თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
179

მათემატიკა
მექანიკა
ასტრონომია

თბილისი 1976

ეძღვნება პროფ. ა. კ. ხარაძეს
დაბადების მე-80 წლისთავზე

Посвящается проф. А. К. Харадзе
к 80-летию со дня рождения

To prof. A. Kharadze's
80th birth anniversary

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
179

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ

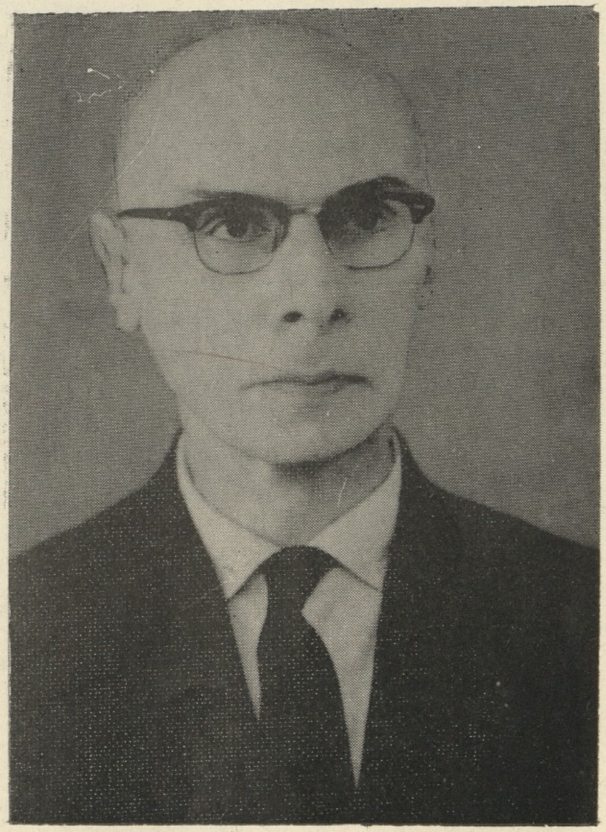
MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

ТБИЛИСИ 1976 TBILISI

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
179

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

თბილისი 1976



არჩილ კირილეს ძე ხარაძე

ქართული მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთ დიდ მოამაგეს, ქართველ მათემატიკოსთა მთელი თაობების აღმზრდელსა და მასწავლებელს, მეცნიერების დამსახურებულ მოღვაწეს პროფესორ არჩილ ხარაძეს 80 წელი შეუსრულდა.

ანდრია რაზმაძესთან, გიორგი ნიკოლაძესთან და ნიკო მუსხელიშვილთან ერთად პროფესორი არჩილ ხარაძე ქართული მათემატიკური სკოლის სათავეებთან იდგა და უკვე ნახევარი საუკუნეა პირნათლად ემსახურება საქართველოში მათემატიკური აზროვნების განვითარების საქმეს, ქართულ უნივერსიტეტს.

დიდად განათლებული ინტელიგენტი, ბრწყინვალე მეცნიერი და ლექტორი, ყოველ საქმეში თავდადებული, აი როგორ იცნობენ მას საქართველოში.

პროფესორ არჩილ ხარაძის სამეცნიერო-პედაგოგიური და საზოგადოებრივი მოღვაწეობა იმის მაგალითია, როგორ უნდა ემსახურებოდეს ადამიანი თავის ხალხს, თავის სამშობლოს. ამიტომაცაა, რომ მის სახელს დიდი სიყვარულითა და ღრმა პატივისცემით ახსენებენ.

თბილისის უნივერსიტეტის მთელი კოლექტივი, „შრომების" რედაქცია გულწრფელად ულოცავენ იუბილარს ამ ღირსშესანიშნავ თარიღს და უსურვებენ ჯანმრთელობას, ხანგრძლივ სიცოცხლესა და დიდ შემოქმედებით წარმატებას.

Одному из старейших представителей грузинской математической школы, воспитателю и наставнику многих поколений грузинских математиков, заслуженному деятелю науки, профессору Арчилу Кирилловичу Харадзе исполнилось 80 лет.

Вместе с Андреем Михайловичем Размадзе, Георгием Николаевичем Николадзе и Николаем Ивановичем Мусхелишвили профессор Арчил Кириллович Харадзе стоял у истоков грузинской математической школы и уже 50 лет с честью служит развитию математической мысли в Грузии, грузинскому университету.

Большой интеллигент, блестящий ученый и лектор, человек с неиссякаемой энергией—так знают профессора Арчила Кирилловича Харадзе в Грузии.

Научно-педагогическая и общественная деятельность профессора А. К. Харадзе—пример того, как должен служить человек своему народу, своей Родине. И поэтому его имя произносят с любовью и чувством глубокого уважения.

Весь коллектив Тбилисского университета, редколлегия „Трудов" искренне поздравляют юбиляра с этой знаменательной датой и желают крепкого здоровья, долгой жизни и больших творческих успехов.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

СУММИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В. Г. ЧЕЛИДЗЕ

1. Пусть функция $f(t)$, заданная в области $Q=[1\leqslant t<+\infty[$, интегрируема по Лебегу на любом сегменте $[1\leqslant t\leqslant a]$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt. \tag{1}$$

Мы скажем, что интеграл (1) суммируем логарифмическим методом к значению s, если для любого $p>0$ существует интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-pu}}{u} s(u)du$$

и имеет место равенство

$$\lim_{p\to 0+} \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-pu}}{u} s(u)du = s,$$

где

$$s(u)=\int_1^u f(t)dt. \tag{2}$$

Лемма 1. Справедливо следующее равенство:

$$\lim_{p\to 0+} \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-pu}}{u} du = 1. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем:

$$\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-pu}}{u} du = \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1} \int_p^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx =$$

$$= \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1} \int_p^1 \frac{e^{-x}}{x} dx + \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = I_1 + I_2.$$

Ясно, что

$$\lim_{p\to 0+} I_2 = 0.$$

Далее,

$$I_1 = \left(\ln \frac{1}{p}\right)^{-1} \int_p^1 \frac{1+(e^{-x}-1)}{x} dx = 1 + \left(\ln \frac{1}{p}\right)^{-1} \int_p^1 \frac{e^{-x}-1}{x} dx = 1 + I_3.$$

Нетрудно заметить, что

$$\lim_{p\to 0+} I_3 = 0.$$

Следовательно, справедливо равенство (3).

Лемма 2. Если $a>1$, $p>0$ и $ap<e^{-1}$, то имеет место неравенство

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln u}{u} e^{-pu} du < 3\left(\ln \frac{1}{p}\right)^2.$$

Доказательство. Положим

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{\ln u}{u} e^{-pu} du.$$

Введя обозначение $pu=x$, будем иметь

$$I = \int_{ap}^{+\infty} \frac{\ln x - \ln p}{x} e^{-x} dx = \int_{ap}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x} dx + \left(\ln \frac{1}{p}\right) \int_{ap}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = I_1 + I_2 \cdot \ln \frac{1}{p}.$$

Оценим I_1. Имеем:

$$I_1 = \int_{ap}^1 \frac{\ln x}{x} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x} dx < \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x} dx < \int_1^{+\infty} e^{-x} dx < 1.$$

Далее

$$I_2 = \int_{ap}^1 \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx < \int_p^1 \frac{e^{-x}}{x} dx + 1 < \int_p^1 \frac{dx}{x} + 1 = \ln \frac{1}{p} + 1.$$

Следовательно,

$$I < 1 + \ln \frac{1}{p}\left(\ln \frac{1}{p} + 1\right).$$

Так как $p<e^{-1}$, то

$$I < \left(\ln \frac{1}{p}\right)^2 + \ln \frac{1}{p} \cdot 2 \ln \frac{1}{p} = 3\left(\ln \frac{1}{p}\right)^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Если интеграл (1) сходится к s, то он суммируем логарифмическим методом к значению s.

Доказательство. В силу леммы 1, справедливо равенство

$$\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-pu}}{u}s\,du=s+s\omega(p), \tag{4}$$

где $\omega(p)\to 0$ при $p\to 0$.

Положим

$$I=\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-pu}}{u}[s(u)-s]\,du,$$

где $s(u)$ определено равенством (2). Покажем, что

$$\lim_{p\to 0+} I=0.$$

Взяв произвольное число $\varepsilon>0$, можно найти такое число $N>1$, что

$$|s(u)-s|<\varepsilon \text{ при } u\geqslant N.$$

Имеем

$$|I|\leqslant\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int\limits_1^{N}\frac{e^{-pu}}{u}|s(u)-s|\,du+$$

$$+\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int\limits_N^{+\infty}\frac{e^{-pu}}{u}|s(u)-s|\,du=I_1+I_2.$$

Очевидно, что

$$\lim_{p\to+0} I_1=0.$$

Далее,

$$I_2<\varepsilon\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-pu}}{u}du=\varepsilon[1+\omega(p)].$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{p\to 0+}}|I|\leqslant\varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{p\to 0+} I=0$.

Принимая во внимание (4), будем иметь

$$\lim_{p\to 0+}\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-pu}}{u}s(u)du=s.$$

Теорема доказана.

2. Введем следующее

Определение 1. Функцию $s(u, v)$, непрерывную в области $Q=[1\leqslant u<+\infty,\ 1\leqslant v<+\infty[$, мы назовем функцией класса T, если она удовлетворяет условиям:

(α)
$$\lim_{v\to\infty}\frac{s(u,\,v)}{\ln v}=\omega(u)$$

равномерно по u в любом отрезке $[1,\ a]$,

(β)
$$\lim_{u\to\infty}\frac{s(u,\,v)}{\ln u}=\chi(v)$$

равномерно в любом отрезке $[1,\ b]$.

Лемма 3. *Если $s(u,\,v)$ является функцией класса T, то существуют двойные интегралы*

$$\iint\limits_{A(a)}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}s(u,\,v)\,du\,dv \tag{5}$$

и

$$\iint\limits_{B(b)}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}s(u,\,v)dudv \tag{6}$$

для любых $a>1,\ b>1,\ p>0,\ q>0$, где

$$A(a)=[1\leqslant a;\ 1\leqslant v<+\infty[,\ B(b)=[1\leqslant u<+\infty;\ 1\leqslant v\leqslant b[.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $y>1$ и положим

$$\Phi(y)=\iint\limits_{D(a,\,y)}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}s(u,\,v)dudv,$$

где

$$D(a,\ y)=[1\leqslant u\leqslant a;\ 1\leqslant v\leqslant y].$$

Так как $s(u,\,v)$ является функцией класса T, то для числа 1 существует число $\nu>0$ такое, что

$$[\omega(u)-1]\ln v<s(u,\ v)<[\omega(u)+1]\ln v, \tag{7}$$

когда $v>\nu,\ 1\leqslant u\leqslant a$.

Пусть теперь y' и y''—произвольные числа $>\nu$, причем $y'<y''$. Тогда на основании (7) будем иметь:

$$\Phi(y'')-\Phi(y')=\int\limits_1^a du\int\limits_{y'}^{y''}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}s(u,v)dv>$$

$$>\int\limits_1^a[\omega(u)-1]\frac{e^{-pu}}{u}du\cdot\int\limits_{y'}^{y''}\frac{\ln v}{v}e^{-qv}dv. \tag{8}$$

Аналогично получим

$$\Phi(y'')-\Phi(y')<\int\limits_1^a[\omega(u)+1]\frac{e^{-pu}}{u}du\cdot\int\limits_{y'}^{y''}\frac{\ln v}{v}e^{-qv}dv. \tag{9}$$

Так как интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln v}{v} e^{-qv}\, dv$$

сходится, то

$$\lim_{y',\, y'' \to \infty} \int_{y'}^{y''} \frac{\ln v}{v} e^{-qv}\, dv = 0.$$

Поэтому, на основании (8) и (9) имеем:

$$\lim_{y',\, y'' \to \infty} [\Phi(y'') - \Phi(y')] = 0.$$

Следовательно, сходится двойной интеграл (5).

Аналогично доказывается сходимость двойного интеграла (6).

Лемма 4. Если $s(u, v)$ является функцией класса T и

$$\overline{\lim_{u,v \to \infty}} \mid s(u, v) \mid = s < +\infty,$$

то двойной интеграл

$$\iint_{Q} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) du dv \tag{10}$$

существует для любых $p > 0$, $q > 0$.

Доказательство. Для числа 1 существует число $\nu > 1$ такое, что

$$\mid s(u, v) \mid < s + 1, \text{ когда } u \geqslant \nu,\ v \geqslant \nu, \tag{11}$$

В силу леммы 3, существуют интегралы

$$\iint_{A(\nu)} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du\, dv, \qquad \iint_{B(\nu)} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du\, dv.$$

Принимая во внимание (11), легко показать абсолютную сходимость двойного интеграла

$$\iint_{C(\nu)} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) du dv,$$

где $C(\nu) = [\nu \leqslant u < +\infty;\ \nu \leqslant v < +\infty[$. Следовательно, существует двойной интеграл (10).

Лемма 5. Если $s(u, v)$ является функцией класса T, то существуют повторные интегралы

$$\int_{1}^{a} du \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, dv, \tag{12}$$

$$\int_{1}^{b} dv \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du \tag{13}$$

и имеют место равенства

$$\iint\limits_{A(a)} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)dudv = \int\limits_1^a du \int\limits_1^\infty \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)dv, \tag{14}$$

$$\iint\limits_{B(b)} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)dudv = \int\limits_1^b dv \int\limits_1^\infty \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)du. \tag{15}$$

Доказательство. Покажем сначала, что интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-qv}}{v} s(u, v)dv \tag{16}$$

сходится при любом фиксированном u. Положим

$$F(y) = \int\limits_1^y \frac{e^{-qv}}{v} s(u, v)dv, \quad y > 1.$$

Так как $s(u, v)$ является функцией класса T, то существует такое число $\nu > 1$, что

$$[\omega(u) - 1]\ln v < s(u, v) < [\omega(u) + 1]\ln v,$$

когда $v \geqslant \nu$. Взяв $y'' > y' > \nu$, будем иметь неравенства

$$[\omega(u) - 1] \int\limits_{y'}^{y''} \frac{\ln v}{v} e^{-qv} dv < F(y'') - F(y') < [\omega(u) + 1] \int\limits_{y'}^{y''} \frac{\ln v}{v} e^{-qv} dv.$$

Отсюда ясно, что

$$\lim_{y',\, y'' \to \infty} [F(y'') - F(y')] = 0.$$

Следовательно, сходится интеграл (16) при любом фиксированном u.

Докажем теперь, что интеграл (16) равномерно сходится на отрезке $[1, a]$. По условию $s(u, v)$ есть функция класса T, поэтому для числа 1 существует число $N > 1$ такое, что

$$[\omega(u) - 1]\ln v < s(u, v) < [\omega(u) + 1]\ln v,$$

когда $v \geqslant N$, $1 \leqslant u \leqslant a$.

Взяв произвольное число $t > N$, будем иметь:

$$[\omega(u) - 1] \int\limits_t^\infty \frac{\ln v}{v} e^{-qv} dv < \int\limits_t^\infty \frac{e^{-qv}}{v} s(u, v)dv < [\omega(u) + 1] \int\limits_t^\infty \frac{\ln v}{v} e^{-qv} dv,$$

когда $1 \leqslant u \leqslant a$. Но так как $\omega(u)$ ограничена на $[1, a]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_0(\varepsilon) > N$, что

$$\left| \int\limits_t^\infty \frac{e^{-qv}}{v} s(u, v) gv \right| < \varepsilon,$$

когда $t \geqslant t_0$, $1 \leqslant u \leqslant a$. Следовательно, интеграл (16) равномерно сходится на отрезке $[1, a]$. Поэтому имеет место равенство

$$\int_1^a du \int_1^\infty \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) dr = \int_1^\infty dv \int_1^a \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) du.$$

С другой стороны, для любого $y > 1$

$$\iint\limits_{D(a, y)} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) du dv = \int_1^y dv \int_1^a \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) du.$$

Так как предел правой части последнего равенства существует при $y \to +\infty$, то существует двойной интеграл (12) и имеет место равенство (14).

Аналогично доказывается существование двойного интеграла (13) и справедливость равенства (15).

Определение 2. Пусть функция $f(t, \tau)$, определенная в области $Q = [1 \leqslant t < +\infty;\ 1 \leqslant \tau < +\infty[$, интегрируема по Лебегу на любом сегменте $[1 \leqslant t \leqslant a;\ 1 \leqslant \tau \leqslant b]$. Рассмотрим несобственный двойной интеграл

$$\iint\limits_Q f(t, r)\, dt d\tau. \tag{17}$$

Мы скажем, что интеграл (17) суммируем логарифмическим методом или L-суммируем к значению s, если для любых $p > 0$ и $q > 0$ существует двойной интеграл $\iint\limits_Q \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du dv$ и имеет место равенство

$$\lim_{p, q \to 0+} \left(\ln \frac{1}{p} \ln \frac{1}{q}\right)^{-1} \iint\limits_Q \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v) du dv = s,$$

где

$$s(u, v) = \int_1^u \int_1^v f(t, \tau)\, dt d\tau.$$

Теорема 2. Пусть интеграл (17) сходится и имеет значение s. Если $s(u, v)$ является функцией класса T и выполнены условия

(I) $$\sup_{0 < q \leqslant q_0} \left| \left(\ln \frac{1}{q}\right)^{-1} \int_1^\infty \frac{e^{-qv}}{v} s(u, v)\, dv \right| = a(u),$$

(II) $$\sup_{0 < p \leqslant p_0} \left| \left(\ln \frac{1}{p}\right)^{-1} \int_1^\infty \frac{e^{-pu}}{u} s(u, v)\, du \right| = b(v),$$

где функции $a(u)$ и $b(v)$ интегрируемы на любом отрезке $[1, A]$, то интеграл (17) будет L-суммируем к значению s.

Доказательство. Положим

$$F(p,\ q)=\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\iint\limits_{Q}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}\,s(u,\ v)dudv. \tag{18}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу сходимости интеграла (17), существует число $\nu>1$ такое, что

$$s-\varepsilon<s(u,\ v)<s+\varepsilon, \tag{19}$$

когда $u\geqslant\nu$, $v\geqslant\nu$.

Теперь $F(p,\ q)$ представим так:

$$F(p,\ q)=\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\left[\int_1^{\nu}\frac{e^{-pu}}{u}du\int_1^{\infty}\frac{e^{-qv}}{v}\,s(u,v)dv+\right.$$

$$+\int_1^{\nu}\frac{e^{-qv}}{v}dv\int_1^{\infty}\frac{e^{-pu}}{u}\,s(u,\ v)\,du+\int_{\nu}^{\infty}\int_{\nu}^{\infty}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}\,s(u,\ v)\,du\,dv-$$

$$\left.-\int_1^{\nu}\int_1^{\nu}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}\,s(u,\ v)\,du\,dv\right]=I_1+I_2+I_3-I_4.$$

Оценим I_1. Принимая во внимание (1) имеем:

$$|\,I_1\,|\leqslant\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int_1^{\nu}\frac{e^{-pu}}{u}\left|\left(\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\int_1^{\infty}\frac{e^{-qv}}{v}\,s(u,\ v)\,dv\,\right|du<$$

$$<\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int_1^{\nu}\frac{e^{-pu}}{u}\,a(u)\,du<\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int_1^{\nu}a(u)du.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{p\to0+}I_1=0.$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{p\to0+}I_2=9.$$

Далее ясно, что

$$\lim_{p,q\to0+}I_4=0.$$

Оценим теперь I_3. Принимая во внимание (19), имеем:

$$I_3<(s+\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\int_{\nu}^{\infty}\int_{\nu}^{\infty}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}dudv.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{p,q\to0+}}I_3\leqslant s+\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{p,q\to 0+}} F(p,\ q)\leqslant s+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, будем иметь

$$\overline{\lim_{p,q\to 0+}} F(p,\ q)\leqslant s. \tag{20}$$

Аналогично покажем, что

$$\underline{\lim_{p,q\to 0+}} F(p,\ q)\geqslant s. \tag{21}$$

Из соотношении (20) и (21) вытекает, что

$$\lim_{p,q\to 0+} F(p,\ q)=s.$$

Следствие. Если интеграл (17) сходится и имеет значение s и кроме того, $s(u,\ v)$ ограничено в области Q, то данный интеграл L-суммируем к значению s.

Действительно, в этом случае $s(u,\ v)$ является функцией класса T и, кроме того, будут выполнены условия (I) и (II) теоремы 2.

3. Наконец введем следующее

Определение 3. Интеграл (17) мы будем называть L^*-суммируемым к значению s, если для любых $p>0$ и $q>0$ существует двойной интеграл $\iint\limits_Q \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u,\ v)\,du\,dv$ и имеет место равенство

$$\lim_{(p,\ q)_0\to 0+} F(p,\ q)=s,$$

где $F(p,\ q)$ определено равенством (18), а символ $(p,\ q)_0\to 0+$ обозначает, что $p\to 0+$, $q\to 0+$ и

$$q^{\lambda}\leqslant p\leqslant q^{1/\lambda},\ 0<p<1,\ 0<q<1,\ \lambda\geqslant 1. \tag{22}$$

Заметим, что неравенства (22) эквивалентны неравенствам

$$\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{|\ln p|}{|\ln q|}\leqslant\lambda.$$

Теорема 3. Пусть интеграл (17) сходится и имеет значение s. Если $s(u,\ v)$ является функцией класса T и выполнены условия

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\omega(u)}{u}du=0,\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{\chi(v)}{v}dv=0, \tag{23}$$

то интеграл (17) будет L^*-суммируемым к значению s.

Доказательство. Взяв произвольное число $\varepsilon>0$, в силу (23) и сходимости интеграла (17) к s, существует такое число $\nu>1$, что будут выполнены следующие неравенства:

$$-\varepsilon < \int\limits_1^{\nu} \frac{\omega(u)}{u} du < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \int\limits_1^{\nu} \frac{\chi(v)}{v} dv < \varepsilon,$$

$$s - \varepsilon < s(u, v) < s + \varepsilon, \tag{24}$$

когда $u > \nu$, $v > \nu$.

Далее, так как $s(u, v)$ является функцией класса T, то найдется такое число $\nu_1 > \nu$, что будут иметь место неравенства

$$\left[\omega(u) - \frac{\varepsilon}{\nu}\right] \ln v < s(u, v) < \left[\omega(u) + \frac{\varepsilon}{\nu}\right] \ln v, \tag{25}$$

когда $v \geqslant \nu_1$ $1 \leqslant u \leqslant \nu$,

$$\left[\chi(v) - \frac{\varepsilon}{\nu}\right] \ln u < s(u, v) < \left[\chi(v) + \frac{\varepsilon}{\nu}\right] \ln u, \tag{26}$$

когда $u \geqslant \nu_1$, $1 \leqslant v \leqslant \nu$.

Легко заметить, что

$$F(p, q) = F_1(p, q) + F_2(p, q) + F_3(p, q) + F_4(p, q),$$

где

$$F_1(p, q) = \left(\ln \frac{1}{p} \ln \frac{1}{q}\right)^{-1} \int\limits_1^{\nu} du \int\limits_{\nu_1}^{\infty} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, dv,$$

$$F_2(p, q) = \left(\ln \frac{1}{p} \ln \frac{1}{q}\right)^{-1} \int\limits_1^{\nu} dv \int\limits_{\nu_1}^{\infty} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du,$$

$$F_3(p, q) = \left(\ln \frac{1}{p} \ln \frac{1}{q}\right)^{-1} \int\limits_{\nu}^{\infty} \int\limits_{\nu}^{\infty} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du\, dv,$$

$$F_4(p, q) = \left(\ln \frac{1}{p} \ln \frac{1}{q}\right)^{-1} \iint\limits_{D} \frac{e^{-pu-qv}}{uv} s(u, v)\, du\, dv.$$

Здесь

$$D = [1 \leqslant u \leqslant \nu;\ 1 \leqslant v \leqslant \nu_1] \cup [\nu \leqslant u \leqslant \nu_1;\ 1 \leqslant v \leqslant \nu].$$

Затем, так как

$$\lim_{p \to 0+} \int\limits_1^{\nu} \omega(u) \frac{e^{-pu}}{u} du = \int\limits_1^{\nu} \frac{\omega(u)}{u} du,$$

$$\lim_{q \to 0+} \int\limits_1^{\nu} \chi(v) \frac{e^{-qv}}{v} dv = \int\limits_1^{\nu} \frac{\chi(v)}{v} dv,$$

то существует такое положительное число $\eta(\varepsilon) < 1$, что

$$\int\limits_1^{\nu} \frac{\omega(u)}{u} du - \varepsilon < \int\limits_1^{\nu} \omega(u) \frac{e^{-pu}}{u} du < \int\limits_1^{\nu} \frac{\omega(u)}{u} du + \varepsilon,$$

$$\int_1^\nu \frac{\chi(v)}{v}dv-\varepsilon<\int_1^\nu \chi(v)\frac{e^{-qv}}{u}du<\int_1^\nu \frac{\chi(v)}{v}dv+\varepsilon,$$

когда $0<p<\eta$, $0<q<\eta$.

Следовательно,

$$-2\varepsilon<\int_1^\nu \omega(u)\frac{e^{-pu}}{u}du<2\varepsilon, \tag{27}$$

$$-2\varepsilon<\int_1^\nu \chi(v)\frac{e^{-qv}}{v}dv<2\varepsilon, \tag{28}$$

когда $0<p<\eta$, $0<q<\eta$.

Пусть p и q удовлетворяют условиям $\nu_1 p<e^{-1}$, $\nu_1 q<e^{-1}$, $0<p<\eta$, $0<q<\eta$.

Тогда, в силу (25), будем иметь

$$F_1(p, q)>\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\int_1^\nu\left[\omega(u)-\frac{\varepsilon}{\nu}\right]\frac{e^{-pu}}{u}du\cdot\int_{\nu_1}^\infty\frac{\ln v}{v}e^{-qv}dv.$$

Далее, в силу леммы 2

$$\int_{\nu_1}^\infty\frac{\ln v}{v}e^{-qv}dv<3\left(\ln\frac{1}{q}\right)^2.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\int_1^\nu\frac{e^{-pu}}{u}du<\nu.$$

Следовательно, принимая во внимание (27), будем иметь

$$F_1(p, q)>\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}(-3\varepsilon)\,3\left(\ln\frac{1}{q}\right)^2.$$

Итак

$$F_1(p, q)>-9\varepsilon\cdot\frac{|\ln q|}{|\ln p|}.$$

Аналогично получим

$$F_2(p, q)>-9\varepsilon\cdot\frac{|\ln p|}{|\ln q|}.$$

Наконец, в силу (24)

$$F_3(p, q)>\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty(s-\varepsilon)\frac{e^{-pu-qv}}{uv}dudv=$$

$$=(s-\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty\frac{e^{-pu-qv}}{uv}dudv.$$

Пусть теперь p и q дополнительно удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{|\ln p|}{|\ln q|}\leqslant\lambda.$$

Тогда

$$F(p,q)>-18\varepsilon\lambda+(s-\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{p}\ln\frac{1}{q}\right)^{-1}\int_{\gamma}^{\infty}\int_{\nu}^{\infty}\frac{e^{-pu-qv}}{uv}\,dudv+F_4(p,q).$$

Так как

$$\lim_{p,q\to 0}F_4(p,q)=0,\quad \lim_{p\to 0+}\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{-1}\int_{\nu}^{\infty}\frac{e^{-pu}}{u}\,du=1,$$

то

$$\lim_{(p,q)_0\to 0+}F(p,q)\geqslant-18\varepsilon\lambda+s-\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, получаем:

$$\varliminf_{(p,q)_0\to 0+}F(p,q)\geqslant s. \tag{29}$$

Аналогично покажем, что

$$\varlimsup_{(p,q)_0\to 0+}F(p,q)\leqslant s. \tag{30}$$

Из соотношении (29) и (30) вытекает, что

$$\lim_{(p,q)_0\to 0+}F(p,q)=s.$$

Теорема доказана.

(Поступило 10. V. 1974)

Кафедра теории функций
и функционального анализа

ვლ. ჭელიძე

ინტეგრალების შეჯამებადობა ლოგარითმული მეთოდით

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია მარტივი და ორმაგი არასაკუთრივი ინტეგრალების ლოგარითმული მეთოდით შეჯამებადობის საკითხი.

V. CHELIDZE

SUMMATION OF INTEGRALS BY THE LOGARITHMIC METHOD

Summary

Summation of double integrals by the logarithmic method has been studied in this paper. A number of new theorems has been proved.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

ОТКРЫВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ НА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ И РЕШЕТКАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ГРУПП

Д. И. ЦЕЙТЛИН

Введение. Понятие замыкания оператора на классах групп введено в работе Ф. Холла [1]. Оно изучалось также в работах Б. И. Плоткина [2] и Ш. С. Кемхадзе [3]. В работах автора [4] и [5] определено двойственное понятие открывания оператора на классах групп[1]. В настоящей работе это определение обобщается и переносится в более общую ситуацию операторов на частично упорядоченных множествах и решетках.

§ 1. Открывание операторов на частично упорядоченных множествах

Пусть X—частично упорядоченное множество (или класс, или даже семейство классов). Однозначное отображение X в себя назовем оператором на X.

Как известно (см. [6], [7]), оператор α на X называется оператором замыкания, если он удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\forall x \in X,\ x \leqslant \alpha(x)$ (экстенсивность),

2) $\forall x, y \in X,\ x \leqslant y \Rightarrow \alpha(x) \leqslant \alpha(y)$ (изотонность),

3) $\forall x \in X,\ \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)$ (идемпотентность).

Двойственно, заменой условия 1) на следующее условие:

1°) $\forall x \in X,\ \alpha(x) \leqslant x$ (интериальность),

определим понятие оператора открывания. Экстенсивный изотонный оператор назовем расширяющим. Двойственно определяется сужающий оператор.

Через $O(X)$, $S(X)$, $I(X)$ и $\mathrm{Op}(X)$ обозначим, соответственно, множества всех, всех сужающих, всех изотонных операторов и всех операторов открывания на X. Множество $O(X)$ естественным образом частично упорядочивается (см., напр., [9]): если $\alpha, \beta \in O(X)$, то полагают $\alpha \leqslant \beta$, если для каждого $x \in X$ $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$. Относительно обычного умножения: $(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ $O(X)$ является полугруппой с единицей, которой служит оператор τ: $\tau(x) = x$ для каждого $x \in X$. Легко видеть, что $S(X)$ и $I(X)$—частично упорядоченные подполугруппы в $O(X)$, содержащие τ. Однако нетрудно показать, что $O(X)$ в общем случае не является частично упорядоченной полугруппой.

---

[1] В работах [4] и [5] вместо „открывание" употреблялся термин „смыкание".

Заметим, что, вообще говоря $Op(X)$ не является подполугруппой в $O(X)$. Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма[1].

Лемма 1.1. Пусть α и β—операторы открывания на X. Для того, чтобы $\alpha\beta$ был оператором открывания, необходимо и достаточно $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$.

Пусть теперь

$$X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \mid x_1<x_2<x_3<x_5,\ x_2<x_4<x_5\}.$$

Положим

$$\alpha(x_1)=x_1,\ \alpha(x_2)=\alpha(x_3)=x_2,\ \alpha(x_4)=\alpha(x_5)=x_4;$$

$$\beta(x_1)=\beta(x_2)=\beta(x_4)=x_1,\ \beta(x_3)=\beta(x_5)=x_3.$$

Тогда α и β—операторы открывания и $\alpha\beta>\beta\alpha$. Следовательно, по лемме 1.1, оператор $\alpha\beta$ не является оператором открывания.

Если α—оператор, то элемент x из X называется α-неподвижным, если $\alpha(x)=x$. Нетрудно проверить, что если α—оператор замыкания, то для каждого $x\in X$ элемент $\alpha(x)$ является наименьшим из α-неподвижных элементов, мажорирующих элемент x. В связи с этим вводится следующее понятие (ср. с [1]). Замыканием оператора α называется оператор $\overline{\alpha}$, действующий так: для каждого $x\in X$ $\overline{\alpha}(x)$ есть наименьший из α-неподвижных элементов, мажорирующтх элемент x. Оператор $\overline{\alpha}$ существует не всегда. Если $\overline{\alpha}$ существует, то α назовем замыкаемым. Таким образом, если α—оператор замыкания, то α замыкаем и $\overline{\alpha}=\alpha$.

Двойственно, открыванием оператора α назовем оператор $\mathring{\alpha}$, действующий следующим образом: для каждого $x\in X$ $\mathring{\alpha}(x)$ есть наибольший из α-неподвижных элементов, минорирующих элемент x. Если $\mathring{\alpha}$ существует, то α назовем открываемым.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства открываемого оператора α:

$$\alpha\mathring{\alpha}=\mathring{\alpha};\ \mathring{\mathring{\alpha}}=\mathring{\alpha};\ \mathring{\alpha}\text{—оператор открывания.} \tag{1}$$

Лемма 1.2. (*i*) Если α и β—открываемые операторы и $\mathring{\alpha}=\mathring{\beta}$, то выполнено условие:

$$\forall x\in X,\ \alpha(x)=x \Longleftrightarrow \beta(x)=x. \tag{2}$$

Если α и β удовлетворяют (2) и один из них открываем, то и второй открываем и $\mathring{\alpha}=\mathring{\beta}$.

---

[1] В случае, когда X—семейство всех классов групп, утверждение, двойственное лемме 1.1, отмечается в [1].

(*ii*) Если α и β открываемы, то для $\mathring{\alpha}\leqslant\mathring{\beta}$ необходимо и достаточно, чтобы каждый α-неподвижный элемент был β-неподвижным.

(*iii*) Если α—изотонный открываемый оператор, то $\mathring{\alpha}\leqslant\alpha$.

Заметим, что условие изотонности в (*iii*) отбросить нельзя. Действительно, пусть X—трехэлементная цепь: $x_1<x_2<x_3$. Положим $\alpha(x_1)=\alpha(x_3)=x_1$, $\alpha(x_2)=x_2$. Тогда $x_2=\mathring{\alpha}(x_3)>\alpha(x_3)$.

Следствие 1.3. Если α и β—интериальные открываемые операторы и $\alpha\leqslant\beta$, то $\mathring{\alpha}\leqslant\mathring{\beta}$.

Следствие 1.4. Если оператор α одновременно открываем и замыкаем, то $\overline{\alpha}$ открываем, $\mathring{\alpha}$ замыкаем и $\mathring{\overline{\alpha}}=\mathring{\alpha}$, $\overline{\mathring{\alpha}}=\overline{\alpha}$.

Теорема 1.5. Пусть α и β интериальны или экстенсивны. Если α,β и $\alpha\beta$ открываемы, то и $\beta\alpha$, $\mathring{\alpha}\mathring{\beta}$, $\mathring{\beta}\mathring{\alpha}$ открываемы и $\overset{\circ}{\mathring{\alpha}\mathring{\beta}}=\overset{\circ}{\alpha\beta}=\overset{\circ}{\beta\alpha}=\overset{\circ}{\mathring{\beta}\mathring{\alpha}}$.

Теорема 1.6. Пусть α—открываемый оператор, β—изотонный и выполнено одно из следующих условий:

а) α экстенсивен и $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$;

б) α интериален и $\alpha\beta\geqslant\beta\alpha$.

Тогда $\mathring{\alpha}\beta\geqslant\beta\mathring{\alpha}$.

Доказательство, Пусть выполнено условие а); случай, когда выполнено условие б) рассматривается аналогично. Пусть $x\in X$. Из $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$ следует $\alpha\beta\mathring{\alpha}(x)\leqslant\beta\alpha\mathring{\alpha}(x)=\beta\mathring{\alpha}(x)$. С другой стороны, ввиду экстенсивности α, имеем $\beta\mathring{\alpha}(x)\leqslant\alpha\beta\mathring{\alpha}(x)$. Итак, $\alpha\beta\mathring{\alpha}(x)=\beta\mathring{\alpha}(x)$. Из последнего равенства следует

$$\mathring{\alpha}\beta\mathring{\alpha}(x)=\beta\mathring{\alpha}(x). \tag{3}$$

Далее, из $\mathring{\alpha}(x)\leqslant x$ по изотонности β следует $\beta\mathring{\alpha}(x)\leqslant\beta(x)$. Отсюда по изотонности $\mathring{\alpha}$ получаем $\mathring{\alpha}\beta\mathring{\alpha}(x)\leqslant\mathring{\alpha}\beta(x)$. Наконец, из последнего неравенства и соотношения (3) имеем $\mathring{\alpha}\beta(x)\geqslant\beta\mathring{\alpha}(x)$, откуда, ввиду произвольности x, $\mathring{\alpha}\beta\geqslant\beta\mathring{\alpha}$, ч. т. д.

Следствие 1.7. Пусть операторы α и β открываемы и β—расширяющий. Тогда:

(*i*) если α—экстенсивный и $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$, то $\mathring{\alpha}\mathring{\beta}\leqslant\mathring{\beta}\mathring{\alpha}$;

(*ii*) если α—расширяюший и $\alpha\beta=\beta\alpha$, то $\mathring{\alpha}\mathring{\beta}=\mathring{\beta}\mathring{\alpha}$.

§ 2. Открывание операторов на решетках

Пусть теперь частично упорядоченное множество X является решеткой. Тогда легко проверить, что и $O(X)$—решетка, причем для каждого x из X, $(\alpha\vee\beta)(x)=\alpha(x)\vee\beta(x)$, $(\alpha\wedge\beta)x=\alpha(x)\wedge\beta(x)$. Если X содержит наибольший или наименьший элемент, соответственно 1 и 0, то и $O(X)$ содержит наибольший и наименьший элементы, соответственно σ и ε, где $\sigma(x)=1$, $\varepsilon(x)=0$ для каждого $x\in X$. Если X полна, то такова и $O(X)$.

Ясно, что $S(X)$ и $I(X)$—подрешетки в $O(X)$. Умножение операторов дистрибутивно справа относительно решеточных операций, т. е. $(\alpha\vee\beta)\gamma=\alpha\gamma\vee\beta\gamma$, $(\alpha\wedge\beta)\gamma=\alpha\gamma\wedge\beta\gamma$, причем если X—полная решетка, то имеет место дистрибутивность справа относительно sup и inf. Дистрибутивность слева выполняется не всегда. Действительно, пусть X—двухэлементная цепь: $x_1<x_2$, Положим $\alpha(x_1)=x_2$, $\alpha(x_2)=x_1$. Тогда $\alpha(\alpha\vee\tau)(x_1)=x_1$, $(\alpha^2\vee\alpha)(x)=x_2$; $\alpha(\alpha\wedge\tau)(x_1)=x_2$, $(\alpha^2\wedge\alpha)(x_1)=x_1$.

В связи с этим введем следующее понятие. Назовем оператор α аддитивным слева, если $\forall x, y\in X$, $\alpha(x\vee y)\leqslant\alpha(x)\vee\alpha(y)$. Аналогично определяются аддитивный справа, мультипликативный слева или справа оператор, а если X полна, то еще и вполне аддитивный слева оператор и т. п.. Аддитивным назовем оператор, являющийся аддитивным слева и справа. Аналогично определяется мультипликативный оператор и т. п. Ясно, что для аддитивных операторов имеет место дистрибутивность умножения слева относительно $\vee$, а для мультипликативных—относительно $\wedge$.

Легко видеть, что если X—линейно упорядоченное множество, то понятия аддитивности и мультипликативности совпадают, причем в этом случае каждый оператор аддитивен слева и мультипликативен справа. Однако в общем случае это не так.

Действительно, пусть $X=\{0, 1, x, y\}$, $\alpha(0)=\alpha(x)=0$, $\alpha(y)=y$, $\alpha(1)=1$; $\beta(0)=0$, $\beta(x)=\beta(1)=1$, $\beta(y)=y$; $\gamma(0)=1$, $\gamma(x)=\gamma(1)=x$, $\gamma(y)=y$. Тогда α аддитивен справа, но не слева; β мультипликативен слева, но не справа; γ аддитивен слева, но не справа и мультипликативен справа, но не слева. Кроме того, α мультипликативен, β аддитивен.

Лемма 2.1. (i) Если X—(полная) решетка, α—изотонный оператор, то α—(вполне) аддитивен справа и (вполне) мультипликативен слева.

(ii) Если α аддитивен справа или мультипликативен слева, то α—изотонный.

Из этой леммы следует, что аддитивный справа (мультипликативный слева) оператор на полной решетке является вполне аддитивным справа (вполне мультипликативным слева). С другой стороны, существуют аддитивные слева операторы, не являющиеся вполне аддитивными слева. Действительно, пусть X—отрезок ряда порядковых чисел от 1 до первого бесконечного порядкового числа ω. Положим $\alpha(n)=1$ для каждого натурального n и $\alpha(\omega)=\omega$. Тогда α—аддитивен слева, но не является вполне аддитивным слева, так как $\alpha(\sup\{1, 2, \ldots\})=\omega$, $\sup\{\alpha(1), \alpha(2),\ldots\}=1$.

Далее, обозначим через $A(X)$, $A_1(X)$, $M(X)$ и $M_1(X)$ множества, соответственно, аддитивных слева, вполне аддитивных слева, мультипликативных справа и вполне мультипликативных справа операторов на X. Легко видеть, что эти множества являются подполугруппами в $O(X)$.

Далее в этом параграфе считаем X полной решеткой.

Теорема 2.2. Множества $A(X)$, $A_1(X)$, $M(X)$ и $M_1(X)$ являются полными решетками.

Заметим, что эти решетки не являются, вообще говоря, подрешетками в $O(X)$. Действительно, пусть $X=\{0, 1, x, y\}$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(x)=y$, $\alpha(y)=\alpha(1)=x$. Тогда $\alpha\in A(X)$, но $\beta=\alpha\Lambda\tau$ не принадлежит $A(X)$, так как $\beta(x\vee y)=x$, $\beta(x)\vee\beta(y)=0$.

Теорема 2.3. Для того, чтобы оператор α был открываем, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(0)=0$ и чтобы sup любого множества α-неподвижных элементов был α-неподвижным.

Следствие 2.4. Если оператор α открываем, то для каждого $x\in X$, $\mathring{\alpha}(x)$ совпадают с супремумом множества всех α-неподвижных элементов, минорирующих элемент x.

Следствие 2.5. Каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы оператор α был открываем:

а) α—сужающий;

б) α—вполне аддитивный и $\alpha(0)=0$.

Эти условия не являются, однако, необходимыми (см. замечание к лемме 1.2).

Далее, обозначим через $\mathrm{Ext}(X)$ и $\mathrm{Int}(X)$ множества, соответственно, всех экстенсивных открываемых и всех интериальных открываемых операторов на X. С помощью теоремы 2.3 нетрудно показать, что $\mathrm{Ext}(X)$ и $\mathrm{Int}(X)$ являются подполугруппами в $O(X)$. Эти полугруппы не являются, вообще говоря, частично упорядоченными. Действительно, пусть

$$X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\mid x_1<x_2<x_3\},\ \alpha(x_1)=\alpha(x_3)=x_1,\ \alpha(x_2)=x_2,$$
$$\beta(x_1)=x_1,\ \beta(x_2)=\beta(x_3)=x_2.$$

Тогда $\alpha,\beta\in\mathrm{Int}(X)$, $\beta<\tau$, но $\alpha\beta>\alpha$, Этот пример показывает также, что полугруппы $A(X)$, $A_1(X)$ и $M(X)$, $M_1(X)$ не являются частично упорядоченными.

Лемма 2.6. Пусть α_j—открываемый оператор для каждого $j\in J$. Положим $\beta=\inf\{\alpha_j\mid j\in J\}$, $\gamma=\sup\{\alpha_j\mid j\in J\}$. Тогда:

(i) если каждый α_j экстенсивен, то

а) γ открываем и $\mathring{\gamma}\leqslant\inf\{\mathring{\alpha}_j\mid j\in J\}$;

б) если β открываем, то $\mathring{\beta}\geqslant\sup\{\mathring{\alpha}_j\mid j\in J\}$;

(ii) если каждый α_j интериален, то

а) β открываем и $\mathring{\beta}\leqslant\inf\{\mathring{\alpha}_j\mid j\in J\}$;

б) если γ открываем, то $\mathring{\gamma} \geqslant \sup\{\mathring{\alpha}_j \mid j \in J\}$.

Теорема 2.7. $\operatorname{Ext}(X)$, $\operatorname{Int}(X)$ и $\operatorname{Op}(X)$ являются полными решетками[1].

Нетрудно показать, что, вообще говоря, $\operatorname{Ext}(X)$ и $\operatorname{Int}(X)$ не являются подрешетками в $O(X)$. Действительно, пусть $X=\{0, 1, x, y\}$, $\alpha(0)=\alpha(x)=0$, $\alpha(y)=\alpha(1)=y$, $\beta(0)=\beta(y)=0$, $\beta(x)=x$, $\beta(1)=y$. Тогда $\alpha,\beta \in \operatorname{Int}(X)$, но $\gamma=\alpha\vee\beta$ не принадлежит $\operatorname{Int}(X)$, так как $\gamma(x)=x$, $\gamma(y)=y$, в то время как $\gamma(x\vee y)=y\neq x\vee y$.

Заметим, что и $\operatorname{Op}(X)$ в общем случае не является подрешеткой в $O(X)$. Это показывают пример, приведенный после леммы 1.1, и следующая лемма.

Лемма 2.8. Пусть $\alpha,\beta \in \operatorname{Op}(X)$ и $\alpha\beta \leqslant \beta\alpha$. Тогда, если $\alpha\wedge\beta \in \operatorname{Op}(X)$, то $\alpha\beta=\beta\alpha$.

§ 3. Применения к теории групп

В §§ 1 и 2 мы нигде не пользовались тем, что область определения операторов X являлась множеством. Поэтому вышеуказанные результаты можно применить к случаю, когда X есть семейство всех классов групп (которое является полной решеткой относительно обычных операций объединения и пересечения классов). Как обычно, предполагается, что каждый класс групп содержит единичную группу и вместе с каждой группой содержит любую изоморфную ей группу. Класс единичных групп обозначим через $\mathbf{E}$.

Через Q и Q_0 обозначим следующие операторы[2]: для любого класса групп $\mathbf{X}$, $Q\mathbf{X}$—класс всех гомоморфных образов $\mathbf{X}$-групп, $Q_0\mathbf{X}$—класс всех групп, каждый гомоморфный образ которых принадлежит $\mathbf{X}$. Ясно, что Q—оператор замыкания, Q_0—оператор открывания. Кроме того, Q—вполне аддитивен и $Q\mathbf{E}=\mathbf{E}$. Значит по следствию 2.5 Q—открываемый оператор.

Имеет место соотношение

$$\mathring{Q}=Q_0. \tag{1}$$

Действительно, легко видеть, что для $Q\mathbf{X}=\mathbf{X}$ необходима и достаточна замкнутость класса $\mathbf{X}$ по гомоморфным образам. Для $Q_0\mathbf{X}=\mathbf{X}$ также необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{X}$ был замкнут по гомоморфным образам, Значит, по лемме 1.2 (i) $\mathring{Q}=\mathring{Q}_0=Q_0$.

Пусть, далее ρ—некоторое свойство подгруппы в группе. Если подгруппа H обладает свойством ρ в группе G, то H называется ρ-подгруп-

---

[1] Хорошо известно, что операторы замыкания на полной решетке образуют полную решетку (см., напр., [9]).

[2] См, [1], [10], [11].

пой и это обозначается так: $H\rho G$. Предполагаем, что ρ удовлетворяет следующему условию: $H\rho G$, φ—изоморфизм G и $G^\varphi \to H^\varphi \rho G^\varphi$.

По мере надобности на ρ будем налагать следующие ограничения (G—произвольная группа):

$$G\rho G; \tag{2}$$
$$H\rho G,\ \varphi\text{—гомоморфизм } G \Rightarrow H^\varphi \rho G^\varphi; \tag{3}$$
$$H\rho G,\ K \lhd G \Rightarrow (H \cap K)\rho K; \tag{4}$$
$$H\rho G,\ K \subset G \Rightarrow (H \cap K)\rho K; \tag{5}$$
$$H \subset G,\ \varphi\text{-гомоморфизм } G,\ H^\varphi \rho G^\varphi \Rightarrow H\rho G. \tag{6}$$

Оператор R_ρ определяется следующим образом[1]: $R_\rho\mathbf{X}$—класс всех групп, порождаемых своими ρ-подгруппами, принадлежащими классу $\mathbf{X}$. Ясно, что если ρ удовлетворяет (2), то R_ρ—расширяющий оператор. Нетрудно проверить, что если ρ удовлетворяет (3), то имеет место соотношение

$$QR_\rho \leqslant R_\rho Q. \tag{7}$$

Класс групп, неподвижный относительно R_ρ, назовем ρ-радикальным. Если в качестве ρ брать инвариантность или субинвариантность, то ρ-радикальность суть, соответственно, радикальность (см. [12], [13]) и специальная радикальность (см. [14]).

Теорема 3.1. Пусть ρ удовлетворяет (2) и (3). Если класс групп $\mathbf{X}$ ρ-радикален, то таков и класс $Q_0\mathbf{X}$.

Доказательство. Из (7) по теореме 1.6 имеем $\mathring{Q}R_\rho \geqslant R_\rho\mathring{Q}$. Отсюда, по (1), $Q_0R_\rho \geqslant R_\rho Q_0$. Значит $Q_0R_\rho\mathbf{X} \geqslant R_\rho Q_0\mathbf{X}$. Отсюда, так как $R_\rho\mathbf{X}=\mathbf{X}$, получаем $Q_0\mathbf{X} \geqslant R_\rho Q_0\mathbf{X}$. С другой стороны, $R_\rho(Q_0\mathbf{X}) \geqslant Q_0\mathbf{X}$. Итак, $R_\rho(Q_0\mathbf{X}) = Q_0\mathbf{X}$, ч. т. д.

Из теоремы 3.1 вытекает, что если класс $\mathbf{X}$ радикален или специально радикален, то таков и класс $Q_0\mathbf{X}$[2].

Заметим, что если бы из того, что класс $\mathbf{X}$ ρ-радикален следовало бы $Q_0\mathbf{X}=\mathbf{X}$ или $Q_0\mathbf{X}=\mathbf{E}$, то теорема 3.1 была бы тривиальным утверждением. Однако это не так. Действительно, обозначим через $\mathbf{U}$ класс, состоящий из всех неабелевых и всех единичных групп. Легко видеть, что $\mathbf{U}$ ρ—радикален, не замкнут по гомоморфным образам, а класс $Q_0\mathbf{U}$ содержит все простые неабелевы группы. Следовательно, $Q_0\mathbf{U} \neq \mathbf{U}$ и $Q_0\mathbf{U} \neq \mathbf{E}$.

Рассмотрим далее операторы E, E_1, E_2, L, S_ρ, $S_{0\rho}$, определенные следующим образом: $E\mathbf{X}$—класс всех расширений $\mathbf{X}$ групп с помощью $\mathbf{X}$-групп, $E_1\mathbf{X}$—класс всех групп, обладающих возрастающим нормальным $\mathbf{X}$-рядом, $E_2\mathbf{X}$—класс всех групп, обладающих возрастающим нормальным $\mathbf{X}$-рядом, каждый член которого достижим в группе, $L\mathbf{X}$—класс всех групп, обладающих локальной системой из $\mathbf{X}$-подгрупп, $S_\rho\mathbf{X}$—класс всех групп, изоморфных ρ-подгруппам $\mathbf{X}$-групп, $S_{0\rho}\mathbf{X}$—класс всех групп, каж-

[1] См. [2].

[2] См. также [2].

дая ρ-подгруппа которых принадлежит $\mathbf{X}$. Ясно, что E, E_1, E_2, L — расширяющие операторы. Если ρ удовлетворяет (2), то S_ρ — расширяющий, а $S_{0\rho}$ — сужающий оператор. Кроме того, S_ρ — вполне аддитивен и $S_\rho \mathbf{E} = \mathbf{E}$. Значит, по следствию 2.5, S_ρ — открываемый оператор. Если ρ удовлетворяет (2), то аналогично соотношению (1) доказывается следующее соотношение:

$$\overset{\circ}{S}_\rho = S_{0\bar{\rho}}, \tag{8}$$

Здесь $\bar{\rho}$ — транзитивное замыкание свойства ρ (см. [8]), т. е. $H \bar{\rho}\, G$, если существуют H_i, $i=0, 1, \cdots, n$ такие, что $H_i \rho H_{i+1}$ для каждого $i = 0, 1, \cdots, n-1$ и $H_0 = H$, $H_n = G$.

Нетрудно проверяются следующие соотношения[1]:

$$(3),\ (4) \Rightarrow S_\rho E \leqslant E S_\rho, \quad S_\rho E_i \leqslant E_i S_\rho \ (i=1,\ 2); \tag{9}$$

$$(5) \Rightarrow S_\rho L \leqslant L S_\rho; \tag{10}$$

$$(6) \Rightarrow S_\rho Q \leqslant Q S_\rho. \tag{11}$$

Следующая теорема доказывается с помощью соотношений (8)—(11) и теоремы 1.6 аналогично теореме 3.1.

Теорема 3.2. (*i*) Если ρ удовлетворяет (2), (3) и (4), а класс групп $\mathbf{X}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

а) замкнут по расширениям;

б) E_i-неподвижен ($i=1,\ 2$).

то таков и класс $S_{0\bar{\rho}}\mathbf{X}$.

(*ii*) Если ρ удовлетворяет (2) и (5), а класс групп $\mathbf{X}$ удовлетворяет локальной теореме, то таков и $S_{0\bar{\rho}}\mathbf{X}$.

(*iii*) Если ρ удовлетворяет (2) и (6), а класс $\mathbf{X}$ замкнут по гомоморфным образам, то таков и $S_{0\bar{\rho}}\mathbf{X}$[2].

В работе А. Г. Куроша [15] определялось и изучалось понятие радикального класса, впоследствии названного радикальным классом в смысле Куроша. Известно (см. [16]), что класс групп $\mathbf{X}$ радикален в смысле Куроша тогда и только тогда, когда $E_2\mathbf{X} = \mathbf{X}$ и $Q\mathbf{X} = \mathbf{X}$. Поэтому из теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.3. Пусть ρ удовлетворяет (2), (3), (4) и (6). Если класс групп $\mathbf{X}$ радикален в смысле Куроша, то таков и класс $S_{0\bar{\rho}}\mathbf{X}$[3].

Если ρ — достижимость или субинвариантность, то вместо $S_{0\rho}$ пишем, соответственно, I_1 и I_2.

Следствие 3.4. Если класс групп $\mathbf{X}$ удовлетворяет одному из условий теоремы 3.2, то тому же условию удовлетворяют классы $I_1\mathbf{X}$ и $I_2\mathbf{X}$.

Следствие 3.4 было бы тривиальным, если бы из того, что класс $\mathbf{X}$ удовлетворяет его условиям, всегда следовало $I_1\mathbf{X} = X$ или $I_2\mathbf{X} = \mathbf{E}$. Однако это не так. Действительно, обозначим $\mathbf{U}_1 = Q_0\mathbf{U}$. Легко проверить,

---

1 Они обобщают соотношения из [1].

2 Теорема 3.2 обобщает результаты из [11].

3 См. также [2].

что U_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2. Однако $I_2U_1 \neq E$, так как I_2U_1 содержит все конечные простые неабелевы группы. Далее, легко показать, что класс U_1 состоит в точности из групп, совпадающих со своим коммутантом. О. Ю. Шмидт построил в [17] группу, совпадающую с коммутантом и обладающую неединичным абелевым нормальным делителем. Следовательно, U_1 не замкнут по нормальным делителям и $I_1U_1 \neq U_1$.

Если ρ—свойство быть подгруппой, то вместо $S\rho$ и $S_0\rho$ пишем S и S_0. Нетрудно проверить, что $SQ \leqslant QS$[1]. Из этого неравенства с помощью (1), (8) и следствия 1.7 следует $S_0Q_0 \leqslant Q_0S_0$.

Нетрудно проверить, что

$$S_0Q_0 < Q_0S_0, \tag{12}$$

Действительно, из результатов [18], [19] и [10] следует, что

$$(S_0Q_0)(RI) \neq (Q_0S_0)(RI)$$

(класс RI определяется в [18]).

Из соотношения (12) и следствия 1.7 вытекает строгое неравенство $SQ < QS$. Из этого неравенства, соотношения (12) и лемм 1.1 и 2.8 следует, что и в случае, когда X—семейство всех классов групп, как операторы открывания, так и операторы замыкания на X не образуют ни подполугруппы, ни подрешетки в $O(X)$.

(Поступило 5. VI. 1974)

Кафедра алгебры
и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1 Ph. Hall, Proc. Cambr. Phil. Soc., № 3, 1963, 531—553.
2. Б. И. Плоткин, Сб. «Избр. вопр. алгебры и логики», Новосибирск, 1973, 204—244.
3. Ш. С. Кемхадзе, Тр. Батумск. гос. пед. ин-та им. Ш. Руставели, 15 (1969), 3—8.
4. Д. И. Цейтлин, Сб. «XI Всесоюзн. алгебр. колл. Рез. сообщ. и докл.», Кишинев, 1971, 99—100.
5. Д. И. Цейтлин, Сб. «XVII науч. конфер. аспир. и молод. научн. раб. Тез. докл.», Тбилиси, 1972, 6—7.
6. Г. Биркхоф, Теория структур, М., 1952.
7. O. Ore, Trans. Amer. Math Soc, 55, № 3, 1944, 493—513.
8. Ж. Риге, Киберн. сборн., 7, М., 1963, 129—185.
9. M. Ward. Ann. of Math., 43 № 2, 1942, 191—196.
10. Ph. Hall, J. London Math. Soc., 39, 1964, 339—344.
11. Ш. С. Кемхадзе, Сб. «Тр. объединен. матем. каф. пед. ин-тов цент. зоны РСФСР, Лог., алг. и выч. матем.», № 1—2, Иваново, 1972, 106—108.
12. Ш. С. Кемхадзе, Сб. «III Республ. науч. метод. конф. матем. вузов ГССР. План раб. и тез. докл.», Тбилиси, 1964, 58—59.
13. Б. И. Плоткин, Ш. С. Кемхадзе, Сиб. матем. журн., 6, № 5, 1965, 1197—1201.
14. Б. И. Плоткин, Сиб. математ. журн., 10, 5, 1969, 1091—1108.

---

[1] Это неравенство отмечается в [1].

15. А. Г. Курош, Сиб. матем. журн., 3, № 6, 1962, 912—931.
16. К. К. Щукин, Сиб. матем. журн., 3, № 6, 1962, 932—942.
17. О. Ю. Шмидт. Матем. сборн., № 17, № 2, 1945, 145—162.
18. А. Г. Курош, С. Н. Черников. Усп. матем. наук, 2, № 3, 1947, 18—59.
19. Ю. И. Мерзляков, Алгебра и логика, 2, № 5, 1963, 29—36.

დ. ცეიტლინი

ოპერატორთა გაღება ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეებზე და მესერებზე და მისი გამოყენება ჯგუფთა თეორიაში

რეზიუმე

შესწავლილია ოპერატორთა გაღება ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეებზე და მესერებზე. განხილულია აგრეთვე ოპერატორთა მესერები. მიღებული შედეგები გამოყენებულია ოპერატორებისათვის ჯგუფთა კლასებზე.

D. ZEITLIN

THE OPENING OF OPERATORS ON PARTIALLY ORDERED SETS AND LATTICES AND ITS APPLICATIONS TO THE THEORY OF GROUPS

Summary

The opening of operators on partially ordered sets and lattices is studied. The lattices of operators are considered. The obtained results are applied to operators on the group classes. For example, the following result is obtained; if a class $\mathbf{X}$ of groups is ρ-radical, then so is the class $Q_0\mathbf{X}$ of groups all of whose homomorphic images are in $\mathbf{X}$.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

О СХОДИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В ПРОСТРАНСТВАХ $l_p (1 \leqslant p < +\infty)$

НГУЕН ЗУЙ ТИЕН

В настоящей статье обсуждается вопрос о слабой относительной компактности и слабой сходимости вероятностных мер в пространствах $l_p (1 \leqslant p < +\infty)$. Условия компактности и сходимости выражаются в терминах соответствующего семейства математических ожиданий и ковариационных операторов. Большая часть результатов настоящей работы посвящена гауссовским мерам. Основные результаты опубликованы без доказательств в заметке [1].

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $l_p (1 \leqslant p < +\infty)$ — банахово пространство последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2 \cdots)$ с нормой

$$\| x \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^{p} \right)^{1/p} < +\infty.$$

Пусть $B(l_p)$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств пространства l_p и μ — некоторая вероятностная мера в $(l_p, B(l_p))$. Мера μ называется гауссовской, если для каждого $f \in l_p^* = l_q$ $(1/p + 1/q = 1)$ случайная величина $f(x)$ имеет гауссовское распределение (на числовой оси). Известно (см. [2], стр. 49—50), что существуют математическое ожидание и ковариационный оператор для любой гауссовской меры в l_p, т. е. существуют элемент $a \in l_p$ и линейный ограниченный симметричный и неотрицательно определенный оператор R из l_q в l_p, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$f(a) = \int_{l_p} f(x)\, d\mu(x),$$

$$\langle Rg, g \rangle = \int_{l_p} g^2 (x - a)\, d\mu(x)$$

для каждого $f \in l_q$. Оператор R имеет матричное представление такое, что

$$R = (r_{ij}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_{kk}^{p/2} < +\infty.$$

Кроме того, характеристический функционал гауссовской меры μ имеет вид:

$$\chi(f, \mu)=\exp\left\{if(a)-\frac{1}{2}\langle Rf, f\rangle\right\} \tag{1.1}$$

для любого $f\in l_q$. В дальнейшем обозначим через $N(a, R)$ гауссовскую меру μ с параметрами a, R.

Пусть теперь μ—некоторая вероятностная мера в $(l_p, B(l_p))$. Мера μ называется плотной, если для каждого $\varepsilon>0$ существует компакт $K(\varepsilon)\subset l_p$ такой, что

$$\mu(\overline{K}(\varepsilon))<\varepsilon,$$

где $\overline{K}(\varepsilon)=l_p\setminus K(\varepsilon)$. Можно показать, что всякая вероятностная мера в $(l_p, B(l_p)$ плотна.

Пусть $\{\mu_\alpha; \alpha\in I\}$—некоторое семейство вероятностных мер в $(l_p, B(l_p))$. Оно называется равномерно плотным, если для каждого $\varepsilon>0$ существует компакт $K(\varepsilon)\subset l_p$ такой, что

$$\sup_a \mu_\alpha(\overline{K}(\varepsilon))<\varepsilon.$$

Пусть задана последовательность вероятностных мер $\{\mu_n; n=1, 2\cdots\}$ в $(l_p, B(l_p))$. Говорят, что μ_n слабо сходится к мере μ_0 (пишут $\mu_n=>\mu_0$), если

$$\lim_{n\to\infty}\int_{l_p}\varphi(x)d\mu_n(x)=\int_{l_p}\varphi(x)\,d\mu_0(x)$$

для каждого ограниченного непрерывного функционала $\varphi(x)$. Семейство $\{\mu_\alpha; \alpha\in I\}$ называется слабо относительно компактным, если из всякого его бесконечного подмножества можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Известно (см. [3], стр. 417), что семейство $\{\mu_\alpha; \alpha\in I\}$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда оно равномерно плотно. В дальнейшем это утверждение называется теоремой Прохорова.

§ 2. О сходимости гауссовских мер в пространствах l_p, $1\leqslant p<+\infty$

Обозначим через $R(l_p)$ совокупность всех вещественных симметричных неотрицательно определенных матриц $R=(r_{ij})$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{kk}^{p/2}<+\infty,$$

и обозначим через $P(l_p)$ совокупность всех вероятностных мер (распределений) в $(l_p\, B(l_p))$.

Теперь введём следующее важное понятие.

Определение. Семейство $\{R_\alpha;\ \alpha\in I\}\subset R(l_p)$ называется компактным если выполнены условия:

$$1.\qquad \sup_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(\alpha)<+\infty,$$

$$2.\qquad \lim_{N\to\infty}\sup_{\alpha}\sum_{k=N}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(\alpha)=0,$$

где $R_\alpha=(r_{ij}(\alpha))$.

Замечание 21. Будем говорить, что семейство $\{R_\alpha;\ \alpha\in I\{\subset R(l_p)$ ограничено в совокупности, если существует матрица $I\in R(l_p)$ такая, что для каждого $k=1,\ 2,\dots$

$$\sup_{\alpha} r_{kk}(\alpha)\leqslant t_{kk},$$

где $I=(t_{ij})$. Ясно, что семейство $\{R_\alpha;\ \alpha\in I\}$ компактно, если оно ограничено в совокупности.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2.1. (см. [4], стр. 248) Для относительной компактности множества $K\subset l_p\,(1\leqslant p<+\infty)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1.\qquad \sup_{x\in K}\|x\|\leqslant M<+\infty,$$

$$2.\qquad \lim_{N\to\infty}\sup_{x\in K}\nu_N^p(x)=0,$$

где

$$\nu_N^p(x)=\sum_{k=N}^{\infty}|x_k|^p.$$

Теорема 2.1. Для слабой относительной компактности семейства вероятностных мер $\{\mu_\alpha;\ \alpha\in I\}\subset P(l_p)$ $(2\leqslant p<+\infty)$ необходимо выполнение следующих условий:

1) для каждого $\varepsilon>0$ и для каждой μ_α существует матрица $R_{\mu_\alpha}(\varepsilon)\in R(l_p)$ такая, что

$$1-\mathrm{Re}\chi(f,\ \mu_\alpha)\leqslant\langle R_{\mu_\alpha}(\varepsilon)f,\ f\rangle+\varepsilon$$

для всех $f\in l_q$, где $\mathrm{Re}\chi(f,\ \mu_\alpha)$—вещественная часть характеристического функционала меры μ_α;

2) при фиксированном $\varepsilon>0$ семейство $\{R_{\mu_\alpha}(\varepsilon);\ \alpha\in I\}$ компактно.

Доказательство. Пусть семейство $\{\mu_\alpha;\ \alpha\in I\}\subset P(l_p)$ слабо относительно компактно. Тогда, по теореме Прохорова для любого $\varepsilon>0$ существует компакт $K(\varepsilon)\subset l_p$ такой, что

$$\sup_{\alpha}\mu_\alpha(\overline{K}(\varepsilon))<\varepsilon/2,$$

Теперь для каждого $x=(x_1, x_2 \dots) \in l_p$ положим

$$\nu_N^p(x)=\sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p. \tag{2.1}$$

Пусть

$$\Psi_\varepsilon(N)=\frac{1}{2}\sup_{x\in K(\varepsilon)} \nu_N^p(x). \tag{2.2}$$

Тогда легко видеть, что

$$1-\operatorname{Re}\chi(f, \mu_\alpha)=\int_{l_p}[1-\cos f(x)]\,d\mu_\alpha(x)$$

$$\leqslant \int_{K(\varepsilon)}[1-\cos f(x)]\,d\mu_\alpha(x)+\varepsilon \tag{2.3}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{K(\varepsilon)} f^2(x)\,d\mu_\alpha(x)+\varepsilon$$

для всех $f\in l_q$.

Пусть $R_{\mu_\alpha}(\varepsilon)$ есть матрица, определенная выражением:

$$\langle R_{\mu_\alpha}(\varepsilon)\,f, f\rangle=\frac{1}{2}\int_{K(\varepsilon)} f^2(x)\,d\mu_\alpha(x) \tag{2.4}$$

(интеграл в правой части (2.4) существует, так как $K(\varepsilon)$ есть компакт и $f(x)$ непрерывен).

Из (2.4) следует, что

$$r_{kk}(\mu_\alpha, \varepsilon)=\frac{1}{2}\int_{K(\varepsilon)} |x_k|^2\,d\mu_\alpha(x),$$

где

$$R_{\mu_\alpha}(\varepsilon)=(r_{ij}(\mu_\alpha, \varepsilon)).$$

Теперь, если $p\geqslant 2$, то $p/2\geqslant 1$. Используя неравенство Гельдера и теорему о возможности почленного интегрирования ряда с неотрицательными функциями, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(\mu_\alpha, \varepsilon)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\int_{K(\varepsilon)}|x_k|^2 d\mu_\alpha(x)\Bigr)^{p/2}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{K(\varepsilon)}|x_k|^p\,d\mu_\alpha(x)=\int_{K(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\,d\mu_\alpha(x)=\int_{K(\varepsilon)}\|x\|^p d\mu_\alpha(x)<+\infty.$$

Это показывает, что $R_{\mu_\alpha}(\varepsilon)\in R(l_p)$. Далее, из (2.1) и (2.2) следует:

$$\sum_{k=N}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(\mu_\alpha, \varepsilon)\leqslant \int_{K(\varepsilon)}\nu_N^p(x)\,d\mu_\alpha(x)\leqslant 2\Psi_\varepsilon(N) \tag{2.5}$$

для всех $N=1, 2\dots$.

Из компактности множества $K(\varepsilon)$ и из леммы 2.1 следует, что

$$\Psi_\varepsilon(1) \leqslant M < +\infty \tag{2.6}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \Psi_\varepsilon(N) = 0. \tag{2.7}$$

Из (2.5)—(2.7) вытекает, что семейство $\{R_{\mu_\alpha}(\varepsilon);\ \alpha \in I\}$ компактно. Из (2.3)—(2.4) вытекает условие I теоремы 1.1. Итак, теорема 1.1 доказана полностью.

Следствие 2.1. Для слабой относительной компактности семейства вероятностных мер $\{\mu_\alpha;\ \alpha \in I\} \subset P(l_p)$ $(2 \leqslant p < +\infty)$ необходимо выполнение условия:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_\alpha \mu_\alpha\{x : \nu_N^p(x) > \delta\} = 0$$

для любого $\delta > 0$, где $\nu_N^p(x)$ определено по (2.1).

Доказательство. Из (2.2) получаем, что

$$\nu_N^p(x) \leqslant 2\Psi_\varepsilon(N) \tag{2.8}$$

для всех $N = 1, 2\ldots$ и для всех $x \in K(\varepsilon)$. Далее, по лемме 2.1

$$\lim_{N\to\infty} \Psi_\varepsilon(N) = 0. \tag{2.9}$$

Из (2.8)—(2.9) следует, что при достаточно больших N

$$\{x : \nu_N^p(x) > \delta\} \subset l_p \setminus K(\varepsilon).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_0 такое, что для всех $N > N_0$

$$\mu_\alpha\{x : \nu_N^p(x) > \delta\} \leqslant \mu_\alpha(l_p \setminus K(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$$

для всех $\alpha \in I$. Это завершает доказательство следствия.

Теперь рассмотрим семейство вероятностных мер $\{\mu_\alpha;\ \alpha \in I\} \subset P(l_p)$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) для каждой μ_α математическое ожидание существует и равно нулю, т. е. для всех $f \in l_q$

$$\int_{l_p} f(x) d\mu_\alpha(x) = 0;$$

б) ковариационная матрица каждой меры μ_α, определяемая, как известно, соотношением

$$\langle R_\alpha f,\ g\rangle = \int_{l_p} f(x)\, g(x)\, d\mu_\alpha(x),$$

принадлежит классу $R(l_p)$.

Теорема 2.2. Семейство вероятностных мер $\{\mu_\alpha;\ \alpha \in I\} \subset P(l_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, удовлетворяющее условиям а), б), слабо относительно компактно, если соответствующее семейство ковариационных операторов $\{R_\alpha;\ \alpha \in I\}$ компактно.

Доказательство. Используя неравенство Гельдера, получаем, что для $1 \leqslant p \leqslant 2$

$$\int\limits_{l_p} | x_k |^p d\mu_\alpha(x) \leqslant \left(\int\limits_{l_p} | x_k |^2 d\mu_\alpha(x) \right)^{p/2} = r_{kk}^{p/2}(\alpha).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{l_p} | x_k |^p d\mu_\alpha(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(\alpha), \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} \int\limits_{l_p} | x_k |^p (d\mu_\alpha(x) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(\alpha). \tag{2.11}$$

Из (2.10)—(2.11) и из компактности семейства $\{R_\alpha;\ \alpha \in I\}$ вытекает, что

$$\sup_{a} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{l_p} | x_k |^p d\mu_\alpha(x) \leqslant M < +\infty, \tag{2.12}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{a} \sum_{k=N}^{\infty} \int\limits_{l_p} | x_k |^p d\mu_\alpha(x) = 0. \tag{2.13}$$

Из (2.12)—(2.13) и из теоремы Н. Н. Вахания (см. [2], стр. 32—33) следует слабая относительная компактность семейства вероятностных мер $\{\mu_\alpha;\ \alpha \in I\}$.

Замечание 2.2. Утверждение теоремы 2.2 для $p=2$ было получено Прохоровым (см. [5]).

Теорема 2.3. Пусть $2 \leqslant p < +\infty$ и $\{\mu_\alpha;\ \alpha \in I\} \subset P(l_p)$. Если помимо условия а) выполняются также условия:

1) $$\sup_{a} \int\limits_{l_p} \|x\|^p d\mu_\alpha(x) < +\infty,$$

2) $$\lim_{N\to\infty} \sup_{a} \int\limits_{l_p} \nu_N^p(x)\, d\mu_\alpha(x) = 0,$$

то соответствующее семейство ковариационных операторов $\{R_\alpha,\ \alpha \in I\}$ компактно.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из неравенства Гельдера и из теоремы о возможности почленного интегрирования ряда с неотрицательными функциями.

Теорема 2.4 Пусть $2 \leqslant p < +\infty$ и $\{\mu_n;\ n=1, 2\ldots\} \subset P(l_p),\ \mu_0 \in P(l_p)$. Пусть для всех $n=1, 2\ldots$

$$\int\limits_{l_p} \|x\|^p d\mu_n(x) < +\infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{l_p} \|x\|^p d\mu_0(x) < +\infty. \tag{2.14}$$

Тогда, если последовательность вероятностных мер $\{\mu_n,\ n=1, 2\ldots\}$ слабо сходится к вероятностной мере μ_0 и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_p} \|x\|^p d\mu_n(x) = \int\limits_{l_p} \|x\|^p d\mu_0(x), \tag{2.15}$$

то

1) соответствующая последовательность ковариационных операторов $\{R_n;\ n=1,\ 2\ldots\}$ компактна;

2) для любых $f,\ g\in l_q$

$$\lim_{n\to\infty}\langle R_n f,\ g\rangle=\langle R_0 f,\ g\rangle$$

Доказательство. Заметим, что из (2.14) следует $R_n\in P(l_p)$ для всех $n=0,1,2,\ldots$. Теперь из (2.15) и из условия $\mu_n=>\mu_0$ легко видеть, что при $n\to\infty$ и $\mu_0\{x\colon \|x\|=A\}=0$

$$\int_{\|x\|>A}\|x\|^p d\mu_n(x)=\int_{l_p}\|x\|^p d\mu_n(x)-\int_{\|x\|\leqslant A}\|x\|^p d\mu_n(x)$$

$$\to\int_{l_p}\|x\|^p d\mu_0(x)-\int_{\|x\|\leqslant A}\|x\|^p d\mu_0(x)=\int_{\|x\|>A}\|x\|^p d\mu_0(x).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{A\to\infty}\sup_n\int_{\|x\|>A}\|x\|^p d\mu_n(x)=0. \tag{2.16}$$

Так как $p\geqslant 2$, используя неравенство Гельдера, из (2.16) имеем:

$$\lim_{A\to\infty}\sup_n\int_{\|x\|>A}\|x\|^2 d\mu_n(x)=0, \tag{2.17}$$

Далее, для любых $f,\ g\in l_q$

$$\langle R_n f,\ g\rangle=\int_{l_p}f(x)g(x)\,d\mu_n x$$

$$=\int_{\|x\|\leqslant A}f(x)\,g(x)\,d\mu_n(x)+\int_{\|x\|>A}f(x)\,g(x)\,d\mu_n(x),$$

$$\langle R_0 f,\ g\rangle=\int_{\|x\|\leqslant A}f(x)\,g(x)\,d\mu_0(x)+\int_{\|x\|>A}f(x)\,g(x)\,d\mu_0(x).$$

Поэтому

$$|\langle R_n f,g\rangle-\langle R_0 f,g\rangle|\leqslant\left|\int_{\|x\|\leqslant A}f(x)\,g(x)\,d\mu_n(x)-\int_{\|x\|\leqslant A}f(x)g(x)d\mu_0(x)\right|+$$

$$+\left|\int_{\|x\|>A}f(x)\,g(x)\,d\mu_n(x)\right|+\left|\int_{\|x\|>A}f(x)g(x)d\mu_0(x)\right|. \tag{2.18}$$

Из (2.17) и из неравенства Коши следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $A>0$ такое, что

$$\sup_n\left|\int_{\|x\|>A}f(x)\,g(x)\,d\mu_n(x)\right|+\left|\int_{\|x\|>A}f(x)\,g(x)\,d\mu_0(x)\right|<\varepsilon/2. \tag{2.19}$$

С другой стороны, из условия $\mu_n=>\mu_0$ получаем, что для любого $\varepsilon>0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\left|\int_{\|x\|\leqslant A}f(x)g(x)\,d\mu_n(x)-\int_{\|x\|\leqslant A}f(x)\,g(x)\,d\mu_0(x)\right|<\varepsilon/2. \tag{2.20}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$|\langle R_n f, g\rangle - \langle R_0 f, g\rangle| < \varepsilon.$$

Это завершает доказательство утверждения 2 теоремы 2.4.

Для доказательства утверждения 1) прежде всего заметим, что из (2.16) имеем: для любого $N=1, 2, \ldots$

$$\lim_{A\to\infty} \sup_n \int_{\|x\|>A} \nu_N^p(x) d\mu_n(x) = 0. \tag{2.21}$$

Далее

$$\int_{l_p} \nu_N^p(x) d\mu_n(x) = \int_{\|x\|\leqslant A} \nu_N^p(x) d\mu_n(x) + \int_{\|x\|>A} \nu_N^p(x) d\mu_n(x). \tag{2.22}$$

Из (2.21)—(2.22) и из условия $\mu_n \Rightarrow \mu_0$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{l_p} \nu_N^p(x) d\mu_n(x) = \int_{l_p} \nu_N^p(x)\, d\mu_0(x). \tag{2.23}$$

Замечая, что при фиксированном n

$$\lim_{N\to\infty} \int_{l_p} \nu_N^p(x) d\mu_n(x) = 0,$$

из (2.23) следует:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_n \int_{l_p} \nu_N^p(x) d\mu_n(x) = 0. \tag{2.24}$$

С другой стороны, из (2.15) имеем

$$\sup_n \int_{l_p} \|x\|^p d\mu_n(x) < +\infty. \tag{2.25}$$

Из (2.24)—(2.25) и из теоремы 2.3 следует компактность семейства $\{R_n;\ n=1, 2\ldots\}$. Теорема 2.4 доказана полностью.

Замечание 2.3. Теорема 2.4 для $p=2$ была доказана Кругловым (см. [6], стр. 220).

Следует заметить, что полученные выше результаты верны для произвольного семейства вероятностных мер в l_p. Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с семейством гауссовских мер в l_p.

Лемма 2.2. *Для слабой относительной компактности семейства гауссовских мер* $\{\mu_\alpha;\ \alpha\in I\}\subset P(l_p)\ (2\leqslant p<+\infty)$ *необходимо, чтобы соответствующее семейство ковариационных операторов* $\{R_\alpha;\ \alpha\in I\}$ *было компактно.*

Доказательство. В самом деле, вначале заметаем, что если $\mu_n \Rightarrow \mu_0$, то $|\mu_n|^2 \Rightarrow \mu_0$, где $|\mu_n|^2 = \mu_n * \overline{\mu}_n$; $\overline{\mu}_n(\Delta) = \mu_n(-\Delta)$. Поэтому из слабой относительной компактности семейства $\{\mu_\alpha;\ \alpha\in I\}$ следует, что семейство $\{|\mu_\alpha|^2;\ \alpha\in I\}$ также слабо относительно компактно. Теперь положим

$$\lambda_\alpha = |\mu_\alpha|^2,\ \alpha\in I.$$

Легко видеть, что λ_α является гауссовской мерой $N(0, 2R_\alpha)$. Следовательно, её характеристический функционал имеет такой вид:

$$\chi(f, \lambda_\alpha) = \exp[-\langle R_\alpha f, f\rangle].$$

Теперь по теореме 2.1 для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное семейство $\{R\lambda_\alpha(\varepsilon);\ \alpha \in I\} \subset R(l_p)$ такое, что

$$1 - \chi(f, \lambda_\alpha) \leqslant \langle R\lambda_\alpha(\varepsilon) f, f\rangle + \varepsilon$$

т. е.

$$1 - \exp[-\langle R_\alpha f, f\rangle] \leqslant \langle R\lambda_\alpha(\varepsilon) f, f\rangle + \varepsilon$$

для всех $f \in l_q$.

Не ограничивая общности, можно предположить, что все $R\lambda_\alpha(\varepsilon)$ положительно определены. Подбирая

$$\delta = 1 - e^{-1} - \varepsilon$$

для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$, получаем, что

$$\langle R_\alpha f, f\rangle \leqslant 1 \quad \text{при } \langle R\lambda_\alpha(\varepsilon) f, f\rangle \leqslant \delta. \tag{2.26}$$

Пусть $f_0 \in l_q$ и $c_\alpha^2 = \langle R\lambda_\alpha(\varepsilon) f_0, f_0\rangle$, $c_\alpha > 0$, Тогда легко проверить, что

$$\langle R\lambda_\alpha(\varepsilon)\delta^{1/2} c_\alpha^{-1} f_0, \delta^{1/2} c_\alpha^{-1} f_0\rangle = \delta. \tag{2.27}$$

Из (2.26) – (2.27) следует:

$$\langle R_\alpha \delta^{1/2} c_\alpha^{-1} f_0, \delta^{1/2} c_\alpha^{-1} f_0\rangle \leqslant 1,$$

т. е.

$$\langle R_\alpha f_0, f_0\rangle < \delta^{-1}\langle R\lambda_\alpha(\varepsilon) f_0, f_0\rangle.$$

Итак, существует $\delta > 0$, такое, что

$$\langle R_\alpha f, f\rangle \leqslant \langle \delta^{-1} R\lambda_\alpha(\varepsilon) f, f\rangle \tag{2.28}$$

для всех $\alpha \in I$ и для всех $f \in l_q$. Так как $\delta > 0$ не зависит от α, f и $\{R\lambda_\alpha(\varepsilon);\ \alpha \in I\}$ компактно, из (2.28) непосредственно вытекает компактность семейства $\{R_\alpha;\ \alpha \in I\}$. Лемма 2.2. доказана.

Пусть теперь $\mu_n = N(a_n, R_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\mu_0 = N(a_0, R_0)$ есть гауссовские меры в $(l_p, B(l_p))$. Естественно возникает следующий вопрос: при каких условиях последовательность гауссовских мер μ_n слабо сходится к гауссовской мере μ_0?

Теорема 2.5. Если выполнены следующие условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ в сильном смысле,

2) последовательность $\{R_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ компактна и

$$\lim_{n\to\infty} \langle R_n f, f\rangle = \langle R_0 f, f\rangle,\ f \in l_q,$$

то последовательность гауссовских мер $\{\mu_n;\ n = 1, 2 \ldots\} \subset P(l_p)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ слабо сходится к гауссовской мере $\mu_0 \in P(l_p)$.

Доказательство. Сначала покажем, что последовательность $\{\mu_n;\ n=1,\ 2\ldots\}$ слабо относительно компактна. Для этого, заметим, что

$$\int\limits_{l_p} |\ x_k-a_{nk}\,|^p\, d\mu_n(x)=c(p)r_{kk}^{p/2}(n) \tag{2.29}$$

где $x=(x_1,\ x_2,\ldots)\in l_p$; $a_n=(a_{n1},\ a_{n2},\ldots)\in l_p$; $R_n=(r_{ij}(n))$ $(n,\ i,\ j=1,\ 2,\ldots)$ и

$$c\,(p)=2^{p/2}\pi^{-1/2}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

(Γ—гамма функция Эйлера).

С другой стороны, всегда имеет место неравенство

$$|\ a+b\ |^p\leqslant 2^p(\ |\ a\ |^p+\ |\ b\ |^p). \tag{2.30}$$

Из (2.29)—(2.30) имеем:

$$\int\limits_{l_p} |\ x_k\ |^p d\mu_n(x)=\int\limits_{l_p} |\ x_k-a_{nk}+a_{nk}\ |^p d\mu_n(x)$$

$$\leqslant 2^p\left\{\int\limits_{l_p} |\ x_k-a_{nk}\ |^p d\mu_n(x)+\int\limits_{l_p} |a_{nk}\ |^p\, d\mu_n(x)\right\}$$

$$\leqslant 2^p\,\{c\,(p)\,r_{kk}^{p/2}(n)+|\ a_{nk}\ |^p\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{l_p} |\ x_k\ |^p\, d\mu_n(x)\leqslant 2^p\left\{c(p)\sum_{k-1}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(n)+\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}\,|^p\right\},$$

$$\leqslant 2^p\left\{c\,(p)\sum_{k=1}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(n)+\|\ a_n\,\|^p\right\}.$$

Из условий 1,2 следует, что

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{l_p} |\ x_k\ |^p d\mu_n(x)\leqslant M<+\infty. \tag{2.31}$$

Далее

$$\sum_{k=N}^{\infty}\int\limits_{l_p} |\ x_k\ |^p\, d\mu_n(x)\leqslant 2^p\left\{c\,(p)\sum_{k=N}^{\infty} r_{kk}^{p/2}(n)+\nu_N^p(a_n)\right\}.$$

Поэтому из условий 1,2 и из леммы 2.1 следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n \sum_{k=N}^{\infty}\int\limits_{l_p} |\ x_k\ |^p d\mu_n(x)=0. \tag{2.32}$$

Из (2.31)—(2.32) и из теоремы Вахания (см. [2], стр. 32—33) вытекает слабая относительная компактность последовательности $\{\mu_n,\ n=1,\ 2\ldots\}$.

Теперь из условий 1,2 и из (1.1) легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty}\chi(f,\ \mu_n)=\chi(f,\ \mu_0)$$

для всех $f\in l_q$. Пусть $\{\mu_{nj}\}$—подпоследовательность последовательности $\{\mu_n;\ n=1,\ 2\ldots\}$, слабо сходящаяся к $\widetilde{\mu}$. Тогда

$$\chi(f,\widetilde{\mu})=\lim_{j\to\infty}\chi(f,\ \mu_{nj})=\chi(f,\mu_0)$$

т. е.

$$\chi(f,\widetilde{\mu})=\chi(f,\mu_0)$$

для всех $f\in l_q$. Таким образом, $\widetilde{\mu}=\mu_0$. Теорема 2.5 доказана полностью.

Если $p>2$, то условия 1,2 теоремы 2.5 также и необходимы. Именно справедлива следующая

Теорема 2.6. Для слабой сходимости последовательности гауссовских мер $\{\mu_n,\ n=1,\ 2,\ldots\}\subset P(l_p)$ $(2\leqslant p<+\infty)$ к гауссовской мере $\mu_0\in P(l_p)$ необходимо выполнение обоих условий теоремы 2.5.

Доказательство. Пусть $\mu_n=>\mu_0$. Тогда, в частности, $\{\mu_n;\ n=1,\ 2\ldots\}$ слабо относительно компактна. Поэтому, по лемме 2.2 последовательность $\{R_n;\ n=1,\ 2\ldots\}$ компактна.

С другой стороны, так как

$$\lim_{n\to\infty}\chi(f,\ \mu_n)=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{if(a_n)-\frac{1}{2}\langle R_nf,\ f\rangle\right\}$$

$$=\chi(f,\mu_0)$$

$$=\exp\left\{if(a_0)-\frac{1}{2}\langle R_0f,\ f\rangle\right\},$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(a_0), \tag{2.33}$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle R_nf,\ f\rangle,=\langle R_0f,\ f\rangle \tag{2.34}$$

для всех $f\in l_q$. (2.34) завершает доказательство условия 2.

Остается показать справедливость условия 1. Для этого достаточно показать, что последовательность $\{a_n;\ n=1,\ 2,\ldots\}$ относительно компактна в сильном смысле. В самом деле пусть $\{a_n;\ n=1,\ 2,\ldots\}$ относительно компактна и пусть $\{a_n'\}$—некоторая подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, сходящаяся к b_0. Тогда, в частности,

$$\lim f(a_n')=f(b_0)$$

Из (2.33) имеем:

$$\lim f(a_n')=f(a_0)$$

Следовательно,

$$f(a_0)=f(b_0)$$

для всех $f\in l_q$. Отсюда следует, что $a_0=b_0$.

Итак, достаточно только показать, что $\{a_n\}$ относительно компактна. Для этого, положим

$$\lambda_n = \mathrm{N}(0, R_n) \quad n=1, 2, \ldots,$$
$$\lambda_0 = \mathrm{N}(0, R_0).$$

Как было сказано выше, $\{R_n; n=1, 2, \ldots\}$ компактна и $\langle R_n f, f\rangle \to \langle R_0 f, f\rangle$. Поэтому, по теореме 2.5 $\{\lambda_n; n=1, 2, \ldots\}$ слабо сходится к λ_0. В частности, $\{\lambda_n; n=1, 2, \ldots\}$ слабо относительно компактна. Теперь обозначим через $\delta(a_n)$ меру, сосредоточенную в точке a_n. Тогда

$$\mu_n = \lambda_n * \delta(a_n) \quad n=1, 2, \ldots$$

Из компактности последовательностей $\{\mu_n; n=1, 2, \ldots\}$ и $\{\lambda_n; n=1, 2\ldots$ вытекает, что последовательность мер $\{\delta(a_n); n=1, 2, \ldots\}$ слабо относительно компактна (см. [7], стр. 58). Именно поэтому последовательность элементов $\{a_n; n=1, 2, \ldots\}$ относительно компактна в сильном смысле (см. [7], стр. 42). Теорема 2.6 доказана полностью.

Из теорем 2.5—2.6 непосредственно получаем следующие следствия:

Следствие 2.2. Если $1 \leqslant p < +\infty$, то компактность последовательностей $\{a_n; n=1, 2, \ldots\}\{R_n, n=1, 2\ldots\}$ достаточна для слабой относительной компактности гауссовских мер $\{\mu_n; n=1, 2, \ldots\}$. Если же $2 \leqslant p < +\infty$, то это условие также и необходимо.

Справедливость этого следствия вытекает из доказательства в теореме 2.5 и из теоремы 2.6.

Следствие 2.3 Последовательность гауссовских мер $\{\mu_n; n=1, 2, \ldots\} \subset P(l_p)$ $(2 \leqslant p < +\infty)$ слабо сходится к гауссовской мере $\mu_0 \in P(l_p)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} a_n = a_0$ в сильном смысле,

2) последовательность $\{R_n; n=1, 2\ldots\}$ компактна и
$\lim\limits_{n \leftarrow \infty} \langle R_n, f, f\rangle = \langle R_0 f, f\rangle$ для всех $f \in l_q$.

Кроме того, $\{\mu_n; n=1, 2, \ldots\}$ слабо относительно компактна тогда и только тогда, когда $\{a_n; n=1, 2, \ldots\}$ относительно компактна и $\{R_n; n=1, 2, \ldots\}$ компактна.

Следствие 2.4. Последовательность гауссовских мер $\{\mu_n; n= =1, 2, \ldots\} \subset P(l_p)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ слабо сходится к гауссовской мере $\mu_0 \in P(l_p)$, если

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_0$ в сильном смысле,

2) $\{R_n; n=1, 2, \ldots\}$ ограничена в совокупности и

$$\lim_{n \to \infty} \langle R_n f, f\rangle = \langle R_0 f, f\rangle \text{ для всех } f \in l_q,$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нгуен Зуй Тиен, Сообщения АН ГССР, 69, № 3, 1973.
2. Н. Н. Вахания, Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тбилиси, 1971.
3. Y. V. Prohorov. Proc. 4th Berkeley Sympsium on Math. Stat. and Probability; Berkeley and Los Angeles Univ., California Press, 1961
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Москва, 1965.
5. Ю. В. Прохоров, Теория вероятностей и ее применение, I, 2 (1956), 177—238.
6. В. М. Круглов, Теория вероятностей и ее применение, XVII, 2 (1972), 209—227.
7. K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces Acad. Press, New-York—London, 1967.

(Поступило 13. IV. 1974)

Кафедра теории случайных процессов

ნგუენ ზუი ტიენი

ალბათურ ზომათა კრებადობის შესახებ $l_p(1\leqslant p<+\infty)$ სივრცეებში

რეზიუმე

განხილულია l_p სივრცეებში მოცემულ ზომათა ოჯახის კომპაქტურობის და კრებადობის საკითხები. მიღებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები კომპაქტურობისა და კრებადობისათვის. პირობები ჩამოყალიბებულია სათანადო საშუალო მნიშვნელობებისა და კოვარიაციული ოპერატორების გამოყენებით. ნაშრომის დიდი ნაწილი ეძღვნება გაუსის ზომებს.

NGUEN ZUI TIEN

ON THE CONVERGENCE OF PROBABILITY MEASURES IN $l_p(1\leqslant p<+\infty)$ SPACES

Summary

Questions of compactness and convergence of a given family of measures in l_p spaces are considered. The necessary and sufficient conditions for compactness and convergence are obtained. The conditions are formed by using appropriate mean values and covariant operators. The paper is largely devoted to Gaussian measures.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

ОБ ОТРОГОНАЛЬНОМ УМНОЖЕНИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. П. КАНДЕЛАКИ, И. Н. КАРЦИВАДЗЕ, Т. Л. ЧАНТЛАДЗЕ

Пусть R^n—действительное n-мерное евклидово пространство. Ортогональным умножением в R^n называют такое билинейное отображение $f: R^n \times R^n \to R^n$, которое обладает следующим свойством:

$$|f(x, y)| = |x \| y|,$$

где x, y—произвольная пара элементов R^n, а $|x|$ обозначает евклидову длину элемента $x \in R^n$. Как известно, ортогональное умножение в R^n существует только для следующих размерностей: $n=1$, 2, 4, 8. (см., например, [1]).

В работе изучается вопрос о существовании и структуре ортогонального умножения в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве H, т. е. вопросы, связанные со структурой такого билинейного отображения $f: H \times H \to H$, что $|f(x, y)| = |x \| y|$ для любых $x, y \in H$ ($|x|$ обозначает норму элемента x в пространстве H).

Для полноты изложения в п. 1 мы приводим некоторые элементарные построения в случае гильбертова пространства H, которые, в той или иной форме, хорошо известны для конечномерного случая.

1. Пусть f—некоторое ортогональное умножение в пространстве H и x—некоторый отличный от нуля элемент из H. Рассмотрим отображение

$$f\left(\frac{x}{|x|}; -\right): H \to H,$$

определяемое соотношением $y \to f\left(\frac{x}{|x|}, y\right)$. Оно очевидно линейно и $\left|f\left(\frac{x}{|x|}, y\right)\right| = |y|$. Следовательно, $f\left(\frac{x}{|x|}; -\right)$ представляет собой линейный изометрический оператор в H; следовательно, если через (x, y) обозначить скалярное произведение в H, будем иметь

$$\left(f\left(\frac{x}{|x|}; y\right), f\left(\frac{x}{|x|}, y'\right)\right) = (y, y')$$

и поэтому

$$(f(x, y), f(x, y')) = |x|^2 (y, y').$$

Это соотношение, очевидно, справедливо и при $x=0$. Аналогичное рассуждение по первому аргументу приводит к следующему предложению:

Лемма 1. При всех $x_1, x_2, y_1, y_2, z \in H$, имеем:

$$(f(x_1, z), f(x_2, z)) = (x_1, x_2) \mid z \mid^2,$$

$$(f(z, y_1), f(z, y_2)) = (y_1, y_2) \mid z \mid^2.$$

Следствие. Если x_1 и x_2 (соответственно y_1 и y_2) ортогональны, то ортогональны также $f(x_1, z)$ и $f(x_2, z)$, ($f(z, y_1)$ и $f(z, y_2)$) при всех $z \in H$.

Пусть теперь $e(1), e(2), \cdots, e(n), \cdots$ обозначает некоторый ортонормированный базис пространства H, пусть $U_k(y) = f(e(k), y)$ $(k=1, 2, \ldots)$. По доказанному $U_k: H \to H$ представляют собой изометрические операторы в H, которые обладают следующими свойствами ортогональности: $(U_p(x), U_q(x)) = 0$ при всех натуральных p и q, $p \neq q$.

Рассматривая последнее соотношение при $x = e(r) + e(s)$, где r и s — произвольные натуральные числа, получаем:

$$O = (U_p(e(r)+e(s)), U_q(e(r)+e(s))) = (U_p(e(r)), U_q(e(s))) + \\ + (U_p(e(s)), U_q(e(r))),$$

если только $p \neq q$. Это соотношение, очевидно, справедливо также при $p=q$, но $r \neq s$. Следовательно, учитывая, что $U_p(e(r)) = f(e(p), e(r))$, приходим к следующему заключению: если f — произвольное ортогональное умножение в гильбертовом пространстве H и $e(1), e(2), \ldots$ — произвольный ортонормированный базис H, то совокупность элементов $f(e(p), e(q))$ $((p, q) \in \mathrm{N} \times N)$[1] удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(f(e(p), e(r)), f(e(q), e(s))) + (f(e(p), e(s)), f(e(q), e(r))) = 0,$$

при всех $(p, q) \neq (r, s)$.

Рассмотрим теперь некоторую бесконечную матрицу $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ $(\alpha, \beta \in N)$ элементов из пространства H. Эту матрицу мы будем называть кососвязанной, если для любой четверки чисел $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ из N выполнены условия:

$$(\mu_{\alpha,\beta};\ \mu_{\gamma,\delta}) + (\mu_{\alpha,\delta};\ \mu_{\gamma,\beta}) = 0.$$

при $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$.

Резюмируя вышесказанное и учитывая, что $f(e(p), e(q))$ — нормированные элементы из H, можем утверждать, что справедлива следующая

Лемма 2. Если $f: H \times H \to H$ — некоторое ортогональное умножение в H, а $e(1), e(2), \cdots, e(n), \cdots$ — произвольный ортонормированный базис пространства H, то матрица $\{f(e(p), e(q))\}_{p,q=1}^{\infty}$ представляет собой кососвязанную матрицу нормированных элементов из H.

[1] N — здесь и в дальнейшем обозначает множество всех натуральных чисел.

Пусть теперь $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ —произвольная кососвязанная матрица нормированных элементов из H. Зададимся, кроме того, некоторым фиксированным ортонормированным базисом $e(1), e(2),\ldots$ в H. Тогда существует единственное ортогональное умножение f в H, такое что $f(e(\alpha), e(\beta))=\mu_{\alpha,\beta}$ $((\alpha, \beta)\in N\times N)$. Такое умножение f мы будем называть умножением, соответствующим матрице $M=\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ и базису $E=\{e(1), e(2),\ldots,e(n)\ldots\}$, и обозначим через $f_{M,E}$.

Для построения такого умножения рассмотрим последовательность операторов $U_k: H\to H$, которые определены соотношениями:

$$U_k(y)=\sum_{s=1}^{\infty}(y, e(s))\mu_{k,s} \quad (k\in N).$$

Учитывая, что условие кососвязанности матрицы влечет за собой ортогональность всех элементов любой строки (столбца) этой матрицы, а также нормированность элементов $\mu_{p,q}$, можем заключить, что каждый оператор $U_k: H\to H$ линеен и изометричен в H. Следовательно, если $y\in H$, можно утверждать, что ряд

$$f(x, y)=\sum_{q=1}^{\infty}(x, e(q))U_q(y) \tag{1}$$

сходится в H. В самом деле, условие кососвязанности матрицы $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ дает при любом натуральном m и $p\neq p'$

$$\left(\sum_{s=1}^{m}(y, e(s))\mu_{q,s}, \sum_{s'=1}^{m}(y, e(s'))\mu_{q',s'}\right)=\sum_{s,s'=1}^{m}(y, e(s))(y, e(s'))(\mu_{q,s}; \mu_{q',s'})=$$

$$=-\sum_{s,s'=1}^{m}(y, e(s))(y, e(s'))(\mu_{q,s'}; \mu_{q',s})=$$

$$=-\left(\sum_{s=1}^{m}(y, e(s))\mu_{q',s}; \sum_{s'=1}^{m}(y, e(s'))\mu_{q,s'}\right).$$

Но скалярное произведение в H симметрично и, следовательно,

$$\left(\sum_{s=1}^{m}(y, e(s))\mu_{q,s}; \sum_{s'=1}^{m}(y, e(s'))\mu_{q',s'}\right)=0,$$

$(m\in N,\ q\neq q')$; отсюда, устремляя $m\to\infty$, получаем $(U_q(y), U_{q'}(y))=0$ при всех $(q, q')\in N\times N$, $q\neq q'$.

Теперь билинейность отображения $f: H\times H\to H$ очевидна, а также

$$|f(x, y)|^2=\sum_{q=1}^{\infty}|(x, e(q))|^2|U_q(y)|^2=\sum_{q=1}^{\infty}|(x, e(q))|^2|y|^2=|x|^2|y|^2,$$

что заканчивает проверку того, что f представляет собой ортогональное умножение в H. Далее имеем $f(e(p), e(q)) = (e(p), e(p))U_p(e(q)) = U_p(e(q)) = = (e(q), e(q))\mu_{p,q} = \mu_{p,q}$ $((p, q) \in N \times N)$.

Единственность f получается так же просто. Если $f' : H \times H \to H$ какое то ортогональное умножение в H, обладающее свойством $f'(e(p), e(q)) = \mu_{p,q}$ (при всех $(p, q) \in N \times N$), будем иметь:

$$f'\left(\sum_{q=1}^{m}(x, e(q))\, e(q), \sum_{s=1}^{m'}(y, e(s))\, e(s)\right) =$$

$$= \sum_{q=1}^{m}(x, e(q)) \sum_{s=1}^{m'}(y, e(s))\, f'(e(q), e(s)) =$$

$$= \sum_{q=1}^{m}(x, e(q)) \sum_{s=1}^{m'}(y, e(s))\mu_{q,s};$$

Теперь при $m' \to \infty$ получаем

$$f'\left(\sum_{q=1}^{m}(x, e(q))e(q), y\right) = \sum_{q=1}^{m}(x, e(q))\, U_q(y),$$

а $m \to \infty$ дает

$$f'(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty}(x, e(q))\, U_q(y) = f(x, y),$$

и предложение полностью доказано.

Совершенно аналогично можно показать, что

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty}(y, e(q))\, V_q(x),$$

где $V_q : H \to H$ — изометрические операторы в H, задаваемые равенствами

$$V_q(x) = \sum_{s=1}^{\infty}(x, e(s))\, \mu_{s,q} \quad (q \in N).$$

При этом ясно, что $V_q(x) = f(x, e(q))$ $(q \in N)$.

Пусть теперь $E' = \{e'(1), e'(2), \ldots, e'(n), \ldots\}$ — другой ортонормированный базис в H. Как уже было доказано, существует единственное ортогональное умножение $f' = f_{M,E'}$, соответствующее той же кососвязанной матрице M и ортогональному базису E'. Обозначим через $U : H \to H$ ортогональный оператор в H, обладающий свойством: $Ue'(i)) = e'(i)$ $(i \in N)$. Рассматривая композицию $f'_0(U \times U)$ отображений $H \times H \xrightarrow{U \times U} H \times H \xrightarrow{f'} H$, т. е. отображение, определенное равенством

$$f'_0(U \times U)(x, y) = f'(U \times U(x, y)) = f'(U(x), U(y)),$$

тривиально убеждаемся, что оно также представляет собой ортогональное умножение в H и что $f'_0(U\times U)(e(p), e(q))=f'(U(e(p)), U(e(q)))=$ $=f'(e'(p)), e'((q))=\mu_{p,q}$ $((p,q)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N})$. В силу доказанного свойства единственности, заключаем, что $f'_0(U\times U)=f$ $(f'=f'_0(U^{-1}\times U^{-1}))$.

Таким образом, нами установлена следующая

Теорема. Всякая кососвязанная матрица $M=\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ нормированных элементов из H определяет класс ортогональных умножений в H. Если дополнительно в H выбран ортонормированный базис $E=\{e(1), e(2),\cdots,e(n),\cdots\}$, то в пространстве H существует единственное умножение $f_{M,E}$, обладающее свойствами $f_{M,E}(e(p), e(q))=\mu_{p,q}$ (при всех $(p, q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ (ортогональное умножение, соответствующее матрице M и базису E). Если $E'=\{e'(1), e'(2),\cdots,e'(n),\cdots\}$— другой базис в H, то $f_{M,E}=f_{M,E'}\circ(U\times U)$, где $U: H\to H$ такой ортогональный оператор в H, что $U(e(i))=e'(i)$ $(i\in\mathbf{N})$. Всякое ортогональное умножение в H имеет вид $f_{M,E}$, где M— некоторая кососвязанная матрица нормированных элементов из H, а E—некоторый ортонормированный базис H.

2. Установленная в п. 1 связь между ортогональными умножениями и кососвязанными матрицами нормированных элементов H позволяет сводить вопрос о построении ортогональных умножений в H, к задаче конструирования кососвязанных матриц нормированных элементов H. В этом пункте дается один способ построения такой матрицы.

Пусть $m\in N$. Для любого $i\in N$ найдем такое максимальное целое неотрицательное число S, что $S\cdot 2^m<i$. Тогда $1\leqslant i-S2^m\leqslant 2^m$ и, таким образом, любое $i\in\mathbf{N}$ допускает единственное представление вида: $i=$ $=S\cdot 2^m+h$ (где $0\leqslant S$, $1\leqslant h\leqslant 2^m$).

Коэффициенты такого представления числа i будем впредь обозначать соответственно через $S_m(i)$ и $h_m(i)$. Итак, имеем для каждого i единственное представление

$$i=S_m(i)2^m+h_m(i)\ (0\leqslant S_m(i),\ 1\leqslant h_m(i)\leqslant 2^m). \tag{1}$$

Пусть $f_m:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$—арифметическая функция, определенная равенством

$$f_m(i)=S_m(i)\,2^m+2^m-h_m(i)+1$$

(т. е. $S_m(f_{m(i)})=S_m(i)$, $h_m(f_m(i))=2^m-h_m(i)+1$). Легко видеть, что сужение отображения f_m на каждом отрезке $[S2^m+1, (S+1)2^m]\subset\mathbf{N}(S=$ $=0, 1,\ldots)$ представляет собой отображение симметрии относительно центра этого отрезка, т. е. относительно точки $S2^m+2^{m-1}+\dfrac{1}{2}$. Из этих определений нетрудно заключить, что справедливы следующие соотношения

$(1, f): f_m \circ f_m = 1_N$ при любом $m \in N$, (1_N—тождественное отображение $N \to N$);

$(2, f): f_m \circ f_n = f_n \circ f_m$ для любой пары $(m, n) \in N \times N$. Определим теперь функцию $\sigma_m : N \to \{-1, +1\}$ $(m \in N)$ по формуле

$$\sigma_m(i) = \begin{cases} +1, \text{ если } 1 \leqslant h_m(i) \leqslant 2^{m-1}, \\ -1, \text{ если } 2^{m-1}+1 \leqslant h_m(i) \leqslant 2^m. \end{cases}$$

Можно также показать, что эти функции обладают свойствами:

$(1, \sigma): \sigma_m(i)\sigma_m(f_m(i)) = -1$ для любого $(m, i) \in N \times N$;

$(2, \sigma): \sigma_n(i)\sigma_m(i)\sigma_n(f_m(i))\sigma_m(f_n(i)) = -1$ для любого $i \in N$, при $m \neq n$ $((m, n) \in N \times N)$.

Проверка этих соотношений чисто арифметическим способом хотя и громоздка, однако элементарна.

Пусть теперь $E = \{e(1), e(2), \cdots, e(n), \cdots\}$—некоторый ортонормированный базис в H. Введем элементы $\mu_{p,q}$ (при $(p, q) \in N \times N$) по формулам:

$$\mu_{p,q} = \sigma_p(q)\, e(f_p(q)).$$

Покажем, что матрица (нормированных) элементов $\{\mu_{p,q}\}_{p,q=1}^{\infty}$—косо-связанна.

Действительно, рассмотрим произвольную четверку чисел $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ из N и составим скалярное произведение

$$(\mu_{\alpha,\beta}; \mu_{\gamma,\delta}) = \sigma_\alpha(\beta)\, e(f_\alpha(\beta));\ \sigma_\delta(\delta)\, e(f_\gamma(\delta))).$$

Если $f_\alpha(\beta) \neq f_\gamma(\delta)$, то это произведение равно нулю, т. к. система $E = \{e(1), e(2), \cdots\}$ ортогональна. Но тогда равно нулю и $(\mu_{\alpha,\delta}; \mu_{\gamma,\beta}) = (\sigma_\alpha(\delta)\, e(f_\alpha(\delta)),\ \sigma_\gamma(\beta)(e(f_\gamma(\beta)))$, ибо в рассматриваемом случае $f_\alpha(\delta) \neq f_\gamma(\beta)$: в самом деле, из соотношения $f_\alpha(\beta) \neq f_\gamma(\delta)$, учитывая $(1, f)$, получаем $f_\alpha \circ f_\alpha(\beta) \neq f_\alpha \circ f_\gamma(\delta)$ [1], т. е. $\beta \neq f_\alpha \circ f_\gamma(\delta)$. Но отсюда, применяя $(2, f)$, получим $\beta \neq f_\gamma \circ f_\alpha(\delta)$, и снова беря преобразование f_γ от левой и правой частей этого неравенства, в силу $(1, f)$, получаем; $f_\gamma(\beta) \neq f_\alpha(\delta)$. Следовательно, в рассматриваемом случае равны нулю оба слагаемых равенства

$$(\mu_{\alpha,\beta}; \mu_{\gamma,\delta}) + (\mu_{\alpha,\delta}; \mu_{\gamma,\beta}) = 0.$$

Переходя к рассмотрению случая, когда $f_\alpha(\beta) = f_\gamma(\delta)$, мы будем считать, что $\alpha \neq \gamma$ (ибо при обратном предположении, учитывая биективность $f_\alpha = f_\gamma$, мы бы имели $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, но для таких пар, условие кососвязанности матрицы $\{\mu_{\alpha,\beta}\}$ отсутствует). Таким образом, $\alpha \neq \gamma$, но $f_\alpha(\beta) = f_\gamma(\delta)$, и мы имеем:

---

[1] Заметим, что из $(1, f)$ следует, что каждое f_m является перестановкой множества N.

$$(\mu_{\alpha,\beta};\ \mu_{\gamma,\delta})=(\sigma_\alpha(\beta)\,e(f_\alpha(\beta)),\ \sigma_\gamma(\delta)\,e(f_\gamma(\delta)))=$$
$$=\sigma_\alpha(\beta)\,\sigma_\gamma(\delta)\,(e(f_\alpha(\beta)),\ e(f_\gamma(\delta))=\sigma_\alpha(\beta)\,\sigma_\gamma(\delta).$$

Аналогично $(\mu_{\alpha,\delta};\ \mu_{\gamma,\beta})=\sigma_\alpha(\delta)\,\sigma_\gamma(\beta)$.

Теперь применяя к равенству $f_\alpha(\beta)=f_\gamma(\delta)$ преобразование f_α и учитывая $(1, f)$, $(2, f)$, получаем

$$\delta=f_\alpha(f_\gamma(\beta))=f_\gamma(f_\alpha(\beta)).$$

Поэтому, в силу $(1, \sigma)$ и $(2, \sigma)$ можно написать, что

$$(\mu_{\alpha,\beta};\ \mu_{\gamma,\delta})=\sigma_\alpha(\beta)\sigma_\gamma(\delta)=\sigma_\alpha(\beta)\,\sigma_\gamma(f_\gamma(f_\alpha(\beta)))=-\sigma_\alpha(\beta)\,\sigma_\gamma(f_\alpha(\beta))=$$
$$=+\sigma_\gamma(\beta)\,\sigma_\alpha(f_\gamma(\beta))=-\sigma_\gamma(\beta)\,\sigma_\alpha(f_\alpha(f_\gamma(\beta)))=-\sigma_\gamma(\beta)\,\sigma_\alpha(\delta)=-(\mu_{\alpha,\delta};\ \mu_{\gamma,\beta})$$

Таким образом, кососвязанность матрицы $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ доказана.

Следуя построениям п. 1, можем сказать, что одним примером ортогонального умножения в H служит отображение $f^*: H\times H\to H$, задаваемое формулой:

$$f^*(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e(q))\,U_q(y). \tag{1}$$

где

$$U_q(y)=\sum_{s=1}^{\infty}(y,\ e(s))\,\sigma_q(s)\ \ e(f_q(s))\ \ (q\in \mathbf{N}). \tag{2}$$

Следует отметить, что последовательность построенных по формулам (2) операторов $U_q: H\to H$ обладает свойствами:

$(1, U)$ U_q—ортогональный оператор при любом $q\in\mathbf{N}$.

$(2, U)$ $U_q^2=-1$ $(q\in\mathbf{N})$,

$(3, U)$ $U_pU_q+U_qU_p=0$ (при $p\neq q$, $(p, q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$),

Действительно, из того, что f_q—перестановка множества $\mathbf{N}$, а $|\sigma_q(s)|=1$, следует, что U_q—изометрический оператор, для которого $U_q(H)=H$, что доказывает $(1, u)$. Свойства $(2, U)$ и $(3, U)$, очевидно, достаточно проверить на базисных векторах $e(i)$ $(i\in\mathbf{N})$ пространства H.

Имеем:

$$U_q^2(e(s))=U_q(U_q(e(s)))=U_q(\sigma_q(s)\,e(f_q(s)))=\sigma_q(s)\,U_q(e(f_q(s)))=$$
$$=\sigma_q(s)\,\sigma_q(f_q(s))\,e(f_q(f_q(s)))=-e(s)\ \ (s\in\mathbf{N})\ \text{в силу}\ (1, \sigma)\ \text{и}\ (1, f).$$

Далее, при $q\neq p$, $(p, q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, имеем:

$$(U_qU_p+U_pU_q)\,(e(s))=U_q(U_p(e(s)))+U_p(U_q(e(s)))=$$
$$=\sigma_p(s)\,U_q(e(f_p(s)))+\sigma_q(s)U_p(e(f_q(s)))=$$
$$=\sigma_p(s)\,\sigma_q(f_p(s))\,e(f_q(f_p(s)))+\sigma_q(s)\,\sigma_p(f_q(s))\,e(f_p(f_q(s))),$$

но эта сумма равна нулю в силу $(2, f)$ и $(2, \sigma)$, ч, т. д.

3. Теперь мы докажем одно свойство последовательности ортогональных операторов, обладающих указанными в п. 2 свойствами (2, U) и (3, U), которое будет в дальнейшем использовано при изучении свойств ортогональных умножений в H.

Теорема: Какова бы ни была последовательность ортогональных операторов $U_q : H \to H$ $(q \in \mathbf{N})$ со свойствами: $U_q^2 = -1$, $U_q U_p + U_p U_q = 0$ (при $p \neq q$, $(p, q) = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$), коразмерность подпространства H, порожденного векторами $(U_1(x), U_2(x), \cdots U_q(x), \cdots)$, бесконечна для любого $x \neq 0$.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем два простых замечания. Пусть $A, B, \cdots$—некоторые подмножества гильбертова пространства H а $x, y \ldots$—некоторые элементы из H. Тогда в последующем изложении, на протяжении этого пункта, символом $\{A, B, \cdots; x, y, \cdots\}$ всегда обозначается наименьшее (замкнутое) подпространство H, содержащее все выписанные в фигурных скобках объекты.

Замечание 1. Пусть $H' \subset H$—некоторое подпространство H конечной коразмерности, а $M \subset H$—произвольное подмножество в H. Тогда существует такое конечное подмножество $M' \subset M$, что $\{H', M'\} = \{H', M\}$.

Действительно, если $M \subset H'$, за M' можно брать пустое подмножество M. В противном случае, найдется $x_1 \in M$, такое, что x_1 не принадлежит H' и, обозначая $H_1' = \{H'; x_1\}$, очевидно, получим подпространство H_1', коразмерность которого на единицу меньше коразмерности H'. Если, далее, $x_2 \in M$ и x_2 не принадлежит H_1', то коразмерность подпространства $H_2' = \{H_1'; x_2\} = \{H'; x_1, x_2\}$ на две единицы меньше коразмерности подпространства H'. Продолжая этот процесс, мы, в силу конечности коразмерности H', придем к такому конечному подмножеству $M' = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$, что $H_n' = \{H'; x_1, \cdots, x_n\}$ содержит M, и замечание доказано.

Пусть теперь $\varphi(k)$ $(k \in \mathbf{N})$ обозначает некоторое произведение операторов U_i из нашей теоремы вида $\varphi(k) = U_{i_1} U_{i_2} \cdots U_{i_k}$ (равно k множителей), где $i_1, i_2, \cdots, i_k$—попарно различные числа из $\mathbf{N}$. Такие символы мы иногда будем снабжать различающими индексами, например, $\varphi_1(k)$ и $\varphi_2(k)$ будут обозначать два каких-то (вообще говоря различных) произведения указанного вида.

Замечание 2. Если p и q—два натуральных числа и $\varphi(p) = U_{i_1} U_{i_2} \cdots U_{i_p}$, а $\varphi(q) = U_{j_1} U_{j_2} \cdots U_{j_q}$, то $(\varphi(p)x, \varphi(q)x) = 0$ при условии, что $\{i_1, i_2, \cdots, i_p\} \cap \{j_1, j_2 \cdots j_q\} = \varnothing$ и $p + q = 4l + r$, где $r = 1, 2$ $(l \in \mathbf{N})$.

Действительно, пользуясь ортогональностью операторов U_q, свойством $U_q^2 = -1$ (что вместе с ортогональностью U_q означает, что $U_q' = -U_q$)[1] и антикоммутативностью U_j и U_i $(i \neq j)$, $i \neq j$, получим:

---

[1] U' обозначает оператор, сопряженный с U.

$$(\varphi(p)x,\ \varphi(q)x)=(U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_p}x,\ U_{j_1}U_{j_2}\cdots U_{j_q}x)=$$

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}}(U_{i_p}\cdots U_{i_2}U_{i_1}x, U_{j_q}\cdots U_{j_2}U_{j_1}x)=$$

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}+p}(x, U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_p}U_{j_q}\cdots U_{j_2}U_{j_1}x)=$$

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}+p+pq}(x, U_{j_q}\cdots U_{j_2}U_{j_1}U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_p}x)=$$

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}+p+pq+q}(U_{j_1}U_{j_2}\cdots U_{j_q}x,\ U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_p}x).$$

Но

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}+p+pq+q=\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$$

и равно нечетному числу, если $p+q=4l+1$ или $p+q=4l+2$. Поэтому, в таких случаях получаем $(\varphi(p)x,\ \varphi(q)x)=-(\varphi(q)x,\ \varphi(p)x)$, откуда, учитывая действительность пространства H, следует справедливость замечания 2.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $x\in H$ и $|x|=1$[1]. Рассмотрим подпространство H_x, порожденное семейством $U_1x,\ U_2x,\cdots,U_nx,\cdots$. Пусть далее H^x обозначает ортогональное дополнение H_x в H.

Предположим вопреки утверждению теоремы, что коразмерность H_x, т. е. $\dim H^x$ конечна и равна $l+1$ $(l\geqslant 0)$[2]. Обозначим через $H(x)=\{H_x;\ x\}=\{x,\ U_1x.\ U_2x,\cdots\}$. Очевидно, что $H(x)$ подпространство H и $\operatorname{codim} H(x)=l$.

Обозначим через M множество всевозможных элементов вида $\varphi(4p)x$, где $p\in \mathrm{N}$. В силу замечания 1, примененного к случаю подпространства $H(x)$ и подмножества M, заключаем, что существует конечная система элементов $\varphi_1(4p_1)x,\ \ \varphi_2(4p_2)x,\cdots,\varphi_s(4p_s)x$, такая, что $\{H(x),\ M\}=\{H(x);\ \varphi_1(4p_1)x,\ \varphi_2(4p_2)x,\cdots,\varphi_s(4p_s)x\}$. Без ограничения общности, будем считать, что $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_s$.

Пусть L есть множество всех индексов i, таких, что U_i входит в качестве множителя в некотором $\varphi_k(4p_k)$ $(k=1,\ 2,\ldots,s)$ и пусть $m_0=\max L$.

Обозначая через m любое натуральное число большее m_0, рассмотрим подпространство $\widetilde{H}$ из H, определенное равенством

$$\widetilde{H}=\{x, U_1x,\ldots,U_mx,\ \varphi(2)x,\ \varphi(3)x,\ldots\varphi(4(p_s+1)-1)x\},$$

[1] Очевидно, теорему достаточно доказать для такого случая.

[2] Коразмерность $H_x\geqslant 1$, т. к. $x\perp U_ix$ при всех i ибо, $(x,\ U_ix)=-(U_i^2x,\ \ U_i\ \ x)=-(U_ix,\ x)$, что дает $(x,\ U_ix)=0$ $(i\in \mathrm{N})$.

где $\varphi(2)$, $\varphi(3),\cdots,\varphi(4(p_s+1)-1)$ обозначают всевозможные произведения в условленном выше смысле операторов $U_1, U_2,\cdots,U_m$ (т. е. $\varphi(k)x= =u_{i_1}\cdot u_{i_2}\cdots u_{i_k}$, где i_j удовлетворяют условию $1\leqslant i_j\leqslant m$, и $i_1, i_2, \cdots, i_k$ попарно различны).

Докажем, что подпространство $\widetilde{H}$ инвариантно относительно всех операторов $U_1, U_2,\cdots,U_m$.

Действительно, рассмотрим действие оператора U_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ на все образующие $\widetilde{H}$. Беря образующую x, находим $U_ix\in\widetilde{H}$ (т. к. $1\leqslant i\leqslant m$). Беря образующие U_jx $(1\leqslant i\leqslant m)$, находим, что U_iU_jx есть одно из $\varphi(2)x$, если $i\neq j$, и $U_iU_jx=-x$, если $i=j$, т. е. в любом случае $U_iU_jx\in\widetilde{H}$. Далее, рассмотрим действие U_i над образующей $\varphi(k)x$ $(2\leqslant k<4(p_s+1)-1)$ из $\widetilde{H}$. Тогда $U_i\varphi(k)x$ есть либо одно из $\varphi(k+1)x$ (если i отличается от всех индексов U_j, составляющих произведение $\varphi(k)$), причем $k+1\leqslant4(p_s+1)-1$, и поэтому в этом случае $U_i\varphi(k)x\in\widetilde{H}$, либо $U_i\varphi(k)x=\pm\varphi(k-1)x$ (если i совпадает с индексом некоторого множителя U_i, входящего в произведение $\varphi(k)$), и поэтому $U_i\varphi(k)x\in\widetilde{H}$ и в этом случае. Остается исследовать действие U_i на элементы вида $\varphi(4(p_s+1)-1)x$, при $1\leqslant i\leqslant m$. Если i совпадает с индексом какого-либо множителя U_j, входящего в состав $\varphi(4(p_s+1)-1)$, то, очевидно, $U_i\varphi(4(p_s+1)-1)x$ есть некоторое $\pm\varphi(4(p_s+ +1)-2)x$ и тогда ясно, что $U_i\varphi(4(p_s+1)-1)x\in\widetilde{H}$. Поэтому рассмотрим $U_i\varphi(4(p_s+1)-1)x$, когда i отличен от всех индексов множителей U_j, составляющих $\varphi(4(p_s+1)-1)$. В таком случае $U_i\varphi(4(p_s+1)-1)$ есть некоторое $\varphi(4(p_s+1))$ и поэтому $\varphi(4(p_s+1))x\in M$. Но $M=\{H(x), \varphi_1(4p_1)x, \varphi_2(4p_2)x,\cdots,\varphi_s(4p_s)_x\}$, и, следовательно,

$$U_i\varphi(4(p_s+1)-1)x=\varphi(4(p_s+1))x=c_0x+\sum_{k=1}^{\infty}c_kU_kx+\sum_{k=1}^{s}d_k\varphi_k(4p_k)x.$$

Умножая обе стороны этого равенства скалярно на U_rx $(r>m)$ и замечая, что в этом случае r отлично от всех индексов множителей U_j, составляющих $\varphi(4(p_s+1))$ и $\varphi_k(4p_k)$ $(k=1, 2,\cdots,s)$, на основе замечания 2 находим

$$(\varphi(4(p_s+1))x, U_rx)=0,\ (x, U_rx)=0,\ (U_kx, U_rx)=\delta_{r,k},$$
$$(\varphi_k(4p_k)x, U_rx)=0,$$

т. е. находим, что $c_r=0$ при всех $r>m$. Следовательно,

$$U_i\varphi(4(p_s+1)-1)x=c_0x+\sum_{k=1}^{m}c_kU_kx+\sum_{k=1}^{s}d_k\varphi_k(4p_k)x\in\widetilde{H}.$$

Мы доказали, что под действием оператора U_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ все образующие подпространства $\widetilde{H}$ отображаются в $\widetilde{H}$ и, следовательно, $\widetilde{H}$ — инвариантное подпространство H для всех операторов $U_1, U_2,\cdots,U_m$.

Имея лишь конечное число образующих, подпространство $\widetilde{H}$ конечномерно и, как легко видеть,

$$\dim \widetilde{H} \leqslant 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{4p_s+3} \equiv g(m)$$

где g—некоторый фиксированный полином (равный средней части этого соотношения).

Рассмотрим сужение всех операторов $U_1, U_2, \ldots, U_m$ (которые в дальнейшем обозначаются теми же символами) на $\widetilde{H}$. Они изометричны на $\widetilde{H}$ и т. к. $\widetilde{H}$ конечномерно, то $U_1, U_2, \cdots, U_m$ ортогональны на $\widetilde{H}$. Очевидно, что $U_1, \cdots, U_m$ обладают на $\widetilde{H}$ свойствами $U_i^2 = -1$, $U_i U_j + U_j U_i = 0$ при $i \neq j$ $(1 \leqslant i\ j \leqslant m)$. Но система таких операторов в $\widetilde{H}$ позволяет построить m касательных векторных полей к единичной сфере $\widetilde{S}$ в $\widetilde{H}$. Эти касательные поля $\widetilde{\tau}_k$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ в некоторой точке $y \in \widetilde{S}$ даются выражениями $\tau_k(y) = U_k(y)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ (см. [1]). По известной теореме Адамса (см. [2]) число таких полей ограничено величиниой $\rho(\dim \widetilde{H}) - 1$, где $\rho(n) = 2^{c(n)} + 8d(n)$, если $n = (2a(n)+1)\, 2^{b(n)}$ и $b(n) = c(n) + 4d(n)$, где $0 \leqslant c(n) \leqslant 3$. Таким образом,

$$m \leqslant \rho(\dim \widetilde{H}) - 1.$$

Пусть $\dim \widetilde{H} = (2a+1)\, 2^{c+4d}$ $(0 \leqslant c \leqslant 3)$. Тогда $\rho(\dim \widetilde{H}) \geqslant m+1$, т. е $2^c + 8d \geqslant m+1$, откуда $8d \geqslant m+1 - 2^c$, но т. к. $1 \leqslant 2^c \leqslant 8$ и, следовательно $8d \geqslant m-7$, т. е. $\dim \widetilde{H} = (2a+1) 2^{c+4d} \geqslant 2^{4d} \geqslant 2^{\frac{m-7}{2}}$. Отсюда следует, что

$$2^{\frac{m-7}{2}} \leqslant g(m)$$

Вспоминая теперь, что m $(m > m_0)$—любое натуральное число, а g—фиксированный полином, беря большое значение для m, не удовлетворяющее последнему неравенству, приходим к противоречию, доказывающему теорему.

4. Вернемся теперь к рассмотрению общих свойств ортогонального умножения. Пусть $f: H \times H \to H$—некоторое ортогональное умножение. Как было указано в п. 1 для любого $x \in H$ $(y \in H)$, имеются операторы

$$f_x : H \to H \quad (f^y : H \to H)$$

определенные равенством $f_x(y) = f(x, y)$ $(f^y(x) = f(x, y))$. Пусть $f_x(H) = H_x$ $(f^y(H) = H^y)$. Это линейное подпространство H и мы сейчас докажем, что $\operatorname{codim} H_x$, $(\operatorname{codim} H_y)$, не зависит от x, при $x \neq 0$, (от y, при $y \neq 0$).

Рассмотрим две точки x', x'', принадлежащие единичной сфере $\{|x|=1\}$, и пусть $\operatorname{codim} H_{x'} = k'$ $(0 \leqslant k' \leqslant \infty)$. Тогда ясно, что найдется такая система ортонормированных векторов $z_1, \cdots z_{k'}$ (базис ортогонального дополнения $H_{x'}$), что любое z_i $(1 \leqslant i \leqslant k')$ ортогонально ко всем векторам из $H_{x'}$. Мы докажем, что при условии $|x'-x''| \leqslant 1$ пересечение

$$H_{x''} \cap \{z_1, \ldots, z_{k'}\} = \{0\}.$$

Действительно, пусть $y_1, y_2, \cdots y_n, \cdots$ — ортонормированный базис подпространства $H_{x''}$, и пусть $z \in H_{x''} \cap \{z_1, \cdots z_{k'}\}$. Итак $z = \sum\limits_{i=1}^{k'} c_i z_i$, а также, т. к. $z \in H_{x''}$, $z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$. Следовательно, имеем равенство

$$\sum_{i=1}^{k'} c_i z_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i.$$

Но $y_i \in H_{x''}$ и значит существуют $x_i \in H$ такие, что $y_i = f(x'', x_i)$, где, в силу изометричности оператора $f_{x''}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots$ ортонормированы в H. Далее $y_i = f(x''-x', x_i) + f(x', x_i)$ и поэтому из предыдущего равенства получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x''-x', x_i) = \sum_{i=1}^{k'} c_i z_i - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x', x_i).$$

Но $z_1, \ldots, z_{k'}$ ортонормированы и лежат в ортогональном дополнении $H_{x'}$, $f(x', x_i)$ ортонормированы и лежат в $H_{x'}$, следовательно, вся система $z_1, \ldots, z_{k'}$; $f(x', x_1), \ldots, f(x', x_n), \ldots$ образует ортонормированную систему в H и поэтому

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x''-x', x_i)\right|^2 = \sum_{i=1}^{k'} c_i^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_i^2$$

С другой стороны, в силу ортогональности векторов $f(x''-x', x_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n \ldots)$ имеем,

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_l f(x''-x', x_i)\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x''-x', x_i)|^2 \alpha_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$$

т. к. $|f(x''-x', x_i)|^2 = |x''-x'|^2 \leqslant 1$. Поэтому предыдущее равенство дает

$$\sum_{i=1}^{k'} c_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2,$$

откуда заключаем, что $c_1 = c_2 = \ldots = c_{k'} = 0$. Таким образом, $z = 0$, ч. с. д.

Итак, имеем: ортогональное дополнение к $H_{x'}$ является дополнительным пространством $H_{x''}$, если x' и x'' таковы, что $|x'| = |x''| = 1$ и $|x'-x''| \leqslant 1$. Отсюда легко заключить, что $\operatorname{codim} H_{x'} \geqslant \operatorname{codim} H_{x''}$. Но, в силу симметрии x' и x'' приходим к равенству $\operatorname{codim} H_{x'} = \operatorname{codim} H_{x''}$

при $|x'|=1$, $|x''|=1$ и $|x'-x''|\leqslant 1$. Теперь, учитывая связность единичной сферы, легко доказать, что $\operatorname{codim} H_x = \text{const}$, когда x меняется на единичной сфере $|x|=1$, и, в силу того, что при $x\neq 0$, имеем $H_x = H_{\frac{x}{|x|}}$, $\operatorname{codim} H_x$ постоянен при всех $x\in H$, $x\neq 0$.

Теперь мы можем утверждать, что с каждым ортогональным умножением $f: H\times H\to H$ в гильбертовом пространстве мы можем связать два числа: $k_1(f)=\operatorname{codim} f_x(H)=\text{const}$ (при $x\neq 0$) и $k_2(f)=\operatorname{codim} f^y(H)=$ $=\text{const}$ (при $y\neq 0$).

В случае построенного в п. 2 специального ортогонального умножения f^* имеем: $k_1(f^*)=0$, $k_2(f^*)=\infty$.

Действительно, рассмотрим, например, $x=e(q)$ $(q\in N)$. Имеем тогда $f^*_{e(q)}: H\to H$, где $f^*_{e(q)}(y)=f^*(e(q),y)=U_q(y)$; но U_q—ортогональный оператор, и, следовательно, $f^*_{e(q)}(H)=U_q(H)=H$, т. е. $k_1(f^*)=0$. Далее, фиксируя некоторое y, получим: $f^{*y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,\ e(k))\,U_k(y)$. Но, по доказанной в п. 3 теореме, $\{U_1(y),\cdots,U_n(y),\cdots\}$ образуют подпространство H бесконечной коразмерности и следовательно, $k_2(f^*)=\infty$.

Более того, на основании теоремы п. 3 можно утверждать, что для любого ортогонального умножения наблюдается аналогичное явление — если одно из чисел $k_1(f)$ (или $k_2(f)$) равно нулю, то $k_2(f)$ (или $k_1(f)$)— бесконечно.

В самом деле, пусть, например, $k_2(f)=0$. Тогда рассмотрим $f^{e(q)}: H\to H$. По допущению $f^{e(q)}(H)=H$ и, следовательно, $V_q=f^{e(q)}$— ортогональный оператор в H. Рассмотрим теперь композицию $\widetilde{f}=V_1^{-1}\circ f$, которая, как легко видеть, также представляет собой ортогональное умножение в H. Очевидно, что $k_1(\widetilde{f})=k_1(f)$, $k_2(\widetilde{f})=k_2(f)$, и наше предложение будет доказано, если мы покажем, что $k_1(\widetilde{f})=+\infty$.

С этой целью обозначим через W_q $(q\geqslant 2)$ операторы $W_q=\widetilde{f}(-;\ e(q))=$ $=\widetilde{f}^{e(q)}$ и докажем, что для них справедливы условия теоремы п. 3. Во-первых, ясно, что $W_q=V_1^{-1}{}_{\circ}V_q$ и поэтому W_q—ортогональный оператор для любого $q\in \mathrm{N}$. Далее, беря произвольное x и учитывая ортогональность оператора V_1, получим

$$(x,\ W_q(x))=(x,\ \widetilde{f}(x,\ e(q)))=(x,\ V_1^{-1}(f(x,\ e(q)))=(V_1\ x,\ f(x,e(q)))=$$
$$=(f(x,\ e(1)).\ f(x,\ e(q))),$$

но последнее произведение равно нулю при $q\geqslant 2$ для любого $x\in H$ (см. п. 1). Следовательно. при всех $x\in H$ и $q\geqslant 2$, имеем $(x,\ W_q(x))=0$.

Отсюда, написав $(x+y,\ W_q(x+y))=0$ $(q\geqslant 2)$, получаем $(x,\ W_q y)+$ $+(y,\ W_q x)=0$, что, учитывая ортогональность операторов W_q, дает $(W_q^{-1}x+W_q x,\ y)=0$ для всех $q\leqslant 2$, $x,\ y\in H$. Т. к. y—произвольно, получаем $W_q^{-1}x+W_q x=0$, т. е. $W_q^{-1}=-W_q$.

Но тогда $W_q^2=-W_q^{-1}W_q=-1$ $(q\geqslant 2)$, т. е. получаем условие 1 теоремы пункта 3.

Теперь составим $(W_q(x), W_{q'}(x))=(\widetilde{f}(x, e(q)), \widetilde{f}(x, e(q')))$. Ясно, что (п. 1) это произведение равно нулю, если $q\neq q'$ (и x—любой элемент из H).

Таким образом, $(W_q(x+y), W_{q'}(x+y))=0$, что дает $(W_q x, W_{q'}y)+(W_q y, W_{q'}x)=0$. Из этого равенства, учитывая уже доказанные соотношения $W_q^{-1}=-W_q$ (при $q\geqslant 2$) и ортогональность операторов W_q, допуская, что $q, q'\geqslant 2$ и $q\neq q'$, получаем:

$$(W_{q'}W_q x+W_q W_{q'}x, y)=0.$$

Так как y произвольно, последнее соотношение влечет равенство $W_{q'}W_q+W_q W_{q'}=0$, при $q, q'\leqslant 2$, $q\neq q'$, т. е. получаем второе условие теоремы п. 3.

Теперь мы, на основании теоремы п. 3, можем утверждать, что коразмерность подпространства H', порожденного последовательностью элементов $W_2(x), W_3(x),\ldots,W_n(x)\ldots$, бесконечна при любом фиксированном $x\in H$ и $x\neq 0$. Но (см. п. 2) $\widetilde{f}$ допускает представление

$$\widetilde{f}(x, y)=\sum_{q=1}^{\infty}(y, e(q))W_q(x),$$

и поэтому $\widetilde{f}_x(H)$ совпадает с подпространством H, которое образовано элементами $W_1(x), W_2(x),\ldots,W_n(x),\ldots$ Это последнее, очевидно, имеет коразмерность $\geqslant \operatorname{codim} H'-1=\infty$ и, следовательно, $\operatorname{codim}\widetilde{f}_x(H)=\infty$, ч. с. д.

Используя ортогональное произведение f^*, можно тривиально построить такие ортогональные умножения, для которых $k_1(f)$ $(k_2(f))$ будет иметь наперед заданное значение m $(1\leqslant m\leqslant\infty)$. Действительно, $k_1(f^*)=0$ (а $k_2(f^*)=\infty$) означает $f_x^*(H)=H_x=H$ для всех $x\neq 0$. Пусть теперь $U: H\to H$—произвольный изометрический оператор, отображающий H на заданное (бесконечномерное) подпространство $H^*\subset H$ со свойством $\operatorname{codim} H^*=m$. Тогда, очевидно, что $\widetilde{f}=U\circ f$ будет обладать свойством

$$k_1(\widetilde{f})=m\ (k_2(\widetilde{f})=+\infty).$$

Обозначая через $\widetilde{f}'(x, y)=\widetilde{f}(y, x)$, очевидно, получим ортогональное умножение $\widetilde{f}'$ со свойствами $k_2(\widetilde{f}')=m$ $(k_1(\widetilde{f}')=\infty)$. Было бы интересно знать, существуют ли такие ортогональные умножения f в пространстве H, для которых $k_1(f)+k_2(f)<\infty$, и если таковые существуют, чему равен $\min\limits_f[k_1(f)+k_2(f)]$.

(Поступило 7. II. 1974)

Кафедра математического анализа
и Вычислительный центр АН ГССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Хьюзмоллер, Расслоенные пространства, Москва, 1970.
2. Дж. Ф. Адамс, Векторные поля на сферах, Сборник «Математика», 7:6 (1963), стр. 48—79.

ნ. კანდელაკი, ი. ქარცივაძე, თ. ჩანტლაძე

ორთოგონალური გამრავლების შესახებ ჰილბერტის სივრცეში

რეზიუმე

ნაშრომში შეისწავლება ისეთი $f: H\times H\rightarrow H$ ორადწრფივი ასახვების სტრუქტურა, რომელთაც გააჩნიათ $|f(x, y)| = |x| \cdot |y|$ თვისება, სადაც H ჰილბერტის ნამდვილი სეპარაბელური სივრცეა, ხოლო $|x|$ აღნიშნავს x ელემენტის ნორმას. ნაჩვენებია ასეთი f ასახვების (ე. წ. ორთოგონალური გამრავლების) არსებობა.

N. KANDELAKI, I. KARTSIVADZE, T. CHANTLADZE

ON THE ORTHOGONAL MULTIPLICATION IN HILBERT SPACE

Summary

The paper deals with the structure of bilinear mappings $f: H\times H\rightarrow H$ having the property $f(x, y) = |x| |y|$, where H is a real separable Hilbert space and $|x|$ denotes the norm of x. The existence of such mappings f (so-called orthogonal multiplications) is shown.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК ПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ $\lambda(\alpha)$

П. Г. КОГОНИЯ

Работа посвящена дальнейшему исследованию множества точек, в которых функция $\lambda(\alpha)$, характеризующая порядок рациональной аппроксимации иррационального числа α, принимает одно и то же значение.

Пусть

$$\alpha=[0;\ a_1,\ a_2,\cdots,a_n\cdots]$$

—любое иррациональное число интервала $(0,\ 1)$, J—множество всех таких чисел; пусть, далее

$$s_n(\alpha)=[0;\ a_1,\ a_2,\ldots,a_n]=\frac{p_n}{q_n},\ r_n=[a_n;\ a_{n+1},a_{n+2}\cdots]\ (n=1,2,\cdots);$$

известно (см., напр., [1]), что

$$q_1=a_1,\ q_2=a_1a_2+1,\ q_{n+1}=a_{n+1}\ q_n+q_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ldots), \tag{1}$$

$L(\alpha)$—точная верхняя грань множества всех действительных чисел m, для которых диофантово неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^m}$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах $p,\ q\ (q>0)$. Как известно]2],

$$L(\alpha)=\varlimsup_{n=\infty}\ \frac{l_n q_{n+1}}{l_n q_n}+1,\ \{L(\alpha)\mid\alpha\in J\}=[2,\ \infty]. \tag{2}$$

Пусть $J_m=\{\alpha\in J\mid L(\alpha)=m\})$, тогда $J=\bigcup\limits_{2\leqslant m\leqslant\infty} J_m$. $\lambda(\alpha;\ \mathrm{L})=\lambda(\alpha)$—точная верхняя грань множества всех действительных положительных чисел c, для которых диофантово неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{cq^L}\ (L=L(\alpha))$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах $p,\ q\ (q>0)$.

Известно [3], что при $L>2$

$$\lambda(\alpha)=\varlimsup_{n=\infty}\ \exp[l_n q_{n+1}-(L-1)\,l_n q_n]. \tag{3}$$

Множество $E_2=\{\lambda(\alpha) \mid L(\alpha)=2\}$ называется спектром Лагранжа. Его структура, оказавшаяся сложной, исследована довольно подробно разными учеными, хотя в ней еще имеются важные и трудные нерешенные задачи.

Множества же
$$E_L=\{\lambda(\alpha) \mid L(\alpha)=L\} \quad (L>2) \tag{4}$$
называются обобщенными спектрами Лагранжа.

Нами доказано [4], что каждое множество E_L—любой обобщенный спектр Лагранжа—содержит бесконечный интервал $(0, \infty)$, т. е. для любого $L>2$ и любого $\lambda>0$ существует число α, для которого имеют место равенства
$$L(\alpha)=L, \ \lambda(\alpha)=\lambda. \tag{5}$$

В связи с этим предложением, естественно, возникает вопрос о структуре множество всех тех α из J_L, для которых $\lambda(\alpha)=\lambda$, т. е. о структуре множества всех решений системы уравнений (5).

Теорема. Множество корней уравнения $\lambda(\alpha)=\lambda$ имеет мощность континуума.

Доказательство. Применяем, в несущественном видоизменении, конструкцию, используемую в работе [4]. Пусть $L>2$ и $\lambda>0$— любые фиксированные числа. Построим иррациональное число—непрерывную дробь—следующими рекуррентными соотношениями:
$$a_1=q_1\geqslant 1, \ a_2=[\lambda q_1^{L-2}]+u_1, \ q_2=a_2q_1+1,$$
$$a_{n+1}=[\lambda q_n^{L-2}]+u_n, \quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}, \ (n\geqslant 2), \tag{6}$$
где $\{u_n\}$—любая ограниченная последовательность натуральных чисел.

Итак, для любой ограниченной последовательности $\{u_n\}$, соотношения (6) дают, при данном a_1, одно единственное иррациональное число—бесконечную непрерывую дробь $\alpha=[0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$—для которого последовательность $\{q_n\}$—последовательность знаменателей подходящих дробей. Очевидно, что разным последовательностям $\{u_n\}$ соответствуют разные числа α. Так как множество всех ограниченных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума, множество чисел α, построенное вышеуказанным образом,—континуальное множество.

Но для любого такого числа α, в силу (2), (3) и (6), имеем ($a_n\to\infty$, при $n\to\infty$).
$$a_{n+1}=\lambda q_n^{L-2}+u_n+O(1)=\lambda q_n^{L-2}+O(1),$$
$$q_{n+1}=q_n\left(a_{n+1}+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)=q_n(\lambda q_n^{L-2}+O(1))=\lambda q_n^{L-1}[1+0(1)],$$
откуда
$$l_n q_{n+1}=\ln\lambda+(L-1)\ln q_n+l_n[1+0(1)]; \tag{7}$$

из последнего равенства имеем

$$L(\alpha)=\overline{\lim_{n=\infty}}\ \frac{\ln q_{n+1}}{l_n q_n}+1=\lim_{n=\infty}\left[\frac{\ln\lambda}{\ln q_n}+L-1+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln[1+\circ(1)[}{\ln q_n}\right|+1\sim L-1+1=L,$$

$$\lambda(\alpha)=\overline{\lim_{n=\infty}}\exp[\ln q_{n+1}-(L-1)\ln q_n]=\lambda$$

Итак, любое число α, построенное с помощью соотношений (6), удовлетворяет системе (5); но таких чисел, как выше было указано, континуальное множество.

(Поступило 28, V. 1975)

Кафедра высшей математики
инженерно-экономического
факультета ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М.-Л., 1949.
2. J. F. Koksma, —Diophantische Approximationen, Berlin, 1936,
3. П. Г. Когония, Труды ТГУ, т. 84, 1961, стр. 143—149.
4. П. К. Когония, Труды ТГУ, т. 10, А (158), 1975, стр. 3—5.

პ. კოღონია

$\lambda(\alpha)$ ფუნქციის მუდმივობის წერტილთა სიმრავლის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებზედაც $\lambda(\alpha)$ ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას, კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

P. KOGHONIA

ON THE SET OF CONSTANT POINTS OF THE $\lambda(\alpha)$ FUNCTION

Summary

It is proved that the set of all those points at which the function $\lambda(\alpha)$ assumes one and the same value has the power of a continuum.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ СУММОЙ 8t+1 КВАДРАТОВ

Г. А. ЛОМАДЗЕ

1. Морделл ([4], стр. 372) заметил, что так называемый дополнительный член в точной формуле для числа представлений натурального числа суммой 9 квадратов можно выразить при помощи числа представлений суммой 7 квадратов, если принять во внимание известное тождество Якоби

$$\vartheta_1' = \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0.$$

Согласно этому замечанию, в работах [1, 2, 3] выведены формулы для числа представлений натурального числа суммой 9, 17 и 25 квадратов. Однако оказывается, что если вместо тождества Якоби воспользоваться соотношением Смита ([5], стр. 433)

$$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \vartheta_2^4, \tag{1}$$

то один (самый худший) из дополнительных членов в точной формуле для числа представлений натурального числа суммой $s=8t+1$ квадратов можно выразить при помощи некоторой суммы, распространенной на все представления данного числа суммой $s-4$ квадратов.

2. Хорошо известны следующие разложения якобиевых тэта-функций нулевого аргумента и их производных:

$$\vartheta_3 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}, \quad \vartheta_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}, \quad \vartheta_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2}, \tag{2}$$

$$\vartheta_3'' = -4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 q^{m^2}, \quad \vartheta_0'' = -4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m m^2 q^{m_2}, \tag{3}$$

где $q = e^{\pi i \tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Известны также тождества (см., напр., [1], стр. 250):

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_0^4 = \vartheta_3^4, \tag{4}$$

$$\vartheta_3^s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_s(n) q^n + \sum_{t=1}^{\left[\frac{s-1}{8}\right]} \alpha_s^{(t)} \vartheta_3^{s-8t} \vartheta_0^{4t} \vartheta_2^{4t}, \tag{5}$$

где $\rho_s(n)$ — известный сингулярный ряд Харди, соответствующий s квадратам, $\alpha_s^{(t)}$ — постоянные; напр., ([1], стр. 268):

$$\alpha_9^{(1)}=\frac{2}{17},\quad \alpha_{17}^{(1)}=\frac{1905428}{929569},\quad \alpha_{17}^{(2)}=-\frac{34}{929569} \tag{6}$$

и ([3]), стр. 74):

$$\alpha_{25}^{(1)}=\frac{3025474259586}{968383680827},\quad \alpha_{25}^{(2)}=-\frac{508225110891}{968383680827},$$

$$\alpha_{25}^{(3)}=\frac{1382}{968383680827}. \tag{7}$$

Лемма. При целом $t\geqslant 1$

$$\vartheta_3\vartheta_0^{4t}\vartheta_2^{4t}=4\sum_{x_1,\ldots,x_{s-4}=-\infty}^{\infty}\left\{(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{4t}x_k}\prod_{h=1}^{t-1}\left(1-(-1)^{\sum\limits_{k=2}^{5}x_{4t+4(h-1)+k}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times(x_{4t+1}^2-x_{4t}^2)\right\}q^{\sum\limits_{k=1}^{s-4}x_k^2}.$$

Доказательство. Из (1), (4), (2) и (3) следует

$$\vartheta_3\vartheta_0^{4t}\vartheta_2^{4t}=\vartheta_0^{4t-1}\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^4\vartheta_2^{4(t-1)}=\vartheta_0^{4t-1}(\vartheta_0''\vartheta_3-\vartheta_0\vartheta_3'')(\vartheta_3^4-\vartheta_0^4)^{t-1}=$$

$$=\sum_{x_1,\ldots,x_{4t-1}=-\infty}^{\infty}(-1)^{x_1+\cdots+x_{4t-1}}q^{x_1^2+\cdots+x_{4t-1}^2}\times$$

$$\times\left(-4\sum_{x_{4t},\,x_{4t+1}=-\infty}^{\infty}(-1)^{x_{4t}}x_{4t}^2q^{x_{4t}^2+x_{4t+1}^2}+\right.$$

$$\left.+4\sum_{x_{4t},\,x_{4t+1}=-\infty}^{\infty}(-1)^{x_{4t}}x_{4t+1}^2q^{x_{4t}^2+x_{4t+1}^2}\right)\times$$

$$\times\sum_{x_{4t+2},\ldots,x_{8t-3}=-\infty}^{\infty}\prod_{h=1}^{t-1}\left(1-(-1)^{\sum\limits_{k=2}^{5}x_{4t+4(h-1)+k}}\right)q^{x_{4t+2}^2+\cdots+x_{8t-3}^2},$$

отсюда получаем утверждаемое.

3. Пусть $r_s(n)$ обозначает число представлений натурального числа n суммой s квадратов.

Положив в формуле (5) $s=9$ и пользуясь леммой при $t=1$, получим

$$\vartheta_3^9=1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_9(n)q^n+4\alpha_9^{(1)}\sum_{x_1,\ldots,x_5=-\infty}^{\infty}(-1)^{x_1+\cdots+x_4}(x_5^2-x_4^2)\,q^{x_1^2+\cdots+x_5^2}.$$

Отсюда, приняв во внимание (6), следует

$$r_9(n)=\rho_9(n)+\frac{8}{17}\sum_{x_1^2+\dots+x_5^2=n}(-1)^{x_1+\dots+x_4}(x_5^2-x_4^2)$$

(сумма сингулярного ряда $\rho_9(n)$ вычислена в работе [2], стр. 297).

Положив в формуле (5) $s=17$, пользуясь леммой при $t=2$ и приняв во внимание лемму 26 из [1], получим

$$\vartheta_3^{17}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{17}(n)q^n+8\alpha_{17}^{(1)}\sum_{x_1,\dots,x_9=-\infty}^{\infty}(x_1^4-3x_1^2x_2^2)q^{x_1^2+\dots+x_9^2}$$

$$+4\alpha_{17}^{(2)}\sum_{x_1,\dots,x_{13}=-\infty}^{\infty}(-1)^{x_1+\dots+x_8}(1-(-1)^{x_{10}+\dots+x_{13}})(x_9^2-x_8^2)q^{x_1^2+\dots+x_{13}^2}.$$

Отсюда, в силу (6), следует

$$r_{17}(n)=\rho_{17}(n)+\frac{15243424}{929569}\sum_{x_1^2+\dots+x_9^2=n}(x_1^4-3x_1^2x_2^2)-$$

$$-\frac{136}{929569}\sum_{x_1^2+\dots+x_{13}^2=n}(-1)^{x_1+\dots+x_8}(1-(-1)^{x_{10}+\dots+x_{13}})(x_9^2-x_8^2)$$

(сумма сингулярного ряда $\rho_{17}(n)$ вычислена в работе [2], стр. 303).

Положив в формуле (5) $s=25$, пользуясь леммой при $t=3$ и приняв во внимание леммы 26 и 28 из работы [1], получим

$$\vartheta_3^{25}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{25}(n)q^n+8(\alpha_{25}^{(1)}-4\alpha_{25}^{(2)})\sum_{x_1,\dots,x_{17}=-\infty}^{\infty}(x_1^4-3x_1^2x_2^2)q^{x_1^2+\dots+x_{17}^2}$$

$$+32\alpha_{25}^{(2)}\sum_{x_1,\dots,x_9=-\infty}^{\infty}(x_1^8-28x_1^6x_2^2+35x_1^4x_2^4)q^{x_1^2+\dots+x_9^2}+$$

$$+4\alpha_{25}^{(3)}\sum_{x_1,\dots,x_{21}=-\infty}^{\infty}(-1)^{x_1+\dots+x_{12}}(1-(-1)^{x_{14}+\dots+x_{17}})\times$$

$$\times(1-(-1)^{x_{18}+\dots+x_{21}})(x_{13}^2-x_{12}^2)q^{x_1^2+\dots+x_{21}^2}.$$

Отсюда, приняв во внимание (7), следует

$$r_{25}(n)=\rho_{25}(n)-\frac{40466997625200}{968\,383\,680\,827}\sum_{x_1^2+\dots+x_{17}^2=n}(x_1^4-3x_1^2x_2^2)-$$

$$-\frac{16263203548512}{968\,383\,680\,827}\sum_{x_1^2+\dots+x_9^2=n}(x_1^8-28x_1^6x_2^2+35x_1^4x_2^4)+$$

$$+\frac{5528}{968\,383\,680\,827}\sum_{x_1^2+\cdots+x_{21}^2=n}(-1)^{x_1+\cdots+x_{12}}\left(1-(-1)^{x_{14}+\cdots+x_{17}}\right)\times$$
$$\times\left(1-(-1)^{x_{18}+\cdots+x_{21}}\right)\left(x_{13}^2-x_{12}^2\right)$$

(сумма сингулярного ряда $\rho_{25}(n)$ вычислена в работе [3], стр. 74).

(Поступило 1. VI. 1975)

Кафедра алгебры
и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Ломадзе, Труды Тбилисского математичекого института, 16, 1948, 231—275.
2. Г. А. Ломадзе, Труды Тбилисского математического института, 17, 1949, 281—314.
3. Г. А. Ломадзе, Труды Тбилисского математического института, 20, 1954, 47—87.
4. L. J. Mordell, Transactions of the Cambridge philosophical society 22, 1919 361—372.
5. H. J. S. Smith, Collected mathematical papers, v. II, Oxford, 1894.

გ. ლომაძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ 8t+1 კვადრატის ჯამად

რეზიუმე

ნაჩვენებია თუ როგორ შეიძლება მიღებული იქნას ფორმულები ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის 8t+1 კვადრატის ჯამად. კერძოდ, მიღებულია შესაბამისი ფორმულები 9,17 და 25 კვადრატისათვის — უფრო მარტივი სახის ვიდრე აქამდე იყო ცნობილი.

G. LOMADZE

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS AS A SUM OF $8t+1$ SQUARES

Summary

It is shown how formulae can be constructed for the number of representations of a positive integer as a sum of $8t+1$ squares. Particularly, corresponding formulae are obtained for 9,17 and 25 squares, having a simpler expression than was known hitherto.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

В. В. БАДАГАДЗЕ

Предлагаются новые разностные схемы повышенного порядка аппроксимации $O(|h|^4)$ и $O(h^6)$ для уравнения Пуассона в p-мерном параллелепипеде. Указаны условия равномерной сходимости построенных схем при любом $p \geqslant 2$.

Для $p=2,3$ в случае квадратной сетки ($h_\alpha = h$, $\alpha=1, 2, 3$) разностные схемы повышенного порядка аппроксимации были рассмотрены в работах [1—3] и там же была доказана равномерная сходимость этих схем со скоростью $O(h^6)$. В случае $p=2$ на прямоугольной сетке разностная схема четвертого порядка аппроксимации была предложена в [4] и при определенных ограничениях на соотношении между шагами сетки доказана равномерная сходимость этой схемы.

В работе [5] предлагается разностная схема четвертого порядка аппроксимации на прямоугольной сетке при любом p и для $p=2$, 3 доказывается сходимость схемы в среднем со скоростью $O(|h|^4)$ при любом соотношении между шагами сетки. В этой же работе выведены условия равномерной сходимости построенной разностной схемы со скоростью $O(|h|^4)$ при $p \leqslant 4$.

В работе [6] доказывается, что разностная схема, предложенная в [5], равномерно сходится при любом соотношении между шагами сетки в случае $p=2,3$.

В [7] рассмотрена разностная схема четвертото порядка аппроксимации на прямоугольной сетке и доказываетсй сходимость схемы в норме сеточных пространств L_2 и $W_2^{(1)}$ при любом p, а при $p=2,3$ доказывается равномерная сходимость этой схемы при любом соотношении между шагами сетки.

В [8] доказывается, что разностная схема, предложенная в [7], при определенных ограничениях на соотношения между шагами сетки равномерно сходится при $2 \leqslant p \leqslant 6$.

1. Для уравнения Пуассона в p-мерном параллелепипеде

$$\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p);\ 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$$

с границей Г рассматривается задача Дирихле

$$\Delta u \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \;\; x \in G, \qquad u|_\Gamma = g(x). \tag{1}$$

В области G введем прямоугольную сетку $\overline{\omega}_h$. $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha = \eta_\alpha h$ — шаг сетки по x_α, $\gamma = \{x^{(i)} \in \Gamma\}$ — граница $\overline{\omega}_h$.

Для аппроксимации задачи (1) рассмотрим разностную схему

$$h^{-2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_p = -1}^{1} a_{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_p^2} \, y_{i_1+\alpha_1, \ldots, i_p+\alpha_p} =$$

$$= \varphi(x^{(i)}), \;\; x^{(i)} \in \omega_h, \;\; y|_\gamma = g(x). \tag{2}$$

Здесь

$$x^{(i)} = (x_1^{(i_1)}, \; x_2^{(i_2)}, \ldots, x_p^{(i_p)}), \;\; x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \;\; (\alpha = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},$$

$$a_{00\cdots0} = \frac{p-7}{3} \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha^{-2} - \sum_{k=3}^{p} 2^{k-1}(k-1)(k-2) \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=k} a_{k_1 k_2 \cdots k_p},$$

$$a_{n_1 n_2 \cdots n_p} = a_1^{(j)}, \text{ где } n_s = 0 \text{ при } s \neq j, \; n_j = 1,$$

$$a_{m_1 m_2 \cdots m_p} = a_{11}^{(j,r)}, \text{ где } m_s = 0 \text{ при } s \neq j \text{ или } s \neq r, \; m_j = m_r = 1, \; j \neq r,$$

$$a_1^{(j)} = \frac{\eta_j^{-2}}{6}(8-p) - \frac{1}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha^{-2} + \sum_{k=3}^{p} 2^{k-1}(k-2) \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots k_p=k \\ k_j=1}} a_{k_1 k_2 \ldots k_p},$$

$$a_{11}^{(j,r)} = \frac{1}{12}(\eta_j^{-2} + \eta_r^{-2}) - \sum_{k-3}^{p} 2^{k-2} \sum_{\substack{k_1+k_1+\cdots+k_p=k \\ k_j=k_r=1}} a_{k_1 k_2 \ldots k_p}$$

$$(j, \; r = 1, \; 2, \ldots, p).$$

Нетрудно показать, что для произвольных значений $a_{k_1 k_1 \cdots k_p}$ $k_1+k_2+\cdots+k_p = k \geqslant 3$ схема (2) имеет четвертый порядок аппроксимации по h на классе достаточно гладких решений (1).

При $p=2$ имеем единственную схему, а при $p \geqslant 3$ получаем семейства разностных схем четвертого порядка аппроксимации.

Разностную схему четвертого порядка аппроксимации, предложенную в [5], получаем из (2) при $a_{k_1 k_2 \ldots k_p} = 0$, $k_1+k_2+\cdots+k_p \geqslant 3$, а схему, предложенную в [7], при

$$a_{k_1 k_2 \cdots k_p} = D_k (p-k)! \sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha \eta_\alpha^{-2} - S_k (p-k-1)! \sum_{\alpha=1}^{p} (1-k_\alpha) \eta_\alpha^{-2},$$

где

$$k_\alpha=0,1 \ (\alpha=1,\ 2,\dots,p),\ k=k_1+k_2+\dots+k_p=3,4,\dots,p,$$

$$D_k=\sum_{\alpha=0}^{p-k}\frac{(-1)^\alpha}{12^{\alpha+k-1}\cdot\alpha!\,(p-k-\alpha)!},\quad S_k=\sum_{\alpha=0}^{p-k-1}\frac{(-1)^\alpha\cdot 2^{\alpha+1}}{12^{\alpha+k}\cdot\alpha!\,(p-k-\alpha-1)!}.$$

Для схемы (2) имеет место принцип максимума (следовательно, схема сходится равномерно со скоростью $O(h^4)$), если выполняются неравенства

$$3\sum_{k=3}^{p}2^k(k-2)\sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_p=k\\ k_\beta=1}}a_{k_1k_2\dots k_p}\geqslant\eta_\beta^{-2}(p-8)+\sum_{\alpha=1}^{p}\eta_\alpha^{-2},$$

$$3\sum_{k=3}^{p}2^k\sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_p=k\\ k_j=k_r=1}}a_{k_1k_2\dots k_p}\leqslant\eta_j^{-2}+\eta_r^{-2},$$

$$a_{k_1k_2\dots k_p}\geqslant 0,\ k_1+k_2+\dots+k_p=k\geqslant 3,$$

$$\beta,\ j,\ r=1,\ 2,\dots,p;\quad r\neq j.$$

Выберем параметры $a_{k_1k_2\dots k_p}$ $(3\leqslant k_1+k_2+\dots+k_p\leqslant p)$, например, следующим образом:

$$a_{k_1k_2\dots k_p}=\begin{cases}0 & \text{при } 3\leqslant k_1+k_2+\dots+k_p\neq m,\\ a_m & \text{при } k_1+k_2+\dots+k_p=m,\end{cases}$$

где m—некоторое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $3\leqslant m\leqslant p$.

В этом случае разностная схема (2) равномерно сходится, если

$$\frac{m-1}{(p-1)(m-2)}\left[(p-8)\eta_\beta^{-2}+\sum_{\alpha=1}^{p}\eta_\alpha^{-2}\right]\leqslant b_m\leqslant\eta_j^{-2}+\eta_r^{-2},$$

$$b_m\geqslant 0\ (\beta,\ j,\ r=1,\ 2,\dots,p;\quad j\neq r), \tag{3}$$

где

$$b_m=\frac{2^m\cdot 3\cdot(p-2)!}{(m-2)\cdot(p-m)!}a_m.$$

Предположим теперь, что $m=p$. Тогда легко проверить, что, если

$$\eta_{\alpha_1}^2\eta_{\alpha_0}^{-2}\leqslant\frac{p+3}{p-1}\ \text{при}\ p\leqslant 8,\ \eta_{\alpha_1}^2\eta_{\alpha_0}^{-2}\leqslant\frac{2p-5}{2p-9}\ \text{при}\ p>8,$$

где

$$\eta_{\alpha_1}=\max_\alpha\{\eta_\alpha\},\quad \eta_{\alpha_0}=\min_\alpha\{\eta_\alpha\},$$

можно подобрать b_p, удовлетворяющее условиям (3).

В этом случае разностная схема равномерно сходится, если

$$\frac{1}{p-2}\left[(p-7)\eta_{\alpha_1}^{-2}+(p-1)\eta_{\alpha_0}^{-2}\right]\leqslant b_p\leqslant 2\eta_{\alpha_1}^{-2} \quad \text{при} \quad p\leqslant 8,$$

$$\frac{1}{p-2}\left[(2p-9)\eta_{\alpha_0}^{-2}+\eta_{\alpha_1}^{-2}\right]\leqslant b_p\leqslant 2\eta_{\alpha_1}^{-2} \quad \text{при} \quad p>8.$$

2. В случае квадратной сетки ($h_\alpha=h$, $\alpha=1, 2,\ldots,p$) для аппроксимации задачи (1) рассмотрим разностную схему

$$h^{-2}\sum_{\alpha_1\,\alpha_2,\ldots,\alpha_p=-1}^{1} a_{\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_p^2}\, y_{i_1+\alpha_1\ldots i_p+\alpha_p}=\varphi_1(x^{(i)}),$$

$$x^{(i)}\in\omega_h,\quad y|_\gamma=g(x), \tag{4}$$

где

$$x^{(i)}=(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)},\ldots x_p^{(i_p)}),\quad x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h,\ (\alpha=1, 2,\ldots,p),$$

$$\varphi_1(x)=f(x)+\frac{h^2}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_\alpha^2}+\frac{h^4}{360}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x_\alpha^4}+$$

$$+\frac{h^4}{90}\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x_\alpha^2\,\partial x_\beta^2},$$

$$a_{k_1k_2\ldots k_p}=a_k,\ k_\alpha=0, 1\ (\alpha=1, 2,\ldots,p),\ k=k_1+k_2+\ldots+k_p,$$

$$a_0=-\frac{p}{45}(2p^2-21p+109)+\frac{2}{3}p(p-1)(p-2)\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k},$$

$$a_1=1+\frac{1}{15}(p-1)(p-7)-(p-1)(p-2)\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k-1},$$

$$a_2=\frac{1}{30}(9-2p)+(p-2)\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k-2},$$

$$a_3=\frac{1}{30}-\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k-3},$$

$$c_k=\frac{2^{k-2}(p-3)!}{(p-k)!\,(k-4)!}\,a_k\quad(k=4, 5,\ldots,p).$$

Можно показать, что при $p\geqslant 2$ схема (4) для произвольных значений a_k ($k=4, 5,\ldots,p$) имеет шестой порядок аппроксимации по h на классе достаточно гладких решений (1).

При $p=2,3$ из (4) получаем единственные схемы, а при $p\geqslant 4$ имеем $(p-3)$-параметрические семейства разностных схем.

Схему шестого порядка аппроксимации, предложенную в [5], получаем из (4) при $a_k=0$ $(k=4, 5,\ldots,p)$.

Очевидно, разностная схема (4) равномерно сходится со скоростью $O(h^6)$, если выполняются соотношения

$$\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k-1}\leqslant\frac{p^2-8p+22}{15(p-1)(p-2)},$$

$$\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k-2}\geqslant\frac{2p-9}{30(p-2)},\tag{5}$$

$$\sum_{k=4}^{p}\frac{c_k}{k-3}\leqslant\frac{1}{15},$$

$$c_k\geqslant 0\ \ (k=4, 5,\ldots,p).$$

Предположим, что $c_k=0$ при $k=4, 5,\ldots,m-1, m+1,\ldots,p$. Тогда легко проверить, что, если $4\leqslant p\leqslant 6$, полученная в этом случае система неравенств имеет решение при $4\leqslant m\leqslant p$. При $p\geqslant 7$ система неравенств имеет решение для тех значений p, для которых существует натуральное число $m\leqslant p$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{2}{5}(p+3)\leqslant m\leqslant\frac{2}{5}(p+4)+\frac{6}{p-7}.\tag{6}$$

Такое число m существует для любого значения p из промежутка $7\leqslant p\leqslant 24$. В случае $25\leqslant p\leqslant 37$ такое m существует для всех значений p, кроме тех, которые делятся на 5, а при $p>37$ для всех p, кроме тех, которые делятся на 5 или оканчиваются на цифры 3 или 8.

Решение системы (5) в рассматриваемом случае дается соотношениями

$$\frac{(m-2)(2p-9)}{30(p-2)}\leqslant c_m\leqslant\frac{1}{15}(m-3)\quad\text{при}\quad m\leqslant\frac{2p^2-p-16}{5(p-4)},$$

$$\frac{(m-2)(2p-9)}{30(p-2)}\leqslant c_m\leqslant\frac{(m-1)(p^2-8p+22)}{15(p-1)(p-2)}\quad\text{при}\quad m>\frac{2p^2-p-16}{5(p-4)},$$

где при $4\leqslant p\leqslant 6$, $4\leqslant m\leqslant p$, а при $p\geqslant 7$, $m\leqslant p$ натуральное число, удовлетворяющее неравенству (6).

Предположим теперь, что $c_k=0$ при $k=4, 5,\ldots,m-1, m+2,\ldots,p$. Тогда система неравенств (5) будет иметь вид

$$\frac{c_m}{m-1}+\frac{c_{m+1}}{m}\leqslant\frac{p^2-8p+22}{15(p-1)(p-2)},$$

$$\frac{c_m}{m-2}+\frac{c_{m+1}}{m-1}\geqslant\frac{2p-9}{30(p-2)},$$

$$\frac{c_m}{m-3}+\frac{c_{m+1}}{m-2}\leqslant\frac{1}{15},$$

$$c_m\geqslant 0,\quad c_{m+1}\geqslant 0\quad (4\leqslant m\leqslant p-1).$$

Легко проверить, что при любом $p>4$ можно подобрать натуральное число $m\leqslant p-1$, для которого система неравенств (7) будет иметь решение. Так, например, для $p\leqslant 8$ $m=4$, а для $p>8$ $m\leqslant p-1$ — любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{2p+3}{5}+\frac{6}{p-7}\leqslant m\leqslant 1+\frac{2p+3}{5}+\frac{6}{p-7}. \tag{8}$$

Те значения коэффициентов c_m и c_{m+1}, которые удовлетворяют соотношениям (7), задаются координатами точек первой четверти координатной плоскости, заключенной внутри треугольника с вершинами

$$A\left(\frac{(m-1)(m-2)(5mp-35m-2p^2+11p-9)}{30(p-1)(p-2)},\right.$$

$$\left.\frac{m(m-1)(35m-5mp+2p^2-6p-26)}{30(p-1)(p-2)}\right),$$

$$B\left(\frac{(m-1)(m-3)(5mp-20m-2p^2+6p-4)}{30(p-1)(p-2)},\right.$$

$$\left.\frac{m(m-2)(20m-5mp+3p^2-9p+6)}{30(p-1)(p-2)}\right),$$

$$C\left(\frac{(m-2)(m-3)(5m-2p-1)}{30(p-2)},\ \frac{(m-1)(m-2)(2p-5m+6)}{30(p-2)}\right),$$

где при $5\leqslant p\leqslant 8$, $m=4$, а при $p>8$ $m\leqslant p-1$ — любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству (8).

(Поступило 14. VI. 1974)

Кафедра вычислительной
математики

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Е. Микеладзе, Изв. АН СССР, сер. мат., 1934, № 6, 819—842.
2. Ш. Е. Микеладзе, Докл. АН СССР, 1937, 14, № 4, 177—180.
3. Ш. Е. Микеладзе, Изв. АН СССР, сер. мат., 1938, № 2, 271—292.
4. Ш. Е. Микеладзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, 4, № 8.
5. А. А. Самарский, В. Б. Андреев, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, № 6, 1025—1036.
6. В. Б. Андреев, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, 6, № 2, 238—250.
7. Е. С. Николаев, А. А. Самарский, Докл. АН СССР, 1972, 206, № 4, 815—818.
8. Г. И. Сулханишвили, Сообщ. АН Груз. ССР, 73, № 3, 1974, 541—544.

ვ. ბადაგაძე

პუასონის განტოლებისათვის მაღალი რიგის აპროქსიმაციის სხვაობიანი სქემების თანაბარი კრებადობის შესახებ

რეზიუმე

აგებულია მეოთხე და მეექვსე რიგის აპროქსიმაციის სხვაობიანი სქემები პუასონის განტოლებისათვის p — განზომილებიან პარალელეპიპედში. დადგენილია აგებული სქემების თანაბარი კრებადობის საკმარისი პირობები ნებისმიერი $p \geqslant 2$-სათვის.

V. BADAGADZE

ON UNIFORM CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH-ACCURACY APPROXIMATION FOR POISSON'S EQUATION

Summary

The paper suggests new difference schemes of high-accuracy approximation of Dirichlet's problem for Poisson's equation iu a p-dimensional parallelepiped.

Some conditions under which the given schemes converge uniformly are indicated for any $p \geqslant 2$.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
179, 1976

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ МНОГИХ ТЕЛ ВБЛИЗИ СОУДАРЕНИЯ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

1. **Введение.** В настоящей статье мы продолжаем исследование некоторых вопросов, изложенных в нашей работе [1].

Рассмотрим движение тела M_1, имеющего переменную массу $m_1=m_1(t)$ в гравитационном поле N тел M_i, $i=0, 2,\cdots N$, имеющих соответственно постоянные массы m_i $(i=0, 2,\cdots,N)$, вблизи момента соударения этого тела с телом M_0, в предположении, что взаимные расстояния между телами M_i $(i=0, 2,\cdots,N)$ остаются больше некоторого определенного положительного числа, а движение происходит в среде с сопротивлением, по величине пропорциональным квадрату скорости.

Мы предполагаем, что в рассматриваемом гравитационном поле многих тел действует обобщенный закон Ньютона, когда функция сил является определенным полиномом относительно обратных величин взаимных расстояний между этими телами с произвольными коэффициентами, аналитически зависящими от времени.

В соответствии с таким допущением в основу исследования мы положим достаточно общую систему дифференциальных уравнений. Коэффициенты этой системы мы считаем аналитическими функциями от времени t.

Для координат движущихся тел мы строим обобщенные степенные ряды по времени и доказываем их сходимость для определенного достаточно малого промежутка времени вблизи момента $t=t_1^*$ первого соударения тела M_1 с телом M_0. Отсюда следует возможность локального аналитического продолжения решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами после первого соударения. Применяемый нами способ отличается от известного метода Зундмана [2—3] для аналитического продолжения решения задачи трех тел с постоянными массами вблизи момента $t=t_1^*$, основанного на законах площадей и живой силы, не имеющих аналога, вообще говоря, в рассматриваемом нами более общем случае.

Для определения коэффициентов разложений неизвестных величин в обобщенные степенные ряды мы строим рекуррентные соотношения, достаточно удобные для их вычисления на современных вычислительных машинах.

При выводе упомянутых соотношений мы использовали метод, являющийся обобщением метода, предложенного И. Ф. Стефенсеном [4] для решения ограниченной задачи трех тел с постоянными массами, получившего дальнейшее развитие и применения в наших статьях [5—7] (в случае переменной массы $m_1 = m_1(t)$) и в статьях [8—12] и др. (в случае постоянных масс).

Мы также даем оценки для остаточных членов разложений основных и вспомогательных неизвестных величин.

Наконец, выводим асимптотическую оценку для вектора скорости тела M_1 при его приближении к телу M_0, дающую возможность установить порядок роста величины скорости в зависимости от достаточно малого расстояния между этими телами.

2. Основная система дифференциальных уравнений. Рассматриваемая основная система дифференциальных уравнений движения по отношению к некоторой абсолютной системе координат в векторной форме имеет вид:

$$m_i(t)\frac{d^2}{dt^2}\vec{\rho}_i = \alpha_i(t)\frac{d}{dt}\vec{\rho}_i + \sum_{j=0}^{N-1}{}' \sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{\vec{\beta}_{ijk}(t)}{|\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i|^{k+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_{ijk}(t)}{|\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j|}(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i)\right] + \vec{\delta}_i(t) + \vec{\varepsilon}_i(t)\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}_i, \quad \frac{d}{dt}\vec{\rho}_i\right), \qquad (1)$$

$$i = 0, \ 1, \ldots, N-1,$$

где $\vec{\rho}_i$—радиус-вектор точки (ξ_i, η_i, ζ_i); $\alpha_i(t)$, $\vec{\beta}_{ijk}(t)$, $\gamma_{ijk}(t)$, $\vec{\delta}_i(t)$, $\vec{\varepsilon}_i(t)$— заданные аналитические функции от t; символ $\sum_{j=0}^{N-1}{}'$ означает знак суммирования, в котором пропущен член, соответствующий индексу $j=i$, $N \geqslant 2$, а p—произвольное четное натуральное число $\geqslant 2$.

Пусть в начальный момент $t=t_0$ все взаимные расстояния $|\vec{\rho}_j(t) - \vec{\rho}_i(t)|$ отличны от нуля, а в некоторый следующий момент $t=t_1^*$ происходит первое соударение тел M_1 и M_0: $\vec{\rho}_1(t_1^*) = \vec{\rho}_0(t_1^*)$, при этом все остальные взаимные расстояния $|\vec{\rho}_j(t) - \vec{\rho}_i(t)|$ $(i, j = 0, 1, \ldots, N-1; \ i \neq 0 \ i \neq j)$ остаются больше определенного положительного числа при $t=t_1^*$ и вблизи этого момента.

Требуется исследовать движение тела M_1 вблизи момента $t=t_1^*$.

С этой целью введем относительную систему координат $Oxyz$, начало которой поместим в M_0 и пусть $\vec{r}_i = \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$; при этом $\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_0(t)$ считается известной функцией времени.

Тогда система (1) примет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i=a_i(t)\frac{d}{dt}\vec{r}_i+\sum_{j=0}^{N-1}{}'\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{\vec{b}_{ijk}(t)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^{k+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_{ijk}(t)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^{k+2}}(\vec{r}_j-\vec{r}_i)\right]+\vec{d}_i(t)+\vec{e}_i(t)\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_i,\ \frac{d}{dt}\vec{r}_i\right), \qquad (2)$$

$$i=1,\ 2,\ldots,N-1,$$

где a_i, $\vec{b}_{ijk}$ c_{ijk}, $\vec{d}_i$ и $\vec{e}_i$ легко выражаются через α_i, $\vec{\beta}_{ijk}$, γ_{ijk}, $\vec{\delta}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$ и m_i.

В момент $t=t_1^*$ очевидно, имеем $\vec{r}_1(t_1^*)=0$ и $\vec{r}_i(t_1^*)\neq 0$ при $i=2,\ 3,\ldots,N-1$.

3. Квази-регуляризирующая переменная. Вместо времени t введем новую независимую переменную τ, полагая

$$t=t_1^*-\frac{\tau^{p+1}}{p+1}. \qquad (3)$$

Переменную τ мы будем называть квази-регуляризирующей переменной по причине, которая станет ясной из нижеизложенного.

Полагая, вообще, $f(t)=f\left(t_1^*-\dfrac{\tau^{p+1}}{p+1}\right)=f^*(\tau)$ систему (2) можно представить в виде

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{r}_i^*=\left[\frac{p}{\tau}-\tau^p a_i^*(\tau)\right]\frac{d}{d\tau}\vec{r}_i^*+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}{}'\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{\tau^{2p}\vec{b}_{ijk}^*(\tau)}{|\vec{r}_j^*-\vec{r}_i^*|^{k+1}}+\frac{\tau^{2p}c_{ijk}^*(\tau)}{|\vec{r}_j^*-\vec{r}_i^*|^{k+2}}(\vec{r}_j^*-\vec{r}_i^*)\right]+$$

$$+\tau^{2p}\vec{d}_i^*(\tau)+\tau^{2p}\vec{e}_i^*(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}\vec{r}_i^*,\ \frac{d}{d\tau}\vec{r}_i^*\right), \qquad (4)$$

$$i=1,\ 2,\ldots,N-1.$$

4. Вспомогательные неизвестные. Введем вспомогательные неизвестные:

$$f_i=\left(\frac{d}{d\tau}\vec{r}_i^*,\ \frac{d}{d\tau}\vec{r}_i^*\right),\ i=1,\ 2,\ldots,N-1;$$

$$r_{10}=\frac{\tau^2}{|\vec{r}_1^*|};\quad r_{i0}=\frac{1}{|\vec{r}_i^*|},\ i=2,\ldots,N-1;$$

$$r_{ij}=\frac{1}{|\vec{r}_j^*-\vec{r}_i^*|},\ i,j=1,\ldots,N-1;\ i\neq j; \qquad (5)$$

$$q_{10}=\frac{|\vec{r}_1^*|^2}{\tau^4},\ q_{i0}=|\vec{r}_i^*|^2;\ i=2,\ldots,N-1;$$

$$
\begin{aligned}
& q_{ij}=|\vec{r}_j^{\,*}-\vec{r}_i^{\,*}|, \quad i,\ j=1,\ldots,N-1;\ i\neq j; \qquad (5)\\
& s_{i0k}=r_{i0}^{k+1}, \quad i=1,\ldots,N-1; \quad k=0,\ 1\ldots,p-1;\\
& s_{ijk}=r_{ij}^{k+1}, \quad i,j=1,\ldots,N-1;\ i\neq j,\ k=0,\ 1,\ldots,p-1;\\
& \vec{u}_{i0}=\frac{\vec{r}_i^{\,*}}{|\vec{r}_i^{\,*}|}, \quad i=1,\ldots,N=1;\\
& \vec{u}_{ij}=r_{ij}\vec{r}_i^{\,*}, \quad \vec{v}_{ij}=r_{ij}\vec{r}_j^{\,*}, \quad i,j=1,\ldots,\ N-1;\ i\neq j;\\
& \vec{w}_{i0k}=-s_{i0k}\ \vec{u}_{i0},\ i=1,\ldots,N-1;\\
& \vec{w}_{ijk}=s_{ijk}(\vec{v}_{ij}-\vec{u}_{ij});\ i,j=1,\ldots,N-1,\ i\neq j.
\end{aligned}
$$

Они дают возможность в каждом уравнении нелинейные члены высокого порядка представить в виде произведения лишь двух множителей, что очень удобно при умножении разложений этих множителей в степенные ряды.

Теперь система (4) принимает вид:

$$
\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{r}_1^{\,*}=\left[\frac{p}{\tau}-\tau^p a_1^*(\tau)\right]\frac{d}{d\tau}\vec{r}_1^{\,*}+\sum_{k=0}^{p-1}(s_{10k}\vec{b}_{10k}^{\,*}+c_{10k}^*\vec{w}_{10k})\,\tau^{2p-2k-2}+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N-1}{}'\sum_{k=0}^{p-1}(s_{1jk}\vec{b}_{1jk}^{\,*}+c_{1jk}^*\vec{w}_{1jk})\,\tau^{2p}+\tau^{2p}\vec{d}_1^{\,*}(\tau)+\tau^{2p}\vec{e}_1^{\,*}(\tau)\,f_1(\tau), \tag{6}
$$

$$
\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{r}_i^{\,*}=\left[\frac{p}{\tau}-\tau^p a_i^*(\tau)\right]\frac{d}{d\tau}\vec{r}_i^{\,*}+\sum_{k=0}^{p-1}(s_{i0k}\ \vec{b}_{i0k}^{\,*}+c_{iokvk}^*\vec{w}_{iok})\,\tau^{2p}+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N-1}{}'\sum_{k=0}^{p-1}(s_{ijk}\vec{b}_{ijk}^{\,*}+c_{ijk}^*\ \vec{w}_{ijk})\tau^{2p}+\tau^{2p}\vec{d}_i^{\,*}(\tau)+\tau^{2p}\vec{e}_i^{\,*}(\tau)\,f_i(\tau), \tag{7}
$$

$$
i=2,\ldots,N-1.
$$

5. Решение систем (6) и (7). Пусть

$$
a_i^*(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{in}^*\tau^n, \qquad \vec{b}_{ijk}^{\,*}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{b}_{ijkn}^{\,*}\tau^n,
$$

$$
c_{ijk}^*(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{jkn}\tau^n, \qquad \vec{d}_i^{\,*}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{d}_{in}^{\,*}\tau^n, \tag{8}
$$

$$
\vec{e}_i^{\,*}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{e}_{in}^{\,*}\tau^n,
$$

при этом предположим, что

$$|a^*_{in}| \leqslant A_i \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{b}^*_{ijkn}| \leqslant B_{ijk} \frac{H_0^n}{n^\alpha},$$

$$|c^*_{ijkn}| \leqslant C_{ijk} \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{d}^*_{in}| \leqslant D_i \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \tag{9}$$

$$|\vec{e}^*_{in}| \leqslant E_i \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \; n=1,\, 2, \ldots,$$

где A_i, B_{ijk}, C_{ijk}, D_i, E_i, H_0 и $\alpha>1$—заданные положительные постоянные.

Очевидно, что ряды (8) сходятся при $|\tau| \leqslant H_0^{-1}$, когда $\alpha>1$.

Решение систем (6) и (7) будем искать в виде рядов:

$$\vec{r}^*_1(\tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}^*_{1n}\tau^n, \quad \vec{r}^*_i(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}^*_{in}\tau^n, \tag{10}$$

$$i=2,\ldots,N-1,$$

при этом полагаем

$$f_i(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{in}\tau^n, \; s_{ijk}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{ijkn}\tau^n,$$

$$\vec{w}_{ijk}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{w}_{ijkn}\tau^n \tag{11}$$

и аналогично для других вспомогательных неизвестных (5).

Подставляя разложения (10), (11) и аналогичные в системы дифференциальных (6) и (7) и конечных (5) уравнений, следуя схеме, указанной в [1], получим систему рекуррентных соотношений между коэффициентами разложений основных $\vec{r}^*_{in}$ и вспомогательных неизвестных f_{in}, q_{ijn}, r_{ijn}, s_{ijkn}, $\vec{u}_{ijn}$, $\vec{v}_{ijn}$ и $\vec{w}_{ijkn}$.

Например, имеем

$$(n+2)(n+1-p)\vec{r}^*_{in+2} = -\sum_{\nu=0}^{n-p} (\nu+1)\, a^*_{in-p-\nu}\vec{r}^*_{i\nu+1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1} \vec{g}_{i0kn-2p} + \sum_{j=1}^{N-1}{}' \sum_{k=0}^{p-1} \vec{g}_{ijkn-2p} + \vec{d}^*_{in-2p} + \sum_{\nu=0}^{n-2p} \vec{e}^*_{i\nu} f_{in-2p-\nu}, \tag{12}$$

$$n=p+1,\ldots; \quad i=2,\ldots,N-1;$$

$$\vec{g}_{ijkn} = \sum_{\nu=0}^{n} (s_{ijkn-\nu}\vec{b}^*_{ijk\nu} + c^*_{ijkn-\nu}\vec{w}_{ijk\nu}), \quad n=0,\; 1,\ldots$$

$$\vec{w}_{ijkn}=\sum_{\nu=0}^{n} s_{ijkn-\nu}\,(\vec{v}_{ij\nu}-\vec{u}_{ij\nu}),\ n=0,\ 1,\ldots$$

Нетрудно показать, что некоторые из коэффициентов разложений основных и вспомогательных неизвестных обращаются в нуль или остаются произвольными, а остальные с их помощью определяются из упомянутых выше рекуррентных соотношений. Например, $\vec{r}^{\,*}_{in}=0$ при $n=1,\ 2,\ldots,p$, и $i=2,\ 3,\ldots,N-1$; $\vec{r}^{\,*}_{i0}$ и $\vec{r}^{\,*}_{ip+1}$ остаются произвольными, а $|\vec{r}^{\,*}_{10}|>0$.

6. Доказательство сходимости рядов (10). Для доказательства сходимости степенных рядов (10) и рядов, получаемых из них дифференцированием, положим

$$|f_{in}|\leqslant F_i\frac{H^n}{n^\alpha},\ |\vec{r}^{\,*}_{in}|\leqslant R_i\frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$|q_{ijn}|\leqslant Q_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha},\ |r_{ijn}|\leqslant R_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$|s_{ijkn}|\leqslant S_{ijk}\frac{H^n}{n^\alpha},\ |\vec{u}_{ijn}|\leqslant U_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha}, \tag{13}$$

$$|\vec{v}_{ijn}|\leqslant V_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha},\ |\vec{w}_{ijkn}|\leqslant W_{ifk}\frac{H^n}{n^a},$$

где $n=4p+2,\cdots$, а $F_i,\ R_i,\ Q_{ij},\ R_{ij},\ S_{ij},\ U_{ij},\ V_{ij},\ W_{ijk},\ H\geqslant\max(1, H_0)$— положительные постоянные, удовлетворяющие определенным неравенствам (ср. [1]).

Например, имеем

$$\frac{2^\alpha|\vec{r}^{\,*}_{10}|}{(2p+1)(3p+1)}A_1\frac{H_0^{-p}}{H}+\frac{2^{\alpha-1}|a^*_{10}|}{3p+1}R_1\frac{1}{H}+\frac{2^{\alpha-1}L\alpha}{2p+1}A_1R_1\frac{1}{H}+$$
$$+\frac{2^{\alpha-1}}{(2p+1)(3p+1)}D_1\frac{H_0^{1-2p}}{H}+\frac{2^{\alpha-2}L\alpha}{(2p+1)(3p+1)}\frac{E_1F_1H_0^{1-2p}}{H}+$$
$$+\frac{2^{\alpha-1}}{(2p+1)(3p+1)}\sum_{k=0}^{p-1}(S_{10k}\,|\vec{b}^{\,*}_{10ko}|+W_{10k}\,|c^*_{10ko}|)+$$
$$+\frac{2^{\alpha-1}}{(2p+1)(3p+1)}\frac{H_0^{3-2p}}{H}\sum_{k=0}^{p-1}(B_{10k}s_{10ko}+C_{10k}|\vec{w}_{10ko}|)H_0^{2k}+$$
$$+\frac{2^{\alpha-2}L\alpha}{(2p+1)(3p+1)}\frac{H_0}{H}\sum_{k=0}^{p-1}(B_{10k}S_{10k}+C_{10k}W_{10k})(1+H_0^{k-p+1})\leqslant R_1,$$

$$(|\vec{v}_{ij0}|+|\vec{u}_{ij0}|)S_{ijk}+s_{ijk0}(U_{ij}+V_{ij})+L\alpha S_{ijk}(U_{ij}+V_{ij})\leqslant W_{ijk},$$

$$L\alpha = 2^{\alpha}(3\alpha-1)/(\alpha-1),$$

$$i,j=1,\ldots,N-1;\ i\neq j;\ k=0,\ 1,\ldots,p-1.$$

Нетрудно показать, что такие постоянные всегда существуют и они эффективно подбираются (ср. [1]).

Из (12) и (13) следует, что ряды (10), (11) и аналогичные сходятся при $|\tau| \leqslant H^{-1}$, так как по условию $\alpha>1$. Ряды, получаемые из них дифференцированием, сходятся при $|\tau| < H^{-1}$ (они сходятся при $|\tau| \leqslant H^{-1}$, если дополнительно потребовать, что $\alpha>2$).

7. Оценка остаточных членов рядов (10). В силу (12), для остаточных членов рядов (10) получаем оценку

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} \vec{r}^{\,*}_{i\nu}\tau^{\nu}\right| \leqslant R_i \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \tag{14}$$

при $n=4p+2\ldots;\ i=1,\ 2,\ldots,\ N-1;\ \alpha>1$.

8. Асимптотическое поведение вектора скорости движения. Теперь возвратимся от квази-регуляризирующей переменной τ к независимой переменной t. Из (3), очевидно, имеем

$$\tau=[(p+1)(t_1^*-t)]^{1/(p+1)}. \tag{15}$$

Поэтому ряды (10) принимают вид:

$$\vec{r}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}^{\,*}_{1n}[(p+1)(t_1^*-t)]^{(n+2)/(p+1)}, \tag{16}$$

$$\vec{r}_i(t)=\vec{r}^{\,*}_{io} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \vec{r}^{\,*}_{in}[(p+1)(t_1^*-t)]^{n/(p+1)}, \tag{17}$$

$$i=2,\ 3,\ldots,N-1.$$

Ряды (16) и (17) сходятся на сегменте $0\leqslant t_1^*-t \leqslant \frac{H^{-(p+1)}}{p+1}$, если $\alpha>1$; ряды, получаемые из них дифференцированием, также сходятся на том же сегменте, если $\alpha>2$ $\left(\text{они сходятся на полусегменте } 0\leqslant t_1^*-t < \frac{H^{-(p+1)}}{p+1}, \text{ если } \alpha>1\right)$.

Из (16), после простых выкладок, получим, что

$$\lim_{t\to t_1^*} |\vec{r}_1(t)|^{\frac{p-1}{2}} \left|\frac{d}{dt}\vec{r}_1(t)\right| = 2|\vec{r}^{\,*}_{10}|^{\frac{p+1}{2}}. \tag{18}$$

9. Аналитическое продолжение. Так как по условию p — произвольное четное натуральное число $\geqslant 2$, то из (15) следует, что суммы рядов (10) аналитически продолжаются для действительных значений времени после первого соударения тела M_1 с телом M_0.

10. Заключение. При $p=2$, то есть в гравитационном поле Ньютона, из (18) следует, что скорость тела M_1 при его приближении к телу M_0 растет как обратная величина квадратного корня из расстояния между ними (ср. [1]). Этот вывод может иметь применение к исследованию асимптотического поведения вектора скорости космического тела при его соударении с другим космическим телом.

(Поступило 5. XI. 1975)

Кафедра астрономии

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Магнарадзе, Сообщения АН ГССР, 1972, 68, № 1, 57—60.
2. Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964, 560 стр.
3. К. А. Зигель, Лекции по небесной механике. М., ИЛ, 1959, 300 стр.
4. J. F. Steffensen, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1956, 30, № 18, 3—17.
5. Н. Г. Магнарадзе, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1959, № 24, 145—159.
6. Н. Г. Магнарадзе, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1961, № 26, 215—224.
7. Н. Г. Магнарадзе, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1964, № 30, 145—152.
8. E. Rabe, Astr. J., 1961, 66. № 9, 500—516.
9. В. А. Брумберг, Труды Ин-та теорет. астр., 1963, № 4, 234—256.
10. P. Sconzo, Astr. Nachr., 1967, 290, № 4, 163—170.
11. В. Ф. Мячин, О. А. Сизова, Труды Ин-та теорет. астр., 1970, XII, № 5, 389—400.
12. R. Broucke, Celestial Mech., 1971, 4, № 1, 110—115.

ნ. მაღნარაძე

ცვლადი მასიანი სხეულის მოძრაობის სიჩქარის გამოკვლევა მრავალი სხეულის გრავიტაციულ ველში დაჯახების მახლობლად, გარემოს წინაღობის გათვალისწინებით

რეზიუმე

გამოყვანილია ცვლადი მასიანი სხეულის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მრავალი სხეულის გრავიტაციულ ველში, გარემოს წინაღობის გათვალისწინებით.

გამოკვლეულია ამ სხეულის მოძრაობა პირველი დაჯახების მომენტის მახლობლობაში.

აგებულია განსახილველ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი დროის განზოგადებული ხარისხოვანი მწკრივების სახით, რომლებიც კრებადია პირველი დაჯახების მომენტის საკმარისად მცირე მახლობლობაში.

უცნობ სიდიდეთა განზოგადებული ხარისხოვანი მწკრივების კოეფიციენტებისათვის გამოყვანილია რეკურენტული დამოკიდებულებანი, რომლებიც საკმარისად მოხერხებულია მათი ანგარიშისათვის თანამედროვე გამომთვლელ მანქანებზე.

მოცემულია ხსენებულ მწკრივთა ნაშთების შეფასება.

მიღებულია სიჩქარის ვექტორის ასიმპტოტური შეფასება პირველი დაჯახების მომენტის მახლობლობაში.

N. MAGNARADZE

STUDY OF THE VELOCITY OF MOTION OF A BODY HAVING VARIABLE MASS IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF MANY BODIES NEAR THE COLLISION WITH ACCOUNT OF THE RESISTANCE OF THE MEDIUM

Summary

The system of differential equations of motion of a body having variable mass in the gravitational field of many bodies is deduced, with account of the resistance of the medium.

The motion of this body near the moment of the first collision is studied.

The solution of the system of considered differential equations is constructed in the form of generalized power series in time, which are convergent for a sufficiently small interval of time near the moment of the first collision.

For the definition of coefficients of expansion of unknown quantities into generalized power series recurrent relations are constructed, which are convenient enough for their computation on modern computers.

The remainders of the above-mentioned power series are estimated.

The asymptotic estimate for the velocity vector near the moment of the first collision is established.

შინაარსი

ვლ. ჭელიძე, ინტეგრალების შეჯამებადობა ლოგარითმული მეთოდით . . . 18
დ. ცეიტლინი, ოპერატორთა გაღება ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეებზე და მესერებზე და მისი გამოყენება ჯგუფთა თეორიაში 28
ნგუენ ზუი ტიენი, ალბათურ ზომათა კრებადობის შესახებ $l_p (1 \leqslant p < +\infty)$ სივრცეებში 41
ჩ. კანდელაკი, ი. ქარციეაძე, თ. ჩანტლაძე, ორთოგონალური გამრავლების შესახებ ჰილბერტის სივრცეში 57
პ. კოლონია, $\lambda(\alpha)$ ფუნქციის მუდმივობის წერტილთა სიმრავლის შესახებ 61
გ. ლომაძე, რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ $8t+1$ კვადრატის ჯამად 66
ვ. ბადაგაძე, პუასონის განტოლებისათვის მაღალი რიგის აპროქსიმაციის სხვაობიანი სქემების თანაბარი კრებადობის შესახებ 73
ნ. მაღნარაძე, ცვლადი მასიანი სხეულის მოძრაობის სიჩქარის გამოკვლევა მრავალი სხეულის გრავიტაციულ ველში დაჯახების მახლობლად გარემოს წინაღობის გათვალისწინებით 82

СОДЕРЖАНИЕ

В. Г. Челидзе, Суммирование интегралов логарифмическим методом . . 7

Д. И. Цейтлин, Открывание операторов на частично упорядоченных множествах и решетках и его применение в теории групп 19

Нгуен Зуй Тиен, О сходимости вероятностных мер в пространствах l_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ 29

Н. П. Канделаки, И. Н. Карцивадзе, Т. Л. Чантладзе, Об ортогональном умножении в гильбертовом пространстве 43

П. Г. Когония, О множестве точек постоянства функции $\lambda(\alpha)$ . . . 59

Г. А. Ломадзе, О представлении чисел суммой $8t+1$ квадратов . . 63

В. В. Бадагадзе, О равномерной сходимости разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения Пуассона 67

Н. Г. Магнарадзе, Исследование скорости движения тела переменной массы в гравитационном поле многих тел вблизи соударения с учетом сопротивления среды 75

CONTENTS

V. Chelidze, Summation of integrals by the logarithmic method 18
D. Zeitlin, The opening of operators on partially ordered sets and lattices and its applications to the theory of groups 28
Nguen Zui Tien, On the convergence of probability measures in $l_p(1 \leqslant p < +\infty)$ spaces 41
N. Kandelaki, I. Kartsivadze, T. Chantladze, On the orthogonal multiplication in Hilbert space 57
P. Kogonia, On the set of constant points of the $\lambda(\alpha)$ function 61
G. Lomadze, On the representation of numbers as a sum of $8t+1$ squares . 66
V. Badagadze, On uniform convergence of difference schemes of high-accuracy approximation for Poisson's equation 73
N. Magnaradze, Study of the velocity of motion of a body having variable mass in the gravitation field of many bodies near the collision with account of the resistance of the medium 83

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. აბუაშვილი
ტექრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორები: ც. კვანტალიანი
ვ. დოლიძე

გადაეცა წარმოებას 23/II-76
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 3/IX-76
ქაღალდის ფორმატი 70×108/16
ნაბეჭდი თაბახი 7,7
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 4,93

შეკვეთა 288 უე 06638 ტირაჟი 300

ფასი 60 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.

ფასი 60 კაპ.