გელა ყიფიანი, ნოდარ მარდალეიშვილი,
კონსტანტინე დოლიძე, ლევან ჯიქიძე,
გეგი აფციაური

თეორიული მექანიკა

ნივთიერ წერტილთა სისტემის დინამიკა

ქრესტომათი

ტომი 4

გელა ყიფიანი, ნოდარ მარდალეიშვილი,
კონსტანტინე დოლიძე, ლევან ჯიქიძე,
გეგი აფციაური

თეორიული მექანიკა

ნივთიერ წერტილთა სისტემის დინამიკა

ტომი 4

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი 2023

უაკ 531 (076.5)(075.8)

სახელმძღვანელო შეიცავს ნივთიერი წერტილის დინამიკის ტიპიურ ამოცანებს ამოხსნებით, რომლებიც აღებულია ი. ვ. მეშჩერსკის საკმაოდ გავრცელებული ამოცანათა კრებულიდან. ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილია ძირითადი დებულებები და მეთოდური მითითებები, რომლებიც გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას. ამოხსნები მოცემულია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებებით.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში დინამიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, წრფივი დიფერენციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

სახელმძღვანელო გათვალისწინებულია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისა და უნივერსიტეტების საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტების სტუდენტებისა და მასწავლებლებისათვის, აგრეთვე, თეორიული მექანიკის დამოუკიდებლად შემსწავლელთათვის.

წიგნი იბეჭდება (ააიპ) "განათლებისა და მეცნიერების პროგრესი"-ს ხელშეწყობით.

*პროფესორ **გელა ყიფიანის** საერთო რედაქციით.*

რეცენზენტები: პროფესორი **გიორგი ჯაიანი**
პროფესორი **ტარიელ კვიციანი**
პროფესორი **ომარ კიკვიძე**
პროფესორი **თამაზ ობგაძე**

გამომცემლობა „უნივერსალი", 2023

თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4, ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

ISBN 978-9941-33-543-3,
ISBN 978-9941-3 3-547-1

წინასიტყვაობა

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერების დარგი, რომელიც სწავლობს ნივთიერი სხეულების მექანიკურ მოძრაობას და ადგენს ამ მოძრაობის ზოგად კანონებს.

თეორიული მექანიკა თავისი საფუძვლებიდანვე მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტექნიკასთან. იგი იქმნებოდა და ვითარდებოდა ტექნიკის განვითარებასთან ერთად. ტექნიკის განვითარება სულ ახალ-ახალ ამოცანებს აყენებდა მექანიკის წინაშე, რაც ხელს უწყობდა თვით მექანიკის განვითარებას. თავის მხრივ, მექანიკაც დიდ ზეგავლენას ახდენდა და ხელს უწყობდა ტექნიკურ პროგრესს.

თეორიული მექანიკა არის ერთ-ერთი ის ფუნდამენტური საგანი, რომელზეც დაფუძნებულია თანამედროვე ტექნიკის ყველა დარგი.

თეორიულ მექანიკას ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია და წარმოადგენს თეორიულ ბაზას ისეთი ტექნიკური საგნებისათვის, როფორიცაა მასალათა გამძლეობა, მექანიზმებისა და მანქანების თეორია, დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორია, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდროაერომექანიკა და მრავალი სხვ.

როგორც ყოველ მეცნერებას, თეორიულ მექანიკასაც კვლევის საფუძვლად უდევს დაკვირვება, ცდა, პრაქტიკა. თეორიულ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური მეთოდები, აბსტრაქტული (განყენებული) ცნებები, მოვლენათა მოდელები, ლოგიკის კანონები.

თეორიულ მექანიკაში შემოღებული თითქმის ყველა საწყისი ცნება არსებითად წარმოადგენს გარკვეულ აბსტრაქციას ან მოდელს. მათი შემოღებისას გათვალისწინებულია ის ძირითადი, განმსაზღვრელი, რაც არსებითია განსახილველ მექანიკურ მოძრაობაში. ასე, მაგალითად, რეალური ნივთიერი სხეულის მაგივრად მექანიკაში განიხილავენ მის ისეთ აბსტრაქტულ მოდელს, როგორიცაა ნივთიერი წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული და სხვ. მხოლოდ ასეთ მოდელებზე აგებული მექანიკისათვის შეიძლება შემუშავდეს ის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან შევისწავლოთ რეალური ობიექტების მოძრაობა. შემდეგ მიღებული თეორიული შედეგები მოწმდება ცდით, პრაქტიკით.

თეორიული მექანიკის საკითხები ცნობილია უძველესი დროიდან.

ჯერ კიდევ არისტოტელე (IV ს. ჩვ. ერ-დე) იცნობდა თეორიული მექანიკის ზოგიერთ კანონს. მასვე ეკუთვნის საგნის სახელწოდების - „მექანიკის" – შემოღებაც. მექანიკის კანონების დასადგენად მათემატიკური კანონების გამოყენებას ყველაზე ადრე ბერძენმა *არქიმედემ* (287-212 ჩვ. ერ-დე) მიმართა. მექანიკის სწრაფი განვითარება იწყება აღორძინების ხანაში. იგი დაკავშირებულია იტალიელ *ლეონარდო და ვინჩის* (1452-1519), პოლონელი *ნიკოლოზ კოპერნიკის* (1473-1543), გერმანელი *იოჰან კეპლერის* (1571-1630) და სხვათა სახელებთან. ამ მეცნიერების მიერ მიღებულმა შედეგებმა მოამზადეს საფუძველი მექანიკის, როგორც მეცნიერების, შემდგომი წინსვლისათვის. დინამიკის, როგორც მეცნიერების, შექმნაში დიდი წვლილი მიუძღვის იტალიელ მეცნიერს *გალილეო გალილეის* (1564-1642). კლასიკური მექანიკის საფუძვლები ჩამოაყალიბა და სისტემატურად დაამუშავა ინგლისელმა მეცნიერმა *ისააკ ნიუტონმა* (1643-1727), რომელმაც თავის წიგნში „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები" მოგვცა კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები.

XVIII ს-ის თეორიული მექანიკის განვითარება ხასიათდება ორი ძირითადი თვისებით: *პირველია* მისი მათემატიზაცია: მექანიკის ყველა კანონი და ძირითადი დებულება გამოჰყავდათ მათემატიკური ანალიზის მეთოდით. *ჟოზეფ-ლუი ლაგრანჟი* (1736-1813) იმასაც კი ამტკიცებდა, რომ მისი მექანიკა წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ახალ თავს. *მეორეც*, ძირითადი დებულებები ფიზიკურად არ ზუსტდებოდა: რა არის ძალა – განუსაზღვრელი რჩებოდა, გარს უვლიდნენ ამ ცნებას; ბმები ჩათვლილი იყო იდეალურად; საყრდენი ზედაპირები – ხახუნის გარეშე; ღერო და თოკი – უწონადი.

მექანიკის საკითხების შესწავლა ანალიზური მეთოდების გამოყენებით დაიწყო შვეიცარიელმა *ლეონარდ ეილერმა* (1707-1783). მექანიკის შემდგომ განვითარებაში დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ფრანგი მეცნიერების *ჟან ლეონ დალამბერის* (1717-1783) ნაშრომს „ტრაქტატი დინამიკაში" და *ლუი ლაგრანჟის* ნაშრომს „ანალიზური მექნიკა".

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ლაგრანჟის ნაშრომი გადმოცემის ორიგინალობითა და მეთოდების ერთიანობით. ამ ნაშრომის შესავალში *ლაგრანჟი წერს: „უკვე არსებობს მრავალი*

ტრაქტატი მექანიკაში, მაგრამ ჩემი ტრაქტატი სრულიად ახალია. მე მიზნად დავისახე მექანიკის თეორია და მასთან დკავშირებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები მივიყვანო საერთო ფორმულებზე, რომლის მარტივი გაფართოება იძლევა ყველა იმ ფორმულას, რომელიც საჭიროა თითოეული ამოცანის ამოსახსნელად". ლაგრანჟმა შექმნა ანალიზური მექანიკის მწყობრი სისტემა.

უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თეორიული მექანიკა ტექნიკური საგნების უშუალო დასაყრდენია. ამავე დროს ცნობილია, რომ თავისი სპეციფიკურობის და სირთულეების გამო ზოგადად თეორიული მექანიკის, განსაკუთრებით კი მისი პრაქტიკული ნაწილის შესწავლა საკმაოდ რთულია; რამდენადაც ამ საგნის თეორემების დაზეპირება შესაძლებელია, იმდენად ძნელია მათი გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად.

ამას ემატება უმაღლეს სასწავლებლებში სასწავლო კურსისათვის გამოყოფილი საათების რაოდენობის სიმცირე. ამ სიძნელეთა გადალახვა შესალებელია, თუ შეიქმნება მექანიკაში ამოხსნილი ამოცანებით ისეთი ტიპის სახელმძღვანელო, რომელიც შუალედური და დამაკავშირებელი იქნება საგნის თეორიულ კურსსა და ამოცანათა კრებულს შორის და რომელიც დაეხმარება დაინტერესებულ პირებს თეორიული მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების გამომუშავებაში.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში დინამიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენ- ციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

თეორიული მექანიკის შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს სტუდენტების მიერ თეორიის საკითხებთან ერთად პრაქტიკული ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნის დაუფლებას. სწორედ ამ ამოცანას ემსახურება ამ კრებულში შეტანილი მეთოდური მითითებები.

წინამდებარე კრებულში წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც საკმაოდ ასახავენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში

თანამედროვე სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინებუილ თემატიკას. ყოველ თემაზე კრებულში მოყვანილია ამოცანის დაწვრილებითი ამოხსნა საჭირო მეთოდური მითითებებით.

ყოველი თემის დასაწყისში მოკლედ ჩამოყალიბებულია თეორიის ძირითადი საკითხები და მოცემულია შესაბამისი ფორმულები. მოცანის გარჩევამდე და ამოხსნის დაწყებამდე საჭიროა სტუდენტმა აუცილებლად შეისწავლოს თეორიული კურსის შესაბამისი საკითხები, ვინაიდან ამ კრებულში მოყვანილი მოკლე თეორიული ცნობები ვერ შეცვლიან თეორიულ სახელმძღვანელოს. სასურველია ამოცანების ამოხსნა წარმოებდეს რეკომენდებული მიმდევრობით და გათვალიწინებული იქნეს შესაბამისი მეთოდური მითითებები.

უკანასკნელ ათწლეულებში მნიშვნელოვნად გაიზარდა ამოხსნილი ამოცანების კრებულების გამოცემათა რაოდენობა ფიზიკაში, მათემატიკაში და მექანიკაში უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. ეს განპირობებულია ბაზის შექმნის აუცილებლობაზე დამოუკიდებელი მუშაობისას გრაფიკული გაანგარიშებისა და საკონტროლო სამუშაოებისათვის დროის შემცირების გამო. მექანიკის მრავალი დარგის ამოცანა, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს დიდი დროის დახარჯვას, არ შეიძლება დეტალური განხილვის გარეშე საჭირო ხარისხით დამუშავდეს პრაქტიკულ მეცადინეობაზე, რის შედეგადაც შეუძლებელი ხდება თეორიული მექანიკისა და მთლიანად მისი ცალკეული განყოფილებების რთული მასალის ათვისება

დინამიკა წარმოადგენს თეორიული მექანიკის ყველაზე უფრო რთულ ნაწილს. ნივთიერი წერტილის დინამიკას აქვს პირველსაწყისი მნიშვნელობა ნიუტონის ვექტორული დინამიკის გასაგებად, ვინაიდან მასში თვალსაჩინოდ განიხილება მექანიკის ძირითადი თეორემების გამოყენება. მყარი სხეულის მექანიკა, მისი მოდელები, პრინციპები, კანონები წარმოადგენენ ყველა მიმართულების ინჟინრების მომზადების ფუნდამენტს, განსაკუთრებით მანქანათმშენებლობის, ხელსაწყოთმშე-ნებლობის, სამშენებლო და ენერგეტიკის სპეციალისტებისათვის. მოცემული განყოფილების ამოცანები უმეტესწილად შეესაბამებიან იმ ამოცანებს, რომლების ამოხსნაც უხდებათ ინჟინრებს მათი პრაქტიკული მოღვაწეობისას. სასწავლო მასალის ათვისების ხარისხი უშუალოდ დამოკიდებულია ამოხსნილი ამოცანების რაოდენობაზე და მრავალსახეობაზე.

ი.ვ. მეშჩერსკის ამოცანათა კრებული წარმოადგენს საკმაოდ ცნობილ დამხმარე სასწავლო სახელმძღვნელოს თეორიულ მექანიკაში, რომელმაც გაუძლო ათეულობით გამოცემას მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში, რომლებიც დღესაც ფართოდ გამოიყენება ტექნიკური განხრის უმაღლეს სასწავლო დაწესებულებებში. ამ კრებულის პირველი დამხმარე სახელმძღვანელო ამოხსნილი ამოცანებით გამოცემული იქნა 1963 წელს გერმანიაში (H. Neuber, Losungen zur Aufgabensammlung Mestscherski, 1963, DVW, 465 S.). თუმცა შემდგომ კრებული მრავალჯერ ხელახლა გამოიცა, ამასთანავე ის სწორდებოდა და ივსებოდა.

შემოთავაზებულ დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემულია ყველა ამოცანის ამოხსნა ი. ვ. მეშჩერსკის კრებულის „დინამიკის" განყოფილებიდან (Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике/ И. В. Мещерский, 36-е изд., испр. М.: Наука, 1986). აგრეთვე ქართულ ენაზე თარგმნილი: ი.ვ. მეშჩერსკი, „თეორიული მექანიკის ამოცანათა კრებული", თბილისი, 1963.

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელოს პირველი ნაწილი შეიცავს „ნივთიერი წერტილის დინამიკის" IX თავის ამოცანებს (§ 26-33). ამოცანების ამოხსნა მოყვანილია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით, რაც განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია ძირითადი თეორიული დებულებები და მეთოდური მითითებები დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით. როგორც წესი, ამოხსნას თან სდევს ნახაზი, რომელზეც მითითებულია მოქმედი ძალა, სიჩქარე, აჩქარება.

აღსანიშნავია, ავტორთა ჯგუფის სხვადასხვა უნივერსიტეტებში „თეორიული მექანიკის" კურსის სწავლების დიდი გამოცდილება. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, ნ. მუსხელიშვილის სახელობის ქუთაისის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ი. გოგებაშვილი სახელობის თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტში, დავით აღმაშენებლის სახელობის საქართველოს ეროვნული თავდაცვის აკადემიაში, საქართველოს აგრარულ უნივესრიტეტში, ბათუმის სახელმწიფო საზღვაო აკადემიაში, მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ლენინ-

გრადის სამშენებლო საინჟინრო ინსტიტუტში, ნ. ბაუმანის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო ტექნიკურ უნივერსიტეტში, სანკტ-პეტერბურგის სახელმწიფო არქიტექტურულ-სამშენებლო უნივერსიტეტში, ვლადიმირის სახლმწიფო უნივერსიტეტში.

ავტორები მადლიერების გრძნობით არიან გამსჭვალულნი რეცენზენტების: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკის კათედრის გამგეს, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის დირექტორს, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ **გიორგი ჯაინს**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტის უფროსს, პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს პროფესორ **ტარიელ კვიციანს**, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მექანიკის დეპარტამენტის უფროსს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფრსორ **ომარ კიკვიძეს,** საქართველოს ეროვნული უნივერსიტეტის პროფესორს ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, **თამაზ ობგაძეს**. რომელთა საქმიანმა შენიშვნებმა და მითითებებმა სრულყო წიგნი.

ავტორები აგრეთვე მადლიერნი არიან ქალბატონ **თინათინ მაღრაძის,** გამომცემლობა „უნივერსალი“-ს დირექტორის ბატონ **გოჩა ხარებავას** ხელმძღვანელობით, რომელთა თავდაუზოგავი შრომის შედეგად სრულყოფილ იქნა სახელმძღვანელო. შემოთავაზებული დამხმარე სახელმძღვანელო დაგეხმარებათ პრაქტიკული მეცადინეობის ჩატარების მეთოდიკის სრულყოფაში. პროფესორს შეუძლია შესთავაზოს სტუდენტებს გარკვეულ თემაზე პრაქტიკული მეცადინეობისათვის მზადებისას დამოუკიდებლად გაეცნოს ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას, ხოლო შემდეგ მეცადინეობის პროცესში ამოხსნას ანალოგიური ამოცანები.

წინამდებარე სახელმძღვანელო კრებული ავტორთა პირველი მოკრძალებული ცდაა. ამიტომ, მკითხველის ყოველი საფუძვლიანი შენიშვნა და წინადადება მადლიერებით იქნება გათვალისწინებული ავტორებისაგან.

რედაქტორი პროფესორი გელა ყიფიანი
E-Mail: gelakip@gmail.com; g.kipiani@gtu.ge
☎ 599106263, 591801188

X. მექანიკური სისტემის დინამიკა

§34. მასათა გეომეტრია. მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრი. სხეულების ინერციის მომენტები.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

მექანიკური სისტემა ან **მატერიალურ წერტილთა სისტემა** ეწოდება მათ ისეთ ერთობლიობას, რომლის დროსაც თითოეულის მდებარეობა და მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი წერტილების მდებარეობასა და მოძრაობაზე. ამიტომ მატერიალური სხეული, მათ შორის აბსოლუტურად მყარი სხეულიც, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მატერიალური ნაწილაკების სისტემა, რომლებისაგანაც შედგება ეს სხეული. თავის მხრივ, ერთმანეთთან დაკავშირებული აბსოლუტურად მყარი სხეულების ერთობლიობაც არის მექანიკური სისტემა.

მექანიკური სისტემის მოძრაობის გამოკვლევისას უნდა გავითვალისწინოთ სისტემის ყველა წერტილის მასების განაწილების ხასიათი.

მასების განაწილების დასახასიათებლად გამოიყენება ისეთი ცნებები, როგორებიცაა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრი, პოლარული, ღერძული, სიბრტყითი და ცენტრიდანული მომენტები.

თუ მექანიკური სისტემის მოძრაობა შეისწავლება დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მაშინ ამ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრი წარმოადგენს გეომეტრიულ წერტილს კოორდინატებით:

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \\ y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \\ z_c = \frac{\sum m_k}{\sum m_k} \end{cases} \tag{34.1}$$

სადაც m_k- k-ური წერტილის (ან სხეულის) მასაა, ხოლო x_k, y_k, z_k-ური წერტილის ან მექანიკურ სისტემაში შემავალი k-ური სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

მექანიკური სისტემის ყველა წერტილის ან სხეულის მასების ჯამი არის მექანიკური სისტემის მასა M, ე.ი.

$$M=\sum m_k.$$

თუ მექანიკური სისტემა წარმოადგენს უწყვეტ სხეულს, მაშინ

$$M = \rho V, \tag{34.2}$$

სადაც ρ-სხეულის მოცულობითი სიმკვრივეა, V-მისი მოცულობა.

თუ მასა განაწილებულია ზედაპირზე (ფართობზე), მაშინ შემოაქვთ ზედაპირული სიმკვრივის ცნება:

$$\rho = \frac{M}{S}, \tag{34.3}$$

სადაც S -ზედაპირის ფართობია.

გრძელი თხელი სხეულებისათვის (ღეროებისათვის) შემოაქვთ წრფივი სიმკვრივის ცნება:

$$\rho = \frac{M}{\ell}, \tag{34.4}$$

სადაც ℓ - M მასის ღეროს სიგრძეა.

ეს სიდიდეები გამოიყენებიან ინერციის მომენტების გამოთვლისას.

მყარი სხეულის ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ეწოდება სხეულის წერტილების მასებისა და ამ ღერძამდე შესაბამისი მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამს. მაგალითად, z ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი ასე აღინიშნება:

$$I_z = \sum m_k h_k^2. \tag{34.5}$$

(34.5) ფორმულაში h_k შეიძლება გამოისახოს k-ური წერტილის კოორდინატებით, მაშინ სხეულის ინერციის მომენტები დეკარტეს საკოორდინატო ღერძების მიმართ მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} I_x = \sum m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right), \\ I_y = \sum m_k\left(x_k^2 + z_k^2\right), \\ I_z = \sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right). \end{cases} \tag{34.6}$$

(34.5) და (34.6) ფორმულები სამართლიანია როგორც მყარი სხეულებისათვის, ასევე ნებისმიერი ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის.

უწყვეტი სხეულის შემთხვევაში მას ყოფენ ელემენტარულ ნაწილებად, ხოლო (34.6) ფორმულებში ჯამების გამოთვლა ზღვარში დაიყვანება განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლაზე. ამასთან, იმის მიხედვით, თუ გეომეტრიის თვალსაზრისით რას წარმოადგენენ სხეულის ელემენტარული ნაწილები შეიძლება იყოს შემდეგი სახის ჯერადი-სამჯერადი, ორჯერადი ან ჩვეულებრივი ერთჯერადი ინტეგრალები:

$$I_z = \int\limits_{(V),(S),(\ell)} h^2\, dm, \tag{34.7}$$

რომლებიც გამოითვლება მთელს V მოცულობაზე, მთელს S ფართეულზე ან სხეულის მთელ ℓ სიგრძეზე.. მაშინ სხეულის ელემენტარული ნაწილის მასა შესაბამისად გამოითვლება ტოლობებით:

$$dm = \rho dV,$$
$$dm = \rho dS,$$
$$dm = \rho d\ell.$$

მყარი სხეულის ინერციის მომენტი z ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$I_z = Mi_z^2, \tag{34.8}$$

სადაც i_Z ან ρ_Z სხეულის ინერციის რადიუსია ღერძის მიმართ.

სხეულის ინერციის რადიუსი ღერძის მიმართ წარმოადგენს მანძილს ამ ღერძიდან სხეულის იმ წერტილამდე, რომელშიც უნდა მოვათავსოთ სხეულის მასა იმისათვის, რომ ამ ერთი წერტილის ინერციის მომენტი ტოლი იყოს მთელი სხეულის ინერციის მომენტისა.

დასკვნის სახით აღვნიშნოთ, რომ ღერძული ინერციის მომენტი წარმოადგენს მყარი სხეულის ინერტულობის საზომს მისი ბრუნვითი მოძრაობისას.

სიბრტყითი ინერციის მომენტები- ეს არის სკალარული სიდიდეები, რომლებიც ტოლია სხეულის ყველა წერტილის მასისა და ამ წერტილებიდან შესაბამის სიბრტყეებამდე მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამის.

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში სიბრტყითი ინერციის მომენტები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\begin{cases} I_{0xy} = \sum m_k z_k^2, \\ I_{0yz} = \sum m_k x_k^2, \\ I_{0zx} = \sum m_k y_k^2. \end{cases} \tag{34.9}$$

ინერციის პოლარული მომენტი- სხეულის ინერციის მომენტია კოორდინატთა სათავის მიმართ

$$I_o = \sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right), \tag{34.10}$$

(34.6) და (34.10) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$2I_o = I_x + I_y + I_z. \tag{34.11}$$

თუ მყარი სხეული სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ და

$$I_x = I_y = I_z = I_{oc,}$$

რასაც ადგილი აქვს სფერული სხეულებისათვის, მაშინ

$$2I_O = 3I_{oc,}$$

საიდანაც

$$I_{oc} = \frac{2}{3}\ I_O, \tag{34.12}$$

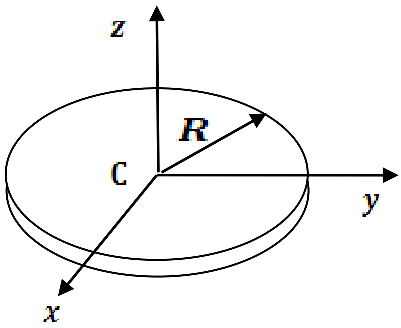
სადაც I_{OC}-ინერციის ღერძული მომენტია.

მოვიყვანოთ ფორმულები ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულებისათვის:

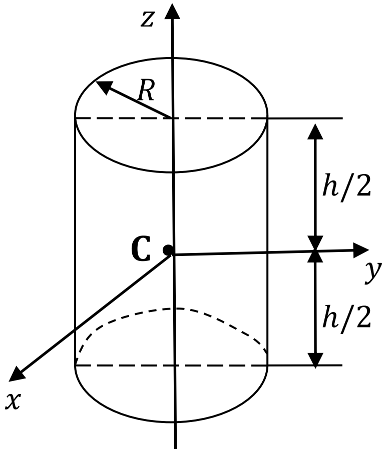
M მასის და R რადიუსის თხელი დისკო (ნახ.34.1)

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{MR^2}{2}$$



ნახ. 34.1



ნახ.34.2

M მასის წრიული ცილინდრი, რომლის ფუძის რადიუსია R და სიმაღლე (ნახ.34.2)

$$I_{C_z} = \frac{MR^2}{2},$$

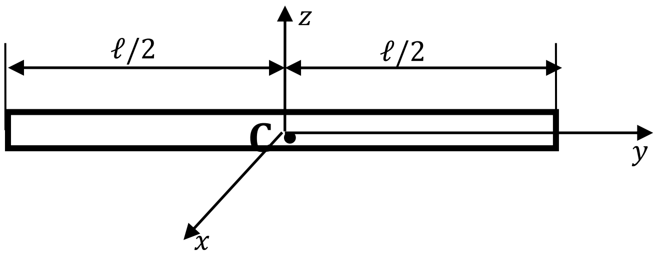
$$I_{C_x} = I_{C_y} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}.$$

M მასის და ℓ სიგრძის თხელი ღერო (ნახ. 34.3). ღეროს ინერციის მომენტი მის ერთ-ერთ ბოლო წერტილის (ან A, ან B) მიმართ:

$I_A = I_B = \frac{M\ell^2}{3}$, ხოლო მასათა ცენტრზე გამავალი საკოორდინატო ღერძების მიმართ:

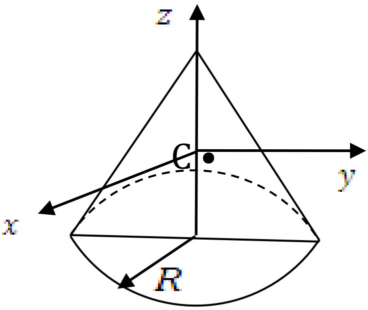
$$I_z = I_x = \frac{M\ell^2}{12},$$

$$I_y = 0.$$

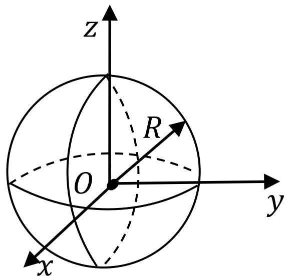


ნახ. 34.3

M მასის წრიული კონუსი, რომლის ფუძის რადიუსია R (ნახ.34.4)



ნახ.34.4



ნახ.34.5

$$I_{Cz} = \frac{3}{10} MR^2$$

სფერო(ნახ.34.5)

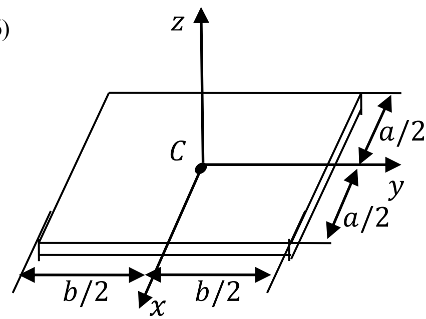
$$I_{OC} = I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} MR^2,$$

$$I_O = \frac{3}{2} I_{oC} = \frac{3}{5} MR^2.$$

მართკუთხა თხელი ფირფიტა(ნახ.34.6)

$$I_{Cx} = \frac{Mb^2}{12},$$

$$I_{Cy} = \frac{Ma^2}{12},$$



ნახ.34.6

$$I_{Cz} = I_{Cx} + I_{Cy} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

სხეულის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ, ისევე როგორც მასათა ცენტრი, სრულად ვერ ახასიათებენ მასების განაწილებას. კერძოდ, მასების განაწილების ეს მახასიათებლები ვერ ითვალისწინებენ ასიმეტრიას მის განაწილებაში. ამიტომ დამატებით მახასიათებლებად, რომლებიც

ითვალისწინებენ მასების განაწილებაში ასიმეტრიას, შემოაქვთ ინერციის ცენტრიდანული მომენტების ცნებები.

ინერციის ცენტრიდანული მომენტები განისაზღვრებიან საკოორდინატო ღერძების წყვილების მიმართ ფორმულებით:

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \\ I_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \\ I_{zx} = \sum m_k x_k z_k \end{cases} \qquad (34.13)$$

ან (34.7) ფორმულების ანალოგიურად უწყვეტი სხეულებისათვის

$$I_{xy} = \int\limits_{(V),(S),(\ell)} xydm, \;\; I_{yz} = \int\limits_{(V),(S),(\ell)} yzdm, \;\; I_{zx} = \int\limits_{(V),(S),(\ell)} zxdm, \qquad (34.14)$$

ინერციის ცენტრიდანული მომენტები ღერძული მომენტებისაგან განსხვავებით, შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი ან ნული. ეს დამოკიდებულია საკოორდინატო სისტემის სათავის და ღერძების მიმართულების არჩევაზე.

ღერძს, რომლის მიმართაც ინერციის ცენტრიდანული მომენტები, რომელთა ინდექსები შეიცავენ ამ ღერძების აღნიშვნებს, უდრის ნულს, **ინერციის მთავარი ღერძი** ეწოდება.

სხეულის მასათა ცენტრზე გამავალ ინერეციის მთავარ ღერძს, **ინერციის მთავარი ცენტრალური ღერძი** ეწოდება.

თუ ცნობილია სხეულის ღერძული და ცენტრიდანული ინერციის მომენტები, შეიძლება განვსაზღვროთ სხეულის ინერციის მომენეტები კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი ღერძის მიმართ, რომელიც x, y, z ღერძებთან შესაბამისად ადგენს α, β, γ კუთხეებს:

$$\begin{aligned} I_1 = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma - 2I_{xy} cos\alpha cos\beta - \\ -2I_{yz} cos\beta cos\gamma - 2I_{zx} cos\gamma cos\alpha. \end{aligned} \qquad (34.15)$$

თუ საკორრდინატო ღერძები წარმოადგენენ ინერციის მთავარ ღერძებს, მაშინ

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0,$$

ამიტომ

$$I_1 = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma. \qquad (34.16)$$

ვთქვათ, მყარი სხეულის რომელიღაც O წერტილში არჩეულია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის სათავე. თუ ამ წერტილში ცნობილია ინერეციის მთავარი მომენტები $Ox'y'z'$ ინერციის მთავარი ღერძების მიმართ და $Oxyz$ ღერძების ორიენტაცია მთავარი ღერძების მიმართ, მაშინ

ცენტრიდანული ინერციის მომენტების გამოსათვლელად შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

1. Ox ღერძი ემთხვევა ინერციის მთავარ Ox' ღერძს(ნახ.34.7-ა), მაშინ

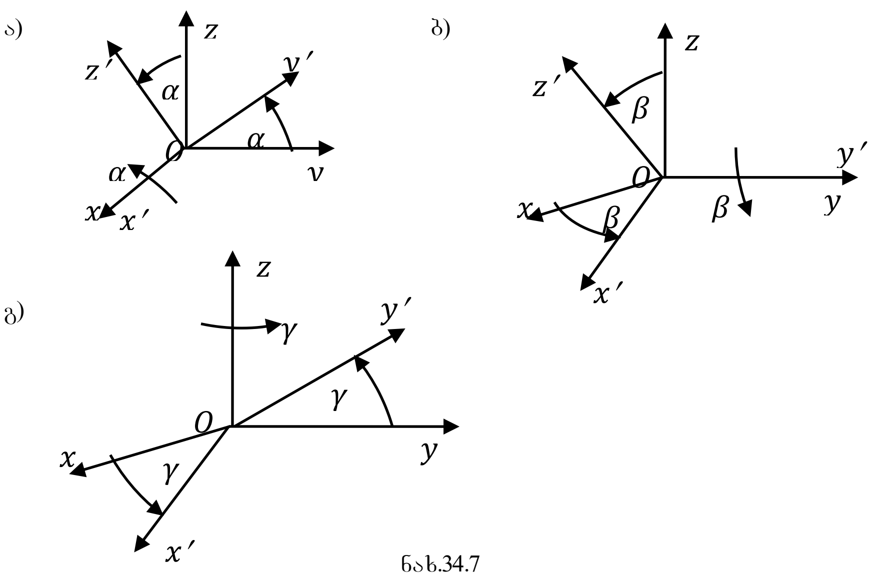
$$I_{xy} = I_{x'y} = 0,$$
$$I_{zx} = I_{zx'} = 0,$$

ხოლო ინერციის ცენტრიდანული მომენტები Oyz ღერძების Ox ღერძის ირგვლივ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\alpha < 90^0$ კუთხით მობრუნებისას $Oy'z'$ ღერძებთან შეთავსებამდე Oy ღერძიდან Oz ღერძამდე

$$I_{yz} = \frac{I_{z'} - I_{y'}}{2} sin2\alpha, \tag{34.17}$$

საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით

$$I_{yz} = \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} sin2\alpha. \tag{34.18}$$



ნახ.34.7

2. Oy ღერძი ემთხვევა ინერციის მთავარ Oy' ღერძს (ნახ.34.7-ბ) და Oy ღერძის ირგვლივ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\beta < 90^0$ კუთხით მობრუნებისას $Ox'z'$ ღერძებთან შეთავსებამდე Oz ღერძიდან Ox ღერძამდე

$$I_{xy} = I_{xy'} = 0,$$
$$I_{yz} = I_{y'z} = 0, \tag{34.19}$$

$$I_{zx} = \frac{I_{x'} - I_{z'}}{2} sin2\beta.$$

3. Oz ღერძი ემთხვევა ინერციის მთავარ Oz' ღერძს (ნახ.34.7-გ) და ამ Oz ღერძის ირგვლივ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\gamma < 90^0$ კუთხით მობრუნებისას $Ox'z'$ ღერძებთან შეთავსებამდე Ox ღერძიდან Oy ღერძამდე

$$I_{xz} = I_{xz'} = 0,$$
$$I_{yz} = I_{yz'} = 0,$$
$$I_{xy} = \frac{I_{y'} - I_{x'}}{2} sin2\gamma. \quad (34.20)$$

სხეულის მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის პარალელური ღერძების მიმართ ინერციის მომენტების გამოთვლისას გამოიყენება **ჰიუგენს-შტეინერის თეორემა:**

მყარი სხეულის ინერციის მომენტი რომელიმე ღერძის მიმართ ტოლია სხეულის მასათა ცენტრზე გამავალი ამ ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისა და სხეულის მასისა და ღერძებს შორის მანძილის კვადრატის ნამრავლთა ჯამის.

ვთქვათ, Oz ღერძი პარალელურია Cz' ღერძის, რომელიც გადის სხეულის მასათა ცენტრზე, მაშინ

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2, \quad (34.21)$$

სადაც d –ღერძებს შორის მანძილია.

ცენტრიდანული ინერციის მომენტებისათვის დამოკიდებულება პარალელური ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებს შორის განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\begin{cases} I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_C y_C, \\ I_{yz} = I_{y'z'} + My_C z_C, \\ I_{zx} = I_{z'x'} + Mx_C z_C, \end{cases} \quad (34.22)$$

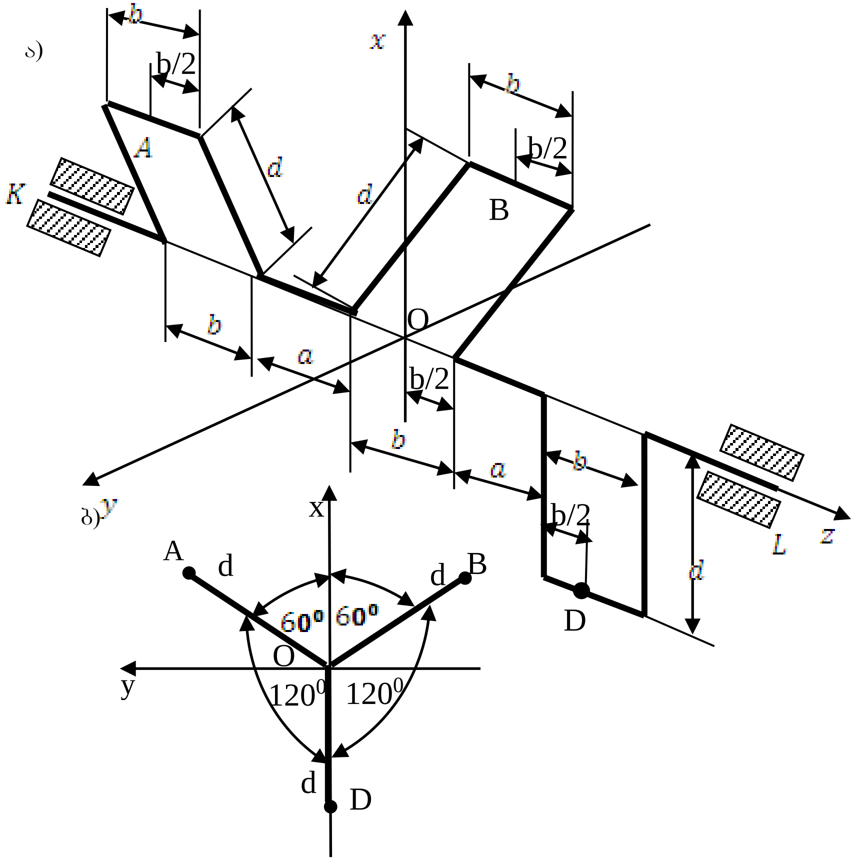
სადაც x', y', z' –სხეულის მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძებია;
x, y, z – ამ ღერძების პარალელური ღერძებია; x_C, y_C, z_C – სხეულის მასათა ცენტრის კოორდინატებია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნისას ზემოთ მოყვანილი ყველა ფორმულა გამოყენებული იქნება მითითებული სახით, თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში არ გამოირიცხება სხვა მიდგომაც.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 34. 1

ნახაზზე ნაჩვენები სამცილინდრიანი ძრავას მუხლა ლილვი შედგება ერთმანეთთან 120^0 კუთხით დახრილი სამი მუხლისაგან. განსაზღვრეთ მუხლა ლილვის მასათა ცენტრის მდებარეობა, თუ მივიღებთ, რომ მუხლების მასები თავმოყრილია A, B და D წერტილებში, მასთან $m_A = m_B = m_D = m.$ ლილვის დანარჩენი ნაწილების მასა უგულებელყოფილია. ზომები ნაჩვენებია ნახაზზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ სისტემის მასათა ცენტრი (34.1) ფორმულით. ვიპოვოთ სისტემაში შემავალი სხეულების სიმძიმის ცენტრების კოორდინატები (იხ. ამოცანის პირობის ნახაზი ა) და ბ)):

$x_A = dcos60^0 = \frac{1}{2}d, \quad x_B = dcos60^0 = \frac{1}{2}d, \quad x_D = -d \quad y_A = dcos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}d,$

$y_B = -dcos30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}d, \; y_D = 0, \quad z_A = -\left(\frac{b}{2} + a + \frac{b}{2}\right) = -(b+a), \quad z_B = 0,$

$z_D = \left(\frac{b}{2} + a + \frac{b}{2}\right) = b + a.$

მაშინ

$$x_C = \frac{m(x_A + x_B + x_D)}{3m} = \frac{m\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2} - d\right)}{3m} = 0,$$

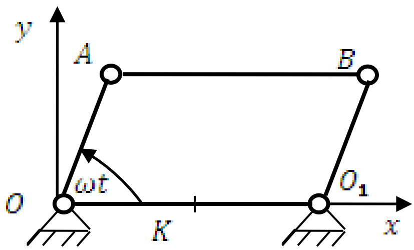
$$y_C = \frac{m(y_A + y_B + y_D)}{3m} = \frac{m\left(\frac{\sqrt{3}d}{2} - \frac{\sqrt{3}d}{2} + 0\right)}{3m} = 0,$$

$$z_C = \frac{m(z_A + z_B + z_D)}{3m} = \frac{m(-b - a + 0 + b + a)}{3m} = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: მასათა ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

ამოცანა 34 2

იპოვეთ $OABO_1$ სამსახსროვანი პარალელოგრამის მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლება და აგრეთვე, მისი მასათა ცენტრის ტრაექტორია, როცა OA მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. პარალელოგრამის წევრები ერთგვაროვანი ღეროებია, მასთან $OA = O_1B = \frac{AB}{2} = a.$



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ მექანიზმის მასათა ცენტრის კოორდინატები:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \qquad (1)$$

$OA, \; AB, O_1B$ ღეროების მასათა ცენტრები ემთხვევა მათ შუაწერტილებს, ე.ი. შესაბამისად C_1, C_2, C_3 წერტილებს (იხ. ნახაზი). ვიპოვოთ ამ წერტილების კოორდინატები:

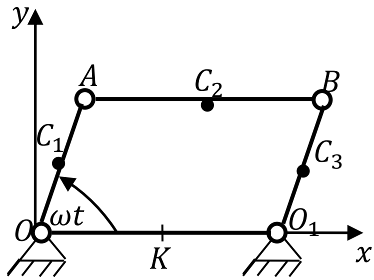
$x_{C_1} = \frac{a}{2} cos\omega t,\ y_{C_1} = \frac{a}{2} sin\omega t\ ,$

$$x_{C_2} = a + acos\omega t,$$

$$y_{C_2} = asin\omega t\ ,$$

$$x_{C_3} = 2a + \frac{a}{2} cos\omega t,$$

$$y_{C_3} = \frac{a}{2} sin\omega t\ .$$



ეს ფორმულები შევიტანოთ (1) ტოლობაში. გავითვალისწინოთ, რომ

$m_1 = m_3 = m_{OA} = m_{O_1B} = \rho \cdot a,$

$$m_2 = m_{AB} = 2\rho \cdot a$$

(ρ ρ -ღეროების მასალის სიმკვრივეა), მივიღებთ:

$$x_C = \frac{\rho \cdot a\left(x_{C_1} + 2x_{C_2} + x_{C_3}\right)}{\rho \cdot a + \rho \cdot a + 2\rho \cdot a} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2} cos\omega t + 2(a + acos\omega t) + 2a + \frac{a}{2} cos\omega t}{1 + 1 + 2} =$$

$$y_C = \frac{\rho \cdot a\left(y_{C_1} + 2y_{C_2} + x_y\right)}{\rho \cdot a + \rho \cdot a + 2\rho \cdot a} = \frac{\frac{a}{2} sin\omega t + 2asin\omega t + \frac{a}{2} sin\omega t}{4}$$

$$= \frac{3}{4} a \cdot sin\omega t.$$

x_C და y_C გამოსახულებებიდან დროის გამორიცხვით ვიპოვით სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლებას. რადგან

$$x_C - a = \frac{3}{4} a \cdot cos\omega t,$$

$$y_C = \frac{3}{4} a \cdot sin\omega t,$$

მაშინ ამ ტოლობების ორივე მხარის კვადრატში აყვანით და მიღებული ტოლობების შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \frac{9}{16} a^2 cos^2\omega t + \frac{9}{16} a^2 sin^2\omega t = \frac{9}{16} a^2 = \left(\frac{3}{4} a\right)^2.$$

ამგვარად,

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \frac{9}{16} a^2$$

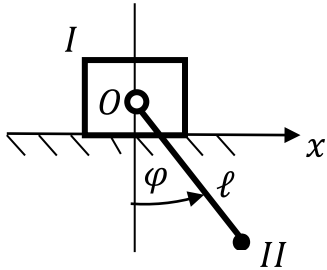
ეს არის წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია $K(a, 0)$ წერტილი, რადიუსი კი $- \frac{3}{4} a$.

პ ა ს უ ხ ი: $x_C = a + \frac{3}{4}a \cdot cos\omega t, \quad y_C = \frac{3}{4}a \cdot sin\omega t$;

ტრაექტორიის განტოლება $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \frac{9}{16}a^2$

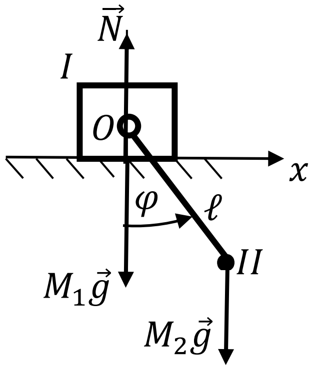
წრეწირი ცენტრით $K(a, 0)$ წერტილში, რადიუსი კი $-\frac{3}{4}a$.

ამოცანა 34. 3



M_1 მასის I ცოციაზე წვრილი უწონი ძაფის საშუალებით მიმაგრებულია M_2 მასის II ტვირთი. ტვირთის $\varphi = \varphi_0 sin\omega t$ კანონით რხევისას ცოცია სრიალებს უძრავ ჰორიზონტალურ გლუვ სიბრტყეზე. იპოვეთ ცოციას მოძრაობის განტოლება $x_1 = f(t)$, თუ საწყის მომენტში $(t$=0$)$ ცოცია x ღერძის ათვლის O წერტილში იმყოფებოდა. ძაფის სიგრძე ℓ-ის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ სისტემის



მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0,$$

რადგან გარე ძალები x ღერძის მართობულია. მაშასადამე, $\ddot{x}_C = 0$, საიდანაც $\dot{x}_C = const.$

ამოცანის პირობის თანახმად $t = 0$, $\dot{x}_{C_0} = 0$, ე.ი. $x_C = const.$ მაშასადამე, $x_{C_0} = x_{C_1}$, სადაც x_{C_0} და x_{C_1} სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატებია შესაბამისად როცა $t = 0$, და როცა $t > 0$.

ვიპოვოთ x_{C_0} და x_{C_1}:

$x_{C_0} = 0$, (ძაფი ტვირთით ვერტიკალურ მდებარეობაშია),

$$x_{C_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2(x_1 + \ell sin\varphi)}{M_1 + M_2},$$

სადაც $x_1 -$ ცოციას გადაადგილებაა, ხოლო $x_2 = x_1 + \ell sin\varphi -$ ტვირთის ცოციასთან ერთად ჰორიზონტალური გადაადგილება. მაშინ

$$x_{C_0} = x_{C_1} = 0 = \frac{M_1 x_1 + M_2(x_1 + \ell sin\varphi)}{M_1 + M_2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M_1 x_1 + M_2 x_1 + M_2 \ell sin\varphi = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1 = -\frac{M_2 \ell sin\varphi}{M_1 + M_2}.$$

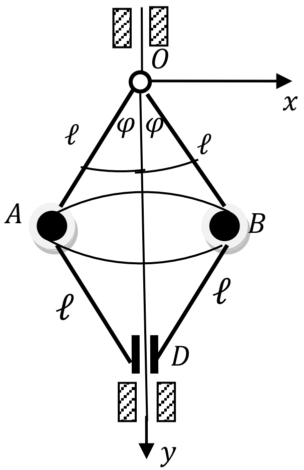
ჩავსვათ φ-ს მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$x_1 = -\frac{M_2 \ell sin(\varphi_0 sin\omega t)}{M_1 + M_2}.$$

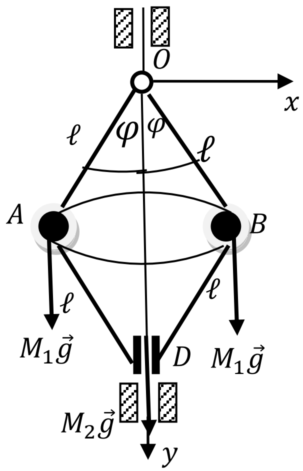
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $x_1 = -\frac{M_2 \ell sin(\varphi_0 sin\omega t)}{M_1 + M_2}.$

ამოცანა 34. 4.

იპოვეთ ნახ.1 -ზე გამოსახული ცენტრიდანული რეგულატორის მასათა ცენტრის მდებარეობა, თუ თითოეული ბურთულას მასა უდრის, ქუროს წონა უდრის, ბურთულები ჩათვალეთ წერტილოვან მასებად, ღეროების წონა უგულებელყოფილია.



ნახ.1



ნახ.2

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$

ნახ. 2-დან ჩანს, რომ

$$x_B = \ell sin\varphi; \quad x_D = 0; \quad y_B = y_A = \ell cos\varphi;$$
$$y_D = 2\ell cos; \quad x_A = -\ell sin\varphi.$$

მაშინ

$$x_C = \frac{M_1 x_A + M_1 x_B + M_2 x_D}{M_1 + M_1 + M_2} = \frac{M_1(-\ell sin\varphi) + M_1 \ell sin\varphi + 0}{2M_1 + M_2} = 0;$$

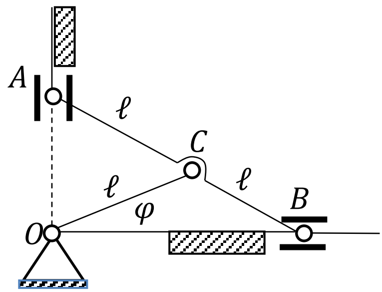
$$y_C = \frac{M_1 y_A + M_1 y_B + M_2 y_D}{M_1 + M_1 + M_2} =$$

$$= \frac{M_1 \ell cos\varphi + M_1 \ell cos\varphi + M_2 \cdot 2\ell cos\varphi}{2M_1 + M_2} =$$

$$= \frac{2(M_1 + M_2)}{2M_1 + M_2} \ell cos\varphi.$$

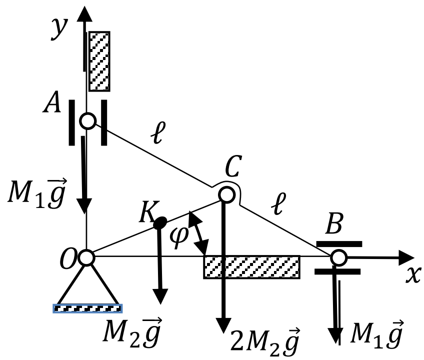
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x_C = 0; \quad y_C = \frac{2(M_1+M_2)}{2M_1+M_2} \ell cos\varphi.$

ამოცანა 34.5.



განსაზღვრეთ ელიფსოგრაფის მექანიზმის მასათა ცენტრის ტრაექტორია; ელიფსოგრაფი შედგება M_1 მასის A და B ქუროების, M_2 მასის OC მრუდმხარასა და $2M_2$ მასის AB სახაზავისაგან; მოცემულია: $OC = AC = CB = \ell.$ ვგულისხმობთ, რომ სახაზავი და მრუდმხარა ერთგვაროვანი ღეროებია, ხოლო ქუროები განიხილება, როგორც მატერიალური წერტილები.

ა მ ო ხ ს ნ ა ჩავწეროთ მექანიზმის მასათა ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები:



$$x_{c_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad y_{c_1} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$x_A = 0, \quad y_A = 2\ell sin\varphi;$$

$$x_B = 2\ell cos\varphi, \; y_B = 0;$$

$$x_C = \ell cos\varphi, \; y_C = \ell sin\varphi;$$

$$x_K = \frac{\ell}{2} cos\varphi, \qquad y_C = \frac{\ell}{2} sin\varphi$$

($K - OC$ ღეროს სიმძიმის ძალის მოდების წერტილია).

$$x_{C_1} = \frac{M_1 \cdot 0 + 2M_1 \ell cos\varphi + 2M_2 \ell cos\varphi + M_2 \frac{\ell}{2} cos\varphi}{2M_1 + 3M_2}$$
$$= \frac{\ell(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)} cos\varphi,$$

$$y_{C_1} = \frac{2M_1 \ell sin\varphi + M_1 \cdot 0 + 2M_2 \ell sin\varphi + M_2 \frac{\ell}{2} sin\varphi}{2M_1 + 3M_2}$$
$$= \frac{\ell(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)} sin\varphi.$$

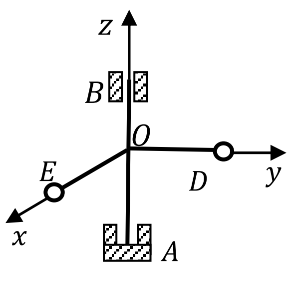
მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ φ, მივიღებთ:

$$x_{C_1}^2 + y_{C_1}^2 = \left[\frac{\ell(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}\right]^2 (cos^2\varphi + sin^2\varphi) =$$
$$= \left[\frac{\ell(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}\right]^2$$

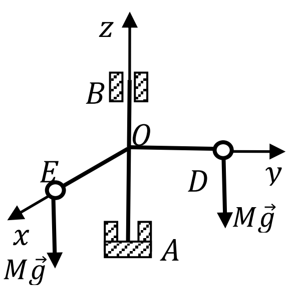
პ ა ს უ ხ ი: წრეწირი ცენტრით O წერტილში და $\frac{\ell(4M_1+5M_2)}{2(2M_1+3M_2)}$ რადიუსით.

ამოცანა 34. 6.

ვერტიკალურ AB ლილვზე მიმაგრებულია ორი ერთნაირი E და D ტვირთი. AB ლილვის მართობულად და ამავე დროს ურთიერთმართობული $OE = OD = r$ ღერძების საშუალებით. ღერძების და ლილვის მასები უგულებელვყოთ. ტვირთები ჩავთვალოთ წერტილოვან მასებად. ვიპოვოთ სისტემის C მასათა ცენტრის მდებარეობა, აგრეთვე ინერციის ცენტრიდანული მომენტები I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} .



ნახ.1



ნახ.2

ა მ ო ხ ს ნ ა. მასათა ცენტრის კოორდინატები განვსაზღვროთ (34.1) ფორმულებით.

ჩავწეროთ E და D წერტილების კოორდინატები (იხ. ნახაზი)

$$x_E = r, \quad y_E = 0, \quad z_E = 0;$$
$$x_D = 0, \quad y_D = r, \quad z_D = 0.$$

მაშინ

$$x_C = \frac{Mx_E + Mx_D}{2M} = \frac{M \cdot r + M \cdot 0}{2M} = \frac{r}{2},$$

$$y_C = \frac{My_E + My_D}{2M} = \frac{M \cdot 0 + M \cdot r}{2M} = \frac{r}{2},$$
$$x_C = \frac{Mx_E + Mx_D}{2M} = 0.$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტები განვსაზღვროთ ფორმულებით

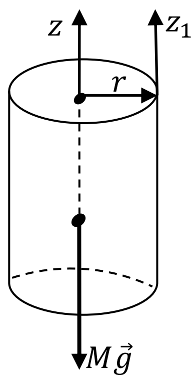
$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \quad I_{zx} = \sum m_k x_k z_k.$$

მივიღებთ

$$I_{xy} = Mx_E y_E + Mx_D y_D = 0,$$
$$I_{yz} = Mz_E y_E + Mz_D y_D = 0,$$
$$I_{zx} = Mx_E z_E + Mx_D z_D = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $C\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, 0\right)$; $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

ამოცანა 34. 7.



გამოთვალეთ 100კგ მასის და 5სმ რადიუსის მქონე ფოლადის ლილვის ინერციის მომენტი მისი მსახველის მიმართ. ლილვი ჩათვალეთ მთლიან ერთგვაროვან ცილინდრად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. z_1 ღ ერძის მიმართ ლილვის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ჰიუგენს- შტეინერის თეორემით, რომლის მიხედვითაც

$$I_{z_1} = I_z + Md^2,$$

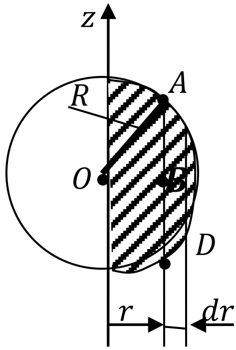
სადაც d – z და z_1 ღერძებს შორის მანძილია.

რადგან $d = r$, ამიტომ

$$I_{z_1} = I_z + Mr^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2 = \frac{3 \cdot 100 \cdot 25}{2} = 3750 \text{კგ} \cdot \text{სმ}^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: 3750კგ·სმ[2].

ამოცანა 34. 8.



გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის თხელი ერთგვაროვანი ნახევარდისკოს ინერციის მომენტი მისი შემომსაზღვრელი დიამეტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, ნახევარდისკოს მასაა, მაშინ მისი ზედაპირული სიმკვრივე

$$\rho = \frac{M}{1/2\pi R^2} = \frac{M}{\pi R^2}.$$

განვიხილოთ z ღერძიდან r მანძილზე მდებარე dr სიგანის ზოლი. ნახაზიდან გამომდინარეობს, რომ

$$AD = 2AB = 2\sqrt{R^2 - r^2},$$

სადაც $R -$ ნახევარდისკოს რადიუსი.

მაშინ სხეულის ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად

$$I_z = \sum \Delta m_k d_k^2,$$

სადაც $d_k = r$.

განვიხილოთ დისკო, როგორც AD სიგრძის და dr სიგანის ნივთიერი ზოლების სისტემა, რომლებიც მდებარეობენ z ღერძიდან r მანძილზე და გააჩნიათ მასა $\Delta m_k = \rho \cdot AD \cdot dr$. ამიტომ

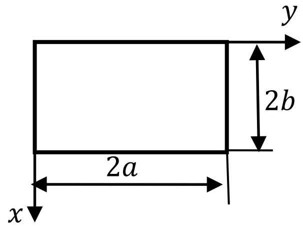
$$I_z = \int_0^R \rho \cdot AD \cdot dr \cdot r^2 = \int_0^R \rho 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 dr = 2\rho \int_0^R r^2\sqrt{R^2 - r^2} dr =$$

$$= 2\rho \left\{ -\frac{r}{4}\sqrt{(R^2 - r^2)^3} + \frac{R^2}{8}\left(r\sqrt{R^2 - r^2} + R^2 arcsin\frac{r}{R} \right) \right\} \Bigg|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= 2\rho \left\{ \frac{R^4}{8} arcsin 1 \right\} = \frac{2\rho R^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2MR^4\pi}{8\pi R^2} = \frac{MR^2}{4}.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ $\frac{MR^2}{4}$.

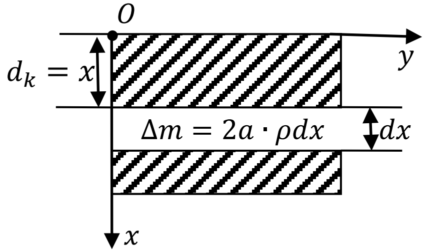
ამოცანა 34. 9.



გამოვთვალოთ ნახაზზე გამოსახული M მასის ერთგვაროვანი მართკუთხა ფირფიტის ღერძული I_x და I_y მომენტები x და y ღერძების მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის ინერციის მომენტი y ღერძის მიმართ

$$I_y = \sum \Delta m_k d_k^2.$$



განვიხილოთ ფირფიტა როგორც dx სიგანის და $2a$ სიგრძის ღეროების სისტემა. (იხ. ნახაზი). ფირფიტის ზედაპირული სიმკვრივე

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{2a \cdot 2b} = \frac{M}{4ab}.$$

მაშინ ღეროს ზოლის მასა

$$\Delta m_k = 2a\rho dx.$$

როცა $d_k = x$ მივიღებთ:

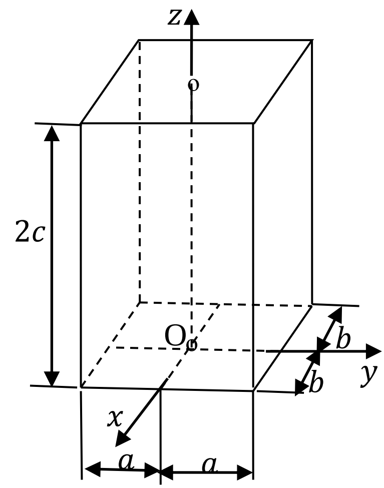
$$I_y = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k d_k^2 = \int_0^{2b} 2a\rho x^2 dx = 2a\rho \frac{x^3}{3}\Big|_0^{2b} = \frac{2a\rho \cdot 8b^3}{3} = \frac{4}{3}Mb^2.$$

I_x ინერციის მომენტს გამოვთვლით ანალოგიურად, თუ შევცვლით $x \to y$, $a \to b \to a$:

$$I_x = \frac{4}{3}Ma^2.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ $I_x = \frac{4}{3}Ma^2$; $I_y = \frac{4}{3}Mb^2$.

ამოცანა 34. 10.



გამოთვალეთ ნახაზზე გამოსახული M მასის ერთგვაროვანი მართკუთხა პარალელეპიპედის ინერციის მომენტები x, y და z ღერძების მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთგვაროვანი მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობითი სიმკვრივე განვსაზღვროთ (34.2) ფორმულით:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2a \cdot 2b \cdot 2c} = \frac{M}{8abc}.$$

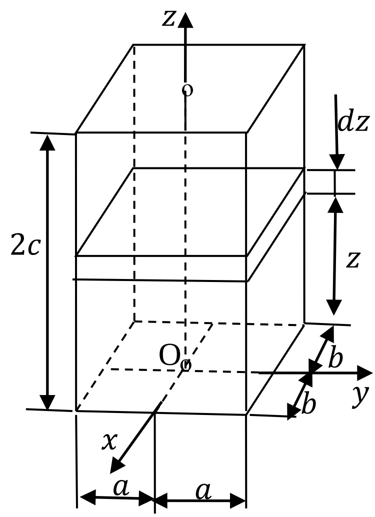
თუ მართკუთხა პარალლელეპიპედს განვიხილავთ როგორც

$$\Delta m_k = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

მასის ნივთიერ წერტილთა სისტემას, რომლებიც z ღერძიდან მდებარეობენ $d_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ მანძილზე (იხ. ნახაზი), ვიპოვით ამ ღერძის მიმართ პარალელეპიპედის ინერციის მომენტს:

$$I_z = \sum \Delta m_k \, d_k^2.$$

$I_z -$ ის გამოთვლა დაიყვანება სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლაზე:



$$\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \int_{0}^{2c} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz =$$

$$= \rho \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} (x^2 + y^2) z |_0^{2c} dx dy =$$

$$= 2c\rho \int_{-b}^{b} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=-a}^{y=a} dx = 2c\rho \int_{-b}^{b} \left(a x^2 + \frac{2a^3}{3} \right) dx =$$

$$= 2c\rho\left(\frac{2ax^3}{3} + \frac{2a^3}{3}x\right)\Bigg|_{x=-b}^{x=b} = 2c\rho\left(\frac{2b^3}{3}\cdot 2a + \frac{2a^3}{3}2b\right) =$$

$$= \frac{M}{3}(a^2 + b^2).$$

ანალოგიურად გამოვთვლით $I_x -$ ს:

$$I_x = \sum \Delta m_k\, d_k^2,$$

სადაც

$$d_k = \sqrt{z_k^2 + y_{k.}^2}$$

ამიტომ

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{0}^{2c} \rho(y^2 + z^2)dxdydz.$$

თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ გამოთვლებს, მივიღებთ:

$$I_x = \frac{M}{3}(a^2 + 4c^2).$$

თუ $I_x -$ ის გამოსახულებაში მოვახდენთ შეცვლას, ვიპოვით $I_y -$ ს:

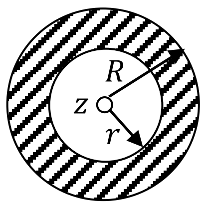
$$I_y = \frac{M}{3}(b^2 + 4c^2).$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$I_x = \frac{M}{3}(a^2 + 4c^2),\ I_y = \frac{M}{3}(b^2 + 4c^2), I_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2).$$

ამოცანა 34. 11.

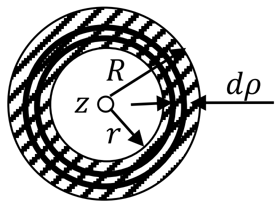
R რადიუსის თხელ ერთგვაროვან წრიულ დისკოში ამოჭრილია r რადიუსის კონცენტრული ხვრელი. გამოვთვალოთ ამ M მასის დისკოს ინერციის მომენტი მის მასათა ცენტრზე გამავალი დისკოს სიბრტყის პერპენდიკულარული z ღერძის მიმართ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. z ღერძის მიმართ დისკოს ინერციის მომენტი

$$I_z = \int_r^R \rho^2 dm,$$

სადაც - $dm - d\rho$ სისქის თხელი რგოლის მასაა (იხ. ნახაზი), სიგრძით $2\pi\rho$ და ზედაპირული სიმკვრივით $\frac{M}{\pi(R^2-r^2)}$. ამიტომ



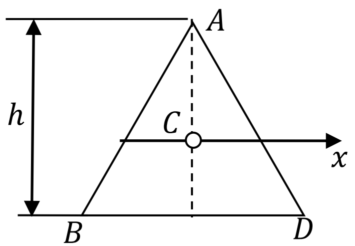
$$I_z = \int_r^R \rho^2 dm = \int_r^R \rho^2 \frac{M}{\pi(R^2-r^2)} \cdot 2\pi\rho d\rho =$$

$$= \int_r^R \frac{2M}{R^2-r^2} \cdot \rho^3 d\rho = \frac{2M}{R^2-r^2}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_r^R = \frac{2M}{R^2-r^2}\frac{R^4-r^4}{4} = \frac{M}{2}(R^2+r^2).$$

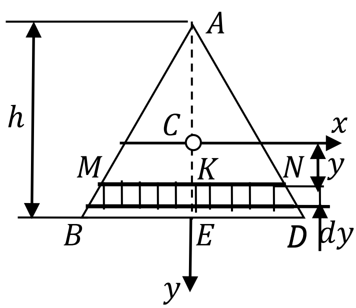
პ ა ს უ ხ ი: $I_z = \frac{M}{2}(R^2+r^2)$.

ამოცანა 34. 12.

გამოვთვალოთ M მასის და h სიმაღლის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედის ფორმის თხელი ერთგვაროვანი ფირფიტის ინერციის მომენტი მისი ფუძის პარალელურად მასათა C ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ტოლფერდა სამკუთხედის მასათა ცენტრი მდებარეობს მის სიმაღლეზე C წერტილში BD ფუძიდან $1/3h$ მანძილზე (იხ.ნახაზი).



ΔABD და ΔAMN სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{AK}{AE} = \frac{MN}{BD},$$

რადგან

$$AK = AC + CK = \frac{2}{3}h + y,$$

ამიტომ

$$MN = \frac{AK \cdot BD}{AE} = \frac{\frac{2}{3}h + y}{h} \cdot BD.$$

განვიხილოთ ფირფიტა როგორც $dm = MN \cdot dy \cdot \rho$ მასის ნივთიერ წერტილთა სისტემა, სადაც $\rho -$ ფირფიტის ზედაპირული სიმკვრივეა:

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}h \cdot BD}.$$

მაშინ ფირფიტის ინერციის მომენტი

$$I_x = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} y^2 dm = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} y^2 \frac{M \cdot MN \cdot dy}{\frac{1}{2}h \cdot BD} = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} \frac{y^2 M\left(\frac{2}{3}h + y\right)dy}{\frac{1}{2}h^2} =$$

$$= \frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{9}y^3 h + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} = \frac{Mh^2}{18}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{1}{18}Mh^2$.

ამოცანა 34. 13.

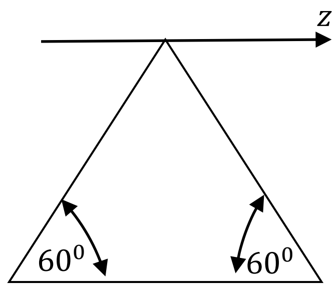
ერთგვაროვან მეტალის ფირფიტას აქვს ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმა. ფირფიტის მასაა M, $\ell -$ მისი გვერდის სიგრძეა. გამოვთვალოთ ფირფიტის ინერციის მომენტი მის წვეროზე ფუძის პარალელურად გამავალი ღერძის მიმართ

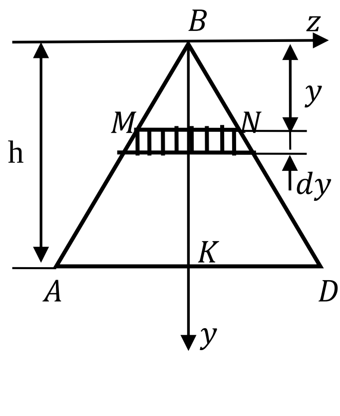
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ფირფიტა როგორც $dm = MN \cdot dy \cdot \rho$ მასის ნივთიერ წერტილთა სისტემა, სადაც $\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}\ell h} -$ ფირფიტის ზედაპირული სიმკვრივეა,

$$h = \ell cos30^0 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2};$$

$$MN = 2ytg30^0 = \frac{2y}{\sqrt{3}},$$

ამიტომ





$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}\ell^2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4M}{\sqrt{3}\ell^2}.$$

მაშინ

$$dm = \rho\cdot\frac{2y}{\sqrt{3}}\cdot \mathrm{dy} = \frac{4M}{\sqrt{3}\ell^2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{3}}\cdot \mathrm{dy} = \frac{8\mathrm{Mydy}}{3\ell^2}.$$

განმარტების თანახმად

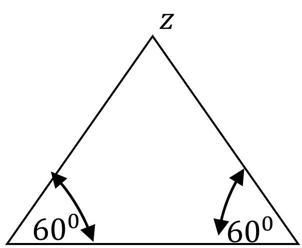
$$I_z = \int_0^h y^2 dm = \int_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} y^2\frac{8M\cdot ydy}{3\ell^2} = \frac{8M}{3\ell^2}\int_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} y^3 dy =$$

$$= \frac{8M}{3\ell^2}\left(\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{8M}{3\ell^2}\cdot\frac{9\ell^4}{64} = \frac{3M\ell^2}{8}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{3}{8}M\ell^2$.

ამოცანა 34. 14.

ერთგვაროვან ტოლგვერდა სამკუთხა ფირფიტას მასაა M და ℓ მისი გვერდის სიგრძეა. გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი მის წვეროზე გამავალი ფირფიტის მართობი ღერძის მიმართ



ა მ ო ხ ს ნ ა. ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)dm,$$

სადაც $S-$ ფირფიტის ფართობია (ტოლგვერდა ΔABD).

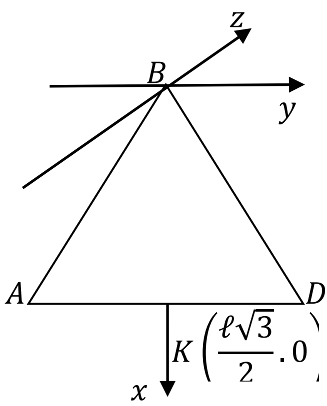
(34.3) ფორმულის მიხედვით განვსაზღვროთ ზედაპირული სიმკვრივე:

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4M}{\sqrt{3}\ell^2}.$$

მაშინ

$$dm = \rho\cdot dx\cdot dy.$$

BD გვერდის განტოლება:



$$y = kx,$$

სადაც $k = tg30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ამიტომ

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

AB გვერდის განტოლება:

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

მაშინ

$$I_z = \int_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \rho dx \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} (x^2 + y^2)dx = \int_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \rho dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \rho \int_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{3 \cdot 3\sqrt{3}}\right) dx =$$

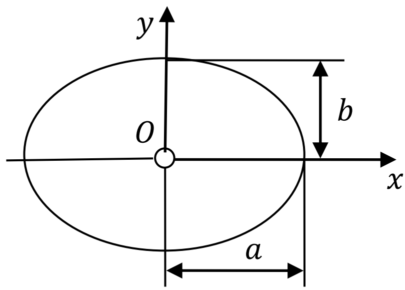
$$= \rho \int_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \frac{20}{9\sqrt{3}} x^3 dx = \frac{20\rho}{9\sqrt{3}} \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\rho}{9\sqrt{3}} \frac{9\ell^4}{4 \cdot 16} = \frac{5M\ell^2}{12}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\frac{5}{12} M\ell^2$.

ამოცანა 34. 15.

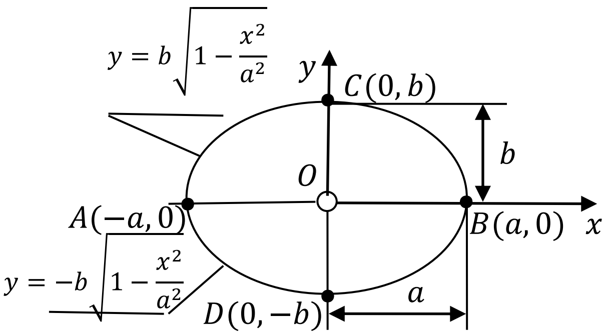
გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ კონტურით შემოსაზღვრული M მასის თხელი ერთგვაროვანი ელიფსური ფირფიტის ინერციის მომენტები სამი ურთიერთმართობული x, y და z ღერძების მიმართ.

.



ა მ ო ხ ს ნ ა.

(34.3) ფორმულის მიხედვით განვსაზღვროთ ზედაპირული სიმკვრივე:



$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi ab}.$$

გამოვთვალოთ ფირფიტის ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ:

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)dm = \iint_S (x^2+y^2)\rho dS =$$

$$= \rho \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{y} (x^2+y^2)dy = \left| y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right| =$$

$$= \rho \int_{-a}^{a} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$= 2\rho \int_{-a}^{a} \left[x^2 b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] dx =$$

$$= 2\rho b \int_{-a}^{a} \left[x^2 + \frac{b^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \right] \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx =$$

$$= 4\rho b \int_0^a \left[x^2 + \frac{b^2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right]\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად მოვახდინოთ ჩასმა:

$$x = a \cdot sint, \qquad dx = a \cdot costdt.$$

მაშინ

$$I_z = 4\rho b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2 sin^2 t + \frac{b^2}{3}(1 - sin^2 t)\right]\sqrt{1 - sin^2 t} \cdot a \cdot costdt =$$

$$= 4\rho ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2 sin^2 t + \frac{b^2}{3} cos^2 t\right] cos^2 tdt =$$

$$= 4ab\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a^2}{4} sin^2 2t + \frac{b^2}{3} cos^4 t\right] dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} sin^2 2t = \dfrac{1 - cos4t}{2}; \\ cos^4 t = \dfrac{1 + 2cos2t + cos^2 2t}{4} = \dfrac{1}{4}\left(1 + 2cos2t + \dfrac{1 + cos4t}{2}\right) \\ cos^2 t = \dfrac{1 + cos4t}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 4\rho ab \left\{\frac{a^2}{8}\left(t - \frac{sin4t}{4}\right) + \frac{b^2}{12}\left[t + sin2t + \frac{1}{2}\left(t + \frac{sin4t}{4}\right)\right]\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\rho ab \left\{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{b^2}{12}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left|\rho = \frac{M}{\pi ab}\right| == 4M\left(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{12} \cdot \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{M}{4}(a^2 + b^2).$$

გამოვთვალოთ ფირფიტის ინერციის მომენტი და x ღერძის მიმართ:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) dm_{|z=0} = \iint_S y^2 \rho dxdy = \rho \int_{-a}^{a} dx \int_{-y}^{y} y^2 dy =$$

$$= \left| y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right| = \rho \int_{-a}^{a} \frac{y^3}{3} \Bigg|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx =$$

$$= 2\rho \int_{-a}^{a} \frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 4\rho \int_{0}^{a} \frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად მოვახდინოთ ჩასმა:

$$x = a \cdot sint, \qquad dx = a \cdot costdt.$$

მაშინ

$$I_x = 4\rho a \frac{b^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 t \cdot costdt = 4\rho a \frac{b^3}{3}\left[\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}sin2t + \frac{1}{32}sin4t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\rho a \frac{b^3}{3}\left[\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right] = 4\frac{M}{\pi ab} \cdot \frac{a \cdot b^3}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{Mb^2}{4}.$$

I_x −ის ანალოგიურად გამოვთვლით I_y:

$$I_y = \frac{Ma^2}{4}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $I_x = \frac{Mb^2}{4}, I_y = \frac{Ma^2}{4}, I_z = \frac{M}{4}(a^2 + b^2).$

ამოცანა 34. 16.

განსაზღვრეთ M მასის ერთგვაროვანი ღრუ სფეროს ინერციის მომენტი მის მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ. სფეროს გარე და შიგა რადიუსები შესაბამისად ტოლია R და r.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ღრუ სფეროს მასათა ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სისტემის სათავეში. ღერძის მიმართ ინეციის მომენტის განმარტების თანახმად:

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)dm,$$

სადაც $V-$ სხეულის მოცულობაა.

გამოვსახოთ dm მოცულობითი სიმკვრივით:

$$dm = \rho dV,$$

სადაც

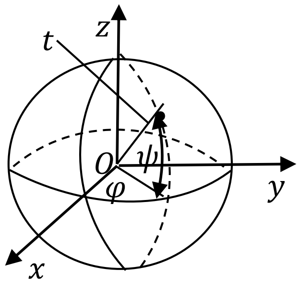
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)}.$$

მაშინ

$$I_z = \iiint\limits_V \rho(x^2 + y^2)dV.$$

გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე (იხ. ნახაზი)

$$x = t\cos\varphi\cos\psi,$$
$$y = t\sin\varphi\cos\psi,$$
$$z = t\sin\psi,$$



სადაც

$$r < t < R; \quad 0 < \varphi < 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

მაშინ

$$dV = t^2\cos\psi\, dt d\varphi d\psi,$$

$$I_z = \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_r^R (t^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + t^2\sin^2\varphi\cos^2\psi)t^2\cos\psi d\,t =$$

$$= \rho\varphi|_0^{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_r^R (t^2\cos^2\psi)(t^2\cos\psi)dt =$$

$$= 2\rho\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi d\psi \int_r^R t^4 dt =$$

$$= 2\rho\pi \left.\frac{t^5}{5}\right|_r^R \cdot \left.\left(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi\right)\right|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \rho\frac{2\pi}{5}(R^5 - r^5)\cdot\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{15}(R^5 - r^5)\cdot\frac{3M}{4\pi(R^3 - r^3)} = \frac{2M(R^5 - r^5)}{5(R^3 - r^3)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $I_z = \frac{2M(R^5 - r^5)}{5(R^3 - r^3)}.$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება ასევე თავიდან განვსაზღვროთ პოლარული ინერციის მომენტი

$$I_0 = \int_r^R t^2 dm,$$

ხოლო შემდეგ ღერძული

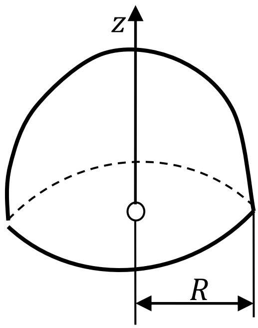
$$I_z = \frac{2}{3} I_0,$$

სადაც

$$dm = 4\pi t^2 \rho dt.$$

ამოცანა 34. 17.

განსაზღვრეთ R რადიუსის ნახევარსფეროს ფორმის თხელი ერთგვაროვანი გარსის ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის ნახევარსფეროს ცენტრში შემომსაზღვრელი სიბრტყის მართობულად. გარსის მასა თანაბრადაა განაწილებული მის ზედაპირზე.



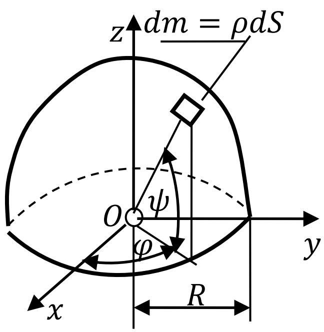
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ნახევარსფერო როგორც $dm = \rho dS$ მასის ნივთიერ წერტილთა სისტემა, რომლებიც მდებარეობენ ზედაპირზე (იხ. ნახაზი)

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

მასის ზედაპირული სიმკვრივეა

$$\rho = \frac{M}{2\pi R^2}.$$

მაშინ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად



$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) dm =$$

$$= \rho \iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

სადაც dS −ნახევარსფეროს ფართობის ელემენტია.
გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე

$$x = R\cos\varphi\cos\psi,$$
$$y = R\sin\varphi\cos\psi,$$
$$z = R\sin\psi$$

სადაც

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

მაშინ

$$dS = R^2\cos\psi d\varphi d\psi.$$

ამიტომ

$$I_z = \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi)R^2\cos\psi d\psi =$$

$$= \rho R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi d\psi = 2\pi\rho R^4 \left(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi\rho R^4}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^4 \frac{M}{2\pi R^2} = \frac{2}{3}MR^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $I_z = \frac{2}{3}MR^2.$

ამოცანა 34. 18.

გამოთვალეთ მთლიანი ერთგვაროვანი ცილინდრის ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ, რომელიც მართობია ცილინდრის ღერძისა და მისი სიმძიმის C ცენტრიდან დაშორებულია 10სმ მანძილით. ცილინდრის რადიუსი უდრის 4სმ, ხოლო სიმაღლე-40სმ (ნახ.1).

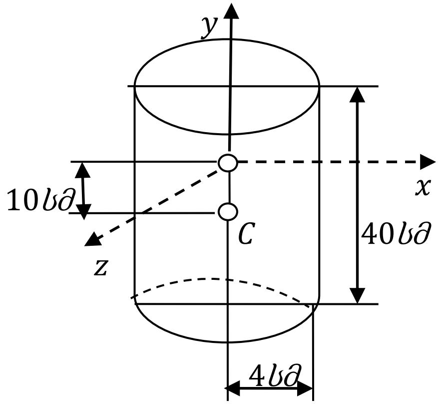
ა მ ო ხ ს ნ ა. (34.8) ფორმულის მიხედვით

$$I_z = M\varrho_z^2,$$

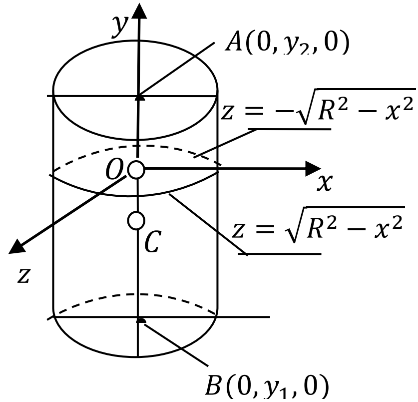
საიდანაც განვსაზღვროთ ინერციის რადიუსი

$$\varrho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$$

სადაც M ცილინდრის მასაა.



ნახ.1



ნახ.2

მოცულობითი სიმკვრივე

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h},$$

სადაც R რადიუსია, h -სიმაღლე, M -ცილინდრის მასა (ნახ.2).

ცილინდრის ინერციის მომენტი z ღერძის მიმართ

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dm = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho dV =$$

$$= \rho \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-z}^{z} (x^2 + y^2)dz = \left| z = \sqrt{R^2 - x^2} \right| =$$

$$= \rho \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{-R}^{R} (x^2 + y^2) 2\sqrt{R^2 - x^2} dx =$$

$$= 4\rho \int\limits_{y_1}^{y_2} \left\{ -\frac{x}{4}\sqrt{(R^2 - x^2)^3} + \frac{R^2}{8}\left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 arcsin\frac{x}{R} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} y^2 \left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 arcsin\frac{x}{R} \right) \right\} \Bigg|_{x=0}^{x=R} dy =$$

$$= 4\rho \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(\frac{R^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{y^2}{2} R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) dy = \rho\pi R^2 \left(\frac{(y_2 - y_1)R^2}{4} + \right.$$

$$+\frac{(y_2^3-y_1^3)}{3}\bigg)=\frac{\rho\pi R^2(y_2-y_1)}{12}[3R^2+4(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)].$$

რამდენადაც $y_2-y_1=h,\ \rho=\frac{M}{\pi R^2h},$ მაშინ

$$I_z=\frac{M[3R^2+4(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)]}{12}.$$

როცა $y_1=-30,\ \ y_2=10, R=4,$ მივიღებთ:

$$I_z=\frac{M}{12}[3\cdot 16+4(100+900-300)]=237{,}33M$$

მაშინ

$$\varrho_z=\sqrt{\frac{I_z}{M}}=\sqrt{237{,}33}=15{,}4\text{სმ}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> **15.4სმ.**

<u>**შენიშვნა:**</u> შეიძლებოდა გამოგვეყენებინა ჰიუგენს-შტეინერის თეორემა და ფორმულა

$$I_{Cz'}=M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right).$$

მაშინ

$$I_{Oz}=I_{Cz'}+Md^2,$$

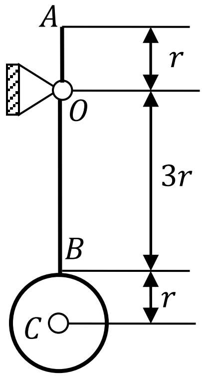
სადაც $d=OC,$ მეორე მხრივ, $I_{0z}=M\varrho_z^2.$
მაშასადამე

$$M\varrho_z^2=I_{Cz'}+Md^2,$$

საიდანაც

$$\varrho_z^2=\frac{I_{Cz'}+Md^2}{M}=d^2+\frac{I_{Cz'}}{M}=d^2+\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}=10^2+\frac{4^2}{4}+\frac{40^2}{12}=$$
$$=237{,}33;$$

ამოცანა 34. 19.

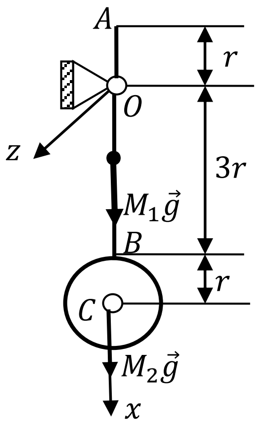


ქანქარა შედგება წვრილი ერთგვაროვანი M_1 მასის AB ღეროსაგან, რომლის ბოლოზე მიმაგრებულია M_2 მასის ერთგვაროვანი C დისკო. ღეროს სიგრძე $4r$ –ის ტოლია, სადაც r – დისკოს რადიუსია. გამოვთვალოთ ქანქარას ინერციის მომენტი მისი დაკიდების O ღერძის მიმართ, რომელიც ქანქარას სიბრტყის მართობია და ღეროს ბოლოდან დაშორებულია r მანძილით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ქანქარას ინერციის მომენტი ტოლია ღეროს I_{z1} ინერციის მომენტის და I_{z2} დისკოს ინერციის მომენტის ჯამის:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2}$$

ღეროს ინერციის მომენტი (იხ. ნახაზი)



$$I_{z1} = \int_{\ell} x^2 dm.$$

რადგან AB ღერო ერთგვაროვანია, ამიტომ

$$dm = \varrho dx,$$

სადაც

$$\varrho_1 = \frac{M_1}{4r}.$$

მაშინ

$$I_{z1} = \int_{-r}^{3r} x^2 dm =$$

$$= \frac{M_1}{4r}\int_{-r}^{3r} x^2 dx = \frac{M_1}{4r}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-r}^{3r} = \frac{M_1}{4r}\frac{27r^3 + r^3}{3} = \frac{7M_1r^2}{3}.$$

დისკოს ინერციის მომენტს ვიპოვით ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის გამოყენებით

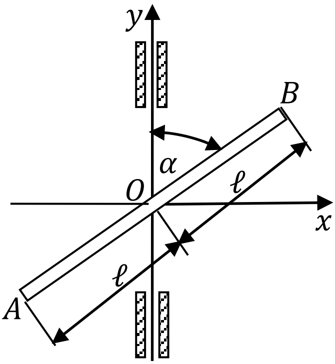
$$I_{z2} = I_{Cz} + M_2(4r)^2 = \frac{M_2r^2}{2} + 16M_2r^2 = 16{,}5M_2r^2$$

მაშასადამე

$$I_z = \frac{7}{3}M_1r^2 + \frac{32}{2}M_2r^2 = \frac{4M_1+99M_2}{6}r^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $I_z = \dfrac{4M_1+99M_2}{6}r^2.$

ამოცანა 34. 20.



წვრილი M მასის და 2ℓ სიგრძის ერთგვაროვანი AB ღერო მიმაგრებულია ვერტიკალურ ღერძზე O ცენტრით, ისე რომ იგი ღერძთან ადგენს α კუთხეს. გამოვთვალოთ ღეროს I_x და I_y ინერციის მომენტები და ცენტრიდანული I_{xy} ინერციის მომენტი. კოორდინატთა ღერძები ნაჩვენებია ნახაზზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (34.4) ფორმულის თანახმად ღეროს ხაზოვანი სიმკვრივე $\rho = \frac{M}{2\ell}$, მაშინ

$$dm = \rho d\ell = \rho\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

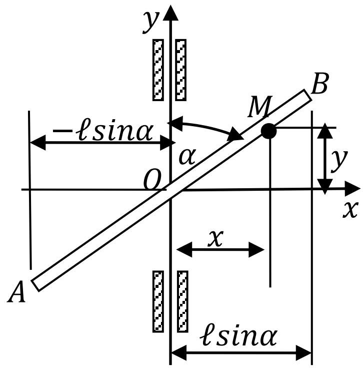
AB წრფის განტოლებაა (იხ. ნახაზი):

$$y = xtg\alpha.$$

ამიტომ

$$d\ell = \sqrt{1 + ctg^2\alpha}dx = \frac{dx}{sin\alpha}$$

გამოვთვალოთ ღეროს ინერციის მომენტები:



$$I_x = \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} y^2 dm = \rho \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} x^2 ctg^2\alpha \, \frac{dx}{sin\alpha} =$$

$$= \frac{\rho ctg^2\alpha}{sin\alpha} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} = \frac{2\rho ctg^2\alpha}{3sin\alpha} \cdot \ell^3 \cdot sin^3\alpha =$$

$$= \frac{2\rho\ell^3 cos^2\alpha}{3} = \frac{2M\ell^3 cos^2\alpha}{3 \cdot 2\ell} = \frac{M\ell^2 cos^2\alpha}{3};$$

$$I_y = \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} x^2 dm = \rho \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} x^2 \, \frac{dx}{sin\alpha} = \frac{\rho}{sin\alpha} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\rho\ell^3 \cdot sin^3\alpha}{3sin\alpha} = \frac{2M\ell^3 \cdot sin^3\alpha}{3sin\alpha \cdot 2\ell} = \frac{M\ell^2 sin^2\alpha}{3}.$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტი

$$I_{xy} = \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} xydm = \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} x^2 ctg\alpha \frac{dx}{sin\alpha} =$$

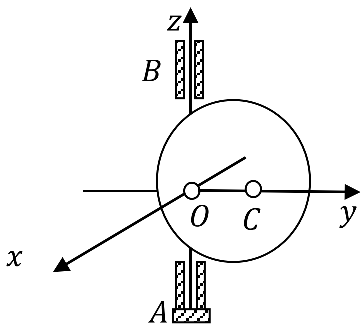
$$= \frac{\rho ctg\alpha}{sin\alpha} \int_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} x^2 dx = \frac{\rho ctg\alpha}{sin\alpha} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\ell sin\alpha}^{\ell sin\alpha} = \frac{2\rho\ell^3 ctg\alpha \cdot sin^3\alpha}{3sin\alpha} =$$

$$= \frac{2M\ell^2 \cdot sin\alpha cos\alpha}{3} = \frac{M\ell^2}{6} sin2\alpha.$$

პ ა ს უ ხ ი: $I_x = \frac{M\ell^2}{3} cos^2\alpha;\ I_y = \frac{M\ell^2}{3} sin^2\alpha;\ I_{xy} = \frac{M\ell^2}{6} sin2\alpha.$

ამოცანა 34. 21

M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო მიმაგრებულია AB ღეროსთან, რომლის მასათა C ცენტრიდან დაშორებულია $OC = R/2$ მანძილით. გამოვთვალოთ დისკოს ღერძული და ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად

$$I_y = I_{y'} = \iint_S [(x')^2 + (z')^2]dm,$$

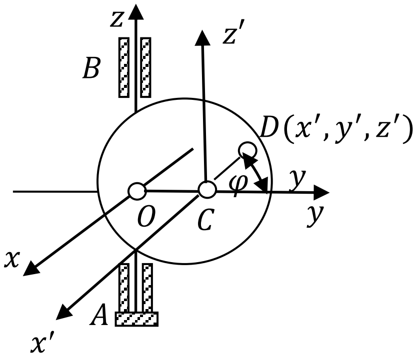
სადაც $S - x = 0$ სიბრტყეზე მდებარე წრეა. ამიტომ

$$I_y = \rho \iint_S (z')^2 dS = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (z')^2 R dR_{|z'=R\sin\varphi} =$$

$$= \rho \int_0^R R^3 dR \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \rho \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \rho \frac{R^4}{4}(\pi - 0) = \rho \frac{R^4}{4}\pi,$$

სადაც ρ −დისკოს ზედაპირული სიმკვრივეა $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. მაშინ

$$I_y = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4}\pi = \frac{MR^2}{4}.$$



I_x −ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ჰიუგენს-შტეინერის თეორემით:

$$I_x = I_{x'} + Md^2,$$

სადაც

$$I_{x'} = \rho \iint_S [(y')^2 + (z')^2] dS = \frac{MR^2}{2},$$

რადგან $d = R/2$ (პირობის თანახმად). მაშასადამე,

$$I_y = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3MR^2}{4}$$

ანალოგიურად გამოვთვალ თ I_z:

$$I_z = I_{z'} + Md^2 = \rho \iint_S [(x')^2 + (y')^2]_{x'=0} dS + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 =$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2\varphi R dR d\varphi + \frac{MR^2}{4} = \rho \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4}\pi + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად:

$$I_{xy}=\iint_S xydm_{|x=0}=0,$$

რადგან S დევს Oyz სიბრტყეზე, ამიტომ $x=0.$ ანალოგიურად

$$I_{xz}=\iint_S xydm_{|x=0}=0.$$

$I_{yz}-$ ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ჰიუგენს-შტეინერის თეორემით:

$$I_{yz}=I_{y'z'}+Mz_Cy_{C_{|z_C=0}}=I_{y'z'}=\rho\iint_S y'z'dS=$$

$$=\rho\int_0^R\int_0^{2\pi} Rcos\varphi\cdot Rsin\varphi\cdot RdRd\varphi==\rho\int_0^R R^3dR\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}sin2\varphi d\varphi=$$

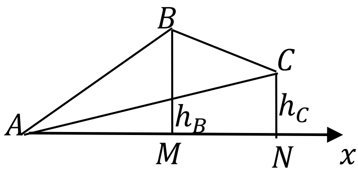
$$=\rho\frac{R^4}{4}\left(-\frac{1}{4}cos2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

პ ა ს უ ხ ი:

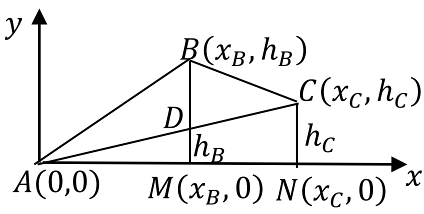
$$I_x=\tfrac{3}{4}Mr^2;\;\; I_y=\tfrac{1}{4}Mr^2;\; I_z=\tfrac{1}{2}Mr^2;\; I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0.$$

ამოცანა 34. 22

განსაზღვრეთ M მასის ერთგვაროვანი ABC სამკუთხა ფირფიტის ინერციის მომენტი A წვეროზე გამავალი ღერძის მიმართ და x მის სიბრტყეში მდებარე x ღერძის მიმართ, თუ ცნობილია B და C წვეროებიდან მანძილი x ღერძამდე: $BM=h_B, CN=h_c$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მყარი სხეულის ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად:



$$I_x=\rho\iint_S(y^2+z^2)dS_{|z=0}=$$

$$= \rho \iint_S y^2 dxdy = \rho \left\{ \iint_{\Delta ABD} y^2 dxdy + \iint_{\Delta DBC} y^2 dxdy \right\} = \rho A$$

ფირფიტის AB გვერდის განტოლებაა (იხ. ნახაზი):

$$y = \frac{h_B}{x_B} x,$$

AC გვერდის:

$$y = \frac{h_C}{x_C} x,$$

BC გვერდის:

$$y - h_B = \frac{h_C - h_B}{x_C - x_B}(x - x_B).$$

ამიტომ

$$\iint_{\Delta ABD} y^2 dxdy = \int_0^{x_B} dx \int_{\frac{h_C}{x_C}x}^{\frac{h_B}{x_B}x} y^2 dy = \int_0^{x_B} dx \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{h_C}{x_C}x}^{\frac{h_B}{x_B}x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{x_B} \left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3 - \left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right] x^3 dx = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3 - \left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right] \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=0}^{x_B} =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3 - \left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right] x_B^4;$$

$$\iint_{\Delta DBC} y^2 dxdy = \int_{x_B}^{x_C} dx \int_{y_2}^{y_1} y^2 dy = \left| \begin{array}{c} y_1 = h_B + \dfrac{h_C - h_B}{x_C - x_B}(x - x_B); \\ y_2 = \dfrac{h_C}{x_C} x, \end{array} \right|$$

$$= \int_{x_B}^{x_C} dx \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{h_C}{x_C}x}^{h_B + \frac{h_C - h_B}{x_C - x_B}(x - x_B)} =$$

$$=\frac{1}{3}\int_{x_B}^{x_C}\left\{\left[h_B+\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)\right]^3-\left(\frac{h_C}{x_C}x\right)^3\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{x_B}^{x_C}\left\{h_B^3+3h_B^2\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)+3h_B\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^2(x-x_B)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)\right)^3-\left(\frac{h_C}{x_C}x\right)^3\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[h_B^3x+3h_B^2\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\frac{(x-x_B)^2}{2}+\right.$$

$$+3h_B\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^2\frac{(x-x_B)^3}{3}+\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^3\frac{(x-x_B)^4}{4}-$$

$$\left.-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{x_B}^{x_C}=\frac{1}{3}\left[h_B^3(x_C-x_B)+3h_B^2\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\frac{(x_C-x_B)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+3h_B\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^2\frac{(x_C-x_B)^3}{3}+\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^3\frac{(x_C-x_B)^4}{4}-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\frac{x_C^4-x_B^4}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+3h_B^2(h_C-h_B)+h_B(h_C-h_B)^2+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\frac{(x_C+x_B)\left(x_C^2+x_B^2\right)}{4}\right].$$

მაშინ

$$A=\iint_S y^2dS=\frac{1}{12}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right]x_B^4+\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+3h_B^2\frac{(h_C-h_B)}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\frac{(x_C+x_B)\left(x_C^2+x_B^2\right)}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\left[h_B^3x_B-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3x_B^4-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\left(x_C^4-x_B^4\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+\frac{3h_B^2}{2}(h_C-h_B)+h_B(h_C-h_B)^2+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\left(h_B^3x_B-h_C^3x_C\right)+$$

$$+\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+\frac{3h_B^2}{2}(h_C-h_B)+h_B(h_C-h_B)^2+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3\right]$$

$$=\frac{1}{12}\left(h_B^3x_B-h_C^3x_C\right)+\frac{1}{12}(x_C-x_B)\left[4h_B^2+6h_B^2h_C-6h_B^3+\right.$$

$$\left.+4(h_Bh_C^2-2h_Ch_B^2+h_B^3)+h_C^3-3h_Bh_C^2+3h_Ch_B^2-h_C^3\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\left(h_B^3x_B-h_C^3x_C\right)+\frac{1}{12}(x_C-x_B)\left(h_B^3+h_B^2h_C+h_Bh_C^2+h_C^3\right)=$$

$$=\frac{1}{12}x_B\left(h_B^3-h_B^3-h_B^2h_C-h_Bh_C^2-h_C^3\right)+$$

$$+\frac{1}{12}x_C\left(h_B^3+h_B^2h_C+h_Bh_C^2+h_C^3-h_C^3\right)=$$

$$=\frac{1}{12}x_Ch_B\left(h_B^2+h_Bh_C+h_C^2\right)-\frac{1}{12}x_Bh_C\left(h_B^2+h_Bh_C+h_C^2\right)=$$

$$=\frac{h_B^2+h_Bh_C+h_C^2}{6}\cdot S,$$

სადაც $S=\frac{1}{2}(x_Ch_B-x_Bh_C)-$ ΔABC ფართობია, რომლის წვეროებია $A(0;0),B(x_B,h_B),C(x_C,h_C)$:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\x_C&h_C&1\\x_B&h_B&1\end{vmatrix}.$$

მაშინ

$$I_x = \rho A = \rho S \cdot \frac{1}{6}(h_B^2 + h_B h_C + h_C^2) = \frac{1}{6}M(h_B^2 + h_B h_C + h_C^2),$$

სადაც $\qquad M = \rho S.$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $I_x = \frac{M}{6}(h_B^2 + h_B h_C + h_C^2).$

ამოცანა 34. 23

34.1 ამოცანის მონაცემებით გამოთვალეთ მუხლა ლილვის I_{xz}, I_{yz}, I_{xy} ცენტრიდანული ინერციის მომენტები

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოვწეროთ A, B და D წერტილების კოორდინატები:

$$A\left[\frac{d}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}d;\ -(a+b)\right],\ B\left[\frac{d}{2}; -\ \frac{\sqrt{3}}{2}d;\ 0\right],\qquad D[-d;\ 0;\ (a+b)].$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტების განმარტების თანახმად

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{3} m_k x_k z_k = m\left\{-(a+b)\frac{d}{2} + 0 + (-d)(a+b)\right\} =$$

$$= -m\left(\frac{3}{2}d\right)(a+b) = \frac{-3md(a+b)}{2},$$

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^{3} m_k y_k z_k = m\left\{-\ \frac{\sqrt{3}}{2}d(a+b) + 0 + 0\right\} =$$

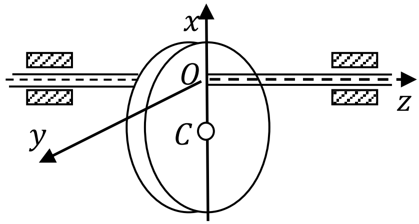
$$= -\ \frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b),$$

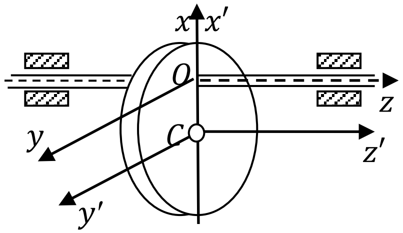
$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{3} m_k x_k y_k = m\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d \cdot \left(\frac{d}{2}\right) - \frac{d \cdot \sqrt{3}d}{2 \cdot 2} + 0\right\} = 0.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $I_{xz} = \frac{-3md(a+b)}{2}; I_{yz} = -\ \frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b);\ I_{xy} = 0.$

ამოცანა 34. 24

M მასის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ექსცენტრულად ჩამოცმულია მისი სიბრტყის მართობ z ღერძზე. დისკოს რადიუსი უდრის R −ს, ექსცენტრისიტეტი $OC = a$, სადაც C-არის დისკოს მასათა ცენტრი. გამოთვალეთ I_x, I_y, I_z ღერძული და I_{xz}, I_{yz}, I_{xy} ცჩენტრიდანუ ლი ინერციის მომენტები. ღერძები ნახაზზეა ნაჩვენები.





ა მ ო ხ ს ნ ა. 34.21 ამოცანის ამოხსნის ანალოგიურად (იხ.ნახაზი) ჩავწეროთ:

$$I_z = I_{z'} + M(OC)^2 =$$

$$= \frac{MR^2}{2} + Ma^2 = \frac{M}{2}(R^2 + 2a^2),$$

$$I_x = I_{x'} + M \cdot 0 = I_{x'} = \rho \iint\limits_S [(y')^2 + (z')^2] dS_{|z'=0} =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R (y')^2 r dr d\varphi =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^3 sin^2\varphi dr d\varphi = \rho \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \rho \frac{\pi R^4}{4}\left|\rho = \frac{M}{\pi R^2}\right| = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_y = I_{y'} + M(OC)^2 = \rho \iint\limits_S [(x')^2 + (z')^2] dS_{|z'=0} + Ma^2 =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^3 cos^2\varphi dr d\varphi + Ma^2 = \rho \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} + Ma^2 =$$

$$= \rho \frac{\pi R^4}{4} + Ma^2 = \frac{MR^2}{4} + Ma^2 = \frac{M}{4}(R^2 + 4a^2).$$

განვსაზღვროთ დისკოს ცენტრიდანული მომენტები:

$$I_{xz} = \iint_S xzdm_{|z=0} = 0;$$

$$I_{yz} = \iint_S yzdm_{|z=0} = 0;$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_C y_C \Big|_{x_C=-a}^{y_C=0} = I_{x'y'} = \iint_S x'y'dS =$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} rcos\varphi \cdot rsin\varphi \cdot rdrd\varphi = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} sin2\varphi d\varphi =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4}\left(-\frac{1}{4}cos2\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ამოცანის ამოხსნა მნიშვნელოვნად მარტივდება, თუ ვისარგებლებთ ცნობარის მონაცემებით და ჰიუგენს-შტეინერის თეორემით:

$$I_x = \frac{1}{4}MR^2,$$

$$I_y = I_{Cy'} + M \cdot (OC)^2 = \frac{MR^2}{4} + Ma^2 = \frac{M}{4}(R^2 + 4a^2);$$

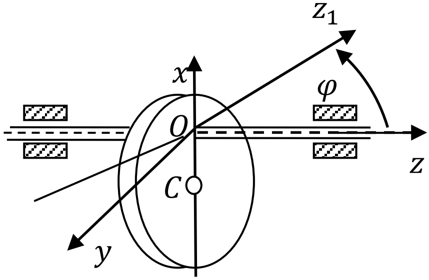
$$I_z = I_{Cz'} + M(OC)^2 = \frac{M}{2}(R^2 + 2a^2).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $I_x = \frac{1}{4}MR^2,\ I_y = \frac{M}{4}(R^2 + 4a^2);\ I_z = \frac{M}{2}(R^2 + 2a^2);$

$$I_{xz} = I_{yz} = I_{xy} = 0.$$

ამოცანა 34. 25

34.24 ამოცანის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტები ვერტიკალურ xz სიბრტყეში მდებარე z_1 ღერძის მიმართ, რომელიც z ღერძთან φ ადგენს კუთხეს..



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ (34.15) ფორმულით, რომელიც განსაზღვრავს სხეულის ინერციის მომენტს კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი ღერძის მიმართ:

$$I_\ell = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma - 2I_{xy} cos\alpha cos\beta -$$
$$-2I_{yz} cos\beta cos\gamma - 2I_{zx} cos\gamma cos\alpha. \qquad (1)$$

სადაც $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma - \ell$ ღერძის მიმართულების განმსაზღვრელი ერთეულოვანი $\vec{e}$ ვექტორის კოორდინატებია (ანუ Z_1 ღერძის).

რადგან

$$\gamma = \varphi,\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{და} \ \beta = \frac{\pi}{2},$$

ამიტომ

$$cos\alpha = sin\varphi,\ cos\beta = 0,\ cos\gamma = cos\varphi,$$

მაშინ

$$I_\ell = I_x sin^2\varphi + I_z cos^2\varphi - 2I_{xz} cos\varphi sin\varphi.$$

მოცემულ შემთხვევაში

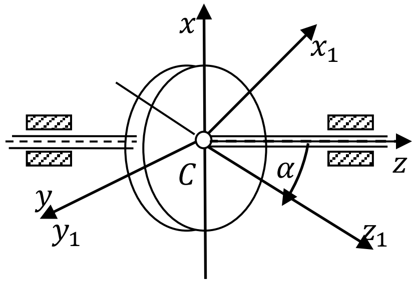
$$I_x = \frac{1}{4}MR^2, \qquad I_z = \frac{M}{2}(R^2 + 2a^2), I_{xz} = 0$$

(იხ. 34.24. ამოცანის ამოხსნა). მაშინ

$$I_\ell = \frac{MR^2}{4} sin^2\varphi + M\left(\frac{R^2}{2} + 2a^2\right) cos^2\varphi = I_{z_1}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $I_\ell = \frac{MR^2}{4} sin^2\varphi + M\left(\frac{R^2}{2} + 2a^2\right) cos^2\varphi.$

ამოცანა 34. 26



M მასის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ჩამოცმულია მისი C მასათა ცენტრზე გამავალ z ღერძზე. დისკოს სიმეტრიის z_1 ღერძიძევს სიმეტრიის ვერტიკალურ xoz სიბრტყეში და z ღერძთან ადგენს α კუთხეს. დისკოს რადიუსი R −ის, ტოლია .გამოთვალეთ I_{xz}, I_{yz}, I_{xy} ცენტრიდანული ინერციის მომენტები. (კოორდინატთა ღერძები ნახაზზეა ნაჩვენები).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ x_1, y_1, z_1 კოორდინატებიდან x, y, z კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულები:

$$x = x_1 cos\alpha - z_1 sin\alpha, \qquad y = y_1, \qquad z = x_1 sin\alpha - z_1 cos\alpha.$$

მაშინ

$$I_{xy} = \iint\limits_S xydm = \iint\limits_S (x_1 cos\alpha - z_1 sin\alpha) y_1 dm =$$

$$= cos\alpha \iint\limits_S x_1 y_1 dm - sin\alpha \iint\limits_S y_1 z_1 dm = I_{x_1y_1} cos\alpha - I_{y_1z_1} sin\alpha.$$

გამოვთვალოთ $I_{x_1y_1}$ და $I_{y_1z_1}$

$$I_{x_1y_1} = \rho \iint\limits_S x_1 y_1 dS = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} rcos\varphi \cdot rsin\varphi \cdot rdrd\varphi$$

$$= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} sin2\varphi d\varphi = \rho \frac{R^4}{4}\left(-\frac{1}{4}cos2\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0,$$

$$I_{y_1z_1} = \iint\limits_S y_1 z_1 dm_{|z_1=0} = 0,$$

რადგან S მდებარეობს $z_1 = 0$ სიბრტყეზე.

მაშასადამე,

$$I_{xy} = 0 \cdot cos\alpha - 0 \cdot sin\alpha = 0.$$

ანალოგიურად,

$$I_{zy}=\iint_S zydm=\iint_S (x_1 sin\alpha + z_1 cos\alpha) y_1 dm =$$

$$= sin\alpha \iint_S x_1 y_1 dm + cos\alpha \iint_S y_1 z_1 dm = I_{x_1 y_1} sin\alpha + I_{y_1 z_1} cos\alpha.$$

რამდენადაც $I_{x_1 y_1}=0$ და $I_{y_1 z_1}=0$, ამიტომ $I_{zy}=0$.

გამოვთვალოთ I_{xz}:

$$I_{xz}=\iint_S xzdm=\iint_S (x_1 cos\alpha - z_1 sin\alpha)(x_1 sin\alpha + z_1 cos\alpha) dm =$$

$$=\iint_S (x_1^2 cos\alpha sin\alpha + x_1 z_1 cos^2\alpha - x_1 z_1 sin^2\alpha - z_1^2 cos\alpha sin\alpha) dm =$$

$$= cos\alpha sin\alpha \iint_S (x_1^2 - z_1^2) dm + (cos^2\alpha - sin^2\alpha) \iint_S x_1 z_1 dm.$$

რადგან S მდებარეობს $z_1=0$ სიბრტყეზე, ამიტომ

$$I_{xz} = cos\alpha sin\alpha \iint_S x_1^2 dm = \rho cos\alpha sin\alpha \iint_S x_1^2 dS =$$

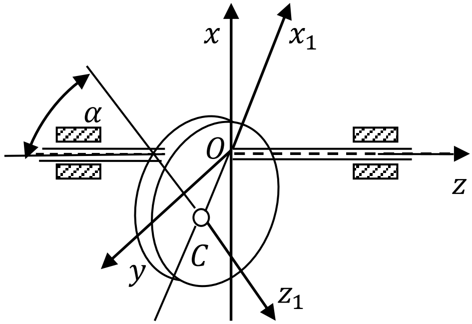
$$=\frac{1}{2}\rho sin2\alpha \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 cos^2\varphi \cdot r dr d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\rho sin2\alpha \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{8}\rho \frac{2\pi R^4}{2} sin2\alpha\right)\Bigg|_{\rho=\frac{M}{\pi R^2}}$$

$$=\frac{1}{8}\frac{M\pi R^4}{\pi R^2} sin2\alpha = \frac{1}{8} M R^2 sin2\alpha.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $I_{xz}=\frac{1}{8} M R^2 sin2\alpha$; $I_{xy}=I_{xz}=0$.

ამოცანა 34. 27



ამოხსენით წინა ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა დისკო ექსცენტრულად ჩამოცმულია z ღერძზე, ამასთან ექსცენტრისიტეტი $OC = a$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. C წერტილის კოორდინატები:

$$x_C = -acos\alpha, \ \ y_C = 0,$$
$$z_C = -asin\alpha.$$

ამიტომ კოორდინატები x, y, z და x_1, y_1, z_1 დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} x = x_1cos\alpha - z_1sin\alpha - acos\alpha = (x_1 - a)cos\alpha - z_1sin\alpha, \\ y = y_1, \\ z = x_1sin\alpha + z_1cos\alpha - asin\alpha = (x_1 - a)sin\alpha - z_1cos\alpha. \end{cases}$$

აქედან

$$I_{xy} = \iint\limits_S xydm = \iint\limits_S y_1(x_1cos\alpha - z_1sin\alpha - acos\alpha)dm_{|z_1=0} =$$

$$= I_{x_1y_1}cos\alpha - acos\alpha \iint\limits_S y_1dm = acos\alpha \cdot M\, y_{1C} = 0,$$

რადგან C წერტილი ემთხვევა x_1, y_1, z_1 კოორდინატთა სისტემის სათავეს და $y_{1C} = 0$, ხოლო $I_{x_1y_1} = 0$ (იხ. ამოცანა 34.26).

ანალოგიურად

$$I_{yz} = \iint\limits_S yzdm_{|z_1=0} =$$

$$= \iint\limits_S y_1(x_1 - a)sin\alpha dm - My_{1C}asin\alpha = 0,$$

$$I_{xz} = \iint\limits_S xzdm =$$

$$= \iint_S (x_1 cos\alpha - z_1 sin\alpha - acos\alpha)(x_1 sin\alpha + z_1 cos\alpha - asin\alpha)dm_{|z_1=0}$$

$$= \iint_S (x_1^2 + a^2 - 2ax_1) cos\alpha sin\alpha dm =$$

$$= a^2 cos\alpha sin\alpha \iint_S dm - asin2\alpha \iint_S x_1 dm + cos\alpha sin\alpha \iint_S x_1^2\, dm =$$

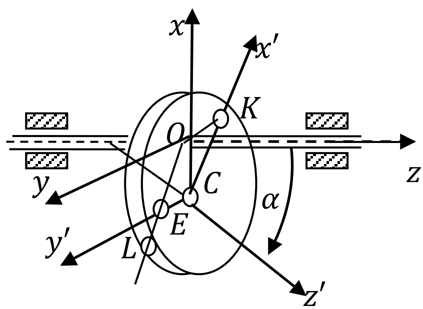
$$= \frac{1}{2} Ma^2 sin2\alpha - asin2\alpha \cdot Mx_{1C} + \frac{sin2\alpha}{2} \cdot M\frac{R^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha.$$

(იხ. 34.26 ამოცანის ამოხსნა).

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $I_{xz} = \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha$; $I_{xy} = I_{zy} = 0.$

ამოცანა 34. 28

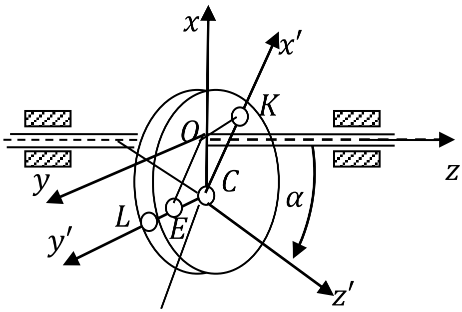


ერთგვაროვანი R რადიუსის წრიული დისკო ჩამოცმულია ბრუნვის z ღერძზე, რომელიც გადის O წერტილზე და დისკოს სიმეტრიის Cz_1 ღერძთან ქმნის α კუთხეს. დისკოს მასა უდრის M. განსაზღვრეთ I_z დისკოს ინერციის მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ და ინერციის ცენტრიდანული I_{xz} და I_{xz} მომენტები, თუ OL არის z ღერძის გეგმილი დისკოს სიბრტყეზე, $OE = a$, $OK = b$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ დამოკიდებულება წერტილის x_i, y_i, z_i კოორდინატებს შორის $Oxyz$ და $Cx'y'z'$ საკოორდინატო სისტემებში:

$$
\begin{cases}
x_i = \overline{x_i}cos\alpha - \overline{z_i}sin\alpha, \\
y_i = \overline{y_i}, \\
z_i = \overline{x_i}sin\alpha + \overline{z_i}cos\alpha, \\
\overline{x_i} = x_C + x_{iC}^{'}, \\
\overline{y_i} = y_C + y_{iC}^{'}, \\
\overline{z_i} = z_C + z_{iC}^{'}, \\
x_C = OE = a,\ y_C = OK = b, z_C = 0.
\end{cases}
\qquad (1)
$$

(1) ფორმულები მიღებულია $Cx'y'z'$ საკოორდინატო სისტემის ღერძების O წერტილში პარალელური გადატანით და შემდეგ α კუთხით მობრუნებით.



გამოვთვალოთ ცენტრიდანული ინერციის მომენტები:

$$
I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = \sum m_i \overline{y_i}(\overline{x_i}sin\alpha + \overline{z_i}cos\alpha) =
$$
$$
= sin\alpha \sum m_i \overline{y_i}\,\overline{x_i} + cos\alpha \sum m_i \overline{y_i}\,\overline{z_i} =
$$
$$
= sin\alpha \sum m_i\left(y_C + y_{iC}^{'}\right)\left(x_C + x_{iC}^{'}\right) +
$$
$$
+cos\alpha \sum m_i\left(y_C + y_{iC}^{'}\right)\left(z_C + z_{iC}^{'}\right) = sin\alpha \sum m_i y_C x_C == Mabsin\alpha.
$$

ამ ფორმულის გამოყვანისას გათვალისწინებული იყო ის, რომ z' არის დისკოს ინერციის მთავარი ცენტრალური ღერძი, ამიტომ

$$
I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0,\ \sum m_i x_i^{'} = Mx_C^{'} = 0, \sum m_i y_i^{'} = My_C^{'} = 0, \qquad (2)
$$
$$
I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = \sum m_i(\overline{x_i}cos\alpha - \overline{z_i}sin\alpha)(\overline{x_i}sin\alpha + \overline{z_i}cos\alpha) =
$$
$$
= sin^2\alpha \sum m_i\,\overline{x_i} z_C + cos^2\alpha \sum m_i x_i\, z_C + cos\alpha sin\alpha \sum m_i\left(\overline{x}_i^2 - \overline{z}_i^2\right)
$$
$$
= (cos^2\alpha - sin^2\alpha)\sum m_i\left(x_C + x_i^{'}\right)\left(z_C + z_C^{'}\right) +
$$
$$
+cos\alpha sin\alpha \sum m_i\left[\left(\left(x_C + x_i^{'}\right)\right)^2 - \left(z_C + z_C^{'}\right)^2\right] =
$$
$$
= \left(cos^2\alpha - sin^2\alpha\right)\left(\sum m_i x_C z_C + \sum m_i x_i z_i + \sum m_i z_i^{'} z_C + \right.
$$

$$+\sum m_i x_i^{'} z_i^{'}\Big) + sin\alpha cos\alpha\left(\sum m_i\left(x_C^2 + x_i^2 + 2x_C x_i - z_i\right)\right) =$$
$$= sin\alpha cos\alpha\left(Mx_C^2 + \sum m_i\left(x_i^{'2} - z_i^{'2}\right)\right) =$$
$$= \left(Ma^2 + \frac{1}{4}MR^2\right) sin\alpha cos\alpha = M\left(a^2 + \frac{1}{4}R^2\right) sin\alpha cos\alpha.$$

რადგან x_i', y_i', z_i' დისკოზე მდებარე წერტილის კოორდინატებია და დისკოს განტოლებაა z' ($Cx'y'z'$ კოორდინატთა სისტემაში), ამიტომ $z_i' = 0$ i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის.

ასევე გამოვთვალოთ I_z;

$$I_z = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum m_i\left[(\overline{x_i} cos\alpha - \overline{z_i} sin\alpha)^2 + \bar{y}_i^2\right] =$$

$$= \sum m_i\left[\bar{x}_i^2 cos^2\alpha - 2\bar{x}_i\bar{z}_i cos\alpha sin\alpha + \bar{z}_i^2 sin^2\alpha + \bar{y}_i^2\right] =$$
$$= cos^2\alpha \sum m_i\left(x_C^2 + x_i^2 + 2x_C x_i'\right) + sin^2\alpha\left(\sum m_i\, z_C^2\right)^2 -$$

$$-2cos\alpha sin\alpha \sum m_i x_{iC}' x_C + \sum m_i\left(y_C^2 + y_i'^2 + 2y_C y_i'\right) =$$

$$= cos^2\alpha\left(Mx_C^2 + 2x_C\sum m_i x_i' + \sum m_i x_C'^{\,2}\right) + sin^2\alpha \cdot Mz_C^2 -$$
$$-2x_C cos\alpha sin\alpha \sum m_i x_{iC}' + \left(\sum m_i x_i'^2 + 2\sum m_i y_{iC}'^2 + \sum m_i y_i'^2\right) =$$

$$= cos^2\alpha M\left(a^2 + \frac{1}{4}R^2\right) + \ sin^2\alpha \cdot Mz_C^2 + My_C^2 + \sum m_i y_i'^2 =$$
$$= M\left(a^2 + \frac{1}{4}R^2\right) cos^2\alpha + \frac{1}{4}MR^2 + Mb^2 =$$
$$= M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right) cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2 sin^2\alpha + b^2\right]$$

გამარტივებისას გათვალისწინებული იყო, რომ წრიული დისკოსათვის

$$\sum m_i y_i'^2 = \frac{1}{4}MR^2,$$

$$\sum m_i x_C'^2 = \frac{1}{4}MR^2.$$

ასევე (2) ფორმულები.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია ჩატარდეს ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის გამოყენებით:

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2,$$
$$I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_C y_C.$$

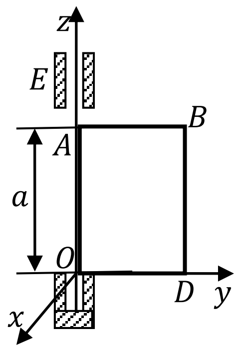
პ ა ს უ ხ ი:

$$I_z = M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2 sin^2\alpha + b^2\right];$$

$$I_{xz} = M\left(a^2 + \frac{1}{4}R^2\right)sin\alpha cos\alpha; \quad I_{yz} = Mabsin\alpha.$$

ამოცანა 34. 29

M მასის a და b გვერდების მქონე ერთგვაროვანი მართკუთხა $OABD$ ფირფიტა OA გვერდით მიმაგრებულია OE ღერძზე. გამოთვალეთ ფირფიტის ცენტრიდანული მომენტები I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}.



ა მ ო ხ ს ნ ა. $OABD$ ფირფიტა დევს $x = 0$ სიბრტყეზე. ამიტომ

$$I_{xz} = \iint_S xzdm_{|x=0} = 0,$$

$$I_{xy} = \iint_S xydm_{|x=0} = 0.$$

გამოვთვალოთ:

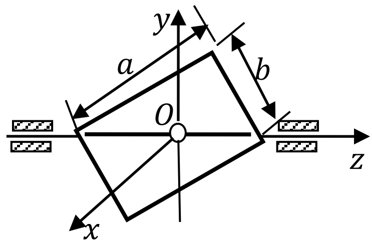
$$I_{yz} = \iint_S yzdm = \rho\int_0^b\left(\int_0^a zdz\right)ydy = \rho\frac{b^2}{2}\frac{a^2}{2} = \frac{1}{4}Mab,$$

სადაც

$$dm = \rho dydz, \qquad \rho = \frac{M}{ab}.$$

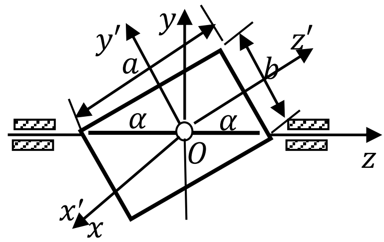
პ ა ს უ ხ ი: $I_{xy} = I_{xz} = 0, \ I_{yz} = \frac{1}{4}Mab.$

ამოცანა 34. 30



M მასის a და b გვერდების მქონე ერთგვაროვანი მართკუთხა ფირფიტა მიმაგრებულია z ღერძზე, რომელიც გადის მის ერთ-ერთ დიაგონალზე. გამოთვალეთ ფირფიტის ცენტრიდანული მომენტი I_{yz}, y და z ღერძების მიმართ მდებარე ფირფიტასთან ერთად ნახაზის სიბრტყეში. კოორდინატთა სათავე ემთხვევა ფორფიტის მასათა ცენტრს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ კოორდინატები x', y', z' შემდეგი ფორმულების თანახმად (იხ. ნახაზი):



$$x = x',\ \ y = y'cos\alpha + z'sin\alpha,$$

$$z = -y'sin\alpha + z'cos\alpha,$$

სადაც

$$tg\alpha = \frac{b}{a};\ -\frac{b}{2} < y' < \frac{b}{2};\ \ -\frac{a}{2} < z' < \frac{a}{a}.$$

ვთქვათ, ფორფიტის ზედაპირული სომკვრივეა

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{ab}.$$

მაშინ ფირფიტის ცენტრიდანული ინერციის მომენტები

$$I_{yz} = \iint\limits_S yzdm =$$

$$= \rho \iint\limits_S (y'cos\alpha + z'sin\alpha)(-y'sin\alpha + z'cos\alpha)dy'dz' =$$

$$= \rho \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{[(z')^2 - (y')^2]cos\alpha sin\alpha + z'(cos^2\alpha - sin^2\alpha)\}\, dy'dz' =$$

$$= \frac{1}{2}\rho sin2\alpha \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ \left[\frac{(z')^3}{3} - z'(y')^2 \right] \Bigg|_{z'=-\frac{a}{2}}^{z'=\frac{a}{2}} \right\} d\,y' +$$

$$+\rho cos2\alpha\left[\frac{(y')^2}{2}\Bigg|_{y'=--\frac{b}{2}}^{y'=-\frac{b}{2}}\right]\left[\frac{(z')^2}{2}\Bigg|_{z'=--\frac{a}{2}}^{z'=\frac{a}{2}}\right]=$$

$$=\frac{\rho sin2\alpha}{2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\frac{a^3}{12}-a(y')^2\right]d\,y'+$$

$$+\rho cos2\alpha\cdot 0\cdot 0=\frac{1}{2}\rho sin2\alpha\left[\frac{a^3}{12}y'-a\frac{(y')^3}{3}\right]_{y'=--\frac{b}{2}}^{y'=-\frac{b}{2}}=$$

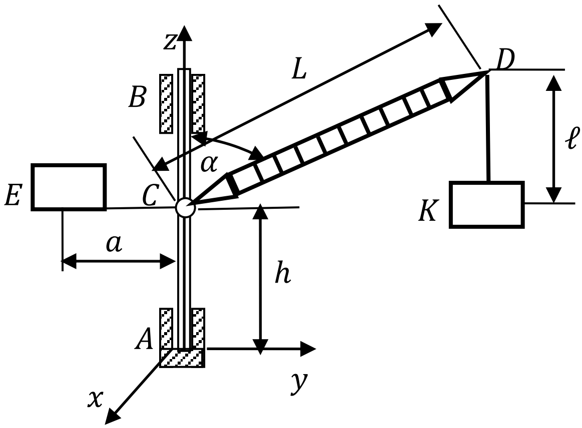
$$=\frac{1}{2}\rho sin2\alpha\left(\frac{a^3}{12}b-a\frac{b^3}{12}\right)=\frac{1}{12}\rho ab(a^2-b^2)\frac{cos\alpha sin\alpha}{cos^2\alpha+sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{M(a^2-b^2)}{12}\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{M(a^2-b^2)}{12}\frac{b/a}{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{Mab(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}.$$

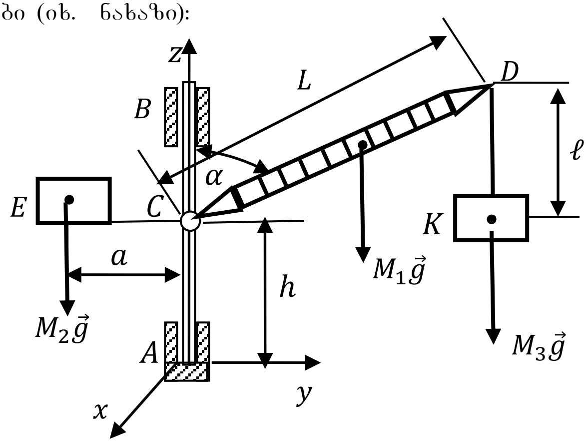
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $I_{yz}=\frac{Mab\left(a^2-b^2\right)}{12(a^2+b^2)}$.

ამოცანა 34. 31

ამწის მბრუნავი ნაწილი შედგება L სიგრძისა და M_1 მასის CD ისრის, M_2 მასის E საპირწონისა და M_3 მასის K ტვირთისაგან . განიხილეთ ისარი, როგორც წვრილი ერთგვაროვანი კოჭი, ხოლო E საპირწონე და K ტვირთი-წერტილოვან მასებად. განსაზღრვეთ ამწეს ინერციის მომენტი მისი ბრუნვის ვერტიკალური z ღერძის მიმართ და ცენტრიდანული ინერციის მომენტები საკოორდინატო x, y და z ღერძების მიმართ, რომლებიც დაკავშირებულია ამწესთან. მთელი სისტემის მასათა ცენტრი იმყოფება z ღერძზე. CD ისარი მდებარეობს yz სიბრტყეში.



ა მ ო ხ ს ნ ა ჩავწეროთ ამწეს მახასიათებელი წერტილების კოორდინატები (იხ. ნახაზი):



$$E(0,-a,h);\ C(0,0,h);$$
$$D(0,Lsin\alpha,h+Lcos\alpha);$$
$$K(0,Lsin\alpha,h+Lcos\alpha-\ell)$$

ღერძის მიმართ ინერციისმომენტის განმარტებისთანახმად

$$I_z=M_2a^2+\int_0^{Lsin\alpha} y^2dm+M_3(Lsin\alpha)^2.$$

მაგრამ

$$dm=\rho d\ell=\rho\sqrt{dx^2+dz^2}=\rho\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dy,$$

სადაც $\rho = \frac{M_1}{L}$; $z = h + yctg\alpha$.

ამიტომ

$$dm = \frac{M_1}{L}\sqrt{1+(ctg\alpha)^2}dy = \frac{M_1}{Lsin\alpha}dy.$$

მაშინ

$$I_z = M_2a^2 + \frac{M_1}{Lsin\alpha}\int_0^{Lsin\alpha} y^2dy + M_3(Lsin\alpha)^2 = M_2a^2 +$$

$$+\frac{M_1}{Lsin\alpha}\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_0^{Lsin\alpha} + M_3(Lsin\alpha)^2 = M_2a^2 + \left(M_3 + \frac{M_1}{3}\right)L^2sin^2\alpha;$$

$$I_{xy} = M_2\cdot 0\cdot(-a) + \int_0^{Lsin\alpha} xydm_{|x=0} + M_3\cdot 0\cdot Lsin\alpha = 0;$$

$$I_{xz} = M_2\cdot 0\cdot h + \int_0^{Lsin\alpha} xzdm_{|x=0} + M_3\cdot 0\cdot(h-\ell+Lcos\alpha) = 0;$$

$$I_{yz} = M_2\cdot(-a)h + \int_0^{Lsin\alpha} yzdm + M_3\cdot L\cdot(h-\ell+Lcos\alpha)sin\alpha =$$

$$= M_3L(h-\ell+Lcos\alpha)sin\alpha - M_2ah +$$

$$+\frac{M_1}{Lsin\alpha}\int_0^{Lsin\alpha} y(h+yctg\alpha)dy = M_3L(h-\ell+Lcos\alpha)sin\alpha -$$

$$-M_2ah + \frac{M_1}{Lsin\alpha}\left(h\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}ctg\alpha\right)\bigg|_0^{Lsin\alpha} =$$

$$= M_3L(h-\ell+Lcos\alpha)sin\alpha - M_2ah + M_1Lsin\alpha\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{h}{2}+\frac{Lsin\alpha ctg\alpha}{3}\right) = \frac{M_3+\frac{1}{3}M_1}{2}L^2sin2\alpha +$$

$$+\left[M_3(h-\ell)+\frac{1}{2}M_1h\right] Lsin\alpha - M_2ah.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $I_z = M_2a^2 + \left(M_3 + \frac{M_1}{3}\right) L^2 sin^2\alpha;$

$$I_{yz} = \frac{M_3 + \frac{1}{3}M_1}{2} L^2 sin2\alpha + \left[M_3(h-\ell)+\frac{1}{2}M_1h\right] Lsin\alpha - M_2ah;$$

$$I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

<u>შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.</u> მოყვანილ კრებულში პასუხში დაშვებულია უზუსტობები.

§35. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრის განმარტება და ფიზიკური არსი მოყვანილია წინა პარაგრაფში. თუმცა აქვე მართებულია შეგახსენოთ, რომ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრი გეომეტრიული წერტილია, რომლის კოორდინატები დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში განისაზღვრებიან კოორდინატებით:

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \\ y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \\ z_c = \frac{\sum m_k}{\sum m_k} \end{cases} \tag{35.1}$$

მექანიკური სისტემის მოძრაობისას ნივთიერ წერტილების ან სისტემაში შემავალი სხეულების სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები- x_k, y_k და z_k იცვლებიან დროის მიხედვით. ამიტომ (35.1) ფორმულები შეიძლება განხილული იქნას როგორც მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლებები:

$$x_C = f_1(t), \qquad y_C = f_2(t), z_C = f_3(t).$$

ვიცით,რა მოძრაობის განტოლებები, დიფერენცირების გზით შეიძლება განვსაზღვროთ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე მასათა ცენტრის სიჩქარის და აჩქარების გეგმილები: $\dot{x}_C$, $\dot{y}_C, \dot{z}_C$, $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C, \ddot{z}_C$ შემდეგ კი გამოვთვალოთ მისი სიჩქარე და აჩქარება:

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2}$$

$$a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{z}_C^2} \tag{35.2}$$

თუ რომელიღაც მექანიკურ სისტემაში მასათა ცენტრი აღმოჩნდება ერთ-ერთ რგოლზე, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას უძრავი ღერძის გარშემო, მაშინ მასათა ცენტრის სიჩქარე v_C და აჩქარება a_C შეიძლება განისაზღვროს როგორც სხეულის წერტილების სიჩქარე და აჩქარება ბრუნვითი მოძრაობისას. ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ მანძილი მასათა ცენტრიდან ბრუნვის რერძამდე, სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და აჩქარება.

თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ- ეს არის დინამიკის მეორე კანონის გამოსახულება ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის მისი გადატანითი მოძრაობისას:

მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრი მოძრაობს როგორც ნებისმიერი ნივთიერი წერტილი, რომლის მასა ტოლია მექანიკური სისტემის მასის და მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის ტოლია, ე.ი.

$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(e)}, \tag{35.3}$$

სადაც $M = \sum m_k$ -მთელი სისტემის მასაა, $\vec{R}^{(e)} = \sum \vec{F}_k^{(e)}$ - მექანიკურ სისტემაში შემავალი ნივთიერ წერტილებზე ან სხეულებზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორია.

(35.3) განტოლება შეიძლება ჩაწერილი იქნას სკალარული სახით დეკარტეს კოორდინატთა ღერძებზე ან ბუნებრივ კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილებში. დეკარტეს კოორდინატთა სისტემაში (35.3) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^{(e)} = \sum F_{kx}^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C &= R_y^{(e)} = \sum F_{ky}^{(e)}, \\ M\ddot{z}_C &= R_z^{(e)} = \sum F_{kz}^{(e)}. \end{aligned} \tag{35.4}$$

როგორც (35.3) და (35.4) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობაზე გავლენას ახდენს მხოლოდ გარე ძალები. მექანიკურ სისტემაში შიაგა ძალები მასათა ცენტრის მოძრაობაზე პირდაპირ გავლენას ვერ ახდენს, თუმცა მათ ირიბ მოქმედებას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც ისინი წარმოადგენენ გარე ძალების წარმოქმნის გაჩენის) წყაროს. (35.4) განტოლებები საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ორი ამოცანა ანალოგიური ნივთიერი წერტილის დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანისა;

- **პირველი ამოცანა-** სისტემის მოცემული მასისა და მისი მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონის მიხედვით საჭიროა განისაზღვროს სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი, ან ამ ძალებიდან ერთ-ერთი, როცა ცნობილია სხვა ძალები.
- **მეორე ამოცანა-** სისტემის მოცემული მასის, სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების და მასათა ცენტრის მოძრაობის საწყისი პირობების მიხედვით საჭიროა განისაზღვროს მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონი.

მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემიდან გამომდინარეობს ორი შედეგი:

1. თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრი უძრავია ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად.
2. თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის

გეგმილი რომელიმე ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის მასათა ცენტრის სიჩქარის გეგმილი ამ ღერძზე მუდმივი სიდიდეა. თუ, მაგალითად, $R_x^{(e)}=0$, მაშინ $\ddot{x}_{OC} = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const.$

თუ საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, მაშინ

$$\dot{x}_{OC} = 0 = \dot{x}_C \Rightarrow x_c = const,$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში სისტემის მასათა ცენტრი ამ ღერძის გასწვრივ არ გადაადგილდება. როცა $\dot{x}_{0C} \neq 0$, მაშინ მასათა ცენტრი ამ ღერძის გასწვრივ მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით.

ეს შედეგები გამოსახავენ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონს. თუ მთელი მოძრაობის პროცესში სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატები რჩება უცვლელი, მაშინ შესაძლებელია განისაზღვროს სისტემის რომელიღაც წერტილთა ან სხეულთა გადაადგილება, შევადგენთ რა შემდეგი სახის ალგებრულ განტოლებებს:.

$$\sum m_k \Delta x_k = 0, \qquad (35.5)$$

სადაც Δx_k - მექანიკურ სისტემაში სხეულების მდებარეობის ცვლილებებისას k –ური სხეულის მასათა ცენტრის კოორდინატის ნაზრდია.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

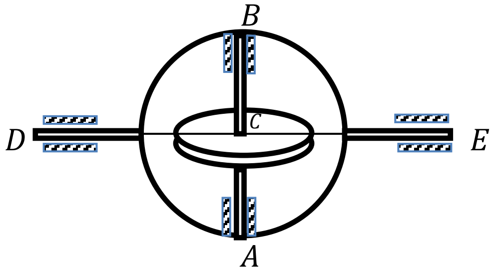
1) გამოვსახოთ მექანიკური სისტემა, ვაჩვენოთ ყველა გარე ძალა, თუ სისტემა არათავისუფალია ვაჩვენოთ ბმების შესაბამისი რეაქციის ძალები;
2) მოცემული საანგარიშო სქემისათვის ჩავწეროთ მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა რაიმე ფორმით (ფორმულა (35.3));
3) ავარჩიოთ უძრავი კოორდინატთა სისტემის ღერძები;
4) ჩავწეროთ მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორმა გეგმილებში ამ ღერძებიდან ერთ-ერთძე (იხ. ორმულა (35.4));
5) რომელიმე გარე ძალის განსაზღვრის აუცილებლობის შემთხვევაში გამოვსახოთ იგი მე-4 პუნქტში მიღებული განტოლებებიდან;
6) (25.1) ფორმულების გამოყენებით განვსაზღვროთ მასათა ცენტრის კოორდინატები ან მოძრაობის განტოლება. მასათა ცენტრის სიჩქარის ან აჩქარების განსაზღვრისას, საჭიროა ამ განტოლებების დიფერენცირება;
7) მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონის განსასაზღვრავად შევადგინოთ (35.4) სახის დიფერენციალური განტოლებები, შემდეგ ვაინტეგროთ ისინი წინასწარ განვსაზღვრავთ რა მასათა ცენტრის მოძრაობისათვის საწყის პირობებს:

   როცა $t = 0$: $x_{0C},\ y_{0C}, z_{0C}, \dot{x}_{0C}, \dot{y}_{0C}, \dot{z}_{0C}$.
8) მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონზე ამოცანების ამოხსნისას აუცილებელია შევასრულოთ 1-4 პუნქტების მითითებები; დავასაბუთოთ მასათა ცენტრი იქნება უძრავი თუ იმოძრავებს თანაბრად; ვაჩვენოთ სისტემის საწყის მდებარეობაში სხეულების სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, განვსაზღვროთ მათი ნაზრდები, შემდეგ შევადგინოთ (35.5) სახის განტოლებები და განვსაზღვროთ რომელიღაც სხეულის გადაადგილება იმ პირობით, რომ სისტემის მასათა ცენტრი უძრავია;
9) ამოცანის ამოხსნა აუცილებელია წარმოვადგინოთ ზოგადი სახით, ხოლო აუცილებლობის შემთხვევაში საძიებელი სიდიდეების გამოსახულებებში ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 35.1

განსაზღვრეთ AB ღერძის გარშემო მბრუნავ M მქნევარაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი. წრიულ ჩარჩოში ჩამაგრებული AB ღერძი, თავის მხრივ, ბრუნავს DE ღერძის გარშემო. მქნევარას მასათა ცენტრი C მდებარეობს AB და DE ღერძების გადაკვეთის წერტილში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ თეორემამექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ:

$$M\ddot{\vec{r}}_C = \sum \vec{F}_k^{(e)}.$$

მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის რადიუს-ვექტორი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k.}{\sum m_k}$$

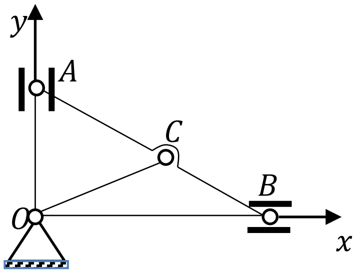
რადგან მოძრაობის პროცესში მქნევარას მასათა ცენტრის მდებარეობა არ იცვლება (ეს არის C წერტილი), ამიტომ $\vec{r}_C =0$, შესაბამისად

$$\sum \vec{F}_k^{(e)} = 0,$$

ე.ი. გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

ამოცანა 35.2



განსაზღვრეთ ნახაზზე გამოსახული ელიფსოგრაფის AB სახაზავზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები ვექტორი. OC მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით, AB სახაზავის მასაა M, OC=AC=BC=l.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ:

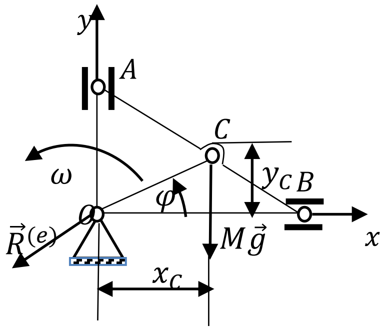
$$M\vec{r}_C = \sum \vec{F}_k^{(e)}. \qquad (1)$$

რადიუს-ვექტორის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე (იხ. ნახაზი) ვიპოვით შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \qquad (2)$$

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \qquad (3)$$

$$\varphi = \omega t. \qquad (4)$$



რადგან მოცემულია მხოლოდ AB სახაზავის მასა, ამიტომ

$$x_C = \frac{M \cdot OC \cdot cos\omega t}{M} = \ell cos\omega t,$$

$$y_C = \ell sin\omega t.$$

თუ ვიპოვით x_c და y_C გამოსახულებების მეორე რიგის წარმოებულებს, მივიღებთ მასათა ცენტრის აჩქარების გეგმილებს

$$\ddot{x}_C = -\ell\omega^2 cos\omega t,$$

$$\ddot{y}_C = -\ell\omega^2 sin\omega t.$$

მაშინ გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე იქნება

$$R_x^{(e)} = M\ddot{x}_C = -M\ell\omega^2 cos\omega t,$$

$$R_y^{(e)} = M\ddot{y}_C = -M\ell\omega^2 sin\omega t,$$

ხოლო გარე ძალების ნაკრები ვექტორის მოდულია:

$$R^{(e)} = \sqrt{\left(R_x^{(e)}\right)^2 + \left(R_y^{(e)}\right)^2} = M\ell\omega^2\sqrt{cos^2\omega t + sin^2\omega t} = M\ell\omega^2.$$

მიმართულების კოსინუსია

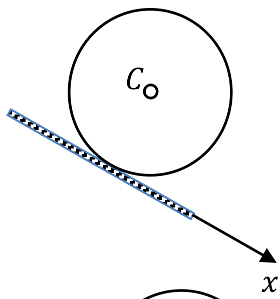
$$cos\alpha = \frac{R_x^{(e)}}{R^{(e)}} = -cos\omega t,$$

ე.ი. α =180^0-φ, სადაც φ=ωt.

ეს ნიშნავს, რომ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი მიმართულია OC-ს გასწვრივ

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> გარე ძალების ნაკრები ვექტორი მიმართულია OC-ს გასწვრივ და მოდულით ტოლია $M\ell\omega^2$.

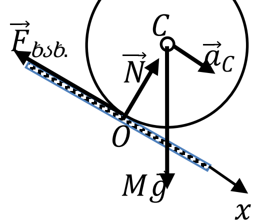
ამოცანა 35.3



განსაზღვრეთ დახრილ სიბრტყეზე ქვევით მგორავი M მასის ბორბალზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი, თუ მისი მასათა C ცენტრი მოძრაობს კანონით $x_C = at^2/2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}.$$



რადგან მასათა ცენტრის მოძრაობის ტრაექტორია Ox ღერძის პარალელური წრფეა (იხ. ნახაზი), ამიტომ

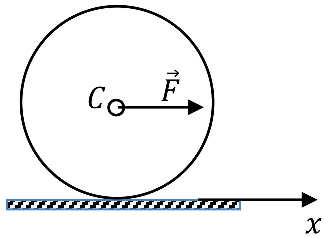
$$\sum F_{kx}^{(e)} = R^{(e)},$$

ე.ი. გარე ძალების ნაკრები ვექტორის ტოლია. გამოვთვალოთ მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლების მეორე რიგის წარმოებული დროით: $\ddot{x}_C = a$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (1) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ, რომ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ტოლია Ma..

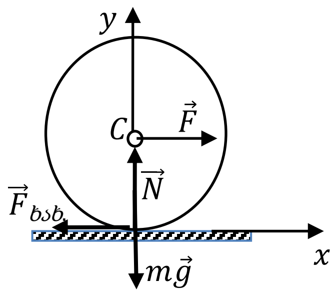
მასათა ცენტრის აჩქარება მიმართულია Ox ღერძის პარალელურად, რამდენადაც გარე ძალების ნაკრებ ვექტორს აქვს აჩქარების მიმართულება, ამდენად ისიც მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> გარე ძალების ნაკრები ვექტორი Ox ღერძის პარალელურია და მოდულით უდრის Ma..

ამოცანა 35.4



ნახაზზე გამოსახული ბორბალი სრიალით მიგორავს ჰორიზონტალური წრფის გასწვრივ ძალის მოქმედებით. ვიპოვოთ ბორბლის მასათა C ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტაი f, ხოლო $F=5fP$, სადაც P -ბორბლის წონაა. საწყის მომენტში ბორბალი იმყოფებოდა უძრავ მდგომარეობაში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ბორბალზ ემოქმედი ძალები: $m\vec{g}$- ბორბლის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ – ნორმალური რეაქცია, $\vec{F}_{ხახ.}$- სრიალის ხახუნის ძალა.

ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ Ox და Oy ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = F - F_{ხახ}, \tag{1}$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)} = N - mg. \tag{2}$$

რადგან $y_C = r = const$, ამიტომ $\ddot{y}_C = 0$, ე.ი

$$N = mg,$$

$$F_{ხახ} = fN = fmg = fP.$$

ხახუნის ძალის მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) განტოლებაში და განვსაზღვროთ $\ddot{x}_C$:

$$m\ddot{x}_C = F - F_{ხახ} = 5fP - fP = 4fP,$$

$$\ddot{x}_C = \frac{4fP}{m} = 4fg. \tag{3}$$

(3) გამოსახულება ვაინტეგროთ ორჯერ. დავწეროთ

$$\frac{d\dot{x}_C}{dt} = 4fg,$$

ან

$$d\dot{x}_C = 4fgdt, \tag{4}$$

საიდანაც მივიღებთ;

$$\dot{x}_C = 4fgt + C_1. \qquad (5)$$

ინტეგრების C_1 მუდმივს განვსაზღვრავთ საწყისი პირობიდან:

$$t = 0, \dot{x}_{0C} = 0, C_1 = 0.$$

თუ ანალოგიური წესით ვაინტეგრებთ (5) გამოსახულებას და გავითვალისწინებთ, რომ

$$C_1 = 0,$$

მივიღებთ:

$$\frac{dx_C}{dt} = 4fgt$$

ან

$$dx_C = 4fgtdt,$$

$$x_C = \frac{4fgt^2}{2} + C_2 = 2fgt^2 + C_2.$$

ინტეგრების C_2 მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობიდან

$$t = 0, x_{0C}=0;\ C_2 = 0.$$

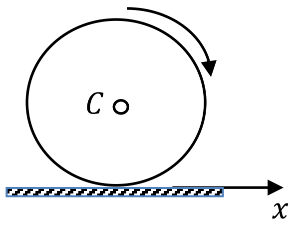
შესაბამისად, მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონს ექნება შემდეგი სახე

$$x_C = 2fgt^2.$$

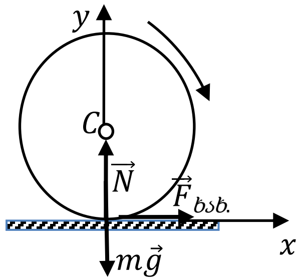
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x_C = 2fgt^2$.

ამოცანა 35.5

ბორბალი სრიალით მიგორავს ჰორიზონტალური წრფის გასწვრივ მასზე მოდებული მაბრუნებელი მომენტისს მოქმედებით. ვიპოვოთ ბორბლის მასათა C ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტაი f, საწყის მომენტში ბორბალი იმყოფებოდა უძრავ მდგომარეობაში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ბორბალზე მოქმედი ძალები: $m\vec{g}$ – ბორბლის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ – ნორმალური რეაქცია, $\vec{F}_{ხახ.}$ – სრიალის ხახუნის ძალა. ბორბლის მასათა C ცენტრი მოძრაობს წრფივად.



ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ Ox და Oy ღერძებზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = \vec{F}_{ხახ.}, \quad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)} = N - mg. \quad (2)$$

რადგან $y_C = R = const$ (R -ბორბლის რადიუსია), ამიტომ . (2) განტოლებიდან გამომდინარეობს რომ

$$N = mg, .$$

მაშინ

$$F_{ხახ} = fN = fmg.$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$m\ddot{x}_C = fmg$$

ან

$$\ddot{x}_C = fg.$$

მიღებული განტოლება ვაინტეგროთ ორჯერ. ინტეგრების მუდმივები ვიპოვოთ საწყისი პირობებიდან:

$$t = 0, x_{C0} = 0, \dot{x}_{C0} = 0.$$

მივიღებთ:

$$\dot{x}_C = fgt + C_1, \quad C_1 = 0.$$

მაშასადამე

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = fgt$$

ან

$$dx_C = fgtdt.$$

ინტეგრების შემდეგ

$$x_C = \frac{fgt^2}{2} + C_{2.}$$

საწყისი პირობების გამოყენებით მივიღებთ, რომ $C_2 = 0$.. შესაბამისად, ბორბლის მასათა C ცენტრის მოძრაობის კანონს აქვს სახე

$$x_C = \frac{fgt^2}{2}.$$

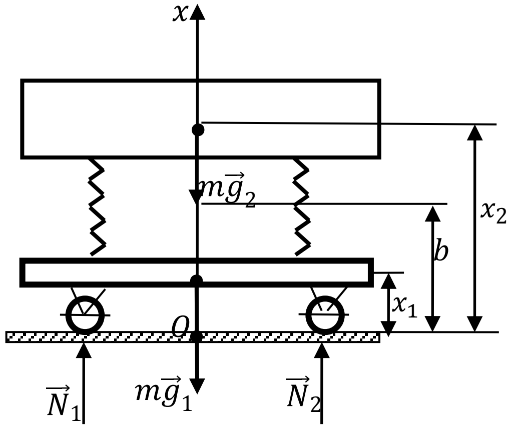
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $x_C = \frac{fgt^2}{2}$.

ამოცანა 35.6

ტრამვაის ვაგონი ასრულებს რესორებზე ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას 2,5სმ ამპლიტუდით და T =0,5წმ პერიოდით. ვაგონის ძარა ტვირთით იწონის 10ტ.-ს, ურიკა თვლებთან ერთად 1ტ.-ს. განსაზღვრეთ ვაგონის წნევა რელსებზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ

$$M\vec{a}_C = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2,$$



სადაც

$$M = m_1 + m_2$$

ჩავწეროთ ეს თეორემა Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი)

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_C = -(m_1 + m_2)g + N,$$

სადაც

$$N = N_1 + N_{2.}.$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$N = (m_1 + m_2)(g + \ddot{x}_C)$$

ვიპოვოთ მთელი სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლება

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

სადაც

$$x_1 = const; \quad x_2 = a \cdot sin\omega t + b.$$

რადგან ვაგონი ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევებს, ამიტომ $b = const.$

რხევის სიხშირეა

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

ამპლიტუდა-

$$a = 2,5\text{სმ} = 0.025\text{მ}.$$

ვიპოვოთ სისტემის მასათა ცენტრის აჩქარება

$$\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} a\omega^2 sin\omega t.$$

რადგან

$$|sin\omega t| \leq 1,$$

ამიტომ

$$\ddot{x}_{Cmax} = \pm \frac{m_2 a\omega^2}{m_1 + m_2}$$

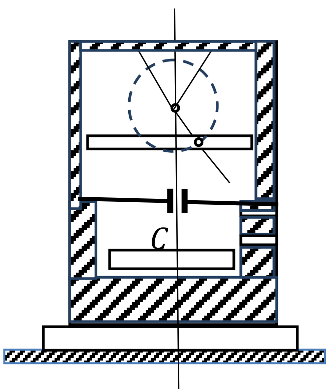
მასათა ცენტრის აჩქარების ნიშნის მიხედვით წნევის მნიშვნელობა იქნება მინიმალური ან მაქსიმალური:

$$N_{min} = (m_1 + m_2)g - m_2 a\omega^2 = 107,8 \cdot 10^3 - 39,5 \cdot 10^3 = 68,3\ (\text{კნ})$$

$$N_{max} = (m_1 + m_2)g + m_2 a\omega^2 = (1 + 10)9,8 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 0,025 \cdot 16\pi^2 = 147,3\ (\text{კნ})$$

პ ა ს უ ხ ი: 68,3-დან 147,3კნ-მდე.

ამოცანა 35.7



განსაზღვრეთ გრუნტზე წყლის ტუმბოს წნევა მისი უქმი მუშაობისას, თუ D კორპუსის უძრავი ნაწილებისა და E საძირკვლის მასა არის M_1, $OA=a$ მრუდმხარას მასა – M_2, B კულისას და C დგუშის მასა კი- M_3. OA მრუდმხარა, რომელიც ბრუნავს თანაბრად ω კუთხური სიჩქარით, ჩათვალეთ ერთგვაროვან ღეროდ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ტუმბოზე მოქმედი ძალები: $M_1\vec{g}$ - D

კორპუსის და E საძირკველის სიმძიმის ძალა, $M_2\vec{g}$ -OA მრუდმხარას სიმძიმის ძალა, $M_3\vec{g}$- B კულისისა და C დგუშის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$- საძირკველის რეაქციის ძალა.

ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ

$$M\vec{a}_C = (M_1 + M_2 + M_3)\vec{g} + \vec{N}. \qquad (1)$$

Ox ღერძზე დაგეგმილებით, მივიღებთ:

$$M\ddot{x}_C = (M_1 + M_2 + M_3)g + N, \qquad (2)$$

აქედან საძირკველის რეაქციის ძალა

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - M\ddot{x}_C, \qquad (3)$$

სადაც

$$M = M_1 + M_2 + M_3.$$

ვიპოვოთ სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლება:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \quad (4)$$

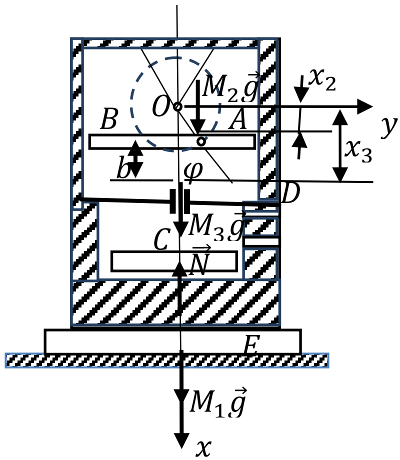
სადაც

$$x_1 = \ell = const-$$

D კორპუსის და E საძირკველის მასათა ცენტრის კოორდინატია,

$$x_2 = \frac{a}{2}cos\varphi = \frac{a}{2}cos\omega t -$$

OA მრუდმხარას მასათა ცენტრის კოორდინატია,



$$x_3 = acos\omega t + b \quad (b - \text{მუდმივია}) -$$

კულისის და დგუშის მასათა ცენტრის კოორდინატია.

თუ გამოვთვლით (4) ტოლობის მეორე რიგის წარმოებულს, მივიღებთ:

$$\ddot{x}_c = \frac{M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + M_3\ddot{x}_3}{M_1 + M_2 + M_3} = -\frac{(M_2 + 2M_3)a\omega^2}{2(M_1 + M_2 + M_3)}cos\omega t. \qquad (5)$$

(5) ფორმულის გათვალისწინებით (3) ფორმულიდან

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - (M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x}_c =$$
$$= (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{a\omega^2}{2}(M_2 + 2M_3)cos\omega t.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{a\omega^2}{2}(M_2 + 2M_3)cos\omega t.$$

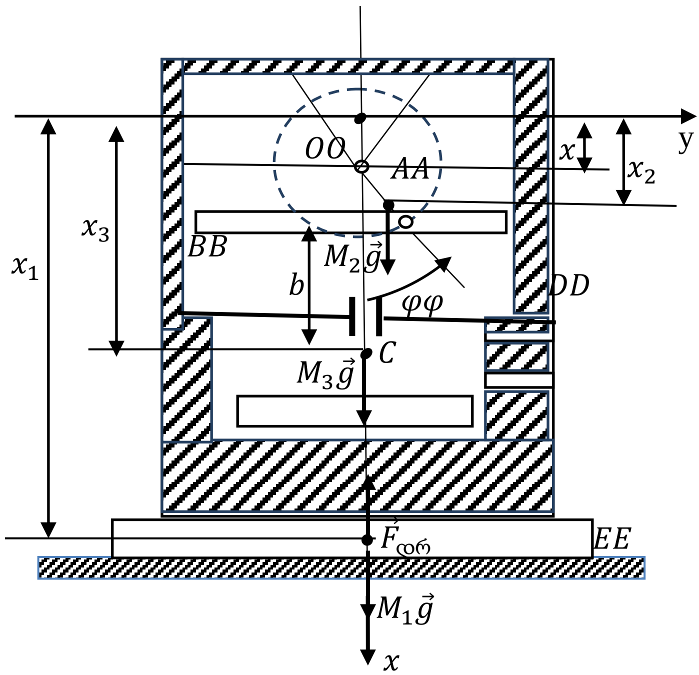
ამოცანა 35.8

ისარგებლეთ წინა ამოცანის პირობებით და ჩათვალეთ, რომ ტუმბო დადგმულია c სიხისტის მქონე დრეკად საძირკველზე. იპოვეთ OA მრუდმხარას O ღერძის ვერტიკალზე მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში O ღერძი სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაშია და მას მიანიჭეს v_0 საწყისი სიჩქარე ვერტიკალურად ქვემოთ. x .ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ, სათავე ემთხვევა სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას. წინააღმდეგობის ძალები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = (M_1 + M_2 + M_3)g - F_{დრ} \quad , \qquad (1)$$

სადაც $\vec{F}_{დრ} = c\left(x + f_{სტ}\right).$



$\vec{F}_{დრ}$ — ის მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) განტოლებაში და გავითვალისწინოთ, რომ

$$f_{სტ} = \frac{(M_1+M_2+M_3)g}{c},$$

მაშინ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$M\ddot{x}_C = -cx. \tag{2}$$

განვსაზღვროთ მექანიკურ სისტემაში შემავალი სხეულების მასათა ცენტრის კოორდინატები:

$$x_1 = \ell + x, \quad \ell = const;$$
$$x_2 = \frac{a}{2}cos\omega t + x;$$
$$x_3 = b + acos\omega t + x.$$

ჩავწეროთ მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლება Ox ღერძის გასწვრივ:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$\frac{M_1(\ell + x) + M_2\left(\frac{a}{2}cos\omega t + x\right) + M_3(x_3 = b + acos\omega t + x)}{M_1 + M_2 + M_3}. \tag{3}$$

თუ გამოვთვლით (3) გამოსახულების მეორე რიგის წარმოებულს დროით, ვიპოვით მასათა ცენტრის აჩქარების გეგმილს Ox ღერძზე-

$$\ddot{x}_c = \frac{M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + M_3\ddot{x}_3}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= -\frac{(M_2 + 2M_3)a\omega^2}{2(M_1 + M_2 + M_3)}cos\omega t + \frac{M_1 + M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\ddot{x}. \tag{4}$$

ჩავსვათ (4) გამოსახულება (2) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\ddot{x} + \frac{c}{M_1 + M_2 + M_3}x = \frac{(M_2 + 2M_3)a\omega^2}{2(M_1 + M_2 + M_3)}cos\omega t. \tag{5}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$k^2 = \frac{c}{M_1 + M_2 + M_3},$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}\frac{a\omega^2}{2}.$$

ჩავსვათ ეს აღნიშვნები (5) განტოლებაში, მივიღებთ O ღერძის მოძრაობის განტოლებას Ox ღერძის გასწვრივ:

$$\ddot{x} + k^2 x = hcos\omega t. \quad (5^{\bullet})$$

ეს არის არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$x = \bar{x} + x^{\bullet},$$

სადაც $\bar{x}$ - ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი; $x^{\bullet}$ -არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) როცა $k \neq \omega$, მაშინ

$$\overline{x} = C_1 coskt + C_2 sinkt,\ x^* = Acos\omega t, \quad \ddot{x}^* = -A\omega^2 cos\omega t.$$

ჩავსვათ $\ddot{x}^*$-ის მნიშვნელობა ($5^{\bullet}$) განტოლებაში:

$$-A\omega^2 cos\omega t + k^2 Acos\omega t = hcos\omega t$$

და მიღებული გამოსახულებიდან ვიპოვოთ A:

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}.$$

მაშასადამე,

$$x^* = \frac{h}{k^2 - \omega^2} cos\omega t.$$

მაშინ

$$x = \overline{x} + x^* = C_1 coskt + C_2 sinkt + \frac{h}{k^2-\omega^2} cos\omega t, \quad (6)$$

$$\dot{x} = -C_1 ksinkt + C_2 kcoskt - \frac{h\omega}{k^2-\omega^2} sin\omega t. \quad (7)$$

C_1 და C_2 ინტეგრების მუდმივებს ვიპოვით საწყისი პირობებით:

$$t = 0, \qquad x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = v_0.$$

(6)-დან განტოლებიდან

$$x = x_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - \omega^2} = 0 \Longrightarrow C_1 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}.$$

(7)-დან განტოლებიდან

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 = C_2 k \Longrightarrow C_2 = \frac{v_0}{k},$$

მაშინ

$$x = -\frac{h}{k^2 - \omega^2} coskt + \frac{v_0}{k} sinkt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} cos\omega t.$$

2) როცა $k = \omega$. მაშინ როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგადი თეორიიდან არის ცნობილი, (5*) ამონახსნი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$x = (At + B)coskt + (Ct + D)sinkt. \tag{8}$$

ვიპოვოთ x-ის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები დროით:

$$\dot{x} = Acoskt - k(At + B)sinkt + Csinkt + (Ct + D)k\,coskt, \tag{9}$$
$$\ddot{x} = -Aksinkt - k^2(At + B)coskt - kAsinkt + Ck\,coskt -$$
$$-(Ct + D)k^2sinkt + Ck\,coskt.$$

ეს გამოსახულებები ჩავსვათ (5*) განტოლებაში:

$$-Aksinkt - k^2(At + B)coskt - kAsinkt + Ck\,coskt -$$
$$+Ck\,coskt - (Ct + D)k^2sinkt + Ck\,coskt + k^2(At + B)coskt$$
$$+ (Ct + D)k^2sinkt = hcoskt,$$
$$-2Aksinkt + 2Ck\,coskt = hcoskt.$$

რადგან $sinkt$ და $coskt$ სიდიდეებთან მდგომი კოეფიციენტები ტოლობის სხვადსხვა მხარეს უნდა იყოს ტოლი, ამიტომ

$$2Ck = h \Longrightarrow C = \frac{h}{2k},$$
$$-2Ak = 0 \Longrightarrow A = 0.$$

B და D მუდმივებს ვიპოვით (8) და (9) განტოლებებიდან შემდეგი საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t = 0,\ x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = v_0$.

$$x_0 = B = 0 \Longrightarrow B = 0,$$
$$\dot{x}_0 = v_0 = A + Dk \Longrightarrow C = \frac{v_0 - A}{k} = \frac{v_0}{k}.$$

ჩავსვათ A, B, C და D მუდმივები (8) ფორმულაში და ჩავწეროთ ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$x = \left(\frac{h}{2k}t + \frac{v_0}{k}\right)sinkt$$

ან ვიცით რა, რომ $k = \omega$, მაშინ

$$x = \frac{v_0}{\omega}sin\omega t + \frac{h}{2\omega}tsin\omega t.$$

პ ა ს უ ხ ი: 1) როცა

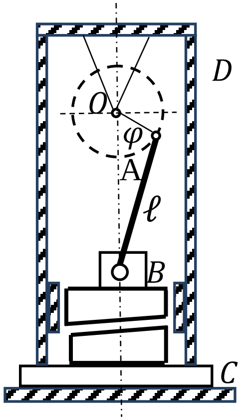
$$\frac{c}{M_1 + M_2 + M_3} \neq \omega^2,$$

$$x = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}coskt + \frac{v_0}{k}sinkt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}cos\omega t.$$

2) როცა

$$\frac{c}{M_1 + M_2 + M_3} = \omega^2,$$
$$x = \frac{v_0}{\omega} sin\omega t + \frac{h}{2\omega} tsin\omega t.$$

ამოცანა 35.9

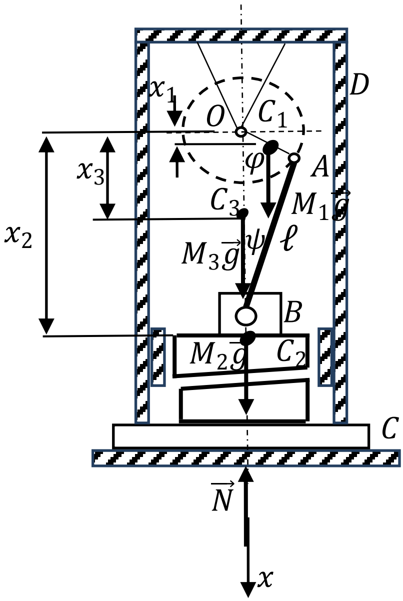


ლითონის საჭრელი მაკრატელი შედგება მრუდმხარა-ბარბაცა OAB მექანიზმისაგან, რომლის B ცოციაზე მიმაგრებულია მოძრავი დანა. უძრავი დანა დამაგრებულია C საძირკველზე. იპოვეთ საძირკველის წნევა გრუნტზე, თუ მრუდმხარას სიგრძე არის r და მასა M_1, ბარბაცას სიგრძეა ℓ, B ცოციას მასა მოძრავ დანასთან ერთად არის M_2, C საძირკველის და D კორპუსის მასა არის M_3, OA მრუდმხარა, რომელიც თანაბრად ბრუნავს Ω კუთხური სიჩქარით, ჩათვალეთ ერთგვაროვან ღეროდ. ბარბაცას მასაუგულებელყოფილია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოსახულება

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell} sin\omega t\right)^2}$$

უნდა დაიშალოს მწკრივად და უგულებელვყოთ $\frac{r}{\ell}$ შეფარდების შემცველი ყველა წევრი, რომლის ხარისხი ორზე მეტია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოქმედი აქტიური ძალები: მანქანის ყველა ნაწილის სიმძიმის ძალა- $M_1\vec{g}, M_2\vec{g}, M_3\vec{g}$, და შესაბამისად მათი მოდების წერტილები C_1 , C_2, C_3, ასევე საძირკველის $\vec{N}$ რეაქციის ძალა.

ჩავწეროთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ

Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = (M_1 + M_2 + M_3)g - N. \qquad (1)$$

(1) განტოლებიდან განვსაზღვროთ N :

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - M\ddot{x}_C. \qquad (2)$$

N – ის განსასაზღვრავათ აუცილებელია ვიცოდეთ მასათა ცენტრის აჩქარების გეგმილები Ox ღერძზე. განვიხილოთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმი.

რადგან $\omega = const$, ამიტომ $\varphi = \omega t$, და C_1, C_2, C_3, მასათა ცენტრის კოორდინატებია (იხ. ნახაზი):

$$x_1 = \frac{OA}{2}cos\omega t = \frac{r}{2}cos\omega t, \qquad (3)$$

$$x_2 = OA \cdot cos\omega t + AB \cdot cos\psi + BC_2 \;\; (BC_2 = const), \qquad (4)$$

$$x_3 = OC_3 = const. \qquad (5)$$

ΔOAB-დან სინუსების თეორემით განვსაზღვროთ დამოკიდებულება φ და ψ კუთხეებს შორის:

$$\frac{sin\psi}{sin\omega t} = \frac{r}{\ell},$$

ან

$$sin\psi = \frac{r}{\ell}\, sin\omega t$$

მაშინ

$$cos\psi = \sqrt{1 - sin^2\psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\, sin\omega t\right)^2}. \qquad (6)$$

ჩავსვათ (6) გამოსახულება (4) ფორმულაში, მივიღებთ;

$$x_2 = rcos\omega t + \ell cos\psi + BC_2 = rcos\omega t + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\, sin\omega t\right)^2} + BC_2.$$

გამოსახულება

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell} sin\omega t\right)^2}$$

გავშალოთ მწკრივად. გავითვალისწინოთ, რომ $\frac{r}{\ell}$ წესიერი წილადია და უგულებელვყოთ წევრები, რომლებიც შეიცავენ $\frac{r}{\ell}$ -ს 2-ზე მაღალი ხარისხებს, მაშინ

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\, sin\omega t\right)^2} = \left[1 - \left(\frac{r}{\ell}\, sin\omega t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\ell^2} sin^2\omega t.$$

მაშასადამე,

$$x_2 = rcos\omega t + \ell\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\ell^2}sin^2\omega t\right) + \ BC_2,$$

ვიცით, რა რომ

$$sin^2\omega t = \frac{1-cos2\omega t}{2},$$

მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$x_2 = \ell + \frac{r^2}{4}\ell + r\left(cos\omega t + \frac{1}{4}\frac{r}{\ell}cos2\omega t\right) + BC_2. \qquad (7)$$

გამოვთვალოთ (3),(5) და (7) გამოსახულებების მეორე რიგის წარმოებულები:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{r\omega^2}{2}cos\omega t,$$

$$\ddot{x}_2 = r\omega^2\left(cos\omega t + \frac{1}{4}\frac{r}{\ell}cos2\omega t\right),$$

$$\ddot{x}_3 = 0.$$

რადგან

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

ამიტომ

$$\ddot{x}_c = \frac{M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + M_3\ddot{x}_3}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{-M_1\frac{r\omega^2}{2}cos\omega t - M_2r\omega^2\left(cos\omega t + \frac{r}{\ell}cos2\omega t\right)}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{-\frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1 + 2M_2)cos\omega t + 2M_2\frac{r}{\ell}cos2\omega t\right]}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

თუ $\ddot{x}_c$-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ (2) განტოლებაში, ვიპოვით:

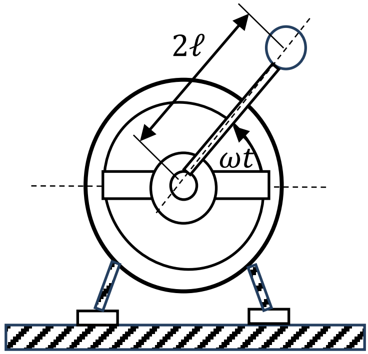
$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g +$$

$$+\frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1 + 2M_2)cos\omega t + 2M_2\frac{r}{\ell}cos2\omega t\right].$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $N = (M_1 + M_2 + M_3)g +$

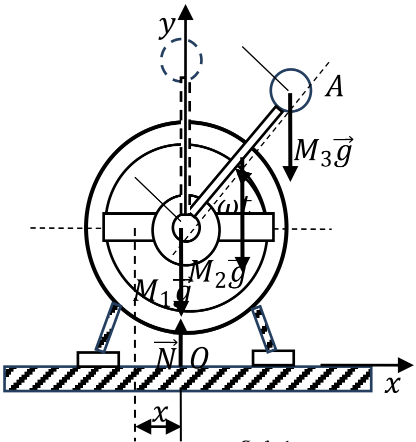
$$+\frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1 + 2M_2)cos\omega t + +2M_2\frac{r}{\ell}cos2\omega t\right].$$

ამოცანა 35.10



M_1 მასის ელექტროძრავი დამაგრების გარეშე დგას ჰორიზონტალურ საძირკველზე. ძრავის ლილვზე მართი კუთხით მიმაგრებულია 2ℓ სიგრძის და M_2 მასის ერთგვაროვანი ღეროს ერთი ბოლო, ხოლო მეორე ბოლოზე ჩამოცმულია M_3 მასის წერტილოვანი ტვირთი. თვლის კუთხური სიჩქარე არის ω. განსაზღვრეთ: 1) ძრავის ჰორიზონტალური მოძრაობა; 2) უდიდესი ჰორიზონტალური R ძალვა, რომელიც მოქმედებს ჭანჭიკებზე, თუ მათი საშუალებით ძრავის გარსაცმი დამაგრებული იქნება საძირკველზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახ.1-ზე ძრავის თითოეულინაწილის სიმძიმის ძალა-$M_1\vec{g}, M_2\vec{g}$, $M_3\vec{g}$ და საძირკველის ჯამური $\vec{N}$ რეაქციის ძალა. 1) თუ ძრავი არ არის დამაგრებული საძირკველზე, მაშინ ღეროს (წერტილოვანი მასით) მოძრაობისას ელექტროძრავის კორპუსი დაიწყებს მოძრაობას. აღვნიშნოთ მისი გადაადგილება x -ით და დავწეროთ მასათა ცენტრის აბსცისას გამოსათვლელი ფორმულა:



ნახ.1

$$x_{C_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} =$$

$$= \frac{M_1(-x) + M_2(\ell cos\omega t - x) + M_3(2\ell cos\omega t - x)}{M_1 + M_2 + M_3}. \qquad (1)$$

თუ ღერო წერტილოვანი მასით დაიკავებს ვერტიკალურ მდებარეობას, მაშინ მასათა ცენტრის კოორდინატი x ღერძის გასწვრივ $x_{C_2} = 0$.

რადგან გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილი x ღერძზე ნულის ტოლია, ამიტომ მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემის თანახმად შეიძლება დავწეროთ $x_{C_1} = \quad x_{C_2} = 0$. თუ გავუტოლებთ (1) გამოსახულებას ნულს, ვიპოვით x -ს(ძრავის ჰორიზონტალურ მოძრაობას):

$$\frac{M_1(-x) + M_2(\ell cos\omega t - x) + M_3(2\ell cos\omega t - x)}{M_1 + M_2 + M_3} = 0$$

ანუ

$$\ell cos\omega t(M_2 + 2M_3) = x(M_1 + M_2 + M_3).$$

საიდანაც

$$x = \frac{\ell cos\omega t(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

ე.ი. ძრავი ასრულებს ჰარმონიულ რხევებს

$$\frac{\ell(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

ამპლიტუდით და

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

პერიოდით.

2) თუ ძრავი დამაგრებულია საძირკველზე, მაშინ ჭანჭიკებზე მოქმედებს ძალა $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ (იხ. ნახ..2).

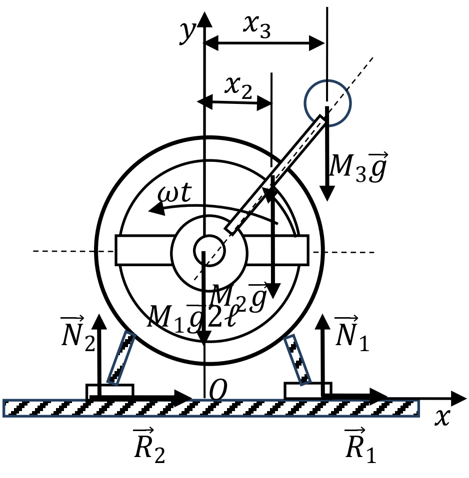
ვიპოვოთ მასათა ცენტრის კოორდინატი:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2 \cdot \ell cos\omega t + M_3 \cdot 2\ell cos\omega t}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{\ell cos\omega t(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

და მასათა ცენტრის აჩქარების გეგმილი x ღერძზე

$$\ddot{x}_C = \frac{-(M_2+2M_3)\ell\omega^2 cos\omega t}{M_1+M_2+M_3}. \quad (2)$$



ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა x ღერძზე გეგმილებში:

$$(M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x}_C =$$

$$= \sum F_{kx}^{(e)} = R. \quad (3)$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება (3) ფორმულაში. მივიღებთ:

$$-(M_2 + 2M_3)\ell\omega^2 cos\omega t = R.$$

R -ის მნიშვნელობა იქნება უდიდესი, როცა $cos\omega t = 1$, ე.ი.

$$R = (M_2 + 2M_3)\ell\omega^2$$

პასუხი: 1) ჰარმონიული რხევა

$$\frac{\ell(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

ამპლიტუდით და

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

პერიოდით; ნახ..2

2)

$$R = (M_2 + 2M_3)\ell\omega^2$$

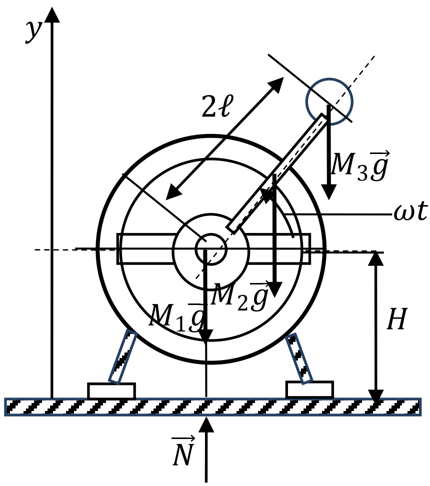
ამოცანა 35.11

წინა ამოცანის პირობების მიხედვით გამოთვალეთ ის ω კუთხური სიჩქარე, რომელიც უნდა ჰქონდეს ელექტროძრავას ლილვს, რომ ელექტროძრავა, საძირკველზე ჭანჭიკებით დაუმაგრებლად, იწყებდეს მასზე ხტომას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ მთელი სისტემის მასა:

$$M = M_1 + M_2 + M_3.$$

y ღერძის გასწვრივ მასათა ცენტრის კოორდინატებია (იხ. ნახაზი):



$$y_{C_1} = H,$$
$$y_{C_2} = H + \ell sin\omega t,$$
$$y_{C_3} = H + 2\ell sin\omega t,$$

მაშინ

$$\begin{cases} \ddot{y}_{C_1} = 0, \\ \ddot{y}_{C_2} = -\ell\omega^2 sin\omega t\ , \\ \ddot{y}_{C_3} = -2\ell\omega^2 sin\omega t. \end{cases} \quad (1)$$

(35.1) ფორმულებიდან ერთ-ერთის თანახმად

$$y_C = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} =$$
$$= \frac{M_1 H + M_2(\ell sin\omega t + H) + M_3(2\ell cos\omega t + H)}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა y ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}.$$

(1) გამოსახულებების გათვალისწინებით ჩავწერთ

$$M\ddot{y}_C = -M_2 \ell \omega^2 sin\omega t - 2M_3 \ell \omega^2 sin\omega t = -Mg + N.$$

საიდანაც

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - \ell\omega^2(M_2 + 2M_3)sin\omega t.$$

წნევის ძალა უმცირესი იქნება იმ შემთხვევაში, როცა $sin\omega t = 1$, ე.ი.

$$N_{min} = (M_1 + M_2 + M_3)g - \ell\omega^2(M_2 + 2M_3).$$

ელექტროძრავი იხტუნავებს მაშინ, როცა $N_{min} < 0$:

$$(M_1 + M_2 + M_3)g - \ell\omega^2(M_2 + 2M_3) < 0,$$

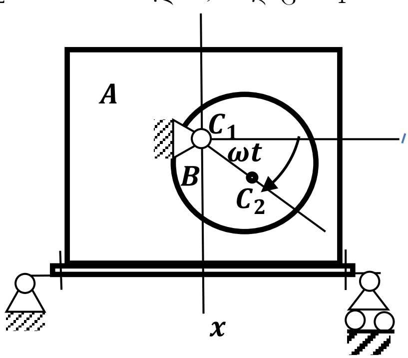
ე.ი. როცა

$$\omega > \sqrt{\frac{(M_1+M_2+M_3)g}{\ell(M_2+2M_3)}}.$$

<u>**პასუხი:**</u> $\omega > \sqrt{\frac{(M_1+M_2+M_3)g}{\ell(M_2+2M_3)}}.$

ამოცანა 35.12

ელექტროძრავის აწყობისას მისი B როტორი ექსცენტრულად დაცმული იყო C_1 ბრუნვის ღერძზე $C_1C_2 = a$ მანძილით, სადაც $C_1 - A$ სტატორის სიმძიმის ცენტრია, ხოლო C_2 - B როტორის სიმძიმის ცენტრი. როტორი თანაბრად ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით. ელექტროძრავა დადგმულია დრეკადი კოჭის შუაში, რომლის ჩაღუნვა უდრის Δ; M_1 არის სტატორის, ხოლო M_2 −როტორის მასა. იპოვეთ C_1 წერტილის ვერტიკალზე მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში იგი იმყოფებოდა უძრავად სტატიკური წონასწორობის



მდებარეობაში. წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია. $x-$ის ათვლის სათავედ მიიღეთ სტატიკური წონასწორობის C_1 მდებარეობა.

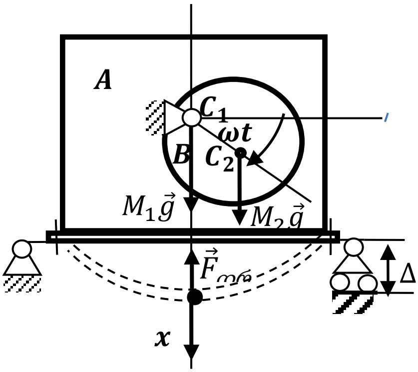
ა მ ო ხ ს ნ ა ჩავწეროთ მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა:

$$M\vec{a}_C = (M_1 + M_2)g - F_{\text{დრ.}}, \qquad (1)$$

სადაც

$$F_{\text{დრ.}} = -c\left(x + f_{\text{სტ}}\right) =$$
$$= -c(x + \Delta),$$

ამოცანის პირობის თანახმად $f_{\text{სტ}} = \Delta.$



x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახ.):

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2.$$

რადგან

$$x_1 = x; \ \ , \ \ x_2 = x + asin\omega t,$$

ამიტომ

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}; \ \ \ddot{x}_2 = \ddot{x} - a\omega^2 sin\omega t,.$$

რადგან

$$f_{\text{სტ}} = \Delta = \frac{(M_1+M_2)g}{c},$$

ამიტომ (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$M_1\ddot{x}_1 + M_2(\ddot{x}_2 - a\omega^2 sin\omega t) = (M_1 + M_2)g - c\left[x + \frac{(M_1+M_2)g}{c}\right],$$

ანუ

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - M_2 a\omega^2 sin\omega t = -cx,$$
$$\ddot{x} + \frac{c}{M_1 + M_2}x = \frac{M_2 a\omega^2}{M_1 + M_2}sin\omega t.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$k^2 = \frac{c}{M_1 + M_2},$$

$$h = \frac{M_2 a\omega^2}{M_1 + M_2}.$$

თუ მათ ჩავსვამთ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\ddot{x} + k^2 x = hsin\omega t. \qquad (3)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) როცა $k \neq \omega$, სადაც $k = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}.$

რადგან (3) განტოლება არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებაა, ამიტომ მისი ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$x = \overline{x} + x^*,$$

სადაც $\overline{x} = C_1 coskt + C_2 sinkt; \quad x^* = Asin\omega t.$

ინტეგრების მუდმივის საპოვნელად ვიპოვოთ x^*- ის მეორე რიგის წარმოებული დროით:

$$\ddot{x}^* = -A\omega^2 sin\omega t.$$

ჩავსვათ $\ddot{x}^*$-ის მნიშვნელობა (3) განტოლებაში:

$$-A\omega^2 sin\omega t + k^2 Asin\omega t = hsin\omega t$$

და მიღებული გამოსახულებიდან ვიპოვოთ A:

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}.$$

მაშინ

$$x = \overline{x} + x^* = C_1 coskt + C_2 sinkt + \frac{h}{k^2-\omega^2} sin\omega t, \tag{4}$$

$$\dot{x} = -C_1 ksinkt + C_2 kcoskt + \frac{h\omega}{k^2-\omega^2} cos\omega t, \tag{5}$$

ჩავწეროთ საწყისი პირობები:

$$t = 0, \qquad x_0 = 0, \ \dot{x}_0 = 0,$$

და მათი გათვალისწინებით ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივები:
(4) ფორმულიდან

$$x_0 = 0 = C_1;$$

(5) ფორმულიდან

$$\dot{x}_0 = 0 = k + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \Longrightarrow C_2 = -\frac{h\omega}{k(k^2 - \omega^2)}.$$

ჩავსვათ C_1 და C_2 –ის მნიშვნელობები (4) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$x = \frac{\omega}{k} \frac{h}{k^2 - \omega^2} sinkt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} sin\omega t$$

2) როცა $k = \omega$. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$x = (At + B)coskt + (Ct + D)sinkt. \tag{6}$$

ვიპოვოთ x-ის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები დროით:

$$\dot{x} = Acoskt - k(At + B)sinkt + Csinkt + (Ct + D)k\, coskt, \tag{7}$$

$$\ddot{x} = -Aksinkt - k^2(At + B)coskt - kAsinkt + Ck\, coskt -$$
$$-(Ct + D)k^2 sinkt + Ck\, coskt.$$

ეს გამოსახულებები ჩავსვათ (3) განტოლებაში, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$-2Aksinkt + 2Ck\, coskt = hsinkt.$$

რადგან $sinkt$ და $coskt$ სიდიდეებთან მდგომი კოეფიციენტები ტოლობის სხვადსხვა მხარეს უნდა იყოს ტოლი, ამიტომ

$$-2Ak = h \Longrightarrow A = -\frac{h}{2k},$$
$$2Ck = 0 \Longrightarrow C = 0.$$

ინტეგრების B და D მუდმივები ვიპოვოთ საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$t = 0, \qquad x_0 = 0, \ \ \dot{x}_0 = 0,$$

(6) და (7) ფორმულებიდან შესაბამისად მივიღებთ:

$$x_0 = 0 = B \Longrightarrow B = 0,$$

$$\dot{x}_0 = 0 = A + Dk \Longrightarrow D = -\frac{A}{k} = \frac{h}{2k^2}.$$

ინტეგრების მუდმივების ნაპოვნი მნიშვნელობები შევიტანოთ (6) ფორმულას, მივიღებთ;

$$x = -\frac{ht}{2k}coskt + \frac{h}{2k^2}sinkt.$$

რადგან $k = \omega$,

$$x = \frac{h}{2\omega^2}sin\omega t - \frac{h}{2\omega}cos\omega t.$$

<u>პასუხი:</u> 1) როცა $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \neq \omega$,

$$x = \frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}sinkt + \frac{h}{k^2-\omega^2}sin\omega t$$

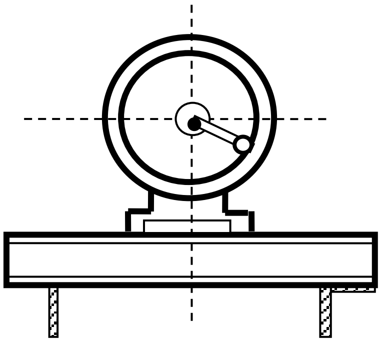
სადაც

$$k = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}, \ h = \frac{M_2}{M_1+M_2}\ a\omega^2;$$

2) როცა $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \omega$,

$$x = \frac{h}{2\omega^2}sin\omega t - \frac{h}{2\omega}cos\omega t.$$

ამოცანა 35.13



M_1 მასის ელექტროძრავა დადგმულია c სიხისტის მქონე კოჭზე, ძრავის ლილვზე ლილვიდან ℓ მანძილზე ჩამოცმულია M_2 მასის ტვირთი; ძრავის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა $\omega = const$; განსაზღვრეთ ძრავას იძულებითი რხევის ამპლიტუდა და მისი ბრუნთა რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, თუ კოჭის მასა და მოძრაობისადმი წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა x ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = (M_1 + M_2)g - F_{\text{დრ.}}, \qquad (1)$$

სადაც

$$M = M_1 + M_2,$$

$$F_{\text{დრ.}} = c\left(x + f_{\text{სტ}}\right);$$

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2.$$

რადგან

$$x_1 = x + b \ (b = const),$$

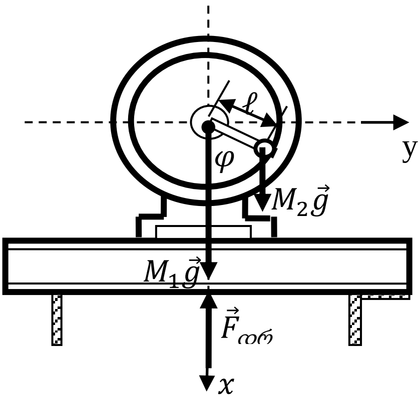
$$x_2 = \ell cos\omega t + x,$$

ამიტომ

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x},$$

$$\ddot{x}_2 = -\ell\omega^2 cos\omega t + \ddot{x}.$$

მაშინ



$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 - M_2\ell\omega^2 cos\omega t.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - M_2\ell\omega^2 cos\omega t = -cx$$

და მივიღებთ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას x -ის მიმართ:

$$\ddot{x} + \frac{c}{M_1 + M_2}x = \frac{M_2\ell\omega^2}{M_1 + M_2}cos\omega t,$$

ანუ

$$\ddot{x} + k^2x = hsin\omega t. \qquad (2)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{c}{M_1 + M_2},$$

$$h = \frac{M_2 \ell \omega^2}{M_1 + M_2}.$$

(2) დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს იძულებითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას წინააღმდეგობის გარეშე. მისი ზოგადი ამონახსნია $x = \overline{x} + x^*$, როცა $k \neq \omega$, $x^* = Acos\omega t$.

ვიპოვოთ იძულებითი რხევების ამპლიტუდა. ამისათვის ვიპოვოთ x^*-ის მეორე რიგის წარმოებული დროით:

$$\ddot{x}^* = -A\omega^2 cos\omega t.$$

x^*-ის და $\ddot{x}^*$-ის მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$-A\omega^2 cos\omega t + k^2 Acos\omega t = hcos\omega t,$$

მივიღებთ

$$a = A = \frac{h}{k^2 - \omega^2} = \frac{M_2 \ell \omega^2}{(M_1 + M_2)\left(\frac{c}{M_1 + M_2} - \omega^2\right)} = \frac{M_2 \ell \omega^2}{c - (M_1 + M_2)\omega^2}.$$

ძრავის კრიტიკულ ბრუნვათა რიცხვი $n_{კრ}$ განვსაზღვროთ რეზონანსის პირობიდან, როცა $k = \omega$:

$$\omega_{კრ} = \frac{\pi n_{კრ}}{30} = k = \sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}.$$

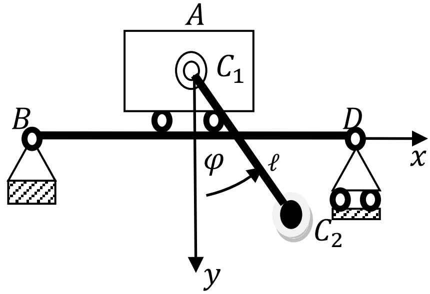
აქედან

$$n_{კრ} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}.$$

<u>**პასუხი:**</u> $a = \frac{M_2 \ell \omega^2}{c - (M_1 + M_2)\omega^2}$; $n_{კრ} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}$.

ამოცანა 35.14

ნახაზზე გამოსახულია M_1 მასის A ურიკა, რომელიც დამუხრუჭებულია BD კოჭის შუაში. ურიკის მასათა C_1 ცენტრზე მიმაგრებულია M_2 მასის და ℓ სიგრძის C_2 ტვირთი. გვარლი ტვირთთან ერთად ვერტიკალურ სიბრტყეში ასრულებს ჰარმონიულ რხევას.



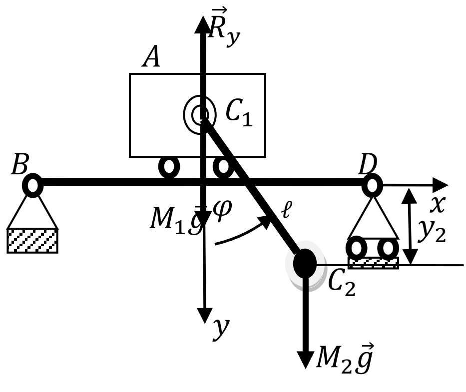
განსაზღვრეთ: 1) BD კოჭის ჯამური ვერტიკალური რეაქცია, თუ კოჭი ხისტია; 2) C_1 წერტილის მოძრაობის კანონი ვერტიკალური მიმართულებით, თუ კოჭის სიხისტის c კოეფიციენტის მქონე დრეკადი სხეულია. შაწყის მომენტში არ არის დეფორმირებული და სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში იყო. გვარლისრხევა მიიღეთ იმდენად მცირედ, რომ ჩათვალეთ $sin\varphi \approx \varphi$, $cos\varphi \approx 1$. y ღერძის ,ათვლის სათავეედ სტატიკური წონასწორობის C_1 მდებარეობა. გვარლის მასა და ურიკის ზომები, კოჭის სიგრძესთან შედარებით, უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

1) განვსაზღვროთ BD კოჭის ჯამური ვერტიკალური რეაქცია, ვთვლით რა მას ხისტად.

A ურიკითა და C_2 ტვირთით შედგენილ მექანიკრ სისტემაზე მოქმედებს ურიკას სიმძიმის ძალა $M_1\vec{g}$, ტვირთის სიმძიმის ძალა $M_2\vec{g}$, ჯამური ვერტიკალური $\vec{R}_y$ რეაქცია (ნახ.1).

ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა:



ნახ.1.

$$M\vec{a}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + \vec{R}_y. \qquad (1)$$

(1) განტოლებას y ღერძზე გეგმილებში აქვს სახე:

$$M\ddot{y}_C = (M_1 + M_2)g - R_y, \qquad (2)$$

აქედან

$$R_y = (M_1 + M_2)g - M\ddot{y}_C, \tag{3}$$

ვიპოვოთ სისტემის მასათა ცენტრის აჩქარების y ღერძზე გეგმილი. მასათა ცენტრის კოორდინატი

$$y_C = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2}$$

სადაც $y_1 = 0$; $y_2 = \ell cos\varphi$, $\ell - C_1C_2$ გვარლის სიგრძეა. მაშინ

$$y_C = \frac{M_2 \ell cos\varphi}{M}, \tag{4}$$

სადაც $M = M_1 + M_2$ -სისტემის ჯამური მასაა.

ჩავთვალოთ, რომ $\varphi = f(t)$ და ვიპოვოთ y_C-ს მეორე რიგის წარმოებული დროით:

$$\dot{y}_C = \frac{dy_C}{dt} = -\frac{M_2\ell}{M} sin\varphi \cdot \dot{\varphi}, \tag{5}$$

$$\ddot{y}_C = \frac{d^2 y_C}{dt^2} == -\frac{M_2\ell}{M} sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{M_2\ell}{M} cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

(5) ფორმულის გათვალისწინებით (3) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$R_y = (M_1 + M_2)g + M_2\ell(sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} + cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2). \tag{6}$$

ვერტიკალური რეაქციის მნიშვნელობა უდიდესია, როცა $\varphi = 0$. ამიტომ

$$R_y = (M_1 + M_2)g + M_2\ell\dot{\varphi}^2. \tag{7}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: პასუხი $R_y = (M_1 + M_2)g$ არასწორია, რადგან M_2 მასა (C_2 ტვირთი) ვერტიკალურ სიბრტყეში ასრულებს ჰარმონიულ რხევას და ამოტომ წარმოიქმნება დამატებითი წნევა, რომელიც განპირობებულია სიდიდით $M_2\ell\dot{\varphi}^2$ -ის ტოლი ცენტრიდანული ინერციის ძალის არსებობით, რაც მიღებულია წარმოდგენილ ამონახსნში. ამ ძალის სიდიდის განსასაზღვრავად ამოცანის პირობაში დამატებით მითითებული უნდა იყოს C_2 ტვირთის მოძრაობის საწყისი პირობები, ე.ი. როცა $t = 0$, მოცემული უნდა იყოს φ_0 და $\dot{\varphi}_0$.

ვთქვათ, მოცეემულია ასეთი საწყისი პირობები: $t = 0$, $\varphi_0 = 0, \dot{\varphi} = = \dot{\varphi}_0 \neq 0$.

შევადგინოთ მათემატიკური ქანქარას რხევების დიფერენციალური განტოლება. ჩავწეროთ დინამიკის მეორე კანონი τ ღერძზე გეგმილებში (ნახ.2):

$$M_2 a_\tau = -M_2 g sin\varphi,$$

სადაც a_τ -მხები აჩქარებაა

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\ell\dot{\varphi})}{dt} = \ell\ddot{\varphi}.$$

მაშინ

$$\ell\dot{\varphi} = -gsin\varphi.$$

თუ ჩავთვლით, რომ რხევები მცირეა და $sin\varphi \approx \varphi$, მაშინ მათემატიკური ქანქარას რხევების დიფერენციალური განტოლებაა

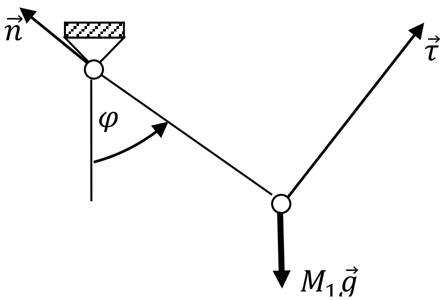
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0,$$

ანუ

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც

$k^2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ −რხევის ციკლური სიხშირეა.



ნახ.2

ამ განტოლების ამონახსნია:

$$\varphi = C_1coskt + C_2sinkt,$$

ამ გამოსახულების გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$\dot{\varphi} = -C_1ksinkt + C_2kcoskt.$$

მითითებული საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$C_1 = \varphi_0 = 0,\ C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\ .$$

მაშინ ქანქარას მოძრაობის განტოლება

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}sinkt.$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით ვიპოვით:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}kcoskt = \dot{\varphi}_0coskt.$$

(7) გამოსახულებაში $M_2\ell\dot{\varphi}^2$ შესაკრებს ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა, როცა $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{max}$, ანუ როცა $t = 0.$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{max} = \dot{\varphi}_0$. მაშინ

$$R_y = (M_1 + M_2)g + M_2\ell\dot{\varphi}_0^2.$$

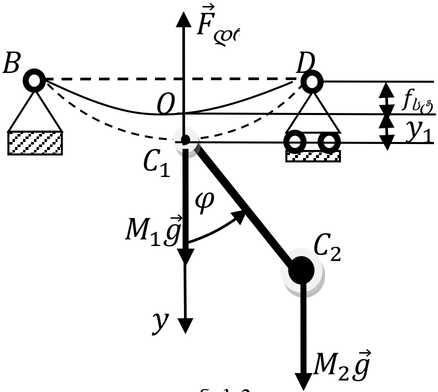
2) ვერტიკალური მიმართულებით C_1 წერტილის მოძრაობის კანონის განსაზღვრა, როცა კოჭი დრეკადია დრეკადობის c კოეფიციენტით.

რადგან კოჭი დრეკადია, ამიტომ ურიკისა და ტვირთის სიმძიმის ძალების მოქმედებით

კოჭი ჩაიღუნება და C_1 წერტილი (ნახ.3) წაინაცვლებს ქვევით რაღაც $\varphi_{სტ.}$ სიდიდით (სტატიკური დეფორმაცია). ამ შემთხვევაში მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს A ურიკისა და C_2 ტვირთის სიმძიმის ძალები: $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$, ასევე კოჭის დრეკადობის ძალა:

$$F_{დრ.} = -\,c\left(y_1 + f_{სტ}\right); \quad (8)$$

ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა y ღერძზე გეგმილებში:



ნახ.3.

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)} = (M_1 + M_2)g - F_{დრ.}, \quad (9)$$

რამდენადაც კოორდინატთა სისტემის სათავე არჩეულია სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში (O წერტილში) ამიტომ

$$y_1 = y_1, y_2 = y_1 + \ell cos\varphi,$$

მაშინ y ღერძის გასწვრივ სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლება იქნება:

$$y_C = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 y_1 + M_2 \ell cos\varphi}{M}, \quad (10)$$

სადაც $M = M_1 + M_2$ -სისტემის ჯამური მასაა.

ამ განტოლების ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\ddot{y}_C = \ddot{y}_1 - \frac{M_2 \ell}{M}\left(sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} + cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2\right). \quad (11)$$

(8) და (11) ფორმულების გათვალისწინებით (9) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$M\ddot{y}_1 = M_2\ell\left(sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} + cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2\right) = (M_1 + M_2)g - c\left(y_1 + f_{სტ}\right) \quad (12)$$

გავითვალისწინოთ, რომ სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში დრეკადობის ძალა სიმძიმის ძალის ტოლია, ე.ი.

$$(M_1 + M_2)g = cf_{სტ},$$

მაშინ (12) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{M_1 + M_2} y_1 = \frac{M_2 \ell}{M} (sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} + cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2). \qquad (13)$$

(13) განტოლება იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლებაა, ე.ი. C_1 მასათა ცენტრი ასრულებს იძულებითი რხევას და არა თავისუფალს, როგორც ეს მითითებულია კრებულში მოყვანილ პასუხში.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ (13) განტოლება, მოცემული უნდა იყოს C_2 ტვირთის რხევისათვის საწყისი პირობები. თუ გავითვალისწინებთ R_y-ის განსაზღვრისათვის მოყვანილ საწყის პირობებს, ქანქარას რხევის განტოლება იქნება შემდეგი სახის:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} sinkt,$$

მაშინ

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} kcoskt = \dot{\varphi}_0 coskt,$$
$$\ddot{\varphi} = -k\dot{\varphi}_0 sinkt.$$

გარდაქმნის შემდეგ (13) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{M_1+M_2} y_1 = \frac{M_2 \ell \dot{\varphi}_0^2}{M_1+M_2} cos2kt. \qquad (14)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{c}{M_1 + M_2} = k_1^2, \quad \frac{M_2 \ell \dot{\varphi}_0^2}{M_1 + M_2} = h, \qquad 2k = p.$$

მაშინ C_1 წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$\ddot{y}_1 + k_1^2 \ y_1 = hcos\, pt. \qquad (15)$$

(15) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოვადგინოთ სახით:

$$y_1 = \overline{y}_1 + y_1^*,$$

სადაც $\overline{y}_1 = Acosk_1 t + Bsink_1 t$- ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია.

არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y_1^* = A_1 sinpt + B_1 cospt.$$

ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული დროით:

$$\ddot{y}_1^* = -A_1 p^2 sinpt - B_1 p^2 cospt$$

და ჩავსვათ (15) განტოლებაში:

$$-A_1p^2 sinpt - B_1p^2 cospt + A_1k_1^2 sinpt + B_1k_1^2 cospt = hcos\,pt.$$

კოეფიციენტები $sinpt$ და $cos\,pt$ სიდიდეებთან უნდა იყოს ტოლი. შესაბამისად მივიღებთ ორ განტოლებას. ირველი განტოლება

$$A_1(k_1^2 - p^2) = 0$$

(გავუტოლეთ $sinpt$ -ს კოეფიციენტები).

რადგან $p^2 = 4k^2 = 4\frac{g}{\ell}$, ხოლო $\frac{c}{M_1+M_2} = k_1^2$ და რიცხვითი მნიშვნელობები არ არის მოცემული, ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ $p \neq k_1$.

მაშინ როცა $sinpt \neq 0,\ A_1 = 0.$

მეორე განტოლებიდან

$$B_1(k_1^2 - p^2) = h$$

(გავუტოლეთ $cos\,pt$ -ს კოეფიციენტები) ვიპოვით:

$$B_1 = \frac{h}{k_1^2 - p^2}.$$

მაშასადამე

$$y_1^* = \frac{h}{k_1^2 - p^2} cos\,pt,$$

$$y_1 = Acosk_1t + Bsink_1t + \frac{h}{k_1^2 - p^2} cos\,pt. \qquad (16)$$

ვიპოვოთ y_1–ის წარმოებული დროით:

$$\dot{y}_1 = -Atsink_1t + Bk_1cosk_1t - \frac{hp}{k_1^2 - p^2} sin\,pt.$$

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით $t = 0, y_1(0) = -f_{სტ.}$ ვიპოვით A:

$$-f_{სტ.} = A + \frac{h}{k_1^2 - p^2},$$

$$A = -\frac{h}{k_1^2 - p^2} - f_{სტ.} = -\left[\frac{h}{k_1^2 - p^2} + \frac{(M_1 + M_2)g}{c}\right];$$

$\dot{y}_1(0) = 0$ განტოლებიდან განვსაზღვროთ B:

$$0 = Bk_1 \Rightarrow B = 0.$$

A და B ინტეგრების მუდმივების ნაპოვნი მნიშვნელობები შევიტანოთ (16) ფორმულაში და ჩავწეროთ C_1 წერტილის მოძრაობის განტოლება

$$y_1 = -\left[\frac{h}{k_1^2 - p^2} + \frac{(M_1 + M_2)g}{c}\right] cosk_1 t + \frac{h}{k_1^2 - p^2} cos\, pt.$$

შემოღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}},$$

$$h = \frac{M_2 \ell \dot{\varphi}_0^2}{M_1 + M_2},$$

$$p = 2k = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

ამ განტოლებას ექნება სახე:

$$y_1 = -\frac{(M_1 + M_2)g}{c}\ cos\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}t + \frac{h}{k_1^2 - p^2}(cos\, pt - \ cosk_1 t).$$

<u>**პასუხი:**</u> 1) $R_y = (M_1 + M_2)g + M_2 \ell \dot{\varphi}_0^2$.

2) C_1 წერტილი ასრულებს იძულებითი რხევას

$$y_1 = -\frac{(M_1 + M_2)g}{c}\ cos\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}t + \frac{h}{k_1^2 - p^2}(cos\, pt - \ cosk_1 t)$$

კანონით.

შენიშვნა: კრებულში მოყვანილი პასუხი არასწორია, რადგან C_1 წერტილი ასრულებს იძულებითი და არა თავისუფალ რხევას, ე.ი. პასუხში არ არის შესაკრები

$$\frac{h}{k_1^2 - p^2}(cos\, pt - \ cosk_1 t).$$

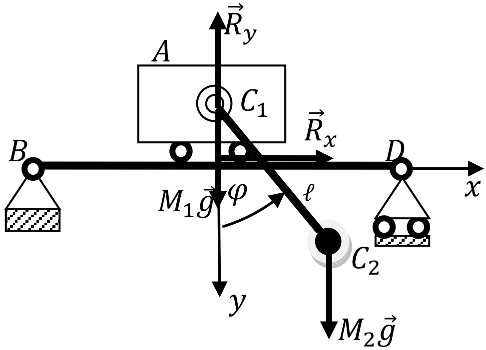
ამოცანა 35.15

შეინარჩუნეთ წინა ამოცანის პირობები და BD კოჭი ჩათვალეთ ხისტად; განსაზღვრეთ: 1) რელსების ჯამური ჰორიზონტალური რეაქცია.

2)მიიღეთ, რომ ურიკა არ არის დამუხრუჭებული და განსაზღვრეთ A ურიკას C_1 მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონი x ღერძის გასწვრივ.

საწყის მომენტში C_1 წერტილი წონასწორობაშია x ღერძის ათვლის საწყის წერტილში. გვარლი ასრულებს რხევებს $\varphi = \varphi_0 cos\omega t$ კანონით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) რელსების ჯამური ჰორიზონტალური რეაქციის განსაზღვრა. მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს (იხ. ნახაზი). ურიკას სიმძიმის ძალა $M_1\overrightarrow{g}$, ტვირთის სიმძიმის ძალა $M_2\vec{g}$, ჯამური ჰორიზონტალური $\vec{R}_x$ და ვერტიკალური $\vec{R}_y$ რეაქციის ძალები.



ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა:

$$M\vec{a}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + \vec{R}_x + \vec{R}_y. \quad (1)$$

$$M\ddot{x}_C = R_x, \quad (2)$$

სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატი გამოითვლება ფორმულით:

$$x_C = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

სადაც $x_1 = 0;\ x_2 = \ell sin\varphi$.

მაშინ

$$x_C = \frac{M_2 \ell sin\varphi}{M_1 + M_2} = \frac{M_2}{M}\ell sin\varphi. \quad (3)$$

(3) გამოსახულება გავაწარმოოთ დროით ორჯერ:

$$\dot{x}_C = \frac{M_2}{M}\ell cos\varphi \cdot \dot{\varphi},$$

$$\ddot{x}_C = \frac{M_2}{M}\ell cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \frac{M_2}{M}\ell sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

(4) ფორმულის გათვალისწინებით (2) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$R_x = M\ddot{x}_C = M_2\ell(cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2). \quad (5)$$

გვარლი მასზე დაკიდებული M ტვირთით ასრულებს ჰარმონიულ რხევებს $\varphi = \varphi_0 cos\omega t$ კანონით. თუ გავაწარმოებთ დროით ამ გამოსახულების მივიღებთ:

$$\dot{\varphi} = -\varphi_0\omega sin\omega t, \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\varphi_0\omega^2 cos\omega t. \quad (7)$$

(6) და (7) ფორმულების გათვალისწინებით (5) მიიღებს სახეს:

$$R_x = M_2\ell[cos\varphi \cdot (-\varphi_0\omega^2 cos\omega t) - sin\varphi \cdot \varphi_0^2\omega^2 sin^2\omega t] =$$
$$= -M_2\ell\varphi_0\omega^2(cos\varphi cos\omega t + \varphi_0 sin\varphi sin^2\omega t). \quad (8)$$

(8) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ რელსების რეაქციის ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი დამოკიდებულია φ კუთხეზე. ვიპოვოთ R_x მნიშვნელობები φ კუთხის ორი მნიშვნელობისათვის;

1) გვარლს უკავია ვერტიკალური მდებარეობა. ამ შემთხვევაში $\varphi = 0$. მაშინ

$$R_x = -M_2\ell\varphi_0\omega^2 cos\omega t. \quad (9)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ასეთი პასუხი მოყვანილია კრებულში. თუმცა კუთხის მნიშვნელობას $\varphi = 0$, როგორც ეს გამომდინარეობს ტვირთის რხევის განტოლებიდან, შეესაბამება $cos\omega t = 0$, რადგან $\varphi_0 \neq 0$. შესაბამისად, გვარლის ამ მდებარეობაში $R_x = 0$.

2) გვარლი გადახრილია მაქსიმალური $\varphi = \varphi_0$ კუთხით. ამ შემთხვევაში $cos\omega t =1$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\omega t = 0$ ანუ $t = 0$, რადგან $\omega \neq 0$.

ამის გათვალისწინებით (8) გამოსახულების თანახმად

$$R_x = -M_2\ell\varphi_0\omega^2 cos\varphi_0. \quad (10)$$

2. A ურიკას C_1 მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონის განსაზღვრა x ღერძის გასწვრივ იმ დაშვებით, რომ ურიკა არ არის დამუხრუჭებული.

ამ შემთხვევაში $R_x = 0$, შესაბამისად, (2) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$M\ddot{x}_C = 0,$$

აქედან $\ddot{x}_C = 0$, $\dot{x}_C = const$.

რადგან საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, ამიტომ $\dot{x}_{C_0} = 0 = \dot{x}_C$ ან $x_C = const$, ე.ი. სისტემის მასათა ცენტრი წონასწორობაშია.

x ღერძის სათავე ავარჩიოთ ურიკის C_1 მასათა ცენტრი მდებარეობაში. ვიპოვოთ სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლება:

$$x_C = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2}.$$

სადაც $x_1 = x_1$; $x_2 = x_1 + \ell sin\varphi$, $M = M_1 + M_2$.
მაშინ

$$x_C = \frac{(M_1 + M_2)x_1 + M_2\ell sin\varphi}{M_1 + M_2},$$

ანუ

$$x_C = x_1 + \frac{M_2\ell}{M_1 + M_2} sin\varphi. \quad (11)$$

თუ გავაწარმოებთ (11) განტოლებას, მივიღებთ გამოსახულებას x ღერძის გასწვრივ მასათა ცენტრის მოძრაობის სიჩქარისათვის:

$$\dot{x}_C = \dot{x}_1 + \frac{M_2\ell}{M_1+M_2}cos\varphi.\dot{\varphi} \qquad (12)$$

ვიცით რა, რომ $x_C = const$, ხოლო $\dot{x}_{C_0} = 0$, C_1 მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონი შეიძლება ვიპოვოთ ორი ხერხით.

პირველი ხერხი. ვიპოვოთ x_{C_0}, ანუ მასათა ცენტრის კოორდინატები საწყის მომენტში:

$$x_{C_0} = \frac{M_1x_{01} + M_2x_{02}}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2\ell sin\varphi_0}{M_1 + M_2} = \frac{M_2\ell sin\varphi_0}{M_1 + M_2}. \quad (13)$$

სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატს, როდესაც გვარლი ვერტიკალთან ადგენს რაიმე φ კუთხეს, განვსაზღვროთ (11) ფორმულით. თუ გავუტოლებთ (13) და (11) გამოსახულებებს ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$\frac{M_2\ell}{M_1 + M_2}sin\varphi_0 = x_1 + \frac{M_2\ell}{M_1 + M_2}sin\varphi.$$

აქედან

$$x_1 = \frac{M_2\ell}{M_1+M_2}(sin\varphi_0 - sin\varphi). \qquad (14)$$

გადახრის მცირე კუთხეებისათვის $\sin\varphi \approx \varphi, \sin\varphi_0 \approx \varphi_0$. მაშინ

$$x_1 = \frac{M_2\ell}{M_1+M_2}(\varphi_0 - \varphi_0 cos\omega t) = \frac{M_2\ell\varphi_0}{M_1+M_2}(1 - cos\omega t). \qquad (15)$$

მეორე ხერხი. რადგან $\dot{x}_C = 0$ ამიტომ

$$\dot{x}_1 + \frac{M_2\ell}{M_1 + M_2}cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = 0$$

ხოლო გადახრის კუთხის სიმწირის გათვალისწინებით, როცა $\cos\varphi \approx 1$, $\dot{x}_1$-თვის გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\dot{x}_1 = -\frac{M_2\ell}{M_1 + M_2}\dot{\varphi}$$

ან (6) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{M_2\ell\varphi_0\omega}{M_1+M_2}sin\omega t. \qquad (16)$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ (16) გამოსახულება:

$$\int_0^{x_1} dx_1 = \frac{M_2\ell\varphi_0\omega}{M_1 + M_2}\int_0^t sin\omega t\, dt$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$x_1 = \frac{M_2\ell\varphi_0\omega}{M_1+M_2}\cdot\frac{1}{\omega}(-cos\omega t)\Big|_0^t = \frac{M_2\ell\varphi_0\omega}{M_1+M_2}(1-cos\omega t).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $R_x = -M_2\ell\varphi_0\omega^2(cos\varphi cos\omega t + \varphi_0 sin\varphi sin^2\omega t)$, $R_x = 0$, როცა $\varphi = 0$, $R_x = -M_2\ell\varphi_0\omega^2 cos\varphi_0$, როცა $\varphi = \varphi_0$; C_1 მასათა ცენტრი ასრულებს რხევებს $\frac{M_2\ell\varphi_0}{M_1+M_2}$ ამპლიტუდით და ω წრიული სიხშირით $x_1 = \frac{M_2\ell\varphi_0}{M_1+M_2}(1-cos\omega t)$ კანონით.

ამოცანა 35.16

წონასწორობის მდგომარეობაში ნავის შუა სკამზე იჯდა ორი კაცი. ერთი მათგანი, რომლის მასაა $M_1 =$50კგ, გადაადგილდა მარჯვნივ ნავის ცხვრისაკენ. და მიმართულებით და რა მანძილზე უნდა გადაადგილდეს მეორე კაცი, რომლის მასაა $M_2 =$70კგ, რომ ნავი დარჩეს წონასწორობაში. ნავის სიგრძე არის 4 მ. ნავის წყლის წინაღობა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალები: $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$, $M_3\vec{g}$ − ტვირთის სიმძიმის ძალები, წყლის ამომგდები ძალა $\vec{F}_{A.}$ (იხ. ნახაზი) .

ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა:

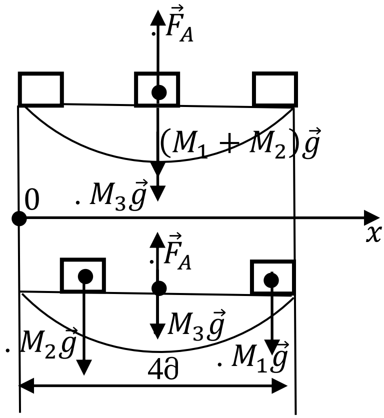
$$M\vec{a}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + M_3\vec{g} + \vec{F}_A,$$

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = 0.$$

მაშინ

$$\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0,$$

$$\dot{x}_C = C_1 = const.$$



საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო, ამიტომ

$$\dot{x}_{0C} = 0, \ \ C_1 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = 0 \Longrightarrow \ x_C = const.$$

ჩავწეროთ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატი პირველ და მეორე მდებარეობაში:

1) $x_{C_1} = 2$ (ორივე ადამიანი ზის ნავის შუაში სკამზე);

2) $x_{C_2} = \dfrac{4M_1 + (2-x)M_2 + 2M_3}{M_1 + M_2 + M_3}$

რადგან

$$x_{C_1} = x_{C_2},$$

მივიღებთ

$$2 = \frac{4M_1 + (2-x)M_2 + 2M_3}{M_1 + M_2 + M_3}$$

ანუ

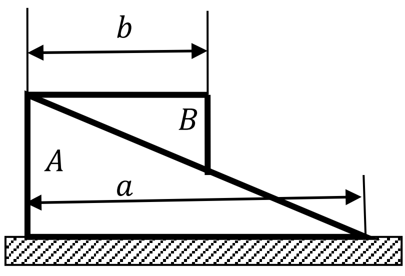
$$2\left(M_1 + M_2 + M_3\right) = 4M_1 + 2M_2 - M_2 x + 2M_3.$$

საიდანაც

$$x = \frac{4M_1 + 2M_2 - 2M_2 - 2M_1 + 2M_3 - 2M_3}{M_2} = \frac{2M_1}{M_2}. = \frac{100}{70} = 1{,}43$$

პ ა ს უ ხ ი: მარცხნივ ნავის ბოლოსაკენ 1,43მ მანძილზე.

ამოცანა 35.17

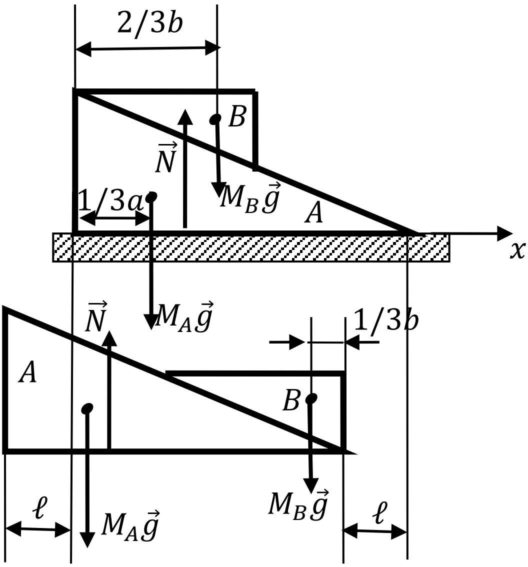


ერთგვაროვან A პრიზმაზე, რომელიც მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, ძევს ერთგვაროვანი B პრიზმა; პრიზმის განივკვეთები მართკუთხა სამკუთხედებია, A პრიზმის მასა 3-ჯერ მეტია B პრიზმის მასაზე. განსაზღვრეთ, რა ℓ მანძილზე გადაინაცვლებს A პრიზმა, როცა B პრიზმა A პრიზმის ზედაპირზე ეშვება ქვევით და მიაღწევს

ჰორიზონტალურ სიბრტყემდე, თუ პრიზმები და ჰორიზონტალური სიბრტყე აბსოლუტურად გლუვია.

ა მ ო ხ ს ნ ა მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალები: $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალები და საყრდენი ზედაპირის რეაქციის ძალა $\vec{N}$ (იხ. ნახაზი) .

ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის x_C კოორდინატი პრიზმის ორ მდებარეობაში. საწყისი მდებარეობისათვის



$$x_{C_2} = \frac{M_A \cdot \frac{1}{3}a + M_B \cdot \frac{2}{3}b}{M_A + M_B}$$

ან, რადგან $M_A = 3M_B$,

$$x_{C_2} = \frac{3M_B \cdot \frac{1}{3}a + M_B \cdot \frac{2}{3}b}{4M_B} = \frac{3a+2b}{12}.$$

საბოლოო მდებარეობისათვის, როცა B პრიზმა მიაღწევს ჰორიზონტალურ სიბრტყეს, გვექნება:

$$x_{C_2} = \frac{3M_B \cdot \left(\frac{1}{3}a - \ell\right) + M_B \cdot \left(a - \ell - \frac{1}{3}b\right)}{4M_B} = \frac{6a - b - 12\ell}{12}.$$

რადგან $x_C = const$, ამიტომ $x_{C_1} = x_{C_2}$, ანუ

$$\frac{3a + 2b}{12} = \frac{6a - b - 12\ell}{12},$$

საიდანაც

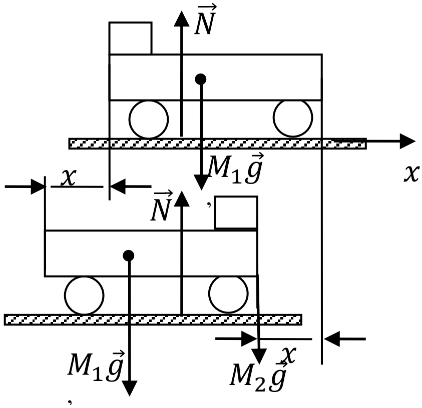
$$\ell = \frac{a - b}{4}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\ell = \dfrac{a - b}{4}$.

ამოცანა 35.18

6მ სიგრძის და 2700კგ მასის ჰორიზონტალურ საბარგო ბაქანზე, რომელიც საწყის მომენტში იყო წონასწორობაში, ორი მუშა მიაგორებს მძიმე ფოლადის ნადნობს ბაქანის მარცხენა ბოლოდან მარჯვენა ბოლოში. ღომელ მხარეს და რა მანზილზე გადაადგილდება ამ დროს ბაქანი, თუ ტვირთისა და მუშათა საერთო მასა უდრის 1800კგ? ბაქნის მოძრაობისადმი წინაღობის ძალები უგუკებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედი ძალები: ბაქანის სიმძიმის ძალა $-M_1\vec{g}$, მუშებისა და ტვირთის სიმძიმის ძალა $-M_2\vec{g}$ და საყრდენი ზედაპირის რეაქციის ძალა $\vec{N}$.



ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა ვექტორული ფორმით:

$$M\vec{a}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + M_3\vec{g} + \vec{N}$$

და x ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = 0$$

(იხ. 35.6 ამოცანის ამოხსნა),

$$x_C = const..$$

განვსაზღვროთ x_C კოორდინატი საწყის მომენტში, როდესაც ბაქანი უძრავია:

$$x_{C_1} = \frac{3M_1 + 0M_3}{M_1 + M_2} = \frac{3M_1}{M_1 + M_2}.$$

საბოლოო მდებარეობისათვის, როდესაც მუშები გადააგორებენ ნადნობს ბაქანის მარჯვენა ბოლოში:

$$x_{C_2} = \frac{(3-x)M_1 + (6-x)M_2}{M_1 + M_2}.$$

რადგან $x_{C_1} = x_{C_2}$, ამიტომ

$$\frac{3M_1}{M_1 + M_2} = \frac{(3-x)M_1 + (6-x)M_2}{M_1 + M_2}$$

ანუ

$$3M_1 = (3-x)M_1 + (6-x)M_2,$$

საიდანაც

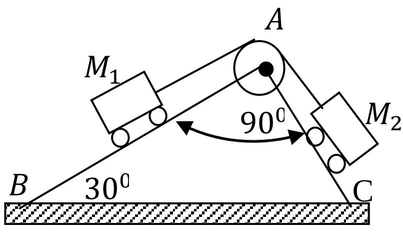
$$x = \frac{6M_2}{M_1 + M_2} = \frac{6 \cdot 1800}{4500} = 2{,}4\ \text{მ}.$$

ბაქანი გადაადგილდება მარცხნივ.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> მარცხნივ 2,4მ-ზე.

ამოცანა 35.19

M_1 და M_2 მასის მქონე ორი ტვირთი შეერთებულია უჭიმარი ძაფის საშუალებით, რომელიც გადაკიდებულია A ბლოკზე და სრიალებს მართკუთხა სოლის გლუვ გვერდებზე. სოლი BC ფუძით ეყრდნობა გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეს. განსაზღვრეთ სოლის გადაადგილება ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე M_1 ტვირთის $h =$10სმ სიმაღლეზე დაშვებისას. სოლის მასა $M = 4M_1 = 16M_2$. ბლოკის და ძაფის მასები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა.

მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ და $M\vec{g}$ სიმძიმის ძალები და საყრდენი ზედაპირის რეაქციის ძალა $\vec{N}$ (იხ. ნახ.) .

თუ ვიმსჯელებთ ისე, როგორც 35.16 ამოცანაში, მივიღებთ:

$$x_C = const\text{, ე.ი. } x_{C_1} = x_{C_2},$$

ჩავწეროთ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატი:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

მაშინ სისტემის საწყის მდებარეობაში მისი მასათა ცენტრის კოორდინატი x_{C_1} იქნება:

$$x_{C_2} = \frac{\frac{1}{4}Mx_1 + Mx_2 + \frac{1}{16}Mx_3}{\frac{1}{4}M + \frac{1}{16}M + M} = \frac{4x_1 + 16x_2 + x_3}{4+1+16} = \frac{4x_1 + 16x_2 + x_3}{21}.$$

მასათა ცენტრის კოორდინატი საბოლოო მდებარეობაში, როდესაც ტვირთი დაეშვება 10სმ-ით, არის

$$x_{C_2} = \frac{\frac{M}{4}\left(\ell + x_1 - x_4\right) + M\left(\ell + x_2\right) + \frac{M}{16}\left(\ell + x_3 - x_5\right)}{\frac{1}{4}M + \frac{1}{16}M + M} =$$

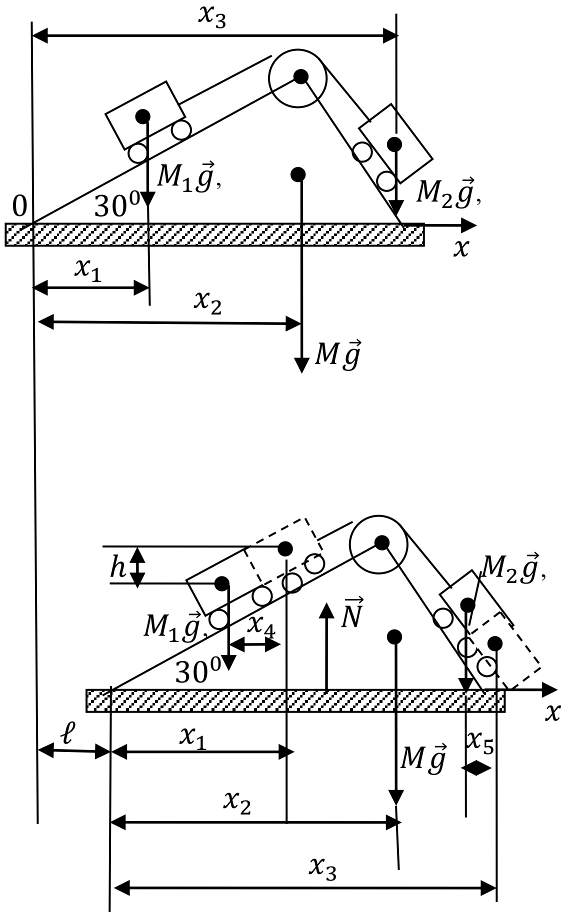
$$= \frac{4\ell + 4x_1 - 4x_4 + 16\ell + 16x_2 + \ell + x_3 - x_5}{21} =$$

$$= \frac{21\ell + 4x_1 + 16\ell + 16x_2 + x_3 - 4\frac{h}{tg\alpha} - h}{21}.$$

სადაც $x_4 = \dfrac{h}{tg\alpha}$, $tg30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_5 = \dfrac{h}{\sin\alpha}\cos\left(90^0 - \alpha\right) = h.$

რადგან $x_{C_1} = x_{C_2}$, ამიტომ

$$4x_1 + 16x_2 + x_3 = 21\ell + 4x_1 + 16x_2 + x_3 - 10\left(\frac{4\sqrt{3}}{1} + 1\right)$$



ანუ

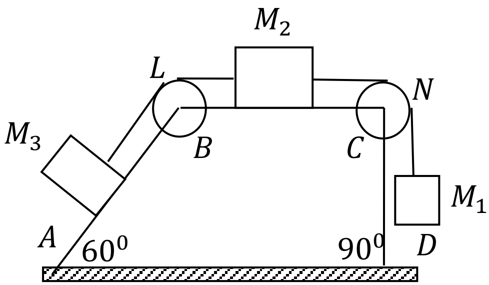
$$21\ell = 79{,}2 \Rightarrow \ell = 3{,}77 \text{ სმ}.$$

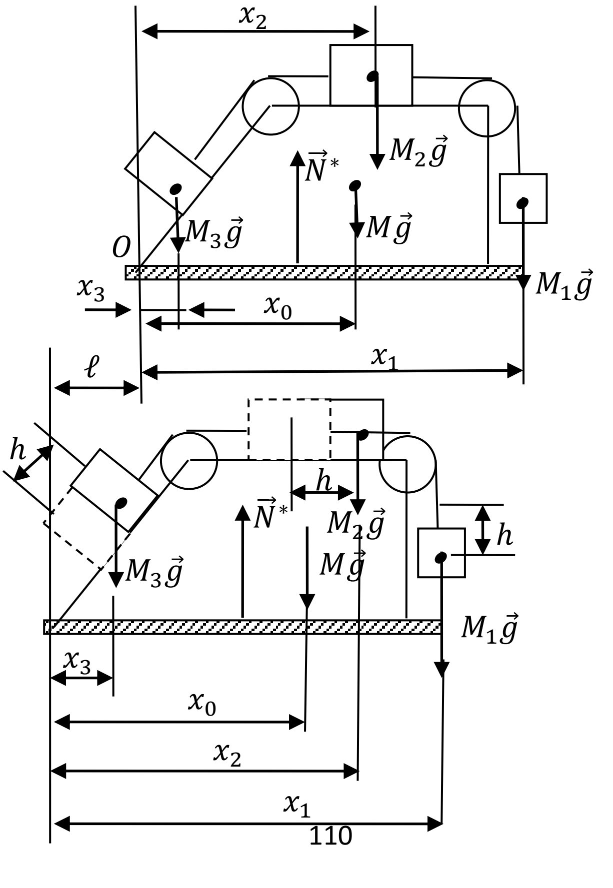
სოლი გადაადგილდება მარჯვნივ.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> სოლი გადაადგილდება მარჯვნივ 3,77სმ-ით.

ამოცანა 35.20

M_1=20კგ, $M_2 = 15$კგ და M_3=10კგ მასის მქონე სამი ტვირთი ერთმანეთთან შეერთებულია უწონი და უჭიმარი ძაფით, რომელიც გადაკიდებულია უძრავ L და N ბლოკებზე. M_1 ტვირთის ქვევით დაშვებისას M_2 ტვირთი მოძრაობს ოთკუთხა წაკვეთილი $ABCD$ პირამიდის ზედა ფუძეზე მარჯვნივ, ხოლო M_3 ტვირთი ადის ზევით AB გვერდით წახნაგზე. პირამიდის მასაა $M =$ 100კგ. განსაზღვრეთ $ABCD$ წაკვეთილი პირამიდის გადაადგილება იატაკის გასწვრივ, როცა M_1 ტვირთი ჩამოვა ქვევით 1მ მანძილზე. პირამიდასა და იატაკს შორის ხახუნი უგულებელყოფილია.





ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემაზე, რომელიც შედგება M მასის პირამიდისა და M_1, M_2, M_3 მასის მქონე სამი ტვირთისაგან, მოქმედებს გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ და $M_3\vec{g}$ სიმძიმისძალები და საყრდენი ზედაპირის რეაქციის ძალა $\vec{N}^*$ (იხ. ნახ.) .თუ ვიმსჯელებთ ისე, როგორც 35.16 ამოცანაში, მივიღებთ:

$$x_C = const\text{, ე.ი. } x_{C_1} = x_{C_2},$$

ჩავწეროთ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატი: საწყისი და საბოლოოო მდებარეობაში:

$$x_{C_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_3 + M_3},$$

$$x_{C_2} = \\ = \frac{M_1(x_1 - \ell) + M_2(x_2 + h - \ell) + M_3(x_3 + hcos60^0 - \ell) + M(x_0 - \ell)}{M_1 + M_2 + M_3 + M}$$

რადგან $x_{C_1} = x_{C_2}$, ამიტომ

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + M x_0 = \\ = M_1(x_1 - \ell) + M_2(x_2 + h - \ell) + M_3(x_3 + hcos60^0 - \ell) + M(x_0 - \ell)$$

აქედან

$$h\left(M_2 + M_3\cos 60^0\right) = \ell\left(M_1 + M_2 + M_3 + M\right).$$

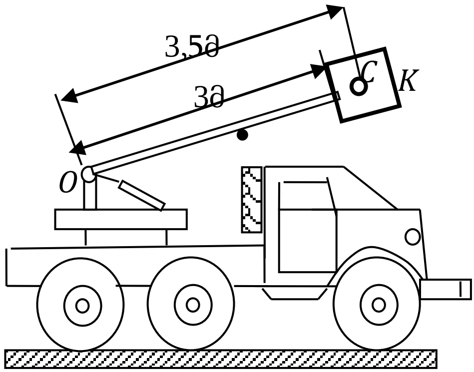
საიდანაც

$$\ell = \frac{h\left(M_2 + M_3\cos 60^0\right)}{M_1 + M_2 + M_3 + M} = 0{,}14$$

პასუხი: მარცხნივ 0,14მ=14სმ-ზე.

ამოცანა 35.21

ქუჩის ელექტროგაყვანილობის შესაკეთებლად განკუთვნილი მოძრავი მბრუნავი ამწე დამონტაჟებულია 1 ტონა მასის მქონე ავტომანქანაზე. L ღეროზე მიმაგრებული ამწის K კალათას შეუძლია შემობრუნება ნახაზის სიბრტყის პერპენდიკულარული ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო. საწყის მომენტში ჰორიზონტალურ დებარეობაში მყოფი ამწე და ავტომობილი იმყოფებოდნენ წონასწორობაში. განსაზღვრეთ დაუმუხრუჭებელი ავტომანქანის გადაადგილება, თუ ამწე შემობრუნდა 60^0-ით. 3მ სიგრძის ერთგვაროვანი L ღეროს მასა 100 კგ-ია, ხოლო K კალათის-200კგ. K კალათის C მასათა ცენტრი O ღერძიდან დაშორებულია $OC=3{,}5$ მ-ით. მოძრაობისადმი წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალები: ავტომანქანის სიმძიმის ძალა-$M_1\vec{g}$, ღეროს სიმძიმის ძალა- $M_2\vec{g}$; კალათის სიმძიმის ძალა- $M_3\vec{g}$ და საყრდენი ზედაპირის რეაქციის ძალა $-\vec{N}$.

ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა ვექტორული ფორმით:

$$M\vec{a}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + M_3\vec{g} + \vec{N},$$

და x ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} = 0$$

მაშინ

$$\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0,$$

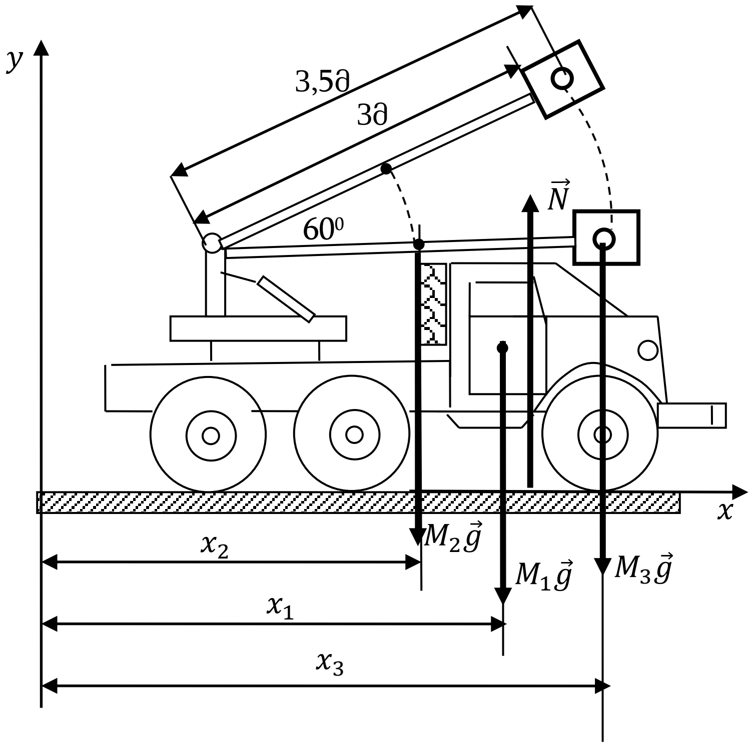
$$\dot{x}_C = C_1 = const.$$

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო, ამიტომ

$$\dot{x}_{0C} = 0, \ \ C_1 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = 0 \Longrightarrow \ \ x_C = const.$$



განვსაზღვროთ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატი ორ მდებარეობაში: საწყის მდებარეობაში, როდესაც ამწეს უკავია ჰორიზონტალური მდებარეობა და დროის იმ მომენტში, როცა ამწე შემობრუნდა 60^0-ით და ავტომანქანა გადაადგილდა x ღერძის გასწვრივ ℓ მანძილზე:

$$x_{C_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

$$x_{C_2} = \frac{M_1(x_1 + \Delta x_1) + M_2(x_2 + \Delta x_2) + M_3(x_3 + \Delta x_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

რადგან $x_C = const$, ამიტომ $x_{C_1} = x_{C_2}$, ანუ

$$M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 = 0. \qquad (1)$$

აღვნიშნოთ $\Delta x_1 = \ell$ -დაუმუხრუჭებელი ავტომანქანის გადაადგილება, მაშინ

$$\Delta x_2 = \ell - (1{,}5 - 1{,}5 cos 60^0),$$

$$\Delta x_3 = \ell - (3{,}5 - 3{,}5cos60^0).$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (1) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$M_1\ell + M_2[\ell - (1{,}5 - 1{,}5cos60^0)] + M_3[\ell - (3{,}5 - 3{,}5cos60^0)] = 0,$$

აქედან

$$\ell = \frac{(1 - cos60^0)(1{,}5M_2 + 3{,}5M_3)}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{(1 - 0{,}5)(1{,}5 \cdot 100 + 3{,}5 \cdot 200)}{100 + 100 + 200} = 0{,}327$$

პ ა ს უ ხ ი: მარჯვნივ 0,327მ=32,7სმ-ზე.

§36. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორის ცვლილების შესახებ. გამოყენება უწყვეტ გარემოზე.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი (ან უბრალოდ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა) ეწოდება სისტემაში შემავალი ყველა წერტილის მოძრაობის რაოდენობის გეომეტრიულ ჯამს:

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k. \qquad (36.1)$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი შეიძლება განისაზღვროს მასათა ცენტრის სიჩქარის საშუალებით:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{C.} \qquad (36.2)$$

(36.1) და (36.2) გამოიყენება არა მხოლოდ მყარი სხეულების სახით წარმოდგენილი ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის, არამედ მყარი სხეულებისაგან შემდგარი მექანიკური სისტემისთვისაც. ამ შემთხვევაში m_k–ს ქვეშ იგულისხმება k -ური სხეულის მასა, $\vec{v}_{Ck.}$ -ამ სხეულის მასათა ცენტრის სიჩქარე, M - ყველა სხეულის მასათა ჯამი. მაშინ k -ური სხეულის მოძრაობის რაოდენობა

$$\vec{Q}_k = \sum m_k \vec{v}_{Ck},$$

ხოლო სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი

$$\vec{Q} = \sum \vec{Q}_k = \sum m_k \vec{v}_{Ck} = M\vec{v}_{C.}. \qquad (36.3)$$

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორის სიდიდე განისაზღვრება ამ ვექტორის დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე გეგმილების საშუალებით:

$$\begin{cases} Q_x = \sum Q_{kx} = M\ddot{x}_C, \\ Q_y = \sum Q_{ky} = M\ddot{y}_C, \\ Q_z = \sum Q_{kz} = M\ddot{z}_C, \end{cases} \qquad (36.4)$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

ფიზიკურ სიდიდეს, რომელიც ახასიატებს მექანიკურ სისტემაზე მოდებული გარე ძალების მოქმედებას დროის რაიმე შუალედში, ეწოდება გარე ძალების ნაკრები ვექტორის იმპულსიან სრული იმპულსი და განისაზღვრება ფორმულით:

$$\vec{S}^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}^{(e)} dt. \qquad (36.5)$$

(36.5) ვექტორულ ტოლობას შეესაბამება სკალარული ტოლობები:

$$\begin{cases} S_x^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} R_x^{(e)} dt, \\ S_y^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} R_y^{(e)} dt, \\ S_z^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} R_{zx}^{(e)} dt, \end{cases} \qquad (36.6)$$

სადაც $R_x^{(e)} = \sum F_{kx}^{(e)}$, $R_y^{(e)} = \sum F_{ky}^{(e)}$, $R_z^{(e)} = \sum F_{kz}^{(e)}$ -გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილებია დეკარტეს კოორდინატთა ღერძებზე.

გარე ძალების ნაკრები ვექტორის იმპულსის მოდული განისაზღვრება ტოლობით:

$$S^{(e)} = \sqrt{\left(S_x^{(e)}\right)^2 + \left(S_y^{(e)}\right)^2 + \left(S_z^{(e)}\right)^2}. \qquad (36.7)$$

თუ გარე ძალები არ არიან დროზე დამოკიდებული, მაშინ $\vec{S}^{(e)}$ ტოლია $\vec{R}^{(e)}$ -ს ნამრავლის ძალების მოქმედების დროზე.

თეორემა მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორის ცვლილების შესახებ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ დიფერენციალური და ინტეგრალური ფორმით.

დიფერენციალური ფორმა- მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული დროით უდრის გრე ძალების ნაკრებ ვექტორს:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)} \qquad (36.8)$$

ინტეგრალური ანუ სასრული ფორმა: მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის რააიმე შუალედში გეომეტრიულად ტოლია გარე ძალების ნაკრები ვექტორის იმპულსისა დროის იმავე შუალედში:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \vec{S}^{(e)}. \qquad (36.9)$$

ამოცანების ამოხსნისას (36.8) და (36.9) ფორმულებს წარმოადგენენ ხოლმე სკალარული სახით (დეკარტეს კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილებში):

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = R_x^{(e)}, \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = R_y^{(e)}, \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = R_x^{(e)}; \end{cases} \qquad (36.8')$$

$$\begin{cases} Q_{2x} - Q_{1x} = S_x^{(e)}, \\ Q_{2y} - Q_{1y} = S_y^{(e)}, \\ Q_{2z} - Q_{1z} = S_z^{(e)}. \end{cases} \qquad (36.9')$$

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორის ცვლილების თეორემიდან გამომდინარე შედეგები:

1) თუ მექანიკური სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობა მუდმივი სიდიდეა.
2) თუ გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილი რომელიმე ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი ამავე ღერძზე მუდმივია.

(36.9) და (36.9′) ფორმულებიდან გამომდინარეობს:

• თუ გარე ძალების სრული იმპულსი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა მუდმივია.

• თუ გარე ძალების სრული იმპულსის გეგმილი რომელიმე ღერძზე მულის ტოლია, მაშინ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი ამავე ღერძზე მუდმივია. (თუ $R_x^{(e)} = 0$ ან $S_x^{(e)}$, მაშინ $Q_x = const.$

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემებიდან გამომდინარე შედეგები გამოსახავენ მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს.

(36.8), (36.9) და (36.8′), (36.9′) ფორმულებიდან, აგრეთვე, გამომდინარეობს, რომ მექანიკური სისტემის შიგა ზალები ვერ ახდენენ პირდაპირ გავლენას მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებაზე. თუმცა, როცა შიგა ძალები იწვევენ გარე ძალების გაჩენას ბმების შესაბამისი რეაქციის ძალების სახით, მაშინ ამით ისინი ირიბად ახდენენ გავლენას მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებაზე.

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა და თეორემა სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის სესახებ ფაქტიურად წარმოადგენენ ერთი და იგივე თეორემის ორ სხვადსხვა ფორმას, რაც გამომდინარეობს (36.8) ფორმულიდან, თუ მასში $\vec{Q}$-ს ნაცვლად ჩავსვამთ (36.2) ტოლობას.

ამიტომ, იმ შემთხვევებში, როდესაც შეისწავლება მყარი სხეულის ან სხეულთა სისტემის მოძრაობა, ტოლფასოვნად შეიძლება ვისარგებლოდ ამ ორი ფორმიდან ერთ-ერთით.

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის შესწავლისას, მაგალითად, სითხის ან აირის, მთელი სისტემის მასათა ცენტრის ცნება კარგავს აზრს. ამ შემთხვევებში ამოცანების ამოხსნისას სარგებლობენ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემით, ამასთან ინტეგრალური ფორმით.

მაგალითად, მილებში ან მრუდწირულ არხებში სითხის მოძრაობისას (36.9) ფორმულებში Q_1 და Q_2 -ის ქვეშ იგულისხმება სითხის იმ მასის მოძრაობის რაოდენობა, რომელიც გაედინება ნებისმიერ ორ კვეთში, მაგალითად, ამ არხის შესასვლელში და გამოსასვლელში, რაიმე დროის განმავლობაში. ნაკადის უწყვეტობის ძალით ეს მოძრაობის რაოდენობები იქნება ერთი და იგივე და ამ კვეთების ფართობების ტოლობისას მათში სითხის ნაკადის სიჩქარეები ასევე იქნება ერთი და იგივე. თუ კვეთების ფართობები განსხვავებულია, მაშინ გამდინარე სითხის მასა იქნება ერთნაირი, ხოლო მათი სიჩქარეები განსხვავებული.

თუ გამოვიყენებთ (36.9′) ფორმულებს, შეიძლება განვსაზღვროთ არხის მრუდწირულ უბანზე სითხის მოძრაობისას მასზე მოქმედი არხის კედლების რეაქციების მდგენელები. შედებისა და უკუქმედების კანონის თანახმად სითხე ასეთივე ძალით იმოქმედებს არხის ან მილის კედელზე, რაც გამოიწვევს მილის მუხლის წნევას საყრდენზე, ან საყრდენის არ არსებობის შემთხვევაში, მუხლი შეეცდება მილის გამოსასვლელში სითხის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ შემობრუნებას. არხის განივ კვეთებში გადინებადი სითხის მასაა

$$M = \rho W = \rho \sigma t, \qquad (36.10)$$

სადაც ρ–სითხის სიმკვრივეა, W - t დროში გადინებადი სითხის მოცულობაა, σ- მუხლის(მილის) განივი კვეთის ფართობია, v-სითხის გადინების სიჩქარეა.

ასეთი ტიპის ამოცანები შეიძლება ამოვხსნათ, თუ გამოვიყენებთ ეილერის თეორემას მოძრაობის რაოდენობის შესახებ, რომელიც გამოიყენება უწყვეტი გარემოსათვის: მოცულობითი და ზედაპირული ძალების ნაკრები ვექტორები- $\vec{R}_{მოც.}$, $\vec{R}_{ზედ.}$ და დროის ერთეულში ორ რომელიმე კვეთში შემავალი და გამომავალი სითხის მასის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორები, რომლებიც მიმართულია გამოყოფილი მოცულობის შიგნით, ქმნიან ჩაკეტილ მრავალკუთხედს., ე.ი.

$$\vec{R}_{მოც.} + \vec{R}_{ზედ.} + M\vec{v}_1 - M\vec{v}_2 = 0 \qquad (36.11)$$

ან საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში:

$$\begin{cases} X_{მოც} + X_{ზედ} + M(v_{1x} - v_{2x}) = 0, \\ Y_{მოც} + Y_{ზედ} + M\left(v_{1y} - v_{2y}\right) = 0, \\ Z_{მოც} + Z_{ზედ} + M(v_{1z} - v_{2z}) = 0. \end{cases} \qquad (36.12)$$

ამასთან, მოცულობითი (ანუ მასური) ძალების ქვეშ იგულისხმება W მოცულობის ყველა იმ ნაწილაკზე მოქმედი ძალები, რომლებიც იმყოფებიან როგორც ამ მოცულობის შიგნით, ასევე მის ზედაპირზე, მაგალითად, ნაწილაკების სიმძიმის ძალები.

ზედაპირული ძალები- ეს არის ძალები, რომლებიც მოქმედებენ მხოლოდ იმ ნაწილაკებზე, რომლებიც მდებარეობენ მოცულობის გარე ზედაპირზე. მაგალითად, იმ მყარი სხეულების რეაქციები, რომლის შიგნითაც მოძრაობს სითხე.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1) გამოვსახოთ მექანიკური სისტემა და ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ყველა გარე ძალა აუცილებელი რეაქციის ძალების ჩათვლით, თუ სისტემა არათავისუფალია;

2) მოცემული საანგარიშო სქემისათვის ჩავწეროთ თეორემა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის შესახებ დიფერენციალური (ფორმულა (36.8) ან ინტეგრალური (ფორმულა (36.9)) ფორმით;

3) ავირჩიოთ უძრავი კოორდინატთა სისტემა;

4) გამოვთვალოთ გარე ძალების $\vec{R}^{(e)}$- ნაკრები ვექტორის გეგმილი ან $\vec{S}^{(e)}$ -იმპულსის გეგმილი საკოორდინატო ღერძებზე (ან რომელიმე ერთ ღერძზე). ამ დროს შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

ა) გარე ძალების $\vec{R}^{(e)}$- ნაკრები ვექტორის ან $\vec{S}^{(e)}$ -იმპულსის გეგმილი რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე (მაგალითად, Ox ღერძზე) , ნულის ტოლია ($R_x^{(e)} = 0,$ ან $S_x^{(e)} = 0$), მაშინ $Q_x = const.$ ამ შემთხვევაში აუცილებელია განისაზღვროს მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი Ox

ღერძზე სისტემის საწყის და საბოლოო მდებარეობებში და გავუტოლოთ ისინი ერთმანეთს, ე.ი. $Q_{1x} = Q_{2x}$. მიღებული განტოლებიდან განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდე (მთელი სისტემის სიჩქარე მთლიანობაში ან რომელიმე სხეულის სიჩქარე)

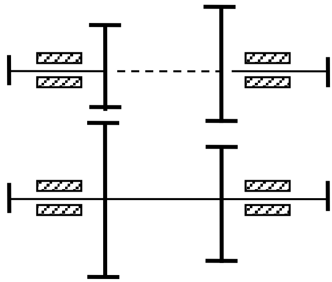
ბ) გარე ძალების $\vec{R}^{(e)}$- ნაკრები ვექტორის ან $\vec{S}^{(e)}$ -იმპულსის გეგმილი რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე (მაგალითად, Ox ღერძზე) , არ უდრის ნულს. მაშინ აუცილებელია ჩაიწეროს თეორემა მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში-(36.8′) ან (36.9′) ფორმულები და მიღებული განტოლებიდან განვსაზღვროთ ყველა გარე ძალის ან ერთ-ერთი ამ ძალის გეგმილი საკოორდინატო ღერძებზე ან ერთ-ერთ ღერძზე. მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობა და გარე ძალების სრული იმპულსი განვსაზღვროთ (36.4) და (36.6) ფორმულების გამოყენებით.

ეილერის თეორემის დახმარებით ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1) ნახაზზე გამოვსახოთ უწყვეტი გარემოს გამოყოფილი მოცულობა და ვაჩვენოთ მოცულიბითი და ზედაპირული ძალები;
2) ნახაზზე ვაჩვენოთ სითხის (გაზის) შემომსაზღვრელი მოცულობის ორივე კვეთაში გამდინარე სითხის ჯამური მოძრაობის რაოდენობის ვექტორები, მივმართავთ რა მათ მოცულობის შიგნით:
3) ავარჩიოთ კოორდინატთა სისტემის ღერძები;
4) ჩავწეროთ ეილერის ფორმულა საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში (36.12)-ფორმულები);
5) მიღებული განტოლებებიდან (განტოლებიდან) განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდე (როგორც წესი, არხის კედლების რეაქცია) ზოგადი სახით, შემდეგ აუცილებლობის შემთხვევაში ჩავსვათ რიცხვითი მონაცემები და გამოვთვალოთ ამ ძალის სიდიდე.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 36.1

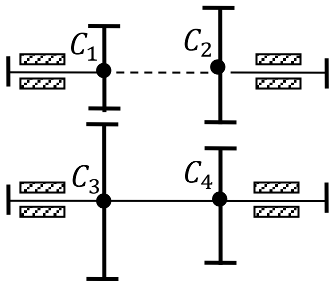


გამოთვალეთ ნახაზზე გამოსახული მომუშავე სიჩქარეთა რედუქტორის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი, თუ თითოეულის, ოთხი კბილანა თვლის სიმძიმის ცენტრები მდებარებს მათი ბრუნვის ღერძებზე

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{4} \vec{Q}_k = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \vec{Q}_4,$$

სადაც $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{Q}_4 -$ სისტემაში შემავალი თვლების მოძრაობის რაოდენობებია.



რადგან კბილათვლების C_1, C_2, C_3, C_4 მასათა ცენტრები უძრავია (იხ. ნახაზი), ამიტომ თითოეული მათგანის მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია და შესაბამისად სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია.

<u>პასუხი:</u> სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია.

ამოცანა 36.2

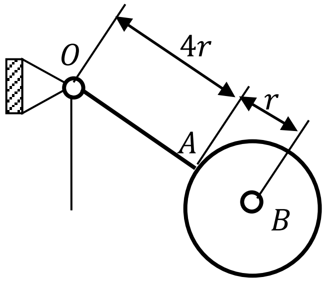
განსაზღვრეთ წინა ამოცანაში განხილულ რედუქტორზე მოდებული გარე ძალების იმპულსების ჯამი ნებისმიერი სასრული დროის შუალედისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გარე ძალების იმპულსების ჯამი უდრის ნულს, რადგან მასათა ცენტრების სიჩქარეები თვლების საწყის და საბოლოო მდებარეობებში ნულის ტოლია:

$$S_{kx} = m_k(v_{kx} - v_{ox}) = 0,$$
$$S_{ky} = m_k(v_{ky} - v_{oy}) = 0.$$

<u>პასუხი:</u> გარე ძალების იმპულსების ჯამი უდრის ნულს

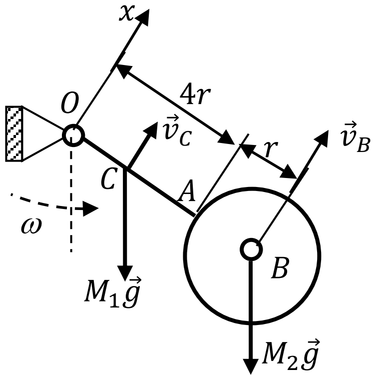
ამოცანა 36.3



განსაზღვრეთ ქანქარას მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი, თუ იგი შედგება M_1 მასის და $4r$ სიგრძის ერთგვაროვანი OA ღეროსაგან და M_2 მასის r რადიუსის მქონე B დისკოსაგან, თუ ქანქარას კუთხური სიჩქარე აღებულ მომენტში ω–ს ტოლია

.ა მ ო ხ ს ნ ა. ღეროსა და დისკოს მასათა ცენტრების სიჩქარეები შესაბამისად ტოლია

$$v_C = \omega \cdot 2r, \ \ = \omega \cdot 5r$$



(სიჩქარეების მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე) მივმართოთ $0x$ ღერძი ღეროს მართობულად, მაშინ

$$Q = Q_x = M_1 v_C + M_2 v_B.$$

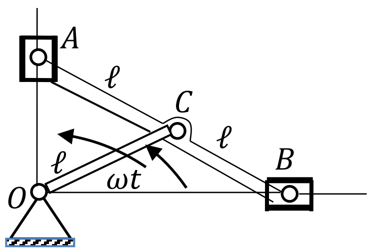
(რადგან v_C და v_B სიჩქარეებს აქვთ ერთი მიმართულება). v_C და v_B -ს მნიშვნელობები ჩავსვათ ამ ტოლობაში, მივიღებთ:

$$Q = M_1\omega \cdot 2r + M_2\omega \cdot 5r = \omega r(2M_1 + 5M_2).$$

$\vec{Q}$ ვექტორი მიმართულია OA ღეროს მართობულად.

<u>პასუხი:</u> მოძრაობის რაოდენობის ვექტორი მიმართულია OA ღეროს მართობულად.

ამოცანა 36.4

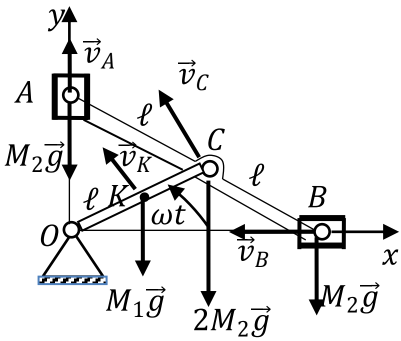


განსაზღვრეთ ელიფსოგრაფის მექანიზმის მოძრაობის რაოდენობის სიდიდე და მიმართულება, თუ OC მრუდმხარას მასა არის M_1, AB სახაზავის მასა - $2M_1$, თითოეული A და B ქუროს მასა $-M_2$; მოცემულია ზომები:

$OC = AC = CB = \ell$.

სახაზავის და მრუდმხარას მასათა ცენტრები მათი შუაწერტილებია. მრუდმხარა ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის კინეტიკური ენერგია



$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}, \qquad (1)$$

სადაც

$$Q_x = \sum m_k v_{kx};\ Q_y = \sum m_k v_{ky}.$$

განვსაზღვროთ სისტემაში შემავალი სხეულების მასათა ცენტრის კოორდინატები და ვიპოვოთ ამ წერტილების სიჩქარეების გეგმილები x და y ღერძებზე (იხ. ნახაზი). OAC და OCB ტოლფერდა სამკუთხედებიდან ვღებულობთ:

$$x_K = \frac{\ell}{2} \cdot cos\omega t, \qquad \dot{x}_K = v_{Kx} = -\frac{\ell\omega}{2} \cdot sin\omega t;$$
$$y_K = \frac{\ell}{2} \cdot sin\omega t, \qquad \dot{y}_K = v_{Ky} = \frac{\ell\omega}{2} \cdot cos\omega t;$$
$$x_C = \ell \cdot cos\omega t, \qquad \dot{x}_C = v_{Cx} = \ell\omega \cdot sin\omega t;$$
$$y_C = \ell \cdot sin\omega t, \qquad \dot{y}_C = v_{Cy} = \ell\omega \cdot cos\omega t;$$
$$x_A = 0, \qquad v_{Ax} = 0;$$
$$y_A = 2\ell \cdot sin\omega t, \qquad \dot{y}_A = v_{Ay} = 2\ell\omega \cdot cos\omega t;$$
$$x_B = 2\ell \cdot cos\omega t, \qquad \dot{x}_B = v_{Bx} = -2\ell\omega \cdot sin\omega t;$$
$$y_B = 0, \qquad \dot{y}_B = 0.$$

სიჩქარეების მიღებული გამოსახულებების გათვალისწინებით გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$Q_x = M_1\left(-\frac{\ell\omega}{2} \cdot sin\omega t\right) + 2M_1(-\ell\omega \cdot sin\omega t) +$$
$$+M_2(-2\ell\omega \cdot sin\omega t) = -\frac{\ell\omega}{2}(M_1 + 4M_1 + 4M_2) =$$
$$= -\frac{(5M_1 + 4M_2)\ell\omega \cdot sin\omega t}{2},$$

$$Q_y = M_1\frac{\ell\omega}{2} \cdot cos\omega t + 2M_1\ell\omega \cdot cos\omega t + 2M_2\ell\omega \cdot cos\omega t =$$
$$= \frac{\ell\omega}{2}cos\omega t(M_1 + 4M_1 + 4M_2) = \frac{(5M_1 + 4M_2)\ell\omega \cdot cos\omega t}{2}.$$

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

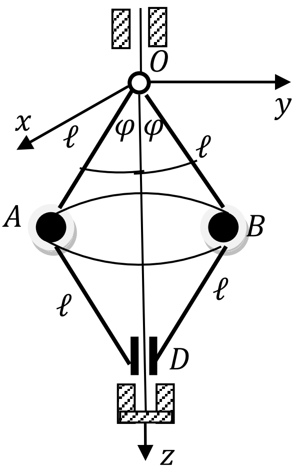
$$Q=\sqrt{\left[-\frac{(5M_1+4M_2)\ell\omega\cdot sin\omega t}{2}\right]^2+[(5M_1+4M_2)\ell\omega\cdot cos\omega t]^2}=$$

$$=\frac{(5M_1+4M_2)}{2}\ell\omega\sqrt{sin^2\omega t+cos^2\omega t}=\frac{\omega\ell}{2}(5M_1+4M_2).$$

მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი მიმართულია OC მრუდმხარას მართობულად.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლებოდა (36.3) და (26.4) ფორმულების გამოყენებაც.

პასუხი: მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორის სიდიდე $Q=\frac{\omega\ell}{2}(5M_1+4M_2)$, ხოლო მიმართულება მრუდმხარას მართობულია.



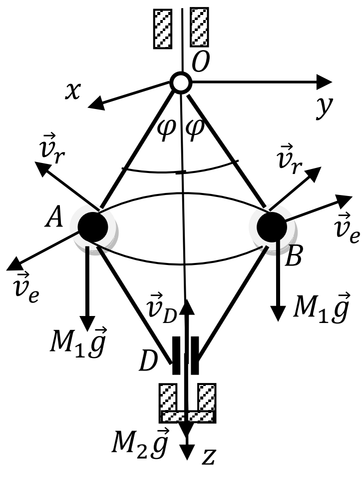
ამოცანა 36.5

განსაზღვრეთ ვერტიკალური ღერძის გარშემო აჩქარებით მბრუნავი ცენტრიდანული რეგულატორის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი. φ კუთხე იცვლება $\varphi=\varphi(t)$ კანონით; ზედა ღეროები მობრუნებისას ზევით წევენ A და B ბურთულებს.

ღეროების სიგრძეებია

$OA=OB=AD=BD=\ell.$

M_2 მასის D ქუროს მასათა ცენტრი ძევს ღერძზე. A და B ბურთულები ჩათვალეთ M_1 მასის წერტილოვან მასებად. ღეროების მასა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ტოლია

$$Q=\sqrt{Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2}.$$

ბურთულები ასრულებენ რთულ მოძრაობას:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad v_r = \dot{\varphi}\ell,$$
$$v_e = \omega\ell sin\varphi.$$

$\vec{v}_r$ ვექტორი მიმართულია $OA(OB)$ –ს
მართობულად, $\vec{v}_e$ ვექტორი კი მიმართულია წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორიის მხების გასწვრივ (იხ. ნახაზი) $(\vec{v}_e \parallel Ox)$.

D წერტილის სიჩქარეს ვიპოვით,
თუ გავაწარმოებთ მის z კოორდინატს:

$$z_D = 2\ell cos\varphi,$$

მაშინ

$$\dot{z}_D = v_D = -2\ell\dot{\varphi}sin\varphi.$$

მოძრაობის რაოდენობის გეგმილები x, y, z ღერძებზე შესაბამისად ტოლია:

$$Q_x = M_1 v_{Ae} - M_1 v_{Be} = 0, \ \ v_{Ae} = v_{Be};$$

$$Q_y = M_1 v_{Ar} cos\varphi - M_1 v_{Br} cos\varphi = 0, \ \ \text{რადგან} \ \ v_{Ar} = v_{Br};$$

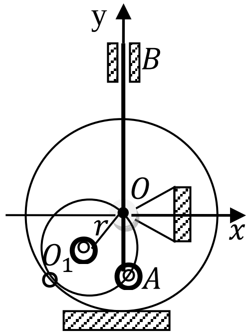
$$Q_z = -M_1 v_{Ar} sin\varphi - M_1 v_{Br} sin\varphi - M_2 v_D =$$

$$= -(2M_1\ell\dot{\varphi}sin\varphi + 2M_2\ell\dot{\varphi}sin\varphi) = -(2M_1 + 2M_{21})\ell\dot{\varphi}sin\varphi.$$

პასუხი: $Q_x = Q_y = 0, \ Q_z = -(2M_1 + 2M_{21})\ell\dot{\varphi}sin\varphi.$

$Q = |Q_z|$, სადაც Q - მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორია; yz სიბრტყე ემთხვევა რეგულატორის ღეროების განლაგების სიბრტყეს.

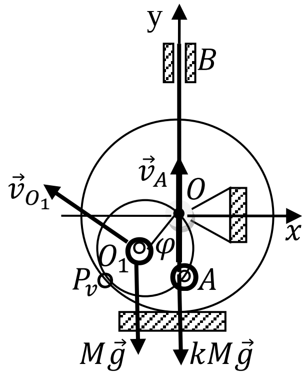
ამოცანა 36.6



ნახაზზე გამოსახული მექანიზმის მოძრავი თვალი r რადიუსის და M მასისაა, მისი მასათა ცენტრი O_1 წერტილშია; AB წრფივი ღერო k –ჯერ მეტს იწონის, ვიდრე მოძრავი თვალი და მასათა ცენტრი მის შუა წერტილშია. OO_1 მრუდმხარა O ღერძის გარშემო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. გამოთვალეთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა, თუ მრუდმხარის მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ტოლია

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}.$$



AB ღერო ასრულებენ გადატანით მოძრაობას, ხოლო ბორბალი- ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას. O_1 წერტილის სიჩქარე $v_{O_1} = r \cdot \omega$ ($\vec{v}_{O_1}$ მიმართულება ნახაზზეა ნაჩვენები).

რადგან P_v –სმც-ია, ამიტომ

$$\omega_k = \frac{v_{O_1}}{r} = \frac{v_A}{AP_v},$$

სადაც $AP_v = 2r sin\varphi$; .

$$v_A = \frac{v_{O_1} \cdot AP_v}{r} = \frac{r\omega \cdot 2r \cdot sin\varphi}{r} = 2r\omega sin\varphi$$

მაშინ

$$Q_x = Mv_{O_1} cos\varphi = -Mr\omega cos\omega t,$$

$$Q_y = Mv_{O_1} sin\varphi + kMv_A = Mr\omega sin\omega t + kM \cdot 2r\omega sin\omega t =$$
$$= Mr\omega(1 + 2k) sin\omega t.$$

<u>პასუხი:</u> მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი Ox ღერძზე უდრის $-Mr\omega cos\omega t$, ხოლო Oy ღერძზე- $Mr\omega(1 + 2k) sin\omega t$.

ამოცანა 36.7

ჰორიზონტალურად მდებარე ქვემეხის ლულა იწონის11ტონას, ყუმბარისა კი-54კგ.-ს. უმბარას სიჩქარე ლულიდან გამოსვლისას $v_0 = 900$ მ/წმ. განსაზღვრეთ ლულის თავისუფალი უკუსვლის სიჩქარე ლულიდან ყუმბარის გამოვარდნის მომენტში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე უდრის ნულს, ამიტომ შეგვიძლია ჩავწეროთ იმპულსის შენახვის კანონი Ox ღერძზე გეგმილებში:

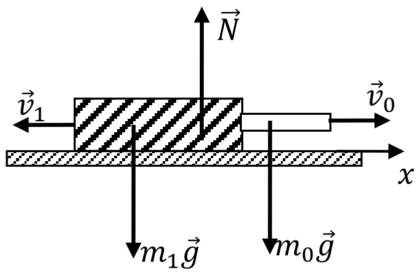
$$(m_1 + m_0)v = -m_1 v_1 + m_0 v_0, \qquad (1)$$

სადაც v -მექანიკური სისტემის სიჩქარეა საწყის მომენტში, $v = 0$. ამის გათვალისწინებით (1) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$0 = -m_1 v_1 + m_0 v_{0.}$$

აქედან

$$v_1 = \frac{m_0 v_0}{m_1} = \frac{54 \cdot 900}{11000} = 4{,}42(\text{მ/წმ})$$

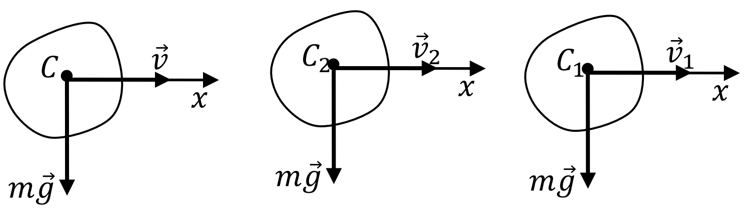


<u>პასუხი</u>: ქვემეხის ლულის უკუქცევის სიჩქარე უდრის 4,42მ/წმ და მიმართულია ყუმბარის მოძრაობის საპირისპიროდ.

ამოცანა 36.8

12 კგ. მასის მქონე ყუმბარა, რომელიც მოძრაობდა 15მ/წმ სიჩქარით, ჰაერში გაიხლიჩა ორ ნატეხად. 8კგ. მასის ნატეხის სიჩქარე მოძრაობის მიმართულებით 25მ/წმ-მდე გაიზარდა. განსაზღვრეთ მეორე ნატეხის სიჩქარე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივმართოთ Ox ღერძი სიჩქარის მიმართულებით, მაშინ ყველა ძალა იქნება ამ ღერძის მართობული (იხ. ნახაზი). ამიტომ გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე უდრის ნულს.



ჩავწეროთ იმპულსის შენახვის კანონი Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$mv = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

საიდანაც

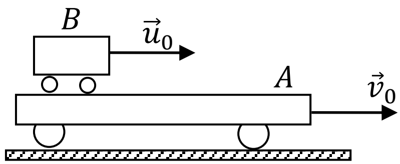
$$v_2 = \frac{mv - m_1 v_1}{m_2} = \frac{12 \cdot 15 - 8 \cdot 25}{4} = -5\left(\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}\right)$$

მინუს ნიშანი მიუთითებს იმაზე, რომ მეორე ნატეხის სიჩქარე მიმართულია პირველი ნატეხის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

პასუხი: 5მ/წმ და მიმართულია პირველი ნატეხის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ამოცანა 36.9

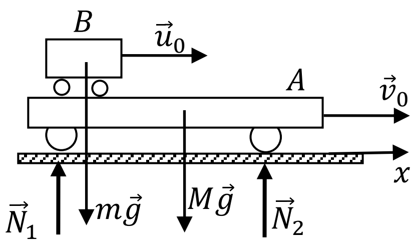
ჰორიზონტალურ A ბაქანზე, რომელიც მოძრაობს ინერციით სიჩქარით, გადაადგილდება B ურიკა მუდმივი ფარდობითი v_0 სიჩქარით. დროის რომელიღაც მომენტში ურიკა იყო დამუხრუჭებული.



განსაზღვრეთ ბაქანის (ურიკასთან ერთად) მოძრაობის საერთო v სიჩქარე მისი გაჩერების შემდეგ, თუ $M -$ ბაქანის მასაა, ხოლო m – ურიკის მასა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.. B ურიკა ასრულებს რთულ მოძრაობას (იხ. ნახაზი), მისი აბსოლუტური სიჩქარეა

$$\vec{v}_a = \vec{u}_0 + \vec{v}_0.$$



რამდენადაც გარე ძალების ნაკრები ვექტორის Ox ღერძზე გეგმილი ნულის ტოლია (ურიკა მოძრაობს ინერციით), შეიძლება დავწეროთ იმპულსის შენახვის კანონი Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$m(u_0 + v_0) + Mv_0 = (m + M)v,$$

საიდანაც

$$v = \frac{m(u_0+v_0)+Mv_0}{m+M} = \frac{mu_0+(m+M)}{m+M} = v_0 + \frac{m}{m+M}u_0$$

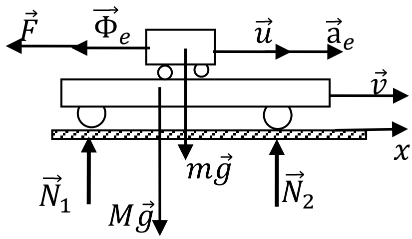
პასუხი: $v = v_0 + \frac{m}{m+M}u_0.$

ამოცანა 36.10

შეინარჩუნეთ წინა ამოცანის პირობები და განსაზღვრეთ S მანძილი, რომელსაც გაივლის B ურიკა A ბაქანზე მოძრაობის დაწყებიდან საბოლოო გაჩერებამდე და დამუხრუჭების τ დრო, თუ დამუხრუჭებისას წარმოიშობა წინაღობის მუდმივი $\vec{F}$ ძალა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ურიკის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებაში გამოიყენეთ $Mv + m(v+u) = const$ ტოლობა, სადაც u და v ცვლადი სიჩქარეებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა ურიკას დამუხრუჭების დაწყების მომენტიდან მისი ფარდობითი u სიჩქარე დამუხრუჭების τ დროის განმავლობაში შეიცვლება u_0-დან ნულამდე.



ბაქნის მოძრაობის v სიჩქარე გაიზრდება. ამასთან ამოცანაში მითითებული პირობის თანახმად სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი Ox ღერძზე იქნება:

$$Mv + m(v+u) = const. \tag{1}$$

რადგან ბაქანს მოძრაობის v სიჩქარე იცვლება, ამიტომ ბაქანი იმოძრავებს წარმტანი $\vec{a}_e$ აჩქარებით და აქედან გამომდინარე, მასზე იმოქმედებს წარმატნი ინერციის ძალა-$\vec{\Phi}_e$. ამიტომ ურიკას ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას Ox ღერძზე გეგმილებში ექნება სახე:

$$m\frac{du}{dt} = -F - \Phi_e\,, \tag{2}$$

სადაც $\left|\vec{\Phi}_e\right| = ma_e = m\frac{dv}{dt}$.

გავაწარმოოთ (1) განტოლება დროით:

$$M\frac{dv}{dt} + m\frac{du}{dt} + m\frac{dv}{dt} = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{m}{M+m}\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

(3) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$m\frac{du}{dt} = -F + \frac{m^2}{M+m}\frac{du}{dt}. \tag{4}$$

გარდაქმნის შემდეგ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{mM}{M+m}\frac{du}{dt} = -F. \qquad (5)$$

მოვხდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ (5) განტოლება, მივიღებთ:

$$\int_0^{\tau} dt = -\frac{mM}{(M+m)F}\int_{u_o}^{0} du \Rightarrow \tau = \frac{mM}{M+m}\frac{u_o}{F}.$$

ურიკას მიერ სრულ გაჩერებამდე გავლილი S მანძილის განსასაზღვრავად (5) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{mM}{M+m}\frac{udu}{dS} = -F. \qquad (6)$$

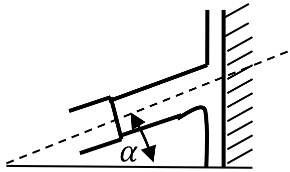
მოვხდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ (5) განტოლება, მივიღებთ:

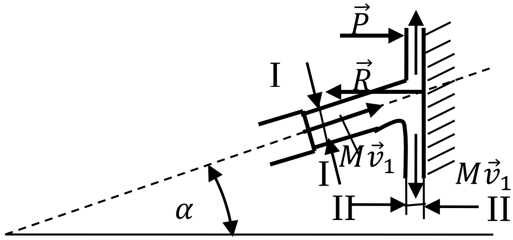
$$\int_0^{S} ds = -\frac{mM}{(M+m)F}\int_{u_o}^{0} udu \Rightarrow S = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}\frac{u_0^2}{F}.$$

პასუხი: $S = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}\frac{u_0^2}{F};\ \ \tau = \frac{mM}{M+m}\frac{u_o}{F}.$

ამოცანა 36.11

სახანძრო სახელურის ბუნიკიდან, რომლის განივკვეთი 16სმ^2-ია, გამოდის 8მ/წმ სიჩქარით წყლის ჭავლი ჰორიზონტთან $\alpha = 30^0$ კუთხით. განსაზღვრეთ ჭავლის წნევა ვერტიკალურ კედელზე, თუ სითხის ნაწილაკები კედელზე დაჯახებისას ღებულობს სიჩქარეებს, რომლებიც მიმართულია კედლის გასწვრივ. სიმძიმის ძალის მოქმედება უგულებელყოფილია.





ა მ ო ხ ს ნ ა. ეილერის თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$M\vec{v}_1 - M\vec{v}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0, \qquad (1)$$

სადაც $\vec{R}_1$ -მოცულობითი ძალების ნაკრები ვექტორია (სიმძიმის ძალების), $\vec{R}_2$ - ზედაპირული ძალების ნაკრები ვექტორია (კედლის რეაქციის ძალების), $M\vec{v}_1$ –I-I კვეთში დროის ერთეულში გადინებადი წყლის მასის მოძრაობის რაოდენობა; $M\vec{v}_2$ – II-II კვთში დროის ერთეულში
გამოდინებადი წყლის მასის მოძრაობის რაოდენობა. ჩავწეროთ (1) ვექტორული განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$Mv_1 cos30^0 + 0 + 0 + R_{2x} = 0,$$

საიდანაც

$$-R_{2x} = Mv_1 cos30^0 = P, \qquad (2)$$

სადაც P –კედელზე ნაკადის წნევის ძალაა.

წყლის ნაკადის მასაა

$$M = \sigma \frac{v_1 \gamma}{g},$$

სადაც $\gamma = 1 \cdot 10^3$ კგ/მ^3 –წყლის სიმკვრივეა; σ –სახანძროს ბუნიკის განივი კვეთის ფართობია.

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$P = \sigma \frac{\gamma}{g} v_1^2 cos30^0 = 16 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1 \cdot 10^3}{9{,}8} \cdot 64 \cdot 0{,}866 = 88{,}8(\text{ნ})$$

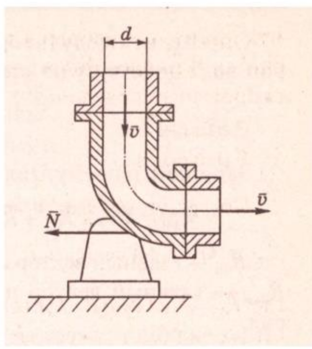
<u>პასუხი</u>: 88.8ნ.

ამოცანა 36.12

განსაზღვრეთ დამატებითი წნევის ჰორიზონტალური N მდგენელი იმ მილის მუხლის საყრდენზე, რომელშიც მოძრაობს წყალი v =2მ/წმ სიჩქარით, თუ მილის განივკვეთის დიამეტრი d=300მმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა ეილერის თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$M\vec{v}_1 - M\vec{v}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0, \qquad (1)$$



სადაც $\vec{R}_1$ -მოცულობითი ძალების ნაკრები ვექტორია, $\vec{R}_2$ - ზედაპირული ძალების ნაკრები
ვექტორი.)

(1) ვექტორული განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში მიიღებს სახეს (იხ. ნახაზი):

$$-Mv_2 + 0 + 0 + R_{2x} = 0,$$

საიდანაც

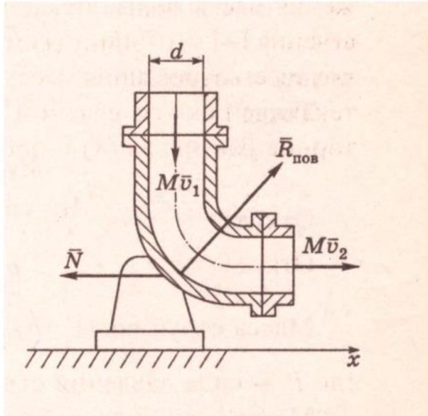
$$R_{2max} = Mv_2 = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\gamma v}{g} v = \frac{\pi d^2}{4g} v^2,$$

სადაც $\gamma = 1 \cdot 10^3$ კგ/მ^3 –წყლის სიმკვრივეა;

რადგან $|R_{2max}| = N,$ მაშინ

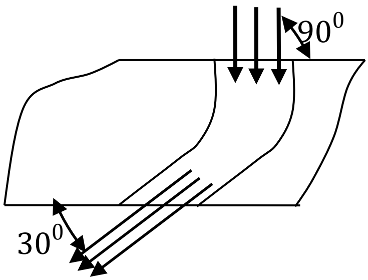
$$N = \frac{3.14 \cdot 10^3 (300 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 9,8} = 284 \text{ (ნ)}$$

პასუხი: $N = 284$ნ.



ამოცანა 36.13

წყალი შედის ცვლადი განივკვეთის უძრავ მილში, რომელიც სიმეტრიულია ვერტიკალური სიბრტყის მიმართ, 2მ/წმ სიჩქარით და $\alpha = 90^0$ კუთხით ჰორიზონტთან; მილის განივკვეთი შესასვლელთან არის 0,02მ^2; წყლის სიჩქარე გამოსასვლელთან $v_1 = 4$მ/წმ და მიმართულია ჰორიზონტთან $\alpha_1 = 30^0$ კუთხით. განსაზღვრეთ მილის კედელზე წყლის მოქმედების რეაქციის ჰორიზონტალური მდგენელი.



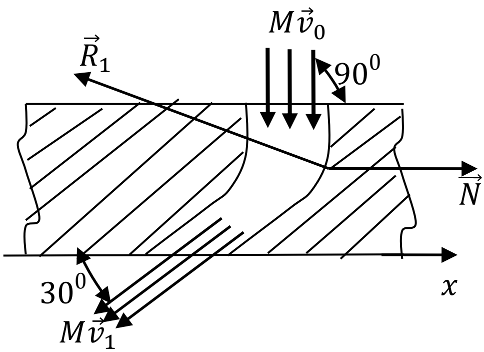
ა მ ო ხ ს ნ ა ეილერის თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$M\vec{v}_1 - M\vec{v}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0, \quad (1)$$

სადაც $\vec{R}_1$ -მოცულობითი ძალების ნაკრები ვექტორია, $\vec{R}_2$ - ზედაპირული ძალების ნაკრები ვექტორი.) (1) ვექტორული განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში მიიღებს სახეს (იხ. ნახაზი):

$$-Mv_{1x} + 0 + 0 - R_{2x} = 0,$$

სადაც $v_{1x} = -v_1 cos30^0$.



მაშინ

$$Mv_1 cos30^0 - R_{2x} = 0.$$

აქედან $R_{2x} = Mv_1cos30^0$.

სითხის ნაკადის მასა

$$M = \sigma\frac{v_0\gamma}{g},$$

სადაც $\sigma -$ არხის კვეთის ფართობია; $\gamma = 1\cdot10^3$ კგ/მ^3 –წყლის სიმკვრივეა;

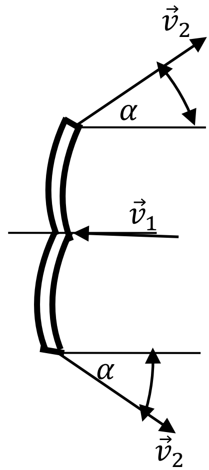
მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$R_{2x} = \sigma\frac{\gamma}{g}v_0v_1cos30^0 = \frac{0.02\cdot1\cdot10^3\cdot2\cdot4\cdot0.866}{9,8} = 138(\text{ნ})$$

არხის კედლებზე წყლის N წნევის ჰორიზონტალური მდგენელი

$$N = R_{2x} = 138(\text{ნ})$$

<u>**პასუხი:**</u> $N = 138$ნ.



ამოცანა 36.14

განსაზღვრეთ უძრავ ნიჩაბზე ჭავლის წნევის ჰორიზონტალური მდგენელი, თუ წყლის მოცულობითი ხარჯი არის Q. კუთრი წონა γ, ნიჩაბზე წყლის მიწოდების v_1 სიჩქარე ჰორიზონტალურია, ნიჩბიდან წყლის გამოსვლის v_2 სიჩქარე ჰორიზონტთან ქმნის α კუთხეს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეილერის თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$M\vec{v}_1 - M\vec{v}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0,$$
(1)

სადაც $\vec{R}_1$ -მოცულობითი ძალების ნაკრები ვექტორია, $\vec{R}_2$ - ზედაპირული ძალების ნაკრები ვექტორი.) (1)

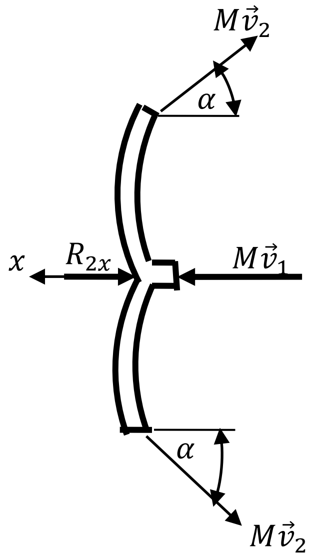
ვექტორული განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში მიიღებს სახეს (იხ. ნახაზი):

$$Mv_{1x} - Mv_{2x} + R_{2x} = 0,$$

სადაც $v_{1x} = -v_1,\ v_{2x} = v_2cos\alpha$.

$$R_{2x} = Mv_1 + \frac{M}{2}v_2cos\alpha.$$

(2)



წყლის ნაკადის მასაა $M = \gamma Q$, მაშინ (2) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$R_{2x} = N = \gamma Q v_1 + \gamma Q v_2 cos\alpha == \gamma Q(v_1 + v_2 cos\alpha),$$

N –წყლის ნაკადის წნევის ძალის ჰორიზონტალური მდგენელის სიდიდეა.

<u>პასუხი</u>: $N = \gamma Q(v_1 + v_2 cos\alpha)$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 36.11-36.36 ამოცანები შეიძლება ამოვხსნათ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის ინტეგრალური ფორმის გამოყენებით Ox ღერძზე გეგმილებში , ვისარგებლებთ რა (36.9) ფორმულებით, რომელიც მოყვანილი იყო მეთოდურ მითიტებებში.

§37. თეორემა ნივთიერწერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების შესახებ. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის დიფერენციალური განტოლება.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

განასხვავებენ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრებ მომენტს ცენტრისა და ღერძის მიმართ.

რომელიმე ცენტრის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ან მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტი ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების იმავე ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტების გეომეტრიულ ჯამს.

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{q}_{k0.} \qquad (37.1)$$

რომელიმე ღერძის მიმართ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ან მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტი ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების იმავე ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტების ალგებრულ ჯამს (მაგალითად Z ღერძის მიმართ):.

$$\vec{K}_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{q}_{kz.} \qquad (37.2)$$

ცენტრისა და ღერძის მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის განმარტება მოცემულია 28-ე პარაგრაფში.

უძრავი Z ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის კინეტიკური მომენტი განისაზღვრება ფორმულით:

$$K_z = I_z \omega\ , \qquad (37.3)$$

სადაც I_z –სხეულის ინერციის მომენტია z ღერძის მიმართ; ω – სხეულის კუთხური სიჩქარე.

.

რომელიმე ცენტრის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა:

რომელიმე O ცენტრის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური მომენტის წარმოებული დროით უდრის ამავე O ცენტრის მიმართ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრებ ვექტორს:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) = \vec{M}_0^{\cdot(e)}, \tag{37.4}$$

ამ თეორემიდან გამომდინარე შედეგი:

თუ რომელიმე ცენტრის მიმართ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, მაშინ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტი ამავე O ცენტრის მიმართ რჩება მუდმივი, ე.ი. როცა $\vec{M}_0^{\cdot(e)} = 0,\ \vec{K}_0 = const.$

(37.4) განტოლებას შეესაბამება სამი სკალარული განტოლება:

$$\begin{cases} \dfrac{dK_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_k^{(e)}) = M_x^{\cdot(e)}, \\ \dfrac{dK_y}{dt} = \sum M_y(\vec{F}_k^{(e)}) = M_y^{\cdot(e)}, \\ \dfrac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^{(e)}) = M_z^{\cdot(e)}, \end{cases} \tag{37.5}$$

რომლებიც გამოსახავენ სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემას რაიმე ღერძის მიმართ:

რომელიმე ღერძის მიმართ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის წარმოებული დროით უდრის ამავე ღერძის მიმართ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრებ ვექტორს:

ამ თეორემიდან გამომდინარე შედეგი:

თუ რომელიმე ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, მაშინ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტი ამავე ღერძის მიმართ რჩება მუდმივი, მაგალითად, როცა

$$M_z^{\cdot(e)} = \sum M_z(\vec{F}_k^{(e)}) = 0,\ K_z = const.$$

თეორემიდან გამომდინარე შედეგები გამოსახავენ კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონს.

თუ მყარი სხეული გარე ძალების მოქმედებით ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო და ამ ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ (37.3) და (37.5) ფორმულების გათვალისწინებით ვღებულობთ მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალურ განტოლებას.

ვთქვათ, ბრუნვის ღერძს წარმოადგენს Z ღერძი, მაშინ

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z^{\cdot(e)}. \tag{37.6}$$

თუ $I_z = const,$ მაშინ (37.6) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\cdot(e)}. \tag{37.7}$$

რადგან

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

ან

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},$$

ამიტომ (37.7) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$I_z \varepsilon = M_z^{\cdot(e)}. \tag{37.8}$$

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^{\cdot(e)}. \tag{37.9}$$

იმის და მიხედვით, თუ როგორ არის ამოცანა დასმული, იყენებენ სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლების ამ სამი ფორმიდან ერთ-ერთს. მაგალითად, თუ მოცემულია ბრუნვის კუთხური აჩქარება ε და უნდა განისაზღვროს გარე ძალების ნაკრები მომენტი, მაშინ განტოლება საჭიროა ჩაიწეროს (37.8) სახით.

კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონის განსასაზღვრავად ან ბრუნვის კანონის დასადგენად გამოიყენებენ ბრუნვის დიფერენციალური განტოლებას შესაბამისად (37.7) ან (37.9) ფორმით.

ამგვარდ, ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ამოცნების შემდეგი ტიპები:

- თუ ცნობილია სხეულის ბრუნვის კანონი და ამ სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, უნდა განისაზღვროს გარე ძალების მომენტი;
- თუ ცნობილია სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ და ამ ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი, უნდა განისაზღვროს ამ სხეულის ბრუნვის კანონი.

თუ ფიზიკური ქანქარასათვაის გამოვიყენებთ ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას, მივიღებთ ქანქარას რხევის პერიოდის განსასაზღვრავ ფორმულას:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{Gd}}\ , \tag{37.10}$$

სადაც $d-$ ღერძის დაკიდების წერტილიდან ქანქარას მასათა ცენტრამდე მანძილია, $I_z -$ ქანქარას ინერციის მომენტი დაკიდების ღერძის მიმართ, $G -$ ქანქარას წონა.

(37.10) ფორმულა საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტალურად განვსაზღვროთ სხეულის ინერციის მომენტი, ამასთან საჭიროა ვიცოდეთ სხეულის წონა, მანძილი დაკიდების წერტილიდან სხეულის მასათა ცენტრამდე და რხევის პერიოდი (ერთი სხეულის რხევისათვის საჭირო დრო). მაშინ

$$I_x = \frac{Gd\tau^2}{4\pi^2}.\ , \tag{37.11}$$

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:
1. გამოვსახოთ სხეული ან მექანიკური სისტემა, რომლის მოძრაობაც უნდა იყოს გამოკვლეული მოცემულ ამოცანაში;
2. ვაჩვენოთ სხეულზე (სისტემაზე) მოქმედი ყველა გარე ძალა ბმების შესაბამისი რეაქციის ძალების ჩათვლით;
3. აუცილებლობის შემთხვევაში გამოვსახოთ დეკარტეს კოორდინატთა ღერძები და დავამთხვიოთ ერთ-ერთი მათგანი ბრუნვის ღერძს;
4. განვსაზღვროთ ბრუნვის ღერძის მიმართ ყველა გარე ძალის მომენტების ჯამი. ამ დროს შესაძლებელია ორი შემთხვევა.

ბრუნვის ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი არ არის ნულის ტოლი. ამ შემთხვევაში საჭიროა:

- შევადგინოთ ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (37.7)-(37.9) სახით, ამოვხსნათ ის და განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდე ზოგადი სახით, შემდეგ საჭიროებისამებრ მიღებულ გამოსახულებაში ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები. კუთხური სიჩქარის ცვლილების ან სხეულის მოძრაობის კანონის განსაზღვრისათვის საჭიროა ვაინტეგროთ მიღებული დიფერენციალური განტოლება წინასწარ განსაზღვრულ საწყის პირობებში;
- ფიზიკური ქანქარას მოძრაობაზე ამოცანების ამოხსნისას შესაძლებელია უშუალოდ ვისარგებლოდ (37.10) და (37.11) ფორმულებით.

თუ ბრუნვის ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ საჭიროა:

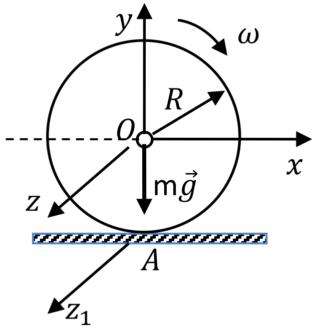
- ბრუნვის ღერძის მიმართ შევადგინოთ სისტემის კინეტიკური მომენტის გამოსახულება მისი საწყისი და საბოლოო მდებარეობისათვის და გავუტოლოთ ერთმანეთს. თუ საწყის მომენტში სისტემა იმყოფებოდა წონასწორობაში, მაშინ აუცილებელია მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტი გავუტოლოთ ნულს.
- განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდე ზოგადი სახით და მიღებულ გამოსახულებაში ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 37.1

$m =$ 50კგ მასის და $R =$30სმ რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, ამასთან თავისი ღერძის გარშემო ასრულებს $n =$50ბრ/წთ-ს. გამოთვალეთ მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი: 1) დისკოს ცენტრზე გამავალი და მოძრაობის სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ; 2) მყისი ღერძის მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) თუ z ღერძი გადის დისკოს O ცენტრზე (იხ. ნახაზი), მაშინ მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი იქნება



$$K_z = I_z\omega \,,$$

სადაც

$$I_z = \frac{mR^2}{2};\ \omega = \frac{\pi n}{30}.$$

მაშინ

$$K_z = \frac{mR^2}{2}\frac{\pi n}{30} = \frac{50\cdot 0{,}3^2\cdot 60}{60} = 14{,}1(\text{კგ.მ}^2/\text{წმ}).$$

2) თუ z_1 ღერძი გადის სიჩქარეთა მყის A ცენტრზე, მაშინ

$$K_{z_1} = I_{Az_1}\omega \,.$$

ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის თანახმად ვიპოვით:

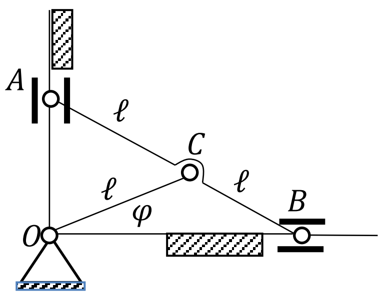
$$I_{Az_1} = I_z + mR^2.$$

მაშინ

$$K_{z_1} = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\frac{\pi n}{30} = \left(\frac{50\cdot 0.3^2}{2} + 50\cdot 0.3^2\right)\frac{3{,}14\cdot 60}{30} =$$
$$= 42{,}3(\text{კგ.მ}^2/\text{წმ}).$$

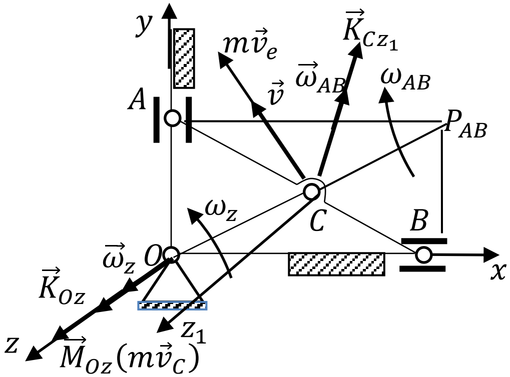
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 1) . 14,1 კგ.მ^2/წმ; 2) 42,3კგ.მ^2/წმ.

ამოცანა 37.2



განსაზღვრეთ ელიფსოგრაფის AB სახაზავის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი z ღერძის მიმართ აბსოლუტური მოძრაობისას, თუ z ღერძი ემთხვევა OC მრუდმხარას ბრუნვის ღერძს, და აგრეთვე იმ

ღერძის მიმართ, რომელიც გადის სახაზავის მასათა C ცენტრზე z –ის პარალელურად მისი ფარდობითი მოძრაობის შემთხვევაში. მრუდმხარა ბრუნავს კუთხური სიჩქარით, რომლის გეგმილი z ღერძზე ω_z –ის ტოლია. სახაზავის მასა არის m, $OC = AC = CB = \ell$. (იხ. 34.5 ამოცანის ნახაზი).



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ C წერტილის სიჩქარე თუ ის ეკუთვნის მრუდმხარას:

$$v_C = \omega_z \cdot OC$$

და თუ ის ეკუთვნის ბარბაცას:

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

რადგან $OC = CP_{AB}$, ამიტომ

$$\omega_{AB} = \omega_z.$$

ნახაზზე გამოსახული AB სახაზავი ასრულებს რთულ მოძრაობას: წარმტანი- OC მრუდმხარასთან ერთად ბრუნვითი (Oz ღერძის გარშემო) და ფარდობითი-ბრუნვა z_1 ღერძის გარშემო.

ვიპოვოთ AB სახაზავის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი O წერტილზე გამავალი z ღერძის მიმართ მისი აბსოლუტური მოძრაობისას:

$$\vec{K}_{Oz} = \vec{K}_{Oze} + \vec{K}_{Cz_1 r},$$

ან

$$\vec{K}_{Oz} = \vec{M}_{Oz}(m\vec{v}_C) + \vec{K}_{Cz_1},$$

რადგან $\vec{K}_{Oz}$, $\vec{M}_{Oz}(m\vec{v}_C)$ და $\vec{K}_{Cz_1}$ ვექტორები პარალელურია, ამიტომ

$$K_{Oz} = mv_C \cdot \ell - K_{Cz_1}\omega_z = m\ell^2\omega_z - \frac{m(2\ell)^2}{12}\omega_z = \frac{2}{3}m\ell^2\omega_z.$$

რადგან სისტემის კინეტიკური მომენტის მიმართულება ემთხვევა $\vec{\omega}_z$ ვექტორის მიმართულებას, ამიტომ $\vec{K}_{Oz}$ მომენტს აქვს დადებითი მნიშვნელობა.

AB სახაზავის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი C წერტილზე გამავალი z_1 ღერძის მიმართ ფარდობითი მოძრაობისას ტოლია

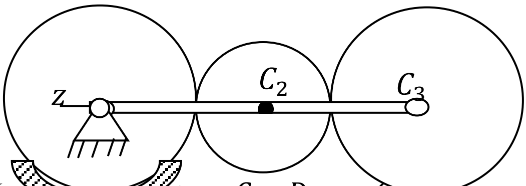
$$K_{Cz_1} = I_{Cz_1}\omega_{AB} = \frac{m(2\ell)^2}{12}\omega_z = \frac{1}{3}m\ell^2\omega_z.$$

რადგან $\vec{K}_{Cz_1}$ ვექტორი მიმართულია მიმართულების საპირისპირო მხარეს, ამიტომ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის მნიშვნელობას ვიღებთ უარყოფითი ნიშნით.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $K_{Oz}=\frac{2}{3}m\ell^2\omega_z;\quad K_{Cz_1}=\frac{1}{3}m\ell^2\omega_z.$

ამოცანა 37.3

გამოთვალეთ პლანეტარული გადაცემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი უძრავი z ღერძის მიმართ, რომელიც ემთხვევა მრუდმხარას ბრუნვის O_3z ღერძს. უძრავი 1 თვლის და მოძრავი 3 თვლის რადიუსები ერთნაირია და უდრის r , 3 თვლის მასა უდრის m-ს, m_2 მასის თვლის რადიუსია r_2. მრუდმხარა ბრუნავს კუთხური სიჩქარით, რომლის გეგმილი z ღერძზე უდრის ω_z. მრუდმხარას მასა უგულებელყოფილია. თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოებად.

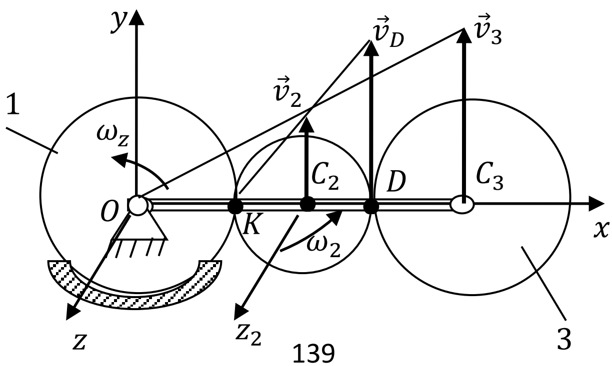


ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ C_2, D და C_3 წერტილების სიჩქარეები (იხ. ნახაზი):

$$v_{C_2}=v_2=(r+r_2)\omega_z,$$

$$v_D=2(r+r_2)\omega_z,$$

$$v_{C_3}=v_3=2(r+r_2)\omega_z.$$



რადგან მივიღეთ, რომ $v_3 = v_D$, ამიტომ 3 თვალი ასრულებს წრიულ გადატანით მოძრაობას და მისი კუთხური სიჩქარე უდრის ნულს.

რადგან პლანეტარული გადაცემის ბორბლების ბრუნვის ღერძები პარალელურია, ამიტომ მექანიზმის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი იქნება

$$K_{Oz} = K_{2Oz} + K_{3Oz}. \tag{1}$$

2 ბორბლის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, რომელიც ასრულებს რთულ მოძრაობას, იქნება:

$$K_{2Oz} = K_{2Oz}^{e} + K_{2Oz_2}^{r},$$

სადაც $K_{2Oz}^{e} = M_{Oz}(m_2\vec{v}_2) = m_2(r + r_2)^2\omega_z;$

$$K_{2Oz_2}^{r} = I_{C_2z_2}\omega_2 = I_{C_2z_2}\frac{r + r_2}{r_2}\omega_z = \frac{m_2r_2^2}{2}\frac{r + r_2}{r_2}\omega_z =$$

$$= \frac{m_2r_2(r + r_2)}{2}\omega_z.$$

მაშინ

$$K_{2Oz} = m_2(r + r_2)^2\omega_z + \frac{m_2r_2(r + r_2)}{2}\omega_z =$$

$$= m_2(r + r_2)\frac{2r + 3r_2}{2}\omega_z. \tag{2}$$

3 ბორბლის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, რომელიც ასრულებს მხოლოდ გადატანით მოძრაობას, იქნება

$$K_{3Oz} = M_{Oz}(m\vec{v}_3) = 4m(r + r_2)^2\omega_z. \tag{3}$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) ფორმულაშივვდა ვიპოვოთ პლანეტარული გადაცემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის მნიშვნელობა:

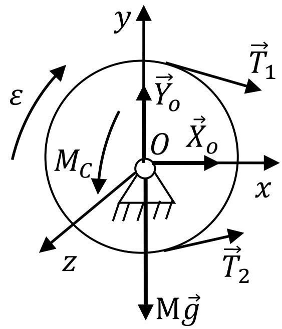
$$K_{Oz} = m_2(r + r_2)\frac{2r + 3r_2}{2}\omega_z + 4m(r + r_2)^2\omega_z =$$

$$= \frac{m_2(2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)}{2}(r + r_2)\omega_z.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $K_{Oz} = \frac{m_2(2r+3r_2)+8m(r+r_2)}{2}(r + r_2)\omega_z.$

ამოცანა 37.4

დვედის წამყვანი და ამყოლი შტოების დაჭიმულობანი, რომლესაც ბრუნვასი მოჰყავს $M =$ 3.27კგ მასის და $r = 2$0სმ რადიუსის ბორბალი, სათანადოდ ტოლია და $T_1 = 100$ნ, $T_2 = 50$ნ. რას უნდა უდრიდეს წინაღობის ძალების მომენტი იმისათვის, რომ ბორბალი ბრუნავდეს $\varepsilon = 1{,}5$ წმ$^{-2}$ კუთხური აჩქარებით. ორბალი ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოდ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ბორბალზე მოქმედი აქტიური ძალები: $M\vec{g}$- ბორბლის სიმძიმის ძალა, $\overrightarrow{T_1}$ და $\overrightarrow{T_2}$ –დვედის დაჭიმულობის ძალები, წინააღმდეგობის ძალები M_C მომენტით, ბმების რეაქციები $\overrightarrow{X_0}$ და $\overrightarrow{Y_0}$. დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

სადაც $I_z = \frac{mr^2}{2}$; $\ddot{\varphi} = \varepsilon$; $\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = T_1r - T_2r - M_C$,

მაშინ (1) განტოლებაა მიიღებს სახეს

$$\frac{mr^2}{2}\varepsilon = T_1r - T_2r - M_C.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ვიპოვით წინააღმდეგობის ძალების მომენტს:

$$M_C = (T_1 - T_2)r - \frac{mr^2}{2}\varepsilon = (100 - 500)\cdot 0{,}2 -$$

$$-\frac{3{,}21\cdot 0{,}2^2}{2}\cdot 1{,}5 = 9{,}8(\text{ნ.მ})$$

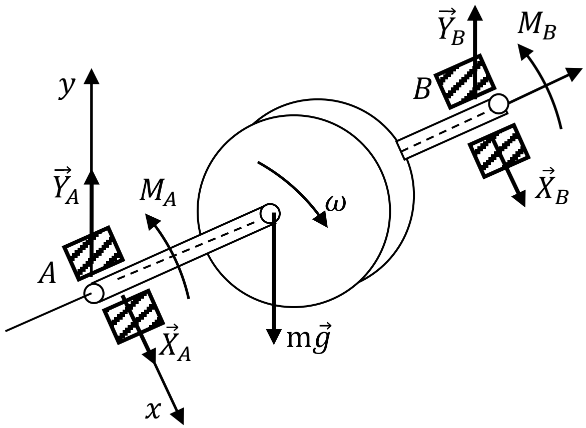
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 9,8 ნ.მ.

ამოცანა 37.5

ხახუნის მომენტის განსასაზღვრავად პოჭოჭიკებში ლილვზე ჩამოცმულია $m = 500$კგ მასის მქნევარა. მქნევარას ინერციის რადიუსი $\rho = 1{,}5$მ. მქნევარას მინიჭებული აქვს $n =$240ბრ/წთ შესაბამისი კუთხური

სიჩქარე; თავის ნებაზე გაშვებული მქნევარა გაჩერდა 10 წთ-ში. განსაზღვრეთ ხახუნის მომენტი, რომელიც ჩათვლილია მუდმივად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალები: $m\vec{g}$-ბორბლის სიმძიმის ძალა, M_A და M_B – პოჭოჭიკებში ხახუნის ძალების მომენტები (ორივე პოჭოჭიკში ხახუნის ჯამური მომენტი



$M = M_A + M_B$), $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}$ და $\overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B} - A$ და B საყრდენებში ბმების რეაქციები. დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

სადაც $I_z = m\rho^2$; $\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -M_{ხახ}$.

მაშინ

$$m\rho^2 \frac{d\omega}{dt} = -M_{ხახ}.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება

$$m\rho^2 d = -M_{ხახ}.dt$$

და ვაინტეგროთ ეს ტოლობა:

$$m\rho^2 \int_{\omega_0}^{0} d\,\omega = -M_{ხახ} \int_{0}^{t} d\,t.$$

მივიღებთ:

$$-m\rho^2 \omega_0 = -M_{ხახ} t,$$

სადაც

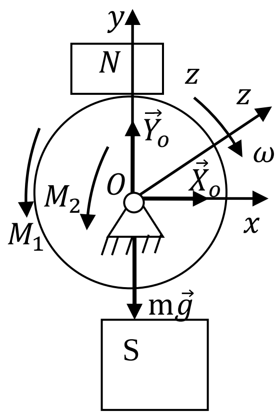
$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}.$$

აქედან ვიპოვით ხახუნის მომენტს:

$$M_{ხახ} = \frac{m\rho^2\omega_0}{t} = \frac{500 \cdot 1{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot 240}{600 \cdot 30} = 47{,}1\ (ნ.მ)$$

პ ა ს უ ხ ი: 47,1 ნ.მ.

ამოცანა 37.6



დიდი მქნევარების სწრაფად აჩერებისათვის გამოიყენება ელექტრომუხრუჭი, რომელიც შედგება ორი დიამეტრალურად მდებარე პოლუსისაგან, რომლებზე დახვეული გრაგნილი იკვებება მუდმივი დენით. მქნევარას პოლუსების მახლობლად მოძრაობისას მის მასაში ინდუირებული დენები წარმოქმნიან M_1 მამუხრუჭებელ მომენტს, რომელიც მქნევარას ფერსოს vსიჩქარის პროპორციულია: $M_1 = kv$, სადაც k კოეფიციენტი დამოკიდებულია მაგნიტურ ნაკადსა და მქნევარას ზომებზე. საკისრებში ხახუნის M_2 მომენტი ჩათვალეთ მუდმივად; მქნევარას დიამეტრია D , ხოლო ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ J. იპოვეთ, რა დროის შემდეგ გაჩერდება მქნევარა, თუ იგი ბრუნავდა ω_0 კუთხური სიჩქარით..

ა მ ო ხ ს ნ ა. . ვაჩვენოთ ნახაზზე მქნევარას ბრუნვის მიმართულება მასზე მოქმედი აქტიური ძალების მოქმედებით: $m\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, M_1 და M_2 −წინააღმდეგობის ძალების მომენტები, საყრდენში აღძრული ბმების რეაქციები $\overrightarrow{X_0}$ და $\overrightarrow{Y_0}$.

დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

სადაც $I_z = J$;

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = M_1 - M_2 = -(M_2 + kv) = -\left(M_2 + \frac{kD\omega}{2}\right).$$

მაშინ (1) განტოლებაა მიიღებს სახეს

$$J\frac{d\omega}{dt} = -\left(M_2 + \frac{kD\omega}{2}\right).$$

ამ უკანასკნელი ტოლობაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვიპოვოთ დრო, რომლის განმავლობაში გაჩერდება მქნევარა:

$$J\frac{d\omega}{M_2 + \frac{kD\omega}{2}} = -dt \Rightarrow J\int_{\omega_0}^{0}\frac{d\omega}{M_2 + \frac{kD\omega}{2}} = -\int_0^T dt \Rightarrow$$

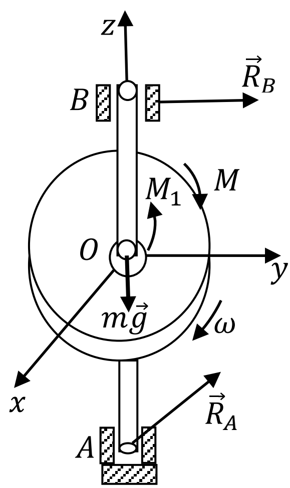
$$\Rightarrow \frac{2J}{kD}ln\left(\frac{M_2 + \frac{kD\omega}{2}}{M_2}\right) = T,$$

ან

$$T = \frac{2J}{kD}ln\left(1 + \frac{kD\omega_0}{M_2}\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $T = \frac{2J}{kD}ln\left(1 + \frac{kD\omega_0}{M_2}\right).$

ამოცანა 37.7



წონასწორობაში მყოფი მყარი სხეული უძრავი ვერტიკალური ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობაში მოჰყავს M მომენტს; ამ მოძრაობისას წარმოიქმნება წინაღობის ძალების M_1 მომენტი, რომელიც მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია: $M_1 = \alpha\omega^2$. იპოვეთ კუთხური სიჩქარის ცვლილებისკანონი; სხეულის ინერციის მომენტიბრუნვის ღერძის მიმართ J ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ახაზზე უძრავი ვერტიკალურ ღერძის არშემო მბრუნვ მყარ სხეულზე მოქმედი აქტიური ძალები: $m\vec{g} -$ სიმძიმის

ძალა, M და M_1 —წინააღმდეგობის ძალების მომენტები, A და B საყრდენში აღძრული ბმების რეაქციები $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$.

დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

სადაც $I_z = J;\ \ \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = M - M_1 = M - \alpha\omega^2.$

მაშინ (1) განტოლებაა მიიღებს სახეს

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega^2.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ:

$$J\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = dt \Rightarrow \frac{J}{\alpha}\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\omega^2\frac{M}{\alpha} - \alpha\omega^2} = \int_0^t dt$$

და მივიღებთ

$$\frac{J}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}}ln\left|\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \omega}\right|_0^{\omega} = t$$

ან

$$ln\left|\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \omega}\right| = \frac{2\sqrt{\alpha M}}{J}t.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\beta = 2\sqrt{\alpha M}/\,J,$ მაშინ ბოლო გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \omega} = e^{\beta t}.$$

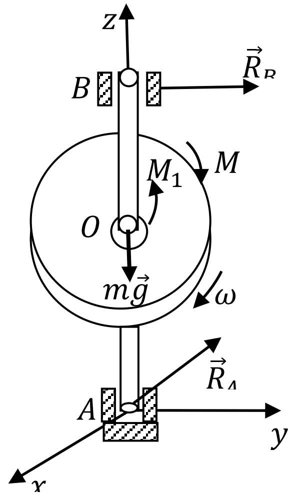
ამ გამოსახულებიდან ვიპოვით სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონს:

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} - 1},$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}-1}}$, სადაც $\beta = \frac{2\sqrt{\alpha M}}{J}$.

ამოცანა 37.8

ამოვხსანათ წინამდებარე ამოცანა იმ შემთხვევაში , როცა წინაღობის ძალთა $M_1 -$ მომენტი მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის პროპორციულია, ე.ი. $M_1 = \alpha\omega$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე უძრავი ვერტიკალურ ღერძის გარშემო მბრუნვ მყარ სხეულზე მოქმედი აქტიური ძალები: $m\vec{g} -$ სიმძიმის ძალა, M და $M_1 -$წინააღმდეგობის ძალების მომენტები, A და B საყრდენებში აღძრული ბმების რეაქციები $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$.

დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

სადაც $I_z = J;\ \ \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) =$

$$= M - M_1 = M - \alpha\omega.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega = -(\alpha\omega - M).$$

ამ უკანასკნელი ტოლობაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ:

$$J\frac{d\omega}{\alpha\omega - M} = -dt,$$

$$J\int_0^\omega \frac{d\omega}{\alpha\omega - M} = -\int_0^t dt,$$

$$\frac{J}{\alpha}ln\left|\frac{\alpha\omega - M}{-M}\right| = -t.$$

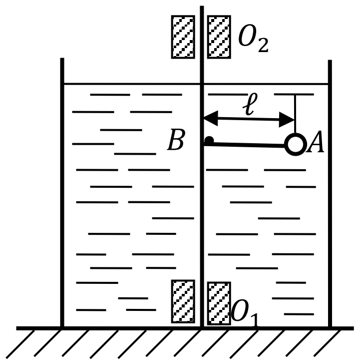
ამ გამოსახულების პოტენცირებით ვიპოვით ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონს:

$$\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t/J}\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t/J}\right).$

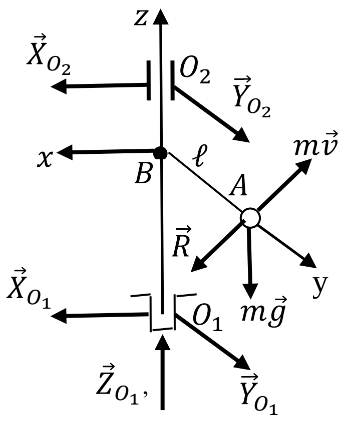
ამოცანა 37.9

ℓ სიგრძის AB ღეროს ბოლოზე მიმაგრებულია A ბურთულა მოთავსებულია სითხით სავსე ჭურჭელში და მოძრაობაში მოდის O_1O_2 ვერტიკალური ღერძის გარშემო საწყისი ω_0 კუთხური სიჩქარით. სითხის წინააღმდეგობის ძალა ბრუნვის კუთხური სიჩქარის პროპორციულია, ე.ი. $R = \alpha m\omega$ სადაც m არის ბურთულას მასა, α − პროპორციულობის კოეფიციენტი. განსაზღვრეთ, რა დროის შემდეგ გახდება ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ორჯერ ნაკლები საწყის ω_0 კუთხური სიჩქარეზე და, აგრეთვე, ბრუნთა რიცხვი, რომელსაც ღერო ბურთულიანად შეასრულებს ამ დროში.



ბურთულის მასა ჩავთვალეთ მის ცენტრში თავმოყრილად, ხოლო ღეროს მასა უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. O_1O_2 ვერტიკალურ ღერძზე AB ღეროს ბოლოზე მიმაგრებულია A ბურთულა მოძრაობს აქტიური ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი): $m\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, $\vec{R}$ − წინააღმდეგობის ძალა, O_1 და O_2 საყრდენებში აღძრული ბმების რეაქციები $\vec{X}_{O_1}$, $\vec{Y}_{O_1}$ და. $\vec{X}_{O_2}$, $\vec{Y}_{O_2}$.



ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემით:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^{(e)}), \qquad (1)$$

სადაც $K_z = M_z(m\vec{v}) = m\ell^2\omega$; $M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -R\ell = -\alpha\ell m\omega$.
მაშინ

$$\frac{d(m\ell^2\omega)}{dt} = -\alpha\ell m\omega$$

ან

$$\ell\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega. \qquad (2)$$

(2) ტოლობაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ:

$$\ell\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}\frac{d\omega}{\omega} = -\alpha\int_0^T dt,$$

მივიღებთ

$$-\ell ln2 = -\alpha T.$$

ამ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ დროს, რომლის განმვლობაში ბურთულას კუთხური სიჩქარე მცირდება 2-ჯერ:

$$T = \frac{\ell}{\alpha}ln2.$$

ბრუნთა n რიცხვის განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ ჩასმით:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}.$$

მაშინ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (2) მიიღებს სახეს:

$$\ell\frac{d\omega}{d\varphi} = -\alpha.$$

მიღებულ ტოლობაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და შემდეგ ვაინტეგროთ:

$$\ell\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}d\omega = -\alpha\int_0^{\varphi}d\varphi,$$

მივიღებთ

$$-\ell\frac{\omega_0}{2} = -\alpha\varphi.$$

აქედან ვიპოვოთ φ:

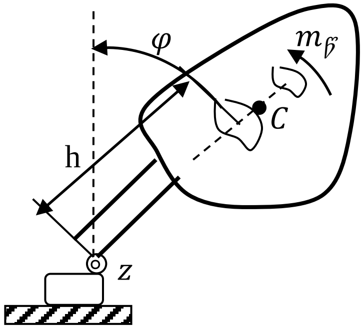
$$\varphi = \frac{\ell}{\alpha}\frac{\omega_0}{2}$$

და მიღებულიდან განვსაზღვროთ n:

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\ell\omega_0}{4\alpha\pi}.$$

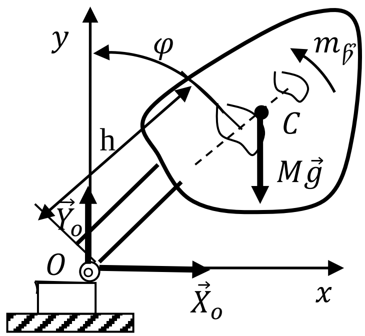
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $T = \frac{\ell}{\alpha} ln2;\ n = \frac{\ell\omega_0}{4\alpha\pi}.$

ამოცანა 37.10



განსაზღვრეთ, როგორი ω კუთხური სიჩქარით დაეცემა მიწაზე M მასის გადახერხილი ხე, თუ მისი მასათა C ცენტრი ძირიდან მდებარეობს h მანძილძე, ხოლო ჰაერის წინაღობის ძალები ქმნის წინაღობის მომენტს ამასთან $m_{წ}$, სადაც $m_{წ} = -\alpha\dot{\varphi}^2$ ხის ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომლის გარშემოც იგი ბრუნავს დაცემისას, უდრის J.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ხის ბრუნვითი მოძრაობა Oz ღერძის გარშემო აქტიური ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი) : $m\vec{g}$ −ხის სიმძიმის ძალა, $m_{წ}$− ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, O წერტილში აღძრული რეაქციის ძალის $\overrightarrow{X_0}$ და $\overrightarrow{Y_0}$ მდგენელები.



ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემით:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^{(e)}), \qquad (1)$$

სადაც $I_z = J$;

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = Mghsin\varphi + m_{\text{წ}} = Mghsin\varphi - \alpha\omega^2.$$

მაშინ (1) განტოლებაა მიიღებს სახეს

$$J\frac{d\omega}{dt} = Mghsin\varphi - \alpha\omega^2. \qquad (2)$$

წარმოვადგინოთ $\frac{d\omega}{dt}$ შემდეგი სახით:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi} = \frac{d(\omega^2)}{2d\varphi}$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა $\omega^2 = Z.$

მაშინ (2) განტოელება ასე ჩაიწერება:

$$\frac{1}{2}J\frac{dZ}{d\varphi} = Mghsin\varphi - \alpha Z$$

ან

$$\frac{dZ}{d\varphi} + \frac{2\alpha}{J}Z = \frac{2ghM}{J}sin\varphi. \qquad (3)$$

(3) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$Z = \overline{Z} + Z^*, \qquad (4)$$

სადაც $\overline{Z}$ არის

$$\frac{dZ}{d\varphi} + \frac{2\alpha}{J}Z = 0 \qquad (5)$$

ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, ხოლო Z^* – (3) განტოლების კერძო ამონახსნია.

პირველ რიგში ვიპოვოთ $\overline{Z}$. (5) განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით::

$$\frac{dZ}{d\varphi} = -\frac{2\alpha}{J}Z,$$

სადაც $Z = \overline{Z}.$

მიღებულ ტოლობაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და შემდეგ ვაინტეგროთ:

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{2\alpha}{J}d\varphi \Rightarrow \int\frac{dZ}{Z} = -\frac{2\alpha}{J}\int d\varphi \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow lnZ = -\frac{2\alpha}{J}\varphi + lnC \Longrightarrow \overline{Z}=Ce^{-\frac{2\alpha}{J}\varphi}.$$

ახლა ვიპოვოთ კერძო ამონახსნი:

$$Z^* = Acos\varphi + Bsin\varphi.$$

ეს გამოსახულება გავაწარმოოთ φ ცვლადით:

$$\frac{dZ^*}{d\varphi} = -Asin\varphi + Bcos\varphi.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) განტოლებაში:

$$-Asin\varphi + Bcos\varphi + \frac{2\alpha}{J}Acos\varphi + \frac{2\alpha}{J}Bsin\varphi = \frac{2ghM}{J}sin\varphi.$$

A და B მუდმივების მიმართ ვღებულობთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} -A + \frac{2\alpha}{J}B = \frac{2ghM}{J}, \\ B + \frac{2\alpha}{J}A = 0, \end{cases}$$

ღომლის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$A = -\frac{2Mgh}{J\left(1+\frac{4\alpha^2}{J^2}\right)}, \;\; B = \frac{4Mgh\alpha}{J^2+4\alpha^2}$$

(4) ამონახსნი მიღებული მნიშვნელობების გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$Z = Ce^{-\frac{2\alpha}{J}\varphi} - \frac{2Mgh}{J\left(1+\frac{4\alpha^2}{J^2}\right)}cos\varphi + \frac{4Mgh\alpha}{J^2+4\alpha^2}sin\varphi. \qquad (6)$$

ინტეგრების C მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობის გათვალისწინებით::

როცა $t = 0,$, მაშინ $\varphi = \varphi_0 = 0, Z = \omega_0^2$:

$$C = \frac{2Mgh}{J\left(1+\frac{4\alpha^2}{J^2}\right)}$$

C −ს მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ (6) ფორმულაში:

$$Z=\omega^2=\frac{2Mgh}{J\left(1+\frac{4\alpha^2}{J^2}\right)}e^{-\frac{2\alpha}{J}\varphi}-\frac{2Mgh}{J\left(1+\frac{4\alpha^2}{J^2}\right)}cos\varphi+$$

$$+\frac{4Mgh\alpha}{J^2+4\alpha^2}sin\varphi.$$

ვიპოვოთ ხის კუთხური სიჩქარე მისი მიწაზე დაცემის მომენტში, ე.ი. როცა $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

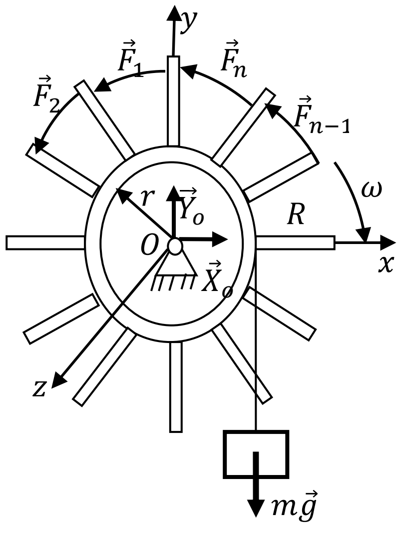
$$\omega^2=\frac{2Mgh}{J\left(1+\frac{4\alpha^2}{J^2}\right)}e^{-\frac{\alpha}{J}\pi}+\frac{4Mgh\alpha}{J^2+4\alpha^2}==\frac{2MghJ}{J^2+4\alpha^2}e^{-\frac{\alpha}{J}\pi}+\frac{4Mgh\alpha}{J^2+4\alpha^2}.$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2Mgh}{J^2+4\alpha^2}\left(2\alpha+Je^{-\frac{\alpha}{J}\pi}\right)}=\sqrt{\frac{2MghJ}{J^2+4\alpha^2}\left(2\frac{\alpha}{J}+e^{-\frac{\alpha}{J}\pi}\right)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega=\sqrt{\frac{2MghJ}{J^2+4\alpha^2}\left(2\frac{\alpha}{J}+e^{-\frac{\alpha}{J}\pi}\right)}.$

ამოცანა 37.11

r რადიუსის ლილვი ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობაში მოდის თოკზე ჩამოკიდებული საწონის საშუალებით. იმისათვის, რომ მოძრაობის დაწყების გარკვეული დროის შემდეგ ლილვის კუთხური სიჩქარე ახლოს იყოს მუდმივ მნიშვნელობასთან, ლილვთან შეერთებულია n ერთნაირი ფირფიტა; ფირფიტაზე ჰაერის წინაღობის ძალა დაიყვანება ფირფიტის მართობულ ძალაზე, რომელიც მოდებულია ლილვის ღერძიდან R მანძილზე და მისი კუთხური სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტი k –ს ტოლია; საწონის მასაა m, ყველა მბრუნავი ნაწილის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის J. თოკის მასა უგულებელყოფილია. განსაზღვრეთ ლილვის კუთხური ω სიჩქარე, თუ საწყის მომენტში იგი ნულ ის



ტოლია. საყრდენებზე ხახუნი უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ საწონის გადატანითი მოძრაობა და ბრუნვა ლილვის ჰორიზონტალური ღერძის გარშემომასზე ხისტად ჩამოცმული დემპერით. საწონის მოძრაობა აქტიური ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი) : $m\vec{g}$ − საწონის სიმძიმის ძალა, $\vec{F}_n$ ფირფიტია წინააღმდეგობის ძალები, O წერტილში აღძრული რეაქციისძალის $\overrightarrow{X_0}$ და $\overrightarrow{Y_0}$ მდგენელები. ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ Z ღერძის მიმართ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემით:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^{(e)}),$$

სადაც

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = mgr - \sum F_k R = mgr -$$

$$-\omega^2 \sum kR = mgr - knR\omega^2\,;$$

$$K_z = K_{zr} + K_{z\text{დემპ}} = M_z(M\vec{v}_r) + J\omega = mr^2\omega + J\omega =$$

$$= (mr^2 + J)\omega.$$

მაშინ

$$(mr^2 + J)\frac{d\omega}{dt} = mgr - knR\omega^2. \qquad (1)$$

(1) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ:

$$\int \frac{d\omega}{mgr - knR\omega^2} = \frac{\int dt}{mr^2 + J}, \qquad \frac{1}{knR}\int \frac{d\omega}{\frac{mgr}{knR} - \omega^2} = \frac{\int dt}{mr^2 + J},$$

$$\frac{1}{2knR\sqrt{\frac{mgr}{knR}}}\,ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} + \omega}{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} - \omega}\right| + C_1 = \frac{t}{mr^2 + J}$$

ან

$$\frac{1}{2\sqrt{knRmgr}}\,ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} + \omega}{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} - \omega}\right| + C_1 = \frac{t}{mr^2 + J}\,. \qquad (2)$$

ინტეგრების C_1 მუდმივი ვიპოვოთ საწყისი პირობიდან: როცა $t_0 = 0$, მაშინ $\omega_0 = 0$. მივიღებთ $C_1 = 0$. ამის გათვალისწინებით (2) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mgr}{knR}}+\omega}{\sqrt{\frac{mgr}{knR}}-\omega}\right| = \frac{2\sqrt{knRmgr}}{mr^2+J}t.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{knRmgr}}{mr^2+J},$$

და კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონი

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}.$$

როცა $t \to \infty$

$$\omega = \omega_{max} = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}.$$

კუთხური სიჩქარის მაქსიმალური მნიშვნელობა ასევე შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი პირობიდან:

$$\omega = \omega_{max};\ \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

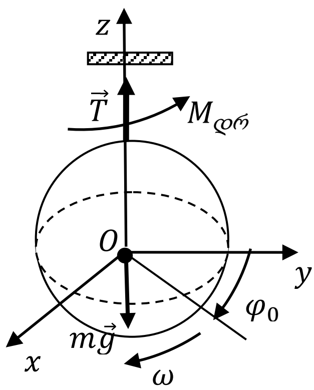
$$0 = mgr - knR\omega_{max}^2.$$

აქედან

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\omega = \omega_{max} = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}$, სადაც $\alpha = \frac{2}{mr^2+J}\sqrt{knRmgr}$;

t –ს საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის ω კუთხური სიჩქარე ახლოსაა მუდმივ მნიშვნელობასთან $\sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.



ამოცანა 37.12

დრეკად მავთულს, რომელზეც ჩამოკიდებულია m მასის და r რადიუსის ერთგვაროვანი სფერო, მოგრიხავენ φ_0 კუთხით და შემდეგ მიუშვებენ თავისუფლად.

წყვილძალის მომენტი, რომელიც საჭიროა მავთულის ერთი რადიანით მოსაგრეხად, C-ს ტოლია. განსაზღვრეთ მოძრაობა, თუ დაგრეხილი მავთულის დრეკადი ძალის მომენტი გრეხის φ კუთხის პროპორციულია. ჰაერის წინაღობა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული ბირთვის ბრუნვა(იხ. ნახაზი). ბირთვზე მოქმედებს: $m\vec{g}$ −ბირთვის სიმძიმის ძალა, $M_{დრ} = c\varphi$ −დაგრეხილი მავთულის დრეკადობის ძალის მომენტი, $\vec{T}$ − მავთულის რეაქციის ძალა..

დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო ბირთვის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

სადაც $I_z = \frac{2mr^2}{5}$; $\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -M_{დრ} = -c\varphi.$

მაშინ

$$\frac{2mr^2}{5}\ddot{\varphi} = -c\varphi \Longrightarrow \frac{2mr^2}{5}\ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \Longrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{5c}{2mr^2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}.$$

ვიპოვოთ მახასიათებელი განტოლების ფესვები:

$$z^2 + k^2 = 0, \quad z_{1,2} = \pm ki.$$

მიღებული ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$\varphi = Acoskt + Bsinkt.$$

ეს გამოსახულება გავაწარმოოთ φ ცვლადით:

$$\dot{\varphi} = \omega = -Aksinkt + Bkcoskt.$$

A და B ინტეგრების მუდმივებს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$, მაშინ $\varphi_0 \neq 0$, $\omega_0 = 0$; $A = \varphi_0, B = 0.$

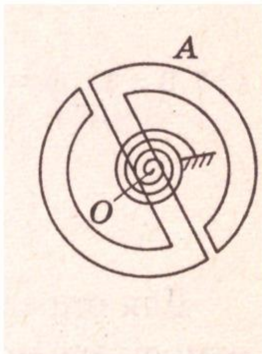
შესაბამისად, ბირთვის ბრუნვითი მოძრაობის განტოლებაა

$$\varphi = \varphi_0 coskt = \varphi_0 cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}t.$$

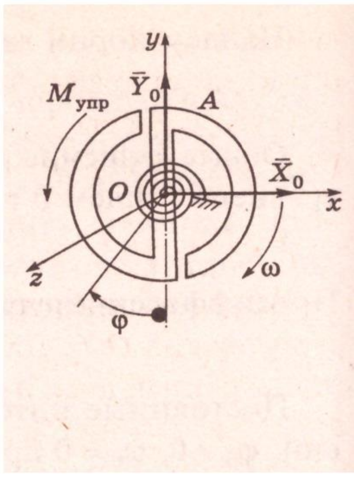
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\varphi = \varphi_0 cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}t.$

ამოცანა 37.13

საათის სვლის რეგულირებისათვის გამოიყენება საათის ბალანსირები. A ბალანსირს შუძლია ბრუნვა მისი სიბრტყის პერპენდიკულარული და მასათა O ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო; ამ ღერძის მიმართ მისი ინერციის მომენტი არის J. ბალანსირი მოძრაობაში მოდის სპირალური ზამბარით, რომლის ერთი ბოლო მიმაგრებულია ბალანსირთან, ხოლო მეორე- საათის უძრავ კორპუსზე. ბალანსირის მობრუნებისას წარმოიქმნება ზამბარის დრკადი ძალის მომენტი, რომელიც მობრუნების კუთხის პროპორციულია. ზამბარის ერთ რადიანზე მოსაბრუნებლად საჭირო მომენტი უდრის c. იპოვეთ ბალანსირის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში, როცა არ არსებობს დრკადი ძალის მომენტი, ბალასირს მიანიჭეს საწყისი ω_0 კუთხური სიჩქარე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. საათის A ბალანსირის მოძრაობა ხდება მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი) : $M_{დრ} = c\varphi$ —ზამბარის დრეკადობის ძალის მომენტი, O საყრდენში აღძრული რეაქციის ძალის $\overrightarrow{X_0}$ და $\overrightarrow{Y_0}$ მდგენელები.



დავწეროთ უძრავი ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

სადაც

$$I_z = J; \quad \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -M_{დრ} = -c\varphi.$$

მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{c}{J}}$

მიღებული ერთგვაროვანი დიფერენციალური გ[illegible]გად ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$\varphi = Bcoskt + Dsinkt.$$

ეს გამოსახულება გავაწარმოოთ φ ცვლადით:

$$\dot{\varphi} = \omega = -Bksinkt + Dkcoskt.$$

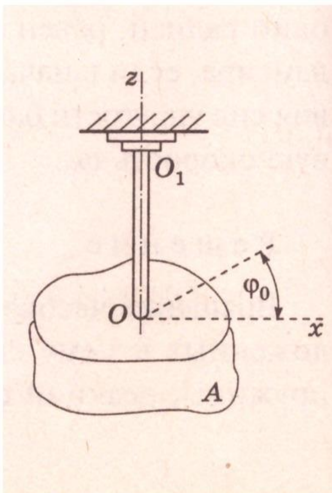
B და D ინტეგრების მუდმივებს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$, მაშინ $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$; $B = 0$, $D = \frac{\omega_0}{k} = \omega_0\sqrt{\frac{J}{c}}$.

B, D და k მუდმივების მნიშვნელობების გათვალისწინებით A ბალანსირის მოძრაობის განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\varphi = \omega_0\sqrt{\frac{J}{c}}sin\sqrt{\frac{c}{J}}t.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\varphi = \omega_0\sqrt{\frac{J}{c}}sin\sqrt{\frac{c}{J}}t.$

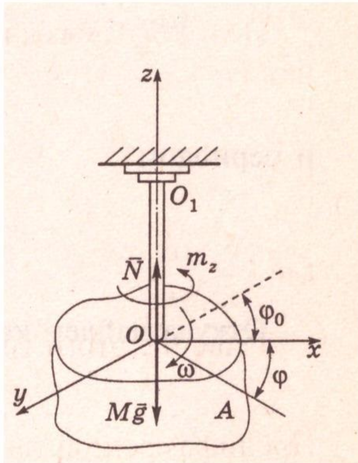
ამოცანა 37.14



A სხეული, ვერტიკალური OZ ღერძის მიმართ მისი ინერციის J_z მომენტის განსაზღვრისას, მიამაგრეს დრეკად ვერტიკალურ OO_1 ღეროს; ეს ღერო მოგრიხეს, A სხეული მოაბრუნეს OZ ღერძის გარშემომცირე φ_0 კუთხით და მიუშვეს თავისუფლად. სხეულმა დაიწყო რხევა. 100 გაქანების ხანგრძლივობააღმოჩნდა $100T_1$=2წთ, სადაც T_1 – რხევის პერიოდის ნახევარია; რხევაარის ჰარმონიული, რადგან დრეკადი ძალის მომენტი გრეხის კუთხის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის

$c\varphi$ −ს. c კოეფიციენტის განსასაზღვრავად ჩაატარეს მეორე ცდა: ღეროზე მის O წერტილზე ჩამოაცვეს r=15სმ რადიუსისა და m=1,6კგ მასის ერთგვაროვანი წრიული დისკო და მაშინ ერთი გაქანების ხანგრძლივობა აღმოჩნდა T_2=1,5 წმ. განსაზღვრეთ სხეულის ინერციის J_z მომენტ.ი.

. **ა მ ო ხ ს ნ ა**. პირველ რიგში განვსაზღვროთ OO_1 ღეროს სიხისტის კოეფიციენტი. ამისათვის ღეროს ჩამოვაცვათ წრიული დისკო და განვიხილოტ სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება M მასის ერთგვაროვანი დისკოსა და დრეკადი ღეროსაგან. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები: $M\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, $M_{დრ} = -c\varphi$ − დრეკადი ძალის მომენტი, $\vec{N}$ − ღეროს რეაქციის ძალა..



ამოსახსნელად ვისარგებლოთ z ღერძის მიმართ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემით

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^{(e)}), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ აქტიური ძალების მომენტი

z ღერძის მიმართ:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = M_{დრ} = -c\varphi$$

და დისკოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი:

$$K_z = J_z\omega = \frac{Mr^2}{2}\omega.$$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (1) ფორმულაში, გვექნება:

$$\frac{Mr^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = -c\varphi$$

ან

$$\frac{Mr^2}{2}\frac{d\omega}{dt} + c\varphi = 0.$$

გარდავქმნათ ეს განტოლება:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c}{Mr^2}\varphi = 0$$

და ჩავწეროთ იგი შემდეგი სახით

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

მიღებული დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს თავისუფალი გრეხვითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის წრიული სიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{2c}{Mr^2}},$$

ხოლო პერიოდია

$$T_2 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{Mr^2}{2c}}.$$

აქედან ვიპოვით OO_1 ღეროს სიხისტის კოეფიციენტს:

$$c = \frac{4\pi Mr^2}{2T_2^2}.$$

შევცვალოთ დისკო A სხეულით და განვიხილოთ მისი მოძრაობა. დავწეროთ ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება შემდეგი სახით:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

სადაც $\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -M_{დრ} = -c\varphi.$

მაშინ გვექნება

$$J_z\ddot{\varphi} = -c\varphi$$

ან

$$J_z\ddot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

გარდავქმნათ მიღებული განტოლება:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J_z}\varphi = 0$$

და ჩავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k -\ A$ სხეულის გრეხვითი რხევების წრიული სიხშირეა:

$$k = \sqrt{\frac{c}{J_z}}.$$

მაშინ A სხეულის გრეხვითი რხევების პერიოდი იქნება

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{c}}.$$

ჩავსვათ ამ გამოსახულებაში (2) მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_z 2T_2^2}{4\pi M r^2}}.$$

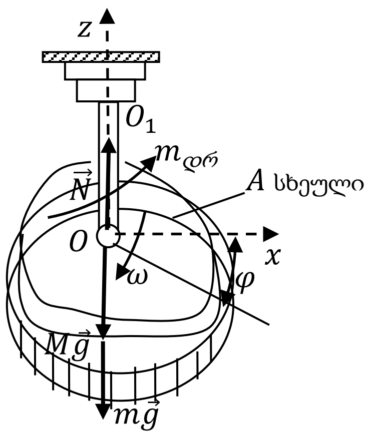
საიდანაც განისაზღვრება A სხეულის ინერციის მომენტი:

$$J_z = \frac{Mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $J_z = \frac{Mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$

ამოცანა 37.15

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ ვარაუდით, რომ c კოეფიციენტის განსასაზღვრავად მეორე ცდა ჩაატარეს სხვაგვარდ, M მასის და r რადიუსის ერთგვაროვან წრიულ დისკოს ამაგრებენ სხეულზე, რომლის ინერციის მომენტიც უნდა განისაზღვროს. განსაზღვრეთ სხეულის ინერციის J_z მომენტ.ი, თუ .მისი რხევის პერიოდი არის τ_1 , ხოლო მასზე მიმაგრებული დისკოთი რხევის პერიოდი- τ_2.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯერ განვიხილოთ A სხეულის მოძრაობა $M\vec{g}-$ სიმძიმის ძალის, $M_{დრ} = -c\varphi -$ დრეკადი ძალის მომენტის და $\vec{N}-$ ღეროს რეაქციის ძალების მოქმედებით(იხ. ნახაზი).

დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო A სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტიბრუნვის z ღერძის მიმართ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = M_{დრ} = -c\varphi.$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$J_z\ddot{\varphi} = -c\varphi$$

ან

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J_z}\varphi = 0.$$

ეს განტოლება ჩავწეროთ ასე:

$$\ddot{\varphi} + k_1^2\varphi = 0.$$

მიღებული განტოლება წამოადგენს OO_1 დრეკად ღერძზე მიმაგრებული A სხეულის გრეხვითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{J_z}}$$

სიხშირით და

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{J_z}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{c}}$$

პერიოდით. .აქედან

$$c = \frac{4\pi^2 J_z}{\tau_1^2}.$$

მივამაგროთ A სხეულს r რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო და განვიხილოთ მათი ერთობლივი მოძრაობა.

დავწეროთ z ღერძის გარშემო ამ სისტემის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{დაყ.}\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \tag{2}$$

ვიპოვოთ სისტემის დაყვანილი ინერციის მომენტი:

$$J_{დაყ.} = J_z + J_{z\,დისკ}$$

სადაც $J_z -$ სხეულის ინერციის მომენტია z ღერძის მიმართ, ხოლო $J_{zდისკ} = \frac{Mr^2}{2} -$ დისკოს ინერციის მომენტია z ღერძის მიმართ.

მაშინ

$$J_{დაყ.} = J_z + \frac{Mr^2}{2}.$$

z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტია

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -c\varphi.$$

მაშასადამე, (2) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\left(J_z + \frac{Mr^2}{2}\right)\ddot{\varphi} = -c\varphi.$$

გარდავქმნათ ეს განტოლება:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{\left(J_z + \frac{Mr^2}{2}\right)}\varphi = 0$$

და ჩავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\ddot{\varphi} + k_2^2\varphi = 0,$$

სადაც $k_2 = \sqrt{\frac{c}{J_z + \frac{Mr^2}{2}}}$.

ვიპოვოთ სისტემის გრეხითი რხევების პერიოდი

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{J_z + \frac{Mr^2}{2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z + \frac{Mr^2}{2}}{c}}.$$

აქედან $$c = \frac{4\pi^2\left(J_z + \frac{Mr^2}{2}\right)}{\tau_2^2}$$

გავუტოლოთ c კოეფიციენტის მნიშვნელობა მიღებული სისტემისათვის (A სხეული და დისკო) c კოეფიციენტის მნიშვნელობას მიღებულს A სხეულისათვის. მივიღებთ:

$$\frac{4\pi^2 J_z}{\tau_1^2} = \frac{4\pi^2\left(J_z + \dfrac{Mr^2}{2}\right)}{\tau_2^2}.$$

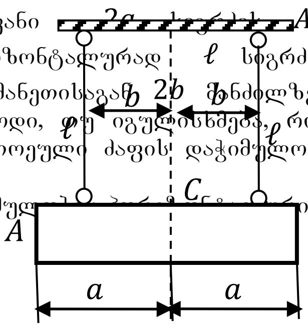
აქედან განვსაზღვრავთ A სხეულის ინერციის მომენტს Z ღერძის მიმართ:

$$J_z = \frac{Mr^2}{2}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $J_z = \frac{Mr^2}{2}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}$.

ამოცანა 37.16

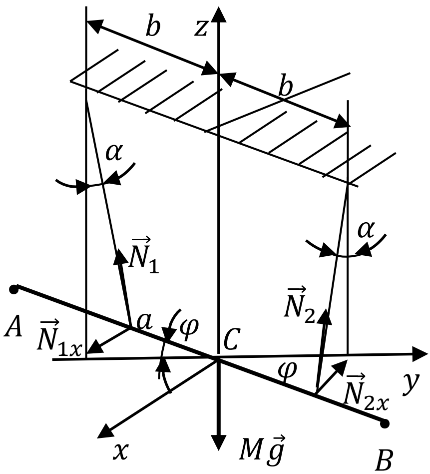
ორძაფა საკიდელი შედგება ერთგვაროვანი $2a$ სიგრძის AB ღეროსაგან, რომელიც ჩამოკიდებულია ჰორიზონტალურად ℓ სიგრძის ორი ვერტიკალური ძაფით; ეს ძაფები ერთმანეთისაგან $2b$ მანძილზეა. განსაზღვრეთ ღეროს გრეხითი რხევის პერიოდი, თუ იგულისხმება, რომ ღერო ყოველთვის ჰორიზონტალურია და თითოეული ძაფის დაჭიმულობა ღეროს წონის ნახევრის ტოლია.



მ ი თ ი თ ე ბ ა. თითოეული ძაფის დაჭიმულობის ჰორიზონტალური მდგენელის განსაზღვრისას, როცა ორძაფას რხევა მცირეა, ძაფსა და ვერტიკალს შორის მდებარე კუთხის სინუსი შეცვალეთ თვით კუთხით

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ ორძაფა საკიდელის მოძრაობა გარე ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}-$ ღეროს სიმძიმის ძალის, $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ $-$დაკიდების ძაფის რეაქციები.



დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -N_{1x}b - N_{2x}b = -(N_{1x}+N_{2x})b$$

და შესაბამისად $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ რეაქციების ჰორიზონტალური მდგენელები

$$N_{1x} = N_1 sin\alpha,$$
$$N_{2x} = N_2 sin\alpha,$$

ამოცანის პირობის თანახმად $N_1 = N_2 = \frac{Mg}{2}.$

მაშინ

$(N_1 + N_2)sin\alpha = Mgsin\alpha$ (2)

გამოვსახოთ α კუთხე φ კუთხის საშუალებით

$$bsin\varphi = \ell sin\alpha$$

ან

$$sin\alpha = \frac{b}{\ell}sin\varphi .$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (2)-ში:

$$Mgsin\alpha = Mg\frac{b}{\ell}sin\varphi.$$

მცირე რხევების შემთხვევაში

$sin\varphi \approx \varphi$, მაშინ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mg\frac{b^2}{\ell}\varphi.$$

z ღერძის მიმართ ღეროს ინერციის მომენტი

$$J_{Cz} = \frac{M(2a^2)}{12} = \frac{Ma^2}{3}.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\frac{Ma^2}{3}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = -Mg\frac{b^2}{\ell}\varphi$$

და ჩავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{3gb^2}{\ell a^2}.$

განვსაზღვროთ ღეროს გრეხვითი რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3gb^2}{\ell a^2}}} = \frac{2\pi a}{b\sqrt{\frac{3g}{\ell}}} = \frac{2\pi a}{b}\sqrt{\frac{\ell}{3g}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $T = \frac{2\pi a}{b}\sqrt{\frac{\ell}{3g}}.$

ამოცანა 37.17

დისკო, რომელიც ჩამოკიდებულია დრეკად მავთულზე, სითხეში ასრულებს გრეხით რხევას. დისკოს ინერციის მომენტი მავთულის ღერძის მიმართ არის J. მავთულის ერთ რადიანზე დასაგრეხი წყვილძალის მომენტი არის c. მოძრაობის წინაღობის მომენტი უდრის $\alpha S\omega$, სადაც α არის სითხის სიბლანტის კოეფიციენტი, $S-$ დისკოს ზედა და ქვედა ფუძეების ფართობთა ჯამი, ω- დისკოს კუთხური სიჩქარე. განსაზღვრეთ სითხეში დისკოს რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ დისკოს მოძრაობა გარე ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი): $\vec{G}-$ დისკოს სიმძიმის ძალის, $m_z=-c\varphi-$ მავთულის დრეკადობის ძალის მომენტი, $m_{წინ}=\alpha S\dot{\varphi}-$ წინააღმდეგობის ძალების მომენტი და $\vec{N}-$მავთულის რეაქცია.

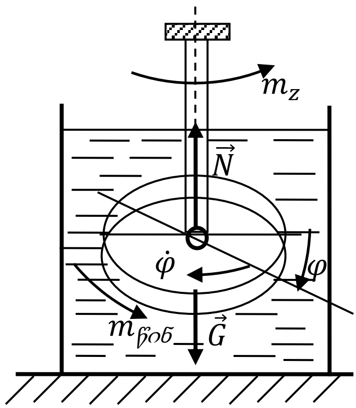
დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi}=\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=-c\varphi-\alpha S\dot{\varphi}$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:



$$J\ddot{\varphi}=-c\varphi-\alpha S\dot{\varphi}$$

ან

$$\ddot{\varphi}+\frac{\alpha S}{J}\dot{\varphi}+\frac{c}{J}\varphi=0.$$

მიღებული განტოლება ჩავწეროთ სახით:

$$\ddot{\varphi}+2n\dot{\varphi}+k^2\varphi=0, \qquad (2)$$

სადაც

$$2n=\frac{\alpha S}{J};k^2=\frac{c}{J}.$$

(2) განტოლება წარმოადგენს მილევადი გრეხითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას.

თუ $k = \sqrt{\frac{c}{J}} > \frac{\alpha S}{2J}$, მაშინ დისკო შეასრულებს მილევად რხევებს

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{J} - \left(\frac{\alpha S}{2J}\right)^2}} = \frac{4\pi J}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}}$$

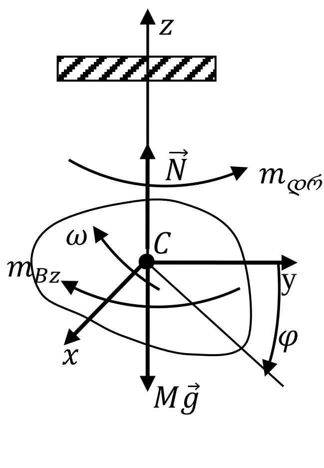
პერიოდით.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $T = \frac{4\pi J}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}}$.

ამოცანა 37.18

დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეული ასრულებს გრეხვით რხევებს $m_{Bz} = m_1 sint + m_2 sin3\omega t$ გარე მომენტის მოქმედებით, სადაც m_1, m_2 და ω მუდმივებია, ხოლო ღერძი მიმართულია მავთულის გასწვრივ. მავთულის დრეკადობის მომენტი $m_{დრ} = -c\varphi$, სადაც c დრეკადობის კოეფიციენტია, ხოლო φ —გრეხის კუთხე. განსაზღვრეთ მყარი სხეულის იძულებითი გრეხითი რხევის კანონი, თუ ინერციის მომენტი z ღერძის მიმართ უდრის J_z. მიიღეთ, რომ $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq \omega$ და $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq 3\omega$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეული მოძრაობა გარე ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}$ — სიმძიმის ძალის, m_{Bz} — გარე მომენტი, $m_{დრ}$ — დრეკადობის ძალის მომენტი და $\vec{N}$ —მავთულის რეაქცია. დავწეროთუძრავი z ღერძის გარშემო ბრუნვისდიფერენციალური განტოლება:



$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{Bz} - m_{დრ} = m_1 sin\omega t + m_2 sin3\omega t - c\varphi.$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = m_1 sin\omega t + m_2 sin3\omega t - c\varphi$$

დავიყვანოთ დიფერენციალური განტოლება შემდეგ სახეზე

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h_1 sin\omega t + h_3 sin3\omega t, \quad (2)$$

სადაც

$k = \sqrt{\frac{c}{J_z}}-$ სხეულის საკუთარი გრეხითი რხევების წრიული სიხშირეა;

$$h_1 = \frac{m_1}{J_z};\ h_3 = \frac{m_3}{J_z}.$$

(2) წარმოადგენს იძულებითი რხევების არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას.

(2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შედგება $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნისაგან. (2) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi = Asin\omega t + Bsin3\omega t.$$

ვიპოვოთ A და B მუდმივები. ამისათვის ვიპოვოთ $\varphi -$ ს პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები დროით:

$$\dot{\varphi} = A\omega cos\omega t + 3B\omega cos3\omega t,$$

$$\ddot{\varphi} = -A\omega^2 sin\omega t - 9B\omega^2 sin3\omega t.$$

ჩავსავათ ეს მნიშვნელობები (2) განტოლებაში:

$$-A\omega^2 sin\omega t - 9B\omega^2 sin3\omega t + Ak^2 sin\omega t + Bk^2 sin3\omega t =$$

$$= h_1 sin\omega t + h_3 sin3\omega t.$$

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} Ak^2 sin\omega t - A\omega^2 sin\omega t = h_1 sin\omega t, \\ Bk^2 sin3\omega t - 9B\omega^2 sin3\omega t = h_3 sin3\omega t \end{cases}$$

და ვიპოვით A და B მუდმივებს:

$$A = \frac{h_1}{k^2 - \omega^2}, \quad B = \frac{h_3}{k^2 - 9\omega^2}.$$

მაშინ იძულებითი გრეხითი რხევების კანონი მიიღებს სახეს:

$$\varphi = \frac{h_1}{k^2 - \omega^2} sin\omega t + \frac{h_3}{k^2 - 9\omega^2} sin3\omega t.$$

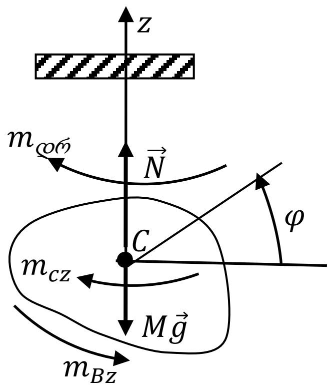
პ ა ს უ ხ ი: $\varphi = \frac{h_1}{k^2-\omega^2} sin\omega t + \frac{h_3}{k^2-9\omega^2} sin3\omega t;$

სადაც $k = \sqrt{\frac{c}{J_z}};\ h_1 = \frac{m_1}{J_z};\ h_3 = \frac{m_3}{J_z}.$

ამოცანა 37.19

ამოხსენით წინა ამოცანა m_C წინაღგობის მომენტის გათვალისწინებით, რომელიც მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარის პროპორციულია $m_C = -\beta\dot{\varphi}$, სადაც β- მუდმივია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეული მოძრაობა გარე ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}-$ სიმძიმის ძალის, $m_{Bz}-$ გარე მომენტის, $m_{დრ}-$ დრეკადობის ძალის მომენტის, $m_{cz}-$წინაღობის ძალების მომენტის, $\vec{N}$ —მავთულის რეაქციის.



დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \tag{1}$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{Bz} - m_{cz} - m_{დრ} =$$
$$= m_1 sin\omega t + m_2 sin3\omega t - c\varphi.$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - c\varphi + m_1 sin\omega t + m_2 sin3\omega t$$

ან გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h_1 sin\omega t + h_3 sin3\omega t, \tag{2}$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{c}{J_z}};\quad n = \frac{\beta}{2J_z};\quad h_1 = \frac{m_1}{J_z};\ h_3 = \frac{m_3}{J_z}.$$

(2) წარმოადგენს იძულებითი გრეხვითი რხევების არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას გარემოს წინააღმდეგობის გათვალისწინებით.

სხეულის იძულებითი გრეხვითი რხევების განტოლებას ვეძებთ არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნის სახით:

$$\varphi = Dsin(\omega t - \varepsilon_1) + Esin(3\omega t - \varepsilon_3). \tag{3}$$

(3) განტოლება გავაწარმოოთ ორჯერ დროით:

$$\dot{\varphi} = D\omega cos(\omega t - \varepsilon_1) + 3E\omega cos(3\omega t - \varepsilon_3),$$

$$\ddot{\varphi} = -D\omega^2 sin(\omega t - \varepsilon_1) - 9E\omega^2 sin(3\omega t - \varepsilon_3).$$

ჩავსვათ φ, $\dot{\varphi}$ და $\ddot{\varphi}$-ის მნიშვნელობები (2) დიფერენციალურ განტოლებაში:

$$-D\omega^2 sin(\omega t - \varepsilon_1) - 9E\omega^2 sin(3\omega t - \varepsilon_3) + 2nD\omega cos(\omega t - \varepsilon_1)$$
$$+6nE\omega cos(3\omega t - \varepsilon_3) + Dk^2 sin(\omega t - \varepsilon_1) + Ek^2 sin(3\omega t - \varepsilon_3)$$
$$= h_1\, sin[(\omega t - \varepsilon_1) + \varepsilon_1] + h_3 sin[(3\omega t - \varepsilon_3) + \varepsilon_3]. \qquad (4)$$

ვიპოვოთ ინტეგრების D და E მუდმივები, ასევე, ფაზათა ძვრის სიდიდეები ε_1 და ε_3. ამისათვის (4) ტოლობის მარჯვენა მხარეში გავხსნათ ორი კუთხის ჯამის სინუსები და გავუტოლოთ ერთმანეთს ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეში ერთი და იგივე ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან მდგომი კოეფიციენტები:

$$D = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}},$$

$$E = \frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}},$$

$$tg\varepsilon_1 = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}, tg\varepsilon_3 = \frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2},$$

ნაპოვნი სიდიდეების გათვალისწინებით (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} sin(\omega t - \varepsilon_1) +$$

$$+\frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}}, sin(3\omega t - \varepsilon_3).$$

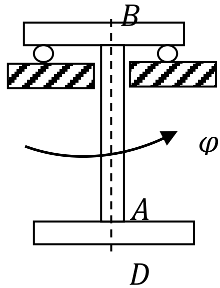
პასუხი: $\varphi = A_1 sin(\omega t - \varepsilon_1) + A_3 sin(3\omega t - \varepsilon_3)$;

სადაც

$$A_1 = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}; \quad A_3 = \frac{h_3}{\sqrt{(k^2-9\omega^2)^2+36n^2\omega^2}};$$

$$\varepsilon_1 = arctg\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}; \ \varepsilon_3 = arctg\frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2}.$$

ამოცანა 37.20



M მასის და R რადიუსის D დისკო ჩამოკიდებულია AB დრეკად ღეროზე, რომლის გრეხვაზე სიხისტის კოეფიციენტია c. ღეროს B ბოლო ბრუნავს კანონით $\varphi_B = \omega_0 t + \Phi sinpt$, სადაც Φ, p მუდმივი სიდიდეებია. უგულებელვყოთ წინააღმდეგობის ძალები და განვსაზღვროთ D დისკოს მოძრაობის კანონი: 1) რეზონანსის არ არსებობის შემთხვევაში; 2) რეზონანსის

შემთხვევაში. საწყის მომენტში დისკო უძრავი იყო, ხოლო ღერო – არადეფორმირებული.

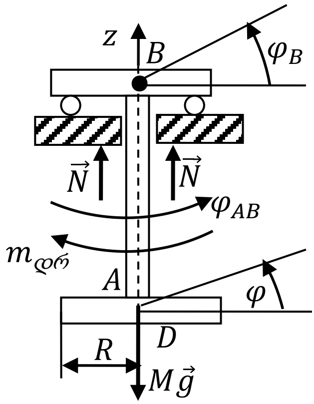
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}-$ დისკოს სიმძიმის ძალა, $m_{დრ}-$ დრეკადობის ძალის მომენტი, $\vec{N}-$ საყრდენის რეაქცია.

დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -m_{დრ} = -c(\varphi - \varphi_B) = (\omega_0 t + \Phi sinpt)c - c\varphi$$



და დისკოს ინერციის მომენტი ამ ერძის მიმართ:

$$J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} = -c\varphi + c(\omega_0 t + \Phi sinpt).$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c}{MR^2}\varphi = \frac{2c}{MR^2}(\omega_0 t + \Phi sinpt)$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = d \cdot t + h \cdot sinpt,$$

სადაც

$k = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}-$ დისკოს გრეხვითი რხევების წრიული სიხშირეა;

$$d = \frac{2c\omega_0}{MR^2}; \quad h = \frac{2c\Phi}{MR^2}.$$

მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნის ვეძებოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad (3)$$

სადაც φ_1 არის $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$\varphi_1 = Acoskt + Bsinkt. \qquad (4)$$

φ_2 −კერძო ამონახსნია, რომელსაც ვეძებთ (2) დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა ნაწილის სახით, როდესაც რეზონანსს არა აქვს ადგილი, ე.ი. როცა $p \neq k$:

$$\varphi_2 = D \cdot t + E \cdot sinpt. \tag{5}$$

ვიპოვოთ ინტეგრების D და E მუდმივები. ამისათვის (5) განტოლება გავაწარმოოთ ორჯერ დროით:

$$\dot{\varphi}_2 = D + Ep \cdot cospt,$$
$$\ddot{\varphi}_2 = -Ep^2 \cdot sinpt.$$

ჩავსვათ φ_2 და $\ddot{\varphi}_2$-ის მნიშვნელობები (2) დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-Ep^2 \cdot sinpt + k^2Dt + k^2\, E \cdot sinpt = d \cdot t + h \cdot sinpt.$$

საიდანაც

$$D = \frac{d}{k^2} = \frac{2c\omega_0MR^2}{MR^2 2c} = \omega_0,$$

$$E = \frac{h}{k^2-p^2}. \tag{6}$$

(3) გამოსახულება (4)-(6) ფორმულების გათვალისწინებით მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\varphi = Acoskt + Bsinkt + \omega_0 t + \frac{h}{k^2-p^2} sinpt. \tag{7}$$

გავაწარმოოთ (7) დროით:

$$\dot{\varphi} = -Akcoskt + Bkcoskt + \omega_0 + \frac{hp}{k^2-p^2} cospt. \tag{8}$$

განვსაზღვროთ ინტეგრების A და B მუდმივები. ამისათვის (7) და (8) განტოლებებში ჩავსვათ საწყისი პირობები: $t = 0, \dot{\varphi}_0 = 0, \varphi_0 = 0.$ მაშინ

$$A = 0, \qquad \boldsymbol{B} = -\frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}} - \frac{hp}{k(k^2-p^2)}.$$

ჩავსვათ A და B მუდმივების მნიშვნელობები (7) განტოლებაში და ჩავწეროთ დისკოს მოძრაობის კანონი:

$$\varphi = -\frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}} sinkt - \frac{hp}{k(k^2-p^2)} sinkt + \omega_0 t + \frac{h}{k^2-p^2} sinpt$$

ან

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}} sinkt + \frac{h}{k^2-p^2}\left(sinpt - \frac{p}{\boldsymbol{k}} sinkt\right).$$

რეზონანსის დროს, ე.ი. როცა $p = k,$ კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\varphi_2 = D \cdot t + E \cdot t \cdot coskt. \tag{9}$$

განვსაზღვროთ ინტეგრების D და E მუდმივები. ამისათვის (9) განტოლება გავაწარმოოთ ორჯერ დროით:

$$\dot{\varphi}_2 = D + E \cdot coskt - kEt \cdot sinkt,$$
$$\ddot{\varphi}_2 = -Ek \cdot sinkt - kE \cdot sinkt - Ek^2 \cdot t \cdot coskt.$$

ჩავსვათ φ_2 და $\ddot{\varphi}_2$-ის მნიშვნელობები (2) დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-Ek^2 tsinpt - 2Eksinkt + k^2 Dt + k^2\, Etcoskt = d \cdot t + h \cdot sinpt.$$

საიდანაც

$$D = \frac{d}{k^2} = \omega_0, \quad E = -\frac{h}{2k}.$$

მაშინ (9) კერძო ამონახსენს აქვს სახე:

$$\varphi_2 = \omega_0 t - \frac{h}{2k} \cdot t \cdot coskt. \tag{10}$$

ჩავსვათ (4) და (10) გამოსახულებები (3) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\varphi = Acoskt + Bsinkt + \omega_0 t - \frac{h}{2k} \cdot t \cdot coskt. \tag{11}$$

ინტეგრების A და B მუდმივებს ვიპოვით. საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t = 0, \dot{\varphi}_0 = 0, \varphi_0 = 0$. ამისათვის (11) განტოლება გავაწარმოოთ დროით:

$$\dot{\varphi} = -Aksinkt + Bkcoskt + \omega_0 + \frac{hk}{2k} tsinkt - \frac{h}{2k} coskt.$$

აქედან

$$A = 0, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{h}{\boldsymbol{2}k^2} - \frac{\omega_0}{k}.$$

თუ A და B მუდმივების მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (11)–ში მივიღებთ დისკოს მოძრაობის კანონს:

$$\varphi = \frac{h}{\boldsymbol{2}k^2} sinkt - \frac{\omega_0}{k} sinkt + \omega_0 t - \frac{h}{2k} \cdot t \cdot coskt$$

ან

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k} sinkt + \frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k} sinkt - tcoskt\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: 1) $\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}} sinkt + \frac{h}{k^2 - p^2}\left(sinpt - \frac{p}{\boldsymbol{k}} sinkt\right)$,

სადაც $k = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$;

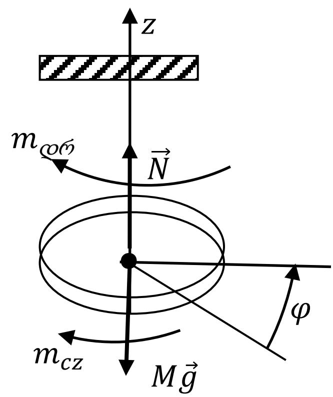
2) $\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k} sinkt + \frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k} sinkt - tcoskt\right)$.

ამოცანა 37.21

დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეული ასრულებს გრეხვით რხევებს სითხეში. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი მავთულის z ღერძის მიმართ უდრის J_z. მავთულის დრეკადი ძალების მომენტია $m_{დრ} = -c\varphi$, სადაც c დრეკადობის კოეფიციენტია, ხოლო φ −გრეხის კუთხე. მოძრაობის წინააღმდეგობის მომენტია $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, სადაც $\dot{\varphi}$ −მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\beta > 0$. საწყის მომენტში მყარი სხეული დაგრეხილი იყო φ_0 კუთხით და გაშვებული იყო უსაწყისო სიჩქარით. განსაზღვრეთ მყარი სხეულის მოძრაობის კანონი, თუ

$$\frac{\beta}{2J_z} < \sqrt{\frac{c}{J_z}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეულის გრეხვითი რხევები სითხეში. ნახაზზე ვაჩვენოთ სხეულზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, $m_{დრ}$ − დრეკადობის ძალის მომენტი, წინააღმდეგობის მომენტი m_{cz} და $\vec{N}$ −მავთულის რეაქცია.



დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -m_{cz} - m_{დრz} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}.$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{J_z}\dot{\varphi} + \frac{c}{J_z}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \qquad (2)$$

სადაც

$$k=\sqrt{\frac{c}{J_z}};\ 2n=\frac{\beta}{J_z}.$$

(2) წარმოადგენს მილევადი რხევების განტოლებას, რადგან

$$\frac{\beta}{2J_z}<\sqrt{\frac{c}{J_z}}\ \text{ანუ}\ v<k.$$

(2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi=e^{-nt}\left(Acos\sqrt{k^2-n^2}t+Bsin\sqrt{k^2-n^2}t\right). \qquad (3)$$

გავაწარმოოთ (3) ტოლობა დროით:

$$\dot{\varphi}=-ne^{-nt}\left(Acos\sqrt{k^2-n^2}t+Bsin\sqrt{k^2-n^2}t\right)+$$
$$+e^{-nt}\left(-A\sqrt{k^2-n^2}sin\sqrt{k^2-n^2}t+\right.$$
$$\left.+B\sqrt{k^2-n^2}cos\sqrt{k^2-n^2}t\right) \qquad (4)$$

ვიპოვოთ A და B მუდმივები. საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t=0,\ \dot{\varphi}_0=0,\ \varphi_0\neq 0.$

ჩავსავათ ეს მნიშვნელობები (3) და (4) განტოლებაში, მივიღებთ:

:

$$A=\varphi_0,\quad B=\frac{n\,\varphi_0}{\sqrt{k^2-n^2}}.\ .$$

A და B მუდმივების მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (3)-ში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის განტოლებას:

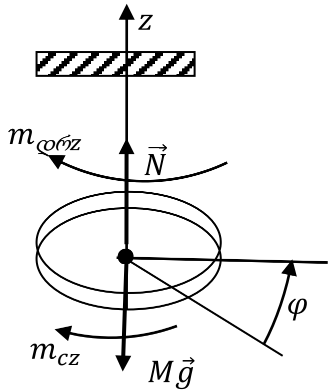
$$\varphi=\varphi_0e^{-nt}\left(cos\sqrt{k^2-n^2}t+\frac{n}{\sqrt{k^2-n^2}}sin\sqrt{k^2-n^2}t\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\varphi=\varphi_0e^{-nt}\left(cos\sqrt{k^2-n^2}t+\frac{n}{\sqrt{k^2-n^2}}sin\sqrt{k^2-n^2}t\right).$

სადაც $k=\sqrt{\frac{c}{J_z}};\ n=\frac{\beta}{2J_z}.$

ამოცანა 37.22

დრეკად მავთულზე დაკიდებულ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვან წრიულ დისკოსშეუძლია შეასრულოს ბრეხვითი რხევები სითხეში. მავთულის დრეკადი ძალების მომენტია $m_{დრz} = -c\varphi,$ სადაც z მიმართულია მავთულის ღერძის გასწვრივ, c- დრეკადობის კოეფიციენტია, ხოლო $\varphi -$ daგრეხის კუთხეა; მოძრაობის წინააღმდეგობის მომენტია $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi},$ სადაც $\dot{\varphi}$-მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\beta > 0.$ საწყის მომენტში მყარი სხეული დაგრეხილი იყო φ_0 კუთხით და გაშვებული იყო უსაწყისო სიჩქარით. განსაზღვრეთ მყარი სხეულის მოძრაობის კანონი,



თუ: 1) $\frac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$. 2) $\frac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული დისკოს გრეხვითი რხევები სითხეში. ნახაზზე ვაჩვენოთ დისკოზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g} -$ სიმძიმის ძალა, $m_{დრz} -$ დრეკადობის ძალის მომენტი, წინააღმდეგობის მომენტი m_{cz} და $\vec{N}$ $-$მავთულის რეაქცია.

დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -m_{cz} - m_{დრz} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$J_z\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \qquad (3)$$

სადაც

$J_z=\frac{MR^2}{2}-$ ერთგვაროვანი დისკოს ინერციის მომენტია Z ღერძის მიმართ: $n=\frac{\beta}{2J_z}=\frac{\beta}{MR^2}-$გარემოს წინააღმდეგობის კოეფიციენტია; $k=\sqrt{\frac{c}{J_z}}=\sqrt{\frac{2c}{MR^2}}-$რხევის წრიული სიხშირეა.

(3) განტოლება წარმოადგენს მილევადი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამონახსნი დამოკიდებულია მახასიათებელი განტოლების ფესვებზე:

$$z^2+2nz+k^2=0, \tag{4}$$

(4) განტოლების ფესვებია:

$$z_{1,2}=-n\pm\sqrt{k^2-n^2}.$$

1) თუ $\frac{\beta}{MR^2}=\sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, ე.ი. $n=k$, მაშინ (4) განტოლების ფესვები ნამდვილი, ტოლი და უარყოფითია:

$$z_{1,2}=-n.$$

ამ შემთხვევაში ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi=e^{-nt}(At+B). \tag{5}$$

გავაწარმოოთ (5) განტოლება დროით

$$\dot{\varphi}=-ne^{-nt}(At+B)+Ae^{-nt}. \tag{6}$$

ვიპოვოთ A და B მუდმივები. საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t=0,\ \dot{\varphi}_0=0,\ \varphi_0\neq 0.$

ჩავსავათ ეს მნიშვნელობები (5) და (6) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$:B=\varphi_0,\quad A=n\,\varphi_0.$$

A და B მუდმივების მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (5)-ში, მივიღებთ დისკოს მოძრაობის განტოლებას ამ შემთხვევისათვის:

$$\varphi=,\varphi_0e^{-nt}(nt+1).$$

2) თუ $\frac{\beta}{MR^2}>\sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, ე.ი. $n>k$, მაშინ (4) განტოლების ფესვები ნამდვილი, უარყოფითი და სხვადსხვა:

$$z_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}.$$

ამ შემთხვევაში ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi=e^{-nt}\left(Ae^{\sqrt{n^2-k^2}t}+Be^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right). \tag{7}$$

გავაწარმოოთ (7) განტოლება დროით

$$\dot{\varphi}=-ne^{-nt}\left(Ae^{\sqrt{n^2-k^2}t}+Be^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right)+$$
$$+e^{-nt}\left(A\sqrt{n^2-k^2}e^{\sqrt{n^2-k^2}t}-B\sqrt{n^2-k^2}e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right). \tag{8}$$

ვიპოვოთ A და B მუდმივები. საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t = 0,\ \dot{\varphi}_0 = 0,\ \varphi_0 \neq 0.$

ჩავსავათ ეს მნიშვნელობები (7) და (8) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$A = \frac{\varphi_0\left(\sqrt{n^2-k^2}+n\right)}{2\sqrt{n^2-k^2}},\quad B = \frac{\varphi_0\left(\sqrt{n^2-k^2}-n\right)}{2\sqrt{n^2-k^2}}$$

A და B მუდმივების მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (7)-ში, მივიღებთ დისკოს მოძრაობის განტოლებას ამ შემთხვევისათვის:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{n^2-k^2}}e^{-nt}\left[\left(\sqrt{n^2-k^2}+n\right)e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + \right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{n^2-k^2}-n\right)e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right].$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: აპერიოდული მოძრაობა, რომელიც მიმდინარეობს კანონით:

1) $\frac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}},\ \varphi =, \varphi_0 e^{-nt}(nt+1),$ სადაც $n = \frac{\beta}{MR^2}$

2) $\frac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\frac{2c}{MR^2}},$

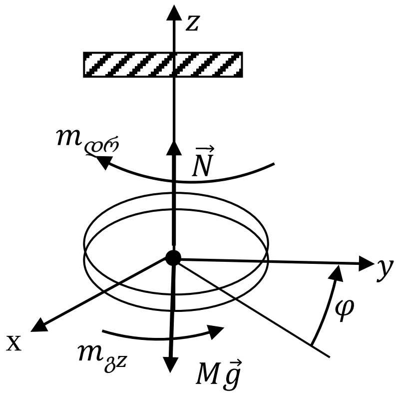
$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{n^2-k^2}}e^{-nt}\left[\left(\sqrt{n^2-k^2}+n\right)e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{n^2-k^2}-n\right)e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right],$$ სადაც $k = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}},\ n = \frac{\beta}{MR^2}.$

ამოცანა 37.23

დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეული ასრულებს გრეხვით რხევებს გარე $m_{gz} = m_0 cospt.$ მომენტის მოქმედებით, სადაც m_0 და p დადებითი მუდმივებია, ხოლო z ღერძის მიმართულია მავთულის გასწვრივ. მავთულის დრეკადი ძალების მომენტია $m_{დრ} = -c\varphi,$ სადაც c დრეკადობის კოეფიციენტია, ხოლო φ −გრეხის კუთხე. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი მავთულის z ღერძის მიმართ უდრის J_z. მოძრაობის წინააღმდეგობის ძალები უგულებელყოფილია. განსაზღვრეთ მყარი სხეულის მოძრაობის კანონი შემდეგ შემთხვევებში: 1) $\frac{c}{J_z} \neq p,$ 2) $\frac{c}{J_z} = p,$ თუ საწყის მომენტშიმავთული იმყოფებოდა არადაძაბულ მდგომარეობაში და მყარ სხეულს მიანიჭეს ω_0 კუთხური სიჩქარე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად მავთულზე ჩამოკიდებული მყარი სხეულის გრეხვითი რხევები მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით. ნახაზზე ვაჩვენოთ სხეულზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}-$ სიმძიმის ძალა, $m_{დრ}-$ დრეკადობის ძალის მომენტი, გარე მომენტი $m_{გz}$ და $\vec{N}-$მავთულის რეაქცია.



დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \tag{1}$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{გz} - m_{დრz} = m_0 cospt - c\varphi. \tag{2}$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = m_0 cospt - c\varphi.$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J_z}\varphi = \frac{m_0}{J_z}cospt$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = hcospt, \tag{3}$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{c}{J_z}};\ h = \frac{m_0}{J_z}.$$

მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნის ვეძებოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{4}$$

სადაც φ_1 არის $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$\varphi_1 = Asinkt + Bcoskt. \tag{5}$$

φ_2-კერძო ამონახსნია, რომელსაც ვეძებთ (3) დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა ნაწილის სახით, როცა $p \neq k$:

$$\varphi_2 = D \cdot cospt. \tag{6}$$

(6) ტოლობა გავაწარმოოთ ორჯერ დროით:

$$\dot{\varphi}_2 = -p \cdot D \cdot sinpt,$$
$$\ddot{\varphi}_2 = -p^2 \cdot D \cdot cospt.$$
ინტეგრების D მუდმივის საპოვნელად ჩავსვათ φ_2 და $\ddot{\varphi}_2$-ის მნიშვნელობები (3) დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:
$$-Dp^2 \cdot cospt + Dk^2\, cospt = hcospt.$$
საიდანაც
$$D = \frac{h}{k^2 - p^2},$$
ჩავსვათ (5) და (6) გამოსახულება ინტეგრების D მუდმივის მნიშვნელობის გათვალისწინებით (4) განტოლებაში, მივიღებთ:
$$\varphi = Asinkt + Bcoskt + \frac{h}{k^2-p^2} sinpt. \qquad (7)$$
გავაწარმოოთ (7) დროით:
$$\dot{\varphi} = Akcoskt - Bksinkt - \frac{hp}{k^2-p^2} sinpt. \qquad (8)$$
განვსაზღვროთ ინტეგრების A და B მუდმივები. საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t = 0,\ \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = \omega_0$.

. მაშინ
$$A = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{B} = -\frac{h}{k^2 - p^2}.$$
ჩავსვათ A და B მუდმივების მნიშვნელობები (7) განტოლებაში და ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის კანონი პირველი შემთხვევისათვის:
$$\varphi = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}} sinkt - \frac{h}{k^2 - p^2} coskt + \frac{h}{k^2 - p^2} cospt$$
ან
$$\varphi = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}} sinkt + \frac{h}{k^2 - p^2}(cospt - coskt).$$
მეორე შემთხვევაში, როცა $p = k$, φ_2 —კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით
$$\varphi_2 = Etsinpt. \qquad (8)$$
გავაწარმოოთ (8) ტოლობა დროით ორჯერ:
$$\dot{\varphi}_2 = Esinpt + Etpcospt,$$
$$\ddot{\varphi}_2 = Epcospt + Epcospt - Ep^3 tsinpt.$$
ინტეგრების E მუდმივის საპოვნელად ჩავსვათ φ_2 და $\ddot{\varphi}_2$ —ის მნიშვნელობები (3) დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:
$$2Ep \cdot cospt - Ep^2 tsinpt + Ek^2 t\, sinkt = hcospt.$$
საიდანაც
$$E = \frac{h}{2p}.$$
ჩავსვათ (5) და (8) გამოსახულება ინტეგრების E მუდმივის მნიშვნელობის გათვალისწინებით (4) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\varphi = Asinkt + Bcoskt + \frac{h}{2p}tsinpt. \quad (9)$$

გავაწარმოოთ (9) დროით:

$$\dot{\varphi} = Akcoskt - Bksinkt + \frac{h}{2p}sinpt + \frac{hp}{2p}tcospt.$$

განვსაზღვროთ ინტეგრების A და B მუდმივები. საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t = 0,\ \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = \omega_0$.

. მაშინ

$$A = \frac{\omega_0}{k}, \qquad B = 0.$$

ჩავსვათ A და B მუდმივების მნიშვნელობები (9) განტოლებაში და ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის კანონი მეორე შემთხვევისათვის:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}}sinkt + \frac{h}{2p}tsinpt$$

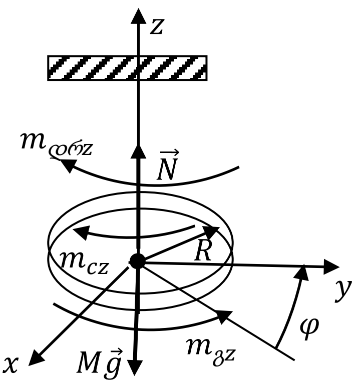
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: 1) $\frac{c}{J_z} \neq p;\ \varphi = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}}sinkt + \frac{h}{k^2-p^2}(cospt - coskt).$ სადაც

$$k = \sqrt{\frac{c}{J_z}};\ h = \frac{m_0}{J_z};$$

2) $\frac{c}{J_z} = p;\quad \varphi = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{k}}sinkt + \frac{h}{2p}tsinpt,$ სადაც $k = \sqrt{\frac{c}{J_z}} = p;\ h = \frac{m_0}{J_z};$

ამოცანა 37.24

დრეკად მავთულზე დაკიდებული M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ასრულებს რეზონანსულ გრეხვით რხევებს სითხეში გარე $m_{გz} = m_0 sinpt$ მომენტის მოქმედებით, სადაც m_0 და p დადებითი მუდმივებია,ხოლო z მიმართულია მავთულის ღერძის გასწვრივ. მავთულის დრეკადი ძალების მომენტია $m_{დრz} = -c\varphi$, სადაც c- დრეკადობის კოეფიციენტია, ხოლო $\varphi -$ დაგრეხის კუთხე; მოძრაობისადმი წინააღმდეგობის მომენტია $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, სადაც $\dot{\varphi}$ −მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\beta > 0$. განსაზღვრეთ დისკოს იძულებითი რეზონანსული რხევების განტოლება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დისკოს გრეხვითი რხევები სითხეში. ნახაზზე ვაჩვენოთ დისკოზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g} -$

სიმძიმის ძალა, $m_{დრz}$ − დრეკადობის ძალის მომენტი, m_{cz} −მოძრაობისადმი წინააღმდეგობის მომენტი, m_{gz} − გარე მომენტი და $\vec{N}$ −მავთულის რეაქცია.

დავწეროთ უძრავი Z ღერძის გარშემო დისკოს ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{gz} - m_{cz} - m_{დრz} = m_0 sinpt - c\varphi - \beta\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = m_0 sinpt - \beta\dot{\varphi} - c\varphi$$

ან

$$J_z\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = m_0 sinpt. \qquad (3)$$

(3) განტოლება წარმოადგენს დისკოს გრეხვითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას.

იძულებითი რხევების კანონს მივიღებთ როგორც არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$\varphi = Asinpt + Bcospt$$

გავაწარმოოთ ეს განტოლება დროით ორჯერ:

$$\dot{\varphi} = Apcospt - Bpsinpt,$$

$$\ddot{\varphi} = -Ap^2 sinpt - Bp^2 cospt$$

ინტეგრების A და B მუდმივების განსასაზღვრავად $\varphi, \dot{\varphi}$ და $\ddot{\varphi}$ −ის მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) განტოლებაში:

$$-AJ_z p^2 sinpt - BJ_z p^2 cospt + A\beta pcospt - B\beta psinpt +$$
$$+ Acsinpt + Bccospt = m_0 sinpt.$$

მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} A(c - J_z p^2)sinpt - B\beta psinpt = m_0 sinpt, \\ B(c - J_z p^2)cospt + A\beta pcospt = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$A = \frac{m_0(c - J_z p^2)}{(c - J_z p^2) + (\beta p)^2},$$

$$B = -\frac{m_0 \beta p}{(c - J_z p^2) + (\beta p)^2},$$

სადაც $J_z = \frac{MR^2}{2}$.

რეზონანსის შემთხვევაში, როცა $p = k = \sqrt{\frac{c}{J_z}}$,

$$A = 0, \qquad B = -\frac{m_0}{\beta p}.$$

შესაბამისად, დისკოს იძულებითი რეზონანსული რხევების განტოლება გარემოს წინააღმდეგობის გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi = -\frac{m_0}{\beta p}cospt.$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ J_z −ზე, მივიღებთ:

$$\varphi = -\frac{h}{2np}cospt,$$

სადაც

$$n = \frac{\beta}{MR^2}; \ h = \frac{m_0}{MR^2}.$$

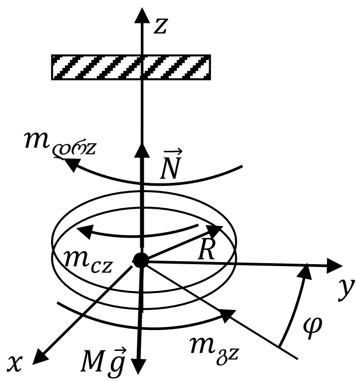
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: როცა $p = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, $\varphi = -\frac{h}{2np}cospt$, სადაც $n = \frac{\beta}{MR^2}$;

$$h = \frac{m_0}{MR^2}.$$

ამოცანა 37.25

სითხის სიბლანტის კოეფიციენტის განსასაზღვრავად აკვირდებიან დრეკად მავთულზე დაკიდებული დისკოს რხევებს სითხეში. დისკოზე მოდებულია $M_0 sinpt(M_0 = const)$ -ს ტოლი გარე მომენტი, რომლის დროსაც ხდება რეზონანსული მოვლენა. სითხეში მოძრაობისადმი წინააღმდეგობის მომენტი ტოლია $\alpha S\omega$, სადაც $\alpha -$ სითხის სიბლანტის კოეფიციენტია, S- დისკოს ქვედა და ზედა ფუძეების ფართობთა ჯამი; ω - მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა. განსაზღვრეთ სითხის სიბლანტის α კოეფიციენტი, თუ რეზონანსის დროს დისკოს იძულებითი რხევების ამპლიტუდა M_0 −ის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დისკოს გრეხვითი რხევები სითხეში. ვაჩვენოთ ნახაზზე დისკოზე მოქმედი ძალები(იხ. ნახაზი): $M\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, $m_{დრz}$ − დრეკადი ძალების მომენტი, m_{cz} − მოძრაობისადმი წინააღმდეგობის მომენტი, $m_{გz}$ − გარე მომენტი და $\vec{N}$ −მავთულის რეაქცია.



დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო დისკოს ბრუნვის დიფერენცია-ლური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ Z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{\text{ɡ}z} - m_{cz} - m_{\text{დრz}} = M_0 sinpt - c\varphi - \alpha S\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება (1) განტოლებაში:

$$J_z\ddot{\varphi} = M_0 sinpt - \alpha S\dot{\varphi} - c\varphi$$

ან

$$J_z\ddot{\varphi} + \alpha S\dot{\varphi} + c\varphi = M_0 sinpt. \qquad (3)$$

(3) განტოლება წარმოადგენს დისკოს გრეხვითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას.

იძულებითი რხევების კანონს მივიღებთ როგორც არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$\varphi = Asinpt + Bcospt$$

გავაწარმოოთ ეს განტოლება დროით ორჯერ:

$$\dot{\varphi} = Apcospt - Bpsinpt,$$

$$\ddot{\varphi} = -Ap^2 sinpt - Bp^2 cospt$$

ინტეგრების A და B მუდმივების განსასაზღვრავად $\varphi, \dot{\varphi}$ და $\ddot{\varphi}$ −ის მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) განტოლებაში:

$$-AJ_z p^2 sinpt - BJ_z p^2 cospt + A\alpha Spcospt - B\alpha Spsinpt +$$
$$+ Acsinpt + Bccospt = M_0 sinpt.$$

მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} A(c - J_z p^2)sinpt - B\alpha Spsinpt = M_0 sinpt, \\ B(c - J_z p^2)cospt + A\alpha Spcospt = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$A = \frac{M_0(c - J_z p^2)}{(c - J_z p^2) + (\alpha Sp)^2},$$

$$B = -\frac{m_0 \alpha Sp}{(c - J_z p^2) + (\alpha Sp)^2}.$$

რეზონანსის დროს

$$p = k = \sqrt{\frac{c}{J_z}},$$

მაშინ

$$A = 0, \qquad B = -\frac{M_0}{\alpha Sp}.$$

იძულებითი რხევების ამპლიტუდა ტოლია

$$\varphi_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{M_0}{\alpha Sp}.$$

აქედან განისაზღვრება სითხის სიბლანტის α კოეფიციენტი

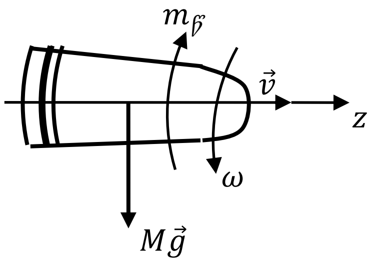
$$\alpha = \frac{M_0}{\varphi_0 Sp}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\alpha = \frac{M_0}{\varphi_0 Sp}$.

ამოცანა 37.26

ყუმბარის მოძრაობისას მისი სიმეტრიის ღერძის გარშემო ბრუნვა ნელდება ჰაერის წინაღობის ძალების მომენტის გავლენით, რომელიც $k\omega$ −ს ტოლია, სადაც ω არის ყუმბარის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, k −პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტი. განსაზღვრეთ კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონი, თუ ყუმბარის საწყისი კუთხური სიჩქარე არის ω_0, ხოლო მისი ინერციის მომენტი სიმეტრიის ღერძის მიმართ-J.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ყუმბარაზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, $m_{\text{წ}}$ −წინააღმდეგობის ძალების მომენტი.



დავწეროთ z ღერძის გარშემო ყუმბარის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J\frac{d\omega}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

ან რაც იგივეა

$$J\frac{d\omega}{dt} = -k\omega.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა

$$J\frac{d\omega}{\omega} = -kdt,$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{J}\int_0^t dt.$$

მივიღებთ

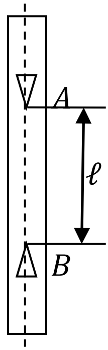
$$ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{J}t.$$

აქედან ვიპოვით ყუმბარის კუთხური სიჩქარის კლების კანონს:

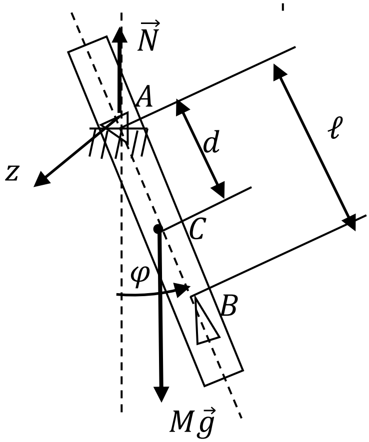
$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$.

ამოცანა 37.27



სიმძიმის ძალის აჩქარების განსაზღვრისას სარგებლობენ შებრუნებული ქანქარით, რომელიც წარმოადგენს ღეროს, აღჭურვილს ორი A და B სამწახნაგა დანით. ერთი დანა უძრავია, ხოლო მეორეს შეუძლია გადაადგილება ღეროს გასწვრივ. თუ ღეროს ჩამოკიდებთ ხან ერთ და ხან მეორე დანაზე და შეცვლით მათ შორის AB მანძილს, შეიძლება მიაღწიოთ გაქანების პერიოდების ტოლობას. რას უდრის სიმძიმის ძალის აჩქარება, თუ მანძილი დანებს შორის, როცა პერიოდები ტოლია, არის $AB = \ell$, ხოლო რხევის პერიოდი $-T$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ შებრუნებული ქანქარის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ქანქარაზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}-$ სიმძიმის ძალა და $\vec{N}-A$ საყრდენის რეაქცია.

დავწეროთ A წერტილზე გამავალი უძრავი z ღერძის გარშემო ქანქარის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{Az}\ddot{\varphi} = -Mgd sin\varphi$$

ან

$$J_{Az}\ddot{\varphi} + Mgd sin\varphi = 0,$$

სადაც $d - A$ წერტილიდან მასათა C ცენტრამდე მანძილია.

თუ ჩავთვლით, რომ საქმე გვაქვს მცირე რხევებთან ($sin\varphi \approx \varphi$), მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{J_{Az}}\varphi = 0. \qquad (1)$$

(1) დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს A საყრდენის გარშემოს ქანქარის რხევის დიფერენციალური განტოლებას.

რხევის პერიოდია

$$T_A = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgd}{J_{Az}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Az}}{Mgd}}.$$

ჩამოვკიდოთ ქანქარს მეორე ქვედა B წერტილზ.ე. დავწეროთ B წერტილზე გამავალი უძრავი z ღერძის გარშემო ქანქარის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{Az}\ddot{\varphi} = -Mg(\ell - d)sin\varphi$$

ან

$$J_{Az}\ddot{\varphi} + Mg(\ell - d)sin\varphi = 0$$

თუ ჩავთვლით, რომ საქმე გვაქვს მცირე რხევებთან $(sin\varphi \approx \varphi)$, მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{M\cdot g(\ell-d)}{J_{Az}}\varphi = 0.$$

(2) დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს B საყრდენის გარშემოს ქანქარის რხევის დიფერენციალური განტოლებას.

რხევის პერიოდი ამ შემთხვევაში იქნება:

$$T_A = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mg(\ell - d)}{J_{Az}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Az}}{Mg(\ell-d)}}.$$

განვსაზღვროთ ქანქარის ინერციის მომენტები A და B წერტილების მიმართ:

$$J_{Az} = J_C + Md^2,$$
$$J_{Bz} = J_C + M(\ell - d)^2.$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს პერიოდები:

$$T_A = T_B = T$$

და ვიპოვოთ ქანქარის ინერციის მომენტი მასათა C ცენტრის მიმართ. გამოვსახოთ ის რხევის T პერიოდით:

$$J_C = Mgd\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - Md^2 = Mg(\ell - d)\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - M(\ell - d)^2.$$

განვსაზღვროთ სიმძიმის ძალის აჩქარება:

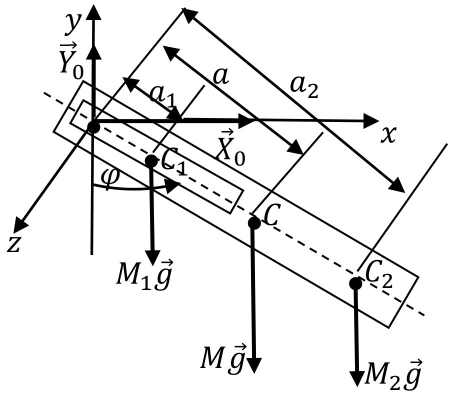
$$g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$$

პ ა ს უ ხ ი: $g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$

ამოცანა 37.28

ორ მყარ სხეულს შეუძლია ქანაობა ერთი და იმავე ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო როგორც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, ისე ერთად მათი შეერთებისას. განსაზღვრეთ რთული ქანქარას დაყვანილი სიგრძე, თუ მყარ სხეულთა მასებია M_1 და M_2, მათი სიმძიმის ცენტრების დაშორება ბრუნვის საერთო ღერძიდან a_1 და a_2, ხოლო თითოეულის ცალ-ცალკე რხევისას დაყვანილი სიგრძეები სათანადოდ$-\ell_1$ და ℓ_2.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ერთად შეერთებული ორი სხეულის რხევა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ძალები, რომლებიც მოქმედებს მიღებულ რთულ ქანქარაზე: მყარი სხეულის სიმძიმის ძალები $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$, O წერტილში რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.



დავიყვანოთ სხეულის სიმძიმის ძალები ტოლქმედ ძალაზე:

$$M\vec{g} = M_1\vec{g} + M_2\vec{g},$$

სადაც $M = M_1 + M_2$.

ვიპოვოთ ტოლქმედის მოდების წერტილი-რთული ქანქარის მასათა ცენტრი:

$$a = \frac{M_1a_1 + M_2a_2}{M_1 + M_2}.$$

განვსაზღვროთ სხეულების ინერციის მომენტები და გამოვსახოთ ისინი დაყვანილი ℓ_1 და ℓ_2. სიგრძეებით:

$$\ell_1 = \frac{J_{1z}}{M_1a_1}, \qquad \ell_2 = \frac{J_{2z}}{M_2a_2}.$$

მაშინ

$$J_{1z} = M_1a_1\ell_1, \qquad J_{2z} = M_2a_2\ell_2.$$

ვიპოვოთ რთული ქანქარის ინერციის მომენტი

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} = M_1a_1\ell_1 + M_2a_2\ell_2$$

და მისი დაყვანილი სიგრძე

$$\ell = \frac{J_z}{Ma} = \frac{M_1a_1\ell_1 + M_2a_2\ell_2}{(M_1 + M_2)\dfrac{M_1a_1 + M_2a_2}{M_1 + M_2}} = \frac{M_1a_1\ell_1 + M_2a_2\ell_2}{M_1a_1 + M_2a_2}.$$

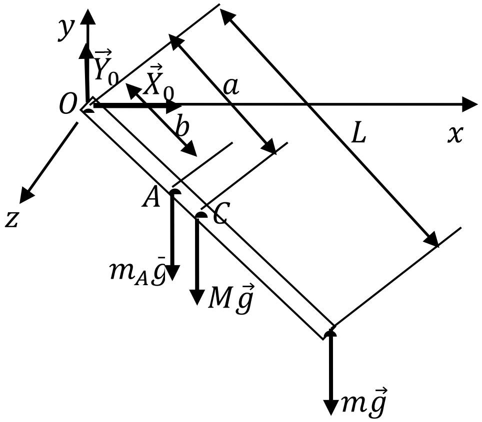
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\ell = \frac{M_1a_1\ell_1 + M_2a_2\ell_2}{M_1a_1 + M_2a_2}$.

ამოცანა 37.29

ხელსაწყოს ნაწილი წარმოადგენს L სიგრძის ერთგვაროვან ღეროს, რომელიც ერთი ბოლოთი თავისუფლად არის დაკიდებული ჰორიზონტალურ O ღერძზე. რხევების აღსაწერად მის ქვედა ბოლოზე აწებებენ m მასის სარკეს. ამავე დროს, იმისათვის, რომ არ შეიცვალოს რხევების სიხშირე, მასზე სხვა ადგილას ამაგრებენ A ტვირთს. თუ განვიხილავთ სარკეს და

ტვირთს როგორც ნივთიერ წერტილებს, იპოვეთ A ტვირთის მინიმალური მასა. O ღერძიდან რა მანძილზე შეიძლება იგი იყოს მიმაგრებული?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ერთგვაროვანი ღეროს რხევა სარკესთან და ტვირთთან ერთად და მათ გარეშე. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედი ძალები: $m_A\vec{g}$ −ტვირთის, $M\vec{g}$ −ღეროს და $m\vec{g}$ −სარკის სიმძიმის ძალები, O წერტილში აღძრული რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.



ვიპოვოთ ღეროს დაყვანილი სიგრძე

$$\ell = \frac{J_z}{Ma} = \frac{\frac{ML^2}{3}}{M\frac{L}{2}} = \frac{2}{3}L$$

და სისტემის (რომელიც შედგება ღეროსა, სარკის და A ტვირთსაგან) დაყვანილი სიგრძე

$$\ell_2 = \frac{J_z^{სისტ.}}{M_C a_C}, \qquad (1)$$

სადაც $M_C -$ სისტემის მასაა, $M_C = M + m + m_A$.

განვსაზღვროთ სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა

$$a_C = \frac{M\frac{L}{2} + mL + m_A b}{M + m + m_A}$$

და სისტემის ინერციის მომენტი O წერტილში გამავალი z ღერძის მიმართ

$$J_z^{სისტ.} = J_z + mL^2 + m_A b^2 = \frac{ML^2}{3} + mL^2 + m_A b^2.$$

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$\ell_2 = \frac{\frac{ML^2}{3} + mL^2 + m_A b^2}{M\frac{L}{2} + mL + m_A b}.$$

რხევის სიხშირე არ შეიცვლება, თუ ქანქარის დაყვანილი სიგრძე იქნება მუდმივი, ე.ი. როცა $\ell = \ell_2$:

$$\frac{2}{3}L = \frac{\frac{ML^2}{3} + mL^2 + m_A b^2}{M\frac{L}{2} + mL + m_A b}.$$

ამ ტოლობიდან ვიპოვით

$$m_A = \frac{\frac{mL^2}{3}}{\frac{2}{3}bL - b^2}.$$

განვსაზღვროთ A ტვირთის მინიმალური მასა და $OA = b$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{2}{3}bL - b^2 = f(b)$. პირობიდან $f'(b) = \frac{2}{3}L - 2b = 0$, $b = \frac{1}{3}L$. რადგან $f''(b) = -2 < 0$, ამიტომ b –ს ამ მნიშვნელობისათვის $f(b)$ იქნება მაქსიმალური, ხოლო m_A – მინიმალური:

$$m_A = \frac{\frac{mL^2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot L^2 - \left(\frac{1}{3}L\right)^2} = 3m.$$

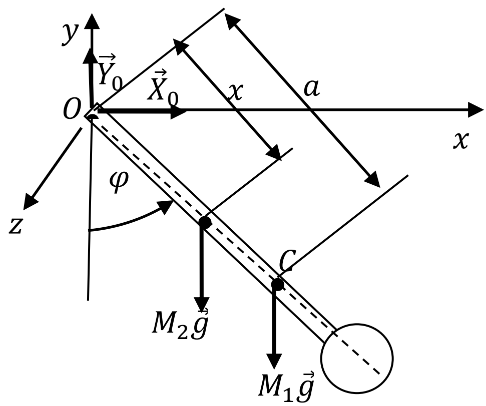
პ ა ს უ ხ ი: $m_A = 3m$; $b = OA = \frac{1}{3}L$.

ამოცანა 37.30

საათის სვლის რეგულირებისათვის მის დაყვანილი ℓ სიგრძის და M_1 მასის ქანქარაზე, რომლის სიმძიმის ცენტრიდან დაკიდების ღერძამდე მანძილი არის a, დამატებით მიამაგრებენ M_2 მასის ტვირთს დაკიდების ღერძიდან მანძილზე. მიიღეთ დამატებითი ტვირთი ნივთიერ წერტილად და განსაზღვრეთ ქანქარას დაყვანილი სიგრძის $\Delta\ell$ ცვლილება M_2 და x –ის მოცემული მნიშვნელობებისას და $x = x_1$ მნიშვნელობა, როდესაც ქანქარას დაყვანილი სიგრძის $\Delta\ell$ ცვლილება მიიღება დამატებითი ტვირთის უმცირესი მასით.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ საათის ქანქარასა და დამატებითი ტვირთისაგან შედგენილი სისტემის რხევები. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედი ძალები: $M_1\vec{g}$ – ქანქარის, $M_2\vec{g}$ –დამატებითი ტვირთის სიმძიმის ძალები, O წერტილში აღძრული რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.



ქანქარის დაყვანილი სიგრძის გამოსახულებიდან

$$\ell = \frac{J_z}{M_1 a}$$

განვსაზღვრავთ მის ინერციის მომენტს:

$$J_z = M_1 a \ell.$$

ვიპოვოთ სისტემის ინერციის მომენტი

$$J_z^{სისტ.} = J_z + M_2 x^2 = M_1 a \ell + M_2 x^2.$$

განვსაზღვროთ სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა

$$a_C = \frac{M_1 a + M_2 x}{M_1 + M_2}$$

და მისი დაყვანილი სიგრძე

$$\ell_{სისტ.} = \frac{J_z^{სისტ.}}{M a_C} = \frac{M_1 a \ell + M_2 x^2}{(M_1 + M_2)\dfrac{M_1 a + M_2 x}{M_1 + M_2}} = \frac{M_1 a \ell + M_2 x^2}{M_1 a + M_2 x}.$$

სადაც M სისტემის საერთო მასაა, $M = M_1 + M_2$.

ვიპოვოთ ქანქარას დაყვანილი სიგრძის ცვლილება

$$\Delta\ell = \ell_{სისტ.} - \ell = \frac{M_1 a \ell + M_2 x^2}{M_1 a + M_2 x} - \ell = \frac{M_2 (x - \ell) x}{M_1 a + M_2 x}.$$

ამ ტოლობიდან გამოვთვალოთ დამატებითი ტვირ|თის მასა

$$M_2 = \frac{M_1 a \Delta\ell}{x(\ell + \Delta\ell) - x^2}.$$

განვსაზღვროთ $x = x_1$ მნიშვნელობა, რომლის დროსაც დამატებითი ტვირთის მასა იქნება უმცირესი. ამისათვის

$$\frac{d}{dx}[x(\ell + \Delta\ell) - x^2] = 0$$

ან

$$(\ell + \Delta\ell) - 2x_1 = 0.$$

მაშინ

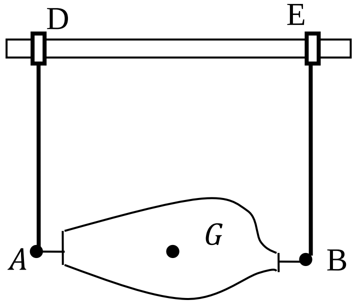
$$x_1 = \frac{1}{2}(\ell + \Delta\ell).$$

შენიშვნა. იხილეთ 37.29 ამოცანის ახსნა-განმარტება.

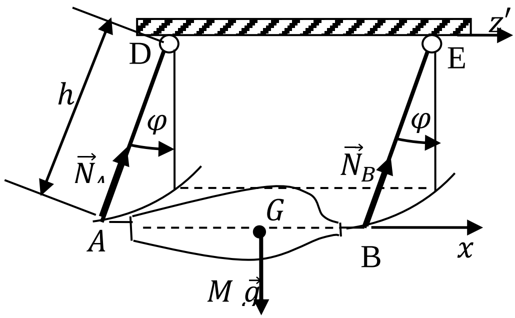
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\Delta\ell = \frac{M_2(x-\ell)x}{M_1 a + M_2 x}$; $x_1 = \frac{1}{2}(\ell + \Delta\ell)$.

ამოცანა 37.31

მყარი სხეული, მისი სიმძიმის G ცენტრზე გამავალი რომელიმე AB ღერძის მიმართ ინერციის J მომენტის განსასაზღვრვად ჩამოკიდეს მასზე ხისტად მიმაგრებული AD და BE ღეროებით, რომლებიც თავისუფლად არის ჩამოცმული უძრავ ჰორიზონტალურ DE ღეროზე ისე, რომ AB ღერძი პარალელურია DE-სი; მეორე სხეული მოიყვანეს რხევით მოძრაობაში; განსაზღვრეს მისი ერთი გაქანების ხანგრძლივობა. როგორია სხეულის ინერციის J მომენტი., თუ სხეული მასაა M, AB და DE ღერძებს შორის მანძილი უდრის h −ს? ღეროების მასა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ უწონად ღეროებზე ჩამოკიდებული სხეულის მოძრაობა. AD და BE ღეროების იმ მდებარეობისათვის,როდესაც ისინი ვერტიკალთან ადგენენ φ კუთხეს, ნახაზზე ვაჩვენოთ მოქმედები ძალები: $M\vec{g}-$ სხეულის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ −ღეროების რეაქციები.



დავწეროთ უძრავი z ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{z'}\ddot{\varphi} = \sum M_{z'}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \tag{1}$$

ვიპოვოთ z' ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_{z'}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mgh sin\varphi = -Mgh\varphi, \tag{2}$$

სადაც $sin\varphi \approx \varphi$.

სხეულის ინერციის $J_{z'}$ მომენტი განვსაზღვროთ ჰიუგენს-შტეინერის თეორემით:

$$J_{z'} = J_z + Mh^2. \tag{3}$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$(J_z + Mh^2)\ddot{\varphi} = -Mgh\varphi$$

და გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgh}{J_z+Mh^2}\varphi=0$$

ან

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

სადაც

$$k^2=\frac{Mgh}{J_z+Mh^2}.$$

ეს დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს z' ღერძის მიმართ სხეულის რხევიტი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას. ვიპოვოთ რხევის ნახევარპერიოდი

$$T=\frac{\pi}{k}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{Mgh}{J_z+Mh^2}}}=\pi\sqrt{\frac{J_z+Mh^2}{Mgh}}$$

და განვსაზღვროთ სხეულის ინერციის მომენტის მნიშვნელობა

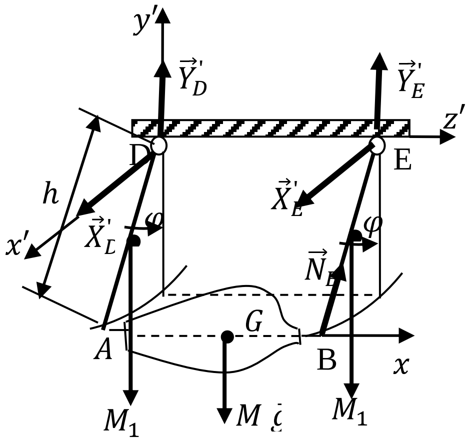
$$J_z=\frac{T^2}{\pi^2}Mgh-Mh^2=Mgh\left(\frac{T^2}{\pi^2}-\frac{h}{g}\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $J_z=Mgh\left(\frac{T^2}{\pi^2}-\frac{h}{g}\right).$

ამოცანა 37.32

ამოხსენით წინამდებარე ამოცანა წვრილი ერთგვაროვანი წრფივი AD და BE ღეროების მასების გათვალისწინებით, თუ თითოეული მათგანის მასაა M_1.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



განვიხილოთ სხეულის და ორი ღეროსაგან შედგენილი სისტემის მოძრაობა. ნახაზზე ვაჩვენოთ მოქმედები ძალები: $M\vec{g}$, $M_1\vec{g}$ — სხეულის და ღეროების სიმძიმის ძალები, $\vec{X}_D', \vec{Y}_D'$ და $\vec{X}_E', \vec{Y}_E'$ — საყრდენების რეაქციები.

დავწეროთ DE ღეროზე გამავალი უძრავი z' ღერძის გარშემო სისტემის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{1z'}\ddot{\varphi} = \sum M_{z'}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \qquad (1)$$

ვიპოვოთ z' ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_{z'}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mghsin\varphi - 2M_1g\frac{h}{2}sin\varphi = -(M+M_1)gh\varphi,$$

სადაც $sin\varphi \approx \varphi.$

z' ღერძის მიმართ სისტემის დაყვანილი ინერციის მომენტი

$$J_{1z'} = J_{z'} + 2J_{z'}^{ღრ}$$

განვსაზღვროთ სხეულის ინერციის მომენტი z' ღერძის მიმართ

$$J_{z'} = J_z + Mh^2.$$

და ღეროს ინერციის მომენტი z' ღერძის მიმართ

$$J_{z'}^{ღრ} = \frac{M_1h^2}{12} + M_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{M_1h^2}{3}.$$

მაშინ

$$J_{1z'} = J_z + Mh^2 + 2\cdot\frac{M_1h^2}{3} = J_z + \frac{3M+2M_1}{3}h^2.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$\left(J_z + \frac{3M+2M_1}{3}h^2\right)\ddot{\varphi} = -(M+M_1)gh\varphi$$

და გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(M+M_1)gh}{J_z + \frac{3M+2M_1}{3}h^2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც

$$k^2 = \frac{(M+M_1)gh}{J_z + \frac{3M+2M_1}{3}h^2}.$$

ვიპოვოთ რხევის ნახევარპერიოდი

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{(M+M_1)gh}{J_z + \frac{3M+2M_1}{3}h^2}}} = \pi\sqrt{\frac{J_z + \frac{3M+2M_1}{3}h^2}{(M+M_1)gh}}$$

და განვსაზღვროთ სხეულის ინერციის მომენტის მნიშვნელობა

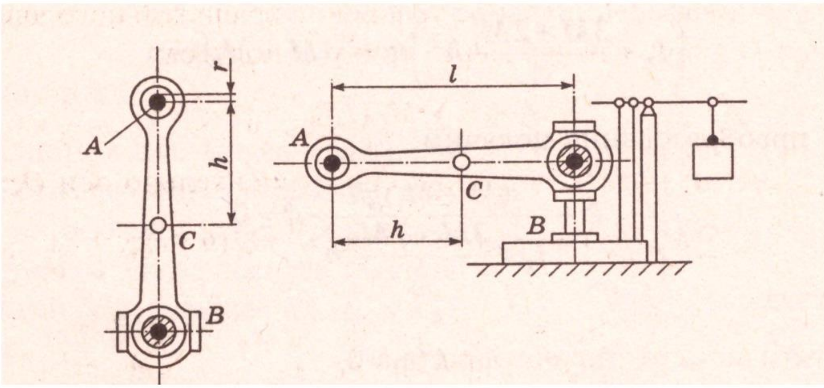
$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{J_z + \frac{3M + 2M_1}{3}h^2}{(M + M_1)gh}$$

$$J_z = h\left[\frac{T^2}{\pi^2}(M + M_1)g - \frac{3M + 2M_1}{3}h\right].$$

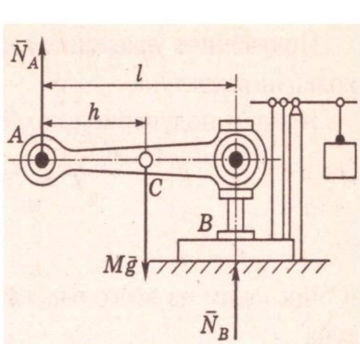
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $J_z = h\left[\frac{T^2}{\pi^2}(M + M_1)g - \frac{3M+2M_1}{3}h\right].$

ამოცანა 37.33

ბარბაცას ინერციის მომენტის განსაზღვრისას იგი აიძულეს იქანაოს ჯვართავას პოჭოჭიკის მილისში გაყრილი წვრილი ცილინდრული ჰორიზონტალური ღეროს გარშემო. 100 გაქანების ხანგრძლივობა $100T = 100$წმ, სადაც T პერიოდის ნახევარია. შემდეგ მასათა C ცენტრიდან ჩამოკიდების ღერძამდე $AC = h$ მანძილის განსასაზღვრავად ბარბაცა



მოათავსეს ჰორიზონტალურად, ჩამოკიდეს A წერტილით საზეველზე და B წერტილით დააყრდნეს ათწილადი სასწორის ბაქანზე. ამ დროს ბაქანზე წნევა აღმოჩნდა P —ს ტოლი. განსაზღვრეთ ცენტრალური ინერციის J მომენტი ნახაზის სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ შემდეგი მონაცემების შემთხვევაში: ბარბაცას მასაა M, A და B წერტილებზე გავლებულ



ვერტიკალებს შორის მანძილია ℓ (იხ. მარჯვენა ნახაზი), ჯვართავას პოჭოჭიკის რადიუსი- r.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ბარბაცას წონასწორობა სასწორზე მისი აწონვისას (ნახ.1). მასზე მოქმედებს ძალები: $M\vec{g}-$ სიმძიმის ძალა, $\vec{N}_A-$ ძაფის რეაქცია და $\vec{N}_B-$სასწორის ბაქანის რეაქცია, რომელიც $\vec{P}$ წნევის ძალის ტოლია.

დავწეროთ A წერტილის მიმართ გარე ძალების მომენტების განტოლება:

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=0,$$

$$P\ell-Mgh=0.$$

ნახ.1

ვიპოვოთ ბარბაცას მასათა C ცენტრის მდებარეობა

$$h=\frac{P\ell}{Mg}.$$

ჩამოვკიდოთ ბარაბცა ღეროზე და განვიხილოთ მისი მოძრაობა (ნახ.2).

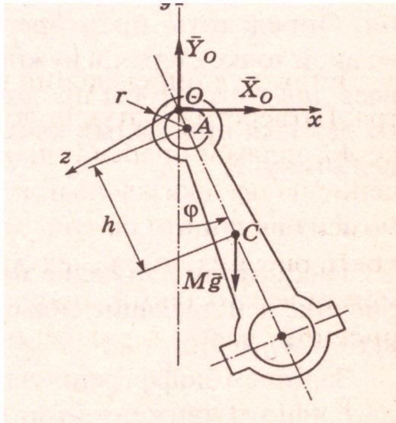
დავწეროთ O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_o\ddot{\varphi}=\sum M_o\left(\vec{F}_k^{(e)}\right), \quad (1)$$

ვიპოვოთ Oz ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_o\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=-Mg(h+r)sin\varphi=-Mg(h+r)\varphi, \quad (2)$$

სადაც $sin\varphi\approx\varphi.$



ნახ.2

ბარბაცას ინერციის J_o მომენტი გამოვსახოთ მისი ცენტრალური ინერციის მომენტით:

$$J_o=J_C+M(h+r)^2. \quad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$[J_C+M(h+r)^2]\ddot{\varphi}=-Mg(h+r)\varphi,$$

საიდანაც

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mg(h+r)}{J_C+M(h+r)^2}\varphi=0$$

ან

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

სადაც

$$k^2 = \frac{Mg(h+r)}{J_C + M(h+r)^2}.$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს ბარბაცას რხევის დიფერენციალურ განტოლებას.

ვიპოვოთ რხევის ნახევარპერიოდი

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{Mg(h+r)}{J_C + M(h+r)^2}}}.$$

და ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ ბარბაცას ცენტრალური ინერციის მომენტი:

$$J = J_C = \frac{T^2}{\pi^2}Mg(h+r) - M(h+r)^2 =$$

$$= \frac{T^2}{\pi^2}Mg\left(\frac{P\ell}{Mg} + r\right) - M\left(\frac{P\ell}{Mg} + r\right)^2 =$$

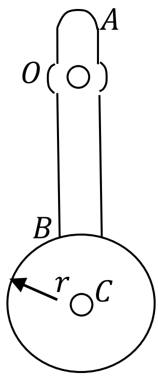
$$= \left(\frac{P\ell}{Mg} + r\right)\left(\frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{MP\ell}{g} - Mr\right) =$$

$$= \left(\frac{P\ell + Mgr}{g}\right)\left(\frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{P\ell}{Mg} - r\right).$$

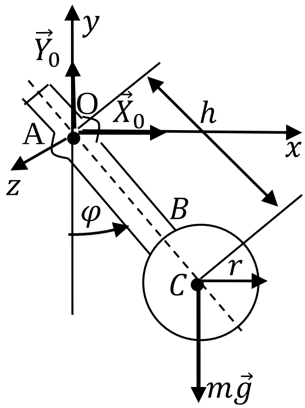
პ ა ს უ ხ ი: $J = \left(\frac{P\ell+Mgr}{g}\right)\left(\frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{P\ell}{Mg} - r\right).$

ამოცანა 37.34

ქანქარა შედგება AB ღერძისაგან მასზე მიმაგრებული m მასისა და r რადიუსის სფეროთი, რომლის C ცენტრი მდებარეობს ღეროს გაგრძელებაზე. განსაზღვრეთ, ღეროსრომელ O წერტილში უნდა მოთავსდეს დაკიდების ღერძი, რათა ერთი გაქანების ხანგრძლივობა მცირე რხევების დროს იყოს მოცემული T მნიშვნელობა, თუ ღეროს მასა უგულებელყოფილია. m მასისა და r რადიუსის სფეროს ინერციის მომენტი მის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის $\frac{2}{5}Mr^2$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ქანქარას მოძრაობა. ვაჩვენოთ მასზე მოქმედებს ძალები: $m\vec{g}-$ სიმძიმის ძალა, რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.



დავწეროთ O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi}=\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

$$J_z\ddot{\varphi}=-mghsin\varphi,$$

სადაც $h-$ ბირთვის C ცენტრიდან დაკიდების წერტილამდე მანძილია.

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi\approx\varphi$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgh}{J_z}\varphi=0$$

ან

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

სადაც $k^2=\frac{Mgh}{J_z}$.

განვსაზღვროთ ბირთვის ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$J_z=J_C+M(OC)^2=\frac{2}{5}Mr^2+Mh^2.$$

ვიპოვოთ რხევის ნახევარპერიოდი ანუ ერთი გაქანების ხანგრძლივობა

$$T=\frac{\pi}{k}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{Mgh}{J_z}}}.=\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mgh}}=\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}Mr^2+Mh^2}{Mgh}}=\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2+h^2}{gh}}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$\boldsymbol{T^2=\pi^2}\frac{\frac{2}{5}r^2+h^2}{gh},$$

$$\frac{T^2}{\pi^2}gh=\frac{2}{5}r^2+h^2$$

ან

$$h^2-\frac{T^2}{\pi^2}gh+\frac{2}{5}r^2=0.$$

მიღებული კვადრატული განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$h = \frac{\frac{T^2}{\pi^2}g \pm \sqrt{\left(\frac{T^2}{\pi^2}g\right)^2 - \frac{8}{5}r^2}}{\mathbf{2}}$$

ხოლო საძიებელი $OC = h$ მნიშვნელობაა

$$h = \frac{1}{2\pi^2}\left[gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - \frac{8}{5}r^2\pi^4}\right].$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $OC = \frac{1}{2\pi^2}\left[gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - \frac{8}{5}r^2\pi^4}\right]$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. რადგან უნდა შესრულდეს პირობა $OC \geq r,$ ამიტომ ამონახსნი არსებობს, თუ

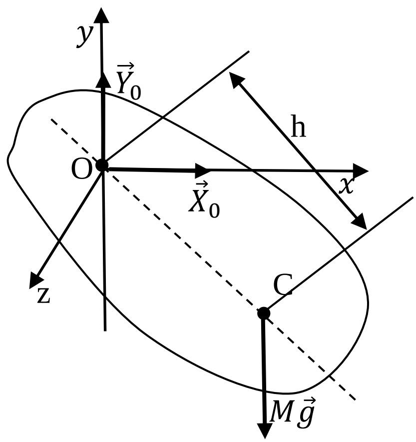
$$T^2 \geq 1{,}4\frac{\pi^2}{g}r.$$

ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება ფესვის წინ მინუს ნიშანს, შეუძლებელია.

ამოცანა 37.35

მასათა ცენტრიდან რა მანძილზე უნდა იყოს დაკიდებული ფიზიკური ქანქარა, რომ მისი რხევის პერიოდი იყოს უმცირესი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დაკიდების Oz ღერძის მიმართ ფიზიკური ქანქარას რხევები. ვაჩვენოთ მასზე მოქმედებს ძალები: $M\vec{g} -$ სიმძიმის ძალა, რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.



დავწეროთ დაკიდების O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right),$$

$$J_z\ddot{\varphi} = -mghsin\varphi,$$

სადაც $h - C$ ცენტრიდან დაკიდების წერტილამდე მანძილია.

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi,$ ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{J_z}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{Mgh}{J_z}$.

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgh}{J_z}}.} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mgh}}$$

ფიზიკური ქანქარას ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$J_z = J_C + Mh^2.$$

მაშინ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + Mh^2}{Mgh}}$$

ან

$$T^2 = 4\pi^2\frac{J_C + Mh^2}{Mgh} = 4\pi^2\left(\frac{J_C}{Mgh} + \frac{Mh}{g}\right).$$

მიღებული გამოსახულება გავაწარმოოთ h –ით:

$$\frac{d}{dh}(T^2) = \frac{4\pi^2}{g}\left[\frac{d\left(\frac{J_C}{Mh}\right)}{dh} + \frac{d(h)}{h}\right] = \frac{4\pi^2}{g}\left[-\frac{J_C}{Mh^2} + 1\right]$$

და ვიპოვოთ h –ის მინიმალური მნიშვნელობა, პირობიდან

$$\frac{d}{dh}(T^2) = 0$$

ან

$$-\frac{J_C}{Mh^2}+1=0,$$

საიდანაც

$$h^2=\frac{J_C}{M}.$$

სხეულის ინერციის მომენტის ფარდობა მის მასასთან ტოლია ინერციის რადიუსის კვადრატის. შესაბამისად, მანძილი მასათა ცენტრიდან ქანქარას დაკიდების წერტილამდე ქანაქარას ინერციის რადიუსის ტოლია.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: რხევის სიბრტყის მართობულად ქანქარას მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ, მისი ინერციის რადიუსის ტოლ მანძილზე

ამოცანა 37.36

ქანქარა შედგება AB ღეროსაგან მასზე მიმაგრებული ორი ტვირთით, რომელთა შორის მანძილი უდრის ℓ. ზედა ტვირთის მასაა m_1, ქვედასი $-m_2$. განსაზღვრეთ წვედა ტვირთიდან რა x მანძილზე უნდა მოვათავსოთ დაკიდების ღერძი, რომ ქანქარას მცირე რხევების პერიოდი იყოს უმცირესი. ღეროს მასა უგულებელყოფილია და ტვირთები ნივთიერ წერტილებად არის ჩათვლილი.

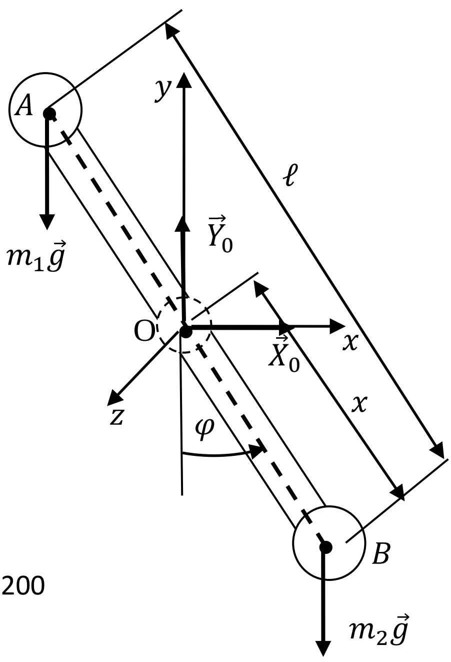
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ უწონადი AB ღეროს და m_1 და m_2. მასის მქონე ორი წერტილოვანი ტვირთისაგან შედგენილი სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ მასზე მოქმედებს ძალები: $m_1\vec{g}$ და $m_2\vec{g}$ -სიმძიმის ძალები, O წერტილში აღძრული რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.

დავწეროთ დაკიდების O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi}=\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$

ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=$$
$$=m_1g(\ell-x)sin\varphi-$$
$$-m_2gxsin\varphi, \qquad (2)$$



და სისტემის დაყვანილი ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}.$$

A და B წერტილოვანი ტვირთების ინერციის მომენტები Z ღერძის მიმართ შესაბამისად ტოლია:

$$J_{1z} = m_1(\ell - x)^2, \qquad J_{2z} = m_2x^2.$$

მაშინ

$$J_z = m_1(\ell - x)^2 + m_2x^2. \tag{3}$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$[m_1(\ell - x)^2 + m_2x^2]\ddot{\varphi} = [m_1(\ell - x) - m_2x]gsin\varphi.$$

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi,$ ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{[m_1(\ell - x) - m_2x]gh}{m_1(\ell - x)^2 + m_2x^2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{[m_1(\ell-x)-m_2x]gh}{m_1(\ell-x)^2+m_2x^2}.$

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{[m_1(\ell - x) - m_2x]gh}{m_1(\ell - x)^2 + m_2x^2}}.} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1(\ell - x)^2 + m_2x^2}{[m_1(\ell - x) - m_2x]g}}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\frac{m_1(\ell - x)^2 + m_2x^2}{[m_1(\ell - x) - m_2x]g}$$

მიღებული გამოსახულება გავაწარმოოთ x –ით:

$$\frac{d}{dx}(T^2) = \frac{4\pi^2}{g}\times$$

$$\times\left\{\frac{[2x(m_1 + m_2) - 2m_1\ell][(m_1 + m_2)x - m_1\ell]}{[(m_1 + m_2)x - m_1\ell]^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(m_1 + m_2)\left[(m_1 + m_2)x^2 - 2m_1\ell x + m_1\ell^2\right]}{[(m_1 + m_2)x - m_1\ell]^2}\right\}.$$

ქანქარას რხევის პერიოდს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა, როცა

$$\frac{d}{dx}(T^2) = 0,$$

ან

$$[2x(m_1+m_2) - 2m_1\ell][(m_1+m_2)x - m_1\ell] -$$

$$-(m_1+m_2)\left[(m_1+m_2)x^{\mathbf{2}} - 2m_1\ell x + m_1\ell^2\right] = 0,$$

$$x^2 - \frac{2m_1\ell}{m_1+m_2}x + \frac{m_1\ell^2(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)^2} = 0.$$

ამ კვადრატული განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$x_{1,2} = \ell\frac{\pm\sqrt{m_1m_2}}{m_1+m_2},$$

საძიებელი მანძილი

$$x = \ell\sqrt{m_1}\frac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x = \ell\sqrt{m_1}\frac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}$.

ამოცანა 37.37

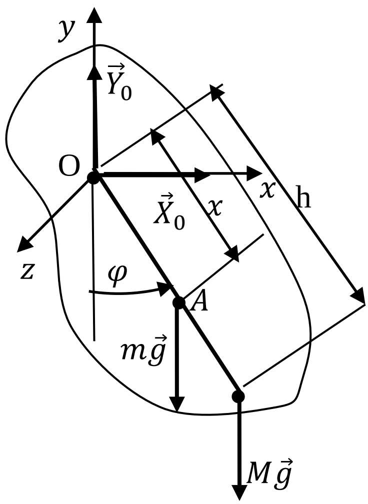
დაკიდების ღერძიდან რა მანძილზე უნდა დაემატოს ფიზიკურ ქანქარას დამატებითიტვირთი, რომ მისი რხევის პერიოდი არშეიცვალოს?

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველ რიგში ვიპოვოთ ფიზიკური ქანქარას რხევის პერიოდი A წერტილოვანი ტვირთის გარეშე ქანქარა $M\vec{g}$ სიმძიმის ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).

დავწეროთ დაკიდების O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ქანქარას ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mghsin\varphi,$$

სადაც $h = OC$.



რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi$,
ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{J_z}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{Mgh}{J_z}$.

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgh}{J_z}.}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mgh}}.$$

ვიპოვოთ ქანქარასა და წერტილოვანი ტვირთისაგან შედგენილი სისტემის რხევის პერიოდი. ვაჩვენოთ მასზე მოქმედებს ძალები: $M\vec{g} -$ ქანქარას სიმძიმის ძალა, $m\vec{g}$ −ტვირთის სიმძიმის ძალა და O წერტილში აღძრული რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.

დავწეროთ Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \quad (1)$$

ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი

$$\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = (-mgx - Mgh)sin\varphi. \quad (2)$$

და სისტემის დაყვანილი ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$J_{დაყ.} = J_z + J_z^A,$$

სადაც J_z −ფიზიკური საქანის ინერციის მომენტი დაკიდების O წერტილის მიმართ.

ვიპოვოთ A წერტილოვანი ტვირთის ინერციის მომენტ:

$$J_z^A = mx^2.$$

მაშინ

$$J_{დაყ.} = J_z + mx^2$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$(J_z + mx^2)\ddot{\varphi} = -(mx + Mh)g\varphi.$$

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{(mx + Mh)g}{J_z + mx^2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{(mx+Mh)g}{J_z+mx^2}$.

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი

$$T^* = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(mx+Mh)g}{J_z+mx^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z+mx^2}{(mx+Mh)g}}.$$

რადგან $T = T^*$, ამიტომ

$$\frac{J_z}{Mgh} = \frac{J_z+mx^2}{(mx+Mh)g}$$

და მაშინ საძიებელი მანძილია:

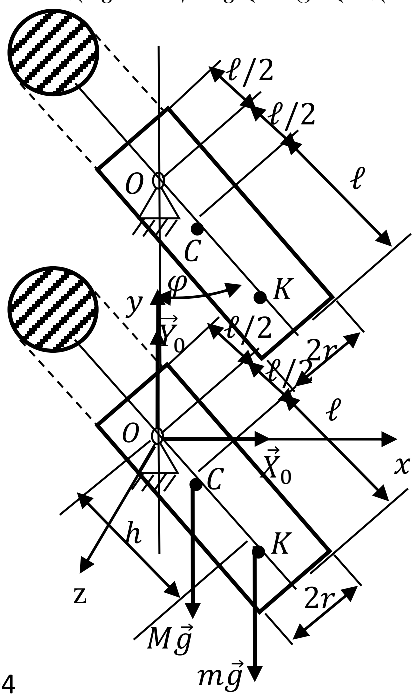
$$x = \frac{J_z}{Mh},$$

რომელიც წარმოადგენს ფიზიკური საქანის დაყვანილ სიგრძეს.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძის ტოლ მანძილზე.

ამოცანა 37.38

M მასის, 2ℓ სიგრძის და $r = \ell/6$ რადიუსის წრიული ცილინდრი ქანაობს ნახაზის სიბრტყის პერპენდიკულარული O ღერძის გარშემო. როგორ შეიცვლება ცილინდრის რხევის პერიოდი, თუ მასზე $OK = \frac{85}{72}\ell$ მანძილზე მიამაგრებთ წერტილოვან m მასას?



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ წრიული ცილინდრის და წერტილოვანი K ტვირთისგან შემდგარი ტვირთის მოძრაობა.

ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედი ძალები: ცილინდრისა და ტვირთის $M\vec{g}$ და $m\vec{g}-$ სიმძიმის ძალები, ღერძის რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.

დავწეროთ O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_{დაყვ.}\ddot{\varphi} = \sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right). \qquad (1)$$

. ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) =$$

$$= -Mg\frac{\ell}{2}sin\varphi - mghsin\varphi \quad (2)$$

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi,$ ამიტომ

$$\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -\left(Mg\frac{\ell}{2} + mh\right)g\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{J_z}\varphi = 0$$

სისტემის დაყვანილი ინერციის მომენტი

$$J_{დაყვ.} = J_z^{ც} + J_z^{ტვ}.$$

განვსაზღვროთ ცილინდრის ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$J_z^{ც} = J_C^{ც} + M\left(\frac{OC}{2}\right)^2 = M\left[\frac{r^2}{4} + \frac{(2\ell)^2}{12}\right] + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{85}{144}M\ell^2$$

და წერტილოვანი K ტვირთის მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$J_z^{ტვ} = mh^2 = m\left(\frac{85}{72}\ell\right)^2.$$

მაშინ

$$J_{დაყვ.} = \left(\frac{1}{2}M + \frac{85}{72}m\right)\frac{85}{72}\ell^2. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\left(\frac{1}{2}M + \frac{85}{72}m\right)\frac{85}{72}\ell^2\ddot{\varphi} = -\left(M\frac{\ell}{2} + m\frac{85}{72}\ell\right)g\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\left(\frac{M}{2} + m\frac{85}{72}\right)\ell g}{\left(\frac{1}{2}M + \frac{85}{72}m\right)\frac{85}{72}\ell^2}\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{72g}{85\ell}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{72g}{85\ell}$.

ვიპოვოთ სისტემის რხევის პერიოდი

$$T^* = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{72g}{85\ell}}.} = 2\pi\sqrt{\frac{85\ell}{72g}}.$$

სისტემას მოვაშოროთ K ტვირთი და განვიხილოთ ცილინდრის რხევები.

$$J_z^{\text{ც}}\ddot{\varphi} + Mg\frac{\ell}{2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg\frac{\ell}{2}}{J_z^{\text{ც}}}\varphi = 0$$

თუ გავითვალისწინებთ Z ღერძის მიმართ ცილინდრის ინერციის ნაპოვნ მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{72g}{85\ell}\varphi = 0$$

ცილინდრის რხევის პერიოდი

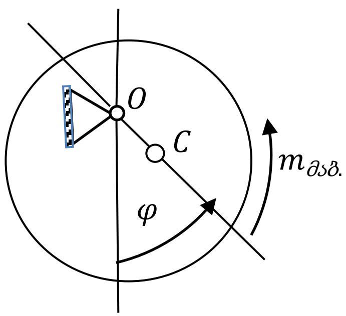
$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{72g}{85\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{85\ell}{72g}}.$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ $T = T^*,$ ე.ი. რხევის პერიოდი არ შეივლება.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: რხევის პერიოდი არ შეიჩვლება, რადგან წერტილოვანი მასა დამატებულია ცილინდრის რხევის ცენტრში.

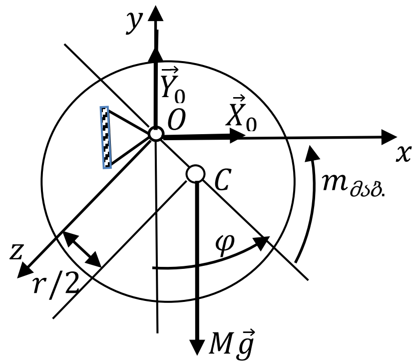
ამოცანა 37.39

იპოვეთ M მასისა და r რადიუსის ერთგვაროვანი დისკოს მცირე რხევათა განტოლება, თუ იგი ასრულებს რხევას იმ ჰორიზონტალური Oz ღერძის გარშემო, რომელიც დისკოს სიბრტყის მართობია და მისი სიმძიმის ცენტრი დაშორებულია $OC = r/2$ მანძილით. დისკოზე მოდებულია $m_{მბ.}$ მაბრუნი მომენტი, ამასთან $m_{მბ.} = m_0 sinpt,$ სადაც m_0 და p მუდმივებია. საწყის მომენტში დისკო უმდაბლეს



მდებარეობაში იყო და მიანიჭეს საწყისი ω_0 კუთხური სიჩქარე. წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია. რხევის სიმცირის გამო ჩათვალეთ $sin\varphi \approx \varphi$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დისკოს მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით. ძალები ნაჩვენებია ნახაზზე.



დავწეროთ O წერტილზე გამავალი Oz ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$

. ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$\sum M_{oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{მბ.} - Mg \cdot OC \cdot sin\varphi = m_0 sinpt - Mg\frac{r}{2}\varphi, \qquad (2)$$

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi$.

განვსაზღვროთ დისკოს ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ:

$$J_z = J_C + M(OC)^2 = \frac{Mr^2}{2} + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3Mr^2}{4}.$$

2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\frac{3Mr^2}{4}\ddot{\varphi} = m_0 sinpt - Mg\frac{r}{2}\varphi.$$

გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3r}\varphi = \frac{4m_0}{3Mr^2}\ sinpt$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = hsinpt, \qquad (4)$$

სადაც k –დისკოს საკუთარი რხევების წრიული სიხშირეა, $k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $h = \frac{4m_0}{3Mr^2}$.

(4) განტოლება წარმოადგენს იძულებითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას.

(4) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi^*,$$

სადაც $\overline{\varphi}$ წარმოადგენს $\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს, ხოლო φ^*- (4) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსია.

ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნია:

$$\overline{\varphi}=Acoskt+Bsinkt.$$

კერძო ამონახსნს იმ შემთხვევაში, როცა $p\neq k$, აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi^*=Dsinpt.$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ ორჯერ დროით, მივიღებთ:

$$\dot{\varphi}^*=Dpcospt,\qquad \ddot{\varphi}^*=-Dp^2sinpt.$$

ვიპოვოთ ინტეგრების D მუდმივის მნიშვნელობა. ჩავსვათ φ^* და $\ddot{\varphi}^*-$ის მნიშვნელობები (4) დიფერენციალური განტოლებაში:

$$-Dp^2sinpt+Dk^2sinpt=hsinpt,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$D=\frac{h}{k^2-p^2}.$$

მაშინ (4) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi=Acoskt+Bsinkt+Dsinpt.$$

ეს გამოსახულება გავაწარმოოთ დროით:

$$\dot{\varphi}=-Aksinkt+Bkcoskt+Dpcospt.$$

ვიპოვოთ ინტეგრების A და B მუდმივები ვიპოვოთ შემდეგი საწყისი პირობიდან: როცა $t=0,\ \varphi_0=0,\dot{\varphi_0}=\omega_0$, მივიღებთ:

$$A=\varphi_0=0,\ \ B=\frac{\omega_0-DP}{k}=\frac{1}{k}\left(\omega_0-\frac{hp}{k^2-p^2}\right).$$

მაშინ

$$\varphi=\frac{1}{k}\left(\omega_0-\frac{hp}{k^2-p^2}\right)coskt+\frac{h}{k^2-p^2}sinpt.$$

ვიპოვოთ კერძო ამონახსნი რეზონანსის შემთხვევაში, ე. ი. როცა $p=k$:

$$\varphi^*=Etcospt,$$

$$\dot{\varphi}^*=Ecospt-Eptsinpt,$$

$$\ddot{\varphi}^*=-Epsinpt-Epsinpt-Ep^2tcospt.$$

განვსაზღვროთ ინტეგრების E მუდმივის მნიშვნელობა. ჩავსვათ φ^* და $\ddot{\varphi}^*-$ის მნიშვნელობები (4) დიფერენციალური განტოლებაში:

$$-2Epsinpt-Ep^2tcospt+k^2Etcospt=hsinpt,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$E = -\frac{h}{2p}.$$

მაშინ იძულებითი რხევების ზოგადი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi = Acoskt + Bsinkt + Etcospt,$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ დროით, გვექნება;

$$\dot{\varphi} = -Aksinkt + Bkcoskt + Ecospt - Eptsinpt.$$

ვიპოვოთ ინტეგრების A და B მუდმივები ვიპოვოთ შემდეგი საწყისი პირობიდან: როცა $t = 0,\ \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = ,$ მივიღებთ:

$$A = \varphi_0 = 0,\ \ B = \frac{\dot{\varphi}_0 - E}{k} = \frac{\omega_0 + \frac{h}{2p}}{p} = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right).$$

ჩავწეროთ მცირე რხევების განტოლება მიღებული მნიშვნელობების საფუძველზე რეზონანსის შემთხვევაში

$$\varphi = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right) sinpt - \frac{h}{2p} tcospt.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: 1) როცა $p \neq \sqrt{\frac{2g}{3r}},\quad \varphi = \frac{1}{k}\left(\omega_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}\right) coskt + \frac{h}{k^2 - p^2} sinpt,$ სადაც $k = \sqrt{\frac{2g}{3r}},\ h = \frac{4m_0}{3Mr^2};$

2) როცა $p = \sqrt{\frac{2g}{3r}},\quad \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right) sinpt - \frac{h}{2p} tcospt,$

სადაც $h = \frac{4m_0}{3Mr^2};$

ამოცანა 37.40

სეისმოგრაფებში-ხელსაწყოებში, რომლებიც ახდენენ მიწისძვრის რეგისტრაციას-გამოიყენება ფიზიკური ქანქარა, რომლის დაკიდების ღერძი ვერტიკალთან ადგენს α კუთხეს. მანძილი დაკიდების ღერძიდან ქანქარას მასათა ცენტრამდე a–ს ტოლია, ქანქარას ინერციის მომენტი დაკიდების ღერძის პარალელური და მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ უდრის J_C , ქანქარას მასაა M . განსაზღვრეთ ქანქარას რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ფიზიკური ქანქარა მოძრაობა, რომლის დაკიდების ღერძი ვერტიკალთან ადგენს α კუთხეს. ვაჩვენოთ ნახაზზე ქანქარაზე მოქმედი ძალები: $M\vec{g}$ $-$ სიმძიმის ძალა, საყრდენის ღერძის რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ და $\vec{Z}_0$ მდგენელები.

დავწეროთ Ox ღერძის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$

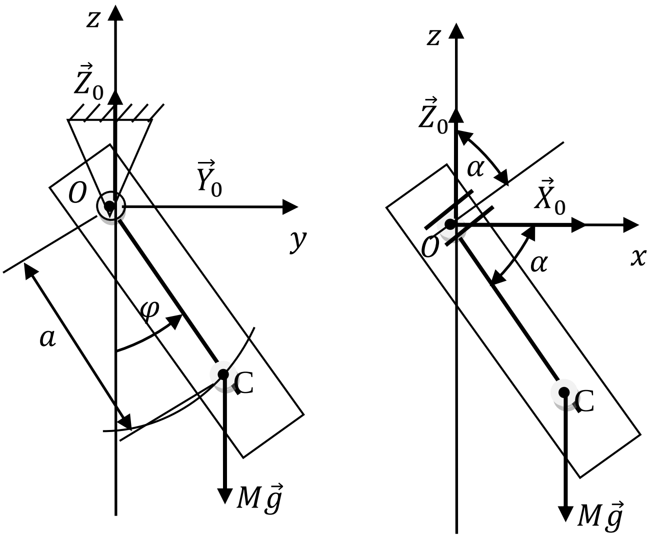
ვიპოვოთ ქანქარაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი x ღერძის მიმართ

$$\sum M_x\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mg \cdot a \cdot sin\alpha \cdot sin\varphi = -Mg \cdot a \cdot sin\alpha \cdot \varphi, \qquad (2)$$

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi$.

x ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის ნაკრებ მომენტს ვიპოვით, თუ განვსაზღვრავთ ქანქარას ინერციის მომენტს დაკიდების ღერძის მიმართ ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის გამოყენებით:

$$K_x = I_x\omega = (J_C + Ma^2)\omega. \qquad (3)$$



(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$(J_C + Ma^2)\frac{d\omega}{dt} = -Mg \cdot a \cdot sin\alpha \cdot \varphi.$$

ან

$$(J_C + Ma^2)\ddot{\varphi} = -Mg \cdot a \cdot sin\alpha \cdot \varphi.$$

გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg \cdot a \cdot sin\alpha}{J_C + Ma^2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k^2 = \frac{Mg \cdot a \cdot sin\alpha}{J_C + Ma^2}$.

ეს განტოლება წარმოადგენს ქანქარას რხევის დიფერენციალურ განტოლებას

$$k = \sqrt{\frac{Mg \cdot a \cdot sin\alpha}{J_C + Ma^2}}.$$

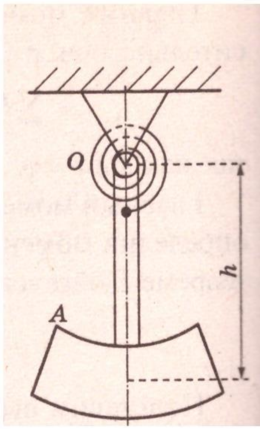
განვსაზღვროთ რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgasin\alpha}{J_C + Ma^2}}.} = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + Ma^2}{Mgasin\alpha}}.$$

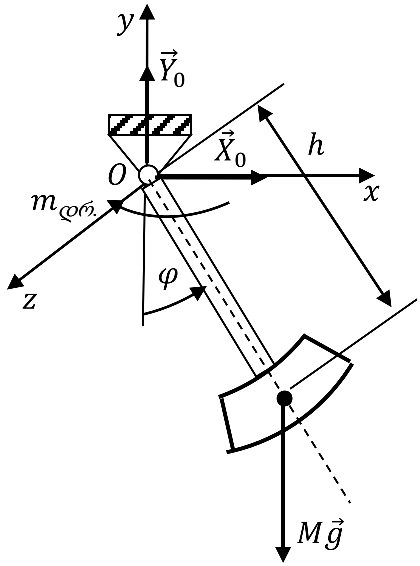
პ ა ს უ ხ ი: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_C+Ma^2}{Mgasin\alpha}}.$

ამოცანა 37.41

მანქანათა საძირკვლების ჰორიზონტალურ რხევათა ჩასაწერად ვიბროგრაფში არის OA ქანქარა, რომელიც შედგება ბერკეტისაგან მის ბოლოზე მიმაგრებული ტვირთით. ანქარას შეუძლია ბრუნვა მისი ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო. იგი შეკავებულია ვერტიკალურ მდებარეობაში საკუთარიმასით და სპირალური ზამბარის საშუალებით. განსაზღვრეთ ქანქარას მცირე გადახრების შემთხვევაში საკუთარი რხევის პერიოდი, თუ ქანქარას მასის მაქსიმალური სტატიკური მომენტი მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ ტოლია Mgh, ინერციის მომენტი იმავე ღერძის მიმართ ტოლია J_z, ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი, რომლის წინაღობა გრეხის კუთხის პროპორციულია, უდრის c –ს. ქანქარას წონასწორობისას ზამბარა დაუძაბავ მდგომარეობაშია. წინაღობები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ OA ქანქარას და სპირალური ზამბარისაგან შედგენილი მექანიკური სისტემის მოძრაობა. სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M\vec{g}$ – ქანქარას სიმძიმის ძალა, სპირალური ზამბარას დრეკადი ძალის მომენტი $m_{დრ.} = -c\varphi, O$ საყრდენის რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.



დავწეროთ Oz ღერძის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$

ვიპოვოთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z = J_z\omega \qquad (2)$$

და ქანქარაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mg \cdot h \cdot sin\varphi - c\varphi = -Mgh\varphi - c\varphi, \qquad (3)$$

რადგან მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi$.

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = -(Mgh + c)\varphi$$

ან

$$J_z\ddot{\varphi} = -(Mgh + c)\varphi$$

გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh + c}{J_z}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{Mgh+c}{J_z}}$.

ეს განტოლება წარმოადგენს ქანქარას რხევის დიფერენციალურ განტოლებას, k −ქანქარას რხევის წრიული სიხშირეა

განვსაზღვროთ ქანქარას რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgh+c}{J_z}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mgh+c}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mgh+c}}$.

ამოცანა 37.42

ვიბროგრაფი (იხ. წინა ამოცანა) დამაგრებულია საძირკველზე, რომელიც ასრულებს ჰორიზონტალურ ჰარმონიულ რხევებს $x = a \cdot sin\omega t$ კანონით. განსაზღვრეთ საძირკველის რხევის a ამპლიტუდა, თუ ვიბროგრაფის ქანქარას იძულებითი რხევების ამპლიტუდა φ_0 −ის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა. სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M\vec{g}$ − ქანქარას სიმძიმის ძალა, სპირალური ზამბარას დრეკადი ძალის მომენტი $m_{დრ.} = -c\varphi$, საძირკველის რეაქცია $\vec{N}$.

გამოვიყენოთ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა z_1 ღერძის მიმართ:

$$\frac{dK_{z_1}}{dt} = \sum M_{z_1}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \quad (1)$$

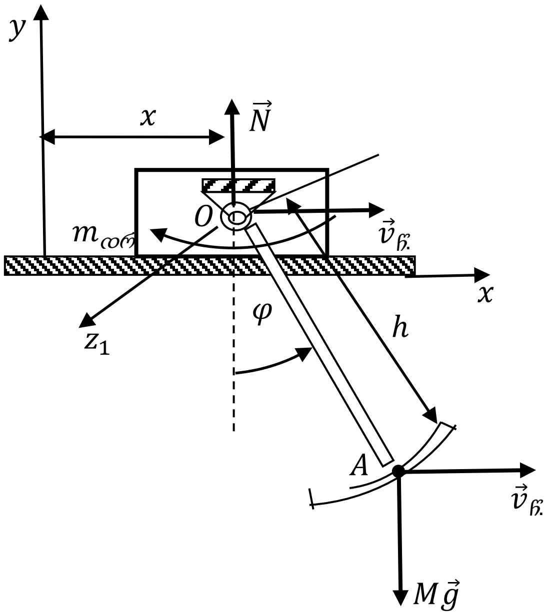
ვიპოვოთ ვიბროგრაფზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი z_1 ღერძის მიმართ

$$\sum M_{z_1}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = -Mg \cdot h \cdot sin\varphi - c\varphi = -(Mgh + c)\varphi, \quad (2)$$

სადაც $sin\varphi \approx \varphi$.

და ამ ღერძის მიმართ ვიბროგრაფის კინეტიკური მომენტი

$$K_{z_1} = K_{z_1}^{ჩ.} + K_{z_1}^{ფ.}$$



ვიბროგრაფი ასრულებს რთულ მოძრაობას ფარდობითი- Z_1 ღერძის გარშემო ბრუნვა და წარმტანი გადატანითი მოძრაობა საძირკველთან ერთად

$$v_{\text{წ}} = \dot{x} = a\omega cos\omega t$$

სიჩქარით.

კინეტიკური მომენტი წარმტანი მოძრაობისას

$$K_{z_1}^{\text{წ.}} = M_{z_1}\left(M\vec{v}_{\text{წ}}\right) - Macos\cdot h\cdot cos\varphi = Mahcos\omega t,$$

რადგან $cos\varphi = 1$.

კინეტიკური მომენტი ფარდობითი მოძრაობისას

$$K_{z_1}^{\text{ფ.}} = J_{z_1}\dot{\varphi},$$

მაშინ

$$K_{z_1} = K_{z_1}\dot{\varphi} + Mahcos\omega t. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\frac{d\left(J_{z_1}\dot{\varphi} + Mahcos\omega t\right)}{dt} = -(Mgh + c)\varphi,$$

რომელიც ასე ჩაიწერება

$$J_{z_1}\ddot{\varphi} - Mah\omega^2 sin\omega t = -(Mgh + c)\varphi$$

გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh+c}{J_{z_1}}\varphi = \frac{Mah\omega^2}{J_{z_1}}sin\omega t \qquad (4)$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = Hsin\omega t,$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{Mgh+c}{J_{z_1}}}-$ სისტემის საკუთარი რხევის წრიული სიხშირეა, $H = \frac{Mah\omega^2}{J_{z_1}}$.

(4) განტოლება წარმოადგენს სისტემის იძულებითი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების φ —ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ ერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლების $\overline{\varphi}$ —ზოგადი ამონახსნისა და (4) არაერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლების φ^* —კერძო ამონახსნის ჯამის სახით:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi^*,$$

სადაც

$$\overline{\varphi} = Acoskt + Bsinkt;\ \varphi^* = Dsin\omega t.$$

მაშინ მოძრაობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi = Acoskt + Bsinkt + Dsin\omega t.$$

გავაწარმოოთ φ^* —ის გამოსახულება დროით ორჯერ და ჩავსვათ $\ddot{\varphi}^*$ და φ^* —ის გამოსახულებები (1) განტოლებაში, საიდანაც მივიღებთ:

$$D = \frac{H}{k^2 - \omega^2}.$$

იძულებითი რხევები აღიწერება კერძო ამონახსნით:

$$\varphi^* = Dsin\omega t = \frac{H}{k^2-\omega^2}sin\omega t = \frac{Mah\omega^2}{J_{z_1}\left(\frac{Mgh+c}{J_{z_1}} - \omega^2\right)}sin\omega t,$$

მაშასადამე, იძულებითი რხევების ამპლიტუდა

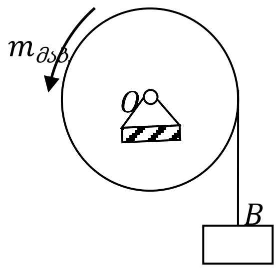
$$\varphi_0 = \frac{Mah\omega^2}{Mgh + c - \omega^2 J_{z_1}}$$

მაშინ საძირკველის რხევების ამპლიტუდაა

$$a = \frac{\varphi_0\left(Mgh + c - \omega^2 J_{z_1}\right)}{Mh\omega^2}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $a = \frac{\varphi_0\left(Mgh+c-\omega^2 J_{z_1}\right)}{Mh\omega^2}$.

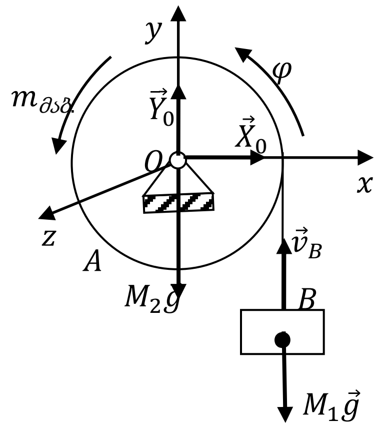
ამოცანა 37.43



ელექტრული ჯალამბრის გაშვებისას A დოლზე მოდებულია მაბრუნი მომენტი, რომელიც დროის პროპორციული $m_{მბ.} = at$, a-სადაც მუდმივია. M_1 მასის B ტვირთი ზევით აიწევა M_2 მასისა და r რადიუსის დოლზე დახვეული ბაგირის საშუალებით. განსაზღვრეთ დოლის კუთხური სიჩქარე, თუ იგი ჩათვლილია წრიულ ცილინდრად. საწყის მომენტში ჯალამბარი უძრავი იყო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა. სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$ — ტვირთის სიმძიმის ძალა, $M_2\vec{g}$ — A დოლის სიმძიმის ძალა, $m_{მბ.}$ – მაბრუნი მომენტი და O საყრდენის რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები. გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა z ღერძის მიმართ:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$



ვიპოვოთ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი z ღერძის მიმართ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{მბ.} - M_1gr = at - M_1gr, \qquad (2)$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტია

$$K_z = K_z^A + K_z^B.$$

განვსაზღვროთ A დოლის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z^A = J_A\omega = \frac{M_2r^2}{2}\omega$$

და B ტვირთის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z^B = m_z(M_1\vec{v}_B) = M_1r^2\omega$$

მაშინ

$$K_z = (2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\omega. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = at - M_1gr. \qquad (4)$$

(4) განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და მიღებული გამოსახულება ვაინტეგროთ:

$$(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{t}(at - M_1 gr)dt,$$

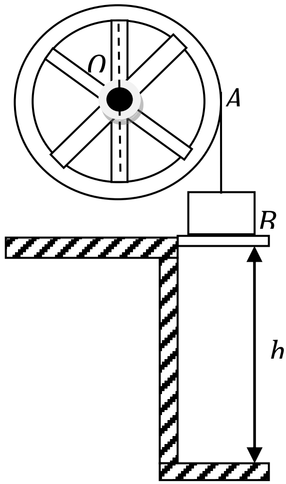
$$(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\omega = \frac{at^2}{2} - M_1 grt.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ A დოლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{\frac{at^2}{2} - M_1 grt}{(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}} = \frac{(at - 2M_1 gr)t}{(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{(at-2M_1 gr)t}{(2M_1+M_2)\frac{r^2}{2}}$.

ამოცანა 37.44

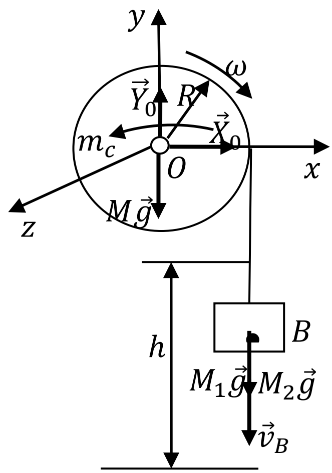


R რადიუსის მქნევარა A თვლის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ინერციის J მომენტის განსასაზღვრავად თვალზე დაახვიეს წვრილი მავთული და მასზე მიაბეს M_1 მასის B საწონი, რომლისდაშვებას $h = 2$მ სიმაღლიდან აკვირდებოდნენ T_1 დროის განმავლობაში. ხახუნის ძალის გამორიცხვის მიზნით ჩაატარესმეორე ცდა M_2 მასის საწონზე,რომელიც იმავე სიმაღლიდან ეშვებოდა T_2 დროის განმავლობაში. განსაზღვრეთ ინერციის J მომენტი, თუ მივიღებთ, რომ ხახუნის ძალის მომენტი მუდმივია და არ არის დამოკიდებული საწონის მასაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მქნევარა A თვლის და B საწონისაგან შედგენილი მექანიკური სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M\vec{g}$ – მქნევარა თვლის სიმძიმის ძალა, $M_1\vec{g}$ საწონის სიმძიმის ძალა ან $M_2\vec{g}$, O წერტილში აღძრული ხახუნის ძალის მომენტი $-m_c$, მქნევარა თვლის რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა Z ღერძის მიმართ:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$



ვიპოვოთ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი z ღერძის მიმართ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = M_1 gR - m_c.$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტია

$$K_z = K_z^A + K_z^B.$$

განვსაზღვროთ A დოლის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z^A = J\omega$$

და B საწონის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z^B = m_z(M_1\vec{v}_B) = M_1R^2\omega$$

მაშინ

$$K_z = (J + M_1R^2)\omega.$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ (1) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$(J + M_1R^2)\frac{d\omega}{dt} = M_1 gR - m_c. \qquad (2)$$

(2) განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და მიღებული გამოსახულება ვაინტეგროთ:

$$(J + M_1R^2)\int d\omega = (M_1 gR - m_c)\int dt,$$

$$(J + M_1R^2)\omega = (M_1 gR - m_c)t + C_1. \qquad (3)$$

ინტეგრების C_1 მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობიდან: $t = 0, \omega_0 = 0,$ მაშინ $C_1 = 0.$

C_1 –ის მნიშვნელობის გათვალისწინებით (3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(J + M_1R^2)\omega = (M_1 gR - m_c)t,$$

სადაც $\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$

მაშინ

$$(J + M_1R^2)\frac{d\varphi}{dt} = (M_1 gR - m_c)t. \qquad (4)$$

(4) განტოლებში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ:

$$(J + M_1R^2)\int_0^{\varphi} d\varphi = (M_1 gR - m_c)\int_0^{T_1} tdt,$$

$$(J+M_1R^2)\varphi=\frac{(M_1gR\ -m_c)T_1^2}{2}.$$

ვიპოვოთ ბორბლის მობრუნების კუთხე T_1 დროის განმავლობაში:

$$\varphi=\frac{(M_1gR\ -m_c)T_1^2}{2(J+M_1R^2)}. \qquad (5)$$

M_1 მასის საწონი შევცვალოთ M_2 მასის საწონით. განვიხილოთ ამ სისტემის მოძრაობა. ანალოგიური მსჯელობით ვღებულობთ:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=M_2gR\ -m_c$$

$$K_z=(J+M_2R^2)\omega.$$

მაშინ

$$(J+M_2R^2)\frac{d\omega}{dt}=M_2gR\ -m_c$$

ეს ტოლობა ვაინტეგროთ ორჯერ და ვიპოვოთ ბორბლის მობრუნების კუთხე T_2 დროის განმავლობაში:

$$(J+M_2R^2)\omega=(M_2gR\ -m_c)t,$$

$$(J+M_2R^2)\frac{d\varphi}{dt}=(M_2gR\ -m_c)t,$$

$$(J+M_2R^2)\varphi=\frac{(M_2gR\ -m_c)T_2^2}{2}$$

$$\varphi=\frac{(M_2gR\ -m_c)T_2^2}{2(J+M_2R^2)}. \qquad (6)$$

რამდენადაც B საწონი ორივე შემთხვევაში გადის ერთი და იგივე მანძილს, ამიტომ თუ გამოვაკლებთ (5) განტოლებას (6) განტოლებას, მივიღებთ:

$$\frac{2(J+M_1R^2)}{T_1^2}-\frac{2(J+M_2)}{T_2^2}\ =M_1gR\ -m_c-M_2gR+m_c$$

ან

$$2J\varphi\left(\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}\right)+2R^2\varphi\left(\frac{M_1}{T_1^2}-\frac{M_2}{T_2^2}\right)=gR(M_1-M_2).$$

მაშინ მქნევარა თვლის ინერციის მომენტი იქნება:

$$J=R^2\frac{\frac{g}{2R\varphi}(M_1-M_2)-\left(\frac{M_1}{T_1^2}-\frac{M_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}}$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\varphi=\frac{h}{R}$, გვექნება

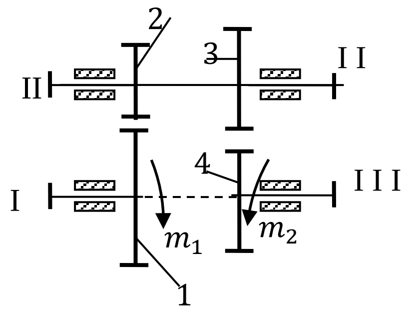
$$J = R^2 \frac{\frac{g}{2h}(M_1 - M_2) - \left(\frac{M_1}{T_1^2} - \frac{M_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>:

$$J = R^2 \frac{\frac{g}{2h}(M_1 - M_2) - \left(\frac{M_1}{T_1^2} - \frac{M_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}$$

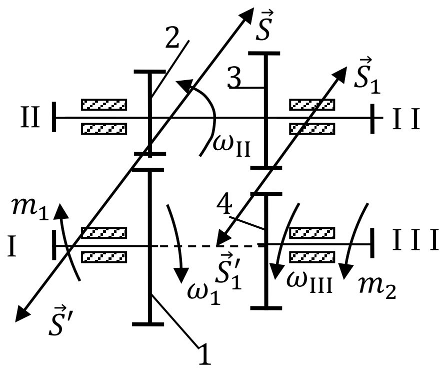
ᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 37.45

I ლილვზე მიერთებულია ელექტროძრავა, რომლის მაბრუნი მომენტი უდრის m_1. სიჩქარეთა რედუქტოტის საშუალებით, რომელიც შედგება ოთხი 1,2,3 და 4 კბილა თვლისაგან, ეს მაბრუნი მომენტი გადაეცემა საჩარხი დაზგის III შპინდელს, რომელზეც მოდებულია წინაღობის m_2 მომენტი (ეს მომენტი წარმოიშობა საჭრისით დეტალის გაჩარხვის დროს).



განსაზღვრეთ III შპინდელის კუთხური აჩქარება, თუ I, II და III ლილვზე ჩამოცმული ყველა მბრუნავი დეტალის ინერციის მომენტები სათანადოდ უდრის J_I, J_{II}, J_{III}; თვლის რადიუსები კი- r_1, r_2, r_3 და r_4 .

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ სიჩქარეთა რედუქტორით წარმოდგენილი მექანიკური სისტემა, რომელზეც მოქმედებს გარე ძალები: ელექტროძრავის მაბრუნი მომენტი -m_1, წინაღობის m_2 მომენტი, ლილვის საყრდენთა რეაქციები. თითოეული ლილვისათვის შევადგინოთ უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენცილური განტოლებები თვლების შეჭიდების ძალების ან წრიული ძალევბის გათვალისწინებით:



$$\overrightarrow{S} = -\vec{S}',\ \vec{S}_1 = -\vec{S}'_{1.}$$

მაშინ I ლილვისათვის

$$J_I \varepsilon_{\mathrm{I}} = \mathrm{m}_1 - \mathrm{Sr}_1 \qquad (1)$$

I ლილვისათვის

$$J_{II} \varepsilon_{II} = \mathrm{S}'^{\mathrm{r}_2} - \mathrm{S}_1 \mathrm{r}_3 \quad (2)$$

III ლილვისათვის

$$J_{III} \varepsilon_{III} = \mathrm{S}_1' \mathrm{r}_4 - \mathrm{m}_2 \qquad (3)$$

გამოვსახოთ ε_{I} და სიდიდეები ε_{III} –ით. რადგან

$$\frac{\varepsilon_{III}}{\varepsilon_{II}} = \frac{\mathrm{r}_3}{\mathrm{r}_4}, \quad \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I} = \frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2},$$

ამიტომ

$$\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{III} \mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_3}, \quad \varepsilon_I = \ \varepsilon_{II} \frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}. \qquad (4)$$

(4) გამოსახულება ჩავსვათ (1) და (2) განტოლებებში, გავამრავლებთ რა (1) განტოლებას r_2 –ზე, ხოლო (2) განტოლებას r_1 – ზე:

$$J_I \frac{\varepsilon_{III} \mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_3} \mathrm{r}_2 = \mathrm{m}_1 \mathrm{r}_2 - \mathrm{Sr}_1 \cdot \mathrm{r}_2,$$

$$J_{II} \frac{\varepsilon_{III} \mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_3} \mathrm{r}_1 = \mathrm{S}' \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_2 - \mathrm{S}_1 \mathrm{r}_3 \cdot \mathrm{r}_1.$$

რადგან $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$, ამიტომ თუ შევკრიბავთ ამ ტოლობებს მივიღებთ:

$$\varepsilon_{III} \left(J_I \frac{\mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_3} \mathrm{r}_2 + J_{II} \frac{\mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_3} \mathrm{r}_1 \right) = \mathrm{m}_1 \mathrm{r}_2 - \mathrm{S}_1 \mathrm{r}_3 \cdot \mathrm{r}_{1.}$$

(3) განტოლება გავამრავლოთ $\mathrm{r}_3 \mathrm{r}_{1.}$ –ზე, ხოლო (5) განტოლება r_4 –ზე და შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები და გავითვალისწინოთ, რომ $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1'$, მაშინ

$$\varepsilon_{III} \left(J_{III} \mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_3 + J_{II} \frac{\mathrm{r}_4{}^2}{\mathrm{r}_3} \mathrm{r}_1 + J_I \frac{\mathrm{r}_2{}^2 \mathrm{r}_4{}^2}{\mathrm{r}_1 \mathrm{r}_3} \mathrm{r}_2 \right) = \mathrm{m}_1 \mathrm{r}_2 \mathrm{r}_4 - \mathrm{m}_2 \mathrm{r}_1 \mathrm{r}_{3.}$$

აქედან III ლილვის კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon_{III} = \frac{m_1 \frac{\mathrm{r}_2 \cdot \mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_1 \cdot \mathrm{r}_3} - \mathrm{m}_2}{\left(J_I \frac{\mathrm{r}_2{}^2}{\mathrm{r}_1{}^2} + J_{II} \right) \frac{\mathrm{r}_4{}^2}{\mathrm{r}_3{}^2} + J_{III}}$$

ან

$$\varepsilon_{III} = \frac{m_1 \mathrm{k}_{1,2} \cdot \mathrm{k}_{3,4} - \mathrm{m}_2}{\left(J_I k_{1,2}^2 + J_{II} \right) k_{3,4}^2 + J_{III}},$$

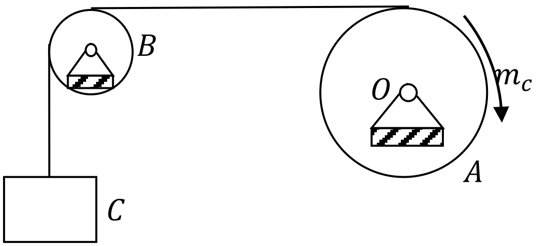
სადაც

$$\mathrm{k}_{1,2} = \frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}, \quad \mathrm{k}_{3,4} = \frac{\mathrm{r}_4}{\mathrm{r}_3}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\varepsilon_{III} = \frac{m_1 k_{1,2} \cdot k_{3,4} - m_2}{(J_I k_{1,2}^2 + J_{II}) k_{3,4}^2 + J_{III}}$, სადაც $k_{1,2} = \frac{r_2}{r_1}$, $k_{3,4} = \frac{r_4}{r_3}$.

ამოცანა 37.46

M_1 მასის და r რადიუსის A დოლი ბრუნვით მოძრაობაში მოჰყავს M_2 მასის C ტვირთს, რომელიც მიბმულია უჭიმარი გვარლის ბოლოზე. გვარლი გადაკიდებულია B ბლოკზე და დახვეულია A დოლზე. დოლზე მოდებულია წინაღობის მომენტი, რომელიც დოლის კუთხური სიჩქარის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტი $\alpha -$ ს ტოლია.



განსაზღვრეთ დოლის კუთხური სიჩქარე, თუ საწყის მომენტში სისტემა იყო წონასწორობაში. გვარლის და ბლოკის მასა უგულებელყოფილია. დოლი ჩათვალეთ მთლიან ერთგვაროვან ცილინდრად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მქნევარა A დოლის, C ტვირთის და უწონადი ბლოკისაგან შედგენილი მექანიკური სისტემის მოძრაობა. სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალები, $m_c -$ წინააღმდეგობის მომენტი, O საყრდენის რეაქციის ძალის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ მდგენელები.

დოლის მოძრაობისათვის გამოვიყენოთ კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა z ღერძის მიმართ:

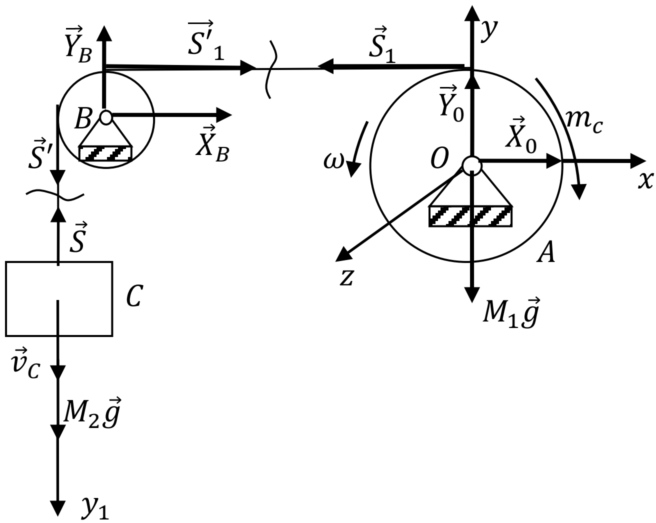
$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d(J_z\omega)}{dt} = J_z\frac{d\omega}{dt} = S_1 r - m_c. \qquad (1)$$

გვარლის დაჭიმულობის S_1 ძალის განსასაზღვრავად C ტვირთის მოძრაობისათვის გამოვიყენოთ დინამიკის მეორე კანონი y_1 ღერძზე გეგმილებში:

$$M_2 a = M_2 g - S, \qquad (2)$$

სადაც $a = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt} r -$ტვირთის აჩქარებაა, რომელიც დოლის ფერსოს წერტილების ბრუნვითი აჩქარების ტოლია.



განვსაზღვროთ S სიდიდე (2) განტოლებიდან და ჩავსვათ (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(J_z + M_2 r^2)\frac{d\omega}{dt} = M_2 g r - m_c. \qquad (3)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$J_z = \frac{M_1 r^2}{2} \quad \text{და} \quad m_c = \alpha\omega,$$

მაშინ (3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{r^2}{2}(M_1 + 2M_2)\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\left(\omega - \frac{M_2 g r}{\alpha}\right). \qquad (4)$$

(4) განტოლებში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ:

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{\omega - \frac{M_2 g r}{\alpha}} = -\frac{2\alpha}{r^2(M_1 + 2M_2)}\int_0^t dt,$$

$$ln\left(\omega - \frac{M_2 g r}{\alpha}\right)_0^\omega = -\frac{2\alpha t}{r^2(M_1 + 2M_2)}$$

ან

$$ln\left|\frac{\omega - \frac{M_2 g r}{\alpha}}{\frac{M_2 g r}{\alpha}}\right| = -\frac{2\alpha t}{r^2(M_1 + 2M_2)} = -2\beta t.$$

სადაც $\beta = \frac{2t}{r^2(M_1+2M_2)}$.

არდაქმნის შედეგად მივიღებთ დოლის კუთხურ სიჩქარეს:

$$\omega = \frac{M_2 gr}{\alpha}\left(1 - e^{-\beta t}\right).$$

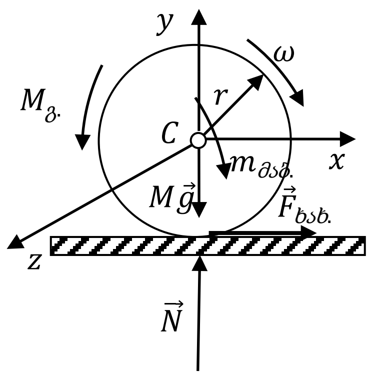
პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{M_2 gr}{\alpha}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$. სადაც $\beta = \frac{2t}{r^2(M_1+2M_2)}$;

$$\lim_{t\to\infty}\omega = \frac{M_2 gr}{\alpha} = const.$$

ამოცანა 37.47

განსაზღვრეთ M მასის და r რადიუსის ავტომობილის წამყვანი თვლის კუთხური აჩქარება, თუ თვალზე მოდებულია $m_{მაბ.}$ მაბრუნი მომენტ.ი. თვლის ინერციის მომენტი მისი მატერიალური სიმეტრიის სიბრტყის მართობულად მასათა C ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ უდრის J_C; $f_{გ}$ არის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი, $F_{ხახ}$ – ხახუნის ძალა იპოვეთ აგრეთვე მაბრუნი მომენტი, რომლის დროსაც თვალი გორავს მუდმივი კუთხური სიჩქრით..

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ თვლის მოძრაობა გარე ძალების მოქმედებით: $M\vec{g}$ თვლის სიმძიმის ძალა, $\vec{F}_{ხახ.}$ – ხახუნის ძალა, $M_{გ.}$ – გორვის წინააღმდეგობის მომენტი, $m_{მაბ.}$ – მაბრუნებელი მომენტი, $\vec{N}$ –საყრდენი ზედაპირის ნორმალური რეაქცია. გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა Z ღერძის მიმართ:



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ თვლის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z = J_C\omega$$

და თვალზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_{მაბ} - M_{გ} - F_{ხახ}r = m_{მაბ} - Mgf_{გ} - F_{ხახ}r.$$

ნაპოვნი მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$J_C\frac{d\omega}{dt} = m_{მაბ} - Mgf_{გ} - F_{ხახ}r, \qquad (2)$$

სადაც $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon -$კუთხური აჩქარებაა.

მაშინ

$$\varepsilon = \frac{m_{\text{მაგ}} - Mgf_{\text{გ}} - F_{\text{ხახ}}r}{J_C}.$$

ვიპოვოთ $m_{\text{მაგ.}} -$ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც თვალი მიგორავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით, ე.ი. $\omega = const,$ ხოლო $\frac{d\omega}{dt} = 0.$
მაშინ (2) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$m_{\text{მაგ}} - Mgf_{\text{გ}} - F_{\text{ხახ}}r = 0,$$

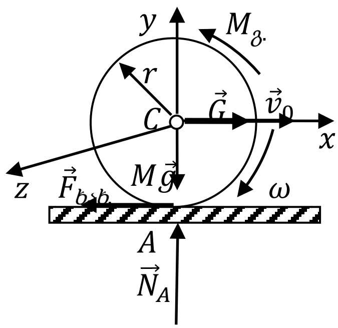
საიდანაც

$$m_{\text{მაგ}} = Mgf_{\text{გ}} + F_{\text{ხახ}}r$$

პ ა ს უ ხ ი: $\varepsilon = \frac{m_{\text{მაგ}} - Mgf_{\text{გ}} - F_{\text{ხახ}}r}{J_C}$; $m_{\text{მაგ}} = Mgf_{\text{გ}} + F_{\text{ხახ}}r.$

ამოცანა 37.48

განსაზღვრეთ M მასის და r რადიუსის ავტომობილის ამყოლი თვლის კუთხური სიჩქარე. თვალი სრიალით გორავს ჰორიზონტალურ გზაზე, მოძრაობაში მოდის მის მასათა C ცენტრზე მოდებული და ჰორიზონტალურად მიმართული ძალის მოქმედებით. თვლის ინერციის მომენტი მატერიალური სიმეტრიის პერპენდიკულრული ღერძის მიმართ უდრის J_C; $f_{\text{გ}} -$ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი, $f -$ ხახუნის კოეფიციენტი სრიალით გორვის დროს. საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ამყოლი თვლის მოძრაობა მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედებით: $M\vec{g} -$ თვლის სიმძიმის ძალა, $\vec{F}_{\text{ხახ.}} -$ ხახუნის ძალა, $M_{\text{გ.}} -$ გორვის წინააღმდეგობის მომენტი, $G -$ მამოძრავებელი ძალა, $\vec{N} -$საყრდენი ზედაპირის ნორმალური რეაქცია.

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა Z ღერძის მიმართ:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \tag{1}$$

განვსაზღვროთ თვლის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z = J_C\omega$$

და თვალზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი ღერძის მიმართ:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = F_{ხახ}r - M_{გ} = N_A fr - N_A f_{გ} = Mg\left(fr - f_{გ}\right).$$

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$J_C\frac{d\omega}{dt} = Mg\left(fr - f_{გ}\right), \tag{2}$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტერგროთ (2) განტოლება:

$$J_C\int_0^{\omega} d\omega = Mg\left(fr - f_{გ}\right)\int_0^{t} dt,$$

$$J_C\omega = Mg\left(fr - f_{გ}\right)t,$$

საიდანაც განვსაზღვრავთ ამყოლი თვლის კუთხურ სიჩქარეს:

$$\omega = \frac{Mg\left(fr - f_{გ}\right)t}{J_C}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{Mg\left(fr - f_{გ}\right)t}{J_C}.$

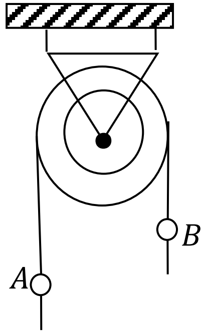
ამოცანა 37.49

შეიცვლება თუ არა ამოცანაში განხილული თვლის კუთხური სიჩქარე, თუ მის მასათა C ცენტრზე.მოდებული ძალის მოდული გაიზრდება ორჯერ?
ა მ ო ხ ს ნ ა.

ვნახოთ 37.48 ამოცანის ამოხსნა. ძალა მოდებულია მასათა C ცენტრზე და არ ქმნის მომენტს ამ ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ, ამიტომ ძალის მოდულის ცვლილება გავლენას ვერ ახდენს თვლის კუთხურ სიჩქარეზე.

პ ა ს უ ხ ი: არვ შეიცვლება.

ამოცანა 37.50



ბლოკზე, რომლის მასა უგულებელყოფილია, გადაკიდებულია თოკი; თოკის A წერტილზე ხელებით ჩამოეკიდა m მასის კაცი, ხოლო B წერტილზე მიბმულია იმავე მასის ტვირთი. რა მოუვა ტვირთს, თუ კაცი ავა თოკის გასწვრივ v სიჩქარით თოკის მიმართ?

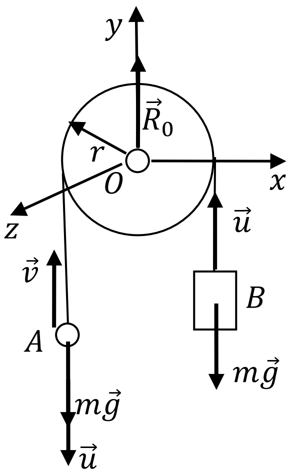
ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემაზე, რომელიც შედგება კაცის, ტვირთის, უწონადი ბლოკისა და თოკისაგან, მოქმედებს გარე ძალები: $m\vec{g}-$ კაცის სიმძიმის ძალა, $m\vec{g}-$ ტვირთის სიმძიმის ძალა, $\vec{R}_O-$ ბლოკის საყრდენის რეაქციის ძალა.

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt}=\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

ვიპოვოთ ბლოკის ღერძზე გამავალი z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=mgr-mgr=0.$$



რადგან გარე ძალების ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია, ამიტომ

$$K_z=const.$$

საწყის მომენტში სისტემა იყო უძრავი, ე.ი.

$$K_{0z}=0.$$

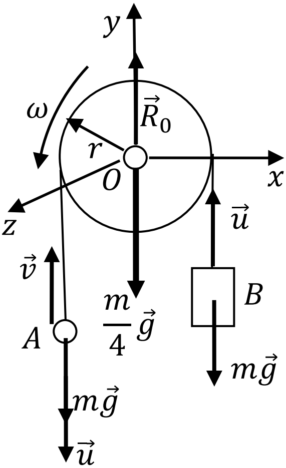
როცა ადამიანმა დაიწყო თოკზე ასვლა v ფარდობითი სიჩქარით, თოკმა ტვირთთან ერთად შეიძინა $\vec{u}$ სიჩქარე, მაშინ სისტემის კინეტიკური მომენტი იქნება

$$K_{1z}=K_z^{ად}+K_z^{ტვ.}=M_z(m\vec{v})+$$
$$+M_z(m\vec{u})=m(u-v)r+mur=0$$

საიდანაც მივიღებთ: $u=\frac{1}{2}v$, ე.ი. ტვირთი დაიწყებს მოძრაობას ზევით.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: ტვირთი დაიწყებს გადაადგილებას თოკთან ერთად ზევით $\frac{1}{2}v$ სიჩქარით.

ამოცანა 37.51



ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ მხედველობაში მიიღება ბლოკის მასა, რომელიც ოთხჯერ ნაკლებია კაცის მასაზე. ბლოკის ინერციის მომენტის გამოთვლისას იგულისხმება, რომ მისი მასა თანაბრად განაწილებულია ბლოკის ფერსოზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალები: $m\vec{g} -$ კაცის სიმძიმის ძალა, $m\vec{g} -$ ტვირთის სიმძიმის ძალა, $\frac{1}{4}m\vec{g} -$ბლოკის სიმძიმის ძალა, $\vec{R}_O -$ ბლოკის საყრდენის რეაქციის ძალა.

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

ვიპოვოთ ბლოკის ღერძზე გამავალი z ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = mgr - mgr = 0.$$

რადგან გარე ძალების ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია, ამიტომ

$$K_z = const.$$

საწყის მომენტში სისტემა იყო უძრავი, ე.ი. $K_{0z} = 0$.

ღოცა ადამიანმა დაიწყო თოკზე ასვლა v ფარდობითი სიჩქარით, თოკმა ტვირთთან ერთად დაიწყო $\vec{u}$ სიჩქარით, ხოლო ბლოკმა დაიწყო მობრუნება კუთხური სიჩქარით:

$$\omega = \frac{u}{r}.$$

ვიპოვოთ სისტემის კინეტიკური მომენტი

$$K_z = K_z^{\text{ად}} + K_z^{\text{ტვ.}} + K_z^{\text{ბლ}}.$$

ადამიანის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი $K_z^{\text{ად}}$, რომელიც ასრულებს რთულ მოძრაობას და რომელიც შედგება ფარდობითი მოძრაობისაგან ზევით თოკის გასწვრივ $\vec{v}_{\text{ფ}} = \vec{v}$ სიჩქარით და წარმტანი მოძრაობისაგან თოკთან ერთად ქვევით $\vec{v}_{\text{წ}} = \vec{u}$ სიჩქარით, ტოლია:

$$K_z^{\text{ად}} = M_z\left(m\vec{v}_{\text{ად}}\right) = M_z\left(m\vec{v}_{\text{ფ}}\right) + M_z\left(m\vec{v}_{\text{წ}}\right) = mur - mvr.$$

ტვირთის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი $K_z^{\text{ტვ.}}$, რომელიც გადაადგილდება თოკთან ერთად $\vec{u}$ სიჩქარით, ტოლია

$$K_z^{ტვ.} = M_z(m\vec{u}) = mur.$$

ბლოკის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი $K_z^{ბლ}$ ტოლია

$$K_z^{ბლ}=J_z\omega = \frac{mr^2}{4}\frac{u}{r} = \frac{1}{4}mur$$

მაშინ

$$K_z = mur - mvr + mur + \frac{1}{4}mur = m\left(2\frac{1}{4}u - v\right)r = 0.$$

აქედან ვპოულობთ ტვირთის სიჩქარეს:

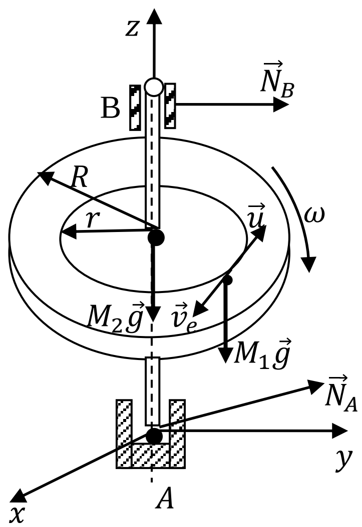
$$u = \frac{4}{9}v,$$

ანუ ტვირთი აიწევა ზევით.

პ ა ს უ ხ ი: ტვირთი აიწევა ზევით $\frac{4}{9}v$ სიჩქარით.

ამოცანა 37.52

ჰორიზონტალურ წრიულ ბაქანს ხახუნის გარეშე შეუძლია ბრუნვა მისი სიმძიმის O ცენტრზე გამავალი ვერტიკალური Oz ღერძის გარშემო. ბაქანზე Oz ღერძიდან უცვლელ r მანძილზე მოძრაობს M_1 მასის კაცი მუდმივი ფარდობითი u სიჩქარით. როგორი ω კუთხური სიჩქარით იბრუნებს ბაქანი Oz ღერძის გარშემო, თუ მისი M_2 მასა შეიძლება იგულისხმოთ თანაბრად განაწილებულად R რადიუსის მთელ ფართობზე, ხოლო საწყის მომენტში ბაქანს და კაცს ჰქონდათ ნულის ტოლი სიჩქარე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა. მასზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$ —კაცის სიმძიმის ძალა, $M_2\vec{g}$ — ბაქნის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ —საყრდენთა რეაქციები (იხ. ნახაზი).

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი Z ღერძის მიმართ:

$$\sum M_z\left(\vec F_k^{(e)}\right)=0,$$

რადგან გარე ძალების შესაბამისი ვექტორები ან გადაკვეთენ Oz ღერძს ან მისი პარალელურია; შესაბამისად

$$K_z=const.$$

საწყის მომენტში სისტემა იყო უძრავი, ე.ი. $K_{0z}=0$.

როდესაც ბაქანზე გადაადგილდება ადამიანი, მაშინ სისტემის კინეტიკური მომენტი ტოლი იქნება:

$$K_z=K_z^{ად}+K_z^{ბ}, \tag{1}$$

ვიპოვოთ ბაქანის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$K_z^{ბ}=J_z\omega=\frac{M_2R^2}{2}\omega$$

და ადამიანის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი იმის გათვალისწინებით, რომ იგი მონაწილეობს რთულ მოძრაობაში

$$K_z^{ად}=M_z(M_1\vec v_{აბ})=M_z\left[M_1\left(v_{გ}-u\right)\right]=M_z[M_1(\omega r-u)]=$$
$$=M_1r^2\omega-M_1ru.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ტოლობაში და გავუტოლოთ ნულს:

$$K_z=\frac{M_2R^2}{2}\omega+M_1r^2\omega-M_1ru=0,$$

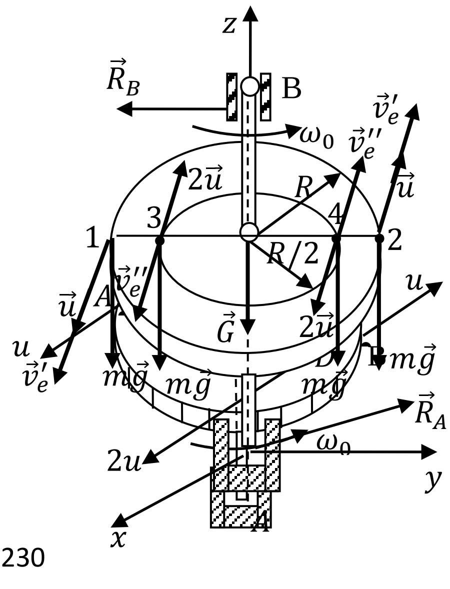
საიდანაც ბაქანის საძიებელი კუთხური სიჩქარის გამოსახულება იქნება:

$$\omega=\frac{2M_1r}{M_2R^2+2M_1r^2}u.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\omega=\frac{2M_1r}{M_2R^2+2M_1r^2}u.$

ამოცანა 37.53

ჰორიზონტალური წრიული ბაქანი ხახუნის გარეშე ბრუნავს მისი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ვერტიკალური ღერძის გარშემო ω_0 კუთხური სიჩქარით; ამასთან, ბაქანზე დგას ერთნაირი მასის ოთხი კაცი: ორი-ბაქნის კიდეზე,ხოლო ორი- ბრუნვის ღერძიდან $R/2$ მანძილზე. როგორ შეიცვლება ბაქნის კუთხური სიჩქარე, თუ კიდეზე მდგარი კაცები იმოძრავებენ წრეხაზზე



წირითი u სიჩქარით, ხოლო $R/2$ მანძილზე მდგარნი იმოძრავებენ $R/2$ რადიუსიან წრეხაზზე ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით $2u$ წირითი სიჩქარით? კაცები ჩათვალეთ წერტილოვან მასებად, ხოლო ბაქანი-ერთგვაროვან წრიულ დისკოდ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $\vec{G}$ –ბაქნის სიმძიმის ძალა, ოთხი კაცის სიმძიმის ძალა, რომელთაგან თითოეული უდრის $m\vec{g}$, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ – საყრდენთა რეაქციები.

გამოვიყენოთ Z ღერძის მიმართ სისტემისმოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right).$$

სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი Z ღერძის მიმართ:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = 0,$$

რადგან გარე ძალების შესაბამისი ვექტორები ან გადაკვეთენ Oz ღერძს ან მისი პარალელურია; შესაბამისად

$$K_z = K_{0z} = K_{1z} = const.$$

საწყის მომენტში მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი

$$K_{0z} = K_ბ + K_{კ1} + K_{კ2} + K_{კ3} + K_{კ4}.$$

განვსაზღვროთ ბაქნის მოძრაობის რაოდენობის მომენტ:ი:

$$K_ბ = J_z\omega_0 = \frac{GR^2}{2g}\omega_0$$

და თითოეული კაცის მოძრაობის რაოდენობის მომენტ:ი:

ა) როდესაც ბაქნის კიდეზე უძრავად დგანან:

$$K_{1_კ} = K_{2_კ} = mR^2\omega_0;$$

ბ) როდესა ბრუნვის ღერძიდან დგანან $R/2$ მანძილზე:

$$K_{3_კ} = K_{4_კ} = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0.$$

მაშინ

$$K_{0z} = \frac{GR^2}{2g}\omega_0 + 2mR^2\omega_0 + 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0 =$$

$$= \frac{GR^2}{2g}\omega_0 + 2.5mR^2\omega_0. \qquad (2)$$

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი, როდესაც კაცები მოძრაობენ ბაქანზე:

$$K_{1z} = K_ბ + K_{კ1} + K_{კ2} + K_{კ3} + K_{კ4}.$$

განვსაზღვროთ ბაქნის მოძრაობის რაოდენობის მომენტ:ი:

$$K_ბ = J_z\omega_1 = \frac{GR^2}{2g}\omega_1$$

და თითოეული კაცის მოძრაობის რაოდენობის მომენტ:ი:

ა) როდესაც კაცები მოძრაობენ ბაქნის კიდეზე

$$K_{კ1} = K_{კ2} = M_z(m\vec{v}_a) = m(v'_e + v'_r) = m(\omega_1 R + u)R =$$
$$= mR^2\omega_1 + mRu,$$

სადაც $v'_e = \omega_1 R, v'_r = u$;

ბ) როდესა ბრუნვის ღერძიდან $R/2$ მანძილზე იმოძრავებენ ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით:

$$K_{კ3} = K_{კ4} = M_z(m\vec{v}_a) = m(v''_e - v''_r) = m\left(\omega_1\frac{R}{2} - 2u\right)\frac{R}{2}.$$
$$= m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_1 - 2mu\frac{R}{2},$$

სადაც $v''_e = \omega_1\frac{R}{2}, v''_r = 2u$;

მაშინ

$$K_{1z} = \frac{GR^2}{2g}\omega_1 + 2(mR^2\omega_1 + mRu) +$$
$$+2\left[m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_1 - 2mu\frac{R}{2}\right] = \frac{GR^2}{2g}\omega_1 + 2.5mR^2\omega_1. \qquad (3)$$

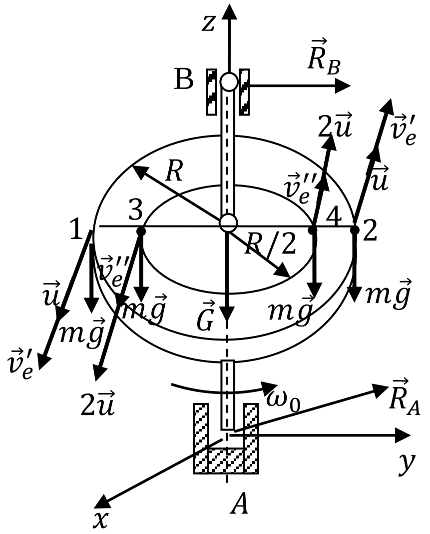
ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\frac{GR^2}{2g}\omega_0 + 2.5mR^2\omega_0 = \frac{GR^2}{2g}\omega_1 + 2.5mR^2\omega_1,$$

ე.ი. $\omega_0 = \omega_1$.

პ ა ს უ ხ ი: ბაქანი იმოძრავებს იმავე კუთხური სიჩქარით.

ამოცანა 37.54



ამოხსენით წინამდებარე ამოცანა იმ შემთხვევაში, როდესაც ოთხივე კაცი მოძრაობს ბაქნის ბრუნვის მიმართულებით, ბაქნის რადიუსია R, მისი მასა თითოეული კაცის მასაზე ოთხჯერ მეტია და თანაბრადაა განაწილებული მთელ მის ფართობზე. გამოარკვიეთ, აგრეთვე, როგორი უნდა იყოს ფარდობითი წირითი u სიჩქარე იმისათვის, რომ ბაქანმა შეწყვიტოს ბრუნვა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $\vec{G}$ –ბაქის სიმძიმის ძალა, ოთხი კაცისსიმძიმის ძალა, რომელთაგან თითოეული უდრის $m\vec{g}$, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ –საყრდენთა რეაქციები

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right).$$

სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი z ღერძის მიმართ:

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = 0 \Longrightarrow K_z = const.$$

საწყის მომენტში მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი

$$K_{0z} = K_{\text{ბ}} + K_{\text{კ}1} + K_{\text{კ}2} + K_{\text{კ}3} + K_{\text{კ}4}.$$

განვსაზღვროთ ბაქნის მოძრაობის რაოდენობის მომენტ:ი:

$$K_{\text{ბ}} = J_z\omega_0 = \frac{MR^2}{2}\omega_0$$

და თითოეული კაცის მოძრაობის რაოდენობის მომენტ:ი:

ა) როდესაც ბაქნის კიდეზე უძრავად დგანან:

$$K_{1_{\text{კ}}} = K_{2_{\text{კ}}} = mR^2\omega_0;$$

ბ) როდესა ბრუნვის ღერძიდან დგანან $R/2$ მანძილზე:

$$K_{3_{\text{კ}}} = K_{4_{\text{კ}}} = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0.$$

მაშინ

$$K_{0z} = \frac{MR^2}{2}\omega_0 + 2mR^2\omega_0 + 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $M = 4m$, მივიღებთ:

$$K_{0z} = 2MR^2\omega_0 + 2mR^2\omega_0 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0 = \frac{9}{2}mR^2\omega_0.$$

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი, როდესაც კაცები მოძრაობენ ბაქანზე:

$$K_{1z} = K_{ბ} + K_{კ1} + K_{კ2} + K_{კ3} + K_{კ4}.$$

განვსაზღვროთ ბაქნის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი:

$$K_{ბ} = J_z\omega = \frac{MR^2}{2}\omega$$

და თითოეული კაცის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი(იხ. ამოცანა 37.53):

ა) როდესაც კაცები მოძრაობენ ბაქნის კიდეზე

$$K_{კ1} = K_{კ2} = M_z(m\vec{v}_a) = M_z[m(\omega R + u)] =$$
$$= mR^2\omega + mRu;$$

ბ) როდესა მოძრაობენ ბრუნვის ღერძიდან $R/2$ მანძილზე :

$$K_{კ3} = K_{კ4} = M_z(m\vec{v}_a) = m(v_e'' - v_r'') = m\left(\omega_1\frac{R}{2} - 2u\right)\frac{R}{2}.$$
$$= \frac{mR^2}{4}\omega + mRu.$$

მაშინ

$$K_{1z} = 2mR^2\omega + 2(mR^2\omega + mRu) + 2\left(\frac{mR^2}{4}\omega + mRu\right) =$$
$$= \frac{9}{2}mR^2\omega + 4mRu.$$

ბაქნის კუთხურ სიჩქარეს ვიპოვით, თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს K_{0z} და $K_{1z} -$ ის მნიშვნელობებს:

$$K_z = K_{0z} = K_{1z}$$

ან

$$\frac{9}{2}mR^2\omega_0 = \frac{9}{2}mR^2\omega + 4mRu.$$

საიდანაც

$$\omega = \omega_0 - \frac{8u}{9R}.$$

განვსაზღვროთ $\vec{u}$ სიჩქარის სიდიდე, რომლის დროსაც ბაქანი გაჩერდება, ე.ი. როცა $\omega = 0$:

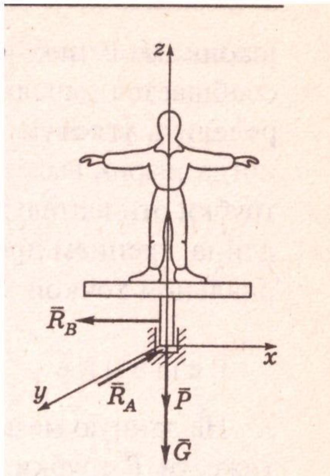
$$u = \frac{9}{8}R\omega_0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \omega_0 - \frac{8}{9R}$; $u = \frac{9}{8}R\omega_0$.

ამოცანა 37.55

კაცს, რომელიც დგას ჟუკოვსკის სკამზე, იმ მომენტში, როცა იგი ხელებს გასწევს განზე, ანიჭებენ 15ბრ/წთ შესაბამის კუთხურ სიჩქარეს; ამასთან, კაცისა და სკამის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ ტოლია 0,8კგ.მ^2-ს. როგორი კუთხური სიჩქარით იბრუნებს სკამი კაცთან ერთად, თუ კაცის ხელების ტანთან მიახლოებით. იგი სისტემის ინერციის მომენტს ამცირებს 1,12კგ.მ^2-მდე?

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $\vec{G}$ —სკამის სიმძიმის ძალა, $\vec{P}$ —ადამიანის სიმძიმის ძალა, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ — სკამის საყრდენთა რეაქციები



გამოვიყენოთ Z ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

რადგან ადამიანის და სკამის სიმძიმის ძალები, აგრეთვე, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ — სკამის საყრდენთა რეაქციები არ ქმნიან მომენტს Z ღერძის მიმართ,ამიტომ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = 0.$$

მაშასადამე

$$K_z = K_{0z} = K_{1z} = const.$$

საწყის მომენტში სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი იყო:

$$K_{0z} = J_0\omega_0,$$

ხოლო, როცა კაცმა ხელები ტანთან მიიტანა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გახდება

$$K_{1z} = J_1\omega_1.$$

გავუტოლოთ ეს მნიშვნელობები ერთმანეთს:

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1.$$

აქედან

$$\omega_1 = \frac{J_0\omega_0}{J_1},$$

სადაც $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$; $\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30}$.

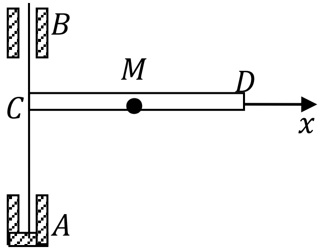
მაშასადამე, სკამის კაცთან ერთად ბრუნვის საძიებელი კუთხური სიჩქარე

$$n_1 = \frac{J_0 n_0}{J_1} = \frac{0{,}8 \cdot 15}{0{,}12} = 100(\text{ბრ/წთ}).$$

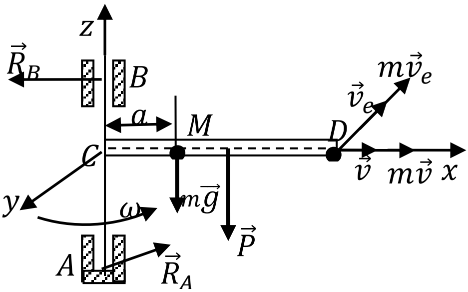
პ ა ს უ ხ ი: 100(ბრ/წთ)

ამოცანა 37.56

ჰორიზონტალურ CD მილს თავისუფლად შეუძლია ბრუნვა ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო. მილის შიგნით $MC = a$ მანძილზე ბრუნვის ღერძიდან იმყოფება M ბურთულა. გარკვეული დროის მომენტში მილს მიანიჭეს ω_0 კუთხური სიჩქარე. განსაზღვრეთ მილისკუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა ბურთულა გამოვარდება მილიდან. მილის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის J. $L-$ მისი სიგრძეა; ხახუნი უგულებელყოფილია და ბურთულა ჩათვალეთ m მასის ნივთიერ წერტილად.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $m\vec{g}$ $-$ბურთულას სიმძიმის ძალა, $\vec{P}-$ მილის სიმძიმის ძალა, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B-$ აყრდენთა რეაქციები.



გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

რადგან მილის და ბურთულას სიმძიმის ძალები, აგრეთვე, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B-$ საყრდენთა რეაქციები არ ქმნიან მომენტს z ღერძის მიმართ, ამიტომ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = 0.$$

მაშასადამე,

$$K_z = K_{0z} = K_{1z} = const.$$

ვიპოვოთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი დროის იმ მომენტში, როცა M ბურთულა იმყოფება a მანძილზე ბრუნვის ღერძიდან.:

$$K_{0z} = K_{მ.} + K_{ბ.},$$

$$K_{\partial} = J_{\partial}\omega_0 = J\omega_0,$$
$$K_{ბ.,} = ma^2\omega_0.$$

მაშინ

$$K_{0z} = (J + ma^2)\omega_0.$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ბურთულას მილიდან გამოვარდნის მომენტში

$$K_{1z} = K_{\partial.} + K_{ბ.,,}$$

სადაც $K_{\partial} = J\omega$; $K_{ბ.,} = m\ell^2\omega$.

მაშინ

$$K_{1z} = (J + m\ell^2)\omega.$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს მიღებული მნიშვნელობები:

$$(J + ma^2)\omega_0 = (J + m\ell^2)\omega$$

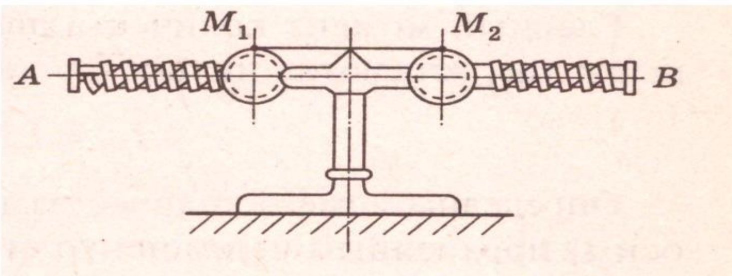
და ვიპოვოთ მილის კუთხური სიჩქარე მისგან ბურთულას გამოვარდნის მომენტში:

$$\omega = \frac{J + ma^2}{J + m\ell^2}\omega_0.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\omega = \frac{J+ma^2}{J+m\ell^2}\omega_0.$

ამოცანა 37.57

M_1 მასისა და $2\ell =$180 სმ სიგრძის ერთგვაროვნი AB ღერო ეყრდნობა წვეტს და ჰორიზონტალურად მდგრად წონასწორობაშია. ღეროს გასწვრივ



შეუძლია გადაადგილება ორ, თითოეული M_2 მასის, ბირთვს, რომლებიც მიმაგრებულია ორი ერთნაირი ზამბარის ბოლოებზე. ღეროს ენიჭება ბრუნვითი მოძრაობა ვერტიკალური ღერძის გარშემო n_1=64ბრ/წთ შესაბამისი კუთხური სიჩქარით, ამასთან ბირთვები მდებარეობს სიმეტრიულად ბრუნვის ღერძის მიმართ და მათი ცენტრები შეკავებულია

ერთმანეთისაგან $2\ell_1 =$72სმ მანძილზე. შემდეგ ძაფი გაიჭრება, ბირთვები შეასრულებენ გაკვეული რაოდენობის რხევებს და ჩერდებიან ზამბარების და ხახუნის ძალის მოქმედებით $2\ell_1 =$108სმ მანძილზე ერთმანეთისაგან. ჩათვალეთ ბირთვები ნივთიერ წერტილებად, ზამბარების მასები უგულებელყოფით განსაზღვრეთ ღეროს ბრუნვათა ახალი n რიცხვი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g} - AB$ ღეროს სიმძიმის ძალა, $M_2\vec{g} -$ თითოეული ბირთვის სიმძიმის ძალა, $\vec{R} -$ კუთხოვანას რეაქცია (იხ. ნახაზი).

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

რადგან გარე ძალები, ან კვეთენ z ღერძს ან პარალელურია მისი, ამიტომ გარე ძალების ნაკრები მომენტი z ღერძის მიმართ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = 0.$$

მაშასადამე

$$K_z = K_{1z} = K_{2z} = const.$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი დროის იმ მომენტში, როცა ბირთვები შეკავებულია ძაფებით:

$$K_{1z} = K_{ღ} + 2K_{ბ.,}$$

განვსაზღვროთ AB ღეროს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი z ღერძის მიმართ, რომელიც გადის მის მასათა ცენტრში

$$K_{ღ} = J_z\omega_1 = \frac{M_1(AB)^2}{12}\omega_1 = \frac{M_1(2\ell)^2}{12}\omega_1$$

და ბირთვების მოძრაობის რაოდენობის მომენტი z ღერძის მიმართ (ბირთვები ჩათვალეთ წერტილოვან მასებად)

$$K_{ბ.,} = M_2{\ell_1}^2\omega_1.$$

მაშინ

$$K_{1z} = \left(\frac{M_1(2\ell)^2}{12} + 2M_2{\ell_1}^2\right)\omega_1 = \left(\frac{M_1\ell^2}{3} + 2M_2{\ell_1}^2\right)\frac{\pi n_1}{30}.$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი დროის იმ მომენტში, როცა ძაფები გადჭრილია:

$$K_{2z} = K_{ღ} + 2K_{ბ.,}$$

განვსაზღვროთ AB ღეროს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი z ღერძის

მიმართ, რომელიც გადის მის მასათა ცენტრში

$$K_{ღ} = J_z\omega_2 = \frac{M_1(2\ell)^2}{12}\omega_2$$

და ბირთვების მოძრაობის რაოდენობის მომენტი z ღერძის მიმართ

$$K_{ბ,} = M_2{\ell_2}^2\omega_2.$$

მაშინ

$$K_{2z} = \left(\frac{M_1(2\ell)^2}{12} + 2M_2{\ell_2}^2\right)\omega_2 = \left(\frac{M_1\ell^2}{3} + 2M_2{\ell_2}^2\right)\frac{\pi n_2}{30}.$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს მიღებული მნიშვნელობები:

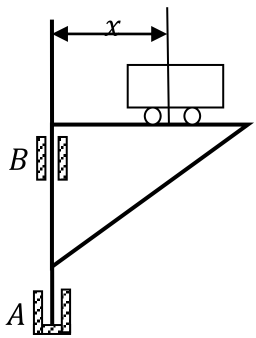
$$\left(\frac{M_1\ell^2}{3} + 2M_2{\ell_1}^2\right)\frac{\pi n_1}{30} = \left(\frac{M_1\ell^2}{3} + 2M_2{\ell_2}^2\right)\frac{\pi}{30}$$

აქედან ვიპოვით n_2-ის მნიშვნელობას:

$$n_2 = \frac{6M_2{\ell_1}^2 + M_1\ell^2}{6M_2{\ell_2}^2 + M_1\ell^2}n_1 = \frac{6\cdot 5\cdot 36^2 + 2\cdot 90^2}{6\cdot 5\cdot 54^2 + 2\cdot 90^2} = 34\,\frac{ბრ}{წთ}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $n_2 = \frac{6M_2{\ell_1}^2+M_1\ell^2}{6M_2{\ell_2}^2+M_1\ell^2}n_1 = 34\ \frac{ბრ}{წთ}.$

ამოცანა 37.58



მაბრუნავი ამწის ურიკა მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით ამწის ისრის მიმართ. ამწის აბრუნი ძრავის გაშვების შემდეგ წარმოშობს მუდმივ m_0 მომენტს. განსაზღვრეთ ამწის ბრუნვის ω კუთხური სიჩქარე ურიკას ბრუნვის x ღერძამდე დაშორების მანძილზე დამოკიდებით, თუ ურიკას წონა ტვირთთან ერთად უდრის M, $J -$ ამწის ინერციის მომენტი (ურიკას გარეშე) ბრუნვის ღერძის მიმართ; ბრუნვა იწყება იმ მომენტში, როცა ურიკა $AB -$დან დაშორებულია მანძილით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g} -$ურიკას სიმძიმის ძალა, $\vec{P} -$ ამწის სიმძიმის ძალა, $m_0 -$მომენტი $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B -$საყრდენთა რეაქციები.

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \qquad (1)$$

გარე ძალების ნაკრები მომენტი z ღერძის მიმართ

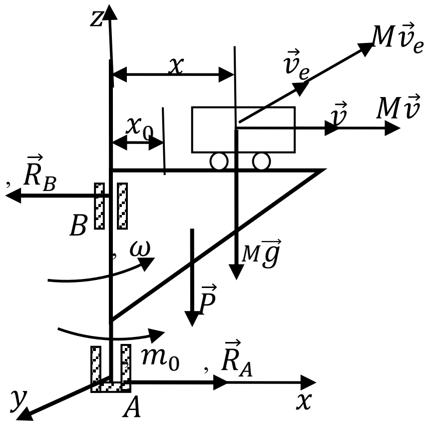
$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_0.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dK_z}{dt} = m_0.$$

.ამ განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და შემდეგ ვაინტეგროთ:

$$\int_{K_{z0}}^{K_{z1}} d\,K_z = \int_0^t m_0\,dt \Longrightarrow$$



$$\Longrightarrow K_{1z} - K_{0z} = m_0 t$$

რადგან $K_{0z} = 0$, ამიტომ სისტემის კინეტიკური მომენტი t მომენტში

$$K_{1z} = m_0 t. \qquad (2)$$

მეორეს მხრივ, სისტემის კინეტიკური მომენტი

$$K_{1z} = K_{ამ.} + K_{ურ.}$$

სადაც $K_{ამ.}-$ ამწის მოძრაობის რაოდენობის მომენტია, $K_{ამ.} = J\omega$; $K_{ურ.}-$ურიკის მოძრაობის რაოდენობის მომენტია.

ურიკა ასრულებს რთულ მოძრაობას: ამწესთან ერთად წარმტან მოძრაობას $v_e = \omega x$ სიჩქარით და ფარდობითს – $v_r = v$ სიჩქარით.

ურიკას აბსოლუტური სიჩქარე;

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

მაშინ ურიკას მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

$$M_z(M\vec{v}_a) = M_z(M\vec{v}_e) + M_z(M\vec{v}_r) = Mx^2\omega,$$

რადგან $M_z(M\vec{v}_r) = 0$ ($M\vec{v}_r$ ვექტორი კვეთს z ღერძს).

მაშასადაამე,

$$K_{1z} = J\omega + Mx^2\omega = (J + Mx^2)\omega.$$

მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) ტოლობაში;

$$(J + Mx^2)\omega = m_0 t. \qquad (3)$$

რადგან ურიკას ფარდობითი მოძრაობა არის $v_r = v$ სიჩქარით თანაბრი მოძრაობა, ამიტომ

$$t = \frac{x - x_0}{v}.$$

მაშინ (3) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ ამწის ბრუნვით კუთხურ სიჩქარეს:

$$\omega = \frac{m_0}{J + Mx^2} \frac{x - x_0}{v}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\omega = \frac{m_0}{J+Mx^2} \frac{x-x_0}{v}$.

ამოცანა 37.59

შეინარჩუნეთ წინა ამოცანის პირობები და იპოვეთ ამწის ბრუნვის ω კუთხური სიჩქარე, თუ ძრავა წარმოშობს მაბრუნ მომენტს, რომელიც $m_0 - \alpha\omega -$ის ტოლია, m_0 და α დადებითი მუდმივებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები (იხ. ნახაზი): $M\vec{g}$ –ურიკას სიმძიმის ძალა, $\vec{P}$ – ამწის სიმძიმის ძალა, $m_{მბ} = m_0 - \alpha\omega -$ მაბრუნი მომენტი, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ –საყრდენთა რეაქციები.

გამოვიყენოთ z ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) \tag{1}$$

გარე ძალების ნაკრები მომენტი Z ღერძის მიმართ

$$\sum M_z\left(\vec{F}_k^{(e)}\right) = m_0 - \alpha\omega.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dK_z}{dt} = m_0 - \alpha\omega. \tag{2}$$

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი Z ღერძის მიმართ (იხ. 37.58 ამოაცნის ამოხსნა):

$$K_{1z} = K_{ამ.} + K_{ურ.} = J\omega + Mx^2\omega = (J + Mx^2)\omega. \tag{3}$$

გავაწარმოოთ დროით (3) გამოსახულება და მიღებული გამოსახულება ჩავსვათ (2)–ში:

$$2Mx\frac{dx}{dt}\omega + (J + Mx^2)\frac{d\omega}{dt} = m_0 - \alpha\omega. \tag{4}$$

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{d\omega}{dx},$$

სადაც $v = \frac{dx}{dt}$.

ამის გათვალისწინებით (4) მიიღებს სახეს:

$$(2Mx+\alpha)\omega+(J+Mx^2)v\frac{d\omega}{dx}-m_0=0. \qquad (5)$$

მოვახდინოთ ჩასმა $\omega = pz.$ მაშინ

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{dp}{dx}z+p\frac{dz}{dx}.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (5)–ში, მივიღებთ:

$$(2Mx+\alpha)pz+v(J+Mx^2)\left(\frac{dp}{dx}z+p\frac{dz}{dx}\right)-m_0=0.$$

ეს განტოლება დავშალოთ ორ განტოლებად:

$$\left[(2Mx+\alpha)p+v(J+Mx^2)\frac{dp}{dx}\right]z=0, \qquad (6)$$

$$v(J+Mx^2)p\frac{dz}{dx}-m_0=0. \qquad (7)$$

ამოვხსნათ (6) განტოლება. რადგან $z\neq 0,$ ამიტომ

$$(2Mx+\alpha)p+v(J+Mx^2)\frac{dp}{dx}=0.$$

ვიპოვოთ $p-$ ს მნიშვნელობა, რომლის დროსაც სრულდება ეს პირობა. მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება, მივიღებთ:

$$\frac{(2Mx+\alpha)dx}{v(J+Mx^2)}=-\frac{dp}{p}$$

ან

$$\frac{\left(2x+\frac{\alpha}{Mv}\right)dx}{\frac{J}{M}+x^2}=-\frac{dp}{p}.$$

ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა:

$$\int\frac{2xdx}{\frac{J}{M}+x^2}+\int\frac{\frac{\alpha}{Mv}dx}{\frac{J}{M}+x^2}=-\int\frac{dp}{p},$$

$$ln\left(\frac{J}{M}+x^2\right)+\frac{\alpha}{Mv}\frac{1}{\sqrt{\frac{J}{M}}}arctg\frac{x}{\sqrt{\frac{J}{M}}}=-lnp.$$

აქედან

$$p=\frac{1}{\frac{J}{M}+x^2}e^{-\frac{\alpha}{Mv}\sqrt{\frac{M}{J}}arctg\sqrt{\frac{M}{J}}x}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{\alpha}{v}\sqrt{\frac{1}{JM}} = \mu, \quad \sqrt{\frac{J}{M}} = k,$$

მაშინ

$$p = \frac{M}{J+Mx^2} e^{-\mu\, arctg\frac{x}{k}}. \tag{8}$$

ამოვხსნათ (7) განტოლება. მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ჩავსვათ p -ს ნაცვლად (8) გამოსახულება. მაშინ

$$dz = \frac{m_0 dx}{v(1+Mx^2)} = \frac{m_0(J+Mx^2)}{v(1+Mx^2)M} e^{\mu\, arctg\frac{x}{k}} dx.$$

აქედან მივიღებთ

$$z = \frac{m_0}{Mv}\int_{x_0}^{x} e^{\mu\, arctg\frac{x}{k}} dx.$$

მაშინ ამწის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = pz = \frac{m_0}{v(J+Mx^2)} e^{-\mu\, arctg\frac{x}{k}} \int_{x_0}^{x} e^{\mu\, arctg\frac{x}{k}} dx.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\omega = \frac{m_0}{v(J+Mx^2)} e^{-\mu\, arctg\frac{x}{k}} \int_{x_0}^{x} e^{\mu\, arctg\frac{x}{k}} dx.$

სადაც $k = \sqrt{\frac{J}{M}},\ \mu = \frac{\alpha}{v_x}\sqrt{\frac{1}{JM}}.$

§38. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია ეწოდება სისტემის ნივთიერ წერტილთა კინეტიკური ენერგიების ჯამს, ე.ი.

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (38.1)$$

თუ მექანიკური სისტემა შედგება ერთმანეთთან გარკვეული სახით შეერთებუ;ლი მყარი სხეულებისაგან, მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება როგორც ყველა სხეულის კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$T=\sum T_k, \qquad (38.2)$$

სადაც T_k- $k-$ური სხეულის კინეტიკური ენერგიაა.

მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელი ფორმულები მისი მოძრაობის კერძო შემთხვევბში.

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობისას

$$T=\frac{Mv^2}{2}. \qquad (38.3)$$

უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას

$$T=\frac{I_z\omega^2}{2} \qquad (38.4)$$

სადაც I_z –სხეულის ინერციის მომენტია z ღერძის მიმართ; $\omega-$ სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

. **ბრტყელ-პარალელური მოძრაობისას**

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{I_{Cz}\omega^2}{2} \qquad (38.5)$$

სადაც v_C-სხეულის მასათა ცენტრის სიჩქარეა; $I_{Cz}-$ ინერციის მომენტი მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

ბრტყელ-პარალელური მოძრაობისას მისი კინეტკური ენერგია შეგვიძლია განვსაზღვროთ როგორც მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია

$$T=\frac{I_p\omega^2}{2}, \qquad (38.6)$$

სადაც I_p –სხეულის ინერციის მომენტია იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის სიჩქარეთა მყის ცენტრზე.

მყარი სხეულის სფერული მოძრაობისას

$$T = \frac{I_\omega \omega^2}{2}, \qquad (38.7)$$

სადაც I_ω –სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ; $\omega -$ სხეულის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე.

მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + \omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_z\omega_y + I_{zx}\omega_x\omega_z\right), \quad (38.8)$$

სადაც

$I_x, I_y, I_z -$ ინერციის ღერძული მომენტებია; $I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} -$ ინერციის ცენტრიდანული მომენტები; $\omega_x, \omega_y, \omega_z -$აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის გეგმილებია მოძრავ სხეულთან დაკავშირებული $Ox, Oy, Oz -$ ღერძებზე.

თუ საკოორდინატო Ox, Oy, Oz ღერძებს მივიღებთ ინერციის მთავარ ღერძებად (კერძო შემთხვევა), მაშინ

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

და (38.8) მიიღებს სახეს:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + \omega_z^2\right), \qquad (38.9)$$

(38.9) ფორმულა გამოიყენება სხეულის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელად იმშემთხვევაში, როცა იგი მონაწილეობს არაუმეტეს სამი ურთიერთგადამკვეთი ღერძის მიმართ ბრუნვითი მოძრაობისას, თუ ეს ღერძები წარმოადგენენ ინერციის მთავარ ღერძებს ან მათი პარალელურია.

თეორემა კინეტიკური ენერგიეს ცვლილების შესახებ შეიძლება ჩაიწეროს დიფერენციალურ და ინტეგრალურ ფორმებში.

დიფერენციალური ფორმა

$$dT = \sum dA(\vec{F}_k^e) + \sum dA(\vec{F}_k^i), \qquad (38.10)$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის დიფერენციალი უდრის შიგა $\vec{F}_k^i$ და გარე $\vec{F}_k^e$ ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამს.

ეს ფორმულა ჩვეულებრივ გამოიყენება მაშინ, როდესაც მოითხოვება მექანიკური სისტემის რომელიმე სხეულის მოძრაობის კანონის განსაზღვრა ან იმ დროის განსაზღვრა, რომლის განმავლობაშიც ხდება მისი მოძრაობის სიჩქარის განსაზღვრა. ამ შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება დიფერენციალური განტოლების შედგენაზე და მის ინტეგრებაზე.

ინტეგრალური ანუ სასრული ფორმა

$$T_2 - T_1 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i), \qquad (38.11)$$

გვიჩვენებს, რომ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიეს ცვლილება მის რაიმე გადაადგილებაზე უდრის სისტემაზე მოქმედი შიგა და გარე ძალების მუშაობათა ჯამს იმავე გადაადგილებაზე.

ცვლელი სისტემისათვის, მაგალითად, აბსოლუტურად მყარი სხეულისათვის ან ასეთი სხეულების სისტემისათვის, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია უჭიმადი ბმებით, შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი უდრის ნულს და თეორემა კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ ასე ჩაიწერება:

დიფერენციალური ფორმა

$$dT = \sum dA\left(\vec{F}_k^e\right) = dA^e, \qquad (38.10')$$

ინტეგრალური ანუ სასრული ფორმა

$$T_2 - T_1 = \sum A\left(\vec{F}_k^e\right) = A^e, \qquad (38.11')$$

სადაც dA^e, A^e არის შესაბამისად სისტემაზე მოდებული გარე ძალების ელემენტარული მუშაობა და მუშაობა სასრულ გადაადგილებაზე.

სრული მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონი:
თუ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებენ მხოლოდ პოტენციური ან კონსერვატიული ძალები, ე.ი. ძალები, რომელთა მუშაობა განისაზღვრება სისტემის წერტილების საწყისი და საბოლოო მდებარეობებით და არ არიან დამოკიდებული ამ წერტილების ტრაექტორიაზე, მაშინ მექანიკური სისტემის ნებისმიერ მდებარეობაში კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდეა:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2. \qquad (38.12)$$

მექანიკური სისტემის პოტენციური ენერგია განისაზღვრება როგორც კონსერვატიული ძალების მუშაობა სისტემის რაიმე მდებარეობიდან ნულოვან მდებარეობაში გადაადგილებისას, რომელშიც სისტემის წერტილების პოტენციური ენერგია ნულის ტოლია(ე.წ. ნულოვანი დონე).

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. გამოვსახოთ მექანიკური სისტემა ბოლო, ხოლო ზოგჯერ საწყის მდებარეობაში;
2. უცვლელი მექანიკური სისტემის შემთხვევაში ვაჩვენოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალა;
3. ჩავწეროთ ზოგად შემთხვევაში თეორემა კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ დიფერენციალური (ფორმულა (38.10)) ან ინტეგრალური (ფორმულა (38.11)) ფორმით;
4. თუ მექანიკური სისტემა უცვლელია და მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან, კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში და შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი გავუტოლოთ ნულს. თუ მექანიკური სისტემა მოძრაობას იწყებს რაღაც სიჩქარით და მოძრაობს გაჩერებამდე, გავუტოლოთ ნულლს კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში;
5. განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო ან საწყის მდებარეობაში, როგორც მოცემულ მექანიკურ სისტემაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი, გამოვსახოთ ის ამოცანის პირობაში მითითებული სხეულის საძიებელი კუთხური სიჩქარით ან წირითი სიჩქარით. ამისათვის საჭიროა სქემაში სხეულების კუთხური სიჩქარეების

და წირითი სიჩქარეების მიმართულებების ჩვენება, ამ სიჩქარეებს შორის კინემატიკური კავშირების დადგენით.;

6. განვსაზღვროთ სისტემაზე მოდებული ყველა გარე ძალის ან ელემენტარული მუშაობათა ჯამი ან ამ ძალების მუშაობათა ჯამი სისტემის სასრულ გადაადგილებაზე გამოვსახოთ რა ის სასრულ გადაადგილებაზე იმ სხეულის გადაადგილებით (კუთხური ან წრფივი), რომლის სიჩქარე ამოცანის პირობით უნდა განისაზღვროს;

7. ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიეს და გარე ძალების მუშაობების გამოსახულებები კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის ფორმულაში, რომელიც ჩაწერილია პ.2 და პ.3-ის შესაბამისად;

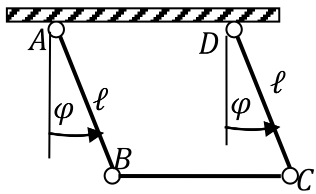
8. მიღებული განტოლებიდან გამოვსახოთ საძიებელი სიდიდე ზოგადი სახით, შედეგ ჩავსვათ რიცხვითი მონაცემები და შევასრულოთ გამოთვლები;

9. თეორემის დიფერენციალური ფორმით გამოყენების შემთხვევაში აუცილებელია შესრულდეს პუნქტები 1-5, შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება და მიღებული განტოლება ვაინტეგროთ საწყისი პირობების გათვალისწინებით.

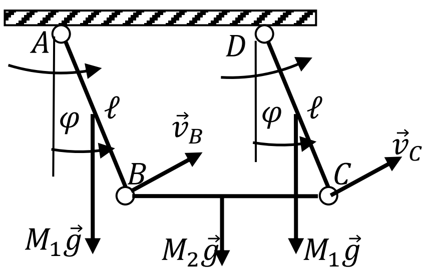
ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 38.1

გამოთვალეთ იმ ბრტყელი მექანიზმის ინეტიკური ენერგია, რომელიც შედგება სამი AB, BC და CD ღეროსაგან , რომლებიც მიმაგრებულია ჭერზე A და D ცილინდრული სახსრებით და ერთმანეთ-თან შეერთებული B და C სახსრებით. ℓ სიგრძის AB და CD თითოეული ღეროს მასა უდრის M_1; BC ღეროს მასაა$-M_2$; ამასთან $BC = AD$. AB და BC ღეროები ბრუნავენ ω კუთხური იჩქარით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ბრტყელი მექანიზმის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე AB და CD რგოლების კუთხური სიჩქარეები და AB, BC და CD ღეროების სიმძიმის ძალები. განვსაზღვროთ თითოეული რგოლის მოძრაობის ხასიათი. AB რგოლი ასრულებს



ბრუნვით მოძრაობას ω_{AB} კუთხური სიჩქარით. CD რგოლი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას ω_{CD} კუთხური სიჩქარით. BC რგოლი ასრულებს გადატანით მოძრაობას $\vec{v}_B$ სიჩქარით. რადგან B და C წერტილების სიჩქარეები ტოლი და პარალელურია, ამიტომ

$$v_B = \omega_{AB} \cdot AB = \omega\ell,$$
$$v_C = \omega_{CD} \cdot CD = \omega\ell.$$

მექანიზმის კინეტიკური ენერგია განვსაზღვროთ როგორც ცალკეული რგოლების კინეტიკური ენერგიების ჯამი:

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD}. \qquad (1)$$

AB და CD რგოლების კინეტიკური ენერგია:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}J_A\omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1(AB)^2}{3}\omega_{AB}^2 = \frac{1}{6}M_1\ell^2\omega^2,$$

$$T_{CD} = \frac{1}{2}J_D\omega_{CD}^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1(CD)^2}{3}\omega_{CD}^2 = \frac{1}{6}M_1\ell^2\omega^2.$$

BC რგოლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_{BC} = \frac{1}{2}m_{BC}v_B^2 = \frac{1}{2}M_2\ell^2\omega^2.$$

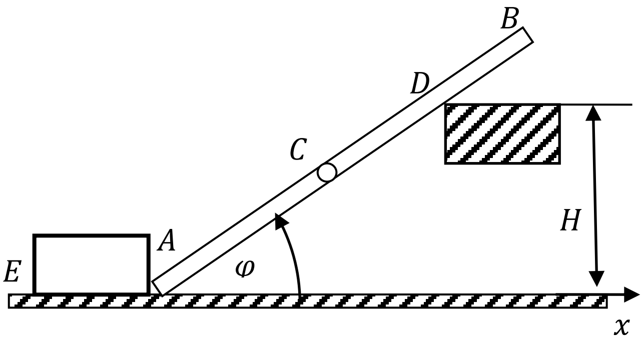
მაშინ (1) ფორმულის თანახმად მექანიზმის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{6}M_1\ell^2\omega^2 + \frac{1}{6}M_1\ell^2\omega^2 + \frac{1}{2}M_2\ell^2\omega^2 = \frac{2M_1 + 3M_2}{6}\ell^2\omega^2.$$

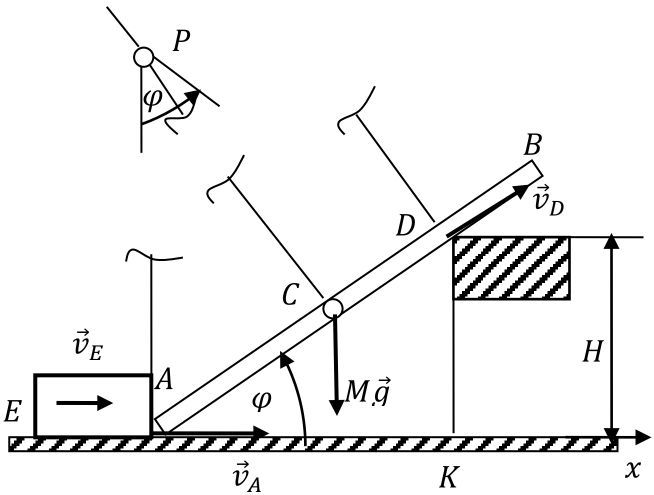
პ ა ს უ ხ ი: $T = \frac{2M_1+3M_2}{6}\ell^2\omega^2$.

ამოცანა 38.2

M მასის ერთგვაროვანი AB ღერო ეყრდნობა D კუთხეს და A ბოლოთი სრიალებს ჰორიზონტალური მიმმართველის გასწვრივ. E საყრდენი მოძრაობს მარჯვნივ მუდმივი v სიჩქარით. განსაზღვრეთ ღეროს კინეტიკური ენერგია, როგორც ფუნქცია φ კუთხისა, თუ ღეროს სიგრძეა 2ℓ, ხოლო D წვეტის ამაღლება ჰორიზონტალური მიმმართველიდან უდრის H. .



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ AB ღეროს ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა. ვიპოვოთ AB ღეროს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი როგორც A და D წერტილებიდან გავლებული $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ სიჩქარეების მართობების გადაკვეთის წერტილი (იხ. ნახაზი). განვიხილოთ მიღებული სამკუთხედები ΔADK და APD. $\Delta ADK -$ დან



$$AD = \frac{DK}{sin\varphi} = \frac{H}{sin\varphi},$$

$\Delta APD -$ დან

$$AP = \frac{AD}{sin\varphi} = \frac{H}{sin^2\varphi}.$$

$\Delta APC -$ დან ვპოულობთ

$$PC=\sqrt{AP^2+AC^2-2\cdot AP\cdot AC\cdot cos(90^0-\varphi)}=$$
$$=\sqrt{\frac{H^2}{sin^4\varphi}+\ell^2-\frac{2H\ell}{sin^2\varphi}cos(90^0-\varphi)}=\sqrt{\frac{H^2}{sin^4\varphi}+\ell^2-\frac{2H\ell}{sin\varphi}}.$$

განვსაზღვროთ AB ღეროს კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{v_A}{H}sin^2\varphi \qquad (1)$$

და მისი მასათა ცენტრის C სიჩქარე

$$v_C=\omega_{AB}\cdot PC=\frac{v_A}{H}sin^2\varphi\sqrt{\frac{H^2}{sin^4\varphi}+\ell^2-\frac{2H\ell}{sin\varphi}}. \qquad (2)$$

AB ღეროს კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

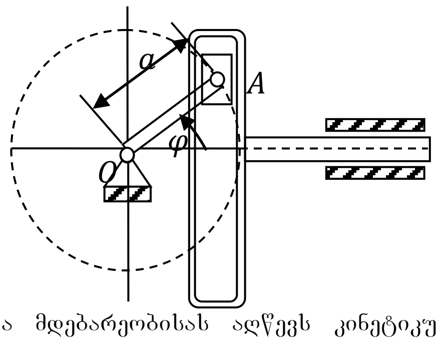
$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_{AB}^2$$

ან (1) და (2) ფორმულების გათვალისწინებით

$$T=\frac{1}{2}M\frac{v^2}{H^2}sin^4\varphi\left(\frac{H^2}{sin^4\varphi}+\ell^2-\frac{2H\ell}{sin\varphi}\right)+\frac{1}{2}\frac{M(2\ell)^2}{12}\frac{v^2}{H^2}sin^4\varphi=$$
$$=\frac{Mv^2}{2}\left(1+\frac{4\ell^2}{3H^2}sin^4\varphi-\frac{2\ell}{H}sin^3\varphi\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T=\frac{Mv^2}{2}\left(1+\frac{4\ell^2}{3H^2}sin^4\varphi-\frac{2\ell}{H}sin^3\varphi\right).$

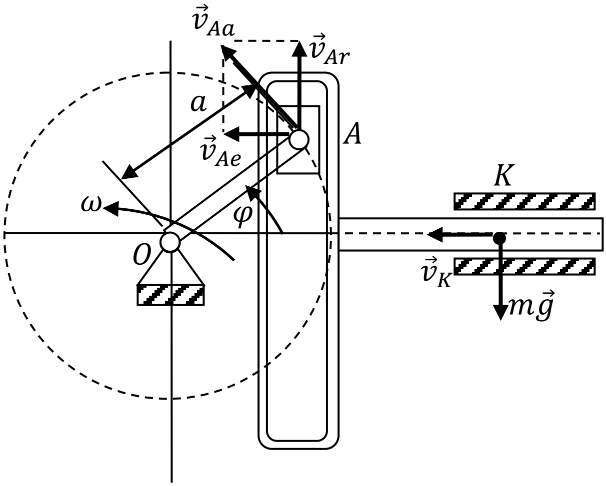
ამოცანა 38.3



გამოთვალეთ კულისური მექანიზმის კინეტიკური ენერგია,

თუ OA მ რუდმხარას ინერციის მომენტი ნახაზის სიბრტყის მართობული ბრუნვის ღერძის მიმართ არის J_O, მრუდმხარას სიგრძე არის a. კულისის მასა m. A ქვის მასა უგულებელყოფილია. OA მრუდმხარა ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით. მექანიზმის რა მდებარეობისას აღწევს კინეტიკური ენერგია მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს?

ა მო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ კულისური მექანიზმის მოძრაობა, რომელიც შედგება OA მრუდმხარას, A ქვის და AK კულისისაგან. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემული ძალები. მექანიზმის ყველა ნაწილის სიჩქარე გამოვსახოთ OA მრუდმხარას მოცემული კუთხური სიჩქარით.



A ქვა ასრულებს რთულ მოძრაობას, რომელიც შედგება კულისთან ერთად წარმტანი მოძრაობისა და კულისის გასწვრივ ფარდობითი მოძრაობისაგან. A ქვისათვის აბსოლუტური მოძრაობა წარმოადგენს OA მრუდმხარასთან ერთად a რადიუსიან წრეწირზე მოძრაობას:

$$v_a = \omega a.$$

A ქვის წარმტან სიჩქარეს ვიპოვით ნახაზიდან

$$v_{Ae} = v_{Aa} sin\varphi = \omega a sin\varphi.$$

განვსაზღვროთ OA მრუდმხარას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega^2.$$

რადგან A ქვის მასა უგულებელყოფილია, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგიაუდრის ნულს.

განვსაზღვროთ კულისის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას:

$$T_K = \frac{1}{2} m v_K^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 sin^2\varphi.$$

მაშინ კულისური მექანიზმის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_{OA} + T_K = \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 sin^2\varphi =$$
$$= \frac{1}{2} (J_O + m a^2 sin^2\varphi)\omega^2.$$

კულისური მექანიზმის კინეტიკური ენერგია მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $sin\varphi = \pm 1$, ე.ი.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k = 0,1,2,\cdots).$$

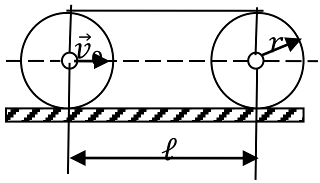
კულისური მექანიზმის კინეტიკური ენერგია მინიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $sin\varphi = 0$, ე.ი.

$$\varphi = k\pi\ (k = 0,1,2,\cdots).$$

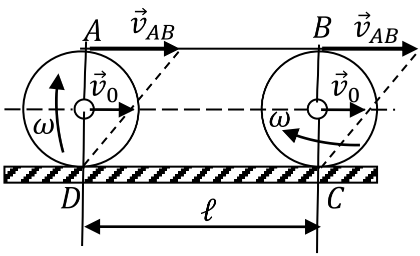
პ ა ს უ ხ ი: $T = \frac{1}{2}(J_O + ma^2 sin^2\varphi)\omega^2$. მინიმალური კინეტიკური ენერგია-კულისის უკიდურესი მდებარეობისას, მაქსიმალური, როდესაც კულისა გადის შუა მდებარეობას.

, ამოცანა 38.4

განვსაზღვრეთ ტრაქტორის მუხლუხის კინეტიკური ენერგია, თუ ტრაქტორი მოძრაობს v_0 სიჩქარით. ბორბლებს შორის მანძილი არის ℓ, მათი რადიუსებია r, მუხლუხის ჯაჭვის ერთი გრძივი მეტრის მასა არის ϒ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტრაქტორის მოძრაობა. მუხლუხის ცალკეული ნაწილები ასრულებენ სხვადსხვა მოძრაობას (იხ. ნახაზი).



მუხლუხის ℓ სიგრძის $ϒ\ell$ მასის AB ნაწილი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, რომლის სიჩქარეა $2v_0$ და მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB}(2v_0)^2 = 2\,ϒ\ell v_0^2.$$

მუხლუხის πr სიგრძის და $ϒ\pi r$ მასის BC ნაწილი. მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m_{BC} v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} ϒ\pi r v_0^2 + \frac{1}{2} ϒ\pi r^3 \frac{v_0^2}{r^2} = ϒ\pi r v_0^2.$$

მუხლუხის CD ნაწილი უძრავად ძევს მიწაზე, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია ნულის ტოლია, ე.ი. $T_{CD} = 0$.

მუხლუხის DA ნაწილი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. მისი კინეტიკური ენერგია ტოლია მუხლუხის BC ნაწილის კინეტიკური ენერგიეს, ე.ი.

$$T_{BC} = T_{DA} = ϒ\pi r v_0^2.$$

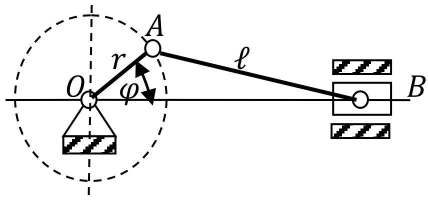
ტრაქტორის მთლიანი მუხლუხის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DA} = 2\,\Upsilon \ell v_0^2 + \Upsilon \pi r v_0^2 + \Upsilon \pi r v_0^2 = \\ = 2\,\Upsilon(\ell + \pi r) v_0^2.$$

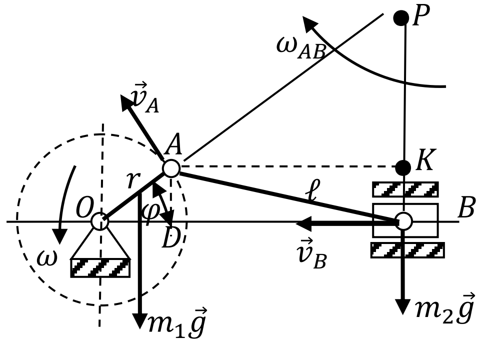
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T = 2\,\Upsilon(\ell + \pi r) v_0^2.$

ამოცანა 38.5

გამოთვალეთ მრუდმხარა-კულისური მექანიზმის კინეტიკური ენერგია, თუ მრუდმხარას მასა არის m_1, მისი სიგრძე r, ცოციას მასა m_2, ხოლო ბარბაცას სიგრძე ℓ. მრუდმხარა ჩათვალეთ ერთგვაროვან ღეროდ. მრუდმხარას ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა ω. ბარბაცას მასა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემული ძალები: $m_1\vec{g}$ და $m_2\vec{g}$.



განვიხილოთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის მოძრაობა. A სახსრის სიჩქარე:

$$v_A = \omega r.$$

განვსაზღვროთ B ცოციას სიჩქარე. ამისათვის ვიპოვოთ AB ბარბაცას სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, რომელიც აგების თანხმად არის P წერტილში.

შევადგინოთ პროპორცია:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

მაშინ B ცოციას სიჩქარე

$$v_B = \frac{v_A \cdot BP}{AP} = \frac{\omega r \cdot BP}{AP}. \quad (1)$$

განვიხილოთ ΔOAD: $OA = r -$ პირობის თანახმად, $AD = r sin\varphi$. $\Delta ABD -$დან ვიპოვით:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ $BD = AK, AD = KB$. $\Delta ABD -$დან

$$AP = \frac{AK}{cos\varphi} = \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}}{cos\varphi},$$

$$PK = AP \cdot sin\varphi = \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}}{cos\varphi} sin\varphi.$$

მაშინ

$$BP = KB + PK = rsin\varphi + \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}}{cos\varphi} sin\varphi.$$

ჩავსვათ AP და BP მნიშვნელობები (1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$v_B = \omega r \frac{rsin\varphi + \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}}{cos\varphi} sin\varphi}{\frac{\sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}}{cos\varphi}} =$$

$$= \omega r \left(\frac{rcos\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2 sin^2\varphi}} + 1 \right) sin\varphi = \omega r \left[sin\varphi + \frac{r}{2\ell} \frac{sin2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}} \right].$$

OA მრუდმხარა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას და მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 r^2}{3} \omega^2.$$

B ცოციას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას:

$$T_B = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[sin\varphi + \frac{r}{2\ell} \frac{sin2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}} \right]^2 r^2 \omega^2.$$

განვსაზღვროთ მთლიანი მექანიზმის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_{OA} + T_B = \frac{1}{2} \frac{m_1 r^2}{3} \omega^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left[sin\varphi + \frac{r}{2\ell} \frac{sin2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}} \right]^2 r^2 \omega^2 +$$

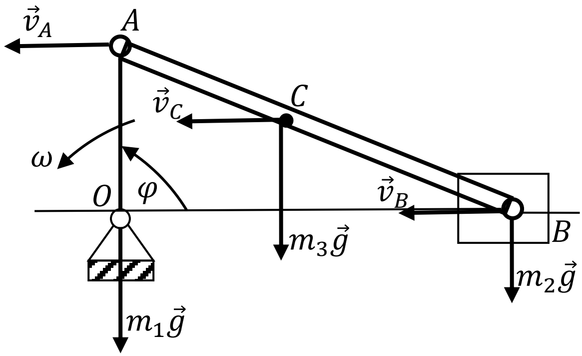
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[sin\varphi + \frac{r}{2\ell}\frac{sin2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}}\right]^2\right\}r^2\omega^2.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[sin\varphi + \frac{r}{2\ell}\frac{sin2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}}\right]^2\right\}r^2\omega^2.$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 38.6

ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ მხედველობაში მიიღება ბარბაცას m_3 მასა იმ მომენტში, როცა OA მრუდმხარა ცოციას მიმმართველის პერპენდიკულარულია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



განვიხილოთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემული ძალები: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ და $m_3\vec{g}$.

OA მრუდმხარა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას, ამიტომ A სახსრის სიჩქარე:

$$v_A = \omega r.$$

AB ბარბაცა ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

$$v_A = v_B = v_C = \omega r,$$
$$\omega_{AB} = 0.$$

B ცოციაც ასრულებს გადატანით მოძრაობას.
მთლიანი მექანიზმის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_B,$$

სადაც

$$T_{OA}=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1r^2\omega^2,\qquad T_{AB}=\frac{1}{2}m_{AB}v_C^2=\frac{1}{2}m_3r^2\omega^2,$$

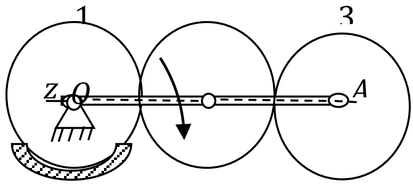
$$T_B=\frac{1}{2}m_Bv_B^2=\frac{1}{2}m_2r^2\omega^2.$$

მაშინ

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1r^2\omega^2+\frac{1}{2}m_3r^2\omega^2+\frac{1}{2}m_2r^2\omega^2=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1+m_2+m_3\right)r^2\omega^2.$$

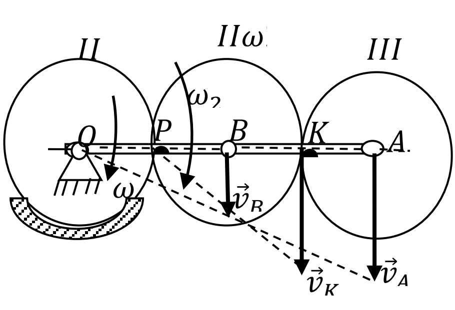
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1+m_2+m_3\right)r^2\omega^2.$

ამოცანა 38.7



ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მდებარე პლანეტარული მექანიზმი მოძრაობაში მოდის OA მრუდმხარას საშუალებით, რომელიც აერთებს სამი I, II და III ერთნაირითვლის ღერძებს. I თვალი უძრავია. OA მრუდმხარა ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით. ყოველი თვლის მასა არის M_1, რადიუსი $-r$, ხოლო მრუდმხარას მასა M_2. გამოთვალეთ მექანიზმის კინეტიკური ენერგია, თუ თვლებს ჩავთვლით ერთგვაროვან დისკოებად, ხოლო მრუდმხარას-ერთგვაროვან ღეროდ. რას ეტოლება III თვალზე მოდებული წყვიძალის მუშაობა?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ პლანეტარული მექანიზმის მოძრაობა. განვსაზღვროთ მექანიზმის ყველა ნაწილის მოძრაობის ხასიათი. OA მრუდმხარა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას, ამასთან (იხ. ნახაზი):



$$v_B=\omega\cdot OB=2\omega r,$$
$$v_A=\omega\cdot OA=4\omega r.$$

II თვალი ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას. II თვლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი არის P წერტილში. ამიტომ II თვლის კუთხური

სიჩქარე

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP} = \frac{2\omega r}{r} = 2\omega.$$

K წერტილის სიჩქარე

$$v_K = \omega_2 \cdot PK = 2\omega \cdot 2r = 4\omega r.$$

განვიხილოთ II თვლის მოძრაობა. ამ თვლის K და A წერტილების $\vec{v}_K$ და $\vec{v}_A$ სიჩქარეები ტოლი და პარალელურია, მაშასადამე, ეს თვალი ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$v_K = v_A = 4\omega r.$$

სიჩქარით.

მექანიზმის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_{OA} + T_{II} + T_{III}, \tag{1}$$

სადაც $T_{OA} - OA$ მრუდმხარას კინეტიკური ენერგიაა; T_{II} და $T_{III} - II$ და III თვლების კინეტიკური ენერგიაა შესაბამისად.

გამოვთვალოთ თითოეული მათგანი:

$$T_{OA} = \frac{1}{2}J_O\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M_2(OA)^2\omega^2 = \frac{M_2\cdot 16r^2\omega^2}{6} = \frac{8M_2r^2\omega^2}{3};$$

$$T_{II} = \frac{1}{2}M_1v_B^2 + \frac{1}{2}J_B{\omega_2}^2 = \frac{1}{2}M_1 4r^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{M_1r^2}{2}4\omega^2 = 3M_1r^2\omega^2;$$

$$T_{III} = \frac{1}{2}M_1v_A^2 = \frac{1}{2}M_1 16r^2\omega^2 = 8M_1r^2\omega^2.$$

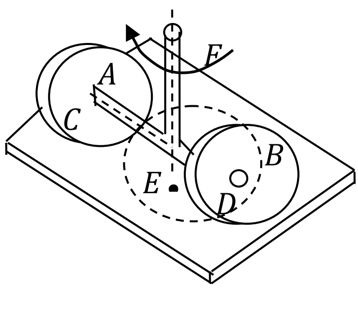
მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{8M_2r^2\omega^2}{3} + 3M_1r^2\omega^2 + 8M_1r^2\omega^2 = \frac{r^2\omega^2}{3}(33M_1 + 8M_2).$$

პ ა ს უ ხ ი: $T = \frac{r^2\omega^2}{3}(33M_1 + 8M_2)$; მუშაობა უდრის ნულს.

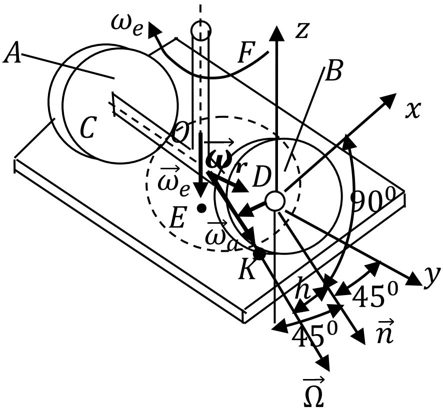
ამოცანა 38.8

წისქვილის A და B რბიები ჩამოცმულია ჰორიზონტალურ CD ღერძზე, რომელიც ბრუნავს ვერტიკალური EF ღერძის გარშემო; ყოველი რბიის მასა უდრის 200კგ. რბიათა დიამეტრები ერთნაირია და თითოეული უდრის 1მ-ს. მათ შორის მანძილი $CD = 1$მ.



განსაზღვრეთ რბიას კინეტიკური ენერგია, როცა CD ღერძი ასრულებს 20ბრ/წთ-ს, თუ დავუშვებთ, რომ ინერციის მომენტების გამოთვლისას რბიები მიღებულია ერთგვაროვან თხელ დისკოებად

ა მ ო ხ ს ნ ა. წისქვილის რბიები მონაწილეობენ ორი გადამკვეთი ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობაში. ჯერ განვიხილოთ მხოლოდ ერთერ-თი მათგანი, მაგალითად B (იხ. ნახაზი).



გამოვიყენოთ თეორემა გადა-მკვეთი ღერძების ირგვლივ ბრუნვითი მოძრაობების შეკრე-ბის შესახებ:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

ნახაზზე ვაჩვენოთ კუთხური სიჩქარეების პარალელოგრამი. წარმტანი კუთხური სიჩქარე

$$|\vec{\omega}_e| = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 20}{60} = 2{,}09(\text{რად/წმ}).$$

ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე ცენტრში:

$$v_D = \omega_1 \cdot D = 2{,}09 \cdot 0{,}5 = 1{,}045(\text{მ/წმ}).$$

ღადგან ადგილი აქვს უსრიალოდ გორვას, ამიტომ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ფარდობით მოძრაობაში მდებარეობს K წერტილში. ვიპოვოთ ამ წერტილის ფარდობითი კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_r = \frac{v_D}{DK} = \frac{1{,}045}{0{,}5} = 2{,}09(\text{რად/წმ})$$

B რბიის მყისი (აბსოლუტური) კუთხური სიჩქარის ვექტორი ძევს O და K წერტილებზე გამავალ Ω მყის ღერძზე. $\vec{\omega}_e$ და $\vec{\omega}_r$. ვექტორები ურთიერთმართობულია, ამიტომ

$$|\vec{\omega}_a| = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2} = \sqrt{2{,}09^2 + 2{,}09^2} = 2{,}95(\text{რად/წმ})$$

რბიის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} J_\Omega \omega_a^2,$$

სადაც J_Ω –რბიის ინერციის მომენტია ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ.

გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი:

$$J_\Omega = J_\text{n} + mh^2 = J_\text{y} cos^2 45^0 + J_\text{x} cos^2 90^0 + J_\text{z} cos^2 45^0 + mh^2 =$$

$$=\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{mr^2}{2}\cdot 0+\frac{mr^2}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+m\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{7}{8}mr^2=$$

$$=\frac{7\cdot 200\cdot 0,5^2}{8}=43,75(\text{კგ.მ}^2)$$

მაშინ ერთი B რბიის კინეტიკური ენერგია

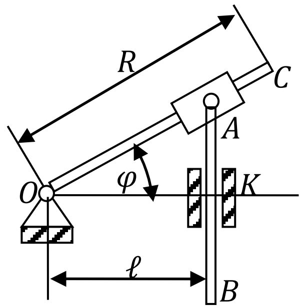
$$T_B=\frac{1}{2}J_\Omega\omega_a^2=\frac{1}{2}\cdot 43,75\cdot 2,95^2=191,5(\text{ნ.მ})$$

ხოლო ორივე რბიის კინეტიკური ენერგია

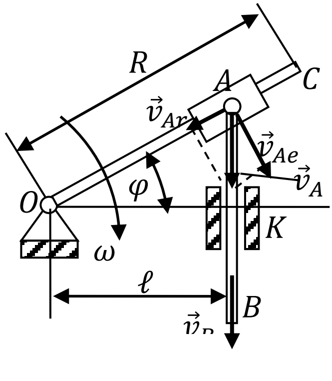
$$T=T_A+T_B=191,5+191,5=383(\text{ნ.მ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 383 ნ. მ.

ამოცანა 38.9



კულისურ მექანიზმში ნახაზის სიბრტყის მართობული O ღერძის გარშემო OC მრუდმხარას ქანაობისას A ცოცია გადაადგილდება OC მრუდმხარას გასწვრივ და მოძრაობაში მოჰყავს AB ღერო, რომელიც მოძრაობს ვერტიკალურ K მიმმართველებში. R სიგრძისა და m_1 მასის OC მრუდმხარა ჩათვალეთ ერთგვაროვან ღეროდ; ცოციას მასაა $-m_2$, ხოლო AB ღეროს მასა $-m_3, OK=\ell$. გამოსახეთ მექანიზმის კინეტიკური ენერგია, როგორც კუთხური სიჩქარისა და OC მრუდმხარას მობრუნების კუთხის ფუნქცია. ცოცია ჩათვალეთ წერტილოვან მასად.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ კულისური მექანიზმის მოძრაობა. განვსაზღვროთ მექანიზმის ყველა ნაწილის მოძრაობის ხასიათი. OC მრუდმხარა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას ω კუთხური სიჩქარით.. A ცოცია ასრულებს რთულ მოძრაობას; განვსაზღვროთ მისი ჭარმტანი v_{Ae} და v_A აბსოლუტური სიჩქარეები:

$$v_{Ae} = \omega \cdot OA = \omega \frac{\ell}{cos\varphi},$$

$$v_A = \frac{v_{Ae}}{cos\varphi} = \omega \frac{\ell}{cos^2\varphi}.$$

AB ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას v_A სიჩქარით, ე.ი.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

მექანიზმის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_{OC} + T_A + T_{AB},$$

სადაც $T_{OC}, T_A, T_{AB} - OC$ მრუდმხარას, A ცოციას და AB ღეროს კინეტიკური ენერგიებია შესაბამისად.

ვიპოვოთ თითოეული მათგანი:

$$T_{OC} = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 R^2}{3} \omega^2,$$

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{\ell^2}{cos^4\varphi} \omega^2,$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} v_A^2 = \frac{1}{2} m_3 \frac{\ell^2}{cos^4\varphi} \omega^2.$$

მაშინ

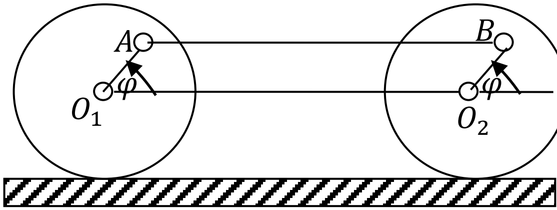
$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 R^2}{3} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\ell^2}{cos^4\varphi} \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{\ell^2}{cos^4\varphi} \omega^2 =$$

$$= \frac{\omega^2}{6cos^4\varphi} [m_1 R^2 cos^4 + 3\ell^2 (m_2 + m_3)].$$

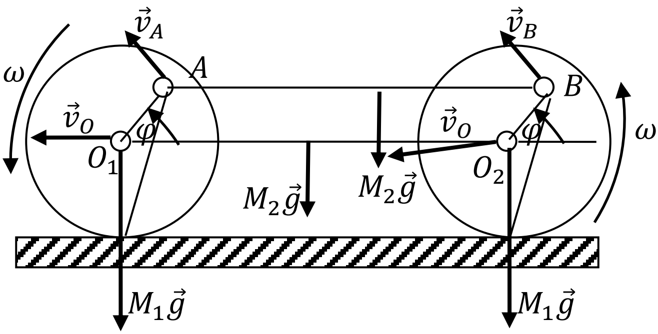
პ ა ს უ ხ ი: $T = \frac{\omega^2}{6cos^4\varphi} [m_1 R^2 cos^4 + 3\ell^2 (m_2 + m_3)].$

ამოცანა 38.10

გამოთვალეთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, რომელიც შედგენილია ორი თვლისაგან, ერთმანეთთან შეერთებული AB ორთქმავლის საუღლითა და O_1O_2 ღეროთი, თუ თვლები მოძრაობს v_O სიჩქარით. თითოეული თვლის მასა უდრის M_1. AB საუღლს და მაერთებელი O_1O_2 ღეროს აქვს ერთნაირი მასა M_2. თვლების მასა თანაბრად განაწილებულია მათი ფერსოს გასწვრივ; $O_1A = O_2B = r/2$, სადაც $r -$ თვლების რადიუსია. თვლები გორავს უსრიალოდ ჰორიზონტალურ რელსზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა.. განვიხილოთ მოცემული მექანიზმის მოძრაობა. განვსაზღვროთ მექანიზმის ყველა ნაწილის მოძრაობის ხასიათი (იხ. ნახაზი) .



ბორალი ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას v_0 სიჩქარით და $\omega = v_{0/r}$ / კუთხური სიჩქარით..

O_1O_2 ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას $\vec{v}_0$ სიჩქარით; AB საუღლი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, რადგან $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, მაშინ

$$v_A = \frac{v_0}{r}\sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4} - 2\frac{r^2}{2}cos(90^0 + \varphi)} = \frac{v_0\sqrt{5 + 4sin\varphi}}{2},$$

მექანიზმის კინეტიკური ენერგია

$$T = 2T_{ბორ} + T_{O_1O_2} + T_{AB},$$

სადაც $T_{ბორ}$, $T_{O_1O_2}, T_{AB}$ – ბორბლის, O_1O_2 ღეროს და AB საუღლის კინეტიკური ენერგიებია შესაბამისად.

ვიპოვოთ თითოეული მათგანი:

$$T_{ბორ} = \frac{1}{2}M_1v_0^2 + \frac{1}{2}M_1r^2\frac{v_0^2}{r^2} = M_1v_0^2,$$

$$T_{O_1O_2} = \frac{1}{2}M_2v_0^2,$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}M_2 v_A^2 = \frac{1}{8}M_2 v_0^2(5 + 4sin\varphi).$$

მაშინ

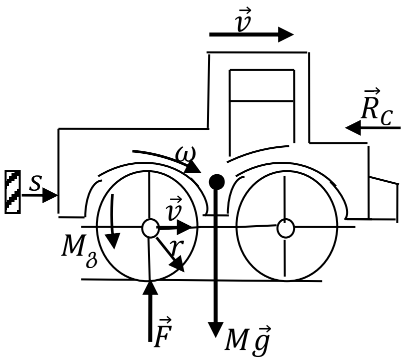
$$T = 2M_1 v_0^2 + \frac{1}{2}M_2 v_0^2 + \frac{1}{8}M_2 v_0^2(5 + 4sin\varphi) =$$
$$= \frac{v_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4sin\varphi)].$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T = \frac{v_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4sin\varphi)].$

ამოცანა 38.11

M მასის ავტომობილი მოძრაობს v სიჩქარით წრფივ ჰორიზონტალურ გზაზე. ავტომობილი თვლების გზაზე გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f_გ$, რადიუსი კი$-r$, ჰაერის აეროდინამიკური წინაღობის ძალა R_C სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია: $R_C = \mu M g v^2$, სადაც $\mu -$ კოეფიციენტი დამოკიდებულია ავტომობილის ფორმაზე. განსაზღვრეთ ძრავას N სიმძლავრე, რომელიც გადაეცემა დამყარებული მოძრაობისას წამყვანი თვლების ღერძს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ავტომობილის მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემული ძალები: $M\vec{g} -$ ავტომობილის სიმძიმის ძალა, $\vec{F} -$გზის ჯამური რეაქცია, $M_გ -$ გორვის ხახუნის ჯამური მომენტი, $\vec{R}_C -$ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, აგრეთვე, ავტომობილის s გადაადგილება და მისი სიჩქარე $\vec{v}$. ავტომობილის თვლის კუთხური სიჩქარე $\omega = v/r$ და მოძრაობისას თვალი მობრუნდება კუთხით $\varphi = \frac{s}{r}$.



გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i) = 0, \qquad (1)$$

რადგან ავტომობილი მოძრაობს თანაბრად, ამიტომ $T - T_0 = 0.$

განვსაზღვროთ ავტომობილზე მოქმედი გარე ძალების მუშაობა.

წინაღობის ძალის მუშაობა, იმის გათვალისწინებით, რომ ავტომობილი მოძრაობს $v = const$ სიჩქარით:

$$A_C = -\int_0^S R_C ds = -\mu M g v^2 S.$$

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_M = -M_{გ}\varphi = -Mgf_{გ}\frac{S}{r}.$$

დანარჩენი გარე ძალების მუშაობა ნულის ტოლია.

მაშინ

$$\sum A\left(\vec{F}_k^e\right) = -Mg\left(\frac{f_{გ}}{r} + \mu v^2\right)s.$$

განვსაზღვროთ ავტომობილზე მოქმედი შიგა ძალების მუშაობა. ერთადერთი არა გაწონასწორებული შიგა ძალა არის ძრავის მამოძრავებელი ძალა. მაშასადამე,

$$\sum A\left(\vec{F}_k^i\right) = A_{მა მ.},$$

სადაც $A_{მამ.,}$ $-$ ძრავის მამოძრავებელი ძალაა.

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$A_{მამ.,} - Mg\left(\frac{f_{გ}}{r} + \mu v^2\right)s = 0$$

ან

$$A_{მამ.,} = Mg\left(\frac{f_{გ}}{r} + \mu v^2\right)s.$$

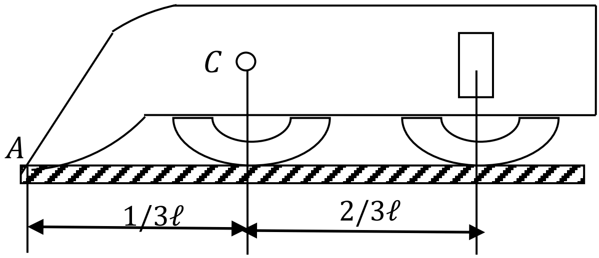
ძრავის სიმძლავრის განსასაზღვრავად გავაწარმოოთ ეს ტოლობა. მაშინ

$$N = \frac{dA_{მამ.,}}{dt} = Mg\left(\frac{f_{გ}}{r} + \mu v^2\right)\frac{ds}{dt} = Mg\left(\frac{f_{გ}}{r} + \mu v^2\right)v.$$

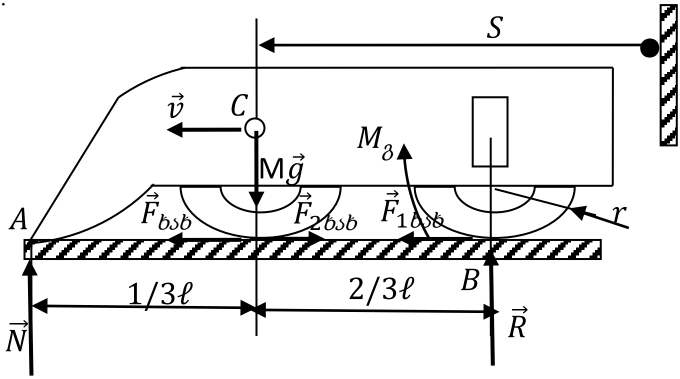
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $N = Mg\left(\frac{f_{გ}}{r} + \mu v^2\right)v.$

ამოცანა 38.12

ყინულის საფხეკი M მასის ავტომობილი მოძრაობს თანაბრად და წრფივად v სიჩქარით ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. მასათა C ცენტრის მდებარეობა ნაჩვენებია ნახაზზე. განსაზღვრეთ ძრავას N სიმძლავრე, რომელიც გადაეცემა წამყვანი თვლების ღერძს, თუ ავტომობილის თვლების ყინულზე გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f_{გ}$, სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი A ნაწიბურსა და ყინულს შორის კი$-f$. ბორბლები გორავენ უსრიალოდ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ავტომობილის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემული ძალები: $M\vec{g}-$ ავტომობილის სიმძიმის ძალა, $\vec{F}_{ხახ.}-$სრიალის ხახუნის ძალა, $M_{გ}-$ გორვის ხახუნის ჯამური მომენტი, $\vec{N}$, $\vec{R}-$ რეაქციის ძალები.



ავტომობილი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად, ამიტომ ბმების რეაქციების განსასაზღვრავად ვისარგებლოდ სტატიკის განტოლებით:

$$\sum M_B\left(\vec{F}_k^e\right) = -N\ell + Mg\frac{2}{3}\ell = 0,$$

საიდანაც

$$N = \frac{2}{3}Mg;$$

$$\sum F_{ky} = N + R - Mg = 0,$$

საიდანაც

$$R = Mg - N = \frac{1}{3}Mg.$$

ვიპოვოთ სრიალის ხახუნის ძალა:

$$F_{ხახ.} = fN = \frac{2}{3}Mgf$$

და გორვის ხახუნის ჯამური მომენტი:

$$M_{გ} = Rf_{გ} = \frac{1}{3} Mgf_{გ}.$$

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum A\left(\vec{F}_k^i\right) = \sum A_k^e + \sum A_k^i \,.$$

ავტომობილი მოძრაობს მუდმივი v სიჩქარით, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგიის ცვლილება არის ნულის ტოლი, ე.ი.

$$T - T_0 = 0.$$

მაშინ

$$\sum A_k^e + \sum A_k^i = 0.$$

გარე ძალების მუშაობა S გადაადგილებაზე:

$$A_k^e = A_{ხახ.} + A_{გ} + A + A_R.$$

განვსაზღვროთ სრიალის ხახუნის ძალის მუშაობა:

$$A_{ხახ.} = F_{ხახ.} S = -\frac{2}{3} MgfS;$$

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა:

$$A_{გ} = -M_{გ}\varphi = -\frac{1}{3} Mgf_{გ}\frac{s}{r}.$$

ავტომობილის სიმძიმის ძალის მუშაობა A და რეაქციის ძალების მუშაობა A_R ნულის ტოლია.

მაშინ

$$A_k^e = -\frac{2}{3} MgfS = -\frac{1}{3} Mgf_{გ}\frac{s}{r} = -\frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{გ}}{r}\right)S.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-\frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{გ}}{r}\right)S + \sum A_k^i = 0$$

ან

$$\sum A_k^i = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{გ}}{r}\right)S.$$

შიგა ძალების მუშაობა ხორციელდება ავტომობილის ძრავის საშუალებით, ამიტომ ამ ძრავის სიმძლავრე

$$N = \frac{d\left(\sum A_k^i\right)}{dt} = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{გ}}{r}\right)v.$$

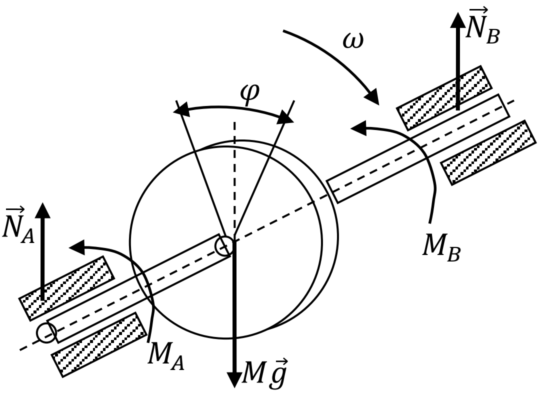
პ ა ს უ ხ ი: $N = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_\delta}{r}\right)v.$

ამოცანა 38.13

60მმ დიამეტრის ლილვზე ჩამოცმულია 50სმ დიამეტრიც მქნევარა, რომელიც ასრულებს 180ბრ/წთ-ს. განსაზღვრეთ ლილვსა და საკისრებს შორის სრიალის ხახუნის f კოეფიციენტი, თუ ამძრავის გამორთვის მომენტიდან გაჩერებამდე ლილვი ასრულებს 90ბრუნს. მქნევარას მასა ჩათვალეთ მის ფერსოზე თანაბრად განაწილებულად.

ა მ ო ხ ს ნ ა

განვიხილოთ ლილვზე ჩამოცმული მქნევარას ბრუნვა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემული ძალები: $M\vec{g}$ – სიმძიმის ძალა, $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ – საყრდენების რეაქციები, M_A და M_B – საყრდენებში სრიალის ხახუნის ძალების მომენტები, აგრეთვე, მქნევარას კუთხური გადაადგილება φ.



გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum A\left(\vec{F}_k^i\right). \tag{1}$$

პირობის თანახმად მქნევარა გაჩერდა, ე.ი. $T = 0$.

განვსაზღვროთ მქნევარას კინეტიკური ენერგია საწყის მომენტში:

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2.$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა მქნევარას φ კუთხით მობრუნებისას.

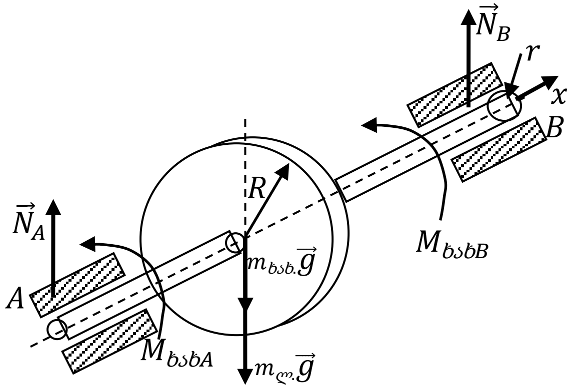
სრიალის ხახუნის მომენტის მუშაობა A და B საყრდენებში:

$$A_{ხახ.A} = -M_A\varphi = -N_A fr\varphi,$$
$$A_{ხახ.B} = -M_B\varphi = -N_B fr\varphi.$$
მაშინ
$$\sum A(\vec{F}_k^e) = -(N_A + N_B)fr\varphi.$$
თუ მქნევარას მასათა ცენტრი მდებარეობს მისი ბრუნვის ღერძზე, მაშინ საყრდენებში დინამიკური რეაქციის მდგენელები უდრის ნულს, მაშინ
$$N_A = N_B = \frac{Mg}{2}.$$
მაშასადამე,
$$\sum A(\vec{F}_k^e) = -Mgfr\varphi.$$
შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულლს, ე.ი.
$$\sum A(\vec{F}_k^i) = 0.$$
მიღებული შედეგები ჩავსვათ (1) განტოლებაში, გვექნება:
$$-\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = -Mgfr\varphi.$$
აქედან განვსაზღვრავთ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტს:
$$f = \frac{R^2\omega^2}{2gr\varphi} = \frac{\pi R^2 n^2}{30^2 \cdot 4grN} = \frac{3{,}14 \cdot 180^2 \cdot 0{,}5^2}{900 \cdot 4 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}03 \cdot 90} = 0{,}07.$$
პ ა ს უ ხ ი: $f = 0{,}07$.

ამოცანა 38.14

0,5ტ. მასის და 10სმ დიამეტრის ცილინდრული ლილვი, რომელზეც ჩამოცმულია 3 ტ.. მასის და 2 მ დიამეტრის მქნევარა თვალი, აღებულ მომენტში ბრუნავს 60ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით, ხოლო შემდეგ მიშვებულია თავის ნებაზე. რამდენ ბრუნს გააკეთებს კიდევ ლილვი გაჩერებამდე, თუ. საკისრებში ხახუნის კოეფიციენტი უდრის 0,05-ს? ამოცანის ამოხსნისას მქნევარას მასა ჩათვალეთ მის ფერსოზე თანაბრად განაწილებულად.

ა მ ო ხ ს ნ ა განვიხილოთ ლილვზე ჩამოცმული მქნევარა თვალის ბრუნვა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით: $m_{ლ.}\vec{g}$ − ლილვის სიმძიმის ძალა, $m_{მქ.}\vec{g}$ − მქნევარა თვალის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ − საყრდენების



რეაქციები, $M_{ხახA}$ და $M_{ხახB}$ – საყრდენებში სრიალის ხახუნის ძალების მომენტები.(იხ. ნახაზი).

განვსაზღვროთ სრიალის ხახუნის ჯამური მომენტი $M_{ხახ}$ ლილვის A და B საყრდენებში:

$$M_{ხახ} = M_{ხახA} + M_{ხახB} = N_A fr + N_B fr = \left(m_{ლ.} + m_{მქ.}\right) gfr =$$
$$= (500 + 3000) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 85{,}8(\text{ნ.მ})$$

გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \qquad (1)$$

რადგან მოცემული სისტემა აბსოლუტურად მყარი სხეულია, ამიტომ

$$\sum A_k^i = 0.$$

მოძრაობის ბოლოს მქნევარა თვალი გაჩერდება და მისი კინეტიკური ენერგია გახდება ნული, ე.ი. $T = 0$.

მაშინ (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$-T_0 = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ მქნევარა თვლის კინეტიკური ენერგია მოძრაობის დასაწყისში. ლილვი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას და მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_{ლ} = J_x \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_{ლ.} r^2}{2} \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_{ლ.} r^2}{4} \omega^2.$$

მქნევარა თვალი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას და მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_{მქ.} = J_x \frac{\omega^2}{2} = m_{მქ.} R^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_{მქ.} R^2}{2} \omega^2.$$

მაშინ

$$T_0 = T_{ლ} + T_{მქ} = \frac{m_{ლ} r^2}{4}\omega^2 + \frac{m_{მქ} R^2}{2}\omega^2 = \left(\frac{m_{ლ} r^2 + 2m_{მქ} R^2}{4}\right)\omega^2 =$$

$$= \left(\frac{500\cdot 0{,}05^2 + 2\cdot 3000\cdot 1^2}{4}\right)\left(\frac{2\pi\cdot 60}{60}\right)^2 = 59169{,}4(\text{ნ.მ})$$

გარე ძალების მუშაობა

$$\sum A_k^e = A_{ლ} + A_{მქ} + A_{ხახ} + A_N.$$

ლილვის და მქნევარა თვლის სიმძიმის ძალების მუშაობები ნულის ტოლია.

ხახუნის მომენტი.ს მუშაობა

$$A_{ხახ} = -M_{ხახ}\varphi = -85{,}8\varphi.$$

A და B საყრდენებში რეაქციის ძალების მუშაობა A_N უდრის ნულს. მაშინ

$$A_k^e = A_{ხახ} = -85{,}8\varphi.$$

მიღებული შედეგები ჩავსვათ (2) განტოლებაში, გვექნება:

$$-59\,169{,}4 = -85{,}8.$$

აქედან

$$\varphi = 689{,}6\text{რად}.$$

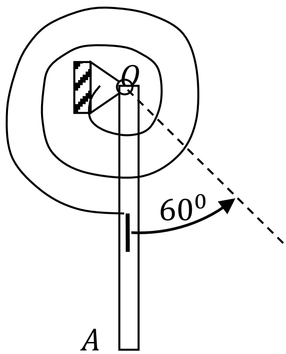
ან ბრუნვებში

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{689{,}6}{2\cdot 3{,}14} = 109{,}8 \text{ ბრ}.$$

პ ა ს უ ხ ი: 109,8 ბრ.

ამოცანა 38.15

M მასის და ℓ სიგრძის ერთგვაროვან OA ღეროს შეუძლია ბრუნვა მის ბოლოზე გამავალი და ნახაზის სიბრტყის მართობი უძრავი O ღერძის გარშემო. c სიხისტის სპირალური ზამბარა ერთი ბოლოთი მიმაგრებულია უძრავ . O ღერძზე, ხოლო მეორეთი – ღეროზე. ღერო წონასწორობაშია და ზამბარა არადეფორმირებულია. როგორი v სიჩქარე უნდა მივანიჭოთ ღეროს ბოლოს, რომ იგი ვერტიკალიდან გადაიხაროს 60^0 კუთხით?

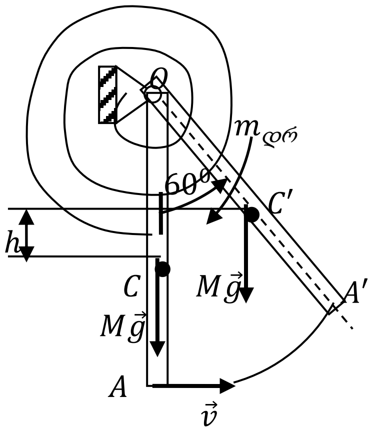


ა მ ო ხ ს ნ ა განვიხილოთ OA ღეროს მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით: $M\vec{g}-$ სიმძიმის ძალა, $m_{დრ} = c\varphi -$ სპირალური

ზამბარის დრეკადობის ძალის მომენტი. ვაჩვენოთ ნახაზზე ღეროს საწყისი და საბოლოო მდებარეობები, აგრეთვე, მოქმედი ძალები.

გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1)$$



საბოლოო მდებარეობაში ღერო გაჩერდება და მისი კინეტიკური ენერგია გახდება ნული,

ე.ი. $T = 0$.

მაშინ (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$-T_0 = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ ღეროს კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში:

$$T_0 = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\left[J_C + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M\ell^2}{12} + \frac{M\ell^2}{4}\right)\frac{v^2}{\ell^2} = \frac{Mv^2}{6}.$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა, რომელიც შეესაბამება ღეროს გადახრას 60^0 –ანი კუთხით მობრუნებისას.:

$$\sum A_k^e = A_{სიმძ} + A_{დრ}.$$

სადაც სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{სიმძ} = -Mgh = -Mg\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}cos60^0\right) = -\frac{Mg\ell}{4};$$

სპირალური ზამბარის დრეკადობის ძალის მუშაობა

$$A_{დრ} = -\int_0^{\varphi} m_{დრ}d\varphi = -\frac{c\varphi^2}{2} = -\frac{c\pi^2}{12}.$$

მაშინ

$$\sum A_k^e = -\frac{Mg\ell}{4} - \frac{c\pi^2}{12}.$$

მიღებული შედეგები ჩავსვათ (2) განტოლებაში, გვექნება:

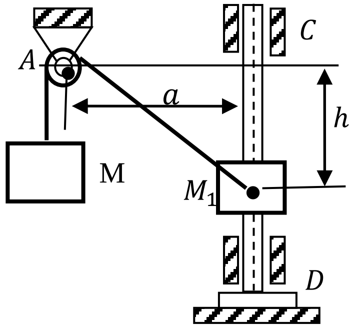
$$-\frac{Mv^2}{6} = -\frac{Mg\ell}{4} - \frac{c\pi^2}{12}.$$

აქედან ღეროს ბოლო წერტილის სიჩქარე

$$v = \sqrt{\frac{9Mg\ell + 2c\pi^2}{6M}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = \sqrt{\frac{9Mg\ell+2c\pi^2}{6M}}.$

ამოცანა 38.16



დრეკადი უჭიმარი ძაფის ბოლოებზე, რომელიც გადაკიდებულია საკმაოდ მცირე A ბლოკზე, ჩამოკიდებულია M_1 და M მასის ტვირთები. M_1 მასის ტვირთს შეუძლია სრიალი ბლოკის ღერძიდან a მანძილით დაშორებულ CD გლუვ ვერტიკალურ ღეროზე. M_1 ტვირთის სიმძიმის ცენტრი საწყის მომენტში მდებარეობდა ბლოკის ღერძთან ერთ დონეზე. სიმძიმის ძალის მოქმედებით M_1 ტვირთი საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება ქვევით. იპოვეთ დამოკიდებულება M_1 ტვირთი სიჩქარესა და დაშვების h სიმაღლეს შორის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება EK უჭიმარი ძაფით შეერთებული M_1 და M მასის ტვირთებისაგან (იხ. ნახაზი)

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \qquad (1)$$

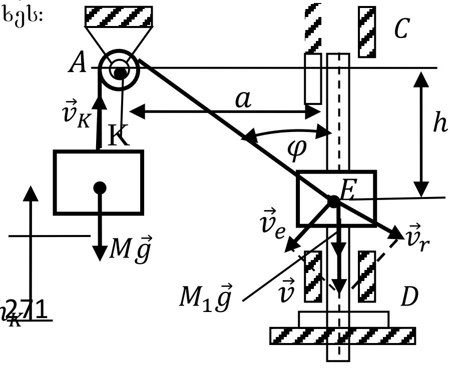
საწყის მდებარეობაში სისტემა იყო წონასწორობაში, ე.ი. $T_0 = 0.$ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი.

$$\sum A_k^i = 0.$$

მაშინ (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_k^e.$$

(2)



განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია,

როდესაც E ტვირთი დაეშვა h სიმაღლეზე:

$$T = T_E + T_K,$$

სადაც T_E, T_K −შესაბამისად E და K ტვირთების კინეტიკური ენერგიებია:

$$T_E = \frac{1}{2} M_1 v^2,$$

$$T_K = \frac{1}{2} M v_K^2.$$

ვიპოვოთ K ტვირთის სიჩქარე, რომელიც უდრის AK ძაფის სიჩქარეს. ძაფის ბოლო E წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე უდრის $\vec{v}$ −ს, რომელიც შედგება წარმტანი $\vec{v}_e$ და ფარდობითი $\vec{v}_r$ სიჩქარეებისაგან:

$$\vec{v}_r = \frac{d\overline{AE}}{dt} = \vec{v}_K.$$

სიჩქარეთა პარალელოგრამიდან ვიპოვით (იხ. ნახაზი):

$$v_r = v cos\varphi = v \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

მაშინ

$$T_K = \frac{1}{2} M \frac{v^2 h^2}{h^2 + a^2}.$$

განვსაზღვროთ ტვირთების სიმძიმის ძალების მუშაობები

$$A_E = M_1 g h,$$

$$A_K = -Mgh_K = -Mg\left(\sqrt{h^2 + a^2} - a\right),$$

მაშინ

$$\sum A_{k.}^e = M_1 g h - Mg\left(\sqrt{h^2 + a^2} - a\right).$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$\frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{1}{2} M \frac{v^2 h^2}{h^2 + a^2} = M_1 g h - Mg\left(\sqrt{h^2 + a^2} - a\right)$$

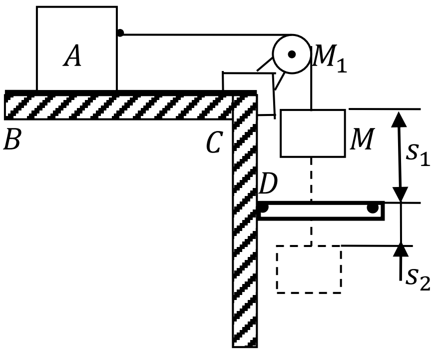
და ვიპოვოთ საძიებელი დამოკიდებულება:

$$v^2 = 2g(h^2 + a^2) \frac{M_1 h - M\left(\sqrt{h^2 + a^2} - a\right)}{M_1(h^2 + a^2) + Mh^2}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$v^2 = 2g(h^2 + a^2) \frac{M_1 h - M\left(\sqrt{h^2 + a^2} - a\right)}{M_1(h^2 + a^2) + Mh^2}.$$

ამოცანა 38.17



M მასის ტვირთს მასზე დადებული M_1 მასის ტვირთით ბლოკზე გადკიდებული ზონრის საშუალებით მოძრაობაში მოჰყავს ჰორიზონტალურ არაგლუვ BC სიბრტყეზე წონასწორობაში მყოფი M_2 მასის A სხეული. s_1 მანძილზე დაშვების შემდეგ M ტვირთი გადის რგოლში, რომელიც ჩამოხსნის M_1 ტვირთს, რის შედეგაც M ტვირთი კიდევ დაეშვება მანძილზე და გაჩერდება. განსაზღვრეთ A სხეულისა და სიბრტყეს შორის დინამიკური ხახუნის f კოეფიციენტი, თუ ზონარის მასა, ბლოკის ხახუნი და მისი მასა უგულებელყოფილია. მოცემულია: $M_2 = 0{,}8$კგ, $M=M_1=0{,}1$კგ, $s_1 = 50$სმ, $s_2 = 30$სმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$, $M\vec{g}$ სიმძიმის ძალების და A სხეულის ხახუნის ძალის $\vec{F}_{ხახ}$ მოქმედებით.

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_{k.}^{i} \qquad (1)$$

შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

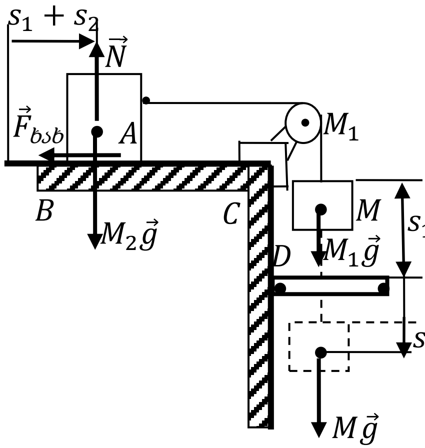
საწყის მდებარეობაში სისტემა იყო წონასწორობაში, ე.ი. . $T_0 = 0$ და გზის ბოლოშიც წონასწორობის მდებარეობაში იქნება, ე.ი. $T = 0.$

მაშინ (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\sum A_k^e = 0.$$

ან

$$\sum A_k^e = A_M + A_{M_1} + A_{M_2} + $$
$$+ A_{ხახ} + A_N = 0. \qquad (2)$$



M მასის ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_M = Mg(s_1 + s_2).$$

M_1 მასის ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{M_1} = M_1 g s_1.$$

A სხეულის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{M_2} = 0.$$

A სხეულის ხახუნის ძალის მუშაობა

$$A_{ხახ} = -\left|\vec{F}_{ხახ}\right|(s_1 + s_2) = -M_2 g f (s_1 + s_2).$$

N რეაქციის ძალის მუშაობა

$$A_N = \mathbf{0}.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) განტოლებაში და ვიპოვოთ ხახუნის f კოეფიციენტი:

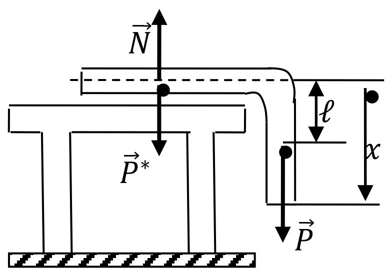
$$f = \frac{M(s_1 + s_2) + M_1 s_1}{M_2(s_1 + s_2)} = \frac{0{,}1(0{,}5 + 0{,}3) + 0{,}1 \cdot 0{,}5}{0{,}8(0{,}5 + 0{,}3)} = 0{,}2$$

პ ა ს უ ხ ი: $f = \frac{M(s_1+s_2)+M_1 s_1}{M_2(s_1+s_2)}$=0,2

ამოცანა 38.18

L სიგრძის ერთგვაროვანი ძაფი, რომლის ერთი ძევს გლუვ ჰორიზონტალურ მაგიდაზე, მოძრაობს ჩამოშვებული მეორე ნაწილის მასის გავლენით.. განსაზღვრეთ დროის ის T შუალედი, რომლის გავლის შემდეგ ძაფი ჩამოვარდება მაგიდიდან, თუ ცნობილია, რომ საწყის მომენტში ჩამოშვებული ნაწილის სიგრძე არის ℓ და საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ერთგვაროვანი ძაფის ნაწილის მოძრაობა ჩამოშვებული ნაწილის $\vec{P}$ სიმძიმის ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

რადგან ძაფი უჭიმარია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს,

ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

საწყის მომენტში ძაფის სიჩქარე ნულის ტოლი იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$

ამიტომ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ ძაფის კინეტიკური ენერგია

$$:T = \frac{1}{2} m v^2$$

სადაც m —მთელი ძაფის მასაა; $v = \frac{dx}{dt}$ — ძაფის სიჩქარე, x — ძაფის ჩამოშვებული ნაწილის სიგრძე.
განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_{P^*} + A_P + A_N.$$

მაგიდაზე მდებარე ძაფის ნაწილის სიმძიმის ძალის მუშაობა ნულის ტოლია, ე.ი.

$$A_{P^*} = 0.$$

ძაფის ჩამოშვებული ნაწილის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_P = \int_{\ell}^{x} \frac{m}{L} gx dx = \frac{m}{2L} g(x^2 - \ell^2).$$

გლუვი მაგიდის რეაქციის ძალის მუშაობა უდრის ნულს.
მაშასადამე,

$$\sum A_k^e = A_P.$$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (2) განტოლებაში:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2L} g(x^2 - \ell^2)$$

ან

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{x^2 - \ell^2}.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\ell}^{L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \ell^2}}.$$

მაშინ

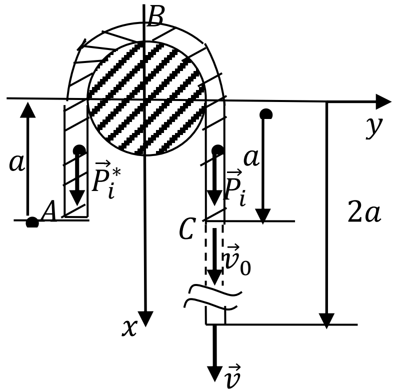
$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - \ell^2}}{\ell}\right).$$

პ ა ს უ ხ ი: $t = \sqrt{\frac{L}{g}} ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - \ell^2}}{\ell}\right).$

ამოცანა 38.19

$2a$ სიგრძის წონადი ერთგვაროვანი ძაფი, რომელიც ჩამოკიდებულია გლუვ წკირზე და წონასწორობის მდებარეობაშია, იწყებს მოძრაობას საწყისი სიჩქარით, განსაზღვრეთ ძაფის v_0 სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც იგი ჩამოცილდება წკირს.

ა მ ო ხ ს ნ ა



განვიხილოთ ერთგვაროვანი ძაფის მოძრაობა სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ძაფის ნაწილის სიმძიმის ძალა (იხ. ნახაზი)

$$\vec{P}_i = \frac{m}{2a} x\vec{g},$$

სადაც $m-$ მთლიანი ძაფის მასაა; $x-$ ძაფის ნაწილის სიგრძეა.

$$T - T_0 = \sum A^e_{k.} + \sum A^i_k. \qquad (1)$$

რადგან ძაფი უჭიმარია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს,

ე.ი. $\sum A^i_k = 0.$

განვსაზღვროთ ძაფის კინეტიკური ენერგია მოძრაობის დასაწყისში

$$: T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

და მაშინ, როცა იგი ჩამოვა წკირიდან:

$$: T = \frac{1}{2} m v^2.$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A^e_k = A_{AB} + A_{BC}.$$

ძაფის AB ნაწილის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{AB} = \int_a^0 \frac{mg}{2a} x dx = -\frac{mga}{4}.$$

ძაფის BC ნაწილის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{BC} = \int_a^{2a} \frac{mg}{2a} x dx = \frac{3mga}{4}.$$

მაშინ

$$\sum A^e_k = \frac{3mga}{4} - \frac{mga}{4} = \frac{mga}{2}.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

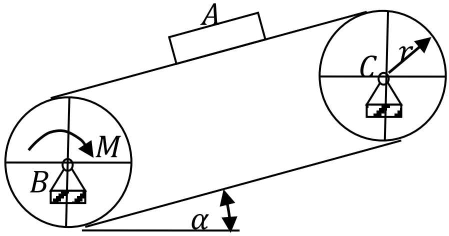
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mga}{2}$$

და ვიპოვოთ ძაფის სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც იგი ჩამოცილდება წკირს:

$$v = \sqrt{ag + v_0^2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = \sqrt{ag + v_0^2}.$

ამოცანა 38.20

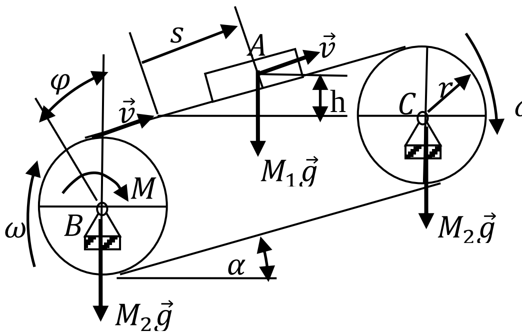


ტრანსპორტიორი მოძრაობაში მოდის წონასწორობის მდებარეობიდან მის ქვედა B ბორბალზე შეერთებული ამძრავის საშუალებით. ამძრავი ამ ბორბალს ანიჭებს მუდმივ მაბრუნ M მომენტს. განსაზღვრეთ ტრანსპორტიორის ლენტის v სიჩქარე მისი s გადაადგილების საშუალებით, თუ ასაწევი A ტვირთის მასა არის M_1, ხოლო ერთნაირი r რადიუსისა და M_2 მასის ბორბლები წარმოადგენენ წრიულ ცილინდრებს. ტრანსპორტიორის ლენტი, რომლის მასა იგულებელყოფილია, ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს. ენტი არ სრიალებს ბორბლებზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე A ტვირთისსაწყისი და საბოლოო მდებარეობა, ლილვის მობრუნების კუთხე და მოქმედი ძალები: $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ $-$ სიმძიმის ძალები, M $-$ მაბრუნი მომენტი,

გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1)$$



რადგან ტრანსპორტიორის ლენტი უჭიმარია, ამიტომ იგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს,

ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

ტრანსპორტიორი მოძრა-ობაში მოდის წონასწორო-ბის მდგომარეობიდან, ე.ი.

$$T_0 = 0.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_k^e. \quad (2)$$

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია, როდესაც A ტვირთი გადაადგილდა s მანძილზე:

$$T = T_A + T_B + T_C.$$

A ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_A = \frac{1}{2} M_1 v^2.$$

B და C დოლების კინეტიკური ენერგია

$$T_B = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{4},$$

$$T_C = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{4},$$

მაშინ

$$T = \frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{M_2 v^2}{4} = (M_1 + M_2) \frac{v^2}{2}.$$

ვიპოვოთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_M.$$

A სხეულის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_A = -M_1 g h = -M_1 g s \cdot sin\alpha\text{-}.$$

B დოლზე M მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_A = M\varphi = M\frac{s}{r}.$$

მაშინ

$$\sum A_k^e = M\frac{s}{r} - M_1 g s \cdot sin\alpha.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(M_1 + M_2)\frac{v^2}{2} = M\frac{s}{r} - M_1 g s \cdot sin\alpha$$

და ვიპოვოთ ტრანსპორტიორის ლენტი სიჩქარე:

$$v = \sqrt{\frac{2(M - M_1 g \cdot sin\alpha)}{r(M_1 + M_2)}. s}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = \sqrt{\frac{2(M - M_1 g \cdot sin\alpha)}{r(M_1 + M_2)}. s}.$

ამოცანა 38.21

ჰორიზონტალურ CD მილს თავისუფლად შეუძლია ბრუნვა ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო(იხ. 37.56 ამოცანის ნახაზი). მილის შიგნით ღერძიდან $MC = x_0$ მანძილზე ძევს M ბურთულა. დროის გარკვეულ მომენტში მილს მიანიჭეს ω_0 კუთხური სიჩქარე.

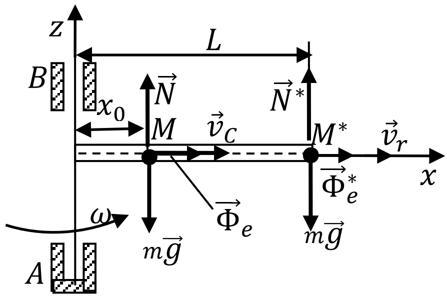
განსაზღვრეთ M ბურთულას სიჩქარე იმ მომენტში, როცა იგი გამოვარდება მილიდან. მილის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის J. $L-$ ღეროს სიგრძე; ხახუნი უგულებელყოფილია და ბურთულა ჩათვალეთ m მასის ნივთიერ წერტილად.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ 37.56 ამოცანის პასუხით

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ M ბურთულას მოძრაობა CD მილის შიგნით.

გამოვიყენოთ მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ფარდობით მოძრაობაში:



$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_{r0}^2}{2} =$$

$$= \sum \int_M^{M^*} F_i dS_r cos(\vec{F}_i, \vec{v}_r) + \sum \int_M^{M^*} \Phi_e dS_r cos(\vec{\Phi}_e, \vec{v}_r), \qquad (1)$$

სადაც $\vec{v}_r - M$ ბურთულას სიჩქარეა იმ მომენტში, როცა იგი გამოვარდება მილიდან.

საწყის მომენტში M ბურთულა CD მილის მიმართ უძრავია, ე.ი. v_r=0.

რადგან CD მილი ბრუნავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ M ბურთულას სიმძმის ძალის მუშაობა

$$\sum \int_M^{M^*} F_i dS_r cos(\vec{F}_i, \vec{v}_r) = 0.$$

ვიპოვოთ წარმტანი $\vec{\Phi}_e$ ინერციის ძალის მუშაობა:

$$\sum \int_M^{M^*} \Phi_e dS_r cos(\vec{\Phi}_e, \vec{v}_r) = \int_{x_0}^{L} m\omega^2 x dx = \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)_{x_0}^{L} =$$

$$= \frac{m\omega^2 L^2}{2} - \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}.$$

CD მილის კუთხური სიჩქრის მნიშვნელობა მისგან M ბურთულას გამოვარდნის მომანტში (იხ. 37.56 ამოცანის ამოხსნა):

$$\omega = \frac{J + mx_0^2}{J + mL^2}\omega_0.$$

მაშინ

$$\int_{x_0}^{L} m\omega^2 x dx = \frac{m\omega_0^2}{2}\left[\frac{J + mx_0^2}{J + mL^2}(L^2 - x_0^2)\right].$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\frac{mv_r^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2}\left[\frac{J + mx_0^2}{J + mL^2}(L^2 - x_0^2)\right]$$

და ვიპოვოთ M ბურთულას სიჩქარე:

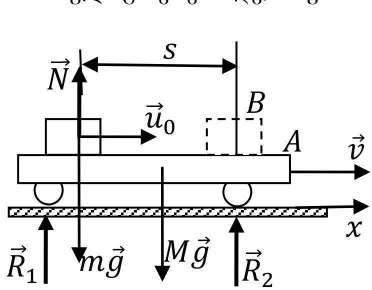
$$v_r = \omega_0\sqrt{\frac{J + mx_0^2}{J + mL^2}(L^2 - x_0^2)}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$v_r = \omega_0\sqrt{\frac{J + mx_0^2}{J + mL^2}(L^2 - x_0^2)}$$

ამოცანა 38.22

ჰორიზონტალურ A ბაქანზე, რომელიც მოძრაობს ხახუნის გარეშე, მუდმივი ფარდობითი u_0 სიჩქარით გადაადგილდება B სხეული (იხ. (36.11) ამოცანის ნახაზი). B სხეულის დამუხრუჭებისას მას და ბაქანს შორის წარმოიშობა ხახუნის ძალა. განსაზღვრეთ B სხეულის A ბაქანზე ხახუნის შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა B სხეულის დამუხრუჭებიდან A ბაქანის მიმართ მის სრულ გაჩერებამდე, თუ მათი მასები სათანადოდ m და M – ის ტოლია..



მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ 36.9 ამოცანის პასუხით

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება A ბაქნისა და B სხეულისაგან, მოცემული ძალების მოქმედებით.ვაჩვენოთ ნახაზზე B

სხეულისსაწყისი და საბოლოო მდებარეობები. გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური
ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \quad (1)$$

გარე ძალების მუშაობა ($m\vec{g}$ სიმძიმის ძალის და $\vec{N}$ ბაქნის რეაქციის) უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^e = 0.$

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია საწყის მომენტში:

$$T_0 = T_{A0} + T_{B0} \qquad (2)$$

A ბაქანის კინეტიკური ენერგია

$$T_{A0} = \frac{1}{2} M v_0^2.$$

B სხეულის კინეტიკური ენერგია

$$T_{B0} = \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} m (u_0 + v_0)^2.$$

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$T_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} m (u_0 + v_0)^2.$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = \frac{1}{2}(m + M) v^2. \qquad (3)$$

(36.9) ამოცანის პასუხის თანახმად

$$v = v_0 + \frac{m}{m + M} u_0.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (3) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$T = \frac{1}{2}(m + M)\left(v_0 + \frac{m}{m + M} u_0\right)^2 =$$

$$= \frac{(m + M)}{2} v_0^2 + m v_0 u_0 + \frac{m^2}{2(m + M)} u_0^2.$$

ჩავსვათ T_0-ის და T –ს მნიშვნელობები (1) განტოლებაში:

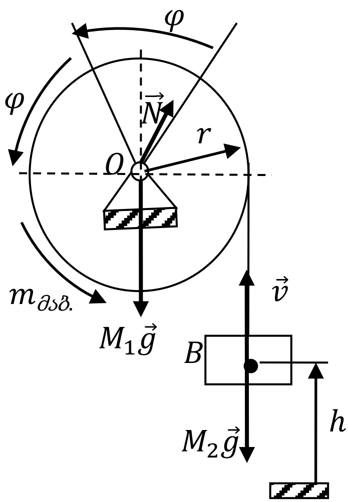
$$\frac{(m + M)}{2} v_0^2 + m v_0 u_0 + \frac{m^2}{2(m + M)} u_0^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2} m (u_0 + v_0)^2 = \sum A_k^i$$

და განვსაზღვროთ ხახუნის ძალის მუშაობა:

$$\sum A_k^i = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{m + M} u_0^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\sum A_k^i = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{m+M} u_0^2.$

ამოცანა 38.23



ელექტრული ჯალამბრის გაშვებისას r რადიუსის და M_1 მასის A დოლზე მოდებულია მაბრუნი $m_{მბ.}$ მომენტი,რომელიც მობრუნების φ კუთხის პროპორციულია; პროპორციულობისკ ოეფიციენტი უდრის a(იხ. 37.42 ამოცანის ნახაზი). განსაზღვრეთ ასაწევი M_2 მასისა B ტვირთის სიჩქარე მისი აწევის h სიმაღლეზე დამოკიდებულებით. დოლი ჩათვალეთ მთლიან წრიულ ცილინდრად. გვარლის მასა უგულებელყოფილია. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება A დოლისა და B ტვირთისაგან. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$ $-$ დოლის სიმძიმის ძალა, $M_2\vec{g}$ $-$ B ტვირთის სიმძიმის ძალა, $m_{მბ.}-$ მაბრუნი მომენტი, აგრეთვე სისტემის ელემნტების გადაადგილებები, რომელიც გამოვსახოთ B ტვირთის გადაადგილებით:

$$\varphi = \frac{h}{r}.$$

A დოლის კუთხური სიჩქარე გამოვსახოთ ასაწევი B ტვირთის სიჩქარით:

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \tag{1}$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია საწყის მომენტში:

$$T_0 = 0.$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_B \tag{2}$$

A დოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას

$$T_A = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1 r^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_1 v^2}{4}.$$

B ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$T_B = \frac{1}{2}M_2 v^2.$$

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$T = (M_1 + 2M_2)\frac{v^2}{4}.$$

სისტემის შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი.

$$\sum A_k^i = 0.$$

სისტემაზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა

$$\sum A_k^e = A_M + A_A + A_B. \qquad (3)$$

$m_{მბ.}$ მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_M = \int_0^{\varphi} m_{მბ.} d\varphi = a\int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2}a\varphi^2 = \frac{1}{2}a\frac{h^2}{r^2}.$$

A დოლის სიმძიმის ძალის მუშაობა A_A უდრის ნულს.

B ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_B = -M_2 gh.$$

(3) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = \frac{1}{2}a\frac{h^2}{r^2} - M_2 gh.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$(M_1 + 2M_2)\frac{v^2}{4} = \frac{1}{2}a\frac{h^2}{r^2} - M_2 gh$$

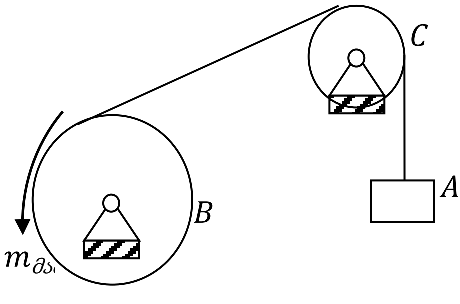
და ვიპოვოთ ასაწევი ტვირთის სიჩქარე:

$$v = \sqrt{\frac{2h(ah - 2M_2 gr^2)}{r^2(M_1 + 2M_2)}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $v = \sqrt{\frac{2h(ah-2M_2gr^2)}{r^2(M_1+2M_2)}}.$

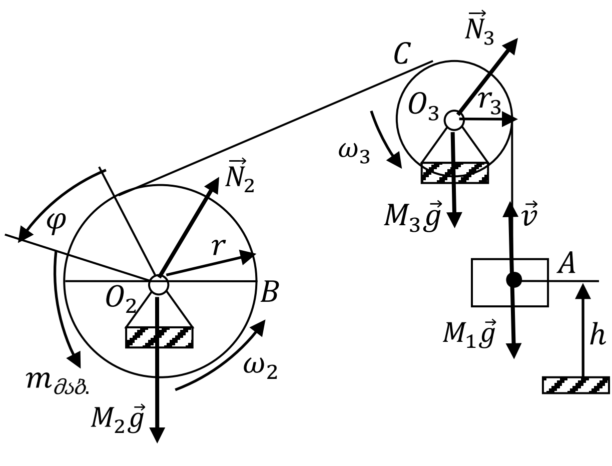
ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 38.24

ნახაზზე გამოსახულია ჯალამბრის ამწე მექანიზმი. M_1 მასის A ტვირთი აიწევა ზევით C ბლოკზე გადაკიდებული r რადიუსის და M_2 მასის B დოლზე დახვეული გვარლის საშუალებით. დოლზე მოდებულია მაბრუნი $m_{მბ.}$ მომენტი,რომელიც ჩართვის მომენტიდან დოლის მობრუნების φ კუთხის კვადრატის პროპორციულია $m_{მბ.} = a\varphi^2$, სადაც a მუდმივი კოეფიციენტია. განსაზღვრეთ A ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტში, როცაიგი ავა h სიმაღლეზე. დოლისმასა ჩათვალეთ მის ფერსოზეთანაბრად განაწილებულად. M_3 მასის C ბლოკი მთლიანი დისკოა. გვარლის მასა უგულებელყოფილია.საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ და, $M_3\vec{g}$ $-$ სიმძიმის ძალები, $m_{მბ.} -$ მაბრუნი მომენტი, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3 -$ ბმების რეაქციები. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის სხეულების საწყისი და საბოლოო მდებარეობები.

სისტემის საბოლოო მდებარეობისათვის, როდესაც A ტვირთი აიწევა h სიმაღლეზე, ვაჩვენოთ მოქმედი ძალები, სისტემაში შემავალი სხეულების სიჩქარეები, აგრეთვე, მათი გადაადგილებები საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში.



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების

თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \tag{1}$$

რადგან გვარლი შეგვიძლია განვიხილოთ როგოც უჭიმარია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^{i} = 0$.

საწყის მდებარეობაში კინეტიკური ენერგია იყო ნული, ე.ი. $T_0 = 0$. ამის გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

A ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$T_1 = \frac{1}{2}M_1 v^2.$$

B და C ბლოკების კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებენ ბრუნვით მოძრაობას

$$T_2 = \frac{1}{2}J_0\omega_2^2 = \frac{M_2 r^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{1}{2}J_0\omega_3^2 = \frac{1}{2}\frac{M_3 {r_3}^2}{2}\frac{v^2}{{r_3}^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{M_3 v^2}{4} = (2M_1 + 2M_2 + M_3)\frac{v^2}{4} \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა სისტემის საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში გადაადგილებისას

$$\sum A_k^{e} = A_1 + A_2 + A_3 + A_{m_{მბ.}} + A_{N_2} + A_{N_3}. \tag{5}$$

A ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_1 = -M_1 g h.$$

B დოლის და C ბლოკის სიმძიმის ძალების მუშაობები უდრის ნულს

B დოლზე მოდებული მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_{m_{მბ.}} = \int_0^{\varphi} a\varphi^2 d\varphi = \frac{a\varphi^3}{3}.$$

თუ დოლის მობრუნების φ კუთხეს გამოვსახავთ გვარლის h სიგრძის საშუალებით:

$$\varphi = \frac{h}{r},$$

მაშინ

$$A_{m_{ძვ.}} = \frac{ah^3}{3r^3}.$$

რეაქციის ძალების მუშაობები A_{N_2} და A_{N_3} უდრის ნულს. მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = \frac{ah^3}{3r^3} - M_1gh = \frac{(ah^2 - 3M_1ghr^3)h}{3r^3}. \qquad (6)$$

(4) და (5) გამოსახულებები ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(2M_1 + 2M_2 + M_3)\frac{v^2}{4} = \frac{(ah^2 - 3M_1ghr^3)h}{3r^3}.$$

და ვიპოვოთ A ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც იგი ავა h სიმაღლეზე:

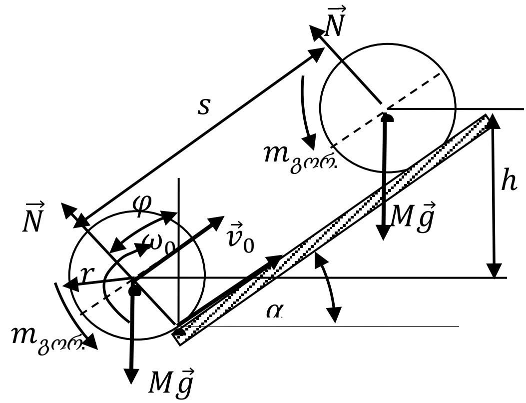
$$v = \sqrt{\frac{4h(ah^2 - 3M_1gr^3)}{3r^3(2M_1 + 2M_2 + M_3)}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = \sqrt{\frac{4h(ah^2-3M_1gr^3)}{3r^3(2M_1+2M_2+M_3)}}.$

ამოცანა 38.25

როგორი საწყისი კუთხური სიჩქარე უნდა მიენიჭოს r რადიუსის თვლის ღერძს დახრილი სიბრტყის უდიდესი დახრის წრფის პარალელურად, რომ იგი უსრიალო გორვით ავიდეს h სიმაღლეზე დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც ჰორიზონტთან α კუთხეს ქმნის. გორვის ხახუნის კოეფიციენტი არის $f_გ$ თვალი ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოდ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ თვლის გორვა დახრილ სიბრტყზე მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედებით: $M\vec{g}$ − სიმძიმის ძალა, $m_{გორ.}$ − გორვის ხახუნის მომენტი, $\vec{N}$ − ბმის რეაქცია. ვაჩვენოთ ნახაზზე თვლის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები, აგრეთვე, მასზე მოქმედი ძალები, თვლის ღერძის სიჩქარე და მისი გადაადგილება.



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^i \qquad (1)$$

რადგან ბორბალი შეგვიძლია ჩავთვალოთ აბსოლუტურად მყარ სხეულად, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

თვლის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში, როდესაც იგი გაჩერდა, იყო ნული, ე.ი. $T = 0.$

ამის გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-T_0 = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ თვლის კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში, რომელშიც იგი ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_0 = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}J_C\omega_0^2 = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v_0^2}{r^2} = \frac{3Mv_0^2}{4}. \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ თვალზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა მისი საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში გადაადგილებისას

$$\sum A_k^e = A_M + A_N + A_{ხახ} + A_{m_{გორ.}}. \qquad (5)$$

თვლის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_M = -Mgh.$$

სიბრტყის რეაქციის და ხახუნის ძალების მუშაობები უდრის ნულს, ე.ი. $A_N = A_{ხახ} = 0.$

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა +

$$A_{m_{გორ.}} = -m_{გორ.}\varphi = -Nf_{გ}\frac{s}{r} = -Mgcos\alpha f_{გ}\frac{h}{rsin\alpha} =$$

$$= -Mg\frac{f_{გ}}{r}hctg\alpha.$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_{k.}^{e} = -\left(Mgh + Mg\frac{f_{გ}}{r}hctg\alpha\right) = -Mgh\left(1 + \frac{f_{გ}}{r}ctg\alpha\right). \qquad (5)$$

(3) და (5) გამოსახულებები ჩავსვათ (2) ტოლობაში:

$$-\frac{3Mv_0^2}{4} == -\left(1 + \frac{f_{გ}}{r}ctg\alpha\right)Mgh$$

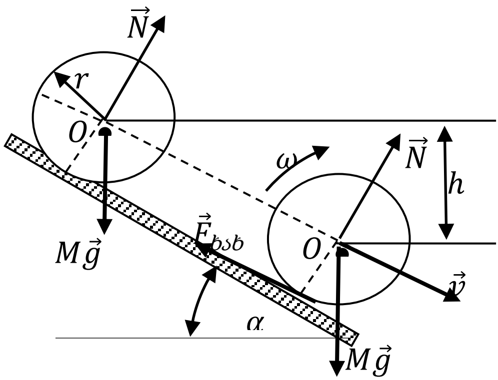
და ვიპოვოთ საწყისი სიჩქარე

$$v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1 + \frac{f_ვ}{r}ctg\alpha\right)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1 + \frac{f_ვ}{r}ctg\alpha\right)}.$

ამოცანა 38.26

ორი ერთნაირი მასისა და რადიუსის ცილინდრი ხახუნის გარეშე ჩამოგორდება დახრილ სიბრტყეზე. პირველი ცილინდრი მთლიანია, ხოლო მეორეს მასა შეიძლება ჩაითვალოს თანაბრად განაწილებულად მის ფერსოზე. იპოვეთ ცილინდრების სიმძიმის ცენტრების სიჩქარეებს შორის დამოკიდებულება, როცა ისინი დაეშვებიან ერთსა და იმავე სიმაღლეზე. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.



ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ თითოეული ცილინდრის გორვა დახრილ სიბრტყზე მასზე მოდებული მხოლოდ $M\vec{g}$ სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ვაჩვენოთ ნახაზზე თვლის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები, აგრეთვე, ცილინდრის სიჩქარე $\vec{v}$ და სიმაღლე h. .

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i$$

რადგან ცილინდრი შეგვიძლია ჩავთვალოთ აბსოლუტურად მყარ სხეულად, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

ორივე ცილინდრის კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში, ე.ი. $T_0 = 0$, ამიტომ

$$T = \sum A_{k.}^e \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ პირველი ცილინდრის (მთლიანი) კინეტიკური ენერგია, რომელშიც იგი დაეშვება h სიმაღლეზე:

$$T = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}J_C\omega_1^2 = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{3Mv_1^2}{4}. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ ცილინდრზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა მისი საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში გადაადგილებისას

$$\sum A_k^e = A_M + A_N,$$

სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_M = Mgh.$$

სიბრტყის რეაქციის ძალის მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $A_N = 0.$ მაშასადამე

$$\sum A_{k.}^e = Mgh. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და ვიპოვოთ პირველი ცილინდრის სიჩქარე:

$$v_1 = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$$

განვსაზღვროთ მეორე ცილინდრის კინეტიკური ენერგია, რომლის მასა თანაბრადაა განაწილებული მის ფერსოზე, როცა .იგი დაეშვება h სიმაღლეზე:

$$T = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{1}{2}J_0\omega_2^2 = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{1}{2}Mr^2\frac{v_2^2}{r^2} = Mv_2^2.$$

ცილინდრზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა მისი საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში გადაადგილებისას ისეთივეა როგორც პირველ შემთხვევაში

$$\sum A_k^e = A_M + A_N = Mgh.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები (1) ტოლობაში და ვიპოვოთ მეორე ცილინდრის სიჩქარე:

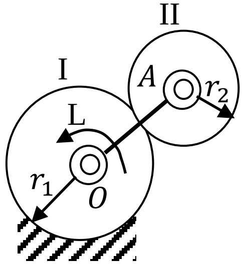
$$v_2 = \sqrt{gh}.$$

მაშინ ცილინდრების სიჩქარეების შეფარდება იქნება:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

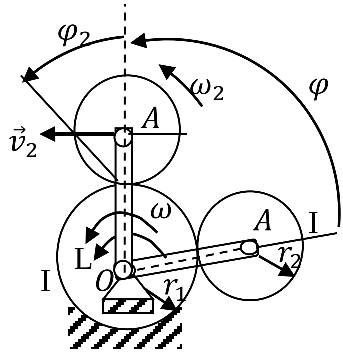
პ ა ს უ ხ ი: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

ამოცანა 38.27



ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარე ეპიციკლური მექანიზმი წონასწორობის მდებარეობიდან მოძრაობაში მოდის მასზე მოდებული მუდმივი მაბრუნი L მომენტით. განსაზღვრეთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე მისი მობრუნების კუთხის საშუალებით, თუ უძრავი I თვლის რადიუსია r_1, მოძრავი II თვლის რადიუსი r_2 და მასა M_1 , ხოლო OA მრუდმხარას მასა$-M_2$. II თვალი მიიღეთ ერთგვაროვან დისკოდ, ხოლო მრუდმხარა-ერთგვაროვან ღეროდ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება უძრავი I თვლის, OA მრუდმხარას და მოძრავი II თვლისაგან. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის სხეულების საწყისი და საბოლოო მდებარეობები, მაბრუნი L მომენტი, სისტემაში შემავალი სხეულების სიჩქარეები და მათი გადაადგილებები.



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^i \tag{1}$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ $\sum A_k^i = 0.$

სისტემა მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან, ამიტომ $T_0 = 0.$ ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \tag{2}$$

განვსაზღვროთ კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_{OA} + T_{II}.$$

OA მრუდმხარას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას O წერტილში გამავალი ღერძის მიმართ:

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2}\left[J_C + M_2\left(\frac{OA}{2}\right)^2\right]\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{M_2 OA^2}{12} + \frac{M_2 OA^2}{4}\right]\omega^2 = \frac{M_2(OA)^2\omega^2}{6} = \frac{M_2(r_1+r_2)^2}{6}\omega^2.$$

II თვლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_{II} = \frac{M_1 v_2^2}{2} + \frac{1}{2}J_A\omega_2^2 = \frac{M_1 v_2^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{M_1 r_2^2}{2}\frac{v_2^2}{r_2^2} = \frac{3M_1 v_2^2}{4}.$$

გამოვსახოთ II თვლის A ცენტრის სიჩქარე OA მრუდმხარას კუთხური სიჩქარის საშუალებით:

$$v_2 = \omega(r_1 + r_2).$$

მაშინ

$$T_{II} = \frac{3M_1(r_1+r_2)^2}{4}\omega^2,$$

$$T = \frac{3M_2(r_1+r_2)^2}{6}\omega^2 + \frac{3M_1(r_1+r_2)^2}{4}\omega^2 =$$

$$= (9M_1 + 2M_2)\frac{(r_1+r_2)^2}{12}\omega^2. \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ ცილინდრზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა მისი საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში გადაადგილებისას

$$\sum A_k^e = A_M + A_L = A_L,$$

რადგამ მექანიზმი განლაგებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ სიმძიმის ძალის მუშაობა A_M ნებისმიერ φ გადადგილებაზე უდრის ნულს.

მაბრუნი L მომენტის მუშაობა φ გადადგილებაზე

$$A_L = L \cdot \varphi.$$

მაშასადამე,

$$\sum A_k^e = L \cdot \varphi. \qquad (4)$$

(3) და (4) გამოსახულებები ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(9M_1 + 2M_2)\frac{(r_1+r_2)^2}{12}\omega^2 = L \cdot \varphi$$

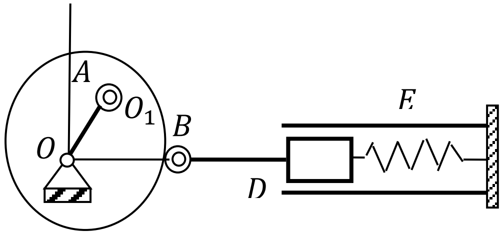
და ვიპოვოთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{3L \cdot \varphi}{9M_1 + 2M_2}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\frac{3L\cdot\varphi}{9M_1+2M_2}}.$

ამოცანა 38.28

ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარე მუშტა მექანიზმში A ექსცენტრიკს უკუქცევით-გადატანით მოძრაობაში მოჰყავს B გორგოლაჭი D შტანგთან ერთად. E ზამბარა შეერთებულია D შტანგთან და უზრუნველყოფს მუდმივ კონტაქტს გორგოლაჭის ექსცენტრიკსთან.



ექსცენტრიკის მასა უდრის M –ს.. e ექსცენტრისიტეტი მისი რადიუსის ნახევრის ტოლია; ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი არის c. შტანგის უკიდურესი მარცხენა მდებარეობისას ზამბარა დაუძაბავია. როგორი კუთხური სიჩქარე უნდა მიენიჭოს ექსცენტრიკს იმისათვის, რომ მან D შტანგი მარცხენა უკიდურესი მდებარეობიდან გადაადგილოს მარჯვენა უკიდურესი მდებარეობაში. გორგოლაჭის, შტანგისა და ზამბარის მასა უგულებელყოფილია. ექსცენტრისიტეტი ჩათვალეთ ერთგვაროვან წრიულ დისკოდ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მუშტა მექანიზმის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მექანიზმის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები. მოძრაობისას A ექსცენტრიკი მობრუნდება $\varphi = \pi$, ხოლო B გორგოლაჭი D შტანგთან ერთად გადაადგილდება $2OO_1 = 2e = r$.

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

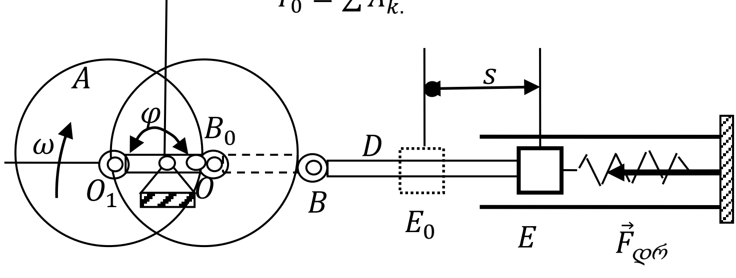
$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^i \qquad (1)$$

სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

საბოლოო მდებარეობაში სისტემა გაჩერდა და მისი კინეტიკური ენერგია გახდა ნული, ე.ი. $T = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$-T_0 = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$



განვსაზღვროთ კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში. რადგან გათვალისწინებულია მხოლოდ A ექსცენტრიკის მასა, ამიტომ

$$T_O = T_A.$$

A ექსცენტრიკი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას O წერტილში გამავალი ღერძის მიმართ, ამიტომ

$$T_{OA} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}[J_0 + Me^2]\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{Mr^2}{2} + M\left(\frac{r}{2}\right)^2\right]\omega_0^2 \quad =$$

$$= \frac{3Mr^2}{8}\omega^2 \, . \qquad (3)$$

მექანიზმი გადაადგილდება ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ ექსცენტრიკის სიმძიმის ძალა მუშაობას არ ასრულებს.

მუშაობას შეასრულებს მხოლოდ ზამბარის დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{დრ}$. ეს ნიშნავს, რომ

$$\sum A_{k.}^e = A_{დრ} = -\int_0^s cxdx = -\frac{cs^2}{2} = -\frac{cr^2}{2}. \qquad (4)$$

(3) და (4) გამოსახულებები ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$-\frac{3Mr^2}{8}\omega^2 = -\frac{cr^2}{2}$$

და ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე

$$\omega = 2\sqrt{c/(3M)}.$$

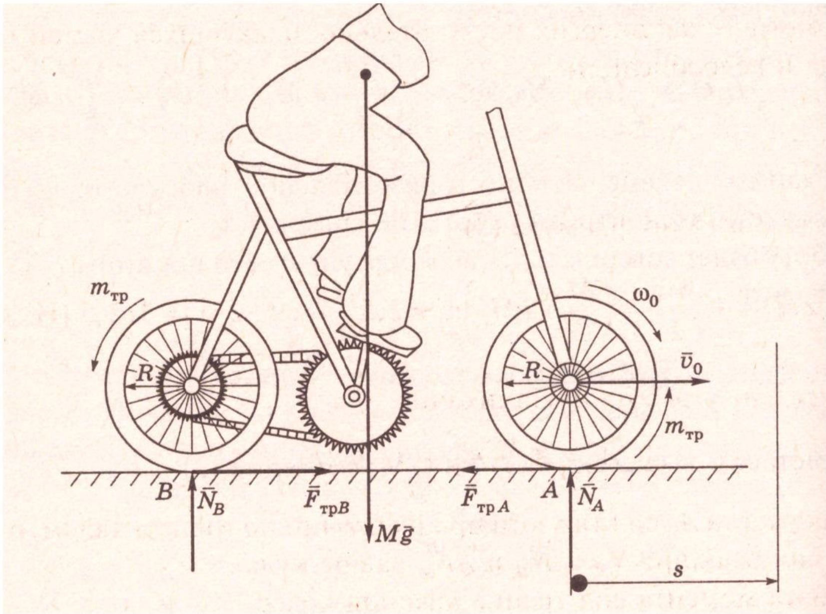
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\omega = 2\sqrt{c/(3M)}.$

ამოცანა 38.29

რა მანძილს გაივლის გაჩერებამდე ველოსიპედისტი შეჩერებული სატერფულებით, თუ მისი საწყისი სიჩქარე იყო 9კმ/სთ; ველოსიპედისა და ველოსიპედისტის საერთო მასა არის 80კგ, ყოველი თვლის მასა =5კგ, ყოველი თვლის მასა იგულისხმება თანაბრად განაწილებულად 50სმ რადიუსის წრეწირზე. მიწაზე გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის 0.5სმ-ს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომელიც სქემაზე შედგება ველოსიპედისა და ველოსიპედისტისაგან. ვაჩვენოთ ნახაზზე ველოსიპედის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები., აგრეთვე, მასზე მოქმედი ძალები: $M\vec{g}$ $-$ ველოსიპედისა და ველოსიპედისტის ერთად სიმძიმის ძალა, $m_{გორ.}-$ გორვის ხახუნის მომენტი, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ $-$ ბმების რეაქციები, $\vec{F}_{ხახA}$, $\vec{F}_{ხახB}$ $-$ ბორბლების

ხახუნის ძალები, აგრეთვე, ველოსიპედის საწყსის სიჩქარე და მისი გზა გაჩერებამდე.



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

გზის ბოლოს, როდესაც ველოსიპედი გაჩერდა მისი კინეტიკური ენერგია გახდა ნული, ე.ი. $T = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$m_{გორ}$

$$-T_0 = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში:

$$T_0 = 2T_1 + T_2.$$

ბორბლების კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებენ ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_1 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2} J \quad \vec{F}_{ხახB} \quad \frac{v_0^2}{2} + \quad \vec{F}_{ხახA} \quad \frac{v_0^2}{R^2} = M_1 v_0^2.$$

ველოსიპედისა და ველოსიპედისტის გადატანით მოძრავი ნაწილების კინეტიკური ენერგია:

$$T_2 = \frac{Mv_{0.}^2}{2}$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში იქნება:

$$T_0 = 2M_1 v_0^2 + \frac{Mv_{0.}^2}{2} = \left(2M_1 + \frac{M}{2}\right) v_0^2 = 312{,}5(\text{ნ.მ})$$

განვსაზღვროთ სისტემაზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა მისი საწყისი მდებარეობიდან საბოლოო მდებარეობაში გადაადგილებისას

$$\sum A_k^e = A_M + A_N + A_{ხახ} + A_{m_{გორ.}} = A_{m_{გორ.}},$$

რადგან სიმძიმის ძალების A_Mმუშაობა, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ ბმების რეაქციების A_N მუშაობა და ხახუნის ძალის $A_{ხახ}$ მუშაობა ველოსიპედის ჰორიზონტალური მოძრაობისას უდრის ნულს.

ველოსიპედის ბორბლების გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_{m_{გორ.}} = -m_{გორ.} \cdot \varphi = -(N_A + N_B) f_{გ,} \varphi \frac{s}{R} =$$

$$= -(2 \cdot 5 + 80) \cdot 9{,}8 \cdot 0.005 \cdot \frac{s}{0{,}5} = -8{,}82s.$$

T_0 და $\sum A_k^e$ მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) განტოლებაში

$$-312{,}5 = -8{,}82s$$

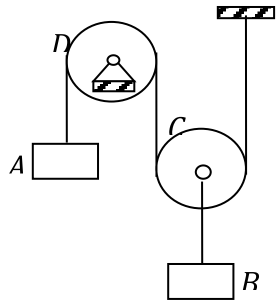
და ვიპოვოთ გაჩერებამდე გავლილი გზა

$$s = 35{,}4\text{მ}.$$

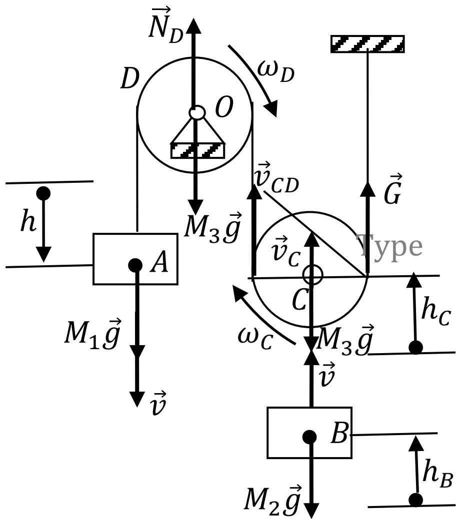
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $s = 35{,}4$მ.

ამოცანა 38.30

. M_1 მასის A ტვირთი ქვევით უძრავ D ბლოკზე გადადებული გვარლის საშუალებით ეწევა ზევით მოძრავ C ბლოკზე მიმაგრებული M_2 მასის B ტვირთს. C და D ბლოკები ჩათვალეთ ერთგვაროვან, თითოეული M_3 მასის მთლიან დისკოებად. განსაზღვრეთ A ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტში, როცა იგი დაეშვება h სიმაღლეზე. გვარლის მასა, ბლოკის ფერსოებზე სრიალი და წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია.საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.



ა მ ო ხ ს ნ ა განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე საბოლოო მდებარეობა, როდესაც A ტვირთი დაეშვება h სიმაღლეზე. სისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$ – ტვირთების სიმძიმის ძალები, $M_3\vec{g}-$ C და D ბლოკების სიმძიმის ძალები, $\vec{N}_D$, $\vec{G}-$ ბმების რეაქციის ძალები. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის სხეულების სიჩქარეთა ვექტორები. გამოვსახოთ ისინი A ტვირთის სიჩქარით:



$$\omega_D = \frac{v}{r},$$
$$v_{CD} = v,$$
$$v_C = v_B = \frac{v_{CD}}{2} = \frac{v}{2},$$
$$\omega_C = \frac{v}{2r}.$$

C ბლოკის და B ტვირთის გადაადგილებები გამოვსახოთ A ტვირთის h გადაადგილებით. რადგან გადაადგილებები სიჩქარეების პროპორციულია, ამიტომ

$$h_C = h_B = \frac{h}{2}.$$

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

სისტემა მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან, ამიტომ $T_0 = 0$. ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემისკინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D. \qquad (3)$$

A და B ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებენ გადატანით მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულებით

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2},$$
$$T_B = \frac{M_2 v_B^2}{2} = \frac{M_2 (v/2)^2}{2} = \frac{M_2 v^2}{8}.$$

მოძრავი C ბლოკის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულით:

$$T_C = \frac{M_3 v_C^2}{2} + \frac{1}{2} J_0 \omega_C^2 = \frac{M_3 v_C^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v_C^2}{r^2} = \frac{3M_3 v^2}{16}.$$

D ბლოკის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულით:

$$T_D = \frac{1}{2} J_0 \omega_D^2 = \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{8} + \frac{3M_3 v^2}{16} + \frac{M_3 v^2}{4} = (8M_1 + 2M_2 + 7M_3) \frac{v^2}{16}. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_C + A_D + A_N + A_G. \qquad (5)$$

A ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა:

$$A_A = M_1 g h.$$

B ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა:

$$A_B = -M_2 g h_B = -M_2 g \frac{h}{2}.$$

მოძრავი C ბლოკის სიმძიმის ძალის მუშაობა:

$$A_C = -M_2 g h_C = -M_3 g \frac{h}{2}.$$

D ბლოკის სიმძიმის ძალის, $\vec{N}_D$, $\vec{G}$ $-$ ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები ნულის ტოლია.

მაშასადამე, (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = (2M_1 - M_2 - M_3) \frac{gh}{2}. \qquad (6)$$

ჩავსვათ (4) და (6) გამოსახულებები (2) განტოლებაში:

$$(8M_1 + 2M_2 + 7M_3) \frac{v^2}{16} = (2M_1 - M_2 - M_3) \frac{gh}{2}$$

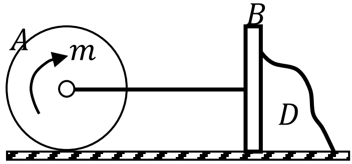
და ვიპოვოთ

$$v = 2\sqrt{2gh \frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = 2\sqrt{2gh \frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}.$

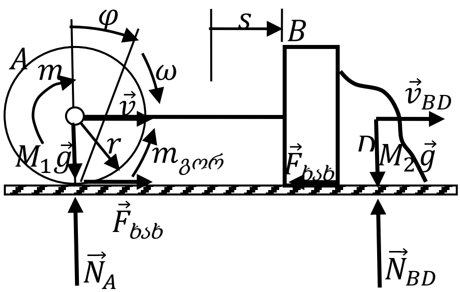
ამოცანა 38.31

თოვლსაწმენდის წამყვან თვალზე - A დოლზე მოდებულიამუდმივი მაბრუნი m მომენტი. A დოლის მასა ჩათვლილია თანაბრად განაწილებულად მის ფერსოზე. D თოვლის და B ფარის და ყველა გადატანითად მოძრავი ნაწილების ჯამური მასა უდრის M_2. არისა და თოვლის მიწასთან სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f, ხოლო დოლის მიწაზე გორვის ხახუნის კოეფიციენტი$-f_გ$. დოლის მასა უდრის M_1, მისი რადიუსი-r.



განსაზღვრეთ დამოკიდებულება B ფარის მიერ განვლილი S მანძილისა და მისი სიჩქარის მოდულს შორის, თუ საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე საანგარიშო სქემა საბოლოო მდებარეობისათვის, როდესაც B ფარმა გაიარა S მანძილი. შისტემაზე მოქმედებენ გარე ძალები: $M_1\vec{g}$ – A დოლის სიმძიმის ძალა, $M_2\vec{g} - B$ ფარის და თოვლის სიმძიმის ძალა, $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_{BD}$ – რეაქციის ძალები, $\vec{F}_{ხახ}$ – სრიალის ხახუნის ძალა, m – მაბრუნი მომენტი, $m_{გორ}$ – გორვის ხახუნის მომენტი.



A დოლის წრფივი სიჩქარე $\vec{v}$ უდრის B ფარის თოვლთან ერთად $\vec{v}_{BD}$ სიჩქარეს.

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

სისტემა მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან, ამიტომ $T_0 = 0$. ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში, როცა B ფარმა გაიარა S მანძილი.

:

$$T = T_A + T_{BD}. \tag{3}$$

A დოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულით:

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} M_1 r^2 \frac{v^2}{r^2} = M_1 v^2.$$

B ფარის თოვლთან ერთად კინეტიკური ენერგია

$$T_{BD} = \frac{M_2 v_{BD}^2}{2} = \frac{M_2 v^2}{2}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = (2M_1 + M_2)\frac{v^2}{2}. \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა S გადაადგილებაზე:

$$\sum A_k^e = A_A + A_{BD} + A_N + A_m + A_{ხახ} + A_{გორ}. \tag{5}$$

თოვლსაწმენდი მოძრაობს ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, ამიტომ სიმძიმის ძალების მუშაობები A_A და A_{BD} უდრის ნულს.

$\vec{N}_A$ და $\vec{N}_{BD}$ – რეაქციის ძალების მუშაობებიც ნულის ტოლია.

მაბრუნი m მომენტის მუშაობა

$$A_m = m\varphi = m\frac{s}{r}.$$

სრიალის ხახუნის ძალის მუშაობა:

$$A_{ხახ} = -F_{ხახ} s = -N_{BD} f s = -M_2 g f s.$$

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა:

$$A_{გორ} = -M_{გორ}\varphi = -N_A f_{გ} \frac{s}{r} = -M_1 g \frac{f_{გ}}{r} s.$$

მაშასადამე, (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = m\frac{s}{r} - M_2 g f s - M_1 g \frac{f_{გ}}{r} s = \left(m - M_1 g f_{გ} - M_2 g f r\right)\frac{s}{r}. \tag{6}$$

(4) და (2) გამოსახულებები ჩავსვათ (2) განტოლებაში

$$(2M_1 + M_2)\frac{v^2}{2} = \left(m - M_1 g f_{გ} - M_2 g f r\right)\frac{s}{r}$$

და ვიპოვოთ B ფარის გავლილი მანძილი

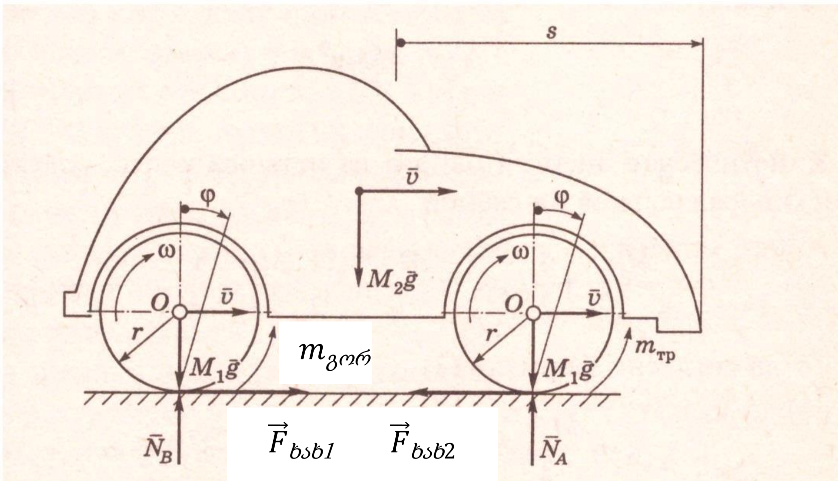
$$s = \frac{r}{2} \cdot \frac{2M_1 + M_2}{m - M_1 g f_{გ} - M_2 g f r} v^2$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $s = \frac{r}{2} \cdot \frac{2M_1+M_2}{m-M_1gf_{გ,}-M_2gfr} v^2$

ამოცანა 38.32

ავტომობილის ძრავის სიმძლავრის გადიდებასთან დაკავშირებით მისი სიჩქარე სწორ ჰორიზონტალურ გზაზე გაიზარდა $v_1 -$ დან $v_2 -$ მდე. ამ დროში მან გაიარა s მანძილი. განსაზღვრეთ ძრავის მიერ შესრულებული მუშაობა ამ გადაადგილებაზე, თუ თითოეული ოთხი თვლის მასაა M_1, M_2 —ძარის მასა, $r -$ თვლის რადიუსი, $f_{გ,} -$ თვლის გზაზე გორვის ხახუნის კოეფიციენტი. უსრიალოდ მგორავი თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან მთლიან დისკოებად. ძარასა და თვლების გარდა, ყველა დანარჩენი ნაწილის კინეტიკური ენერგია უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ავტომობილის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ავტომობილის საწყისი მდებარეობა.



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A^e_{k.} + \sum A^i_k$$

გზის დასაწყისში სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T_0 = T_2 + 4T_1. \tag{1}$$

ძარის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულით:

$$T_2 = \frac{M_2 v_0^2}{2}.$$

ერთი თვლის კ ინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულით:

$$T_1 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_1 r^2}{2} \frac{v_0^2}{r^2} = \frac{3 M_1 v_0^2}{4}. \qquad (2)$$

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$T_0 = \frac{M_2 v_0^2}{2} + \frac{3 M_1 v_0^2}{4} = (6M_1 + M_2) \frac{v_0^2}{2}.$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია გზის ბოლოს

$$T = T_2 + 4T_1. \qquad (3)$$

ძარის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$T_2 = \frac{M_2 v^2}{2}$$

ერთი თვლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას, გამოითვლება ფორმულით:

$$T_1 = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_1 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{3 M_1 v^2}{4}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_2 v^2}{2} + 4\left(\frac{3 M_1 v^2}{4}\right) = (6M_1 + M_2) \frac{v^2}{2}. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა S გადაადგილებაზე:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_N + A_{ხახ} + A_{გორ.} = A_{გორ.} \qquad (5)$$

ავტომობილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, ამიტომ სიმძიმის ძალების მუშაობები A_1 და A_2 უდრის ნულს.

ხახუნის ძალის მუშაობა $A_{ხახ}$ და $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ რეაქციის ძალების A_N მუშაობებიც ნულის ტოლია.

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა:

$$A_{გორ} = -M_{გორ}\varphi = -N_A f_{გ,} \frac{s}{r} = -(M_2 + 4M_1) g f_{გ,} \frac{s}{r}. \qquad (6)$$

შიგა ძალების მუშაობა-ეს ძრავის მუშაობაა, ე.ი.

$$\sum A_k^i = A_{M.} \qquad (7)$$

ჩავსვათ (7), (6), (4) და (2) გამოსახულებები (2) განტოლებაში

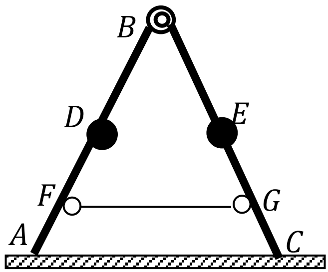
$$(6M_1+M_2)\frac{v^2}{2}-(6M_1+M_2)\frac{v_0^2}{2}=-(M_2+4M_1)gf_{გ,}\frac{s}{r}+A_M.$$

და ვიპოვოთ ძრავის მიერ შესრულებული მუშაობა

$$A_M=\frac{6M_1+M_2}{2}(v^2-v_0^2)+\frac{f_{გ,}}{r}(M_2+4M_1)gs.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ $A_M=\frac{6M_1+M_2}{2}(v^2-v_0^2)+\frac{f_{გ,}}{r}(M_2+4M_1)gs.$

ამოცანა 38.33



$B-$ სახსრიანი ABC კიბე დგას გლუვ ჰორიზონტალურ იატაკზე, სიგრძე $AB=BC=2\ell,$ მასათა ცენტრები მდებარეობს ღეროების D და E შუაწერტილებში. კიბის თითოეული ნაწილის ინერციის რადიუსი მისი მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ უდრის ρ. B სახსრის დაშორება იატაკიდან არის h. დროის გარკვეულ მომენტში FG მოსაჭიმის გაწყვეტის გამო კიბე იწყებს ვარდნას. სახსარში ხახუნის უგულებელყოფით განსაზღვრეთ: 1) B წერტილის v სიჩქარე იატაკზე მისი დარტყმის მომენტში; 2) B წერტილის v სიჩქარე იმ მომენტში, როცა მისი დაშორება იატაკიდან უდრის $\frac{1}{2}h$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) განვიხილოთ ABC კიბის მოძრაობა FG მოსაჭიმის გაწყვეტის შემდეგ. ვაჩვენოთ საანგარიშო სქემაზე (ნახ.1). მოსაჭიმის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები. მოსაჭიმის მოძრაობის დასახასიათებლად დაცემის დროის განმავლობაში ვისარგებლოთ სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემით ჰორიზონტალურ ღერძზე x გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_B=\sum F_{kx}^e$$

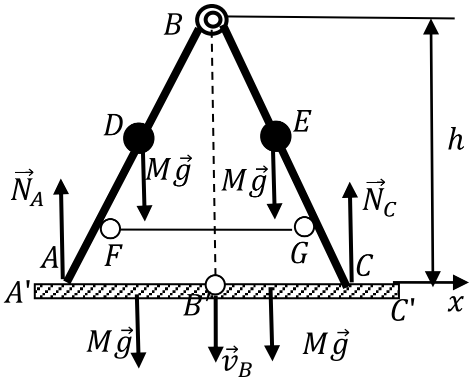
რადგან $\sum F_{kx}^e=0$ ამიტომ $x_B=const$ და B სახსრი იმოძრავებს BB' ვერტიკალზე.

B სახსრის v სიჩქარის საპოვნელად ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \quad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, (1)ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

სახსრიანი ABC კიბე მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან,



ნახ.1.

ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია უდრის ნულს, ე.ი. $T_0 = 0.$ ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \quad (2)$$

განვსაზღვროთ AB კიბის კინეტიკური ენერგია იატაკზე მისი დაცემის მომენტში B სახსრის სიჩქარე მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით, ხოლო კიბის ბოლო A წერტილის სიჩქარე მიმართული შეიძლება იყოს მხოლოდ იატაკის გასწვრივ.

ვიპოვოთ კიბის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამისათვის $\vec{v}_B$ და $\vec{v}_A$ სიჩქარეების საწყისი წერტილებიდან აღვმართოთ ამ ვექტორების მართობები. ამ მართობების გადაკვეთის A' წერტილი არის ABC კიბის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, მაშასადამე, დაცემის მომენტში კიბე ასრულებს მყის ბრუნვით მოძრაობას A' წერტილის ირგვლივ.

მაშინ

$$T_{AB} = \frac{1}{2} J_{A0}\omega^2 = \frac{1}{2}[J_D + M(AD)^2]\frac{v^2}{(AB)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}[M\rho^2 + M\ell^2]\frac{v^2}{4\ell^2} = \frac{M(\rho^2 + \ell^2)v^2}{8\ell^2}.$$

ანალოგიურად, BC კიბის კინეტიკური ენერგია

$$T_{BC} = \frac{M(\rho^2 + \ell^2)v^2}{8\ell^2}.$$

მაშინ სახსრიანი ABC კიბის კინეტიკური ენერგია დაცემის მომენტში

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{M(\rho^2 + \ell^2)v^2}{8\ell^2}. \quad (3)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_{AB} + A_{BC} + A_N. \quad (4)$$

AB კიბის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{AB} = Mg\frac{h}{2}.$$

BC კიბის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{BC} = Mg\frac{h}{2}.$$

$\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B -$ რეაქციის ძალების მუშაობებიც ნულის ტოლია,ე.ი. $A_N = 0.$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = 2Mg\frac{h}{2} = Mgh. \quad (5)$$

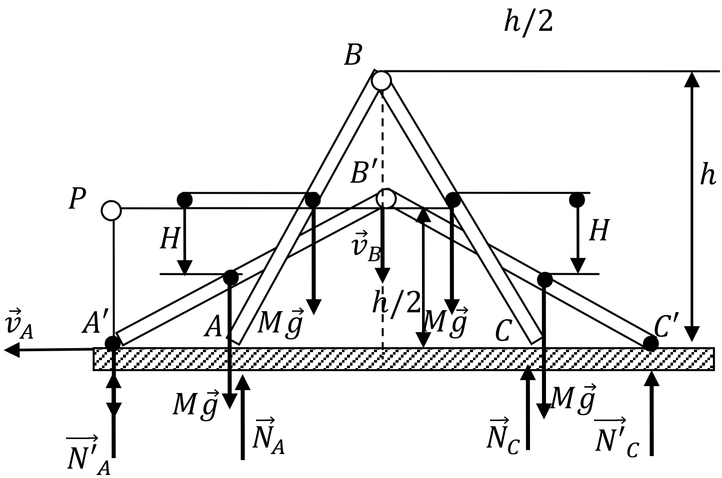
ჩავსვათ (3) და (5) გამოსახულებები (2) განტოლებაში

$$\frac{M(\rho^2 + \ell^2)v^2}{8\ell^2} = Mgh$$

და ვიპოვოთ B სახსრის სიჩქარე:

$$v = 2\ell\sqrt{\frac{gh}{\rho^2 + \ell^2}}.$$

2) განვსაზღვროთ B სახსრის სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც იატაკამდე მანძილი იქნება $\frac{h}{2}$. ვაჩვენოთ საანგარიშო სქემაზე (ნახ.2) სახსრიანი ABC კიბის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები.



ნახ.2.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i}$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^{i} = 0$. სახსრიანი ABC კიბე მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია უდრის ნულს, ე.ი. $T_0 = 0$. ამის გათვალისწინებით:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \tag{6}$$

განვსაზღვროთ AB კიბის კინეტიკური ენერგია იმ მომენტში, როდესაც იატაკამდე მანძილი იქნება $\frac{h}{2}$. B სახსრის სიჩქარე მიმართულია ვერტიკა-ლურად ქვევით, კიბის ბოლო A წერტილის სიჩქარე $\vec{v}_A$ მიმართულია იატა-კის გასწვრივ ჰორიზონტალურად მარცხნივ. AB კიბის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს P წერტილში. AB კიბის კუთხური სიჩქარე ვიპოვოთ თანაფარდობიდან

$$\frac{v_B}{B'P} = \frac{v_A}{A'P} = \omega_{AB},$$

ან

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{B'P} = \frac{v_B}{\sqrt{(A'B')^2 - (A'P)^2}} = \frac{v_B}{\sqrt{4\ell^2 - h^2/4}} = \frac{v_B}{\sqrt{16\ell^2 - h^2}}.$$

AB კიბის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას გამოითვლება ფორმულით:

$$T_{AB} = \frac{1}{2} J_p \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}[J_{D'} + M(D'P)^2]\omega_{AB}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}[M\rho^2 + M\ell^2]\left(\frac{v_B}{\sqrt{16\ell^2 - h^2}}\right)^2 = \frac{2(\rho^2 + \ell^2)Mv_B^2}{16\ell^2 - h^2}.$$

ანალოგიურად ვიპოვით BC კიბის კინეტიკური ენერგიას

$$T_{BC} = \frac{2(\rho^2 + \ell^2)Mv_B^2}{16\ell^2 - h^2}$$

ABC კიბის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{4(\rho^2 + \ell^2)Mv_B^2}{16\ell^2 - h^2}.$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^{e} = A_{AB} + A_{BC} + A_N. \tag{8}$$

AB და BC კიბის სიმძიმის ძალების მუშაობა

$$A_{AB} = MgH = Mg\frac{h}{4}.$$

$$A_{BC} = MgH = Mg\frac{h}{4}.$$

$\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ − რეაქციის ძალების მუშაობებიც ნულის ტოლია,ე.ი. $A_N = 0.$

მაშინ (8) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = 2Mg\frac{h}{4} = Mg\frac{h}{2}. \qquad (9)$$

ჩავსვათ (7) და (9) გამოსახულებები (6) განტოლებაში

$$\frac{2(\rho^2 + \ell^2)Mv_B^2}{16\ell^2 - h^2} = Mg\frac{h}{2}$$

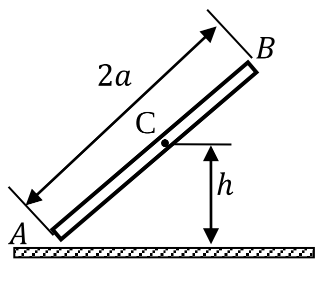
და ვიპოვოთ B სახსრის სიჩქარე:

$$v_B = \frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{16\ell^2 - h^2}{2(\rho^2 + \ell^2)}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: 1) $v = 2\ell\sqrt{\frac{gh}{\rho^2+\ell^2}}$. 2) $v_B = \frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{16\ell^2-h^2}{2(\rho^2+\ell^2)}}$.

ამოცანა 38.34

$2a$ სიგრძის AB ღერო ვარდება ისე, რომ მისი ბოლო სრიალებს გლუვ ჰორიზონტალურ იატაკზე. საწყის მომენტში ღეროს ეკავა ვერტიკალური მდებარეობა და წონასწორობაში იყო. განსაზღვრეთ ღეროს სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე, როგორც იატაკიდან მისი დაშორების h სიმაღლის ფუნქცია.

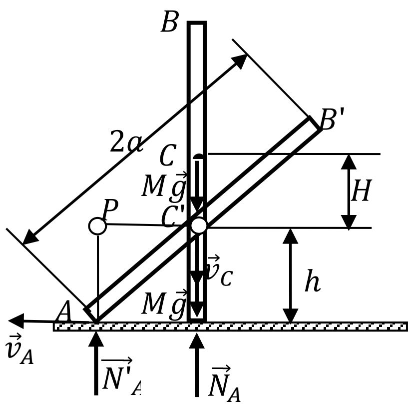


ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ღეროს

საწყისი და საბოლოო მდებარეობები. AB ღეროს მოძრაობის დასახასიათებ-ლად დაცემის დროის განმავლობაში ვისარგებლოთ სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემით ჰორიზონტალურ ღერძზე x გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e$$

რადგან $\sum F_{kx}^e = 0$, და $\dot{x}_C = const = 0$ ამიტომ მასათა ცენტრის x_C კოორდინატი იქნება მუდმივი და C წერტილი იმოძრავებს ვერტიკალურად ქვევით.



ნახ.1.

მასათა C ცენტრის სიჩქარის განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \tag{1}$$

რადგან AB ღერო, ამიტომ $\sum A_k^i = 0$.

საწყის მდებარეობაში AB ღერო იყო წონასწორობაში, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია უდრის ნულს, ე.ი. $T_0 = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \tag{2}$$

განვსაზღვროთ AB ღეროს კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში. ამ მომენტში ღერო ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას და C წერტილის სიჩქარე მიმართული იქნება ქვევით, ხოლო ღეროს A ბოლოს სიჩქარე, რომელიც სრიალებს გლუვ იატაკზე, მიმართული იქნება მარცხნივ.

ვიპოვოთ AB ღეროს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამისათვის A და C წერტილებიდან აღვმართოთ $\vec{v}_C$ და $\vec{v}_A$ სიჩქარეების მართობები. ამ მართობების გადაკვეთის P წერტილი არის AB ღეროს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

AB კიბის კუთხური სიჩქარე ვიპოვოთ თანაფარდობიდან

$$\frac{v_C}{C'P} = \frac{v_A}{A'P} = \omega_{AB},$$

ან

$$\omega_{AB} = \frac{v_C}{C'P} = \frac{v_C}{\sqrt{(A'C')^2 - (C'P)^2}} = \frac{v_C}{\sqrt{a^2 - h^2}}.$$

ვიპოვოთ AB კიბის კინეტიკური ენერგია, განვიხილოთ რა მისი მოძრაობა როგორც მყისი ბრუნვა P წერტილის გარშემო:

$$T = \frac{1}{2} J_p \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} [J_{C'} + M(C'P)^2] \omega_{AB}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{M(2a)^2}{12} + M \left(\sqrt{a^2 - h^2} \right)^2 \right] \frac{v_C^2}{a^2 - h^2} = \frac{4a^2 - 3h^2}{6(a^2 - h^2)} M v_C^2 \,. \quad (3)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_{AB} + A_N = A_{AB} = MgH = Mg(a - h), \qquad (4)$$

რადგან $\vec{N}_A$ – რეაქციის ძალის მუშაობა ნულის ტოლია,ე.ი. $A_N = 0$.

ჩავსვათ (3) და (4) გამოსახულებები (2) განტოლებაში

$$\frac{4a^2 - 3h^2}{6(a^2 - h^2)} M v_C^2 = Mg(a - h)$$

და ვიპოვოთ ღეროს მასათა ცენტრის სიჩქარე:

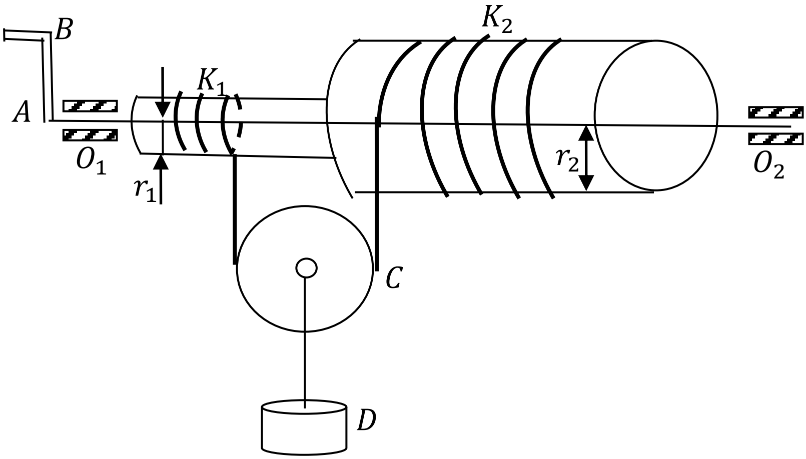
$$v_C = \sqrt{\frac{6g(a - h)(a^2 - h^2)}{4a^2 - 3h^2}} = \sqrt{\frac{6g(a - h)(a - h)(a + h)}{4a^2 - 3h^2}} =$$

$$= (a - h) \sqrt{\frac{6g(a + h)}{4a^2 - 3h^2}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\quad v_C = (a - h) \sqrt{\frac{6g(a+h)}{4a^2 - 3h^2}}$.

ამოცანა 38.35

დიფერენციალურ ჯალამბარში ორი ხისტად შეერთებული K_1 და K_2 ლილვი, r_1 და r_2 რადიუსებითა და O_1O_2 ღერძის მიმართ სათანადოდ J_1 და J_2 ინერციის მომენტებით, ბრუნვით მოძრაობაში მოდის AB სახელურით. მოძრავი C ბლოკი ჩამოკიდებულია უწონ და უჭიმარ ძაფზე, რომლის მარცხენა შტო დახვეულია K_1 ლილვზე, ხოლო მარჯვენა $-K_2$ ლილვზე. AB სახელურზე მოდებულია მუდმივი მაბრუნი m მომენტი. C



ბლოკზე ჩამოკიდებულია M მასის D ტვირთი. იპოვეთ სახელურის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა D ტვირთი ავა s სიმაღლის ბოლო წერტილში. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია. სახელურისა და ბლოკის მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დიფერენციალური ჯალამბარის მოძრაობა შეერთებული უჭიმარ ძაფით C ბლოკზე და D ტვირთზე.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$ საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$ ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის ყველა ნაწილის სიჩქარე და გამოვსახოთ ისინი სახელურის ω კუთხური სიჩქარით:

$$v_1 = \omega r_1, \ v_2 = \omega r_2. \quad \vec{v}_2$$

C ბლოკი ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას. შევადგინოთ პროპორცია:

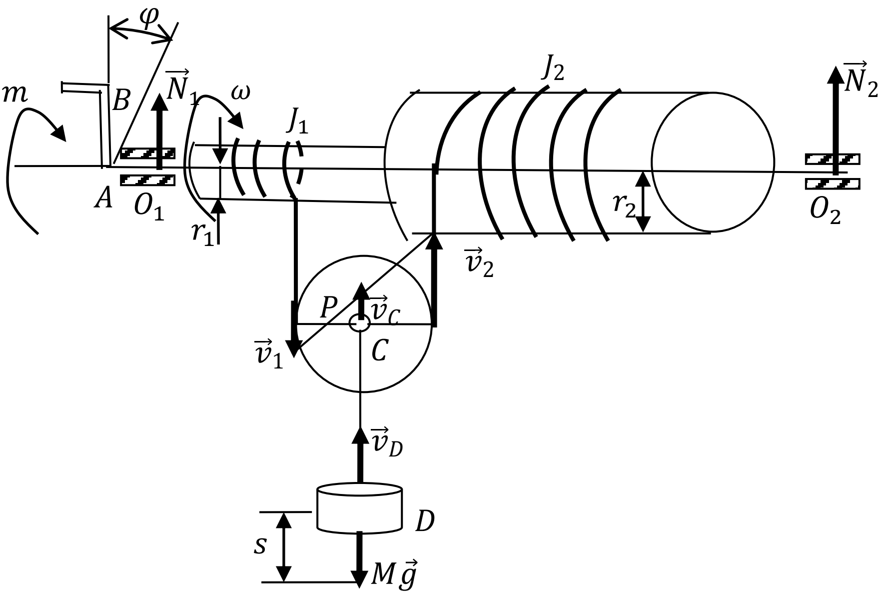
$$\frac{v_1}{R - PC} = \frac{v_2}{R + PC} = \frac{v_C}{PC}$$

საიდანაც

$$PC = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} R = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} R,$$

მაშინ

$$v_C = \frac{v_1 \cdot PC}{R - PC} = \frac{r_2 - r_1}{2} \omega.$$



D ტვირთის სიჩქარე უდრის C ბლოკის ღერძის სიჩქარეს:

$$v_D = v_C = \frac{r_2 - r_1}{2} \omega.$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში, როცა D ტვირთი ავიდა S სომაღლეზე:

:

$$T = T_1 + T_2 + T_D. \tag{3}$$

K_1 ლილვის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega^2,$$

K_2 ლილვის კინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega^2,$$

D ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_D = \frac{Mv_D^2}{2} = \frac{M(r_2 - r_1)^2}{8}\omega^2.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = [4(J_1 + J_2) + M(r_2 - r_1)^2]\frac{\omega^2}{2} \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_D + A_M + A_N \tag{5}$$

D ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_D = -Mgs$$

მაბრუნი m მომენტის მუშაობა

$$A_M = m\varphi = m\frac{2s}{r_2 - r_1}.$$

$\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ რეაქციის ძალების მუშაობა ნულის ტოლია,ე.ი. $A_N = 0$. მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = [2m - Mg(r_2 - r_1)]\frac{s}{r_2 - r_1} \tag{6}$$

ჩავსვათ (4) და (6) გამოსახულებები (2) განტოლებაში

$$[4(J_1 + J_2) + M(r_2 - r_1)^2]\frac{\omega^2}{2} = [2m - Mg(r_2 - r_1)]\frac{s}{r_2 - r_1}$$

და ვიპოვოთ სახელურის კუთხური სიჩქარე

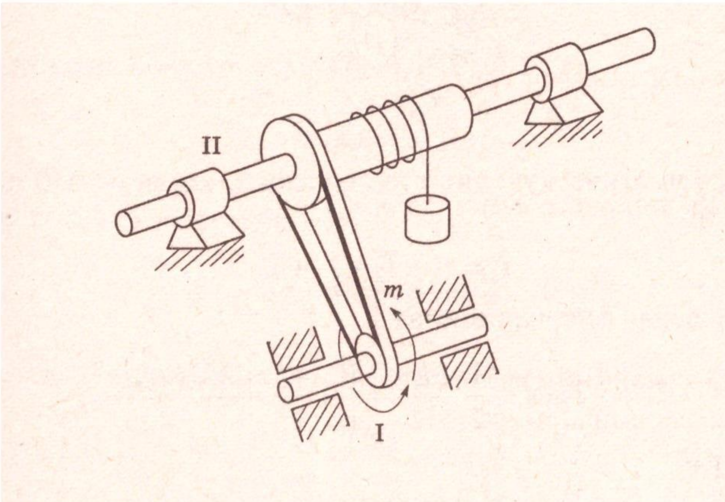
$$\omega = 2\sqrt{2s\frac{2m - Mg(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)[4(J_1 + J_2) + M(r_2 - r_1)^2]}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\omega = 2\sqrt{2s\frac{2m - Mg(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)[4(J_1 + J_2) + M(r_2 - r_1)^2]}}.$

ამოცანა 38.36

ჯალამბარი მოძრაობაში მოდის ღვედური გადაცემის საშუალებით, რომელიც აერთებს ჯალამბრის ლილვზე ჩამოცმულ II ბორბალს ძრავის ლილვზე ჩამოცმულ I ბორბალთან. M_1 მასის და r რადიუსის I ბორბალზე

მოქმედებს M მაბრუნი მომენტი. II ბორბლის მასა არის M_2, მისი რადიუსი $-R$. ჯალამბრის დოლის მასა არის M_3 მასის და რადიუსი $-r$, ხოლო ასაწევი ტვირთის მასა $-M_4$. ჯალამბარი მოძრაობას იწყებს წონასწორობის მდებარეობიდან. განსაზღვრეთ M_4 ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტში, როცა იგი ავა h სიმაღლეზე. .ღვედისა და ბაგირის მასები და



საკისრებში უგულებელყოფილია .ბორბლები და ღვედი ჩათვალეთ ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრებად.
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა საწყის მომენტში.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T-T_0=\sum A_{k.}^{e}+\sum A_{k.}^{i} \tag{1}$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ხოლო ღვედი და გვარლი უჭიმარი, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i=0$.
საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0=0$.
ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

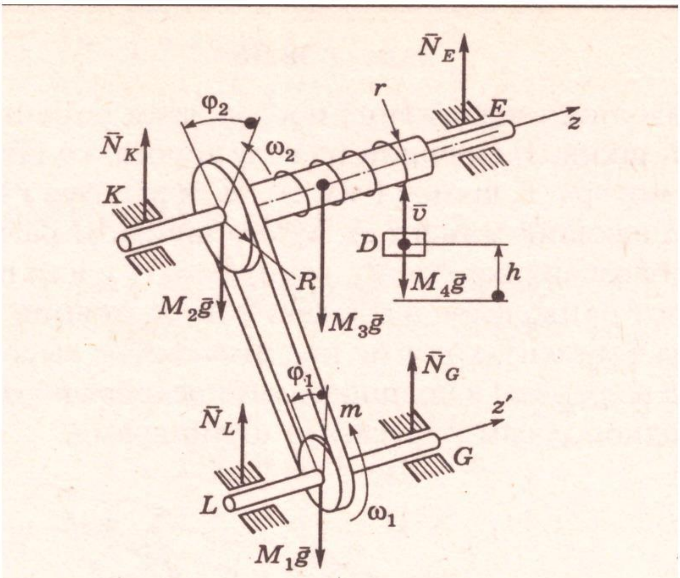
$$T=\sum A_{k.}^{e} \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, როცა D ტვირთი ავიდა h სიმაღლეზე:
:

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4. \tag{3}$$

I ლილვის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{1}{2}J_{z'}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1 r^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_1(R/r)^2 v^2}{4}$$



და II ლილვის კინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{1}{2}J_z\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M_2 R^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2(R/r)^2 v^2}{4}.$$

ჯალამბრის დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_3 = \frac{1}{2}J_z\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M_3 r^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

D ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_4 = \frac{M_4 v_D^2}{2} = \frac{M_4 v^2}{2}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \left[\frac{M_1(R/r)^2}{4} + \frac{M_2(R/r)^2}{4} + \frac{M_3}{4} + \frac{M_4}{2}\right]v^2 =$$

$$= [M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4]\frac{v^2}{4}. \quad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_N + A_m. \quad (5)$$

I და II ლილვების სიმძიმის ძალების მუშაობა A_1 და A_2 უდრის ნულს.

დოლის სიმძიმის ძალის მუშაობა, აგრეთვე ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები უდრის ნულს.

D ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_4 = -M_4 gh.$$

M მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_m = m\varphi = m\frac{R}{r}\frac{h}{r} = \frac{mRh}{r^2}$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = \frac{mR}{r^2}h - M_4 gh = \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g\right)h. \qquad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$[M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4]\frac{v^2}{4} = \left(\frac{m}{r^2} - M_4 g\right)h$$

და ვიპოვოთ ტვირთის სიჩქარე

$$v = 2\sqrt{\frac{h[m(R/r^2) - M_4 g]}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4}}$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = 2\sqrt{\frac{h[m(R/r^2) - M_4 g]}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4}}$.

ამოცანა 38.37

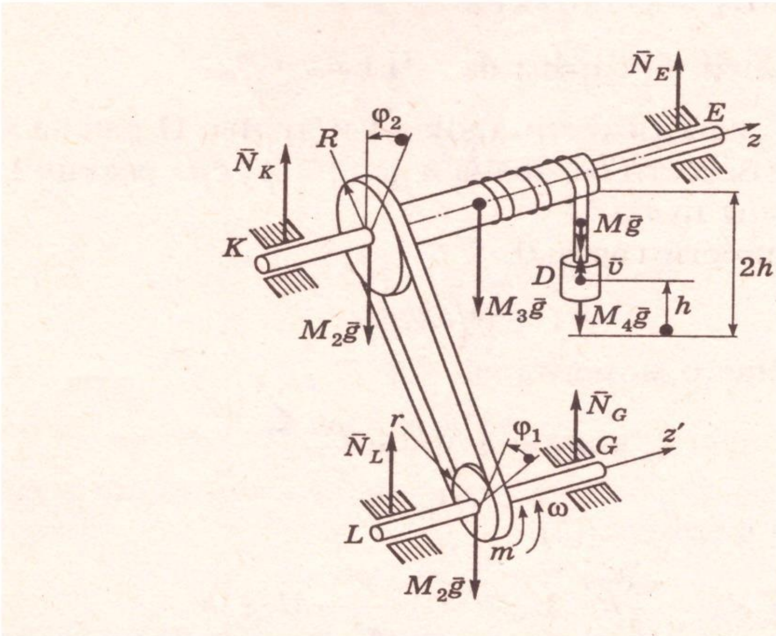
ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ მხედველობაში მიიღება იმ ბაგირის მასა, რომელზეც ჩამოკიდებულია M_4 ტვირთი. ბაგირის სიგრძე არის ℓ, ერთეული სიგრძის მასა კი $-M.$ საწყის მომენტში დოლის ლილვიდან გადმოკიდებული ბაგირის სიგრძე იყო $2h.$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა საწყის მომენტში.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ხოლო ღვედი და გვარლი უჭიმარი, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.



საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, როცა D ტვირთი ავიდა h სომაღლეზე:

:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_{ბაგ}. \tag{3}$$

I ლილვის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{1}{2}J_{z'}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1 r^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_1(R/r)^2 v^2}{4}$$

და II ლილვის კინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{1}{2}J_z\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M_2 R^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2(R/r)^2 v^2}{4}.$$

ჯალამბრის დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_3 = \frac{1}{2} J_z \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

D ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_4 = \frac{M_4 v^2}{2}.$$

ℓ სიგრძის ბაგირის კინეტიკური ენერგია

$$T_{ბაგ} = \frac{M\ell v^2}{2}$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \left[M_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + M_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + M_3 + 2M_4 + 2M\ell\right] \frac{v^2}{4}. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_N + A_m + A_{ბაგ}. \qquad (5)$$

I და II ლილვების სიმძიმის ძალების მუშაობა A_1 და A_2 უდრის ნულს.

დოლის სიმძიმის ძალის მუშაობა A_3, აგრეთვე ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.

D ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_4 = -M_4 g h.$$

m მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_m = m\varphi_1 = m\frac{R}{r}\varphi_2 = m\frac{R}{r}\frac{h}{r} = m\frac{R}{r^2}h.$$

ბაგირის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{ბაგ} = \int_{2h}^{h} Mgx dx = -\frac{3}{2} Mgh^2.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g - \frac{3}{2} Mgh\right) h. \qquad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$[M_1 (R/r)^2 + M_2 (R/r)^2 + M_3 + 2M_4 + 2M\ell] \frac{v^2}{4} =$$
$$= \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g - \frac{3}{2} Mgh\right) h$$

და ვიპოვოთ ტვირთის სიჩქარე

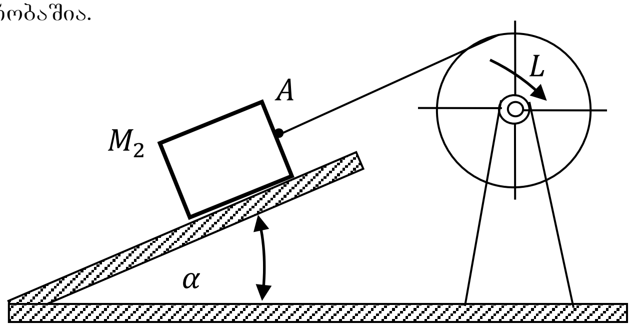
$$v = 2\sqrt{\frac{h\left[m(R/r^2) - M_4 g - \frac{3}{2}Mgh\right]}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4 + 2M\ell}}$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$v = 2\sqrt{\frac{h[m(R/r^2) - M_4 g]}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4}}.$$

ამოცანა 38.38

r რადიუსის და M_1 მასის ჯალამბრის დოლზე მოქმედებს M მაბრუნი მომენტი. დოლზე დახვეული გვარლის A ბოლოზე მიბმულია M_2 მასის ტვირთი, რომელიც მოძრაობს ზევით ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. როგორ კუთხურ სიჩქარეს შეიძენს ჯალამბრის დოლი, როცა იგი მობრუნდება φ კუთხით? ახრილ სიბრტყეზე ტვირთის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f. გვარლის მასა უგულებელყოფილია. დოლი ჩათვალეთ ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრად. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.

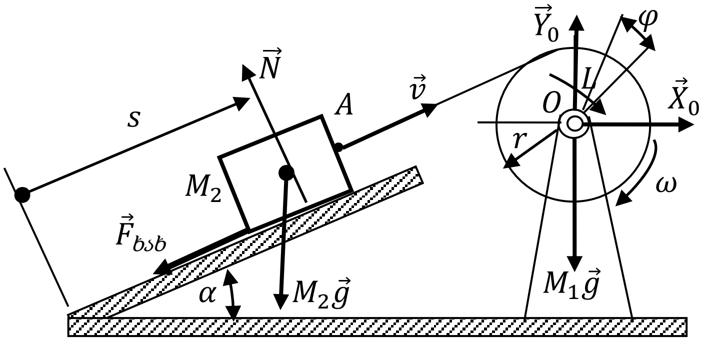


ა მ ო ხ ს ნ ა.. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა საწყის მომენტში.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \tag{1}$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.



საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$.
ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, როცა დოლი მობრუნდება φ კუთხით:
:

$$T = T_2 + T_{დოლ}. \qquad (3)$$

M_2 ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{1}{2}M_2 v^2 = \frac{M_2(\omega r)^2}{2} = \frac{M_2 r^2\omega^2}{2}.$$

დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_{დოლ} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1 r^2}{2}\omega^2 = \frac{M_1 r^2\omega^2}{4}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1 r^2\omega^2}{4} + \frac{M_2 r^2\omega^2}{2} = (M_1 + 2M_2)\frac{r^2\omega^2}{4}. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_{დოლ} + A_2 + A_{ხახ} + A_N + A_L \qquad (5)$$

დოლის სიმძიმის ძალების მუშაობა $A_{დოლ}$ უდრის ნულს.
ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.
M_2 ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_2 = -M_2 gs\cdot sin\alpha = -M_2 gr\varphi\cdot sin\alpha.$$

ხახუნის ძალის მუშაობა

$$A_{ხახ} = -F_{ხახ}s = -Nfs = -M_2 gfs\cdot cos\alpha = -M_2 gfr\varphi\cdot cos\alpha$$

L მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_m = L\varphi = m\frac{R}{r}\varphi_2 = m\frac{R}{r}\frac{h}{r} = m\frac{R}{r^2}h.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = L\varphi - (sin\alpha + fcos\alpha)M_2 gr\varphi =$$

$$= [L - (sin\alpha + fcos\alpha)M_2 gr]\varphi \qquad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(M_1 + 2M_2)\frac{r^2\omega^2}{4} = [L - (sin\alpha + fcos\alpha)M_2 gr]\varphi$$

და განვსაზღვროთ ჯალამბრის დოლის კუთხური სიჩქარე

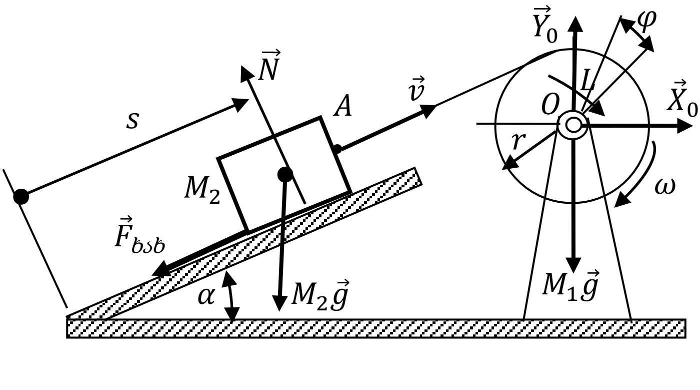
$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L - (sin\alpha + fcos\alpha)M_2 gr}{M_1 + 2M_2}\varphi}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u>

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L - (sin\alpha + fcos\alpha)M_2 gr}{M_1 + 2M_2}\varphi}.$$

ამოცანა 38.39

ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ მხედველობაშია მიღებული იმ გვარლის მასა, რომელზეც ჩამოკიდებულია M_2 ტვირთი. გვარლის სიგრძე არის ℓ, გვარლის ერთეული სიგრძის მასა კი $-M.$ საწყის მომენტში დოლის ლილვიდან გადმოკიდებული ბაგირის სიგრძე იყო $a.$ დოლზე დახვეული გვარლის პოტენციური ენერგიის ცვლილება უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა საწყის მომენტში.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \tag{1}$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, როცა დოლი მობრუნდება φ კუთხით:

:

$$T = T_2 + T_{დოლ} + T_{გვ}. \tag{3}$$

M_2 ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{1}{2}M_2v^2 = \frac{M_2(\omega r)^2}{2} = \frac{M_2r^2\omega^2}{2}.$$

დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_{დოლ} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1r^2}{2}\omega^2 = \frac{M_1r^2\omega^2}{4}.$$

ℓ სიგრძის გვარლის კინეტიკური ენერგია

$$T_{გვ} = \frac{M\ell v^2}{2} = \frac{M\ell r^2\omega^2}{2}$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1r^2\omega^2}{4} + \frac{M_2r^2\omega^2}{2} + \frac{M\ell r^2\omega^2}{2} = (M_1 + 2M_2 + 2M\ell)\frac{r^2\omega^2}{4} \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_{დოლ} + A_2 + A_{გვ} + A_{ხახ} + A_N + A_L \tag{5}$$

დოლის სიმძიმის ძალების მუშაობა $A_{დოლ}$ უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.

M_2 ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_2 = -M_2gs \cdot sin\alpha = -M_2gr\varphi \cdot sin\alpha.$$

სრიალის ხახუნის ძალის მუშაობა

$$A_{ხახ} = -F_{ხახ}s = -Nfs = -M_2gfs \cdot cos\alpha = -M_2gfr\varphi \cdot cos\alpha.$$

გვარლის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{გვ} = \int_{asin\alpha}^{(a-r\varphi)sin\alpha} Mgxdx = \frac{Mgx^2}{2}\Bigg|_{asin\alpha}^{(a-r\varphi)sin\alpha} =$$

$$= \frac{Mg}{2}[(a-r\varphi)^2 sin^2\alpha - a^2 sin^2\alpha] = \frac{Mg}{2}(r^2\varphi^2 - 2ar\varphi)sin\alpha =$$

$$= -\frac{Mgr}{2}(2a - r\varphi)\varphi sin\alpha.$$

L მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_m = L\varphi.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = L\varphi - (sin\alpha + fcos\alpha)M_2gr\varphi - \frac{Mgr}{2}(2a - r\varphi)\varphi sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}[2L - 2M_2gr(sin\alpha + fcos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)sin\alpha]\varphi \quad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(M_1 + 2M_2 + 2M\ell)\frac{r^2\omega^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}[2L - 2M_2gr(sin\alpha + fcos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)sin\alpha]\varphi$$

და განვსაზღვროთ ჯალამბრის დოლის კუთხური სიჩქარე გვარლის მასის გათვალისწინებით:

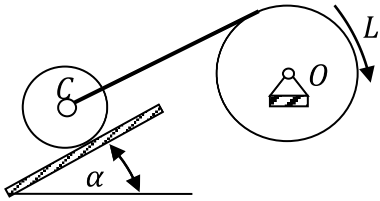
$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{2L - 2M_2gr(sin\alpha + fcos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)sin\alpha}{M_1 + 2M_2 + 2M\ell}\varphi}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

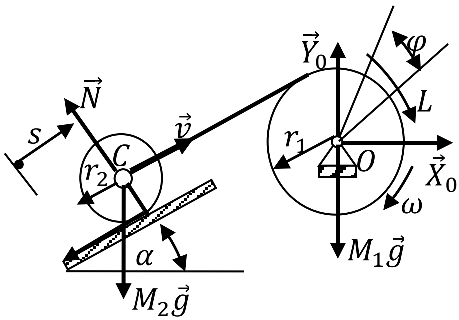
$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{2L - 2M_2gr(sin\alpha + fcos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)sin\alpha}{M_1 + 2M_2 + 2M\ell}\varphi}.$$

ამოცანა 38.40

r_1 რადიუსის და M_1 მასის ჯალამბრის დოლზე მოქმედებს M მაბრუნი მომენტი. დოლზე დახვეული გვარლის ბოლოზე მიბმულია M_2 მასის C თვლის ღერძი. თვალი მიგორავს ზევით სრიალის გარეშე დახრილსიბრტყეზე, რომლის დახრა ჰორიზონტთან α −ს ტოლია. როგორ კუთხურ სიჩქარეს შეიძენს ჯალამბრის დოლი n ბრუნის შემდეგ? დოლი და თვალი ჩათვალეთ ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრებად. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია. გვარლის მასა და ხახუნი უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება გვარლით შეერთებული დოლისა დათვლისაგან . ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა საწყის მომენტში.



ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში, როცა დოლი მობრუნდება φ კუთხით $(\varphi = 2\pi n)$:

$$T = T_1 + T_2. \qquad (3)$$

ჯალამბრის დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 r_1^2}{2} \omega^2 = \frac{M_1 r_1^2 \omega^2}{4}.$$

თვლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_2 = \frac{1}{2}M_2v^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}M_2v^2 + \frac{1}{2}\frac{M_2r_2^2}{2}\frac{v^2}{r_2^2} = \frac{3M_2r_1^2\omega^2}{4}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1r_1^2\omega^2}{4} + \frac{3M_2r_1^2\omega^2}{4} = (M_1 + 3M_2)\frac{r_1^2\omega^2}{4}. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_N + A_L \qquad (5)$$

დოლის სიმძიმის ძალების მუშაობა A_1 უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.

C თვლის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_2 = -M_2gs \cdot sin\alpha = -M_2gr_1\varphi \cdot sin\alpha = -2M_2gr_1\pi n \cdot sin\alpha.$$

L მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_L = L\varphi = 2L\pi n.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = 2L\pi n - 2M_2gr_1\pi n \cdot sin\alpha =$$

$$= 2\pi n(L - M_2gr_1sin\alpha). \qquad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(M_1 + 3M_2)\frac{r_1^2\omega^2}{4} = 2\pi n(L - M_2gr_1sin\alpha)$$

და განვსაზღვროთ ჯალამბრის დოლის კუთხური სიჩქარე

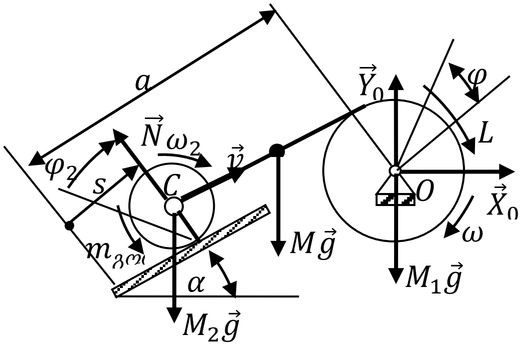
$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\frac{L - M_2gr_1sin\alpha}{M_1 + 3M_2}}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\frac{L - M_2gr_1sin\alpha}{M_1 + 3M_2}}.$$

ამოცანა 38.41

ამოხსენით წინა ამოცანა გვარლის მასისა და თვლის უძრავ სიბრტყეზე გორვის ხახუნის გათვალისწინებით, თუ გვარლის სიგრძე არის ℓ, მისი ერთეული სიგრძის მასა კი $-M.$ დოლზე დაუხვეველი გვარლის სიგრძე $-a,$ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი $f_{გ.}$, თვლის რადიუსი $-r_2.$ დოლზე დახვეული გვარლის პოტენციური ენერგიის ცვლილება უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება გვარლის, დოლისა და თვლისაგან.

ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა საწყის მომენტში. ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \tag{1}$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში, როცა დოლი მობრუნდება φ კუთხით $(\varphi = 2\pi n)$:

$$T = T_1 + T_2 + T_{გვ}. \tag{3}$$

ჯალამბრის დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1 r_1^2}{2}\omega^2 = \frac{M_1 r_1^2\omega^2}{4}.$$

C თვლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_2 = \frac{1}{2}M_2 v^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}M_2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{M_2 r_2^2}{2}\frac{v^2}{r_2^2} = \frac{3M_2 r_1^2\omega^2}{4}.$$

გვარლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_{\text{ვვ}} = \frac{M\ell v^2}{2} = \frac{M\ell r_1^2\omega^2}{2}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1 r_1^2\omega^2}{4} + \frac{3M_2 r_1^2\omega^2}{4} + \frac{M\ell r_1^2\omega^2}{2} =$$
$$= (M_1 + 3M_2 + 2M\ell)\frac{r_1^2\omega^2}{4}. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_{\text{ვვ}} + A_N + A_L + A_{\text{გ.}} \qquad (5)$$

დოლის სიმძიმის ძალების მუშაობა A_1 უდრის ნულს.
ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.
თვლის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_2 = -M_2 gs \cdot sin\alpha = -M_2 gr_1\varphi \cdot sin\alpha = -2M_2 gr_1\pi n \cdot sin\alpha.$$

L მაბრუნი მომენტის მუშაობა

$$A_L = L\varphi = 2L\pi n.$$

გვარლის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{\text{ვვ}} = \int_{asin\alpha}^{(a-s)sin\alpha} Mgxdx = \left.\frac{Mgx^2}{2}\right|_{asin\alpha}^{(a-s)sin\alpha} = \frac{1}{2}Mg(s-2a)s \cdot sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}Mgr_1(2a - r_1\varphi)\varphi \cdot sin\alpha = 2Mgr_1(a - r_1\pi n)\pi n sin\alpha.$$

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_{\text{გ.}} = -M_{\text{გ.}}\varphi_2 = -Nf_{\text{გ.}}\frac{r_1}{r_2}\varphi = -M_2 gf_{\text{გ.}}\frac{r_1}{r_2}2\pi n cos\alpha.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = 2L\pi n - 2M_2 gr_1\pi n \cdot sin\alpha -$$
$$-M_2 gf_{\text{გ.}}\frac{r_1}{r_2}2\pi n cos\alpha - M_2 gf_{\text{გ.}}\frac{r_1}{r_2}2\pi n cos\alpha =$$
$$= 2\pi n\left[L - M_2 gr_1\left(sin\alpha + \frac{f_{\text{გ.}}}{r_2}cos\alpha\right) - Mgr_1(a - r_1\pi n)sin\alpha\right] \qquad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(M_1 + 3M_2 + 2M\ell)\frac{r_1^2\omega^2}{4} =$$

$$= 2\pi n\left[L - M_2 g r_1\left(sin\alpha + \frac{f_{გ.}}{r_2}cos\alpha\right) - Mgr_1(a - r_1\pi n)sin\alpha\right] =$$
$$= 2\pi n\left[L - gr_1\left\{M_2\left(sin\alpha + \frac{f_{გ.}}{r_2}cos\alpha\right) - M(a - r_1\pi n)sin\alpha\right\}\right]$$

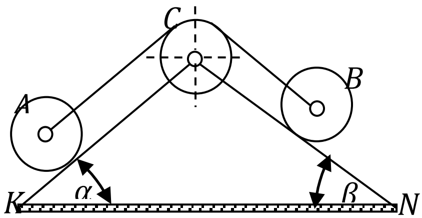
და განვსაზღვროთ ჯალამბრის დოლის კუთხური სიჩქარე გვარლის მასისა და გორვის ხახუნის მომენტის გათვალისწინებით:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\frac{L - gr_1\left\{M_2\left(sin\alpha + \frac{f_{გ.}}{r_2}cos\alpha\right) - M(a - r_1\pi n)sin\alpha\right\}}{(M_1 + 3M_2 + 2M\ell)}}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\frac{L - gr_1\left\{M_2\left(sin\alpha + \frac{f_{გ.}}{r_2}cos\alpha\right) - M(a - r_1\pi n)sin\alpha\right\}}{(M_1 + 3M_2 + 2M\ell)}}.$$

ამოცანა 38.42

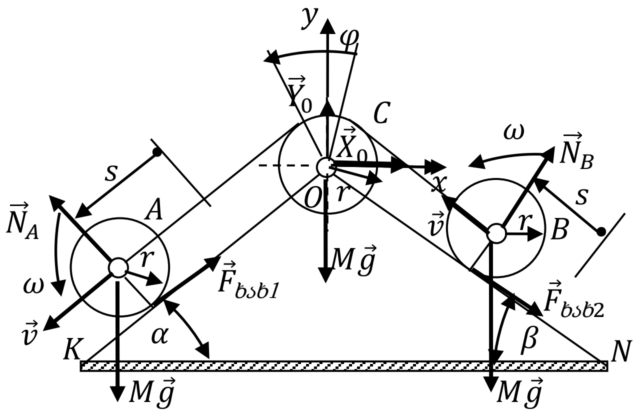


A თვალი დახრილ OK სიბრტყეზე ჩამოგორებისასეწევა ზევით B თვალს C ბლოკზე გადაკიდებული გვარლის საშუალებით დახრილ ON სიბრტყეზე. C ბლოკი ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემო. განსაზღვრეთ A თვლის ღერძის სიჩქარე OK დახრილი სიბრტყის უდიდესი დახრის წრფის პარალელურად s მანძილზე მოძრაობისას. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია. ორივე თვალი და ბლოკი ჩათვალეთ ერთნაირი რადიუსისა და მასის ერთგვაროივან დისკოებად. გვარლის მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A^e_{k.} + \sum A^i_k \quad (1)$$



.

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0$.

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_B + T_C. \tag{3}$$

A და B თვლების კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_A = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{3Mv^2}{4},$$

$$T_B = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{3Mv^2}{4}$$

C ბლოკის კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_C = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{Mv^2}{4}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{3Mv^2}{4} + \frac{3Mv^2}{4} + \frac{Mv^2}{4} = \frac{7Mv^2}{4}. \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_C + A_N. \tag{5}$$

A თვლის სიმძიმის ძალების მუშაობა

$$A_A = Mgs \cdot sin\alpha.$$

B თვლის . სიმძიმის ძალების მუშაობა

$$A_B = -Mgs \cdot sin\beta.$$

C ბლოკის . სიმძიმის ძალების მუშაობა A_C უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = Mgs \cdot sin\alpha - Mgs \cdot sin\beta = Mgs(sin\alpha - sin\beta). \quad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$\frac{7Mv^2}{4} = Mgs(sin\alpha - sin\beta)$$

და ვიპოვოთ თვლის ღერძის სიჩქარე

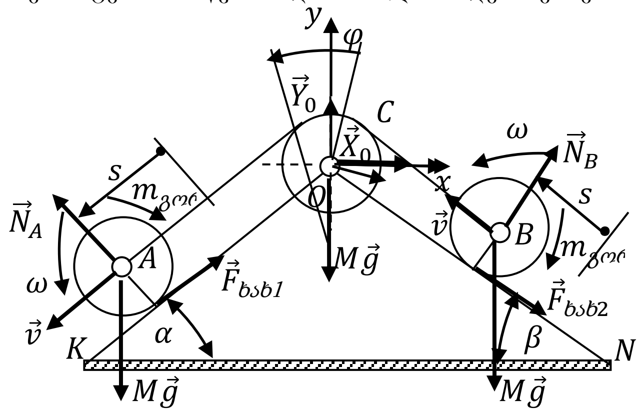
$$v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs(sin\alpha - sin\beta)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs(sin\alpha - sin\beta)}.$

ამოცანა 38.43

ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ მხედველობაში მიიღება დახრილ სიბრტყეზე თვლების გორვის ხახუნის გათვალისწინებით; გორვის ხახუნის კოეფიციენტი $f_{გ.}$– ს ტოლია, ხოლო თვლების რადიუსები $-r$.

ა მ ო ხ ს ნ ა..განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები



ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^{i} = 0.$

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$
ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში (იხ. 38.42 ამოცანის ამოხსნა):

$$T = \frac{3Mv^2}{4} + \frac{3\,Mv^2}{4} + \frac{Mv^2}{4} = \frac{7Mv^2}{4}. \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა თვლების გორვის ხახუნის გათვალისწინ ებით:

$$\sum A_k^{e} = A_A + A_B + A_C + A_N + A_{გორA} + A_{გორB}. \qquad (4)$$

A თვლის სიმძიმის ძალების მუშაობა

$$A_A = Mgs \cdot sin\alpha.$$

B თვლის . სიმძიმის ძალების მუშაობა

$$A_B = -Mgs \cdot sin\beta.$$

C ბლოკის . სიმძიმის ძალების მუშაობა A_C უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების მუშაობები A_N უდრის ნულს.

A თვლის გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_{გორA} = -m_{გორ}\varphi = -N_A f_{გ.} \frac{s}{r} = -Mgf_{გ.} \frac{s}{r} cos\alpha,$$

B თვლის გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_{გორB} = -m_{გორ}\varphi = -N_B f_{გ.} \frac{s}{r} = -Mgf_{გ.} \frac{s}{r} cos\beta.$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^{e} = Mgs \cdot sin\alpha - Mgs \cdot sin\beta - Mgf_{გ.} \frac{s}{r} cos\alpha - Mgf_{გ.} \frac{s}{r} cos\beta =$$

$$= Mgs\left[sin\alpha - sin\beta - \frac{f_{გ.}}{r}(cos\alpha + cos\beta)\right]. \qquad (5)$$

(3) და (5) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$\frac{7Mv^2}{4} = Mgs\left[sin\alpha - sin\beta - \frac{f_{გ.}}{r}(cos\alpha + cos\beta)\right]$$

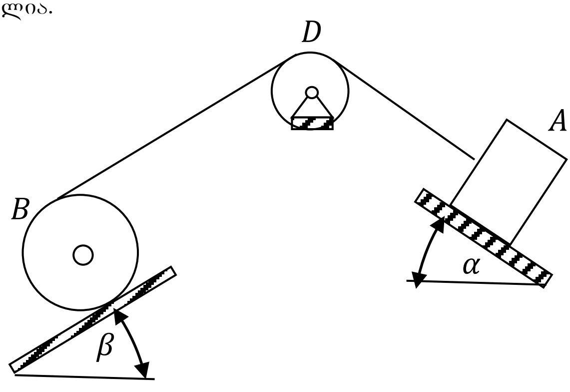
და ვიპოვოთ თვლის ღერძის სიჩქარე

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[sin\alpha - sin\beta - \frac{f_{გ.}}{r}(cos\alpha + cos\beta)\right]}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[sin\alpha - sin\beta - \frac{f_{გ.}}{r}(cos\alpha + cos\beta)\right]}.$

ამოცანა 38.44

. M_1 მასის A ტვირთზე მიბმულია უჭიმარი ძაფი, რომელიც გადადებულია M_2 მასის D ბ ლოკზე და დახვეულია M_3 მასის ცილინდრული B საგორავის გვერდით ზედაპირზე. კუთხით დახრილ სიბრტყეზე A ტვირთის ქვევით მოძრაობისას D ბლოკი ბრუნავს, ხოლო B საგორავი გორავს ზევით სრიალის გარეშე ჰორიზონტთან β კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. განსაზღვრეთ A ტვირთის სიჩქარე მის მიერ გავლილი მანძილისაგან დამოკიდებულებით, თუ საწყის მომენტში სისტემა იყო წონასწორობაში. D ბლოკი და B საგორავი ჩავთვალეთ ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრებად. ძაფის მასა და ხახუნის ძალები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა

განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები.
ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A^e_{k.} + \sum A^i_k \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A^i_k = 0.$

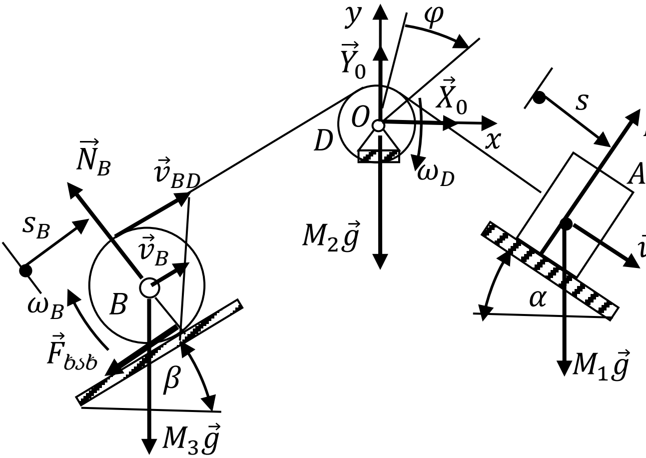
საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$
ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_B + T_C. \tag{3}$$

A ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით



მოძრაობას

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}$$

D ბლოკის კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_D = \frac{1}{2} J_D \omega_D^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r_D^2}{2} \frac{v^2}{r_D^2} = \frac{M_2 v^2}{4}.$$

B საგორავის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_B = \frac{1}{2} M_3 v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} M_3 v_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M_3 r_B^2}{2} \frac{v_B^2}{r_B^2}$$

$$\frac{1}{4} M_3 v^2 + \frac{1}{4} M_3 \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{3 M_3 v^2}{16}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{3 M_3 v^2}{16} = (8M_1 + 4M_2 + \ 3M_3) \frac{v^2}{16} \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_D + A_N. \tag{5}$$

A ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_A = M_1 gs \cdot sin\alpha,$$

B საგორავის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_B = -M_3 gs_B \cdot sin\beta = -M_3 g\frac{s}{2} \cdot sin\beta.$$

D ბლოკის სიმძიმის ძალების მუშაობა A_D უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების $\left(\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{X}_0,\ \vec{Y}_0, \vec{F}_{ხახ}\right)$ მუშაობები A_N უდრის ნულს.

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = M_1 gs \cdot sin\alpha - M_3 g\frac{s}{2} \cdot sin\beta =$$

$$= \tfrac{1}{2}(2M_1 sin\alpha - M_3 sin\beta)gs. \tag{6}$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(8M_1 + 4M_2 + \ 3M_3)\frac{v^2}{16} \ = \ \frac{1}{2}(2M_1 sin\alpha - M_3 sin\beta)gs$$

და ვიპოვოთ A ტვირთის სიჩქარე

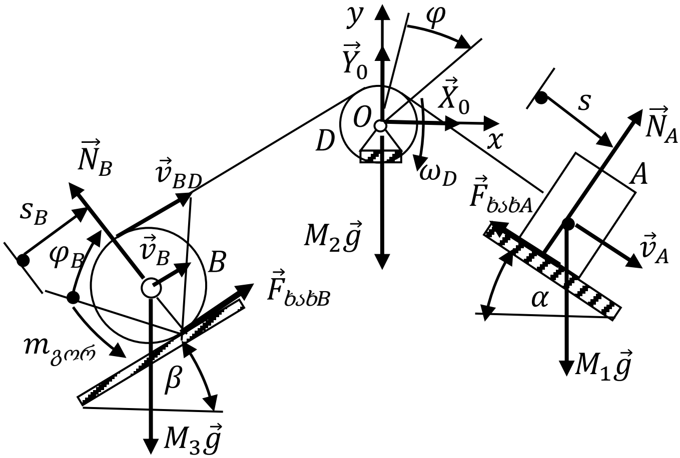
$$v = 2\sqrt{2gs\frac{2M_1 sin\alpha - M_3 sin\beta}{8M_1 + 4M_2 + \ 3M_3}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = 2\sqrt{2gs\frac{2M_1 sin\alpha - M_3 sin\beta}{8M_1 + 4M_2 + \ 3M_3}}.$

ამოცანა 38.45

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ დაშვებით, რომ სრიალის და გორვის ხახუნის კოეფიციენტები სათანადოდ უდრის f და $f_{გ.}$, საგორავის რადიუსები კი $-r$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები



ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში (იხ. 38.44 ამოცანის ამოხსნა):

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{3M_3 v^2}{16} = (8M_1 + 4M_2 + 3M_3)\frac{v^2}{16} \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_D + A_N + A_{ხახA} + A_{გორB}. \qquad (4)$$

A ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_A = M_1 g s \cdot sin\alpha,$$

B საგორავის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_B = -M_3 g s_B \cdot sin\beta = -M_3 g\frac{s}{2} \cdot sin\beta.$$

D ბლოკის სიმძიმის ძალების მუშაობა A_D უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების $(\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{X}_0, \ \vec{Y}_0)$ მუშაობები A_N უდრის ნულს.

A ტვირთის სრიალის ხახუნის ძალის მუშაობა

$$A_{ხახA} = -F_{ხახ}s = -N_A f s = -M_1 g f s \cdot cos\alpha.$$

B საგორავის გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_{გორB} = -m_{გორ}\varphi_B = -N_B f_{გ.}\frac{s_B}{r} = -M_3 g f_{გ.}\frac{s}{2r}cos\beta.$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = M_1 gs \cdot sin\alpha - M_3 g\frac{s}{2} \cdot sin\beta - M_1 gfs \cdot cos\alpha - M_3 gf_{გ.}\frac{s}{2r}cos\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2M_1(sin\alpha - fcos\alpha) - M_3\left(sin\beta + \frac{f_{გ.}}{r}cos\beta\right)\right]gs. \qquad (5)$$

(4) და (5) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(8M_1 + 4M_2 + 3M_3)\frac{v^2}{16} = \frac{1}{2}\left[2M_1(sin\alpha - fcos\alpha) - M_3\left(sin\beta + \frac{f_{გ.}}{r}cos\beta\right)\right]gs$$

და ვიპოვოთ A ტვირთის სიჩქარე სრიალის ხახუნის და გორვის ხახუნის მომენტის გათვალიეწინებით:

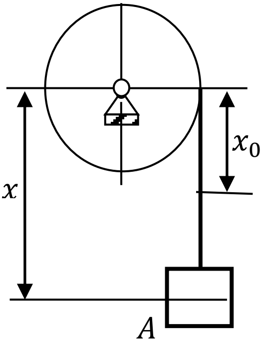
$$v = 2\sqrt{2gs\frac{2M_1(sin\alpha - fcos\alpha) - M_3\left(sin\beta + \frac{f_{გ.}}{r}cos\beta\right)}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

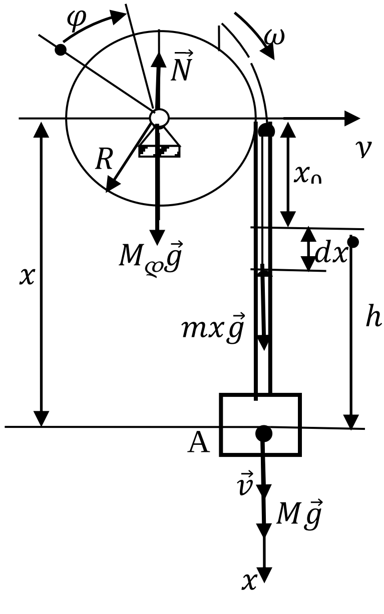
$$v = 2\sqrt{2gs\frac{2M_1(sin\alpha - fcos\alpha) - M_3\left(sin\beta + \frac{f_{გ.}}{r}cos\beta\right)}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}.$$

ამოცანა 38.46

M მასის ტვირთი ჩამოკიდებულია ℓ სიგრძის ერთგვაროვან უჭიმარ გვარლზე, რომელიც დახვეულია ჰორიზონტალური ბრუნვის ღერძისმქონე ცილინდრულ დოლზე. დოლის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის J , მისი რადიუსია R,გვარლის ერთეული სიგრძის მასა კი m. იპოვეთ ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც ჩამოკიდებული გვარლის სიგრძე უდრის x, თუ საწყის მომენტში ტვირთის სიჩქარე $v_0 = 0,$ ხოლო დოლზე ჩამოკიდებული გვარლის სიგრძე იყო x_0. გვარლის სისქე, ხახუნი დოლის ღერძში და გვარლის პოტენციური ენერგიის ცვლილება უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა.. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები.



ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A^e_{k.} + \sum A^i_k \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A^i_k = 0$.

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A^e_{k.} \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_{დ} + T_{გვ}. \qquad (3)$$

A ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$T_A = \frac{Mv^2}{2}$$

დოლის კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_{დ} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2}.$$

გვარლის კინეტიკური ენერგია, რომლის თითოეული წერტილის ასრულებს გადტანით მოძრაობას:

$$T_{გვ} = \frac{m\ell v^2}{2},$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{Mv^2}{2} + \frac{m\ell v^2}{2} + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2} = [(M + m\ell)R^2 + J]\frac{v^2}{2R^2} \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_{დ} + A_{გვ} + A_N. \qquad (5)$$

A ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_A = Mgh = Mg(x - x_0).$$

გვარლის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{გვ} = \int_{x_0}^{x} mgxdx = \frac{mg}{2}(x^2 - x_0^2).$$

დოლის სიმძიმის ძალების მუშაობა $A_{დ}$ და ბმების რეაქციის ძალების მუშაობა A_N უდრის ნულს.

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = Mg(x - x_0) + \frac{mg}{2}(x^2 - x_0^2) =$$

$$= [2M + m(x + x_0)]\frac{g(x-x_0)}{2}. \qquad (6)$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$[(M + m\ell)R^2 + J]\frac{v^2}{2R^2} = [2M + m(x + x_0)]\frac{g(x - x_0)}{2}$$

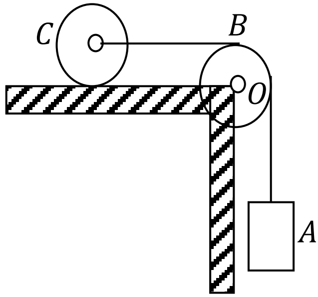
და ვიპოვოთ A ტვირთის სიჩქარე

$$v = R\sqrt{g\frac{[2M + m(x + x_0)](x - x_0)}{(M + m\ell)R^2 + J}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = R\sqrt{g\frac{[2M+m(x+x_0)](x-x_0)}{(M+m\ell)R^2+J}}$.

ამოცანა 38.47

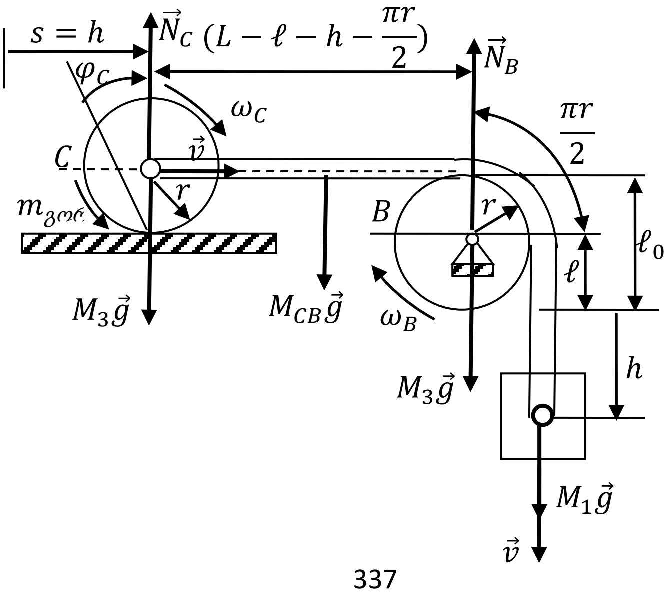
M_1 მასის A ტვირთი ჩამოკიდებულია L სიგრძისა და M_2 მასის ერთგვაროვანი ბაგირის ბოლოზე. ბაგირი გადაკიდებულია B ბლოკზე, რომელიც ბრუნავს ნახაზის სიბრტყის მართობული O ღერძისგარშემო. ბაგირის მეორე ბოლომიბმულია C საგორავის ღერძზე,რომელიც უსრიალოდ გორავს უძრავ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. B ბლოკი და C საგორავი ერთგვაროვანი r რადიუსისა და M_3 მასის წრიული დისკოებია. ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე C საგორავის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f_{გ.}$. საწყის მომენტში, როცა სისტემა წონასწორობაში იყო, B ბლოკიდან გადაკიდებული ბაგირის სიგრძე უდრიდა ℓ. განსაზღვრეთ A ტვირთის სიჩქარე, როგორც მისი ვერტიკალური h გადაადგილების ფუნქცია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საბოლოო მდებარეობა, როცა A ტვირთი გადაადგილდა h მანძილზე და საწყისი მდებარეობა.

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A^e_{k.} + \sum A^i_k \qquad (1)$$



რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უდრის ნულს, ე.ი. $\sum A_k^i = 0.$

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0.$

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \tag{2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_B + T_C + T_{ბაგ}. \tag{3}$$

A ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}$$

B ბლოკის კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_B = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

C საგორავის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას:

$$T_C = \frac{1}{2} M_3 v^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2 = \frac{1}{2} M_3 v^2 + \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{3 M_3 v^2}{4}$$

აგირის კინეტიკური ენერგია, რომლის თითოეული წერტილის ასრულებს გადტანით მოძრაობას $\vec{v}$ სიჩქარით:

$$T_{ბაგ} = \frac{M_2 v^2}{2}$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_3 v^2}{4} + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{3 M_3 v^2}{4} = (M_1 + M_2 + 2M_3)\frac{v^2}{2} \tag{4}$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_{ბაგ} + A_C + A_N + A_{გორC}. \tag{5}$$

A ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_A = M_1 g h.$$

B ბლოკის სიმძიმის ძალების მუშაობა A_B და C საგორავის სიმძიმის ძალის მუშაობა A_C უდრის ნულს.

ბმების რეაქციის ძალების $(\vec{N}_A, \vec{N}_B,)$ მუშაობები A_N უდრის ნულს.

ბაგირის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_{ბაგ} = \int\limits_{\ell_0}^{\ell_0+h} \frac{M_2 g}{L} x dx = \frac{M_2 g}{2L}\left[(\ell_0 + h)^2 - \ell_0^2\right] =$$

$$= \frac{M_2 g}{2L}(2\ell_0 + h)h = \frac{M_2 g}{2L}(2\ell + 2r + h)h.$$

C საგორავის გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A_{გორ}C = -m_{გორ}\varphi_C = -N_C f_{გ.}\frac{s_C}{r} = -N_C \frac{f_{გ.}}{r} h.$$

განვსაზღვროთ C საგორავის რეაქციის მნიშვნელობა N_C:

$$N_C = M_3 g + \frac{M_2 g}{2L}\left(L - \ell - \frac{h}{2} - \frac{\pi r}{2}\right) =$$

$$= g\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right].$$

მაშასადამე,

$$A_{ბაგ} = -gh\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right]\frac{f_{გ.}}{r}.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = M_1 gh + \frac{M_2 g}{2L}(2\ell + 2r + h)h -$$

$$-gh\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right]\frac{f_{გ.}}{r}. \tag{6}$$

(4) და (6) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$(M_1 + M_2 + 2M_3)\frac{v^2}{2} = gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2\ell + 2r + h) -\right.$$

$$\left.-\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right]\frac{f_{გ.}}{r}\right\}$$

და ვიპოვოთ A ტვირთის სიჩქარე

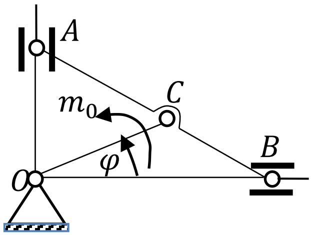
$$v = \sqrt{\frac{2gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2\ell + 2r + h) - \frac{f_{გ.}}{r}\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right]\right\}}{M_1 + M_2 + 2M_3}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u>

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2\ell + 2r + h) - \frac{f_{გ.}}{r}\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right]\right\}}{M_1 + M_2 + 2M_3}}$$

ამოცანა 38.48

ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარე ელიფსოგრაფის მექანიზმი მოძრაობაში მოდის მუდმივი მაბრუნი m_0 მომენტის მოქმედებით, რომელიც მოდებულია OC მრუდმხარაზე. საწყის მომენტში, როცა $\varphi = 0$, ს მექანიზმი ს უძრავია. იპოვეთ მრუდმხარას სკუთხური ს სიჩქარე იმ მომენტში, როცა მან გააკეთას მეოთხედი ბრუნვა. მოცემულია: $M - AB$ სღეროს მასა, $m_A = m_B = m,\ A$ და B ცოციას მასები, $OC = AC = BC = \ell$; მრუდმხარას მასა და წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საბოლოო მდებარეობა, როცა OC მრუდმხარა შემობრუნდება $\varphi = \frac{\pi}{2}$ კუთხით და საწყისი მდებარეობა. ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^e + \sum A_k^i \tag{1}$$

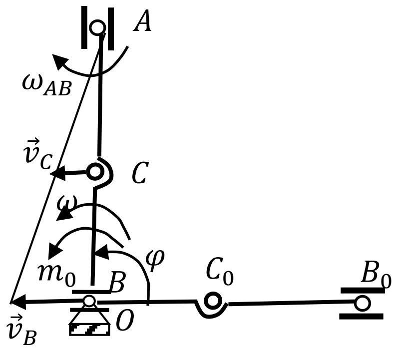
ლადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ $\sum A_k^i = 0$.

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი. $T_0 = 0$.

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^e \tag{2}$$

მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ მისი ცალკეული ნაწილების სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ. მუშაობას ასრულებს მხოლოდ მაბრუნი m_0 მომენტი:



$$\sum A_k^e = A_{m_0} = m_0\varphi = m_0 \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_A + T_B + T_{AB}. \tag{4}$$

A ცოციას კინეტიკური ენერგია უდრის ნულს, რადგან A წერტილში არის AB რგოლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}$$

AB ღეროს კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს მყის ბრუნვით მოძრაობას $\omega_{AB}=\omega$ კუთხური სიჩქარით A წერტილში მდებარე სიჩქარეთა მყისი ცენტრის ირგვლივ:

$$T_{AB}=\frac{1}{2}J_A\omega_{AB}^2=\frac{1}{2}[J_C+M(AC)^2]\omega_{AB}^2=$$
$$==\frac{1}{2}\left[\frac{M(AB)^2}{12}+M(AC)^2\right]\omega^2=\frac{2M\ell^2\omega^2}{3}.$$

B ცოციას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს გადატანით მოძრაობას

$$T_B=\frac{mv_B^2}{2}=\frac{m(2\ell\omega)^2}{2}=2m\ell^2\omega^2.$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$T=\frac{2M\ell^2\omega^2}{3}+2m\ell^2\omega^2=\frac{2\ell^2\omega^2}{3}(M+3m).$$

(3) და (4) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$\frac{2\ell^2\omega^2}{3}(M+3m)=m_0\cdot\frac{\pi}{2}$$

და ვიპოვოთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე

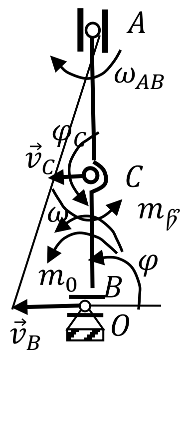
$$\omega=\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M+3m}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\omega=\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M+3m}}.$

ამოცანა 38.49

ამოხსენით წინა ამოცანა C სახსარში მუდმივი წინაღობის $m_{\text{წ}}$ მომენტის გათვალისწინებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საბოლოო მდებარეობა, როცა OC მრუდმხარა შემობრუნდება $\varphi=\frac{\pi}{2}$ კუთხით და საწყისი მდებარეობა.



ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T-T_0=\sum A_{k.}^e+\sum A_k^i \qquad (1)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ $\sum A_k^i=0$.

საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობში იყო, ე.ი.
$T_0 = 0.$
ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$T = \sum A_{k.}^{e} \qquad (2)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში (იხ. 38.48 ამოცანის ამოხსნა)

$$T = \frac{2M\ell^2\omega^2}{3} + 2m\ell^2\omega^2 = \frac{2\ell^2\omega^2}{3}(M + 3m). \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_{m_0} + A_{m_{\beta}}, \qquad (4)$$

მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ მისი ცალკეული ნაწილების სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ.
: მაბრუნი m_0 მომენტის მუშაობა

$$A_{m_0} = m_0\varphi = m_0 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

წინაღობის m_{β} მომენტის მუშაობა

$$A_{m_{\beta}} = -m_{\beta}\varphi_c = -\pi m_{\beta}..$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = m_0 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi m_{\beta} = \left(m_0 - 2m_{\beta}\right)\frac{\pi}{2}, \qquad (5)$$

რადგან $\varphi_c = 2\varphi = \pi.$

(3) და (5) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$\frac{2\ell^2\omega^2}{3}(M + 3m) = \left(m_0 - 2m_{\beta}\right)\frac{\pi}{2}$$

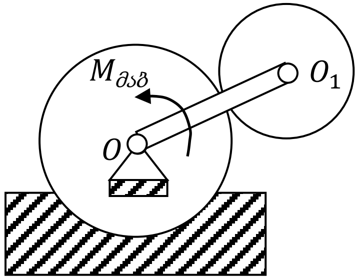
და ვიპოვოთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე წინაღობის მომენტის გათვალიწინებით.

$$\omega = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{3\pi\left(m_0 - 2m_{\beta}\right)_0}{M + 3m}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\omega = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{3\pi\left(m_0 - 2m_{\beta}\right)_0}{M + 3m}}.$

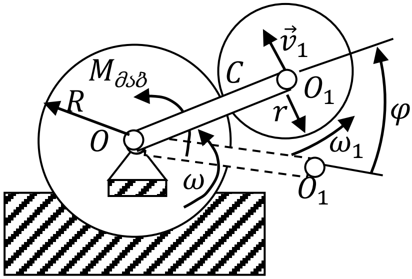
ამოცანა 38.50

ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარე ეპიციკლური მექნიზმის OO_1 მრუდმხარაზე მოდებულია მაბრუნი მომენტი $M_{მბ} = M_0 - \alpha\omega$, სადაც M_0 და α დადებითი მუდმივებია, ხოლო $\omega -$ კუთხური სიჩქარე უდრის m , სატელიტის მასა $-M$ (მოძრავი თვალი). განსაზღვრეთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე, როგორც დროის ფუნქცია,თუ მრუდმხარამიღებულია ერთგვაროვან წრიულ დისკოდ.. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო. უძრავი კბილანას რადიუსია $R.$ წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია.



მ ი თ ი თ ე ბ ა. მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა გამოიყენეთ დიფერენციალური სახით.

ა მ ო ხ ს ნ ა.განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა დროის t მომენტში, ავღნიშნოთ მრუდმხარას საწყის მდებარეობა



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა დიფერენციალური ფორმით:

$$dT = \sum \delta A_{k.}^{e} \qquad (1)$$

ვიპოვოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_{მრ} + T_C \qquad (2)$$

OO_1 მრუდმხარას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_{მრ} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m(OO_1)^2}{12} + m\left(\frac{OO_1}{2}\right)^2\right]\omega^2 =$$
$$= \frac{m(OO_1)^2}{6}\omega^2 = \frac{m(R+r)^2}{6}\omega^2.$$

C სატელიტის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ პარალელურ მოძრაობას:

$$T_C = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}J_{O_1}\omega_1^2 = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{Mv_1^2}{4} = \frac{3M(R+r)^2}{4}\omega^2.$$

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{m\omega^2(R+r)^2}{6} + \frac{3M\omega^2(R+r)^2}{4} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)\frac{(R+r)^2}{2}\dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

ვიპოვოთ (3) გამოსახულების დიფერენციალი:

$$dT = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi}. \quad (4)$$

მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ მისი ცალკეული ნაწილების სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ.
გამოვთვალოთ მაბრუნი $M_{მაბ}$ მომენტის ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = M_{მაბ}d\varphi = (M_0 - \alpha\omega)d\varphi = (M_0 - \alpha\dot{\varphi})d\varphi \qquad (5)$$

(4) და (5) გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi} = (M_0 - \alpha\dot{\varphi})d\varphi,$$

შევკვეცოთ $d\varphi -$ზე, მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა:

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\int_0^{\omega}\frac{d\dot{\varphi}}{\alpha\dot{\varphi} - M_0} = -\int_0^t dt,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2 ln\left|\frac{\alpha\omega - M_0}{-M_0}\right| = -t,$$

$$\frac{\alpha\omega - M_0}{-M_0} = e^{-\frac{\alpha t}{J_{დაყ}}}$$

სადაც

$$J_{დაყ.} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2.$$

ვიპოვოთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{დაყ}}t}\right).$$

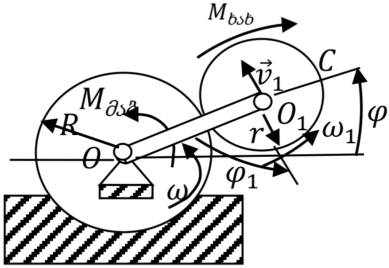
პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{დაყ}}t}\right)$, სადაც

$$J_{დაყ.} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2.$$

ამოცანა 38.51

ამოხსენით წინა ამოცანა სატელიტის O_1 ღერძში ხახუნის მუდმივი მომენტის $M_{ხახ}$ –ისგათვალიწინებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა დროის t მომენტში.



გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიეს ცვლილების თეორემა დიფერენციალური ფორმით:

$$dT = \sum \delta A_k^e. \qquad (1)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია(იხ. 38.50 ამოცანის ამოხსნა, ფორმულა (3)):

$$T = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)\frac{(R+r)^2}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}J_{დაყ.}\omega^2 = \frac{1}{2}J_{დაყ.}\dot{\varphi}^2,$$

სადაც

$$J_{დაყ.} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2.$$

მაშინ

$$dT = J_{დაყ.}\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = J_{დაყ.}\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი:

$$\sum \delta A_k^e = \delta A_{გრ} + \delta A_{ხახ}\ , \qquad (3)$$

მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ.

გამოვთვალოთ სატელიტის ღერძში ხახუნის მომენტის $M_{ხახ}$ –ის მუშაობა

$$.\qquad \delta A_{ხახ} = -M_{ხახ}\,d\varphi_1, \qquad (4)$$

სადაც φ_1 – სატელიტის მობუნების კუთხეა მრუდმხარას მიმართ.

რადგან მობუნების კუთხე კუთხური სიჩქარის პროპორციულია, ამიტომ

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

ტოლობიდან

$$\frac{\omega_e}{\omega_1} = \frac{r}{R}$$

ვიპოვით

$$\omega_1 = \frac{\omega_e R}{r} = \frac{\omega R}{r}$$

მაშინ მობრუნების კუთხე

$$\varphi_1 = \frac{\varphi R}{r}$$

და (4) ფორმულის თანახმად

$$\delta A_{ხახ} = -M_{ხახ}\frac{R}{r}d\varphi.$$

გამოვთვალოთ მაბრუნი $M_{მაგ}$ მომენტის ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A_{ბრ} = (M_0 - \alpha\dot{\varphi})d\varphi$$

ამის გათვალისწინებით (3) ფორმულის თანხამად მივიღებთ:

$$\sum \delta A_k^e = \left[(M_0 - \alpha\dot{\varphi}) - M_{ხახ}\frac{R}{r}\right]d\varphi = -\left[\alpha\dot{\varphi} - \left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)\right]d\varphi, \quad (5)$$

(2) და (5) გამოსახულება ჩავსვათ (1) დიფერენციალურ განტოლებაში:

$$J_{დაყ.}\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi} = \left[\alpha\dot{\varphi} - \left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)\right]d\varphi.$$

შევკვეცოთ $d\varphi$ −ზე, მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა:

$$J_{დაყ.}\int_0^{\omega}\frac{d\dot{\varphi}}{\alpha\dot{\varphi} - \left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)} = -\int_0^t dt,$$

$$J_{დაყ.}ln\left|\frac{\alpha\omega - \left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)}{-\left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)}\right| = -t,$$

$$\frac{\alpha\omega - \left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)}{-\left(M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}\right)} = e^{-\frac{\alpha}{J_{დაყ}}t}.$$

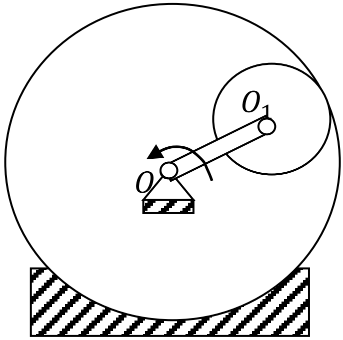
ვიპოვოთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{დაყ}}t}\right).$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{M_0 - \frac{R}{r}M_{ხახ}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{დაყ}}t}\right)$, სადაც

$$J_{დაყ.} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R + r)^2.$$

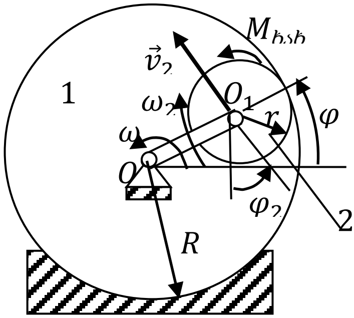
ამოცანა 38.52



ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარე ჰიპოციკლური მექანიზმისმრუდმხარა ბრუნავს ω_0 კუთხურისიჩქარით. გარკვეულ მომენტში ძრავას გამორთვის გამო სატელიტის (მოძრავი თვალი) ღერძზე ხახუნის მუდმივი $M_{ხახ}$ მომენტის მოქმედების შედეგად მექანიზმი გაჩერდა. განსაზღვრეთ დამუხრუჭების τ დრო და მრუდმხარასმობრუნების φ კუთხე ამ დროში, თუ მისი მასა $-M_1$ სატელიტის მასა$-M_2$;. R და $r-$ სათანადო რადიუსებია.მრუდმხარა ჩათვალეთ ერთგვაროვან ვრილ ღეროდ., ხოლო სატელიტი ერთგვაროვან წრიულ დისკოდ.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა გამოიყენეთ დიფერენციალური სახით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება OO_1 მრუდმხარას და ორი თვლისაგან-1 უძრავი თვალი, მეორე მოძრავი თვალი-სატელიტი. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის მდებარეობა დროის t მომენტში, ავღნიშნოთ მრუდმხარას საწყის მდებარეობა გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა დიფერენციალური ფორმით:



$$dT = \sum \delta A_{k.}^{e} \qquad (1)$$

ვიპოვოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_{მრ} + T_2 \qquad (2)$$

OO_1 მრუდმხარას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_{მრ} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1(OO_1)^2}{3}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1(R-r)^2}{3}\omega^2$$

2 სატელიტის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრტყელ პარალელურ მოძრაობას:

$$T_2 = \frac{M_2 v_2^2}{2} + \frac{1}{2}J_{O_1}\omega_2^2 = \frac{M_2 v_2^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v_2^2}{r^2} = \frac{3M_2 v_2^2}{4}\omega^2.$$

ვიპოვოთ სატელიტის ღერძის სიჩქარე

$$v_2 = \omega \cdot OO_1 = (R-r)\omega,$$

მაშინ

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{3M_2(R-r)^2}{2}\omega^2$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია (2) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{1}{2}\frac{M_1(R-r)^2}{3}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{3M_2(R-r)^2}{2}\omega^2 =$$

$$= \left(\frac{M_1}{3} + \frac{3M_2}{2}\right)\frac{(R-r)^2}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}J_{დაყ.}\omega^2 = \frac{1}{2}J_{დაყ.}\dot{\varphi}^2,$$

სადაც

$$J_{დაყ.} = \left(\frac{M_1}{3} + \frac{3M_2}{2}\right)(R-r)^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის დიფერენცილი:

$$dT = J_{დაყ.}\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = J_{დაყ.}\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi}. \quad (3)$$

მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ მისი ცალკეული ნაწილების სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ,ე.ი.

$$\delta A^e_{k.} = \delta A_{ხახ}.$$

გამოვთვალოთ ხახუნის მომენტის $M_{ხახ}$ –ის მუშაობა

$$. \qquad \delta A_{ხახ} = -M_{ხახ}\, d\varphi_2,$$

სატელიტის მობრუნების φ_2 კუთხე გამოვსახოთ მრუდმხარას მობრუნების φ კუთხე.:

$$\varphi_2 = \frac{R-r}{r}\varphi,$$

$$d\varphi_2 = \frac{R}{r}d\varphi,$$

მაშინ

$$\delta A_{ხახ} = -\frac{R}{r}M_{ხახ}\, d\varphi. \quad (4)$$

(3) და (4) გამოსახულება ჩავსვათ (1) დიფერენციალურ განტოლებაში:

$$J_{დაყ.}\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r}M_{ხახ}\, d\varphi. \quad (5)$$

შევკვეცოთ $d\varphi$ –ზე, მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა:

$$J_{დაყ.}\int_{\omega_0}^{0} d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r}M_{ხახ}\int_{0}^{t} dt,$$

$$-J_{დაყ.}\omega_0 = -\frac{R}{r}M_{ხახ}t.$$

აქედან ვიპოვით დამუხრუჭების დრო

$$\tau = \frac{rJ_{დაყ.}}{RM_{ხახ}}\omega_0.$$

მრუდმხარას მობრუნების φ კუთხის საპოვნელად (5) დიფერენციალურ განტოლება ჩავწეროთ სახით:

$$J_{დაყ.}\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r}M_{ხახ}\,d\varphi.$$

მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ

$$J_{დაყ.}\int_{\omega_0}^{0} \dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r}M_{ხახ}\int_{0}^{\varphi} d\varphi$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$J_{დაყ.}\frac{\omega_0^2}{2} == -\frac{R}{r}M_{ხახ}\,\varphi.$$

მრუდმხარას მობრუნების φ კუთხე

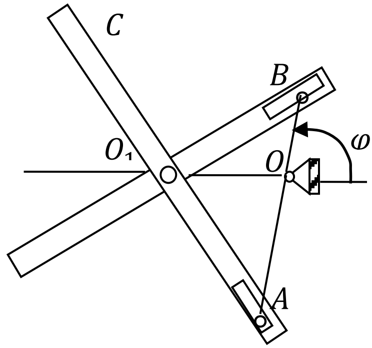
$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{rJ_{დაყ.}}{RM_{ხახ}}\omega_0^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\tau = \frac{rJ_{დაყ.}}{RM_{ხახ}}\omega_0$; $\varphi = \frac{1}{2}\frac{rJ_{დაყ.}}{RM_{ხახ}}\omega_0^2$, სადაც

$$J_{დაყ.} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R-r)^2.$$

ამოცანა 38.53

C ჯვართავა O_1 უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობაში მოდის უძრავი O ღერძის გარშემობრუნავი AB ერთგვაროვანი ღეროს საშულებით (O და O_1 ღერძებინახაზის სიბრტყის მართობებია). ამ შემთხვევაში A და B ცოციები,რომლებიც AB ღეროსთან სახსრებითაა შეერთებული, სრიალებს C ჯვართავას ორურთიერთმართობ წრილში. ღერო ბრუნავს მუდმივი $m_{მბ}$ მომენტის მოქმედებით. განსაზღვრეთ AB ღეროს კუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა იგი ასრულებს მეოთხედ ბრუნს, თუ საწყის მომენტში, როცა $\varphi = 0,$ მას ჰქონდა ω_1 კუთხური სიჩქარე. A და B ცოციების სახსრებში წარმოშობილი წინაღობის მომენტის სიდიდე $m_{მბ}-$ზე ორჯერ ნაკლებია. დანარჩენი წინაღობია ძალები უგულებელყოფილია. ღეროს მასა უდრის m; C ჯვართავა O_1 ღერძის მიმართ უდრის J; $OO_1 = OA = OB = \ell.$



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემის საბოლოო მდებარეობა, როცა AB ღერო შემობრუნდება $\varphi = \frac{\pi}{2}$ კუთხით და ავღნიშნოთ საწყისი მდებარეობა წყვეტილი ხაზებით. ვიპოვოთ ჯვართავას კუთხური სიჩქარე საბოლოო მდებარეობაში.A და B ცოციები ასრულებენ რთულ მოძრაობას: აბსოლუტურს AB ღეროსთან ერთად, წარმტანს- ჯვართავასთან ერთად, ფარდობითს- ჯვართავას ჭრილის გასწვრივ.

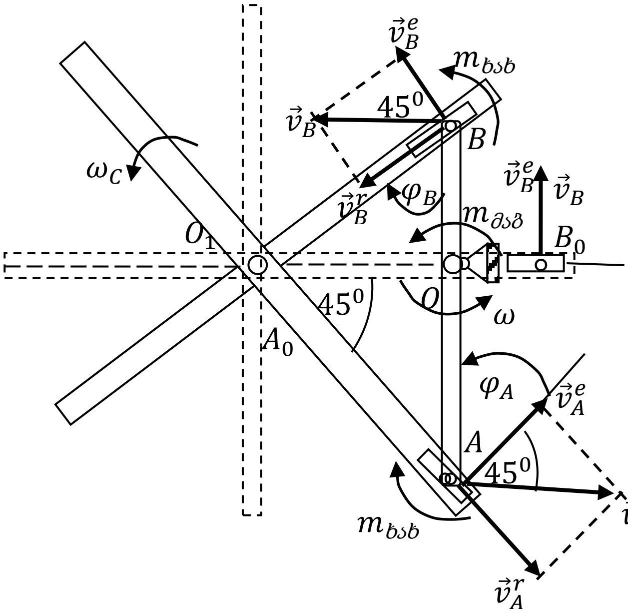
A და B ცოციების აბსოლუტური სიჩქარეები გამოვსახოთ AB ღეროს კუთხური სიჩქარით:

$$v_A = v_B = \omega\ell.$$

A და B ცოციების სიჩქარეთა პარალელოგრამიდან (იხ. ნახაზი) ვპოულობთ:

$$v_A^e = v_A cos45^0, \quad v_B^e = v_A cos45^0.$$

განვსაზღვროთ C ჯვართავას კუთხური სიჩქარე:



$$\omega_C = \frac{v_A^e}{O_1A} = \frac{\omega\ell cos45^0}{\ell/cos45^0} = \omega cos^2 45^0 = \frac{\omega}{2}.$$

განვსაზღვროთ ჯვართავას ω_{C_0} კუთხური სიჩქარე საწყის მდებარეობაში (B_0 მდებარეობა).

B ცოციას აბსოლუტური სიჩქარე v_B უდრის წარმტან v_B^e სიჩქარეს;

$$v_B = v_B^e = \omega_0 \cdot OB_0 = \omega\ell.$$

მაშინ

$$\omega_{C_0} = \frac{v_B^e}{O_1B_0} = \frac{\omega_0\ell}{2\ell} = \frac{\omega_0}{2}.$$

განვსაზღვროთ A და B ცოციების მობრუნეის კუთხეები მათი სახსრების ირგვლივ.

ΔAOO_1 −დან ვიპოვით: $\angle O_1OA = \varphi -$ აგების თანახმად;

$$\angle OO_1A = \frac{180^0 - \varphi}{2}.$$

მაშინ

$$\varphi_A = 90^0 - \angle OO_1A = \frac{\varphi}{2}.$$

ანალოგიურად ვიპოვით

$$\varphi_B = \frac{\varphi}{2}.$$

ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_{k.}^{e} + \sum A_k^{i} \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საწყის მდებარეობაში:

$$T_0 = T_{AB} + T_C.$$

AB ღეროს კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}\frac{m(2\ell)^2}{12}\omega_0^2 = \frac{m\ell^2}{6}\omega_0^2$$

C ჯვართავას კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_C = \frac{1}{2}J\omega_{C0}^2 = \frac{1}{2}J\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 = \frac{J}{8}\omega_0^2.$$

მაშინ

$$T_0 = \frac{1}{6}m\ell^2\omega_0^2 + \frac{1}{8}J\omega_0^2 = \frac{4m\ell^2+3J}{24}\omega_0^2. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია საბოლოო მდებარეობაში:

$$T = T_{AB} + T_C.$$

AB ღეროს კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m(2\ell)^2}{12}\omega^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2$$

C ჯვართავას კინეტიკური ენერგია, რომლებიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_C = \frac{1}{2}J\omega_C^2 = \frac{1}{2}J\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{J}{8}\omega^2.$$

მაშინ

$$T = \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2 + \frac{1}{8}\omega^2 = \frac{4m\ell^2+3J}{24}\omega^2. \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_{ბრ}. \qquad (4)$$

AB ღეროზე მოდებული მუდმივი $m_{ძაბ}$ მომენტის მუშაობა

$$A_{ბრ} = m_{ძაბ}\varphi = \frac{\pi}{2}m_{ძაბ}.$$

A ცოციას სახსარში წარმოქმნილი წინააღმდეგობის ძალების მომენტის მუშაობა:

$$A_A = -m_{ხახ}\varphi_A = -\frac{m_{მამ}}{2}\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{4}m_{მამ}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8}m_{მამ}.$$

ანალოგიურად B ცოციას სახსარში წარმოქმნილი წინააღმდეგობის ძალების მომენტის მუშაობა:

$$A_B = -m_{ხახ}\varphi_B = -\frac{m_{მამ}}{2}\frac{\varphi}{2} = -\frac{\pi}{8}m_{მამ}.$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$\sum A_k^e = \frac{\pi}{2}m_{მამ}. -\frac{\pi}{8}m_{მამ} - \frac{\pi}{8}m_{მამ} = \frac{\pi}{4}m_{მამ}. \qquad (5)$$

რადგან სისტემა უცვლელია, ამიტომ $\sum A_k^i = 0.$

ჩავსვათ (2), (3), (5) და (6) გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$\frac{4m\ell^2 + 3J}{24}\omega^2 - \frac{4m\ell^2 + 3J}{24}\omega_0^2 = \frac{\pi}{4}$$

და ვიპოვოთ AB ღეროს კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \sqrt{\frac{6\pi m_{მამ}}{4m\ell^2 + 3J} + \omega_0^2}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\omega = \sqrt{\frac{6\pi m_{მამ}}{4m\ell^2+3J} + \omega_0^2}.$

§39. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური (ბრტყელი) მოძრაობა.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

მყარი სხეულის **ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა** წარმოდგენს ორი მარტივი მოძრაობის ჯამს-პოლუსთან ერთად გადატანით და ამ პოლუსის ირგვლივ ბრუნვითი მოძრაობის. ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის დროს პოლუსად ღებულობენ სხეულის მასათა ცენტრს, მაშინ ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დინამიკის შესწავლისას შეიძლება გამოვიყენოთ თეორემა მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ გადატანითი მოძრაობისას:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e = \vec{R}^e \qquad (39.1)$$

და თეორემა მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა მასათა ცენტრზე გამავი ღერძის მიმართ ბრუნვით მოძრაობაში:

$$\frac{dK_{Cz}}{dt} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = M_{Cz}^e \qquad (39.2)$$

რადგან კინეტიკური მომენტი K_{Cz}ბრუნვით მოძრაობაში

$$K_{Cz} = J_{Cz}\omega, \qquad (39.3)$$

ამიტომ თუ ჩავსვამთ (39.3)-ს (39.2)-ში, მივიღებთ:

$$J_{Cz}\frac{d\omega}{dt} = J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = M_{Cz,}^e \qquad (39.4)$$

სადაც $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}$, რადგან $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\varphi -$ სხეულის მობრუნების კუთხეა.

(39.4) განტოლება–ეს **არის მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება**.

(39.1) ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილოთ x და y საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ ორ დიფერენციალური განტოლებას, რომლებიც აღწერენ გადატანითი მოძრაობისასდა რომლებიც (39.4) განტოლებასთან ერთად აღწერს მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დინამიკას.

ამგვარად, მყარი სხეულის **ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებებს** აქვს სახე:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \\ M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right). \end{cases} \qquad (39.5)$$

(39.5) განტოლება საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ბრტყელი მოძრაობის დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა;

- მოჩემული გარე ძალების საფუძველზე განვსაზღვროთ სხეულის მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონი და მასათა ცენტრის ირგვლივ ბრუნვითი მოძრაობის კანონი;
- მასათა ცენტრის მოძრაობის მოცემული კანონი საფუძველზე განვსაზღვროთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი $\vec{R}^e$, ხოლო ბრუნვითი მოძრაობის მოცემული კანონის საფუძველზე - გარე ძალების ნაკრები მომენტი M^e_{Cz}.

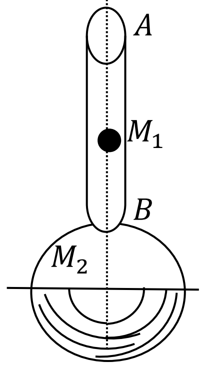
ეს განტოლებები, აგრეთვე, საშუალებას გვძლევს განვსაზღვროთ ერთ-ერთი უცნობი გარე ძალა.

მოცემული პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა (საკოორდინატო სისტემის ღერძები). ღერძები მიმვმართოთ მოძრაობის მიმართულებით;
2. გამოვსახოთ სხეული ნებისმიერ მდგომარეობაში და განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობები;
3. ნახაზზე გამოვსახოთ სხეულზე მოქმედი ყველა გარე ძალა;
4. ჩავწეროთ მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები და მათი ამოხსნის შედეგად საძიებელი სიდიდეები ზოგადი სახით მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით;
5. აუცილებლობის შემთხვევაში მიღებულ გამოსახულებაში შევიტანოთ რიცხვითი მნიშვნელობები და გამოვთავლოთ შედეგი.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 39.1



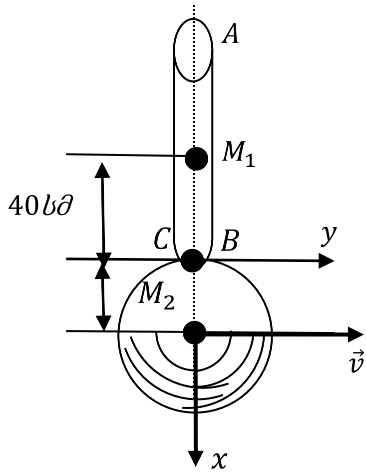
მძიმე სხეული შედგება 80სმ სიგრძის 1კგ მასის B ღეროსა და მასზე იმაგრებული 20 სმ რადიუსის და 2კგ მასის დისკოსგან. საწყის მომენტში ღეროს ვერტიკალური მდებარეობისას სხეულს მიანიჭეს ისეთი მოძრაობა, რომ ღეროს M_1 მასათა ცენტრის სიჩქარე ნულის ტოლია, ხოლო დისკოს M_2 მასათა ცენტრის სიჩქარე 360სმ/წმ-ის და მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ. იპოვეთ სხეულის შემდგომი მოძრაობის კანონი, თუ მხედველობაში მიიღება მხოლოდ სომძიმის ძალის მოქმედება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ღერო და დისკო წარმოადგენს ერთიაენ მექანიკურ სისტემას, რომლის მასათა ცენტრი მდებარეობს M_1M_2 მონაკვეთზე და M_1 წერტილიდან

დაშორებულია

$$M_1C=\frac{m_1\cdot 0+m_2\cdot M_1M_2}{m_1+m_2}=\frac{60\cdot 2}{1+2}=40 \text{ (სმ)}$$

მანძილით (ამგვარად, C წერტილი ემთხვევა B წერტილს). ღადგან საწყის მომენტში M_1 წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, ამიტომ ის წარმოადგენს მექანიკური სისტემის სიჩქარეთა მყის ცენტრს, რომელიც ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას.



მაშინ

$$v_B(t=0)=\frac{v}{M_1M_2}\cdot M_1B=\frac{360}{60}\cdot 40=$$
$$=240 \text{ (სმ).}$$

$$\omega(t=0)=\frac{v}{M_1M_2}=\frac{360}{60}=6 \text{ (რად/წმ).}$$

მყარი სხეული შემდგომი ბრტყელი მოძრაობა კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომლის ცენტრი B წერტილშია, y ღერძი მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ, ხოლო x ღერძი-ქვემოთ, აღიწერებაშემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლებებით:

$$M\ddot{x}_C=Mg, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C=0, \qquad (2)$$

$$J_C\frac{d\omega}{dt}=0. \qquad (3)$$

(1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\ddot{x}_C=g,$$
$$x_C=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით $x_C(0)=0,\ \dot{x}_C(0)=0,$ განვსაზღვრავთ ინტეგრების მუდმივებს: $C_1=C_2=0.$ მაშასადამე,

$$x_C=\frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

(2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\dot{y}_C=C_3,$$
$$y_C=C_3t+C_4.$$

ამის გათვალისწინებით

$\dot{y}_C(0)=v_B(t=0)=240$ სმ/წმ, ხოლო $y_C(0)=0,$ მაშინ

$$y_C=240t. \qquad (5)$$

(5) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$t = \frac{y_C}{240}.$$

ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (4) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x_C = \frac{980 y_C^2}{2 \cdot 240^2}$$

ან

$$y_C^2 = 117{,}5 x_C. \qquad (6)$$

(6) წარმოადგენს პარაბოლის განტოლებას.

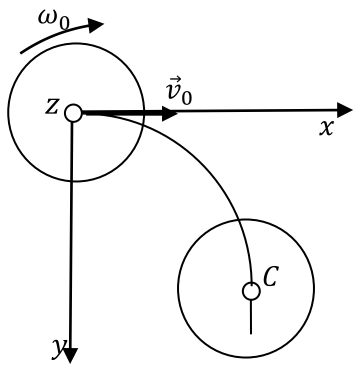
(3) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\omega = const,$ ე.ი.

$$\omega = \omega(t = 0) = 6 \text{ რად/წმ}.$$

პ ა ს უ ხ ი: სხეული თანაბრად ბრუნავს $\omega = 6$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით მისი მასათა ცენტრის გარშემო, რომელიც შემოსწერს $y^2 = 117{,}5x$ პარაბოლას (კოორდინატთა სათავე მოთავსებულია B წერტილშია, y ღერძი მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ, ხოლო x ღერძი-ქვემოთ)

ამოცანა 39.2

დისკო სიმძიმის ძალის მოქმედებით ვარდება ვერტიკალურ სიბრტყეში. საწყის მომენტში დისკოს მიანიჭეს ω_0 კუთხური სიჩქარე, ხოლო მის სიმძიმის C ცენტრს, რომელიც იმყოფებოდა კოორდინატთა სათავეში, ჰქონდა ჰორიზონტალურად მიმართული v_0 სიჩქარე. განსაზღვრეთ დისკოს მოძრაობის განტოლებები. x და y ღერძები ნაჩვენებია ნახაზზე. წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. დავწეროთ დისკოს ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები სიმძიმის ძალის მოქმედებით x და y ღერძზე გეგმილებში:

$$M\ddot{x}_C = 0, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = Mg, \qquad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = 0, \qquad (3)$$

სადაც M –დისკოს მასა, J_C –დისკოს ინერციის მომენტია მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

(1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\ddot{x}_C = 0,$$

$$x_C = C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით $x_C(0) = 0,\ \dot{x}_C(0) = v_0$, განვსაზღვრავთ ინტეგრების მუდმივებს:

$$C_1 = v_0, C_2 = 0.$$

ჩავსვათ C_1 და $C_2 -$ ის მნიშვნელობები (4) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$x_C = v_0 t.$$

(2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\ddot{y}_C = g,$$

$$y_C = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$\dot{y}_C(0) = 0\ , \quad y_C(0) = 0,$$

განვსაზღვროთ C_3 და C_4 ინტეგრების მუდმივები:

$$C_3\ = C_4$$

მაშინ

$$y_C = \frac{gt^2}{2}.$$

(3) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi = 0,$$

$$\varphi = C_5 t + C_6.$$

რადგან $\dot{\varphi}(0) = \omega_0, \varphi(0) = 0,$ ამიტომ

$$C_5 = \omega_0, \qquad C_6. = 0.$$

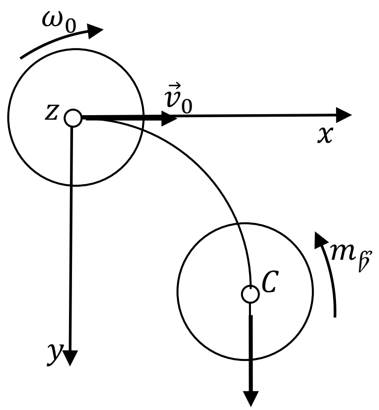
მაშინ

$$\varphi = \omega_0 t.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{gt^2}{2}, \quad \varphi = \omega_0 t,$ სადაც φ დისკოს მობრუნების კუთხეა, შედგენილი ღერძსა და იმ დიამეტრით, რომელსაც საწყის მომენტში ჰორიზონტალური მდებარეობა ჰქონდა.

ამოცანა 39.3

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ დაშვებით, რომ $m_{წ}$ არის წინაღობის მომენტი, დისკოს მასათა C ცენტრზე მოძრაობის სიბრტყის მართობულად გამავალი მოძრავი ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო ბრუნვისას, რომელიც დისკოს ბრუნვის კუთხური $\dot{\varphi}$ სიჩქარის პროპორციულია, ამასთან პროპორციულობისკოეფიციენტი არის β. დისკოს ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ უდრის J_C.



ა მ ო ხ ს ნ ა. (1) და (2) დიფერენციალურ განტოლებები (იხ. 39.2 ამოცანის ამოხსნა), ისევე როგორც საწყისი პირობები რჩება უცვლელი, ამიტომ მათ ამონახსნებს ექნება იგივე სახე, როგორიც წინა ამოცანაში.

$$J_C\ddot{\varphi} = 0$$

განტოლება წინააღმდეგობის ძალების გათვალიწინებით მიიღებს სახეს:

$$J_C\frac{d\omega}{dt} = -m_{\beta},$$

სადაც $m_{\beta} = \beta\omega$

მაშინ

$$J_C\frac{d\omega}{dt} = -\beta\omega. \qquad (1)$$

(1) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადების განცალება:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\beta}{J_C}dt,$$

ვაინტეგროთ

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\beta}{J_C}\int_0^t dt,$$

მივიღებთ

$$ln\omega|_{\omega_0}^{\omega} = -\frac{\beta}{J_C}t\Big|_0^t,$$

$$ln\,\omega - ln\omega_0 = -\frac{\beta}{J_C}t,$$

$$ln\,\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\beta}{J_C}t.$$

საიდანაც

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\beta}{J_C}t}. \qquad (2)$$

ω შევცვალოთ $\frac{d\varphi}{dt}$ –ით და (2) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$d\varphi = e^{-\frac{\beta}{J_C}t}dt$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^{t} e^{-\frac{\beta}{J_C}t} dt,$$

$$\varphi\Big|_0^{\varphi} = -\frac{J_C\omega_0}{\beta} e^{-\frac{\beta}{J_C}t}\Bigg|_0^t,$$

$$\varphi = \frac{J_C\omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{J_C}t}\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $x_C = v_0 t$, $y_C = \frac{gt^2}{2}$, $\varphi = \frac{J_C\omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{J_C}t}\right)t$, სადაც φ დისკოს მობრუნების კუთხეა, შედგენილი ღერძსა და იმ დიამეტრით, რომელსაც საწყის მომენტში ჰორიზონტალური მდებარეობა ჰქონდა.

ამოცანა 39.4

ავტომობილის r რადიუსის და M მასის წამყვანი თვალი მოძრაობს ჰორიზონტალურად და წრფივად. თვალზე მოქმედებს მაბრუნი m მომენტი. თვლის ინერციის რადიუსი მისი მასათა ცენტრზე გამავალი და მისი სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ არის ρ. მიწაზე თვლის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მაბრუნი მომენტი, რომ თვალი მოძრაობდეს უსრიალო გორვით? გორვის წინაღობა უგულებელყოფილია.

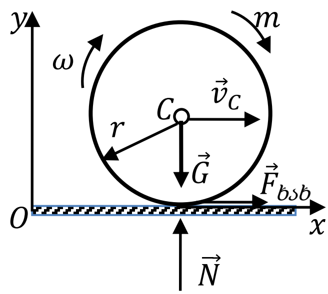
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ თვალზე მოქმედი ძალები (იხ. ნახაზი), აგრეთვე, კუთხური სიჩქარე და მასათა ცენტრის სიჩქარე.

ჩავწეროთ თვლის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$M\ddot{x}_C = F_{ხახ}, \quad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = N - G, \quad (2)$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = m - F_{ხახ}r \quad (3)$$



შადაც $F_{ხახ}$ – მიწაზე თვლის სრიალის ხახუნის ძალაა; $J_{Cz} = M\rho^2$ – თვლის ინერციის მომენტია მისი ცენტრზე გამავალი და მისი სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ (ინერციის მომენტი მასათა ცენტრის მიმართ).

თვალი რომ უსრიალოდ გორავდეს, უნდა სრულდებოდეს პირობა:

$$F_{ხახ} \le fG = fMg. \quad (4)$$

თვლის მოძრაობის დროს $y_C = r$, მაშასადამე, $\ddot{y}_C = 0$. მაშინ (2)-დან მივიღებთ, რომ $N = G$. რადგან თვალი გორავს უსრიალოდ, ამიტომ $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$ და (1) და (3) განტოლებები ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$M r\ddot{\varphi} = F_{ხახ}, \quad (5)$$

$$M\rho^2\ddot{\varphi} = m - F_{ხახ}r \quad (6)$$

(5) განტოლებიდან ვიპოვოთ

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{ხახ}}{Mr}$$

და ეს გამოსახულება ჩავსვათ (6) განტოლებაში. მაშინ მივიღებთ:

$$m = \left(r + \frac{\rho^2}{r}\right)F_{ხახ} = \frac{r^2 + \rho^2}{r}F_{ხახ}$$

(4) ფორმულის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$m \leq fMg\frac{r^2 + \rho^2}{r}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $m \leq fMg\frac{r^2+\rho^2}{r}$.

ამოცანა 39.5

ამოხსენით წინა ამოცანა გორვის ხახუნის გათვალიწინებით, თუ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f_გ$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში 39.4 ამოცანის ამოხსნაში ნახაზზე ნაჩვენებ ძალებს დაემატება გორვის ხახუნის მომენტი (იხ. ნახაზი).

$$m_გ = f_გN = f_გMg.$$

ისე როგორც წინა ამოცანის ამოხსნისას აქაც მივიღებთ:

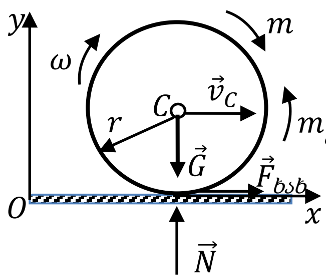
$$Mr\ddot{\varphi} = F_{ხახ}, \quad (1)$$

$$M\rho^2\ddot{\varphi} = m - F_{ხახ}r - f_გMg \quad (2)$$

(1) განტოლებიდან ვიპოვოთ

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{ხახ}}{Mr}$$

და ეს გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში. მაშინ მივიღებთ:



$$m = \frac{r^2 + \rho^2}{r}F_{ხახ} + f_გMg$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$F_{ხახ} \leq fG = fMg,$$

მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

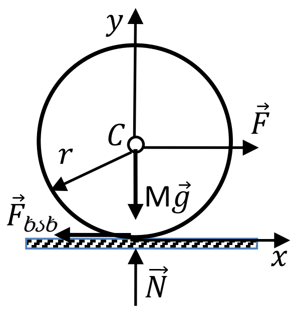
$$m \leq fMg\frac{r^2+\rho^2}{r} + f_გMg.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $m \leq fMg\frac{r^2+\rho^2}{r} + f_გMg.$

, ამოცანა 39.6

ავტომობილის ამყოლი თვლის ღერძი მოძრაობს ჰორიზონტალურად და წრფივად. თვლის ღერძზე მოდებულია ჰორიზონტალური $\vec{F}$ ძალა. თვლის ინერციის რადიუსი მისი მასათა ცენტრზე გამავალი და მისი სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ არის ρ. მიწაზე თვლის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f, თვლის რადიუსი $-r$, ხოლო მასა $-M$. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{F}$ ძალა იმისათვის, რომ თვალმა იგოროს უსრიალოდ? გორვის წინაღობა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ თვლის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები გარე ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი),:



$$M\ddot{x}_C = F - F_{ხახ}, \qquad (1)$$
$$M\ddot{y}_C = N - Mg, \qquad (2)$$
$$M\rho^2\ddot{\varphi} = F_{ხახ}r. \qquad (3)$$

რადგან $\ddot{y}_C = 0$, ამიტომ $N = Mg.$
მაშინ

$$F_{ხახ} = fN = fMg$$

რადგან თვალი გორავს უსრიალოდ, ამიტომ $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$ და (1) და (3) განტოლებები ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$M\ddot{x}_C = F - fMg,$$
$$M\rho^2\frac{\ddot{x}_C}{r} = fMgr.$$

მაშინ

$$F - fMg = f\frac{Mgr^2}{\rho^2}.$$

აქედან მივიღებთ, რომ ძალის ზღვრული მნიშვნელობა, რომლის დროსაც თვალი გორავს უსრიალოდ,

$$F = \frac{fMg(r^2+\rho^2)}{\rho^2}.$$

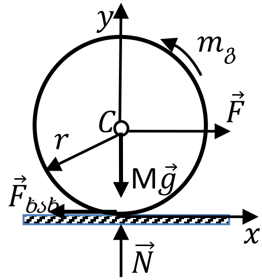
მაშასადამე, უსრიალოდ გორვას ადგილი ექნება, თუ

$$F \le \frac{fMg(r^2+\rho^2)}{\rho^2}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $F \le \frac{fMg(r^2+\rho^2)}{\rho^2}.$

ამოცანა 39.7

ამოხსენით წინა ამოცანა გორვის ხახუნის გათვალისწინებით, თუ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f_{\text{გ}}$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გორვის ხახუნის მომენტის გათვალისწინებით 39.6 ამოცანის ამოხსნაში შეიცვლება მხოლოდ (3) განტოლება და თუ გავითვალისწინებთ, რომ გორვის ხახუნის მომენტი

$$m_{\text{გ}} = f_{\text{გ}}N,$$

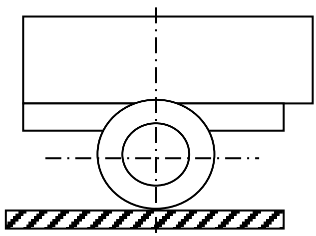
მაშინ ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M\rho^2\ddot{\varphi} = fNr - f_{\text{გ}}N$$

ჩავატარებთ რა იგივე მოქმედებებს, რაც წინა ამოცანაში, მივიღებთ:

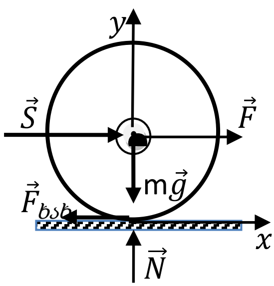
$$F \le \frac{fMg(r^2+\rho^2) - f_{\text{გ}}Mgr}{\rho^2}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $F \le \frac{fMg(r^2+\rho^2)-f_{\text{გ}}Mgr}{\rho^2}.$



ამოცანა 39.8

ავტომობილის მისაბმელი მოძრობს შენელებულად გაჩერებამდე w_0 აჩქარებით. ამასთან ერთ-ერთ თვალზე მუხრუჭი არ ჩაირთო. თვლის წნევა გზაზე უდრის N. მიწაზე თვლის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f, მოცემულია: $r-$თვლის რადიუსი, $m-$მასა, $\rho -$ინერციის რადიუსი. განსაზღვრეთ თვლის მის ღერძზე ჰორიზონტალური წნევის S ძალა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ ავტომობილის მისაბმელის თვლის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები გარე ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი),:

$$mw_0 = S - fN,$$
$$m\rho^2\ddot{\varphi} = fNr.$$

1) უსრიალოდ გორვის დროს უნდა შესრულდეს პირობა:: $w_0 \leq r\ddot{\varphi}.$

მაშასადამე, როცა $w_0 \leq f\frac{N}{m}\frac{r^2}{\rho^2}$

$$S = mw_0 + fN = mw_0 + m\frac{\rho^2\ddot{\varphi}}{r} == mw_0\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right).$$

2) სრიალით გორვის დროს

$$fN \neq \frac{m\rho^2\ddot{\varphi}}{r},$$

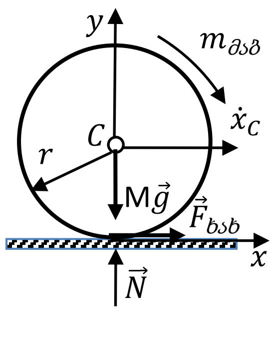
ე.ი. თუ $w_0 \leq f\frac{N}{m}\frac{r^2}{\rho^2}$, მაშინ წნევა $S = mw_0 + fN.$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 1) $w_0 \leq f\frac{N}{m}\frac{r^2}{\rho^2}, \quad S = mw_0\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right);$

2) $w_0 \leq f\frac{N}{m}\frac{r^2}{\rho^2}, \quad S = mw_0 + fN.$

ამოცანა 39.9

r რადიუსის თვალი გორავს წამყვანი მოძრაობს წრფივ ჰორიზონტალურ რელსზე, მასზე მოდებული მაბრუნი $m_{მაბ} = \frac{5}{2}fMgr$ მომენტის მოქმედებით, სადაც f არის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი, $M-$ თვლის მასა. განსაზღვრეთ თვლის რელსთან შეხების წერტილის სიჩქარე(გასრიალების სიჩქარე). თვლის მასა თანაბრადაა განაწილებული მის ფერსოზე. გორვის ხახუნი უგულებელყოფილია. საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ თვლის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი),:

$$M\ddot{x}_C = F_{ხახ}, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = N - Mg, \qquad (2)$$
$$Mr^2\ddot{\varphi} = m_{მბ} - F_{ხახ}r. \qquad (3)$$

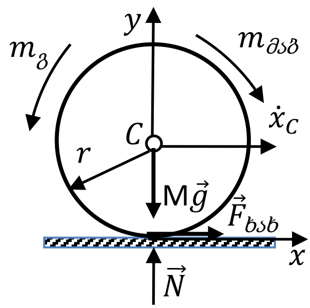
რადგან $\ddot{y}_C = 0$ ამიტომ (2) განტოლების
თანახმად $N = Mg$.
მაშინ
$$F_{ხახ} = fN = fMg$$
რადგან თვალი გორავს უსრიალოდ,
ამიტომ $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$ და (3) განტოლება ჩაიწერება ასეთი სახით:
$$Mr\ddot{x}_C = \frac{5}{2}fMgr - fMgr = \frac{3}{2}fMgr\,,$$
აქედან
$$\ddot{x}_C = \frac{3}{2}fg,$$
$$\dot{x}_C = \frac{3}{2}fgt.$$

ასეთი სიჩქარე აქვსთვლის ფერსოს წერტილებს. (1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\dot{x}_C = fgt$. ამიტომ ადგილი ექნება სრიალს, რომლის სიჩქარე
$$\boldsymbol{v} = \frac{3}{2}fgt - fgt = \frac{fgt}{2}.$$
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\boldsymbol{v} = \frac{fgt}{2}$.

ამოცანა 39.10

ამოხსენით წინა ამოცანა გორვის ხახუნის გათვალიწინებით, თუ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი $f_გ = \frac{1}{4}fr$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში 39.9 ამოცანის ამოხსნაში შეიცვლება მხოლოდ თვლის ბრუნვის (3) დიფერენციალური განტოლება. გორვის ხახუნის მომენტი



$$m_გ = f_გMg,$$
მაშინ ეს განტოლება მიიღებს სახეს:
$$Mr^2\ddot{\varphi} = m_{მბ} - F_{ხახ}r - f_გMg,$$
$$Mr^2\ddot{\varphi} = \frac{5}{2}fMgr - fMgr - f_გMg =$$
$$= \frac{3}{2}fMgr - \frac{fr}{4}Mg = \frac{5fMgr}{4}.$$

საიდანაც

$$\ddot{\varphi} = \frac{5fg}{4r},$$

$$\dot{x}_C = \frac{5fgt}{4}.$$

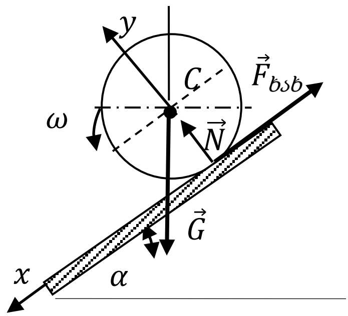
მაშასადამე, სრიალის სიჩქარე გორვის ხახუნის გათვალიწინებით

$$v = \frac{5fgt}{4} - fgt = \frac{fgt}{4}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{fgt}{4}$.

ამოცანა 39.11

ჰორიზონტალური ღერძის მქონე ერთგვაროვანი ცილინდრი სიმძიმის ძალის მოქმედებით ჩამოგორდება არაგლუვ დახრილ სიბრტყეზე, რომლის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი არის f. განსაზღვრეთ ჰორიზონტთან სიბრტყის დახრის კუთხე და ცილინდრის ღერძის აჩქარება იმ პირობით, რომ ცილინდრის მოძრაობისას სრიალს ადგილი არა აქვს. გორვის წინაღობა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ცილინდრის ბრტყელი მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლებები:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = Gsin\alpha - F_{ხახ}, \quad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = N - Gcos\alpha, \quad (2)$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = F_{ხახ}r. \quad (3)$$

რადგან

$$J_{Cz} = \frac{mr^2}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r},$$

მაშინ (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{mr^2}{2}\frac{\ddot{x}_C}{r} = F_{ხახ}r.$$

აქედან

$$\frac{m\ddot{x}_C}{2} = F_{ხახ} \quad (4)$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$m\ddot{x}_C = mgsin\alpha - \frac{m\ddot{x}_C}{2}$$

ან

$$\frac{3m\ddot{x}_C}{2} = mgsin\alpha.$$

აქედან

$$\ddot{x}_C = a_C = \frac{2}{3}gsin\alpha.$$

მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$F_{ხახ} = \frac{m\ddot{x}_C}{2} = \frac{1}{3}mgsin\alpha.$$

სიბრტყის დახრის კუთხის განსაზღვრისათვის, რომლის დროსაც იწყება სრიალი, ვისარგებლოთ დამოკიდებულებით:

$$F_{ხახ} \leq F_{ხახ}^{max} = fN,$$

სადაც $N = Gcos\alpha.$

მაშინ

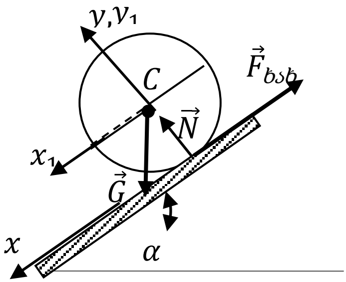
$$\frac{1}{3}mgsin\alpha \leq fmgcos\alpha$$

აქედან

$$tg\alpha \leq 3f,$$
$$\alpha \leq arctg3f.$$

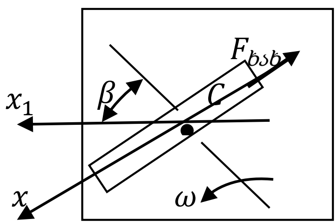
პ ა ს უ ხ ი: $\alpha \leq arctg3f;\ a_C = \frac{2}{3}gsin\alpha.$

ამოცანა 39.12



ერთგვაროვანი მთლიანი წრიული დისკო სრიალის გარეშე გორავს ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. დისკოს ბრუნვის ღერძი უდიდესი დახრის წრფესთან ადგენს β კუთხეს. განსაზღვრეთ დისკოს მასათა ცენტრის აჩქარებ, თუ მისი გორვა ხდება მხოლოდ ერთ ვერტიკალურ სიბრტყეში..

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დისკოს ბრტყელი მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). შევადგინოთ ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:



$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = Gsin\alpha sin\beta - F_{ხახ}, \quad (1)$$
$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = -N + Gcos\alpha, \quad (2)$$
$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = F_{ხახ}r. \quad (3)$$

რადგან დისკოს ინერციის მომენტი

მისი მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ

$$J_{Cz} = \frac{mr^2}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r},$$

მაშინ (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{mr^2}{2}\frac{\ddot{x}_C}{r} = F_{ხახ}r.$$

აქედან

$$\frac{m\ddot{x}_C}{2} = F_{ხახ}.$$

(1) განტოლებიდან გვაქვს:

$$m\ddot{x}_C = mgsin\alpha sin\beta - F_{ხახ}.$$

შევკრიბოთ ბოლო ორი განტოლება, მივიღებთ:

$$\frac{3m\ddot{x}_C}{2} = mgsin\alpha sin\beta.$$

აქედან ვიპოვეთ დისკოს მასათა ცენტრის აჩქარება

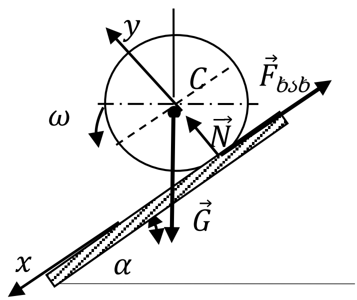
$$\ddot{x}_C = a_C = \frac{2}{3}gsin\alpha sin\beta.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a_C = \frac{2}{3}gsin\alpha sin\beta.$

ამოცანა 39.13

ჰორიზონტალური ღერძის მქონე ერთგვაროვანი ცილინდრი საკუთარი სიმძიმის მოქმედებით სრიალით გორდება დახრილ სიბრტყეზე, რომლის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი არის f. განსაზღვრეთ ჰორიზონტთან სიბრტყის დახრის α კუთხე და ცილინდრის ღერძის აჩქარება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ ცილინდრის სრიალით



ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი).

$$:M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = Gsin\alpha - F_{ხახ}, \quad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = N - Gcos\alpha, \quad (2)$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = F_{ხახ}r. \quad (3)$$

უსრიალოდ გორვით მოძრაობა შესაძლებელია, თუ სრულდება პირობა (იხ. 39.11 ამოცანის ამოხსნა) $\alpha \leq arctg3f$.

მაშასადამე, როცა $\alpha \geq arctg3f$ ცილიდრი იგორებს სრიალით და ხახუნის $F_{ხახ}$ ძალას ექნება ზღვრული მნიშვნელობა:

$$F_{ხახ} = \mathrm{f}N = fGcos\alpha = fmgcos\alpha .$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$m\ddot{x}_C = mgsin\alpha - fmgcos\alpha.$$

აქედან ვიპოვით ცილინდრის ღერძის აჩქარებას:

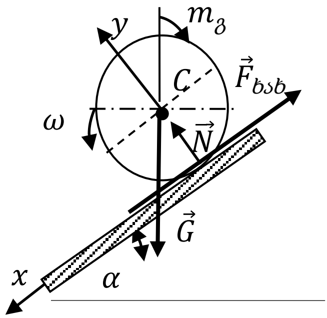
$$\ddot{x}_C = g(sin\alpha - fcos\alpha).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\alpha \geq arctg3f, \ddot{x}_C = g(sin\alpha - fcos\alpha).$

ამოცანა 39.14

r რადიუსის ერთგვაროვანი თვალი უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. გორვის ხახუნის $f_გ$ კოეფიციენტის როგორი მნიშვნელობის შემთხვევაში იმოძრავებს თვლის ცენტრი თანაბრად, ხოლო თვალი შეასრულებს თანაბარ ბრუნვას მისი სიბრტყის მართობულ და მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დისკოს ბრტყელი მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). შევადგინოთ ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:



$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = Gsin\alpha - F_{ხახ}, \quad (1)$$
$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = -N + Gcos\alpha, \quad (2)$$
$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\vec{F}_k^e) = F_{ხახ}r - m_გ. \quad (3)$$

რადგან პირობის თანახმად $v_C = const$, ამიტომ $\ddot{x}_C = 0$. მაშინ (1) განტოლებიდან გვაქვს

$$:Gsin\alpha = F_{ხახ}.$$

(3) განტოლებიდან, მივიღებთ:

$$F_{ხახ} = \frac{m_გ}{r}$$

გორვის ხახუნის მომენტი

$$m_გ = f_გN = f_გGcos\alpha.$$

მაშასადამე,

$$Gsin\alpha = \frac{m_გ}{r} = \frac{f_გGcos\alpha.}{r}$$

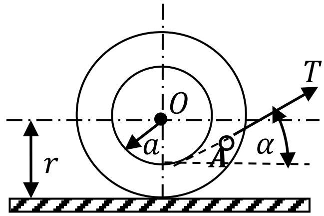
აქედან

$$f_{გ} = rtg\alpha.$$

პ ა ს უ ხ ი: $f_{გ} = rtg\alpha.$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 39.15

M მასის და r რადიუსის ერთგვაროვანი საგორავის დოლზე, რომელიც ძევს ჰორიზონტალურ იატაკზე, დახვეულია ძაფი, რომელზეც მოდებულია ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილი T ძალა. დოლის რადიუსია a, ხოლო საგორავის ინერციის რადიუსი $-\rho$. იპოვეთ საგორავის ღერძის მოძრაობის კანონი.

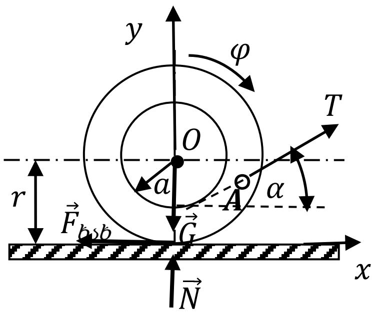


ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ საგორავის გორვა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). შევადგინოთ ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = Tcos\alpha - F_{ხახ}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = -G + N + Tsin\alpha, \quad (2)$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = F_{ხახ}r - T \cdot a \quad (3)$$



ვინაიდან ადგილი აქვს უსრიალოდ გორვას, ამიტომ

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}, \quad J_{Cz} = m\rho^2$$

და (1) და (3) განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$mr\ddot{x}_C = Trcos\alpha - F_{ხახ}r$$

$$m\rho^2\frac{\ddot{x}_C}{r} = F_{ხახ}r - T \cdot a$$

შევკრიბოთ მიღებული განტოლებები:

$$m\ddot{x}_C\left(r + \frac{\rho^2}{r}\right) = T(rcos\alpha - a).$$

აქედან

$$\ddot{x}_C = \frac{Tr(rcos\alpha - a)}{m(r^2 + \rho^2)}.$$

ეს განტოლება ვაინტეგროთ ორჯერ

$$\dot{x}_C = \frac{Tr(rcos\alpha - a)}{m(r^2 + \rho^2)} t + C_1,$$

$$x_C = \frac{Tr(rcos\alpha - a)}{m(r^2 + \rho^2)} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

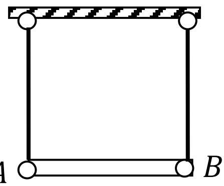
მოცემულია საწყისი პირობები: $t = 0, x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0,$ რომლის გამოყენებით ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს: $C_1 = C_2 = 0.$

მაშინ საგორავის ღერძის მოძრაობის კანონს ექნება სახე:

$$x_C = \frac{Tr(rcos\alpha - a)}{2m(r^2 + \rho^2)} t^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x_C = \frac{Tr(rcos\alpha - a)}{2m(r^2+\rho^2)} t^2$; x ღერძი მიმართულია მარცხნიდან მარჯვნივ.

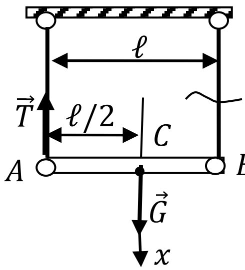
ამოცანა 39.16



M მასის ერთგვაროვანი AB ღერო ჩამოკიდებულია ჭერზე ორი ვერტიკალური ძაფის საშუალებით, რომლებიც ბოლოებით მიმაგრებულია ღეროსთან. იპოვეთ ერთ-ერთი ძაფის დაჭიმულობა მეორის გაწყვეტის მომენტში.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვადგენთ ძაფის გაწყვეტის მომენტის შემდეგ ძალიან მცირე დროის შუალედისათვის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ისე, რომ უგულებელვყოფთ ღეროს მიმართულებას და მეორე ძაფიდან მისი მასათა ცენტრის დაშორების მანძილის ცვლილებას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთ-ერთი ძაფის გაწყვეტის მომენტში AB ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. ვაჩვენოთ ნახაზზე ღეროზე მოქმედი ძალები. შევადგინოთ ღეროს მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:



$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = G - T, \qquad (1)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = T\frac{\ell}{2}, \qquad (2)$$

სადაც J_C –ღეროს ინერციის მომენტია,

$$J_C = \frac{M\ell^2}{12},\ \ \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{\ell/2} = \frac{2\ddot{x}_C}{\ell}.$$

მაშინ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{M\ell^2}{12}\frac{2\ddot{x}_C}{\ell} = \frac{T\ell}{2}.$$

აქედან

$$M\ddot{x}_C = 3T.$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

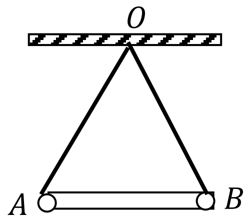
$$G - T = 3T$$

აქედან ვიპოვით ძაფის დაჭიმულობა მეორის გაწყვეტის მომენტში:

$$T = \frac{G}{4} = \frac{Mg}{4}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T = \frac{Mg}{4}$.

ამოცანა 39.17



M მასის ერთგვაროვანი AB ღერო ჩამოკიდებულია O წერტილზე ღეროს სიგრძის მქონე ორი ძაფის საშუალებით. განსაზღვრეთ ერთ-ერთი ძაფის დაჭიმულობა მეორის გაწყვეტის მომენტში (იხ. 39.16 ამოცანის მითითება).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე AB ღეროზე მოქმედი ძალები ერთ-ერთი ძაფის გაწყვეტის მომენტში. ჩავწეროთ ღეროს ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ძაფის გაწყვეტის მომენტში B წერტილში:

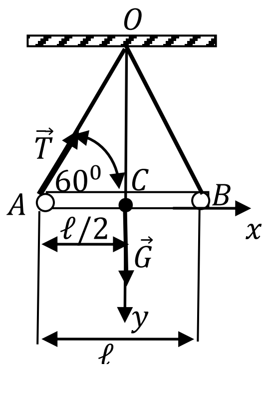
$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = T\cos 60^0, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = G - T\sin 60^0, \quad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = T\frac{\ell}{2}\sin 60^0, \quad (3)$$

ღეროს ინერციის მომენტი მასათა ცენტრში გამავალი ღერძის მიმართ

$$J_C = \frac{M\ell^2}{12}$$



შევადგინოთ კიდევ ერთი განტოლება, რომელის დაამყარებს კავშირს $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ და $\ddot{\varphi}$ სიდიდეებს შორის.

(1) და (2) განტოლებების თანახმად ძაფის გაწყვეტის შემდეგ ღეროს მასათა ცენტრი $-C$ წერტილი მოძრაობს ერთდროულად როგორც x, ისე y ღერძების გასწვრივ, ხოლო AB ღერო ასრულებს რთულ მოძრაობას, რომელის შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ბრუნვები A და O წერტილებში გამავალი

პარალელური ღერძების ირგვლივ.

რადგან

$$\varphi_1 = -\frac{y_C}{\ell/2},$$

$$\varphi_2 = \frac{x_C}{CO} = \frac{x_C}{(\ell/2)tg60^0}$$

(მობრუნების კუთხის უარყოფით მიმართულებად აღებულია საათის ისრის ბრუნვის მიმართულება), მაშინ

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2x_C}{\ell tg60^0} - \frac{2y_C}{\ell}.$$

მაშინ

$$\frac{\ell}{2}\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C\, tg60^0 - \ddot{y}_C$$

და

$$\frac{\ell}{2}M\ddot{\varphi} = M\ddot{x}_C\, tg30^0 - M\ddot{y}_C. \qquad (4)$$

(3) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{M\ell^2}{12}\ddot{\varphi} = T\frac{\ell}{2}sin60^0$$

ანუ

$$M\frac{\ell}{2}\ddot{\varphi} = -3Tsin60^0.$$

ეს გამოსახულება შევიტანოთ (4)-ში და (1) და (2) განტოლებების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$-3Tsin60^0 = Tcos60^0 tg30^0 - G + Tsin60^0,$$
$$G = T(3sin60^0 + cos60^0 tg30^0 + sin60^0).$$

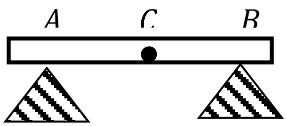
აქედან

$$T = \frac{G}{3sin60^0 + cos60^0 tg30^0 + sin60^0} =$$
$$= \frac{Mg}{3sin60^0 + cos60^0 tg30^0 + sin60^0} = 0,266Mg.$$

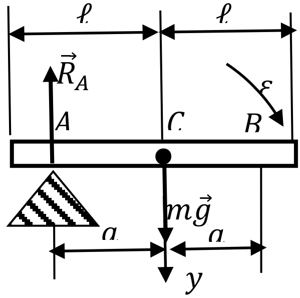
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T = 0,266Mg.$

ამოცანა 39.18

2ℓ სიგრძის და M მასის ერთგვაროვანი თხელი ღერო ძევს ორ A და B საყრდენზე; ღეროს მასათა C ცენტრი თანაბარი მანძილით არის დაშორებული საყრდენებიდან



ისე, რომ $CA = CB = a$; ყოველ საყრდენზე წნევა უდრის $\frac{1}{2}P$ –ს. როგორ შეიცვლება A საყრდენზე წნევა იმ მომენტში, როცა B საყრდენი უცბად ჩამოცილდება? (იხ. 39.16 ამოცანის მითითება).



ა მ ო ხ ს ნ ა. B საყრდენის მოცილდების შემდეგ ღერო შეასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (იხ. ნახაზი).

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ ღეროს მასათა ცენტრში და შევადგინოთ ღეროს მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = Mg - R_A, \qquad (1)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = R_A \cdot a \qquad (2)$$

ცნობილია, რომ

$$J_C = \frac{M\ell^2}{3}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}_C}{a},$$

მაშინ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{M\ell^2}{3}\frac{\ddot{y}_C}{a} = R_A \cdot a,$$

ან

$$M\ddot{y}_C = \frac{3a^2R_A}{\ell^2}.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{3a^2R_A}{\ell^2} = Mg - R_A,$$

აქედან

$$R_A = \frac{Mg\ell^2}{\ell^2 + 3a^2}$$

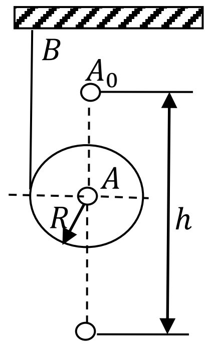
განვსაზღვროთ წნევის ცვლილება A საყრდენზე, თუ $R_A^{სტ} = \frac{Mg}{2}$:

$$\Delta R_A = R_A - R_A^{სტ} = \frac{Mg\ell^2}{\ell^2 + 3a^2} - \frac{Mg}{2} = \frac{\ell^2 - 3a^2}{2(\ell^2 + 3a^2)}Mg.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> A საყრდენის წნევა მიიღებს $\frac{\ell^2-3a^2}{2(\ell^2+3a^2)}Mg$ –ს ტოლ ნამატს.

ამოცანა 39.19

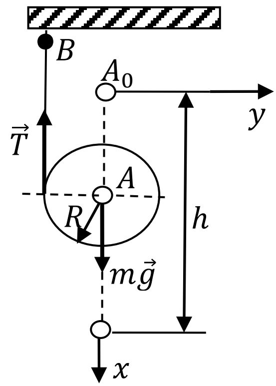
m მასის წრიული A ცილინდრის შუა ნაწილზე დახვეულია წვრილი ძაფი, რომლის B ბოლო დამაგრებულია უძრავად. ცილინდრი ვარდება უსაწყისო სიჩქარით. განსაზღვრეთ ჩილინდრის ღერძის v სიჩქარე იმ მომენტში, როცა იგი ჩამოვა h მანძილზე და იპოვეთ ძაფის T დაჭიმულობა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ წერტილში და დავწეროთ ორი დიფერენციალური განტოლება:

$$m\ddot{x}_A = mg - T, \qquad (1)$$

$$J_{Az}\ddot{\varphi} = T \cdot R \qquad (2)$$



ცნობილია, რომ

$$J_{Az} = \frac{mR^2}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_A}{R},$$

მაშინ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{x}_A}{R} = T \cdot R$$

ან

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_A = T. \qquad (3)$$

შევკრიბოთ (1) და (3) განტოლებები:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_A = mg$$

ან

$$\ddot{x}_A = \frac{2}{3}g. \qquad (4)$$

გარდავქმნათ $\ddot{x}_A$ შემდეგნაირად:

$$\ddot{x}_A = \frac{d\dot{x}_A}{dt} = \frac{dx_A}{dt}\frac{d\dot{x}_A}{dx_A} = \dot{x}_A\frac{d\dot{x}_A}{dx_A}. \qquad (5)$$

ჩავსვათ (5) გამოსახულება (4) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\dot{x}_A d\dot{x}_A = \frac{2}{3}g dx_A. \qquad (6)$$

ვაინტეგროთ (6) გამოსახულება:

$$\int_0^v \dot{x}_A d\dot{x}_A = \int_0^h \frac{2}{3}g dx_A,$$

მივიღებთ

$$\left.\frac{\dot{x}_A^2}{2}\right|_0^v=\frac{2}{3}gx_{A,}\Big|_0^h$$

ანუ

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}.$$

ძაფის T დაჭიმულობის განსასაზღვრავად (4) გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\frac{2}{3}mg=mg-T.$$

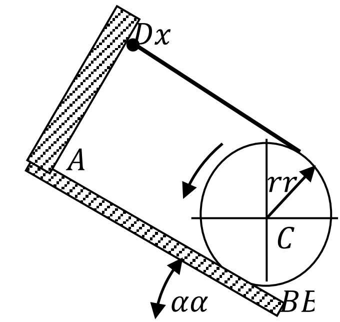
საიდანაც

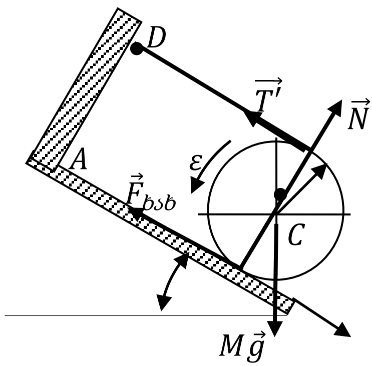
$$T=\frac{1}{3}mg.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v=\frac{2}{3}\sqrt{3gh};\ \ T=\frac{1}{3}mg.$

ამოცანა 39.20

M მასის და r რადიუსის ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრზე დახვეულია ორი ღუნვადი ძაფი ისე, რომ მათი ხვიები სიმეტრიულია ფუძეებიის პარალელური შუა სიბრტყის მიმართ. ცილინდრი მოთავსებულია დახრილ AB სიბრტყეზე ისე, რომ მისი მსახველები უდიდესი დახრის წრფის პერპენდიკულარულია, ხოლო ძაფების ბოლო C წერტილები დამაგრებულია ზემოაღნიშნული შუა სიბრტყის სიმეტრიულად AB სიბრტყიდან $2r$ მანძილზე.. ცილინდრი იწყებს მოძრაობას უსაწყისო სიჩქარით დახრილ სიბრტყეზე ხახუნის გადალახვით, რომლის კოეფიციენტი არის f. განსაზღვრეთ ცილინდრის მასათა ცენტრის მიერ t დროში გავლილი s მანძილი და ორივე ძაფის T დაჭიმულობა, თუ იგულისხმება, რომ t დროის განმავლობაში არც ერთი ძაფი ბოლომდე არ გადმოეხვევა.





ა მ ო ხ ს ნ ა. მოძრაობისას ცილინდრზე მოქმედებენ ძალები:

$M\vec{g}$ – სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ – ნორმალური რეაქცია, $\vec{F}_{ხახ}$ – სრიალის ხახუნის ძალა, $\overrightarrow{T'}$ – ორი ძაფის დაჭიმულობა (იხ. ნახაზი). ამ ძალების მოქმედებით ის ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. შევადგინოთ ცილინდრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = -T' - F_{ხახ} + Mgsin\alpha, \tag{1}$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = -Mgcos\alpha + N, \tag{2}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k^e\right) = T'r - F_{ხახ}\,\mathrm{r}. \tag{3}$$

(2) განტოლებიდან ვიპოვით:

$$N = Mgcos\alpha.$$

ამიტომ

$$F_{ხახ} = fN = fMgcos\alpha.$$

ცნობილია, რომ

$$J_{Cz} = \frac{Mr^2}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}$$

მაშინ (3) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\frac{M\ddot{x}_C}{2} = T' - F_{ხახ}. \tag{4}$$

შევკრიბოთ (1) და (4) განტოლებები:, მივიღებთ:

$$\frac{3M\ddot{x}_C}{2} = -2F_{ხახ} + Mgsin\alpha = Mg(sin\alpha - 2fcos\alpha)$$

აქედან

$$\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = \frac{2}{3}g(sin\alpha - 2fcos\alpha) \tag{5}$$

განვაცალოთ ცვლადები (5) გამოსახულებაში და ვაინტგროთ:

$$d\dot{x}_C = \frac{2}{3}g(sin\alpha - 2fcos\alpha)dt,$$

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = \frac{2}{3}g(sin\alpha - 2fcos\alpha)t + C_{1.}$$

როცა $t = 0,$ $v_{C_0} = 0,$ მაშინ $C_{1.} = 0.$

ამის გათვალისწინებით

$$s = x_C = \frac{gt^2}{3}(sin\alpha - 2fcos\alpha).$$

(5) გამოსახულება ჩავსვათ (4) განტოლებაში და ვიპოვოთ ძაფის T' დაჭიმულობა:

$$\frac{Mg}{2}(sin\alpha - 2fcos\alpha) = T' - fMgcos\alpha.$$

აქედან

$$T' = \frac{1}{3}Mg(sin\alpha + fcos\alpha).$$

რადგან

$$T' = T,$$

მაშინ

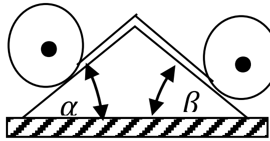
$$T = \frac{1}{6}Mg(sin\alpha + fcos\alpha).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u>

$$s = \frac{1}{3}g(sin\alpha - 2fcos\alpha)t^2; \quad T = \frac{1}{6}Mg(sin\alpha + fcos\alpha).$$

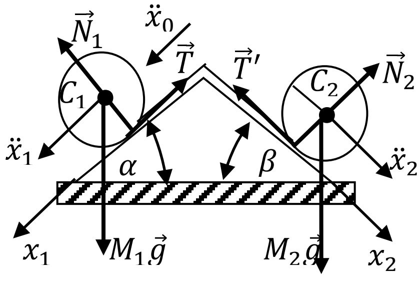
ცილინდრი დარჩება უძრავად, თუ $tg\alpha < 2f$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 39.21



M_1 და M_2 მასის ორი ცილინდრული ლილვი ჩამოგორდება ჰორიზონტთან α და β კუთხით დახრილ ორ სიბრტყეზე. ლილვები შეერთებულია უჭიმარი ძაფით, რომლის ბოლოები დახვეულია ლილვებზე და დამაგრებულია მათზე. განსაზღვრეთ ძაფის დაჭიმულობა და მისი აჩქარება დახრილ სიბრტყეებზე მოძრაობისას. ლილვები ჩათვალეთ ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრებად. ძაფის მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ C_1 ლილვის მოძრაობა $M_1\vec{g}$ სიმძიმის ძალის და $\vec{T}$ ძაფის დაჭიმულობის ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).



ვთვლით, რომ ძაფი მოძრაობს ლილვის მოძრაობის იმართულებით და მისი მასათა ცენტრის აჩქარება უდრის ლილვის $\ddot{x}_1$ და ძაფის $\ddot{x}_0$ აჩქარებების ჯამს:

$$\ddot{x}_{C_1} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_0.$$

შევადგინოთ C_1 ლილვის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_0) = \sum F_{kx}^e = M_1 g sin\alpha - T, \tag{1}$$

$$J_{C_1}\varepsilon_1 = \sum m_{C1z}(\vec{F}_k^e) = Tr_1. \tag{2}$$

ასევე- C_2 ლილვის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალის და $\overrightarrow{T'}$ ძაფის დაჭიმულობის ძალის მოქმედებით და $\ddot{x}_{C_2} = \ddot{x}_2 + \ddot{x}_0$ ტოლობის გათვალისწინებით:

$$M_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_0) = \sum F_{kx}^e = M_2 g sin\beta - T', \tag{3}$$

$$J_{C_2}\varepsilon_2 = T'r_2. \tag{4}$$

ვიპოვოთ ლილვების ინერციის მომენტები:

$$J_{C_1} = \frac{M_1 r_1^2}{2}, \quad J_{C_2} = \frac{M_2 r_2^2}{2}.$$

მაშინ (2) და (4) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\frac{M_1 r_1 \varepsilon_1}{2} = T, \tag{5}$$

$$\frac{M_2 r_2 \varepsilon_2}{2} = T'. \tag{6}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $T = T'$, მივიღებთ:

$$\frac{M_1 r_1 \varepsilon_1}{2} = \frac{M_2 r_2 \varepsilon_2}{2}$$

ან

$$M_1 r_1 \varepsilon_1 = M_2 r_2 \varepsilon_2 = 2T. \tag{7}$$

რადგან $x_1 = r_1\varphi_1, x_2 = r_2\varphi_2$, მაშინ $\ddot{x}_1 = r_1\ddot{\varphi}_1, \ddot{x}_2 = r_2\ddot{\varphi}_2$, სადაც $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1, \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$.

ეს თანაფარდობები შევიტანოთ (7) გამოსახულებაში:

$$M_1\ddot{x}_1 = M_2\ddot{x}_2. \tag{8}$$

გამოვაკლოთ (1) განტოლებას (3):

$$M_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0) - M_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_0) = M_1 g sin\alpha - M_2 g sin\beta$$

და (8) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\ddot{x}_0(M_1 + M_2) = M_1 g sin\alpha - M_2 g sin\beta,$$

აქედან

$$\ddot{x}_0 = g\frac{M_1 sin\alpha - M_2 sin\beta}{M_1 + M_2}.$$

ეს გამოსახულება შევიტანოთ (1) განტოლებაში:

$$M_1\ddot{x}_1 + \frac{M_1 g(M_1 g sin\alpha - M_2 g sin\beta)}{M_1 + M_2} = M_1 g sin\alpha - T.$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინოთ, რომ $M_1\ddot{x}_1 = 2T$, მივიღებთ:

$$3T = M_1 g sin\alpha - \frac{M_1 g(M_1 g sin\alpha - M_2 g sin\beta)}{M_1 + M_2}.$$

ამ ბოლო ტოლობიდან განვსაზღვრავთ თოკის დაჭიმულობას:

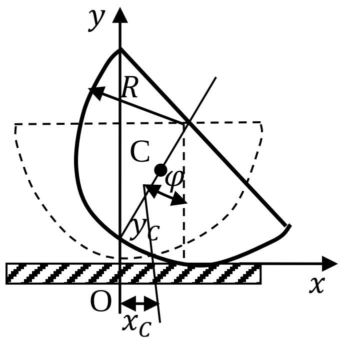
$$T = g\frac{M_1M_2(sin\alpha + sin\beta)}{3(M_1 + M_2)}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$T = g\frac{M_1M_2(sin\alpha + sin\beta)}{3(M_1 + M_2)}; \quad \ddot{x}_0 = g\frac{M_1 sin\alpha - M_2 sin\beta}{M_1 + M_2}.$$

ამოცანა 39.22

განსაზღვრეთ R რადიუსის ერთგვაროვანი ნახევარწრიული დისკოს მცირე რხევების პერიოდი; იგი ძევს არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე და შეუძლია მასზე უსრიალო გორვა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები. კოორდინატთა სათავე ავირჩიოთ სხეულის სიბრტყესთან შეხების წერტილი (იხ. ნახაზი).)

გავითვალისწინოთ, რომ

$$CD = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi} = \ell,$$

სადაც C წერტილი - ნახევარწრიული დისკოს მასათა ცენტრია.

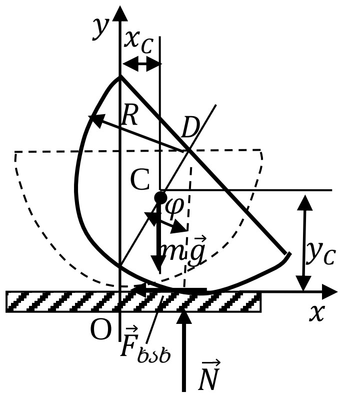
მაშინ

$$m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx} = -F_{ხახ}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = -mg + N, \quad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\vec{F}^e_k) =$$

$$= F_{ხახ}(\mathrm{R} - \ell cos\varphi) - N\ell sin\varphi. \quad (3)$$



(2) განტოლებიდან

$$N = m\ddot{y}_C + mg. \quad (4)$$

ჩავხვათ (1) და (4) გამოსახულებები (3) განტოლებაში:

$$J_C\ddot{\varphi} = -(\mathrm{R} - \ell cos\varphi)m\ddot{x}_C - (m\ddot{y}_C + mg)\ell sin\varphi. \quad (5)$$

რადგან დისკოს გორავს უსრიალოდ, ამიტომ

$$x_C = R\varphi - \ell sin\varphi,$$
$$y_C = R - \ell cos\varphi,$$

ვინაიდან განიხილება მცირე რხევები, რომლისთვისაც $sin\varphi \approx \varphi$, $cos\varphi = 1$, ამიტომ

$$x_C = (R-\ell)\varphi, \quad \ddot{x}_C = (R-\ell)\ddot{\varphi};$$
$$y_C = R-\ell, \quad \ddot{y}_C = 0.$$

მაშინ (5) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$J_C\ddot{\varphi} = -m(R-\ell)^2\ddot{\varphi} - mg\ell\varphi$$

ან

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg\ell}{J_C + m(R-\ell)^2}\varphi = 0. \qquad (6)$$

ვიპოვოთ ნახევარწრიული დისკოს ინერციის მომენტი

$$J_C = J_D - m\ell^2 = \frac{mR^2}{2} - m\ell^2 = \frac{m}{2}(R^2 - 2\ell^2).$$

მაშინ (6) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g\ell}{(R^2-2\ell^2)+2(R-\ell)^2}\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც

$$k^2 = \frac{2g\ell}{(R^2-2\ell^2)+2(R-\ell)^2}.$$

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{(R^2-2\ell^2)+2(R-\ell)^2}{2g\ell}}.$$

ბოლო გამოსახულებაში შევიტანოთ $\ell = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ მნიშვნელობა და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$T = \frac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi-16)R}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T = \frac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi-16)R}.$

§40. გიროსკოპის მიახლოებითი თეორია.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

გიროსკოპი ეწოდება სიმეტრიულ მყარ სხეულს, რომელიც ბრუნავს მის ღერძზე არსებული უძრავი წერტილის ირგვლივ. ასეთ სხეულს წარმოადგენს ბრზიალა ან მძიმე ერთგვაროვანი დისკო, რომელსაც ერთდროულად შეუძლია ბრუნვა ორი ან მეტი ერთ წერტილში ურთიერთგადამკვეთი ღერძების გარშემო. მაშასადამე, გიროსკოპის მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სფერული, ე.ი. როგორც სხეულის მოძრაობა ერთი უძრავი წერტილით, ან შედგენილი მოძრაობა ურთიერთგდამკვეთი ღერძების ირგვლივ. ამიტომ გიროსკოპის თეორიის ამოცანების დასმისა და ამოხსნისას მიზანშეწონილია სფერული ან შედგენილი მოძრაობების ტერმინოლოგიით სარგებლობა.

ამგვარად, სფერული მოძრაობისას სხეულის მდებარეობა უძრავ ღერძებში განისაზღვრება ***ეილერის*** კუთხეებით: $\psi -$ პრეცესიის კუთხე, $\varphi -$ საკუთარი ბრუნვის კუთხე, $\theta -$ ნუტაციის კუთხე. ამასთან უძრავი კოორდინატთა სისტემა აღინიშნება $Oxyz -$ით, ხოლო სხეულთან დაკავშირებული მოძრავი- $Ox_1y_1z_1 -$ ით, სადაც $z_1 -$ სხეულის სიმეტრიის ღერძია. მაშინ სფერული მოძრაობის ტერმინოლოგიის თანახმად სხეულის ბრუნვა z_1 ღერძის გარშემო არის **საკუთარი ბრუნვა**, ხოლო შედგენილი მოძრაობის ტერმინოლოგიით-**ფარდობითი**. ამასთან ბრუნვის კუთხური სიჩქარე-ეს არის საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ან ფარდობითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე, რომელიც აღინიშნება შესაბამისად $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$ ან ω_r.

სფერული მოძრაობის ტერმინოლოგიის თანახმად სხეულის ბრუნვას z ღერძის გარშემო ეწოდება **პრეცესია**, ხოლო შედგენილი მოძრაობის ტერმინოლოგიით-**წარმტანი** მოძრაობა. კუთხური სიჩქარე აღინიშნება შესაბამისად $\omega_\psi = \dot{\psi}$ (პრეცესიის კუთხური სიჩქარე) ან ω_e (წარმტანი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე).

ნუტაციის კუთხე θ-ეს არის კუთხე z და z_1 ღერძებს შორის. თუ $\theta = const$, მაშინ $\omega_\psi = const$ და $\omega_\varphi = const$ და ადგილი აქვს ე.წ. *რეგულარულ პრეცესიას*, რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ტექნიკაში, კერძოდ, ისეთ მოწყობილობებში, რომლებიც წარმოადგენენ გიროსკოპებს.

ამ პარაგრაფის ამოცანებს ხსნიან გიროსკოპების ელემენტარული, ანუ მიახლოებითი თეორიით. ამ თეორიის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ სწრაფადმბრუნავი გიროსკოპის პრეცესიის კუთხური სიჩქარე მცირეა საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარესთან შედარებით, ხოლო ნუტაციის კუთხე პრაქტიკულად რჩება მუდმივი. ამიტომ *გიროსკოპის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე*

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi. \tag{40.1}$$

მაშინ სწრაფადმბრუნავი გიროსკოპის კინეტიკური მომენტი უძრავი O წერტილის მიმართ:

$$\vec{K}_O = J_O\vec{\omega} = J_O\vec{\omega}_\varphi. \quad (40.2)$$

და ის მიმართულია საკუთარი ბრუნვის ღერძის გასწვრივ.
რეზალის თეორემის თანახმად

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum M_O(\vec{F}_k^e) = \vec{u}, \quad (40.3)$$

სადაც $\vec{u} -$ $\vec{K}_O$ ვექტორის ბოლო წერტილის სიჩქარეა. გეომეტრიულად $\vec{u}$ უდრის გარე ძალების ნაკრები მომენტს O წერტილის მიმართ:

$$\vec{M}_O^e = \sum M_O(\vec{F}_k^e),$$

ე.ი.

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e. \quad (40.4)$$

ამიტომ, თუ $\vec{M}_O^e \neq 0$, მაშინ $\vec{K}_O$ კინეტიკური მომენტის ვექტორის ბოლო წერტილი მოძრაობს $\vec{u}$ სიჩქარით. ეს ნიშნავს, რომ გიროსკოპის საკუთარი ბრუნვის ღერძი იბრუნებს პრეცესიის ღერძის ირგვლივ ω_ψ კუთხური სიჩქარით. მაშინ $\vec{u}$ სიჩქარე შეიძლება განისაზღვროს სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის ანალოგიურად უძრვი ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს ელიერის ფორმულით:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

სადაც $\vec{r} -$ მოცემული წერტილის რადიუს-ვექტორია გავლებული ბრუნვის ღერძის ნებისმიერი წერტილიდან.
ამიტომ

$$\vec{u} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{K}_O = \vec{\omega}_\psi \times J_O\vec{\omega}_\varphi. \quad (40.5)$$

(40.4) და (40.5) გამოსახულებებია საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ პრეცესიის კუთხური სიჩქარე ω_ψ, თუ ცნობილია საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და გარე ძალების ნაკრები მომენტი, რადგან

$$\left|\vec{M}_O^e\right| = \left|\vec{\omega}_\psi \times J_O\vec{\omega}_\varphi\right| = J_O\omega_\psi\omega_\varphi sin\theta. \quad (40.6)$$

აქედან

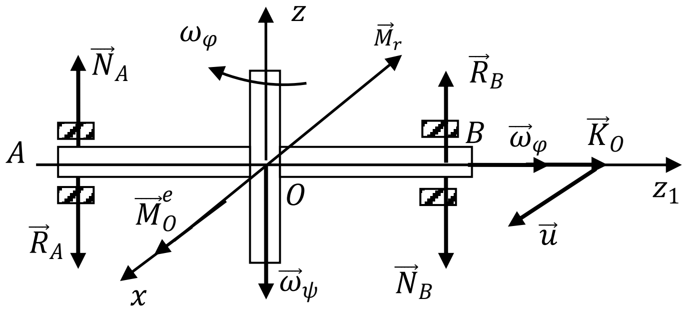
$$\omega_\psi = \frac{|\vec{M}_O^e|}{J_O\omega_\varphi sin\theta}. \quad (40.7)$$

თუ ცნობილია პრეცესიის კუთხური სიჩქარე და საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, მაშინ გარე ძალების ნაკრები მომენტი შეიძლება განისაზღვროს (40.6) ფორმულით.

თუ გიროსკოპი წარმოადგენს დისკოს, რომელიც ბრუნავს გადამკვეთი ღერძების ირგვლივ (ნახ.40.1), ამასთან საკუთარი ბრუნვის ღერძი დამაგრებულია A და B საყრდენებში, მაშინ გარე ძალების ნაკრები

მომენტი ღერძების გადაკვეთი O წერტილის მიმართ შეიქმნება ამ საყრდენების რეაქციებით, რომლებიც მოთავსებულია $\vec{M}_O^e$ ვექტორის და, მაშასადამე, $\vec{u}$ ვექტორის მართობ სიბრრტყეში. თუ გიროსკოპი მოთავსებულია საყრდენების სიმეტრიულად, მაშინ მათი რეაქციების სიდიდე

$$R_A = R_B = \frac{J_O \omega_\psi \omega_\varphi \sin\theta}{AB}. \qquad (40.8)$$



ნახ. 40.1

თავის მხრივ, საყრდენებში წარმოიქმნება $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ წნევები, რომლებიც სიდიდით რეაქციების ტოლია, მაგრამ მიმართულებით მათი საპირისპიროა, ე.ი.

$$\vec{N}_A = -\vec{R}_A, \;\; \vec{N}_B = -\vec{R}_B.$$

თუ მბრუნავ გიროსკოპზე მოვდებთ გიროსკოპის ინერციის ძალების ნაკრებ მომენტს უძრავი O წერტილის მიმართ $\vec{M}_O^{ინ}$, მაშინ დალამბერის პრინციპის თანახმად მივიღებთ გაწონასწორებულ ძალთა სისტემას:

$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{ინ} = 0 \Longrightarrow \vec{M}_O^{ინ} = -\vec{M}_O^e. \qquad (40.9)$$

რადგან

$$\vec{M}_O^e = \vec{\omega}_\psi \times J_O \vec{\omega}_\varphi = J_O \vec{\omega}_\psi \times \vec{\omega}_\varphi. \qquad (40.10)$$

ამიტომ

$$\vec{M}_O^{ინ} = -J_O \vec{\omega}_\psi \times \vec{\omega}_\varphi = J_O \vec{\omega}_\varphi \times \vec{\omega}_\psi. \qquad (40.11)$$

გიროსკოპების თეორიაში $J_O \vec{\omega}_\varphi \times \vec{\omega}_\psi$ გამოსახულებას ეწოდება **გიროსკოპული მომენტი** და აღინიშნება $\vec{M}_r -$ ით. ამგვარად,

$$\vec{M}_r = \vec{M}_O^{ინ} = J_O \vec{\omega}_\varphi \times \vec{\omega}_\psi. \qquad (40.12)$$

გიროსკოპული მომენტი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გიროსკოპული წყვილძალის მომენტი, რომლის შემადგენელი ძალებია საყრდენებში წარმოქმნილი წნევის ძალები, ე.ი.

$$\vec{M}_r = \vec{M}(\vec{N}_A, \vec{N}_B).$$

ამ ძალების მნიშვნელობები განისაზღვრება ფორმულით:

$$N_A = N_B = \frac{\left|\vec{M}_r\right|}{AB} = \frac{J_O \omega_\psi \omega_\varphi sin\theta}{AB},$$

რომელიც (40.8) ფორმულის ანალოგიურია.

გიროსკოპული წყვილძალების მოქმედება განისაზღვრება ჟუკოვსკის წესით:

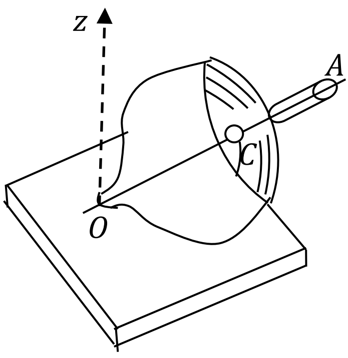
თუ სწრაფადმბრუნავ გიროსკოპს მივანიჭებთ პრეცესიულ მოძრაობას, მაშინ წარმოიქმნება გიროსკოპული წყვილძალა, რომელიც ცდილობს გიროსკოპის ღერძი მოათავსოს პრეცესიის ღერძის პარალელურად, ისე, რომ ამ ღერძების მიმართულებების თანადამთხვევის შემდეგ ორივე ბრუნვას ჰქონდეს ერთნაირი მიმართულება.

მოცემული პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. ნახაზზე გამოვსახოთ გიროსკოპზე მოქმედი ყველა გარე ძალა (საყრდენების რეაქცია, სიმძიმის ძალა, გარე ძალების ნაკრები მომენტის და გიროსკოპული მომენტის მიმართულებები);
2. ავირჩიოთ უძრავი $Oxyz$ და მოძრავი- $Ox_1y_1z_1$ კოორდინატთა სისტემა, z_1 ღერძი მიმვმართოთ გიროსკოპის სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ, $z-$ კი პრეცესიის ღერძის გასწვრივ;
3. ვაჩვენოთ ნახაზზე კინეტიკური მომენტის, საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარის და პრეცესიის კუთხური სიჩქარის მიმართულებები;
4. ჩავწეროთ მოცემული ამოცანისათვის რეზალის თეორემა ან წონასწორობის განტოლება გიროსკოპული მომენტის გამოყენებით (40.9) ფორმუკლის სახით. სტატიკური წნევის (რეაქციების) განსაზღვრისას შესაძლებელია წონასწორობის სხვა განტოლებების ჩაწერაც. .

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 40.1



ბზრიალა ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით თავისი OA ღერძის გარშემო მუდმივი ω=600 წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. OA ღერძი დახრილია

ვერტიკალთან; ღერძის ქვედა O ბოლო უძრავია; ბზრიალა მასათა C ცენტრი მდებარეობს OA ღერძზე OC =30სმ მანძილზე O წერტილიდან.

ბზრიალას ინერციის რადიუსი ღერძის მიმართ არის 10სმ. განსაზღვრეთ ბზრიალას OA ღერძის მოძრაობის კანონი, თუ დავუშვებთ, რომ ძალიან დიდი ω კუთხური სიჩქარისას ბზრიალას მოძრაობათა რაოდენობის ნაკრები მომენტი მიმართულია OA ღერძის გასწვრივ და $J\omega$ ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ რეზალის თეორემა

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum M_O(\vec{F}_k^e) = \vec{u}$$

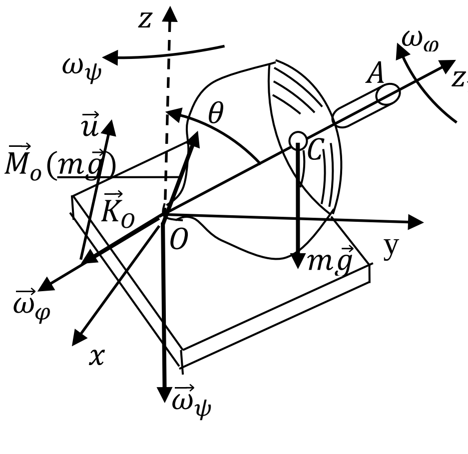
ბზრიალას საკუთარი ბრუნვის z_1 ღერძი მიმვმართოთ yz სიბრტყეში. მაშინ $\vec{M}_o(m\vec{g})$ ვექტორს აქვს x ღერძის საპირისპირო მიმართულება, ხოლო $\vec{K}_O$ კინეტიკური მომენტის ვექტორის ბოლო წერტილის $\vec{u}$ სიჩქარესაც რეზალის თეორემის თანახმად აქვს იგივე მიმართულება. პრეცესიის კუთხური სიჩქარის ვექტორი $\vec{\omega}_\psi$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ ქვევით. მაშინ რეზალის თეორემა ასე ჩაიწერება

$$\vec{u} = \vec{M}_o(m\vec{g}), \tag{1}$$

საიდანაც ვიპოვით u −ს:

$$u = \omega_\psi K_o \sin\theta, \tag{2}$$

სადაც $K_o = J_{z_1}\omega_\varphi$.



მაგრამ $J_{z_1} = J = m\rho^2$, მაშინ

$$u = \omega_\psi \omega_\varphi m\rho^2 \sin\theta.$$

ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი O წერტილის მიმართ:

$$M_o(m\vec{g}) = mg \cdot OC \cdot \sin\theta. \tag{3}$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში

$$\omega_\psi \omega_\varphi m\rho^2 sin\theta = mg \cdot OC \cdot sin\theta$$

და ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე:

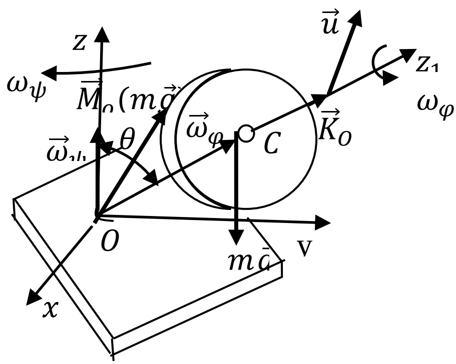
$$\omega_\psi = \frac{g \cdot OC}{\omega_\varphi \rho^2} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}3}{0{,}1^2 \cdot 600} = 0{,}49\ (\text{წმ}^{-1}).$$

პ ა ს უ ხ ი: OA ღერძი ბრუნავს Oz ვერტიკალური ღერძის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მუდმივი ω=0,49 წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით ისე, რომ აღწერს წრიულ კონუსს.

ამოცანა 40.2

30სმ დიამეტრის ბზრიალა, რომელსაც აქვს დისკოს ფორმა, ბრუნავს თავისი სიმეტრიის ღერძის გარშემო 80 წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. დისკო ჩამოცმულია მისი სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ მდებარე 20სმ სიგრძის ღერძზე. განსაზღვრეთ ბზრიალას რეგულარული პრეცესიის კუთხური სიჩქარე, თუ მისი მოძრაობათა რაოდენობის ნაკრები მომენტი მიმართულია სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ და $J\omega$ ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავთვალოთ, რომ საკუთარი ბრუნვის ღერძი მიმართულია Oyz სიბრტყეში და დისკო ბრუნავს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით (იხ. ნახაზი). მაშინ $\vec{K}_O$ ვექტორი მიმართული იქნება z_1 ღერძის გასწვრივ, ხოლო $\vec{M}_o(m\vec{g})$ ვექტორს ექნება x ღერძის საპირისპირო მიმართულება, $\vec{K}_O$ კინეტიკური მომენტის ვექტორის ბოლო წერტილის $\vec{u}$ სიჩქარეს რეზალის თეორემის თანახმად ექნება $\vec{M}_o(m\vec{g})$ ვექტორის მიმართულება.



მაშასადამე, პრეცესიის კუთხური სიჩქარის ვექტორი $\vec{\omega}_\psi$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ ზევით.

ჩავწეროთ რეზალის თეორემა:

$$\vec{u} = \vec{M}_o(m\vec{g}),$$

ვიპოვოთ $\vec{K}_O$ ვექტორის ბოლო წერტილის $\vec{u}$ სიჩქარე:

$$u = \omega_\psi K_o sin\theta, \qquad (1)$$

სადაც $K_o = J_{z_1}\omega_\varphi = \frac{mr^2}{2}\omega_\varphi$.

მაგრამ, რადგან $J_{z_1} = J = \frac{mr^2}{2}$, ამიტომ

$$u = \omega_\psi \omega_\varphi \frac{mr^2}{2} sin\theta. \qquad (2)$$

ვიპოვოთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი O წერტილის მიმართ:

$$M_o(m\vec{g}) = mg \cdot OC \cdot sin\theta. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში

$$\omega_\psi \omega_\varphi \frac{mr^2}{2} sin\theta = mg \cdot OC \cdot sin\theta$$

და ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე:

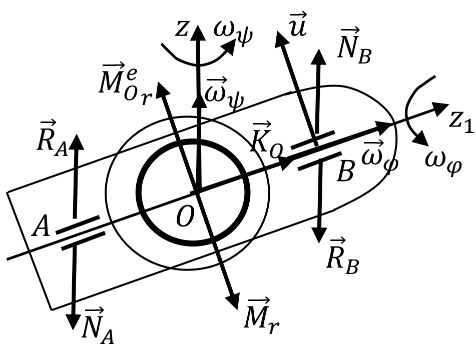
$$\omega_\psi = \frac{g \cdot OC \cdot 2}{r^2 \omega_\varphi} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 2}{0{,}15^2 \cdot 80} = 2{,}15 \ (რად/წმ).$$

პ ა ს უ ხ ი: 2,18რად/წმ.

ამოცანა 40.3

ტურბინა, რომლის ლილვი გემის გრძივი ღერძის პარალელურია, ასრულებს 1500ბრ/წთ-ს. მბრუნავი ნაწილები იწონის 6ტ-ს, ინერციის რადიუსი ρ =0,7მ. განსაზღვრეთ საკისრებზე გიროსკოპული წნევა, თუ გემი ვერტიკალური ღერძის გარშემო აღწერს ცირკულაციას და წამში მობრუნდება 10^0-ით. საკისრებს შორის მანძილი ℓ =2,7მ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გემის ცირკულაცია ვერტიკალური ღერძის გარშემო – ეს არის იძულებითი პრეცესია ღერძის გარშემო (იხ. ნახაზი).



რადგან ტურბინა ბრუნავს საკუთარი ბრუნვის z_1 ღერძის გარშემო, ამიტომ ჟუკოვსკის წესის თანახმად წარმოიქმნება გიროსკოპული მომენტი, რომელიც ცდილობს გიროსკოპის ღერძი მოაბრუნოს პრეცესიის ღერძის პარალელურად. ამიტომ საკისრებში წარმოიქმნება $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ წნევები, რომლებიც $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციების საპირისპიროა. რადგან $N_A = N_B = N$, ამიტომ

$$M_r = N\ell = J_{z_1} \omega_\varphi \omega_\psi, \qquad (1)$$

სადაც $J_{z_1} = M\rho^2$; $\omega_\psi = \frac{10\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$; $\omega_\varphi = \frac{\pi n}{30}$.

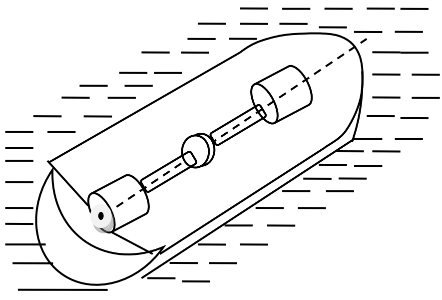
(1) ფორმულიდან ვიპოვით გიროსკოპულ წნევას:

$$N = \frac{\omega_\psi M\rho^2 \frac{\pi n}{30}}{\ell} = \frac{\frac{\pi}{18}\cdot 6\cdot 10^3\cdot 0{,}7^2\cdot \frac{\pi\cdot 1500}{30}}{2{,}7} =$$
$$= \frac{\pi^2\cdot 10^3\cdot 0{,}7^2\cdot 50}{3\cdot 2{,}7} = 30{,}4(\text{კნ})$$

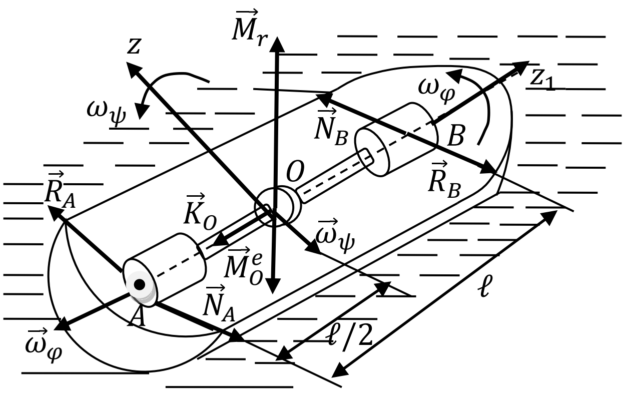
პ ა ს უ ხ ი: 30,4კნ.

ამოცანა 40.4

განსაზღვრეთ გემზე დადგმული სწრაფმავალი ტურბინის საკისრებზე მაქსიმალური გიროსკოპული წნევა, თუ გემი განიცდის 9^0 ამპლიტუდით და 15 წმ პერიოდით გრძივ რხევას როტორის ღერძის პერპენდიკულარული ღერძის გარშემო.ტურბინის 3500კგ. მასისა და 0,6 ინერციის რადიუსის მქონე როტორი აკეთებს 3000ბრ/წთ. შაკისრებს შორის მანძილია 2მ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ კინეტიკური მომენტი ტურბინის მასათა ცენტრზე გამავალი გრძივი z_1 ღერძის მიმართ (იხ. ნახაზი).



$$K_o = J_{z_1}\omega_\varphi = m\rho^2\frac{\pi n}{30} = 3500\cdot 0{,}6^2\cdot\frac{3{,}14\cdot 3000}{30} =$$
$$= 395640 \quad (\text{კგ.მ}^2/\text{წმ})$$

ვიგულისხმოთ, რომ გრძივი რხევა მიმდინარეობს კანონით:

$$\psi = \psi_0 sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

მაშინ კუთხური სიჩქარე

$$\omega_\psi = \frac{d\psi}{dt} = \frac{2\pi}{T}cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$\omega_\psi(\max) = \frac{2\pi\psi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 3{,}14\cdot 9}{15\cdot 180} = 0{,}0657 \quad (\text{რად/წმ})$$

გიროსკოპული მომენტი

$$M_r = M_O^e = R_A\ell,$$

სადაც $R_A = R_B -$ საკისრების რეაქციებია; $M_r = J_{z_1}\omega_\psi\omega_\varphi$.
მაშინ

$$J_{z_1}\omega_\psi\omega_\varphi = R_A\ell.$$

აქედან

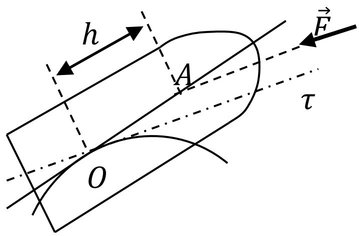
$$R_A = R_B = \frac{J_{z_1}\omega_\psi\omega_\varphi}{\ell} = \frac{395640\cdot 0{,}0657}{2} = 12996{,}8\text{ნ}{=}13(\text{კნ}).$$

წნევის ძალები საკისრების რექციების ტოლია და მიმართულია მათ საპირისპიროდ.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 13კნ.

ამოცანა 40.5

განსაზღვრეთ საარტილერიო ყუმბარის სიმეტრიის ღერძის მიერ მასათა ცენტრის ტრაექტორიის მხების გარშემო სრული შემობრუნების T დრო. ეს მოძრაობა ხდება ჰაერისწინაღობის $F =$ 6,72კნ ძალის მოქმედების გამო, რომელიც მიმართულია მხების პარალელურად და მოდებულია ყუმბარის ღერძზე მასათა ცენტრიდან $h =$0,2მ მანძილზე. ყუმბარის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი მისი სიმეტრიის ღერძის მიმართ უდრის 1850კგ$\cdot$ მ^2/წმ-ს.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მხების გარშემო ყუმბარის სიმეტრიის ღერძის ბრუნვისკუთხური სიჩქარე განისაზღვრება რეზალის თეორემის თანახმად:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e,$$

სადაც

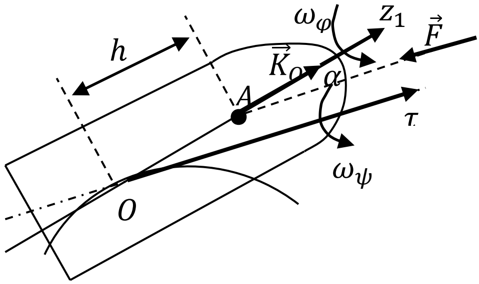
$$u = K_{z_1}\omega_\psi sin\alpha;$$

$$M_O^e = Fhsin\alpha.$$

მაშინ

$$K_{z_1}\omega_\psi sin\alpha = Fhsin\alpha.$$

საიდანაც



$$\omega_\psi = \frac{Fh}{K_{z_1}}.$$

ამ განტოლებაში გავითვალისწინოთ ფორმულა

$$\omega_\psi = \frac{2\pi}{T}$$

და განვსაზღვროთ ყუმბარის სიმეტრიის ღერძის სრული შემობრუნების დრო

$$T = \frac{2\pi}{\omega_\psi} = \frac{2\pi K_{z_1}}{Fh} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1850}{6,72 \cdot 10^3 \cdot 0,2} = 8,64(\text{წმ})$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 8,64წმ.

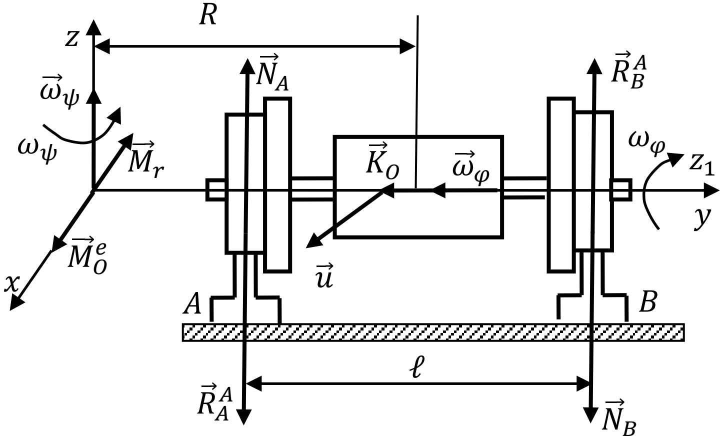
ამოცანა 40.6

ორთქლმავალი მოძრაობაში მოდის ტურბინით, რომლის ღერძი თვლების ღერძის პარალელურია და ბრუნავს თვლების ბრუნვის მიმართულებით ისე,რომ ასრულებს 1500ბრ/წთ-ს. მბრუნავი ნაწილების ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ $J_z = 20$კგმ². როგორია რელსებზე დამატებითი წნევა, თუ ორთქლმავალი მოძრაობს 250მ რადიუსის წრეწირის რკალზე 15მ/წმ სიჩქარით? რელსებს შორის მანძილია 1,5მ.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვსაზღვროთ კინეტიკური მომენტი ტურბინის მასათა ცენტრზე გამავალი გრძივი z_1 ღერძის მიმართ (იხ. ნახაზი).

$$K_o = J_{0z_1}\omega_\varphi = J_{0z_1}\frac{\pi n}{30} = 200 \cdot \frac{3,14 \cdot 1500}{30} =$$
$$= 31400 \quad (\text{კგ.მ}^2/\text{წმ})$$



რეზალის თეორემის თანახმად:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e.$$

მაშინ

$$M_O^e = u = \omega_\psi = K_O \frac{v}{R} = 31400 \cdot \frac{15}{250} = 1884(ნ.მ)$$

ტურბინის გიროსკოპული მომენტი:

$$M_r = M_O^e = R_A \cdot AB.$$

აქედან დინამიკური რეაქციები:

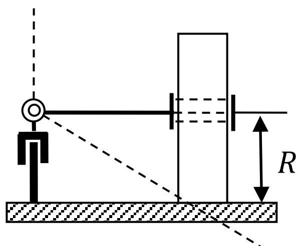
$$R_A = R_B = \frac{M_r}{AB} = \frac{1884}{1,5} = 1256(ნ).$$

დინამიკური წნევები $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ ტოლია დინამიკური რეაქციების და მიმართულია მათ საპირისპიროდ.

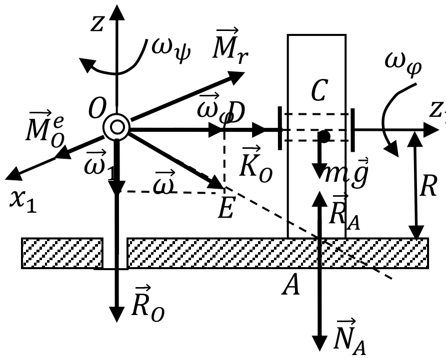
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> ერთ რელსზე-1256ნ ქვევით, მეორეზე-1256ნ ზევით.

ამოცანა 40.7

რბიებიან სამსხვრეველაში ყოველი რბია იწონის $M =$1200კგ; მისი ღერძის მიმართ ინერციის რადიუსი $\rho = 0,4$ მ. რადიუსი $R =$0,5მ. რბიას ბრუნვის მყისი ღერძი გადის ჯამის ფსკერთან რბიას შეხების მონაკვეთის შუა წერტილზე. განსაზღვრეთ რბიას წნევა ჯამის ჰორიზონტალურ ფსკერზე, თუ ვერტიკალური ღერძის გარშემო მისი ბრუნვის წარმტანი სიჩქარე შეესაბამება $n =$60ბრ/წთ-ს.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ავირჩიოთ x და z საკოორდინატო ღერძების სათავე O წერტილში (x_1 და z_1 მოძრავი ღერძებია). შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\omega_1 - z$ ღერძის გარშემო რბიას ბრუნვის კუთხური სიჩქარე (პრეცესიის კუთხური სიჩქარე); $\omega_2 - z_1$ ღერძის გარშემო რბიას ბრუნვის კუთხური სიჩქარე (საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე); $\omega -$ აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე.



რბიას მყისი ბრუნვის ღერძი მიმართულია OA წრფის გასწვრივ, ამიტომ

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi.$$

რადგან $\Delta OAC \sim \Delta OED$, ამიტომ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{AC}{OC} = \frac{R}{\ell},$$

სადაც $OC = \ell$.
ვიპოვოთ

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\ell}{R}$$

ან

$$\omega_\varphi = \omega_\psi \frac{\ell}{R}.$$

$\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ დინამიკური რეაქციების ქმნიან წყვილძალას მომენტით $M_r = M_O^e = R_A\ell$ და უდრის გიროსკოპულ მომენტს:

$$M_r = J_{Cz_1}\omega_1\omega_2,$$

სადაც $J_{Cz_1} = m\rho^2$. მაშინ

$$M_r = \frac{m\rho^2\omega_1^2\ell}{R}.$$

ვიპოვოთ დინამიკური რეაქციები:

$$R_A = R_O = \frac{M_r}{\ell} = \frac{m\rho^2\omega_1^2}{R}.$$

გიროსკოპული წნევა სიდიდით უდრის დინამიკურ რეაქციებს, ე.ი.

$$N_A = R_A = \frac{m\rho^2\omega_1^2}{R}.$$

მაშასადამე, რბიას სრული წნევა ფსკერზე:

$$N = mg + N_A = m\left(g + \frac{\rho^2\omega_1^2}{R}\right),$$

სადაც $\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = 2\pi.$

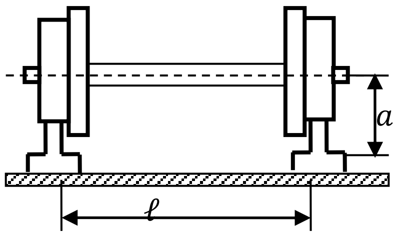
თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ რიცხვით მონაცემებს, მივიღებთ:

$$N = 1200\left(9{,}81 + \frac{0{,}4^2 \cdot 4\pi^2}{0{,}5}\right) = 26900(ნ) = 26{,}9(კნ).$$

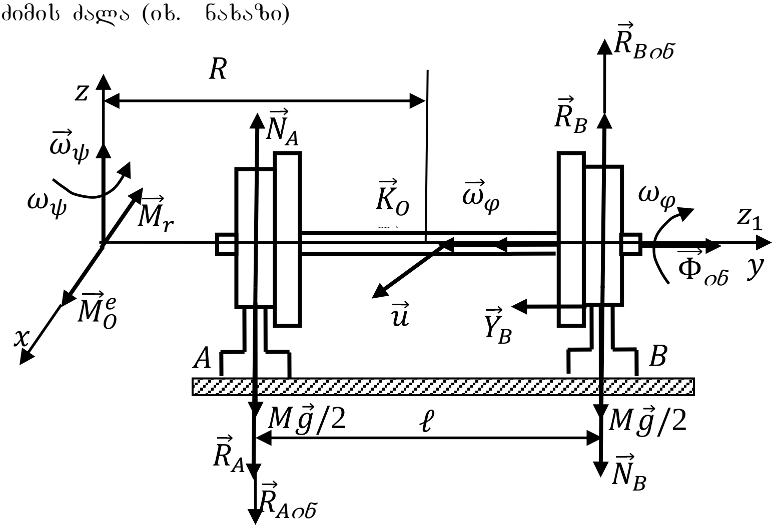
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> N=26,9კნ.

ამოცანა 40.8

M =1400კგ მასის და a =0,5მ რადიუსის წყვილთვალი, რომლის ინერციის რადიუსი $\rho = \sqrt{0{,}55}a$,.თანაბრად მოძრაობს v=20მ/წმ სიჩქარით, R=200მ რადიუსის წრეწირის რკალზე ჰორიზონტალურ სიბრტყეში. განსაზღვრეთ წყვილთვალის წნევა რელსებზე, თუ რელსებს შორის მანძილია ℓ =1,5მ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ავირჩიოთ $Ox_1y_1z_1$ მოძრავი საკოორდინატო სისტემის სათავე O წერტილში. გარე ძალებია: $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციები და $M\vec{g}/2$ სიმძიმის ძალა (იხ. ნახაზი)



ვთქვათ, წყვილთვალი ბრუნავს z ღერძის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით. მაშინ $\vec{\omega}_\psi$ ვექტორი მიმართული იქნება ზევით, ხოლო $\vec{\omega}_\varphi$ –ქვევით. ვიპოვოთ დინამიკური რეაქციები.

რეზალის თეორემის თანახმად:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e = \vec{u} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{K}_O = \vec{\omega}_\psi \times J_{z_1}\vec{\omega}_\varphi.$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების ნაკრები მომენტი:

$$M_O^e = R_B\ell = M_r = J_{Cz_1}\omega_\psi\omega_\varphi.$$

აქედან

$$R_B = \frac{J_{Cz_1}\omega_\psi\omega_\varphi}{\ell},$$

სადაც $\omega_\psi = \frac{v}{R}$; $J_{Cz_1} = M\rho^2 = 0{,}55a^2M$; $\omega_\varphi = \frac{v}{a}$

მაშინ

$$R_B = \frac{M\rho^2v^2}{Ra\ell} = \frac{0{,}55Mav^2}{Ra\ell} = 770(\text{ნ})$$

და მიმართულია ზევით, ხოლო $R_A = R_B$, მაგრამ მიმართულია ქვევით.

მაგრამ წყვილთვალის წრიულ რკალზე მოძრაობისას წარმოიქმნება დამატებითი დინამიკური რეაქციის ძალები ცენტრიდანული ინერციის ძალების გამო, რომელიც მიმართულია Oz_1 ღერძის გასწვრივ:

$$\Phi_{ob} = Ma_n = M\frac{v^2}{R}.$$

ინერციის ძალების შედეგად წარმოქმნილი დინამიკური რეაქციის ძალები ავღნიშნოთ R_{Aob} და R_{Bob} – ით. მაშინ დალამბერის პრინციპის თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\sum M_O\left(\vec{F}_k^e\right) = \mathrm{R}_{Bob}\ell - a\Phi_{ob} = 0,$$

$$\sum M_O\left(\vec{F}_k^e\right) = \mathrm{R}_{Aob}\ell - a\Phi_{ob} = 0.$$

აქედან

$$\mathrm{R}_{Aob} = \mathrm{R}_{Bob} = \frac{a\Phi_{ob}}{\ell} = \frac{aMv^2}{R\ell}.$$

რიცხვითი მონაცემების ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$\mathrm{R}_{Aob} = \mathrm{R}_{Bob} = \frac{1400 \cdot 0{,}75 \cdot 20^2}{200 \cdot 1{,}5} = 1400(\text{ნ}).$$

რადგან გიროსკოპული და ცენტრიდანული დინამიკური რეაქციები მიმართულია ერთ მხარეს, ამიტომ

$$N_A = N_B = R_A + \mathrm{R}_{Aob} = 770 + 1400 = 2170(\text{ნ}).$$

სტატიკური რეაქციები

$$R_A^{სტ} = R_B^{სტ} = \frac{Mg}{2} = \frac{1400 \cdot 9{,}8}{2} = 6860(\text{ნ})$$

ორივე რეაქცია მიმართულია ზევით.

თვლების ჯამური წნევა უდრის ჯამურ რეაქციებს და მათ საწინააღმდეგოდ არის მიმართული.

მაშინ

$$\left|\vec{N}_A\right| = R_A^{სტ} - R_A = 6{,}86 - 2{,}17 = 4{,}69(კნ),$$
$$\left|\vec{N}_B\right| = R_A^{სტ} + R_A = 6{,}86 + 2{,}17 = 9{,}03(კნ).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ შევცვლით წყვილთვალის მობრუნების მიმართულებას საპირისპიროთი, მაშინთვლების წნევის სიდიდე იქნება:

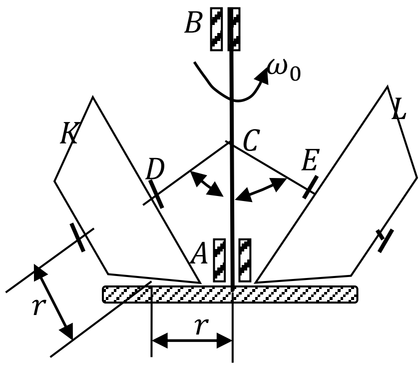
$$N_A = 6{,}86 + 2{,}17 = 9{,}03(კნ),$$
$$N_B = 6{,}86 - 2{,}17 = 4{,}69(კნ).$$

ზოგად შემთხვევაში შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$N = 6{,}86 \pm 2{,}17კნ.$$

პ ა ს უ ხ ი: $N = 6{,}86 \pm 2{,}17კნ.$

ამოცანა 40.9

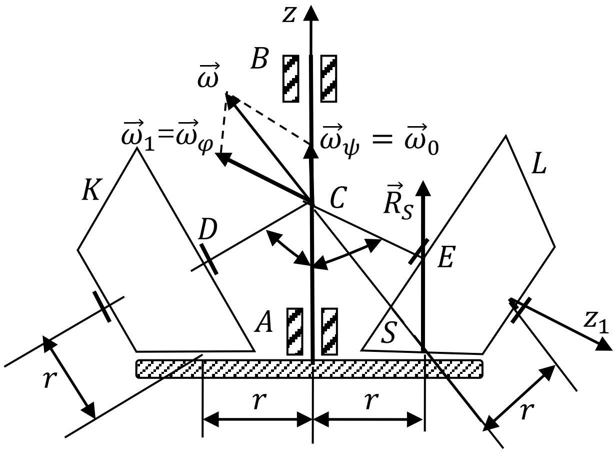


ნახაზზე გამოსახულია გასახსნელი ხიდის მოსაბრუნებელი ნაწილის კვანძი. AB ლილვი მასაზე მიმაგრებული და მასთან α კუთხით დახრილი CD და CE ღეროებით ბრუნავს ω_0 კუთხური სიჩქარით. ამ დროს K და L კბილანები, რომლებიც თავისუფლადაა ჩამოცმული CD და CE ღეროებზე უსრიალოდ გორავს უძრავ ჰორიზონტალურ ბრტყელ კბილანაზე. განსაზღვრეთ თითოეული M მასის K და L კბილანების დამატებითი დინამიკური წნევები უძრავ ჰორიზონტალურ კბილანაზე, თუ თითოეული კბილანას რადიუსი უდრის r. მოძრავი კბილანები ჩათვალეთ მთლიან ერთგვაროვან დისკოებად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ კბილანას Oz_1 ღერძის ირგვლივ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. გავითვალისწინოთ, რომ

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_0,$$

სადაც $\vec{\omega}-$ აბსოლუტური კუთხური სიჩქრეა. კუთხური სიჩქარეების



მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე. ნახაზიდან ჩანს, რომ $\omega_0 = \omega_1$,

რადგან ბრუნვის მყისი CS ღერძი CE კუთხის ბისექტრისაა.

ვიპოვოთ გიროსკოპული მომენტი:

$$\vec{M}_r = J_{z_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0)$$

ან

$$\vec{M}_r = J_{z_1}\vec{\omega}_\varphi \times \vec{\omega}_\psi,$$

$$\left|\vec{M}_r\right| = J_{z_1}\omega_0\omega_1 sin\alpha = J_{z_1}\omega_0^2 sin\alpha, \qquad (1)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$J_{z_1} = \frac{1}{2}Mr^2.$$

მაშინ (1)-დან მივიღებთ:

$$M_r = \frac{Mr^2\omega_0^2 sin\alpha}{2}. \qquad (2)$$

მეორეს მხრივ,

$$M_r = M_C^e = M_C(\vec{R}_S) = R_S r. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებებიდან მივიღებთ:

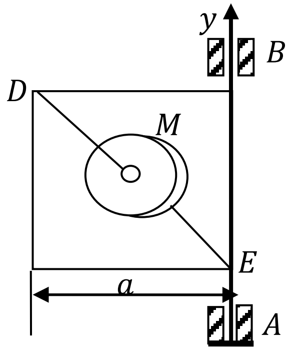
$$R_S = \frac{Mr^2\omega_0^2 sin\alpha}{2}.$$

დინამიკური წნევა $N_S = R_S$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\frac{Mr^2\omega_0^2 sin\alpha}{2}$.

ამოცანა 40.10

$a=$20სმ ტოლი გვერდის მქონე კვადრატული ჩარჩო ბრუნავს ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო ω_1=2წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. ჩარჩოს დიაგონალური CD ღერძის გარშემო ბრუნავს $r=$10სმ რადიუსის მქონე M დისკო ω =300წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ A და B საყრდენებზე გვერდითი დამატებითი დინამიკური წნევების ფარდობაშესაბამის სტატიკურ წნევებთან. ჩარჩოს მასა უგულებელყოფილია. დისკოს მასა თანაბრადაა განაწილებული მისი ფერსოს გასწვრივ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ სტატიკის განტოლებით

$$\sum F_{kx}=0$$

ან

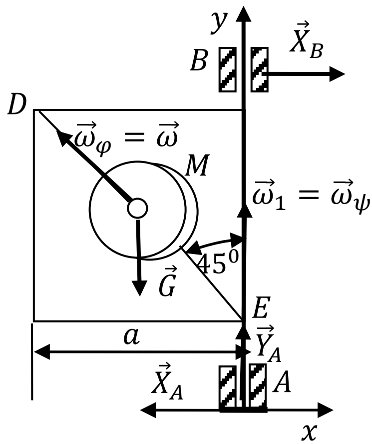
$$X_B^{სტ}-X_A^{სტ}=0, \qquad (1)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k)=0$$

ან

$$G\frac{a}{2}-X_B^{სტ}\cdot AB=0. \qquad (2)$$

ვიპოვოთ სტატიკური რეაქციები (იხ. ნახაზი):



$$X_A^{სტ}=X_B^{სტ}=\frac{Ga}{2\cdot AB}=\frac{Mga}{2\cdot AB}. \qquad (3)$$

ჩარჩოს ბრუნვისას წარმოიქმნება გიროსკოპული მომენტი

$$M_r=J\omega\omega_1 sin45^0.$$

მაშინ დინამიკური რეაქციები

$$X_A^{დინ}=X_B^{დინ}=\frac{M_r}{AB}=\frac{\sqrt{2}J\omega\omega_1}{2\cdot AB},$$

სადაც $J-$ინერციის მომენტია.

რადგან დისკოს მასა თანაბრადაა განაწილებული მისი ფერსოს გასწვრივ, ამიტომ $J=Mr^2$ და, მაშასადამე,

$$X_A^{დინ}=X_B^{დინ}=\frac{Mr^2\omega\omega_1}{\sqrt{2}\cdot AB}. \qquad (4)$$

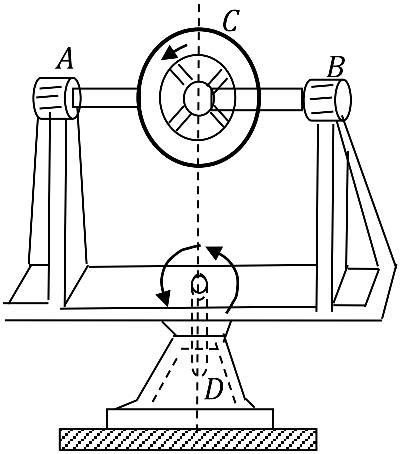
(3) და (4) გამოსახულებების გათვალისწინებით განვსაზღვრავთ საძიებელ თანაფარდობას:

$$\frac{X_A^{დინ}}{X_A^{სტ}}=\frac{X_B^{დინ}}{X_B^{სტ}}=\frac{M}{\sqrt{2}\cdot AB}:\frac{Mga}{2\cdot AB}=\frac{\sqrt{2}r^2\omega\omega_{1.}}{ga}=4{,}32.$$

პ ა ს უ ხ ი: 4,32ნ.

ამოცანა 40.11

a რადიუსისდა $2M$ მასის თვალი ბრუნავს ჰორიზონტალური AB ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით; AB ღერძი ბრუნავს CD ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი ω_2 კუთხური სიჩქარით; ბრუნვათა მიმართულება ნაჩვენებია ისრებით. განსაზღვრეთ A და B საკისრებზე N_A და N_B წნევები, თუ $AO=OB=h$; იგულისხმება, რომ მასა თანაბრადაა განაწილებული მის ფერსოზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთდროულად ორი ღერძის ირგვლივ თვლის ბრუნვისას წარმოიქმნება გიროსკოპული მომენტი

$$\vec{M}_r=J_{z_1}(\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2),$$

რომელიც ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახაზი). გარდა $\vec{M}_r$ −სა თვალზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $\vec{G}=2M\vec{g}$.

დინამიკური წონასწორობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\sum F_{ky}=0,$$

ან

$$R_A+R_B-2Mg=0, \qquad (1)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k)=0$$

ან

$$-R_Ah+R_Bh+\ M_r=0. \qquad (2)$$

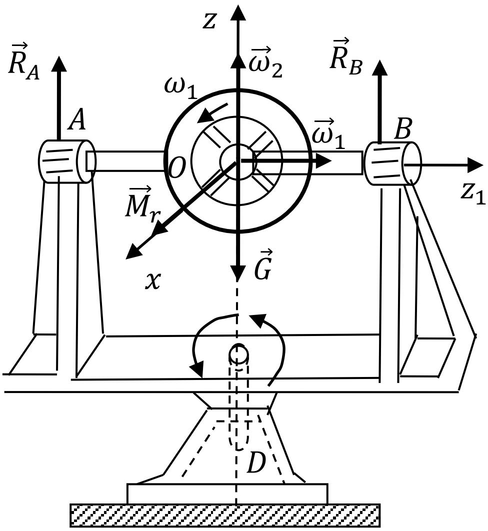
რადგან თვლის მასა თანაბრადაა განაწილებული მის ფერსოზე, ამიტომ $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებს შორის კუთხე უდრის 90^0, მაშინ

$$J_{z_1}=2Ma^2,$$

$$M_r=2Ma^2\omega_1\omega_2. \qquad (3)$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ $h-$ ზე, მიღებულს გამოვაკლოთ (2)

განტოლება და გავითვალისწინოთ (3) განტოლება, მაშინ მივიღებთ



$$2R_A h - 2Mgh - 2Ma^2\omega_1\omega_2 = 0.$$

მაშასადამე,

$$R_A = Mg\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right).$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ $h-$ ზე, მიღებულს მივუმატოთ (2) განტოლება და გავითვალისწინოთ (3) განტოლება, მაშინ მივიღებთ

$$2R_B h - 2Mgh + 2Ma^2\omega_1\omega_2 = 0.$$

აქედან

$$R_B = Mg\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right),$$

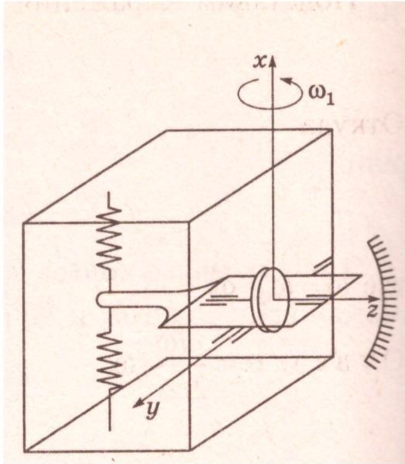
სადაც $\omega_1 = \omega_\varphi$, $\omega_2 = \omega_\psi$.

თუ $\frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh} > 1$, მაშინ $\vec{R}_B$ ვექტორა აქვს ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულების საპიროსპირო მიმართულება. A და B საკისრებზე N_A და N_B წნევები რიცხობრივად საყრდენების რეაქციების ტოლია, ე.ი. $N_A = R_A, N_B = R_B$, მაგრამ მიმართულებით მათი საპირისპიროა.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $N_A = Mg\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$; $N_B = Mg\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$,

ამოცანა 40.12

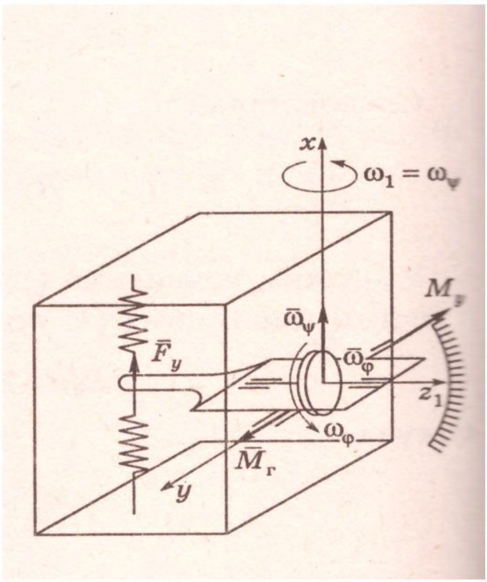
უმარტივესი გიროტახომეტრი შედგება გიროსკოპისაგან, რომლის ჩარჩო შეკავებულია ხელსაწყოს კორპუსზე მიმაგრებული ორი ზამბარით. გიროსკოპის ინერციის მომენტი თავისუფალი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის J, გიროსკოპის კუთხური სიჩქარე ტოლია ω. განსაზღვრეთ ის α კუთხე, რომელზეც მობრუნდება გიროსკოპის ღერძი მის ჩარჩოსთან ერთად, თუ ხელსაწყო დადგმულია მანქანაზე, რომელიც ბრუნავს ω_1 კუთხური სიჩქარით ჩარჩოს ბრუნვის y ღერძის მართობული x ღერძის გარშემო. ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი უდრის c; ჩათვალეთ α კუთხე მცირედ. მანძილი ჩარჩოს ბრუნვის ღერძიდან ზამბარამდე უდრის a.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთდროულად ორი ღერძის ირგვლივ თვლის ბრუნვისას შედეგად იროტახომეტრზე მოქმედებს გიროსკოპული მომენტი

$$\vec{M}_r = J(\vec{\omega}_\varphi \times \vec{\omega}_\psi).$$

$\vec{M}_r$ ვექტორი მიმართულია y ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახაზი) და ცდილობს ჩარჩო z ისართან ერთად მოაბრუნოს y ღერძის ირგვლივ. თავის მხრივ, ზამბარა დეფორმირდება და წარმოიქმნება დრეკადობის ძალა, რომლის მომენტი y ღერძის $M_y(\vec{F}_{დრ})$ მიმართ აწონასწორებს M_r −ს, ე.ი.



$$M_y(\vec{F}_{დრ}) = M_r.$$

რადგან $\vec{\omega}_\psi \perp \vec{\omega}_\varphi$ და $sin90^0 = 1$, ამიტომ

$$M_r = J\omega_\psi\omega_\varphi.$$

ვინაიდან $F_{დრ} = 2ca\alpha$, ამიტომ

$$M_y(\vec{F}_{დრ}) = F_{დრ}a = 2ca^2\alpha.$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$2ca^2\alpha = J\omega_1\omega.$$

აქედან

$$\alpha = \frac{J\omega}{2ca^2}\omega_1,$$

სადაც $\omega_1 = \omega_\psi, \quad \omega = \omega_\varphi.$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\alpha = \frac{J\omega}{2ca^2}\omega_1.$

§41. კინეტოსტატიკის მეთოდი.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

კინეტოსტატიკის მეთოდი- დინამიკის ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდია, რომლის გამოყენებით მოძრაობის განტოლებებს, ე.ი. დინამიკის განტოლებებს, მიეცემა "წონასწორობის", ე.ი. სტატიკის განტოლებების სახე.

მეთოდი ემყარება მატერიალური წერტილის ან მექანიკური სისტემისათვის **დალამბერის პრინციპის** გამოყენებას. ამ პრინციპის თანახმად შემოაქვთ ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ აჩქარებით მოძრავი მატერიალური წერტილის ან მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის ძალები, ინერციის ძალებს უწოდებენ **დალამბერის ძალებს**, ან უბრალოდ ინერციის ძალებს.

შევთანხმდეთ, რომ ინერციის ძალები ავღნიშნოთ $\vec{\Phi}-$ ით, ე.ი. ისე, როგორც წერტილის ფარდობითი მოძრაობის შემთხვევაში და ჩავთვალოთ, რომ ის უდრის წერტილის მასისა და მისი აჩქარების ნამრავლს აღებულს მინუს ნიშნით, ე.ი.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \tag{41.1}$$

ან დეკარტის საკოორდინატო სისტემის რერძებზე გეგმილებში:

$$\Phi_x = -m\ddot{x}, \Phi_y = -m\ddot{y}, \Phi_z = -m\ddot{z}. \tag{41.2}$$

მატერიალური წერტილის მრუდწირული მოძრაობისას ინერციის ზალა შეიძლება დავშალოთ ორ მდგენელად: ინერციის მხები ძალა და ნორმალური ძალა, ამასტან

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau, \quad \vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n, \tag{41.3}$$

სადაც $a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$

ვთქვათ, არათავისუფალი მატერიალური წერტილი მოძრაობს აქტიური ძალების ტოლქმედის $\vec{F}$ და მასზე დადებული ბმის რეაქციის ძალების ტოლქმედის $\vec{R}$ მოქმედებით. მაშინ წერტილის დინამიკის მეორე კანონის თანახმად წერტილი შეიძენს აჩქარებას:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}+\vec{R}}{m}. \qquad (41.4)$$

ამ წერტილის ინერციის ძალა

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} = -(\vec{F} + \vec{R}).$$

ტოლობა, რომელიც გამოსახავს **დალამბერის პრინციპს** არათავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის, შეგვიძლია ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (41.5)$$

ე.ი. არათავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის აქტიური ძალების, რეაქციის ძალების და ინერციის ძალების გეომეტრიული ჯამი დროის ნებისმიერ მომენტში უდრის ნულს.

დალამბერის პრინციპი არათავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

თუ მექანიკური სისტემის ყველა წერტილზე მოვდებთ მოძრაობს აქტიური ძალების ტოლქმედს, ბმის რეაქციის ძალების ტოლქმედს, აგრეთვე ფიქტიურ ინერციის ზალებს, მაშინ მიღებული სისტემა იქნება ნულის ექვივალენტური, ე.ი. მექანიკური სისტემა პირობითად იქნება წონასწორობაში.

შტატიკიდან ცნობილია, რომ თუ ძალთა სისტემის მოქმედებით სხეული წონასწორონაშია, მაშინ ამ ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე ცენტრის მიმართ უდრის ნულს. ამიტომ დალამბერის პრიციპი მექანიკური სისტემისათვის შეიძლება ჩაიწეროს სახით:

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{\Phi}_k = 0, \qquad (41.6)$$

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) + \sum \vec{M}_O(\vec{R}_k) + \sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}_k) = 0, \qquad (41.7)$$

(41.6) და (41.7) განტოლებებში მითითებული ძალები სათანადოდ წარმოადგენენ აქტიური ძალების, რეაქციის ძალების და სისტემის ყველა წერტილის ინერციის ძალების ნაკრებ ვექტორებს.

ამგვარად, არათავისუფალი მექანიკური სისტემისათვის აქტიური ძალე-ბის, რეაქციის ძალების და სისტემის ყველა წერტილის ინერციის ძალის ნაკრები ვექტორების გეომეტრიული ჯამი, აგრათვე, ამ ძალების ნაკრები მომენტების გეომეტრიული ჯამი რაიმე ცენტრის მიმართ უდრის ნულს.

სასწავლო ლიტერატურაში შეიძლება შეგვხვდეს მექნიკური სისტე-მისათვის დალამბერის პრინციპის შემდეგი ფორმულირება:

არათავისუფალი მექანიკური სისტემისათვის შიგა და გარე ძალების, აგრეთვე, სისტემის ყველა წერტილის ინერციის ძალის ნაკრები ვექტო-რების გეომეტრიული ჯამი, აგრათვე, ამ ძალების ნაკრები მომენტების გეომეტრიული ჯამი რაიმე ცენტრის მიმართ უდრის ნულს.

ასეთი ფორმულირება სავსებით დასაშვებია, მაგრამ დამატებით უნდა შევთანხმდეთ, რომ გარე ძალებსი აქტიურ ძალებთან ერთად უნდა შე-ვიდეს მექანიკურ სისტემაზე დადებული გარე ბმების რეაქციის ძალებიც.

შიგა ბმების რეაქციები, როგორც მექანიკური სისტემის სხეულებს შორის ურთიერთქმედების ძალები შიგა ძალების თვისების თანახმად ურთიერთ-წონასწორობაშია.

ამგვარად, (41.6) და (41.7) განტოლებების შედგენისას ეს ძალები უნდა გამოირიცხოს. მაშინ მივიღებთ:

$$\sum \vec{F}_k^e + \sum \overrightarrow{\Phi}_k = 0, \tag{41.8}$$

$$\sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum \vec{M}_O\left(\overrightarrow{\Phi}_k\right) = 0. \tag{41.9}$$

კინეტოსტატიკის მეთოდით ამოცანების ამოხსნისას მნიშვნელოვანია მყარი სხეულის ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის განსაზღვრება მისი ნებისმიერი მოძრაობისას. მათი განმარტება დაფუძნებულია სტატიკიდან ცნობილი **პუანსოს** მეთოდზე ნებისმიერ ძალთა სისტემის მოცემულ ცენტრზე დაყვანის შესახებ. მიტომ შეგვიძლია ჩავწეროტ, რომ მყარი სხეულის მოძრაობისას მასზე მოდებული ძალთა სისტემა ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის $\overrightarrow{\Phi}^*$და მასათა ცენტრის მიმართ ნაკრები მომენტის $\vec{M}_C^{\Phi}$ ექვივალენტურია:

$$\overrightarrow{\Phi}^* = \sum \overrightarrow{\Phi}_k = -\sum m_k \vec{a}_k = -\sum m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} =$$
$$= -\frac{d^2}{dt^2}\sum m_k \vec{r}_k = -\frac{d^2}{dt^2}\left(M\vec{r}_C\right) = -M\vec{v}_C, \tag{41.10}$$
$$\vec{M}_C^{\Phi} = \sum \vec{M}_C\left(\overrightarrow{\Phi}_k\right) = -\sum\left(\vec{r}_k \times m_k\, \vec{a}_k\right). \tag{41.11}$$

(41.10) და (41.11) ფორმულებს მყარი სხეულის მოძრაობის კერძო შემთხვევებში აქვთ სახე:

- გატანითი მოძრაობისას

$$\overrightarrow{\Phi}^* = -M\vec{a}_C, \quad \vec{M}_C^{\Phi} = 0; \tag{41.12}$$

- მყარი სხეულის მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას:

$$\overrightarrow{\Phi}^* = 0, \ \vec{M}_C^{\Phi} = -J_C\vec{\varepsilon}, \tag{41.13}$$

სადაც $J_C -$ მყარი სხეულის ინერციის მომენტია მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ;

- მყარი სხეულის ბრუნვა ღერძის გარშემო, რომელიც არ გადის მასათა ცენტრზე:

$$\overrightarrow{\Phi}^* = -M\vec{a}_C, \ \vec{M}_O^{\Phi} = -J_O\vec{\varepsilon}, \tag{41.14}$$

- მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობა:

$$\overrightarrow{\Phi}^* = -M\vec{a}_C, \ \vec{M}_C^{\Phi} = -J_C\vec{\varepsilon}, \tag{41.15}$$

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობისას ღერძის გარშემო, რომელიც არ გადის მასათა ცენტრზე და ბრტყელი მოძრაობისას ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის $\overrightarrow{\Phi}^*$ მოდებულია მასათა ცენტრზე. თუ წერტილების ინერციის ძალებს დავიყვანთ რაიმე O ცენტრზე, რომელიც არ მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, მაშინ

$$\overrightarrow{\Phi}^* = -M\vec{a}_C,$$

მაგრამ მოდებულია O წერტილზე და

$$\vec{M}_O^{\Phi} = -J_O\vec{\varepsilon},$$

სადაც J_O — მყარი სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ.

დაყვანის ცენტრად შეგვიძლია მივიღოთ სხეულის ისეთი წერტილი, რომლის მიმართ ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი უდრის ნულს. მაშინ ყველა წერტილის ინერციის ძალები ექვივალენტურია ერთი ტოლქმედი ძალის, რომელიც ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის ტოლია რომლის მოქმედების ფუძე O წერტილიდან დაშორებული იქნება

$$d = \frac{M_O^{\Phi}}{\Phi^*}$$

მანძილით.

ანალოგიურ შედეგამდე მივალთ მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას.

თუ (41.8) და (41.9) განტოლებებს ჩავწერთ სახით:

$$\sum \vec{F}_k^e - \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0, \tag{41.8'}$$

$$\sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) - \frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0, \tag{41.9'}$$

მაშინ (41.8′) გამოსახულება წარმოადგენს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემას, ხოლო (41.9′) გამოსახულება- მოძრაობის რაოდენობის მომენტის (კინეტიკური მომენტის) ცვლილების თეორემას.

(41.8) და (41.8′), (41.9) და (41.9′) ფორმულების შედარებით, მივიღებთ სისტემის ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის გამოსათვლელ ფორმულებს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის და კინეტიკური მომენტის საშუალებით:

$$\vec{\Phi}^* = \sum \vec{\Phi}_k = -\frac{d\vec{Q}}{dt}, \tag{41.16}$$

$$\vec{M}_O^{\Phi} = \sum \vec{M}_O\left(\vec{\Phi}_k\right) = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}. \tag{41.17}$$

რადგან სისტემის მოძრაობის რაოდენობა $\vec{Q} = M\vec{v}_C$, ამიტომ

$$\vec{\Phi}^* = -M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = -M\vec{a}_C. \tag{41.10'}$$

(41.17) ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილოთ სხეულის ბრუნვის z ღერძზე, მივიღებთ

$$M_z^{\Phi} = \sum M_z\left(\vec{\Phi}_k\right) = -\frac{dK_z}{dt}. \tag{41.18}$$

რადგან სხეულის კინეტიკური მომენტი ბრუნვის Z ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით $K_z = J_z\omega$, ამიტომ

$$M_z^{\Phi} = -J_z\frac{d\omega}{dt} = -J_z\varepsilon, \tag{41.19}$$

სადაც J_z –მყარი სხეულის ინერციის მომენტია Z ღერძის მიმართ; ε —სხეულის ბრუნვის კუთხური აჩქარება.

(41.19) ფორმულით გამოითვლება მყარი სხეულის ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი მის ნებისმიერ წერტილზე გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ.

მოცემული პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

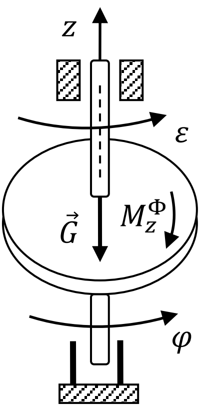
1. გამოვსახოთ ნახაზზე სხეული ან მექანიკური სისტემა (სხეულთა სისტემა), რომლის მოძრაობა განიხილება ამოცანაში;
2. გამოვსახოთ ნახაზზე სხეულზე ან სხეულთა სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალა, მათ შორის გარე ბმების რეაქციის ძალებიც, აგრეთვე, ყველა სხეულის ინერციის ძალა;
3. სხეულის (სხეულთა სისტემის) ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი განვსაზღვროთ მათი მოძრაობის ხასიათის მიხედვით (41.12)-(41.15) ფორმულების გამოყენებით, გამოვსახოთ რა ისინი ერთ-ერთი სხეულის წრფივი ან კუთხური აჩქარებით;
4. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა (საკოორდინატო სისტემის ღერძები);
5. შევადგინოთ აუცილებელი “წონასწორობის” განტოლებები (სტატიკის განტოლებები) ერთ-ერთი სხეულის ან მექანიკურ სისტემასი სემავალი თითოეული სხეულისათვის, წინასწარ დავყოთ სისტემა ცალკეულ სხეულებად და ვაჩვენოთ მათ სორის ურთიერთქმედების ძალები;
6. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა და განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდეები.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 41.1

.განსაზღვრეთ 20სმ რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკოს სიმძიმის ძალა; დისკო ბრუნავს ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi = 3t^2$. ღერძი გადის დისკოს ცენტრზე მისი სიბრტყის მართობულად, დისკოს მხები ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი არის 4ნ.სმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დისკოს ინერციის ძალების ნაკრები მომენტია z ღერძის მიმართ (იხ. ნახაზი):



$$\vec{M}_z^{\Phi} = -J_z\vec{\varepsilon},$$

ან სიდიდით

$$M_z^{\Phi} = J_z\varepsilon. \qquad (1)$$

დისკოს ინერციის მომენტი

$$J_z = \frac{mR^2}{2} = \frac{GR^2}{2g},$$

აჩქარება

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 6t.$$

მაშინ (1)

$$M_z^{\Phi}=\frac{GR^2}{2g}\cdot\varepsilon.$$

აქედან

$$G=\frac{2gM_z^{\Phi}}{\varepsilon R^2}=\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 4\cdot 10^{-2}}{6\cdot 20^2\cdot(10^{-2})^2}=3{,}27(ნ)$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 3,27 ნ.

ამოცანა 41.2

M მასის და ℓ სიგრძის ერთგვაროვანი წვრილი ღერო ბრუნავს მის ბილოზე მართობულად გამავალი ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi=at^2$. იპოვეთ ღეროს ნაწილაკების Φ_n ცენტრიდანული და Φ_τ მხები ინერციის ძალების ტოლქმედის სიდიდე, მიმართულება და მოდების წერტილი.

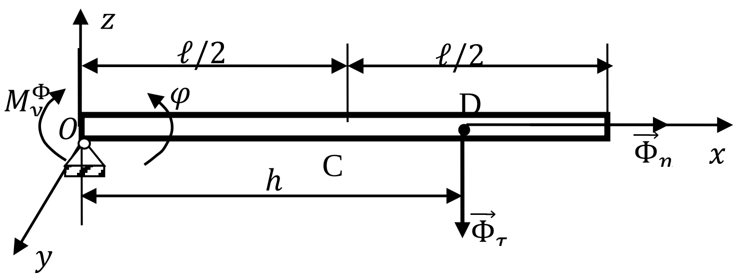
ა მ ო ხ ს ნ ა. თანაბარი ბრუნვისას ღეროს ცენტრიდანული და მხები ინერციის ძალები (იხ. ნახაზი):

$$\vec{\Phi}_n=-M\vec{a}_C^{\,n}\ ,\ \vec{\Phi}_\tau=-M\vec{a}_C^{\,\tau},\qquad(1)$$

სადაც $\vec{a}_C^{\,n}-$ ღეროს მასათა ცენტრის ცენტრისკენული აჩქარებაა; $\vec{a}_C^{\,\tau}-$ ღეროს მასათა ცენტრის ბრუნვითი (მხები) აჩქარება.

ამ ძალების სიდიდეები

$$\Phi_n=Ma_C^n\ ,\ \Phi_\tau=Ma_C^\tau,\qquad(2)$$



განვსაზღვროთ ღეროს მასათა ცენტრის ცენტრისკენული და ბრუნვითი აჩქარებები:

$$a_C^n=\frac{1}{2}\omega^2\ell,\ a_C^\tau=\frac{1}{2}\varepsilon\ell,$$

სადაც $\omega=2at;\ \varepsilon=2a.$

მაშინ

$$a_C^n=2a^2t^2\ell,\quad a_C^\tau=a\ell.\qquad(3)$$

თუ (3) გამოსახულებებს ჩავსვამთ (2) გამოსახულებებში, მივიღებთ:

$$\Phi_n=2Ma^2\ell t^2,\ \Phi_\tau=Ma\ell.$$

მხები ინერციის ძალების ტოლქმედის მოქმედების ფუძის განსასაზღვრავად ვიპოვოთ ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის Oy ღერძის მიმართ:

$$M_y^{\Phi} = J_y\varepsilon = \frac{m\ell^2}{2}\cdot 2a = \frac{2}{3}Ma\ell^2.$$

რადგან ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი უდრის მხები ინერციის ძალების ტოლქმედს O წერტილის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მანძილი $\vec{\Phi}_\tau$ მოქმედების ფუძიდან ბრუნვის ღერძამდე:

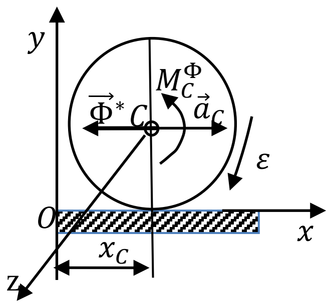
$$h = \frac{M_y^{\Phi}}{\Phi_\tau} = \frac{\frac{2}{3}Ma\ell^2}{Ma\ell} = \frac{2}{3}\ell.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> მხები ინერციის ძალების $\Phi_\tau = Ma\ell$ ტოლქმედი მიმართულია ღეროს მართობულად და მოდებულია წერტილზე, რომელიც ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია $\frac{2}{3}\ell$ მანძილით; ინერციის ცენტრიდანული ძალების $\Phi_n = 2Ma^2\ell t^2$ ტოლქმედი მიმართულია ბრუნვის ღერძიდან ღეროს გასწვრივ.

ამოცანა 41.3

M მასის და R რადიუსის თვალი უსრიალოდ გორავს წრფივ ჰორიზონტალურ რელსზე. განსაზღვრეთ ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი, თვლის მოძრაობის სიბრტყის მართობულად მის მასათა C ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ. მასათა C ცენტრი მოძრაობს $x_C = \frac{at^2}{2}$, კანონით, სადაც a დადებითი მუდმივი სიდიდეა. x ღერძი მიმართულია რელსის გასწვრივ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თვალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (იხ. ნახაზი), მაშასადამე, მისი ინერციის ძალები დაიყვანება ნაკრებ ვექტორზე $\vec{\Phi}^*$ და ნაკრებ მომენტზე მოძრაობის სიბრტყის მართობი Cz ღერძის მიმართ, სადაც C წერტილი- თვლის მასათა ცენტრია.



ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი სიდიდით

$$\Phi^* = Ma_C = M\ddot{x}_C = Ma,$$

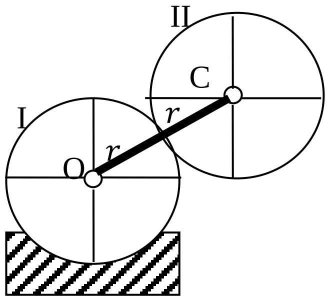
$\vec{\Phi}^*$ ვექტორი მიმართულია $\vec{a}_C$ ვექტორის საპირისპიროდ.

მაშინ ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი

$$M^{\Phi}=J_{Cz}\varepsilon=\frac{Mr^2}{2}\frac{\ddot{x}_C}{r}=\frac{Mr^2}{2}\frac{a}{r}=\frac{Mar}{2}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი სიდიდით ტოლია Ma და მიმართულია x ღერძის გასწვრივ; ინერციის ძალების ნაკრები მომენტის აბსოლუტური სიდიდე $\frac{Mar}{2}$ ტოლია.

ამოცანა 41.4



გამოთვალეთ პლანეტარული მექანიზმის II მოძრავი თვლის ინერციის ძალების აკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი, მოძრაობის სიბრტყის მართობულად მის მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ. OC მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. II თვლის მასა არის M, თვლების რადიუსი უდრის r.

ა მ ო ხ ს ნ ა. II თვალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, ამიტომ მისი ინერციის ძალები დაიყვანება ნაკრებ ვექტორზე $\vec{\Phi}^*$, რომელიც მოდებულია C მასათა ცენტრზე:

$$\vec{\Phi}^*=-M\vec{a}_C,$$

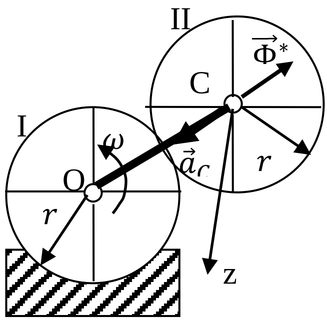
$$\Phi^*=Ma_C=M\omega^2\,2r=2M\omega^2r$$

და ნაკრებ მომენტზე $\vec{M}_C^{\Phi}$.

ამ შემთხვევაში

$$M_C^{\Phi}=J_{Cz}\varepsilon=0,$$

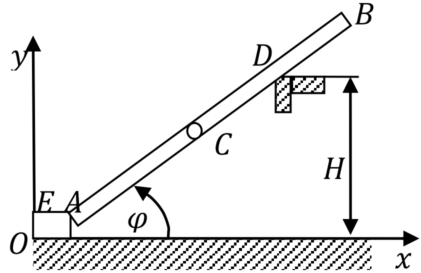
რადგან $\omega=const,\ \varepsilon=0.$



<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი OC მრუდმხარას პარალელურია და უდრის $2M\omega^2r$; ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

ამოცანა 41.5

2ℓ სიგრძის და M მასის ერთგვაროვანი AB ღეროს A ბოლო გადაადგილდება ჰორიზონტალურ მიმმართველზე E საბრჯენის საშუალებით მუდმივი v სიჩქარით ისე, რომ ღერო ყოველთვის ეყრდნობა D კუთხეს. განსაზღვრეთ ღეროს ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი φ კუთხეზე დამოკიდებულებით იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის ღეროს მასათა C ცენტრზე მოძრაობის სიბრტყის პერპენდიკულარულად.



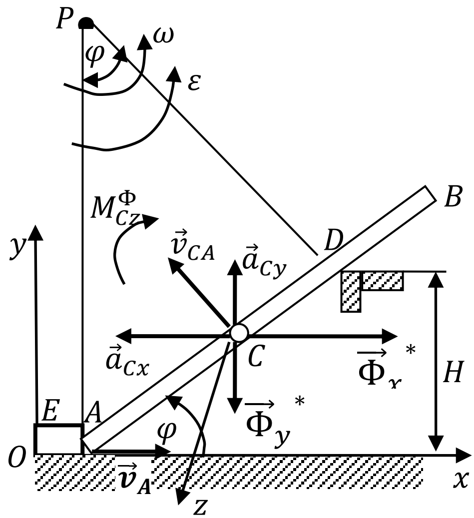
ა მ ო ხ ს ნ ა. ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი

$$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C.$$

ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -J_C\vec{\varepsilon},$$

AB ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, $P-$ წერტილი სმც (იხ. ნახაზი).



ღეროს კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{v_A}{AP},$$

სადაც

$$AP = \frac{AD}{sin\varphi},\ AD = \frac{H}{sin\varphi}.$$

მაშინ

$$\omega = \frac{v_A sin^2\varphi}{H}.$$

ღეროს კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{v_A}{H}\cdot 2sin\varphi cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2v_A^2}{H^2}sin^3\varphi cos\varphi.$$

ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი Cz ღერძის მიმართ, რომელიც მოძრაობის სიბრტყის მართობულია

$$M_{Cz}^{\Phi} = -J_{Cz}\varepsilon_z,$$

სადაც $J_{Cz} = \frac{M\ell^2}{3};\ \varepsilon_z = \varepsilon.$

მაშინ

$$M_{Cz}^{\Phi} = -\frac{2v_A^2}{H^2} sin^3\varphi cos\varphi \cdot \frac{M\ell^2}{3} = -\frac{2}{3} M\ell^2 \frac{v_A^2}{H^2} sin^3\varphi cos\varphi.$$

ღეროს მასათა C ცენტრის სიჩქარე ვიპოვოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემის გამოყენებით ბრტყელ მოძრაობაში:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$$

ან

$$v_{Cx} = v_A - v_{CA} sin\varphi,$$

$$v_{Cy} = v_{CA} cos\varphi,$$

სადაც

$$v_{CA} = \omega\ell = \frac{v_A \ell}{H} \, sin^2\varphi.$$

მაშინ

$$v_{Cx} = v_A - \frac{v_A \ell}{H} \, sin^3\varphi,$$

$$v_{Cy} = \frac{v_A \ell}{H} \, sin^2\varphi cos\varphi.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა დროით და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

და განვსაზღვროთ მასათა C ცენტრის აჩქარების გეგმილები x და y ღერძებზე:

$$a_{Cx} = -\frac{v_A \ell}{H} \cdot 3sin^2\varphi cos\varphi \cdot \omega = -3\frac{v_A^2 \ell}{H^2} sin^4\varphi cos\varphi,$$

$$a_{Cy} = \frac{v_A \ell}{H} \, (2sin\varphi cos^2\varphi - sin^2\varphi sin\varphi) \cdot \omega = \frac{v_A^2 \ell}{H^2} sin^3\varphi (3cos^2\varphi - 1).$$

ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილები x და y ღერძებზე:

$$\Phi_x^* = -Ma_{Cx} = 3M\frac{v_A^2 \ell}{H^2} sin^4\varphi cos\varphi,$$

$$\Phi_y^* = -Ma_{Cy} = M\frac{v_A^2 \ell}{H^2} sin^3\varphi (1 - 3cos^2\varphi).$$

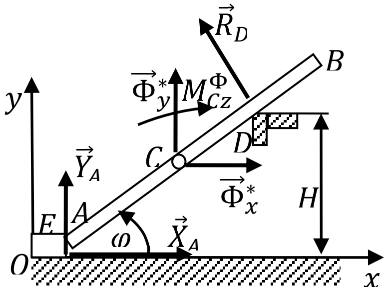
პ ა ს უ ხ ი: $\Phi_x^* = 3M\frac{v_A^2 \ell}{H^2} sin^4\varphi cos\varphi$;

$\Phi_y^* = M\frac{v_A^2 \ell}{H^2} sin^3\varphi (1 - 3cos^2\varphi)$; $M_{Cz}^{\Phi} = -\frac{2}{3} M\ell^2 \frac{v_A^2}{H^2} sin^3\varphi cos\varphi$.

ამოცანა 41.6

წინა ამოცანის მონაცემებით განსაზღვრეთ ღეროს N_D დინამიკური წნევა D კუთხეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. D კუთხეზე ღეროს N_D დინამიკური წნევის განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი. ვაჩვენოთ ნახაზზე დინამიკური ძალები: ინერციის ძალები $\vec{\Phi}_x^*$ და $\vec{\Phi}_y^*$, ინერციის ძალების მომენტი M_{Cz}^{Φ}, რეაქციის ძალები $\overrightarrow{-X}_A$, $\vec{Y}_A$ და $\vec{R}_D$.



$\vec{R}_D$ რეაქციის ძალას ვიპოვით განტოლებიდან

$$\sum \vec{M}_A(\vec{F}_k) = 0.$$

$$R_D \cdot AD - M_{Cz}^{\Phi} - \Phi_x^* \cdot AC \cdot sin\varphi + \Phi_y^* \cdot AC \cdot cos\varphi = 0$$

ან

$$R_D = \frac{M_{Cz}^{\Phi} + \Phi_x^* \cdot AC \cdot sin\varphi - \Phi_y^* \cdot AC \cdot cos\varphi}{AD}.$$

ვისარგებლოდ წინა ამოცანის ამოხსნის შედეგებით, მივიღებთ

$$R_D = \frac{\left(\frac{2}{3}M\ell^2\frac{v^2}{H^2}sin^3\varphi cos\varphi + 3M\frac{v^2\ell}{H^2}sin^4\varphi cos\varphi \cdot \ell sin\varphi - M\frac{v^2\ell}{H^2}sin^3\varphi(1-3cos^2\varphi)\ell cos\varphi\right)}{H/sin\varphi} =$$

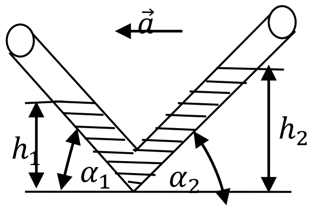
$$= \frac{Mv^2\ell^2}{H^3}sin^4\varphi cos\varphi\left(\frac{2}{3} + 3sin^2\varphi - 1 + 3cos^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{8Mv^2\ell^2}{3H^3}sin^4\varphi cos\varphi.$$

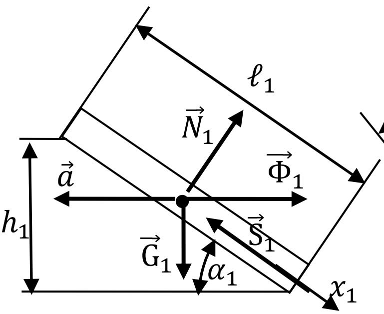
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $N_D = \frac{8Mv^2\ell^2}{3H^3}sin^4\varphi cos\varphi.$

ამოცანა 41.7

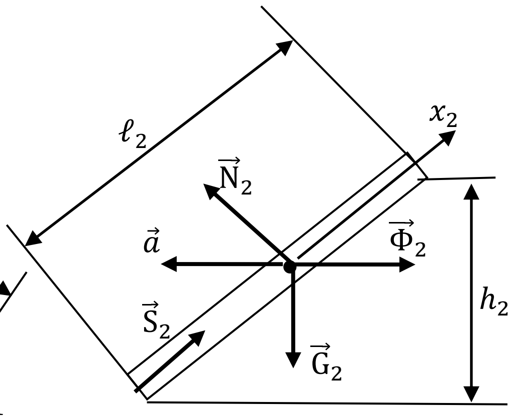
ტროლეიბუსის შენელების ექსპერიმენტალურად განსასაზღვრავად გამოიყენება სითხიანი აქსელერომეტრი, რომელიც შედგება ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე და ზეთით ავსებული მილისაგან. განსაზღვრეთ ტროლეიბუსის დამუხრუჭებისას მისი შენელება, თუ ამ დროს სითხის დონე მოძრაობის მიმართულების მხარეს მდებარე მილის ბოლოში აიწევა h_2 სიმაღლეზე, ხოლო მოპირდაპირე მხარეს დაიწევა h_1 დონემდე. აქსელერომეტრის მდებარეობა ნაჩვენებია ნახაზზე: $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^0$, h_1 =25მმ, $h_2 =$ 75მმ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი სითხის სვეტებისათვის მილის სხვადსხვა ნაწილებში ცალ-ცალკე (ნახ. 1 და 2).



ნახ.1



ნახ..2

ვაჩვენოთ ნახაზზე: ინერციის ძალები $\vec{\Phi}_1$ და $\vec{\Phi}_2$, მილის კედლების რეაქციები $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$, სიმძიმის ძალები $\vec{G}_1$ და $\vec{G}_2$, სითხის ჰიდროსტატიკური წნევის ძალები $\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$.

ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძები x_1 და x_2, მაშინ

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = 0, \\ \sum F_{x_2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -S_1 + \Phi_1 cos\alpha_1 + G_1 sin\alpha_1 = 0, \\ -S_2 + \Phi_2 cos\alpha_2 - G_2 sin\alpha_2 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

სადაც $\Phi_1 = m_1 a;\ \Phi_2 = m_2 a;\ G_1 = m_1 g;\ G_2 = m_2 g.$

გამოვსახოთ სითხის მასა მილის ორივე ბოლოში მისი ρ სიმკვრივით:

$$\begin{cases} m_1 = \rho \ell_1 = \rho \frac{h_1}{sin\alpha_1}, \\ m_2 = \rho \ell_2 = \rho \frac{h_2}{sin\alpha_2} \end{cases}. \quad (2)$$

შევკრიბოთ (1) სისტემის განტოლებები და ჩავსვათ (20 გამოსახულებები:

$$\rho \frac{h_1}{sin\alpha_1} acos\alpha_1 + \rho \frac{h_1}{sin\alpha_1} gsin\alpha_1 + \rho \frac{h_2}{sin\alpha_2} a\, cos\alpha_2 -$$
$$-\rho \frac{h_2}{sin\alpha_2} gsin\alpha_2 = 0.$$

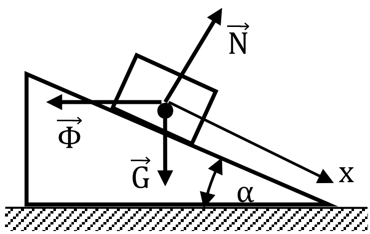
აქედან

$$a = \frac{g(h_2 - h_1)}{h_2 ctg\alpha_2 + h_1 ctg\alpha_1} = \frac{g(h_2 - h_1) tg\alpha_1 tg\alpha_2}{h_2 tg\alpha_1 + h_1 tg\alpha_2} = 0{,}5g.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a = \frac{g(h_2 - h_1) tg\alpha_1 tg\alpha_2}{h_2 tg\alpha_1 + h_1 tg\alpha_2} = 0{,}5g.$

ამოცანა 41.8

როგორი აჩქარებით უნდა მოძრაობდეს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე პრიზმა, რომლის გვერდითი წახნაგი ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს, რომ ამ გვერდით წახნაგზე მდებარე ტვირთი არ გადაადგილდეს პრიზმის მიმართ?



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის წონასწორობა პრიზმაზე დალამბერის პრინციპის გამოყენებით. ვაჩვენოთ ნახაზზე ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $\vec{G}$, ინერციის ძალა $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, სიბრტყის რეაქცია $\vec{N}$. მაშინ

$$\sum F_{kx} = 0,$$

ე.ი.

$$Gsin\alpha - \Phi cos\alpha = 0$$

ან

$$mgsin\alpha - macos\alpha = 0.$$

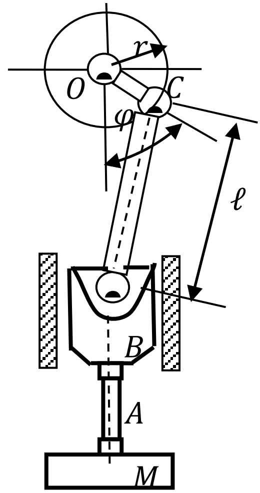
აქედან პრიზმის აჩქარება

$$a = gtg\alpha.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a = gtg\alpha.$

ამოცანა 41.9

ლითონის ძელაკზე გამჭიმავი და შემკუმშავი ძალების სწრაფად, რიგრიგობით მოქმედებისას მათი გავლენის გამოსარკვევად ლითონის A ძელაკს ზედა ბოლოთი მიამაგრებენ BCD მრუდმხარა მექანიზმის B ცოციაზე, ხოლო ქვედა ბოლოზე ჰკიდებენ Q ტვირთს. იპოვეთ ძელაკის გამჭიმავი ძალა იმ შემთხვევაში, როცა OC მრუდმხარა Oღერძის გარშემო ბრუნავს ω მუდმივი კუთხური სიჩქარით.



მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოსახულება $\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}$ უნდა გავშალოთ მწკრივად და უკუვაგდოთ მწკრივის ყველა წევრი, რომლებიც შეიცავენ $\frac{r}{\ell}$ ფარდობის ორზე მაღალ ხარისხებს.

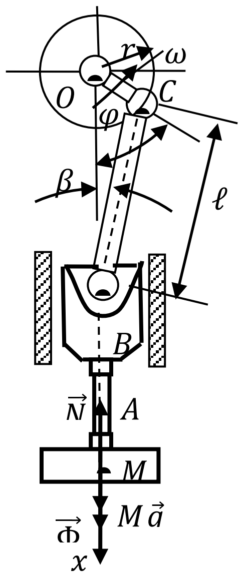
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ B წერტილის კოორდინატი. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\angle CBO = \beta$. მაშინ

$$OB = rcos\varphi + \ell cos\beta \qquad (1)$$

სინუსების თეორემის თანახმად

$$\frac{r}{sin\beta} = \frac{\ell}{sin\varphi}$$

$$sin\beta = \frac{rsin\varphi}{\ell}.$$



თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$cos\beta = \sqrt{1-sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi}\,,$$

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$OB = rcos\varphi + \ell\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 sin^2\varphi} \qquad (2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{r}{\ell} = \lambda.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\frac{r}{\ell} \ll 1,\ \varphi = \omega t,$ ხოლო

$$\sqrt{1-\lambda^2 sin^2\varphi} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}sin^2\varphi,$$

მაშინ (2) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$OB = rcos\varphi + \ell\sqrt{1-\lambda^2 sin^2\varphi} = rcos\varphi + \ell\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}sin^2\varphi\right) =$$

$$= r\left(cos\varphi + \frac{\lambda}{4}cos2\varphi\right) + \ell - \frac{\lambda}{4}r =$$

$$= r\left(cos\omega t + \frac{\lambda}{4}cos2\omega t\right) + \ell - \frac{\lambda r}{4}.$$

ეს გამოსახულება გავაწარმოოთ დროით ორჯერ:

$$v_B = \frac{d}{dt}(OB) = r\omega\left(sin\omega t - \frac{\lambda}{2}sin2\omega t\right),$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = r\omega^2(-cos\omega t - \lambda cos2\omega t).$$

სისტემაზე მოვდოთ აქტიური ძალა $M\vec{g}$ და ინერციის ძალა $\vec{\Phi}$ და ვიპოვოთ

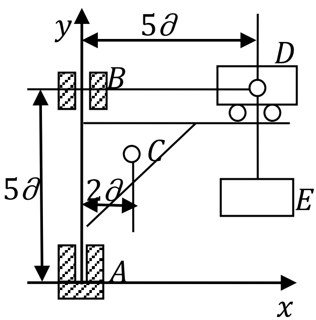
$$\Phi = \mathrm{M}a_B = M\omega^2(cos\omega t + \lambda cos2\omega t).$$

მაშინ ძელაკის გამჭიმავი ძალა

$$N = Mg + \Phi = Mg + M\omega^2\left(cos\omega t + \frac{r}{\ell}cos2\omega t\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $N = Mg + \Phi = Mg + M\omega^2\left(cos\omega t + \frac{r}{\ell}cos2\omega t\right).$

ამოცანა 41.10



განსაზღვრეთ საბრუნი ამწის A აქუსლისა და B საკისრის საყრდენთა რეაქციები, როცა იგი ეწევა 3ტ მასის E ტვირთს $\frac{1}{3}g$ აჩქარებით. ამწის მასა უდრის 2ტ და მოდებულია მის მასათა C ცენტრზე. D ურიკის მასა უდრის 0,5ტ. ამწე და ურიკა უძრავია. ზომები ნაჩვენებია ნახაზზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები, რეაქციის ძალები $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$ და ინერციის ძალები.

განვსაზღვროთ ინერციის ძალა

$$\Phi_E = m_E a_E = 3000 \cdot \frac{1}{3}g = 1000g.$$

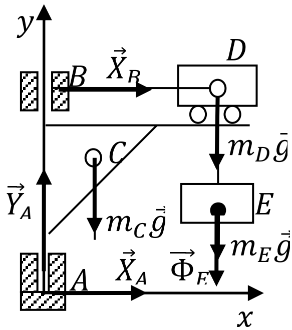
შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები. დალამბერის პრინციპის თანახმად:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - (m_C + m_E + m_D)g - \Phi_E = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -5X_B - 2m_C g - 5(m_E + m_D)g - 5\Phi_E = 0 \quad (3)$$

(2) განტოლებიდან ვიპოვით



$$Y_A = (m_C + m_E + m_D)g + \Phi_E =$$
$$= (2000 + 3000 + 500)g = 63900(\text{ნ})$$

(3) განტოლებიდან

$$X_B = -\frac{1}{5}[2m_C g + 5(m_E + m_D)g + 5\Phi_E] =$$
$$= -\frac{1}{5}[2000g \cdot 2 + (500 + 3000)g \cdot 5$$
$$+ 1000g \cdot 5] == -52100(\text{ნ}).$$

(1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

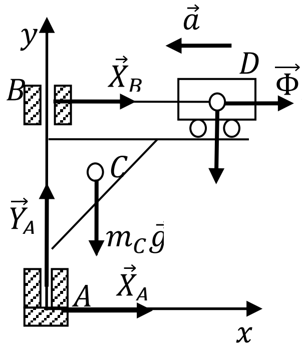
$$X_A = -X_B = 52,1\text{კნ}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $X_A = -X_B = 52,1$კნ; $Y_A = 63,9$კნ.

ამოცანა 41.11

განსაზღვრეთ წინა ამოცანაში განხილული საბრუნი ამწის A საქუსლისა და B საკისრის საყრდენთა რეაქციები, როცა D ურიკა გადაადგილდება მარცხნივ $0,5g$ აჩქარებით და E ტვირთი ჩამოხსნილია. ურიკის მასათა C ცენტრი B საყრდენის დონეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები, რეაქციის ძალები $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$ და ინერციის ძალები.



განვსაზღვროთ ინერციის ძალა

$$\Phi_D = m_D a_D = 0,5m_D g = 250g =$$
$$= 250g = 250 \cdot 9,8 = 2450 \text{ (ნ)}.$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები დალამბერის პრინციპის თანახმად:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + \Phi_D = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - m_C g - m_D g = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -5X_B - 2m_C g - 5m_D g - 5\Phi_D = 0. \quad (3)$$

(2) განტოლებიდან ვიპოვით

$$Y_A = (m_C + m_D)g = (2000 + 500)9,8 = 24\,500(\text{ნ})$$

(3) განტოლებიდან

$$X_B = -\frac{1}{5}(2m_C g + 5m_D g + 5\Phi_D) =$$

$$= -\frac{1}{5}[2000 \cdot 2 + 500 \cdot 5 + 250 \quad \cdot 5]9{,}8 = -15190(\text{ნ})$$

(1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$X_A = -X_B - \Phi_D.$$

მაშინ

$$X_A = -15190 - 2450g = 12750(\text{ნ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $X_A = 12.8$ კნ; X_B=-15,2კნ; $Y_A = 24{,}5$კნ.

ამოცანა 41.12

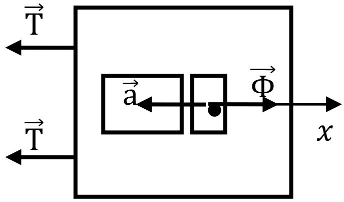
ბორანზე, რომელიც მიბმულია ნაპირზე ორი პარალელური ბაგირით, შედის 12კმ/სთ სიჩქარით 7ტ მასის სატვირთო მანქანა, მუხრუჭები აჩერებს მანქანას 3მ მანზილზე. განსაზღვრეთ ბაგირების T დაჭიმულობა, თუ ბორანის ზედაპირზე თვლების ხახუნის ძალა მუდმივია და ბორანის მასა და აჩქარება უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოქმედი აქტიური ძალები: ბაგირების T დაჭიმულობა და ინერციის ძალა $\Phi = ma$.

აჩქარება ვიპოვოთ კინემატიკის ფორმულების გამოყენებით:

$$v_0 - at = 0, \qquad (1)$$

$$v_0 t - \frac{at^2}{2} = s. \qquad (2)$$



(1) განტოლებიდან

$$t = \frac{v_0}{a}.$$

ჩავსვათ ეს ფორმულა

$$\frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = s.$$

აქედან

$$a = \frac{v_0^2}{2s} = \left(\frac{12\,000}{3600}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = 1{,}85(მ/წმ^2)$$

ახლა განვსაზღვროთ ინერციის ძალა

$$\Phi = ma = 7000 \cdot 1{,}85 = 12950(ნ).$$

შემდეგ შევადგინოთ განტოლება:

$$\sum F_{kx} = \Phi - 2\mathrm{T} = 0$$

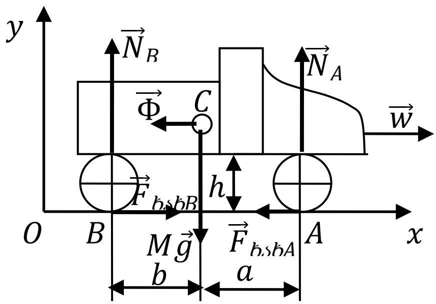
და განვსაზღვროთ ბაგირების დაჭიმულობები

$$T = \frac{\Phi}{2} = 6475(ნ).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> T=6,48ნ.

ამოცანა 41.13

M მასის ავტომობილი მოძრაობს წრფივად w აჩქარებით. განსაზღვრეთ ავტომობილის წინა და უკანა თვლების ნორმალური წნევა, თუ მისი მასათა C ცენტრი მდებარეობს h სიმაღლეზე გრუნტის ზედაპირიდან. წინა და უკანა ღერძების დაშორება მასათა ცენტრზე გამავალი ვერტიკალიდან სათანადოდ არის a და b. თვლების ბრუნვის ინერციის ძალების მომენტები უგულებელყოფილია. როგორ უნდა მოძრაობდეს ავტომობილი, რომ წინა და უკანა თვლების წნევა ტოილ იყოს?



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები, რეაქციის ძალები $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ და ინერციის ძალა.

განვსაზღვროთ ინერციის ძალა

$$\Phi = Mw.$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები დალამბერის პრინციპის თანახმად:

$$\sum F_{ky} = N_B + N_A - Mg = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = \Phi h + N_A(a+b) - Mgb = 0 \qquad (2)$$

(2) განტოლებიდან ვიპოვით

$$N_A = \frac{Mgb - \Phi h}{a+b} = \frac{M(gb - \mathrm{w}h)}{a+b}$$

(1) განტოლებიდან

$$N_B = Mg - N_A = \frac{M(gb + \mathrm{w}h)}{a+b},$$

ავტომობილის აჩქარებას ვიპოვით ტოლობიდან $N_A = N_B$:

$$\frac{M(gb - \mathrm{w}h)}{a+b} = \frac{M(gb + \mathrm{w}h)}{a+b},$$

$$\mathrm{w} = -\frac{\mathrm{g}((\mathrm{a}-\mathrm{b})}{2\mathrm{h}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $N_A = \frac{M(gb-\mathrm{w}h)}{a+b}$; $N_B = \frac{M(gb+\mathrm{w}h)}{a+b}$;

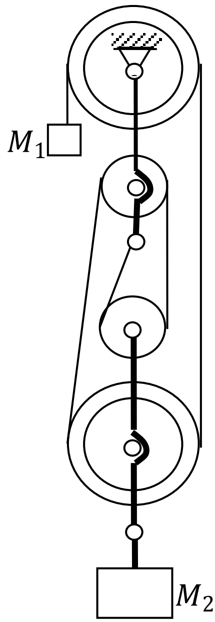
ავტომობილის დამუხრუჭებისას $w = \frac{g((a-b)}{2h}$ შენელებით.

ამოცანა 41.14

რა w აჩქარებით ეშვება M_1 მასის ტვირთი, თუ იგი ზევით ეწევა M_2 მასის ტვირთს პოლისპასტის საშუალებით? როგორია M_1 ტვირთის თანაბრი მოძრაობის პირობა? ბლოკებისა და გვრლის მასები უგულებელყოფილია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: M_2 ტვირთის აჩქარება 4-ჯერ ნაკლებია M_1 ტვირთის აჩქარებაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი. ამისათვის აზრობრივ გავაჩეროთ მოძრავი სისტემა: მასზე მოქმედ ძალებს დავუმატოთ $\vec{\Phi}_1$ და $\vec{\Phi}_2$ ინერციის ძალები, რომლებსაც აქვთ M_1 და M_2 ტვირთების აჩქარებების საპირისპირო მიმართულება (იხ. ნახაზი).



მითითების თანახმად $a_1 = a, a_2 = a/4$. მაშინ

$$\Phi_1 = M_1 a_1 = M_1 a,$$
$$\Phi_2 = M_2 a_2 = \frac{M_2 a}{4}. \qquad (1)$$

განვიხილოთ M_1 მასის ტვირთის მოძრაობა. ბმისაგან განთავისუფლების პრინციპის თანახმად ბაგირის მოქმედება შევცვალოთ მისი $\vec{T}_1$ რეაქციით.

გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი და შევადგინოთ "წონასწორობის" განტოლება y ღერძზე გეგმილებში $M_1\vec{g}$ სიმძიმის ძალის, $\vec{\Phi}_1$ ინერციის ძალის და $\vec{T}_1$ ძალის მოქმედებით:

$$\sum F_{ky} = 0$$

ან

$$T_1 + \Phi_1 - M_1 g = 0.$$

აქედან

$$T_1 = M_1 g - \Phi_1.$$

ახლა განვიხილოთ M_1 მასის ტვირთის და მოძრავი ბლოკების "წონასწორობა:

$$\sum F_{ky} = 0$$

ან

$$4T_2 - \Phi_2 - M_2 g = 0.$$

აქედან

$$T_2 = \frac{\Phi_2 + M_2 g}{4}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $T_1 = T_2$, მივიღებთ

$$4(M_1 g - \Phi_1) = \Phi_2 + M_2 g.$$

ჩავსვათ (1) ფორმულა მიღებულ გამოსახულებაში და განვსაზღვროთ M_1 მასის ტვირთის აჩქარება:

$$4M_1 g - 4M_1 a = M_2 \frac{a}{4} + M_2 g.$$

$$a = 4g \frac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}.$$

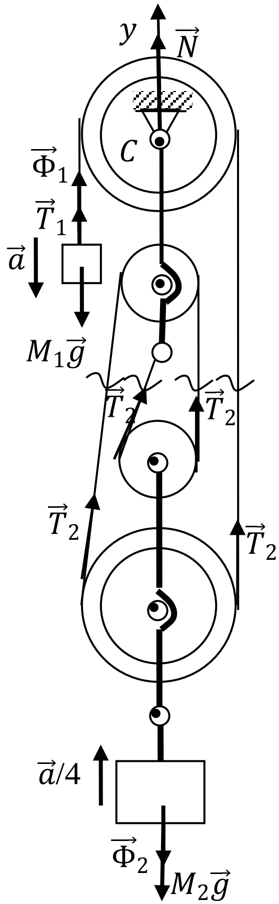
თანაბარი მოძრაობის დროს $a = 0$ მაშასადამე,

$$4M_1 - M_2 = 0$$

ან

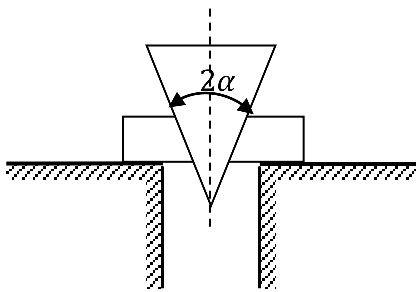
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{4}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $a = 4g \frac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}$; $\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{4}$.

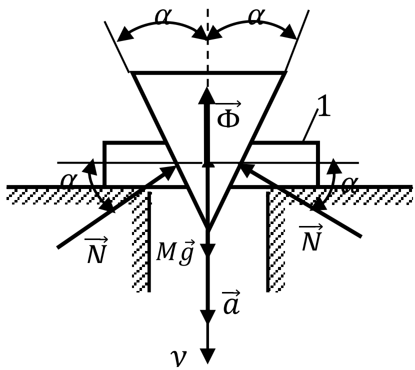


ამოცანა 41.15

M მასის გლუვი სოლი, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხე არის 2α, ასწევს ერთმანეთისაგან ორ M_1 მასის ფირფიტას, რომლებიც უძრავად მდებარეობენ გლუვ ჰორიზონტალურ მაგიდაზე. განსაზღვრეთ სოლისა და ფირფიტების მოძრაობის განტოლებები და სოლის წნევა თითოეულ ფირფიტაზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ სოლის მოძრაობა. სოლზე მოქმედი ფირფიტების $\vec{N}$ რეაქციები ერთმანეთის ტოლია (იხ. ნახ. 1), რადგან ფირფიტების მასები ტოლია. შედეგად სოლი იმოძრავებს ვერტიკალურად ქვევით რაიმე $\vec{a}$ აჩქარებით.



ნახ.1.

გავაჩეროთ აზრობრივ სოლის მოძრაობა, მოქმედ ძალებს დავუმატოთ $\vec{\Phi}$ ინერციის ძალა, რომელიც მიმართულია $\vec{a}$ აჩქარების საპირისპიროდ.

დალამბერის პრინციპის ანახმად სოლზე მოქმედი ძალთა სისტემა წონასწორობაშია. შევადგინოთ განტოლება:

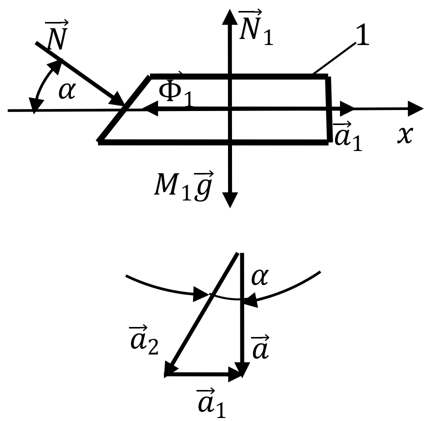
$$\sum F_{ky} = 0$$

ან

$$Mg - \Phi + 2Nsin\alpha = 0. \qquad (1)$$

ინერციის ძალა

$$\Phi = Ma. \qquad (2)$$



გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი მარჯვენა ფირფიტისათვის(ნახ.2), ჩავწეროთ განტოლება

$$\sum F_{ky} = 0$$

ან

$$Mg - \Phi + 2Nsin\alpha = 0. \qquad (3)$$

ინერციის ძალა ამ შემთხვევაში

$$\Phi_1 = M_1 a_1. \qquad (4)$$

ნახ.2 –დან მივიღებთ დამოკიდებულებას a და a_1 აჩქარებებს შორის:

$$a_1 = atg\alpha. \qquad (5)$$

(3) განტოლებიდან

$$N = \frac{M_1 atg\alpha}{cos\alpha}. \qquad (6)$$

ჩავსვათ (6) და (2) გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$Mg - Ma + 2M_1 atg^2\alpha = 0.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$tg^2\alpha = \frac{tg\alpha}{ctg\alpha},$$

განვსაზღვრავთ აჩქარებას

$$a = g\frac{M}{M + 2M_1 tg^2\alpha} = g\frac{Mctg\alpha}{Mctg\alpha + 2M_1 tg\alpha}. \qquad (7)$$

სოლის მოძრაობის კანონი:

$$s = \frac{at^2}{2},$$

სადაც a აჩქარება განისაზღვრება (7) ფორმულით. ფირფიტისათვის

$$s_1 = \frac{a_1 t^2,}{2}$$

სადაც $a_1 = atg\alpha$.

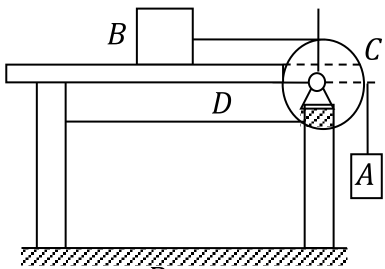
წნევის ძალა

$$N = \frac{M_1 a_1}{cos\alpha}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> სოლის მოძრაობის განტოლება $s = \frac{at^2}{2}$, სადაც $a = g\frac{Mctg\alpha}{Mctg\alpha + 2M_1 tg\alpha}$, ფირფიტის მოძრაობის განტოლება $s_1 = \frac{a_1 t^2,}{2}$, სადაც $a_1 = atg\alpha$. წნევის ძალა $N = \frac{M_1 a_1}{cos\alpha}$.

ამოცანა 41.16

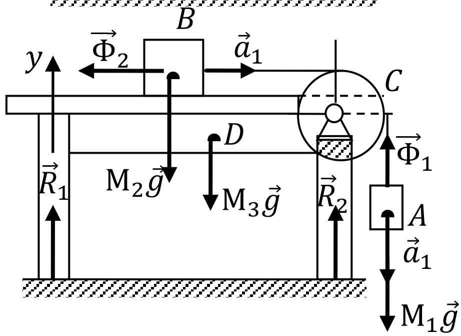
M_1 მასის A ტვირთს ქვევით დაშვებისას უჭიმარი და უწონი თოკის საშუალებით, რომელიც გადაკიდებულია უძრავ C ბლოკზე, მოძრაობაში მოჰყავს M_2 მასის B ტვირთი. იპოვეთ D მაგიდის წნევა იატაკზე, თუ მისი მასა უდრის M_3.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯერ განვიხილოთ მექანიკური სისტემა, რომელიც შედგება D მაგიდის, C ბლოკის და A და B ტვირთებისაგან. აზრობრივ გავაჩეროთ ტვირთების მოძრაობა და სისტემაზე მოქმედ ძალებს დავამატოთ ინერციის ძალები (ნახ.1).:

$$\overrightarrow{\Phi}_1 = -M_1\vec{a}_1,\ \overrightarrow{\Phi}_2 = -M_2\vec{a}_2$$

ლადგან სიდიდით $a_1 = a_2 = a$, ამიტომ



ნახ.1

$$\Phi_1 = M_1 a,\ \Phi_2 = M_2 a. \qquad (1)$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად მიღებული მექანიკური სისტემა არის გაწონსწორებული. კერძოდ, ყველა ძალების გეგმილების ჯამი ვერტიკალურ y ღერძზე უდრის ნულს, მაშინ

$$R - M_1 g - M_2 g - M_3 g + \Phi_1 = 0, \qquad (2)$$

სადაც R −იატაკის მხრიდან მაგიდის ფეხებზე ჯამური რეაქციაა.

(2) განტოლებიდან (1) ტოლობების გათვალისწინებით ვიპოვით

$$R = (M_1 + M_2 + M_3)g - \mathrm{M}_1 a. \qquad (3)$$

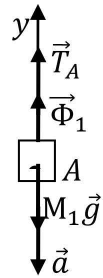
შემდეგ განვიხილოთ A ტვირთის მოძრაობა (ნახ.2). ბმისაგან განთავისუფლების პრინციპის თანახმად ძაფის მოქმედება შევცვალოთ მისი $\vec{T}_A$ დაჭიმულობით.

გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი და შევადგინოთ ტვირთის "წონასწორობის" განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{ky} = 0$$

ან

$$T_A + \Phi_1 - M_1 g = 0. \qquad (4)$$



ნახ.2

(4) განტოლებიდან

$$T_A = M_1 g - \Phi_1 = M_1 g - \mathrm{M}_1 a. \qquad (5)$$

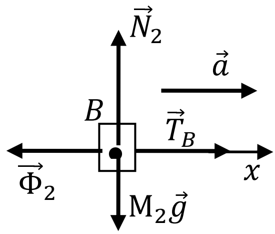
განვიხილოთ B ტვირთის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებს $\mathrm{M}_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალა, ბმის N_2 რეაქცია, ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_2$ და თოკის დაჭიმულობა $\vec{T}_B$ (ნახ.3).

გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი და შევადგინოთ B ტვირთის "წონასწორობის" განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0$$

ან

$$T_B - \Phi_2 = 0.$$



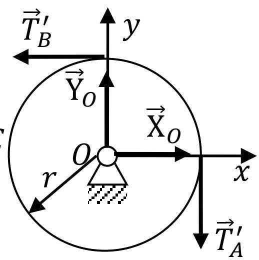
ნახ.3

აქედან

$$T_B = \Phi_2 = \mathrm{M}_2 a. \qquad (6)$$

განვიხილოთ C ბლოკის წონასწორობა, რომელზეც მოქმედებს დაჭიმულობის ძალები $\vec{T}'_A$ და $\vec{T}'_B$, აგრეთვე, საყრდენების რეაქციები $\vec{\mathrm{X}}_0$ და $\vec{\mathrm{Y}}_0$ (ნახ.4).

შევადგინოთ მომენტების განტოლება O წერტილის მიმართ:



ნა.ხ.4

$$\sum M_0 = 0$$

ან

$$-T'_A r + T'_B r = 0.$$

აქედან

$$T'_A = T'_B$$

ან

$$T_A = T_B. \qquad (7)$$

(5) და (6) გამოსახულებები ჩავსვათ (7) ტოლობაში:

$$M_1 g - M_1 a = M_2 a,$$

აქედან

$$a = \frac{M_1}{M_1 + M_2} g.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (3) ფორმულაში, მივიღებთ:

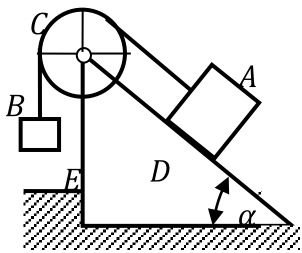
$$R = \left(M_1 + M_2 + M_3 - \frac{M_1^2}{M_1 + M_2}\right) g.$$

მაგიდის წნევა იატაკზე უდრის ჯამურ R რეაქციას, ე.ი. $R = N$.

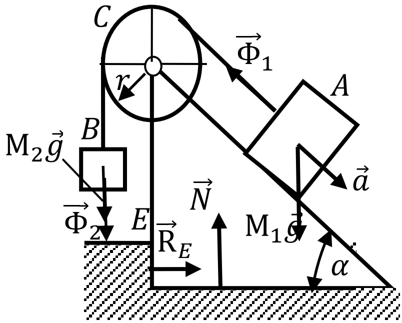
პ ა ს უ ხ ი: $N = \left(M_1 + M_2 + M_3 - \frac{M_1^2}{M_1+M_2}\right) g.$

ამოცანა 41.17

M_1 მასის A ტვირთი ეშვება ძირს D დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც ჰორიზონტთან ქმნის α კუთხეს და მოძრაობაში მოჰყავს M_2 მასის B ტვირთი უჭიმარი და უწონი ძაფის საშუალებით, რომელიც გადაკიდებულია უძრავ C ბლოკზე. იპოვეთ იატაკის E შვერილზე დახრილ D სიბრტყის წნევის ჰორიზონტალური მდგენელი.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახ.1 –ზე ვაჩვენოთ ინერციის ძალები $\vec{\Phi}_1$ და $\vec{\Phi}_2$, რომლებიც უნდა მოვდოთ მოძრავ A და B სხეულებზე:



$$\Phi_1 = M_1 a,\ \Phi_2 = M_2 a. \quad (1)$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის “წონასწორობის” პირობა აქტიური ძალების, ბმების რეაქციების და ინერციის ძალის x ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0$$

ან

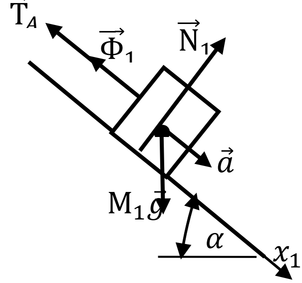
ნახ.1

$$R_E - \Phi_1 cos\alpha = 0.$$

საიდანაც (1) ტოლობების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$R_E = M_1 a cos\alpha. \quad (2)$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად განვიხილოთ A ტვირთის წონასწორობა მასზე მოქმედი $M_1\vec{g}$ სიმძიმის ძალის, $\vec{T}_A$ ძაფის დაჭიმულობის და $\vec{\Phi}_1$ ინერციის ძალის მოქმედებით და დავწეროთ “წონასწორობის” განტოლება x_1 ღერძზე გეგმილებში (ნახ.2):



$$\sum F_{kx_1} = M_1 g sin\alpha - T_A - \Phi_1 = 0. \quad (3)$$

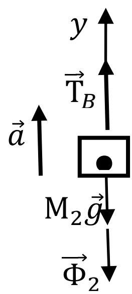
აქედან

$$T_A = M_1 g sin\alpha - \Phi_1 = M_1 g sin\alpha - M_1 a. \quad (4)$$

შემდეგ განვიხილოთ B ტვირთის წონასწორობა

ნახ.2

მასზე მოქმედი $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალის, $\vec{T}_B$ ძაფის დაჭიმულობის და $\vec{\Phi}_2$ ინერციის ძალის მოქმედებით. შევადგინოთ “წონასწორობის” განტოლება y ღერძზე გეგმილებში (ნახ.3):



$$\sum F_{ky} = T_B - M_2 g - \Phi_2 = 0 \quad (5)$$

აქედან

$$T_B = M_2 g + \Phi_2 = M_2 g + M_2 a. \quad (6)$$

განვიხილოთ C ბლოკის წონასწორობა, რომელზეც მოქმედებს დაჭიმულობის ძალები $\vec{T}'_A$ და $\vec{T}'_B$ და საყრდენების რეაქციები $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$(ნახ.4).

ნახ.3

შევადგინოთ მომენტების განტოლება O წერტილის მიმართ:

$$\sum M_0(\vec{F}_k) = 0$$

ან

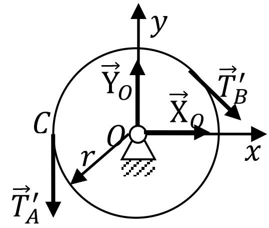
$$T_B'r - T_A'r = 0.$$

აქედან

$$T_A' = T_B'$$

ან

$$T_A = T_B. \qquad (7)$$



(4) და (6) გამოსახულებები ჩავსვათ (7) ტოლობაში: ნა.ხ.4

$$M_1 g sin\alpha - M_1 a = M_2 g + M_2 a,$$

აქედან

$$a = \frac{M_1 sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2} g.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (2) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$R_E = M_1 g \frac{M_1 sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2} cos\alpha.$$

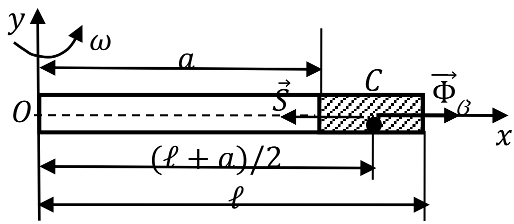
ეს კი უდრის სოლის წნევას შვერილზე, ე.ი. $N = R_E$

პ ა ს უ ხ ი: $N = M_1 g \frac{M_1 sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2} cos\alpha.$

ამოცანა 41.18

M მასის და ℓ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით უძრავი ვერტიკალური ღერძის გარშემო, რომელიც ღეროს მართობია და გადის მის ბოლოზე. განსაზღვრეთ გამჭიმავი ძალა ღეროს იმ განივკვეთში, რომელიც ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია a მანძილით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ღეროდან ბრუნვის ღერძიდან a მანძილზე გამოვყოთ დაშტრიხული ნაწილი (იხ. ნახაზი). გამოყოფილ ნაწილში წარმოიქმნება $\vec{S}$ ძალა, რომელიც წარმოადგენს გამოყოფილი ნაწილის რთიერთქმედების ძალას დანარჩენ ნაწილთან.



დალამბერის პრინციპის თანახმად გამოყოფილ ნაწილზე მოვდოთ ცენტრიდანული ინერციის ძალა და დავწეროთ "წონასწორობის" განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0, \;\; \Phi_{\text{ც}} - S = 0, \tag{1}$$

ცენტრიდანული ინერციის ძალა

$$\Phi_{\text{ც}} = M_1 a_{\text{ც}}. \tag{2}$$

განვსაზღვროთ ღეროს გამოყოფილი ნაწილის მასა

$$M_1 = \frac{\ell - a}{\ell} M$$

და ღეროს ან ნაწილის მასათა C ცენტრის ცენტრისკენული აჩქარება:

$$a_{\text{ც}} = \frac{\ell + a}{2} \omega^2.$$

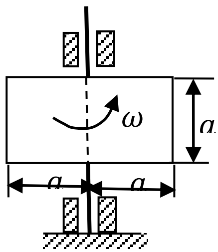
ნაპოვნი მნიშვნელობები შევიტანოთ (2) გამოსახულებაში და (1) განტოლებიდან განვსაზღვროთ S:

$$S = \frac{M(\ell^2 - a^2)}{2\ell} \omega^2.$$

S ძალა რიცხობრივად უდრის გამჭიმავ F ძალას, ე.ი. $F = S$.

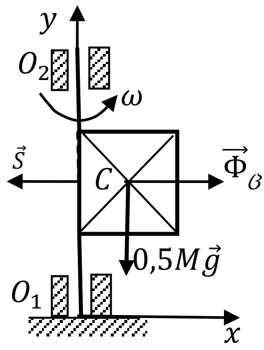
პ ა ს უ ხ ი: $\quad F = \frac{M(\ell^2 - a^2)}{2\ell} \omega^2.$

ამოცანა 41.19



M მასის ერთგვაროვანი მართკუთხა ფირფიტა თანაბრად ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ ბრუნვის ღერძზე გამავალ კვეთში მოქმედი ფირფიტის გამხლეჩი ძალა, თუ ის მიმართულია ბრუნავის ღერძის მართობულად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აზრობრივ გავჭრათ ფირფიტა ბრუნვის ღერძის გასწვრივ და განვიხილოთ მარჯვენა ფირფიტა (იხ. ნახაზი). მოვდოთ $\vec{S}$ ძალა, რომელიც წარმოადგენს განსახილველი ნაწილის ურთიერთქმედების ძალას უკუგდებულ ნაწილთან.



ნახევარფირფიტის ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას წარმოიქმნება ცენტრიდანული ინერციის ძალა:

$$\Phi_{\text{ც}} = \frac{M}{2} a_{C_{\text{ც}}} = \frac{M}{2}\frac{a}{2}\omega^2 = \frac{Ma}{4}\omega^2.$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად დავწეროთ “წონასწორობის” განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \ \Phi_{ც} - S = 0,$$

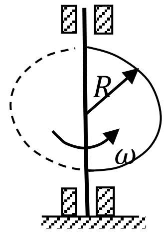
აქედან

$$S = \Phi_{ც} = \frac{Ma}{4}\omega^2.$$

ფირფიტის გამჭიმავი ძალა უდრის S ძალას.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\frac{Ma}{4}\omega^2$.

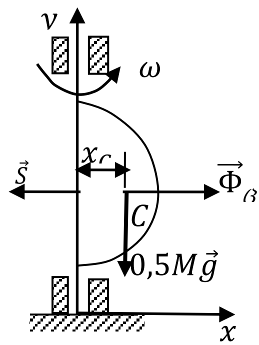
ამოცანა 41.20



M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით თავისი ვერტიკალური ღერძის გარშემო.განსაზღვრეთ დიამეტრის გასწვრივ მოქმედი დისკოს გამხლეჩი ძალა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

აზრობრივ გავჭრათ დისკო დიამეტრის გასწვრივ და განვიხილოთ მარჯვენა ნახევარდისკო (იხ. ნახაზი). მოვდოთ $\vec{S}$ ძალა, რომელიც წარმოადგენს განსახილველი ნაწილის ურთიერთქმედების ძალას უკუგდებულ ნაწილთან. ნახევარდისკოს მასათა C ცენტრზე მოვდოთ ცენტრიდანული ინერციის ძალა:



$$\Phi_{ც} = \frac{M}{2}a_{C_ც} = \frac{M}{2}x_C\omega^2,$$

სადაც $x_C = \frac{4R}{3\pi}$.

მაშინ

$$\Phi_{ც} = \frac{M}{2}\frac{4R}{3\pi}\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{MR}{\pi}\omega^2.$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად დავწეროთ “წონასწორობის” განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \ \Phi_{ც} - S = 0,$$

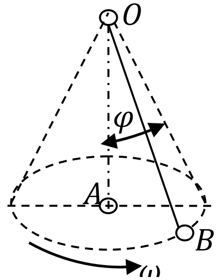
აქედან

$$S = \Phi_{ც} = \frac{2MR}{3\pi}\omega^2.$$

ფირფიტის გამჭიმავი ძალა უდრის S ძალას.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\frac{2MR}{3\pi}\omega^2$.

ამოცანა 41.21



M მასის და ℓ სიგრძის წვრილი, წრფივი, ერთგვაროვანი ღერო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით უძრავი O წერტილის გარშემო (სფერული სახსარი) და აღწერს კონუსურ ზედაპირს OA ღერძითა და C წვეროთი. განსაზღვრეთ ღეროს გადახრა ვერტიკალური მდებარეობიდან და N წნევა O სახსარზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოძრავი ათვლის სისტემა- x და y ღერძები-ავირჩიოთ ისე, რომ ღერო მდებარეობდეს Oxy სიბრტყეში. ვაჩვენოთ ნახაზზე ღეროზე მოქმედი გარე ძალები: სიმძიმის ძალა და სახსრების რეაქციის ძალები.

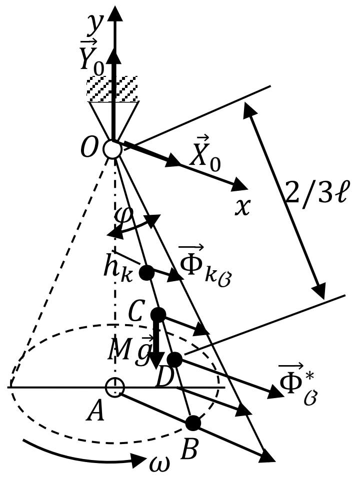
დალამბერის პრინციპის თანახმად ამ ძალებს დავამატოთ ღეროს ნერციის ძალა. რადგან ღერო ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით, ამიტომ ღეროს თითოეული k −ური ელემენტის ინერციის ძალა

$$\Phi_{k_{\mathcal{C}}} = \Delta M a_{k_{\mathcal{C}}},$$

სადაც $a_{k_{\mathcal{C}}} = h_k \omega^2$ (h_k-k −ური ელემენტიდან ბრუნვის ღერძამდე მანძილია).

მაშინ

$$\Phi_{k_{\mathcal{C}}} = \Delta M h_k \omega^2.$$



ინერციის ყველა ძალა $\Phi_{k_{\mathcal{C}}}$ პროპორციულია h_k −სი, პარალელური ძალების ეპიურა ადგენს სამკუთხედს და ისინი შეგვიძლია შევცვალოთ ტოლქმედით, რომელიც ინერციის ძალების ნაკრები მომენტის ტოლია და მისი მოქმედების ფუძე გაივლის ამ სამკუთხედის მასათა ცენტრზე $\frac{2}{3}\ell$ მანძილზე, ე.ი. D წერტილზე.

ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი

$$\Phi^*_{\mathcal{C}} = M a_{C_{\mathcal{C}}},$$

სადაც $a_{C_{\mathcal{C}}}$ −მასათა C ცენტრის ცენტრისკენული აჩქარებაა:

$$a_{C_{\mathcal{C}}} = \frac{1}{2}\omega^2 sin\varphi.$$

მაშინ

$$\Phi^*_{\mathcal{C}} = \frac{M\ell\omega^2}{2} sin\varphi.$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად ღეროზე მოდებული გარე ძალები და ინერციის ძალები ქმნიან გაწონასწორებულ ძალთა სისტემას.

მიღებული ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის შევადგინოთ “წონასწორობის” სამი განტოლება:

$$\sum M_0(\vec{F}_k) = \Phi_{\mathcal{B}}^* \frac{2}{3}\ell cos\varphi - Mg\frac{\ell}{2}sin\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{kx} = X_0 + \Phi_{\mathcal{B}}^* = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{ky} = Y_0 - Mg = 0. \quad (3)$$

ჩავსვათ $\Phi_{\mathcal{B}}^*$ −ს მნიშვნელობა (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{M\ell\omega^2}{2}sin\varphi \cdot \frac{2}{3}\ell cos\varphi - Mg\frac{\ell}{2}sin\varphi = 0$$

ან

$$\frac{\ell\omega^2}{3}cos\varphi - \frac{g}{2} = 0.$$

აქედან

$$cos\varphi = \frac{3g}{2\ell\omega^2},$$

$$\varphi = arccos\frac{3g}{2\ell\omega^2}.$$

(2) და (3) განტოლებებიდან განვსაზღვროთ რეაქციის ძალები

$$X_0 = -\Phi_{\mathcal{B}}^* = -\frac{M\ell\omega^2}{2}sin\varphi,$$

$$Y_0 = Mg.$$

წნევა სახსარზე

$$N = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}$$

ან

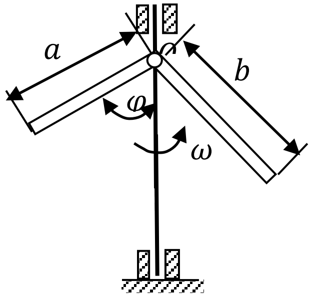
$$N = \sqrt{M^2g^2 + \frac{M^2\,\ell^2\omega^4\,sin^2\varphi}{4}} = \sqrt{M^2g^2 + \frac{M^2\,\ell^2\omega^4}{4}(1 - cos^2\varphi)}$$

$$= \sqrt{M^2g^2 + \frac{M^2\,\ell^2\omega^4}{4}\left(1 - \frac{9g^2}{4\,\ell^2\omega^4}\right)} =$$

$$= \frac{M\ell\omega^2}{2}\sqrt{1 + \frac{4g^2}{\ell^2\omega^4} - \frac{9g^2}{4\,\ell^2\omega^4}} = \frac{M\ell\omega^2}{2}\sqrt{1 + \frac{7g^2}{4\ell^2\omega^4}}.$$

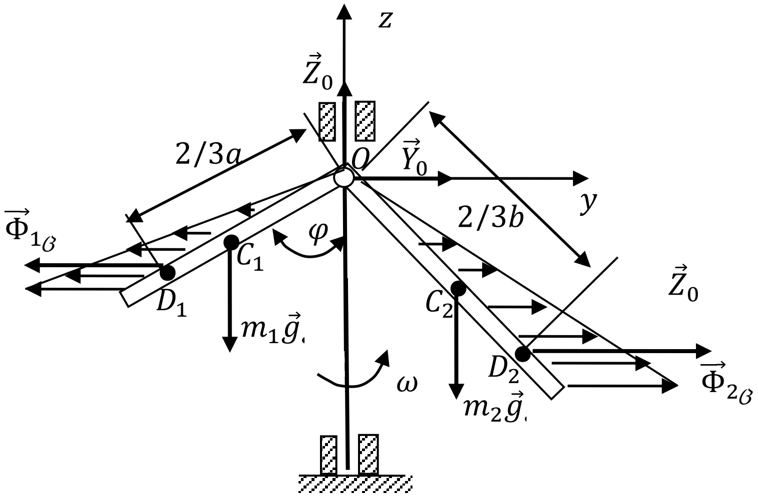
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\varphi = arccos\frac{3g}{2\ell\omega^2}$; $\quad N = \frac{1}{2}M\ell\omega^2\sqrt{1 + \frac{7g^2}{4\ell^2\omega^4}}$.

ამოცანა 41.22



ცენტრიდანულ ტახომეტრში ორი წვრილი, წრფივი a და b სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო ხისტად შეერთებულია ერთმანეთთან მართი კუთხით, რომლის O წვერო სახსრით შეერთებულია ვერტიკალურ ლილვთან. ლილვი ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ დამოკიდებულება ω –სა და იმ φ კუთხეს შორის, რომელსაც a სიგრძის ღეროადგენს ვერტიკალთან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ საკოორდინატო ღერძები Ozy მბრუნავ ღეროებთან ერთად. ბმისაგან განთავისუფლების პრინციპის თანახმად



ვაჩვენოთ ნახაზზე O სახსრის რეაქციის ძალები $\vec{Y}_0$. და $\vec{Z}_0$.

დალამბერის პრინციპის თანახმად ღეროებზე მოვდოთა ინერციის ძალები (იხ. 41..21 ამოცანის ამოხსნა):

$$\Phi_{1ც}^{*} = m_1 a_{C1ც}, \quad \Phi_{2ც}^{*} = m_2 a_{C2ც},$$

სადაც $m_1, m_2 -$ ღეროების მასებია; $a_{C1ც}, a_{C2ც}, -$ღეროების მასათა ცენტრების ცენტრისკენული აჩქარებებია.

თუ ერთეული სიგრძის ღეროს სიმკვრივეს ავღნიშნავთ $\rho -$თი, მაშინ

$$m_1 = \rho a, m_2 = \rho b. \tag{1}$$

ღეროების მასათა C ცენტრის ცენტრისკენული აჩქარებები შესაბამისად ტოლია

$$a_{C1ც} = \frac{a}{2}\omega^2 sin\varphi, \qquad a_{C2ც} = \frac{b}{2}\omega^2 cos\varphi.$$

მაშინ

$$\Phi_{1\mathcal{B}}^{*}=\rho\frac{a^2\omega^2}{2}sin\varphi,\ \Phi_{2\mathcal{B}}^{*}=\rho\frac{b^2\omega^2}{2}cos\varphi \qquad (2)$$

ინერციის ძალების ტოქმედის მოდების წერტილებია D_1 და D_2 შესაბამისად.

დალამბერის პრინციპის თანახმად ღეროზე მოდებული გარე ძალები და ინერციის ძალები ქმნიან გაწონასწორებულ ძალთა სისტემას. მიღებული ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის შევადგინოთ “მომენტების განტოლება O ცენტრის მიმართ:

$$\sum M_0(\vec{F}_k)=\frac{a}{2}m_1gsin\varphi-\frac{b}{2}m_2gcos\varphi-\frac{2}{3}\Phi_{1\mathcal{B}}^{*}cos\varphi+$$
$$+\frac{2}{3}b\Phi_{2\mathcal{B}}^{*}sin\varphi=0.$$

მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ (1) და (2) გამოსახულებები:

$$\frac{a^2}{2}\rho gsin\varphi-\frac{b^2}{2}\rho gcos\varphi-\rho\frac{a^2\omega^2}{2}sin\varphi\cdot\frac{2}{3}acos\varphi+$$
$$\rho\frac{b^2\omega^2}{2}cos\varphi\cdot\frac{2}{3}bsin\varphi=0.$$

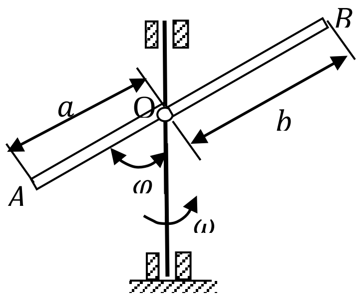
აქედან ვიპოვით დამოკიდებულებას ω –სა და იმ φ კუთხეს შორის:

$$\omega^2=3g\frac{b^2cos\varphi-a^2sin\varphi}{(b^3-a^3)sin2\varphi}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\omega^2=3g\frac{b^2cos\varphi-a^2sin\varphi}{(b^3-a^3)sin2\varphi}$.

ამოცანა 41.23

წვრილი, წრფივი, ერთგვაროვანი AB ღერო სახსროვნად შეერთებულია O წერტილში ვერტიკალურ ლილვთან. ლილვი ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ ვერტიკალიდან ღეროს გადახრის φ კუთხე, თუ $OA=a$ და $OB=b$.

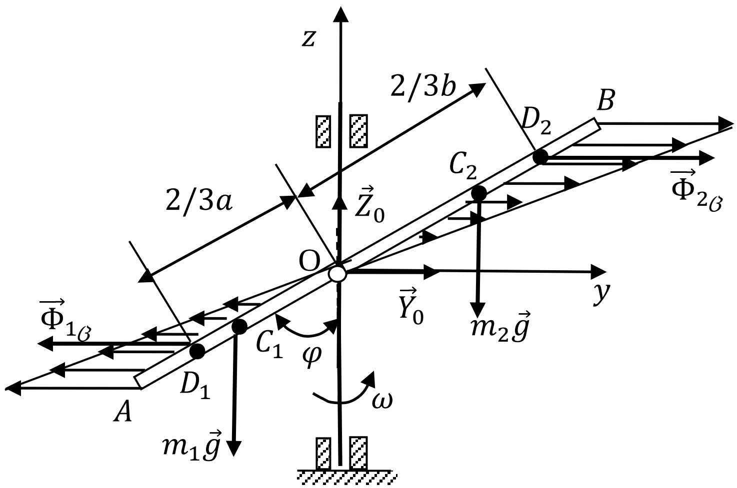


ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ საკოორდინატო ღერძები Ozy მბრუნავ ღეროებთან ერთად. ბმისაგან განთავისუფლების პრინციპის თანახმად ვაჩვენოთ ნახაზზე O სახსრის რეაქციის ძალები $\vec{Y}_0$ და $\vec{Z}_0$. (იხ. ნახაზი).

დალამბერის პრინციპის თანახმად ღეროებზე მოვდოთა ინერციის ძალები (იხ. 41.21 ამოცანის ამოხსნა):

$$\Phi^*_{1ც} = m_1 a_{C1ც}, \quad \Phi^*_{2ც} = m_2 a_{C2ც},$$

სადაც $m_1, m_2 -$ ღეროს თითოეული ნაწილის მასებია; $a_{C1ც}, a_{C2ც}$ – OA და OB ღეროების მასათა ცენტრების ცენტრისკენული აჩქარებებია.



თუ ერთეული სიგრძის ღეროს სიმკვრივეს ავღნიშნავთ ρ –თი, მაშინ

$$m_1 = \rho a, m_2 = \rho b. \qquad (1)$$

OA და OB ღეროების მასათა ცენტრის ცენტრისკენული აჩქარებები შესაბამისად ტოლია

$$a_{C1ც} = \frac{a}{2}\omega^2 sin\varphi, \qquad a_{C2ც} = \frac{b}{2}\omega^2 cos\varphi.$$

მაშინ

$$\Phi^*_{1ც} = \rho\frac{a^2\omega^2}{2} sin\varphi, \ \Phi^*_{2ც} = \rho\frac{b^2\omega^2}{2} cos\varphi. \qquad (2)$$

ინერციის ძალების ტოქმედის მოდების წერტილებია D_1 და D_2 შესაბამისად.

დალამბერის პრინციპის თანახმად ღეროზე მოდებული გარე ძალები და ინერციის ძალები ქმნიან გაწონასწორებულ ძალთა სისტემას. მიღებული ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის შევადგინოთ "მომენტების განტოლება O ცენტრის მიმართ:

$$\sum M_0(\vec{F}_k) = \frac{a}{2} m_1 g sin\varphi - \frac{b}{2} m_2 g cos\varphi - \frac{2}{3}\Phi^*_{1ც} cos\varphi +$$
$$+\frac{2}{3} b\Phi^*_{2ც} sin\varphi = 0.$$

მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ (1) და (2) გამოსახულებები:

$$\frac{a^2}{2}\rho g sin\varphi - \frac{b^2}{2}\rho g cos\varphi - \rho\frac{a^2\omega^2}{2}sin\varphi\cdot\frac{2}{3}acos\varphi -$$
$$-\rho\frac{b^2\omega^2}{2}sin\varphi\cdot\frac{2}{3}bcos\varphi = 0.$$
$$\left[\frac{1}{2}g(a^2-b^2)-\frac{\omega^2}{3}(a^3-b^3)cos\varphi\right]sin\varphi = 0,$$

ან

$$\frac{1}{2}g(a^2-b^2)-\frac{\omega^2}{3}(a^3-b^3)cos\varphi = 0.$$

აქედან ვიპოვით ვერტიკალიდან ღეროს გადახრის φ კუთხის:

$$cos\varphi = \frac{3g(a^2-b^2)}{2\omega^2(b^3+a^3)} = \frac{3g(a-b)}{2\omega^2(a^2-ab+b^2)}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $cos\varphi = \frac{3g(a-b)}{2\omega^2(a^2-ab+b^2)}.$

§42. ბრუნავი მყარი სხეულის წნევა ბრუნვის ღერძზე

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად გამოიყენება დალამბერის პრინციპი.

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავ სხეულზე, გარდა აქტიური ძალებისა და საყრდენების რეაქციებისა, მოდებენ ამ სხეულის ინერციის ძალებს და ღებულობენ გაწონასწორებულ ძალთა სისტემას, რომლისთვისაც ადგენენ სტატიკის აუცილებელ განტოლებებს. საიდანაც პოულობენ სრულ რეაქციის ძალებს. მაგრამ რიგ ამოცანებში მოითხოვება განისაზღვროს მხოლოდ დინამიკური რეაქციები ან წნევა ღერძზე, რომელიც გამოწვეულია გაუწონასწორებელი მასის ბრუნვით ან იმით, რომ ბრუნვის ღერძი არ არის ინერციის მთავარი ღერძი. ამიტომ ღერძზე დინამიკური წნევების განსაზღვრისას შესაძლებელია ამოცანის ამოხსნის შემდეგი ხერხები.

1. ამოცანის პირობა საშუალებას იძლევა განისაზღვროს მბრუნავი მასების ინერციის ძალები და მათი მოდების წერტილები ცნობილი ფორმულებით. მაშინ სხეულზე ინერციის ძალებს და დინამიკურ რეაქციებს და ადგენენ სტატიკის აუცილებელ განტოლებებს. ამ ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება ამოცანები რომლებშიც ვერტიკალურ ან ჰორიზონტალურ მბრუნავ ლილვზე უწონი ღეროების საშუალებით ამაგრებენ წერტილოვან მასებს ან ერთგვაროვან ღეროებს.

ეს ამოცანის ამოხსნის ყველაზე მარტივი გზაა, რადგან მოითხოვება ინერციის ძალების განსაზღვრა და წონასწორობის განტოლებების შედგენა. ამასთან, უნდა გვახსოვდეს, რომ ღეროს ინერციის ძალა

$$\overrightarrow{\Phi} = -M\vec{a}_C$$

მოდებულია არა მასათა ცენტრში, არამედ მბრუნავი ლილვის ღერძიდან $\frac{2}{3}\ell$ მანძილზე.(ℓ- ღეროს სიგრძეა).

2. ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას გამოიყენება ვერტიკალური ან ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წონასწორობის განტოლებები, რომელზეც მოქმედებს ინერციის ძალები. ასე მაგალითად, თუ სხეული ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო, რომლის ქვედა საყრდენი A საქუსლეა, ხოლო ზედა- B სახსარი, მაშინ $Axyz$ საკოორდინატო ღერძებში, სადაც Az ღერძი მიმართულია ლილვის ღერძის გასწვრივ, ხოლო კოორდინატთა სათავე A წერტილშია, ეს განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \sum X_k = 0,\ X_A^{\wp} + X_B^{\wp} + M\omega^2 x_C + M\varepsilon y_C = 0, \\ \sum Y_k = 0,\ Y_A^{\wp} + Y_B^{\wp} + M\omega^2 y_C - M\varepsilon x_C = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ -Y_B^{\wp} H - \omega^2 J_{yz} + \varepsilon J_{zx} = 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ X_B^{\wp} H + \omega^2 J_{zx} + \varepsilon J_{yz} = 0, \end{cases} \tag{42.1}$$

სადაც $H-$ საყრდენებს შორის მანძილია (მანძილი A და B წერტილებს შორის)

(42.16) განტოლებების ამოხსნის შედეგად, მივიღებთ:

$$\begin{cases} X_A^{\wp} = \frac{1}{H}\left(\omega^2 J_{zx} + \varepsilon J_{yz}\right) - M\omega^2 x_C - M\varepsilon y_C, \\ X_B^{\wp} = -\frac{1}{H}\left(\omega^2 J_{zx} + \varepsilon J_{yz}\right), \\ Y_A^{\wp} = -\frac{1}{H}\left(\varepsilon J_{zx} - \omega^2 J_{yz}\right) - M\omega^2 y_C + M\varepsilon x_C, \\ Y_B^{\wp} = \frac{1}{H}\left(\varepsilon J_{zx} - \omega^2 J_{yz}\right). \end{cases} \tag{42.2}$$

(42.2) განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ დინამიკური წნევები ნულის ტოლია, თუ $x_C = y_C = 0, J_{yz} \neq 0, J_{zx} \neq 0,$ ე.ი. როდესაც ბრუნვის ღერძი გადის სხეულის მასათა ცენტრში, მაგრამ არ წარმოადგენს ინერციის მთავარ ღერძს, მაშინ რეაქციები

$$\begin{cases} \begin{cases} X_A^{\wp} = \frac{1}{H}\left(\omega^2 J_{zx} + \varepsilon J_{yz}\right), \\ X_B^{\wp} = -\frac{1}{H}\left(\omega^2 J_{zx} + \varepsilon J_{yz}\right) \end{cases} \Rightarrow X_A^{\wp} = -X_B^{\wp}, \\ \begin{cases} Y_B^{\wp} = \frac{1}{H}\left(\varepsilon J_{zx} - \omega^2 J_{yz}\right), \\ Y_A^{\wp} = -\frac{1}{H}\left(\varepsilon J_{zx} - \omega^2 J_{yz}\right) \end{cases} \Rightarrow Y_A^{\wp} = -Y_B^{\wp}. \end{cases} \tag{42.3}$$

თანაბარი ბრუნვის დროს $\varepsilon = 0,$ მაშინ

$$\begin{cases} X_A^{\omega} = \frac{1}{H}\omega^2 J_{zx},\ X_B^{\omega} = -\frac{1}{H}\omega^2 J_{zx}, \\ Y_A^{\omega} = \frac{1}{H}\omega^2 J_{yz},\ Y_B^{\omega} = -\frac{1}{H}\omega^2 J_{yz}. \end{cases} \tag{42.4}$$

თუ კოორდინატთა სათავე O არჩეულია AB მონაკვეთის შუაში, ე.ი. $OA = OB = h$, მაშინ (42.1)-(42.4) ფორმულებში $H-$ის ნაცვლად უნდა დავწეროთ $2h$.

3. ეს ხერხი გულისხმობს ინერციის ტენზორის გამოყენებას. ინერიცული ძალების ნაკრები მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{M}_O^{ob} = -\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = -J\vec{\varepsilon} - \vec{\omega} \times (J\vec{\omega}), \tag{42.5}$$

სადაც $J-$ ინერციის ტენზორია:

$$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix}. \tag{42.6}$$

თუ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემაში ღერძები წარმოადგენენ მთავარ ცენტრალურ ღერძებს, ამიტომ

$$J = \begin{vmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{vmatrix}. \tag{42.7}$$

თუ ლილვი ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით, მაშინ ინერიცული ძალების ნაკრები მომენტი

$$\vec{M}_O^{ob} = -\vec{\omega} \times (J\vec{\omega}), \tag{42.8}$$

დინამიკურ წნევებს $X_A^{\omega}, Y_A^{\omega}, X_B^{\omega}$ და Y_B^{ω} ვიპოვით, თუ (42.5) ან (42.8) ვექტორულ გამოსახულებებს დავაგეგმილებთ საკოორდინატო ღერძებზე და მიღებულ გამოსახულებებს ჩავსვამთ ლილვის წონასწორობის განტოლებებში, რომლებიც ჩაწერილია Ox და Oy ღერძების მიმართ მომენტებში.

ამ ხერხის მთავარი ღირსება არის მისი უნივერსალურობა. მას აქვს ცხადი უპირატესობა მაშინ, როცა ცნობილია სხეულის ინერციის მთავარი ღერძები და არ არის აუცილებელი ინერციის ცენტრიდანული მომენტების გამოთვლა.

მოცემული პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. ავირჩიოთ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა, თუ ის არ არის მითითებული ამოცანის პირობაში. ამასთან, z ღერძი მივმართოთ ბრუნვის ღერძის გასწვრივ, ხოლო x და y ღერძები მარჯვენა კოორდინატთა სისტემის შესაბამისად.;
2. გამოვსახოთ ნახაზზე აქტიური ძალები, საყრდნეების რეაქციის ძალები და მბრუნავი მასების ინერციის ძალებ;
3. შევადგინოთ (42.1) სახის წონასწორობის განტოლებები.

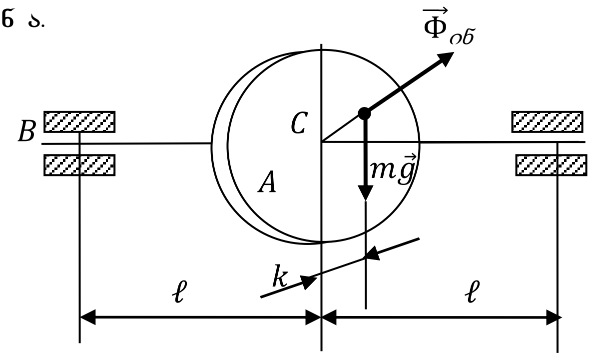
4. მიღებული განტოლებებიდან განვსაზღვროტ საყრდენების რეაქციები. წნევები საყრდენებზე სიდიდთ ტოლი იქნება რეაქციების, მაგრამ მიმართული იქნება მათ საპიროპოროდ;
5. მეორე ან მესამე ხერხით ამოცანის ამოხსნისას უნდა ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა, ვაჩვენოთ საყრდენების რეაქციები, ხოლო შემდეგ შევადგინოთ აუცილებელი განტოლებები.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 42.1

3000კგ მასის მქნევარა თვლის მასათა ცენტრი მდებარეობს ლილვის ჰორიზონტალური ღერძიდან 1მმ მანზილზე; საკისრების დაშორება თვლიდან ურთიერთტოლია. იპოვეთ წნევა საკისრებზე, როცა ლილვი ასრულებს 1200ბრ/წთ-ს. მქნევარას აქვს ბრუნვის ღერძის მართობული სიმეტრიის სიბრტყე. .

ა მ ო ხ ს ნ ა.



ნახ.1

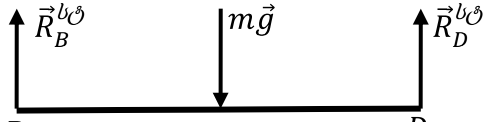
განვსაზღვროთ მქნევარას კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{1200\pi}{30} = 40\pi.$$

საკისრებზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და ცენტრიდანული ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_{ობ}$, რომელიც წარმოიქმნება k ექსცენტრისიტეტის შედეგად (ნახ.1). ამიტომ ბმების რეაქციებს აქვთ სტატიკური და დინამიკური მდგენელები:.

$$\vec{R}_B = \vec{R}_B^{სტ} + \vec{R}_B^{დ},$$
$$\vec{R}_D = \vec{R}_D^{სტ} + \vec{R}_D^{დ}.$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები (ნახ.2) და განვსაზღვროთ



ნახ.2

რეაქციების სტატიკური მდგენელები:.

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0, R_D^{სტ} \cdot 2\ell - mg\ell = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = 0, -R_B^{სტ} \cdot 2\ell + mg\ell = 0, \qquad (2)$$

სადაც $2\ell -$ $BD -$ს სიგრძეა.

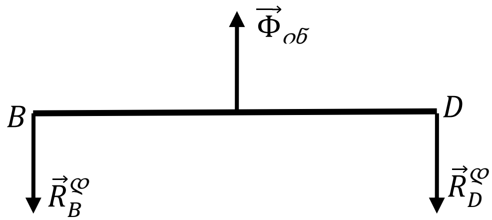
(1) განტოლებიდან ვიპოვით

$$R_D^{სტ} = \frac{mg}{2} = \frac{3000 \cdot 9{,}8}{2} = 14\ 700 \text{ (ნ)}$$

(2) განტოლებიდან

$$R_B^{სტ} = \frac{mg}{2} = \frac{3000 \cdot 9{,}8}{2} = 14\ 700 \text{ (ნ)}$$

განვსაზღვროთ რეაქციების დინამიკური მდგენელები (ნახ.3),



ნახ.3

რომლებიც პარალელურია ცენტრიდანული ინერციის ძალის. გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Phi_{ობ} = ma_C = m\omega^2 k = 3000 \cdot (40 \cdot 3{,}14)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 47\ 326 \text{ ნ).}$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = \Phi_{ობ} \cdot \ell - R_D^{დ} \cdot 2\ell = 0,$$

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = R_B^{დ} \cdot 2\ell - \Phi_{ობ} \cdot \ell = 0.$$

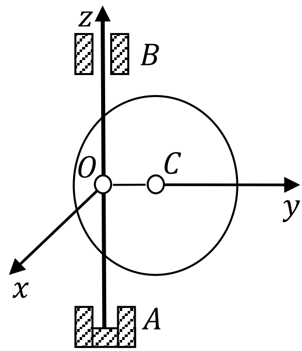
მიღებული განტოლებებიდან გვაქვს

$$R_B^{დ} = R_D^{დ} = \frac{\Phi_{ობ}}{2} = \frac{47\ 326}{2} = 23\ 663 (\text{ნ})$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> თითოეულ საკისარზე წნევა არის ორი ძალის ტოლქმედი, რომელთაგან ერთი უდრის 1500კგ-ს და მიმართულია ვერტიკალის გასწვ-რივ, ხოლო მეორე-2400კგ-ს და მიმართულია იმ წრფის პარალელურად, რომელიც თვლის გეომეტრიულ ცენტრს აერთებს მასათა ცენტრთან.

ამოცანა 41.2

M მასის ერთგვაროვანი წრიული დისკო თანაბრად ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით მის სიბრტყეში მდებარე და მასათა C ცენტრიდან $OC = a$ მანძილით დაშორებული ღერძის გარშემო. განსაზღვრეთ A საქუსლესა და B საკისარზე დინამიკური რეაქციები, თუ $OB = OA.\ x$ და y ღერძები უძრავად დაკავშირებულია დისკოსთან.



.ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე დინამიკური რეაქციები:

$$\vec{X}_A^{\wp}, \vec{Y}_A^{\wp}, \vec{X}_B^{\wp} \text{ და } \vec{Y}_B^{\wp}.$$

რადგან დისკო თანაბრად ბრუნავს, ე.ი. $\omega = const,$ დისკოს მასათა C ცენტრის აჩქარება

$$a_C = \omega^2 \cdot OC = \omega^2 \cdot a.$$

მაშინ ცენტრიდანული ინერციის ძალა მიმართულია y ღერძის გასწვრივ და სიდიდით უდრის

$$\Phi_{ობ} = M\omega^2 a.$$

დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0,\ X_A^{\wp} + X_B^{\wp} = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_k = 0,\ Y_A^{\wp} + Y_B^{\wp} + \Phi_{ობ} = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_{x_1}(\vec{F}_k) = 0,\ -\Phi_{ობ} \cdot OA - Y_B^{\wp} \cdot AB = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_{y_1}(\vec{F}_k) = 0,\ X_B^{\wp} \cdot AB = 0. \tag{4}$$

(4) და (1) განტოლებებიდან ვიპოვით

$$X_B^{\wp} = 0, \quad X_A^{\wp} = 0;$$

(3) და (2) განტოლებებიდან

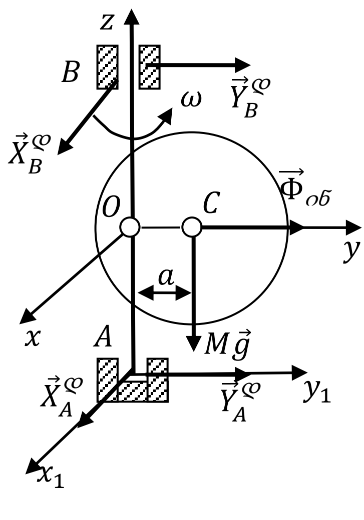
$$Y_B^{\wp} = -\frac{\Phi_{ობ}}{2} = -\frac{Ma\omega^2}{2},$$

$$Y_A^{\wp} = -\Phi_{ობ} - Y_B^{\wp} = -\frac{Ma\omega^2}{2}.$$

მაშინ

$$Y_A = -Y_A^{\wp} = \frac{Ma\omega^2}{2},$$

$$Y_B = -Y_B^{\wp} = \frac{Ma\omega^2}{2}.$$



<u>პასუხი:</u> $X_A = X_B = 0;$

$$Y_A = Y_B = \frac{Ma\omega^2}{2}.$$

ამოცანა 42.3

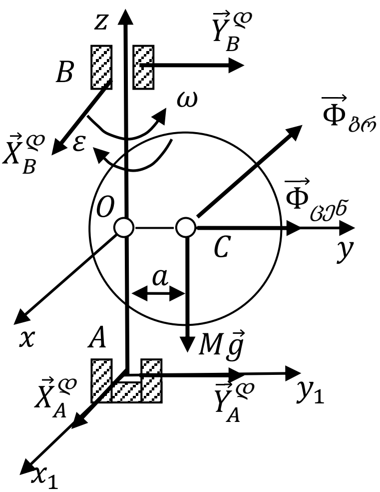
ამოხსენით წინა ამოცანა იმ დაშვებით, რომ წინაღობის ძალების არსებობისას დისკოს კუთხური სიჩქარე კლებულობს კანონით: $\omega = \omega_0 - \varepsilon_0 t$, სადაც ω_0 და ε_0 დადებითი მუდმივებია.

ამოხსნა. ვაჩვენოთ ნახაზზე დინამიკური რეაქციები: $\vec{X}_A^{დ}, \vec{Y}_A^{დ}, \vec{X}_B^{დ}$ და $\vec{Y}_B^{დ}$, აგრეთვე, ცენტრიდნაული $\vec{\Phi}_{ცენ}$ და ბრუნვითი $\vec{\Phi}_{ბრ}$ ინერციის ძალები:

$$\Phi_{ცენ} = Ma\omega^2, \ \ \Phi_{ბრ} = Ma\varepsilon.$$

რადგან $\varepsilon = \dot{\omega} = -\varepsilon_0$, ამიტომ

$$\Phi_{ბრ} = Ma\varepsilon_0.$$



$\vec{\Phi}_{ბრ}$ – მიმართულება ნაჩვენებია კუთხური აჩქარების ნიშნის გათვალისწინებით.

დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0, \ X_A^{დ} + X_B^{დ} - \Phi_{ბრ} = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_k = 0, \ Y_A^{დ} + Y_B^{დ} + \Phi_{ცენ} = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{x_1}(\vec{F}_k) = 0, \ -\Phi_{ცენ} \cdot OA - Y_B^{დ} \cdot AB = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{y_1}(\vec{F}_k) = 0, \ X_B^{დ} \cdot AB - \Phi_{ბრ} \cdot A0 = 0. \quad (4)$$

(4) განტოლებებიდან ვიპოვით

$$X_B^{დ} = \frac{\Phi_{ბრ}}{2} = \frac{Ma\varepsilon_0}{2};$$

(1) განტოლებებიდან

$$X_A^{დ} = -X_B^{დ} + \Phi_{ბრ} = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2} + Ma\varepsilon_0 = \frac{Ma\varepsilon_0}{2};$$

(3) განტოლებებიდან

$$Y_B^{\text{დ}} = -\frac{\Phi_{\text{ცენ}}}{2} = -\frac{Ma\omega^2}{2};$$

(2) განტოლებებიდან

$$Y_A^{\text{დ}} = -\Phi_{\text{ცენ}} - Y_B^{\text{დ}} = \frac{Ma\omega^2}{2} - Ma\omega^2 = -\frac{Ma\omega^2}{2}.$$

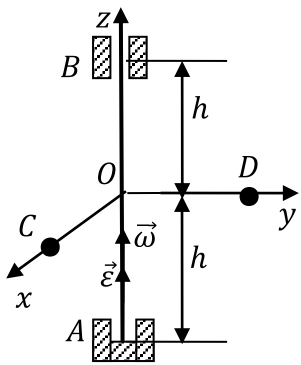
ლილვის დინამიკური წნევები საყრდენებზე სიდიდით უდრის ბმების დინამიკურ რეაქციებს და მიმართულია მათ საპირისპიროდ.
ამიტომ

$$X_A = -\ X_A^{\text{დ}} = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2}, X_B = -\ X_B^{\text{დ}} = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2};$$

$$Y_A = -Y_A^{\text{დ}} = \frac{Ma\omega^2}{2}, \qquad Y_B = -Y_B^{\text{დ}} = \frac{Ma\omega^2}{2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $X_A = X_B = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2}, \qquad Y_A = Y_B = \frac{Ma\omega^2}{2}.$

ამოცანა 42.4



ვერტიკალურ, ε კუთხური აჩქარებით თანაბარაჩქარებულად მბრუნავ AB ღერძზე მიმაგრებულია ორი C და D ტვირთი, ორი ურთიერთმართობ და AB ღერძის მართობი $OC = OD = r$ ღეროების საშუალებით. განსაზღვრეთ AB ღერძის დინამიკური წნევები A საქუსლესა და B საკისარზე.C და D ტვირთები თითოეული M მასის წერტილოვან მასებად. ღეროების მასა უგულებელყოფილია. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო. x და y ღერძები უცვლელად დაკავშირებულია ღეროებთან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე დინამიკური რეაქციები: $\vec{X}_A^{\text{დ}}, \vec{Y}_A^{\text{დ}}, \vec{X}_B^{\text{დ}}$ და $\vec{Y}_B^{\text{დ}}$, აგრეთვე, ინერციის ძალები:

$$\Phi_{D\text{ცენ}} = \Phi_{C\text{ცენ}} = Mr\omega^2; \ .$$

$$\Phi_{D\text{ბრ}} = \Phi_{C\text{ბრ}} = Mr\varepsilon.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\omega = \varepsilon t$, მაშინ

$$\Phi_{D\text{ცენ}} = \Phi_{C\text{ცენ}} = Mr(\varepsilon t)^2.$$

დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0,\ X_A^{\text{დ}} + X_B^{\text{დ}} + \Phi_{D\text{ბრ}} + \Phi_{C\text{ცენ}} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0,\ Y_A^{\text{დ}} + Y_B^{\text{დ}} + \Phi_{D\text{ცენ}} - \Phi_{C\text{ბრ}} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_{x_1}(\vec{F}_k) = 0,\ -\Phi_{D\text{ცენ}} \cdot h - Y_B^{\text{დ}} \cdot 2h + \Phi_{C\text{ბრ}} \cdot h = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_{y_1}(\vec{F}_k) = 0,\ X_B^{\text{დ}} \cdot 2h + \Phi_{D\text{ბრ}} \cdot h + \Phi_{D\text{ცენ}} \cdot h = 0. \qquad (4)$$

(4) განტოლებებიდან ვიპოვით

$$X_B^{\text{დ}} = \frac{\Phi_{D\text{ბრ}} + \Phi_{C\text{ცენ}}}{2} = \frac{Mr\varepsilon + Mr(\varepsilon t)^2}{2} = -\frac{Mr\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon t^2);$$

(1) განტოლებებიდან

$$X_A^{\text{დ}} = -X_B^{\text{დ}} - \Phi_{D\text{ბრ}} - \Phi_{C\text{ცენ}} =$$

$$= \frac{Mr\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon t^2) - Mr(\varepsilon t)^2 -$$

$$-Mr\varepsilon = -\frac{Mr\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon t^2);$$

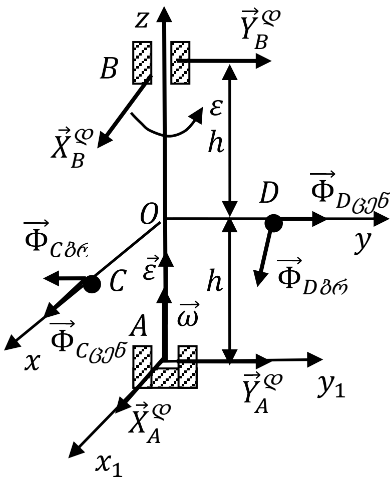
(3) განტოლებებიდან

$$Y_B^{\text{დ}} = \frac{\Phi_{C\text{ბრ}} - \Phi_{D\text{ცენ}}}{2} =$$

$$= \frac{Mr\varepsilon - Mr(\varepsilon t)^2}{2} =$$

$$= -\frac{Mr\varepsilon}{2}(\varepsilon t^2 - 1);$$

(2) განტოლებებიდან



$$Y_A^{\text{დ}} = -\Phi_{D\text{ცენ}} - Y_B^{\text{დ}} + \Phi_{C\text{ბრ}} =$$

$$= \frac{Mr\varepsilon}{2}(1 - \varepsilon t^2) - Mr(\varepsilon t)^2 + Mr\varepsilon = -\frac{Mr\varepsilon}{2}(\varepsilon t^2 - 1).$$

ლილვის დინამიკური წნევები საყრდენებზე სიდიდით უდრის ბმების დინამიკურ რეაქციებს და მიმართულია მათ საპირისპიროდ.
ამიტომ

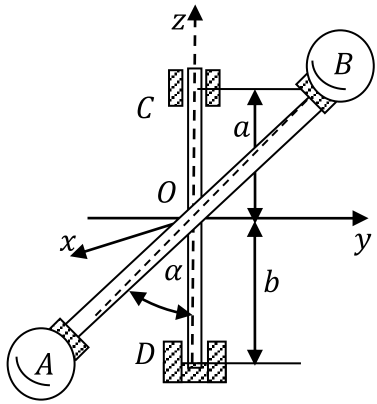
$$X_A = X_B = -\frac{M}{2} r\varepsilon(1 + \varepsilon t^2);$$

$$Y_A = Y_B = \frac{Mr\varepsilon}{2}(\varepsilon t^2 - 1).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $X_A = X_B = -\frac{M}{2} r\varepsilon(1 + \varepsilon t^2)$,

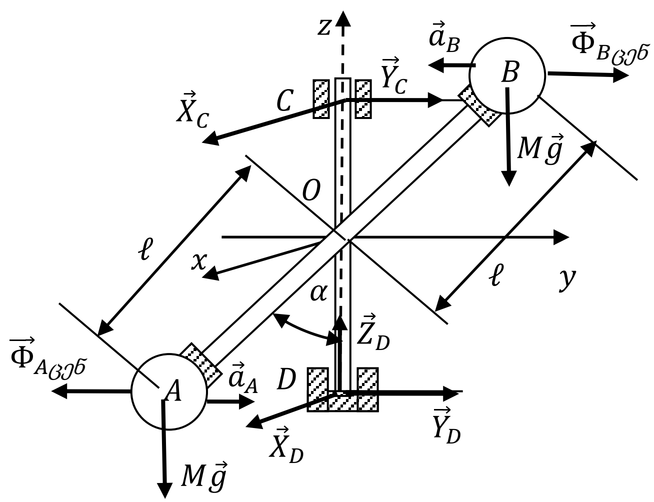
$$Y_A = Y_B = \frac{Mr\varepsilon}{2}(\varepsilon t^2 - 1).$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 42.5



2ℓ სიგრძის AB ღერო, რომლის ბოლოებზე მოთავსებულია M მასის ტოლი ტვირთები, თანაბრად ბრუნავს ღეროს შუა O წერტილზე გამავალი ვერტიკალური ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. O წერტილის დაშორება . C საკისრიდან უდრის a –ს, ხოლო D საქუსლედან- b. კუთხე AB ღეროსა და Oz ღერძს შორის ინარჩუნებს მუდმივ α მნიშვნელობას. განსაზღვრეთ C საკისარსა და D საქუსლეზე წნევის გეგმილები იმ მომენტში, როცა ღერო Oyz სიბრტყეშია. ღეროს მასა და ტვირთების ზომები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



ნახაზზე ვაჩვენოთ ტვირთების სიმძიმის ძალები და D საქუსლის და C საკისარის რეაქციები.

განვსაზღვროთ ტვირთების ინერციის ძალები და მოვდოთ ისინი ლილზე:

$$\Phi_{A ცენ} = Ma_A = M\ell\omega^2 sin\alpha,$$

$$\Phi_{Bცენ} = Ma_B = M\ell\omega^2 sin\alpha.$$

$\overrightarrow{\Phi}_{Aცენ}$ და $\overrightarrow{\Phi}_{Bცენ}$ ვექტორებიმიმართულია შესაბამისი ცენტრისკენული აჩქარებების ვექტორების საპირისპიროდ:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{Aცენ} \text{ და } \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{Bცენ}.$$

დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0, \; X_C + X_D = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0, \; Y_C + Y_D + \Phi_{Bცენ} - \Phi_{Aცენ} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum Z_k = 0, \; Z_D - 2Mg = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \; -\Phi_{Aცენ} \cdot \ell cos\alpha - \Phi_{Bცენ} \cdot \ell cos\alpha -$$

$$-Y_C a + Y_D \cdot b = 0, \qquad (4)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \; X_C a - X_D b = 0. \qquad (5)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0. \qquad (6)$$

(1) და (5) განტოლებებიდან ვღებულობთ:

$$X_C = X_D = 0.$$

(2) და (4) განტოლებებიდან $\Phi_{Aცენ}$ და $\Phi_{Bცენ}$ მნიშვნელობების გათვალისწინებით ვიპოვით

$$-Y_C = Y_D = \frac{2M\ell^2\omega^2 sin\alpha cos\alpha}{a+b} = \frac{M\ell^2\omega^2 sin2\alpha}{a+b},$$

(3) განტოლებებიდან ვღებულობთ:

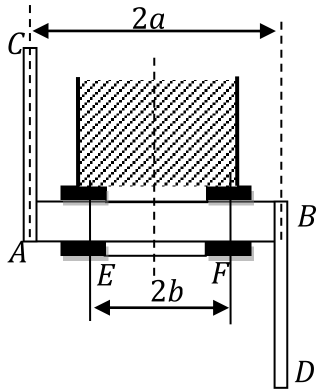
$$Z_D = 2Mg.$$

წნევები D საქუსლესა და C საკისარზე მიმართულია ნაპოვნი რეაქციების საპირისპიროდ, ე.ი. პასუხები უნდა ჩავწეროთ მოპირდაპირე ნიშნით.

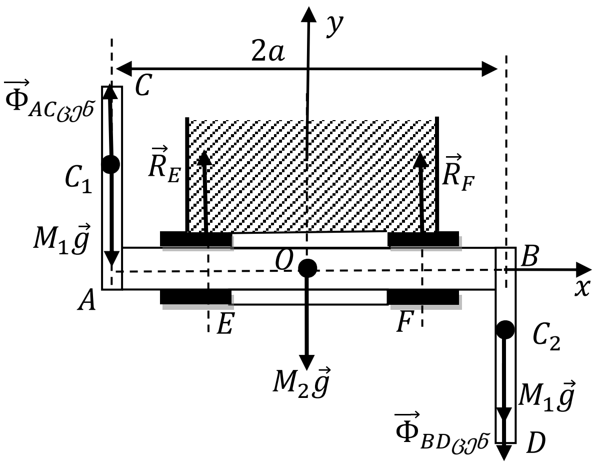
პ ა ს უ ხ ი: $X_C = X_D = 0; \; Y_C = -Y_D = \frac{M\ell^2\omega^2 sin2\alpha}{a+b}; \; Z_D = -2Mg.$

ამოცანა 42.6

ველოსიპედის შუა AB ღერძის ბოლოებზე ჩამოცმულია ორი ერთნაირი ℓ სიგრძისა და M_1 მასის AC და BD ღეროები, რომლებიც ერთმანეთთან ქმნიან 180^0 კუთხეს. $2a$ სიგრძისა და M_2 მასის AB ღერძი ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით E და F საკისრებში, რომლებიც განლაგებულია სიმეტრიულად $2b$ მანძილზე. განსაზღვრეთ N_E და N_F საკისრებზე წნევები იმ მომენტში, როცა AC მრუდმხარა მიმართულია ვერტიკალურად ზევით. ყოველი მრუდმხარას მასა ჩათვალეთ თანაბრად განაწილებულად მისი ღერძის გასწვრივ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემაზე მოქმედ სიმძიმის ძალებს და E და F საყრდენების რეაქციებს დავუმატოთ ინერციის ძალები:



$$\Phi_{A_{ცენ}} = M_1 a_{C1_{ცენ}} = M_1\omega^2\frac{\ell}{2}\ ,\Phi_{B_{ცენ}} = M_1 a_{C2_{ცენ}} = M_1\omega^2\frac{\ell}{2},$$

რომელთა მიმართულებები C_1 და C_2 წერტილების (შესაბამისად AC და BD ღეროების შუაწერტილები) ცენტრისკენული აჩქარებების საპირისპიროა (იხ. ნახაზი).

დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ ბრტყელ პარალელურ ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum Y_k = 0,$$

ან

$$-\Phi_{Aცენ} - 2M_1g + R_E + R_F - M_2g - \Phi_{Bცენ} = 0. \qquad (1)$$

$$\sum M_O(\vec{F}_k) = 0,$$

ან

$$-\Phi_{Aცენ}a + M_1ga - R_Eb + R_Fb - M_2ga - \Phi_{Bცენ}a = 0. \qquad (2)$$

გამარტივების შემდეგ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$R_E + R_F - 2M_1g - M_2g = 0. \qquad (3)$$

(2) განტოლება $\Phi_{Aცენ}$ და $\Phi_{Bცენ}$ მნიშვნელობების გათვალისწინებით ასე ჩაიწერება:

$$R_F - R_E - \frac{M_1\ell a\omega^2}{b} = 0. \qquad (4)$$

შევკრიბოთ (3) და (4) განტოლებები და ვიპოვოთ

$$R_F = \frac{1}{2}M_2g + M_1g + \frac{M_1\ell a\omega^2}{2b}.$$

შემდეგ (3) განტოლებას გამოვაკლოთ (40 განტოლება, მივიღებთ:

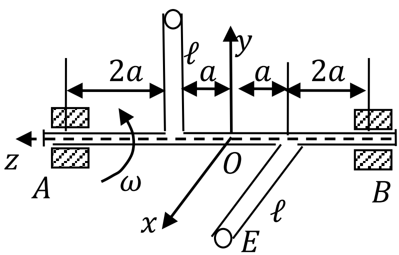
$$R_E = \frac{1}{2}M_2g + M_1g - \frac{M_1\ell a\omega^2}{2b}.$$

N_E და N_F წნევები საკისრებზე სიდიდით ტოლია R_E და R_F რეაქციების, მაგრამ მიმართულია მათ საპირისპიროდ.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> წნევა $N_E = \frac{1}{2}M_2g + M_1g - \frac{M_1\ell a\omega^2}{2b}$, როცა $N_E > 0$, მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით, ხოლო, როცა $N_E < 0$ –ზევით. წნევა $N_F = \frac{1}{2}M_2g + M_1g + \frac{M_1\ell a\omega^2}{2b}$ მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით.

ამოცანა 42.7

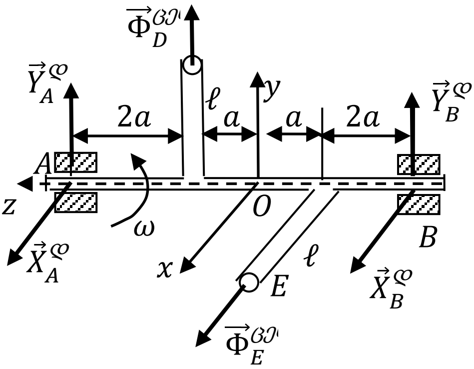
ჰორიზონტალურ AB ლილვზე, რომელიც ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით, მიმაგრებულია მის მართობულად ორი ტოლი ℓ სიგრძის ღერო, რომლებიც მოთავსებულია ურთიერთპერპენდიკულარულ



სიბრტყეებში. ღეროთა ბოლოებზე მოთავსებულია ერთნაირი m მასის D და E ბურთულები. განსაზღვრეთ ლილვის დინამიკური წნევები A და B საყრდენებზე. ღეროების მდებარეობა ნაჩვენებია ნახაზზე. ბურთულები მიღებულია ნივთიერ წერტილებად და ღეროთა მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ლილვის დინამიკური წნევების განსაზღვრისათვის A და B საყრდენებზე უნდა გავითვალისწინოთ ცენტრიდანული ინერციის მომენტები. რადგან $\omega = const$, ამიტომ

$$\Phi_E^{ცენ} = \Phi_D^{ცენ} = m\ell\omega^2.$$



დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0,\ X_A^{დ} + X_B^{დ} + \Phi_E^{ცენ} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0,\ Y_A^{დ} + Y_B^{დ} + \Phi_D^{ცენ} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ -Y_A^{დ}\cdot 3a - \Phi_D^{ცენ}a + Y_B^{დ}\cdot 3a = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ X_A^{დ}\cdot 3a - X_B^{დ}\cdot 3a - \Phi_E^{ცენ}a = 0. \qquad (4)$$

(1) და (4) განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$X_A^{დ} = -\frac{1}{3}\Phi_E^{ცენ} = -\frac{1}{3}m\ell\omega^2,$$

$$X_B^{დ} = -\frac{2}{3}\Phi_E^{ცენ} = -\frac{2}{3}m\ell\omega^2.$$

ნალოგიურად (2) და (3) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$Y_A^{დ} = -\frac{2}{3}\Phi_D^{ცენ} = -\frac{2}{3}m\ell\omega^2,$$

$$Y_B^{დ} = -\frac{1}{3}\Phi_D^{ცენ} = -\frac{1}{3}m\ell\omega^2;$$

$$R_A^{დ} = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}m\ell\omega^2,$$

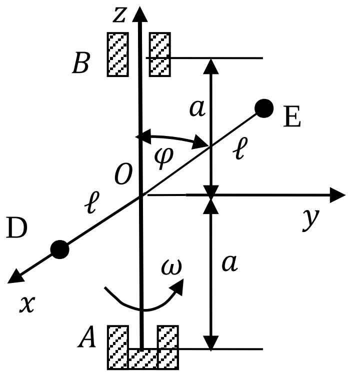
$$R_B^{დ} = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}m\ell\omega^2,$$

ლილვის დინამიკური წნევები A და B საყრდენებზე სიდიდით უდრის საყრდენების ნაპოვნ დინამიკურ რეაქციებს, ე.ი.

$$N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} m\ell\omega^2.$$

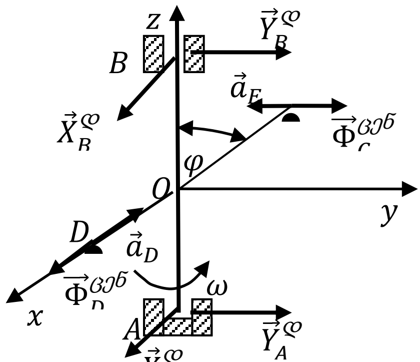
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} m\ell\omega^2.$

ამოცანა 42.8



მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავ ვერტიკალურ AB ლილვზეხისტად მიმაგრებულია ორი ღერო. E ღერო ლილვთან ქმნის φ კუთხეს; OD ღერო OE ღეროსა და AB ლილვზე გამავალი სიბრტყის პერპენდიკულარულია. ცნობილია ზომები: $OE = OD = \ell$; $AB = 2a.$ ღეროების ბოლოებზე მიმაგრებულია ორი ერთნაირი m მასის ბურთულები. განსაზღვრეთ ლილვის დინამიკური წნევები A და B საყრდენებზე. D და E ბურთულები მიღებულია წერტილოვან მასებად. ღეროების მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



ლილვის დინამიკური წნევები A და B საყრდენებზე წარმოიქმნება მხოლოდ $\vec{\Phi}_D^{ცენ}$ და $\vec{\Phi}_C^{ცენ}$ ინერციის ძალების არსებობის გამო, რომლებიც ნახაზზეა ნაჩვენები. ისინი მიმართულია ბრუნვის ღერძიდან შესაბამისად D და E წერტილების ცენტრისკენული აჩქარებების საპირისპიროდ. დალამბერის პრინციპის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0,$$

$$X_A^{\varphi} + X_B^{\varphi} + \Phi_D^{ცენ} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0,\; Y_A^{\varphi} + Y_B^{\varphi} + \Phi_E^{ცენ} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\; Y_A^{\varphi} \cdot a - \Phi_E^{ცენ} \ell cos\varphi - Y_B^{\varphi} \cdot a = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\; -X_A^{\varphi} \cdot a + X_B^{\varphi} \cdot a = 0. \qquad (4)$$

(1) - (4) განტოლებებში:

$$\Phi_D^{ცენ} = ma_D = m\ell\omega^2, \tag{5}$$

$$\Phi_E^{ცენ} = ma_E = m\ell\omega^2\ell sin\varphi. \tag{6}$$

(1) და (4) განტოლებებიდან (5) გამოსახულების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$X_A^{დ} = X_B^{დ} = -\frac{1}{2}m\ell\omega^2.$$

ლილვის დინამიკური წნევების გეგმილებს Ox ღერძზე აქვთ ნაპოვნი რეაქციების საპირისპირო ნიშანი, ე.ი.

$$X_A = -X_A^{დ}, \quad X_B = -X_B^{დ}.$$

მაშინ

$$X_A = X_B = \frac{m\ell\omega^2}{2}.$$

(2) და (3) განტოლებებიდან (6) გამოსახულების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$Y_A^{დ} = -\frac{m\ell\omega^2(a-\ell cos\varphi)sin\varphi}{2a};$$

$$Y_B^{დ} = -\frac{m\ell\omega^2(a+\ell cos\varphi)sin\varphi}{2a}$$

ლილვის დინამიკური წნევების გეგმილებს Oy ღერძზე აქვთ ნაპოვნი რეაქციების საპირისპირო ნიშანი, ე.ი.

$$Y_A = -Y_A^{დ}, \quad Y_B = -Y_B^{დ}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $X_A = X_B = \frac{m\ell\omega^2}{2}; \quad Y_A = \frac{m\ell\omega^2(a-\ell cos\varphi)sin\varphi}{2a};$

$$Y_B = \frac{m\ell\omega^2(a+\ell cos\varphi)sin\varphi}{2a}.$$

ამოცანა 42.9

გამოიყენეთ 34.1 ამოცანის პირობები და განსაზღვრეთ მუხლა ლილვის K და L საკისრებზე დინამიკური რეაქციები. ლილვი ბრუნავს თანაბარი ω კუთხური სიჩქარით. ამოხსნის დროს შეიძლება ისარგებლოთ 34.1 და 34.23 ამოცანის პასუხებით

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ვისარგებლოთ 34.1 და 34.23 ამოცანის ამოხსნით და ჩავწეროთ:

$$x_C = y_C = 0,$$

$$I_{xz} = -\frac{3}{2}md(a+b),$$

$$I_{yz} = -\frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b),$$
$$I_{xy} = 0.$$

გამოვთვალოთ ინერციული ძალების ნაკრები მომენტი: კოორდინატთა სათავის მიმართ:

$$\vec{M}_O^{ob} = -\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = -\vec{\omega} \times (J\vec{\omega}),$$

სადაც

$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix}$ – მუხლა ლილვის ინერციის ტენზორია O წერტილში (კოორდინატთა სათავე); $\vec{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix}$-კუთხური სიჩქარის ვექტორია.

ინერციული ძალების ნაკრები მომენტის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე

$$M_x^{ob} = J_{yz}\omega^2, \qquad M_y^{ob} = -J_{xz}\omega^2, \quad M_z^{ob} = 0.$$

ამიტომ მომენტების განტოლება საკოორდინატო ღერძების მიმართ მიიღეს სახეს:

$$\sum M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0, Y_K\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) - Y_L\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) + J_{yz}\omega^2 = 0;$$
$$\sum M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0, -X_K\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) + X_L\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) - J_{xz}\omega^2 = 0.$$

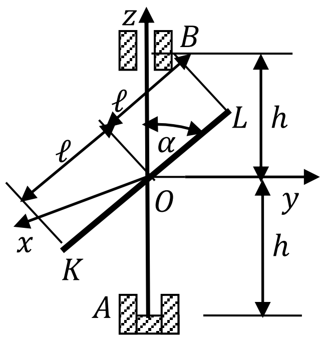
როცა $X_K = -X_L$ და $Y_K = -Y_L$, მაშინ

$$X_K = -X_L = \frac{3}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b},$$
$$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $X_K = -X_L = \frac{3}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b}$;

$$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b}.$$

ამოცანა 42.10



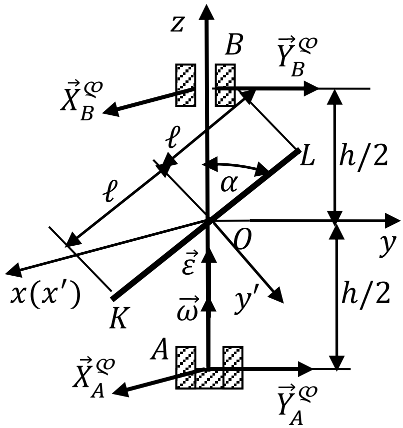
ერთგვაროვანი KL ღერო იმაგრებულია ε კუთხური აჩქარებით თანაბრად აჩქარებულად მბრუნავ AB ვერტიკალურ ღერძზე α კუთხით . განსაზღვრეთ AB ღერძის დინამიკური წნევები A საქუსლესა და B საკისარზე, თუ M არის ღეროს მასა, $2\ell -$ მისი სიგრძე. $OA = OB = h/2$. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაში იყო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ ინერციული ძალების ნაკრები მომენტი: კოორდინატთა სათავის მიმართ (იხ. ნახ.1):

$$\vec{M}_o^{ობ} = -\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} =$$
$$= -J\vec{\varepsilon} - \vec{\omega} \times (J\vec{\omega}).$$

ინერციის ტენზორი განვსაზღვროთ $Ox'y'z'$ მთავარ ცენტრალურ ღერძებში, ე.ი.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{M\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ell^2}{3} \end{vmatrix},$$



ნახ.1

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\omega sin\alpha \\ \omega cos\alpha \end{vmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\varepsilon sin\alpha \\ \varepsilon cos\alpha \end{vmatrix}.$$

გამრავლების შედაგად მივიღებთ:

$$\vec{M}_o^{ობ} = \vec{i}\frac{M\ell^2}{3}\omega^2 sin\alpha cos\alpha - \vec{j'}\frac{M\ell^2}{3}\varepsilon sin\alpha.$$

შევნიშნოთ, რომ $\vec{j'}$ ორტი მიმართულია Oy' ღერძის გასწვრივ.

შევადგინოთ მომენტების განტოლება Ox და Oy საკოორდინატო ღერძების მიმართ:

$$\sum M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \ Y_A^{\text{დ}}\frac{h}{2} - \ Y_B^{\text{დ}}\frac{h}{2} + \frac{M\ell^2}{3}\omega^2 sin\alpha cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ -X_A^{\text{დ}}\frac{h}{2} + \ X_B^{\text{დ}}\frac{h}{2} - \frac{M\ell^2}{3}\varepsilon sin\alpha cos\alpha = 0.$$

როცა $Y_A^{\text{დ}} = -\ Y_B^{\text{დ}}$ და $X_A^{\text{დ}} = -\ X_B^{\text{დ}}$, მაშინ

$$X_A^{\text{დ}} = -\ X_B^{\text{დ}} = -\frac{M\ell^2}{6h}\varepsilon sin2\alpha,$$

$$Y_A^{\text{დ}} = -\ Y_B^{\text{დ}} = \frac{M\ell^2\omega^2}{6h}sin2\alpha = \frac{M\ell^2\varepsilon^2 t^2}{6h}sin2\alpha,$$

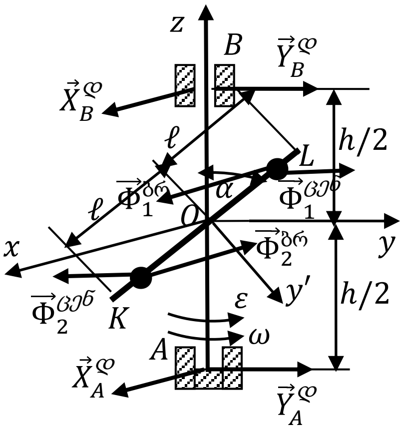
სადაც $\omega = \varepsilon t$.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $X_A^{\text{დ}} = -\ X_B^{\text{დ}} = -\frac{M\ell^2}{6h}\varepsilon sin2\alpha;$

$$Y_A^{\text{დ}} = -\ Y_B^{\text{დ}} = \frac{M\ell^2\varepsilon^2 t^2}{6h}sin2\alpha.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ეს ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას ამ პარაგრაფის მეთოდურ მითითებებში აღწერილი პირველი ხერხით.

ნახ.2-ზე ვაჩვენოთ დინამიკური რეაქციები: $\vec{\Phi}_1^{\text{ცენ}}$ და $\vec{\Phi}_2^{\text{ცენ}}$ ცენტრიდანული, აგრეთვე, $\vec{\Phi}_1^{\text{ბრ}}$ და $\vec{\Phi}_2^{\text{ბრ}}$ ბრუნვითი ინერციის ძალები, რომლებიც მოდებულია C_1 და C_2 წერტილებში $\left(OC_1 = OC_2 = \frac{2\ell}{3}\right)$:



ნახ.2

$$\begin{cases} \Phi_1^{\text{ცენ}} = \Phi_2^{\text{ცენ}} = \frac{M}{2}\frac{\ell}{2}\omega^2\ sin\alpha, \\ \Phi_1^{\text{ბრ}} = \Phi_2^{\text{ბრ}} = \frac{M}{2}\frac{\ell}{2}\varepsilon\ sin\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum X_k = 0,\ X_A^{\text{დ}} + X_B^{\text{დ}} + \Phi_1^{\text{ბრ}} - \Phi_2^{\text{ბრ}} = 0, \quad (2)$$

$$\sum Y_k = 0,\ Y_A^{\text{დ}} + Y_B^{\text{დ}} + \Phi_1^{\text{ცენ}} - \Phi_2^{\text{ცენ}} = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, -Y_B^{დ} \cdot \frac{h}{2} + Y_A^{დ} \cdot \frac{h}{2} - \Phi_1^{ცენ} \frac{2}{3} \ell cos\alpha -$$
$$-\Phi_1^{ცენ} \frac{2}{3} \ell cos\alpha = 0 \qquad (4)$$
$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ X_B^{დ} \cdot \frac{h}{2} - X_A^{დ} \cdot \frac{h}{2} + \Phi_1^{ბრ} \frac{2}{3} \ell cos\alpha -$$
$$+\Phi_2^{ბრ} \frac{2}{3} \ell cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

(2) განტოლებებიდან (1) გამოსახულების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$X_A^{დ} = -X_B^{დ}.$$

(3) განტოლებებიდან

$$Y_A^{დ} = -\ Y_B^{დ}. \qquad (6)$$

(4) განტოლებებიდან (6) გამოსახულების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$Y_A^{დ} = -\ Y_B^{დ} = \frac{M\ell^2\omega^2}{6h} sin2\alpha = \frac{M\ell^2\varepsilon^2 t^2}{6h} sin2\alpha,$$

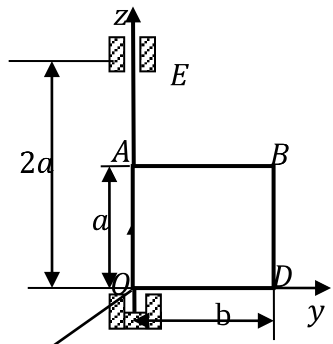
ხოლო (5) განტოლებებიდან

$$X_A^{დ} = -\ X_B^{დ} = -\frac{M\ell^2}{6h} \varepsilon sin2\alpha.$$

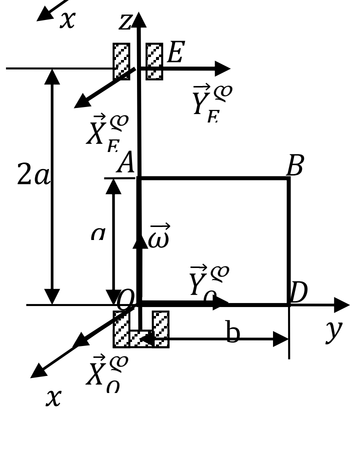
მაშასადამე, $B\left(\ X_B^{დ},\ Y_B^{დ}\right)$ საკისარის რეაქციის გეგმილების მიმართულებები ნახაზზე ნაჩვენების საპირისპიროა. თავის მხრივ, დინამიკური წნევები საყრდენებზე რეაქციების საპირისპიროა.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 42.11

M მასის $OABD$ ერთგვაროვანი მართკუთხა ფირფიტა, რომლისგვერდებია a და b და OE ლილვზე მიმაგრებულია OA გვერდით ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით.. საყრდენებს შორის მანძილი $OE = 2a$. გამოთვალეთ O და E საყრდენებზე ლილვის დინამიკური წნევის გვერდითი ძალები.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ ფირფიტის ინერციის მომენტები ნახ.1-ზე ნაჩვენები ღერძების მიმართ:



$$J_x = \frac{M(a^2+b^2)}{12},\ \ J_{xy} = 0, J_{xz} = 0,$$

$$J_y = \frac{Ma^2}{3}, J_{yz} = \frac{Mab}{4} \ , J_z = \frac{Mb^2}{3}$$

და ინერციული ძალების ნაკრები მომენტი

$$\vec{M}_O^{ინ} = -\vec{\omega} \times (J\vec{\omega}) = -\vec{\imath}\frac{Mab\omega^2}{4}.$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum Y_k = 0, Y_O^{დ} + Y_E^{დ} + \frac{Mb\omega^2}{2} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ Y_E^{დ} \cdot 2a - \frac{Mab}{4}\omega^2 = 0.$$

მიღებული განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$Y_O^{დ} = -Y_E^{დ} - \frac{Mb\omega^2}{2} = -\frac{3Mb\omega^2}{8},$$

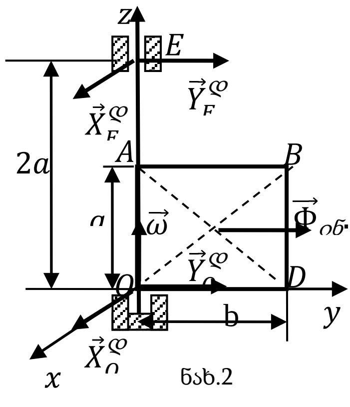
$$Y_E^{დ} = -\frac{Mb\omega^2}{8}.$$

$\vec{X}_O^{დ}$ და $\vec{X}_E^{დ}$ რეაქციები ნულის ტოლია, რადგან ფირფიტა მდებარეობს Oyz სიბრტყეში.

დინამიკური წნევის ძალები $N_{0x}, N_{Ex}, N_{0y}, N_{Ey}$ სიდიდით უდრის O და E საყრდენების ნაპოვნ რეაქციებს და აქვთ საპირისპირო მიმართულება, ე.ი.

$$N_{0x} = -X_O^{დ} = 0, N_{Ex} = -X_E^{დ} = 0,$$

$$N_{0y} = -Y_O^{დ} = \frac{3}{8}Mb\omega^2,\ N_{Ey} = -Y_E^{დ} = \frac{1}{8}Mb\omega^2.$$



ნახ.2

__პ ა ს უ ხ ი:__ $N_{0x} = N_{Ex} = 0$; $N_{0y} = -\frac{3}{8}Mb\omega^2$; $N_{Ey} = \frac{1}{8}Mb\omega^2$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ეს ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას ამ პარაგრაფის მეთოდურ მითითებებში აღწერილი პირველი ხერხით. ფირფიტაზე მოვდოთ ცენტრიდანული ინერციის ძალა

$$\Phi_{ინ} = Ma_C^{ცენ} = M\omega^2\frac{b}{2}. \quad (1)$$

რადგან ფირფიტა მდებარეობს Oyz სიბრტყეში, ამიტომ $\vec{X}_O^{დ}=\vec{X}_E^{დ}=0.$

Oyz სიბრტყეში მდებარე პარალელურ ძალთა სისტემისათვის შევადგინოთ წონასწორობის ორი განტოლება:

$$\sum Y_k = 0,\ Y_O^{დ} + Y_E^{დ} + \Phi_{ობ} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, -Y_E^{დ} \cdot 2a + \Phi_{ობ} \cdot \frac{a}{2} = 0. \qquad (3)$$

(3) განტოლებიდან (1) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$Y_E^{დ} = -\frac{1}{2}a \cdot M\omega^2 \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2a} = -\frac{Mb\omega^2}{8}.$$

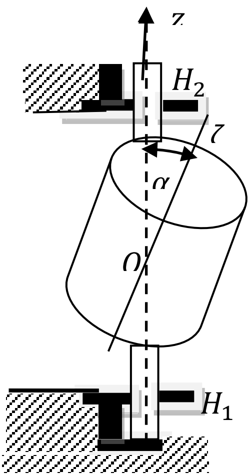
(2) განტოლებიდან (1) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

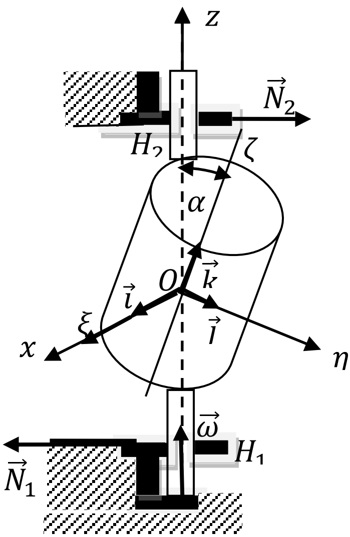
$$Y_O^{დ} = -Y_E^{დ} - \Phi_{ობ} = \frac{Mb\omega^2}{8} - \frac{Mb\omega^2}{2} = -\frac{3Mb\omega^2}{8}$$

$\vec{Y}_E^{დ}$ და $\vec{Y}_O^{დ}$ რეაქციები მიმართულია ნახ.2 ნაჩვენები მიმართულებების საპირისპიროდ.

ამოცანა 42.12

M მასის, 2ℓ სიგრძის და r რადიუსის მართიწრიული ცილინდრი ბრუნავს მისი მასათა O ცენტრზე გამავალი ვერტიკალური Oz ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით, რომლის დროსაც ცილინდრის $O\zeta$ ღერძსა და ბრუნვის Oz ღერძს შორის α კუთხე ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას. მანძილი საქუსლესა და საკისარს შორის $H_1H_2 = h$. განსაზღვრეთ გვერდითი წნევები: N_1 საქუსლესა და N_2 საკისარზე (ნახ.1).





ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ინერციის ტენზორი ξ,η,ζ ღერძებში (ნახ.2):

$$J=\begin{vmatrix}\frac{Mr^2}{4}+\frac{M\ell^2}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{Mr^2}{4}+\frac{M\ell^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{Mr^2}{2}\end{vmatrix}$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$\vec{\omega}=-\omega sin\alpha\cdot\vec{j}+\omega cos\alpha\cdot\vec{k}$ და

ვიპოვოთ ინერციული ძალების ნაკრები მომენტი:

$$\vec{M}_o^{ინ}=-\vec{\omega}\times(J\vec{\omega})=$$

$$=-\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -\omega sin\alpha & \omega cos\alpha\\ 0 & -\left(\frac{Mr^2}{4}+\frac{M\ell^2}{3}\right)\omega sin\alpha & \frac{Mr^2}{2}\omega cos\alpha\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\frac{Mr^2}{2}\omega^2 sin\alpha cos\alpha-\vec{i}\frac{Mr^2}{4}\omega^2 sin\alpha cos\alpha-$$

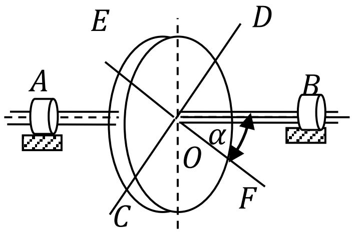
$$-\vec{i}\frac{M\ell^2}{3}\omega^2 sin\alpha cos\alpha=\vec{i}\left(\frac{Mr^2}{4}-\frac{M\ell^2}{3}\right)\omega^2 sin\alpha cos\alpha.$$

Ox ღერძის მიმართ მომენტების განტოლებიდან განვსაზღვროთ გვერდითი წნევის ძალები საქუსლეზე და საკისარზე, რომლებიც სიდიდით ტოლია, მაგრამ ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით:

$$N=\frac{\left|\vec{M}_o^{ინ}\right|}{h}=\frac{M\omega^2 sin2\alpha}{2h}\left(\frac{\ell^2}{3}-\frac{r^2}{4}\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ წნევებს აქვთ ერთნაირი სიდიდეები $\frac{M\omega^2 sin2\alpha}{2h}\left(\frac{\ell^2}{3}-\frac{r^2}{4}\right)$ და მიმართულია ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ.

ამოცანა 42.13



გამოთვალეთ A და B საკისრებზე წნევები ორთქლის ტურბინის თხელი ერთგვაროვანი წრიული CD დისკოს AB ღერძის გარშემო ბრუნვისას, თუ დავუშვებთ, რომ AB გადის დისკოს მასათა O ცენტრზე, მაგრამ მილისის არასწორი გაბურღვის გამო იგი. დისკოს სიბრტყის პერპენდიკულართან ადგენს $AOE = \alpha = 0{,}02$ რადიან კუთხეს. მოცემულია: დისკოს მასა 3,27კგ, მისი რადიუსი 20სმ, კუთხური სიჩქარე 30000ბრ/წთ, მანძილი $OA =$50სმ, $OB =$30სმ. AB ღერძი განიხილება როგორც აბსოლუტურად მყარი და ვღებულობთ, რომ $sin2\alpha$=2α.

ა მ ო ხ ს ნ ა განვსაზღვროთ სტატიკური წნევის ძალები საკისრებში:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0,\ R_B^{სტ} \cdot AB - G \cdot AO = 0,$$

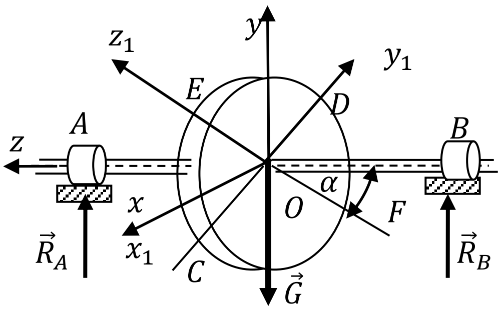
$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0,\ G \cdot OB\ - R_A^{სტ} \cdot AB = 0,$$

სადაც $G = mg$.

აქედან

$$R_B^{სტ} = mg \cdot \frac{AO}{AB} = 3{,}27 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{50}{80} = 20{,}0(ნ),$$

$$R_A^{სტ} = mg \cdot \frac{OB}{AB} = 3{,}27 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{30}{80} = 12{,}01(ნ).$$



N_A და N_B სტატიკური წნევის ძალები სიდიდით უდრის რეაქციებს საკისრებში, ე.ი.

$$N_A = R_A^{სტ},\ N_B = R_B^{სტ}.$$

განვსაზღვროთ დინამიკური წნევის ძალები საკისრებში:

$$\sum Y_k = 0,\ R_A^{\varnothing} + R_B^{\varnothing} = 0 \Longrightarrow R_A^{\varnothing} = -R_B^{\varnothing};$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ R_B^{\varnothing} \cdot OB - R_A^{\varnothing} \cdot AO - J_{yz}\omega^2 = 0.$$

გამოვთვალოთ დოსკოს ცენტრიდანული ინერციის მომენტები:

$$J_{yz} = \frac{1}{2}\left(J_{z_1} - J_{y_1}\right) sin2\alpha,$$

სადაც $J_{z_1} = \frac{mr^2}{2};\ J_{y_1} = \frac{mr^2}{4};\ r -$ დისკოს რადიუსია.
მაშინ

$$J_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2} - \frac{mr^2}{4}\right) sin2\alpha = \frac{mr^2}{8} sin2\alpha.$$

მაშასადამე,

$$R_B^{\varnothing} = \frac{J_{yz}\omega^2}{AO + OB} = \omega^2 \frac{mr^2 sin2\alpha}{8AB} = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \frac{2mr^2\alpha}{8AB} =$$

$$= \frac{3{,}27 \cdot 0{,}2^2 \cdot 2 \cdot 0{,}02 \cdot (3{,}14 \cdot 30000)^2}{8 \cdot 0{,}8 \cdot 30^2} = 8064(\text{ნ}),$$

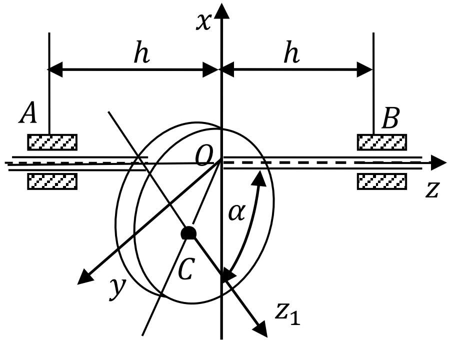
$$R_A^{\varnothing} = -R_B^{\varnothing} = -8064(\text{ნ}),$$

სადაც $\omega = \frac{\pi n}{30}$.

დინამიკური წნევები საკისრებში მიმართულებით საკისრების დინამიკური რეაქციების საპირისპიროა.

პ ა ს უ ხ ი: დისკოს წონით გამოწვეული წნევა A საკისარზე არის 12,01ნ, B -ზე=20,0ნ. დისკოს ბრუნვით გამოწვეული წნევები საკისრებზე სიდიდით ერთამანეთის ტოლია და უდრის 8,06ნ-ს და მიმართულია ურთიერთსაწინააღმდეგოდ.

ამოცანა 42.14



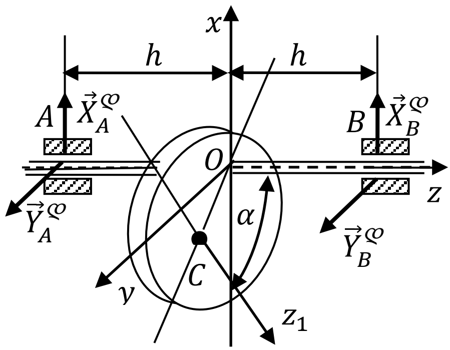
ორთქლის ტურბინის წრიული დისკოს არასწორი აწყობის გამო დისკოს სიბრტყე AB ღერძთან ადგენს α კუთხეს, ხოლო დისკოს მასათა C ცენტრი არ მდებარეობს ამ ღერძზე. ქსცენტრისიტეტი $OC = a$. გამოთვალეთ გვერდითი დინამიკური წნევები A და B საკისრებზე, თუ დისკოს მასა უდრის M, მისი რადიუსი R, $AO = OB = h$; დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე მუდმივია და უდრის ω.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ 34.27 ამოცანის პასუხით

ა მ ო ხ ს ნ ა 34.28 ამოცანის ამოხსნის თანახმად დისკოს ცენტრიდანული ინერციის მომენტები

$$I_{xy} = I_{zy} = 0,$$

$$I_{xz} = \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha.$$



განვსაზღვროთ დამატებითი ინამიკური რეაქციები (იხ. ნახაზი)

$$X_A^{\wp} + X_B^{\wp} = -M\omega^2 x_C - M\varepsilon y_C \quad (1)$$

$$Y_A^{\wp} + Y_B^{\wp} = -M\omega^2 y_C + M\varepsilon x_C, \quad (2)$$

$$Y_A^{\wp} h - Y_B^{\wp} h = \omega^2 J_{yz} - \varepsilon J_{zx}, \quad (3)$$

$$X_B^{\wp} h - X_A^{\wp} h = -\omega^2 J_{zx} - \varepsilon J_{yz}. \quad (4)$$

რადგან $\omega = const$, ამიტომ

$$\varepsilon = 0; y_C = 0, x_C = -OC \cdot cos\alpha = -a \cdot cos\alpha$$

მაშინ (1)-(4) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$X_A^{\wp} + X_B^{\wp} = \omega^2 Ma \cdot cos\alpha, \quad (5)$$

$$Y_A^{\wp} + Y_B^{\wp} = 0, \quad (6)$$

$$Y_A^{\wp} h - Y_B^{\wp} h = 0, \quad (7)$$

$$X_B^{\wp} h - X_A^{\wp} h = -\omega^2 J_{zx} = -\omega^2 \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha. \quad (8)$$

ამოვხსნათ (6) და (7) განტოლებები, მივიღებთ

$$Y_A^{\wp} = Y_B^{\wp} = 0$$

(8) განტოლება გავყოთ h −ზე, მიღებული განტოლება ჯერ შევკრიბოთ (5) განტოლებასთან, ხოლო შედეგ ის გამოვაკლოთ (5)-ს:

$$X_B^{\wp} = -\frac{\omega^2 M}{2}\left[\frac{sin2\alpha}{2h}\left(\frac{R^2}{4}+a^2\right)-a\cdot cos\alpha\right],$$

$$X_A^{\wp} = \frac{\omega^2 M}{2}\left[\frac{sin2\alpha}{2h}\left(\frac{R^2}{4}+a^2\right)+a\cdot cos\alpha\right].$$

დინამიკური წნევები საკისრების რეაქციების საპირისპიროდ არის მიმართული, ე.ი.

$$N_{Ax} = X_A = -X_A^{\wp},\ \ N_{Bx} = X_B = -X_B^{\wp}.$$

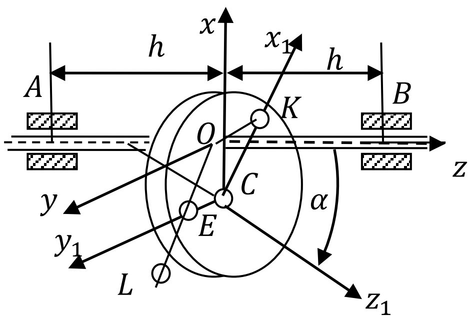
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $Y_A = Y_B = 0;$

$$X_A = -\frac{M}{2}\left[\frac{sin2\alpha}{2h}\left(\frac{R^2}{4}+a^2\right)+a\cdot cos\alpha\right]\omega^2,$$

$$X_B = \frac{M}{2}\left[\frac{sin2\alpha}{2h}\left(\frac{R^2}{4}+a^2\right)-a\cdot cos\alpha\right]\omega^2.$$

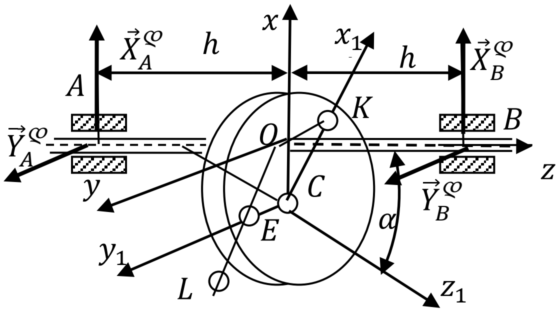
ამოცანა 42.15

M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ჩამოცმულია AB ღერძზე, რომელიც გადის დისკოს O წერტილზე და დისკოს სიმეტრიის Cz_1 ღერძთან ადგენს α კუთხეს. OL არის z ღერძის გეგმილი დისკოს სიბრტყეზე, ამასთან $OE = a$, $OK = b$. გამოთვალეთ გვერდითი დინამიკური წნევები A და B საკისრებზე, თუ დისკო



ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით და $AO = OB = h$;
მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ 34.28 ამოცანის პასუხით

ა მ ო ხ ს ნ ა. 34.28 ამოცანის ამოხსნის თანახმად დისკოს



ცენტრიდანული ინერციის მომენტები

$$I_{xz} = M\left(a^2 + \frac{1}{4}R^2\right) sin\alpha cos\alpha;$$

$$I_{yz} = \ Mabsin\alpha.$$

განვსაზღვროთ დამატებითი დინამიკური რეაქციები (იხ. ნახაზი)

$$X_A^{\varphi} + X_B^{\varphi} = -M\omega^2 x_C - M\varepsilon y_C, \tag{1}$$

$$Y_A^{\varphi} + Y_B^{\varphi} = -M\omega^2 y_C + M\varepsilon x_C, \tag{2}$$

$$Y_A^{\varphi} h - Y_B^{\varphi} h = \omega^2 J_{yz} - \varepsilon J_{zx}, \tag{3}$$

$$X_B^{\varphi} h - X_A^{\varphi} h = -\omega^2 J_{zx} - \varepsilon J_{yz}. \tag{4}$$

რადგან $\omega = const$, ამიტომ

$$\varepsilon = 0; y_C = 0, x_C = -OE \cdot cos\alpha = -a \cdot cos\alpha, y_C = -OK = -b$$

მაშინ (1)-(4) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$X_A^{\varphi} + X_B^{\varphi} = \omega^2 Ma \cdot cos\alpha, \tag{5}$$

$$Y_A^{\varphi} + Y_B^{\varphi} = \omega^2 Mb, \tag{6}$$

$$Y_A^{\varphi} h - Y_B^{\varphi} h = \omega^2 Ma \cdot sin\alpha, \tag{7}$$

$$X_B^{\varphi} h - X_A^{\varphi} h = -\omega^2 \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha. \tag{8}$$

ამოვხსნათ (6) და (7) განტოლებები, მივიღებთ

$$2Y_A^{\varphi} = \omega^2 Mb + \omega^2 Mb\frac{a}{h} sin\alpha \Longrightarrow Y_A^{\varphi} = \frac{\omega^2 Mb}{2}\left(1 + \frac{a}{h} sin\alpha\right).$$

$$2Y_B^{\varphi} = \omega^2 Mb - \omega^2 Mb\frac{a}{h} sin\alpha \Longrightarrow Y_B^{\varphi} = \frac{\omega^2 Mb}{2}\left(1 - \frac{a}{h} sin\alpha\right).$$

შემდეგ ამოვხსნათ (1) და (4) განტოლებები, მივიღებთ
:

$$2X_B^{\text{დ}} = \omega^2 Ma \cdot cos\alpha - \frac{\omega^2 M}{2h}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_B^{\text{დ}} = \frac{\omega^2 M}{2}\left[a \cdot cos\alpha - \left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{sin2\alpha}{2h}\right],$$

$$2X_A^{\text{დ}} = \omega^2 Ma \cdot cos\alpha + \frac{\omega^2 M}{2h}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) sin2\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_A^{\text{დ}} = \frac{\omega^2 M}{2}\left[a \cdot cos\alpha + \left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{sin2\alpha}{2h}\right].$$

დინამიკური წნევები საკისრების რეაქციების საპირისპიროდ არის მიმართული, ე.ი.

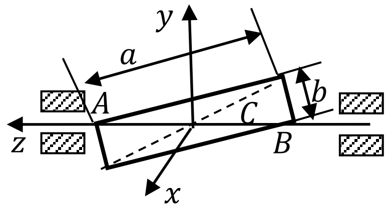
$$N_{Ax} = X_A = -X_A^{\text{დ}}, \;\; N_{Bx} = X_B = -X_B^{\text{დ}},$$
$$N_{Ay} = Y_A = -Y_A^{\text{დ}}, \;\; N_{By} = Y_B = -Y_B^{\text{დ}}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$X_A = -\frac{\omega^2 M}{2}\left[a \cdot cos\alpha - \left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{sin2\alpha}{2h}\right];$$
$$X_B = \frac{\omega^2 M}{2}\left[a \cdot cos\alpha + \left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{sin2\alpha}{2h}\right];$$
$$Y_A = -\frac{Mb}{2}\left(1 + \frac{a}{h} sin\alpha\right)\omega^2; \; Y_B = -\frac{Mb}{2}\left(1 - \frac{a}{h} sin\alpha\right)\omega^2.$$

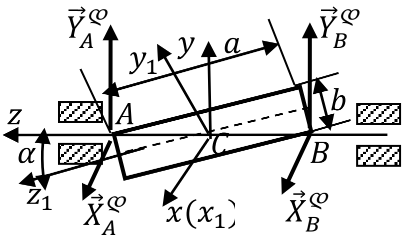
ამოცანა 42.16

M მასის ერთგვაროვანი მართკუთხა ფირფიტა თანაბრად ბრუნავს თავისი AB დიაგონალის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ ფირფიტის დინამიკური წნევები A და B საყრდენებზე, თუ გვერდების სიგრძებია a და b.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ საყრდენებს შორის მანძილი (იხ. ნახაზი):

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



დინამიკური რეაქციების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი:

$$\sum Y_k = 0,\ Y_A^{\text{ღ}} + Y_B^{\text{ღ}} = 0, \quad (1)$$

$$\sum X_k = 0,\ X_A^{\text{ღ}} + X_B^{\text{ღ}} = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, Y_B^{\text{ღ}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - Y_A^{\text{ღ}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \omega^2 J_{yz} = 0 \qquad (3)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, X_A^{\text{ღ}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - X_B^{\text{ღ}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \omega^2 J_{xz} = 0\,. \qquad (4)$$

რადგან Cx ღერძი ინერციის მთავარი ღერძია, ამიტომ $J_{xz}=0$. ამოვხსნათ ერთად (2) და (4) განტოლებები, მივიღებთ:

$$X_A^{\text{ღ}} = X_B^{\text{ღ}} = 0.$$

გამოვთვალოთ J_{z_1} და J_{y_1}:

$$J_{y_1} = \frac{Ma^2}{12},\ \ J_{z_1} = \frac{Mb^2}{12}.$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

განვსაზღვრავთ ფირფიტის ცენტრიდანულ მომენტს:

$$J_{yz} = \frac{1}{2}\left(J_{y_1} - J_{z_1}\right)sin2\alpha = \left(J_{y_1} - J_{z_1}\right)sin\alpha\, cos\alpha =$$

$$= \left(\frac{Ma^2}{12} - \frac{Mb^2}{12}\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Mab(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}.$$

ამოვხსნათ ერთად (1) და (3) განტოლებები, მივიღებთ:

$$Y_A^{\text{ღ}} + Y_B^{\text{ღ}} = 0,$$

$$Y_B^{დ} - Y_A^{დ} = \frac{2\omega^2}{\sqrt{a^2+b^2}} J_{yz} = \frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{6(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

შევკრიბოთ ეს განტოლებები, მივიღებთ:

$$Y_B^{დ} = \frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

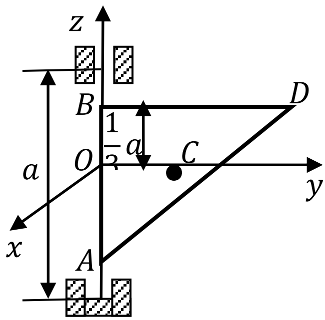
მაშინ (1) განტოლებიდან გვაქვს:

$$Y_A^{დ} = -\frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $X_A = 0,\ Y_A = -\frac{Mab\omega^2\left(a^2-b^2\right)}{12(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}};$

$$X_B = 0,\quad Y_B = \frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

ამოცანა 42.17



როგორი ω კუთხური სიჩქარით უნდა ბრუნავდეს თავისი კათეტის გარშემო მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის ფირფიტა ABD. რომ ქვედა B საყრდენზე გვერდითი წნევა იყოს ნულის ტოლი? მანძილი საყრდენებს შორის ჩათვალეთ AB კათეტის ტოლად.

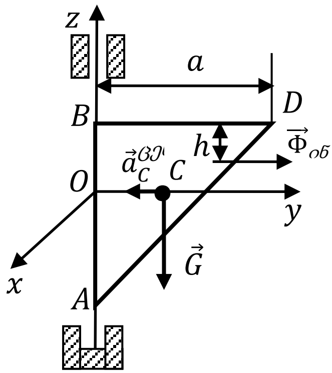
ა მ ო ხ ს ნ ა. იმისათვის, რომ დინამიკური რეაქციები B საყრდენზე იყოს ნული, უნდა სრულდებოდეს პირობა (იხ. ნახაზი):

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \Phi_{ობ}h - G\,\frac{1}{3}a = 0 \quad (1)$$

ვიპოვოთ ინერციის ძალა:

$$\Phi_{ობ} = ma_C^{ცენ} = \frac{1}{3}ma\omega^2.$$

განსაზღვრეთ ინერციის ძალის მოქმედების ფუძის მდებარეობა



$$h = \frac{\left|M_A^{\Phi}\right|}{\Phi_{ობ}},$$

სადაც

$$\left|M_A^{\Phi}\right| = \omega^2 J_{yz} = \omega^2 \frac{ma^2}{12}.$$

მაშინ

$$h = \frac{\omega^2 ma^2}{12}\frac{3}{ma\omega^2} = \frac{a}{4}.$$

(1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{ma\omega^2}{3}\frac{a}{4} = \frac{mga}{3}.$$

აქედან

$$\omega^2 = \frac{4g}{a}, \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$

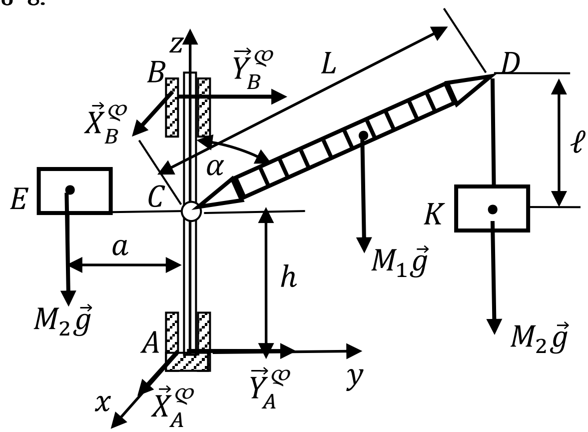
ამოცანა 42.18

ამწის მბრუნავი ნაწილი შედგება L სიგრძისა და M_1 მასის CD ისრისაგან, E საპირწონისა და თითოეული M_2 მასის K ტვირთისაგან (იხ. 34.31 ამოცანის ნახაზი). მუდმივი მამუხრუჭებელი მომენტის ჩართვის შემდეგ ამწე,რომელიც ბრუნავდა $n = 1{,}5$ ბრ/წთ შესაბამისი კუთხური სიჩქარით, ჩერდება 2წმ-ის შემდეგ.

განიხილეთ ისარი, როგორც ერთგვაროვანი წვრილი ძელი, ხოლო საპირწონე ტვირთით წერტილოვან მასები; განსაზღვრეთ ამწის A და B საყრდენთა დინამიკური რეაქციები დამუხრუჭების ბოლოს. ამწის საყრდენებს შორის მანძილი $AB = 3$მ, $M_1 = 8$ტ, $M_2 = 5$ტ, $\alpha = 45^0$, $L = 30$მ. $\ell = 10$მ. მთელი სისტემის მასათა ცენტრი იმყოფება ბრუნვის ღერძზეა; x და y ღერძები დაკავშირებულია ამწესთან; CD ისარი მდებარეობს yz სიბრტეში.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ 34.34 ამოცანის პასუხით (დავუშვათ $M_2 = M_1$).

ა მ ო ხ ს ნ ა.



34.31 ამოცანის ამოხსნიდან ვიცით, რომ

$$I_{xy} = I_{xz} = 0,$$

$$I_{yz} = \frac{M_2 + \frac{1}{3}M_1}{2} L^2 sin2\alpha - M_2 L\ell sin\alpha.$$

განვსაზღვროთ საყრდენების დინამიკური რეაქციები (იხ. ნახაზი):

$$X_A^{\text{დ}} + X_B^{\text{დ}} = -M\omega^2 x_C - M\varepsilon y_C, \qquad (1)$$

$$Y_A^{\text{დ}} + Y_B^{\text{დ}} = -M\omega^2 y_C + M\varepsilon x_C, \qquad (2)$$

$$-Y_B^{\text{დ}} AB = \omega^2 J_{yz} - \varepsilon J_{zx}, \qquad (3)$$

$$X_B^{\text{დ}} AB = -\omega^2 J_{zx} - \varepsilon J_{yz}. \qquad (4)$$

რადგან ამწის მასათა ცენტრი იმყოფება ბრუნვის AB ღერძზე, ამიტომ $x_C = y_C = 0$. დინამიკური რეაქციები აუცილებელია განისაზღვროს ამწის დამუხრუჭების ბოლოს, ამიტომ $\omega = 0$. ვიპოვოთ ამწის კუთხური შენელება დამუხრუჭების მომენტში:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

რადგან $\omega = 0$, ამიტომ

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\pi n}{30t}.$$

ამ განტოლების გათვალისწინებით (1)-(4) მიიღებს სახეს:

$$X_A^{\text{დ}} + X_B^{\text{დ}} = 0, \qquad (5)$$

$$Y_A^{\text{დ}} + Y_B^{\text{დ}} = 0, \qquad (6)$$

$$-Y_B^{\text{დ}} AB = 0, \qquad (7)$$

$$X_B^{\wp} AB = \frac{\pi n}{30t}\left(\frac{M_2+\frac{1}{3}M_1}{2} L^2 sin2\alpha - M_2 L\ell sin\alpha\right). \qquad (8)$$

ამოვხსნათ (7) და (6) განტოლებები ერთად, მივიღებთ:

$$Y_A = - \; Y_B = 0.$$

(8) განტოლებიდან ვიპოვით:

$$X_B^{\wp} = \frac{\pi n}{AB30t}\left(\frac{M_2+\frac{1}{3}M_1}{2} L^2 sin2\alpha - M_2 L\ell sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5}{3 \cdot 30 \cdot 2}\left(\frac{5000+\frac{8000}{3}}{2} \cdot 30^2 \cdot sin90^0 - 5000 \cdot 30 \cdot 10 \cdot\cdot\, sin45^0\right)$$

$$= 62\,525(ნ) = 62{,}5(კნ).$$

მაშინ (5) განტოლების თანახმად

$$X_A^{\wp} = -X_B^{\wp} = -62{,}5კნ.$$

შენიშვნა; ამოცანათა კრებულში პასუხი არასწორია.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $Y_A = - \; Y_B = 0, \quad X_B = - X_A = 62{,}5კნ.$

§43. შერეული ამოცანები

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

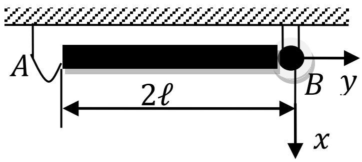
შერეული ამოცანების ამოხსნისათვის მოითხოვება დინამიკის ყველა თეორემის ცოდნა

მოცემული პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

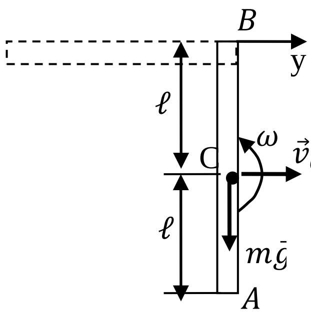
1. გამოვსახოთ სხეული, რომლის მოძრაობა განიხილება.;
2. გამოვსახოთ ნახაზზე სხეულზე მოქმედი ძალები, მათ შორის საყრდნეების რეაქციის ძალებიც;
3. ჩავწეროთ ზოგადი სახით გამოსაყენებული თეორემები (თეორემის შედეგები) ან განტოლებები;.
4. შევადგინოთ მოცემული ამოცანისათვის ანალიზური გამოსახულებები და ზოგადი სახით ვიპოვოთ საზიებელი სიდიდეები..

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 43.1



2ℓ სიგრძის ერთგვაროვანი AB კოჭი დამაგრებული ბოლოებით ჰორიზონტალურ მდგომარეობაშია. გარკვეულ მომენტში A ბოლო თავისუფლდება და კოჭი ვარდება ისე, რომ იგი ბრუნავს B ბოლოზე გამავალი ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო; იმ მომენტში, როცა კოჭი ვერტიკალურია, თავისუფლდება მისი B ბოლოც. განსაზრვრეთ კოჭის შემდგომი მოძრაობისას მასათა ცენტრის ტრაექტორია და ω კუთხური სიჩქარე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. როდესაც კოჭი მიაღწევს ვერტიკალურ მდებარეობას და თავიცუფლდება ბმისაგან, B წერტილში ხორციელდება გადასვლა ბრუნვითი მოძრაობიდან ბრტყელ მოძრაობაში. გამოვთვალოთ კოჭის მასათა ცენტრის v_C სიჩქარე და ω კუთხური სიჩქარე (იხ. ნახაზი).

კინეტკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$T - T_0 = \sum A_k^e$$

რადგან კოჭმა ბრუნვა დაიწყო წონასწორობიდან, ამიტომ $T_0 = 0$ და

$$T = \sum A_k^e, \tag{1}$$

კოჭის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} J_B \omega^2,$$

სადაც $J_B = \frac{1}{3} m(2\ell)^2 = \frac{4}{3} m\ell^2 -$ ღეროს ინერციის მომენტია. მაშინ

$$T = \frac{2}{3} m\ell^2 \omega^2. \tag{2}$$

გარე ძალების მუშაობათა ჯამი ხასიათდება $m\vec{g}$ სიმძიმის ძალის მუშაობით, როდესაც კოჭი ჰორიზონტალური მდებარეობიდან გადადის ვერტიკალურ მდებარეობაში, ე.ი. როცა იგი მობრუნდება $\varphi = \frac{\pi}{2}$ კუთხით. ამასთან, მასათა C ცენტრი დაეშვება ℓ მანძილზე, ამიტომ

$$\sum A_k^e = mg\ell. \tag{3}$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\frac{2}{3} m\ell^2 \omega^2 = mg\ell.$$

აქედან

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}. \tag{4}$$

ვიპოვოთ მასათა ცენტრის სიჩქარე

$$v_C = \omega\ell = \sqrt{\frac{3}{2} g\ell}. \tag{5}$$

შევადგინოთ კოჭის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

$$m\ddot{x}_C = mg, \tag{6}$$

$$m\ddot{y}_C = 0, \tag{8}$$

$$J_C \frac{d\omega}{dt} = 0. \tag{9}$$

(6) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\ddot{x}_C = g \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_C = gt + C_1, \\ x_C = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{cases} \tag{9}$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით:

$$t = 0,\ x_C(0) = \ell,\ \dot{x}_C(0) = 0,$$

და განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები: $C_1 = 0,\ C_2 = \ell,$

მაშასადამე,

$$x_C = \frac{gt^2}{2} + \ell. \qquad (10)$$

(7) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{cases} \dot{y}_C = C_3, \\ y_C = C_3 t + C_4. \end{cases} \qquad (11)$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით:

$$t = 0,\ y_C(0) = 0,\ \dot{y}_C(0) = v_C,$$

და (11) სისტემიდან განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები: $C_3 = v_C$, $C_4 = 0$.
მაშინ

$$y = v_C t.$$

აქედან

$$t = \frac{y}{v_C}.$$

ჩავსვათ $t -$ს მიღებული მნიშვნელობა (10) ფორმულაში და განვსაზღვროთ ტრაექტორიის განტოლება კოორდინატული ფორმით:

$$x = \frac{gy^2}{2v^2} + \ell.$$

მიღებულ განტოლებაში ჩავსვათ (5) გამოსახულება

$$x = \frac{2gy^2}{2 \cdot 3g\ell} + \ell,$$

საიდანაც

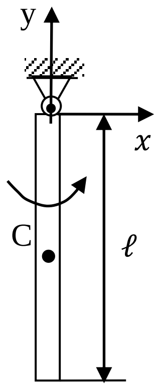
$$y^2 = 3\ell x - 3\ell^2.$$

(8) განტილებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\omega = const.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> პარაბოლა $y^2 = 3\ell x - 3\ell^2;\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}.$

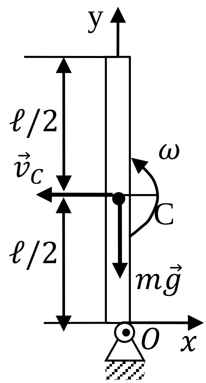
ამოცანა 43.2



ℓ სიგრძის მძიმე ერთგვაროვანი ღერო ზედა ბოლოთი ჩამოკიდებულია ჰორიზონტალურ O ღერძზე ვერტიკალურ მდებარეობაში ღეროს მიანიჭეს $\omega_0 = 3\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ კ უთხური სიჩქარე. ნახევარი ბრუნვის შემდეგ ღერო შორდება O ღერძს. იპოვეთ ღეროს შემდგომი მოძრაობისას მასათა ცენტრის ტრაექტორია და ბრუნვის ω კუთხური სიჩქარე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ღეროს მასათა ცენტრის v_C სიჩქარე და ω კუთხური სიჩქარე O წერტილიდან მისი მოცილების მომენტში.

მასათა ცენტრის v_C სიჩქარეს ვიპოვით კინეტკური ენერგიის ვლილების თეორემის გამოყენებით:



$$T - T_0 = \sum A_k^e \qquad (1)$$

მოცემულ შემთხვევაში ღეროს კინეტიკური ენერგია საწყის მომენტში:

$$T_0 = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2 \cdot 9\frac{g}{\ell} = \frac{3}{2}mg\ell. \quad (2)$$

ღეროს კინეტიკური ენერგია საბოლოო (უმაღლეს) მდებარეობაში

$$T = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2. \qquad (3)$$

გამოვთვალოთ გარე ძალების ($m\vec{g}$ სიმძიმის ძალა) მუშაობა ღეროს უმდაბლესი მდებარეობიდან უმაღლეს მდებარეობაში გადაადგილებისას, ე.ი. როცა ღერო მობრუნდება $\varphi = \pi$ კუთხით და მისი მასათა C ცენტრი აიწევს $h = \ell$ სიმაღლეზე, ამიტომ

$$\sum A_k^e = -mg\ell. \qquad (4)$$

ჩავსვათ (2)-(4) გამოსახულებები (1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{6}m\ell^2\omega^2 - \frac{3}{2}mg\ell = -mg\ell \implies \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

განვსაზღვროთ მასათა ცენტრის v_C სიჩქარე:

$$v_C = m\frac{\ell}{2} = \sqrt{\frac{3g\ell}{4}}.$$

შევადგინოთ ღეროს ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

$$m\ddot{x}_C = 0, \tag{5}$$
$$m\ddot{y}_C = -mg, \tag{6}$$
$$J_C \frac{d\omega}{dt} = 0. \tag{7}$$

(5) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ
$$\begin{cases} \dot{x}_C = C_1, \\ x_C = C_1 t + C_2. \end{cases} \tag{8}$$
ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით:
$$t = 0,\ x_C(0) = 0,\ \dot{x}_C(0) =\text{-}v_C,$$
და განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები: $C_1 = -v_C,\ C_2 = 0,$ მაშასადამე,
$$x_C = -v_C t.$$
აქედან
$$t = \frac{x_C}{v_C}.$$

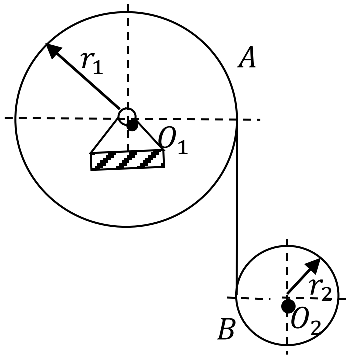
(6) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ
$$\begin{cases} \dot{y}_C = -gt + C_3, \\ y_C = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \end{cases} \tag{9}$$
ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით:
$$t = 0,\ y_C(0) = \frac{\ell}{2},\ \dot{y}_C(0) = 0,$$
და (9) სისტემიდან განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები:
$$C_3 = 0, \qquad C_4 = \frac{\ell}{2}.$$
მაშინ
$$y_C = -\frac{gt^2}{2} + \frac{\ell}{2}.$$
ჩავსვათ $t = \frac{x_C}{v_C}$ მნიშვნელობა მიღებული ფორმულაში და განვსაზღვროთ ღეროს მასათა ცენტრის ტრაექტორიის განტოლება კოორდინატული ფორმით:
$$y_C = -\frac{g{x_C}^2}{2{v_C}^2} + \frac{\ell}{2}.$$
მიღებულ განტოლებაში ჩავსვათ $v_C -$ ს გამოსახულება, მივიღებთ:
$$y_C = \frac{\ell}{2} - \frac{4g{x_C}^2}{2 \cdot 3g\ell}$$
საიდანაც

$$y_C = \frac{\ell}{2} - \frac{2}{3\ell} x_C{}^2 -$$

პარაბოლის განტოლება.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> პარაბოლა $y_C = \frac{\ell}{2} - \frac{2}{3\ell} x_C{}^2$; $\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$.

ამოცანა 43.3

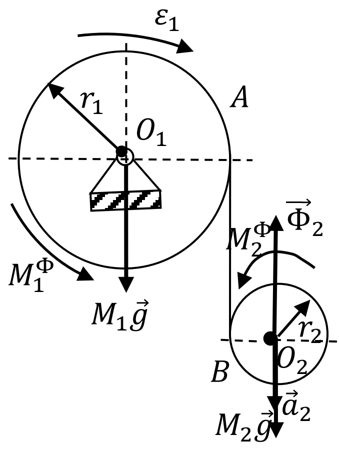


M_1 და M_2 მასისა და r_1 და r_2 რადიუსის ორ ერთგვაროვან წრიულ ცილინდზე დახვეულია ორი ღუნვადი ძაფი, რომელთა ხვიები სიმეტრიულია. ცილინდრის ფუძეების პარალელური საშუალო სიბრტყეების მიმართ ცილინრდთა ღერძები ჰორიზონტალურია, ამასთან მათი მსახველები უდიდესი ქანობის წრფეების მართობულია. A ცილინდრის ღერძი უძრავია.; B ცილინდრი წონასწორობის მდებარეობიდან ვარდება სიმძიმის ძალის გავლენით. განსაზღვრეთ მოძრაობის დაწყებიდან t დროის შემდეგ:

1) ცილინდრების ω_1 და ω_2 კუთხური სიჩქარეეები;

2) B ცილინდრის მასათა ცენტრის მიერ გავლილი s მანძილი;

3) ძაფების T დაჭიმულობები, თუ t მომენტში ძაფები კიდევ რჩებიან დახვეული ორივე ცილინდრზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. აზრობრივ გავაჩეროთ მექანიკური სისტემა გავაწონასწოროთ რა ის მეორე ცილინდრის $\overrightarrow{\Phi}_2$ ინერციის ძალით და M_1^{Φ} და M_2^{Φ} ინერციის ძალების მომენტებით (ნახ.1):

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2(a_2^e + a_2^r) = M_2(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2),$$

$$M_1^{\Phi} = J_1\varepsilon_1 = \frac{1}{2}M_1 r_1^2\varepsilon_1, \tag{1}$$

$$M_2^{\Phi} = J_2\varepsilon_2 = \frac{1}{2}M_2 r_2^2\varepsilon_2.$$

ამასთან გავითვალისწინეთ, რომ წარმტანი $\vec{a}_2^e$ და ფარდობითი $\vec{a}_2^r$ აჩქარებების ვექტორები პარალელურია და, მაშასადამე, მათი შეკრება ალგებრულად ნახ.1
შესაძლებელია, აგრეთვე, ის ,რომ ორივე ცილინდრი ერთგვაროვანია, ე.ი.

$$J_1 = \frac{1}{2}M_1 r_1^2,\ \ J_2 = \frac{1}{2}M_2 r_2^2.$$

“წონასწორობის” განტოლებად ავიღოთ განტოლება

$$\sum M_{O1} = 0,$$

ან

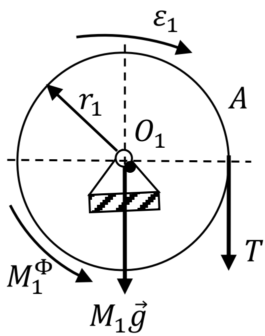
$$M_1^{\Phi} + M_2^{\Phi} + \Phi_2(r_1 + r_2) - M_2 g(r_1 + r_2) = 0. \tag{2}$$

(1)-ის გათვალისწინებით (2) განტოლება ღებულობს სახეს:

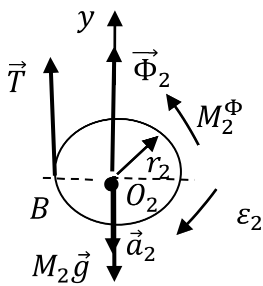
$$M_1 r_1^2\varepsilon_1 + M_2 r_2^2\varepsilon_2 + 2M_2(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2) - 2M_2 g(r_1 + r_2) = 0,$$

ან

$$(M_1 r_1^2 + 2M_2 r_1^2 + 2M_2 r_1 r_2)\varepsilon_1 + \left(3r_2^2 + 2r_1 r_2\right)M_2\varepsilon_2 -$$
$$-2M_2 g(r_1 + r_2) = 0, \tag{3}$$



ნახ.2.



ნახ.3.

თუ ცილინდრებს განვიხილავთ ცალ-ცალკე და გავითვალისწინებთ, რომ B ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, მაშინ მივიღებთ:

A ცილინდრისათვის (ნახ.2):

$$\sum M_{O1} = 0,$$

ან

$$M_1^{\Phi} - Tr_1 = 0; \tag{4}$$

B ცილინდრისათვის (ნახ.3):

$$\sum M_{O2} = 0,$$

ან

$$M_2^{\Phi} - Tr_2 = 0; \qquad (5)$$

(4) და (5) ტოლობებიდან განვსაზღვროთ T დაჭიმულობები და გავუტოლოთ ერთმანეთს:

$$\frac{M_1^{\Phi}}{r_1} = \frac{M_2^{\Phi}}{r_2},$$

აქედან (1) გამოსახულებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$M_1 r_1 \varepsilon_1 = M_2 r_2 \varepsilon_2. \qquad (6)$$

(6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\varepsilon_2 = \frac{M_1 r_1}{M_2 r_2} \varepsilon_1.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (3) ფორმულაში:

$$(3M_1 r_1^2 + 3M_1 r_1 r_2 + 2M_2 r_1^2 + 2M_2 r_1 r_2)\varepsilon_1 - 2\mathrm{M}_2 g(r_1 + r_2) = 0$$

და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$r_1(3M_1 + 2M_2)(r_1 + r_2)\varepsilon_1 = 2\mathrm{M}_2 g(r_1 + r_2).$$

აქედან

$$\varepsilon_1 = \frac{2M_2 g}{r_1(3M_1 + 2M_2)}.$$

ε_1 –ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ ε_2 –ის გამოსახულებაში, მაშინ

$$\varepsilon_2 = \frac{2M_1 g}{r_1(3M_1 + 2M_2)}.$$

(4) განტოლებიდან ვიპოვოთ ძაფების დაჭიმულობები:

$$T = \frac{M_1 M_2 g}{3M_1 + 2M_2}.$$

რადგან მოძრაობა დაიწყო წონასწორობის მდებარეობიდან, ე.ი. $\omega_1(0) = 0, \omega_2(0) = 0,$ ამიტომ t მომენტში ცილინდრების კუთხური სიჩქარეები იქნება:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 t = \frac{2M_2 g}{r_1(3M_1 + 2M_2)} t,$$

$$\omega_2 = \varepsilon_2 t = \frac{2M_1 g}{r_2(3M_1 + 2M_2)}t.$$

B ცილინდრის მასათა ცენტრის a_2 აჩქარებას ვიპოვით Φ_2 −ის გამოსახულებიდან [იხ. ფორმულა (1)]:

$$a_2 = a_2^e + a_2^r = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 = \frac{2(M_1 + M_2)g}{3M_1 + 2M_2}$$

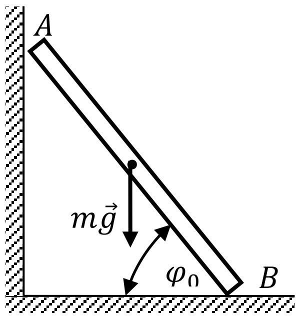
აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $\dot{s}(0) = 0, s(0) = 0,$ მივიღებთ:

$$s = \frac{a_2 t^2}{2} = \frac{(M_1 + M_2)g}{3M_1 + 2M_2}t^2.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 1) $\omega_1 = \frac{2M_2 g}{r_1(3M_1+2M_2)}t$; $\omega_2 = \frac{2M_1 g}{r_2(3M_1+2M_2)}t$;
2) $s = \frac{(M_1+M_2)g}{3M_1+2M_2}t^2$; 3) $T = \frac{M_1 M_2 g}{3M_1+2M_2}$.

ამოცანა 43.4

a სიგრძის ერთგვაროვანი AB ღერო მდებარეობს ვერტიკალურ სიბრტყეში ჰორიზონტთან φ_0 კუთხით ისე, რომ A ბოლოთი ეყრდნობა გლუვ კედელს, ხოლო B ბოლოთი გლუვ ჰორიზონტალურ იატაკს. შემდეგ ღეროს მისცეს ვარდნის საშუალება საწყისი სიჩქარის გარეშე. 1) განსაზღვრეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე და აჩქარება; 2) იპოვეთ, როგორ φ_0 კუთხეს ქმნის ღერო ჰორიზონტთან იმ მომენტში, როცა იგი სცილდება კედელს.



ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) კინეტკური ენერგიის ცვლილების თეორემის გამოყენებით:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \qquad (1)$$

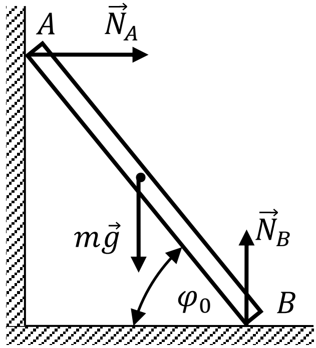
სადაც T_0 −კინეტიკური ენერგიაა როცა $\varphi = \varphi_0, T_0 = 0$; T −კინეტიკური ენერგია φ კუთხის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გამოითვლება ფორმულით (კენიგის თეორემა):

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + J_C\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left[\dot{x}_C = \frac{a}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y}_C = -\frac{a}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \; J_C = \frac{ma^2}{12}\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 sin^2\varphi + \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi\right) + \frac{ma^2}{12}\cdot\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6}.$$

$m\vec{g}$ სიმძიმის ძალის მუშაობა კუთხის φ_0 –დან φ –მდე ცვლილებისას (იხ. ნახაზი):

$$\sum A_k^e = \frac{mga}{2}(sin\varphi_0 - sin\varphi).$$



მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6} = \frac{mga}{2}(sin\varphi_0 - sin\varphi).$$

აქედან

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{a}(sin\varphi_0 - sin\varphi).$$

მაშასადამე, AB ღეროს კუთხური სიჩქარე

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}(sin\varphi_0 - sin\varphi)}. \qquad (2)$$

(2) ტოლობა გავაწარმოოთ დროით და ვიპოვოთ ღეროს კუთხური აჩქარება:

$$\frac{d\dot{\varphi}^2}{dt} = 2\,\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{a}\dot{\varphi}cos\varphi,$$

აქედან

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2a}cos\varphi.$$

2) კედლის რეაქცია A წერტილში

$$N_A = m\ddot{x}_C = \frac{ma}{2}(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi) =$$

$$= \frac{ma}{2}\left[-\frac{3g}{2a}cos\varphi sin\varphi + \frac{3g}{a}(sin\varphi_0 - sin\varphi)cos\varphi\right].$$

დროის იმ მომენტში, როცა ღერო მოცილდება კედელს, $N_A = 0$, ე.ი.

$$sin\varphi_1 = \frac{2}{3}sin\varphi_0.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 1) $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}(sin\varphi_0 - sin\varphi)}$; 2) $\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2a}cos\varphi$;

3) $sin\varphi_1 = \frac{2}{3}sin\varphi_0$.

ამოცანა 43.5

გამოიყენეთ წინა ამოცანის პირობები, განსაზღვრეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე და მისი ქვედა ბოლოს სიჩქარე ღეროს იატაკზე დაცემის მომენტში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კედლიდან AB ღეროს მოცილების მომენტში მისი მასათა ცენტრის სიჩქარის ჰორიზონტალური მდგენელი მუდმივია და უდრის:

$$v_{Cx} = \frac{a}{2}\dot{\varphi}sin\varphi\Big|_{\varphi=arcsin\frac{2}{3}sin\varphi} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3g}{a}\left(sin\varphi_0 - \frac{2}{3}sin\varphi_0\right)}\cdot\frac{2}{3}sin\varphi_0 =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{a}sin\varphi_0}\cdot\frac{2}{3}sin\varphi_0 = \frac{1}{3}sin\varphi_0\sqrt{gasin\varphi_0}.$$

კედლიდან მოცილების მომენტში AB ღერო ასრულებს მყის-გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

$$v_B = v_{Cx} = \frac{1}{3}sin\varphi_0\sqrt{gasin\varphi_0}.$$

AB ღეროს კინეტიკური ენერგია კედლიდან მოცილების შემდეგ:

$$T = \frac{m}{2}\left(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2\right) + \frac{ma^2}{12}\frac{\dot{\varphi}^2}{2} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{ga}{9}\dot{\varphi}^2 sin^3\varphi_0 + \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi\right) + \frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{24};$$

იატაკზე დაცემისას, ე.ი. როცა $\varphi = 0$,

$$T_{|\varphi=0} = \frac{mga}{18}sin^3\varphi_0 + \frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6}.$$

ამგვარად, გამოვიყენებთ რა კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემას დროის $\varphi = arcsin\frac{2}{3}sin\varphi$ მომენტიდან $\varphi = 0$ მომენტამდე შუალედში, ვიპოვით ღეროს კუთხურ სიჩქარეს დაცემის მომენტში

$$\frac{mga}{18}sin^3\varphi_0 + \frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6} - \frac{mga}{6}sin\varphi_0 = \frac{mga}{2}\left(\frac{2}{3}sin\varphi_0 - sin0\right),$$

$$\frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6} = \frac{mga}{2}sin\varphi_0\left(1 - \frac{1}{9}sin^2\varphi_0\right),$$

აქედან

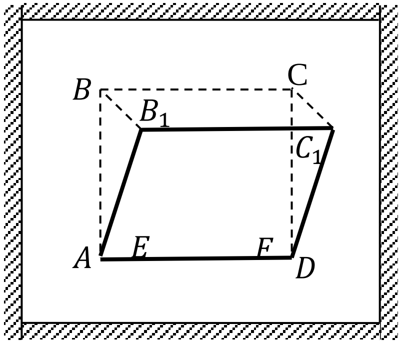
$$\dot{\varphi}_{|\varphi=0} = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}sin^2\varphi_0\right)sin\varphi_0}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}sin^2\varphi_0\right)sin\varphi_0}$;

$$v_B = \frac{1}{3}sin\varphi_0\sqrt{gasin\varphi_0}.$$

ამოცანა 43.6

თხელი ერთგვაროვანი მართკუთხა ფორმის $ABCD$ ფიცარი მიდგმულია ვერტიკალურ კედელზე და ეყრდნობა ორ უთავო გლუვ E და F ლურსმანს; გარკვეულ მომენტში ფიცარი იწყებს ვარდნას წრფის გარშემო ბრუნვითი უმნიშვნელო მცირე კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ, როგორ α კუთხეს ქმნის ფიცარი კედელთან იმ მომენტში, როცა იგი ჩამოვარდება ლურსმნებიდან. ფიცრის სრიალი ლურსმნებზე მათგან დაცილებამდე გამორიცხულია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. კინეტკური ენერგიის ცვლილების თეორემის გამოყენებით:

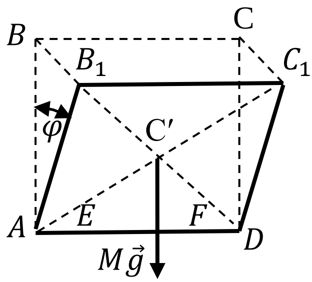
$$T - T_0 = \sum A_k^e ,$$

სადაც $T_0 = 0$; $\quad T = \frac{m \cdot AB^2}{3}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}$;

$$\sum A_k^e = mg\frac{AB}{2}(1 - cos\varphi), \;\; \varphi = \angle BAB_1 = \alpha.$$

მასათა ცენტრის (მოცემულ შემთხვევაში C წერტილი) მოძრაობის შესახებ თეორემის საფუძველზე ჩავწერთ:

$$m\ddot{x}_{C'} = N_x, \qquad m\ddot{y}_{C'} = N_y - mg.$$



ვიპოვოთ დაფის კუთხური სიჩქარე

$$\dot{\varphi} = \frac{m \cdot AB^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{6} = \frac{m \cdot AB}{2}(1 - cos\varphi),$$

აქედან

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g \cdot (1 - cos\varphi)}{AB}, \qquad (1)$$

ეს გამოსახულ;ება გავაწარმოოთ დროით და ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება

$$2\,\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{3gsin\varphi}{AB}\dot{\varphi},$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3gsin\varphi}{2AB}. \qquad (2)$$

დაფის მასათა ცენტრის კოორდინატები (იხ. ნახაზი):

$$x_{C'} = \frac{AB}{2} \cdot sin\varphi, \qquad y_{C'} = \frac{AB}{2} \cdot cos\varphi,$$

აქედან

$$\dot{x_{C'}} = \frac{AB}{2} \cdot \dot{\varphi} cos\varphi, \qquad \dot{y}_{C'} = -\frac{AB}{2} \cdot \dot{\varphi} sin\varphi;$$

$$\ddot{x}_{C'} = \frac{AB}{2} \cdot (\,\ddot{\varphi} cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi),$$
$$\ddot{y}_{C'} = -\frac{AB}{2} \cdot (\,\ddot{\varphi} sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi). \qquad (3)$$

რეაქციის ჰორიზონტალური მდგენელი შეიცვლის მიმართულებას, როცა $N_x = m\ddot{x}_C = 0$, ე.ი. როცა

$$\ddot{\varphi} cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

ჩავსვათ (1) და (2) გამოსახულებები (4) განტოლებაში და განვსაზღვროთ φ_1 კუთხე, რომლის დროსაც რეაქციის ჰორიზონტალური მდგენელი N_x შეიცვლის მიმართულებას:

$$\frac{3g sin\varphi cos\varphi}{2AB} - \frac{3g(1 - cos\varphi) sin\varphi}{AB} = 0$$

ან

$$cos\varphi_1 - 2 + 2cos\varphi_1 = 0,$$

საიდანაც

$$cos\varphi_1 = \frac{2}{3}, \;\; \varphi_1 = \alpha_1 = arccos\frac{2}{3} = 48^0 11'.$$

რეაქციის ვერტიკალური მდგენელი N_y შეიცვლის მიმართულებას როცა $N_y = m\ddot{y}_C + mg = 0$, ე.ი. როცა

$$\ddot{y}_{C'} + g = 0$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება მიღებულ განტოლებაში და განვსაზღვროთ φ_2 კუთხე, რომლის დროსაც მოხდება დაფის მოცილება ლურსმნებიდან:

$$-\frac{AB}{2} \cdot (\,\ddot{\varphi} sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi) + g = 0,$$
$$-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3sin^2\varphi}{2} + 3(1 - cos\varphi) cos\varphi\right] + 1 = 0,$$

$$4 - 3sin^2\varphi - 6cos\varphi + 6cos^2\varphi = 0,$$
$$6cos^2\varphi - 6cos\varphi + 1 = 0.$$

მაშინ

$$cos\varphi_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9}}{9} = \frac{1}{3},$$

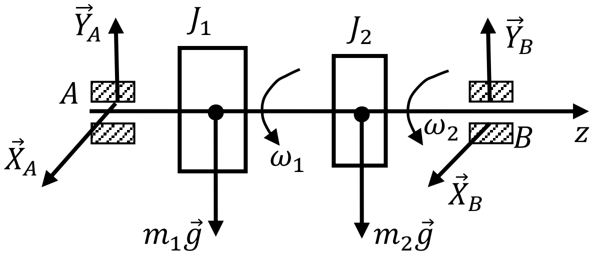
$$\varphi_2 = \alpha_2 = arccos\frac{1}{3} = 70^0 32'.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\alpha_1 = arccos\frac{2}{3} = 48^0 11'$; $\alpha_2 = arccos\frac{1}{3} = 70^0 32'$.

ამოცანა 43.7

ორი დისკო ბრუნავს ერთი და იმავე ღერძის გარშემო ω_1 და ω_2 კუთხური სიჩქარეებით. დისკოთა ინერციის მომენტები ამ ღერძის მიმართ არის J_1 და J_2. განსაზღვრეთ კინეტიკური ენერგიის დანაკარგი იმ შემთხვევაში, როცა ორივე დისკო უეცრივ შეერთებული იქნება ღეროთი. ღეროს მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



რადგან მბრუნავ დისკოზე მოძრავი გარე ძალების მომენტები ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის ნულს (იხ. ნახაზი), ამიტომ კინეტიკური მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ რჩება მუდმივი (გარე ძალების ვექტორები კვეთენ ბრუნვის ღერძს)

მაშასადამე,

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega,$$
$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2},$$

სადაც ω −დისკოების კუთხური სიჩქარეა მათი შეერთების შემდეგ.

კინეტიკური ენერგიის დანაკარგის განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ კინეტკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$\Delta T = T_2 - T_1,$$

სადაც T_2 −სისტემის კინეტკური ენერგიაა დისკოების შეერთებამდე; T_1 − სისტემის კინეტკური ენერგია დისკოების შეერთების შემდეგ.

ვიპოვოთ

$$T_2 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2},$$

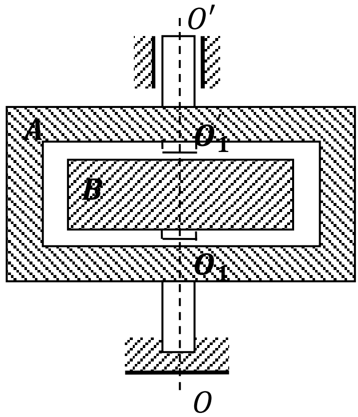
$$T_1 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\left(\frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}\right)^2.$$

მაშინ

$$\Delta T = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\left(\frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\frac{J_1^2\omega_1^2 + 2J_1\omega_1J_2\omega_2 + J_2^2\omega_2^2}{J_1 + J_2} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{J_1J_2}{J_1 + J_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{J_1J_2}{J_1+J_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$

ამოცანა 43.8



A სხეული ბრუნავს OO' ღერძის გარშემო ω_A კუთხური სიჩქარით ხახუნის გარეშე. A სხეულში O_1O_1' ღერძზე მოთავსებულია B როტორი, რომელიც ბრუნავს ω_B კუთხური სიჩქარით იმავე მიმართულებით. OO' და O_1O_1' ღერძები მდებარეობს ერთ წრფეზე. A სხეულის და B როტორის ინერციის მომენტები ამ წრფის მიმართ შესაბამისად არის J_A და J_B. უგულებელვყოთ დანაკარგები და განვსაზღვროთ მუშაობა, რომელიც უნდა შეასრულოს A სხეულში დაყენებულმა ძრავამ, იმისათვის, რომ B როტორს მიენიჭოს ისეთი კუთხური სიჩქარე, რომლის დროსაც A სხეული გაჩერდეს.

. **ა მ ო ხ ს ნ ა.** A სხეულის და B როტორისათვის გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

ამ შემთხვევაში ძრავის მომენტი-შიგა ფაქტორია, რომელიც მოქმედებს როგორც A სხეულზე, ისე B როტორზე. მაშასადამე სისტემის კინეტიკური მომენტი მუდმივია, ე.ი.

$$J_A\omega_A + J_B(\omega_A+\omega_B) = J_B\omega,$$
$$\omega = \frac{J_A}{J_B}\omega_A + \omega_A + \omega_B.$$

ვისარგებლოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = A,$$

სადაც A ძრავის მუშაობაა.

მექანიკური სისტემის საწყისი კინეტკური ენერგია

$$T_0 = \frac{J_A\omega_A^2}{2} + \frac{J_B(\omega_A+\omega_B)^2}{2}.$$

მექანიკური სისტემის საბოლოო კინეტკური ენერგია

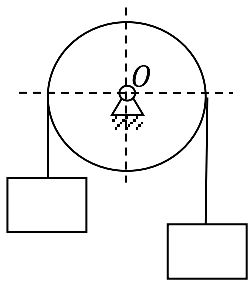
$$T = \frac{J_B\omega^2}{2} = \frac{1}{2}J_B\left(\frac{J_A}{J_B}\omega_A + \omega_A + \omega_B\right)^2.$$

მაშინ მუშაობა, რომელიც უნდა შეასრულოს ძრავამ:

$$A = \frac{1}{2}J_B\left(\frac{J_A}{J_B}\omega_A + \omega_A + \omega_B\right)^2 - \frac{J_A\omega_A^2}{2} - \frac{J_B(\omega_A+\omega_B)^2}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}J_B\left(\frac{J_A^2}{J_B^2}\omega_A^2 + \omega_A^2 + \omega_B^2 + 2\frac{J_A}{J_B}\omega_A^2 + 2\frac{J_A}{J_B}\omega_B + 2\omega_A\omega_B\right) -$$
$$-\frac{1}{2}J_A\omega_A^2 - \frac{1}{2}J_B\omega_A^2 - J_B\omega_A\omega_B - \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 =$$
$$= \frac{1}{2}J_A\left[\omega_A^2\left(1+\frac{J_A}{J_B}\right) + 2\omega_A\omega_B\right].$$

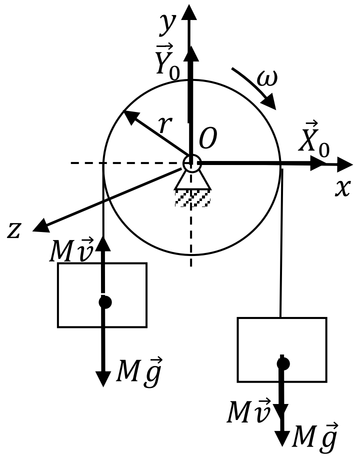
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $A = \frac{1}{2}J_A\left[\omega_A^2\left(1+\frac{J_A}{J_B}\right) + 2\omega_A\omega_B\right]$.

ამოცანა 43.9



m მასისა და r რადიუსის ბორბალზე, რომელიც წინააღმდეგობის გარეშე ბრუნავს ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო ω_0 კუთხური სიჩქარით, გადადებულია გვარლი. გვარლის ბოლოებზე მიბმულია ორი ტვირთი. თითოეული ტვირთის მასა $M = 2m$. ჩათვალეთ ბორბალი ერთგვაროვან დისკოდ და ტვირთების საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლად და განსაზღვრეთ რა სიჩქარით იმოძრავებენ ისინი მას შემდეგ, როცა გვარლი შეწყვეტს სრიალს ბორბალზე. იპოვეთ, აგრეთვე, დისკოზე გვარლის ხახუნის ძალის მუშაობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკური სისტემისათვის (ბორბალი და ორი ტვირთი) გამოვიყენოთ კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა:



$$\frac{dK_{oz}}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right).$$

რადგან $\sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right) = 0$, ამიტომ

$$K_{oz} = const.$$

მაშინ

$$J\omega_0 = J\omega + 2Mvr,$$

სადაც $v -$ ტვირთის სიჩქარეა,

$$v = \omega r.$$

მაშასადამე,

$$\frac{mr^2}{2}\omega_0 = \frac{mr^2}{2}\omega + 2 \cdot 2m\omega r^2,$$

საიდანაც

$$\omega = \frac{\omega_0}{9}.$$

მაშასადამე, თითოეული ტვირთის სიჩქარე

$$v = \omega r = \frac{1}{9}\omega_0 r.$$

ხახუნის ძალის მუშაობის $A_{ხახ}$ განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ მექანიკური სისტემის კინეტკური ენერგიის ცვლილების თეორემით, მხედველობაში მივიღოთ, რომ ტვირთების სიმძიმის ძალების ჯამური მუშაობა უდრის ნულს:

$$A_{ხახ} = \quad T - T_0\left[T = \frac{J\omega^2}{2} + 2 \cdot \frac{Mv^2}{2}, T_0 = \frac{J\omega_0^2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ხახ} = \frac{J\omega_0^2}{2} - \frac{J\omega^2}{2} - 2 \cdot \frac{2mv^2}{2} = \frac{1}{2}\left(J\omega_0^2 - J\omega^2 - 4m\omega^2 r^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2\omega_0^2}{2} - \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{9^2} - 4m\frac{\omega_0^2}{9^2}r^2\right) =$$

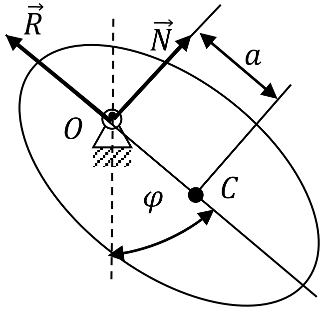
$$= \frac{1}{2}mr^2\omega_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{81} - \frac{4}{81}\right) = \frac{2}{9}mr^2\omega_0^2.$$

,

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = \frac{1}{9}\omega_0 r$; $A_{ხახ} = \frac{2}{9}mr^2\omega_0^2$.

ამოცანა 43.10

M მასის მყარი სხეული ქანაობს ნახაზის სიბრტყის მართობული ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო. მანძილი მასათა C ცენტრიდან დაკიდების ღერძამდე არის a. სხეულის ინერციის რადიუსი ნახაზის სიბრტყის მართობულად მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ $\rho -$ ს ტოლია. საწყის მომენტში სხეული წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრილი იყო φ_0 კუთხით და გაუშვეს უსაწყისო სიჩქარით.

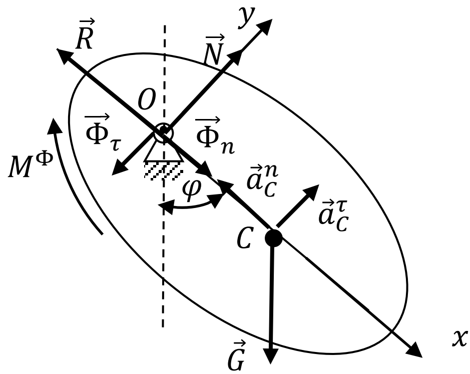


განსაზღვრეთ ღერძის რეაქციის ძალის ორი $\vec{R}$ და $\vec{N}$ მდგენელი, რომელთაგან ერთი მიმართულია დაკიდების წერტილზე და მასათა ცენტრზე გამავალი წრფის გასწვრივ, ხოლო მეორე მის მართობულად. გამოსახეთ R და N როგორც ვერტიკალიდან სხეულის გადახრის φ კუთხის ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ სხეულის გხევითი მოძრაობა.

შევადგინოთ სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ღერძის იმ მიმართ, რომელიც გადის O წერტილში ნახაზის სიბრტყის მართობულად



$$J\ddot{\varphi} = -Gasin\varphi.$$

რადგან $J = M(\rho^2 + a^2)$,
ამიტომ

$$\ddot{\varphi} = -\frac{ga}{\rho^2 + a^2}sin\varphi,$$

ან

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{ga}{\rho^2 + a^2}sin\varphi d\varphi.$$

ვაინტეგროთ მიღებული გამოსახულება:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ga}{\rho^2 + a^2}cos\varphi d\varphi + C.$$

გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები: $t = 0, \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$ და ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივი:

$$C = -\frac{ga}{\rho^2 + a^s} cos\varphi_0.$$

მაშინ

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ga}{\rho^2 + a^2} cos\varphi - \frac{ga}{\rho^2 + a^2} cos\varphi_0 = \frac{ga}{\rho^2 + a^s}(cos\varphi - cos\varphi_0).$$

ინერციის ძალები დავიყვანოთ რხევის O ცენტრზე:

$$\vec{\Phi}_\tau = -M\vec{a}_C^\tau, \qquad \vec{\Phi}_n = -M\vec{a}_C^n, \ \vec{M}^\Phi = -J_O\vec{\varepsilon}.$$

O საყრდენის რეაქციების საპოვნელად გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი:

$$\sum F_{kx} = 0, -R + Gcos\varphi + \Phi_n = 0, \qquad (1)$$
$$\sum F_{ky} = 0, \ N - Gsin\varphi - \Phi_\tau = 0 \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ Φ_n და Φ_τ:

$$\Phi_n = Ma_C^n = M\omega^2 a = M\frac{2ga}{\rho^2 + a^s}(cos\varphi - cos\varphi_0)a =$$
$$= \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^s}(cos\varphi - cos\varphi_0),$$

სადაც $\omega = \dot{\varphi}$.

მაშინ (1) განტოლებიდან მივიღებთ ღერძის რეაქციის პირველ მდგენელს:

$$R = Mgcos\varphi + \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^s}(cos\varphi - cos\varphi_0).$$

რადგან

$$\Phi_\tau = \ Ma_C^\tau = M\varepsilon a = M\left(-\frac{ga}{\rho^2 + a^s}sin\varphi\right)a = -\frac{Mga^2}{\rho^2 + a^s}sin\varphi,$$

სადაც $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, მაშინ (2) განტოლებიდან მივიღებთ ღერძის რეაქციის მეორე მდგენელს:

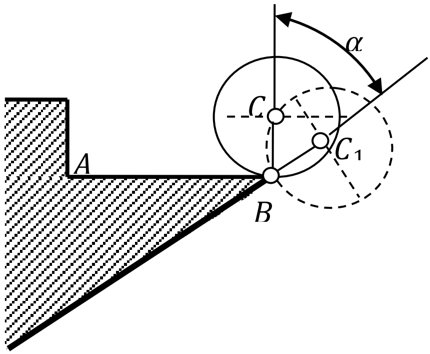
$$N = Gsin\varphi + \Phi_\tau = Mgsin\varphi - \frac{Mga^2}{\rho^2 + a^2}sin\varphi =$$
$$= Mgsin\varphi\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2+a^2}\right) = Mg\frac{\rho^2}{\rho^2+a^2}sin\varphi.$$

პ ა ს უ ხ ი: $R = Mgcos\varphi + \frac{2Mga^2}{\rho^2+a^s}(cos\varphi - cos\varphi_0);$

$$N = Mg\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}sin\varphi.$$

ამოცანა 43.11

მძიმე ერთგვაროვანი ცილინდრი, ღებულობს უმნიშვნელო მცირე სიჩქარეს, უსრიალო გორვით ეშვება AB ჰორიზონტალური ბაქნიდან, რომლის B ნაპირი წაწვეტებულია და ცილინდრის მსახველის პარალელურია. ცილინდრის ფუძის რადიუსი არის r. ბაქნიდან ცილინდრის მოშორების მომენტში ცილინდრის ღერძზე და B ნაპირზე გამავალი სიბრტყე ვერტიკალური მდებარეობიდან გადახრილია $CBC_1 = \alpha$ კუთხით. განსაზღვრეთ ცილინდრის კუთხური სიჩქარე ბაქნიდან დაშორების მომენტში და α კუთხე. გორვის ხახუნი და ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია.

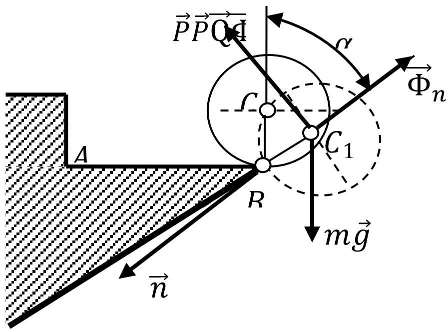


ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ცენტრიდანული $\vec{\Phi}_{\mathcal{B}}$ და ტანგენციალური $\vec{\Phi}_\tau$ ინერციის ძალები და $m\vec{g}$ სიმძიმის ძალა.

ბაქნიდან ცილინდრის მოშორების მომენტში საყრდენის რეაქციები ნულის ტოლია. დალამბერის პრინციპის საფუძველზე შევადგინოთ განტოლება $\vec{n}$ ღერძზე გეგმილებში:

$$mgcos\alpha - \Phi_{\mathcal{B}} = 0,$$

სადაც $\Phi_{\mathcal{B}} = m\omega^2 r.$



მაშინ

$$\omega^2 r = gcos\alpha. \qquad (1)$$

ჩავთვალოთ, რომ ბაქნიდან ცილინდრის მოშორების მომენტამდე იგი ბრუნავდა B წერტილის ირგვლივ და ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

რადგან საწყის სიჩქარეს ვთვლით ნულის ტოლად, ამიტომ $T_0 = 0.$ ამიტომ

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

ვიპოვოთ ცილინდრის კინეტიკური ენერგია ბაქნიდან ცილინდრის მოშორების მომენტში:

$$T = \frac{J_B \omega^2}{2},$$

სადაც $J_B = J_C + mr^2 -$ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის თანახმად, $J_C = \frac{mr^2}{2} -$ ერთგვაროვანი ცილინდრის ინერციის მომენტია მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

მაშინ

$$J_B = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2},$$

$$T = \frac{3}{4} mr^2 \omega^2. \qquad (3)$$

ვიპოვოთ გარე ძალების მუშაობა

$$\sum A_k^e = mgr. \qquad (4)$$

ჩავსვათ (3) და (4) გამოსახულებები (2) განტოლებაში:

$$\frac{3}{4} mr^2 \omega^2 = mgr(1 - cos\alpha),$$

აქედან

$$r\omega^2 = \frac{4}{3} g(1 - cos\alpha).$$

(5)

გავუტოლოთ ერთმანეთს (1) და (5) გამოსახულებების მარჯვენა ნაწილები:

$$gcos\alpha = \frac{4}{3} g(1 - cos\alpha),$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$cos\alpha = \frac{4}{7}, \qquad \alpha = arccos\frac{4}{7} = 55{,}1^0.$$

ჩავსვათ $cos\alpha -$ს მნიშვნელობა (1) განტოლებაში

$$r\omega^2 = \frac{4}{7} g$$

და განვსაზღვროთ ცილინდრის კუთხური სიჩქარე ბაქნიდან დაშორების მომენტში:

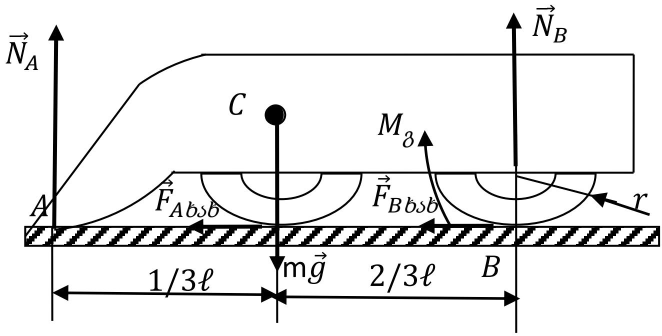
$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}; \qquad \alpha = arccos\frac{4}{7} = 55{,}1^0.$

ამოცანა 43.12

ყინულის საფხეკი ავტომობილი მოძრაობს წრფივად ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. მასათა C ცენტრის მდებარეობა ნაჩვენებია 38.12 ამოცანის ნახაზზე. ძრავის ჩართვის მომენტში ავტომობილს ჰქონდა v −ს ტოლი სიჩქარე. იპოვეთ გზა, რომელსაც გაივლის ავტომობილი გაჩერებამდე, თუ $f_გ$ − ავტომობილის თვლების ყინულზე გორვის ხახუნის კოეფიციენტია, f − სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი A საფხეკის ნაწიბურსა და ყინულს შორის, უსრიალოდ მგორავი r რადიუსის თვლების მასები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



განვსაზღვროთ $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ რეაქციები და $\vec{F}_{Aხახ}$ ხახუნის ძალა (იხ. ნახაზი) იმ პირობით, რომ არ არის გათვალისწინებული გორვის ხახუნის მომენტი და წინა თვლების რეაქციები. ამისათვის შევადგინოთ "წონასწორობის" ორი განტოლება:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, -mg\frac{1}{3}\ell + N_B\ell = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0, mg\frac{2}{3}\ell - N_A\ell = 0, \qquad (2)$$

(1) და (2) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$N_B = \frac{1}{3}mg, \ \ N_A = \frac{2}{3}mg\,. \qquad (3)$$

ვიპოვოთ

$$F_{Aხახ} = fN_A = \frac{2}{3}fmg \qquad (4)$$

და გორვის ხახუნის მომენტი

$$M_გ = f_გN_B = \frac{1}{3}f_გmg. \qquad (5)$$

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_k^e = A(\vec{F}_{Aხახ}) + A(M_გ). \qquad (6)$$

რადგან S მანძილის გავლის შემდეგ ავტომობილი გაჩერდა, ამიტომ T –საბოლოო კინეტიკური ენერგია-უდრის ნულს, ხოლო საწყისი კინეტიკური ენერგია

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{7}$$

განვსაზღვროთ ხახუნის ძალის მუშაობა. (4) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$A\left(\vec{F}_{Absb}\right) = -F_{Absb}s = -\frac{2}{3}fmgs. \tag{8}$$

გორვის ხახუნის მომენტის მუშაობა

$$A\left(M_{\text{გ}}\right) = -M_{\text{გ}}\varphi = -\frac{1}{3}f_{\text{გ}}mg\frac{S}{r}. \tag{9}$$

ჩავსვათ (7)-(9) გამოსახულებები (6) განტოლებაში:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2}{3}fmgs + \frac{1}{3}f_{\text{გ}}mg\frac{S}{r}.$$

და ვიპოვოთ გზა, რომელსაც გაივლის ავტომობილი გაჩერებამდე:

$$S = \frac{v_0^2}{2g}\frac{3r}{2fr + f_{\text{გ}}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $S = \frac{v_0^2}{2g}\frac{3r}{2fr+f_{\text{გ}}}$.

ამოცანა 43.13

ვერტიკალური ღერძის მქონე წრიული ცილინდრის(რომელსაც შეუძლია უხახუნოდ ბრუნვა ამ ღერძის გარშემო) გვერდით ზედაპირზე ამოჭრილია გლუვი ხრახნული ღარი ასვლის α კუთხით. საწყის მომენტში ცილინდრი წონასწორობაშია. ღარში ჩაუშვებენ მძიმე ბურთულას, რომელიც ჩავარდება და უსაწყისო სიჩქარით აიძულებს ცილინდრს იბრუნოს. მოცემულია: ცილინდრის M მასა, მისი R რადიუსი, ბურთულა m მასა. ბურთულას დაშორება ცენტრიდან მიღებულია R- ის ტოლად. ცილინდრის ინერციის მომენტი არის $\frac{1}{2}MR^2$. იპოვეთ ის კუთხური ω სიჩქარე, რომელიც ექნება ცილინდრს იმ მომენტში, როცა ბურთულა ჩამოვარდება h სიმაღლეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა Z ღერძის მიმართ:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right) = 0. \tag{1}$$

რადგან $\sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right) = 0$, ამიტომ $K_z = const$, ე.ი. $K_z = K_{z0}$.

საწყის მომენტში მექანიკური სისტემა იყო წონასწორობაში, ამიტომ

$$K_{z0} = 0. \qquad (2)$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტი z ღერძის მიმართ დროის ნებისმიერ მომენტში:

$$K_z = K_{z1} + K_{z2.} \qquad (3)$$

გამოვთვალოთ ცილინდრის კინეტიკური მომენტი K_{z1}:

$$K_{z1} = -J_z\omega = -\frac{1}{2}MR^2\omega. \qquad (4)$$

გამოვთვალოთ ბურთულას კინეტიკური მომენტი K_{z2}:

$$K_{z2} = mv_aR,$$

სადაც

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r\,,\ \ |\vec{v}_a| = v_a = v_r cos\alpha - v_e.$$

რადგან $v_e = \omega R$, ამიტომ

$$v_a = v_r cos\alpha - \omega R \qquad (5)$$

მაშინ ბურთულას კინეტიკური მომენტი

$$K_{z2} = m(v_r cos\alpha - \omega R)R. \qquad (6)$$

ჩავსვათ (4) და (6) გამოსახულებები (3) ფორმულაში:

$$K_z = -\frac{1}{2}MR^2\omega + m(v_r cos\alpha - \omega R)R = 0$$

ან

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)R\omega = mv_r cos\alpha.$$

საიდანაც

$$v_r = \frac{(M+2m)R\omega}{2mcos\alpha}. \qquad (7)$$

გამოვიყენოოთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

სადაც $T_0 = 0$, ვინაიდან $v_0 = 0$;

$$\sum A_k^e = mgh.$$

მაშინ

$$T = mgh. \qquad (8)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2. \qquad (9)$$

ცილინდრის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = J_z\frac{\omega^2}{2} = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

ბურთულას კინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{mv^2}{2}, \tag{10}$$

სადაც

$$v^2 = v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e cos(180^0 - \alpha) = v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e cos\alpha.$$

მაშინ

$$T_2 = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e cos\alpha). \tag{11}$$

ჩავსვათ (11) და (12) გამოსახულებები (10) ფორმულაში:

$$T = \frac{MR^2\omega^2}{4} + \frac{m}{2}(v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e cos\alpha) =$$

$$= \frac{MR^2\omega^2}{4} + \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} - mRv_r R\omega cos\alpha =$$

$$= \frac{R^2\omega^2}{4}(M + 2m) + \frac{m}{2}(v_r^2 - 2v_r R\omega cos\alpha), \tag{12}$$

ხოლო (7) (12)-ში და ვიპოვოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = \frac{R^2\omega^2}{4}(M + 2m) + \frac{m}{2}\left[\frac{(M + 2m)^2 R^2\omega^2}{4m^2 cos^2\alpha} - \frac{(M + 2m)R^2\omega^2}{2m}\right] =$$

$$= \frac{R^2\omega^2}{4}(M + 2m) + \frac{1}{8}\frac{(M + 2m)^2 R^2\omega^2}{mcos^2\alpha} - \frac{(M + 2m)R^2\omega^2}{2m} =$$

$$= \frac{(M + 2m)R^2\omega^2}{8}\frac{\left(M + 2msin^2\alpha\right)}{mcos^2\alpha}.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (8) განტოლებაში:

$$\frac{(M + 2m)R^2\omega^2}{8}\frac{(M + 2msin^2\alpha)}{mcos^2\alpha} = mgh$$

აქედან განვსაზღვროთ

$$\omega^2 = \frac{8m^2 ghcos^2\alpha}{(M + 2m)R^2(M + 2msin^2\alpha)}$$

და ცილინდრის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{2mcos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M + 2m)(M + 2msin^2\alpha)}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{2mcos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2msin^2\alpha)}}$.

§44. დარტყმა

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

დარტყმა ეწოდება მოვლენას, რომლის დროსაც უსასრულოდ მცირე დროის შუალედში, ე.ი. თითქმის მყისიერად, სისტემის წერტილების სიჩქარეები იცვლებიან სასრული სიდიდით. დარტყმითი მოვლენა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბმების ერთჯერადი მყისიერი დადება ან მოხსნა. მაგალითად, გადატანით მოძრავი სხეულის დაჯახება სხვა უძრავ სხეულთან ან ბმების პერიოდული დადება ან მოშორება (ჭედვა, შტამპვა და ა. შ.).

ძალა, რომელიც მოქმედებს უსასრულოდ მცირე დროის τ შუალედში, მაგრამ აღწევს ძალიან დიდი მნიშვნელობას,ეწოდება **დ ა რ ტ ყ მ ი ს ძ ა ლ** ა და აღინიშნება $\vec{F}_{დ}$ –ით. დროის შუალედს, რომლის განმავლობაში ხდება დარტყმა, **დარტყმის ხანგრძლივობა** ეწოდება.

რადგან დარტყმის ძალები ღებულობენ ძალიან დიდ მნიშვნელობებს და დარტყმის მომენტში შეუძლიათ შეიცვალონ მნიშვნელოვან საზღვრებში, ამიტომ დარტყმისას სხეულების ურთიერთქმედების საზომად იღებენ არა თვით დარტყმის ძალებს, არამედ მათ იმპულსებს.

დარტყმის ძალის იმპულსი ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს

$$\vec{S}_{დარ} = \int_0^\tau \vec{F}_{დ} dt. \tag{44.1}$$

დარტყმის თეორიაში არადარტყმითი ძალების იმპულსებს (მაგ. სიმძიმის ძალის) მათი სიმცირის გამო დარტყმითი ძალების იმპულსებთან შედარებით უგულებელყოფენ. სხეულის წერტილების გადაადგილებები დარტმის დროის შუალედში, ასევე, შეგვიძლია უგულებელვყოთ, რადგან ამ გადაადდგილებებს აქვთ τ სიდიდის რიგი..

მრავალი სიდიდე, რომლებიც დარტყმის მოვლენის დამახასაითებელია, მიიღება მატერიალური წერტილის და მექანიკური სისტემის დინამიკის ძირითადი თეორემების გამოყენებით, კერძოდ: მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის, მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ თეორემის, კინეტიკური მომენტის და კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემების.

თეორემა მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ დარტყმის დროს. ვთქვათ, წერტილის სიჩქარე დარტყმის დასაწყისში არისს $\vec{v}$, ხოლო დარტყმის ბოლოს $-\vec{u}$. მაშინ

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}_{დარ} \tag{44.2}$$

ე.ი. მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დარტყმის განმავლობაში უდრის წერტილზე მოდებული დარტყმის ძალის იმპულსს.

(44.2) განტოლება წარმოადგენს დარტყმის თეორიის ძირითად განტოლებას და ამ შემთხვევაში აქვს ისეთივე მნიშვნელობა, როგორიც დინამიკის ძირითად კანონს- $m\vec{a} = \vec{F}$ მატერიალური წერტილის მოძრაობის შესწავლისას არადარტყმითი ძალების მოქმედების დროს.

თეორემა მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ დარტყმის დროს. $k-$ური წერტილისათვის გვაქვს

$$m_k\vec{u}_k - m_k\vec{v}_k = \vec{S}^e_{k_{დარ}} + \vec{S}^i_{k_{დარ}}, \qquad (44.3)$$

სადაც $\vec{S}^e_{k_{დარ}}, \vec{S}^i_{k_{დარ}} -$ დარტყმის გარე და შიაგა ძალების იმპულსებია შესაბამისად.

მექანიკური სისტემისათვის, თუ ავჯამავთ (44.3) განტოლებებს k ინდექსის მიმართ და გავითვალისწინებთ, რომ შიგა (მათ შორის დარტყმის) ძალების თვისების თანახამად $\sum \vec{S}^i_{k_{დარ}} = 0,$ მივიღებთ:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}^e_{k_{დარ}}, \qquad (44.4)$$

ე.ი. მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დარტყმის განმავლობაში უდრის სისტემის წერტილებზე მოდებული გარე ძალების დარტყმის იმპულსების ვექტორულ ჯამს.

დავაგეგმილოთ (44.4) $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} Q_x - Q_{0x} = \sum S^e_{kx}, \\ Q_y - Q_{0y} = \sum S^e_{ky}, \\ Q_z - Q_{0z} = \sum S^e_{kz}. \end{cases} \qquad (44.5)$$

თუ $\sum \vec{S}^e_{k_{დარ}} = 0,$ მაშინ, როგორც (44.4) განტოლებიდან ჩანს მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობა დარტყმის განმავლობაში არ იცვლება.

თეორემა მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ დარტყმის დროს.

გამოვსახოთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა მასათა ცენტრის სიჩქარით:

$$\vec{Q} = M\vec{u}_C, \quad \vec{Q}_0 = M\vec{v}_C. \qquad (44.6)$$

მაშინ 44.4) განტოლება (44.6)-ის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს:

$$M(\overrightarrow{u_C} - \vec{v}_C) = \sum \vec{S}^e_{k_{დარ}}, \qquad (44.7)$$

დავაგეგმილოთ (44.47 $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ;

$$\begin{cases} M(u_{Cx} - v_{Cx}) = \sum S^e_{kx}, \\ M\big(u_{Cy} - v_{Cx}\big) = \sum S^e_{ky}, \\ M(u_{Cz} - v_{Cz}) = \sum S^e_{kz}. \end{cases} \qquad (44.8)$$

თეორემის შედეგები:

1. თუ $\sum \vec{S}^{e}_{k\,დარ} = 0$, მაშინ $\vec{u}_C = \vec{v}_C$, ე.ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა და მასათა ცენტრის სიჩქარე არ იცვლება, თუ სისტემის წერტილებზე მოდებული გარე ძალების დარტყმის იმპულსების ვექტორული ჯამი უდრის ნულს
2. თუ $\sum S^{e}_{kx} = 0$, მაშინ $u_{Cx} = v_{Cx}$, ე.ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის და მასათა ცენტრის სიჩქარის გეგმილები Ox ღერძზე არ იცვლება, თუ სისტემის წერტილებზე მოდებული გარე ძალების დარტყმის იმპულსების გეგმილების ჯამი Ox ღერძზე უდრის ნულს.

თეორემა მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილების შესახებ დარტყმის დროს.

ჯერ განვიხილოთ რაიმე ცენტრის მიმართ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილება დარტყმის დროს.

გავამრავლოთ ვექტორულად (44.2) ვექტორული ტოლობა მარცხნიდან $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორზე, რომელიც იქნება ერთი და იგივე დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ. მივიღებთ:

$$\vec{r} \times m\vec{u} - \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{s}_{დარ}. \qquad (44.9)$$

ეს თანაფრდობა წარმოადგენს O ცენტრის მიმართ წერტილის კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემას დარტყმის დროს.

გამოვიყენოთ ანალოგიური მოქმედება მექანიკური სისტემის $k-$ური წერტილისათვის (44.3) განტოლებისათვისათვის და ავჯამავთ მიღებულ განტოლებებს k ინდექსის მიმართ, მივიღებთ:

$$\vec{K}_0 - \vec{K}_0^{საწ} = \sum \vec{M}_0(\vec{S}^{e}_{k\,დარ}), \qquad (44.10)$$

სადაც $\vec{K}_0 = \sum(\overrightarrow{r_k} \times m_k\vec{u}_k) -$ O ცენტრის მიმართ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტია დარტყმის შემდეგ;

$\vec{K}_0^{საწ} = \sum(\overrightarrow{r_k} \times m_k\vec{v}_k) -$ O ცენტრის მიმართ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტია დარტყმამდე.

უნდა აღინიშნოს, რომ სისტემის წერტილებზე მოდებული შიგა ძალების დარტყმის იმპულსების ვექტორული ჯამი უდრის ნულს შიგა ძალების თვისების თანახმად.

ამგვარად, რაიმე ცენტრის მიმართ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილება დარტყმის განმავლობაში უდრის იმავე ცენტრის მიმართ გარე ძალების დარტყმის იმპულსების მომენტების ვექტორულ ჯამს.

განვიხილოთ ღერძის მიმართ მექანიკური სისტემის კინეტიკური მომენტის ცვლილება დარტყმის დროს.

დავაგეგმილოთ (44.10) ტოლობა $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ;

$$\begin{cases} K_x - K_x^{საწ} = \sum M_x(\vec{S}^{e}_{kდარ}), \\ K_y - K_y^{საწ} = \sum M_y(\vec{S}^{e}_{kდარ}), \\ K_z - K_z^{საწ} = \sum M_z(\vec{S}^{e}_{kდარ}). \end{cases} \tag{44.11}$$

თუ დარტყმას განიცდის მყარი სხეული, რომელიც ბრუნავს უძრავი ღერძის, მაგალითად, Oz ღერძის) გარშემო, მაშინ

$$K_z = J_z\omega,$$
$$K_z^{საწ} = J_z\omega_0,$$

სადაც J_z –სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის Oz ღერძის მიმართ; ω და ω_0- შესაბამისად სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეებია დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ.

მაშინ (44.11) ტოლობებიდან ბოლო მიიღებს სახეს:

$$J_z(\omega-\omega_0) = \sum M_z(\vec{S}^{e}_{kდარ}),$$

ან

$$\omega-\omega_0 = \frac{\sum M_z(\vec{S}^{e}_{kდარ})}{J_z}. \tag{44.12}$$

(44.12) ტოლობაში არ შედის საყრდენების რეაქციის დარტყმის ძალების მომენტები, რადგან ისინი კვეთენ ბრუნვის ღერძს, ხოლო საყრდენებში ხახუნის ძალების დარტყმის იმპულსებს უგულებელყოფენ.

თეორემიდან გამომდინარე შედეგები:

1. თუ $\sum \vec{M}_0(\vec{S}^{e}_{kდარ}) = 0,$ მაშინ (44.10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, ცენტრის მიმართ კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონი დარტყმის დროს:

$$\vec{K}_0 = \vec{K}_0^{საწ} = const. \tag{44.13}$$

2. თუ, მაგალითად, $\sum M_z(\vec{S}^{e}_{kდარ}) = 0,$ მაშინ (44.11) ტოლობიდან გამომდინარეობს, ღერძის მიმართ კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონი დარტყმის დროს:

$$K_z = K_z^{საწ} = const. \tag{44.13$'$}$$

განვიხილოთ წერტილის დარტყმა უძრავ ზედაპირზე. შესაძლებელია ორი შემთხვევა-პირდაპირი დარტყმა და ირიბი დარტყმა.

დარტყმას ეწოდება **პირდაპირი**, თუ დაჯახების მომენტში $\vec{v}$ წერტილის სიჩქარე მიმართულია შეხების წერტილზე გამავალი ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. დარტყმის შემდეგ მატერიალური წერტილი ზედაპირს მოშორდება ზოგად შემთხვევაში რაიმე $\vec{u}$ სიჩქარით, რომელიც

ისევ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ არის მიმართული.დარტყმის შემდეგ $\vec{u}$ სიჩქარის სიდიდის შეფარდებას დარტყმამდე $\vec{v}$ სიჩქარის სიდიდესთან ეწოდება აღდგენის კოეფიციენტი დარტყმისას:

$$k = \frac{u}{v}. \qquad (44.14)$$

თუ $k = 1$, მაშინ დარტყმას ეწოდება აბსოლუტურად დრეკადი; თუ $k = 0$, მაშინ დარტყმას ეწოდება აბსოლუტურად არადრეკადი; თუ $0 < k < 1$, მაშინ დარტყმას ეწოდება ნაწილობრივ დრეკადი.

თუ სხეული ვარდება H სიმაღლიდან, ხოლო დარტყმის შემდეგ ადის h სიმაღლეზე, მაშინ

$$k = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \qquad (44.15)$$

დარტყმას ეწოდება **ირიბი**, თუ დაჯახების მომენტში წერტილის $\vec{v}$ სიჩქარე ზედაპირის ნორმალთან ადგენს რაღაც α კუთხეს. α კუთხეს ეწოდება *დ ა ც ე მ ი ს* კუთხე. ზოგად შემთხვევაში, წერტილის $\vec{v}$ სიჩქარე ზედაპირის ნორმალთან ადგენს რაღაც β კუთხეს., რომელსაც *ა რ ე კ ვ ლ ი ს* კუთხე ეწოდება. ირიბი დარტყმისას

$$K = \frac{tg\alpha}{tg\beta}. \qquad (44.16)$$

ორი მოძრავი სხეულის (მაგალითად, ბირთვების) ურთიერთდაჯახებისას დარტყმას ეწოდება **პირდაპირი ცენტრალური** დარტყმა, თუ სხეულების შეხების წერტილში გავლებული საერთო ნორმალი გადის მასათა ცენტრში, ხოლო მასთა ცენტრის სიჩქარეები დარტყმამდე მიმართულია ამ ნორმალის გასწვრივ, რომელსაც დარტყმის წრფე ეწოდება.

ვთქვათ, პირველი სხეულის მასაა m_1, ხოლო მეორესი $-m_2$. მათი მასთა ცენტრის სიჩქარეები დარტყმამდე შესაბამისად უდრის $\vec{v}_1$ და $\vec{v}_2$, ხოლო დარტყმის ბოლოს $\vec{u}_1$ და $\vec{u}_2$ და მიმართული არიან დარტყმის წრფის გასწვრივ. იმისათვის, რომ დარტყმა შესრულდეს, დრატყმამდე უნდა შესრულდეს უტოლობა $v_1 > v_2$, ხოლო დარტყმის შემდეგ-$u_2 \geq u_1$.

ამ შემთხვევაში

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}. \qquad (44.17)$$

თუ დარტყმაში მონაწილე სხეულებს განვიხილავთ ერთ სისტემად, მაშინ დარტყმის იმპულსები არის შიგა და, რადგან

$$\sum \vec{S}_k^e = 0,$$

მაშინ მოძრაობის რაოდენობა დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ არ შეიცვლება, ე.ი.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (44.18)$$

ამოვხსნათ (44.17) და (44.18) განტოლებები ერთად, მივიღებთ სხეულების სიჩქარეების გამოსათვლელ ფორმულებს დარტყმის შემდეგ:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 = v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2). \end{cases} \quad (44.19)$$

აბსოლუტურად დრეკადი დაჯახებისას ($k = 1$) (44.19) ფორმულებს აქვს სახე:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2). \end{cases} \quad (44.20)$$

აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახებისას ($k = 0$) $\vec{u}_1$ და $\vec{u}_2$ სიჩქარეები სიდიდით ერთმანეთის ტოლია. მაშინ (44.18) ტოლობებიდან ან (44.19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (44.21)$$

როცა $m_1 = m_2$, (44.20) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, ე.ი. აბსოლუტურად დრეკადი დაჯახებისას სხეულები ცვლიან სიჩქარეებს/

თუ მეორე ბირთვი დარტყმამდე მოძრაობს v_2 სიჩქარით პირველი ბირთვის შესახვედრად, მაშინ (44.19)-(44.21) ფორმულებში v_2 სიჩქარე უნდა განვიხილოთ როგორც გეგმილი ღერძზე, რომელიც მიმართულია პირველი ბირთვის მოძრაობის მიმართულებით და უნდა ავიღოთ მინუს ნიშნით

კინეტიკური ენერგიეს ცვლილების თეორემა ორი სხეულის დარტყმისას.

დრეკადი დარტყმისას ($0 < k < 1$) ადგილი აქვს კინეტიკური ენერგიეს დანაკარგს:

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}m_1(v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - u_2)^2\right] \quad (44.22)$$

ან

$$T_0 - T_1 = (1-k^2)\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1 - v_2)^2 \quad (44.23)$$

აბსოლუტურად არადრეკადი დარტყმისას ($k = 0$), $u_1 = u_2 = u$. მაშინ

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}m_1(v_1 - u)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - u)^2 \quad (44.24)$$

(44.24) ფორმულა არის **კარნოს თეორემის** მათემატიკური გამოსახულება, რომელიც ჩამოყალიბდება შემდეგნირად:

ორი სხეულის სისტემის აბსოლუტურად არადრეკადი დარტყმისას კინეტიკური ენერგიის დანაკარგი უდრის იმ კინეტიკურ ენერგიას, რომელიც ექნებოდა სისტემას, თუ მისი სხეულები იმოძრავებდნენ დაკარგული სიჩქარეებით.

დაკარგული სიჩქარეები ეწოდება დარტყმაში მონაწილე სხეულების სიჩქარეთა სხვაობას დარტყმადე და დარტყმის შემდეგ, ე.ი. $(v_1 - u)$ და $(v_2 - u)$.

კარნოს თეორემის კერძო შემთხვევები.

ვთქვათ, $v_2 = 0$ (სხეული უძრავია). მაშინ

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2, \tag{44.25}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad T_0.$$

შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

- თუ $m_1 \gg m_2$, მაშინ $T_1 \cong T_0$, ე.ი. კინეტიკური ენერგიის დაკარგვა არ ხდება (ხიმინჯის ჩასობა, ლურსმნის ჩარჭობა და ა.შ.);
- თუ $m_1 \ll m_2$, მაშინ $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx 0$, მაშასადამე, $T_1 \approx 0$, ე.ი. დარტყმისასა მთლიანად იკარგება კინეტიკური ენერგია, რომელიც იხარჯება სხეულების დეფორმაციაზე (მეტალის ჭედვა, მოქლოვნა და სხვა)

დარტყმის ცენტრი- ეს არის სხეულის წერტილი, რომელზეც გადის დარტყმის ძალის იმპულსი, რომელიც არ იწვევს დარტყმით რეაქციებს საყრდენებში. თუ მოვდებთ სხეულზე დარტყმით იმპულსს, რომელიც ბრუნავს რაიმე საყრდენებში უძრავი ღერძის გარშემო, მაშინ ამ საყრდენებში წარმოიქმნება დარტყმითი რეაქციები. მაგრამ შესაძლებელია ისეთი პირობებიც, რომლის დროსაც დარტყმითი რეაქციები იქნება ნულის ტოლი. პრაქტიკაში ამას დიდი მნისვნელობა აქვს; დარტყმისას რეაქციის იმპულსების ქარმოქმნა არასასურველია, რადგან შეიზლება მოხდეს კონსტრუქციის ნაწილების რღვევა.

იმისათვის, რომ z ღერძზე დამაგრებულ სხეულზე დარტყმისას საყრდენებში არ წარმოიქმნას დარტყმითი რეაქციები, აუცილებელია შემდეგი პირობების შესრულება:

- დრტყმის ძალის იმპულსე უნდა მდებარეობდეს z ღერძის მართობ და O წერტილში გამავალ Oxy სიბრტყეში, რომლისთვისაც z ღერძი არის ინერციის მთავარი ღერძი;
- დარტყმა მიმართული უნდა იყოს z ღერძსა და მასათა C ცენტრზე გამავალი სიბრტყის მართობულად'
- დარტყმის ზალის იმპულსე აუციელებელია მოდებული იყოს ბრუნვის ღერძის იმ მხარეს, სადაც იმყოფება სხეულის მასათა ცენტრი

$$h = \frac{J_z}{Md} \tag{44.26}$$

მანძილზე, სადაც $J_z -$ სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ; M- სხეულის მასაა; $d -$ მანძილი ბრუნვის ღერძიდან სხეულის მასათა ცენტრამდე.

(44.26) ფორმულა ემთხვევა ფიზიკური საქანის $\ell_{დაყ}$ დაყვანილი სიგრძის გამოსათვლელ ფორმულას მისი ჰორიზონტალური Z ღერძის გარშემო ბრუნვისას; წერტილს, რომელიც დაკიდების ღერძისაგან დაშორებულია $\ell_{დაყ}$ მანძილით , ეწოდება ფიზიკური საქნის რხევის ცენტრი. ამიტომ დარტყმის ცენტრი ემთხვევა ფიზიკური საქნის რხევის ცენტრს.

ამ პარაგრაფის პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. გამოვსახოთ ნახაზზე დარტყმაში მონაწილე სხეულები, მათი სიჩქარეთა ვექტორები დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ;
2. გამოვსახოთ ნახაზზე ღერძები(ღერძი), რომელთა გამოყენება ამოცანის ამოხსნისას აუცილებელია;
3. სხეულის მოძრაობის ხასიათის, დარტყმის თავისებურების და საბოლოო შედეგების გათვალისწინებით გამოვიყენოთ შესაბამისი თეორემები, ე.ი. ვისარგებლოთ ფორმულებით (44.2), (44.4), (44.5), (44.7), (44.8), (44.10)-(44.12) და (44.22)-(44.24), ან თეორემის შედეგებით; დარტყმისას აღდგენის კოეფიციენტის, დარტყმის შემდეგ სიჩქარეების და მასათა ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრისას უკეთესია ვისარგებლოთ (44.14)-(44.17), (44.19), (44.20) და (44.26) ფორმულებით;
4. იმ ამოცანების ამოხსნისას, რომლებშიც განიხილება ირიბი დარტყმა, უმჯობესია სხეულების სიჩქარეთა ვექტორები დავშალოთ მდგენელებად შეხების საერთო წერტილში გავლებული ნორმალის და მხების გასწვრივ, შევისწავლოთ ამ მდგენელების ცვლილების ხასიათი და განვსაზღვროთ მათი სიდიდეები დარტყმის შემდეგ;
5. საძიებელი სიდიდეები გამოვსახოთ ზოგადი ფორმით, შემდეგ კი გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობები რიცხვითი მონაცემების საფუძველზე.

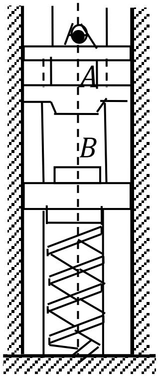
ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 44.1

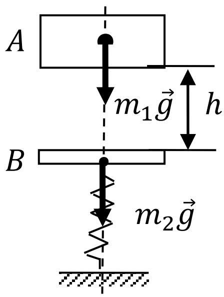
ურნალის A კუტი ვარდება 4,905მ სიმაღლიდან და ეჯახება B გრდემლს, რომელიც დამაგრებულია ზამბარაზე. კუტის მასაა 10კგ, გრდემლის-5კგ. განსაზღვრეთ, როგორი სიჩქარით დაიწყება დარტყმის შემდეგ უროს მოძრაობა, თუ კუტი იმოძრავებს მასთან ერთად(ნახ.1).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონით დარტყმისას:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v.$$



ნახ.1



ნახ.2

რადგან (ნახ.2)

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}905} = 9{,}81(\text{მ/წმ}),$$

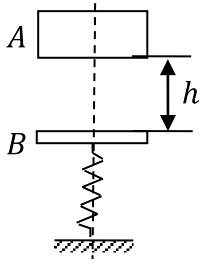
მაშინ

$$v = \frac{m_1 v_1}{(m_1+m_2} = \frac{10 \cdot 9{,}81}{10+5} = 6{,}54 \quad (\text{მ/წმ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 6,54 (მ/წმ).

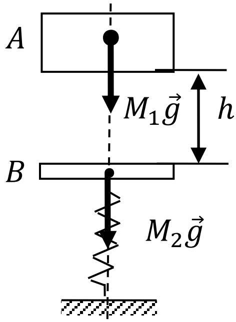
ამოცანა 44.2

M_1 მასის A ტვირთი ვარდება h სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარით და ეცემა M_2 მასის B ფილაზე, რომელიც დამაგრებულია c სიხისტის მქონე ზამბარით. განსაზღვრეთ დარტყმის შემდეგ ზამბარის კუმშვის სიდიდე S, თუ აღდგენის კოეფიციენტი ნულის ტოლია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ზამბარის უდიდესი შეკუმშვის სიდიდე უდრის სატატიკური შეკუმშვის და ფირფიტის ჰარმონიული რხევების ამპლიტუდის ჯამს დარტყმის შემდეგ, ე.ი.

$$s = \frac{M_1 g}{c} + a, \qquad (1)$$



სადაც $a -$ $x = \mathrm{a}\sin{(kt + \alpha)}$ ჰარმონიული ხევების ამპლიტუდაა.

ვიცით, რომ როცა $t = 0$

$$x_0 = -\frac{M_1 g}{c},$$

$$\dot{x}_0 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2}\sqrt{2gh},$$

მივიღებთ

$$a sin\alpha = -\frac{M_1 g}{c},$$

$$ak\ cos\alpha = \sqrt{2gh}\frac{M_1}{M_1 + M_2}.$$

გამოვრიცხოთ მიღებული განტოლებებიდან α და გავითვალისწინოთ, რომ

$$k = \sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}},$$

მაშინ მივიღებთ:

$$a^2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) = a^2 = \left(\frac{M_1 g}{c}\right)^2 + \frac{2ghM_1^2}{k^2(M_1 + M_2)^2} =$$

$$= \left(\frac{M_1 g}{c}\right)^2 + \frac{2ghM_1^2}{c(M_1 + M_2)},$$

აქედან

$$a = \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + \frac{2ghM_1^2}{c(M_1 + M_2)}}$$

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$s = \frac{M_1 g}{c} + \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + \frac{2ghM_1^2}{c(M_1 + M_2)}}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამოცანის პირობაში უფრო კორექტულად უნდა დასმულიყო კითხვა: იპოვეთ ზამბარის მაქსიმალური შეკუმშვის სიდიდე.

პ ა ს უ ხ ი: $s = \frac{M_1 g}{c} + \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + \frac{2ghM_1^2}{c(M_1+M_2)}}$.

ამოცანა 44.3

აღდგენის კოეფიციენტის ცდით განსაზღვრისათვის ხელსაწყოში საცდელი მასალისაგან დამზადებული ბურთულა საწყისი სიჩქარის გარეშე მინის ვერტიკალურ მილში მოცემული h_1=50სმ სიმაღლიდან დაეცემა იმავე მასალის უძრავ ჰორიზონტალურ ფილას. განსაზღვრეთ აღდგენის კოეფიციენტი, თუ დარტყმის შემდეგ ბურთულა ავიდა h_2=45სმ სიმაღლეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღდგენის კოეფიციენტი დარტყმისას უდრის დარტყმის შემდეგ u სიჩქარის შეფარდებას და დარტყმამდე v სიჩქარესთან, ე.ი.

$$k = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{45}{50}} = 0,95.$$

პ ა ს უ ხ ი: $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 0,95.$

ამოცანა 44.4

დრეკადი ბურთულა ვარდება h სიმაღლიდან ვერტიკალზე და ეცემა გლუვ ჰორიზონტალურ ფილაზე, ახტება მისგან ზევით, ისევ ეცემა იმავე ფილაზე და ა.შ. აგრძელებს ასეთ მოძრაობას. იპოვეთ ბურთულას მიერ გავლილი მანძილი, თუ აღდგენის კოეფიციენტი k –ს ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გზა, რომელსაც დრეკადი ბურთულა გაივლის გაჩერებამდე

$$s = h + 2h_1 + 2h_2 + \cdots + 2h_n. \quad (1)$$

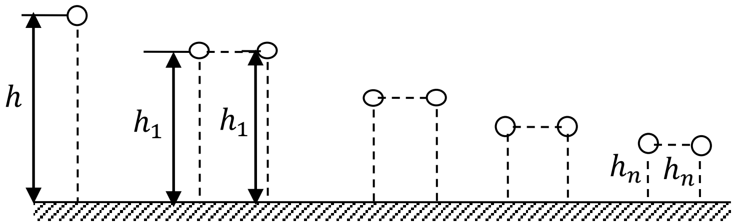
აღდგენის კოეფიციენტი დარტყმისას(იხ. ნახაზი)

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \Longrightarrow h_1 = k^2 h,$$

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \Longrightarrow h_2 = k^2 h_1 = k^4 h,$$

$$k = \sqrt{\frac{h_3}{h_2}} \Longrightarrow h_3 = k^2 h_2 = k^6 h.$$

ამგვარად, ჩანს კანონზომიერება $h_n = k^{2n}h.$



ჩავსვათ $h_n -$ ის მიღებული მნიშვნელობა (1) განტოლებაში და ვიპოვოთ გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, რომელიც იქნება ბურთულას მიერ გაჩერებამდე გავლილი მანძილი:

$$s = h + 2k^2h + 2k^4h + k^6h + \dots + 2k^{2n}h =$$

$$= h + 2h(k^2 + k^4 + k^6 + \dots + k^{2n}) = h + 2h\sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} =$$

$$= h\left(1 + \frac{2k^2}{1-k^2}\right) = \frac{1+k^2}{1-k^2}h, \quad 0 \le k < 1.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $s = \frac{1+k^2}{1-k^2}h.$

ამოცანა 44.5

m_1 და m_2 მასისა და k აღდგენის კოეფიციენტიანი ორი ბურთულა გადატანით მოძრაობს ერთი და იგივე მიმართულებით. როგორი უნდა იყოს მათი $\vec{v}_1$ და $\vec{v}_2$ სიჩქარეები იმისათვის, რომ დარტყმის შემდეგ m_1 სხეული, რომელიც ეჯახება, გაჩერდეს, ხოლო m_2 სხეულმა მიიღოს მოცემული u_2 სიჩქარე?

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ჩავწეროთ სხეულების სიჩქარეების გამოსათვლელი ფორმულები დარტყმის შემდეგ:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2}(v_1 - v_2), \qquad (1)$$

$$u_2 = v_2 + \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}(v_1 - v_2). \qquad (2)$$

მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონის თანახმად დარტყმისას:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2. \qquad (3)$$

(1) განტოლებას გამოვაკლოთ (2) განტოლება, მივიღებთ

$$u_1 - u_2 = -k(v_1 - v_2),$$

აქედან

$$v_2 = v_1 + \frac{u_1 - u_2}{k}. \qquad (4)$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_1 + m_2\frac{(u_1 - u_2)}{k},$$

საიდანაც

$$v_1 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2(u_1 - u_2)}{k(m_1 + m_2)}.$$

მიღებული გამოსახულება ჩავსვათ (4) ფორმულაში:

$$v_2 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2(u_1 - u_2)}{k(m_1 + m_2)} + \frac{u_1 - u_2}{k} =$$

$$= \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1(u_1 - u_2)}{k(m_1 + m_2)}.$$

დარტყმის შემდეგ $u_1 = 0,$ ამიტომ

$$v_1 = \frac{m_2u_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2u_2}{k(m_1 + m_2)} = \frac{1 + k}{k}\frac{m_2}{m_1 + m_2}u_2,$$

$$v_2 = \frac{m_2u_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1u_2}{k(m_1 + m_2)} = \frac{km_2 - m_1}{k(m_1 + m_2)}u_2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_1 = \frac{1+k}{k}\frac{m_2}{m_1+m_2}u_2; \quad v_2 = \frac{km_2-m_1}{k(m_1+m_2)}u_2.$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამოცანათა კრებულში $v_2 -$ ის გამოსახულებაში არასაწორად არის დასმული პლიუს და მინუს ნიშნები.

ამოცანა 44.6

12ტ მასის ორთქლის ურო 5მ/წმ-ის სიჩქარით ეცემა გრდემლზე, რომლის მასა გამოსაწედი რკინის ნაჭრით არის 250ტ. იპოვეთ გამოსაჭედი ნაჭრის მიერ შთანთქმული A_1 მუშაობა და A_2 მუშაობა, დაკარგული საძირკვლის შერყევაზე, და უროს მარგი ქმედების η კოეფიციენტი; დარტყმა არადრეკადია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

A_1 მუშაობა, რომელიც გამოსაჭედი ნაჭრის მიერ შთანთქმება, გამოვთვალოთ როგორც დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ კინეტიკური ენერგიების სხვაობა:

$$T_0 - T = \sum_{i=1}^{n} A_i^e,$$

სადაც

$$T_0 = \frac{m_უ v_უ^2}{2}; \;\; T = \frac{m\mathrm{u}^2}{2}, \qquad m = m_უ + m_{გრ}.$$

მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონის თანახმად:

$$m_უ v_უ = mu,$$

მაშინ

$$A_1 = \frac{m_უ v_უ^2}{2} - \frac{m\mathrm{u}^2}{2} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2} - \frac{262 \cdot 10^3}{2} \cdot \left(\frac{5 \cdot 12}{262}\right)^2 =$$

$$= 150 \cdot 10^3 \cdot \left(1 - \frac{6}{131}\right) = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 125}{131} =$$
$$= 143 \cdot 10^3 (ნ \cdot მ) = 143 კნ \cdot მ.$$

A_2 მუშაობა, რომელიც იხარჯება დაკარგული საძირკვლის შერყევაზე, განვსაზღვროთ როგორც დარტყმამდე კინეტიკური ენერგიის და იმ ენერგიის სხვაობა, რომელის შთაინთქმება გამოსაჭედი ნაჭრის მიერ:

$$A_2 = \frac{m_უ v_უ^2}{2} - A_1 = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2} - 143 \cdot 10^3 =$$
$$= 6{,}83 \cdot 10^3 (ნ \cdot მ) = 6{,}83 (კნ \cdot მ).$$

გამოვთვალოთ უროს მარგი ქმედების η კოეფიციენტი:

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{143 - 9{,}83}{143} = 0{,}95$$

პ ა ს უ ხ ი: A_1=143 კნ·მ; $A_2 = 6{,}83$ კნ·მ; $\eta = 0.95$.

ამოცანა 44.7

$m_1 =$10კგ მასის ურო ნამზადს აბრტყელებს სასურველ ზომებამდე 70 დარტყმით. რამდენი დარტყმით შეასრულებს იგივე ოპერაციას $m_2 =$100კგ მასის ურო, თუ ამძრავი მექანიზმი მას მიანიჭებს იგივე სიჩქარეს, რასაც ანიჭებს პირველ უროს. გრდემლის მასა M=200კგ. დარტყმა აბსოლუტურად არადრეკადია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 10 და 100კგ მასის უროების მუშაობისას შთანთქმული ენერგიების ტოლობის პირობიდან (ფორმულა (44.44)) შეგვიძლია დავწეროთ:

$$A = 70\left[\frac{10v^2}{2} - \frac{210v^2}{2}\left(\frac{10}{210}\right)^2\right] = N\left[\frac{100v^2}{2} - \frac{300v^2}{2}\left(\frac{100}{300}\right)^2\right],$$

აქედან განვსაზღვრავთ, თუ რამდენი N დარტყმის შემდეგ გააბრტყელებს ნამზადს m_2 =100კგ მასის ურო:

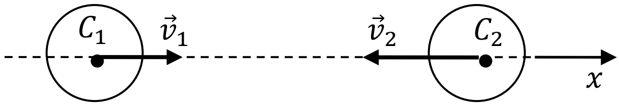
$$N = 10.$$

პ ა ს უ ხ ი: 10 დარტყმა.

ამოცანა 44.8

იპოვეთ აბსოლუტურად დრეკადი დარტყმის შემდეგ ორი ისეთი ერთნაირი ბირთვის სიჩქარე, რომლებიც მოძრაობენ ერთმანეთის შესახვედრად v_1 და v_2 სიჩქარეებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვსახოთ ბირთვების მდებარეობა დარტყმამდე (იხ. ნახაზი).



(44.19) ფორმულის თანახმად ვიპოვოთ პირველი ბურთულას u_1 და u_2 სიჩქარეები დარტყმის შემდეგ, თუ ვიცით, რომ $m_1 = m_2 = m,\ k = 1$:

$$u_1 = v_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1+v_2) = v_1 - 2\frac{m}{2m}(v_1+v_2) = -v_2,$$

$$u_2 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1+v_2) = -v_2 + 2\frac{m}{2m}(v_1+v_2) = v_1.$$

მივიღეთ, რომ $u_1 = -v_2,\ u_2 = v_1,$ ე.ი. ბურთულები დაჯახების შემდეგ გაცვლიან სიჩქარეებს.

პ ა ს უ ხ ი: ბურთულები დაჯახების შემდეგ გაცვლიან სიჩქარეებს.

ამოცანა 43.9

ორი ერთნაირი A და B ბურთულა მოძრაობს ერთმანეთის შესახვედრად. როგორი დამოკიდებულება უნდა იყოს სიჩქარეებს შორის დაჯახებამდე, რომ დაჯახების შემდეგ A ბურთულა გაჩერდეს? დარტყმის აღდგენის კოეფიციენტი არის k.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გამოვსახოთ ბირთვების მდებარეობა დარტყმამდე (იხ. ნახაზი).

(44.19) ფორმულის თანახმად ვიპოვოთ A ბურთულას u_A სიჩქარე დარტყმის შემდეგ,:

$$u_A = v_A - (1+k)\frac{m_B}{m_A+m_B}(v_A+v_B).$$

პირობის თანახმად $m_A = m_B = m,\ u_A = 0,$ ე.ი.

$$0 = v_A - (1+k)\frac{m}{2m}(v_A+v_B)$$

ან

$$0 = \frac{v_A}{v_B} - \frac{1}{2}(1+k)\left(\frac{v_A}{v_B}+1\right).$$

აქედან

$$\frac{v_A}{v_B}\frac{1-k}{2} = \frac{1+k}{2},$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}$$

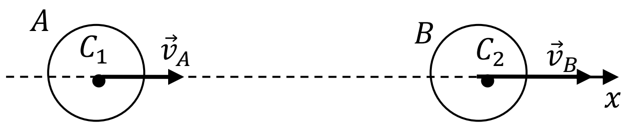
პ ა ს უ ხ ი: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}$.

ამოცანა 44.10

A სხეული, რომლის სიჩქარე 3-ჯერ მეტია B სხეულის სიჩქარეზე, ეჯახება მას. რას უნდა უდრიდეს ამ სხეულების მასების შეფარდება, რომ დაჯახების შემდეგ A სხეული გაჩერდეს? დარტყმის აღდგენის კოეფიციენტი არის 0,8.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გამოვსახოთ ბირთვების მდებარეობა დარტყმამდე (იხ. ნახაზი).



(44.19) ფორმულის თანახმად ვიპოვოთ A ბურთულას u_A სიჩქარე დარტყმის შემდეგ,:

$$u_A = v_A - (1+k)\frac{m_B}{m_A+m_B}(v_A-v_B).$$

პირობის თანახმად $\frac{v_A}{v_B} = 3, \ \ u_A = 0,$ მაშინ

$$0 = v_A - (1+k)\frac{m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B) =$$
$$= \frac{v_A}{v_B} - (1+k)\frac{m_B}{m_A + m_B}\left(\frac{v_A}{v_B} - 1\right)$$

ან

$$3 - 3{,}6 \cdot \frac{m_B}{m_A + m_B} = 0.$$

აქედან

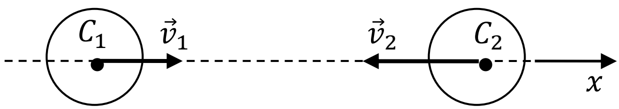
$$\frac{m_B}{m_A + m_B} = \frac{1}{1{,}2} \Longrightarrow \frac{m_A}{m_B} + 1 = 1{,}2 \Longrightarrow \frac{m_A}{m_B} = 0{,}2 \ \Longrightarrow \frac{m_B}{m_A} = 5.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{m_B}{m_A} = 5.$

ამოცანა 44.11

განსაზღვრეთ ორი ბურთულას m_1 და m_2 მასების ფარდობა ორ შემთხვევაში: 1) პირველი ბურთულა წონასწორობაშია; ხდება ცენტრალური დაჯახება, რის შედეგადაც მეორე ბურთულა წონასწორობაში რჩება; 2) ბურთულები ერთმანეთს ხვდება ტოილ და ურთიერთსაწინაალმდეგოდ მიმართული სიჩქარეებით და ცენტრალური დაჯახების შემდეგ მეორე ბურთულა წონასწორობაში რჩება. აღდგენის კოეფიციენტი არის k.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვსახოთ ბირთვების მდებარეობა დარტყმამდე (იხ. ნახაზი).



(44.19) ფორმულის თანახმად ვიპოვოთ მეორე ბურთულას u_2 სიჩქარე დარტყმის შემდეგ:

$$u_2 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2).$$

ამოცანის პირობის თანახმად $u_2 = 0, \ \ v_1 = 0.$
მაშინ

$$0 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}v_2.$$

რადგან $v_2 \neq 0,$ მაშინ

$$1+k=\frac{m_1+m_2}{m_1}=1+\frac{m_2}{m_1}\Longrightarrow\frac{m_2}{m_1}=k.$$

2) ვიპოვოთ მეორე ბურთულას u_2 სიჩქარე დარტყმის შემდეგ:

$$u_2=-v_2+(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1+v_2).$$

ამოცანის პირობის თანახმად $\vec{v}_1=-\vec{v}_2,\ u_2=0.$ მაშასადამე,

$$0=-v_2+(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}2v_2.$$

რადგან $v_2\neq 0,$ მაშინ

$$1=2(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}\Longrightarrow 2(1+k)=\frac{m_1+m_2}{m_1}=1+\frac{m_2}{m_1}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{m_2}{m_1}=1+2k.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 1) $\frac{m_2}{m_1}=k;$ 2) $\frac{m_2}{m_1}=1+2k.$

ამოცანა 44.12

სამი, m_1, m_2 და m_3 მასის, აბსოლუტურად დრეკადი ბურთულა ძევს გლუვ ღარში ერთმანეთისაგან გარკვეულ მანძილზე. ირველი ბურთულა, გაშვებული გარკვეული საწყისი სიჩქარით, ეჯახება მეორე გაჩერებულ ბურთულას, რომელიც იწყებს მოძრაობას და თავის მხრივ ეჯახება მესამე გაჩერებულ ბურთულას. როგორი სიდიდის უნდა იყოს მეორე ბურთულას m_2 მასა, რომ მესამე ბურთულამ მიიღოს უდიდესი სიჩქარე?

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან სისტემის მოძრაობის რაოდენობა დარტყმის დროს რჩება უცვლელი, ამიტომ მესამე ბურთულას უდიდესი სიჩქარე ექნება იმ შემთხვევაში, როცა პირველი და მეორე ბურთულების დაჯახების შემდეგ პირველი რჩება წონასწორობაში (მეორეს სიჩქარე მაქსიმალურია), ხოლო მეორე და მესამე ბურთულების დაჯახების შემდეგ მეორე ბურთულა გაჩერდება.

მაშასადამე, (44.19) ფორმულის თანახმად პირველი დარტყმის შემდეგ:

$$u_1=v_1-(1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2).$$

ამოცანის პირობის თანახმად $k=1,\ v_2=0,$ რადგან უნდა შესრულდეს პირობა u_1, ამიტომ

$$0=v_1-\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_1\Longrightarrow\frac{m_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{2},$$

რადგან პირობის თანახმად $v_1\neq 0.$

მეორე დარტმისათვის

$$u_2' = v_2' - (1+k)\frac{m_3}{m_3+m_2}(v_2' - v_3).$$

სადაც $v_2' -$ მეორე ბურთულას სიჩქარეა პირველი დარტყმის შემდეგ მეორე დარტყმამადე; $u_2' -$ მეორე ბურთულას სიჩქარეა მეორე დარტყმის შემდეგ, $u_2' = 0$; $v_3 -$ მესამე ბურთულას სიჩქარეა დარტყმამადე.

პირობის თანახმად $v_3 = 0.$ მაშინ

$$0 = v_2' - \frac{2m_3}{m_3+m_2}v_2'.$$

რადგან $v_2' = 0.$ მაშინ

$$\frac{m_3}{m_3+m_2} = \frac{1}{2}.$$

გავაერთიანოთ ორივე შედეგი და განვსაზღვროთ $m_2 -$ ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც მესამე ბურთულა მიიღებს უდიდეს სიჩქარეს:

$$\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_3}{m_3+m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} + 1 = \frac{m_2}{m_3} + 1 \Rightarrow m_2 = \sqrt{m_1 m_3}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}.$

ამოცანა 44.13

v_1 სიჩქარის მქონე m_1 მასის ბურთულა მოძრაობისას ხვდება m_2 მასის უძრავი ბურთულა ისე, რომ მისი სიჩქარე დაჯახებისას მათი ცენტრების შემაერთებელ წრფესთან ადგენს α კუთხეს. განსაზღვრეთ: 1) პირველი ბურთულას სიჩქარე დარტყმის შემდეგ, თუ დარტყმა აბსოლუტურად არადრეკადია; 2) თითოეული ბურთულას სიჩქარე დარტყმის შემდეგ, თუ დარტყმა არის დრეკადი, ხოლო აღდგენისა კოეფიციენტი $-k.$

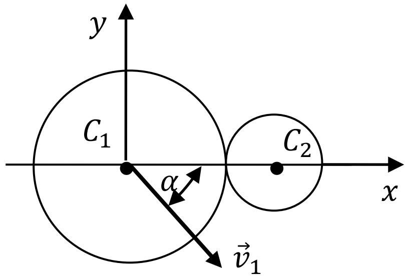
ა მ ო ხ ს ნ ა.

1) ბურთულები ახორციელებენ პირდაპირ დარტყმას, მაშინ (44.19) ფორმულის თანახმად პირველი ბურთულას სიჩქარე დარტყმის შემდეგ

$$u_{1x} = v_{1x} - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{1x} - v_{2x}),$$

სადაც u_{1x} და v_{1x} –პირველი ბურთულას სიჩქარის გეგმილია Ox ღერძზე შესაბამისად დარტყმის შემდეგ და დარტყმამდე (იხ. ნახაზი).

ამოცანის პირობის თანახმად $k = 1,\ v_2 = 0,$ მაშასადამე,



$$u_{1x} = v_1 cos\alpha - \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 cos\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 cos\alpha,$$

$$u_{1y} = v_{1y} = -v_1 sin\alpha.$$

მაშინ

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 cos\alpha\right)^2 + (v_1 sin\alpha)^2} =$$

$$= v_1 \sqrt{sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 cos^2\alpha}.$$

2) პირველი ბურთულას სიჩქარე:

$$u_{1x} = v_1 cos\alpha - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 cos\alpha =$$

$$= v_1 cos\alpha \left[1 - (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right] = v_1 \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} cos\alpha,$$

$$u_{1y} = v_{1y} = -v_1 sin\alpha.$$

მაშინ პირველი ბურთულას სიჩქარე დარტყმის შემდეგ

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{v_1^2 cos^2\alpha \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + v_1^2 sin^2\alpha} =$$

$$= v_1 \sqrt{sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 cos^2\alpha}.$$

ვიპოვოთ მეორე ბურთულას სიჩქარე დარტყმის შემდეგ, რადგან $v_2 = 0$, მაშინ

$$u_2 = v_2 + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_2) = (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 cos\alpha =$$

$$= v_1 \frac{m_1(1 + k)}{m_1 + m_2} cos\alpha.$$

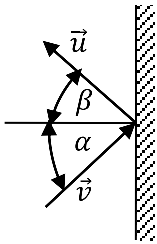
პ ა ს უ ხ ი: 1) $u_1 = v_1 \sqrt{sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 cos^2\alpha}$; ;

$$2)\, u_1 = v_1\sqrt{sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 cos^2\alpha};\ u_2 = v_1\frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}cos\alpha.$$

ამოცანა 44.14

აბსოლუტურად დრეკადი ბურთულა, რომლის ცენტრი მოძრაობს ჰორიზონტალურ წრფეზე v სიჩქარით, ხვდება α კუთხით გლუვ სიბრტყეს. განსაზღვრეთ ბურთულას სიჩქარე დარტყმის შემდეგ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ბურთულას უძრავ სიბრტყეზე ირიბი დაჯახებისას (იხ. ნახაზი) აღდგენის კოეფიციენტი



$$k = \frac{tg\alpha}{tg\beta}.$$

რადგან დარტყმა აბსოლუტურად დრეკადია, ამიტომ $k = 1$. მაშინ $\alpha = \beta$

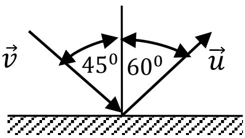
და $u = v$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u> დაცემის კუთხე ეტოლება კუთხეს, სიჩქარეები დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ მოდულით ტოლია.

ამოცანა 44.15

ფოლადის ბურთულა ეცემა 45^0 კუთხით ფოლადის ჰორიზონტალურ ფილაზე და აიტყორცნება ვერტიკალიდან 60^0 კუთხით. განსაზღვრეთ დარტყმისას აღდგენის კოეფიციენტი

ა მ ო ხ ს ნ ა. ბურთულას უძრავ სიბრტყეზე ირიბი დაჯახებისას (იხ. ნახაზი) აღდგენის კოეფიციენტი



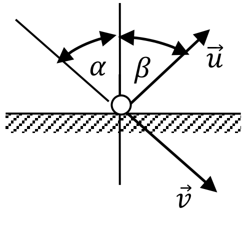
$$k = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{tg45^0}{tg60^0} = \frac{1}{1,73} = 0,58,.$$

სადაც $\alpha -$ დაცემის კუთხეა; $\beta -$ არეკვლის.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $k = 0,58$.

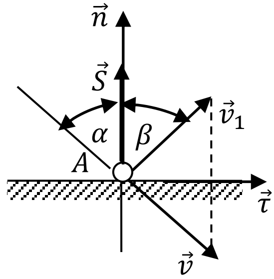
ამოცანა 44.16

ბურთულა v სიჩქარით დახრილად ეჯახება გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეს და აიტყორცნება იქიდან $v_1 = \frac{v\sqrt{2}}{2}$ სიჩქარით. განსაზღვრეთ α დაცემისა და β არეკვლის



კუთხეები, თუ დარტყმისას აღდგენის კოეფიციენტი $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემით დარტყმისას



$$m\overrightarrow{v_1} - m\vec{v} = \overrightarrow{S}. \qquad (1)$$

(1) ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილოთ $\vec{n}$ და $\vec{\tau}$ ღერძებზე (იხ. ნახაზი), მივიღებთ:

$$\begin{cases} v_{1\tau} - v_\tau = 0, \\ v_{1n} - v_n = \frac{S}{m}. \end{cases} \qquad (2)$$

ცხადია, რომ

$$\begin{cases} |v_n| = vcos\alpha; \;\; v_\tau = vsin\alpha, \\ v_{1n} = v_1 cos\beta; \quad v_{1\tau} = v_1 sin\beta. \end{cases} \qquad (3)$$

ამიტომ

$$v_1 sin\beta = vsin\alpha. \qquad (4)$$

აქედან

$$sin\beta = \frac{v}{v_1} sin\alpha = \sqrt{2} sin\alpha. \qquad (4)$$

ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$v_1 = v\sqrt{sin^2\alpha + k^2 cos^2\alpha}$$

და ვიპოვოთ

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = sin^2\alpha + k^2(1 - sin^2\alpha)$$

ან

$$sin^2\alpha(1 - k^2) + k^2 = \left(\frac{v_1}{v}\right)^2.$$

აქედან

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 - k^2}{(1 - k^2)}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

მაშინ დაცემის კუთხე

.

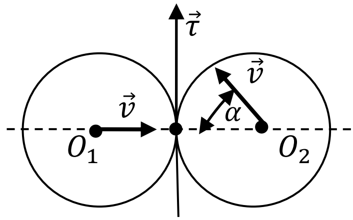
(5) განტოლებიდან ვიპოვით არეკვლის კუთხეს:

$$sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}.$$

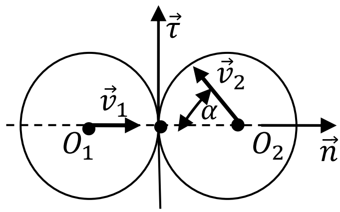
პ ა ს უ ხ ი: $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 44.17

ორი ერთნაირი აბსოლუტურად დრეკადი ბურთულა ერთნაირი სიდიდის v სიჩქარეებით ეჯახება ერთმანეთს. მარცხენა ბურთულას სიჩქარე დარტყმამდე მიმართულია ცენტრების წრფის გასწვრივ მარჯვნივ, მარჯვენასი დარტყმამდე იმავე ცენტრების წრფესთან ადგენს α კუთხეს (იხ. ნახაზი). განსაზღვრეთ ბურთულების სიჩქარეები დარტყმის შემდეგ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ ბურთულების ცენტრების სიჩქარეების გეგმილები $\vec{n}$ და $\vec{\tau}$ ღერძებზე დარტყმამდე::



$$v_{1n} = v_1 = v, \; v_{1\tau} = 0; \quad (1)$$

$$v_{2n} = -v_2 cos\alpha = -vcos\alpha, \quad (2)$$

$$v_{2\tau} = v_2 sin\alpha = vsin\alpha$$

და საერთო სიჩქარის გეგმილი $\vec{n}$ ღერძებზე აბსოლუტურად დრეკადი დარტყმის შემდეგ:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

ჩავსვათ (3) განტოლებში ცნობილი სიდიდეები, გავითვალისწინოთ, რომ $m_1 = m_2 = m$, მაშინ

$$u_n = \frac{v - vcos\alpha}{2} = \frac{v(1 - cos\alpha)}{2}. \quad (4)$$

ბურთულების ცენტრების სიჩქარეების გეგმილები $\vec{\tau}$ ღერძზე დარტყმის შემდეგ:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau} = 0, \quad (5)$$

$$u_{2\tau} = v_{2\tau} = vsin\alpha \quad (6)$$

და $\vec{n}$ ღერძებზე აბსოლუტურად დრეკადი დარტყმისას:

$$u_{1n} = 2u_n - v_{1n}, \quad (7)$$

$$u_{2n} = 2u_n - v_{2n}, \quad (8)$$

ან (1), (2) და (4) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$u_{1n} = v(1 - cos\alpha) - v = -vcos\alpha,$$

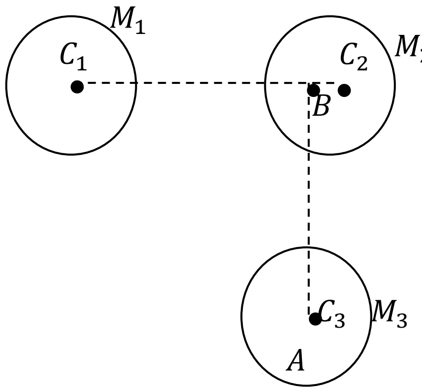
$$u_{2n} = v(1 - cos\alpha) + vcos\alpha = v.$$

პ ა ს უ ხ ი: $u_{1n} = -vcos\alpha; \; u_{2n} = v; \; u_{2\tau} = vsin\alpha.$ $\vec{n}$ ღერძი მიმართულია ცენტრების წრფის გასწვრივ მარჯვნივ, ხოლო $\vec{\tau}$ – ღერძი- ზევით.

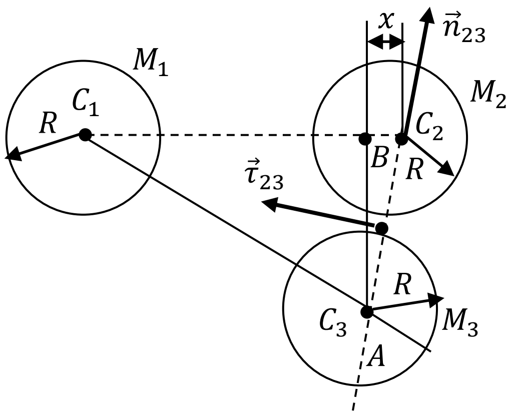
ამოცანა 44.18

გვაქვს R რადიუსის სამი ერთნაირი ბურთულა: M_1, M_2 და M_3. მანძილი ცენტრებს შორის $C_1\,C_2 = a$. განსაზღვრეთ $C_1\,C_2$ წრფის მართობ რომელ AB წრფეზე უნდა იყოს მესამე ბურთულას C_2 ცენტრი იმისათვის , რომ მესამე ბურთულა მიიღებს გარკვეულ სიჩქარეს AB მიმართულებით და M_2 ბურთულას დაჯახების შემდეგ კი ცენტრალურად დაეჯახება M_1 ბურთულას. იგულისხმება აბსოლუტურად დრეკადი ბურთულები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავღნიშნოთ მანძილი C_2 ცენტრიდან AB წრფემდე, რომელიც უდრის BC_2, x –ით. მოძრაობისას, მათი საერთო სიჩქარე მიმართული იქნება მათ ცენტრებზე გამავალი ნორმალის გასწვრივ (იხ. ნახაზი. მაშინ იმისათვის, რომ M_3 ბურთულა ცენტრალურად დაეჯახოს M_1 ბურთულას აუცილებელია, რომ მისი სიჩქარე მიმართული იყოს ურთიერთ დარტმაში მონაწილე ზედაპირების ნორმალის გასწვრივ (ნორმალი გადის M_1 და M_3 ბურთულების მასათა ცენტრებში) ამიტომ



M_3 ბურთულას სიჩქარე M_2 ბურთულას დაჯახების შემდეგ უნდა იყოს



მიმართული $C_1\,C_3$ წფრის გასწვრივ, რომელიც პარალელურია M_1და M_3 ბურთულების შეხების წერტილში გავლებული n_{23} ნორმალის

მართობულად. მაშინ $\Delta C_1\, C_3 C_2$ –მართკუთხაა და მსგავსია $\Delta\, C_3\boldsymbol{B}C_2$, ამიტომ

$$\frac{C_2C_3}{x}=\frac{C_1C_2}{C_3}$$

ან

$$\frac{2R}{x}=\frac{a}{2R}.$$

აქედან

$$x=BC_2=\frac{4R^2}{a}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> AB წრფის დაშორება C_2 ცენტრიდან არის $BC_2=\frac{4R^2}{a}$.

ამოცანა 44.19

შენობის საძირკვლის ქვეშ ნიადაგის გასამაგრებლად M =50კგ მასის ბოძს ჩაასობენ ურნალით, რომლის $M_1=450$კგ მასის საცემი ვარდება h =2მ სიმაღლიდან უსაწყისო სიჩქარით. უკანასკნელი 10 დარტყმისას ბოძი ჩავიდა δ =5სმ სიღრმეში. განსაზღვრეთ ნიადაგის საშუალო წინაღობა ბოძის ჩასობისას. დარტყმა არადრეკადია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გამოვთვალოთ კინეტიკური ენერგიეს დანაკარგი არადრეკადი დარტყმისას:

$$T_1-T_2=\frac{M_1M}{2(M_1+M)}(v_{1n}-v_{2n})^2, \qquad (1)$$

სადაც T_1- სიტემის კინეტიკური ენერგიაა დარტყმის დასაწყისში; T_2- სიტემის კინეტიკური ენერგიაა დარტყმის ბოლოს.

რადგან ბოძი დარტყმის დასაწყისში იყო უძრავი, ამიტომ $v_{2n}=0$, ხოლო

$$v_{1n}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 2}=6{,}26\textit{(მ/წმ).}$$

სიტემის კინეტიკური ენერგია დარტყმის დასაწყისში უდრის საცემის კინეტიკურ ენერგიას:

$$T_1=\frac{M_1v_{1n}^2}{2}.$$

მაშინ (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\frac{M_1v_{1n}^2}{2}-T_2=\frac{M_1M{v_{1n}}^2}{2(M_1+M)}.$$

აქედან

$$T_1=\frac{M_1v_{1n}^2}{2}\left(1-\frac{M}{M_1+M}\right)=\frac{450\cdot 6{,}26^2}{2}\left(1-\frac{50}{500}\right)=7935.$$

თოლობიდან

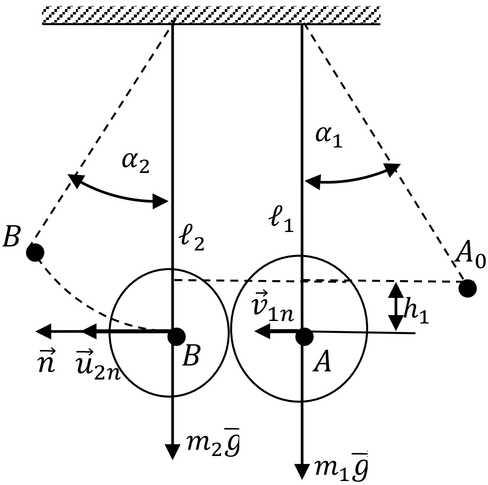
$$10T_2 = S \cdot \delta$$

განვსაზღვროთ ნიადაგის საშუალო წინაღობა ბოძის ჩასობისას:

$$S = \frac{10T_2}{\delta} = \frac{10 \cdot 7935}{0{,}05} = 1\,590\,000(ნ) = 1590(კნ).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $S =$1590კნ.

ამოცანა 44.20



m_1 და m_2 მასის ორი ბურთულა ჩამოკიდებულია ℓ_1 და ℓ_2 სიგრძის პარალელურ ძაფზე ისე, რომ მათი ცენტრები ერთ სიმაღლეზე არიან. პირველი ბურთულა გადახარეს ვერტიკალიდან α_1 კუთხით და შემდეგ გაუშვეს უსაწყისო სიჩქარით. განსაზღვრეთ მეორე ბურთულას α_2 უდიდესი გადახრის კუთხე, თუ აღდგენის კოეფიციენტი არის k.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით და განსაზღვროთ პირველი ბურთულას სიჩქარე დარტყმამდე (იხ. ნახაზი):

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g h_1,$$

სადაც $h_1 = \ell_1(1 - cos\alpha_1)$.

მაშინ

$$\frac{m_1 v^2}{2} =$$
$$= m_1 g \ell_1 (1 - cos\alpha_1).$$

აქედან

$$v^2 = 2g\ell_1(1 - cos\alpha_1). \quad (1)$$

ბურთულების სიჩქარეების გეგმილები n ღერძზე, რომელიც გადის ბურთულების მასათა ცენტრებზე დარტყმამდე:

$$v_{1n} = v, \qquad v_{2n} = 0.$$

განვსაზღვროთ ბურთულების საერთო სიჩქარის გეგმილი n ღერძზე დარტყმის შემდეგ:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$$

და მეორე ბურთულას სიჩქარის გეგმილი n ღერძზე დარტყმის შემდეგ:

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = u_n(1+k) = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}(1+k).$$

u_{2n} სიჩქარე წარმოადგენს მეორე ბირთვის საწყის სიჩქარეს, ე.ი.

$$u_{2n} = v_0.$$

კინეტიკური ენერგიის ცვლილების საფუძველზე შევადგინოთ განტოლება მეორე ბურთულასათვის:

$$-\frac{m_2 v_0^2}{2} = -m_2 g h_2 = -m_2 g \ell_2 (1 - cos\alpha_2)$$

ან

$$\frac{u_{2n}^2}{2} = g\ell_2(1 - cos\alpha_2).$$

აქედან

$$1 - cos\alpha_2 = \frac{u_{2n}^2}{2g\ell_2} = \frac{1}{2g\ell_2}\frac{m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2}(1+k)^2 =$$

$$= \frac{m_1^2(1+k)^2 \ell_1}{(m_1 + m_2)^2 \ell_2}(1 - cos\alpha_1).$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

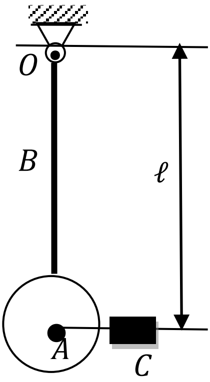
$$sin^2\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1^2(1+k)^2\ell_1}{(m_1+m_2)^2\ell_2} sin^2\frac{\alpha_1}{2}$$

ან

$$sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \cdot sin\frac{\alpha_1}{2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \cdot sin\frac{\alpha_1}{2}.$

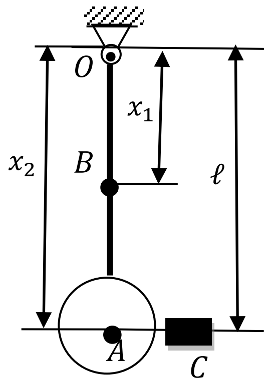
ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 44.21



სარტყამი მანქანის ქანქარა შედგება 10სმ რადიუსის და 5სმ სისქის ფოლადის A დისკოსა და 2სმ დიამეტრის და 90სმ სიგრძის ფოლადის მრგვალი B ღეროსაგან. ჰორიზონტალური სიბრტყიდან (რომელშიაც მდებარეობს ბრუნვის O ღერძი) რა ℓ მანძილზე უნდა მოვათავსოთ მანქანის მიერ დასამსხვრევი C ძელაკი, რომ ღერძი არ განიცდიდეს დარტყმას, თუ დარტყმის მიმართულებას მივიღებთ ჰორიზონტალურად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ბრუნვის ღერზე არ მოხდება დარტყმა, თუ დასამსხვრევი C ძელაკი მოთავსებულია დარტყმის ცენტრში, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება ფორმულით

$$\ell = \frac{J_{0z}}{mx}, \qquad (1)$$



სადაც $m-$სისტემის მასაა; $x-$ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატი; $J_{0z}-$ სისტემის ინერციის მომენტია O წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: m_1- ღეროს მასა, $a-$ღეროს სიგრძე, $r-$ღეროს დიამეტრი, m_2-დისოს მასა, $R-$დისოს დიამეტრი, $\delta-$დისოს სისქე.

ვიპოვოთ სისტემის ინერციის მომენტი

$$J_{0z} = J_B + J_A,$$

სადაც $J_B = \frac{m_1 a^2}{3}$; $J_A = \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 x_2^2.$

მაშინ

$$J_{0z} = \frac{m_1 a^2}{3} + \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 x_2^2. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ ღეროს მასა

$$m_1 = \rho \pi r^2 a$$

და დისკოს მასა

$$m_2 = \rho \pi R^2 \delta.$$

ვიპოვოთ სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა (იხ. ნახაზი), თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = a + R:$$

$$mx = \sum m_k x_k = m_1 x_2 + m_2 x_k$$

ან

$$mx = \rho\pi r^2 a\frac{a}{2} + \rho\pi R^2\delta(a+R) = \rho\pi\left[\frac{r^2a^2}{2} + R^2\delta(a+R)\right]. \qquad (3)$$

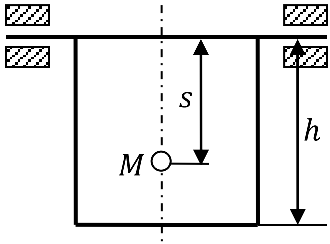
ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და განვსაზღვროთ საძიებელი მანძილი:

$$\ell = \frac{\dfrac{m_1a^2}{3} + \dfrac{m_2R^2}{2} + m_2x_2^2}{\rho\pi\left[\dfrac{r^2a^2}{2} + R^2\delta(a+R)\right]} = \frac{2r^2a^3 + 3R^4\delta + 6R^2x_2^2\delta}{6\left[\dfrac{r^2a^2}{2} + R^2\delta(a+R)\right]} =.$$

$$= \frac{2r^2a^3 + 3R^4\delta + 6R^2x_2^2\delta}{3[r^2a^2 + 2R^2\delta(a+R)]} = 97{,}5(სმ).$$

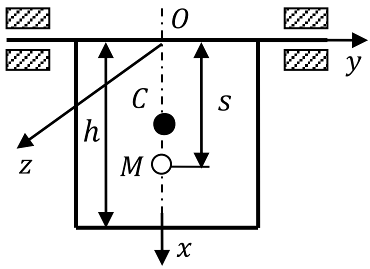
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\ell = 97{,}5(სმ)$.

ამოცანა 44.22



იპოვეთ სროლის საწარმოებლად მართკუთხა სამიზნეს დარტყმის ცენტრი. სამიზნეს სიმაღლე არის h.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დარტყმის იმპულსი უნდა იყოს ბრუნვის ღერძსა და მასათა ცენტრზე გამავალი სიბრტყის პერპენდიკულარული, ე.ი. სამიზნეს სიბრტყის. .ბრუნვის ღერძის მართობი სიბრტყე, რომელშიც მდებარეობს დარტყმის იმპულსი, უნდა მოგვცეს ბრუნვის ღერძზე გადაკვეთის O წერტილი, რომლისთვისაც ეს ღერძი წარმოადგენს ინერციის მთავარ ღერძს. ასეთი თვისება აქვს წერტილს, რომელიც მდებარეობს Oy ღერძზე და რომელსიც სამიზნეს სიბრტყე კვეთს მის სიმეტრიის სიბრტყეს (იხ. ნახაზი). დარტყმის ცენტრამდე $OM = s$ მანძილს ვიპოვით ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულიდან:



$$s = \frac{J_y}{mx_C},$$

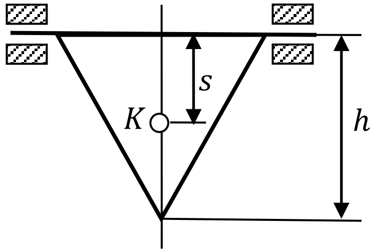
სადაც $x_C = \frac{h}{2}$; $J_y = \frac{mh^2}{3}$.

მაშინ

$$s = \frac{mh^2}{3m\cdot h/2} = \frac{2}{3}h.$$

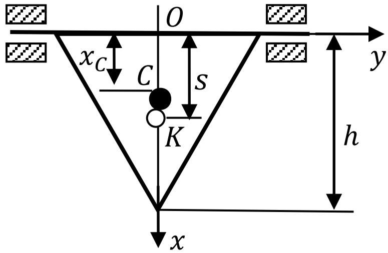
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $s = \frac{2}{3}h$.

ამოცანა 44.23



განსაზღვრეთ სამკუთხა სასროლი სამიზნეს დარტყმის K ცენტრის მდებარეობა. სამიზნეს სიმაღლე არის h

ა მ ო ხ ს ნ ა. დარტყმის იმპულსი არ გადაეცემა ღერძის დამაგრების წერტილებს, თუ ის ფირფიტის სიბრტყის მართობულია და ამასთან სრულდება პირობა: $J_{xy} = 0,$ ე.ი. სამიზნეს ბრუნვის y ღერძი O წერტილისათვის უნდა იყოს ინერციის მთავარი ღერძი (იხ. ნახაზი). ოცემულ შემთხვევაში ეს პირობა სრულდება, რადგან x ღერძი არის სიმეტრიის ღერძი და K წერტილი მდებარეობს ამ ღერძზე.



განვსაზღვროთ s მანძილი O წერტილიდან დარტყმის K ცენტრამდე:

$$s = OK = \frac{J_y}{Mx_C}, \qquad (1)$$

სადაც $J_y -$ სამიზნეს ინერციის მომენტია Oy ღერძის მიმართ; $x_C -$ მანძილი ბრუნვის ღერძიდან სამიზნეს მასათა C ცენტრამდე.

ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის თანახმად ვისარგებლოთ 34.12 ამოცანის ამოხსნით და განვსაზღვროთ

$$J_y = \frac{1}{8}Mh^2 + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}Mh^2.$$

ვიცით რა, რომ $x_C = h/3,$ ვიპოვით დარტყმის ცენტრის მდებარეობა:

$$s = \frac{Mh^2/6}{Mh/3} = \frac{h}{2}.$$

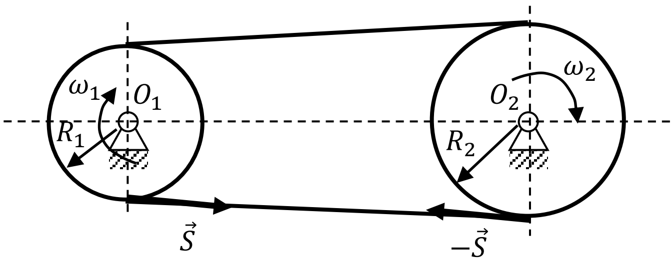
პ ა ს უ ხ ი: $s = h/2.$

ამოცანა 44.24

ორი ბორბალი ბრუნავს ერთ სიბრტყეში თავიანთი ღერძების გარშემო ω_{10} და ω_{20} კუთხური სიჩქარეებით. განსაზღვრეთ ბორბალთა ω_1 და ω_2 კუთხური სიჩქარეები მას შემდეგ, რაც მათზე ჩამოცმული იქნება ღვედი; ბორბლები მიღებულია R_1 და R_2 რადიუსების ერთნაირი

სიმკვრივის წრიულ დისკოებად; ღვედის მასა და სრიალი უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განიხილება შემთხვევა, როდესაც მოძრავი სხეული განიცდის დარტყმას იმის გამო, რომ მასზე ჩამოაცვამენ ღვედს. თითოეულ მოძრავ ბორბალზე მოდებული გარე დარტყმის $\vec{S}$ იმპულსი მოცემულ შემთხვევაში არის ღვედის დაჭიმულობის ძალის დარტყმის იმპულსი (იხ. ნახაზი). ამასთან,



უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე დარტყმის დროის განმავლობაში იცვლება სიდიდით, რომელიც უდრის ბრუნვის ღერძის მიმართ დარტყმის იმპულსის მომენტის შეფარდებას იმავე ღერძის მიმართ ინერციის მომენტთან:

$$\omega = \omega_0 + \frac{m_z(\vec{S})}{J_z}, \tag{1}$$

გამოვიყენოთ (1) ფორმულა პირველი და მეორე ბორბლისათვის, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\omega_1 = \omega_{10} - \frac{SR_1}{J_1}, \tag{2}$$

$$\omega_2 = \omega_{20} + \frac{SR_2}{J_2}. \tag{3}$$

გავამრავლოთ (2) განტოლება R_2J_1 −ზე, ხოლო (3) განტოლება R_1J_2 −ზე დ ამიღებული განტოლებები შევკრიბოთ. შედეგად მივიღებთ:

$$\omega_1R_2J_1 + \omega_2R_1J_2 = \omega_{10}R_2J_1 + \omega_{20}R_1J_2. \tag{4}$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ ღვედებით შეერთებული ბორბლები იბრუნებენ ერთად და ღვედების სრიალი უგულებელყოფილია, კავშირი ბორბლების კუთხური სიჩქარეებს შორის განისაზღვრება ტოლობით: $\omega_1R_1 = \omega_2R_2$. აქედან

$$\omega_2 = \frac{\omega_1R_1}{R_2}. \tag{5}$$

ჩავსვათ (5) გამოსახულება (4) ფორმულაში და ვიპოვოთ

$$\omega_1 = \frac{R_2(\omega_{10}R_2J_1 + \omega_{20}R_1J_2)}{{R_2}^2J_1 + R_1^2J_2}. \tag{6}$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\omega_2 = \frac{R_1(\omega_{10}R_2J_1 + \omega_{20}R_1J_2)}{{R_2}^2J_1 + R_1^2J_2}. \tag{7}$$

რადგან, ამოცანის პირობის თანახმად, ბორბლები წარმოადგენენ ერთნაირი სიმკვრივის წრიულ დისკოებს, ამიტომ

$$J_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi R_1^2 h)R_1^2 = \frac{1}{2}\rho\pi h R_1^4,$$
$$J_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi R_2^2 h)R_2^2 = \frac{1}{2}\rho\pi h R_2^4,$$

სადაც ρ —სიმკვრივეა; h —დისკოს სისქე; M_1, M_2 — ბორბლების მასები: $M_1 = \rho\pi R_1^2 h$, $M_2 = \rho\pi R_2^2 h$.

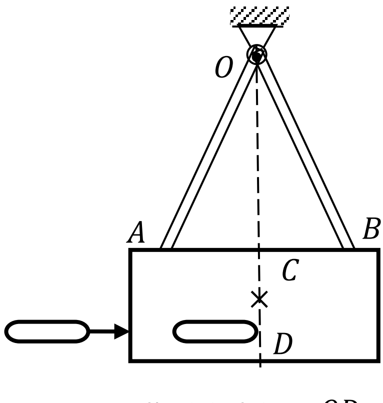
ჩავსვათ J_1 და J_2 მნიშვნელობები (6) და (7) ფორმულებში და გარდაქმნის შემდეგ ჩავწეროთ საბოლოო შედეგი:

$$\omega_1 = \frac{\omega_{10}R_2^2R_1^4 + \omega_{20}R_2^5R_1}{R_2^2R_1^4 + R_2^4R_1^2} = \frac{\omega_{10}R_1^3 + \omega_{20}R_2^3}{R_1(R_1^2 + R_2^2)},$$
$$\omega_2 = \frac{\omega_{10}R_2R_1^5 + \omega_{20}R_1^2R_2^4}{R_2^2R_1^4 + R_2^4R_1^2} = \frac{\omega_{10}R_1^3 + \omega_{20}R_2^3}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega_1 = \frac{\omega_{10}R_1^3+\omega_{20}R_2^3}{R_1(R_1^2+R_2^2)}$; $\omega_2 = \frac{\omega_{10}R_1^3+\omega_{20}R_2^3}{R_2(R_1^2+R_2^2)}$.

ამოცანა 44.25

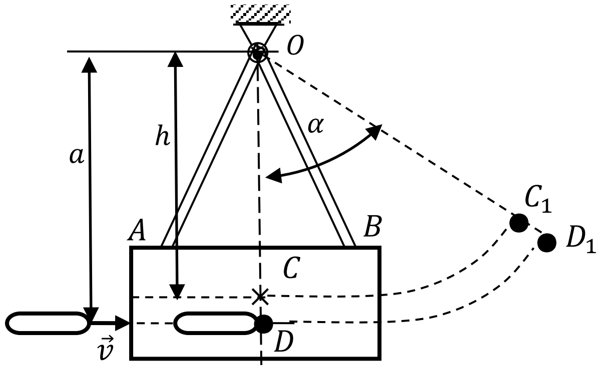
ბალისტიკური ქანქარა, რომელიც გამოიყენება ყუმბარის სიჩქარის განსასაზღვრავად, შედგება ჰორიზონტალურ O ღერძზე ჩამოკიდებული AB ცილინდრისაგან; ცილინდრი ერთი A ბოლოდან ღიაა და შევსებულია ქვიშით. ცილინდრში შესული ყუმბარა იწვევს ქანქარას მობრუნებას მისი O ღერძის გარშემო გარკვეული კუთხით. მოცემულია: M — ქანქარას მასა; $OC = h$ — მანძილი მისი მასათა C ცენტრიდან O ღერძამდე;



ρ —ინერციის რადიუსი O ღერძის მიმართ; m — ყუმბარის მასა; $OD = a$ — მანძილი დარტყმის მოქმედების წრფიდან ღერძამდე; α — ქანქარას გადახრის კუთხე. განსაზღვრეთ ყუმბარის v სიჩქარე, თუ დავუშვებთ, რომ ქანქარას ღერძი არ განიცდის დარტყმას, ამასთან $ah = \rho^2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გამოვსახოთ ნახაზზე ქანქარას და ყუმბარის მასათა ცენტრები



დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ (იხ. ნახაზი).

ქანქარაზე დარტყმის დროს იმოქმედებს დარტყმის $\vec{S}$ იმპულსი, რომელიც ყუმბარის მოძრაობის რაოდენობის ტოლია:

$$\vec{S} = m\vec{u} - m\vec{v}, \tag{1}$$

სადაც $\vec{u} = 0 -$ ყუმბარის საბოლოო სიჩქარეა; $\vec{v} -$ საწყისი (საძიებელი) სიჩქარეა.

ამასთან დარტყმის იმპულსის მომენტი O ღერძის მიმართ იწვევს სისტემის (ქანქარა-ყუმბარა) კინეტიკური მომენტის ცვლილებას იმავე ღერძის მიმართ, ე.ი.

$$J_A\omega = mva, \tag{2}$$

სადაც $\omega -$ქანქარას კუთხური სიჩქარეა ყუმბარის მოხვედრის მომენტში; $J_A -$ ქანქარას ყუმბარასთან ერთად ინერციის მომენტია A ღერძის მიმართ.

ვიპოვოთ J_A:

$$J_A = M\rho^2 + ma^2. \tag{3}$$

რეაქტიული დარტყმის იმპულსი A ღერძზე არ წარმოიქმნება, თუ D წერტილი ამ რერძისათვის იქნება დარტყმის ცენტრი, ე.ი. (1) ფორმულის თანახმად (იხ. 44.23 ამოცანის ამოხსნა

$$a = OD = \frac{J_y}{My_C} = \frac{M\rho^2}{Mh} = \frac{\rho^2}{h} \Longrightarrow \rho^2 = ah.$$

ჩავსვათ $\rho^2 -$ის ეს მნიშვნელობა (3) ფორმულაში და მივიღებთ:

$$J_A = Mah + ma^2 = a(Mh + ma).$$

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$\omega a(Mh + ma) = mva,$$

აქედან

$$v = \frac{Mh+ma}{m}\omega. \tag{4}$$

ქანქარას კუთხური სიჩქარის განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \quad (5)$$

რომელიც გამოვიყენოთ ყუმბარა-ქანქარას სისიტემის გადაადგილებისათვის დარტყმის შემდეგ. რადგან საბოლოო სიჩქარე ნულის ტოლია, ამიტომ $T = 0$:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} a(Mh + ma)\omega^2,$$

$$\sum A_k^e = -Mgh(1 - cos\alpha) - mga(1 - cos\alpha) =$$

$$= -g(Mh + ma)(1 - cos\alpha) = -g(Mh + ma)2sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (5) ფორმულაში და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}} sin \frac{\alpha}{2}.$$

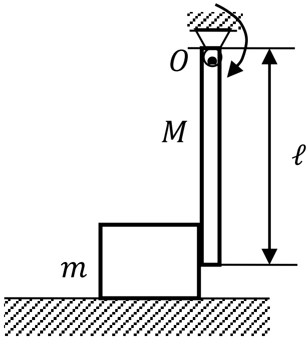
ამ გამოსახულების გათვალისწინებით ვიპოვით ყუმბარის სიჩქარეს (4) ფორმულით:

$$v = \frac{2(Mh + ma)}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} sin \frac{\alpha}{2}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $v = \frac{2(Mh+ma)}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} sin \frac{\alpha}{2}.$

ამოცანა 44.26

M მასის და ℓ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო, რომელიც მიმაგრებულია თავისი ზედა ბოლოთი O ცილინდრულ სახსართან, ვარდება ჰორიზონტალური მდებარეობიდან უსაწყისო სიჩქარით. ვერტიკალურ მდებარეობაში იგი ეჯახება m მასის ტვირთს და ამოძრავებს მას ჰორიზონტალურ მქისე სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი არის f. იპოვეთ ტვირთის მიერ გავლილი მანძილი, თუ დარტყმა არადრეკადია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. დარტყმის $\vec{S}$ იმპულსის განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ კინეტიკური მომენტის ცვლილების თეორემა დარტყმისას (ნახ.1):

$$K_z - K_z^{(0)} = \sum M_z(\vec{S}^e)$$

ან

$$J_z(\omega - \omega_0) = -S\ell.$$

(1)

კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად:

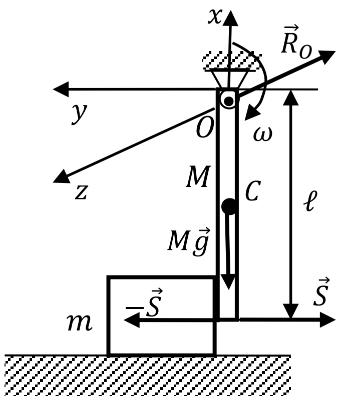
$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e$$

(2)

ღეროს კინეტიკური ენერგია ტვირთთან დაჯახების მომენტში

$$T_1 = \frac{1}{2} J_z \omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} M\ell^2\omega_1^2 = \frac{1}{6} M\ell^2\omega_1^2$$

რადგან მოძრაობა დაიწყო წონასწორობის მდგომარეობიდან, $T_0 = 0$.



ნახ.1

ღეროს $\varphi = \pi/2$ კუთხით მობრუნებისას მისი მასათა ცენტრი დაეშვება $h = \ell/2$ მანძილით, ამიტომ

$$\sum A_k^e = Mg\frac{\ell}{2}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (2) ფორმულაში:

$$\frac{1}{6} M\ell^2\omega_1^2 = Mg\frac{\ell}{2}$$

და მივიღებთ

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

ჩვასვათ ω_1 –ის მნიშვნელობა (1) ფორმულაში და გავითვალისწინოთ, რომ $\omega_0 = \omega_1$, მივიღებთ

$$S = \frac{J_z(\omega_0 - \omega)}{\ell} = \frac{\frac{1}{3}M\ell^2(\omega_1 - \omega)}{\ell} = \frac{1}{3}M\ell\sqrt{\frac{3g}{\ell}} - \frac{1}{3}M\ell\omega =$$

$$= M\sqrt{\frac{g\ell}{3}} - \frac{1}{3}Mv, \qquad (3)$$

სადაც $v = \omega\ell -$ ღეროს ბოლოს (რომლითაც ის ეჯახება ტვირთს) სიჩქარეა.

მეორეს მხრივ, რადგან დარტყმა არადრეკადია, ამიტომ თუ ჩავსვამთ $S = mv$ მნიშვნელობას (3) ფორმულაში , მივიღებთ:

$$v\left(\frac{1}{3}M + m\right) = M\sqrt{\frac{g\ell}{3}},$$

$$v = \frac{M\sqrt{3g\ell}}{M+3m}. \qquad (4)$$

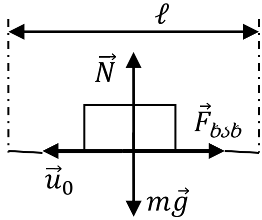
არადრეკადი დარტყმის შემდეგ ტვირთი იწყებს მოძრაობას ხაოიან ზედაპირზე u_0 სიჩქარით (ნახ.2), რომელიც გამოისახება (4) ფორმულით შენელებული აჩქარებით:

$$ma = -F_{ხაh}$$

ან

$$ma = -fmg,$$

$$a = -fg.$$



ნახ.2

გავითვალისწინოთ, რომ ტვირთის საბოლოო სიჩქარე $u = 0$ და გავლილი s მანძილი ვიპოვოთ ფორმულით: :

$$s = \frac{u^2 - u_0^2}{2a} = \frac{v^2}{2fg} = \frac{3\ell}{2f} \cdot \frac{M^2}{(M+3m)^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ განვიხილვთ სისტემას ღერო-ტვირთი და ჩავთვლით, რომ დარტყმის იმპულსი ტვირთის მხრიდან უდრის ნულს ხახუნის ძალის სასრული სიდიდის და დარტყმის დროის სიმცირის გამო, მაშინ (10 ფორმულა მიიღებს სახეს:

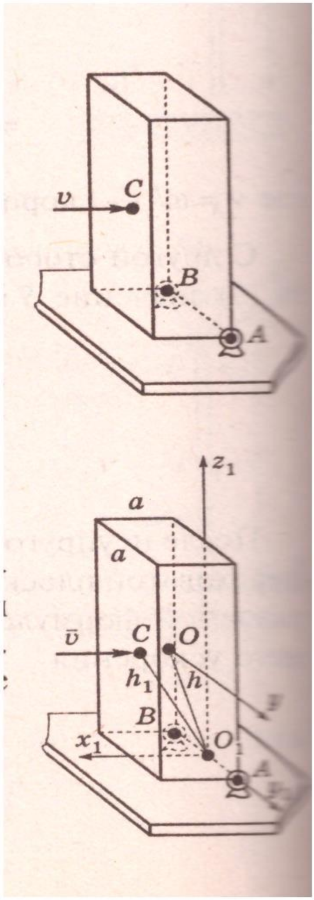
$$J_z(\omega - \omega_0) = -mv\ell,$$

სადაც $\omega = M/\ell$, რადგან დარტყმა არადრეკადია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში შედეგი არ შეიცვლება.

პ ა ს უ ხ ი: $s = \frac{3\ell}{2f} \cdot \frac{M^2}{(M+3m)^2}.$

ამოცანა 44.27

კვადრატული ფუძის მქონე ერთგვაროვანი მართი პრიზმა დგას ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე და შეუძლია ბრუნვა ამავე სიბრტყეში მდებარე AB წიბოს გარშემო. პრიზმის ფუძის წიბო არის a. მისი სიმაღლე არის-$3\,a$, მასა–$3\,m$. AB წიბოს მოპირდაპირე წახნაგის შუა C წერტილზე ეჯახება ჰორიზონტალური სიჩქარით m მასის ბურთულა. მიიღეთ, რომ დარტყმა არადრეკადია და ბურთულას მასა თავმოყრილია მის ცენტრში, რომელიც დარტყმის შემდეგ რჩება C წერტილში. განსაზღვრეთ v სიჩქარის უმცირესი მნიშვნელობა, როდესაც პრიზმა გადაყირავდება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. დარტყმის ძალების მომენტი O_1y_1 ღერძის მიმართ უდრის ნულს, რადგან დარტყმის დატვირთები მოდებულია ამ ღერძზე მდებარე A და B წერტილებზე (იხ ნახაზი). ამიტომ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ არ იცვლება, ე.ი.

$$3amv = J_{y_1}\omega, \qquad (1)$$

სადაც $J_{y_1} = J_{y_1}^{\text{ბურ}} + J_{y_1}^{\text{პრ}}$.

ბურთულას ინერციის მომენტი

$$J_{y_1}^{\text{ბურ}} = mh_1^2 = m\left[a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2\right] = \frac{13}{4}ma^2.$$

ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის საფუძველზე პრიზმის ინერციის მომენტი

$$J_{y_1}^{\text{პრ}} = J_y + 3mh^2,$$

სადაც

$$J_y = \int_{(M)} (x^2+z^2)dm = \gamma\left(\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-3a/2}^{3a/2} x^2\,dxdydz + \right.$$

$$+\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-3a/2}^{3a/2} z^2 dxdydz\Bigg) = \frac{5}{2}ma^2.$$

შედეგად

$$J_{y_1}^{პრ} = \frac{5}{2}ma^2 + 3m\left[a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2\right] = 10ma^2.$$

$$J_{y_1} = \frac{13}{4}ma^2 + 10ma^2 = \frac{53}{4}ma^2.$$

მაშინ (1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\omega = \frac{6v}{53a}. \quad (2)$$

სიჩქარის უმცირესი მნიშვნელობის განსასაზღვრავად, როდესაც პრიზმა გადაყირავდება, გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3)$$

ვიპოვოთ (3) ფორმულაში შემავალი სიდიდეები: $T = 0$, რადგან პრიზმა დაიწყებს გადაყირავებას ძალიან მცირე სიჩქარით;

$$T_0 = J_{y_1}\frac{\omega^2}{2} = \frac{53}{4}ma^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6^2}{53^2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{9}{106}mv^2,$$

$$\sum A_k^e = -(m_{ბურ} + m_{პრ})g\Delta h_C.$$

მასათა ცენტრის კოორდინატები დარტყმის მომენტში

$$x_{1C} = \frac{ma + \frac{1}{2}\cdot 3ma}{4m} = \frac{5}{8}a,$$

$$y_{1C} = \frac{3}{2}a.$$

მაშინ

$$\Delta h_C = \sqrt{x_{1C}^2 + y_{1C}^2} - \frac{3}{2}a = \frac{1}{8}a,$$

$$\sum A_k^e = -\frac{1}{2}mga.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები (3) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\frac{9}{106}mv^2 = \frac{1}{2}mga.$$

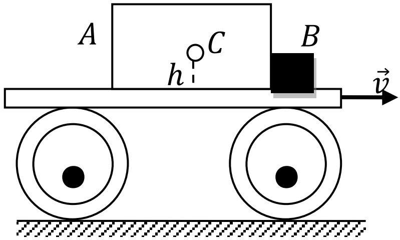
აქედან

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{53ga.}$$

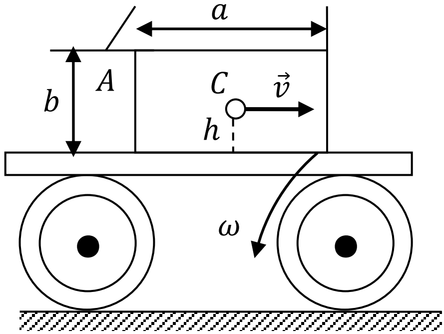
პ ა ს უ ხ ი: $v = \frac{1}{3}\sqrt{53ga.}$

ამოცანა 44.28

ბაქანზე, რომელზეც მოთავსებულია AB ტვირთი, v სიჩქარით მიგორავს ჰორიზონტალურ რელსებზე. ბაქნის B წიბოსთან არის შვერილი, რომელიც ბაქანზე წინ სრიალის საშუალებას არ აძლევს, მაგრამ არ უშლის მას B წიბოს გარშემო ბრუნვას. მოცემულია: $h-$ ტვირთის მასათა ცენტრის დაშორება ბაქნის ზედაპირიდან , $\rho-$ ტვირთის ინერციის რადიუსი B წიბოს მიმართ. განსაზღვრეთ B წიბოს გარშემო ტვირთის ბრუნვის კუთხური ω სიჩქარე ბაქნის უეცარი გაჩერებისას.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ტვირთის ბრუნვა B წიბოს გარშემო. ბაქნის უეცარი გაცერებისას ხდება დარტყმა. B წიბოს დარტყმის იმპულსის მომენტი B წერტილზე გამავალი და ნახაზის სიბრტყის მართობი სიბრტყის მიმართ, უდრის ნულს (იხილეთ 44.26 და 44.27 ამოცანის ამოხსნა). მაშინ განტოლება



$$\vec{K}_B - \vec{K}_{B0} = \sum M_B(\vec{S}^e_{k დარ})$$

მიიღებს სახეს

$$\mathrm{J_B}\, \omega - Mvh = 0, \tag{1}$$

სადაც $\mathrm{J_B} = \mathrm{M}\rho^2$.

(1) განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$\omega = \frac{Mvh}{\mathrm{J_B}} = \frac{vh}{\rho^2}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\omega = \frac{Mvh}{\mathrm{J_B}} = \frac{vh}{\rho^2}.$

ამოცანა 44.29

წინა ამოცანის პირობებში, თუ ტვირთს ჩავთვლით ერთგვაროვან მართკუთხა პარალელეპიპედად, რომლის წიბო ბაქნის გასწვრივ უდრის 4მ-ს და სიმაღლე-3მ-ს; განვსაზღვროთ როგორი v სიჩქარისას მოხდება ტვირთის გადაყირავება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \tag{1}$$

სადაც $T_0 = \frac{1}{2} J_B \omega^2$.

44.28 ამოცანაში ჩვენ ვიპოვეთ, რომ

$$\omega = \frac{Mvh}{J_B} = \frac{Mvb}{2J_B},$$

მაშინ

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{M^2v^2b^2}{2J_B}.$$

ჰიუგენს-შტეინერის თეორემის საფუძველზე

$$J_B = J_C + M \cdot BC^2 = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) + M\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით

$$T_0 = \frac{3M}{8}\frac{v^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{2}$$

რადგან გადაყირავება ხდება მასატა ცენტრის უმაღლეს მდებარეობიდან ნულოვანი კუთხური სიჩქარით, ამიტომ $T = 0$.

ვიპოვოთ

$$\sum A_k^e = -mgh_C = -Mg\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{b}{2}\right). \tag{3}$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) ფორმულაში და ვიპოვოთ

$$v^2 = \frac{4g}{3b^2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - b\right)(a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{4 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 9}\left(\sqrt{4^2 + 3^2} - 3\right)(4^2 + 3^2) = 72{,}59.$$

მაშინ

$$v = \sqrt{72{,}59} = 8{,}52\ (მ/წმ) \approx 30{,}7(კმ/სთ).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = 30{,}7(კმ/სთ)$.

§45. ცვლადი მასის წერტილისა და სისტემის (ცვლადი შემადგენლობა) დინამიკა

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

კლასიკურ მექანიკაში რელატივისტური მექანიკისაგან განსხვავებით თითოეული წერტილის ან სისტემის ნაწილაკის მასა მოძრაობის დროს ითვლება მუდმივად, რომელიც არ არის დამოკიდებული სხეულის მოძრაობის სიჩქარეზე.

მაგრამ სხეულის მოძრაობის რიგ შემთხვევებში სხეულის მასა შეიძლება მცირდებოდეს ან იზრდებოდეს.

სხეულის მასის მატება შეიძლება მოხდეს ნაწილაკების მიერთების გზით (მაგალითად, თვითმფრინავის მოყინვა მისი დაშვების ან აფრენის დროს, მოძრავ სხეულზე მყარი ნაწილაკების მიკვრა (მიწებება) ან მოძრაობისას გეომეტრიული ზომების ცვლილება (მაგალითად, ამწევი ბაგირის ან ჯაჭვის სიგრძის ცვლილება, დოლის დიამეტრიც გაზრდა მასზე ბაგირის ან ძაფის დახვევის შედეგად)

სხეულის მასა შეიძლება მცირდებოდეს ნაწილაკების მოცილების გზით (მაგალითად, რაკეტის ან რეაქტიული თვითმფრინავის მოძრაობისას საწვავის დაწვის შედეგად) ან სხეულის გეომეტრიული ზომების შემცირება(მაგალითად, დოლის დიამეტრის შემცირება ბაგირის ან ძაფის გორგლის დაშლა).

სხეულს, რომლის მასა დროის განმავლობაში უწყვეტად იცვლება მასზე მატერიალური ნაწილაკების მიერთების ან ჩამოცილების გზით, ეწოდება **ცვლადი მასის მქონე სხეული**. თუ ცვლადი მასის სხეულის მოძრაობისას შესაძლებელია მისი ზომების უგულებელყოფა გავლილ მანძილთან შედარებით, მაშინ ეს სხეული შეიძლება განვიხილოთ როგორც ცვლადი მასის წერტილი.

ცვლადი მასის სხეულის დინამიკის ძირითად განტოლებას გადატანიტი მოზრაობის დროს აქვს სახე:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^e + \frac{dM}{dt}\,(\vec{u} - \vec{v}), \qquad (45.1)$$

სადაც $M-$ სხეულის (წერტილის) მასაა დროის მოცემულ მომენტში.; $\vec{v}-$ ცვლადი მასის მქონე სხეულის აბსოლუტური სიჩქარე.; $\vec{u}-$ჩამოცილებული ნაწილაკების აბსოლუტური სიჩქარე; $\vec{F}^e-$ ცვლადი მასის მქონე სხეულზე მოდებული გარე ძალების ტოლქმედი; $\left|\frac{dM}{dt}\right|-$ შესასწავლი ცენტრის (სხეულის) მასის წამიერი ხარჯი.

(45.1) განტილება პირველად შემოგვთავაზა ი.ვ. მეშერსკიმ და მის საპატივცემულოდ ეწოდება **მეშერსკის განტოლება**.

რთულ მოძრაობაში წერტილის სიჩქარეთა შეკრების თეორემის თამახმად მოცილებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე

$$\vec{u} = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \qquad (45.2)$$

რადგან მოცემულ შემთხვევაში მოცილებული ნაწილაკის წარმტანი სიჩქარე არის სხეულის სიჩქარე, ამიტომ $\vec{v}_e = \vec{v}$. მაშინ $\vec{u} - \vec{v}$ სხვაობა (45.1) განტოლებაში არის ფარდობითი სიჩქარე, ე.ი.

$$\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}. \qquad (45.3)$$

ამიტომ (45.1) განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^e + \frac{dM}{dt}\,\vec{v}_r, \qquad (45.4)$$

სადაც $\frac{dM}{dt}\,\vec{v}_r -$ **რეაქტიული ძალაა**.

თუ $M -$ კლებადი სიდიდეა, მაშინ $\frac{dM}{dt} < 0$, და, მაშასადამე, რეაქტიული ძალა მიმართულია $\vec{v}_r$ ვექტორის საპირისპიროდ. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{dM}{dt}\,\vec{v}_r = \overrightarrow{\Phi}. \qquad (45.5)$$

მაშინ (45.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^e + \overrightarrow{\Phi}. \qquad (45.6)$$

თუ (45.1) განტოლებაში $\left(-M\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ შესაკრებს გადავიტანთ მარჯვენა მხარეში, მაშინ ეს განტოლება ასე ჩაწერება:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \vec{F}^e + \frac{dM}{dt}\vec{u}. \qquad (45.7)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $\vec{u} = 0$, (45.7) განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \vec{F}^e. \qquad (45.8)$$

ამგვარად, თუ მოცილებული (დამატებული) ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ნულლს, მაშინ ცლადი მასის მქონე სხეულის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული დროით უდრის მასზე მოქმედი გარე ძალების ტოლქმედს.

როცა $\vec{v}_r = 0$, მაშინ (45.4) განტოლება მიიღებს სახეს

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^e, \qquad (45.9)$$

ამიტომ ცვლადი მასის მქონე სხეულის (წერტილის) მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება ისე, როგორც მუდმივი მასის მქონე წერტილისათვის, მაგრამ ამასთან ერთად, მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ $M = f(t)$. რაკეტის მოძრაობის შემთხვევაში (45.4) განტოლებაში $\frac{dM}{dt} < 0$ და, მაშასადამე, რეაქტიული ძალა $\overrightarrow{\Phi}$ მიმართულია გამოსროლილი გაზების ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ და წარმოადგენს ძრავის წევის ძალას.

(45.5) ფორმულით განსაზღვრული რეაქტიული ძრავის წევის ძალის მნიშვნელობა იქნებოდა სწორი, თუ მოცილებული ნაწილაკები არ იმოქმედებენ ერთმანეთზე. ფაქტიურად, რაკეტის მოძრაობისას საწვავის წვის პროდუქტები ატმოსფეროსი გამოიტყორცნება უწყვეტი გაზის ნაკადის სახით, რომლის ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ ერთამანეთთან და ატმოსფეროსთან. ამიტომ წევის ძალა რამდენჯერმე მეტია (45.5) ფორმულით განსაზღრულზე.

ეს რომ გაეთვალისწინებიათ, გაზების გამოტყორცნის ფარდობითი $\vec{v}_r$ სიჩქარის ნაცვლად შემოიტანეს გამოტყორცნის ეფექტური სიჩქარე $\vec{v}_e > \vec{v}_r$. ი. ვ. მეშერსკის კრებულში ამოცანათა პირობებში მოცემულია გაზების გამოტყორცნის ეფექტური სიჩქარე $\vec{v}_{ეფ} = \vec{v}_e$.

კ.ე. ციოლკოვსკიმ ამოხსნა რაკეტის წრფივი მოძრაობის ორი ამოცანა.

განვიხილოთ **ციოლკოვსკის პირველი ამოცანის** ამოხსნა. რაკეტა მოძრაობს წრფივად მხოლოდ რეაქტიული ძალის მოქმედებით. გაზების გამოტყორცნის ფარდობითი $\vec{v}_r$ სიჩქარე მუდმივია და მიმართულია რაკეტის მოძრაობის $\vec{v}$ სიჩქარის საპირისპიროდ. რაკეტის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძის გასწვრივ, რომლის მიმართულება ემთხვევა რაკეტის მოძრაობის მიმართულებას:

$$M\frac{dv}{dt} = \Phi_x = -\frac{dM}{dt}v_r \qquad (45.10)$$

(45.10) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ ის, მივიღებთ:

$$v = v_0 + v_r ln\frac{M_0}{M}, \qquad (45.11)$$

სადაც $v_0 -$ რაკეტის საწყისი სიჩქარეა, რომელსაც აქვს რეაქტიული ძალის მიმართულება; $M_0 -$რაკეტის საწყისი მასა; $M -$ რაკეტის საბოლოო მასა.

ავღნიშნოთ რაკეტის მთლიანი მასა თავისი მოწყობილობებით $M_რ$-ით. ხოლო საწვავის მასა $M_ს$-ით. მაშინ

$$M_0 = M_რ\text{-}+M_ს$$

ხოლო $M -$რაკეტის საბოლოო მასა, როდესაც ყველა საწვავი დაიწვება, უდრის $M_რ$.

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (45.11) ტოლობაში და მივიღოთ ციოლკოვსკის ფორმულა, რომლის საშუალებით გამოითვლება სიჩქარე მოძრაობის აქტიური მონაკვეთის ბოლოში (როდესაც საწვავი მთლიანად დახარჯულია):

$$v = v_0 + v_r ln\left(1 + \frac{M_ს}{M_რ}\right). \qquad (45.12)$$

(45.12) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ რაკეტის სიჩქარე დამოკიდებულია:

- მის საწყის v_0 სიჩქარეზე;
- v_r ფარდობით სიჩქარეზე;
- საწვავის $\frac{M_ს}{M_რ}$ ფარდობით მარაგზე.

ფარდობას $\frac{M_ს}{M_რ}$ ეწოდება ციოლკოვსკის რიცხვი და აღინიშნება z-ით.

მაშინ (45.12) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$v = v_0 + v_r ln(1 + z). \qquad (45.13)$$

მაგრამ ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნისას, რომლებიც დაკავშირებულია რაკეტის მოძრაობასთან, მათ შორის

მრავალსაფეხურიანთან, ციოლკოვსკის რიცხვად ღებულობენ რაკეტის საერთო საწყისი მასის $M_{საერ}$ ფარდობას მისი კორპუსის მასასთან, ე.ი.

$$z = \frac{M_{საერ}}{M_{რ}}.$$

მრავალსაფეხურიანი რაკეტისათვის, იმ პირობით, რომ გაზის გამოტყორცნის ეფექტური v_e სიჩქარე ყველა საფეხურისათვის ერთნაირია, ციოლკოვსკის საერთო რიცხვი

$$z = e^{\frac{v_n}{\pi v_e}}, \qquad (45.14)$$

სადაც $n -$ რაკეტის საფეხურების რიცხვია; $v_n -$ ბოლო საფეხურის საბოლოო სიჩქარეა.

რაკეტის მოძრაობის განტოლებების განსაზღვრისათვის ჩავსვათ (45.12) ფორმულაში

$$v = \frac{dx}{dt}$$

და ვაინტეგროთ, ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ როცა $t = 0, x_0 = 0,$ მაშინ მივიღებთ

$$x = v_0 t + v_r \int_0^t ln\left(\frac{M_0}{M}\right) dt. \qquad (45.15)$$

სადაც $M = f(t)$.

თეორიულ კვლევებში რაკეტის დინამიკაში ჩვეულებრივ განიხილავენ მასის ცვლილების ორ კანონს: წრფივს და მაჩვენებლიანს.

წერტილის მასის წრფივი კანონით დროის მიხედვით ცვლილებისას

$$M = M_0(1 - \alpha t), \qquad (45.16)$$

სადაც $\alpha -$ საწვავის კუთრი ხარჯია ($\alpha = const$); M_0 –წერტილის მასაა დროის საწყის მომენტში.

(45.16) თანაფარდობის გათვალისწინებით ვაინტეგროთ (45.15) გამოსახულება, მივიღებთ რაკეტის მოძრაობის განტოლებას მისი მასის წრფივი კანონით ცვლილების შემთხვევაში:

$$x = v_0 t + \frac{v_r}{\alpha}[(1 - \alpha t) ln(1 - \alpha t) + \alpha t] \qquad (45.17)$$

წერტილის მასის მაჩვენებლიანი კანონით დროის მიხედვით ცვლილებისას

$$M = M_0 e^{-\alpha t}, \qquad (45.18)$$

და რაკეტის მოძრაობის განტოლებას მისი მასის მაჩვენებლიანი კანონით ცვლილების შემთხვევაში აქვს სახე:

$$x = v_0 t + \frac{\alpha v_r t^2}{2}. \qquad (45.19)$$

ციოლკოვსკის მეორე ამოცანა-რაკეტის ვერტიკალური მოძრაობის გამოკვლევა დედამიწის მიზიდულობის ერთგვაროვან ველში ($g = const$) ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის გათვალისწინების გარეშე.

ამ შემთხვევაში რაკეტის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt} v_r. \qquad (45.20)$$

(45.20) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$v = v_0 - gt + v_r ln\frac{M_0}{M}, \tag{45.21}$$

(45.21) გამოსახულებაში v შევცვალოთ $\frac{dx}{dt}$−ით და ვაინტეგროთ ის საწყისი პირობების $t = 0, x_0 = 0,$ გათვალისწინებით:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + v_r l \int_0^t ln\left(\frac{M_0}{M}\right)dt. \tag{45.22}$$

მასის წრფივი კანონით ცვლილების შემთხვევაში (45.22)-დან მივიღებთ:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{v_r}{\alpha}[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t]. \tag{45.23}$$

მასის მაჩვენებლიანი კანონით ცვლილების შემთხვევაში

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{\alpha v_r t^2}{2}. \tag{45.24}$$

ცვლადი მასის მქონე სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება ჩაიწერება ცვლადი მასის მქონე წერტილისათვის მეშერსკის განტოლების ანალოგიურად შედეგი სახით:

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z(\vec{F}^e) + M_z(\overrightarrow{\Phi}), \tag{45.25}$$

სადაც $M_z(\vec{F}^e) -$ სხეულზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტია z ღერძის მიმართ; $M_z(\overrightarrow{\Phi}) -$ რეაქტიული ძალის მომენტი:

$$M_z(\overrightarrow{\Phi}) = \Phi h = \frac{dM}{dt}(\vec{u} - \vec{v})h = \frac{dM}{dt}\vec{v}_r h, \tag{45.26}$$

სადაც $h -$ რეაქტიული ძალის მხარია z ღერძის მიმართ.

თუ სხეულის მიერ გამოტყორცნილი ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარე უდრის ნულლს (ნაწილაკები ცილდება მბრუნავ სხეულს დარტყმის გარეშე), ამიტომ $M_z(\overrightarrow{\Phi}) = 0$ და (45.25) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z(\vec{F}^e). \tag{45.27}$$

თუ გამოყოფილი ნაწილაკების აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ნულს, მაშინ ბრუნვის განტოლებასი სხეულის ინერციის მომენტი შედის წარმოებულის ნიშნის ქვეშ და (45.27) განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega) = M_z(\vec{F}^e). \tag{45.28}$$

ამ პარაგრაფის პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. გამოვსახოთ ნახაზზე ცვლადი მასის მქონე სხეული, თუ ეს აუცილებელია ამოცანის პირობთ;
2. ვაჩვენოთ ნახაზზე სხეულზე მოქმედი ძალები, მათ შორის ბმის რეაქციები და რეაქტიული ძალა თუ ისინი არსებობენ;
3. ჩავწროთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის დინამიკის ძირითადი განტოლებები (45.4), (45.8) ან (45.9) ფორმულების სახით, ხოლო უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას (45.25), (45.27) ან (45.28) ფორმულების სახით.
4. ავირჩიოთ ათვლის სისტემა (დეკარტის საკოორდინატო ღერძები ან ბუნებრივი ღერძები) და ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლებები არჩეული ღერძებზე (ღერძზე) ან უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება;

5. რაკეტის მოძრაობასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას შეიძლება ჩაიწეროს მეშერსკის განტოლება იმ ღერძზე გეგმილებში, რომელიც მიმართულია რაკეტის მოძრაობის მიმართულებით ან გამოვიყენოთ ციოლკოვსკის ფორმულა. $z-$ ის მნიშვნელობად ავიღოთ რაკეტის საწყისი საერთო მასის შეფარდება კორპუსის მასასთან.
6. ამოვხსნათ ამოცანა ზოგადი სახით, ხოლო შემდეგ ჩავსვათ რიცხვითი მონაცემები და გამოვთვალოთ საძიებელი სიდიდის მნიშვნელობა, თუ ეს მოითხოვება ამოცანის პირობით.

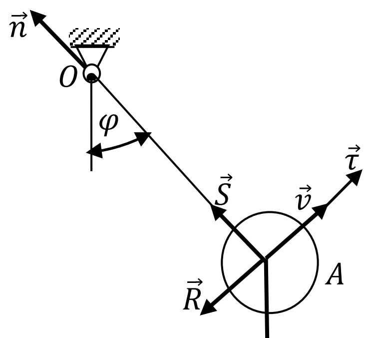
ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 45.1

შეადგინეთ ცვლადი მასის მქონე ქანქარას მოძრაობის განტოლება გარემოში, რომლის წინაღობა სიჩქარის პროპორციულია, ქანქარას მასა იცვლება მოცემული კანონით $m = m(t)$. სხეულიდან მცირე ნაწილაკების ჩამოშორებით და ნულის ტოლი ფარდობითი სიჩქარით. ქანქარას სიგრძე არის ℓ. ქანქარაზე მოქმედებს აგრეთვე წინაღობის ძალა, რომელიც მისი კუთხური სიჩქარის პროპორციულია: $R = -\beta\dot{\varphi}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \vec{v}_r\frac{dm}{dt}.$$



პირობის თანახმად $\vec{v}_r = 0$, მაშინ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e = \vec{R} + \vec{G} + \vec{S}. \qquad (1)$$

ავირჩიოთ $A\tau n$ ბუნებრივი ღერძები (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ (1) ვექტორული განტოლების გეგმილი τ ღერძზე და გავითვალისწინოთ, რომ

მაშინ (1) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$m\ell\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - mgsin\varphi.$$

გავყოთ მიღებული გამოსახულების ყველა წევრი $m\ell-$ზე და ყველა წევრის მარჯვენა მხარეში გადატანით მივიღებთ ქანქარას მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m\ell}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0,$$

სადაც $m = m(t)$.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m\ell}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0,$

ამოცანა 45.2

შეადგინეთ რაკეტის აღმავალი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება. აირთა გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე ჩათვლილია მუდმივად. რაკეტის მასა იცვლება $m = m_0 f(t)$ კანონით (დაწვის კანონი). ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა წარმოადგენს რაკეტის სიჩქარის და მდებარეობის მოცემულ ფუნქციას: $R(x, \dot{x})$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}.$$

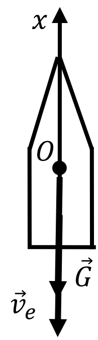
Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი) ის მიიღებს სახეს:

$$m_0 f(t)\ddot{x} = -G - R - v_e \frac{d\big(m_0 f(t)\big)}{dt}$$

ან

$$m_0 f(t)\ddot{x} = -m_0 f(t) g - R(x, \dot{x}) - v_e\, m_0 \dot{f}(t),$$

სადაც $\vec{v}_r = \vec{v}_e$.



აქედან მივიღებთ რაკეტის აღმავალი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებას:

$$\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} v_e - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} v_e - \frac{R(x,\dot{x})}{m_0 f(t)}$.

ამოცანა 45.3

მოახდინეთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირება წინა ამოცანაში, როცა $m = m_0(1 - \alpha t)$ და $R = 0$. რაკეტის საწყისი სიჩქარე დედამიწის ზედაპირზე ნულის ტოლია. რა სიმაღლეზე იქნება რაკეტა იმ მომენტში, როცა $t =$10; 30; 50წმ, $v_r =$ 2000მ/წმ და $\alpha = \frac{1}{100}$წმ$^{-1}$?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ 45.2 ამოცანის ამოხსნის შედეგით:

$$\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} v_e - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)} = -g - \frac{(1 - \alpha t)'}{1 - \alpha t} v_e = -g + \frac{\alpha v_e}{1 - \alpha t}$$

ან

$$d\dot{x} = \left(-g + \frac{\alpha v_e}{1 - \alpha t}\right) dt.$$

ამ განტოლების ორჯერ ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\dot{x} = -gt - v_e ln(1-\alpha t) + C_1,$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + \frac{v_e}{\alpha}[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) - (1-\alpha t)] + C_1 t + C_2.$$

მიღებული განტოლებებიდან ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივები საწყისი პირობების გათვალიწინებით $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$; $C_1 = 0, C_2 = \frac{v_e}{\alpha}$.

მაშინ ბოლო განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$x(t) = \frac{v_e}{\alpha}[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t] - g\frac{t^2}{2}.$$

განვსაზღვროთ რაკეტის ასვლის სიმაღლე დროის მოცემული მომენტებისათვის:

$$x(10) = -\frac{9{,}81 \cdot 10^2}{2} +$$

$$+\frac{2000}{1/100}\left[\left(1-\frac{1}{100}\cdot 10\right)ln\left(1-\frac{1}{100}\cdot 10\right)+\frac{1}{100}\cdot 10\right] = 540(მ)$$

$$x(30) = -\frac{9{,}81 \cdot 30^2}{2} +$$

$$+\frac{2000}{1/100}\left[\left(1-\frac{1}{100}\cdot 30\right)ln\left(1-\frac{1}{100}\cdot 30\right)+\frac{1}{100}\cdot 30\right] = 5650(მ)$$

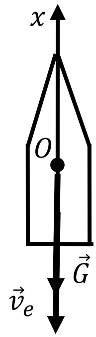
$$x(50) = -\frac{9{,}81 \cdot 50^2}{2} +$$

$$+\frac{2000}{1/100}\left[\left(1-\frac{1}{100}\cdot 50\right)ln\left(1-\frac{1}{100}\cdot 50\right)+\frac{1}{100}\cdot 50\right] = 18400(მ)$$

პ ა ს უ ხ ი: $x(t) = \frac{v_e}{\alpha}[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t] - g\frac{t^2}{2}$.

$x(10) = 0{,}54$კმ; $x(30) = 5{,}65$კმ; $x(50) = 18{,}4$კმ.

ამოცანა 45.4



m_0 საწყისი მასის მქონე რაკეტა ადის ვერტიკალურად ზევით სიმძიმის ძალის ერთგვაროვან ველში მუდმივი ng აჩქარებით ($g-$ დედამიწის მიზიდულობის აჩქარება). ატმოსფეროს წინაღობის მხედველობაში მიუღებლად ჩათვალეთ აირთა გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე მუდმივად და განსაზღვრეთ: 1. რაკეტის მასის ცვლილების კანონი. 2. რაკეტის მასის ცვლილების კანონი, როცა არ არსებობს მიზიდულობის ველი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \vec{v}_r\frac{dm}{dt}.$$

1. ეს ვექტორული განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი) მიიღებს სახეს:

$$m\ddot{x} = -G - v_e\frac{dm}{dt}, \qquad (1)$$

სადაც $v_r = v_e$; $G = mg$.

რადგან $\ddot{x} = ng$, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$mng = -mg - v_e\frac{dm}{dt}.$$

აქედან

$$mg(n+1) = -v_e\frac{dm}{dt}$$

ან

$$\frac{dm}{m} = -\frac{g(n+1)}{v_e}dt.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$lnm = -\frac{g(n+1)}{v_e}t + C.$$

ვიპოვოთ ინტეგრირების მუდმივი საწყისი პირობების გათვალიწინებით $t = 0,\ m = m_0;\quad C = lnm_0.$ მაშინ ბოლო განტოლება მიიღებს სახეს:

$$ln\frac{m}{m_0} = -\frac{n+1}{v_e}gt.$$

აქედან

$$m = m_0 exp\left(-\frac{n+1}{v_e}gt\right).$$

2. როცა სიმძიმის ძალა უგულებელყოფილია, ე.ი. $G = 0$, მაშინ (1) განტოლებას აქვს სახე:

$$m\ddot{x} = -v_e\frac{dm}{dt}$$

ან

$$\frac{dm}{m} = -\frac{gn}{v_e}dt.$$

ამ განტოლების ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ:

$$lnm = -\frac{gn}{v_e}t + C.$$

ვიპოვოთ ინტეგრირების C მუდმივი საწყისი პირობების გათვალიწინებით: $t = 0,\ m = m_0;\quad C = lnm_0.$ მაშინ

$$ln\frac{m}{m_0} = -\frac{ng}{v_e}t.$$

აქედან

$$m = m_0 exp\left(-\frac{ng}{v_e}t\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 1) $m = m_0 exp\left(-\frac{n+1}{v_e}gt\right)$; 2) $m = m_0 exp\left(-\frac{ng}{v_e}t\right)$.

ამოცანა 45.5

45.2 ამოცანაში აღწერილი რაკეტის მასა $t = t_0$ მომენტამდე იცვლება კანონით: $m = m_0 e^{-\alpha t}$. წინაღობის ძალის მხედველობაში მიუღებლად განსაზღვრეთ რაკეტის მოძრაობა და თუ ჩათვლით, რომ t_0 მომენტისათვის მთელი მუხტი პრაქტიკულად დაიწვა. განსაზღვრეთ რაკეტის ასვლის მაქსიმალური სიჩქარე. საწყის მომენტში რაკეტას ჰქონდა ნულის ტოლი სიჩქარე და იმყოფებოდა დედამიწაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ვისარგებლოთ 45.2 ამოცანის ამოხსნის შედეგით. ჩავწეროთ რაკეტის ასვლითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$\ddot{x} = -g - \frac{(e^{-\alpha t})'}{e^{-\alpha t}}v_e = -g + \alpha v_e.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება ორჯერ:

$$\dot{x} = -gt + \alpha v_e t + C_1,$$

$$x = (\alpha v_e - g)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივები საწყისი პირობების გათვალიწინებით $t = 0,\ x_0 = 0,\quad \dot{x}_0 = 0;\ C_1 = 0, C_2 = 0.$ მაშინ

$$\dot{x} = (\alpha v_e - g)t, \qquad (1)$$

$$x = (\alpha v_e - g)\frac{t^2}{2}. \qquad (2)$$

რაკეტის მოძრაობა მაქსიმალურ სიმაღლეზე ასვლამდე გავყოთ ორ ეტაპად/

I ეტაპი. რაკეტა მოძრაობს t_0 მომენტამდე. $t = t_0$ მომენტისათვის (1) და (2) ფორმულებიდან ვიპოვით:

$$\dot{x}(t_0) = (\alpha v_e - g)t_0,$$

$$x(t_0) = (\alpha v_e - g)\frac{t_0^2}{2}.$$

II ეტაპი. საწვავი დაიწვა. რაკეტა მოძრაობს მხოლოდ სიმძიმის ძალის მოქმედებით, ე.ი.

$$\ddot{x} = -g.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება ორჯერ:

$$\dot{x} = -gt + C_3,$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

რაკეტის მოძრაობის II ეტაპისათვის საწყისი პირობები წარმოადგენს I ეტაპის საბოლოო მნიშვნელობებს: $t = t_0$, $x_0(t_0)$, $\dot{x}_0(t_0)$. მაშასადამე,

$$(\alpha v_e - g)t_0 = -gt_0 + C_3,$$

$$(\alpha v_e - g)\frac{t_0^2}{2} = -g\frac{t_0^2}{2} + C_3 t_0 + C_4.$$

ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივები:

$$C_3 = \alpha v_e t_0,\ \ C_4 = -\alpha v_e\frac{t_0^2}{2}.$$

მაშინ

$$\dot{x} = -gt + \alpha v_e t_0, \tag{3}$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + \alpha v_e t_0 t - \alpha v_e\frac{t_0^2}{2}. \tag{4}$$

რაკეტის მაქსიმალური სიმღლის მიღწევისას $x = H,\ t = T, \dot{x} = v = 0.$ მაშინ (3) და (4) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$0 = -gT + \alpha v_e t_0 \Longrightarrow T = \frac{\alpha v_e t_0}{g};$$

$$H = -\frac{g}{2}\left(\frac{\alpha v_e t_0}{g}\right)^2 + \alpha v_e t_0\frac{\alpha v_e t_0}{g} - \alpha v_e\frac{t_0^2}{2} = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\boldsymbol{H} = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2$, სადაც $v_e -$ რაკეტიდან გაზების გამოსვლის ეფექტური სიჩქარეა.

ამოცანა 45.6

წინა ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ $\alpha -$ს მნიშვნელობა შესაბამისი რაკეტის ასვლის H_{max} მაქსიმალური სიმაღლე და

გამოთვალეთ H_{max} $\left(\mu = \alpha t_0 = \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)\right.$ აუცილებლად ჩათვალეთ მუდმივად; m_1-რაკეტის მასა t_0 მომენტში).

ა მ ო ხ ს ნ ა. 45.5 ამოცანის ამოხსნის შედეგების თანახმად რაკეტის ასვლის მაქსიმალური სიმაღლე

$$H = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2,$$

ან

$$H = \frac{\mu^2 v_e}{2g}\left(v_e - \frac{g}{\alpha}\right),$$

რადგან $\mu = \alpha t_0 = const.$

ვიპოვოთ

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{\mu^2 v_e}{2\alpha^2},$$

$\frac{dH}{d\alpha} \to 0$ როცა $\alpha \to \infty$;

$$H_{max} = \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{\mu^2 v_e}{2g}\left(v_e - \frac{g}{\alpha}\right)\right] = \frac{\mu^2 v_e}{2g}\left(v_e - g\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\alpha = \infty$ (უეცარი დაწვა); $H_{max} = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g}$.

ამოცანა 45.7

45.5 და 45.6 ამოცანის პირობებში, გადატვირთვის მოცემული $k = \frac{\alpha v_{ეფ}}{g}$ კოეფიციენტით განსაზღვრეთ რაკეტით ზეასვლის H სიმაღლე $H_{max}-$ ისაგან დამოკიდებულებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

45.5 ამოცანის ამოხსნის შედეგების თანახმად რაკეტის ასვლის სიმაღლე

$$H = \frac{\alpha v_e}{2}\left(\frac{\alpha v_e}{g} - 1\right)t_0^2 = \frac{kg}{2}(k-1)t_0^2,$$

სადაც $k = \frac{\alpha v_e}{g}$.

45.6 ამოცანის ამოხსნის თანახმად

$$H_{max} = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g} = \frac{\alpha^2 v_e^2 t_0^2}{2g} = \frac{k^2 t_0^2 g}{2},$$

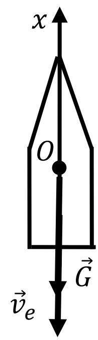
სადაც $\mu = \alpha t_0$.

მაშინ რაკეტის ასვლის სიმაღლე

$$H = \frac{kg}{2}(k-1)t_0^2 = \frac{k^2 t_0^2 g}{2} - \frac{k^2 t_0^2 g}{2k} = H_{max} - \frac{H_{max}}{k} = H_{max}\frac{k-1}{k}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $H = H_{max}\frac{k-1}{k}$.

ამოცანა 45.8



რაკეტა სტარტს იღებს მთვარიდან მისი სიბრტყის მართობულად. გამოდინების ეფექტური სიჩქარე $v_{ეფ}$ =2000მ/წმ. ციოლკოვსკის რიცხვი $z = 5$ (ციოლკოვსკის რიცხვი ეწოდება რაკეტის სასტარტო მასის ფარდობას რაკეტის მასასთან (საწვავის გარეშე)). როგორი უნდა იყოს საწვავის წვის დროს, რომ რაკეტამ მიაღწიოს v =3000მ/წმ სიჩქარეს(მიიღეთ, რომ სიმძიმის ძალის აჩქარება მთვარის მახლობლად მუდმივია და უდრის 1,62მ/წმ²).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში

$$m\frac{dv}{dt} = -mg_{მთ} - v_e\frac{dm}{dt}$$

ან

$$dv = -g_{მთ}dt - v_e\frac{dm}{m}.$$

ვაინტეგროთ მიღებული განტოლება

$$\int_0^v dv = -g_{მთ}\int_0^T dt - v_e\int_{mz}^m \frac{dm}{m}.$$

აქედან

$$v = -g_{მთ}T - v_e ln\frac{m}{mz} = -g_{მთ}T + v_e lnz.$$

მაშინ საწვავის დაწვის დრო

$$T = \frac{v_e lnz - v}{g_{მთ}} = \frac{2000ln5 - 3000}{1,62} = 135(\text{წმ})\text{=2წთ 15წმ}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 2წთ 15წმ

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. კრებულში დაშვებულია შეცდომა.

ამოცანა 45.9

რაკეტა მოძრაობს ზევით სიმძიმის ძალის ერთგვაროვან ველში მუდმივი w აჩქარებით. ატმოსფეროს წინაღობის მხედველობაში მიუღებლად ჩათვალეთ აირების გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე მუდმივად; განსაზღვროთ T დრო, რომლის დროსაც რაკეტის მასა ორჯერ შემცირდება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. 45.4 ამოცანის ნახაზი)

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - v_e\frac{dm}{dt}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\frac{dv}{dt} = w$, მაშინ

$$w = -g - v_e\frac{dm}{mdt}$$

ან

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w+g}{v_e}dt.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება

$$\int_{m_0}^{m_0/2}\frac{dm}{m} = -\frac{w+g}{v_e}\int_0^T dt$$

საიდანაც

$$lnm|_{m_0}^{m_0/2} = -\frac{w+g}{v_e}T \Longrightarrow ln2 = \frac{w+g}{v_e}T.$$

აქედან ვიპოვით T დროს, რომლის განმავლობაში რაკეტის მასა შემცირდება 2-ჯერ:

$$T = \frac{v_e}{w+g}ln2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $T = \frac{v_e}{w+g}ln2.$

ამოცანა 45.10

რაკეტის აირების გამოდინების ეფექტური სიჩქარე $v_{ეფ} =$ 2,4კმ/წმ, როგორი უნდა იყოს სათბობის მარაგის ფარდობა რაკეტის წონასთან საწვავის გარეშე, რომ სათბობის დაწვის შემდეგ რაკეტამ, რომელიც მოძრაობდა უჰაერო და უწონო სივრცეში, შეიძინოს 9კმ/წმ სიჩქარე?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება შემდეგი სახით

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}.$$

ან

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}.$$

ვიპოვოთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_0^{9000} dv = -v_e \int_{m_0}^{km_0} \frac{dm}{m} \Longrightarrow 9000 = -v_e lnm|_{m_0}^{km_0} = -(lnkm_0 - lnkm_0) = v_e lnk$$

აქედან

$$k = e^{-9000/v_e} = e^{-9000/2400} = 0.02,$$

სადაც $k -$ რაკეტის ნარჩენი მასის შეფარდებაა საწყისთან..

მაშასადამე, რაკეტის მასა საწვავის გარეშე შეადგენს სასტარტო მასის 2%, ხოლო საწვავი- 98%.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> სათბობის მასა რაკეტის სასტარტო მასის 98% უნდა შეადგენდეს.

ამოცანა 45.11

რაკეტა მოძრაობს გადატანით გარემოში, სადაც არ არსებობს წინაღობა და მიზიდულობა. აირების გამოდინების ეფექტური სიჩქარე $v_{ეფ} =$ 2400მ/წმ. განსაზღვრეთ ციოლკოვსკის რიცხვი, თუ საწვავის მთლიანად დაწვის მომენტში რაკეტის სიჩქარე ტოლია 4300მ/წმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

მოცემულ შემთხვევაში მეშერსკის განტოლებას აქვს სახე:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt}.$$

ან

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება:

$$\int_0^{v} dv = -v_e \int_{mz}^{m} \frac{dm}{m} \Longrightarrow v = -v_e ln\frac{m}{mz} = v_e lnz.$$

აქედან

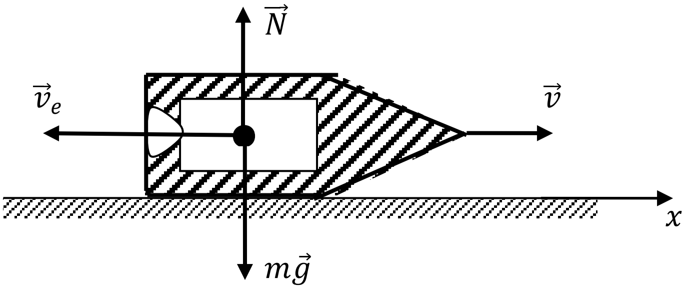
$$z = e^{v/v_e} = e^{4300/2400} = 6$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $z = 6$.

ამოცანა 45.12

ცვლადმასიანი სხეული,რომლის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, მოძრაობს ჰორიზონტალურ მიმართველებში მუდმივი w აჩქარებით. აირთა გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე მუდმივია. წინაღობის მხედველობაში მიუღებლად განსაზღვრეთ მანძილი, რომლის გავლის შემდეგ მისი მასა შემცირდება k–ჯერ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):



$$m\ddot{x} = -v_e \frac{dm}{dt}.$$

მოვახდინოთ ცვალდთა განცალება და გავითვალისწინოთ, რომ $\ddot{x} = w$, მაშინ

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w}{v_e} dt.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება

$$\int_{m_0}^{m_0/k} \frac{dm}{m} = -\frac{w}{v_e} \int_0^t dt,$$

საიდანაც

$$lnm|_{m_0}^{m_0/k} = -\frac{w}{v_e} t \Longrightarrow t = \frac{v_e}{w} lnk.$$

სხეულის მიერ თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას გავლილი მანძილი

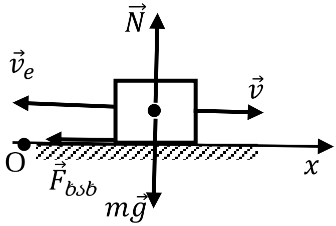
$$s = \frac{wt^2}{2} = \frac{w}{2}\left(\frac{v_e}{w} lnk\right)^2 = \frac{v_e^2(lnk)^2}{2w}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $s = \frac{v_e^2(lnk)^2}{2w}$.

ამოცანა 45.13

ამოხსენით წინამდებარე ამოცანა, თუ დავუშვებთ, რომ სხეულზე მოქმედებს სრიალის ხახუნის ძალა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):



$$m\ddot{x} = -v_e \frac{dm}{dt} - F_{ხახ},$$

სადაც $F_{ხახ} = fN = fmg$.
მაშინ

$$m\ddot{x} = -v_e \frac{dm}{dt} - fmg.$$

მოვახდინოთ ცვალდთა განცალება და გავითვალისწინოთ, რომ $\ddot{x} = w$, მაშინ

$$-\frac{v_e dm}{m(a + fg)} = dt.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება

$$-\int_{m_0}^{m_0/k} \frac{v_e dm}{m(w + fg)} = \int_0^t dt,$$

მივიღებთ

$$-\frac{v_e}{(w + fg)} lnm\Big|_{m_0}^{\frac{m_0}{k}} = t,$$

საიდანაც

$$t = \frac{v_e}{w + fg} lnk.$$

მაშასადამე, სხეულის მიერ თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას გავლილი მანძილი

$$s = \frac{wt^2}{2} = \frac{w}{2}\left(\frac{v_e}{w + fg} lnk\right)^2 = \frac{wv_e^2}{2(w + fg)^2}(lnk)^2.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $s = \frac{wv_e^2}{2(w+fg)^2}(lnk)^2$, სადაც f −სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია.

ამოცანა 45.14

ცვლადი მასის სხეული მოძრაობს ეკვატორის გასწვრივ დაგებულ სპეციალურ მიმმართველებში. მხები აჩქარება $w_\tau = a = const.$ მოძრაობისადმი წინაღობის მხედველობაში მიუღებლად განსაზღვრეთ , რამდენჯერ შემცირდება სხეულის მასა, როცა იგი შეასრულებს დედამიწის გარშემო ერთ შემობრუნებას, თუ აირთა გამოდინების ეფექტური სიჩქარე $v_{ეფ} = const.$ როგორ უნდა იყოს აჩქარება, რომ ერთი შემობრუნების შემდეგ სხეულმა მიიღოს პირველი კოსმოსური სიჩქარე?

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ავირჩიოთ ბუნებრივი ღერძები n (ეკვატორის რადიუსის გასწვრივ ცენტისკენ) და τ (ეკვატორის მხების გასწვრივ).

შევადგინოთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის დიფერენციალური განტოლება τ ღერძზე გეგმილებში:

$$ma = -v_e \frac{dm}{dt}.$$

მოვახდინოთ ცვალდთა განცალება და ვაინტეგროთ:

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -\frac{a}{v_e} \int_0^t dt,$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$-lnm|_{m_0}^{m} = \frac{a}{v_e} t$$

ან

$$ln \frac{m_0}{m} = \frac{at}{v_e}.$$

აქედან

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{at}{v_e}}. \qquad (1)$$

ტოლობიდან

$$S = \frac{at^2}{2} = 2\pi R$$

განვსაზღვრავთ t დროს, რომლის განმავლობაში სხეული შეასრულებს ერთ ბრუნს:

$$t = \sqrt{\frac{4\pi R}{a}}. \qquad (2)$$

ეს გამოსახულება შევიტანოთ (1) განტოლებაში და ვიპოვოთ რამდენჯერ შემცირდება სხეულის მასა::

$$\frac{m_0}{m} = e^{2\sqrt{\pi R a}/v_e} = \exp\left(2\sqrt{\pi R a}/v_e\right).$$

პირველი კოსმოსური სიჩქარე

$$v = \sqrt{gR}.$$

თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას $v = at$, მაშინ

$$\sqrt{gR} = at.$$

ჩავსვათ ამ გამოსახულებაში (2) ტოლობა:

$$\sqrt{gR} = \sqrt{4\pi R a}.$$

ამ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ აჩქარებას:

$$a = \frac{g}{4\pi}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\exp\left(\frac{2\sqrt{\pi R a}}{v_e}\right)$ −ჯერ; $a = \frac{g}{4\pi}$.

ამოცანა 45.15

წინამდებარე ამოცანაში განსაზღვრეთ საწვავის მასა იმ მომენტისათვის, როცა სხეულის წნევა მიმმართველებზე ნულის ტოლი იქნება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავაკავშიროთ სხეულთან ბუნებრივი n და τ ღერძები და ჩავწეროთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის დიფერენციალური განტოლება n ღერძზე გეგმილებში იმ მომენტში, როცა სხეულის წნევა მიმმართველებზე უდრის ნულს:

$$\frac{mv^2}{R} = mg,$$

სადაც $m -$ სხეულის მასაა ამ მომენტში.

აქედან

$$v = \sqrt{gR}. \qquad (1)$$

ჩავწეროთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის დიფერენციალური განტოლება τ ღერძზე გეგმილებში:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}.$$

ან

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}.$$

ვაინტეგროთ: მიღებული განტოლება:

$$\int_0^v dv = -v_e \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}.$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$v = v_e ln \frac{m_0}{m}$$

ან

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_e}}.$$

აქედან

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{v_e}}$$

ან (1) გამოსახულების გათვალსიწინებით

$$m = m_0 e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}.$$

ვიპოვოთ დამწვარი საწვავის მასა

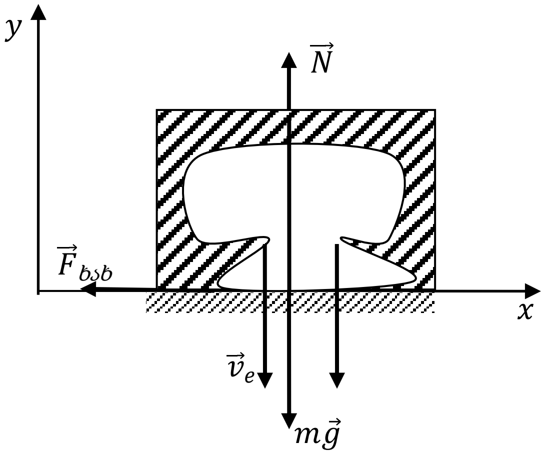
$$m_T = m_0 - m = m_0\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right).$$

პ ა ს უ ხ ი: $m_T = m_0\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right).$

ამოცანა 45.16

სხეული სრიალებს ჰორიზონტალურ რელსებზე. აირთა გამოდინება ხდება ვერტიკალურად ქვევით მუდმივი $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარით. სხეულის საწყისი სიჩქარე უდრის v_0. განსაზღვრეთ სხეულის სიჩქარის ცვლილებისა და მისი მოძრაობის კანონები, თუ მისი მასის ცვლილება ხდება $m = m_0 - \alpha t$ კანონით. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის



დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$m\ddot{x} = -F_{\text{ხახ}}. \qquad (1)$$

ვიცით რა, რომ

$$m = m_0 - \alpha t,$$

$$N = mg - v_e \frac{dm}{dt}.$$

ვიპოვით ხახუნის ძალას:

$$F_{\text{ხახ}} = fN = f\left(mg - v_e \frac{dm}{dt}\right).$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$(m_0 - \alpha t)\ddot{x} = -fg(m_0 - \alpha t) + f v_e \frac{d(m_0 - \alpha t)}{dt}$$

ან

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -fg + f v_e \frac{-a}{m_0 - \alpha t}.$$

მიღებულ განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და შემდეგ ვაინტეგროთ:

$$\int_{v_0}^{v} d\dot{x} = -\int_{o}^{t} fg dt + \int_{o}^{t} f v_e \frac{d(m_0 - \alpha t)}{m_0 - \alpha t}$$

აქედან მივიღებთ

$$v - v_0 = -fgt + f v_e ln(m_0 - \alpha t)\Big|_0^t$$

ან

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - f\left(gt - v_e ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right).$$

ამ განტოლებშიც განვაცალოთ ცვლადები და შემდეგ ვაინტეგროთ:

$$\int dx = \int v_0 dt - f\int\left(gt - v_e ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)dt$$

აქედან მივიღებთ

$$x = v_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[tln\, m_0 + \frac{1}{a}(\, m_0 - \alpha t)ln(\, m_0 - \alpha t) - 1\right]\right\} + C.$$

ვიპოვოთ ინტეგრების C მუდმივი. ამისათვის მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ საწყისი პირობები: $x_0 = 0$, როცა $t = 0$:

$$C = -\frac{f v_e\, m_0}{a}(ln\, m_0 - 1).$$

მაშინ

$$x = v_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[tln\, m_0 + \frac{1}{a}(\, m_0 - \alpha t)ln(\, m_0 - \alpha t) - 1\right]\right\} -$$

$$-\frac{f v_e\, m_0}{a}(ln\, m_0 - 1).$$

გარდაქმნის შემდეგ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$-[+ln(\, m_0 - \alpha t) - 1]\} -$$

$$S = x = v_0 t - f\left\{\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[tln\, m_0 + \frac{m_0 - \alpha t}{a}(ln(\, m_0 - \alpha t) - 1 -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{f v_e\, m_0}{a}(ln\, m_0 - 1)\right)\right]\right\}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $v = v_0 - f\left(gt - v_e ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)$;

$$S = v_0 t - f\left\{\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[tln\, m_0 + \frac{m_0 - \alpha t}{a}(ln(\, m_0 - \alpha t) - 1 -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{f v_e\, m_0}{a}(ln\, m_0 - 1)\right)\right]\right\}.$$

ამოცანა 45.17

ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ საწვავის ცვლილება ხდება $m = m_0 e^{-\alpha t}$ კანონით. განსაზღვრეთ $\alpha -$ რა მნიშვნელობისათვის იმოძრავებს სხეული მუდმივი v_0 სიჩქარით.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

შევადგინოთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. 45.16 ამოცანის ამოხსნა):

$$m\ddot{x} = -F_{ხახ}. \qquad (1)$$

სადაც $m = m_0 e^{-\alpha t}$; $F_{ხახ} = f\left(mg - v_e \frac{dm}{dt}\right)$.

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$m_0 e^{-\alpha t}\,\ddot{x} = -fg\,m_0 e^{-\alpha t} + f v_e \alpha\, m_0 e^{-\alpha t}$$

ან

$$\ddot{x} = -fg + f\alpha v_e. \qquad (2)$$

ვაინტეგროთ (2) ტოლობა ორჯერ:

$$\dot{x} = -fgt + f\alpha v_e t + C_1 \qquad (3)$$

$$x = -f\frac{gt^2}{2} + f\frac{\alpha v_e t^2}{2} + C_1 t + C_{2.} \qquad (4)$$

ჩავსვათ (3) და (4) ფორმულებში საწყისი პირობები: $t = 0,\ \dot{x}_0 = v_0$, $x_0 = 0$ და ვიპოვოთ ინტეგრების C_1 და $C_{2.}$ მუდმივები: $C_1 = v_{0,}$, $C_{2.} = 0$.

მაშინ (3) და (4) ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$v = \dot{x} = v_0 - f(g - \alpha v_e)t, \qquad (5)$$

$$S = x = v_0 t - f(g - \alpha v_e)\frac{t^2}{2}. \qquad (6)$$

(5) ტოლობიდან ვიპოვით $\alpha -$ ს მნიშვნელობას, რომლის დროსაც სხეული იმოძრავებს მუდმივი v_0 სიჩქარით:

$$v = v_0 = v_0 - f(g - \alpha v_e)t,$$

საიდანაც

$$\alpha = \frac{g}{v_e}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = v_0 - f(g - \alpha v_e)t;\quad S = v_0 t - f(g - \alpha v_e)\frac{t^2}{2};$

$$\alpha = \frac{g}{v_e}.$$

ამოცანა 45.18

რა მანძილს გაივლის რაკეტა წრფივ აქტიურ უბანზე სიცარიელეში და მიზიდულობის ძალების არარსებობისას (მისი გაქანების დროში), ნულოვანი საწყისი სიჩქარიდან აირთა გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარის ტოლი სიჩქარის მიღებამდე, თუ ცნობილია რაკეტის საწყისი მასა m_0 და β წამური ხარჯი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მისი მოძრაობის მიმართულებაზე გეგმილებში

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}.$$

ან

$$dv = -v_e\frac{dm}{m}.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება:

$$\int_0^v dv = -v_e\int_{m_0}^{m_1}\frac{dm}{m}$$

აქედან მივიღებთ:

$$v = -v_e(\ln m_1 - \ln m_0) = v_e\ln\frac{m_0}{m_1}. \quad (1)$$

(1) ფორმულის თანახმად რაკეტის $v = v_e$ სიჩქარის მიღწევისას

$$1 = \ln\frac{m_0}{m_1} = \ln e.$$

აქედან

$$m_1 = \frac{m_0}{e}. \quad (3)$$

ამავე დროს

$$m_1 = m_0 - \beta t. \quad (4)$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს (3) და (4) და ვიპოვოთ დრო, როდესაც $v = v_e$:

$$T = \frac{m_0(e-1)}{\beta e}. \quad (5)$$

(2) ტოლობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$v = \frac{ds}{dt} = v_e(\ln m_0 - \ln m_1).$$

ამ გამოსახულებაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება და ვაინტეგროთ:

$$\int_0^s ds = v_e\int_0^T \ln m_0 dt - v_e\int_0^T \ln(m_0 - \beta t)dt;$$

$$s = v_e\ln m_0 \cdot t|_0^T + \frac{v_e}{\beta}\int_0^T \ln(m_0 - \beta t)d(m_0 - \beta t) = v_e\ln m_0 \cdot t|_0^T +$$

$$+\frac{v_e}{\beta}(m_0-\beta t)ln(m_0-\beta t)\Big|_0^T-\frac{v_e}{\beta}(m_0-\beta t)\Big|_0^T;$$

$$s=v_eTln\,m_0+\frac{v_e}{\beta}(m_0-\beta t)ln(m_0-\beta t)\Big|_0^T-\frac{v_e}{\beta}(m_0-\beta t)\Big|_0^T;$$

$$s=v_eTln\,m_0+\frac{v_e}{\beta}(m_0-\beta T)ln(m_0-\beta T)\Big|-\frac{v_e}{\beta}m_0ln\,m_0-$$
$$-\frac{v_e}{\beta}(m_0-\beta T)+\frac{v_e\,m_0}{\beta}.$$

ამ ფორმულაში შევიტანოთ (5) გამოსახულება, მივიღებთ:

$$s=v_e\frac{m_0(e-1)}{\beta e}ln\,m_0+$$
$$+\frac{v_e}{\beta}\left(m_0-\frac{m_0(e-1)}{e}\right)ln\left(m_0-\frac{m_0(e-1)}{e}\right)-$$
$$-\frac{v_e}{\beta}m_0ln\,m_0-\frac{v_e}{\beta}\left(m_0-\frac{m_0(e-1)}{e}\right)+\frac{v_e\,m_0}{\beta}=.$$
$$=\frac{v_{e\,m_0}}{\beta e}(eln\,m_0-ln\,m_0+ln\,m_0-1-eln\,m_0-1+e)$$
$$=\frac{v_{e\,m_0}}{\beta e}(e-2).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $s=\frac{v_{e\,m_0}}{\beta e}(e-2),$ სადაც $e-$ ნეპერის რიცხვია.

ამოცანა 45.19

რაკეტა მოძრაობს წრფივად ველსი, სადაც არ არსებობს წინაღობა და მიზიდულობა. განსაზღვრეთ წევის ძალის მუშაობა იმ მომენტისათვის, როცა დაიწვება მთელი საწვავი. რაკეტის საწყისი მასაა m_0, საბოლოო$-$ m_1. აირთა გამოდინების ეფექტური სიჩქარე $v_{ეფ}$ მუდმივია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ჩავწეროთ ცვლადი მასის მქონე სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მისი მოძრაობის მიმართულებაზე გეგმილებში

$$m\frac{dv}{dt}=-v_e\frac{dm}{dt}.$$

ან

$$dv=-v_e\frac{dm}{m}. \qquad (1)$$

ვაინტეგროთ (1) განტოლება:

$$\int_0^v dv=-v_e\int_{m_0}^m\frac{dm}{m}$$

აქედან მივიღებთ:

$$v = v_e(\ln m_0 - \ln m). \qquad (2)$$

წევის ძალის მუშობა

$$A = \int F ds,$$

სადაც $F = m\frac{dv}{dt}$; $ds = vdt$.

მაშინ

$$A = \int mvdv. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (1) გამოსახულება (3)-ში:

$$A = -\int v_e v dm.$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება ბოლო ტოლობაში, მივიღებთ:

$$A = -v_e^2 \int_{m_0}^{m_1} (\ln m_0 - \ln m)\, dm = -v_e^2 \ln m_0 \cdot m|_{m_0}^{m_1} + v_e^2 m \ln m|_{m_0}^{m_1} -$$

$$-v_e^2 \cdot m|_{m_0}^{m_1} = -v_e^2 \ln m_0 \cdot (m_1 - m_0) + v_e^2 m_1 \ln m_1 - v_e^2 m_0 \ln m_0 -$$

$$-v_e^2 m_1 + v_e^2 m_0 = -v_e^2 m_1 \ln m_0 + v_e^2 m_0 \ln m_0 + v_e^2 m_1 \ln m_1 -$$
$$-v_e^2 m_0 \ln m_0 - v_e^2 m_1 + v_e^2 m_0 = m_1 v_e^2 \left[-(\ln m_0 - \ln m_1) + \frac{m_0}{m_1} - 1\right]$$

რადგან

$$\frac{m_0}{m_1} = z,$$

ამიტომ

$$A = m_1 v_e^2 (z - 1 - \ln z).$$

პ ა ს უ ხ ი: $A = m_1 v_e^2 (z - 1 - \ln z)$; $z = \frac{m_0}{m_1}$.

ამოცანა 45.20

$z = \frac{m_0}{m_1}$ −ის (m_0 −საწყისი, m_1 − საბოლოო მასა) როგორი მნიშვნელობისათვის აქვს რაკეტის მექანიკური მარგი ქმედების კოეფიციენტს უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც განისაზღვრება, როგორც საწვავის დაწვის შემდეგ რაკეტის კინეტიკური ენერგიის ფარდობა დახარჯულ ენერგიასთან?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ მექანიკური მარგი ქმედების კოეფიციენტის გამოსათვლელი გამოსახულება:

$$\eta = \frac{T}{A} = \frac{m_1 v_e^2}{2A},$$

სადაც T −რაკეტის კინეტიკური ენერგია საწვავის დაწვის შემდეგ, A − წევის ძალის მუშობა.

ვისარგებლოთ 45.19 ამოცანაში მიღებული ფორმულებით:

$$v_1 = v_e(\ln m_0 - \ln m_1),$$

ან

$$v_1 = v_e \ln\frac{m_0}{m_1} = v_e \ln z,$$

$$A = m_1 v_e^2 (z - 1 - \ln z).$$

მაშინ

$$\eta = \frac{m_1 v_e^2 \ln^2 z}{2\, m_1 v_e^2 (z - 1 - \ln z)} = \frac{\ln^2 z}{2(z - 1 - \ln z)}.$$

ექსტრემუმის განსასაზღვრავად გავაწარმოოთ ეს გამოსახულება და მიღებული გამოსახულება გავუტოლოთ ნულს:

$$\eta'_z = \frac{2\frac{1}{z}(z - 1 - \ln z)\ln z - \left(1 - \frac{1}{z}\right)\ln^2 z}{2(z - 1 - \ln z)^2} = 0.$$

აქედან

$$2(z - 1 - \ln z) - (z - 1)\ln z = 0,$$
$$2(z - 1) - 2\ln z - z\ln z + \ln z = 0$$

ან

$$2(z - 1) = (z + 1)\ln z,$$

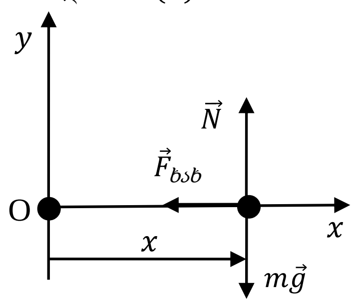
სადაც z არის $\ln z = \frac{2(z-1)}{1+z}$ განტოლების ფესვი.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> z არის $\ln z = \frac{2(z-1)}{1+z}$ განტოლების ფესვი.

ამოცანა 45.21

m_0 მასის თვითმფრინავი v_0 სიჩქარით ჯდება პოლარულ აეროდრომზე. დაჯდომის შემდეგ მოძრაობისას მისი შემოყინვის გამო თვითმფრინავის მასა იზრდება $m = m_0 + at$ კანონით, სადაც $a = const.$ აეროდრომზე თვითმფრინავის მოძრაობის წინაღობის ძალამისი მასის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტი არის f). განსაზღვრეთ თვითმფრინავის გაჩერების დრო (T) მისი მასის გათვალისწინებით და დრო (T_1) მასის გაუთვალისწინებლად. იპოვეთ დროის ცვლასთან დაკავშირებით სიჩქარის ცვლილების კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე თვითმფრინავზე მოქმედი ძალები:



$m\vec{g}-$ სიმძიმის ძალა, $\vec{F}_{ხახ}-$ ხახუნის ძალა, $\vec{N}-$ საყრდენის რეაქციის ძალა. თვითმფრინავი მივიღოთ მატერიალურ წერტილად და ჩავწეროთ მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$\frac{d}{dt}(mv)=-F_{ხახ}. \qquad (1)$$

$$m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}=-fN=-fmg \qquad (2)$$

ან

$$\frac{dv}{dt}+\frac{vdm}{mdt}=-fg.$$

რადგან $m=\ m_0+at$, ამიტომ $dm=adt$.
მაშინ

$$\frac{dv}{dt}+\frac{vdm}{(m_0+at)dt}+fg=0 \qquad (3)$$

ან

$$\frac{dv}{dt}+\frac{av}{m_0+at}+fg=0. \qquad (4)$$

მოვახდინოთ ჩასმა

$$v=uw=f(t). \qquad (5)$$

მაშინ

$$\frac{dv}{dt}=u\frac{dw}{dt}+w\frac{du}{dt}. \qquad (6)$$

(5) და (6) გამოსახულებების გათვალისწინებით (4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$u\frac{dw}{dt}+w\frac{du}{dt}+\frac{auw}{m_0+at}+fg=0. \qquad (7)$$

შევარჩიოთ u ისე, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$w\frac{du}{dt}+\frac{auw}{m_0+at}=0.$$

მაშინ

$$\frac{du}{u}=-\frac{adt}{m_0+at}.$$

ვაინტეგროთ ბოლო გამოსახულება, მივიღებთ:

$$lnu=-ln(m_0+at)$$

ან

$$lnu=\frac{1}{ln(m_0+at)}.$$

აქედან

$$u=\frac{1}{m_0+at}. \qquad (8)$$

ჩავსვათ (8) გამოსახულება (7) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{m_0+at}\frac{dw}{dt}+fg=0$$

ან

$$\frac{dw}{dt}=-fg(\,m_0+at),$$

$$dw=(-fg\,m_0-fgat)dt$$

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$w=-fg\,m_0t-fga\frac{t^2}{2}+C_1. \qquad (9)$$

ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივი საწყისი პირობიდან: $t=0,\ w=w_0.\ C_1=w_0.$ მაშასადამე, (5) განტოლების თანახმად:

$$v_0=u_0w_0,$$
$$w_0.=\frac{v_0}{u_0}=v_0m_0.$$

მაშინ

$$w=-fg\,m_0t-fga\frac{t^2}{2}+v_0m_0. \qquad (10)$$

ჩავსვათ (8) და (10) გამოსახულებები (5) ფორმულაში და მივიღოთ დროის ცვლასთან დაკავშირებით სიჩქარის ცვლილების კანონი:

$$v=\frac{1}{m_0+at}\left(m_0v_0-fg\,m_0t-\frac{1}{2}fgat^2\right)=$$
$$=\frac{2m_0v_0-fg\,(2m_0+at)t}{2(\,m_0+at)}. \qquad (11)$$

განსაზღვროთ თვითმფრინავის გაჩერების დრო $v=0$ პირობიდან:

$$m_0v_0-fg\,m_0t-\frac{1}{2}fgat^2=0$$

ან

$$t^2+\frac{2m_0}{a}t-\frac{2m_0v_0}{fga}=0.$$

კვადრატული განტოლების ფესვებია

$$t_{1,2}=-\frac{m_0}{a}\pm\sqrt{\frac{{m_0}^2}{a^2}+\frac{2m_0v_0}{fga}}.$$

რადგან დრო არ უნდა იყოს უარყოფითი, ამიტომ

$$T=\frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2av_0}{fgm_0}}-1\right).$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $m=m_0=const.$ მაშინ

$$F_{ხახ1} = fN_1,$$

სადაც $N_1 = m_0 g$.

ხახუნის ძალის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$m_0 \frac{dv}{dt} = -f\, m_0 g$$

ან

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_{0}^{t} fgdt.$$

ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$v - v_0 = -fgt$$

ან

$$v = v_0 - fgt \qquad (12)$$

გაჩერების მომენტში $t = T_1,\ v = 0,$ მაშინ (12) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$T_1 = \frac{v_0}{fg}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T = \frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2av_0}{fgm_0}} - 1\right);\ T_1 = \frac{v_0}{fg};$

$$v = \frac{2m_0 v_0 - fg\,(2m_0 + at)t}{2(\,m_0 + at)}.$$

ამოცანა 45.22

აირთა გამოდინების ეფექტური სიჩქარე ორსაფეხურიანი რაკეტის პირველ და მეორე საფეხურებში სათანადოდ ტოლია $v_{ეფ}^{(1)}$=2400 მ/წმ და $v_{ეფ}^{(2)}$=2600 მ/წმ. განსაზღვრეთ ციოლკოვსკის რიცხვები საბოლოო სიჩქარის უზრუნველსაყოფად: $v_1 =$2400მ/წმ სიჩქარისა რაკეტის პირველი საფეხურისათვის, ხოლო $v_2 =$5400მ/წმ სიჩქარისა რაკეტის მეორე საფეხურისათვის, თუ მოძრაობა ხდება უჰაერო სივრცეში მიზიდულობის არარსებობისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რაკეტის სიჩქარეს აქტიური მონაკვეთის ბოლოს ვიპოვით ციოლკოვსკის ფორმულით:

$$v = v_0 + v_e \ln z, \qquad (1)$$

სადაც $z = \frac{M_0}{M_კ}$ − რაკეტის საწყისი მასის შეფრდებაა კორპუსის მასასთან; $v_e = v_{ეფ}$ −გაზების გამოდინების ეფექტური სიჩქარეა.

ვისარგებლოთ (1) ფორმულით და გამოვთვალოთ:

$$v_1 = v_0 + v_{ეფ}^{(1)} \ln z_1,$$

მაშასადამე, რადგან $v_0 = 0$,

$$z_1 = exp\left(\frac{v_1}{v_{ეფ}^{(1)}}\right) = exp\left(\frac{2400}{2400}\right) = e = 2{,}72;$$

$$v_2 = v_1 + v_{ეფ}^{(2)} lnz_2,$$

მაშასადამე,

$$z_2 = exp\left(\frac{v_2 - v_1}{v_{ეფ}^{(2)}}\right) = exp\left(\frac{5400 - 2400}{2400}\right) = e^{15/13} = 3{,}17.$$

პ ა ს უ ხ ი: $z_1 = 2{,}72; \quad z_2 = 3{,}17.$

ამოცანა 45.23

სამსაფეხურიანი რაკეტის ყველა სამ საფეხურს აქვს ერთნაირი ციოლკოვსკის რიცხვი და აირების გამოდინების ერთნაირი $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე. იპოვეთ ციოლკოვსკის რიცხვი, როცა $v_{ეფ}$ =2,4კმ/წმ, თუ მთელი საწვავის დახარჯვის შემდეგ რაკეტის სიჩქარე უდრის 9კმ/წმ (სიმძიმის ძალის ველის მიზიდულობა და ატმოსფეროს წინაღობა უგულებელყოფილია).

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ვისარგებლოთ ციოლკოვსკის ფორმულით და ჩავწეროთ რაკეტის სიჩქარე სამ ეტაპიდან თითოეულზე:

I ეტაპი- $v_1 = v_{ეფ}^{(1)} lnz_1;$ (1)

II ეტაპი- $v_2 = v_1 + v_{ეფ}^{(2)} lnz_2;$ (2)

III ეტაპი- $v_3 = v_2 + v_{ეფ}^{(3)} ln.;$ (3)

რადგან ამოცანის პირობის თანახმად $v_{ეფ}^{(1)} = v_{ეფ}^{(2)} = v_{ეფ}^{(3)} = v_{ეფ}$ და $z_1 = z_2 = z_3 = z$, ამიტომ, თუ ამოვხსნით (1)-(3) სისტემას, მივიღებთ $v_3 = 3v_{ეფ} lnz$. მაშასადამე,

$$z = exp\left(\frac{v_3}{3v_{ეფ}}\right) = exp\left(\frac{9}{3 \cdot 2{,}4}\right) = e^{1{,}25} = e \cdot \sqrt[4]{e} =$$

$$= 2{,}718 \cdot \sqrt[4]{2{,}718} = 3{,}49$$

პ ა ს უ ხ ი: $z = 3{,}49.$

ამოცანა 45.24

სამსაფეხურიანი რაკეტა მოძრაობს გადატანით მიზიდულობისა და ატმოსფეროს წინაღობის გარეშე. აირების გამოდინების ეფექტური სიჩქარე და ციოლკოვსკის რიცხვი სამივე საფეხურისთვის ერთნაირია და სათანადოდ ტოლია $v_{ეფ}$ =2500მ/წმ, $z=$ 4. განსაზღვრეთ რაკეტის სიჩქარეები პირველ, მეორე და მესამე საფეხურში საწვავის მთლიანად დახარჯვის შემდეგ.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ვისარგებლოთ ციოლკოვსკის ფორმულით და ჩავწეროთ რაკეტის სიჩქარე სამ ეტაპიდან თითოეულზე:

I ეტაპი- $v_1 = v_{ეფ} \, lnz = 2500 \cdot ln4 = 3465$(მ/წმ);

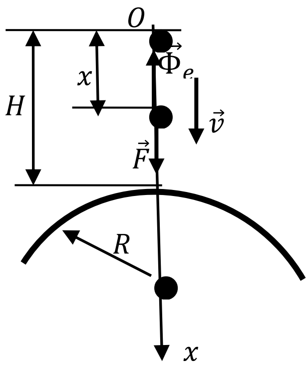
II ეტაპი- $v_2 = v_1 + v_{ეფ} \, lnz = 3465 + 2500 \cdot ln4 = 6930$(მ/წმ);

III ეტაპი- $v_3 = v_2 + v_{ეფ} \, lnz = 6930 + 2500 \cdot ln4 =$10395(მ/წმ).

პ ა ს უ ხ ი: $v_1 = 3465$(მ/წმ); $v_2 = 6930$(მ/წმ); $v_3 =$10395(მ/წმ).

ამოცანა 45.25

იმ მომენტში, როცა მთვარისაკენ მიმართული კოსმოსური ხომალდი უახლოვდება მას და მთვარის ზედაპირიდან H სიმაღლეზე აქვს v_0 სიჩქარე მიმართული მთვარის ცენტრისაკენ, რთავენ მამუხრუჭებელ ძრავას. ჩათვალეთ, რომ მიზიდულობის ძალა ხომალდიდან მთვარის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია და მივიღებთ, რომ ხომალდის მასა იცვლება კანონით $m = m_0 e^{-\alpha t}$ (m_0 არის ხომალდის მასა მამუხრუჭებელი ძრავას ჩართვის მომენტში, α –მუდმივია). იპოვეთ α –ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ხომალდი შეასრულებს რბილ დაჯდომას (ე.ი. მთვარეზე დაჯდომის მომენტში სიჩქარე ნულის ტოლი იქნება). აირების გამოდინების ეფექტური სიჩქარე მუდმივია, მთვარის რადიუსი- R.



ა მ ო ხ ს ნ ა. კოსმოსური ხომალდის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას მოცემულ შემთხვევაში აქვს სახე (იხ. ნახაზი):

$$m\frac{dv}{dt} = F - \Phi_e, \qquad (1)$$

სადაც $\Phi_e = \frac{dm}{dt} v_e$ –რეაქტიული წევის

ძალაა; $F = G\frac{mM}{(R+H-x)^2} -$ მთვარის მიერ რაკეტის მიზიდულობის ძალა; $M -$ მთვარის მასა.

ჩავსვათ Φ_e, F და $m -$ის გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$m_0 e^{-\alpha t}\frac{dv}{dt} = G\frac{m_0 e^{-\alpha t}M}{(R+H-x)^2} == -m_0 \alpha e^{-\alpha t} v_e$$

ან

$$\frac{dv}{dt} = \frac{GM}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e. \qquad (2)$$

დავუშვათ, რომ $v = v(x)$, მივიღებთ

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

მაშინ (2) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{GM}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e. \qquad (3)$$

მთვარის ზედაპირზე სრულდება პირობა:

$$mg_{მთ} = \frac{GmM}{R^2},$$

ე.ი. $GM = g_{მთ}R^2$.

ამის გათვალისწინებით (3) გამოსახულება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{g_{მთ}R^2}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e = 0. \qquad (4)$$

(4) განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, მივიღებთ:

$$\int_{v_0}^{0} v\,dv = g_{მთ}R^2\int_0^H \frac{dx}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e\int_0^H dx$$

ან

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_0}^{0} = g_{მთ}R^2 \left.\frac{1}{R+H-x}\right|_0^H - \alpha v_e x|_0^H.$$

მაშასადამე,

$$-\frac{v_0^2}{2} = g_{მთ}R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) - \alpha v_e H.$$

აქედან

$$\alpha v_e H = \frac{v_0^2}{2} + \frac{g_{მთ}R^2}{R(R+H)}$$

ან

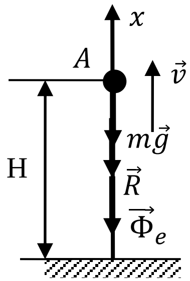
$$\alpha = \frac{v_0^2}{2v_eH} + \frac{g_{მთ}R^2}{v_e(R+H)}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\alpha = \frac{v_0^2}{2v_eH} + \frac{g_{მთ}R^2}{v_e(R+H)}$.

ამოცანა 45.26

იპოვეთ იმ რაკეტის მასის ცვლილების კანონი, რომელმაც დაიწყო მოძრაობა ნულოვანი საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ზევით, თუ მისი აჩქარება w მუდმივია, ხოლო გარემოს წინაღობის ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია (b −პროპორციულობის კოეფიციენტია), სიმძიმის ძალის ველი ჩათვალეთ ერთგვაროვან ველად. აირების გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე მუდმივია

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ სიმძიმის ძალთა ველში რაკეტის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება გარემოს წინაღობის ძალის გათვალისწინებით (იხ.ნახაზი):



$$mw = -mg - \Phi_e - R,$$

სადაც $\Phi_e = v_e \frac{dm}{dt}$.

მაშინ

$$mw = -mg - v_e \frac{dm}{dt} - bv^2$$

ან

$$v_e \frac{dm}{dt} + (w+g)m + bv^2 = 0. \qquad (1)$$

რადგან

$$\frac{dv}{dt} = w,$$

ამიტომ $v_0 = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ $v = wt$ და (1) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$\frac{dm}{dt} + \frac{w+g}{v_e} m + \frac{bw^2}{v_e} t^2 = 0$$

ან

$$\frac{dm}{dt} + \alpha m + \beta t^2 = 0, \qquad (2)$$

სადაც $\alpha = \frac{w+g}{v_e}$; $\beta = \frac{bw^2}{v_e}$.

ამოვხსნათ (2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$\frac{dm}{dt} + \alpha m = 0,$$

მაშასადამე, $m = Ce^{-\alpha t}$.

მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის საფუძველზე (2) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$m = C(t)e^{-\alpha t}. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება (2) განტოლებაში:

$$\frac{dC}{dt} e^{-\alpha t} - C\alpha e^{-\alpha t} + C\alpha e^{-\alpha t} + \beta t^2 = 0$$

ან

$$\frac{dC}{dt} = -\beta t^2 e^{\alpha t}.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა, მივიღებთ:

$$C = -\beta \int t^2 e^{\alpha t} + C_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \int t^2 e^{\alpha t} + C_1 =$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha} \int t e^{\alpha t} + C_1 = -\frac{\beta}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2} \int t e^{\alpha t} + C_1 =$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2} t e^{\alpha t} - \frac{2\beta}{\alpha^2} \int e^{\alpha t} + C_1 =$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2} t e^{\alpha t} - \frac{2\beta}{\alpha^3} e^{\alpha t} + C_1.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (3) ფორმულაში:

$$m = C_1 e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2} t e^{\alpha t} - \frac{2\beta}{\alpha^3} e^{\alpha t}.$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობით: როცა $t = 0, m(0) = m_0$ და ვიპოვოთ C_1:

$$C_1 = m_0 + \frac{2\beta}{\alpha^3}.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$m = \left(m_0 + \frac{2\beta}{\alpha^3}\right) e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} t^2 + \frac{2\beta}{\alpha^2} t - \frac{2\beta}{\alpha^3}.$$

დავუბრუნდეთ α და β აღნიშვნებს (2) ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{2\beta}{\alpha^3} = \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{bw^2}{w+g}, \quad \frac{2\beta}{\alpha^2} = \frac{2bv_e w^2}{(w+g)^2}$$

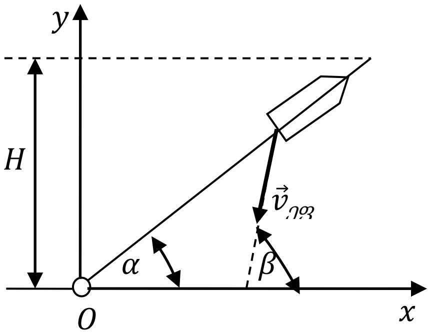
და ჩავწროთ საბოლოო შედეგი:

$$m = \left(m_0 + \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}\right) e^{-\frac{w+g}{v_e} t} - \frac{bw^2}{w+g} t^2 + \frac{2bv_e w^2}{(w+g)^2} t - \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}.$$

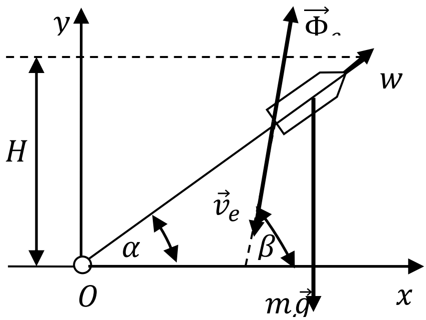
პ ა ს უ ხ ი:

$$m = \left(m_0 + \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}\right) e^{-\frac{w+g}{v_e} t} - \frac{bw^2}{w+g} t^2 + \frac{2bv_e w^2}{(w+g)^2} t - \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}.$$

ამოცანა 45.27



რაკეტა მოძრაობს წრფეზე სიმძიმის ძალის ერთგვაროვან ველში მუდმივი w აჩქარებით. ეს წრფე ადგენს α კუთხეს იმჰორიზონტალურ სიბრტყესთან, რომელიც გადის დედამიწის ზედაპირის იმ წერტილში, საიდანაც გაუშვეს რაკეტა. განსაზღვრეთ რაკეტის საწყისი მასის ფარდობა მის მასასთან საწვავის გარეშე (ციოლკოვსკის რიცხვი), თუ მივიღებთ, რომ აირების გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე სიდიდით და მიმართულებით მუდმივია და საწვავის ხარჯვის მომენტში რაკეტა ზემოხსენებული ჰორიზონტალური სიბრტყიდან იმყოფებოდა H სიმაღლეზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მეშერსკის განტოლებას, რომელიც აღწერს რაკეტის მოძრაობას მუდმივი w აჩქარებით წრფეზე, რომელიც ადგენს α კუთხეს ჰორიზონტალურ სიბრტყესთან (იხ. ნახაზი), საკოორდინატო x და y ღერძებზე გეგმილებში აქვს შემდეგი სახე:

$$mw\cos\alpha = -v_e\frac{dm}{dt}\cos\beta, \quad (1)$$

$$mw\sin\alpha = -mg - v_e\frac{dm}{dt}\sin\beta, \quad (2)$$

(1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}dt \Longrightarrow \ln m\Big|_{m_0}^{m} = -\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}t\Big|_0^T.$$

აქედან

$$m = m_0e^{-at}. \quad (3)$$

სადაც $a = \frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}$.

ჩავსვათ (30 გამოსახულება (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$m_0e^{-at}w\sin\alpha = -m_0e^{-at}g + v_eam_0e^{-at}\sin\beta$$

ან

$$wsin\alpha + g = v_e \frac{wcos\alpha}{v_e cos\beta} sin\beta.$$

აქედან

$$tg\beta = \frac{wsin\alpha + g}{wcos\alpha},$$

$$\beta = arctg\left(\frac{wsin\alpha + g}{wcos\alpha}\right).$$

(1) განტოლება ვაინტეგროთ დროით 0-დან T −მდე საზღვრებში, სადაც T −საწვავის დახარჯვის დროა. მაშინ

$$lnm|_{m_0}^{m_k} = -at|_0^T$$

ან

$$lnz = aT.$$

აქედან

$$z = e^{\frac{wcos\alpha}{v_e cos\beta}T} \qquad (4)$$

T დროს ვიპოვოთ პირობიდან:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = wsin\alpha.$$

მაშასადამე,

$$y = \frac{wsin\alpha}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \qquad (5)$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $\dot{y}(0) = 0, y(0) = 0,$ მივიღებთ: $C_1 = C_2 = 0$. რადგან, როცა $t = T, y = H,$ ამიტომ (5) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$H = \frac{wsin\alpha}{2}T^2.$$

აქედან

$$T = \sqrt{\frac{2H}{wsin\alpha}}.$$

T −ს ეს გამოსახულება შევიტანოთ (4) გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$z = e^{\frac{wcos\alpha}{v_e cos\beta}\sqrt{\frac{2H}{wsin\alpha}}} = e^{\frac{cos\alpha}{v_e cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{sin\alpha}}}$$

პ ა ს უ ხ ი: $z = e^{\frac{cos\alpha}{v_e cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{sin\alpha}}}$, სადაც არის კუთხე, რომელსაც v_e სიჩქარე ადგენს მხებ სიბრტყესთან,

$$\beta = arctg\left(\frac{wsin\alpha + g}{wcos\alpha}\right).$$

ამოცანა 45.28

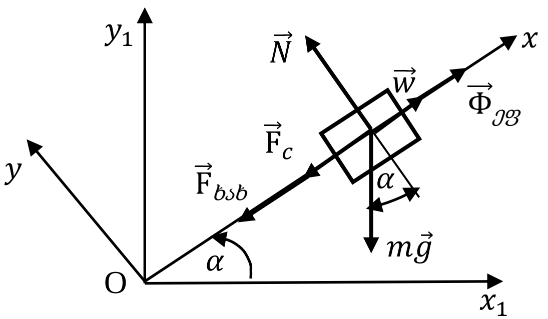
ცვლადი მასის სხეული მოძრაობს w აჩქარებით ხორკლიან წრფივ მიმმართველებში, რომელიც ადგენს α კუთხეს ჰორიზონტთან. იპოვეთ სხეულის მასის ცვლილების კანონი, თუ მივიღებთ, რომ სიმძიმის ძალის ველი ერთგვაროვანია და ატმოსფეროს წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია (b −პროპორციულობის კოეფიციენტია), აირების გამოდინების $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე მუდმივია; სხეულსა და მიმმართველს შორის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი ტოლია f.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ჩავწეროთ მეშერსკის განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$mw = -mgsin\alpha - F_{ხახ} - F_c + \Phi_e, \qquad (1)$$

ამოცანის პირობის თანახმად $F_c = bv = bwt,$ რადგან $v = wt, w = const.$



ხახუნის ძალა

$$F_{ხახ} = fN = fmgcos\alpha.$$

რადგან $\vec{F}_{ხახ}$ გეგმილი Oy ღერძზე, ე.ი. $0 = N - mgcos\alpha$, ამიტომ

$$N - fmgcos\alpha$$

რეაქტიული ძალა

$$\Phi_e = -v_e\frac{dm}{dt}.$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$mw_1 = -bwt - v_e\frac{dm}{dt}$$

ან

$$\frac{dm}{dt} + am + \gamma t = 0, \qquad (2)$$

სადაც $w_1 = w + g(sin\alpha + fcos\alpha);\quad a = \frac{w_1}{v_e};\ \gamma = \frac{bw}{v_e}.$

(2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$m = C(t)e^{-at}. \quad (3)$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება (2) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{dC}{dt}e^{-at} - C\alpha e^{-at} + C\alpha e^{-at} + \gamma t = 0$$

ან

$$\frac{dC}{dt} = -\gamma t e^{at}.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა, მივიღებთ:

$$C = -\gamma \int t e^{at} + C_1 = -\frac{\gamma}{a}\int t d e^{at} + C_1 = -\frac{\gamma}{a} t e^{at} + C_1 =$$

$$= -\frac{\gamma}{a} t e^{at} + \frac{\gamma}{a^2} e^{at} + C_1$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (3) ფორმულაში:

$$m = C_1 e^{-\alpha t} - \frac{\gamma}{\alpha} t + \frac{\gamma}{\alpha^2}.$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობით: როცა $t = 0, m(0) = m_0$ და ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივი C_1 :

$$C_1 = m_0 - \frac{\gamma}{\alpha^2}.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$m = \left(m_0 - \frac{\gamma}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha t} - \frac{\gamma}{\alpha} t + \frac{\gamma}{\alpha^2}.$$

დავუბრუნდეთ a და γ აღნიშვნებს, მაშინ მივიღებთ

$$m = \left(m_0 - \frac{bwv_e}{{w_1}^2}\right) e^{-\frac{w_1}{v_e}t} - \frac{bw}{w_1}\left(t - \frac{v_e}{w_1}\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $m = \left(m_0 - \frac{bwv_e}{{w_1}^2}\right) e^{-\frac{w_1}{v_e}t} - \frac{bw}{w_1}\left(t - \frac{v_e}{w_1}\right)$, სადაც $w_1 = w + g(sin\alpha + fcos\alpha)$, $m_0 -$ სხეულის საწყისი მასაა.

ამოცანა 45.29

Q წონის აეროსტატი ადის ვერტიკალურად ზევით და თან აქვს მიწაზე დაკეცილი ბაგირი. აეროსტატზე მოქმედებს ამწევი P ძალა, სიმძიმის ძალა და სიჩქარის კვადრატის პროპორციული წინაღობის $R = -\beta\dot{x}^2$ ძალა. ბაგირის ერთეული სიგრძის წონა არის γ. შეადგინეთ აეროსტატის მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აეროსტატის მასა იზრდება აწეული ბაგირის სიგრძის პროპორციულად. ამასთან ბაგირის ასვლის აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ნულს. მაშასადამე, მეშერსკის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum F_{kx}$$

ან

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = P - mg - \beta\dot{x}^2$$

ან

$$\frac{dm}{dt}\dot{x} + m\ddot{x} = P - mg - \beta\dot{x}^2. \qquad (1)$$

რადგან

$$m = \frac{Q + \gamma x}{g},$$

ამიტომ

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\gamma}{g}\dot{x}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{Q + \gamma x}{g}\ddot{x} = P - (Q + \gamma x) - \left(\beta + \frac{\gamma}{g}\right)\dot{x}^2.$$

აქედან

$$\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q + \gamma x} - \frac{\beta g + \gamma}{Q + \gamma x}\dot{x}^2.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2.$

ამოცანა 45.30

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ აეროსტატის ასვლის სიჩქარე. საწყის მომენტში აეროსტატი უძრავია და იმყოფება H_0 სიმაღლეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 45.29 ამოცანის ამოხსნის თანახმათ აეროსტატის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება

$$\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2. \tag{1}$$

შემდეგი გარდაქმნის შედეგად

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx}$$

(1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2. \tag{2}$$

(2) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$\dot{x}^2 = uv \Longrightarrow \frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u,$$

მაშინ მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u\right) = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}uv.$$

მოვახდინოთ დაჯგუფებები:

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}u = -\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}uv, \tag{3}$$

და

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}v = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x}. \tag{4}$$

(3) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}dx.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება

$$\int\frac{dv}{v} = -\frac{2(\beta g+\gamma)}{\gamma}\int\frac{d(Q+\gamma x)}{Q+\gamma x}$$

და ვიპოვოთ

$$ln v = -\frac{2(\beta g+\gamma)}{\gamma}ln(Q+\gamma x).$$

აქედან

$$v = \left(\frac{1}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{g\beta}{\gamma}\right)}.$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (4) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\frac{du}{dx} = 2g\left[P(Q+\gamma x)^{1+\frac{2g\beta}{\gamma}} - (Q+\gamma x)^{2\left(1+\frac{g\beta}{\gamma}\right)}\right].$$

მიღებულ გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, გვექნება:

$$u = 2g\left[\frac{P}{2\gamma + 2g\beta}(Q+\gamma x)^{2\left(1+\frac{g\beta}{\gamma}\right)} - \frac{1}{3\gamma + 2g\beta}(Q+\gamma x)^{\left(3+\frac{2g\beta}{\gamma}\right)} + C\right].$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $u = 0, x = H_0$ და განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივი:

$$C = \frac{(Q+\gamma H_0)^{\left(3+\frac{2g\beta}{\gamma}\right)}}{3\gamma+2g\beta} - \frac{P(Q+\gamma H_0)^{2\left(1+\frac{g\beta}{\gamma}\right)}}{2\gamma+2g\beta}.$$

მაშინ

$$\dot{x}^2 = uv = \frac{Pg}{\gamma+g\beta}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{g\beta}{\gamma}\right)}\right] -$$

$$-\frac{2g(Q+\gamma x)}{3\gamma+2g\beta}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{\left(3+2\frac{g\beta}{\gamma}\right)}\right].$$

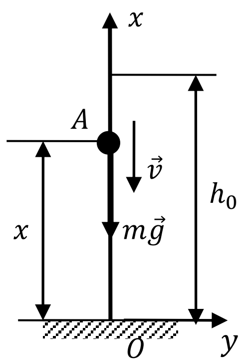
პ ა ს უ ხ ი:

$$\dot{x}^2 = \frac{Pg}{\gamma+g\beta}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{g\beta}{\gamma}\right)}\right] -$$

$$-\frac{2g(Q+\gamma x)}{3\gamma+2g\beta}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{\left(3+2\frac{g\beta}{\gamma}\right)}\right].$$

ამოცანა 45.31

წყლის ბურთულასებრი წვეთი ეცემა ვერტიკალურად წყლის ორთქლით გაჟღენთილ გარემოში. კონდესაციის გამო წვეთის მასა იზრდება მისი ზედაპირის ფართობის პროპორციულად (პროპორციულობის კოეფიციენტია α). წვეთის რადიუსი საწყის მომენტში არის $-r_0$, მისი საწყისი სიჩქარე $-v_0$, ხოლო საწყისი სიმაღლე $-h_0$. განსაზღვრეთ წვეთის სიჩქარე და სიმაღლის ცვლილება დროის მიხედვით.



მ ი თ ი თ ე ბ ა. უჩვენეთ, რომ $dr = \alpha dt$ და გადადით ახალ დამოუკიდებელ r ცვლადზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წვეთის მასა პროპორციულია მისი V მოცულობის, რომელიც, თავის მხრივ, მისი

ზედაპირის S ფართობის პროპორციულია. შედეგად ვღებულობთ თანაფარდობას:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha S \Rightarrow 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dr = \alpha dt \Rightarrow r = r_0 + \alpha t.$$

რადგან მიერთებული მასის აბსოლუტური სიჩქარე
უდრის ნულს, ამიტომ მეშერსკის განტოლებას საკოორდინატო სისტემაში, რომლის ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით, ხოლო სათავე დედამიწის ზედაპირზეა (იხ. ნახაზი), აქვს სახე:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -mg. \tag{1}$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$dr = \alpha dt \Rightarrow \frac{d}{dt} = \alpha \frac{d}{dr},$$

და (1) განტოლება ჩავწეროთ ასეთი ფორმით:

$$\alpha \frac{d}{dr}\left(m\alpha \frac{dx}{dr}\right) = -mg$$

ან

$$\alpha^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dr}\frac{dx}{dr} + \frac{d^2x}{dt^2}\right) = -g. \tag{2}$$

გამოვთვალოთ $\frac{dm}{dr}$, მივიღებთ:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\gamma\pi r^3\right) = \frac{4}{3} \cdot 3\pi r^2 = \frac{3}{r}\gamma \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3m}{r},$$

სადაც $\gamma -$ წყლის სიმკვრივეა.

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (2) ფორმულაში, მივიღებთ შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^2\overline{x}}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\overline{x}}{dr} = -\frac{g}{\alpha^2}. \tag{3}$$

(3) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$\overline{x} = r^\lambda.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება განტოლებაში

$$\frac{d^2\overline{x}}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\overline{x}}{dr} = 0,$$

მაშინ მივიღებთ:

$$(\lambda - 1)r^{\lambda-2} + 3\lambda r^{\lambda-2} = 0,$$
$$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda = 0$$

ან

$$\lambda(\lambda + 2) = 0.$$

ამ განტოლების ფესვები

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -2.$$

მაშასადამე

$$\overline{x} = C_1 + \frac{C_2}{r^2}.$$

(3) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ სახით: $x^* = Ar^2$. ჩავსვათ ეს ტოლობა (3) განტოლებაში. მივიღებთ:

$$2A + 6A = -\frac{g}{\alpha^2}.$$

აქედან

$$A = -\frac{g}{8\alpha^2},$$

$$x^* = -\frac{g}{8\alpha^2}r^2.$$

ჩავწეროთ (3) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$x = \overline{x} + x^*$$

ან

$$x = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{g}{8\alpha^2}r^2, \tag{4}$$

$$\dot{x} = v = \alpha\frac{dx}{dr} = -\frac{2\alpha C_2}{r^3} - \frac{gr}{4\alpha}. \tag{5}$$

C_2 მუდმივს ვიპოვოთ (5) განტოლებიდან საწყისი პირობების საფუძველზე:

$$v(r_0) = v_0 \Longrightarrow C_2 = \frac{r_0^3}{2\alpha}\left(-\frac{gr_0}{4\alpha} - v_0\right).$$

თუ მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (5) –ში მივიღებთ წვეთის სიჩქარეს:

$$v = v_0\frac{r_0^2}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left(r - \frac{r_0^4}{r^3}\right).$$

C_1 მუდმივს ვიპოვოთ (4) განტოლებიდან საწყისი პირობის $x_0 = h_0$ საფუძველზე: C_2 მნიშვნელობის გათვალისწინებით:

$$x(r_0) = h_0 \Longrightarrow C_1 = h_0 - \frac{r_0}{2\alpha}\left(-\frac{gr_0}{4\alpha} - v_0\right) + \frac{g}{8\alpha^2}r_0^2 = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha} + \frac{gr_0^2}{4\alpha^2}$$

შედეგად მივიღებთ:

$$x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha} + \frac{gr_0^2}{4\alpha^2} - \frac{gr_0^4}{8\alpha^2 r^3} - \frac{v_0 r_0^3}{2\alpha r^3} - \frac{gr^2}{8\alpha^2} =$$

$$= h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left(r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right).$$

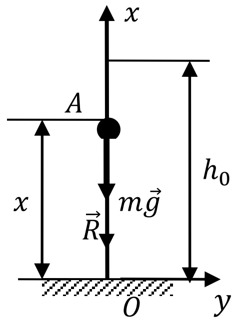
პ ა ს უ ხ ი:

$$x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left(r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right);$$

$$v = v_0\frac{r_0^2}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left(r - \frac{r_0^4}{r^3}\right), r = r_0 + \alpha t.$$

ამოცანა 45.32

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ დაშვებით, რომ წვეთზე სიმძიმის ძალის გარდა, მოქმედებს აგრეთვე წინაღობის ძალა, რომელიც მაქსიმალური განივკვეთის ფართობისა და წვეთის სიჩქარის პროპორციულია: $R = -4\beta\pi r^2 v$ (β მუდმივი კოეფიციენტია)



ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოცანის პირობის თანახმად წვეთის მასის ზრდის სიჩქარე მისი ზედაპირის ფართობის პირდაპირპროპორციულია, ე/ი/

$$\frac{dm}{dt} = \alpha S,$$

სადაც $m = \frac{4}{3}\gamma\pi r^3$ (γ-წყლის სიმკვრივეა); $S = 4\pi r^2$.

რადგან მიერთებული ნაწილაკების აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ნულს, ამიტომ წვეთის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ვერტიკალურ x ღერძზე გეგმილებში აქვს სახე:

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg - 4\beta\pi r^2 v. \qquad (1)$$

ჩავსვათ (1) განტოლებაში m და dt ნაცვალდ მათი მნისვნელობები:

$$m = \frac{4}{3}\gamma\pi r^3, \qquad dt = \frac{dr}{\alpha}.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\alpha\frac{d}{dr}(r^3 v) + 3\beta\pi r^2 v = -r^3 g.$$

შემოვიღოთ ჩასმა $r^3 v = w$ და ეს განტოლება ჩავწეროთ სახით:

$$\frac{dw}{dr} + \frac{3\beta w}{\alpha r} = -\frac{r^3 g}{\alpha} \quad \text{(ბერნულის განტოლება)} \qquad (2)$$

(2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$w = uz. \qquad (3)$$

მაშინ

$$\frac{dw}{dr} = u\frac{dz}{dr} + z\frac{du}{dr}.$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (2) განტოლება მიირებს სახეს:

$$u\frac{dz}{dr} + z\frac{du}{dr} + \frac{3\beta}{\alpha r}uz = -\frac{r^3 g}{\alpha},$$

ან

$$u\frac{dz}{dr} + z\left(\frac{du}{dr} + \frac{3\beta}{\alpha r}u\right) = -\frac{r^3 g}{\alpha},$$

ჯერ ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{du}{dr}+\frac{3\beta}{\alpha r}u=0.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\frac{du}{u}+\frac{3\beta dr}{\alpha r}=0,$$

$$lnu+\frac{3\beta}{\alpha}lnr=0,$$

საიდანაც

$$u=r^{-\frac{3\beta}{\alpha}}. \qquad (4)$$

ახლა ამოვხსნათ განტოლება

$$u\frac{dz}{dr}=-\frac{r^3 g}{\alpha},$$

ან, (4) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$r^{-\frac{3\beta}{\alpha}}\cdot\frac{dz}{dr}=-\frac{r^3 g}{\alpha}.$$

განვაცალოთ ცვლადები:

$$dz=r^{-\frac{3\beta}{\alpha}}\cdot\frac{dz}{dr}=-\frac{g}{\alpha}r^{\frac{3}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}dr$$

და ვაინტეგროთ, მივიღებთ:

$$z=-\frac{g}{4\alpha+3\beta}r^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}+C. \qquad (5)$$

ჩასვათ (3) და (4) გამოსახულებები (2) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$w=r^{-\frac{3\beta}{\alpha}}\left[-\frac{g}{4\alpha+3\beta}r^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}+C\right].$$

ინტეგრების C მუდმივი ვიპოვოთ საწყისი პირობიდან: როცა $r=r_0$, $v=v_0$, $w_0=r_0^3 v_0$.

მაშასადამე,

$$r_0^3 v_0={r_0}^{-\frac{3\beta}{\alpha}}\left[-\frac{g}{4\alpha+3\beta}{r_0}^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}+C\right].$$

აქედან

$$C=v_0{r_0}^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}+\frac{g}{4\alpha+3\beta}{r_0}^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}$$

და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$v=-\frac{gr}{4\alpha+3\beta}+r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}\left[v_0{r_0}^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}+\frac{g}{4\alpha+3\beta}{r_0}^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}\right].$$

$x-$ ის საპოვნელად ვისარგებლოთ დამოკიდებულებებით

$$\frac{dx}{dt}=v,\ \text{ან}\ \ \frac{dx}{dr}=\frac{v}{\alpha}\ \ \text{ან}\ dx=\frac{v}{\alpha}dr.$$

აქედან ინტეგრირების შედეგად და x_0=0 ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$x = h_0 - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)} - \frac{1}{2\alpha+3\beta}\left[r^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)}\right]\times$$

$$\times\left[v_0 r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)} - \frac{g}{4\alpha+3\beta} r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}\right].$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u>

$$v = -\frac{gr}{4\alpha+3\beta} + r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}\left[v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)} + \frac{g}{4\alpha+3\beta} r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}\right].$$

$$x = h_0 - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)} - \frac{1}{2\alpha+3\beta}\left[r^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)}\right]\times$$

$$\times\left[v_0 r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)} - \frac{g}{4\alpha+3\beta} r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}\right], \quad r = r_0 + \alpha t. \qquad .$$

ამოცანა 45.33

მორგვად დახვეული მძიმე ერთგვაროვანი ჯაჭვი ძევს ჰორიზონტალური მაგიდის კიდეზე ისე, რომ საწყის მომენტში ჯაჭვის ერთი რგოლი უძრავად არის გადმოკიდებული მაგიდიდან. მიმართეთ x ღერძი ვერტიკალურად ქვევით და მიიღეთ, რომ საწყის მომენტში $x = 0, \dot{x} = 0$; განსაზღვრეთ ჯაჭვის მოძრაობის კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯაჭვის მასალის სიმკვრივე აღვნიშნოთ γ-თი და შევადგინოთ ჯაჭვის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, როცა $\vec{u}_a = 0$:

$$\frac{d}{dt}(\gamma x\dot{x}) = \gamma x g, \qquad \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}(x\dot{x}) = xg,$$

$\dot{x}\frac{d}{dx}(x\dot{x}) = xg.$ ვაინტეგროთ მიღებული განტოლება:

$$\frac{(x\dot{x})^2}{2} = \frac{x^3 g}{3} + C_1.$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ და ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივი: $C_1 = 0$. მაშინ

$$x\dot{x} = \sqrt{\frac{2gx^3}{3}},$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gx}{3}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2g}{3}}dt,$$

$$2\sqrt{x} = t\sqrt{\frac{2g}{3}} + C_2.$$

ინტეგრების C_2 მუდმივი ვიპოვოთ საწყისი პირობით: $x_0 = 0$, როცა $t = 0$, მივიღებთ, რომ $C_2 = 0$. მაშინ

$$4x = \frac{2t^2 g}{3}.$$

აქედან ჯაჭვის მოძრაობის განტოლება:

$$x = \frac{gt^2}{6}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x = \frac{gt^2}{6}$.

ამოცანა 45.34

ჯაჭვი დაკეცილია მიწაზე და ერთი ბოლოთი მიმაგრებულია ვაგონეტზე, რომელიც დგას ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ ლიანდაგზე. ჯაჭვის მიწაზე ხახუნის კოეფიციენტი არის f, ჯაჭვის ერთეული სიგრძის წონა γ, ვაგონეტის წონა $-P$ ვაგონეტის საწყისი სიჩქარე v_0. იპოვეთ ვაგონეტის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში და გამოარკვიეთ, რა პირობებში შეიძლება გაჩერდეს ვაგონეტი.

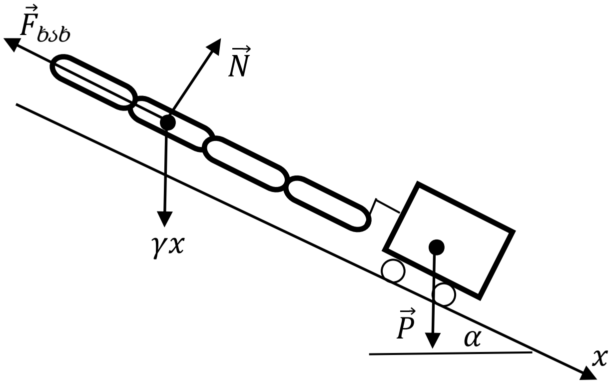
ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ ვაგონეტის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება Ox ღერძზე გეგმილებში იმის გათვალისწინებით, რომ მიერთებული მასის აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ნულს (იხ. ნახაზი):

$$\frac{d(x\dot{x})}{dt} = \sum F_{kx},$$

სადაც $m = \frac{P+\gamma x}{g}$.

მაშინ

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{P+\gamma x}{g}\dot{x}\right] = Psin\alpha + \gamma xsin\alpha - F_{ხახ},$$



რადგან $F_{ხახ} = f\gamma x cos\alpha,$ ამიტომ

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{P+\gamma x}{g}\dot{x}\right] = (P+\gamma x)sin\alpha - f\gamma x cos\alpha.$$

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{P+\gamma x}{g}\ddot{x} + \frac{\gamma \dot{x}^2}{g} = (P+\gamma x)sin\alpha - f\gamma x cos\alpha.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\ddot{x} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}$, მაშინ მივიღებთ:

$$(P+\gamma x)\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} + \gamma\dot{x}^2 = (P+\gamma x)gsin\alpha - f\gamma xgcos\alpha. \qquad (1)$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ $(P+\gamma x)dx$ –ზე, მივიღებთ:

$$(P+\gamma x)^2\dot{x}d\dot{x} + (P+\gamma x)\gamma\dot{x}^2dx = (P+\gamma x)^2gsin\alpha dx - \\ -f\gamma g(P+\gamma x)xcos\alpha dx. \qquad (2)$$

ვინაიდან

$$(P+\gamma x)^2\dot{x}d\dot{x} + (P+\gamma x)\gamma\dot{x}^2dx = d\left[\frac{(P+\gamma x)^2\dot{x}^2}{2}\right],$$

ამიტომ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$d\left[\frac{(P+\gamma x)^2\dot{x}^2}{2}\right] = (P+\gamma x)^2gsin\alpha dx - f\gamma gx(P+\gamma x)cos\alpha dx.$$

ვაინტეგროთ მიღებული გამოსახულება:

$$\frac{(P+\gamma x)^2\dot{x}^2}{2} = \frac{g(P+\gamma x)^3}{3}sin\alpha - fg\gamma P\frac{x^2}{2}cos\alpha - \\ -fg\gamma^2\frac{x^3}{3}cos\alpha + C. \qquad (3)$$

ჩავსვათ $x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0$ საწყისი პირობები (3) განტოლებაში:

$$\frac{P^2 v_0^2}{2} = \frac{gP^3}{3\gamma} sin\alpha + C$$

და ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივი:

$$C = \frac{P^2 v_0^2}{2} - \frac{gP^3}{3\gamma} sin\alpha.$$

ჩავსვათ C −ს მიღებული მნიშვნელობა (3) განტოლებაში და მიღებული ტოლობა გავყოთ $(P + \gamma x)^2$ −ზე:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{g(P + \gamma x)}{3} sin\alpha - \frac{fg\gamma P x^2}{2(P + \gamma x)^2} cos\alpha -$$

$$- \frac{fg\gamma^2 x^3}{3(P + \gamma x)^2} cos\alpha + \frac{P^2 v_0^2}{2(P + \gamma x)^2} - \frac{gP^3}{3\gamma(P + \gamma x)^2} sin\alpha$$

ან

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{P^2 v_0^2}{2(P + \gamma x)^2} + \frac{gPsin\alpha}{3\gamma}\left[1 - \frac{P^2}{2(P + \gamma x)^2}\right] + \frac{1}{3} gxsin\alpha - \frac{fg\gamma P x^2}{2(P + \gamma x)^2} cos\alpha - \frac{fg\gamma^2 x^3}{3(P + \gamma x)^2} cos\alpha$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{P^2 v_0^2}{2(P + \gamma x)^2} + \frac{gPsin\alpha}{3\gamma}\left[1 - \frac{P^2}{2(P + \gamma x)^2}\right] + \frac{1}{3} gxsin\alpha - \frac{fg\gamma P x^2}{2(P + \gamma x)^2} cos\alpha - \frac{fg\gamma^2 x^3}{3(P + \gamma x)^2} cos\alpha.$$

გაჩერებას ექნება ადგილი, თუ შესრულდება უტოლობა $f > tg\alpha$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. კრებულში პასუხი არ არის ზუსტი.

ამოცანა 45.35

m მასის ნივთიერი წერტილი მიიზიდება უძრავი ცენტრისაკენ ნიუტონის კანონით. ცენტრის მასა დროის მიხედვით იცვლება წრფივი კანონით: $M = \frac{M_0}{1+\alpha t}$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გადადით ახალ კოორდინატებზე $\xi = \frac{x}{1+\alpha t}$, $\eta = \frac{y}{1+\alpha t}$ თანაფარდობათა მეშვეობით და, აგრეთვე, დაყვანილ დროზე $\tau = \frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები დეკარტის საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში:

$$m\ddot{x} = -\frac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{fmMy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

სადაც $M = \frac{M_0}{1+\alpha t}$; $x = \frac{\xi}{\alpha\tau}, y = \frac{\eta}{\alpha\tau}$.

მაშინ

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\alpha^2\tau^2}{\alpha}\left(\frac{\frac{d\xi}{d\tau}\tau - \xi}{\tau^2}\right) = \alpha\left(\frac{d\xi}{d\tau}\tau - \xi,\right)$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\alpha^2\tau^2(-\alpha)\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\tau + \frac{d\xi}{d\tau} - \frac{d\xi}{d\tau}\right) = -\alpha^3\tau^3\frac{d^2\xi}{d\tau^2}.$$

მიღებული გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$\alpha^3\tau^3\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{fM_0\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}(1+\alpha t)^2} = 0.$$

შევკვეცოთ $\alpha^3\tau^3$ –ზე, მივიღებთ:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{fM_0\xi}{\rho^3} = 0,$$

სადაც $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

ანალოგიურად გარდაიქმნება (2) განტოლებაც, რომელიც მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{fM_0\eta}{\rho^3} = 0$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: მოძრაობის განტოლებებს ξ, η კოორდინატებში აქვს სახე (f – მიზიდულობის მუდმივაა):

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{fM_0\xi}{\rho^3} = 0;\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{fM_0\eta}{\rho^3} = 0;\ \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

ე.ი. ვღებულობთ ჩვეულებრივ განტოლებებს მუდმივი მასის შემთხვევისათვის. ამიტომ საწყისი პირობების მიხედვით ξ და η კოორდინატებში გვექნება ელიფსური, ჰიპერბოლური ან პარაბოლური ორბიტები.

ამოცანა 45.36

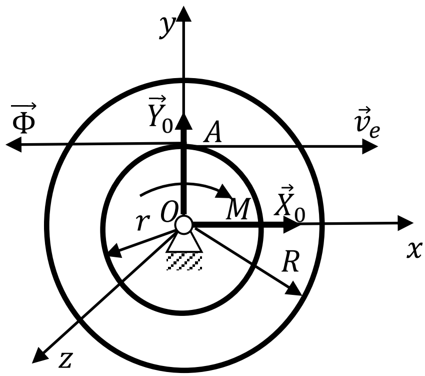
გიროსკოპის როტორისათვის სწრაფად სასურველი ბრუნთა რიცხვის მისანიჭებლად გამოიყენება რეაქტიული გაშვება. როტორის სხეულში ჩაიდგმება დენთის კოჭები საერთო m_0 მასით, რომელთა დაწვის პროდუქტები გამოისროლება სპეციალური საქშენით. დენთის კოჭები ჩათვალეთ ნივთიერ წერტილებად, რომლებიც როტორის ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია r მანძილით. დაწვის პროდუქტების გამოდინების $\vec{v}_{\text{ეფ}}$ ეფექტურის სიჩქარის მხები მდგენელი მუდმივია. მიიღეს, რომ დენთის დანახარჯის საერთო მასა ერთ წამში უდრის q; გამოთვალეთ როტორის ω კუთხური სიჩქარე დენთის მთლიანად დაწვის მომენტისათვის, თუ როტორზე მოქმედებს მუდმივი წინაღობის M მომენტი. როტორის რადიუსი უდრის R. საწყის მომენტში როტორი უძრავია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ჩავწეროთ დენთის მასის ცვლილების კანონი:

$$m = m_0 - qt,$$

სადაც $t -$ დრო, რომელიც იცვლება $t_1 = 0 -$დან $t_2 = \frac{m_0}{q} -$მდე. Oz ღერძის გარშემო როტორის ბრუნვის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე (იხ. ნახაზი):



$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z,$$

სადაც $J_z = J_p + (m_0 - qt)r^2 -$ როტორის და ცვლადი მასის მქონე დენთის კოჭების ინერციის მომენტია;

$M_z = v_e qR - M -$რეაქტიული ძალის და წინაღობის ძალის მომენტია Oz ღერძის მიმართ.

ამგვარად, გვაქვს განცალებულ ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება:

$$\left[J_p + (m_0 - qt)r^2\right]\frac{d\omega}{dt} = v_e qR - M.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{\frac{m_0}{q}} \frac{v_e qR - M}{J_p + (m_0 - qt)r^2} dt,$$

საიდანაც

$$\omega = -\frac{v_e qR - M}{r^2 q} ln[J_{\text{რ}} + (m_0 - qt)r^2]\Big|_0^{m_0/q} =$$

$$= -\frac{v_e qR - M}{r^2 q} ln \frac{J_რ + mr^2}{J_რ}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = -\frac{v_e qR - M}{r^2 q} ln \frac{J_0}{J_რ}$, სადაც $J_0 = J_რ + mr^2$, $J_რ -$ ბრუნვის ღერძის მიმართ როტორის ინერციის მომენტია.

ამოცანა 45.37

წინა ამოცანის პირობებში გაიგეთ როტორის კუთხური სიჩქარე დენთის დაწვის შემდეგ, თუ როტორზე მოქმედებს წინაღობის მომენტი, რომელიც მისი კუთხური სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია ($b -$პროპორციულობის კოეფიციენტია).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ ამოცანაში წინა ამოცანასთან შედარებით მუდმივი წინაღობის მომენტის ნაცვლად მოცემულია მისი ცვლილების კანონი: $M_{წ} = b\omega$. მაშინ როტორის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\left[J_p + (m_0 - qt)r^2\right]\frac{d\omega}{dt} = v_e qR - b\omega.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაიტენგროთ ეს განტოლება:

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{v_e qR - b\omega} = \int_0^{\frac{m_0}{q}} \frac{dt}{J_p + (m_0 - qt)r^2},$$

$$-\frac{1}{b}\ln{(v_e qR - b\omega)}\Big|_0^{\omega} = -\frac{1}{qr^2} ln\left[J_p + (m_0 - qt)r^2\right]\Big|_0^{\frac{m_0}{q}},$$

$$\frac{v_e qR - b\omega}{v_e qR} = \left(\frac{J_რ + mr^2}{J_რ}\right)^{\frac{b}{qr^2}},$$

$$1 - \frac{b\omega}{v_e qR} = \left(\frac{J_რ + mr^2}{J_რ}\right)^{\frac{b}{qr^2}},$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$J_0 = J_რ + m_0 r^2.$$

მაშინ

$$\omega = \frac{Rv_e q}{b}\left[1 - \left(\frac{J_რ}{J_0}\right)^{\frac{b}{qr^2}}\right].$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \frac{Rv_e q}{b}\left[1-\left(\frac{J_რ}{J_0}\right)^{\frac{b}{qr^2}}\right].$

ამოცანა 45.38

მრავალსაფეხურიანი რაკეტა შედგება სასარგებლო ტვირთისა და საფეხურებისაგან. ყოველი საფეხური საწვავის დახარჯვის შემდეგ სცილდება დანარჩენ კონსტრუქციას. სუბრაკეტაში იგულისხმება მომუშავე საფეხურის, ყველა არამომუშავე საფეხურებისა და სასარგებლო ტვირთის ერთობლიობა, ამასთან მოცემული სუბრაკეტისათვის ყველა არამომუშავე საფეხური და სასარგებლო ტვირთი არის “სასარგებლო ტვირთი”, ე.ი. თითოეული რაკეტა განიხილება, როგორც ერთსაფეხურიანი რაკეტა. ნახაზზე ნაჩვენებია სუბრაკეტის საფეხურთა ნუმერაცია.

ვთქვათ, q არის სასარგებლო ტვირთის წონა; $P_i -$ საწვავის წონა $i -$ურ საფეხურში, $Q_i - \ i -$ური რაკეტის (მშრალი) წონა საწვავის გარეშე; $G_i - \ i -$ური სუბრაკეტის მთლიანი წონა. თუ განვიხილავთ ციოლკოვსკის რიცხვს სუბრაკეტის ყოველი საფეხურისათვის

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$$

და კონსტრუქციულ მახასიათებელს (საფეხურის მთლიანი წონის ფარდობა მშრალ რაკეტის წონასთან) ყოველი საფეხურისათვის

$$s_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i};$$

განსაზღვრეთ მთელი რაკეტის მთლიანი სასტარტო წონა, სუბრაკეტის $k -$ური საფეხურის წონა, $k -$ური საფეხურის საწვავის წონა და $k -$ური საფეხურის მშრალი წონა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ამოცანის ამოხსნის დროს შემოიტანეთ სუბრაკეტის $k -$ური საფეხურის “ფარდობითი წონა” α_i, ე.ი. რაკეტის საწყისი წონის ფარდობა მის სასარგებლო ტვირთის წონასთან:

$$\alpha_1 = \frac{G_1}{G_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{G_2}{G_3}, \cdots, \alpha_n = \frac{G_n}{q}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ ციოლკოვსკის რიცხვი პირველი სუბრაკეტისათვის

$$z_1 = \frac{G_1}{G_1 - P_1}. \tag{1}$$

მეორე სუბრაკეტის სრული წონა

$$G_2 = G_1 - P_1 - Q_1.$$

აქედან პირველი სუბრაკეტის სრული წონა

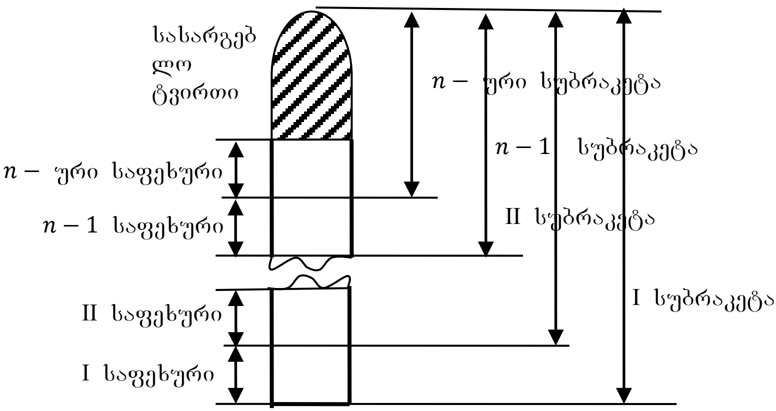
$$G_1 = G_2 + P_1 + Q_1. \tag{2}$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება (1) განტოლების მნიშვნელში და ვიპოვოთ

$$z_1 = \frac{G_1}{G_2 + Q_1}.$$

აქედან

$$G_1 = z_1(G_2 + Q_1). \tag{3}$$



განვსაზღვროთ კონსტრუქციული პარამეტრი I საფეხურისათვის:

$$s_1 = \frac{Q_1 + P_1}{Q_1}. \tag{4}$$

ვიპოვოთ საწვავის წონა პირველ საფეხურში (4) და (1) გამოსახულებებიდან:

$$P_1 = Q_1(s_1 - 1) \tag{5}$$

$$P_1 = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1}. \tag{6}$$

გავუტოლოთ ერთამნეთს (5) და (60 გამოსახულებების მარჯვენა მხარეები:

$$Q_1(s_1 - 1) = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1}$$

და ვიპოვოთ პირველი საფეხურის მშრალი წონა:

$$Q_1 = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1(s_1 - 1)}. \tag{7}$$

შევიტანოთ Q_1 –ის მნიშვნელობა (3) გამოსახულებაში:

$$G_1 = z_1(G_2 + Q_1) = z_1 G_2 + z_1 Q_1 = z_1 G_2 + \frac{Q_1(z_1 - 1)}{z_1(s_1 - 1)}$$

და განვსაზღვროთ პირველი საფეხურის სრული სასტარტო წონა

$$G_1 = \frac{z_1 G_2 (s_1 - 1)}{s_1 - z_1}$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ მეორე სუბრაკეტის წონა

$$G_2 = \frac{z_2 G_3 (s_2 - 1)}{s_2 - z_2}$$

და ა. შ. $n-$ ური სუბრაკეტის წონა

$$G_n = q\frac{z_2(s_n - 1)}{s_n - z_n}.$$

მაშინ მთლიანი რაკეტის სასტარტო წონა

$$G_1 = q\prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i},$$

ხოლო $k-$ ური სუბრაკეტის წონა

$$G_k = q\prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i},$$

(7) ფორმულის თანახმად $k-$ ური საფეხურის მშრალი წონა

$$Q_k = \frac{G_k(z_k - 1)}{z_k(s_k - 1)}. \qquad (8)$$

განვსაზღვროთ $k-$ ური საფეხურის წონა (6) ფორმულის გამოყენებით:

$$P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k.$$

აქედან

$$G_k = \frac{P_k z_k}{z_k - 1}.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (8) ტოლობაში, მაშინ

$$Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$G_1 = q\prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}; \quad G_k = q\prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}; \; P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k;$$

$Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}$ (ფერტრეგტის ფორმულა).

ამოცანა 45.39

ორსაფეხურიანი რაკეტა გამოიყენება სასარგებლო $q = 1$კნ ტვირთისათვის $v =$ 6000მ/წმ სიჩქარის მისანიჭებლად. აირების გამოდინების ეფექტური სიჩქარე ორივე საფეხურისთვის ერთნაირია და $v_{ეფ}$ =2400მ/წმ. კონსტრუქციული მახასიათებლები პირველი და მეორე საფეხურისათვის სათანადოდ ტოლია $s_1 = 4,\ s_2 = 5$ (იხ. 45.38 ამოცანა) დედამიწის მიზიდულობისა და ატმოსფეროს წინაღობის მხედველობაში მიუღებლად; განსაზღვრეტ ციოლკოვსკის რიცხვები პირველი და მეორე სუბრაკეტისათვის, რომლის დროსაც რაკეტის სასტარტო წონა G_1 იქნება მინიმალური.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ციოლკოვსკის ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{v}{v_e} = ln(z_1 z_2).$$

აქედან

$$z_1 z_2 = e^{\frac{v}{v_e}} = e^{\frac{6}{2,4}} = e^{2,5}. \quad (1)$$

რაკეტის სასტარტო წონას განვსაზღვრავთ 45.38 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული ფორმულის გამოყენებით:

$$G_1 = q\prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i} = \frac{z_1 z_2 q(s_1 - 1)(s_2 - 1)}{(s_1 - z_1)(s_2 - z_2)} = \frac{12 z_1 z_2 q}{(4 - z_1)(5 - z_2)} =$$

$$= \frac{12 q e^{2,5}}{(4 - z_1)(5 - z_2)}. \quad (2)$$

გამოვიკვლიოთ (2) გამოსახულება მინიმუმზე. ამისათვის გავაწარმოოთ ეს გამოსახულება და გავუტოლოთ ნულს:

$$\frac{dG_1}{dz_1} = \frac{12qe^{2,5}[(4 - z_1)(5z_1 - e^{2,5}) - z_1(-5z_1 + e^{2,5} + 20 - 5z_1)]}{(4 - z_1)^2 (5 - z_2)^2} = 0.$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება:

$$20z_1 - 5z_1^2 + z_1 e^{2,5} - 4e^{2,5} + 10z_1^2 - 20z_1 - z_1 e^{2,5} = 0,$$

$$5z_1^2 = 4e^{2,5},$$

$$z_1 = e^{1,25}\sqrt{\frac{4}{5}} = 3,12.$$

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$z_2 = \frac{e^{2,5}}{3,12} = 3,91.$$

გამოვიკვლიოთ წარმოებულის ნიშნის ცვლილბის ხასიათი $z_1 = 3,12$ წერტილში, მაშინ დავრწმუნდებით, რომ სასტარტო G_1 წონას აქვს მინიმუმი, რომელიც გამოითვლება (2) ფორმულით:

$$G_{1min} = \frac{e^{2,5} \cdot 12 \cdot 1}{0,88 \cdot 1,09} = 152(კნ)$$

პ ა ს უ ხ ი: $z_1 = 3,12$; $z_2 = 3,91$; $G_1 = 152$კნ.

ამოცანა 45.40

გამოიყენეთ წინა ამოცანის მონაცემები და განსაზღვრეთ ყოველი საფეხურისათვის სათბობის წონა და რაკეტის მშრალი წონა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ 45.38 ამოცანის პასუხის ფორმულები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რაკეტის I საფეხურში საწვავის წონას განვსაზღვრავთ 45.38 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული (6) ფორმულის გამოყენებით:

$$P_1 = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1} = \frac{152(3,12 - 1)}{3,12} = 103,3(კნ)$$

რაკეტის I საფეხურის მშრალ წონას განვსაზღვრავთ 45.38 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული ბოლო ფორმულის გამოყენებით:

$$Q_1 = \frac{P_1}{s_1 - 1} = \frac{103,3}{4 - 1} = 34,4(კნ).$$

განვსაზღვროთ მეორე საფეხური წონა

$$P_2 = \frac{(z_2 - 1)}{z_2} G_2 = \frac{3,91 - 1}{3,91} \cdot 14,34 = 10,7(კნ)$$

და მეორე საფეხური წონა საწვავის გარეშე

$$Q_2 = \frac{P_2}{s_2 - 1} = \frac{10,67}{5 - 1} = 2,7(კნ).$$

პ ა ს უ ხ ი: $P_1 = 103,3$კნ; $P_2 =10,7$კნ; $Q_1 =34,4$კნ; $Q_2 =2,7$კნ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. კრებულში პასუხი არ არის ზუსტი.

ამოცანა 45.41

ოთხსაფეხურიანი რაკეტა შედგება ოთხი რაკეტისაგან. კონსტრუქციული მახასიათებელი s და $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე ყველა რაკეტას ერთნაირი

აქვს სათანადოდ ტოლია $s = 4{,}7$ და $v_{ეფ}$ =2,4კმ/წმ. როგორი უნდა იყოს რაკეტის სასტარტო წონა, რომ მან 10კნ წონის ტვირთს მიანიჭოს $v =$ 9000მ/წმ სიჩქარე? (გამოიყენეთ 45.38 ამოცანის პასუხები).

ა მ ო ხ ს ნ ა. გავითვალისწინოთ, რომ კონსტრუქციული მახასიათებელი s და $v_{ეფ}$ ეფექტური სიჩქარე ოთხივე რაკეტისათვის ერთნაირია, მაშინ ციოლკოვსკის ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{v}{v_e} = lnz^4.$$

აქედან

$$z^4 = e^{\frac{v}{v_e}} = e^{3{,}75}.$$

მაშინ

$$z = e^{3{,}75/4} = e^{0{,}9375}.$$

ოთხსაფეხურიანი რაკეტის სასტარტო G_1 წონას განვსაზღვრავთ 45.38 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული ფორმულის გამოყენებით:

$$G_1 = qz^4\frac{(s-1)^4}{(s-z)^4} = 10\frac{e^{3{,}75}(4{,}7-1)^4}{(4{,}7-e^{0{,}9375})^4} = 3755(\text{კნ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: 3755კნ.

ლიტერატურა

1. კვიციანი ტ. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, .2019 წ, 474 გვ.
2. გორჯოლაძე ი., ყიფიანი გ., ბუქსიანიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2008, 542 გვ.
3. Теоретическая механика, Динамика, Практикум: учеб. Пособие В. 2ч Ч.2 Динамика матерыальнной системы. Аналитическая механика, В. А. Акимов [и др.]: под. Обш. Ред. Проф. А. В. Чигарева и доц. И И. Горбача. – Минск. Новое издание: М. ЦУПЛ. 2010, 563 с.
4. გორგიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი II, დინამიკა, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 1997, 561 გვ.
5. ვეკუა ნ. თეორიული მექანიკა, ნაწილი II, თბილისის უნივერ-სიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1970, 366 გვ.
6. Мещерский И.В. – Сборник задач по теоретической механике.(И.В. Мещерский. 36-е изд. Испр. М. Наука, 1986. 448 с.).
7. Айзенберг Т.В., Воронков М.И., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике, “Высшая школа”, Москва, 1982, 390 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, том II, динамика, Москва, “Наука”,1985, 558 с.
9. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том II, Москва, “Наука”, 1985, 495 с.
10. Кабальский М.М., Кривошей В.Д., Савицкий Н.И., Чаиковский Т.Н. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. Киев, 1985, 512 с.

11. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. “Высшая школа”, Москва, 1995, 366 с.
12. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, часть II, динамика, “Высшая школа”, Москва, 1984.-423 с.
13. Bedford A., Fowler W. Engineering Mechanics, Prentice Hall, Inc. USA, 2002.-580 p.
14. Hibbeler R.C. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, Prentice Hall, Inc. USA, 2004.-688p.
15. Neuber H. Losungen zur aufgabensammlung mestscherski. Veb Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.- 464 p.
16. Romano A. Classical Mechanics With Mathematica, Springer, 2012. - 520 p.

შინაარსი

X. ნივთიერ წერტილთა სისტემის დინამიკა 9

34. მასათა გეომეტრია. მექანიკური სისტემის მასათა ცენტრი. მყარი სხეულების ინერციის მომენტები 9
35. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ 65
36. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორის ცვლილების შესახებ. გამოყენება უწყვეტ გარემოზე 114
37. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტის ცვლილების შესახებ. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის დიფერენციალური განტოლება 133
38. თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ 244
39. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური (ბრტყელი) მოძრაობა 354
40. გიროსკოპის მიახლოებითი თეორია 382
41. კინეტოსტატიკური მეთოდი 402
42. მბრუნავი მყარი სხეულის წნევა ბრუნვის ღერძზე 435
43. შერეული ამოცანები 469
44. დარტყმა 494
45. ცვლადი მასის წერტილისა და სისტემის (ცვლადი შემადგენლობის) დინამიკა 534

გელა ყიფიანი, ნოდარ მარდალეიშვილი, კონსტანტინე დოლიძე, ლევან ჯიქიძე, გეგი აფციაური

თეორიული

მექანიკა

ნივთიერ წერტილთა სისტემის დინამიკა

ტომი 4

ტექნიკური რედაქტორი: ნოდარ მარდალეიშვილი
კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ნანა დუმბძე
დიზაინერი: ირაკლი უშვერიძე

გადაეცა წარმოებას 2.03.2023წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17.03.2023წ. ტირაჟი 100 ეგზემპლარი

გამომცემლობა „უნივერსალი“

თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4. ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

გელა ყიფიანი – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1986 წ.), ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1997 წ.), საქართველოს მეცნიერებისა და ტექნიკის დარგის სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი (2004 წ.), საქართველოს დამსახურებული მშენებელი (2019 წ.), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი.

ნოდარ მარდალეიშვილი – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1993 წ.), აკადემიური დოქტორი (2006 წ.). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

კონსტანტინე დოლიძე – დაამთავრა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის არქიტექტურის ფაკულტეტი. აკადემიური დოქტორი (2009წ), მისი სამეცნიერო მიმართულებაა სამშენებლო მექანიკა. გამოქვეყნებული აქვს 20 სამეცნიერო ნაშრომი. პროფესიული კოლეჯის „პრესტიჟი“ დირექტორი.

ლევან ჯიქიძე – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1998 წ.), აკადემიური დოქტორი (2006 წ.). საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

გუგი აფციაური – დაამთავრა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი (2012 წ. ბაკალავრიატი), ტ. შევჩენკოს სახელობის კიევის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის სპეციალობით (2014 წ. მაგისტრატურა), დოქტორის აკადემიური ხარისხი მექანიკის ინჟინერიასა და ტექნოლოგიაში (2021 წ.). გამოქვეყნებული აქვს 20 სამეცნიერო ნაშრომი.

ISBN 978-9941-33-547-1