გელა ყიფიანი, ალექსანდრე ბაძგარაძე,
ზურაბ მჭედლიშვილი, მაყვალა ბექირიშვილი,
მარინა ქურდაძე

თეორიული მექანიკა

კინემატიკა

პრაქტიკული

ტომი 2

გელა ყიფიანი, ალექსანდრე ბაძგარაძე,
ზურაბ მჭედლიშვილი, მაყვალა
ბექირიშვილი, მარინა ქურდაძე

თეორიული მექანიკა

კინემატიკა

ტომი 2

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი 2023

უაკ 531 (076.5)(075.8)

სახელმძღვანელო შეიცავს კინემატიკის ტიპიურ ამოცანებს ამოხსნებით, რომლებიც აღებულია ი. ვ. მეშჩერსკის საკმაოდ გავრცელებული ამოცანათა კრებულიდან. ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილია ძირითადი დებულებები და მეთოდური მითითებები, რომლებიც გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას. ამოხსნები მოცემულია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებებით.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში კინემატიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა წარმოებული, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, წრფივი დიფერენციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

სახელმძღვანელო გათვალისწინებულია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისა და უნივერსიტეტების საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტების სტუდენტებისა და მასწავლებლებისათვის, აგრეთვე, თეორიული მექანიკის დამოუკიდებლად შემსწავლელთათვის.

წიგნი იბეჭდება (ააიპ) “განათლებისა და მეცნიერების პროგრესი”-ს ხელშეწყობით.

*პროფესორ **გელა ყიფიანის** საერთო რედაქციით.*

რეცენზენტები: პროფესორი **გიორგი ჯაიანი**
პროფესორი **ტარიელ კვიციანი**
პროფესორი **ომარ კიკვიძე**
პროფესორი **თამაზ ობგაძე**

გამომცემლობა „უნივერსალი“, 2023

თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4, ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

ISBN 978-9941-33-543-3,
ISBN 978-9941-33-545-7

წინასიტყვაობა

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერების დარგი, რომელიც სწავლობს ნივთიერი სხეულების მექანიკურ მოძრაობას და ადგენს ამ მოძრაობის ზოგად კანონებს.

თეორიული მექანიკა თავისი საფუძვლებიდანვე მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტექნიკასთან. იგი იქმნებოდა და ვითარდებოდა ტექნიკის განვითარებასთან ერთად. ტექნიკის განვითარება სულ ახალ-ახალ ამოცანებს აყენებდა მექანიკის წინაშე, რაც ხელს უწყობდა თვით მექანიკის განვითარებას. თავის მხრივ, მექანიკაც დიდ ზეგავლენას ახდენდა და ხელს უწყობდა ტექნიკურ პროგრესს.

თეორიული მექანიკა არის ერთ-ერთი ის ფუნდამენტური საგანი, რომელზეც დაფუძნებულია თანამედროვე ტექნიკის ყველა დარგი.

თეორიულ მექანიკას ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია და წარმოადგენს თეორიულ ბაზას ისეთი ტექნიკური საგნებისათვის, როფორიცაა მასალათა გამძლეობა, მექანიზმებისა და მანქანების თეორია, დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორია, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდროაერომექანიკა და მრავალი სხვ.

როგორც ყოველ მეცნერებას, თეორიულ მექანიკასაც კვლევის საფუძვლად უდევს დაკვირვება, ცდა, პრაქტიკა. თეორიულ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური მეთოდები, აბსტრაქტული (განყენებული) ცნებები, მოვლენათა მოდელები, ლოგიკის კანონები.

თეორიულ მექანიკაში შემოღებული თითქმის ყველა საწყისი ცნება არსებითად წარმოადგენს გარკვეულ აბსტრაქციას ან მოდელს. მათი შემოღებისას გათვალისწინებულია ის ძირითადი, განმსაზღვრელი, რაც არსებითია განსახილველ მექანიკურ მოძრაობაში. ასე, მაგალითად, რეალური ნივთიერი სხეულის მაგივრად მექანიკაში განიხილავენ მის ისეთ აბსტრაქტულ მოდელს, როგორიცაა ნივთიერი წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული და სხვ. მხოლოდ ასეთ მოდელებზე აგებული მექანიკისათვის შეიძლება შემუშავდეს ის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან შევისწავლოთ რეალური ობიექტების მოძრაობა. შემდეგ მიღებული თეორიული შედეგები მოწმდება ცდით, პრაქტიკით.

თეორიული მექანიკის საკითხები ცნობილია უძველესი დროიდან.

ჯერ კიდევ არისტოტელე (IV ს. ჩვ. ერ-დე) იცნობდა თეორიული მექანიკის ზოგიერთ კანონს. მასვე ეკუთვნის საგნის სახელწოდების - „მექანიკის" – შემოღებაც. მექანიკის კანონების დასადგენად მათემატიკური კანონების გამოყენებას ყველაზე ადრე ბერძენმა *არქიმედემ* (287-212 ჩვ. ერ-დე) მიმართა. მექანიკის სწრაფი განვითარება იწყება აღორძინების ხანაში. იგი დაკავშირებულია იტალიელ *ლეონარდო და ვინჩის* (1452-1519), პოლონელი *ნიკოლოზ კოპერნიკის* (1473-1543), გერმანელი *იოჰან კეპლერის* (1571-1630) და სხვათა სახელებთან. ამ მეცნიერების მიერ მიღებულმა შედეგებმა მოამზადეს საფუძველი მექანიკის, როგორც მეცნიერების, შემდგომი წინსვლისათვის. დინამიკის, როგორც მეცნიერების, შექმნაში დიდი წვლილი მიუძღვის იტალიელ მეცნიერს *გალილეო გალილეის* (1564-1642). კლასიკური მექანიკის საფუძვლები ჩამოაყალიბა და სისტემატურად დაამუშავა ინგლისელმა მეცნიერმა *ისააკ ნიუტონმა* (1643-1727), რომელმაც თავის წიგნში „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები" მოგვცა კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები.

XVIII ს-ის თეორიული მექანიკის განვითარება ხასიათდება ორი ძირითადი თვისებით: *პირველია* მისი მათემატიზაცია: მექანიკის ყველა კანონი და ძირითადი დებულება გამოჰყავდათ მათემატიკური ანალიზის მეთოდით. *ჟოზეფ-ლუი ლაგრანჟი* (1736-1813) იმასაც კი ამტკიცებდა, რომ მისი მექანიკა წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ახალ თავს. *მეორეც*, ძირითადი დებულებები ფიზიკურად არ ზუსტდებოდა: რა არის ძალა – გაუნსაზღვრელი რჩებოდა, გარს უვლიდნენ ამ ცნებას; ბმები ჩათვლილი იყო იდეალურად; საყრდენი ზედაპირები – ხახუნის გარეშე; ღერო და თოკი – უწონადი.

მექანიკის საკითხების შესწავლა ანალიზური მეთოდების გამოყენებით დაიწყო შვეიცარიელმა *ლეონარდ ეილერმა* (1707-1783). მექანიკის შემდგომ განვითარებაში დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ფრანგი მეცნიერების *ჟან ლეონ დალამბერის* (1717-1783) ნაშრომს „ტრაქტატი დინამიკაში" და *ლუი ლაგრანჟის* ნაშრომს „ანალიზური მექნიკა".

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ლაგრანჟის ნაშრომი გადმოცემის ორიგინალობითა და მეთოდების ერთიანობით. ამ ნაშრომის შესავალში *ლაგრანჟი წერს: „უკვე არსებობს მრავალი ტრაქტატი მექანიკაში, მაგრამ ჩემი ტრაქტატი სრულიად ახალია. მე მიზნად დავისახე მექანიკის თეორია და მასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები მივიყვანო საერთო ფორმულებზე, რომლის მარტივი გაფართოება იძლევა ყველა იმ ფორმულას, რომელიც საჭიროა თითოეული ამოცანის ამოსახსნელად".* ლაგრანჟმა შექმნა ანალიზური მექანიკის მწყობრი სისტემა.

უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თეორიული მექანიკა ტექნიკური საგნების უშუალო დასაყრდენია. ამავე დროს ცნობილია, რომ თავისი სპეციფიკურობის და სირთულეების გამო ზოგადად თეორიული მექანიკის, განსაკუთრებით კი მისი პრაქტიკული ნაწილის შესწავლა საკმაოდ რთულია; რამდენადაც ამ საგნის თეორემების დაზეპირება შესაძლებელია, იმდენად ძნელია მათი გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად.

ამას ემატება უმაღლეს სასწავლებლებში სასწავლო კურსისათვის გამოყოფილი საათების რაოდენობის სიმცირე. ამ სიძნელეთა გადალახვა შესალებელია, თუ შეიქმნება მექანიკაში ამოხსნილი ამოცანებით ისეთი ტიპის სახელმძღვანელო, რომელიც შუალედური და დამაკავშირებელი იქნება საგნის თეორიულ კურსსა და ამოცანათა კრებულს შორის და რომელიც დაეხმარება დაინტერესებულ პირებს თეორიული მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების გამომუშავებაში.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში კინემატიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა წარმოებული, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

თეორიული მექანიკის შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს სტუდენტების მიერ თეორიის საკითხებთან ერთად პრაქტიკული ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნის დაუფლებას.

სწორედ ამ ამოცანას ემსახურება ამ კრებულში შეტანილი მე-თოდური მითითებები.

წინამდებარე კრებულში წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც საკმაოდ ასახავენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებ-ლებში თანამედროვე სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინე-ბუილ თემატიკას. ყოველ თემაზე კრებულში მოყვანილია ამო-ცანის დაწვრილებითი ამოხსნა საჭირო მეთოდური მითითებე-ბით.

ყოველი თემის დასაწყისში მოკლედ ჩამოყალიბებულია თეორიის ძირითადი საკითხები და მოცემულია შესაბამისი ფორმულები. მოცანის გარჩევამდე და ამოხსნის დაწყებამდე საჭიროა სტუდენტმა აუცილებლად შეისწავლოს თეორიული კურსის შესაბამისი საკითხები, ვინაიდან ამ კრებულში მოყვა-ნილი მოკლე თეორიული ცნობები ვერ შეცვლიან თეორიულ სახელმძღვანელოს. სასურველია ამოცანების ამოხსნა წარმოებ-დეს რეკომენდებული მიმდევრობით და გათვალიწინებული იქ-ნეს შესაბამისი მეთოდური მითითებები.

უკანასკნელ ათწლეულებში მნიშვნელოვნად გაიზარ-და ამოხსნილი ამოცანების კრებულების გამოცემათა რაოდე-ნობა ფიზიკაში, მათემატიკაში და მექანიკაში უმაღლესი ტექ-ნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. ეს განპირობე-ბულია ბაზის შექმნის აუცილებლობაზე დამოუკიდებელი მუ-შაობისას გრაფიკული გაანგარიშებისა და საკონტროლო სა-მუშაოებისათვის დროის შემცირების გამო. მექანიკის მრავა-ლი დარგის ამოცანა, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს დიდი დროის დახარჯვას, არ შეიძლება დეტალური განხილვის გა-რეშე საჭირო ხარისხით დამუშავდეს პრაქტიკულ მეცადინეო-ბაზე, რის შედეგადაც შეუძლებელი ხდება თეორიული მექანი-კისა და მთლიანად მისი ცალკეული განყოფილებების რთუ-ლი მასალის ათვისება.

ი.ვ. მეშჩერსკის ამოცანათა კრებული წარმოადგენს საკმა-ოდ ცნობილ დამხმარე სასწავლო სახელმძღვნელოს თეორიულ მექანიკაში, რომელმაც გაუძლო ათეულობით გამოცემას მსოფ-ლიოს მრავალ ქვეყანაში, რომლებიც დღესაც ფართოდ გამოი-ყენება ტექნიკური განხრის უმაღლეს სასწავლო დაწესებულე-ბებში. ამ კრებულის პირველი დამხმარე სახელმძღვანელო ამოხსნილი ამოცანებით გამოცემული იქნა 1963 წელს გერმანი-

აში (H. Neuber, Losungen zur Aufgabensammlung Mestscherski, 1963, DVW, 465 S.). თუმცა შემდგომ კრებული მრავალჯერ ხელახლა გამოიცა, ამასთანავე ის სწორდებოდა და ივსებოდა.

შემოთავაზებულ დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემულია ყველა ამოცანის ამოხსნა ი. ვ. მეშჩერსკის კრებულის „კინემატიკის" განყოფილებიდან (Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике/ И. В. Мещерский, 36-е изд., испр. М.: Наука, 1986). აგრეთვე ქართულ ენაზე თარგმნილი: ი.ვ. მეშჩერსკი, „თეორიული მექანიკის ამოცანათა კრებული", თბილისი, 1963.

წინამდებარე სახელმძღვანელო შეიცავს თეორიული მექანიკის „კინემატიკის" ნაწილს. ამოცანების ამოხსნა მოყვანილია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით, რაც განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია ძირითადი თეორიული დებულებები და მეთოდური მითითებები დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით. როგორც წესი, ამოხსნას თან სდევს ნახაზი, რომელზეც მითითებულია მოქმედი ძალა, სიჩქარე, აჩქარება.

აღსანიშნავია, ავტორთა ჯგუფის სხვადასხვა უნივერსიტეტებში „თეორიული მექანიკის" კურსის სწავლების დიდი გამოცდილება. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, ნ. მუსხელიშვილის სახელობის ქუთაისის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ი. გოგებაშვილი სახელობის თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტში, დავით აღმაშენებლის სახელობის საქართველოს ეროვნული თავდაცვის აკადემიაში, საქართველოს აგრარულ უნივესრიტეტში, ბათუმის სახელმწიფო საზღვაო აკადემიაში, მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ლენინგრადის სამშენებლო საინჟინრო ინსტიტუტში, ნ. ბაუმანის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო ტექნიკურ უნივერსიტეტში, სანკტ-პეტერბურგის სახელმწიფო არქიტექტურულ-სამშენებლო უნივერსიტეტში, ვლადიმირის სახლმწიფო უნივერსიტეტში.

ავტორები მადლიერების გრძნობით არიან გამსჭვალულნი რეცენზენტების: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკის კათედრის გამგეს, ი. ვე-

კუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის დირექტორს, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ **გიორგი ჯაიანს**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტის უფროსს, პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს პროფესორ **ტარიელ კვიციანს**, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მექანიკის დეპარტამენტის უფროსს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფრსორ **ომარ კიკვიძეს,** საქართველოს ეროვნული უნივერსიტეტის პროფესორს ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, **თამაზ ობგაძეს**. რომელთა საქმიანმა შენიშვნებმა და მითითებებმა სრულყო წიგნი.

ავტორები აგრეთვე მადლიერნი არიან ქალბატონ **თინათინ მაღრაძის,** გამომცემლობა „უნივერსალი“-ს თანამშრომლების, დირექტორის ბატონ **გოჩა ხარებავას** ხელმძღვანელობით, რომელთა თავდაუზოგავი შრომის შედეგად სრულყოფილ იქნა სახელმძღვანელო. შემოთავაზებული სახელმძღვანელო დაგეხმარებათ პრაქტიკული მეცადინეობის ჩატარების მეთოდიკის სრულყოფაში. პროფესორს შეუძლია შესთავაზოს სტუდენტებს გარკვეულ თემაზე პრაქტიკული მეცადინეობისათვის მზადებისას დამოუკიდებლად გაეცნოს ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას, ხოლო შემდეგ მეცადინეობის პროცესში ამოხსნას ანალოგიური ამოცანები.

წინამდებარე სახელმძღვანელო კრებული ავტორთა პირველი მოკრძალებული ცდაა. ამიტომ, მკითხველის ყოველი საფუძვლიანი შენიშვნა და წინადადება მადლიერებით იქნება გათვალისწინებული ავტორებისაგან.

რედაქტორი პროფესორი გელა ყიფიანი
E-Mail: gelakip@gmail.com; g.kipiani@gtu.ge
☎ 599106263, 591801188

2. კინემატიკა

წერტილის კინემატიკა

წერტილის მოძრაობის ძირითადი ელემენტები

მოკლე მიმოხილვა

თეორიული მექანიკის ნაწილს, სადაც მოძრაობა შეისწავლება სხეულის მასისა და გარე ზემოქმედების გათვალისწინების გარეშე, კინემატიკა ეწოდება.

კინემატიკის შესწავლა იწყება გეომეტრიული წერტილის კინემატიკით, ხოლო შემდეგ შეისწავლება ისეთ წერტილთა სისტემის კინემატიკა, რომლებიც დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან, ანუ მყარი სხეულის კინემატიკა.

წერტილის ტრაექტორია ეწოდება იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, სადაც წერტილი იმყოფებოდა მოძრაობის პროცესში. წერტილის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება არჩეული საკოორდინატო სისტემის მიმართ. იმის მიხედვით თუ როგორია წერტილის ტრაექტორიის ფორმა, განასხვავებენ წრფივ და მრუდწირულ მოძრაობას.

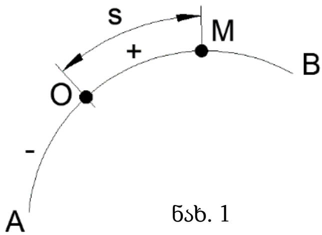
წერტილის მოძრაობა მოცემულად ჩაითვლება, თუ ცნობილია ამ წერტილის მდებარეობა ნებისმიერ მომენტში.

გვაქვს წერტილის მოძრაობის მოცემის სამი ხერხი:

1) ბუნებრივი
2) კოორდინატული
3) ვექტორული.

წერტილის მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი ხერხი

მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი ხერხის დროს ცნობილია: ტრაექტორია, რომელზეც მოძრაობს წერტილი, ათვლის წერტილი, დადებითი ათვლის მიმართულება და ტრაექტორიის გასწვრივ ათვლილი მანძილი სათავიდან წერტილამდე. მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია წერტილის ტრაექტორია (ნახ.1) ავირჩიოთ მასზე ნებისმიერი წერტილი O და ჩავთვალოთ ის ათვლის სათავედ. თუ გვეცოდინება ტრაექტორიის გასწვრივ მანძილი სათავიდან მოძრავ M წერტილამდე გვეცოდინება წერტილის მდებარეობა ტრაექტორიაზე. ის შეიძლება იყოს სათავის მარცხნივ ან მარჯვნივ. მანძილი სათავიდან წერტილამდე მივიღოთ დადებითი, თუ ის გადაზომილია მარჯვნივ, ხოლო უარყოფითად - მარცხნივ. მანძილი s შეიძლება განვიხილოთ როგორც M წერტილის რკალური კოორდინატი.



ნახ. 1

რადგან წერტილის კოორდინატი იცვლება დროის მიხედვით, ამიტომ რკალური კოორდინატი მოცემული უნდა იყოს, როგორც დროის ფუნქცია

$$s=f(t). \qquad (1)$$

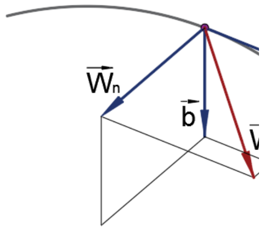
დროის ნებისმიერი მომენტისთვის წერტილის სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$V=\frac{ds}{dt}. \qquad (2)$$

სიჩქარის ვექტორი მიმართულია ტრაექტორიის მხების გასწვრივ, მოძრაობის მიმართულებით.

სრული აჩქარების სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ბუნებრივ ღერძებზე მისი მდგენელებით. როგორც გეომეტრიიდან არის ცნობილი, ტრაექტორიის ნებისმიერ წერტილში შეიძლება ავაგოთ სამღერძი: მხები $\vec{\tau}$, რომელიც მიმართულია ტრაექტორიის მხების გასწვრივ . ნორმალი $\vec{n}$, რომელიც მიმართულია ტრაექტორიის ნორმალის გასწვრივ და ბინორმალი $\vec{b}$ -მიმართული ტრაექტორიის ბინორმალის გასწვრივ (ნახ.2). სიბრტყეს, რომელიც გადის მხებსა და ნორმალზე

ეწოდება მიმხები სიბრტყე. ნორმალითა და ბინორმალით განსაზღვრულ სიბრტყეს ეწოდება ნორმალური სიბრტყე, ხოლო ამ ორი სიბრტყის მართობ სიბრტყეს გამწრფევი სიბრტყე ეწოდება.



ნახ. 2

წერტილის სრული აჩქარება განისაზღვრება მიმხებ სიბრტყეში მოთავსებული ვექტორით, რომელთაგან ერთს ეწოდება მხები აჩქარება, ხოლო მეორეს ნორმალური აჩქარება. მხები აჩქარება განისაზღვრება ტოლობით.

$$W_\tau = \frac{dV}{dt}. \tag{3}$$

მხები აჩქარება მიმართულია ტრაექტორიის მხების გასწვრივ. ნორმალური ვექტორის სიდიდე განისაზღვრება ტოლობით

$$W_\tau = \frac{V^2}{\rho}. \tag{4}$$

სადაც ρ - ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია მოცემულ წერტილში; V - წერტილის სიჩქარე მოცემულ მომენტში. ნორმალური აჩქარების ვექტორი მიმართულია ნორმალის გასწვრივ ტრაექტორიის ჩაზნექილობის მხარეს.

სრული აჩქარების სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით :

$$W = \sqrt{W_\tau{}^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}. \tag{5}$$

აჩქარების ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება კუთხით, რომელსაც აჩქარების ვექტორი ადგენს ნორმალთან. ეს კუთხე განისაზღვრება ფორმულით:

$$tg\mu = \frac{W_\tau}{W_n}. \tag{6}$$

იმის მიხედვით ,თუ როგორ მოძრაობს წერტილი, განარჩევენ თანაბარ და არათანაბარ მოძრაობას. თანაბარი მოძრაობის დროს წეტრილის სიჩქარის მოდული არის მუდმივი სიდიდე, ამიტომ მხები აჩქარება არის ნულის ტოლი. არათანაბარი მოძრაობის დროს წერტილის აჩქარება იცვლება. შესაბამისად მხები აჩქარება ნულისაგან განსხვავებულია. თუ მხები აჩქარება მუდმივია მაშინ ამბობენ, რომ მოძრაობა არის თანაბრადცვლადი. თანაბარი და თანაბრადცვლადი მოძრაობის დროს წერტილის სიჩქარე და აჩქარებები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

თანაბარი მოძრაობის დროს, როცა სიჩქარე მუდმივია,

$$s = s_0 + Vt. \qquad (7)$$

სადაც s -არის მანძილი სათავიდან წერტილამდე მოცემულ მომენტში, ხოლო s_0 - საწყისი მდებარეობის კოორდინატია.

თანაბრადცვლადი მოძრაობის დროს მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{w_\tau t^2}{2}, \qquad (8)$$

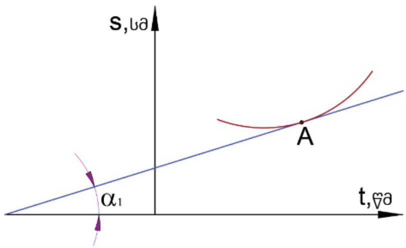
სადაც V_0 და W_τ, შესაბამისად, სიჩქარისა და მხები აჩქარების გეგმილებია მხების დადებით მიმართულებაზე. წერტილის სიჩქარე ამ შემთხვევაში გამოითვლება ფორმულით:

$$V = V_o + W_\tau t. \qquad (9)$$

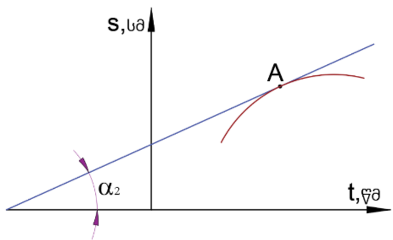
მოძრაობის კანონი და აგრეთვე სიჩქარისა და აჩქარების ცვლილების კანონი შეიძლება წარმოვადგინოთ გრაფიკულად. გრაფიკული ხერხი გვეხმარება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ წერტილის მოძრაობა.

წერტილის მოძრაობის კანონი შეიძლება წარმოვადგინოთ s, t კოორდინატებში (ნახ.3). ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაიზომება დრო, ხოლო ვერტიკალურზე გავლილი მანძილი.

სიჩქარის წირი უნდა ავაგოთ S, t სისტემაში (ნახ.4).



ნახ. 3



ნახ. 4

როგორც ცნობილია, სიჩქარის სიდიდე უდრის გავლილი მანძილის წარმოებულს დროით, ხოლო მხები აჩქარება არის სიჩქარის წარმოებული. ამიტომ სიჩქარე პროპორციულია მანძილის წირის მხების დახრის კუთხის ტანგენსისა, ხოლო მხები აჩქარება პროპორციულია სიჩქარის წირის მოცემულ წერტილში გავლებული მხების ტანგენსისა.

$$V = b_1 tg\alpha_1 \, , W_\tau = b_2 tg\alpha_2.$$

წერტილის მოძრაობის მოცემის კოორდინატული ხერხი

კოორდინატული ხერხით მოძრაობის მოცემისას ცნობილია წერტილის კოორდინატები დეკარტეს მართკუთხა სისტემაში, როგორც დროის ფუნქციები.

$$x = f_1(t), \;\; y = f_2(t), \;\; z = f_3(t). \tag{10}$$

ეს განტოლებები წარმოადგენენ ტრაექტორიის განტოლებებს პარამეტრული სახით. მისი ცხადი სახით მისაღებად საჭიროა ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დროის პარამეტრი.

თუ მოცემულია მოძრაობის განტოლებები, მაშინ სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \;\; V_y = \frac{dy}{dt}, \;\; V_z = \frac{dz}{dt}. \tag{11}$$

წერტილის სიჩქარის სიდიდე განისაზღვრება მისი გეგმილების საშუალებით შემდეგნაირად

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{12}$$

სიჩქარის ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \tag{13}$$

სადაც α, β *და* γ - არიან სიჩქარის ვექტორსა და შესაბამის ღერძს შორის კუთხეები.

აჩქარების ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე არიან შესაბამისი კოორდინატების მეორე რიგის წარმოებულები

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \;\; W_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \;\; W_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{14}$$

აჩქარების ვექტორის სიდიდე უდრის

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}. \tag{15}$$

კუთხეები, რომელსაც აჩქარების ვექტორი ადგენს შესაბამის ღერძებთან გამოითვლება ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{W_x}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}\,,$$
$$\cos\beta = \frac{W_y}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}\,, \tag{16}$$
$$\cos\gamma = \frac{W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}\,,$$

კავშირი მოძრაობის მოცემის კოორდინატორულ ხერხსა და ბუნებრივ ხერხს შორის.

თუ მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული ხერხით, მაშინ ბუნებრივი ხერხზე გადასასვლელად აუცილებელია განისაზღვროს ტრაექტორია, წერტილის მდებარეობა საწყის მომენტში და ტრაექტორიის გასწვრივ წერტილის მოძრაობის კანონი .

ტრაექტორიის გასწვრივ წერტილის მოძრაობის კანონი განისაზღვრება განტოლებით

$$s=\int_0^t \sqrt{f'^2_1(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}dt \tag{17}$$

სადაც s - რკალური კოორდინატია.

მოძრაობის მოცემის ვექტორული ხერხი.

ვექტორული ხერხით მოძრაობის მოცემისას წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ნებისმიერად არჩეული წერტილიდან გავლებული რადიუს-ვექტორით (ნახ.5). რადიუსვექტორი წარმოადგენს დროის ფუნქციას

$$\vec{r} = f(t). \tag{18}$$

ან ღერძებზე გეგმილებში გვექნება

$$\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \tag{19}$$

სიჩქარის ბექტორი უდრის

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{20}$$

ანუ საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt} \tag{21}$$

სრული აჩქარების ვექტორი

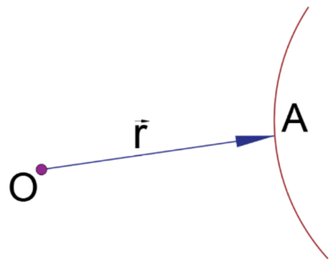
$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} \tag{22}$$

დეკარტეს კოორდინატებში გვექნება

$$\vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k.} \tag{23}$$

ჰოდოგრაფი

წირს, რომელსაც ღწერს რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილი, ეწოდება რადიუს-ვექტორის ჰოდოგრაფი. სიჩქარის ვექტორის ბოლო წერტილით აღწერილ წირს სიჩქარის ჰოდოგრაფი ეწოდება, რადიუსვექტორის ჰოდგრაფის მხები განსაზღვრავს წერტილის სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას. არჩეული წერტილიდან გავლებული აჩქარების ვექტორის ბოლო წერტილი აღწერს წირს, რომელსაც აჩქარების ჰოდოგრაფი ეწოდება.სიჩქარის ჰოდოგრაფის მხები განსაზღვრავს აჩქარების ვექტორის მიმართულებას. რადიუსვექტორის, სიჩქარის ად აჩქარების ჰოდოგრაფის გრაფიკი საშუალებას გვაძლევს თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ ამ სიდიდეების ცვლილების კანონზომიერება.



ნახ. 5

სიჩქარის ვექტორის ჰოდოგრაფის განტოლების მისაღებად, როცა მოძრაოპბა მოცემულია კოორდინატული ხერხით, საჭიროა გავადიფერენციროთ მოძრაობის განტოლება და შემდეგ გამოვრიცხოთ დროის პარამეტრი. მიღებული დამოკიდებულებები წარმოვადგინოთ გრაფიკულად. ანა-

ლოგიური გარდაქმნები უნდა ჩატარდეს აჩქარების ჰოდოგრაფის მისა-ღებად.

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

წერტილის კინემატიკის ამოცანები შეიძლება დავიყვანოტ რამდენიმე ტიპზე. განვიხილოთ რამდენიმე მათგანი და ჩამოვაყალიბოთ მათი ამოხსნის გზები.

1. წერტილის მოძრაობა მოცემულია ბუნებრივი ხერხით. მოითხოვება განვსაზღვროთ კინემატიკური მახასიათებლები ან ვიპოვოთ ისინი რაიმე მომენტისთვის. ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა მოძრაობის განტოლებების გაწარმოება (2), (3), (4), (5), (6) ფორმულების მიხედვით.

იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია მოძრაობის ტრაექტორია და მოითხოვება ვიპოვოთ მოძრაობის კანონო სიჩქარიდან ან აჩქარებიდან, საჭიროა მოვახდინოთ შესაბამისი განტოლებების ინტეგრება. ამავდროულად მოცამული უნდა იყოს წერტილის საწყისი მდებარეობა და სიჩქარე რათა შევზლოთ ინტეგრების მუდმივების განსაზღვრა და მოძრაობის კანონის დადგენა.

2. წერტილის მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული ფორმით. უნდა ვიპოვოთ ტრაექტორიის განტოლება, ხოლო შემდეგ გაწარმოების გზით ვიპოვოთ სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები შესაბამის ღერძებზე, მათი სიდიდეები და მიმართულება შესაბამისი ფორმულებით.

იგივე ტიპს მიეკუთვნება ამოცანები, ოვა მოცემულია სიჩქარე და აჩქარება და საძიებელია მოძრაობის კანონი. ამ დროს ვახდენთ ინტეგრებას (110 და (14) ფორმულების შესაბამისად. ინტეგრების მუმივების საპოვნელად უნდა ვიცოდეთ საწყისი პირობები, ანუ უნდა ვიცოდეთ წერტილის საწყისი სიცქარე და საწყისი აჩქარება.

3. წერტილის მოზრაობბა მოცემულია კოორდინატული ხერხიტ. მოითხოვება ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია, სიცქარე, მხები და ნორმალური აჩქარებები და აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი მოცემულ წრტილში. ამ შემთხვევაში წერტილის სიჩქარე და სრული აჩქარება გამოითვლება (12) და (15) ფორმულებით. შემდეგ (3) ფორმულით გამოითვლება მხები აჩქარება. ვიცით რა სრული და მხები აჩქარება,

შეიძლება ვიპოვოთ ნორმალური აჩქარება (4) ფორმულით. ამის შემდეგ ვპოულობთ იგივე ფორმულიდან ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსს და ტრაექტორიის განტოლებას (17) ფორმულის საშუალებით.

4. ზემოთ ჩამოთვლილი ამოცანების ტიპების გარდა არის ისეთი ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება მოძრაობის განტოლებების შედგენა. მაგალითად: გასროლილი სხეულის მოძრაობის განტოლებების შედგენა, სწორხაზოვნად და უსრიალოდ მგორავი ცილინდრული ფორმის სხეულის წერტილის მოძრაობის კანონის დადგენა და სხვა. ასეთი სახის განტოლებებში წერტილის მოძრაობა განისაზღვრება დეკარტეს კოორდინატთა სისტემაში და მიღებული მოძრაობის კანონი გამოიყენება დანარჩენი კინემატიკური მახასიათებლების საპოვნელად.

მყარი სხეულის მოძრაობის ძირითადი სახეები და წერტილის რთული მოძრაობა

მყარი სხეულის მოძრაობის ძირითადი სახეები

გადატანითი მოძრაობა

სხეულის მოძრაობას ეწოდება გადატანითი თუ ამ სხეულთან დაკავშირებული ნებისმიერი წრფე გადადგილდება თავის თავის პარალელურად.

გადატანითი მოზრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი ტრაექტორია, ტოლი სიჩქარე და აჩქარება. წერტილის ტრაექტორიები ზოგადად წარმოადგენენ სივრცით წირებს. იმ შემთხვევაში, თუ გადატანითი მოძრაობა სრულდება რაიმე სიბრტყის პარალელურად, წერტილის ტრაექტორიები წარმოადგენენ ბრტყელ წირებს განლაგებულს პარალელურ სიბრტყეებში.

იმისათვის, რომ შევისწავლოთ სხეულის გადატანითი მოძრაობა, საკმარისია ვიცოდეთ მისი ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობა.

ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა ეწოდება სხეულის ისეთ მოძრაობას , როცა მისი ორი წერტილი და მასზე გამავალი წრფე უძრავი რჩება. ამ უძრავ წრფეს ეწოდება ბრუნვის ღერძი.

უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს მისი ყველა წერტილი გადადგილდება ღერძის მართობულ სიბრტყეებში და მოძრაობენ წრეწირზე, რომლის ცენტრი ბრუნვის ღერძზეა მოთავსებული და რადიუსი უდრის მანძილს ბრუნვის ღერძიდან წერტილამდე. სხეულის წერტილის მდებარეობა შეიძლება ვიპოვოთ, თუ გვეცოდინება მანძილი ბრუნვის ღერძამდე და სხეულის მობრუნების კუთხე φ, როგორც დროის ფუნქცია.

კუთხე φ წარმოადგენს კუთხეს ბრუნვის ღერძზე გამავალ ორ სიბრტყეს შორის, რომელთაგან ერთი უძრავია, ხოლო მეორე უძრავადაა დაკავშირებული სხეულთან.

სხეულის ყველა წერტილი დროის ერთი და იგივე შუალედში შემობრუნდება ერთი და იგივე კუთხით. ამიტომ მობრუნების კუთხის დროზე დამოკიდებულების განტოლებას ეწოდება ბრუნვის განტოლება.

$$\varphi = f(t) \tag{1}$$

თუ ვიცით სხეულის ბრუნვის განტოლება შეიძლება განვსაზღვროთ სხეულის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება.

კუთხური სიჩქარე უდრის მობრუნების კუთხის წარმოებულს დროით

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{2}$$

კუთხური აჩქარება უდრის კუთხური სიჩქარის პირველი რიგის წარმოებულს ან მობრუნების კუთხის მეორე რიგის წარმოებულს დროით.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{3}$$

კუთხური სიჩქარის ერთეულია რად/წმ, ხოლო კუთხური აჩქარების ერთეულია რად /წმ^2.

თუ გვეცოდინება კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ ბრუნვის ღერძიდან r მანძილზე დაშირებული წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.

წერტილის სიჩქარე უდრის

$$V = \omega r, \tag{4}$$

და მიმართულია ტრაექტორიის მხების გასწვრივ, ბრუნვის მიმართულებით. ამ წერტილის მხები აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon. \tag{5}$$

და მიმართულია დადებითი ბრუნვის მიმართულებით (თუ $\varepsilon > 0$), ტრაექტორიის მხების გასწვრივ.

წერტილის ნორმალური აჩქარება სიდიდით უდრის

$$W_n = \frac{V^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r. \tag{6}$$

ნორმალური აჩქარება ყოველთვის მიმართულია ბრუნვის ღერძისკენ.

სრული აჩქარება სიდიდით უდრის

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \omega^2 r, \tag{7}$$

მიმართულება განისაზღვრება მხებ და ნორმალურ აჩქარებებს შორის კუთხით, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$tg\mu = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{8}$$

თანაბარი ბრუნვის დროს კუთხური სიჩქარე მუდმივია და, აქედან გამომდინარე, სხეული დროის ტოლ შუალედში ასრულებს ტოლ ბრუნვას.

კავშირი სხეულის კუთხურ სიჩქარესა და ერთ წუთში შესრულებულ ბრუნთა რუცხვს შორის გამოისახება ფორმულით (n -ერთ წუთში შესრულებილი ბრუნთა რიცხვია)

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \tag{9}$$

ბრუნვის ღერძიდან r მანძილით დაშორებული წერტილის ხაზოვანი სიჩქარე ბრუნთა რიცხვით ასე გამოისახება

$$V = \omega r = \frac{\pi r n}{30} \tag{10}$$

სხეულის ბრუნვის განტოლება მუდმივი კუთხური სიჩქარის დროს ასე გამოისახება

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{11}$$

სადაც $\varphi_0 -$ საწყისი კუთხური სიჩქარეა.

როცა სხეული ასრულებს თანაბრადცვლად მოძრაობას, კუთხური სიჩქარე ε მუდმივი სიდიდეა. როცა მოძრაობა შენელებულია, მაშინ

კუთხური აჩქარება აიღება უარყოფითი ნიშნით. ასეთ შემთხვევაში თანაბრადცვლადი ბრუნვის მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (12)$$

ხოლო კუთხური აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \quad (13)$$

სადაც φ_0 - საწყისი მობრუნების კუთხეა, ხოლო ω_0 საწყისი კუთხური სიჩქარეა.

კუთხური სიჩქარე, კუთხური აჩქარება და, აგრეთვე, სხეულის წერტილის სიჩქარე და აჩქარება შეიძლება გამოვსახოთ ვექტორულად. კერძოდ, კუთხური სიჩქარის ვექტორი არის

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k} \quad (14)$$

სადაც $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ არის კუთხური სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე. $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ საკოორდინატო ღერძების მგეზავებია.

სხეულის კუთხური სიჩქარის ვექტორი არის

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{\imath} + \varepsilon_y \vec{\jmath} + \varepsilon_z \vec{k} \quad (15)$$

სადაც $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – არიან კუთხური აჩქარების ვექტორის გეგმილები შესაბამის საკოორდინატო ღერძებზე.

სხეულის იმ წერტილის სიჩქარე, რომლის რადიუს-ვექტორია $\vec{r}$, გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (16)$$

ანუ ღერძებზე გეგმილებში გვექნება

$$\vec{V} = V_x \vec{\imath} + V_y \vec{\jmath} + V_z \vec{k}, \quad (17)$$

სადაც V_x, V_y, V_z არიან სიჩქარის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე.

მხები აჩქარების ვექტორი უდრის

$$\overrightarrow{W_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\ , \quad (18)$$

ნორმალური აჩქარების ვექტორი არის

$$\overrightarrow{W_n} = \vec{\omega} \times \vec{V}\ , \quad (19)$$

სრული აჩქარების ვექტორი უდრის

$$\vec{W} = \overrightarrow{W_\tau} + \overrightarrow{W_n} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (20)$$

მეთოდური მითითებები ამოცანის ამოხსნისათვის

სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შესწავლისას განიხილავენ სხვადასხვა ტიპის ამოცანებს. მათგან ზოგადი ამოცანები ასეთია.

1. მოძრაობის მოცემული განტოლებიდან ვიპოვოთ სხეულის სიჩქარე და აჩქარება.

2.მოცემული კუთხური აჩქარების საშუალებით ვიპოვოთ სხეულის მოძრაობის კანონი.

3. მოითხოვება ერთი სხეულის ბრუნვითი ან გადატანითი მოძრაობის გარდაქმნა სხვა სხეულის ბრუნვით ან გადატანით მოძრაობაში.

პირველი ტიპის ამოცანები იხსნება მოძრაობის განტოლების დიფერენცირებით.მაგალითად, თუ მოცემულია მოძრაობის განტოლება (1), მაშინ მისი გაწარმოებით მიიღება კუთხური სიჩქარე, ხოლო მეორედ გაწარმოებით მიიღება კუთხური აჩქარება.

ზოგჯერ მოძრაობის განტოლების შედგენა ხდება ამოცანის პირობიდან გამომდინარე. მაგალითად, დისკო იწყებს აჩქარებულ ბრუნვით მოძრაიბას დროის კუბის პროპორციულად. იპოვეთ დისკოს კუთხური აჩქარება იმ პირობით, რომ დროის t_1 მომენტისთვის კუთხური სიჩქარე უდრის ω_1.

ამ შემთხვევაში მოძრაობის კანონი ასე შეიძლება ჩავწეროთ :

$$\varphi = at^3 \ . \qquad (1)$$

სადაც a არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც უნდა განისაზღვროს ამოცანის პირობიდან.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3at^2. \qquad (2)$$

ვიცით რა კუთხური სიჩქარე $\omega = \omega_1$, დროის მოცემული მომენტისთვის $t = t_{1,}$ ვპოულობთ a კოეფიციენტს:

$$\omega_1 = 3at_1^2, \qquad (3)$$

საოდანაც

$$a = \frac{\omega}{3t_1^2}. \qquad (4)$$

აქედან გამომდინარე, მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\varphi = \frac{\omega_1 t^2}{3t_1^2}, \qquad (5)$$

თუ გამოვთვლით კუთხის მეორე რიგის წარმოებულს მივიღებთ კუთხურ აჩქარებას

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2\omega_1}{t_1^2}. \tag{6}$$

მეორე ტიპის ამოცანები იხსნება ინტეგრებით. ამ შემთხვევაში კუთხური აჩქარების ცვლილების კანონთან ერთად მოცემული უნდა იყოს პირობები, რომლის საშუალებით განისაზღვრება ინტეგრების მუდმივები.

მაგალითად, ვთქვათ სხეულის კუთხური სიჩქარე იცვლება კანონით:

$$\varepsilon = bt^n + a, \tag{1}$$

სადაც a, b, და n მუდმივი სიდიდეებია. ცნობილია ,აგრეთვე, რომ საწყის მომენტში, როცა t=0, სხეულის კუთხური სიჩქარე უდრის ω_0 , ხოლო საწყისი მობრუნების კუთხეა $\varphi_0.$ მოითხოვება ვიპოვოთ სხეულის მოძრაობის კანონი. კუთხური სიჩქარე განვსაზღვროთ ტოლობიდან

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \tag{2}$$

აქედან

$$\omega = \int (bt^n + a)dt + C_{1,}$$

ანუ,

$$\omega = \frac{b}{n+1}t^{n+1} + at + C_{1.} \tag{3}$$

ინტეგრების მუდმივის საპოვნელად ჩავსვათ (3)-ში საწყისი პირობები, როცაt=0 , მაშინ, $\omega = \omega_{0.}$მივიღებთ

$$\omega_0 = C_1.$$

ამიტომ

$$\omega = \frac{b}{n+1}t^{n+1} + at + \omega_0. \tag{4}$$

თუ ამ განტოლებას ვაინტეგრებთ და გავითვალისწინებთ საწყის პირობებს, მივიღებთ ბრუნვითი მოძრაობის განტოლებას

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{a}{2}r^2 + \frac{b}{(n+1)(n+2)}t^{n+2}. \tag{4'}$$

მესამე ტიპის ამოცანა შეეხება მოძრაობების გარდაქმნას. კერძოდ, ერთი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის მეორე სხეულის ბრუნვით მოძრაობაში გარდაქმნისას ჩავწერთ ფორმულებს, რომლებიც გამოიყენება კბილანური ან ღვედური გადაცემის დროს. ვთქვათ, მოდებაშია ორი კბილა თვალი (ნახ. 6ა), რომელთა რადიუსებია r_1 და r_2. O_1 თვალი არის

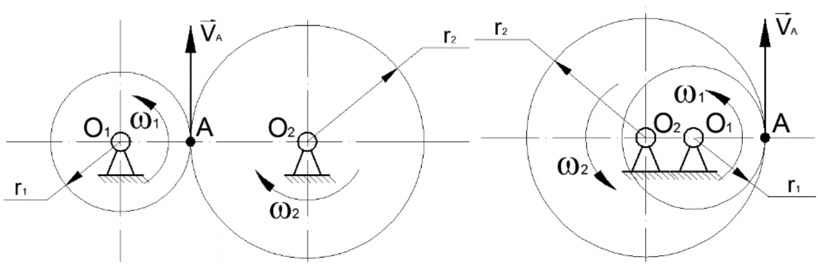
წამყვანი, ხოლო O_2 - მიმყოლი თვალი. ორივე თვალისთვის შეხების წერტილების სიჩქარეები ერთნაირია ,როგორც სიდიდით, ასევე მიმართულებით.

$$V_{1A} = V_{2A} = V_{A.} \quad]] \tag{1}$$

(1) განტოლებიდან შეიძლება მივიღოთ დამოკიდებულებები თვლების რადიუსებსა და მათ კუთხურ სიჩქარეებს შორის. კერძოდ

$$V_A = r_1\omega_1 = V_{1A,} \tag{2}$$

აქედან $\quad V_A = r_2\omega_2 = V_{2A}$.



ა ნახ.6 ბ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{3}$$

ე.ი. თვლების კუთხური სიჩქარეები მათი რადიუსების უკუპროპორციულია. როგორც ნახ.6 -დან ჩანს, როცა კბილანები არიან გარე მოდებაში (ნახ.6ა), მაშინ თვლები ბრუნავენ საპირისპირო მიმართულებით, ხოლო შიგა მოდების შემთხვევაში (ნახ.6ბ) ბრუნავენ თანხვედრილი მიმართულებით.

კუთხური სიჩქარეების შეფარდება შეიძლება გამოვსახოთ კბილთა რიცხვების (z_1 და z_2) ან ბრუნთა რიცხვების (n_1 და n_2) შეფარდებით.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{4}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{5}$$

წანყვანი თვალის *კუ*თხური სიჩქარის შეფარდებას მიმყოლი თვალის კუთხურ სიჩქარესთან ეწოდება გადაცემათა რიცხვი

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{1,2}$$

გადაცემათა რიცხვი დადებითია შიდა მოდების დროს, ხოლო უარყოფითია გარე მოდების დროს. თუ მოდებაში არიან რამდენიმე კბილანა, მაშინ გადაცემათა რიცხვი უდრის ყოველი კბილანათა წყვილის გადაცემათა რიცხვის ნამრავლს.

$$i_{1,n} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdots i_{n-1,n}. \qquad (6)$$

ამიტომ შეიძლება დავწეროთ

$$i_{1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_2}(-1)^m, \qquad (7)$$

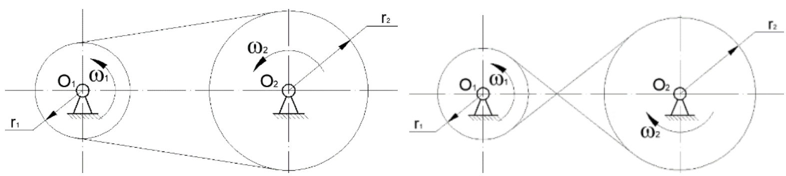
სადაც m გარე მოდების წყვილების რაოდენობაა.

გადაცემათა რიცხვი შეიძლება გამოისახოს კბილების შეფარდებით ან რადიუსების შეფარდებით .

ღვედური გადაცემის დროს გადაცემათა რიცხვი უდრის წამყვანი თვალის კუთხური სიჩქარის შეფარდებას მიმყოლი შკივის კუთხურ სიჩქარესთან . ეს შეფარდება პირდაპირპროპორციულია ბრუნთა რიცხვის შეფარდებისა და უკუპროპორციულია რადიუსების შეფაერდების.

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (8)$$

თუ ღვედის შტოები არ არის გადაჯვარედინებული (ნახ.7ა), მაშინ კუთხურ სიჩქარეებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება. და, შესაბამისად, გადაცემათა რიცხვი დადებითია. გადაჯვარედინების შემთხვევაში (ნახ.7ბ) კუთხურ სიჩქარეებს აქვთ საპირისპირო მიმართულება და გადაცემათა რიცხვი არის უარყოფითი



ა ნახ. 7. ბ

წერტილის რთული მოძრაობა
აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობა. წერტილის სიჩქარე და აჩქარება

წერტილის მოძრაობის განტოლებების ანალიზური გამოსახულება დამოკიდებულია საკოორდინატო სისტემის არჩევაზე. სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ ერთი და იგივე წერტილის მოძრაობა განსხვავებული განტოლებებით აღიწერება. წერტილის ფარდობითი მოძრაობის კინემატიკის ერთერთ ამოცანას წარმოადგენს ერთმანეთის მიმართ მოძრავი სისტემების მიმართ მოძრაობებს შორის კავშირის დამყარება. ამავე დროს იგულისხმება, რომ მოძრავი სისტემის კინემატიკური მახასიათებლები ცნობილია.

წერტილის მოძრაობას უძრავი სისტემის მიმართ ეწოდება აბსოლუტური მოძრაო ბა, ხოლო წერტილის მოძრაობასმოძრავი სისტემის მიმართ, ანუ მასთან დაკავშირებული სისტემის მიმართ, ეწოდება ფარდობითი მოძრაობა. მოძრავი სისტემის იმ წერტილის მოძრაობას სადაც მოცემულ მომენტში ომყოფებოდა მოძრავი წერტილი, ეწოდება წარმტანი მოძრაობა.

წერტილის აბსოლუტური მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც რთული მოძრაობა, რომელიც შედგება ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობებისაგან.

შესაბამისად, წერტილის ფარდობითი მოძრაობის კინემატიკის ძირითად ცნებებს წარმოადგენენ : აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი ტრაექტორიები. ასევე აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეები და აჩქარებები.

თუ წარმტანი და ფარდობითი მოძრაობები სწორხაზოვანია, მაშინ აბსოლუტური მოძრაობაც სწორხაზოვანია და უდრის წარმტანი და ფარდობითი გადაადგილებების გეომეტრიულ ჯამს.

$$\overrightarrow{S_a} = \overrightarrow{S_e} + \overrightarrow{S_r} \qquad (1)$$

მრუდწირული მოძრაობის დროს აბსოლუტური გადაადგილება განიხილება დროის მცირე შუალედში და უდრის წარმტანი და ფარდობითი გადაადგილებების გეომეტრიულ ჯამს

$$d\overrightarrow{S_a} = d\overrightarrow{S_e} + d\overrightarrow{S_r} \qquad (1')$$

წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე უდრის წარმტანი ($\overrightarrow{V_e}$) და ფარდობითი ($\overrightarrow{V_r}$ სიჩქარეების გეომეტრიულ ჯამს.

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r} \tag{2}$$

წერტილის აბსოლუტური აჩქარების განსაზღვრის დროს განიხილება ორი შემთხვევა:

1. როცა წარმტანი მოძრაობა გადატანითია,
2. როცა წარმტანი მოძრაობა ბრუნვაა.

პირველ შემთხვევაში წერტილის აბსოლუტური აჩქარება უდრის წარმტანი ($\overrightarrow{w_e}$) და ფარდობითი ($\overrightarrow{W_r}$) აჩქარებების ჯამს

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} \tag{3}$$

მეორე შემთხვევაში აჩქარება უდრის წარმტანი, ფარდობითი და კორიოლისის აჩქარებების გეომეტრიულ ჯამს

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_\mathrm{k}}\,. \tag{4 }$$

კორიოლისის აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით

$$\overrightarrow{W_k} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overline{V_r} \tag{5}$$

აქედან გამომდინარე, კორიოლისის აჩქარების მოდული გამოითვლება ფორმულით

$$W_k = 2\omega_e V_r \sin\left(\overrightarrow{\omega_e}, \overrightarrow{V_r}\right). \tag{5’}$$

სადაც $\overrightarrow{\omega_e}$ წარმტანი ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\overrightarrow{V_r}$ – ფარდობითი სიჩქარე. კორიოლისის აჩქარების მიმართულება განისაზღვრება ვექტორული ნამრავლის განმარტებიდან. კორიოლისის აჩქარების მიმართულება შეიძლება განვსაზღვროთ ჟუკოვსკის წესით, რომლის თანახმად თუ ფარდობითი სიჩქარე წარმტანი ბრუნვის ღერძის მართობულია, ის უნდა მოვაბრუნოთ $90° -$ ით წარმტანი ბრუნვის მიმართულებით. იმ შემთხვევაში, როცა ფარდობითი სიჩქარე არ არის მართობული წარმტანი ბრუნვის ღერძის, ფარდობითი სიჩქარე უნდა დავაგეგმილოთ ბრუნვის ღერძის მართობ სიბრტყეში და შემდეგ გეგმილი მოვაბრუნოთ 90°-ით წარმტანი ბრუნვის მიმართულებით

ზოგჯერ ამოცანის ამოხსნის დროს აუცილებელია მიღებული განტოლებები გამოვიყენოთ სკალარული ფორმით. მაგალითად, გადაადგილების საპოვნელად ვსარგებლობთ ტოლობებით:

$$\begin{aligned} x_a &= x_e + x_r\,, \\ y_a &= y_e + y_r \\ z_a &= z_e + z_r \end{aligned} \tag{6}$$

სიჩქარის საპოვნელად ვსარგებლობთ ფორმულებით:

$$V_{ax} = V_{ex} + V_{rx}\,,$$
$$V_{ay} = V_{ey} + V_{ry}\,,$$
$$V_{az} = V_{ez} + V_{rz}\,, \qquad (7)$$

აჩქარების საპოვნელად ვსარგებლობთ ფორმულებით:

$$W_{ax} = W_{ex} + W_{rx}\,,$$
$$W_{ay} = W_{ey} + W_{ry}\,,$$
$$W_{az} = W_{ez} + W_{rz}\,, \qquad (8)$$

იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს დამატებითიაჩქარება (კორიოლისის აჩქარება) ვსარგებლობთ ფორმულებით:

$$W_{ax} = W_{ex} + W_{rx} + W_{kx},$$
$$W_{ay} = W_{ey} + W_{ry} + W_{ky},$$
$$W_{az} = W_{ez} + W_{rz} + W_{kz} \qquad (9)$$

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

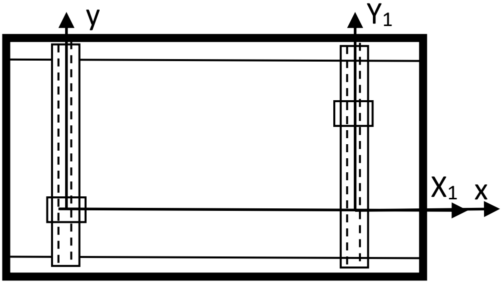
როგორც უკვე ითქვა, წერტილის აბსოლუტური მოძრაობა განიხილება ,როგორც ორი, წარმტანი და ფარდობითი მოძრაობების ერთობლიობა. ამ განყოფილებაში განიხილება რამდენიმე სახის ამოცანა:

1. მოძრაობის კანონის და აბსოლუტური სიჩქარის განსაზღვრა.
2. წერტილის აბსოლუტური აჩქარების განსაზღვრა, როცა წარმტანი მოძრაობა გადატანითია.
3. წერტილის აჩქარების პოვნა, როცა წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვითი მოძრაობა.

ამოცანის ამოხსნის საწყის ეტაპზე უნდა დავადგინოთ მოძრაობის სახე (წარმტანი, ფარდობითი და აბსოლუტური). ავირჩიოთ უძრავი და მოძრავი სისტემები. ამის შემდეგ ამოცანის პირობის შესაბამისად გამოვიყენოთ დამოკიდებულებები გადაადგილებებს, სიჩქარეებსა და აჩქარებებს შორის.

მაგალითად, ხიდურა ამწე მოძრაობს საამქროს გასწვრივ კანონით $S = 0{,}6t^2$: ამწეს ხიდზე განივი მიმართულებით მოძრაობს ურიკა კანონით:

$S_1 = 2t$. განსაზღვრეთ მოძრაობის განტოლება, ტრაექტორია და, აგრეთვე, ურიკას სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე საამქროს მიმართ. ამ შემთხვევაში ურიკას მოძრაობა ხიდის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა($S_1 = S_r$), ხოლო ამწეს მოძრაობა არის წარმტანი მოძრაობა ($S = S_e$) . ურიკას მოძრაობა საამქროს მიმართ არის აბსოლუტური მოძრაობა.



ნახ.8

ავირჩიოთ პირობითად მოძრავი და უძრავი საკოორდინატო სისტემები. რადგანაც ამოცანაში არ არის მოცემული ურიკას საწყისი მდებარეობა, ამიტომ ავირჩიოთ საკოორდინატო სისტემები შემდეგნაირად. უძრავი საკოორდინატო სისტემის (oxy) სათავე ავირჩიოთ ურიკას მასათა ცენტრში საწყის მომენტში. მოძრავი სისტემის ($O_1x_1y_1$) , რომელიც ხიდთან არის დაკავშირებული უძრავად, სათავეც ავიღოთ იმ წერტილში სადაც ურიკას მასათა ცენტრი იყო საწყის მომენტში.

(6) განტოლების თანახმად ვწერთ

$$x_a = x_e + x_r,$$
$$y_a = y_e + y_r \; . \qquad (1)$$

განხილულ შემთხვევაში $x_e = S = 0{,}6t^2$, $x_r = 0$, რადგან ფარდობითი მოძრაობა O_1x_1 ღერძის მართობულია, ამიტომ $y_r = 2t$. ხოლო $y_e = 0$. ამრიგად, აბსოლუტური მოძრაობის კოორდინატებია:

$$x_a = 0{,}6t^2, y_a = 2t. \qquad (2)$$

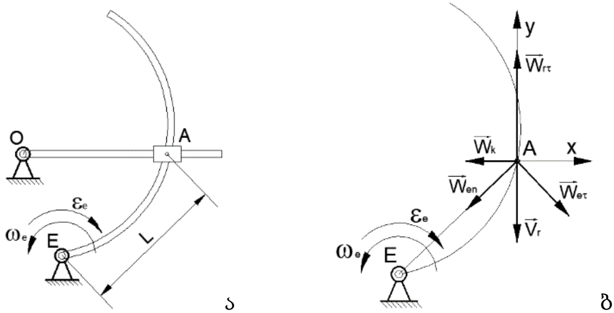
ტრაექტორიის განტოლების მისაღებად გამოვრიცხოთ ამ ორი განტოლებიდან დრო და მივიღებთ

$$x_a = 0{,}15y_a^2 \qquad (3)$$

აბსოლუტური სიჩქარის საპოვნელად გავაწარმოოთ (2) ტოლობები და გამოვთვალოთ სიჩქარის სიდიდე:

$$V_{ax} = \dot{x_a} = 1.2t, \qquad V_{ay} = \dot{y_a} = 2.$$
$$V_a = \sqrt{(1{,}2t)^2 + 2^2} = \sqrt{1{,}44t^2 + 4}\,.$$

ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად არ სარგებლობენ კოორდინატული ხერხით. განვიხილოთ წერტილის აჩქარების გამოთვლის მაგალითი, როცა წარმტანი მოძრაობა ბრუნვითია, ანუ გვაქვს დამატებითი აჩქარების მდგენელი (კორიოლოსის აჩქარება).



ნახ. 9

ვთქვათ გვინდა ვიპოვოთ A ცოციას აჩქარება, როცა ის მოძრაობს მბრუნავი კულისას გასწვრივ (ნახ.9). მოცემულია ცოციას ფარდობითი სიჩქარე კულისას მიმართ V_r. ცოციას ფარდობითი მხები აჩქარება $W_{r\tau}$, რომელიც მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ. კულისას კუთხური სიჩქარე ω_e, და კუთხური აჩქარება ε_e, რომელიც მიმართულია კუთხური სიჩქარის საპირისპიროდ (ნახ.9), მანძილი l არის ცოციას დაშორება ბრუნვის ცენტრიდან. ხოლო ρ არის სიმრუდის რადიუსი მოცემულ წერტილში.

დავუშვათ, მოცემულ მომენტში ცოციას სიჩქარე მომართულია ვერტიკალურად ქვევით. ხოლო ქორდა OA ჰორიზონტთან ადგენს $\alpha = 60°$კუთხეს.

ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ ტოლობა:

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_k} \qquad (1)$$

გამოვსახოთ ნახაზზე წარმტანი, ფარდობითი და კორიოლისის აჩქარებები. რადგან

$$\overrightarrow{W_e} = \overrightarrow{W_{en}} + \overrightarrow{W_{e\tau}},$$
$$\overrightarrow{W_r} = \overrightarrow{W_{rn}} + \overrightarrow{W_{r\tau}},$$
$$\overrightarrow{W_k} = 2(\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_r}).$$

ამიტომ (1) ტოლობა ასე შეიძლება ჩავწეროთ :

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_{en}} + \overrightarrow{W_{e\tau}} + \overrightarrow{W_{rn}} + \overrightarrow{W_{r\tau}} + 2\left(\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_r}\right),$$

სადაც $W_{en} = \omega_e^2 l$, მიმართულია A წერტილიდან O ცენტრისაკენ OA ქორდის მიმართულებით. $W_{en} = \varepsilon l$ და მიმართულია OA მართობული მიმართულებით $\varepsilon_e - l$ თანხვედრილი მიმართულებით. $W_{rn} = \frac{V_r^2}{\rho}$ და მიმართულია კულისას სიმრუდის ცენტრისკენ რადიუსის გასწვრივ. $W_{r\tau}$ - მოცემულია და მიმართულია მხების გასწვრივ ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ. კორიოლისის აჩქარების სიდიდეა - $W_k = 2\omega_e V_r$, ამ აჩქარების მიმართულებას განვსაზღვრავთ ჟუკოვსკის წესით. სრული აჩქარება გამოითვლება ამ ვექტორების გეომეტრიული ჯამის გამოთვლით.

შეიძლება ,ასევე, ვიპოვოთ სრული აჩქარების სიდიდე ანალიზურად. ამისათვის დავაგეგმილოთ ვექტორული ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და შემდეგ ვიპოვოთ მისი სიდიდე.

$$W_x = W_k - W_{rn} - W_{en}cos60° + W_{e\tau}cos30°\ ,$$
$$W_y = W_{rn} - W_{en}cos30°,$$
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}\ .$$

მყარი სხეულის რთული მოძრაობა

მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა

ზოგადი ცნებები

მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, როდესაც მისი ყოველი წერტილი მოძრაობს რაიმე უძრავი სიბრტყის პარალელურად. სხეულის ასეთი მოძრაობა დაიყვანება სხეულის ბრტყელი კვეთის მოძრაობაზე. ანუ, მოძრაობა დაიყვანება სიბრტყეში მოძრაობაზე. ბრტყელი ფიგურის ასეთი მოძრაობა ემყარება ძირითად თეორემებს, რომლებიც გვეხმარება შევადგინოთ მოძრაობის განტოლებები და განვსაზღვროთ სხეულის წერტილების სიჩქარეები და აჩქარებები. ეს თეორემებია:

1. ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა შეიძლება წარმოვადგინოთ რაიმე წერტილთან უძრავად დაკავშირებული სისტემის

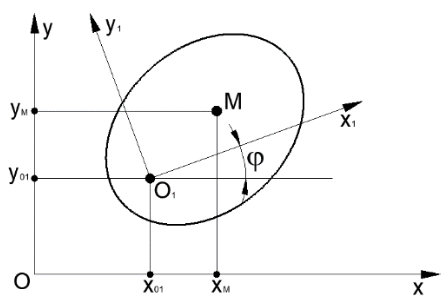
გადატანითი მოძრაობისა და ამ წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა.

2. ყოველი არა გადატანითი მოძრაობა მოცემულ მომენტში შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ბრუნვა რაიმე წერტილის გარშემო, რომელსაც სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ეწოდება.
3. ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეების გეგმილები მათ შემაერთებელ წრფეზე ერთმანეთის ტოლია.

სხეულის წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების ანალიზური განსაზღვრა

ბრტყელი ფიგურის წერტილების კინემატიკური მახასიათებლების ანალიზური განსაზღვრა ემყარება ზემოთ ჩამოთვლილ თეორემებს.

ვთქვათ უძრავი სისტემა xoy მოთავსებულია სხეულის მოძრაობის სიბრტყეში (ნახ.10). ამ ფიგურის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ავირჩიოთ მეორე საკოორდინატო სისტემა $x_1 o_1 y_1$, რომელიც უძრავად არის დაკავშირებული სხეულთან და მოძრაობს მასთან ერთად. მოძრავი კოორდინატთა სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება მისი სათავის მოძრაობით და მოძრავი ღერძის მიერ შესაბამის უძრავ ღერძთან შედგენილი კუთხით (ნახ.10). მოძრავი სისტემის სათავის კოორდინატები და მობრუნების კუთხე არიან დროის კოორდინატები, ე.ი.



ნახ. 10

$$x_{o1} = f_1(t), \quad (1)$$

$$y_{o1} = f_1(t), \quad (2)$$

$$\varphi = f_3(t) \quad (3)$$

ამ სამ განტოლებას ეწოდება ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები. ეს განტოლებები საშუალებას გვაძლევენ განვსაზღვროთ ფიგურის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობა, სიჩქარე და აჩქარება. ჩავწეროთ

ფიგურის M წერტილის მოძრაობის განტოლებები. მისი მდებარეობა მოძრავ სისტემაში განისაზღვრება x_1, y_1 კოორდინატებით და უძრავ სისტემაში კოორდინატებით x, y

$$x = x_{o1} + x_1 cos\varphi - y_1 sin\varphi \quad (4)$$

$$y = y_{o1} + x_1 sin\varphi + y_1 cos\varphi \quad (5)$$

(4) და (5) განტოლებები წარმოადგენენ M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს. თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ დროის პარამეტრს, მივიღებთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას ცხადი სახით. (4) და (5) განტოლებების გაწარმოებით მივიღებთ წერტილის სიჩქარის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე .

$$V_x = \frac{dx_{o1}}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}(x_1 sin\varphi + y_1\, cos\varphi)$$

$$V_y = \frac{dy_{o2}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}(x_1 cos\varphi - y_1 sin\varphi)$$

ანუ, რადგან $\frac{dx_{o1}}{dt} = V_{o1x}; \frac{dy_{o1}}{dt} = V_{o1y}, \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$

$$V_x = V_{o1x} - \omega(x_1 sin\varphi + y_1\, cos\varphi), \quad (6)$$

$$V_y = V_{o1y} + \omega(x_1 cos\varphi - y_1 sin\varphi) \quad (6')$$

ანუ

$$V_x = V_{o1x} - \omega(y - y_{o1}), \quad (7)$$

$$V_y = V_{o1y} + \omega(x - x_{o1}). \quad (7')$$

სრული სიჩქარის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$V = \sqrt{V_x^2 + v_y^2}\,.$$

ვიპოვოთ ,აგრეთვე, აჩქარების სიდიდე. ამისათვის გავაწარმოოთ სიჩქარის გეგმილები და მიიღებთ:

$$W_x = W_{o1x} - \varepsilon(x_1 sin\varphi + y_1 cos\varphi) - \omega^2(x_1 cos\varphi - y_1 sin\varphi), \quad (8)$$

$$W_y = W_{o1y} + \varepsilon(x_1 cos\varphi - y_1 sin\varphi) - \omega^2(x_1 sin\varphi + y_1 cos\varphi). \quad (8')$$

ანუ

$$W_x = W_{o1x} - \varepsilon(y - y_{o1}) - \omega^2(x - x_{o1}) \quad (9)$$

$$W_y = W_{o1y} + \varepsilon(x - x_{o1}) - \omega^2(y - y_{o1}) \quad (9')$$

სრული აჩქარების სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}\,.$$

სხეულის წერტილთა სიჩქარე და აჩქარება ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დროს შეიძლება გამოვთვალოთ სხვა ხერხითაც.

პირველი თეორემის ძალით ბრტყელი მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი მოძრაობის ჯამი: გადატანითი მოძრაობა არჩეულ წერტილთან (პოლუსთან) ერთად და ბრუნვითი მოძრაობა ამ წერტილის გარშემო.

ამიტომ, თუ ცნობილია პოლუსის სიჩქარე და ამ პოლუსის გარშემო ბრუნვის სიჩქარე, მაშინ წერტილის აჩქარება წარმოადგენს ამ ორი ვექტორის ჯამს.

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}}, \tag{10}$$

სადაც A წერტილი არის პოლუსი,ხოლო წერტილი B - ფიგურის განხილული წერტილია.

B წერტილის სიჩქარე A წერტილის გარშემო ბრუნვისას უდრის

$$V_{BA} = \omega \cdot AB = \frac{d\varphi}{dt} \cdot AB. \tag{11}$$

A წერტილის სიჩქარე უდრის

$$V_A = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\ ,$$

სადაც

$$V_x = \frac{dx}{dt};\ \ V_y = \frac{dy}{dt}.$$

ანალოგიურად, ბრტყელი ფიგურის წერტილის აჩქარების ვექტორი არის პოლუსის აჩქარებისა და პოლუსის გარშემო ბრუნვის აჩქარებია გეომეტრიული ჯამი

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}},$$

სადაც $\overrightarrow{W_B}$ - არის B წერტილის აჩქარება, $\overrightarrow{W_A}$ - პოლუსის აჩქარების ვექტორია. $\overrightarrow{W_{BA}}$ არის B წერტილის აჩქარება პოლუსის გარშემო ბრუნვის დროს. სრული ფარდობითი აჩქარების ვექტორი უდრის

$$\overrightarrow{W_{BA}} = \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} + \overrightarrow{W_{BA}^{n}}\ , \tag{12}$$

მხები აჩქარების სიდიდე უდრის

$$W_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \cdot BA. \tag{13}$$

ნორმალური აჩქარების სიდიდე უდრის

$$W_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB \tag{14}$$

როგორც (13) და (14) განტოლებებიდან ჩანს, მხები და ნორმალური აჩქარების სიდიდე შეიძლება ვიპოვოთ, თ უ გვეცოდინება პოლუსის გარშემო ბრუნვის განტოლება $\varphi = f_3(t)$ ან კუთხური სიჩქარე ω და

კუთხური აჩქარება ε . B წერტილის აჩქარების ვექტორი შეიძლება მივიღოთ სამი ვექტორის გეომეტრიული შეკრებით

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} + \overrightarrow{W_{BA}^{n}}.$$

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოხსნისას

ანალიზური ხერხით ამოცანის ამოხსნა არ წარმოადგენს სირთულეს თუ ცნობილია მოძრაობის განტოლებები. იმ შემთხვევაში, როცა მოითხოვება ამ განტოლებების შედგენა, აუცილებელია პირველ რიგში ავირჩიოთ უძრავი კოორდინატთა სისტემა xoy. შემდეგ ვირჩევთ მოძრავი სისტემის $x_1 o_1 y_1$ სათავეს o_1. მაძრავი სისტემის სათავეს ვირჩევთ ისე, რიმ შესაძლებელი იყოს მისი მოძრაობის განტოლებების შედგენა და მოძრავი წერტილის კოორდინატები დადგენა ამ სისტემაში. ნებისმიერი წერტილისსიჩქარისა და აჩქარების დადგენა შესაძლებელია (6) და (8) განტოლებების გამოყენებით. იგივე სიდიდეები შეიძლება სხვა გზითაც ვიპოვოთ, თუ ვისარგებლებთ (10) და (14) ვექტორული დამოკიდებულებებით.

სხეულის წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრის გრაფიკული ხერხი და მეთოდური მითითებები სიჩქარისა და აჩქარების გეგმის ასაგებად

წინა პარაგრაფში მოყვანილი ბრტყელი მოძრაობის დროს წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების გამოსათვლელი გეომეტრიული თანაფარდობები

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}},\ \ \overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}}, \qquad (1)$$

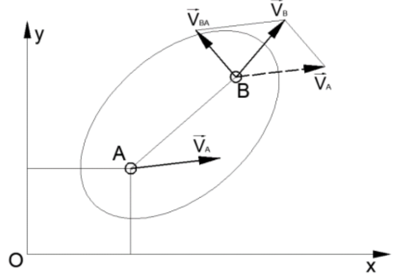
საშუალებას გვძლევს გრაფიკულად განვსაზღვროთ სხეულის წერტილს სიჩქარე და აჩქარება დროის ნებისმიერი მომენტისთვის.

განვიხილოთ სიჩქარისა და აქარების განსაზღვრის გრაფიკული ხერხი.

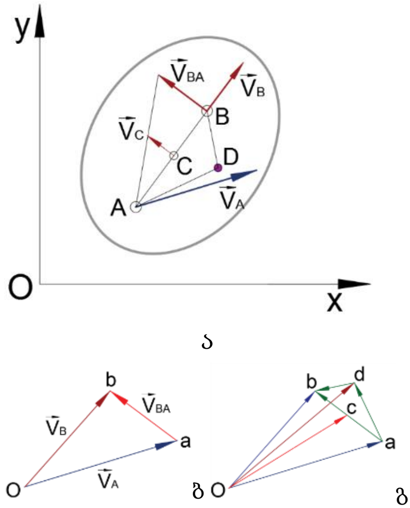
სიჩქარეთა გეგმა. ვთქვათ ბრტყელი ფიგურა ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას xoy სიბრტყეში. პოლუსად ავირჩიოთ A წერტილი, რომლის სიჩქარე $\overrightarrow{V_A}$ ცნობილია. ცნობილია ასევე პოლუსის გარშემო ბრუნვის სიჩქარე $\overrightarrow{V_{AB}}$, მაშინ B წერტილის სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ გამოითვლება, როგორც ამ ორი სიჩქარის გეომეტრიული ჯამი. ეს ჯამი გრაფიკულად გამოსახულის ნახ.11-ზე. იგივე სიჩქარე შეიძლება მივიღოთ სიჩქარეთა გეგმის საშულებით. ამისათვის ნებისმიერად არჩეულ წერტილზე გადავდოთ A წერტილის სიჩქარის ვექტორი არჩეული მასშტაბით. ამ ვექტორის ბოლოდან გადავდოთ B წერტილის ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი $\overrightarrow{V_{BA}}$. მათი გეომეტრიული ჯამი $\overrightarrow{Ob}$ უდრის აბსოლუტურ სიჩქარეს. აგებულ ფიგურას (ნახ.12) ეწოდება სიჩქარეთა გეგმა. სიჩქარეთა გეგმის საშუალებით შეიძლება ავაგოთ ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე. მაგალითად, ავიღოთ წერტილი C, რომელიც მდებარეობს AB მონაკვეთის შუა წერტილში. ამ წერტილის სიჩქარის ვექტორი შეიძლება მივიღოთ ab მონაკვეთის იგივე თანაფარდობით გაყოფით, როგორც გეგმაზეა (ამ შემთხვევაში შუაზე გაყოფით) და შევაერთოთ ეს წერტილი სიჩქარეთა გეგმის პოლუსთან. ვექტორი $\overrightarrow{OC}$ იქნება ფიგურის C წერტილის სიჩქარე.

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{CA}}. \qquad (2)$$

ფარდობითი სიჩქარე $\overrightarrow{V_{CA}}$ უდრის $\overrightarrow{V_{BA}}$ სიჩქარის ნახევარს და მიმართულია AM წრფის მართო-



ნახ. 11



ნახ.12

ბულად. ის უდრის $\overrightarrow{ac}$ ვექტორს სიჩქარეთა გეგმაზე. აქედან გამომდინარე, $\overrightarrow{Oc}$ უდრის C წერტილის სიჩქარეს.

რომ ვიპოვოთ ისეთი D წერტილის სიჩქარე, რომელიც არ ძევს AB მონაკვეთზე, შევაერთოთ ის A და B წერტილებთან (ნახ.12ა). D წერტილის ფარდობითი სიჩქარე $\overrightarrow{V_{DA}}$ მიმართულია AD წრფის მართობულა, ხოლო იგივე წერტილის ფარდობითი სიჩქარე B წერტილის მიმართ $\overrightarrow{V_{DB}}$ მართობულია DB წრფისა.

თუ გავავლებთ სიჩქარეთა გეგმაზე ამ ფარდობითი სიჩქარეების პარალელურ წრფეებს. მავიღებთ მათ გადაკვეთაზე d წერტილს. შევაერთოთ d წერტილი გეგმის პოლუსთან და მივიღებთ D წერტილის აბსოლუტურ სიჩქარეს $\overrightarrow{Od} = \overrightarrow{V_D}$ და ფარდობითი სიჩქარის ვექტორს

$$\overrightarrow{da} = \overrightarrow{V_{DA}} \text{ და } \overrightarrow{db} = \overrightarrow{V_{DB}}.$$

ამრიგად, აბსოლუტური სიჩქარის ვექტორი შეიძლება ავაგოთ სხეულის ნებისმიერი წერტილისათვის, თუ გამოვალთ სიჩქარეთა გეგმიდან.

ზოგჯერ ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი არ არის მოცემული და ცნობილია მხოლოდ წრფე, რომელზედაც ის მდებარეობს. მაშინ სიჩქარეთა გეგმის ასაგებად უნდა ვიცოდეთ B წრტილის აბსოლუტური სიჩქარის მიმართულება. A წერტილის $\overrightarrow{V_A}$ სიჩქარის ბოლო წერტილიდან გავავლოთ ფარდობითი სიჩქარის პარალელური წრფე, ხოლო საწყისი წერტილიდან აბსოლუტური სიჩქარის პარალელური წრფე. მათი გადაკვეთის წერტილი მომცემს სიჩქარეთა გეგმაზე b წერტილს.

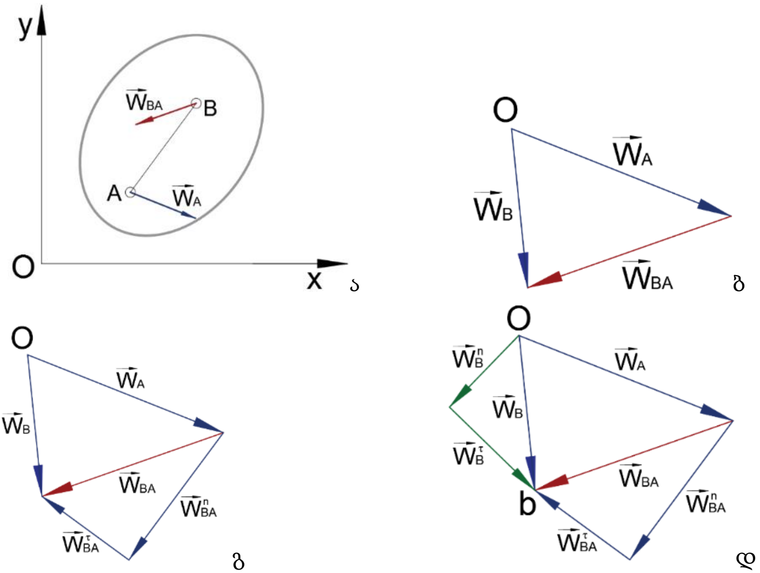
აჩქარებათა გეგმა . სხეულის B წერტილის აჩქარება ბრტყელი მოძრაობის დროს გრაფიკულად შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ფორმულებიდან ერთერთით.

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}}, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^{n}} + \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} \tag{2}$$

B წერტილია აჩქარება პირველი ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ, თუ ცნობილია A პოლუსის აჩქარება $\overrightarrow{W_A}$ და ამ პოლუსის მიმართ B წერტილის ფარდობითი აჩქარება - $\overrightarrow{W_{BA}}$. იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია პოლუსის აჩქარებს $\overrightarrow{W_A}$ და პოლუსის მიმართ ფარდობითი აჩქარება $\overrightarrow{W_{AB}}$, სრულ აჩქარებას ვღებულობთ (1) ფორმულის საშუალებით (ნახ.13). მართლაც, ავირჩიოთ აჩქარებათა გეგმის პოლუსად O წერტილი,

გადავდოთ არჩეულ მასშტაბში პოლუსის აჩქარება $\overrightarrow{W_A}$, შემდეგ მისი ბოლოდან გადავდოთ ფარდობითი აჩქარების ვექტორი $\overrightarrow{W_{BA}}$. შევაერთოთ O წერტილი მისი ბოლოსთან და მივიღებთ B წერტილის აჩქარებას. მიღებულ სამკუთხედს ეწოდება აჩქარებათა გეგმა მოცემული სხეულისათვის,



ნახ. 13

რადგან მისი საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ ამ სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება.

ტოლობა (2) შეიძლება გამოვიყენოთ აჩქარების საპოვნელად, თუ გარდა პოლუსის აჩქარებისა, ვიცით სიდიდით და მიმართულებით ფარდობითი აჩქარების ნორმალური მდგენელი $\overrightarrow{W_{BA}^{n}}$, აგრეთვე წრფე, რომლის გასწვრივაც მიმართულია B წერტილის აჩქარება. ამ შემთხვევაში აჩქარების გეგმას ვადგენთ შემდეგნაირად: აჩქარების გეგმის O პოლუსიდან (ნახ. 13 გ) გადავდოთ ვექტორი $\overrightarrow{W_A}$. შემდეგ მისი ბილოდან გადავდოთ $\overrightarrow{W_{BA}^{n}}$ ვექტორი. ეს ვექტორი მიმართულია პოლუსისკენ. ამ ვექტორის ბოლოდან გავავლოთ ფარდობითი აჩქარების მხები მდგენელის

პარალელური წრფე. ,რომელიც ნორმალური მდგენელის მართობულია. ბოლოს, O პოლუსიდან გავავლოთ B წერტილის სრული აჩქარების პარალელური წრფე, ამ წრფის გადაკვეთა ფარდობითი აჩქარების მხები მდგენელის წრფესთან, გვაძლევს b წერტილს, რომელიც არის $\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{W_B}$ ვექტორის ბოლო წერტილი. ხოლო ab მონაკვეთი განსაზღვრავს ფარდობითი აჩქარებას $\overrightarrow{W_{BA}}$.

იმ შემთხვევაში, როცა B წერტილის აბოლუტური აჩქარების ვექტორის მოქმედების წრფე ცნობილია (ნახ.13დ) , აჩქარებათა გეგმის ასაგებად უნდა განვსაზღვროთ აბსოლუტური და ფარდობითი აჩქარებების ნორმალური მდგენელები სიდიდით და მიმართულებით, გავავლოთ მხები აჩქარებების პარალელური წრფეები და მივიღებთ b წერტილს.

სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრის გრაფო-ანალიზური მეთოდი და მითითებები ამოცანის ამოხსნისათვის

ბრტყელი ფიგურის წერტილის სიჩქარის და აჩქარების გრაფიკული განსაზღვრა მოითხოვს სიჩქარეთა და აჩქარებათა გეგმის აგებას გარკვეულ მასშტაბში, რაც გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული. მაგრამ ამ სიდიდეების განსაზღვრა შესაძლებელია სიჩქარეთა და აჩქარებათა გეგმის აგებით და აგრეთვე გეომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით (სინუსების თეორემა, კოსინუსების თეორემა და სხვა), ან კიდევ ვექტორული ტოლობის შესაბამის ღერძებზე დაგეგმილებით. სიჩქარეების განსაზღვრას ასევე ამარტივებს სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემის გამოყენება.

სხეულის წერტილთა სიჩქარეების განსაზღვრა სიჩქარეთა მყისი ცენტრის გამოყენებით

მეორე თეორემის თანახმად, ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მობრუნება რაიმე წერტილის გარშემო.

ამ წერტილს სასრული მობრუნების ცენტრი ეწოდება. ამ ცენრტის მდებარეობა შეიძლება ვიპოვოთ, თუ ცნობილია სხეულის საწყისი და საბოლოო მდებარეობა (ნახ.14). სხეულის საბოლოო მდებარეობა და შესაბამისად სასრული ბრუნვის ცენტრის მდებარეობა დამოკიდებულია დროის შუალედზე, რომელშიც გადაადგილდება წერტილი. თუ დროის შუალედს უსასრულოდ შევამცირებთ, მაშინ ცენტრი დაიკავებს თავის ზღვრულ მდებარეობას, რომელსაც სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ეწოდება.

თუ ვიცით სხეულის რაიმე წერტილის სიჩქარე V_a და ამ წერტილიდან მყის ცენტრამდე მანძილი l, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ სხეულის კუთხური სიჩქარე ფორმულით

$$\omega = \frac{V_A}{l}.$$

თუ ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარის სიდიდეს და მიმართულებას, მაშინ ვიპოვით სხეულის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობას, თუ ცნობილი იქნება მანძილი ამ წერტილიდან მყის ცენრტამდე. სიჩქარის ვექტორი მიმართული იქნება ამ წერტილის მყის ცენტრთან შემაერთებელი წრფის მართობულად იმ მხარეს საითაც ხდება ბრუნვა.

მოძრავი და უძრავი ცენტროიდები

სხეულის სიჩქართა მყისი ცენტრების გეომეტრიულ ადგოლს ყზრავ საკოორდინატო სისტემაში, ეწოდება უძრავი ცენტროიდები, ხოლო ამ ცენტრების გეომეტრიულ ადგილს სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში, ეწოდება მოზრავი ცენტროიდი. სხეულის მოზრაობის დროს მოძრავი ცენტროიდი უსრიალოდ გორავს უძრავ ცენტროიდზე. აქედან გამომდინარე, ყოველ წერტილს მოძრავ ცენტროიდზე სეესაბამება ერთად-ერთი წერტილი უძრავ ცენტროიდზე. თუ ცნობილია ცენტროიდები, მაშინ სხეულის მოძრაობა შეიძლება განვახორციელოთ როგორც მოძრავი ცენტროიდის უსრიალო გორვა უძრავ ცენტროიდზე.

ცენტროიდები შეიძლება ავაგოთ როგორც ანალიზურად, ასევე გრაფიკულად. უძრავი ცენტროიდი განისაზღვრება ანალიზურად იმ ფორმულებით, რომლებიც განსაზღვრავებ სიჩქარეთ მყისი ცენტრის მდებარეობას უძრავ საკოორდინატო სისტემაში (x_P და y_p) . ეს კოორდინატები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$x_p = x_{o1} - \frac{V_{o1y}}{\omega}, \qquad (1)$$
$$y_p = y_{o1} + \frac{V_{o1x}}{\omega}. \qquad (2)$$

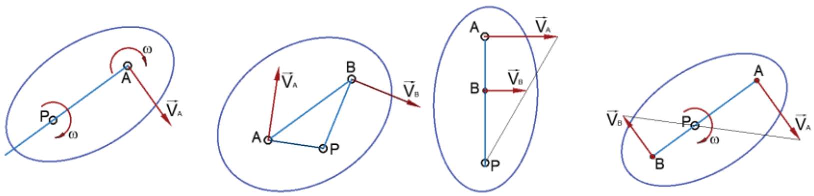
სიჩქარეთა მყისი ცენტრის კოორდინატები მოძრავ ფიგურასთან უძრავად დაკავშირებული სისტემის მიმართ (მოძრავი ცენტროიდი) განისაზღვრება ფორმულებით:

$$x_{1p} = \frac{V_{o1x}sin\varphi - V_{o1y}cos\varphi}{\omega}, \qquad (3)$$
$$y_{1p} = \frac{V_{o1x}cos\varphi + V_{o1y}sin\varphi}{\omega}. \qquad (4)$$

(1)-(4) ფორმულებში x_{o1}, და y_{o1} არიან ფიგურის პოლუსის კოორდინატები. φ არის მოძრავი სისტემის უძრავის მიმართ მობრუნების კუთხე. V_{o1x} და V_{o1y} - პოლუსის წერტილის სიჩქარის გეგმილებია შესაბამის ღერძებზე, ხოლო ω - მოძრავი სისტემის უძრავი სისტემის მიმართ ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა.

მეთოდური მითითებები ამოცანის ამოსახსნელად

სიჩქარეთა მყისი ცენტრის P და კუთხური სიჩქარის პოვნას აქვს დიდი მნიშვნელობა. თუ გვეცოდინება სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მდებარეობა და კუთხური სიჩქარე, შეიძლება ვიპოვოთ სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე მოცემულ მომენტში.



ა ბ გ დ

ნახ. 15

განვიხილოთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მოძებნის რამდენიმე ხერხი:

1. მოცემულია სხეულის რომელიმე წერტილის სიჩქარე და კუთხური სიჩქარე. ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს $\overrightarrow{V_A}$ სიჩქარის ვექტორის მართობზე, დაშორებულია AP მანძილით, სადაც

$$AP = \frac{V_A}{\omega}$$

და მიმართულია ისე, რომ სიჩქარის მიმართულება ემთხვევა მყისი ცენტრის გარშემო ბრუნვის მიმართულებას (ნახ.15ა)

2. ცნობილია სხეულის ორი A და B წერტილის სიჩქარე $\overrightarrow{V_A}$ და $\overrightarrow{V_B}$, აგრეთვე, მანძილი ამ წერტილებს შორის (ნახ. 15ბ). ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობა A და B წერტილებიდან მათი სიჩქარეების მართობი წრფეების გადაკვეთის წერტილში. მანძილები AP და BP გამოითვლება ან გრაფიკულად ან ანალიზურად ამოცანის პირობიდან გამომდინარე.

3. შესაძლებელია ცნობილი იყოს ისეთი ორი წერტილის სიჩქარე, რომ ისინი მდებარეობდნენ ერთ მართობზე. ამ დროს გვაქვს ორი შემთხვევა: ა) $\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B}$ - ამ შემთხვევაში სხეული ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობა და ყველა წერტილის სიჩქარე ამ მომენტში ერთმანეთის ტოლია. თუ სიჩქარეები განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მაშინ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს ამ წერტილებზე გამავალი წრფისა და მათი სიჩქარეების ბოლო წერტილებზე გამავალი წრფის გადაკვეთის წერტილში (ნახ. 15გ,დ). მისი მდებარეობა განისაზღვრება PAD და PBC სამკუთხედების მსგავსებიდან

$$\frac{BP}{AB} = \frac{V_B}{V_A}.$$

სხეულის წერტილთა აჩქარების განსაზღვრა აჩქარებათა მყისი ცენტრის გამოყენებით

ბრტყელი ფიგურის აჩქარებათა მყისი ცენტრი ეწოდება წერტილს, რომლის აჩქარება მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია. აჩქარებათა მყისი ცენტრის საშუალებით შესაძლებელია მოცემულ მომენტში განვსაზღვროთ სხეულის ნებისმიერი წერტილის სრული აჩქარება, თუ ცნობილია კუთხური სიჩქარე ω და კუთხური აჩქარება ε მოცემულ მომენტში.

აჩქარებათა მყისი K ცენტრიდან AK მანძილით დაშორებული A წერტილის აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$W_A = AK\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

ხოლო კუთხე, რომელსაც აჩქარების ვექტორი ადგენს AK წრფესთან, გამოითვლება ფორმულით

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ წერტილის აჩქარება პროპორციულია აჩქარებათა მყის ცენტრამდე მანძილისა და ამ წერტილის აჩქარებათა მყის ცენტრთან შემაერთებელ წრფესთან ადგენს ერთი და იგივე კუთხეს.

მეთოდური მითითებები ამოცანის ამოხსნისას

აჩქარებათა მყისი ცენტრის მდებარეობა შეიძლება განისაზღვროს სხვადასხვა ხერხით. ეს დამოკიდებულია ამოცანის პირობაზე. ეს პირობა შეიძლება ასეთი იყოს:

1. მოცემულია ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის განტოლებები: $x = f_1(t), y = f_2(t), \varphi = f_3(t)$. მაშინ სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარების გეგმილები უძრავი საკოორდინატო სისტემის ღერძებზე გამოითვლება ფორმულებით:

$$W_x = W_{o1x} - \varepsilon(y - y_{o1}) - \omega^2(x - x_{o1}), \tag{1}$$

$$W_y = W_{o1y} - \varepsilon(x - x_{o1}) - \omega^2(y - y_{o1}). \tag{2}$$

აჩქარებათა მყისი ცენტრის აჩქარება ნულის ტოლია, ამიტომ, თუ გავიტოლებთ ამ ტოლობების მარჯვენა მხარეებს ნულს და ამოვხსნით x და y ,რომლებიც აჩქარებათა მყისი ცენტრის კოორდინატები(x_k, y_k) არიან, მივიღებთ:

$$x_k = x_{o1} + \frac{W_{o1x}\omega^2 - W_{o1y}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{3}$$

$$y_k = y_{o1} + \frac{W_{o1x}\varepsilon - W_{o1y}\omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{4}$$

2. მოცემულია: ფიგურის რომელიმე წერტილის აჩქარების ვექტორი, ფიგურის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება სიდიდით და მიმართულებით. ამ შემთხვევაში აჩქარებათა მყისი ცენტრი ძევს წრფეზე რომელიც აჩქარების ვექტორთან ადგენს μ კუთხეს, რომელიც განისაზღვრება ფორმულიდან

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

და გადაზომილია აჩქარების ვექტორიდან კუთხური აჩქარების მიმართულებით. მყის ცენტრამდე მანძილი უდრის

$$AK = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

3. მოცემულია ორი წერტილის აჩქარების ვექტორი $\overrightarrow{W_A}$ და $\overrightarrow{W_B}$, აგრეთვე მოცემულია მანძილი მათ შორის. ამ შემთხვევაში აუცილებელია არა მარტო აჩქარებათა მყისი ცენტრის პოვნა, არამედ კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების სიდიდისა და მიმართულების პოვნა.

აჩქარებათა მყისი ცენტრის პოვნა შესაძლებელია გრაფიკულად. ავირჩიოთ შესაბამისი მასშტაბი აჩქარებებისა და მანძილისათვის.ზოგ შემთხვევაში ასეთი ამოცანები იხსნება გრაფო- ანალიტიკური ხერხით. ე.ი. აგებენ გრაფიკს (არა მასშტაბში) და საძიებელ სიდიდეებს პოულობენ ანალიზურად.

აჩქარების მოცემული ვექტორები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ტოლობით

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}}.$$

აქედან

$$\overrightarrow{W_{BA}} = \overrightarrow{W_B} - \overrightarrow{W_A}.$$

კუთხე $\overrightarrow{W_{BA}}$ ვექტორსა და AB წრფეს შორის განისაზღვრება კუთხური აჩქარებისა და კუთხური სიჩქარის საშუალებით

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, ეს კუთხე ემთხვევა კუთხეს, რომელსაც ადგენს აჩქარების ვექტორი აჩქარებათა მყის ცენტრთან შემაერთებელი წრფის მიმართულებასთან. $\overrightarrow{W_A}$ და $\overrightarrow{W_B}$ ვექტორებიდან გავავლოთ წრფეები ამ კუთხით. მიღებული წრფეების გადაკვეთის წერტილი წარმოადგენს აჩქარებათა მყის ცენტრს.

რიგობითი, პლანეტარული და დიფერენციალური კბილანა გადაცემის კინემატიკა

კბილანა თვლების ისეთ შეერთებას, როცა მათი ღილვები უძრავ საკისრებში ბრუნავენ, ეწოდება რიგობითი შეერთება. ასეთი გადაცემის ერთი კბილანა თვალი არის წამყვანი, ხოლო დანარჩენები მომყოლი. ასეთ გადაცემას ახასიათებენ გადაცემათა რიცხვით, რომელიც უდრის წამყვანი კბილანას კუთხური სუჩქარის მიმყოლი კბილანას კუთხურ სიჩქარესთან შეფარდებას:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \qquad (1)$$

გადაცემათა რიცხვი შეიძლება გამოვსახოთ როგორც რადიუსების შეფარდება ასევე კბილთა რიცხვის შეფარდება:

$$i_{1n} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \ \dots \ \frac{z_n}{z_{n-1}}.$$

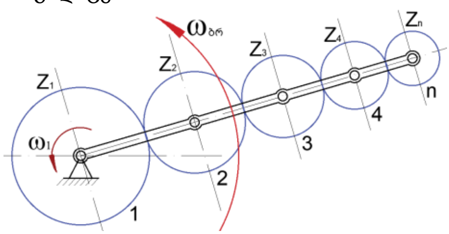
ან
$$i_{1n} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3} \ \dots \ \frac{r_n}{r_{n-1}}.$$

ზოგჯერ გადაცემათა რიცხვს უწოდებენ მიმყოლი თვალის კუთხური სიჩქარის წამყვანი თვალის კუთხურ სიჩქარესთან შეფარდებას:

$$i_{1n} = \frac{\omega_n}{\omega_1}.$$

ამ შემთხვევაში , შესაბამისად , იცვლება რადიუსების შეფარდებები და ასევე კბილთა რიცხვების შეფარდებები.

პლანეტარული გადაცემა გვაქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთი კბილანა უძრავადაა, ხოლო დანარჩენი თანმიმდევრულადაა მოდებაში და მოძრაობაში მოდის მრუდმხარას საშუალებით, რომლის ბრუნვის ღერძი ემთხვევა უძრავი კბილანას ბრუნვის ღერძს (ნახ.17). თუ პლანეტარული მექანიზმი ამოძრავებს აგრეთვე უძრავი ღერძის მქონე კბილანასაც (გარდა მრუდმხარას მოძრაობისა) მაშინ ასეთ გადაცემას ეწოდება დიფერენციალური გადაცემა.



ნახ. 17

ამრიგად, პლანეტარული გადაცემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც დიფერენციალური გადაცემის კერძო შემთხვევა. კერძოდ, წამყვანი კბილანა უძრავია.

მეთოდური მითითებები ამოცანის ამოსახსნელად

პლანეტარული და დიფერენციალური მექანიზმის რგოლების კინემატიკური მახასიათებლების განსაზღვრა ხდება შემდეგნაირად:

1. წარმტანი, ფარდობითი და აბსოლუტური მოძრაობის კუთხური სიჩქარის ვექტორების შეკრება. ამ დროს გამოიყენება ვექტორული ტოლობა

$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}, \tag{1}$$

სადაც $\overrightarrow{\omega_e}$ - წარმტანი მოძრაობის კუთხური სიჩქარეა; $\overrightarrow{\omega_r}$ - ფარდობითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე, ხოლო

$\overrightarrow{\omega_a}$ - აბსოლუტური მოძრაობის კუთხური სიჩქარე. თუ ლილვების ბრუნვის ღერძები პარალელურია, მაშინ (1) ტოლობა გადაიქცევა ალგებრულ ტოლობად. აბსოლუტური კუთხური აჩქარების ვექტორის მდებარეობა განისაზღვრება პარალელური ძალების შეკრების წესიდან გამომდინარე. აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის ვეტორი ემთხვევა ბრუნვის მყის ღერძს.

2. სიჩქარეთა მყისი ცენტრის გამოყენების მეთოდი. იმ შემთხვევაში, როცა სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ვიცით ან შესაძლებელია მისი პოვნა ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, კუთხური სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულით $\omega_a = V_a/r$.

3. “გაჩერების“ მეთოდი ძალიან მოსახერხებელია პლანეტარული და დიფერენციალური მექანიზმის რგოლების აბსოლუტური და ფარდობითი კუთხური სიჩქარეების განსაზღვრისათვის. ამისათვის აზრობრივად გავაჩერებთ პლანეტარული მექანიზმის მრუდმხარას,მივანიჭოთ მექანიზმის ყველა რგოლს მრუდმხარას კუთხური სიჩქარის საწინააღმდეგო კუთხური სიჩქარე. მაშინ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე იქნება ნულის ტოლი, ხოლო კბილანების კუთხური სიჩქარეები ტოლი იქნება საკუთარი საწყისი სიჩქარისა და მრუდმხარას კუთხური სიჩქარის სხვაობისა. ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად მოხერხებულია შევადგინოთ ასეთი ცხრილი:

კუთხური სიჩქარე		მრუდმხარა	კბილა თვალი			
			1	2	3	4
გაჩერებამდე		-	-	-	-	-
გაჩერების შემდეგ		-	-	-	-	-

აზრობრივი გაჩერების შემდეგ, წამყვანი თვალის კუთხური სიჩქარის შეფარდება ბოლო მიმყოლი თვალის კუთხურ სიჩქარესთან არის გადაცემათა რიცხვი. ამიტომ, ისე როგორც რიგობრივი გადაცემის დროს, გვაქვს

$$i_{1n}\,(-1)^m = \frac{\pm\omega_1-(\pm\omega_k)}{\omega_n-(\pm\omega_k)}, \qquad (2)$$

სადაც ω_n – არის n-ური კბილანას კუთხური სიჩქარე, $\pm\omega_1$ - წამყვანი კბილანას კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\pm\omega_k$ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა. m - გარე მოდების კბილანების რიცხვია. i_{1n} - გადაცემათა რიცხვია. კუთხური სიჩქარის წინ დადებითი ნიშანი აიღება მაშინ, როცა ბრუნვა ხდება საათის ისრის მიმართულების საპირისპიროდ.

(2) ფორმულა სამართლიანის ყველა სახის გადაცემისათვის, მაგალითად,

როცა $\omega \neq 0$ და $\omega_k \neq 0$ დიფერენციალური გადაცემაა.

როცა $\omega = 0$ და $\omega_k \neq 0$ პლანეტარული გადაცემაა,

როცა $\omega = 0$ და $\omega_k = 0$ რიგობითი გადაცემაა.

მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო

ზოგადი ცნობები

უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მოძრაობის კანონი შეიძლება მივიღოთ ეილერის თეორემიდან: უძრავი წერტილის მქონე სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება მივიღოთ სამი , უძრავ წერტილში გამავალი, ღერძის გარშემო მობრუნების თანმიმდევრული შესრულებით.

ამრიგად, სხეულის მოძრაობის კანონი მოცემულია, თუ მოცემულია სამი ღერძის გარშემო მობრუნების კუთხეები დროის ნებისმიერ მომენტში, ანუ, მოცემულია ეილერის კუთხეები , როგორც დროის ფუნქციები:

$$\varphi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \;\; \psi = f_3(t). \tag{1}$$

სადაც ψ - წარმტანი ბრუნვის კუთხეა (პრეცესიის კუთხე), φ −ფარდობითი მობრუნების კუთხეა (საკუთარი ბრუნვის კუთხე), ხოლო $\theta -$ გადახრის კუთხეა (ნუტაციის კუთხე).

ეილერის კუთხეების (ნახ.18) საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ სხეულის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, აგრეთვე სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.

კუთხური სიჩქარის გეგმილები უძრავ საკოორდინატო ღერძებზე გამოისახება ეილერის ფორმულებით:

$$\omega_x = \theta cos\psi \dot{+} \varphi s\dot{i}n\theta \,, \tag{2}$$

$$\omega_y = \theta\ s\dot{i}n\varphi + \varphi cos\dot{\psi} s\imath n\theta, \tag{3}$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} cos\theta\ . \tag{4}$$

საიდანაც სრული კუთხური სიჩქარის სიდიდე უდრის

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}cos\theta}. \tag{5}$$

კუთხური სიჩქარის ვექტორის მიმართულების საპოვნელად უნდა გამოვთვალოთ მიმართულების კოსინუსები. კუთხური აჩქარების გეგმილების საპოვნელად უნდა გავაწარმოოთ (2),(3) და (4) ტოლობები, კერძოდ

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \qquad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \tag{6}$$

კუთხური აჩქარების სიდიდე უდრის

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \tag{7}$$

სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის გეგმილები გამოითვლება ფორმულებით:

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y,$$
$$V_y = \omega_z x - \omega_x z,$$
$$V_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

სრული სიჩქარის სიდიდე უდრის

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

სიჩქარის ვექტორის მომართულება განისაზღვრება მიმართულების კოსინუსების გამოთვლის შემდეგ.

ანალოგიურად განისაზღვრება სხეულის წერტილის აჩქარება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} W_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ W_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ W_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \tag{10}$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}\,.$$

აჩქარების ვექტორის მიმართულებაც ასევე განისაზღვრება მიმართულების კოსინუსების გამოთვლის შემდეგ.

უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მოძრაობა შეიძლება შევისწავლოთ ეილერის კიდევ ერთი თეორემით: უძრავი წერტილის მქონე სხეულის ნებისმიერი გადადგილება შეიძლება განვახორციელოთ ერთი მობრუნებით არჩეული ღერძის გარშემო. ამ თეორემის ძალით სხეულის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც უწყვეტი ბრუნვა იძრავ წერტილზე გამავალი ღერძის გარშემო, როცა ეს ღერძი უწყვეტად იცვლის მდებარეიბას, ე. ი. მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვა.

ბრუნვის მყისი ღერძის მდებარეობის გეომეტრიულ ადგილს უძრავ სისტემაში ეწოდება უძრავი აქსოიდა. ბრუნვის მყისი ღერძების გეომეტრიულ ადგილს მოძრავი სხეულის მიმართ ეწოდება მოძრავი აქსოიდი.

თუ ცნობილია მოძრავი და უძრავი აქსოიდები, მაშინ სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო შეიძლება განვიხილოთ როგორც მოძრავი აქსოიდის გორვა უძრავ აქსოიდზე გასრიალების გარეშე.

თუ დროის მიცემულ მომენტში ვიცით ბრუნვის მყისი ღერძის მდებარეობა, მაშინ სხეულის წერტილის სიჩქარე გამოითვლება ფორმულებით:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{11}$$

აქედან სიჩქარის სიდიდე უდრის

$$V = \omega \cdot rsin\alpha = \omega \cdot r_0\,, \tag{12}$$

სადაც r_0 არის მანძილი მოცემული წერტილიდან მყის ბრუნვის ღერძამდე.

ანალოგიურად გამოითვლება წერტილის აჩქარება, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი შესაკრების სახით: ღერძისკენული და ბრუნვითი აჩქარებების ჯამად.

$$\vec{W} = \overrightarrow{W_{ღ}} + \overrightarrow{W_{ბრ}}\,. \tag{13}$$

სადაც ღერძისკენული აჩქარება უდრის

$$\overrightarrow{W_{ღ}} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \tag{14}$$

მიმართულია ბრუნვის მყისი ღერძის მართობულად წერტილიდან ღერძისკენ, ხოლო სიდიდით უდრის

$$W_{ღ} = \omega^2 r_0. \tag{15}$$

სადაც r_0 არის მანძილი წერტილიდან ბრუნვის მყის ღერძამდე.

ბრუნვითი აჩქარების ვექტორი არის

$$\overrightarrow{W_{ბრ}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \tag{16}$$

ამ აჩქარების სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$W_{ბრ} = \varepsilon \cdot rsin\alpha\,, \tag{17}$$

სადაც α არის კუთხე ბრუნვის მყის ღერძსა და კუთხური აჩქარების ვექტორს შორის.

არსებობს უძრავი წერტილის მქონე სხეულის კუთხური სიჩქარისა და სიჩქარისა და აჩქარების გამოთვლის კიდევ ერთი ხერხი. სხეულის ბრუნვა შეიძლება განვიხილოთ როგორც რთული მოძრაობა: ფარდობითი მოძრაობა -ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო . ეს ღერძი გადის უძრავ წერტილზე და უძრავადაა დაკავშირებული სხეულთან. მას საკუთარი ბრუნვის ღერძს უწოდებენ. შესაბამის კუთხურ სიჩქარეს კი ფარდობითი კუთხური სიჩქარე $\overrightarrow{\omega_r}$ ეწოდება. წარმტანი მოძრაობა არის სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო და შესაბამის კუთხურ სიჩქარეს $\overrightarrow{\omega_e}$ წარმტანი კუთხური სიჩქარე ეწოდება.

აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე არის ფარდობითი და წარმტანი კუთხური სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამი

$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_r} + \overrightarrow{\omega_e}\,. \tag{18}$$

თუ ცნობილია კუთხური სიჩქარეების ვექტორები, მაშინ ნებისმიერი წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე განისაზღვრება ფორმულით

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e}\ . \tag{19}$$

სხეული წერტილის აჩქარების საპოვნელად საჭიროა ვიცოდეთ კუთხური აჩქარება. კუთხური აჩქარების ვექტორი უდრის კუთხური სიჩქარის ვექტორის წარმოებულს.

$$\overrightarrow{\varepsilon_a} = \frac{d\omega_a}{dt}\,. \tag{20}$$

იმ შემთხვევაში, როცა კუთხური სიჩქარე სიდიდით მუდმივია, და საკუთარი ბრუნვის ღერძი ბრუნვის უძრავ ღერძთან ადგენს მუდმივ კუთხეს, კუთხური აჩქარების ვექტორები შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულებით:

$$\overrightarrow{\varepsilon_a} = \overrightarrow{\omega_a} \times \overrightarrow{\omega_r}. \tag{21}$$

სხეულის წერტილის აჩქარების ვექტორი გამოითვლება ფორმულით

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_k}\ . \tag{22}$$

მეთოდური მითითებები ამოცანის ამოსახსნელად

ამ განყოფილების ამოცანები შეიძლება დავყოთ რამდენიმე ჯგუფად,

1. ამოცანები, სადაც უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვა მოცემულია ეილერის განტოლებებით. ამ სემთხვევაში კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება ასევე სხეულის წერტილის სიჩქარე და აჩქარება გამოითვლება (1) –(11) ფორმულებით.

2. ამოცანები, სადაც აბსოლუტური მოძრაობა დაყოფილია წარმტან და გადატანით ბრუნვად შესაბამისი ღერძების გარშემო. ამ შემთხვევაში კუთხური სიჩქარის საპოვნელად აგებენ კუთხური სიჩქარის პარალელოგრამს წინა პარაგრაფის (18) ფორმულის შესაბამისად. აქედან პოულობენ შესაბამის სიდიდეებს.

სხეულის წერტილთა აჩქარება გამოითვლება ორი გზით: აჩქარების წარმოდგენა ,როგორც ბრუნვითი და ღერძისკენული აჩქარებების ჯამი ან წარმტანი, ფარდობითი და კორიოლისის აჩქარებების ჯამი.

წერტილის კინემატიკა

10. ტრაექტორია და მოძრაობის განტოლებები

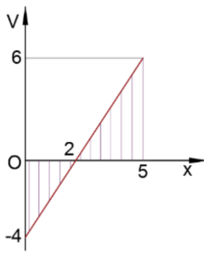
ამოცანა 10.1.0

წერტილის მოძრაობის მოცემულიმგანტოლებიდან იპოვეთ წერტილის დაშორება S ტრაექტორიის გასწვრივ სათავიდან ბოლო მდებარეობამდე და გავლილი გზა σ მითითებულ შუალედში. (S და σ - სანტიმეტრებში, ხოლო დრო წამებში).

1) $S = 5 - 4t + t^2,\ 0 \le t \le 5,$

2) $S = 1 + 2t - t^2,\ 0 \le t \le 2.5,$

3) $S = 4\sin 10t,\ \pi/20 \le t \le 3\pi/10.$



ნახ. 1

ამოხსნა

1)) $S = 5 - 4t + t^2,\ 0 \le t \le 5,$

განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარე:

$V = \frac{dS}{dt} = 2t - 4.$

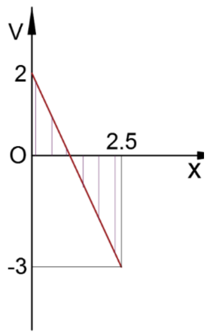
როცა t=2 წმ წერტილის სიჩქარე იცვლის ნიშანს ამიტომ გავლილი გზა უდრის (ნახ.1)

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 13.$

t=5 წმ მომენტისთვის $S(5) = 10$ სმ.

2) $S = 1 + 2t - t^2$, კოორდინატი იქნება $S(2.5) = 1 + 2 \cdot 2.5 - 2.5^2$=-0.25სმ. ვიპოვოთ სიჩქარე : $V = \frac{dS}{dt} = 2 - 2t$. როცა t=2 წმ სიჩქარე იცვლის ნიშანს, ამიტომ გავლილი მანძილი (ნახ.2)

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 1.5 = 3.25$



ნახ. 2

3) $S = 4sin10t, \pi/20 \le t \le 3\pi/10$.

წერტილის კოორდინატია S($3\pi/10$) $=$ $4\sin\left(10 \cdot \frac{3\pi}{10}\right) = 0$ განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარე:

$V = \frac{dV}{dt} = 40cos10t$. ვიპოვოთ დრო, როცა სიჩქარე იცვლის ნიშანს.

$\cos 10t = 0, 10t = \frac{\pi}{2} + n\pi, n\epsilon Z.\ \ t = \frac{\pi}{20}(1 + 2n).$

$\sigma = \int_0^{3\pi/10} |V| dt = 20$ სმ.

პასუხი: 1) $S = 10სმ, \sigma = 13სმ.$ 2) $S = -0.25$ სმ. $\sigma = 3.25$ სმ. 3) $S = 0, \sigma = 20$სმ.

ამოცანა 10.2.

წერტილის მოძრაობის მოცემული განტოლებებიდან იპოვეთ მისი ტრაექტორია კოორდინატებში და მიუთითეთ მოძრაობის მიმართულება.

1) $x = 3t - 5, y = 4 - 2t$. 2) $x = 2t, y = 2t^2$, 3) $x = 4sin10t, y = 3cos10t$.

4) $x = 2 - 3cos5t, y = 4sin5t - 1$, 5) $x = cht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), y = sht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

ამოხსნა

1) გამოვრიცხოთ განტოლებებიდან დროის პარამეტრი და დავაკავშიროთ ერთმანეთს კოორდინატები:

$$\begin{cases} x = 3t - 5, \\ y = 4 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 6t - 10 \\ 3y = 12 - 6t \end{cases} \rightarrow 2x + 3y = 2.$$

როგორც ვხედავთ წერტილის ტრაექტორია არის წრფე. წერტილის საწყისი მდებარეობაა $x(0) = -5, y(0) = 4$.

2) მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დროის პარამეტრი და მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას ცხადი სახით.

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 8t^2 \end{cases} \rightarrow \ y = 2x^2.$$ ტრაექტორია არის პარაბოლა.

3) $$\begin{cases} y = 3cos10t \\ x = 5sin10t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{y}{3} = cos10t \\ \frac{x}{5} = sin10t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{3^2} = cos^2 10t \\ \frac{x^2}{5^2} = sin^2 10t \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

ტრაექტორია არის ელიფსი. საწყისი მდებარეობაა $x(0) = 0, y(0) = 3$. წერტილი მოძრაობს სათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით.

4) $$\begin{cases} x = 2 - 3cos5t \\ y = 4sin5t - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = -cos5t \\ \frac{y+1}{4} = sin5t \end{cases} \rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$ - ელიფსი.

წერტილის საწყისი მდებარეობაა $x(0) = -1, y(0) = -1$. წერტილი მოძრაობს ტრაექტორიაზე საათის ისრის ბრუნვის საპირისპიროდ.

5) $$\begin{cases} x = \mathrm{cht} = \frac{1}{2}(\mathrm{e^t} + \mathrm{e^{-t}}) \\ y = sht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2) \\ y^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2 \end{cases} \rightarrow \ x^2 - y^2 = 1$$

- ჰიპერბოლის ზედა შტო. წერტილის საწყისი მდებარეობაა $x(0) = 1, y(0) = 0$.

პასუხი: 1) ნახევარწრფე $2x - 3y - 2 = 0$, საწყისი მდებარეობაა $x = -5, \ y = 4$.

2) $y = 2x^2$ პარაბოლის მარჯვენა შტო საწყისი მდებარეობით $x = 0, y = 0$.

3) ელიფსი $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ საწყისი წერტილით $x=0, y=3$.

4) ელიფსი $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$. საწყისი მდებარეობაა $x=-1, y=-1$.

5) ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოს ზედა ნაწილი $x^2-y^2=1$ საწყისი მდებარეობით $x=1, y=0$.

ამოცანა 10.3.

ვიპოვოთ იმ წერტილის ტრაექტორია, რომლის განტოლებაა ($\overrightarrow{r_0}$ და $\vec{e}$ - მოცემულუ მუდმივი ვექტორია, $\vec{\imath}$ და $\vec{\jmath}$ საკოოედინატო ღერძების მგეზავია)

$$1)\ \vec{r}=\overrightarrow{r_0}+t\vec{e}\,, \quad 2)\ \vec{r}=\overrightarrow{r_0}+cost\,\vec{e}, \quad 3)\ \vec{r}=acos\frac{\pi}{1+t^2}\vec{\imath}+bsin\frac{\pi}{1+t^2}\vec{\jmath}\,.$$

ამოხსნა

1) $\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+t\vec{e}$. $\vec{e}=\vec{\imath}cos\alpha+\vec{\jmath}sin\alpha, \overrightarrow{r_0}=x_0\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}\,, \vec{r}=(x_0+tcos\alpha)\vec{\imath}+(y_0+tsin\alpha)\vec{\jmath}$, აქედან

$$\begin{cases} x=x_0+tcos\alpha\,, x(0)=x_0 \\ y=y_0+tsin\alpha, y(0)=y_{0.} \end{cases}$$

2) $\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+cost\,\vec{e}$, . $\vec{e}=\vec{\imath}cos\alpha+\vec{\jmath}sin\alpha, \overrightarrow{r_0}=x_0\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}$.

$$\vec{r}=x_0\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}+\vec{\imath}cos\alpha\cdot cost+\vec{\jmath}sin\alpha\cdot cost=(x_0+cos\alpha\cdot cost)\vec{\imath}+(y_0+sin\alpha\cdot cost)\vec{\jmath};$$

$$\begin{cases} x=x_0+cos\alpha\cdot cost\,, x(0)=x_0+cos\alpha, \\ y=y_0+sin\alpha\cdot cost, y(0)=y_0+sin\alpha \end{cases}.$$

3) $\vec{r}=acos\frac{\pi}{1+t^2}\vec{\imath}+bsin\frac{\pi}{1+t^2}\vec{\jmath}$;

$\begin{cases} x=acos\frac{\pi}{1+t^2} \\ y=bsin\frac{\pi}{1+t^2} \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - ელიფსის ზედა ნაწილი. წერტილი იწყებს მოძრაობას იწყებს ელიფსის მარცხენა წვეროდან და მონოტონურად უახლოვდება მარჯვენა წვეროს.

პასუხი: 1) ნახევარწრფე, რომელიც გადის საწყის $M_0(\overrightarrow{r_0})$ წერტილში და პარალელურია $\vec{e}$ ვექტორისა.

2) წრფის M_0M_1 მონაკვეთი, რომელიც გადის M_0 წერტილზე $\vec{e}$ ვექტორის პარალელურად.

საწყისი წერტილია $M_0(\overrightarrow{r_0}+\vec{e}\ )$; მეორე ბოლოს კოორდინატია $M_0(\overrightarrow{r_0}+\vec{e})$; როცა $t\rightarrow\infty$, მაშინ რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილი მავალჯერრ გაივლის ტრაექტორიის ბოლო წერტილს.

3) წერტილის ტრაექტორია არის ელიფსის ზედა ნაწილი. წერტილი მოძრაობას იწყებს მარცხენა წვეროდან და მიდის მარჯვენა წვეროსაკენ მონოტონურად.

ამოცანა 10.4

წერტილის მოძრაობის მოცემული განტოლებიდან იპოვეთ მისი ტრაექტორია, და აგრეთვე მიუთითეთ წერტილის მოძრაობის კანონი ტრაექტორიის გასწვრივ. ათვლა აწარმოეთ წერტილის საწყისი მდებარეობიდან.

1) $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.   2) $x = 3sint, y = -3cost$.

3) $x = acos^2t, y = asin^2t$ 4) $x = 5cos5t^2, y = 5sin5t^2$.

ამოხსნა

1) $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. $t^2 = \frac{x}{3}$; $y = 4 \cdot \frac{x}{3}$, $4x - 3y = 0$ - ნახევარწრფე.

$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$ $\int_0^t \sqrt{36t^2 + 64t^2}dt = \int_0^t 10tdt = 5t^2$. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

წერტილი მოძრაობს ნახევარწრფეზე $4x - 3y = 0$.

2) $\begin{cases} x = 3sint \\ y = -3cost \end{cases} \to \begin{cases} \frac{x^2}{9} = sin^2t \\ \frac{y^2}{9} = cos^2t \end{cases} \to x^2 + y^2 = 9.$- წრეწირი

$\begin{cases} \dot{x} = 3cost \\ \dot{y} = 3cost, \end{cases} \to S = \int_0^t \sqrt{9cos^2t + 9sin^2t}dt = 3t;\ x(0) = 0;\ y(0) = 3; \to M_o(0;3)$

წერტილი მოძრაობს წრეწირზე საათის ისრის ბრუნვის თანხვედრილი მიმართულებით.

3) $\begin{cases} x = acos^2t \\ y = asin^2t \end{cases} \to x + y = a$ ტრაექტორია არის წრფის მონაკვეთი.

მოძრაობა იწყება წერტილიდან $M_0(a,0)$.

$\begin{cases} \dot{x} = -2acostsint = -asin2t \\ \dot{y} = 2asintcost = asin2t \end{cases} \to S = \int_0^t \sqrt{a^2sin^22t + a^2sin^22t}\,dt =$

$\sqrt{2}a \int_0^t sin2tdt = \sqrt{2}asin^2t.$

4) $\begin{cases} x = 5cos5t^2 \\ y = 5sin5t^2 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = 25cos^25t^2 \\ y^2 = 25sin^25t^2 \end{cases} \to x^2 + y^2 = 25$ - წრეწირი.

$\begin{cases} \dot{x} = -50tsin5t^2 \\ \dot{y} = 50tcos5t^2 \end{cases} \to S = \int_0^t 50tdt = 25t^2;\ x(0) = 5;\ y(0) = 0 \to M_0(5,0).$

წერტილი მოძრაობს წრეწირზე საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით.

პასუხი: 1) ნახევარწრფე $4x - 2y = 0$; $S = 5t^2$;

2) წრეწირი $x^2 + y^2 = 9$; $S = 3t$;

3) x+y=a წრფის მონაკვეთი; $S = a\sqrt{2}\,sin^2t$;

4) წრეწირი $x^2 + y^2$=25; $S = 25t^2$.

ამოცანა 10.5

ხიდურა ამწე მოძრაობს საამქროს გასწვრივ განტოლებით $x = t$; ამწეზე განივი მიმართულებით მოძრაობს ურიკა კანონით $y = 0.5$ (x და y მეტრებშია, t-წამებშია). ჯაჭვი მოკლდება სიჩქარით V=0,5 მ/წმ. განსაზღვრეთ ტვირთის ცენტრის ტრაექტორია. საწყის მომენტში ტვირთი იმყოფება xoy სიბრტყეში. Oz ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით.

ამოხსნა

მოძრაობის განტოლებაა $\begin{cases} x = t \\ y = 1.5t \\ z = 0.5t \end{cases}$.

გამოვრიცხოთ დრო ამ განტოლებებიდან და მივიღებთ:

$\begin{cases} y = 1.5x \\ z = 0.5x \end{cases}$ - ეს არის წრფე, რომელიც მიიღება ორი სიბრტყის გადაკვეთით.

პასუხი: ტრაექტორია არის წრფე, რომლის განტოლებაა $y = 1.5x$; $z = 0.5x$.

ამოცანა 10.6.

მოძრავი წერტილი აღწერს ფიგურას, რომელიც მოცემულია განტოლებებით:

$$x = 3sint; y = 2cos2t;$$

სადაც, t -წამებშია. იპოვეტ ტრაექტორიის განტოლება, ააგეთ ის და მიუთითეთ წერტილის მოძრაობის მიმართულება. იპოვეთ აგრეთვე დრო, როცა წერტილი პირველად გადაკვეთს აბსცისათა ღერძს.

ამოხსნა

$$\begin{cases} x = 3sint \\ y = 2cos2t. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3sint \\ y = 2(1 - 2sin^2t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 9sin^2t \\ y = 2(1 - 2sin^2t) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} sin^2t = x^2/9 \\ y = 4 - 4sin^2t \end{cases} \rightarrow y = 2 - \frac{4}{9}x^2 \text{ . - პარაბოლა.}$$

$$|x| \leq 3; \quad |y| \leq 2 \text{ . } x(0) = 0; \; y(0) = 2.$$

პასუხი: წერტილი მოძრაობს პარაბოლაზე M_0 წერტილიდან M_1 წერტილისკენ. შემდეგ ამ წერტილიდან მიდის M_2 წერტილისკენ და შემდეგ ყველაფერი თავიდან მეორდება.

ამოცანა10.7.

საკოორდინატო ღერძების შესაბამისი არჩევის შემდეგ მაგნიტურ ველში ელექტრონის მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე:

$$y = acoskt;$$
$$x = asinkt;$$
$$z = vt,$$

სადაც a, k, v - მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია ელექტრონის მასაზე, მუხტზე და სიჩქარეზე და ,აგრეთვე, მაგნიტური ველის ინდუქციაზე. იპოვეთ ელექტრონის მოძრაობის კანონი და ტრაექტორია.

ამოხსნა

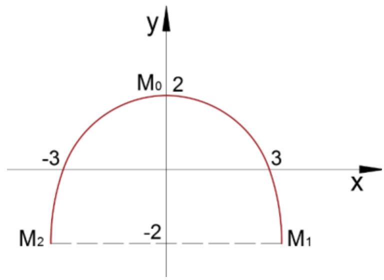
როცა $t = 0$; $x = 0$; $y = a$; $z = 0$. გავაწარმოოთ ეს ფუნქციები და ვიპოვოთ გავლილი გზა ფორმულით:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,.$$
$$\dot{x} = akcoskt;\ \dot{y} = -aksinkt;\ \dot{z} = v.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები წინა ტოლობაში და მივიღებთ ელექტრონის მოძრაობის კანონს ტრაექტორიაზე (ხრახნწირი).

$$S = \sqrt{a^2k^2 + v^2}\ t.$$

ელექტრონის z ღერძის გარშემო ბრუნვის სიხშირეა k. ბრუნვის პერიოდია: $T = \frac{2\pi}{k}$.



პასუხი: ელექტრონი მოძრაობს ხრახნწირზე. საწყისი წერტილია $x = 0$; $y = a$; $z = 0$; ხრახნის ბიჯი -$h = \frac{2\pi v}{k}$. ხრახნწირის გასწვრივ ელექტრონის მოძრაობის განტოლებაა $S = \sqrt{a^2k^2 + v^2}\ t$.

ამოცანა 10.8

წერტილის ჰარმოიული რხევის განტოლებაა $x = \mathrm{asin}(kt + \varepsilon)$, სადაც $a > 0$ - რხევის ამპლიტუდაა, $k > 0$ - რხევის წრიული სიხშირეა, $\varepsilon(-\pi < \varepsilon < \pi)$ - საწყისი ფაზაა. განსაზღვრეთ რხევის ცენტრი a_0, ამპლიტუდა, წრიული სიხშირე, რხევის პერიოდი, რხევის სიხშირე ჰერცებში და

საწყისი ფაზა მოძრაობის შემდეგი განტოლებებიდან (x-სანტიმეტრებშია, t -წამებშია):

1) $x = -7cos12t$;   2) $x = 4sin\frac{\pi t}{20} - 3cos\frac{\pi t}{20}$; 3) $x = 2 - 4sin140t$;

4) $x = 6sin^2 18t$;   5) $x = 1 - 4cos^2\frac{\pi}{60}t$.

ამოხსნა

მაგალითისთვის განვიხილოთ მეორე განტოლება. $x = 4sin\frac{\pi t}{20} - 3cos\frac{\pi t}{20}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $a = 4$; $b = 3$; $\varphi = \frac{\pi t}{20}$. მაშინ წინა განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x = asin\varphi + bcos\varphi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sin\varphi - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cos\varphi\right) =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}(sin\varphi cos\psi - sin\psi cos\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\varphi - \psi);$$

$$x = 5\sin\left(\frac{\pi t}{20} - arctg\frac{3}{4}\right).$$

აქედან გვაქვს: ამოლიტუდა $A = 5$ სმ, წრიული სიხშირე $k = \frac{\pi}{20}$, რხევის პერიოდი $T = \frac{2\pi}{k} = 40$ წმ. სიხშირე ჰერცებში $f = \frac{1}{T} = 0{,}025$, რხევის ფაზა $\varepsilon = -\varphi = -arctg\frac{3}{4}$. ზოგადი სახით

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(kt + \varepsilon) + a_0,$$

სადაც a_0 რხევის ცენტრია. ამ შემთხვევაში $a_0 = 0$.

ანალოგიურად ამოიხსნება დანარჩენი ამოცანებიც.

პასუხი:

ამოცანა№	a_0	a	K	T	f	ε
1	0	7	12	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	5	$\frac{\pi}{20}$	40	0,025	-arctg$\frac{3}{4}$
3	2	4	140	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{70}{\pi}$	π
4	3	3	36	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{18}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
5	-1	2	$\frac{\pi}{30}$	60	$\frac{1}{60}$	$-\frac{\pi}{2}$

ამოცანა 10.9

დრეკად ბაგირზე დაკიდებული ტვირთი ირხევა კანონით $x = \operatorname{asin}\left(kt + \frac{3\pi}{2}\right)$, სადაც a -სანტიმეტრებშია, k -რად/წმ. იპოვეთ ტვირთვის რხევის ამპლიტუდა და წრიული სიხშირე, თუ რხევის პერიოდია 0,4 წმ და საწყის მომენტში $x_0 = -4$ სმ.

ამოხსნა

ამპლიტუდას ვპოულობთ პირობიდან: $x = \operatorname{asin}\left(kt + \frac{3\pi}{2}\right)$, როცა t=0, მაშინ

$x = x_0 = -4$; ჩასმით მივიღებთ :

$-4 = asin\frac{3\pi}{2}$, აქედან $a = 4$ სმ.

წრიული სიხშირე გამოითვლება ტოლობიდან;

$k = \frac{2\pi}{T} = 5\pi$ რად/წმ.

პასუხი: $a = 4$ სმ, $k = 5\pi$ რად/წმ.

ამოცანა 10.10

იპოვეთ იმ წერტილის ტრაექტორია, რომელიც ერთდროულად ასრულებს ორ ჰარმონიულ რხევას ერთნაირი სიხშირითა და განსხვა-ვებული ამპლიტუდითა და ფაზით, თუ რხევა ხდება ორი ურთიერთ მართობული ღერძის გასწვრივ: $x = \operatorname{asin}(kt + \alpha)$, $y = \operatorname{asin}(kt + \beta)$.

ამოხსნა

საწყისი მონაცემები ჩავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} x = a(sinkt \cdot cos\alpha + coskt \cdot sin\alpha) \\ y = b(sinkt \cdot cos\beta + coskt \cdot sin\beta) \end{cases} \to \begin{cases} sinkt \cdot cos\alpha + coskt \cdot sin\alpha = \dfrac{x}{a} \\ sinkt \cdot cos\beta + coskt \cdot sin\beta = \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

მოცემული განტოლებებიდან ვიპოვოთ $p = sinkt, g = coskt$.

$$\begin{cases} pcos\alpha + gsin\beta = \frac{x}{a} \\ pcos\beta + psin\beta = \frac{y}{b} \end{cases} \begin{vmatrix} sin\beta \\ sin\alpha \end{vmatrix} \to \begin{cases} psin\beta cos\alpha + gsin\alpha sin\beta = \frac{x}{a}sin\beta \\ psin\alpha\, cos\beta + gsin\beta sin\alpha = \frac{y}{b}sin\alpha \end{cases} \to$$

$$p(sin\beta\, cos\alpha - cos\beta sin\alpha) = \frac{x}{a}sin\beta - \frac{y}{b}sin\alpha.$$

$$\text{p}=\frac{y}{b} \cdot \frac{sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{x}{a} \cdot \frac{sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

$$\begin{cases} pcos\alpha + gsin\beta = \frac{x}{a} \\ pcos\beta + psin\beta = \frac{y}{b} \end{cases} \begin{vmatrix} cos\beta \\ cos\alpha \end{vmatrix} \to \begin{cases} pcos\beta cos\alpha + gsin\alpha cos\beta = \frac{x}{a}cos\beta \\ pcos\alpha\, cos\beta + gsin\beta cos\alpha = \frac{y}{b}cos\alpha \end{cases} \to g = \frac{x}{a} \cdot$$

$$\frac{cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{y}{b} \cdot \frac{cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $p^2+g^2=1$ და მივიღებთ:

$$sin^2(\alpha-\beta)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos(\alpha-\beta).$$

ეს არის ელიფსის განტოლება. თუ

$$\alpha-\beta=0\rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}=0\rightarrow\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0\rightarrow y=\frac{b}{a}x.$$

- წრფის განტოლებაა.

პასუხი: ტრაექტორია არის ელიფსი ,რომლის განტოლებაა: $sin^2(\alpha-\beta)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos(\alpha-\beta)$.

ამოცანა 10.11

იპოვეთ იმ წერტილის ტრაექტორია რომელიც ორი ურთიერთმართობული წრფის გასწვრივ ირხევა სხვადასხვა სიხშირით:

1) $x=asin2\omega t, y=asin\omega t$; 2) $x=acos2\omega t, y=acos\omega t$.

ამოხსნა

1) გარდავქმნათ მოცემული განტოლებები და მივიღებთ:

$$\begin{cases}x=asin2\omega t\\ y=asin\omega t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2asin\omega t\,cos\omega t\\ y=asin\omega t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2ycos\omega t\\ y=asin\omega t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2y}=cos\omega t\\ \frac{y}{a}=sin\omega t\end{cases}\rightarrow\frac{x^2}{4y^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\rightarrow x^2a^2=4y^2(a^2-y^2)$$

- ეს არის ტრაექტორიის განტოლება.

2) ამ შემთხვევაში გარდაქმნები იქნება ანალოგიური.

$$\begin{cases}x=acos2\omega t\\ y=acos\omega t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=a(cos^2\omega t-1)\\ y=acos\omega t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=a(cos^2\omega t-1)\\ \frac{y}{a}=cos\omega t\end{cases}\rightarrow x=a\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right)\rightarrow 2y^2-ax-a^2=0.$$

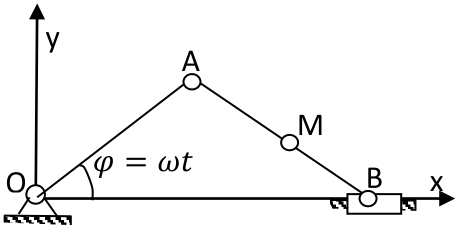
ორივე შემთხვევაში $|x|\le a, |y|\le b$.

პასუხი: 1) $x^2a^2=4y^2(a^2-y^2)$; 2) $2y^2-ax-a^2=0$, ამასთან $|x|\le a, |y|\le b$.

ამოცანა 10.12

მრუდმხარა OA ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega=10$ რად/წმ. სიგრძე OA=AB=80 სმ. იპოვეთ ბარბაცას შუა M წერტილის მოძრაობის განტოლება და ტრაექტორიის განტოლება. იპოვეთ, აგრეთვე, B ცოციას მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში ცოცია იმყოფებოდა უკიდურეს მარჯვენა მდებარეობაში; საკოორდინატო ღერძები ნაჩვენებია ნახაზზე.

ამოხსნა



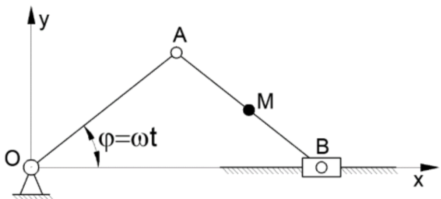
ნახაზიდან გამომდინარე ვიპოვოთ M და B წერტილების კოორდინატები.

$x_B = 2OAcos\omega t = 2 \cdot 80cos10t = 160cos10t.$

$x_M = OAcos\omega t + \frac{1}{2}OAcos\omega t = \frac{3}{2}cos\omega t = 120cos10t.$

$y_M = MBsin\omega t = 40sin10t.$

საბოლოოდ მივიღებთ წერტილის M მოძრაობის განტოლებას.



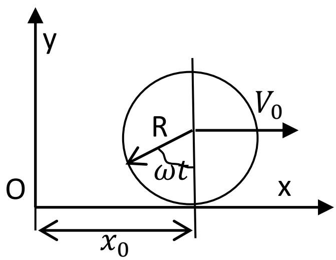
თუ ორივე განტოლებას ავიყვანთ კვადრატში და შევკრებთ მივიღებთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$\frac{x_M^2}{120^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1 .$$

პასუხი: 1) $x_M = 120cos10t$; $y_M = 40sin10t$; 2) M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებაა: $\frac{x_M^2}{120^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1.$

3) B ცოციას მოძრაობის განტოლებაა : $x_B = 160cos10t.$

ამოცანა10.13



იპოვეთ ავტომობილის R=1 მ რადიუსიანი ბორბლის ფერსოს წერტილის მოძრაობის განტოლება და ტრაექტორიის განტოლება, თუ ავტომობილი მოძრაობს მუდმივი 20 მ/წმ სიჩქარით. ჩათვალეთ,რომ ბორბალი გორავს უსრიალოდ. საწყის წერტილად ჩათვალეთ წერტილის მდებარეობა გზაზე, რომელიც ox ღერძად არის აღებული.

ამოხსნა

განვსაზღვროთ ბორბლის კუთხური სიჩქარე და მობრუნების კუთხე:

$$\omega = \frac{V_0}{R};\ \varphi = \omega t = \frac{V_0}{R}t.$$

გამოვთვალოთ ცენტრის კოორდინატი: $x_0 = V_0 t$;

$x = x_0 - Rsin\omega t = 20t - sin20t,\ \ y = R - Rcos\omega t = 1 - cos20t.$

პასუხი: ციკლოიდა $x = 20t - sin20t,$, $y = 1 - cos20t.$

ამოცანა11.14

მოცემულია ჭურვის მოძრაობის განტოლებები: $x = V_0 cos\alpha \cdot t$; $y = V_0 sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, სადაც V_0 - საწყისი სიჩქარეა, $\alpha -$ კუთხე საწყის სიჩქარესა და ჰორიზონტალურ ox ღერძს შორის. g - თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა. განსაზღვრეთ ჭურვის მოძრაობის ტრაექტორია, სიმაღლე H, ფრენის სიშორე L და ფრენის დრო T.

ამოხსნა

საწყის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\begin{cases} x = V_0 cos\alpha \cdot t \\ y = V_0 sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

(1) განტოლებიდან ამოვხსნათ t დრო და ჩავსვათ მეორეში, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას:

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{gt^2}{2V_0^2 cos^2\alpha}.$$

როცა y=H, მაშინ $V_y = 0, \dot{y} = V_0 sin\alpha - gt$. აქედან ვპოულობთ ზევით მოძრაობის დროს $\tau_1 = \frac{V_0}{g}sin\alpha$. ვარდნის დრო უდრის ზევით მოძრაობის დროს ამოტომ ფრენის სიშორე უდრის $T = 2\tau_1 = \frac{2V_0}{g}sin\alpha$. ფრენის სიშორე განისაზღვრება პირობიდან: $y(L) - 0$. აქედან

$$0 = Ltg\alpha - \frac{gL^2}{2V_0^2 cos^2\alpha} \rightarrow L = \frac{V_0^2}{g}sin2\alpha.$$

ასვლის სიმაღლე განისაზღვრება პირობიდან : $y(\tau_1) = H$. ამ პირობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$H = V_0 sin\alpha \cdot \frac{V_0}{g}sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{V_0}{g}sin\alpha\right) = \frac{V_0^2}{2g}sin^2\alpha.$$

პასუხი: ტრაექტორია არის პარაბოლა: $y = x \cdot tg\alpha - \frac{gt^2}{2V_0^2 cos^2\alpha}$. ფრენის სიმაღლე $H = \frac{V_0^2}{2g}sin^2\alpha,$

ფრენის სიშორე $L=\frac{V_0^2}{g}sin2\alpha$ ფრენის დრო $T=\frac{2V_0}{g}sin\alpha$.

ამოცანა 10.15

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ გასროლის კუთხის მნიშვნელობა, როცა ფრენის სიშორე მაქსიმალურია. იპოვეთ შესაბამისი დრო და სიმაღლე.

ამოხსნა

$$L=\frac{V_0^2}{g}sin2\alpha;\text{ როცა } \alpha=\frac{\pi}{4}, L=\frac{V_0^2}{g};\ H=\frac{V_0^2}{2g}sin^2\alpha=\frac{V_0^2}{2g};\ T=\sqrt{2}\frac{V_0}{g}.$$

პასუხი: $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $L_{max}=\frac{V_0^2}{g}$; $H=\frac{V_0^2}{2g}$; $T=\sqrt{2}\frac{V_0}{g}$.

ამოცანა 10.16

10.14 ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ კუთხე α ,როდესაც ჭურვი დაეცემა A (x,y) წერტილში.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ ტრაექტორიის განტოლებით:

$$y=x\cdot tg\alpha-\frac{gt^2}{2V_0^2cos^2\alpha}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $2cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}$, მივიღებთ

$$y=xtg\alpha-\frac{gx^2}{2V_0^2}(1+tg^2\alpha)$$

აქედან

$$tg^2\alpha-\frac{2V_0^2}{gx}tg\alpha+\left(1+\frac{2V_0^2y}{gx^2}\right)=0;$$

$$tg\alpha=\frac{V_0^2\pm\sqrt{V_0^4-2V_0^2gy-g^2x^2}}{gx}.$$

ე.ი. იმისათვის რომ მოხვდეს A(x,y) წერტილში არსებობს ორი კუთხე .

პასუხი: $tg\alpha=\frac{V_0^2\pm\sqrt{V_0^4-2V_0^2gy-g^2x^0}}{gx}$.

ამოცანა 10.17

განსაზღვრეთ უსაფრთხოების პარაბოლა (ამ პარაბოლის გარეთ მდებარე წერტილები მიუღწეველია ჭურვისთვის მოცემული საწყისი სიჩქარისთვის და გასროლის ნებისმიერი კუთხისთვის).

ამოხსნა

ვისარგებლოთ წინა ამოცანის შედეგით $tg\alpha = \frac{V_0^2 \pm \sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 gy - g^2 x^0}}{gx}$.

ამ გამოსახულებას აზრი აქვს როცა

$$V_0^4 - 2V_0^2 gy - g^2 x^2 \geq 0 \ .$$

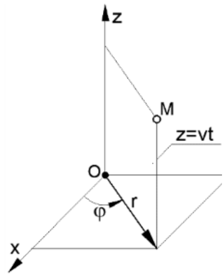
აქედან

$$y \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2};$$

ამრიგად უსაფრთხოების ზონის საზღვარი არის პარაბოლა:

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}.$$

თუ ამ პარაბოლას ვაბრუნებთ oy ღერძის გარშემო მივიღებთ უსაფრთხოების ზედაპირს.



ამოცანა 18.10

წერტილი მოძრაობს ხრახნწირზე:

$$x = acoskt, y = asinkt, z = vt.$$

იპოვეთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები ცილინდრულ კოორდინატებში.

ამოხსნა

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2(sin^2kt + cos^2kt) \ \rightarrow r^2 = a^2.$$

საბოლოოდ გვაქვს $r = a;\ \varphi = kt;\ z = vt.$

პასუხი: $r = a;\ \varphi = kt;\ z = vt.$

ამოცანა10.19

მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები: $x = 2acos^2\left(\frac{kt}{2}\right), y = asinkt$, სადაც a,k -დადებითი მუდმივებია.იპოვეთ ტრაექტორია და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი. მანძილი აითვლება საწყისი მდებარეობიდან.

ამოხსნა

$$\begin{cases} x = 2acos^2\left(\frac{kt}{2}\right) \\ y = asinkt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xx = a(1 + coskt) \\ y = asinkt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} - 1 = coskt \\ \frac{y}{a} = sinkt \end{cases}.$$

თუ ორივე განტოლებას ავიყვანთ კვადრატში და შევკრებთ მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას:

$$(\frac{x}{a}-1)^2+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

ან $(x-a)^2+y^2=a^2$- წერტილის ტრაექტორია არის წრეწირი.

გამოვთვალოთ სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases}\dot{x}=-aksinkt\\ \dot{y}=akcoskt\ .\end{cases}$$

ვიპოვოთ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი:

$$S=\int_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{(ak)^2sin^2kt+(ak)^2cos^2kt}\ dt=akt.$$

პასუხი: წრეწირი $(x-a)^2+y^2=a^2$; $S=akt$.

ამოცანა 10.20

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში.

ამოხსნა

$$\begin{cases}x=2acos^2\left(\frac{kt}{2}\right)\\ y=asinkt\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2acos^2\left(\frac{kt}{2}\right)\\ y=2\,\mathrm{asin}\left(\frac{\mathrm{kt}}{2}\right)\cos\left(\frac{\mathrm{kt}}{2}\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=4a^2cos^4(\frac{kt}{2})\\ y^2=4a^2sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)cos^2(\frac{kt}{2})\end{cases}.$$

ავიყვანოთ ეს განტოლებები კვადრატში და შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$x^2+y^2=4a^2cos^2(kt/2)$$

საბოლოოდ მივიღებთ $r=2\,\mathrm{acos}\left(\frac{kt}{2}\right);\ \varphi=\frac{kt}{2}$.

პასუხი: $r=2\,\mathrm{acos}\left(\frac{kt}{2}\right);\ \varphi=\frac{kt}{2}$.

ამოცანა 10.21

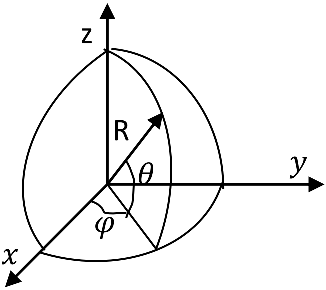
დეკარტეს კოორდინატებში მოცემული განტოლებებიდან : $x=Rcos^2\left(\frac{kt}{2}\right);\ y=\frac{R}{2}sinkt;\ \ z=Rsin\left(\frac{kt}{2}\right)$, იპოვეთ მისი ტრაექტორია და მოძრაობის განტოლებები სფერულ კოორდინატებში.

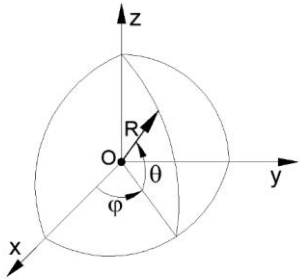
ამოხსნა

$$\begin{cases}x=Rcos^2\left(\frac{kt}{2}\right) & (1)\\ y=\frac{R}{2}sinkt & (2)\\ z=Rsin\left(\frac{kt}{2}\right) & (3)\end{cases}\qquad \varphi=\frac{kt}{2};\ \ \theta=\frac{kt}{2};$$

$$\begin{cases} x = Rcos^2\left(\frac{kt}{2}\right) \\ y = \frac{R}{2}\cdot 2sin\frac{kt}{2}cos\frac{kt}{2} \\ z = Rsin\left(\frac{kt}{2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = Rcos\theta cos\varphi \\ y = Rcos\theta sin\varphi \\ z - Rsin\theta \end{cases}.$$

გამოვრიცხოთ დრო (1) - (3) განტოლებებიდან და მივიღებთ:





$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

გამოვრიცხოთ დრო (1) და (2) განტოლებებიდან და მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = Rcos^2\frac{kt}{2} \\ y = \frac{R}{2}sinkt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{R}{2}\cdot 2cos^2\frac{kt}{2} \\ y = \frac{R}{2}sinkt \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}coskt \\ y = \frac{R}{2}sinkt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}coskt \quad (4) \\ y = \frac{R}{2}sinkt \quad (5) \end{cases}$$

ავიყვანოთ (4) და (5) კვადრატში და შევკრიბოთ , მივიღებთ

$$(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$ - ცილინდრი.

პასუხი: სფეროს $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ და ცილინდრის $(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ გადაკვეთის წირი. მოძრაობის განტოლებები სფერულ კოორდინატებში არის r=R, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\theta = \frac{kt}{2}$.

ამოცანა 10.22

წერტილი ერთდროულად მონაწილეობს ორ ურთიერთ მართობულ მილევად რხევაში, რომლის მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით:

$$x - Ae^{-ht}\cos(kt + \varepsilon), \quad y = Ae^{-ht}\sin(kt + \varepsilon).$$

სადაც $A > 0, h > 0, k > 0, \varepsilon$ -მუდმივი სიდიდეებია. იპოვეთ მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში და იპოვეთ წერტილის ტრაექტორია.

ამოხსნა

დეკარტეს კოორდინატები პოლარულ კოორდინატებს უკავშირდება ტოლობებით:

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$$

შემოვიტანოთ პოლარული კოოტდინატები: $r = Ae^{-ht}$, $\varphi = kt + \varepsilon$. ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო

$t = \frac{1}{k}(\varphi - \varepsilon)$, აქედან $r = Ae^{\frac{h}{k}(\varphi-\varepsilon)}$ - ეს არის ლოგარითმული სპირალი.

პასუხი: $r = Ae^{-ht}$, $\varphi = kt + \varepsilon.$; ტრაექტორია არი ლოგარითმული სპირალი - $r = Ae^{\frac{h}{k}(\varphi-\varepsilon)}$.

ამოცანა 10.23

მანიპულიატორის ბრტყელ მექანიზმს სხეული გადააქვს ერთი მდებარეობიდან მეორე მდებარეობაში ტრაექტორიაზე, რომლის ცენტრის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში არის

$$r_c = r_c(t), \varphi_c = \varphi_c(t).$$

იპოვეთ:

1) ψ_1 და ψ_2 კუთხეების ცვლილების კანონი, რომელიც უზრუნველყოფს წინასწარ განსაზღვრული პროგრამის შესრულებას.

2) იპოვეთ ამ კუთხეების ცვლილების კანონი, თუ ტვირთი გადაადგილდება წრფეზე, რომელიც oy ღერძის პარალელურია და ამ ღერძიდან დაშორებულია a მანძილზე, იცვლება კანონით: $y = S(t)$, სადაც S - მოცემული ფუნქციაა.

ამოხსნა

$$r_c^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(180° - \psi_1);\ cos\psi_2 = \frac{r_c^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2};\ \psi_2 = arccos\frac{r_c^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2};$$

$$l_2^2 = r_c^2 + l_1^2 - 2r_cl_1\cos(\psi_c - \psi_1);$$

$$\cos(\psi_c - \psi_1) = \frac{l_1^2 + r_c^2 - l_2^2}{2r_cl_1};\ \psi_c - \psi_1 = \pm arccos\frac{l_1^2 + r_c^2 - l_2^2}{2r_cl_1};\ \psi_1 = \psi_c \pm arccos\frac{l_1^2 + r_c^2 - l_2^2}{2r_cl_1}.$$

გამოვსახოთ y კოორდინატი S(t) კანონით. მივიღებთ:

$y = S(t),\ tg\varphi_c = \frac{S(t)}{a}, \varphi_c =$ $arctg\frac{S(t)}{a},\ r_c^2 = a^2 + S^2(t).$

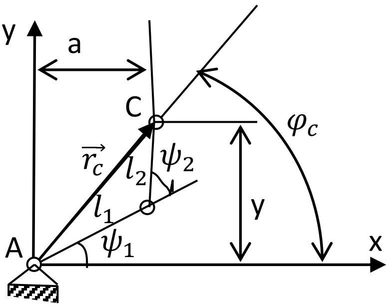
მიღებული ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

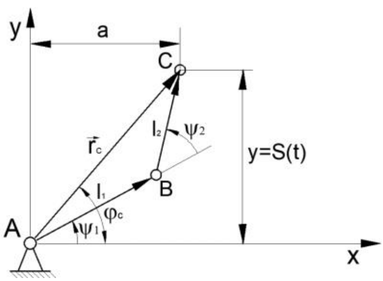
$\psi_1 = \psi_c \pm arccos\frac{l_1^2 + r_c^2 - l_2^2}{2r_c l_1} =$ $arctg\frac{S(t)}{a} \pm arccos\frac{a^2+S^2(t)+l_1^2-l_2^2}{2r_c l_1}$;

$\psi_2 = \pm arccos\frac{r_c^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1 l_2} =$ $arccos\frac{a^2+S^2(t)-l_1^2-l_2^2}{2l_1 l_2}$.

პასუხი: 1) $\psi_1 = \psi_c \pm arccos\frac{l_1^2+r_c^2-l_2^2}{2r_c l_1}$; $\psi_2 = \pm arccos\frac{r_c^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1 l_2}$.

2) $\psi_1 = arctg\frac{S(t)}{a} \pm$ $arccos\frac{a^2+S^2(t)+l_1^2-l_2^2}{2l_1\sqrt{a^2+S^2(t)}}$; $\psi_2 =$ $arccos\frac{a^2+S^2(t)-l_1^2-l_2^2}{2l_1 l_2}$.





10.30

11. წერტილის სიჩქარე

ამოცანა 11.1

წერტილი ასრულებს სწორხაზოვან მოძრაობას კანონით $x = asinkt$. იპოვეთ რხევის ამპლიტუდა და წრიული სიხშირე, თუ როცა $x = x_1$, მაშინ სიჩქარე $V = V_1$ ხოლო როცა $x = x_1$, მაშინ სიჩქარე $V = V_1$.

ამოხსნა

წერტილის სიჩქარე

$$\begin{cases} V = akcoskt \\ x = asinkt\,. \end{cases}$$

ამ ორი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ დრო და მივიღებთ:

$$V^2 = (ak)^2[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2]$$

$$\begin{cases} {V_1}^2 = (ak)^2[1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \\ {V_2}^2 = (ak)^2[1 - \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 \end{cases}$$

ამ ორი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ k და მივიღებთ:

$$(\frac{V_1}{V_2})^2 = \frac{a^2-x_1^2}{a^2-x_2^2},$$

აქედან

$$a = \sqrt{\frac{V_1^2x_2^2+V_2^2x_1^2}{V_1^2+V_2^2}}.$$

იგივე განტოლებებიდან ვიპოვით წრიულ სიხშირეს

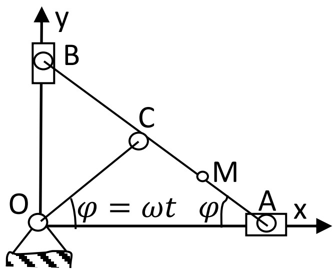
$$k = \sqrt{\frac{V_1^2-V_2^2}{x_2^2-x_1^2}}.$$

პასუხი: $a = \sqrt{\frac{V_1^2x_2^2+V_2^2x_1^2}{V_1^2+V_2^2}}$; $k = \sqrt{\frac{V_1^2-V_2^2}{x_2^2-x_1^2}}$.

ამოცანა 11.2

ელიფსოგრაფის სახაზავის სიგრძე უდრის AB=40 სმ, ხოლო მრუდმხარას სიგრძე OC =20 სმ , AC=CB. მრუდმხარა თანაბრად ბრუნავს O ღერძის გარშემო კუთხური სიჩქარით ω. იპოვეთ სახაზავის M წერტილის ტრაექტორიის განტოლება და სიჩქარის ჰოდოგრაფი, თუ ის ძევს სახაზავის ბოლოდან AM=10 სმ მანძილზე.

ამოხსნა



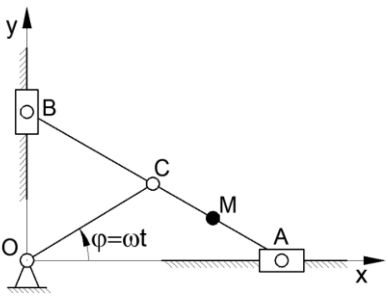
ჩავწეროთ M წერტილის მოძრაობის განტოლება.

$$x_M = OC \cdot cos\omega t + CM \cdot cos\omega t;\ y_M = AMsin\omega t.$$

ანუ
$$\begin{cases} x_M = 30cos\omega t \\ y_M = 10sin\omega t \end{cases}$$

ტრაექტორიის განტოლებაა:

$$\frac{x_M^2}{900} + \frac{y_M^2}{100} = 1.$$ - ელიფსი.



სიჩქარის ჰოდოგრაფის საპოვნელად გავაწარმოოთ მოძრაობის განტოლებები და მღებული ტოლობებიდან გამოვრიცხოთ დროის პარამეტრი. გვექნება

$$\begin{cases} \dot{x_M} = -30sin\omega t \\ \dot{y_M} = 10\omega cos\omega t \end{cases} \rightarrow \frac{\dot{x}_M^2}{900\omega^2} + \frac{\dot{y}_M^2}{100\omega^2} = 1.$$

პასუხი: $\frac{x_M^2}{900} + \frac{y_M^2}{100} = 1. \frac{\dot{x}_M^2}{900\omega^2} + \frac{\dot{y}_M^2}{100\omega^2} = 1.$

ამოცანა 11.3

წერტილი აღწერს ლისაჟის ფიგურას, რომლის განტოლებაა $x = 2cost, y = 4cos2t$. (x ,y - სანტიმეტრებშია, ხოლო t - წამებში). იპოვეთ სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება იმ მომენტში, როცა ის იმყოფება oy ღერძზე .

ამოხსნა

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\cos 2t \end{cases}$$

ამოცანის პირობის თანახმად

$$x = 0 \ \rightarrow cost = 0; \rightarrow t = t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0,1,2, \ldots$$

$$y(x = 0) = 4\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -4.$$

ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია. ამისათვის გამოვრიცხოთ დრო მოძრაობის განტოლებებიდან და მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = 2cost \\ y = 4(cos^2t - sin^2t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2cost \\ y = 4(1 - 2sin^2t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2cost \\ y - 4 = -8sin^2t \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 4cos^2t \\ (y - 4) = -8sin^2t \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y-4}{8} = 1. \rightarrow$$

$$2x^2 - y + 4 = 8 \rightarrow y = 2x^2 - 4.$$

ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2sint \\ \dot{y} = -8sin2t \end{cases}.$$

$$\dot{x}(t_0) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -2cosk\pi;\ \dot{y}(t_0) = 0;$$

$$V(t_0) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2.$$

$$\cos(\overrightarrow{V}, x) = -coskt = (-1)^{k+1}. k = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots$$

პასუხი: V=2; $\cos(\overrightarrow{V}, x) = -coskt = (-1)^{k+1}. k = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots$

ამოცანა 11.14

მრუდმხარა OA ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω. იპოვეთ მრუდმხარა- ბარბაცა მექანიზმის ბარბაცას შუა M წერტილის სიჩქარე და B ცოციას სიჩქარე, როგორც დროის ფუნქცია. თუ $OA = AB = a$.

ამოხსნა

M წერტილის მოძრაობის განტოლებები არის

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{3a}{2}cos\omega t \\ y_M = \dfrac{a}{2}sin\omega t \end{cases}.$$

გავაწარმოოთ ეს განტოლებები დროით და მივიღებთ M წერტილის სიჩქარის გეგმილებს შესაბამის ღერძებზე:

$$\begin{cases} \dot{x_M} = -\frac{3a\omega}{2} sin\omega t, \\ \dot{y}_M = \frac{a\omega}{2} cos\omega t. \end{cases}$$

აქედან სიჩქარის სიდიდე უდრის

$$V_M = \frac{a\omega}{2}\sqrt{8sin^2\omega t + 1}\,.$$

B წერტილის კოორდინატი უდრის $x_B = 2acos\omega t$, ხოლო სიჩქარე $V_B = \dot{x}_B = -2\omega asin\omega t$.

პასუხი: $V_M = \frac{a\omega}{2}\sqrt{8sin^2\omega t + 1}\,.$ $V_B = -2\omega asin\omega t$.

ამოცანა 11.5

წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით: $x = V_0 tcos\alpha_0$, $y = V_0 tsin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}$. ამასთან ox ღერძი ჰორიზონტალურია, ხოლო oy მიმართულია ვერტიკალურად ზევით. $V_{0,}\ g, \alpha_0$ - მუდმივი სიდიდეებია. იპოვეთ: 1) წერტილის ტრაექტორია, 2) მისი უმაღლესი მდებარეობის კოორდინატები, 3) წერტილის სიჩქარის კოორდინატები როცა წერტილი იმყოფება ox ღერძზე.

ამოხსნა

$$\begin{cases} x = V_0 tcos\alpha_0 \\ y = V_0 tsin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

გამოვრიცხოთ დრო (1) განტოლებებიდან და მივიღებთ:

$$y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2cos^2\alpha_0}\,. \qquad (2)$$

ეს არის ტრაექტორიის განტოლება. მაქსიმალური სიმაღლის საპოვნელად გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული და გავუტოვოთ ნულს.

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha_0 - \frac{gx}{V_0^2cos^2\alpha_0} = 0, \rightarrow\ x_H = \frac{V_0^2}{2g}sin2\alpha_{0.}$$

$$H = y(x_H) = \frac{v_0^2}{2g}sin2\alpha_0 tg\alpha_0 - \frac{g}{2V_0cos^2\alpha_0}\cdot\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^2 = \frac{V_0^2}{2g}sin^2\alpha_{0\,.}$$

სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე უდრის

$$\begin{cases} V_x = V_0 cos\alpha_0 \\ V_y = V_0 sin\alpha_0 - gt. \end{cases}$$

1) ტრაექტორია არის პარაბოლა - $y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2cos^2\alpha_0}$,

2) მაქსიმალური ასვლის სიმაღლე როცა $x_H = \frac{V_0^2}{2g} sin2\alpha_{0.}$,

H=$\frac{V_0^2}{2g} sin^2\alpha_0$.

3) სიჩქარის გეგმილებია $V_x = V_0 cos\alpha_0$ $V_y = \pm V_0 sin\alpha_0$, ამასთან ზედა ნიშანი შეესაბამება წერტილის საწყის მდებარეობას, ხოლო ქვედა ბოლო მდებარეობას დაცემის მომენტში.

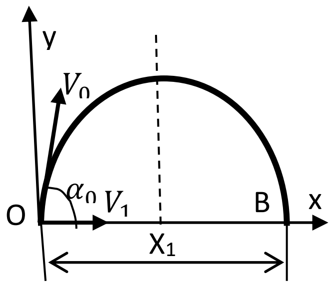
ამოცანა 11.6

წერტილი მოძრაობს ისეთი კანონით, როგორც წინა ამოცანაში იყო მოცემული. ცნობილია რომ $V_0 = 20$ *მ/წმ* , $\alpha_0 = 60°, g = 9{,}81$ *მ/წმ*. განსაზღვრეთ რა V_1 სიჩქარით უნდა გამოვიდეს იგივე საწყისი წერტილიდან მეორე

სხეული, რომელიც მუდმივი სიჩქარით იმოძრავებს ჰორიზონტის გასწვრივ და შეხვდება პირველს. გასაზღვრეთ ასევე, მანძილი სადაც ეს წერტილები შეხვდებიან.

ამოხსნა

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = V_1 t} \\ \boldsymbol{x = V_0 t cos\alpha_0} \end{cases}$$



შეხვედრის მომენტში ორივე წერტილის კოორდინატები ერთმანეთს ემთხვევა

$x_{1B}(\tau) = x(\tau) \rightarrow \mathrm{V_1 t = V_0 t cos\alpha_0} \rightarrow \mathrm{V_1} = \mathrm{V_0 cos\alpha_0} \rightarrow \mathrm{V_1} = 20\mathrm{cos}60° = 10$ მ/წმ.

შეხვედრის ადგილის დაშორება სათავიდან უდრის $x = \frac{V_0^2}{g} sin2\alpha_0 = 35{,}5$მ.

პასუხი: $\mathrm{V_1} = 10$ *მ/წმ*. $\boldsymbol{x_1 = 35.5}$ მ

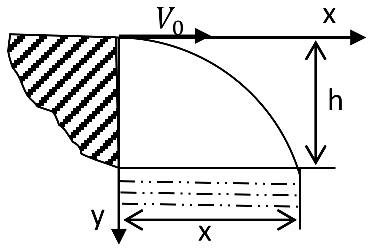
ამოცანა 11.7

ციცაბო ნაპირის სამი სხვადასხვა წერტილიდან გაისროლეს ტყვია, შესაბამისად, 50, 75, და 100 მ/წმ სიჩქარეეებით. ისე, რომ სამივე ერთდროულად დაეცა წყლის ზედაპირზე. პირველის დაცემის ადგილი ნაპირიდან დაშორებულია 100 მ მანძილით. იპოვეთ სიმაღლეები $h_{1\,,}\, h_2, h_3$ (წყლის დონიდან), საიდანაც მოხდა გასროლა. იპოვეთ, აგრეთვე, ტყვიების ფრენის დრო და თითოეული მათგანის სიჩქარე დაცემის მომენტში.

ამოხსნა

ტყვიის მოძრაობის განტოლებებია: $y = \frac{gt^2}{2}$, $x = V_0 t$. წყლის ზედაპირზე დაცემის დრო $T = \frac{S}{V_0} = \frac{100}{50} = 2$ *წმ.* ადგილი საიდანაც მოხდა გასროლა, წყლის დონიდან არის $h_1 = y(T) = \frac{gT^2}{2} = 19{,}62$ მ. რადგავ ვარდნის დრო სამივე ტყვიისთვის ერთნაირია, ამიტომ სამივე შემთხვევაში სიმაღლე ერთი და იგივეა. $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ მ.

სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე უდრის: $V_x = V_0$, $V_y = gt$. დაცემის მომენტში $t = T = 2$წმ. ამიტომ $V_y = 2g$. სიჩქარის სიდიდე თითოეულ შემთხვევაში უდრის



$V_1 = \sqrt{50^2 + (2g)^2} = 53{,}71$ *მ/წმ*;

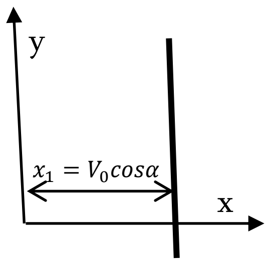
$V_2 = \sqrt{75^2 + (2g)^2} = 77{,}52$ *მ/წმ*;

$V_3 = \sqrt{100^2 + (2g)^2} = 101{,}95$ *მ/წმ*.

პასუხი: $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ მ. $T = 2$*წმ.* $V_1 = 53{,}71$ *მ/წმ*; $V_2 = 77{,}52$ *მ/წმ*; $V_3 = 101{,}95$ *მ/წმ*.

ამოცანა 11.8

ქვემეხიდან, რომლის ლულა დახრილია ჰორიზონტალისადმი 30° -იანი კუთხით, გაისროლეს ჭურვი, 500 მ/წმ სიჩქარით. დავუშვათ, რომ ჭურვი მოძრაობს მხოლოდ თავისუფალი ვარდნის აჩქარებით g=9,81 მ/წმ² .ვიპოვოთ ჭურვის სიჩქარის ჰოდოგრაფი და ამ ჰოდოგრაფის აღმწერი წერტილის სიჩქარე.



ამოხსნა

ჭურვის მოძრაობის განტოლებებია: $x = V_0 cos\alpha \cdot t$; $y = V_0 sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. ამ ტოლობების გაწარმოებით მივიღებთ ჰოდოგრაფის განტოლებებს:

$$\begin{cases} \dot{x} = V_0 cos\alpha = 432 \\ \dot{y} = V_0 sin\alpha - gt \end{cases}.$$

ანუ

$$\begin{cases} x_1 = V_0 cos\alpha \\ y_1 = V_0 sin\alpha - gt \end{cases}.$$

ჰოდოგრაფის გრაფიკი ნაჩვენებია ნახაზზე.

თუ გავაწარმოებთ ჰოდოგრაფის განტოლებებს, მივიღებთ ჰოდოგრაფის აღმწერი წერტილის სიჩქარეს.

$$\dot{x_1} = 0;\ \dot{y_1} = -g = -9{,}81 \text{ აქედან } V_1 = 9{,}81 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: ჰოდოგრაფი არის ვერტიკალური წრფე, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან დაშორებულია

432 მეტრით. $V_1 = 9{,}81$ მ/წმ².

ამოცანა 11.9

იპოვეთ ელმავლის ბორბლის იმ წერტილის მოძრაობის განტოლება და ტრაექტორია, რომელიც დაშორებულია ღერძიდან 0,5 მ მანძილზე. ბორბლის რადიუსია 1 მ. ბორბალი მოძრაობს სწორხაზობრივად და ღერძის სიჩქარეა $V = 10 მ/წმ$. ox ღერძი ემთხვევა რელსს, ხოლო oy - წერტილის რადიუსს საწყის მდებარეობაში. იპოვე, აგრეთვე ამ წერტილის სიჩქარე იმ შემთხვევებში, როცა შესაბამისი რადიუსი არის ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ მდებარეობაში.

ამოხსნა

ცენტრის გარშემო მობრუნების კუთხეა $\varphi = \omega t$, სადაც კუთხური სიჩქარე $\omega = \frac{V_0}{R}$. ანუ $\varphi = \frac{V_0}{R}t = 10t$. მოცემული წერტილის მოძრაობის განტოლებები მიიღება შემდეგი გარდაქმნებით: :

$$\begin{cases} x = x_0 - a sin\varphi \\ y = R - a cos\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = V_0 t - a sin\frac{V_0}{R}t \\ y = R - a cos\frac{V_0}{R}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10t - 5sin10t \\ y = 1 - 0{,}5cos10t \end{cases}$$

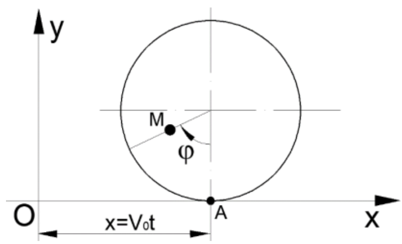
მიღებული განტოლებები წარმოადგენენ დამოკლებული ციკლოიდის განტოლებას.

წერტილის სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე არის:

$$\begin{cases} \dot{x} = 10 - 5cos10t \\ \dot{y} = 5sin10t. \end{cases},$$

როცა $\varphi = 0$, მაშინ $\dot{x} = 5, \dot{y} = 0$ აქედან V=5 მ/წმ;

როცა $\varphi = 180°$, მაშინ $\dot{x} = 15, \dot{y} = 0 \ \rightarrow V = 15 \ მ/წმ$. ხოლო, როცა $\varphi = 90°$, მაშინ $\dot{x} = 10, \dot{y} = 5$. აქედან



$V = 11$მ/წმ . როცა $\varphi = 270°$ მაშინ $\dot{x} = 15, \dot{y} = -5 \rightarrow V = 18$მ/წმ.

პასუხი: დამოკლებული ციკლოიდა $x = 10t - 5sin10t, x = 10t - 5sin10t$.

1) 11მ/წმ, 18მ/წმ 2) 5მ/წმ, 15მ/წმ

ამოცანა 11.10

ელმავლის სიჩქარეა $V_0 = 72$ კმ/სთ. ბორბლის რადიუსი $r =$ 1მ. ბორბალი მოძრაობს სწორხაზოვან რელსზე უსრიალოდ. 1) განსაზღვრეთ M წერტილის სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება იმ მომენტში, როცა OM რადიუსი სიჩქარის მიმართულებასღან ადგენს $\frac{\pi}{2} - \alpha$ კუთხეს. 2) იპოვეთ M წერტილის ჰოდოგრაფი და მისი აღმწერი წერტილის სიჩქარე.

ამოხსნა

$$\omega = \frac{V_0}{R} = \frac{72 \cdot 1000}{1 \cdot 3600} = 20 \text{ მ/წმ}. V_M = \omega \cdot O_1M = 2V_0 cos\frac{\alpha}{2} . V_M = 40cos\frac{\alpha}{2}.$$

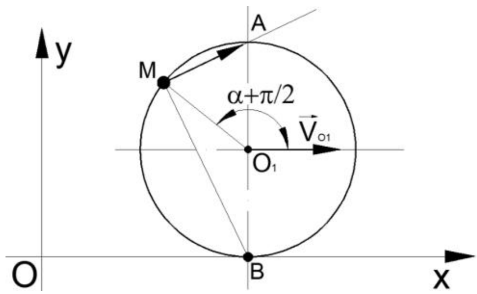
ჰოდოგრაფის განტოლებაა $\rho = 2V_0 cos\theta$, სადაც $\theta = \frac{\alpha}{2}$, $r = V_0$. სიჩქარე

$$V_1 = \frac{V_0^2}{R} = 400\text{მ/წმ}.$$

პასუხი: 1) სიჩქარე $V_M = 2V_0 cos\frac{\alpha}{2}$მ/წმ , მიმართულია AM წრფის გასწვრივ.

2) ჰოდოგრაფი არის წრეწირი $\rho = 2V_0 cos\theta$, სადაც $\theta = \frac{\alpha}{2}$, წრეწირის რადიუსი $r = V_0$.

სიჩქარე $V_1 = \frac{V_0^2}{R} = 400$მ/წმ.



ამოცანა 11,11

იპოვეთ ვაგონის R=0,5 სმ რადიუსიანი ბორბლის M წერტილის მოძრაობის განტოლება და ტრაექტორია. ეს წერტილი ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია a=0,6 მ მანძილზე და დასწის მომენტში ძევს რელსიდაან დაბლა 0,1 მ მანძილზე. ვაგონი მოძრაობს გზის სწორხაზოვან მონაკვეთზე მუდმივი V=10 მ/წმ სიჩქარით . იპოვეთ აგრეთვე დროის მომენტები, როცა წერტილი გაივლის ქვედა უკიდურეს და ზედა უკიდურეს მდებარეობას.

იპოვეთ, აგრეთვე სიჩქარის გეგმილები ღერძებზე ამ მდებარეობებში. Ox ღერძი გადის რელსის გასწვრივ, ხოლო Oy ღერძი ემთხვევა წერტილის საწყის ქვედა მდებარეობას.

ამოხსნა

წინა ამოცანების ანალოგიურად გვაქვს $\omega = V/R$, $\varphi = \omega t = \frac{V}{R}t$.

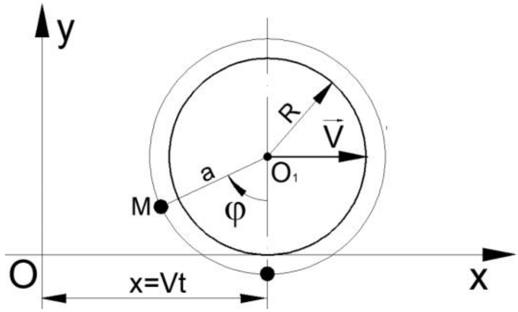
M წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$\begin{cases} x = Vt - a\sin\frac{V}{R}t \\ y = R - a\cos\frac{V}{R}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10t - 0{,}6sin20t \\ y = 0{,}5 - 0{,}6cos20t \end{cases}$$ - დაგრძელებული ციკლოიდა.

სიჩქარის გეგმილებია -

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = 10 - 12cos20t \\ \quad V_y = 12sin20t \end{cases}.$$

როცა წერტილი იმყოფება ქვედა მდებარეობაში, სამართლიანია ტოლობები:



11.11

$$R - a\cos\frac{V}{R}t = R - a \ \rightarrow \ \cos\frac{V}{R}t = 1 \ \rightarrow 20t = 2k\pi \ \rightarrow t = \frac{k\pi}{10}.$$

სადაც k=0,1,2,... აქედან, ქვედა მდებარეობაში $V_x = -2\partial/წ\partial$, $V_y = 0$.

ანალოგიურად მივიღებთ ზედა მდებარეობის შემთხვევაში $t = \frac{\pi}{10}(2k+1), k = 0{,}1{,}2, \ldots$ შესაბამისად სიჩქარის გეგმილები ზედა მდებარეობაში იქნება $V_x = 22\frac{\partial}{წ\partial}$. $V_y = 0$.

პასუხი: დაგრძელებული ციკლოიდა $x = 10t - 0{,}6sin20t$, $y = 0{,}5 - 0{,}6cos20t$;

როცა $t = \frac{k\pi}{10}$ - ქვედა მდებარეობა. $V_x = -2\partial/წ\partial$ $V_y = 0$.

როცა $t = \frac{\pi}{10}(2k+1)$ - ზედა მდებარეობა. $V_x = 22\frac{\partial}{წ\partial}$. $V_y = 0$.

ამოცანა 11.12

წერტილი ერთდროულად მონაწილეობს ორ ურთიერთმართობულ მილევად რხევით მოძრაობაში, რომლის განტოლებებია: $x = Ae^{-ht}\cos(kt+\varepsilon)$, $y = Ae^{-ht}\sin(kt+\varepsilon)$. იპოვეთ წერტილის სიჩქარის

გეგმილები დეკარტეს და პოლარულ საკოორდინატო ღერძებზე და იპოვეთ სიჩქარის მოდული.

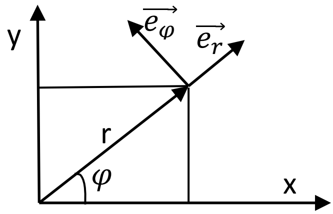
ამოხსნა

$$V_x = \dot{x} = -Ae^{-ht}\big(h\cos(kt+\varepsilon) + k\sin(kt+\varepsilon)\big);$$

$$V_y = \dot{y} = -he^{-ht}\big(h\sin(kt+\varepsilon) - k\cos(kt+\varepsilon)\big).$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases};$$

$$r = Ae^{-ht}, q_1 = r, H_1 = 1, \varphi = kt + \varepsilon, q_2 = \varphi, H_2 = r.$$



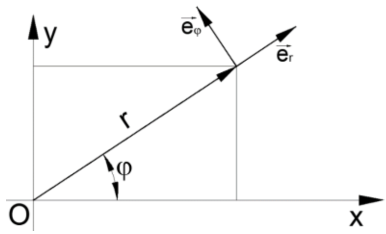
$$V_r = H_1 q_1 = -Ae^{-h\dot{t}}, V_\varphi = H_2\dot{q}_2 = Ae^{-ht}\ .$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = Ae^{-ht}\sqrt{h^2+k^2} = r\sqrt{h^2+k^2}.$$

პასუხი: 1) $V_x = \dot{x} = -Ae^{-ht}\big(h\cos(kt+\varepsilon) + k\sin(kt+\varepsilon)\big)$; $V_y = \dot{y} = -he^{-ht}\big(h\sin(kt+\varepsilon) - k\cos(kt+\varepsilon)\big)$.

2) $V_r = -Ae^{-ht}$; $V_\varphi = Ae^{-ht}$;

3) $V = r\sqrt{h^2+k^2}$.



11.12

ამოცანა11.13

რა წირს აღწერს გემი, რომელიც მოძრაობს მუდმივი კურსით, მერიდიანისადმი α კუთხით. გემი ჩათვალეთ მატერიალურ წერტილად, რომელიც მოძრაობს დედამიწის ზედაპირზე.

ამოხსნა

$$q_1 = r_1,\ q_2 = \lambda,\ q_3 = \varphi\ .$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\lambda \\ y = r\cos\varphi\sin\lambda \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$H_1 = 1, H_2 = r\cos\varphi\ ,\ H_3 = r.$$

$$V_r = H_1\dot{r} = 0,\ V_\lambda = H_2\dot{q}_2 = r\dot{\lambda}\cos\varphi, V_\varphi = H_3\dot{q}_3 = r\dot{\varphi}\ .$$

$$\frac{V_\lambda}{V_\varphi} = tg\alpha, \rightarrow \frac{r\dot{\lambda}\cos\varphi}{r\dot{\varphi}} = tg\alpha, \rightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\cos\varphi} = \dot{\lambda}ctg\alpha \rightarrow \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = ctg\alpha \cdot d\lambda.$$

ვაინტეგროთ ეს უკანასკნელი განტოლება და მივიღებთ:

$$\int \frac{d\varphi}{cos\varphi} = ctg\alpha \int d\lambda \; \rightarrow \; \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \mathrm{ctg}\alpha \cdot \lambda + \ln C., \;\; \varphi(\lambda_0) = \varphi_0,$$

$$\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) = \mathrm{ctg}\alpha \cdot \lambda_0 + \ln C, lnC = lng\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) - \mathrm{ctg}\alpha \cdot \lambda_0,$$

$$ln\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)} = ctg\alpha\,(\lambda - \lambda_0),$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{(\lambda-\lambda_0)\mathrm{ctg}\alpha}.$$

სადაც φ - განედია, ხოლო λ - გრძედი გემის მოცემული მდება-რეობისათვის.

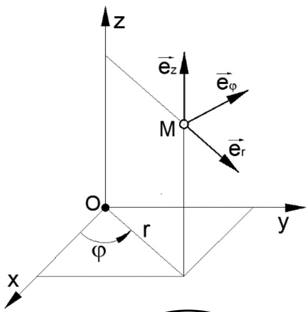
პასუხი: $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{(\lambda-\lambda_0)\mathrm{ctg}\alpha}$.

სადაც φ - განედია, ხოლო λ - გრძედი გემის მოცემული მდება-რეობისათვის.

ამოცანა11.14

წერტილის მოძრაობის განტოლებას ცილინდრულ კოორდინატებში აქვს სახე: $r = a, \varphi = kt, z = \nu t$. იპოვეთ სიჩქარის გეგმილები ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, ჰოდოგრაფის აღმწერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები და მისი სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე.

ამოხსნა



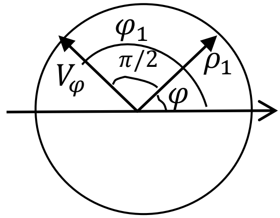
$$q_1 = r, x = rcos\varphi, q_2 = \varphi, y = rsin\varphi, q_3 = z, z = z.$$

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = 1 \quad \vec{V} = H_1\dot{q_1}\overrightarrow{e_1} + H_2\dot{q_2}\overrightarrow{e_2} + H_3\dot{q_3}\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}. \;\; V_r = \dot{r} = 0, V_\varphi = r\dot{\varphi} = ak, V_z = \dot{z} = \nu.$$

$$V = \sqrt{(ak)^2 + \nu^2}\;.$$

ვიპოვოთ პოლარული რადიუსი



$$\rho_1 = \sqrt{{V_\varphi}^2 + {V_r}^2} = ak.$$

ჰოდოგრაფის განტოლებას ცილინდრულ კოორდინატებში აქვს სახე:

$$\begin{cases} r_1 = \rho_1 = ak \\ \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} + kt \\ z_1 = \nu \end{cases}$$

გავაწარმოოთ ჰოდოგრაფის განტოლებები და მივიღებთ :

$$\begin{cases} V_{r1} = \dot{r_1} = 0 \\ V_{\varphi 1} = ak^2 \\ V_{z1} = 0 \end{cases}.$$

პასუხი: 1) $V_r = \dot{r} = 0, V_\varphi = r\dot{\varphi} = ak, V_z = \dot{z} = \nu.$

2) $r_1 = \rho_1 = ak, \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt, z_1 = \nu$.

3) $V_{r1} = \dot{r_1} = 0,\ V_{\varphi 1} = ak^2, V_{z1} = 0.$

ამოცანა 11.15

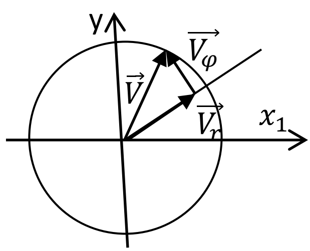
წერტილი მოძრაობს წრეწირზე კანონით: $r = 2acos\frac{kt}{2}$, $\varphi = \frac{kt}{2}$ (r, φ - პოლარული კოორდინატებია). იპოვეთ M წერტილის სიჩქარის გეგმილები პოლარულ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. სიჩქარის ჰოდოგრაფის აღმწერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები და ამ წერტილის სიჩქარის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე.

ამოხსნა

$$V_r = \dot{r}\ \frac{d}{dt}\left(2acos\frac{kt}{2}\right) = -aksin\frac{kt}{2},$$

$$V_\varphi = r\dot{\varphi} = 2acos\frac{kt}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{kt}{2}\right) = akcos\frac{kt}{2}.$$

$$V = \sqrt{V_\varphi^2 + V_r^2} = ak.$$



ჰოდოგრაფის პოლარული რადიუსია $\rho_1 = V = ak.$

სიჩქარის ვექტორის პოლარულ ღერძთან შედგენილი კუთხე $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt.$

სიჩქარის გეგმილებია: $V_{\rho 1} = \dot{\rho_1} = 0, V_{\varphi 1} = \rho_1\dot{\varphi_1} = ak^2$

პასუხი: 1) $V_r = -aksin\frac{kt}{2}, V_\varphi = r\dot{\varphi} = akcos\frac{kt}{2}.$

2) $\rho_1 = V = ak,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt.$

3) $V_{\rho 1} = \dot{\rho_1} = 0, V_{\varphi 1} = ak^2.$

ამოცანა 11.16

წერტილი მოძრაობს ცილინდრისა და სფეროს გადაკვეთის წირზე. მისი მოძრაობის განტოლებებია: $r = R$,
$\varphi = \frac{kt}{2}, \theta = \frac{kt}{2}$. (r, φ, θ - სფერული კოორდინატებია. იხ. ამოც. 11.21). იპოვეთ სიჩქარის მოდული და გეგმილები სფერულ საკოორდინატო ღერძებზე.

ამოხსნა

$$q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \theta.$$

$$\begin{cases} x = rcos\theta cos\varphi \\ y = rcos\theta sin\varphi \\ z = rsin\theta \end{cases}$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = rcos\theta,$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r.$$

$$V_r = H_1\dot{q_1} = 1 \cdot \dot{r} = 0, V_\varphi = H_2\dot{q_2} = r\dot{\varphi}cos\theta = \frac{Rk}{2}cos\frac{kt}{2}, V_\theta = H_3\dot{q_3} = r\dot{\theta} = \frac{Rk}{2}.$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2 + V_\theta^2} = \frac{Rk}{2}\sqrt{1 + cos^2\frac{kt}{2}}.$$

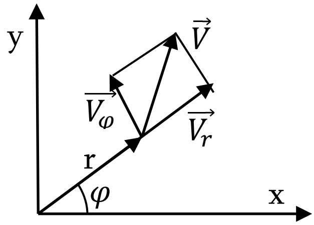
პასუხი: $V_r = 0, V_\varphi = \frac{Rk}{2}cos\frac{kt}{2}, V_\theta = \frac{Rk}{2}. V = \frac{Rk}{2}\sqrt{1 + cos^2\frac{kt}{2}}$.

ამოცანა 11.17

იპოვეთ იმ გემის მიერ აღწერილი ,ტრაექტორიის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, რომელიც მოძრაობს ისე რომ კუთხე α (კუთხე სიჩქარის მიმართულებასა და უძრავი წერტილის მიმართულებას შორის) მუდმივია, თუ ცნობილია კუთხე α და $r(\varphi = 0) = r_0$. გემი ჩავთვალოთ წერტილად, რომელიც მოძრაობს სიბრტყეში . პოლუსად შეიძლება ავიღოთ ამ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. გამოვიკვლიოთ კერძო შემთხვევა, როცა $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2},\ \alpha = \pi$.

ამოხსნა

$$\mathrm{q}_1 = \mathrm{r}, \mathrm{x} = \mathrm{rcos\varphi}. q_2 = \varphi,\ y = rsin\varphi. H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = 1, H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = r.$$



$V_r = H_1\dot{q}_1 = \dot{r},\ V_\varphi = H_2\dot{q}_2 = r\dot{\varphi}\ ,\ \frac{V_\varphi}{V_r} = tg\alpha.$

$\frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}} = tg\alpha, \dot{r} = r\dot{\varphi}\ ctg\alpha\ , dr = rctg\alpha \cdot d\varphi\ ,$

$\frac{dr}{r} = ctg\alpha \cdot d\varphi, lnr = \varphi ctg\alpha + C.$

$r(\varphi = 0) = r_0\ \rightarrow C = lnr_0.$

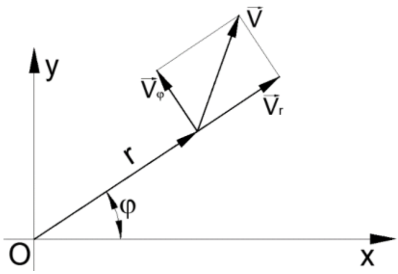
$ln\frac{r}{r_0} = \varphi ctg\alpha,$

საბოლოოდ მივიღებთ $r = r_0 e^{-\varphi ctg\alpha}$ - ეს არის ლოგარითმული სპირალის განტოლება.

როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით $r = r_0$.

როცა $\alpha = 0$ - წრფე, რომელიც გადის სათავეზე და მოცემულ წერტილზე.

როცა $\alpha = \pi$ - წრფე, რომელიც გადის სათავეზე და მოცემულ წერტილზე.



პასუხი: ლოგარითმული სპირალი $r = r_0 e^{-\varphi ctg\alpha}$. როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$ წრეწირი რადიუსით $r = r_0$. როცა $\alpha = 0$ ან $\alpha = \pi$, მაშინ ტრაექტორია არის წრფე.

11.17

12. წერტილის აჩქარება

ამოცანა 12.1

მატარებელი მოძრაობს მუდმივი 72კმ/სთ სიჩქარით. დამუხრუჭების დროს მან შეიძია შენელება 0,4მ/წმ^2. იპოვეთ სადგურში მოსვლამდე რა დროს და რა მანძილზე უნდა დაიწყოს დამუხრუჭება.

ამოხსნა

მატარებლის მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე:

$$\begin{cases} x = V_0 t - \frac{at^2}{2} \\ V = V_0 - at. \end{cases}$$

ვთქვათ დამუხრუჭების დრო არის τ . მატარებლის გაჩერების მომენტში სიჩქარე ნულის ტოლია. ხოლო გავლილი გზა S. ვისარგებლოთ ზემოთმოყვანილი განტოლებებით და გვექნება:

$$V_0 - a\tau = 0 \ \rightarrow \tau = \frac{V_0}{a} = \frac{20}{0,4} = 50 \ წმ. \ S = V_0\tau - \frac{a\tau^2}{2} = 500მ.$$

პასუხი: 50 წმ, 500მ.

ამოცანა 11.2

ურო, ბოძზე დარტყმის შემდეგ, მოძრაობს მასთან ერთად 0.02 წმ-ის განმავლობაში და ჩადის მასთან ერთად 6 სანტიმეტრზე. იპოვეთ ბოძის საწყისი სიჩქარე. მოძრაობა ჩათვალეთ თანაბრადშენელებულად.

ამოხსნა

უროს მოძრაობის განტოლებებია:

$$\begin{cases} y = V_0 t - \dfrac{at^2}{2} \\ V = V_0 - at. \end{cases}$$

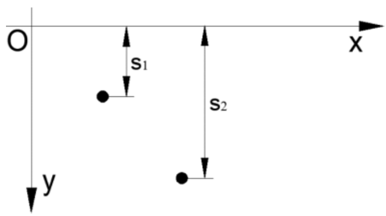
როცა y=h=6 წმ, მაშინ სიჩქარე უდრის ნულს.

$$V_0 - a\tau = 0, a = \frac{V_0}{\tau}, h = V_0\tau - \frac{at^2}{2} = \frac{V_0\tau}{2} \rightarrow V_0 = \frac{2h}{\tau} = 6მ/წმ.$$

პასუხი: 6 მ/წმ.

ამოცანა 12.3

წყლის წვეთი ვარდება ჰორიზონტალურ მილში გაკეთებული ხვრელიდან ყოველი 0,1 წმ- ის შემდეგ. წვეთის აჩქარებაა 9,81მ/წმ^2. განსაზღვრეთ მანძილი პირველ ორ წვეთს შორის პირველი წვეთის ჩამოვარდნიდან 1 წმ-ის შემდეგ.



ამოხსნა

$$S_1 = \frac{gt^2}{2}, S_2 = \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2,$$

$$S = S_1 - S_2 = \frac{g}{2}(t^2 - (t - \Delta t)^2)) = \frac{9,81}{2}(1 - (1 - 0,1)^2) = 0.932 \text{ მ}.$$

პასუხი: 0,932 მ.

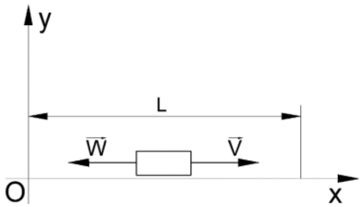
12.3

ამოცანა 12.4

ჩათვალეთ, რომ თვითმფრინავის დაფრენის სიჩქარე არის 400კმ/სთ, განვსაზღვროთ მისი შენელება l=1200 მ გზაზე. ჩავთვალოთ ,რომ შენელება მუდმივია.

ამოხსნა

მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე:



$$\begin{cases} x = V_0 t - \dfrac{Wt^2}{2} \\ V_x = V_0 - Wt \end{cases}$$

თვითმფრინავის გაჩერების მომენტში

$$V_x(t=\tau) = 0, x(t=\tau) = l,$$

აქედან

$$V_0 - W\tau = 0 \ \rightarrow \tau = \frac{V_0}{W},$$

$$l = V_0 \cdot \frac{V_0}{W} - \frac{W}{2}\left(\frac{V_0}{W},\right)^2 = \frac{V_0^2}{W} \rightarrow W = \frac{V_0^2}{2l} = 5{,}15 \text{ მ/წმ}^2$$

პასუხი: 5,15 მ/წმ².

ამოცანა12.5

ურო ვარდება 2.5 მ სიმაღლიდან. მის მაღლა აწევაზე იხარჯება სამჯერ მეტი დრო ვიდრე ვარდნაზე. რამდენ დარტყმას აკეთებს ურო ერთ წუთში, თუ ურო ვარდება თავისუფალი ვარდნის აჩქარებით g=9,81 მ/წმ.

ამოხსნა

უროს ვარდნის დრო გამოითვლება ტოლობით

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, ზევით აწევის დრო უდრის $t_2 = 3t_1$. სრული დრო ერთი ციკლისათვის არის

$$t_1 + t_2 = 4\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

ერთ წუთში შესრულებული დარტყმების რიცხვი უდრის

$$n = \frac{60}{4\sqrt{\frac{2h}{g}}} = 21\ .$$

პასუხი: 21 დარტყმა.

ამოცანა 12.6

ცოცია მოძრაობს სწორხაზოვან მიმმართველში აჩქარებით

$$W_x = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{მ/წმ}^2.$$

იპოვეთ ცოციას მოძრაობის განტოლება, თუ მისი საწყისი სიჩქარეა $V_{0x} = 2\pi$ მ/წმ. ხოლო საწყისი მდებრეობა ემთხვევა ცოციას შუა მდებარეობას, რომელიც აღებულია კოორდინატთა სათავედ.

ამოხსნა

აჩქარების გამოსახულება ასე ჩავწეროთ

$$\frac{dV_x}{dt} = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობა და მივიღებთ

$$V_x = \int -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = 2\pi cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + C_1.$$

რადგან $V_x = \frac{dx}{dt}$. ამიტომ წინა ტოლობის ინტეგრებით გვექნება

$$x = \int \left(2\pi cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + C_1\right) dt = 4sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + C_1 t + C_2.$$

საწყისი პირობებიდან ვპოულობთ ინტეგრების მუდმივებს

$$V_x(x=0) = 2\pi\ \rightarrow C_1 = 0, \qquad x(0) = 0\ \rightarrow C_2 = 0;$$

ამ პირობების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$x = 4sin\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

პასუხი: $x = 4sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

ამოცანა12.7

მატარებელმა, რომლის საწყისი სიჩქარეა 54 კმ/სთ, პირველ 30 წმში გაიარა 600 მეტრი. ჩათვალეთ მატარებლის მოძრაობა თანაბრადცვლადი და განსაზღვრეთ 30-ე წამის ბოლოს მატარებლის სიჩქარე და აჩქარება, თუ ის მოძრაობს R= 1 კმ რადიუსიან წრეწირზე.

ამოხსნა

მატარებლის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\sigma = \sigma_0 + V_0 t + \frac{W_\tau t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$V_\tau = V_0 + W_\tau t \qquad (2)$$

სადაც V_0 =54კმ/წმ=54· $\frac{5}{18} = 15$მ/წმ.

როცა $\sigma_0 = 0$, მაშინ

$$\sigma = V_0 t + \frac{W_\tau t^2}{2} \qquad (3)$$

(3) განტოლებიდან ვიპოვით მხებ აჩქარებას

$$W_\tau = \frac{2}{t^2}(\sigma - V_0 t) = \frac{2}{30^2}(600 - 15 \cdot 30) = 0{,}33 \text{ მ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე

$$V_\tau = V_0 + W_\tau t = 25\text{მ/წმ}.$$

ვიპოვოთ ნორმალური აჩქარება

$$W_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 0{,}625\text{მ/წმ}.$$

ვიპოვოთ სრული აჩქარება

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = \text{o},708\text{მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $V = 25მ/წმ$, $W =$=0,708მ/წმ^2.

ამოცანა 12.8

სადგურიდან გამოსვლის შემდეგ მატარებლის სიჩქარე იზრდება თანაბრად და 3 წამის შემდეგ აღწევს 72კმ/სთ. გზა არის 800 მეტრი რადიუსიანი წრეწირის რკალი. იპოვეთ მატარებლის მხები, ნორმალური და სრული აჩქარება გამოსვლიდან 2 წამის შემდეგ.

ამოხსნა

რადგან მოძრაობა თანაბრადცვლადია, ამიტომ სიჩქარე უდრის

$$V_\tau = W_\tau t + V_0 \qquad (1)$$

ვისარგებლოთ (1) განტოლებით და გავითვალისწინოთ, რომ $V_0 = 0$. მივიღებთ

$$W_\tau = \frac{V_\tau}{t} = \frac{1}{9} \text{ მ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ მატარებლის ნორმალური აჩქარება

$$W_n = \frac{V_\tau^2}{R} = \frac{2}{9}\text{მ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ მატარებლის სრული აჩქარების მოდული

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = 0.25\text{მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_\tau = \frac{1}{9}$ მ/წმ^2 ; $W_n = \frac{2}{9}$მ/წმ^2. $W = 0.25$მ/წმ^2.

ამოცანა 12.9

მატარებელი მოძრაობს თანაბრადშენელებულად R=800მ რადიუსიანი წრეწირის რკალზე და გაიარა S=800 მ მანძილი. საწყისი სიჩქარე $V_0 = 54\frac{მ}{წმ^2}$ და საბილოო სიჩქარე V=18 კმ/სთ. იპოვეთ მატარებლის სრული აჩქარება საწყის და საბოლოო მდებარეობაში, და აგრეთვე ამ გზის გასავლელად დახარჯული დრო.

ამოხსნა

გამოვსახოთ ყველა სიდიდე ერთეულთა SI სისტემაში

$$V_0 = 54 \cdot \frac{1000}{3600} = 15მ/წმ,\ V = 18 \cdot \frac{1000}{3600} = 5\ მ/წმ.$$

1) გალილეის ფორმულის თანახმად $V_\tau^2 = V_0^2 + 2W_\tau\sigma$. ჩვენ შემთხვევაში გვაქვს $V_\tau = V,\ \sigma = S$. ამიტომ

$$V^2 = V_0^2 + 2W_\tau S,$$

აქედან

$$W_\tau = \frac{V^2 - V_0^2}{2S} = -0{,}125\ მ/წმ^2.$$

2) თუ მატარებელი მოძრაობდა გზის ამ მონაკვეთზე τ დროის განმავლობაში, მაშინ

$$\tau = \frac{V - V_0}{-W_\tau} = 80წმ.$$

3) ნორმალური აჩქარება საწყის მომენტში უდრის

$$W_n = \frac{V_0^2}{R} = 0.281მ/წმ^2,$$

სრული აჩქარება უდრის

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = 0.308\ მ/წმ^2\ .$$

4) ვიპოვოთ აჩქარება გზის ბოლოს

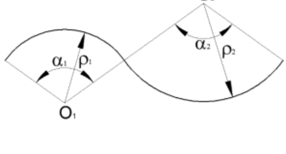
$$W_n = \frac{V^2}{R} = 0.032\ მ/წმ^2.$$

$$W = \sqrt{0.032^2 + 0{,}125^2} = 0{,}129\ მ/წმ^2.$$

პასუხი: $W_0 = 0{,}308\ მ/წმ^2,\ W = 0{,}129\ მ/წმ^2\ ,\ \ \tau = 80\ წმ.$

ამოცანა 12.10

ტრამვაის გზის მომრგვალება შედგება ორი რკალისაგან რომელთა რადიუსებია $\rho_1 = 300მ$ და $\rho_2 = 400მ$. ცენტრალური კუთხეები $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$. ააგეთ ნორმალური აჩქარების გრაფიკი, თუ ის მოძრაობს $V = 36$კმ/წმ სიჩქარით.



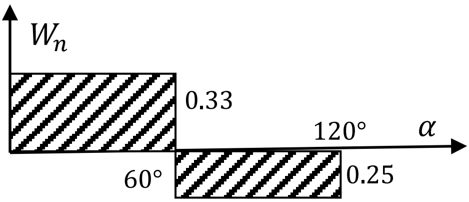
ამოხსნა

გადავიყვანოთ სიჩქარე SI სისტემაში $V = 36 \cdot \frac{1000}{3600} = 10$მ/წმ .
განვსაზღვროთ ნორმალური აჩქარებები თითოეულ მონაკვეთზე

$$W_{n2} = \frac{V^2}{\rho_1} = \frac{100}{300} = 1/3 \text{ მ/წმ}^2,\ W_{n2} = \frac{V^2}{\rho_2} = 1/4\text{მ/წმ}^2.$$

პასუხი:

ამოცანა 12.11



წერტილი მოძრაობს R=20 სმ რადიუსიანი წრ-ეწირის რკალზე. ტრაექტორიაზე მისი მოძრაობის კანონია $S = 20sin\pi t$ (t-წამებში, S-სანტიმეტრებში). იპოვეთ წერტილის სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება, მხები, ნორმალური და სრული აჩქარება t=5 წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე:

$$V_\tau = \frac{dS}{dt} = 20\pi cos\pi t.$$

ვიპოვოთ წერტილის მხები მდგენელი:

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = -20\pi^2 sin\pi t.$$

ვიპოვოთ წერტილის ნორმალური აჩქარება:

$$W_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 20\pi^2 cos\pi t.$$

გამოვთვალოთ ეს სიდიდეები 5 წმ მომენტისთვის და მივიღეთ:

$$V_\tau(5) = -20\pi^2 \text{სმ/წმ},\ W_\tau(5) = 0,\ W_n(5) = 20\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2,\ W = 20\pi^2 \text{სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: სიჩქარე უდრის 20π მ/წმ, მიმართულია დადებითი ათვლის მიმართულებით.

$$W_\tau = 0, W = W_n = 20\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 12.12

წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობა აღიწერება კანონით: $S = \frac{g}{a^2}(at + e^{-at})$, სადაც a და g - მუდმივი

ამოხსნა

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე

$$V_\tau = \frac{dS}{dt} = \frac{g}{a^2}(a - ae^{-at}) = \frac{g}{a}(1 - e^{-at}),\ V_\tau(0) = 0.$$

ვიპოვოთ აჩქარება

$$W = \frac{dV_\tau}{dt} = ge^{-at}.$$

თუ გავითვალისწინებთ წინა ტოლობას მოვიღებთ , რომ

$$W = g\left(1 - \frac{aV}{g}\right) = g - aV.$$

პასუხი: $V = 0;\ \ W = g - aV.$

ამოცანა 12.13

წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით: $x = 10cos2\pi\frac{t}{5}$, $y = 10sin2\pi\frac{t}{5}$. (x,y- სანტიმეტრებშია, ხოლო t-წამებში). იპოვეთ წერტილის ტრაექტორია, სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება და აგრეთვე აჩქარების სიდიდე და მიმართულება.

ამოხსნა

მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{10}\right)^2 = cos^2\frac{2\pi t}{5} \\ \left(\frac{y}{10}\right)^2 = sin^2\frac{2\pi t}{5} \end{cases}.$$

შევკრიბოთ ეს განტოლებები და მივიღებთ:

$$x^2 + y^2 = 10^2.$$

ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია 10 სანტიმეტრი.

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4\pi sin\frac{2\pi t}{5} \\ \dot{y} = 4\pi cos\frac{2\pi t}{5} \end{cases}$$

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 4\pi \text{ სმ/წმ}.$$

ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები

$$\begin{cases}\ddot{x} = -\frac{8\pi^2}{5}cos\frac{2\pi t}{5}\\ \ddot{y} = -\frac{8\pi^2}{5}sin\frac{2\pi t}{5}\end{cases}.$$

ვიპოვოთ წერტილის აჩქარება:

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 1{,}5\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: წრეწირი რადიუსით 10 სმ. სიჩქარე $V = 4\pi$ სმ/წმ და მიმართულუა ტრაექტორიის მხებად ისე რომ მობრუნება ხდება ox ღერძიდან oy ღერძის მომართულებით 90 გრადუსით. აჩქარება უდრის $W = 1{,}5\pi^2$ სმ/წმ^2 და მიმართულია წრეწირის ცენტრისკენ.

ამოცანა 12.14

დიზელის ძრავის მრუდმხარას თითის მოძრაობის განტოლებებია: $x = 75cos4t^2$, $y = 75sin4t^2$ (x,y- მოცემულია სანტიმეტრებში, ხოლო t- წამებში). იპოვეთ თითის სიჩქარე, მხები და ნორმალური აჩქარება.

ამოხსნა

ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება. ამისათვის მოძრაობის განტოლებები ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$x^2 + y^2 = 75^2.$$

ეს არის იმ წრეწირის განტოლება, რომლის რადიუსი R=75 სმ.

ვიპოვოთ სიჩქარე

$$\begin{cases}\dot{x} = -600tsin^2 4t^2\\ \dot{y} = 600tcos^2 4t^2\end{cases},$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 600t \text{ სმ/წმ}^2.$$

მხები აჩქარება

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = (60\dot{0}t) = 600 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ნორმალური აჩქარება უდრის

$$W_n = \frac{V^2}{R} = 4800t^2.$$

პასუხი: $V = 600t$ სმ/წმ, $W_\tau = \frac{dV}{dt} = 600$ სმ/წმ^2. $W_n = 4800t^2$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 12.15

წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით: $x = a(e^{kt} + e^{-kt})$, $y = a(e^{kt} - e^{-kt})$, სადაც a და k მოცემული მუდმივე-

ბია. იპოვეთ ტრაექტორიის განტოლება და წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, როგორც $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ რადიუსის ფუნქცია.

ამოხსნა

მიძრაობის განტოლებები ავიყვანოთ კვადრატში

$$\begin{cases} x^2 = a^2(e^{2kt} + e^{-2kt} + 2) \\ y^2 = a^2(e^{2kt} + e^{-2kt} - 2 \end{cases},$$

ავიყვანოთ ეს განტოლებები კვადრატში და გამოვაკლოთ პირველი მეორეს, მივიღებთ

$$x^2 - y^2 = 4a^2 \text{ - ჰიპერბოლა.}$$

ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = ak(e^{kt} - e^{-kt}) \\ \dot{y} = ak(e^{kt} + e^{-kt}) \end{cases},$$

ავიყვანოთ ეს ტოლობები კვადრატში და მივიღებთ:

$$V^2 = k^2(y^2 + x^2) \to V = kr.$$

აჩქარების გეგმილებია :

$$\begin{cases} \ddot{x} = k^2a(e^{kt} + e^{-kt}) \\ \ddot{y} = k^2a(e^{kt} - e^{-kt}) \end{cases} \to \begin{cases} \ddot{x} = k^2x \\ \ddot{y} = k^2y \end{cases} \to W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = k^2r.$$

პასუხი: ჰიპერბოლა $x^2 - y^2 = 4a^2$. $V = kr$, $W = k^2r$.

ამოცანა12.16

წერტილი აღწერს ლისაჟის ფიგურას , რომელიც აღიწერება განტოლებებით: $x = -asin2\omega t, y = -asin\omega t$. იპოვეთ სიმრუდის რადიუსი როცა x=y=0.

ამოხსნა

x=y=0 როცა t=0, ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2a\omega cos2\omega t \\ \dot{y} = -a\omega cos\omega t \end{cases}.$$

ვიპოვოთ წერტილის აჩქარების გეგმილები:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 4\omega^2 asin2\omega t \\ \ddot{y} = a\omega^2 sin\omega t \end{cases}.$$

ვიპოვოთ სიმრუდის რადიუსი ფორმულით:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{((\dot{x}^2 + \dot{y}^2))^{3/2}}.$$

თუ ჩავსვამთ შესაბამის სიდიდეებს და მოვახდენთ გამოთვლებს, მოვიღებთ:

$$\frac{1}{\rho} = 0 \to \rho = \infty.$$

პასუხი: $\rho = \infty$.

ამოცანა 12.17

ცილინდრი მიგორავს წრფის გასწვრივ უსრიალოდ. მისი ფერსოს წერტილი აღწერს წირს, რომლის განტოლებებია:

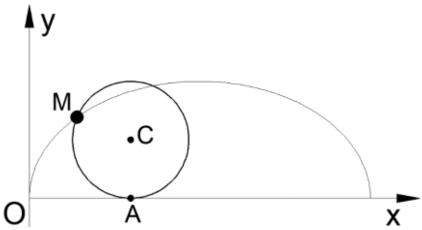
$x = 20t - sin2t, y = 1 - cos2t$ (t - წამებშია, ხოლო x,y -მეტრებში). იპოვეთ აჩქარების სიდიდე და მიმართულება და აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი როცა t=0.

ამოხსნა

ვიპოვოთ სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები:

$$\begin{cases} x = 20t - sin2t \\ y = 1 - cos2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 20(1 - cos20t) \\ \dot{y} = 20sin20t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 400sin20t \\ \ddot{y} = 400cos20t \end{cases}.$$

სიჩქარე უდრის: $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 40t.$



აჩქარება უდრის:

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 400\text{მ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ მხები აჩქარება:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 400cos10t.$$

ნორმალური აჩქარებაა

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = 400sin10t.$$

სიმრუდის რადიუსი უდრის

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = 400sin10t. \rightarrow \rho(0) = 0.$$

პასუხი: აჩქარება W=400მ/წმ^2 და მიმართულია ცილინდრის ცენტრისკენ MC რადიუსის გასწვრივ. $\rho = 2MA$,

$\rho_0 = 0.$

ამოცანა 12.18

იპოვეთ მრუდხარა-ბარბაცა მექანიზმის M წერტილის ტრაექტორია, სიჩქარე, აჩქარება და ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი, როცა $\varphi = 0$, თუ ცნობილია, რომ $r = l = 60$ სმ, $MB = \frac{1}{3}l, \varphi = 4\pi t$ (t -წამებშია)

ამოხსნა

ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლება

$$\begin{cases} xx = 100cos4\pi t \\ y = 20sin4\pi t \end{cases}.$$

ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დროის პარამეტრი და მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{100}\right)^2 = cos^2 4\pi t\\ \left(\frac{y}{20}\right)^2 = sin^2 4\pi t\end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1 \text{ -ელიფსი.}$$

სიჩქარის გეგმილები ღერძებზე უდრის

$$\begin{cases}\dot{x} = -400\pi sin4\pi t\\ \dot{y} = 80\pi cos4\pi t\end{cases}.$$

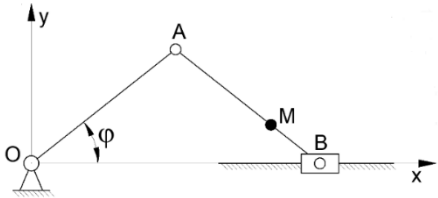
როცა t=0, მაშინ $\dot{x} = 0, \dot{y} = 80\pi$.

წერტილის სიჩქარეა

$$V = \sqrt{(-400\pi sin4\pi t)^2 + (80\pi cos4\pi t)^2}, V(0) = 80\pi \text{ სმ/წმ.}$$

სრული აჩქარების კოორდინატების

$$\begin{cases}\ddot{x} = -1600\pi^2 cos4\pi t\\ \ddot{y} = -320\pi^2 sin4\pi t\end{cases}.$$



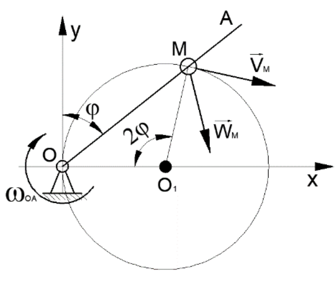
როცა t=0, მაშინ $\ddot{x} = -1600\pi^2, \ddot{y} = 0$

t=0 მომენტისთვის მხები აჩქარება ნულის ტოლია, ამიტომ სრული აჩქარება უდრის ნორმალურ აჩქარებას. სრული აჩქარება უდრის W(0)=1600 π^2 სმ/წმ² . გამოვთვალოთ სიმრუდის რადიუსი $\varphi = 0$ მომენტისთვის.

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = 4\text{სმ.}$$

პასუხი: ტრაექტორია არის ელიფსი $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$. V=80$\pi$სმ/წმ, $\rho = 4$ სმ.

ამოცანა 12.19



წრიულ მავთულზე, რომლის რადიუსია 10 სმ, წამოცმულია როლი.ამ რგოლში გადის OA ღერო, რომელიც თანაბრად ბრუნავს წრეწირზე მდებარე O წერტილის გარშემო. ღეროს კუთხური სიჩქარე ისეთია, რომ ის 5 წამში შემობრუნდება მართი კუთხით. განსაზღვრეთ რგოლის სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად $\varphi = \omega t$, სადაც ω - კუთხური სიჩქარეა. რკალი OM უდრის 2 φ. რგოლის მოძრაობის განტოლებაა: $\sigma = 2r\varphi = 2r\omega t$. რგოლის სიჩქარე:

$$V_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = 2r\omega.$$

ამოცანის პირობით; როცა t=5 მაშინ $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ანუ $\frac{\pi}{2} = \omega \cdot 5$, აქედან $\omega = \frac{\pi}{10}1$/წმ. $V_\tau = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{10} = 2\pi$სმ/წმ.

მხები აჩქარება $W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = 0$. ნორმალური აჩქარებაა $W_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 0{,}4\pi^2$.

პასუხი: $V = 2\pi$ სმ/წმ, $W = 0{,}4\pi^2$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 12.20

წინა ამოცანის პირობიდან გამომდინარე განსაზღვრეთ რგოლის სიჩქარე და აჩქარება როგორც φ კუთხის ფუნქცია, თუ OM ღეროს კუთხური აჩქარება უდრის $kcos\varphi$ (k - მუდმივია). საწყის მომენტში მობრუნების კუთხე და სიჩქარე ნულის ტოლია. წრეწირის რადიუსია r, $0 \le \varphi \le \pi$.

ამოხსნა

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე

$$\varepsilon = kcos\varphi \ \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = kcos\varphi \ \rightarrow \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = kcos\varphi \ \rightarrow \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = kcos\varphi.$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობა და მივიღებთ:

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\varphi kcos\varphi d\varphi \ \rightarrow \ \frac{\omega^2}{2} = ksin\varphi \ \rightarrow \omega = \sqrt{2ksin\varphi}.$$

გვაქვს ასევე, რომ $\sigma = 2r\varphi$, $\boldsymbol{V = \frac{d\sigma}{dt} = 2r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}, V_\tau = 2r\omega = 2r\sqrt{2ksin\varphi}$.

მხები აჩქარება უდრის :

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 2rkcos\varphi.$$

ნორმალური აჩქარება უდრის:

$$W_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = 8krsin\varphi.$$

სრული აჩქარება უდრის :

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = 2rk\sqrt{1 + 15sin^2\varphi}\,.$$

პასუხი: $V = 2r\sqrt{2ksin\varphi}, W = 2rk\sqrt{1 + 15sin^2\varphi}$.

ამოცანა 12.21

ჭურვის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით: $x = V_0 t cos\alpha_0$, $y = V_0 t sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$. სადაც V_0, α_0- მუდმივებია.

იპოვეთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი გასროლისა და დაცემის მომენტში.

ამოხსნა

განვსაზღვროთ ჭურვის სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები

$$\begin{cases} x = V_0 t cos\alpha_0 \\ y = V_0 t sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = V_0 cos\alpha_0 \\ \dot{y} = V_0 sin\alpha_0 - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}.$$

ვიპოვოთ ტრაექტორიის სიმრუდე

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{|-gV_0 cos\alpha_0|}{\sqrt{[V_0^2 cos^2\alpha_0 + (V_0 sin\alpha_0 - gt)^2]^3}}.$$

განვსაზღვროთ ტრაექტორიის სიმრუდე t=0 მომენტისთვის:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g cos\alpha_0}{V_0^2} \rightarrow \rho = \frac{V_0^2}{g cos\alpha_0}.$$

ისეთივე იქნება სიმრუდე დაცემის წერტილში.

პასუხი: $\rho = \frac{V_0^2}{g cos\alpha_0}$

ამოცანა12.22

ჭურვი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში კანონით: $x = 300t, y = 400t - 5t^2$ (t -წამებშია x,y - მეტრებში). იპოვეთ: 1) სიჩქარე და აჩქარება საწყის მომენტში, 2) სროლის სიმაღლე და სიშორე, 3) ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი საწყის მომენტში და უმაღლეს წერტილში.

ამოხსნა

1) ჭურვის მოძრაობის განტოლებაა:

$$\begin{cases} x = 300t \\ y = 400t - 5t^2 \end{cases}.$$

ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = 300 \\ \dot{y} = 400 - 10t' \end{cases}$$

საწყისს მომენტში $\dot{x}(0) = 300$ მ/წმ, $\dot{y}(0) = 400$ მ/წმ. სიჩქარე საწყის მომენტში $V(0) = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ მ/წმ.

2) ვიპოვოთ აჩქარება

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -10 \end{cases} \rightarrow W = 10 \text{ მ/წმ}^2$$

3) ვიპოვოთ ტრაექტორიის განტოლება. ამისათვის გამოვრიცხოთ დრო მოძრაობის განტოლებებიდან და მივიღებთ:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5x^2}{300^2}.$$

გავაწარმოოთ ტრაექტორიის განტოლება და ფრენის სიმაღლე ვიპოვოთ იმ პირობით, რომ წარმოებული უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$$\dot{y} = \frac{4}{3} - \frac{10x}{300^2} = 0 \ \rightarrow x = 12000 \ \rightarrow y_{max} = y(12000) = 8000 \text{ მ}.$$

ფრენის სიშორე უდრის S =24000მ.

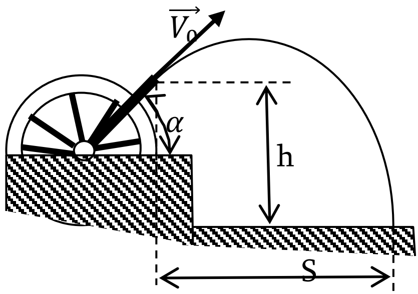
4) ვიპოვოთ სიმრუდის რადიუსი საწყის მომენტში

$$\rho_0 = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|} = 41{,}67\text{კმ}.$$

ანალოგიურად ვიპოვით სიმრუდის რადიუსს დაცემის წერტილში: $\rho = 9$ კმ.

პასუხი: V_0=500მ/წმ, W_0 =10 მ/წმ^2, h=8კმ, S=24 კმ, $\rho_0 = 41{,}67$ კმ, $\rho = 9$ კმ.

ამოცანა12.23



ქვემეხიდან, რომელიც ზღვის დონიდან h=30მ სიმაღლეზეა, ჰორიზონტისადმი $\alpha_0 = 45°$ კუთხით გაისროლეს ჭურვი $V_0 = 1000$მ/წმ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ქვემეხიდან რა მანძილზე მოხვდება მიზანს, რომელიც ზღვის დონეზე იმყოფება.ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა

ჭურვის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{cases} x = V_0 t cos\alpha_0 \\ y = h + V_0 t sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

ჭურვის დაცემის მომენტში $x(T) = S, y(T) = 0.$ ამ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} S = V_0 T cos\alpha_0 \\ 0 = h + V_0 T sin\alpha_0 - \dfrac{1}{2}gT^2. \end{cases}$$

გამივრიცხოთ ამ ტოლობებიდან დრო და მივიღებთ განტოლებას,საიდანაც განისაზღვრება ფრენის სიშორე:

$$S^2 - 2\frac{V_0^2}{g}sin\alpha cos\alpha \cdot S - \frac{2V_0^2}{g}hcos^2\alpha = 0.$$

ამ კვადრატული განტოლების ამოხსნით ვიპოვით;

$$S = \frac{V_0}{g}cos\alpha\left[V_0 sin\alpha + \sqrt{(V_0 sin\alpha)^2 + 2gh}\right] = 102 \text{ კმ}$$

პასუხი: 102 კმ.

ამოცანა12.24

იპოვეთ იმ წერტილის მხები და ნორმალური აჩქარება, რომლის მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით:

$x = \alpha t, y = \beta t - \frac{gt^2}{2}$.

ამოხსნა

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha \\ \dot{y} = \beta - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \rightarrow W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = g.$$

ვიპოვოთ მხები აჩქარება

$$W_\tau = \frac{\vec{W} \cdot \vec{V}}{V} = -\frac{g(\beta - gt)}{V}.$$

ვიპოვოთ ნორმალური აჩქარება

$$W_n = \sqrt{g^2 - \frac{g^2(\beta - gt)^2}{V^2}} = \frac{g\alpha}{V}.$$

პასუხი: $W_\tau = -\frac{g(\beta - gt)}{V}$; $W_n = \frac{g\alpha}{V}$, სადაც V - წერტილის სიჩქარეა.

ამოცანა 12.25

წერტილი მოძრაობს ხრახნწირზე კანონით: $x = 2cos4t, y = 2sin4t, z = 2t$. იპოვეთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი. მანძილი იზომება მეტრებით.

ამოხსნა

ვიპოვოთ სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები:

$$\begin{cases} V_x = -8sin4t \\ V_y = 8cos4t \\ V_z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W_x = -32cos4t \\ W_y = -32sin4t \\ W_z = 0 \end{cases}.$$

წერტილის სიჩქარე:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{68}.$$

მხები აჩქარება :

$$W_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \frac{W_xV_x + W_yV_y + W_zV_z}{V} = 0.$$

ნორმალური აჩქარება:

$$W_n = W = 32\text{მ/წმ}^2.$$

სიმრუდის რადიუსი:

$$\rho = \frac{V^2}{W} = 2\frac{1}{2}\text{მ}.$$

პასუხი: $\rho = 2\frac{1}{2}$ მ.

ამოცანა 12.26

წერტილის მოძრაობა მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში : $r = ae^{kt}$, $\varphi = kt$, სადაც a და k - მოცემული მუდმივებია. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება, სიჩქარე, აჩქარება და სიმრუდის რადიუსი, როგორც რადიუს-ვექტორის ფუნქცია.

ამოხსნა

მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო და მივიღებთ : $r = ae^{\varphi}$ - ეს არის ლოგარითმული სპირალი. ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილებში პოლარულ კოორდინატებში:

$$V_r = \dot{r} = kae^{kt} = kr. V_\varphi = r\dot{\varphi} = rk, V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2 =} kr\sqrt{2}.$$

ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = ak^2e^{kt} - ak^2e^{kt} = 0.$$

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\ddot{\varphi} = 2k^2r.$$

წერტილის აჩქარება :

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = 2k^2r.$$

მხები აჩქარება უდრის

$$W_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = k^2\sqrt{2}ae^{kt} = k^2r\sqrt{2}\,.$$

ნორმალური აჩქარება:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = k^2r\sqrt{2}\,.$$

სიმრუდის რადიუსი :

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = r\sqrt{2}\,.$$

პასუხი: $r = ae^{\varphi}$ -ლოგარითმლი სპირალი; $V = kr\sqrt{2}, W = 2k^2r, \rho = r\sqrt{2}$.

ამოცანა12.27

წერტილის მოძრაობა მოცემულია გამტოლებებით: $x = 2t, y = t^2$ ($t -$ წამებშია, $x, y -$ სანტიმეტრებში). განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარის და აჩქარების სიდიდე და მიმართულება t=0 წმ მომენტისათვის.

ამოხსნა

ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 2t \end{cases}.$$

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2\sqrt{1 + t^2}.$$

მიმართულების კოსინუსები უდრის:

$$\cos(x, \vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos(y, \vec{V}) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

დროის t=1 წმ მომენტისათვის

$$V(1) = 2\sqrt{2}\ , \cos(x, \vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \cos(y, \vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

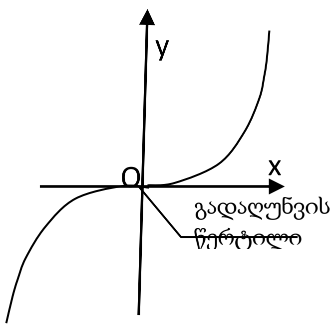
ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები: $\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 2.$ აჩქარება $W = 2$ სმ/წმ²,

მიმართულების ცოსინუსებია: $\cos(x, \vec{W}) = 0\ ,\ \cos(y, \vec{W}) = 1.$

პასუხი: $V(1) = 2\sqrt{2}$სმ/$წმ$, $\cos(x, \vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \cos(y, \vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ $W = 2$ სმ/წმ², $\cos(x, \vec{W}) = 0\ ,\ \cos(y, \vec{W}) = 1.$

ამოცანა 12.28

ააგეთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარეის ჰოდოგრაფი და განსაზღვრეთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი საწყის მომენტში, თუ წერტილი მოძრაობს კანონით: $x = 4t;\ y = t^3$ (t- წამებშია, x,y - სანტიმეტრებში).



ამოხსნა

გამოვრიცხოთ დრო მოძრაობის განტოლებებიდან

$$t = \frac{x}{4}, y = \left(\frac{x}{4}\right)^3 = \frac{x^3}{64}$$ -ეს არის კუბური პარაბოლა.

ვიპოვოთ სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები:

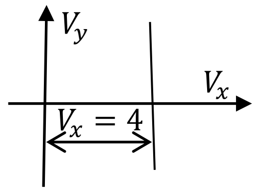
$$\begin{cases}\dot{x} = 4\\ \dot{y} = 3t^2\end{cases} \cdot \begin{cases}\ddot{x} = 0\\ \ddot{y} = 6t\end{cases} \cdot$$

წერტილის სიჩქარეა:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{16 + 9t^2},\ V(0) = 4 \text{ სმ/წმ}.$$

აჩქარება უდრის:

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 6t,\ W(0) = 0.$$

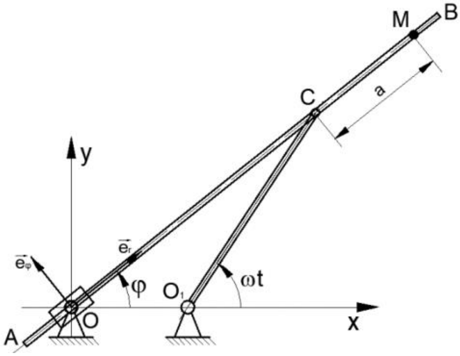


სიჩქარის ჰოდოგრაფია V_y ღერzის პარალელური წრფე

პასუხი: ტრაექტორიის განტოლებაა $y = \frac{x^3}{64}$ - კუბური პარაბოლა; სიჩქარის ჰოდოგრაფი არის V_y ღერძის პარალელური წრფე. $\rho_0 = \infty$, ტრაექტორიის საწყისი წერტილი არის გადაღუნვის წერტილი.

ამოცანა 12.29

მრუდხარა O_1C, რომლის სიგრძეა 2a, ბრუნავს O_1 ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. C წერტილში მრუდხარასთან სახსრითაა დაკავშირებული AB სახაზავი, რომელიც გადის მოძრავ O მილაკში, რომელიც ბრუნვის O_1 ღერძიდან დაშორებულია a/2 მანძილით. ჩათვალეთ წერტილი პოლუსად და იპოვეთ პოლარულ კოორდინატებში M წერტილის მოძრაობის განტოლებები, მისი ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება (საწყის მომენტში კუთხე $\varphi = 0$), თუ OM=a.



ამოხსნა

$$O_1C = \frac{a}{2}, OO_1 = \frac{a}{2}, CM = a, \varphi = \frac{\omega t}{2},\ r = \frac{a}{2}\cos\varphi + \frac{a}{2}\cos\varphi + a = a\left(1 + \cos\frac{\omega t}{2}\right).$$

სიჩქარეს გამოვითვლით ფორმულებით:

$$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi};\ V_r = \dot{r},\ V_\varphi = r\dot{\varphi}\,.$$

მოვიღებთ

$$V_r = a\left(-\sin\frac{\omega t}{2}\cdot\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{a\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}, V_\varphi = r\cdot\frac{\omega}{2} = \frac{a\omega}{2}\left(1 + \cos\frac{\omega t}{2}\right).$$

$$V=\sqrt{V_r^2+V_\varphi^2}=a\omega cos\frac{\omega t}{4};$$

აჩქარება გამოითვლება ფორმულებით:

$$W_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2,\ W_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

აქედან

$$\dot{r}=-\frac{\mathrm{a\omega}}{2}\sin\frac{\mathrm{\omega t}}{2},\ddot{r}=-\frac{a\omega^2}{2}cos\frac{\omega t}{2},\ \dot{\varphi}=\frac{\omega}{2},\ddot{\varphi}=0\ .$$

$$W_r=-\frac{a\omega^2}{2}\left(1+2cos\frac{\omega t}{2}\right),\quad W_\varphi=-\frac{a\omega^2}{2}sin\frac{\omega t}{2}.$$

$$W=\sqrt{W_r^2+W_\varphi^2}=\frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5+4cos\frac{\omega t}{2}},$$

პასუხი: 1) r= a$\left(1+\cos\frac{\mathrm{\omega t}}{2}\right)$,$\varphi=\frac{\mathrm{\omega t}}{2}$. 2) r=a(1+cos$\varphi$) - კარდოიდა; 3) $V=a\omega cos\frac{\omega t}{4}$; 4) $W=\frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5+4cos\frac{\omega t}{2}}$.

ამოცანა 12.30

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ კარდოიდის სიმრუდის რადიუსი როცა $r=2a,\varphi=0$.

ამოხსნა

პოლარულ კოორდინატებში სიმრუდე განისაზღვრება ფორმულით:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\right)^3}.$$

კარდოიდას განტოლებაა: r=a(1+cosφ), აქედან $\frac{dr}{d\varphi}=-asin\varphi,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}=-acos\varphi$. ჩავსვათ სიმრუდის გამოსათვლელ ფორმულაში და მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{a^2[(1+cos\varphi)(2+cos\varphi)+2sin^2\varphi]}{\left(\sqrt{a^2[(1+cos\varphi)^2+sin^2\varphi]}\right)^3}\ \rightarrow\ \rho=\frac{\left(\sqrt{a^2[(1+cos\varphi)^2+sin^2\varphi]}\right)^3}{a^2[(1+cos\varphi)(2+cos\varphi)+2sin^2\varphi]}.$$

გამოვთვალოთ $\rho(\varphi=0)=\frac{4}{3}$a.

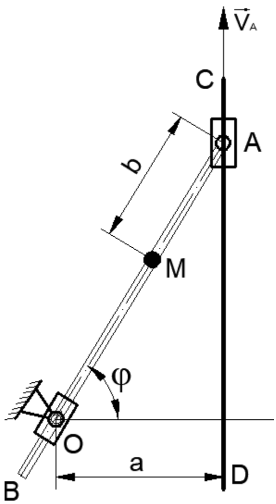
პასუხი: $\rho(\varphi=0)=\frac{4}{3}$a.

ამოცანა 12.31

AB ძელის A ბოლო გადაადგილდება სწორხაზოვანი CD მიმმართველის გასწვრივ მუდმივი V_A სიჩქარით. AB ძელი ყოველთვის გადის O მოძრავ მილაკში, რომელიც CD მიმმართველიდან დაშორებულია

a მანძილით. ჩავთვალოთ O წერტილი პოლუსად და ვიპოვოთ M წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, თუ ის მდებარეობს სახაზავზე A წერტილიდან b მანძილზე.

ამოხსნა



ერთის მხრივ $y_A = atg\varphi$, ხოლო მეორე მხრივ $y_A = V_x t$, საიდანაც $atg\varphi = V_x t$. აქედან $tg\varphi = \frac{V_x t}{a}$.

ვიპოვოთ ასევე თანაფარდობები:

$$sin^2\varphi = \frac{\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2}; \quad cos^2\varphi = \frac{1}{1+\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2}.$$

ვიპოვოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში. პითაგორას თეორემის თანახმად

$$OA^2 = a^2 + (V_A t)^2 \ \rightarrow OA = \sqrt{a^2 + (V_A t)^2}, r = \sqrt{a^2 + (V_A t)^2} - b.$$

ამრიგად, მოძრაობის განტოლებებია:

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + (V_A t)^2} - b \\ \varphi = arctg\left(\frac{V_x t}{a}\right) \end{cases}.$$

ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები:

$$V_r = \dot{r}\ , \ V_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$\dot{\varphi} = \frac{\frac{V_A}{a}}{1+\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2}, V_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{a^2 + (V_A t)^2} - b\right) = \frac{V_A^2 t}{\sqrt{a^2+(V_A t)^2}}.$$

$$V_r^2 = \left(\frac{V_A^2 t}{\sqrt{a^2+(V_A t)^2}}\right)^2 = V_A^2 \frac{\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2} = V_A^2 sin^2\varphi.$$

$$V_\varphi = r \cdot \frac{\frac{V_A}{a}}{1+\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2}, \rightarrow V_\varphi^2 = r^2 \frac{(\frac{V_A}{a})^2}{\left[1+\left(\frac{V_x t}{a}\right)^2\right]^2} = r^2\left(\frac{V_A}{a}\right)^2 cos^4\varphi,$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi} = \sqrt{V_A^2 sin^2\varphi + r^2\left(\frac{V_A}{a}\right)^2 cos^4\varphi} = \sqrt{\frac{V_A^2}{a^2}(a^2 sin^2\varphi + r^2 cos^4\varphi)}$$

$$V = \frac{V_A}{a}\sqrt{a^2 sin^2\varphi + r^2 cos^4\varphi}\ .$$

ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = \frac{V_A^2 b}{a^2} cos^3\varphi\sqrt{1 + 3sin^2\varphi}\,.$$

პასუხი: $V = \frac{V_A}{a}\sqrt{a^2sin^2\varphi + r^2cos^4\varphi}$, $W = \frac{V_A^2 b}{a^2}cos^3\varphi\sqrt{1 + 3sin^2\varphi}$, სადაც , $r = \sqrt{a^2 + (V_A t)^2} - b, \varphi = arctg\left(\frac{V_x t}{a}\right)$.

ამოცანა 12.32

წერტილი M მოძრაობს ხრახნწირზე. ცილინდრულ კოორდინატებში მისი მოძრაობის განტოლებებია:

$r = a, \varphi = kt, z = \nu t$. იპოვეთ აჩქარების გეგმილები ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელები და ხრახნწირის სიმრუდის რადიუსი.

ამოხსნა

მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე:

$$\begin{cases} r = a \\ \varphi = kt \\ z = \nu t \end{cases}.$$

სადაც a, k, ν - მუდმივებია. წერტილი თანაბრად მოძრაობს ხრახნწირზე. სიჩქარის გეგმილებია:

$$V_r = 0,\ V_\varphi = ak, V_z = \nu.$$

აქედან *გამომდინარე,* , სიჩქარე უდრის

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2} = \sqrt{a^2k^2 + \nu^2}\,.$$

ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -rk^2,\ W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0, W_z{=}0.$$

რადგან V=const, ამიტომ $W_\tau = 0,\ W_n{=}\mathrm{r}k^2$.

სიმრუდის რადიუსი უდრის:

$$\rho = \frac{a^2k^2+\nu^2}{\mathrm{r}k^2}\,.$$

პასუხი: 1) $W_r = -rk^2,\ W_\varphi = 0, W_z{=}0$.

2) $W_\tau = 0,\ W_n{=}\mathrm{r}k^2$.

3) $\rho = \frac{a^2k^2+\nu^2}{\mathrm{r}k^2}$.

ამოცანა 12.33

წერტილი მოძრაობს $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროსა და $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ ცილინდრის გადაკვეთის წირზე. წერტილის მოძრაობის განტოლებებს

სფერულ კოორდინატებში აქვთ სახე: $r = R, \varphi = \frac{kt}{2}, \theta = \frac{kt}{2}$. იპოვეთ აჩქარების გეგმილები და სიდიდე სფერულ კოორდინატებში.

ამოხსნა

გამოვთვალოთ ლამეს კოეფიციენტები და სიჩქარის გეგმილები სფერულ კოორდინატებში:

$$\begin{cases} g_1 = r \\ g_2 = \varphi \\ g_3 = \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = 1 \\ H_2 = r\cos\theta \\ H_3 = r \end{cases}, \begin{cases} V_r = H_1\dot{g}_1 = \dot{r} \\ V_\varphi = H_2\dot{g}_2 = r\dot{\varphi}\cos\theta \\ V_\theta = H_3\dot{g}_3 = r\dot{\theta}. \end{cases}$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{e_r}\dot{r} + r\dot{\varphi}\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}.$$

სადაც $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_\theta}$ − შესაბამისი ღერძების მგეზავებია.

$$T = \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right);$$

$$W_r = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r}\right\};$$

გამოვთვალოთ შესაბამისი წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = \ddot{r}, \frac{\partial T}{\partial r} = r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + r\dot{\theta}^2;$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ :

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2 = -R\frac{k^2}{4}(1 - \cos^2\theta);$$

$$W_\varphi = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right\}; \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos^2\theta + r^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\dot{r} = 0,\ \ddot{\varphi} = 0, \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \frac{k}{2}$, მივიღებთ:

$$W_\varphi = \frac{1}{r\cos\theta}\left(2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos^2\theta + r^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right) = -\frac{Rk^2}{2}\sin\theta.$$

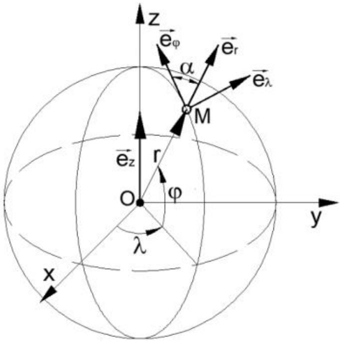
$$W_\theta = \frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right\}; \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta; \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta};$$

$$W_\theta = \frac{1}{r}\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} + r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{Rk^2}{4}\sin\theta\cos\theta;$$

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2 + W_\theta^2} = \frac{Rk^2}{4}\sqrt{4 + 3\sin^2\theta}.$$

პასუხი: $W_r = -R\frac{k^2}{4}(1 - \cos^2\theta); W_\varphi = -\frac{Rk^2}{2}\sin\theta;\ W_\theta = \frac{Rk^2}{4}\sin\theta\cos\theta;\ W = \frac{Rk^2}{4}\sqrt{4 + 3\sin^2\theta}$.

ამოცანა 12.34



გემი მოძრაობს მუდმივი კურსით α (გეოგრაფიულ განედთან შედგენილი კუთხე) და აღწერს წირს, რომელსაც ლოქსოდრომია ეწოდება. ჩათვალეთ, რომ გემის სიჩქარის მოდული მუდმივია. იპოვეთ აჩქარების გეგმილები სფერულ საკოორდინატო ღერძებზე, აჩქარების მოდული და წირის სიმრუდის რადიუსი.

ამოხსნა

$$\vec{V} = V\left(\overrightarrow{e_\varphi}\cos\alpha + \overrightarrow{e_\lambda}\sin\alpha\right).$$

საბაზისო სისტემის კუთხური სიჩქარის ვექტორი უდრის

$$\vec{\omega} = \dot{\lambda}\overrightarrow{e_r} - \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\lambda} = \dot{\lambda}\left(\overrightarrow{e_r}sin\varphi + \overrightarrow{e_\varphi}cos\varphi\right) - \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\lambda}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\dot{\lambda} = \frac{Vsin\alpha}{Rcos\varphi},\ \dot{\varphi} = \frac{Vcos\alpha}{R}.$$

ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\vec{\omega} = \frac{Vsin\alpha}{Rcos\varphi}\left(\overrightarrow{e_r}sin\varphi + \overrightarrow{e_\varphi}cos\varphi\right) - \frac{Vcos\alpha}{R}\overrightarrow{e_\lambda}.$$

რადგან პირობის მიხედვით სიჩქარე მუდმივია, მივიღებთ:

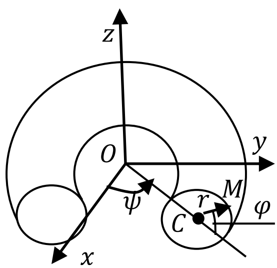
$$\vec{W} = \vec{\omega}\times\vec{V} = \frac{V^2}{R}\left[-\overrightarrow{e_r} + \overrightarrow{e_\varphi}tg\varphi sin^2\alpha - \overrightarrow{e_\lambda}tg\varphi sin\alpha cos\alpha\right],$$

აქედან ვიპოვით სიმრუდის რადიუსს

$$\rho = \frac{V^2}{W} = \frac{R}{\sqrt{1+tg^2\varphi sin^2\alpha}}.$$

პასუხი: $\vec{W} = \frac{V^2}{R}\left[-\overrightarrow{e_r} + \overrightarrow{e_\varphi}tg\varphi sin^2\alpha - \overrightarrow{e_\lambda}tg\varphi sin\alpha cos\alpha\right],\ \rho = \frac{R}{\sqrt{1+tg^2\varphi sin^2\alpha}}$.

ამოცანა12.35



გამოსახეთ წერტილის დეკარტეს კოორდინატები ტოროიდალური კოორდინატებით $r = CM, \varphi, \psi$ (იხ. ნახ.) და გამოთვალეთ ლიამეს კოეფიციენტები.

ამოხსნა

მრუდწირულ კოორდინატებად

ავიღოთ $g_1 = r,\ g_2 = \psi,\ g_3 = \varphi$.

$$\begin{cases} x = (a + rcos\varphi)cos\psi \\ y = (a + rcos\varphi)sin\psi \\ \quad z = rsin\varphi \end{cases}$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_3}\right)^2}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial g_1} = \frac{\partial x}{\partial r} = cos\varphi cos\psi$$

$$\frac{\partial y}{\partial g_1} = \frac{\partial y}{\partial r} = cos\varphi sin\psi$$

$$\frac{\partial z}{\partial g_1} = \frac{\partial z}{\partial r} = sin\varphi$$

$$H_1 = \sqrt{cos^2\varphi cos^2\psi + cos^2\varphi sin^2\psi + sin^2\varphi} = 1.$$

ანალოგიურად ვიპოვით დანარჩენ კოეფიციენტებსაც

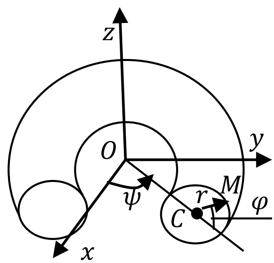
$$H_2 = a + \dot{r}cos\varphi,\ \ H_3 = r.$$

პასუხი:

1) $x = (a + rcos\varphi)cos\psi\ , y = (a + rcos\varphi)sin\psi\ , z = rsin\varphi$.

2) $H_1 = 1, H_2 = a + \dot{r}cos\varphi,\ \ H_3 = r.$

ამოცანა 12.36



წერტილის მოძრაობა მოცემულია ტოროიდალურ სისტემაში r, φ, ψ. იპოვეთ სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები ამ სისტემის ღერძებზე .

ამოხსნა

ვისარგებლოთ წინა ამოცანის შედეგებით: $H_1 = 1, H_2 = a + \dot{r}cos\varphi,\ \ H_3 = r.$ ვიპოვოთ გეგმილები შესაბამის ღერძებზე:

$$V_r = H_r\,\dot{r} = \dot{r}\ , \qquad V_\psi = H_\psi\dot{\psi} = (a + \dot{r}cos\varphi)\dot{\psi}\ , \quad V_\varphi = H_\varphi\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}.$$

სიჩქარის მოდული უდრის

$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \left((a + \dot{r}cos\varphi)\right)^2\dot{\psi}^2}.$$

ვიპოვოთ

$$T=\frac{1}{2}V^2=\frac{1}{2}\left[\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\left((a+\dot{r}cos\varphi)\right)^2\dot{\psi}^2\right].$$

მაშინ

$$W_r=\frac{1}{H_r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}\right\}=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2-(a+\dot{r}cos\varphi)\dot{\psi}^2cos\varphi.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$W_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}+(a+\dot{r}cos\varphi)\dot{\psi}^2sin\varphi,$$

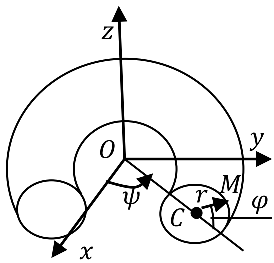
$$W_\psi=\ddot{\psi}(a+rcos\varphi)+2\dot{\psi}(\dot{r}cos\varphi-r\dot{\varphi}sin\varphi).$$

პასუხი:

1) $V_r=\dot{r}$, $V_\psi=(a+\dot{r}cos\varphi)\dot{\psi}$, $V_\varphi=r\dot{\varphi}$.

2) $W_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2-(a+\dot{r}cos\varphi)\dot{\psi}^2cos\varphi$, $W_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}+(a+\dot{r}cos\varphi)\dot{\psi}^2sin\varphi$,
$W_\psi=\ddot{\psi}(a+rcos\varphi)+2\dot{\psi}(\dot{r}cos\varphi-r\dot{\varphi}sin\varphi)$.

ამოცანა 12.37



წერტილი მოძრაობს ტორზე დახვეული ხრახნწირის გასწვრივ კანონით: $r=R=const,\psi=\omega t,\varphi=kt$.

იპოვეთ წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები ტოროიდალურ საკოორდინატო ღერძებზე.

ამოხსნა

ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარის გეგმილები:

$$V_r=H_r\dot{r}=\frac{d}{dt}(R)=0,$$

$$V_\psi=H_\psi\dot{\varphi}=(a+rcos\varphi)\dot{\psi}=(a+rcos\varphi)\frac{d}{dt}(\omega t)=(a+rcos\varphi)\omega .$$

$$V_\varphi=H_\varphi\dot{\varphi}=r\dot{\varphi}=Rk .$$

ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები :

$$W_r=\frac{1}{H_r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}\right\}=-[(a+Rcos\varphi)\omega^2cos\varphi+Rk^2],$$

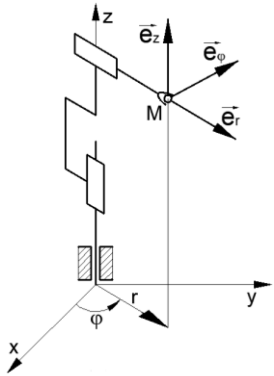
$$W_\psi=\frac{1}{H_\psi}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}\right\}=-2R\omega kksin\varphi,$$

$$W_\varphi=\frac{1}{H_\varphi}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right\}=\omega^2(a+rcos\varphi)sin\varphi.$$

პასუხი: $V_r=0,\ V_\psi=(a+rcos\varphi)\omega,\ V_\varphi=Rk. W_r=-[(a+Rcos\varphi)\omega^2cos\varphi+Rk^2]$,

$W_\psi=-2R\omega kksin\varphi,\ W_\varphi=\omega^2(a+rcos\varphi)sin\varphi$.

ამოცანა 12.38



რობოტ-მანიპულიატორის მექანიზმი შედგება მოსაბრუნებელი მექანიზმისგან 1, ვერტიკალური გდაადგილების კოლონასაგან 2, მოძრავი ხელისაგან დამჭერით 3. იპოვეთ დამჭერის ცენტრის სიჩქარე და აჩქარება მოცემული $\varphi(t), r(t), z(t)$ პარამეტრებისათვის.

ამოხსნა

$$\begin{cases} g_1 = r \\ g_2 = \varphi \\ g_3 = z \end{cases}; \quad \begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases};$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1. H_2 = r\ ,\ H_3=1.$$

$$\vec{V} = H_1\dot{g_1}\overrightarrow{e_r} + H_2\dot{g_2}\overrightarrow{e_\varphi} + H_3\dot{g_3}\overrightarrow{e_z} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}.\ V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

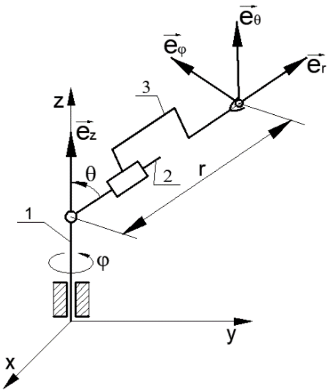
$$T = \frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

$$W_r = \frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r}\right\} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.\ W_\varphi = \frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right\} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\ .\ W_z = \frac{1}{1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z}\right\} = \ddot{z}.$$

$$\vec{W} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}.\ \ W = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}\ .$$

პასუხი: V=$\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$; $W = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}$.

ამოცანა 12.39



ვერტიკალურ კოლონას, რომელზეც დამაგრებულია რობოტ- მანიპულატორის ხელი, შეუძლია მობრუნდეს φ კუთხით. ჩამჭერიან ხელს შეუძლია მობრუნდეს θ კუთხით და გავიდეს r მანძილზე. იპოვეთ ჩამჭერის ცენტრის სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

შემოვიღოთ საბაზისო ვექტორები: $\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta},\ \overrightarrow{e_\varphi}$.

შემოვიტანოთ ვექტორ-ფუნქცია $\vec{r} = r(t)\overrightarrow{e_r}(t)$.

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}[r(t)\overrightarrow{e_r}(t)] = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}, \ \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{\widetilde{d\overrightarrow{e_r}}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{e_r}.$$

რადგან $\overrightarrow{e_r}$ მოდულით არ იცვლება, ამიტომ მისი ლოკალური წარმოებული ნულის ტოლია და მივიღებთ:

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{e_r}.$$

სადაც $\vec{\omega}$- ბაზისის კუთხური სიჩქარეა.

საბოლოოდ გვექნება

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{e_r}.$$

გამოვსახოთ კუთხური სიჩქარის ვექტორი საბაზისო ვექტორებით:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}\text{; სადაც } \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r}cos\theta - \overrightarrow{e_\theta}sin\theta + \overrightarrow{e_\varphi} \cdot 0 .$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}cos\theta\overrightarrow{e_r} - \dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} .$$

გამოვთვალოთ ვექტორული ნამრავლი

$$\vec{\omega} \times r\overrightarrow{e_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{e_\varphi} \\ \dot{\varphi}cos\theta & -\dot{\varphi}sin\theta & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_r} \cdot 0 + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + \ r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}.$$

აქედან ვიპოვით სიჩქარის გეგმილებს საბაზისო ღერძებზე:

$$V_r = \dot{r} \ , \ V_\theta = r\dot{\theta} \ , \ V_\varphi = r\dot{\varphi}sin\theta .$$

$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\dot{\varphi}sin\theta\right)^2} .$$

ვიპოვოთ ჩამჭერის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W} = \frac{\widetilde{d\vec{V}}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}.$$

ლოკალური წარმოებულის გამოთვლის დროს გავითვალისწინოთ, რომ ღერძების მგეზავები არ არის დამოკიდებული დროზე.

$$\frac{\tilde{d}\vec{V}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + \ r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}\right) = \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_r} + \left[\left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\varphi}\right)sin\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\ cos\theta\right]\overrightarrow{e_\varphi}.$$

ვიპოვოთ ვექტორული ნამრავლი

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{e_\varphi} \\ \dot{\varphi}cos\theta & -\dot{\varphi}sin\theta & \dot{\theta} \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\varphi}sin\theta \end{vmatrix} = -\left(r\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}\ \varphi.$$

საბოლოოდ აჩქარებისთვის მივიღებთ:

$$\vec{W} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta)\vec{e_\theta} + (r\ddot{\varphi} sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} cos\theta)\vec{e_\varphi} .$$

აჩქარების სიდიდე უდრის:

W=

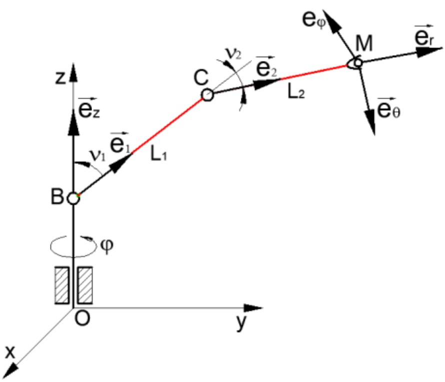
$$\sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta)^2 + (r\ddot{\varphi} sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} cos\theta)^2}.$$

პასუხი: $V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\varphi sin\theta)^2}$.

W=

$$\sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta)^2 + (r\ddot{\varphi} sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} cos\theta)^2}.$$

ამოცანა 12.40



რობოტი - მანიპულია-ტორი შედგება ვერტიკალური ღერძის გარშემო მოსაბრუნებელი მექანიზმისაგან და ორი რგოლისაგან, რომლებიც მოთავსებული არიან ვერტიკალურ სიბრტყეში (მობრუნების კუთხეებია ν_1 და ν_2). იპოვეთ ჩამჭერის ცენტრის სიჩქარე ტვირთის გადატანისას.

ამოხსნა

შემოვიტანოთ ბაზისი $\{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}\}$ და ერთეულოვანი ვექტორები $\vec{e_z}, \vec{e_1}, \vec{e_2}$.

მაშინ $\vec{r} = l_1\vec{e_1} + l_2\vec{e_2}$.

ვიპოვოთ ჩამჭერის სიჩქარე

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(l_1\vec{e_1} + l_2\vec{e_2}) = l_1\frac{d\vec{e_1}}{dt} + l_2\frac{d\vec{e_2}}{dt}.$$

ვისარგებლოთ ბურის ფორმულით და მივიღებთ :

$$\frac{d\vec{e_1}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{e_1}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{e_1} ; \ \frac{d\vec{e_2}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{e_2}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{e_2} .$$

რადგან $\frac{\tilde{d}\vec{e_1}}{dt} = 0$, $\frac{\tilde{d}\vec{e_2}}{dt} = 0$, ამიტომ

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times (l_1\overrightarrow{e_1} + l_2\overrightarrow{e_2}\,).$$

გამოვსახოთ ერთეულოვანი ვექტორები და კუთხური სიჩქარე საბაზისო ვექტორებით:

$$\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r}cos(\nu_1+\nu_2) - \overrightarrow{e_\theta}sin(\nu_1+\nu_2),\ \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_r}cos\nu_2\text{-}\vec{e}_\theta sin\nu_2,\ \ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_r}\cdot 1\,.$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z} + (\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\varphi}cos(\nu_1+\nu_2)\overrightarrow{e_r} - \dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\overrightarrow{e_\theta} + (\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\overrightarrow{e_\varphi}\,.$$

გამოვთვალოთ ვექტორული ნამრავლები

$$\vec{\omega}\times l_1\overrightarrow{e_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{e_\varphi} \\ \dot{\varphi}cos(\nu_1+\nu_2) & -\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2) & (\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}) \\ l_1cos\nu_2 & -l_1sin\nu_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l_1sin\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\overrightarrow{e_r} + l_1cos\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\overrightarrow{e_\theta} + \big(-l_1sin\nu_2\dot{\varphi}cos(\nu_1+\nu_2) + l_1cos\nu_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\big)\overrightarrow{e_\varphi}.$$

$$\vec{\omega}\times l_2\overrightarrow{e_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{e_\varphi} \\ \dot{\varphi}cos(\nu_1+\nu_2) & -\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2) & (\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}) \\ l_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{e_r}\cdot 0 + l_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\overrightarrow{e_\theta} + l_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\overrightarrow{e_\varphi}\,.$$

საბოლოოდ ვიპოვით ჩამჭერის სიჩქარის ვექტორს

$$\vec{V} = l_1sin\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\overrightarrow{e_r} + \big(l_1cos\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}) + l_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\big)\overrightarrow{e_\theta} + \big(l_1cos\nu_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2) + l_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\big)\overrightarrow{e_\varphi}\,.$$

აქედან სიჩქარის გეგმილები იქნება:

$$V_r = l_1sin\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}),\ V_\varphi = l_1cos\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}) + l_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}), V_\varphi\ = l_1cos\nu_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2) + l_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\,.$$

ვისარგებლოთ მიღებული შედეგებით და ვიპოვით სიჩქარეს

$$V = \sqrt{(l_1sin\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}))^2 + \big(l_1cos\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}) + l_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\big)^2 + \big(l_1cos\nu_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2) + l_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\big)^2}\,.$$

პასუხი:

$$V = \sqrt{(l_1sin\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}))^2 + \big(l_1cos\nu_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2}) + l_2(\dot{\nu_1}+\dot{\nu_2})\big)^2 + \big(l_1cos\nu_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2) + l_2\dot{\varphi}sin(\nu_1+\nu_2)\big)^2}$$

მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობები

13. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

ამოცანა 13.1

განსაზღვრეთ კუთხური სიჩქარე: 1) საათის წამების ისრის, 2) წუთების ისრის, 3) საათების ისრის 4) დედამიწის საკუთარი ღერძის გარშემო ბრუნვის, 5) ორთქლის ტურბინის, რომელიც აკეთებს 15000 ბრ/წთ.

ამოხსნა

1) $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{t}$ - კუთხური სიჩქარეა. რადგან წამების ისარი ერთ ბრუნს აკეთებს 60 წამში, ამიტომ

$$\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\frac{\text{რად}}{\text{წმ}} = 0.1047\frac{რად}{წმ}.$$

2) რადგან წუთების ისარი ერთ ბრუნს აკეთებს 3600 წამში, ამიტომ

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800}\ რად/წმ.$$

3) რადგან ერთ ბრუნს საათის ისარი აკეთებს t=$60 \cdot 60 \cdot 12 = 43200$ წმ, ამიტომ

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{43200} = \frac{\pi}{2160}\ \frac{რად}{წმ}.$$

4) 24 საათში დედამიწა აკეთებს ერთ ბრუნს , ამიტომ

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{86400}\ \frac{რად}{წმ}.$$

5) $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1500}{30}$=$500\pi = 1571\ რად/წმ$

პასუხი: 1) $\omega = \frac{\pi}{30}\frac{რად}{წმ}$, 2) $\omega = \frac{\pi}{1800}\ რად/წმ.$ 3) $\omega = \frac{\pi}{2160}\ \frac{რად}{წმ}$, 4) $\omega = \frac{2\pi}{86400}\ \frac{რად}{წმ}$. *5)* $\omega = \frac{2\pi}{86400}\ \frac{რად}{წმ}$.

ამოცანა 13.2

დაწერეთ ორთქლის მანქანის ტურბინის ბრუნვის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მობრუნების კუთხე დროის კუბის პროპორციულია და t=3 წმ მომენტისთვის მისი კუთხური სიჩქარე უდრის $\omega = 27\pi$ რად/წმ.

ამოხსნა

ტურბინის ბრუნვის განტოლება ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$\varphi = kt^3$ (k-პროპორიულობის კოეფიციენტია).

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \ \rightarrow \ \omega = 3kt^2.$$

როცა t-3 წმ, მაშინ $\omega = 27\pi$. ამიტომ

$$27\pi = 4k \cdot 3^2 \ \rightarrow \ k = \pi.$$

ე.ი. ტურბინის ბრუნვის განტოლებაა

$$\varphi = \pi t^2.$$

პასუხი: $\varphi = \pi t^2$.

ამოცანა 13.3

ცენტრიდანული რეგულიატორის ბრუნავს ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო და აკეთებს120 ბრ/წთ. საწყის მომენტში მობრუნების კუთხეა $\frac{\pi}{2}$. იპოვეთ მობრუნების კუთხე და კუთხური გადაადგილება t=1/2 წმ მომენტში.

ამოხსნა

თანაბარი ბრუნვის განტოლებაა $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, სადაც $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi$. აქედან $\varphi = \frac{\pi}{6} + 4\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{6}\pi$ რად/წმ.

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 2\pi \text{ რად.}$$

პასუხი: $\varphi = \frac{13}{6}\pi$ რად/წმ. $\Delta\varphi = 2\pi$ რად.

ამოცანა 13.4

სხეული იწყებს ბრუნვას თანაბრადაჩქარებულად უძრაობის მდგომარეობიდან და აკეთებს 3600 ბრუნს პირველ 2 წუთში. იპოვეთ კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა

უძრაობის მდგომარეობიდან თანაბრადაჩქარებული მოძრაობის განტოლებაა:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

კუთხური სიჩქარე იცვლება კანონით : $\omega = \varepsilon t$.

$$\varphi = 2\pi N = 2\pi \cdot 3600 = 7200\pi \text{ ბრ.}$$

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 7200\pi}{(2 \cdot 60)^2} = \pi \text{ რად/წმ}^2.$$

პასუხი: $\varepsilon = \pi$ რად/წმ^2 .

ამოცანა 13.5

ლილვი იწყებს თანაბრადაჩქარებულ ბრუნვას უძრაობის მდგომარეობიდან და პირველ 5 წამში აკეთებს 12,5 ბრუნს. როგორია მისი კუთხური სიჩქარე 5 წამი მომენტისთვის.

ამოხსნა

თანაბრადაჩქარებული ბრუნვის განტოლებაა: $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

კუთხური სიჩქარე იცვლება კანონით: : $\omega = \varepsilon t$.

$$\varphi = 2\pi N = 2\pi \cdot 12.5 = 25\pi \text{ რად.}$$

წინა ორი ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\varphi = \frac{\omega t}{2} \rightarrow \omega = \frac{2\varphi}{t} = \frac{2\cdot 25\pi}{5} = 10\pi \text{ რად.}$$

პასუხი: $\omega = 10\pi$ რად/წმ.

ამოცანა13.6

მქნევარა ბორბალი იწყებს თანაბრადაჩქარებულ ბრუნვას უძრაობის მდგომარეობიდან. მოძრაობის დაწყებიდან 10 წუთის შემდეგ მას აქვს კუთხური სიჩქარე 4π რად/წმ. რამდენი ბრუნი გააკეთა ბორბალმა ამ დროის განმავლობაში?

ამოხსნა

მობრუნების კუთხე იცვლება კანონით: $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$, ხოლო კუთხური სიჩქარეა $\omega = \varepsilon t$. მობრუნების კუთხე $\varphi = 2\pi N$. აქედან N=$\frac{\varphi}{2\pi}$. თუ ჩავსვამთ შესაბამის მნიშვნელობებს მივიღებთ: $\varphi = \frac{\omega t}{2} = \frac{4\pi\cdot 10\cdot 60}{2} = 1200\pi$ რად. აქედან N=$\frac{1200\pi}{2\pi} = 600$ ბრ.

პასუხი: 600 ბრუნი.

ამოცანა 12.7

უძრავი ღერძის მქონე ბორბალს მიანიჭეს საწყისი კუთხური სიჩქარე 2π რად/წმ . გააკეთა 10 ბრუნი და ხახუნის ძალის გავლენით გაჩერდა. იპოვეთ ბორბლის კუთხური აჩქარება თუ ის მუდმივია.

ამოხსნა

ბორბლის მობრუნების კუთხე იცვლება კანონით: $\varphi = 2\pi N = 20\pi რად.$

თანაბრადშენელებული მოძრაობის განტოლებაა: $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

კუთხური სიჩქარე უდრის $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. როცა ბორბალი გაჩერდა $\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 0 \ \rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_0}{t}$.

ჩავსვათ წინა ტოლობაში და მივიღებთ: $\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}, \rightarrow t = \frac{2\varphi}{\omega_0}$.

როცა $\varphi = 20\pi$ მაშინ $t = \frac{2\cdot 20\pi}{2\pi} = 20$ *წმ.*

ჩავსვათ კუთხური აჩქარების გამოსახულებაში და მივიღებთ: $\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}1$რად/წმ^2

პასუხი: $\varepsilon = 0{,}1$რად/წმ^2.

ამოცანა 13.8

ძრავის გამორთვის მომენტიდან თვითმფრინავის პროპელერმა, რომელსაც ჰქონდა 40π რად/წმ კუთხური სიჩქარე, გაჩერებამდე გააკეთა 80 ბრუნი. რა დრო გავიდა ძრავის გამორთვიდან პროპელერის გაჩერებამდე, თუ ის ბრუნავდა თანაბრადშენელებულად.

ამოხსნა

კუთხე, რომლითაც მობრუნდა პროპელერი გაჩერებამდე, უდრის: $\varphi = 2\pi N = 180\pi$.

თანაბრადცვლადი ბრუნვის დროს მობრუნების კუთხე და კუთხური სიჩქარე იცვლება კანონით:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

როცა პროპელერი გაჩერდა, მაშინ $\omega = 0$. აქედან $\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}$.

ჩავსვათ (1) ტოლობაში და მივიღებთ:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

აქედან

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2\cdot 160\pi}{40\pi} = 8 \text{ წმ.}$$

პასუხი: t=8 წმ.

ამოცანა 12.9

სხეული ასრულებს რხევით მოძრაობას უძრავი ღერძის გარშემო. მობრუნების კუთხე იცვლება კანონით:

$\varphi = 20°sin\psi, \psi = (2t)°$. იპოვეთ სხეულის კუთხური სიჩქარე, როცა t=0 და დროის ორი მეზობელი მომენტი t_1 და t_2, როცა სხეული იცვლის ბრუნვის მიმართულებას. იპოვეღ, აგრეთვე რხევის პერიოდი T.

ამოხსნა

გადავიყვანოთ კუთხეები *φ და ψ* რადიანებში და გვექნება:

$$\psi = \frac{2\pi t}{180} = \frac{\pi t}{90} \text{ რად}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{9} sin\frac{\pi t}{90} \text{ რად}.$$

კუთხური სიჩქარის საპოვნელად გავაწარმოოთ ეს ტოლობა და მივიღებთ:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi^2}{810} cos\frac{\pi t}{90}.$$

$$\text{როცა } t = 0, \text{ მაშინ } \omega = \frac{\pi^2}{810} \text{ რად/წმ}.$$

მოძრაობა მიმართულებას იცვლის, როცა კუთხური სიჩქარე იცვლის ნიშანს. $\omega = 0$ როცა $cos\frac{\pi t}{90} = 0$, ეს ტოლობა სრულდება, როცა $t_1 = 45$ წმ. ხოლო მომდევნო მომენტი არის $t_2 = 135$ *წმ.*

რხევის პერიოდს ვიპოვით პირობიდან

$$\frac{\pi t}{90} = \frac{2\pi}{T} \cdot t \ \rightarrow T = 180 \text{ წმ}.$$

პასუხი: $\omega = \frac{\pi^2}{810}$ *რად/წმ.* $t_1 = 45$ წმ, $t_2 = 135$ *წმ.* $T = 180$ *წმ.*

ამოცანა13.10

საათის ბალანსირი ასრულებს გრეხით რხევით მოძრაობას პერიოდით $T = \frac{1}{2}$ *წმ* . წონასწორობის მდგომარეობიდან მაქსიმალური გადახრის კუთხე $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *რად.* იპოვეთ ბალანსირის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება წონასწორობის მდგომარეობაში გავლიდან 2 წამის შემდეგ

ამოხსნა

ბალანსირის მოძრაობის კანონი ჩავწეროთ ასე:

$$\varphi = asin\frac{2\pi}{T}t.$$

რადგან T=1/2 წმ და $a = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ

$$\varphi = \frac{\pi}{2} sin4\pi t.$$

გამოვთვალოთ პირველი და მეორე წარმოებულები და ვიპოვით კუთხურ სიჩქარეს და კუთხურ აჩქარებას:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi^2 cos4\pi t, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 8\pi^3 sin4\pi t.$$

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება 2 წმ მომენტისათვის:

$$\omega = 2\pi^2 cos(4\pi \cdot 2) = 2\pi^2 \text{რად/წმ}. \ \varepsilon = 0.$$

პასუხი: $\omega = 2\pi^2$რად/წმ. $\varepsilon = 0$.

ამოცანა 12.11

ქანქარა ირხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო. წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოსვლის შემდეგ ის მაქსიმალურ გადახრას $\alpha = \frac{\pi}{4}$ რად. აღწევს 2/3 წამის შემდეგ. 1) ჩაწერეთ ქანქარას რხევის განტოლება, თუ ის ასრულებს ჰარმონიულ რხევას. 2) რა მდებარეობაში ექნება ქანქარას უდიდესი კუთხური სიჩქარე და რას უდრის ის.

ამოხსნა

ქანქარას მოძრაობის განტოლება ჩავწეროთ ასე:

$$\varphi = asin\frac{2\pi}{T}t.$$

რხევის პერიოდი T=4 $\cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ წმ. მაშინ

$$\varphi = \frac{\pi}{16} sin\frac{3\pi}{4}t.$$

გამოვთვალოთ მისი წარმოებული და ვიპოვით კუთხურ სიჩქარეს:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3\pi^2}{64} cos\frac{3\pi}{4}t.$$

კუთხური სიჩქარე მაქსიმალურია, როცა

$$cos\frac{3\pi}{4}t = 1 \ \rightarrow t \ \mathrm{t} = 0, \omega_{\max} = \frac{3\pi^2}{64}.$$

პასუხი: 1) $\varphi = asin\frac{2\pi}{T}t$ 2) $\omega_{\max} = \frac{3\pi^2}{64}$ რად/წმ.

ამოცანა 13.12

იპოვეთ იმ წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, რომელიც იმყოფება სანკტ-პეტერბურგში. მხედველობაში მიიღეთ მხოლოდ დედამიწის ბრუნვა. ჩათვალეთ, რომ მისი განედია 60° , ხოლო დედამიწის რადიუსია 6370 კმ.

ამოხსნა

რადიუსი, რომლითაც ს. პეტერბურგი ბრუნვის ღერძიდან არის დაშორებული უდრის r=Rcos 60°, სადაც R - დედამიწის რადიუსია. კუთხური სიჩქარე უდრის

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

სადაც T - დედამიწის საკუთარი ღერძის გარშემო ბრუნვის პერიოდია. და უდრის T= $24 \cdot 3600 = 86400 წმ$.

მაშინ სიჩქარე იქნება

$$V = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} r = \frac{2\pi}{86400} \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 = 232 \text{ მ/წმ}.$$

აჩქარება უდრის:

$$a = \omega^2 r = 0{,}0169 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: V=232 მ/წმ ; $a = 0{,}0169$ მ/წმ^2.

ამოცანა 13.13

მქნევარა ბორბალი, რომლის რადიუსია 0,5 მ, ბრუნავს თანაბრად საკუთარი ღერძის გარშემო. მის ფერსოზე მდებარე წერტილის სიჩქარეა 2 მ/წმ. რამდენ ბრუნს აკეთებს ბორბალი წუთში?

ამოხსნა

ბორბლის ფერსოს წერტილის სიჩქარეა $v = \omega R$. რადგან $v = \frac{2მ}{წმ}$ და $R = 0{,}5$ მ, ამიტომ

$$\omega = \frac{v}{R} = 4 \text{ რად/წმ}.$$

ამავე დროს

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

აქედან

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 38{,}2 \text{ ბრ/წთ}.$$

პასუხი: $n = 38{,}2$ ბრ/წთ.

ამოცანა 13.14

წერტილი A, რომელიც შკივის ფერსოზე ძევს, მოძრაობს 50 სმ/წმ სიჩქარით. იგივე რადიუსზე მდებარე B წერტილი მოძრაობს 10 სმ/წმ სიჩქარით. მანძილი AB=20 სმ. იპოვეთ შკივის კუთხური სიჩქარე და დიამეტრი.

ამოხსნა

რადგან A და B წერტილები ბრუნავენ ღეტძის გარშემო, ამოტომ მათი სიჩქარეები ტოლოა:

$$V_A = \omega \cdot \frac{d}{2}; \;\; V_B = \omega \cdot \left(\frac{d}{2} - AB\right).$$

ამოვხსნათ ეს ორი განტოლება და ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე და დიამეტრი

$$\begin{cases} 50 = \omega \cdot \frac{dd}{2} \\ 10 = \omega\left(\frac{d}{2} - 20\right) \end{cases} \to \omega = \frac{100}{d}, 10 = \frac{100}{d}\left(\frac{d}{2} - 20\right) = 50 - \frac{2000}{d},$$

ანუ

$$10d = 50d - 2000 \;\to d = 50, \omega = \frac{100}{50} = 2.$$

პასუხი: $\omega = 2$ რად/წმ, d=50 სმ.

ამოცანა 13.15

მქნევარა ბორბალი, რომლის რადიუსია R=2 მ, ბრუნავს თანაბრადაჩქარებულად უძრაობის მდგომარეობიდან. t= 10 წამის შემდეგ ფერსოზე მდებარე წერტილმა შეიძინა V=100 მ/წმ სიჩქარე. იპოვეთ ფერსოს წერტილის სიჩქარე და მხები და ნორმალური აჩქარება 15 წამისთვის.

ამოხსნა

რადგან ბორბალი მოძრაობს თანაბრადაჩქარებულად, ამიტომ

$$\varphi = \varepsilon\frac{t^2}{2}\;; \;\; \omega = \varepsilon t; \; V = \omega R; \; a_n = \omega^2 R; \;\; a_\tau = \varepsilon R.$$

რადგან $V = \omega R$, აქედან $\omega = \frac{V}{R} = \frac{100}{2} = 50\frac{რად}{წმ}. \varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} =$ 5 *რად/წმ²*.

კუთხური სიჩქარე უდრის $\omega = 5t$.

t=15 წმ მომენტისათვის $\omega = 5 \cdot 15 = 75$ რად/წმ; $V = 75 \cdot 2 = 150$მ/წმ $a_n = 75^2 \cdot 2 = 11250$ მ/წმ² ; $a_\tau = 5 \cdot 2 = 10$ მ/წმ²

პასუხი: $V = 150$მ/წმ ; $a_n = 11250$ მ/წმ² ; $a_\tau = 10$ მ/წმ².

ამოცანა 13.16.

იპოვეთ იმ სხეულის ჰორიზონტალური სიჩქარე, რომელიც მდებარეობს ეკვატორზე და მოძრაობს მიმმართველში, ისე რომ ის თანაბრად ბრუნავდეს დედამიწის გარშემო და ჰქონდეს თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. იპოვეთ , ასევე ,დრო რომლის შემდეგ სხეული დაბრუნდება

საწყის მდებარეობაში. დედამიწის რადიუსი R= $637 \cdot 10^6$ სმ, ხოლო თავისუფალი ვარდნის აჩქარება $g = 978\frac{სმ}{წმ^2}$.

ამოხსნა

რადგან სხეული მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, ამიტომ

$$a_\tau = 0;\ a_n = \frac{V^2}{R} = g.$$

$$V = \sqrt{gR} = \sqrt{637 \cdot 10^6 \cdot 978} = 7{,}9 კმ/წმ.$$

ერთი ბრუნვის დროს გავლილი გზა ეკვატორის სიგრძეა, ე.ი. $l = 2\pi R = VT\ \rightarrow T = \frac{2\pi R}{V} = 1{,}4 სთ.$

პასუხი: V=7,9კმ/წმ ; T=1,4 სთ.

ამოცანა13.17

მქნევარა ბორბლის ფერსოს წერტილის სრული აჩქარება რადიუსთან ადგენს 60° -იან კუთხეს. მოცემულ მომენტში მხები აჩქარება $a_\tau = 10\sqrt{3}$. იპოვე იმ წერტილის ნორმალური აჩქარება, რომელიც ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია r=0,5 მ მანძილით , ბორბლის რადიუსი R=1 მ.

ამოხსნა

წერტილის აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}\,.$$

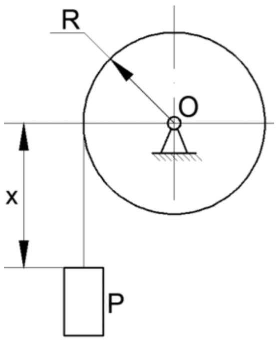
ვექტორული სამკუთხედიდან გვაქვს

$$a_{n1} = \frac{a_\tau}{tg60°} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10 წმ^{-2}.$$

$$a_{n1} = \omega^2 R = 10\ \rightarrow \omega^2 = \frac{20}{R} = 10 წმ^{-2}.$$

$$a_{n2} = \omega^2 r = 5 მ/წმ$$

პასუხი: $a_{n2} = 5 მ/წმ$



ამოცანა 13.18

R=10 სმ რადიუსიანი ლილვი მოძრაობაში მოდის P ტვირთვის საშუალებით, რომელიც დაკიდებულია ლილვზე დახვეულ თოკზე. ტვირთის მოძრაობის განტოლებაა: $x = 100t^2$, სადაც x არის მანძილი ტვირთიდან ლილვის ზედაპირთან თოკის მოხსნის წერტილამდე. იპოვეთ ლილვის კუთხური სიჩქარე და

კუთხური აჩქარება და, აგრეთვე, ლილბის ფერსოს წერტილის სრული აჩქარება t მომენტში.

ამოხსნა

როგორც ვიცით, სიჩქარე უდრის

$$v = \frac{dx}{dt} = 200t.$$

მეორე მხრივ

$$v = \omega R \ \to \omega = \frac{v}{R} = \frac{200t}{10} = 20t.$$

კუთხურ აჩქარებას ვიპოვით კუთხური სიჩქარის გაწარმოებით

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 20,$$

აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: $\omega = 20t$; $\varepsilon = 20$ რად/წმ. $a = 200\sqrt{1 + 400t^4}$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 13.19

ამოხსენით წინა ამოცანა ზოგადი სახით. ბორბლის წერტილის აჩქარება გამოსახეთ როგორც x მანძილის ფუმქცია, ბორბლის რადიუსია R და ტვირთის აჩქარება $\ddot{x} = const.$

ამოხსნა

რადგან $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, ხოლო მეორე მხრივ $v = \omega R$, აქედან $\omega = \frac{\dot{x}}{R}$; კუთხური აჩქარება არის კუთხური სიჩქარის წარმოებული $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\ddot{x}}{R} = a_0$.

მაშინ აჩქარება უდრის $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{a_0^2 + \frac{\dot{x}^4}{R^2}}$. რადგან $v = \sqrt{2a_0 x}$ ამიტომ

$$a = \sqrt{a_0^2 + \frac{\left(\sqrt{2a_0 x}\right)^4}{R^2}} = a_0\sqrt{1 + \frac{4x^2}{R^2}}.$$

პასუხი: $a = a_0\sqrt{1 + \frac{4x^2}{R^2}}$.

ამოცანა 13.20

3 სმ სიგრძის გალვანომეტრის ისარი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო კანონით; $\varphi = \varphi_0 sinkt$. განსაზღვრეთ ისრის ბოლო წერტილის აჩქარება შუა და კიდურა მდებარეობაში , აგრეთვე იმ მომენტში, როცა

კუთხური აჩქარება და კუთხური სიჩქარე ხდება ნულის ტოლი. რხევის პერიოდია 0,4 წამი, ხოლო კუთხური ამპლიტუდა $\varphi_0 = \frac{\pi}{30}$.

ამოხსნა

რადგან $T = 0{,}4$, ჩავწეროთ მოძრაობის კანონი ასე:

$$\varphi = \frac{\pi}{30} sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{30} sin5\pi t.$$

მაშინ კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება შესაბამისად უდრის:

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{\pi^2}{6}cos5\pi t,$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = -\frac{5}{6}\pi^3 sin5\pi t.$$

1) შუა მდებარეობაში კუთხური აჩქარება უდრის

$$a = l\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

გამოვთვალოთ a როცა t=0. $\omega(0) = \frac{\pi^2}{6}$, $\varepsilon(0) = 0$. აქედან $a = l\omega^2 = 8{,}1$ სმ/წმ².

2) კიდურა მდებარეობაში $t_1 = 0{,}1$, $t_2 = 0{,}3$. გამოვთვალოთ ამ მომენტში კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება;

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \varepsilon_1 = -5\frac{\pi^3}{3}, \varepsilon_2 = 5\frac{\pi^3}{3} \rightarrow a = l\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 77{,}4 \text{ სმ/წმ}^2$$

3) კუთხური სიჩქარე უდრის ნულს როცა $sin5\pi t = 0 \rightarrow t = 0{,}2n\ (n = 1{,}2 \dots)$.

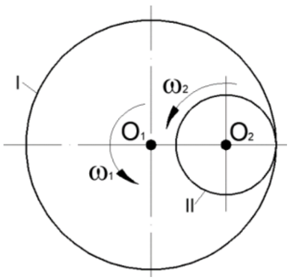
პასუხი: 1) ისრის შუა მდებარეობაში $a = 8{,}1$ სმ/წმ² ;

2) კიდურა მდებარეობაში $a = 77{,}5$ სმ/წმ²

3) $\omega = 0$, როცა t=0,2nწმ (n=1,2,...).

14. მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობების გარდაქმნა

ამოცანა 14.1



კბილა თვალის I კუთხური სიჩქარეა $\frac{10\pi}{3}$ რად/წმ. თვლის დიამეტრი $D_1 = 360$ მმ. რისი ტოლი უნდა იყოს II თვლის დიამეტრი, რომელიც შიგა მოდებაშია I კბილა თვალთან, რომ მისი კუთხური სიჩქარე სამჯერ მეტი იყოს I- ის კუთხურ სიჩქარეზე.

ამოხსნა

შეხების წერტილში ორივე თვალს აქვს ერთნაირი სიჩქარე

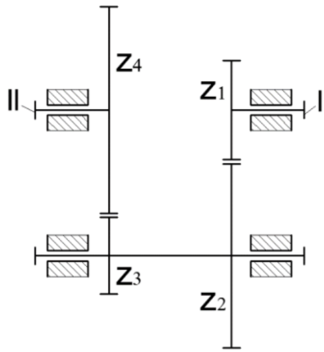
$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

მაგრამ $\omega_2 = 3\omega_1$, ამიტომ წინა ტოლობიდან გვაქვს

$$r_1 = 3r_2 \ \rightarrow \ d_2 = \frac{d_1}{3} = 120 \text{ მმ}.$$

პასუხი: 120 მმ.

ამოცანა 14.2



სიჩქარის რედუქტორი, რომლის დანიშნულებაა ბრუნვის შენელება I ლილვიდან II ლილვზე ბრუნვის გადაცემის დროს, შედგება ოთხი კბილანისაგან, რომელთა კბილები, შესაბამისად უდრის: $z_1 = 10, z_2 = 60, z_3 = 12, z_4 = 70$. იპოვეთ მექანიზმის გადაცემათა რიცხვი.

ამოხსნა

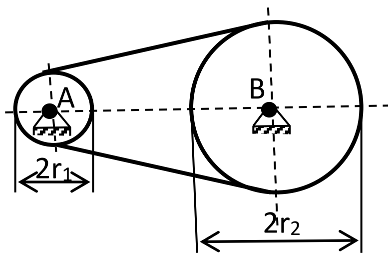
$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} \cdot \frac{\boldsymbol{z_3}}{\boldsymbol{z_4}} = \frac{10}{60} \cdot \frac{12}{70} = \frac{1}{35}.$$

პასუხი: $i_{I,II} = 35$.

ამოცანა 14.3

ჩარხი, რომლის შკივია A, მოძრაობაში მოდის ელექტროძრავის B შკივზე გადადებული უსასრულო ღვედის საშუალებით. შკივების რადიუსებია : $r_1 = 75$ *სმ,* $r_2 = 30$ *სმ.* ელექტროძრავის ჩართვის შემდეგ მისი კუთხური აჩქარებაა 0,4 რად/წმ². უგულებელყავით ღვედის გასრიალება შკივზე და იპოვეთ რამდენი წუთის შემდეგ გახდება ჩარხის კუთხური სიჩქარე 10π რად/წმ - ის ტოლი.

ამოხსნა



რადგან ძრავის ბრუნვა თანაბრადაჩქარებულია, ამიტომ

$$\omega_B = \varepsilon t = 0{,}4\pi t.$$

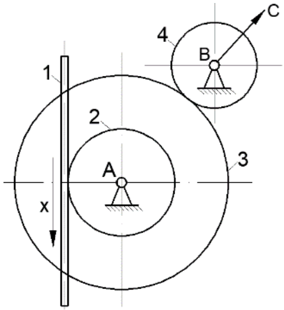
ღვედის სიჩქარე შეიძლება გამოვსახოთ შკივების კუთხური სიჩქარეებით

$$v = \omega_A \cdot r_A = \omega_B \cdot r_B \ \rightarrow \omega_A = \frac{\omega_B \cdot r_B}{r_A} = \pi t.$$

რადგან $\omega_A = 10\pi$, ამიტომ $10\pi = \pi t \ \rightarrow \ t = 10$ წმ.

პასუხი: 10 წამი.

ამოცანა 14.4



ისრიანი ინდიკატორის მექანიზმში 1 ლარტყიდან მოძრაობა გადაეცემა 2 კბილანას, რომელიც 3 კბილანასთან ერთ ღერძზეა დასმული. 3 კბილანა მოდებაშია 4 კბილანასთან, რომელზედაც დამაგრებულია ისარი. იპოვეთ ისრის კუთხური სიჩქარე, თუ ლარტყის მოძრაობა აღიწერება განტოლებით: $x = asinkt$. კბილანების რადიუსებია: r_2, r_3, r_4.

ამოხსნა

ლარტყის სიჩქარე

$$V = \frac{dx}{dt} = akcoskt.$$

2 კბილანას ფერსოს წერტილის სიჩქარე

$$V = \omega_{2,3} r_2 \ \rightarrow \omega_{2,3} = \frac{V}{r_2} = \frac{akcoskt}{r_2}.$$

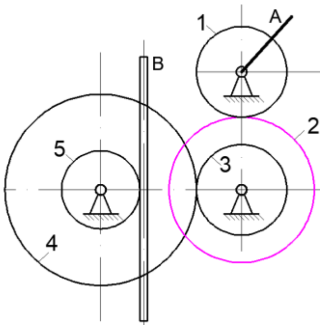
3 და 4 კბილანების საერთო წერტილების სიჩქარეები ერთმანეთის ტოლია, ანუ

$$\omega_{2,3} r_3 = \omega_4 r_4 \ \rightarrow \ \omega_4 = \frac{\omega_{2,3} r_3}{r_4} = \frac{akr_3}{r_4} coskt.$$

ეს არის ისრის კუთხური სიჩქარე.

პასუხი: $\omega_4 = \frac{akr_3}{r_4} coskt.$

ამოცანა 14.5



დომკრატის მექანიზმში A სახელურის ბრუნვს დროს მოძრაობაში მოდის 1,2,3,4, და 5 კბილანები. რომელსაც მოძრაობაში მოჰყავს კბილანებიანი ლარტყა. იპოვეთ ამ უკანასკნელის სიჩქარე, თუ A სახელური ბრუნავს π რად/წმ, კუთხური სიჩქარით, ხოლო კბილანების კბილთა რიცხვებია, შესაბამისად, $z_1 = 6$, $z_2 = 24, z_3 = 8$, $z_4 = 24$. მეხუთე კბილანას რადიუსია $r_5 = 4$სმ.

ამოხსნა

სახელურის კუთხური სიჩქარეა $\omega_1 = \pi$ რად/წმ. 1 და 2 კბილანები მოდებაშია, ამიტომ შეხების წერტილებს აქვთ ტოლი სიჩქარეები.

$$\omega_1 z_1 = \omega_{2,3} z_2 \ \rightarrow \ \omega_{2,3} = \frac{\omega_1 z_1}{z_2}.$$

3 და 4 კბილანები ასევე მოდებაში არიან, ამიტომ

$$\omega_{2,3} z_3 = \omega_{4,5} z_4 \ \rightarrow \ \omega_{4,5} = \frac{\omega_{2,3} z_3}{z_4} = \frac{\omega_1 z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

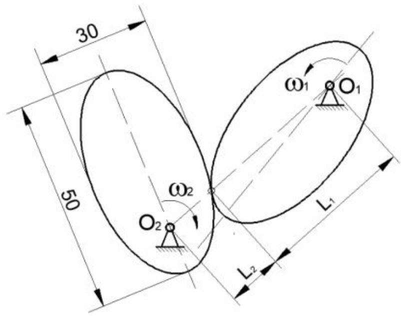
B ლარტყის 5 კბილანასთან შეხების წერტილის სიჩქარეა

$$V_B = \omega_{4,5} r_5 = \frac{\omega_1 z_1 z_3 r_5}{z_2 z_4} = 0{,}785 \text{ სმ/წმ}.$$

პასუხი: $V_B = 0{,}785$ სმ/წმ.

ამოცანა 14.6

პერიოდულად ცვლადი კუთხური სიჩქარის მისაღებად ერთმანეთთან მოდებაშია ორი ელიფსური კბილანა, რომელთაგან ერთი ბრუნავს თანაბრად O ღერძის გარშემო $\omega = 9\pi$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით, ხოლო მეორე პირველს მოჰყავს ბრინვაში O_1 ღერძის გარშემო. ორივე ღერძი გადის ელიფსების ფოკუსებში. მანძილი OO_1=50სმ. ელიფსების ნახევარღერძებია 25 და 15 სმ. იპოვეთ O_1 კბილანას კუთხური სიჩქარის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა.



ამოხსნა

კონტაქტის წერტილში სიჩქარეები ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ

$$\omega_1 l_1 = \omega_2 l_2,$$

სადაც $l_1 + l_2 = 50$სმ.

$$f = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20,$$
$$l_{max} = 25 + 20 = 45,$$
$$l_{min} = 25 - 20 = 5.$$

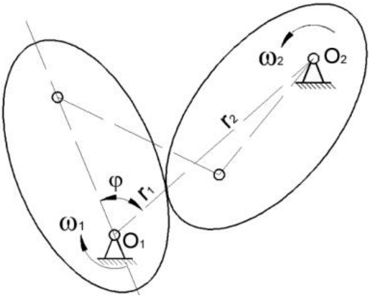
შესაბამისად

$$\omega_{min} = \frac{5}{45} \cdot 9\pi = \pi \text{ რად/წმ}.$$
$$\omega_{max} = \frac{45}{5} \cdot 9\pi = 81\pi \text{რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_{min} = \pi$ რად/წმ ; $\omega_{max} = 81\pi$ რად/წმ.

ამოცანა 14.7

გამოიყვანეთ ელიფსური კბილანების მიერ ბრუნვის გადაცემის კანონი, თუ ელიფსის ნახევარღერძებია a და b. 1 კბილანას კუთხური სიჩქარეა $\omega_1 = const$. ღერძებს შორის მანძილი O_1O_2 =2a, φ - არის კუთხე, რომელსაც აგენს ბრუნვის ღერძების შემაერთებელი წრფე 1 ელიფსის დიდ ღერძთან. ღერძები გადიან ელიფსის ფოკუსებში.



ამოხსნა

კბილანების შეხების წერტილს აქვს ტოლი სიჩქარეები

$$\omega_2(2a - r_1) = \omega_1 r_1.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$x = c - r_1 cos\varphi\ , a^2 = c^2 + b^2.$$

$$y^2 = r_1^2 - (c-x)^2 = r_1^2(1 - cos^2\varphi),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{r_1^2}{b^2}(1 - cos^2\varphi) = 1 - \frac{(c - r_1 cos\varphi)^2}{a^2}.$$

$$r_1^2 a^2 - r_1^2 a^2 cos^2\varphi = a^2 b^2 - c^2 b^2 + 2cb^2 r_1 cos\varphi - b^2 r_1^2 cos^2\varphi,$$

$$\boldsymbol{r_1^2}(a^2 - a^2 cos^2\varphi + b^2 cos^2\varphi) - 2cb^2 r_1 cos\varphi = b^4,$$

$$r_1^2 - \frac{2cb^2 r_1 cos\varphi}{a^2 - c^2 cos^2\varphi} = \frac{b^4}{a^2 - c^2 cos^2\varphi},$$

$$\left[r_1 - \frac{cb^2 r_1 cos\varphi}{a^2 - c^2 cos^2\varphi}\right]^2 = \frac{b^4}{a^2 - c^2 cos^2\varphi} + \frac{c^2 b^4 cos^2\varphi}{(a^2 - c^2 cos^2\varphi)^2},$$

$$r_1 - \frac{cb^2 cos\varphi}{a^2 - c^2 cos^2\varphi} = \frac{b^2 a}{a^2 - c^2 cos^2\varphi},$$

$$r_1 = \frac{b^2(a + c cos\varphi)}{(a^2 - c^2 cos^2\varphi)} = \frac{b^2}{(a - c cos\varphi)},$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{b^2}{(a - c cos\varphi)\left(2a - \frac{b^2}{(a - c cos\varphi)}\right)} = \omega_1 \frac{b^2}{2a^2 - 2ac cos\varphi - b^2}.$$

პასუხი: $\omega_2 = \omega_1 \frac{b^2}{2a^2 - 2ac cos\varphi - b^2}$.

ამოცანა 14.8

იპოვეთ ელიფსური ბორბლის O2, რომელიც მოდებაშია მეორე ელიფსურ კბილანასთან, კუთხური სიჩქარის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. O1 ბორბლის კუთხური სიჩქარეა 8π რად/წმ. ბრუნვის ღერძები მოთავსებულია ელიფსების ცენტრებში. ნახევარღერძებია 40 სმ და 10 სმ.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ წინა ამოცანის ამოხსნით

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

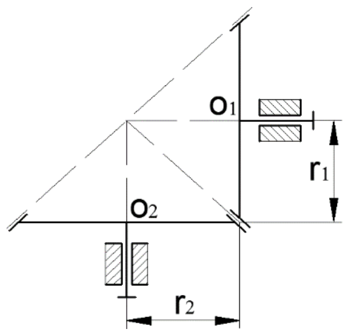
აქ $\omega_1 = 8\pi$ რად/წმ, $a = 40$ სმ, $b = 10$ სმ. წინა ფორმულიდან ჩანს, რომ კუთხური სიჩქარე მინიმალურია, როცა $r_1 = b$ და $r_2 = a$, ხოლო მაქსიმალურია, როცა $r_1 = a$ და $r_2 = b$. შესაბამისად , გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\omega_{min} = 2\pi, \qquad \omega_{max} = 32\pi$$

პასუხი: $\omega_{min} = 2\pi \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}$, $\omega_{max} = \frac{32\pi \text{რად}}{\text{წმ}}$.

ამოცანა 14.9

O1 კონუსური კბილანა მოძრაობაში მოდის ისეთივე O2 კბილანის მიერ, რომლის რადიუსი $r_2 = 15$სმ. O2 კბილანა ბრუნავს თანაბრადაჩქარებულად კუთხური აჩქარებით $4\pi \frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2}$. განსაზღვრეთ რა დროის შემდეგ მიიღებს პირველი კბილანა , რომლის რადიუსია $r_1 = 10$ სმ, 144πრად/წმ კუთხურ სიჩქარეს.



ამოხსნა

კბილანების კონტაქტის წერტილების სიჩქარეები ერთნაირია, ამიტომ

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

რადგან 2 კბილანა მოძრაობს თანაბრადაჩქარებულად კუთხური აჩქარებით $\varepsilon_2 = 4\pi$ რად/წმ^2, ამიტომ მისი კუთხური სიჩქარე უდრის

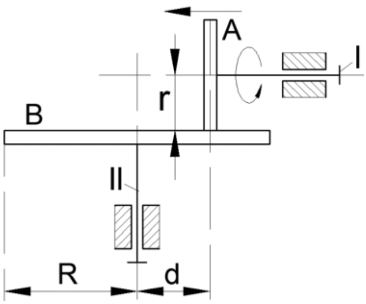
$$\omega_2 = 4\pi t.$$

ჩავსვათ წინა ტოლობაში და გვექნება

$$\omega_1 r_1 = 4\pi t r_2 \ \rightarrow t = \frac{\omega_1 r_1}{4\pi} = 24 წმ.$$

პასუხი: 24 წმ.

ამოცანა 14.10



ფრიქციული გადაცემის წამყვანი ლილვი ბრუნავს კუთხური სიჩქარით $\omega = 20\pi$ რად/წმ და იმავდროულად გადაადგილდება ისე, რომ მანძილი d იცვლება კანონით d=(10-0,5t) სმ.

იპოვეთ:

1) მეორე ლილვის კუთხური აჩქარება, როგორც d მანძილის ფუნქცია;

2) მეორე კბილანას ფერსოს წერტილის აჩქარება, როცა d=r, მოცემულია: r=5 სმ, R=15სმ.

ამოხსნა

1) კონტაქტის წერტილში ხაზოვანი სიჩქარეები ტოლია, ამიტომ

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 d \ \rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{d} = \frac{100\pi}{d},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{50\pi}{d^2}.$$

2) კბილანას ფერსოზე მდებარე წერტილია აჩქარებაა

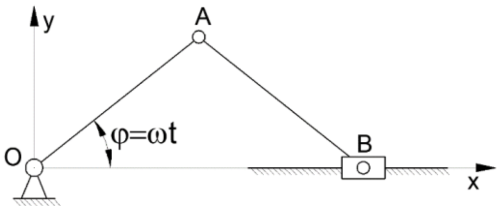
$$a = R\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 15\sqrt{\left(\frac{50\pi}{d^2}\right)^2 + \left(\frac{100\pi}{d}\right)^4}.$$

როცა d=5, მაშინ

$$a = 15\sqrt{\left(\frac{50\pi}{5^2}\right)^2 + \left(\frac{100\pi}{5}\right)^4} = 300\pi\sqrt{40000\pi^2 + 1} \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: 1) $\varepsilon_2 = \frac{50\pi}{d^2}$; 2) $a = 300\pi\sqrt{40000\pi^2 + 1}$ სმ/წმ².

ამოცანა 14.11



იპოვეთ OAB მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოციას მოძრაობის კანონი, სიჩქარე და აჩქარება, თუ მრუდმხარასა და ბარბაცას სიგრძეებია AB=OA=r,

ხოლო OA მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა $\omega = \omega_0 = const$. x ღერძი მიმართულია ცოციას მიმმართველის გასწვრივ. სათავე აღებულია O წერტილში.

ამოხსნა

$$x_B = \mathrm{OB} = \mathrm{OAcos}\omega_0\mathrm{t} + \mathrm{ABcos}\omega_0\mathrm{t} = 2\mathrm{rcos}\omega_0\mathrm{t},\ \ \mathrm{y_B} = 0.$$

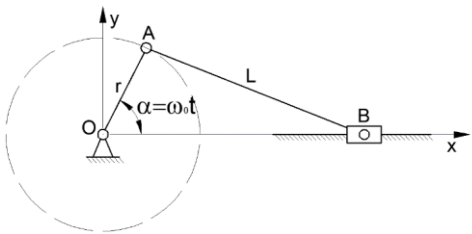
$$V_{Bx} = V_B = \frac{dx_B}{dt} = -2\omega_0 rsin\omega_0 t,$$

$$a_{Bx} = a_B = \frac{d^2x_B}{dt^2} = -2r\omega_0^2 cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x\ .$$

პასუხი: $x_B = 2\mathrm{rcos}\omega_0\mathrm{t},\ V_{Bx} = -2\omega_0 rsin\omega_0 t, a_{Bx} = -\omega_0^2 x$.

ამოცანა 14.12

იპოვეთ OAB მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოციას მოძრაობის კანონი, სიჩქარე და აჩქარება, თუ მრუდმხარა OA ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქა-რით ω_0. მრუდმხარას სიგრძე OA=r, ბარბაცას სიგრძე AB=l. Ox ღერძი ცოციას მიმმარ-თველის პარალელურია. ათ-



ვლის სათავეა მრუდმხარას O ცენტრი. $\alpha = \omega_0 t$; შეფარდება $\frac{r}{l}$ ჩათვალეთ მცირედ .

ამოხსნა

აღვნიშნოთ $\angle ABO = \beta$, მაშინ

$$x_B = OA \cdot cos\alpha + AB \cdot cos\beta = rcos\alpha + lcos\beta\ .$$

სინუსების თეორემით $\Delta ABO - \textit{დან}$ გვაქვს

$$\frac{l}{sin\alpha} = \frac{r}{sin\beta}\,.$$

რადგან $\angle\beta$ მცირეა, ამიტომ $\sin\beta = \beta$, ამის გათვალისწინებით გვექნება

$$\beta = \frac{r \cdot sin\alpha}{l},$$

$$cos\beta = 1 - 2sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\beta^2}{2},$$

$$x_B = r \cdot cos\alpha + l \cdot \left(1 - \frac{r^2 sin^2\alpha}{2l^2}\right).$$

რადგან $sin^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{2}$ და $\frac{r}{l} = \lambda \ll 1$, ამიტომ წინა ტოლობები ასე გდავწეროთ:

$$x_B = r\left(cos\omega_0 t + \frac{\lambda}{4}cos2\omega_0 t\right) + l - \frac{\lambda}{4}r.$$

$$V_B = \dot{x_B} = -r\omega_0\left(sin\omega_0 t + \frac{\lambda}{2}sin2\omega_0 t\right),$$

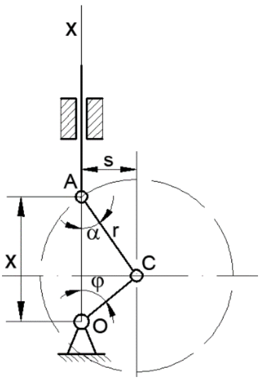
$$a_B = \ddot{x}_B = -r\omega_0^2(cos\omega_0 t + \lambda cos2\omega_0 t).$$

პასუხი: $x_B = r\left(cos\omega_0 t + \frac{\lambda}{4}cos2\omega_0 t\right) + l - \frac{\lambda}{4}r$

$V_B = \dot{x_B} = -r\omega_0\left(sin\omega_0 t + \frac{\lambda}{2}sin2\omega_0 t\right),$

$a_B = \ddot{x}_B = -r\omega_0^2(cos\omega_0 t + \lambda cos2\omega_0 t).$

ამოცანა 14.13



იპოვეთ ღეროს მოძრაობის კანონი, თუ ექსცენტრიკის დიამეტრი d=2r, ხოლო ბრუნვის ღერძი O მდებარეობს C დისკოს ღერძიდან OC=a მანძილზე. Ox ღერძი მიმართულია ღეროს გასწვრივ, სათავედ აღებულია ბრ.უნვის ღერძი. $\frac{a}{r} = \lambda.$

ამოხსნა

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მოძრაობის კანონი , საჭიროა ვიპოვოთ x. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$x = acos\varphi + rcos\alpha,\ sin\varphi = \frac{S}{a}.$$

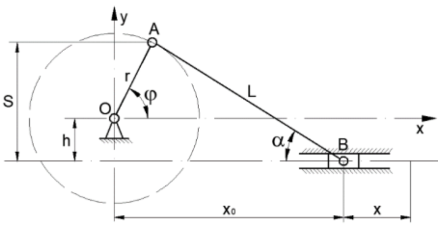
$sin\alpha = \frac{S}{r}$, ანუ $\sin\alpha = \frac{a}{r}sin\varphi, cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \lambda^2 sin^2\varphi}$.

საბოლოოდ მიიღებთ

$$x = acos\varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2 sin^2\varphi} .$$

პასუხი: $x = acos\varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2 sin^2\varphi}.$

ამოცანა 14.14



დაწერეთ არაცენტრირებული მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის დგუშის მოძრაობის განტოლება. მანძილი მრუდმხარას ღერძიდან მიმმართველ სახაზა-

ვამდე არის h, მრუდმხარას სიგრძეა r, ბარბაცას სიგრძეა l. Ox ღერძი მიმართულია ცოციას მიმმართველის გასწვრივ. ათვლის სათავეა ცოციას კიდურა მარჯვენა მდებარეობა. $\frac{r}{l} = \lambda$,

$\frac{h}{r} = k, \varphi = \omega_0 t$.

ამოხსნა

გეომეტრიული თანაფარდობებიდან ვწერთ :

$$sin\varphi = \frac{S}{l}, \ \ sin\alpha = \frac{S-h}{r} \ \rightarrow S = rsin\varphi + h,$$

მაშინ

$$sin\alpha = \frac{rsin\varphi + h}{l} = \frac{h}{l} + \frac{r}{l}sin\varphi.$$

$$x_0 = rcos\varphi + lcos\alpha = rcos\varphi + l\sqrt{1 - \left(\frac{h}{l} + \frac{r}{l}sin\varphi\right)^2},$$

$$x = \sqrt{(r+l)^2 - h^2} - x_0.$$

ჩავსვათ x_0, და x-ის გამოსახილება ასე გადავწეროთ

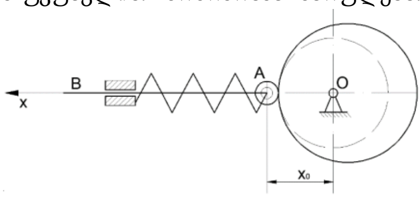
$$x = r\sqrt{\left(1 - \frac{l}{r}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2}} - \left(rcos\varphi + l\sqrt{1 - \left(\frac{h}{l} + \frac{r}{l}sin\varphi\right)^2}\right) = r\left(\sqrt{(1+\lambda)^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - (k + sin\varphi)^2} - cos\varphi\right).$$

პასუხი: $x = r\left(\sqrt{(1+\lambda)^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - (k + sin\varphi)^2} - cos\varphi\right)$.

ამოცანა 14.15.

მუშტა, რომელიც თანაბრად ბრუნავს O ღერძის გარშემო, ამოძრავებს AB ძელს, რომელიც წინსვლა-უკუსვლით მოძრაობას ასრულებს. მუშტას ერთი სრული მობრუნების დრო არის 8 წამი. ამ ღეროს მოძრაობის განტოლებაა (x - სანტიმეტრებშია, ხოლო t - წამებში):

$$x = \begin{cases} 30 + 5t, 0 \le t \le 4, \\ 70 - 5t, 4 \le t \le 8 \,. \end{cases}$$



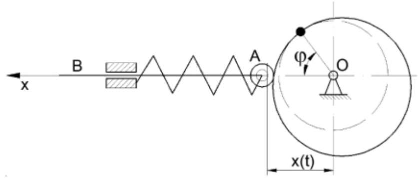
განსაზღვრეთ მუშტას კონტურის განტოლება და ააგეთ ღეროს მოძრაობის გრაფიკი.

ამოხსნა

ნახაზიდან ჩანს, რომ დროის ნრბისმიერ მომენტში სამართლიანია ტოლობა:

$$OM = r(\varphi) = x(t) \,.$$

რადგან M წერტილი იმყოფება წრეწირზე, ამიტომ



$OM = r_0 + k_1\varphi, 0 < \varphi < \pi,$

ასევე

$OM = r_2 + k_2\varphi, \pi < \varphi < 2\pi$

ამიტომ

$$r_0 + k_1\varphi(0) = x(0) \;\rightarrow\; r_0 = 30 + 5 \cdot 0 = 30,$$
$$r_1 = r_0 + k_1\varphi(\pi) = r_0 + k_1 \cdot \pi = 50,$$
$$k_1\pi = 20 \rightarrow k_1 = \frac{20}{\pi}.$$

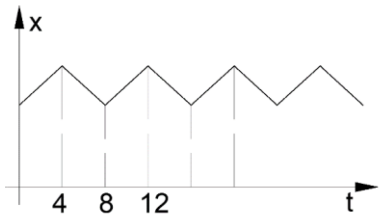
ანალოგიურად ვიპოვით $r(\varphi)$ როცა $\varphi \in (\pi, 2\pi)$. როცა $4 \le t \le 8$ მაშინ

$$r = r_2 - k_2\varphi.$$

რადგან r(φ) მცირდება r_1 –დან r_0-მდე, ამიტომ

$$r = r_2 - k_2\varphi(\pi) = 50 = x(4);$$
$$r = r_2 - k_2\varphi(2\pi) = 30 = x(8) \rightarrow \begin{cases} r_2 - k_2\pi = 50 \\ r_2 - k_2 \cdot 2\pi = 30 \end{cases} \rightarrow k_2 = \frac{20}{\pi};\; r_2 = 70.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

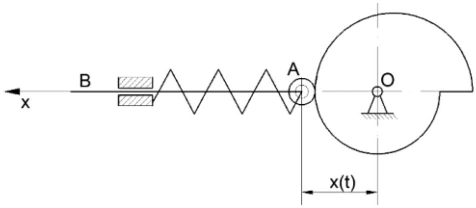


$$r = \begin{cases} 30 + \dfrac{20}{\pi}\varphi, 0 \le \varphi \le \pi \\ 70 - \dfrac{20}{\pi}\varphi, \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

ავაგოთ გრაფიკი

პასუხი: $r = \begin{cases} 30 + \frac{20}{\pi}\varphi, 0 \le \varphi \le \pi \\ 70 - \frac{20}{\pi}\varphi, \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}.$

ამოცანა 14.16



იპოვეთ გადატანითად მოძრავი AB ღეროს მოძრაობის კანონი, თუ მუშტას პროფილის განტოლებაა: $r = \left(20 - \frac{15}{\pi}\varphi\right)$ სმ, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

მუშტა ბრუნავს თანაბრად კუთხური სიჩქარით $\frac{2}{3}\pi$ რად/წმ.

ამოხსნა

რადგან მუშტა და ღერო ეხება ერთმანეთს, ამიტომ

$$x(t) = r(\varphi).$$

დავუშვათ

$$x = x_0 + kt,$$

რადგან $x(0) = x_0 = r(0)$, ამიტომ

$$x(0) = 20 + \frac{15}{\pi} \cdot 0 = 20 \text{ სმ.}$$

მუშტას სრული მობრუნების შემდეგ გვაქვს

$$\varphi = 2\pi \rightarrow rr\ r(2\pi) = 20 + \frac{15}{\pi} \cdot 2\pi = 50 \text{ სმ.}$$

გარდა ამისა

$$\varphi = \omega t = \frac{2}{3}\pi t \ \rightarrow t = \frac{3\varphi}{2\pi},$$

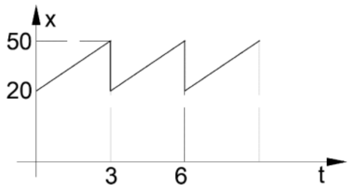
როცა $\varphi = 2\pi$ მაშინ t=3წმ. ეს არის მუშტას ერთი მობრუნების დრო.

$$x(3) = r(2\pi) \rightarrow x(3) = 20 + 3k =$$

$$= 20 + \frac{15}{\pi} \cdot 2\pi = 50 \rightarrow k = 10.$$

საბოლოოდ

$$x(t) = 20 + 10t;$$

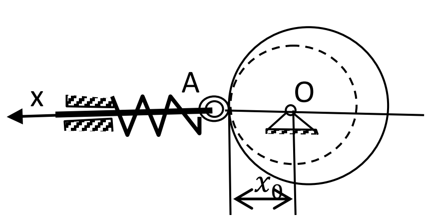


გრაფიკს ექნება სახე:

პასუხი: $x(t) = 20 + 10t$; ეს დამოკიდებულება არის 3 წამი განმავლობაში, ხოლო შემდეგ გრაფიკი გრძელდება პერიოდულად.

ამოცანა 14.17.

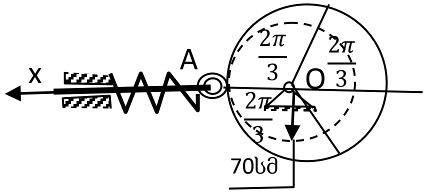
დავწეროთ მუშტას კონტურის განტოლება , თუ ღეროს სვლას h=20 სმ შეესაბამება მუშტას მობრუნება მესამედით,ამავე დრს მუშტას გადაადგილება პროპორციულია მობრუნების კუთხის. შემდეგი მესამედი მობრუნების დროს ღერო უძრავია, შემდეგი მესამედით მობრუნების დროს ღერო ბრუნდება უკან იგივე პირობებით, როგორც პირველი მესამედის შემთხვევაში. მინიმალური მანძილი ღეროს ბოლოდან მუშტას ცენტრამდე არის 70 სმ.



ამოხსნა

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მუშტას ზედაპირის ნაწილი წარმოადგენს არქიმედის სპირალს, ხოლო მეორე ნაწილი წრეწირის ნაწილია. არქიმედეს სპირალის განტოლება ვეძებოთ ასეთი სახით:

$$r = \begin{cases} r_0 + k_0\varphi, \varphi \in \left(0; \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ r_1 - k_1\varphi, \varphi \in \left(\dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right) \end{cases}$$



იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მუდმივები r_0, k_0, r_1 , k_1 ვისარგებლოთ პირობით,რომ სრული სვლა არის h=20 სმ.

როცა $\varphi = 0$, მაშინ $r_0 = 70$ სმ. როცა $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, მაშინ $r_0 + k_0 \cdot \frac{2\pi}{3} = 70 + 20 \ \to k_0 = \frac{30}{\pi}$. ე.ი

$$r = 70 + \frac{30}{\pi}\varphi, \varphi\epsilon\left(0; \frac{2\pi}{3}\right).$$

ვიპოვოთ r_1, k_1:

$$r_1 - k_1 \cdot \frac{4\pi}{3} = 90, r_1 - k_1 \cdot 2\pi = 70.$$

აქედან $r_1 = 130 \ \ k_1 = \frac{30}{\pi}$.

საბოლოოდ მივიღებთ:

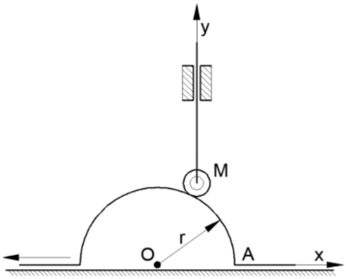
$$r = \left(130 - \frac{30}{\pi}\varphi\right), \ \varphi\epsilon\left(\frac{4}{3}\pi; 2\pi\right).$$

$$r(\varphi) = \left(90 - \frac{30}{\pi}\varphi\right), \varphi\epsilon\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$$

პასუხი: მუშტას კონტური, რომელიც შეესაბამება მესამედ ბრუნს, წარმოადგენს არქიმედეს სპირალს:

$r = 70 + \frac{30}{\pi}\varphi$ სმ. მეორე მესამედი არის წრეწირის რკალი რადიუსით 90 სმ, ხოლო მესამე მესამედი ბრუნი ასევე არქიმედეს სპირალია და აღიწერება განტოლებით: $r = \left(90 - \frac{30}{\pi}\varphi\right)$,

ამოცანა 14.18



იპოვეთ რა სიგრძეზე გადაად-გილდება ძელი, რომელიც ეყრდნობა $r =$ 30 სმ რადიუსიან მუშტას, თუ ის გა-დაადგილდება მუდმივი $V = 5$ მ/წმ სიჩქარით. ღეროს გადაადგილების დრო t=3 წმ. საწყის მომენტში ღერო იმყოფება უკიდურეს ზედა მდებარეობაში

ამოხსნა

მუშტა ასრულებუ წინსვლა-უკუსვლით მოძრაობას და მისი ცენტრი გადაადგილდება მუდმივი სიჩქარით, ამიტომ $x_0 = Vt = 5t$

M წერტილი ძევს 30 სმ რადიუსიან წრეწირზე, რომლის განტოლებაა:

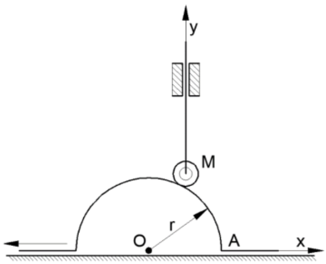
$$x_0{}^2 + y^2 = 900. \rightarrow y = \sqrt{900 - 25t^2};\ y(t = 3) = 15\sqrt{3}\text{ სმ.}$$

ღეროს გადაადგილებაა

$$h = 30 - 15\sqrt{3} = 4{,}02\text{ სმ.}$$

პასუხი: 4.02 სმ.

ამოცანა14.19



იპოვეთ გადატანითად მოძრავი წრიული მუშტას აჩქარება, თუ ის უსა-წყისო სიჩქარით მოძრაობს თანაბრადა-ჩქარებულად. ღერო 4 წამში დაეშვა დაბლა h=4 სმ სიმაღლეზე. მუშტას რადიუსია 10 სმ.

ამოხსნა

შეიძლება ჩავწეროთ

$$x_0 = \sqrt{r^2 - y^2}\text{ მ.}$$

რადგან მუშტა მოძრაობს თანაბრადაჩქარებულად ამიტომ

$$x_0 = \frac{at^2}{2}.$$

როცა t=4 წმ მაშინ $x_0 = 8a$, ხოლო $y = r - h = 10 - 4 = 6$ სმ. ამიტომ

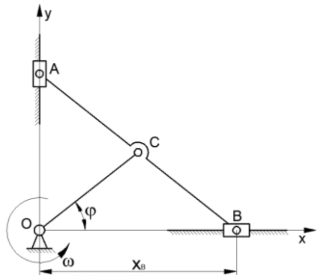
$$8a = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ \rightarrow a = 1\text{მ/წმ}^2$$

.პასუხი: $a = 1$მ/წმ^2

მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობა

15. ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის განტოლებები.

ამოცანა 15.1



ელიფსოგრაფის სახაზავი მოძრაობაში მოჰყავს OC მრუდმხარას, რომელიც ბრუნავს O ღერძის გარშემო მუდმივი ω_0 კუთხური სიჩქარით . ჩათვალეთ B ცოცია პოლუსად და ჩაწერეთ ელიფსოგრაფის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები, თუ OC=BC=AC=r. საწყის მდებარეობაში სახაზავი ჰორიზონტალურადაა განლაგებული.

ამოხსნა

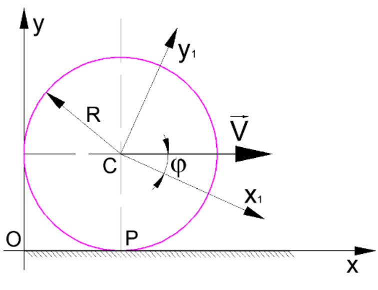
რადგან B ცოცია მოძრაობს ჰორიზონტის გასწვრივ, ამიტომ

$$y_B = 0. x_B = OCcos\varphi + CBcos\varphi = 2rcos\varphi = 2rcos\omega_0 t.$$

$$\varphi = \omega_0 t, \mathrm{\varphi_B} = -\mathrm{\omega_0 t}.$$

პასუხი: $x_B = 2rcos\omega_0 t$; $y_B = 0$; $\mathrm{\varphi_B} = -\mathrm{\omega_0 t}$.

ამოცანა 15.2



R რადიუსიანი ბორბალი მიგორავს უსრიალოდ ჰორიზონტალური წრფის გასწვრივ. ცენტრის სიჩქარე მუდმივია და უდრის V. განსაზღვრეთ ბორბლის მოძრაობის განტოლებები, თუ საწყის მომენტში ღერძი y_1, რომელიც ხისტად არის დაკავშირებული ბორბალთან, იმყოფებოდა ვერტიკალურ მდებარეობაში, ხოლო უძრავი y ღერძი ამ მომენტში გადიოდა ბორბლის ცენტრში. პოლუსად ავირჩიოთ C წერტილი.

ამოხსნა

რადგან ცენტრის სიჩქარე მუდმივია, ამიტომ

$$x_c = Vt,$$

(როცა t=0 , ბორბლის C ცენტრი მდებარეობს y ღერძზე), y_c კოორდინატი მუდმივია. ე.ი.

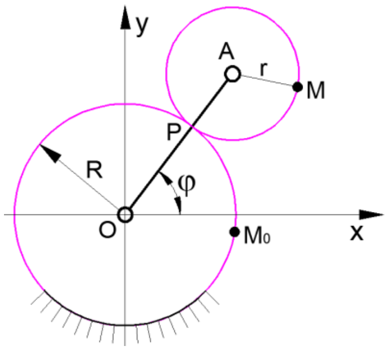
$$y_c = R, \varphi = \omega t.$$

ბორბლის კუთხური სიჩქარეა V/R. ამიტომ

$$\varphi = \frac{V}{R}t.$$

პასუხი: $x_c = Vt, y_c = R, \ \ \varphi = \frac{V}{R}t.$

ამოცანა 15.3



r რადიუსიანი კბილანა, რომელიც გორავს R რადიუსიან უძრავ კბილანაზე, მოძრაობაში მიჰყავს OA მრუდმხარას, რომელიც ბრუნავს თანაბრად აჩქარებულად უძრავი O ღერძის გარშემო. დაწერეთ მოძრავი კბილანის მოძრაობის განტოლებები. პოლუსად აირჩიეთ მისი A ცენტრი. როცა $t = 0$, მაშინ $\omega_0 = \varphi_0 = 0$.

ამოხსნა

$$\omega_{OA} = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon_0 t, \ \rightarrow d\varphi = \varepsilon_0 t dt.$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობა და საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$x_A = OAcos\varphi = (R + r)cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$$

$$y_A = OAsin\varphi = (R + r)sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

P წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP},$$

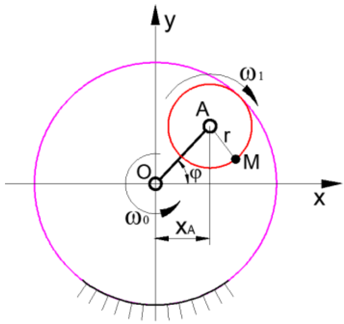
$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = (R + r)\varepsilon_0 t,$$

$$\omega_1 = \frac{R + r}{r}\varepsilon_0 t.$$

$$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

პასუხი: $x_A = (R+r)cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$; $y_A = (R+r)sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$; $\varphi_1 = \left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$.

ამოცანა 15.4



r რადიუსიანი კბილანა, რომელიც გორავს R რადიუსიანი კბილანას შიგნით, მოძრაობაში მოდის OA მრუდმხარას საშუალებით. მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე მუდმივია და უდრის ω_0 . როცა t=0, მაშინ კუთხე $\varphi = 0$. დაწერეთ მოძრავი კბილანას მოძრაობის განტოლებები. პოლუსად აირჩიეთ კბილანას A ცენტრი.

ამოხსნა

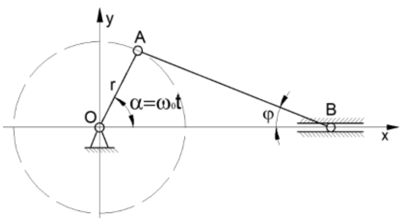
$$\varphi = \omega_0 t,$$
$$x_A = OAcos\varphi = (R-r)cos\omega_0 t.$$
$$y_A = OAsin\varphi = (R-r)sin\omega_0 t.$$
$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP} = \frac{(R-r)\omega_0}{r} = \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ ტოლობას და გავითვალისწინებთ საწყის პირობებს, მივიღებთ:

$$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r}-1\right)\omega_0 t.$$

პასუხი: $x_A = (R-r)cos\omega_0 t$; $y_A = (R-r)sin\omega_0 t$; $\varphi_1 = \left(\frac{R}{r}-1\right)\omega_0 t$.

ამოცანა15.5



იპოვეთ ბარბაცას მოძრაობის განტოლებები, თუ მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად. პოლუსად აირჩიეთ A წერტილი. r - მრუდმხარას სიგრძეა, l – ბარბაცას სიგრძე ა, ω_0 მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა. როცა t=0, მაშინ $\alpha = 0$.

ამოხსნა

AB ბარბაცა ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას, რომელიც ხასიათდება A წერტილის მოძრაობით და ამ წერტილის გარშემო ბრუნვით. A წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x_A = OAcos\omega_0 t = rcos\omega_0 t,$$
$$y_A = OAsin\omega_0 t = rsin\omega_0 t.$$

ΔOAB -დან სინუსების თეორემის გამოყენებით გვაქვს:

$$\frac{\text{OA}}{\sin\varphi_1} = \frac{\text{AB}}{\sin\omega_0 t},$$

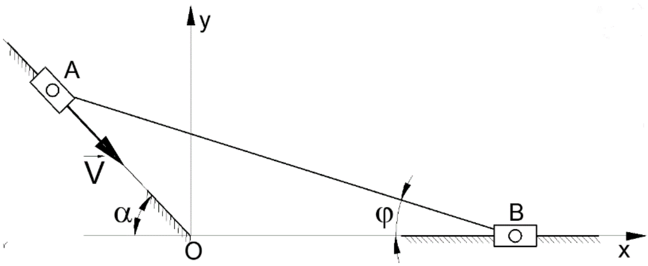
აქედან

$$sin\varphi_1 = \frac{OA}{AB}\sin\omega_0 t = \frac{r}{l}\sin\omega_0 t \rightarrow \varphi_1 = arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right).$$

პასუხი: $x_A = rcos\omega_0 t; y_A = rsin\omega_0 t. \varphi_1 = arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right).$

ამოცანა15.6

A და B ქუროები შეერთებულია l სიგრძის AB ძელით. იგულისხმება,რომ A ქურო მოძრაობას იწყებს O წერტილიდან მუდმივი V_A სიჩქარით. პოლუსად აირჩიეთ A წერტილი. კუთხე BOA უდრის $\pi - \alpha$.



ამოხსნა

ამოცანის პირობით $OA = V_A t$. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$x_A = -OAcos\alpha = -V_A tcos\alpha,$$
$$y_A = OAsin\alpha = V_A tsin\alpha.$$

კუთხე φ_1 გამოითვლება თანაფარდობიდან

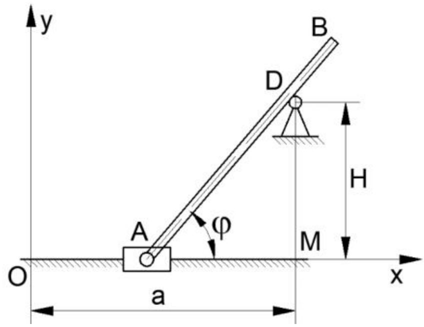
$$\frac{OA}{sin\varphi_1} = \frac{AB}{sin(\pi-\alpha)} = \frac{AB}{sin\alpha} \rightarrow sin\varphi_1 = \frac{OA}{AB}sin\alpha. \rightarrow \varphi_1 = arcsin\left(\frac{OA}{AB}sin\alpha\right) = arcsin\left(\frac{V_A t}{l}sin\alpha\right)$$

პასუხი: $x_A = -V_A tcos\alpha$; $y_A = V_A tsin\alpha$; $\varphi_1 = arcsin\left(\frac{V_A t}{l}sin\alpha\right)$.

ამოცანა15.7

AB ძელის A ბოლო სრიალებს სწორხაზოვანი მიმმართველის გასწვრივ მუდმივი V სიჩქარით. იმავდროულად ძელი ეყრდნობა D შვერილს. დავწეროთ ძელის მოძრაობის განტოლებები და მისი B ბოლოს მოძრაობის განტოლება. ძელის სიგრძეა l. D შვერილი მდებარეობს ჰორიზონტალური მიმმართველიდან H სიმაღლეზე. მოძრაობის დაწყების მომენტში A წერტილის მდებარეობა ემთხვევა O წერტილს, რომელიც აღებულია კოორდინატთა სათავედ. OM=α.

A წერტილი აიღეთ პოლუსად.



ამოხსნა

$$x_A = V_A t = Vt.$$

რადგან A ცოცია მოძრაობს x ღერძის გასწვრივ, ამიტომ $y_A = 0$.

მობრუნების კუთხის საპოვნელად განვიხილოთ სამკუთხედი ADM:

$$AM = OM - OA = a - Vt.$$

$$tg\varphi = \frac{DM}{AM} = \frac{H}{a-Vt}.$$

$$\varphi = arctg\,\frac{H}{a-Vt}.$$

$$x_B = ABcos\varphi = lcos\varphi.$$

ΔADM -დან გვაქვს

$$\cos\varphi = \frac{AM}{AD} = \frac{a-Vt}{\sqrt{H^2+(a-Vt)^2}}.$$

$$x_{B=}l\frac{a-Vt}{\sqrt{H^2+(a-Vt)^2}}\ ,\ y_B = ABsin\varphi.$$

$$sin\varphi = \frac{DM}{AD} = \frac{H}{\sqrt{H^2+(a-Vt)^2}}.$$

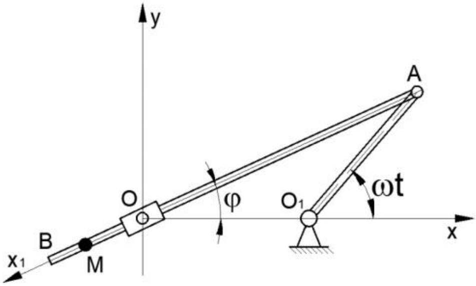
$$y_B = \frac{Hl}{\sqrt{H^2+(a-Vt)^2}}.$$

პასუხი:

$x_A = V_A t = Vt.\, y_A = 0, \varphi = arctg\,\frac{H}{a-Vt}; x_{B=}l\frac{a-Vt}{\sqrt{H^2+(a-Vt)^2}}\ ;\ y_B = \frac{Hl}{\sqrt{H^2+(a-Vt)^2}}.$

ამოცანა 15.8

მრუდმხარა O_1A, რომლის სიგრძეა a/2, ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით. მრუდმხარასთან A წერტილში სახსრითაა შეერთებული AB ღერო, რომელიც გადის O მუფტაში. ამასთან $OO_1 = \frac{a}{2}$. იპოვეთ AB ღეროს მოძრაობის განტოლებები და M წერტილის ტრაექტორია (პოლარულ და დეკარტეს კოორდინატებში), რომელიც მდებარეობს ძელზე და A წერტილიდან დაშორებულია a მანძილით. პოლუსად აიღეთ A წერტილი.



ამოხსნა

$$x_A = OO_1 + O_1A\cos\omega t = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\omega t = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega t).$$

$$y_A = O_1A\sin\omega t = \frac{a}{2}\sin\omega t\ .$$

განვიხილოთ სამკუთხედი OAO_1;

$$\angle AO_1x = \angle AOO_1 + \angle OAO_1.$$

სამკუთხედი OAO_1 ტოლფერდაა. ამის გათვალისწინებით წინა ტოლობა ასე ჩაიწერება :

$$\omega t = 2\varphi\ \to \varphi = \frac{\omega t}{2}.$$

ვიპოვოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში:

$$\rho = OM = a - OA = \ a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi). \qquad (1)$$

თუ გავთვალისწინებთ დამოკიდებულებებს პოლარულ და მართკუთხა კოორდინატებს შორის გვექნება:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\ ,}.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები (1) ტოლობაში და გარდაქმნებისშემდეგ მივიღებთ:

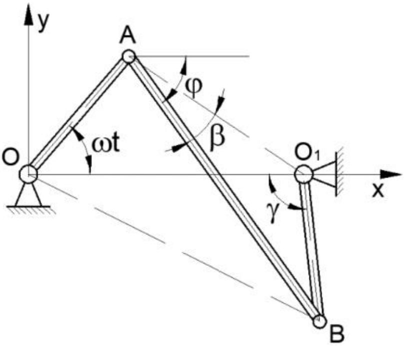
$$x^2 + y^2 = a(x - \sqrt{x^2 + y^2}\ )\text{- კარდოიდა.}$$

პასუხი: 1) $x_A = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega t)$; $y_A = \frac{a}{2}\sin\omega t$;

2) $\rho = OM = a(1 - \cos\varphi)$; $x^2 + y^2 = a(x - \sqrt{x^2 + y^2}\ )$- კარდოიდა.

ამოცანა15.9

$OABO_1$ ანტიპარალელოგრამის OA მრუდმხარა თანაბრად ბრუნავს კუთხური სიჩქარით ω. პოლუსად ჩათვალეთ A წერტილი, შეადგინეთ AB რგოლის მოძრაობის განტოლებები, თუ $OA = O_1B = a$ და $OO_1 = AB = b$ $(a < b)$; საწყის მომენტში OA მრუდმხარა მიმართული იყო OO_1 წრფის გასწვრივ გასწვრივ.



ამოხსნა

$$x_A = OAcos\omega t = acos\omega t,$$
$$y_A = OAsin\omega t = asin\omega t.$$

განვიხილოთ სამკუთხედები ΔOAB და ΔOBO_1. ისინი ტოლი არიან, რადგან $OA = O_1B,\ OO_1 = AB$, გვერდი OB საერთოა. სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle OO_1B = \angle OAB = \gamma$; ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$OK = KB;\ O_1K = AK.\ \Delta OAO_1 = \Delta ABO_1$$

სინუსების თეორემის გამოყენებით გვაქვს:

$$\frac{AK}{sin\omega t} = \frac{OA}{sin\varphi} = \frac{OK}{sin\gamma},\ \left(\Delta OAK - დან\right),$$
$$\frac{KO_1}{sin\omega t} = \frac{KB}{sin\mu} = \frac{O_1B}{sin\varphi},\ (\Delta KB_1O).$$
$$AK + KB = OK + KO_1 = b;\ \rightarrow\ KO_1 = b - OK\ ;$$

ΔOAK- დან გვაქვს

$$OK = OAcos\omega t + \mathrm{AKcos\varphi} = \mathrm{acos\omega t} + \mathrm{KO_1cos\varphi};$$
$$KO_1 = b - (acos\omega t + KO_1)\ \rightarrow KO_1 = \frac{b - acos\omega t}{1 + cos\varphi}.$$
$$KO_1 = \frac{asin\omega t}{sin\varphi} = \frac{b-acos\omega t}{1+cos\varphi},$$

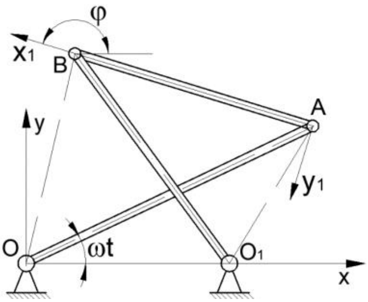
ამოვხსნათ ეს გამტოლება φ კუთხის მიმართ. გადავწეროთ ეს ტოლობა ასე:

$$\frac{1+cos\varphi}{sin\varphi} = \frac{b-acos\omega t}{asin\omega t}\ \rightarrow ctg\frac{\varphi}{2} = \frac{b-acos\omega t}{asin\omega t}\ \rightarrow tg\frac{\varphi}{2} = \frac{asin\omega t}{b-acos\omega t} \rightarrow \varphi = 2arctg\left(\frac{asin\omega t}{b-acos\omega t}\right).$$

პასუხი: $x_A = acos\omega t$; $y_A = asin\omega t$; $\varphi = 2arctg\left(\frac{asin\omega t}{b-acos\omega t}\right)$.

ამოცანა 15.10

OO_1 რგოლზე დასმული $OABO_1$ ანტიპარალელოგრამის OA მრუდ-მხარა ბრუნავს თააბრად ω კუთხური სიჩქარით. პოლუსად ჩათვალეთ A წერტილი და დაწერეთ AB რგოლის მოძრაობის განტოლებები, თუ $OA = O_1B = a$,



$OO_1 = AB = b\ (a < b)$. საწყის მომენტში OA მრუდმხარა მიმართული იყო $OO_1 - ob$ გასწვრივ.

ამოხსნა

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$x_A = OAcos\omega t, = acos\omega t \quad y_A = OAsin\omega t = asin\omega t.$$

განვიხილოთ სამკუთხედები ΔOAB და ΔOO_1B. ისინი ტოლი სამკუთხედები არიან, ამიტომ

$$\angle BAO = \angle OBO_{1,} \quad \angle BOA = \angle OBO_{1,}$$

აქედან გამომდინარე ΔBKO ტოლფერდა სამკუთხედია და BK=KO.

ანალოგიურად, $\Delta ABO_1 = \Delta AOO_1$ და ამიტომ $\angle AOO_1 = \angle ABO_1 = \omega t$;

$$\angle BO_1A = \angle OAO_1 \ \rightarrow \ O_1K = AK.$$

$$\angle \mathrm{OAB} = \pi - (\varphi - \omega t),$$

$$\angle \mathrm{ABK} = \pi - (\angle \mathrm{ABK} + \angle \mathrm{OAB}) = \pi - \omega t - \big(\pi - (\varphi - \omega t)\big) \rightarrow \angle \mathrm{ABK} = \varphi - 2\omega t.$$

თუ ვისარგებლებთ სინუსების თეორემით სამკუთხედი $\Delta ABK -$ დან მივიღებთ:

$$\frac{BK}{\sin{(\pi - (\varphi - \omega t)}} = \frac{AB}{sin(\varphi - 2\omega t)} = \frac{AK}{sin\omega t},$$

აქედან

$$AK = \frac{bsin\omega t}{c}\ , \ BK = \frac{bsin(\varphi - \omega t)}{sin(\varphi - 2\omega t)}\ .$$

$$\mathrm{BK} = \mathrm{KO}; \ \ \mathrm{a} = \mathrm{OK} + \mathrm{KA} = \mathrm{BK} + \mathrm{AK} = \frac{\mathrm{b}(\sin\omega t + \sin(\varphi - \omega t))}{\sin{(\varphi - 2\omega t)}}$$

$$= \frac{\mathrm{b} \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\varphi - 2\omega t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\varphi - 2\omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi - 2\omega t}{2}\right)} = \frac{\mathrm{b}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\left(\frac{\varphi - 2\omega t}{2}\right)}$$

აქედან

$$a\sin\left(\frac{\varphi - 2\omega t}{2}\right) - \mathrm{b}\sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

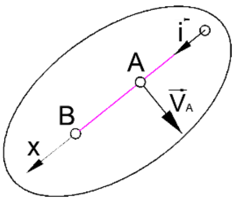
$$a\left(sin\frac{\varphi}{2}cos\omega t - cos\frac{\varphi}{2}sin\omega t\right) - \mathrm{bsin}\frac{\varphi}{2} = 0 \ \rightarrow \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\mathrm{asin\omega t}}{\mathrm{acos\omega t - b}} \ \rightarrow \frac{\varphi}{2} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{cos\omega t - b/a}}{\mathrm{sin\omega t}}.$$

პასუხი: $x_A = acos\omega t$; $y_A = asin\omega t$; $\frac{\varphi}{2} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{cos\omega t - b/a}}{\mathrm{sin\omega t}}$.

16. მყარი სხეულის წერტილთა სიჩქარეები ბრტყელი მოძრაობის დროს.

სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

ამოცანა 16.1



გაავლეთ ბრტყელი ფიგურის რომელიმე წერტილის სიჩქარის მართობული წრფე. აჩვენეთ, რომ ამ წრფის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის გეგმილი ამ წრფეზე ნულის ტოლია.

ამოხსნა

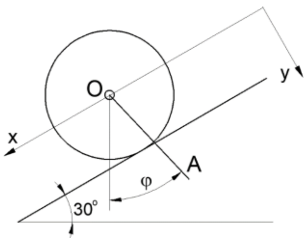
ვისარგებლით სიჩქარის გამოსათვლელი ფორმულით:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}},$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერ ძზე და გავითვალისწინოთ, რომ $\overrightarrow{V_{BA}} \perp AB$ და მივიღებთ:

$$V_{Bx} = 0.$$

ამოცანა16.2



ბორბალი მიგორავს დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც ჰორიზონტთან 30° ადგენს კუთხეს. ბორბლის O ღერძი მოძრაობს კანონით: $x_0 = 10t^2$ სმ. ბორბლის ცენტრზე დაკიდებულია $OA = l = 36$ სმ სიგრძის ღერო, რომელიც ირხევა O ღერძის გარშემო

კანონით: $\varphi = \frac{\pi}{3} sin \frac{\pi t}{6}$ რად. იპოვეთ OA ღეროს A ბოლოს კუთხური სიჩქარე t=1 წმ
მომენტისთვის.

ამოხსნა

ჩავწეროთ A წერტილის მოძრაობის განტოლებები უძრავ კოორდინატთა სისტემაში:

$$\begin{cases} x_A = x_0 - lsin(\varphi - \alpha) \\ y_A = lcos(\varphi - \alpha). \end{cases}$$

იპოვეთ A წერტილის სიჩქარის გეგმილები :

$$\begin{cases} \dot{x_A} = \dot{x}_0 - l\omega\cos(\varphi - \alpha) \\ \dot{y}_A = -l\omega\sin(\varphi - \alpha). \end{cases}$$

ვიპოვოთ ღეროს კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi^2}{18} cos \frac{\pi t}{6}.$$

გამოვთვალოთ t=1 წმ მომენტისათვის

$$\varphi(1) = \frac{\pi}{6};\ \omega(1) = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{36};\ \dot{x}_0 = 20 \text{ სმ/წმ};\ \dot{x}_A(1) = 2{,}9 \text{ სმ/წმ};\ \dot{y}_A(0) = 0;$$

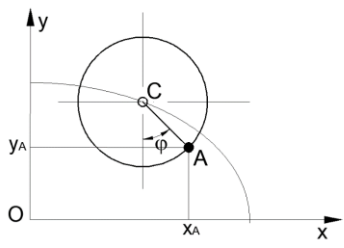
$$V_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = 2{,}9 \text{ სმ/წმ}.$$

პასუხი: სიჩქარე უდრის 2,9 სმ/წმ და მიმართულია დახრილი სიბრტყის პარალელურად ქვემოთ.

ამოცანა 16.3

r=20 სმ რადიუსიანი დისკო მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში. მისი C ცენტრი მოძრაობს კანონით:

$x_c = 10t, y_c = (100 - 4{,}9t^2)$. ამავე დროს დისკო ბრუნავს ცენტრზე მოძრაობის სიბრტყის მართობულად გამავალი ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = \frac{\pi}{2}$ რად/წმ. იპოვეთ t=0 მომენტისთვის დისკოს ფერსოზე მდებარე A წერტილის სიჩქარე.



ამ წერტილის მდებარეობა დისკოზე განისაზღვრება კუთხით $\varphi = \omega t$, რომელიც აითვლება ვერტიკალიდან საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით.

ამოხსნა

ჩავწეროთ A წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$\begin{cases} x_A = x_C + r sin\omega t \\ y_A = y_C - r cos\omega t. \end{cases}$$

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = \dot{x}_c + r\omega cos\omega t \\ y_A = \dot{y}_c + r\omega sin\omega t \end{cases}$$

$$\dot{x}_A = 10 + 20\cdot 10^{-2}\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi t}{2},\ \ \dot{y}_A = -9{,}8t + 20\cdot 10^{-2}\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi t}{2}.$$

როცა t=0, გვექნება

$$\dot{x}_A = 10 + 0{,}31 = 10{,}31,\, \dot{y}_A = 0,\, V_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = 10{,}31 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_A = 10{,}31$ მ/წმ.

ამოცანა 16.4

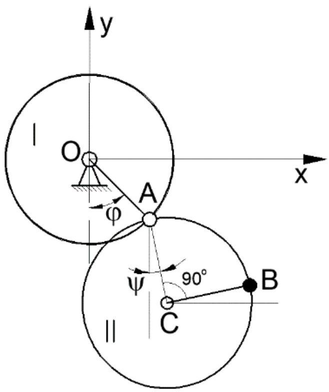
წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ A წერტილის სიჩქარე t=1 წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა

$$\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{A}}(1) = 10\ ,\, \dot{y}_A(1) = -9{,}49,\, V_A = 13{,}8 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_A = 13{,}8$ მ/წმ.

ამოცანა 16.5-16.6



ორი ერთნაირი დისკო, რომელთა რადიუსებია r, ერთმანეთთან დაკავშირებულია A სახსრით. დისკო I ბრუნავს უძრავი ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო კანონით $\varphi = \varphi(t)$. დისკო II ბრუნავს ჰორიზონტალური A ღერძის გარშემო კანონით $\psi = \psi(t)$. ღერძები O და A არიან ნახაზის სიბრტყის მართობული. კუთხეები აითვლება ვერტიკალიდან საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. იპოვეთ II დისკოს C ცენტრის სიჩქარე და B წერტილის სიჩქარე, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$.

ამოხსნა

ჩავწეროთ C წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$\begin{cases} x_C = rsin\varphi + rsin\,\psi \\ y_C = -rcos\varphi - rcos\,\psi. \end{cases}$$

ვიპოვოთ C წერტილის სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = r(\dot{\varphi}cos\varphi + \dot{\psi}cos\psi) \\ \dot{y}_C = r(\dot{\varphi}sin\varphi + \dot{\psi}sin\psi) \end{cases}.$$

$$\dot{x}_C^2 = r^2\left(\dot{\varphi}^2cos^2\varphi + \dot{\psi}^2cos^2\psi + 2\dot{\varphi}^2\dot{\psi}^2cos\varphi cos\psi\right),$$

$$\dot{y}_C^2 = r\left(\dot{\varphi}^2sin^2\varphi + \dot{\psi}^2sin^2\psi + 2\dot{\varphi}^2\dot{\psi}^2sin\varphi sin\psi\right),$$

ვიპოვოთ C წერტილის სიჩქარე

$$V_C = r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos{(\varphi - \psi)}}.$$

ჩავწეროთ B წერტილის მოძრაობის განტოლებები

$$x_A = rsin\varphi + rsin\,\psi + rcos\,\psi,$$

$$y_B = -rcos\varphi - rcos\,\psi + rsin\psi,$$

ანუ

$$x_B = r\left[sin\varphi + \sqrt{2}\sin{(45° + \psi)}\right]$$

$$y_B = -r\left[cos\varphi + \sqrt{2}\cos(45° + \psi)\right].$$

ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარის გეგმილები

$$\dot{x}_B = r\left[\dot{\varphi}cos\varphi + \sqrt{2}\dot{\psi}\cos{(45° + \psi)}\right].$$

$$\dot{y}_B = r\left[\dot{\varphi}sin\varphi + \sqrt{2}\dot{\psi}\sin{(45° + \psi)}\right].$$

ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე

$$V_B = r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}^2 + 2\sqrt{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos{(45° - (\varphi - \psi))}}$$

პასუხი: $V_{Cx} = r\left(\dot{\varphi}cos\varphi + \dot{\psi}cos\psi\right)$,

$$V_{Cy} = r\left(\dot{\varphi}sin\varphi + \dot{\psi}sin\psi\right),$$

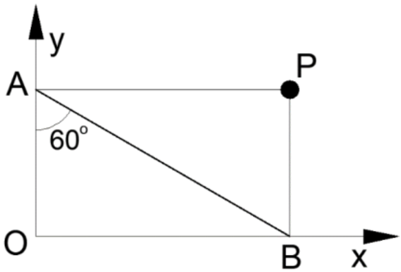
$$V_C = r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos{(\varphi - \psi)}}$$

$$V_{Bx} = r\left[\dot{\varphi}cos\varphi + \sqrt{2}\dot{\psi}\cos{(45° + \psi)}\right],$$

$$V_{By} = r\left[\dot{\varphi}sin\varphi + \sqrt{2}\dot{\psi}\sin{(45° + \psi)}\right],$$

$$V_B = r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}^2 + 2\sqrt{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos{(45° - (\varphi - \psi))}}.$$

ამოცანა 16.7



l=1 მ სიგრძის AB ძელი მოძრაობს ისე, რომ მისი ბოლოები ყოველთვის მდებარეობს ორ ურთიერთ მართობულ ღერძზე ox და oy ღერძზე. იპოვეთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის კოორდინატები იმ შემთხვევაში, როცა კუთხე $\angle OAB = 60°$.

ამოხსნა

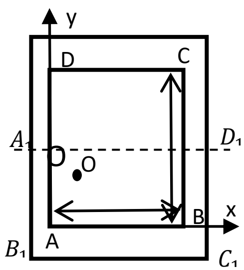
სიჩქარეთა მყისი ცენტრის აგება ნაჩვენებია ნახაზზე.

$$x = x_P = x_B = l sin60° = 0{,}866 \text{ მ.}$$

$$y = y_P = y_B = l cos60° = 0{,}5 \text{ მ.}$$

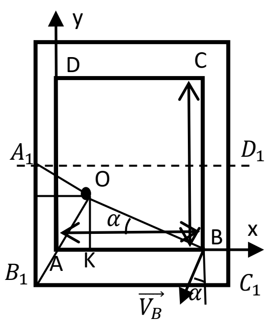
პასუხი: $x_P = 0{,}866$ მ; y_P=0,5 მ.

ამოცანა16.8



დასაკეცი მაგიდის დაფას აქვს მართკუთხედის ფორმა. მისი გვერდებია a და b.მობრუნდება O ღერძის გარშემო და ABCD მდებარეობიდან გადადის $A_1B_1C_1D_1$ მდებარეობაში და იშლება. მიიღება მაგიდა გვერდებით b და 2a .იპოვეთ O წერტილის მდებარეობა AB და AD გვერდების მიმართ.

ამოხსნა



$$\boldsymbol{AK} = \mathrm{A_1K_1}\,,\ \mathrm{x_0 + y_0} = \frac{\mathrm{b}}{2},\ \mathrm{V_A} = \omega\left(\mathrm{x_0} + \frac{\mathrm{b-a}}{2}\right),$$

$$\mathrm{V_B} = \omega\sqrt{\mathrm{y_0^2 + (a - x_0)^2}},$$

$$sin\alpha = \frac{y_0}{\sqrt{\mathrm{y_0^2+(a-x_0)^2}},}.$$

რადგან $V_k = V_B sin\alpha$, ამიტომ გვექნება

$$\begin{cases} \mathrm{x_0 + y_0} = \dfrac{\mathrm{b}}{2} \\ \omega\left(\mathrm{x_0} + \dfrac{\mathrm{b-a}}{2}\right) = y_0\omega. \end{cases}$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ ღერძის კოორდინატებს

$$\alpha \qquad \begin{cases} y_0 = \frac{b}{2} - \frac{a}{4} \\ x_0 = \frac{b}{4}. \end{cases}$$

პასუხი: $x_0 = \frac{b}{4}$; $y_0 = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.

ამოცანა 16.9

AB წრფე მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში. გარკვეულ მომენტში A წერტილის სიჩქარე ამ წრფესთან ადგენს 30 ° -იან კუთხეს. და უდრის 180 სმ/წმ. B წერტილის სიჩქარე ამ მომენტში ემთხვევა AB წრფის მიმართულებას. იპოვეთ B წერტილის სიჩქარე.

ამოხსნა

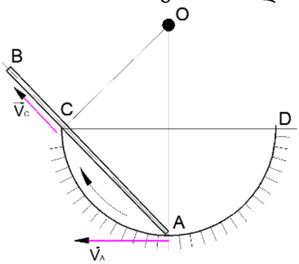
ვისარგებლოთ სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემით და მივიღებთ:

$$V_A cos30° = V_B, \rightarrow \; V_B = \frac{180\sqrt{3}}{2} = 156\text{სმ/წმ}.$$

პასუხი: $V_B = 156\text{სმ/წმ}$.

ამოცანა 16.10

AB ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში. ამასთან მისი ერთი ბოლო ყოველთვის იმყოფება CAD რკალზე. თვითონ AB წრფე ყოველთვის გადის C წერტილში. იპოვეთ ღეროს იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც მოცემულ მომენტში ემთხვევა C წერტილს. ცნობილია, რომ $V_A = 4$ მ/წმ და CD მართობულია AD რადიუსის.



ამოხსნა

ვისარგებლოთ სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემით და მივიღებთ:

$$V_C = V_A cos45° = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = 2{,}83\text{მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_C = 2,$

ამოცანა 16.11

l=0,5 მ სიგრძის AB ძელი მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში. სიჩქარე $V_A = 2$ მ/წმ x ღერძთან ქმნის 45°-იან კუთხეს. ღეროს B წერტილის სიჩქარე x ღერძთან ადგენს 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ B წერტილის სიჩქარე და AB ღეროს კუთხური სიჩქარე.

ამოხსნა

$$\boldsymbol{V_B}\cos 60° = \mathrm{V_A}\cos 45° \ \rightarrow \mathrm{V_B} = 2\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ მ/წმ}.$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}}\ .$$

დავაგეგმილოთ ეს უკანასკნელი y ღერძზე და მივიღებთ

$$V_B sin60° = V_A sin45° + V_{BA},$$

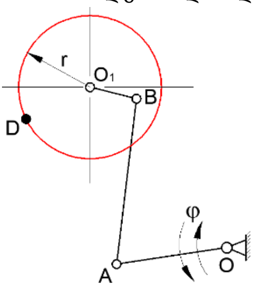
რადგან $V_{BA} = \omega \cdot l$, ამიტომ

$$\omega l = V_B sin60° - V_A sin45°, \rightarrow \omega = \frac{V_B sin60° - V_A sin45°}{l} = 2{,}06 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\mathrm{V_B} = 2{,}82$ მ/წმ ; $\omega = 2{,}06$ რად/წმ.

ამოცანა 16.12

სალესი დანადგარი მოძრაობაში მოჰყავს OA=24 სმ სიგრძის სატერფულს, რომელიც ბრუნავს O ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi = \frac{\pi}{6} sin\frac{\pi}{2}t$ რად. სალესი ქვა ბრუნავს O_1 ღერძის გარშემო AB ღეროს საშუალებით. O და O_1 ღერძები ნახაზის სიბრ-ტყის მართობულია. იპოვეთ D წერტილის სიჩქა-რე, როცა t=0, ხოლო OA და O_1B ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში არიან.



ამოხსნა

ვიპოვოთ სატერფულის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi^2}{12} cos\frac{\pi t}{2}.$$

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე

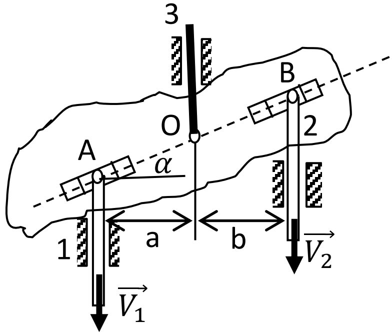
$$V_A = \omega \cdot OA = 2\pi^2 cos\frac{\pi t}{2}, V_B = V_A\ .$$

(მოცემულ მომენტში რგოლი ასრულებს მყისიერ გადატანით მოძრაობას)

$$V_D = 2V_D = 4\pi^2 cos\frac{\pi t}{2},\ V_D(0) = 4\pi^2 = 39,44 \text{ სმ/წმ}.$$

პასუხი: $V_D = 39,44$ სმ/წმ.

ამოცანა 16.13

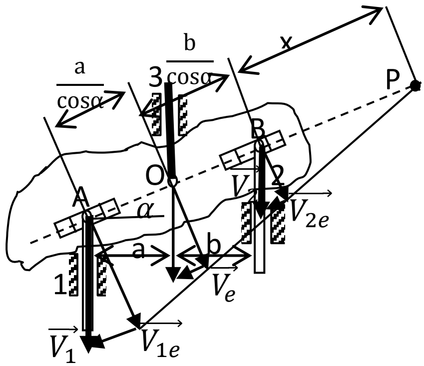


ნახაზზე ნაჩვენებია მექანიზმი, რომელიც შედგება ორი ღეროსაგან 1 და 2, რომლებიც მოძრაობენ ვირტიკალურ მიმმართველში. ეს ღეროები შეერთებულის AB უღელთან ცილინდრული სახსრებით, რომლებიც სრიალებენ უღელის ჭრილში. ღეროები მოძრაობენ სიჩქარით V_1 და V_2. აჩვენეთ რომ 3 ღეროს სიჩქარე, რომელიც შეერთებულია უღელის ცენტრთან და სრიალებს ვერტიკალურ მიმმართველში, უდრის $V = \frac{b}{a+b}V_1 + \frac{a}{a+b}V_2$, იპოვეთ, აგრეთვე, უღელის კუთხური სიჩქარე.

ამოხსნა

ავაგოთ უღელის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამისათვის V_1 და V_2 სიჩქარეები დავშალოთ წარმტან და ფარდობით მდგენელებად (იხ. ნახ.) .

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_{1r}} + \overrightarrow{V_{1e}}\ ;\ \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_{2r}} + \overrightarrow{V_{2e}};\ \vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}.$$



ვთქვათ უღელის კუთხური სიჩქარეა ω. მაშინ

$$V_{1e} = \omega\left(\frac{a}{cos\alpha} + \frac{b}{cos\alpha} + x\right),$$

$$V_{2e} = \omega x.$$

ამ განტოლებებიდან გვაქვს

$$V_{1e} - V_{2e} = \omega\left(\frac{a+b}{cos\alpha}\right) \to \omega = \frac{V_{1e}-V_{2e}}{a+b}cos\alpha = \frac{V_1 cos\alpha - V_2 cos\alpha}{a+b}cos\alpha = \frac{V_1-V_2}{a+b}cos^2\alpha.$$

ვიპოვოთ x მანძილი:

$$x = \frac{V_{2e}}{\omega} = \frac{V_2 cos\alpha}{\frac{V_1-V_2}{a+b}cos^2\alpha} = \frac{a+b}{cos\alpha}\cdot\frac{V_2}{V_1-V_1}.$$

ვიპოვოთ O წერტილის წარმტანი სიჩქარე :

$$V_e = \omega\left(x + \frac{b}{cos\alpha}\right) = \frac{V_1 - V_2}{a+b}cos^2\alpha\left[\frac{a+b}{cos\alpha}\cdot\frac{V_2}{V_1 - V_1} + \frac{b}{cos\alpha}\right]$$
$$= \left(\frac{b}{a+b}V_1 + \frac{a}{a+b}V_2\right)cos\alpha.$$

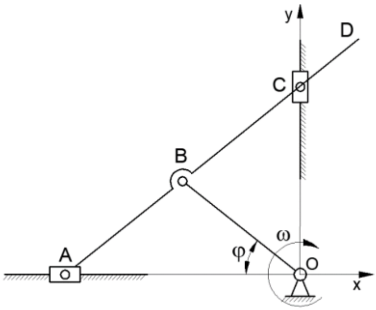
ჩავსვათ $V_e - b$ გამოსახულება და მივიღებთ:

$$V = \frac{b}{a+b}V_1 + \frac{a}{a+b}V_2.$$

პასუხი: $V = \frac{b}{a+b}V_1 + \frac{a}{a+b}V_2;\ \omega = \frac{V_1 - V_2}{a+b}cos^2\alpha.$

ამოცანა16.14

OB ძელი ბრუნავს O ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 2წმ^{-1}$ და მოძრაობაში მოჰყავს AD ძელი. წრილები A და C მოძრაობენ მიმმართველების გასწვრივ. იპოვეთ D წერტილის სიჩქარე, როცა $\varphi = 45°$ და იპოვეთ ამ წერტილის ტრაექტორია, თუ AB=OB=CD=12სმ.



ამოხსნა

D წერტილის კოორდინატებია:

$$\begin{cases} x_D = 12cos\varphi \\ Y_D = 36Ssin\varphi \end{cases}.$$

გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან φ კუთხე და ვიპოვით D წერტილის ტრაექტორიას:

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{36^2} = 1.$$

ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარის გეგმილი შესაბამის ღერძებზე:

$$\begin{cases} V_x = -12\omega sin\varphi \\ V_y = 36\omega cos\varphi \end{cases}.$$

გამოთვლების შემდეგ ვპოულობთ:

$$V_x = -12\sqrt{2},\ V_y = 36\sqrt{2}.$$

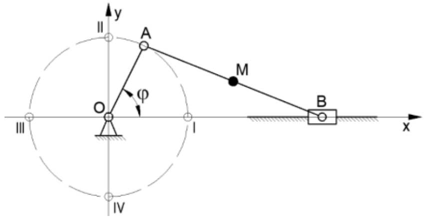
ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე:

$$V_D = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 24\sqrt{5}\ სმ/წმ$$

პასუხი: $V_D = 24\sqrt{5}$ სმ/წმ ; $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{36^2} = 1.$

ამოცანა 16.15

მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმში მრუდმხარა OA=20 სმ, ხოლო ბარბაცა AB=2 მ. მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად კუთხური სიჩქარით 2π რად/წმ. იპოვეთ ბარბაცას ω კუთხური სიჩქარე და მისი შუა M წერტილის სიჩქარე ოთხ მდებარეობაში რომლის შესაბამისი კუთხე AOB უდრის $0.\frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi/2$.



ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = OA \cdot \omega = 0{,}4 \cdot 6\pi = 2{,}4\pi = \frac{12\pi}{5}\ \text{მ/წმ.}$$

1) *ბარბაცას სიჩქარეთა მყისი ცენტრი იმყოფება B წერტილში. ამიტომ*

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{6\pi}{5};\ V_M = \omega_{AB} MB = \frac{6\pi}{5}.$$

2) $V_A = V_M = 7{,}54;\ \omega_{AB} = 0$. (ამ მომენტში ღერო ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას)

3) მყისი ცენტრი მდებარეობს B წერტილში, ამიტომ

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{6\pi}{5};\ V_M = \omega_{AB} MB = \frac{6\pi}{5}.$$

4) ამ შემთხვევაშიც ბარბაცა ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

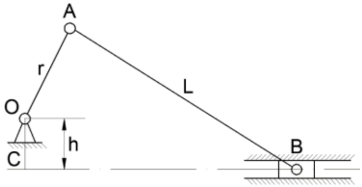
$$V_A = V_M = 7{,}54;\ \omega_{AB} = 0.$$

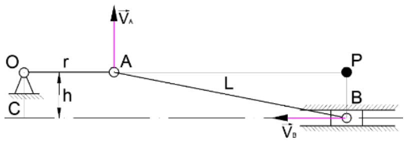
პასუხი: 1) $\omega_{AB} = \frac{6\pi}{5}$ *რად/წმ;* ; $V_M = \frac{6\pi}{5}$ *მ/წმ;* 2) $V_A = V_M = 7{,}54$ *მ/წმ;* $\omega_{AB} = 0$.

3) $\omega_{AB} = \frac{6\pi}{5}$ *რად/წმ;* ; $V_M = \frac{6\pi}{5}$ *მ/წმ.* 4) $V_A = V_M = 7{,}54$ *მ/წმ;* $\omega_{AB} = 0$.

ამოცანა 16.16.

იპოვეთ არაცენტრირებული მრუდმხარა მექანიზმის B წერტილის სიჩქარე ორ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ მდებარეობაში. მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა $\omega = 1{,}5\,\frac{\text{რად}}{\text{წმ}}$. ცნობილია, რომ OA=40სმ; AB=200 სმ; OC=20 სმ.





ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე, როცა მრუდმხარას უჭირავს ჰორიზონტალური მდებარეობა:

$$V_A = \omega \cdot OA = 1{,}5 \cdot 40 = 60\ \frac{სმ}{წმ}.$$

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\sqrt{l^2-h^2}}.$$

ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე:

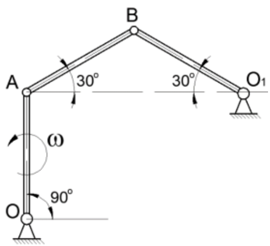
$$V_B = PB \cdot \omega_{AB} = \frac{V_A h}{\sqrt{l^2-h^2}} = 6{,}03\ სმ/წმ.$$

მრუდმხარას ვერტიკალური მ დებარეობის დროს ბარბაცა ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

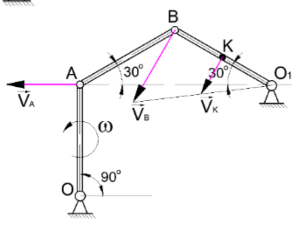
$$\omega = 0\ ;\ \ V_A = V_B = 60\ \text{სმ/წმ}.$$

პასუხი: $V_1 = V_3 = 6{,}03\,სმ/წმ;\ \ V_2 = V_4 = 60$ სმ/წმ.

ამოცანა 16.17



იპოვეთ ოთხრგოლიანი OABO1 მექანიზმის A წერტილის სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენებ მდგომარეობაში, თუ OA რგოლს, რომლის სიგრძეა 20 წმ, მოცემულ მომენტში აქვს $\omega = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარე. წერტილი K მდებარეობს BO1 ღეროს შუაში.



ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = OA \cdot \omega = 40\ \text{სმ/წმ}.$$

ვისარგებლოთ სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემით და გვექნება:

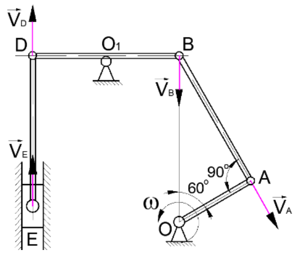
$$V_A cos30° = V_B cos30°\,, \rightarrow V_B = V_A 40\ \text{სმ/წმ}.$$

ვიპოვოთ K წერტილის სიჩქარე:

$$V_K = \frac{V_B}{2} = 20 \text{ სმ/წმ.}$$

პასუხი: 20 სმ/წმ.

ამოცანა 16.18



იპოვეთ ტუმბოს ამძრავი მექანიზმის E დგუშის სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში, თუ OA=20 სმ, $O_1B=O_1D$. მრუდმხარა OA ბრუნავს თანაბრად კუთხური სიჩქარით $\omega = 2$ რად/წმ.

ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = OA \cdot \omega = 40 \text{ სმ/წმ.}$$

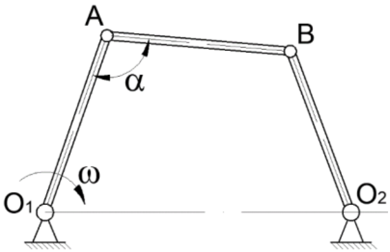
ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე:

$$V_B cos30° = V_A, \rightarrow \ V_B = \frac{2V_A}{\sqrt{3}} = \frac{80}{\sqrt{3}},$$

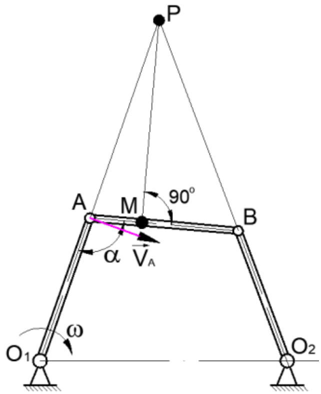
$$V_D = V_B = V_E = \frac{80}{\sqrt{3}} = 46{,}2 \text{ სმ/წმ.}$$

პასუხი: $V_E = 46{,}2$ სმ/წმ.

ამოცანა 16.19



ღეროები O_1A და O_2B AB ღეროსთან შეერთებულია A და B სახსრების საშუალებით და შეუძლიათ იბრუნონ უძრავი O_1 და O_2 წერტილების გარშემო, ისე რომ რჩებიან ერთ სიბრტყეში და ქმნიან ოთხრგოლიან მექანიზმი. მოცემულია: O_1A ღეროს სიგრძეა a, ხოლო მისი კუთხური სიჩქარეა ω. აგებით განსაზღვრეთ AB ღეროს იმ M წერტილის მდებარეობა, რომლის სიჩქარე მიმართულია ამ ღეროს გასწვრივ. ასევე იპოვეთ ამ წერტილის სიჩქარე, როცა კუთხე O_1AB უდრის α − ს.



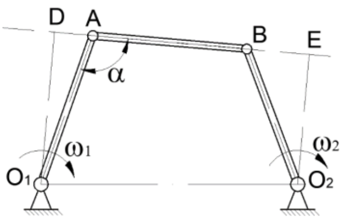
ამოხსნა

ნახაზზე ნაჩვენებია AB ღეროს სიჩქარეთა მყისი ცენტრის პოვნა და M წერტილის აგება.

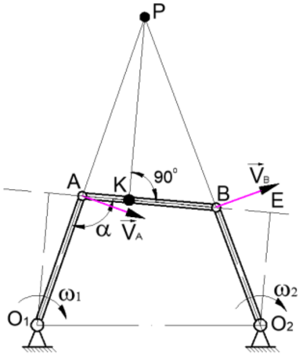
$$V_A = a\omega, V_M = V_A sin(180° - \alpha) = V_A sin\alpha,\ V_M = a\omega sin\alpha.$$

პასუხი: $V_M = a\omega sin\alpha$.

ამოცანა 16.20.



სახსრებიანი ოთხრგოლა მექანიზმის O_1A ღეროს კუთხური სიჩქარეა ω_1. O_2B ღეროს კუთხური სიჩქარე ω_2 გამოსახეთ ω_1 კუთხური სიჩქარით და O_1 და O_2 ღერძებიდან AB წრფემდე უმოკლესი მანძილებით: O_1D და O_2E.



ამოხსნა

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A,\ \ V_B = \omega_2.O_2B.$$

მეორე მხრივ, რადგან P წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$V_A = \omega_{AB} \cdot AP,\ \ V_B = \omega_{AB} \cdot BP.$$

აქედან გვაქვთ

$$\omega_1 \cdot O_1A = \omega_{AB} \cdot AP;\ \ \omega_2.O_2B = \omega_{AB} \cdot BP.$$

შევაფარდოთ ეს ტოლობები ერთმანეთს და გვექნება:

$$\frac{\omega_1 \cdot O_1A}{\omega_2.O_2B} = \frac{\omega_{AB} \cdot AP}{\omega_{AB} \cdot BP},\ \rightarrow\ \omega_2 = \omega_1 \frac{O_1A}{AP} \cdot \frac{PB}{O_2B}.$$

ADO_1 და APK სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს

$$\frac{O_1A}{AP} = \frac{O_1D}{PK}.$$

ანალოგიურად, EBO_2 და PKB სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს

$$\frac{PB}{O_2B} = \frac{PK}{O_2E}.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

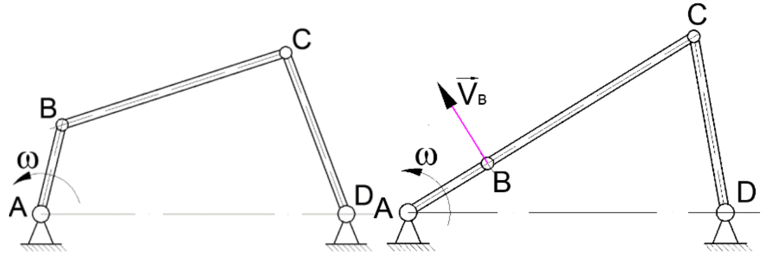
D

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{O_1 D}{O_2 E}.$$

პასუხი: $\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{O_1 D}{O_2 E}$.

ამოცანა 16.21

ოთხრგოლიან ABCD მექანიზმში წამყვანი მრუდმხარა AB ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega_0 = 6\pi$ რად/წმ. იპოვეთ CD მრუდმხარასა და AB ღეროს კუთხური სიჩქარეები იმ მომენტში, როცა მრუდმხარა AB და ღერო BC მდებარეობენ ერთ წრფეზე. BC=3AB.



ამოხსნა

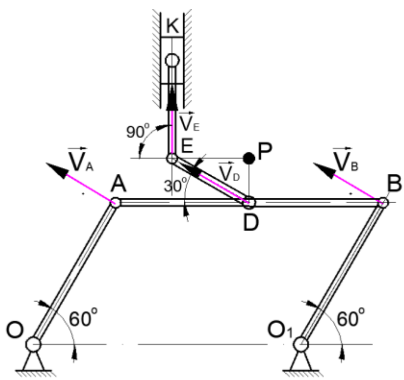
$$V_B = \omega_0 AB = \omega_{AB} \cdot 3AB \ \rightarrow \omega_{AB} \ = \frac{\omega_0}{3} = 2\pi$$

რადგან სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს C წერტილში, ამიტომ $V_c = 0, \omega_{CD} = 0$.

პასუხი: $\omega_{AB} \ = 2\pi$ რად/წმ; $\omega_{CD} = 0$.

ამოცანა 16.22

სახსრული პარალელოგრამის AB ძელის შუა D წერტილში სახსრითაა მიერთებული DE ღერო, რომელსაც მოძრაობაში მოჰყავს K ცოცია. განსაზღვრეთ K ცოციას სიჩქარე და DE ღეროს კუთხური სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენებ მდგომარეობაში. თუ OA=O₁B=2DE=20 სმ, ხოლო OA რგოლის კუთხური სიჩქარე მოცემულ მომენტში არის $\omega = 1$ რად/წმ.



ამოხსნა

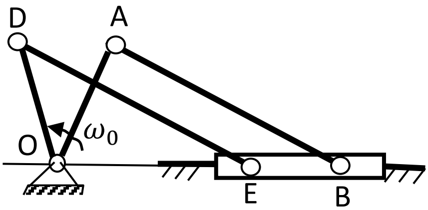
1) ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე: $V_A = \mathrm{OA} \cdot \omega$. რადგან V_A=V_D, ამიტომ $V_D = \mathrm{OA} \cdot \omega$. სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემის ძალით გვაქვს $V_E sin30° = V_D \ \rightarrow V_E = 2\, OA \cdot \omega = 40$ სმ/წმ. $V_K = V_E = 40$ სმ/წმ

2) ავაგოთ ED რგოლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

$$V_D = \omega_{DE} \cdot DE \cdot tg30°, \rightarrow \omega_{DE} = \frac{V_D}{DE \cdot tg30°} = \omega_1 \frac{OA}{DE \cdot tg30°} \approx 3{,}46 \text{ რად/წმ.}$$

პასუხი: $V_K = 40$ სმ/წმ ; $\omega_{DE} = 3{,}46$ რად/წმ.

ამოცანა 16.23

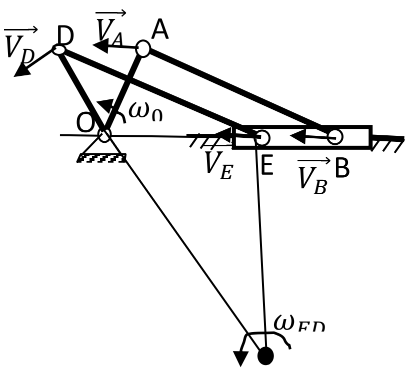


შეწყვილებული მრუდ-მხარა-ცოცია მექანიზმის B და E ცოციები შეერთებულია BE ღეროს საშუალებით. წამყვანი მრუდმხარა OA და მიმყოლი მრუდმხარა OD ბრუნავენ საერთო O ღერძის გარშემო. განსაზღვრეთ წამყვანი OD მრუდმხარისა და DE ბარბაცას მყისი კუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა წამყვანი მრუდმხარა OA, რომლის კუთხური სიჩქარეა $\omega_0 = 12 \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}$, ცოციების მიმმართველის მართობულია. მოცემულია: OA=10 სმ, AB=26სმ, EB=12 სმ, DE=$12\sqrt{3}$ სმ, OD=12 სმ.

ამოხსნა

ვიპოვოთ მანძილი:

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 24 \text{ სმ. } OE = OB - EB = 12 \text{ სმ.}$$



კოსინუსების თეორემიდან ვიპოვით

$$DE^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OE}^2 - 2 \cdot \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OE} \cos(180° - \alpha) = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OE}^2 + 2 \cdot \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OE} \cos \alpha.$$

აქედან

$$cos\alpha = \frac{DE^2 - (\mathrm{OD}^2 + \mathrm{OE}^2)}{2 \cdot \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OE}} = \frac{1}{2}, PE = OE \cdot tg60° = 12\sqrt{3}.$$

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = \omega_0 OA = 120\frac{სმ}{წმ}$$

ვიპოვოთ DE რგოლის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_{DE} = \frac{V_E}{PE} = \frac{120}{12\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

$$OP = \frac{OE}{cos60°} = 24\ სმ. DP = DO + OP = 36\ სმ.$$

ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე:

$$V_D = \omega_{DE} \cdot DP = 120\sqrt{3}\ სმ/წმ.$$

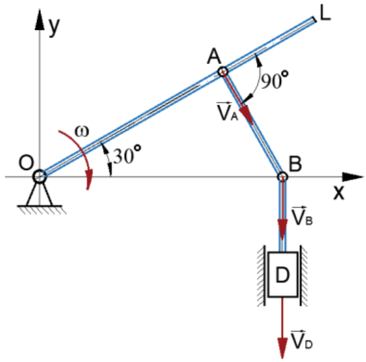
ვიპოვოთ OD რგოლის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_{OD} = \frac{V_D}{OD} = 10\sqrt{3}\ რად/წმ.$$

პასუხი: $\omega_{DE} = \frac{10\sqrt{3}}{3}. \omega_{OD} = 10\sqrt{3}$ რად/წმ.

ამოცანა 16.24.

ჰიდრავლიკური წნეხის D დგუში მოძრაობაში მოდის OABD სახსრულ- ბერკეტული მექანიზმის საშუალებით. ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში OL ბერკეტს აქვს კუთხური სიჩქარე $\omega = 2წმ^{-1}$. განსაზღვრეთ D დგუშის სიჩქარე და AB რგოლის კუთხური სიჩქარე, თუ OA=15 სმ.



ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე

$$V_A = OA \cdot \omega = 15 \cdot 2 = 30\frac{სმ}{წმ}$$

სიჩქარეთა გეგმილების თეორემის ძალით

$$V_B cos30° = V_A. \rightarrow\ V_B = V_D = \frac{V_A}{cos30°} = 34{,}6\frac{მ}{წმ}$$

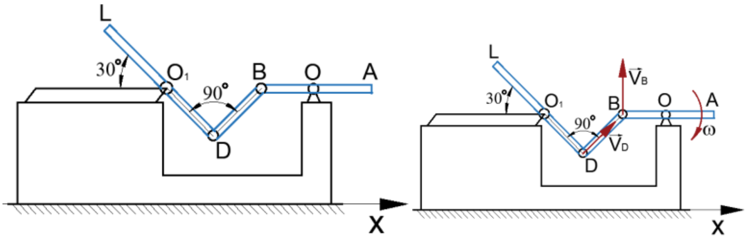
რადგან O წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$V_A = \omega_{AB} \cdot OA\ \rightarrow\ \omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = 2\ წმ^{-1}.$$

პასუხი: $V_D = 34{,}6\frac{მ}{წმ}.; \omega_{AB} = 2\ წმ^{-1}.$

ამოცანა 16.25

ლითონის საჭრელი მაკრატლის L საჭრისი მოძრაობაში მოდის AOBD სახსრულ-ბერკეტული მექანიზმის საშუალებით. იპოვეთ D სახსრის სიჩქარე და BD რგოლის კუთხური სიჩქარე, თუ ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში AB ბერკეტის კუთხური სიჩქარეა 2 წმ$^{-1}$. OB=5 სმ, O_1D=10 სმ.



ამოხსნა

ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე

$$V_B = \omega \cdot BO = 2 \cdot 5 = 10\,\frac{სმ}{წმ}.$$

შემდეგ ვიპოვით :

$$V_D = V_B \cos 30° = 8{,}66\,\text{სმ/წმ}.$$

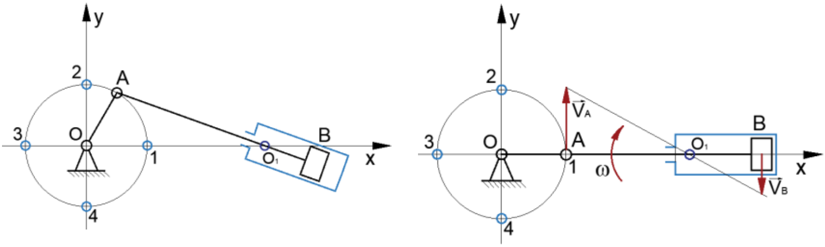
რადგან O წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$V_D = O_1D \cdot \omega_{DB} \;\rightarrow\; \omega_{DB} = \frac{V_D}{O_1D} = 0{,}87\,წმ^{-1}\,.$$

პასუხი: V_D =სმ/წმ. $\omega_{DB} = 0{,}87\,წმ^{-1}$.

ამოცანა 12.26

მბრუნავ ცილინდრიან მექანიზმში მრუდმხარა OA=12 სმ/წმ. მანძილი ლილვის ღერძსა და ცილინდრის ბრუნვის ღერძს შორის $OO_1 = 60\ \text{სმ}$. ბარბაცას სიგრძე AB=60 სმ. იპოვეთ დგუშის სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენებ მრუდმხარას ოთხ მდებარეობაში, თუ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე $\omega = 5\,\text{წმ}^{-1}$=const.



ამოხსნა

მექანიზმის შესაბამისი მდებარეობები. პირველ ბდებარეობაში გვაქვს:

$$V_A = \omega \cdot OA = 12 \cdot 5 = 60 \text{ სმ/წმ}.$$

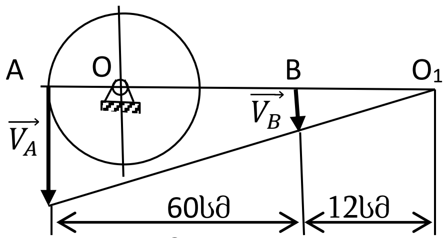
რადგან AB ბარბაცა ბრუნავს O_1 ღერძის გარშემო, ამიტომ

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AO_1} = \frac{60}{48} = 1{,}25\text{რად/წმ} .$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot O_1B = 1{,}25 \cdot 12 = 15 \text{ სმ/წმ}.$$

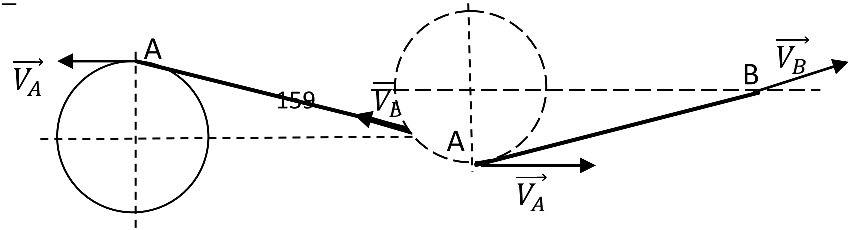
განვიხილოთ მესამე მდებარეობა. ამ შემთხვევაში ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\frac{V_A}{72} = \frac{V_B}{12} \rightarrow V_B = \frac{V_A}{6} = 10 \text{ სმ/წმ}.$$



მეორე და მეოთხე მდებარეობაში დგუშის სიჩქარე ერთიდაიგივეა დგუშის სიჩქარე მიმართულია AB ღეროს გასაწვრივ და სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემით ვპოულობთ მის სიჩქარეს:

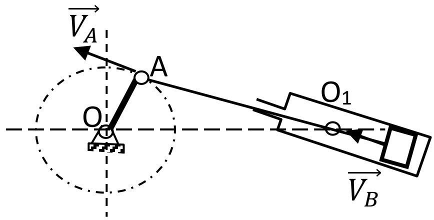
$V_B = V_A cos\alpha =$



58,9სმ/წმ.

პასუხი: $V_I = \frac{15სმ}{წმ}. V_{III} = 10\ \frac{სმ}{წმ}.\ \ V_{II} = V_{IV} = 58{,}9$ სმ/წმ.

ამოცანა 16.27



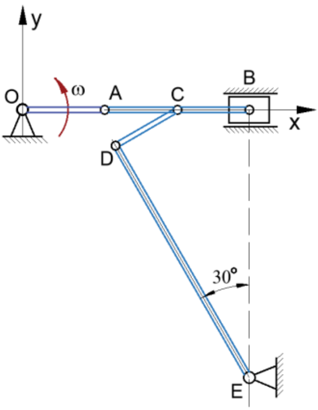
მოძრავცილინდრიან მექანიზმში მრუდმხარას სიგრძე OA=15 სმ. მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = 15 წმ^{-1}$.იპოვეთ დგუშის სიჩქარე და ცილინდრის კუთხური სიჩქარე, როცა მრუდმხარა ბარბაცას მართობულია.

ამოხსნა

ნახაზიდან ჩანს, რომ ბარბაცა მოცემულ მომენტში ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

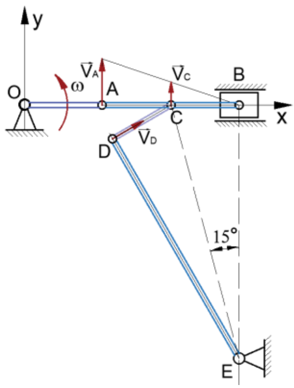
$$\vec{V}_A = \vec{V}_{O1} = \vec{V}_B = OA \cdot \omega_0 = 225 \text{ სმ/წმ}, \ \omega = 0 .$$

პასუხი: $\vec{V}_B = 225$ სმ/წმ; $\omega = 0$.



ამოცანა 16. 28

მრუდმხარა მექანიზმი შუა C წერტილით სახსრითაა შეერთებული CD ძელთან, ხოლო ეს უკანასკნელი შეერთებულია DE ძელთან, რომელიც ბრუნავს E ღერძის გარშემო. განსაზღვრეთ DE ძელის კუთხური სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში, თუ B და E წერტილები ერთ ვერტიკალზეა. მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა 8 რად/წმ. მოცემულია: OA=25 სმ , DE=100 სმ , $\angle CDE = 90°, \angle BED = 30°$.



ამოხსნა

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$V_A = OA \cdot \omega = 200 \text{ სმ/წმ}.$$

რადგან P წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$V_C = \frac{V_A}{2} = 100 \text{ სმ/წმ}.$$

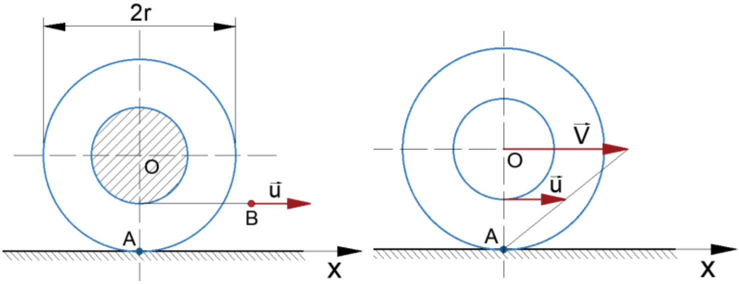
სიჩქარეთა გეგმილების თეორემის გამოყენებით გვაქვს

$$V_D = V_C sin30^\circ = 50 \text{ სმ/წმ}, \ \omega_{DE} = \frac{V_D}{ED} = 0{,}5 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_{DE} = 0{,}5$ რად/წმ.

ამოცანა 16.29

R რადიუსიანი კოჭა მიგორავს უსრიალოდ ჰორიზონტალური HH სიბრტყის პარალელურად. კოჭას შუა ცილინდრულ ნაწილზე, რომლის რადიუსია r დახვეულია ძაფი, რომლის ბოლო B წერტილს აქვს U სიჩქარე, რომელიც ჰორიზონტალურადაა მიმართული. იპოვეს კოჭას ცენრტის V სიჩქარე.



ამოხსნა

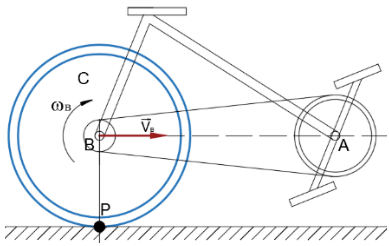
სიჩქარეთა მყისი ცენტრია P წერტილი, ამიტომ

$$V_A = \omega \cdot (R - r) = U, \rightarrow \ \omega = \frac{U}{R-r};$$

$$V = \omega R = \frac{U}{R-r} \cdot R = U \frac{R}{R-r}.$$

პასუხი: $V = U \frac{R}{R-r}$.

ამოცანა 16.30



ველოსიპედის ჯაჭვური გადაცემა შედგება ჯაჭვისაგან, რომელიც შემოვლებილია A კბილა თვალზე, რომლის კბილთა რიცხვია 26 და B კბილანაზე, რომელსაც აქვს 9 კბილი. კბილანა უძრავადაა შეერთებული უკანა ბორბალთან, რომლის დიამეტ-

რია 70 სმ. იპოვეთ ველოსიპედის სიჩქარე, როცა A ბორბალი წამში აკეთებს ერთ ბრუნს. C ბორბალი მიგორავს უსრიალოდ.

ამოხსნა

აღვნიშნოთ კბილთა რიცხვი, შესაბამისად, Z_A, Z_B , მაშინ

$$\omega_A Z_A = \omega_B Z_B, \omega_B = \frac{V}{d/2} = \frac{2V}{d}.$$

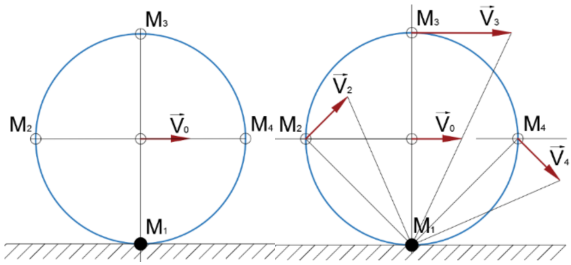
სადაც d ბორბლის დიამეტრია;

$$\omega_A Z_A = \frac{2V}{d} Z_B, \rightarrow \ V = \frac{\omega_A Z_A d}{2Z_B} = 6{,}353 \frac{\textit{მ}}{\textit{წმ}} = \frac{3600}{1000} \cdot 6{,}353 = 22{,}87 \textit{კმ/სთ.}$$

პასუხი: $V = 22{,}87$ *კმ/სთ.*

ამოცანა 16.31

R=0,5 მ რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს გზის ჰორიზონტალურ მონაკვეთზე. მისი ცენტრის სიჩქარეა $V_0 = 10$ მ/წმ. იპოვეთ ვერტიკალური და ჰორიზონტადური დიამეტრების ბოლო M_1 , M_2, M_3, M_4 წერტილების სიჩქარეები და ბორბლის კუთხური სიჩქარე.



ამოხსნა

ნახაზზე ნაცვენებია სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამიტომ $V_1 = 0$. ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{V_0}{R} = 20 \textit{ წმ}^{-1}.$$

გამოვთვალოთ M_2, M_3 და M_4 წერტილების სიჩქარეები:

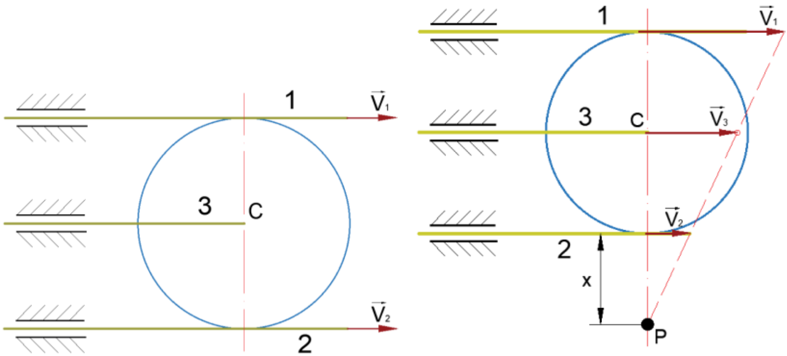
$$V_2 = \omega \cdot PM_2 = \frac{V_0}{R} \cdot R\sqrt{2} = V_0\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ მ/წმ}.$$

$$V_4 = V_2 = 14{,}14 \text{ მ/წმ}; V_3 = 2V_0 = 20 \text{ მ/წმ}$$

პასუხი: $V_1 = 0$; $V_4 = V_2 = 14{,}14$ მ/წმ; $V_3 = 20$ მ/წმ .

ამოცანა 16.32

ნახაზზე ნაჩვენებია შემკრები მექანიზმი. ორი პარალელური ლარტყა მოძრაობს ერთ მხარეს V_1 და V_2 სიჩქარეებით. ლარტყებს შორის მოთავსებულია r რადიუსიანი დისკო, რომელიც უსრიალოდ გორავს ლარტყებზე. აჩვენეთ, რომ შუა ლარტყის სიჩქარე უდრის 1 და 2 ლარტყების სიჩქარეების საშუალო არითმეტიკულს. იპოვეთ, აგრეთვე დისკოს კუთხური სიჩქარე.



ამოხსნა

ავაგოთ დისკოს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. $V_1 = \omega(2r + x), V_2 = \omega x$.

ქედან

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2r+x}{x} \to x = 2r \cdot \frac{V_2}{V_1 - V_2}.$$

$$\omega = \frac{V_2}{x} = \frac{V_1 - V_2}{2r}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

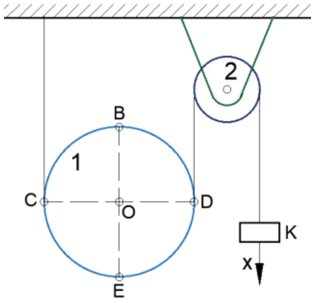
$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

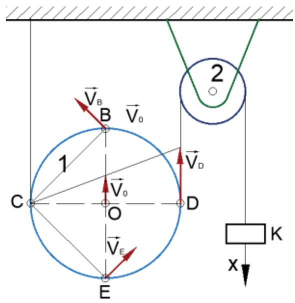
პასუხი: $\omega = \frac{V_1 - V_2}{2r}$.

ამოცანა 16.33

მოძრავი ბლოკი 1 და უძრავი ბლოკი 2 შეერთებულია უჭიმვადი თოკით.ამ თოკის ბოლოზე მიმაგრებული K ტვირთი ეშვება დაბლა კანონით: $x = 2t^2$ მ. იპოვეთ იმ C, D, B და E წერტილების სიჩქარეები,

რომლებსაც t=1 წმ მომენტისთვის უკავიათ ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობა. მოძრავი ბლოკის რადიუსია 0,2 მ, ხოლო $CD \perp BE$. იპოვეთ ასევე 1 ბლოკის კუთხური სიჩქარე.





ამოხსნა

ვიპოვოთ K წერტილის სიჩქარე :

$$V_K = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2) = 4t. V_K(1) = 4 \text{ მ/წმ}. V_D = V_K = 4 \text{ მ/წმ}.$$

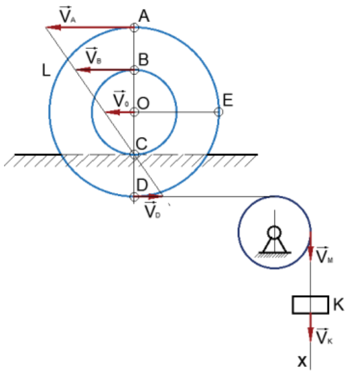
სიჩქარეთა მყისი ცენტრი არის C წერტილი, ამიტომ

$$V_0 = \frac{V_D}{2} = 4\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}. \omega = \frac{V_0}{r} = 10 \text{ წმ}^{-1}.$$

გამოვთვალოთ B და E წერტილების სიჩქარეები:

$$V_B = V_D = \omega \cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_C = 0$; $V_B = V_D = 2\sqrt{2}$ მ/წმ. $V_0 = 4$ მ/წმ. $\omega = 10$ რად/წმ.



ამოცანა 16.34

K ტვირთი, რომელიც უჭიმვადი თოკით არის დაკავშირებული L კოჭასთან, მოძრაობს კანონით $x = t^2$ მ. ამავე დროს კოჭა უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტალურ რელსებზე. იპოვეთ A, B, C , O და E წერტილების სიჩქარეები t=1 წმ მომენტისათვის ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში. იპოვეთ აგრეთვე კოჭას კუთხური სიჩქარე, თუ $AO \perp OE$,

$OD = 2OC = 0,2$ მ.

ამოხსნა

$\text{OD} = 0{,}2$ მ, $OC = 0{,}1$ მ, CD=OD-OC=0,1 მ. $CE = \sqrt{OC^2 + OE^2} = 0{,}224$ მ.

ვიპოვოთ სიჩქარეები

$V_K = \frac{dx}{dt} = 2t$. როცა t=1 , მაშინ $V_K = 2$ მ/წმ. $V_D = V_K = 2$ მ/წმ.

კოჭას კუთხური სიჩქარეა

$$\omega = \frac{V_D}{CD} = \frac{2}{0{,}1} = 20 \text{ რად/წმ}. \; V_C = 0.$$

ვიპოვოთ წერტილების სიჩქარეები

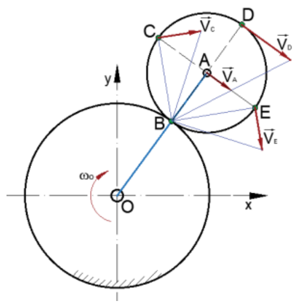
$$V_O = \omega \cdot OC = 2 \text{ მ/წმ}, V_B = \omega \cdot CB = 4 \text{ მ/წმ}.$$

$$V_A = \omega \cdot CA = 6 \text{ მ/წმ}. \; V_E = \omega \cdot CE = 4{,}47 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_C = 0$; $V_O = 2$ მ/წმ, $V_B = 4$ მ/წმ. $V_A = 6$ მ/წმ. $V_E = 4{,}47$ მ/წმ.

ამოცანა 16.35

OA მრუდმხარა ბრუნავს უძრავი, $r_2 = 15$ სმ რადიუსიანი ბორბლის O ღერძის გარშემო $\omega_0 = 2{,}5$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და მოძრაობაში მოჰყავ მის მეორე ბოლოზე დასმული კბილანა , რომლის რადიუსი r_1=5 სმ. განსაზღვრეთ მოძრავი კბილანას A, B, C , D და E წერტილების სიჩქარეების სიდიდე და მიმართულება, თუ $CE \perp BD$.



ამოხსნა

1) ვიპოვოთ მრუდმხარას A წერტილის სიჩქარე:

$$\text{V}_\text{A} = \omega_0(r_1 + r_2) = 50 \text{ სმ/წმ}.$$

2) ვიპოვოთ კბილანას კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_A = \frac{V_A}{r_1} = 10 \text{ რად/წმ}.$$

3) რადგან B წერტილი სიჩქარეთა მყისი ცენტრია, ამიტომ

$$V_B = 0.$$

4) ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე:

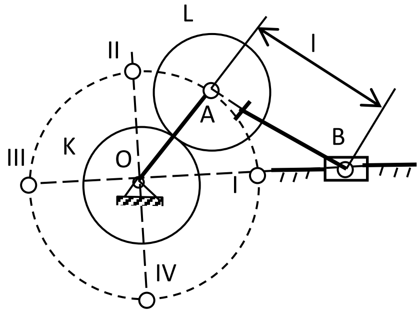
$$V_D = \omega_A \cdot PD = 100 \text{ სმ/წმ}.$$

5) ვიპოვოთ C და E წერტილების სიჩქარეები:

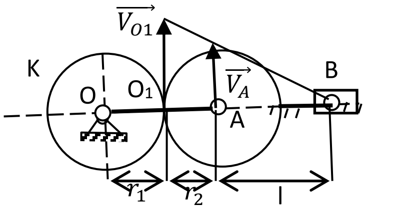
$$V_c = V_E = \omega_A PE = 70{,}7 \text{ სმ/წმ}.$$

პასუხი: $\text{V}_\text{A} = 50$ სმ/წ. $V_B = 0$; $V_D = 100$ სმ/წმ. $V_c = V_E = 70{,}7$ სმ/წმ.

ამოცანა 16.36



O ღერძზე დასმულია K კბილა თვალი, რომლის დია-მეტრია 20 სმ, და 20 სმ სიგრძის OA მრუდმხარა. AB ბარბაცაზე ხისტად არის დამაგრებული L კბილა თვალი, რომლის სიგრძეც 20 სმ-ია. AB ბარბაცას სიგრძეა 1 მეტრი. K ბორბალი ბრუნავს თანაბრად 2π რად/წმ კუთხური სიჩქარით, მოდებაშია L კბი-ლანასთან და მოძრაობაში მოჰყავს AB ბარბაცა და OA მრუდმხარა. იპოვე მრუდმხარას ω_{OA} კუთხური სიჩქარე მის ოთხ მდებარეობაში: ორი ჰორიზონტალური და ორი ვერტიკალური მდებარეობა.



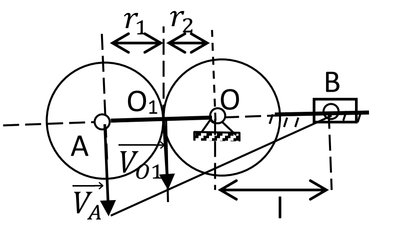
ამოხსნა

1) $V_{O1} = \omega_0 r_1$, მეორე მხრივ $V_{O1} = \omega_2(r_2 + l)$; აქედან

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{r_1}{r_2+l} = 2\pi \cdot \frac{10}{10+100} = \frac{2\pi}{11}.$$

$$V_A = l\omega_2;\ \omega_{OA} = \frac{V_A}{2r_1} = \frac{10\pi}{11}$$

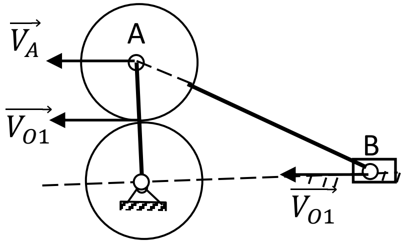
რად/წმ.



2) ნახზიდან გვაქვს:

$$\frac{V_A}{V_{O1}} = \frac{l}{l - r_1};\ \rightarrow\ V_A = V_{O1}\frac{l}{l - r_1}.$$

$$2r_1\omega_{OA} = V_{O1}\frac{l}{l-r_1}, \rightarrow\ \omega_{OA} = \frac{V_{O1}}{2r_1}\frac{l}{l-r_1} = \frac{10\pi}{9}$$ რად/წმ.



3) რადგან რგოლი ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

$$V_A = V_B = V_{O1}$$

რადგან $V_{O1} = \omega_0 r_1$ და $V_A = 2r_1\omega_{OA}$, ამიტომ

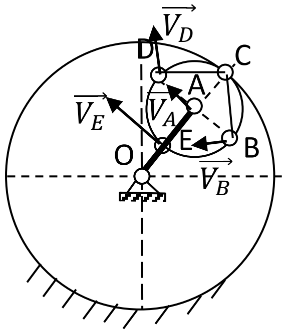
$$2r_1\omega_{OA,} = \omega_0 r_1, \rightarrow\ \omega_{OA} = \frac{\omega_0}{2} = \pi$$

რად/წმ.

მეოთხე მდებარეობაში $\omega_{OA} = \pi$რად/წმ.

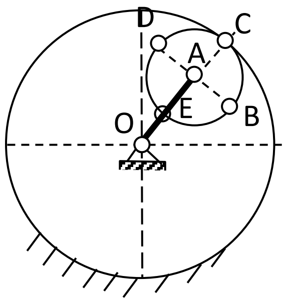
პასუხი: 1) $\omega_{OA} = \frac{10\pi}{11}$ რად/წმ. 2) $\omega_{OA} = \pi$რად/წმ; 3) $\omega_{OA} = \frac{10\pi}{9}$ რად/წმ. 4) $\omega_{OA} = \pi$რად/წმ.

ამოცანა 16.37



მრუდმხარა OA=20 სმ ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემოკუთხური სიჩქარით 2 რად/წმ. მის მეორე ბოლოზე დასმულია კბილანა 2 ,რომლის რადიუსია 10 სმ. ეს კბილანა შიგა მოდებაშია 1 უძრავ კბილანასთან. იპოვეთ 2 კბილანას წერტილების (B, C,D,E) სიჩქარე, თუ BD ⊥ OC.

ამოხსნა



სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ნაჩვენებია ნახაზზე (წერტილი C).

1) ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე :

$$V_A = r_1\omega_0 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ სმ/წმ.}$$

2) ვიპოვოთ მოძრავი ბორბლის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{V_A}{r_2} = \frac{40}{10} = 4 \text{ რად/წმ.}$$

3) ვიპოვოთ E წერტილის სიჩქარე

$$V_E = 2r_2\omega = 2V_A = 80 \text{ სმ/წმ.}$$

4) C წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, რადგან ის არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

5) ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე.

$$V_B = \omega \cdot CB = 40\sqrt{2} \text{ სმ/წმ.}$$

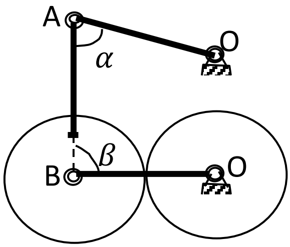
6) ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე

$$V_D = \omega \cdot CD = \omega \cdot r_2\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \text{ სმ/წმ.}$$

პასუხი: $V_C = 0, V_B = V_D = 40\sqrt{2}$ სმ/წმ, $V_E = 80$ სმ/წმ.

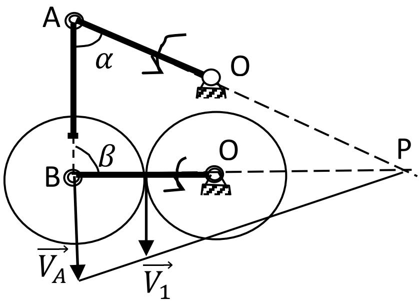
ამოცანა 16. 38

უატის მექანიზმი შედგება O_1A უღლისაგან, რომელიც ნახაზის სიბრტყის მართობული O_1 ღერძის გარშემო და AB ბარბაცას საშუალებით მოძრაობაში მოჰყავს OB მრუდმხარა, რომელიც თავისუფლად ბრუნავს O ღერძის გარშემო. იმავე O ღერძზე დასმულია I კბილანა. AB ბარბაცაზე ხისტად არის დამაგრებული ბორბალი. იპოვეთ OB მრუდმხარას და I კბილანას კუთხური სიჩქარეები იმ მომენტში,



როცა $\alpha = 60°, \beta = 90°$. $r_1 = r_1 = 30\sqrt{3}$ სმ, OA=75 სმ, AB=150 სმ, უღლის კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = 6$ რად/წმ.

ამოხსნა



ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე: $V_A = \omega_0 \cdot OA = 450$ სმ/წმ.

სიჩქარეთა გეგმილების თეორემით ვწერთ:

$$V_A cos30° = V_B,$$

მეორე მხრივ

$$V_B = \omega_{OB} \cdot 2r_1.$$

თ გავითვალისწინებთ წინა ტოლობას გვექნება:

$$\omega_{OB} \cdot 2r_1 = V_A cos30° \rightarrow \omega_{OB} = \frac{V_A cos30°}{2r_1} = 3{,}75$$

APB სამკუთხედიდან გვაქვს PB=AB tg60^0. ჩავწეროთ პროპორცია:

$$\frac{V_B}{PB} = \frac{V_1}{PB - r_1}, \rightarrow V_1 = V_B\left(1 - \frac{r_1}{PB}\right),$$

მეორე მხრივ

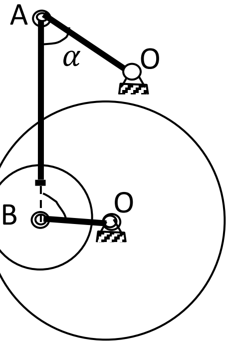
$$V_1 = \omega_1 r_1.$$

აქედან

$$\omega_1 r_1 = V_B\left(1 - \frac{r_1}{PB}\right), \rightarrow \omega_1 = \frac{V_B}{r_1}\cdot\left(1 - \frac{r_1}{PB}\right) = \frac{\omega_{OB}\cdot 2r_1}{r_1}\left(1 - \frac{r_1}{PB}\right) = 6 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_{OB} = 3{,}75\,\frac{\text{რად}}{\text{წმ}}.\ \omega_1 = 6\,\frac{\text{რად}}{\text{წმ}}.$

ამოცანა 16.39



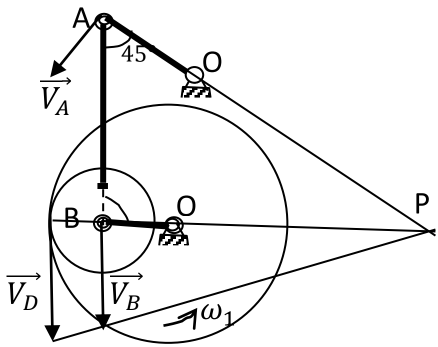
პლანეტარული მექანიზმი შედგება O1A მრუდმხარასაგან, რომელსაც მოძრაობაში მოჰყავს AB ბარბაცა, OB უღელი და $r_1 = 25$ სმ რადიუსიანი კბილანა I. AB ბარბაცა მთავრდება მასზე ხისტად დამაგრებული II კბილანით, რომლის რადიუსია $r_2 = 10$ სმ. იპოვეთ O_1A მრუდმხარას და I კბილანას კუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა $\alpha = 45°, \beta = 90°$. მოცემულია: $O_1A = 30\sqrt{2}$ *სმ,* AB=150 სმ, OB უღელის კუთხური სიჩქარე $\omega = 8$ რად/წმ.

ამოხსნა

1) ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე:

$$V_B = \omega \cdot OB = \omega(r_1 - r_2) = 120 \text{ სმ/წმ}.$$

2) ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე. რადგან P წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ



$$\frac{V_D}{r_2 + l} = \frac{V_B}{l}, \rightarrow \ V_D = V_B \frac{r_2 + l}{l}.$$

მეორე მხრივ $V_D = \omega_1 r_1$,

ამიტომ

$$\omega_1 r_1 = V_B \frac{r_2+l}{l} \ \rightarrow \ \omega_1 = \frac{V_B}{r_1} \cdot \frac{r_2+l}{l} = 5{,}12 \text{ რად/წმ} .$$

სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემით გვაქვს:

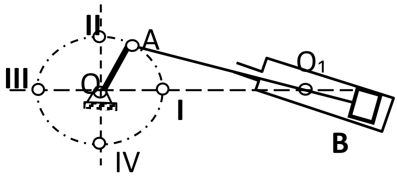
$$V_B = V_A cos45° \ \rightarrow \ V_A = \frac{V_B}{cos45°}.$$

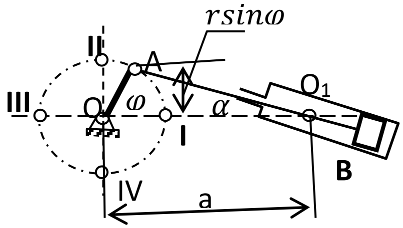
მეორე მხრივ $V_A = \omega_{O1A} \cdot O_1A$, *ამიტომ*

$$\omega_{O1A} \cdot O_1A = \frac{V_B}{cos45°} \ \rightarrow \ \omega_{O1A} = \frac{V_A}{O_1Acos45°} = 4 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_{O1A} = 4$ რად/წმ. $\omega_1 = 5{,}12$ რად/წმ.

ამოცანა 16.40





მოძრავცილინდრიან მანქანაში მრუდმხარა OA=r და მანძილი OO_1 =a. მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_0. განსაზღვრეთ AB ბარბაცას კუთხური სიჩქარე ω_1 , როგორც მრუდმხარას მობრუნების კუთხის ფუნქცია. იპოვეთ მისი უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები და მრუდმხარას მობრუნების კუთხის ის მნიშვნელობა, როცა კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლია.

ამოხსნა

ნახაზიდან გვაქვს

$$tg\beta = \frac{rsin\varphi}{a-rcos\varphi}.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა დროით და გვექნება

$$\frac{d}{dt}(tg\beta) = \frac{d}{dr}\left(\frac{rsin\varphi}{a-rcos\varphi}\right).$$

$$\frac{1}{cos^2\beta}\cdot\dot{\beta} = \frac{r\cdot\dot{\varphi}cos\varphi(a-rcos\varphi)-r^2sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}}{(a-rcos\varphi)^2}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$, მივიღებთ

$$\frac{1}{cos^2\beta}\cdot\dot{\beta} = \dot{\varphi}\frac{r(acos\varphi-r)}{(a-rcos\varphi)^2}, \qquad (1)$$

გამოვსახოთ $cos^2\beta$ კუთხე φ -ს საშუალებით. ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$cos^2\beta = \frac{1}{1-tg^2\beta}$$

მივიღებთ

$$cos^2\beta = \frac{1}{1+\frac{r^2sin^2\varphi}{(a-rcos\varphi)^2}} = \frac{(a-rcos\varphi)^2}{a^2+r^2-2arcos\varphi} \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\dot{\beta} = \dot{\varphi}\frac{r(acos\varphi-r)}{(a-rcos\varphi)^2}\cdot\frac{(a-rcos\varphi)^2}{a^2+r^2-2arcos\varphi} = \dot{\varphi}\,\frac{r(acos\varphi-r)}{a^2+r^2-2arcos\varphi}.$$

რადგან $\dot{\beta} = \omega_{1,}\ \dot{\varphi} = \omega_0$ ა მიტომ

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{r(acos\varphi - r)}{a^2+r^2-2arcos\varphi}.$$

ცხადია $\omega_1 = 0$, როცა $(acos\varphi - r) = 0$, აქედან $\varphi = arccos\frac{r}{a}$.

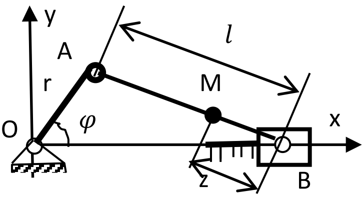
$$\text{როცა } \varphi = 0 \text{ მაშინ } \omega_{max} = \frac{\omega_0 r}{a-r}.$$

$$\text{როცა } \varphi = \pi \text{ მაშინ } \omega_{min} = \frac{\omega_0 r}{a+r}.$$

პასუხი: $\omega_1 = \omega_0 \frac{r(acos\varphi - r)}{a^2+r^2-2arcos\varphi}$. $\omega_{max} = \frac{\omega_0 r}{a-r}$. $\omega_{min} = \frac{\omega_0 r}{a+r}$.

ამოცანა 16.41

იპოვეთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის AB ბარბაცას ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარის გეგმილების მიახლოებითი მნიშვნელობები, როცა ლილვი ბრუნავს თანაბრად ω კუთხური სიჩქარით. დავუშვათ, რომ მრუდმხარას სიგრძე r გაცილებით ნაკლებია ბარბაცას l სიგრძეზე. წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება მანძილით MB=z .



ამოხსნა

ჩავწეროთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$\begin{cases} x_M = rcos\varphi + (l-z)cos\beta \\ y_M = zsin\beta \end{cases}$$

გარდა ამისა, გვაქვს თანაფარდობა

$$sin\beta = \frac{r}{l}sin\varphi, \rightarrow cos\beta = \sqrt{1-sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}sin^2\varphi}.$$

$$\begin{cases} x_M = rcos\varphi + (l-z)\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}sin^2\varphi}. \\ y_M = z\frac{r}{l}sin\varphi \end{cases}$$

ფესვიანი გამოსახულება გავშალოთ მწკრივად და შევინარჩუნოთ პირველი ორი წევრი და მივიღებთ:

$$\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 sin^2\varphi.$$

მოძრაობის განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} x_M = rcos\varphi + (l - z)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 sin^2\varphi\right] \\ y_M = z\frac{r}{l}sin\varphi \end{cases}.$$

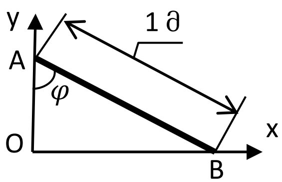
გაზადიფერენციროთ ეს განტოლებები და მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = -\omega\left[rsin\varphi + \frac{l - z}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 sin2\varphi\right] \\ \dot{y}_M = \frac{zr}{l}\omega cos\varphi. \end{cases}$$

პასუხი: $\dot{x}_M = -\omega\left[rsin\varphi + \frac{l-z}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 sin2\varphi\right]$; $\dot{y}_M = \frac{zr}{l}\omega cos\varphi.$

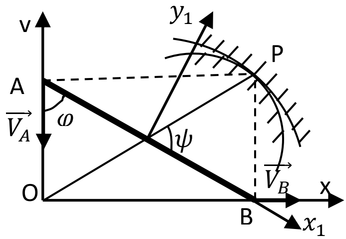
17. მოძრავი და უძრავი ცენტროიდები.

ამოცანა 17.1



AB ღერო მოძრაობს ისე, რომ მისი ბოლოები სრიალებენ ორი ურთიერთ-მართობული ox და oy წრფის გასწვრივ. იპოვეთ ცენტროიდები, თუ AB= 1 მ .

ამოხსნა



სიჩქარეთა მყისი ცენტრი P მდე-ბარეობს ღეროს A და B ბოლოებიდან ox და oy ღერძების მართებების გადაკვეთის წერტილში. უძრავი ცენ-ტროიდის განტოლებას მივიღებთ, თუ ვიპოვით P წერტილის მოძრაიბის განტოლებებს უძრავ oxy სისტემაში. შმოვიღოთ აღნიშვნა: $\angle AOP = \angle OAB = \varphi$. მაშინ P წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$\begin{cases} x = OB = ABsin\varphi \\ y = OA = ABcos\varphi\ . \end{cases}$$

თ გამოვრიცხავთ ამ განტოლებებიდან φ კუთხეს და გავითვალისწინებთ, რომ AB=1 მ, მივღებთ $x^2 + y^2 = 1$. ეს განტოლება წარმოადგენს წრეწირის განტოლებას, რომლის რადიუსი 1 მეტრის ტოლია. მოძრავი ცენტროიდის საპოვნელად უნდა ვიპოვოთ სიჩქარეთა

მყისი ცენტრის კოორდინატებს მოძრავ სისტემაში, რომელიც უძრავად არის დაკავშირებული AB ღეროსთან. ვთქვათ, C წერტილი, რომელიც ღეროს შუა წერტილია, არის სისტემის სათავე, ხოლო ox1 ღერძი მიმართულია AB ღეროს გასწვრივ და oy1 მის მართობულად. თუ აღვნიშნავთ $\psi = \angle BCP$, მაშინ P წერტილის კოორდინატები ამ სისტემაში იქნება:

$$\begin{cases} x_1 = CPcos\varphi = \frac{AB}{2}cos\psi \\ y_1 = CP\ sin\psi = \frac{AB}{2}sin\psi. \end{cases}$$

აქედან

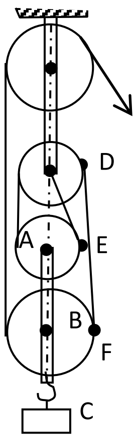
$$x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

პასუხი: მოძრავი ცენტროიდი არის წრეწირი, რომლის ცენტრი არის წვეროს შუა წერტილი და რადიუსი 0.5 მ, ხოლო უძრავი ცენტროიდის ცენტრია O წერტილი, რომლის რადიუსია 1 მეტრი.

ამოცანა 17.2

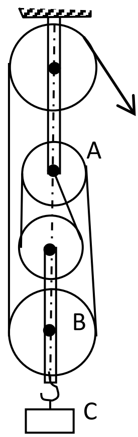
იპოვეთ A და B მოძრავი ჭოჭონაქების უძრავი და მოძრავი ცენტროიდები, თუ მათი რადიუსები r_A და r_B .

ამოხსნა

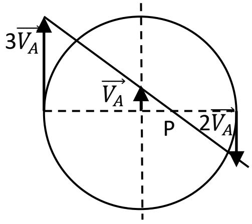


შემოვიღოთ აღნიშვნა: C - A ჭოჭონაქზე შემოხვეული ძაფის ბოლოს ჩამაგრების წერტილი; E - წერტილი სადაც ძაფი იწყებს A ჭოჭონაქზე შემოხვევას; F - B ბლოკის მარჯვენა მხარეს ძაფის შეხების წერტილი. D – C ცენტრის მქონე ჭოჭონაქიზე ძაფის შემოხვევის წერტილი.

როგორც ცნობილია, როცა ჭოჭონაქი გორავს წრფის გასწვრივ, მაშინ მისი უძრავი ცენტროიდი არის წრფე, როგორც გზის მონაკვეთთან შეხების წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. აქედან გამომდინარე, უძრავი ცენტროიდი იქნება წრფე, რომელიც გადის ჭოჭონაქების მხებად E და F წერტილებში. მოძრავი ცენტროიდი A ჭოჭონაქისათვის იქნება მის ფერსის წერტილების



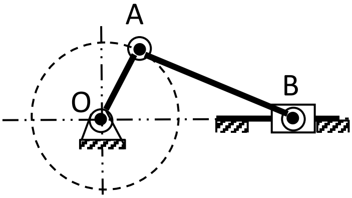
გეომეტრიული ადგილი. A ჭოჭონაქისათვის ეს იქნება წრეწირი, რომლის ცენტრი მდებარეობს მის ცენტრში და რადიუსია R_A.



მოძრავი ცენტროიდის საპოვნელად ავაგოთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ვიპოვოთ მანძილი მყისი ცენტრიდან ჭოჭონაქის ცენტრამდე. $OP = \frac{r_B}{3}$. აქედან გამომდინარე უძრავი ცენტროიდი არის წრეწირი, რომლის რადიუსია $\frac{r_B}{3}$.

პასუხი: მოძრავი ცენტროიდები: A ჭოჭინაქისთვის არის წრეწირი, რომლის რადიუსია r_A.

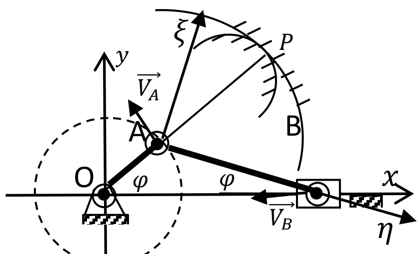
B ჭოჭონაქისთვის არის წრეწირი რადიუსით $\frac{r_B}{3}$. უძრავი ცენტროიდების მხები ვერტიკალური წრფეები.



ამოცანა 17.3

იპოვეთ გეომეტრიულად AB ბარბაცას მოძრავი და უძრავი ცენტროიდები, თუ $AB = OA = r$.

ამოხსნა



AB ბარბაცას სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს $\vec{V_A}$ და $\vec{V_B}$ სიჩქა-რეების მართობების გადაკვეთის P წერტილში. Vაღვნიშნოთ: $\angle AOB = \varphi$. P წერტილის კოო-რდინატები xoy კოორდინატთა სისტემაში არის :

$$x = OAcos\varphi + AB\ cos\varphi = 2rcos\varphi\ ,$$

$$y = OBtg\varphi = 2rcos\varphi \cdot tg\varphi = 2rsin\varphi.$$

გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან კუთხე φ და მივიღებთ უძრავი ცენტროიდის განტოლებას.

$$x^2 + y^2 = 4r^2.$$

მოძრავი ცენტროიდის განტოლების საპოვნელად შემოვიტანოთ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც უძრავად არის დაკავშირებული AB

ზარბაცასთან . ერთი ღერძი მივმართოთ ზარბაცას გასწვრივ (იხ. ნახ.). რადგან $\angle PAB = 2\varphi$, ამიტომ მყისი ცენტრის კოორდინატები ამ სისტემაში იქნება :

$$\xi = APcos2\varphi = rcos2\varphi;$$
$$\eta = APsin2\varphi = rsin2\varphi.$$

გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან კუთხე φ და მივიღებთ:

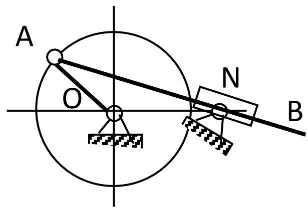
$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

ეს არის წრეწირი, რომლის ცენტრი მდებარეობს A წერტილში.

პასუხი: უძრავი ცენტროიდია წრეწირი, რომლის რადიუსია 2r და ცენტრი მდებარეობს O წერტილში: მოძრავი ცენტროიდი არის წრეწირი რომლის ცენტრი მდებარეობს A წერტილში, ხოლო რადიუსი არის r .

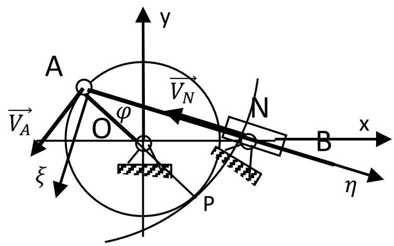
ამოცანა 17.4

AB ღერო მოძრაობს ისე, რომ მისი ერთერთი წერტილი A მოძრაობს წრეწირზე, რომლის ცენტრი არის O წერტილში. თვითონ ღერო ყოველთვის გადის N წერტილში, რომელიც იმავე წრეწირზე ძევს. ვიპოვოთ მისი ცენტროიდები.



ამოხსნა

გავავლოთ $\overrightarrow{V_A}$ და $\overrightarrow{V_B}$ სიჩქარეების მართობები. ვიპოვით სიჩქარეთა მყის ცენტრს P. რადგან A და N წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე და $\angle ANP = 90°$, ამიტომ P წერტილი მდებარეობს ამ წრეწირზე, ხოლო AP მონაკვეთი არის მისი დიამეტრი. აღვნიშნოთ $\angle NAP = \varphi$, მაშინ $\angle NOP = 2\varphi$.



შემოვიტანოთ მოძრავი საკოორდინატო სისტემა, რომელიც უძრავად არის დაკავშირებული AB ღეროსთან: ღერძი $A\eta$ იმართულია AB ძელის გასწვრივ, ხოლო $A\xi$ მისი მართობულია. ვიპოვოთ P წერტილის კოორდინატები, როგირცუძრავ, ასევე მოძრავ სისტემაში.

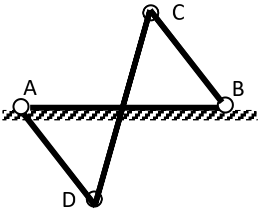
$$\begin{cases} x = OPcos2\varphi = rcos2\varphi \\ y = -OPsin2\varphi = -rsin2\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = APsin\varphi = 2rsin\varphi \\ \eta = APcos\varphi = 2rcos\varphi \end{cases}.$$

გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან კუთხე და მივიღებთ აქსოიდის განტოლებებს.

პასუხი: უძრავი ცენტროიდა არის წრეწირი რადიუსით r და ცენტრით O წერტილში, ხოლო მოძრავი ცენტროიდა ასევე არის წრეწირი რადიუსით 2r და ცენტრით A წერტილში.

ამოცანა 17.5

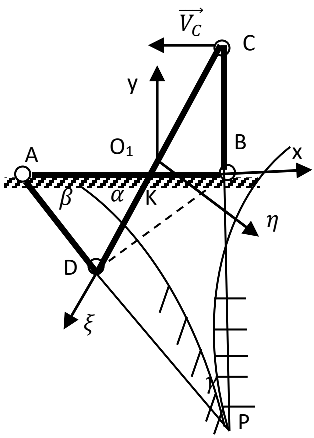


იპოვეთ ანტიპარალელოგრამის CD რგოლის მოძრავი და უძრავი ცენტროიდები თუ $AB = CD = b, AD = BC = a, a < b.$

ამოხსნა

P წერტილი არის DC რგოლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ნახაზიდან ჩანს, რომ $\Delta ADB = \Delta DCB \rightarrow \angle BAD = \angle BCD$. რადგან $\angle APD = \gamma$, რომელიც საერთო აქვთ სამკუთხედებს ΔAPB და ΔDCP. გარდა ამისა AB=DC , $\angle BAD = \angle BCD = \beta$, ამიტომ აქედან გამომდინარე გვაქვს , რომ $\Delta ABP = \Delta DCP \rightarrow DP = BP$. AP-BP=a. ანუ,კოორდინატული ფორმით გვაქვს:

$$\sqrt{(x + b/2)^2 + y^2} - \sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} = a.$$



თუ გავამარტივებთ ამ გამოსახულებას, მივიღებთ უძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$\frac{4x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{(b-a)^2} = 1.$$

ეს არის ჰიპერბოლა, რომლის ფოკუსებია A და B წერტილებში, ნამდვილი ნახევარღერძია $a/2$.

მოძრავი სისტემა დავაკავშიროთ CD ღეროს და სათავე ავიღოთ მის შუა O_1 წერტილში. ნახაზიდან ჩანს,რომ $CD - DP = a$, ანუ კოორდინატებში გვექნება

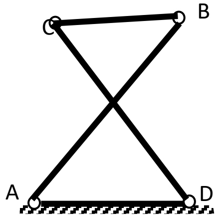
$$\sqrt{(\xi + b/2)^2 + \eta^2} - \sqrt{(\eta - b/2)^2 + \eta^2} = a.$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ მოძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$\frac{4\xi^2}{a^2} - \frac{4\eta^2}{(b-a)^2} = 1.$$

პასუხი: უძრავი ცენტროიდა - ჰიპერბოლა ფოკუსებით წერტილში A და B, მოძრავი ცენტროიდა - ასევე ჰიპერბოლა ფოკუსებით C და D.

ამოცანა 17.6



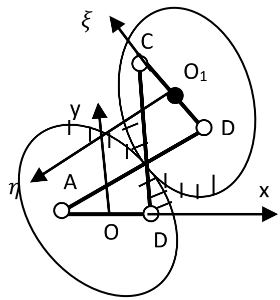
იპოვეთ მცირე AD გვერდზე დასმული ანტიპარალელოგრამის CD რგოლის მოძრავი და უძრავი ცენტროიდები თუ $AB = CD = b, AD = BC = a, a < b$.

ამოხსნა

P წერტილი არის CD რგოლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. შემოვიტანოთ ორი საკოორდინატო სისტემა: უძრავი სისტემა xoy ,რომლის ცენტრი არის AD მონაკვეთის შუა წერტილი და მოძრავი სისტემა $\xi O_1 \eta$ ცენტრით CB მონაკვეთის შუა წერტილში. სამკუთხედების ტოლობიდან $\Delta ABD = \Delta CBD$ გვაქვს $\angle CDB = \angle ABD = \alpha$. გარდა ამისა PB=PD და PC=PA, აქედან გამომდინარე

$$AP + PD = b \qquad (1)$$

$$BP + PC = b \qquad (2)$$



(1) ტოლობიდან ვწერთ

$$\sqrt{(x + a/2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a/2)^2 + y^2} = b.$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2 - a^2} = 1.$$

უძრავი ცენტროიდი არის ელიფსი ფოკუსებით A და D წერტილებში, ხოლო ნახევარღერძებია $\frac{b}{2}$ და $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$.

(2) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\sqrt{(\xi + b/2)^2 + \eta^2} + \sqrt{(\eta - b/2)^2 + \eta^2} = a.$$

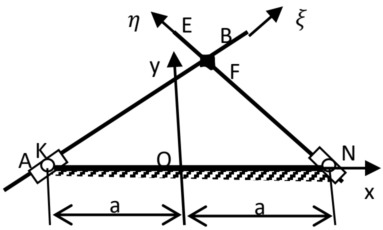
გარდაქმნების შემდეგ გვექნება

$$\frac{4\xi^2}{a^2} + \frac{4\eta^2}{b^2 - a^2} = 1.$$

პასუხი: უძრავი ცენტროიდი არის ელიფსი ფოკუსებით A და D წერტილებში, ხოლო ნახევარღერძებია $\frac{b}{2}$ და $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$. მოძრავი ცენტროიდი ასევე არის ელიფსი ფოკუსებით B და C.

ამოცანა 17.7

ორი ღერო AB და DE ხისტად არის შეერთებული ერთმანეთთან მართი კუთხით F წერტილში. ისინი მოძრაობენ ისე, რომ AB ღერო ყოველთვის გადის K წერტილში, ხოლო DE ღერო - N წერტილში. მანძილი KN=2a. იპოვეთ ცენტროიდების განტოლებები. საკოორდინატო ღერძები ნაჩვენებია ნახაზზე.



ამოხსნა

გავავლოთ $\overrightarrow{V_K}$ და $\overrightarrow{V_N}$ სიჩქარეების მართობები და ვიპოოვით სიჩქარეთა მყის ცენტრს P. აღვნიშნოთ $\angle FKO=\varphi$. ნახაზიდან ვიპოვით მყისი ცენტრის კოორდინატებს მოძრავ სისტემაში:

$$x_P=OM=KPsin\varphi-a=2asin^2\varphi-a=a(2sin^2\varphi-1)=-acos2\varphi.$$

$$y_P=-KPcos\varphi=-2asin\varphi cos\varphi=-asin2\varphi.$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$x_P^2+y_P^2=a^2$$

ეს არი მოძრავი ცენტროიდის განტოლება. ცენტროიდი წარმოადგენს წრეწირს.

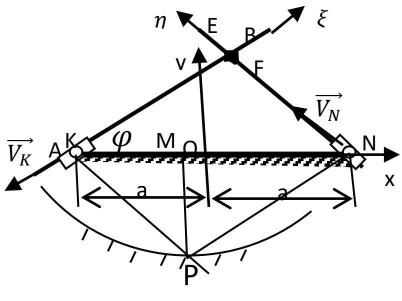
მოძრავი ცენტროიდისათვის ანალოგიურად მივიღებთ

$\xi_P=-2acos\varphi$; $\eta_P=-2asin\varphi$.

აქედან გვაქვს

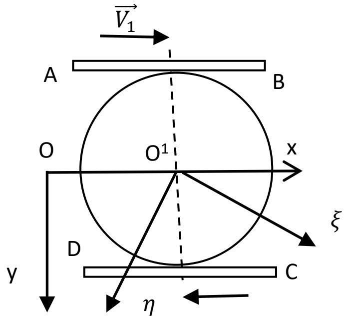
$$\xi_P^2+\eta_P^2=4a^2.$$

ეს არის მოძრავი ცენტროიდის განტოლება.



პასუხი: $x_P^2+y_P^2=a^2$ $\xi_P^2+\eta_P^2=4a^2$

ამოცანა 17.8



ორი პარალელური ლარტყა AB და DE მოძრაობს ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით მუდმივი $\overrightarrow{V_1}$ და $\overrightarrow{V_2}$ სიჩქარეებით. ლარტყებს შორის მოთავსებულია დისკო, რომლის რადიუსია a. დისკო უსრიალოდ სრიალებს ლარტყებზე. იპოვეთ: დისკოს ცენტროიდების განტოლებები; დისკოს ცენტრის სიჩქარე და კუთხური სიჩქარე ω.

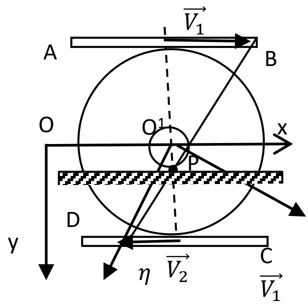
ამოხსნა

სიჩქარეთა მყისი ცენტრია P. ნახაზიდან გვაქვს

$$\frac{V_1}{a+O_1P} = \frac{V_2}{a-O_1P} \;\to\; O_1P = a\frac{V_1-V_2}{V_1+V_2}.$$

რადგან $O_1P = const$, ამიტომ უძრავი ცენტროიდის განტოლებაა

$$y_P = a\frac{V_1-V_2}{V_1+V_2}.$$



კუთხე φ ავითვალოთ დისკოს ბრუნვის მიმართულებით და განვსაზღვროთ P წერტილის კოორდინატები მოძრავ სისტემაში, რომელიც უძრავად არის დაკავშირებული დისკოსთან.

$$\xi_r = O_1P\sin\varphi,$$
$$\eta_1 = O_1P\cos\varphi.$$

ამ განტოლებებიდან მივიღებთ ნოძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$\xi_P^2 + \eta_P^2 = a^2\left(\frac{V_1-V_2}{V_1+V_2}\right)^2$$

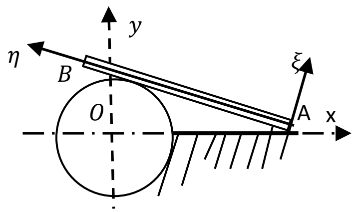
ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{V_1}{a+O_1P} = \frac{V_1+V_2}{2a}$$ - დისკოს კუთხური სიჩქარეა.

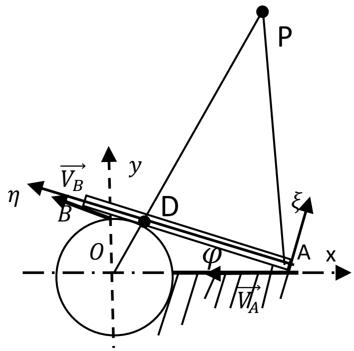
$$V_{O1} = O_1P\omega = \frac{V_1-V_2}{2}$$ - დისკოს ცენტრის სიჩქარეა.

პასუხი: 1) $y_P = a\frac{V_1-V_2}{V_1+V_2}$, $\xi_P^2 + \eta_P^2 = a^2\left(\frac{V_1-V_2}{V_1+V_2}\right)^2$, 2) $\omega = \frac{V_1+V_2}{2a}$, 3) $V_{O1} = \frac{V_1-V_2}{2}$

ამოცანა 17,9



იპოვეთ მოძრავი და უძრავი ცენტროიდების განტოლებები იმ AB ძელის, რომელიც ეყრდნობა რა უძრავ წრეს, რომლის რადიუსია a , ერთი ბოლოთი სრიალებს წრის ცენტრზე გამავალი ox ღერძის გასწვრივ. საკოორდინატო ღერძები ნაჩვენებია ნახაზზე.



ამოხსნა

ვიპოვოთ AB ძელის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამისათვის გავავლოთ $\overrightarrow{V_D}$ და $\overrightarrow{V_A}$ სიჩქარეების მართობები. გადაკვეთის წერტილი არის მყისი ცენტრი. ნახაზიდან ვიპოვოთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის კოორდინატები უძრავ სისტემაში.

$$x_P = OA = \frac{a}{sin\varphi},$$

$$y_A = \frac{a}{sin\varphi}\cdot tg(90^\circ - \varphi) = a\frac{cos\varphi}{sin^2\varphi} \rightarrow sin\varphi = \frac{a}{x_P}\ ,cos\varphi = \frac{y_P a}{x_P^2}.$$

თუ ვისარგებლებთ იგივობით $sin^2\varphi + cos^2\varphi$=1, მივიღებთ უძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$\left(\frac{a}{x_P}\right)^2 + \left(\frac{y_P a}{x_P^2}\right)^2 = 1$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$x_P^2(z_P^2 - a^2) - a^2 y_P^2\ .$$

P წერტილის კოორდინატები მოძრავ სისტემაში იქნება:

$$\xi = APcos\varphi = a\cdot ctg^2\varphi\ ,$$

$$\eta = AD = actg\varphi.$$

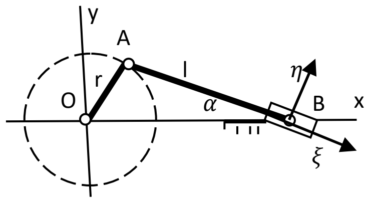
გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან φ კუთხე და მივიღებთ მოძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$\eta_P^2 = a\xi_P \text{ - პარაბოლა.}$$

პასუხი: $x_P^2(z_P^2 - a^2) - a^2 y_P^2\ ;\ \eta_P^2 = a\xi_P$.

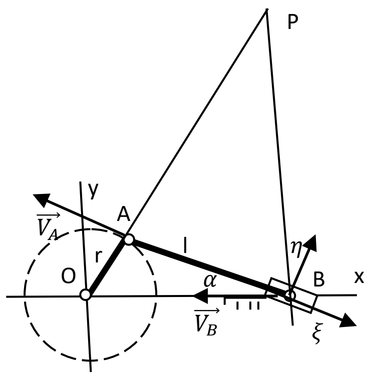
ამოცანა 17.10

იპოვეთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის AB ბარბაცას უძრავი და მოძრავი ცენტროიდების მიახლოებითი განტოლებები. დავუშვათ ბარბაცას სიგრძე AB=l გაცილებით დიდია მრუდმხარას OA=r სიგრძეზე. კუთხე α მცირეა და $sin\alpha = \alpha, cos\alpha = 1$. საკოორდინატო ღერძები ნაჩვენებია ნახაზზე .



ამოხსნა

გავავლოთ A და B წერტილების სიჩქარეების მართობები და მათი გადაკვეთის წერტილი გვაძლევს P წერტილს, რომელიც არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი AB ბარბაცასთვის. ამ წერტილის კოორდინატები უძრავ სისტემაში არის



$$x_p = rcos\varphi + l\,cos\alpha \approx rcos\varphi + l;$$

$$y_P = x_P tg\varphi.$$

ამ განტოლებებიდან გვაქვს:

$$cos\varphi = \frac{x_P - l}{r};\ y_P^2 = x_P^2\frac{1-cos^2\varphi}{cos^2\varphi} = x_P^2\frac{r^2-(x_P-l)^2}{(x_P-l)^2}.$$

ამ განტოლების გარდაქმნით მივიღებთ უძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$(x_P - l)^2(x_P^2 + y_P^2) = r^2x_P^2\ .$$

ნახაზიდან ვწერთ, რომ

$$rsin\varphi = lsin\alpha\ \rightarrow sin\alpha = \frac{rsin\varphi}{l}\ \rightarrow \alpha = \frac{rsin\varphi}{l}.$$

მეორე მხრივ

$$tg \propto = -\frac{\xi_P}{\eta_P}\ \rightarrow \alpha = -\frac{\xi_P}{\eta_P}.$$

მაშინ

$$sin\varphi = -\frac{l\xi_P}{r\eta_P},$$

მეორე მხრივ

$$\eta_P = l\text{tg}\varphi \ \rightarrow \eta_P{}^2(1 - sin^2\varphi) = l^2 sin^2\varphi.$$

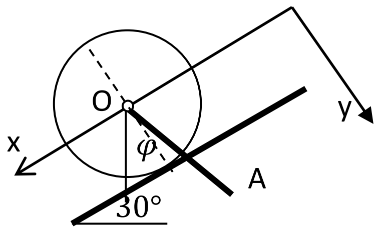
თუ გავითვალისწინებთ წინა ტოლობას და მოვახდენთ გარდაქმნებს, მივიღებთ მოძრავი ცენტროიდის განტოლებას

$$r^2\eta_P^4 = l^2\xi_P^2(l^2 + \eta_P^2).$$

პასუხი: $(x_P - l)^2(x_P^2 + y_P^2) = r^2x_P^2$; $r^2\eta_P^4 = l^2\xi_P^2(l^2 + \eta_P^2)$.

მყარი სხეულის წერტილთა აჩქარებები ბრტყელი მოძრაობის დროს. აჩქარებათა მყისი ცენტრი.

ამოცანა 18.1



ბორბალი გორავს დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც ჰორიზონ-ტთან ადგენს 30° კუთხეს. ბორბლის ცენტრი მოძრაობს კანონით $x_0 = 10t^2$ სმ, სადაც x ღერძი მიმართულია დახრილი სიბრტყის პარალელურად. O ცენტრზე დაკიდებულია ღერო OA=36 სმ, რომელიც ირხევა ნახაზის სიბრტყის მართობული O ღერძის გარშემო კანონით $\varphi = \frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{6}t$ რად. იპოვეთ OA ღეროს A წერტილის სიჩქარე დროის t=1 წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა

ჩვწეროთ A წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x_A = x_0 - lsin(\varphi - \pi/6),$$
$$y_A = lcos(\varphi - \pi/6).$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობები და მივიღებთ აჩქარების გეგმილებს შესაბამის ღერძებზე:

$$\dot{x_A} = \dot{x_0} - l\dot{\varphi}cos(\varphi - \pi/6),$$
$$\dot{y_A} = -l\dot{\varphi}cos(\varphi - \pi/6).$$

აჩქარების გეგმილების საპოვნელად კიდევ ერთხელ გავაწარმოოთ ეს ტოლობები და გვექნება :

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_0 - l\left[\ddot{\varphi}cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \dot{\varphi}^2 sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right],$$
$$\ddot{y}_A = -l\left[\ddot{\varphi}sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + \dot{\varphi}^2 cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები:

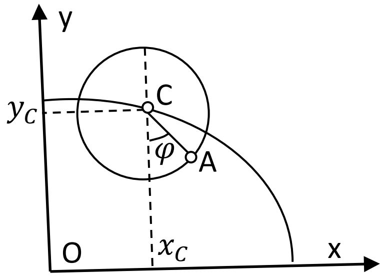
$$\dot{x}_0 = 20t, \ddot{x}_0 = 20\ .\dot{\varphi} = \frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),\quad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi^2}{108}sin\frac{\pi t}{6}.$$

გამოვთვალოთ მიღებული სიდიდეები t=1 წმ მომენტისთვის და გვექნება:

$\ddot{x}_A = 25{,}2$ სმ/წმ² , $\ddot{y}_A = -8{,}25$ სმ/წმ², $W_A = 26{,}4$ სმ/წმ².

პასუხი: $W_{Ax} = 25{,}2$ სმ/წმ² , $W_{Ay} = -8{,}25$ სმ/წმ² , $W_A = 26{,}4$ სმ/წმ².

ამოცანა 18.2



r =20 სმ რადიუსიანი დისკო მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში ისე, რომ მისი ცენტრის მოძრაობის განტოლებებია: $x_C = 10t$ მ, $y_C = 100 - 49t^2$ მ. ამავე დროს დისკო ბრუნავს მოძრაობის სიბრტყის მართობულად გამავალი საკუთარი ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = \frac{\pi}{2}$ რად/წმ. t=0 მომენტისათვის იპოვეთ დისკოს A წერტილის აჩქარება. ამ წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება $\varphi = \omega t$ კუთხით.

ამოხსნა

ჩავწეროთ A წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$\begin{cases} x_A = x_C + rsin\varphi \\ y_A = y_C - rcos\varphi, \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} x_A = 10t + rsin\omega t \\ y_A = 100 - 4{,}9t^2 - rcos\omega t. \end{cases}$$

ამ ტოლობების ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ აჩქარების გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\begin{cases} W_{Ax} = -r\omega^2 sin\omega t \\ W_{Ay} = -9{,}8 + r\omega^2 cos\omega t. \end{cases}$$

როცა t=0 გვაქვს:

$$W_{Ax}=0.\ W_{Ay} = -9{,}8 + r\omega^2 = 9{,}31,\ W = 9{,}31.$$

პასუხი: აჩქარება მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით და უდრის 9,31 მ/წმ²

ამოცანა 18.3

წინა ამოცანის პირობებით იპოვეთ A წერტილის სიჩქარე, როცა t=1წმ.

ამოხსნა

$$W_{Ax}(1) = -0{,}2\frac{\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2} = -0{,}49 \text{ მ/წმ}^2,$$

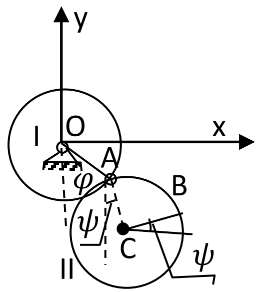
$$W_{Ay}(1) = -0{,}2\frac{\pi^2}{4}cos\frac{\pi}{2} = -9{,}8 \text{ მ/წმ}^2,$$

$$W_A = \sqrt{0{,}49^2 + 9{,}8^2} = 9{,}81 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_{Ax} = -0{,}49$ მ/წმ², $W_{Ay} = -9{,}8$ მ/წმ², $W_A = 9{,}81$ მ/წმ².

ამოცანა 18.4

ორი ერთნაირი დისკო , რომლის რადიუსია r , შეერთებულია ერთმანეთთან ცილინდრული A სახსრით . პირველი დისკო ბრუნავს O ღერძის გარშემო კანონით $\varphi = \varphi(t)$. მეორე დისკო ბრუნავს A ღერძის გარშემო კანონით $\psi = \psi(t)$. ბრუნვის ღერძები ნახაზის სიბრტყის მართობულია. კუთხეები φ და ψ აითვლება ვერტიკალიდან საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით. იპოვეთ მეორე დისკოს C ცენტრის აჩქარება.



ამოცანა

ვისარგებლოთ 16.5 ამოცანის შედეგებით;

$$V_{Cx} = r(\dot{\varphi}cos\varphi + \dot{\psi}cos\psi).$$

$$V_{Cy} = r(\dot{\varphi}sin\varphi + \dot{\psi}sin\psi).$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობები და მივიღებთ აჩქარების გეგმილებს:

$$\mathrm{W}_{Cx} = r(\ddot{\varphi}cos\varphi - \dot{\varphi}^2sin\varphi + \ddot{\psi}cos\psi - \dot{\psi}^2sin\psi),$$

$$\mathrm{W}_{Cy} = r(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi + \ddot{\psi}sin\psi + \dot{\psi}^2cos\psi).$$

$$W_C = \sqrt{\mathrm{W}_{Cx}{}^2 + \mathrm{W}_{Cy}{}^2}\ .$$

პასუხი: $W_C = \sqrt{\mathrm{W}_{Cx}{}^2 + \mathrm{W}_{Cy}{}^2}$, სადაც $\mathrm{W}_{Cx} = r(\ddot{\varphi}cos\varphi - \dot{\varphi}^2sin\varphi + \ddot{\psi}cos\psi - \dot{\psi}^2sin\psi)$,

$$\mathrm{W}_{Cy} = r(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi + \ddot{\psi}sin\psi + \dot{\psi}^2cos\psi).$$

ამოცანა 18.5

წინა ამოცანის პირობებში ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება, თუ $\angle ABC = \pi/2$.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ 16.5 ამოცანის ამოხსნით და გვექნება:

$$V_{Bx} = r\big(\dot\varphi cos\varphi + \sqrt{2}\dot\psi \cos{(45° + \psi)}\big),$$
$$V_{Bx} = r\big(\dot\varphi sin\varphi + \sqrt{2}\dot\psi \sin{(45° + \psi)}\big).$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობები და მივიღებთ აჩქარების გეგმილებს ღერძებზე:

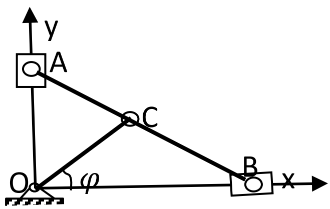
$$W_{Bx} = \big[\ddot\varphi cos\varphi - \dot\varphi^2 sin\varphi + \sqrt{2}\ddot\psi \cos{(45° + \psi)} - \sqrt{2}\dot\psi^2 \sin{(45° + \psi)}\big]r,$$
$$W_{By} = \big[\ddot\varphi sin\varphi - \dot\varphi^2 cos\varphi + \sqrt{2}\ddot\psi \sin(45° + \psi) + \sqrt{2}\dot\psi^2 \cos{(45° + \psi)}\big]r.$$

$$W_B = \sqrt{\mathrm{W}_{Bx}{}^2 + \mathrm{W}_{By}{}^2}.$$

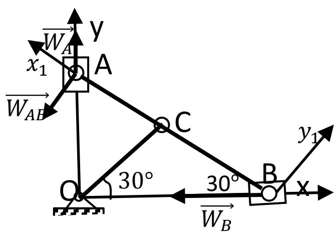
პასუხი: $W_B = \sqrt{\mathrm{W}_{Bx}{}^2 + \mathrm{W}_{By}{}^2}$, სადაც

$$W_{Bx} = \big[\ddot\varphi cos\varphi - \dot\varphi^2 sin\varphi + \sqrt{2}\ddot\psi \cos{(45° + \psi)} - \sqrt{2}\dot\psi^2 \sin{(45° + \psi)}\big]r,$$
$$W_{By} = \big[\ddot\varphi sin\varphi - \dot\varphi^2 cos\varphi + \sqrt{2}\ddot\psi \sin(45° + \psi) + \sqrt{2}\dot\psi^2 \cos{(45° + \psi)}\big]r.$$

ამოცანა 18.6



ელიფსოგრაფის სახაზავი B ბოლო სრიალებს ox ღერძის გასწვრივ, ხოლო A ბოლო - oy ღერძის გასწვრივ. AB=20 სმ. იპოვეთ A წერტილის სიჩქარე და აჩქარება როცა სახაზავის დახრის კუთხე ox ღერძის მიმართ არის 30°. ხოლო B წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილებია $V_{Bx} = -20$ სმ/წმ, $W_{Bx} = -10$სმ/წმ² .

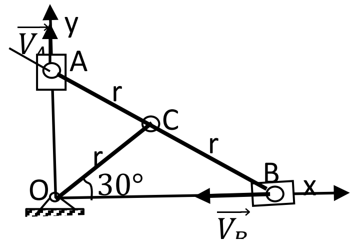


ამოხსნა

სიჩქარეთა გეგმილების შესახებ თეორემის თანახმად :

$$V_{Ay} cos 60° = |V_{Bx}| cos 30° \rightarrow V_{Ay} = 2|V_{Bx}| cos 30° = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}866 = 34{,}64 \text{სმ/წმ}.$$

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე:



$\omega_{AB} = \frac{V_B}{PB} = \frac{20}{10} = 2$ რად/წმ.

ვიპოვოთ წერტილის აჩქარება ${W_{AB}}^n$:

$$W_{AB}^n = 2r\omega^2 = 20 \cdot 2^2 = 80$$ სმ/წმ²,

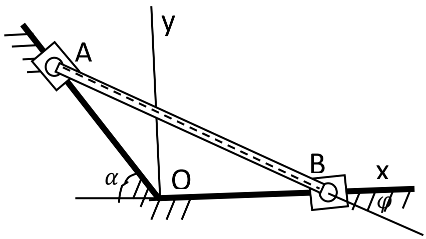
$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_{Bx}} + \overrightarrow{W_{AB}^n} + \overrightarrow{W_{AB}^\tau}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერძზე

$W_A cos60°$=$W_{Bx} cos30° - W_{BA}^n \rightarrow W_A = \frac{W_{Bx} cos30° - W_{BA}^n}{cos60°} = -142{,}68$ სმ/წმ².

პასუხი: $V_{Ay} = 34{,}64$სმ/წმ ; $W_A = -142{,}68$ სმ/წმ² .

ამოცანა 18.7



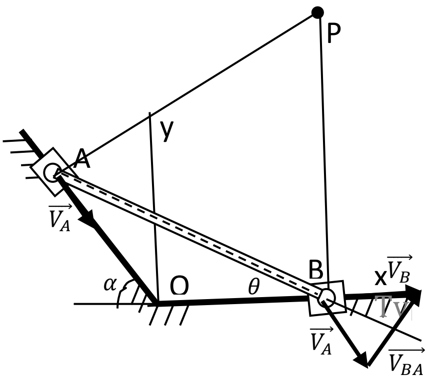
A და B ქუროები სრიალებენ სწორხზოვანი მიმმართველების გასწვრი და შეერთებული არიან AB= l სიგრძის ღეროთი. A ქურო მოძრაობს მდმივი სიჩქარით $\overrightarrow{V_A}$. იპოვეთ B წერტილის აჩქარება და AB ღეროს კუთხური აჩქარება, როცა AB ღერო OB წრფესთან ადგენს φ კუთხეს.

ამოხსნა

ღეროს მდებარეობა oxy სისტემაში განისაზღვრება კუთხით θ.

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა y ღერძზე



$$0 = -V_A sin\alpha + V_{BA} cos\theta. \rightarrow$$

$$V_{BA} = \frac{V_A sin\alpha}{cos\theta}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{l} = \frac{V_A sin\alpha}{l cos\theta} = \dot{\theta}.$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{d\omega_{AB}}{dt} = \frac{V_A sin\alpha}{l} \cdot$$

$$\frac{d}{dt}(cos^{-1}\theta) = \frac{V_A sin\alpha}{l cos^2\theta} sin\theta \cdot \dot{\theta} = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{l^2 cos^3\theta} sin\theta.$$

როცა $\theta = \varphi$, მაშინ

$$\varepsilon_{AB} = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{l^2 cos^3\varphi} sin\varphi .$$

ჩავწეროთ განტოლებები B წერტილის აჩქარებებისათვის:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau},$$

$$\overrightarrow{W_A} = 0, \overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau},$$

$$W_B = \sqrt{(W_{BA}^n)^2 + (W_{BA}^\tau)^2},$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 l = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{lcos^3\theta}.$$

$$W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} l = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{lcos^3\theta} sin\theta,$$

როცა $\theta = \varphi$, მაშინ

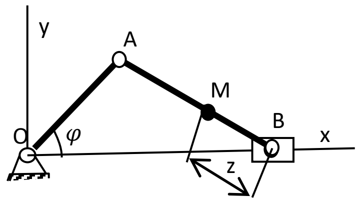
$$W_{BA}^n = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{lcos^3\varphi},$$

$$W_{BA}^\tau = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{lcos^3\varphi} sin\varphi,$$

$$W_B = \frac{V_A^2}{l}\frac{sin^2\alpha}{cos^3\varphi}.$$

პასუხი: $\varepsilon_{AB} = \frac{V_A^2 sin^2\alpha}{l^2cos^3\varphi} sin\varphi$; $W_B = \frac{V_A^2}{l}\frac{sin^2\alpha}{cos^3\varphi}$.

ამოცანა 18.8

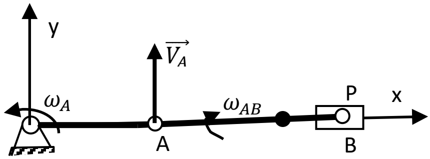


იპოვეთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოციას აჩქარება და AB ბარბაცას აჩქარება თა მყისი ცენტრი K მრუდმხარას ორ: ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ მდებარეობაში. მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega_0 = 15$ რად/წმ. მრუდმხარას სიგრძე OA=40 სმ, ბარბაცას სიგრძე AB=200 სმ.

ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

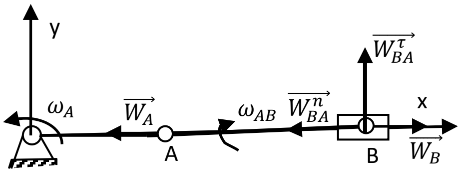
$$V_A = \omega_0 OA = 15 \cdot 40 = 600 \text{ სმ/წმ}.$$



ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე BA$\omega_{BA} = \frac{V_A}{AB} = \frac{600}{200} = 3$ რად/წმ.

ვიპოვოთ A წერტილის ნორმალური აჩქარება, როცა ის

ბრუნავს O წერტილზე გამავალი ღერძის გარშემო, და B წერტილის ნორმალური აჩქარება, მისი A ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს.



$$W_A^n = \omega^2 OA = 90მ/წმ^2,$$

$$W_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 18 მ/წმ^2.$$

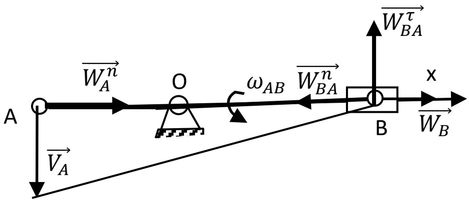
ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} + \overrightarrow{W_A}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x და y ღერძებზე:

$$x: W_B = W_A^n - W_{BA}^n = -108 მ/წმ^2.$$

$$y: 0 = W_{BA}^{\tau}.$$



მხები აჩქარება ამ მომენტში ნულის ტოლია, შესაბამისად კუთხური აჩქარება ნულის ტოლია ε_{AB}.

ვიპოვოთ AB ბარბაცას აჩქარებათა მყისი ცენტრი:

$$KB = \frac{W_B}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{BA}^4}} = 12 მ, tg\beta = \frac{\varepsilon_{BA}^2}{\omega_{BA}^4} = 0.$$

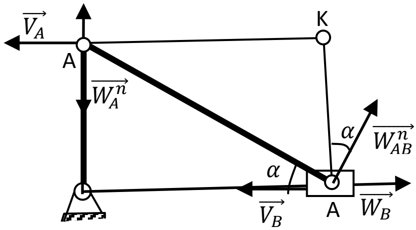
ამრიგად, ამ მომენტში აჩქარებათა მყისი ცენტრი ძევს ცოცოას მიმმართველ ღერძზე.

ახლა განვიხილოთ მექანიზმის მდებარეობა, როცა $\varphi = 180°$.

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე

$$\omega_{BA} = \frac{V_A}{AB} = 3 რად/წმ.$$

გვაქვს



$$W_B = W_A^n - W_{BA}^n = 72 მ/წმ^2,$$

$$W_{BA}^{\tau} = 0,\ \varepsilon_{BA} = 0, KB = \frac{72}{9} = 8 მ.$$

ბოლოს განვიხილოთ მდებარეობა, როცა $\varphi = 90°$.

$$sin\alpha = \frac{1}{5}, cos\alpha = 0{,}98, tg\alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau},\ V_A = V_B = 4\ \text{მ/წმ}.\ \omega_{AB} = 0.$$

$$\begin{cases} W_B = W_{BA}^\tau sin\alpha \\ 0 = -W_A^n + W_{BA}^\tau cos\alpha\ . \end{cases}$$

$$W_B = W_A^n tg\alpha = 90 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} = 18{,}37\ \text{მ/წმ}^2.$$

$$W_{BA}^\tau = \frac{W_A^n}{cos\alpha} = 91{,}85\ \text{მ/წმ}^2,\ \varepsilon_{AB} = \frac{91{,}85}{200} = 0{,}459\ \text{რად/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ აჩქარებათა მყისი ცენტრი - K წერტილი:

$$KB = \frac{V_B}{\varepsilon_{AB}} = 40\ \text{მ}.$$

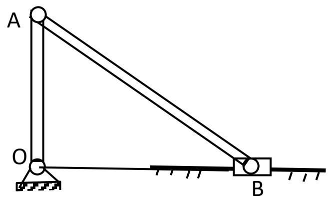
პასუხი: აჩქარებათა მყისი ცენტრი, როცა $\varphi = 0°$ და $\varphi = 180°$, ძევს ცოციას მიმმართველის ღერძზე.

1) $\varphi = 0$, $W_B = 108$ მ/წმ², $KB = 12$ მ.

2) $\varphi = 180°$, $W_B = 72$ მ/წმ², BK=8მ.

3) $\varphi = 90°$, W_B =18,37 მ/წმ², $KB = 40$ მ. AK=196 სმ.

ამოცანა 18.9



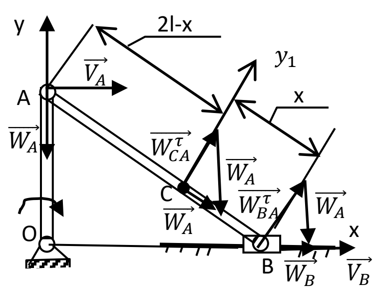
მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის AB ბარბაცას სიგრძე ორჯერ მეტია AO მრუდმხარაზე. იპოვეთ AB ბარბაცას იმ წერტილის მდებარეობა, რომლის აჩქარება მიმართულია ბარბაცას გასწვრივ იმ მომენტში, როცა მრუდმხარა ცოციას მიმმართველის მართობულია. მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად.

ამოხსნა

მოცემულ მდებარეობაში AB ასრულებს მყისიერ გადატანით მოძრაობას, ამოტომ მისი კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლია $\omega_{AB} = 0$.

$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}^n} + \overrightarrow{W^\tau{}_{CA}}$,

$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}$.



რადგან A და B წერტილების სიჩქარეები პარალელურია, ამიტომ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი უსასრულობაშია და , შესაბამისად ბარბაცას კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე $W_{CA}^n = W_{BA}^n = 0$.

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W^{\tau}{}_{CA}} \ \ (1)$$
$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W^{\tau}_{BA}}. \ (2)$$
$$W^{\tau}_{BA} cos30° = W_A \ \rightarrow \ 2l\varepsilon_{AB} cos30° = \omega^2 l.$$
$$\omega^2 = 2\varepsilon_{AB} cos30° \ \ (3)$$

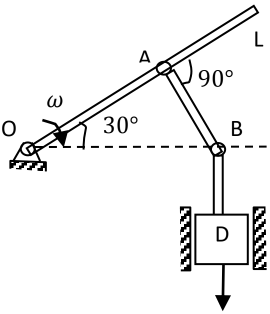
დავაგეგმილოთ (10) y ღერძზე;

$$0 = W^{\tau}_{CA} - W_A cos30° \ \rightarrow W^{\tau}_{CA} = W_A cos30°$$
$$(2l - x)\varepsilon_{AB} = \omega^2 l cos30° \ (4)$$

ამოვხსნათ ერთად (3) და (4) განტოლებები და გვექნება $x = \frac{l}{2}$.

პასუხი: სამიებელი წერტილი B ცოციადან დაშორებულია ბარბაცას სიგრძის მეოთხედზე.

ამოცანა 18.10



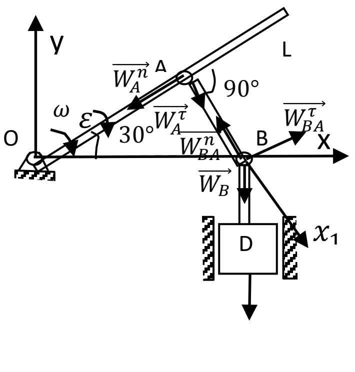
ჰიდრავლიკური წნეხის D დგუში მოძრაობაში მოდის სახსრულ-ბერკეტული OABD მექანიზმის საშუალებით. ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში OL ბერკეტს აქვს კუთხური სიჩქარე $\omega =$ 2რად/წმ და კუთხური აჩქარება

$\varepsilon =$ 4რად/წმ², OA=15 სმ. იპოვეთ D დგუშის აჩქარება და AB რგოლის კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ 16.24 ამოცანის შედეგით. $\omega_{AB} = 2$ რად/წმ. ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარების კომპონენტები:

$$W^n_A = \omega^2 \cdot OA = 60\text{სმ/წმ}^2,$$



$$W^{\tau}_A = \varepsilon \cdot OA = 60 \text{ სმ/წმ}^2 ,$$
$$W^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 34{,}64 \text{ სმ/წმ}^2.$$

D და B წერტილების აჩქარებების საპოვნელად დავაგეგმილოთ x_1 ღერძზე ვექტორული განტოლება

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W^n_A} + \overrightarrow{W^{\tau}_A} + \overrightarrow{W^n_{BA}} + \overrightarrow{W^{\tau}_{BA}}$$

მივიღებთ

$$W_B cos30° = W^{\tau}_A - W^n_{BA}.$$

აქედან

$$W_B = W_D = \frac{W_A^\tau - W_{BA}^n}{cos30°} = 29{,}3 \text{ სმ/წმ}^2.$$

კუთხური აჩქარების საპოვნელად დავაგეგმილოთ ვექტორული განტოლება xy ღერძზე:

$$0 = -\mathrm{W_A^n cos30° + W_A^\tau sin30° - W_{BA}^n sin30° + W_{BA}^\tau sin30°}.$$

აქედან

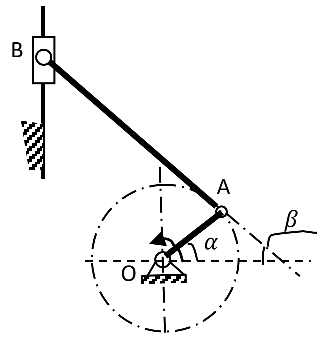
$$W_{BA}^\tau = \frac{\mathrm{W_A^n cos30° - W_{BA}^n sin30° + W_{BA}^\tau sin30°}}{cos30°} = 45{,}4 \text{სმ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ AB რგოლის კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB} = 5{,}2 \text{ რად/წმ}^2$$

პასუხი: $W_D = 29{,}3$ სმ/წმ² ; $\varepsilon_{AB} = 5{,}2$ რად/წმ² .

ამოცანა 18.11



20 სმ სიგრძის OA მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად $\omega_0 = 10 \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}$ კუთხური სიჩქარით და მოძრაობაში მოჰყავს 100 სმ სიგრძის AB ბარბაცა. იპოვეთ ბარბაცას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, და აგრეთვე ცოციას აჩქარება. მრუდმხარა და ბარბაცა ურთიერთმართობულია და ჰორიზონტალურ ღერძთან ქმნიან კუთხეებს $\alpha = \beta = 45°$.

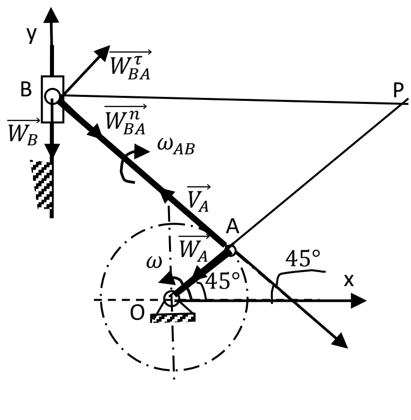
ამოხსნა

ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = \omega_0 OA = 10 \cdot 20 = 200 \text{სმ/წმ}.$$

მეორე მხრივ

$$V_A = \omega_{AB} PA \ \rightarrow \ \omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = 2 \text{რად/წმ}.$$



ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარების კომპონენტები:

$$W_A^n = \omega_0^2 OA = 2000 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_{BA}^n = \omega_{BA}^2 BA = 400 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ჩავწეროთ A წერტილისთვის აჩქარების ვექტორული გამოსახულება

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}. \ (1)$$

დავგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერძზე:

$$0 = -W_A^n cos45° + W_{BA}^n cos45° + \ W_{BA}^\tau cos45° \ .$$

აქედან ვპოულობთ

$$W_{BA}^\tau = W_A^n - W_{BA}^n = 1600 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ ბარბაცას კუთხური აჩქარება

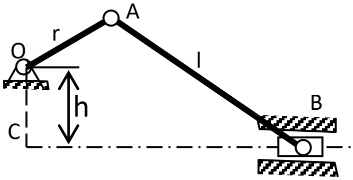
$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB} = 16 \text{ რად/წმ}^2.$$

დავაგეგმილოთ (1) განტოლება x_1 ღერძზე :

$$W_B cos45° = W_{BA}^n \ \rightarrow \ W_B = 565{,}8 \text{ სმ/წმ}^2 \ .$$

პასუხი: $\omega_{AB} = 2$რად/წმ. $\varepsilon_{AB} = 16$ რად/წმ². $W_B = 565{,}8$ სმ/წმ².

ამოცანა 18.12

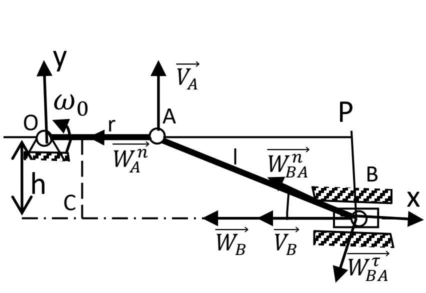


ვიპოვოთ არაცენტრირებული მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის ბარბაცას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და აგრეთვე ცოციას სიჩქარე და აჩქარება, როცა მრუდმხარას უჭირავს 1) მარჯვენა ჰორიზონტალური მდებარეობა, 2) ვერტიკალურად ზედა მდგომარეობა, თუ ის ბრუნავს მუდმივი ω_0 კუთხური სიჩქარით. მოცემულია: $OA = r$, $AB = l$, მანძილი მრუდმხარას O ღერძიდან ცოციას მოძრაობის წრფემდე OC=h.

ამოხსნა

ვიპოვოთ დამხმარე სიდიდეები :

$$sin\alpha = \frac{h}{l}, \ cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} \ , tg\alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}} \ .$$



ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე

$$V_A = r\omega_0$$

რადგან P არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$V_A = \omega \cdot PA = \omega \cdot \sqrt{l^2 - h^2},$$

$$r\omega_0 = \omega \cdot \sqrt{l^2 - h^2} \ \rightarrow$$

$$\omega = \omega_0 \frac{r}{\sqrt{l^2 - h^2}}.$$

$$V_B = \omega_0 \frac{hr}{\sqrt{l^2-h^2}}. W_{BA}^n = \omega^2 l = \omega_0^2 \frac{r^2 l}{l^2-h^2}.$$

ჩავწეროთ ვექტორული ტოლობა:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$

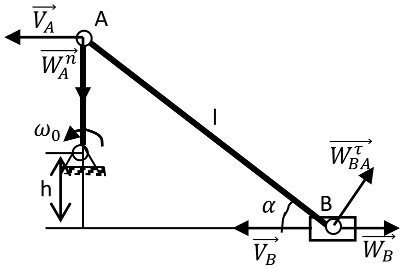
დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა y ღერძზე

$0 = W_{BA}^n sin\alpha - W_{BA}^\tau cos\alpha, \rightarrow W_{BA}^\tau =$

$W_{BA}^n \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \omega_0^2 \frac{r^2 l}{l^2-h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}},$

აქედან

$$\varepsilon = \frac{W_{BA}^\tau}{l} = \omega_0^2 \frac{r^2 h}{\sqrt{(l^2-h^2)^3}}.$$



იგივე ვექტორული ტოლობის დაგეგმილება x ღერძზე გვაძლევს

$$W_B = W_A^n + W_{BA}^n cos\alpha + W_{BA}^\tau sin\alpha = r\omega_0^2 \left[1 + \frac{r^2 l}{\sqrt{(l^2-h^2)^3}}\right].$$

რადგან ბარბაცა ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

$$V_A = V_B = \omega_0 r,$$

ბარბაცას კუთხური სიჩქარე $\omega_{AB} = 0$. შესაბამისად $W_{BA}^n = 0$. ამიტომ

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau} \quad (4)$$

დავაგეგმილოთ იგივე ვექტორული ტოლობა y ღერძზე და გვექნება

$$0 = -W_A^n + W_{BA}^\tau cos\alpha, \rightarrow W_{BA}^\tau = \frac{W_{BA}^n}{cos\alpha} = \frac{r\omega_0^2 l}{\sqrt{l^2-(h+r)^2}}.$$

$$\varepsilon = \frac{W_{BA}^\tau}{l} = \frac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2-(h+r)^2}}.$$

დავაგეგმილოთ (4) x ღერძზე:

$$W_B = W_{BA}^\tau sin\alpha = \frac{r\omega_0^2 l}{\sqrt{l^2-(h+r)^2}} \cdot \frac{h+r}{l} = r\omega_0^2 \frac{h+r}{\sqrt{l^2-(h+r)^2}}.$$

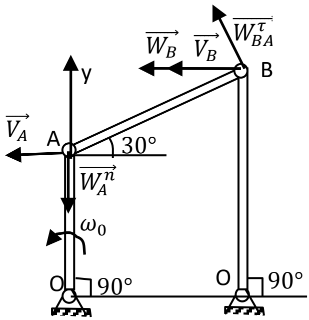
პასუხი: 1) $\omega = \omega_0 \frac{r}{\sqrt{l^2-h^2}}, \varepsilon = \omega_0^2 \frac{r^2 h}{\sqrt{(l^2-h^2)^3}}, V_B = \omega_0 \frac{hr}{\sqrt{l^2-h^2}}, W_B = r\omega_0^2 \left[1 + \frac{r^2 l}{\sqrt{(l^2-h^2)^3}}\right].$

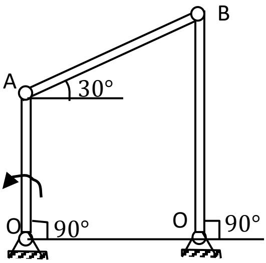
2) $\omega_{AB} = 0, \varepsilon = \frac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2-(h+r)^2}}. V_B = \omega_0 r, W_B = r\omega_0^2 \frac{h+r}{\sqrt{l^2-(h+r)^2}}.$

ამოცანა 18.13

ოთხრგოლიანი $OABO_1$ მექანიზმის OA ღერო ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_0 . იპოვეთ AB ღეროს კუთხური სიჩქარე და

კუთხური აჩქარება, და ასევე B სახსრის აჩქარება ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში. ცნობილია AB=2OA=2a.





ამოხსნა

მოცემულ მომენტში AB ღერო ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ $V_A = V_B, \omega_{AB} = 0.$ ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება:

$$x: -W_B = -W_{BA}^{\tau} sin30°.$$

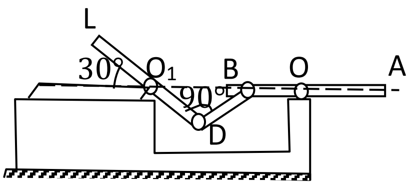
$$W_B = W_{BA}^{\tau} sin30°\,.$$

y: $0 = W_{BA}^{\tau} cos30° - W_A^n$, $W_{BA}^{\tau} = \frac{W_A^n}{cos30°} = \frac{2\omega_0^2 a}{\sqrt{3}}.$

$$W_B = \frac{2\omega_0^2 a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{3}}, 2a\varepsilon = \frac{2\omega_0^2 a}{\sqrt{3}}, \rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}.$$

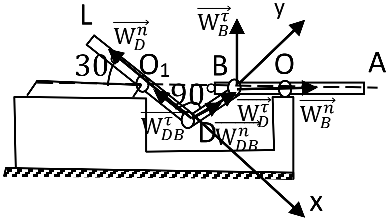
პასუხი: $\omega_{AB} = 0, \varepsilon = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}},\ W_B = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{3}}$.

ამოცანა 18.14



ლითონის საჭრელი მაკრატლის L საჭრისი მოძრაობაში მოჰყავს სახსრულ-ბერკეტიან AOBD მექანიზმს . ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში AB ბერკეტის კუთხური სიჩქარეა 2რად/წმ, ხოლო კუთხური აჩქარება 4 რად/წმ² . OB=5 სმ O_1D=10 სმ. იპოვეთ D სახსრის აჩქარება და BD რგოლის კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა



ვისარგებლოთ 16.25 ამოცანის შედეგით:

$$\omega_{BD} = 0{,}87\text{რად/წმ}, \omega_{O1D} = \frac{V_D}{O_1D} = 0{,}87 \text{ რად/წმ}.$$

$$DB = O_1Dtg30° = 10 \cdot 0{,}5774 = 5{,}77სმ.$$

ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება:

$$\overrightarrow{W_D} = \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^\tau} + \overrightarrow{W_{DB}^n} + \overrightarrow{W_{DB}^\tau},$$

მეორე მხრივ

$$\overrightarrow{W_D} = \overrightarrow{W_D^n} + \overrightarrow{W_D^\tau},$$

გავუტოლოთ ეს ორი გამოსახულება ერთმანეთს და გვექნება

$$\overrightarrow{W_D^n} + \overrightarrow{W_D^\tau} = \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^\tau} + \overrightarrow{W_{DB}^n} + \overrightarrow{W_{DB}^\tau}. (1)$$

გამოვთვალოთ აჩქარებების კომპონენტები:

$$W_B^n = \omega_0^2 \cdot OB = 20 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_B^\tau = \varepsilon_0 \cdot OB = 20 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_{DB}^n = \omega_{DB}^2 \cdot DB = 4{,}37 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_D^n = \omega_{O1D}^2 \cdot O_1D = 7{,}57 \text{ სმ/წმ}^2.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა x და y ღერძებზე:

$$x:\ -W_D^n = W_B^n cos30° - W_B^\tau sin30° - W_{DB}^\tau.$$

აქედან

$$W_{DB}^\tau = W_B^n cos30° - W_B^\tau sin30° + W_D^n = 14{,}89 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$\varepsilon_{DB} = \frac{W_{DB}^\tau}{DB} = 2{,}56 \text{ რად/წმ}^2.$$

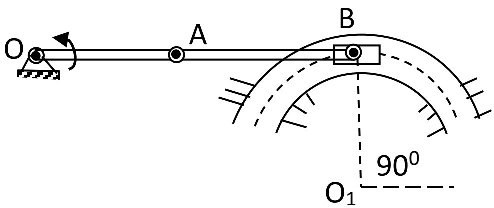
$$y:\ \ W_D^n = W_B^n son30° + W_B^\tau cos30° + W_{DB}^n = 31{,}69 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ D წერტილის აჩქარება :

$$W_D = \sqrt{(W_D^n)^2 + (W_D^\tau)^2} = 32{,}4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W = 32{,}4$ სმ/წმ^2 , $\varepsilon_{DB} = 2{,}56$ რად/წმ^2 .

ამოცანა 18.15



OAB მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოცია მოძრაობს მრუდწირულ მიმმართველში. იპოვეთ ცოციას მხები და ნორმალური აჩქარებები ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში თუ : OA=10 სმ, AB=20 სმ. OA მრუდმხარას მოცემულ მომენტში აქვს კუთხურო სიჩქარე $\omega = 1$ რად/წმ და კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 0$.

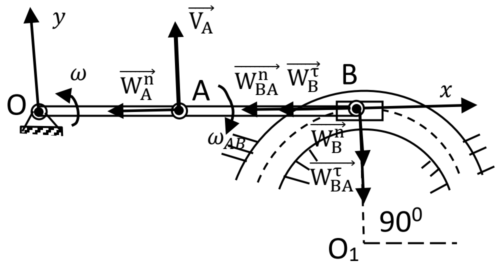
ამოხსნა

1) ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = \omega \cdot OA = 1 \cdot 10 = 10 სმ/წმ.$$

2) ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე ω_{AB}:

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{AB} = 0,5 \text{ რად/წმ.}$$



3) ვიპოვოთ აჩქარება

$$W_A^n = \omega^2 \cdot OA = 10 \text{ სმ/წმ}^2.$$

4) ვიპოვოთ აჩქარება

$$W_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 5 \text{ სმ/წმ}^2.$$

5) B წერტილის აჩქარებისთვის ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau},$$

მეორე მხრივ

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^\tau}.$$

შევადაროთ წინა ტოლობას და მივიღებთ

$$\overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^\tau} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$

იმ მომენტში , როცა B წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, $\overrightarrow{W_B^n} = 0$, მაშინ გვექნება

$$\overrightarrow{W_B^\tau} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$

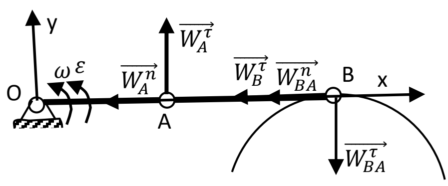
დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერძზე:

$$-W_B^\tau = -W_A^n - W_{BA}^n, \rightarrow W_B^\tau = W_A^n + W_{BA}^n = 15 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_B^\tau = 15$ მ/წმ^2 , $\overrightarrow{W_B^n} = 0$.

ამოცანა.18.16

იპოვეთ წინა ამოცანაში მოცემული მექანიზმის AB ბარბაცას კუთხური სიჩქარე, თუ ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში OA მრუდმხარას კუთხური აჩქარება უდრის 2 რად/წმ^2.



ამოხსნა

ვისარგებლოთ წინა ამოცანის შედეგით

$$\overrightarrow{W_B^\tau} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau} + \overrightarrow{W_A^\tau}.$$

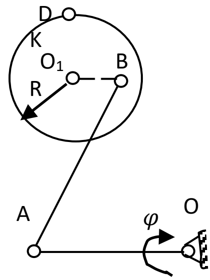
დავაგეგმილოთ ეს განტოლება y ღერძზე:

$$0 = W_A^\tau - W_{BA}^\tau, \rightarrow W_{BA}^\tau = W_A^\tau.$$

$W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB,\ W_A^\tau = OA \cdot \varepsilon, \rightarrow \varepsilon_{AB} \cdot AB = OA \cdot \varepsilon, \rightarrow\ \varepsilon_{AB} = \varepsilon \cdot \frac{OA}{AB} = 1$ რად/წმ^2.

პასუხი : 1 რად/წმ^2 .

ამოცანა 18.17.



სალესი დაზგა მოძრაობაში მოდის OA=24 სმ სატერფულის საშუალებით, რომელიც ირხევა O ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi = \frac{\pi}{6} sin \frac{\pi}{2} t$ რად. სალეს ქვას აბრუნებს AB ღერო, რომელიც ბრუნავს O_1 ღერძის გარშემო, ღერძები O და O_1 არიან ნახაზის სიბრტყის მართობულები. t=0 მომენტისათვის იპოვეთ სალესი ქვის B წერტილის აჩქარება, თუ O_1B=12 სმ. ამ მომენტისათვის OA და O_1B ღეროები არიან ჰორიზონტალურ მდებარეობაში. ამასთან $\angle OAB = 60°$.

ამოხსნა

1) ვიპოვოთ სატერფულის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{2} cos \frac{\pi t}{2} = \frac{\pi^2}{12} cos \frac{\pi t}{2}.$$

როცა t=0, მაშინ $\omega = \omega_0 = \frac{\pi^2}{12}$ რად/წმ.

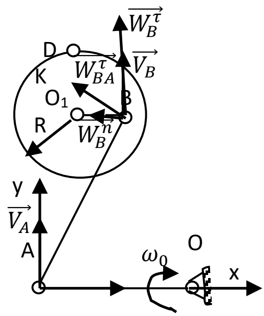
2) ვიპოვოთ სატერფულის კუთხური აჩქარება.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\pi^2}{24} sin \frac{\pi t}{2}.$$

როცა t=0, მაშინ $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.$

3) ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = OA \cdot \omega_0 = 2\pi^2,$$



ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე:

$$V_B = V_A = 2\pi^2;$$

AB რგოლის კუთხური სიჩქარე $\omega_{AB} = 0.$

რადგან როცა t=0 $W_A^\tau = 0$, ამიტომ A წერტილის სრული აჩქარება უდრის:

$$W_A = W_A^n = \omega_0^2 \cdot AB = 16{,}2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ჩავწეროთ A წერტილის აჩქარების განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau},$$

მეორე მხრივ

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^\tau}.$$

შევადაროთ ეს ტოლობები და მივიღებთ:

$$\overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^\tau} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}. \ (1)$$

ვიპოვოთ სალესი ქვის კუთხურისიჩქარე

$$V_B = O_1B \cdot \omega_1 \ \rightarrow \omega_1 = \frac{V_B}{O_1B} = 1{,}64 \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}.$$

ვიპოვოთ აჩქარება

$$W_B^n = \omega_1^2 \cdot O_1B = 33{,}3 \text{სმ}/\text{წმ}^2 .$$

დავაგეგმილოთ (1) განტოლება x და y ღერძებზე და მივიღებთ:

$$x; \ -W_B^n = W_A^n - W_{BA}^\tau cos30° \ \rightarrow W_{BA}^\tau = (W_B^n + W_A^n) \cdot \frac{1}{cos30°} \ (2)$$

$$\text{y: } W_B^\tau = W_{BA}^\tau sin30°. \qquad (3)$$

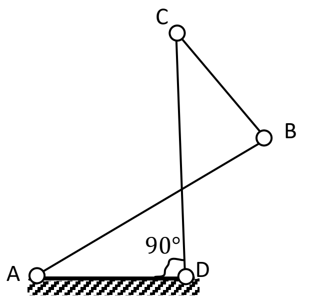
(2) და (3) გამოსახულებებიდან ვიპოვით $W_B^\tau = 28{,}58$ სმ/წმ^2.

ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება:

$$W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2} = 43{,}9 \text{ სმ/წმ}^{22} .$$

პასუხი: $W_B = 43{,}9$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 18.18



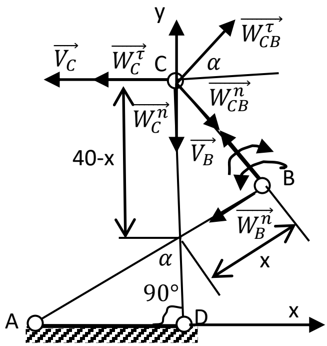
ანტიპარალელოგრამი შედგება ორი A და B ერთნაირი 40 სმ სიგრძის მრუდმხარასაგან და სახსრულად შეერთებული 20 სმ სიგრძის BC ღეროსაგან. მანძილი უძრავ A და D ღერძებს შორის 20 სმ-ია. AB მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_0 . იპოვეთ BC ძელის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება იმ მომენტში, როცა კუთხე ADC უდრის 90^0.

ამოხსნა

P წერტილი არის CB ღეროს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ვიპოვოთ PB მანძილი:

$$20^2 + x^2 = (40 - x)^2 . \rightarrow x = 15 \text{ სმ.}$$

ვიპოვოთ $sin\alpha = \frac{4}{5}, cos\alpha = \frac{3}{5},$



ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე ω_{BC} :

$$V_B = \omega_0 \cdot AB = 40\omega_0.$$

მეორე მხრივ

$$V_B = PB \cdot \omega_{BC} = 15\omega_{BC}\ .$$

აქედან

$$40\omega_0 = 15\omega_{BC}\ \to \omega_{BC} = \frac{8}{3}\omega_0.$$

ვიპოვოთ C წერტილის სიჩქარე

$$V_C = \omega_{BC} \cdot CP = \frac{200}{3}\omega_0.$$

DC რგოლის კუთხური სიჩქარეა

$$\omega_1 = \frac{V_c}{AD} = \frac{5}{3}\omega_0.$$

ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება W_B^n:

$$W_B^n = \frac{V_B^2}{AB} = 40\omega_0^2\ .$$

ვიპოვოთ აჩქარება :

$$W_{BC}^n = \omega_{\boldsymbol{BC}}^2 \cdot BC = \frac{1280}{9}\omega_0^2\ .$$

$$W_C^n = \omega_1^2 \cdot CD = \frac{1000}{9}\omega_0^2.$$

ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება C წერტილის აჩქარებისთვის:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_{CA}^n} + \overrightarrow{W_{CA}^{\tau}}\ .$$

მეორე მხრივ

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_C^n} + \overrightarrow{W_C^{\tau}}.$$

შევადაროთ ერთმანეთს ეს განტოლებები და გვექნება :

$$\overrightarrow{W_C^n} + \overrightarrow{W_C^{\tau}} = \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_{CA}^n} + \overrightarrow{W_{CA}^{\tau}}.$$

დავაგეგმილოთ ეს განტოლება y ღერძზე და მოვიღებთ:

$$-W_C^n = -W_B^n cos\alpha - W_{BC}^n sin\alpha + W_{BC}^{\tau} cos\alpha\ .$$

აქედან ვიპოვოთ

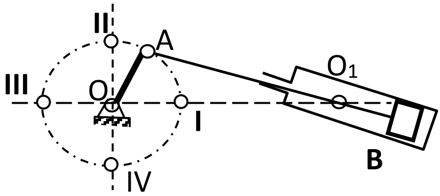
$$W_{BC}^{\tau} = \frac{1}{cos\alpha}\left(-W_C^n + W_B^n cos\alpha + W_{BC}^n sin\alpha\right) = \frac{400}{9}\omega_0^2\ .$$

აქედან გვაქვს:

$$\varepsilon_{BC} = \frac{W_{BC}^{\tau}}{CB} = \frac{20}{9}\omega_0^2\ .$$

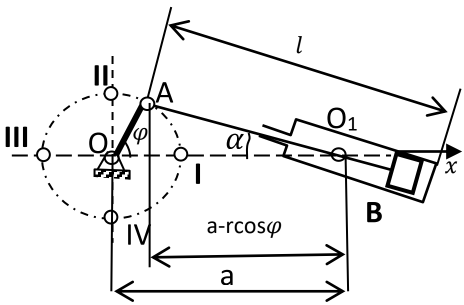
პასუხი: $\omega_{BC} = \frac{8}{3}\omega_0$; $\varepsilon_{BC} = \frac{20}{9}\omega_0^2$.

ამოცანა 18.19



მოძრავცილინდრიან მანქანაში მრუდმხარას სიგრძე OA=12 სმ, ხოლო ბარბაცას სიგრძე AB=60 სმ. იპოვეთ B დგუშის აჩქარება და მისი ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი შემდეგი ორი მდებარეობისათვის: 1) როცა მრუდმხარა და ბარბაცა ურთიერთმართობულია და 2) როცა მრუდმხარას უკავია III მდებარეობა. მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა 5 რად/წმ .

ამოხსნა



ვისარგებლოთ 16.40 ამოცანის შედეგით:

$$\omega_1 = \omega_0 \cdot \frac{r(acos\varphi - r)}{a^2 + r^2 - 2arcos\varphi},$$

ამ დამოკიდებულების გამოყენებით ვიპოვით ბარბაცას კუთხურ აჩქარებას :

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = -r\omega_0^2 asin\varphi \cdot \frac{a^2 - r^2}{(a^2 + r^2 - 2arcos\varphi)^2}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\varepsilon_1 = \frac{r\omega_0^2 asin\varphi(r^2 - a^2)}{(a^2 + r^2 - 2arcos\varphi)^2}, \qquad \varepsilon_1 = \ddot{\beta}.$$

ჩავწეროთ B წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$\begin{cases} x_B = rcos\varphi + lcos\beta \\ y_B = rsin\varphi - lsin\beta \end{cases}.$$

ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარის გეგმილები:

$$\begin{cases} V_{Bx} = \dfrac{dx_B}{dt} = -r\omega sin\varphi - l\omega_1 sin\beta = -r\dot{\varphi}sin\varphi - l\dot{\beta}_1 sin\beta \\ V_{By} = \dfrac{dy_B}{dt} = r\omega cos\varphi - l\omega_1 cos\beta = r\dot{\varphi}cos\varphi - l\dot{\beta}_1 cos\beta \end{cases}.$$

ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარების გეგმილები:

$$W_{Bx} = -r(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi) - l\left(\ddot{\beta}sin\beta + \dot{\beta}^2 cos\beta\right),$$

$$W_{By} = -r(\ddot{\varphi}sin\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi) - l\left(\ddot{\beta}cos\beta - \dot{\beta}^2 cos\beta\right).$$

სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილების გამოსახულებაში ჩავსვათ კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების გამოსახულებები და მივიღებთ:

$$V_{Bx} = -r\omega_0 \left[sin\varphi + sin\beta \cdot \frac{l(acos\varphi - r)}{a^2+r^2-2arcos\varphi}\right],$$

$$V_{By} = r\omega_0 \left[cos\varphi - cos\beta \cdot \frac{l(acos\varphi - r)}{a^2+r^2-2arcos\varphi}\right],$$

$$W_{Bx} = -r\omega_0^2 \left\{\frac{[r(acos\varphi - r)^2 cos\beta + a(r^2-a^2)sin\varphi sin\beta]l}{(a^2+r^2-2arcos\varphi)^2} + cos\varphi\right\},$$

$$W_{By} = -r\omega_0^2 \left\{\frac{[r(acos\varphi - r)^2 sin\beta - a(r^2-a^2)sin\varphi cos\beta]l}{(a^2+r^2-2arcos\varphi)^2} + sin\varphi\right\}.$$

ვიცით რა სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები, ვიპოვით სიმრუდის რადიუსს B წერტილში.

შემთხვევა 1) მრუდმხარა და ბარბაცა ურთიერთმართობულია. ამ შემთხვევაში

$$\omega_1 = 0\ ;\ acos\varphi - r = 0, \qquad cos\varphi = \frac{r}{a} = 0{,}2.$$

$$W_B = 6{,}12 \text{ სმ/წმ}^2,\ \ \rho_B = 589 \text{ სმ.}$$

მეორე შემთხვევაში, როცა $\varphi = 180°$, გვაქვს

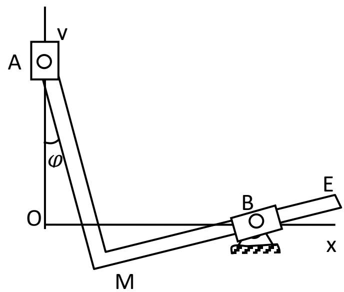
$$W_B = 258{,}3 \text{ სმ/წმ}^2,\ \rho_B = 0{,}39 \text{ სმ.}$$

პასუხი: პირველ შემთხვევაში $W_B = 6{,}12$ სმ/წმ², $\rho_B = 589$ სმ.

მეორე სემთხვევაში $W_B = 258{,}3$ სმ/წმ², $\rho_B = 0{,}39$ სმ.

ამოცანა 18.20

ხისტი მართი კუთხე მოძრაობს ისე, რომ A ბოლო მოძრაობს უძრავ oy ღერძზე, ხოლო მეორე ბოლო მოძრაობს ისე, რომ ME გვერდი ყოველთვის გადის მბრუნავ B ცილინდრში. მანძილი AM=OB=a. A წერტილის სიჩქარე მუდმივია. განსაზღვრეთ M წერტილის სიჩქარე, როგორც φ კუთხის ფუნქცია.



ამოხსნა

ვიპოვოთ მონაკვეთი AC=MB:

$$KM = MBcos\varphi, \rightarrow MB = \frac{a - asin\varphi}{cos\varphi},$$

$$AC = APcos\varphi \ \rightarrow \ AP = \frac{AC}{cos\varphi} = \frac{a - asin\varphi}{cos^2\varphi}.$$

P წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot \frac{a - asin\varphi}{cos^2\varphi} = \omega a \cdot \frac{1}{1+sin\varphi}. \rightarrow \omega = \frac{V_A}{a}(1 + sin\varphi).$$

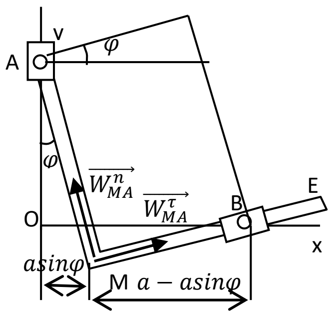
ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{V_A}{a}cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_A}{a}\omega cos\varphi = \frac{V_A^2}{a^2}(1 + sin\varphi)cos\varphi.$$

ვიპოვოთ M წერტილის აჩქარება

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{MA}^n} + \overrightarrow{W_{MA}^\tau},$$

რადგან $W_A = 0$, ამიტომ



$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_{MA}^n} + \overrightarrow{W_{MA}^\tau},$$

$$W_{MA}^n = \omega^2 a = \frac{V_A^2}{a^2}(1 + sin\varphi)^2 \cdot a$$

$$= \frac{V_A^2}{a}(1 + sin\varphi)^2.$$

$$W_{MA}^\tau = \varepsilon a = \frac{V_A^2}{a}(1 + sin\varphi)cos\varphi .$$

$$W = \sqrt{\left(\frac{V_A^2}{a}(1 + sin\varphi)^2\right)^2 + \left(\frac{V_A^2}{a}(1 + sin\varphi)cos\varphi\right)^2} = \frac{V_A^2}{a}\sqrt{2}(1 + sin\varphi)^{3/2} .$$

ვიპოვოთ კუთხე β:

$$tg\beta = \frac{W_{MA}^\tau}{W_{MA}^n} = \frac{cos\varphi}{1+sin\varphi} = tg\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right).$$

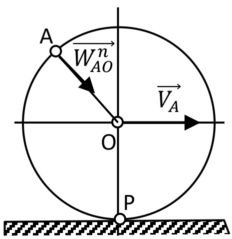
აქედან

$$\beta = 45° - \frac{\varphi}{2}.$$

პასუხი: $W = \frac{V_A^2}{a}\sqrt{2}(1 + sin\varphi)^{3/2}$. აჩქარების ვექტორი მიმართულია კუთხის შიგნით და MA გვერდთან ადგენს

$\beta = 45° - \frac{\varphi}{2}$ კუთხეს.

ამოცანა 18.21



ბორბალი მიგორავს სწორხაზოვანი გზის, მონაკვეთზე ისე, რომ მისი ცენტრი მოძრაობს თანაბრად, მუდმივი

სიჩქარით V. იპოვეთ ფერსოს წერტილის აჩქარება თუ ბორბლის რადიუსია r.

ამოხსნა

სიჩქარეთა მყისი ცენტრი არის P წერტილი. ვიპოვოთ ბორბლის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{V}{r} = const.$$

ბორბლის კუთხური აჩქარებაა $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$.

ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{AO}^n} + \overrightarrow{W_{AO}^\tau} = \overrightarrow{W_{AO}^n} + \overrightarrow{W_{AO}^\tau}.$$

$$W_{AO}^\tau = \varepsilon \cdot r = 0, \quad W_{AO}^n = \omega^2 r = \frac{V^2}{r},$$

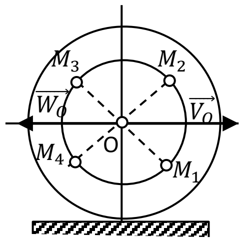
აქედან გამომდინარე

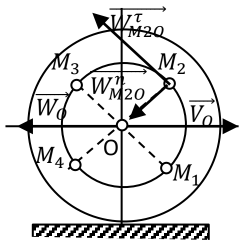
$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_{AO}^n} \ \rightarrow \ W_A = \frac{V^2}{r}.$$

პასუხი: აჩქარება მიმართულია ბორბლის ცენტრისკენ და უდრის $\frac{V^2}{r}$.

ამოცანა 18.22

ვაგონი მოძრაობს გზის სწორხაზოვან მონაკვეთზე შენელებით $W_0 = 2$ მ/წმ² და მოცემულ მომენტში აქვს სიჩქარე $V_0 = 1$ მ/წმ. გორვა უსრიალოა. იპოვეთ როტორის იმ დიამეტრების ბოლო წერტილების აჩქარებები, რომლებიც W_{AO}^n ვერტიკალთან ადგენენ 45° კუთხეს. ბორბლის რადიუსია R=0,5 მ , ხოლო როტორის რადიუსია r=0,25 მ





ამოხსნა

1) ვიპოვოთ ბორბლის კუთხური სიჩქარე:

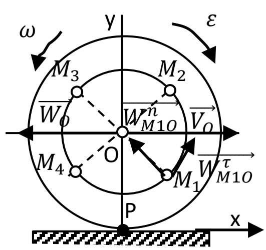
$$\omega = \frac{V(t)}{R}.$$

კუთხური აჩქარებაა

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{R}W.$$

მოცემულ მომენტში

$\omega_0(ttt)=\frac{V_O}{R} = 2$ რად/წმ. $\varepsilon = \frac{W_O}{R} = 4$რად/წმ².



2) ვიპოვოთ როტორის M₁ წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_{M1}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W_{M1O}^n} + \overrightarrow{W_{M1O}^\tau}\ .$$

ვიპოვოთ შესაბამისი აჩქარებები:

$$W_{M1O}^n = \omega^2 r = 16 \text{ მ/წმ}^2,\ \ W_{M1O}^\tau = \varepsilon r = 1 \text{ მ/წმ}^2\ .$$

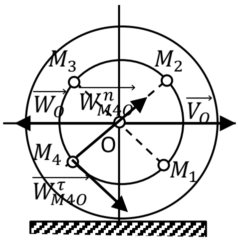
დავაგეგმილოთ ვექტორული ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება:

$$W_{M1x} = -W_0 - W_{M10}^n cos45° + W_{M1O}^\tau cos45° = -2 \text{ მ/წმ}^2\ .$$

$$W_{M1y} = (W_{M10}^n + W_{M1O}^\tau) sin45{=}1{,}414 \text{ მ/წმ}^2\ .$$

$$W_{M1} = \sqrt{W_{M1x}^2 + W_{M1y}^2} = 2{,}449 \text{ მ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ M_2 წერტილის აჩქარება :



$$\overrightarrow{W_{M2}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W_{M2O}^n} + \overrightarrow{W_{M2O}^\tau}\ ,$$

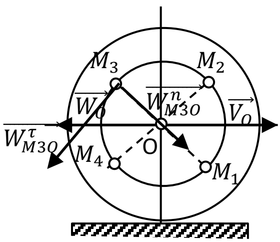
$$W_{M2O}^n = \omega^2 r = 1 \text{მ/წმ}^2,\ \ W_{M2O}^\tau = \varepsilon r = 1 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$W_{M2x} = -W_0 - (W_{M20}^n + W_{M2O}^\tau) cos45°,$$

$$W_{M2y} = (W_{M20}^\tau - W_{M2O}^n) cos45\ ,$$

$$W_{M2} = \sqrt{W_{M2x}^2 + W_{M2y}^2} = 3{,}414 \text{ მ/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ M3 წერტილის აჩქარება:



$$\overrightarrow{W_{M3}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W_{M3O}^n} + \overrightarrow{W_{M3O}^\tau}\ ,$$

$$W_{M3x} = -W_0 + (W_{M30}^n - W_{M3O}^\tau) sin45°,$$

$$W_{M3y} = -(W_{M30}^\tau + W_{M3O}^n) cos45\ ,$$

$$W_{M3} = \sqrt{W_{M3x}^2 + W_{M3y}^2} = 2{,}449 \text{ მ/წმ}^2\ .$$

ვიპოვოთ M4 წერტილის აჩქარება:

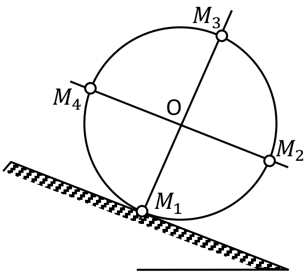
$$\overrightarrow{W_{M4}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W_{M4O}^n} + \overrightarrow{W_{M4O}^\tau},$$

$$W_{M4x} = -W_0 - (W_{M40}^n + W_{M4O}^\tau) cos45°,$$

$$W_{M4y} = (W_{M40}^n - W_{M4O}^\tau) cos45\ .$$

$$W_{M4} = \sqrt{W_{M4x}^2 + W_{M4y}^2}{=}0{,}586 \text{ მ/წმ}^2\ ,$$

პასუხი: $W_{M1} = 2{,}449$ მ/წმ², $W_{M2} = 3{,}414$ მ/წმ², $W_{M3} = 2{,}449$ მ/წმ² , W_{M4}=0,586 მ/წმ² .

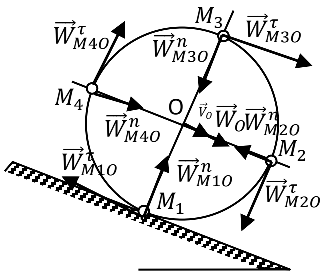


ამოცანა 18.23

ბორბალი გორავს უსრიალოდ ვერტიკალურ სიბრტყეში დახრილი სწორხაზოვანი გზის მონაკვეთზე. იპოვეთ

ორი ურთიერთმართობული დიამეტრის ბოლო წერტილების აჩქარებები, როცა ერთი მათგანი გზის პარალელურია. მოცემულ მომენტში ბორბლის ცენტრის სიჩქარე $V_O = 1$მ/წმ, ხოლო ცენტრის აჩქარებაა $W_O = 3$ მ/წმ², ბორბლის რადიუსია R=0,5 მ.

ამოხსნა



1) ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{V}{R}.$$

2) ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} = \frac{W}{R}.$$

მოცემულ მომენტში

$$\omega_0 = \frac{V_0}{R} = 2 \text{ რად/წმ },\ \varepsilon_0 = \frac{W_0}{R} = 6 \text{ რად/წმ}^2.$$

3) ვიპოვოთ M_1 წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_{M1}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W^n_{M1O}} + \overrightarrow{W^{\tau}_{M1O}}.$$

ვიპოვოთ აჩქარების მდგენელები:

$$W^n_{M1O} = \omega^2 R = 2 \text{ მ/წმ},\ W^{\tau}_{M1O} = \varepsilon R = 3 \text{ მ/წმ}^2 .$$

$$W_{M1x} = W_0 - W^{\tau}_{M1o} = 3 - 3 = 0, W_{M1y} = W^n_{M1O} = 2.$$

გამოვთვალოთ M_1 წერტილის აჩქარება:

$$W_{M1} = \sqrt{W^2_{M1x} + W^2_{M1y}} = 2 \text{ მ/წმ}^2.$$

4) ვიპოვოთ M_2 წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_{M2}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W^n_{M2O}} + \overrightarrow{W^{\tau}_{M2O}}.$$

ვიპოვოთ აჩქარების მდგენელები:

$$W_{M2x} = W_0 - W^n_{M2o} = 3 - 2 = 1 \text{ მ/წმ}^2,$$

$$W_{M2y} = -W^{\tau}_{M2O} = -3 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$W_{M2} = \sqrt{W^2_{M2x} + W^2_{M2y}} = 3{,}16 \text{ მ/წმ}^2 .$$

5) ვიპოვოთ M_3 წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_{M3}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W^n_{M3O}} + \overrightarrow{W^{\tau}_{M3O}}.$$

ვიპოვოთ გეგმილები

$$W_{M3x} = W_0 + W^{\tau}_{M3o} = 3 + 3 = 6 \text{ მ/წმ}^2,$$

$$W_{M3y} = -W^n_{M3O} = -2 \text{ მ/წმ}^2$$

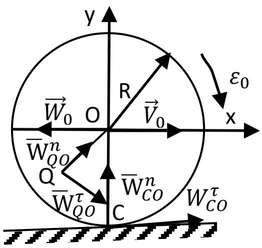
$$W_{M3} = \sqrt{W^2_{M3x} + W^2_{M3y}} = 6{,}32 \text{ მ/წმ}^2$$

) ვიპოვოთ M_4 წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_{M4}} = \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W_{M4O}^n} + \overrightarrow{W_{M4O}^\tau}.$$
$$W_{M4x} = W_0 + W_{M4o}^n = 5\text{მ/წმ}^2,$$
$$W_{M4y} = W_{M4O}^\tau = 3\text{ მ/წმ}^2,$$
$$W_{M4} = \sqrt{W_{M4x}^2 + W_{M4y}^2} = 5{,}83\text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_{M1x} = 2$ მ/წმ². $W_{M2x} = 3{,}16$ მ/წმ². $W_{M3x} = 6{,}32$ მ/წმ². $W_{M3x} = 5{,}83$ მ/წმ².

ამოცანა 18.24



ბორბალი, რომლის რადიუსი R=0,5 სმ, მოძრაობს უსრიალოდ გზის სწორხაზოვან მონაკვეთზე. მოცემულ მომენტში მიცი ცენტრის სიჩქარეა $V_0 = 0{,}5$მ/წმ და შენელება $W_0 = 0{,}5$ მ/წმ². იპოვეთ: 1) ბორბლის აჩქარებათა მყისი ცენტრი, 2) იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც ემთხვევა სიჩქარეთა მყის ცენტრს. 3) M წერტილის აჩქარება და 4) მისი ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი, თუ OM=MC=0,5 მ.

ამოხსნა

1) სიჩქარეთა მყისი ცენტრია C წერტილი. ბორბლს კუთხური სიჩქარე იქნება

$$\omega(t) = \frac{V(t)}{R}.$$

კუთხური აჩქარებაა

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

მოცემულ მომენტში

$$\omega = \frac{V_0}{R} = 1\text{ რად/წმ. } \varepsilon_0 = \frac{W_0}{R} = 1\text{ რად/წმ}^2 .$$

ვიპოვოთ აჩქარებათა მყისი ცენტრი Q :

$$\text{AQ=}\frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon_0^2+\omega_0^4}} = 0{,}35\text{მ. R=AQ=0,35 მ .}$$

გამოვთვალოთ აჩქარების მდგენელები:

$$W_{QO}^n = \varepsilon_0^2 r,\ W_{QO}^\tau = \varepsilon_0 r.$$

ვიპოვოთ $\overrightarrow{W_{QO}}$ ვექტორის მიერ OQ რადიუსთან შედგენილი კუთხე

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0^2} = 1 \ \to \alpha = 45°.$$

აჩქარებათა მყისი ცენტრი ნაჩვენებია ნახაზზე.

2) ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{CO}^n} + \overrightarrow{W_{CO}^\tau}.$$

გამოვთვალოთ აჩქარების მდგენელები:

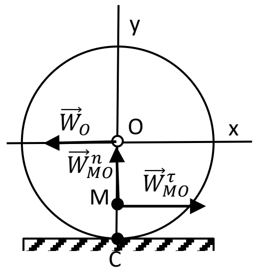
$$W_{CO}^n = \omega_0^2 R = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2, \; W_{CO}^\tau = \varepsilon R = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2.$$

გამოვთვალოთ აჩქარების გეგმილები ღერძებზე:

$$W_{Cx} = -W_0 + W_{CO}^\tau = 0, W_{Cy} = W_{CD}^\tau = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2.$$

აჩქარება უდრის

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2.$$



3) ვიპოვოთ M წერტილის აჩქარება

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{MO}^n} + \overrightarrow{W_{MO}^\tau}.$$

ვიპოვოთ აჩქარების მდგენელები

$$W_M^n = \frac{\omega_0^2 R}{2} = 0{,}25 \text{ მ/წმ}^2, \; W_M^\tau = \frac{\varepsilon R}{2} = 0{,}25 \text{ მ/წმ}^2.$$

გამოვთვალოთ აჩქარება

$$W_{Mx} = -W_0 + W_{MO}^\tau = -0{,}25 \text{ მ/წმ}^2$$

$$W_{My} = W_{MO}^n = 0{,}25 \text{ მ/წმ}^2$$

$$W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2} = 0{,}35 \text{ მ/წმ}^2.$$

4) გამოვთვალოთ M წერტილის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი .

$$V_M = \omega_0 \cdot \frac{R}{2} = 0{,}25 \text{ მ/წმ}.$$

გამოვთვალოთ მხები აჩქარების მოდული

$$W_\tau = \left| \frac{V_{Mx} W_{Mx} + V_{My} W_{My}}{V_M} \right| = 0{,}25 \text{ მ/წმ}^2.$$

გამოვთვალოთ ნორმალური აჩქარება

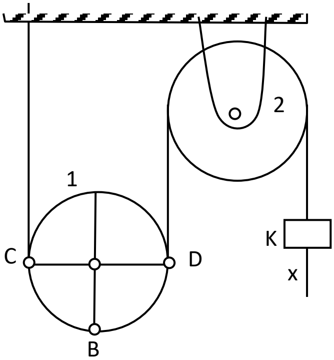
$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = 0{,}25 \text{ მ/წმ}^2.$$

სიმრუდის რადიუსი მოცემულ წერტილში უდრის

$$\rho = \frac{V^2}{W_n^2} = 0{,}25 \text{ მ}.$$

პასუხი: 1) $r = 0{,}35$ მ . $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. 2) $W_C = 0{,}5$ მ/წმ². 3) $W_M = 0{,}35$ მ/წმ². 4) $\rho = 0{,}25$ მ

ამოცანა 18.25



უძრავი და მოძრავი ჭოჭონაქები შეერთებულია უჭიმვადი თოკით. ამ თოკის ბოლოზე მიმაგრებულია ტვირთი ,რომელიც ეშვება დაბლა კანონით: $x=2t^2$ მ. იპოვეთ C, B და D წერტილების აჩქარებები ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში. მოძრავი ჭოჭონაქის რადიუსია 0,2 მ. დრო t=0,5წმ.

ამოხსნა

1) ვიპოვოთ K წერტილის სიჩქარე:

$$V_K = \frac{dx}{dt} = 4t.$$

2) ვიპოვოთ O ჭოჭონაქის ცენტრის სიჩქარე:

$$V_0 = \frac{V_D}{2} = \frac{V_k}{2} = 2t\ .$$

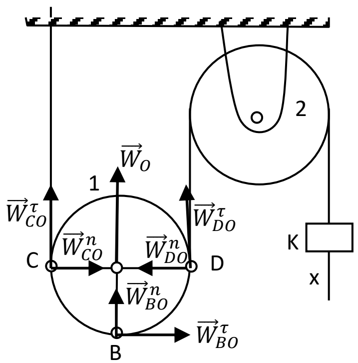
3) ვიპოვოთ ჭოჭონაქის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{V_0}{r} = \frac{2t}{r}.$$

4) ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{r}.$$

როცა t=0, მაშინ $\omega = \omega_0 = 5$ რად/წმ, $\varepsilon = 10$ რად/წმ^2 .



5) ვიპოვოთ D წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{DO}^n} + \overrightarrow{W_{DO}^\tau}\ .$$

$W_{DO}^n = \omega^2 r = 5$ მ/წმ^2, $W_{DO}^\tau = \varepsilon r = 2$ მ/წმ^2,

$W_{Dx} = -W_{DO}^n = -5$ მ/წმ^2, $W_{Dy} = W_0 + W_{DO}^\tau = 4$ მ/წმ^2

$$W_D = \sqrt{W_{Dx}^2 + W_{Dy}^2} = 6{,}4 \text{ მ/წმ}^2$$

6) ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{BO}^n} + \overrightarrow{W_{BO}^\tau}.$$

$W_{BO}^n = \omega^2 r = 5$ მ/წმ^2, $W_{BO}^\tau = \varepsilon r = 2$ მ/წმ^2.

$W_{Bx} = W_{BO}^\tau = 2$ მ/წმ^2 , $W_{By} = W_0 + W_{BO}^n = 7$მ/წმ^2

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} = 7{,}28 \text{ მ/წმ}^2.$$

7) ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{CO}^n} + \overrightarrow{W_{CO}^\tau},$$

$$W_{CO}^n = \omega^2 r = 5 \text{ მ/წმ}^2, \; W_{CO}^\tau = \varepsilon r = 2 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$W_{Cx} = W_{CO}^n = 5 \text{ მ/წმ}^2, \; W_{Cy} = W_0 - W_{CO}^\tau = 0$$

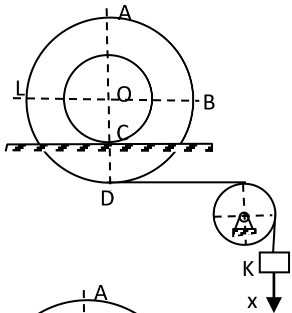
$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = 5 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_D = 6{,}4$ მ/წმ², $W_B = 7{,}28$ მ/წმ², $W_C = 5$ მ/წმ²,

ამოცანა 18.26

K ტვირთი, რომელიც მოძრავ L კოჭასთან დაკავშირებულია უჭიმვადი ძაფის საშუალებით, ეშვება ვერტიკალურად დაბლა კანონით : $x=t^2$ მ. კოჭა გორავს უსრიალოდ უძრავ ჰორიზონტალურ ღერძზე. იპოვეთ: კოჭას ფერსოზე მდებარე A,B და D წერტილების აჩქარებები, კოჭას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება t=0,5 წმ მომენტისთვის, ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში, როცა OD=2OC=0,2 მ

.



ამოხსნა

1) ვიპოვოთ D წერტილის სიჩქარე:

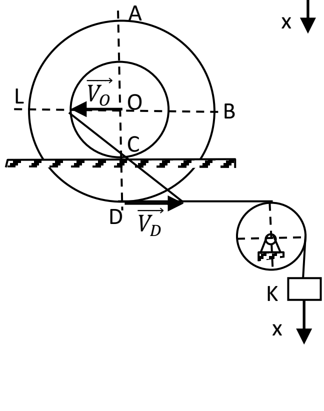
$$V_D = \frac{dx}{dt} = 2t . V_D(0{,}5) = 1 \text{ მ}.$$

2) ვიპოვოთ კოჭას კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{V_D}{CD} = 10 \text{ რად/წმ}.$$

3) ვიპოვოთ კოჭას ცენტრის აჩქარება:

$$W_O = \frac{dV_O}{dt} = 2 \text{ მ/წმ}^2.$$



4) ვიპოვოთ კოჭას კუთხური აჩქარება: რადგან ძაფი უჭიმვადია, ამიტომ

$$W_K = W_{DC}^\tau = \varepsilon \cdot CD \;\to \varepsilon = \frac{W_K}{CD} = \frac{2}{0{,}1} = 20 \text{ რად/წმ}^2.$$

5) ვიპოვოთ $\overrightarrow{W_A}$:

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{AO}^n} + \overrightarrow{W_{AO}^\tau},$$

$$W_O = 2 \text{ მ/წმ}^2, \; W_{AO}^n = \omega^2 AO = 20$$

მ/წმ^2 , $W_{AO}^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = 4$ მ/წმ^2 ,

ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები ღერძებზე:

$$W_{Ax} = -W_O - W_{AO}^{\tau} = -6 \text{ მ/წმ}^2 ,$$

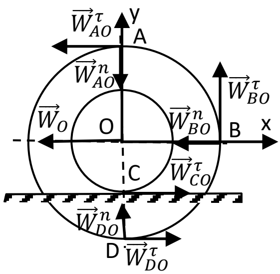
$$W_{Ay} = -20 \text{ მ/წმ}^2 ,$$

$$W_A = \sqrt{W_{Ax}^2 + W_{Ay}^2} = 20{,}9 \text{ მ/წმ}^2.$$

6) ვიპოვოთ D წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_D} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{DO}^n} + \overrightarrow{W_{DO}^{\tau}},$$

$$W_{DO}^{\tau} = \varepsilon \cdot OD = 4 \text{ მ/წმ}^2 ,\ W_{DO}^n = \omega^2 DO = 20 \text{ მ/წმ}^2 ,$$



$$W_{Dx} = -W_O - W_{DO}^{\tau} = 2 \text{ მ/წმ}^2,\ W_{Dy} = 20 \text{ მ/წმ}^2,$$

$$W_D = \sqrt{W_{Dx}^2 + W_{Dy}^2} = 20{,}1 \text{ მ/წმ}^2.$$

7) ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება :

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{BO}^n} + \overrightarrow{W_{BO}^{\tau}},$$

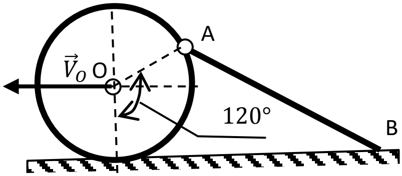
$$W_{Bx} = -W_O - W_{BO} = -22 \text{ მ/წმ}^2,$$

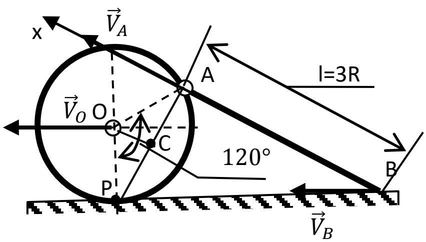
$$W_{By} = 4 \text{ მ/წმ}^2 ,$$

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} = 22{,}4 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_A = 20{,}9$ მ/წმ^2, W_B =22,4 მ/წმ^2 , $W_D = 20{,}1$ მ/წმ^2, $\omega = 10$ რად/წმ, $\varepsilon = 20$ რად/წმ^2 .

ამოცანა 18.27





ბორბალი, რომლის რადიუსია R, მიგორავს უსრიალოდ. ბორბლის O ცენტრი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით V_O . A წერტილში მასზე მიერთებულია l=3R სიგრძის AB ღერო. ღეროს მეორე ბოლო სრიალებს სიბრტყეზე. ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში იპოვეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება. იპოვეთ ასევე ღეროს B ბოლოს სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

1) ვიპოვოთ PA მონაკვეთის სიგრძე:

$$PA = 2Rcos30° = R\sqrt{3}\ .$$

2) ვიპოვოთ AK მანძილი:

$$\mathrm{AK=PAsin60°} = \frac{3}{2}R.$$

3) ვიპოვოთ კუთხე β:

$$sin\beta = \frac{KA}{AB} = \frac{1}{2}\ \rightarrow\ \beta = 30°\ .$$

4) ვიპოვოთ ბორბლის კუთხური სიჩქარე :

$$\omega = \frac{V_O}{R}\ .$$

5) ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = PA \cdot \omega = R\sqrt{3} \cdot \frac{V_O}{R} = V_O\sqrt{3}\ .$$

6) ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = V_B cos30°\ \rightarrow V_B = \frac{V_A}{cos30°} = 2V_O.$$

7) ვიპოვოთ ღეროს კუთხური სიჩქარე:

ერთის მხრივ

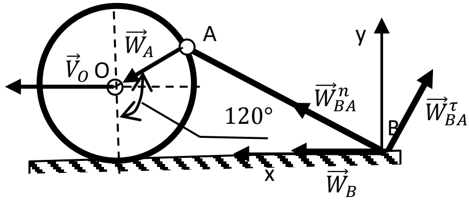
$$V_{BA} = \omega_{AB} \cdot 3R,$$

მეორე მხრივ

$$V_{BA} = V_B sin30°.$$

ამ ორი ტოლობიდან გვაქვს

$$\omega_{AB} \cdot 3R = V_B sin30°\ \rightarrow \omega_{BA} = \frac{V_O}{3R}\ .$$



8) ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარება. ვისარგებლოთ 18.21 ამოცანის ამოხსნით.

$$W_A = \frac{V_O^2}{R}.$$

9) ვიპოვოთ აჩქარება W_{BA}^n:

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{V_O^2}{3R}\ .$$

10) ვიპოვოთ ღეროს კუთხური აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}\ .$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ღერზებზე და მივიღებთ:

$$0 = -W_A cos60° + W_{BA}^n cos60° + W_{BA}^\tau cos30°.$$

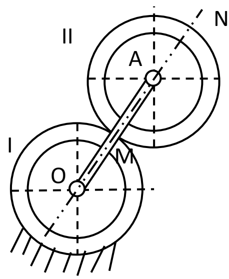
აქედან გვაქვს

$$W_{BA}^{\tau} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{V_O^2}{R},\ \varepsilon_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{V_O^2}{R^2},$$

$$W_B = W_A cos30° + W_{BA}^{n} cos30° - W_{BA}^{\tau} cos60° = \frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{V_O^2}{R}.$$

პასუხი: $\omega_{BA} = \frac{V_O}{3R}$; $\varepsilon_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{V_O^2}{R^2}$; $V_B = 2V_O$; $W_B = \frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{V_O^2}{R}$;

ამოცანა 18.28



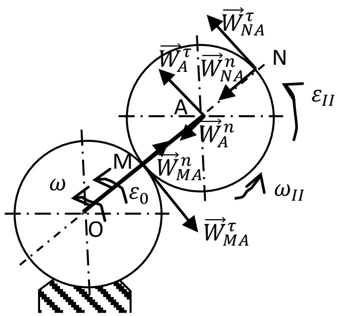
R=12 სმ რადიუსიანი კბილანა მოძრაობაში მოჰყავს OA მრუდმხარას, რომელიც ბრუნავს ისეთივე რადიუსის უძრავი კბილანის O ღერძის გარშემო. მრუდმხარას კუთხური აჩქარება $\varepsilon_0 = 8$ რად/წმ² და მოცემულ მომენტში აქვს კუთხური სიჩქარე $\omega = 2$ რად/წმ. იპოვეთ: 1) მოძრავი კბილანას იმ წერტილია აჩქარება, რომელიც მოცემულ მომენტში ემთხვევა სიჩქარეთა მყის ცენტრს, 2) მის მიმართ დიამეტრალურად მდებარე N წერტილის აჩქარება და 3) აჩქარებათა მყისი ცენტრის მდებარეობა.

ამოხსნა

M წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

1) ვიპოვოთ კბილანას კუთხური სიჩქარე. ერთი მხრივ

$$V_A = \omega\cdot 2R,$$



მეორე მხრივ

$$V_A = \omega_{II}\cdot R,$$

ამ ორი ტოლობის შედარებით მივიღებთ:

$$\omega_{II} = 2\omega = 4 \text{ რად/წმ}.$$

2) ამ ტოლობის გაწარმოებით ვიპოვით კუთხურ აჩქარებას

$$\varepsilon_{II} = 2\varepsilon_0 = 16 \text{ რად/წმ}^2.$$

3) ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_A^{\tau}}.$$

ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარების მდგენელები:

$$W_A^n = \omega^2\cdot 2R = 96 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot 2R = 192 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_A = \sqrt{(W_A^n)^2 + (W_A^\tau)^2} = 214{,}66 \text{ სმ/წმ}^2.$$

4) ვიპოვოთ M წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_A^\tau} + \overrightarrow{W_{MA}^n} + \overrightarrow{W_{MA}^\tau},$$

$$W_{MA}^n = \omega_{II}^2 R = 192 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_{MA}^\tau = \varepsilon_{II} R = 192 \text{ სმ/წმ}^2,$$

დავაგეგმილოთ ვექტორული ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე:

$$W_{Mx} = -W_A^\tau + W_{MA}^\tau = -192 + 192 = 0,$$

$$W_{My} = -W_A^n + W_{MA}^n = 96 \text{ სმ/წმ2},$$

$$W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2} = 96 \text{ სმ/წმ}^2.$$

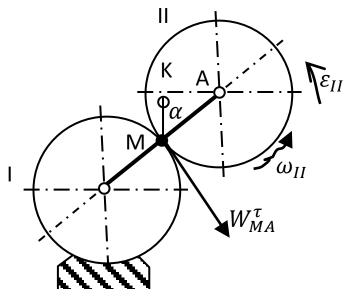
5) ვიპოვოთ N წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_N} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_A^\tau} + \overrightarrow{W_{NA}^n} + \overrightarrow{W_{NA}^\tau},$$

$$W_{NA}^n = \omega_{II}^2 R = 192 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_{NA}^\tau = \varepsilon_{II} R = 192 \text{ სმ/წმ}^2.$$

დავაგეგმილოთ საკოორდინატო ღერძებზე ვექტორული განტოლება და გვექნება:



$$W_{Nx} = -W_A^\tau - W_{NA}^\tau = -384 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_{Ny} = -W_A^n - W_{NA}^n = -288 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_N = \sqrt{W_{Nx}^2 + W_{Ny}^2} = 480 \text{ სმ/წმ}^2.$$

6) ვიპოვოთ აჩქარებათა მყისი ცენტრი K:

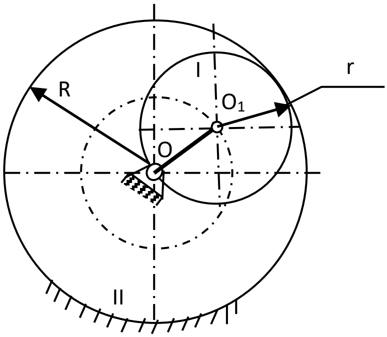
მანძილი აჩქარებათა მყის ცენტრამდე უდრის:

$$MK = \frac{W_M}{\sqrt{\varepsilon_{II}^2 + \omega_{II}^2}} = 4{,}24 \text{ სმ}. \quad tg\alpha = \frac{\varepsilon_{II}}{\omega_{II}^2} = 1 \ \rightarrow \alpha = 45°.$$

პასუხი: $W_M = 96$ სმ/წმ^2 ; $W_N = 480$ სმ/წმ^2 ; MK=4,24 სმ ; $\alpha = 45°$.

ამოცანა 18.29

იპოვეთ ფიგურის აჩქარებათა მყისი ცენტრი და ფიგურის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც მოცემულ მომენტში მას ემთხვევა. აპოვეთ აგრეთვე იმ წერტილის აჩქარება, რომელიც მოცემულ მომენტში სიჩქარეთა მყის ცენტრს ემთხვევა, თუ I კბილანა, რომლის რადიუსია r, გორავს II კბილანაზე უსრიალოდ. II კბილანას რადიუსია R=2r.

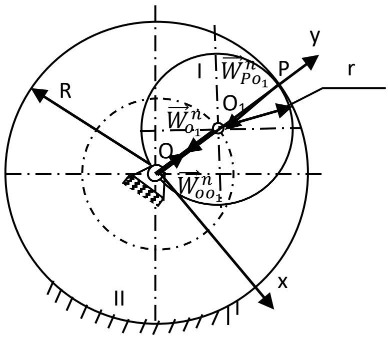


მრუდმხარა OO1, რომელსაც მოძრაობაში მოჰყავს მოძრავი კბილანა, ბრუნავს თანაბრად კუთხური სიჩქარით ω_0.

ამოხსნა

1) ამოცანის პირობით კბილანა I გორავს უსრიალოდ, ამიტომ P წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ვიპოვოთ O1 წერტილის სიჩქარე:

$$V_{O1} = r \cdot \omega_0.$$



2) ვიპოვოთ O1 წერტილის აჩქარება:

$$W_{O1} = r \cdot \omega_0^2 .$$

3) ვიპოვოთ O წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_O} = \overrightarrow{W_{O1}^n} + \overrightarrow{W_{OO1}^n} + \overrightarrow{W_{OO1}^\tau} .$$

რადგან I კბილანას კუთხური აჩქარება ნულის ტოლია, ამიტომ $\overrightarrow{W_{OO1}^\tau} = 0$. ე.ი.

$$\overrightarrow{W_O} = \overrightarrow{W_{O1}^n} + \overrightarrow{W_{OO1}^n} .$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება:

$$\begin{cases} W_{Ox} = 0 \\ W_{Oy} = W_{O1}^n - W_{Oo1}^n = r \cdot \omega_0^2 - r \cdot \omega_0^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \ W = 0.$$

ე.ი. O წერტილი არის აჩქარებათა მყისი ცენტრი.

4) ვიპოვოთ P წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_P} = \overrightarrow{W_{O1}^n} + \overrightarrow{W_{PO1}^n},$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ:

$$\begin{cases} W_{Px} = 0 \\ W_{Py} = -r \cdot \omega_0^2 - r \cdot \omega_0^2 = -2r\omega^2 \end{cases} \rightarrow W_P = 2r\omega^2 .$$

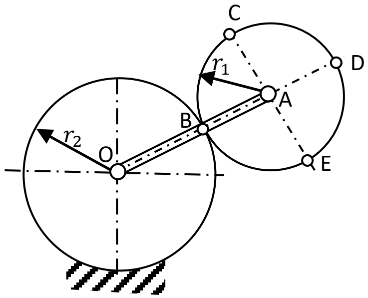
5) ვიპოვოთ O წერტილის სიჩქარე:

$$V_K = V_0 = 2r\omega_0 .$$

პასუხი: აჩქარებათა მყისი ცენტრი ემთხვევა უძრავი კბილანას O ცენტრს. $V_K = 2r\omega_0, W_C = 2r\omega^2$.

ამოცანა 18.30

იპოვეთ $r_1 = 5$ სმ რაადიუ-სიანი კბილანას B, C, D, E წერ-ტილების აჩქარებები, თუ კბილანა გორავს გარედან უსრიალოდ უძრ-ავ კბილანაზე, რომლის რადიუსია $r_2 = 15$ სმ. მოზრავი კბილანა მოძრაობაში მოჰყავს OA მრუდ-მხარას, რომელიც ბრუნავს მუდივი კუთხური სიჩქარით $\omega_0 = 3$ რად/წმ უძრავი კბილანას ღერძის გარშემო.



ამოხსნა

1) ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე:

$$V_A = \omega_0(r_1 + r_2)$$

მეორე მხრივ

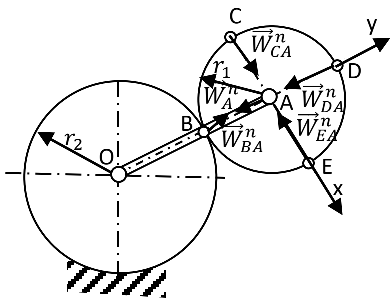
$$V_A = r_1 \cdot \omega_1 .$$

შევადაროთ ეს ტოლობები ერთმანეთს და მივიღებთ :

$$r_1 \cdot \omega_1 = \omega_0(r_1 + r_2) \ \rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_0(r_1+r_2)}{r_1} = 12 \text{ რად/წმ.}$$

2) ვიპოვოთ მოძრავი კბილანას კუთხური აჩქარება :

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)\frac{d\omega_0}{dt} = 0 \ .$$



3) ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_A^\tau} \ .$$

$$W_A^n = (r_1 + r_2)\omega_0^2 = 180 \ , W_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot (r_1 + r_2) = 0$$

$$W_A = 180 \text{ სმ/წმ}^2 \ .$$

4) ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^n} \ ,$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ღერძებზე :

$$\begin{cases} W_{Bx} = 0 \\ W_{By} = W_{BA}^n - W_A^n \end{cases}$$

ვიპოვოთ აჩქარება W_{BA}^n

$$W_{BA}^{n} = \omega_1^2 \cdot r = 720 \text{ სმ/წმ}^2$$
$$W_{By} = 720 - 180 = 540 \text{ სმ/წმ}^2$$
$$W_B = 540 \text{ სმ/წმ}^2.$$

5) ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{CA}^n},$$
$$W_{Cx} = W_{CA}^{n} = \omega_1^2 r_1 = 720 \text{ სმ/წმ}^2$$
$$W_{Cy} = -W_A^n = -180 \text{ სმ/წმ}^2$$
$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = 742 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ანალოგიურად ვიპოვით E წერტილის აჩქარებას:

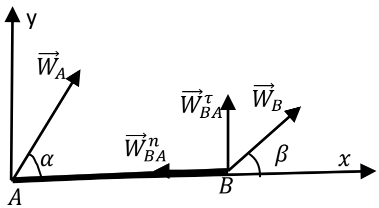
$$W_E = W_C = 742 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

6) ვიპოვოთ D წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_D} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{DA}^n}.$$
$$W_{Dx} = 0, W_{Dy} = -(W_{DA}^n + W_A^n) = -900 \text{ სმ/წმ}^2,$$
$$W_D = \sqrt{W_{Dx}^2 + W_{Dy}^2} = 900 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: $W_B = 540$ სმ/წმ² , $W_D = 900$ სმ/წმ², $W_C = W_E = 742$ სმ/წმ².

ამოცანა 18.31



დაამტკიცეთ, რომ, როცა მონაკვეთის, რომელიც სიბრტყეში მოძრაობს, კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლია, მაშინ მისი ბოლოების აჩქარებების გეგმილები მონაკვეთზე ერთმანეტის ტოლია .

ამოხსნა

ჩავწეროთ განტოლება :

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$

დავაგეგმილოთ x ღერძზე :

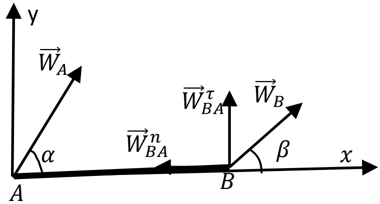
$$W_B cos\beta = W_A cos\alpha - W_{BA}^{\tau};$$

რადგან $\omega = 0$, ამიტომ $\overrightarrow{W_{BA}^n} - 0$. წინა ტოლობიდან მივიღებთ;

$$W_B cos\beta = W_A cos\alpha .$$

ამოცანა 18.32

ვაჩვენოთ, რომ როცა კუთხური აჩქარება ნულის ტოლია, მაშინ მონაკვეთის ბოლო წერტილების აჩქარებების გეგმილები მონაკვეთის მართობზე ერთმანეთის ტოლია. მონაკვეთი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას.



ამოხსნა

ჩავწეროთ განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} .$$

დავაგეგმილოთ ეს განტოლება y ღერძზე :

$$W_B sin\beta = W_A sin\alpha + W_{BA}^{\tau}$$

რადგან კუთხური აჩქარება ნულის ტოლია, ამიტომ $W_{BA}^{\tau} = 0$. წინა ტოლობიდან გვექნება

$$W_B sin\beta = W_A sin\alpha.$$

ამოცანა 18.33

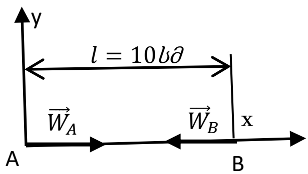
10 სმ სიგრძის AB ღერო მოძრაობს სიბრტყეში. მისი ბოლო წერტილების აჩქარებებს აქვთ ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება და $W_A = 10$ სმ/წმ² , $W_B = 20$ სმ/წმ² .იპოვეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ 18.32 ამოცანის შედეგით და ვიპოვით, რომ $\varepsilon = 0$.

ჩავწეროთ განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n}$$



დავაგეგმილოთ x ღერძზე და მივიღებთ:

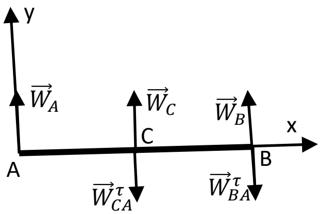
$$-W_B = W_A - W_{BA}^n ,$$

აქედან

$$W_{BA}^n = W_A + W_B = \omega^2 l \ \ \rightarrow \omega^2 = \frac{W_A + W_B}{l} = 3 \ \rightarrow \omega = \sqrt{3} \ რად/წმ.$$

პასუხი: $\omega = \sqrt{3}$ *რად/წმ.*

ამოცანა18.34



12 სმ სიგრძია AB ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. მისი ბოლოების აჩქარებები ღეროს მართობულადაა და მიმართულია ერთ მხარეს. ცნობილია: $W_A = 24$ სმ/წმ², $W_B = 12$ სმ/წმ². იპოვეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და , აგრეთვე, მისი სიმძიმის C ცენტრის აჩქარება.

ამოხსნა

ჩავწეროთ განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W^n_{BA}} + \overrightarrow{W^{\tau}_{BA}}.$$

დავაგეგმილოთ ღერძებზე და მივიღებთ:

$$\text{x: } 0 = W^n_{BA} \rightarrow \omega_{AB} = 0.$$

$$\text{y : } W_B = W_A - W^{\tau}_{BA} \rightarrow W^{\tau}_{BA} = W_A - W_B,$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W^{\tau}_{BA}}{AB} = \frac{W_A - W_B}{AB} = 1 \text{ რად/წმ}^2.$$

ვიპოვოთ C წერტილის სიჩქარე:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W^{\tau}_{CA}}.$$

დავაგეგმილოთ y ღერძზე:

$$W_C = W_A - W^{\tau}_{CA} = W_A - \varepsilon_{BA} \,.AC = 18 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამრიგად, C წერტილის აჩქარება მართობულია AB წრფის, მიმართულია A და B წერტილების აჩქარების გასწვრივ და უდრის 18 სმ/წმ² .

პასუხი: $\omega_{AB} = 0;\ \varepsilon_{AB} = 1$ რად/წმ²; C წერტილის აჩქარება მართობულია AB წრფის, მიმართულია A და B წერტილების აჩქარების გასწვრივ და უდრის 18 სმ/წმ².

ამოცანა 18.35

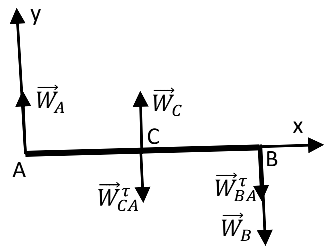
0,2 მ სიგრძის ძელი ასრულებს ბრტყელ- პარალელურ მოძრაობას. მისი A და B ბოლოების აჩქარებები AB მონაკვეთის მართობულია, აქვთ ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება და თითოეული უდრის 2 სმ/წმ² .

იპოვეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე, კუთხური აჩქარება და მისი შუა C წერტილის აჩქარება.

ამოხსნა

ჩავწეროთ განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$



დავაგეგმილოთ ღერძებზე და მივიღებთ:

$$\text{x: } 0 = W_{BA}^n \ \rightarrow \omega_{AB} = 0.$$

$$\text{y : -} W_B = W_A - W_{BA}^\tau \ \rightarrow W_{BA}^\tau = \ W_A + W_B,$$

$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB} = \frac{W_A + W_B}{AB} = 20$ რად/წმ².

ვიპოვოთ C წერტილის სიჩქარე:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}^\tau}.$$

დავაგეგმილოთ y ღერძზე:

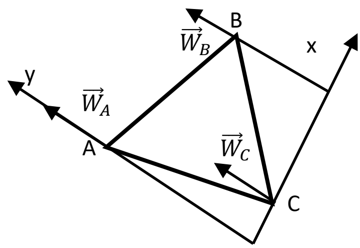
$$W_C = W_A - W_{CA}^\tau = 2 - 0{,}1 \cdot 20 = 0.$$

ამრიგად, C წერტილი არის აჩქარებათა მყისი ცენტრი.

პასუხი: $\omega_{AB} = 0$; $\varepsilon_{AB} = 20$ რად/წმ²; $W_C = 0$.

ამოცანა 18.36

ABC სამკუთხედის A და B წვეროების აჩქარებები ვექტორულად ტოლი არიან $\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_B} = \vec{a}$. სამკუთხედი მოძრაობს სიბრტყეში. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და , ასევე სამკუთხედის მესამე წვეროს აჩქარება.



ამოხსნა

ჩავწეროთ განტოლება :

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_B} = \vec{a}$ და მივიღებთ:

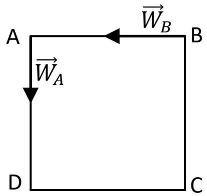
$$\overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau} = 0,$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ :

$$W_{BA}^n = 0, W_{BA}^\tau = 0 \ \rightarrow \ \omega_{AB} = 0, \ \varepsilon_{AB} = 0.$$

ამრიგად, სამკუთხედის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება ნულის ტოლია. ამიტომ მისი მესამე წვეროს აჩქარებაც ისეთივეა როგორც დანარჩენი ორის $\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_B} = \vec{a}$.
პასუხი: $\omega_{AB} = 0,\ \varepsilon_{AB} = 0, \overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_B} = \vec{a}$.

ამოცანა 18,37

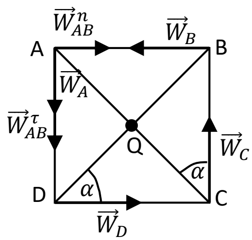


ABCD კვადრატი, რომლის გვერდია a, ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. იპოვეთ აჩქარებათა მყისი ცენტრი და C და D წერტილების აჩქარებები, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ მომენტში ორი A და B წერტილის აჩქარება ერთნაირია და უდრის 10 სმ/წმ². აჩქარებების მიმართულებები ემთხვევა კვადრატის გვერდებს.

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად $\left|\overrightarrow{W_A}\right| = \left|\overrightarrow{W_B}\right| = W = 10$ სმ/წმ².
ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება:

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{AB}^n} + \overrightarrow{W_{AB}^\tau}.$$



დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\begin{cases} 0 = W_B - W_{BA}^n \\ W_A = W_{BA}^\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W_{BA}^n = W \\ W_{BA}^\tau = W \end{cases}.$$

რადგან $W_{BA}^\tau = \varepsilon a,\ W_{BA}^n = \omega^2 a$, ამიტომ წინა ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\varepsilon = \frac{W}{a},\ \ \omega = \sqrt{\frac{W}{a}}.$$

ვიპოვოთ α კუთხე:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{W_{BA}^\tau}{W_{BA}^n} = 1 \ \rightarrow \alpha = 45°.$$

ვიპოვოთ მანძილი აჩქარებათა მყის ცენტრამდე:

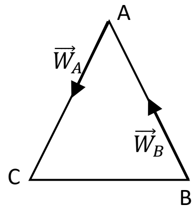
$$AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ამრიგად, აჩქარებათა მყისი ცენტრი მდებარეობს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში. აქედან გამომდინარე $W_D = W_C = 10$სმ/წმ².

პასუხი: $W_D = W_C = 10$ სმ/წმ². აჩქარებათა მყისი ცენტრი მდებარეობს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში.

ამოცანა 18.38

ტოლგვერდა სამკუთხედი ABC მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში. მისი A და B წვეროების აჩქარებები მოცემულ მომენტში უდრის 16 სმ/წმ² და მიმართულია სამკუთხედის გვერდის გასწვრივ(იხ.ნახ.) იპოვეთ სამკუთხედის მესამე წვეროს აჩქარება.



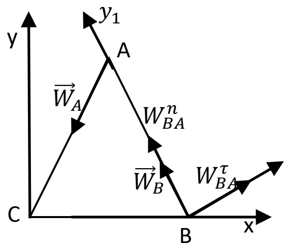
ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად

$$\left|\overrightarrow{W_A}\right| = \left|\overrightarrow{W_B}\right| = W = 16 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

ჩავწეროთ ვექტორული განტოლება B წერტილისათვის:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$



დავაგეგმილოთ ეს განტოლება საკოორდინატო ღერძებზე:

$$0 = -W\cos 30° + W_{BA}^\tau,$$

$$W = -W\sin 30° + W_{BA}^n.$$

აქედან ვიპოვით

$$W_{BA}^\tau = W\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}W. \; W_{BA}^n = W(1 + \sin 30°) = \frac{3W}{2}.$$

ჩავწეროთ განტოლება C წერტილის აჩქარებისათვის:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{CB}^n} + \overrightarrow{W_{CB}^\tau}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე:

$$W_{Cx} = -W_B\cos 60° + W_{CB}^n = -W \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}W = W.$$

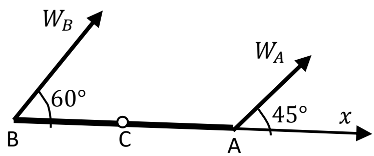
$$W_{Cy} = W_B\sin 60° - W_{CB}^\tau = 0.$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = W = 16 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამრიგად, აჩქარება W_C მიმართულია C-დან B- კენ.

პასუხი: $W_C = 16$ სმ/წმ² და მიმართულია C-დან B- კენ.

ამოცანა18.39



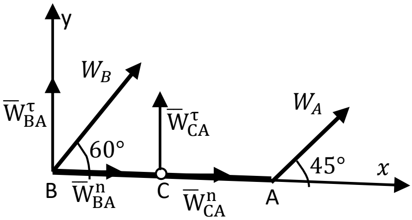
$l = 0{,}2$ მ სიგრძის AB ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში. A წერტილის აჩქარება $W_A = 2$მ/წმ² და

x ღერძთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. B წერტილის აჩქარება $W_A = 4{,}42$ მ/წმ² და x ღერძთან ადგენს 60° კუთხეს. იპოვეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და, აგრეთვე, მისი შუა C წერტილის აჩქარება.

ამოხსნა

1) ჩავწეროთ აჩქარების განტოლება B წერტილისათვის:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}.$$



დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ღერძებზე:

$$\begin{cases} W_B cos60° = W_A cos45° + W_{BA}^n \\ W_B sin60° = W_A sin45° + W_{BA}^n \end{cases}.$$

ამ განტოლებების გამოყენებით ვიპოვით კუთხურ სიჩქარესა და კუთხურ აჩქარებას ;

$$\omega = \sqrt{\frac{W_B cos60° - W_A cos45°}{l}} = 2 \text{ რად/წმ}.$$

$$\varepsilon = \frac{W_B sin60° = W_A sin45°}{l} = 12{,}06 \text{ რად/წმ}^2.$$

2) ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}^n} + \overrightarrow{W_{CA}^\tau}.$$

გამოვთვალოთ აჩქარებები:

$$W_{CA}^n = \omega^2 \cdot \frac{l}{2} = 0{,}4 \text{ მ/წმ}^2 \quad W_{CA}^\tau = \varepsilon \cdot \frac{l}{2} = 1{,}206 \text{ მ/წმ}^2$$

ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარების გეგმილები:

$$W_{Cx} = W_A cos45° + W_{CA}^\tau = 1{,}81 \text{ მ/წმ}^2$$

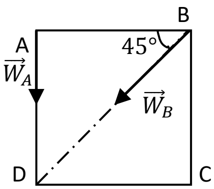
$$W_{Cy} = W_A sin45° + W_{CA}^\tau = 2{,}26 \text{ მ/წმ}^2$$

ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარება:

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = 3{,}18 \text{ მ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $\omega = 2$რად/წმ; $\varepsilon = 12{,}06$ რად/წმ²; $W_C = 3{,}18$ მ/წმ² .

ამოცანა 18.40



ABCD კვადრატი, რომლის გვერდი a=2სმ, ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. მოცემულ მომენტში მისი A და B წვეროების აჩქარებები მოდულით უდრის $W_A = 2$ სმ/წმ² და

$W_B = 4\sqrt{2}$ სმ/წმ². მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე. იპოვეთ კვადრატის მყისი კუთხური სიჩქარე და მყისი კუთხური აჩქარება და, ასევე, C წერტილის აჩქარება.

ამოცანა

1) ვიპოვოთ კვადრატის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება:

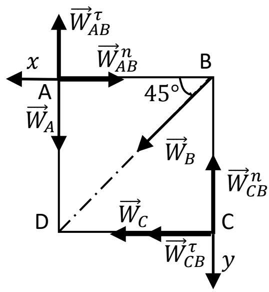
$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{AB}^n} + \overrightarrow{W_{AB}^\tau}\ .$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\begin{cases} 0 = W_B cos45° - W_{AB}^n \\ W_A = W_B sin45° - W_{AB}^\tau \end{cases} .$$

$$\begin{cases} W_{AB}^n = \omega^2 a \\ W_{AB}^\tau = \varepsilon a \end{cases} .$$

ამ განტოლებებიდან ამოვხსნათ კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და გვექნება :



$$\omega = \sqrt{\frac{W_B}{a} \cdot cos45°} = \sqrt{2}\text{რად/წმ}\ ,$$

$$\varepsilon = \frac{W_B sin45° - W_A}{a} = 1 \text{ რად/წმ}^2\ .$$

2) ვიპოვოთ C წერტილის აჩქარება:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{CB}^n} + \overrightarrow{W_{CB}^\tau}\ .$$

$W_{CB}^n = \omega^2 a = 4$ სმ/წმ², $W_{CB}^\tau = \varepsilon a = 2$.სმ/წმ² .

გამოვთვალოთ C წერტილის აჩქარების გეგმილები:

$$W_{Cx} = W_B cos45° + W_{CB}^\tau = 6 \text{ .სმ/წმ}^2\ ,$$

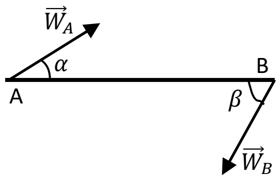
$$W_{Cy} = W_B sin45° - W_{CB}^n = 4 \text{ .სმ/წმ}^2$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = 4.\text{სმ/წმ}^2\ .$$

პასუხი: $\omega = \sqrt{2}$რად/წმ , $\varepsilon = 1$ რად/წმ² , $W_C = 4$ სმ/წმ² .

ამოცანა 18.41

იპოვეთ AB ღეროს შუა წერტილის აჩქარება, თუ მისი ბოლო წერტილების აჩქარებებია: $W_A = 10$ სმ/წმ² , $W_B = 20$სმ/წმ² , ხოლო AB წრფესთან შედგენილი კუთხეებია: $\alpha = 10°, \beta = 70°$.

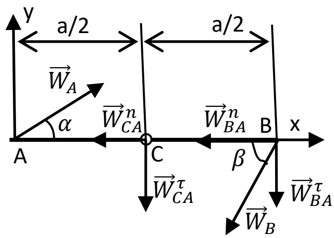


ამოხსნა

კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების საპოვნელად გვაქვს განტოლება:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau}\,.$$

დავაგეგმილოთ ღერძებზე და



მივიღებთ:

$$\begin{cases}-W_B cos\beta = W_A cos\alpha - W_{BA}^n \\ -W_B sin\beta = W_A sin\alpha - W_{BA}^\tau\end{cases},$$

$$\begin{cases}W_{BA}^n = W_B cos\beta + W_A cos\alpha \\ W_{BA}^\tau = W_B sin\beta + W_A sin\alpha\end{cases},$$

$$\begin{cases}\omega^2 a = W_B cos\beta + W_A cos\alpha \\ \varepsilon a = W_B sin\beta + W_A sin\alpha\end{cases}.$$

აქედან ვპოულობთ:

$$\omega^2 = \frac{W_B cos\beta + W_A cos\alpha}{a},$$

$$\varepsilon = \frac{W_B sin\beta + W_A sin\alpha}{a}\,.$$

ვიპოვოთ C წერტილის სიჩქარე:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}^n} + \overrightarrow{W_{CA}^\tau}\,.$$

გამოვთვალოთ აჩქარებები W_{CA}^n და W_{CA}^τ:

$$W_{CA}^n = \omega^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(W_B cos\beta + W_A cos\alpha),$$

$$W_{CA}^\tau = \varepsilon \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(W_B sin\beta + W_A sin\alpha)\,.$$

ვიპოვოთ აჩქრების გეგმილები:

$$W_{Cx} = W_A cos\alpha - W_{CA}^n = \frac{1}{2}(W_A cos\alpha - W_B cos\beta),$$

$$W_{Cy} = W_A sin\alpha - W_{CA}^\tau = \frac{1}{2}(W_A cos\alpha - W_B cos\beta).$$

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(W_A cos\alpha - W_B cos\beta)^2 + (W_A cos\alpha - W_B cos\beta)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{W_A^2 + W_B^2 - 2W_A W_B \cos(\beta - \alpha)} = 8{,}66 \text{ სმ/წმ}^2.$$

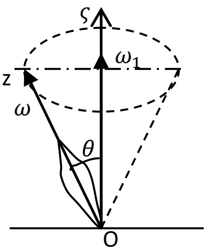
პასუხი: $W_C = \frac{1}{2}\sqrt{W_A^2 + W_B^2 - 2W_A W_B \cos(\beta - \alpha)} = 8{,}66$ სმ/წმ².

უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მოძრაობა, სივრცითი ორიენტაცია.

19. უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მოძრაობა

ამოცანა 19.1

ბზრიალას z ღერძი ვერტიკალური $O\xi$ ღერძის გარშემო თანაბრად აღწერს კონუსს, რომლის გაშლის კუთხეა 2θ. ბზრიალას $O\xi$ ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა ω_1, ხოლო საკუთარი ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა ω. იპოვეთ ბზრიალას აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე Ω.



ამოხსნა

აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის ვექტორი უდრის

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \overrightarrow{\omega_1}.$$

მისი სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

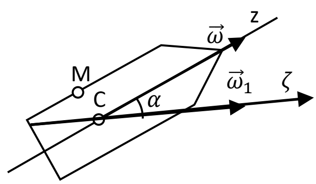
$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 cos\theta}\ .$$

$$\cos(\Omega, z) = \frac{\omega_z}{\Omega} = \frac{\omega + \omega_1 cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 cos\theta}}.$$

პასუხი: $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 cos\theta}$, $\cos(\Omega, z) = \frac{\omega_z}{\Omega} = \frac{\omega + \omega_1 cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 cos\theta}}$.

ამოცანა 19.2

საარტილერიო ჭურვი მოძრაობს ატმოსფეროში ისე, რომ ბრუნავს z ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. იმავდროულად ჭურვის ღერძი ბრუნავს სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის მხები ξ ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ ჭურვის M წერტილის სიჩქარე მისი ბრუნვითი მოძრაობის დროს, თუ CM=r და CM მართობულია z ღერძის. კუთხე z და ξ ღერძებს შორის უდრის γ.



ამოხსნა

მოცემულ შემთხვევაში საკუთარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე უდრის

$$\dot{\varphi} = \omega,$$

პრეცესიის კუთხური სიჩქარეა

$$\dot{\psi} = \omega_1,$$

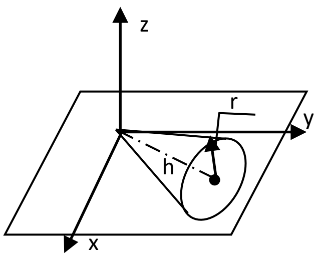
ნუტაციის კუთხე $\theta = \gamma$, ხოლო კუთხური სიჩქარე $\dot{\theta} = 0$.

M წერტილის სიჩქარე მისი ბრუნვითი მოძრაობის დროს უდრის

$$V_M = \omega_z MC = \left(\dot{\psi}cos\theta + \dot{\varphi}\right)r = (\omega_1 cos\gamma + \omega)r.$$

პასუხი: $V_M = (\omega_1 cos\gamma + \omega)r.$

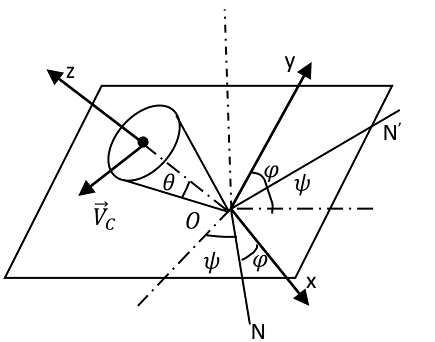
ამოცანა 19.3



კონუსი, რომლის სიმაღლე h=4სმ და რადიუსი r=3სმ, გორავს სიბრტყეზე უსრიალოდ, ისე, რომ მისი O წვერო უძრავი რჩება. იპოვეთ კონუსის კუთხური სიჩქარე, იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც აღწერს კუთხური სიჩქარის ჰოდოგრაფს და კონუსის კუთხური აჩქარება, თუ ფუძის ცენტრის სიჩქარე $V_C = 48სმ/წმ = const.$

ამოხსნა

ბრუნვის მყისი ღერძი არის OK̓ წრფე. დავუშვათ, კონუსის ბრუნვა z ღერძის გარშემო ხდება საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით.



გვექნება

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}},$$

რადგან (ნახ.ბ) $\omega = OK, \dot{\psi} = AK, \dot{\varphi} = OA,$ ამიტომ სამკუთხედი OAK-დან

$$\omega = \dot{\psi}ctg\theta, \ \ \dot{\varphi} = \frac{\dot{\psi}}{sin\theta}, \text{სადაც } \dot{\psi} = \frac{V_C}{C_0C}.$$

სამკუთხედი OAK-დან

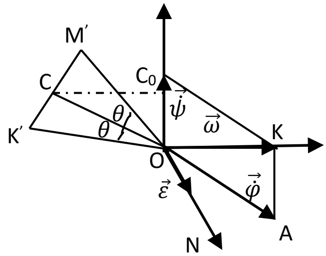
$$C_0C = hcos\theta = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{16}{4}.$$

იმის გათვალისწინებით,რომ

$$sin\theta = \frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{3}{5}, \qquad ctg\theta = \frac{h}{r} = \frac{4}{3},$$

მივიღებთ

$\dot{\psi} = 15$ რად/წმ, $\dot{\varphi} = 25$ რად/წმ, $\omega = 20$ რად/წმ.



მაშინ K წერტილისკოორდინატებს ექნება სახე:

$x_1 = 20cos15t, \quad y_1 = 20sin15t, z_1 = 0.$

კუთხური აჩქარების ვექტორი უდრის K წერტილის სიჩქარეს, ანუ

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\dot{\psi}} \times \overrightarrow{\omega}.$$

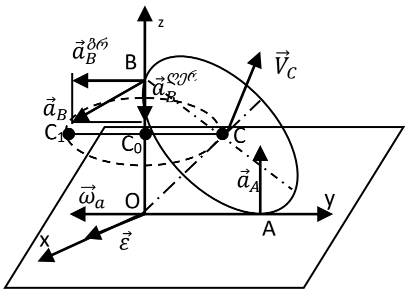
რადგან $\vec{\dot{\psi}} \perp \overrightarrow{\omega}$ ამიტომ

$$\varepsilon = \dot{\psi}\omega sin90° = 300 \text{ რად/წმ}^2.$$

პასუხი: $\omega = 20$ რად/წმ, $x_1 = 20cos15t,\ y_1 = 20sin15t, z_1 = 0, \varepsilon = 300$ რად/წმ².

ამოცანა 19.4

კონუსი, რომლის O წვერო უძრავია, უსრიალოდ გორავს სიბრტყეზე. კონუსის სიმაღლე CO=18სმ, ხოლო კუთხეწვეროსთან $AOB = 90°$. კონუსის ფუძის ცენტრი C ბრუნავს თანაბრად და ცაწყის მდებარეობას უბრუნდება 1 წამის შემდეგ. იპოვეთ AB დიამეტრის B წერტილის სიჩქარე, კონუსის კუთხური აჩქარება და A და B წერტილების აჩქარებები.



ამოხსნა

ბრუნვის მყისი ღერძი არის უძრავ სიბრტყეზე მდებარე OA მსახველი. თუ დავუშვებთ, რომ კონუსი ბრუნავს oz ღერძის გარშემო საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით, კუთხური

სიჩქარის ვექტორები $\overrightarrow{\omega_r}$, $\overrightarrow{\omega_e,}\overrightarrow{\omega_a,}$ ისეა განლაგებული, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. ამ შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r,\ \omega_r = \sqrt{2}\omega_e.$$

ამოცანის პირობის ძალით

$$\omega_e = \frac{2\pi}{1} = 2\pi რად/წმ.$$

აქედან გამომდინარე

$$\omega_r = 2\sqrt{2}\pi რად/წმ.$$

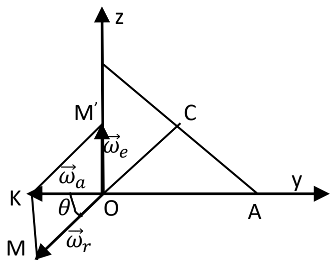
A და B წერტილების სიჩქარეები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$V_A = h_\omega^A \cdot \omega, V_B = h_\omega^B \cdot \omega,$$

სადაც h_ω^A და h_ω^B არიან შესაბამისად A და B წერტილებიდან ბრუნვის მყის ღერძზე დაშვებული მართობის სიგრძეების. ა) და ბ) ნახაზებიდან ჩანს

$$h_\omega^A = 0,\ h_\omega^B = OB = \sqrt{2}OC = 18\sqrt{2}\ სმ.$$

შედეგად მივიღებთ



$$V_A = 0;\ V_B = 36\sqrt{2}\pi\ სმ/წმ.$$

A და B წერტილების აჩქარებების საპოვნელად ვისარგებლოთ ფორმულებით:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{ღერძ} + \vec{a}_A^{ბრ},\ \vec{a}_B = \vec{a}_B^{ღერძ} + \vec{a}_B^{ბრ}.$$

წინასწარ განვსაზღვროთ

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \ \to \varepsilon = 2\pi \cdot 2\pi \cdot sin90° = 4\pi^2\ რად/წმ^2.$$

მაშინ

$$\vec{a}_A^{ბრ} = \vec{\varepsilon}_A \times \overrightarrow{OA}\ ,\ \ \vec{a}_A^{ღერძ} = \vec{\omega}_A \times \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{OA} = 0,$$

რადგან $\vec{\omega}_A$ და $\overrightarrow{OA}$ ვექტორები მდებარეობენ ერთ წრფეზე, ანუ $h_\omega^A = 0$.

$$a_A = \varepsilon \cdot OA \cdot sin90° = 42\sqrt{2}\pi^2 = 1000\ სმ/წმ^2\ .$$

ანალოგიურად

$$\vec{a}_B^{ბრ} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB}\ \to a_B^{ბრ} = \varepsilon \cdot OB \cdot sin90° = 1000\ სმ/წმ^2\ .$$

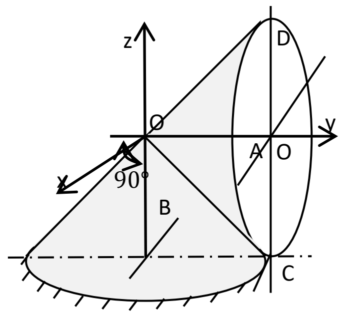
$$a_B^{ღერძ} = \omega_a^2 \cdot OB = 1000\ სმ/წმ^2\ .$$

სრული აჩქარება უდრის

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^{ბრ}\right)^2 + \left(a_B^{ღერძ}\right)^2} = 1000\sqrt{2}\ სმ/წმ^2\ .$$

პასუხი: $V_B = 36\sqrt{2}\pi$ სმ/წმ, $\varepsilon = 4\pi^2$ რად/წმ², $a_A = 1000$ სმ/წმ² , $a_B = 1000\sqrt{2}$ სმ/წმ² .

ამოცანა 19.5



კონუსი A შემოურბენს უძრავ B კონუსს 12-ჯერ წუთში. კონუსის სიმაღლე OO_1=10სმ. იპოვეთ კონუსის წარმტანი კუთხური სიჩქარე ω_e , რომელიც აქვს z ღერძის გარსემო ბრუნვის დროს, და ფარდობითი კუთხური სიჩქარე ω_rკონუსის OO_1 ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს, აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე ω_a და აბსოლუტური კუთხური აჩქარება ε_a.

ამოხსნა

ნახაზიდან გვაქვს

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r,\ \omega_e = \frac{V_{O1}}{OO_1} = \frac{120\cdot 2\pi}{60} = 4\pi \text{ რად/წმ.}$$

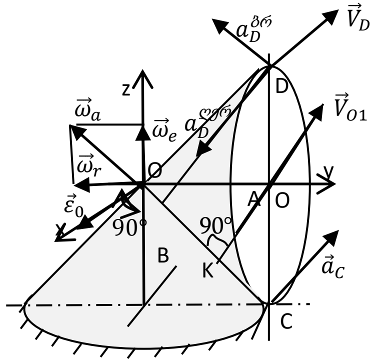
$$\omega_r = \omega_e ctg30° = 6,93 \text{ რად/წმ.}$$

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{sin30°} = 8\pi \text{ რად/წმ.}$$

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \to \varepsilon_a = \omega_e \cdot \omega_r sin90° = 27,71 \text{ რად/წმ}^2.$$

პასუხი: $\omega_e = 4\pi$ რად/წმ, $\omega_r = 6,93$ რად/წმ, $\omega_a = 8\pi$ რად/წმ, $\varepsilon_a = 27,71$ რად/წმ².

ამოცანა 19.6



წინა ამოცანის პირობებით იპოვეთ მოძრავი კონუსის C და D წერტილების სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

რადგან $\vec{\omega}_a$ და $\overrightarrow{OC}$ ვექტორები ერთ წრფეზე არიან, ამიტომ

$$\vec{V}_C = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OC} = 0\,.$$

$$\vec{a}_C^{ღერძ} = \vec{\omega}_a \times \left(\vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OC}\right) = \vec{\omega}_a \times \vec{V}_C = 0.$$

$$\vec{a}_C^{ბრ} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OC} \to a_C = a_C^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot OC \cdot sin90° = 160\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

C წერტილის აჩქარება

მიმართულია OC წრფის მართობულად yOz სიბრტყეში.

ანალოგიურად გვექნება D წერტილისათვის :

$$\vec{V}_D = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OD} \ \rightarrow \ V_D = \omega_a \cdot OD \cdot sin120° = 80\pi \text{ სმ/წმ} .$$

$$\vec{a}_D^{\text{ბრ}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OD} \ \rightarrow \ a_D^{\text{ბრ}} = \varepsilon_a \cdot ODsin90° = 320\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

ვექტორი $\vec{a}_D^{\text{ბრ}}$ მართობულია $\overrightarrow{OD}$ ვექტორისა და CD წრფესთან ადგენს 30° კუთხეს.

$$\vec{a}_D^{\text{ღერძ}} = \vec{\omega}_a \times \vec{V}_D \ \rightarrow a_D^{\text{ღერძ}} = \omega_a V_D sin90° = 640\pi^2 \text{სმ/წმ}^2.$$

ვექტორი $\vec{a}_D^{\text{ღერძ}}$ მართობულია OC წრფის და DC წრფესთან ადგენს 30° კუთხეს.

საბოლოო მივიღებთ:

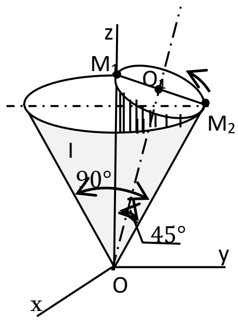
$$a_{Dy} = -a_D^{\text{ბრ}} sin30° - a_D^{\text{ღერძ}} sin30° = -480\pi^2 \text{სმ/წმ}^2$$

$$a_{Dz} = a_D^{\text{ბრ}} cos30° - a_D^{\text{ღერძ}} cos30° = -160\sqrt{3}\,\pi^2 \text{სმ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $\vec{V}_C = 0, V_D = 80\pi$ სმ/წმ და მიმართულია x ღერძის პარალელურად.

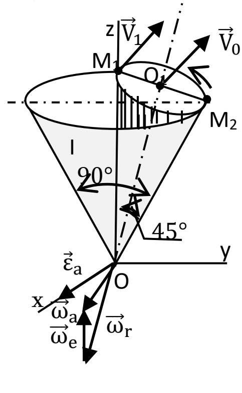
$a_C = 160\pi^2$ სმ/წმ², C წერტილის აჩქარება მიმართულია OC წრფის მართობულად yOz სიბრტყეში.

D წერტილის აჩქარების გეგმილებია: $a_{Dy} = -480\pi^2$, $a_{Dz} = -160\sqrt{3}\,\pi^2$ სმ/წმ².



ამოცანა 19.7

კონუსი II, რომლის გაშლის კუთხე $\alpha_2 = 45°$, შიგნიდან გორავს I უძრავი ცილინდრის ზედაპირზე, რომლის გაშლის კუთხე $\alpha_1 = 90°$. მოძრავი კონუსის სიმაღლეა $OO_1 = 100$ სმ. მოძრავი კონუსის ფუძის ცენტრი აღწერს წრეწირს 0,5 წამში. იპოვეთ წარმტანი (z ღერძის გარშემო), ფარდობითი (OO1 ღერძის გარშემო) და აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე და აბსოლუტური კუთხური აჩქარება.



ამოხსნა

ნახაზიდან გვაქვს, რომ

$$\omega_e = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ რად/წმ.}$$

ვექტორი $\vec{\omega}_e$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ.

$$\omega_a = \omega_e = 4\pi \text{ რად/წმ.}$$

ვექტორი $\vec{\omega}_a$ მიმართულია OM_2 ღერძის გასწვრივ.

$$\omega_r = \sqrt{\omega_a^2 + \omega_e^2 - 2\omega_e\omega_r cos135°} = 7,39\pi \text{ რად/წმ.}$$

ვექტორი $\vec{\omega}_r$ მიმართულია OO_1 ღერძის გასწვრივ.

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \ \rightarrow \varepsilon_a = \omega_e\omega_a sin135° = 11,31\pi^2.$$

ვექტორი $\vec{\varepsilon}_a$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ.

პასუხი: $\omega_e = 4\pi$ რად/წმ. მიმართულია z ღერძის გასწვრივ.

$\omega_r = 7,39\pi$ რად/წმ , მიმართულია OO_1 ღერძის გასწვრივ

$\omega_a = 4\pi$ რად/წმ, მიმართულია OM_2 ღერძის გასწვრივ.

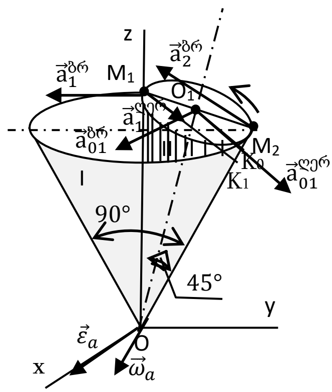
$\varepsilon_a = 11,31\pi^2$ რად/წმ^2, მიმართულია z ღერძის გასწვრივ.

ამოცანა 19.8

წინა ამოცანის პირობებით იპოვეთ მოძრავი კონუსის O_1 , M_1 , M_2 წერტილების სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

კონუსის O_1 , M_1 , M_2 წერტილების აჩქარებები არის ბრუნვითი და ღერძისკენული მდგენელების ვექტორული ჯამი. რადგან ეს წერტილები მოთავსებულია yOz სიბრტყეში, ამიტომ მათი აჩქარებების მდგენელებიც მოთავსებული არიან იმავე სიბრტყეში და განისაზღვრებიან Oy და Oz ღერძებზე გეგმილებით. ამ წერტილების სიჩქარეები არიან xOz სიბრტყის მართობები, რადგან ვექტორი $\vec{\omega}_a$ მოთავსებულია ამ სიბრტყეში.



O_1 წერტილისთვის გვაქვს:

$$V_0 = \omega_a \cdot O_1K_0 = \omega_a \cdot OO_1 \cdot sin22,5° = 153,1\pi \text{ სმ/წმ.}$$

$$a_0^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot OO_1 = 800\sqrt{2}\,\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$a_0^{ღერძ} = \omega_a^2 \cdot O_1K_0 = \omega_a^2 \cdot OO_1 sin22,5° = 800\pi^2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

$$a_{Oy} = a_0^{ღერძ} cos45° - a_0^{ბრ} cos22,5° = -612,3\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2$$

$$a_{Oz} = -a_0^{ღერძ} sin45° + a_0^{ბრ} cos22,5° = 0 .$$

ვექტორი $\vec{a}_0$ მიმართულია O_1 დან Oz ღერძის მართობულად.

წერტილი M_1:

$$V_1 = \omega_a \cdot M_1K_1 = 306,2\pi \text{ სმ/წმ}.$$

$$a_1^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot OM_1 = 1600\sqrt{2-\sqrt{2}}\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

$$a_1^{ღერძ} = \omega_a^2 \cdot M_1K_1 = 1600\sqrt{2-\sqrt{2}}\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

$$a_{1y} = -a_1^{ბრ} + a_1^{ღერძ} cos45° = -358,7\, \pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

$$a_{1z} = -a_1^{ღერძ} cos45° = -865,9\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

წერტილი M_2 :

$$V_2 = \omega_a \cdot M_2M_2 = 0.$$

$$\vec{a}_2^{ღერძ} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM_2} = 0.$$

$$a_2 = a_2^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot OM_2 = 1224,6\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

ვექტორი $\vec{a}_2$ ძევს OO_1M_2 სიბრტყეში და მიმართულია OM_2 -ის მართობულად.

პასუხი: $V_0 = 153,1\pi$ სმ/წმ, მიმართულია Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით.

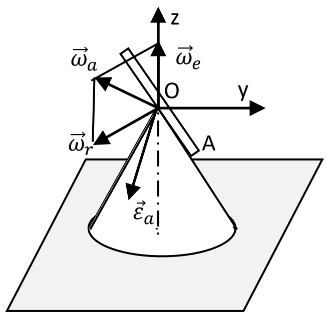
$V_1 = 306,2\pi$ სმ/წმ. მიმართულია Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით.

$V_2 = 0$, $a_0 = 612,3\pi^2$ სმ/წმ^2. მიმართულია Oz ღერძის მართობულად.

აჩქარების გეგმილები M_1 წერტილისათვის: $a_{1y} = -358,7\, \pi^2$ სმ/წმ^2. $a_{1z} = -865,9\pi^2$ სმ/წმ^2 .

$a_2 = 1224,6\pi^2$ სმ/წმ^2 .

ამოცანა 19.9



R=4 $\sqrt{3}$ სმ რადიუსიანი დისკო ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო ისე, რომ გადაგორდება უძრავ ცილინდრზე, რომლის გაშლის კუთხეა 60°. იპოვეთ დისკოს საკუთარი სიმეტრიის ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, თუ დისკოს A წერტილის აჩქარება სიდიდით მუდმივია და უდრის $W_A = 48$ სმ/წმ².

ამოხსნა

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r, \omega_e = \frac{\omega_r}{sin30°} = 2\omega_r,$$

$$\omega_a = \omega_r ctg30° = \sqrt{2}\,\omega_r,\ \varepsilon_a = \omega_e\omega_r sin30° = \sqrt{3}\omega_r^2\ .$$

რადგან A წერტილი ძევს ბრუნვის მყის ღერძზე, ამიტომ $W_A^{ღერძ} = 0$, მაშინ მივიღებთ

$$W_A = W_A^{ბრ} = \varepsilon_A \cdot OA = 12\omega_r^2.$$

გავუტოლოთ მოცემულ მნიშვნელობას და მივიღებთ:

$$12\omega_r^2 = 48\ \rightarrow\ \omega_r = 2 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_r = 2$ რად/წმ.

ამოცანა19.10

სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო. მოცემულ მომენტში მისი კუთხური სიჩქარე გამოისახება ვექტორით, რომლის კოორდინატებია: $\sqrt{3}\,,\sqrt{5}\,,\sqrt{7}$. იპოვეთ ამ მომენტში იმ წერტილის სიჩქარე, რომლის კოორდინატებია: $\sqrt{12}\,,\sqrt{20}\,,\sqrt{28}$.

ამოხსნა

ეილერის კინემატიკური განტოლებების შესაბამისად ჩავწეროთ სიჩქარის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები:

$$V_x = z\omega_y - y\omega_z, V_y = x\omega_z - z\omega_x, V_z = y\omega_x - x\omega_y\ .$$

ჩავსვათ შესაბამისი მნიშვნელობები და მივიღებთ:

$$V_x = \sqrt{28}\cdot\sqrt{5} - \sqrt{20}\cdot\sqrt{7}=0,$$

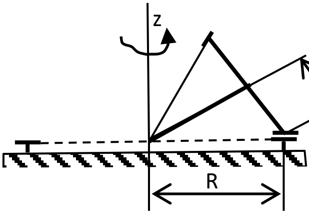
$$V_y = \sqrt{12}\cdot\sqrt{7} - \sqrt{28}\cdot\sqrt{3} = 0.$$

$$V_z = \sqrt{20}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{12}\cdot\sqrt{5} = 0.$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 0.$$

პასუხი: V=0.

ამოცანა 19.11



კონუსური კბილა თვალი, რომლის ღერძი გადაიკვეთება საყრდენი კბილანას გეომეტრიულ ღერძთან ამ უკანასკნელის ცენტრში, წუთში ხუთჯერ შემოუვლის კბილანას. იპოვეთ კბილანას კუთხური სიჩქარე საკუთარი ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს და მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, თუ საყრდენი კბილანას რადიუსი ორჯერ მეტია კონუსური კბილანას რადიუსზე: R=2r.

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად

$$\omega_e = \frac{5\cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi}{6}\text{ რად/წმ.}$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\omega_r = \frac{\omega_e}{sin\alpha},\ \omega_a = \omega_e ctg\alpha.$$

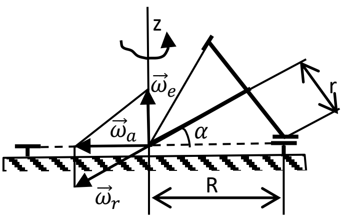
ცხადია, რომ

$$sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{1}{2},\ tg\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} = \sqrt{3}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\omega_r = 1{,}047\text{ რად/წმ},\quad \omega_a = 0{,}906\text{ რად/წმ.}$$

პასუხი: $\omega_r = 1{,}047$ რად/წმ, $\omega_a = 0{,}906$ რად/წმ.



ამოცანა 19.12

სხეულის კუთხური სიჩქარეა $\omega = 7$ რად/წმ. მისი მყისი ღერძი მოცემულ მომენტში უძრავ ღერძებთან ადგენს α, β და γ კუთხეებს. იპოვეთ სხეულის იმ წერტილის

სიჩქარე და ამ სიჩქარის გეგმილები უძრავ ღერძებზე, რომლის კოორდინატები მოცემულ მომენტში არის 0,2,0. იპოვეთ ასევე მანძილი ამ წერტილიდან მყის ღერძამდე, თუ
$cos\alpha = \frac{2}{7}, cos\gamma = \frac{6}{7}$.

ამოხსნა

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარის მიერ y ღერძთან შედგენილი კუთხის კოსინუსი:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \rightarrow cos^2\beta = 1 - cos^2\alpha - cos^2\gamma = \frac{9}{49} \rightarrow cos\beta = \frac{3}{7}.$$

კუთხური სიჩქარის გეგმილები ღერძებზე იქნება:

$$\omega_x = \omega cos\alpha = 2, \omega_y = \omega cos\beta = 3, \omega_z = \omega cos\gamma = 6.$$

სიჩქარის გეგმილები გამოითვლება ტოლობებით:

$$V_x = z\omega_y - y\omega_z = -12\ ,$$
$$V_y = x\omega_z - z\omega_x = 0,$$
$$V_z = y\omega_x - x\omega_y = 4,$$
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 12{,}65 \text{ მ/წმ}.$$

მეორე მხრივ

$$V = \omega \cdot d \rightarrow d = \frac{V}{\omega} = 1{,}82 \text{ მ}.$$

პასუხი: $V_x = -12$ მ/წმ, $V_y = 0, V_z = 4$ მ/წმ, $V = 12{,}65$ მ/წმ , $d = 1{,}82$ მ.

ამოცანა 19.13

იპოვეთ სხეულის მყისი ღერძის განტოლება და კუთხური სიჩქარე , თუ ცნობილია, რომ სხეულის $M_1(0,0,2)$ წერტილის სიჩქარის გეგმილები სხეულთან დაკავშირებულ ღერძებზე უდრის $V_{x1} = 1,\ V_{y1} = 2\ , V_{z1} = 0$, ხოლო $M_2(0,1,2)$ წერტილის სიჩქარის მიმართულების კოსინუსებია: -2/3, 2/3, -1/3.

ამოხსნა

საწყისი მონაცემების გათვალისწინებით ეილერის კონემატიკური განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} V_{1x} = z_1\omega_y - y_1\omega_z \\ V_{1y} = x_1\omega_z - z_1\omega_x \\ V_{1z} = y_1\omega_x - x_1\omega_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 2\omega_y \\ 2 = -2\omega_x \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \ \omega_x = -1\ , \omega_y = \frac{1}{2}.$$

M_2 წერტილისთვის გვექნება:

$$\begin{cases} V_{2x} = z_2\omega_y - y_2\omega_z \\ V_{2y} = x_2\omega_z - z_2\omega_x \\ V_{2z} = y_2\omega_x - x_2\omega_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{2x} = 1 - \omega_z \\ V_{2y} = 2 \\ V_{2z} = -1. \end{cases}$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2} = \sqrt{6 - 2\omega_z + \omega_z^2},$$

$$cos(\vec{V}_2, Oz) = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{\sqrt{6-2\omega_z+\omega_z^2}} \rightarrow 6 - 2\omega_z + \omega_z^2 = 3 \rightarrow \omega_{z1} = -1, \omega_{z2} = 3 \rightarrow$$

$$V_2 = 3\ .$$

მყისი ღერძის განტოლებაა

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

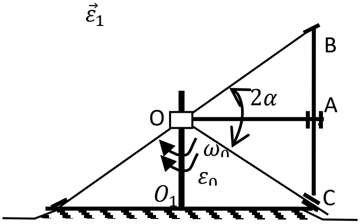
აქედან ვწერთ

$$\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} \\ \frac{x}{-1} = \frac{z}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$ - ორი სიბრტყის გადაკვეთა.

$$\omega = \sqrt{{\omega_x}^2 + {\omega_y}^2 + {\omega_z}^2} = 3{,}2 \text{ რად/წმ}.$$

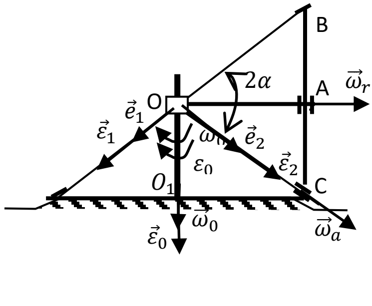
პასუხი: $x + 2y = 0, 3x + z = 0.\ \omega = 3{,}2$ რად/წმ.

ამოცანა 19.14



OA მრუდმხარაზე თავისუფლად დასმული კონუსური კბილანა გორავს უძრავ საყრდენ კბილანაზე. იპოვეთ მოძრავი კბილანას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, თუ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, შესაბამისად, უდრის ω_0 , ε_0 .

ამოხსნა



შემოვიტანოთ ერთეულოვანი ვექტორები $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$, რომლებიც მიმართულია შესაბამისად OC წრფის გასწვრივ და OAC სიბრტყის მართობულად.

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \rightarrow \omega_a sin\alpha = \omega_0 \rightarrow \vec{\omega}_a = \omega_a \vec{e}_1 = \frac{\omega_0}{sin\alpha}\vec{e}_1.$$

$$\vec{\varepsilon}_a = \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} \cdot \frac{\vec{e}_1}{sin\alpha} + \frac{\omega_0}{sin\alpha}\frac{d\vec{e}_1}{dt} =$$

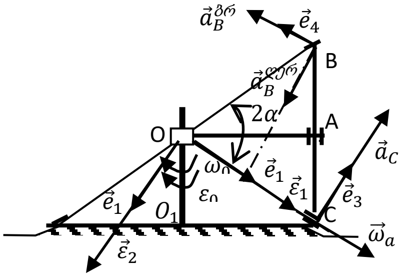
$$\frac{\varepsilon_0}{sin\alpha}\vec{e}_1 + \omega_0^2 ctg\alpha\vec{e}_2.$$

ანუ $\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$, სადაც

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{sin\alpha},\ \ \varepsilon_2 = \omega_0^2 ctg\alpha\ .$$

პასუხი: $\vec{\omega} = \frac{\omega_0}{sin\alpha}\vec{e}_1\ , \vec{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{sin\alpha}\vec{e}_1 + \omega_0^2 ctg\alpha\vec{e}_2.$

ამოცანა 19.15



წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ C და B წერტილების აჩქარებები, თუ საყრდენი კბილანას რადიუსია R.

ამოხსნა.

რადგან C წერტილი მდებარეობს ბრუნვის მყის ღერძზე, ხოლო ვექტორები $\vec{\varepsilon}_1$ და $\vec{\omega}_a$ მდებარეობენ იმავე ღერძზე, ამიტომ

$$\vec{a}_C^{1ბრ} = 0\ ,\ \vec{a}_C^{ღერძ} = 0. \to \vec{a}_C = \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{OC}\ \to \vec{a}_C = \omega_0^2 ctg\alpha\ \cdot \frac{R}{cos\alpha}\vec{\varepsilon}_3 = \frac{R\omega_0^2}{sin\alpha}\vec{\varepsilon}_3\ ,$$

სადაც $\vec{\varepsilon}_3$ ვექტორი ძევს ნახაზის სიბრტყეში OC წრფის მართობულად. ****

B წერტილის აჩქარება განისაზრვრება ფორმულით:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{1ბრ} + \vec{a}_B^{2ბრ} + a_B^{ღერძ},$$

სადაც

$$\vec{a}_B^{1ბრ} = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{OB} = \varepsilon_1 OBsin2\alpha\vec{e}_2 = 2R\varepsilon_0\vec{e}_2,$$

$$\vec{a}_B^{2ბრ} = \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{OB} = \frac{R\omega_0^2}{sin\alpha}\vec{\varepsilon}_4.$$

$$\vec{a}_B^{ღერძ} = \vec{\omega}_a \times \left(\vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{2R\omega_0^2}{sin\alpha}\vec{\varepsilon}_3.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

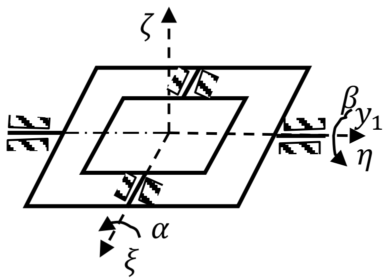
$$\vec{a}_B = 2R\varepsilon_0\vec{e}_2 + \frac{R\omega_0^2}{sin\alpha}(\vec{\varepsilon}_4 - 2\vec{\varepsilon}_3),$$

ვექტორი $\vec{\varepsilon}_4$ ძევს OBC სიბრტყეში და მართობულია OB წრფისა.

პასუხი: $\vec{a}_C = \frac{R\omega_0^2}{sin\alpha}\vec{\varepsilon}_3, \vec{a}_B = 2R\varepsilon_0\vec{e}_2 + \frac{R\omega_0^2}{sin\alpha}(\vec{\varepsilon}_4 - 2\vec{\varepsilon}_3)$. სადაც $\vec{\varepsilon}_3$ და $\vec{\varepsilon}_4$ ერთეულოვანი ვექტორებია და , შესაბამისად მიმართულია OC და OB წრფეების მართობულად.

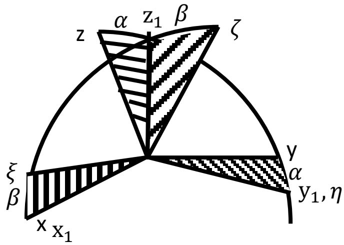
20. სივრცითი ორიენტაცია; ეილერის კინემატიკური განტოლებები და მათი მოდიფიკაცია; აქსოიდები.

ამოცანა 20.1



მოქანავე გემზე ხელოვნური ჰორიზონტალური მოედანი შექმნილია კარდანული დაკიდების საშუალებით. გარე რგოლის ბრუნვის y_1 ღერძი, გემის გრძივი ღერძის პარალელურია. გარე რგოლის მობრუნების კუთხეა β. შიგა ჩარჩოს მობრუნების კუთხეა α. რგოლების ორიენტაციისთვის შემოტანილია სამი საკოორდინატო სისტემა: სისტემა $\xi\eta\zeta$ უძრავადაა დაკავშირებული გემთან (ξ ღერძი მიმართულია მარჯვენა ბორტისკენ, η ღერძი მიმართულია გემის კიჩოსკენ, ხოლო ζ ღერძი გემბანის მართობულია.). სისტემა $x_1y_1z_1$ დაკავშირებულია გარე რგოლთან (y_1 ღერძი ემთხვევა η ღერძს); სისტემა xyz დაკავშირებულია შიგა რგოლთან (x ღერძი ემთხვევა x_1 ღერძს); დადებითი ათვლის მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე. როცა $\alpha = \beta = 0$, მაშინ ათვლის ყველა სისტემა ერთმანეთს ემთხვევა. განსაზღვრეთ შიგა რგოლის მდებარეობა გემის მიმართ.

ამოხსნა



შიგა რგოლის მდებარეობა გემის მიმართ განვსაზღვროთ მიმართულების კოსინუსების მატრიცის საშუალებით. $\xi\eta\zeta$ სისტემიდან xyz სისტემაზე გადასვლა მოვახდინოთ ორი თანმიმდევრული სასრული მობრუნებით β და α კუთხით. პირველი და მეორე მობრუნების მატრიცებს აქვთ სახე :

$$A_\beta = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix} \quad A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}.$$

შედეგად მივიღებთ:

$$(\xi,\eta,\zeta)^T = A_\beta \cdot A_\alpha (x,y,z)^T,$$

სადაც T ტრანსპონირების სიმბოლოა.

$$A = A_\beta A_\alpha = \begin{bmatrix} cos\beta & sin\alpha sin\beta & cos\alpha sin\beta \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ -sin\beta & sin\alpha cos\beta & cos\alpha cos\beta \end{bmatrix}$$

რადგან $A^{-1} = A^T$ ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ:

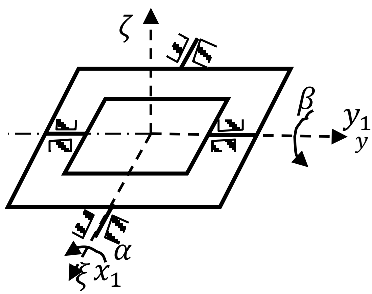
$$(x,y,z)^T = A^T(\xi,\eta,\zeta)^T$$

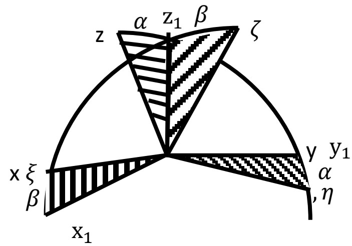
სადაც

$$A^T = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & -sin\beta \\ sin\alpha sin\beta & cos\alpha & sin\alpha cos\beta \\ cos\alpha sin\beta & -sin\alpha & cos\alpha cos\beta \end{bmatrix}.$$

პასუხი	ξ	η	ζ
x	$cos\beta$	0	$-sin\beta$
y	$sin\alpha sin\beta$	$cos\alpha$	$sin\alpha cos\beta$
z	$cos\alpha sin\beta$	$-sin\alpha$	$cos\alpha cos\beta$

ამოცანა 20.2





წინა ამოცანაში აღწერილი კარდანული დაკიდების მეორე წესში გარე რგოლის ბრუნვის ღერძი გემის განივი ღერძის პარალელურია. დაკიდების ამ წესში გემთან დაკავშირებული ξ ღერძი ემთხვევა შიგა რგოლის x_1 ღერძს, ხოლო შიგა რგოლის ბრუნვის y ღერძი ემთხვევა y_1 ღერძს, რომელიც უძრავად არის დაკავშირებული გარე რგოლთან. გარე რგოლის მობრუნების კუთხეა α , ხოლო შიგა რგოლის მობრუნების კუთხეა β. განსაზღვრეთ შიგა რგოლის ორიენტაცია გემის მიმართ.

ამოხსნა

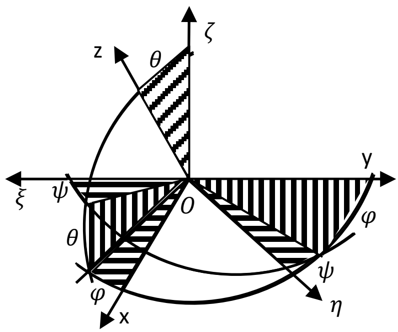
ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$A = A_\alpha A_\beta = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ sin\alpha sin\beta & cos\alpha & -sin\alpha cos\beta \\ -cos\alpha sin\beta & sin\alpha & cos\alpha cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} cos\beta & sin\alpha sin\beta & -cos\alpha sin\beta \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ sin\beta & -sin\alpha cos\beta & cos\alpha cos\beta \end{bmatrix}.$$

პასუხი:	ξ	η	ζ
x	$cos\beta$	$sin\alpha sin\beta$	$-cos\alpha sin\beta$
y	0	$cos\alpha$	$sin\alpha$
z	$sin\beta$	$-sin\alpha cos\beta$	$cos\alpha cos\beta$

ამოცანა 20.3



უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მდებარეობა განისაზღვრება ეილერის კუთხეებით: პრეცესიის კუთხე ψ , ნუტაციის კუთხე θ და საკუთარი ბრუნვის კუთხე φ . განსაზღვრეთ მოძრავი Oxyz სისტემის მიმართულების კოსინუსები.

ამოხსნა

ამ შემთხვევაში $O\xi\eta\zeta$ სისტემიდან $Oxyz$ სისტემაზე გადასვლა ხდება სამი თანმიმდევრული მობრუნებით კუთხეებით ψ, θ, φ.

$$(\zeta, \eta, \xi)^T = A_\psi(\zeta_1, \eta_1, \xi_1)^T; \quad \xi = \xi_1.$$

$$(\zeta_1, \eta_1, \xi_1)^T = \mathrm{A}_\theta\,(\zeta_2, \eta_2, \xi_2)^T; \quad \xi_1 = \xi_2.$$

$$(\zeta_2, \eta_2, \xi_2)^T = A_\varphi\,(x, y, z)^T \quad \xi_2 = z.$$

გამოვრიცხოთ კოორდინატები ζ_1, η_1, ξ_1 და ζ_2, η_2, ξ_2, მივიღებთ:

$$(\zeta, \eta, \xi)^T = A_\psi\{\mathrm{A}_\theta\,(\zeta_2, \eta_2, \xi_2)^T\} = A_\psi A_\theta (\zeta_2, \eta_2, \xi_2)^T = A_\psi A_\theta A_\varphi\,(x, y, z)^T,$$

აქედან გამომდინარეობს

$$A = A_\psi A_\theta A_\varphi,$$

სადაც

$$A_\psi = \begin{bmatrix} cos\psi & -sin\psi & 0 \\ sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}, \ A_\varphi = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

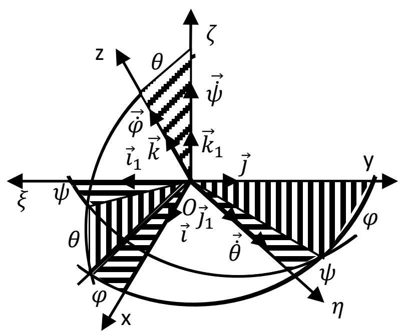
გადავამრავლოთ ეს მატრიცები და მივიღებთ:

$$A = \begin{bmatrix} cos\psi cos\theta cos\varphi - sin\psi sin\varphi & -cos\psi cos\theta sin\varphi - sin\psi cos\varphi & cos\psi sin\theta \\ sin\psi cos\theta cos\varphi + cos\psi sin\varphi & -sin\psi cos\theta sin\varphi + cos\psi cos\varphi & sin\psi sin\theta \\ -sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \end{bmatrix}.$$

თუ მოვახდენთ ამ მატრიცის ტრანსპონირებას მივიღებთ მოძრავი სისტემის კოსინუსებს:

პასუხი	ξ	η	ζ
x	$cos\psi cos\theta cos\varphi$ $- sin\psi sin\varphi$	$sin\psi cos\theta cos\varphi$ $+ cos\psi sin\varphi$	$-sin\theta cos\varphi$
y	$-cos\psi cos\theta sin\varphi$ $- sin\psi cos\varphi$	$-sin\psi cos\theta sin\varphi$ $+ cos\psi cos\varphi$	$sin\theta sin\varphi$
z	$cos\psi sin\theta$	$sin\psi sin\theta$	$cos\theta$

ამოცანა 20.4



ვიცით რა ეილერის კუთხეების ცვლილების კანონი, განსაზღვრეთ კუთხური სიჩქარე და მისი გეგმილები როგორც უძრავ, ასევე მოძრავი სისტემის ღერძებზე.

ამოხსნა

ნახაზიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ კუთხური აჩქარების ვექტორი ასე წარმოდგება:

$$\vec{\omega} = \dot\psi\overrightarrow{k_1} + \dot\theta\vec{n} + \dot\varphi\vec{k}, \quad (1)$$

სადაც $\overrightarrow{k_1}, \vec{n}, \vec{k}$ - ერთეულოვანი მგეზავებია შესაბამისი ღერძებისათვის. გამოვსახოთ ისინი ეილერის კუთხეების საშუალებით და მივიღებთ:

$$\overrightarrow{k_1} = -sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{j} + cos\theta\,\vec{k},$$
$$\vec{k} = sin\theta cos\psi\overrightarrow{\imath_1} + sin\theta sin\psi\overrightarrow{j_1} + cos\theta\,\overrightarrow{k_1}, \quad (2)$$
$$\vec{n} = sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{j}\,,$$
$$\vec{n} = -sin\psi\overrightarrow{\imath_1} + cos\psi\,\overrightarrow{j_1}$$

ჩავსვათ რიგრიგობით (2) გამოსახულებები (1)- ში და გვექნება:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\overrightarrow{k_1} + \dot{\theta}(-sin\psi\overrightarrow{\iota_1} + cos\psi\,\overrightarrow{J_1}) + \dot{\varphi}\left(sin\theta cos\psi\overrightarrow{\iota_1} + sin\theta sin\psi\overrightarrow{J_1} + cos\theta\,\overrightarrow{k_1}\right) =$$

$$= \left(\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi - \dot{\theta}sin\psi\right)\overrightarrow{l_1} + \left(\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi + \dot{\theta}cos\psi\right)\overrightarrow{J_1} + \left(\dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}\right)\overrightarrow{k_1}.$$

აქედან ვპოულობთ:

$$\omega_\xi = \dot{\varphi}sin\theta cos\varphi - \dot{\theta}sin\psi,$$

$$\omega_\eta = \dot{\varphi}sin\theta sin\varphi + \dot{\theta}cos\psi,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}.$$

ანალოგიურად, x,y,z ღერძებისთვის მივიღებთ:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\left(-sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}\right) + \dot{\theta}(sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath}\,) + \dot{\varphi}\vec{k} =$$

$$=\left(-\dot{\psi}sin\theta cos\varphi + \dot{\theta}sin\varphi\right)\vec{\imath} + \left(\dot{\psi}sin\theta sin\phi + \dot{\theta}cos\varphi\right)\vec{\jmath} + \left(\dot{\psi}cos\varphi + \dot{\varphi}\right)\vec{k}\ .$$

აქედან გვაქვს:

$$\omega_x = -\dot{\psi}sin\theta cos\varphi + \dot{\theta}sin\varphi\ ,$$

$$\omega_y = \dot{\psi}sin\theta sin\phi + \dot{\theta}cos\varphi\ ,$$

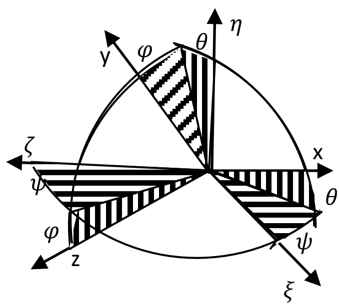
$$\omega_z = \dot{\psi}cos\varphi + \dot{\varphi}.$$

კუთხური სიჩქარის მოდული უდრის:

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\theta^2} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}cos\theta}\ .$$

პასუხი: $\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}cos\theta}$; $\omega_\xi = \dot{\varphi}sin\theta cos\varphi - \dot{\theta}sin\psi$; $\omega_\eta = \dot{\varphi}sin\theta sin\varphi + \dot{\theta}cos\psi$; $\omega_\zeta = \dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}$;
$\omega_x = -\dot{\psi}sin\theta cos\varphi + \dot{\theta}sin\varphi$; $\omega_y = \dot{\psi}sin\theta sin\phi + \dot{\theta}cos\varphi$; $\omega_z = \dot{\psi}cos\varphi + \dot{\varphi}$.

ამოცანა 20.5



თვითმფრინავის ბრუნვითი მოძრაობის განსაზღვრისათვის მას უკავშირებენ ორთოგონალურ სისტემას Cxyz, ამასთან x ღერძი მიმართულია თვითმფრინავის ღერძის გასწვრივ კუდიდან პილოტის კაბინისაკენ, y ღერძი მოთავსებულია თვითმფრინავის სიმეტრიის სიბრტყეში, ხოლო z - ფრთების გასწვრივ (ცენტრი C მოთავსებულია თვითმფრინავის

სიმძიმის ცენტრში. თვითმფრინავის კუთხური გადაადგილება $C\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ (ξ -მიმართულია თვითმფრინავის კურსის გასწვრივ, η - ვერტიკალურად ზევით, ხოლო ζ - მათი მართობულია) განისაზღვრება ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები, სამი კუთხით, რომელთაც თვითმფრინავის კუთხეები ეწოდება. განსაზღვრეთ თვითმფრინავის ორიენტაცია.

ამოხსნა

გარდაქმნების თანმიმდევრობა ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$[x, y, z]^T = A_\varphi^{-1}[\zeta_2, \eta_2, \xi_2]^T,$$

$$[\zeta_2, \eta_2, \xi_2]^T = A_\theta^{-1}[\zeta_1, \eta_1, \xi_1]^T, \xi_1 = \xi_2,$$

$$[\zeta_1, \eta_1, \xi_1]^T = A_\psi^{-1}[\xi, \eta, \zeta]^T,$$

ანუ

$$[x, y, z]^T = A_\varphi^{-1}A_\theta^{-1}A_\psi^{-1}[\xi, \eta, \zeta]^T.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$A_\varphi^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}, A_\theta^{-1} = A_\theta^T = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_\psi^{-1} = A_\psi^T = \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix},$$

მივიღებთ

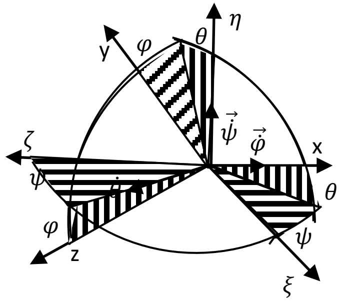
$$A = A_\varphi^{-1}A_\theta^{-1}A_\psi^{-1} = A_\varphi^T A_\theta^T A_\psi^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix}.$$

თუ გადავამრავლებთ მატრიცებს, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

პასუხი:	ξ	η	ζ
x	$cos\theta cos\psi$	$sin\theta$	$-sin\psi cos\theta$
y	$sin\psi sin\varphi - cos\psi sin\theta cos$	$cos\theta cos\varphi$	$cos\psi sin\varphi + sin\psi sin\theta cos\varphi$
z	$sin\psi cos\varphi + sin\theta cos\psi sin\varphi$	$-cos\theta sin\varphi$	$cos\psi cos\varphi - sin\psi sin\theta sin\varphi$

ამოცანა 20.6

ვიპოვოთ თვითმფრინავის კუთხური სიჩქარის გეგმილები $Cxyz$ და $C\xi\eta\zeta$ სისტემების ღერძებზე, თუ ცნობილია თვითმფრინავის კუთხეები (ამოც.20.5)



ამოხსნა

ვისარგებლოთ წინა ამოცანაში მიღებული შედეგით. A მატრიცა არის $C\xi\eta\zeta$ სისტემიდან $Cxyz$ სისტემაზე გადასვლის მატრიცა. წარმოვიდგინოთ, რომ ვექტორი $\vec{\dot\theta}$ მოთავსებულია z ღერძზე, როცა $\psi = 0$, მივიღებთ

$$\left(\dot\theta_x, \dot\theta_y, \dot\theta_z\right) = \dot\theta(a_{31}, a_{32}, a_{33})_{\psi=0} = \dot\theta(0, sin\varphi, cos\varphi).$$

მეორე მხრივ, თუ წარმოვიდგენთ, რომ $\vec{\dot\theta}$ ვექტორი მდებარეობს z ღერძზე, როცა $\varphi = 0$, მივიღებთ

$$\left(\dot\theta_\xi, \dot\theta_\eta, \dot\theta_\zeta\right) = \dot\theta(a_{31}, a_{32}, a_{33})_{\varphi=0} = \dot\theta(sin\psi, 0, cos\psi).$$

ანალოგიურად, $\overrightarrow{\dot\psi}$, და $\vec{\dot\varphi}$ ვექტორებისათვის გვექნება

$$\left(\dot\psi_x, \dot\psi_y, \dot\psi_z\right) = \dot\psi(sin\theta, cos\theta cos\varphi, -cos\theta sin\varphi),$$

$$\left(\dot\psi_\xi, \dot\psi_\eta, \dot\psi_\zeta\right) = \dot\psi(0,1,0),$$

$$\left(\dot\varphi_x, \dot\varphi_y, \dot\varphi_z\right) = \dot\varphi(1,0,0) ,$$

$$\left(\dot\varphi_\xi, \dot\varphi_\eta, \dot\varphi_\zeta\right) = \dot\varphi(cos\psi cos\theta, sin\theta, -sin\psi cos\theta).$$

საბოლოოდ მივიღებთ :

$$\omega_x = \dot\psi sin\theta + \dot\varphi,$$

$$\omega_y = \dot\psi cos\theta cos\varphi + \dot\theta sin\varphi ,$$

$$\omega_z = -\dot\psi cos\theta sin\varphi + \dot\theta cos\varphi.$$

ანალოგიურად

$$\omega_\xi = \dot\varphi cos\theta cos\psi + \dot\theta sin\psi ,$$

$$\omega_\eta = \dot\varphi sin\theta + \dot\psi,$$

$$\omega_\zeta = -\dot\varphi cos\theta sin\psi + \dot\theta cos\psi .$$

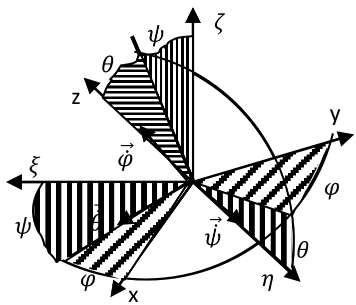
კუთხური სიჩქარის სიდიდე იქნება

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\psi\dot\varphi sin\theta} .$$

პასუხი: $\omega_x = \dot\psi sin\theta + \dot\varphi$; $\omega_y = \dot\psi cos\theta cos\varphi + \dot\theta sin\varphi$; $\omega_z = -\dot\psi cos\theta sin\varphi + \dot\theta cos\varphi$;

$\omega_\xi = \dot{\varphi}cos\theta cos\psi + \dot{\theta}sin\psi$; $\omega_\eta = \dot{\varphi}sin\theta + \dot{\psi}$; $\omega_\zeta = -\dot{\varphi}cos\theta sin\psi + \dot{\theta}cos\psi$.

ამოცანა 20.7



გემის რყევისა და მდგრადობის შესასწავლად შემოაქვთ სამი კუთხე (ψ, θ , φ) , რომელთაც გემის კუთხეები ეწოდება. ათვლის სისტემა Cxyz ხისტად არის დაკავშირებული გემთან. C - გემის სიმძიმის ცენტრია, x ღერძი მიმართულია გემის კიჩოისაკენ, y - მიმართულია მარცხენა ნაპირისკენ, ხოლო z ღერძი გემბანის მართობულია. სისტემა $C\xi\eta\zeta$ ორიენტირებულია გემის კურსის მიმართ: ζ ღერძი ვერტიკალურია, ξ ღერძი ჰორიზონტალურია და მიმართულია გემის კურსის გასწვრივ, ხოლო η ღერძი ჰორიზონტალურია და მიმართულია კურსიდან მარცხნივ. განსაზღვრეთ გემის ორიენტაცია $C\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ.

ამოხსნა

ამ ამოცანის ამოხსნა ვაწარმოოთ იგივე თანმიმდევრობით, როგორც 20.5 ამოცანაში. მობრუნება $C\xi\eta\zeta$ სისტემიდან $Cxyz$ სისტემაზე გადასასვლელად ხდება თანმიმდევრული მობრუნებით η, CN, z ღერძების გარშემო, შესაბამისად , ψ, θ, φ კუთხეებით. ჩავწეროთ უკუგარდაქმნის მატრიცები:

$$A_\varphi^{-1} = A_\varphi^T = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_\theta^{-1} = A_\theta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix},$$

$$A_\psi^{-1} = A_\psi^T = \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix}.$$

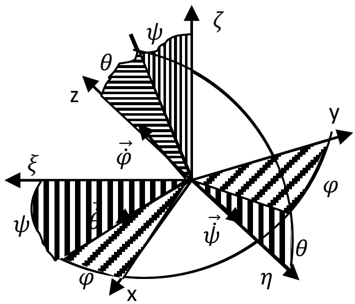
$$A = A_\varphi^{-1} A_\theta^{-1} A_\psi^{-1} .$$

თუ მოვახდენთ მატრიცების გადამრავლებას მივიღებთ ცხრილს:

პასუხი:	ξ	η	ζ
x	$cos\psi cos\varphi$ $+ sin\psi sin\theta sin\varphi$	$cos\theta sin\varphi$	$cos\psi sin\theta sin\varphi$ $- sin\psi cos\varphi$
y	$sin\psi sin\theta cos\varphi$ $- cos\psi sin\varphi$	$cos\psi cos\varphi$	$sin\psi sin\varphi$ $+ cos\psi sin\theta cos\varphi$
z	$cos\theta sin\varphi$	$-sin\theta$	$cos\psi cos\theta$

ამოცანა 20.8

იპოვეთ გემის კუთხური სიჩქარის გეგმილები $C\xi\eta\zeta$ და $Cxyz$ სისტემის ღერზებზე, თუ ცნობილია გემის კუთხეების ცვლილების სიჩქარეები (იხ. წინა ამოცანის ნახაზი)



ამოხსნა

წინა ამოცანაში მიღებული მატრიცა არის $Cxyz$ სისტემიდან $C\xi\eta\zeta$ სისტემაზე გადასვლის მატრიცა. პირიქით გადასვლა ხდება მოცემულის ტრანსპონირებულის მატრიცით. ვისარგებლოთ ამ მატრიცით და ვიპოვოთ კერძო შემთხვევებში ნახაზზე ნაჩვენები ვექტორების გეგმილები ორივე სისტემის ღერძებზე :

$$(\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y, \dot{\psi}_z) = \dot{\psi}(sin\varphi coa\theta, cos\theta cos\varphi, -sin\theta),$$
$$(\dot{\psi}_\xi, \dot{\psi}_\eta, \dot{\psi}_\zeta) = \dot{\psi}(0,1,0) \ ,$$
$$(\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z) = \dot{\theta}(a_{11}, a_{12}, a_{13})_{\psi=0} = \dot{\theta}(cos\varphi, -sin\varphi, 0),$$
$$(\dot{\theta}_\xi, \dot{\theta}_\eta, \dot{\theta}_\zeta) = \dot{\theta}(a_{11}, a_{12}, a_{13})_{\varphi=0} = \dot{\theta}(cos\psi, 0, -sin\psi) \ ,$$
$$(\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z) = \dot{\varphi}(0,0,1),$$
$$(\dot{\varphi}_\xi, \dot{\varphi}_\eta, \dot{\varphi}_\zeta) = \dot{\varphi}(sin\psi cos\theta, -sin\theta, cos\psi cos\theta \ ).$$

ამის შემდეგ ვპოულობთ კუთხური სიჩქარის გეგმილებს შესაბამის ღერძებზე:

$$\omega_x = \dot{\psi}_x + \dot{\theta}_x + \dot{\varphi}_x = \dot{\psi} cos\theta sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\psi}_y + \dot{\theta}_y + \dot{\varphi}_y = \dot{\psi} cos\theta cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi}_z + \dot{\theta}_z + \dot{\varphi}_z = -\dot{\psi}sin\theta + \dot{\varphi},$$

ანალოგიურად

$$\omega_\xi = \dot{\varphi}sin\psi cos\theta + \dot{\theta}cos\psi,$$
$$\omega_\eta = \dot{\varphi}sin\theta + \dot{\psi} ,$$
$$\omega_\zeta = \varphi cos\theta cos\dot{\varphi} - \dot{\theta}s\imath n\psi.$$

კუთხური სიჩქარე უდრის

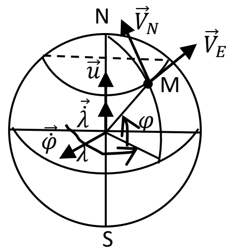
$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 - 2\dot{\psi}\dot{\varphi}sin\theta}.$$

პასუხი: $\omega_x = \dot{\psi}cos\theta sin\varphi + \dot{\theta}cos\varphi$; $\omega_y = \dot{\psi}cos\theta cos\varphi - \dot{\theta}sin\varphi$; $\omega_z = -\dot{\psi}sin\theta + \dot{\varphi}$;

$\omega_\xi = \dot{\varphi}sin\psi cos\theta + \dot{\theta}cos\psi$; $\omega_\eta = \dot{\varphi}sin\theta + \dot{\psi}$; $\omega_\zeta = \varphi cos\theta cos\dot{\varphi} - \dot{\theta}s\imath n\psi$.

ამოცანა 20.9

M წერტილი (თვითმფრინავის სიმძიმის ცენტრი) მოძრაობს დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ. სიჩქარის აღმოსავლეთი მდგენელი უდრის V_E , ხოლო ჩრდილოეთის V_N. M წერტილის მოცემული მდებარეობისათვის იპოვეთ განედისა და გრძედის ცვლილების სიჩქარე.



ამოხსნა

ნახაზიდან ვპოულობთ

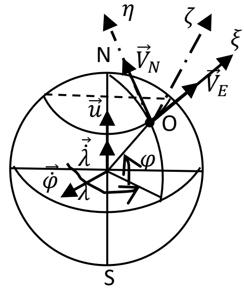
$$\dot{\varphi} = \frac{V_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_E}{Rcos\varphi} .$$

ვექტორები $\vec{V}_N, \vec{V}_E, \vec{\dot{\varphi}}, \vec{\dot{\lambda}}$ ნაჩვენებია ნახაზზე, ამასთან ვექტორი $\vec{\dot{\varphi}}$ არის $\vec{V}_E$ ვექტორის საპირისპირო Vმიმართულების.

პასუხი: $\dot{\varphi} = \frac{V_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_E}{Rcos\varphi}$.

ამოცანა 20.10

დედამიწის გარშემო სხეულის მოძრაობის შესასწავლად შემოაქვთ მოძრავი სისტემა - დარბუს სამწახნაგა. ξ ღერძი არის ჰორიზონტალური და მიმართულია აღმოსავლეთით, η ღერძი - ჩრდილოეთით, ხოლო ζ ღერძი არის ვერტიკალური. განსაზღვრეთ $O\xi\eta\zeta$ სამწახნაგას კუთხური სიჩქარის გეგმილები $\xi,\eta\,,\zeta$ ღერძებზე, თუ მისი სათავის სიჩქარის გეგმილებია: $V_\xi = V_E, V_\eta = V_N, V_\zeta = 0$. დედამიწის კუთხური სიჩქარეა U, ხოლო რადიუსი R.



ამოხსნა

ნახაზიდან გამომდინარე შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\vec{\dot{\varphi}} \uparrow\downarrow \vec{V}_E$. ამიტომ გვექნება

$$\omega_\xi = -\dot{\varphi} = -\frac{V_N}{R},$$

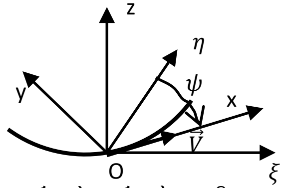
$$\omega_\eta = (U + \dot{\lambda})cos\varphi = \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)cos\varphi,$$

$$\omega_\eta = (U + \dot{\lambda})sin\varphi = \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)sin\varphi\ .$$

პასუხი: $\omega_\xi = -\dot{\varphi} = -\frac{V_N}{R}, \omega_\eta = (U + \dot{\lambda})cos\varphi = \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)cos\varphi,\ \omega_\eta = (U + \dot{\lambda})sin\varphi = \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)sin\varphi$.

ამოცანა 20.11

დარბუს სამწახნაგა ორიენტირებულია არა გეოგრაფიულად, როგორც ეს იყო წინა ამოცანაში, არამედ სამწახნაგას სათავის ტრაექტორიის გასწვრივ: x ღერძი მიმართულია ჰორიზონტალურად O სათავის V სიჩქარის გასწვრივ. y მიმართულია x ღერძიდან მარცხნივ ჰორიზონტალურად, ხოლო z ღერძიმიმართულია ვერტიკალურად ზევით. განსაზღვრეთ Oxyz სამწახნაგას კუთხური სიჩქარის გეგმილები, თუ O წერტილის სიჩქარეა V, ხოლო მისი კურსი



ტრაექტორიის გეგმილი ჰორიზონტალიურ xOy სიბრტყეში

განისაზღვრება ψ კუთხით (კუთხე ჩრდილოეთის მიმართულებასა და O წერტილის ფარდობით სიჩქარეს შორის) .

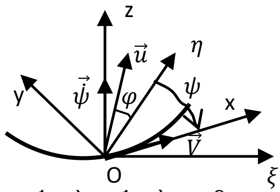
ამოხსნა

$\vec{U}$ ვექტორი ძევს $\eta O\zeta$ სიბრტყეში და ადგენს φ კუთხეს η ღერძთან.

ვისარგებლოთ წინა ამოცოცანის შედეგით და იმის გათვალისწინებით,რომ

$$V_N = V\cos\psi,\ V_E = V\sin\psi$$

მივიღებთ



ტრაექტორიის გეგმილი ჰორიზონტალიურ xOy სიბრტყეში

$$\omega_x = \omega_\xi \sin\psi + \omega_\eta \cos\psi$$

$$= \left(-\frac{V\cos\psi}{R}\right)\sin\psi$$

$$+ \left(U\cos\varphi + \frac{V\sin\psi}{R}\right)\cos\psi$$

$$= U\cos\varphi\cos\psi\ ,$$

$$\omega_y = \omega_\xi \cos\psi + \omega_\eta \sin\psi = U\cos\varphi\sin\psi + \frac{V}{R},$$

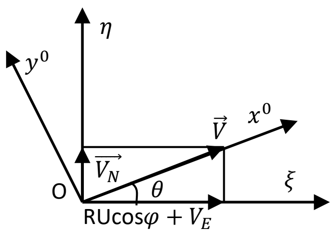
$$\omega_z = \left(U + \frac{V\sin\psi}{R\cos\varphi}\right)\sin + \dot\psi = U\sin\varphi + \frac{V}{\rho}.$$

*აქ R, U, φ, და λ აქვთ იგივე მნიშვნელობები, როგორც წინა ამოცანებში, ხოლო ρ არის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია.

პასუხი: $\omega_x = U\cos\varphi\cos\psi$; $\omega_y = U\cos\varphi\sin\psi + \frac{V}{R}$; $\omega_z = U\sin\varphi + \frac{V}{\rho}$.

ამოცანა 20.12

დარბუს სამკუთხედი $Ox^0y^0z^0$ დედამიწის ზედაპირზე ორიენტირებულია შემდეგნაირად: x^0 ღერძი მიმართულია O წერტილის (რომელიც მოძრაობს დედამიწის ზედაპირზე) აბსოლუტური სიჩქარის მიმართულებით. y^0 ღერძი მიმართულია ჰორიზონტალურად x^0 ღერძიდან მარცხნივ, ხოლო z^0 ღერძი ვერტიკალურია. იპოვეთ $Ox^0y^0z^0$ სამწახნაგას კუთხური სიჩქარის გეგმილები, თუ დედამიწის მიმართ O წერტილის სიჩქარის მდგენელებია: V_E, და V_N.



ამოხსნა

20.10 და 20.11 ამოცანების ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $V_N = V\sin\theta$, და $V_E = V\cos\theta - RU\cos\varphi$, მივიღებთ:

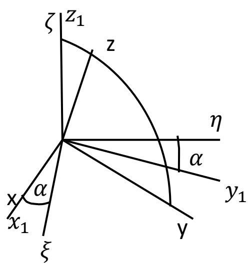
$$\omega_{x^0} = \omega_\xi cos\theta + \omega_\eta sin\theta = -\frac{Vsin\theta}{R}cos\theta + \Big(Ucos\varphi + \frac{Vcos\theta - RUcos\varphi}{R}\Big) sin\theta = 0,$$

$$\omega_{y^0} = -\omega_\xi sin\theta + \omega_\eta cos\theta = \frac{V}{R}sin^2\theta + \Big(Ucos\varphi + \frac{Vcos\theta - RUcos\varphi}{R}\Big)cos\theta = \frac{V}{R}.$$

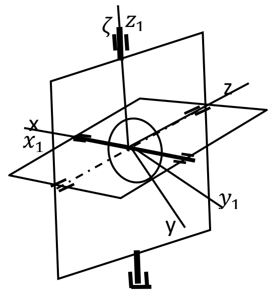
$$\omega_{z^0} = \big(U + \dot{\lambda}\big)sin\varphi + \dot{\theta} = \frac{Vcos\theta}{Rcos\varphi} + \dot{\theta}.$$

პასუხი: $\omega_{x^0} = 0$; $\omega_{y^0} = \frac{V}{R}$; $\omega_{z^0} = \frac{Vcos\theta}{Rcos\varphi} + \dot{\theta}$.

ამოცანა 20.13



მიმართულების მაჩვენებელი გიროსკოპი დაყენებულია კარდანულ დაკიდებაზე. კოორდინატთა სისტემა $x_1y_1z_1$ დამაგრებულია გარე რგოლზე. xyz სისტემა დამაგრებულია შიგა რგოლზე (x ღერძი ჰორიზონტალურია) შიგა რგოლის z ღერძი იმავდროულად არის გიროსკოპის საკუთარი ბრუნვის ღერძი. განსაზღვრეთ:



1) გიროსკოპის ბრუნვის z ღერძის ორიენტაცია გეოგრაფიულად ორიენტირებული $\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ, თუ გარე ჩარჩოს მობრუნება მერიდიანის მიმართ აითვლება საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით და განისაზღვრება α კუთხით, ხოლო z ღერძის გადახრა ჰორიზონტიდან β კუთხით.

2) xyz სამწახნაგას კუთხური სიჩქარის გეგმილები x, y, z ღერძებზე. ვიგულისხმოთ, *რომ* გიროსკოპის დაკიდების წერტილი O უძრავია დედამიწის მიმართ.

ამოხსნა

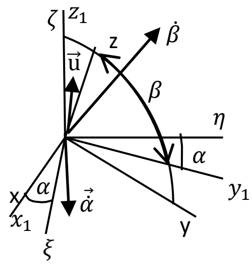
$$\vec{k} = a_{13}\vec{i}_1 + a_{23}\vec{j}_1 + a_{33}\vec{k}_1,$$

$$z = a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta.$$

ნახაზიდან გვაქვს

$$a_{13} = \vec{i}_1 \cdot \vec{k} = cos\beta sin\alpha,$$

$$a_{23} = \vec{j}_1 \cdot \vec{k} = cos\beta cos\alpha \ ,$$
$$a_{33} = \vec{k}_1 \cdot \vec{k} = sin\beta.$$



ნახაზიდან ჩანს, რომ ვექტორი $\vec{U}$ მოთავსებულია $\eta O\zeta$ სიბრტყეში და O η ღერძთან ადგენს φ კუთხეს. ვექტორები $\vec{\dot{\alpha}}$, და $\vec{\dot{\beta}}$ მიმართული არიან , შესაბამისად, Oz_1 და Ox_1 ღერძების გასწვრივ. თუ გავითვალისწინებთ, რომ z ღერძის მობრუნება ჰორიზონტისადმი β კუთხით ნიშნავს x_1 ღერძის გარშემო $90° - \beta$ კუთხით მობრუნებას საათის ისრის მიმართულებით, შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\left(U_\xi, U_\eta, U_\zeta\right) = U(0, cos\varphi, sin\varphi).$$

Oxyz სისტემიდან $O\xi\eta\zeta$ სისტემაზე გადასვლის მატრიცას აქვს ასეთი სახე:

$$A = A_\beta^{-1} A_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha sin\beta & cos\alpha sin\beta & -cos\beta \\ sin\alpha cos\beta & cos\alpha cos\beta & sin\beta \end{bmatrix}.$$

მაშინ

$$\left[U_x, U_y, U_z\right]^T = A\left[U_\xi, U_\eta, U_\zeta\right]^T$$

აქედან გამომდინარე

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha sin\beta & cos\alpha sin\beta & -cos\beta \\ sin\alpha cos\beta & cos\alpha cos\beta & sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ cos\varphi \\ sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -cos\varphi sin\alpha \\ cos\varphi cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta \\ cos\varphi cos\alpha cos\beta + sin\varphi sin\beta \end{bmatrix}.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\omega_x = -\dot{\beta} - Ucos\varphi sin\alpha,$$
$$\omega_y = \dot{\alpha} cos\beta + U(cos\varphi cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta),$$
$$\omega_z = -\alpha s\imath n\beta + U(cos\varphi cos\alpha cos\beta + s\imath n\varphi s\imath n\beta).$$

პასუხი:	ξ	η	ζ
z	$cos\beta sin\alpha$	$cos\beta cos\alpha$	$sin\beta$

$\omega_x = -\dot{\beta} - Ucos\varphi sin\alpha$

$\omega_y = \dot{\alpha} cos\beta + U(cos\varphi cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta)$;

$\omega_z = -\dot{\alpha} sin\beta + U(cos\varphi cos\alpha cos\beta + sin\varphi sin\beta)$.

ამოცანა 20.14

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ O xyz სისტემის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის გეგმილები, თუ დაკიდების წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელებია V_E და V_N (იხ. ნახ. ამოც. 20.13) .

ამოხსნა

ამ შემთხვევაში წინა ამოცანაში მიღებულ O xyz სისტემის კუთხურ სიჩქარეს უნდა დაემატოს

$$\omega_x' = [cos\alpha, -sin\alpha, 0] \cdot \left[-\frac{V_N}{R}, \frac{V_E}{R}, \frac{V_E}{Rcos\varphi} sin\varphi\right]^T = -\frac{V_N}{R} cos\alpha - \frac{V_E}{R} sin\alpha.$$

$$\omega_y' = [sin\alpha sin\beta, cos\alpha cos\beta, -cos\beta] \cdot \left[-\frac{V_N}{R}, \frac{V_E}{R}, \frac{V_E}{Rcos\varphi} sin\varphi\right]^T$$

$$= -\frac{V_N}{R} sin\alpha sin\beta + \frac{V_E}{R} cos\alpha cos\beta - \frac{V_E}{Rcos\varphi} sin\varphi cos\beta$$

$$= -\frac{V_N}{R} sin\alpha sin\beta + \frac{V_E}{Rcos\varphi}(cos\alpha sin\beta cos\varphi - sin\varphi cos\beta).$$

$$\omega_z = [sin\alpha cos\beta, cos\alpha cos\beta, sin\beta] \cdot \left[-\frac{V_N}{R}, \frac{V_E}{R}, \frac{V_E}{Rcos\varphi} sin\varphi\right]^T =$$

$$-\frac{V_N}{R} sin\alpha cos\beta + \frac{V_E}{R} cos\alpha cos\beta + \frac{V_E}{Rcos\varphi} sin\varphi sin\beta = -\frac{V_N}{R} sin\alpha cos\beta +$$

$$\frac{V_E}{Rcos\varphi}(cos\alpha cos\beta cos\varphi + sin\varphi sin\beta).$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\omega_x = -\dot{\beta} - \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right) cos\varphi sin\alpha - \frac{V_E}{R} cos\alpha,$$

$$\omega_y = \dot{\alpha} cos\beta + \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)(cos\alpha sin\beta cos\varphi - sin\varphi cos\beta) - \frac{V_N}{R} sin\alpha sin\beta,$$

$$\omega_z = -\dot{\alpha} sin\beta + \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)\Big(cos\alpha cos\beta cos\varphi + sin\varphi sin\beta -$$

$$\frac{V_N}{R} sin\alpha cos\beta\Big).$$

კუთხური სიჩქარის სიდიდე უდრის

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 + \left(\frac{V_N}{R}\right)^2 - 2\dot{\alpha}\left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right) sin\varphi +$$

$$\left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)^2 + 2\dot{\beta}\frac{V_E}{R} cos\alpha + 2\dot{\beta}\left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right) cos\varphi sin\alpha.$$

პასუხი: $\omega_x = -\dot{\beta} - \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right) cos\varphi sin\alpha - \frac{V_E}{R} cos\alpha$,

$\omega_y = \dot{\alpha} cos\beta + \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)(cos\alpha sin\beta cos\varphi - sin\varphi cos\beta) -$
$\frac{V_N}{R} sin\alpha sin\beta$,

$\omega_z = -\dot{\alpha} sin\beta + \left(U + \frac{V_E}{Rcos\varphi}\right)\Big(cos\alpha cos\beta cos\varphi + sin\varphi sin\beta -$
$\frac{V_N}{R} sin\alpha cos\beta\Big)$.

ამოცანა 20.15

სხეულის მოძრაობა უძრავი წერტილის გარშემო აღიწერება ეილერის კუთხეებით: $\varphi = 4t, \psi = \frac{\pi}{2} - 2t, \theta = \frac{\pi}{3}$. იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც აღწერს კუთხური სიჩქარის ჰოდოგრაფს. იპოვეთ ასევე სხეულის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება უძრავი სისტემის მიმართ.

ამოხსნა

ვიპოვოთ ეილერის კუთხეების წარმოებულები:

$$\dot{\varphi} = 4, \qquad \dot{\psi} = -2, \qquad \dot{\theta} = 0.$$

კუთხური სიჩქარის გეგმილები უძრავ ღერძებზე იქნება:

$$\omega_\xi = -\dot{\varphi} sin\psi sin\theta + \dot{\theta} sin\psi = 4sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}cos2t,$$

$$\omega_\eta = -\dot{\varphi} cos\psi sin\theta + \dot{\theta} sin\psi = -4\dot{} cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) sin\frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}sin2t,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} cos\theta + \dot{\psi} = 4cos\frac{\pi}{3} - 2 = 0.$$

კუთხური სიჩქარის ვექტორის ჰოდოგრაფის აღმწერი წერტილის კოორდინატებია:

$$\xi = \omega_\xi = 2\sqrt{3}cos2t, \eta = \omega_\eta = -2\sqrt{3}sin2t, \qquad \zeta = \omega_\zeta = 0.$$

ჰოდოგრაფის გამტოლებას კოორდინატებში ექნება სახე:

$$\xi^2 + \eta^2 = 12.$$

ეს არის წრეწირის განტოლება , რომლის ცენტრი არის უძრავ წერტილში.

კუთხური სიჩქარე უდრის:

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = 2\sqrt{3}\ .$$

ვიპივოთ ზკუთხური აჩქარების კოორდინატები:

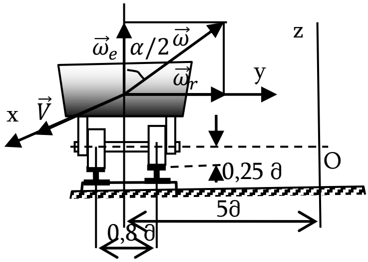
$$\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi = -4\sqrt{3}sin2t, \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta = -4\sqrt{3}cos2t, \qquad \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta = 0\ .$$

მაშინ

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2} = 4\sqrt{3}.$$

პასუხი: $= \omega_\xi = 2\sqrt{3}cos2t, \eta = \omega_\eta = -2\sqrt{3}sin2t,\ \zeta = \omega_\zeta = 0. \omega =$ $2\sqrt{3}$ რად/წმ $\varepsilon = 4\sqrt{3}$ რად/წმ^2.

ამოცანა 20.16



ვაგონი მიგორავს გზის ჰორიზონტალურ მონაკვეთზე, რომლის სომრუდის რადიუსია 5 მ. იპოვეთ გარე ვაგონის უძრავი და მოძრავი აქსოიდები, თუ ბორბლის რადიუსია 0,25 მ, გზის სიგანეა 0,80 მ. ბორბალი ბრუნავს ვერტიკალური z ღერძის გარშემო, რომელიც გადის სიმრუდის ცენტრში და ვაგონის ღერძის მიმართ.

ამოხსნა

ვაგონის ღერძის ცენტრის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეა V, მაშინ გარე ბორბლის ღერძის სიჩქარე იქნება

$$V_1 = V + \frac{V \cdot 0{,}4}{5} = 1{,}08V.$$

$$\omega_{1r} = \frac{V_1}{0{,}25} = 1{,}32V.$$

რადგან V_1 და ω_{1r} არიან მუდმივი სიდიდეები, ამიტომ კუთხური სიჩქარე აღწერს კონუსს, რომლის კუთხე წვეროსთან უდრის

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{5{,}4}{0{,}25} = 21{,}6 \;\rightarrow\; \alpha = 2arctg21{,}6.$$

მოძრავი აქსოიდისთვის:

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}0463 \;\rightarrow\; \beta = 2arctg0{,}0463$$

პასუხი: უძრავი აქსოიდია კონუსი რომლის ღერძია z და გაშლის კუთხე $\alpha = 2arctg21{,}6$, ხოლო მოძრავი აქსოიდია კონუსი რომლის ღერძი არის AB, ხოლო გაშლის კუთხე $\beta = 2arctg0{,}0463$.

ამოცანა 20.17

სხეულის მოძრაობა უძრავი წერტილის გარშემო მოიცემა განტოლებებით: $\varphi = nt, \psi = \frac{\pi}{2} + ant, \theta = \frac{\pi}{3}$. განსაზღვრეთ კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების გეგმილები უძრავ ღერძებზე, თუ a და n მუდმივი სიდიდეებია. იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, როცა სხეულის უძრავი აქსოიდა იქნება $O\xi\eta$ სიბრტყე.

ამოხსნა

ვიპოვოთ კუთხის წარმოებულები:

$$\dot{\varphi} = n, \dot{\psi} = an, \qquad \dot{\theta} = 0.$$

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარის გეგმილები უძრავ ღერძებზე:

$$\omega_\xi = \dot\varphi sin\psi sin\theta + \dot\theta cos\psi = nsin\left(\frac{\pi}{2} + ant\right)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{n\sqrt{3}}{2}cosant\ ;$$

$$\omega_\eta = -\dot\varphi cos\psi sin\theta + \dot\theta sin\psi = -ncos\left(\frac{\pi}{2} + ant\right)sin\frac{\pi}{3} = \frac{n\sqrt{3}}{2}sinant;$$

$$\omega_\zeta = \dot\varphi cos\theta + \dot\psi = \frac{n}{2} + an = n\left(a + \frac{1}{2}\right).$$

ვიპოვოთ კუთხური აჩქარების გეგმილები ღერძებზე:

$$\varepsilon_\xi = \dot\omega_\xi = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2}sinant;$$

$$\varepsilon_\eta = \dot\omega_\eta = \frac{an^2\sqrt{3}}{2}cosant;$$

$$\varepsilon_\zeta = \dot\omega_\zeta = 0.$$

უძრავი აქსოიდის განტოლებაა:

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}\ .$$

იმისათვის, რომ $O\xi\eta$ სიბრტყე იყოს უძრავი აქსოიდი, საჭიროა შესრულდეს პირობა $\zeta = 0$

ანუ

$$\omega_\zeta = 0\ \rightarrow n\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

პასუხი: $\omega_\xi = \frac{n\sqrt{3}}{2}cosant;\ \omega_\eta = \frac{n\sqrt{3}}{2}sinant; \omega_\zeta = n\left(a + \frac{1}{2}\right);$

$$\varepsilon_\xi = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2}sinant;\ \varepsilon_\eta = \frac{an^2\sqrt{3}}{2}cosant;\ \varepsilon_\zeta = 0;\ a = -\frac{1}{2}.$$

ამოცანა 20.18

ეილერის კუთხეები, რომელიც განსაზღვრას სხეულის მდებარეობას, მოცემულია განტოლებებით: $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0 + n_1 t,\ \varphi = \varphi_0 + n_2 t,$ სადაც $\theta_0,\ \ \psi_0, \varphi_0$ - შესაბამისი კუთხეების საწყისი მნიშვნელობებია. n_1 და n_2 -მუდმივებია. იპოვეთ სხეულის კუთხური სიჩქარე და უძრავი და მოძრავი აქსოიდები.

ამოხსნა

ვიპოვოთ კუთხური სიჩქარის გეგმილები უძრავი $O\xi\eta\zeta$და მოძრავი Oxyz სისტემის ღერძებზე:

$$\omega_\xi = \dot\varphi sin\psi sin\theta + \dot\theta cos\psi = n_2 sin(\psi_0 + n_1 t)sin\theta_0,$$

$$\omega_\eta = -\dot\varphi cos\psi sin\theta + \dot\theta sin\psi = -n_2 cos(\psi_0 + n_1 t)sin\theta_0,$$

$$\omega_\zeta = \dot\varphi cos\theta + \dot\psi = n_2 cos\theta_0 + n_1.$$

$$\omega_x = \dot\psi sin\varphi sin\theta + \dot\theta cos\varphi = n_1 sin(\varphi_0 + n_2 t)sin\theta_0,$$

$$\omega_y = -\psi cos\varphi \dot{s}in\theta - \dot{\theta} sin\varphi = n_1 cos(\varphi_0 + n_2 t) sin\theta_0,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} cos\theta + \dot{\varphi} = n_1 cos\theta_0 + n_2.$$

კუთხური სიჩქარე უდრის

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} cos\theta} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 cos\theta_0}\ .$$

უძრავი აქსოიდის განტოლებაა:

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta},$$

აქედან

$$\xi = \frac{\omega_\xi}{\omega_\zeta}\zeta = \frac{n_2 sin(\psi_0 + n_1 t) sin\theta_0}{n_2 cos\theta_0 + n_1}\zeta,$$

$$\eta = \frac{\omega_\eta}{\omega_\zeta}\zeta = \frac{-n_2 cos(\psi_0 + n_1 t) sin\theta_0}{n_2 cos\theta_0 + n_1}\zeta.$$

ავიყვანოთ ეს განტოლებები კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{n_2^2 sin^2\theta_0}{(n_2 cos\theta_0 + n_1)^2}\zeta^2 = 0.$$

ეს არის წრიული კონუსი, რომლის გაშლის კუთხეა

$$2arctg\frac{n_2 sin\vartheta_0}{n_2 cos\theta_0 + n_1} = 2arcsin\frac{n_2 sin\theta_0}{\omega}.$$

მოძრავი აქსოიდის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

$$x = \frac{n_1 sin(\varphi_0 + n_2 t) sin\theta_0}{n_1 cos\theta_0 + n_2} z,$$

$$y = \frac{n_1 sin(\varphi_0 + n_2 t) sin\theta_0}{n_1 cos\theta_0 + n_2} z,$$

გამოვრიცხოთ დრო და გვექნება

$$x^2 + y^2 - \frac{n_1^2 sin^2\theta_0}{(n_1 cos\theta_0 + n_2)^2} z^2 = 0.$$

ეს არის წრიული კონუსი, რომლის ღერძია z, ხოლო გაშლის კუთხეა

$$2arctg\frac{n_1 sin\theta_0}{n_1 cos\theta_0 + n_2} = 22arcsin\frac{n_1 sin\theta_0}{\omega}.$$

პასუხი: $\omega = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 cos\theta_0}$;

უძრავი აქსოიდა - წრიული კონუსი $\xi^2 + \eta^2 - \frac{n_2^2 sin^2\theta_0}{(n_2 cos\theta_0 + n_1)^2}\zeta^2 = 0$;

მოძრავი აქსოიდა - წიული კონუსი $x^2 + y^2 - \frac{n_1^2 sin^2\theta_0}{(n_1 cos\theta_0 + n_2)^2} z^2 = 0$.

წერტილის რთული მოძრაობა

21. წერტილის მოძრაობის განტოლება

ამოცანა 21.1

იპოვეთ იმ წერტლის სწორხაზოვანი მოძრაობის განტოლება, რომელიც ერთდროულად ასრულებს ორ ჰარმონიულ მოძრაობას:

$$x_1 = 2cos(\pi t + \pi/2), \quad x_2 = 3cos(\pi t + \pi) .$$

ამოხსნა

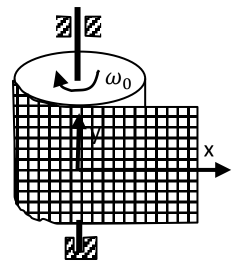
$$x = x_1 + x_2 = 2cos(\pi t + \pi/2) + 3cos(\pi t + \pi) = -2sin\pi t - 3cos\pi t = \sqrt{13}cos(\pi t - \alpha).$$

ამ ტოლობაში

$$sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} , cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}. \rightarrow tg\alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = arctg\frac{2}{3} + \pi = 213°40'.$$

პასუხი: $x = \sqrt{13}cos(\pi t - \alpha)$; სადაც $\alpha = arctg\frac{2}{3} + \pi = 213°40'$.

ამოცანა21.2



ჩამწერი მოწყობილობის დოლურა ბრუნავს თანაბრად ω_0 კუთხური სიჩქარით. მისი რადიუსია r. ჩამწერი მიერთებულია მოწყობილობასთან, რომელიც მოძრაობს კანონოთ $y = asin\omega_1 t$. იპოვეთ წირის განტოლება, რომელსაც ჩაწერს კალამი ქაღალდის ლენტაზე.

ამოხსნა

რადგან დოლურა მოძრაობს თანაბრად, ამიტომ ჩამწერის ჰორიზონტალური მოძრაობის განტოლებაა

$$x = Vt = \omega_0 rt.$$

დავუმატოთ ამას ვერტიკალის გასწვრივ მოძრაობა

$$y = asin\omega_1 t.$$

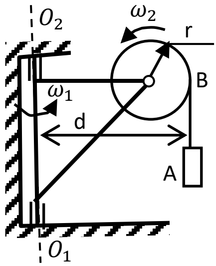
რომ ვიპოვოთ წირის განტოლება, საჭიროა ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო. მივიღებთ:

$$y = asin\frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}.$$

პასუხი: $y = asin\frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}$.

ამოცანა 21.3

მოსაბრუნებელი ამწეს O_1O_2 ღერძის გარშემო მუდმივი ω_1 კუთხური სიჩქარით მობრუნების დროს ტვირთი აიწევა ზევით B დოლურაზე დახვეული ბაგირის საშუალებით. დოლი, რომლის რადიუსია r , ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქა-რით ω_2. იპოვეთ ტვირთის აბსოლუტური ტრაექ-ტორია, თუ ამწეს შვერილის სიგრძე უდრის d.



ამოხსნა

ავარჩიოთ ათვლის სათავე ისე,რომ Ox ღერძი გადიოდეს O_1O_2 ღერძზე და ტვირთის საწყის მდებარეობაზე. Oz ღერძი გადის ამწეს ბრუნვის O_1O_2 ღერძზე, ხოლო Oy ღერძი არის ნახაზიდან იქით. ვიპოვოთ ტვირთის კოორდინატები დროის ნებისმიერი მომენტისათვის:

$$x = dcos\varphi = dcos\omega_1 t,$$
$$y = dsin\varphi = dsin\omega_1 t,$$
$$z = V_z t = \omega_2 rt.$$

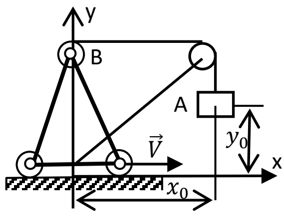
ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ვიპოვოთ დრო და ჩავსვათ წინა ორ ტოლობაში, გვექნება:

$$t = \frac{z}{\omega_2 r}\ , x = dcos\frac{\omega_1 z}{\omega_2 r}\ , y = dsin\frac{\omega_1 z}{\omega_2 r}\ .$$

პასუხი: ხრახნწირი, რომლის განტოლებაა: $x = dcos\frac{\omega_1 z}{\omega_2 r};\ y = dsin\frac{\omega_1 z}{\omega_2 r}$.

ამოცანა21.4

ამწე მექანიზმების გადადგილებისა და ტვირთის აწევის დროს A ტვირთი გადაადგილდება, როგორც ვერტიკალურად, ასევე ჰორიზონტალურად. B დოლურაზე , რომლის რადიუსია 0,5მ, დახვეულია ბაგირი, რომელზედაც დაკიდებულია ტვირთი. დოლურა ბრუნავს კუთხური სიჩქარით $\omega = 2\pi$ რად/წმ. ამწე გადაადგილდება ჰორიზონტალური მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით $V = 0,5$ მ/წმ. იპოვეთ ტვირთვის ტრაექტორია, თუ ტვირთის საწყისი კოორდინატებია $x_0 = 10$მ, $y_0 = 6$ მ.



ამოხსნა

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებები დეკარტეს კოორდინატებში იმის გათვალისწინებით, რომ

$$a_x = a_y = 0.$$

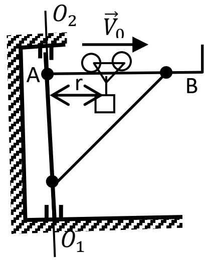
$$x = x_0 + V_x t = x_0 + Vt, y = y_0 + V_y t = y_0 + \omega r t.$$

გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან დრო და მივიღებთ:

$$y = \frac{x - x_0}{V}\omega r + y_0 = 6{,}28x - 56{,}8.$$

პასუხი: $y = 6{,}28x - 56{,}8$.

ამოცანა 21.5



მოსაბრუნებელი ამწის AB ისარი ბრუნავს O_1O_2 ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω. ჰორიზონტალურ ისარზე A-დან B- კენ მოძრაობს ურიკა მუდმივი სიჩქარით V_0 . იპოვეთ ურიკას აბსოლუტური ტრაექტორია თუ საწყის მომენტში ურიკა იმყოფებოდა O_1O_2 ღერძთან.

ამოხსნა

ავირჩიოთ საკოორდინატო სისტემა ისე, რომ x ღერძი გადიოდეს ტვირთის საწყის მდებარეობაში და იყოს O_1O_2 ღერძის მართობი. z ღერძი გადის ბრუნვის O_1O_2 ღერძზე, ხოლო y ღერძი ნახაზის მართობულია და მიმართულია ნახაზიდან იქით. ამ შემთხვევაში წერტილის კოორდინატებს აქვს სახე:

$$x = r cos\varphi,\ y = r sin\varphi,\ z = o.$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$r = V_0 t.$$

გარდა ამისა

$$\varphi = \omega t\ \rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega}.$$

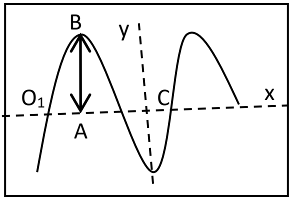
საბოლოოდ გვაქვს

$$r = \frac{V_0}{\omega}\varphi.$$

მიღებული განტოლება არის არქიმედეს სპირალის განტოლება z=0 სიბრტყეში.

პასუხი: ტრაექტორია არის არქიმედეს სპირალი - $r = \frac{V_0}{\omega}\varphi$.

ამოცანა 21.6



რხევითი მოძრაობის ჩამწერი ლენტა მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ 2 მ/წმ სიჩქარით. Oy ღერძის გასწვრივ მერხევი სხეული ლენტაზე აღწერს სინუსოიდას, რომლის უდიდესი ორდინატა AB=2,5სმ , ხოლო სიგრძე $O_1C = 8$სმ. იპოვეთ სხეულის რხევითი მოძრაობის განტოლება. დავუშვათ, სხეულის საწყის მდებარეობას შეესაბამება O წერტილი .

ამოხსნა

დავუშვათ Oy ღერძის მიმართ რხევის განტოლებას აქვს სახე

$$y = asin(kt + \varphi_0),$$

სადაც არის aამპლიტუდა, ხოლო φ_0 საწყისი ფაზა.

ჩვენს შემთხვევაში $a = AB = 2,5$ სმ.

რადგან სინუსოიდა არის პერიოდული ფუნქცია , ამიტომ უნდა შესრულდეს პირობა

$$k(t+T) + \varphi_0 = kt + \varphi_0 + 2\pi \ \rightarrow k = \frac{2\pi}{T}$$ - წრიული სიხშირე.

ჩვენს შემთხვევაში T არის დრო, რომელიც საჭიროა O_1C მანძილის V_x სიჩქარით გასავლელად, ე.ი.

$$T = \frac{O_1C}{V_x} = 0,04 \text{ წმ.}$$

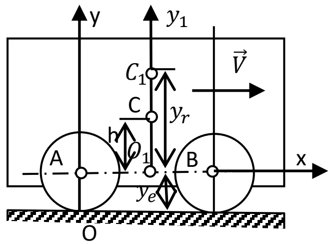
$$k = \frac{2\pi}{T} = 50\pi \text{ რად/წმ.}$$

რადგან ამოცანის პირობით y=0 როცა t=0, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$y = 2,5sin(50\pi t) \text{ სმ.}$$

პასუხი: $y = 2,5sin(50\pi t)$ სმ.

ამოცანა 21.7



ტრამვაი მოძრაობს თანაბრად გზის სწორხაზოვან მონაკვეთზე V= 18 კმ/წთ სიჩქარით. ამასთან ძარა ასრულებს რხევას $a = 0,8$ სმ ამპლიტუდით და T=0,5 წმ პერიოდით. იპოვეთ ძარას სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის განტოლება, თუ მისი საშუალო

დაშორება ბორბლებზე გამავალი ჰორიზონტალური სიბრტყიდან არის $h = 0{,}9$ მ. ბოტბლის რადიუსია $R = 0{,}39$ მ. როცა t=0 სიმძიმის ცენტრი საშუალო მდებარეობაშია და სიჩქარე მიმართულია ზევით.

ამოხსნა

ძარას სიმძიმის ცენტრი ასრულებს რთულ მოძრაობას. ის გადაადგილდება ურიკასთან ერთად ჰორიზონტალურად და ასრულებს რხევით მოძრაობას ურიკას მიმართ ვერტიკალური მიმართულებით. ავირჩიოთ უძრავი Oxyდა მოძრავი $O_1x_1y_1$ ათვლის სისტემები. Ox ღერძი მოთავსებულლია რელსის დონეზე ჰორიზონტალურად, ხოლო Oy ღერძი ვერტიკალურია. მოძრავი სისტემა მოთავსებულია ვაგონის ურიკაზე, O_1x_1 ღერძი მიმართულია ბორბლების ღერძის დონეზე და მიმართულია მარჯვნივ, ხოლო O_1y_1 ღერძი გადის ციმძიმის ცენტრზე და მიმართულია ვერტიკალურად ზევით.

ძარას სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები მოძრავ სისტემაში არის

$$x_r = 0, y_r = h + asin\omega t,$$

რადგან ამპლიტუდა $a = 0{,}008$ მ და სიხშირე

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi,$$

ამიტომ

$$y_r = 0{,}9 + 0{,}008sin4\pi t.$$

O_1 წერტილის კოორდინატები უძრავი სისტემის მიმართ უდრის

$$x_e = Vt = 5t \text{ მ}, \; y_e = R = 0{,}39 \text{ მ}.$$

მაშინ ურიკას სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები უძრავ სისტემაში იქნება:

$$x_a = x_e + x_r = 5t, \;\; y_a = y_e + y_r = 1{,}29 + 0{,}008sin4\pi t.$$

ტრაექტორიის განტოლების საპოვნელად გამოვრიცხოთ ამ ტოლობებიდან დრო და გვექნება

$$y_a = 1{,}29 + 0{,}008sin0{,}8\pi x_a.$$

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორია არის სინუსოიდა.

პასუხი: $y_a = 1{,}29 + 0{,}008sin0{,}8\pi x_a$

ამოცანა 21.8

ორმაგი საქანი ასრულებს ერთდროულად ორ ურთიერთმართობულ ჰარმონიულ რხევას ერთნაირი სიხშირით მაგრამ განსხვავებული ამპლიტუდით და ფაზით. იპოვეთ ტრაექტორიის განტოლება, თუ რხევების განტოლებებია : $x = asin(\omega t + \alpha)$, $y = bsin(\omega t + \beta)$.

ამოხსნა

რომ ვიპოვოთ ტრაექტორიის განტოლება საჭიროა მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო. ვისარგებლოთ ტრიგონომეტრიის ფორმულებით და გვექნება

$$\frac{x}{a} = sin\omega tcos\alpha + cos\omega tsin\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{y}{b} = sin\omega tcos\beta + cos\omega tsin\beta \ . \qquad (2)$$

ამოვხსნათ ამ განტოლებებიდან $sin\omega t$ და $cos\omega t$ შემდეგი გარდაქმნებით:

$$(1) \times sin\beta - (2) \times sin\alpha \ \rightarrow \frac{x}{a}sin\beta - \frac{y}{b}sin\alpha = sin\omega t(cos\alpha sin\beta - cos\beta sin\alpha),$$

ანუ

$$\frac{x}{a}sin\beta - \frac{y}{b}sin\alpha = sin\omega tsin(\beta - \alpha) \qquad (3)$$

ანალოგიურად

$$(1) \times cos\beta - (2) \times cos\alpha \ \rightarrow \ \frac{x}{a}cos\beta - \frac{y}{b}cos\alpha = cos\omega tsin(\alpha - \beta) \qquad (4)$$

ავიყვანოთ (3) და (4) განტოლებები კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\left(\frac{x}{a}sin\beta - \frac{y}{b}sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{x}{a}cos\beta - \frac{y}{b}cos\alpha\right)^2 = sin^2(\alpha - \beta).$$

მოვახდინოთ გარდაქმნები და საბოლოოდ მივიღებთ:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}cos(\alpha - \beta) = sin^2(\alpha - \beta)$ - ელიფსის განტოლება.

პასუხი: ელიფსი $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}cos(\alpha - \beta) = sin^2(\alpha - \beta)$.

ამოცანა 21.9

ორმაგი საქანის ბოლო აღწერს ლისაჟის ფიგურას, რომელიც მიირება ორი ურთიერთმართობული რხევის შეკრებით. $x = asin2\omega t, \ y = asin\omega t$. იპოვეთ ტრაექტორიის განტოლება.

ამოხსნა

ამ ამოცანაშიც განტოლებებიდან უნდა გამოირიცხოს დრო. გვაქვს

$$x = asin2\omega t = 2asin\omega tcos\omega t \qquad (1)$$

$$y = asin\omega t. \qquad (2)$$

ჩავსვათ (2) (1)-ში

$$\begin{cases} x = 2ycos\omega t \\ y = asin\omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2y} = cos\omega t \\ \dfrac{y}{a} = sin\omega t \end{cases}$$

ავიყვანოტ ორივე მხარე კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

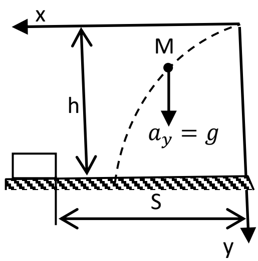
$$\frac{x^2}{4y^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

თუ მოვახდენთ გარდაქმნას მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას

$$a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2).$$ - ლისაჟის ფიგურა.

პასუხი: $a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$. - ლისაჟის ფიგურა.

ამოცანა 21.10



მატარებელი მოძრაობს თანაბრად 36 კმ/სთ სიჩქარით. სასიგნალო ფანარი, რომელიც დაკიდებულია ბოლო ვაგონზე, მოწყდა კრონშტეინიდან.განსაზღვრეთ ფანარის აბსოლუტური მოძრაობის ტრაექტორია და გავლილი გზა S,რომელსაც გაივლის მატარებელი ფანარის ვარდნის დროის განმავლობაში. ფანარი დაკიდებულია დედამიწის ზედაპირიდან 4,905მ სიმაღლეზე.გაკოორდინატო ღერძები გაავლეთ დაკიდების წერტილში. Ox ღერძი ჰორიზონტალურია და მიმართულია მატარებლის მოზრაობის მიმართულებით, ხოლო Oy ღერძი ვერტიკალურია.

ამოხსნა

ფანარის მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე:

$$x = Vt, \qquad y = \frac{gt^2}{2}.$$

სადაც $V = \frac{36 კმ}{სთ} = \frac{10 მ}{წმ}$. g= 9,81 მ/წმ².

გამოვრიცხოთ მოზრაობის განტოლებებიდან დრო

$$t = \frac{x}{V}. \; y = \frac{gx^2}{2V^2} = 0{,}049x^2.$$

ვიპოვოთ ფანარის ვარდნის დრო

$$y = h \rightarrow \; t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

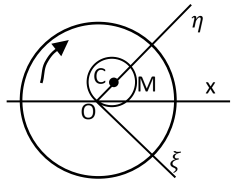
მატარებლის მიერ გავლილი გზა უდრის

$$S = Vt = V\sqrt{\frac{2h}{g}} = 10 \text{ მ}.$$

პასუხი: ტრაექტორია არის პარაბოლა $y = 0{,}049x^2$, გავლილი მანძილი $S = 10$ მ.

ამოცანა 21.11

M საჭრისი ასრულებს განივ წინსვლა-უკუსვლით მოძრაობას კანონით $x = asin\omega t$. იპოვეთ საჭრისის ბოლოს ტრაექტორია დისკოს მიმართ, თუ დისკო ბრუნავს თანაბრად ω კუთხური სიჩქარით O ღერძის გარშემო.



ამოხსნა

საჭრისის დაცილება ბრუნვის ღერძიდან უდრის $r = x = asin\omega t$. საჭრისის მოძრაობის კანონი მოძრავ სისტემაში იქნება

$$\xi = rcos\varphi = asin\omega tcos\omega t \qquad (1)$$

$$\eta = rsin\varphi = asin\omega tsin\omega t \qquad (2)$$

ამ განტოლებებში გათვალისწინებული იყო, რომ თანაბარი ბრუნვის დროს $\varphi = \omega t$.ტრაექტორიის განტოლების საპოვნელად (1) და (2) განტოლებებიდან უნდა გამოირიცხოს დროის პარამეტრი. ამისათვის ეს განტოლებები ასე გადავწეროთ:

$$\xi = \frac{1}{2}asin2\omega t \qquad (3)$$

$$\eta = \frac{1}{2}a(1 - cos2\omega t) \qquad (4)$$

(3) განტოლებიდან გვაქვს

$$sin2\omega t = \frac{2\xi}{a},$$

(4) განტოლებიდან გვაქვს

$$cos2\omega t = 1 - \frac{2\eta}{a}.$$

ავიყვანოთ ეს ტოლობები კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

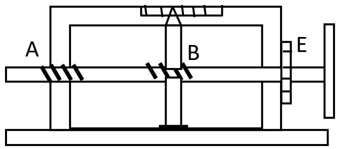
$$\left(\frac{2\xi}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{2\eta}{a}\right)^2 = 1,$$

ანუ

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

პასუხი: $\xi^2 + \left(\eta - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ - ტრაექტორია არის წრეწირი რომლის რადიუსია $a/2$, ხოლო ცენტრია C (0, a/2).

ამოცანა 21.12



ზოგიერთ საზომ ხელსაწყოებში მაჩვენებლის გადასაადგილებლად გამოიყენება დიფერენცირებული ხრახნი, რომელიც შედგება AB ღერძისგან, რომელსაც აქვს A ხრახნი-ბიჯით h_1 და B ხრახნი ბიჯით h_2 $(h_2 < h_1)$. A ნაწილი ბრუნავს უძრავ C ქანჩში, ხოლო B ნაწილი ბრუნავს D ელემენტში, რომელიც დაკავშირებულია მაჩვენებელთან, რომელიც სრიალებს უძრავ სკალაზე.

1) იპოვეთ მაჩვენებლის გადაადგილება როცა მქნევარა ბორბალი მობრუნდება 1/n ბრუნით, თუ $n = 200$,

$h_1 = 0{,}5$ მმ, $h_2 = 0{,}4$ მმ. ორივე ხრახნი მარჯვენაა ან ორივე მარცხენაა.

2) როგორ შეიცვლება ჩვენება, თუ A ნაწილში გაკეთდება მარცხენა, ხოლო B ნაწილში მარჯვენა ხრახნი.

ამოხსნა

რომ ვიპოვოთ მაჩვენებლის გადაადგილება განვიხილოთ დიფერენციალის მუშაობის პრინციპი A და B ნაწილებში ცალცალკე. A ხრახნი მოძრაობს უძრავ C ჭანჭიკში და ერთი მობრუნებით მისი ღერძი გადაადგილდება ერთი ბიჯით h_1. B ნაწილის ერთი მობრუნება იწვევს D ელემენტის გადაადგილებას ხრახნის მიმართ საპირისპირო მიმართულებით h_2 ბიჯით. შედეგად 1/n ბრუნის დროს მაჩვენებლის აბსოლუტური გადაადგილება მოხდება დიდი ბიჯის მქონეხრახნის მიმართულებით და გამოითვლება ფორმულით

$$S = \frac{1}{n}(h_2 - h_1) = 0{,}0005 \text{ მმ}.$$

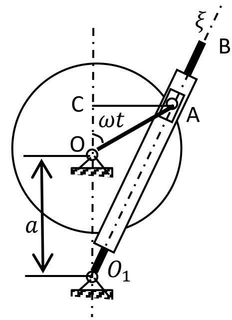
როცა ხრახნები საპირისპიროა მაშინ სკალა გადაადგილდება იმ მხარეს, საითაც ხრახნი და შედეგად გვექნება

$$S = \frac{1}{h}(h_1 + h_2) = 0{,}0045 \text{ მმ}.$$

პასუხი: 1) $S = \frac{1}{n}(h_2 - h_1) = 0{,}0005$ მმ. 2) $S = \frac{1}{h}(h_1 + h_2) = 0{,}0045$ მმ.

ამოცანა 21.13

ჩარხის ამჩქარებელი მექანიზმი შედგება ორი პარალელური ლილვისგან O და O_1 . OA მრუდმხარას ბოლოო შეერთებულია შეერთებულია ცოციასთან, რომელიც სრიალებს O_1B კულისას ჭრილში. იპოვეთ ცოციას ფარდობითი მოძრაობა მუშტას ჭრილში და თვითონ კულისას ბრუნვის განტოლება, მრუდმხარა $OA = r$ ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω. მანძილი ღერძებს შორის $OO_1 = a$.



ამოხსნა

ცოცია ასრულებს სწორხაზოვან გადატანით მოძრაობას კულისას ჭრილში. O_1OA სამკუთხედიდან კოსინუსების თეორემით მივიღებთ:

$$\xi = \sqrt{a^2 + r^2 + 2arcos\omega t}\ .$$

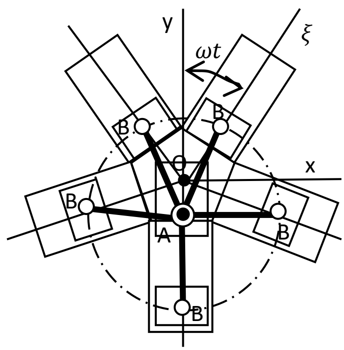
მუშტას ბრუნვის განტოლება განისაზღვრება φ კუთხით, რომელიც შეიძლება ვიპოვოთ სამკუთხედიდან O_1AC .

$$tg\varphi = \frac{AC}{O_1C} = \frac{rsin\omega t}{a+rcos\omega t}\ .$$

პასუხი: $\xi = \sqrt{a^2 + r^2 + 2arcos\omega t};\ tg\varphi = \frac{rsin\omega t}{a+rcos\omega t}$.

ამოცანა 21.14

ნახაზზე ნაჩვენებ როტაციულ ძრავში კარტერზე მიმაგრებული ცილინდრები ბრუნავენ მასთან ერთად უძრავი O ღერძის გარშემო. დგუშების ბარბაცები ბრუნავენ უძრავი OA მრუდმხარას A თითის გარშემო. მიუთითეთ 1) დგუშის B წერტილის აბსოლუტური მოზრაობის ტრაექტორია. 2) ცილინდრის მიმართ მათი მოძრაობის მიახლოებითი განტოლება, თუ ცილინდრები ბრუნავენ მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. მოცემულია $OA = r, AB = l$. Ox და Oy ღერძების სათავეა ლილვის ცენტრი. დავუშვათ $\lambda = \frac{r}{l}$ არის მცირე.



ამოხსნა

რადგან B დგუშების ბარბაცები ბრუნავენ უძრავი მრუდმხარას A თითის გარშემო, ამიტომ ისინი აღწერენ წრეწირს რომლის რადიუსია l. ამ წრეწირის განტოლება xAy სისტემაში იქნება

$$x^2 + (y + r)^2 = l^2.$$

ვიპოვოთ დგუშის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება ცილინდრის მიმართ $OB = \xi(t)$. OAB სამკუთხედიდან გვაქვს

$$l^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi cos(2\pi - \omega t).$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება ξ უცნობის მიმართ.

$$\xi = -rcos\omega t \pm \sqrt{r^2cos^2\omega t + l^2 - r^2}.$$

რადგან $\xi > 0$, ამიტომ ფესვის ნიშნის წინ ვიღებთ „პლიუს" ნიშანს. გამოვიტანით ფესვის ნიშნის გარეთ l და მივიღებთ :

$$\xi = -rcos\omega t + l\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2 cos^2\omega t - \frac{r^2}{l^2}} = -rcos\omega t + l\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2 (cos^2\omega t - 1)} = -rcos\omega t + l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}sin^2\omega t}.$$

რადგან $\lambda = \frac{r}{l}$ არის მცირე, ამიტომ

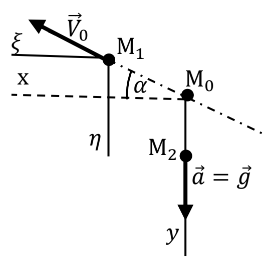
$$\sqrt{1 - \lambda^2 sin^2\omega t} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2}sin^2\omega t.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\xi = -rcos\omega t + l\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}sin^2\omega t\right) = l\left(1 - \lambda cos\omega t - \frac{\lambda^2}{2}sin^2\omega t\right).$$

პასუხი: $\xi = l\left(1 - \lambda cos\omega t - \frac{\lambda^2}{2}sin^2\omega t\right)$.

ამოცანა 21.15



ჰაერში უძრავად დაკიდებული ვერტმფრენი აგდებს ტვირთს და იმავდროულად იწყებს მოძრაობას V_0 სიჩქარით, რომელიც ჰორიზონტისადმი მიმართულია α კუთხით. იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება და ტრაექტორია ვერტმფრენის მიმართ (ფარდობითი სისტემის ღერძები მიმართეთ ვერტმფრენის სიმიმის ცენტრიდან ჰორიზონტალურად კურსის მიმართულებით და ვერტიკალურად ქვემოთ.

ამოხსნა

ტვირთის საწყისი მდებარეობა აღვნიშნოთ M_0 . შემოვიტანოთ ათვლის ორი სისტემა სათავით M_0 წერტილში. უძრავი xM_0y და მოძრავი $\xi M_1\eta$, რომელიც მოძრაობს ვერტმფრენთან ერთად. იპოვეთ M წერტილის კოორდინატები მოძრავი სისტემის მიმართ დროის t მომენტში.

$$M_0M_1 = V_0t\ ;\ M_0M_2 = \frac{gt^2}{2}.$$

მაშინ

$$x_r = \xi = -M_0M_1cos\alpha = -V_0tcos\alpha\ ;$$

$$y_r = \eta = M_0M_2 + M_0M_1sin\alpha = \frac{gt^2}{2} + V_0tsin\alpha.$$

ტრაექტორიის განტოლების საპოვნელად ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო.

$$t = -\frac{x_r}{V_0cos\alpha},$$

$$y_r = -V_0\frac{x_r}{V_0cos\alpha}sin\alpha + \frac{g}{2}\left(-\frac{x_r}{V_0cos\alpha}\right)^2 = -x_rtg\alpha + \frac{gx_r^2}{2V_0^2cos^2\alpha}.$$

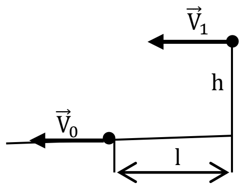
მიღებული განტოლება არის პარაბოლის განტოლება.

პასუხი: $x_r = -V_0tcos\alpha\ ;\ y_r = \frac{gt^2}{2} + V_0tsin\alpha;$

ტრაექტორია არის პარაბოლა - $y_r = -x_rtg\alpha + \frac{gx_r^2}{2V_0^2cos^2\alpha}.$

22. წერტილის სიჩქარეების შეკრება

ამოცანა 22.1



გემი მოძრაობს სწორხაზობრივად V_0 სიჩქარით. ზღვიდან h სიმაღლეზე, იგივე კურსით მიფრინავს თვითმფრინავი V_1 სიჩქარით. ვიპოვოთ მანძილი lჰორიზონტის გასწვრივ, საიდანაც უნდა ჩამოაგდონ საგანი, რომ ის დაეცეს გემზე. ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა

ვიპოვოთ სხეულის სიჩქარე გემის მიმართ

$$V_r = V_1 - V_0.$$

სხეულის ვარდნის დრო ასე შეიძლება ვიპოვოთ:

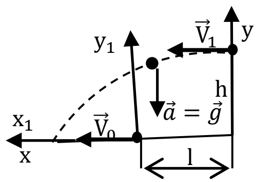
$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

მაშინ საძიებელი მანძილი უდრის

$$l = V_r t = (V_1 - V_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

პასუხი: $l = (V_1 - V_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

ამოცანა 22.2



ამოხსენით იგივე ამოცანა თუ თვითმფრინავი მოძრაობს იგივე სიჩქარით გემის შემხვედრი მიმართულებით.

ამოხსნა

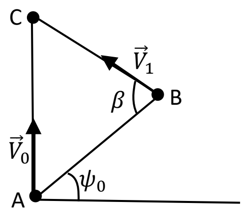
ამ შემთხვევაში $V_r = V_1 + V_0$, ხოლო სხეულის ვარდნის დრო იგივეა. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$l = V_r t = (V_1 + V_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

პასუხი: $l = (V_1 + V_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

ამოცანა 22.3

გემი, რომელიც გადის A წერტილში, მოძრაობს მოძრაობს სიდიდით და მიმართულებით მუდმივი V_0 სიჩქარით. AB წრფის მიმართ რა კუთხით უნდა დაიწყოს მოძრაობა B წერტილში მყოფმა კატერმა, რომ შეხვდეს გემს, თუ კატერის სიჩქარე სიდიდით და მიმართულებით მუდმივია და უდრის V_1? . AB წრფე ადგენს ψ_0 კუთხეს გემის კურსის მართობთან.



ამოხსნა

სამკუთხედ ABC- დან ვპოულობთ

$$\frac{sin\beta}{sin(90°-\psi_0)} = \frac{AC}{BC},$$

მაგრამ, რადგან $AC = V_0 t, BC = V_1 t$, ამიტომ შედეგად მივიღებთ:

$$sin\beta = \frac{V_0}{V_1} cos\psi_0.$$

პასუხი: $sin\beta = \frac{V_0}{V_1} cos\psi_0$.

ამოცანა 22.4

წინა ამოცანაში იპოვეთ დრო T , რომლის შემდეგ კატერი შეხვდება გემს, თუ მათ შორის საწყისი მანძილი $AB = l$.

ამოხსნა

რომ ვიპოვოთ შეხვედრის დრო შევადგინოთ განტოლებები:

1) $$\frac{AC}{AB} = \frac{sin\beta}{sin(180°-(90°-\psi_0)-\beta)}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $AC = V_0 T, AB = l$, გვექნება

$$sin(180° - (90° - \psi_0) - \beta) = sin(90° + \psi_0 - \beta) = cos(\psi_0 - \beta).$$

$$T = \frac{l}{V_0} \frac{sin\beta}{cos(\psi_0-\beta)}.$$

2) $$\frac{BC}{AB} = \frac{sin(90°-\psi_0)}{sin(180°-(90°-\psi_0)-\beta)}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $AB = l, BC = V_1 T$, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{V_1} \frac{cos\psi_0}{cos(\psi_0-\beta)}.$$

3) $$AB = ACcos(90° - \psi_0) + BCcos\beta$$

ჩავსვათ $AB = l, AC = V_0 T$, $BC = V_1 T, AB = l$.

$$cos\beta = \sqrt{1 - sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{V_1^2}cos^2\psi_0} = \frac{1}{V_1}\sqrt{V_1^2 - V_0^2cos^2\psi_0}\,,$$

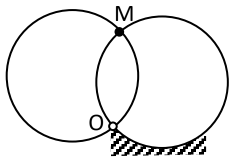
საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$T = \frac{1}{V_0 sin\psi_0 + \sqrt{V_1^2 - V_0^2cos^2\psi_0}}.$$

პასუხი: $T = \frac{1}{V_0sin\psi_0+\sqrt{V_1^2-V_0^2cos^2\psi_0}} = \frac{l}{V_0}\frac{sin\beta}{cos(\psi_0-\beta)} = \frac{1}{V_1}\frac{cos\psi_0}{cos(\psi_0-\beta)}$.

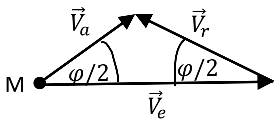
ამოცანა 22.5

მავთულისგან გაკეთებული რგოლი ბრუნავს თავის სიბრტყეში O ღერძის გარშემო თანაბრად ω კუთხური სიჩქარით. როგორ იმოძრავებს ისეთივე რადიუსიან წრეწირთან მოცემული წრეწირის გადაკვეთის M წერტილი .

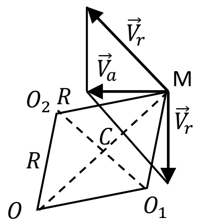


ამოხსნა

აღვნიშნოთ O_1 და O_2 -ით შესაბამისად უძრავი და მოძრავი წრეწირების რადიუსები. მოძრაობის დროს მოძრავი წრეწირის ცენტრი მოძრაობს წრეწირზე, რომლის რადიუსია R. აღვნიშნოთ კუთხე მოძრავ OO_1 და უძრავ OO_2 წრფეებს შორის φ-ით. მაშინ M წერტილის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც რთული მოძრაობა , სადაც ფარდობითი მოძრაობა არის მოძრავ წრეწირზე მოძრაობა, ხოლო წარმტანი მოძრაობაა მისი მოძრაობა მოძრავ წრეწირთან ერთად. ამიტომ სიჩქარეებისათვის შეიძლება დავწეროთ:



ნახ.5ა



ნახ.5ბ

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r\,.$$

ნახ.5ა და ნახ.5ბ -დან გვაქვს

$$V_a = V_r = \frac{V_e}{2cos\frac{\varphi}{2}},$$

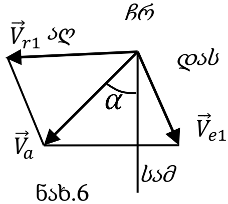
სადაც $V_e = \omega \cdot OM = \omega \cdot 2Rcos\frac{\varphi}{2}$, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$V_a = V_r = \omega R.$$

ამრიგად, წერტილი მოძრაობს მოძრავი და უძრავი წრეწირების გაშემო, შესაბამისად საათის ისრის საწინააღმდეგო და თანმხვედრი მიმართულებით.
პასუხი: გადაკვეთის წერტილი შემოუვლის ორივე წრეწირს მუდმივი სიჩქარით ωR.

ამოცანა22.6

გემო მოძრაობს სამხრეთ-აღმოსავლეთის მიმართულებით a კვანძი სიჩქარით. ამავე დროს ანძაზე დამაგრებული ფლუგერი აჩვენებს ქარის აღმოსავლეთის მიმართულებას. გემი ამცირებს სიჩქარეს a/2 კვანძამდე. ფლუგერი აჩვენებს ჩრდილო-აღმოსავლეთის მიმართულებას. იპოვეთ: 1) მიმართულება და 2) ქარის სიჩქარე (კურსის დასახელება აჩვენებს გემის სვლის მიმართულებას, ხოლო ქარის დასახელება მიუთითებს თუ საიდან უბერავს).



ნახ.6

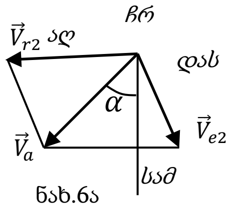
ამოხსნა

გემის მოძრაობის მიმართულებით და ფლუგერის ჩვენებით შეიძლება ვიმსჯელოთ ქარის მიმართულებაზე. ქარის მიმართულება ჩავთვალოთ აბსოლუტურად. სამართლიანია ტოლობა:

$$\overrightarrow{V_a} = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \qquad (1)$$

სადაც $\vec{V}_e$ - გემის სიჩქარეა, ხოლო $\vec{V}_r$ - ქარის სიჩქარე გემის მიმართ.

დავუშვათ, რომ ქარის სიჩქარე სამხრეთ-ჩრდილოეთის მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს. 6 და 6ა ნახაზზე ნაჩვენებია ორივე შემთხვევა. შევადგინოთ შესაბამისი განტოლებები:



ნახ.6ა

$$V_a^2 = V_{e1}^2 + V_{r1}^2 + 2V_{e1}V_{r1}cos135°\,,$$
$$V_a^2 = V_{e2}^2 + V_{r2}^2.$$

აქედან

$$V_{e2}^2 + V_{r2}^2 = V_{e1}^2 + V_{r1}^2 + 2V_{e1}V_{r1}cos135°\,.$$

დავაგეგმილოთ (1) განტოლება ჰორიზონტალურ ღერძზე და მივიღებთ:

$$-V_{r1} - V_a sin\alpha + V_{e1}cos45° = -V_{r2}cos45° - V_a sin\alpha + V_{e2}cos45°$$

აქედან

$$-V_{e1}cos45° - V_{r1} = V_{e2}cos45° - V_{r2}cos45°.$$

ვისარგებლოთ ტოლობებით:

$$V_{e1} = a,\ V_{e2} = a/2.$$

წინა ტოლობებში ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{4} + V_{r2}^2 = a^2 + V_{r1}^2 - \sqrt{2}aV_{r1} \\ V_{r2} = \sqrt{2}V_{r1} - \frac{a}{2}\,. \end{cases}$$

აქედან

$$\frac{a^2}{4} + 2V_{r2}^2 - \sqrt{2}aV_{r1} + \frac{a^2}{4} = a^2 + V_{r1}^2 - \sqrt{2}aV_{r1} \ \to V_{r1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \ \to V_{r2} = \frac{a}{2}.$$

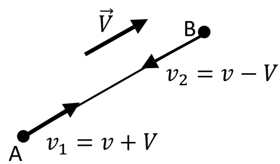
$$V_a = \sqrt{V_{r2}^2 + V_{e2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\,.$$

ეს ნიშნავს, რომ $\alpha = 0$, ანუ ქარი უბერავს ჩრდილოეთიდან.

პასუხი: 1) ჩრდილოეთიდან 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ კვანძი.

ამოცანა 22.7

ქარის დროს თვითმფრინავის სიჩქარის განსაზღვრისათვის მიწაზე მონიშნავენ l სიგრძის ხილულ მონაკვეთს. მონაკვეთის მიმართულება ემთხვევა ქარის მიმართულებას. ამ მონაკვეთის გასწვრივ თვითმფრინავმა გაიფრინა ჯერ ქარის მიმართულებით t_1 დროში, ხოლო შემდეგ საპირისპირო მიმართულებით t_2 დროში. იპოვეთ თვითმფრინავის საკუთარი სიჩქარე v და ქარის სიჩქარე V.



ამოხსნა

ცხადია, რომ თვითმფრინავის აბსოლუტური სიჩქარე ქარის მიმართულებით არის $v_1 = v + V$, ხოლო ქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით $v_2 = v - V$. ვიპოვოთ დრო ორივე მიმართულებით.

$$\begin{cases} t_1 = \frac{l}{v_1} \\ t_2 = \frac{l}{v_2} \end{cases} \to \begin{cases} \frac{l}{v+V} = t_1 \\ \frac{l}{v-V} = t_2 \end{cases} \to \begin{cases} v + V = \frac{l}{t_1} \\ v - V = \frac{l}{t_2} \end{cases}.$$

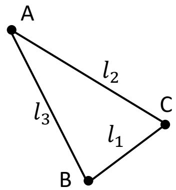
ამ სისტემიდან ვპოულობთ საძიებელ სიდიდეებს:

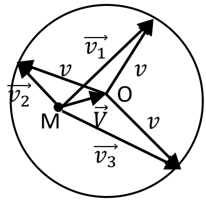
$$v = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right);\ V = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right).$$

პასუხი: $v = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right);\ V = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right).$

ამოცანა 22.8

ქარის დროს თვითმფრინავის საკუთარი v სიჩქარის განსაზღვრისათვის მიწაზე მონიშნავენ ABC სამკუთხა პოლოგონს, რომლის გვერდებია: $BC = l_1, CA = l_2,\ AB = l_3$. პოლიგონის სამივე გვერდისათვის განსაზღვრავენ ფრენის დროს: t_1, t_2, t_3 . იპოვეთ თვითმფრინავის საკუთარი სიჩქარე v და ქარის სიჩქარე V.





ამოხსნა

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\vec{V}$ - ქარის სიჩქარის ვექტორი, რომელიც სიდიდით და მიმართულებით მუდმივია. $\vec{v}$ -თვითმფრინავის სიჩქარე ქარის მიმართ, რომელიც სიდიდით მუდმუვია, მაგრამ მიმართულებით იცვლება. მაშინ სამივე შემთხვევაში აბსოლუტური სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

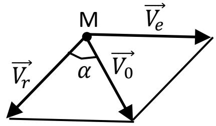
ამასთან $\vec{v}_i$ სიჩქარე მიმართულია l_i $(i = 1, 2, 3)$ წრფის გასწვრივ. თუ ამ დამოკიდებულებებს გამოვსახავთ ერთ ნახაზზე, მივიღებთ ნახ.ა-ზე მოცემულ სურათს. რადგან $\vec{v}$ ვექტორი სიდიდით მუდმივია, ამიტომ a, b და c წერტილებზე გაივლება წრეწირი, რომლის რადიუსია v. Mc, Ma , Mb მონაკვეთები შესაბამისად უდრის:

$$Mc = \frac{l_1}{t_1}\ ,\ \ Ma = \frac{l_2}{t_2},\ \ Mb = \frac{l_3}{t_3}.$$

ვექტორები $\overrightarrow{Mc}\,,\ \overrightarrow{Ma}, \overrightarrow{Mb}$ შესაბამისად პარალელური არიან ABC სამკუთხედის BC, AC და AB გვერდებისა.

პასუხი: ნებისმიერი M წერტილიდან გადავდოთ BC, CA AB გვერდების პარალელური ვექტორები, რომელთა სიგრძეებია, შესაბამისად, $\frac{l_1}{t_1}, \frac{l_2}{t_2}, \frac{l_3}{t_3}$. თვითმფრინავის სიჩქარე არის ამ ვექტორების ბოლო წერტილებზე გამავალი წრეწირის რადიუსი. ქარის სიჩქარე განისაზღვრება $\overrightarrow{MO}$ ვექტორით.

ამოცანა22.9



72 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი მანქანის მგზავრი ხედავს მინაზე წვიმის წვეთს, რომლის კვალი ადგენს ვერტიკალთან 40° კუთხეს. იპოვეთ წვიმის წვეთის აბსოლუტური სიჩქარე. მინაზე ხახუნი უგულებელყოფილია.

ამოხსნა

ნახაზიდან ჩანს, რომ წვეთის გადახრისთვის სამართლიანია დამოკიდებულება:

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}.$$

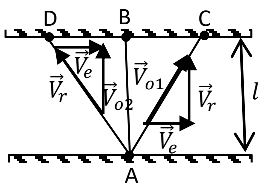
ჩვენს შემთხვევაში $V_e = 72$ კმ/სთ=20მ/წმ. სამკუთხედიდან ვპოულობთ:

$$V_a = V_e ctg\alpha = 20ctg40° = 23{,}8.$$

პასუხი: V_a =23,8 მ/წმ.

ამოცანა 22.10

მდინარის ნაპირები პარალელურია. ნავი გამოვიდა A წერტილიდან და უჭირავს ნაპირის მართობული კურსი. მეორე ნაპირს მიაღწია 10 წუთში და აღმოჩნდა C წერტილში, რომელიც A წერტილიდან დინების გასწვრივ 120 მეტრით ქვემოთ არის. იმისათვის, რომ იგივე სიჩქარით მოძრაობისას მოხვდეს B წერტილში, რომელიც ნაპირის მართობზე მდებარეობს A წერტილის გასწვრივ, ნავი მოძრაობს AB მართობისადმი კუთხით დინების საპირისპირო მიმართულებით. ამ შემთხვევაში ნავი მეორე ნაპირს მიაღწევს 2,5 წამის შემდეგ. იპოვეთ: მდინარის სიგანე l, ნავის სიჩქარე წყლის მიმართ U და მდინარის დინების სიჩქარე V.



ამოხსნა

მოძრაობის ორივე შემთხვევაში სამართლიანია ტოლობა:

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}.$$

აქ $V_e = V$ - მდინარის დინების სიჩქარეა, $V_r = U$ - ნავის სიჩქარეა მდინარის მიმართ. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, შევადგინოთ სკალარული ტოლობა

$$Vt_1 = BC \ \rightarrow V = \frac{BC}{t_1} = 12\text{მ/წმ}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$V_{a2}^2 = U^2 - V^2,$$

გვექნება

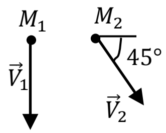
$$U \cdot t_1 = V_{a2}t_2 \ \rightarrow U^2t_1^2 = (U^2 - V^2)t_2^2 \ \rightarrow U = \frac{Vt_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = 20 \text{ მ/წთ}.$$

$$l = V_{a2}t_2 = \sqrt{U^2 - V^2} \cdot t_2 = 200\text{მ}.$$

პასუხი: $l = 200$ მ, U =20 მ/წთ, $V = 12$მ/წთ.

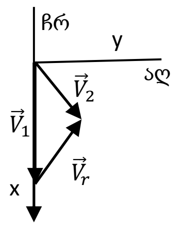
ამოცანა 22.11

გემი მიცურავს სამხრეთით $36\sqrt{2}$ კმ/სთ სიჩქარით. მეორე გემი მიდის სამხრეთ-აღმოსავლეთით 36 კმ/სთ სიჩქარით. იპვეთ მეორე გემის სიჩქარე იმ დამკვირებლის მიმართ, რომელიც დგას პირველი გემის გემბანზე.



ამოხსნა

ჩავთვალოთ პირველი გემის სიჩქარე წარმტან სიჩქარედ, ხოლო მეორე გემის სიჩქარე - აბსოლუტურ სიჩქარედ. მაშინ გვექნება



$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \ \rightarrow \vec{V}_r = \vec{V}_2 - \vec{V}_1.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x და y ღერძებზე, მივიღებთ

$$V_{rx} = V_2 sin45° - V_1 = -18\sqrt{2} \text{ კმ/სთ}.$$

$$V_{ry} = V_2 cos45° = -18\sqrt{2} \text{ კმ/სთ}.$$

ამ თანაფარდობებიდან ვპოულობთ

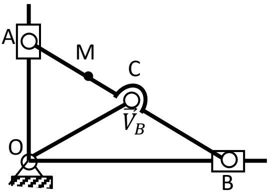
$$V_r = \sqrt{V_{rx}^2 + V_{ry}^2} = 36\text{კმ/სთ}.$$

$$tg\beta = \left|\frac{V_{ry}}{V_{rx}}\right| = 1 \ \rightarrow \beta = 45°.$$

ამრიგად, პირველი გემის მიმართ მეორე გემი მოძრაობს ჩრდილო-აღმოსავლეთით.

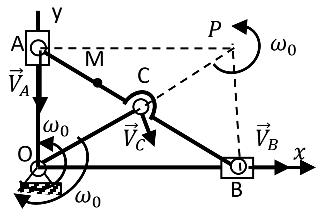
პასუხი: $V_r = 36$კმ/სთ. მიმართულია ჩრდილო-აღმოსავლეთით.

ამოცანა 22.12

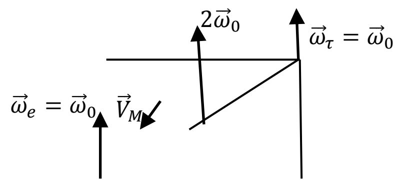


ელიფსოგრაფის AB სახაზავი მოძრაობაში მოჰყავს OC ღეროს, რომელიც ბრუნავს O ღერძის გარშემო მუდმივი ω_0 კუთხური სიჩქარით. მთელი მექანიზმი ასევე ბრუნავს ნახაზის სიბრტყის მართობული O წერტილზე გამავალი ღერძის გარშემო იგივე ω_0 კუხური სიჩქარით. იპოვეთ სახაზავის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე, როგორც $AM = l$ მანძილის ფუნქცია იმ პირობით, რომ მთელი მექანიზმი ბრუნავს საპირისპირო მიმართულებით.

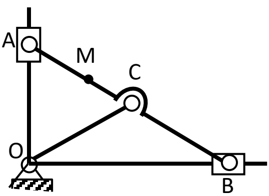
ამოხსნა



ფარდობით მოძრაობაში xoy სიბრტყეში A და B წერტილები მოძრაობენ მიმმართველების გასწვრივ. გავავლოთ მათი მართობებიდა მივიღებთ P წერტილს, რომელიც არის AB სახაზავის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამასთან სახაზავის კუთხური სიჩქარე არის OC ღეროს კუთხური სიჩქარის საპირისპირო მიართულებით.



ნახაზიდან ცხადია $OC = CP$ ამიტომ $\omega_P = \omega_0$. ამრიგად, სახაზავი მონაწილეობს ორ მოძრაობაში: ფარდობითი მოძრაობა კუთხური სიჩქარით $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0$ და წარმტანი მოძრაობა კუთხური სიჩქარით $\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_0$. რადგან ორივე კუთხური სიჩქარე თანამიმართულია ამიტომ აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე $\omega_a = 2\omega_0$. რადგან OC=CP, ამიტომ ω_a მოთავსებულია C წერტილში. ვიპოვოთ M წერტილის სიჩქარე:



$$V_M = \omega_a \cdot MC = \omega_a \cdot (AC - AM) = 2\omega_0\left(\frac{AB}{2} - l\right) = (AB - 2l)\omega_0$$

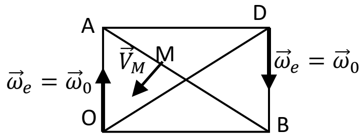
ვექტორი $\vec{V}_M$ მიმართულია CM მონაკვეთის მართობულად.

პასუხი: $V_M = (AB - 2l)\omega_0$.

ამოცანა 22.13

ამოხსენით წინა ამოცანა, როცა ორივე ბრუნვა ხდება ერთი მიმართულებით.

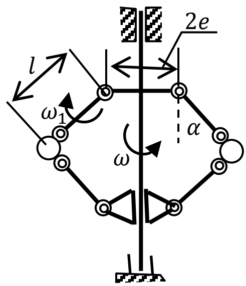
ამოხსნა



თუ წინა ამოცანაში მრუდმხარა ბრინავს საპირისპირო მიმართულებით, ამიტომ სახაზავის ბრუმვა ხდება საპირისპირო მიმართულებით. სიჩქარეთა შეკრების თეორემის ძალით ჯამური მოძრაობა არის ბრუნვათა წყვილი , ამიტომ ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე არის OP მონაკვეთის მართობული და უდრის

$$V_M = OP \cdot \omega_0 = AB \cdot \omega_0.$$

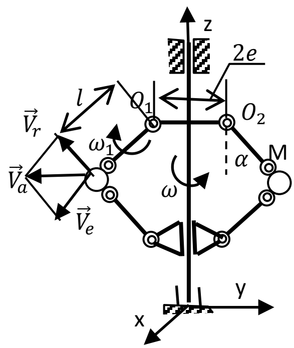
პასუხი: V_M სიჩქარე არ არის დამოკიდებული წერტილის მდებარეობაზე და უდრის $AB \cdot \omega_0$.



ამოცანა 22.14

უატის ცენტრიდანული რეგულიატორის ბურთულები ბრუნავენ ვერტიკალური ღერძის გარშემო $\omega = 10$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და შორდებიან ღერძს $\omega_1 = 1{,}2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ ბურთულების აბსოლუტური სიჩქარე მოცემულ მომენტში, თუ ღეროს სიგრძე $l = 0{,}5$ მ, ხოლო კუთხეები, რომელთაც ღეროები ადგენენ ღერძთან უდრის $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30°$.

ამოხსნა



ბურთულას აბსოლუტური სიჩქარის საპოვნელად ვისარგებლოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემით

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

ფარდობით მოძრაობაში ბურთულა გადაიხრება O_1 ღერძიდან ω_1 კუთხური სიჩქარით, ამიტომ

$$V_r = l\omega_1 = 0{,}5 \cdot 1{,}2 = 0{,}6;\ \vec{V}_r \perp O_1M.$$

წარმტან მოძრაობაში ბურთულა ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით და აქვს სიჩქარე

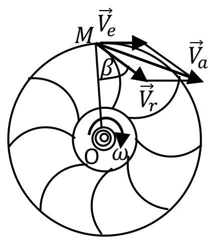
$$V_e = (l + l sin\alpha)\omega = 3 \text{ მ/წმ}.$$

რადგან

$$\vec{V}_e \perp \vec{V}_r \ \rightarrow V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 3{,}06 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_a = 3{,}06$ მ/წმ.

ამოცანა 22.15



ჰიდროტურბინაში წყალი მიმმართველიდან ეცემა მბრუნავ ბორბალს, რომლის ფრთები ისეა დაყენებული, რომ ფარდობითი სიჩქარე ეხებოდეს ფრთას. იპოვეთ წყლის ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარე ბორბლის ფერსოზე, თუ წყლის აბსოლუტური სიჩქარე $V = 15$ მ/წმ. კუთხე აბსოლუტურ სიჩქარესა და რადიუსს შორის უდრის $\alpha = 60°$. რადიუსი R=2მ, ხოლო ბორბლის კუთხური სიჩქარეა π რად/წმ.

ამოხსნა

დავშალოთ აბსოლუტური სიჩქარე ფარდობით და წარმტან მდგენელებად

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

ნახაზიდან გვაქვს

$$V_e = R \cdot \omega = 2\pi = 6{,}28 \text{ მ/წმ}.$$

დავაგეგმილოთ ვექტორული ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და მივიღებთ:

$$\begin{cases} V cos\alpha = V_r cos\beta \\ V sin\alpha = V_r sin\beta + V_e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_r cos\beta = V cos\alpha \\ V_r sin\beta = V sin\alpha - V_e \end{cases}.$$

ამ ტოლობებიდან გვაქვს

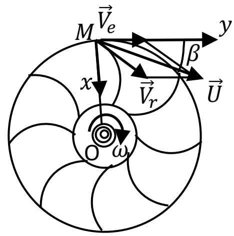
$$tg\beta = \frac{V sin\alpha - V_e}{V cos\alpha} = 0{,}895. \rightarrow \beta = 41°50'.$$

$$V_r = \sqrt{V^2 + V_e^2 - 2VV_e sin\alpha} = 10{,}06 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_r = 10{,}06$ მ/წმ. $\beta = 41°50'$.

ამოცანა 22.16

წყლის ნაწილაკი შედის ტურბინაში U სიჩქარით ისე, რომ როტორის მხებსა და ამ სიჩქარეს შორის კუთხეა α. როტორის დიამეტრია d. როტორი წუთში აკეთებს n ბრუნს. იპოვეთ კუთხე ფრთასა და წყლის შესვლის წერტილში როტორის მხებს შორის იმ პირობით, რომ ადგილი არ ექნება წყლის დარტყმას (ფარდობითი სიჩქარე უნდა იყოს ფრთის მხების გასწვრივ.



ამოხსნა

წინა ამოცანის ანალოგიურად

$$\vec{U} = \vec{V}_e + \vec{V}_r\ ,$$

სადაც $V_e = \frac{d}{2}\omega = \frac{d}{2}\cdot\frac{\pi n}{30} = \frac{\pi d n}{60}$ წარმტანი სიჩქარეა.

დავაგეგმილოთ x და y ღერძებზე და მივიღებთ

$$\begin{cases} Ucos\alpha = V_e + V_r cos\beta \\ Usin\alpha = V_r sin\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_r cos\beta = Ucos\alpha - V_e \\ V_r sin\beta = Usin\alpha \end{cases},$$

ამ განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$tg\beta = \frac{Usin\alpha}{Ucos\alpha - \frac{\pi dn}{60}} = \frac{60Usin\alpha}{60Ucos\alpha - \pi dn}.$$

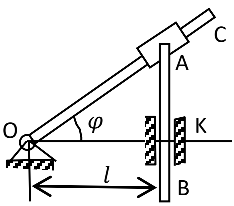
ასევე თუ ამ ტოლობებიდან ვიპოვით ფარდობით სიჩქარეს

$$V_r = \sqrt{U^2 + V_e^2 - 2UV_e cos\alpha}\ .$$

პასუხი: $tg\beta = \frac{60Usin\alpha}{60Ucos\alpha - \pi dn}$.

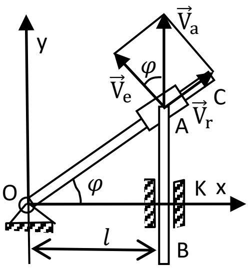
ამოცანა 22.17

კულისა მექანიზმში OC მრუდმხარა ბრუნავს O წერტილზე გამავალი ნახაზის სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო. A ცოცია გადაადგილდება მრუდმხარას გასწვრივ და ამოძრავებს AB ღეროს, რომელიც მოძრაობს ვერტიკალურ მიმმართველში. მანძილი $OK = l$. განსაზღვრეთ A ცოციას სიჩქარე OC მრუდმხარას მიმართ, როგორც მრუდმხარას ω კუთხური სიჩქარის და მობრუნების φ კუთხის ფუნქცია.



ამოხსნა

დავუშვათ, მოცემულ მომენტში მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე მიმართულია საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით. რადგან AB ძელი მოძრაობს ვერტიკალური მიმართულებით, ამიტომ ცოციას აბსოლუტური სიჩქარემიმართულია ვერტიკალურად ზევით. ის შეიძლება წარმოვადგინოთ მრუდმხარასთან ერთად წარმტანი სიჩქარის და მის გასწვრივ ფარდობითი სიჩქარის ჯამად.



$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \ .$$

სადაც $V_e = \omega \cdot OC = \frac{\omega l}{cos\varphi}$.

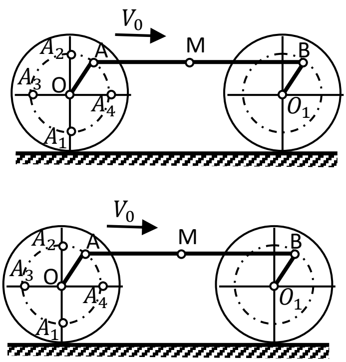
კინემატიკური სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$V_r = V_e tg\varphi = \frac{l\omega tg\varphi}{cos\varphi} \ .$$

პასუხი: $V_r = \frac{l\omega tg\varphi}{cos\varphi}$.

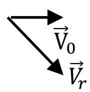
ამოცანა 22.18

იპოვეთ O და O_1 ღერძების მქონე OA და O_1B მრუდმხარების შემაერთებელი AB უღელის ნებისმიერი M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, თუ ბორბლის რადიუსია R=1მ, მრუდმხარების რადიუსებია $OA = O_1B$ =0,5 მ. ეკიპაჟის სიჩქარეა 20მ/წმ. M წერტილის სიჩქარე იპოვეთ ოთხ მდებარეობაში: როცა მრუდმხარები ვერტიკალურია ან ჰორიზონტალურია. ბორბალი მიგორავს უსრიალოდ.



ამოხსნა

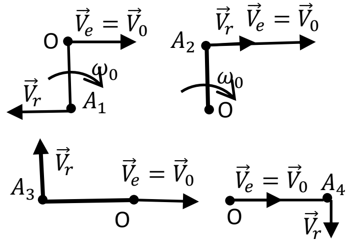
მრუდმხარა ხისტად არის დამაგრებული ბორბალზე, ამიტომ მისი კუთხური სიჩქარე ბორბლის კუთხური სიჩქარის ტოლია. ეს კუთხური სიჩქარე უდრის



$$\omega_0 = \frac{V_0}{R} = 20 \text{ რად/წმ}.$$

A წერტილის სიჩქარე ბორბლის მიმართ უდრის $V_r = \omega_0 \cdot OA = 10$ მ/წმ.

A წერტილის წარმტანი სიჩქარე უდრის ბორბლის ცენტრის სიჩქარეს $V_e = V_0$. აბსოლუტური სიჩქარის საპოვნელად ვისარგებლოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემით.



$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

იგივე შედეგს მივიღებთ B წერტილისთვის. ეს ნიშნავს, რომ AB უღელი ასრულებს გადატანით მოძრაობას და მის ყველა წერტილს აქვს ერთი და იგივე სიჩქარე. $V_M = V_A = V_B$.

გამოვიყენოთ შიჩქარეთა შეკრების თეორემა ოთხ სხვადასხვა შემთხვევაში:

$$1)\ V_a = V_e - V_r = 10 \text{ მ/წმ}.$$

$$2)\ V_a = V_e + V_r = 30 \text{ მ/წმ}.$$

$$3)\ 4)\ V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 10\sqrt{5} = 22{,}36 \text{ მ/წმ}.$$

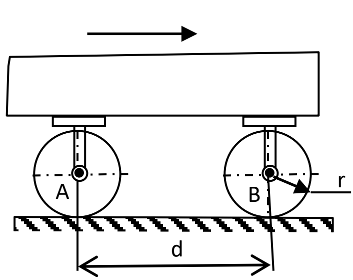
პასუხი: $V_1 = 10$ მ/წმ; $V_2 = 30$ მ/წმ; $V_3 = V_4 = 22{,}36$ მ/წმ.

ამოცანა 22.19

ვაგონი მოძრაობს სწორხაზოვნად V სიჩქარით. მისი A და B ბორბლები გორავენ უსრიალოდ. ბორბლების რადიუსია r , ხოლო მათ ღერძებს შორის მანძილია d. იპოვეთ A ბორბლის ცენტრის სიჩქარე B ბორბალთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში.

ამოხსნა

რადგან ბორბლების ცენტრებს შორის მანძილი უცვლელია და წარმტანი სიჩქარე ერთნაირი აქვთ, ამიტომ წერტილი B ბორბალთან დაკავშირებულ სიტემაში ასრულებს ფარდობით ბრუნვით მოძრაობას. რადგან ბორბალი ბრუჰავს საათის ისრის ბტუნვის მიმართულებით, ამიტომ წერტილი მოძრავი სიტემის მიმართ ბრუნავს საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით და რიცხობრივად უდრის



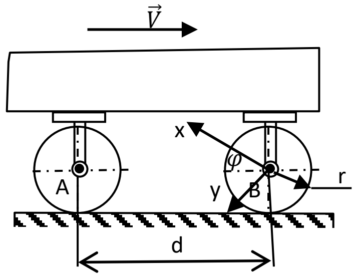
$$V_r = \omega \cdot AB = \frac{Vd}{r}.$$

ამოვხსნათ იგივე ამოცანა კოორდინატების გამოყენებით

$$x = dcos\varphi, \ \ y = dsin\varphi \ ,$$

სადაც $\varphi = \omega t = \frac{Vt}{r}$.

ანუ



$$\begin{cases} x = dcos\left(\frac{Vt}{r}\right) \\ y = dsin\left(\frac{Vt}{r}\right) \end{cases}$$

$$V_{rx} = \dot{x} = -\frac{Vd}{r} sin\left(\frac{Vt}{r}\right),$$

$$V_{ry} = \dot{y} = \frac{Vd}{r} cos\left(\frac{Vt}{r}\right),$$

$$V_r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{Vd}{r} \, .$$

$$cos\left(\vec{V}_r, By\right) = \frac{V_{ry}}{V_r} = cos\left(\frac{Vt}{r}\right) \rightarrow \left(\vec{V}_r, By\right) = \varphi,$$

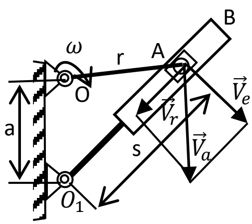
$$cos\left(\vec{V}_r, Bx\right) = \frac{V_{rx}}{V_r} = -sin\left(\frac{Vt}{r}\right) = -sin\varphi = cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

ამრიგად, სიჩქარის ვექტორი მიმართულია AB -ს მართობულად ქვემოთ.

პასუხი: სიჩქარე უდრის $\frac{Vd}{r}$, მართობულია AB წრფის და მიმართულია ქვევით.

ამოცანა 22.20

მექანიზმი შედგება ორი პარალელური ლილვისაგან O და O$_1$, OA მრუდმხარასაგან და O$_1$B მუშტასაგან. OA მრუდმხარას A ბოლო სრიალებს O$_1$B მუშტაში საკეთებულ ჭრილში. ლილვებს შორის მანძილი უდრის $OO_1 = a$; OA მრუდმხარას სიგრძეა l; ლილვი O ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ: O_1 ლილვის კუთხური სიჩქარე ω_1 და A წერტილის ფარდობითი სიჩქარე O$_1$B მუშტას მიმართ. გამოსახეთ ისინი $O_1A = s$ სიდიდით.



ამოხსნა

მუშტას ბრუნვითი მოძრაობა ჩავთვალოთ წატმტან მოძრაობად, მაშინ A წერტილის მოძრაობა ჭრილში იქნება ფარდობითი მოძრაობა. OA მრუდმხარას მოძრაობა არის აბსოლუტური.

A წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე არის მრუდმხარას მართობული და უდრის

$$V_a = \omega r.$$

A წერტილის წარმტანი სიჩქარე კულისას მართობულია და უდრის

$$V_e = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 s\ .$$

ფარდობითი სიჩქარის მიმართულება ემთხვევა მუშტაში გაკეთებული ჭრილის მიმართულებას. სიჩქარეთა პარალელოგრამიდან ვპოულობთ

$$V_e = V_0 cos\alpha,$$

სადაც $\alpha = \angle OAO_1$ -არის მუშტას მობრუნების კუთხე.

ფარდობითი სიჩქარე

$$V_r = V_a sin\alpha.$$

წინა ტოლობებიდან გვაქვს

$$\omega_1 = \frac{\omega r cos\alpha}{s}.$$

OAO_1 სამკუთხედიდან ვპოულობთ α კუთხის კოსინუსს

$$cos\alpha = \frac{r^2+s^2-a^2}{2rs}\ .$$

ჩავსვათ წინა ტოლობაში და მივიღებთ

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1+\frac{r^2-a^2}{s^2}\right).$$

ფარდობითი სიჩქარე უდრის

$$V_r = V_a sin\alpha = \omega r\sqrt{1-cos^2\alpha}\ .$$

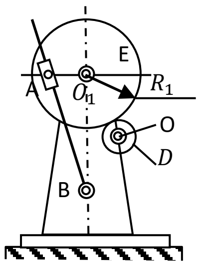
თუ ჩავსვავთ $cos\alpha$ გამოსახულებას და მოვახდენთ შესაბამის გარდაქმნებს, მივიღებთ

$$V_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(r+s+a)(r+s-a)(a+r-s)(a+s-r)}.$$

პასუხი: $\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1+\frac{r^2-a^2}{s^2}\right);\ V_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(r+s+a)(r+s-a)(a+r-s)(a+s-r)}.$

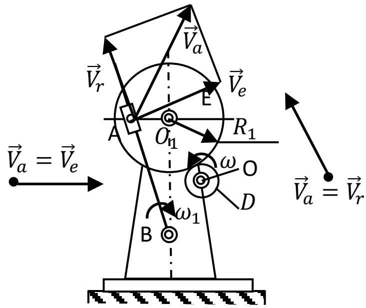
ამოცანა 22.21

სარანდავი ჩარხის მუშტა მექანიზმის A ქურო მოძრაობაში მოდისკბილანა გადაცემით, რომელიც შედგება ორი D და E კბილანასაგან. E კბილანაზე დამაგრებულია თითი, რომელზეც მოძრაობს A ქვა. კბილანების რადიუსებია R=0,1 მ, R_1=0,35 მ, O_1A=0,3 მ, მანძილი $O_1B = 0,7$მ. იპოვეთ მუშტას კუთხური სიჩქარე იმ მომენტებში, როცა O_1A მრუდმხარას უჭირავს ჰორიზონტალური ან ვერტიკალური მდებარეობა. D კბილანას კუთხური სიჩქარეა ω. O_1 და B წერტილები ერთ ვერტიკალზეა განლაგებული.



ამოხსნა

A წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე მიმართულია O_1A მონაკვეთის მართობულად. ის შეიძლება დავშალოთ ორ შესაკრებად: ფარდობითი სიჩქარე მიმართულია BC ღეროს გასწვრივ, ხოლო წარმტანი სიჩქარე ამ ღეროს მართობულია.



$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \,.$$

კულისას კუთხური სიჩქარე წარმტანი სიჩქარით ასე გამოისახება

$$\omega_e = \frac{V_e}{AB}.$$

ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ აბსოლუტური სიჩქარე, შემდეგ წარმტანი სიჩქარე და მუშტას კუთხური სიჩქარე. ცხადია, რომ

$$\omega_1 R_1 = \omega R \ \rightarrow \omega_1 = \frac{\omega R}{R_1} \rightarrow V_a = \omega_1 O_1 A = \frac{\omega R}{R_1} O_1 A = 0{,}6 \text{ მ/წმ}.$$

ქვედა მდებარეობაში

$$V_e = V_a \,, \ AB = O_1B - O_1A = 0{,}4 \text{ მ}.$$

მაშინ

$$\omega_I = \frac{V_e}{AB} = 1{,}5 \text{ რად/წმ}.$$

ზედა მდებარეობაში ასევე

$$V_e = V_a \,, \ AB = O_1B + O_1A = 1 \text{ მ}.$$

$$\omega_{III} = \frac{V_e}{AB} = 0{,}6\ მ/წმ.$$

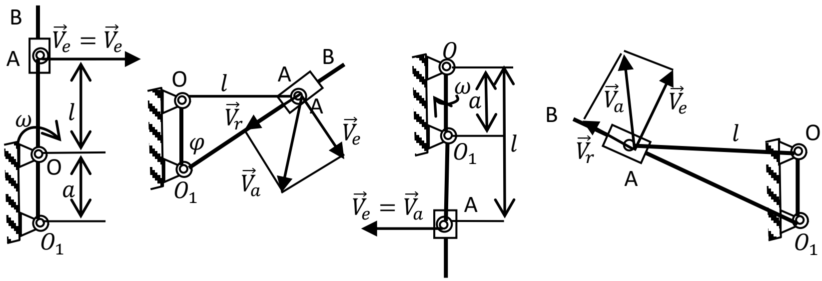
მეორე და მეოთხე შემთხვევაში $O_1A \perp BC, V_e = 0$. შესაბამისად

$$\omega_{II} = \omega_{IV} = 0.$$

პასუხი: $\omega_I = 1{,}5$ რად/წმ ; $\omega_{III} = 0{,}6$ მ/წმ. $\omega_{II} = \omega_{IV} = 0$.

ამოცანა 22.22

იპოვეთ მრუდმხარა- მუშტა მექანიზმის მუშტას ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ოთხ სხვადასხვა მდებარეობაში (ორი ვერტიკალური და ორი ჰორიზონტალური), თუ $a = 60$ სმ, $l = 80$ სმ და მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე არის π რად/წმ.



ამოხსნა

წინა ამოცანის ანალოგიურად I და III შემთხვევებში $V_r = 0, V_e = V_a$. ამიტომ

$$\omega_I = \frac{V_a}{O_1A} = \frac{\omega l}{l+a} = \frac{4\pi}{7}\text{რად/წმ}.$$

$$\omega_{III} = \frac{V_a}{O_1A} = \frac{\omega l}{l-a} = 4\pi\ \text{რად/წმ}.$$

II და IV შემთხვევებში

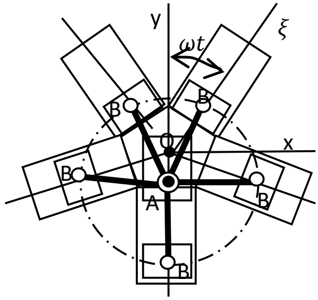
$$V_e = V_a sin\varphi = \frac{\omega l^2}{\sqrt{l^2+a^2}}.$$

$$\omega_{II} = \omega_{IV} = \frac{V_e}{O_1A} = \frac{\omega l^2}{l^2+a^2} = 0{,}64\ \text{რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_I = \frac{4\pi}{7}$რად/წმ ; $\omega_{III} = 4\pi$ რად/წმ; $\omega_{II} = \omega_{IV} = 0{,}64$ რად/წმ.

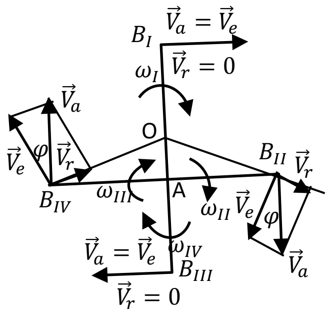
ამოცანა 22.23

იპოვეტ როტაციული მექანიზმის დგუშის სიჩქარე AB ბარბაცას ორ ვერტიკალურ და ორ ჰორიზონტალურ მდებარეობაში, თუ მრუდმხარას სიგრძე $OA = r = 0{,}24$ მ, კარტერთან ერთად ცილინდრის კუთხური სიჩქარეა 40πრად/წმ.



ამოხსნა

ნახაზზე წარმოდგენილია როტაციული დგუშის აბსოლუტური სიჩქარის საპოვნელად სიჩქარეთა შეკრების თეორემა ოთხ სხვადსხვა შემთხვევაში. წინა ამოცანის შემთხვევის ანალოგიურად გვაქვს :



$$V_I = V_e = \omega(l - r) = 20{,}1\text{მ/წმ}.$$

$$V_{II} = \frac{V_e}{cos\varphi} = \frac{\omega \cdot OB_{II}}{l/OB_{II}} = \frac{\omega \cdot OB_{II}^2}{l} = \frac{\omega(l^2+r^2)}{l} = 33{,}5\ \text{მ/წმ}.$$

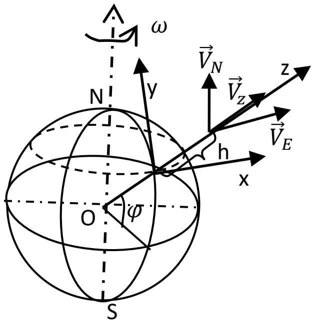
$$V_{III} = V_e = \omega(l + r) = 40{,}2\ \text{მ/წმ}.$$

$$V_{IV} = \frac{V_e}{cos\varphi} = \frac{\omega \cdot OB_{II}}{l/OB_{II}} = \frac{\omega \cdot OB_{II}^2}{l} = \frac{\omega(l^2+r^2)}{l} = 33{,}5\ \text{მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_I = 20{,}1$მ/წმ; $V_{II} = V_{IV} = 33{,}5$ მ/წმ; $V_{III} = 40{,}2$ მ/წმ.

ამოცანა 22.24

M წერტილის სიჩქარის აღმოსავლეთი, ჩრდილოეთი და ვერტიკალური მდგენელები, შესაბამისად , არის V_E, V_N, V_h . წერტილის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან მოცემულ მომენტში არის h. ადგილის განედია φ, დედამიწის რადიუსია R, მისი კუთხური სიჩქარეა ω . იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის მდგენელები.



ამოხსნა

წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ვიპოვოთ სიჩქარეთა შეკრების თეერემის გამოყენებით:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \ .$$

აქ დედამიწის ბრუნვით გამოწვეული წარმტანი სიჩქარე გამოითვლება ტოლობით:

$$\vec{V}_e = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \ .$$

მისი მოდული უდრის

$$V_e = \omega \cdot OM \cdot sin(90° - \varphi) = (R + h)\omega cos\varphi.$$

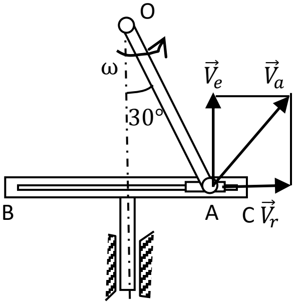
$\vec{V}_e$ ვექტორი მართობულია $\vec{\omega}$ და $\overrightarrow{OM}$ ვექტორების. ე.ი. არის ღერძის Mx პარალელური . საბოლოოდ გვექნება

$$V_x = V_E + (R + h)\omega cos\varphi \ , V_y = V_{N,} \ V_z = V_h \ .$$

პასუხი: $V_x = V_E + (R + h)\omega cos\varphi$, $V_y = V_{N,}$ $V_z = V_h$.

ამოცანა 22.25

მრუდმხარა-მუშტა მექანიზმში, სადაც მუშტა გადატანითად მოძრაობს, $l = 0{,}2$ მ სიგრძის მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით 3π რად/წმ. A ბოლოზე სახსრით დამაგრებული ქუროს საშუალებით მრუდმხარა კულისას ანიჭებს წინსვლა- უკუსვლით მოძრაობას . იპოვეთ კულისას სიჩქარე, როცა მრუდმხარა კულისას ღერძთან ადგენს 30°.



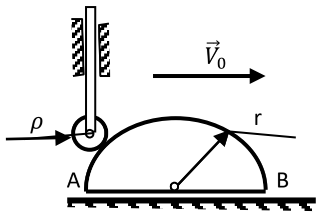
ამოხსნა

ნახაზზე ნაჩვენები კინემატიკური სამკუთხედიდან, რომელიც სიჩქარეთა შეკრების თეორემას გამოსახავს, ვპოულობთ

$$V = V_E = V_a sin30° = l\omega sin30° = 0{,}2 \cdot 3\pi \cdot 0{,}5 = 0{,}942 \text{ მ/წმ}.$$

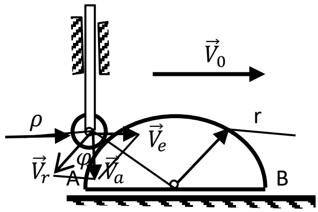
პასუხი: $V = 0{,}942$ მ/წმ.

ამოცანა 22.26



ღერო, რომელიც მოძრაობს ვერტიკალურ მიმმართველში, გორგოლაჭის საშუალებით ერთი ბოლოთი ეყრდნობა r რადიუსიან ნახევარცილინდრს. ნახევარცილინდრი მოძრაობს მარჯვნივ მუდმივი V_0 სიჩქარით. გორგოლაჭის რადიუსია ρ . იპოვეთ ღეროს სიჩქარე, თუ საწყის მომენტში ის იმყოფებოდა უმაღლეს მდებარეობაში.

ამოხსნა



O_1 წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე დავშალოთ წარმტან და ფარდობით სიჩქარეებად. წარმტანი სიჩქარეა V_0 , ხოლო ფარდობითი სიჩქარე არის OO_1 -ის მართობული. კინემატიკური სამკუთხედიდან (იხ. ნახ.) გვაქვს

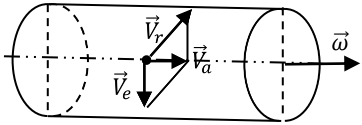
$$V = V_0 tg\varphi = V_0 \frac{O_1K}{OK} = V_0 \frac{O_1K}{\sqrt{(OO_1)^2 - (O_1K)^2}} = \frac{V_0^2 t}{\sqrt{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2}} .$$

აქ გათვალისწინებული იყო, რომ

$$OO_1 = r + \rho, O_1K = V_0 t .$$

პასუხი: $V = \frac{V_0^2 t}{\sqrt{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2}}$.

ამოცანა 22.27



სახარატო ჩარხზე ჩარხავენ ცილინდრს, რომლის დიამეტრია 80 მმ. ცილინდრი აკეთებს n=30ბრ/წთ. გრძივი მიწოდების სიჩქარე $V =$ 0,2მმ. იპოვეთ საჭრისის ფარდობითი სიჩქარე ცილინდრის მიმართ.

ამოხსნა

საჭრისის აბსოლუტური სიჩქარე დავშალოთ ცილინდრის ბრუნვის წარმტან სიჩქარედ $\overrightarrow{V_e}$ და ცილინდრის მიმართ ფარდობით $\overrightarrow{V_r}$ სიჩქარედ. ნახაზიდან ვიპოვოთ ამ სიჩქარეების რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$V_e = \omega \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi n d}{60} = 125{,}6 \text{ მმ/წმ},$$

$$V_r = \sqrt{V_e^2 + V^2} = 125{,}6 \text{მმ/წმ}$$

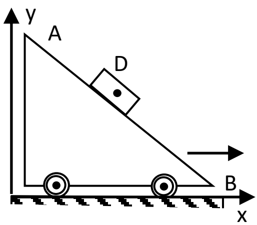
$$tg \propto = \frac{V_e}{V} = \frac{125{,}6}{0{,}2} = 628\ .$$

პასუხი: $V_r = 125{,}6$მმ/წმ; $tg \propto = 628,$ სადაც $\propto$ არის კუთხე ფარდობით სიჩქარესა და ცილინდრის ღერძს შორის.

23. წერტილის აჩქარებების შეკრება

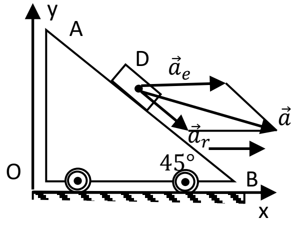
23.1 ამოცანა

დახრილი AB სიბრტყე, რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს $45°$-იან კუთხეს, მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ მუდმივი 0,1მ/წმ² აჩქარებით. ამ სიბრტყეზე დაბლა ეშვება P სხეული $0{,}1\sqrt{2}\ \frac{მ}{წმ^2}$. ფარდობითი აჩქარებით. სიბრტყისა და სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია. სხეულის საწყისი მდებარეიბა სიბრტყეზე განისაზღვრება კოორდინატებით x=0, y=h. იპოვეთ სხეულია აბსოლუტური მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.



ამოხსნა

P სხეული მონაწილეობს რთულ მოძრაობაში: ფარდობითი მოძრაობა არის ქრფივი მოძრაობა AB წრფის გსწვრივ, ხოლო წარმტანი მოძრაობა არის მოძრაობა სიბრტყესთან ერთად Ox ღერძის გასწვრივ. რთული მოძრაობის დროს აბსოლუტური მოძრაობა გამოითვლება როგორც ფაედობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქრებების გეომეტრიული ჯამი.



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

რადგან წარმტანი აჩქარება გადატანითია, ამიტომ კორიოლისის აჩქარება ნულის ტოლია. ე.ი.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e. \qquad (1)$$

$\vec{a}_r$ ვექტორი მიმართულია AB წრფის გასწვრივ, ხოლო $\vec{a}_e$ ვექტორი მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ. დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღეტძებზე და გვექნება :

$$a_x = a_r cos45° + a_e = 0{,}1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}1 = 0{,}2,$$

$$a_y = -a_r cos45° = -0{,}1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}1,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0{,}1\sqrt{5}.$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \rightarrow dV_x = a_x dt.$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} \rightarrow dV_y = a_y dt,$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობები შემდეგი საწყისი პირობებით: $x_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0,\ y_0 = h.$

$$\int dV_x = \int a_x dt = \int 0{,}2dt = 0{,}2t + C_1\ ,\ C_1 = 0.$$

ე.ი . $V_x = 0{,}2t.$

$$\int dV_y = \int a_y dt = -0{,}1t + C_2,\ C_2 = 0.$$

ე.ი. $V_y = 0{,}1t.$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 0{,}1\sqrt{5}t.$$

კიდევ ერთხელ მოვახდინოთ ინტეგრება

$$\int dx = \int V_x dt = \int 0{,}2tdt = 0{,}1t^2 + C_3 \rightarrow x = 0{,}1t^2 + C_3 \rightarrow x = 0{,}1t^2.$$

ანალოგიურად

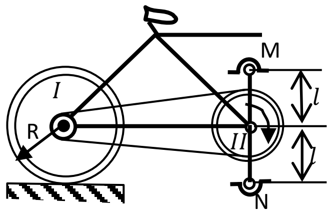
$$y = \int V_x dt = -\int 0{,}1tdt = -0{,}05t^2 + C_{4,}\ \ C_{4,} = y_0 = h.$$

საბოლოოდ

$$y = h - 0{,}05t^2.$$

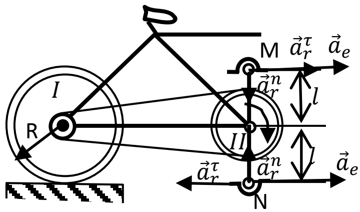
პასუხი: $a = 0{,}1\sqrt{5};\ V = 0{,}1\sqrt{5}t;\ x = 0{,}1t^2;\ y = h - 0{,}05t^2.$

ამოცანა 23.2



გზის სწორხაზოვან მონაკვეთზე მოძრაობს ველოსიპედი კანონით: $s = 0{,}1t^2$ (s-მეტრებში t-წამებში). მოცემულია: $R = 0{,}35$ მ, $l = 0{,}18$ მ, $z_1 - 18$ კბილანა, $z_2 = 48$ კბილანა. იპოვეთ ველოსიპედის M და N პედლების აბსოლუტური აჩქარება, როცა t=10 წმ, თუ ამ მომენტში MN მრუდმხარა ვერტიკალურია.

ამოხსნა



პედალის ბრუნვა O ღერძის გარშემო არის ფარდობითი მოძრაობა. ველოსიპედის მოძრაობა გზის გასწვრივ არის წარმტანი მოძრაობა. ის არის გადატანითი მოძრაობა, ამიტომ კორიოლისის აჩქარება ნულის ტოლია. აბსოლუტური აჩქარება იქნება

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ვექტორების სიდიდე და მიმართულებები:

$$a_e = \frac{d^2s}{dt^2} = 0{,}2 \text{ მ/წმ}^2,$$

ეს ვექტორი მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ. ფარდობითი აჩქარება იშლება ორ - მხებ და ნორმალურ მდგენელებად. მათ საპოვნელად უნდა ვიცოდეთ კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება. ამისათვის ვიპოვოთ მპბრუნების კუთხის ცვლილების კანონი:

$$\varphi_r = \frac{s}{R}\cdot\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{28}t^2,$$

გამოვთვალოთ პირველი და მეორე წარმოებულები:

$$\omega_r = \frac{6t}{28} \to \omega_r(10) = \frac{15}{7} = 2{,}14,\ \ \varepsilon_r = \frac{6}{28}.$$

გამოვთვალოთ ფარდობითი აჩქარების მდგენელები:

$$a_r^n = \omega_r^2 l = 0{,}824\,,\ \ a_r^\tau = \varepsilon_r l = 0{,}2\,.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და M წერტილისათვის მივიღებთ:

$$a_{Mx} = a_r^\tau + a_e = 0{,}2 + 0{,}039 = 0{,}239\,,$$
$$a_{My} = -a_r^n = -0{,}824\,.$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 0,860 \text{ .წ/წმ}^2 .$$

N წერტილისათვის გვექნება :

$$a_{Nx} = a_e - a_r^\tau = 0,161,$$

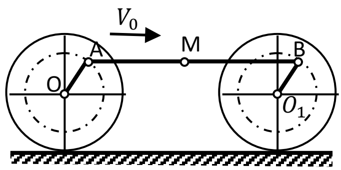
$$a_{Ny} = a_r^n = 0,824,$$

$$a_N = \sqrt{a_{Nx}^2 + a_{Ny}^2} = 0,842 \text{ მ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $a_M = 0,860$.წ/წმ² ; $a_N = 0,842$ მ/წმ² .

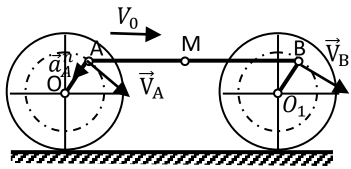
ამოცანა 23..3

იპოვეთ AB უღლის რომელიმე M წერტილის აჩარება, თუ ის აერთებს O O₁ ღერძის მქონე მრუდმხარებს. ეკიპაჯი მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვ-ბრივად $V_0 = 10$ მ/წმ სიჩქარით. ბორბლის რადიუსია 1მ, ხოლო მრუდმხარას რადიუსი- 0,75მ .



ამოხსნა

M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას . ბორბალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, ხოლო უღელი გადატანით მოძრაობას. P₁ და P₂ წერტილები არიან ბორბლების სიჩქარეთა მყისი ცენტრები. რადგან $\vec{V}_A = \vec{V}_B$, ამიტომ



$\omega_{AB} = 0.$ ბორბლების კუთხური სიჩქარეები ერთნაირია და უდრის

$$\omega = \frac{V_0}{R} = 10 \text{ რად/წმ}.$$

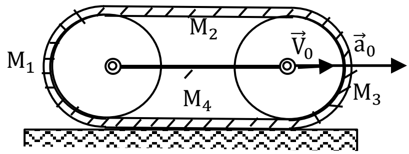
რადგან $V_0 = const$, ამიტომ კუთხური აჩქარება ნულის ტოლია. A წერტილის აჩქარება უდრის M წერტილის აჩქარებას.

$$a_A = a_A^n = \omega^2 r = 75 \text{მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a_M = 75$მ/წმ².

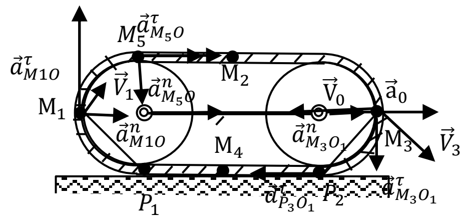
ამოცანა 23.4

იპოვეთ მუხლუხა ტრაქტორის M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილების სიჩქარე და აჩქარება, თუ ტრაქტორი მოძრაობს V_0 სიჩქარით და a_0 აჩქარებით. ტრაქტორის ბორბლების რადიუსებია R. მოძრაობა ხდება გასრიალების გარეშე.



ამოხსნა

წერტილები P_1 და P_2 სიჩქარეთა მყისი ცენტრებია. M_1 და M_3 წერტილების სიჩქარეები ნაჩვენებია ნახაზზე. M_4 წერტილის სიჩქარე ტოლია ნულის. რადგან ვიცით სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ



$$\omega_1 = \frac{V_1}{M_1P_1} = \frac{V_5}{M_5P_1} = \frac{V_0}{R} \rightarrow V_1 = \frac{V_0M_1P_1}{R} = V_0\sqrt{2}\,.V_5 = V_2 = 2V_0.$$

$$\omega_2 = \frac{V_0}{R} = \frac{V_3}{M_3P_1} \rightarrow V_3 = V_0\sqrt{2}\,.$$

M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილების აჩქარებები ვეძებოთ ფორმულით:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_0 + a^n_{MO} + \vec{a}^{\tau}_{MO}\,. \qquad (1)$$

$$a^n_{MO} = \omega^2 MO = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 \cdot R = \frac{V_0^2}{R},$$

$$a^{\tau}_{MO} = \varepsilon \cdot MO\ , \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_0}{R}\right) = \frac{a_0}{R}. \rightarrow a^{\tau}_{MO} = \frac{a_0}{R}.$$

დავაგეგმილოთ (1) განტოლება საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება :

$$a_{1x} = a_0 + a^n_{1MO} = a_0 + \frac{V_0^2}{R},\ a_{1y} = a^{\tau}_{1MO} = a_0,$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{a_0^2 + \left(a_0 + \frac{V_0^2}{R}\right)^2}.$$

M_2 წერტილისთვის

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_5, a_{2x} = a_0 + a^{\tau}_{2MO} = a_0 + a_0 = 2a_0, a_{2y} = 0, \rightarrow a_2 = 2a_{0.}$$

M_3 წერტილისათვის

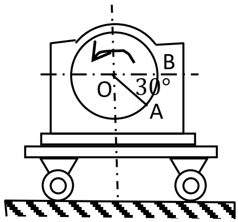
$$a_{3x} = a_0 - a^n_{M3O2} = a_0 - \frac{V_0^2}{R}, a_{3y} = a_0,$$

$$a_3 = \sqrt{a_0^2 + \left(a_0 - \frac{V_0^2}{R}\right)^2},$$

M_4 წერტილისთვის $a_4 = 0$.

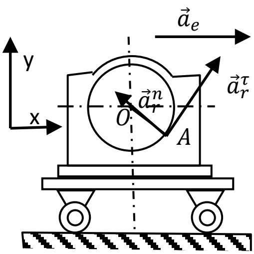
პასუხი: $V_1 = V_3 = V_0\sqrt{2}$; $V_2 = 2V_0$; $V_4 = 0$; $a_1 = \sqrt{a_0^2 + \left(a_0 + \frac{V_0^2}{R}\right)^2}$; $a_2 = 2a_{0.}$; $a_3 = \sqrt{a_0^2 + \left(a_0 - \frac{V_0^2}{R}\right)^2}$; $a_4 = 0$.

ამოცანა 23.5



ურიკა,რომელზედაც დამაგრებულია ელექტროძრავი, მოძრაობს ჰორიზონტალურად მარჯვნივ $a = 0{,}492$ მ/წმ² . ძრავის როტორი მოძრაობის დაწყებიდან ბრუნავს კანონით $\varphi = t^2$. კუთხე იზომება რადიანებში. როტორის რადიუსია 0,2 მ. იპოვეთ ფერსოზე მდებარე A წერტილის აბსოლუტური აჩქარება, თუ , როცა t=0, მაშინ A წერტილი იმყოფება ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში.

ამოხსნა



A წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: ურიკას მოძრაობა არის წარმტანი მოძრაობა, ხოლო როტორის ბრუნვა არის ფარდობითი მოძრაობა. რადგან წარმტანი მოძრაობა *არის გადატანითი* , ამიტომ კორიოლისის აჩქარება ნულის ტოლია. A წერტილის აჩქარება უდრის

$$\vec{a}_A = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e. \tag{1}$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები:

$a_r^n = \omega_r^2 R, \omega_r = \frac{d\varphi}{dt} = 2t, \omega_r(1) = 2$ რად/წმ . $a_r^n = 0{,}8$ მ/წმ².

$a_r^\tau = \varepsilon_r R,\ \varepsilon_r = \frac{d\omega_r}{dt} = 2,\ a_r^\tau = 0{,}4$მ/წმ².

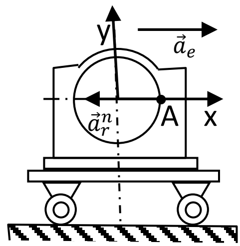
დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე

$$a_x = -a_r^n cos30° + a_r^\tau cos60° + a_e = 0.$$

$a_y = a_r^n cos60° + a_t^\tau cos30° = 0{,}7463$ მ/წმ². $a = a_y = 0{,}7463$ მ/წმ² .

პასუხი: $a = 0{,}7463$ მ/წმ² .

ამოცანა 23.6



წინა ამოცანაში იპოვეთ თანაბრადმბრუნავი როტორის კუთხური სიჩქარე, როცა A წერტილი იმყოფება B მდებარეობაში და აქვს ნულის ტოლი აჩქარება.

ამოხსნა

A წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას

$$\vec{a}_A = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e = 0$$

(1)

წარმტანი აჩქარება მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ

$$a_r^n = \omega_r^2 R$$

აჩქარება მიმართულია ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.

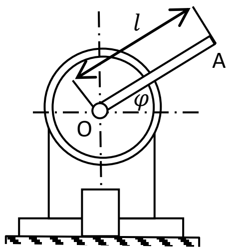
$$a_r^\tau = \varepsilon_r R = 0.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_x = a_r^n - a_e = \omega_r^2 \cdot 0{,}2 - 0{,}492 = 0 \ \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0{,}492}{0{,}2}} = 1{,}57 \text{ რად/წმ.}$$

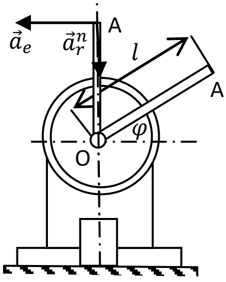
პასუხი: $\omega = 1{,}57$ რად/წმ.

ამოცანა 23.7



ელექტროძრავის ლილვზე, რომელიც ბრუნავს $\varphi = \omega t$ კანონით, მართი კუთხით დამაგრებულია l სიგრძის OA ღერო.ელექტროძრავი თავისუფლად დგას ფუნდამენტზე და ასრულებს ჰარმონიულ რხევას კანონით $x = asin\omega t$. იპოვეთ A წერტილის აბსოლუტური აჩქარება t= $\frac{\pi}{2\omega}$ წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა



OA ღეროს ბრუნვა O ღერძის გარშემო არის ფარდობითი მოძრაობა. A წერტილი მოძრაობს l რადიუსიან წრეწირზე. ძრავის მოძრაობა ჰოროზონტალურ ზედაპირზე არის წქარმტანი მოძრაობა. მისი ტრაექტორია არის წრფე. A წერტილია აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით

$$\vec{a}_A = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e.$$

ვიპოვოთ ამ ტოლოაში შემავალი სიდიდეები:

$$\varepsilon_r = \frac{d\omega_r}{dt} = 0 \ \rightarrow a_r^\tau = \varepsilon_r \cdot l = 0.$$

$$a_r^n = \omega^2 l.$$

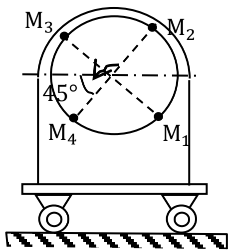
$$a_e = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 sin\omega t, a_e\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right) = -a\omega^2.$$

რადგან $\vec{a}_r^n$ და $\vec{a}_e$ ვექტორები ურთიერთმართობულია, ამიტომ

$$a = \sqrt{(\omega^2 l)^2 + (-a\omega^2)^2} = \omega^2\sqrt{l^2 + a^2}.$$

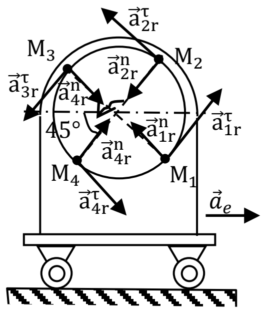
პასუხი: $a = \omega^2\sqrt{l^2 + a^2}$.

ამოცანა 23.8



ურიკა, რომელზეც დადგმულია ელექტრო-ძრავი, მოძრაობს ჰორიზონტალურად მარჯვნივ მუდმივი აჩქარებით 0,4სმ/წმ² . ძრავი ბრუნავს კანონით $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. t=1 წმ მომენტისთვის იპოვეთ ძრავის იმ ოთხი M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილის აჩქარებე-ბი, რომლებიც ბრუნვის ღერძიდან დაშორებული არიან $l = 2\sqrt{2}$ სმ მანძილით და უჭირავთ ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობა.

ამოხსნა



წერტილები ასრულებენ რთულ მოძრაობას. ურიკას მოძრაობა არის წარმტანი მოძრაობა და მიცი ტრაექტორია არის წრფე. ძრავის ბრუნვა არის ფარდობითი მოძრაობა და მოძრაობის ტრაექტორია არის l რადიუსიანი წრეწირი. აბსოლუტური აჩქარება უდრის :

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e \,. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ (1) ტოლობაში შემავალი სიდიდეები. მიმართულებები ნახაზზეა ნაჩვენები. სიდიდე უდრის :

$$a_r^n = \omega_r^2 l = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = t^2 l = 0{,}2\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}^2$$

$$a_r^\tau = \varepsilon \cdot i = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot l = 1 \cdot l = 0{,}2\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}^2 .$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება :

M_1 წერტილისათვის

$$a_{1x} = a_r^\tau + a_e cos45° = 0{,}4\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}^2 ,$$

$$a_{1y} = a_r^n - a_e cos45° = 0 ,$$

$$a_1 = a_{1x} = 0{,}4\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}^2 .$$

M_2 წერტილისათვის

$$a_{2x} = -a_r^n + a_e cos45° = 0 ,$$

$$a_{2y} = a_r^\tau - a_e cos45° = 0 ,$$

$$a_2 = 0.$$

M_3 წერტილისათვის

$$a_{3x} = -a_r^\tau + a_e cos45 = 0 ,$$

$$a_{3y} = -a_r^n - a_e cos45° = -0{,}4\sqrt{2},$$

$$a_3 = 0{,}4\sqrt{2}\text{სმ/წმ}^2 .$$

M_4 წერტილისათვის

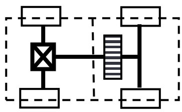
$$a_{4x} = a_r^n + a_e cos45° = 0{,}4\sqrt{2},$$

$$a_{4y} = -a_r^\tau - a_e cos45° = -0{,}4\sqrt{2},$$

$$a_4 = \sqrt{a_{4x}^2 + a_{4y}^2} = 0{,}8\text{სმ/წმ2}.$$

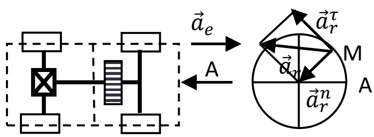
პასუხი: $a_1 = 0{,}4\sqrt{2}$ სმ/წმ² , $a_2 = 0$, $a_3 = 0{,}4\sqrt{2}$სმ/წმ² . $a_4 = 0{,}8$სმ/წმ2.

ამოცანა 23.9



ავტომობილი მოძრაობს გზის სწორხაზოვან მონაკვეთზე $a_0 = 2$მ/წმ² აჩქარებით. გრძივ ლილვზე დასმულია მქნევარა თვალი, რომლის რადიუსი $R = 0{,}25$ მ და მოცემულ მომენტში აქვს კუთხური სიჩქარე $\omega = 4$ რად/წმ და კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 4$ რად/წმ². იპოვეთ მოცემულ მომენტში მქნევარა თვლის ფერსოს წერტილების აჩქარება.

ამოხსნა



მქნევარა თვლის ფერსოს წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: ფარდოოობითი მოძრაოოობა არის ბორბლის ბრუნვა ლილვის გარშემო ხოლო წარმტანი მოძრაობა არის ამ წრტილის მოძრაობა ავტომობილთან ერთად. რადგან წარმტანი მოძრაობა არის გადატანითი, ამიტომ კორიოლისის აჩქარება ნულის ტოლია. აბსოლუტური აჩქარება ასე გამოითვლება

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e.$$

გამოვთვალოთ ამ ტოლობაში სემავალი სიდიდეები.:

$$a_r^n = \omega^2 R = 4\,\frac{მ}{წმ^2},\ a_r^\tau = \varepsilon R = 1\,\frac{მ}{წმ^2}.$$

ფარდობითი აჩქარების მოდული უდრის

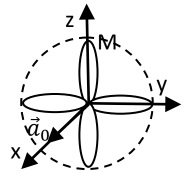
$$a_r = \sqrt{(a_r^n)^2 + (a_r^\tau)^2} = \sqrt{17}.$$

ფარდობითი აჩქარების ვექტორი ძევს ლილვის მართობულ სიბრტყეში, ამიტომ ის არის წარმტანი აჩქარების მართობი . აქედან გამომდინარე

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_e^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58მ/წმ^2.$$

პასუხი: $a = 4{,}58$მ/წმ^2 .

ამოცანა 23.10



თვითმფრინავი მოძრაობს სწორხაზობრივად $a_0 = const = 4$მ/წმ^2 აჩქარებით. ხრახნი, რომლის დიამეტრი d=1,8 მ, ბრუნავს თანაბრად კუთხური სიჩქარით n=1800 ბრ/წთ. იპოვეთ ხრახნის ბოლო წერტილის მოძრაობის განტოლება, სიჩქარე და აჩქარება დედამიწის მიმართ უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში, თუ Ox ღერძი ემთხვევა ხრახნს. თვითმფრინავის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

ამოხსნა

თვითმფრინავის მოძრაობა მუდმივი აჩქარებით არის წარმტანი მოძრაობა, ხოლო ხრახნის ბრუნვა - ფარდობითი მოძრაობა. ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსი R=d/2=0,9 მ. რადგან წარმტანი მოძრაობა თანაბრადაჩქარებულია, ამიტომ

$$\frac{dV_x}{dt} = 4\ \to V_x = \int 4dt = 4t + C_1, V_0 = 0 \to c_1 = 0,$$

$$x = \int V_x dt = \int 4tdt = 2t^2 + C_2\ \ x_0 = 0\ \to C_2 = 0,$$

$$x = 2t^2.$$

რადგან ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, ამიტომ M წერტილის კოორდინატებია :

$$y_M = Rcos\omega t = 0{,}9cos60\pi t,$$

$$z_M = Rsin\omega t = 0{,}9sin60\pi t.$$

გამოვთვალოთ ამ სიდიდეების პირველი და მეორე წარმოებულები და მივიღებთ ფარდობითი სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილებს:

$$\dot{y}_M = V_{ry} = -54\pi sin60\pi t, \qquad \ddot{y}_M = a_{ry} = -3240\pi^2 cos60\pi t,$$

$$\dot{z}_M = V_{rz} = 54\pi cos60\pi t,\ \ddot{z}_M = a_{rz} = -3240\pi^2 sin60\pi t.$$

აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდეა:

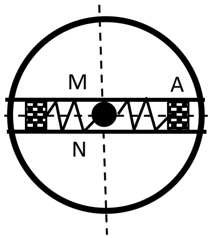
$$V = \sqrt{V_{rx}^2 + V_{ry}^2 + V_{rz}^2} = \sqrt{(54\pi)^2 + 16t^2} \text{ მ/წმ}$$

აბსოლუტური აჩქარების სიდიდეა

$$a = \sqrt{a_{rx}^2 + a_{ry}^2 + a_{rz}^2} = \sqrt{16 + (3240\pi^2)^2} = 31945 \text{ მ/წმ}^2.$$

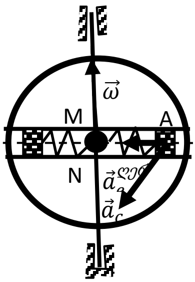
პასუხი: $x = 2t^2$; $y_M = 0{,}9cos60\pi t$; $z_M = 0{,}9sin60\pi t$; $V = \sqrt{(54\pi)^2 + 16t^2}$ მ/წმ ; $a = 31945$ მ/წმ².

ამოცანა 23.11



რეგულიატორში, რომელიც ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით n=1800 ბრ/წთ, მძიმე A საწონი, რომელიც მიმაგრებულია ზამბარებზე, ასრულებს ჰარმონიულ რხევას NM ღარის გასწვრივ ისე, რომ მისი სიმძიმის ცენტრიდან ნრუნვის ღერძამდე მანძილი იცვლება კანონით: $x = (10 + sin8\pi t)$ სმ. იპოვეთ საწონის სიმძიმის ცენტრის აჩქარება იმ მომენტში, როცა კორიოლისის აჩქარება აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას და აჩვენეთ კორიოლისის აჩქარება საწონის კიდურა მდებარეობაში.

ამოხსნა



საწონის სიმძიმის ცენტრი ასრულებს რთულ მოძრაობას. სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა კანონით $x = (0{,}1 + 0{,}05sin8\pi t)$სმ არის ფარდობითი მოძრაობა და ტრაექტორია არის წრფე. რეგულიატორის ბრუნვა ვერტიკალური ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. საწონის სიმძიმის ცენტრის აჩქარება არის ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების გეომეტრიული ჯამი.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ განტოლებებში შემავალი აჩქარებების მოდულები:

ფარდობითი აჩქარების მოდული უდრის

$$a_r = \frac{d^2x}{dt^2} = \big((10 + sin8\pi t)\big)'' = -3{,}2\pi^2 sin8\pi t,$$

კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega_e V_r sin(\omega_e, V_r) = 2 \cdot 6\pi \cdot \dot{x} \cdot sin90° = 12\pi \cdot 0{,}4\pi cos8\pi t = 4{,}8\pi^2 cos8\pi t,$$

კორიოლისის აჩქარება მაქსიმუმს აღწევს , როცა t=1. ამიტომ $a_r(1) = 0$.
წარმტანი აჩქარება უდრის

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}.$$

ცენტრისკენული აჩქარება უდრის

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 R = 36\pi^2 x, a_e^{ღერ}(1) = 3{,}6\pi^2.$$

მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.
ბრუნვითი აჩქარება უდრის

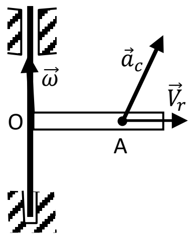
$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e^2 R = 0. \text{(რადგან } \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0)$$

კორიოლისის აჩქარების მაქსიმუმია $a_c = 4{,}8\pi^2$. მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.
სიმძიმის ცენტრის აბსოლიუტური აჩქარება ამ მომენტში უდრის

$$a_C = \sqrt{\left(a_e^{ღერ}\right)^2 + (a_c)^2} = 6\pi^2 \text{ მ/წმ}^2.$$

საწონი უკიდურეს მდებარეობას დაიჭერს, როცა $x = x_{max} = 0{,}15$, ამ დროს t=1/16წმ. $a_c = 0$.
პასუხი: $a_C = 6\pi^2$ მ/წმ², $a_c = 0$.

ამოცანა 23.12



წყლის ნაკადი მიედინება OA მილში, რომელიც ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო n=60 ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ ნაკადის იმ წერტილია კორიოლისის აჩქარება, სადაც ფარდობითი სიჩქარე $V_r = \frac{21}{11}$ მ/წმ და მიმართულია OA მილის გასწვრივ. π რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობად აიღეთ 22/7.

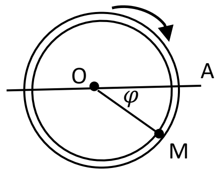
ამოხსნა

კორიოლისის აჩქარება უდრის $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$.
აჩქარების მოდული უდრის

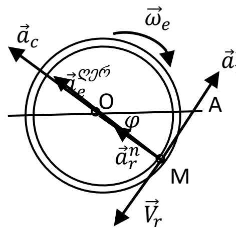
$$a_c = 2\omega_e V_r sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}\right) = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{21}{11} sin90° = 24\text{მ/წმ}^2.$$

აჩქარების მიმართულება ნახაზის სიბტყის მართობულია და მიიღება (ჟუკოვსკის წესი) ფარდობითი სიჩქარის მობრუნებით წარმტანი ბრუნვის თანხვედრილი მიმართულებით.
პასუხი: $a_c = 24$მ/წმ².

ამოცანა 23.13



R=1 მ რადიუსიანი მილი ბრუნავს ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო, საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით, მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 1$ რად/წმ. მილში A წერტილის მახლობლად ირხევა M წერტილი ისე, რომ კუთხე $\varphi = sin\pi t$.იპოვეთ ბურთულას აბსოლუტური აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელები, როცა $t = 2\frac{1}{6}$წმ.



ამოხსნა

წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. დისკოს ბრუნვა არის წარმტანი მოძრაობა, ხოლო წერტილის მოძრაობა მილში არის ფარდობითი მოძრაობა. აბსოლუტურ აჩქარებას ვპოულობთ ტოლობით

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \ . \qquad (1)$$

ვიპოვოთ აქ შემავალი სიდიდეების მოდულები:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau .\ a_r^\tau = \varepsilon_r R = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = -\pi^2 \cdot 1 = -\pi^2,\ a_r^\tau\left(2\frac{1}{6}\right) = -4{,}93 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_r^n = \omega_r^2 R = (d\varphi/dt)^2\, R = (\pi sin\pi t)^2 R,\ \ a_r^n\left(2\frac{1}{6}\right) = \frac{3\pi^2}{4} \text{ მ/წმ}^2\ .$$

$$\vec{a}_e = a_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}.$$

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 R = 1\text{მ/წმ}^2,\ a_e^{ბრ} = \varepsilon_r R = 0\ (რადგან\ \omega_e = const)$$

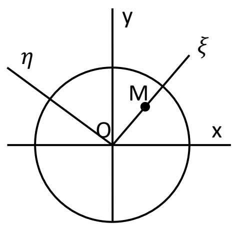
$$a_c = 2\omega_e V_r sin 90° = 1{,}73\pi \text{ მ/წმ}^2\,.$$

მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე. დავაგეგმილოთ ვექტორული ტოლობა (1) მხებსა და ნორმალზე და გვექნება:

$$a_\tau = -a_r^\tau = -4{,}93 \text{ მ/წმ}^2,\ a_n = a_r^n + a_e^{ღერ} + a_c = 13{,}84\text{მ/წმ2}\,.$$

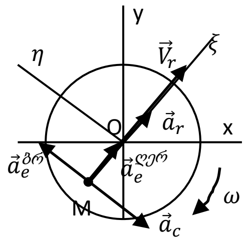
პასუხი: $a_\tau = -4{,}93$ მ/წმ² ; $a_n = 13{,}84$მ/წმ2 .

ამოცანა 23.14



დისკო ბრუნავს თავისი სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო საათის ისრის მიმართულებით თანაბრადაჩქარებულად კუთხური აჩქარებით 1წმ⁻¹ . t=0 მომენტში მისი კუთხური სიჩქარე ნულის

ტოლია. დისკოს ერთერთ დიამეტრზე ირხევა წერტილი M, რომლის კოორდინატია $\xi = sin\pi t$ მ. $t = 1\frac{2}{3}$ წმ მომენტისათვის იპოვეთ ამ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის გეგმილები დისკოსთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში.



ამოხსნა

წერტილის მოძრაობა კანონით $\xi = sin\pi t$ არის ფარდობითი მოძრაობა. $O\xi$ ღერძის ბრუნვა არის წარმტანი მოძრაობა. წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი. M წერტილის აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad (1)$$

ვიპოვოთ M წერტილის მდებარეობა მოცემული მომენტისთვის;

$$როცა\, t = 1\frac{2}{3}\ \ მაშინ\, \xi = -0{,}866\ მ.$$

ვიპოვოთ (1) ტოლობაში სემავალი სიდიდეების მოდულები. ფარდობითი აჩქარება არის ξ სიდიდის მეორე რიგის წარმოებული.

$$a_r = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\pi^2 sin\pi t, როცა\, t = 1\frac{2}{3}\ \ მაშინ\, a_r = 0{,}866\pi^2 მ/წმ2\,,$$

$\vec{a}_r$ ვექტორი მიმართულია $O\xi$ ღერძის გასწვრივ კოორდინატის ზრდის მიმართულებით. რადგან წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვითი მოძრაობა, ამიტომ ის შედგება ორი მდგენელისაგან: ბრუნვითი და ღერძისკენული.

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ბრ} + \vec{a}_e^{ღერ}\,.$$

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e OM = sin\pi t\ როცა\, t = 1\frac{2}{3}\ \ მაშინ\, a_e^{ბრ} = 0{,}866\ მ/წმ2.$$

$$\omega_e = \int \varepsilon_e dt = t\,, a_e^{ღერ} = {\omega_e}^2 OM, როცა\, t = 1\frac{2}{3}\ \ მაშინ\, a_e^{ღერ} = 2{,}4მ/წმ2.$$

კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega_e V_r sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}\right),$$

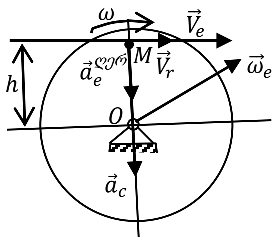
ფარდობითი სიჩქარე $V_r = \frac{d\xi}{dt} = \pi cos\pi t\ როცა\, t = 1\frac{2}{3}\ \ მაშინ V_r = 1{,}57მ/წმ$. ამ ვექტორის მიმართულება ნაცვენებია ნახაზზე. კუთხე წარმტან კუთხურ სიჩქარესა და ფარდობით სიჩქარეს შორის არის 90°, ამიტომ $a_c = 5{,}233მ/წმ2$.

დავაგეგნ=მილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_\xi = a_r + a_e^{ღერ} = 10{,}96\frac{მ}{წმ2},\ a_\eta = a_e^{ბრ} - a_c = -4{,}37\frac{მ}{წმ2}\,.$$

პასუხი: $a_\xi = 10{,}96\frac{მ}{წმ2}\ ;\ a_\eta = -4{,}37\frac{მ}{წმ2}$.

ამოცანა 23.15



დისკო ბრუნავს თავისი სიბრტყის მართობული სიმეტრიის ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. დისკოს ქორდაზე თანაბრად, v_r ფარდობითი სიჩქარით მოძრაობს წერტილი. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აჩქარება იმ პირობით, რომ წერტილი იმყოფება ბრუნვის ღერძიდან უმოკლეს მანძილზე და ფარდობითი მოძრაობა ხდება დისკოს ბრუნვის მიმართულებით.

ამოხსნა

წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე რთული მოძრაობის დროს უდრის

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

$\vec{v}_r$ ვექტორი მოცემულია ამოცანის პირობით. წარმტანი სიჩქარის სიდიდე უდრის $v_e = \omega h$, მიმართულია OM ღერძის მართობულად. ამიტომ აბსოლუტური სიჩქარე იქნება $v = v_r + v_e = v_r + \omega h$.

აბსოლუტური აჩქარება უდრის:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad (1)$$

გამოვთვალოთ აქ შემავალი სიდიდეები:

ფარდობითი აჩქარება

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 0.$$

წარმტანი აჩქარება:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}, \qquad a_e^{ღერ} = \omega^2 h, a_e^{ბრ} = \varepsilon h = 0 \ (\ \varepsilon = 0).$$

კორიოლისის აჩქარება

$$a_c = 2\omega v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 2\omega v_r.$$

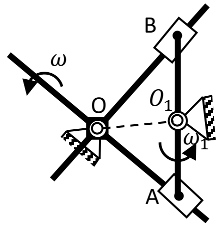
კორიოლისის აჩქარების მიმართულება განვსაზღვროთ ჟუკოვსკის წესით და მიღებს ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობას.

აბსოლუტური სიჩქარის საპოვნელად შევკრიბოთ (1) ტოლობაში შემავალი სიდიდები და მივიღებთ:

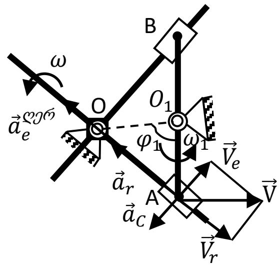
$$a = a_e^{ღერ} + a_c = \omega^2 h + 2\omega v_r\ .$$

პასუხი: $v = v_r + \omega h$; $a = \omega^2 h + 2\omega v_r$.

ამოცანა 23.16



ერთი ლილვიდან მეორე, მის პარალელურ ლილვზე, ბრუნვის გადაცემისათვის გამოიყენება ქურო, რომელიც წარმოადგენს სებრუნებულ ელიფსურ სახაზავს, რომლია OO1 მრუდმხარა დამაგრებულია. AB მრუდმხარა ბრუნავს O1 ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით და მოძრაობაში მოჰყავს მეორე O ლილვზე დამაგრებული ვარსკვლავა. იპოვეთ ვარსკვლავას კუთხური სიჩქარე და , აგრეთვე, A ცოციას ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებები და წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეები. თუ: $\omega_1 = const, OO_1 = AO_1 = O_1B = a$.



ამოხსნა

A ცოციას მოძრაობა OA წრფეზე არის ფარდობითი მოძრაობა. ABღეროს ბრუნვა O წერტილის გარშემო არის აბსოლუტური მოძრაობა. ვარსკვლავას ბრუნვა O ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. რადგან AB ღერო ბრუნავს მუდმივი ω_1 კუხური სიჩქარით, ამიტომ მობრუნების კუთხე $\varphi = \omega_1 t$. სამკუღხედი OO1A ტოლფერდაა. ამიტომ $\angle AO_1K = \frac{\varphi_1}{2}$. ე.ი. კუთხე $\vec{v}_e$ და $\vec{v}$ ვექტორებს შორის უდრის $\beta = 90° - \frac{\varphi_1}{2}$.

ცოციას აბსოლუტური სიჩქარეუდრის

$$v = \omega_1 a,$$

მიმართულია OA-ს მართობულად.

ცოციას წარმტანი სიჩქარე უდრის

$$v_e = \omega OA.$$

OO1A სამკუთხედიდან

$$OA = 2OK = 2asin\frac{\varphi_1}{2} = 2asin\frac{\omega_1 t}{2}; v_e = 2a\omega sin\frac{\omega_1 t}{2}.$$

ავაგოთ სიჩქარეთა სამკუთხედი. ამ სამკუთხედიდან შეიძლება დავწეროთ:

$$v_e = vcos\beta = vsin\frac{\varphi_1}{2} = \omega_1 asin\frac{\omega_1 t}{2}.$$

რადგან ვიცით v_e და v, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ ω.

$$2a\omega sin\frac{\omega_1 t}{2} = \omega_1 asin\frac{\omega_1 t}{2} \to \omega = \frac{\omega_1}{2}.$$

მაშინ

$$v_r = vcos\frac{\varphi_1}{2} = \omega_1 acos\frac{\omega_1 t}{2}.$$

ცოციას აჩქარება ვიპოვოთ განტოლებიდან

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

ფარდობით აჩქარებას ვიპოვით ფარდობითი სიჩქარის გაწარმოებით

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\omega_1 a}{2} sin\frac{\omega_1 t}{2}.$$

ფარდობითი აჩქარების ვექტორს აქვს ფარდობითი სიჩქარის საპირისპირო მიმართულება.

წარმტანი მოძრაობის აჩქარება უდრის

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{ბრ}} + \vec{a}_e^{\text{ღერ}},\ a_e^{\text{ღერ}} = \omega^2 OA = \frac{\omega_1^2 a}{2}\ sin\frac{\omega_1 t}{2}.\ a_e^{\text{ბრ}} = \varepsilon_e OA = 0.$$

კორიოლისის აჩქარება უდრის

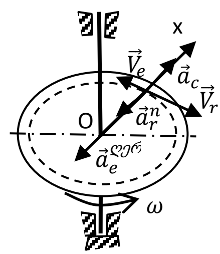
$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = \omega_1^2 acos\frac{\omega_1 t}{2}.$$

კუთხე $\vec{\omega}_e$ და $\vec{v}_r$ ვექტორებს შორის მართია. კორიოლისის აჩქარება მიმართულია $\vec{v}_r$ ვწქტორის მართობულადისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.

პასუხი: $\omega = \frac{\omega_1}{2}$; $v_e = \omega_1 asin\frac{\omega_1 t}{2}$; $v_r = \omega_1 acos\frac{\omega_1 t}{2}$; $a_r = -\frac{\omega_1 a}{2} sin\frac{\omega_1 t}{2}$, $a_e = \frac{\omega_1^2 a}{2}\ sin\frac{\omega_1 t}{2}$; $a_c = \omega_1^2 acos\frac{\omega_1 t}{2}$.

ამოცანა 23.17

ველოსიპედი მოძრაობს წრიულ პლატფორმაზე, რომელიც ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = \frac{1}{2}$რად/წმ . მანძილი ველოსიპედიდან პლატფორმის ბრუნვის ღერძამდე მუდმივია და უდრის r=4 მ. ველოსიპედის ფარდობითი სიჩქარე $v_r = 4$ მ/წმ და მიმართულია შესაბამისი წერტილის წარმტანი სიჩქარის საპირისპიროდ. იპოვეთ ველოსიპედისტის აბსოლუტური აჩქარება. იპოზეთ ასევე, რა არდობითი სიჩქარით უნდა იმოძრაოს, რომ აბსოლუტური აჩქარება იყოს ნულის ტოლი.



ამოხსნა

ველოსიპედის მოძრაობა პლატფორმაზე არის ფარდობითი მოძრაობა. მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით 4მ. ფარდობითი სიჩქარე მიმართულია ამ წრეწირის მხების გასწვრივ. წარმტანი მოძრაობა არის პლარფორმის ბრუნვა ღერძის გარშემო. ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია 4 მ. წარმტანი სიჩქარე არის ამ წრეწირის მხები და მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ.

ააჩქარება გამოითვლება ტოლობით

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \quad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები.

ა) ფარდობითი მოძრაობის აჩქარება უდრის

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau.$$

$a_r^n = \frac{v_r^2}{r} = 4$მ/წმ² - მიმართულია რადიუსის გასწვრივ, $a_r^\tau = 0$.

ბ) წარმტანი მოძრაობის აჩქარება

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}.$$

$a_e^{ღერ} = \omega^2 r = 1$მ/წმ² -მიმართულია რადიუსის გასწვრივ ცენტრისკენ,

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon r = 0.$$

გ) კორიოლისის აჩქარება

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 4 \text{ მ/წმ}^2.$$

კორიოლისის აჩქარების ვექტორი ძევს პლატფორმის სიბრტყეში OM რადიუსის გასწვრივ ფარდობითი აჩქარების საპირისპიროდ.

(1) ტოლობაში შემავალი ვექტორები დალაგებულია ერთ წრფეზე. ამიტომ მათ შესაკრებად საჭიროა დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერძზე

$$a_x = a_c - a_r^n - a_r^{ღერ} = -1,\ a = 1 \text{ მ/წმ}^2.$$

მიმართულია დისკოს რადიუსის გასწვრივ ცენტრისკენ.

ველოსიპედისტის აჩქარება რომ იყოს ნულის ტოლი, ჩავწეროთ ტოლობა

$$a_x = a_c - a_r^n - a_r^{ღერ} = 0 \ \to 2\omega v_r - \frac{v_r^2}{r} - \omega^2 r = 0,$$

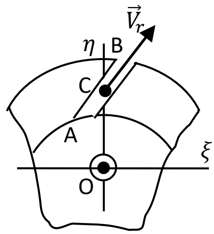
ჩავსვათ ω და r და ვიპოვოთ v_r.

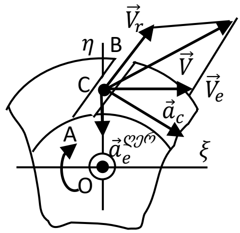
$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v_r - \frac{v_r^2}{4} - \frac{1}{4} r = 0 \ \to v_r^2 - 4v_r + 4 = 0 \to v_r = 2\text{მ/წმ}.$$

პასუხი: , $a = 1$ მ/წმ² - მიმართულია დისკოს ცენტრისკენ; $v_r =$ 2მ/წმ.

ამოცანა 23.18

კომპრესორი, რომელსაც სწორხაზოვანი ღარები აქვს, ბრუნავს ნახაზის სიბრტყის მართობული O ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით.ღარში მიედინება ჰაერის ნაკადი მუდმივი ფარდობითი V_r სიჩქარით. იპოვეთ ჰაერის ნაკადის იმ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აჩქარების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე, რომელიც მოცემულ მომენტში იმყოფება C წერტილში. მოცემულია: AB არხი OC რადიუსის მიმართ დახრილია 45° კუთხით. $OC = 0{,}5$ მ, $\omega = \frac{4\pi \text{რად}}{\text{წმ}}, v_r = 2\,\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$





ამოხსნა

ნაწილაკის მოძრაობა არხში არის ფარდობითი მოძრაობა, ტრაექტორია არის AC წრფე. კომპრესორის ბრუნვა ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით არის წარმტანი მოძრაობა. მოძრაობის ტრაექტორია არის OC რადიუსიანი წრეწირი. აბსოლუტური სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით.

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \qquad (1)$$

ფარდობითი სიჩქარე მოცემულია ამოცანის პირობით. წარმტანი სიჩქარე უდრის

$$v_e = \omega \cdot OC = 4\pi \cdot 0{,}5 = 2\pi = 6{,}28 \text{ მ/წმ}.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ :

$$v_\xi = v_r cos45° + v_e = 7{,}694 \text{ მ/წმ}.$$

$$v_\eta = v_r cos45° = 1{,}414 \text{ მ/წმ}.$$

აჩქარება რთული მოძრაობის დროს გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (2)$$

ვიპოვოთ (2) ტოლობაში შემავალი სიდიდეების მნიშვნელობები და მიმართულებები:

ა) ფარდობითი აჩქარება

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 0 \text{ , (რადგან } v_r = const)$$

ბ) წარმტანი აჩქარება უდრის

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{ღერ}} + \vec{a}_e^{\text{ბრ}}.$$

$$a_e^{ღერ} = \omega^2 OC = 8\pi^2 \text{ მ/წმ}^2,$$

მიმართულია OC რადიუსის გასწვრივ.

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon \cdot OC = 0, \left(\omega = const, \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0\right).$$

გ) კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 2 \cdot 4\pi \cdot 2 = 16\pi.$$

კორიოლისის აჩქარების მიმართულებას განვსაზღვრავთ ჟუკოვსკის წესით.ამისათვის ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი, რომელიც ძევს წარმტანი ბრუნვის ღერძის მართობულ სიბრტყეში, უნდა მოვაბრუნოთ ამ ღერძის გარშემო წარმტანი ბრუნვის მიმართულებით 90°-ით. მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.

ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარების გეგმილები ღერძებზე:

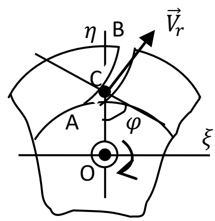
$$a_\xi = a_c cos45° = 16\pi \cdot 0{,}707 = 35{,}54 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_\eta = -a_e^{ღერ} - a_c cos45° = -114{,}54 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a_\xi = 35{,}54$ მ/წმ² ; $a_\eta = -114{,}54$ მ/წმ². $v_\xi = 7{,}694$ მ/წმ. $v_\eta = 1{,}414$ მ/წმ.

ამოცანა 23.19

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა არხი არის მრუდი, რომლის სიმრუდის რადიუსი C წერტილში უდრის ρ . კუთხე C წერტილში გამავალ AB წრფის ნორმალსა და OC რადიუსს შორის არის φ. $OC = r$.



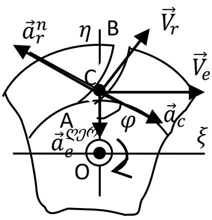
ამოხსნა

ამოხსნა წინა ამოხსნის ანალოგიურია:

სიჩქარე უდრის

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \qquad (1)$$

$$v_e = \omega \cdot OC = \omega r.$$



$\vec{v}_e$ ვექტორი OC რადიუსის მართობულია.

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ξ და η ღერძებზე:

$$v_\eta = v_r sin\varphi, \qquad v_\eta = v_r cos\varphi + \omega r.$$

ჰაერის ნაწილაკის აჩქარება რთული მოძრაობისას გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (2)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდეები და მიმართულებები:

ა) ფარდობითი აჩქარება

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho},$$

$\vec{a}_r$ ვექტორი მიმართულია სიმრუდის რადიუსის გასწვრივ.

ბ) წარმტანი აჩქარება

$$a_e^{ღერ} = \omega^2 r \text{ - მიმართულია } CD \text{ წრფის გასწვრივ.}$$

გ) კორიოლისის აჩქარება

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 2\omega v_r.$$

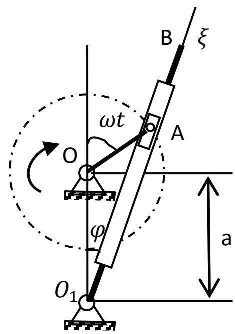
დავაგეგმილოთ (2) ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_\xi = -a_r^n sin\varphi + a_c sin\varphi = -\frac{v_r^2}{\rho} sin\varphi + 2\omega v_r sin\varphi = \left(2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho}\right) sin\varphi.$$

$$a_\eta = a_r^n cos\varphi - a_e^{ღერ} - a_c cos\varphi = \frac{v_r^2}{\rho} cos\varphi - \omega^2 r - 2\omega v_r cos\varphi = -\left[\omega^2 r + \left(2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho}\right) cos\varphi\right].$$

პასუხი: $v_\eta = v_r sin\varphi$; $v_\xi = v_r cos\varphi + \omega r$; $a_\xi = \left(2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho}\right) sin\varphi$; $a_\eta = -\left[\omega^2 r + \left(2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho}\right) cos\varphi\right]$.

ამოცანა 23.20



მოძრავი მუშტას კუთხური აჩქარება გამოსახე როგორც დროის ფუნქცია, თუ მრუდმხარა, რომლის სიგრძეა r ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω . მანძილი მრუდმხარასა და მუშტას ღერძებს შორის $a > r$.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ 21.13 ამოცანის ამოხსნით

$$ctg\varphi = \frac{rsin\omega t}{a + rcos\omega t}.$$

ამოვხსნათ ამ ტოლობიდან კუთხე და გამოვთვალოთ ორი წარმოებული, მივიღებთ საძიებელ სიდიდეს:

$$\varphi = arctg\left(\frac{a}{rsin\omega t} + ctg\omega t\right).$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{a + rcos\omega t}{rsin\omega t}\right)}\left(-\frac{\omega acos\omega t}{rsin^2\omega t} - \frac{\omega}{sin^2\omega t}\right).$$

გავამარტივოთ გამოსახულება და მივიღებთ

$$\dot{\varphi} = \frac{r\omega(a + rcos\omega t)}{r^2 + a^2 + 2arcos\omega t}.$$

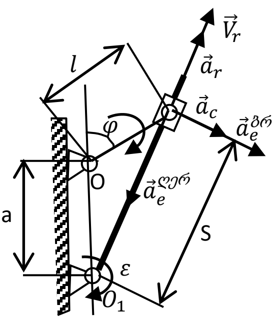
გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული და მივიღებთ საძიებელ სიდიდეს

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{(r^2-a^2)at\omega^2 sin\omega t}{(r^2+a^2+2arcos\omega t)^2}.$$

პასუხი: $\varepsilon_1 = \frac{(r^2-a^2)at\omega^2 sin\omega t}{(r^2+a^2+2arcos\omega t)^2}$.

ამოცანა 23.21

A ცოცია ასრულებს წარმტან მოძრაობას მუშტასთან ერთად, რომელიც ბრუნავს ნახაზის სიბრტყის მართობული O1 ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით და ε კუთხური აჩქარებით. იმავდროულად ცოცია მოძრაობს მუშტას ჭრილში, ასრულებს ფარდობით მოძრაობას v_r ფარდობითი სიჩქარით და a_r ფარდობითი აჩქარებით. იპოვეთ ცოციას აბსოლუტური აჩქარების გეგმილები მუშტასთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემის ღერძებზე და გამოსახე ისინი $O_1A = S$ მანძილის საშუალებით.



ამოხსნა

რთული მოძრაობის დროს აბსოლუტური აჩქარება გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში სემავალი სიდიდეები

ა) ფარდობითი აჩქარების სიდიდე მოცემულია ამოცანის პირობით და ნაჩვენებია ნახაზზე.

ბ) წარმტანი აჩქარების მდგენელებია:

$a_e^{ღერ} = \omega^2 S$, მიმართულია AO წრფის გასწვრივ;

$a_e^{ბრ} = \varepsilon S$ - მიმართულია AO წრფის მართობულად.

გ) კორიოლისის აჩქარება

$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e,\hat{} \vec{v}_r) = 2\omega v_r$. მიმართულია AO წრფის მართობულად.

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_\eta = -a_e^{ბრ} - a_c = -(\varepsilon S + 2\omega v_r);\ a_\xi = a_r - a_e^{ღერ} = a_r - \omega^2 S.$$

პასუხი: $a_\eta = -(\varepsilon S + 2\omega v_r);\ a_\xi = a_r - \omega^2 S$.

ამოცანა23.22

იპოვეთ მრუდმხარა-მუშტა მექანიზმის მუშტას კუთხური აჩქარება როცა მრუდმხარას უკავია ორი ვერტიკალური და ორი ჰორიზონტალური მდებარეობა, თუ: მრუდმხარას სიგრძე $l = 0{,}4$მ, მანძილი მრუდმხარასა და მუშტას ღერძებს შორის $a = 0{,}3$ მ,მრუდმხარას თანაბარი ბრუნვის კუთხურუ სიჩქარე $\omega = 3$რად/წმ. (იხ. ნახ. ამოცანა 23.21).

ამოხსნა

ამოცანა 23.20-ში მიღებული იყო კუთხური აჩქარების ფორმულა

$$\varepsilon = \frac{(r^2-a^2)at\omega^2 sin\omega t}{(r^2+a^2+2arcos\omega t)^2} .$$

ჩავსვათ $\varphi = \omega t$ კუთხის მნიშვნელობები მრუდმხარას სხვადასხვა მდებარეობისათვის:

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 180°,$$

შესაბამისად მივიღებთ: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$,

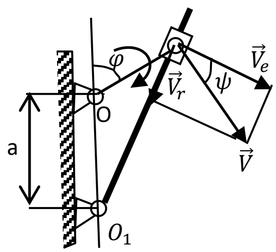
$$\varphi_3 = 90° \ \to \varepsilon_3 = \frac{(l^2-a^2)al\omega^2}{(l^2+a^2)^2} = 1{,}12 .$$

$$\varphi_4 = 270° \ \to \varepsilon_4 = -\frac{(l^2-a^2)al\omega^2}{(l^2+a^2)^2} = -1{,}12$$

პასუხი: $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 180°, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \varphi_3 = 90°\ , \varepsilon_3 = 1.12$რად/წმ²; $\varphi_4 = 270°, , \varepsilon_4 = -1.12$რად/წმ² .

ამოცანა 23.23

იპოვეთ მუშტას ჭრილში მოძრავი ცოციას ფარდობითი აჩქარება წინა ამოცანის პირობებში მრუდმხარას მითითებულ ოთხ მდებარეობაში.



ამოხსნა

სიჩქარე რთული მოძრაობის დროს ასე გამოითვლება

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_r.$$

$\vec{v}_r$ ვექტორი მიმართულია AO_1 წრფის გასწვრივ; $\vec{v}_r \perp AO_1$; $\vec{v} \perp OA$ და უდრის $v = \omega \cdot OA = \omega \cdot l$.

რადგან ვიცით აბსოლუტური სიჩქარე, ვიპოვით ფარდობით სიჩქარეს

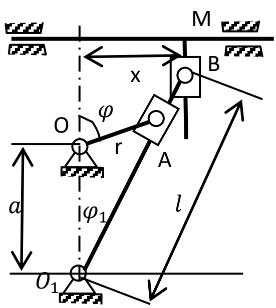
$$v_r = vsin\psi.$$

ვიპოვოთ კუთხე ψ. ამისათვის განვიხილოთ სამკუთხედი OAO₁;

$$\angle AOO_1 = 180° - \omega t,$$
$$\angle OO_1A = arctg\left(\frac{a}{lsin\omega t} + ctg\omega t\right).$$
(ამოცანა23,20), მაშინ კუთხე ψ უდრის
$$\psi = 180° - 180° + \omega t - \angle OO_1A = \omega t - \angle OO_1A.$$
რადგან ფარდობითი მოძრაობა არის წრფივი, ამიტომ
$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot l \cdot sin\psi) = \omega l \cdot \frac{d(sin\psi)}{dt} = \omega lcos\psi \frac{d\psi}{dt};$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{-\frac{a\omega cos\omega t}{lsin^2\omega t} - \frac{\omega}{sin^2\omega t}}{1+\left(\frac{a}{lsin\omega t}+ctg\omega t\right)^2} = \omega - \frac{l\omega(acos\omega t + l)}{l^2+a^2+2alcos\omega t}.$$
დავითვალოთ a_r ოთხი მდებარეობისათვის:

1) $\varphi = 0, \psi = 0;$
$$a_{1r} = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 1 \cdot \left[3 - \frac{0{,}4\cdot 3\cdot(0{,}3+0{,}4)}{0{,}16+0{,}09+2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4}\right] = 1{,}543\text{მ/წმ}^2.$$
2) $\varphi = 90°;$
$$\cos\psi = \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}16+0{,}09}} = \frac{4}{5};\ a_{2r} = 3 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left[3 - \frac{0{,}4\cdot 3\cdot 0{,}4}{0{,}16+0{,}09}\right] = 1{,}037\text{მ/წმ2}.$$
3) $\varphi = 180°, \psi = 0.$
$$a_{3r} = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 1 \cdot \left[3 - \frac{0{,}4\cdot 3\cdot(0{,}3\cdot(-!)+0{,}4)}{0{,}16+0{,}09-2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4}\right] = -10{,}8\text{მ/წმ2}.$$
4) $\varphi = 270°, \cos\psi = \frac{4}{5}.$
$$a_{4r} = 3 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left[3 - \frac{0{,}4\cdot 3\cdot 0{,}4}{0{,}16+0{,}09}\right] = 1{,}037\ \text{მ/წმ2}.$$
პასუხი: $\varphi = 0, a_{1r} = 1{,}543$მ/წმ²; $\varphi = 90°, \varphi = 270°, a_{2r} = a_{4r} = 1{,}037\frac{\text{მ}}{\text{წმ2}}$; $\varphi = 180°, a_{3r} = -10{,}8$მ/წმ2.

ამოცანა 23.24



იპოვეთ ჩარხის სუპორტის სიჩქარე და აჩქარება, თუ ის მოძრაობაში მოდის მრუდმხარა-მუშტა მექანიზმის საშუალებით. სქემა ნაჩვენებია ნახაზზე. მუშტა M სუპორტთან შეერთებულია B ცოციას საშუალებით. ცოცია მოძრაობს სუპორტის მართობულ მიმმართველზე. მოცემულია: $O_1B = l, OA = r, O_1O = a, r < a$. OA მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω. მრუდმხარას მობრუნების კუთხე აითვლება ვერტიკალიდან.

ამოხსნა

ამოცანის პირობით $\varphi = \omega t$, x კოორდინატი ვიპოვოთ გეომეტრიულად

$$x = O_1B \cdot sin\varphi_1 = lsin\varphi_1. \qquad (1)$$

განვიხილოთ სამკუთხედი OO_1A და სინუსების თეორემით ვწერთ:

$$\frac{OA}{sin\varphi_1} = \frac{O_1A}{sin(180° - \varphi)} \rightarrow OAsin\varphi = O_1Asin\varphi_1 \rightarrow rsin\varphi = O_1Asin\varphi_1.$$

ΔO_1AM-დან ვიპოვოთ O_1A

$$O_1A^2 = (OO_1 + OM)^2 + AM^2 = (OO_1 + OAcos\varphi)^2 + (OAsin\varphi)^2 = (a + rcos\varphi)^2 + (rsin\varphi)^2.$$

გავხსნათ ფრჩხილები და გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$O_1A^2 = a^2 + r^2 + 2arcos\varphi.$$

განვიხილოთ ΔO_1AM, ვიპოვოთ $sin\varphi_1$:

$$sin\varphi_1 = \frac{AM}{O_1A} = \frac{rsin\varphi}{\sqrt{a^2+r^2+2arcos\varphi}}.$$

ჩავსვათ (1) ტოლობაში $sin\varphi_1$გამოსახულება;

$$x = \frac{lrsin\omega t}{\sqrt{a^2+r^2+2arcos\omega t}} = \frac{lrsin\omega t}{\sqrt{f(t)}}.$$

სიჩქარისა და აჩქარების საპოვნელად საჭიროა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის პირველი და მეორე წარმოებული:

$$v = \dot{x} = \frac{(a + rcos\omega t) \cdot (r + acos\omega t)}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2arcos\varphi}} lr\omega.$$

აჩქარების საპოვნელად გავაწარმოოთ ეს გამოსახულება:

$$a = \frac{dv}{dt} = rl\omega^2 \frac{a(r^2 - a^2)(a + rcos\omega t) - r^2(r + acos\omega t)^2}{\left(\sqrt{a^2 + r^2 + 2arcos\varphi}\right)^5} \cdot sin\omega t.$$

პასუხი: $x = \frac{lrsin\omega t}{\sqrt{a^2+r^2+2arcos\omega t}}$; $v = \frac{(a+rcos\omega t)\cdot(r+acos\omega t)}{\sqrt{a^2+r^2+2arcos\varphi}} lr\omega$; $a = rl\omega^2 \frac{a(r^2-a^2)(a+rcos\omega t)-r^2(r+acos\omega t)^2}{\left(\sqrt{a^2+r^2+2arcos\varphi}\right)^5} \cdot sin\omega t.$

ამოცანა 23.25

წინა ამოცანის პირობით იპოვეთ საჭრისის აჩქარება ორ ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ მდებარეობაში, თუ მოცემულის: $r = 0{,}1მ$, $a = 0{,}3მ$, $l = 0{,}6$ მ. მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე $\omega = 4\pi$ რად/წმ.

ამოხსნა

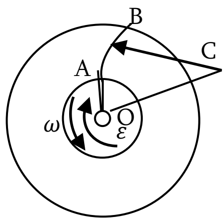
განსახილველ მდებარეობებს შეესაბამება φ კუთხის მნიშვნელობები: $0°$, $90°, 180°, 270°$. ვისარგებლოთ წინა ამოცანის შედეგით

$$a = rl\omega^2 \frac{a(r^2-a^2)(a+r\cos\omega t)-r^2(r+a\cos\omega t)^2}{\left(\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\varphi}\right)^5}\cdot \sin\omega t.$$

ჩავსვათ $\varphi = \omega t$ შესაბამისი მნიშვნელობები და მივიღებთ: როცა $\varphi = 0$ ან $180°$, მაშინ $a = 0$, როცა $\varphi = 90°$ ან $270°$, მაშინ $a = \pm 2{,}21$ მ/წმ² .

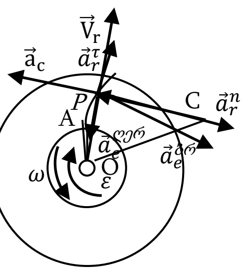
პასუხი: როცა $\varphi = 0$ ან $180°$, მაშინ $a = 0$, როცა $\varphi = 90°$ ან $270°$, მაშინ $a = \pm 2{,}21$ მ/წმ² .

ამოცანა 23.26



ტურბინა ბრუნავს საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით შენელებულად კუთხური სიჩქარით 3 რად/წმ. ტურბინის ფრთის სიმრუდის რადიუსია0,2მ და სიმრუდის ცენტრია C წერტილი. ამასთან $OC = 0{,}1\sqrt{10}$ მ. წყლის ნაწილაკი P, რომელიც ტურბინის ღერძიდან დაშორებულია $OP = 0{,}2$ მ მანძილით, მოძრაობს ფრთაზე გარედან და აქვს სიჩქარე 0,25 მ/წმ და მხები აჩქარება 0,5 მ/წმ² ფრთის მიმართ. იპოვეთ P ნაწილაკის აბსოლუტური აჩქარება იმ მომენტში, როცა ტურბინის კუთხური სიჩქარე არის 2 რად/წმ.

ამოხსნა



სითხის ნაწილაკი ასრულებს რთულ მოძრაობას: ნაწილაკის მოძრაობა ფრთაზე არის ფარდობითი მოძრაობა. ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირის რკალი. ფარდობითი სიჩქარე $v_r = 0{,}25$ მ/წმ და მიმართულია ფრთის მხების გასწვრივ. მხები აჩქარება ასევე მხების გასწვრივ არის მიმართული და უდრის $a_r = 0{,}5$მ/წმ² . წარმტანი მოძრაობა არის ტურბინის მოძრაობა. მისი ტრაექტორია არის OP რადიუსიანი წრეწირი. ნაწილაკის აბსოლუტური აჩქარება არის ფარდობითი წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების ჯამისა .

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ} + \vec{a}_c \quad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდეები და მიმართულებები. ფარდობითი აჩქარების ნორმალური მდგენელი უდრის

$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = 0{,}3125$ მ/წმ², მიმართულია CP წრფის გასწვრივ.

წარმტანი ღერძისკენული აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით:

$a_e^{ღერ} = \omega^2 OP = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$მ/წმ². მიმართულია OP –ს გასწვრივ.

წარმტანი ბრუნვითი აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon \cdot OP = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 \text{მ/წმ}^2.$$

მიმართულია OP რადიუსიანი წრეწირის მხების გასწვრივ ε -ის მიმართულებით .

კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 1 \text{ მ/წმ}^2$$

კორიოლისის აჩქარების მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.

დავუკავშიროთ მოძრავ წერტილს x და y საკოორდინატო ღერძები და განვიხილოთ სამკუთხედი OCP. ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა, OP=OC=0,2მ. ვიპოვოთ კუთხე $\angle POC$:

$$sin\angle POC = \frac{\sqrt{0{,}2^2 + \left(0{,}05\sqrt{10}\right)^2}}{0{,}2} = 0{,}612. \rightarrow \angle POC = 37°42'.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღერძებზე:

$$a_x = a_r^n + a_e^{ბრ} cos14°34' - a_e^{ღერ} \sin14°34' - a_c = -0{,}3055 \text{ მ/წმ}^2.$$

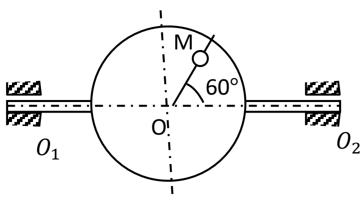
$$a_y = a_r - a_e^{ბრ} \sin14°34' - a_e^{ღერ} cos14°34' = -0{,}426 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0{,}52 \text{ მ/წმ}^2.$$

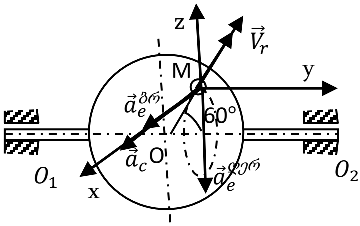
პასუხი: $a = 0{,}52$ მ/წმ² .

ამოცანა 23.27

O_1O_2 ღერძის გარშემო მბრუნავი დისკოს კუთხური სიჩქარე $\omega = 2t$ რად/წმ. დისკოს ცენტრიდან ფერსოსკენ, რადიუსის გასწვრივ, მოძრაობს წერტილი კანონით : $OM = 4t^2$სმ. OM რადიუსი O_1O_2 ღერძთან ადგენს 60° კუთხეს.იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება როცა t=1 წმ.



ამოხსნა



M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: ფარდობითი მოძრაობა არის წერტილის მოძრაობა რადიუსის გასწვრივ, ხოლო წარმტანი მოძრაობა არის დისკოს ბრუნვა . ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარეა

$$v_r = \frac{dOM}{dt} = 8t, \text{როცა } \mathrm{t} = 1 \text{ მაშინ } \mathrm{v_r} = 8 \text{ მ/წმ.}$$

წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია $R = OMsin\varphi$.

რთული მოძრაობის დროს აბოლუტური აჩქარება გამოითვლება ფორმულით:

$$\overline{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ფორმულაში შემავალი ვექტორების სიდიდე და მიმართულებები:

რადგან ფარდობითი მოძეაობის ტრაექტორია არის წრფე ამიტომ ფარდობითი აჩქარება არის

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 8 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ფარდობით აჩქარებას აქვს ფარდობითი სიჩქარის მიმართულება.

წარმტანი მოძრაობა არის ღერძის გარშემო ბრუნვა ამიტომ

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ},$$

$$a_e^{ღერ} = \omega^2 R, \text{ როცა r=1 მაშინ } \omega = 2, R = 2\sqrt{3} \ \rightarrow a_e^{ღერ} = 8\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2 .$$

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon R = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2 .$$

მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე.

კორიოლისის აჩქარების სიდიდეა

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2 .$$

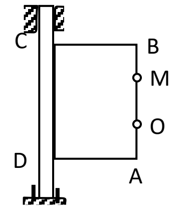
კორიოლისის აჩქარების ვექტორი მიმართულია ფარდობით სიჩქარესა და წარმტანი მოძრაობის კუთხურ სიჩქარეზე გამავალი სიბრტყის მართობულად, ამ შემთხვევაში ის მიმართულია ნახაზიდან ჩვენსკენ R რადიუსიანი წრეწირის მხებად. აბსოლუტური სიჩქარის საპოვნელად დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება:

$$a_x = a_e^{ბრ} + a_c = 20\sqrt{3}\,,\;\; a_y = a_r cos60° = 4,\;\; a_z = a_r cos30° - a_e^{ღერ} = -4\sqrt{3}\,.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 35{,}56 \text{ სმ/წმ}^2.$$

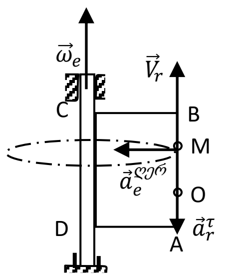
პასუხი: $a = 35{,}56$ სმ/წმ^2 .

ამოცანა 23.28



მართკუთხედი ABCD ბრუნავს CD გვერდის გარშემო $\omega = \frac{\pi}{2} = const$ კუთხური სიჩქარით. AB გვერდის გასწვრივ მოძრაობს M წერტილი კანონით: $\xi = asin\frac{\pi}{2}t$ მ. მოცემულია ზომები: DA=CB=a მ. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური აჩქარების სიდიდე t=1 წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა



M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მოძრაობა AB წრფის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა და მისი ტრაექტორია არის წრფე. მართკუთხედის ბრუნვა ღერძის გარსემო არის წარმტანი მოძრაობა. წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია OM.

აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{ბრ} + \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ვექტორების სიდიდეები და მიმართულებები:

$$a_r^{\tau} = \frac{d^2OM}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{a\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}t, \text{ როცა } t = 1 \text{ მაშინ } a_r^{\tau} = -\frac{a\pi^2}{4}.\; a_r^n = 0.$$

$\vec{a}_r^{\tau}$ ვექტორი მიმართულია AB წრფის გასწვრივ M- დან O-კენ.

$$a_e^{ღერ} = \omega^2 R = \frac{\pi^2}{4}\text{ a}$$, - მიმართულია რადიუსის გასწვრივ.

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon R = 0, (\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0)\,.$$

კორიოლისის აჩქარება უდრის ნულს, რადგან $\vec{v}_r \parallel \vec{\omega}_e$.

(1) ტოლობა მიიღებს სახეს:

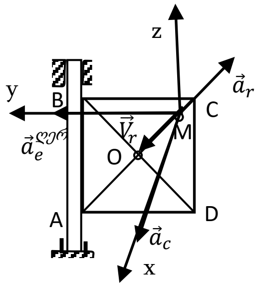
$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_e^{ღერ}.$$

რადგან $\vec{a}_r^{\tau}$ და $a_e^{ღერ}$ ურთიერთმართობული ვექტორებია, ამიტომ

$$a = \sqrt{(a_r^\tau)^2 + \left(a_e^{ღერ}\right)^2} = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}.$$

პასუხი: $a = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$მ/წმ² .

ამოცანა 23.29



ABCD კვადრატი, რომლის გვერდია 2a, ბრუნავს ერთი გვერდის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = \pi\sqrt{2}$. AC დიაგონალის გასწვრივ M წერტილი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას კანონით : $\xi = acos\frac{\pi}{2}t$ მ. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტურრი აჩქარება t=1 წმ და t=2 წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა

წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. წერტილის მოძრაობა კვადრატის დიაგონალის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა. ტრაექტორია არის წრფის ნაწილი. კვადრატის ბრუნვა ვერტიკალური ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. მისი ტრაექტორია არის წრეწირი. წერტილის აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^{ბრ} + \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_c \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდეები და მიმართულებები:

$a_r^\tau = \frac{d^2OM}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{a\pi^2}{4}cos\frac{\pi}{2}t,$ როცა $t = 1$ მაშინ $a_r^\tau = 0, t = 2$ მაშინ $a_r = \frac{a\pi^2}{4}.$

წარმტანი ღერძისკენული აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით:

$$a_e^{ღერ} = \omega^2 MK = \omega^2(\xi cos45° + a).$$

$$\text{როცა t=1, } a_e^{ღერ} = 2\pi^2 \cdot \left(a + \mathrm{acos}\,(\tfrac{\pi}{2}\cdot 1)\cdot cos45°\right) = 2\pi^2 a.$$

$$\text{როცა t=1, } a_e^{ღერ} = 2\pi^2 \cdot \left(a + \mathrm{acos}\,(\tfrac{\pi}{2}\cdot 2)\cdot cos45°\right) = 0{,}586\pi^2 a.$$

წარმტანი მოძრაობის ბრუნვითი აჩქარება ნულის ტოლია $a_e^{ბრ} = 0$, რადგან $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$.

კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r).$$

ვიპოვოთ ფარდობითი სიჩქარე

$v_r = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{a\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}t,$ როცა t=1მაშინ $v_r = -\frac{a\pi}{2}$; $t = 2 \ \rightarrow v_r = 0.$

შესაბამისად

$$a_c(1) = \pi^2 a; \;\; a_c(2) = 0.$$

$\vec{a}_c$ ვექტორი ნახაზის სიბრტყის მართობულია და მომართულია ჩვენსკენ.

დავუკავშიროთ M წერტილს xyz სისტემა და დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღერძებზე, გვექნება:

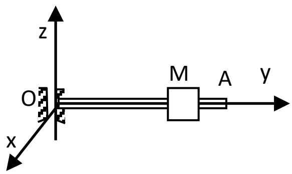
$$a_x = a_c, \to a_{1x} = \pi^2 a, a_{2x} = 0.$$

$$a_y = a_e^{ღერ} - a_r cos45°, \; \to a_{1y} = 2\pi^2 a, a_{2y} = 0{,}41\pi^2 a.$$

$$a_z = a_r cos45°, \to a_{1z} = 0, a_{2z} = 0{,}177\pi^2 a.$$

ამოცანა 23.30

OA ღერო ბრუნავს O წერტილზე გამავალი z ღერძის გარშემო 10 რად/წმ^2 კუთხური შენელებით. ღეროს გასწვრივ O წერტილიდანმისრიალებს M რგოლი. იპოვეთ რგოლის აბსოლუტური აჩქარება იმ მომენტში, როცა ის იმყოფება O წერტილიდან 0,6 მ მანძილზე და ღეროს გასწვრივ აქვს , შესაბამისად, 1,2მ/წმ და 0,9მ/წმ^2 სიჩქარე და აჩქარება. ამ მომენტისთვის ღეროს კუთხური სიჩქარე არის 5 რად/წმ.



ამოხსნა

ღერო ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა OA ღეროს გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა და მისი ტრაექტორია არის წრფე, ხოლოწარმტანი მოძრაობა არის ღეროს ბრუნვა ღერძის გარსემო და ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია OM. წერტილის აჩქარება რთული მოძრაობის დროს განისაზღვრება ფორმულით:

$$\overrightarrow{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდე დამიმართულებები:

ამოცანის პირობით ფარდობითი აჩქარება $a_r = 0{,}9$ მ/წმ^2 .მიმართულია OAწრფის გასწვრივ y კოორდინატის ზრდის მიმართულებით. წარმტანი აჩქარება იშლება ბრუნვით და ღერძისკენულ მდგენელებად;

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 OM = 1{,}5 \text{ მ/წმ}^2. \;\; a_e^{ბრ} = \varepsilon \cdot OM = 6 \text{ მ/წმ}^2.$$

მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე.

კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}2 = 12 \text{ მ/წმ}^2 .$$

კორიოლისის აჩქარების მიმართულება განისაზღვრება ვექტორული ნანრავლის განსაზღვრებიდან. $\vec{a}_c$ ვექტორი მართობულია $\vec{\omega}_e$ და $\vec{v}_r$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად ისე რომ $\vec{\omega}_e$ ვექტორის მობრუნება უმცირესი კუთხით $\vec{v}_r$ ვექტორთან სესათავსებლად ცანდეს საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით. ამ შემთხვევაში ის მიმართულია ნახაზიდან იქით.

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_{My} = a_r - a_e^{ღერ} = 0{,}9 - 15 = 14{,}1 \text{ მ/წმ}^2 .$$

$$a_{Mx} = a_e^{ბრ} - a_c = 6 - 12 = -6 \text{ მ/წმ}^2 .$$

$$a_{Mz} = 0.$$

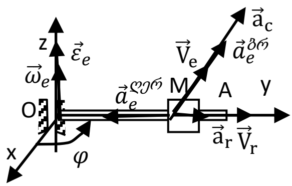
$$a = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 15{,}33 \text{ მ/წმ}^2 .$$

ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარების მიმართულება

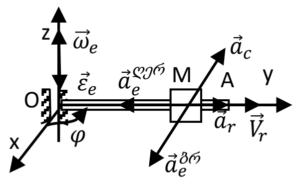
$$cos\gamma = \frac{a_y}{a} = 0{,}92 \ \rightarrow \gamma = 23° .$$

პასუხი: $a = 15{,}33$ მ/წმ² და MO მიმართულებასთან ადგენს 23° კუთხეს.

ამოცანა 23.31



M რგოლი მოძრაობს ჰორიზონ-ტალურ OA ღეროზე ისე,რომ $OM = 0{,}5t^2$ სმ.იმავდროულად ღერო ბრუნავს ვერტი-კალური ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi = t^2 + t$. იპოვეთ რგოლის აბსოლუტური სიჩქარის და აჩქარების რადიალური და ტრანსვერსალური მდგნელები t=2წმ მომენტისთვის.



ამოხსნა

რგოლი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი აბსოლუტური სიჩქარე უდრის

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi .$$

ფარდობითი სიჩქარე უდრის

$$v_r = \frac{dOM}{dt} = t, \text{ როცა } t = 2 \text{ მაშინ } v_r = 2\text{სმ/წმ=0,02მ/წმ}.$$

ფარდობითი აჩქარების ვექტორი OA მიმართულია წრფის გასწვრივ. ტრანსვერსალური სიჩქარეა:

$v_e = r \cdot \omega_e,\ \omega_e = \dot{\varphi} = 2t + 1\ \rightarrow როცა\ t = 2\ მაშინ\ \omega_e = 5, v_\varphi = v_e = 0{,}1$ მ/წმ .

აბსოლუტური აჩქარება არის რადიალური და ტრანსვერსალური მდგენელების ჯამი. გამოვთვალოთ აჩქარების მდგენელები და დავაგეგმილოთ y ღერძზე. მივიღებთ რადიალურ მდგენელს , ხოლო x ღერძზე დაგეგმილება მოგვცემს ტრანსვერსალურ მდგენელს.

რგოლის ფარდობითი აჩქარება უდრის:

$a_r = \frac{d^2OM}{dt^2} = 1$სმ/წმ². - მიმართულია y ღერძის გასწვრივ.

წარმტანი მოძრაობის აჩქარება შედგება ორი შესაკრებისაგან: ბრუნვითი და ღერძისკენული. თიტოეული მათგანი უდრის:

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 OM, როცა\ t = 2, მაშინ\ a_e^{ღერ} = 50 \text{ მ/წმ}^2 .$$

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 2\text{რად/წმ}^2 ,\ a_e^{ბრ} = \varepsilon_e \cdot OM = 4 \text{ მ/წმ}^2 .$$

კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega_e v_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r) = 20 \text{ მ/წმ}^2 .$$

ვექტორების მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე .

აჩქარების რადიალური მდგენელი უდრის

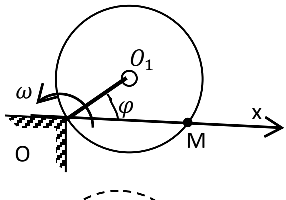
$$a_r = \mathrm{a_y} = \mathrm{a_r'} - a_e^{ღერ} = -0.49 \text{ მ/წმ}^2.$$

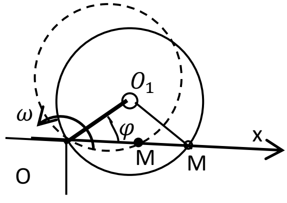
$$a_\varphi = \mathrm{a_x} = a_e^{ბრ} + a_c = 0{,}24 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $v_r = 0{,}02$ მ/წმ, $v_\varphi = 0{,}1$ მ/წმ , $a_r = -0.49$ მ/წმ². a_φ= 0,24 მ/წმ².

ამოცანა 23.32

r რადიუსიანი წრე ბრუნავს მასზე მდებარე O წერტილის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. მოძრაობის დროს წრეწირი გადაკვეთს ჰორიზონტალურ წრფეს - Ox ღერძს. იპოვეს წრეწირისა და წრფის გადაკვეთის წერტილის სიჩქარე და აჩქარება Ox ღერძის მიმართ და წრეწირის მიმართ მოძრაობაში. გამოსახეთ ეს სიდიდეები როგორც OM=x მანძილის ფუნქცია.





ამოხსნა

1) ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე და აჩქარება x წრფის მიმართ. OO_1M სამკუთხედიდან გვაქვს

$$OM = x = 2rcos\varphi = 2rcos\omega t \ \rightarrow cos\omega t = \frac{x}{2r}.$$

სიჩქარეს ვიპოვით გაწარმოების შედეგად

$$V_{Mx} = \frac{dx}{dt} = -2r\omega sin\omega t = -2r\omega\sqrt{1 - cos^2\omega t} =$$

$$= -2\omega r\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2r}\right)^2} = -\ \omega\sqrt{4r^2 - x^2} \text{ მ/წმ.}$$

კიდევ ერთხელ გავაწარმოოთ და მივიღებთ აჩქარებას

$$a_{Mx} = \frac{dV_{Mx}}{dt} = -2\omega^2 rcos\omega t = -\omega^2 x \text{ მ/წმ}^2.$$

2) ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე და აჩქარება წრეწირის მიმართ. რკალური კოორდინატი უდრის

$$S_M = \cup\, OM = r(180° - 2\varphi) = r(180° - 2\omega t).$$

სიჩქარის საპოვნელად გამოვთვალოთ რკალური კოორდინატის წარმოებული

$$V = \frac{dS_M}{dt} = -2r\omega \text{ მ/წმ.}$$

სიჩქარე მიმართულია წრეწირის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით.

აჩქარება გამოითვლება ტოლობით

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

სადაც მხები აჩქარება უდრის

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0.$$

ნორმალური აჩქარება უდრის

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{4r^2\omega^2}{r} = 4r\omega^2.$$

აბსოლუტური აჩქარება უდრის

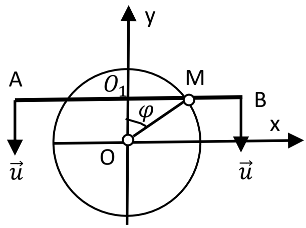
$$a = a_n = 4r\omega^2.$$

პასუხი: x ღერძის მიმართ წერტილი მოძრაობს $-\omega\sqrt{4r^2 - x^2}$ სიჩქარით და $-\omega^2 x$ აჩქარებით. წრეწირის მიმართ

მოძრაობს წრეწირის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით $2r\omega$ და აჩქარებით $4r\omega^2$.

ამოცანა 23.33

ჰორიზონტალური წრფე AB გადაადგილდება თავისთავის პარალელურად ვერტიკალის გასწვრივ მუდმივი სიჩქარით u და გადაკვეთს უძრავ წრეწირს , რომლის რადიუსია r. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილის სიჩქარე და აჩქარება წრფის მიმართ და წრეწირის მიმართ მოძრაობაში. ეს სიდიდეები გამოსახეთ როგორც φ კუთხის ფუნქცია.



ამოხსნა

1) AB წრფის მიმართ სიჩქარისა და აჩქარების საპოვნელად განვიხილოთ სამკუთხედი OO_1M და მივიღებთ:

$$OO_1 = y = ut = rcos\varphi;\ \ O_1M = x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - u^2t^2};$$

$$cos\varphi = \frac{OO_1}{OM} = \frac{ut}{r};\ \ \sin\varphi = \frac{x}{r}.$$

საძიებელი სიდიდეების საპოვნელად გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$V_{Mx} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{r^2 - u^2t^2}\right) = \frac{-2u^2t}{2\sqrt{r^2-u^2t^2}} = -\frac{ucos\varphi}{sin\varphi} \text{ მ/წმ.}$$

$$a_{Mx} = \frac{dV_{Mx}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{u^2t}{x}\right) = -\frac{u^2}{x} + \frac{u^2t}{x^2}x = -\frac{u^2}{x^2}(x - t\dot{x}) = \frac{u^2}{rsin^3\varphi} \text{ მ/წმ}^2 .$$

2) წრეწირის მიმართ სიჩქარისა და აჩქარების საპოვნელად ვიპოვოთ რკალი S, მობრუნების კუთხე φ და $\dot{\varphi}$.

$$S = r\varphi, \varphi = arcsin\frac{x}{r}.\ \ \dot{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot \frac{\dot{x}}{r} = \frac{-\dfrac{ucos}{sin\varphi}}{\sqrt{r^2 - r^2sin^2\varphi}} = -\frac{u}{rsin\varphi}.$$

ე.ი. რკალური კოორდინატი უდრის

$$S = rarcsin\frac{x}{r}.$$

სიჩქარის საპოვნელად გავაწარმოოთ ეს სიდიდე

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(rarcsin\frac{x}{r}\right) = \frac{r\dot{x}}{r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} = \frac{r\dot{x}}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

გავამარტივოთ ეს გამოსახულება და მივიღებთ :

$$V = -\frac{u}{sin\varphi} \text{ მ/წმ.}$$

აჩქარება იშლება ორ მდგენელად:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

მხები აჩქარება უდრის

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -u\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{sin\varphi}\right) = -\frac{ucos\varphi\cdot\dot{\varphi}}{sin^2\varphi} = -\frac{u^2cos\varphi}{rsin^3\varphi}$$ მ/წმ^2 .

ნორმალური აჩქარება უდრის

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{u^2}{rsin^2\varphi}$$მ/წმ^2.

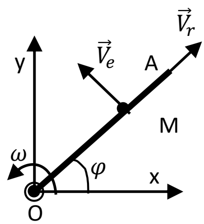
პასუხი: 1) AB წრფის მიმართ წერტილი მოძრაობს $-\frac{ucos\varphi}{sin\varphi}$ მ/წმ სიჩქარით და $\frac{u^2}{rsin^3\varphi}$ მ/წმ^2 .

2) წრეწირზე მოძრაობის დროს სიჩქარეა $-\frac{u}{sin\varphi}$ მ/წმ, მხები აჩქარებაა $-\frac{u^2cos\varphi}{rsin^3\varphi}$ მ/წმ^2 ხოლო ნორმალური აჩქარებაა $\frac{u^2}{rsin^2\varphi}$მ/წმ^2.

ამოცანა 23.34

OA ნახევარწრფე ბრუნავს ნახაზის სიბრტყეში O ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. ამ წრფის გასწვრივ მოძრაობს M წერტილი. იმ მომენტში, როცა ნახევარწრფე ემთხვეოდა x ღერძს, M წერტილი იმყოფებოდა კოორდინატთა სათავეში. იპოვეთ ამ წერტილის მოძრაობა ნახევარწრფის მიმართ, თუ ცნობილია, რომ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე V სიდიდით მუდმივია. იპოვეთ ასევე M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება და ტრაექტორია.

ამოხსნა



M წერტილის მოძრაობა ნახევარწრფეზე არის ფარდობითი მოძრაობა. ნახევარწრფის ბრუნვა O წერტილის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. აბსოლუტური სიჩქარე არის ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამი.

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r\ .$$

$$V_e = \omega\cdot OM = \omega r, V_r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{V^2 - V_e^2} = \sqrt{V^2-\omega^2r^2}.$$

განვაცალკეოთ ცვლადები და მოვახდინოთ ინტეგრება

$$\int\frac{dr}{\sqrt{V^2-\omega^2r^2}} = \int dt \ \rightarrow \frac{1}{\omega}arcsin\frac{\omega r}{V} = t \ \rightarrow sin\omega t = \frac{\omega r}{V} \ \rightarrow r = \frac{Vsin\omega t}{\omega}.$$

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Vsin\omega t}{\omega}\right) = Vcos\omega t.$$

ტრაექტორიის საპოვნელად ჩავწეროთ კოორდინატები x და y.

$$x = rcos\varphi = \frac{Vsin\omega tcos\omega t}{\omega} = \frac{Vsin2\omega t}{2\omega};$$

$$y = rsin\varphi = \frac{Vsin^2\omega t}{\omega} = \frac{V}{2\omega}(1 - cos2\omega t) .$$

აქედან ვპოულობთ

$$x^2 + \left(y - \frac{V}{2\omega}\right)^2 = \frac{V^2}{4\omega^2}.$$

აჩქარების საპოვნელად კიდევ ერთხელ გავაწარმოოთ კოორდინატები და მოვიღებთ:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{V \cdot 4\omega^2}{2\omega} sin2\omega t = -2V\omega sin2\omega t ,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{V \cdot 4\omega^2}{2\omega} cos2\omega t = -2V\omega cos2\omega t .$$

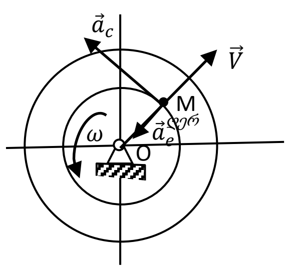
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2V\omega \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: წერტილი მოძრაობს OA სხივის გასწვრივ $V_r = Vcos\omega t$ სიჩქარით. აბსოლუტური ტრაექტორია არის წრეწირი რომლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში არის $r = \frac{Vsin\omega t}{\omega}$, ხოლო დეკარტეს კოორდინატებში $x^2 + \left(y - \frac{V}{2\omega}\right)^2 = \frac{V^2}{4\omega^2}$. აბსოლუტური აჩქარებაა $a = 2V\omega$ მ/წმ^2.

ამოცანა 23.35

დისკო ბრუნავს მის ცენტრზე გამავალი და მისივე სიბრტყის მართობილი ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. დისკოს რადიუსის გასწვრივ მოძრაობს წერტილი M მუდმივი V სიჩქარით. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური აჩქარება იმ მომენტში, როცა ის დისკოს ცენტრიდან დაშორებულია r მანძილით.

ამოხსნა



წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა რადიუსის გასწვრივ V სიჩქარით არის ფარდობითი მოძრაობა. ამ მოძრაობის ტრაექტორია არის წრფე. დისკოს ბრუნვა O წერტილის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია r. აჩქარება რთული მოძრაობის დროს გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდეები და მიმართულებები:

ფარდობითი მოძრაობის აჩქარება უდრის $\vec{a}_r = 0$, რადგან V=const. წარმტანი მოძრაობის აჩქარება უდრის

$$a_e^{\text{ღერ}} = \omega^2 r,\ a_e^{\text{ბრ}} = \varepsilon r = 0\ \text{რადგან}\,\omega = const, \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega V sin(\vec{\omega}\hat{,}\vec{V}) = 2\omega V.$$

კორიოლისის აჩქარების ვექტორი მიმართულია $\vec{\omega}$ და $\vec{V}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად იმ მხარეს საიდანაც $\vec{\omega}$ ვექტორის მობრუნება უმცირესი კუთხით $\vec{V}$ ვექტორის მიმართულებით ჩანს საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით (იხ. ნახ.). აცქარების გამოსათვლელი ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^{\text{ღერ}} + \vec{a}_c.$$

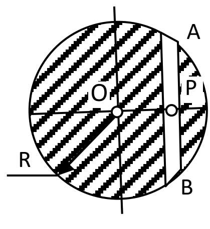
რადგან $\vec{a}_c$ ვექტორი $\vec{a}_e^{\text{ღერ}}$ ვექტორის მართობულია, ამიტომ

$$a = \sqrt{\left(a_e^{\text{ღერ}}\right)^2 + (a_c)^2} = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (2\omega V.)^2} = \omega\sqrt{\omega^2 r^2 + 4V^2}.$$

პასუხი: $a = \omega\sqrt{\omega^2 r^2 + 4V^2}$.

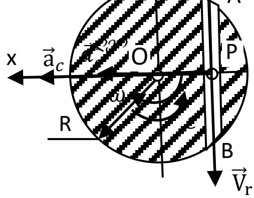
ამოცანა23.36

დისკო ბრუნავს თავისი სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო. დისკოს AB ქორდის გასწვრივ მოძრაობს P ბურთულა 1,2მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ ბურთულას აბსოლუტური აჩქარება იმ მომენტში, როცა ის ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია უმოკლესი მანძილით - 30 სმ. ამ მომენტისთვის დისკოს კუთხური სიჩქარეა 3რად/წმ, ხოლო კუთხური აჩქარებაა 8 რად/წმ.



ამოხსნა

P ბურთულა ასრულებს რთულ მოძრაობას: მისი მოძრაობა ქორდის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო დისკოს ბრუნვა ღერძის გარშემო - წარმტანი მოძრაობა. აბსოლუტური აჩქარება უდრის



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდე და მიმართულება:

$a_r = 0$, რადგან $\vec{V_r} = const$. რადგან წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო, ამიტომ ის ისლება ორ მდგენელად: ღერძისკენული და ბრუნვითი.

$a_e^{ღერ} = \omega^2 OP = 9 \cdot 0{,}3 = 2{,}7$ მ/წმ², $a_e^{ბრ} = \varepsilon \cdot OP = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$ მ/წმ².

კორიოლისის აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$a_c = 2\omega V sin\alpha = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}2 \cdot sin90° = 7{,}2 \text{ მ/წმ}^2.$$

კორიოლისის აჩქარების მიმართულების საპოვნლად ვისარგებლოთ ჟუკოვსკის წესით (მიმარტულება ნაჩვენებია ნახაზზე) .

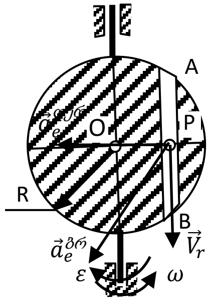
დავუკავშიროთ Pწერტილს xy სისტემა და (1) ტოლობა დავაგეგმილოთ ღერძებზე, მივიღებთ:

$$a_x = a_e^{ღერ} + a_c = 9{,}9 \text{ მ/წმ}^2. \;\; a_y = a_e^{ბრ} = 2{,}4 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10{,}18 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a = 0{,}18$ მ/წმ².

ამოცანა 23.37



ამოვხსნათ წინა ამოცანა იმ პირობით, რომ დისკო ბრუნავს ქორდის პარალელური დიამეტრის გარშემო.

ამოხსნა

ვურთულა ასრულებს რთულ მოძრაობას: მოძრაობა ქორდას გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო დისკოს ბრუნვა დიამეტრის გარშემო - წარმტანი მოძრაობა. აჩქარება უდრის ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების გეომეტრიულ ჯამს

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდე და მიმართულება: $a_r = 0$, რადგან $\vec{V_r} = const$.

რადგან წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო, ამიტომ ის იშლება ორ მდგენელად: ღერძისკენული და ბრუნვითი.

$a_e^{ღერ} = \omega^2 OP = 9 \cdot 0{,}3 = 2{,}7$ მ/წმ^2 , $a_e^{ბრ} = \varepsilon \cdot OP = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$ მ/წმ^2

კორიოლოსის აჩქარება ნულის ტოლია, რადგან წარმტანი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე და ფარდობითი სიჩქარე პარალელური ვექტორებია. ბურთულას აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ორი ურთიერთმართობი ვექტორის ჯამს. ამიტომ აბსოლუტური აჩქარება უდრის

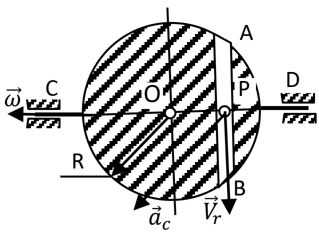
$$a = \sqrt{\left(a_e^{ღერ}\right)^2 + \left(a_e^{ბრ}\right)^2} = \sqrt{7{,}29 + 5{,}76} = 3{,}612 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a = 3{,}612$ მ/წმ^2 .

ამოცანა 23.38

ამოხსენით 23.36 ამოცანა იმ პირობით, რომ დისკოს ბრუნვის ღერძი AB ქორდის მართობულია.

ამოხსნა



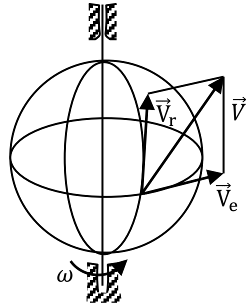
P წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. ბურთულას მოძრაობა AB ქორდის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა, რომლის ტრაექტორია არის AB წრფის მონაკვეთი. დისკოს ბრუნვა CD ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. რადგან ბურთულა ძევს წარმტანი ბრუნვის ღერძზე, ამიტომ წარმტან მოძრაობაში ბურთულა უძრავია.

რადგან ფარდობითი მოძრაობა არის წრფივი და თანაბარი,ამიტომ ფარდობითი აჩქარება ნულის ტოლია. შედეგად გვაქვს,რომ აბსოლუტური აჩქარება უდრის კორიოლისის აჩქარება

$$a = a_c = 2\omega_e V_r sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2\omega_e V_r sin 90° = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}2 = 7{,}2 \text{მ/წმ}^2$$

პასუხი: $a = 7{,}2$მ/წმ^2 .

ამოცანა 23.39



გემი, რომელიც იმყოფება ეკვატორზე, მიდის ჩრდილო-აღმოსავლეთის კურსით. გემის სიჩქარეა 20 კვანძი. ვიპოვოთ გემის აბსოლუტური სიჩქარე და კორიოლისის აჩქარება დედამიწის ბრუნვის გათვალისწინებით. დედამიწის რადიუსი R=6,378· 10^6 მ .

(კურსის დასახელება მიუთითებს თუ საით მიდის გემი. კვანძი=1საზღვაო მილი/სთ=1852მ/სთ=0,5144მ/წმ).

ამოხსნა

გემი ჩავთვალოთ წერტილად . გემის მოძრაობა ჩრდილო-აღმოსავლეთით არის ფარდობითი მოძრაობა. ტრაექტორია არის წრეწირი და სიჩქარე მიმართულია ამ წრეწირის მხებად. დედამიწის ბრუნვა საკუთარი ღერძის გარსემო არის წარმტანი მოძრაობა და მისი ტრაექტორიაც არის წრეწირი - სიჩქარე მიმართულია ამ წრეწირის გასწვრივ. აბსოლუტური სიჩქარე უდრის წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეების გეომეტრიულ ჯამს.

$$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{V_e}\ .$$

სიჩქარეების მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.კუთხე მათ შორის არის 45°. წარმტანი სიჩქრე უდრის

$$V_e = \omega \cdot R,\ \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0{,}0000726 \text{ რად/წმ.}$$

$$V_e = 0{,}0000726 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6 = 463 \text{ მ/წმ.}$$

ფარდობითი სიჩქარე უდრის

$$V_r = 20 \cdot 0{,}5144 = 10{,}288 \text{ მ/წმ.}$$

კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვიპოვოთ აბსოლუტური სიჩქარე

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 - 2V_eV_r cos45°} = 470{,}4 \text{ მ/წმ.}$$

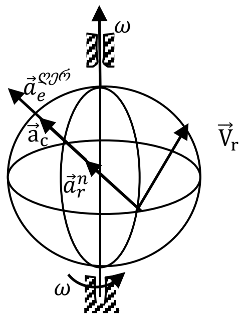
კორიოლისის აჩქარების მოდული განისაზღვრება ტოლობით:

$$a_c = 2\omega V sin(\vec{\omega}\,\hat{,}\vec{V}) = 2 \cdot 0{,}0000726 \cdot 10{,}288 \cdot 0{,}707 = 1{,}06 \cdot 10^{-3} \text{ მ/წმ.}$$

პასუხი: $V = 470{,}4$ მ/წმ ; $a_c = 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ მ/წმ.

ამოცანა 23.40

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ გემის აბსოლუტური აჩქარება, თუ მისი სიჩქარე მუდმივია.



ამოხსნა

აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების სიდიდეები და მიმართულებები:

ფარდობითი აჩქარება:

$a^\tau{}_r = 0,$ რადგან $V_r = const.$ $a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}$ მ/წმ^2 .

წარმტანი აჩქარება იშლება ორ შესაკრებად

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + a_e^{ბრ} .$$

$a_e^{ღერ} = \omega^2 R = 0{,}033617$ მ/წმ^2 , $a_e^{ბრ} = \varepsilon R = 0,$ (რადგან $\omega = const$).

კორიოლისის აჩქარება გამოთვლილია წინა ამოცანაში. მომართულება ნაჩვენებია ნახაზზე. (1) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_c \ .$$

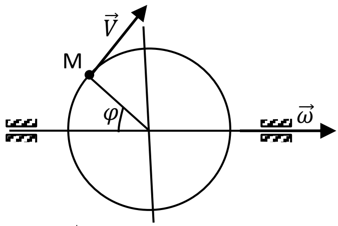
რადგან სამივე ვექტორი ერთი წრფის გასწვრივაა, ამიტომ

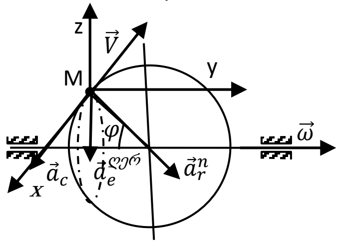
$$a = a_r^n + a_e^{ღერ} + a_c = 337{,}385 \cdot 10^{-4} \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a = 337{,}385 \cdot 10^{-4}$ მ/წმ^2.

ამოცანა 23.41

R რადიუსიანი დისკო ბრუნავს ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω. დისკოს ფერსოზე მუდმივი სიდიდის V სიჩქარით მოძრაობს M წერტილი. იპოვეთ ამ წერტილის აბსოლუტური აჩქარება, როგორც რადიუს-ვექტორის მიერ ბრუნვის ღერძთან შედგენილი φ კუთხის ფუნქცია.





ამოხსნა

M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა ფერსოზე არის ფარდობითი მოძრაობა. მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია R. დისკოს ბრუნვა ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია ასევე არის წრეწირი, რომლის რადიუსია $Rsin\varphi$. აბსოლუტური აჩქარეა უდრის ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების ჯამს.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები:

რადგან ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, ამიტომ

$$\boldsymbol{\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau}.$$

ფარდობით მოძრაობაში ნორმალური აჩქარება უდრის

$$a_r^n = \frac{V^2}{R}.$$ - მიმართულია რადიუსის გასწვრივ.

ფარდობითი მოძრაობის მხები აჩქარება $a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 0$.

წარმტან მოძრაობაში აჩქარება იშლება ორ მდგენელად: ბრუნვითი და ღერძისკენული.

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ბრ} + \vec{a}_e^{ღერ}.$$

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e MO_1 = 0,\ a_e^{ღერ} = \omega^2 MO_1 = \omega^2 Rsin\varphi.$$

განვსაზღვროთ კორიოლისის აჩქარების სიდიდე

$$a_c = 2\omega_e V_r sin\left(\vec{\omega}_e\hat{,}\vec{V}_r\right) = 2\omega V cos\varphi\ .$$

ვექტორების მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე.

აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად დავუკავშიროთ საკოორდინატო ღერძები xyz მოძრავ წერტილს და დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ამ ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_x = a_c = 2\omega V cos\varphi\ .$$

$$a_y = a_r^n cos\varphi = \frac{V^2}{R}cos\varphi\ ,$$

$$a_z = -a_r^n sin\varphi - a_e^{ღერ} = -\left(\frac{V^2}{R}sin\varphi + \omega^2 Rsin\varphi\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(2\omega V cos\varphi)^2 + \left(\frac{V^2}{R}cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}sin\varphi + \omega^2 Rsin\varphi\right)^2}\ .$$

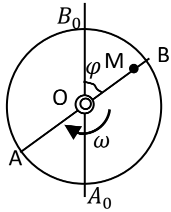
თუ გავხსნით ფრჩხილებს და მოვახდენთ შესაბამის გარდაქმნებს, საბოლოოდ გვექნება

$$a = \sqrt{2V^2\omega^2(1 + cos^2\varphi) + \frac{V^4}{R^2} + \omega^4 R^2 sin^2\varphi}\ .$$

პასუხი: $a = \sqrt{2V^2\omega^2(1 + cos^2\varphi) + \frac{V^4}{R^2} + \omega^4 R^2 sin^2\varphi}.$

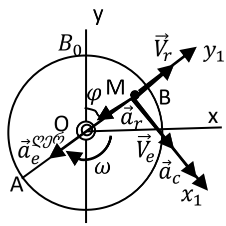
ამოცანა 23.42

R რადდიუსიანი დისკო ბრუნავს მის ცენტრზე, დისკოს სიბრტყის მართობულად აგმავალი ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. დისკოს დიამეტრის გასწვრივ მოძრაობს M წერტილი ისე, რომ მანძილი დისკოს ცენტრამდე იცვლება კანონით: $OM = Rsin\omega t$. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური ტრაექტორია, აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება.



ამოხსნა

M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. დისკოს რადიუსის გასწვრივ მოძრაობა არის ფარდობითი მოძრაობა. მისი ტრაექტორია არის წრფე. სიჩქარე V_r მიმართულია OM წრფის გასწვრივ.



$$V_r = \frac{dOM}{dt} = R\omega cos\omega t\ .$$

დისკოს ბრუნვა ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. მისი ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით OM. წარმტანი სიჩქარე უდრის

$$V_e = \omega \cdot OM = \omega R sin\omega t\ ,$$

მიმართულია OM წრფის მართობულად ბრუნვის მიმართულებით. აბსოლუტური სიჩქარე არის წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამისა. რადგან ეს ორი ვექტორი ურთიერთმართობილია, ამიტომ აბოლუტური სიჩქარე ტოლი იქნება

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{(R\omega cos\omega t)^2 + (\omega R sin\omega t)^2} = \omega R.$$

წერტილის ტრაექტორიის საპოვნელად ვიპოვოთ მისი კოორდინატები:

$$x_M = OMsin\omega t = Rsin\omega t \cdot sin\omega t = Rsin^2\omega t = \frac{R}{2}(1 - cos2\omega t) \qquad (1)$$

$$y_M = OMcos\omega t = Rsin\omega t cos\omega t = \frac{1}{2}Rsin2\omega t\ . \qquad (2)$$

ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი და მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას

$$\left(x_M - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

აბსოლუტურო აჩქარება უდრის ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების ჯამს.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (3)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = -R\omega^2 sin\omega t,$$

მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ.

რადგან წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვითი მოძრაობა, ამიტომ შესაბამისი აჩქარება იშლება ორ მდგენელად:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ბრ} + a_e^{ღერ}.$$

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 \cdot OM = \omega^2 Rsin\omega t,\ a_e^{ბრ} = \epsilon_e \cdot OM = 0\ (\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0).$$

$\vec{a}_e^{ღერ}$ ვექტორი მიმართულია OM წრფის გასწვრივ.

გამოვთვალოთ კორიოლისის აჩქარების მოდული

$$a_c = 2\omega_e V_r sin(\vec{\omega}_e, \hat{\vec{V}_r}) = 2\omega \cdot R\omega cos\omega t \cdot sin 90° = 2\omega^2 R cos\omega t.$$

მიმართულებას განვსაზღვრავთ ჟუკოვსკის წესით. ამისათვის ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი უნდა მოვაბრუნოთ წარმტანი ბრუნვის ღერძის გარშემო 90° კუთხით წარმტანი ბრუნვის მიმართულებით (იხ.ნახ.). აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად დავაგეგმილოთ (3) ტოლობა ღერძებზე და გვექნება:

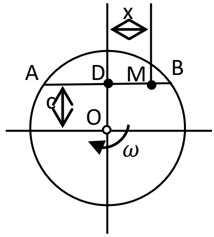
$$a_{x1} = a_c = 2\omega^2 R cos\omega t,$$

$$a_{y1} = -a_r - a_e^{ღერ} = -2\omega^2 R sin\omega t.$$

$$a = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = 2\omega^2 R.$$

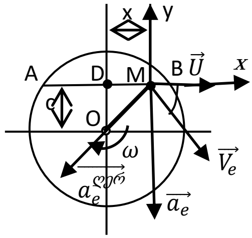
პასუხი: თუ სათავედ ავიღებთ M წერტილს და y ღერძს მივმართავთ დიამეტრის საწყისი მდებარეობის გასწვრივ, მაშინ ტრაექტორიის გამტოლება იქნება $\left(x_M - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$. აბსოლუტური სიჩქარე უდრის $V = \omega R$. აბსოლუტური აჩქარება უდრის $a = 2\omega^2 R$.

ამოცანა 23.43



დისკო ბრუნავს მის ცენტრზე, მისივე სიბრტყის მართობულად გამავალი ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. დისკოს ქორდაზე, მისი შუა D წერტილიდან მოძრაობს M წერტილი მუდმივი U სიჩქარით. ქორდა დისკოს ცენტრიდან დაშორებულია c მანძილით . იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება, როგორც DM=x მანძილის ფუნქცია.

ამოხსნა



M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა AB ქორდის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა ფარდობითი სიჩქარით $V_r = U$. დისკოს ბრუნვა ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით OM. წარმტანი სიჩქარე მიმართულია OM წრფის მართობულად წარმტანი ბრუნვის თანხვედრილი მიმართულებით.

$$V_e = \omega \cdot OM = \omega\sqrt{x^2 + c^2}.$$

აბსოლუტური სიჩქარე არის ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამი. რადგან ეს ვექტორები ერთ სიბრტყეში არიან და ადგენენ φ კუთხეს, ამიტომ აბსოლუტური სიჩქარის მოდული უდრის

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 - 2V_rV_e cos(180° - \varphi)} = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e cos\varphi},$$

თუ ჩავსვავთ შსაბამის მნიშვნელობებს და მოვახდენთ გარდაქმნებს საბოლოოდ მივიღებთ

$$V = \sqrt{\omega^2 x^2 + (U + \omega c)^2}$$

აბსოლუტურო აჩქარება უდრის ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების ჯამს.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში ეს ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ

$$\vec{a} = \vec{a}_r + a_e^{ბრ} + a_e^{ღერ} + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dU}{dt} = 0.$$

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e OM = 0 \ (\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0),$$

$a_e^{ღერ} = \omega^2 OM = \omega^2\sqrt{x^2 + c^2}$. მიართულია OM რადიუსის გასწვრივ.

კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega_e V_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{V}_r) = 2\omega U.$$

განვსაზღვროთ კორიოლისისს აჩქარების მიმართულება. ამისათვის ფარდოვითი სიჩქარის ვექტორი $\vec{U}$ უნდა დავაგეგმილოთ წარმტანი ბრუნვის ღერძის მართობულ სიბრტყეში და მიღებული გეგმილი შემოვაბრუნოთ წარმტანი ბრუნვის მიმართულებით 90° კუთხით. ამრიგად, კორიოლისის აჩქარების ვექტორი მიმართულია $\vec{U}$ ვექტორის მართობულად ქვევით. რადგან ყველა ვექტორი ძევს ერთ სიბრტყეში, ამიტომ საკმარისია ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარების გეგმილები x და y ღერძებზე და შემდეგ გამოვთვალოთ მისი სიდიდე.

$$a_x = -a_e^{ღერ} sin\varphi = -\omega^2\sqrt{x^2 + c^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} = -\omega^2 x.$$

$$a_y = -a_e^{ღერ} cos\varphi - a_c = -\omega^2\sqrt{x^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}} - 2\omega U = -(\omega^2 c + 2\omega U).$$

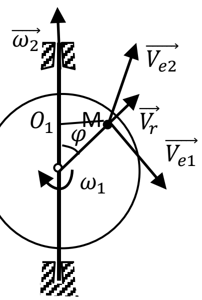
აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + ((\omega^2 c + 2\omega U))^2} = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + (\omega c + 2U)^2}.$$

პასუხი: $V = \sqrt{\omega^2 x^2 + (U + \omega c)^2}; a = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + (\omega c + 2U)^2}$.

ამოცანა 23.44

დისკოს მოძრავ რადიუსზე, ცენტრიდან ფერსოსკენ, მოძრაობს M წერტილი მუდმივი V_r სიჩქარით. მოძრავი რადიუსი ბრუნავს დისკოს სიბრტყეში მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_1. დისკოს სიბრტყე ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_2. იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე თუ, როცა t=0, მაშინ M წერტილი იმყოფება დისკოს ცენტრში, ხოლო რადიუსი ემთხვევა ბრუნვის ღერძის მიმართულებას.



ამოხსნა

M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა დისკოს რადიუსის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა. მოძრაობის ტრაექტორია არის OM წრფე. სიჩქარე მიმართულია ამ წრფის გასწვრივ. $\vec{V}_r$ - ის მიმართულება მოცემულია ამოცანის პირობით. დისკოს ბრუნვა ნახაზის სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო არის პირველი წარმტანი მოძრაობა (ტრაექტორია არის OM რადიუსიანი წრეწირი და სიჩქარე მიმართყლია ამ რადიუსის მართობულად). დისკოს ბრუნვა ვერტიკალური ღერძის გარშემო არის მეორე წარმტანი მოძრაობა (ტრაექტორია არის O_1M რადიუსიამი წრეწირი და სიჩქარე მიმართულია ამ წრეწირის მხებად წარმტანიბრუნვის მიმართულებით) ამრიგად, აბსოლუტური სიჩქარე უდრის ფარდობითი და ორი წარმტანი სიჩქარის გეომეტრიულ ჯამს

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_{e1} + \vec{V}_{e2}.$$

ვიპოვოთ წარმტანი სიჩქარეები:

$$V_{e1} = \omega_1 R_1 = \omega_1 OM = \omega_1 V_r t,$$
$$V_{e2} = \omega_2 O_1 M = \omega_2 OM sin\varphi_1 = \omega_2 V_r t sin\omega_1 t.$$

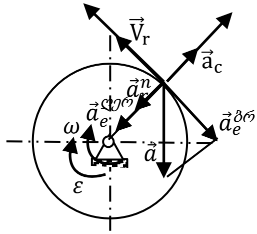
სიჩქარის სამივე მდგენელი ურთიერთმართობი ვექტორებია ამიტომ აბსოლუტური სიჩქარე უდრის

$$V = \sqrt{V_r^2 + (\omega_1 V_r t)^2 + (\omega_2 V_r t sin\omega_1 t)^2} = V_r\sqrt{1 + t^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 sin^2\omega_1 t)}$$

პასუხი: $V = V_r\sqrt{1 + t^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 sin^2\omega_1 t)}$.

ამოცანა 23.45

4 მ დიამეტრის დისკოს ფერსოზე მიძრაობს წერტილი 2მ/წმ სიჩქარით. დისკო ბრუნავს საპირისპირო მიმართულებით და მოცემულ მომენტში აქვს 2 რად/წმ კუთხური სიჩქარე და 4 რად/წმ² კუთხური აჩქარება. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური აჩქარება.



ამოხსნა

წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: მოძრაობა დისკოს ფერსოზე არის ფარდობითი მოძრაობა (მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით R=2 მ) . დისკოს ბრუნვა O ღერძის გარშემო არის

წარმტანი მოძრაობა (მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით R=2 მ). სიჩქარე მიმართულია წრეწირის მხების გასწვრივ. აბსოლუტური აჩქარება განისაზღვრება ტოლობით

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები. ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, ამიტომ ფარდობითი აჩქრება უდრის

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau.$$

ფარდობითი ნორმალური აჩქარების მოდული უდრის

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{4}{2} = 2 \text{ მ/წმ}^2 ,$$

მიმართულია დისკოს რადიუსის გასწვრივ O წერტილისკენ. მხები აჩქარების მოდული უდრის

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 0.$$

რადგან წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვითი მოძრაობა, ამიტომ წარმტანი აჩქარება უდრის

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{ბრ}} + a_e^{\text{ღერ}}.$$

სადაც

$$a_e^{\text{ბრ}} = \varepsilon R = 4 \cdot 2 = 8 \text{ მ/წმ}^2. \ a_e^{\text{ღერ}} = \omega^2 R = 4 \cdot 2 = 8 \text{ მ/წმ}^2.$$

მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე. კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega_e V_r sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{V}_r) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \text{ მ/წმ}^2 .$$

კორიოლისის აჩქარება განვსაზღვროთ ჟუკოვსკის წესით (მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე). აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე:

$$a_x = -a_r^n - a_e^{\text{ღერ}} + a_c = -2 \text{ მ/წმ}^2.$$

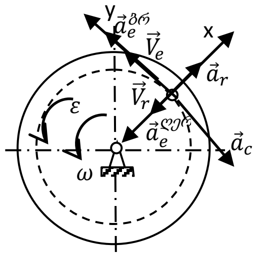
$$a_y = -a_e^{\text{ბრ}} = -8 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 8{,}246 \text{ მ/წმ}^2 .$$

$$tg\alpha = \frac{a_e^{\text{ბრ}}}{a_e^{\text{ღერ}}} = 4 \ \rightarrow \alpha = 76° .$$

პასუხი: $a = 8{,}246$ მ/წმ² -მიმართულია რადიუსისადმი 76° კუთხით.

ამოცანა 23.46



დისკო ბრუნავს მისი სიბრტყის მართობულად მისსავე ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო კანონით $\varphi = \frac{2}{3}t^3$. დისკოს რადიუსის გასწვრივ მოძრაობას იწყებს წერტილი კანონით $s = 4t^2 - 10t + 8$. s მანძილი აითვლება დისკოს ცენტრიდან. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება დროის t=1 წმ მომენტისთვის.

ამოხსნა

წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა რადიუსის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა (ტრაექტორია არის OM წრფე), დისკოს ბრუნვა ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა (ტრაექტორია არის OM რადიუსიანი წრეწირი). აბსოლუტური სიჩქარე განისაზღვრება ტოლობით

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e \ .$$

ფარდობითი სიჩქარე უდრის

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 8t - 10, \text{როცა } t = 1 \text{ მაშინ } \mathrm{V_r} = -2 \text{ მ/წმ.}$$

ნიშანი „-„ აჩვენებს, რომ სიჩქარე მიმართულია ცენტრისკენ.

წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვითი მოძრაობა. ამიტომ სიჩქარე უდრის

$$V_e = \omega R, \ \omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t^2, \ \omega(1) = 2 \text{ რად/წმ.}$$

$$\text{R=s(1)=2 სმ, } V_e = 2 \cdot 2 = 4 \text{ სმ/წმ.}$$

რადგან $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$, ამიტომ

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{4 + 16} = 4{,}47 \text{ მ/წმ.}$$

აბსოლუტური აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \ . \qquad (2)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები. ფარდობითი აჩქარება უდრის

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = 8 \text{ სმ/წმ}^2 \ .$$

$\vec{a}_r$ ვექტორი მიმართულია s კოორდინატის ზრდის მიმართულებით.

წარმტანი აჩქარება ბრუნვითი მოძრაობის დროს განისაზღვრება ტოლობით

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ბრ} + a_e^{ღერ} \ .$$

სადაც

$a_e^{ღერ} = \omega^2 R = 4 \cdot 2 = 8$ სმ/წმ², $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$=4t, როცა t=1 მაშინ $\varepsilon = 4$, $a_e^{ბრ} = \varepsilon R = 8$ სმ/წმ² .

$\vec{a}_e^{ბრ}$ და $\vec{a}_e^{ღერ}$ ვექტორების მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე.

კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega V_r sin 90° = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \text{ სმ/წმ}^2 \ .$$

კორიოლისის აჩქარების ვექტორის მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.

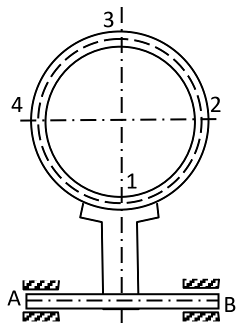
აჩქარების ყველა მდგენელი მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში.

დავაგეგმილოთ (2) ტოლობა ღერძებზე და მივიღებთ:

$$a_x = a_r - a_e^{ღერ} = 0, \ a_y = a_e^{ბრ} - a_c = 0 \ \rightarrow \ \mathrm{a} = 0.$$

პასუხი: $V = 4{,}47$ მ/წმ; $\mathrm{a} = 0$.

ამოცანა 23.47



ღრუ რგოლი, რომლის რადიუსია r, ხისტად არის შეერთებული AB ლილვთან, რომელიც რგოლის სიბრტყეშია. რგოლი შევსებულია სითხით, რომელიც მოძრაობს მასში მუდმივი ფარდობითი სიჩქარით U. AB ლილვი ბრუნავს საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით, თუ ბრუნვას შევხედავთ A-დან B - კენ. ლილვის კუთხური სიჩქარეა ω . იპოვეთ წყლის იმ ნაწილაკების აბსოლუტური აჩქარება, რომლებიც 1,2,3 და 4 წერტილებშია.

ამოხსნა

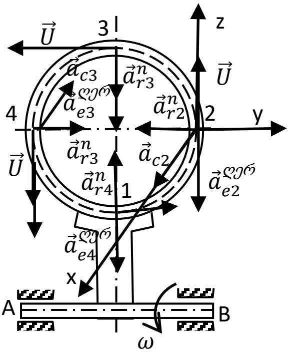
სითხის ნაწილაკები ასრულებენ რთულ მოძრაობას: ნაწილაკების მოძრაობა რგოლში არის ფარდობითი მოძრაობა (ტრაექტორია არის წრეწირი). რგოლის ბრუნვა AB ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით არის წარმტანი მოძრაობა (ტრაექტორია არის წრეწირი) . აჩქარება რთული მოძრაობის დროს განისაზღვრება ფორმულით

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \ .$$

ვიპოვოთ აჩქარების მდგენელები. რადგან ფარდობითი მოძრაობა წრეწირზე მოძრაობაა, ამიტომ

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau \ ,$$

სადაც $a_r^n = \frac{U^2}{r}$ -მიმართულია რადიუსის გასწვრივ O ცენტრისკენ; $a_r^\tau = \frac{dU}{dt} = 0$. რადგან წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვითი მოძრაობა, ამიტომ იშ წარმოდგება ორი შესაკრების სახით:



$$\vec{a}_e = a_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}.$$

სადაც

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e R = 0 \ \left(\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0\right), a_e^{ღერ} = \omega_e^2 R.$$

დავითვალოთ $a_e^{ბრ}$ ნაწილაკის ოთხი მდებარეობისათვის:

$$a_{e1}^{ღერ} = \omega^2 r,\ a_{e2}^{ღერ} = \omega^2 \cdot 2r = 2r\omega^2, a_{e3}^{ღერ} = 3\omega^2 r, a_{e4}^{ღერ} = 2r\omega^2.$$

კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega_e V_r sin(\omega \,\vec{}e\ ,\hat{}\vec{U})\ .$$

$\vec{\omega}_e$ ვექტორი მიმართულია AB წრფის გასწვრივ. პირველი და მესამე შემთხვევაში ეს ვექტორი არის ფარდობითი სიჩქარის პარალელური, ამიტომ , ამ შემთხვევაში $a_{c1} = a_{c3} = 0$. მეორე და მეოთხე შემთხვევაში გვაქვს:

$$a_{c2} = 2\omega U sin 90° = 2\omega U,\ a_{c4} = 2\omega U sin 90° = 2\omega U.$$

კორიოლისის აჩქარების მიმართულება განისაზღვრება ჟუკოვსკის წესით. $\vec{a}_{c2}$ ვექტორი არის ნახაზის სიბრტყის მართობულად ჩვენგან იქით, ხოლო $\vec{a}_{c4}$ - მიმართულია ნახაზის სიბრტყის მართობულად ნახაზიდან ჩვენსკენ.

ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარების გეგმილები ღერძებზე ოთხივე შემთხვევაში:

1) $a_{x1} = 0;\ a_{y1} = 0;\ a_{z1} = a_{r1}^n - a_{c1}^{ღერ} = \frac{U^2}{r} - \omega^2 r;\ a_1 = \frac{U^2}{r} - \omega^2 r.$

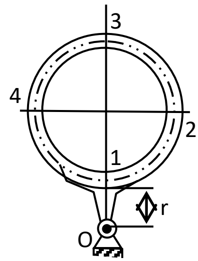
2) $a_{x2} = a_{c2} = 2\omega U;\ a_{y2}$=-$a_r^n = -\frac{U^2}{r}$; $a_{z2} = -a_{e2}^{ღერ} = -2r\omega^2;\ a_2 = \sqrt{a_{x2}^2 + a_{y2}^2 + a_{z2}^2} = \sqrt{4\omega^2 U^2 + \frac{U^4}{r^2} + 4\omega^2 r^2}.$

3) $a_{x3} = 0;\ a_{y3} = 0;\ a_{z3} = -a_{r3}^n - a_{e3}^{ღერ} = -\left(\frac{U^2}{r} + 3\omega^2 r\right);\ a_3 = \frac{U^2}{r} + 3\omega^2 r.$

4) $a_{x4} = -a_{c4} = -2\omega U;\ a_{y4} = -a_{r4}^n = \frac{U^2}{r};\ a_{z4} = -a_{e4}^{ღერ} = -2r\omega^2;\ a_4 = \sqrt{4\omega^2 U^2 + \frac{U^4}{r^2} + 4\omega^2 r^2}.$

პასუხი: $a_1=\frac{U^2}{r}-\omega^2 r;\ a_2=a_4=\sqrt{4\omega^2U^2+\frac{U^4}{r^2}+4\omega^2r^2};\ \ a_3=\frac{U^2}{r}+3\omega^2 r.$

ამოცანა 23.48



წინა ამოცანაში შევცვალოთ ის, რომ რგოლის სიბრტყე მართობულია AB ღერძის. იპოვეთ იგივე სიდიდეები შემდეგ ორ შემთხვევაში:

1) წარმტანი და ფარდობითი მოძრაობა ერთი მიმართულებითაა.

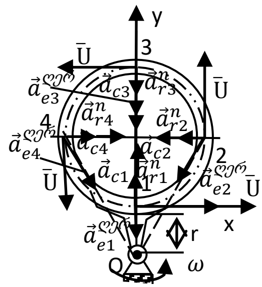
2) მოძრაობის მდგენელები საპირისპირო მიმართულებისაა.

ამოხსნა

ნაწილაკი ასრილებს რთულ მოძრაობას: ნაწილაკის მოძრაობა ღრუ რგოლში არის ფარდობითი მოძრაობა. მისი ტრაექტორია არის წრეწირი რადიუსით r , ხოლო წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო. ამ შემთხვევაშიც ტრაექტორია არის წრეწირი.

აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c\,. \qquad (1)$$



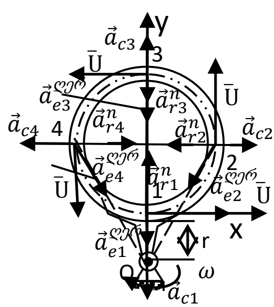
რადგან ფარდობითი მოძრაობა არის წრეწირზე მოძრაობა, ამიტომ მისი აჩქარება წარმოადგენს ორი შესაკრების გეომეტრიულ ჯამს.

$$\vec{a}_r=\vec{a}_r^n+\vec{a}_r^\tau\,,$$

სადაც

$$a_r^n=\frac{V_r^2}{\rho}=\frac{U^2}{r},\ \ a_r^\tau=\frac{dV_r}{dt}=\frac{dU}{dt}=0.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, უნდა ვიპოვოთ აჩქარება ოთხ მდებარეობაში ორ შემთხვევაში:



I) როცა წარმტანი და ფარდობითი მოძრაობა ხდება ერთი მიმართულებით. ამ შემთხვევაში $\vec{\omega}_e$ ვექტორი მართობულია ნახაზის სიბრტყის და მომართულია ჩვენსკენ. ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი ოთხივე შემთხვევაში მიმართულია წრეწირის მხების გასწვრივ.

წარმტანი ბრუნვითი მოძრაობის დროს აჩქარებაა შედგება ორი შესაკრებისაგან

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{ბრ}} + a_r^{\text{ღერ}},$$

სადაც

$$a_e^{\text{ღერ}} = \omega_e^2 R,\ a_e^{\text{ბრ}} = \varepsilon_e R = 0\ \left(\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0\right).$$

ვიპოვოთ $\vec{a}_e^{\text{ბრ}}$ ვექტორის სიდიდე და მიმართულება ოთხ შემთხვევაში:

$$a_{e1}^{\text{ღერ}} = \omega^2 r;\ \ a_{e2}^{\text{ღერ}} = \omega^2\sqrt{(2r)^2 + r^2} = \omega^2 r\sqrt{5};$$

$$a_{e3}^{\text{ღერ}} = \omega^2 \cdot 3r = 3\omega^2 r;\ \ a_{e4}^{\text{ღერ}} = \ \omega^2 r\sqrt{5}.$$

ვიპოვოთ კორიოლისის აჩქარება

$$a_c = 2\omega_e V_r sin\alpha\ .$$

ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი $\vec{V}_r = \vec{U}$ ოთხივე მდებარეობისთვის ძევს ნახაზის სიბრტყეში, ხოლო $\vec{\omega}_e$ ნახაზის სიბრტყის მართობულია. $\alpha = 90°$, ამიტომ $a_c = 2\omega U$.

განვსაზღვროთ კორიოლისის აჩქარების მიმართულება ოთხივე მდებარეობისთვის. ვისარგებლოთ ჟუკოვსკის წესით. ანხილულ შემთხვევაში $\vec{U}$ ვექტორი ძევს ნახაზის სიბრტყეში და წარმტანი კუთხური სიჩქარის მართობულია. ამიტომ კორიოლისის აჩქარების მისაღებად საკმარისია ეს ვექტორი მოვაბრუნოთ 90° -ით წარმტანი ბრუნვის თანხვედრილად (ნახ. ა).

რადგან ყველა ვექტორი ძევს ერთ სიბრტყეში, ამიტომ საკმარისია (1) ტოლობა დავაგეგმილოთ x დაy ღერძებზე:

1) $a_{x1} = 0,\ a_{y1} = a_{r1}^n + a_{c1} - a_{e1}^{\text{ღერ}} = \frac{U^2}{r} + 2\omega U - \omega^2 r,\ \ a_1 = \frac{U^2}{r} + 2\omega U - \omega^2 r.$

2) $a_{x2} = -a_{r2}^n - a_{c2} -\ a_{e2}^{\text{ღერ}} cos\beta;\ cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}};\ sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}};\ a_{x2} = -\frac{U^2}{r} - 2\omega U - \omega^2 r = -\left(\frac{U^2}{r} + 2\omega U + \omega^2 r\right);$

$a_{y2} = -a_{e2}^{\text{ღერ}} sin\beta = -\omega^2 r\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -2\omega^2 r;\ a_2 = \sqrt{\left(\frac{U^2}{r} + 2\omega U + \omega^2 r\right)^2 + (2\omega^2 r)^2}\ .$

3) $a_{x3} = 0;\ a_{y3} = -(a_{r3}^n + a_{c3} + a_{e3}^{\text{ღერ}}) = -\ \left(\frac{U^2}{r} + 2\omega U + 3\omega^2 r\right); a_3 = \frac{U^2}{r} + 2\omega U + 3\omega^2 r.$

4) $a_{x4} = a_{r4}^n + a_{c4} + a_{e4}^{\text{ღერ}} cos\beta = \frac{U^2}{r} + 2\omega U + \omega^2 r; a_{y4} = -a_{e4}^{\text{ღერ}} sin\beta = -2\omega^2 r;$

$$a_4 = \sqrt{\left(\frac{U^2}{r} + 2\omega U + \omega^2 r\right)^2 + (2\omega^2 r)^2}\ .$$

II) თუ წარმტანი და ფარდობითი მოზრაობები საპირისპირო მიმართულებითაა, მაშინ წარმტანი აჩქარება უცვლელი რჩება, კორიოლისის აჩქარების სიდიდე უცვლელია, ხოლო მიმართულება შეიცვლება საპირისპიროთი. ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარება ოთხივე მდებარეობისათვის:

1) $a_{x1} = 0;\ a_{y1} = a_{r1}^{n} - a_{c1} - a_{e1}^{ღერ} = \frac{U^2}{r} - 2\omega U - \omega^2 r;\ a_1 = \frac{U^2}{r} - 2\omega U - \omega^2 r.$

2) $a_{x2} = -a_{r2}^{n} + a_{c2} - a_{e2}^{ღერ} cos\beta = -\frac{U^2}{r} + 2\omega U - \omega^2 r;\quad a_{y2} = -a_{e2}^{ღერ} sin\beta = -\omega^2 r\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -2\omega^2 r;$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{U^2}{r} - 2\omega U + \omega^2 r\right)^2 + (2\omega^2 r)^2}.$$

3) $a_{x3} = 0;\ a_{y3} = -(a_{r3}^{n} - a_{c3} + a_{e3}^{ღერ}) = -\left(\frac{U^2}{r} - 2\omega U + 3\omega^2 r\right);\ a_3 = -\frac{U^2}{r} + 2\omega U - 3\omega^2 r.$

4) $a_{x4} = a_{r4}^{n} - a_{c4} + a_{e4}^{ღერ} cos\beta = \frac{U^2}{r} - 2\omega U + \omega^2 r;\ a_{y4} = -a_{e4}^{ღერ} sin\beta = -2\omega^2 r;$

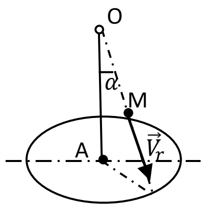
$$a_4 = \sqrt{\left(\frac{U^2}{r} - 2\omega U + \omega^2 r\right)^2 + (2\omega^2 r)^2}\ .$$

პასუხი: 1) $a_1 = \frac{U^2}{r} + 2\omega U - \omega^2 r;\ a_3 = \frac{U^2}{r} + 2\omega U + 3\omega^2 r;\ a_2 = a_4 = \sqrt{\left(\frac{U^2}{r} + 2\omega U + \omega^2 r\right)^2 + (2\omega^2 r)^2}.$

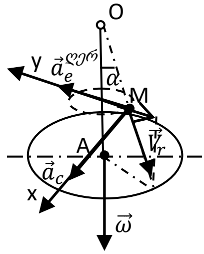
2) $a_1 = \frac{U^2}{r} - 2\omega U - \omega^2 r;\ a_3 = -\frac{U^2}{r} + 2\omega U - 3\omega^2 r;\ a_2 = a_4 = \sqrt{\left(\frac{U^2}{r} - 2\omega U + \omega^2 r\right)^2 + (2\omega^2 r)^2}.$

ამოცანა 23.49

OA ღერძის მქონე კონუსის მსახველზე, წვეროდან ფუძისკენ, V_r ფარდობითი სიჩქარით, მოძრაობს M წერტილი. $\angle MOA = \alpha$. t=0 მომენტისთვის $OM_0 = a$. კონუსი თანაბრად ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება.



ამოხსნა



წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა მსახველის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა და ტრაექტორია არის წრფე. კონუსის ბრუნვა საკუთარი ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია O_1M.

აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c\ .$$

ფარდობითი აჩქარება ნულის ტოლია, რადგან ფარდობითი მოძრაობა არის წრფივი და თანაბარი. წარმტანი აჩქარება იშლება ორ მდგენელად

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}\ .$$

სადაც

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 R,\ R = O_1M = (OM_0 + M_0M)sin\alpha = (a + V_r t)sin\alpha;\ \rightarrow a_e^{ღერ} = \omega^2(a + V_r t)sin\alpha.$$

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e R = 0, რადგან\ \varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

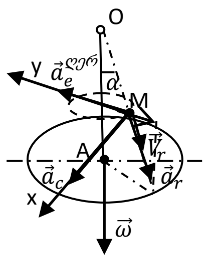
კორიოლისის აჩქარების მოდული უდრის

$$a_c = 2\omega V_r sin\alpha.$$

კორიოლისის აჩქარებოს მიმართულების საპოვნელად ვისარგებლოთ ჟუკოვსკის წესით: დავაგეგმილოთ ფარდობითი აჩქარება O_1 წერტილზე, ფუძის პარალელურად გამავალ სიბრტყეზე და მოვაბრუნოთ წარმტანი მოძრაობის თანხვედრილად $90° -$ იანი კუთხით. $\vec{a}_c$ ვექტორი არის O_1M რადიუსიანი წრეწირის მხები.

პასუხი: აბსოლუტური აჩქარება ძევს ბრუნვის ღერძის მართობულ სიბრტყეში და არის იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, რომლის კათეტებია $\omega^2(a + V_r t)sin\alpha$ და $2\omega V_r sin\alpha$.

ამოცანა23.50



წინა ამოცანაში იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება t=1 წმ მომენტისთვის, თუ წერტილი მოძრაობს მსახველის გასწვრივ მუდმივი ფარდობითი აჩქარებით a_r წვეროდან ფუძისაკენ. მოცემულია: $\alpha = 30°, a = 15$ მ. $a_r = 10$ მ/წმ², $\omega = 1$რად/წმ, t=0 მომენტში ფარდობითი სიჩქარე ნულის ტოლია.

ამოხსნა

წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა მსახველის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა. ტრაექტორია არის წრფე. წარმტანი მოძრაობა არის კონუსის ბრუნვა საკუთარი ღერძის გარშემო. წარმტანი მოზრაობის ტრაექტორია არის წრეწირი, რომლის რადიუსია O_1M . აბსოლუტური აჩქარება უდრის

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \, . \qquad (1)$$

ამოცანის პირობით $a_r = const = 10$ მ/წმ² . ანუ $\frac{dV_r}{dt} = 10$; ვაინტეგროთ და მივიღებთ $V_r = 10t + C_1$. რადგან, როცა t=0, მაშინ V_r. აქედან გამომდინარე გვაქვს $C_1 = 0$, ე.ი $V_r = 10t$.

ვიპოვოთ ფარდობითი გადაადგილება

$$\frac{dS_r}{dt} = V_r = 10t, \rightarrow \ S_r = \int 10tdt = 5t^2 + C_2.$$

ამოცანის პირობით $S_r(0) = a = 15$. ამ პირობის გათვალისწინებით წინა ტოლობიდან მივიღებთ $C_2 = 15$. საბოლოოდ გვექნება $S_r = 5t^2 + 15$. როცა t=1 მაშინ $S_r = 20$ მ=OM.

წარმტანი აჩქარება წარმოვადგინოთ ორი შესაკრების სახით:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{ღერ} + \vec{a}_e^{ბრ}.$$

ვიპოვოთ აქ შემავალი ვექტორების მოდულები:

$$a_e^{ღერ} = \omega_e^2 R, R = OMsin30° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ მ} \, , a_e^{ღერ} = 10\text{მ/წმ}^2.$$

$$a_e^{ბრ} = \varepsilon_e R = 0, რადგან \, \varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

ვიპოვოთ კორიოლისის აჩქარების მოდული

$$a_c = 2\omega V_r sin\alpha = 10\text{მ/წმ}^2.$$

მიმართულება დავადგინოთ ჟუკოვსკის წესით (იხ. ნახ.) .

დავუკავშიროთ საკოორდინატო ღერძები M წერტილს და დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ამ ღერძებზე:

$$a_x = a_c = 10 \text{ მ/წმ}^2.$$

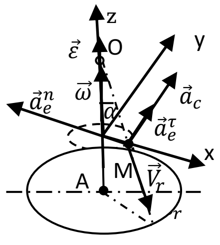
$$a_y = a_e^{ღერ} - a_r cos60° = 5 \text{ მ/წმ}^2 \, .$$

$$a_z = -a_r sin60° = 8{,}66 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 14{,}14 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: a =14,14 მ/წმ².

ამოცანა 23.51



დავუშვათ, რომ 23.49 ამოცანაში კონუსი ბრუნავს თანაბრადაჩქარებულად ε კუთხური აჩქარებით. t=t1=2 წმ მომენტისთვის იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება. მოცემულია: $\alpha = 30°, a = 0{,}2$ მ, $V_r = 0{,}3$ მ/წმ,
$\varepsilon = 0{,}5$ რად/წმ², t=0 მომენტში ფარდობითი სიჩქარე ნულის ტოლია.

ამოხსნა

წინა ამოცანის ანალოგიურად

$$S_r = a + V_r t_1 = 0{,}2+0{,}3\cdot 2 = 0{,}8 \text{ მ}.$$

აბსოლუტური აჩქარება ვიპოვოთ ფორმულით

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

სადაც

$$a_e^n = \omega^2 O_1 M = (\varepsilon t)^2 \cdot S_r \cdot sin30° = 0{,}4 \text{ მ/წმ}^2 .$$
$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot O_1 M = \varepsilon S_r \cdot sin30° = 0{,}2 \text{ მ/წმ}^2 .$$
$$a_c = 2\varepsilon t V_r sin(180° - \alpha) = 0{,}3 \text{ მ/წმ}^2.$$

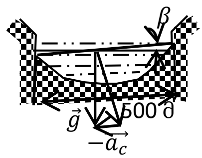
რადგან ბრუნვა აჩქარებულია, ამიტომ $\vec{a}_e^\tau$ და $\vec{a}_c$ ვექტორები ერთი და იგივე მიმართულების ვექტორებია. დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა ღერძებზე და მივღებთ:

$$a_x = -a_e^n = -0{,}4 \text{ მ/წმ}^2,\ a_y = a_e^\tau + a_c = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2 ,\ a_z = 0.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0{,}64 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a = 0{,}64$ მ/წმ².

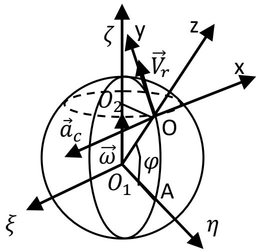
ამოცანა 23.52



მდინარე, რომლის სიგანეა 500 მ, მიედინება სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ 1,5მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ წყლის ინ ნაწილაკების კორიოლისის აჩქარება, რომელიც იმყოფება ჩრდილოეთის განედის 60° -ზე. განსაზღვრეთ აგრეთვე, რომელ ნაპირზეა უფრო მაღალი წყლის დონე და რამდენით, თუ

ცნობილია, რომ წყლის ზედაპირი უნდა იყოს მართობი ვექტორისა, რომელიც არის სიმძიმის ძალის ვექტორისა და კორიოლისის აჩქარების ტოლი და საპირისპირო მიმართულების ვექტორისაგან.

ამოხსნა



წყლის ნაწილაკზე მოქმედი კორიოლისის აჩქარების ვექტორი უდრის

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

ამასთან, xyz სისტემაში (x- მიმართულია აღმოსავლეთით, y- ჩრდილოეთით, z- ვერტიკალურად ზევით) $\vec{V}_r$ ვექტორი მიმართულია y ღერძის გასწვრივ, ხოლო $\vec{a}_c$ ვექტორი x ღერძის დადებითი მიმართულების საპირისპიროდ. გავითვალისწინოთ, რომ

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ რად/წმ.}$$

ვიპოვოთ ცორიოლისის აჩქარება

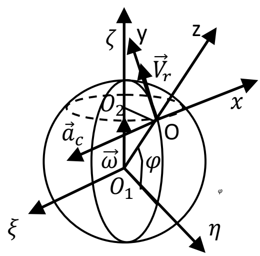
$$a_c = 2\omega V_r sin\alpha = 2 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}886 = 1{,}89 \cdot 10^{-4} \text{ მ/წმ}^2.$$

კორიოლისის აჩქარება მიმართულია დასავლეთისკენ. რადგან კორიოლისის აჩქარების საპირისპირო ვექტორი მიმარტულია აღმოსავლეთისკენ, წყალი იქნება მაღლა მარჯვენა ნაპირზე სიდიდით

$$\Delta h = ltg\beta = l\frac{a_c}{g} = 500 \cdot \frac{1{,}89 \cdot 10^{-4}}{9{,}81} = 0{,}0096 \text{ მ.}$$

პასუხი: კორიოლისის აჩქარება მიმართულია დასავლეთისკენ და უდრის $1{,}89 \cdot 10^{-4}$ მ/წმ². წყალი აიწევს მაღლა მარჯვენა ნაპირზე და აწევის სიმაღლე უდრის 0,0096 მ.

ამოცანა 23.53



რკინიგზის მაგისტრალი მელიტოპოლის ჩრდილოეთით მიდის მერიდიანის გასწვრივ.თბომავალი მოძრაობს ჩრდილოეთით $V = 90$ კმ/სთ სიჩქარით. ადგილის განედია $\varphi = 47°$. იპოვეთ თბომავლის კორიოლისის აჩქარება.

ამოხსნა

როგორც წინა ამოცანაში გვქონდა $\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ რად/წმ . გარდა ამისა

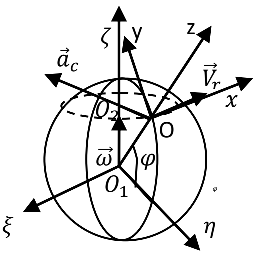
$$V_r = 90 \cdot \frac{1000}{3600} = 25 \text{ მ/წმ.}$$

მაშინ კორიოლისის აჩქარება რიცხობრივად უდრის

$$a_c = 2\omega V_r sin\varphi = 2 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 0{,}7314 = 2{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი : $a_c = 2{,}66 \cdot 10^{-3}$ მ/წმ^2 .

ამოცანა 23.54



ჩრდილოეთის განედის პარალელზე გადის რკინიგზა, რომელზეც დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ მოძრაობს თბომავალი $V_r = 20$ მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ თბომავლის კორიოლისის აჩქარება.

ამოხსნა

ნახაზზე გამოსახულ საკოორდინატო სისტემაში კუთხური სიჩქარის ვექტორი $\vec{\omega}$ მიმართულია ვერტიკალურად ზევით და ძევს xOy სიბრტყეში და V_r სიჩქარესთან ადგენს 90° კუთხეს. კორიოლისის აჩქარების ვექტორი უდრის

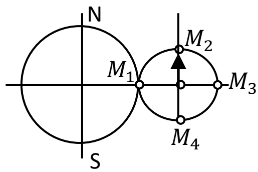
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \text{ .}$$

მიმართულია O წერტილიდან O_2 წერტილისკენ. რიცხობრივად უდრის

$$a_c = 2\omega V_r sin90° = 2{,}91 \cdot 10^{-3} \text{ მ/წმ}^2 \text{ .}$$

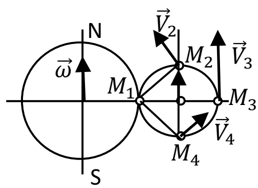
პასუხი: $a_c = 2{,}91 \cdot 10^{-3}$ მ/წმ^2 .

ამოცანა 23.55



იპოვეთ მერიდიანის გასწვრივ მოძრავი ელმავლის ბორბლის M_1, M_2, M_4, M_4 წერტილების კორიოლისის აჩქარებები ეკვატორის გადაკვეთის მომენტში. ელმავლის ბორბლის ცენტრის სიჩქარეა $V_0 = 40$მ/წმ .

ამოხსნა



რადგან ცნობილია ბორბლის ცენტრის სიჩქარე, ვიპოვოთ მოცემული წერტილების ფარდობითი სიჩქარეები.

$V_1 = 0, \qquad V_2 = \sqrt{2}V_0, \qquad V_3 = 2V_0, \qquad V_4 = \sqrt{2}V_0.$

იმის გათვალისწინებით, რომ M_1 სიჩქარეთა მყისი ცენტრია, ნახაზზე ნაჩვენებია

ფარდობითი სიჩქარების ვექტორები. ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \ .$$

გამოვთვალოთ კორიოლისის აჩქარება ოთხივე შემთხვევაში:

$$a_{c1} = 2\omega V_1 sin(\vec{\omega}, \vec{V}_1) = 0.$$

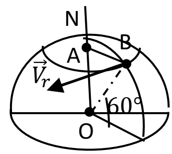
$$a_{c2} = 2\omega V_2 sin45° = 5{,}82 \cdot 10^{-5} \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_{c3} = 2\omega V_3 sin0° = 0.$$

$$a_{c4} = 2\omega V_4 sin45° = 5{,}82 \cdot 10^{-5} \text{ მ/წმ}^2 \ .$$

პასუხი: $a_{c1} = a_{c3} = 0$. $a_{c2} = a_{c4} = 5{,}82 \cdot 10^{-5}$ მ/წმ² .

ამოცანა 23.56



ჩრდილო ნახევარსფეროს 60° განედზე მიედინება მდინარე ნევა აღმოსავლეთიდან დასავლეთისაკენ. მდინარის სიჩქარეა $V_r = 1{,}11$ მ/წმ. იპოვეთ შესაბამისი მერიდიანის მხებზე წყლის ნაწილაკის აჩქარების იმ მდგენელების გეგმილების ჟამი, რომლებიც დინების სიჩქარეზეა დამოკიდებული. დედამიწის რადიუსია R=10^5 მ.

ამოხსნა

როგორც 23.54 ამოცანაში გვქონდა, მივმართოთ x ღერძი აღმოსავლეთით, y - ჩრდილოეთით, z - ვერტიკალურად ზევით. კორიოლისის აჩქარება მიმართულია AB წრფის გასწვრივ. რიცხობრივად კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega V_r sin90° = 2\omega V_r.$$

კორიოლისის აჩქარების გეგმილი BC მხებზე (y ღეძზე) უდრის

$$a_{BC}^c = a_c cos30° = 2\omega V_r cos30° = 2 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}11 \cdot 0{,}866 = 1{,}3977 \cdot 10^{-4} \text{ მ/წმ}^2 \ .$$

ფარდობითი აჩქარების გეგმილი BC წრფეზე უდრის

$$a_{BC}^r = a_r^n cos30° = \frac{V_r^2}{AB} cos30° = \frac{V_r^2 cos30°}{Rcos60°} = 0{,}00333 \cdot 10^{-4} \text{მ/წმ}^2 \ .$$

გეგმილების ჯამი იქნება

$$a_{BC} = a_{BC}^c - a_{BC}^r = 1{,}3944 \cdot 10^{-4} \text{ მ/წმ}^2 \ .$$

პასუხი: $a_{BC} = 1{,}3944 \cdot 10^{-4}$ მ/წმ² .

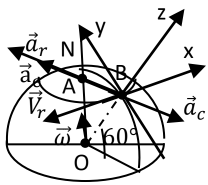
ამოცანა 23.57

ჩრდილო ნახევარსფეროს 60° განედზე მიედინება მდინარე ნევა აღმოსავლეთიდან დასავლეთისაკენ. მდინარის სიჩქარეა $V_r = 1{,}11$ მ/წმ.

იპოვეთ წყლის ნაწილაკების აბსოლუტური აჩქარების მდგენელები. დედამიწის რადიუსია $R = 64 \cdot 10^5$ მ.

ამოხსნა

აბსოლუტური აჩქარების მდგენელებია: ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარება. რადგან კუთხური სიჩქარე და ფარდობითი სიჩქარე მუდმივია, ამიტომ ამ აჩქარებებს ექნებათ მხოლოდ ნორმალური მდგენელები.



$$a_e = a_e^n = \omega^2 AB = \omega^2 R cos60° = 1{,}691 \cdot 10^{-2}$$ მ/წმ².

$$a_r = a_r^n = \frac{V_r^2}{AB} = \frac{V_r^2}{Rcos60°} = 3{,}85 \cdot 10^{-7} \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_c = 2\omega V_r sin90° = 1{,}6114 \cdot 10^{-4} \text{ მ/წმ}^2 .$$

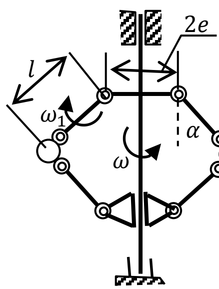
ყველა ვექტორი მოთავსებულია ერთ წრფეზე, ამიტომ

$$a = a_c - a_e - a_r = -1{,}675 \cdot 10^{-2} \text{ მ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $a = -1{,}675 \cdot 10^{-2}$ მ/წმ² ; $a_c = 1{,}6114 \cdot 10^{-4}$ მ/წმ² ; $a_e = 1{,}691 \cdot 10^{-2}$ მ/წმ² ; $a_r = 3{,}85 \cdot 10^{-7}$ მ/წმ² .

ამოცანა 23.58

იპოვეთ უატის რეგულიატორის ბურთულების აბსოლუტური აჩქარება, თუ რეგულიატორი ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო $\omega = \pi/2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და $\varepsilon = 1$ რად/წმ² კუთხური აჩქარებით. ბურთულების გაშლის კუთხური სიჩქარეა $\omega_1 = \pi/2$ რად/წმ და კუთხური აჩქარებაა $\varepsilon_1 = 0{,}4$ რად/წმ² . ბურთულას მკლავის სიგრძე $l = 0{,}5$ მ, მანძილი დაკიდების ღერძებს შორის 2e=0,1 მ. რეგულიატორის გაშლის კუთხე მოცემულ მომენტში $2\alpha = 90°$. ბურთულები ჩათვალეთ წერტილებად.

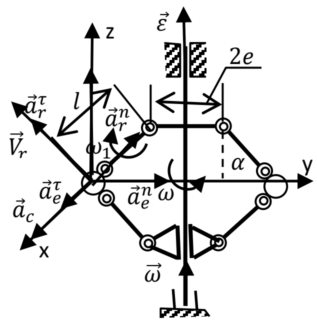


ამოხსნა

აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით.

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_c . \quad (1)$$

განვსაზღვროთ (1) ფორმულაში შემავალი ვექტორების სიდიდეები ა მიმართულებები.



წარმტანი მოძრაობა ხდება წრეწირზე, რომლის რადიუსი

$$R = O_1M = l + lsin\alpha.$$

წარმტანი აჩქარების მდგენელებია:

$$a_e^n = \omega^2 R = \omega^2(l + lsin\alpha) = 1 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_e^\tau = \varepsilon R = 0{,}4 \text{ მ/წმ}^2.$$

ეს ვექტორები მიმართულია შესაბამისი წრეწირის მხებად და ნორმალის გასწვრივ.

ფარდობითი მოძრაობა ხდება l რადიუსიან წრეწირზე, რომლის ცენტრია O წერტილი. ვიპოვოთ მისი მდგენელები:

$$a_r^n = \omega_1^2 l = \frac{\pi^2 l}{4} = 1{,}2\text{მ/წმ}^2.$$

$$a_r^\tau = \varepsilon_1 l = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2\text{მ/წმ}^2.$$

ისინი მიმართულია ფარდობითი ტრაექტორიის მხების და ნორმალის გასწვრივ.

კორიოლისის აჩქარება

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r \ \rightarrow \ a_c = 2\omega \cdot \omega_1 l \cdot sin\alpha = 1{,}74\text{მ/წმ}^2.$$

ვისარგებლოთ ჟუკოვსკის წესით და დავადგენთ, რომ კორიოლისისაჩქარება მიმართულია x ღერძის დადებითი მიმართულებით.

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღეძებზე და მივიღებთ:

$$a_x = a_e^\tau + a_c = 2{,}14\text{მ/წმ}^2.$$

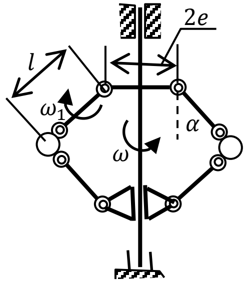
$$a_y = a_e^n + (a_r^n - a_r^\tau)cos45° = 1{,}71 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_z = (a_r^n + a_r^\tau)cos45° = 1\text{მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 2{,}916 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a = 2{,}916$ მ/წმ^2.

ამოცანა 23.59

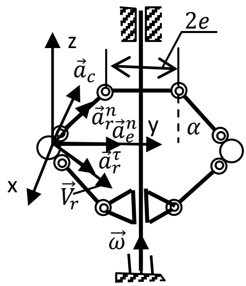


იპოვეთ უატის ცენტრიდანული რეგულიატორის ბურთულების აბსოლუტური აბოლუტური აჩქარება, თუ დატვირთვის შეცვლის შემდეგ ის იწყებს ბრუნვას $\omega = \pi$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. ამასთან ბურთულები ეშვება დაბლა $V_r = 1$ მ/წმ ფარდობითი სიჩქარით და $a_r^\tau = 0{,}1$ მ/წმ² მხები აჩქარებით. რეგულიატორის გაშლის კუთხე $2\alpha = 60°$ ბურთულების მკლავების სიგრძეა $l = 0{,}5$მ. მანძილი დაკიდების ღერძებს შორის უგულებელყოფილია.

ამოხსნა

წინა ამოცანის ანალოგიურად, ჩავწეროთ აბსოლუტური აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულა შემდეგნაირად:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_c \qquad (1)$$



წინა შემთხვევისაგან განსხვაავებით $a_e^\tau = 0$, რადგან რეგულიატორი ბრუნავს თანაბრად. ვიპოვოთ (1) ტოლობაში შემავალი სიდიდეები ცალცალკე.

$a_e^n = \omega^2 R = \omega^2 l sin30° = \pi^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 2{,}46$ მ/წმ² ;

$a_r^n = \frac{V_r^2}{l} = 2$ მ/წმ²; $a_r^\tau = 0{,}1$ მ/წმ² - ამოცანის პირობით.

$a_c = 2\omega_e V_r sin(90° + \alpha) = 2\omega V_r cos\alpha = 5{,}44$ მ/წმ².

ნახაზზე ნაჩვენებია აჩწარებების მიმართულებები. დავაგეგმილოთ (1) საკოორდინატო ღეტძებზე ად მივიღებთ:

$$a_x = -a_c = 5{,}44 \text{ მ/წმ}^2,$$

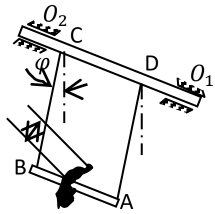
$$a_y = a_e^n + a_r^\tau cos\alpha + a_r^n sin\alpha = 3{,}55 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_z = a_r^n cos\alpha + a_r^\tau sin\alpha = 1{,}78 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 6{,}735 \text{მ/წმ}^2.$$

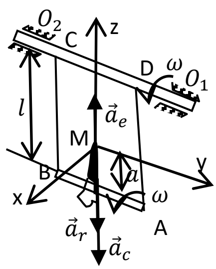
პასუხი: $a = 6{,}735$მ/წმ².

ამოცანა 23.60



საჰაერო ტრაპეცია ABCD ირხევა ჰორიზონტალური OO_1 ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi = \varphi_0 sin\omega t$. ტანმოვარჯიშე, რომელიც ვარჯიშს ასრულებს AB ძელზე, ბრუნავს მის გარშემო ფარდობითი კუთხური სიჩქარით $\omega = const$. მოცემულია: $BC=AD=l$. იპოვეთ ტანმოვარჯიშის ტერფის M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება $t = \pi/\omega$ წმ მომენტისთვის, თუ ის ძელიდან დაშორებულია a მანძილით. საწყის მომენტში ტანმოვარჯიშე იყო ვერტიკალურ მდებარეობაში თავით ზევით. ტრაპეციას უჭირავს ქვედა ვერტიკალური მდებარეობა.

ამოხსნა



$t = \pi/\omega$ წმ მომენტისთვის ტრაპეცია ვერტიკალთან ადგენს $\varphi = 0°$ კუთხეს. ხოლო ტანმოვარჯიშე მობრუნებულია $\varphi_r = \omega \cdot \frac{\pi}{\omega} = \pi$ კუთხეს. ე.ი. მას უჭირავს ვერტიკალური მდებარეობა თავით ქვევით. M წერტილში სემოვიტანოთ საკოორდინატო სისტემა: x – ტრაპეციის სიბრტყის მართობულია, y - ძელის პარალელურია, ხოლო z - ვერტიკალურად ზევით არის მიმართული. აჩქრებათა შეკრების თეორემის თანახმად

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{c}} .$$

წარმტანი აჩქრების მდგენელებია:

$$a_e^n = \dot{\varphi}^2 OM\ , \dot{\varphi} = \varphi_0 \omega cos\omega t, \ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega^2 sin\omega t. \text{ როცა } t = \pi/\omega, \text{ მაშინ } \dot{\varphi} = -\varphi_0\omega, \ddot{\varphi} = 0.$$

$$a_e^n = (-\varphi_0\omega)^2(l-a) = \varphi_0^2\omega^2(l-a);\ a_e^\tau = \ddot{\varphi} OM = 0.$$

ამრიგად, წარმტანი აჩქარების ვექტორი შედგება , მოცემულ მომენტში, მხოლოდ ერთი შესაკრებისაგან და მიმართულია M-დან O-კენ.

ფარდობითი აჩქარების ვექტორი ასევე შედგება ერთი შესაკრებისაგან

$$a_r = a_r^n = \omega^2 a.$$

ნახაზზე ეს ვექტორი მიმართულია ფარდობითი მოძრაობის წრეწირის ცენტრისკენ.

კორიოლისის აჩქარება უდრის

$$a_c = 2\omega_e V_r sin90° = 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot a\omega = -2\varphi_0 a\omega^2.$$

ჟუკოვსკის წესის შესაბამისად, ეს ვექტორი მიმართულია ვერტი-კალურად ქვევით.

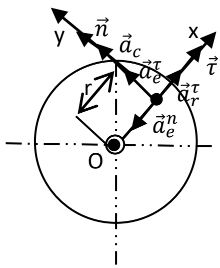
რადგან სამივე ვექტორი ზევს ერთ წრფეზე, ამიტომ აბსოლუტური აჩქარება ტოლი იქნება

$$a = a_e^n - a_r - a_c = \varphi_0^2\omega^2(l-a) - \omega^2 a - 2\varphi_0 a\omega^2$$
$$= \omega^2\Big(\varphi_0^2(l-a) - a(2\varphi_0+1)\Big).$$

პასუხი: $a = \omega^2\Big(\varphi_0^2(l-a) - a(2\varphi_0+1)\Big)$. აჩქარება მიმართულია ვერტიკალურად ზევით თუ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება დადებითია.

ამოცანა 23.61

დისკოს რადიუსის გასწვრივ მოძრაობს წერტილი კანონით: $r = ae^{kt}$ (a, k მუდმივი სიდიდეებია). დისკო ბრუნავს მის ცენტრზე გამავალი მისივე სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო კანონით $\varphi = kt$. იპოვეთ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე. აბსოლუტური აჩქარება . მხები და ნორმალური აჩქარებები.



ამოხსნა

M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე წარმოვადგინოთ ასე:

$$\vec{V} = \vec{V_\tau} + \vec{V_n}, \qquad (1)$$

სადაც $\vec{V_\tau} = V_\tau\vec{\tau}$ - რადიალური მდგენელია, ხოლო $\vec{V_n} = V_n\vec{n}$ - სიჩქარის განივი (ტრანსვერსალური) მდგენელია.

V_τ, და V_n სიდიდეების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულებით:

$$v_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(ae^{kt}) = ake^{kt},$$

$$V_n = r\dot{\varphi} = ae^{kt}\frac{d}{dt}(kt) = ake^{kt}.$$

რადგან $\vec{V_\tau} \perp \vec{V_n}$, ამიტომ აბსოლუტური სიჩქარე ტოლი იქნება

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \sqrt{2}ake^{kt}.$$

აბსოლუტური აჩქარება ასევე იშლება რადიალურ და ტრანსვერსალურ მდგენელებად:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (2)$$

სადაც

$$a_\tau = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = ak^2e^{kt} - ak^2e^{kt} = 0;$$
$$a_n = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 + 2ake^{kt}k = 2ak^2e^{kt}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$a = a_n = 2ae^{k^2kt}$$

შევნიშნოთ, რომ (1) და (2) ფორმულები მოცემულ მაგალითში შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც სიჩქარეთა შეკრების თეორემა და აჩქარებათა შეკრების თეორემა. ისინი ასე სეიძლებოდა ჩაგვეწერა:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_n\,,$$
$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_c\,.$$

ამ ფორმულებს შორის კავშირი ასეთია:

$$V_\tau = V_r\,,\; V_n = V_e, a_\tau = a_r^{\tau} - a_e^{n}, a_n = a_e^{\tau} - a_c.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$V_\tau = V_x, V_n = V_y, a_x = a_\tau, a_y = a_n,$$

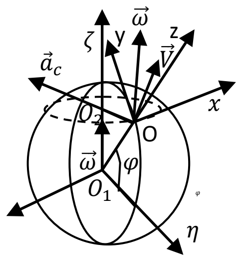
ვიპოვით წერტილის აჩქარების მხებ და ნორმალურ მდგენელებს:

$$a_\tau = \frac{a_xV_x + a_yV_y}{V} = \frac{ake^{kt}\cdot 0 + ake^{kt}\cdot 2ak^2e^{kt}}{\sqrt{2}ake^{kt}} = \sqrt{2}ak^2e^{kt}.$$
$$a_n = \frac{|V_xa_y - V_ya_x|}{V} = \sqrt{2}ak^2e^{kt}\,.$$

პასუხი: $V = \sqrt{2}ake^{kt};\; a = 2ae^{k^2kt}; a_\tau = \sqrt{2}ak^2e^{kt}; a_n = \sqrt{2}ak^2e^{kt}$.

ამოცანა 23.62

M წერტილი მოძრაობს დედამიწის ზედაპირზე. მოძრაობის კურსია k (კუთხე ჩრდილოეთის მიმართულებასა და დედამიწის მიმართ სიჩქარეს შორის). ადგილის განედი ამ მომენტში არის φ. იპოვეთ წერტილის კორიოლისის აჩქარების აღმოსავლეთი, ჩრდილოეთი და ვერტიკალური მდგენელი.



ამოხსნა

წარმოვადგინოთ კორიოლისის აჩქარება ასეთი სახით

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_{rx} & V_{ry} & V_{rz} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

შემოვიტანოთ საკოორდინატო სისტემა ისე რომ: ღერძი x - აღმოსავლეთით, ღერძი y - ჩრდილოეთით, ღერძი z- ვერტიკალურად.

ასეთ სისტემაში $\vec{V}$ სიჩქარის ვექტორი ძევს xOy სისტემაში და y ღერძთან ადგენს k კუთხეს.

ვექტორი $\vec{\omega}$ მოთავსებულია yOz სიბრტყეში და y ღერძთან ადგენს φ კუთხეს. ვიპოვოთ ამ ვექტორების გეგმილები შესაბამის ღერძებზე.

$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega cos\varphi, \ \omega_z = \omega sin\varphi, \ V_{rx} = Vsink, V_{ry} = Vcosk, V_{rz} = 0.$

(1) ტოლობიდან გვაქვს

$$a_{cx} = 2(\omega_y V_{rz} - \omega_z V_{ry}) = -2V\omega cosksin\varphi,$$
$$a_{cy} = 2(\omega_z V_{rx} - \omega_x V_{rz}) = 2V\omega \mathrm{sinksin}\varphi,$$
$$a_{cz} = 2(\omega_x V_{ry} - \omega_y V_{rz}) = -2V\omega sinkcos\varphi \ .$$

პასუხი: $a_{cx} = -2V\omega cosksin\varphi$; $a_{cy} = 2V\omega \mathrm{sinksin}\varphi$; $a_{cz} = -2V\omega sinkcos\varphi$. სადაც ω დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა.

ამოცანა 23.63

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ კორიოლისის აჩქარების ჰორიზონტალური მდგენელი.

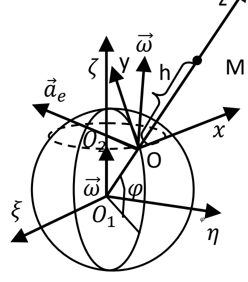
ამოხსნა

თუ ვისარგენლებთ წინა ამოცანის ნახაზით, დავინახავთ, რომ ჰორიზონტალური მდგენელი განისაზღვრება ტოლობით

$$a_{ch} = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2} = 2V\omega\sqrt{sin^2\varphi(sin^2k + cos^2k)} = 2V\omega sin\varphi.$$

პასუხი: $a_{ch} = 2V\omega sin\varphi$. ჰორიზონტალური მდგენელი არის დედამიწის მიმართ სიჩქარის მართობული და მიმართულია მისგან მარცხნივ ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში და მისგან მარჯვნივ- სამხრეთ ნახევარსფეროში.

ამოცანა 23.64



M წერტილის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან არის h, ხოლო განედი φ. განსაზღვრეთ დედამიწის ბრუნვით გამოწვეული წარმტანი აჩქარების აღმოსავლეთის, ჩრდილოეთის და ვერტიკალური მდგენელები. (დედამიწის რადიუსია R, კუთხური სიჩქარე ω) .

ამოხსნა

შემოვიტანოთ საკოორდინატო სისტემა

ისე, როგორც წინა ამოცანაში: აღმოსავლეთი (x ღერძი), ჩრდილოეთი (y ღერძი) და აღმოსავლეთი (z ღერძი). წარმტანი აჩქარების მდგენელები არჩეულ სისტემაში განვსაზღვროთ ფორმულიდან

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (1)$$

სადაც $\vec{\omega}$ -დედამიწის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\vec{r}$ - წერტილის რადიუსვექტორი. ჩვენ შემთხვევაში:

$$\omega_x = 0\,,\ \omega_y = \omega cos\varphi, \omega_z = \omega sin\varphi\,,\ x = 0, y = 0, z = R + h.$$

(1) ტოლობიდან მივიღებთ,რომ

$$a_{ex} = -x\left(\omega_y^2 + \omega_z^2\right) + y\omega_x\omega_y + z\omega_x\omega_z = 0,$$

$$a_{ey} = x\omega_x\omega_y - y(\omega_x^2 + \omega_z^2) + z\omega_y\omega_z = (R + h)\omega^2 sin\varphi cos\varphi,$$

$$a_{ez} = x\omega_x\omega_z + y\omega_y\omega_z - z\left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) = (-R + h)\omega^2 cos^2\varphi\ .$$

$\vec{a}_e$ ვექტორი მიმართულია O - დან A - კენ.

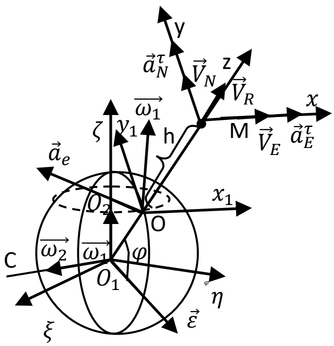
პასუხი: $a_{ex} = 0$; $a_{ey} = (R + h)\omega^2 sin\varphi cos\varphi$; $a_{ez} = (-R + h)\omega^2 cos^2\varphi$.

ამოცანა 23.65

M წერტილის დედამიწის მიმართ სიჩქარის აღმოსავლეთის, ჩრდილოეთის და ვერტიკალური მდგენელებია V_E, V_N და V_h . იპოვეთ ფარდობითი აჩქარების გეგმილები x, y, z, ღერძებზე (x -აღმოსავლეთით, y - ჩრდილოეთით, z - ვერტიკალურად), თუ მისი სიმაღლე დედამიწიდან არის h, ხოლო განედია φ. (R და ω - დედამიწის რადიუსი და კუთხური სიჩქარეა).

ამოხსნა

წერტილის მოძრაობა მოცემულ შემთხვევაში გამვიხილოთ როგორც რთული მოძრაობა, ფარდობითი მოძრაობა z ღერძის მიმართ და წარმტანი მოძრაობა Oxyz სისტემასთან ერთად. ეს წარმტანი მოძრაობა დაიყვანება ორი ბრუნვითი მოძრაობის ერთობლიობაზე $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. რადგან Oxyz სისტემაში კუთხური სიჩქარეების გეგმილებია:



$$\omega_{1x} = 0, \qquad \omega_{1y} = \dot{\psi} cos\varphi, \qquad \omega_{1z} = \dot{\psi} sin\varphi, \omega_{2x} = -\dot{\varphi}, \omega_{2y} = \omega_{2z} = 0.$$

მაშინ მივიღებთ

$$\omega_x = -\dot{\varphi}, \omega_y = \dot{\psi}cos\varphi,\ \ \omega_z = \dot{\psi}sin\varphi.$$

ამასთან

$$r = R + h.$$

$$V_E = r\dot{\psi}cos\varphi\ \to \dot{\psi} = \frac{V_E}{rcos\varphi} = \frac{V_E}{(R+h)cos\varphi};$$

$$V_N = r\dot{\varphi} \to \dot{\varphi} = \frac{V_N}{r} = \frac{V_N}{R+h}.$$

საძიებელი აჩქარება გამოვთვალოთ ტოლობით

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ ამ ტოლობაში შემავალი ვექტორების გეგმილები Oxyz სისტემის ღერძებზე:

$$a_{rx} = \dot{V}_E,\ a_{ry} = \dot{V}_N,\quad a_{rz} = \dot{V}_h\ .$$

რადგან $x = 0, y = 0, z = R + h$ და

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \dot{\psi}cos\varphi & \dot{\psi}sin\varphi \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = -\dot{\varphi}\dot{\psi}sin\varphi, \varepsilon_z = \dot{\varphi}\dot{\psi}cos\varphi$$

,

მივიღებთ

$$a_{ex} = \varepsilon_x z\text{-}\varepsilon_z y - x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + y\omega_x\omega_y - z\omega_x\omega_z = -2r\dot{\varphi}\dot{\psi}sin\varphi = -\frac{2V_EV_N}{R+h}tg\varphi,$$

$$a_{ey} = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + x\omega_x\omega_y - y(\omega_x^2 + \omega_z^2) + z\omega_y\omega_z = 2r\dot{\psi}^2 sin\varphi cos\varphi = \frac{V_E^2}{R+h}tg\varphi,$$

$$a_{ez} = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + x\omega_x\omega_z + y\omega_y\omega_z - z(\omega_x^2 + \omega_y^2) = -r(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2cos^2\varphi) = -\frac{V_E^2+V_N^2}{R+h}tg\varphi.$$

გამოვთვალოთ კორიოლისის აჩქარების გეგმილები:

$$a_{cx} = 2(\omega_y V_{rz} - \omega_z V_{ry}),\ a_{cy} = 2(\omega_z V_{rx} - \omega_x V_{rz}),\quad a_{cz} = 2(\omega_x V_{ry} - \omega_y V_{rx})\ .$$

ჩვენ შემთხვევაში

$$\omega_x = -\dot{\varphi}, \omega_y = \dot{\psi}cos\varphi,\ \ \omega_z = \dot{\psi}sin\varphi,$$

$$V_{rx} = V_{ry} = 0, V_{rz} = V_h.$$

ამიტომ მივიღებთ:

$$a_{cx} = 2\omega_y V_{rz} = 2\dot{\psi}cos\varphi V_h = \frac{2V_EV_h}{R+h},\ a_{cy} = -2\omega_x V_{rz} = 2\dot{\varphi}V_h = \frac{2V_NV_h}{R+h}, a_{cz} = 0.$$

აჩქარებათა შეკრების თეორემის საფუძველზე (1) - დან მივღებთ:

$$a_x = \dot{V}_E - \frac{2V_EV_N}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_EV_h}{R+h},$$

$$a_y = \dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_NV_h}{R+h},$$

$$a_z = \dot{V}_h - \frac{V_E^2+V_N^2}{R+h}tg\varphi.$$

მიღებული შედეგების სემოწმებისთვის ვიპოვოთ იგივე სიდიდეები სფერულ კოორდინატებში. გავითვალისწინოთ, რომ

$$r = R + h, \dot{r} = \dot{h} = V_h, \qquad \ddot{r} = \ddot{h} = \dot{V}_h,$$
$$rcos\varphi\ddot{\psi} = a^{\tau} = V_{E,}\ r\ddot{\varphi} = a_N^{\tau} = \dot{V}_N.$$

მოვიღებთ:

$$a_x = 2\dot{r}\dot{\psi}cos\varphi + rcos\varphi\ddot{\psi} - \dot{\varphi}\dot{\psi}sin\varphi = \dot{V}_E - \frac{2V_E V_N}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_E V_h}{R+h},$$
$$a_y = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + r\dot{\psi}^2 cos\varphi sin\varphi = \dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_N V_h}{R+h},$$
$$a_z = \ddot{r} - r\dot{\psi}^2 cos^2\varphi - r\dot{\varphi}^2 = \dot{V}_h - \frac{V_E^2+V_N^2}{R+h}tg\varphi.$$

მიღებული შედეგების თანხვედრა ამტკიცებს გამოთვლების სამართლიანობას.

პასუხი: $a_{rx} = \dot{V}_E - \frac{2V_E V_N}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_E V_h}{R+h};\ a_{ry} = \dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_N V_h}{R+h}; a_{rz} = \dot{V}_h - \frac{V_E^2+V_N^2}{R+h}tg\varphi.$

ამოცანა 23.66

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ დედამიწის სიახლოვეს მოძრავი წერტილის აბსოლუტური აჩქარების მდგენელები.

ამოხსნა

აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად წინა ამოცანაში უნდა გავითვალისწინოთ დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. ამ შემთხვევაში უნდა დავუშვათ, რომ

$$\omega_x = -\dot{\varphi}\ , \omega_y = (\omega + \dot{\psi})cos\varphi,\ \ \omega_z = (\omega + \dot{\psi})sin\varphi.$$

მივიღებთ ახალ დამატებით შესაკრებებს:

$$a_x^{დამ} = a_{cx}^{დამ} + a_{ex}^{დამ} = 2\omega cos\varphi V_h - 2r\dot{\varphi}\omega sin\varphi = 2\omega(cos\varphi V_h - V_{\mathrm{N}}sin\varphi),$$

$$a_y^{დამ} = a_{cy}^{დამ} + a_{ey}^{დამ} = 2V_E\omega cos\varphi + (R+h)\omega^2 sin\varphi cos\varphi,$$
$$a_z^{დამ} = a_{cz}^{დამ} + a_{ez}^{დამ} = -2V_E\omega cos\varphi + (R+h)\omega^2 cos^2\varphi.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$a_x = \dot{V}_E - \frac{2V_E V_N}{R+h}tg\varphi + \frac{2V_E V_h}{R+h} + 2\omega(cos\varphi V_h - V_{\mathrm{N}}sin\varphi);$$

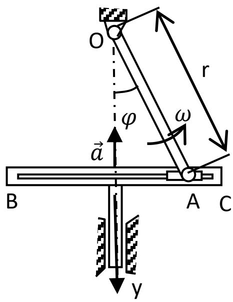
$$a_y = \dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R+h} tg\varphi + \frac{2V_N V_h}{R+h} + 2V_E \omega cos\varphi + (R+h)\omega^2 sin\varphi cos\varphi;$$
$$a_z = \dot{V}_h - \frac{V_E^2 + V_N^2}{R+h} tg\varphi + (R+h)\omega^2 cos^2\varphi - 2V_E \omega cos\varphi.$$

პასუხი: $a_x = \dot{V}_E - \frac{2V_E V_N}{R+h} tg\varphi + \frac{2V_E V_h}{R+h} + 2\omega(cos\varphi V_h - V_\mathrm{N} sin\varphi);$

$a_y = \dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R+h} tg\varphi + \frac{2V_N V_h}{R+h} + 2V_E \omega cos\varphi + (R+h)\omega^2 sin\varphi cos\varphi;$

$a_z = \dot{V}_h - \frac{V_E^2 + V_N^2}{R+h} tg\varphi + (R+h)\omega^2 cos^2\varphi - 2V_E \omega cos\varphi.$

ამოცანა 23.67



ჩაქუჩის ამძრავი მრუდმხარა-მუშტა მექანიზმი შედგება წრფივი მუშტასგან, რომელიც ასრულებს წინსვლა-უკუსვლით მოძრაობას. მუშტა მოძრაობაში მოჰყავს მრუდმხარას მასზე დამაგრებული A ცოციას მეშვეობით. მრუდმხარა OA=r=0,4 მ ბრუნავს თანაბრად 4π რად/წმ კუთხური სიჩქარით. როცა t=0, მუშტას უკავია ქვედა მდებარეობა. იპოვეთ კულისას აჩქარება.

ამოხსნა

OA მრუდმხარას განტოლებაა

$$\varphi = \omega t.$$

მუშტას მოძრაობის განტოლებაა

$$y = OD = rcos\varphi = 0{,}4cos4\pi t.$$

ვიპოვოთ აჩქარება

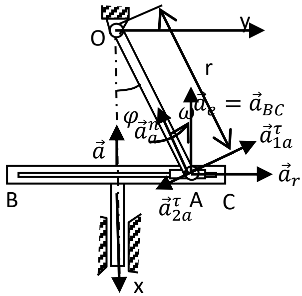
$$a = \ddot{y} = -63{,}2cos4\pi t \text{ მ/წმ}^2 .$$

ნიშანი „მინუსი" მიუთითებს, რომ აჩქარებას აქვს y ღერძის საპირისპირო მიმართულება.

პასუხი: $a = -63{,}2cos4\pi t$ მ/წმ² .

ამოცანა 23.68

მრუდმხარა-მუშტა მექანიზმში მრუდმხარას მოძრაობაში მოჰყავს მუშტა, რომელიც აცრულებს წინსვლა-უკუსვლით მოძრაობას. მრუდმხარას, რომლის სიგრძეა OA=r=0,5 მ, აქვს კუთხური სიჩქარე $\omega = 1$ რად/წმ და კუთხური აჩქარება $\varepsilon = \pm 1$ რად/წმ² იმ მომენტში, როცა $\angle xOA = 60°$. იპოვეთ მუშტას აჩქარება მითითებულ მომენტში ორ შემთხვევაში:



1) როცა $\varepsilon > 0$ და 2) როცა $\varepsilon < 0$.

ამოხსნა

A ცოციას მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც რთული მოძრაობა: ფარდობითი მოძრაობა არის მოძრაობა მუშტას ღარში, ხოლო წარმტანი მოძრაობაა მოძრაობა ამ ღარის მართობულად. ანსოლუტური აჩქარების ვექტორი წარმოვადგინოთ როგორც მხები და ნორმალური აჩქარებების ჯამი.

$$\vec{a} = \vec{a}^\tau + \vec{a}^n.$$

აჩქარებათა შეკრების შესახებ თეორემის თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ

$$\vec{a}^\tau + \vec{a}^n = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c\,. \qquad (1)$$

განხილულ შემთხვევაში წარმტანი მოძრაობა არის გადატანითი, ამიტომ კორიოლისის აჩქარება $\vec{a}_c = 0$. საწყისი მონაცემებიდან ვიპოვით

$$a_1^\tau = a_2^\tau = \varepsilon \cdot OA = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2.\ a^n = \omega^2 OA = 0{,}5 \text{ მ/წმ}^2.$$

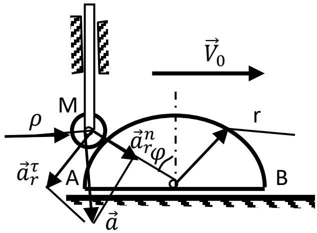
დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა x ღერძზე ორ შემთხვევაში და მივიღებთ:

1) $-a_1^\tau cos60° - a^n cos30° = -a_e, \rightarrow\ a_e = a_{BC} = a_1^\tau cos60° + a^n cos30° =$ 0,682 მ/წმ² .

2) $a_2^\tau cos60° - a^n cos30° = -a_e\ \rightarrow\ a_e = a_{BC} = a^n cos30° - a_2^\tau cos60° =$ 0,183 მ/წმ² .

პასუხი: $a_1 = 0{,}682$ მ/წმ²; $a_2 = 0{,}183$ მ/წმ² . აჩქარების ვექტორი მიმართულია ზევით.

ამოცანა 23.69



მუშტას, რომელიც გადატანითად მოძრაობს AB დიამეტრის გასწვრივ მუდმივი V_0 სიჩქარით, აქვს ნახევარწრის ფორმა. იპოვეთ იმ ღეროს აჩქარება, რომელიც AB დიამეტრის მართობულად ეყრდნობა მუშტას და თავისუფლად მოძრაობს მიმმართველში . გორგოლაჭის რადიუსია ρ. საწყის მომენტში ღერო იმყოფებოდა ზედა მდებარეობაში.

ამოხსნა

დავშალოთ ღეროს მოძრაობა წარმტან მოძრაობად (მოძრაობა მუშტასთან ერთად) და ფარდობით მოძრაობად (მუშტას ზედაპირზე მოძრაობა). რადგან წარმტანი მოძრაობა არის თანაბარი და გადატანითი, ამიტომ $a_c = a_e = 0$. აჩქარებათა შეკრების თეორემა მიიღებს სახეს:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$sin\varphi = \frac{MK}{MO} = \frac{V_0 t}{r+\rho} \rightarrow \frac{d}{dt}(sin\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_0 t}{r+\rho}\right) \rightarrow cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{V_0}{r+\rho} \rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{V_0}{r+\rho} \cdot \frac{1}{cos\varphi} = \frac{V_0}{r+\rho}\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\varphi}} = \frac{V_0}{r+\rho}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2 t^2}{(r+\rho)^2}}} = \frac{V_0}{\sqrt{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2}}.$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{V_0^3 t}{((r+\rho)^2 - V_0^2 t^2)^{3/2}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{a}_r^\tau \perp \vec{a}_r^n$, გვექნება:

$$a_r^\tau = (r+\rho)\ddot{\varphi}\ ,\ a_r^n = (r+\rho)\dot{\varphi}^2,$$

$$a_r = \sqrt{(a_r^\tau)^2 + (a_r^n)^2} = (r+\rho)\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} = (r+\rho)\sqrt{\frac{V_0^6 t^2}{((r+\rho)^2 - V_0^2 t^2)^3} + \frac{V_0^4}{((r+\rho)^2 - V_0^2 t^2)^2}} = \frac{V_0^2 (r+\rho)^2}{((r+\rho)^2 - V_0^2 t^2)^{3/2}}.$$

მიღებული შედეგის შესამოწმებლად შეიძლება ვისარგებლოთ 23.26 ამოცანაში მიღებული შედეგით. სიჩქარე

$$V = \frac{V_0^2 t}{\sqrt{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2}}.$$

თუ გავაწარმოებთ ამ გამოსახულებას, მივიღებთ აჩქარებას

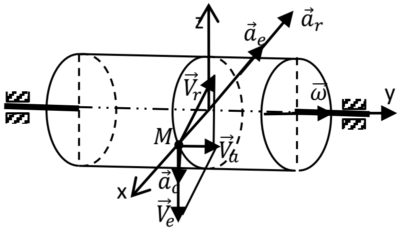
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{V_0^2\sqrt{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2} + \frac{V_0^4 t^2}{\sqrt{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2}}}{(r+\rho)^2 - V_0^2 t^2} = \frac{V_0^2 (r+\rho)^2}{((r+\rho)^2 - V_0^2 t^2)^{3/2}}.$$

მიღებული შედეგი ორივე შემთხვევაში ერთი და იგივეა.

პასუხი: $a = \frac{V_0^2(r+\rho)^2}{\left((r+\rho)^2 - V_0^2 t^2\right)^{3/2}}$.

ამოცანა 23.70

სახარატო ჩარხზე ჩარხავენ 80 მმ დიამეტრის ცილინდრს. შპინდელი აკეთებს 30 ბრ/წთ. გრძივი მიწოდების სიჩქარე მუდმივია და უდრის 0,2მმ/წმ. იპოვეთ საჭრისის სიჩქარე და აჩქარება დასამუშავებელი ცილინდრის მიმართ.



ამოხსნა

ამ ამოცანაში საჭრისის მოძრაობა წარმოვადგინოთ ორ მოძრაობად: ფარდობითი მოძრაობა ცილინდრის ზედაპირის მიმართ და წარმტანი მოძრაობა მბრუნავ ცილინდრთან ერთად. აჩქარებათა შეკრების თეირემის თანახმად

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

ამ შემთხვევაში $a_e^\tau = 0$.

რადგან $V_e = const$. ამიტომ

$$a_e = a_e^n = \frac{V_e^2}{R}.$$

ვისარგებლოთ 22.27 ამოცანის პირობით. წინასწარ ვიპოვოთ

$$V_r^2 = V^2 + V_e^2,\ V_e = \omega_e \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{d}{2} = 125{,}6 \text{ მმ/წმ},\ V = 0{,}2 \text{ მმ/წმ}.$$

აქედან გამომდინარე $V_r = 125{,}6$ მმ/წმ, $a_e = \frac{125{,}6^{\,2}}{40} = 324{,}4$ მმ/წმ².

კორიოლისის აჩქარება

$$a_c = 2\omega V_r sin 90° = 788{,}8 \text{ მმ/წმ}^2.$$

$a = 0$, რადგან საჭრისი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად. რადგან ყველა ვექტორი ერთ წრფეზეა, ამიტომ

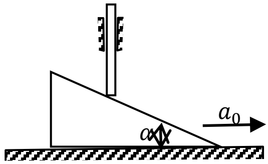
$$a_r = a_c - a_e = 324{,}4 \text{მმ/წმ}^2.$$

რადგან $V_r = 0$, ამიტომ a_r^τ=0. მაშასადამე, $a_r = a_r^n = a_e$.

პასუხი: $V_r = 125{,}6$ მმ/წმ; $a_c = 788{,}8$ მმ/წმ²; $a_r = a_e = 324{,}4$ მმ/წმ² .

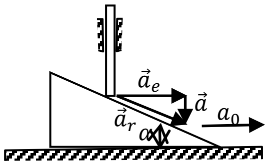
ამოცანა 23.71

ღერო სრიალებს ვერტიკალურ მიმმართველში და ქვედა ბოლოთი ეყრდნობა დახრილ სამკუთხა პრიზმას. პრიზმა მოძრაობს მუდმივი a_0 აჩქარებით მარჯვნივ. იპოვეთ ღეროს აჩქარება.



ამოხსნა

ღეროს აბსოლუტური მოძრაობა მიმმართველში წარმოვადგინოთ ორ მოძრაობად: ფარდობითი მოძრაობა დახრილი სიბრტყის მიმართ და წარმტანი მოძრაობა სიბრტყესთან ერთად. აჩქარებათა შეკრების თეორემას ამ შემთხვევაში აქვს სახე:



$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r \ .$$

გავითვალისწინოთ,რომ $a_e = a_0$. ნახაზიდან ვპოულობთ;

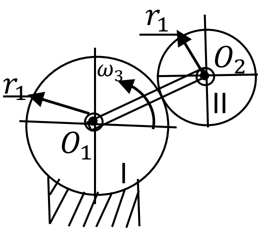
$$a = a_0 tg\alpha.$$

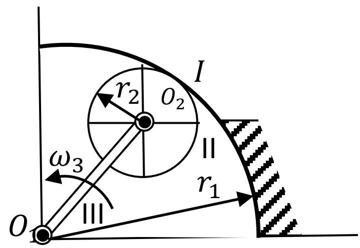
პასუხი: $a = a_0 tg\alpha$.

მყარი სხეულის რთული მოძრაობა

24. სხეულების მოძრაობების შეკრება

ამოცანა 24.1





მრუდმხარა III აერთებს I და II კბილა თვლების O_1 და O_2 ღერძებს. კბილანებს შორის მოდება შეიძლება იყოს როგორც შიგა, ასევე გარე მოდებაში ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. I თვალი უძრავია, ხოლო მრუდმხარა ბრუნავს O_1 ღერძის გარშემო ω_3 კუთხური სიჩქარით. ცნობილია თვლების რადიუსები r_1 და r_2 ცნობილია. იპოვეთ II კბილა თვალის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე ω_2 და კუთხური სიჩქარე ω_{23} მრუდმხარას მიმართ.

ამოხსნა

1) $\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_3}}{\boldsymbol{\omega_2-\omega_3}} = -\frac{r_2}{r_1}$; $\quad \frac{\omega_3}{\omega_2-\omega_3} = \frac{r_2}{r_1}$; $\quad \boldsymbol{\omega_3}\frac{\mathrm{r_1+r_2}}{\mathrm{r_1}} = \omega_2\frac{\mathrm{r_2}}{\mathrm{r_1}}$; $\omega_2 = \boldsymbol{\omega_3}\frac{\mathrm{r_1+r_2}}{\mathrm{r_2}}$;

$\omega_2 = \omega_3 + \omega_{23}$; $\omega_{23} = \omega_3 - \omega_2 = \omega_3\frac{r_1}{r_2}$.

2) $\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_3}}{\boldsymbol{\omega_2-\omega_3}} = \frac{r_2}{r_1}$; $\quad \frac{\omega_3}{\omega_2-\omega_3} = \frac{r_2}{r_1}$; $\quad \omega_2 = -\boldsymbol{\omega_3}\frac{\mathrm{r_1-r_2}}{\mathrm{r_2}}$; $\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3 = -\omega_3\frac{r_1}{r_2}$.

პასუხი: გარე მოდეის შემთხვევაში: $\omega_2 = \boldsymbol{\omega_3}\frac{\mathrm{r_1+r_2}}{\mathrm{r_2}}$; $\omega_{23} = \omega_3\frac{r_1}{r_2}$;

შიგა მოდების შემთხვევაში: $\omega_2 = -\boldsymbol{\omega_3}\frac{\mathrm{r_1-r_2}}{\mathrm{r_2}}$; $\omega_{23} = -\omega_3\frac{r_1}{r_2}$.

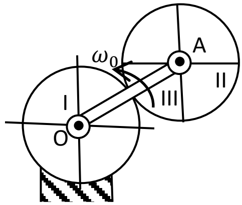
ამოცანა 24.2

იპოვეთ r რადიუსიანი კბილა თვალის აბსოლუტური და ფარდობითი კუთხური სიჩქარე, თუ ის გორავს იგივე რადიუსიან უძრავ კბილა თვალზე და მოძრაობაში მოჰყავს მრუდმხარას. მრუდმხარა

ბრუნავს უძრავი თვლის O ღერძის გარშემო ω_0 კუთხური სიჩქარით. მრუდმხარას მოძრაობა ჩათვალეთ გადატანითად.

ამოხსნა

ჩავთვალოთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე ω_0 გადარტანით სიჩქარედ და გამოვიყენოთ ვილისის ფორმულა, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში მიიღებს სახე:



$$\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega_2-\omega_0}=-\frac{r_1}{r_2},$$

სადაც “-„ ნიშანი შეესაბამება გარე მოდებას. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $r_1=r_2=r$ და $\omega_1=0$, მივიღებთ

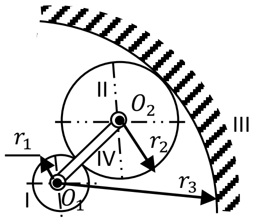
$$\omega_2=2\omega_0.$$

კუთხური სიჩქარე ω_{23}მრუდმხარას მიმართ უდრის $\omega_{23}=\omega_2-\omega_0=\omega_0$.

პასუხი: $\omega_2=2\omega_0;\ \omega_{23}=\omega_0$.

ამოცანა 24.3

მექანიზმი, რომელიც სწრაფად აბრუნებს სალეს ქვას,მოწყობილია შემდეგნაირად: ღერო 4 სახელურის საშუალებით ბრუნავს O1 ღერძის გარშემო ω_4 კუთხური სიჩქარით. ღეროს მეორე ბოლოზე დამაგრებულია თითი, რომელზეც თავისუფლად წამოცმულია r_2 რადიუსიანი თვალი 2. ეს უკანასკნელი უსრიალოდ გორავს r_3 რადიუსიან 3 უძრავ წრეწირზე. ამავე დროს 2 თვალი, ხახუნის ძალის გავლენით აბრუნებს r_1 რადიუსიან 1 თვალს, რომელიც თავისუფლად არის დასმული O1 ღერძზე და უცვლელად არის დაკავშირებული სალესი ქვის ღერძთან. გარე უძრავი წრეწირის რადიუსის მიხედვით იპოვეთ r_1 რადიუსი ისე, რომ შესრულდეს პირობა $\frac{\omega_1}{\omega_4}=12$. ანუ სალესი ქვა უნდა ბრუნავდეს 12-ჯერ სწრაფად, ვიდრე სახელური.



ამოხსნა

4 ღეროს ბრუნვა ჩავთვალოთ წარმტან მოძრაობად და გავითვალისწინოთ რომ 1 და 2 ბორბლები გარე მოდებაშია, ხოლო 2 და 3 - შიგა მოდებაში. ვილისის ფორმულის გამოყენებით გვექნება :

$$\frac{\omega_1-\omega_4}{\omega_2-\omega_4}=-\frac{r_2}{r_1} \tag{1}$$

$$\frac{\omega_2-\omega_4}{\omega_3-\omega_4}=-\frac{r_3}{r_2} \qquad (2)$$

გადავამრავლოთ (1) და (2) ტოლობები და მივიღებთ

$$\frac{\omega_1-\omega_4}{\omega_3-\omega_4}=\frac{r_3}{r_1},$$

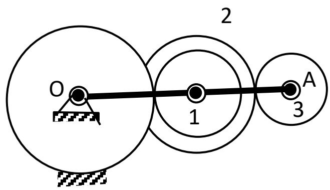
გავითვალისწინოთ, რომ $\omega_3=0$ და მივიღებთ:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4}=1+\frac{r_3}{r_1} \rightarrow r_1=\frac{1}{\frac{\omega_1}{\omega_4}-1}r_3=\frac{1}{12-1}r_3=\frac{1}{11}r_3.$$

პასუხი: $r_1=\frac{1}{11}r_3$.

ამოცანა 24.4

მრუდმხარა ბრუნავს უძრავი კბილანას O ღერძის გარშემო კუთხური სიჩქარით $n_0=30$ბრ/წთ და ამოძრავებს ორ კბილანას. კბილანების კბილთა რიცხვებია, შესაბამისად, $z_0=60, z_1=40, z_2=50$. იპოვეთ მესამე კბილანას (კბილთა რიცხვი $z_3=25$) ბრუნთა რიცხვი წუთში.



ამოხსნა

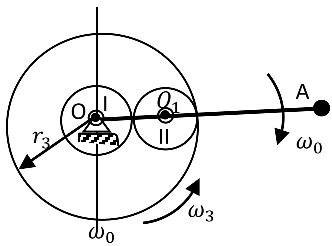
$$\frac{\mathrm{n}-\mathrm{n}_0}{n_3-n_0}=\frac{z_1}{z_0}\cdot\frac{z_3}{z_2};\ n=0;\ \frac{\mathrm{n}_0}{n_0-n_3}=\frac{z_1}{z_0}\cdot\frac{z_3}{z_2}; n_0-n_3=\mathrm{n}_0\cdot\frac{z_0\cdot z_2}{z_1z_3};$$

$$n_3=n_0\left(1-\frac{z_0\cdot z_2}{z_1z_3}\right)=30\cdot\left(1-\frac{60\cdot50}{40\cdot25}\right)=-60 \text{ ბრ/წთ}.$$

პასუხი: $n_3=n_0\left(1-\frac{z_0\cdot z_2}{z_1z_3}\right)=-60$ბრ/წთ .

ამოცანა 24.5

ეპიციკლურ მექანიზმში OA მატარი და ბორბალი 1, რომლის რადიუსია r_1, დასმულია თავისუფლად O ლილვზე. მეორე თვლის O_1 ღერძი დამაგრებულია მატარზე, ხოლო 3 თვალი, რომლის რადიუსია r_3 , თავისუფლად ბრუნავს O ღერძის გარშემო. იპოვეთ 1 თვლის კუთხური სიჩქარე ω_1, თუ მატარის კუთხური სიჩქარეა ω_0, ხოლო 3 თვალის კუთხური სიჩქარეა ω_3 და აქვს საპირისპირო მიმართულება .



ამოხსნა

ჩავთვალოთ მატარის კუთხური სსიჩქარე წარმტანად და გავითვალისწინოთ, რომ თვლები 1 და 2 გარე მოდებაშია, ხოლო 2 და 3 - შიგა მოდებაშია. ვილისის ფორმულის ძალით ვწერთ:

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega_2-\omega_0}=-\frac{r_2}{r_1} \tag{1}$$

$$\frac{\omega_2-\omega_0}{-\omega_3-\omega_0}=\frac{r_3}{r_2} \tag{2}$$

ნიშანი „-„ მიუთითებს, რომ ,მატარის კუთხურ სიჩქარეს აქვს ω_3 -ის საპირისპირო ნიშანი. გადავამრავლოთ (1) და (2) ტოლობები და მივიღებთ

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{-\omega_3-\omega_0}=-\frac{r_3}{r_1},$$

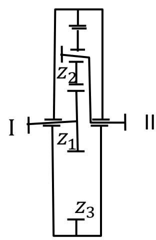
აქედან გვაქვს

$$\omega_1=\omega_0\left(1+\frac{r_3}{r_1}\right)+\frac{r_3}{r_1}\omega_3.$$

პასუხი: $\omega_1=\omega_0\left(1+\frac{r_3}{r_1}\right)+\frac{r_3}{r_1}\omega_3.$

ამოცანა 24.6

სიჩქარის რედუქტორი შედგება სამი კბილა თვალისაგან: პირველი თვალი (კბილთა რიცხვი $z_1=20$) დასმულია I წამყვან თვალზე , რომელიც აკეთებს $n_1=4600$ ბრ/წთ. მეორე ($z_2=25$) თავისუფლად არის დასმული მიმყოლ ლილვთან უძრავად დაკავშირებულ ღერძზე. მესამე თვალი ($z_3=70$) შიგა მოდებისაა და უძრავია. იპოვეთ მუმყოლი ლილვისა და მოძრავი თვლის ბრუნთა რიცხვი წუთში.



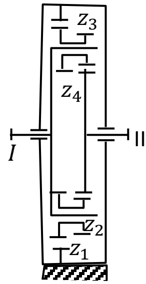
ამოხსნა

$$\frac{n_I-n_{II}}{n_3-n_{II}}=\frac{z_3}{z_1},\rightarrow\frac{n_I-n_{II}}{n_{II}}=-\frac{z_3}{z_1}\ \rightarrow\ n_{II}=\frac{1}{1+\frac{z_3}{z_1}}=1000 \text{ ბრ/წთ.}$$

$$\frac{n_2-n_{II}}{n_3-n_{II}}=\frac{z_3}{z_2}\ \rightarrow\ \frac{n_2-n_{II}}{-n_{II}}=\frac{z_3}{z_2}\ \rightarrow\ n_2=-n_{II}\left(\frac{z_3}{z_2}-1\right)=-1800 \text{ ბრ/წთ.}$$

პასუხი: n_{II} =1000 ბრ/წთ. $n_2=-1800$ ბრ/წთ.

ამოცანა 24.7



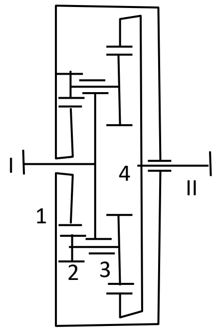
რედუქტორის წამყვანი ლილვი I აკეთებს $n_1 = 1200$ ბრ/წთ. იპოვეთ მიმყოლი ლილვის ბრუნთა რიცხვი წუთში, თუ უძრავ კბილა თვალს აქვს შიგა მოდება და კბილთა რიცხვი $z_1 = 180$ კბილს. მოძრავ კბილანებს, რომლებიც მოდებაში არიან ერთმანეთთან, აქვთ $z_1 = 60$, და $z_2 = 40$ კბილი. მიმყოლ ლილვზე დამაგრებულ კბილანას აქვს $z_4 = 80$ კბილი.

ამოხსნა

$\frac{n_1 - n_I}{n_{II} - n_I} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$; $n_I = 0$; $n_{II} - n_I = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$; $n_{II} = n_I \left(1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\right)$=3000ბრ/წთ.

პასუხი: n_{II} =3000ბრ/წთ.

ამოცანა 24.8



სიჩქარის რედუქტორი შედგება $r_1 = 40$ სმ რადიუსიანი უძრავი კბილანასაგან, ორი მოძრავი კბილანასაგან, რომელთა რადიუსებია: $r_2 = 20$ სმ, $r_3 = 30$ სმ და მოდებაში არიან ერთმანეთთან და შიგა მოდების კბილანასაგან , რომლის რადიუსია $r_4 = 90$ სმ და დასმულია მიმყოლ ლილვზე. წამყვანი ლილვი აკეთებს $n_1 = 1800$ ბრ/წთ. იპოვეთ მიმყოლი ლილვის ბრუნთა რიცხვი წუთში.

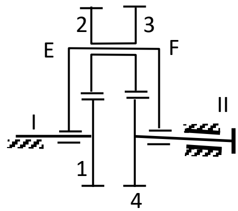
ამოხსნა

$$\frac{n_1 - n_I}{n_{II} - n_I} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3}; \; \frac{-n_I}{n_{II} - n_I} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3}; \; n_{II} - n_I = n_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4};$$

$$n_{II} = n_I \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) = 1800 \cdot \left(1 + \frac{40 \cdot 30}{20 \cdot 90}\right) = 3000 \text{ბრ/წთ.}$$

პასუხი: n_{II} =3000ბრ/წთ.

ამოცანა 24.9



პლანეტარულ გადაცემიანი სიჩქარეთა რედუქტორი შედგება უძრავ კბილანასაგან, რომელიც ხისტად არის დამაგრებულ;ი I ლილვზე, ჩარჩოსაგან, რომელიც თავისუფლად არის სასმული I და II ლილვებზე და ბრუნავს ω_p კუთხური სიჩქარით. და აგრეთვე ერთმანეთთან ხისტადა დამაგრებული 2 და 3 კბილანებისაგან. ეს კბილანები თავისუფლად ბრუნავენ EF ღერძის გარშემი. ეს ღერძი ჩარჩოსთან ერთად. კბილანა 4 ხისტად არის დამაგრებული II ლილვზე.იპოვეთ II ლილვის კუთხური სიჩქარის შეფარდება ჩარჩოს კუთხურ სიჩქარესთან.კბილანების რადიუსებია: $Z_1 = 49, Z_2 = 50, Z_3 = 51, Z_4 = 50$.

ამოხსნა

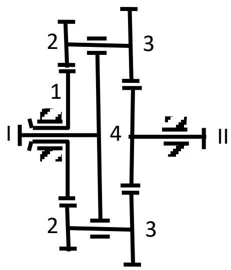
$$\frac{\omega_I - \omega_p}{\omega_{II} - \omega_p} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}; \quad \frac{\omega_p}{\omega_{II} - \omega_p} = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3};$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega_{II}}{\omega_p}} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}; \quad \mathbf{1} - \frac{\omega_{II}}{\omega_p} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4};$$

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_p} = 1 - \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} = \mathbf{1} - \frac{(50-1)(50+1)}{50^2} = \frac{1}{2500}.$$

პასუხი: $\frac{\omega_{II}}{\omega_p} = \frac{1}{2500}$.

ამოცანა 24.10



იპოვეთ დიფერენციალური მექანიზმის რედუქტორის მიმყოლი ლილვის კუთხური სიჩქარე ω_{II} თუ წამყვანი ლილვი მრუდმხარასთან ერთად ბრუნავს $\omega_I = 120$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. ბორბალი 1 ბრუნავს კუთხური სიჩქარით $\omega_1 = 180$ რად/წმ და აქვს $Z_1 = 80$ კბილი. მორბენალ ბორბლებს აქვთ კბილების რიცხვები : $Z_2 = 20$; $Z_3 = 40$. მიმყოლ ლილვზე დასმულ ბორბალს აქვს $Z_4 = 60$ კბილი. 1 თვალი და წამყვანი ლილვი ბრუნავენ ერთი მიმართულებით.

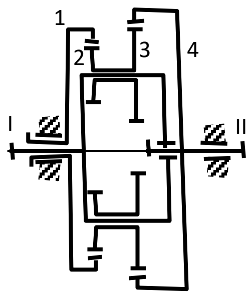
ამოხსნა

$$\frac{\omega_I - \omega_I}{\omega_{II} - \omega_I} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}; \; \omega_{II} - \omega_I = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2\, Z_4}(\omega_I - \omega_I);$$

$$\omega_{II} = \omega_I + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2\, Z_4}(\omega_I - \omega_I) = 120 + \frac{80\cdot 40}{20\cdot 60}(180 - 120)$$ =280 რად/წმ.

პასუხი: $\omega_{II} = 280$ რად/წმ.

ამოცანა 24.11



სიჩქარეთა რედუქტორი, დიფერენციალური გადაცემით, შედგება ოთხი კბილა თვლისგან: პირველი- შიგა გადაცემით- აკეთებს 160 ბრ/წთ და აქვს $Z_1 = 70$ კბილი. მეორე და მესამე შეწყვილებულია და დასმულია ღერძზე, რომელიც ბრუნავენ წამყვანი ლილვის ღერძის გარშემო მასთან ერთად და აკეთებს $n_I = 1200$ ბრ/წთ. კბილთა რიცხვებია: : $Z_2 = 20$, : $Z_3 = 30$. მეოთხე- შიგა მოდებით - აქვს $Z_4 = 80$ კბილი და დამაგრებულია მიმყოლ ლილვზე. იპოვეთ მიმყოლი ლილვის ბრუნთა რიცხვი წუთში, თუ I ლილვი და 1 კბილანა ბრუნავენ საპირისპირო მიმართულებით.

ამოხსნა

დავუშვათ, რომ II ლილვი ბრუნავს იგივე მიმართულებით, როგორც მატარი და მივიღებთ:

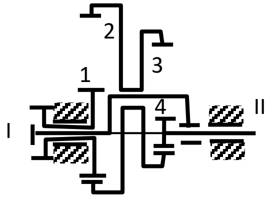
$$\frac{-n_1 - n_I}{-n_{II} - n_I} = \frac{Z_2\, Z_4}{Z_1 Z_3};$$

$$n_{II} + n_I = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2\, Z_4}(n_1 + n_I);$$

$$n_{II} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2\, Z_4}(n_1 + n_I) - n_I$$ =1585 ბრ/წთ.

პასუხი: $n_{II} = 1585$ ბრ/წთ.

ამოცანა 24.12



სიჩქარის რედუქტორს აქვს უძრავი კბილანა 1, ერთმანეთთან შეწყვილებული მოძრავი კბილანები 2 და 3 შიგა მოდებით და კბილანა 4 ,რომელიც წამოცმულია მომყოლ ლილვზე. იპოვთ მიმყოლი ლილვის ბრუნთა რიცხვი წუთში, თუ

კბილთა რიცხვებია: $Z_1 = 30, Z_2$ =80, $Z_3 = 70$, $Z_4 = 20$. წამყვანი ლილვი ბრუნავს კუთხური სიჩქარით $n_I = 1200$ ბრ/წთ.

ამოხსნა

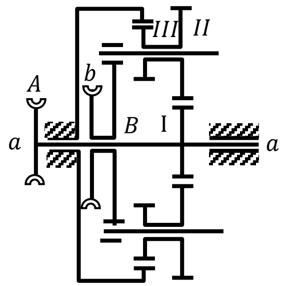
$$\frac{n_1 - n_I}{n_{II} - n_I} = \frac{Z_2\,Z_4}{Z_1 Z_3}; \quad \frac{n_I}{n_I - n_{II}} = \frac{Z_2\,Z_4}{Z_1 Z_3}; \; n_I - n_{II} = n_I \frac{Z_1 Z_3}{Z_2\,Z_4};$$

$$n_{II} = n_I\left(1 - \frac{Z_1 Z_3}{Z_2\,Z_4}\right) = -375 \text{ ბრ/წთ.}$$

პასუხი: $n_{II} = -375$ ბრ/წთ.

ამოცანა 24.13

„ტრიპლექსის“ სისტემის ბლოკში a-a ლილვზე ხისტად არის დასმული A ბლოკი. იგივე ლილვზე თავისუფლად არის დასმული b მილისა ამწე ჯაჭვი და ტვირთით, რომელიც ხისტად არის დაკავშირებული B სახელურთან. სახელურის თითოეულ თითზე თავისუფლად არის დასმული II და III კბილანა, რომლებიც შეწყვილებული არიან ერთმანეთთან. კბილანა II მოდებაშია კბილანა I-თან, რომელიც ხისტად არის დაკავშირებული a-a ლილვთან. კბილანა III მოდებაშია IV უძრავ კბილანასთან. იპოვეთ a-a ლილვისა და b მილისას კუთხური სიჩქარეების შეფარდება, თუ კბილანების კბილთა რიცხვებია: $Z_1 = 12, Z_2 = 28$, $Z_3 = 14, Z_4 = 54$.



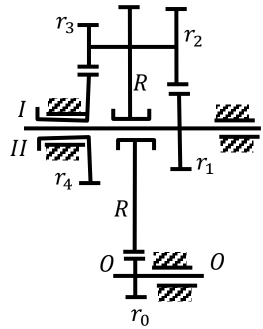
ამოხსნა

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_{\text{IV}} - \omega_b} = -\frac{Z_2\,Z_4}{Z_1 Z_3}; \; \omega_{\text{IV}} = 0; \; \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_b} = \frac{Z_2\,Z_4}{Z_1 Z_3}; \frac{\omega_a}{\omega_b} - 1 = \frac{Z_2\,Z_4}{Z_1 Z_3};$$

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = 1 + \frac{Z_2\,Z_4}{Z_1 Z_3} = 1 + \frac{28 \cdot 54}{12 \cdot 14} = 1 + 9 = 10.$$

პასუხი: $\frac{\omega_a}{\omega_b} = 10.$

ამოცანა 24.14



ცილინდრულ დიფერენციალში R რადიუსიანი კბილა თვალი თავისუფლად არის დასმული I – I ლილვზე და ატარებს r_2 და r_3 რადიუსიან კბილანებს, რომლებიც შეწყვილებული არიან ერთმანეთთან. კბილა თვალი R მოძრაობაში მოჰყავს r_0 რადიუსიან კბილანას. r_2 და r_3 რადიუსიანი კბილანები მოდებაში არიან r_1 და r_4 რადიუსებიან კბილანებთან, რომლებიც ხისტად არიან წამოცმული I – I და II ლილვებზე. II ლილვი დამზადებულია მილისას სახით. იპოვეთ II ლილვის კუთხური სიჩქარე თუ ცნობილია, რომ I – I და 0 – 0 ლილვების კუთხური სიჩქარეებია n_1 და n_0 .

ამოხსნა

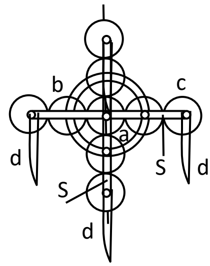
ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მატარი და ლილვი ბრუნავენ საპირისპირო მიმართულებით. ჩავთვალოთ I ლილვის ბრუნვა საათის ისრის საპირისპიროდ და ასევე იქნება II ლილვიც, ვილისის ფორმულით მივიღებთ

$$\frac{\mathrm{n_I+n_ð}}{\mathrm{n_{II}+n_ð}}=\frac{r_2\,r_4}{r_1 r_3};\ n_ð=n_0\frac{r_0}{R}\ ;$$

$$\mathrm{n_{II}}=(\mathrm{n_I}+\mathrm{n_ð})\frac{r_1 r_3}{r_2\,r_4}-\mathrm{n_ð}=\left(n_1+n_0\frac{r_0}{R}\right)\frac{r_1 r_3}{r_2\,r_4}-n_0\frac{r_0}{R}.$$

პასუხი: $\mathrm{n_{II}}=\left(n_1+n_0\frac{r_0}{R}\right)\frac{r_1 r_3}{r_2\,r_4}-n_0\frac{r_0}{R}.$

ამოცანა 24.15



კარტოფელია ასაღები მანქანის პლანეტარულ ამძრავში ცენტრალური კბილანა a, რომელიც მოძრაობს თავის ღერძთან ერთად თანაბრად და გადატანითად, პარაზიტული b კბილანას საშუალებით დაკავშირებულია მოძრავ c კბილანებთან, რიმელთა მილისაზე დამაგრებულია d ფრთები. b და c კბილანების ღერძები დასმულია S მატარზე, რომელიც ბრუნავს ცენტრალური კბილანას ღერძის გარშემო ω_0 კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ კბილანების

კუთხური სიჩქარეები და ფრთების მოძრაობის ხასიათი, თუ კბილანების რადიუსები ერთნაირია.

ამოხსნა

ვილისის ფორმულით გვექნება

$$\frac{\omega_a-\omega_0}{\omega_c-\omega_0}=1.\ \omega_a=0\ \rightarrow\ -\omega_0=\omega_c-\omega_0\rightarrow\omega_c=0.$$

ე.ი. c კბილანა მოძრაობს აბსოლუტურ მოძრაობაში გადატანითად.

ჩავწეროთ C წერტილის მოძრაობის განტოლებები აბსოლუტურ სისტემაში, მივიღებთ

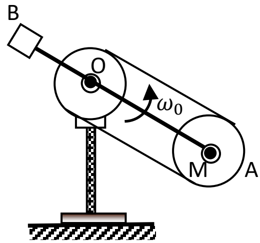
$$\begin{cases} x_c=V_0t+4rcos\omega_0t \\ y_c=y_0+4rsin\omega_0t\ . \end{cases}$$

ეს არის ციკლოიდას განტოლება პარამეტრული სახით.

პასუხი: $\omega_{\beta}=0$; ფრთები ასრულებენ გადატანით მოძრაობას ციკლოიდაზე კბილანების ცენტრებთან ერთად.

ამოცანა 24.16

OA მრუდმხარა B საპირწონესთან ერთად ბრუნავს უძრავიკბილანას O ღერძის გარშემო კუთხური სსიჩქარით $\omega_0=const$. მეორე ბოლოზე დამაგრებულია ისეთივე რადიუსის კბილანა, რომელზეც გადაცმულია ჯაჭვი. იპოვეთ მოძრავი კბილანას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება ,და აგრეთვე მისი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება თუ მრუდმხარას სიგრძე $OA=l$.



ამოხსნა

ვისარგებლოთ ვილისის თეორემით და გვექნება

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega-\omega_0}=1.\ \omega_1=0,\rightarrow\ -\omega_0=\omega-\omega_0\ \rightarrow\omega=0.$$

კბილანა ასრულებს გადატანით მოძრაობას.

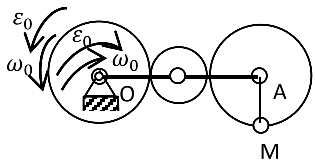
$$V_A=\omega_0l;\quad a_A=\omega_0^2l.$$

რადგან კბილანა ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ამიტომ მის ყველა წერტილს აქვს ერთნაი9რი სიჩქარე და აჩქარება, ანუ

$$V=V_A=\omega_0l\ ;\quad a=a_A=\omega_0^2l..$$

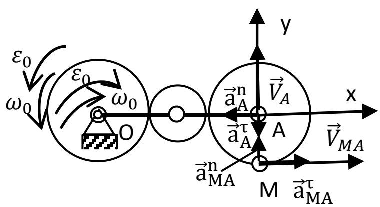
პასუხი: $\omega = 0. \varepsilon = 0$; კბილანა ასრულებს გადატანით მოძრაობას მის ცენტრთან ერთად და მისი სიჩქარე და აჩქარება, შესაბამისად, უდრის $V = V_A = \omega_0 l, a = a_A = \omega_0^2 l$.

ამოცანა 24.17



ეპიციკლურ გადაცემაშიწამყვანი კბილანა, რომლის რადიუსია R , ბრუნავს საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით ω_0 კუთხური სიჩქარით და ε_0 კუთხური აჩქარებით. მრუდმხარა, რომლის სიგრძეა 3 R, ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო საათის ბრუნვის მიმართულებით ისეთივე კუთხური სიჩქარით და კუთხური აჩქარებით. იპოვეთ R რადიუსიანი მიმყოლი კბილანას M წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, რომელიც მოცემულ მომენტში ძევს მრუდმხარას მართობული დიამეტრის ბოლოზე .

ამოხსნა



ვისარგებლოთ ვილისის თეორემით და ვიპოვოთ მიმყოლი კბილანას კუთხური სსსიჩქარე და კუთხური აჩქარება:

$\frac{\omega_0+\omega_0}{\omega+\omega_0} = \frac{R/2}{R} \cdot \frac{R}{R/2} = 1 \ \rightarrow \omega = \omega_0 \ \rightarrow$

$$\varepsilon = \varepsilon_0.$$

ჩავწეროთ განტოლება M წერტილისათვის

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} \ ,$$

აქედან ვპოულობთ

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2} = \sqrt{9R^2\omega_0^2 + R^2\omega_0^2} = R\omega_0\sqrt{10}.$$

ჩავწეროთ M წერტილის აჩქარების კომპონენტები:

$$a_x = a_{MA}^\tau - a_A^n = \varepsilon_0 R - 3\omega_0^2 R,$$

$$a_y = a_{MA}^n - a_A^\tau = \ \omega_0^2 R - 3\varepsilon_0 R,$$

$$a_x^2 = \varepsilon_0^2 R^2 - 6\varepsilon_0 R^2\omega_0^2 + 9R^2\omega_0^4,$$

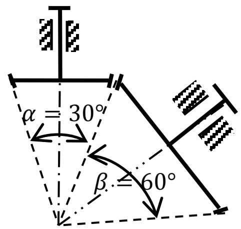
$$a_y^2 = 9\varepsilon_0^2 R^2 - 6\varepsilon_0 R^2\omega_0^2 + R^2\omega_0^4 \ .$$

$$a = \sqrt{10R^2(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\varepsilon_0 R^2\omega_0^2} = R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\varepsilon_0\omega_0^2}.$$

პასუხი: $a = \ R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\varepsilon_0\omega_0^2}.$

ამოცანა 24.18

მოცემულია ორი კონუსური კბილა თვალი, რომელთა ღერძები უძრავია, ხოლო შესაბამისი კუთხეებია α და β . პირველი თვალი ბრუნავს ω_1 კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ მეორე თვლის კუთხური სიჩქარე და გამოთვალეთ როცა: $\alpha = 30°, \beta = 60°, \omega_1 = 10$ ბრ/წთ.

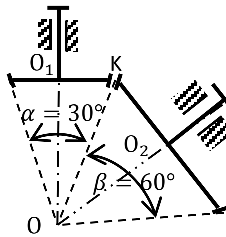


ამოხსნა

კონუსური კბილანებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (1)$$

$\Delta O_1OK \ \rightarrow r_1 = OKsin\frac{\alpha}{2}, \ \ \Delta\, O_2OK \ \rightarrow \ r_2 = OKsin\frac{\beta}{2}$.



ჩავსვათ (1) განტოლებაში და მივიღებთ

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\beta}{2}}.$$

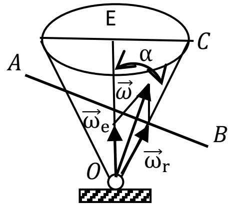
რიცხვითი გამოთვლის შედეგები მოგვცემს

$$\omega_2 = 10 \cdot \frac{sin15°}{sin30°} = 5\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 5{,}16 \text{ბრ/წთ}.$$

პასუხი: $\omega_2 = \omega_1 \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\beta}{2}} = 5{,}16$ბრ/წთ .

ამოცანა 24.19

კარუსელი წარმოადგენს AB წრიულ მოედანს, რომელიც ბრუნავს OC ღერძის გარშემო და აკეთებს $n_r = 6$ ბრ/წთ. თვითონ OC ღერძი ბრუნავს იგივე მიმართულებით ვერტიკალური OE ღერძის გარშემო და აკეთებს n_e=10ბრ/წთ. კუთხე ღერძებს შორის $\alpha = 20°$, AB მოედნის დიამეტრია d=10 მ. მანძილი OD=2 მ. იპოვეთ B წერტილის სიჩქარე იმ მომენტში, როცა მას უჭირავს ყველაზე ქვედა მდებარეობა.



ამოხსნა

$$\omega_r = \frac{\pi n_r}{30} = \frac{\pi}{5} = 0{,}628\, \text{წმ}^{-1}, \ \omega_e = \frac{\pi n_e}{30} = \frac{\pi}{3} = 1{,}047\text{წმ}^{-1}.$$

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 - 2\omega_e\omega_r cos(180° - \alpha)} = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 + 2\omega_e\omega_r cos\alpha} = 1{,}615 \text{ წმ}^{-1}.$$

$$\frac{\omega_0}{sin\gamma} = \frac{\omega}{sin160°} \rightarrow sin\gamma = \frac{\omega_0}{\omega_0} sin160° = 0{,}217 \rightarrow \gamma = 12{,}53°.$$

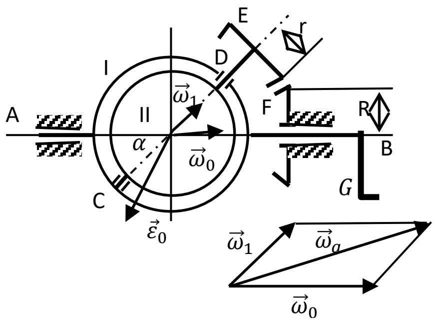
$$\sin\beta = \frac{DB}{\sqrt{OD^2+DB^2}} = 0{,}93 \rightarrow \beta = 68{,}2°, \sin(\beta + \gamma) = 0{,}99$$

$$V_B = \omega \cdot OB \cdot sin(\beta + \gamma) = 8{,}77 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_B = 8{,}77$ მ/წმ.

ამოცანა 24.20

სფერული დამქუცმაცებელი შედგება ღრუ ბირთვისაგან, რომლის შიგნით მოთავსებულია ბურთულები და დასაქუცმაცებელი მასალა. დამაგრებულია CD ღერძზე, რომელზეც ხისტად არის დამაგრებული კონუსური კბილა თვალი E, რომლის რადიუსია r. CD ღერძი ჩამაგრებულია საკისრებში, რომელიც 1 ჩარჩოზეა დამაგრებული. ეს ჩარჩო AB ღერძთან ერთად ქმნის ერთ მთლიანს და მოძრაობაში მოდის G სახელურის საშუალებით. E კბილანა მოდებაშია უძრავ F კბილანასთან, რომლის რადიუსია R. იპოვეთ დამქუცმაცებლის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე, თუ სახელური მოძრაობს მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_0. კუთხე AB და CD ღერძებს შორის არის α. იპოვეთ აგრეთვე დამქუცმაცებლის კუთხური აჩქარება.



ამოხსნა

ღრუ ბირთვი 2 მონაწილეობს ორ მოძრაობაში: ის სფერულ ჩარჩოსთან ერთად ბრუნავს AB ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით ω_0 და ასევე ბრუნავს CD ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით. სამართლიანია ტოლობა

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1.$$

აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე მიმართულია OF წრფის გასწვრივ, სადაც O არის $\vec{\omega}_0$ და $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარისვექტორების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო F არის წერტილი, სადაც E კონუსის წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია. გვაქვს

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{R}{r} \rightarrow \omega_1 = \omega_0 \frac{R}{r}.$$

ნახაზიდან ვწერთ

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1 cos\alpha} = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rrcos\alpha}.$$

აბსოლუტური კუთხური აჩქარება უდრის

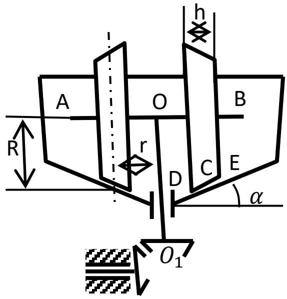
$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_1 \rightarrow \varepsilon_a = \omega_0\omega_0 \frac{R}{r} sin\alpha = {\omega_0}^2 \frac{R}{r} sin\alpha.$$

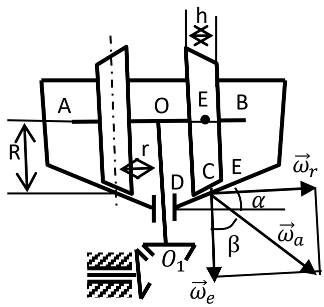
კუთხური აჩქარების ვექტორი მიმართულია $\vec{\omega}_0$ და $\vec{\omega}_1$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად იმ მხარეს, საიდანაც $\vec{\omega}_0$-ის მობრუნება $\vec{\omega}_1 -$ კენ უმცირესი კუთხით ცანს საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით.

პასუხი: $\omega_a = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rrcos\alpha}$; $\varepsilon_a = {\omega_0}^2 \frac{R}{r} sin\alpha.$

ამოცანა 24.21

მადნის გასუფთავებისთვის გამოიყენება მორბენალი ბორბლები, რომლებიც წარმოადგენენ თუჯის თვლებს ფოლადის ფერსოთი. ბორბლები გორავენ კონუსური ჩანის ფსკერზე, ბრუნავენ ჰორიზონტალური AOB ღერძის გარშემო, რომელიც ,თავისი მხრივ, ბრუნავს ვერტიკალური OO_1 ღერძის გარშემო და მასთან ერთად შეადგენს ერთ მთლიანს. იპოვეთ ბორბლის D და E წერტილების აბილუტური სიჩქარეები. ჩათვალეთ, რომ სიჩქარეთა მყისი ღერძი გადის ბორბლის ჩანის ზედაპირთან შეხების წრფის შუა C წერტილში. ვერტიკალური ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა $\omega_e = 1$რად/წმ. ბორბლის სისქეა $h = 0{,}5$ მ. ბორბლის საშუალო რადიუსია R=1 მ. ბრუნვის საშუალო რადიუსია r=0,6 მ , $tg\alpha = 0{,}2$.





ამოხსნა

მორბენალი ბორბალი ასრულებს რთულ მოძრაობას. ის შედგება ორი ბრუნვისაგან (საკუთარი ბრუნვა AOB ღერძის გარშემო ω_r კუთხური სიჩქარით და წარმტანი ბრუნვა OO_1 ღერძის გარშემო $\omega_e = 1$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით) გვაქვს სფერული მოძრაობა, რომლის უძრავი წერტილია O , ამიტომ ბრუნვის მყისი ღერძი ძევს OC წრფეზე. ამის გათვალისწინებით შეიძლება დავწეროთ

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

ნახაზიდან შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{cos\beta}.$$

$$\Delta OFC - დან \rightarrow tg\beta = \frac{OF}{CF} = \frac{r}{R}.$$

გავავლოთ D წერტილიდან OC წრფის DK მართობი. ΔDCK $-$დან გვაქვს

$$\angle KCD = \angle OCD = \pi - \left(\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta.$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $DC = h/2cos\alpha$, მივიღებთ

$$DK = DCsin\angle KCD = \frac{h}{2cos\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = \frac{hcos(\alpha-\beta)}{2cos\alpha} = \frac{h(cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta)}{2cos\alpha} = \frac{h}{2}(cos\beta + tg\alpha sin\beta).$$

$$V_D = \omega_a DK = \frac{\omega_e}{cos\beta} \cdot \frac{h}{2}(cos\beta + tg\alpha sin\beta) = \frac{\omega_e h}{2}(1 + tg\alpha tg\beta).$$

ჩავსვათ შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობები და მივიღებთ:

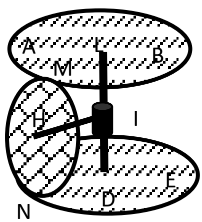
$$V_D = \frac{1 \cdot 0{,}5}{2}(1 + 0{,}6 \cdot 0{,}2) = 0{,}28 \text{ მ/წმ}.$$

რადგან D და E წერტილები სიმეტრიულია მყისი ღერძის მიმართ, ამიტომ მათი სიჩქარეები ერთმანეთის ტოლია.

$$V_E = V_D = 0{,}28 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი: $V_E = V_D = 0{,}28$ მ/წმ.

ამოცანა 24.22

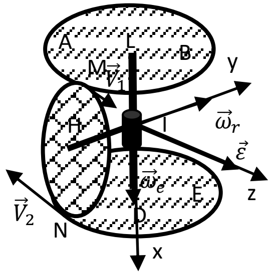


დიფერენციალური მექანიზმი შედგება ორი AB და DE დისკოსაგან, რომელთა ცენტრები მდებარეობენ საერთო ბრუნვის ღერძზე. ამ დისკოებს შორის ჩაჭედილია MN ბორბალი, რომლის ღერძი დისკოების ღერძის მართობულია.

იპოვეთ MN ბორბლის H ცენტრის V სიჩქარე და

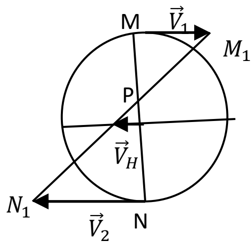
HI ღერძის გარშემო ბრუნვის ფარდობითი სიჩქარე , თუ ბორბლის დისკოსთან შეხების წერტილების სიჩქარეებია $V_1 = 3$ მ/წმ, $V_2 = 4$ მ/წმ, ბორბლის რადიუსია $r = 0{,}05$ მ.

ამოხსნა



ბორბლის რთული მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორ მდგენელად: საკუთარი ბრუნვა HI ღერძის გარშემო და ბრუნვა ამ ღერძთან ერთად IL ღერძის გარშემო. მისი ცენტრის სიჩქარე ვიპოვოთ ანტიპარალე-ლოგრამიდან რომელიც შედგება MN და M_1N_1 წრფეებისაგან, რომლებიც აერთებენ V_1 და V_2 სიჩქარეების ბოლო წერტილებს (იხ, ნახ.).

$$V_H = \frac{V_2 - V_1}{2} = \frac{4-3}{2} = 0{,}5\text{მ/წმ}.$$



ω_r კუთხური სიჩქარის საპოვნელად ვიპოვოთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, რომელიც არის MN და M_1N_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილი. ნახაზიდან ვწერთ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{PM}{PN} = \frac{r - PH}{r + PH} \to PH = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} r.$$

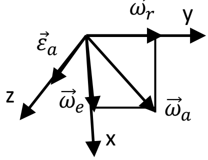
$$\omega_e = \frac{V_H}{PH} = \frac{V_2 + V_1}{2r} = 70 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $V_H = 0{,}5$მ/წმ; $\omega_e = 70$ რად/წმ.

ამოცანა 24.23

წინა ამოცანის პირობებში, თუ ვიცით, რომ HI=1/14 მ, ვიპოვოთ ბორბლის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე და აბსოლუტური კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა



ვიპოვოთ ბორბლის წარმტანი კუთხური სიჩქარე, როცა ის HI ღერძთან ერთად ბრუნავს HL ღერძის გარშემო

$$\omega_e = \frac{V_H}{HI} = \frac{0{,}5}{1/14} = 7 \text{ რად/წმ}.$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$$

რადგან $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}_r$ ამიტომ ნახაზიდან ვწერთ

$$\omega_e \sqrt{7^2 + 70^2} = \sqrt{4949} \text{ რად/წმ} .$$

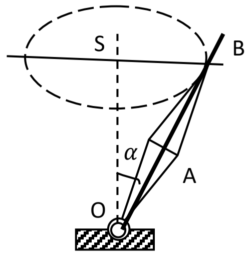
აბსოლუტური კუთხური აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ ბურის ფორმულით, რომელიც მუდმივი აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \ .$$

$$\varepsilon_a = \omega_e \omega_r sin90° = 490 \text{ რად/წმ}^2.$$

პასუხი: $\omega_e = \sqrt{4949}$ რად/წმ ; $\varepsilon_a = 490$ რად/წმ^2.

ამოცანა 24.24



ბზრიალა ბრუნავს თავისი სიმეტრიის OB ღერძის გარშემო მუდმივი ω_1 კუთხური სიჩქარით. OB ღერძი შემოწერს კონუსს თანაბრად. ერთ წუთში ბზრიალა აკეთებს n ბრუნს. $\angle BOS = \alpha$. იპოვეთ ბზრიალას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება.

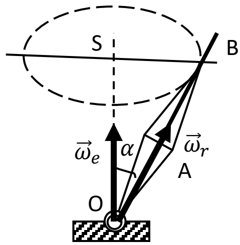
ამოხსნა

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_1, \omega_e = \frac{\pi n}{30}.$$

კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვწერთ

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 + 2\omega_e\omega_r cos\alpha} = \sqrt{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + 2\omega_1 \frac{\pi n}{30} cos\alpha};$$

კუთხური აჩქარების განმარტებიდან გამომდინარე ვწერთ



$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_r}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{\tilde{d}\vec{\omega}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \ .$$

რადგან $\vec{\omega}_e = const$ და $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 = const.$ ამიტომ

$$\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = 0; \ \frac{\tilde{d}\vec{\omega}_r}{dt} = 0 \ .$$

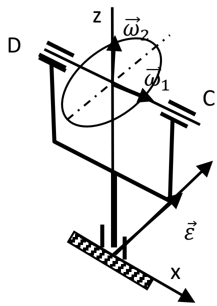
მასასადამე

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_1; \ \varepsilon = \omega_e \omega_1 \sin\alpha = \frac{\pi n}{30} \omega_1 \sin\alpha.$$

პასუხი: $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + 2\omega_1 \frac{\pi n}{30} cos\alpha}; \varepsilon = \frac{\pi n}{30} \omega_1 \sin\alpha.$

ამოცანა 24.25

წრიული დისკო ბრუნავს ჰორიზონტალური CD ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით. ამავე დროს CD ღერძი ბრუნავს დისკოს O ცენტრზე გამავალი ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო ω_2 კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ დისკოს მყისი კუთხური სიჩქარის და მყისი კუთხური აჩქარების სიდიდე და მიმართულება. თუ $\omega_1 = 5$რად/წმ, ω_2=3 რად/წმ.



ამოხსნა

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \ .$$

რადგან $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$ ამიტომ

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{34} = 5{,}83 \ .$$

$$cos\alpha = \frac{\omega_1}{\omega} = 0{,}51 \ \rightarrow \alpha = 59°; \ \ cos\beta = \frac{\omega_2}{\omega} = 0{,}86 \ \rightarrow \beta = 31°;$$

სადაც α *და* β შესაბამისად x და y ღერძებთან შედგენილი კუთხეებია.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 \ \rightarrow \ \varepsilon = \omega_1\omega_2 = 15 \text{ რად/წმ}^2.$$

ვექტორი $\vec{\varepsilon}$ მიმართულია y ღერძის გასწვრივ.

პასუხი: $\omega = 5{,}83$ და x და y ღერძებთან ადგენს, შესაბამისად $\alpha = 59°$ და $\beta = 31°$ კუთხეებს. $\varepsilon = 15$ რად/წმ^2. ვექტორი $\vec{\varepsilon}$ მიმართულია y ღერძის გასწვრივ.

ამოცანა 24.26

R რადიუსიანი დისკო ბრუნავს ჰორიზონტალური O_1O_2 ღერძის გარშემო ω_r კუთხური სიჩქარით. თვითონ ეს ღერძი ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო ω_e კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ დისკოს ვერტიკალურ დიამეტრზე მდებარე A და B წერტილების სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

ვისარგებლოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემით

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{eA} + \vec{V}_{rA}.$$

$$\vec{V}_{eA} = \vec{\omega}_e \times \vec{r}_A = 0 \text{ (რადგან } \vec{\omega}_e \parallel \vec{r}_A \text{).}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{rA} \ \rightarrow \ \mathrm{V_A} = \omega_r \ \mathrm{R}.$$

B წერტილის შემთხვევაშიც მივიღებთ იგივეს $\mathrm{V}_B = \omega_r \ \mathrm{R}$.

ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_\mathrm{e} \times \vec{\omega}_\mathrm{r} \ \rightarrow \varepsilon = \omega_\mathrm{e} \ \omega_\mathrm{r}.$$

$$sin\alpha = \frac{\omega_r}{\sqrt{\omega_e^2+\omega_r^2}} \ ; \ \ cos\alpha = \frac{\omega_e}{\sqrt{\omega_e^2+\omega_r^2}}.$$

ჩავწეროთ A წერტილის აჩქარება შემდეგი სახით :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{ბრ} + \vec{a}_{ღერძ}, \qquad (1)$$

სადაც

$$a_{ბრ} = \varepsilon R = \omega_\mathrm{e} \ \omega_\mathrm{r}\mathrm{R}, \ \ a_{ღერძ} = \omega^2 R sin\alpha = R\omega_\mathrm{r}\sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2}.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და მივიღებთ

$$a_{Ax} = a_{ბრ} + a_{ღერძ}cos\alpha = 2R\omega_\mathrm{e} \ \omega_\mathrm{r}, \ \ a_{Ay} = a_{ღერძ}sin\alpha = R\omega_r^2.$$

$$a_A = \sqrt{(a_{ბრ})^2 + \left(a_{ღერძ}\right)^2} = R\omega_\mathrm{r}\sqrt{4\omega_\mathrm{e}^2 + \omega_\mathrm{r}^2}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ B წერტილის შემთხვევაში.

პასუხი: $\mathrm{V_A} = \mathrm{V}_B = \omega_r \ \mathrm{R}; a_A = a_B = \ R\omega_\mathrm{r}\sqrt{4\omega_\mathrm{e}^2 + \omega_\mathrm{r}^2}$.

ამოცანა 24.27

კვადრატული ჩარჩო ბრუნავს AB ღერძის გარშემო და აკეთებს $n_e =$ 2ბრ/წთ. ჩარჩოს BC დიაგონალის გარშემო ბრუნავს დისკო და აკეთებს $n_r = 2$ ბრ/წთ. იპოვეთ დისკოს აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა

$$\omega_r = \frac{\pi n_r}{30} = 0{,}209 \text{ რად/წმ},$$

$$\omega_e = \frac{\pi n_e}{30} = 0{,}209 \text{ რად/წმ},$$

$$\varepsilon = \omega_r \omega_e sin135° = 0{,}031 \text{ რად/წმ}^2,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 + 2\omega_e\omega_r cos45°} = \sqrt{2\omega_e^2 + 2\omega_e^2 cos45°} = 2\omega_r cos22{,}5° = 0{,}39\text{რად/წმ}.$$

პასუხი: $\varepsilon = 0{,}031$ რად/წმ²; $\omega = 0{,}39$რად/წმ.

ამოცანა 24.28

წისქვილის მორბედის ღერძი OA ბრუნავს თანაბრად ვერტიკალური Oz ღერძის გარშემო Ω კუთხური სიჩქარით. ღერძის სიგრძე OA=R. მორბედის რადიუსია AC=r. ჩათვალეთ, რომ მორბედის C წერტილს

მოცემულ მომენტში აქვს ნულის ტოლი სიჩქარე. განსაზღვრეთ: მორბედის კუთხური სიჩქარე ω, მყისი ღერძის მიმართულება, უძრავი და მოძრავი აქსოიდები.

ამოხსნა

მორბედის მოძრაობა წარმოვიგინოთ როგორც ორი მოძრაობის ერთობლიობა: ბრუნვა z ღერძის გარშემო კუთხური სიჩქარით $\vec{\omega}_e = \vec{\Omega}$ და ბრუნვა z' ღერძის გარშემო $\vec{\omega}_r$ კუთხური სიჩქარით. გვაქვს ურთიერთგადამკვეთი ღერძების გარშემო ბრუნვა, ამიტომ აბსოლუტური კუთხური აჩქარება უდრის

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \ .$$

გავითვალისწინოთ, რომ მყისი ღერძი გადის OC წრფეზე და მოცემული შემთხვევა გეომეტრიულად წარმოვადგინოთ ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. ΔOAC-დან ვწერთ

$$sin\alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}};\ \omega_a = \frac{\omega_e}{sin\alpha} = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}\ \Omega.$$

OC წრფის წერტილები არიან მყისი ღერძის წერტილები და მათი სიჩქარეები ნულის ტოლია. მოძრავი აქსოიდა არის კონუსური ზედაპირი, რომელსაც აღწერს OC მონაკვეთი მოძრავ zOz' სისტემაში. კონუსის წვეროა O წერტილი, ხოლო გაშლის კუთხე უდრის

$$\alpha = arctg\frac{r}{R}.$$

უძრავ სისტემაში OC მონაკვეთი აღწერს კონუსურ ზედაპირს, რომლის წვეროა O წერტილი, ხოლო გაშლის კუთხეა

$$\beta = arctg\frac{R}{r} = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{r}{R}.$$

პასუხი: $\omega_a = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}\ \Omega$; მყისი ღერძია OC წრფე; აქსოიდებია კონუსები , რომლის წვეროა O წერტილი. მოძრავი აქსოიდის გაშლის კუთხეა $z'OC$ და უდრის $arctg\frac{r}{R}$. უძრავი აქსოიდის გაშლის კუთხეა zOC და უდრის $\frac{\pi}{2} - arctg\frac{r}{R}$.

ამოცანა 24.29

დიფერენციალური მექანიზმი შედგება IV მრუდმხარაზე დასმული III კბილა თვალისაგან (სატელიტი). მრუდმხარა ბრუნავს უძრავი CD ღების გარშემო. სატელიტი აერთებს ორ კონუსურ კბილა თვალს I და II, რომლებიც ბრუნავენ იგივე CD ღერძის გარშემო, შესაბამისად, $\omega_1 = 5\frac{რად}{წმ}$,

$\omega_2 = 3\frac{რად}{წმ}$. ამასთან ბრუნვა ხდება ერთ მხარეს. სატელიტის რადიუსი r=2 სმ, ხოლო I და II თვლების რადიუსია R=7 სმ. იპოვეთ IV კუთხური სიჩქარე ω_4 , სატელიტის კუთხური სიჩქარე მრუდმხარას მიმართ ω_{34} და A წერტილის სიჩქარე.

ამოხსნა

დავუშვათ, რომ ბორბალი ბრუნავს ისე, რომ სატელიტის ცენტრი ბრუნავს მკითხველისკენ. ნახაზიდან ვწერთ:

$$V_A = \frac{V_1+V_2}{2} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}R = 0{,}28 \text{ მ/წმ}.$$

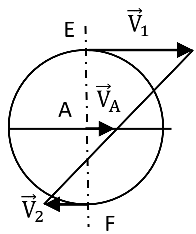
$$\omega_4 = \frac{V_A}{R} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = 4 \text{ რად/წმ}.$$

ვიპოვოთ სატელიტის კუთხური სიჩქარე მრუდმხარას მიმართ

$$\begin{cases} V_1 = V_A + \omega_{34}r \\ V_2 = V_A - \omega_{34}r \end{cases} \rightarrow V_1 - V_2 = 2\omega_{34}r \rightarrow \omega_{34} = \frac{V_1-V_2}{2r} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\frac{R}{r} = 3{,}5 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $V_A = 0{,}28$ მ/წმ; $\omega_4 = 4$ რად/წმ; $\omega_{34} = 3{,}5$ რად/წმ.

ამოცანა 24.30



წინა ამოცანაში განხილულ დიფერენციალურ მექანიზმში I და II კბილანები ბრუნავენ საპირისპირო მიმართულებით კუთხური სიჩქარით $\omega_1 = 7$ *რად/წმ*. $\omega_2 = 3$ *რად/წმ*. იპოვეთ V_A , ω_4 და ω_{34}, თუ $R = 5$სმ, $r = 2{,}5$ სმ.

ამოხსნა

24.22 და 24.29 ამოცანის ანალოგიურად

$$V_A = \frac{V_1-V_2}{2} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}R = 10 \text{ სმ/წმ} = 0{,}1 \text{მ/წმ}.$$

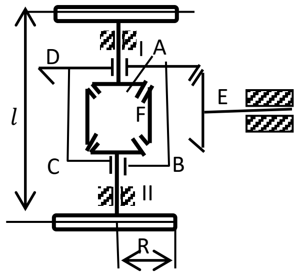
$$\omega_4 = \frac{V_A}{R} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = 2 \text{ რად/წმ}.$$

$$\begin{cases} V_1 = V_A + \omega_{34}r \\ V_2 = -V_A + \omega_{34}r \end{cases} \rightarrow V_1 + V_2 = 2\omega_{34}r \rightarrow \omega_{34} = \frac{V_1+V_2}{2r} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\frac{R}{r} = 10$$

რად/წმ.

პასუხი: V_A =0,1მ/წმ; ω_4 =2 რად/წმ; ω_{34} =10 რად/წმ.

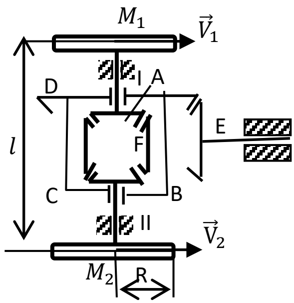
ამოცანა 24.31



ავტომობილის გზის მრუდწირულ ტრაექტორიაზე მოძრაობისას მისი გარე ბორბალი, რომელიც მეტ გზას გადის ვიდრე შიგა ბორბალი, ბრუნავს უფრო სწრაფად ვიდრე შიგა ბორბალი. იმოსატვის ,რომ უკანა ღერძი არ გატყდეს, იყენებენ კბილანა გადაცემას, რომელსაც დიფერენციალი ჰქვია და მოწყობილია შემდეგნაირად.

უკანა ღერძი, რომელზეც დამაგრებულია ბორბლები, დამზადებულია ორი განცალკევებული ნაწილისაგან I და II, რომლის ბოლოებზე ხისტად არის დამაგრებული ორი ერთნაირი კბილანა A და B. ლილვის ამ ნაწილებზე თავისუფლად ბრუნავს C კოლოფი მასზე ხისტად დამაგრებულ კონუსურ D კბილანასთან ერთად. კოლოფი ბრუნვით მოძრაობაში მოდის ძრავიდან გამომავალი მთავარი ღერძის მიერ E კბილანას საშუალებით.

C კოლოფის ბრუნვა გადაეცემა A და B კბილანებს ორი კონუსური კბილანის (სატელიტები) საშუალებით. სატელიტები თავისუფლად ბრუნავენ კოლოფში, ავტომობილის ღერძის მართობულად, დამაგრებული ღერძის გარშემო.



იპოვეთ ავტომობილის უკანა ბორბლების კუთხური სიჩქარეები, როგორც C კოლოფის კუთხური სიჩქარის ფუნქცია და სატელიტების ფარდობითი კუთხური სიჩქარე ω_r , თუ ავტომობილი მოძრაობს V=36 კმ/სთ სიჩქარით მომრგვალებაზე, რომლის რადიუსია ρ =5 მ; უკანა ბორბლის რადიუსია R=0,5 მ, მათ შორის მანძილი l =2 მ; A და B კბილანების რადიუსები ორჯერ მეტია სატელიტების რადიუსებზე $R_0 = 2r$.

ამოხსნა

მომრგვალებაზე ავტომობილის მოძრაობის დროს ავტომობილის გარე ბორბალი უფრო სწრაფად ბრუნავს ვიდრე შიგა ბორბალი,

შესაბამისად, გარე ბორბლის M_2 ცენტრის სიჩქარე მეტია შიგა ბორბლის M_1 ცენტრის სიჩქარეზე $V_2 > V_1$. ნახაზიდან გვაქვს

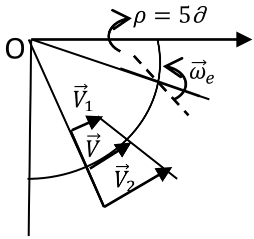
$$\omega_e = \frac{V}{\rho};$$

$$V_1 = V - \omega_e \frac{l}{2} = V - V\frac{l}{2\rho};$$

$$V_2 = V + \omega_e \frac{l}{2} = V + V\frac{l}{2\rho};$$

$$\omega_A = \omega_1 = \frac{V_1}{R} = \left(1 - \frac{l}{2\rho}\right)\frac{V}{R} = 16\text{რად/წმ};$$

$$\omega_B = \omega_2 = \frac{V_1}{R} = \left(1 + \frac{l}{2\rho}\right)\frac{V}{R} = 24\text{რად/წმ};$$



აქ გათვალისწინებული იყო რომ 36 კმ/სთ=10მ/წმ. ნახ . ბ- დან სიჩქარეებისათვის შეიძლება დავწეროთ

$$\begin{cases} V_4 = V_C + \omega_r r \\ V_3 = V_C - \omega_r r \end{cases} \rightarrow \ \omega_r = \frac{V_4 - V_3}{2r}.$$

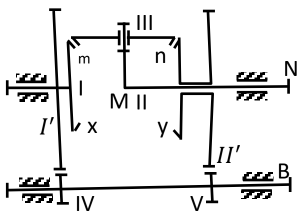
ჩავსვათ ω_r -ის მნიშვნელო

ბაში $V_4 = \omega_2 R_0, V_3 = \omega_1 R_0$ და მივიღებთ:

$$\omega_r = (-\omega_1 + \omega_2)\frac{R_0}{2r} = \omega_2 - \omega_1 = 24 - 16 = 8 \text{ რად/წმ}.$$

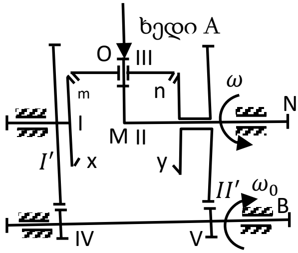
პასუხი: $\omega_A = 16$რად/წმ; $\omega_B = 24$რად/წმ; $\omega_r = 8$ რად/წმ.

ამოცანა 24.32



დიფერენციალური მექანიზმის გამოყენების დროს AB და NM ღერძებს შორის ბრუნთა რიცხვის მოცემული შეფარდების მისაღებად I და II კბილა თვლებზე ხისტად არის დამაგრებული I’ და II’ კბილა თვლები, რომლებიც თავის მხრივ მოდებაში არიან IV და V კბილანებთან. ეს კბილანები ხისტად არიან დამაგრებული AB ღერძზე. იპოვეთ AB და MN ღერძების ω_0 და ω კუთხურ სიჩქარეებს შორის თანაფარდობა , თუ I და II თვლების რადიუსები ერთნაირია. I’, II’, IV და V კბილანების კბილთა რიცხვებია, შესაბამისად, m, n, x, y.

ამოხსნა



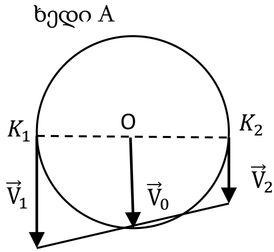
ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$r_I = r_{II} = OM = r\ . \qquad (1)$$

I’, II’ და AB თვლების კუთხურ სიჩქარეებს შორის თანაფარდობები ასე ჩაიწერება.

$$\frac{\omega_{I'}}{\omega_0} = \frac{x}{m}\ ; \quad \frac{\omega_{II'}}{\omega_0} = \frac{y}{n}.$$

თუ გავითვალისქინებთ, რომ $\omega_{I'} = \omega_I$ და $\omega_{II'} = \omega_{II}$, (1) განტოლებიდან მივიღებთ:



$$V_1 = \omega_I r_I = \frac{x}{m}\omega_0 r;$$

$$V_2 = \omega_{II} r_{II} = \frac{y}{n}\omega_0 r;$$

ნახ. ა - დან → $V_0 = \frac{V_1+V_2}{2} = \frac{\omega_0 r}{2}\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right)$

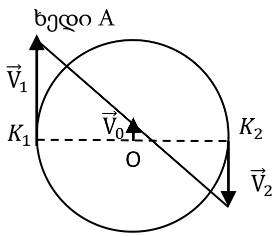
$$\omega = \frac{V_0}{OM} = \frac{\omega_0 r}{2r}\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right).$$

აქედან გამომდინარე ვიპოვით საძიებელ შეფარდებას

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right).$$

პასუხი : $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right)$.

ამოცანა 24.33



წინა ამოცანაში განხილულ დიფერენციალურ მექანიზმში I’ და IV კბილა თვლებს შორის ჩასმულია უძრავი ღერძის მქონე პარაზიტული ბორბალი. ამოცანის ყველა დანარჩენი პირობა უცვლელად რჩება. იპოვეთ AB და MN ლილვების ω_0 და ω კუთხურ სიჩქარეებს შორის თანაფარდობა.

ამოხსნა

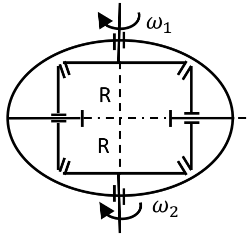
პარაზიტული ბორბლის არსებობა განაპირობებს იმას, რომ V_1 სიჩქარე რცება ისეთივე, მაგრამ საპირისპირო მიმართულებით (ნახ. ა). შედეგად მივიღებთ

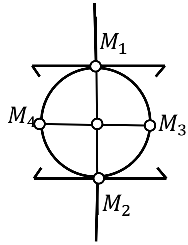
$$V_0 = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{\omega_0 r}{2}\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right),$$

$$\omega = \frac{V_0}{OM} = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right); \rightarrow \ \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right).$$

პასუხი: $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right)$.

ამოცანა 24.34





დიფერენციალური მექანიზმი, რომელიც აერთებს უკანა ღერძის ორ ნაწილს, შედგება ორი ერთნაირი R=6 სმ რადიუსიანი კბილანისაგან, რომლებიც დასმულია ნახევარღერძებზე, რომლებიც მოსახვევში ბრუნავენ სხვადსხვა, მაგრამ მუდმივი ერთმხრივ კუთხური სიჩქარეებით $\omega_1 = 6$ რად/წმ და $\omega_2 = 4$ რად/წმ . კბილანებს შორის ჩასმულია ღერძზე თავისუფლად დასმული მორბენალი სატელიტი, რომლის რადიუსი r=3 სმ. სატელიტის ღერძი ხისტად არის ჩამაგრებული გარსაცმში და ბრუნავს მასთან ერთად ავტომობილის ღერძთან ერთად. იპოვეთ ავტომობილის კორპუსის მიმართ სატელიტის ურთიერთმართობული დიამეტრების ბოლო M_1,M_2,M_3 *და* M_4 წერტილების აჩქარებები.

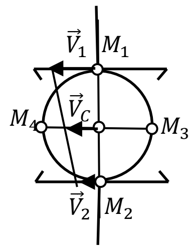
ამოხსნა

24.29, 24.31, და24.32 ამოცანების ანალოგიურად მივიღებთ

$V_1 = \omega_1 r_1 = 6 \cdot 6 = 36$ სმ/წმ =0,36 მ/წმ, $V_2 = \omega_{II} r_{II} = 4 \cdot 6 = 24$ სმ/წმ=*0,24* მ/წმ .

$$V_C = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}R; \quad \omega_r = \frac{V_1 - V_2}{2r} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2r}R = 2\text{რად/წმ};$$

$$\omega_e = \frac{V_C}{R} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 5 \text{ რად/წმ}.$$



სატელიტი მონაწილეობს ორ მოძრაობაში: V_C სიჩქარით ბრუნვა AB ღერძის გარშემო და ω_r კუთხური სიჩქარით C წერტილის გარშემო. აჩქარებათა შეკრების თეორემის ძალით, გვაქვს

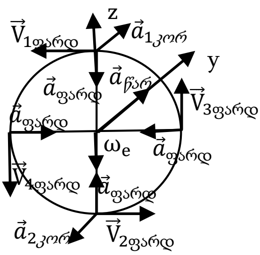
$$\vec{a}_{აბს} = \vec{a}_{წარ} + \vec{a}_{ფარდ} + \vec{a}_{კორ.} \quad (1)$$

აქ შესაბამისი აჩქარებები გამოითვლება ფორმულებით :

$$a_{ფარდ} = \omega_r^2 r = \frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{4} \cdot \frac{R^2}{r} = 12 \text{ სმ/წმ}^2 = 0{,}12 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_{1,2წარ} = \frac{V_C^2}{R} = \frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{4} R = 150 \text{ სმ/წმ}^2 = 1{,}5 \text{ მ/წმ}^2.$$

ნახაზზე $\vec{a}_{წარ}$ მიმართულია C წერტილიდან AB ღერძისკენ. ჩავთვალოთ, რომ Cx ღერძი მიმართულია C წერტილიდან ჩვენსკენ. ნახ.ბ - დან ჩანს M_3 და M_4 წერტილების სიჩქარეები მიმართულია $\vec{\omega}_e$ ვექტორის პარალელურად. ეს ნიშნავს, რომ $\vec{a}_{კორ.} = 0$. მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ



$$a_3 = a_4 = \sqrt{{a_{ფარდ}}^2 + {a_{1,2წარ}}^2 + 2a_{წარ}a_{ფარდ} \cdot cos(a_{ფარდ}\hat{,}\, a_{წარ})} = 1{,}734 \text{ მ/სმ}^2.$$

M_1 და M_2 წერტილებისათვის

$$a_{1კორ} = 2\omega_e V_{1ფარდ} sin90° = 2\omega_e\omega_r = 0{,}6 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_{2კორ} = 2\omega_e V_{2ფარდ} sin90° = 2\omega_e\omega_r = 0{,}6 \text{ მ/წმ}^2,$$

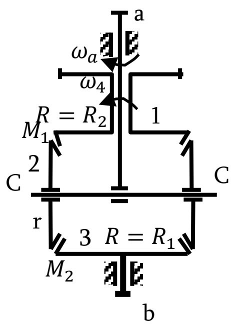
$$a_1 = \sqrt{{a_{ფარდ}}^2 + \left(a_{წარ} + a_{1კორ}\right)^2} = 2{,}1 \text{მ/წმ}^2,$$

$$a_2 = \sqrt{{a_{ფარდ}}^2 + \left(a_{წარ} - a_{2კორ}\right)^2} = 0{,}9 \text{მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a_1 = 2{,}1$მ/წმ², $a_2 = 0{,}9$მ/წმ², $a_3 = a_4 = 1{,}734$ მ/სმ².

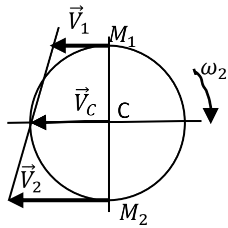
ამოცანა 24.35.

კბილანების საჭრლელი ჩარხის ამჩქარებელი ბორბალი 4 მასზე ხისტად გამაგრებული I კბილანასთან ერთად თავისუფლად არის დასმული წამყვან ლილვზე. წამყვანი a ლილვის ბოლოზე დასმულია თავაკი, რომელიც ატარებს 2-2 სატელიტის CC ღერძს. იპოვეთ მიმყოლი b ლილვის კუთხური სიჩქარე ხუთ შემთხვევაში:



1) წამყვანი ლილვის კუთხური სიჩქარეა ω_a, ხოლო ამჩქარებლის კუთხური სიჩქარე ω_4=0.

2) წამყვანი ლილვის კუთხური სიჩქარეა ω_a, ამჩქარებელი ბორბალი ბრუნავს იგივე მიმართულებით, როგორც წამყვანი ლილვი და მისი კუთხურ სიჩქარეა ω_4.



3) ამჩქარებელი ბორბალი და წამყვანი ლილვი ბრუნავენ ერთი მიმართილებით და ω_a=ω_4.

4) ამჩქარებელი ბორბალი და წამყვანი ლილვი ბრუნავენ ერთი მიმართილებით და $2\omega_a$=ω_4.

5) წამყვანი ლილვის კუთხური სიჩქარეა ω_a , ამჩქარებელი ბორბალი ბრუნავს საპირისპირო მიმართულებით, როგორც წამყვანი ლილვი და მისი კუთხურ სიჩქარეა ω_4.

ამოხსნა

აღვნიშნოთ $R_1 = R_3 = R$. 24.29, 24.31 და 24.34 ამოცანების ანალოგიურად

$$V_1 = \omega_4 R;\ V_C = \omega_a R;\ \ V_1 = V_C - \omega_2 r\ \rightarrow\ \omega_2 = \frac{V_C - V_1}{2};$$

$$V_2 = V_C + \omega_2 r = 2V_c - V_1\,; \quad \omega_b = 2\omega_a - \omega_4.$$

საბოლოოდ მოცემული ხუთი შემთხვევისათვის მივიღებთ:

1) $\omega_4 = 0\ \rightarrow \omega_b = 2\omega_a$; 2) $\omega_4 > 0\ \rightarrow \omega_b = 2\omega_a - \omega_4$; 3) $\omega_4 = \omega_a\ \rightarrow\ \omega_b = \omega_a$;

4) $\omega_4 = 2\omega_a\ \rightarrow\ \omega_b = 0$; 5) $\omega_4 < 0\ \rightarrow \omega_b = 2\omega_a + \omega_4$.

პასუხი: 1) $\omega_b = 2\omega_a$; 2) $\omega_b = 2\omega_a - \omega_4$; 3) $\omega_b = \omega_a$; 4) $\omega_b = 0$; 5) $\omega_b = 2\omega_a + \omega_4$.

ამოცანა 24.36

წინა ამოცანაში აღწერილ მექანიზმში წამყვანი ლილვის კუთხური სიჩქარეა $\omega_a = 60$ ბრ/წთ. როგორი უნდა იყოს ამჩქარებელი თვლის კუთხური სიჩქარე, რომ მიმყოლი თვალი დარჩეს უძრავად.

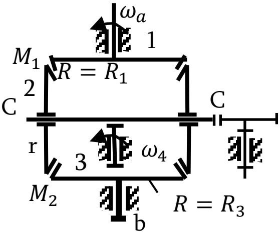
ამოხსნა

წინა ამოცანის შედეგიდან ვწერთ, რომ $\omega_b = 0$, ამიტომ

$$\omega_4 = 2\omega_a = 2 \cdot 60 = 120 \text{ ბრ/წთ.}$$

პასუხი : $\omega_4 = 120$ ბრ/წთ.

ამოცანა 24.37



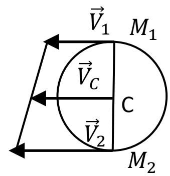
კბილის საჭრელი ჩარხის დიფერენციალში ამჩქარებელი ბორბალი 4 ამოძრავებს სატელიტების ღერძს. წამყვანი ლილვის კუთხური სიჩქარეა ω_a. იპოვეთ მიმყოლი ლილვის უთხური სიჩქარე შემდეგ სამ შემთხვევაში:

1) ამჩქარებელი ბორბალი ბრუნავს წამყვანი ლილვის ბრუნვის მიმართულებით და $\omega_4 = \omega_a$.

2) იგივე პირობებია, მხოლოდ ბრუნვა ხდება საპირისპირო მიმართულებით.

3) ამჩქარებელი ბორბალი და სატელიტების ღერძი უძრავია.

ამოხსნა



ეს ამოცანა 24.35 ამოცანისაგან განსხვავდება მხოლოდ 1 და 4 კბილანების ამძრავის სქემით, ამიტომ ანალოგიურად გვექნება

$$V_1 = \omega_a R;\ V_C = \omega_4 R;$$

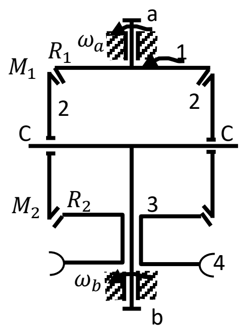
$$V_C = \frac{V_1+V_2}{2} \ \rightarrow\ V_2 = 2V_C - V_1 \ \rightarrow \omega_b = 2\omega_4 - \omega_a.$$

საძიებელ შემთხვევაში გვექნება :

1) $\omega_4 = \omega_a \ \rightarrow\ \omega_b = \omega_a$; 2) $\omega_4 = -\omega_a \rightarrow\ \omega_b = -3\omega_a$; 3) $\omega_4 = 0\ \rightarrow$ $\omega_b = -\omega_a$

პასუხი : 1) $\omega_b = \omega_a$; 2) $\omega_b = -3\omega_a$; 3) $\omega_b = -\omega_a$.

ამოცანა 24.38



ჩარხის დიფერენციალურ მექანიზმში კონუსური კბილანა 1 გაჭედილია წამყვან a ლილვზე. მიმყოლი b ლილვის ბოლოზე დამაგრებულია თავაკი, რომელიც ატარებს 2-2 სატელიტის CC ღერძს. იგივე ლილვზე თავისუფლად არის დასმული კონუსური კბილა თვალი 3, რომელიც 4 ჭიაბორბალთან ქმნის ერთ მთლიანს. იპოვეთ გადაცემათა რიცხვი უძრაბი ჭიას დროს, ღუ ყველა კონუსური კბილანას რადიუსი ერთნაირია.

2

ამოხსნა

თუ ჩავატარებთ იგივე მსჯელობას, როგორც 24.35 და 24. 37 ამოცანებში, შეიძლება დავწეროთ:

$$V_C = \frac{V_1+V_2}{2},$$

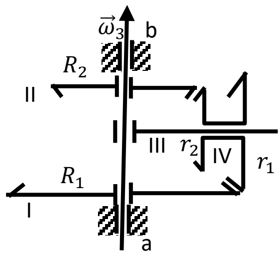
როცა $V_1 = 0$, მაშინ

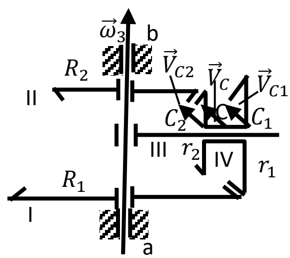
$$V_C = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}\omega_a R;\ \omega_b = \frac{V_C}{R} \to \ \frac{\omega_b}{\omega_a} = 0{,}5 \text{ რად/წმ.}$$

პასუხი: $\frac{\omega_b}{\omega_a} = 0{,}5$ რად/წმ .

ამოცანა 24.39

ორმაგი დიფერენციალი შედგება III მრუდმხარასაგან, რომელსაც შეუძლია იბრუნოს უძრავი ab ღერძის გარშემო. მრუდმხარაზე თავისუფლად დასმულია IV სატელიტი, რომელიც შედგება ორი, ერთმანეთთან ხისტად დაკავშირებული, კბილა თვლისაგან, რომელთა რადიუსებია: $r_1 = 5$ სმ და $r_2 = 2$ სმ. ეს თვლები შეერთებულია ორ კონუსურ კბილა თვალთან I და II. მათი რადიუსებია: $R_1 = 10$ სმ, $R_2 = 5$ სმ და ბრუნავენ ab ღერძის გარშემო ისე, რომ სატელიტთან კავშირი არ აქვთ. I და II კბილანების კუთხური სიჩქარეებია : $\omega_1 = 4{,}5$ რად/წმ, $\omega_2 = 9$ რად/წმ. იპოვეთ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე ω_3, როცა ორივე ბორბალი ბრუნავს ერთ მხარეს.





ამოხსნა

წინა ამოცანების ანალოგიურად ნახაზიდან გვაქვს

$$V_1 = V_{C1} + \omega_{34} r_1, \qquad (1)$$

$$V_2 = V_{C2} - \omega_{34} r_2, \qquad (2)$$

სადაც $V_1 = \omega_1 R_1, V_2 = \omega_2 R_2$.

$$V_{C1} = V_C - \frac{R_1 - R_2}{2}\omega_3 = \frac{R_1 + R_2}{2}\omega_3 + \frac{R_1 - R_2}{2}\omega_3 = R_1\omega_3;$$

$$V_{C2} = V_C - \frac{R_1-R_2}{2}\omega_3 = \frac{R_1+R_2}{2}\omega_3 - \frac{R_1-R_2}{2}\omega_3 = R_2\omega_3.$$

ჩავსვათ (1) და (2) თანაფარდობებში და მივიღებთ

$$\begin{cases}\omega_1 R_1 = R_1\omega_3 + \omega_{34} r_1 \\ \omega_2 R_2 = R_2\omega_3 - \omega_{34} r_2\end{cases}.$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა და ვიპოვით საძიებელ სიდიდეებს:

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 R_1 r_2 + R_2\omega_2 r_1}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 7 \text{ რად/წმ}.$$

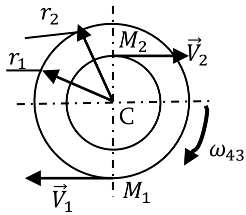
$$\omega_{34} = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1 R_2}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 5 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_3 = 7$ რად/წმ ; $\omega_{34} = 5$ რად/წმ.

ამოცანა 24.40

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ პირობით, რომ I და II კბილა თვლები ბრუნავენ ურთიერთ საპირისპირო მიმართულებით.

ამოხსნა



ამ შემთხვევაში (1) და (2) ტოლობები მიიღებს სახეს :

$$V_1 = -V_{C1} + \omega_{34} r_1, \quad (1)$$

$$V_2 = V_{C2} + \omega_{34} r_2, \quad (2)$$

სადაც $V_1 = \omega_1 R_1, V_2 = \omega_2 R_2$.

$$V_{C1} = V_C + \frac{R_1 - R_2}{2}\omega_3 = \frac{R_1 + R_2}{2}\omega_3 + \frac{R_1 - R_2}{2}\omega_3 = R_1\omega_3,$$

$$V_{C2} = V_C - \frac{R_1 - R_2}{2}\omega_3 = \frac{R_1 + R_2}{2}\omega_3 - \frac{R_1 - R_2}{2}\omega_3 = R_2\omega_3.$$

ჩავსვათ (1) და (2) ტოლობებში და მივიღებთ:

$$\begin{cases}\omega_1 R_1 = -R_1\omega_3 + \omega_{34} r_1 \\ \omega_2 R_2 = R_2\omega_3 + \omega_{34} r_2\end{cases}$$

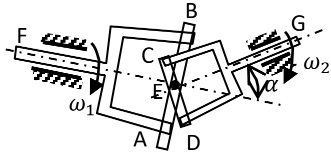
ამოვხსნათ ეს სისტემა და ვიპოვით საძიებელ სიდიდეებს:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 R_2 r_1 - R_1\omega_1 r_2}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 3 \text{ რად/წმ},$$

$$\omega_{34} = \frac{(\omega_2 + \omega_1) R_1 R_2}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 15 \text{ რად/წმ}.$$

პასუხი: $\omega_3 = 3$ რად/წმ ; $\omega_{34} = 15$ რად/წმ.

ამოცანა 24.41



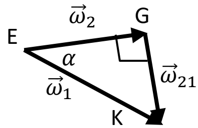
ჰუკის უნივერსალური სახსრის ABCD ვარსკვლავა ბრუნავს უძრავი E წერტილის გარშემო. იპოვეთ ვარსკვლავათი შეერთებული ლილვების ბრუნვების შეფარდება ორ შემთხვევაში:

1) როცა ABF ჩანგლის სიბრტყე ჰორიზონტალურია, ხოლო CDG –ს სიბრტყე ვერტიკალური.

2) როცა ABF ჩანგლის სიბრტყე ვერტიკალურია, ხოლო CDG –ს სიბრტყე მისი მართობული

ღერძებს შორის კუთხე მუდმივია და უდრის $\alpha = 60°$.

ამოხსნა



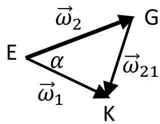
ნახ.ა

ABF ჩანგალი ასრულებს რთულ მოძრაობას, რომელიც შედგება წარმტანი მოძრაობისა $\vec{\omega}_2$ და ფარდობითი $\vec{\omega}_{21}$ მოძრაობისაგან. ამასთან

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{21}.$$

პირველ შემთხვევაში ნახაზიდან ჩანს (ნახ.ა) , რომ

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{cos\alpha} \to \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{cos\alpha}.$$



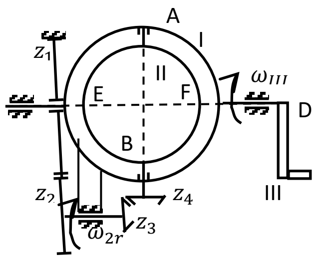
ნახ.ბ

მეორე შემთხვევაში (ნახ.ბ)

$$\omega_1 = \omega_2 cos\alpha \to \frac{\omega_1}{\omega_2} = cos\alpha .$$

პასუხი: 1) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{cos\alpha}$; 2) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = cos\alpha$.

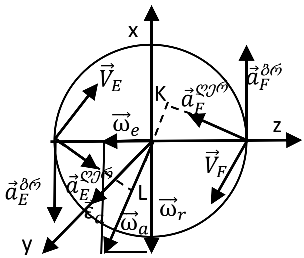
ამოცანა 24.42



ბურთულიანი დამქუცმაცებელი შედგება d=10 სმ დიამეტრიანი ბირთვისაგან, რომელიც დამაგრებულია AB ღერძზე. ღერძზე გაჭედილია ბორბალი, რომლის კბილთა რიცხვია $z_4 = 28$. AB ღერძი ჩამაგრებულია I ჩარჩოზე a და b საკისრებით. ჩარჩო შეადგენს ერთ მთლიანს CD ღერძთან ერთად, რომელიც მოძრაობაში მოდის III სახელურის საშუალებით.

ბურთულიანი დამქუცმაცებლის ბრუნვა AB ღერძის გარშემო ხდება კბილანების საშუალებით, რომელთა კბილთა რიცხვებია: $z_1 = 80, z_2 = 43, z_3 = 28$, ამასთან მათგან პირველი უძრავია. იპოვეთ დამქუცმაცებლის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და E და F წერტილების სიჩქარე და აჩქარება. ეს წერტილები ამ მომენტში მდებარეობენ CD ღერძზე. სახელური ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 4{,}3$ რად/წმ.

ამოხსნა



ვიპოვოთ ბურთულიანი დამქუცმაცებლის AB ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. შეწყვილებული 2 – 3 თვლების ღერძი დამაგრებულია ჩარჩოზე და ბრუნავს მასთან ერთად წარმტანი კუთხური სიჩქარით $\omega_e = \omega_{III}$. ვისარგებლოთ ვილისის თეორემით და გვექნება

$$\frac{\omega_{2a}-\omega_{III}}{\omega_{1a}-\omega_{III}} = -\frac{z_1}{z_2},$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\omega_{1a} = 0$, მივიღებთ

$$\omega_{3r} = \omega_{2r} = \omega_{2a} - \omega_{III} = \frac{z_1}{z_2}\omega_{III}$$

ეს არის შეწყვილებული კბილანების კუთხური სიჩქარე ჩარჩოს მიმართ. ნიშანი „+“ მიუთითებს, რომ ω_{2r} აქვს ω_{III} კუთხური სიჩქარის მიმართულება. დამქუცმაცებლის კუთხური სიჩქარისათვის ვწერთ

$$\frac{\omega_r}{\omega_{3r}} = \frac{z_3}{z_4} \rightarrow \omega_r = \frac{z_3}{z_4}\omega_{3r} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\omega_{III} = 8 \text{ რად/წმ} .$$

ეს ბრუნვა ხდება საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით როცა ბრუნვას ვუყურებთ B დან A-კენ. რადგან დამქუცმაცებელი ასრულებს სფერულ მოძრაობას O ცენტრის გარშემო. ამ წერტილში გადაიკვეთება $\vec{\omega}_r$ და $\vec{\omega}_e$ ვექტორები. მათთვის სამართლიანია ტოლობა

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e \qquad (1)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2} = 9{,}08 \text{ რად/წმ}$$

$$\vec{V}_F = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OF} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \overrightarrow{OF} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{OF}.$$

ანლოგიურად

$$\vec{V}_E = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OE} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \overrightarrow{OE} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{OE} .$$

მათი მოდული უდრის

$$V_E = V_F = \omega_r \cdot \frac{d}{2} \sin 90° = 0{,}4 \text{ მ/წმ}.$$

ნახაზზე $\vec{V}_F$ მიმართულია y ღერძის პარალელურად, ხოლო $\vec{V}_E$ მის საპირისპიროდ არის მიმართული.

გამოვთვალოთ კუთხური აჩქარება ბურის ფორმულის საშუალებით.

$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \rightarrow \varepsilon_a = \omega_e\omega_r \sin 90° = 34{,}4$ მ/წმ² .

ვექტორი $\vec{\varepsilon}_a$ მიმართულია xOz სიბრტყის მართობულად. ვიპოვოთ ასევე

$$\cos\alpha = \frac{\omega_r}{\omega_a}\ ;\ \sin\alpha = \frac{\omega_e}{\omega_a};$$

$$a_E^{ღერ} = \omega_a^2 EK = \omega_a^2 \cdot \frac{d}{2} cos\alpha = \omega_a\omega_r \cdot \frac{d}{2}\ ;$$

$$a_F^{ღერ} = \omega_a^2 FL = \omega_a^2 \cdot \frac{d}{2} cos\alpha = \omega_a\omega_r \cdot \frac{d}{2}\ ;$$

$$\vec{a}_E^{ბრ} = \vec{\varepsilon}_a \times \overrightarrow{OE}\ ;\ \vec{a}_F^{ბრ} = \vec{\varepsilon}_a \times \overrightarrow{OF}\ ;$$

სიდიდით

$$a_E^{ბრ} = a_F^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot \frac{d}{2}.$$

ამასთან $\vec{a}_F^{ბრ}$ ვექტორი მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ, ხოლო $\vec{a}_E^{ბრ}$ - მისი საპირისპიროა. საბოლოოდ მივიღებთ

$$a_E = \sqrt{\left(a_E^{ღერ}\right)^2 + \left(a_E^{ბრ}\right)^2 + 2a_E^{ბრ}a_E^{ღერ}\cos(90° - \alpha)} =$$

$$\sqrt{\omega_a^2\omega_r^2 + \varepsilon_a^2 + 2\omega_a\omega_r sin\alpha} = \frac{d}{2}\sqrt{\omega_r^2 + 4\omega_e^2} = 4{,}68 \text{ მ/წმ}^2 .$$

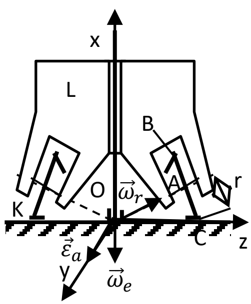
ანალოგიურად

$$a_F = \sqrt{\left(a_F^{ღერ}\right)^2 + \left(a_F^{ბრ}\right)^2 + 2a_F^{ბრ}a_F^{ღერ}\cos(90° - \alpha)} =$$

$$\sqrt{\omega_a^2\omega_r^2 + \varepsilon_a^2 + 2\omega_a\omega_r sin\alpha} = \frac{d}{2}\sqrt{\omega_r^2 + 4\omega_e^2} = 4{,}68 \text{ მ/წმ}^2 .$$

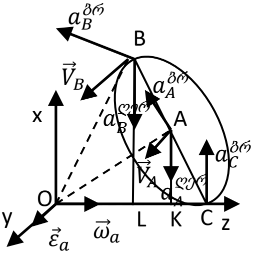
პასუხი: $\omega_a = 9{,}08$ რად/წმ ; $\varepsilon_a = 34{,}4$ მ/წმ² ; $V_E = V_F = 0{,}4$ მ/წმ. $a_E = a_F = 4{,}68$ მ/წმ² .

ამოცანა 24.43



ხიდის მოსაბრუნებელი ნაწილი დგას საგორავებზე, რომელსაც აქვს კონუსური კბლა თვლის ფორმა და რომლის ღერძი დამაგრებულია წრიულ L ჩარჩოზე დახრილად ისე, რომ მათი გაგრძელებები იკვეთებიან საყრდენი კბილანას გეომეტრიულ ცენტრში. იპოვეთ კონუსური საგორავების კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და , აგრეთვე A,B,C წერტილების სიჩქარე

და აჩქარება, თუ საგორავის საყრდენის რადიუსი r=0,25 მ. კუთხე წვეროსთან არის 2α . ამასთან $\cos\alpha = 84/85$.



წრიული ჩარჩოს ვერტიკალური ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა
$\omega_0 = const = 0{,}1$ რად/წმ .

ამოხსნა

კბილა თვალი ასრულებს სფერულ მოძრაობას, რომლის ცენტრია უძრავი O წერტილი. ამასთან

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \,, \qquad (1)$$

სადაც

$$\omega_e = \omega_0 = 0{,}1 \text{ მ/წმ}; \; \omega_a = \omega_e ctg\alpha = \omega_0 \frac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}} = 0{,}646 \text{ რად/წმ}.$$

ვისარგებლოთ ბურის ფორმულით და ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \;\rightarrow\; \varepsilon_a = \omega_e \omega_a sin90^\circ = \omega_0^2 ctg\alpha = 0{,}0646 \text{ რად/წმ}^2 .$$

რადგან C წერტილი ძევს ბრუნვის ღერძზე, ამიტომ $V_C = 0$.

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{OA} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \overrightarrow{OA} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OA} \,,$$

რადგან $\vec{\omega}_r$ და $\overrightarrow{OA}$ კოლინეარული ვექტორებია. რიცხობრივად

$$V_A = \omega_e OAsin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \omega_e OAcos\alpha = \omega_0 rctg\alpha cos\alpha = 0{,}16 \text{მ/წმ} .$$

რადგან B წერტილი ორჯერ უფრო შორსაა მყისი ღერძიდან ვიდრე A, ამიტომ მისი სიჩქარე ორჯერ მეტი იქნება $V_B = 0{,}32$ მ/წმ.

A,B.C წერტილების აჩქარებები გამოვთვალოთ ფორმულით

$$\vec{a} = \vec{a}^{ღერ} + \vec{a}^{ბრ}.$$

A წერტილისთვის

$$a_A^{ღერ} = \omega_a^2 \cdot AK = \omega_0^2 rctg^2\alpha cos\alpha ; \; a_A^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot OA = \omega_0^2 rctg^2\alpha \;;$$

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{ღერ}\right)^2 + \left(a_A^{ბრ}\right)^2 + 2a_A^{ბრ}a_A^{ღერ}\cos(\pi - \alpha)} = \omega_0^2 rctg^2\alpha \cdot sin\alpha = 0{,}016 \text{ მ/წმ}^2 .$$

B წერტილისთვის

$$a_B^{ღერ} = \omega_a^2 \cdot BL = 2\omega_0^2 rctg^2\alpha cos\alpha \;; \; a_B^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot BL = \frac{\omega_0^2 rctg^2\alpha}{cos\alpha} .$$

ნახაზიდან გვაქვს

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^{ღერ}\right)^2 + \left(a_B^{ბრ}\right)^2 + 2a_B^{ბრ}a_B^{ღერ}\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{\omega_0^2 rctg^2\alpha}{cos\alpha}\sqrt{1 + sin^2\alpha} = 0.11 \text{ მ/წმ}^2 .$$

C წერტილისათვის

$$a_B^{ღერ} = 0; \; a_C = a_C^{ბრ} = \varepsilon_a OC = \frac{\omega_0^2 rctg^2\alpha}{sin\alpha} = 0{,}105 \text{ მ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $\omega_a = 0{,}646$ რად/წმ ; $\varepsilon_a = 0{,}0646$ რად/წმ² ; $V_A = 0{,}16$მ/წმ; $V_B = 0{,}32$ მ/წმ ;

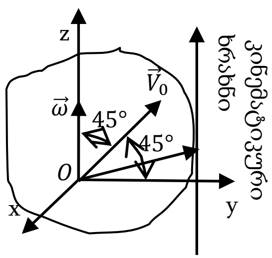
$V_C = 0$; $a_A = 0{,}016$ მ/წმ² $a_B = 0.11$ მ/წმ² ; $a_C = 0{,}105$ მ/წმ² .

ამოცანა 24.44

სხეული მოძრაობს სივრცეში ისე, რომ კუთხური სიჩქარე უდრის ω და მოცემულ მომენტში მიმართულია z ღერძის გასწვრივ. O წერტილის სიჩქარეა V_0 და z და y ღერძებთან ადგენს ერთნაირ კუთხეს 45°-ს. იპოვეთ სხეულის წერტილი, რომლის სიჩქარე არის უმცირესი და იპოვეთ ამ წერტილის სიჩქარე.

ამოხსნა

თავისუფალი სხეულის მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ხრახნზე მოძრაობა. უმცირესი სიჩქარე აქვს წერტილს, რომელიც ხრახნის ღერძზე მდებარეობს. ამიტომ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ამ ღერძის პოვნაზე. ეს ღერძი არის კუთხური სიჩქარის პარალელური. ღერძის განტოლებას აქვს სახე



$$\frac{x-x_C}{\omega_x} = \frac{y-y_C}{\omega_y} = \frac{z-z_C}{\omega_z}, \qquad (1)$$

$$x_C = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_y V_{oz} - \omega_z V_{oy}\right),$$
$$y_C = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_z V_{ox} - \omega_x V_{oz}\right),$$
$$z_C = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_x V_{oy} - \omega_y V_{ox}\right).$$

სიჩქარის მიერ ღერძებთან შედგენილი კუთხეებისთვის სამართლიანია ტოლობა

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2 y = 1.$$

მოცემულ შემთხვევაში გვექნება

$$cos^2\alpha + cos^2 45° + cos^2 45° = 1 \;\rightarrow\; \cos\alpha = 0 \;\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

მაშინ

$$V_{ox} = V_0 cos\alpha = 0\,;\;\; V_{oy} = V_{oz} = V_0 cos45°;\; \omega_x = \omega_y = 0;\; \omega_z = \omega.$$

$$x_C = \frac{1}{\omega^2}(0 \cdot V_0 cos45° - \omega \cdot V_0 cos45°) = -\frac{V_0 cos45°}{\omega};\; y_C = 0;\; z_C = 0.$$

ხრახნის ღერძის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x+\frac{V_0 cos45°}{\omega}}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{\omega}.$$

ამ ტოლობიდან დავასკვნით, რომ ღერძი არის z ღერძის პარალელური და გადის წერტილში კოორდინატებით:

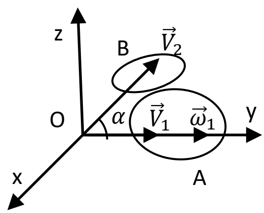
x= - -$\frac{V_0 cos45°}{\omega}$, y=0.

მინიმალური სიჩქარე გამოითვლება ტოლობით

$$V_{min}=\frac{1}{\omega}\left(\vec{V}_0\cdot\vec{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\left(V_{ox}\omega_x+V_{oy}\omega_y+V_{oz}\omega_z\right)=V_0 cos45°.$$

პასუხი: $V_{min}=V_0 cos45°$. ეს არის ხრახნწირის ღერძის განტოლება. ღერძი არის Oz ღერძის პარალელური და გადის წერტილში x= - -$\frac{V_0 cos45°}{\omega}$, y=0.

ამოცანა 24.45



A სხეული ბრუნავს ω_1 კუთხური სიჩქარით Oy ღერძის გარშემო და მოძრაობს V_1 სიჩქარით იმავე ღერძის გასწვრივ. B სხეული მოძრაობს გადატანითად V_2 სიჩქარით, რომელიც Oy ღერძთან ადგენს α კუთხეს. როგორი V_1/V_2 თანაფარდობისთვის იქნება A სხეულის მოძრაობა B სხეულის მიმართ სიფთა ბრუნვა? სად ძევს ბრუნვის ღერძი?

ამოხსნა

ვიპოვოთ A სხეულის სიჩქარე B სხეულის მიმართ

$$\vec{V}_r=\vec{V}_1-\vec{V}_2 \qquad (1)$$

საკოოორდინატო ღერძებზე დაგეგმილება მოგვცემს :

$$V_{rx}=0;\ V_{ry}=V_1-V_2 cos\alpha;\ V_{rz}=V_2 sin\alpha \qquad (2)$$

გარდა ამისა

$$\omega_x=0;\ \ \omega_y=\omega_1;\ \ \omega_z=0 \qquad (3)$$

ფარდობითი მოძრაობა იქნება სუფთა ბრუნვითი მოძრაობა როცა

$$\omega_x V_{rx}+\omega_y V_{ry}+\omega_z V_{rz}=0,$$

რომელიც (2) და (3) ტოლობების გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$0\cdot 0+\omega_1\cdot(V_1-V_2 cos\alpha)+0\cdot V_2 sin\alpha\ \rightarrow\ V_1-V_2 cos\alpha=0\ \rightarrow\frac{V_1}{V_2}=cos\alpha\ .$$

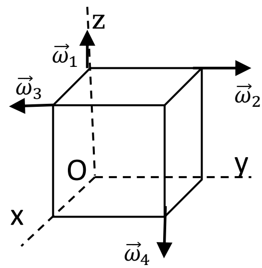
ეს ბრუნვითი მოძრაობა ხდება ხრახნის ღერძის გასწვრივ $\vec{\omega}_1$ ვექტორის პქრქლელური ღერძის გარშემო. ეს ღერძი გადაიკვეთება zOx სიბრტყესთან იმ წერტილში, რომლის კოორდინატებია

$$x_C = \frac{1}{{\omega_1}^2}\left(\omega_y V_{rz} - \omega_z V_{ry}\right) = \frac{1}{{\omega_1}^2}[\omega_1 \cdot V_2 sin\alpha - 0 \cdot (V_1 - V_2 cos\alpha)] = \frac{V_2 sin\alpha}{\omega_1},$$

$$z_C = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_x V_{oy} - \omega_y V_{ox}\right) = \frac{1}{{\omega_1}^2}[0 \cdot (V_1 - V_2 cos\alpha) - \omega_1 \cdot 0]=0.$$

პასუხი : როცა $\frac{V_1}{V_2} = cos\alpha$, მაშინ A სხეულის ფარდობითი მოძრაობა B სხეულის მიმართ არის წმინდა ბრუნვითი მოძრაობა Oy ღერძის პარალე-ლური ღერძის მიმართ . ეს ღერძი Oy ღერძიდან დაშორებულია $l = \frac{V_2 sin\alpha}{\omega_1}$ მანძილით.

ამოცანა 24.46



კუბის ფორმის სხეული მონაწილეობს ერთდროულად ოთხ ბრუნვაში, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია:

$\omega_1 = \omega_4 = 6$ რად/წმ, $\omega_2 = \omega_3 = 4$ რად/წმ.

კუბის გვერდია $a = 2$მ. იპოვეთ ჯამური მოძრაობა.

ამოხსნა

დავიყვანოთ კუთხური სიჩქარის ვექტორები O წერტილში. მივიღებთ:

1) კუთხური სიჩქარის ნაკრები ვექტორის კოორდინატებია :

$$\omega_x = 0;\ \omega_y = \omega_2 - \omega_3 = 0;\ \omega_z = \omega_1 - \omega_4 = 0\ \rightarrow\ \omega = 0.$$

2) ნაკრები მომენტი უდრის

$$V_x = \omega_3 a - \omega_2 a - \omega_4 a = -12 \text{ მ/წმ},$$

$$V_y = -\omega_4 a = -12\text{მ/წმ},$$

$$V_z = -\omega_3 a = -8 \text{ მ/წმ}.$$

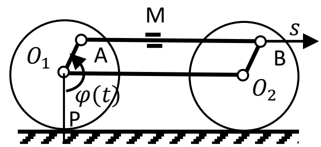
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 4\sqrt{22} \text{ მ/წმ}.$$

$$000\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = -\frac{3}{\sqrt{22}}, \cos\beta = \frac{V_y}{V} = -\frac{3}{\sqrt{22}},\ \cos\gamma = \frac{V_x}{V} = -\frac{2}{\sqrt{22}}.$$

პასუხი: სხეული მოძრაობს გადატანითად $V = 4\sqrt{22}$ მ/წმ სიჩქარით.

25. ამოცანები მყარი სხეულისა და წერტილის მოძრაობების შეკრებაზე

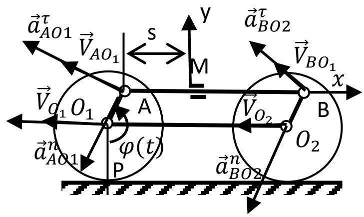
ამოცანა 25.1



ორთქმავლის თვლები შეერთებულია AB უღლით. ბორბალი, რომლის რადიუსი r=80 სმ, მიგორავს მარცხნივ უსრიალოდ. მოძრაობის დროს ბორბლის მობრუნების კუთხე იცვლება კანონით $\varphi = \frac{3}{4}t^2$ რად. AB უღლის გასწვრივ მოძრაობს M ცოცია კანონით $s = AM = (10 + 40t^2)$ სმ. იპოვეთ M ცოციას აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება t=1წმ მომენტისათვის, თუ $O_1O_2 = AB,\ O_1A = O_2B = \frac{r}{2}$.

ამოხსნა

ცოცია ასრულებს რთულ მოძრაობას: ის მოძრაობს უღელთან ერთად და გადაადგილდება მასზე. ჩავწეროთ აჩქარეთა შეკრების თეორემა ცოციასთვის:



$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \qquad (1)$$

რადგან უღელი ასრულებს გადატანით მოძრაობას ამიტომ

$$\vec{V}_e = \vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_{O1} + \vec{V}_{Ao1}. \qquad (2)$$

გამოვთვალოთ ამ ტოლობაში შემავალი სიდიდეები

$$V_{O1} = r\dot{\varphi}(t = 1) = 376{,}8 \text{ სმ/წმ},$$

$$V_{AO1} = \frac{r}{2}\dot{\varphi}(t = 1) = 188{,}8 \text{ სმ/წმ},$$

$$V_r = \dot{s}(t = 1) = 80\text{სმ/წმ}.$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გავითვალისწინოთ (2) ტოლობა :

$$V_{ax} = -V_{o1} - V_{AO1}cos\varphi + V_r = -430 \text{ სმ/წმ},$$

$$\mathrm{V_{ay}} = \mathrm{V_{AO1}}\mathrm{sin}\varphi = 133 \text{ სმ/წმ}.$$

$$0V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2} = 450 \text{ სმ/წმ}.$$

ცოციას აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c. \tag{3}$$

განხილულ შემთხვევაში

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{01} + \vec{a}_{AO1}^{\tau} + \vec{a}_{AO1}^{n},$$

სადაც

$$a_{01} = r\ddot{\varphi}(t=1) = 376.8 \text{ სმ/წმ}^2. \ a_{AO1}^{\tau} = \frac{r}{2}\ddot{\varphi}(t=1) = 188{,}4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$a_{AO1}^{n} = \frac{r}{2}\dot{\varphi}^2(t=1) = 887{,}4 \text{ სმ/წმ}^2, \ a_r = \ddot{s} = 80 \text{ სმ/წმ}^2, \ a_c = 0.$$

დავაგეგმილოთ (3) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და მივიღებთ:

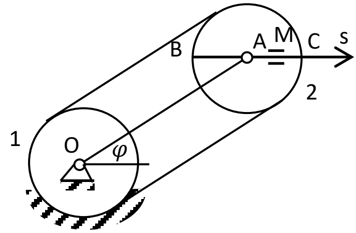
$$a_{ax} = -a_{01} - a_{AO1}^{n} \cdot sin\frac{3}{4}\pi + a_{AO1}^{\tau}cos\frac{3}{4}\pi + a_r = -1057{,}4 \ ,$$

$$a_{ay} = a_{AO1}^{\tau}sin\frac{3}{4}\pi + a_{AO1}^{n} \cdot cos\frac{3}{4}\pi = \text{-}492{,}2 \ ,$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 1167{,}2 \text{ სმ/წმ}^2 \ .$$

პასუხი: $V_a = 450$ სმ/წმ ; $a_a = 1167{,}2$ სმ/წმ² .

ამოცანა 25.2



უძრავი კბილანა 1 ჯაჭვით არის დაკავშირებული ისეთივე მოძრავ კბილანასთან 2. ეს კბილანა მოძრაობაში მოდის OA=60 სმ მრუდმხარის საშუალებით. მრუდმხარა ბრუნავს საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით კანონით $\varphi = \frac{\pi}{6}t$. t=0 მომენტში მრუდმხარა იმყოფება მარჯვენა ჰორიზონტალურ მდებარეობაში. 2 კბილანას ჰორიზონტალურ BC მიმმართველში მოძრაობს M ცოცია, რომელიც ასრულებს რხევით მოძრაობას კანონით s=AM=20sin$\frac{\pi}{2}t$ სმ. იპოვეთ ცოციას აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება $t_1 = 0, t_2 = 1$ წამისთვის.

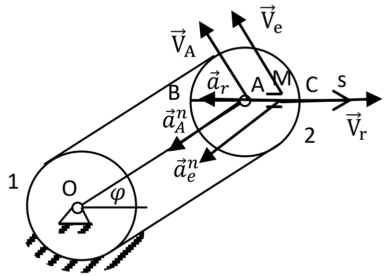
ამოხსნა

რადგან 1 კბილანა არ მოძრაობს, ამიტომ ის არ ამოძრავებს ჯაჭვს. ასეთი მოძრაობის დროს კბილანაზე შემოხვეული ჯაჭვი უდრის ჯაჭვის მოხსნილ სიგრძეს. $\angle BAO = \varphi$. BC წრფე რჩება ჰორიზონტალური. ეს

ნიშნავს, რომ 2 კბილანა ასრულებს გადატანით მოძრაობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C = \vec{V}_B; \qquad (1)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C = \vec{a}_B. \qquad (2)$$



M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: მოძრაობს წრფივი მიმმართველის გასწრივ (ფარდობითი მოძრაობა) და 2 კბილანასთან ერთად მოძრაობს გადატანითად წრეწირზე (წარმტანი მოძრაობა) სიჩქარეთა შეკრების თეორემის ძალით ვწერთ

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \qquad (3)$$

სადაც $V_r = \dot{s} = 10\pi cos\frac{\pi}{2}t$, $V_e = V_A = OA \cdot \dot{\varphi} = 10\pi.$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\angle(\vec{V}_e, \vec{V}_r) = \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}t$$

მივიღებთ

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_eV_r\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = 10\pi\sqrt{1 + cos^2\frac{\pi}{2}t - 2sin\frac{\pi}{6}tcos\frac{\pi}{2}t}.$$

აქედან გვაქვს

$$t_1 = 0 \ \rightarrow V_a = V_{M1} = 44{,}4 \text{ სმ/წმ} ,$$

$$t_2 = 1 \ \rightarrow V_a = V_{M2} = 31{,}4 \text{ სმ/წმ}.$$

აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c,$$

სადაც

$$a_r = \dot{V}_r = -5\pi^2 sin\frac{\pi}{2}t \ , a_e = a_e^n = OA \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{5}{3}\pi^2, a_e^\tau = OM\ddot{\varphi} = 0, a_c = 0.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

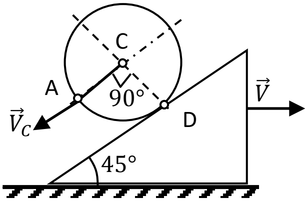
$$a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2a_ea_rcos\varphi} = 5\mu^2\sqrt{\frac{1}{9} + sin^2\frac{\pi}{2}t + \frac{2}{3}cos\frac{\pi}{6}tsin\frac{\pi}{2}t},$$

აქედან

$t_1 = 0 \ \rightarrow \ a = a_{M1} = 16{,}43$ სმ/წმ²; $t_2 = 1 \ \rightarrow \ a = a_{M2} = 64$ სმ/წმ².

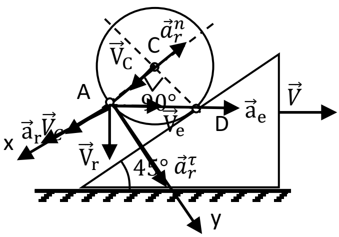
პასუხი: $V_{M1} = 44{,}4$ სმ/წმ ; $V_{M2} = 31{,}4$ სმ/წმ ; $a_{M1} = 16{,}43$ სმ/წმ² ; $a_{M2} =$ 64 სმ/წმ² .

ამოცანა 25.3



სამკუთხა პრიზმა, რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს 45° -იან კუთხეს, მისრიალებს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მარჯვნივ V=2t სმ/წმ სიჩქარით. პრიზმის დახრილ წახნაგზე უსრიალოდ მიგორავს წრიული ცილინდრი. მისი ცენტრის სიჩქარის მოდული პრიზმის მიმართ უდრის $V_C = 4t$ სმ/წმ. იპოვეთ ცოლინდრის ფერსოზე მდებარე A წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება, თუ t=1 წმ მომენტისთვის $\angle ACD = 90°$.

ამოხსნა



ცილინდრი ასრულებს რთულ მოძრაობას: ფარდობითი მოძრაობაა ცილინდრის გორვა დახრილ სიბრტყეზე და წარმტანი მოძრაობაა ცილინდრის მოძრაობა პრიზმასთან ერთად. სიჩქარეთა შეკრების თეორემით გვაქვს

$$\vec{V}_A = \vec{V}_e + \vec{V}_r \qquad (1)$$

რადგან ცილინდრი გორავს უსრიალოდ, ამიტომ D წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი . ნახაზიდან ვწერთ:

$$\frac{V_r}{V_C} = \frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{2}\,R}{R} = \sqrt{2} \;\rightarrow\; V_r = \sqrt{2}\,V_C;\; V_e = V.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$V_A = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 6t.$$

როცა t=1 წმ, მაშინ $V_a = 6$ სმ/წმ.

აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად ვისრგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_A = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c\,. \qquad (2)$$

რადგან წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, ამიტომ

$$a_c = 0, \quad a_e = \dot{V}_e = \dot{V} = 2 \text{ სმ/წმ}^2\,.$$

ვისარგებლოთ ბრტყელი ფიგურის აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულით:

$$\vec{a}_{Ar} = \vec{a}_{Cr} + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^\tau.$$

სადაც $a_{Cr} = \dot{V}_C = 4$სმ/წმ2 . $a_{AC}^n = \frac{V_C^2}{R} = \frac{16t^2}{R} = 4$სმ/წმ2 ; $a_{AC}^\tau = \varepsilon R = \dot{V}_C = 4$ სმ/წმ².

დავაგეგმილოთ (2) ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და გვექნება :

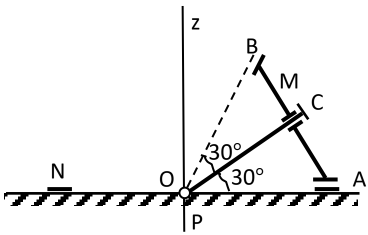
$$a_{Ax} = a_{Cr} - a_{AC}^n - a_e cos45° = -1{,}4 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

$$a_{Ay} = a_{AC}^\tau + a_e cos45° = 5{,}4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + \left(a_{Ay}\right)^2} = 5{,}6 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

პასუხი : $V_A = \frac{6\text{სმ}}{\text{წმ}}$; $a_A = 5{,}6\frac{\text{სმ}}{\text{წმ2}}$.

ამოცანა 25.4

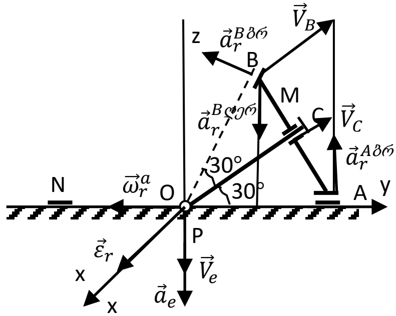


M კონუსურ კბილანას N კბილანაზე ამოძრავებს OC ღერძი, რომელიც ჩამაგრებულია O წერტილში და ბრუნავს z ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით 2 რად/წმ. ჰორიზონტალური P პლატფორმა, რომელზეც დამაგრებულია N კბილანა, მოძრაობს აჩქარებულად ვერტიკალურად ქვევით და მოცემულ მომენტში აქვს სიჩქარე V=80 სმ/წმ და აქარება a=$80\sqrt{3}$ სმ/წმ². კუთხე $BO000000000A = 60°$, M კბილანას AB დიამეტრი უდრის 20 სმ. იპოვეთ M კბილანას A და B წერტილების სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

კონუსური კბილანის გორვა ჰორიზონტალურ პლატფორმაზე არის ფარდობით მოძრაობა, ხოლო მისი აჩქარებული მოძრაობა პლატფორმასთან ერთად არის წარმტანი მოძრაობა. A და B წერტილების აბსოლუტური სიჩქარე ვიპოვოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემის გამოყენებთ

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \qquad (1)$$



ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\omega_r^a = \omega_r^e ctg30° = 2\sqrt{3}\text{ რად/წმ .}$$

ამის საფუძველზე მივიღებთ:

$V_r^A = 0$ - რადგან A წერტილი ძევს ბრუვის მყის ღერძზე,

$$V_r^B = \omega_r^a\, BK = \omega_r^a AB\cos 30° = 60\text{ სმ/წმ.}$$

A წერტილისთვის: $V_a^A = V_e = V = 80$ სმ/წმ .

B წერტილისთვის: $V_a^B = \sqrt{(V_r^B)^2 + (V_e^B)^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ სმ/წმ .

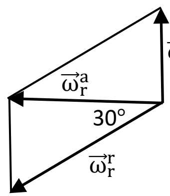
აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c\ .$$

რადგან წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, ამიტომ

$a_c = 0$; $a_e = a = 80\sqrt{3}$ სმ/წმ² .ფარდობითი აჩქარების მდგენელები A და B წერტილებისათვის უდრის:

$a_r^{B\text{ღერ}} = (\omega_r^a)^2 BK = (\omega_r^a)^2 AB\cos30° = 12 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 120\sqrt{3}$ სმ/წმ²; $a_r^{A\text{ღერ}} = 0$;



$$a_r^{B\text{ბრ}} = \varepsilon_r^a\, OB; \quad a_r^{A\text{ბრ}} = \varepsilon_r^a\, OA.$$

$$\varepsilon_r^a = \omega_r^a \omega_r^e \sin90° = 4\sqrt{3}\text{ სმ/წმ}^2 .$$

ამ ტოლობების გამოყენებით გვექნება :

A წერტილისთვის: $a_r^a = a_r^{A\text{ბრ}} \frac{AB}{2\sin30°} = 80\sqrt{3}$; $a_a^A = a_r^a - a_e = 0.$

B წერტილისთვის: $a_a^B =$

$\sqrt{\left(a_r^{B\text{ბრ}}\right)^2 + \left(a_r^{B\text{ღერ}} + a_e\right)^2 + 2a_r^{B\text{ბრ}}\left(a_r^{B\text{ღერ}} + a_e\right)\cos120°} = 302$ სმ/წმ².

პასუხი: V_a^A =80 სმ/წმ; $V_a^B = 100$ სმ/წმ ; $a_a^A = 0$; $a_a^B = 302$ სმ/წმ².

ამოცანა25.5

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ დაშვებით, რომ OC ღერძი ბრუნავს z ღერძის გარშემო 2t რად/წმ კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ კონუსური კბილანას A და B წერტილების აბსოლუტური აჩქარება დროის t=1წმ მოენტისათვის.

ამოხსნა

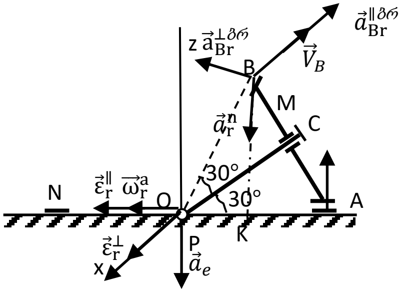
ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad (1)$$

აქ, როგორც წინა ამოცანაში $a_c = 0$; $a_e = a = 80\sqrt{3}$.

OC ღერძი ბრუნავს კუთხური აჩქარებით

$$\varepsilon_r^e = \dot{\omega}_r^e = 2\text{რად/წმ}.$$



ფარდობითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე ჩავწეროთ ასეთი სახით

$$\vec{\omega}_r^a = \omega_r^a \vec{\omega}_0,$$

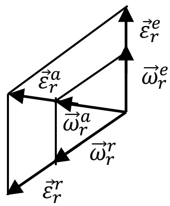
სადაც $\vec{\omega}_0$ არის ერთეულოვანი ვექტორი, რომელიც მიმართულია $\vec{\omega}_r^a$ ვექტორის გასწვრივ. მაშინ

$$\vec{\varepsilon}_r^a = \frac{d\vec{\omega}_r^a}{dt} = \frac{d\omega_r^a}{dt}\vec{\omega}_0 + \omega_r^a \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \varepsilon_r^a \vec{\omega}_0 + \omega_r^a \vec{\omega}_r^e \times \vec{\omega}_0 = \vec{\varepsilon}_r^{\|} + \vec{\varepsilon}_r^{\perp}. \qquad (1)$$

აქ $\vec{\varepsilon}_r^{\|}$ ვექტორი მიმართულია $\vec{\omega}_0$ ვექტორის გასწვრივ, მოდულით უდრის $\varepsilon_r^{\|} = \varepsilon_r^e ctg30° = 2\sqrt{3}$ რად/წმ² და ახასიათებს ფარდობითი კუთხური სიჩქარის მოდულით ცვლილებას . ვექტორი $\vec{\varepsilon}_r^{\perp}$ მიმართულია x ღერძის გასწვრივ და სიდიდით უდრის

$$\varepsilon_r^{\perp} = \omega_r^e \omega_r^e ctg30° = 4\sqrt{3} \text{ რად/წმ}^2,$$

ახასიათებს ფარდობითი კუთხური სიჩქარის ცვლილებას მიმართულებით.



A წერტილისთვის : რადგან A წერტილი ძევს OA ღერძზე, რომლის გასწვრივაც არის მიმართული $\vec{\omega}_r^a$ ვექტორი, ამიტომ

$$a_r^{IIღერ} = a_r^{IIბრ} = 0;$$

$$a_{Ar}^{\perp ბრ} = \varepsilon_r^{\perp} \cdot OA = 80\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2;$$

$$a_a^A = a_{Ar}^{\perp ბრ} - a_e = 0.$$

B წერტილისთვის:

$$\vec{a}_{Br} = \vec{a}_{Br}^{\|ბრ} + \vec{a}_{Br}^{\perp ბრ} + \vec{a}_{Br}^{ღერ}.$$

$a_{Br}^{\|ბრ} = \varepsilon_r^{\|}\text{BK} = 60$ სმ/წმ²; $a_{Br}^{\perp ბრ} = \varepsilon_r^{\perp} OB = 80\sqrt{3}$ სმ/წმ²; $a_{Br}^{ღერ} = (\omega_r^a)^2 \cdot BK = 120\sqrt{3}$სმ/წმ² .

ნახაზზე ნაჩვენები ვექტორების გათვალისწინებით გვექნება:

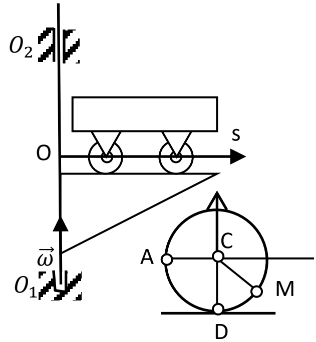
$$a_B = \sqrt{\left(a_{Br}^{\perp\text{ბრ}}\right)^2 + \left(a_{Br}^{\text{ღერ}} + a_e\right)^2 + 2a_{Br}^{\perp\text{ბრ}}\left(a_{Br}^{\text{ღერ}} + a_e\right)cos120° + \left(a_{Br}^{\parallel\text{ბრ}}\right)^2} =$$

308სმ/წმ^2 .

პასუხი: $a_A = 0;\ a_B = 308$სმ/წმ^2 .

ამოცანა 25.6

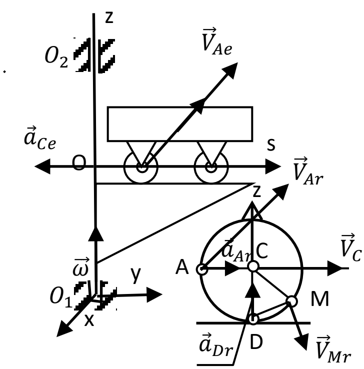
მოსაბრუნებელი ამწე ბრუნავს უძრავი, ვერტიკალური ღერძის გარშემო $\omega = 1$რად/წმ კუთხური სიჩქაით. ამწეს ჰორიზონტალური ისრის გასწვრივ მოძრაობს ურიკა. მისი უკანა ბორბლის C ცენტრი მოძრაობს კანონით: $s_C = OC = 60(1+t)$ სმ. იპოვეთ ბორბლის ფერსოზე მდებარე M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე t=1 წმ მომენტში, თუ $\angle MCD = 30°$. იპოვეთ აგრეთვე ფერსოზე მდებარე A და D წერტილების აბსოლუტური აჩქარებების მოდული, როცა t=1 წმ და $\angle ACD = 90°$.



ამოხსნა

ბორბალი ასრულებს რთულ მოძრაობას: მისი გორვა ჰორიზონტალურ ისარზე არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო მოძრაობა ისართან ერთად არის წარმტანი მოძრაობა. ვისარგებლოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემით

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \qquad (1)$$



რადგან ფარდობითი მოძრაობა არის ბრტყელი მოძრაობა, ამიტომ $\vec{V}_r$ ვექტორი არის DM მონაკვეთის მართობული და მიმართულია გორვის მიმართულებით. რიცხობრივად ფარდობითი სიჩქარე უდრის

$$V_r = \omega_c \cdot DM = DM \cdot \frac{V_C}{r} =$$

$$\frac{\dot{s}_C}{r}\sqrt{r^2 + r^2 2r \cdot rcos30°} = 60 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} =$$

31 სმ/წმ.

როცა t=1 წმ , მაშინ

$$V_e = V_{Ce} = \omega \cdot OC = 120 \text{ სმ/წმ}.$$

რადგან წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეები ურთიერთ მართობულია , ამიტომ

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 124 \text{ სმ/წმ}.$$

A და D წერტილების აჩქარებების საპოვნელად ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

სადაც

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau.$$

რადგან $\omega = 1$, ამიტომ

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \ \rightarrow \ a_e^\tau = \varepsilon \cdot OC = 0, \ \ a_{Ce}^n = \omega^2 OC = 120 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამ ვექტორის მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე. რადგან C წერტილი მოძრაობს თანაბრად ამიტომ $a_C = \dot{V}_C = 0$. A და D წერტილების ფარდობიღი აჩქარებების საპოვნელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\vec{a}_r = \vec{a}_C + \vec{a}_{D(A)C}^{\text{ბრ}} + \vec{a}_{D(A)C}^{\text{ღერ}}\ .$$

შევნიშნოთ, რომ

$$a_C = 0 \ \rightarrow \ \varepsilon = 0 \ \rightarrow \vec{a}_{DC}^{\text{ბრ}} = \vec{a}_{AC}^{\text{ბრ}} = 0;$$

$$a_{Dr} = a_{DC}^{\text{ღერ}} = \omega_C^2 DC = \frac{V_C^2}{r} = 360 \text{ სმ/წმ}^2, \ \ a_{Ar} = \omega_C^2 AC = \frac{V_C^2}{r} = 360 \text{ სმ/წმ}^2\ ;$$

D წერტილისათვის: რადგან $V_r = 0 \ \rightarrow a_c = 0;\ a_{De} = \omega^2 \cdot OC = 120$ სმ/წმ^2 ;

$$a_{Da} = \sqrt{a_{Dr}^2 + a_{De}^2} = 380 \text{ სმ/წმ}^2.$$

A წერტილისთვის:

$$V_{Ar} = \omega_C AD = \frac{V_C}{r} r\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}.$$

ვექტორი $\vec{V}_{Ar} \perp AD$ და მიმართულია გორვის მიმართულებით.

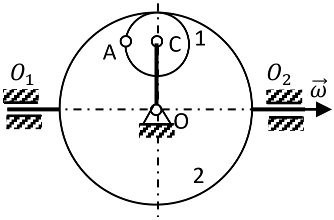
$$a_{Ac} = 2\omega V_{Ar} sin 45° = 120 \text{ სმ/წმ}^2;\ a_{Ae} = \omega^2 OC = 120 \text{ სმ/წმ}^2\ .$$

საბოლოოდ A წერტილის აჩქარება იქნება

$$a_A = \sqrt{a_C^2 + (a_{Ar} - a_{Ae})^2} = 268 \text{ სმ/წმ}^2\ .$$

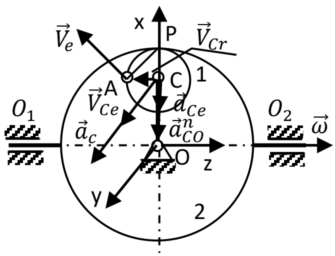
პასუხი: $V_M = 124$ სმ/წმ; $a_A = 268$ სმ/წმ^2 ; $a_D = 380$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 25.7



10 სმ რადიუსიანი კბილანა1 მოძრაობს 40 სმ რადიუსიანი 2 კბილანის შიგნით OC მრუდმხარის საშუალებით. მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად, კუთხური სიჩქარით $\omega_0 = 2$ რად/წმ. კბილანა 2 თავის მხრივ ბრუნავს უძრავი ჰორიზონტალური O_1O_2 ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 2$ რად/წმ. იპოვეთ 1 კბილანის ფერსოზე მდებარე A წერტილის აბსოლუტური სიჩქარისა და აბსოლუტური აჩქარების მოდული, თუ $\angle OCA = \angle O_1OC = 90°$.

ამოხსნა



კბილანა 1 მონაწილეობს რთულ მოძრაობაში: ფარდობითი მოძრაობა - მისი გორვა 2 კბილანაზე, წარმტანი მოძრაობა - მისი მოძრაობა 2 კბილანასთან ერთად. აბოლუტური სიჩქარე ვიპოვოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემის გამოყენებით

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \ .$$

აქ

$$V_r = \omega_C AP = \frac{\omega_0 OC}{PC} AP = 60\sqrt{2} \text{ სმ/წმ},$$

$$V_e = \omega_e OC = \omega(r_2 - r_1) = 60 \text{ სმ/წმ}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\vec{V}_e$ და $\vec{V}_r$ ურთიერთმართობული ვექტორებია და მივიღებთ

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 60\sqrt{3} = 104 \text{ სმ/წმ}.$$

აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელადვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \ .$$

ამ ტოლობაში

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{CO}^n + \vec{a}_{CO}^\tau + \vec{a}_{AC}^{\text{ბრ}} + a_{AC}^{\text{ღერ}}$$

რადგან $\omega_e = \omega_0 = const$, ამიტომ

$$\varepsilon_0 = 0 \ \rightarrow a_{CO}^\tau = \varepsilon_0 \ OC = 0; \ a_{AC}^{\text{ბრ}} = \varepsilon_C AC = \frac{a_{CO}^\tau}{PC} AC = 0.$$

$$a_{CO}^n = \omega_0^2 \cdot OC = 120 \text{ სმ/წმ}^2; a_{AC}^{\text{ღერ}} = \omega_C^2 \cdot AC = \frac{\omega_0^2 (r_2 - r_1)^2}{r_1} = 360 \text{ სმ/წმ}^2$$

$$a_{Ce}^n = \omega_e^2 \cdot OC = 120 \text{ სმ/წმ}^2 \, ; a_c = 2V_r \omega_e \sin 135° = 240 \text{ სმ/წმ}^2 \ .$$

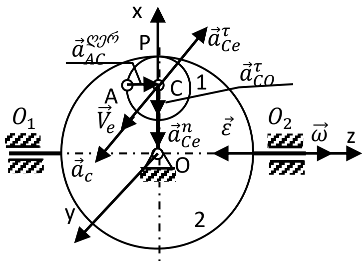
თუ გავითვალისწინებთ ვექტორების მიმართულებებს, შეიძლება დავწეროთ:

$$a = \sqrt{(a_{CO}^{n} + a_{Ce}^{n})^2 + \left(a_{AC}^{\text{ღერ}}\right)^2 + a_c{}^2} = 495 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $V_A = 104$ სმ/წმ ; $a_A = 495$ სმ/წმ².

ამოცანა 25.8

წინა ამოცანაში იპოვეთ A წერტილის აბსოლუტური აჩქარების მოდული t=2 წმ მომენტისათვის, თუ 2 კბილანას ბრუნვა ხდება ცვლადი კუთხური სიჩქარით $\omega = (2 - t)$ რად/წმ. ჩათვალეთ, რომ t=2 წმ მომენტისათვის A წერტილს უკავია წინა ამოცანის ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობა.



ამოხსნა

როგორც წინა ამოცანის შემთხვევაში, აბსოლუტურ აჩქარებას ვიპოვით ფორმულით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

წინა ამოცანის ანალოგიურად ვექტორების $\vec{a}_{CO}^{n}$, $\vec{a}_{AC}^{\text{ღერ}}$, $\vec{a}_c$, $\vec{a}_{Ce}^{n}$ რიცხობრივი მნიშვნელობები არ იცვლება და უდრის

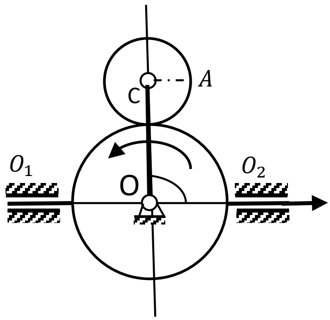
$a_{CO}^{n} = 120$ სმ/წმ², $a_{AC}^{\text{ღერ}} = 360$ სმ/წმ², $a_c = 240$ სმ/წმ², $a_{Ce}^{n} = 120$ სმ/წმ².
ამასთან კორიოლისის აჩქარების მიმართულება იცვლება საპირისპიროთი და დაემატება $a_{Ce}^{\tau} = \varepsilon_e \cdot OC = -120$ სმ/წმ².
ნიშანი „-„ მიუთითებს, რომ კბილანა2 ბრუნავს შენელებულად.
საბოლოოდ მივიღებთ

$$a_A = \sqrt{(a_{CO}^{n} + a_{Ce}^{n})^2 + \left(a_{AC}^{\text{ღერ}}\right)^2 + (a_c - a_{Ce}^{\tau})^2} = 449 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a_A = 449$ სმ/წმ².

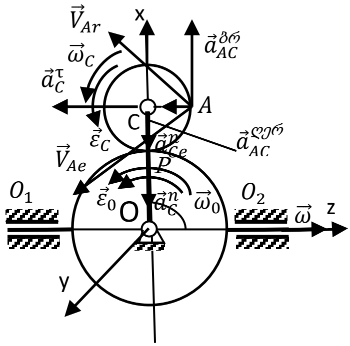
ამოცანა 25.9

10 სმ რადიუსიანი კბილანა 1 გორავს გარედან 20 სმ რადიუსიანი 2 კბილანაზე OC მრუდმხარას საშუალებით. მრუდმხარა ბრუნავს $\omega = t$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით . კბილანა 2 თავის მხრივ ბრუნავს ჰორიზონტალური O_1O_2 ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 2$ რად/წმ. იპოვეთ 1 კბილანას ფერსოზე მდებარე A წერტილის აბსოლუტური სსსიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება $t = 1$წმ მომენტისთვის, თუ $\angle O_2OC = \angle OCA = 90°$.



ამოხსნა

ეს ამოცანა იდენტურია წინა ორი ამოცანის იმ განსხვავებით, რომ კბილანები არიან გარე მოდებაში. 1 კბილანა მოძრაობს აჩქარებულად ფარდობით მოძრაობაში. A წერტილის სიჩქარე ვიპოვოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემის გამოყენებით.



$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e .$$

წინა ორი ამოცანის ანალოგიურად ვწერთ

$$V_r = \omega_C \cdot PA = \frac{\omega_0 OC}{CP} \cdot PC\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}.$$

$$V_e = \omega_P \cdot OC = \omega \cdot (r_1 + r_2) = 60 \text{ სმ/წმ} .$$

$$\vec{V}_r \perp \vec{V}_e \; \rightarrow \; V_A = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 73{,}5 \text{ სმ/წმ}.$$

აბსოლუტური აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

ვიპოვოთ ფარდობითი აჩქარება

$$\vec{a}_r = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau + \vec{a}_{AC}^{ბრ} + \vec{a}_{AC}^{ღერ}.$$

ნახაზზე გამოსახულია ამ ვექტორების მიმართულებები. გამოვთვალოთ მათი მოდულები:

$$a_C^n = \omega_0^n \cdot OC = 30 \text{ სმ/წმ}^2; \;\; a_C^\tau = \varepsilon_0 \cdot OC = \dot{\omega}_0 \cdot OC = 30 \text{ სმ/წმ}^2;$$

$a_{AC}^{ღერ}=\omega_C^2 \cdot CA = \left(\frac{\omega_0 OC}{CP}\right)^2 \cdot CA = \frac{\omega_0^2(r_1+r_2)^2}{r_1} = 90$ სმ/წმ^2 ; $a_{AC}^{ბრ} = \varepsilon_C \cdot AC =$ 30სმ/წმ^2.

წარმტანი მოძრაობა ;

$$a_e = \omega^2 OC = 120 \text{ სმ/წმ}^2$$

კორიოლისის აჩქარება:

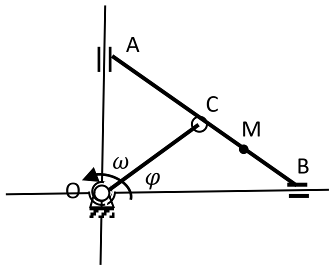
$$a_c = 2\omega_e V_r \sin 135° = 120 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

ვისარგებლოთ ნახაზზე გამოსახული ვექტორებით და მივიღებთ:

$$a_A = \sqrt{\left(a_C^\tau + a_{AC}^{ღერ}\right)^2 + \left(a_{AC}^{ბრ} - a_C^n - a_e\right)^2 + a_c^2} = 208 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $V_A = 73{,}5$ სმ/წმ ; $a_A = 208$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 25.10



OC მრუდმხარას AB ღეროს საშუალებით მოძრაობაში მოჰყავს A და B ცოციები, რომლებიც მოძრაობენ x და y მიმმართველების გასწვრივ. ეს მიმმართველები თავის მხრივ ბრუნავენ O ღერძის გარშემო საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით მუდმივი $\omega = \frac{\pi}{2}$ რად/ წმ კუთხური სიჩქარით. OC მრუდმხარას მობრუნების კუთხე φ აითვლება x ღერძიდან საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით და იცვლება კანონით: $\varphi = \pi t/4$ რად. იპოვეთ AB სახაზავის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება t=0 მომენტისათვის, თუ OC=AC=CB=2BM=16 სმ.

ამოხსნა

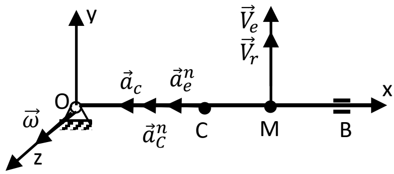
M წერტილის მოძრაობა AB ღეროსთან ერთად ჩავთვალოთ ფარდობით მოძრაობად, ხოლო ბრუნვა Oz ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. მივიღებთ, რომ

$$V_e = \omega_e \cdot OM = \frac{\pi}{2} \cdot 24 = 12\pi \text{ სმ/წმ} .$$

რადგან B წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და CB=2BM , ამიტომ

$$\frac{V_r}{V_c} = \frac{MB}{CB} \to V_r = \frac{1}{2} V_C = \frac{1}{2} \dot{\varphi}\, OC = 2\pi \text{ სმ/წმ}.$$

აბსოლუტური სიჩქარე არის ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამი. განხილულ შემთხვევაში ეს სიჩქარეები კოლინეარულია, ამიტომ



$V_M = V_e + V_r = 14\pi = 44$ სმ/წმ.

აბსოლუტური აჩქარება გამოვთვალოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \tag{1}$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$\ddot{\varphi} = 0 \ \ \rightarrow a_{MC}^{\tau} = 0 \text{ და } \vec{a}_r = \vec{a}_c^n + \vec{a}_{MC}^n.$$

სადაც

$$a_C^n = \dot{\varphi}^2 \cdot OC = \pi^2 \text{სმ/წმ}^2,\ a_{MC}^n = \omega_C^2 \cdot MC = \dot{\varphi}^2 MC = 0{,}5\pi^2 \text{სმ/წმ}^2 .$$

ვიპოვოთ წარმტანი და კორიოლისის აჩქარების მოდულები:

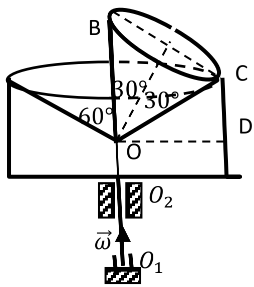
$a_e^n = \omega^2 OM = 6\pi^2$სმ/წმ², $a_c = 2\omega V_r \sin 90° = 2\pi^2$სმ/წმ².

ყველა ვექტორი დალაგებულია ერთ წრფეზე და მიმართულია M-დან O-კენ, ამიტომ

$$a_M = a_C^n + a_{MC}^n + a_e^n + a_c = 93{,}7 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

პასუხი : $V_M = 44$ სმ/წმ ; $a_M = 93{,}7$ სმ/წმ².

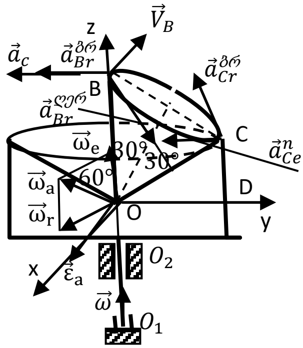
ამოცანა 25.11



კონუსი, რომლის გაშლის კუთხეა 60°, უსრიალოდ გორავს მეორე კონუსზე შინიდან. მეორე კონუსი, რომლის გაშლის კუთხეა 120°, ბრუნავს უძრავი ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 3$ რად/წმ. 1 კონუსის B ძევს BC დიამეტრზე, რომელიც მდებარეობს O_1O_2 ღერძთან ერთ ვერტიკალურ სიბრტყეში. B წერტილის სიჩქარე მოდულით მუდმივია, უდრის 60 სმ/წმ და მიმართულია OBC სიბრტყის მართობულად. OB=OC=20 სმ. $\angle COD = 30°$. იპოვეთ 1 კონუსის B და C წერტილებისაბსოლუტური ნაჩქარების მოდული.

ამოხსნა

ამ ამოცანაში ფარდობით მოძრაობად ჩავთვალოთ 1 კონუსის გორვა 2 კონუსის შიგა ზედაპირზე. ხოლო მისი ბრუნვა 2 კონუსთან ერთად არის წარმტანი მოძრაობა. განვიხილოთ ისინი ცალცალკე და შემდეგ გამოვიყენოთ სიჩქარეთა შეკრების და აჩქარებათა შეკრების თეორემები.



ფარდობითი მოძრაობა:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{ღერ} + \vec{a}_r^{ბრ}.$$

OC მონაკვეთი არის 1 კონუსის ბრუნვის მყისი ღერძი. მაშინ

$$V_B = \omega_a \cdot BK \text{ სადაც } BK = OB\sin 60° = 10\sqrt{3} \text{ სმ .}$$

აქედან

$$\omega_a = \frac{V_B}{BK} = \frac{60}{10\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ რად/წმ.}$$

$$a_{Br}^{ღერ} = \omega_a^2 \cdot BK = \frac{V_B^2}{BK} = 120\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2.\ a_{Cr}^{ღერ} = 0.$$

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \ \rightarrow \varepsilon_a = \omega_e \omega_a sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_e\omega_a.$$

რადგან A წერტილი მდებარეობს BC მონაკვეთის შუაში, ამიტომ ის ორჯერ უფრო ახლოს არის ბრუნვის მყის ღერძთან ამიტომ

$$V_A = \frac{1}{2}V_B = 30 \text{ სმ/წმ.}$$

გარდა ამისა

$$AK = OC\cos 30° sin30° = 5\sqrt{3} \text{ სმ.}$$

ვიპოვოთ წარმტანი კუთხური სიჩქარე

$$\omega_e = \frac{V_A}{AK} = 2\sqrt{3} \text{ რად/წმ.}$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\varepsilon_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ რად/წმ}^2.$$

კუთხური აჩქარების ვექტორი მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ .

$$OC=OB \rightarrow a_{Cr}^{ბრ} = a_{Br}^{ბრ} = \varepsilon_a \cdot OB = \varepsilon_a \cdot OC = 120\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2.$$

წარმტანი მოძრაობა:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau.$$

რადგან $\omega_e = \omega = 3$ რად/წმ, ამიტომ

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0 \ \rightarrow \ a_e^\tau = 0;$$

$a_{Be}^n = 0$ რადგან B წერტილი ძევს წარმტანი ბრუნვის ღერძზე.

$$a_{Ce}^{n} = \omega^2 CL = \omega^2 CO \cdot sin60° = 90\sqrt{3}\text{ სმ/წმ}^2 .$$

კორიოლისის აჩქარება:

$$V_C = 0 \ \rightarrow a_{Cc} = 0 .$$

$$V_B = 60 \ \rightarrow a_{Bc} = 2\omega V_B sin90° = 180\text{ სმ/წმ}^2 .$$

ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარებები B და C წერტილებისათვის. ვისარგებლოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{Cr}^{\text{ბრ}} + \vec{a}_{Ce}^{n};$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Br}^{\text{ბრ}} + a_{Br}^{\text{ღერ}} + \vec{a}_{Be} .$$

თუ ვისარგებლეთ ნახაზით, სადაც გამოსახულია შესაბამისი აჩქარებები, მივიღებთ:

$$a_C = \sqrt{\left(a_{Cr}^{\text{ბრ}}\right)^2 + (a_{Ce}^{n})^2 + 2a_{Ce}^{n} a_{Cr}^{\text{ბრ}} cos60°} = 316\text{ სმ/წმ}^2.$$

$$a_B = \sqrt{\left(a_{Br}^{\text{ბრ}} + a_{Bc}\right)^2 + \left(a_{Br}^{\text{ღერ}}\right)^2 + 2\left(a_{Br}^{\text{ბრ}} + a_{Bc}\right) a_{Br}^{\text{ღერ}} cos120°} = 497{,}6\text{ სმ/წმ}^2 .$$

პასუხი: $a_C = 316$ სმ/წმ^2 ; $a_B = 497{,}6$ სმ/წმ^2 .

ამოცანა 25.12

იპოვეთ წინა ამოცანაში განხილული 1 კონუსის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი რომლის აჩქარება არ იცვლება. მიუხედავად იმისა, რომ B წერტილის სიჩქარე იცვლება და უდრის მოცემულ 60t სმ/წმ.

ამოხსნა

განვიხილოთ C წერტილი, რომლის წარმტანი სიჩქარე უცვლელია რადგან მანძილი ამ წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე უცვლელია.

$$CL = OCsin60° = 10\sqrt{3}\text{ სმ.}$$

წარმტანი კუთხური სიჩქარე $\omega = 3$ რად/წმ. აქედან გამომდინარე

$$a_{Ce}^{n} = 90\sqrt{3}\text{ სმ/წმ}^2.$$

წინა ამოცანის ანალოგიურად, ფარდობითი მოძრაობისთვის მივიღებთ:

$$\omega_a = \frac{V_B}{BK} = \frac{60t}{10\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}t\text{ რად/წმ.}$$

$$\omega_e = \frac{V_A}{AK} = \frac{V_B}{2AK} = \frac{V_B}{BK} = 2\sqrt{3}t\text{ რად/წმ.}$$

$\varepsilon_a = \omega_e \omega_a sin120° = 6\sqrt{3}t^2$ რად/წმ^2. როცა t=1 ,მაშინ $\varepsilon_a = 6\sqrt{3}t^2$ რად/წმ^2.

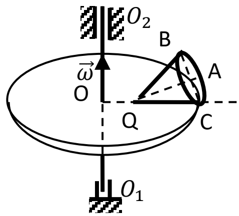
აქედან, როგორც წინა ამოცანაში, გვაქვს

$$a_{Ce}^{\text{ბრ}} = \varepsilon_a \cdot \mathrm{OC} = 120\text{ სმ/წმ}^2 ;\ a_C = 316\text{ სმ/წმ}^2 .$$

თ უ ჩავატარებთ ანალოგიურ გამოთვლებს__OC წრფის სხვა წერტილებისათვის, დავასკვნით, რომ საიებელი წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის OC წრფე.

პასუხი: კონუსი 1-ის წერტილები, რომლებიც ემთხვევა OC მსახველს.

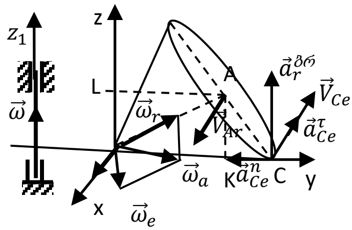
ამოცანა 25.13



წრიული კონუსი გორავს უსრიალოდ ჰორიზონტალურ დისკზე და დამაგრებულია მასზე Q წვეროთი. თავის მხრივ დისკო ბრუნავს ვერტიკალური O_1O_2 ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega = 2$ რად/წმ. კონუსის ფუძის A ცენტრის სიჩქარე დისკოს მიმართ უდრის 15 სმ/წმ და მიმართულია მკითხველისკენ ნახაზის სიბრტყის მართობულად. იპოვეთ კონუსის ფუძის C წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება, თუ $OQ = QC = QB = BC = 10$ სმ.

ამოხსნა

კონუსის გორვა დისკოზე არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო კონუსის ბრუნვა დისკოსთან ერთად არის წარმტანი მოძრაობა. განვიხილოთ ეს მოძრაობები ცალ-ცალკე.



ფარდობითი მოძრაობა არის სფერული მოძრაობა, რომლის უძრავი წერტილია Q. რადგან $QC = QB = BC$, ამიტომ სამკუთხედი QBC არის ტოლგვერდა და კუთხე კონუსის წვეროსთან არის $60°$. კონუსის გორვის პირობიდან გამომდინარე ვწერთ:

$$\omega_e = \frac{V_A}{AL} = 2 \text{ რად/წმ}.$$

კუთხური სიჩქარისთვის გვაქვს

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

ნახაზიდან ვწერთ

$$\omega_a = \omega_e ctg30° = \sqrt{3}\omega_e = 2\sqrt{3} \text{ რად/წმ};$$

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \ \rightarrow \ \varepsilon_a = \omega_e \omega_r sin90° = 4\sqrt{3} \text{ რად/წმ}^2 .$$

ვექტორული ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\varepsilon}_a$ ვექტორი მიმართულია x ღერძის დადებითი მიმართულებით. მეორე მხრივ

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\text{ბრ}} + a_r^{\text{ღერ}}.$$

რადგან C წერტილი ძევს ბრუნვის მყის ღერძზე, ამიტომ $\vec{a}_r^{\text{ღერ}} = 0$. აქედან $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\text{ბრ}}$. სადაც

$$\vec{a}_r^{\text{ბრ}} = \vec{\varepsilon}_a \times \overrightarrow{QC} \ \to a_r^{\text{ბრ}} = \varepsilon_a \cdot QC \cdot sin90° = 40\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2 .$$

წარმტანი მოძრაობა :

$$V_e = \omega \cdot OC = 40 \text{ სმ/წმ}.$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau ,$$

$$\omega_e = \omega \ \to \varepsilon_e = \dot{\omega} = 0 \ \to a_e^\tau = 0;\ a_e^n = \omega^2 \text{OC=80 სმ/წმ}.$$

კორიოლისის აჩქარება უდრის ნულს, რადგან ფარდობითი აჩქარება ნულის ტოლია.

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$V = V_e = 40\text{სმ/წმ} ;\ a = \sqrt{\left(a_r^{\text{ბრ}}\right)^2 + (a_e^n)^2} = 106 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: $V = 40$სმ/წმ ; $a = 106$ სმ/წმ².

ამოცანა 25.14

იპოვეთ წინა ამოცანაში განხილული C წერტილის აბსოლუტური აჩქარება t=1წმ მომენტისთვის იმ პირობით, რომ დისკო ბრუნავს კუთხური აჩქარებით $\varepsilon = 2t$ რად/წმ² და საწყის მომენტში კუთხური სიჩქარე იყო 2 რად/წმ.

ამოხსნა

ამ ამოცანის ამოხსნისას ვისარგებლოთ 25.13 ამოცანის ნახაზით. დავუმატოთ სქემაზე $\vec{a}_{Ce}^\tau$, რომელიც მიმართულია $\vec{V}_{Ce}$ ვექტორის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში აჩქარებათა შეკრების თეორემა მიიღებს სახეს

$$\vec{a}_C = \vec{a}_r^{\text{ბრ}} + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau,$$

სადაც $a_r^{\text{ბრ}} = 40\sqrt{3}$ სმ/წმ².

გამოვთვალოთ წარმტანი აჩქარების მდგენელები:

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot OC = 40 \text{ სმ/წმ}^2; \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \ \to \ \omega = \omega_0 + t^2;$$

როცა t=1, მაშინ

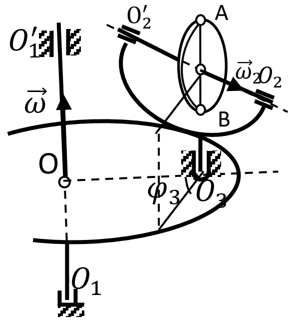
$$\omega = 3 \ \to a_e^n = \omega^2 OC = 180 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

აჩქარების მდგენელების მიმართულების გათვალისწინებით ვწერთ

$$a_C = \sqrt{\left(a_r^{ბრ}\right)^2 + (a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2} = 197სმ/წმ^2 .$$

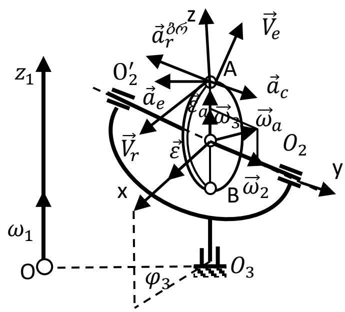
პასუხი : $a_C = 197$სმ/წმ².

ამოცანა 25.15



გიროსკოპი დგას ჰორიზონტალურ L ბაქანზე, რომელიც ბრუნავს ვერტიკალური O_1O_1' ღერძის გარშემო $\omega_1 = 2\pi$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. გიროსკოპი არის r=10 სმ რადიუსიანი დისკო, რომელიც ბრუნავს ჰორიზონტალურ O_2O_2' ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით $\omega_2 = 8\pi$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. O_2O_2' ღერძი თავის მხრივ ბრუნავს ვერტიკალური O_3O_3' ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi_3 = 2\pi t^2$ რად. t=0 მომენტისთვის დისკო ძევს O_1O_1' ღერძთან ერთად ერთ ვერტიკალურ სიბრტყეში. კუთხე φ_3 აითვლება ამ სიბრტყიდან ნახაზზე ნაჩვენები ნინართულებით. იპოვეთ K დისკოს ვერტიკალური დიამეტრის ზედა ბოლო A წერტილის ანსოლუტური სიჩარისა და აბსოლუტური აჩქარების მოდული t=1 წმ მომენტისთვის, თუ მანძილი პარალელურ O_1O_1' და O_3O_3' ღერძებს შორის არის 30 სმ.

ამოხსნა



გიროსკოპს აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი, რომელიც ხასიათდება ბრუნვის ორი ღერძით: საკუთარი ბრუნვა ხდება O_2O_2' ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხურ კუთხური სიჩქარით, ხოლო პრეცესიული მოძრაობა ხდება O_3O_3' ღერძის გარშემო კანონით: $\varphi_3 = 2\pi t^2$. ეს მოძრაობა ჩავთვალოთ ფარდობით მოძრაობად, ხოლო გიროსკოპის ბრუნვა ბაქანთან ერთად O_1O_1' ღერძის გარშემო არის წარმტანი მოძრაობა. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე.

ფარდობითი მოძრაობა: სფერული მოძრაობის დროს სამართლიანია ტოლობა

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \tag{1}$$

$\omega_3 = \dot{\varphi}_3 = 4\pi t$; როცა t=1წმ, მაშინ $\omega_3 = 4\pi$ რად/წმ.

ფარდობითი სიჩქარე ვიპოვოთ ფორმულით

$$\vec{V}_r = \vec{\omega}_a \times \overline{KA} = (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \overline{KA} = \vec{\omega}_2 \times \overline{KA} \ \rightarrow V_r = \omega_2 r = 80\pi \text{ სმ/წმ}.$$

ფარდობითი მოძრაობის კუთხური აჩქარება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_\perp + \vec{\varepsilon}_\parallel ,$$

სადაც

$$\varepsilon_\parallel = \ddot{\varphi}_3 = 4\pi \text{ რად/წმ}^2; \vec{\varepsilon}_\perp = \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) = \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_2 \ \rightarrow \ \varepsilon_\perp = \omega_3\omega_2 = 32\pi^2 \text{რად/წმ}^2 .$$

ვექტორი $\vec{\varepsilon}_\parallel$ მიმართულია ვერტიკალურად ზევით, ხოლო $\vec{\varepsilon}_\perp$ მიმართულია Kx ღერძის გასწვრივ.

$$\vec{a}_r = a_r^{ღერ} + \vec{a}_r^{ბრ}. \tag{2}$$

$$\vec{a}_r^{ღერ} = \vec{\omega}_a \times \vec{\omega}_a \times \overline{KA} = \vec{\omega}_a \times \vec{\omega}_2 \times \overline{KA} = \vec{\omega}_2 \times \left(\vec{\omega}_2 \times \overline{KA}\right) + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_2 \times \overline{KA} =$$
$$= \omega_2^2 r\left[\vec{j} \times \left(\vec{j} \times \vec{k}\right)\right] + \omega_2\omega_3 r\left[\vec{k} \times \left(\vec{j} \times \vec{k}\right)\right] = -\omega_2^2 r\vec{k} + \omega_2\omega_3 r\vec{j}.$$

$$a_{ry}^{ღერ} = \omega_2\omega_3 r = 320\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 ; \ a_{rz}^{ღერ} = -\omega_2^2 r = -640\ \pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

აქ $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ არის Kx, Ky, Kz ღერძების მგეზავები, ხოლო KA=r.

$$\vec{a}_r^{ბრ} = \vec{\varepsilon}_a \times \overline{KA} = (\vec{\varepsilon}_\perp + \vec{\varepsilon}_\parallel) \times \overline{KA} = \vec{\varepsilon}_\perp \times \overline{KA} \ \rightarrow \ a_r^{ბრ} = \varepsilon_\perp r sin90° = 320\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2 .$$

ვექტორი $\vec{a}_r^{ბრ}$ ძევს y ღერძზე და მიმართულია უარყოფითი მიმართულებით.

წარმტანი მოძრაობა: რადგან $\omega_1 = const = 2\pi$ რად/წმ, ამიტომ $\varepsilon_1 = 0$.

$$a_e = a_e^n = \omega_1^2 {OO_3}^2 = 120\ \pi^2 \text{ სმ/წმ}^2; V_e = \omega_1 \cdot OO_3 = 60\pi \text{ სმ/წმ}.$$

კორიოლისის აჩქარება

$$a_c = 2\omega_1 V_r sin90° = 320\pi^2 \text{სმ/წმ}^2.$$

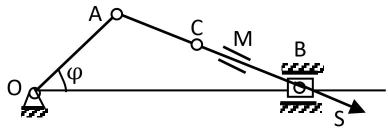
სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელების მიმართულების გათვალისწინებით ვწერთ:

$$V_A = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_3\right)} = 314 \text{ სმ/წმ};$$

$$a_A = \sqrt{\left(a_{rz}^{ღერ}\right)^2 + \left(a_{ry}^{ღერ} + a_c - a_r^{ბრ}\right)^2 + (a_e)^2} = 7153 \text{ სმ/წმ}^2.$$

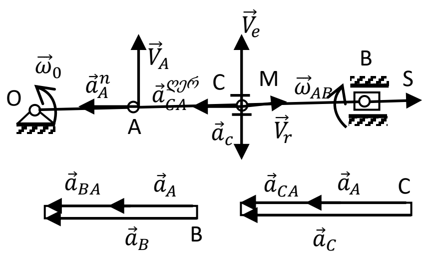
პასუხი: $V_A = 314$ სმ/წმ ; $a_A = 7153$ სმ/წმ².

ამოცანა 25.16



მრუდმხარა- ბარბაცა მექანიზმის AB ბარბაცას გასწვრივ C წერტილის მიდამოში ირხევა ცოცოია M კანონით : $s = CM = 20sin\frac{\pi}{2}t$ სმ. OA მრუდმხარა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით კანონით: $\varphi = \frac{\pi}{2}t$ რად. იპოვეთ ცოციას აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება t=0 მომენტისათვის, თუ OA=10 სმ, AC=CB=AB/2=20 სმ.

ამოხსნა



ნახაზზე გამოსახულია მექანიზმის მდებარეობა t=0 მომენტისათვის. AB ბარბაცა ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, რომელიც არის წარმტანი მოძრაობა. ბარბაცას გასწვრივ ცოციას მოძრაობა არის ფარდობითი მოძრაობა. მოცემულ მომენტში მისი მდებარეობა ემთხვევა C წერტილის მდებარეობას. განვიხილოთ ეს მოძრაობები ცალ-ცალკე.

წარმტანი მოძრაობა:

$$V_A = \dot{\varphi} \cdot OA = 5\pi \text{ სმ/წმ.}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

$$a_A^\tau = \ddot{\varphi} \cdot OA = 0, a_A = a_A^n = \dot{\varphi}^2 \cdot OA = 2{,}5\pi^2 \text{სმ/წმ}^2.$$

რადგან $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ ვექტორების მართობები გადაიკვეთებიან B წერტილში, ამიტომ ეს წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და $\vec{V}_B = 0$. ვიპოვოთ ფარდობითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე და წარმტანი სიჩქარე:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{\pi}{8} \text{ რად/წმ; } V_e = \omega_{AB} \cdot BC = \frac{5}{2}\pi \text{ სმ/წმ.}$$

აჩქარების საპოვნელად ვისარგებლოთ ბრტყელი მოძრაობის დროს აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულით

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + a_{CA}^{ღერ} + \vec{a}_{CA}^{ბრ},$$

სადაც $a_{CA}^{ღერ} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \frac{5}{16}\pi^2$სმ/წმ². $\vec{a}_{CA}^{ბრ}$ ვექტორის საპოვნელად ავაგოთ ვექტორული სამკუთხედი B წერტილისათვის. ცხადია $\vec{a}_{BA}^{ბრ} = 0 \rightarrow$ $\varepsilon_{AB} = 0, \rightarrow$ $\vec{a}_{CA}^{ბრ}$=0.

ე.ი. $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{ღერ}$ და $\vec{a}_A$ და $\vec{a}_{CA}^{ღერ}$ ვეტორები მიმართულია A - დან B-კენ.

ფარდობითი მოძრაობა: რადგან ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია არის წრფე, ამიტომ

$V_r = \dot{s} = 10\pi cos\frac{\pi}{2}t$, როცა t=0 , მაშინ $V_r = 10\pi$ სმ/წმ ;

$$a_r^{\tau} = \ddot{s} = 0;\ a_r^n = 0.$$

კორიოლისის აჩქარება:

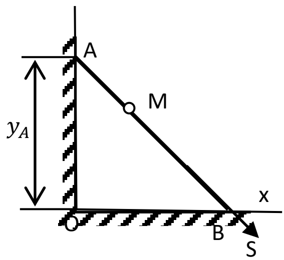
$$a_c = 2\omega_{AB}V_r\ sin90° = 2{,}5\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ვისარგებლოთ სიჩქარეთა და აჩქარებათა შეკრების თეორემებით, გავითვალისწინოთ ნახაზზე გამოსახული ვექტორების განლაგება და მივიღებთ:

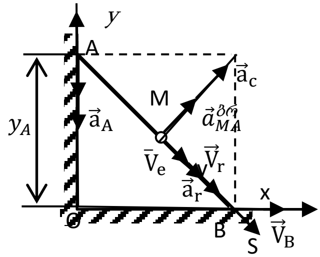
$V_M = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 32{,}4$ სმ/წმ; $a_M = \sqrt{\left(a_A + a_{CA}^{ღერ}\right)^2 + a_c^2} = 37{,}1$ სმ/წმ².

პასუხი: $V_M = 32{,}4$ სმ/წმ; $a_M = 37{,}1$ სმ/წმ².

ამოცანა 25.17



$4\sqrt{3}$ მ სიგრძის AB ღეროს A ბოლო სრიალებს ქვევით y ღერძის გასწვრივ, ხოლო B ბოლო- მარჯვნივ x ღერძის გასწვრივ. A წერილიმოძრაობს კანონით: $y_A = (5 - t^2)$ მ. იმავე დროს ღეროს გასწვრივ A -დან B-კენ მისრიალებს M წერტილი. იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება t=1 წმ მომენტისათვის, თუ ღეროს გასწვრივ მისი მოძრაობის განტოლებაა $s = AM = 2\sqrt{2}t^2$მ.



ამოხსნა

M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას. მისი მოძრაობა AB ღეროს გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო ღეროს-

თან ერთად მოძრაობა არის წარმტანი მოძრაობა. ვისარგებლოთ სიჩქარეთა შეკრების თეორემით

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \qquad (1)$$

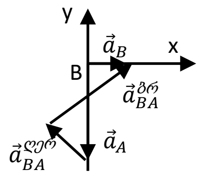
AB ღეროს მოძრაობა არის ბრტყელი მოძრაობა. ვიპოვოთ ამ მოძრაობის მახასიათებლები.

როცა t=1 წმ, მაშინ AO=$y_A = 4$მ; $cos\varphi = \frac{AO}{AB} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = 45°$.

გავავლოთ $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეების მართობები A და B წერტილებიდან. მათი გადაკვეთის წერტილი P იქნება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. მაშინ

$$\omega_{AB} = \left|\frac{V_A}{AP}\right| = \left|\frac{\dot{y}_A}{AP}\right| = \left|\frac{-2}{4}\right| = 0{,}5\text{რად/წმ}.$$

ნიშანი „-„ მიუთითებს, რომ A წერტილის სიჩქარე მიმართულია AO მონაკვეთის სემცირების მიმართულებით.



ვიპოვოთ M წერტილის მდებარეობა AB ღეროზე და მანძილი PM. მათი საშუალებით გამოვთვალოთ წარმტანი სიჩქარე.

AM=s(t=1)=$2\sqrt{2}$ მ,

ე.ი M წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთის შუაში, ამიტომ PM=AM=$\sqrt{2}$ მ.

$$V_e = \omega_{AB} \cdot PM = \sqrt{2}\text{ მ}. \vec{V}_e \perp AB.$$

რადგან ცნობილია ფარდობითი მოძრაობის განტოლება, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ ფარდობითი სიჩქარე;

$$V_r = \dot{s}(t=1) = 4\sqrt{2}\text{ მ/წმ}.$$

$\vec{V}_e$ და$\vec{V}_r$ ვექტორები არიან კოლინეარული ვექტორები, ამიტომ

$$V_a = V_e + V_r = 5\sqrt{2} = 7{,}07\text{ მ/წმ}.$$

აბსოლუტური აჩქარება ვიპოვოთ აჩქარებათა შეკრების თეორემით

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

განსახილველ შემთხვევაში

$$\vec{a}_e = \vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{ღერ} + \vec{a}_{MA}^{ბრ}\ ;\ a_A = \ddot{y}_A = -2\text{ მ/წმ}^2.$$

ნიშანი „-„ მიუთითებს, რომ $\vec{a}_A$ ვექტორი მიმარულია ქვემოთ.

$$a_{MA}^{ღერ} = \omega_{AB} \cdot AC = \omega_{AB}^2 \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ მ/წმ}^2.$$

$\vec{a}_{MA}^{ბრ}$ ვექტორის საპოვნელად ავააგოთაჩქარების მრავალკუთხედი B წერტილისათვის (იხ.ნახ.)

დავაგეგმილოთ y ღერძზე ვექტორული ტოლობა $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ღერ} + \vec{a}_{BA}^{ბრ}$ და მივიღებთ:

$$0=-a_A + a_{BA}^{ღერ} cos45° + a_{BA}^{ბრ} cos45° \ \rightarrow \ a_{BA}^{ბრ} = \sqrt{2}a_A - a_{BA}^{n} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$ მ/წმ^2 .

ვიპოვოთ კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{ბრ}}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \text{ რად/წმ}^2;$$

$$a_{MA}^{ბრ} = \varepsilon_{AB} \cdot AM = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ მ/წმ}^2.$$

$\vec{a}_{MA}^{ბრ}$ ვექტორი მიმართულია AM წრფის მართობულად და მიმართულებით ემთხვევა $\vec{a}_{BA}^{ბრ}$ ვექტორს. M წერტილის ფარდობითი აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით:

$$a_r = \ddot{s} = 4\sqrt{2} \text{ მ/წმ}^2,$$

მიმართულია s კოორდინატის ზრდის მიმართულებით.

კორიოლისის აჩქარება:

$$a_c = 2\omega_e V_r sin90° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ მ/წმ}^2 .$$

აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{ღერ} + \vec{a}_{MA}^{ბრ} + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე და მივიღებთ:

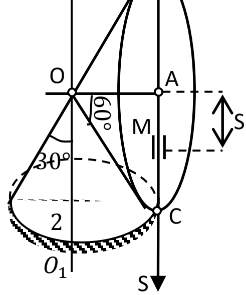
$$a_x = a_r - a_{MA}^{ღერ} + a_A cos45° = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a_y = a_c + a_{MA}^{ბრ} - a_A sin45° = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ მ/წმ}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_x^2} = \sqrt{65} = 8,06 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი: $V_M = 7,07$ მ/წმ; $a_M = 8,06$ მ/წმ^2 .

ამოცანა 25.18

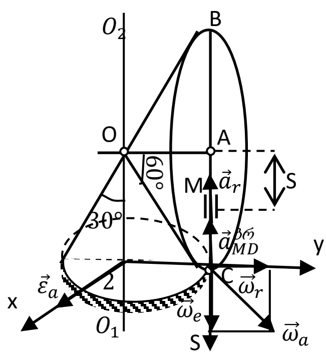


წრიული კონუსი 1, რომლის გაშლის კუთხეა 120^0, წვეროთი დამაგრებულია უძრავ კონუსზე 2 და გორავს მასზე უსრიალოდ.2 კონუსის გაშლის კუთხეა 60^0. OA ღერძი ვერტიკალური O_1O_2 ღერძის გარშემო აკეთებს ერთ ბრუნს წამში. BC=20 სმ დიამეტრის გასწვრივ მიმმართველში მოძრაობს M ცოცია, რომელიც ასრულებს რხევით მოძრაობას A წერტილის მიმართ კანონით: $s = AM = 10\cos{(2\pi t)}$

სმ. საწყის მომენტში (t=0) BC მიმმართველი ძევს O ცენტრთან ერთად ერთ სიბრტყეში. იპოვეთ ცოციას აბსოლუტური აჩქარება t=0 მომენტისათვის.

ამოხსნა

M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: მისი მოძრაობა BC დიამეტრის გასწვრივ არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო კონუსის გორვა უძრავ კონუსზე არის წარმტანი მოძრაობა. განვიხილოთ ეს მოძრაობები ცალ-ცალკე, დავადგინოთ კინემატიკური მახასიათებლები და, შემდეგ, ვიპოვოთ აბსოლუტური აჩქარება აჩქარებათა შეკრების თეორემის გამოყენებით.



$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

დავუშვათ, კომუსი გორავს მკითხველისკენ. გამოვსახოთ კონუსის კუთხური სიჩქარე ნახაზზე ისე, რომ აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$$

და შევადგინოთ კინემატიკური სამკუთხედი. ამ სამკუთხედიდან გვაქვს

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{cos30°}.$$

$\vec{\omega}_a$ ვექტორი ძევს OC წრფეზე, იქ, სადაც 1 კონუსის წერტილების სიჩქარეები ნულის ტოლია. გავითვალისწინოთ, რომ

$$\omega_e = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ რად/წმ.}$$

მივიღებთ

$$\omega_a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}/_2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi \text{ რად/წმ.}$$

ბურის ფორმულით

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \ \rightarrow \varepsilon_a = \omega_e \omega_a sin30° = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi^2 \text{ რად/წმ}^2.$$

t=0 მომენტისთვის

$$AM_0 = 10\cos(2\pi \cdot 0) = 10 \text{ სმ.}$$

ე.ი M_0 წერტილი ემთხვევა C წერტილს. მაშინ $a^{\text{ღერ}}_{MO} = 0$, რადგან M_0 ძევს ბრუნვის მყის ღერძზე.

$$a^{\text{ბრ}}_{MO} = \varepsilon_a \cdot OM_0 = \varepsilon_a \cdot \frac{1}{2}\frac{BCsin30°}{cos60°} = \frac{40\sqrt{3}}{3}\pi^2 \text{სმ/წმ}^2.$$

ფარდობით მოძრაობაში

$$a_r = \ddot{s} = -40\pi^2 cos2\pi t \ \rightarrow \text{როცა}\, t = 0, \text{მაშინ}\, a_r = -\,40\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ნიშანი „-„ მიუთითებს, რომ ფარდობითი აჩქარება მიმართულია s კოორდინატის კლების მიმართულებით, ანუ ზევით.

კორიოლისის აჩქარება :

$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e,\hat{}\vec{V}_r) = 0$, რადგან $V_r = \dot{s} = -20\pi sin2\pi t\ (t = 0) = 0$.

საბოლოოდ

$$\vec{a}_M = \vec{a}_e + \vec{a}_r \ ,$$

რადგან $\vec{a}_e$ *და* $\vec{a}_r$ კოლინეარული ვექტორებია, ამიტომ

$$a_M = a_e + a_r = 572 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პასუხი: $a_M = 572$ სმ/წმ².

გამოყენებული ლიტერატურა

1. კვიციანი ტ. თეორიული მექანიკის კურსი, სტატიკა და კინემატიკა, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2015, 562 გვ.
2. გორგიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი I, სტატიკა და კინემატიკა, გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1990, 364 გვ.
3. გორჯოლაძე ი., ყიფიანი გ. თეორიული მექანიკის კურსი, სტატიკა და კინემატიკა, სტუ, თბილისი, 2002წ. 434 გვ.
4. ვეკუა ნ. თეორიული მექანიკა, ნაწილი I, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1970, 285 გვ.
5. მუსხელიშვილი ნ. თეორიული მექანიკის კურსი, პირველი ნაწილი, სტატიკა. სახელმწიფო გამომცემლობა, ტფილისი, 1930, 216 გვ.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике, Москва, “Наука”, 1985, 580 с.
7. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике / А.И. Аркуша. М. : Высшая школа, 2004. 336 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, том I, статика и кинематика, Москва, “Наука”,1998, 624 с.
9. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том I, Москва, “Наука”, 1985, 239 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, том I, Москва, “Наука”, 1988, 215 с.
11. Hibbeler R.C. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, Prentice Hall, Inc. USA, 2004.-688p.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

კინემატიკა

გელა ყიფიანი, ალექსანდრე ბაძგარაძე,
ზურაბ მჭედლიშვილი, მაყვალა ბექირიშვილი,
მარინა ქურდაძე

თეორიული

მექანიკა

კინემატიკა

ტომი 2

ტექნიკური რედაქტორი: ალექსანდრე ბაძგარაძე
კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ეთერი ზარიძე
დამკაბადონებელი: ნანა დუმბაძე
ყდის დიზაინერი: ირაკლი უშვერიძე

გადაეცა წარმოებას 2.03.2023წ.
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17.03.2023წ.
ტირაჟი 100 ეგზემპლარი

გამომცემლობა „უნივერსალი"

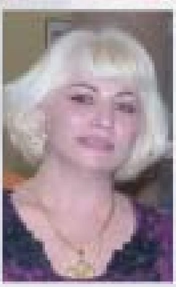
თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4. ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

გელა ყიფიანი – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1986წ), ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1997წ), საქართველოს მეცნიერებისა და ტექნიკის დარგის სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი (2004წ), საქართველოს დამსახურებული მშენებელი (2019წ), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი.

ალექსანდრე ბაძგარაძე – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1986 წ.), აკადემიური დოქტორი (2006 წ.). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

ზურაბ მჭედლიშვილი – დაამთავრა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (2006წ), მექანიკის ინჟინერიის დოქტორი (2006წ). გამოქვეყნებული აქვს 70 სამეცნიერო ნაშრომი, მათ შორის 5 სახელმძღვანელო. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

მაყვალა ბექირიშვილი – დაამთავრა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი. საინჟინრო მეცნიერებათა დოქტორი (2009წ), მისი სამეცნიერო მიმართულებაა სამშენებლო მექანიკა. გამოქვეყნებული აქვს 30 სამეცნიერო ნაშრომი, მათ შორის 2 სახელმძღვანელო და 1 მონოგრაფია. ბათუმის სახელმწიფო საზღვაო აკადემიის ასოცირებული პროფესორი.



მარინა ქურდაძე – ეკონომისტ-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საინჟინრო ეკონომიური ფაკულტეტი, ეკონომიკური კიბერნეტიკის სპეციალობით. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (2002წ) აკადემიური დოქტორი (2006წ) არის 210 სამეცნიერო შრომის, 34 სახელმძღვანელოს , დამხმარე სახელმძღვანელოს, მეთოდური მითითებების და 3 მონოგრაფიის ავტორი. სტუ-ს ციფრული სატელეკომუნიკაციო ტექნოლოგიების დეპარტამენტის უფროსი, პროფესორი.

ISBN 978-9941-33-565-7