta_n^+)^2 = g_n T_n, \quad n = m-k. \tag{36}$$

Из равенства (36) следует:

$$p_n / r_n = g_n^{12} / [\exp(2\pi i \alpha_{1n}) - g_n^{11}]; \tag{37}$$

$$p_n / r_n = [\exp(2\pi i \alpha_{1n}) - g_n^{22}] / g_n^{21}; \tag{38}$$

$$s_n / q_n = g_n^{21} / [\exp(2\pi i \alpha_{2n}) - g_n^{22}]; \tag{39}$$

$$s_n / q_n = [\exp(2\pi i \alpha_{2n}) - g_n^{11}] / g_n^{12}. \tag{40}$$

Из равенства (36) следует, что главные инварианты матриц $(\vartheta_m^+)^2$ и g_n равны, поэтому правые части (37) и (38); (39) и (40), соответственно, равны. Действительно, для (37) и (38) имеем:

$$\exp[4\pi i \alpha_{1n}] - (g_n^{11} + g_n^{22}) \exp(2\pi i \alpha_{1n}) + 1 = 0. \tag{41}$$

Равенство (41) можно переписать так:

$$g_n^{11} + g_n^{22} = \exp(2\pi i \alpha_{1n}) + \exp(-2\pi i \alpha_{1n}) = \\ = \exp(2\pi i \alpha_{1n}) + \exp(2\pi i \alpha_{2n}). \tag{42}$$

Из равенства (42) следует:

$$Re\, g_n^{11} = \cos(2\pi \alpha_{1n}), \tag{43}$$

где Re означает действительную часть числа g_n^{11}.

Доказем сейчас, что уравнения (37) – (40) действительные;

для уравнения (37) имеем:

$$P_n / r_n = g_n^{12}[\exp(-2\pi i\alpha_{1n}) - \overline{g}_n^{11}] / [\exp(2\pi i\alpha_{1n}) - g_n^{11}]. \tag{44}$$

На основании (43) равенство (44) можно переписать так:

$$P_n / r_n = -i\, g_n^{12}[\sin(2\pi\alpha_{1n}) - I_m\, g_n^{11}] / [\exp(2\pi i\alpha_{1n}) - g_n^{11}], \tag{45}$$

где I_m означает коэффициент мнимой части числа g_n^{11}.

Правая часть равенства (45) является действительной, так как $Re\, g_n^{12} = 0$.

Между уравнениями (37) и (39) имеется связь:

$$\frac{P_n S_n}{r_n q_n} = \frac{g_n^{12}\, g_n^{21}}{[\exp(2\pi i\alpha_{1n}) - g_n^{11}][\exp(2\pi i\alpha_{2n}) - g_n^{22}]}. \tag{46}$$

Как было доказано в работе [4] , равенство (46) является инвариантом относительно дробно-линейного преобразования, т.е. является двойным отношением четырех точек круга. За четыре точки берутся точки, в которых пересекается одна окружность с двумя соседними окружностями [4].

Инвариантность формулы (46) мы докажем другим путем. С этой целью введем обозначение:

$$H_{m-k} = \left\| H_{m-k}^{ij} \right\| = T_m \vartheta_m^+ T_{m-1} \vartheta_{m-1}^+ \cdots T_{m-k+1} \vartheta_{m-k+1}^+ T_{m-k} \vartheta_{m-k}^+ , \tag{47}$$

где H_{m-k}^{ij} – элементы матрицы H_{m-k}.

Равенства (34) с помощью обозначений (47) можно переписать так:

$$H_n = G_{n-1}\overline{H_n}, \quad n=m-k. \tag{48}$$

Из равенства (48) следует, что:

$$H_n^{11} = B_{n-1}\overline{H_n^{11}} - iD_{n-1}\overline{H_n^{21}}, \tag{49}$$

$$H_n^{12} = B_{n-1}\overline{H_n^{12}} - iD_{n-1}\overline{H_n^{22}}, \tag{50}$$

$$H_n^{21} = iA_{n-1}\overline{H_n^{11}} + \overline{B_{n-1}}\,\overline{H_n^{21}}, \tag{51}$$

$$H_n^{22} = iA_{n-1}\overline{H_n^{12}} + \overline{B_{n-1}}\,\overline{H_n^{22}}. \tag{52}$$

Как было доказано выше, из каждой пары уравнений (49), (50); (51), (52) можно взять по одному уравнению.

Разделим уравнение (49) на (51) и (50) на (52), получим:

$$H_n^{11}/H_n^{21} = [B_{n-1}\overline{H_n^{11}}/\overline{H_n^{21}} - iD_{n-1}]/[iA_{n-1}\overline{H_n^{11}}/\overline{H_n^{21}} - \overline{B_{n-1}}], \tag{53}$$

$$H_n^{12}/H_n^{22} = [B_{n-1}\overline{H_n^{12}}/\overline{H_n^{22}} - iD_{n-1}]/[iA_{n-1}\overline{H_n^{12}}/\overline{H_n^{22}} + \overline{B_{n-1}}]. \tag{54}$$

Если сравнить равенства (53) и (54) с равенством (4), можно заключить, что числа H_n^{11}/H_n^{21}; H_n^{12}/H_n^{22} совпадают с комплексными координатами точек b_n, b_n'. Из того, что, когда $t \to a_n$, тогда $z(t) \to b_n$, следует:

$$b_n = H_n^{11}/H_n^{21}, \tag{55}$$

$$b_n' = H_n^{12}/H_n^{22}, \quad n=m-k. \tag{56}$$

Доказательство инвариантности выражения (45) начнем с точки b_m. Для промежутка (a_{m-1}, a_m) матрица H_{m-1} имеет вид:

$$H_{m-1} = T_m \vartheta_m^+ T_{m-1} \tag{57}$$

Равенства (53) и (54) для матрицы (57) принимают вид:

$$b_{m-1} = \frac{q_m r_{m-1}}{r_m p_{m-1}} e^{i\pi\nu_m}, \tag{58}$$

$$b'_{m-1} = \frac{q_m s_{m-1}}{r_m q_{m-1}} e^{i\pi\nu_m}. \tag{59}$$

Условие совместимости равенств (58) и (59) относительно $q_m \exp(i\pi\nu_m)/r_m$ имеет вид:

$$\frac{p_{m-1} s_{m-1}}{r_{m-1} q_{m-1}} = \frac{b'_{m-1}}{b_{m-1}}. \tag{60}$$

Для промежутка (a_{m-2}, a_{m-1}) имеем матричное равенство

$$H_{m-1} \mathcal{D}^+_{m-1} T_{m-2} = G_{m-2} \bar{H}_{m-1} \mathcal{D}^-_{m-1} T_{m-2} \tag{61}$$

Матрицу $H_{m-1} \mathcal{D}^+_{m-1} T_{m-2}$ можно переписать так:

$$\left\| \begin{matrix} H^{11}_{m-1} p_{m-2} e^{i\pi\alpha_{1(m-1)}} + H^{12}_{n} r_{m-2} e^{i\pi\alpha_{2(m-1)}}, & H^{11}_{m-1} q_{m-2} e^{i\pi\alpha_{1(m-1)}} + H^{12}_{m-1} s_{m-2} e^{i\pi\alpha_{2(m-1)}} \\ H^{21}_{m-1} p_{m-2} e^{i\pi\alpha_{1(m-1)}} + H^{22}_{m-1} r_{m-2} e^{i\pi\alpha_{2(m-1)}}, & H^{21}_{m-1} q_{m-2} e^{i\pi\alpha_{1(m-1)}} + H^{22}_{m-1} s_{m-2} e^{i\pi\alpha_{2(m-1)}} \end{matrix} \right\| \tag{62}$$

Учитывая, что $b_{m-1} = H^{11}_{m-1}/H^{21}_{m-1}$, $b'_{m-1} = H^{12}_{m-1}/H^{22}_{m-1}$, из (62) следует:

$$b_{m-2} = \frac{H^{11}_{m-1} p_{m-2} + H^{12}_{m-1} r_{m-2} e^{i\pi\nu_{m-1}}}{H^{21}_{m-1} p_{m-2} + H^{22}_{m-1} r_{m-2} e^{i\pi\nu_{m-1}}} \tag{63}$$

$$b'_{m-2} = \frac{H^{11}_{m-1} q_{m-2} + H^{12}_{m-1} s_{m-2} e^{i\pi\nu_{m-1}}}{H^{21}_{m-1} q_{m-2} + H^{22}_{m-1} s_{m-2} e^{i\pi\nu_{m-1}}} \tag{64}$$

Решая уравнения (63) и (64) относительно $P_{m-2}/r_{m-2}, S_{m-2}/q_{m-2}$ получим:

$$\frac{P_{m-2}}{r_{m-2}}=\frac{H^{22}_{m-1}}{H^{21}_{m-1}}=\frac{b_{m-2}-b'_{m-1}}{b_{m-1}-b_{m-2}}e^{i\pi\nu_{m-1}}, \tag{65}$$

$$\frac{S_{m-2}}{q_{m-2}}=\frac{H^{21}_{m-1}}{H^{22}_{m-1}}=\frac{b'_{m-2}-b_{m-1}}{b'_{m-1}-b'_{m-2}}e^{-i\pi\nu_{m-1}}. \tag{66}$$

Условие совместимости системы (65) и (66) относительно $H^{22}_{m-1}e^{i\pi\nu_{m-1}}/H^{21}_{m-1}$ имеет вид:

$$\frac{P_{m-2}\,S_{m-2}}{r_{m-2}\,q_{m-2}}=\frac{b_{m-2}-b'_{m-1}}{b_{m-1}-b_{m-2}}\cdot\frac{b'_{m-2}-b_{m-1}}{b'_{m-1}-b'_{m-2}}. \tag{67}$$

Продолжая далее, можно показать, что для точки a_n, $n=m-k$, имеет место равенство:

$$\frac{P_n S_n}{r_n q_n}=\frac{b_n-b'_{n+1}}{b_{n+1}-b_n}\cdot\frac{b'_n-b_{n+1}}{b'_{n+1}-b'_n},\quad n=m-k. \tag{68}$$

Вышеприведенное рассуждение верно только для случая, когда $\nu_n\neq 0,\ \nu_{n+1}\neq 0.$

Для каждой точки мы получили по два уравнения, всего $2m$ уравнения. Два из этих уравнения, $P_m=S_m=0$, мы получили для точки a_m. Для остальных точек имеем $2m-2$ уравнения. Для точки a_{m-1} упомянутые уравнения имеют вид (58) и (59), а условие совместимости этих уравнений – (60). Мы для точки a_{m-1} возьмем уравнения (58) и (60). В общем для точки a_{m-k} можем взять уравнения (37) и (46), где $k=1,2,\dots,m-1$. Одно из $2m-2$ уравнений (58) даст возможность определить параметр q_m/r_m, если мы найдем параметры a_k, c_k. После этого остается $2m-3$ уравнений. Далее, так как точка $\zeta=\infty$ является обыкновенной для уравнения (I), между матрицами $T_j,\ j=1,2,\ldots,m-1$, существует одна зависимость [6], поэтому одна матрица T_k определяется через остальные матрицы T_j; следовательно, элементы одной матрицы должны определяться с помощью элементов других матриц T_j. Матрица T_k определяется тремя действительными параметрами, следовательно, три уравнения являются следствием других уравнений. Поэтому число независимых уравнений остается $2(m-3)$ с $2(m-3)$ неизвестными $a_k,\ c_k$. Напомним, что три из параметров a_k мы можем произвольно зафиксировать, а параметры c_k удовлетворяют системе трех уравнений (3), поэтому число независимых параметров c_k тоже равно $m-3$.

Заметим здесь, что в вышеполученные уравнения вместо параметров p_j, q_j, r_j, s_j, подставляются их значения из уравнения (22).

Чтобы более ясно представить значение параметров a_k, c_k, для сравнения рассмотрим задачу конформного отображения верхней полуплоскости на m линейный конечный многоугольник.

Обозначим комплексные координаты вершин и внутренние углы ограниченного линейного многоугольника, соответственно, через e_k и $\pi\beta_k,\ k=1,2,\ldots,m$.

Как известно, с помощью формулы Кристоффеля-Шварца

$$z=M\int_{z_0}^{\zeta}\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\beta_k-1}\,dt+z_0, \tag{69}$$

где M, z_0 - комплексные постоянные, а a_k -точки действительной оси плоскости $\zeta(-\infty<a_1<\cdots<a_m<+\infty)$, которые переходят в точки e_k, можно произвести искомое отображение.

Следуя работам [2,4], укажем способ определения постоянных $\mathcal{M}, z_0, a_k$.

Начнем с рассмотрения отрезка $\ell_1 \ell_2$. Перепишем подинтегральную функцию так, чтобы она была действительной и положительной, имеем:

$$z = \mathcal{M}_1 \int_{a_1}^{\zeta} F(t)\,dt + \ell_1, \quad F(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - a_k)^{\beta_k - 1}. \tag{70}$$

Формулу (70) можно переписать так:

$$dz = \rho_1 e^{i\varphi_1} F(t)\,dt, \quad \mathcal{M}_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \tag{71}$$

где φ_1 - угол, составляемый отрезком $\ell_1 \ell_2$ с осью абсцисс.

В точке ℓ_2 значение функции $z(\zeta)$ вычисляется так:

$$\ell_2 - \ell_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \int_{a_1}^{a_2} |F(t)|\,dt. \tag{72}$$

Формулу (72) можно переписать так:

$$\ell_{12} = \rho_1 \int_{a_1}^{a_2} |F(t)|\,dt, \tag{73}$$

где

$$\ell_2 - \ell_1 = \ell_{12} e^{i\varphi_1}. \tag{74}$$

Совершенно аналогично для других отрезков

$$\ell_{23} = \rho_1 \int_{a_2}^{a_3} |F(t)|\,dt, \ldots, \ell_{m-2,m-1} = \rho_1 \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} |F(t)|\,dt. \tag{75}$$

Уравнения двух последних сторон $\ell_{m-1} \ell_m$, $\ell_m \ell_1$, как известно, не будут независимыми от предыдущих. Действительно, при заданных вершинах ℓ_{m-1}, ℓ_1 и при заданных углах $\pi\beta_1$, $\pi\beta_{m-1}$ положение вершины ℓ_m остается вполне определенным и равенства, относящиеся к сторонам $l_{m-1} l_m$, $l_1 l_m$, не дадут новых соотношений. Поэтому, в качестве последнего из уравнений (75) примем уравнение [2] :

$$l_{m-2,\,m-1} = \rho_1 \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} |F(t)|\,dt. \tag{76}$$

В итоге мы получили $m-2$ уравнений, содержащих $m-2$ неизвестных $\rho_1, a_3, a_4, \dots, a_{m-1}$ (три из параметров a_k зафиксированы).

Уравнения (75) перепишем так [4] :

$$\rho_1 = \frac{l_{12}}{\int_{a_1}^{a_2} |F(t)|\,dt} = \frac{l_{23}}{\int_{a_2}^{a_3} |F(t)|\,dt} = \dots = \frac{l_{m-2,\,m-1}}{\int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} |F(t)|\,dt} \tag{77}$$

Из формул (77) видно, что они состоят из $m-3$ существенных уравнений с $m-3$ неизвестными a_k, а ρ_1 играет роль коэффициента подобия, который можно определить по любой формуле из (77) (несущественное уравнение), когда будет решена система $m-3$ существенных уравнений относительно a_k. Заметим, что когда система состоит из трех существенных уравнений, она решается эффективно [10], следовательно, при $m=6$, можно найти функцию $z(\zeta)$. Наша цель состоит в том, чтоб сопоставить этот результат с полученными выше результатами для круговых многоугольников.

Мы будем считать, что известны параметры $\pi\nu_k$, а также радианные меры дуг $b_k b_{k+1}$ и радиусы этих дуг (можно задавать равноценные этим параметрам два параметра для каждой дуги, дополнительно к параметрам $\pi\nu_k$, например, длину хорд $b_k b_{k+1}$

и радианную меру дуги и так далее). Как было сказано, вначале считаем, что с помощью дробно-линейного преобразования две стороны кругового многоугольника, например, $b_{m-1}b_m$, $b_m b_1$, переведены в две прямые. Возьмём на произвольной прямой точку b_1. Построим в точке b_1 угол $\pi\nu_1$ так, чтобы внутренняя область кругового многоугольника при обходе области оставалась слева. В точке b_1 ко второй стороне угла $\pi\nu_1$ восстановим перпендикуляр и отложим на этом перпендикуляре известный радиус $b_1\varepsilon_1$ круга $b_1 b_2$, а затем в центре круга $b_1 b_2$ построим центральный угол $\pi\nu_1'$; вторая сторона центрального угла пересечет дугу $b_1 b_2$ в точке b_2. В точке b_2 проведем касательную к дуге $b_1 b_2$, пристроим к этой касательной в точке b_2 угол $\pi\nu_2$. Ко второй стороне угла $\pi\nu_2$ восстановим перпендикуляр $b_2\varepsilon_2$, отложим на прямой радиус $b_2\varepsilon_2$ круга. Построим в точке ε_2 центральный угол $\pi\nu_2'$; вторая сторона угла $\pi\nu_2'$ пересечет дугу $b_2 b_3$ в точке b_3. Продолжая построение дальше, дойдем до точки b_{m-1}. При заданных углах $\pi\nu_{m-1}$ и $\pi\nu_1$ две последние стороны $b_m b_{m-1}$, $b_m b_1$ и угол $\pi\nu_m$ определяются однозначно. Очевидно, что параметры $\pi\nu_k, \pi\nu_k'$ удовлетворяют условию:

$$\sum_{k=1}^{m}\nu_k+\sum_{k=1}^{m-1}\nu_k'=2m-4. \tag{78}$$

Подсчитаем, при таком построении, сколько параметров мы использовали. Для каждой дуги, начиная с точки b_1, мы, помимо углов $\pi\nu_1, \pi\nu_2, \ldots, \pi\nu_{m-1}$, добавляли по два параметра (радиусы и радианные меры дуг), всего $2(m-2)$ параметра. В итоге использовали $2(m-2)+m-1=3m-5$ параметра. Параметры $\pi\nu_k$

входят в уравнение (I), следовательно, остается $2m-5$ параметра, а мы и располагаем $2m-5$ параметрами: $q_m/r_m, a_k, c_k$.

Как было доказано выше, число независимых уравнений равняется $2m-5$. Из них - существенных $2(m-3)$, а одно уравнение (58) определяет параметр q_m/r_m, после того, как будут найдены a_k, c_k. Параметр q_m/r_m здесь играет роль коэффициента подобия.

Перейдем к случаю, когда в некоторых точках b_k имеем надрез, т.е. когда уравнения контуров для двух соседних дуг совпадают на плоскости z, а на плоскости вектора $\Phi(\zeta)$ матрицы отличаются знаком. Например, если для дуги $b_{k-1}b_k$ имеем матрицу G_k, то для дуги $b_k b_{k+1}$ имеем матрицу $(-G_k)$. Для точки b_k, $\nu_k = 2$, поэтому уравнение (I4) имеет корни $\alpha_{1k}=-1/2$, $\alpha_{2k}=3/2$. Разность $\alpha_{2k}-\alpha_{1k}=2$, поэтому формулы (I3) позволяют определить только одно решение $v_{2k}(t)$, соответствующее корню $\alpha_{2k}=3/2$, а второе решение $v_{1k}(t)$, которое обыкновенно находят по формуле Лиувилля, содержит логарифмический член. П.Я.Кочиной [I] установлено, что решение $v_{1k}(t)$ не может содержать логарифмического члена, и для параметров c_k найдено дополнительное условие.

Для получения решения $v_{1k}(t)$ лучше пользоваться методом Фробениуса [II]. По этому методу в формуле (I2) вместо γ_{ok} следует подставить $-\gamma_{ok} f_{ok}(\alpha_{1k}+1) f_{ok}(\alpha_{1k}+2)/2$, затем найти производную решения по α_{jk} и вычислить её при $\alpha_{1k}=-1/2$, и, наконец, взять $(\gamma'_{2k})_{\alpha_{1k}=-1/2}=0$; получим:

$$v_{1k}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{d\alpha_{1k}}(\gamma'_{nk})\right]_{\alpha_{1k}=-1/2}(t-a_k)^n, \qquad (79)$$

$$(\gamma'_{2k})_{\alpha_{1k}=-1/2}=0. \tag{80}$$

Уравнение (80) есть необходимое и достаточное условие отсутствия в решении $v_{1k}(t)$ логарифмического члена.

Как было сказано выше, для каждой точки мы должны получить по два условия, а в этом случае одно условие (80) мы уже получили; поэтому, чтобы получить второе условие, следует воспользоваться формулой:

$$b_n = H_n^{11} / H_n^{21}, \quad n = m-k. \tag{81}$$

Заметим здесь же, что если допустить, что решение $v_{1k}(t)$ содержит логарифмический член, тогда при подстановке соответствующих матриц $\chi^{\pm}(t)$ в граничное условие (7) получим условие (80).

Перейдем к рассмотрению случая, когда в некоторых точках соседние дуги касаются между собой. В таких точках $\nu_j=0$ или $\nu_j=2$. Для этих точек одно решение уравнения (I) содержит логарифмический член, поэтому формулы (I3) позволяют определить только по одному решению, а вторые решения получают по формуле Лиувилля, но мы их предпочитаем получить по методу Фробениуса [II]. В случае, когда $\nu_j=0$, можно продифференцировать решение (I2) по α_{kj}, $k=1,2$, а затем подставить в него $\alpha_{kj}=1/2$; получим:

$$v_{kj}(t)=(t-a_j)^{1/2}\ \gamma_{0j}\Big\{\tilde{U}_{kj}(t)\ln(t-a_j)+ + \sum_{m=1}^{\infty}\Big[\frac{d}{d\alpha_{kj}}(\gamma^{k}_{mj})\Big]_{\alpha_{kj}=1/2}(t-a_j)^m\Big\}. \tag{82}$$

Для этой точки матрицы $\vartheta_k^{\pm}$ имеют вид:

$$\vartheta_k^{\pm} = \pm i \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ \pm\pi i, & 1 \end{Vmatrix} \tag{83}$$

Учитывая равенство (83), уравнение (36) для этой точки имеет вид:

$$T_n \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 2\pi i, & 1 \end{Vmatrix} = -g_n T_n, \quad n = m-k. \tag{84}$$

Из матричного равенства (84) следует:

$$-P_n - 2\pi i q_n = g_n^{11} P_n + g_n^{12} r_n \tag{85}$$

$$-r_n - 2\pi i S_n = g_n^{21} P_n + g_n^{22} r_n \tag{86}$$

$$-q_n = g_n^{11} q_n + g_n^{12} S_n \tag{87}$$

$$-S_n = g_n^{21} q_n + g_n^{22} S_n \tag{88}$$

Можно проверить, что из равенства (85) следует равенство (86), а из (87) следует (88) и наоборот.

Рассмотрим систему (87) и (88). Имеем:

$$\frac{q_n}{S_n} = \frac{1+g_n^{11}}{g_n^{21}} = \frac{g_n^{12}}{1+g_n^{22}}. \tag{89}$$

Из равенства (89) должно вытекать равенство:

$$(1+g_n^{11})(1+g_n^{22}) = g_n^{12} g_n^{21}, \tag{90}$$

а из равенства (90) следует:

$$g_n^{11} + g_n^{22} = -2, \quad (\nu_n = 0). \tag{91}$$

Таким образом, равенство (9I) имеет место, что и требовалось доказать.

После этого очевидно, что из системы (89) мы можем брать одно уравнение.

Когда имеет место равенство (89), тогда, как это легко проверить, из уравнения (85) следует уравнение (86), и наоборот.

Исходя из структуры матрицы g_n, можно показать, что уравнения (85) - (88) действительные. Для этого случая в равенстве (2I) следует взять $\gamma_{0j}=1$. Отметим также, что инвариантность формулы (46) не сохраняется.

В случае, когда $\nu_\kappa=2$ (дуги касаются), поступим аналогично случаю, когда имеем надрез, только в отличие от него, в одном решении, соответствующем корню $\alpha_{2j}=-1/2$, будем иметь логарифмический член.

Как было показано нами в работе [10], эффективное построение функции $z(\zeta)$ в общем случае нам удается, когда число существенных уравнений меньше или равно трем. В случае круговых многоугольников это сводится к случаям, когда имеем произвольный круговой треугольник, круговой четырехугольник (два существенных уравнения с двумя неизвестными) и пятиугольник частного вида, когда в одной вершине имеем надрез, угол в этой вершине равен 2π, а уравнения прилегающих сторон совпадают, на остальные углы и стороны никакие ограничения не накладываются (число существенных уравнений равно трем).

Иногда для конкретных круговых многоугольников удается строить функцию $z(\zeta)$ эффективно для большого числа особых точек, например, случай, рассмотренный в работе [5].

Дадим алгорифм решения трех существенных уравнений с тремя неизвестными, которые встречаются при решении исходной задачи. Для краткости эти уравнения запишем так: $F_к \equiv F_к(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0,\ к = 1,2,3,$ где параметры $\mu_к$ совпадают с параметрами $a_к, c_к$; будем считать, что промежутки изменения параметров $\mu_к$ известны.

Функции $F_к$ относительно $\mu_к$ обладают всеми нужными свойствами, которые нам понадобятся при решении этих уравнений.

Каждое уравнение из системы $F_к = 0$, относительно μ_1, μ_2, μ_3, есть уравнение поверхности, а если взять попарно:

$$F_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0,\ F_2(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0, \tag{92}$$

$$F_2(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0,\ F_3(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0. \tag{93}$$

тогда каждая пара уравнений есть уравнение кривой в пространстве. Эти кривые, согласно теореме Римана, пересекаются в одной точке. При решении системы (92), (93) мы будем проектировать эти кривые на две взаимно перпендикулярные плоскости, пользуясь теоремой Монжа [I2].

Возьмем систему (92), зафиксируем μ_1 в заданном промежутке и будем решать систему (92) с двумя неизвестными так: при фиксированном μ_1 зафиксируем μ_2 и найдем нули функции F_1. Будем менять μ_2 и будут меняться нули функции F_1. С помощью нулей функции F_1 построим точки (μ_2^j, μ_3^j) на плоскости μ_2, μ_3. Соединим плавной линией эти точки. Аналогично построим точки из уравнения $F_2 = 0$. Тогда мы получим кривые, которые должны пересекаться в одной точке. Будем менять μ_1, тогда точки пересечения этих кривых будут меняться; соединим эти точки плавной линией. Совершенно аналогично из второй системы (93) построим кривые, эти кривые должны пересекаться в одной точке. Обозначим координаты точки пересечения этих кривых через (μ_2^*, μ_3^*). Аналогичное построение проделаем в плоскости (μ_1, μ_3). Только следует развернуть полуплоскость (μ_1, μ_3) и совместить с нижней полуплоскостью (μ_2, μ_3). Для координат μ_2^*, μ_3^* найдем μ_1^*.

Допустим, что мы решили по вышеизложенному алгоритму систему $F_j = 0$ и нашли числа μ_k; тогда, подставляя эти числа в равенства (I2), (22), мы будем знать функцию $z(t)$ вдоль всей действительной оси, а продолжать эту функцию вне оси можно по известной формуле [4].

Пользуясь результатами, полученными выше, в будущем мы будем решать задачи теории фильтрации, которые более сложны, чем задача отыскания функции $z(\zeta)$; будут произведены расчеты и результаты опубликованы.

Поступило 25.XII.1976.

Математический институт АН
Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

I. П.Я.Полубаринова-Кочина, Известия АН СССР, серия математическая, № 5-6, 1939.
2. П.Я.Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, М., 1952.
3. Э.Н.Береславский, Дифференциальные уравнения, т.8, 2, 1972.
4. В.Коппенфельс, Ф.Штальман, Практика конформных отображений, М., 1963.

5. Г.Н.Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.

6. В.В.Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950.

7. Н.П.Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., 1970.

8. А.Р.Цицкишвили, ДАН СССР, т.211, № 2, 1973.

9. А.Р.Цицкишвили, Дифференциальные уравнения, т.X, № 3, 1974.

10. А.Р.Цицкишвили, Дифференциальные уравнения, т.XII, № 11, 1976.

11. Э.Л.Аайнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

12. Н.А.Глаголев. Начертательная геометрия, М.Л., 1946.

ა.ციცქიშვილი

ნახევარსიბრტყის წრიულ მრავალკუთხედებზე
კონფორმულად გადასახვის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

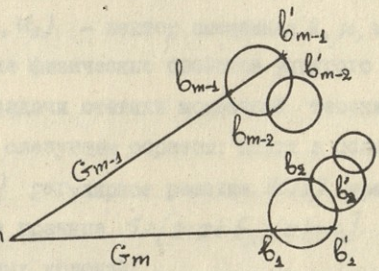
ნაშრომში მოცემულია ნახევარსიბრტყის წრიულ მრავალკუთხედებზე კონფორმულად გადამსახავი ფუნქციის ეფექტურად აგების მეთოდი. ფუნქციის აგება ხერხდება იმ შემთხვევებში, თუ მის ასაგებად საჭირო ამოსახსნელ ტრანსცენდენტურ განტოლებათა რაოდენობის და უცნობთა რიცხვი სამს არ აღემატება. ასეთ შემთხვევებს მიეკუთვნებიან: ნებისმიერი წრიული მრავალკუთხედები, სადაც გვერდების რიცხვი ხუთზე ნაკლებია; კერძო სახის წრიული ხუთკუთხედი, თუ მის რომელიმე წვეროში (კუთხით 2π) ჭრილი მთავრდება, ხოლო სხვა გვერდები და კუთხეები ნებისმიერია.

A. Tsitskishvili

CONFORMAL MAPPING OF A HALF-PLANE ON ARC POLYGONS

Summary

There is given an effective method of function construction, mapping conformally a half-plane on arc polygons with a number of sides less than five and for a particular type of an arc pentagon with a cut.



Рис

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

185, 1977

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Л.Г.Гиоргашвили

I. Общее представление. Основные уравнения статики моментной теории упругости имеют вид [I]

$$\Delta(\mu-\nu\Delta)u+(\lambda+\mu+\nu\Delta)\,\mathrm{grad\,div}\,u=0 \tag{I}$$

где $u=(u_1,u_2,u_3)$ – вектор смещения; λ,μ,ν – постоянные, характеризующие физические свойства упругого тела.

Основные задачи статики моментной теории упругости для шара ставятся следующим образом: найти в области $D\equiv Ш(0,a)=\{x:x\in E_3,|x|<a\}$ регулярное решение $u(x)$ уравнений (I), удовлетворяющее на границе $S=\{x:x\in E_3,|x|=a\}$ одному из следующих граничных условий:

(I)$^+$. $\{u(z)\}^+=f_1(z),\quad \{R(\partial z,n)u(z)\}^+=f_2(z).$

(II)$^+$. $\{P(\partial z,n)u(z)\}^+=f_1(z),\quad \{Q(\partial z,n)u(z)\}^+=f_2(z)$

(III)$^+$. $\{u(z)\}^+=f_1(z),\quad \{Q(\partial z,n)u(z)\}^+=f_2(z).$

(IУ). $^{+}\{P(\partial_z,n)u(z)\}^{+}=f_1(z)$, $\{P(\partial_z,n)u(z)\}^{+}=f_2(z)$.

Здесь $f_1=(f_{11},f_{12},f_{13})$, $f_2=(f_{21},f_{22},f_{23})$ – заданные на S векторы; n – орт внешней относительно D нормали в точке $z\in S$. Векторы Ru, Qu, Pu, участвующие в граничных условиях, имеют вид:

$$R(\partial_x,n)u=\operatorname{rot}u-n(n\cdot\operatorname{rot}u),$$

$$Q(\partial_x,n)u=q(u)-n(n\cdot q),$$

$$P(\partial_x,n)u=T(\partial_x,n)u+\nu[n\times\operatorname{rot}\Delta u]-[n\times\operatorname{grad}(n\cdot q)],$$

где

$$x\in E_3,$$

$$q(u)\equiv q=\nu\frac{\partial}{\partial n(x)}\operatorname{rot}u+\nu'\operatorname{grad}(n\cdot\operatorname{rot}u)^{*},$$

$T(\partial_x,n)u$ – вектор напряжения в классической теории упругости [2], а ν' – постоянная, удовлетворяющая неравенству $|\nu'|\le\nu$ [I].

Будем предполагать, что граничные функции разлагаются по полной системе сферических функций в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды. При этом предполагаем, что полученные дважды дифференцированием ряды сходятся также абсолютно и равномерно.

Из общей теории известны теоремы единственности для сформулированных выше задач.

Теорема. Вектор $u(x)$, определенный формулой

$$u(x)=\varphi(x)+(\rho^2-a^2)\operatorname{grad}\psi(x)-\nu\Phi(x), \tag{2}$$

где

ж) Символ $[c\times b]$ означает векторное произведение двух векторов, а $(c\cdot b)$ – их скалярное произведение.

$$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3),\quad \Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3),\quad \Delta\varphi=0,$$

$$\Delta\psi=0,\ (\Delta-\ell^2)\Phi=0,\ \ell^2=\frac{\mu}{\nu},\ \operatorname{div}\Phi=0,$$

$$\operatorname{div}\varphi=-\frac{2(\lambda+3\mu)}{\lambda+\mu}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{2\mu}{\lambda+\mu}\psi, \tag{3}$$

являются решением уравнения (I).

Это представление дает возможность решить все основные задачи статики моментной теории упругости для шара.

2. Решение задачи $(I)^+$. Ищем решение $\mathcal{U}(x)$ в виде (2), где

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m\varphi_m(\vartheta_0,\varphi_0),$$

$$\psi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m\psi_m(\vartheta_0,\varphi_0), \tag{4}$$

$$\Phi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}h_m(\rho)\Phi_m(\vartheta_0,\varphi_0),$$

φ_m,ψ_m,Φ_m - искомые сферические функции порядка m, $h_m(\rho)=\sqrt{\frac{a}{\rho}}\cdot\frac{I_{m+1/2}(\ell\rho)}{I_{m+1/2}(\ell a)}$, $I_{m+1/2}(x)$ - функция Бесселя от мнимого аргумента, $(\rho,\vartheta_0,\varphi_0)$ - сферические координаты точки $x\in D$.

Для определения искомых сферических функций мы получим следующие алгебраические системы уравнений:

a)

$$q_{2m}-\nu q_{3m}=(z\cdot f_1(z))_m,$$

$$\mu q_{3m}-\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}m(2m+1)\psi_m=\sum_{j=1}^{3}a\frac{\partial[f_{2j}(z)]_m}{\partial S_j(z)},$$

$$-mq_{2m}-\frac{2a^2(2m+1)[(\lambda+3\varkappa)m+\mu]}{(\lambda+\mu)(2m+3)}\psi+\nu a\left[\frac{\partial}{\partial\rho}h_m(\rho)\right]_{\rho=a}q_{3m}=$$

$$=(z\cdot f_1(z))_m+\sum_{j=1}^{3}a\frac{\partial[z\times f_1(z)]_{mj}}{\partial S_j(z)};$$

в)

$$\varphi_m-\nu\Phi_m=[f_1(z)]_m,$$

$$[a\mathcal{M}(\partial_z,n)\varphi_m-m\varphi_m]-\nu[a\mathcal{M}(\partial_z,n)\Phi_m-$$

$$-\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}h_m(\rho)\right)_{\rho=a}\Phi_m]=\mathcal{F}_m(z),$$

где $\frac{\partial}{\partial S_j}=[n\times grad]_j$, q_{2m} и q_{3m} – некоторые сферические функции,

$$\mathcal{M}(\partial_z,n)=\|\mathcal{M}_{kj}(\partial_z,n)\|_{3\times3},\ \mathcal{M}_{kj}(\partial_z,n)=n_j\frac{\partial}{\partial z_k}-n_k\frac{\partial}{\partial z_j},\ k,j=1,2,3$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{F}_m(z)\equiv\mathcal{F}(z)=[z\times f_2(z)]-z(div\,\psi)^{+}-[z\times[z\times grad\,\psi]]^{+}.$$

Из системы а) мы найдем ψ_m , и, следовательно, в шаровой области будут известны функции $\psi(x)$, $div\,\psi(x)$. Из системы в) определятся функции φ_m и Φ_m ; они, со своей стороны, в области $\mathcal{D}=Ш(o,a)$ определят функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$.

Теперь докажем, что детерминанты систем а) и в), которые обозначим соответственно через $\mathcal{D}_1^{(m)}$ и $\mathcal{D}_2^{(m)}$, отличны от нуля.

Рассмотрим однородную задачу $(I)_0^+$. $(f_i\equiv0,\ i=1,2)$.

Из теоремы единственности решения этой задачи следует, что $u(x)\equiv0$, при $x\in\mathcal{D}$.

Допустим, что хотя бы один из детерминантов $\mathcal{D}_{j_0}^{(m_0)}=0$ при некотором $m_0\geqslant0$, $j_0=1,2$. Тогда, по крайней мере, одна из функций φ_{m_0} , ψ_{m_0} , Φ_{m_0} тождественно не равна нулю в $\mathcal{D}$. Если эти последние подставим в (2), то получим решение задачи $(I)^+$. Но из формул

$$\left(2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+1\right)\psi_{m_0}(x)=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\operatorname{div}u(x),$$

$$\Phi_{m_0}(x)=\frac{1}{\mu}\left[\lambda\left(2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+3\right)\operatorname{grad}\psi_{m_0}(x)-\Delta u(x)\right],$$

$$\varphi_{m_0}(x)=u(x)-(\rho^2-a^2)\operatorname{grad}\psi_{m_0}(x)+\nu\Phi_{m_0}(x),$$

в силу тривиальности решения $u(x)$, ясно, что $\varphi_{m_0}=\psi_{m_0}=\Phi_{m_0}=0$. Это противоречие доказывает отличие от нуля детерминантов $\mathcal{D}_j^{(m)}$, $j=1,2,\ m\geq 0$.

Таким образом, если решения систем а) и в) подставим в (2), то получим решения задачи $(I)^+$.

3. Решение задачи $(II)^+$. Ищем решение $u(x)$ в виде (2), где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ определяются формулами (4).

Учитывая граничные условия задачи $(II)^+$, для искомых сферических функций φ_m , ψ_m , Φ_m получим следующие системы алгебраических уравнений:

а)
$$\frac{2\mu a^2(m-3\lambda-4\mu)(2m+1)}{(\lambda+\mu)(2m+3)}\psi_m-2\mu\nu\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-1\right)h_m(\rho)\right]_{\rho=a}q_{3m}+$$
$$+2\mu(m-1)q_{2m}=a(z\cdot f_1(z))_m,$$

$$-\frac{2(\lambda+2\mu)m^2(2m+1)}{\lambda+\mu}\psi_m+\mu a\left[\frac{\partial}{\partial\rho}h_m(\rho)\right]_{\rho=a}q_{3m}=$$
$$=\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{3}a^2\frac{\partial}{\partial S_j(z)}\left[f_{2j}(z)\right]_m,$$

$$\alpha_m \psi_m - \frac{\lambda\mu}{a^2}(m^2-1) q_{2m} + 2\mu\left\{\left[\nu\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\right)-\mu\right] h_m(\rho)\right\}_{\rho=a} \times$$

$$\times q_{3m} = \sum_{j=1}^{3} a \frac{\partial}{\partial s_j(z)}\left[n \times f_1(z)\right]_{mj};$$

в)

$$\left[\mu(m-1)+(\nu+\nu')\frac{m^3-2m^2+3m-4}{a^2}\right]\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_{mj}}{\partial s_j} + \left\{\left[2\mu\nu+(\nu+\nu')\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\mu-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2\nu}{\rho^2}\right)\right]h_m(\rho)\right\}_{\rho=a}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\Phi_{mj}}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{3} a\frac{\partial[f_{1j}(z)]_m}{\partial s_j},$$

$$-\frac{1}{a}\left[(\nu+\nu')m(m+1)+2\nu'\right]\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_{mj}}{\partial s_j} + \left\{\left[(\nu+\nu')\nu\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+1\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\nu'}{a}(2\nu-\mu a)\right]h_m(\rho)\right\}_{\rho=a}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\Phi_{mj}}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{3} a\frac{\partial}{\partial s_j}\left[n \times f_2(z)\right]_{mj};$$

с)

$$\frac{\mu m}{a}\varphi_m + \mu\mathcal{M}(\partial_z, n)\varphi_m - 2\mu\nu\mathcal{M}(\partial_z, n)\Phi_m = \mathcal{F}'_m(z),$$

$$-\frac{m(m-1)}{a^2}\varphi_m + \frac{m-1}{a}\mathcal{M}(\partial_z, n)\varphi_m + \nu\left[\frac{\partial^2 h_m(\rho)}{\partial\rho^2}\right]_{\rho=a}\Phi_m -$$

$$-\frac{\nu}{a}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-1\right)h_m(\rho)\right]_{\rho=a}\mathcal{M}(\partial_z, n)\varphi_m = \mathcal{F}''_m(z),$$

где

$$\alpha_m = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left\{\frac{8(m+1)[(\lambda+3\mu)m+\mu]}{2m+3} - 2(\lambda+2\mu)m(m-1) - \right.$$

$$\left. - (5\lambda+12\mu)m - 2\mu\right\},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}'_m(z) = f_1(z) - 2\mu a(\mathrm{grad}\,\psi)^+ - (\lambda+\varkappa)n(z)(\mathrm{div}\,\varphi)^+ -$$

$$-(\lambda+2\mu)z\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^+ + (\nu+\nu')\left\{[n(z)\times\nabla]\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial s_j}(\varphi_j - \nu\Phi_j)\right\}^+,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}''_m(z) = \frac{1}{\nu}[n(z)\times f_2(z)] - n(z)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\mathrm{div}\,\varphi\right)^+ -$$

$$-2\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \rho\,\mathrm{grad}\,\psi\right)\right]^+ - \frac{\nu'}{\nu}\left\{[n(z)\times\nabla]\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial s_j}(\varphi_j - \nu\Phi_j)\right\}^+,$$

q_{2m} и q_{3m} – некоторые сферические функции.

Из системы а) мы найдем ψ_m, и, следовательно, в области $\mathcal{D} = \mathcal{U}(0,a)$ будут известны ψ_m и $\mathrm{div}\,\varphi(x)$. Из системы в) определятся функции $\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_{mj}}{\partial s_j}$ и $\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\Phi_{mj}}{\partial s_j}$, которые, со своей стороны, в $\mathcal{D}$ определят $\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_j}{\partial s_j}$ и $\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\Phi_j}{\partial s_j}$.

Перепишем систему с) в виде:

$$a_m\varphi_m + b_m\mathcal{M}(\partial z,n)\varphi_m + d_m\mathcal{M}(\partial z,n)\Phi_m = \mathcal{F}'_m, \tag{5}$$

$$A_m\varphi_m + B_m\mathcal{M}(\partial z,n)\varphi_m + C_m\Phi_m + D_m\mathcal{M}(\partial z,n)\Phi_m = \mathcal{F}''_m,$$

где

$$a_m = \frac{\mu m}{a},\ b_m = \mu,\ d_m = -2\mu\nu,\ A_m = -\frac{m(m-1)}{a^2},$$

$$B_m = \frac{m-1}{a},\ C_m = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}h_m(\rho)\right]_{\rho=a},$$

$$D_m = -\frac{\nu}{a}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - 1\right)h_m(\rho)\right]_{\rho=a}.$$

В случае сферической поверхности нетрудно убедиться в справедливости следующего соотношения (см. [4]):

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 g_m(\vartheta,\varphi)}{\partial S_j^2} = -\frac{m(m+1)}{a^2} g_m(\vartheta,\varphi). \tag{6}$$

Легко доказать справедливость соотношения:

$$\mathcal{M}(\partial z,n)\,\mathcal{M}(\partial z,n)\,g_m = \frac{m(m+1)}{a^2} g_m + [n\times\nabla]\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g_{mj}}{\partial S_j} - \frac{1}{a}\mathcal{M}(\partial z,n)\,g_m \tag{7}$$

Здесь $g_m = g_m(\vartheta,\varphi)$ – сферическая функция.

Из системы (5) получаем связь между функциями φ_m и Φ_m :

$$\Phi_m = \frac{a_m D_m - A_m d_m}{c_m d_m}\varphi + \frac{b_m D_m - B_m d_m}{c_m d_m}\mathcal{M}(\partial z,n)\varphi_m + \frac{1}{c_m d_m}\left(d_m F_m'' - D_m F_m'\right) \tag{8}$$

Подставляя выражение Φ_m в первое уравнение системы (5) и учитывая формулы (6) и (7) для функции φ_m , получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\beta_m \varphi_m + \gamma_m \mathcal{M}(\partial z,n)\varphi_m = \chi_m , \tag{9}$$

где

$$\beta_m = a_m + \frac{m(m+1)}{a^2}\cdot\frac{b_m D_m - B_m d_m}{c_m},$$

$$\gamma_m = \frac{1}{a c_m}\left[a\left(b_m c_m + a_m D_m - A_m d_m\right) + B_m d_m - b_m D_m\right],$$

$$\chi_m = F_m' - \frac{1}{c_m}\mathcal{M}(\partial z,n)\left(d_m F_m'' - D_m F_m'\right) +$$

$$+\frac{B_m d_m - b_m D_m}{C_m}\left[n\times\nabla\right]\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \dot{\varphi}_{mj}}{\partial s_j}.$$

Решение уравнения (9) дано в [4] и имеет вид:

$$\varphi_m = a^2\left[m(m+1)\gamma_m + a\beta_m(\gamma_m - a\beta_m)\right]^{-1}\Big\{\Big(\frac{\gamma_m}{a}-\beta_m\Big)\chi_m +$$

$$+M(\partial_z, n)\chi_m - \gamma_m\left[n\times\nabla\right]\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_{mj}}{\partial s_j}\Big\}.$$

Если внесем выражение φ_m в (8), то можно определить и функцию Φ_m.

Заметим, что для разрешимости системы (5) при $m=0$ и $m=1$, необходимые условия имеют соответственно вид:

$$\int_S f_1(z)\, d_z S = 0,$$

$$\int_S \left\{\left[z\times f_1(z)\right] + 2 f_2(z)\right\} d_z S = 0$$

Эти соотношения показывают равенство нулю главного вектора и главного момента внешних усилий, действующих на границе S.

Таким образом, мы решили системы а), в) и с) при условии, что детерминанты этих систем отличны от нуля.

Отличие от нуля детерминантов системы а), в) и с) доказывается подобно тому, как это сделано при решении задачи (I)$^+$.

Аналогично решаются задачи (III)$^+$ и (IУ)$^+$.

Поступило IO.IУ.1976

Институт
прикладной математики ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Т.Койтер, Механика, Сб. перев. ин.статей, 1965, № 3, 89-112.
2. В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе, Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси, 1968.
3. М.О.Башелейшвили, Т.Г.Гегелиа, О.И.Маисаиа, Аннотации докл. семинара ИПМ ТГУ, № 2, 1969, 43-47.
4. Д.Г.Натрошвили, Труды ИПМ ТГУ, Ш, 1972, 127-140.
5. Д.Г.Натрошвили, А.Я.Джагмаидзе, Некоторые задачи теории упругости. Изд-во ИПМ ТГУ, 1975, 93-112.

ლ.გიორგაშვილი

დრეკადობის მომენტური თეორიის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა სფეროსთვის

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში მიღებულია დრეკადობის მომენტური თეორიის სტატიკის ერთგვაროვანი განტოლებების ამოხსნის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა. მიღებული წარმოდგენის საშუალებით ამოხსნილია სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები სფეროსთვის. ამოხსნები მიღებულია მწკრივების სახით.

L.Giorgashvili

THE SOLUTION OF BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF STATICS OF THE NON-SYMMETRICAL THEORY OF ELASTICITY FOR THE SPHERE

Summary

The formula of the general representation for solving homogeneous equations of statics of the non-symmetrical theory of elasticity is obtained By means of this representation the basic boundary valuy problems are solved for the sphere. The solutions are obtained in the form of series.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

185, 1977

ზოგიერთი უმომენტო ბრუნვითი გარსის ჰიდროსტატიკური დატვირთვის შესახებ

შ. მეცხოვრიშვილი

გარსთა თეორიაში გამოყენებულ მიახლოებით მეთოდებს შორის უმომენტო თეორიას ერთერთი უპირველესი ადგილი უჭირავს. ეს თეორია, ხშირ შემთხვევაში, პრაქტიკისათვის მეტად ხელსაყრელ შედეგს იძლევა. ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს იმის დადგენას, შეიძლება თუ არა აღებული გარსის გაანგარიშება უმომენტო თეორიის საფუძველზე.

1. როგორც ცნობილია, გარსის უმომენტო დაძაბული მდგომარეობის შესწავლისათვის მიიღება დიფერენციალური განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AS_2)-N_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}+S_1\frac{\partial A}{\partial\beta}+ABP_\alpha=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2)-N_1\frac{\partial A}{\partial\beta}+S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}+ABP_\beta=0,$$

$$\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}+P_n=0, \qquad S_1-S_2=0.$$

სადაც (α,β) არიან ზედაპირზე აღებული მრუდწირული კოორდინატები, რომლებიც სიმრუდის წირებს ემთხვევიან, A^2 და B^2 –პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები, R_1 და R_2 - ზედაპირის მთავარი სიმრუდის რადიუსები, N_1 და N_2 –ძალვის ნორმალური კომპონენტები, S_1 და S_2 –მხები კომპონენტები, P_α, P_β, P_n გარე ძალების ნაკრები ვექტორის მდგენელები.

წინამდებარე ნაშრომის მიზანს შეადგენს ბრუნვითი ზედაპირების ერთი კლასის შემთხვევაში უმომენტო დაძაბული მდგომარეობის

ამოცანის შესწავლა და ამ გარსის გაანგარიშება ჰიდროსტატიკური გარე დატვირთვის შემთხვევაში.

როგორც ცნობილია, Oz ღერძის ირგვლივ ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება ზოგადად ასე გამოისახება:

$$r^2 = x^2+y^2,$$

სადაც r გამოსახავს მანძილს წირის წერტილებიდან ბრუნვის Oz ღერძამდე.

კუთხე, რომლითაც განისაზღვრება წირის მობრუნება ბრუნვის ღერძის ირგვლივ, აღვნიშნოთ ϑ -თი, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ბრუნვით ზედაპირზე მრუდწირულ კოორდინატად ავიღოთ (z,ϑ), სადაც ცხადია $z=const$ წარმოადგენენ პარალელებს, ხოლო $\vartheta=const$ – მერიდიანებს.

განვსაზღვრავთ რა პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს და ზედაპირის მთავარ სიმრუდეებს, ცხადია, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\partial}{\partial z}(rN_1)+(1+r'^2)^{1/2}\frac{\partial S}{\partial\vartheta}-r'N_2+r(1+r'^2)^{1/2}P_z=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(rS)+(1+r'^2)\frac{\partial N_2}{\partial \vartheta}+r'S+r(1+r'^2)^{1/2}P_\vartheta=0, \qquad (I.I)$$

$$-\frac{rr''}{1+r'^2}N_1+N_2+r(1+r'^2)^{1/2}P_n=0,$$

სადაც $S_1=S_2=S.$

ჩვენი მიზანია (I.I) განტოლებათა სისტემის შესწავლა არანულოვანი სასაზღვრო პირობების და ჰიდროსტატიკური გარე დატვირთვის შემთხვევაში.

როგორც ცნობილია, ამოცანა შეიძლება გავყოთ ორ ნაწილად: ჯერ განვიხილოთ ნულოვანი გარე დატვირთვის და არანულოვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევა, შემდეგ კი შევისწავლოთ არანულოვანი დატვირთვა ნულოვანი სასაზღვრო პირობებით. ამ ორი ამოცანის შეკრებით მიიღება მოცემული ამოცანის ამონახსნი.

დავუშვათ, რომ $P_z = P_\vartheta = P_n = 0$ და ვეძიოთ (1,1) -ის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$N_1 = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}, \quad N_2 = \frac{r''}{\sqrt{1+r'^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}, \quad S = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad (1,2)$$

სადაც $\varphi(z,\vartheta)$ უცნობი ფუნქციაა.

(1.2) მნიშვნელობების (1,1)-ში შეტანის შედეგად დავრწმუნდებით, რომ პირველი და მესამე განტოლება იგივურად დაკმაყოფილდება, მეორე კი მიიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$r\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2r'\frac{\partial\varphi}{\partial z} - r''\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} = 0. \qquad (1.3)$$

$\varphi(z,\vartheta)$ ფუნქციის მიმართ მიღებული განტოლება ელიფსური ან ჰიპერბოლური იმის მიხედვით, თუ რა ნიშნისაა r''. კერძოდ, თუ $r''<0$, განტოლება იქნება ელიფსური, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ჰიპერბოლური.

განვიხილოთ ბრტყელი წირი

$$r = (az^2+bz)^\alpha, \qquad (1.4)$$

სადაც a, b და α ნამდვილი რიცხვებია. z-ის მნიშვნელობანი ისე უნდა ვცვალოთ, რომ შესრულდეს პირობა $r \geq 0$. კერძოდ ვიგულისხმოთ, რომ $z \geq 0$.

შევნიშნოთ, რომ ყველა მეორე რიგის ბრუნვითი ზედაპირი (1.4) წირის ბრუნვითი მიიღება. მართლაც: ა) თუ

$a=-1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, მაშინ $x^2+y^2+(z-\frac{b}{2})^2=\frac{b^2}{4}$, ე.ი. მივიღეთ სფერო; ბ) თუ $a=-\frac{c^2}{e^2}$, $b=\frac{2c^2}{e^2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, მივიღებთ $\frac{x^2+y^2}{c^2}+\frac{(z-e)^2}{e^2}=1$, ე.ი. მივიღეთ ბრუნვითი ელიფსოიდი;

გ) თუ $a=\frac{c^2}{e^2}$, $b=\frac{2c^2}{e^2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, მივიღებთ $\frac{x^2+y^2}{c^2}-\frac{(z-e)^2}{e^2}=1$

რომელიც ორკალთა ბრუნვითი ჰიპერბოლოიდია.

ჩვენ აგრეთვე შეგვიძლია მისგან მივიღოთ პარაბოლოიდი, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, კონუსი ან ცილინდრი.

გარსთა უმომენტო თეორიიდან ცნობილია, რომ ჰიპერბოლური გარსის შემთხვევაში საზოგადოდ უმომენტო თეორია არ გამოიყენება. ამიტომ (1.3) განტოლება განვიხილოთ იმ შემთხვევაში, როცა ის ელიფსურია.

2. (1.4)-ის საფუძველზე (1.3) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$(az^2+bz)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2\alpha(2az+b)(az^2+b)\frac{\partial\varphi}{\partial z}-$$
$$-\alpha[\alpha(2az+b)^2-(2a^2z^2+2abz+b^2)]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0. \qquad (2.1)$$

პირველ რიგში გამოვარკვიოთ, რა შემთხვევაში იქნება (2.1) განტოლება ელიფსური.

იმისათვის, რომ (2.1) იყოს ელიფსური, უნდა შესრულდეს უტოლობა

$$\alpha\left[\alpha-\frac{2a^2z^2+2abz+b^2}{(2az+b)^2}\right]<0,$$

რაც შესაძლებელია მაშინ, როცა

$$0<\alpha<\frac{2a^2z^2+2abz+b^2}{(2az+b)^2}, \quad \text{ან} \quad \frac{2a^2z^2+2abz+b^2}{(2az+b)^2}<\alpha<0.$$

მეორე შემთხვევა შეუძლებელია. ამიტომ განვიხილოთ მხოლოდ პირველი. გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{2a^2z^2+2abz+b^2}{(2az+b)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2az+b}\right)^2. \qquad (2.2)$$

შესაძლებელია 3 შემთხვევა.

1^0. როცა $a<0$, მაშინ, იმის გამო, რომ $az^2+bz\geqslant 0$ და $z\geqslant 0$, მივიღებთ $-b\leq 2az+b\leq b$ და, მაშასადამე $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$.

2^0. როცა $a=0$, მაშინ $0<\alpha\leq 1$.

3^0. როცა $a>0$, მაშინ, იმის გამო, რომ ზედაპირი განსაზღვრულია $z\geqslant 0$ მნიშვნელობებისათვის, მივიღებთ $b<2az+b<$ $<\infty$ და, მაშასადამე $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$.

ამრიგად, ჩვენ დავადგინეთ შემთხვევები, როცა (1.4) მრუდის ბრუნვით მიღებული გარსი გამოითვლება უმომენტო თეორიის საფუძველზე.

3. ჯერჯერობით განვიხილოთ მთლიანი ბრუნვითი გარსი. (2.1) განტოლების ამონახსნის პერიოდულობის გამო უცნობი $\varphi(z,\vartheta)$ ფუნქცია შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\varphi(z,\vartheta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k(z)e^{ik\vartheta}, \tag{3.1}$$

სადაც $Z_k(z)$ უცნობი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ $Z_{-k}(z)=\overline{Z_k(z)}$ პირობას. გავამრავლოთ (2.1) განტოლება $e^{-ik\vartheta}$-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრება 0-დან 2π-მდე. ვისარგებლებთ რა ნაწილობითი ინტეგრების წესით, მივიღებთ:

$$(az^2+bz)^2Z_k''+2\alpha(2a^2z^3+3abz^2+b^2z)Z_k'+$$
$$+\alpha k^2[2a^2(2\alpha-1)z^2+2ab(2\alpha-1)z+(\alpha-1)b^2]Z_k=0,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{3.2}$$

ეს არის ფუქსის ტიპის განტოლება. მისი ამონახსნი იქნება ყველგან ანალიზური, გარდა $z=0$ წერტილისა, ამ წერტილის მახლობლობაში (3.2) განტოლების ამონახსნი ვეძიოთ შემდეგი სახით:

$$Z_k=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^{n+\rho_k}, \tag{3.3}$$

სადაც $a_n^{(k)}$ კოეფიციენტები და ρ_k უცნობი სიდიდეებია.

შევიტანოთ (3.3) მნიშვნელობა (3.2)-ში მივიღებთ:

$$(a^2z^4+2abz^3+b^2z^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho_k)(n+\rho_k-1)a_n^{(k)}z^{n+\rho_k-2}+$$
$$+2\alpha(2a^2z^3+3abz^2+b^2z)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho_k)a_n^{(k)}z^{n+\rho_k-1}+$$
$$+\alpha k^2[2a^2(2\alpha-1)z^2+2ab(2\alpha-1)z+(\alpha-1)b^2]\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(k)}z^{n+\rho_k}=0,$$

ანდა, თუ დავალაგებთ z-ის ხარისხების მიმართ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[a^2(n+\rho_k)(n+\rho_k-1)+4\alpha a^2(n+\rho_k)+2\alpha k^2a^2(2\alpha-1)]a_n^{(k)}z^{n+\rho_k+2}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}[2ab(n+\rho_k)(n+\rho_k+1)+6\alpha ab(n+\rho_k)+2\alpha k^2ab(2\alpha-1)]a_n^{(k)}z^{n+\rho_k+1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}[b^2(n+\rho_k)(n+\rho_k-1)+2\alpha b^2(n+\rho_k)+\alpha k^2b^2(\alpha-1)]a_n^{(k)}z^{n+\rho_k}=0.$$

გავუტოლოთ ნულს z-ის შესაბამისი ხარისხების კოეფიციენტები ცხადია გვექნება:

$$\begin{aligned}
&[b^2\rho_k(\rho_k-1)+2\alpha b^2\rho_k+\alpha k^2b^2(\alpha-1)]a_0^{(k)}=0,\\
&[2ab\rho_k(\rho_k-1)+6\alpha ab\rho_k+2\alpha k^2ab(2\alpha-1)]a_0^{(k)}+\\
&+[b^2(\rho_k+1)\rho_k+2\alpha b^2(\rho_k+1)+\alpha k^2b^2(\alpha-1)]a_1^{(k)}=0\\
&[b^2(\rho_k+2)(\rho_k+1)+2\alpha b^2(\rho_k+2)+\alpha k^2b^2(\alpha-1)]a_2^{(k)}+\\
&+[2ab(\rho_k+1)\rho_k+6\alpha ab(\rho_k+1)+2\alpha k^2ab(2\alpha-1)]a_1^{(k)}+\\
&+[a^2\rho_k(\rho_k-1)+4\alpha a^2\rho_k+2\alpha k^2a^2(2\alpha-1)]a_0^{(k)}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[b^2(m+\rho_k)(m+\rho_k-1)+2\alpha b^2(m+\rho_k)+\alpha k^2b^2(\alpha-1)]a_m^{(k)}+\\
&+[2ab(m+\rho_k-1)(m+\rho_k-2)+6\alpha ab(m+\rho_k-1)+2\alpha k^2ab(2\alpha-1)]a_{m-1}^{(k)}+\\
&+[a^2(m+\rho_k-2)(m+\rho_k-3)+4\alpha a^2(m+\rho_k-2)+2\alpha k^2a^2(2\alpha-1)]a_{m-2}^{(k)}=0.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

ავარჩიოთ ნებისმიერად $a_0^{(k)}$ რიცხვები (მაგალითად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $a_0^{(k)}=1$). მაშინ მივიღებთ

$$F(\rho_k)=b^2\rho_k(\rho_k-1)+2\alpha b^2\rho_k+\alpha k^2b^2(\alpha-1)=0. \tag{3.5}$$

ეს არის განმსაზღვრელი განტოლება. ვთქვათ მისი ამონახსნია $\rho_k^{(1)}$ და $\rho_k^{(2)}$. მაშინ (3.4) რეკურენტული განტოლებებიდან განისაზღვრებიან მათი შესაბამისი $(a_n^{(k)})_1$ და $(a_n^{(k)})_2$ კოეფიციენტები და, მივიღებთ შემდეგ ზოგად ამონახსნს

$$Z_k = C_k^{(1)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_1 z^{n+\rho_k^{(1)}} + C_k^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_2 z^{n+\rho_k^{(2)}}, \qquad (3.6)$$

სადაც $C_k^{(1)}$ და $C_k^{(2)}$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც სასაზღვრო პირობების საფუძველზე განისაზღვრებიან (იმ შემთხვევაში, როცა $\rho_k^{(1)} - \rho_k^{(2)}$ მთელი რიცხვია, (3.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოდგინება (3.6)-გან განსხვავებულად. ამავე დროს საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც მიღებული ამონახსნი რეგულარული იქნება).

თუ შევიტანთ (3.6) მნიშვნელობებს (3.1)-ში, მივიღებთ

$$\varphi(z,\vartheta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{C_k^{(1)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_1 z^{n+\rho_k^{(1)}} + C_k^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_2 z^{n+\rho_k^{(2)}}\right\}e^{ik\vartheta} \qquad (3.7)$$

მიღებული ფორმულის საფუძველზე კი, თანახმად (1,2) დამოკიდებულებებისა, მიიღება ძალვის კომპონენტების შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$N_1=\frac{\sqrt{1+\alpha^2(2az+b)^2(az^2+bz)^{2\alpha-2}}}{(az^2+bz)^{\alpha}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}ik\left\{C_k^{(1)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_1 z^{n+\rho_k^{(1)}}+\right.$$

$$\left.+C_k^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_2 z^{n+\rho_k^{(2)}}\right\}e^{ik\vartheta},$$

$$N_2=\frac{2a\alpha(az^2+bz)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(2az+b)^2(az^2+bz)^{\alpha-2}}{\sqrt{1+\alpha^2(2az+b)^2(az^2+bz)^{2\alpha-2}}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}ik\left\{C_k^{(1)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_1 z^{n+\rho_k^{(1)}}+\right.$$

$$\left.+C_k^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(k)})_2 z^{n+\rho_k^{(2)}}\right\}e^{ik\vartheta},$$

$$S=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{C_k^{(1)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho_k^{(1)})(a_n^{(k)})_1 z^{n+\rho_k^{(1)}-1}+C_k^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho_k^{(2)})(a_n^{(k)})_2 z^{n+\rho_k^{(2)}-1}\right\}e^{ik\vartheta}.$$

4. გადავიდეთ არაერთგვაროვანი სისტემის ამოხსნაზე იმ შემთხვევაში, როცა ზემოაღნიშნულ გარსზე მოქმედებს ჰიდროსტატიკური წნევა, სასაზღვრო პირობები კი ნულოვანია.

(1.1) სისტემის მესამე განტოლებიდან ამოვხსნათ N_2 და შევიტანოთ ის პირველ ორ განტოლებაში. მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial z}(rN_1)-\frac{rr'r''}{1+r'^2}N_1+\sqrt{1+r'^2}\,\frac{\partial S}{\partial \vartheta}+r\sqrt{1+r'^2}\,P_\alpha+rr'\sqrt{1+r'^2}\,P_n=0,$$

$$\frac{rr''}{\sqrt{1+r'^2}}\frac{\partial N_1}{\partial \vartheta}+\frac{\partial}{\partial z}(rS)+r'S+r\sqrt{1+r'^2}\,P_\beta-r(1+r'^2)\frac{\partial P_n}{\partial \vartheta}=0, \qquad (4.1)$$

სადაც P_α, P_β, P_n გარე ძალების მდგენელებია.

ვიგულისხმოთ, რომ გარსი ჩაძირულია სითხეში ისე, რომ ბრუნვის ღერძი პარალელურია სითხის ზედაპირის. აღვნიშნოთ h-ით მანძილი ბრუნვის ღერძიდან გარსის იმ წერტილამდე, რომელიც ყველაზე ახლოსაა სითხის ზედაპირთან. ამ წერტილში სითხის წნევა აღვნიშნოთ P_0-ით, იმის გამო, რომ ჰიდროსტატიკური დატვირთვა მიმართულია შიგა ნორმალის გასწვრივ და სიღრმეში ჩაძირვის პროპორციულია, წნევა გამოისახება ფორმულით:

$$\vec{P}=[P_0+P_0(h-r\cos\vartheta)]\vec{n}, \qquad (4.2)$$

სადაც იგულისხმება, რომ ϑ-ს ათვლა ხდება იმ მერიდიანიდან, რომელიც სითხის ზედაპირთან უახლოეს წერტილზე გადის, $\vec{n}$ კი ზედაპირის შიგა ნორმალია.

აშკარაა, რომ (4.2)-ის დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$P_\alpha=P_\beta=0,\quad P_n=P_0+P_0(h-r\cos\vartheta). \qquad (4.3)$$

შევიტანთ რა ამ მნიშვნელობას (4.1) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial z}(rN_1)-\frac{rr'r''}{1+r'^2}N_1+(1+r'^2)\frac{\partial S}{\partial \vartheta}+rr'\sqrt{1+r'^2}\,[P_0+P_0(h-r\cos\vartheta)]=0,$$

$$\frac{rr''}{\sqrt{1+r'^2}}\frac{\partial N_1}{\partial \vartheta}+\frac{\partial}{\partial z}(rS)+r'S-P_0r^2(1+r'^2)\sin\vartheta=0. \qquad (4.4)$$

ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ (4,3) სახის დატვირთვა განაწილებულია მთელ ზედაპირზე.

ვიგულისხმოთ ჯერჯერობით, რომ (4.3) სახის დატვირთვა მოქმედებს მხოლოდ ზოლზე, რომელიც მოთავსებულია $z=z_0$, $z=z_0+\varepsilon$ პარალელებს შორის. გარსის დანარჩენი ნაწილი კი დატვირთვისაგან თავისუფალია. განვიხილავთ შემთხვევას, როცა სასაზღვრო პირობები ნულოვანია, რადგან მისგან გამოწვეული დაძაბულობა პირველ ეტაპზეა გათვალისწინებული. რაკი ჩვენ ვეძებთ კერძო ამონახსნს, ცხადია, გარსის დაუტვირთავ $0\leq z<z_0$ ნაწილზე ძალები ნულის ტოლად უნდა მივიღოთ. ნულის ტოლად შეგვიძლია მივიღოთ აგრეთვე მათი წარმოებულები ϑ -ს მიმართ ყველგან, მათ შორის დატვირთულ ნაწილშიც.

დატვირთულ ზოლზე ძალის კომპონენტები იღებენ ნაზრდს. აღვნიშნოთ $z=z_0+dz$ პარალელის შესაბამისი ნაზრდები dN_1 და dS -ით. მაშინ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდის სიზუსტით მივიღებთ

$$dN_1=-\left\{\kappa'\left[P_0+P_0(h-\kappa\cos\vartheta)\right]dS_1\right\}_{z_0},$$

$$dS=P_0\left[\kappa\sqrt{1+\kappa'^2}\sin\vartheta\, dS_1\right]_{z_0}, \qquad (4.5)$$

სადაც $dS_1=\sqrt{1+\kappa'^2}\,dz$ წარმოადგენს მერიდიანის რკალის ელემენტს.

დავუშვათ, რომ $\varepsilon\to 0$, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ დატვირთვა მოქმედებს მხოლოდ $z=z_0$ პარალელზე. მაშინ, თუ აღვნიშნავთ ძალთა შესაბამის ნაზრდებს ΔN_1 და ΔS -ით, მივიღებთ

$$\Delta N_1 = -r'(z_0)\, P_0 [1+h-r(z_0)\cos\vartheta],$$

$$\Delta S = P_0\, r(z_0)\,[1+r'^2(z_0)]^{\frac{1}{2}} \sin\vartheta. \qquad (4.6)$$

ახლა დავუშვათ, რომ ბრუნვითი გარსი მიღებულია (1.5) წირის ბრუნვით $0z$ ღერძის ირგვლივ.

შევიტანოთ r -ის მნიშვნელობანი (4.6) ფორმულებში:

$$\Delta N_1 = -\alpha P_0 (2az_0+b)(az_0^2+bz_0)^{\alpha-1}[1+h-(az_0^2+bz_0)\cos\vartheta],$$

$$\Delta S = P_0 (az_0^2+bz_0)^{\alpha}[1+\alpha^2(2az_0+b)^2(az_0^2+bz_0)^{2\alpha-2}]^{\frac{1}{2}}\sin\vartheta. \qquad (4.7)$$

ვთქვათ გარსის მთელ ზედაპირზე მოქმედებს განაწილებული ჰიდროსტატიკური დატვირთვა. მაშინ (4.7) -ში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ z_0 იცვლება z -ის ცვლილების მთელ შუალედში, ძალვის შესაბამისი კომპონენტები კი z_0 -ის მიმართ ინტეგრებით მიიღებიან, ე.ი.

$$N_1 = -\alpha P_0 (1+h)\int_0^z (2ar+b)(ar^2+br)^{\alpha-1}dr + \alpha P_0 \cos\vartheta \int_0^z (2ar+b)(ar^2+br)^{2\alpha-1}dr,$$

$$S = P_0 \sin\vartheta \int_0^z (ar^2+br)^{\alpha}[1+\alpha^2(2ar+b)^2(ar^2+br)^{2\alpha-2}]^{\frac{1}{2}}dr.$$

პირველი მათგანი შეიძლება ვიპოვოთ ცხადი სახით:

$$N_1 = -P_0(1+h)(az^2+bz)^{\alpha} + \frac{1}{2}P_0(az^2+bz)^{2\alpha}\cos\vartheta.$$

ასევე განისაზღვრება S -ის და შემდეგ N_2 -ის მნიშვნელობაც z -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

განხილული ორი ამოცანის ამონახსნის შეერთებით მიიღება თავდაპირველად დასმული ამოცანის ამონახსნი.

შემოსულია 25.X.1976.

თეორიული მექანიკის
კათედრა

ლიტერატურა

I. В.З.Власов, Общая теория оболочек, Москва-Ленинград, 1949.

2. В.Ф.Коган, Основы теории поверхностей, ч.I,Москва, 1948.

3. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т.Ш, ч.П, Москва, 1956

Ш.С.Мецховришвили

О ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Р е з ю м е

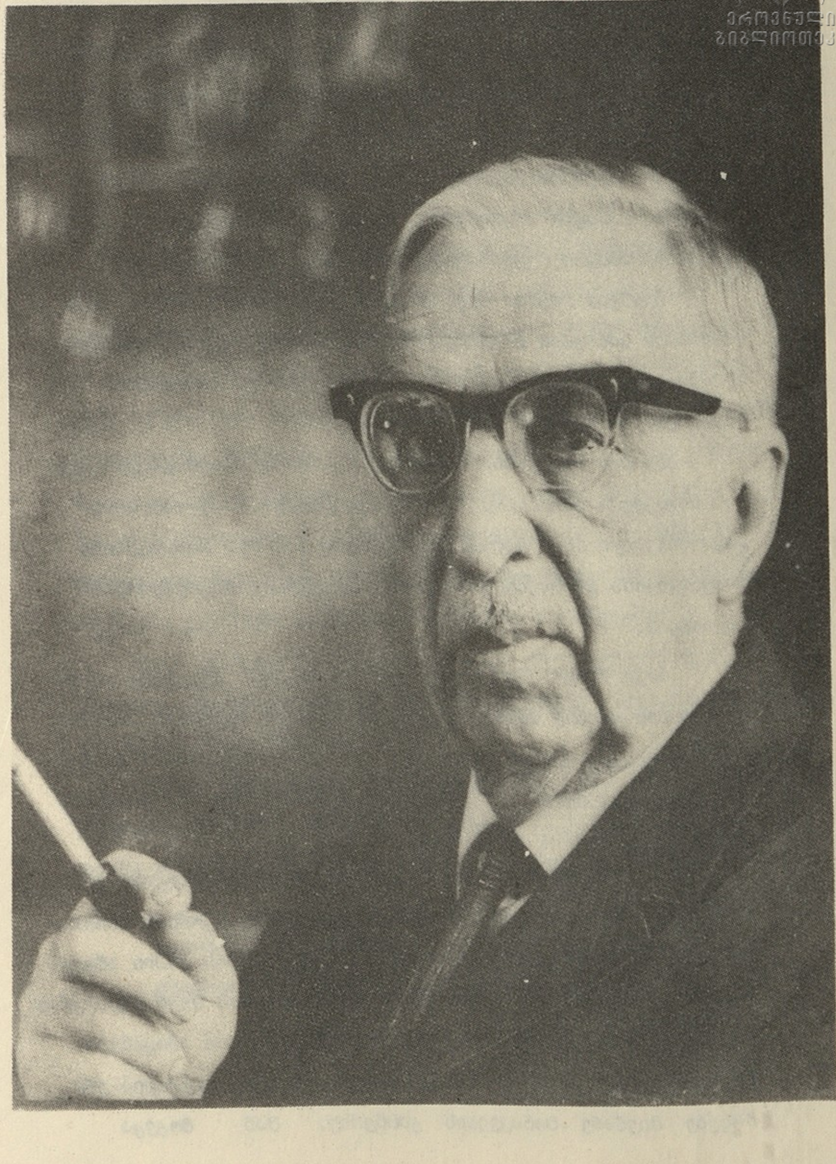
Задача безмоментного напряженного состояния для оболочек вращения приводится к нахождению одной неизвестной функции. В работе рассматривается неоднородная задача, когда внешняя нагрузка представляет гидростатическое давление.

Sh. Metskhovrishvili

On the HYDROSTATICAL PRESSURE OF SOME MOMENTLESS ROTATION SHELLS

S u m m a r y

The problem of the momentless strained state for rotation shells is reduced to the finding of one unknown function. The paper considers a heterogeneous problem for the case when the external load constitutes hydrostatical pressure.



აკადემიკოსი ნიკო მუსხელიშვილი

დიდი ხანი არარის გასული მას შემდეგ, რაც ქართველმა ერმა სამუდამოდ მიაბარა მთაწმინდას თავისი გამოჩენილი შვილი, სახელმოხვეჭილი მეცნიერი, სოციალისტური შრომის გმირი, სსრ კავშირის სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი, საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო პრეზიდენტი, საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების საპატიო წევრი, აკადემიკოსი ნიკო მუსხელიშვილი.

ჩვენგან წავიდა მეცნიერების დიდი ორგანიზატორი და შესანიშნავი საზოგადო მოღვაწე, რომელმაც თავისი უტყუარი ნიჭი და დაუშრეტელი ენერგია მეცნიერების სამსახურსა და ახალგაზრდა სპეციალისტთა აღზრდის საქმეს შეალია.

ამჟამად საქვეყნოდ აღიარებული ქართული მათემატიკური სკოლის მიღწევები ძირითადად ნიკო მუსხელიშვილის სახელთან არის დაკავშირებული. მისი შემოქმედების სფერო მოიცავს თანამედროვე მათემატიკისა და მექანიკის მეტად აქტუალურ და მნიშვნელოვან საკითხებს.

ნიკო მუსხელიშვილის მთავარი მეცნიერული შედეგები თავმოყრილია მის ცნობილ მონოგრაფიებში "Некоторые основные задачи математической теории упругости" და "Сингулярные интегральные уравнения ", რომლებიც გადათარგმნილია სხვადასხვა ენაზე და უცხოეთშია გამოცემული.

ნიკო მუსხელიშვილის მიერ გამოკვლეულია ერთგვაროვანი და იზოტროპული დრეკადი სხეულის ბრტყელი სტატიკური თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები კონფორმული ასახვის, კოშის ტიპის ინტეგრალისა და ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდებით. მის მიერ ეფექტურად გამოკვლეულია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის შერეული ამოცანები ნახევარსიბრტყისათვის და სიბრტყისათვის, რომელიც გაჭრილია ერთ წრფეზე მდებარე მონაკვეთის გასწვრივ. მან მოგვცა

ეფექტური ამოხსნა საკონტაქტო ამოცანებისა ნახევარსიბრტყისათვის და დრეკად ნახევარსიბრტყის საზღვარზე მყარი შტამპის წონასწორობის ამოცანისა. მის მიერ აგებულია სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური ამონახსნები სასრული და ნახევრად უსასრულო არეებისათვის, რომლებიც აისახებიან კონფორმულად წრეზე ან ნახევარსიბრტყეზე რაციონალური ფუნქციების საშუალებით.

ნიკო მუსხელიშვილს ეკუთვნის კიდევ ერთი ახალი ეფექტური მეთოდი, რომლითაც დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნაზე.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ნიკო მუსხელიშვილის შედეგები სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში. აქ მის მიერ შემოღებულია მნიშვნელოვანი ფუნქციონალური კლასები და ნაპოვნია ეფექტური ფორმულა ინდექსის გამოსათვლელად, მათი საშუალებით ნიკო მუსხელიშვილმა პირველად მოახერხა ერთი განზომილების შემთხვევაში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სრული თეორიის აგება გახსნილი საინტეგრაციო წირების შემთხვევაში.

ნიკო მუსხელიშვილს მრავალი მოწაფე და მიმდევარი ჰყავს, რომლებთაც მნიშვნელოვანი წვლილი აქვთ შეტანილი მათემატიკისა და მექანიკის სხვადასხვა დარგში.

იმედია, რომ ჩვენი ნიჭიერი ახალგაზრდა მკვლევარები ღირსეულად გააგრძელებენ იმ სახელოვან ტრადიციას, რომელიც დანერგა დიდმა ქართველმა მეცნიერმა ნიკო მუსხელიშვილმა.

საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდენტი,
მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწე, პროფესორი
ი. ბაღნარაძე

Академик Н.И.Мусхелишвили

Недавно грузинский народ простился с выдающимся ученым, Героем социалистического труда, лауреатом Государственной премии, почетным президентом Академии наук Грузинской ССР, почетным членом Грузинского математического общества, академиком Николаем Ивановичем Мусхелишвили.

От нас ушел большой организатор науки и замечательный общественный деятель, отдавший весь свой талант и неиссякаемую энергию служению науке и делу воспитания молодых кадров.

С именем Н.Мусхелишвили связаны в основном все достижения в настоящее время широко известной грузинской математической школы. Сфера его творческих интересов включала наиболее актуальные и значительные вопросы современной математики и механики.

Основные научные результаты Н.И.Мусхелишвили собраны в его известных монографиях "Некоторые основные задачи математической теории упругости" и "Сингулярные интегральные уравнения", переведенных на многие языки.

Методами конформного отображения, интеграла типа Коши и интегральных уравнений Н.И.Мусхелишвили исследованы основные граничные задачи плоской статической теории однородного изотропного упругого тела. Им детально исследованы смешанные задачи плоско теории упругости для полуплоскости и плоскости с разрезами, лежащими на одной прямой.

Н.И.Мусхелишвили дал эффективное решение контактной задачи для полуплоскости и задачи о равновесии твердого штампа на границе полуплоскости. Им построены эффективные решения граничных задач для конечных и полубесконечных областей, конформно отображающих с помощью рациональных функций на круг или полуплоскость.

Н.И.Мусхелишвили принадлежит эффективный метод приведения решения некоторых важных задач плоской теории упругости к решению граничных задач теории аналитических функций комплексной переменной.

Особо следует отметить результаты Н.И.Мусхелишвили в теории сингулярных интегральных уравнений. Здесь им введены важные функциональные классы и найдена эффективная формула для вычисления индекса. С ее помощью Н.И. Мусхелишвили впервые удалось в одномерном случае построить полную теорию сингулярных интегральных уравнений для разомкнутых линий интегрирования.

У Н.И.Мусхелишвили много учеников и последователей , внесших значительный вклад в различные области математики и механики. Надеемся, что они достойно продолжат славные традиции, заложенные выдающимся грузинским ученым.

Президент Грузинского математического общества,
заслуженный деятель науки, профессор

Л.Г.Магнарадзе

შინაარსი

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. აბუაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 27/VI-77 წ.

ქაღალდის ფორმატი 60 X 84

ნაბეჭდი თაბახი 7,75

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 4,27

ფასი 69 კაპ.

შეკვეთა 3171 უე 01654 ტირაჟი 300

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028,

ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

საქ.სსრ მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060,

კუტუზოვის 19.

Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 380028,

пр. И.Чавчавадзе, I4.

Типография АН ГССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова I9.