გრ. ხაჯალია

დიფერენციალური განტოლებანი

მესამე გადამუშავებული გამოცემა

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1983

517.2
517.91+[016.3]
6245

წიგნი „დიფერენციალური განტოლებანი“ შედგენილია პროგრამის მიხედვით. იგი განკუთვნილია სახელმძღვანელოდ პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტთათვის. მასში გათვალისწინებულია აგრეთვე დაუსწრებელი განყოფილების სტუდენტთა მუშაობის თავისებურებაც.

სახელმძღვანელო გამოადგება აგრეთვე სხვა უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

$X \frac{20203}{M-602(08)-83}$ 28—83

I თავი

ზოგადი ცნებები

§ 1. შესავალი

ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის მრავალი ამოცანის მათემატიკურ გამოკვლევას ხშირად მივყავართ განტოლებამდე, რომელიც დამოკიდებულებას ამყარებს დამოუკიდებელ ცვლადსა, ამ ცვლადის უცნობ ფუნქციასა და ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს ან დიფერენციალებს შორის. ასეთ განტოლებას *ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება.

განსაზღვრა 1. *განტოლებას, რომელიც დამოკიდებულებას ამყარებს დამოუკიდებელ x ცვლადსა, ამ ცვლადის უცნობ $y(x)$ ფუნქციასა და ფუნქციის წარმოებულებს ან დიფერენციალებს შორის n-ურ რიგამდე ჩათვლით, ეწოდება n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება.*

ამგვარად, n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახე[1]

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

სადაც y წარმოადგენს x-ის უცნობ ფუნქციას, ხოლო F თავისი არგუმენტების ცნობილი უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც მოცემულია $n+2$-განზომილებიანი სივრცის რომელიღაც D არეში; მასთან, იგულისხმება, რომ (1.1) განტოლება აუცილებლად შეიცავს $y^{(n)}(x)$-ს, ე. ი. $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, ხოლო დანარჩენი არგუმენტებიდან ზოგიერთი შეიძლება ცხადად არ მონაწილეობდეს მასში.

[1] აქ ვიგულისხმებთ რომ, თუ n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ჩაწერილია დამოკიდებულების სახით x არგუმენტსა, საძიებელ $y(x)$ ფუნქციასა და $y(x)$ ფუნქციის დიფერენციალებს შორის, მაშინ ეს დამოკიდებულება აუცილებლად უნდა იყოს ისეთი, რომ ის დაჰყვანებოდეს (1.1) სახის განტოლებაზე.

მათემატიკურ ანალიზში ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებთან ერთად შეისწავლება კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები.

განსაზღვრა 2. *განტოლებას, რომელიც აკავშირებს რამდენიმე დამოუკიდებელ x, y, z, ..., t ცვლადს, ამ ცვლადების უცნობ ω ფუნქციასა და x, y, z, ..., t ცვლადების მიმართ ω ფუნქციის კერძო წარმოებულებს n-ურ რიგამდე ჩათვლით, ეწოდება n-ური რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება.*

მაგალითად, პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$\Phi\left(x,\ y,\ z, \dots, t,\ \omega,\ \frac{\partial \omega}{\partial x},\ \frac{\partial \omega}{\partial y},\ \frac{\partial \omega}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)=0,$$

სადაც Φ თავისი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციაა, ω არის $x, y, z, \dots, t$ ცვლადების უცნობი ფუნქცია, ხოლო $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial t}$ — მისი კერძო წარმოებულები. მაგალითად,

$$x\frac{\partial \omega}{\partial x}+y\frac{\partial x}{\partial y}=0$$

წარმოადგენს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას. აქ x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო ω — ამ ცვლადების უცნობი ფუნქცია. განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებაა.

შემდეგში შევისწავლით ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

თუ (1.1) დიფერენციალურ განტოლებაში $n=1$, მაშინ მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ზოგადი სახით:

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{1.2}$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y(x)$ — ამ ცვლადის უცნობი ფუნქცია, $y'(x)$ — მისი პირველი რიგის წარმოებული, ხოლო F — თავისი არგუმენტების მოცემული უწყვეტი ფუნქცია, განსაზღვრული $(x,\ y,\ z)$ სივრცის რომელიღაც D არეში.

მაგალითად,

$$\frac{dy}{dx}+x^2 y-x^3=0$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, ასევე განტოლება

$$(1+y^2)\,dx+xy\,dy=0$$

არის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება, რადგან იგი შეგვიძლია დავიყვანოთ (1.1) სახის განტოლებამდე.

თუ (1.1) განტოლებაში $n=2$, მაშინ მივიღებთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ზოგადი სახით:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0, \tag{1.3}$$

რადგან (1.3) განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის წარმოებულის მაქსიმალური რიგი ეტოლება 2-ს ($n=2$). ამასთან, ვიგულისხმებთ, რომ F თავის არგუმენტების უწყვეტი ფუნქციაა, განსაზღვრული $(x,\ y,\ y',\ y'')$ სივრცის რომელიღაც D არეში და ა. შ.

მაგალითად,

$$y''+2\,y'-3\,y=0$$

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებაა.

თუ (1.2) განტოლებაში შემავალი $F\ (x,\ y,\ y')$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $x,\ y,\ y'$ ცვლადების მიმართ, აკმაყოფილებს არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის ყველა პირობას, მაშინ xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში ის განსაზღვრავს y' ცვლადს, როგორც x და y დამოუკიდებელი ცვლადების ცალსახა არაცხად ფუნქციას. ამ შემთხვევაში

$$F(x,\ y,\ y')=0$$

დიფერენციალური განტოლება ეკვივალენტურია (ტოლფასია)

$$y'=f(x,\ y)\qquad\left(\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)\right) \tag{1.4}$$

განტოლებისა[1], სადაც $f\ (x,\ y)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში.

(1,4) სახის განტოლებას ეწოდება **წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება.**

---

[1] ანდა ვიგულისხმებთ, რომ xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში (1.2) განტოლება შეიძლება ცალსახად ამოვხსნათ y' მიმართ (თუ ეს ამოხსნა შესაძლებელია), ე. ი. შეგვიძლია ის ჩავწეროთ (1.4) სახით.

ანალოგიურად, თუ (1.3) განტოლებაში შემავალი $F(x, y, y', y'')$ ფუნქცია აკმაყოფილებს არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის ყველა პირობას, მაშინ იგი განსაზღვრავს y'' ცვლადს, როგორც x, y, y' დამოუკიდებელი ცვლადების ცალსახა არაცხად ფუნქციას. ამ შემთხვევაში

$$F(x, y, y', y'')=0$$

დიფერენციალური განტოლება ეკვივალენტურია

$$y''=f(x, y, y') \qquad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}=f(x, y, y')\right). \tag{1.5}$$

განტოლებისა, სადაც $f(x, y, y')$ არის x, y და y' ცვლადების მოცემული უწყვეტი ფუნქცია (x, y, z) სივრცის რომელიღაც D არეში და ა. შ.

(1.5) სახის განტოლებას ეწოდება წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება.

მაგალითად,

$$y''+2y'-3y=0$$

არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება.

განსაზღვრა 3. თუ (1.1) დიფერენციალური განტოლების მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს მრავალწევრს უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ, მაშინ ამ მრავალწევრის ხარისხს დიფერენციალური განტოლების ხარისხი ეწოდება. ასე, მაგალითად,

$$\frac{dy}{dx}=y+x$$

პირველი რიგის პირველი ხარისხის, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, ხოლო

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2=1+y^2+\frac{dy}{dx}$$

არის მეორე რიგისა და მეორე ხარისხის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რადგან იგი შეიცავს უცნობი ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს $\frac{d^2 y}{dx^2}$-ს კვადრატში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. საზოგადოდ, დიფერენციალური განტოლების რიგი და ხარისხი განისაზღვრება განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულით, იმის შემდეგ რაც განტოლება რაციონალიზებულია და განთავისუფლებულია წილადებიდან.

მაგალითად,

$$\frac{d^3 y}{d x^3}+x\sqrt{\frac{dy}{dx}}+x^2 y=0$$

განტოლება წარმოადგენს მესამე რგისა და მეორე ხარისხის დიფერენციალურ განტოლებას, რადგან რაციონალიზაციის შემდეგ იგი შეიცავს $\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)^2$ წევრს.

განსაზღვრა 4. დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი ე წ ო დ ე ბ ა ყ ო ვ ე ლ $y=y(x)$ დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი რ ე ბ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს, რ ო მ ე ლ ი ც ჩ ა ს მ უ ლ ი ა მ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა შ ი მ ა ს გ ა დ ა ა ქ ც ე ვ ს ი გ ი ვ ე ო ბ ა დ. ასე, მაგალითად, თუ $y=\varphi(x)$ არის (1.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x)]\equiv 0.$$

საზოგადოდ, თუ $y=\psi(x)$ ფუნქცია არის (1.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$F[x, \psi(x), \psi'(x), \dots, \psi^{(n)}(x)]\equiv 0.$$

მაგალითი 1. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{d^4 y}{d x^4}=y.$$

$y=e^x$ და $y=e^{-x}$ ფუნქციები წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ აღნიშნულ ფუნქციებს ჩავსვამთ განტოლებაში.

მაგალითი 2. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y''+y=0.$$

$y=\sin x$, $y=\cos x$ და, საზოგადოდ, ფუნქციები $C_1\sin x$, $C_2\cos x$, $C_1\sin x+C_2\cos x$, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ამ ფუნქციებს ჩავსვამთ განტოლებაში.

ამგვარად, ამოვხსნათ (1.1) დიფერენციალური განტოლება ნიშნავს, ვიპოვოთ x ცვლადზე დამოკიდებული ყველა ის დიფერენცირებადი $y=y(x)$ ფუნქცია, რომელიც იგივურად აკმაყოფილებს მოცემულ (1.1)

განტოლებას. თუ ასეთი $y=y(x)$ ფუნქცია მოძებნილია, მაშინ ვიტყვით რომ მოძებნილია ამ განტოლების ამონახსნი.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მოძებნის პროცესს **დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება** ეწოდება.

განსაზღვრა 5. *ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის გრაფიკს ამ განტოლების ინტეგრალური წირი ეწოდება.*

როცა მოძებნილია წირი, რომლის y ორდინატები აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, მაშინ ამბობენ, რომ მოძებნილია მოცემული დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი.

ამგვარად, გეომეტრიული თვალსაზრისით დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ნიშნავს ყველა იმ წირის მოძებნას, რომელთა ორდინატები, განხილული როგორც დამოუკიდებელი x ცვლადის ფუნქცია, აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას.

ანალიზური თვალსაზრისით, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნის ამოცანა იმ შემთხვევაში ჩაითვლება გადაწყვეტილად, თუ ეს ამონახსნი წარმოდგენილია მოცემული ფუნქციებიდან აღებული ინტეგრალებით. ზოგად შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნის პრობლემა წარმოადგენს საკმარისად რთულ და ძნელ ამოცანას; მისი სიძნელე იმაში მდგომარეობს, რომ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ყოველთვის არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში.

განვიხილოთ უმარტივესი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა რაიმე შუალედში. ამ განტოლების ამონახსნია

$$y=\int f(x)\,dx+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია; მაგრამ ეს ამონახსნი ყოველთვის არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ ზოგიერთი შედარებით მარტივი ელემენტარული ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში. ასე, მაგალითად, თუ მოცემულია დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{x},$$

მაშინ

$$y=\int\frac{\cos x}{x}\,dx+C$$

არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. ასევე, განტოლებას $y'=x^2+y^2$ არა აქვს ამონახსნი, რომელიც შესაძლოა გამოისახოს ელემენტარულ ფუნქციებში. ასეთ შემთხვევაში უნდა დავკმაყოფილდეთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მიახლოებითი მოძებნით, გამოვიყენებთ რა ამ მიზნით მიახლოებითი ინტეგრების მეთოდს. ამიტომ შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას, ანდა წარმოგვიდგება მოცემული ფუნქციებიდან აღებული ინტეგრალებით, რომელიც არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში.

§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი და კერძო ამონახსნი

როგორც ვიცით, პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{2.1}$$

ან

$$y'=f(x,\ y), \tag{2.2}$$

სადაც F და f თავისი არგუმენტების მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია.

(2.2) პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს უამრავი ამონახსნი. მაგალითად,

$$\frac{dy}{dx}=x. \tag{2.3}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$y=\frac{x^2}{2}+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა. ამგვარად, (2,3) განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი. თუმცა არსებობს (2.3) განტოლების მხოლოდ ერთი ამონახსნი, რომელიც გაივლის xOy სიბრტყის მოცემულ $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ წერტილზე. სახელდობრ, $y=\frac{1}{2}x^2$ $(C=0)$.

1. კოშის ამოცანა. საზოგადოდ, რომ გვქონდეს საშუალება ვილაპარაკოთ (2.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის ერთადერთო-

ბის შესახებ. საჭიროა განვიხილოთ ეგრეთწოდებული კოშის ამოცანა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

(2.2) განტოლების ყველა ამონახსნს შორის ვიპოვოთ ისეთი $y=\Phi(x)$ ამონახსნი, რომელიც x არგუმენტის მოცემული x_0 მნიშვნელობისათვის ღებულობს მოცემულ y_0 მნიშვნელობას, ე. ი.

$$\varphi'(x)\equiv f[x,\ \varphi(x)] \quad \text{და} \quad \varphi(x_0)=y_0.$$

პირობას, რომ არგუმენტის $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის $y=\Phi(x)$ ამონახსნის მნიშვნელობა უნდა იყოს მოცემული y_0 რიცხვის ტოლი, ეწოდება (2.2) განტოლების საწყისი პირობა. მას ხშირად ასე ჩაწერენ: $y=y_0$, როცა $x=x_0$, ანდა $y|_{x=x_0}=y_0$.

კოშის ამოცანა გეომეტრიულად შეგვიძლია ასე გამოვთქვათ: (2.2) განტოლების ყველა ინტეგრალურ წირს შორის ვიპოვოთ ის წირი, რომელიც გაივლის მოცემულ $(x_0,\ y_0)$ წერტილზე.

2. კოშის ამოცანის დაყვანა ინტეგრალურ განტოლებამდე. ვაჩვენოთ, რომ კოშის ამოცანის ამოხსნა (2.2) დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$y'=f(x,\ y),$$

საწყისი პირობით

$$y|_{x=x_0}=y_0 \quad (y_0=y(x_0)), \tag{2.4}$$

ეკვივალენტურია რომელიღაც ინტეგრალური განტოლების ამოხსნისა[1].

მართლაც, ვთქვათ, $y=\varphi(x)$ ფუნქცია (2.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია $x=x_0$ წერტილის შემცველ რომელიღაც $(a,\ b)$ შუალედში, და როცა $x=x_0$, გადაიქცევა y_0-ად; $y_0=\varphi(x_0)$. მაშინ, როცა $x\in(a,\ b)$ ადგილი ექნება იგივეობას:

$$\varphi'(x)=f(x,\ \varphi(x)).$$

ამ უკანასკნელი იგივეობის ინტეგრებით x_0-დან x-მდე $(a<x_0<x<b)$ და (2.4) ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y)\,dx, \quad x\in(a,\ b)$$

[1] განტოლებას, რომელიც ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შეიცავს უცნობ ფუნქციას, ინტეგრალურ განტოლებას უწოდებენ.

მაშასადამე, $y=\varphi(x)$ ფუნქცია, $\varphi(x_0)=y_0$, საწყისი პირობით აკმაყოფილებს უმარტივეს ინტეგრალურ განტოლებას:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{2.5}$$

ცხადია, პირიქით, თუ (a, b) შუალედში მოცემული უწყვეტი $y=\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.5) ინტეგრალურ განტოლებას;

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)]\,dx, \tag{2.6}$$

მაშინ $f[x, \varphi(x)]$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, (2.6) ტოლობის გაწარმოებით, მივიღებთ:

$$\varphi'(x)=f[x, \varphi(x)], \ \varphi(x_0)=y_0.$$

ე. ი. $\varphi(x)$ არის (2.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. მოკლედ, (2.5) ინტეგრალური განტოლება ტოლფასია (2.2) დიფერენციალური განტოლებისა.

შევნიშნავთ, რომ კოშის ამოცანის ამონახსნი შეიძლება არ იყოს ერთადერთი, ე. ი. შესაძლოა არსებობდეს რამდენიმე ამონახსნი, რომელიც განტოლების მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს: $y=y_0$, როცა $x=x_0$, ანუ, გეომეტრიულად რომ ვთქვათ, (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის რამდენიმე ინტეგრალური წირი.

ქვემოთ (თავი III, § 1), ზოგიერთი შეზღუდვით, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს (2.2) განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი $f(x.y)$ ფუნქცია, დავამტკიცებთ კოშის ამოცანის როგორც არსებობას, ისე ერთადერთობას.

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის მართებულია შემდეგი.

თეორემა. თუ

$$y'=f(x, y)$$

დიფერენციალურ განტოლებაში $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია xOy სიბრტყის რაიმე $\overline{D}$ არეში, აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული $f'_y(x, y)$ D-ში და (x_0, y_0) D არის ნებისმიერი შიგა წერტილია, მაშინ არსებობს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y=\varphi(x)$, რომელიც უწყვეტია და დიფერენცირე-

ბადი $x=x_0$ წერტილის შემცველ რაიმე $[x_0-a, x_0+a]$ ინტერვალში და აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(x_0)=y_0$. ამ თეორემის დამტკიცებას მოვიყვანთ უფრო ზოგადი პირობებით მესამე თავში.

არსებობის თეორემიდან გამომდინარე შედეგის გეომეტრიული შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი (მრუდი), რომელიც გაივლის D არის ნებისმიერ შიგა $(x_0, y_0)\in D$ წერტილში და, რომ D არის ყოველი (x_0, y_0) საწყისი მნიშვნელობისათვის, მიიღება თავისი ინტეგრალური წირი (მრუდი), რომელიც მთლიანად ძევს D-ში.

ამგვარად, (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას D არეში აქვს სხვადასხვა ამონახსნის უსასრულო სიმრავლე.

მართლაც, ფორმულირებული თეორემის პირობებში $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და აქვს $\frac{\partial f}{\partial y}$ შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული D-ში, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია D არის ყოველი $(x_0, y_0)\in D$ წერტილისათვის ავაგოთ $x=x_0$ წერტილის შემცველი მაქსიმალური შუალედი $[x_0-a, x_0+a]$, $a>0$, რომელზედაც განსაზღვრულია ორ x_0, y_0 პარამეტრზე დამოკიდებული ამონახსნი

$$y=\varphi(x;\ x_0, y_0)$$

საწყისი მნიშვნელობით

$$y_0=\varphi(x_0;\ x_0, y_0),$$

რომელიც, როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები (თავი III, § 3), შეიძლება გაგრძელდეს ორივე მხრით D არის საზღვრამდე („საზღვრიდან — საზღვრამდე") და, მაშასადამე, მთლიანად ძევს D-ში.

ახლა, თუ საწყის პირობაში:

$$y|_{x=x_0}=y_0 \quad (y(x_0)=y_0)$$

x_0 პარამეტრს განვიხილავთ როგორც მოცემულ რიცხვს (მივანიშნებთ ფიქსირებულ მნიშვნელობას), ხოლო y-ის საწყის y_0 მნიშვნელობას განვიხილავთ, როგორც პარამეტრს (ნებისმიერად მივცემთ სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას, მაგრამ ისე, რომ $(x_0, y_0)\in D$), მაშინ y_0-ის ცვლილებასთან ერთად შეიცვლება (2.2) [ან (2.1)] დიფერენციალური განტოლების ამონახსნიც, და ჩვენ მივიღებთ (2.2) [ან (2,1)] პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების უსასრულო სიმრავლეს, ანუ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაში ერთი y_0 ნებისმიერი მუდმივისაგან დამოკიდებულ ინტეგრალურ წირთა (მრუდთა) ოჯახს:

$$y=\varphi(x, y_0), \quad y_0=\varphi(x_0, y_0) \tag{2.7}$$

რომელიც ძევს D-ში.

ამგვარად, (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების (2.7) ამონახსნი იქნება არა მხოლოდ x არგუმენტის ფუნქცია, არამედ x-ისა და y_0 პარამეტრის ფუნქცია. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია რომელიღაც (A, B) შუალედზე, რომელიც D არეს შეესაბამება:

$$(A, B) = \{(x; x_0, y_0), (x_0, y_0) \in D, x \in [x_0 - a; x_0 + a]\}.$$

ზემომოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ: (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი იქნება სრულიად განსაზღვრული, მხოლოდ მას შემდეგ, რაც დავადგენთ, თუ $x = x_0$ წრფის რომელ წერტილში გაივლის ეს ამონახსნი[1]; რადგან ეს წერტილი სავსებით განისაზღვრება თავისი y_0 მანძილით x ღერძიდან $(x_0, y_0) \in D$, ამიტომ, აქედან გამომდინარეობს, რომ ამონახსნის ზუსტი ფორმა დამოკიდებულია ამ y_0 მუდმივის მნიშვნელობაზე; რადგანაც $x = x_0$ წრფის (ამ წრფის ნაწილის, რომელიც გვაქვს D-ში) ყოველ წერტილს შეესაბამება y_0-ის გარკვეული მნიშვნელობა და, პირიქით, ამიტომ (2.7) თანაფარდობა გვაძლევს (2.2) [ან (2.1)] დიფერენციალური განტოლების ყველა შესაძლო ამონახსნს.

ამგვარად, არსებობის თეორემიდან გამომდინარე შედეგის გეომეტრიული მნიშვნელობა (შინაარსი) იმაში მდგომარეობს, რომ D არის ნებისმიერ შიგა $(x_0, y_0) \in D$ წერტილში (სადაც x_0 ნებისმიერი მოცემული ფიქსირებული რიცხვია, $x_0 \in (A, B)$, ხოლო y_0 — ნებისმიერი მუდმივი[2]) გაივლის (2.2) [ან (2.1)] განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი (მრუდი), $y = \varphi(x, y_0)$ ინტეგრალურ წირთა (მრუდთა) ოჯახიდან, რომელიც ძევს D არეში.

ამ შემთხვევაში მთელი D არე დაიფარება ერთმანეთთან არაგადამკვეთი და არაშემხები გლუვი ინტეგრალური წირებით.

კოშის თეორემას, (2.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, აქვს მრავალი თეორიული და პრაქტიკული გამოყენება.

იგი პირველ რიგში გამოიყენება მთელი დიფერენციალური განტოლებისათვის მნიშვნელოვანი ცნების — ზოგადი ამონახსნის (კერძო ამონახსნის) ცნების, მკაცრი განსაზღვრისათვის.

1. **ზოგადი ამონახსნი.** კოშის თეორემიდან გამომდინარე შედეგების გამოყენებით, როგორც ეს ზემომოყვანილი მსჯელობებიდანაც

---

[1] აქ იგულისხმება $x = x_0$ წრფის მონაკვეთი, რომელიც მთლიანად ძევს D-ში და y ღერძის პარალელურია.

[2] y_0 ნებისმიერი მუდმივი ინტეგრალური მრუდის $y = \varphi(x, y_0)$ ამონახსნის $x = x_0$ წრფესთან გადაკვეთის ცვლადი წერტილის ორდინატია.

ჩანს, ვაჩვენეთ, რომ (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, რომელიც მიიღება

$$y = \varphi(x, y_0)$$

ფორმულით, სადაც y_0 აღნიშნავს პარამეტრს, ე. ი. ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $\varphi(x, y_0)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რომელიღაც (A, B) შუალედზე, რომელიც D არეს შეესაბამება.

$y' = f(x, y)$ განტოლების (2.7) სახის ამონახსნს, რომელიც ერთ y_0 ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ეწოდება.

მაგრამ, როგორც ეს ადრე განხილულ მაგალითებში ვნახეთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრირებისას, ჩვენ, ჩვეულებრივ, ვღებულობთ სხვა ნებისმიერ მუდმივს.

ასე მაგალითად, უმარტივესი სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

განტოლებას, ანუ

$$dy = f(x)\,dx,$$

სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიღაც (a, b) ინტერვალში, აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, რომელიც გამოისახება

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

ფორმულით, ანუ

$$y = \varphi(x) + C, \tag{2.8}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. მივცემთ რა C პარამეტრს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას $(-\infty < C < +\infty)$, მივიღებთ (2.7) განტოლების სხვადასხვა ამონახსნის უსასრულო სიმრავლეს.

ამგვარად, ნებისმიერი მუდმივი შეიძლება შედიოდეს (2.8) ზოგად ამონახსნში არა როგორც y-ის საწყისი მნიშვნელობა, არამედ ზოგადი

$$y = \varphi(x, C)$$

ფორმითაც, ე. ი. შეიცავს C ნებისმიერ მუდმივს, ამასთან, C მუდმივი შეიძლება არ წარმოადგენდეს აუცილებლად y-ის საწყის მნიშვნელობას, როგორც ეს გვქონდა არსებობის თეორემის შედეგად.

ამრიგად, ზოგად შემთხვევაში, როცა პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

სადაც $f(x, y)$ აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ არსებობის თეორემის პირობებს D არეში, (2.2) განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, მაგრამ, როგორც ვნახეთ, C ნებისმიერ მუდმივზე ამ ამონახსნების დამოკიდებულების სახე საზოგადოდ, უფრო რთულია, ვიდრე ეს (2.8) ფორმულითაა მოცემული, სახელდობრ, (2.2) [ან (2.1)] განტოლების ამონახსნების ზოგადი სახე წარმოიდგინება

$$y = \varphi(x, C)$$

ფორმულით, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

განსაზღვრა 1. (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი D არეში ეწოდება ერთი C ნებისმიერი მუდმივის შემცველ

$$y = \varphi(x, C) \tag{2.9}$$

სახის ფუნქციას[1], თუ იგი აკმაყოფილებს (2.2) დიფერენციალურ განტოლებას C პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის და C-ს კერძო მნიშვნელობის სათანადოდ ამორჩევით. $\varphi(x, C)$ ფუნქცია გვაძლევს ამ განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს D არეში.

(2.9) ზოგადი ამონახსნის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს, C ნებისმიერი მუდმივის კერძო მნიშვნელობის სათანადოდ ამორჩევით, ამოვხსნათ კოშის ნებისმიერი ამოცანა, ე. ი. ვიპოვოთ (2.2) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს: $y=y_0$, როცა $x=x_0$.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ერთობლიობა D არეში. (რომელიც მიიღება $y=\psi(x,C)$ განტოლებიდან C ნებისმიერი მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის) წარმოადგენს (2.2) **დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.**

2. **ზოგადი ინტეგრალი.** მაგრამ (2.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ყოველთვის არ მიიღება (2.9), ცხადი სახით. მრავალშემთხვევაში (2.2) განტოლების ინტეგრების შედეგი გამოისახება ფორმულით:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad [\text{ან} \quad \Psi(x, y) = C], \tag{2.10}$$

---

[1] როგორც ქვემოთ ვნახავთ (თავი III, § 2), ზემოთ ფორმულირებული არსებობის თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ $y=\varphi(x, C)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია x ცვლადით და უწყვეტია C პარამეტრის მიმართ, $(-\infty < C < +\infty)$.

რომელიც არაცხადი სახით განსაზღვრავს (2.2) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

თუ (2.10) განტოლებიდან ამოვხსნით y-ს, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს ცხადი სახით; მაგრამ (2.10) განტოლებიდან y-ის გამოსახვა ელემენტარულ ფუნქციებში ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ასეთ შემთხვევაში ზოგად ამონახსნს ვტოვებთ არაცხადი სახით.

განსაზღვრა 2.

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

სახის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, რომელიც ერთ C ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს, ეწოდება (2.2) პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი[1] D არეში, თუ (2.10) თანაფარდობა განსაზღვრავს (2.2) განტოლების $y = \varphi(x, C)$ ზოგად ამონახსნს D არეში არაცხადი სახით.

განსაზღვრა 3. (2.2) განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება ისეთ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი $y = \varphi(x, C)$ ამონახსნიდან ნებისმიერი C მუდმივის კერძო $C = C_0$ მნიშვნელობისათვის; $\Phi(x, y, C_0) = 0$ დამოკიდებულებას, რომელიც მიიღება $\Phi(x, y, C) = 0$ ზოგადი ინტეგრალიდან ნებისმიერი C მუდმივის კერძო $C = C_0$ მნიშვნელობისათვის, ეწოდება კერძო ინტეგრალი.

ზოგადი ინტეგრალის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს C ნებისმიერი მუდმივის კერძო მნიშვნელობების სათანადო ამორჩევით მივიღოთ ჩვენი დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი ინტეგრალური წირი (მრუდი), რომელიც D არეში გაივლის.

ინტეგრალურ წირს, რომელიც შეესაბამება C ნებისმიერი მუდმივის რომელიღაც კერძო მნიშვნელობას, (2.2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება.

მაგალითად 1. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}\ \arcsin y} = \frac{dx}{x}. \tag{2.11}$$

ამოხსნა. რადგან

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = d \arcsin y,$$

[1] ანუ ზოგადი ამონახსნი არაცხადი სახით.

ამიტომ, (2.11)მიიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\frac{d \arcsin y}{\arcsin y}=\frac{dx}{x}. \tag{2.12}$$

ამ შემთხვევაში, ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება (2.12) ტოლობის ორივე ნაწილის უშუალო ინტეგრებით. მივიღებთ:

$$\ln \arcsin y=\ln x+\ln|C|, \tag{2.13}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

(2.13) განტოლება წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს; თუ (2.13)-ს ამოვხსნით y-ის მიმართ. მაშინ მივიღებთ (2.11) განტოლების ზოგად ამონახსნს სახით: $y=\sin C x$.

(2.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი $y=\varphi(x, C)$ ამონახსნიდან რომ გამოვყოთ რომელიმე კერძო ამონახსნი, საჭიროა მოცემულ იქნეს საწყისი პირობა $y=y_0$, როცა $x=x_0$, $(x_0, y_0) \in D$.

მართლაც, თუ x_0 და y_0 მოცემულია, მაშინ ჩავსვამთ რა მათ მნიშვნელობებს (2.2) განტოლების $y=\varphi(x, C)$ ზოგად ამონახსნში, მივიღებთ

$$y_0=\varphi(x_0, C)$$

ერთ განტოლებას ერთი C უცნობის განსასაზღვრავად; გეომეტრიული მოსაზრებანი გვაძლევს საფუძველს, რომ ამ განტოლებას C-ს მიმართ აქვს ამონახსნი, ე. ი. $\varphi_C'(x_0 C_0) \neq 0$ და x და C ცვლადების ცვლილების Δ არის, $\Delta \in D$, (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში, რომლისათვის $\varphi_C'(x_0, C_0) \neq 0$, (2.9)-დან შეგვიძლია განვსაზღვროთ C როგორც x-ისა და y-ის ფუნქცია:

$$C=\Psi(x, y), \tag{2.14}$$

მასთან ეს ამონახსნი იქნება ერთადერთი. (2.14) ფორმულაში $\Psi(x, y)$ ფუნქციას აქვს თვისება, რომ ნებისმიერი კერძო ამონახსნის გასწვრივ ის იგივურად მუდმივია:

$$\Psi[x, \varphi(x, C)] \equiv C.$$

ასეთ ფუნქციას (2.2) დიფერენციალური განტოლების ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ეწოდება.

ახლა ვიპოვოთ (2.9) ზოგადი ამონახსნის ფორმულის მეშვეობით (2.2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ს ა წ ყ ი ს ი მნიშვნელობებით: x_0, y_0, $(x_0, y_0) \in D$.

თუ (2.14) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ჩავსვამთ $x=x_0$, $y=y_0$ მნიშვნელობებს, მაშინ C-თვის მივიღებთ გარკვეულ C_0 მნიშვნელობას:

$$C_0=\Psi(x_0, y_0).$$

თუ ჩავსვამთ C_0 მნიშვნელობას (2.9) ფორმულაში, გვექნება:

$$y = \varphi(x, C_0);$$

მივიღეთ (2.2) განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

გეომეტრიული თვალსაზრისით ზოგადი ინტეგრალი $\Phi(x, y, C)=0$ წარმოადგენს xOy სიბრტყეზე ერთ C პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახს. ამ წირებს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირები ეწოდება. ცხადია, კერძო ინტეგრალს შეესაბამება ამ ინტეგრალურ წირთა ოჯახის ერთი წირი, რომელიც გაივლის xOy სიბრტყის მოცემულ წერტილზე.

მაგალითი 2. მოცემულია განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების ის $y=\varphi(x)$ ამონახსნი, რომელიც არგუმენტის $x=1$ მნიშვნელობისათვის ღებულობს $y=2$ მნიშვნელობას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ მოცემული განტოლების ამონახსნია

$$y = x^3 + C$$

ფუნქცია, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ეს ამონახსნი იქნება მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ახლა ვისარგებლოთ საწყისი პირობით და მიღებული ზოგადი ამონახსნიდან გამოვყოთ ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს: $x=1$, $y=2$. საწყისი მნიშვნელობების ჩასმა $y=x^3+C$ განტოლებაში გვაძლევს:

$$2 = 1 + C.$$

აქედან

$$C = 1.$$

მაშასადამე, საძიებელ კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$y = x^3 + 1.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$3x^2\,dx = -e^{-y^2}\,dy \tag{2.15}$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$x^3 + \int e^{-y^2} dy = C, \tag{2.16}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

შევნიშნავთ, რომ ინტეგრალი

$$\int e^{-y^2} dy$$

არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში სასრული სახით, მაგრამ მიუხედავად ამისა, (2.16) წარმოადგენს (2.15) განტოლების ზოგად ინტეგრალს, რადგან (2.15) განტოლების ინტეგრება, დაყვანილია განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნის ამოცანაზე — კვადრატურაზე.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx} = y^2$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ dx-ზე და გავყოთ y^2-ზე $(y \neq 0)$, მივიღებთ:

$$dx = \frac{dy}{y^2}, \tag{2.17}$$

სადაც $y = y(x)$ არის x ცვლადის საძიებელი ფუნქცია. რადგანაც დიფერენციალები იგივურად ტოლია, ამიტომ მათი განუსაზღვრელი ინტეგრალები შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით; შეგვიძლია (2.17) განტოლების მარცხენა ნაწილის ინტეგრება x-ით, ხოლო მარჯვენა ნაწილისა y-ით. მივიღებთ:

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2} + C,$$

საიდანაც

$$x = -\frac{1}{y} + C,$$

ანუ

$$y = -\frac{1}{x + C}, \tag{2.18}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. (2.18) წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მართლაც, მივცემთ რა C პარამეტრს ამა თუ იმ რიცხვით მნიშვნელობას, $-\infty < C < +\infty$, ყოველთვის მივიღებთ ახალ ფუნქციას, რომელიც ჩასმული მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში მას იგივეობად გადააქცევს.

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, რომელიც გამოისახება ფორმულით:

$$y = -\frac{1}{x + C}.$$

ამ ოჯახის ყოველი წირი იქნება (2.17) განტოლების ინტეგრალური წირი (მრუდი).

მაგრამ, როგორც ეს უშუალოდ ჩანს, არსებობს (2.17) განტოლების კერძო ამონახსნი $y=0$, რომელიც არ მიიღება (2.18) ზოგადი ამონახსნიდან C პარამეტრის არავითარი მნიშვნელობისათვის.

ამონახსნს, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან C პარამეტრის არც ერთი მნიშვნელობისათვის, ეწოდება განსაკუთრებული ამონახსნი (იხ. თავი IV, § 5).

§ 3. ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ბრტყელ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით

$$E(x, y, y') = 0. \tag{3.1}$$

როგორც ვნახეთ, ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

გეომეტრიულად წარმოადგენს ბრტყელ წირთა ოჯახს xOy სიბრტყის რაიმე D არეში. (3.1) განტოლება გამოსახავს ამ ინტეგრალური წირებისათვის დამახასიათებელ რომელიღაც ზოგად დიფერენციალურ თვისებას.

ახლა განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების შებრუნებული ამოცანა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მოცემულია ერთ C პარამეტრზე დამოკიდებული ბრტყელ წირთა ოჯახი

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

უნდა შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება, რომლისათვის მოცემული ოჯახი წარმოადგენს ზოგად ინტეგრალს. ამ მიზნით დავამტკიცოთ

თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია ერთ C პარამეტრზე დამოკიდებული წირთა ოჯახი

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{3.2}$$

სადაც $\Phi(x, y, C)$ უწყვეტია ყველა არგუმენტის მიმართ და დიფერენცირებადია x-ისა და y-ის მიმართ, ამასთანავე $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$; მაშინ ამ ოჯახიდან ნებისმიერი წირის ორდინატი y, განხილული როგორც x აბსცისის ფუნქცია, აკმაყოფილებს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც დამოუკიდებელია C მუდმივისაგან, ამასთან (3.2) წარმოადგენს ამ განტოლების ზოგად ინტეგრალს[1].

დამტკიცება. ვიპოვოთ (3.2) წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება. ამისათვის (3.2) განტოლება გავადიფერენციროთ x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.3}$$

თუ (3.3) განტოლება არ შეიცავს C მუდმივს, მაშინ ის იქნება მოცემული წირთა ოჯახის საძიებელი დიფერენციალური განტოლება, ხოლო თუ (3.3) ტოლობა შეიცავს C მუდმივს, მაშინ C უნდა გამოვრიცხოთ (3.2) და (3.3) განტოლებებიდან:

$$\begin{aligned} &\Phi(x, y, C) = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

მივიღებთ გარკვეულ დამოკიდებულებას $x, y, \frac{dy}{dx}$ შორის, ე. ი. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{3.5}$$

ეს არის წირთა მოცემული ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

---

[1] ანალოგიურ თეორემას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ბრტყელ წირთა ოჯახი მოცემულია სახით:

$$y = \varphi(x, C).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (3.2) განტოლება განსაზღვრავს (3.5) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს. მართლაც, (3.2) და (3.3) განტოლებები გადაიქცევა იგივეობებად, თუ მათში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ (3.2) დამოკიდებულებიდან განსაზღვრულ $y=\varphi(x, C)$ ფუნქციას:

$$\Phi[x, \varphi(x, C) \; C] \equiv 0,$$

$$\frac{\partial\Phi[x, \varphi(x, C), C]}{\partial x}+\frac{\partial\Phi[x, \varphi(x, C), C]}{\partial y}\cdot\varphi'(x, C)\equiv 0. \tag{3.6}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (3.5) განტოლება, რომელიც არის (3. 4) განტოლებათა შედეგი, გადაიქცევა იგივეობად, თუ მასში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $\varphi(x, C)$ გამოსახულებას (3.2)-დან, ე. ი.

$$F[x, \varphi(x, C), \varphi'(x, C)] \equiv 0.$$

მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ $y=\varphi(x, C)$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება (3.2)-დან, არის (3.5) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მაშასადამე, (3.2) წარმოადგენს (3.5) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ იმ პარაბოლების ოჯახის განტოლება

$$y^2-2Cx=0, \tag{3.7}$$

რომლებსაც სიმეტრიის ღერძად აქვთ Ox ღერძი. შევადგინოთ ამ ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, xOy სიბრტყის ყოველ $M(x, y)$ წერტილზე გაივლის ამ ოჯახის ერთ-ერთი პარაბოლა, რადგან C პარამეტრი ყოველთვის შეიძლება ისე განვსაზღვროთ, რომ მოცემული განტოლება დაკმაყოფილდეს xOy სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებით. მოცემული განტოლების გაწარმოება x-ით გვაძლევს:

$$2y\frac{dy}{dx}-2C=0, \tag{3.8}$$

უკანასკნელი განსაზღვრავს ოჯახის ნებისმიერი პარაბოლის მხების კუთხურ კოეფიციენტს $M(x, y)$ წერტილში.

(3.7) და (3.8) განტოლებებიდან C პარამეტრის გამორიცხვა გვაძლევს

$$y^2-2xy\frac{dy}{dx}=0,$$

ანუ

$$2x\frac{dy}{dx}-y=0,$$

ე. ი.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}.$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს განსახილავ პარაბოლათა ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას, კერძოდ, იგი განსაზღვრავს xOy სიბრტყის M წერტილში გამავალი პარაბოლის მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

მაგალითი 2. მოცემულია წრეწირთა ოჯახი

$$x^2+y^2=C^2, \tag{3.9}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. შევადგინოთ ამ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

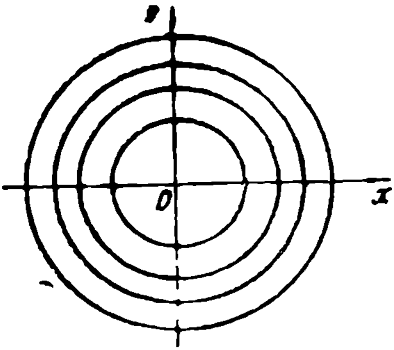
ა მ ო ხ ს ნ ა. (3.9) განტოლება გავაწარმოოთ x-ით, გვექნება:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,$$

ანუ

$$x+yy'=0. \tag{3.10}$$

ეს განტოლება არის (3.9) განტოლებით მოცემული კონცენტრულ წრეწირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება (ნახ. 1).



ნახ. 1.

(3.10) განტოლება გამოსახავს მიღებული წირთა ოჯახის შემდეგ დიფერენციალურ თვისებას: წრეწირთა ყოველ (x_0, y_0) წერტილში გავლებული მხები მართობულია შესაბამისი რადიუს-ვექტორებისა.

მაგალითი 3. მოცემულია წრფეთა ოჯახი

$$y=ax+a^2, \tag{3.11}$$

სადაც a ნებისმიერი მუდმივია. შევადგინოთ ამ წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3.11) განტოლება გავაწარმოოთ x-ით, გვექნება:

$$y'=a. \tag{3.12}$$

ახლა (3.11) და (3.12) განტოლებიდან გამოვრიცხოთ a პარამეტრი, მივიღებთ:

$$y = xy' + y'^2. \tag{3.13}$$

(3.13) არის მოცემული წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

მაგალითი 4. მოცემულია წირთა შემდეგი ოჯახი

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), \tag{3.14}$$

სადაც a ნებისმიერი მუდმივია. შევადგინოთ ამ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

ამოხსნა. (3.14) განტოლება გავაწარმოოთ x-ით, გვექნება:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = a^2 (2x - 2yy'),$$

ანუ

$$2(x^2 + y^2)(x + yy') = a^2 (x - yy'). \tag{3.15}$$

ახლა (3.14) და (3.15) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ a, მივიღებთ:

$$2\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{x - yy'}{x^2 - y^2}. \tag{3.16}$$

ეს უკანასკნელი არის მოცემული წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

§ 4. ზოგიერთი ამოცანა, რომელიც ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე დაიყვანება

ფიზიკურ და ტექნიკურ მეცნიერებებში მათემატიკის გამოყენებისას ყოველთვის გვხვდება დიფერენციალური განტოლებანი, რადგან ფიზიკური კანონები ყველაზე მარტივად გამოისახება დიფერენციალურ განტოლებათა მეშვეობით. საილუსტრაციოდ, ბუნებისმეტყველების სხვადასხვა დარგიდან განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა, რომლებსაც მათი ამოხსნის პროცესში მივყავართ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

განვიხილოთ ამოცანა გეომეტრიიდან.

ამოცანა 1. მოვძებნოთ წირები, რომელთაც ყოველ $M(x,y)$ წერტილებში აქვს ის თვისება, რომ მათი ნორმალის სიგრძე მოცემული მუდმივი a რიცხვის ტოლია.

ვთქვათ, $M(x, y)$ არის წერტილი იმ საძიებელი Γ წირისა, რომელსაც აღნიშნული თვისება აქვს: $MN=a$ (ნახ. 2). ცხადია, $\alpha=90_0+\beta$, ანუ $\beta=\alpha-90^0$, სადაც α არის M წერტილზე Γ წირისადმი გავლებული მხების მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე, ხოლო β MN ნორმალის მიერ შედგენილი კუთხე იმავე ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ΔNMm-დან გვაქვს:

$$N_m=y\operatorname{ctg}(\alpha-90^0)=-y\operatorname{tg}\alpha=-yy',$$

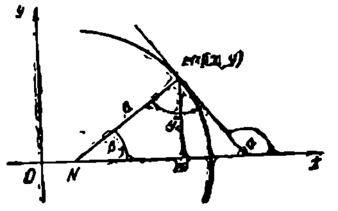
$$|NM|=a=\sqrt{y^2+N_m^2},$$

ანუ

$$a=\sqrt{y^2+y^2y'^2},$$

ე. ი.

$$y\sqrt{1+y'^2}=a, \qquad (4.1)$$



ნახ. 2.

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს საძიებელი წირთა ოჯახის პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას. მიღებული დიფერენციალური განტოლება რომ ამოვხსნათ, გადავწეროთ იგი ასეთნაირად:

$$y'^2=\frac{a^2-y^2}{y^2}, \quad \text{ანუ} \quad y'=\frac{\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

აქედან:

$$\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx \qquad (4.2)$$

განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(a^2-y^2)}{\sqrt{a^2-y^2}}=x+C, \qquad (4.3)$$

საიდანაც

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x+C.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვაქვს:

$$(x+C)^2+y^2=a^2. \qquad (4.4)$$

(4.4) დამოკიდებულება წარმოადგენს საძიებელი წირთა ოჯახის განტოლებას, რომელიც შეიცავს ერთ ნებისმიერ C მუდმივს.

ამგვარად, (4.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, როგორც ეს გეომეტრიული მოსაზრებიდანაც გამომდინარეობს, წარმოადგენს a-რადიუსიანი იმ წრეწირების ოჯახს, რომელთა ცენტრები ძევს Ox ღერძის ნებისმიერ წერტილში.

ამოცანა 2. ვერტიკალურ წრფეზე სიმძიმის ძალის მოქმედებით მოძრაობს მატერიალური წერტილი M; ამასთანავე ცნობილია, რომ დროის რომელიმე t_0 მომენტში მისი სიჩქარეა v_0 და საწყისი მდებარეობა y_0. ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვერტიკალურ წრფედ, რომელზეც მოძრაობს მატერიალური წერტილი M, ავირჩიოთ Oy ღერძი. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ დედამიწის ზედაპირზე და Oy ღერძი მივმართოთ ზევით. მატერიალური წერტილის მდებარეობა დროის t_0 მომენტში აღვნიშნოთ, შესაბამისად, y_0-ით. y_0, v_0, და $t_0=0$ რიცხვებს ამოცანის საწყისი პირობები ეწოდება. რომ ვიპოვოთ M წერტილის მდებარეობა მოძრაობის დაწყების შემდეგ დროის ნებისმიერ t მომენტში, ამისათვის უნდა ვიცოდეთ M წერტილის ერთადერთი y კოორდინატის გამოსახულება t-ს ფუნქციის სახით. ამგვარად, y წარმოადგენს t დამოუკიდებელი ცვლადის საძიებელ ფუნქციას, $y=f(t)$. ამ ფუნქციის საპოვნელად შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება. ამისათვის დიფერენციალური აღრიცხვიდან გავიხსენოთ მეორე რიგის წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა. როგორც ცნობილია, $y=f(t)$. ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $\frac{d^2y}{dt^2}$ მექანიკურად წარმოადგენს მოძრავი M წერტილის აჩქარებას. მეორე მხრივ, სიმძიმის ძალის აჩქარება g მუდმივი სიდიდეა და იგი მიმართულია ქვევით $\left(g\approx 9{,}81\ \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}^2}\right)$; ცხადია, ჩვენ მიერ შერჩეულ კოორდინატთა სისტემაში მას ექნება უარყოფითი ნიშანი. ახლა, თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს მოძრავი M წერტილის აჩქარების ორ აღნიშნულ $\frac{d^2y}{dt^2}$ და $-g$ მნიშვნელობას, მივიღებთ M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას, რომელშიაც უცნობ ფუნქციას წარმოადგენს y

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g. \tag{4.5}$$

(4.5) განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას უმარტივესი სახით. მოვძებნოთ (4.5) განტოლების ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს: როცა $t=t_0=0$, მაშინ $y=y_0$ და $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=v_0$. (4.5) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-g. \tag{4.6}$$

(4.6) განტოლების ორჯერ მიმდევრობითი ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\int g dt + C_1,$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1; \tag{4.7}$$

უკანასკნელიდან კი

$$\int dy = -\int gt\, dt + C_1 \int dt + C_2,$$

ანუ

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{4.8}$$

(4.8) განტოლება წარმოადგენს (4.5) განტოლების ზოგად ამონახსნს, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ახლა გამოვყოთ ზოგადი ამონახსნიდან ამონახსნი, რომელიც საწყის პირობებს აკმაყოფილებს. ამისათვის (4.7) და (4.8) განტოლებაში მივიღებთ $t = 0$, მაშინ გვექნება:

$$v_0 = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = C_1 \quad (M \text{ წერტილის საწყისი სიჩქარე}) \tag{4.9}$$

და

$$y|_{t=0} = y_0 = C_2 \quad (M \text{ წერტილის საწყისი მდებარეობა}). \tag{4.10}$$

ახლა, თუ (4.8) განტოლებაში C_1 და C_2-ს შევცვლით მათი მნიშვნელობებით, (4.9) და (4.10) ფორმულების მიხედვით, გვექნება:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \tag{4.11}$$

(4.11) წარმოადგენს M წერტილის მოძრაობის განტოლებას.

ამოცანა 3. მასის მოქმედების კანონი. ცნობილია, რომ ქიმიური რეაქცია არ ხდება ერთბაშად მას შემდეგ, რაც რეაგენტები მოყვანილია თანაშეხებაში. შენაერთის რაღაც რაოდენობა წარმოიქმნება (შეიქმნება) პირველ მეათედ წამში, კიდევ რაღაც რაოდენობა — წამის შემდეგ მეათედ ნაწილში და ა. შ. თუმცა შენაერთის წარმოქმნის სიჩქარე არ არის მუდმივი, ის იცვლება იმ ნივთიერების რაოდენობასთან ერთად, რომელსაც აქვს უნარი შევიდეს შენაერთში. მრავალ მარტივ პროცესში რეაქციის სიჩქარე ექვემდებარება კანონს, რომელიც ცნობილია „მასის მოქმედების კანონის“ სახელწოდებით. ამ კანონის თანახმად, მარტივი ნივთიერებების შენაერთად გარდაქმნის

სიჩქარე პროპორციულია იმ ნივთიერებების რაოდენობათა ნამრავლისა, რომლებიც ჯერ კიდევ არ შეერთებულან. განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი. ვთქვათ, ორი A და B ნივთიერება, რომლებიც იმყოფება ხსნარში, შედის არაშექცევად ქიმიურ რეაქციაში. უნდა მოვძებნოთ წესი, რომლის მიხედვით შეიძლება გამოვთვალოთ დროის ნებისმიერ t მომენტში რეაქციაში უკვე შესული ნივთიერების რაოდენობა.

აღვნიშნოთ M და N-ით ამ ნივთიერებათა რაოდენობა (გრამ-მოლეკულებში მოცულობის ერთეულზე) რეაქციის დასაწყისში, ე. ი. როცა $t=0$. ვთქვათ, გარკვეულობისათვის $M<N$; x-ით აღვნიშნოთ როგორც ერთი, ისე მეორე ნივთიერების ტოლი რაოდენობა, რომლებიც უკვე შევიდნენ რეაქციაში დროის t მომენტში. დროის ამ მომენტში A ნივთიერების მოცულობის ერთეულში იმყოფება $M-x$ გრამ-მოლეკულა, ხოლო B ნივთიერების მოცულობის ერთეულში $N-x$ გრამ -მოლეკულა. მასის მოქმედების კანონის თანახმად, ქიმიური რეაქციის სიჩქარე, ე. ი. x-ის გადიდების სიჩქარე $\frac{dx}{dt}$ პროპორციულია $M-x$ და $N-x$ სიდიდეთა ნამრავლისა, ე. ი.

$$\frac{dx}{dt}=k(M-x)(N-x), \tag{4.12}$$

სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტი.

(4.12) განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც $x(t)$ არის უცნობი ფუნქცია. მოვძებნოთ (4.12) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. ამისათვის ის გადავწეროთ ასეთნაირად

$$\frac{dx}{(M-x)(N-x)}=kdt. \tag{4.13}$$

უკანასკნელი განტოლება გადავწეროთ ამ სახით:

$$\frac{1}{N-M}\left(\frac{1}{M-x}-\frac{1}{N-x}\right)dx=kdt. \tag{4.14}$$

(4.14) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\frac{1}{N-M}\left(\int\frac{dx}{M-x}-\int\frac{dx}{N-x}\right)=k\int dt+C,$$

საიდანაც

$$\frac{1}{N-M}\left[-\ln(M-x)+\ln(N-x)\right]=kt+C,$$

$$\frac{1}{M-N}\left[\ln(M-x)-\ln(N-x)\right]=kt+C,$$

ანუ

$$\frac{1}{M-N}\ln\frac{M-x}{N-x}=kt+C,$$

$$\ln\frac{M-x}{N-x}=(M-N)\,kt+C\,(M-N),$$

$$\frac{M-x}{N-x}=e^{(M-N)\,kt}\,e^{C\,(M-N)} \tag{4.15}$$

(4.15) ტოლობის მეორე მუდმივი მამრავლი აღვნიშნოთ C_1-ით,

$$C_1=e^{C\,(M-N)}$$

და ამოვხსნათ (4.15) განტოლება $x\,(t)$-ს მიმართ

$$x=x\,(t)=\frac{M-N\,C_1\,e^{(M-N)\,kt}}{1-C_1\,e^{(M-N)\,kt}} \tag{4.16}$$

(4.16) განტოლება, სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა, წარმოადგენს (4.12) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს. ახლა გამოვყოთ ზოგადი ამონახსნიდან ის ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს: როცა $t=0$, მაშინ $x=0$. (4.16) განტოლებაში მივიღოთ $t=0$, რის შედეგად გვექნება:

$$0=\frac{M-NC_1}{1-C_1}.$$

საიდანაც

$$C_1=\frac{M}{N}: \tag{4.17}$$

ახლა, თუ (4.16) განტოლებაში C_1-ს შევცვლით მისი მნიშვნელობით (4.17) ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ:

$$x=x\,(t)=\frac{M-N\cdot\dfrac{M}{N}\,e^{(M-N)\,kt}}{1-\dfrac{M}{N}\,e^{(M-N)\,kt}},$$

ანუ

$$x=x(t)=\frac{MN\,[1-e^{(M-N)\,kt}]}{N-M\,e^{(M-N)\,kt}}. \tag{4.18}$$

(4.18) განტოლება წარმოადგენს (4.12) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს. იგი გვაძლევს ნივთიერების იმ რაოდენობას, რომელიც t მომენტში შევიდა რეაქციაში.

ამოცანა 4. Q°_0 ტემპერატურის მქონე სხეული მოთავსებულია 0°-იანი ტემპერატურის გარემოში. სხეული იწყებს გაცივებას. უნდა მოვძებნოთ კანონი, რომლის მიხედვით შეიძლება განისაზღვროს სხეულის ტემპერატურა დროის ნებისმიერ მომენტში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სხეულის გაცივების პროცესის მათემატიკური აღწერისათვის დამოუკიდებელ ცვლად სიდიდედ ავირჩიოთ დრო. ეს დრო გადავთვალოთ იმ მომენტიდან, როცა სხეული მოათავსეს 0° ტემპერატურის გარემოში და სხეულმა დაიწყო გაცივება. ამ ამოცანაში საძიებელ ფუნქციას წარმოადგენს სხეულის დროის მიხედვით ცვლადი ტემპერატურა. ეს ფუნქცია აღვნიშნოთ $\Theta=\Theta(t)$. ამ შემთხვევაში ამოცანის საწყისი პირობებია: $t=0$, $\Theta(0)=\Theta_0$. ფიზიკიდან ცნობილია შემდეგი კანონი: სხეულის გაცივების სიჩქარე პროპორციულია თვით ამ სხეულის ტემპერატურისა. მაგრამ გაცივების სიჩქარე არის სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე, ე. ი. $\Theta(t)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე. დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ რაიმე ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე არის ამ ფუნქციის წარმოებული დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ. ამგვარად, ზემოთ მოყვანილი ემპირიული კანონი მათემატიკურად შეიძლება ჩავწეროთ ასე

$$\frac{d\Theta}{dt}=-k\Theta, \tag{4.19}$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია (ნიშანი „მინუსი" დასმულია იმიტომ, რომ ტემპერატურა $\Theta(t)$ კლებულობს, ხოლო კლებადი ფუნქციის წარმოებული უარყოფითია).

(4.19) განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. რომ მოვძებნოთ (4.19) განტოლების ამონახსნი, იგი გადავწეროთ ასე:

$$\frac{d\Theta}{\Theta}=-kt\,dt. \tag{4.20}$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int\frac{d\Theta}{\Theta}=-\int k dt+C,$$

საიდანაც

$$\ln\Theta=-kt+C,$$

ანუ

$$\Theta = e^{-kt + C}, \tag{4.21}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა. (4.21) განტოლება წარმოადგენს (4.19) განტოლების ზოგად ამოხსნას. რომ გამოვყოთ (4.21) ზოგადი ამონახსნიდან კერძო ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს: $t=0$, $\Theta(0)=\Theta_0$, (4.21) განტოლებაში მივიღოთ $t=0$, მაშინ

$$\Theta_0 = e^{-k\cdot 0 + C},$$

საიდანაც

$$C = \ln \Theta_0.$$

ამგვარად, C მუდმივს აქვს სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა. თუ C-ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (4.21) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\Theta(t) = e^{-kt} \ e^{C} = e^{-kt} \ e^{\ln \Theta_0} = \Theta_0 \, e^{-kt} \quad \Theta(t) = \Theta_0 \, e^{-kt} \tag{4.22}$$

(4.22) განტოლება წარმოადგენს (4.19) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს.

§ 5. წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

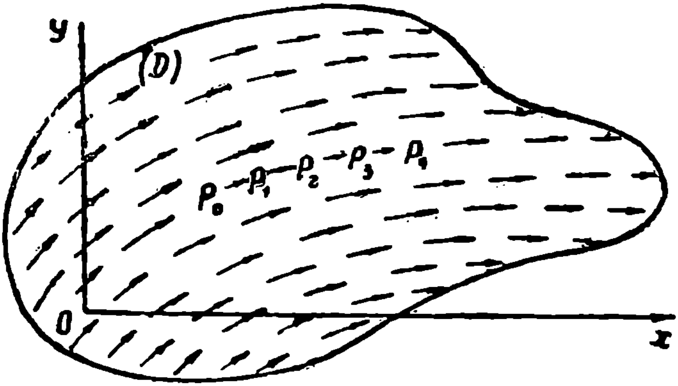
ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{5.1}$$

სადაც $f(x, y)$ არის x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქცია xOy სიბრტყის რაიმე D არეში.

განვიხილოთ x და y როგორც წერტილის მართკუთხა კოორდინატები xOy სიბრტყეზე. მაშინ (5.1) დამოკიდებულების საფუძველზე D არის ყოველ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილს ეთანადება $y' = \dfrac{dy}{dx}$-ის გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობა $y_0' = f(x_0, y_0)$, რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც გარკვეული M_0T_0 მიმართულების კუთხური კოეფიციენტი M_0 წერტილში. ამგვარად, (5.1) განტოლება D არის ყოველ $M(x, y)$ წერტილში განსაზღვრავს გარკვეულ MT მიმართულებას, რომლის კუთხური კოეფიციენტი ეტოლება $f(x, y)$-ს. თუ ყოველ

ასეთ მიმართულებას აღვნიშნავთ პატარა ისრით, რომელიც გამოდის შესაბამისი $M(x, y)$ წერტილიდან, მივიღებთ (5.1) განტოლების მიმართულებათა ველს (ნახ. 3).



ნახ. 3

ამგვარად, (5.1) სახის ყოველ განტოლებას ეთანადება გარკვეული მიმართულებათა ველი. მეორე მხრივ, (5.1) განტოლების ყოველი $y=f(x)$ ამონახსნი გეომეტრიულად წარმოადგენს ინტეგრალურ წირს, რომელიც ძევს D არეში, ხოლო მისი წარმოებული $y'=f'(x)$ ამ წირის $M[x, \varphi(x)]$ წერტილზე გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტია. მაშასადამე, (5.1) განტოლება განსაზღვრავს D არის ყოველ $M(x, y)$ წერტილში გამავალი საძიებელი ინტეგრალური წირის მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

ამრიგად, (5.1) განტოლება გეომეტრიულად წარმოადგენს მიმართულებათა რაიმე ველს და გეომეტრიული თვალსაზრისით (5.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ამოცანა მდგომარეობს ისეთ წირთა ოჯახის პოვნაში, რომ ოჯახის ნებისმიერი წირის ნებისმიერ $M(x, y)$ წერტილში გავლებული მხების მიმართულება ემთხვეოდეს ველის მიმართულებას ამ წერტილში[1].

განვიხილოთ ზოგიერთი კერძო სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების საშუალებით განსაზღვრული მიმართულებათა ველი.

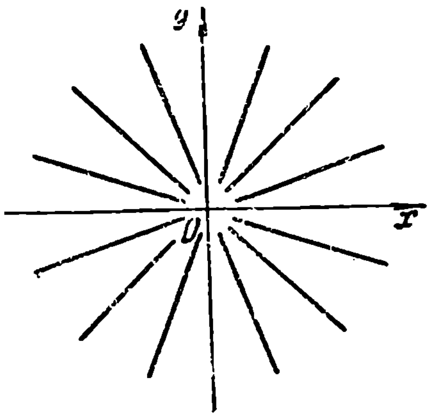
---

[1] თუ მოცემული დიფერენციალური განტოლებისათვის ავაგებთ მიმართულებათა ველს, მაშინ ადვილად ავაგებთ მისი ინტეგრალური წირების მიახლოებით გამოსახულებას და, ამგვარად, ზოგადი წარმოდგენა გვექნება ასეთ ინტეგრალურ წირებზე.

მაგალითი 1. ავაგოთ მიმართულებათა ველი და ვიპოვოთ ინტეგრალური წირები დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \tag{5.2}$$

ეს განტოლება სიბრტყის (0,0) წერტილისაგან განსხვავებულ ყოველ (x_0, y_0) წერტილში განსაზღვრავს რაიმე მიმართულებას, ე. ი. განსაზღვრავს ველს ყველგან, გარდა (0,0) წერტილისა. აქ (0,0) წერტილში ველი არ არის განსაზღვრული. ცხადია, ყოველ $(x, y) \neq (0,0)$ წერტილში ველის მიმართულება ემთხვევა ამ წერტილში და კოორდინატთა სათავეში გამავალი წრფის მიმართულებას. ამიტომ აქ ინტეგრალურ წირებს წარმოადგენს ნახევარწრფეები $y = Cx$ $(x \neq 0)$ სადაც C ნებისმიერი მუდმივია (ნახ. 4). (0,0) წერტილში არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი. ინტეგრალური წირები რომ ვიპოვოთ, მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ:



ნახ. 4

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},$$

საიდანაც ინტეგრებით გვექნება:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|.$$

აქედან პოტენცირებით მივიღებთ:

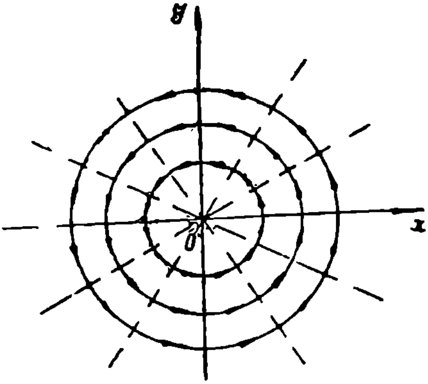
$|y| = |Cx|$, ანუ $y=Cx$, $x \neq 0$.

მაგალითი 2. ავაგოთ მიმართულებათა ველი და ვიპოვოთ ინტეგრალური წირები შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}. \tag{5.3}$$

შევნიშნავთ, რომ (5.2) და (5.3) განტოლებებით განსაზღვრული საძიებელი ინტეგრალური წირების მხებთა კუთხური კოეფიციენტები, $\frac{y}{x}$ და $-\frac{x}{y}$, აკმაყოფილებს მართობულობის პირობას: $\frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-1$. მაშასადამე, (5.3) განტოლებით განსაზღვრული მიმართულებათა ველი ორთოგონალურია $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ განტოლებით განსაზღვრული ველისა.

ცხადია, ინტეგრალური წირები ამ შემთხვევაში იქნება წრეწირები, რომელთა ცენტრები კოორდინატთა სათავეშია: $x^2+y^2=R^2$ (ნახ. 5). (5.3) განტოლება განსაზღვრავს ველს ყველგან, გარდა (0,0) წერტილისა. (0,0) წერტილში ველი არ არის განსაზღვრული. ამ წერტილში არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი, ხოლო ინტეგრალური წირების Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებში მხებები Oy ღერძის პარალელურია, რაც ემთხვევა ველის მიმართულებას ამ წერტილში, თუ მხედველობაში მივიღებთ განტოლებას:



ნახ. 5

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}.$$

(5.3) განტოლების ინტეგრალური წირების მისაღებად ეს განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$2yy'=-2x,$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ:

$$x^2+y^2=C, \; C>0.$$

თუ $C=R^2$, მაშინ მივიღებთ (5.3) განტოლების ინტეგრალურ წირთა ოჯახს:

$$x^2+y^2=R^2.$$

შენიშვნა. თუ დიფერენციალური განტოლება მოცემულია სახით:

$$F(x, y, y')=0, \tag{5.4}$$

მაშინ მას ამოვხსნით y'-ის მიმართ:

$$y'=f(x, y). \tag{5.5}$$

მაგრამ $f(x, y)$ შეიძლება აღმოჩნდეს მრავალსახა ფუნქციაც. ვთქვათ, გვაქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა y'-ისა; ასე რომ, x-ისა და y-ის მოცემულ მნიშვნელობებს შეესაბამება n სხვადასხვა მიმართულება და მაშინ მოცემულ წერტილს ეთანადება არა ერთი, არამედ n სხვადასხვა მიმართულება.

ამგვარად, xOy სიბრტყეზე გვექნება არა ერთი, არამედ n სხვადასხვა მიმართულებათა ველი. თითოეული ამ ველისათვის ყოველ მოცემულ წერტილზე გაივლის ერთი ინტეგრალური წირი; ასე რომ,

საბოლოოდ ყოველ მოცემულ წერტილზე გაივლის (5.4) განტოლების n ინტეგრალური წირი, თუმცა ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს, ე. ი. მას ექნება სახე:

$$\psi(x, y, C) = 0, \tag{5.6}$$

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში (5.6) განტოლება C-სათვის უნდა გვაძლევდეს, საზოგადოდ, არა ერთ, არამედ n სხვადასხვა მნიშვნელობას.

§ 6. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გრაფიკული ამოხსნა

ტექნიკური ამოცანის მათემატიკურ ფორმულირებას ხშირად მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ისეთი ამონახსნის მოძებნამდე, რომელიც ამა თუ იმ საწყის პირობას აკმაყოფილებს. გეომეტრიულად ამოცანა დაიყვანება დიფერენციალური განტოლების იმ ინტეგრალური წირის აგებაზე, რომელიც მოცემულ წერტილზე გაივლის.

რადგან ინტეგრება დიფერენციალური განტოლებისა, რომელიც დამახასიათებელია ტექნიკური ამოცანებისათვის, არ ხდება სასრული სახით, ამიტომ გვიხდება ვისარგებლოთ დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდით. არსებობს დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის მრავალი სხვადასხვა მეთოდი. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორს — ეილერის გრაფიკულ მეთოდსა და რიცხვითი ინტეგრების მეთოდს.

1. ე ი ლ ე რ ი ს გ რ ა ფ ი კ უ ლ ი წ ე ს ი. განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირის მიახლოებითი აგების შემდეგი წესი.

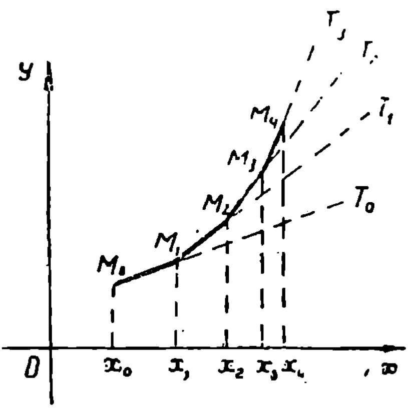
ვთქვათ, მოცემულია დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{6.1}$$

სადაც $f(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციაა xOy სიბრტყის რაიმე D არეში და ამ არეში აქვს y-ის მიმართ შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული $f_y'(x, y)$. ვიპოვოთ (6.1) განტოლების კერძო ამონახსნი $y = \varphi(x)$, რომელიც განსაზღვრულია $[x_0, X]$ შუალედში და აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $y = y_0$, როცა $x = x_0$.

გეომეტრიული თვალსაზრისით ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $y = \varphi(x)$ ინტეგრალური წირი, რომელიც D არის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გაივლის. აქ განვიხილავთ დასმული ამოცანის მიახლოებით ამოხსნას ე ი ლ ე რ ი ს გრაფიკული მეთოდით.

ეილერის გრაფიკული მეთოდი დაიყვანება რაიმე ტეხილის აგებაზე, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი $y = \varphi(x)$ საძიებელი ინტეგრალური წირის მიახლოებითი გრაფიკული გამოსახვა. ამ ტეხილს ეილერის ტეხილი ეწოდება. მის ასაგებად ვისარგებლოთ (6.1) დიფერენციალური განტოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაციით. ზემოთ ვნახეთ (§ 5), რომ (6.1) განტოლება D არეში განსაზღვრავს მიმართულებათა ველს. მაშასადამე, საძიებელი $y = \varphi(x)$ ინტეგრალური წირის M_0T_0 მხების კუთხური კოეფიციენტი D არის ყოველ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში უკვე ცნობილია და მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება $y_0' = f(x_0, y_0)$ ტოლობით (ნახ. 6). ახლა $[x_0, X]$ შუალედი დავყოთ n მცირე შუალედად წერტილებით: $x_0, x_1\ x_2, \dots, x_{n-1}, X$ და დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ Oy ღერძის პარალელური წრფეები: $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, თუ ამ M_0T_0 მხებზე გადავზომავთ მცირე სიგრძის მონაკვეთს $x = x_1$ წრფის გადაკვეთამდე, მაშინ მივიღებთ M_1 წერტილს x_1, y_1 კოორდინატებით, რომელიც მიახლოებით შეგვიძლია მივიღოთ როგორც M_0 წერტილთან ახლო მდებარე საძიებელი $y = \varphi(x)$ წირის წერტილი; მაგრამ ეს ნიშნავს $[x_0, x_1]$ ინტერვალში წირის რკალის შეცვლას M_0T_0 მხების M_0M_1 მონაკვეთით. ცხადია, რომ



ნახ. 6.

$$y_1' - y_0 \approx f(x_0, y_0)\cdot(x_1 - x_0), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

სადაც $y_0' = f(x_0, y_0)$, ხოლო y_1 აღნიშნავს საძიებელი წირის წერტილის ორდინატს, რომელიც შეესაბამება x-ის x_1 მნიშვნელობას:

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

$M_1(x_1, y_1)$ წერტილში საძიებელი წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი y_1' მოცემული იქნება (6.1) განტოლებით:

$$y_1' = f(x_1, y_1) \tag{6.2}$$

და, მაშასადამე, $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ მხები M_1T_1. ახლა, თუ M_1T_1 მხებზე M_1 წერტილიდან გადავზომავთ მონაკვეთს $x = x_2$ წრფის გადაკვეთამდე. მაშინ მივიღებთ $M_2(x_2, y_2)$ წერტილს, რომელიც

მიახლოებით შეგვიძლია მივიღოთ, როგორც M_1 წერტილის ახლო მდებარე საძიებელი $y=\varphi(x)$ წირის წერტილი. ცხადია,

$$y_2-y_1\approx f(x_1, y_1)(x_2-x_1), \quad x_1\leqslant x\leqslant x_2,$$

სადაც $y_1'=f(x_1, y_1)$ ხოლო y_2 არის საძიებელი წირის წერტილის ორდინატი, რომელიც შეესაბამება x-ის x_2 მნიშვნელობას, $y_2=\varphi(x_2)$. $M_2(x_2, y_2)$ წერტილში საძიებელი წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი y_2' შეიძლება ვიპოვოთ $y_2'=f(x_2, y_2)$ დამოკიდებულებიდან. მაშასადამე, საძიებელი წირის $M_2(x_2, y_2)$ წერტილში შესაძლებელია გავავლოთ M_2T_2 მხები წრფე. თუ ამ მხებზე M_2 წერტილიდან გადავზომავთ მონაკვეთს $x=x_3$ წრფის გადაკვეთამდე, მივიღებთ წერტილს $M_3(x_3, y_3)$, რომელიც მიახლოებით შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც M_2 წერტილთან ახლოს მდებარე საძიებელი წირის წერტილი. ცხადია,

$$y_3-y_2\approx f(x_2, y_2)(x_3-x_2), \quad x_2\leqslant x\leqslant x_3,$$

სადაც $y_2'=f(x_2, y_2)$, ხოლო y_3 არის $y=\varphi(x)$ საძიებელი წირის $M_3(x_3, y_3)$ წერტილის ორდინატი. $M_3(x_3, y_3)$ წერტილში საძიებელი წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი შეიძლება ვიპოვოთ $y_3'=f(x_3, y_3)$ დამოკიდებულებიდან. მაშასადამე, შესაძლებელია M_3 წერტილში გავავლოთ მხები წრფე M_3T_3 და ა. შ. ვთქვათ, ამასთან $x_0<x_1<x_2<$ თუ პროცესს გავაგრძელებთ მანამ, ვიდრე არ მივაღწევთ დანიშნულ $M_n(X, Y)$ წერტილს, მაშინ ჩვენ ამ გზით ავაგებთ $M_0M_1M_2M_3\ldots M_{n-1}M_n$ ტეხილს, რომელსაც ეილერის ტეხილი ეწოდება. იგი წარმოადგენს $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში გამავალი საძიებელი ინტეგრალური წირის მიახლოებით წირს $[x_0, X]$ შუალედში.

თუ $y'=f(x, y)$ განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ზემოთ მითითებულ პირობებს, მაშინ შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ არსებობს $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი (6. 1) განტოლების მხოლოდ ერთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი და $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი ეილერის ტეხილების ყოველი $[M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n]$ მიმდევრობა იქნება თანაბრად კრებადი $[x_0, X]$ ინტერვალში ამ ერთადერთი $y=\varphi(x)$ ინტეგრალური წირისაკენ, როცა ტეხილის გვერდების რიცხვი n უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ ტეხილის გვერდი M_lM_{l+1} მიისწრაფვის ნულისაკენ; ამასთან ტეხილის წერტილის y_n ორდინატი

$$y_n=y_{n-1}+f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

მიისწრაფვის საძიებელი ინტეგრალური წირის ზუსტი y ორდინატისაკენ, რომელიც აკმაყოფილებს (6.1) დიფერენციალურ განტოლებას[1].

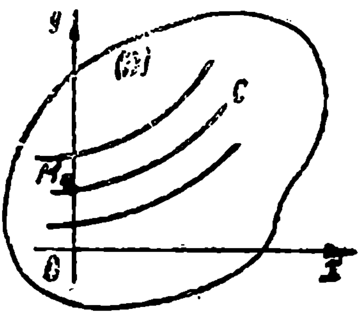
---

[1] იგულისხმება, რომ ასეთი ინტეგრალური წირი არსებობს.

მაშასადამე, საკმარისად დიდი n-სათვის ეილერის ტეხილი $M_0 M_1 M_2 M_3 \dots M_{n-1} M$ შეიძლება მიახლოებით განვიხილოთ, როგორც (6.1) განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გაივლის. ამგვარად, ვიპოვეთ წესი (6.1) განტოლების ინტეგრალური წირის მიახლოებითი აგებისა. ცხადია, ის საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ საძიებელ ზუსტ $y=\varphi(x)$ ამონახსნს.

თუ აღნიშნული პროცესის დაწყებისას გამოვალთ D არის არა $M(x_0, y_0)$ წერტილიდან, არამედ სხვა წერტილიდან, მაშინ მივიღებთ სხვა მიახლოებით ინტეგრალურ წირს. ამ ახალი წირის კოორდინატები და დახრილობა მის ყოველ წერტილში დააკმაყოფილებს (6.1) დიფერენციალურ განტოლებას. მაშასადამე, არსებობს (6.1) განტოლების ერთზე მეტი ამონახსნი.

იმაში დასარწმუნებლად, რომ (6.1) განტოლების ინტეგრალურ წირთა ზოგადი განტოლება შეიცავს ნებისმიერ მუდმივს, საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ Oy ღერძი კვეთს D არეს, რომელშიაც ძევს ინტეგრალური წირები (ნახ. 7). მართლაც, ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, Oy ღერძზე აღებულ $M_0(0, y_0)$ წერტილზე გაივლის (6.1) განტოლების ერთი მიახლოებითი ინტეგრალური, წირი. ცხადია, ეს წირი შეიცვლის თავის ფორმასა და მდებარეობას, როცა $M_0(0. y_0)$ წერტილი გადაინაცვლებს Oy ღერძზე, $M_0(0, y_0) \in D$. ამიტომ მისი განტოლება შეიცავს ერთ ნებისმიერ y_0 მუდმივს. მაშასადამე, ამონახსნი ზოგადი სახით შეიძლება ჩაიწეროს ასე:



ნახ. 7.

$$\Phi(x, y, y_0) = 0, \tag{6.3}$$

რადგან Oy ღერძის ყოველ M_0 $(0, y_0)$ წერტილს ეთანადება y_0-ის გარკვეული მნიშვნელობა და, პირიქით; ამიტომ (6.3) დამოკიდებულება შეიცავს (6.1) დიფერენციალური განტოლების ყველა შესაძლო ამონახსნს. მაშასადამე, (6.3) წარმოადგენს მოცემული (6.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

(6.1) დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნის ეილერის გრაფიკული წესიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ამ განტოლების რიცხვითი ინტეგრების მეთოდი.

2. რიცხვითი ინტეგრების მეთოდი. გრაფიკული მეთოდის გამოყენების დროს ფაქტიურად აგებენ ეილერის ტეხილს, ხოლო რიცხვითი მეთოდის გამოყენებისას (6.1) დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ინტეგრების ეილერის წესი გადაჰყავთ ანალიზურ ენაზე.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეილერის ტეხილის პირველი M_0M_1 გვერდის ბოლო $M_1(x_1, y_1)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას $f(x_0, y_0)=y_0'$, კუთხური კოეფიციენტით: $y_1-y_0=f(x_0, y_0)(x_1-x_0)$, საიდანაც

$$y_1=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0). \tag{6.4}$$

ვიცით რა x_1 და y_1, იმავე წესით ვიპოვით y_2-ს.

$$y_2=y_1+f(x_1, y_1)(x_2-x_1), \tag{6.5}$$

ანუ

$$y_2=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)+f(x_1, y_1)(x_2-x_1)$$

და ა. შ.

$$y-y_{n-1}=f(x_{n-1}, y_{n-1})(X-x_{n-1}). \tag{6.6}$$

თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელ ტოლობებს, გვექნება:

$$y=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)+f(x_1, y_1)(x_2-x_1)+\cdots+ \\ +f(x_{n-1}, y_{n-1})(X-x_{n-1}). \tag{6.7}$$

(6.4), (6.5), (6.6) და (6.7) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს თანდათანობით გამოვთვალოთ უცნობი ფუნქციის y $(n=1, 2,...)$ მნიშვნელობები $[x_0, X)$ ინტერვალის დაყოფის წერტილებში. მართლაც, (x_0, y_0)-ისა და ამორჩეული x_1-ის მიხედვით მოვძებნით y_1-ს; შემდეგ, ცნობილი (x_1, y_1) წერტილისა და ამორჩეული x_2-ის მიხედვით გამოვთვლით y_2-ს და ა. შ. ცხადია, რამდენადაც მცირე იქნება x_i-x_{i-1} $(i=1, 2, \ldots, n)$, ე. ი. რამდენადაც დიდი იქნება n, იმდენად ზუსტი იქნება შედეგი. როცა $n\to\infty$, უკანასკნელი (6.7) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$y=y_0+\int\limits_{\smile M_0M} f(x, y)\,dx, \tag{6.8}$$

სადაც წირითი ინტეგრალი აღებულია M_0M ინტეგრალურ წირზე. თეორიულად ზუსტი (6.8) ფორმულა არ იძლევა y-ის გამოთვლის პრაქტიკულ საშუალებას, გარდა იმ კერძო შემთხვევისა, როცა

$f(x, y) = f(x)$. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ზუსტი ამონახსნი წარმოგვიდგება ფორმულით:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

ამგვარად, y ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა ფაქტიურად უნდა გამოვთვალოთ (6,4), (6,5), (6,6) (6,7) რეკურენტული ფორმულების მეშვეობით. ეს წესი წარმოადგენს რიცხვითი ინტეგრების ერთ-ერთ მეთოდს[1].

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემულია დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = y. \tag{6.9}$$

მოვძებნოთ ამ განტოლების ინტეგრალური წირი გრაფიკული წესით.

ავიღოთ Oy ღერძზე ($y>0$) ნებისმიერი M_0 წერტილი, რომლის კოორდინატია y_0 და ამ წერტილიდან გავავლოთ მიახლოებითი ინტეგრალური წირი. M_0 წერტილში წირის M_0T_0 მხების კუთხური კოეფიციენტი y_0' დადებითია და $y_0' = y_0$. თუ ამ მხებზე ავიღებთ M_0M_1 მცირე სიგრძის მონაკვეთს დადებითი x-ებისათვის, მაშინ M_1 წერტილის y_1 ორდინატი მეტი იქნება y_0-ზე. წირის M_1 წერტილში M_1T_1 მხების კუთხური კოეფიციენტი y_1 განისაზღვრება დამოკიდებულებით: $y_1' = y_1$. მაშასადამე, ეს მხები ქმნის Ox ღერძთან კუთხეს, რომელიც აღემატება M_1T_1 მხების მიერ შედგენილ კუთხეს. თუ M_1T_1 მხებზე გადავზომავთ მცირე სიგრძის M_1M_2 მონაკვეთს, მაშინ M_2 წერტილის y_2 ორდინატი იქნება მეტი, ვიდრე y_1 ორდინატი. მაშასადამე, წირის M_2 წერტილში მხების კუთხური კოეფიციენტი y_2', $y_2' = y_2$, აღემატება y_1'-ს და M_2T_2 ძევს M_1T_1 მხების ზემოთ. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ტეხილს, რომლის ორდინატები თანდათანობით იზრდება და ტეხილის გვერდები მიისწრაფვის ვერტიკალური მდებარეობისაკენ. მაშასადამე, ორდინატები ინტეგრალური წირისა, რომელიც წარმოადგენს ამ ტეხილი წირის ზღვარს, ყოველთვის იზრდება და მათი სიდიდე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. Oy ღერძის მარჯვნივ წირი წარმოადგენს უსასრულო შტოს, რომლის მხები მიისწრაფვის Oy ღერძის პარალელური მდებარეობისაკენ, როცა y

---

[1] ამბობენ „რიცხვითი" ინტეგრება, რადგან მას მივყავართ კერძო ამონახსნის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლამდე და არა თვით კერძო ამონახსნის გამომსახველი ფუნქციის მოძებნამდე.

უსაზღვროდ იზრდება. ახლა ვნახოთ, აქვს თუ არა წირს ვერტიკალური ასიმპტოტი. ამ მიზნით, (6.9) განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$dx = \frac{dy}{y}. \tag{6.10}$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება წირის M_0 წერტილიდან M-მდე, როცა y იცვლება y_0-დან y-მდე, x კი 0-დან x-მდე, გვაძლევს:

$$\int_0^x dx = \int_{y_0}^y \frac{dy}{y},$$

$$x = \ln \frac{y}{y_0},$$

საიდანაც

$$y = y_0 e^x. \tag{6.11}$$

როცა $y \to \infty$, მაშინ $x \to \infty$ და, მაშასადამე, წირის ცვალებადობის ხასიათი პარაბოლურია. ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ მიახლოებითი ინტეგრალური წირი Ox ღერძის ქვემოთ.

(6.11) წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს, რომელიც შეიცავს ნებისმიერ y_0 მუდმივს.

მაგალითი 2. მოცემულია დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2}.$$

ვიპოვოთ y-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როცა $x = 0{,}9$, დიფერენციალური განტოლების იმ ამონახსნისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას:

$$y_0 = 1, \quad \text{როცა} \quad x_0 = 0.$$

ამოხსნა. დავყოთ [0. 0,9] მონაკვეთი 9 ტოლ ნაწილად წერტილებით: $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; $x_3 = 0{,}3; \dots$; $x_8 = 0{,}8$. გამოთვლის შედეგები მოვათავსოთ ცხრილში. ცხრილის პირველი სვეტი შეიცავს x_i-ს მნიშვნელობებს, მეორე სვეტი y_i-ს შესაბამის მნიშვნელობებს, მესამე $f(x_i, y_i) = \frac{x_i y_i}{2}$ მნიშვნელობებს, მეოთხე — საძიებელი ფუნქციის $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \frac{x_i y_i}{2} \cdot 0{,}1$ და, ბოლოს, მეხუთე სვეტი შეიცავს შედარებისათვის მოყვანილი ზუსტი $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ ამონახსნის მნიშვნელობებს.

ცხრილი

x_i	y_i	$\frac{x_i y_i}{2}$	$\Delta y_i = \frac{x_i y_i}{2} \cdot 0,1$	$e^{\frac{x^2}{4}}$
$x_0=0.0$	1,000	0,000	0,000	1,0000
$x_1=0,1$	1,000	0,005	0,005	1,0025
$x_2=0,2$	1.005	0,0005	0,0101	1,0100
$x_3=0,3$	1.0151	0,1523	0,0152	1,0227
$x_4=0,4$	1,0303	0,2061	0,0206	1,0408
$x_5=0,5$	1,0509	0,2627	0,0263	1.0645
$x_6=0,6$	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
$x_7=0,7$	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
$x_8=0,8$	1,1483	0,4593	0,0459	1,1735
$x_9=0,9$	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244

გამოთვლა ხდება ასე: გამოვთვლით y_1-y_0-ს. თუ ამ სახეობას მივუმატებთ y_0-ს, მივიღებთ y_1-ს. შემდეგ ვიპოვოთ y_2-y_1 სხვაობა და იგი მივუმატოთ y_1-ს, მივიღებთ y_2-ს და ა. შ.

ცხრილიდან ჩანს, რომ, როცა $x=0,9$, მაშინ $y=1,1942$. უშუალო შემოწმებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ მოცემულ საწყის პირობებში განსახილველი განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს $y=e^{\frac{x^2}{4}}$ მაშასადამე, ამ ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობა, როცა $x=0,9$, იქნება

$$y\Big|_{x=0.9}=e^{\frac{(0,9)^2}{4}}=1,2244.$$

მაშასადამე, მიახლოებით ამონახსნში დაშვებული ცდომილება ნაკლებია 0,031-ზე, რაც შეადგენს 2,5%-ს.

II თავი

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც ამოიხსნება კვადრატურებში

§ 1. წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება:

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{1.1}$$

სადაც F არის $x,\ y,\ y'$ ცვლადების მოცემული უწყვეტი ფუნქცია. თუ (1.1) განტოლება განსაზღვრავს $\dfrac{dy}{dx}$-ს, როგორც დანარჩენი x და y ცვლადების არაცხადი ფუნქციას (შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ეს პირობა შესრულებულია), მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\dfrac{dy}{dx}$-ის მიმართ ამოხსნილი სახით:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{1.2}$$

აქ f, x და y ცვლადების მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა.

თუ რომელიმე წერტილზე $f(x,\ y)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია, მაშინ (1.2) განტოლება, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, არ კარგავს აზრს. მივიღებთ რა y-ს დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო x-ს მის ფუნქციად, (1.2) განტოლება შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით[1]:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,\ y)}\,. \tag{1.3}$$

---

[1] რომ არსებობდეს $F(x,\ y,\ y')=0$ განტოლებით განსაზღვრული $y'=f(x,\ y)$ არაცხადი ფუნქცია; რომელიც $(x_0,\ y_0)$ წერტილზე ღებულობს $y_0'=(x_0,\ y_0)$ მნიშვნელობას, საკმარისია, რომ $F(x_0,\ y_0,\ y_0')=0$, არსებობდეს $Fy'(x,\ y,\ y')$ და $F_x'(x,\ y,\ y')$ კერძო წარმოებულები და რომ $Fy'(x_0,\ y_0,\ y_0')\neq 0$. მაშინ (1.1) განტოლება $(x_0,\ y_0)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრავს $y=f(x,\ y)$ უწყვეტ ფუნქციას, ამასთან, $y_0'=f(x_0)\ y_0)$.

(1.2) და (1.3) განტოლება სრულიად იდენტურია და უკანასკნელს გამოვიყენებთ იმ წერტილების მიდამოში, რომლებშიც $f(x, y)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია.' აღნიშნულის გამო, ხშირად ხელსაყრელია (1.2) განტოლებას მივცეთ ისეთი სახე, რომელშიც წინასწარ არ იქნება დადგენილი, x და y ცვლადებიდან რომელი მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადად და რომელი — ფუნქციად; ამ მიზნით (1.2) განტოლება გადავწეროთ ასეთნაირად:

$$dy - f(x, y)\, dx = 0. \tag{1.4}$$

უკანასკნელი განტოლება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც (1.2) და (1.3) განტოლებების ტოლფასი დიფერენციალური განტოლება, რომელშიაც x, y ცვლადებიდან ნებისმიერი შეგვიძლია მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადად. (1.4) განტოლებას შეიძლება მივცეთ უფრო სიმეტრიული სახე. ვთქვათ,

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

მაშინ (1.4) განტოლება ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \tag{1.5}$$

სადაც x და y ცვლადები შედიან სრულიად ტოლუფლებიანად.

§ 2. დიფერენციალური განტოლებანი განცალებული ცვლადებით

1. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნებისმიერი პირველი რიგისა და პირველი ხარისხის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნეს სახეზე:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{2.1}$$

სადაც ვიგულისხმოთ, რომ $M(x, y)$ და $N(x, y)$ დამოკიდებული x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია xOy სიბრტყის რაიმე D არეში. თუ (2.1) განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნეს სახეზე:

$$M_1(x)\, dx + N_1(y)\, dy = 0, \tag{2.2}$$

სადაც $M_1(x)$ და $N_1(y)$ უწყვეტი ფუნქციებია შესაბამისად (a, b) და (c, d) ინტერვალებში, მაშინ უკანასკნელ განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით. ვიპოვოთ ახლა (2.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ვთქვათ, მოვძებნეთ (2.2) განტოლების რაიმე $y = y(x)$ ამონახსნი.

როცა $y=y(x)$, ამონახსნს ჩავსვამთ (2.2)-ში, (2.2) დიფერენციალური განტოლება გადაიქცევა იგივეობად, რომლის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int M_1(x)\,dy+\int N_1(y)\,dy=C, \tag{2.3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ამრიგად, (2.2) განტოლების ყოველი ამონახსნი აკმაყოფილებს (2.3) განტოლებას. ასევე, (2.3) განტოლების ყოველი ამონახსნი წარმოადგენს (2.2) განტოლების ამონახსნსაც, ვინაიდან, თუ რომელიმე $y(x)$ ფუნქცია იგივეობად აქცევს (2.3) განტოლებას, მაშინ ამ უკანასკნელი იგივეობის გაწარმოებით მივიღებთ, რომ $y(x)$ იგივეობად აქცევს (2.2) განტოლებასაც. მაშასადამე, (2.3) განტოლება წარმოადგენს (2.2) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 1. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$xdx+ydy=0.$$

ცვლადები აქ განცალებულია, ე. ი. დიფერენციალებთან მდგომი კოეფიციენტები წარმოადგენს შესაბამისად მხოლოდ x-ისა და მხოლოდ y-ის ფუნქციებს. მაშასადამე, განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$\int xdx+\int ydy=C_1.$$

აქედან:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1,$$

ანუ

$$x^2+y^2=C^2.$$

ამგვარად, ინტეგრალური წირები წარმოადგენს იმ წრეწირთა ოჯახს, რომელთა ცენტრია (0, 0) წერტილი.

მაგალითი 2. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$e^{x^2}\,dx=\frac{dy}{\ln y}$$

განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int e^{x^2}\,dx=\int\frac{dy}{\ln y}+C, \tag{2.4}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ინტეგრალები: $\int e^{x^2}dx$ და $\int \frac{dy}{\ln y}$ არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში, მაგრამ მიუხედავად ამისა, (2.4) წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

2. ახლა, ვთქვათ, (2.1) განტოლებაში $M(x, y)$ და $N(x, y)$ შესაბამისად წარმოადგენს ორი ფუნქციის ნამრავლს, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია x-ზე, ხოლო მეორე y-ზე:

$$M(x, y) = M_1(x)\cdot N_1(y),$$
$$N(x, y) = M_2(x)\cdot N_2(y),$$

მაშინ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$M_1(x)\cdot N_1(y)\,dx + M_2(x)\cdot N_2(y)\,dy = 0, \tag{2.5}$$

რომელიც შეიძლება დაყვანილ იქნეს დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით. ცვლადების განცალებისათვის (2.5) განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ $M_2(x)\cdot N_1(y)$ ნამრავლზე, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით[1]

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{2.6}$$

თუ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებას შევასრულებთ, მივიღებთ (2.6) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, \tag{2.7}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ამავე (2.7) ფორმულით გამოისახება (2.5) განტოლების ზოგადი ინტეგრალიც, რადგან (2.6) განტოლების ყოველი ამონახსნი დააკმაყოფილებს (2.5) განტოლებასაც. თუ (2.7) განტოლებაში შევასრულებთ კვადრატურებს და მას ამოვხსნით y-ის მიმართ (თუ ეს ამოხსნა შესაძლებელია), მაშინ მივიღებთ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = \varphi(x, C). \tag{2.8}$$

რომ გამოვყოთ ზოგადი (2.7) ინტეგრალიდან კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას: $y = y_0$, როცა

---

[1] $M_2(x)\,N_1(y)$-ზე გაყოფისას შეიძლება დავკარგოთ ცალკე ამონახსნი, რომელიც ამ ნამრავლს გადააქცევს ნულად.

$x=x_0$, ამისათვის, ზოგადი წესის თანახმად, უნდა განვსაზღვროთ ნებისმიერი მუდმივი C, მივიღებთ რა ზოგად (2.7) ინტეგრალში $y=y_0$, როცა $x=x_0$. ცხადია, ასეთ კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (2.5) განტოლებაში ცვლადთა განცალებისას განტოლების ორივე ნაწილი გავყავით $M_2(x)\,N_1(y)$ ფუნქციაზე; ამასთან დაკავშირებით ჩვენ შეგვეძლო დაგვეკარგა ამონახსნები, რომლებიც განისაზღვრებიან ტოლობებით: $M_2(x)=0$ და $N_1(y)=0$. მართლაც, თუ $y=\beta$ არის $N_1(y)=0$ განტოლების ფესვი, $N_1(\beta)=0$, მაშინ (2.5) განტოლებაში $y=\beta$-ს შეტანა მოგვცემს

$$M_1(x)\cdot N_1(\beta)\,dx + M_2(x)\cdot N_2(\beta)\,d\beta \equiv 0,$$

რადგან $N_1(\beta)=0$ და $d\beta=0$. მაშასადამე, $y=\beta$ იქნება (2.5) განტოლების ამონახსნი.

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ თუ $x=a$ არის $M_2(x)=0$ განტოლების ფესვი, მაშინ $x=a$ აგრეთვე იქნება (2.5) განტოლების ამონახსნი. თუ ეს ამონახსნები არ მიიღება (2.7)-დან C-ს არც ერთი კერძო რიცხვითი მნიშვნელობისათვის, მაშინ ისინი წარმოადგენენ (2.5) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებს.

მაგალითი 3. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი განტოლებისა:

$$x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0.$$

თუ მოვახდენთ ცვლადების განცალებას, მივიღებთ:

$$\frac{xdx}{(1+x^2)^{1/2}} + \frac{ydy}{(1+y^2)^{1/2}} = 0;$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^{1/2}} + \int \frac{ydy}{(1+y^2)^{1/2}} = C,$$

ანუ

$$(1+x^2)^{1/2} + (1+y^2)^{1/2} = C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

(2.9) წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$xydx - (x^2 + 1)\,dy = 0.$$

გავყოთ ამ განტოლების ორივე ნაწილი $y\,(x^2+1)$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{dy}{y} = 0.$$

ამ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln|y| = \ln|C|,$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{y} = C,$$

ანუ

$$y = \frac{1}{C}\sqrt{x^2+1}.$$

უკანასკნელი წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

3. ზოგიერთ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება დაყვანილ იქნეს განტოლებებზე განცალებული ცვლადებით, ცვლადთა გარდაქმნის წესის გამოყენებით.

დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით მიიყვანება აგრეთვე შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi(y), \tag{2.10}$$

სადაც $f(x)$ და $\varphi(y)$ უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) და (c, d) შუალედებში შესაბამისად, ამასთან, მოცემულ შუალედში $\varphi(y) \neq 0$. ამ პირობებში (2.10) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი გამოისახება ფორმულით:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

მართლაც, (2.10) განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ $\varphi(y)$ ფუნქციაზე და გავამრავლოთ dx-ზე, მაშინ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx. \tag{2.11}$$

ახლა, ვთქვათ, არსებობს $y=\varphi_1(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (2.10) განტოლებას, მაშინ (2.11) განტოლების ორივე ნაწილში გვექნება ერთმანეთს შორის იგივურად ტოლი დიფერენციალები; თუ დიფერენციალები ტოლია, მაშინ მათი განუსაზღვრელი ინტეგრალები ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება. (2.11) იგივეობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} \doteq \int f(x)\,dx + C. \tag{2.12}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ამიტომ, თუ $\Phi_1(y)$-ით აღვნიშნავთ $\frac{1}{\varphi(y)}$-ის რაიმე პირველყოფილ ფუნქციას, ხოლო $\Phi_2(x)$-ით $f(x)$-ის რომელიმე პირველყოფილ ფუნქციას, (2.12) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\Phi_1(y) = \Phi_2(x) + C, \tag{2.13}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. (2.12) ან (2.13) წარმოადგენს (2.10) განტოლების ზოგად ინტეგრალს. თუ შესაძლებელია მისი ამოხსნა y-ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს. ვთქვათ, (x_0, y_0) არის $R\,[a, b;\ c, d]$ მართკუთხედის ნებისმიერი წერტილი. ვნახოთ, რა პირობებში განსაზღვრავს (2.12) ფორმულა x-ს, როგორც x-ის ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში. ინტეგრალი ასე დავწეროთ:

$$0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \equiv \Psi(x, y;\ x_0, y_0),$$

ცხადია, $\Psi(x_0, y_0;\ x_0, y_0) = 0$. შემდეგ:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \frac{1}{\varphi(y_0)} \neq 0$$

და მას აზრი აქვს. რადგან $\varphi(y_0) \neq 0$. თუ y-ის რომელიღაც y_0 მნიშვნელობისათვის $\varphi(y_0) = 0$, მაშინ (2.10) განტოლებას, გარდა (2.12) ფორმულით მოცემული ამონახსნებისა, აგრეთვე, ექნება $y = y_0$ ამონახსნი[1].

მაგალითი 5. განვიხილოთ განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2y}{2x}. \tag{2.14}$$

[1] თუ განტოლებას აქვს $y=y_0$ სახის ნამდვილი ამონახსნები, მაშინ $y=y_0$ წრფეები იქნება (2.10) განტოლების ამონახსნები, ეს ამონახსნები, ყველა ან ზოგიერთი, შეიძლება აღმოჩნდეს განსაკუთრებული.

მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{y(y-2)}=\frac{dx}{2x}.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int\frac{dy}{y(y-2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\ln|C_1|,$$

სადაც C_1 აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს. აქედან

$$\ln|y-2|-\ln|y|=\ln|x|+\ln C, \qquad C>0,$$

საიდანაც

$$\left|\frac{y-2}{xy}\right|=C,$$

ანუ

$$\frac{y-2}{xy}=\pm C,$$

$$\frac{y-2}{xy}=C \qquad (C\neq 0).$$

აქედან ვღებულობთ ზოგად ამონახსნს:

$$y=\frac{2}{1-Cx}, \quad (C\neq 0), \tag{2.15}$$

სადაც C აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს.

რადგანაც $\varphi(y)=y^2-2y$ ნულია, როცა $y=0$ და $y=2$, დამატებით გვექნება კიდევ ორი ამონახსნი, რომლებიც არ მიიღება (2.15) ზოგადი ამონახსნიდან. მეორე $y=2$ ამონახსნი კი შეიძლება შევიტანოთ ზოგად ამონახსნში, თუ C პარამეტრს მივცემთ ნულის მნიშვნელობასაც.

ამგვარად, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$y=\frac{2}{1-Cx} \quad (-\infty<C<\infty)$$

და ამონახსნს

$$y=0,$$

რომელიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან და წარმოადგენს განსაკუთრებულ ამონახსნს, თუ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას დავწერთ სიმეტრიული სახით:

$$(y^2-2y)\,dx-2x\,dy=0,$$

მაშინ, ცხადია, მიღებულ ამონახსნებს უნდა დავუმატოთ კიდევ ერთი ამონახსნი $x=0$.

მაგალითი 6. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლებიდან გვაქვს:

$$\sin x\, dy = y\ln y dx,$$

საიდანაც:

$$\frac{dx}{\sin x} - \frac{dy}{y\ln y} = 0.$$

უკანასკნელი წარმოადგენს განტოლებას განცალებული ცვლადებით. მისი ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int \frac{dx}{\sin x} - \int \frac{dy}{y\ln y} = C_1,$$

$$\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln(\ln y) = \ln C, \quad \text{სადაც} \quad C_1 = \ln C.$$

თუ მოვახდენთ პოტენცირებას, მივიღებთ განტოლების ზოგად ინტეგრალს სახით:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = C\ln y.$$

მაგალითი 7. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y' = 10^{x+y}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dy}{dx} = 10^x\, 10^y.$$

აქედან

$$\frac{dy}{10^y} = 10^x\, dx.$$

უკანასკნელის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int 10^{-y}\, dy + C_1 = \int 10^x\, dx,$$

$$C_1 - \frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10},$$

საიდანაც განტოლების ზოგად ინტეგრალს მივიღებთ სახით:

$$10^{x} + 10^{-y} = C, \quad \text{სადაც} \quad C = C_1 \ln 10.$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი განტოლებისა:

$$(xy^2 + y)\,dx - xdy = 0.$$

მოვახდინოთ ცვლადების გარდაქმნა:

$$xy = z,$$

მაშინ

$$dz = xdy + ydx.$$

თუ ამ აღნიშვნებს შევიტანთ მოცემულ განტოლებაში, გვექნება:

$$\left(\frac{z^2}{x} + \frac{z}{x}\right)dx + \frac{z}{x}dx - dz = 0.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z(z+2)} = 0.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln\frac{z+2}{z} = C_1,$$

საიდანაც

$$x\left(\frac{z+2}{z}\right)^{1/2} = e^{C_1},$$

$$x\left(\frac{xy+2}{xy}\right)^{1/2} = e^{C_1},$$

ანუ

$$x^2\left(1 + \frac{2}{xy}\right) = C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

უკანასკნელი დამოკიდებულება გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 9. ამოვხსნათ განტოლება:

$$xy(1 + x^2)\,y' = 1 + y^2.$$

ამოხსნა. მოცემული დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$xy(1 + x^2)\,dy = (1 + y^2)\,dx.$$

უკანასკნელიდან გვაქვს:

$$\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{ydy}{1+y^2}.$$

ეს არის განტოლება განცალებული ცვლადებით, მისი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}+C_1=\int\frac{ydy}{1+y^2};$$

მაგრამ

$$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

ე. ი.

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x=C_1,$$

ანუ

$$\ln\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}}{x}=\ln C_2,$$

სადაც

$$C_1=\ln C_2.$$

თუ მოვახდენთ პოტენცირებას, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$(1+y^2)(1+x^2)=C_2^2x^2,$$

ანუ

$$(1+y^2)(1+x^2)=Cx^2,$$

სადაც

$$C=C_2^2.$$

მაგალითი 10. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$y'=\sin\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2},$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{x}{2},$$

ე. ი.

$$\frac{dy}{2\sin\frac{y}{2}}=-\cos\frac{x}{2}\,dx.$$

უკანასკნელის ინტეგრებით მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\int\frac{dy}{2\sin\frac{y}{2}}+\int\cos\frac{x}{2}\,dx=C,$$

ე. ი.

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|+2\sin\frac{x}{2}=C.$$

§ 8. ერთგვაროვანი განტოლებები

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები მრავალ შემთხვევაში ცვლადების სათანადო გარდაქმნით შეიძლება დაყვანილ იქნეს დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით. განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{3.1}$$

რომელშიაც $f(x, y)$ არის უწყვეტი ფუნქცია xy სიბრტყის რომელიმე D არეში.

განსაზღვრა. (3.1) სახის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია არის ნულოვანი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, ე. ი. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია წარმოგვიდგება, როგორც $\frac{y}{x}$ ფარდობის ფუნქცია:

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

როგორც ცნობილია, ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ ნებისმიერი t-სათვის შესრულდება შემდეგი იგივეობა:

$$f(tx,\ ty)=t^m f(x,\ y):$$

კერძოდ, როცა $m=0$, მაშინ

$$f(tx.\ ty)=f(x,\ y).$$

თუ t მამრაელს ავიღებთ $\frac{1}{x}$-ის ტოლს, ე. ი. $t=\frac{1}{x}$, მივიღებთ ნულოვანი ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=f(x, y).$$

მაგალითად, $f(x, y)=\log\frac{x}{y}$ არის ნულოვანი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია x-ისა და y-ის მიმართ. მართლაც,

$$f(tx, ty)=\log\frac{tx}{ty}=t^0\log\frac{x}{y}.$$

ცხადია, თუ $f(x, y)$ არის m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, მაშინ $\frac{f(x, y)}{x^m}=f_1(x, y)$ იქნება ნულოვანი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y-ის მიმართ. მართლაც, $f(tx, ty)=t^m f(x, y)$. თუ ამ ტოლობაში მივიღებთ $t=\frac{1}{x}$, მაშინ $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^m}f(x, y)$. მაშასადამე, $\frac{f(x, y)}{x^m}$ იქნება ნულოვანი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია. ცხადია,

$$f(x, y)=x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციის ზოგად წარმოდგენას.

განვიხილოთ პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.2}$$

სადაც $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ნულოვანი ხარისხის უწყვეტი ერთგვაროვანი ფუნქციაა xOy სიბრტყის რაიმე D არეში, რომელიც განსაზღვრულია უტოლობებით: $a<\frac{y}{x}<b$ (ცხადია, D წარმოადგენს ორი ვერტიკალური კუთხის შიგა ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=ax$, $y=bx$ წრფეებით და $x\neq 0$). (3.2) განტოლება $y=ux$ ჩასმით, სადაც $u=u(x)$ არის x ცვლადის ახალი საძიებელი ფუნქცია, დაიყვანება განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით. მართლაც,

$$dy=xdu+udx,$$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u. \tag{3.3}$$

ცხადია, (3.2) განტოლებაში თუ შევიტანთ (3.3) გამოსახულებას, მივიღებთ:

$$x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u),$$

ანუ

$$xdu=[\varphi(u)-u]\,dx. \tag{3.4}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(u)-u\neq0$ და $x\neq0$, მაშინ (3.4) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

საიდანაც ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C.$$

თუ $\Phi(u)$ არის $\dfrac{1}{\varphi(u)-u}$ ფუნქციის რომელიმაც პირველყოფილი, ე. ი.

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\Phi(u),$$

მაშინ

$$\Phi(u)=\ln|x|+C, \tag{3.5}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ u-ს შევცვლით $\dfrac{y}{x}$-ით, მაშინ დამოკიდებულება (3.5) გვაძლევს (3.2) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

(3.5) ზოგადი ინტეგრალიდან შეიძლება გამოვყოთ (3.2) განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს: $y=y_0$, როცა $x=x_0$. მართლაც, საკმარისია C-ს შესაბამისი მნიშვნელობა განვსაზღვროთ (3.5) ფორმულიდან, მივიღებთ:

$$\Phi\left(\frac{y_0}{x_0}\right)=\ln|x_0|+C.$$

საიდანაც

$$C=\Phi\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\ln|x_0|.$$

ამგვარად, (3.5) განტოლების კერძო ამონახსნი, საწყისი პირობებით: $x=x_0$, $y=y_0$, იქნება:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\Phi\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|,$$

ანუ

$$y = x\,\Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|\right],$$

სადაც Φ^{-1} აღნიშნავს Φ ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას. ამგვარად, მართებულია შემდეგი

თეორემა. თუ ერთგვაროვან

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

განტოლებაში $\varphi(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $a<u<b$ ინტერვალში და ამ ინტერვალში $\varphi(u) \neq u \left(u = \frac{y}{x}\right)$, მაშინ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი გამოისახება კვადრატურებში:

$$\int \frac{dx}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C,$$

ამასთან D არის ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის ერთადერთი ინტეგრალური წირი.

შენიშვნა 1. ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $\varphi(u) - u \neq 0$. მაგრამ, თუ $\varphi(u) - u = 0$, მაშინ განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x};\tag{3.6}$$

და ამ შემთხვევაში არ არის საჭირო არავითარი გარდაქმნა, რადგანაც თვით განტოლება იქნება განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

განტოლების ინტეგრება ხდება ცვლადთა განცალების წესის გამოყენებით და მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება $y = Cx$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ $\varphi(u) - u = 0$, u-ს რაიმე u_0 მნიშვნელობისათვის, მაშინ, გარდა ამ ამონახსნებისა, რომლებიც მოცემულია (3.5) ფორმულით, განტოლებას ექნება ამონახსნი $u = u_0$, რომლებიც წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს. ეს ამონახსნი არ მიიღება (3.5) ზოგადი ამონახსნიდან C-ს არც ერთი მნიშვნელობისათვის და, მაშასადამე, წარმოადგენს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს[1].

შენიშვნა 2. (3.5) ფორმულიდან ჩანს, რომ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ყველა ინტეგრალური წირი მსგავსია ერთმანე-

---

[1] (3.6) განტოლებისათვის, ისე როგორც, საზოგადოდ, (3.2) განტოლებისათვის, (0.0) კორდინატთა სათავე წარმოადგენს განსაკუთრებულ წერტილს.

თისა, მსგავსების ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. მართლაც, C_1 მუდმივის სათანადო შერჩევით, x და y-ის შეცვლა $C_1 x$-ით და $C_2 y$-ით შესაბამისად წირს $\ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ გადაიყვანს (3.5) ოჯახის ნებისმიერ წირში.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი ერთგვაროვანი განტოლებისა:

$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$$

ეს განტოლება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}\,.$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა $y = ux$, სადაც u ახალი საძიებელი ფუნქციაა x-ისა; მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u^2}{u-1}\,, \quad \text{ანუ} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}\,.$$

აქედან გვაქვს:

$$\frac{u-1}{u}\,du = \frac{dx}{x}\,.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$u - \ln|u| = \ln|x| - \ln(C),$$

ანუ

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} = \ln|C|,$$

საიდანაც:

$$\ln|y| = \ln|C| + \frac{y}{x}\,.$$

მაშასადამე,

$$y = x\ln\left|\frac{y}{C}\right|.$$

მიღებული დამოკიდებულება გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს. ამას გარდა, ამონახსნი იქნება $y=0$, $x=0$, რომლებიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან C-ს არც ერთი მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი 2. მოცემულია ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3y}+\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3}\,.$$

ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი.

თუ მოვახდენთ $y=ux$ გარდაქმნას, მივიღებთ:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{3u}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{u^2}-3}\,.$$

უკანასკნელ განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება, გვექნება:

$$\frac{3udu}{1-3u^2+2\sqrt{1-3u^2}}=\frac{dx}{x}\,.$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int\frac{3udu}{1-3u^2+2\sqrt{1-3u^2}}=\ln|x|-\ln|C|,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა. უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილის ინტეგრალის გამოსათვლელად შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$1-3u^2=z^2,$$

აქედან:

$$-3udu=zdz.$$

ამრიგად, მივიღებთ:

$$\int-\frac{zdz}{z^2+2z}=-\int\frac{dz}{z+2}=-\ln(z+2)=-\ln(\sqrt{1-3u^2}+2)\,.$$

მაშასადამე,

$$-\ln(\sqrt{1-3u^2}+2)=\ln|x|-\ln|C|,$$

საიდანაც:

$$x(\sqrt{1-3u^2}+2)=C.$$

აქედან:

$$\sqrt{x^2-3y^2}+2x=C,$$

ანუ

$$3(x^2+y^2)-4Cx+C^2=0.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება გვაძლევს მოცემული ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს. ინტეგრალური წირები წარმოადგენს წრეწირებს.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y-x\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2-x^2}.$$

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{y}{x}-\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=ux$, მაშინ მივიღებთ:

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\sqrt{u^2-1},$$

ანუ

$$x\frac{du}{dx}=-\sqrt{u^2-1}.$$

აქედან გვაქვს:

$$\frac{du}{-\sqrt{u^2-1}}=\frac{dx}{x}.$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{dx}{x}-\ln|C|,$$

საიდანაც:

$$-\ln|u+\sqrt{u^2-1}|=\ln|x|-\ln|C|,$$

ანუ

$$-\ln\left|\frac{y\pm\sqrt{y^2-x^2}}{x}\right|=\ln|x|-\ln|C|,$$

ე. ი.

$$\ln|y\pm\sqrt{y^2-x^2}|=\ln C.$$

აქედან:

$$y\pm\sqrt{y^2-x^2}=C$$

და, მაშასადამე,

$$\sqrt{y^2-x^2}=C-y,$$

ე. ი.

$$-x^2=C^2-2Cy,$$

ანუ

$$x^2 - 2Cy + C^2 = 0.$$

უკანასკნელი არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0, \qquad x \neq 0.$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა $y = xu$, მივიღებთ:

$$(1 + u^2)\,dx + (1 + u)\,xdu = 0,$$

საიდანაც:

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 + u}{1 + u^2}\,du = 0.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln|x| + \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln C,$$

ე. ი.

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \ln C.$$

აქედან:

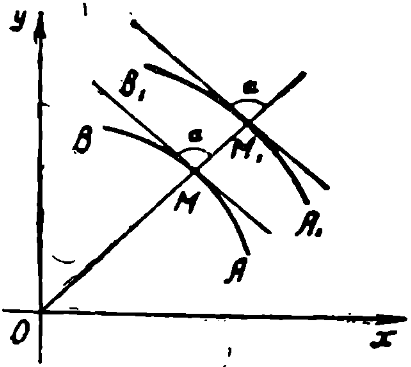
$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

სადაც $C > 0$ ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი გამოსახულება წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

§ 4. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირთა გეომეტრიული თვისება

ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირებს აქვს ერთი მნიშვნელოვანი გეომეტრიული თვისება, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: ინტეგრალური წირები, რომლებიც გამოისახება $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალით, ერთმანეთის მსგავსია კოორდინატთა

სათავის მიმართ. შევნიშნავთ, რომ ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრალური წირები (0,0) წერტილიდან გამომავალ ნებისმიერ წრფეს გადაკვეთს ერთი და იმავე (ამ წრფისათვის მუდმივი) α კუთხით.



ნახ. 8

მართლაც, ვთქვათ, AB წირი აკმაყოფილებს ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4.1)$$

და, ვთქვათ, $M(x, y)$ არის ამ წირის ნებისმიერი წერტილი (ნახ. 8). ავაგოთ A_1B_1 წირი, რომელიც მსგავსია AB წირისა კოორდინატთა სათავის მიმართ. ეს დაიყვანება AB წირის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის რადიუს-ვექტორის სიგრძის გამრავლებაზე რამე k რიცხვზე, $k > 0$. ამიტომ ახალი წირის იმ $M_1(x_1, y_1)$ წერტილის კოორდინატები, რომელიც M წერტილს შეესაბამება, განისაზღვრება განტოლებით:

$$\overline{OM_1} = k\overline{OM};$$

ე. ი.

$$x_1 = kx, \; y_1 = ky, \qquad (4.2)$$

სადაც k მუდმივი მამრავლია. ცხადია,

$$dx_1 = kdx, \quad dy_1 = kdy.$$

აქედან:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}, \; \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}. \qquad (4.3)$$

რადგან AB ინტეგრალური წირი აკმაყოფილებს (4.1) განტოლებას, ამიტომ (4.3) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

ე. ი. ახალი $A_1 B_1$ ინტეგრალური წირი დააკმაყოფილებს იმავე განტოლებას ნებისმიერი k-სათვის. ამგვარად, აღნიშნული თვისება დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება სიმეტრიული სახით:

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0, \tag{4.4}$$

სადაც $M(x,\ y)$ და $N(x,\ y)$ ერთი და იმავე m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ე. ი.

$$M(x,\ y) = x^m M_1\left(\frac{y}{x}\right), \qquad N(x,\ y) = x^m N_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

ამ გამოსახულებებს თუ შევიტანთ (4.4) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$M_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \tag{4.5}$$

შემოვიღოთ ჩასმა:

$$u = \frac{y}{x}.$$

გვაქვს:

$$dy = x\,du + u\,dx$$

ამ გამოსახულებებს თუ შევიტანთ (4.5) განტოლებაში, გვექნება:

$$M_1(u)\,dx + N_1(u)\,(x\,du + u\,dx) = 0.$$

აქედან:

$$[M_1(u) + u\,N_1(u)]\,dx + x\,N_1(u)\,du = 0. \tag{4.6}$$

თუ

$$M_1(u) + u\,N_1(u) = 0,$$

მაშინ

$$du = 0,$$

საიდანაც:

$$\frac{y}{x} = C, \text{ ე. ი. } \quad y = Cx.$$

თუ $M_1(u) + u\,N_1(u) \neq 0$, მაშინ (4.6) განტოლების ორივე ნაწილის გამრავლებით

$$\frac{1}{x\,[M_1(u) + u\,N_1(u)]}$$

გამოსახულებაზე, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N_1(u)\,du}{M_1(u) + u\,N_1(u)} = 0.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln|x| + \int \frac{N_1(u)\,du}{M_1(u) + u N_1(u)} = \ln|C|,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ეს დამოკიდებულება გვაძლევს (4.6) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: მოვახდინოთ გარდაქმნა $y = ux$, გვექნება:

$$\frac{du}{dx}x + u = \sqrt{u};$$

აქედან:

$$\frac{du}{u - \sqrt{u}} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (u - \sqrt{u} \neq 0, \quad x \neq 0)$$

ანუ

$$\frac{du}{\sqrt{u}\,(\sqrt{u} - 1)} + \frac{dx}{x} = 0.$$

ამ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$2\ln(\sqrt{n} - 1) + \ln|x| = 2\ln|C|, \quad (\sqrt{n} - 1)\sqrt{x} = C,$$

$$\sqrt{ux} - \sqrt{x} = C.$$

საიდანაც მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = C.$$

მაგალითი 2. მოვძებნოთ

$$(y^2 - 3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ გარდაქმნა $y = ux$, სადაც u ახალი საძიებელი ფუნქციაა x-ისა, მივიღებთ:

$$dy = xdu + udx,$$

$$(u^2x^2 - 3x^2)\,dx + 2x^2u\,(xdu + udx) = 0,$$

$$3(u^2 - 1)\,dx + 2uxdu = 0,$$

საიდანაც ცვლადთა განცალებით ვღებულობთ:

$$3\frac{dx}{x}+\frac{2udu}{u^2-1}=0.$$

რადგან $x\neq 0$ და $u^2-1\neq 0$, შესაძლო ამონახსნების დაკარგვას არ ექნება ადგილი. უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln|x^3|+\ln(u^2-1)=\ln|C|,$$

$$x^3(u^2-1)=C.$$

თუ u-ს შევცვლით $\frac{y}{x}$-ით, მივიღებთ:

$$xy^2-x^3=C.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'=\frac{y^2}{x^2}-2.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=ux$, მაშინ

$$y'=u'x+u$$

და მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$u'x+u=u^2-2,$$

ანუ

$$\frac{du}{dx}x=u^2-u-2,$$

საიდანაც:

$$\frac{du}{u^2-u-2}=\frac{dx}{x}.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება მოგვცემს:

$$\int\frac{du}{u^2-u-2}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|,$$

აქედან:

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|=\ln|x|+\ln|C|,$$

ანუ

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|=\ln|Cx|,$$

ე. ი.

$$\sqrt[3]{\frac{u-2}{u+1}}=Cx,$$

საიდანაც:

$$\frac{y-2x}{y+x}=Cx^3,$$

ანუ

$$y-2x=Cx^3(y+x).$$

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=tx$, მაშინ $y'=t'x+t$ და მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$t'x+t=\frac{2t}{1-t^2}.$$

აქედან:

$$t'x=\frac{t+t^3}{1-t^2},$$

$$\frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{t+t^3}{1-t^2}.$$

აქედან ცვლადების განცალებით მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x}+\frac{t^2-1}{t^3+t}dt=0.$$

მაგრამ

$$\int\frac{t^2-1}{t^3+t}dt=\int\frac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t}=\ln(t^2+1)-\ln|t|.$$

მაშასადამე,

$$\ln|x|+\ln(t^2+1)-\ln|t|=C_1.$$

თუ მოვახდენთ პოტენცირებას, გვექნება:

$$\frac{x(t^2+1)}{t}=C, \quad \text{სადაც} \quad C_1=\ln|C|.$$

თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში t-ს შევცვლით მისი მნიშვნელობით $t=\dfrac{y}{x}$, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$x^2+y^2=Cy.$$

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(3x^2+6xy+3y^2)\,dx+(2x^2+3xy)\,dy=0.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=tx$. აქედან $dy=tdx+xdt$ და მაშასადამე, გვექნება:

$$(3x^2+6x^2t+3x^2t^2)\,dx+(2x^2+3x^2t)(tdx+xdt)=0,$$

ანუ

$$(3+6t+3t^2+2t+3t^2)\,dx+(2+3t)\,xdt=0.$$

ცვლადების განცალებით მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x}+\frac{(2+3t)\,dt}{6t^2+8t+3}=0.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln|x|+\frac{1}{4}\int\frac{(12t+8)\,dt}{6t^2+8t+3}=\ln|C|.$$

აქედან

$$\ln|x|+\frac{1}{4}\ln|6t^2+8t+3|=\ln|C|,$$

ანუ

$$\ln|x|\sqrt[4]{6t^2+8t+3}=\ln|C|.$$

თუ მოვახდენთ პოტენცირებას, მივიღებთ:

$$x\sqrt[4]{6t^2+8t+3}=C.$$

თუ ამ გამოსახულებაში t-ს შევცვლით მისი მნიშვნელობით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$x\sqrt[4]{\frac{6y^2+8xy+3x^2}{x^2}}=C,$$

ანუ

$$6x^2y^2+8x^3y+3x^4=C.$$

§ 5. განტოლებანი, რომლებიც პირველი რიგის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე დაიყვანებიან

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1 x+b_1 y+c_1}{a_2 x+b_2 y+c_2}\right), \tag{5.1}$$

სადაც a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 მუდმივი სიდიდეებია. როცა $c_1=c_2=0$, მაშინ (5.1) განტოლების მარჯვენა ნაწილი იქნება მხოლოდ $\frac{y}{x}$-ის ფუნქცია, მართლაც,

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1 x+b_1 y}{a_2 y+b_2 y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.2}$$

უკანასკნელი არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. ახლა, ვთქვათ, c_1 და c_2 რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ამ შემთხვევაშიც მოცემული დიფერენციალური განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე შემდეგი წესის გამოყენებით:

ვთქვათ, $\Delta=a_1 b_2-a_2 b_1\neq 0$ და ვიპოვოთ შემდეგი ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x+b_1 y+c_1&=0,\\ a_2 x+b_2 y+c_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{*}$$

თუ ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_0 და y_0-ით, გვექნება:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad y_0=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\Delta}.$$

ახლა მოვახდინოთ ცვლადთა წრფივი გარდაქმნა:

$$x=\xi+x_0, \qquad y=\eta+y_0$$

(η არის ξ-ს ახალი საძიებელი ფუნქცია). თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (5.1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1x_0+b_1y_0+c_1}{a_2\xi+b_2\eta+a_2x_0+b_2y_0+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)=$$

$$=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\frac{\eta}{\xi}}\right)=F\left(\frac{\eta}{\xi}\right). \qquad (5.3)$$

ამგვარად, მოცემული (5.1) დიფერენციალური განტოლება დაყვანილია ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე. როგორც ვიცით, ამ განტოლების ინტეგრება შეიძლება ცვლადთა გარდაქმნის წესის გამოყენებით.

$$\eta=\xi u,$$

სადაც u ახალი საძიებელი ფუნქციაა, დამოკიდებულია ξ-ზე. საბოლოოდ (5.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი რომ ვიპოვოთ, უნდა მოვძებნოთ (5.3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და მასში ξ და η შევცვალოთ შესაბამისად $x-x_0$-ითა და $y-y_0$-ით.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0, \qquad (5.4)$$

ე. ი. როცა (*) წრფეები პარალელურია. ცხადია, (5.4) დამოკიდებულების თანახმად, გვაქვს:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{a_1}=\alpha, \qquad (5.5)$$

სადაც α აღნიშნავს მუდმივ სიდიდეს. (5.5)-დან

$$a_2=\alpha a_1, \qquad b_2=\alpha b_1.$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (5.1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\alpha(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y),$$

თუ $b_1\neq0$, მაშინ ცვლადთა გარდაქმნით:

$$z=a_1x+b_1y, \quad y=\frac{1}{b_1}(z-a_1x), \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx}-\frac{a_1}{b_1}:$$

მოცემული განტოლება დაიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით:

$$\frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx}-\frac{a_1}{b_1}=f\left(\frac{z+c_1}{az+c_2}\right)=F_1(z); \tag{5.6}$$

აქედან ცვლადთა განცალებით მივიღებთ:

$$\frac{dz}{a_1+b_1F_1(z)}=dx. \tag{5.7}$$

(5.7) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს (5.6) განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\int\frac{dz}{a_1+b_1F_1(z)}=x+C. \tag{5.8}$$

თუ (5.8) ტოლობაში მოვახდენთ კვადრატურას და დავუბრუნდებით x და y ცვლადებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული (5.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1}. \tag{5.9}$$

თანახმად ზოგადი თეორიისა, ვიპოვოთ x_0 და y_0 განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned}2x_0+3y_0+1=0,\\ 3x_0+4y_0+1=0.\end{aligned}\right\}$$

გვაქვს:

$$x_0=1,\quad y_0=-1.$$

ახლა შევასრულოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$x=\xi+1,\ y=\eta-1,$$

სადაც η არის ξ-ს ფუნქცია. მაშინ მოცემული (5.9) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{2\xi+3\eta}{3\xi+4\eta}=-\frac{2+3\dfrac{\eta}{\xi}}{3+4\dfrac{\eta}{\xi}}. \tag{5.10}$$

უკანასკნელი განტოლება არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური

განტოლება. ის შეიძლება მიყვანილ იქნეს დიფერენციალურ განტოლებამდე განცალებული ცვლადებით, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$\eta = z\xi,$$

სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა, დამოკიდებული ξ-ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$z + \xi \frac{dz}{d\xi} = -\frac{2+3z}{3+4z}. \tag{5.11}$$

აქედან ცვლადების განცალებით გვექნება:

$$\xi \frac{dz}{d\xi} = \frac{-2-3z-3z-4z^2}{3+4z} = -\frac{4z^2+6z+2}{4z+3},$$

საიდანაც

$$2\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{4z+3}{2z^2+3z+1}dz,$$

ანუ

$$2\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{d(2z^2+3z+1)}{2z^2+3z+1}.$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln \xi^2 = -\ln|2z^2+3z+1| + \ln|C|,$$

აქედან:

$$\xi^2(2z^2+3z+1) = C.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება გვაძლევს (5.11) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს. თუ დავუბრუნდებით ჯერ ξ, η ცვლადებს, გვექნება:

$$2\eta^2 + 3\xi\eta + \xi^2 = C; \tag{5.12}$$

(5.12) დამოკიდებულება წარმოადგენს (5.10) განტოლების ზოგად ინტეგრალს. საბოლოოდ, თუ დავუბრუნდებით x და y ცვლადებს $\xi = x-1$, $\eta = y+1$ ფორმულების მეშვეობით, მაშინ მივიღებთ (5.9) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს შემდეგი სახით:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y = C.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Delta \neq 0$, ამიტომ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი x_0 და y_0, რომ ჩასმა $x=\xi+x_0$ და $y=\eta+y_0$ მოცემულ განტოლებას გადააქცევს ერთგვაროვან განტოლებად. x_0-ისა და y_0-ის განსაზღვრისათვის ამოვხსნათ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x+y-2=0, \\ x-y+4=0, \end{aligned}\right\}$$

საიდანაც $x_0=-1$, $y_0=3$, ე. ი. გვაქვს: $x=\xi-1$ და $y=\eta+3$, მაშინ $dx=d\xi$, $dy=d\eta$. თუ ჩასმას შევასრულებთ, გვექნება:

$$(\xi-1+\eta+3-2)\,d\xi+(\xi-1-\eta-3+4)\,d\eta=0,$$

აქედან:

$$(\xi+\eta)\,d\xi+(\xi-\eta)\,d\eta=0.$$

უკანასკნელი განტოლება არის ერთგვაროვანი. მისი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ ჩასმა $\xi=t\,\eta$. აქედან $d\xi=t\,d\eta+\eta\,dt$ და, მაშასადამე, გვექნება:

$$(1+t)\,(t\,d\eta+\eta\,dt)+(t-1)\,d\eta=0,$$

საიდანაც:

$$(t^2+2t-1)\,d\eta+\eta\,(1+t)\,dt=0.$$

ცვლადების განცალების შედეგად გვექნება:

$$\frac{d\eta}{\eta}+\frac{t+1}{t^2+2t-1}\,dt=0.$$

მოვახდინოთ ინტეგრება, მივიღებთ:

$$\ln|\eta|+\frac{1}{2}\ln|t^2+2t-1|=\ln|C|.$$

აქედან:

$$\eta\sqrt{t^2+2t-1}=C.$$

მაგრამ $t=\dfrac{\xi}{\eta}$, ამიტომ

$$\eta\sqrt{\frac{\xi^2+2\xi\eta-\eta^2}{\eta^2}}=C,$$

ანუ

$$\xi^2+2\xi\eta-\eta^2=C,$$

სადაც $\xi = x + 1$ და $\eta = y - 3$. მაშასადამე,

$$(x+1)^2 + 2(x+1)(y-3) - (y-3)^2 = C.$$

ამგვარად, საბოლოოდ მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$

ამოხსნა. აქ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ამიტომ შეგვიძლია ვიპოვოთ x_0 და y_0 ისეთი, რომ ჩასმა $x = \xi + x_0$ და $y = \eta + y_0$ მოცემულ განტოლებას გადააქცევს ერთგვაროვან განტოლებად. x_0, y_0-ის განსაზღვრისათვის ამოვხსნათ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} y + 2 = 0. \\ x + y - 1 = 0, \end{aligned}\right\}$$

საიდანაც $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, ე. ი. $x = \xi + 3$ და $y = \eta - 2$; $dx = d\xi$, $dy = d\eta$.

თუ აღნიშნულ ჩასმებს გავითვალისწინებთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\left(\frac{\eta}{\xi + \eta}\right)^2$$

აქედან:

$$2\eta^2 d\xi - (\xi + \eta)^2 d\eta = 0.$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის გამოვიყენოთ ჩასმა: $\xi = t\eta$, $d\xi = td\eta + \eta dt$, მაშინ

$$2(td\eta + \eta dt) - (1+t)^2 d\eta = 0.$$

$$2\eta dt - (t^2 + 1) d\eta = 0,$$

საიდანაც:

$$\frac{d\eta}{\eta} - 2\frac{dt}{t^2+1} = 0.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება მოგვცემს:

$$\ln|\eta| - 2\,\mathrm{arctg}\, t + \ln|C| = 0.$$

ანუ

$$\ln|C'(y+2)| = 2\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{y+2},$$

აქედან:

$$C(y+2) = e^{2\operatorname{arctg}\frac{x-3}{y+2}}$$

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0.$$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ ჩასმა $x+y=z$, საიდანაც $dy = dz - dx$; ამიტომ:

$$(z+1)\,dx + (2z-1)(dz-dx) = 0.$$

$$(z+1-2z+1)\,dx + (2z-1)\,dz = 0,$$

$$(2-z)\,dx + (2z-1)\,dz = 0.$$

ცვლადების განცალებით მივიღებთ:

$$dx + \frac{2z-1}{2-z}\,dz = 0.$$

უკანასკნელის ინტეგრება გვაძლევს:

$$x + \int \frac{2z-1}{2-z}\,dz = C,$$

$$x - 2\int\frac{zdz}{z-2} + \int\frac{dz}{z-2} = C,$$

$$x - 2z - 4\ln(z-2) + \ln(z-2) = C,$$

$$x - 2x - 2y - 3\ln(x+y-2) = C$$

$$x + 2y + 3\ln(x+y-2) = C.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

§ 6. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

განსაზღვრა. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომელიც წრფივია უცნობი $y(x)$ ფუნქ-

ციისა და $y'(x)$ წარმოებულის მიმართ, ე. ი. მას აქვს სახე:

$$A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y+C(x)=0, \tag{6.1}$$

სადაც $A(x)$, $B(x)$ და $C(x)$ წარმოადგენს x ცვლადის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს რაიმე (a, b) შუალედში.

ვიგულისხმოთ, რომ (a, b) შუალედში $A(x)\neq 0$. თუ (6.1) განტოლებაში ყველა წევრს გავყოფთ $A(x)$ კოეფიციენტზე და შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{B(x)}{A(x)}=P(x), \qquad -\frac{C(x)}{A(x)}=Q(x),$$

მაშინ (6.1) განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{6.2}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ x ცვლადის მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია მოცემულ შუალედში. კერძოდ, თუ $Q(x)\equiv 0$, მაშინ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0. \tag{6.3}$$

(6.3) განტოლებას წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება. თუ (6.2) განტოლებაში $Q(x)\not\equiv 0$, მაშინ მას არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. (6.3) განტოლებას, აგრეთვე, უწოდებენ (6.2) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას.

თეორემა 1. თუ $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) შუალედში, მაშინ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$y'=-P(x)y+Q(x)$$

აქვს ზოგადი ამონახსნი, რომელიც გამოისახება კვადრატურებში; მასთან, $x=a$ და $y=b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ზოლის ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის ამ განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი.

დამტკიცება. წინასწარ დავამტკიცოთ, რომ პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის არაერთგვაროვანი განტოლების ნებისმიერი კერძო

ამონახსნისა და მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის ჯამი. ამ მიზნით განვიხილოთ (6.2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = 0. \tag{6.4}$$

მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx\,.$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს (6.4) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$\ln|y| = -\int P(x)\, dx + \ln|C|,$$

ანუ

$$y = Ce^{-\int P(x)\, dx} \tag{6.5}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია[1].

ცვლადთა განცალების შედეგად შესაძლოა დაგვეკარგა მხოლოდ ერთი უშუალოდ ცხადი ნულოვანი ამონახსნი $y=0$, მაგრამ ამ უკანასკნელ ამონახსნსაც შეიცავს (6.5) ზოგადი ამონახსნი, როცა $C=0$.

ახლა, რომ ვიპოვოთ (6.2) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, ვისარგებლოთ ე. წ. მუდმივის ვარიაციის მეთოდით. შევეცადოთ არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ (6.5) სახით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ უკანასკნელში C-ს განვიხილავთ არა როგორც ინტეგრების მუდმივს, არამედ, როგორც ცვლადის ჯერჯერობით უცნობ წარმოებად $C(x)$ ფუნქციას. $C(x)$ ფუნქცია განვსაზღვროთ ისე, რომ (6.5) ამონახსნი აკმაყოფილებდეს არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების გაწარმოება x-ით გვაძლევს:

$$y'(x) = C'(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} - C(x)\cdot P(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} \tag{6.6}$$

---

[1] ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს x_0, y_0 საწყის მნიშვნელობებს, სადაც (x_0, y_0) ზოლის ნებისმიერი წერტილია, შეიძლება დავწეროთ სახით:

$$y = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx}$$

ასეთი ამონახსნი არის ერთადერთი.

(6.5) და (6.6) გამოსახულებები შევიტანოთ (6.2) არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$C'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)\,P(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)P(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

საიდანაც:

$$C'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

ანუ

$$C'(x) = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}$$

მაშასადამე,

$$C(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + C.$$

თუ $C(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას შევიტანთ (6.5) ფორმულაში, მივიღებთ (6.2) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C\right] =$$

$$= e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C\, e^{-\int P(x)\,dx} \tag{6.7}$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები წარმოადგენს (6.2) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალს, რომელიც მიიღება (6.7) ფორმულიდან, როცა $C=0$; ხოლო მეორე შესაკრები შესაბამისი ერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალია.

შემდეგ, რადგანაც

$$y' = -P(x)\,y + Q(x)$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი ფუნქცია უწყვეტია ($a < x < b$; $-\infty < y < +\infty$) ზოლში და აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული y-ით, ამიტომ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, ზოლის ნებისმიერ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის ერთადერთი ინტეგრალური წირი. თეორემა დამტკიცებულია.

ზოგადი ამონახსნის (6.7) ფორმულაში განუსაზღვრელი ინტეგრალები შეიძლება შევცვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალებით, მაშინ მივიღებთ (6.2) განტოლების ზოგად ამონახსნს ასეთი სახით:

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx\right],$$

სადაც x_0 ნებისმიერი, მაგრამ გარკვეული რიცხვია. თუ მოცემულია საწყისი პირობა: $y=y_0$, როცა $x=x_0$, მაშინ შეიძლება განვსაზღვროთ C-ს მნიშვნელობა. რადგან განსაზღვრული ინტეგრალები ერთნაირი საზღვრებით ნულის ტოლია, ამიტომ $C=y_0$, და ჩვენ მივიღებთ წრფივი განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx\right], \tag{6.8}$$

რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (6.6) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პირველი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ (6.2) განტოლებას არა აქვს განსაკუთრებული ამონახსნები, ე. ი. ისეთები, რომლებიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან, თუ $P(x)$ და $Q(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $-\infty<x<\infty$ შუალედში. მართლაც, (6.2) განტოლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$y' = -P(x)\,y + Q(x). \tag{6.9}$$

ამ შემთხვევაში (6.8) განტოლების მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ორი x და y დამოკიდებული ცვლადის უწყვეტ ფუნქციებს მთელს xOy სიბრტყეზე. (6.8) განტოლების მარჯვენა ნაწილის წარმოებული y-ით, ტოლი—$P(x)$-ისა, მუდმივია y-ის მიმართ და, მაშასადამე, აგრეთვე, უწყვეტია როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია. ამგვარად, (6.8) განტოლების მარჯვენა ნაწილი აკმაყოფილებს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობას (თავი I, § 2) ნებისმიერ საწყის პირობებში, რომელთათვის x_0 ეკუთვნის $P(x)$ და $Q(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეს. ამიტომ წრფივ არაერთგვაროვან (6.2) დიფერენციალურ განტოლებას არა აქვს განსაკუთრებული ამონახსნები, ე. ი. ისეთი ამონახსნები, რომლებიც არ მიიღება მისი ზოგადი ინტეგრალიდან.

ახლა აღვნიშნოთ წრფივი განტოლების ზოგიერთი თვისება.

თეორემა 2. თუ $y_1(x)$ წარმოადგენს წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, მაშინ $y=Cy_1(x)$ ფუნქცია, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე, იქნება მისი ამონახსნი.

მართლაც, თუ

$$\frac{dy_1}{dx}+P(x)\,y_1=0.$$

მაშინ

$$\frac{d\,[Cy_1]}{dx}+P(x)\,Cy_1=C\left[\frac{dy_1}{dx}+P(x)\,y_1\right]=0.$$

თეორემა 3. თუ $y_2(x)$ წარმოადგენს წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს, ხოლო $y_1(x)$ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნია, მაშინ $y=y_1(x)+y_2(x)$ ფუნქცია იქნება, აგრეთვე, არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი.

მართლაც, თუ

$$\frac{dy_1}{dx}+P(x)\,y_1=0 \quad \text{და} \quad \frac{dy_2}{dy}+P(x)\,y_2=Q(x),$$

მაშინ

$$\frac{d\,[y_1+y_2]}{dx}+P(x)\,[y_1+y_2]=\frac{dy_1}{dx}+P(x)\,y_1+\frac{dy_2}{dx}+P(x)\,y_2=Q(x).$$

ამ თვისებით შეიძლება ვისარგებლოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრებისას.

თეორემა 4. თუ ცნობილია (6.2) განტოლების $y_1(x)$ კერძო ამონახსნი, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება ერთი კვადრატურით.

მართლაც, გვაქვს:

$$\frac{dy_1}{dx}+P(x)\,y_1=Q(x). \tag{6.10}$$

თუ (6.2) განტოლებიდან გამოვაკლებთ (6.9) განტოლებას, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)+P(x)\,(y-y_1)=0.$$

ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$y - y_1 = C e^{-\int (Px)\, dx}$$

ანუ

$$y = y_1 + C e^{-\int P(x)\, dx}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური (6.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება აგრეთვე ვიპოვოთ შემდეგი მეთოდის გამოყენებით: (6.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ ორი დიფერენცირებადი $u = u(x)$ და $v = v(x)$ ფუნქციის ნამრავლის სახით:

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{6.11}$$

ვიპოვოთ წარმოებული:

$$y' = u'v + v'u. \tag{6.12}$$

(6.10) და (6.11) გამოსახულებები ჩავსვათ (6.2) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$u'v + v'u + P(x)\, uv = Q(x),$$

ანუ

$$u \frac{dv}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + P(x)\, u(x)\right) v(x) = Q(x).$$

ახლა $u = u(x)$ ფუნქცია ისე განვსაზღვროთ, რომ $v(x)$-ის კოეფიციენტი გახდეს ნული

$$\frac{du}{dx} + P(x)\, u(x) = 0,$$

საიდანაც:

$$u(x) = e^{-\int P(x)\, dx} \tag{6.13}$$

ჩვენთვის საკმარისია გვქონდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი (6.12), ამიტომ უკანასკნელი ფორმულის მარჯვენა ნაწილში მივიღეთ $C = 1$.

მოვძებნოთ $v = v(x)$ ფუნქცია. $v(x)$ ფუნქცია ისე უნდა განვსაზღვროთ, რომ $y = uv$ წარმოადგენდეს (6.2) განტოლების ამონახსნს, ცხადია, ასეთი $v = v(x)$ ფუნქცია განისაზღვრება

$$u \frac{dv}{dx} = Q(x), \quad \text{ანუ} \quad e^{-\int P(x)\, dx} \frac{dv}{dx} = Q(x)$$

განტოლებიდან; მივიღებთ:

$$v(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C. \tag{6.14}$$

თუ (5.12) და (5.13) ფორმულებს ჩავსვამთ (6.10) ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ (6.2) წრფივი განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C\right].$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y' - y = e^{5x}. \tag{6.15}$$

ცხადია, შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ამონახსნი $y_1 = C e^{x}$. ახლა ვიპოვოთ (6.15) განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$y = A e^{5x}, \tag{6.16}$$

სადაც A ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივია. (6.14) განტოლებაში (6.15) გამოსახულების ჩასმა გვაძლევს:

$$5 A e^{5x} - A e^{5x} = e^{5x},$$

საიდანაც $4A = 1$, $A = \frac{1}{4}$. ამრიგად,

$$y_2 = \frac{1}{4} e^{5x}.$$

მაშასადამე, მე-2 და მე-3 თეორემების თანახმად,

$$y = C e^{x} + \frac{1}{4} e^{5x}$$

იქნება (6.14) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y' + \frac{1}{x} y = x^2 + 5x + 3.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ ზოგადი ფორმულით. ამ მაგალითში

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2 + 5x + 3$ განტოლების შესაბამის $y' + \frac{1}{x} y = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ზოგადი ამონახსნი:

$$y_1 = C e^{-\int \frac{dx}{x}}$$

ანუ

$$y = \frac{C}{x}.$$

არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი შესაძლოა მოვძებნოთ ფორმულით:

$$y_2 = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx,$$

ე. ი. გვაქვს:

$$y_2 = e^{-\int \frac{dx}{x}} \int e^{\int \frac{dx}{x}} (x^2 + 5x + 3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{x} \int (x^3 + 5x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^3}{4} + \frac{5}{3} x^2 + \frac{3}{2} x.$$

მაშასადამე,

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x^3}{4} + \frac{5x^2}{3} + \frac{3x}{2} + \frac{C}{x}$$

არის განხილული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y' + ay = e^{mx}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის ფორმულით, გვექნება:

$$y = e^{-\int a\,dx} \left(C + \int e^{\int a\,dx} e^{mx}\,dx \right).$$

$$y = e^{-ax} \left(C + \int e^{(a+m)x}\,dx \right),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა.

თუ $m \neq -a$, მაშინ მივიღებთ ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m};$$

ხოლო, თუ $m = -a$, მაშინ ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$y = (C + x)\, e^{mx}.$$

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(1 + x^2)\, y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\, y = 1 + x^2,$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრება გვაძლევს:

$$y = e^{\int \frac{2xdx}{1+x^2}} \left[C + \int (1 + x^2)\, e^{-\int \frac{2xdx}{1+x^2}} dx\right],$$

$$y = e^{\ln(1+x^2)} \left[C + \int (1 + x^2)\, e^{-\ln(1+x^2)} dx\right].$$

აქედან მივიღებთ ზოგად ამონახსნს:

$$y = (1 + x^2)(C + x).$$

§ 7. განტოლებანი, რომლებიც წრფივ განტოლებაზე დაიყვანებიან. ბერნულის განტოლება

ზოგიერთი განტოლება, რომელიც არ არის წრფივი, ცვლადთა სათანადო გარდაქმნით შეიძლება დაყვანილ იქნეს წრფივ განტოლებამდე. ამ განტოლებებიდან ყველაზე მნიშვნელოვანია ბერნულის განტოლება. განტოლებას

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n, \tag{7.1}$$

სადაც n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ბ ე რ ნ უ ლ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ეწოდება. თუ $n = 0$, ან $n = 1$, (7.1) განტოლება გადაიქცევა პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებად. ამიტომ ვიგულისხმებთ, რომ $n \neq 0$ და $n \neq 1$. ისე როგორც წინათ, $P(x)$ და $Q(x)$ არის x-ის უწყვეტი ფუნქციები რაიმე (a, b) შუალედში.

ბერნულის განტოლება სათანადო გარდაქმნით ყოველთვის დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე. (7.1) განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ y^n-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{y'}{y^n}+\frac{P(x)}{y^{n-1}}=Q(x). \tag{7.2}$$

ახლა შემოვიღოთ ახალი $u(x)$ ფუნქცია, დაკავშირებული y ფუნქციასთან ტოლობით:

$$u(x)=y^{1-n},$$

მაშინ

$$(1-n)\,y^{-n}\,y'=u'(x),$$

ანუ

$$y'\,y^{-n}=\frac{u'}{1-n}. \tag{7.3}$$

თუ (7.3) გამოსახულებას შევიტანთ (7.2) განტოლებაში, მაშინ გამარტივების შემდეგ, მივიღებთ პირველი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას $u(x)$ ფუნქციის მიმართ:

$$u'(x)+(1-n)\,P(x)\,u(x)=(1-n)\,Q(x).$$

ამ უკანასკნელი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, როგორც ცნობილია, გამოითვლება ფორმულით:

$$u(x)=e^{-(1-n)\int P(x)\,dx}\left[C+(1-n)\int e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx\right],$$

ახლა, თუ დავუბრუნდებით y ცვლადს, მივიღებთ ბერნულის განტოლების ზოგად ინტეგრალს სახით:

$$y=\left\{e^{\int(n-1)P(x)\,dx}\left[C+\int(1-n)\,Q(x)\,e^{\int(1-n)P(x)\,dx}\,dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}. \tag{7.4}$$

შენიშვნა. თუ $n>0$, მაშინ ზოგადი ინტეგრალი უნდა შეიცავდეს კიდევ ერთ $y=0$ ამონახსნს, რომელსაც მივიღებთ $y^n=0$ განტოლებიდან და რომელიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან. ეს ამონახსნი არ მიიღება ზოგადიდან იმიტომ, რომ ზოგადი ამონახსნის მისაღებად განტოლებას ვყოფთ y^n-ზე და, თუ $n>0$, ვგულისხმობთ, რომ $y\neq 0$.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'+\frac{1}{x}\,y=2xy^2.$$

ამ შემთხვევაში $n=2$. ვისარგებლოთ (7.4) ზოგადი ფორმულით, მივიღებთ:

$$y=\left\{e^{\int\frac{dx}{x}}\left[C+\int(-2x)\,e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right]\right\}^{-1}=$$

$$=\left\{x\left[C-2\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right]\right\}^{-1}=[x\,(C-2x)]^{-1}=$$

$$=(Cx-2x^2)^{-1}=\frac{1}{Cx-2x^2},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$xy'+y=y^2\ln x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2.$$

უკანასკნელი წარმოადგენს ბერნულის დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც სპეციალური აღნიშნვით დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე. მართლაც, გამოვიყენოთ ჩასმა $y^{-1}=z$. უკანასკნელი გავაწარმოოთ x-ით, გვექნება: $z'=-y^{-2}y'$, ამიტომ

$$-z'+\frac{1}{x}z=\frac{\ln x}{x},$$

ანუ

$$z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}.$$

უკანასკნელის ინტეგრება გვაძლევს:

$$z=e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C-\int\frac{\ln x}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right),$$

$$z=e^{\ln|x|}\left(C-\int\frac{\ln x}{x}\cdot e^{-\ln x}dx\right),$$

$$z=x\left(C-\int\frac{\ln x}{x^2}dx\right),$$

$$z=Cx+\ln|x|+1,$$

მაგრამ, რადგანაც $y^{-1} = z$, ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y'(Cx + \ln|x| + 1) = 1.$$

მაგალითი 3. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი შემდეგი განტოლებისა:

$$dy + (xy - xy^3)\,dx = 0.$$

ამოხსნა. მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$y' + xy = xy^3,$$

საიდანაც

$$y'\,y^{-3} + x\,y^{-2} = x. \tag{7.5}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $y^{-2} = z$; მაშინ $-2\,y^{-3}\,y' = z'$, ანუ

$$y^{-3}\,y' = -\frac{1}{2}\,z';$$

მაშასადამე, (7.5) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x,$$

აქედან

$$z' - 2xz = -2x.$$

უკანასკნელის ინტეგრება გვაძლევს:

$$z = e^{\int 2xdx}\left(C - 2\int xe^{-x^2}\,dx\right) = e^{x^2}\,(C + e^{-x^2})\,.$$

$$z = C\,e^{x^2} + 1.$$

მაგრამ $y^{-2} = z$, ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$y^2\,(1 + C\,e^{x^2}) = 1\,.$$

§ 8. რიკატის განტოლება

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს მეორე ხარისხის პოლინომს საძიებელი $y(x)$ ფუნქციის მიმართ, ე. ი.

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x), \tag{8.1}$$

ასეთ განტოლებას ეწოდება რიკატის ზოგადი განტოლება. აქ ვიგულისხმებთ, რომ $P(x)$, $Q(x)$ და $R(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) შუალედში $(a \geqslant -\infty,\ b \leqslant \infty)$; კერძოდ, თუ $P(x) \equiv 0$, მაშინ მივიღებთ პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. თუ $R(x) \equiv 0$, მაშინ ვღებულობთ ზემოთ განხილულ ბერნულის განტოლებას. ამიტომ შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $P(x) \not\equiv 0$ და $Q(x) \not\equiv 0$. თუ, კერძოდ, $P(x)$, $Q(x)$ და $R(x)$ მუდმივი სიდიდეებია (a, b) შუალედში, მაშინ რიკატის განტოლება წარმოადგენს განტოლებას განცალებადი ცვლადებით და მისი ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება კვადრატურებში. შევნიშნავთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $P(x)$, $Q(x)$ და $R(x)$ x-ის ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) შუალედში, მაშინ რიკატის განტოლების კვადრატურებში ინტეგრება შეგვიძლია მოვახდინოთ მხოლოდ გამონაკლის შემთხვევაში[1].

ერთ-ერთი ასეთი გამონაკლისი შემთხვევა გვექნება, როცა (8.1) განტოლების მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს $\frac{y}{x}$ ფარდობის კვადრატულ ფუნქციას, რადგან ამ შემთხვევაში რიკატის განტოლება იქნება ერთგვაროვანი განტოლება.

ინტეგრება რიკატის განტოლებისა

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}\,y + \frac{C}{x^2}\,, \tag{8.2}$$

სადაც A, B და C მუდმივი რიცხვებია, აგრეთვე, დაიყვანება კვადრატურებზე. მართლაც, (8.2) განტოლება, $y = \frac{z}{x}$ გარდაქმნით, ადვილად დაიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით, სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა; გარდაქმნის შედეგად გვექნება:

$$xz' = Az^2 + (B + 1)\,z + C,$$

ანუ

$$x\,\frac{dz}{dx} = Az^2 + (B + 1)\,z + C,$$

საიდანაც

$$\frac{dz}{Az^2 + (B + 1)\,z + C} = \frac{dx}{x}$$

მივიღეთ განტოლება განცალებადი ცვლადებით, რომლის ზოგადი ინტეგრალი გამოისახება კვადრატურებში.

---

[1] ზოგად შემთხვევაში კი, როგორც ეს ლიუვილმა უჩვენა, რიკატის განტოლების ინტეგრება არ დაიყვანება კვადრატურაზე.

რიკატის განტოლების ინტეგრება ადვილად შეგვიძლია მოვახდინოთ, აგრეთვე, იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი y_1.

თეორემა. თუ ცნობილია რიკატის (8.1) განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი $y=y_1(x)$, მაშინ რიკატის განტოლება დაიყვანება ბერნულის განტოლებაზე.

დამტკიცება. მართლაც, რიკატის განტოლებაში მოვახდინოთ გარდაქმნა $y=y_1+z$, სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა, მივიღებთ:

$$z' + [y_1' - P(x)\,y_1^2 - Q(x)\,y_1 - R(x)] - P(x)\,z^2 -$$
$$- 2P(x)\,y_1 z - Q(x)\,z = 0$$

და რადგანაც y_1 არის კერძო ამონახსნი, გვექნება:

$$z' + z\,[2P(x)\,y_1 + Q(x)] = P(x)\,z^2. \tag{8.3}$$

(8.3) არის ბერნულის განტოლება, რომელიც ადვილად დაიყვანება წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე $z=\frac{1}{u}$ გარდაქმნით:

$$u' + [2P(x)\,y_1 + Q(x)]\,u = -P(x).$$

ამრიგად, თუ ცნობილია რიკატის განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი y_1, მაშინ მოცემულ განტოლებას ადვილად დავიყვანთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე გარდაქმნით[1]:

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

რიკატის ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს განტოლება

$$y' + ay^2 = bx^m, \tag{8.4}$$

სადაც a, b და m მუდმივი რიცხვებია. ამ განტოლებას რიკატის სპეციალური განტოლება ეწოდება. აქ მივუთითებთ მხოლოდ ორ კერძო შემთხვევას, როცა (8.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში:

---

[1] შევნიშნავთ, რომ რიკატის ზოგადი განტოლების შემთხვევაში არ არსებობს საერთო წესი y_1 კერძო ამონახსნის აგებისა.

1) $m = 0$; მაშინ (8.4) განტოლებას აქვს სახე:

$$y' + ay^2 = b.$$

ეს არის განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

2) $m = -2$; ამ შემთხვევაში (8.4) განტოლებას აქვს სახე:

$$y' + ay^2 = \frac{b}{x^2}$$

ეს განტოლება წარმოადგენს (8.2) განტოლების კერძო შემთხვევას და, მაშასადამე, მისი ზოგადი ამონახსნი გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამგვარად, რიკატის სპეციალური განტოლების ინტეგრება ხდება ელემენტარულ ფუნქციებში, როცა $m=0$ და $m=-2$. მაგრამ, არსებობს m-ის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, რომელთათვის რიკატის სპეციალური განტოლების ინტეგრება ხდება აგრეთვე ელემენტარულ ფუნქციებში.

§ 9. განტოლებანი სრულ დიფერენციალებში

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{9.1}$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია და აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები x-ისა და y-ის მიმართ xOy სიბრტყის რაიმე მარტივადბმულ D არეში.

განსაზღვრა. (9.1) *დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში.*

მაშასადამე, განტოლება სრულ დიფერენციალებში შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს სახით:

$$du(x, y) = 0.$$

თუ $y = y(x)$ არის (9.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$du[x, y(x)] \equiv 0.$$

აქედან $u[x, y(x)] = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია და, პირიქით, $u[x, y(x)] \equiv C$ ტოლობით განსაზღვრული ყოველი $y = y(x)$ ფუნქციისათვის გვაქვს $du[x, y(x)] \equiv 0$. მაშასადამე,

$$u(x, y) = C.$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, წარმოადგენს სრულ დიფერენციალებში (9.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 1. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში:

$$x^2\,dx + y^2\,dy = 0.$$

ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს $u(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამიტომ განსახილველი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$\frac{x^3}{4} + \frac{y^3}{3} = C, \quad \text{ანუ } x^3 + y^3 = C.$$

ამგვარად, თუ (9.1) დიფერენციალური განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ ზოგადი ამონახსნის მისაღებად საკმარისია, წინასწარ ვიპოვოთ ის $u(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრულ დიფერენციალს წარმოადგენს $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ დიფერენციალური გამოსახულება და შემდეგ იგი გავუტოლოთ C ნებისმიერ მუდმივს.

მოყვანილ კერძო მაგალითში ადვილად ვიპოვეთ $u(x, y)$ ფუნქცია. ზოგად შემთხვევაში $u(x, y)$ ფუნქციის მოძებნა ხდება კვადრატურების საშუალებით, რაც ქვემოთ იქნება შესრულებული. წინასწარ მოვძებნოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (9.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ წარმოადგენს რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამ მიზნით დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. თუ $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ფუნქციები და მათი $\frac{\partial M}{\partial y}$ და $\frac{\partial N}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია $R\,[a, b; c, d]$ მართკუთხედში, მაშინ იმისათვის, რომ დიფერენციალური გამოსახულება $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ წარმოადგენდეს რომელიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, აუცილებელი და საკმარისია ადგილი ჰქონდეს პირობას

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{9.2}$$

იგივურად მთელ R მართკუთხედში.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, დიფერენციალური გამოსახულება $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ წარმოადგენს $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ე. ი.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv du(x, y), \tag{9.3}$$

მაგრამ, რადგანაც

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \tag{9.4}$$

ამიტომ (9.3) და (9.4) ფორმულების შედარება გვაძლევს:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \tag{9.5}$$

გავაწარმოოთ (9.5) სისტემის პირველი ტოლობა y-ით, ხოლო მეორე x-ით; მივიღებთ იგივეობებს:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}; \tag{9.6}$$

რადგანაც თეორემის პირობის თანახმად, $u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u^2}{\partial y \partial x}$ უწყვეტი ფუნქციებია R-ში, ამიტომ $u(x, y)$ ფუნქცია ამ არეში აკმაყოფილებს შვარცის თეორემის ყველა პირობას. მაშასადამე, გვექნება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \tag{9.7}$$

(9.6) და (9.7) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა[1]:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ამით (9.2) პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, (9.2) პირობა შესრულებულია მთელს R არეში.

ვუჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი $u(xy)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი გამოისახება ფორმულით:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du(x, y),$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \tag{9.8}$$

---

[1] პირველად ეს პირობა მიიღო 1739 წელს პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილმა წევრმა ლეონარდო ეილერმა (1707—1783).

გამოვიდეთ (9.8)-ის პირველი ტოლობიდან; ამ უკანასკნელის ინტეგ-რებით x_0-დან x-მდე, მივიღებთ:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \varphi(y), \tag{9.9}$$

სადაც φ (y) არის y-ის ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია. ამ ფუნქ-ციის ნებისმიერად ამორჩევის შემთხვევაში (9.9) ფორმულიდან გვექ-ნება:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

ყოველი (x, y) წერტილისათვის R მართკუთხედის შიგნით. მაშასადამე, (9.8) პირობებიდან პირველი დაკმაყოფილებულია. ახლა შევეცადოთ φ(y) ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილებულ იქნეს (9.8)-დან მეორე პირობაც. ასეთი φ (y) ფუნქციის განსაზღვრისათვის გავა-წარმოოთ (9.9) ტოლობის ორივე ნაწილი y-ით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \varphi(y)\right],$$

რადგანაც

$$\frac{\partial M}{My} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

ამიტომ, თუ შევასრულებთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოებას y-ით, გვექნება:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

აქედან ჩანს, რომ პირობა

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

შესრულდება ყოველთვის, თუ

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

საიდანაც $\varphi(y)$-ის ერთ-ერთი მნიშვნელობა იქნება:

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy.$$

ახლა, თუ $\varphi(y)$-ის ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (9.9) ფორმულაში, საბოლოოდ მივიღებთ საძიებელ $u(x, y)$ ფუნქციას

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy,$$

რაც ამტკიცებს პირობის საკმარისობას.

ამგვარად, არა მარტო დამტკიცდა პირობის $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ საკმარისობა იმისათვის, რომ განტოლება $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0$ წარმოადგენდეს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში, არამედ მასთან ერთად აიგო $u(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალია $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$. თუ $u(x, y)$ ფუნქციას გავუტოლებთ ნებისმიერ C მუდმივს, მაშინ მივიღებთ მოცემული (9.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy=C, \tag{9.10}$$

რომელიც გამოისახება კვადრატურებში. აქ $Mdx+Ndy$ სრული დიფერენციალის პირველყოფილ ფუნქციად აღებულია ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც (x_0, y_0) წერტილში ისპობა. თვით წერტილი (x_0, y_0) შეიძლება ამოვირჩიოთ ნებისმიერად მხოლოდ იმ პირობით, რომ იგი ეკუთვნოდეს R არეს, კერძოდ, შეიძლება მივიღოთ $x_0=0$, $y_0=0$.

თუ $u(x, y)$ ფუნქციის აგებისათვის გამოვალთ (9.5)-ის მეორე ტოლობიდან, მაშინ (9.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალისათვის (9.10) ფორმულის ნაცვლად მივიღებთ სიმეტრიულ გამოსახულებას:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy=C. \tag{9.11}$$

დასასრულ, ისმის კითხვა — დიფერენციალურ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (*)$$

ექნება თუ არა მოცემულ საწყის პირობებში $y = y_0$, როცა $x = x_0$, ზოგადი ინტეგრალით განსაზღვრული ერთადერთი ამონახსნი?

ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 2. ვთქვათ, $M(x, y)$, $N(x, y)$ და მათი კერძო წარმოებულები $\dfrac{\partial M}{\partial x}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, $\dfrac{\partial N}{\partial y}$ უწყვეტი ფუნქციებია $R = [a, b; c, d]$ მართკუთხედში. თუ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial x}$ და $N(x, y)$ ფუნქცია არ ისპობა R არეში, მაშინ (*) განტოლების ზოგადი ინტეგრალით განსაზღვრული ამონახსნი მოცემულ საწყის პირობებში ($y = y_0$, როცა $x = x_0$, სადაც (x_0, y_0) მართკუთხედის ნებისმიერი წერტილია) არსებობს და არის ერთადერთი.

მართლაც, ეს თეორემა გამომდინარეობს I თავში მოყვანილი არსებობისა და ერთადერთობის თეორემიდან, რადგან

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილი აკმაყოფილებს აღნიშნული თეორემის ყველა პირობას.

მაგალითი 2.

$$(x^3 + y^3)\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0.$$

აქ

$$M(x, y) = 3x^2 y, \quad N(x, y) = x^3 + y^3.$$

განტოლების მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს რომელიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, რადგან $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. მაშასადამე, მოცემული განტოლება წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში.

ზოგადი ინტეგრალის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ (9.10) ფორმულით, სადაც მივიღოთ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. გვაქვს:

$$u(x, y) = \int_0^x 3x^2 y\,dx + \int_0^y y^3\,dy = C,$$

აქედან მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$x^3 y + \frac{y^4}{4} = C.$$

მაგალითი 3. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი განტოლებისა:

$$\frac{y + \sin x \cdot \cos^2 (xy)}{\cos^2 (xy)} dx + \frac{x}{\cos^2 (xy)} dy + \sin y dy = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შევამოწმებთ, ვნახავთ, რომ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. მაშასადამე,

$$\int_0^x \frac{y + \sin x \cdot \cos^2 (xy)}{\cos^2 (xy)} dx + \int_0^y \frac{x_0}{\cos^2 (x_0 y)} dy + \int_0^y \sin y dy = C,$$

აქ მივიღეთ, რომ $x_0 = y_0 = 0$, საიდანაც

$$\operatorname{tg} (xy) - \cos x - \cos y = C.$$

უკანასკნელი წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

§ 10. მაინტეგრებელი მამრავლი

წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ, თუ დიფერენციალური განტოლება

$$M (x, y) dx + N (x, y) dy = 0 \tag{10.1}$$

არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ ამ განტოლების ინტეგრება ყოველთვის შეგვიძლია მოვახდინოთ კვადრატურებში. თუ (10.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი არ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, ე. ი. თუ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, მაშინ ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა მოიძებნოს ისეთი $\mu = \mu (x, y)$ ფუნქცია, რომ (10.1) განტოლების ამ ფუნქციაზე გამრავლებით მიღებული განტოლება

$$\mu M (x, y) dx + \mu N (x, y) dy = 0 \tag{10.2}$$

წარმოადგენდეს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში? ა ს ე თ $\mu = \mu (x, y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს, თ უ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს, ე წ ო დ ე ბ ა (10.1) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს მ ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ე ლ ი მ ა მ რ ა ვ ლ ი.

ახლა ვნახოთ, რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მაინტეგრებელი მამრავლი.

ვთქვათ, $\mu = \mu(x, y)$ ფუნქცია არის (10.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი, ე. ი. (10.2) განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. ცხადია, თუ $M(x, y)$, $N(x, y)$ და $\mu(x, y)$ ფუნქციებს აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ $\mu(x, y)$ მაინტეგრებელი მამრავლი უნდა აკმაყოფილებდეს კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \tag{10.3}$$

ე. ი.

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} M(x, y) + \mu(x, y)\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x} N(x, y) + \mu(x, y)\frac{\partial N}{\partial x},$$

ანუ

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} M(x, y) - \frac{\partial\mu}{\partial x} N(x, y) = -\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\mu(x, y), \tag{10.4}$$

ამგვარად, $\mu(x, y)$ მაინტეგრებელი მამრავლის განსაზღვრისათვის მივიღებთ პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება.

ყოველი $\mu(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც (10.4) განტოლებას აკმაყოფილებს, ცხადია, წარმოადგენს (10.1 განტოლების მაინტეგრებელ მამრავლს. საზოგადოდ, (10.4) განტოლებას შეუძლია ჰქონდეს უსასრულო სიმრავლე ასეთი ამონახსნებისა და, მაშასადამე, (10.1) განტოლებასაც შეუძლია ჰქონდეს უსასრულო სიმრავლე მაინტეგრებელი მამრავლებისა. მაგრამ ზოგად შემთხვევაში (10.4) განტოლების ინტეგრების ამოცანა გაცილებით რთულია, ვიდრე (10.1) განტოლების ინტეგრების ამოცანა; მხოლოდ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში (10.4) განტოლების მეშვეობით $\mu(x, y)$ მაინტეგრებელი მამრავლი ადვილად მოიძებნება. განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

1) ვთქვათ, (10.1) განტოლებას აქვს მხოლოდ x-ზე დამოკიდებული მაინტეგრებელი მამრავლი $\mu = \mu(x)$. ამ შემთხვევაში $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$ და (10.4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$N(x, y)\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(x),$$

ანუ

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)}dx. \tag{10.5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mu = \mu(x)$ სახის მაინტეგრებელი მამრავლის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ (10.5) განტოლების მარჯვენა ნაწილში dx-ის კოეფიციენტი წარმოადგენს მხოლოდ x-ის ფუნქციას: $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)} = \varphi(x)$. ასეთ შემთხვევაში, μ მამრავლის განსაზღვრისათვის ვღებულობთ (10.5) ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln \mu(x) = \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)} dx = \int \varphi(x)\, dx,$$

საიდანაც

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\, dx} \tag{10.6}$$

უკანასკნელი ტოლობით განსაზღვრული $\mu(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს (10.1) განტოლების მაინტეგრებელ მამრავლს.

2) განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა არსებობს (10.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი, დამოკიდებული მხოლოდ y-ზე: $\mu = \mu(y)$.

ამ შემთხვევაში $\dfrac{d\mu}{dx} = 0$ და (10.4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-M \cdot \frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

ანუ

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} dy. \tag{10.7}$$

აქედან, ცხადია, x-ისაგან დამოუკიდებელი მაინტეგრებელი მამრავლის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ (10.7) განტოლების მარჯვენა ნაწილში dy-ის კოეფიციენტი წარმოადგენს მხოლოდ y-ის ფუნქციას:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \psi(y).$$

თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ მაინტეგრებელი მამრავლის განსაზღვრისათვის მივიღებთ:

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\, dy} \tag{10.8}$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(y+xy^3)\,dx-2xdy=0.$$

ამ განტოლებაში:

$$M(x,\ y)=y+xy^3,\ N(x,\ y)=-2x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+3xy^2,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-2.$$

მაშასადამე, მოცემული დიფერენციალური განტოლების მარცხენა ნაწილი არ წარმოადგენს რაიმე $u\ (x,\ y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. შევამოწმოთ, აქვს თუ არა მოცემულ განტოლებას მაინტეგრებელი მამრავლი — დამოკიდებული მხოლოდ y-ზე. ამ მიზნით შევნიშნავთ, რომ

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-2-1-3xy^2}{y+xy^3}=-\frac{3}{y}=\psi(y).$$

მაშასადამე, მაინტეგრებელი მამრავლი მოიძებნება (10.8) ფორმულით:

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{3}{y}dx}=e^{-3\ln y}=\frac{1}{y^3}$$

მოცემული განტოლების $\mu(y)=\dfrac{1}{y^3}$ მაინტეგრებელ მამრავლზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ განტოლებას:

$$\left(\frac{1}{y^2}+x\right)dx-\frac{2x}{y^3}\,dy=0$$

სრულ დიფერენციალებში, რადგანაც დაკმაყოფილებულია პირობა:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2}{y^3};$$

ამოვხსნით რა უკანასკნელ დიფერენციალურ განტოლებას, მივიღებთ მის ზოგად ინტეგრალს:

$$\frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{2}=C,$$

ანუ

$$y^2=\frac{2x}{2C-x^2}.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$$

ამოხსნა. აქ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2.$$

რადგანაც

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x)} = -\frac{2}{x} = \varphi(x),$$

ამიტომ მაინტეგრებელი მამრავლი მხოლოდ x-ის ფუნქციაა:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2dx}{x}} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

ახლა გავამრავლოთ მოცემული განტოლების ორივე ნაწილი $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$-ზე, მივიღებთ:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}\,dy = 0.$$

უკანასკნელი არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად ვისარგებლოთ (9.9) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\int_{x_0}^{x} \left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{x_0}\,dy = C.$$

აქედან:

$$x\Big|_{x_0}^{x} - \frac{y}{x}\Big|_{x_0}^{x} - \frac{y}{x_0}\Big|_{y_0}^{y} = C,$$

ე. ი.

$$x - x_0 - \frac{y}{x} + \frac{y}{x_0} - \frac{y}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} = C;$$

ვთქვათ, $x_0 = y_0 = 1$, მაშინ

$$x - \frac{y}{x} = C,$$

ანუ

$$x^2 - y = Cx$$

არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

მაგალითი 8. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ

$$M(x, y) = 2xy^2 - y, \quad N(x, y) = y^2 + x + y.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2(1 - 2xy),$$

ე. ი.

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2(1 - 2xy)}{2xy^2 - y} = -\frac{2}{y} = \psi(y),$$

მაშასადამე,

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{2dy}{y}} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2},$$

მოცემული განტოლება გავამრავლოთ $\mu(y)$ მამრავლზე, მივიღებთ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში:

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx - \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად ვისარგებლოთ (9.9) ფორმულით, გვექნება:

$$\int_{x_0}^{x} \left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \int_{y_0}^{y} \left(1 + \frac{x_0}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = C,$$

ე. ი.

$$x^2\Big|_{x_0}^{x} - \frac{x}{y}\Big|_{x_0}^{x} + y\Big|_{y_0}^{y} - \frac{x_0}{y}\Big|_{y_0}^{y} + \ln y\Big|_{y_0}^{y} = C.$$

თუ $x = y_0 = 1$, მაშინ

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln y = C,$$

ანუ

$$y x^2 - x + y^2 + y \ln y = Cy.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(1 - x^2 y)\, dx + x^2 (y - x)\, dy = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = - x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x(x - y),$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x(x - y)}{x^2 (y - x)} = -\frac{2}{x} = \varphi(x),$$

ე.

$$\mu(x) = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

თუ მოცემულ განტოლებას გავამრავლებთ $\mu(x)$-ზე, მივიღებთ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)\, dy = 0.$$

ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად ვისარგებლოთ (9.9) ფორმულით, გვექნება:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + \int_{y_0}^{y} (y - x_0)\, dy = C, \quad -\frac{1}{x}\Bigg|_{x_0}^{x} - yx\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y_0}^{y} - x_0 y\Bigg|_{y_0}^{y} = C,$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} - yx + y x_0 + \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} - x_0 y + x_0 y_0 = C.$$

კერძოდ, თუ მივიღებთ $x_0 = 1,\ y_0 = 0$, მაშინ

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C,$$

ანუ

$$\frac{x y^2}{2} - x^2 y - 1 = C x.$$

უკანასკნელი არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

§ 11. მაინტეგრებელი მამრავლი და დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები, რომლებიც არ გამომდინარეობენ ზოგადი ამონახსნიდან

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{11.1}$$

თუ ცნობილია (11.1) განტოლების $\mu(x, y)$ მაინტეგრებელი მამრავლი, მაშინ შეგვიძლია მოვძებნოთ მოცემული განტოლების არა მარტო ზოგადი ინტეგრალი, არამედ ყველა ამონახსნი, რომლებიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან, როცა ისინი არსებობენ. მართლაც, ამ განტოლების $\mu(x, y)$ მამრავლზე გამრავლებით გადავაქცევთ მას განტოლებად სრულ დიფერენციალებში:

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0, \tag{11.2}$$

ამასთან, (11.2) განტოლების მარცხენა ნაწილი იქნება რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი, ე. ი.

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = du(x, y). \tag{11.3}$$

მაშასადამე, (11.2) განტოლების ინტეგრება შეიძლება მოვახდინოთ (9.9) ფორმულის მიხედვით; მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$u(x, y) = C, \tag{11.4}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

(11.2) განტოლების ყველა ამონახსნი (11.4) დააკმაყოფილებს აგრეთვე (11.1) განტოლებასაც, გარდა შესაძლებელია იმ ამონახსნებისა, რომლებსაც შეიცავს განტოლება $\mu(x, y) = 0$ და რომლებშიც შედის (11.4) ზოგადი ინტეგრალის შემადგენლობაში. ასე რომ, თუ $\mu(x, y) = 0$ განტოლება განსაზღვრავს რაიმე $y = \varphi(x)$ ფუნქციას (ან $x = \varphi_1(y)$), მაშინ ეს ამონახსნი, შევა რა (11.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნის გამოსახულებაში, შეიძლება აღმოჩნდეს გარეშე ამონახსნი მოცემული (11.1) დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ცხადია, (11.3) დამოკიდებულებიდან გვაქვს:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{1}{\mu}\,du(x, y);$$

ამიტომ მოცემული (11.1) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\frac{1}{\mu(x, y)}\,du(x, y) = 0.$$

ეს განტოლება დაიშლება ორ განტოლებად:

$$du(x, y) = 0, \quad \frac{1}{\mu(x, y)} = 0. \tag{11.5}$$

(1.1.5)-დან პირველის ინტეგრება გვაძლევს ზოგად ინტეგრალს:

$$u(x, y) = C.$$

ცხადია, გამოსახულება $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ შეიძლება გახდეს ნულის ტოლი არა მარტო მაშინ, როცა $du(x, y) = 0$, არამედ მაშინაც, როცა $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$. ამიტომ, თუ განტოლება $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ფუნქციას $y = \psi(x)$ [ან პირიქით, $x = \psi_1(y)$], მაშინ ეს ფუნქცია იქნება (11.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც არ გამომდინარეობს ზოგადიდან. აქედან დავასკვნით, რომ (11.1) განტოლების ყოველი კერძო ინტეგრალი დააკმაყოფილებს აგრეთვე (11.2) განტოლებასაც, გარდა შესაძლოა იმ ამონახსნებისა, რომლებსაც შეიცავს განტოლება $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ და რომლებიც არ გამომდინარეობს ზოგადი ინტეგრალიდან (11.4).

ამგვარად, თუ (11.1) დიფერენციალური განტოლება ამოხსნილია მაინტეგრებელი მამრავლის მეშვეობით, მაშინ (11.4) ფორმულა გვაძლევს ამ განტოლების ყველა ამონახსნს; ამ ამონახსნებს შესაძლოა დაემატოს ამონახსნები, რომლებსაც შეიცავს განტოლება $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$, და გამოვრიცხოთ ამონახსნები, რომლებსაც გვაძლევს განტოლება $\mu(x, y) = 0$.

(11.1) **დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს, რომლებიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან, ეწოდება განსაკუთრებული ამონახსნები.**

ამგვარად, $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ განტოლებამ შეიძლება მიგვიყვანოს (11.1) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებამდე.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0.$$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში

$$M(x, y) = 2xy, \quad N(x, y) = y^2 - 3x^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -6x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

მოცემულ განტოლებას აქვს მაინტეგრებელი მამრავლი, რომელიც დამოკიდებულია y-ზე. მართლაც,

$$\psi(y) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M(x, y)} = \frac{-6x - 2x}{2xy} = -\frac{4}{y};$$

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{4}{y} dy} = e^{-4 \ln y},$$

$$\mu(y) = \frac{1}{y^4}.$$

თუ მოცემულ განტოლებას გავამრავლებთ $\mu(y) = \dfrac{1}{y^4}$ მამრავლზე, მივიღებთ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში:

$$\frac{2x}{y^3} dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0.$$

ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად ვისარგებლოთ წინა (9.9) ფორმულით, ამასთან მივიღოთ $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, მაშინ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{2x}{y^3} dx + \int_{1}^{y} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x_0^2}{y^4}\right) dy = C,$$

ანუ

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. რადგანაც $\dfrac{1}{\mu(y)} \neq 0$, ამიტომ არ გვექნება განსაკუთრებული ამონახსნი.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y^2(x - 3y) dx + (1 - 3xy^2) dy = 0.$$

აქ მაინტეგრებელი მამრავლია $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$. დიფერენციალური განტოლება

$$(x - 3y) dx + \left(\frac{1}{y^2} - 3x\right) dy = 0.$$

წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად ვისარგებლოთ (9.9) ფორმულით, მასთან მივიღოთ $x_0=0$, $y_0=1$, მაშინ

$$\int_0^x (x-3y)\,dx + \int_1^y \left(\frac{1}{y^2}-3x_0\right)dy = C,$$

საიდანაც

$$\frac{x^2}{2}-3xy-\frac{1}{y}+1=C,$$

ანუ

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{y}-3xy=C,$$

რომელიც მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალია. გამოსახულებას $\mu=0$ აზრი არა აქვს. პირიქით, $\frac{1}{\mu}=y^2=0$ გვაძლევს მოცემული განტოლების ამონახსნს $y=0$, რომელიც არ მიიღება ზოგადიდან.

§ 12. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლის არსებობა და განსაზღვრის წესი

არსებობს მთელი რიგი წესებისა, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ მაინტეგრებელი მამრავლი სხვადასხვა შემთხვევაში. ცხადია, თუ μ არის

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0 \tag{12.1}$$

განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი, მაშინ $C\mu$, სადაც C ნებისმიერ მუდმივს აღნიშნავს, იქნება აგრეთვე (12.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი. ვუჩვენოთ, რომ ყოველ (12.1) სახის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს უსასრულო სიმრავლე ერთიმეორისაგან არსებითად განსხვავებული მაინტეგრებელი მამრავლისა. მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. *თუ $\mu=\mu(x,\ y)$ ფუნქცია (12.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლია, ე. ი. $\mu Mdx+\mu Ndy=du(x,\ y)$, მაშინ $\mu f[u(x,y)]$, სადაც $f(u)$ არის u ცვლადის ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია, იქნება აგრეთვე (12.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mu=\mu(x, y)$ არის (12.1) განტოლების რომელიმე მაინტეგრებელი მამრავლი, ხოლო $u(x, y)=C$ — ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. პირობის თანახმად:

$$\mu(x, y)\,[M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy]=du(x, y)$$

და, მაშასადამე,

$$\mu f(u)\,[M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy]=f(u)\,du=dF(u).$$

სადაც $F(u)$ არის $f(u)$ ფუნქციის ერთი რომელიღაც პირველყოფილი ფუნქცია:

$$F(u)=\int f(u)du.$$

მაშასადამე, $\mu_1=\mu(x, y)\cdot f[u(x, y)]$ წარმოადგენს (12.1) განტოლების მაინტეგრებელ მამრავლს. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ ზოგიერთი თეორემა, რომლებსაც ერთგვარი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს ზოგადი ინტეგრალის განსაზღვრისათვის.

თეორემა 2. თუ (12.1) განტოლებაში შემავალი ფუნქციები M და N უწყვეტია D არეში და ამ არეში $N(x, y)\neq 0$, ამას გარდა, $\mu(x, y)$ და $\mu_1(x, y)$ (12.1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავებული ორი მაინტეგრებელი მამრავლია, რომლებიც არ ისპობა D-ში, მაშინ დამოკიდებულება $\dfrac{\mu(x, y)}{\mu_1(x, y)}=\rho(x, y)=C$ წარმოადგენს (12.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

დამტკიცება. რადგან μ (12.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლია, ამიტომ

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial\mu}{\partial x}. \tag{12.2}$$

ახლა, თუ (12.2) განტოლებაში შევიტანთ $\mu_1=\mu\rho$, მივიღებთ ახალ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\mu\rho\frac{\partial M}{\partial y}+M\left(\rho\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)=\mu\rho\frac{\partial N}{\partial x}+N\left(\rho\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \tag{12.3}$$

(12.3) განტოლებას გამოვაკლოთ (12.2) განტოლება, გამრავლებული ρ-ზე, მივიღებთ:

$$M\mu\frac{\partial\rho}{\partial y}=N\mu\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

საიდანაც:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} : \frac{\partial \rho}{\partial y} = M : N. \tag{12.4}$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\rho(x, y) = C$ არის (12.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. მართლაც, თუ $\rho(x, y) = C$ გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy = 0,$$

საიდანაც:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \rho}{\partial x}}{\frac{\partial \rho}{\partial y}}. \tag{12.5}$$

თუ შევადარებთ (12.4) და (12.5) დამოკიდებულებებს, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N},$$

ე. ი. $\frac{\partial y}{dx}$ აკმაყოფილებს (12.1) განტოლებას.

თეორემა 8. თუ (12.1) განტოლებას აქვს ზოგადი ინტეგრალი

$$u(x, y) = C$$

რაიმე D არეში და ამ არის შიგნით $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთდროულად არ ისპობა, ამასთან, $u(x, y)$ ფუნქციას x-ისა და y-ის მიმართ აქვს კერძო წარმოებულები, მაშინ ამ განტოლებას ექნება მაინტეგრებელი მამრავლი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $u(x, y) = C$ არის (12.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, მაშინ

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \equiv 0,$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}. \tag{12.6}$$

$\frac{dy}{dx}$-ის მნიშვნელობა უნდა აკმაყოფილებდეს (12.1) განტოლებას, ე. ი.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}. \tag{12.7}$$

(12.6) და (12.7) თანაფარდობათა შედარება გვაძლევს:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}=\mu(x, y),$$

საიდანაც

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu M, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu N.$$

ამიტომ

$$\mu(Mdx+Ndy)=\mu Mdx+\mu Ndy=\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du(x, y),$$

ე. ი. (12.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი $\mu(x, y)$ ფუნქციაზე გამრავლების შემდეგ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს. მაშასადამე, $\mu(x, y)$ ფუნქცია არის (12.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი. თეორემა დამტკიცებულია.

III თავი

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა

§ 1. ლიფშიცის პირობა

განვიხილოთ წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.1}$$

სადაც $f(x, y)$ არის x და y ცვლადების ფუნქცია, განსაზღვრული xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში.

(1.1) დიფერენციალური განტოლებისათვის, რომლის ინტეგრება ხდება კვადრატურებში, ცხადია, საკითხი ამონახსნის არსებობის შესახებ არ წარმოიშობა. მაგრამ, თუ (1.1) განტოლება ისეთია, რომ ჩვენ არ გვაქვს მისი ინტეგრების წესი, მაშინ დაისმის კითხვა განტოლების ამონახსნის არსებობის შესახებ.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ მოცემულ საწყის პირობებში (1.1) განტოლების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა, აუცილებელია (1.1) განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი $f(x\ y)$ ფუნქცია შევზღუდოთ გარკვეული პირობებით. ერთ-ერთ ასეთ პირობას წარმოადგენს ლიფშიცის პირობა.

ვთქვათ, $f(x, y)$ არის x და y ცვლადების ფუნქცია, განსაზღვრული xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში.

ამბობენ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია y ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას D არეში, თუ არსებობს ისეთი M დადებითი მუდმივი რიცხვი, რომ D არეს ყოველი ორი (x, y_1), (x, y_2) წერტილისათვის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|.$$

ეს პირობა, კერძოდ, შესრულდება ყოველთვის, თუ $f(x, y)$ ფუნქციას D არეში აქვს y-ის მიმართ შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული $f_y'(x, y)$; ამასთან D არე ისეთია, რომ Oy ღერძის პარალელური ყოველი წრფე კვეთს D არის საზღვარს მხოლოდ ორ წერტილში.

მართლაც, ავიღოთ D არეში ორი ნებისმიერი წერტილი (x, y_1) და (x, y_2). ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად, გვაქვს:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |(y_2 - y_1) f_y'(x, y_1 + \Theta(y_2 - y_1)| \leqslant M|y_2 - y_1|,$$

სადაც M წარმოადგენს $|f_y'(x, y)|$ ფუნქციის ზუსტ ზედა საზღვარს D არეში.

ანალოგიურად, მიიღება ლიფშიცის პირობა, როცა მოცემული გვაქვს $(n+1)$ დამოუკიდებელი ცვლადის $\omega = f(x, y_1, \dots, y_n)$ ფუნქცია, განსაზღვრული ევკლიდეს $(n+1)$ განზომილებიანი სივრცის რომელიღაც D არეში.

იმ შემთხვევაში, თუ $M_1(x, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n})$ და $M_2(x, \widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \dots, \widetilde{y_n})$ აღნიშნავს, D_{n+1} არის ორ ნებისმიერ წერტილს, მაშინ ამ ფუნქციისათვის ლიფშიცის პირობა ასე ჩაიწერება:

$$|f(x, \widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \dots, \widetilde{y_n}) - f(x, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n})| \leqslant$$

$$\leqslant M(|\widetilde{y_1} - \overline{y_1}| + |\widetilde{y_2} - \overline{y_2}| + \cdots + |\widetilde{y_n} - \overline{y_n}|),$$

სადაც M გარკვეული რიცხვია.

§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა

წინა თავებში გავეცანით კვადრატურებში ინტეგრებად სხვადასხვა ტიპის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას; ვნახეთ, რომ ამ განტოლებათა ზოგადი ინტეგრალები წარმოადგენს ერთპარამეტრიან წირთა ოჯახს: $\varphi(x, y) = C$ და, მასთან, ისეთს, რომ D არის ყოველ (x, y) წერტილზე (xOy სიბრტყის ზოგიერთი განსაკუთრებული წერტილების გარდა) გაივლის ოჯახის ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი. ზოგად შემთხვევაში, შესაძლოა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ყოველთვის არ გამოისახოს კვადრატურებში, თუმცა მას ამონახსნი აქვს, მაგრამ ის თავისი ბუნებით გაცილებით რთულია, ვიდრე ინტეგრალები ელემენტარული ფუნქციებიდან. ასეთ შემთხვევაში, ჩვეულებრივ, მიმართავენ ინტეგრების მიახლოებითს მეთოდს და ეძებენ დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითს ამონახსნს, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

მაგრამ, სანამ შევუდგებოდეთ ამონახსნების მიახლოებით მოძებნას, წინასწარ უნდა ვიყოთ დარწმუნებული, რომ არსებობს განსახილველი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, რის შემდგომ ამონახსნის მიახლოებითი გამოთვლისათვის გამოვიყენებთ განტოლების მიახლოებითი ინტეგრების მეთოდებს. ამ საკითხს პასუხობს შემდეგი

თეორემა. თუ დიფერენციალურ

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{2.1}$$

განტოლებაში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია D არეში, ამავე დროს აკმაყოფილებს პირობებს:

1) $|f(x,\ y)|\leqslant N$,

2) $|f(x,\ y_2)-f(x,\ y_1)|<M|y_2-y_1|$.

და (x_0, y_0) ამ არის ნებისმიერი შიგა წერტილია, მაშინ $x=x_0$ წერტილის მიდამოში, $x_0-a<x<x_0+a$, არსებობს (2.1) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y=\varphi(x)$, რომელიც უწყვეტი და დიფერენცირებადია და ამ მიდამოში იგივურად აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას

$$\varphi'(x)\equiv f[x,\ \varphi(x)]$$

და საწყის პირობებს: $y=y_0$, როცა $x=x_0$.

დამტკიცება. x-ის ცვალებადობის ინტერვალი ამოვირჩიოთ შემდეგნაირად:

ავაგოთ შესაძლო უდიდესი მართკუთხედი R, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ხოლო ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

$$R:\begin{cases}|x-x_0|\leqslant a',\\ |y-y_0|\leqslant b;\end{cases}\quad R\subset D.$$

(x_0, y_0) წერტილზე გავავლოთ წრფეები:

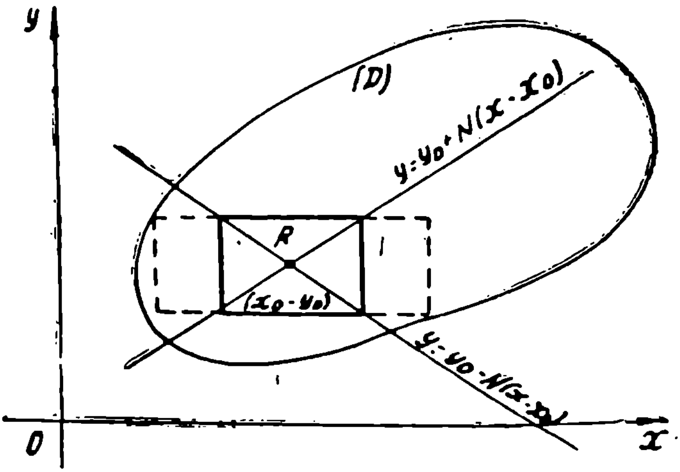
$$\left.\begin{aligned}y-y_0&=N(x-x_0),\\ y-y_0&=-N(x-x_0).\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

რადგან, თეორემის პირობის თანახმად, საძიებელი ინტეგრალური წი-

რის დახრილობის კუთხის ტანგენსის აბსოლუტური სიდიდე შემოსაზღვრულია N რიცხვით,

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = |f(x, y)| = |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant N, \tag{2.3}$$

ამიტომ, როცა $\frac{b}{a'} \geqslant N$, ინტეგრალური წირი, რომელიც წარმოადგენს საძიებელი ამონახსნის გრაფიკს, გაივლის რა (x_0, y_0) წერტილზე, დარჩება მართკუთხედის იმ Δ ნაწილის ფარგლებში, რომელსაც შემოსაზღვრავს წრფეები: $x=x_0-a'$, $x=x_0+a'$, $y-y_0=N(x-x_0)$, $y-y_0=-N(x-x_0)$). Δ შედგენილია ორი სამკუთხედისაგან, რომლის საერთო წვერო (x_0, y_0) წერტილია და იგი მთლიანად ძევს D არეში (ნახ. 9).



ნახ. 9

თუ $\frac{b}{a'} \geqslant N$ უტოლობა არ არის შესრულებული, მაშინ არ შეგვიძლია დარწმუნებული ვიყოთ იმაში, რომ, როცა x იცვლება $|x-x_0| \leqslant a'$ შუალედში. ინტეგრალური წირი დარჩება R მართკუთხედის შიგნით. ამიტომ განვიხილავთ (2.1) დიფერენციალურ განტოლებას მცირე შუალედში:

$$x_0 - a < x < x_0 + a, \quad a \leqslant a',$$

სადაც a არის უმცირესი a' და $\frac{b}{N}$ რიცხვებს შორის:

$$a = \min\left(a', \frac{b}{N}\right).$$

ამგვარად, როცა x იცვლება $|x-x_0| \leq a$ შუალედში, ინტეგრალური წირი, რომელიც გაივლის (x_0, y_0) წერტილში, ვერ გამოვა R მართკუთხედიდან. ამოვირჩევთ რა ამნაირად x-ის ცვალებადობის შუალედს, გადავალთ ამონახსნის არსებობის დამტკიცებაზე.

როგორც ვნახეთ, დიფერენციალური (2.1) განტოლება საწყისი პირობით: $y(x_0)=y_0$ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს სახით:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y(x)]\, dx. \tag{2.4}$$

(2.1) დიფერენციალური განტოლების საძიებელი ამონახსნი $y=\varphi(x)$ საწყისი მნიშვნელობებით x_0, y_0 აკმაყოფილებს აგრეთვე (2.4) ინტეგრალურ განტოლებას და, პირიქით, (2.4) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი $y=\varphi(x)$ იქნება (2.1) განტოლების ამონახსნი საწყისი მნიშვნელობებით x_0, y_0.

ვისარგებლოთ (2.1) დიფერენციალური განტოლების წარმოდგენის (2.4) სახით და დავამტკიცოთ $y=\varphi(x)$ ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა პიკარის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ამ მიზნით $[x_0-a,\ x_0+a]$ სეგმენტზე, სადაც a არჩეულია ზემოაღნიშნული წესით, შევადგინოთ ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$\left.\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0,\\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx,\\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx,\\
&\ \ \vdots\\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

ამგვარად, გვექნება ფუნქციათა მიმდევრობა

$$y_0(x),\ y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, \tag{2.6}$$

სადაც, როგორც ნულოვანი მიახლოება საძიებელი $y(x)$ ამონახსნისა, ამორჩეულია ნებისმიერი ფუნქცია $y_0(x)$, რომელიც იმავე x_0, y_0 საწყის პირო-

მებს აკმაყოფილებს. ახლა ვუჩვენოთ, რომ ამ მიმდევრობის ყოველი y_n წევრი ($n = 1, 2, \ldots$) არ გამოდის R მართკუთხედიდან (ე. ი. ვუჩვენოთ, რომ წერტილი $(x, y_n(x))$, $|x - x_0| < a$, არ გამოვა R მართკუთხედიდან), რომელშიაც $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრული და უწყვეტია, და, მაშასადამე, ინტეგრებადია. (2.5) ფორმულებიდან მეორე გვაძლევს:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N|x - x_0| \leqslant aN \leqslant b. \tag{2.7}$$

ცხადია, (2.5) ფორმულებიდან მეორე განსაზღვრავს პირველ მიახლოებას $y_1(x)$-ს; რადგან ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქცია ცნობილია, ამიტომ $y_1(x)$ გამოითვლება კვადრატურით. (2.7)-დან გამომდინარეობს, რომ $y = y_1(x)$ წირი რჩება R მართკუთხედის შიგნით. ამიტომ $f[x, y_1(x)]$ ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრულია, ე. ი.

$$|f[x, y_1(x)]| \leqslant N, \quad |x - x_0| \leqslant a. \tag{2.8}$$

ანალოგიურად, (2.5) ფორმულებიდან მესამე განსაზღვრავს მეორე $y_2(x)$ მიახლოებას, რადგან $y_1(x)$ უკვე განსაზღვრულია და, მაშასადამე, მესამე ფორმულის ინტეგრალის ქვეშ დგას $f[x, y_1(x)]$ ცნობილი ფუნქცია და ა. შ. ამგვარად, თუ გავითვალისწინებთ (2.8) უტოლობას, მაშინ (2.5) ფორმულებიდან მესამე გვაძლევს:

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\, dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f[x, y_1(x)]|\, dx \right| \leqslant$$

$$N|x - x_0| \leqslant aN \leqslant b, \tag{2.9}$$

ე. ი. $y = y_2(x)$ წირიც დარჩება R მართკუთხედის შიგნით. ამიტომ ფუნქცია $f[x, y_2(x)]$ უწყვეტი და შემოსაზღვრულია, ე. ი.

$$|f[x, y_2(x)]| \leqslant N. \tag{2.10}$$

სრულიად ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ, თუ $y = y_{n-1}(x)$ წირი გაივლის (x_0, y_0) წერტილზე და მოთავსებულია R მართკუთხედის შიგნით, მაშინ $y = y_n(x)$ წირიც, აგრეთვე, მოთავსებული იქნება R მართკუთხედის შიგნით, რადგანაც, ისე როგორც ზემოთ,

$$|f[x, y_{n-1}(x)]| \leqslant N \tag{2.11}$$

და

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\, dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f[x, y_{n-1}(x)]|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N|x - x_0| \leqslant aN \leqslant b, \quad \text{როცა} \quad |x - x_0| \leqslant a. \tag{2.12}$$

ამგვარად, (2.6) მიმდევრობა შედგება $[x_0 - a, \ x_0 + a]$ სეგმენტზე უწყვეტი და დიფერენცირებადი ფუნქციებისაგან, როგორიც არ უნდა იყოს n, და არც ერთი მიახლოებითი ფუნქცია $y_n(x)$ არ გამოდის R არედან. მასთან, ეს ფუნქციები აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას: $y_n(x_0) = y_0$, მაგრამ, ცხადია, არ წარმოადგენს (2.4) განტოლების ამონახსნებს, რადგან

$$\frac{dy_n(x)}{dx} = f[x, \ y_{n-1}(x)] \quad (n = 1, \ 2, \ldots)$$

და არ ეტოლება $f[x, \ y_n(x)]$-ს, როგორც ეს უნდა ყოფილიყო, თუ $y_n(x)$ იქნებოდა (2.4) განტოლების ამონახსნი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციათა (2.6) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[x_0 - a, \ x_0 + a]$ სეგმენტზე და ზღვრული ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას და საწყის პირობებს. ამ მიზნით განვიხილოთ მწკრივი:

$$y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots +$$

$$+ [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots \tag{2.13}$$

რომლის პირველი n წევრის ჯამი $s_n(x) = y_n(x)$. დავამტკიცოთ, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $[x_0 - a, \ x_0 + a]$ სეგმენტზე[1].

ცხადია, (2.13) მწკრივის თანაბრად კრებადობა ამავე დროს ნიშნავს (2.6) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობასაც. ამ მიზნით შევაფასოთ (2.13) მწკრივის წევრთა აბსოლუტური მნიშვნელობანი, დაწყებული მეორე წევრიდან. (2.5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს:

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant N |x - x_0| \leqslant N \frac{a}{1!},$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \{f[x, \ y_1(x)] - f[x, \ y_0(x)]\} \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f[x, \ y_1(x)] - f[x, \ y_0(x)]| \, dx \right|$$

---

[1] ცხადია, (2.13) მწკრივის ყოველი წევრი არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია, რადგან ინტეგრალები, რომლითაც ეს ფუნქციები გამოისახებიან, წარმოადგენენ ზედა საზღვრის უწყვეტ ფუნქციებს.

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ თეორემის პირობას (ლიფშიცის პირობას), გვექნება:

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant M\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(x)-y_0(x)|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant MN\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|\,dx\right| = MN\frac{|x-x_0|^2}{1\cdot 2} \leqslant MN\frac{a^2}{2!}. \quad (2.14)$$

სრულიად ანალოგიურად, თუ ვისარგებლებთ თეორემის მეორე პირობით და $|y_2(x)-y_1(x)|$ სხვაობის (2.14) შეფასებით, გვექნება:

$$|y_3(x)-y_2(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}\{f[x, y_2(x)]-f[x, y_1(x)]\}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f[x, y_2(x)]-f[x, y_1(x)]|\,dx\right| \leqslant M\left|\int_{x_0}^{x}|y_2(x)-y_1(x)|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\frac{M^2N}{1\cdot 2}\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|^2\,dx\right| = \frac{M^2N}{1\cdot 2\cdot 3}|x-x_0|^3 \leqslant M^2N\frac{a^3}{3!}; \quad (2.15)$$

საზოგადოდ, აღნიშნული წესით ვაჩვენებთ, რომ

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant N M^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{1\cdot 2\cdot\ \cdot n} \leqslant \frac{N M^{n-1}a^n}{n!}. \quad (2.16)$$

უტოლობა (2.16) მართებულია ნებისმიერი n-ისათვის[1].

ამგვარად, (2.13) ფუნქციონალური მწკრივის წევრთა აბსოლუტური მნიშვნელობანი, დაწყებული მეორე წევრიდან, შესაბამად ნაკლებია ან ტოლი შემდეგი დადებითი რიცხვითი მწკრივის წევრების

$$N\frac{a}{1!}+NM\frac{a^2}{2!}+NM^2\frac{a^3}{3!}+\cdot\ \cdot+NM^{n-1}\frac{a^n}{n!}+\cdots,$$

ანუ

$$\frac{N}{M}\left[\left(1+Ma+\frac{M^2a^2}{2!}+\frac{M^3a^3}{3!}+\cdots+\frac{M^na^n}{n!}+\cdot\cdot\ \right)-1\right]. \quad (2.17)$$

---

[1] ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ გამოვიყენებთ სრული ინდუქციის მეთოდს.

მაგრამ მრგვალ ფრჩხილებში მოთავსებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია e^{Ma}. მაშასადამე, (2.19) მწკრივი კრებადია და მას ჯამად აქვს რიცხვი $\frac{N}{M}(e^{Ma}-1)$. ამგვარად, (2.13) ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია $x_0-a \leqslant x \leqslant x_0+a$ სეგმენტზე. მისი ჯამი აღვნიშნოთ $\varphi(x)$-ით.

მაშასადამე, ფუნქციათა (6.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ $[x_0-a, x_0+a]$ სეგმენტზე. რადგანაც $y=y_n(x)$ წირი არ გამოდის R მართკუთხედიდან, ამიტომ არც $y=\varphi(x)$ წირი გამოვა R მართკუთხედიდან.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx=\int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)]\,dx. \tag{2.18}$$

ამისათვის ავიღოთ რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვი. რადგან $[y_n(x)]$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[x_0-a, x_0+a]$ სეგმენტზე $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, ამიტომ მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, დამოკიდებული მხოლოდ ε-ზე, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|y_{n-1}(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{Ma}, \quad \text{როცა} \quad n>N,$$

ყოველი x-ისათვის $[x_0-a, x_0+a]$ სეგმენტიდან.

შემდეგ, რადგან $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია R მართკუთხედზე და y-ის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, ამიტომ გვექნება:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx-\int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f[x, y_{n-1}(x)]-f[x, \varphi(x)]|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(x)-\varphi(x)|\,dx\right|<M\frac{\varepsilon}{Ma}|x-x_0|\leqslant\varepsilon,$$

როცა $n>N$. მაშასადამე, მართებულია (2.18) ტოლობა.

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.18) ტოლობას და გადავალთ ზღვარზე ტოლობაში:

$$y_n(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx,$$

როცა $n \to \infty$, გვექნება:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)]\,dx.$$

ამ ტოლობის თანახმად, $\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.4) ინტეგრალურ განტოლებას. ამასთან $\varphi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\varphi'(x) \equiv f[x, \varphi(x)], \ \varphi(x_0) = y_0,$$

ე. ი. $\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას. ამგვარად, (2.1) განტოლების ამონახსნის არსებობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ მოძებნილი ამონახსნის ერთადერთობა, ე. ი. რომ $R \subset D$ არის მოცემულ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი (2.1) დიფერენციალური განტოლებისა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $\varphi(x)$ და $\Phi(x)$ არის $[x_0 - a, x_0 + a]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ორი სხვადასხვა ამონახსნი, $\varphi(x) \not\equiv \Phi(x)$, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ (2.1) დიფერენციალურ განტოლებას, ანუ (2.4) ინტეგრალურ განტოლებას, და იმავე საწყის პირობებს:

$$\varphi(x_0) = \Phi(x_0) = y_0.$$

ამ სეგმენტში $\psi(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტი და დიფერენცირებადია, ამასთან $\psi(x_0) = \Phi(x_0) - \varphi(x_0) = 0$. ავირჩიოთ უმცირესი ინტერვალი $|x - x_0| \leqslant \varepsilon < a$ ისე, რომ შესრულდეს უტოლობა: $M\varepsilon < \frac{1}{2}$. ვთქვათ, $\mu = \max|\Phi(x) - \varphi(x)|$; ცხადია, $|\Phi(x) - \varphi(x)|$ უწყვეტი ფუნქცია უდიდეს $\mu > 0$ მნიშვნელობას მიაღწევს $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ სეგმენტის რომელიღაც ξ წერტილში. მაშინ გვექნება:

$$|\psi'(x)| = |\Phi'(x) - \varphi'(x)| = |f[x, \Phi(x)] - f[x, \varphi(x)]|;$$

ანუ, თუ თეორემის მე-2 პირობას მივიღებთ მხედველობაში, გვექნება:

$$|\psi'(x)| \leqslant M|\Phi(x) - \varphi(x)| = M|\psi(x)| \leqslant M\mu,$$

ე. ი.

$$|\psi'(x)| \leqslant \mu M.$$

მეორე მხრივ, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად:

$$|\psi(x)| = |\Phi(x) - \varphi(x)| = |x - x_0| \cdot |\psi'(\xi)| \leqslant |x - x_0| M\mu \leqslant M\mu\varepsilon < \frac{\mu}{2}$$

მაშასადამე, $\mu = \max |\psi(x)| < \frac{\mu}{2}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu \equiv 0.$$

ანუ

$$\psi(x) = \Phi(x) - \varphi(x) \equiv 0,$$

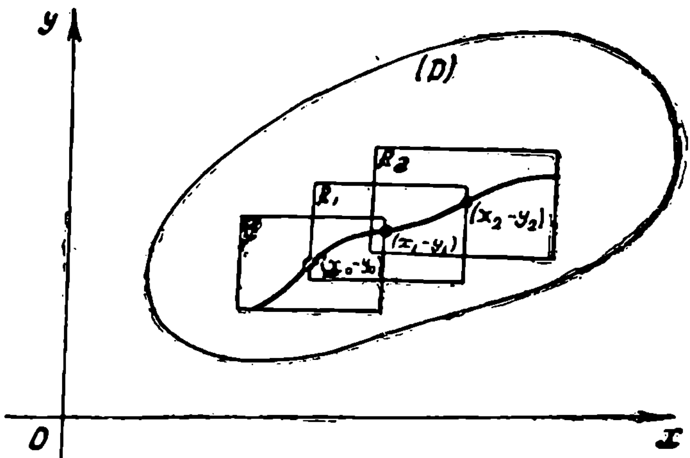
ე. ი.

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x).$$

ამგვარად, როცა შესრულებულია 1-ლი და მე-2 პირობები, არსებობს (2.1) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს: $y = y_0$, როცა $x = x_0$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. ამონახსნის ანალიზური გაგრძელება

ჩვენ დავამტკიცეთ (2.1) განტოლების $y = \varphi(x)$ ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა მხოლოდ $[x_0 - a, x_0 + a]$ შუალედისათვის, სადაც $a = \min\left(a', \frac{b}{N}\right)$. ეს შუალედი წარმოადგენს მხოლოდ ნაწილს x-ის ცვალებადობის $[x_0 - A, x_0 + A]$ შუალედისა, რომელიც D არეს ეთანადება. მაგრამ, აქედან არ გამომდინარეობს, რომ ეს ამონახსნი არსებობს მხოლოდ $[x_0 - a, x_0 + a]$ მონაკვეთზე. იგი შეიძლება არსებობდეს ამ მონაკვეთის გარეთაც, მაგრამ მიიღება იქ მიმდევრობითი მიახლოებათა ახალი მწკრივის მეშვეობით, ე. ი. ინტეგრალური წირი, რომელიც გაივლის D არის შიგა (x_0, y_0) წერტილში, შეიძლება გაგრძელებულ იქნეს ორივე მხარეს D არის საზღვრამდე (ნახ. 10).



ნახ. 10

ვთქვათ, $a < A$: მაშინ ავიღოთ ამ ინტეგრალურ წირზე უკიდურესი მარჯვენა წერტილი ($x_1 = x_0 + a$, $y_1 = \varphi(x_0 + a)$) და მივიღოთ იგი როგორც ცენტრი ახალი R_1 მართკუთხედისა, რომელიც გამოდის R-ის გარეთ და მთლიანად ძევს D-ში, $R_1 \subset D$

$$R_1 : |x - x_1| \leqslant a_1, \ |y - y_1| \leqslant b_1,$$

სადაც $a \leqslant \frac{b_1}{N}$, $a_1 \leqslant a_1'$, $a_1 = \min\left(a_1', \frac{b_1}{N}\right)$, და რომელშიაც $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობას. საწყის მნიშვნელობად x_1 და y_1 მივიღოთ, მაშინ არსებობის თეორემის თანახმად, (2.1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია $x_1 - a_1 \leqslant x \leqslant x_1 + a_1$ შუალედში და აკმაყოფილებს საწყის პირობას: $y = y_1 = \varphi_1(x_1)$, როცა $x = x_1$; ამასთან, $x = x_1$ წერტილში $y = \varphi(x)$ და $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნებს აქვთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა:

$$\varphi(x_0 + a) = \varphi_1(x_1) = y_1.$$

მაშასადამე, ერთადერთობის თეორემის თანახმად, $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნი ეთავსება ძველ $y = \varphi(x)$ ამონახსნს $[x_0 - a, \ x_0 + a]$ და $[x_1 - a_1, \ x_1 + a_1]$ შუალედების საერთო ნაწილში, ე. ი. $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ $[x_0 + a - a_1, \ x_0 + a]$ შუალედში და, მეორე მხრივ, იგი განსაზღვრულია $[x_0 + a, \ x_0 + a + a_1]$ შუალედში, რომელშიც ძველი $f = \varphi(x)$ ამონახსნი არ იყო განსაზღვრული. ეს გვაძლევს საშუალებას განვიხილოთ ახალი $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნი $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + a_1$ შუალედში, როგორც $y = \varphi(x)$ ძველი ამონახსნის უშუალო გაგრძელება $|x - x_0| \leqslant a$ შუალედიდან $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + a_1$ შუალედში:

$$y = \varphi(x), \quad x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a = x_1,$$

$$y = \varphi_1(x), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + a_1.$$

ახალ $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნს ეწოდება ძველი $y = \varphi(x)$ ამონახსნის ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი გ ა გ რ ძ ე ლ ე ბ ა.

თუ ახალი $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნი ვერ აღწევს D არის საზღვარს, ე. ი. $a_1 < A$, და $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნის ბოლო წერტილი ($x_2 = x_1 + a_1$, $y_2 = \varphi_1(x_1 + a_1)$) ძევს D-ს შიგნით, მაშინ ანალოგიური წესით ავაგებთ R_2 მართკუთხედს:

$$R \quad |x - x_2| \leqslant a_2, \quad |y - y_2| \leqslant b_2,$$

სადაც

$$a_2 \leqslant \frac{b_2}{N}, \quad a_2 \leqslant a_2', \quad a_2 = \min\left(a_2', \frac{b_2}{N}\right),$$

რომელიც გამოდის R_1-ის გარეთ და მთლიანად ძევს D-ს შიგნით. მაშასადამე, R_2-ში $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ (2.1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი $y = \varphi_2(x)$ ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია შუალედში:

$$x_2 - a_2 \leqslant x \leqslant x_2 + a_2$$

და აკმაყოფილებს საწყის პირობას: $y = y_2 = \varphi_2(x_2)$, ამასთან, $x = x_2$ წერტილში $y = \varphi_1(x)$ და $y_2 = \varphi_2(x)$ ამონახსნებს აქვთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა:

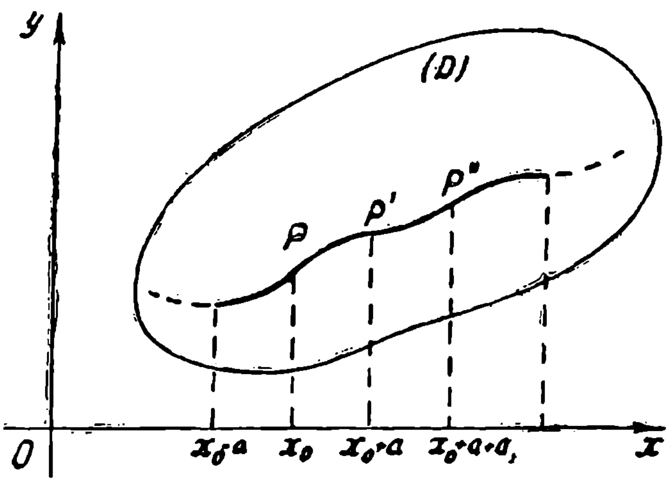
$$\varphi_1(x_2) = \varphi_2(x_2) = y_2.$$

მაშასადამე, ერთადერთობის თეორემის თანახმად, $y = \varphi_2(x)$ ამონახსნი ეთავსება ძველ $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნს $[x_1 - a_1, x_1 + a_1]$ და $]x_2 - a_2, x_2 + a_2]$ შუალედების საერთო ნაწილში, ე. ი. $[x_1 + a_1 - a_2, x_1 + a_1]$ შუალედში $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ და, მეორე მხრივ, იგი განსაზღვრულია $[x_1 + a_1, x_1 + a_1 + a_2]$ შუალედში, რომელშიც ძველი $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნი არ იყო განსაზღვრული.

ახალ $y = \varphi_2(x)$ ამონახსნს ეწოდება ძველი $y = \varphi_1(x)$ ამონახსნის ანალიზური გაგრძელება და ა. შ. ანალოგიური წესით განვიხილავთ $y = \varphi(x)$-ის ანალიზურ გაგრძელებას მარცხნივ x-ის კლებადი მნიშვნელობებისათვის.

a_l მონაკვეთები, რომლებიც განსაზღვრავენ Ox ღერძის გასწვრივ გადაადგილების ნაბიჯს, ყოველი ახალი გაგრძელებისას აკმაყოფილებს პირობებს:

$$a_l \leqslant \frac{b_l}{N}, \quad a_l \leqslant a_l', \quad a_l = \min\left(a_l', \frac{b_l}{N}\right).$$



ნახ. 11

გავიმეორებთ რა მიმდევრობით ანალიზური გაგრძელების პროცესს, ნაბიჯების სასრული რიცხვის შემდეგ, მივიღებთ (2.1) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს $y = \Phi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y = y_0 = \Phi(x_0)$ და რომლის არსებობის არეს წარმოადგენს ან მთელი მონაკვეთი $[A, B]$ ან მისი ნაწილი, ე. ი. მივიღებთ $y = \varphi(x)$ კერძო ამონახსნის ანალიზურ გავრძელებას D არის საზღვრამდე (ნახ. 11). შევნიშნავთ, რომ ეს ამონახსნი ცალსახად განისაზღვრება (2.1) დიფერენციალური განტოლებით და საწყისი პირობით.

§ 4. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგება

ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$y' = f(x, y), \tag{4.1}$$

სადაც f უწყვეტია, შემოსაზღვრულია და აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული y-ის მიმართ xOy სიბრტყის რომელიღაც შემოსაზღვრულ D არეში.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, კოშის თეორემა ამტკიცებს (4.1) განტოლების იმ კერძო ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს: $y = y_0$, როცა $x = x_0$, $(x_0, y_0) \in D' \subseteq D$.

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც D არეს შიგა (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის და ყოველი ინტეგრალური წირი განისაზღვრება (x_0, y_0) წერტილის ამორჩევით D-ს შიგნით.

ცხადია, (4.1) განტოლების ეს ამონახსნი x-ის ცვალებადობის $[x_0 - a, x_0 + a]$ შუალედში, რომელიც $D' \subseteq D$ არეს ეთანადება, შეიძლება განვიხილოთ არა მარტო როგორც x-ის ფუნქცია, არამედ, აგრეთვე, როგორც ფუნქცია იმ (x_0, y_0) წერტილის კოორდინატებისა, რომელზეც ეს ამონახსნი გადის, სახელდობრ, $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, $y_0 = \varphi(x_0; x_0, y_0)$.

მაგალითად, პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{4.2}$$

აქვს ამონახსნი $y = \varphi(x) = y_0 e^{x-x_0}$, რომელიც (x_0, y_0) წერტილზე გადის. ეს პირობა განსაზღვრავს x, x_0, y_0 ცვლადების ფუნქციას, რომელსაც აგრეთვე აღვნიშნავთ φ-თი, სახელდობრ,

$$y = \varphi(x, x_0, y_0) = y_0 e^{x-x_0} \tag{4.3}$$

ამგვარად, (4.2) განტოლების ყველა ინტეგრალური წირის ერთობლიობა წარმოადგენს ორ x_0, y_0 პარამეტრზე დამოკიდებულ ისეთ ოჯახს (4.3), რომლის ყოველ წირს ეთანადება ამ პარამეტრების ერთი წყვილი მნიშვნელობა, ე. ი. (4.3) დამოკიდებულება გვაძლევს (4.2) განტოლების **ზოგად ამონახსნს**, თუმცა, როგორც ამას ქვემოთ ვუჩვენებთ, (4.3) ფორმულაში x_0, y_0 პარამეტრებიდან (4.2) განტოლების სხვადასხვა კერძო ამონახსნების მისაღებად, არსებითი მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ ერთ y_0 პარამეტრს — საძიებელი ფუნქციის საწყის მნიშვნელობას, რადგან x_0 პარამეტრს თავიდანვე შეგვიძლია მივანიჭოთ ფიქსირებული რიცხვითი მნიშვნელობა.

ზოგად შემთხვევაში, კოშის თეორემიდან ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ (4.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგება.

ვუჩვენოთ, რომ, თუ მოცემულ D **არეში შესრულებულია კოშის თეორემის პირობები, მაშინ არსებობს (4.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია რომელიღაც D არეში, $D' \subseteq D$.**

მართლაც, განვიხილოთ x_0 არგუმენტის საწყისი მნიშვნელობა, როგორც მოცემული მუდმივი რიცხვი, ხოლო საძიებელი ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობა y_0—როგორც პარამეტრი, რომელსაც შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობა ისეთი, რომ x_0, y_0) წერტილი არ გამოვიდეს D არიდან. მაშინ, როცა x იცვლება (A, B) შუალედში, საწყის მნიშვნელობათა ყოველი ასეთი (x_0, y_0) სისტემისათვის, $x_0 \in (A, B)$, იარსებებს (4.1) განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი. ამგვარად, მივიღებთ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ამონახსნს:

$$y = \varphi(x, y_0), \tag{4.4}$$

სადაც $\varphi(x, y_0)$ ფუნქცია (A, B) შუალედში უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო საწყისი მნიშვნელობა y_0 წარმოადგენს პარამეტრს, ე. ი. ნებისმიერ მუდმივს, $y_0 = C$.

განტოლება (4.4) წარმოადგენს (4.1) განტოლების **ზოგად ამონახსნს**.

ამგვარად, (4.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = \varphi(x, C),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

(2.5) ფორმულები, რომლებიც გვაძლევს $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ მიმდევრობითს მიახლოებებს, გვიჩვენებს, რომ y_n მიახლოებანი წარმოადგენენ

საძიებელი ამონახსნის y_0 საწყისი მნიშვნელობის უწყვეტ ფუნქციებს, მაშასადამე, (4.1) განტოლების (4.4) ზოგადი ამონახსნი, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი, წარმოადგენს აგრეთვე $C = y_0$ პარამეტრის უწყვეტ ფუნქციას.

ახლა განვიხილოთ საწყისი მნიშვნელობანი x_0 და y_0, როგორც ცვლადი პარამეტრები. მაშინ D არის ყოველ შიგა (x_0, y_0) წერტილზე, $(x_0, y_0) \in D' \subseteq D$, გაივლის (4.1) განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი და ყოველი წირი განისაზღვრება (x_0, y_0) წერტილის ამორჩევით, ამასთან ეს წირები ერთმანეთს არ კვეთს.

ვთქვათ, ეს ამონახსნი არის

$$y = \varphi(x, x_0, y_0), \tag{4.5}$$

სადაც φ არის x_0, y_0 პარამეტრების უწყვეტი ფუნქცია.

განვიხილოთ D არეში (x_0, y_0) წერტილი და (x, y) წერტილი, რომელიც ძევს (x_0, y_0) წერტილში გამავალ ინტეგრალურ წირზე. ცხადია, x_0, y_0 მნიშვნელობანი ერთი მხრივ და x, y მნიშვნელობანი მეორე მხრივ, დაკავშირებულია ერთმანეთთან (4.5) დამოკიდებულებით. თუ ახლა (x, y) წერტილს მივიღებთ საწყის წერტილად, მაშინ ერთადერთობის თანახმად, ამ საწყისი მნიშვნელობებით განსაზღვრული ინტეგრალური წირი გაივლის (x_0, y_0) წერტილზე, ამასთან, ცხადია, ადგილი ექნება დამოკიდებულებას:

$$y_0 = \varphi_1(x_0;\ x, y).$$

ანდა, თუ ამ განტოლებაში x_0 პარამეტრს განვიხილავთ ხელახლა როგორც მუდმივს, ხოლო y_0-ს როგორც პარამეტრს, ე. ი. ნებისმიერ მუდმივს $y_0 = C$, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\psi(x, y) = C,$$

რომელიც აკავშირებს ინტეგრალური წირის ცვლადი (x, y) წერტილის კოორდინატებს და C მუდმივს. (4.6) განტოლება წარმოადგენს (4.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში ძირითადი მნიშვნელობა აქვს დამტკიცებულ თეორემას, რადგან იგი საშუალებას გვაძლევს მოცემული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების სახის მიხედვით თავიდანვე დავადგინოთ, არსებობს თუ არა მოცემულ საწყის პირობებში განტოლების ერთადერთი ამონახსნი. ამ გარემოებას კი, როგორც იყო აღნიშნული, დიდი მნიშვნელობა აქვს მაშინ, როცა ჩვენ არ გვაქვს საშუალება მივუთითოთ ზუსტ ფორმულაზე, რომელიც გვაძლევს (4.1) განტოლების ამონახსნს. ასეთ შემთხვევაში აუცილებელია განსახილველი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობის წინასწარ გარკვევა, რის შემდგომ ამონა-

ხსნის მიახლოებითი პოვნისათვის გამოიყენებთ განტოლების სხვადასხვა მიახლოებით ინტეგრების მეთოდს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. (2.5) ფორმულები

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx, \quad y_0(x) = y_0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

რომლებიც გვაძლევს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების —

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

საძიებელი $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$ ამონახსნის მიმდევრობით მიახლოებას, გვიჩვენებს, რომ $y_n(x)$ მიახლოებანი წარმოადგენს საწყისი y_0 მნიშვნელობის უწყვეტ ფუნქციებს. მაშასადამე, $y = \varphi(x, y_0)$ ამონახსნიც, როგორც ზღვარი უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი $\{y_n(x)\}$ მიმდევრობისა, აგრეთვე, წარმოადგენს y_0 პარამეტრის უწყვეტ ფუნქციას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის დამტკიცებისას, საძიებელი $y(x)$ ფუნქციისათვის, როგორც პირველი მიახლოება, აღებული იყო $y_0(x)$ ფუნქცია, რომელიც იგივურად უდრიდა y_0 საწყის მნიშვნელობას: $y_0(x) \equiv y_0$, განსახილველ $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$ შუალედში. ახლა ვუჩვენოთ, რომ, (4.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი $y = y(x)$ არ არის დამოკიდებული პირველი მიახლოების გამომსახველი ფუნქციის შერჩევაზე. ასე რომ, პირველ მიახლოებად შეგვიძლია მივიღოთ არა y_0, არამედ x დამოუკიდებელი ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია $Y \equiv Y_0(x)$, რომელიც უწყვეტია $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$ სეგმენტზე და აკმაყოფილებს დიფერენციალური განტოლების საწყის პირობებს, $Y_0(x) = y_0$; მასთან $Y = Y_0(x)$ წირი არ გამოდის R მართკუთხედიდან, $|Y_0(x) - y_0| < b$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. ამგვარად, თუ პირველ მიახლოებად ავირჩევთ $Y_0(x)$ ფუნქციას, მაშინ, ისე როგორც ზემოთ, ავაგებთ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობას:

$$Y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, Y_0(x)]\,dx,$$

$$Y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, Y_1(x)]\,dx,$$

$$Y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, Y_{n-1}(x)]\,dx.$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $\{Y_n(x)\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $Y(x)$ ფუნქციისაკენ $[x_0 - a, x_0 + a]$ სეგმენტზე:

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = Y(x).$$

ეს ზღვრული ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია და წარმოადგენს (4.1) დიფერენციალური განტოლების საძიებელ ამონახსნს:

$$\frac{dY(x)}{dx} \equiv f[x, Y(x)].$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ

$$Y(x) \equiv \varphi(x) = y.$$

მართლაც, $\{Y_n(x)\}$ მიმდევრობაში შემავალი ფუნქციები აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$Y_n(x_0) = y_0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x_0) = Y(x_0) = y_0.$$

მაშასადამე, $Y(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს (4.1) დიფერენციალურ განტოლებას საწყისი პირობებით:

$$Y(x_0) = \varphi(x_0) = y_0.$$

აქედან არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, რომ

$$Y(x) \equiv \varphi(x_0).$$

ამით დამტკიცებულია $y = \varphi(x)$ ამონახსნის დამოუკიდებლობა საწყისი მიახლოების გამომსახველი ფუნქციის შერჩევისაგან.

ამგვარად, (4.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი $y = \varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y_0 = \varphi(x_0)$, შეგვიძლია მივიღოთ როგორც ზღვარი უწყვეტ ფუნქციათა სხვადასხვა მიმდევრობებისა:

$$\{y_n(x)\}, \quad \{Y_n(x)\}, \ldots \tag{4.7}$$

რომლებიც, თანახმად მათი აგებისა, დამოკიდებულია მხოლოდ საწყისი მიახლოების გამომსახველი ფუნქციის შერჩევაზე.

ცხადია, (4.7) მიმდევრობათა კრებადობის ხასიათი იქნება სხვადასხვა; ზოგიერთი მათგანი იქნება სწრაფად კრებადი (4.1 განტოლების საძიებელი ამონახსნისაკენ, როგორც ზღვრისაკენ, ზოგიერთი კი — ნელად კრებადი იმავე ზღვრისაკენ.

თუ რაიმე წესით შევძლებთ საწყისი მიახლოების გამომსახველი ფუნქციის შერჩევას ისე, რომ იგი უახლოვდებოდეს საძიებელ ამო-

ნახსნს, მაშინ, ცხადია, შესაბამის ფუნქციათა მიმდევრობა $[y_n(x)]$ იქნება სწრაფად კრებადი საძიებელი ამონახსნისაკენ, როგორც ზღვრისაკენ. საზოგადოდ, პრაქტიკული თვალსაზრისით, საწყისი მიახლოების გამომსახველი ფუნქციის შერჩევა უნდა აკმაყოფილებდეს ერთ ძირითად პირობას, სახელდობრ, ის უნდა იყოს უწყვეტი $|x-x_0|\leqslant a$ სეგმენტზე და, მასთან, მისი შესაბამისი ფუნქციათა მიმდევრობა უნდა იყოს სწრაფად კრებადი საძიებელი ამონახსნისაკენ, როგორც ზღვრისაკენ.

მაგალითი 1. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y' = x^3 - y^2. \tag{4.8}$$

გამოვარკვიოთ, აქვს თუ არა მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას ამონახსნი და xOy სიბრტყის რა ნაწილში იქნება ერთადერთი ეს ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, (4.8) განტოლება არ ეკუთვნის არც ერთ ზემოთ განხილულ კვადრატურებში ინტეგრებად განტოლებას. მისი მარჯვენა ნაწილი $f(x, y)=x^3-y^2$ უწყვეტი ფუნქციაა მთელს xOy სიბრტყეში, ამას გარდა, ამ ფუნქციის წარმოებული y-ის მიმართ $f_y' = -2y$ იქნება შემოსაზღვრული xy სიბრტყის ნებისმიერ შემოსაზღვრულ ნაწილში. მაშასადამე, ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, xOy სიბრტყის ნებისმიერ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის (4.8) განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი. ჩვენ არ გვაქვს საშუალება მოვძებნოთ ამ ამონახსნის ზუსტი ფორმულა. ამიტომ ვისარგებლოთ არსებობის თეორემის მტკიცებისას გამოყენებული მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით და ვიპოვოთ მოცემული განტოლების პირველი ამონახსნის სამი მიახლოებითი გამოსახულება საწყისი პირობებით (0,0).

დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

წარმოვადგინოთ ინტეგრალური განტოლების საშუალებით

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx,$$

სადაც x_0, y_0 საწყისი მნიშვნელობებია. მაშინ (4.8) განტოლება შეგვიძლია შევცვალოთ ინტეგრალური განტოლებით ($x_0=0$, $y_0=0$):

$$y(x) = \int_0^x (x^3 - y^2)\,dx.$$

თუ $y_0(x)=y_0=0$ პირობას მივიღებთ, როგორც ნულოვან მიახლოებას, მაშინ გვექნება:

$$y_1(x)=\int_0^x x^3\,dx=\frac{x^4}{4},$$

$$y_2(x)=\int_0^x\left(x^3-\frac{x^8}{16}\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^9}{144},$$

$$y_3(x)=\int_0^x\left(x^3-\frac{x^8}{16}+\frac{x^{13}}{288}-\frac{x^{18}}{144^2}\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^9}{144}+$$

$$+\frac{x^{14}}{14\cdot 288}-\frac{x^{19}}{19\cdot 144^2}.$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=ax+by. \tag{4.9}$$

მოვძებნოთ განტოლების ამონახსნის მესამე მიახლოება საწყისი პირობებით: $x_0=0$, $y_0=1$.

ამოხსნა. ამ განტოლებას აქვს ზოგადი ინტეგრალი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[C+\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx\right].$$

განსახილველი მაგალითის შემთხვევაში: $P(x)=-b$, $Q(x)=ax$, ამიტომ

$$y(x)=e^{-\int -b dx}\left(C+\int e^{\int -b dx}\,axdx\right),$$

ანუ

$$y(x)=e^{bx}\left(C+\int e^{-bx}\,ax\,dx\right). \tag{4.10}$$

ახლა გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$I=\int e^{-bx}\,ax\,dx.$$

გვექნება:

$$I=\int e^{-bx}\,ax\,dx=-\frac{e^{-bx}}{b}\,ax-\frac{a}{b^2}\,e^{-bx}. \tag{4.11}$$

თუ (4.11) გამოსახულებას შევიტანთ (4.10) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$y(x) = e^{bx}\left(C - \frac{e^{-bx}}{b}ax - \frac{a}{b^2}e^{-bx}\right). \tag{4.12}$$

ნებისმიერი C მუდმივის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $x_0=0$, $y_0=1$, გვექნება:

$$y(x_0) = y_0 = 1 = e^{b\cdot 0}\left(C - \frac{e^{-b\cdot 0}}{b}\cdot a\cdot 0 - \frac{a}{b^2}\cdot e^{-b\cdot 0}\right),$$

$$1 = C - \frac{1}{b^2}\cdot 0 - \frac{a}{b^2},$$

საიდანაც

$$C = 1 + \frac{a}{b^2}.$$

თუ ნებისმიერი C მუდმივის მნიშვნელობას შევიტანთ (4.12) ზოგად ამონახსნში, მივიღებთ კერძო ინტეგრალს:

$$y(x) = e^{bx}\left(1 + \frac{a}{b^2} - \frac{e^{-bx}}{b}ax - \frac{a}{b^2}e^{-bx}\right) = \frac{e^{bx}}{b^2}(b^2 + a -$$

$$- abx\,e^{-bx} - a\,e^{-bx}) = \frac{1}{b^2}\left[(a+b^2)e^{bx} - abx - a\right] =$$

$$= \frac{1}{b^2}\left[(a+b^2)\left(1 + \frac{bx}{1!} + \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^3x^3}{3!} + \quad\right) - abx - a\right],$$

ანუ

$$y(x) = 1 + \frac{bx}{1!} + \frac{(a+b^2)}{2!}x^2 + \frac{(a+b^2)\,b}{3!}x^3 + \frac{(a+b^2)\,b^2}{4!}x^4 + \cdots \tag{4.13}$$

უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს (4.9) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს მოცემულ საწყის პირობებში.

ახლა მოვძებნოთ (4.9) განტოლების მესამე მიახლოება საწყის პირობებში: $x_0=0$, $y_0=1$ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით და იგი შევადაროთ (4.13) ზუსტ ამონახსნს. ამ მიზნით, ისე როგორც ზემოთ, პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება წარმოვადგინოთ ინტეგრალური განტოლების საშუალებით:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx.$$

გვექნება:

$$y(x) = 1 + \int_0^x (ax + by)\, dx,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (ax + b)\, dx = 1 + bx + \frac{a x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[ax + b\left(1 + bx + \frac{ax^2}{2}\right)\right] dx = 1 + \frac{bx}{1!} +$$

$$+ (a + b^2)\frac{x^2}{2!} + \frac{ab\, x^3}{3!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left\{ ax + b\left[1 + \frac{b}{1!}x + \frac{(a+b^2)}{2!}x^2 + \frac{ab}{3!}x^3\right]\right\} dx =$$

$$= 1 + \frac{b}{1!}x + \frac{a+b^2}{2!}x^2 + \frac{(a+b^2)\,b}{3!}x^3 + \frac{ab^2}{4!}x^4. \quad (4.14)$$

(4.14) ფორმულა გვაძლევს (4.9) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მესამე მიახლოებით გამოსახულებას, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას: $y_3(0) = 1$.

ამგვარად, (4.13) ზუსტი ამონახსნის მესამე მიახლოებითი გამოსახულება წარმოადგენს ამ ამონახსნის ხარისხოვან მწკრივად დაშლის პირველი ხუთი წევრის ჯამს.

ვხედავთ, რომ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი რაგინდ მაღალი ხარისხის სიზუსტით, თუ გამოთვლებს განვაგრძობთ სათანადო მე-n მიახლოების გამოთვლამდე, სადაც n საკმაოდ დიდი რიცხვია.

მაგალითი 3. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ay}, \quad a \neq 0;$$

მოვძებნოთ ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

Ox ღერძის ნებისმიერ $(x_0, 0)$ წერტილში დარღვეულია არსებობის თეორემის პირობები, განტოლების მარჯვენა ნაწილი $f(x, y) = \frac{1}{ay}$ და მისი კერძო წარმოებული y-ის მიმართ $f_y' = -\frac{1}{ay^2}$, შემოუსაზღვრელია. მიუხედავად ამისა, წერტილი $(x_0, 0)$ არ წარმოადგენს განსაკუთრებულ წერტილს, ე. ი. ამ წერტილზე გაივლის განსახილველი განტოლების ერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს. მართლაც, დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$y^2 = \frac{2}{a} x + C.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს. ახლა მოვძებნოთ კერძო ინტეგრალი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს. ამ მიზნით საწყისი პირობები შევიტანოთ ზოგად ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$0 = \frac{2}{a} x + C,$$

საიდანაც ნებისმიერი C მუდმივისათვის ვღებულობთ მნიშვნელობას—

$$C = C_0 = -\frac{2}{a} x_0.$$

თუ უკანასკნელს გავითვალისწინებთ ზოგად ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$y^2 = \frac{2}{a}(x - x_0). \tag{4.15}$$

(4.15) დამოკიდებულება წარმოადგენს მოცემული განტოლების ერთადერთ ინტეგრალურ წირს (ერთადერთ კერძო ამონახსნს), რომელიც გაივლის $(x_0, 0)$ წერტილში. მაშასადამე, $(x_0, 0)$ წერტილი არ იქნება განსაკუთრებული წერტილი.

მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობები წარმოადგენს კერძო ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკმარის პირობას, მაგრამ არა აუცილებელს. წერტილები, რომლებშიც დარღვეულია თეორემის პირობები, შეიძლება იყოს ჩვეულებრივი ან განსაკუთრებული წერტილები.

§ 5. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც დაკავშირებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემასთან

მოვიყვანოთ ზოგიერთი თეორემა, რომლებიც დაკავშირებულია არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის გამოყენებასთან. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{5.1}$$

სადაც $f(x, y)$ არის x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქცია რომელიღაც D არეში და ამ არეში აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. ვთქვათ, (x_0, y_0) D არის რაიმე შიგა წერტილია. მაშინ, არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, არსებობს (5.1) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y=y(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს: $y=y_0$, როცა $x=x_0$, მასთან ეს ამონახსნი არ გამოვა R მართკუთხედიდან:

$$R:\begin{cases}|x-x_0|\leqslant a,\\ |y-y_0|\leqslant b,\end{cases}\qquad R\subset D,$$

სადაც

$$a=\min\left(a', \frac{b}{N}\right).$$

ისმის კითხვა: რა გავლენას მოახდენს (5.1) განტოლების $y=y(x)$ ამოხსნაზე დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქციის შეცვლა $f(x, y)+\omega(x, y)$ ფუნქციით, რომელიც მცირედ განსხვავდება $f(x, y)$ ფუნქციისაგან? ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 1. ვ თ ქ ვ ა თ, მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ო რ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

და

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)+\omega(x, y), \tag{5.2}$$

ს ა დ ა ც $f(x, y)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს ზ ე მ ო თ ა ღ ნ ი შ ნ უ ლ პ ი რ ო ბ ე ბ ს, ხ ო ლ ო $\omega(x, y)$ ა რ ი ს x დ ა y ც ვ ლ ა დ ე ბ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა, რ ო მ ლ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ნ ა კ ლ ე ბ ი ა მ ც ი რ ე $\varepsilon>0$ რ ი ც ხ ვ ზ ე, $|\omega(x, y)|<\varepsilon$, $(x, y)\in R$.

თ უ $y(x)$ დ ა $Y(x)$ ა რ ი ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ა დ მ ო ც ე მ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ს ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ე ბ ი, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს ე რ თ ს ა დ ა ი მ ა ვ ე ს ა წ ყ ი ს პ ი რ ო ბ ა ს

$$y(x_0)=Y(x_0)=y_0,$$

მაშინ $Y(x)$ ამონახსნის გადახრა $y(x)$ ამონახსნიდან იქნება საკმარისად მცირე, თუ ε საკმარისად მცირე დადებითი რიცხვია, ე. ი.

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant\eta, \quad \text{როცა} \quad |x-x_0|\leqslant\delta<a,$$

სადაც $\eta=\eta(\varepsilon)$ მცირე დადებითი რიცხვია, $\eta<b$, და $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta=0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ (5.1) დიფერენციალური განტოლება და ვიპოვოთ მისი ამონახსნი მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. წინასწარ შევნიშნავთ, რომ არ არის აუცილებელი ნულოვან მიახლოებად ავიღოთ საძიებელი ამონახსნის საწყისი მნიშვნელობა y_0, არამედ შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია $Y(x)$, რომელიც არ გამოდის R მართკუთხედიდან, როცა $|x-x_0|\leqslant a$, რადგან, როგორც ვიცით, საძიებელი ამონახსნი არ არის დამოკიდებული გამოსავალი ფუნქციის შერჩევაზე. ახლა (5.1) დიფერენციალური განტოლების საძიებელი ამონახსნის ნულოვან მიახლოებად ამოვარჩიოთ ზუსტად ის უწყვეტი ფუნქცია $Y(x)$, რომელიც არ გამოდის R მართკუთხედიდან, როცა $|x-x_0|\leqslant a$, და მასთან წარმოადგენს (5.2) განტოლების ამონახსნს.

(5.1) დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ ინტეგრალური სახით:

$$y=Y(x)+\int\limits_{x_0}^{x}f(x,\,y)\,dx, \tag{5.3}$$

სადაც x_0, $Y(x_0)$ არის იმ წერტილის კოორდინატები, რომელშიც გაივლის საძიებელი ინტეგრალური წირი. ახლა ვისარგებლოთ (5.3) გამოსახულებით და ვიპოვოთ (5.1) განტოლების ამონახსნი $Y=y(x)$ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ამ მიზნით შევადგინოთ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$\left.\begin{aligned}
y_1&=Y(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f[x,\,Y(x)]\,dx,\\
y_2&=Y(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f(x,\,y_1)\,dx,\\
&\cdot\\
y_n&=Y(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f(x,\,y_{n-1})\,dx,\\
&\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

კოშის თეორემის დამტკიცებიდან ცნობილია, რომ $\{y_n(x)\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $|x-x_0| \leqslant a$ სეგმენტზე და ზღვრად აქვს (5.1) განტოლების ამონახსნი:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x).$$

ახლა განვიხილოთ (5.2) დიფერენციალური განტოლება და იგი წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \{f[x, Y(x)] + \omega[x, Y(x)]\}\, dx. \tag{5.5}$$

(5.1) განტოლების ამონახსნის მიახლოებანი, ე. ი. $\{y_n(x)\}$ ფუნქციათა მიმდევრობის წევრები, თანდათანობით შევადაროთ (5.2) დიფერენციალური განტოლების $Y(x)$ ამონახსნს, რომელიც (5.5) ინტეგრალურ განტოლებას აკმაყოფილებს. ამ მიზნით (5.5) განტოლებას მიმდევრობით გამოვაკლოთ (5.4) განტოლებებიდან თითოეული ცალ-ცალკე: მაშინ მივიღებთ:

$$|Y-y_1| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |\omega(x, Y)|\, dx \right| \leqslant \varepsilon |x-x_0|,$$

$$|Y-y_2| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, Y) - f(x, y_1)|\, dx \right| + \left| \int_{x_0}^{x} |\omega(x, Y)|\, dx \right|,$$

$$|Y-y_3| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, Y) - f(x, y_2)|\, dx \right| + \left| \int_{x_0}^{x} |(\omega(x, Y)|\, dx \right|,$$

თუ გამოვიყენებთ ლიფშიცის პირობას, მივიღებთ:

$$|Y-y_2| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} M|Y-y_1|\, dx \right| + \varepsilon |x-x_0|,$$

ანუ

$$|Y-y_2| \leqslant M\varepsilon \frac{|x-x_0|^2}{2!} + \varepsilon |x-x_0|$$

ასევე,

$$|Y-y_3|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} M|Y-y_2|dx\right|+\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\, dx\right|\leqslant M^2\varepsilon\frac{|x-x_0|^3}{3!}+$$

$$+M\varepsilon\frac{|x-x_0|^2}{2!}+\varepsilon|x-x_0|,$$

$$|Y-y_n|\leqslant\varepsilon M^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}+\varepsilon M^{n-2}\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+$$

$$+\varepsilon M\frac{|x-x_0|^2}{2!}+\varepsilon|x-x_0|,$$

წინა უტოლობა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$|Y-y_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\left[M|x-x_0|+\frac{M^2|x-x_0|^2}{2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{M^3|x-x_0|^3}{3!}+\cdots+\frac{M^n|x-x_0|^n}{n!}\right]$$

ცხადია, ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს $\Phi(x)=e^{M|x-x_0|}-1$ ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად დაშლის პირველი n წევრის ჯამს; ამიტომ ეს უტოლობა უფრო გაძლიერდება, თუ ამ ჯამს შევცვლით $\Phi(x)$ ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად დაშლით, გვექნება:

$$|Y-y_n|<\frac{\varepsilon}{M}\left[M|x-x_0|+\frac{M^2|x-x_0|^2}{2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{M^3|x-x_0|^3}{3!}+\cdots+\frac{M^n|x-x_0|^n}{n!}+\cdots\right],$$

ანუ

$$|Y-y_n|<\frac{\varepsilon}{M}\left(e^{M|x-x_0|}-1\right); \tag{5.6}$$

ამ უტოლობას ადგილი აქვს ყოველი n-ისათვის, როცა $x>x_0$ ან $x<x_0$. ამიტომ, თუ (5.6) ფორმულაში გადავალთ ზღვარზე, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, მივიღებთ:

$$|Y(x)-y(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\left(e^{M|x-x_0|}-1\right),\quad \text{როცა}\quad (x-x_0)\leqslant\delta<a.$$

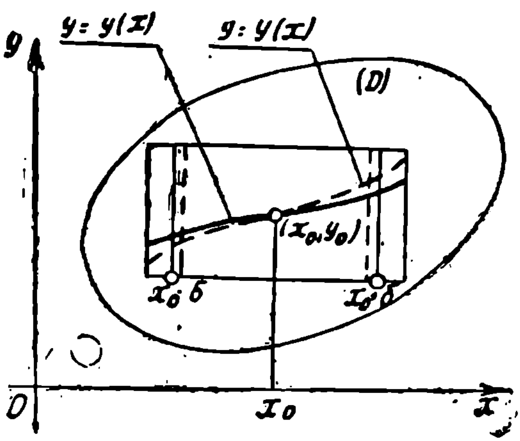
თეორემა დამტკიცებულია. დამტკიცებულ თეორემას აქვს არა მარტო თეორიული, არამედ პრაქტიკული მნიშვნელობაც.

შენიშვნა. 1-ლი თეორემა დადგენილია მხოლოდ $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, $\delta<a$, (ნახ. 12) შუალედისათვის, თუმცა ის მართებული რჩება, საზოგადოდ, ვიდრე ინტეგრალური წირები $y=y(x)$ და $y=Y(x)$ არ მიუახლოვდება D არის საზღვარს.

ახლა, ვთქვათ, (5.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=\varphi(x,\ y_0), \tag{5.7}$$

რომელიც მხოლოდ y_0 პარამეტრზეა დამოკიდებული. დავსვათ კითხვა: *როგორ შეიცვლება* მოცემული განტოლების ამონახსნი $y=\varphi(x,\ y_0)$, თუ მის საწყის y_0 მნიშვნელობას შევცვლით მცირეთი, და საწყისი y_0 მნიშვნელობის მცირეთი შეცვლა გამოიწვევს თუ არა



ნახ. 12

(5.1) განტოლების ამონახსნის მცირეთი შეცვლას? ეს საკითხი მნიშვნელოვანია არა მარტო დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიისათვის, არამედ მისი გამოყენებისთვისაც, რადგან საწყისი მონაცემები x_0, y_0 მოიძებნება გაზომვით, მაგრამ არ შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ ამ გაზომვათა აბსოლუტურ სიზუსტეში. ამიტომ აუცილებელია დავრწმუნდეთ, რომ მცირე ცდომილებანი გაზომვებში არ გამოიწვევს ამონახსნის დიდ შეცვლას. ჩვენ ვუჩვენებთ, რომ, თუ (5.1) განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალი $f(x,\ y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს კოშის თეორემის ყველა პირობას, მაშინ (5.1) განტოლების ამონახსნი უწყვეტად იქნება დამოკიდებული საწყის პირობებზე. ამ მიზნით დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2. თუ დიფერენციალური

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს არსებობის თეორემის ყველა პირობას R მართკუთხედში

$$R:\begin{cases}|x-x_0|\leqslant a, & R\subset D,\\ |y-y_0|\leqslant b, & a=\min\left(a', \dfrac{b}{N}\right),\end{cases}$$

მაშინ (5.1) განტოლების $y=\varphi(x, y_0)$ ამონახსნი წარმოადგენს მისი საწყისი y_0 მნიშვნელობის უწყვეტ ფუნქციას, მასთან, შესაბამისი ნაზრდების ფარდობა $\frac{\Delta y}{\Delta y_0}$ შემოსაზღვრული რჩება, როცა Δy_0 მიისწრაფვის ნულისაკენ.

დამტკიცება. მართლაც, მივცეთ y_0-ს ნაზრდი Δy_0 ისე, რომ ახალი მნიშვნელობა არ გამოვიდეს R-დან, $|\Delta y_0|\leqslant\frac{b}{2}$; მივიღებთ ახალ საწყის მნიშვნელობას $y_0+\Delta y_0$; მაგრამ, მაშინ შეიცვლება (5.1) განტოლების ამონახსნი (5.7) და მის ნაცვლად გვექნება ამონახსნი:

$$Y(x)=\varphi(x, y_0+\Delta y_0),$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dY}{dx}=f(x, Y),$$

საწყისი პირობით: $Y(x_0)=y_0+\Delta y_0$. ცხადია, $Y(x)-\Delta y_0$ წარის x-ის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც აქვს საწყისი მნიშვნელობა y_0 და აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d[Y-\Delta y_0]}{dx}=f(x, Y-\Delta y_0)+\omega(x, Y-\Delta y_0), \tag{5.8}$$

სადაც

$$\omega(x, Y-\Delta y_0)=f(x, Y)-f(x, y-\Delta y_0).$$

ახლა მოვახდინოთ ჩასმა:

$$Y(x)-\Delta y_0=\eta(x),$$

$$Y(x)=\eta(x)+\Delta y_0.$$

ცხადია, როცა $x=x_0$, მაშინ

$$Y(x_0)=y_0+\Delta y_0=\eta(x_0)+\Delta y_0,$$
$$\eta(x_0)=y_0,$$

და (5.8) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\eta}{dx}=f(x,\eta)+\omega(x,\eta), \tag{5.9}$$

სადაც

$$\omega(x,\eta)=f(x,\eta+\Delta y_0)-f(x,\eta).$$

რადგანაც, ლიფშიცის პირობის თანახმად,

$$|\omega(x,\eta)|=|f(x,\eta+\Delta y_0)-f(x,\eta)|<M|\Delta y_0|,$$

ამიტომ, როცა Δy_0 არის საკმაოდ მცირე, მაშინ $|\omega(x,\eta)|$ ფუნქციაც იქნება საკმაოდ მცირე, ე. ი.

$$|\omega(x,\eta)|<\varepsilon, \quad \text{სადაც} \quad \varepsilon=M|\Delta y_0|.$$

ამგვარად, (5.9) დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი ფუნქციები $f(x,\eta)$ და $\omega(x,\eta)$ აკმაყოფილებს წინა პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემის ყველა პირობას. აღნიშნული თეორემის თანახმად, $\eta(x)=Y(x)-\Delta y_0$ და, მაშასადამე, $Y(x)$ იქნება საკმაოდ ახლოს $y(x)$-თან. ამიტომ გვექნება:

$$|\eta-y|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\left(e^{M|x-x_0|}-1\right),$$

ანუ, თუ ε-ის ნაცვლად შევიტანთ $\varepsilon=M|\Delta y_0|$, მაშინ

$$|\eta-y|<|\Delta y_0|\cdot\left(e^{M|x-x_0|}-1\right).$$

უკანასკნელ უტოლობაში ჩავსვათ $\eta=Y-\Delta y_0$. მივიღებთ:

$$|Y-y-\Delta y_0|<|\Delta y_0|\cdot\left(e^{M|x-x_0|}-1\right).$$

რადგანაც

$$|Y-y|-|\Delta y_0|\leqslant|Y-y-\Delta y_0|,$$

ამიტომ გვექნება:

$$|Y-y|\leqslant|\Delta y_0|e^{M|x-x_0|}. \tag{5.10}$$

აქედან ცხადია, რომ, როცა $\Delta y_0\to 0$, მაშინ $Y(x)=\varphi(x, y_0+\Delta y_0)$ ამონახსნიც მიისწრაფვის $y=\varphi(x, y_0)$ ამონახსნისაკენ.

ახლა ვუჩვენოთ, რომ $\left|\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right|$ შემოსაზღვრული რჩება, როცა $\Delta y_0 \to 0$. მართლაც, შევნიშნოთ. რომ

$$Y(x) = \varphi(x, y_0 + \Delta y_0) = y + \Delta y;$$

აქედან:

$$Y - y = \Delta y.$$

მაშასადამე, (5.10) უტოლობის თანახმად, გვექნება:

$$|\Delta y| \leqslant |\Delta y_0| e^{M|x-x_0|},$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right| \leqslant e^{M|x-x_0|}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ (5.1) დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია x და y ცვლადების მიმართ R მართკუთხედში

$$R: \begin{cases} |x-x_0| \leqslant a, & (x_0, y_0) \in R, \\ |y-y_0| \leqslant b, & R \subset D, \end{cases}$$

და ამ არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial y}$, მაშინ x_0, y_0 საწყისი მნიშვნელობით განსაზღვრული (5.1) განტოლების $y = \varphi(x, y_0)$ ამონახსნისათვის არსებობს y_0 საწყისი მნიშვნელობის მიმართ უწყვეტი წარმოებული $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \neq 0$ და იგი გამოისახება ფორმულით:

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f_y'[x, \varphi(x, y_0)]\,dx}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $y = \varphi(x, y_0)$ ფორმულაში y_0 არის მოცემული ფიქსირებული რიცხვი. შემდეგ y ჩავსვათ (5.1) განტოლებაში, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{5.11}$$

ახლა $y=\varphi(x, y_0)$ დამოკიდებულებაში y_0 საწყის მნიშვნელობას მივცეთ ნაზრდი Δy_0 ისე, რომ ახალი საწყისი მნიშვნელობა $y_0+\Delta y_0$ არ გამოვიდეს R-იდან. აღვნიშნოთ შესაბამისი ზოგადი ამონახსნი Y-ით:

$$Y=\varphi(x, y_0+\Delta y_0).$$

ეს ამონახსნი დააკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dY}{dx}=f(x, Y). \tag{5.12}$$

ცხადია,

$$Y=\varphi(x, y_0+\Delta y_0)=y+\Delta y;$$

ამიტომ (5.12) განტოლება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d\Delta y}{dx}=f(x, y+\Delta y). \tag{5.13}$$

ახლა (5.13) ტოლობას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ (5.11) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\frac{d\Delta y}{dx}=f(x, y+\Delta y)-f(x, y). \tag{5.14}$$

რადგანაც Δy_0 არის x-ისაგან დამოუკიდებელი ფიქსირებული რიცხვი, ამიტომ (5.14) განტოლება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)=\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y_0},$$

ანუ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)=\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta y_0}. \tag{5.15}$$

ახლა (5.15) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის სხვაობის მიმართ გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა სასრული ნაზრდის შესახებ, მაშინ მივიღებთ

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\Delta y\cdot f_y'(x, y+\Theta\Delta y);$$

მაგრამ, რადგანაც $f_y'(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\Delta y\cdot f_y'(x, y)+\varepsilon\Delta y, \tag{5.16}$$

სადაც ε უსასრულოდ მცირეა Δy-თან ერთად.

თუ (5.16) ფორმულას შევიტანთ (5.15) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)=\frac{\Delta y\cdot f_y'(x,\, y)+\varepsilon\,\Delta y}{\Delta y}\quad\frac{\Delta y}{\Delta y_0}.$$

ანუ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)=f_y'(x,\, y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta y_0}+\varepsilon\cdot\frac{\Delta y}{\Delta y_0}.$$

მოვახდინოთ ჩასმა

$$\frac{\Delta y}{\Delta y_0}=z(x).$$

მაშინ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\omega=\varepsilon\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}$, გვექნება:

$$\frac{dz}{dx}=f_y'(x,\, y)\,z(x)+\omega, \tag{5.17}$$

სადაც, ცხადია, $|\omega|$ ნებისმიერად მცირეა, როცა $|\Delta y|$ არის საკმარისად მცირე. მართლაც, ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად,

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right|\leqslant e^{M|x-x_0|}$$

მაშასადამე,

$$|\omega|<\varepsilon\cdot e^{M|x-x_0|},$$

ე. ი. $|\omega|\to 0$, როცა $|\Delta y|\to 0$, მაშასადამე, Δy_0-იც იქნება საკმარისად მცირე აღნიშნული თეორემის თანახმად.

ამგვარად, ახალი $z(x)$ საძიებელი ფუნქციისათვის მივიღეთ (5.17) განტოლება, სადაც $|\omega|$ ნებისმიერად მცირეა. ახლა (5.17) განტოლება შევადაროთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dz}{dx}=f_y'(x,\, y)\,z(x), \tag{5.18}$$

აშკარაა, (5.17) და (5.18) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები აკმაყოფილებს ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ყველა პირობას და ისინი ერთმანეთისაგან ნებისმიერად მცირე ω სიდიდით განსხვავდებიან, მასთან, ახალი საძიებელი $z(x)$ ფუნქცია (5.18) განტოლებაში აკმაყოფილებს საწყის პირობას:

$$z=z(x_0)=z_0,$$

$$z_0=\frac{\Delta y_0}{\Delta y_0}=1.$$

ამავე საწყის პირობას აკმაყოფილებს (6.17) განტოლების ამონახსნი $Z=Z(x)$. ამიტომ აღნიშნული თეორემის თანახმად გვექნება:

$$\lim_{\substack{\Delta y_0\to 0\\ \omega\to 0}} Z(x)=z(x)\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y_0}=\frac{\partial y}{\partial y_0}. \tag{5.19}$$

ახლა ვიპოვოთ $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$-ის გამოსახულება. ამ მიზნით ვიპოვოთ (5.18) განტოლების ამონახსნი, გვექნება:

$$\frac{dz}{z}=f_y'(x, y)\,dx,$$

$$\ln|z|=\int_{x_0}^{x} f_y'(x, y)\,dx+C,$$

როცა $x=x_0$, $\ln|z(x_0)|=C$, $z(x_0)=1$, $C=0$.

მაშასადამე,

$$z(x)=e^{\int_{x_0}^{x} f_y'(x, y)\,dx} \tag{5.20}$$

თუ (5.20) დამოკიდებულებას შევადარებთ (5.19)-ს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=e^{\int_{x_0}^{x} f_y'(x, y)\,dx}$$

ანუ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=e^{\int_{x_0}^{x} f_y'[x, \varphi(x, y_0)]\,dx}$$

ამგვარად, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ იქნება x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქცია მთელს R არეში და $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\neq 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით ადვილად დამტკიცდება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალის არსებობა.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 4. თუ (5.1) დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია R არეში

$$R: \begin{cases} |x-x_0| \leqslant a, \\ |y-y_0| \leqslant b. \end{cases} \qquad R \subset D,$$

უწყვეტია და აქვს y-ის მიმართ უწყვეტი კერძო წარმოებული $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, მაშინ არსებობს (5.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი

$$\Phi(x, y) = C,$$

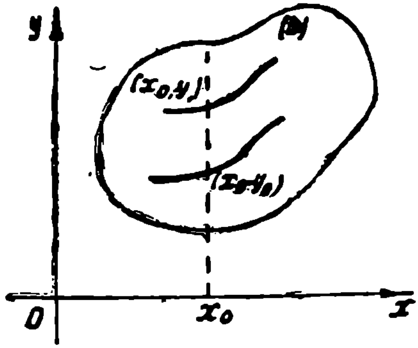
სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, რომელიც უწყვეტად დიფერენცირებადია x და y ცვლადების მიმართ R არეში.

დამტკიცება. ზემოთ ვნახეთ, რომ (5.1) განტოლებას ჩამოყალიბებული თეორემის პირობებში აქვს ერთ y_0 პარამეტრზე დამოკიდებული ზოგადი ამონახსნი.

$$y = \varphi(x, y_0), \qquad (*)$$

სადაც φ წარმოადგენს y_0 პარამეტრის უწყვეტ ფუნქციას.

მეორე მხრივ, წინა პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემის თანახმად, $y = \varphi(x, y_0)$ ზოგადი ამონახსნი y_0 პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციაა და აქვს y_0 პარამეტრის მიმართ უწყვეტი კერძო წარმოებული $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}$, რომელიც x-ის ცვალებადობის



ნახ.. 13

$|x - x_0| \leqslant a$ შუალედში განსხვავებულია ნულისაგან, $\dfrac{\partial y}{\partial y_0} \neq 0$. ამიტომ განსახილველ x_0, y_0 მნიშვნელობათა მახლობლობაში $\left|\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = \varphi'_{y_0}(x_0, y_0) \neq 0$. (*) განტოლებიდან ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ y_0, როგორც x-ისა და y-ის ფუნქცია

$$y_0 = \psi(x, y), \qquad (5.21)$$

სადაც $\psi(x, y)$ არის ერთადერთი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ R არეში, $R \subset D$.

თუ (5.21) ფორმულაში y_0 ცვლად პარამეტრს განვიხილავთ როგორც ნებისმიერ მუდმივს, ე. ი. y_0-ს შევცვლით C ნებისმიერი მუდმივით, მივიღებთ განტოლებას:

$$\psi(x, y) = C,$$

რომელიც აკავშირებს ინტეგრალური წირის ცვლადი წერტილის (x, y) კოორდინატებს, ე. ი. C ნებისმიერი მუდმივის მიმართ ამოხსნილი (5.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნავთ, რომ $\psi\ (x, y)$ წარმოადგენს x დამოკიდებული ცვლადისა და საძიებელი $y\,(x)$ ამონახსნის ფუნქციას. როგორც ამ ფორმულის აგებიდანაც ჩანს, $\psi\,(x, y)$ ფუნქცია იგივურად გახდება რომელიღაც მუდმივის ტოლი, თუ მასში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ (5.1) განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს

$$y = \varphi\,(x, C),$$

ე. ი.

$$\psi\,[x, \varphi\,(x, C)\,] \equiv C.$$

ასე რომ, $\psi\,(x, y)$ ინარჩუნებს გარკვეულ მუდმივ მნიშვნელობას ნებისმიერი კერძო ამონახსნის გასწვრივ; მასთან, ეს მუდმივი მნიშვნელობა სხვადასხვა ამონახსნისათვის, საზოგადოდ, სხვადასხვაა.

ასეთი თვისების $\psi(x, y)$ ფუნქციას (5.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი ეწოდება. ამგვარად, გვაქვს

განსაზღვრა 1. ორი x და y ცვლადის $z = \psi\,(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც იგივურად გადაიქცევა მუდმივად მაშინ, როცა მასში y-ის ნაცვლად ჩასმულია (5.1) განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი $y = \varphi\,(x, C)$, ე. ი.

$$\psi\,[x, \varphi\,(x, C)\,] \equiv C,$$

ეწოდება მოცემული დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი.

თეორემა 5. თუ $\psi\,(x, y)$ არის მოცემული (5.1) განტოლების ინტეგრალი, მაშინ ფუნქცია

$$\Phi\,[x, \psi\,(x, y)\,],$$

სადაც Φ თავისი არგუმენტის ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა, წარმოადგენს, აგრეთვე, (5.1) განტოლების ინტეგრალს.

მართლაც, თუ Φ ფუნქციაში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ (5.1) განტოლების ნებისმიერ კერძო ამონახსნს $y=\varphi(x, C)$, მაშინ $\psi[x, \varphi(x, C)] \equiv C$ და, მაშასადამე, $\Phi[\psi(x, y)]$ ფუნქცია გახდება მუდმივი

$$\Phi[\psi(x, y)] = \Phi[\psi(x, \varphi(x, C))] = \Phi(C) = C.$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს (5.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალთა უსასრულო სიმრავლე. ახლა ვიპოვოთ ანალიზური ნიშანი იმისა, რომ $z=\psi(x, y)$ ფუნქცია წარმოადგენდეს (5.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს. გამოვიდეთ ზემოთ მიღებული განმარტებიდან. ამ განმარტების თანახმად, (5.1) განტოლების ინტეგრალი არის x და y ცვლადების ისეთი ფუნქცია, რომლის სრული წარმოებული x-ით იგივურად ნულის ტოლია. მართლაც,

$$\psi(x, y) \equiv C, \tag{5.22}$$

სადაც y-ის ნაცვლად ჩასმულია (5.1) განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი; მაშინ (5.22)-ის მარცხენა ნაწილი გახდება მხოლოდ x-ის ფუნქცია. თუ ამ უკანასკნელ იგივეობას გავაწარმოებთ x-ით, გვექნება:

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} \quad \frac{dy}{dx} \equiv 0. \tag{5.23}$$

რადგან y არის (5.1) განტოლების ამონახსნი, ამიტომ (5.22) ტოლობაში y' შეგვიძლია შევცვალოთ (5.1) განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომი $f(x, y)$ ფუნქციით: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$; მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y) \equiv 0. \tag{5.24}$$

სადაც y არის x-ის ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს (5.1) განტოლების რომელიმე ამონახსნს. ამ ტოლობაში x და y მნიშვნელობები წარმოადგენს D არის წერტილის კოორდინატებს, რომელშიაც გაივლის განსახილველი ამონახსნი. რადგანაც (5.22) ტოლობის დიფერენცირების შედეგი არ არის დამოკიდებული C-ზე, ამიტომ (5.23) იგივეობა დაკმაყოფილებული იქნება ყოველი (x, y) წერტილისათვის, რომელიც ძევს ნებისმიერ ინტეგრალურ წირზე D არეში.

რადგან არსებობის თეორემის თანახმად, ამ არის ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი, ამიტომ (5.23) იგივეობას ადგილი ექნება ყოველი (x, y) წერტილისათვის D არეში. ამგვარად, $\psi(x, y)$ ფუნქცია იგივურად უნდა აკმაყოფილებდეს (5.24) განტოლებას. მაშასადამე, (5.24) დამოკიდებულება

არის აუცილებელი პირობა იმისა, რომ $\psi(x, y)$ ფუნქცია წარმოადგენდეს (5.1) განტოლების ინტეგრალს.

ახლა დავამტკიცოთ პირიქით, თუ რომელიმე $z=\psi(x, y)$ ფუნქცია იგივურად აკმაყოფილებს (5.24) განტოლებას, მაშინ ეს ფუნქცია არის (5.1) განტოლების ინტეგრალი.

მართლაც, ვთქვათ, რომელიმე $z=\psi(x, y)$ ფუნქცია იგივეობად გადააქცევს (5.24) განტოლებას; მაშინ (5.1) განტოლების ნებისმიერი ინტეგრალური წირის გასწვრივ ადგილი ექნება (5.23) ტოლობას და, მაშასადამე, (5.22) ტოლობასაც. მართლაც, (5.1) განტოლების ნებისმიერი ინტეგრალური წირის გასწვრივ გვექნება:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} y' \equiv 0,$$

საიდანაც

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \equiv 0,$$

ე. ი.

$$\psi(x, y) \equiv C.$$

ამგვარად, (5.1) განტოლების ნებისმიერი ინტეგრალური წირის გასწვრივ $\psi(x, y)$ ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას. მაშასადამე, $z=\psi(x, y)$ ფუნქცია არის (5.1) განტოლების ინტეგრალი. ამგვარად, (5.24) ტოლობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $z=\psi(x, y)$ ფუნქცია წარმოადგენდეს (5.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს.

ცხადია, თუ ცნობილია (5.1) განტოლების $\psi(x, y)$ ინტეგრალი, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად საკმარისია $\psi(x, y)$ ფუნქცია გავუტოლოთ C-ს:

$$\psi(x, y) = C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მაშასადამე, (5.1) განტოლების $\psi(x, y)$ ინტეგრალის ცოდნა ტოლფასია ამ განტოლების ინტეგრებისა.

მაგალითი. განვიხილოთ განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{5.25}$$

ცხადია,

$$z = \psi(x, y) = x^2 + y^2$$

ფუნქცია იქნება (5.25) განტოლების ინტეგრალი. მართლაც,

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}\cdot f(x, y)=2x-2y\cdot\frac{x}{y}\equiv 0,$$

(5.24) განტოლების თანახმად, ამ განტოლების ინტეგრალი იქნება აგრეთვე $\Phi(x^2+y^2)=C$, სადაც Φ ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

(5.25) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$\psi(x, y)=x^2+y^2=C.$$

IV თავი

წარმოებულის მიმართ ამოუხსნელი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. $F(x, y, y')=0$ ზოგადი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

წინა თავებში განვიხილავდით წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს; ახლა განვიხილოთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით:

$$F(x, y, y')=0. \tag{1.1}$$

ამ განტოლების ინტეგრება მრავალ შემთხვევაში გაცილებით რთულია, ვიდრე ზემოთ განხილული სხვადასხვა ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება და ზოგად შემთხვევაში არ შეიძლება დავიყვანოთ კვადრატურებზე. თუმცა, ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში, შესაძლებელია ასეთი სახის განტოლების ინტეგრება.

რომ ვიპოვოთ (1.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, უნდა შევეცადოთ ეს განტოლება ამოვხსნათ y'-ის მიმართ და იგი წარმოვადგინოთ სახით:

$$y'=f(x, y), \tag{1.2}$$

ხოლო შემდეგ მისი ინტეგრება მოვახდინოთ ზემოთ შესწავლილი ერთ-ერთი წესის მიხედვით.

თუ $F(x, y, y')$ აკმაყოფილებს არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის პირობებს, მაშინ არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის თანახმად, (x_0, y_0) წერტილის რომელიღაც მიდამოში იარსებებს ერთი და მხოლოდ ერთი უწყვეტი ფუნქცია $y'=f(x, y)$, რომელიც (x_0, y_0) წერტილში ღებულობს y_0'-ის მნიშვნელობას $y_0'=f(x_0, y_0)$, და ამ წერტილის მიდამოში იგივურად აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას.

მაშასადამე, აღნიშნულ მიდამოში (1.1) განტოლება ტოლფასია y'-ის მიმართ ამოხსნილი (1.2) დიფერენციალური განტოლებისა. არსე-

ბობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, ამ განტოლებას ექნება[1] ზოგადი ინტეგრალი $\varphi(x, y)=C$, რომელიც აგრეთვე დააკმაყოფილებს (1.1) განტოლებასაც. საზოგადოდ, შეიძლება მოხდეს, რომ (x_0, y_0) წყვილ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს y'-ის არა ერთი, არამედ რამდენიმე მნიშვნელობა

$$y_i' \ (i=1, 2, \ldots, m)$$

ისეთი, რომ

$$F(x_0, y_0, y_i')=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

და

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, y_i')}{\partial y_i'} \neq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

მაგრამ, მაშინ არაცხად ფუნქციათა შესახებ თეორემის თანახმად, y_i'-ის ყოველ ასეთ მნიშვნელობას (x_0, y_0) წერტილის რომელიღაც მიდამოში შეესაბამება დიფერენციალური განტოლება

$$y_i'=f_i(x, y) \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

რომელთაც ექნება ზოგადი ინტეგრალი

$$\varphi_i(x, y)=C \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

და რომლებიც დააკმაყოფილებენ (1.1) განტოლებას. ამ შემთხვევაში ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\prod_{i=1}^{m}[\varphi_i(x, y)-C]=\Phi(x, y, C)=0.$$

ცხადია, ამ შემთხვევაში ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის (1.1) განტოლების რამდენიმე ინტეგრალური წირი.

კერძოდ, თუ (1.1) არის კვადრატული განტოლება y' წარმოებულის მიმართ

$$F(x, y, y')=A(x, y)\, y'^2+2B(x, y)\, y'+C(x, y)=0, \tag{1.3}$$

სადაც $A(x, y)\neq 0$, $B(x, y)$ და $C(x, y)$ x და y ცვლადების მოცემული ფუნქციებია xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში, მაშინ, ამოვხსნით რა (1.3) განტოლებას y'-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y'=\frac{-B(x, y)}{A(x, y)} \pm \frac{\sqrt{B^2-AC}}{A(x, y)}.$$

---

[1] თუ $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

D არის იმ (x, y) წერტილებში, რომელთათვის $B^2 - AC > 0$, y' წარმოებულს ექნება ორი სხვადასხვა მნიშვნელობა. ცხადია, ყოველ ასეთ (x, y) წერტილზე გაივლის (1.3) განტოლების ორი ინტეგრალური წირი. D არის იმ წერტილებში, რომელთათვის $B^2(x, y) - A(x, y) \cdot C(x, y) < 0$, y' წარმოებულს არ ექნება ნამდვილი მნიშვნელობა და ასეთ წერტილებზე არ გაივლის არც ერთი ინტეგრალური წირი.

მაგალითი. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$y'^2 - (x + y)\, yy' + xy^3 = 0. \tag{1.4}$$

ეს წარმოადგენს y'-ის მიმართ კვადრატულ განტოლებას. ვიპოვოთ მისი ფესვები, მივიღებთ y'-ის ორ მნიშვნელობას, რომლებიც (1.4) განტოლებას აკმაყოფილებს:

$$y' = xy \quad \text{და} \quad y' = y^2. \tag{1.5}$$

(1.5) დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნებია შესაბამისად:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{და} \quad xy + Cy + 1 = 0,$$

ამიტომ (1.4) განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)(xy + Cy + 1) = 0.$$

ახლა გადავიდეთ იმ ზოგიერთი კერძო შემთხვევის განხილვაზე, როცა $F(x, y, y') = 0$ სახის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ადვილად დაიყვანება კვადრატურებზე.

§ 2. ზოგიერთი $F(x, y, y') = 0$ სახის ინტეგრებადი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც არ შეიცავს ერთ-ერთ ცვლადს x-ს ან y-ს

1. **განტოლება $F(x, y, y') = 0$ ცხადად არ შეიცავს $y(x)$ ფუნქციას.** ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს სახე:

$$F(x, y') = 0. \tag{2.1}$$

ინტეგრება ხდება უშუალოდ კვადრატურებში, თუ განტოლებას ამოვხსნით y'-ის მიმართ.

მართლაც, ამოვხსნით რა (2.1) განტოლებას y'-ის მიმართ, მივიღებთ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad dy = f(x)\, dx.$$

აქედან:

$$y=\int f(x)\,dx+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა. ამით (2.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი უკვე მოძებნილია. მაგრამ, ხშირად ხდება, რომ (2.1) განტოლება უფრო ადვილად ამოიხსნება x-ის მიმართ, ვიდრე y'-ის მიმართ, მაშინ გვექნება:

$$x=f_1(y').\tag{2.2}$$

ამ შემთხვევაში განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება მოიძებნოს პარამეტრული სახით. მართლაც, (2.2) განტოლებაში y' განვიხილოთ როგორც პარამეტრი, მივიღოთ $\frac{dy}{dx}=p$. ასე რომ, განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x=f_1(p),\tag{2.3}$$

სადაც p ახალი დამოუკიდებელი ცვლადია.

ახლა ვიპოვოთ $y(x)$, როგორც p პარამეტრის ფუნქცია; გვაქვს:

$$dy=pdx.$$

აქედან მივიღებთ:

$$y=\int pdx.\tag{2.4}$$

მაგრამ, (2.3) ტოლობიდან გვაქვს:

$$dx=f_1'(p)\,dp;\tag{2.5}$$

ამიტომ (2.4) და (2.5) ტოლობებიდან გვექნება:

$$y=\int p\frac{dx}{dp}\,dp+C=\int pf_1'(p)\,dp+C.$$

ამგვარად, განსახილველ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(p),\\ y&=\int pf_1'(p)\,dp+C \end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

გვაძლევს (2.3) განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით.

თუ შესაძლებელია (2.6)-დან p-ს გამორიცხვა, მიიღება ზოგადი ინტეგრალი ჩვეულებრივი სახით:

$$\Phi(x,y,C)=0.$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sin y' + y' = x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება, ფაქტიურად, არ შეიძლება ამოხსნილ იქნეს y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში, მაგრამ ის უკვე ამოხსნილია x-ის მიმართ:

$$x = \sin p + p, \ p = y' = \frac{dy}{dx}.$$

გვაქვს:

$$dy = pdx = p(\cos p + 1)dp,$$

საიდანაც

$$y = \int p(\cos p + 1)\,dp = \int p\cos p dp + \int pdp =$$

$$= p\sin p + \cos p + \frac{p^2}{2} + C.$$

ამიტომ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin p + p, \\ y &= p\sin p + \cos p + \frac{p^2}{2} + C \end{aligned}\right\}$$

გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით. აქედან p პარამეტრის გამორიცხვა არ შეიძლება.

2. $F(x, y, y')=0$ განტოლება ცხადად არ შეიცავს x დამოკიდებულ ცვლადს. ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს სახე:

$$F(y, y') = 0, \tag{2.7}$$

თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით:

$$\frac{dy}{dx} = f_2(y),$$

ანუ

$$\frac{dy}{f_2(y)} = dx.$$

საიდანაც

$$x = \int \frac{dy}{f_2(y)} + C.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება გვაძლევს (2.7) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

თუ (2.7) განტოლების ამოხსნა y'-ის მიმართ უფრო ძნელია, ვიდრე y-ის მიმართ, მაშინ პირველი შემთხვევის ანალოგიურად გვექნება:

$$y = f_3(p),$$

სადაც

$$p = y'. \tag{2.8}$$

ახლა ვიპოვოთ x, როგორც p პარამეტრის ფუნქცია.

$$dx = \frac{1}{p}\, dy$$

განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$x = \int \frac{1}{p}\, dy + C.$$

მაგრამ (2.8) ტოლობიდან გვაქვს:

$$dy = f_3'(p)\, dp.$$

მაშასადამე,

$$x = \int \frac{1}{p}\, dy + C = \int \frac{1}{p} \cdot \frac{dy}{dy} \cdot dp + C = \int \frac{1}{p} f_3'(p)\, dp + C.$$

ამრიგად, განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{p} f_3'(p)\, dp + C, \\ y &= f_3(p) \end{aligned}\right\}$$

გვაძლევს (2.7) განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით. თუ ამ სისტემიდან შეიძლება p-ს გამორიცხვა, მაშინ ზოგად ინტეგრალს წარმოვადგენთ ჩვეულებრივი სახით:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y = y'^2 + 2y'^3.$$

მოვძებნოთ ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი პარამეტრული სახით. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$y' = p,$$

მაშინ

$$y = p^2 + 2p^3.$$

მაშასადამე,

$$x = \int \frac{1}{p}\, dy + C = \int \frac{1}{p} \frac{dy}{dp}\, dp + C = \int \frac{1}{p}(2p + 6p^2)\, dp + C =$$

$$= \int (2 + 6p)\, dp + C = 2p + 3p^2 + C.$$

ამრიგად, განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} x &= 2p + 3p^2 + C, \\ y &= p^2 + 2p^3 \end{aligned} \right\}$$

გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით.

§ 8. x-ისა და y-ის მიმართ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი

ვთქვათ,

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

არის m რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება x, y-ის მიმართ, ე. ი.

$$F(x, y, y') = x^m F\left(1, \frac{y}{x}, y,\right) = 0,$$

სადაც m ერთგვაროვნების მაჩვენებელია. ამ შემთხვევაში (3.1) განტოლება ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0. \tag{3.2}$$

თუ უკანასკნელი განტოლების ამოხსნა შეიძლება y'-ის მიმართ. მივიღებთ:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ე. ი. ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. თუ $\Phi\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$

განტოლების ამოხსნა $\frac{y}{x}$-ის მიმართ უფრო მოსახერხებელია, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{y}{x} = f(y').$$

ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება ვიპოვოთ პარამეტრის შემოტანის მეთოდით, თუ აღვნიშნავთ $y' = p$, $\frac{y}{x} = z$, სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა. მართლაც, $y = zx$ იგივეობა გავაწარმოოთ, მივიღებთ:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\cdot x + z = x\frac{dz}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + z = xf'(p)\cdot\frac{dp}{dx} + f(p),$$

ანუ

$$\frac{dp}{dx}\cdot x f'(p) = p - f(p)$$

უკანასკნელ განტოლებაში ცვლადთა განცალება გვაძლევს:

$$\frac{d f(p)}{p - f(p)} = \frac{dx}{x}.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს:

$$\int \frac{df(p)}{p - f(p)} + \ln|C| = \ln|x|,$$

საიდანაც გვექნება:

$$x = Ce^{\psi(p)}$$

ამრიგად,

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\psi(p)} \\ y &= xf(p) \end{aligned}\right\}$$

წარმოადგენს (3.2) განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით. ამგვარად, ზოგადი ინტეგრალი მოძებნილია p პარამეტრის ფუნქციის სახით.

მაგალითი. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$xyy'^2 - (x^2 - y^2)y' - xy = 0, \quad x \neq 0.$$

მოცემული განტოლება ერთგვაროვანია x-ისა და y-ის მიმართ. თუ მას გავყოფთ x^2-ზე და ამოვხსნით y'-ის მიმართ, გვექნება:

$$y' = \frac{1 - z^2 \pm (1 + z^2)}{2z},$$

სადაც

$$z = \frac{y}{x},$$

ანუ

$$y_1' = \frac{1}{z}$$

და

$$y_2' = -z.$$

უკანასკნელი განტოლებანი წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებებს განცალებადი ცვლადებით.

§ 4. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებანი

1. განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც წრფივია x და y ცვლადების მიმართ:

$$\varphi_0(y')\,y + \varphi_1(y')\,x + \varphi_2(y') = 0, \tag{4.1}$$

სადაც $\varphi_0(y')$ და $\varphi_1(y')$, $\varphi_2(y')$ y' ცვლადის მოცემული დიფერენცირებადი ფუნქციებია, რომელთაგან $\varphi_0(y') \neq 0$. თუ (4.1) განტოლებას ამოვხსნით y-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y = \psi_1(y')\,x + \psi_2(y'), \tag{4.2}$$

სადაც $\psi_1(y')$ და $\psi_2(y')$ მოცემული დიფერენცირებადი ფუნქციებია. (4.1) ან (4.2) სახის განტოლებას ლაგრანჟის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. ახლა ვიპოვოთ (4.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ამ მიზნით გამოვიყენოთ პარამეტრის შემოტანის მეთოდი.

ვთქვათ,

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

მივიღებთ

$$y = \psi_1(p)\,x + \psi_2(p) \tag{4.3}$$

დამოკიდებულებას, რომელიც აკავშირებს x და y ცვლადებს და p პარამეტრს. აქ ვიგულისხმებთ, რომ $\psi_1(p) \neq p$. ახლა მოვძებნოთ x, რო-

გორც p პარამეტრის ფუნქცია. ამისათვის გავაწარმოოთ (4.3) ტოლობის ორივე ნაწილი x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx} = \psi_1(p) + x\,\psi_1'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi_2'(p)\,\frac{dp}{dx},$$

$$p\,dx = \psi_1(p)\,dx + [x\,\psi_1'(p) + \psi_2'(p)]\,dp,$$

ანუ

$$p - \psi_1(p) = \frac{dp}{dx}\,[x\,\psi_1'(p) + \psi_2'(p)]. \tag{4.4}$$

ან, თუ უკანასკნელი განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $[p - \psi_1(p)]$-ზე (ამასთან, შეიძლება დავკარგოთ ზოგიერთი ამონახსნი), მივიღებთ:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\pi_1(p)}{p - \psi_1(p)}\,x + \frac{\varphi_2'(p)}{p - \psi_1(p)}.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს x-ის მიმართ წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც x განიხილება, როგორც p პარამეტრის უცნობი ფუნქცია. როგორც ცნობილია, წრფივი განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის წრფივი C ნებისმიერი მუდმივის მიმართ:

$$x = H_1(p) + C H_2(p). \tag{4.5}$$

ამგვარად, მივიღეთ მეორე დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს x-ს, p-სა და ნებისმიერ C მუდმივს.

თუ (4.3) ტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მიღებულ გამოსახულებას, მივიღებთ

$$y = Q_1(p) + C\,Q_2(p). \tag{4.6}$$

მაშასადამე, (4.5) და (4.6) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს ლაგრანჟის განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით, სადაც პარამეტრი არის p. (4.5) და (4.6) განტოლებებიდან p პარამეტრის გამორიცხვა მოგვცემს ლაგრანჟის განტოლების ზოგად ინტეგრალს ჩვეულებრივი სახით $F(x, y, C) = 0$. (4.4) განტოლების $[p - \psi_1(p)]$-ზე გაყოფისას შეიძლება დაგვეკარგა ლაგრანჟის განტოლების ზოგიერთი ამონახსნი, სახელდობრ ისინი, რომელთათვისაც

$$p - \psi_1(p) = 0.$$

თუ ამ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვები: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ე. ი.

$$\psi_1(a_i) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

მაშინ p-ს გამორიცხვა სისტემიდან:

$$\left.\begin{array}{l} p = a_i, \\ y = \psi_1(p)\, x + \psi_2(p) \end{array}\right\}$$

მოგვცემს ამონახსნებს, ე. ი. წრფეებს:

$$y = \psi_1(\alpha_i)\, x + \psi(\alpha_i) \quad (i = 1,\ 2, \dots, n), \tag{4.7}$$

რომლებიც იქნება ლაგრანჟის განტოლების ამონახსნები. ცხადია, ეს ამონახსნები არ გამომდინარეობს ზოგადი ინტეგრალიდან და, მაშასადამე, წარმოადგენს (4.3) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებს. მართლაც,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0 = x\, \psi_1{}'(p) + \psi_2{}'(p)\,.$$

მაშასადამე, (4.4) განტოლების თანახმად, კვლავ გვექნება:

$$p - \psi_1(p) = 0.$$

ამგვარად, ლაგრანჟის განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები შეიძლება იყოს მხოლოდ (4.7) წრფეები, სადაც α არის, ($p - \psi_1(p) = 0$ განტოლების ფესვი.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2} \tag{4.8}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი წესი და ვიპოვოთ მოცემული განტოლების ამონახსნი. მივიღოთ $y' = p$, მაშინ (5.8) განტოლების პარამეტრული სახე იქნება:

$$y = 2px + \sqrt{1 + p^2} \tag{4.9}$$

ამ განტოლებაში y და p განვიხილოთ, როგორც x-ის ფუნქციები, და გავაწარმოოთ x-ით, მივიღებთ:

$$p = 2p + 2x\,\frac{dp}{dx} + \frac{2p\,\dfrac{dp}{dx}}{2\sqrt{1 + p^2}}\,.$$

ანუ

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}}\,,$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}\,.$$

ეს განტოლება x უცნობი ფუნქციის მიმართ წარმოადგენს წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით, მივიღებთ:

$$x = e^{-\int \frac{2}{p} dp} \left\{ C - \int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} e^{\int \frac{2}{p} dp} dp \right\},$$

ანუ

$$p^2 x = C - \int \frac{p^2 \, dp}{\sqrt{1+p^2}} . \tag{4.10}$$

ამრიგად, (4.9) და (4.10) განტოლებათა სისტემა მოგვცემს ლაგრანჟის (4.8) განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით, სადაც p პარამეტრია. თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ p პარამეტრს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს ჩვეულებრივი სახით.

2. ახლა განვიხილოთ ეგრეთწოდებული კლეროს განტოლება, რომელიც წარმოადგენს ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევას.

ლაგრანჟის განტოლების ინტეგრებისას ვგულისხმობდით, რომ $p - \psi_1(p) \neq 0$, როცა $\psi_1(p) = p$, $p = y'$, ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის განტოლებას აქვს სახე:

$$y = y' x + \psi(y), \tag{4.11}$$

სადაც $\psi(y')$ არის y'-ის მიმართ არაწრფივი, მოცემული დიფერენცირებადი ფუნქცია. (4.12) განტოლებას კლეროს განტოლება ეწოდება.

ისევე როგორც ლაგრანჟის განტოლების შემთხვევაში, კლეროს განტოლების ინტეგრებისათვის გამოვიყენოთ p პარამეტრის შემოტანის მეთოდი. (4.11) განტოლებაში ჩავსვათ $y' = p$, მივიღებთ დამოკიდებულებას x, y და p-ს შორის:

$$y = px + \psi(p). \tag{4.12}$$

მეორე დამოკიდებულების მისაღებად, რომელიც აკავშირებს p პარამეტრს, x-სა და $\frac{dp}{dx}$-ს, გავაწარმოოთ (4.12) განტოლება x-ით, მივიღებთ:

$$p = p + \frac{dp}{dx} [x + \psi'(p)],$$

ანუ

$$\frac{dp}{dp} [x + \psi'(p)] = 0.$$

უკანასკნელი დაიშლება ორ განტოლებად:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{და} \quad x + \psi'(p) = 0, \tag{4.13}$$

რომელთაგან პირველი p-სათვის გვაძლევს მუდმივ მნიშვნელობას $p = C$. თუ სისტემიდან

$$\left.\begin{aligned} p &= C, \\ y &= px + \psi(p) \end{aligned}\right\}$$

გამოვრიცხავთ p პარამეტრს, მივიღებთ:

$$y = Cx + \psi(C). \tag{4.14}$$

უკანასკნელი წარმოადგენს კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს.

ამგვარად, კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნი გეომეტრიულად წარმოადგენს წრფეთა ოჯახს xOy სიბრტყეზე. (4.14) განტოლებიდან ჩანს, რომ ოჯახის C პარამეტრი არის ამ წრფეთა კუთხური კოეფიციენტი; ამასთან, კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნი მიიღება კვადრატურების გარეშე, თვით ამ განტოლებიდან, თუ მასში y' წარმოებულს შევცვლით ნებისმიერი C მუდმივით.

(4.13) ტოლობებიდან მეორე განტოლება:

$$x + \psi'(p) = 0$$

(4.12) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს კლეროს განტოლების კიდევ ერთ ამონახსნს

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p) \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

პარამეტრული სახით, რომელიც არ გამომდინარეობს ზოგადი ამონახსნიდან. ეს იქნება მისი განსაკუთრებული ამონახსნი, რადგან

$$\frac{\partial F}{\partial p} = x + \psi'(p) = 0,$$

(4.15) ამონახსნი გეომეტრიულად წარმოადგენს რომელიღაც წირს xOy სიბრტყეზე, რომელიც იქნება წრფეთა (1.14) ოჯახის მომვლები. მართლაც, (4.15) სისტემას მივიღებთ, თუ კლეროს განტოლების ზოგად ინტეგრალს გავაწარმოებთ C პარამეტრით:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}\,[y - Cx - \psi(C)] = x + \psi'(C) = 0$$

და შემდეგ გამოვრიცხავთ C პარამეტრს შემდეგი სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + \psi(C), \\ 0 &= x + \psi'(C), \end{aligned}\right\}$$

ანუ

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, C) = y - Cx - \psi(C) = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial C} = x + \psi'(C) = 0. \end{aligned}\right\}$$

უკანასკნელი სისტემა, როგორც ცნობილია, გვაძლევს (4.14) ინტეგრალურ წირთა მომვლებს. მაგრამ, ინტეგრალურ წირთა მომვლები წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ამგვარად, კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნი (4.14) წარმოადგენს წრფეთა ოჯახს, ხოლო მისი განსაკუთრებული ამონახსნი (4.15) — ამ ოჯახის მომვლებს; კლეროს განტოლების ინტეგრალური წირები შედგება რომელიღაც წირისაგან და მისი ყველა შემხები წრფეებისაგან. ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $\psi(y') \neq y'$, ე. ი. $\psi(y_1')$ არ წარმოადგენს y'-ის წრფივ ფუნქციას. თუ $\psi(y')$ არის y-ის წრფივი ფუნქცია, მაშინ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ინტეგრალური წირები წარმოადგენს წრფეთა კონას. ამ შემთხვევაში მომვლები და, მაშასადამე, განსაკუთრებული ამონახსნები არ გვექნება.

შენიშვნა. პრაქტიკულად კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ამ განტოლებაში y' წარმოებული შევცვალოთ ნებისმიერი C მუდმივით:

$$y = Cx + \psi(C).$$

განსაკუთრებული ამონახსნის მოძებნისათვის ზოგადი ამონახსნი

$$y = Cx + \psi(C)$$

უნდა გავაწარმოოთ C-ს მიმართ და C გამოვრიცხოთ სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + \psi(C), \\ 0 &= x + \psi'(C), \end{aligned}\right\}$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y = xy' + y'^2.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება წარმოადგენს კლეროს განტოლებას. მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = Cx + C^2.$$

განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს ვიპოვით შემდეგი სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + C^2, \\ x + 2C &= 0, \end{aligned}\right\}$$

C-ს გამორიცხვით.

$$C = -\frac{x}{2},$$

ამიტომ

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

$y = -\dfrac{x^2}{4}$ იქნება მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი. ის xOy სიბრტყეზე გეომეტრიულად წარმოადგენს პარაბოლას, რომელიც ყოველ თავის წერტილში ეხება ერთ-ერთ წრფეს $y = Cx + C^2$ ოჯახიდან.

მაგალითი 8. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}.$$

რომ მოვძებნოთ განსაკუთრებული ამონახსნი, გამოვრიცხოთ C მუდმივი სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}} &= 0, \\ y &= Cx - a\sqrt{1 + C^2} \end{aligned}\right\}$$

თუ x-ის მნიშვნელობას პირველი განტოლებიდან ჩავსვამთ მეორეში, გვექნება:

$$y = \frac{aC^2}{\sqrt{1 + C^2}} - a\sqrt{1 + C^2} = -\frac{a}{\sqrt{1 + C^2}},$$

ამიტომ

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2C^2}{1 + C^2} + \frac{a^2}{1 + C^2} = a^2,$$

ე. ი. $x^2 + y^2 = a^2$ განსაკუთრებული ამონახსნია.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$x = y x' + x'^2,$$

სადაც

$$\frac{1}{y'} = x',$$

მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$x = Cy + C^2.$$

განსაკუთრებულ ამონახსნს ვიპოვით სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} x &= C y + C^2, \\ y + 2C &= 0 \end{aligned}\right\}$$

C პარამეტრის გამორიცხვით

$$C = -\frac{y}{2},$$

მაშინ

$$x = -\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{4} = -\frac{y^2}{4};$$

ე. ი.

$$4x = -y^2$$

განსაკუთრებული ამონახსნია.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2}.$$

ცხადია, ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი განსაზღვრულია ზოლში: $|y| \leqslant a$. თუ ამ განტოლების ორივე მხრიდან ამოვიღებთ კვადრატულ ფესვს, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}. \tag{4.16}$$

(4.16) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm\, dx. \tag{4.17}$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \pm x + C,$$

აქედან მივიღებთ:

$$(x-C)^2 + y^2 = a^2, \tag{4.18}$$

ე. ი. წრეწირთა ოჯახს, რომელთა ცენტრები ძევს Ox ღერძზე და რადიუსი a-ს ტოლია. ყველა ეს წრე მოთავსებულია ზოლში, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით: $y=a$, $y=-a$; ამასთან ამ ზოლის შიგნით ყოველ (x, y) წერტილზე გაივლის (4.18) ოჯახის ორი წრეწირი. (4.16) განტოლებიდან (4.17) განტოლებაზე გადასვლისათვის, (4.16) განტოლების ორივე მხარე გავყავით $\sqrt{a^2-y^2}$-ზე, რის შედეგად შეიძლება დაგვეკარგა $y=\pm a$ ამონახსნები. უშუალოდ ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $y=\pm a$ ნამდვილად არის მოცემული განტოლების ამონახსნები. გეომეტრიულად ეს ამონახსნები გამოისახება $y=a$ და $y=-a$ წრფეებით, ისინი არ შევლენ (4.18) ზოგადი ამონახსნის ოჯახში და წარმოადგენენ ე. წ. განსაკუთრებულ ამონახსნებს (იხ. თავი IV, § 7).

$y=a$, $y=-a$ ზოლის შიგნით გვაქვს ორი დიფერენციალური განტოლება, რომელთაგან ერთი ეთანადება (+) ნიშანს, ხოლო მეორე (—) ნიშანს.

(4.18) წრეწირები მიიღება აღნიშნული ზოლის შიგნით არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად. ამ თეორემის გამოყენება უკვე არ შეიძლება $y=\pm a$ წრფის წერტილებში, რადგან ამ წერტილებში დარღვეულია არსებობის თეორემის პირობა $f_y'(x, y)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შესახებ. ამიტომ ეს წრფეები წარმოადგენს (4.16) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებს. $y=\pm a$ წრფეების ყოველ წერტილში გაივლის (4.16) განტოლების ორი ამონახსნი, რომელთაგან ერთი მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან C-ს მოცემული მნიშვნელობისათვის, ხოლო მეორე იქნება განსაკუთრებული ამონახსნი, რომელიც Ox ღერძის პარალელურია: $y=a$ ან $x=-a$.

§ 5. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები

ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{5.1}$$

სადაც $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში. ამ არეში ავიღოთ გარკვეული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი. თუ $f(x, y)$ ან $\frac{1}{f(x, y)}$ ფუნქცია უწყვეტია x და y ცვლადების მიმართ და აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული $f_y'(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის რაიმე Δ მიდამოში, $\Delta \subset D$, მაშინ ამონახსნის არსებობის თეორემის თანახმად, ამ Δ მიდამოს ყოველ წერტილზე გაივლის (6.1) განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი; ასეთ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილს (5.1) განტოლების ჩვეულებრივი წერტილი ეწოდება. თუ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის ასეთი Δ მიდამო არ არსებობს, მაშინ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილს (5.1) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილი ჰქვია.

ცხადია, თუ $M_0(x_0, y_0)$ არის (5.1) განტოლების განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ ამ წერტილზე გაივლის ამ განტოლების რამდენიმე ამონახსნი ან არ გაივლის მისი არც ერთი ამონახსნი.

მაგალითად, დიფერენციალური განტოლების:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

განსაკუთრებული წერტილები იქნება, კერძოდ, $M(x, y)=0$ და $N(x, y)=0$ წირების გადაკვეთის წერტილები.

პირველი რიგის (5.1) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ წერტილებს შორის დიდი მნიშვნელობა აქვს ე. წ. განმხოლოებულ განსაკუთრებულ წერტილებს.

განსაზღვრა. D არის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილს ეწოდება (5.1) განტოლების განმხოლოებული განსაკუთრებული წერტილი, თუ მის საკმარისად მცირე მიდამოში არ არსებობს სხვა განსაკუთრებული წერტილი.

მაგალითად, თუ (5.1) განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \tag{5.2}$$

რომლისთვისაც $\Delta = ad - bc \neq 0$, მაშინ შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ $M_0(0, 0)$ წერტილი იქნება (5.2) განტოლების განმხოლოებული განსაკუთრებული წერტილი; ამისათვის საკმარისია გამოვიკვლიოთ (5.2) განტოლების ინტეგრალურ წირთა ყოფაქცევა (0,0) წერტილის მიდამოში[1].

---

[1] განსაკუთრებული წერტილების შესახებ უფრო ვრცლად იხილეთ ვ. სტეპანოვის წიგნი: „Курс дифференциальных уравнений", თავი II, §. 6.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,\ x\neq 0. \tag{5.3}$$

განტოლება გადავწეროთ ასე:

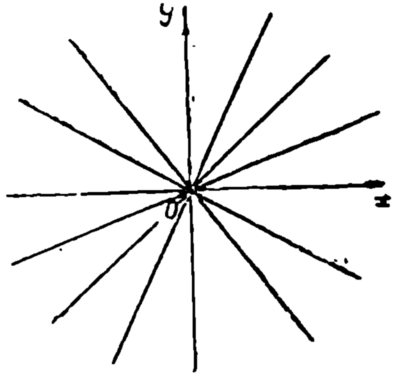
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},\quad x\neq 0. \tag{5.4}$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრება გვაძლევს:

$$y=Cx,\ x\neq 0, \tag{5.5}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. (5.5) წარმოადგენს (5.3) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

Ox ღერძის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები: $y=0$, $x\neq 0$ აგრეთვე წარმოადგენს (5.4) განტოლების ინტეგრალურ წირებს, რომლებიც არ შედის (5.5) ინტეგრალურ წირთა ოჯახში. აქ xOy სიბრტყის ყველა წერტილი, რომელიც არ ძევს Oy ღერძზე, წარმოადგენს ჩვეულებრივ წერტილს.



ნახ. 14

$x=0$, $y\neq 0$ წერტილებისათვის განვიხილავთ განტოლებას:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}\ (y\neq 0). \tag{5.6}$$

ამ განტოლების განხილვიდან გამომდინარეობს, რომ Oy ღერძის ზედა და ქვედა ნაწილები: $x=0$, $y\neq 0$; აგრეთვე წარმოადგენს (5.4) განტოლების ინტეგრალურ წირებს, რომლებიც არ შედის (5.5) ინტეგრალურ წირთა ოჯახში. ყველა წერტილი, რომლებიც არ ძევს Ox ღერძზე აგრეთვე, წარმოადგენს ჩვეულებრივ წერტილებს. მაშასადამე, წერტილი (0, 0) წარმოადგენს (5.4) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ წერტილს, რადგან (0, 0) წერტილში დარღვეულია $f(x, y)$ და $f_y'(x, y)$ ფუნქციების უწყვეტობის პირობა. ამგვარად, (6.4) განტოლების ინტეგრალური წირები წარმოადგენს არა კოორდინატთა სათავეზე გამავალ $y=Cx$ წრფეებს, არამედ ნახევარწრფეთა ოჯახს: $y=Cx$, $x\neq 0$, რომლებიც ეკვრის თავისი მიმართულებებით კოორდინატთა სათავეს. ამ წერტილში ველის ინტეგრალური წირების მიმართულება განუსაზღვრელია (ნახ. 14).

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y' x + y = 0. \tag{5.7}$$

ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება ტოლფერდა ჰიპერბოლების ოჯახი:

$$y = \frac{C}{x},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. მართლაც,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

ანუ

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

ანუ

$$y = \frac{C}{x},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. აქ (0,0) წერტილი (5.7) განტოლების განსაკუთრებული წერტილია, რადგან ამ წერტილში არ გადის მოცემული განტოლების არც ერთი კერძო ამონახსნი, ე. ი. განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $x=0$, $y=0$.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \tag{5.8}$$

ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$y = (C + x)^2,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა.

ზემონახევარი სიბრტყის $y>0$ წერტილები იქნება (5.8) განტოლების ჩვეულებრივი წერტილები. გამონაკლისს წარმოადგენს წერტილე-

ბი, რომლებიც ძევს Ox ღერძზე. Ox ღერძის ყოველი წერტილი (5.8) განტოლების განსაკუთრებული წერტილია, რადგანაც ამ წერტილებში $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y-ით შემოუსაზღვრელია

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left.\frac{1}{\sqrt{y}}\right|_{y=0} = \infty.$$

ამ შემთხვევაში განსაკუთრებული წერტილები არაგანმხოლოებული წერტილებია. ასეთ წირს (Ox ღერძს), რომლის ყოველი წერტილი (5.8) განტოლების განსაკუთრებული წერტილია, ამ განტოლების **განსაკუთრებული წირი** ეწოდება.

ამგვარად, პრაქტიკულად რომ ვიპოვოთ (5.1) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები ან განსაკუთრებული წირები, ამისათვის უნდა ვიპოვოთ D არის იმ (x_0, y_0) წერტილთა სიმრავლე, რომლებშიც დარღვეულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის კოშის თეორემის პირობები $f(xy)$ ფუნქციის უწყვეტობისა და მისი y-ის მიმართ $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულის შემოსაზღვრულობის შესახებ (ლიფშიცის პირობა), რადგან მხოლოდ ასეთ წერტილებს შორის შეიძლება ვეძიოთ განსაკუთრებული წერტილები. ამასთან, ცხადია, ყოველი ასეთი წერტილი არ არის განსაკუთრებული წერტილი, რადგან კოშის თეორემის პირობები წარმოადგენს საკმარის, მაგრამ არა აუცილებელ პირობებს (6.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობისათვის.

1. **არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირველი პირობის დარღვევა.** განსაკუთრებით ხშირად გვხვდება (5.1) სახის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებშიც x და y ცვლადები შედის სრულიად ტოლუფლებიანად. ამ შემთხვევაში განსაკუთრებული წერტილები უნდა ვეძიოთ იმ წერტილებს შორის, რომლებშიც ერთდროულად $f(x, y)$ და $\frac{1}{f(x, y)}$ ფუნქციები წყვეტილია, ე. ი. დარღვეულია კოშის თეორემის პირველი პირობა. ასე, მაგალითად, თუ (5.1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{5.9}$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}; \tag{5.9'}$$

$\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ და $\dfrac{N(x, y)}{M(x, y)}$ ფუნქციები იქნება ერთდროულად წყვეტილი D არის მხოლოდ იმ (x_0, y_0) წერტილებში, რომლებშიც ერთდროულად

$$M(x_0, y_0) = 0, \; N(x_0, y_0) = 0 \qquad (5.10)$$

და თანაც არ არსებობს ზღვრები:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{და} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)},$$

ამ შემთხვევაში (x_0, y_0) წერტილები წარმოადგენს (5.9) ან (5.9′) განტოლების განსაკუთრებულ წერტილებს. ამგვარად, (5.9) ან (5.9′) განტოლების განსაკუთრებული წერტილების კოორდინატები მოიძებნება განტოლებათა სისტემიდან:

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 0 \\ N(x, y) &= 0. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

ასე, მაგალითად, ზემოთ განხილულ მეორე მაგალითში მოცემული (5.7) განტოლებისა და

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილები: $f(x, y) = -\dfrac{y}{x}$ და $\dfrac{1}{f(x, y)} = -\dfrac{x}{y}$ წყვეტილი ფუნქციებია $(x=0, y=0)$ წერტილში. აქ $(0, 0)$ წერტილი — კოორდინატთა სათავე (5.7) განტოლების განმხოლოებული განსაკუთრებული წერტილია. ამ წერტილში არ გადის მოცემული განტოლების არც ერთი ინტეგრალური წირი:

$$y = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ტოლფერდა ჰიპერბოლების ოჯახიდან. როცა $C = 0$, ოთხი ინტეგრალური წირი: Ox ღერძის ორი ნახევარი წრფე $y = 0$, $x < 0$, და $y = 0$, $x > 0$, და Oy ღერძის ორი ნახევარი წრფე: $x = 0$, $y < 0$, $x = 0$, $y > 0$, რაგინდ ახლოს იქნებიან $(0, 0)$ განსაკუთრებულ წერტილებთან. როცა $C \neq 0$, მაშინ ყოველი სხვა ინტეგრალური წირი — ტოლფერდა ჰიპერბოლები საკმაოდ უახლოვდება $(0, 0)$ განსაკუთრებულ წერტილს, შემდეგ მისგან იწყებს დაშორებას, რადგან, როცა $C \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0} |y| = \infty$$

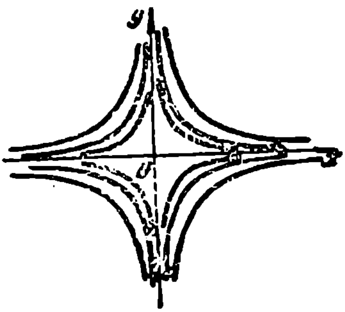
და ამ შემთხვევაში არც ერთი ინტეგრალური წირი არ გაივლის კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 15).

მაგალითი 4. განვსაზღვროთ

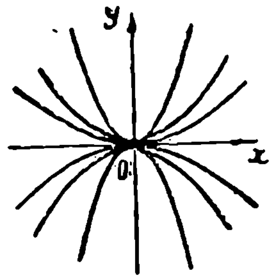
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \tag{5.12}$$

განტოლების განსაკუთრებული წერტილის ხასიათი და ინტეგრალურ წირთა ყოფაქცევა.

ამოხსნა. ისე, როგორც წინა მაგალითებში, (5.12) განტოლება ეკუთვნის (5.9) განტოლების ტიპს, რომელშიც x და y ცვლადები შე-



ნახ. 15



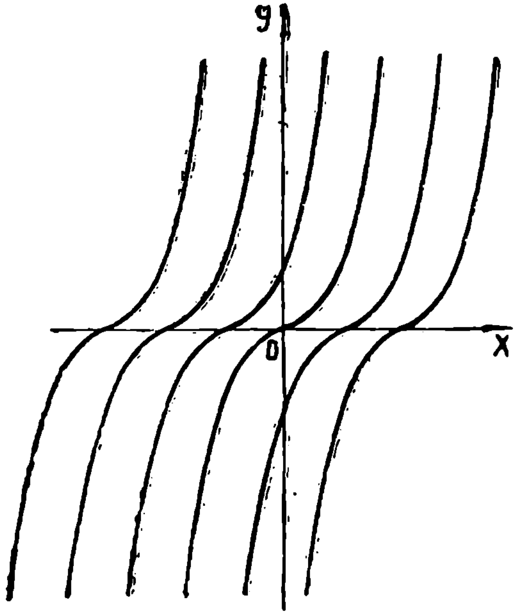
ნახ. 16

დის სრულიად ტოლუფლებიანად, თანაც მოცემული (6.12) განტოლების და

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} \tag{5.13}$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილები: $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ და $\frac{1}{f(x, y)} = \frac{x}{2y}$ ფუნქციები წყვეტილია $x = 0$, $y = 0$ წერტილში, ამასთან, როცა $x \to 0$, $y \to 0$, მაშინ $f(x, y)$ და $\frac{1}{f(x, y)}$ ფუნქციებს არა აქვს ზღვარი. ამიტომ, ისე როგორც წინა მაგალითში, (0, 0) წერტილი (5.12) განტოლების განსაკუთრებული წერტილია. (5.12) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ $y = Cx^2$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია; ინტეგრალური წირები პარაბოლებია, რომელთა წვეროები კოორდინატთა სათავეშია, ამასთან, ყველა ინტეგრალური წირი ერთმანეთს ეხება კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 16).

ცხადია, Ox და Oy ღერძები წარმოადგენს ინტეგრალურ წირებს ყველგან, გარდა (0, 0) წერტილისა, სადაც (5.12) განტოლება არ განსაზღვრავს არავითარ მიმართულებას; ამაში ადვილად დავრწმუნდებით (5.12) და (5.13) განტოლებებში $x=0$ და $y=0$ უშუალო ჩასმით.



ნახ. 17

მაგალითი 5. განვსაზღვროთ განტოლების:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y} \tag{5.14}$$

განსაკუთრებული წერტილები.

ამოხსნა. (5.14) განტოლების მარჯვენა ნაწილი $f(x, y)=\frac{1}{y}$ წყვეტილი ფუნქციაა $y=0$ წრფის (ღერძის) წერტილებში. ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სათავე — (0, 0) წერტილი განტოლების განსაკუთრებული წერტილია. ახლა, თუ x-ს განვიხილავთ როგორც y დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციას და (5.14) განტოლებას გადავწერთ სახით:

$$\frac{dx}{dy}=y, \tag{5.15}$$

მაშინ (0, 0) წერტილი ამ განტოლებისათვის არ იქნება განსაკუთრებული წერტილი, რადგან ამ წერტილში უკანასკნელი განტოლების მარჯვენა ნაწილი $\frac{1}{f(x, y)} = y$ დააკმაყოფილებს არსებობის თეორემის პირველ პირობას, $x = 0$, $y = 0$ საწყისი პირობებით. მართლაც, (5.15) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\frac{y^2}{2} = x + C$$

პარაბოლათა ოჯახს; მოცემულ საწყის პირობებში $x = 0$, $y = 0$, (5.15) განტოლების კერძო ამონახსნია $x = \frac{y^2}{2}$ პარაბოლა, რადგან, როცა $x = 0$, $y = 0$, მაშინ $C = 0$.

ამგვარად, მოცემულ საწყის პირობებში: $x=0$, $y=0$, (0, 0) წერტილში გაივლის (5.15) განტოლების ერთი ინტეგრალური მრუდი და ამიტომ არ აქვს აზრი, ეს წერტილი ჩავთვალოთ განსაკუთრებულ წერტილად.

2. არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის მეორე პირობის (ლიფშიცის პირობა) დარღვევა. კოშის თეორემის მეორე—ლიფშიცის პირობა, ანუ პირობა $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულის შემოსაზღვრულობის შესახებ, ხშირად ირღვევა იმ (x_0, y_0) წერტილებში, რომლებშიც

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial f}{\partial y} = \infty \quad \text{ან} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \quad \left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \right).$$

განტოლება $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$, საზოგადოდ, განსაზღვრავს რომელიღაც წირს xOy სიბრტყეზე, რომლის წერტილებში შეიძლება დარღვეული იყოს ამონახსნის ერთადერთობა. თუ ამ წირის წერტილებში დარღვეულია ერთადერთობა, მაშინ ეს წირი იქნება განსაკუთრებული წირი, და თუ ამას გარდა, ეს წირი (5.1) განტოლებისათვის აღმოჩნდება ინტეგრალური, მაშინ მივიღებთ განსაკუთრებულ ინტეგრალურ წირს.

შესაძლებელია, რომ $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0$ წირს გააჩნდეს რამდენიმე შტო, მაშინ

ყოველი შტოსათვის უნდა გადავწყვიტოთ საკითხი იმის შესახებ, იქნება თუ არა ეს შტო განსაკუთრებული წირი, და იქნება თუ არა ის განსაკუთრებული ინტეგრალური წირი.

მაგალითი 6. განვსაზღვროთ

$$\frac{dy}{dx}\sqrt[3]{y^2} \tag{5.16}$$

განტოლებისათვის განსაკუთრებული წერტილის ხასიათი და ინტეგრალური წირების ყოფაქცევა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების მარჯვენა ნაწილი $f(x, y)=\sqrt[3]{y^2}$ განსაზღვრული და უწყვეტია მთელს xOy სიბრტყეზე, მაგრამ მისი კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial y}$ უწყვეტია ყველგან, გარდა $y=0$ წრფის წერტილებისა, რომელიც $f_y'(x, y)=\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ ფუნქციისათვის წარმოადგენს მეორე გვარის წყვეტის წირს. ეს წერტილები (5.16) განტოლების განსაკუთრებული წერტილებია.

(5.16) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$y=\frac{1}{27}(x+C)^3$, სადაც C — ნებისმიერი მუდმივია. ამგვარად, ინტეგრალური წირები კუბური პარაბოლებია; $y=0$ წრფე (5.16) განტოლებისათვის განსაკუთრებული ინტეგრალური წირია, რადგან $y=0$ ამონახსნი აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას; ამასთან, (5.16) განტოლების ყოველ (x_0, O) განსაკუთრებულ წერტილში დარღვეულია ამონახსნის ერთადერთობა, რადგანაც ამ წერტილში გაივლის ორი მაინც ინტეგრალური წირი: $y=0$ წრფე და კუბური პარაბოლა $y=\frac{1}{27}(x+C_0)^3$ (ნახ. 17), სადაც $C_0=-x_0$. ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიული ადგილი $y=0$ წრფე წარმოადგენს განსაკუთრებულ ინტეგრალურ წირს.

მაგალითი 7. აქვს თუ არა

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+1 \tag{5.17}$$

განტოლებას განსაკუთრებული წერტილები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც წინა მაგალითში, მოცემული განტოლების მარჯვენა ნაწილი $f(x, y)=\sqrt[3]{(y-x)^2}+1$ უწყვეტია მთელს xOy სიბრ-

ტყეზე, მაგრამ მისი კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$ უწყვეტია ყველგან, გარდა $y=x$ წრფის წერტილებისა, რომელიც $f_y'(x, y)$ ფუნქციისათვის წარმოადგენს მეორე გვარის წყვეტის წირს.

წირის $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$, ანუ $y=x$ წრფის წერტილები (5.17) განტოლების განსაკუთრებული წერტილებია.

მაგრამ, ამ შემთხვევაში ფუნქცია $y=x$ აკმაყოფილებს (5.17) მოცემულ განტოლებას. დაგვრჩენია გამოვიკვლიოთ, დარღვეულია თუ არა ამ წრფის წერტილებში ამონახსნის ერთადერთობა.

ცვლადების შეცვლით: $z=y-x$, სადაც z არის ახალი საძიებელი ფუნქცია, მოცემული დიფერენციალური განტოლება დაიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით:

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt[3]{z^2}$$

ისე, როგორც წინა მაგალითში, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y-x=\frac{1}{27}(x+C)^3.$$

ამ ოჯახის წირები გადის $y=x$ ამონახსნის გრაფიკის წერტილებში.

მაშასადამე, $y=x$ წრფის ყოველ წერტილში დარღვეულია ამონახსნის ერთადერთობის პირობა და $y=x$ ფუნქცია წარმოადგენს (5.17) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ეს მაგალითიც გვიჩვენებს, რომ $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ განტოლების მარჯვენა ნაწილის მარტო უწყვეტობა არაა საკმარისი ამონახსნის ერთადერთობისათვის; თუმცა, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ამონახსნის არსებობა ამასთან უზრუნველყოფილია.

მაგალითი 8. განვსაზღვროთ, აქვს თუ არა

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases} y\ln y, & y>0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

განტოლებას განსაკუთრებული წერტილები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების მარჯვენა ნაწილი $f(x, y)=y\ln y$, $y>0$, უწყვეტია მთელს xoy სიბრტყეზე, მაგრამ მისი კერძო წარმოებუ-

ლი $f_y'(x, y) = \ln y + 1$, $y > 0$, არის წყვეტილი ფუნქცია $y = 0$ წრფის წერტილებში. რადგანაც, როცა $y \to 0$, $y > 0$, მაშინ

$$\lim_{y \to 0} f_y'(x, y) = -\infty.$$

მიუხედავად ამისა, მოცემულ განტოლებას არ აქვს განსაკუთრებული წერტილებისაგან შედგენილი ამონახსნი, რადგან მისი განსაკუთრებული წერტილებისაგან შედგენილი წირები, ე. ი. e^{ce^x}, სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა, არ კვეთს $y = 0$ წრფეს. თუმცა $y = 0$ წრფის წერტილებში დარღვეულია ლიფშიცის პირობა, მაგრამ xOy სიბრტყის ყველა წერტილი მოცემული განტოლების ჩვეულებრივი წერტილია. ეს გამოწვეულია იმით, რომ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობები წარმოადგენს მხოლოდ საკმარის, მაგრამ არა აუცილებელ პირობებს.

§ 6. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები

ზემოთ ვნახეთ, რომ არსებობს ისეთი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აქვს ამონახსნი, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან, ე. წ. განსაკუთრებული ამონახსნები. ასე, მაგალითად, კლეროს განტოლებას აქვს ამონახსნი, რომელიც არ მიიღება მისი ზოგადი ამონახსნიდან და სხვ.

ამ პარაგრაფში დაწვრილებით გამოვიკვლევთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნების არსებობის საკითხს და მათ კავშირს ზოგად ინტეგრალთან.

ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{6.1}$$

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია რომელიღაც D არეში და ამ არეში აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial y}$, მაშინ. კოშის თეორემის თანახმად, D არის ყოველ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში გაივლის ერთადერთი ინტეგრალური წირი; ეს წირი, როგორც კერძო ამონახსნი, შედის (6.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალით განსაზღვრულ ერთპარამეტრიან წირთა ოჯახში:

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{6.2}$$

ცხადია, (6.2) ოჯახის ყოველი ინტეგრალური წირი წარმოადგენს (6.1) განტოლების კერძო ამონახსნს და, ერთადერთობის თეორემის

თანახმად, არავითარი სხვა ამონახსნი, კერძოდ, ამონახსნი, რომელიც არ მიიღება (6.2) განტოლებიდან, ამ შემთხვევაში არ წარმოგვიდგება. მაგრამ (6.1) განტოლებას, გარდა იმ ამონახსნებისა, რომლებსაც შეიცავს მისი ზოგადი ინტეგრალი (6.2), შეიძლება გააჩნდეს ამონახსნები, რომლებიც არ მიიღება ზოგადიდან C პარამეტრის არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის.

განსაზღვრა 1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

ამონახსნს, რომელიც არ მიიღება მისი (6.2) ზოგადი ინტეგრალიდან C ნებისმიერი მუდმივის არც ერთი მნიშვნელობისათვის, ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი ეწოდება.

გეომეტრიულად, (6.1) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს ეთანადება ინტეგრალური წირი, რომელიც არ შედის ამ განტოლების (6.2) ზოგადი ამონახსნით განსაზღვრულ ინტეგრალურ წირთა ოჯახში, ე. ი. განსაკუთრებული ამონახსნი არ წარმოადგენს კერძო ამონახსნს.

ცხადია, განსაკუთრებული ამონახსნები უნდა ვეძიოთ D არის იმ (x, y) წერტილებში, რომლებშიც დარღვეულია კოშის თეორემის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები ან, კერძოდ, პირობა $f(x, y)$ ფუნქციის $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულის შემოსაზღვრულობის შესახებ; D არის ასეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი შეიძლება წარმოადგენდეს განსაკუთრებული ამონახსნის გრაფიკს, ე. ი. განსაკუთრებულ ინტეგრალურ წირს, რომლის ყოველ $M(x, y)$ წერტილში დარღვეულია ერთადერთობის პირობა.

ამგვარად, განსაკუთრებული ინტეგრალური წირის ყოველი $M(x, y)$ წერტილისათვის შეიძლება ვიპოვოთ კიდევ ერთი მაინც ისეთი ინტეგრალური წირი (6.2) ოჯახიდან, რომელიც გადის ამ წერტილში და განსაკუთრებული ამონახსნის გრაფიკთან აქვს საერთო მხები. აქედან გამომდინარეობს განსაკუთრებული ამონახსნის მეორე განსაზღვრაც.

განსაზღვრა 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

განსაკუთრებული ამონახსნი ეწოდება ისეთ ამონახსნს, რომლის ყოველ წერტილში დარღვეულია ამონახსნის ერთადერთობის პირობა.

ცხადია, განსაკუთრებული ამონახსნის ზემოთ მოყვანილი 1-ლი და მე-2 განსაზღვრები ეკვივალენტურია.

შემდეგ, თუ $y=\varphi(x)$ არის (6.1) განტოლების რომელიმე ამონახსნი და, ამასთან, მისი ყოველი წერტილი არის (6.1) განტოლების განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ $y=\varphi(x)$ იქნება (6.1) განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

შენიშვნა. კოშის თეორემიდან ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ შეიძლება გამოვიყვანოთ მხოლოდ აუცილებელი პირობები განსაკუთრებული ამონახსნის არსებობისათვის. იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, სადაც არ სრულდება ლიფშიცის პირობა, თუ ის არის წირი, შეიძლება წარმოადგენდეს განსაკუთრებულ ამონახსნს. მაგრამ, შეიძლება არც წარმოადგენდეს მას, რადგან ეს წირი არ არის განტოლების ამონახსნი. ასე, მაგალითად,

$$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{3}}+1$$

დიფერენციალური განტოლებისათვის $y=0$ წარმოადგენს წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, სადაც არ სრულდება ლიფშიცის პირობა, მაგრამ ეს წრფე არ არის ამ განტოლების ამონახსნი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1-y^2}. \tag{6.3}$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

განტოლების მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას $-1\leqslant y\leqslant 1$ შუალედში.

(6.3) განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx.$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრება გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს სახით:

$$\arcsin y=x+C,$$

ანუ

$$y=\sin(x+C), \tag{6.4}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

(6.3) განტოლებას აქვს განსაკუთრებული ამონახსნები $y=1$ და $y=-1$, რომლებიც არ მიიღება (6.4) ტოლობიდან ნებისმიერი C მუდმივის არც ერთი მნიშვნელობისათვის, ამასთან, ცხადია, განსაკუთრებული ამონახსნების ყოველ წერტილში დარღვეულია ერთადერთობის პირობა (ლიფშიცის პირობა); მართლაც,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\pm 1}=-\left.\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right|_{y=\pm 1}=\infty.$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}, \quad y>0. \tag{6.5}$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y=(x+C)^2, \tag{6.6}$$

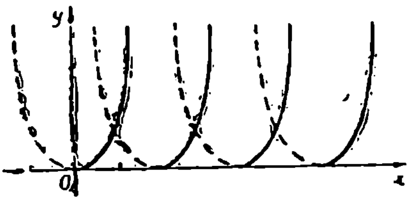
სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. (6.5) ტოლობიდან გვაქვს:

$$x+C>0,$$

ანუ

$$x>-C.$$

მაშასადამე, $y=(x+C)^2$ ფუნქციები, სადაც $x\geqslant -C$, წარმოადგენს (6.5) განტოლების ზოგად ინტეგრალს მთელ ზედა ნახევარსიბრტყეში $-\infty<x<+\infty$, $0\leqslant y<\infty$. ამგვარად, (6.5) განტოლების ინტეგრალურ წირთა ოჯახი იქნება პარაბოლათა (6.6) ოჯახის მარჯვენა შტოები, რადგან მხოლოდ მათ გასწვრივ $\frac{dy}{dx}>0$. ცხადია, (6.5) განტოლების ამონახსნი იქნება, აგრეთვე, $y=0$ (Ox ღერძი).



ნახ. 18

$y=0$ წარმოადგენს (6.5) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს, რადგანაც ის არ მიიღება (6.6) ზოგადი ინტეგრალიდან ნებისმიერი C მუდმივის არც ერთი მნიშვნელობისათვის (ნახ. 18), ამასთან ცხადია, $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნის ყოველ წერტილში დარღვეული იქნება ერთადერთობის (ლიფშიცის) პირობა. მართლაც,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0}=2\cdot\left.\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|_{y=0}=\infty.$$

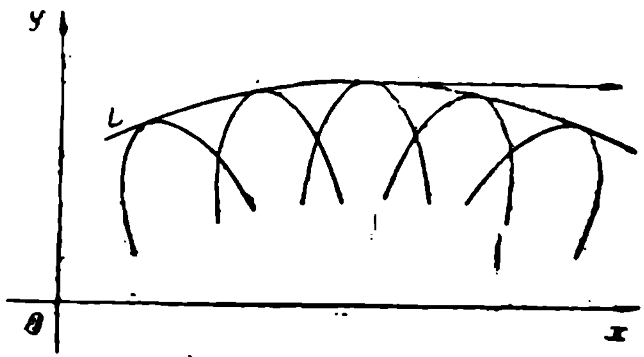
§ 7. წირთა ოჯახის მომვლები

განსაკუთრებული ამონახსნის ცნებასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახის მომვლების ცნება.

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი სახის განტოლება:

$$\Phi(x, y, C)] = 0, \tag{7.1}$$

სადაც x და y დეკარტის ცვლადი კოორდინატებია, ხოლო C პარამეტრი, რომელსაც შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობა $-\infty < C < \infty$ შუალედში. პარამეტრის ყოველი მოცემული მნიშვნელობისათვის (7.1) განტოლება xOy სიბრტყეზე განსაზღვრავს რომელიღაც წირს. ამგვარად, (7.1) განტოლება წარმოადგენს ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახს. შეიძლება არსებობდეს ისეთი წირი, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ იგი მხებია ოჯახის ყოველი წირისა მის ყოველ წერტილში.



ნახ. 19

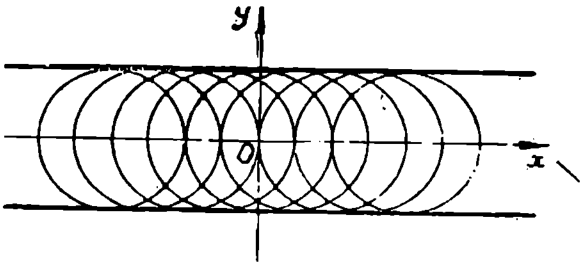
განსაზღვრა. ერთპარამეტრიანი წირთა (7.1) ოჯახის მომვლები ეწოდება ისეთ L წირს, რომელიც ყოველ თავის წერტილში ეხება (7.1) ოჯახის ერთ-ერთ წირს და მთლიანად შედგენილია შეხების ამ წერტილებისაგან, ამასთან, L წირის სხვადასხვა წერტილში მას ეხება მოცემული ოჯახის სხვადასხვა წირი, ე. ი. ყოველ თავის წერტილში აქვს (7.1) ოჯახის წირთან საერთო მხები, რომელიც ამავე წერტილში გადის (ნახ. 19).

ასე მაგალითად, განვიხილოთ იმ წრეწირთა ოჯახი, რომელთა ცენტრი ფიქსირებულია, ხოლო ცენტრები Ox ღერძზეა:

$$(x-C)^2+y^2=R^2.$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ამ ოჯახის მომვლები Ox ღერძის პარალელური $y=-R$ წრფეებია (ნახ. 20), რომლებიც მთლიანად შედგენილია (7 1) ოჯახის წრეწირებთან შეხების წერტილებით. მაშასადამე, განმარტების თანახმად, ეს ორი წრფე წარმოადგენს მოცემულ წრეწირთა ოჯახის მომვლებს.

მსგავსად ზემოთ განხილული მაგალითისა, განსაკუთრებული ამონახსნები: $y=1$ და $y=-1$ წარმოადგენს $y=\sin(x+C)$ სინუსოიდების ოჯახის მომვლებს, რომელთა ყოველ წერტილში დარღვეულია ერთადერთობის პირობა. ასე, მაგალითად, $y=1$ მომვლების ყოველ წერტილში გაივლის ორი ინტეგრალური წირი, თვით $y=1$ მომვლები და მისი შემხები $y=\sin(x+C)$ სინუსოიდის ოჯახიდან.



ნახ. 20

მეორე მაგალითში განსაკუთრებული ამონახსნი $y=0$ წარმოადგენს $y=(x+C)^2$, $x>-C$, პარაბოლათა ოჯახის მომვლებს.

წირთა ოჯახის მომვლების განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია ერთ C პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალურ წირთა ოჯახი $\Phi(x, y, C)=0$, რომლებიც ფარავენ xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეს ისე, რომ D-ს ყოველ წერტილზე გაივლის ერთი წირი მაინც ამ ოჯახიდან. უნდა ვიპოვოთ მოცემულ წირთა ოჯახის მომვლების განტოლება. ვთქვათ,

$$\Phi(x, y, C)=0 \qquad (7.2)$$

ინტეგრალურ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები, ვიპოვოთ მისი განტოლება. ვიგულისხმებთ, რომ $\Phi(x, y, C)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებულები ყველა თავისი არგუმენტის მიმართ. რადგანაც მომვლები

ყოველი თავის $M(x, y)$ წერტილში ეხება (7.2) ოჯახის რომელიმე L_c წირს[1], ამიტომ C პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება მომვლების გარკვეული წერტილი. მაშასადამე, მომვლების წერტილის მიმდინარე კოორდინატები (x, y) წარმოადგენს C პარამეტრის ფუნქციებს. ამიტომ საძიებელი მომვლების განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ პარამეტრული სახით:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(C), \\ y &= \varphi_1(C). \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

ამგვარად, C პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება მომვლების გარკვეული (x, y) წერტილი, რომელშიც C პარამეტრის შესაბამისი მნიშვნელობის წირი (7.2) ოჯახიდან ეხება მომვლებს.

მაშასადამე, რომ ვიპოვოთ მოცემული (7.2) ოჯახის მომვლები, საკმარისია ვიპოვოთ $\varphi(C)$ და $\varphi_1(C)$ ფუნქციები. ამ მიზნით შევნიშნავთ, რომ C-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მომვლების შესაბამი წერტილი ძევს, აგრეთვე, (7.2) ოჯახის ერთ-ერთ წირზე და, მაშასადამე, აკმაყოფილებს ამ წირის განტოლებას, ე. ი.

$$\Phi[\varphi(C),\ \varphi_1(C),\ C] \equiv 0. \tag{7.4}$$

ახლა ვიპოვოთ მეორე განტოლება, რომელსაც მომვლების წერტილები აკმაყოფილებს.

(7.4) იგივეობა გავაწარმოოთ C პარამეტრით, მივიღებთ:

$$\Phi_x'[\varphi(C),\ \varphi_1(C),\ C]\,\varphi_c' + \Phi_y'[\varphi(C),\ \varphi_1(C),\ C]\,\varphi_{1c}' + \\ + \Phi_c'[\varphi(C),\ \varphi_1(C),\ C] \equiv 0. \tag{7.5}$$

შემდეგ ვისარგებლოთ იმ პირობით, რომ (7.2) ოჯახის რომელიმე წირისა და მომვლების საერთო შეხების $[\varphi(C), \varphi_1(C)]$ წერტილში მომვლების მხების კუთხური კოეფიციენტი k ეტოლება (7.2) ოჯახის შესაბამისი წირის k_1 კუთხურ კოეფიციენტს ამ წერტილში. (7.2) ოჯახის რომელიმე წირის მხების კუთხურ k_1 კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ (7.2) განტოლებიდან. არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით:

$$\frac{dy}{dx} = k_1 = -\frac{\Phi_x'[\varphi(C),\ \varphi_1(C),\ C]}{\Phi_y'[\varphi(C),\ \varphi_1(C),\ C]},$$

სადაც C გარკვეული ფიქსირებული რიცხვია.

---

[1] ნიშანი C-მიუთითებს C პარამეტრის იმ მნიშვნელობაზე, რომლისათვის ამ წირის განტოლება მიიღება (7.2) ზოგადი განტოლებიდან.

შეხების $M[\varphi(C), \varphi_1(C)]$ წერტილში მომვლების მხების კუთხური k კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის საკმარისია გავაწარმოოთ მომვლების პარამეტრული განტოლებანი C პარამეტრით, გვექნება:

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_1'(C)}{\varphi'(C)} .$$

მაშასადამე,

$$\frac{\varphi_1'(C)}{\varphi'(C)} = -\frac{\Phi_x'[\varphi(C), \varphi_1(C), C]}{\Phi_y'[\varphi(C), \varphi_1(C), C]} ,$$

ანუ

$$\Phi_x'[\varphi(C), \varphi_1(C), C]\cdot\varphi'(C) + \Phi_y'[\varphi(C), \varphi_1(C), C]\cdot\varphi_1'(C) = 0 \qquad (7.6)$$

ამრიგად, $\varphi(C)$ და $\varphi_1(C)$ ფუნქციები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდეს (7.5) და (7.6) პირობებს.

ამ პირობების შედარებიდან ვიპოვით, რომ $x=\varphi(C)$ და $y=\varphi_1(C)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\Phi_c'[\varphi(C), \varphi_1(C), C] \equiv 0. \qquad (7.7)$$

მაშასადამე, მომვლების ნებისმიერი M წერტილის x და y კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას $\Phi(x, y, C)=0$, რადგან, M წერტილი ძევს (7.2) ოჯახის წირზე; ამასთან ერთად, მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს $\Phi_c'(x, y, C) = 0$ განტოლებასაც. ამიტომ მომვლების ნებისმიერი M წერტილის x და y კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, y, C) = 0,\\ &\Phi_c'(x, y, C) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

თუ ამ სისტემას ამოვხსნით x-ისა და y-ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ მომვლების განტოლებას პარამეტრული სახით.

პირიქით, თუ (7.8) სისტემიდან გამოვრიცხავთ C პარამეტრს, მივიღებთ მომვლების განტოლებას მართკუთხა კოორდინატებში

$$F(x, y) = 0,$$

რომელიც აკავშირებს მომვლების ნებისმიერი M წერტილის x და y კოორდინატებს.

შენიშვნა. მომვლების განტოლების გამოყვანის პროცესში ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $\frac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0$. თუ (7.2) ოჯახიდან ზოგიერთი წირისათ-

ვის მომვლებთან შეხების წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$, ხოლო $\frac{\partial \Phi}{\partial x}\neq 0$, მაშინ მომვლების განტოლების მისაღებად ოჯახის წირებისა და მომვლებისათვის უნდა ვიპოვოთ $\frac{dx}{dy}$-ის გამოსახულებანი, რომლებსაც ერთმანეთს გავუტოლებთ და ხელახლა მივიღებთ მომვლების (7.8) განტოლებას.

თუ ოჯახის ყოველ წირს აქვს განსაკუთრებული წერტილი, ე. ი. წერტილი, სადაც $\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0$ და $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$, მაშინ შეიძლება ვილაპარაკოთ განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიულ ადგილზე; ადვილად შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ამ გეომეტრიული ადგილის პარამეტრული განტოლება:

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi_2(C),\\ y&=\varphi_3(C),\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

თუ პარამეტრად ავირჩევთ ნებისმიერი C მუდმივის შესაბამის მნიშვნელობას.

შევნიშნავთ, რომ (7.9) განტოლებანი იგივურად აკმაყოფილებს C მუდმივის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის განტოლებას, ასე რომ

$$\Phi[\varphi_2(C), \varphi_3(C), C]\equiv 0. \tag{7.10}$$

ამიტომ $\Phi(x, y, C)$ ფუნქციის სრული წარმოებულები C-ს მიმართ იგივურად ტოლი იქნება ნულისა:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dC}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dC}+\frac{\partial \Phi}{\partial C}\equiv 0. \tag{7.11}$$

(7.11) განტოლება დაკმაყოფილდება განსაკუთრებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილის ყოველ წერტილში. რადგან ყოველ განსაკუთრებულ წერტილში

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0, \tag{7.12}$$

ამიტომ (7.11) და (7.12) განტოლებათა შედარება გვაძლევს:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C}=0.$$

ამგვარად, განსაკუთრებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი აკმაყოფილებს განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

(7.13) სისტემა წარმოადგენს განტოლებათა იმავე სისტემას, რომელსაც აკმაყოფილებდა მომვლები. მაშასადამე, (7.8) განტოლებები განსაზღვრავენ ან (7.2) ოჯახის მომვლებს, ან ამ ოჯახის წირთა განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიულ ადგილს.

ამგვარად, (7.8) სისტემიდან C პარამეტრის გამორიცხვის შემდეგ, მიღებული წირის განტოლება დამატებით უნდა იქნეს გამორკვეული, რათა დადგენილ იქნეს, ის წარმოადგენს მომვლებს, თუ განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიულ ადგილს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ერთ C პარამეტრზე დამოკიდებული წრეწირთა ოჯახის

$$F(x, y, C) = (Cx - C)^2 + y^2 - R^2 = 0 \tag{7.14}$$

მომვლები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გავაწარმოოთ ოჯახის განტოლება C-ს მიმართ, მივიღებთ:

$$2(x - C) = 0. \tag{7.15}$$

თუ C-ს გამოვრიცხავთ (8.14) და (7.15) განტოლებებიდან, მივიღებთ:

$$y^2 - R^2 = 0,$$

ანუ

$$y = \pm R.$$

გეომეტრიული მოსაზრებითაც ცხადია, რომ Ox ღერძის პარალელური $y = \pm R$ წრფეთა წყვილი წარმოადგენს (7.14) ოჯახის მომვლებს.

მაგალითი 2. მოვძებნოთ მომვლები ნახევრად კუბურ პარაბოლათა შემდეგი ოჯახისა:

$$F(x, y) = y^3 - (x - C)^2 = 0. \tag{7.16}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლების C-ს მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ:

$$2(x - C) = 0. \tag{7.17}$$

ახლა (7.16) და (7.17) განტოლებებიდან C პარამეტრის გამორიცხვა გვაძლევს:

$$y = 0.$$

Ox ღერძი წარმოადგენს განსაკუთრებული წერტილების გეომეტ-რიულ ადგილს, რადგანაც ნახევრად კუბურ პარაბოლებს, რომლებიც შედის ოჯახში, აქვთ განსაკუთრებული წერტილები Ox ღერძზე.

მართლაც, მოვძებნოთ (7.16) წირის განსაკუთრებული წერტილები, ფიქსირებული C-სათვის. გაწარმოება x-ითა და y-ით გვაძლევს:

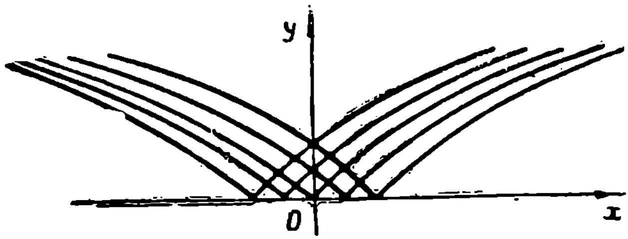
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(x - C) = 0, \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 = 0. \tag{7.19}$$

თუ (7.16), (7.18) და (7.19) განტოლებებს ამოვხსნით, მივიღებთ განსაკუთრებული წერტილის კოორდინატებს:

$$x = C, \; y = 0.$$

ამგვარად, მოცემული ოჯახის ყოველ წირს აქვს განსაკუთრებული წერტილი Ox ღერძზე. თუ C პარამეტრს მივცემთ ყველა მნიშვნელობას $-\infty < C < +\infty$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ განსაკუთრებული წერტილები შეავსებს მთელ Ox ღერძს (ნახ. 21).



ნახ. 21

მაგალითი 3. მოვძებნოთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლები, რომელნიც კოორდინატთა ღერძებთან მუდმივი ფართობის მქონე სამკუთხედს ქმნიან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წრფის განტოლება ავიღოთ ღერძთა მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \tag{7.20}$$

წრფის მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობი იქნება:

$$S = \frac{1}{2} pq.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, S უნდა იყოს მუდმივი, ე. ი.

$$pq = k = \text{const},$$

აქედან

$$q = \frac{k}{p}\,. \tag{7.21}$$

თუ (7.21) ტოლობას შევიტანთ (7.20) ტოლობაში, გვექნება:

$$\frac{x}{p} + \frac{yp}{k} = 1. \tag{7.22}$$

სადაც p პარამეტრია.

ამგვარად, მივიღეთ ერთ p პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ოჯახი.

(7.22) განტოლება გავაწარმოოთ p პარამეტრის მიმართ, გვექნება:

$$-\frac{x}{p^2} + \frac{y}{k} = 0,$$

აქედან:

$$p = \pm\sqrt{\frac{kx}{y}}\,. \tag{7.23}$$

თუ (7.22) და (7.23) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ p-ს, მივიღებთ მომვლების განტოლებას:

$$xy = \frac{4}{k}\,. \tag{7.24}$$

ამგვარად, (7.22) წრფეთა ოჯახის მომვლებს წარმოადგენს (7.24) ტოლფერდა ჰიპერბოლა.

მაგალითი 4. მოვძებნოთ მომვლები წრფეთა შემდეგი ოჯახისა:

$$F(x, y) = y - Cx - C^2 = 0. \tag{7.25}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: განტოლების C-ს მიმართ გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$x + 2C = 0. \tag{7.26}$$

თუ (7.25) და (7.26) განტოლებებიდან C პარამეტრს გამოვრიცხავთ, გვექნება:

$$y = -\frac{x^2}{4}\,. \tag{7.27}$$

ამგვარად, მოცემულ წრფეთა ოჯახის მომვლები არის პარაბოლა და წრფეთა ოჯახი წარმოადგენს (7.27) პარაბოლის მხებთა ოჯახს.

მაგალითი 5. განვიხილოთ წრეწირთა ოჯახი:

$$\Phi(x, y, C) = x^2 + (y + C)^2 - 1 = 0.$$

ეს ოჯახი ფარავს მთელ ზოლს $x = \pm 1$ წრფეებს შორის, რომლებიც წარმოადგენს ამ ოჯახის მომვლებ წირებს.

მართლაც, თუ Φ-ს წარმოებულს C პარამეტრის მიმართ გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ:

$$\Phi_C'(x, y, C) = 2(y + C) = 0,$$

საიდანაც $C = -y$. თუ C-ს ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ ოჯახის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x = \pm 1.$$

მაშასადამე, ამ წრფეებიდან თითოეული წარმოადგენს მოცემულ წრეწირთა ოჯახის მომვლებს.

მაგალითი 6. განვიხილოთ წირთა ოჯახი:

$$y = C^3 x^2 - 2C^2 x + C,$$

სადაც $C \neq 0$. განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$y - C^3 \left(x - \frac{1}{C}\right)^2 = 0.$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს პარაბოლების ოჯახს, რომელთა ღერძი პარალელურია Oy ღერძისა, ხოლო წვეროები მდებარეობს Ox ღერძზე. ცხადია, მათთვის Ox ღერძი წარმოადგენს მომვლებს, თუმცა ის იმავე დროს ეკუთვნის განსახილავ ოჯახს და მიიღება ამ ოჯახიდან, როცა $C = 0$.

§ 8. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნების მოძებნის წესები

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{8.1}$$

ვთქვათ,

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{8.2}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, არის (8.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და ვიგულისხმოთ, რომ ინტეგრალურ წირთა (8.2) ოჯახს აქვს მომვლები. ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 1. თუ (8.1) დიფერენციალური განტოლების (8.2) ზოგადი ინტეგრალით გამოსახულ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები, მაშინ ეს მომვლები წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ, F არის წირთა (8.2) ოჯახის მომვლები. ამ მომვლებზე ავიღოთ წერტილი $M(x, y)$ და ამ წერტილში მომვლების MT მხების კუთხური კოეფიციენტი აღვნიშნოთ y_1'-ით. ცხადია, $M(x, y)$ წერტილზე გაივლის რომელიღაც L_C წირი (8.2) ოჯახიდან და, რადგან L_C არის ინტეგრალური წირი, ამიტომ მის ყოველ $M(x, y)$ წერტილში მხების y' დახრილობა და ამ წერტილის კოორდინატები x და y დააკმაყოფილებს (8.1) განტოლებას. ამგვარად, თუ y'-ით აღვნიშნავთ L_C წირის მხების კუთხურ კოეფიციენტს მის $M(x, y)$ წერტილში, მაშინ $F(x, y, y') = 0$. რადგანაც L მომვლების $M(x, y)$ წერტილში L და L_C წირებს საერთო MT მხები აქვს, ამიტომ $y' = y_1'$. მაშასადამე, მომვლების ყოველი წერტილის x აბსცისა, y ორდინატი და კუთხური კოეფიციენტი y' დააკმაყოფილებს იმავე (8.1) განტოლებას, ე. ი. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$F(x, y, y_1') = 0. \tag{8.3}$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება მართებულია L მომვლების ყოველი წერტილისათვის. მაშასადამე, მომვლები წარმოადგენს (8.1) განტოლების ინტეგრალურ წირს. მაგრამ, საზოგადოდ, მომვლები არ წარმოადგენს (8.2) ოჯახის წირს, ამიტომ მისი განტოლება არ შეიძლება მიღებულ იქნეს (8.2) ზოგადი ინტეგრალიდან ნებისმიერი C მუდმივის არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის.

(8.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან C-ს არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის და გრაფიკად აქვს (8.2) ოჯახის მომვლები, წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს. მაშასადამე, (8.1) განტოლების ინტეგრალურ წირთა ოჯახის მომვლები ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნია. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1, განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y^2(1 + y'^2) = R^2,$$

ანუ

$$\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \pm \frac{dx}{dy} = \pm \frac{1}{y'}$$

ვიპოვოთ მისი განსაკუთრებული ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ზემოთ ვნახეთ, რომ მოცემულ განტოლებას აქვს ზოგადი ინტეგრალი:

$$(x-C)^2+y^2=R^2, \tag{8.4}$$

რომელიც წარმოადგენს R-რადიუსიან იმ წრეწირთა ოჯახს, რომლის ცენტრებია $(C, 0)$. რადგანაც C მუდმივს შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობანი, ამიტომ, როცა C განუწყვეტლივ იცვლება, (8.4) წრეწირთა ცენტრები უწყვეტად შეავსებს Ox ღერძს. $-R<y<+R$ ზოლის ყოველ (x, y) წერტილში გაივლის ამ წერტილში გადამკვეთი ორი წრეწირი (8.4) ოჯახისა, ანუ ორი ინტეგრალური წირი. ცხადია, ეს ხდება იმის გამო, რომ მოცემული განტოლება განსაზღვრავს xOy სიბრტყეზე ისეთ მიმართულებათა ველს, რომ $-R<y<R$ ზოლის ყოველ წერტილს შეესაბამება ორი მიმართულება, რომლებიც წარმოადგენს ამ წერტილში გადამკვეთი ორი წრეწირის მხებ წრფეებს. წრეწირთა (8.4) ოჯახის მომვლები იქნება $y=\pm R$ წრფეები, რომლებიც შედგენილია ამ ოჯახის წრეწირებთან შეხების წერტილებისაგან და, მაშასადამე, განმარტების თანახმად, წარმოადგენს მოცემული განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნის გრაფიკს. ცხადია, ის არ მიიღება (8.4) ზოგადი ინტეგრალიდან ნებისმიერი C მუდმივის არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის. ეს გამოწვეულია იმით, რომ მოცემული განტოლების მარცხენა ნაწილის წარმოებული y-ით შემოუსაზღვრელია $y=\pm R$ წრფეებზე. რადგან $y=\pm R$ ფუნქციები აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას, ამიტომ იგი წარმოადგენს განსაკუთრებულ ამონახსნს.

მაგალითი 2. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y' = 2+\sqrt{y-2x} = f(x, y).$$

ვიპოვოთ მისი განსაკუთრებული ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია,

$$f_y' = \frac{1}{2\sqrt{y-2x}}$$

შემოუსაზღვრელია $y=2x$ წრფეზე, თუმცა $y=2x$ არის განტოლების ამონახსნი. მაშასადამე, $y=2x$ წრფე შეიძლება წარმოადგენდეს მოცემული განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს. რომ გავიგოთ, იქნება თუ არა ნამდვილად ეს ამონახსნი განსაკუთრებული, წინასწარ უნდა მოვძებნოთ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ეს განტოლება წარმოადგენს ლაგრანჟის დიფერენციალურ განტოლებას. მართლაც,

$$y = 2x+(y'-2)^2.$$

ამოვხსნათ ის ცნობილი წესით. მივიღოთ $y'=p$, გვექნება:

$$y = 2x + (p-2)^2. \tag{*}$$

უკანასკნელი ტოლობა გავაწარმოოთ x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 2(p-2)\frac{dp}{dx}, \quad p-2 \neq 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{dp} = 2,$$

$$x = 2p + C.$$

თუ x-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ y-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$y = 2(2p + C) + (p-2)^2$$

ანუ

$$y = 4p + 2C + (p-2)^2,$$

რომელიც $x=2p+C$ განტოლებასთან ერთად გვაძლევს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2p + C, \\ y &= 4p + 2C + (p-2)^2. \end{aligned}\right\}$$

თუ ამ განტოლებიდან გამოვრიცხავთ p-ს, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს ჩვეულებრივი სახით:

$$y = 2x + \left(\frac{x}{2} + C\right)^2.$$

ამგვარად, ინტეგრალურ წირებს წარმოადგენს პარაბოლები. $y=2x$ წრფის ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის მიღებული ოჯახის პარაბოლა, რომელიც შეესაბამება $C = -\frac{x_0^2}{2}$ მნიშვნელობას.

მაშასადამე, $y=2x$ ამონახსნი წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

მოყვანილი მაგალითები გვიჩვენებს, რომ, თუ დიფერენციალური განტოლება მოცემულია სახით: $y'=f(x, y)$ და $y=\varphi(x)$ არის ფუნქცია, რომლის გრაფიკის ყოველ წერტილში დარღვეულია $f(x, y)$ ფუნქციის y-ის მიმართ ზრდის შემოსაზღვრულობის პირობა, მაშინ, რომ გავიგოთ, წარმოადგენს თუ არა $y=\varphi(x)$ ფუნქცია მოცემული განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს, საჭიროა შემოწმდეს:

1. აკმაყოფილებს თუ არა $y=\varphi(x)$ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას;

2. გაივლის თუ არა $y=\varphi(x)$ წირის წერტილებზე დიფერენციალური განტოლების სხვა ინტეგრალური წირი.

განსაკუთრებული ამონახსნის მოძებნის ორი წესი. ახლა გამოვიკვლიოთ ის კავშირი, რომელიც არსებობს დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებსა და მის ზოგად ინტეგრალს შორის. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით:

$$F(x, y, y')=0. \tag{8.5}$$

ვთქვათ,

$$\Phi(x, y, C)=0 \tag{8.6}$$

არის (8.5) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

არსებობს ორი წესი დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნების მოძებნისა იმის მიხედვით, გამოვალთ $F(x, y, y')=0$ განტოლებიდან, თუ $\Phi(x, y, C)=0$ ზოგადი ინტეგრალიდან. განვიხილოთ პირველი წესი.

გამოვიდეთ (8.5) განტოლებიდან. ვთქვათ, განტოლების მარცხენა მხარეში შემავალი $F(x, y, y')$ ფუნქცია უწყვეტია და აქვს $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ უწყვეტი კერძო წარმოებულები x, y, y' ცვლადების მიმართ რომელიღაც D არეში.

თუ წერტილი $(x_0, y_0, y_0')\in D$ და ამ წერტილისათვის:

$$F(x_0, y_0, y_0')=0,$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'}\neq 0,$$

მაშინ, არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის თანახმად, არსებობს მხოლოდ ერთი ფუნქცია

$$y'=f(x, y)^{1} \tag{8.7}$$

---

[1] შეიძლება მოხდეს, რომ (x_0, y_0) წერტილს ეთანადებოდეს y'-ის არა ერთი, არამედ რამდენიმე მნიშვნელობა:

$$y_i'\ (i=1, 2, \ldots, n),\ F(x, y, y_i')=0.$$

თუ, ამასთან, $F_{y_i'}(x, y, y_i')\neq 0$, მაშინ არაცხად ფუნქციათა შესახებ თეორემის თანახმად, ყოველ ასეთ y_i' მნიშვნელობას (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში ეთანადება დიფერენციალური განტოლება:

$$y'=f_i(x, y)\quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

აქ განვიხილავთ განსაკუთრებული ამონახსნის არსებობის პირობებს, მხოლოდ ერთი განტოლებისათვის.

რომელიც ცალსახა და უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე D_0 მიდამოში, იგივეურად აკმაყოფილებს (8.5) განტოლებას და (x_0, y_0) წერტილზე ღებულობს y_0' მნიშვნელობას; ამასთან $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში ექნება უწყვეტი კერძო წარმოებულები:

$$f_x'(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0,$$

$$f_y'(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0.$$

ამგვარად, D_0 მიდამოს შიგნით გვექნება (8.7) დიფერენციალური განტოლება; ამასთან, ამ მიდამოში, $f_y'(x, y)$ ფუნქცია იქნება შემოსაზღვრული. მაშასადამე, თუ $F(x, y, y')$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობებს, მაშინ D_0 არეში (8.5) განტოლებას არ ექნება განსაკუთრებული ამონახსნები, რადგანაც დაკმაყოფილებული იქნება ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობა.

აქამდე არ ვიხილავდით ყველა იმ (x, y, y') წერტილს, რომლებიც ძევს $F(x, y, y') = 0$ ზედაპირზე და აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{8.8}$$

ახლა, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $F(x, y, y')$ ფუნქცია აკმაყოფილებს აგრეთვე (8.8) პირობას, მაშინ, გარდა იმ ამონახსნებისა, რომლებიც შედიან $\Phi(x, y, C) = 0$ ზოგად ინტეგრალში, შეიძლება არსებობდეს განსაკუთრებული ამონახსნები, რომელთათვის დარღვეულია პირობა:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \neq 0,$$

ე. ი. ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, p) = 0, \\ &\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \; y' = p. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

ცხადია, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში დარღვეული იქნება ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობა $f_y'(x, y)$ ფუნქ-

ციის შემოსაზღვრულობის შესახებ (ლიფშიცის პირობა). თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\dfrac{\partial F_p'}{\partial p} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2} \neq 0$, მაშინ $\dfrac{\partial F}{\partial p} = \psi(x, y, p) = 0$ განტოლება ზოგჯერ შეიძლება ამოვხსნათ p-ს მიმართ, მივიღებთ $p = p(x, y)$ (ან რამდენიმე ასეთ განტოლებას). თუ ამ $p(x, y)$ ფუნქციას შევიტანთ $F(x, y, p) = 0$ განტოლებაში, მივიღებთ წირის განტოლებას:

$$F[x, y, p(x, y)] = D(x, y) = 0. \tag{8.10}$$

წირს, რომელიც გამოისახება $D(x, y) = 0$ განტოლებით, (8.5) დიფერენციალური განტოლების დ ი ს კ რ ი მ ი ნ ა ნ ტ უ ლ ი წ ი რ ი ეწოდება. ზოგად შემთხვევაში (8.10) განტოლება შეიძლება გამოსახავდეს არა ერთ წირს, არამედ რამდენიმეს, რომლებიც ძევს ერთიმეორისაგან განცალკევებულად xOy სიბრტყეში.

თუ დისკრიმინანტული განტოლებით $D(x, y) = 0$ განსაზღვრული $y = \varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (8.5) დიფერენციალურ განტოლებას, მასთან, შესაძლოა, ეს ფუნქცია არც კი შედიოდეს (8.5) განტოლების ზოგად ინტეგრალში, მაშინ ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, საზოგადოდ, იგი უნდა წარმოადგენდეს (8.5) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს. ამგვარად, (8.5) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები შეიძლება იყოს მხოლოდ $y = \varphi(x)$ ფუნქციები, რომლებიც დისკრიმინანტული წირის (8.10) განტოლებას აკმაყოფილებენ[1].

განსაკუთრებული ამონახსნების მოძებნა $D(x, y) = 0$ დისკრიმინანტის მეშვეობით არ მოითხოვს განსახილველი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალის ცოდნას. აქ ზოგადი ინტეგრალი ვამოიყენება მხოლოდ შემოწმებისათვის, რომ მიღებული ამონახსნი მართლაც წარმოადგენს თუ არა განსაკუთრებულ ამონახსნს. ამგვარად, ჩვენ გვაქვს განსაკუთრებული ამონახსნის მოძებნის შემდეგი წ ე ს ი:

თუ მოცემულია განტოლება:

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{8.11}$$

---

[1] გამონაკლის შემთხვევაში $y = \varphi(x)$ ფუნქცია არ აკმაყოფილებს (8.5) დიფერენციალურ განტოლებას, ე. ი. არ წარმოადგენს (8.5) განტოლების ამონახსნს. ამიტომ ასეთ შემთხვევებში საჭიროა დამატებით შემოწმება იმისა, ხომ არ წარმოადგენს $y = \varphi(x)$ დისკრიმინანტული წირი ინტეგრალურ წირთა ოჯახის გ ა ნ ს ა კ უ თ რ ე ბ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ს გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ა დ გ ი ლ ს.

სადაც მარცხენა ნაწილი p-ს მიმართ არის მრავალწევრი, მაშინ შევად-
გენთ განტოლებას:

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0; \tag{8.11'}$$

(8.11) და (8.11′) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ p პარამეტრს, მი-
ვიღებთ დისკრიმინანტული წირის განტოლებას:

$$D(x, y) = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელი განტოლებით განსაზღვრული $y = \varphi(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს (8.5) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, მაშინ ის განსაკუთრებული ამონახსნია.

განტოლებათა (8.9) სისტემა გვაძლევს განსაკუთრებული ამონახსნის პარამეტრულ წარმოდგენას.

მაგალითი 8. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y = y'^2 + 2y'^3.$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ $y' = p$ და განტოლება გავაწარმოოთ p-ს მიმართ; მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} F(y, p) &= y - p^2 - 2p^3 = 0, \\ \frac{\partial F(y, p)}{dp} &= -2p - 6p^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

თუ ამ სისტემის მეორე განტოლებას ამოვხსნით p-ს მიმართ, მივიღებთ: $p = 0$ და $p = -\dfrac{1}{3}$. თუ p-ს ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ სისტემის პირველ განტოლებაში, შესაბამისად მივიღებთ ორი დისკრიმინანტული წირის განტოლებებს: $y = 0$ და $y = \dfrac{1}{27}$. ამგვარად, დისკრიმინანტული წირი იშლება ორ წრფედ; $y = 0$ წრფე აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას და, მაშასადამე, იგი უნდა წარმოადგენდეს ამ განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს. მართლაც, მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი პარამეტრული სახით იქნება:

$$y = p^2 + 2p^3,$$

$$x = \int \frac{1}{p}(2p + 6p^2)\,dp = C + 2p + 3p^2.$$

ცხადია, $y=0$ ამონახსნი არ მიიღება ამ ზოგადი ინტეგრალიდან C-ს არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის; მასთან, რადგან ის აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას, ამიტომ წარმოადგენს ამ განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს. $y=\frac{1}{27}$ ამონახსნი არ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

მაგალითი 4. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y'^2-9y^3=0. \tag{8.12}$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} F(y,\,p)&=p^2-9y^3=0,\\ \frac{\partial F}{\partial p}&=2p=0. \end{aligned}\right\}$$

ამ სისტემიდან p-ს გამორიცხვა გვაძლევს $y=0$ დისკრიმინანტულ წირს. $y=0$ აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას. მაშასადამე, შესაძლოა ის წარმოადგენდეს (8.12) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს. მოვძებნოთ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი:

$$y'=\pm 3y^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}=3dx,$$

საიდანაც:

$$-2y^{-\frac{1}{2}}=3x+C,$$

ანუ

$$y=\frac{4}{(3x+C)^2}. \tag{8.13}$$

როგორც ვხედავთ, $y=0$ ამონახსნი არ მიიღება (8.13) ზოგადი ინტეგრალიდან C-ს არავითარი კერძო მნიშვნელობისათვის. მიუხედავად ამისა, იგი არ წარმოადგენს მოცემული განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს, რადგან (9.13) წირები არ გადაკვეთს $y=0$ წრფეს.

მაგალითი 5. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$F(x,\,y,\,y')=y'^2-(x+y)\,yy'+x\,y^3=0. \tag{8.14}$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები

ა მ ო ხ ს ნ ა. (8.14) განტოლება წარმოადგენს კვადრატულ განტოლებას y'-ის მიმართ. მოვძებნოთ მისი ფესვები; მივიღებთ:

$$y' = xy$$

და

$$y' = y^2.$$

მიღებულ დიფერენციალურ განტოლებებს ექნება ზოგადი ინტეგრალები შესაბამისად:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

და

$$xy + Cy + 1 = 0;$$

ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)(xy + Cy + 1) = 0.$$

შევადგინოთ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, p) = p^2 - (x + y)\,yp + xy^3 = 0, \; y' = p, \\ &\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 2p - (x + y)\,y = 0. \end{aligned}\right\}$$

თუ ამ სისტემის მეორე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ p-ს და შევიტანთ პირველ განტოლებაში, მივიღებთ დისკრიმინანტული წირის განტოლებას:

$$D(x, y) = \frac{(x + y)^2 y^2}{4} - \frac{(x + y)^2 y^2}{2} + xy^3 = -\frac{(x - y)^2 y^2}{4} = 0.$$

უკანასკნელიდან გვაქვს: $y = 0$ და $y = x$. ამგვარად, დისკრიმინანტული წირი შედგება ორი წრფისაგან: $y = x$, $y = 0$. პირველი წრფე არ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. მეორე $y = 0$ წრფე წარმოადგენს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს, რომელიც იმყოფება ზოგად ინტეგრალში და შეესაბამება ნებისმიერი მუდმივის $C = 0$ მნიშვნელობას.

ა ხ ლ ა   გ ა ნ ვ ი ხ ი ლ ო თ   პ ი რ ვ ე ლ ი   რ ი გ ი ს   დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი   გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს   გ ა ნ ს ა კ უ თ რ ე ბ უ ლ ი   ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი ს   მ ო ძ ე ბ ნ ი ს   მ ე ო რ ე   წ ე ს ი.

ვიპოვოთ ის კავშირი, რომელიც არსებობს განსაკუთრებულ ამონახსნსა და განტოლების ზოგად ინტეგრალს შორის.

ვთქვათ.

$$\Phi(x, y, C)=0 \tag{8.6}$$

არის (8.5) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. იგი გამოსახავს ინტეგრალურ წირთა ოჯახს xOy სიბრტყეზე. როგორც ვნახეთ, თუ ინტეგრალურ წირთა (8.6) ოჯახს აქვს მომვლები, მაშინ $y=\varphi(x)$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი არის მომვლები, წარმოადგენს განსაკუთრებულ ამონახსნს. მართლაც, მომვლები ეხება რა ყოველ თავის წერტილში (8.6) ოჯახის რომელიმე წირს, აქვს შესაბამის წერტილში (8.5) დიფერენციალური განტოლებით განსაზღვრული მიმართულება და, მაშასადამე, წარმოადგენს ინტეგრალურ წირს, ე. ი. მომვლები არის ამონახსნი, მასთან მომვლების ყოველ წერტილში დარღვეული იქნება ერთადერთობის პირობა, რადგან მის ყოველ წერტილში გაივლის ორი ინტეგრალური წირი საერთო მხებით, თვით მომვლები და მისი შემხები (8.6) ოჯახის წირი. მაგრამ, $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის მომვლები, თუ ის არსებობს, როგორც ცნობილია, გამოისახება განტოლებათა სისტემით:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, y, C)=0, \\ &\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C}=0, \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

ანუ, C-ს გამორიცხვის შემდეგ,

$$\Delta(x, y)=0. \tag{8.16}$$

(8.16) განტოლებას ვუწოდებთ C დისკრიმინანტს.

$y=\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება $\Delta(x, y)=0$ განტოლებიდან, იქნება მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი. თუ $\Delta(x, y)=0$ წირის გამოკვლევისას გამოვრიცხავთ იმ წერტილებს, რომელთათვის, როგორც ზემოთ.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial C^2}=\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial C}\right)=0$$

და

$$\Phi_x'=\Phi_y'=0,$$

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 2. ინტეგრალურ წირთა $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის $\Delta(x, y)=0$ დისკრიმინანტული წირი, განსაზღვრული განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, y, C)=0, \\ &\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C}=0, \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

აკმაყოფილებს, გარდა, შესაძლოა, ზემოთ მითითებული წერტილებისა, იმავე (8.5) დიფერენციალურ განტოლებას, რასაც აკმაყოფილებს $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახი, და წარმოადგენს მის განსაკუთრებულ ამონახსნს.

დამტკიცება. ვთქვათ, (x_0, y_0) არის $\Delta(x, y)=0$ დისკრიმინანტული წირის რომელიმე წერტილი რადგან (x_0, y_0) წერტილზე და მის მიდამოში $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial C^2} \neq 0$, ამიტომ $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = \Phi_1(x, y, C) = 0$ განტოლება ზოგჯერ შეიძლება ამოიხსნას C-ს მიმართ და წარმოდგენილ იქნეს სახით: $C = C(x, y)$ (ან რამდენიმე ასეთი განტოლებით). თუ $C = C(x, y)$ ჩავსვამთ $\Phi(x, y, C)=0$ ზოგად ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\Delta(x, y) = \Phi[x, y, C(x, y)] \equiv 0 \tag{8.18}$$

დისკრიმინანტული წირის განტოლებას (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში. ამ მიდამოს შიგნით გვექნება:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

აქ, ისე, როგორც ზემოთ, Φ_x' და Φ_y' კერძო წარმოებულები აღებულია იმ დაშვებით, რომ C დამოკიდებულია x-სა და y-ზე. ცხადია, წირი $\Delta(x, y)=0$ არის $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის მომვლები და მას (x_0, y_0) წერტილში ექნება მიმართულება:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x'[x_0, y_0, C(x_0, y_0)]}{\Phi_y'[x_0, y_0, C(x_0, y_0)]} \tag{8.19}$$

ვთქვათ, $C(x_0, y_0) = C_0$. $\Phi(x, y, C_0)=0$ ინტეგრალური წირი გაივლის (x_0, y_0) წერტილზე და მის მხებს ამ წერტილში ექნება მიმართულება:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x'(x_0, y_0, C_0)}{\Phi_y'(x_0, y_0, C_0)}. \tag{8.20}$$

(8.19) და (8.20) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ ორივე მხების მიმართულებები (x_0, y_0) წერტილში ემთხვევა ერთმანეთს. რადგან $\Delta(x, y)=0$ წირის ყოველ წერტილში დარღვეულია ერთადერთობის პირობა, ამიტომ $y=\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება $\Delta(x, y)=0$ განტოლებიდან, იქნება მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. თუ განსახილველ წერტილში $\Phi_y' = 0$, მაშინ ორივე წირისათვის $\frac{dx}{dy} = 0$, ე. ი. ამ შემთხვევაშიც მხებები აგრეთვე ემთხვევა ერთმანეთს.

ამგვარად, თუ $\Phi(x, y, C) = 0$ ინტეგრალურ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები, მაშინ ფუნქცია $y = \varphi(x)$, რომლის გრაფიკია მომვლები, განისაზღვრება $\Delta(x, y) = 0$ განტოლებიდან და წარმოადგენს (8.5) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ახლა, თუ მომვლების წერტილებში ერთდროულად $\Phi_x' = 0$, $\Phi_y' = 0$, მაშინ $\Delta(x, y) = 0$ განტოლება მოგვცემს არა მარტო მომვლებს, არამედ $\Phi(x, y, C) = 0$ წირთა ოჯახის განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიულ ადგილს, რადგან ამ შემთხვევაში $\Phi(x, y, C) = 0$ განტოლებისათვის დარღვეულია არაცხადი ფუნქციის შესახებ არსებობის თეორემის პირობები და ჩვენ არ შეგვიძლია ვიყოთ დარწმუნებული, რომ ასეთი წერტილების მიდამოში $\Phi(x, y, C) = 0$ განტოლება განსაზღვრავს y-ს როგორც x-ის ცალსახა, უწყვეტ და წარმოებად ფუნქციას. პირიქით უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ასეთ წერტილებში $\Phi(x, y, C) = 0$ წირებს აქვს განსაკუთრებული წერტილები (კვანძითი წერტილი, უკუქცევის წერტილი და სხვ.), რომლებიც განისაზღვრება პირობებით:

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} = 0.$$

ამგვარად, $\Delta(x, y) = 0$ წირი მომვლებთან ერთად შეიძლება შეიცავდეს $\Phi(x, y, C) = 0$ ინტეგრალურ წირთა ოჯახის განსაკუთრებულ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს. $\Phi(x, y, C) = 0$ ინტეგრალურ წირთა ოჯახის განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიული ადგილი, ჩვეულებრივ, არ წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს.

შენიშვნა 2. არ უნდა ავურიოთ ერთმანეთში დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები, ე. ი. წერტილები, რომლებზედაც არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი ან გადის რამდენიმე ინტეგრალური წირი და თვით ინტეგრალური წირების განსაკუთრებული წერტილები (კვანძითი, უკუქცევისა და სხვ.).

ახლა საინტერესოა გამოვიკვლიოთ ურთიერთდამოკიდებულება $\Delta(x, y) = 0$ და $D(x, y) = 0$ განტოლებებით განსაზღვრულ განსაკუთრებულ ამონახსნებს შორის.

ამ მიზნით ვაჩვენოთ, რომ თუ $\Phi(x, y, C)=0$ ინტეგრალურ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები, განსაზღვრული განტოლებით $\Delta(x, y)=0$, მაშინ ეს მომვლები ეკუთვნის აგრეთვე $D(x, y)=0$ დისკრიმინანტულ წირს. საზოგადოდ, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 3. ამონახსნები, რომლებიც ეკუთვნის $\Delta(x, y)=0$ დისკრიმინანტულ წირს, შედის აგრეთვე $D(x, y)=0$ დისკრიმინანტულ წირში, ე. ი. წარმოადგენენ (9.5) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებს.

დამტკიცება. ვთქვათ, (x_0, y_0) არის $\Delta(x, y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული მომვლების რაიმე წერტილი. განვიხილოთ ამ წერტილის მიდამოში ორივე წირი $\Delta(x, y)=0$ და $\Phi(x, y, C_0)=0$, სადაც $C_0=C(x_0, y_0)$. ეს წირები, როგორც ეს ზემოთ იყო დამტკიცებული, აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F(x, y, y')=0.$$

ამიტომ ორივე წირის გასწვრივ გვექნება:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''=0.$$

ცხადია, ორივე წირისათვის x_0 წერტილში პირველი რიგის წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია. თუ y-ის მეორე რიგის წარმოებული x_0 წერტილში $\Delta(x, y)=0$ და $\Phi(x, y, C_0)=0$ წირებისათვის ღებულობს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ y''_Δ და y''_Φ მნიშვნელობებს, მაშინ შესაბამისად:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''_\Delta=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''_\Phi=0.$$

თუ პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ:

$$(F'_{y'})(y_\Delta''-y_\Phi'')=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (x_0, y_0) წერტილში

$$F'_{y'}(x_0, y_0, y_0')=0.$$

რადგანაც (x_0, y_0) წერტილი $\Delta(x, y)=0$ მომვლების ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ აქედან დავასკვნით, რომ $\Delta(x, y)=0$ განტოლებით

განსაზღვრული მომვლების გასწვრივ დაკმაყოფილებულია განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ y') &= 0, \\ F'_{y'}(x,\ y,\ y') &= 0. \end{aligned}\right\}$$

თუ უკანასკნელი სისტემიდან y'-ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ $D(x,\ y) = 0$ განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს დისკრიმინანტულ წირს. მაშასადამე, $\Delta(x,\ y)=0$ და $D(x,\ y)=0$ წირები ერთმანეთს ემთხვევა. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

დამტკიცებული თეორემის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ

მაგალითი 6. ვთქვათ,

$$\Phi(x,\ y,\ C) = x^2 + y^2 - 2Cxy + C^2 - 1 = 0 \tag{8.21}$$

არის $F(x,\ y,\ y')=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ვუჩვენოთ, რომ $\Delta(x,\ y)=0$ და $D(x,\ y)=0$ განტოლებებით განსაზღვრული დისკრიმინანტული წირები ეთავსებიან ერთმანეთს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინასწარ ვიპოვოთ ის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ზოგადი ინტეგრალია (8.21).

გავაწარმოოთ (8.21) განტოლება x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y'\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x - 2Cy + y'(2y - 2Cx) = 0, \tag{8.22}$$

საიდანაც

$$C = \frac{x + yy'}{y + xy'} \tag{8.23}$$

თუ C-ს გამოსახულებას ჩავსვამთ ზოგად ინტეგრალში (8.21), მივიღებთ მოცემულ ინტეგრალურ წირთა ოჯახის საძიებელ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F(x,\ y,\ y') = (1 - x^2)y'^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{8.23'}$$

ახლა, ვთქვათ, მოცემული ოჯახისათვის

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C} = -2xy + 2C = 0. \tag{8.24}$$

თუ (8.21) და (8.24) ტოლობებიდან გამოვრიცხავთ C პარამეტრს, მივიღებთ C დისკრიმინანტს:

$$\Delta(x,\ y) = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2 - 1 = 0,$$

ანუ

$$\Delta(x, y) = -(x^2-1)(y^2-1) = 0.$$

აქედან ჩანს, რომ დისკრიმინანტული წირი შედგება ოთხი წრფისაგან $y=\pm 1$, $x=\pm 1$. ეს წრფეები აკმაყოფილებს (8.23) დიფერენციალურ განტოლებას; ამასთან, ისინი წარმოადგენენ მოცემულ ინტეგრალურ წირთა ოჯახის მომვლელებს და, მაშასადამე, (8.23′) განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნებს. ახლა ვიპოვოთ $D(x, y)=0$ დისკრიმინანტული წირი. მივიღოთ $y'=p$, მაშინ

$$F(x, y, p) = (1-x^2)p^2 + y^2 - 1 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2p(1-x^2) = 0$$

განტოლებიდან მივიღებთ:

$$1-x^2=0, \ x=\pm 1 \text{ და } p=0.$$

$F(x, y, p)=0$ განტოლებაში ჩავსვათ $p=0$, მივიღებთ:

$$y^2-1=0, \ y=\pm 1.$$

მაშასადამე, დისკრიმინანტული წირები $\Delta(x, y)=0$ და $D(x, y)=0$ ემთხვევიან ერთმანეთს.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$y' = y^{\frac{2}{3}}.$$

აქ $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$. ეს ფუნქცია უწყვეტია y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის; მისი წარმოებული y-ით

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

უსასრულოდ დიდი ხდება, როცა $y=0$, ე. ი. Ox ღერძზე. მაშასადამე, Ox ღერძზე დარღვეულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ლიფშიცის პირობა. ახლა მოვძებნოთ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი, გვექნება:

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C,$$

ანუ

$$27y = (x+C)^3.$$

მივიღეთ კუბურ პარაბოლათა ოჯახი. ამას გარდა, მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს $y=0$, რომელიც გადის იმ წერტილებზე სადაც არ არის შესრულებული ლიფშიცის პირობა. ამონახსნი $y=0$ არის განსაკუთრებული ამონახსნი, რადგან Ox ღერძის ყოველ წერტილში გადის კუბური პარაბოლაც $27y=(x+C)^3$ და $y=0$ წრფეც და, მაშასადამე, წრფის ყოველ წერტილში დარღვეულია ერთადერთობის პირობა.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი განტოლებისა:

$$F(x,\ y,\ y')=(xy'-y)^2-x^3(2y-xy')=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ განსაკუთრებული ამონახსნის ზემოთ მოყვანილი წესით. მოცემული განტოლება გავაწარმოოთ $p=y'$-ით:

$$\frac{\partial F}{\partial p}=2(xp-y)+x^3=0.$$

შევადგინოთ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &F(x,\ y,\ p)=(xp-y)^2-x^3(2y-xp)=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial p}=2(xp-y)x+x^4=0. \end{aligned}\right\}$$

ამ სისტემიდან გამოვრიცხოთ p. ამისათვის სისტემის მეორე განტოლებიდან p გამოვსახოთ x და y ცვლადების მეშვეობით და ჩავსვათ პირველში:

$$p=\frac{2y-x^3}{2x},$$

$$D(x,\ y)=\left(x\quad\frac{2y-x^3}{2x}-y\right)^2-x^3\left(2y-x\cdot\frac{2y-x^3}{2x}\right)=0,$$

საიდანაც

$$D(x,\ y)=\frac{x^6}{4}-x^3\cdot\frac{2y+x^3}{2}=0,$$

ანუ

$$D(x,\ y)=4y+x^3=0.$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს დისკრიმინანტულ წირს:

$$y=-\frac{x^3}{4}.$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას. ამიტომ იგი წარმოადგენს ამ განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

მაგალითი 9. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი განტოლებისა:

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ $y' = p$, მაშინ

$$F(x, y, p) = xp^2 - 2yp + 4x = 0.$$

გავაწარმოოთ ეს უკანასკნელი p-თი, გვექნება:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2px - 2y = 0.$$

გამოვრიცხოთ p სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} F = xp^2 - 2yp + 4x = 0, \\ F_p' = 2xp - 2y = 0. \end{aligned}\right\}$$

მივიღებთ:

$$D(x, y) = 4x^2 - y^2 = 0.$$

ამ უკანასკნელიდან განსაზღვრული ფუნქციები: $y = 2x$ და $y = -2x$ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

მაშასადამე, შეიძლება მივიღოთ, რომ $y = 2x$ და $y = -2x$ არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები. ნამდვილად რომ დავრწმუნდეთ, ეს ამონახსნები არის თუ არა განსაკუთრებული ამონახსნები, ამისათვის უნდა მოვძებნოთ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. მოცემული განტოლებიდან განვსაზღვროთ y', გვექნება:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4}$$

უკანასკნელი არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება; მისი ინტეგრება მოგვცემს ზოგად ამონახსნს: $x^2 = 2C(y - 2C)$, რომელიც წარმოადგენს პარაბოლათა ოჯახს C პარამეტრით; მათი წვეროები Oy ღერძზეა.

ამონახსნები $y = \pm 2x$ მოცემული დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნებია, რადგან ამ წრფეების ნებისმიერ წერტილში $(x_0, \pm 2x_0)$ გადის რომელიმე პარაბოლა პარაბოლათა ოჯახიდან.

მაგალითი 10. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$y'^2 - y^3 = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} F &= p^2 - y^3 = 0, \\ F_p' &= 2p = 0. \end{aligned}\right\}$$

თუ ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ p-ს, მივიღებთ $D(x, y) = y = 0$, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას. ახლა, მოვძებნოთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, რისთვისაც ამოვხსნათ $y' = \pm y^{\frac{3}{2}}$, გვექნება:

$$y = \frac{4}{(x+C)^2}.$$

აქედან ვამჩნევთ, რომ ამონახსნი $y=0$ არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან მასში შემავალი პარამეტრის არც ერთი მნიშვნელობისათვის. $y=0$ არ არის განსაკუთრებული ამონახსნი, რადგანაც ზოგადი ამონახსნით განსაზღვრული წირები არ კვეთს Ox ღერძს.

მაგალითი 11. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$y = \frac{8}{27} y'^3.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს მოვძებნით, თუ ამოვხსნით მას y'-ის მიმართ და მოვახდენთ ცვლადთა განცალებას, გვექნება:

$$y^2 - (x+C)^3 = 0.$$

ვიპოვოთ ახლა განსაკუთრებული ამონახსნი, ამისათვის შევადგინოთ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} F &= y^2 - (x+C)^3 = 0, \\ F_C' &= -3(x+C)^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

აქედან $\Delta(x, y) = y = 0$; $y=0$ არის განსაკუთრებული ამონახსნი.

მაგალითი 12. ვიპოვოთ განსაკუთრებული ამონახსნი განტოლებისა:

$$y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება არის კლეროს განტოლება, მისი ზოგადი ინტეგრალია:

$$\Phi(x, y, C) = y - [Cx + \sqrt{1 - C^2}] = 0.$$

ეს განტოლება გავაწარმოოთ C-თი, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = -x + \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = 0.$$

საიდანაც:

$$x = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}$$

x-ის ეს გამოსახულება ჩავსვათ ზოგად ინტეგრალში, გვექნება:

$$y - \frac{C^2}{\sqrt{1 - C^2}} - \sqrt{1 - C^2} = y - \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} = 0.$$

ამგვარად, მივიღებთ დისკრიმინანტული წირის პარამეტრულ სახეს:

$$x = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}}.$$

თუ ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ C-ს, მივიღებთ:

$$\Delta(x, y) = y^2 - x^2 - 1 = 0,$$

ანუ

$$y^2 - x^2 = 1;$$

ეს უკანასკნელი განტოლება განსაზღვრავს მოცემული განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

§ 9. ამოცანები ტრაექტორიების შესახებ

გამოყენებითს დარგებში ხშირად საქმე გვაქვს შემდეგ ამოცანებთან:

ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ბრტყელ წირთა ოჯახი:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{9.1}$$

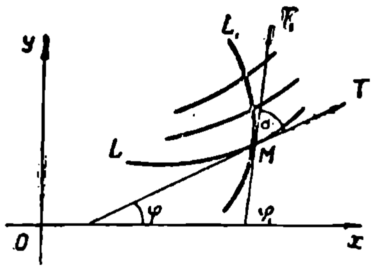
სადაც $\Phi(x, y, C)$ და მისი კერძო წარმოებულები x-ის მიმართ უწყვეტია xOy სიბრტყის რომელიღაც D არეში[1]. უნდა ვიპოვოთ წირთა ისეთი ოჯახი:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \tag{9.2}$$

რომლის ყოველი წირი გადაკვეთს მოცემული $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის წირებს მუდმივი α კუთხით (ნახ. 22).

განსაზღვრა. $\Phi_1(x, y, C)=0$ წირთა ოჯახს, რომლის ყოველი წირი გადაკვეთს მოცემული $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის წირებს მუდმივი α კუთხით, ეწოდება მოცემული ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახი. თუ ეს მუდმივი α კუთხე არის მართი კუთხე, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მაშინ იზოგონალურ ტრაექტორიებს ორთოგონალური ტრაექტორიები ეწოდება.

1. იზოგონალური ტრაექტორიები. ვუჩვენოთ, რომ მოცემული (10.1) ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების მოძებნის ამოცანა დაიყვანება პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. ვთქვათ, L_1 არის იზოგონალური ტრაექტორია, $M(x_1, y_1)$ — ნებისმიერი წერტილი L_1-ზე, ხოლო L არის (10.1) ოჯახის წირი, რომელიც გადის $M(x_1, y_1)$ წერტილზე და იკვეთება L_1 წირით მუდმივი α კუთხით.



ნახ. 22.

აღვნიშნოთ φ და φ_1-ით შესაბამისად ის კუთხეები, რომლებსაც M წერტილში L და L_1 წირებისადმი გავლებული MT და MT_1 მხებები შეადგენს $0x$ ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ცხადია, L_1 წირის ნებისმიერი M წერტილისათვის ადგილი ექნება დამოკიდებულებას:

$$\alpha = \varphi_1 - \varphi = \text{const}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ორი კუთხის სხვაობის ტანგენსის გამოსახულებას

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi_1}. \tag{9.3}$$

[1] ვგულისხმობთ, რომ ბრტყელ წირთა ოჯახს აქვს ის თვისება, რომ D არის ყოველ წერტილზე გაივლის ოჯახის მხოლოდ ერთი წირი.

სადაც

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x'(x, y, C)}{\Phi_y'(x, y, C)} \tag{9.4}$$

არის L წირისადმი M წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი, ხოლო

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{dy_1}{dx} \tag{9.5}$$

— საძიებელი L_1 წირისადმი M წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი, მაშინ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dy_1}{dx} - k}{1 + k\frac{dy_1}{dx}} \tag{9.6}$$

სადაც a გადათვლილია (9.1) წირიდან საძიებელი (9.2) წირისაკენ. (9.4) ტოლობაში ჩავსვათ C-ს მნიშვნელობა (9.1)-დან, მაშინ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \psi(x, y), \tag{9.7}$$

ამიტომ იზოგონალობის (9.6) პირობის თანახმად, გვექნება:

$$K = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi) = \frac{\frac{dy_1}{dx} - \psi(x, y)}{1 + \psi(x, y)\frac{dy_1}{dx}}, \text{ თუ } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \tag{9.8}$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას საძიებელი იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის განსაზღვრისათვის (ნახ. 22).

თუ (9.8) განტოლებას ამოვხსნით $\frac{dy_1}{dx}$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\psi(x, y) + K}{1 - K\psi(x, y)},$$

სადაც $K = \operatorname{tg} \alpha$ და $\psi(x, y) = \frac{dy}{dx}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

ანუ

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx} + K}{1 - K\frac{dy'}{dx}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \tag{9.9}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$, (9.9) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{9.10}$$

2. ვთქვათ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

არის მოცემული (9.1) ბრტყელ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება. რადგანაც $M(x, y)$ წერტილი ეკუთვნის (9.1) ოჯახის ერთ-ერთ წირს, ამიტომ ამ წერტილში

$$\frac{dy}{dx} = y'_{\text{ვs.}} = f(x, y)$$

და, მაშასადამე, ამავე წერტილში, თუ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{f(x, y) + K}{1 - kf(x, y)}, \tag{9.11}$$

და

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{f(x, y)}. \tag{9.12}$$

თუ $\alpha = \frac{\pi}{2}$[1], (9.11) განტოლება წარმოადგენს მოცემული (9.1) ბრტყელ

---

[1] რადგანაც $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$. ახლა თუ გავიხსენებთ წარმოებულის გეომეტრიულ მნიშვნელობას, დავასკვნით, რომ $M(x, y)$ წერტილში: $\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

წირთა ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას, ხოლო (9.12) განტოლება — მოცემული (9.1) ბრტყელ წირთა ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას.

ახლა, თუ (9.1) ბრტყელ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება მოცემულია სახით:

$$F(x,\ y,\ y') = 0,$$

მაშინ, (9.1) ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{\dfrac{dy_1}{dx} - K}{1 + K\dfrac{dy_1}{dx}}\right) = 0, \tag{9.13}$$

სადაც $K = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$.

ცხადია, (9.11), (9.12) და (9.13) განტოლებების ინტეგრებით, მივიღებთ მოცემული (9.1) ბრტყელ წირთა ოჯახის იზოგონალური და ორთოგონალური ტრაექტორიების ოჯახების განტოლებებს.

მაგალითი 1. მოცემულია წრფეთა ოჯახი:

$$y = Cx,\ -\infty < x < +\infty.$$

უნდა ვიპოვოთ წირები, რომლებიც $y = Cx$ წრფეებს კვეთს მოცემული $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ კუთხით.

ამოხსნა. მოცემულ ბრტყელ წირთა ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის მოძებნისათვის, რომელიც შეესაბამება $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ კუთხეს, უნდა შევადგინოთ $y = Cx$ წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება:

$$y = Cx,\ \frac{dy}{dx} = C,\ \text{ე. ი.}\ y = y'x,$$

ანუ

$$y' = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

ახლა (9.11) ფორმულის მიხედვით, უნდა შევადგინოთ $y=Cx$ ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის დიფერენციალური განტოლება:

$$y'_{\text{იზ.ტრ.}}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}. \qquad (9.13')$$

(9.13) განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას; მისი ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$y=ux,\ y'=u'x+u,\ u'x+u=\frac{1+u}{1-u},$$

ანუ

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}. \qquad (9.14)$$

(9.14) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\operatorname{arc\,tg} u-\frac{1}{2}\ln(1+u)^2=\ln|x|+C,$$

ანუ

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\ln x^2=\ln|x|+C,$$

საიდანაც:

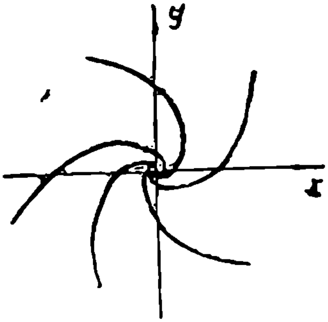
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-C=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს მოცემულ წრფეთა ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის განტოლებას. თუ ამ განტოლებაში გადავალთ პოლარულ კოორდინატებზე: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, მაშინ მივიღებთ (9.14) განტოლების ზოგად ინტეგრალს სახით:

$$\varphi-C=\ln\rho,\ \rho=e^{\varphi-c},\quad \text{ანუ}\quad \rho=c_1e^{\varphi},\ \text{სადაც}\ C_1=e^{-c}.$$

ამგვარად, მოცემულ წრფეთა ოჯახის იზოგონალურ ტრაექტორიებს წარმოადგენს ლოგარითმული სპირალების ოჯახი, რომელიც მოცემულ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ კუთხეს შეესაბამება (ნახ. 23).

2. ორთოგონალური ტრაექტორიები. ანალოგიურად ვუჩვენებთ, რომ ორთოგონალური ტრაექტორიების მოძებნის ამოცანა დაიყვანება პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე.



ნახ. 23

მართლაც, ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ წირთა ისეთი ოჯახი (9.2), რომლის ყოველი წირი გადაკვეთს მოცემული (9.1) ოჯახის წირებს მართი კუთხით. ანალიზურად ეს ნიშნავს, რომ, თუ $F(x, y, y')=0$ არის წირთა $\Phi(x, y, C) = 0$ ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ $\Phi(x, y, C)=0$ ოჯახის მიმართ ორთოგონალური ტრაექტორიების $\Phi_1(x, y, C)=0$ ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0, \qquad (9.15)$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება მოგვცემს საძიებელი ორთოგონალური ტრაექტორიების ოჯახს.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=Cx^2$ პარაბოლათა ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

ამოხსნა. $y = Cx^2$ და $y' = 2Cx$ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ C პარამეტრი, მივიღებთ პარაბოლათა ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას: $y' = \frac{2y}{x}$. ამ უკანასკნელ განტოლებაში y' წარმოებულის შეცვლა $-\frac{1}{y'}$-ით მოგვცემს პარაბოლათა მოცემული ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიების ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$y' = -\frac{x}{2y}, \quad -\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x},$$

ანუ

$$-ydy = \frac{xdx}{2},$$

აქედან, თუ მოვახდენთ მიღებული განტოლების ინტეგრებას, მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2,$$

ამგვარად, პარაბოლათა მოცემული ოჯახისადმი ორთოგონალური ტრაექტორიების ოჯახი იქნება ელიფსები:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2,$$

რომელთა ნახევარღერძებია:

$$a = 2C, \; b = \sqrt{2}\,C.$$

V თავი

უმაღლესი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი და ზოგადი ამონახსნი

განვიხილოთ n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0^{1} \tag{1.1}$$

ან $y^{n}(x)$ უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი სახით:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

პირველ თავში გავეცანით ძირითად ცნებებს, რომლებიც დაკავშირებულია (1.1) ან (1.2) სახის დიფერენციალური განტოლების შესწავლასთან.

დამოუკიდებელი x **ცვლადის ყოველ** $x=\varphi(x)$ **ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრული და** n-**ჯერ წარმოებადია** (a, b) **შუალედში, ეწოდება (1,1) ან (1.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, თუ ის ამ შუალედში** x-**ის ყველა მნიშვნელობისათვის იგივურად აკმაყოფილებს (1.1) ან (1.2) სახის განტოლებას:**

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0$$

ან

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)].$$

(1.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ამ განტოლების ყველა ამონახსნის მოძებნა და მათი თვისებების შესწავლა.

[1] (1.1) დამოკიდებულებაში შემავალი $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის ყველა პირობას. იგი შეიცავს $y^{(n)}(x)$-ს და $\dfrac{\partial F}{dy^{(n)}} \neq 0$.

1. კ ო შ ი ს   ა მ ო ც ა ნ ა.

$$y_{(x)}^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (1.2')$$

განტოლებისათვის კოშის ამოცანა შემდეგნაირად დაისმის:

(1.2) განტოლების ყველა ამონახსნს შორის ვიპოვოთ ამონახსნი

$$y = y(x), \qquad (1.3)$$

რომელიც x დამოუკიდებელი ცვლადის მოცემული x_0 მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს პირობებს

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \dots, y_{(x_0)}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \qquad (1.4)$$

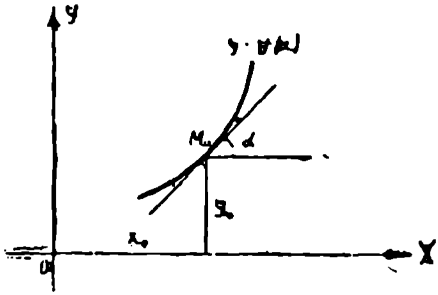
სადაც x_0; $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ მოცემული რიცხვებია: $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ რიცხვებს (1.3) ამონახსნის საწყისი მნიშვნელობანი ეწოდება, x_0 რიცხვს — დამოუკიდებელი ცვლადის საწყისი მნიშვნელობა, ხოლო $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ რიცხვების ერთობლიობას კი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების (1.3) ამონახსნის საწყისი პირობები.

მეორე რიგის განტოლების შემთხვევაში

$$y''(x) = f(x, y, y') \qquad (1.5)$$

კოშის ამოცანა მდგომარეობს (1.3) ამონახსნის მოძებნაში, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y = y_0, \; y' = y_0', \; \text{როცა} \; x = x_0.$$



ნახ. 24.

ეს ამოცანა გეომეტრიული თვალსაზრისით ნიშნავს, რომ საძიებელია $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირი, რომელსაც ამ წერტილში მხების მოცემული მიმართულება ექნება, ე. ი. $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში ექნება მოცემული მხები, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შეადგენს ისეთ α კუთხეს, რომ $\operatorname{tg}\alpha = y_0'$ (ნახ. 24).

2. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ზემოთ ვნახეთ, რომ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს წირთა ოჯახს, რომელიც ერთ ნებისმიერ C პარამეტრზეა დამოკიდებული, ე. ი. ამონახსნში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვი ეტოლება დიფერენციალური განტოლების რიგს. საზოგადოდ, შეიძლება

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი C მუდმივების რიცხვი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალში ეტოლება მოცემული დიფერენციალური განტოლების რიგს. მართლაც, ამ მიზნით განვიხილოთ უმარტივესი სახის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$y'' = f(x). \tag{1.6}$$

ამოცანა მდგომარეობს ამ განტოლების ამონახსნის მოძებნაში, ე. ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი $y=y(x)$ ფუნქციები, რომლებიც (1.6) განტოლებას იგივეობად გადააქცევს. მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x).$$

ამ უკანასკნელი განტოლების ორჯერ ინტეგრება გვაძლევს:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$dy = dx\int f(x)\,dx + C_1\,dx,$$

$$y = \int dx\int f(x)\,dx + C_1\int dx + C_2,$$

ანუ

$$y = \int dx\int f(x)\,dx + C_1 x + C_2,$$

მაშასადამე,

$$y = \varphi(x) + C_1 x + C_2. \tag{1.7}$$

უკანასკნელი წარმოადგენს (1.6) განტოლების ორ C_1 და C პარამეტრზე დამოკიდებულ ამონახსნებს, რომელშიაც C_1 და C_2 პარამეტრებს შეუძლია მიიღოს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობანი. ამგვარად, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვი ეტოლება განტოლების რიგს. კერძოდ, თუ

$$f(x) = x^2, \tag{1.5}$$

მაშინ (1.7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2.$$

უკანასკნელი არის (1.6) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

(1.7) განტოლება გეომეტრიულად წარმოადგენს ორპარამეტრიან წირთა ოჯახს xOy სიბრტყეზე. (1.6) განტოლების ამონახსნის ცალსახად განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: როცა $x = x_0$, მაშინ $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, სადაც y_0 და y_0' რომელიღაც მუდმივი რიცხვებია. პირობა $y(x_0) = y_0$ გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ მხოლოდ ერთი ნებისმიერი მუდმივი C_1. მართლაც, ამისათვის (1.7) განტოლებაში ჩავსვათ $x = x_0$, მაშინ

$$y(x_0) = y_0 = \varphi(x_0) + C_1 x_0 + C_2,$$

საიდანაც

$$C_1 = \frac{y(x_0) - \varphi(x_0) - C_2}{x_0}, \quad x_0 \neq 0,$$

თუ უკანასკნელს გავითვალისწინებთ (1.4) განტოლებაში, გვექნება:

$$y(x) = \varphi(x) + \frac{y(x_0) - \varphi(x_0)}{x_0} x - \frac{C_2}{x_0} x + C_2,$$

სადაც C_2 ნებისმიერი მუდმივია. მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის (1.6) განტოლების ინტეგრალურ წირთა მთელი ოჯახი. ცალსახად რომ განვსაზღვროთ ამონახსნი, ე. ი. (x_0, y_0) წერტილზე გამავალ წირთა ოჯახიდან რომ გამოვყოთ ერთი გარკვეული წირი, ამისათვის მოცემული უნდა იყოს შესაბამისი ინტეგრალური წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი, ანუ მიმართულება (x_0, y_0) წერტილში: $y'(x_0) = y_0'$. მართლაც, გავაწარმოოთ (1.7) განტოლება x-ით და მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ $x = x_0$, გვექნება:

$$y'(x_0) = \varphi'(x_0) + C_1.$$

მაშასადამე, მივიღებთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას C_1 და C_2-ის მიმართ:

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= \varphi(x_0) + C_1 x_0 + C_2, \\ y'(x_0) &= \varphi'(x_0) + C_1, \end{aligned}\right\}$$

რომლის ამოხსნა C_1 და C_2 პარამეტრების მიმართ გვაძლევს ამ პარამეტრებისათვის სრულიად გარკვეულ $C_1{}^\circ$ და $C_2{}^\circ$ რიცხვით მნიშვნელობებს.

$$\left.\begin{aligned} C_1{}^\circ &= y'(x_0) - \varphi'(x_0), \\ C_2{}^\circ &= y(x_0) - \varphi(x_0) - x_0 [y'(x_0) - \varphi'(x)]. \end{aligned}\right\}$$

თუ C_1° და C_2° მნიშვნელობებს შევიტანთ (1.7) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$y = y(x) = \varphi(x) + C_1^\circ x + C_2^\circ = \varphi(x) + [y'(x_0) - \varphi'(x_0)]\, x +$$
$$+ y(x_0) - \varphi(x_0) - x_0 [y'(x_0) - \varphi'(x_0)],$$

ე. ი.

$$y = y(x) = \varphi(x) + [y'(x_0) - \varphi(x_0)]\, x + y(x_0) -$$
$$- \varphi(x_0) - x_0 [y'(x_0) - \varphi'(x_0)];$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს (1.6) განტოლების კერძო ამონახსნს.

ისე როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, აქაც, როცა მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1.8}$$

ე. ი. როცა დიფერენციალური განტოლება უფრო რთულია, ვიდრე (1.6) განტოლება, მაშინ (1.8) განტოლებას აქვს აგრეთვე ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. მაგრამ ამ ამონახსნების დამოკიდებულება C_1 და C_2 მუდმივებზე შეიძლება იყოს უფრო რთული, ვიდრე (1.7) ფორმულაში. ამიტომ (1.8) განტოლების ამონახსნი შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{1.9}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. შესაძლოა, რომ y ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს (1.8) განტოლების ამონახსნს, განტოლების ამონახსნის პროცესში მიღებულ იქნეს როგორც არაცხადი ფუნქცია, ე. ი. ფორმულა, რომელიც იძლევა განტოლების ამონახსნის ზოგად სახეს, არ იყოს y-ის მიმართ ამოხსნილი. ამ შემთხვევაში (1.8) განტოლების ამონახსნი ზოგადი სახით შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

სრულიად ანალოგიური მსჯელობით ვუჩვენებთ, რომ უმარტივესი სახის n რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების

$$y^{(n)} = f(x) \tag{1.10}$$

ზოგადი ამონახსნი, სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა (a, b) შუალედში, შეიცავს n ნებისმიერ მუდმივს. მართლაც, ვიპოვოთ (1.10) განტოლების ამონახსნი. მოვახდინოთ განტოლების ორივე მხარის მიმდევრობითი ინტეგრება n-ჯერ, ამასთან მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx}\right);$$

გვექნება:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1, \qquad (1.11)$$

სადაც x_0 არის x-ის ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობა $f(x)$-ის განსაზღვრის შუალედიდან, ხოლო C_1 ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივია. (1.11) განტოლების ერთხელ კიდევ ინტეგრება გვაძლევს:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx = C_1(x-x_0) + C_2.$$

თუ ინტეგრების პროცესს განვაგრძობთ, მაშინ n-ჯერ მიმდევრობითი ინტეგრების შედეგად მივიღებთ (1.10) განტოლების ამონახსნის შემდეგ გამოსახულებას:

$$y = y(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n,$$

ანუ

$$y(x) = \varphi(x) + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n. \qquad (1.12)$$

(1.12) ფორმულა გვაძლევს (1.10) განტოლების ამონახსნს, სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $\varphi(x)$ n-ჯერადი ინტეგრალი $f(x)$-დან, ნებისმიერად შერჩეული ქვედა საზღვრით:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \qquad (1.13)$$

(1.13) გამოსახულება შეიცავს n-ჯერად კვადრატურას x-ით, თუმცა იგი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს სახით:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt, \qquad (1.14)$$

რომელიც მხოლოდ ერთ კვადრატურას შეიცავს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ვისარგებლებთ ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილი ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების ფორმულით, მივიღებთ $\varphi^{n}(x) = f(x)$.

მართლაც, ვისარგებლოთ ინტეგრალის პარამეტრის მიმართ გაწარმოების ფორმულით:

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \int\limits_{a=a(\alpha)}^{b=b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + f[b(\alpha), \alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha]\frac{da}{d\alpha},$$

სადაც

$$\varphi(\alpha) = \int\limits_{a=a(\alpha)}^{b=b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx,$$

გვექნება:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} f(t)\, dt,$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{(n-3)!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-3} f(t)\, dt,$$

$$\varphi^{(n-1)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x).$$

ამგვარად, (1.14) ფორმულის მართებულობა დამტკიცებულია. აქედან ცხადია, რომ (1.10) განტოლების ამონახსნია:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{C_{n-2}(x-x_0)^2}{2!} + \frac{C_{n-1}(x-x_0)}{1!} + C_n.$$

ამგვარად, ვუჩვენოთ, რომ უმარტივესი სახის n-ური რიგის (1.10) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიცავს n ნებისმიერ მუდმივს $C_1, C_2, \dots, C_n$, ე. ი. განტოლების ამონახსნში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვი ეტოლება დიფერენციალური განტოლების რიგს.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos kx$$

განტოლების ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$y' = \int_0^x \cos kx\,dx + C_1 = \frac{\sin kx}{k} + C_1,$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$y = \int_0^x \frac{\sin kx}{k}dx + \int_0^x C_1\,dx + C_2 = -\frac{1}{k^2}\cos kx + C_1 x + C_2,$$

ანუ

$$y = -\frac{1}{k^2}\cos kx + C_1 x + C_2,$$

მოყვანილ მაგალითებში აღნიშნული თვისება ზოგადი ხასიათისაა.

თუ მოცემულია n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'', \dots ,\ y^{(n)}) = 0, \tag{1.15}$$

მაშინ ამ განტოლების ამონახსნი შეიცავს n ნებისმიერ მუდმივს: $C_1, C_2, \dots, C_n$. ისე როგორც მეორე რიგის ზოგადი სახის განტოლების შემთხვევაში, აქაც, როცა n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს (1.15) სახე, ე. ი. როცა დიფერენციალური განტოლება უფრო რთულია, ვიდრე (1.10), მაშინ (1.15) განტოლების ამონახსნების დამოკიდებულება $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივებზე შეიძლება იყოს უფრო რთული, ვიდრე (1.12) ფორმულაში. ამიტომ (1.15) განტოლების ამონახსნი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2, \dots ,\ C_n). \tag{1.16}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. შესაძლოა, $y = y(x)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს (1.15) განტოლების ამონახსნს, განტოლების ამონახსნის შედეგად გამოისახოს როგორც არაცხადი ფუნქცია:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

თუ ამ განტოლებიდან შეიძლება განისაზღვროს $y(x)$ ფუნქცია, მაშინ მივიღებთ (1.16) ფორმულას.

განსაზღვრა I. (1.15) n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი D არეში ეწოდება n ნებისმიერი $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივის შემცველ ყოველ

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

სახის ფუნქციას[1], თუ იგი აკმაყოფილებს (1.15) დიფერენციალურ განტოლებას $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივების ყოველი მნიშვნელობისათვის და $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივების სათანადო შერჩევით. $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ ფუნქცია წარმოადგენს ამ განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს D-ში.

(1.16) ზოგადი ამონახსნის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივების სათანადო შერჩევით მოვძებნოთ (1.15) განტოლების ამონახსნი, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ საწყისი მონაცემებით, ე. ი. საშუალებას გვაძლევს (1.15) განტოლებისათვის ამოვხსნათ კოშის ნებისმიერი ამოცანა D არეში.

გეომეტრიული თვალსაზრისით, n-ური რიგის (1.15) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი (1.16) წარმოადგენს $C_1, C_2, \ldots, C_n$ პარამეტრებზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახს xOy სიბრტყეზე. აღნიშნული წირების y ორდინატები, როგორც x-ის ფუნქციები, აკმაყოფილებს (1.15) დიფერენციალურ განტოლებას ნებისმიერი მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამ წირებს მოცემული დიფერენციალური განტოლების **ინტეგრალური წირები** ეწოდება.

თეორიული თვალსაზრისით, ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება ნიშნავს, ვიპოვოთ მისი ზოგადი ამონახსნი. მაგრამ, პრაქტიკული

---

[1] არსებობის თეორემის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

ფუნქცია n-ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია x არგუმენტის მიმართ და უწყვეტია $C_1, C_2, \ldots, C_n$ პარამეტრების მიმართ $(x, y, y', y^n, \ldots, y^{(n-1)})$ სივრცის რომელიღაც მოცემულ D არეში.

თვალსაზრისით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ნიშნავს არა მარტო ზოგადი ამონახსნის, არამედ ამ განტოლების კერძო ამონახსნის პოვნასაც, რადგან ამა თუ იმ ფიზიკური ან ტექნიკური ხასიათის პრობლემის გამოკვლევის შემთხვევაში საძიებელმა ამონახსნმა ჩვეულებრივად უნდა დააკმაყოფილოს არა მარტო განტოლება, არამედ თვით პრობლემის გამოკვლევასთან დაკავშირებული ზოგიერთი დამატებითი პირობაც. ამ დამატებით პირობებს, როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, საწყისი პირობები ეწოდება. საწყისი პირობები საშუალებას გვაძლევს ზოგად ამონახსნში შემავალი ნებისმიერი მუდმივები განვსაზღვროთ ისე, რომ მივიღოთ გამოსაკვლევი პრობლემის ერთი გარკვეული პასუხი.

როგორც ვნახეთ, ზოგადი სახის n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება არ განსაზღვრავს კონკრეტულ ამონახსნს, რადგან მას აქვს უსასრულოდ მრავალი ამონახსნი. ზოგადი ინტეგრალიდან განტოლების გარკვეული კერძო ამონახსნის მისაღებად, ე. ი. ამონახსნის ცალსახა განსაზღვრისათვის, საჭიროა მოცემული იყოს დამატებითი პირობები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს საძიებელი $y=y(x)$ ფუნქცია და მისი მიმდევრობითი წარმოებულები $(n-1)$ რიგის ჩათვლით x-ის რომელიმე x_0 მნიშვნელობისათვის; მასთან, ძირითადი ამოცანა, რომელიც ჩვეულებრივად ისმება, წარმოადგენს კოშის ამოცანას.

ახლა ვუჩვენოთ, როგორ შეიძლება ამოვხსნათ კოშის ამოცანა (1.15) განტოლებისათვის, თუ ცნობილია მისი ზოგადი ამონახსნი.

საწყისი პირობების მეშვეობით შეიძლება განვსაზღვროთ $C_1, C_2, \dots, C_n$ პარამეტრების შესაბამისი $C_1^\circ, C_2^\circ, \dots, C_n^\circ$ რიცხვითი მნიშვნელობანი განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან[1]:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_0'' &= \varphi''(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

ამ სისტემას მივიღებთ, თუ $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ განტოლებას გავაწარმოებთ x-ით $(n-1)$-ჯერ და შემდეგ x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ საწყის მნიშვნელობას, x_0-ს, ხოლო $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$-ის ნაცვლად — საძიებელი ამონახსნის საწყის მნიშვნელობებს.

---

[1] იგულისხმება, რომ (1.17) სისტემა ამოხსნადია $C_1, C_2, \dots, C_n$-ის მიმართ ნებისმიერ საწყის პირობებში: $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$; $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

თუ (1.17) სისტემას განვიხილავთ როგორც n ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $C_1, C_2, \ldots, C_n$ უცნობებით, მაშინ ამ სისტემის ამოხსნა მოგვცემს $C_1, C_2, \ldots, C_n$ პარამეტრებისათვის სრულიად გარკვეულ მნიშვნელობებს $C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ$:

$$\left.\begin{aligned} C_1^\circ &= \psi_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \\ C_2^\circ &= \psi_2(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \\ &\ \ \vdots \\ C_n^\circ &= \psi_n(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}). \end{aligned}\right\}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ ზოგადი ამონახსნის ფორმულაში, მივიღებთ განხილული განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$y = \varphi(x, C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ) =$$

$$= \varphi[x, \psi_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \ldots, \psi_n(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})] =$$

$$= \psi(x; x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

რომელიც ეთანადება მოცემულ საწყის პირობებს.

განსაზღვრა 2. (1.15) n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი[1] D არეში ეწოდება n ნებისმიერი $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივის შემცველ ყოველ

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{1.18}$$

სახის ფუნქციონალურ თანაფარდობას, თუ ეს თანაფარდობა D არეში, განსაზღვრავს (1.15) დიფერენციალური განტოლების

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

ზოგად ამონახსნს. არაცხადი სახით.

(1.18) ზოგადი ინტეგრალის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს C_1, $C_2, \ldots, C_n$ მუდმივების სათანადოდ შერჩეული მნიშვნელობისათვის მოვძებნოთ (1.15) დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი ინტეგრალური წირი (მრუდი) რომელიც D არეში გაივლის.

თუ (1.15) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოცემულია სახით:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{1.13}$$

---

[1]) იგულისხმება, რომ (1,17) სისტემა ამოხსნადია $C_1, C_2, \ldots, C_n$-ის მიმართ ნებისმიერ საწყის პირობებში:

$$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}; \quad (x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D.$$

მაშინ ამონახსნის ცალსახად განსაზღვრისათვის საკმარისია ეს განტოლება გავაწარმოოთ x-ით $(n-1)$-ჯერ, გვექნება:

$$F_1(x, y, y', C_1, C_2, \dots, C_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$F_2(x, y, y', y'', C_1, \dots, C_2) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \qquad (1.20)$$

$$F_{n-1}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1, C_2, \dots, C_n) =$$

$$= \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^{n-1}} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = 0.$$

(1.19) და (1.20) განტოლებებში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ საწყისი მნიშვნელობა x_0, ხოლო $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$-ის ნაცვლად საძიებელი ამონახსნის საწყისი მნიშვნელობები: $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$. ამ გზით მივიღებთ n განტოლების სისტემას n უცნობი პარამეტრით: $C_1, C_2, \dots, C_n$, საიდანაც განვსაზღვრავთ $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივებს[1].

განსაზღვრა 3. *ყოველ* $y = \varphi(x, C_1^\circ, C_2^\circ, \dots, C_n^\circ)$ სახის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, რომელიც მიიღება (1.16) *ზოგადი ამონახსნიდან ნებისმიერი* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *მუდმივების მოცემული კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის,* (1.16) *განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება.*

§ 2. მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების გეომეტრიული და მექანიკური ინტერპრეტაცია

ისე როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას შეიძლება მივცეთ გეომეტრიული და მექანიკური ახსნა.

ზემოთ ვნახეთ, რომ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (2.1)$$

---

[1] იგულისხმება, რომ (1.19) და (1.20) განტოლებათა სისტემა ამოხსნადია $C_1, C_2, \dots, C_n$-ის მიმართ ნებისმიერ საწყის პირობებში: $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{n-1})$, $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{2.2}$$

ან

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{2.3}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებსაც ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად შეუძლიათ მიიღონ ყველა მნიშვნელობა $(-\infty, +\infty)$ შუალედში; ამასთან, ამ ამონახსნებიდან თითოეული გამოისახება რომელიღაც წირით xOy სიბრტყეზე, რომელსაც (2.1) განტოლების ინტეგრალური წირი ეწოდება. ამგვარად, (2.1) განტოლების (2.2) ან (2.3) ზოგადი ამონახსნი xOy სიბრტყის რაიმე D არეში წარმოადგენს ორ C_1 და C_2 პარამეტრზე დამოკიდებულ ინტეგრალურ წირთა ოჯახს; როგორც ცნობილია, ამ ოჯახის ნებისმიერი $y=\varphi(x)$ მ რ უ დ ი ს ს ი მ რ უ დ ე მის ყოველ $M(x, y)$ წერტილში გამოითვლება ფორმულით:

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{2.4}$$

ახლა, თუ (2.1) განტოლებას ჩავწერთ სახით:

$$F\left(x, y, y', \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}(1+y'^2)^{3/2}\right) = 0,$$

დავინახავთ, რომ მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება გეომეტრიულად გამოსახავს დამოკიდებულებას $y=\varphi(x)$ ინტეგრალური მრუდის $M(x, y)$ წერტილის კოორდინატებს, ამ წერტილში მისი მხების $y'(x)$ კუთხურ კოეფიციენტსა და K სიმრუდეს შორის.

ამგვარად, (2.1) განტოლების ინტეგრალური წირები ის წირებია, რომელთაც ყოველ თავის წერტილში აქვთ (2.1) განტოლებით განსაზღვრული დამოკიდებულება ამ წერტილში მრუდის მხების კუთხურ კოეფიციენტსა და სიმრუდეს შორის.

(2.1) განტოლებას შეგვიძლია მივცეთ მექანიკური ახსნა. მართლაც, თუ (2.1) განტოლებაში შემავალ x დამოუკიდებელ ცვლადს აღვნიშნავთ t-თი და მას განვიხილავთ როგორც დროს, ხოლო საძიებელ $y=\varphi(t)$-ს, როგორც წრფივად მოძრავი წერტილის მიერ განვლილ მანძილს t დროის განმავლობაში, მაშინ (2.1) განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$F\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0. \tag{2.5}$$

ეს განტოლება დროის ყოველ t მომენტში მექანიკურად გამოსახავს დამოკიდებულებას მოძრავი წერტილის განვლილ $y=\varphi(t)$ მანძილს, $\frac{dy}{dt}$ სიჩქარესა და $\frac{d^2y}{dt^2}$ აჩქარებას შორის. ამოვხსნათ (2.5) განტოლება, ნიშნავს, განვსაზღვროთ მოძრაობის კანონი, ე. ი. ვიპოვოთ $y=\varphi(t)$ თანაფარდობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს დროის ნებისმიერ t მომენტში განვსაზღვროთ მოძრავი მატერიალური წერტილის მდებარეობა. (2.5) განტოლება, საზოგადოდ, განსაზღვრავს უსასრულოდ მრავალ ამონახსნს. მათ მოძრაობები ეწოდება.

იმისათვის, რომ ამ უამრავი მოძრაობებიდან ამოვირჩიოთ ერთი გარკვეული მოძრაობა, ჩვეულებრივ, მექანიკაში მოცემულია მოძრავი წერტილის საწყისი მდებარეობა, ე. ი. $y=\varphi(t)$-ს მნიშვნელობა, როცა $t=t_0$, მას აღვნიშნავთ y_0-ით, $y_0=y(t_0)$, და საწყისი სიჩქარე, ე. ი. $\frac{dy}{dt}$-ს მნიშვნელობა, როცა $t=t_0$, მას აღვნიშნავთ y_0'-ით, $y_0'=y'(t_0)$.

§ 3. n ნებისმიერ მუდმივზე დამოკიდებული ბრტყელ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0, \tag{3.1}$$

სადაც $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ თავისი არგუმენტების ცნობილი ფუნქცია მოცემული $(n+2)$-განზომილებიანი სივრცის რომელიღაც D არეში. x და y-ს განვიხილავთ, როგორც სიბრტყის წერტილის დეკარტის კოორდინატებს.

ამ თავის 1-ლი პარაგრაფიდან ცნობილია, რომ n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი წარმოადგენს წირთა ოჯახს, რომელიც განისაზღვრება განტოლებით:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0. \tag{3.2}$$

(3.1) განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს (3.2) ოჯახის ყველა წირი, გამოსახავს ამ ინტეგრალური წირებისათვის დამახასიათებელ რომელიღაც ზოგად დიფერენციალურ თვისებას. ამიტომ (3.1) განტოლებას უწოდებენ n პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახის დიფერენციალურ განტოლებას.

ამ თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების შებრუნებული ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:

მოცემულია $C_1, C_2, \ldots, C_n$ პარამეტრებზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახი

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

უნდა შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც ეს წირები აკმაყოფილებს და რომლისათვის მოცემული (3.2) ოჯახი იქნება ზოგადი ინტეგრალი. საძიებელი დიფერენციალური განტოლება უნდა გამოსახავდეს ამ წირებისათვის დამახასიათებელ რომელიღაც ზოგად დიფერენციალურ თვისებას.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. თუ xOy სიბრტყეში მოცემულია n პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახი:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{3.2}$$

მაშინ ამ ოჯახიდან ნებისმიერი წირის y ორდინატი, განხილული როგორც x აბსცისის ფუნქცია, აკმაყოფილებს n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

ამასთან, (3.2) წარმოადგენს მის ზოგად ინტეგრალს.

დამტკიცება. ვთქვათ, (3.2) განტოლებით მოცემულია $C_1, C_2, \ldots, C_n$ პარამეტრებზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახი; შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც დააკმაყოფილებს (3.2) დამოკიდებულებიდან განსაზღვრული y ფუნქცია, პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, და რომლისათვის წირთა მოცემული ოჯახი იქნება ზოგადი ინტეგრალი. ვიგულისხმებთ, რომ $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველა არგუმენტის მიმართ, დიფერენცირებადია x-ისა და y-ის მიმართ n რიგამდე, n რიგის ჩათვლით, და აკმაყოფილებს არაცხადი ფუნქციის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობას. გავაწარმოოთ (3.2) განტოლება მიმდევრობით n-ჯერ; გვექნება:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y' = 0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot y' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot y'^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y'' = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y^{(n)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

(3.2) და (3.3) დამოკიდებულებანი ქმნის $(n+1)$ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს n პარამეტრს: $C_1, C_2, \dots, C_n$. საზოგადოდ, ამ სისტემიდან შეიძლება გამოვრიცხოთ ყველა პარამეტრი, ე. ი. ვიპოვოთ $C_i\ (i=1, 2, \dots, n)$ პარამეტრის გამოსახულებანი პირველი n განტოლებიდან $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$-ის საშუალებით და ჩავსვათ ეს გამოსახულებანი $(n+1)$-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{n}) = 0. \tag{3.4}$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება წარმოადგენს n რიგის დიფერენციალურ განტოლებას.

ვუჩვენოთ, რომ (3.2) წარმოადგენს (3.4) დიფერენციალური განტოლებების ზოგად ინტეგრალს. მართლაც, თუ (3.2) და (3.3) განტოლებებში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მის გამოსახულებას $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ (3.2) დამოკიდებულებიდან, მაშინ მივიღებთ იგივეობებს. ამიტომ (3.4) დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ჩასმის შემდეგ წარმოადგენს (3.2) და (3.3) იგივეობათა შედეგს, გადაიქცევა იგივეობად:

$$F[x, \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots,$$
$$\varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)] = 0, \tag{3.5}$$

მაგრამ, ეს იმას ნიშნავს, რომ $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება (3.2) დამოკიდებულებიდან, არის (3.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამგვარად, (3.2) დამოკიდებულება, რომელიც შეიცავს n და მხოლოდ n ნებისმიერ მუდმივს, წარმოადგენს (3.4) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება წირთა შემდეგი ოჯახისა:

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{3.6}$$

სადაც a, b და c ნებისმიერი მუდმივებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3.6) განტოლება x-ის მიმართ 3-ჯერ გავაწარმოოთ, და გავუტოლოთ 0-ს, მივიღებთ:

$$y' = 2ax + b = 0;\ y'' = 2a = 0;\ y''' = 0. \tag{3.7}$$

(3.6) და (3.7) განტოლებებიდან a, b, c ნებისმიერი მუდმივების გამორიცხვით მივიღებთ:

$$y''' = 0. \tag{3.8}$$

მაშასადამე, (3.8) დამოკიდებულება არის მოცემულ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

მაგალითი 2. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება წრეწირთა შემდეგი ოჯახისა:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1, \tag{3.9}$$

სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ მოცემული განტოლება x-ით ორჯერ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x-a+(y-b)\,y'=0,\\ 1+y'^2+(y-b)\,y''=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

(3.9), (3.10) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ a და b მუდმივები. სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს:

$$y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3.11}$$

თუ (3.11) გამოსახულებას ჩავსვამთ სისტემის პირველ განტოლებაში, გვექნება:

$$x-a=\frac{y'(1+y'^2)}{y''} \tag{3.12}$$

და, ბოლოს, (3.11) და (3.12) განტოლებები გავითვალისწინოთ (3.9)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{y'^2(1+y'^2)^2}{y''^2}+\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}=1,$$

ანუ

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=1,$$

ე. ი.

$$y''^2=(1+y'^2)^3. \tag{3.13}$$

უკანასკნელი არის მოცემულ წრეწირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

ამ წრეწირთა ოჯახის (3.13) დიფერენციალური განტოლებიდან ჩანს, რომ წრეწირთა სიმრუდე უდრის ერთს, რადგანაც (3.13)-დან გვაქვს:

$$1=\frac{y''^2}{(1+y'^2)^3}, \qquad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=K,$$

ე. ი.

$$K=1.$$

მაგალითი 3. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება წირთა შემდეგი ოჯახისა:

$$y = A\sin(x+\alpha), \tag{3.14}$$

სადაც A და α ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ (3.14) განტოლება x-ით ორჯერ:

$$\begin{aligned} y' &= A\cos(x+\alpha), \\ y'' &= -A\sin(x+\alpha). \end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.14) და (3.15) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ A და a, მივიღებთ:

$$y'' = -y,$$

ანუ

$$y'' + y = 0.$$

უკანასკნელი განტოლება არის წირთა (3.14) ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

სავარჯიშოები

უჩვენეთ, რომ ნებისმიერი მუდმივებისაგან დამოკიდებული ფუნქციები:

1. $$y^2 = 2C_1x + C_2,$$
2. $$y = \frac{C_1}{x} + C_2,$$
3. $$y = C_1x + C_2x^2,$$
4. $$y = \operatorname{arctg}\frac{u+v}{u-v}.$$

შესაბამისად აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებებს:

1. $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\quad\frac{dy}{dx} = 0,$$

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$$
4. $$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

იპოვეთ დიფერენციალური განტოლება წირთა შემდეგი ოჯახებისა:

1. $y = e^x (Ax + B)$, სადაც A, B პარამეტრებია.

პას. $y'' - 2y' + y = 0$.

2. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$, სადაც a, b, c პარამეტრებია.

პას. $\left[\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}\right]' = 0$ (სიმრუდე მუდმივია).

§ 4. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

სადაც F ყველა თავისი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციაა $(n+2)$ განზომილებიანი სივრცის რომელიმე D არეში. იმ საწყის მნიშვნელობათა

$$y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0', \dots, y^{(n)}|_{x=x_0} = y_0^{(n)}$$

მიდამოში, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{x=x_0,\; y=y_0,\; \dots,\; y^{(n)}=y_0^{(n)}} \neq 0,$$

$$(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) \in D.$$

არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის თანახმად, (4.1) განტოლება შეგვიძლია ამოვხსნათ $y^{(n)}$-ის მიმართ და იგი ასე წარმოვადგინოთ:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{4.2}$$

ისე როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქციის გარკვეული შეზღუდვის პირობებში, დავამტკიცებთ (4.2) განტოლების ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას, რომელიც ეთანადება მოცემულ საწყის პირობებს:

$$y = y_0, \; y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \; \text{როცა } x = x_0, \tag{4.3}$$

სადაც $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$, გარკვეული მოცემული რიცხვებია.

ვიდრე გადავიდოდეთ (4.2) სახის განტოლების ამონახსნის არსებობის საკითხის შესწავლაზე, წინასწარ განვიხილოთ აღნიშნული გან-

ტოლების დაყვანა მის ეკვივალენტურ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე n უცნობი ფუნქციით. ასე ეწოდება განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\
&\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

სადაც $f_1, f_2, \cdots, f_n$ თავისი არგუმენტების მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია, ხოლო $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ კი x-ის უცნობი ფუნქციები. (4.2) განტოლება შეიძლება შევცვალოთ (3.4) სახის სისტემით. თუ შემოვიღებთ დამხმარე ფუნქციებს:

$$y_1(x), \; y_2(x), \ldots, y_n(x).$$

მართლაც, განვიხილოთ n რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

თუ ამ განტოლებაში საძიებელ $y(x)$ ფუნქციას სიმეტრიისათვის აღვნიშნავთ y_1-ით და განვიხილავთ ახალ ფუნქციებს: $y_1, y_2, \cdots, y_n$, განსაზღვრულს დამოკიდებულებებით:

$$y_1 = y(x), \; y_2 = y'(x), \; y_3 = y''(x), \ldots, y_n = y^{(n-1)}(x),$$

გვექნება:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y' = y_2, \\
\frac{dy_2}{dx} &= y'' = y_3, \\
&\\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y^{(n-1)} = y_n, \\
\frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned}\right\} \tag{4.4'}$$

(4.4) სისტემა არის პირველი რიგის n დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა n უცნობი ფუნქციით: $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$. ამ განტოლების მარცხენა მხარეში დგას საძიებელი ფუნქციების წარმოებულები, ხოლო მარჯვენა ნაწილები კი დამოკიდებულია x ცვლადზე და ამ ცვლადის საძიებელ $y_n(x)$ ფუნქციებზე. ასეთი სახის სისტემას ეწოდება ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. მაშასადამე, (4.2) განტოლება ეკვივალენტურია (4.4′) დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემისა.

განტოლებათა (4.4′) სისტემას ეწოდება (4.2) განტოლების ეკვივალენტური სისტემა. ცხადია, თუ მოვძებნით (4.4′) სისტემის ამონახსნებს: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ამით ნაპოვნი იქნება (4.2) განტოლების $y(x)$ ამონახსნი და, პირიქით, თუ გვაქვს (4.2) განტოლების ამონახსნი $y(x)$, მაშინ ნაპოვნი იქნება (4.4) სისტემის ამონახსნი:

$$y_1 = y,\ y_2' = y',\ y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)}.$$

ასეთი შესაბამისობა (4.2) და (4.4′) განტოლებათა ამონახსნებს შორის გვექნება იმ შემთხვევაშიც, როცა $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არის (4.4′) სისტემის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)}, \text{ როცა } x = x_0.$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში $y = y(x)$ იქნება (4.2) განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს:

$$y = y_0 = y_1^{(0)},\ y' = y_0' = y_2^{(0)}, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} = y_n^{(0)}, \text{ როცა } x = x_0$$

და, პირიქით, თუ $y(x)$ არის (4.2) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y = y_0,\ y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \text{ როცა } x = x_0,$$

მაშინ

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$$

იქნება (4.4′) სისტემის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y = y_0 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_0' = y_2^{(0)}, \ldots, y_n = y_0^{(n-1)} = y_n^{(0)}, \text{ როცა } x = x_0.$$

თუ ვიპოვით (4.4′) სისტემის ამონახსნს რომელიმაც $D(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ არეში, ამით ნაპოვნი იქნება (4.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი $D(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ არეში და, პირიქით, ასე რომ, (4.2) განტოლების ინტეგრების ამოცანა ეკვივალენტურია (4.4′) სისტემის ინტეგრების ამოცანისა.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა (4.2) განტოლებისათვის.

თეორემა 1. თუ დიფერენციალური განტოლების

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4.5}$$

მარჯვენა მხარეში შემავალი $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქცია უწყვეტია $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ცვლადების მიმართ $(n+1)$-განზომილებიანი სივრცის რომელიღაც D არეში და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ არგუმენტების მიმართ[1]:

$$|f(x, \overline{y}, \overline{y'}, \overline{y''}, \dots, \overline{y}^{(n-1)}) - f(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}' \widetilde{y}'', \dots, \widetilde{y}^{n-1})) \leqslant$$

$$\leqslant M\{|\overline{y} - \widetilde{y}| + |\overline{y'} - \widetilde{y}'| + |\overline{y''} - \widetilde{y}''| + \cdots + |\overline{y}^{(n-1)} - \widetilde{y}^{(n-1)}|\},$$

სადაც M მუდმივი დადებითი რიცხვია, ხოლო

$$(x, \overline{y}, \overline{y'} y'', \dots, \overline{y}^{(n-1)} \text{ და } (x, \widetilde{y}, \widetilde{y}' \ \widetilde{y}'', \dots, \widetilde{y}^{(n-1)})$$

ორი ნებისმიერი წერტილია $\overline{D}$-დან, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)})$ წერტილი $\overline{D}$-დან (4.5) განტოლებას დამოუკიდებელი x ცვლადის $x = x_0$ საწყისი მნიშვნელობის გარკვეულ მიდამოში, $\Delta = |x - x_0| \leqslant h$, აქვს ერთადერთი ამონახსნი $y = \varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

$$x_0 = x_0, \ \varphi(x_0) = y_0, \ \varphi'(x_0) = y_0', \dots,$$

$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}, \ (x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D.$$

ეს ამონახსნი უწყვეტად დიფერენცირებადია $x=x_0$ წერტილის Δ მიდამოში და ამ მიდამოში იგი იგივურად აკმაყოფილებს (4.5) განტოლებას, ე. ი.

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)].$$

დამტკიცება. თეორემა შეგვიძლია დავამტკიცოთ (4.5) განტოლების დაყვანით მის ტოლფას (4.4′) პირველი რიგის n დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე. სიმარტივისათვის მივიღებთ $n=2$,

[1] შევნიშნავთ, რომ ლიფშიცის პირობა (4.5) განტოლებისათვის უეჭველად შესრულდება, თუ ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილს—$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქციას—აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებულები $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ არგუმენტების მიმართ.

მაშინ (4.5) განტოლება, თუ მივიღებთ $y'(x)=z(x)$, იგივურად ტოლფასი იქნება შემდეგი ორი განტოლების სისტემისა:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=z(x),\\ \frac{dz}{dx}&=f(x,\ y,\ z),\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, (4.6) სისტემის ერთადერთი ამონახსნის არსებობიდან გამომდინარეობს ასეთივე ამონახსნის არსებობა (4.5) დიფერენციალური განტოლებისათვის, როცა $n=2$, და, პირიქით.

ერთადერთი ამონახსნის არსებობა ახლა უმჯობესია დავამტკიცოთ არა (4.6) სისტემისათვის, არამედ უფრო ზოგადი სახის სისტემისათვის. ამგვარად, განვიხილოთ პირველი რიგის ორი დიფერენციალური განტოლების სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f_1(x,\ y,\ z),\\ \frac{dz}{dx}&=f_2(x,\ y,\ z)\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

საწყისი პირობებით:

$$y=y_0,\ z=z_0,\ \text{როცა}\ x=x_0. \tag{4.7'}$$

(4.7) სისტემისათვის, ისე როგორც ერთი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის, ადგილი აქვს ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგ თეორემას:

თეორემა 2. ვთქვათ, (4.7) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში შემავალი $f_1(x,y,z)$ და $f_2(x,y,z)$ ფუნქციები უწყვეტია რაიმე $\bar{D}_0\subset D$ არეში: $|x_0-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$, $|z-z_0|\leqslant c$ და, მაშასადამე, შემოსაზღვრულია

$$|f_i(x,\ y,\ z)|\leqslant N,\ i=1,\ 2,$$

გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობას, y, z არგუმენტების მიმართ:

$$|f_1(x,\ \bar{y},\ \bar{z})-f_1(x,\ \tilde{y},\ \tilde{z})|\leqslant M(|\bar{y}-\tilde{y}|+|\bar{z}-\tilde{z}|),$$
$$|f_2(x,\ \bar{y},\ \bar{z})-f_2(x,\ \tilde{y},\ \tilde{z})|\leqslant M(|\bar{y}-\tilde{y}|+|\bar{z}-\tilde{z}|),$$

სადაც M მუდმივი დადებითი რიცხვია, ხოლო (x, y, z) და $(x, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ ორი ნებისმიერი წერტილია $\overline{D}_0 \subset D$-დან, მაშინ (4.7) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$y = y(x), \ z = z(x),$$

რომელიც (4.7′) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს. ეს ამონახსნი განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია $|x - x_0| \leqslant h$ შუალედში, სადაც $h = \min\left(a, \frac{b}{N}\right)$ და x-ის ამ მნიშვნელობისათვის არ გამოდის $\overline{D}_0 \subset D$ არიდან, ე. ი.

$$|y(x) - y_0| \leqslant b, \ |z(x) - z_0| \leqslant b, \ \text{როცა} \ |x - x_0| \leqslant h.$$

დამტკიცება. ამოვირჩიეთ რა ამგვარად x-ის ცვალებადობის შუალედი, გადავიდეთ თეორემის დამტკიცებაზე. ამ მიზნით (4.6) განტოლებანი, საწყისი პირობებით $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$, წარმოვადგინოთ მათი ტოლფასი ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით. ვთქვათ, (4.7) სისტემის ამონახსნი: $y = y(x)$, $z = z(x)$ მოძებნილია, მაშინ, თუ ამ ამონახსნებს ჩავსვამთ (4.7) სისტემაში, მივიღებთ იგივეობებს:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= f_1[x, y(x), z(x)], \\ \frac{dz(x)}{dx} &= f_2[x, y(x), z(x)], \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

როცა $|x_0 - x_0| \leqslant h$. თუ საწყის პირობებს მხედველობაში მივიღებთ, მაშინ (4.8) ტოლობებიდან გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1[x, y(x), z(x)]\,dx, \\ z(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2[x, y(x), z(x)]\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

ამგვარად, (4.7) სისტემის ამონახსნი $y(x)$ და $z(x)$, საწყისი პირობებით: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ აკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$
\left.\begin{aligned}
y &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y, z)\,dx, \\
z &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y, z)\,dx.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.10)
$$

პირიქით, (4.7) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $y = y(x)$, $z = z(x)$, რომელიც უწყვეტია $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ შუალედში და x-ის ამ მნიშვნელობისათვის არ გამოდის D არიდან, იქნება (4.7) სისტემის საძიებელი ამონახსნი.

ახლა ვისარგებლოთ (4.7) სისტემის წარმოდგენის (4.10) ფორმით. დავამტკიცოთ (4.7) სისტემის $y = y(x)$, $z = z(x)$ ამონახსნის არსებობა პიკარის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. მიმდევრობითი მიახლოებანი გამოვთვალოთ ერთდროულად ორივე საძიებელი $y(x)$ და $z(x)$ ფუნქციებისათვის. ამ მიზნით უცნობი ფუნქციების $y_0(x)$, $z_0(x)$ ნულოვან მიახლოებად მივიღოთ თვით საძიებელი ფუნქციების საწყისი მნიშვნელობანი $y_0(x) = y_0$, $z_0(x) = z_0$ და შევადგინოთ ფუნქციათა მიმდევრობები:

$$
\left.\begin{aligned}
&y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)\,dx, \qquad z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0)\,dx; \\
&y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1)\,dx, \qquad z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, z_1)\,dx; \\
&y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_2, z_2)\,dx, \qquad z_3(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_2, z_2)\,dx; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})\,dx, \quad z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_2, z_2)\,dx; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (4.11)
$$

ამგვარად, მივიღებთ ფუნქციათა ორ მიმდევრობას:

$$
\begin{aligned}
&y_0,\ y_1(x),\ y_0(x), \ldots, y_n(x), \ldots, \\
&z_0,\ z_1(x),\ z_2(x), \ldots, z_n(x), \ldots .
\end{aligned} \qquad (4.12)
$$

დავამტკიცოთ, რომ (4.12) მიმდევრობის ყოველი ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში და არ გამოდის D არიდან, ე. ი. წერტილი $[x, y_n(x), z_n(x)]$ არ გამოდის $f_1(x, y, z)$ და $f_2(x, y, z)$ ფუნქციების განსაზღვრის D არიდან. ცხადია, (4.12) მიმდევრობათა ფუნქციები წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციებს. ახლა ვუჩვენოთ, რომ n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\begin{aligned} &|y_n(x)-y_0|\leqslant b, \quad \frac{b}{a}\geqslant N, \\ &|z_n(x)-z_0|\leqslant b, \quad \text{როცა} \quad |x-x_0|\leqslant h \quad (n=1, 2\cdots). \end{aligned} \tag{4.13}$$

მართლაც (4.11) დამოკიდებულებებიდან, როცა $|x-x_0|\leqslant a$, გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} |y_1(x)-y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)\,dx\right|\leqslant N|x-x_0|\leqslant Na, \\ |z_1(x)-z_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0)\,dx\right|\leqslant N|x-x_0|\leqslant Na. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

აქედან ცხადია, რომ პირველი მიახლოებანი — ფუნქციები $y_1(x)$ და $z_1(x)$, რომლებიც განსაზღვრულია და უწყვეტი $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში, არ გამოდის D არიდან, ე. ი. შესრულდება უტოლობანი:

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant b, \quad |z_1(x)-z_0|\leqslant b,$$

თუ $N|x-x_0|\leqslant b$, ე. ი. $|x-x_0|\leqslant \dfrac{b}{N}$, და $h=\min\left(a, \dfrac{b}{N}\right)$.

ამგვარად, $f_1[x, y_1(x), z_1(x)]$ და $f_2[x, y_1(x), z_1(x)]$ ფუნქციები იქნება უწყვეტი და შემოსაზღვრული D არეში:

$$\begin{aligned} &|f_1[x, y_1(x), z_1(x)]|\leqslant N, \\ &|f_2[x, y_1(x), z_1(x)]|\leqslant N. \end{aligned} \tag{4.15}$$

უკანასკნელი უტოლობებიდან და (4.11) მიმდევრობის მეორე დამოკიდებულებებიდან, როცა $|x-x_0|\leqslant h$, მივიღებთ:

$$|y_2(x)-y_0|\leqslant Na\leqslant b,$$

$$|z_2(x)-z_0|\leqslant Na\leqslant b,$$

ე. ი. $y_2(x)$ და $z_2(x)$ იქნება განსაზღვრული და უწყვეტი $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში და x-ის ამ მნიშვნელობებისათვის დარჩება D არეში. ამიტომ $f_1[x, y_2(x), z_2(x)]$ და $f_2[x, y_2(x), z_2(x)]$ ფუნქციები, განხილული როგორც x-ის რთული ფუნქციები, იქნება უწყვეტი და შემოსაზღვრული

$|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში. (4.11) დამოკიდებულებებიდან აგრეთვე მივიღებთ, რომ $y_3(x)$ და $z_3(x)$ ფუნქციები უწყვეტია ამ შუალედში და ა. შ. მსგავსი მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ $y_n(x)$ და $z_n(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში და x-ის ამ მნიშვნელობისათვის არ გამოდის D არიდან:

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant b,\quad |z_n(x)-z_0|\leqslant b,\quad \text{როცა}\quad |x-x_0|\leqslant h. \tag{4.16}$$

ამგვარად, (4.12) მიმდევრობები შედგება უწყვეტი და დიფერენცირებადი $y_n(x)$ და $z_n(x)$ ფუნქციებისაგან, როგორიც უნდა იყოს n, როცა $|x-x_0|\leqslant h$, და ეს ფუნქციები არ გამოდიან D არიდან.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (4.12) მიმდევრობები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში და მათი ზღვრული ფუნქციები $y(x)$ და $z(x)$ უწყვეტია ამავე შუალედში. ამ მიზნით შევადგინოთ ფუნქციონალური მწკრივები:

$$\begin{aligned}&y_0+[y_1(x)-y_0]+[y_2(x)-y_1(x)]+\cdots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\cdots,\\&z_0+[z_1(x)-z_0]+[z_2(x)-z_1(x)]+\cdots+[z_n(x)-z_{n-1}(x)]+\cdots\end{aligned} \tag{4.17}$$

დავამტკიცოთ, რომ ისინი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი არიან $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში. ამით დადგენილ იქნება, რომ (4.12) მიმდევრობების ზღვრული ფუნქციები არის შესაბამისად. უწყვეტი ფუნქციები: $y(x)$ და $z(x)$. აღნიშნულის დასამტკიცებლად შევაფასოთ (4.12) მიმდევრობების წევრები. (4.11) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned}&|y_1(x)-y_0|\leqslant N|x-x_0|,\\&|z_1(x)-z_0|\leqslant N|x-x_0|.\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}\{f_1[x,y_1(x),z_1(x)]-f_1[x,y_0,z_0]\}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int\limits_{x_0}^{x}|f_1[x,y_1(x),z_1(x)]-f_1(x,y_0,z_0)|\,dx\right|$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ლიფშიცის პირობებს, გვექნება:

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant M\left|\int\limits_{x_0}^{x}[\,|y_1(x)-y_0|+|z_1(x)-z_0|\,]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2MN\left|\int\limits_{x_0}^{x}|x-x_0|\,dx\right|=2MN\,\frac{|x-x_0|^2}{2!}. \tag{4.19}$$

ანალოგიურად მივიღებთ $z_2(x)-z_1(x)$ სხვაობისათვის ასეთ შეფასებას:

$$|z_2(x)-z_1(x)| \leqslant 2MN\frac{|x-x_0|^2}{2!} \tag{4.20}$$

მსგავსად ამისა მივიღებთ, რომ

$$\left.\begin{aligned} |y_3(x)-y_2(x)| &\leqslant N(2M)^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}, \\ |z_3(x)-z_2(x)| &\leqslant N(2M)^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

და, საზოგადოდ,

$$\left.\begin{aligned} |y_n(x)-y_{n-1}(x)| &\leqslant N(2M)^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}, \\ |z_n(x)-z_{n-1}(x)| &\leqslant N(2M)^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}, \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

ამგვარად, (4.17) ფუნქციონალური მწკრივების წევრთა აბსოლუტური მნიშვნელობანი x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $|x-x_0| \leqslant h$ შუალედში შესაბამისად ნაკლებია შემდეგი დადებითი კრებადი რიცხვითი მწკრივის წევრებზე:

$$N\cdot\frac{h}{1!}+N\quad 2M\frac{h^2}{2!}+N(2M)^2\frac{h^3}{3!}+\cdots+N(2M)^{n-1}\frac{h^n}{n!}+\cdots \tag{4.23}$$

ეს მწკრივი კრებადია და მას ჯამად აქვს რიცხვი $\dfrac{N}{2M}(e^{2Mh}-1)$.

მაშასადამე, ვაიერშტრასის კრიტერიუმის თანახმად, (4.17) ფუნქციონალური მწკრივები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $|x-x_0| \leqslant h$ შუალედში. მათი ჯამები შესაბამისად აღვნიშნოთ $y(x)$ და $z(x)$-ით. რადგანაც ამ ფუნქციონალური მწკრივების წევრები უწყვეტი ფუნქციებია $|x-x_0| \leqslant h$ შუალედში და თვით მწკრივები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია ამავე შუალედში, ამიტომ, ცნობილი თეორემის თანახმად, $y(x)$ და $z(x)$ ფუნქციები უწყვეტი იქნება $|x-x_0| \leqslant h$ შუალედში. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ზღვრული ფუნქციები არ გამოდის D არიდან, როცა $|x-x_0| \leqslant h$, ე. ი.

$$|y(x)-y_0| \leqslant b, \quad |z(x)-z_0| \leqslant b \tag{4.24}$$

და აკმაყოფილებს ინტეგრალურ განტოლებათა (4.9) სისტემას. მართლაც, (4.16) უტოლობებში ზღვარზე გადასვლა, როცა $n\to\infty$, გვაძლევს (4.24) უტოლობებს.

ფუნქციები $y(x)$ და $z(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში და წარმოადგენს (4.7) სისტემის საძიებელ ამონახსნს. მართლაც, $f_1(x, y, z)$ და $f_2(x, y, z)$ ფუნქციების უწყვეტობისა და (4.12) მიმდევრობების $\{y_n(x)\}$ და $\{z_n(x)\}$ თანაბარი კრებადობის გამო შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვარზე ტოლობებში:

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1[x,\ y_{n-1}(x),\ z_{n-1}(x)]\,dx.$$

$$z_n(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f_2[x,\ y_{n-1}(x),\ z_{n-1}(x)]\,dx,$$

როცა $n\to\infty$, მაშინ მივიღებთ:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx,$$

$$z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f_2[x;\ y(x),\ z(x)]\,dx.$$

თუ უკანასკნელი ტოლობების ორივე ნაწილს გავაწარმოებთ x-ით, მივიღებთ იგივეობებს:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=f_1[x,\ y(x),\ z(x)],$$

$$z'(x)=\frac{dz}{dx}=f_2[x,\ y(x),\ z(x)]$$

და

$$y_0=y(x_0),\qquad z_0=z(x_0).$$

მაშასადამე, $y(x)$ და $z(x)$ ფუნქციებს აქვს უწყვეტი წარმოებულები და მართლაც წარმოადგენს (4.7) სისტემის ამონახსნებს $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში.

ამგვარად, (4.7) სისტემის ამონახსნის $y(x)$ და $z(x)$ არსებობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს ამონახსნები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებენ, არის ერთადერთი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $y=y^*(x)$, $z=z^*(x)$ არის აგრეთვე (4.7) სისტე-

მის ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრული და უწყვეტია რომელიღაც $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში და აკმაყოფილებს იმავე საწყის პირობებს: $y^*(x_0)=y(x_0)=y_0$, $z^*(x_0)=z(x_0)=z_0$.

ამასთან ერთად, გვაქვს იგივეობები:

$$y^*(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1[x,\ y^*(x),\ z(x)]\,dx.$$

$$z^*(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f_2[x,\ y^*(x),\ z^*(x)]\,dx,$$

როცა

$$|x-x_0|\leqslant h'.$$

ფუნქციები $Y(x)=y(x)-y^*(x)$, $Z(x)=z(x)-z^*(x)$ უწყვეტი და დიფერენცირებადია $|x-x_0|\leqslant h$ შუალედში. ახლა ამოვირჩიოთ უმცირესი შუალედი $|x-x_0|\leqslant h'$ ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ უტოლობას:

$$2h'M<\frac{1}{2},\ h'<h.$$

მივიღოთ, $\eta=\max|Y(x)|$ და $\eta_1=\max|Z(x)|$ შუალედში $|x-x_0|\leqslant h'$ და ვთქვათ, η და η_1 დადებითი რიცხვებიდან η უდიდესია; მაშინ გვექნება:

$$|Y'(x)|=|y'(x)-y^{*\prime}(x)|=|f_1[x,\ y(x),\ z(x)]-f_1[x,\ y^*(x),\ z^*(x)]|.$$

$$|Z'(x)|=|z'(x)-z^{*\prime}(x)|=|f_2[x,\ y(x),\ z(x)]-f_2[x,\ y^*(x),\ z^*(x)]|,$$

ანუ, ლიფშიცის პირობის თანახმად,

$$\begin{aligned} |Y'(x)|&\leqslant M\{|y(x)-y^*(x)|+|z(x)-z^*(x)|\}=M\{|Y(x)|+|Z(x)|\},\\ |Z'(x)|&\leqslant M\{|y(x)-y^*(x)|+|z(x)-z^*(x)|\}=M\{|Y(x)|+|Z(x)|\}. \end{aligned}\tag{4.25}$$

მაშასადამე,

$$|Y'(x)|\leqslant 2M\eta,\quad |x-x_0|\leqslant h'.$$

მეორე მხრივ, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად, გვექნება:

$$|Y(x)|=|Y(x)-Y(x_0)|=|x-x_0|\cdot|Y'(\xi)|\leqslant 2|x-x_0|M\eta\leqslant 2h'M\eta,$$

ე. ი.

$$\eta=\max|Y(x)|\leqslant 2\frac{1}{4M}M\eta=\frac{\eta}{2},$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ $\eta=0$, ანუ $Y\equiv 0$; მაშასადამე,

$$y(x)\equiv y^*(x),\ \text{როცა}\ |x-x_0|\leqslant h'$$

მაგრამ, მაშინ (4.25) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$|Z'(x)| \leqslant M|Z(x)| \leqslant M\eta_1.$$

მეორე მხრივ,

$$|Z(x)| = |Z(x) - Z(x_0)| = |x - x_0| \cdot |Z'(\xi)| \leqslant h' M \eta_1 < \frac{\eta_1}{4},$$

ე. ი.

$$\eta_1 = \max |Z(x)| \leqslant \frac{\eta_1}{4},$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ $\eta_1 = 0$, ანუ $Z(x) \equiv 0$, მაშასადამე,

$$z(x) \equiv z^*(x), \quad \text{როცა} \quad |x - x_0| \leqslant h'.$$

ამით (3.7) სისტემის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა დამტკიცებულია $|x - x_0| \leqslant h'$ შუალედისათვის.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ამონახსნი $y = y(x)$, $z = z(x)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია $|x - x_0| \leqslant h$ შუალედში, სადაც $h = \min\left(a, \frac{b}{N}\right)$, თუ $h < a$, ე. ი. თუ (x_0, y_0, z_0) წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირის მიღებული მონაკვეთის ერთ-ერთი ბოლო წერტილი (ან ორივე ბოლო), რომელიც ეთანადება $x_0 - h$ ან $x_0 + h$ მნიშვნელობას, წარმოადგენს D არის შიგა წერტილს, რომელშიაც f_1 და f_2 ფუნქციები აკმაყოფილებს არსებობის თეორემის პირობებს (მაგალითად, ბოლო წერტილი, რომელიც $x = x_0 + h$ წერტილს ეთანადება), მაშინ შეგვიძლია ეს ბოლო წერტილი, რომლის კოორდინატებია:

$$x_0^{(1)} = x_0 + h, \quad y^{(1)} = y(x_0 + h), \quad z^{(1)} = z(x_0 + h),$$

მივიღოთ როგორც ახალი საწყისი წერტილი, ე. ი. როგორც ცენტრი ახალი D_1 არისა:

$$D_1 \quad |x - x_0^{(1)}| \leqslant a^{(1)}, \ |y - y^{(1)}| \leqslant b^{(1)}, \quad |z - z^{(1)}| \leqslant b^{(1)},$$

$D_1 \subset D$, და განვსაზღვროთ $(x_0^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირის შემდგომი მონაკვეთი, $y = \widetilde{y}(x)$, $z = \widetilde{z}(x)$ x-ის მნიშვნელობებისათვის რომელიღაც $(x_0^{(1)} - h^{(1)}, x_0^{(1)} + h^{(1)})$ შუალედში, სადაც $h^{(1)} = \min\left(a^{(1)}, \frac{b^{(1)}}{N}\right)$. ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, $y = \widetilde{y}(x)$, $z = \widetilde{z}(x)$ ამონახსნები ემთხვევა $y = y(x)$, $z = z(x)$ ამონახსნს $x^{(1)} - h^{(1)} < x < x^{(1)}$ შუალედში, ე. ი. $[x_0 - h, x_0 + h]$ და $[x_0^{(1)} - h^{(1)}, x_0^{(1)} + h^{(1)}]$ შუალედების საერთო ნაწილში. იგი განსა-

ზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია $x = x^{(1)}$ წერტილის მარჯვნივ, $x^{(1)} \leqslant x < x^{(1)} + h^{(1)}$. ამგვარად, ამონახსნი $y = \widetilde{y}(x)$, $z = \widetilde{z}(x)$ წარმოადგენს $y = y(x)$, $z = z(x)$ ამონახსნის უშუალო გაგრძელებას $|x - x_0| \leqslant h$ შუალედიდან $|x - x^{(1)}| \leqslant h^{(1)}$ შუალედში ისე, რომ მათ საერთო ნაწილში $x^{(1)} - h^{(1)} < x \leqslant x^{(1)}$, $y(x) \equiv \widetilde{y}(x)$ და $z(x) \equiv \widetilde{z}(x)$. ასეთი წესით გავაგრძელებთ ამონახსნს უფრო დიდ შუალედებში; ამასთან, ცხადია, ეს გაგრძელება შესაძლებელია x-ის იმ მნიშვნელობებზე, რომლებიც არ აღემატებიან $(x_0 + a)$-ს. ანალოგიური წესით შეგვიძლია მოვახდინოთ ამონახსნის გაგრძელება $x = x_0 - h$ წერტილის მარცხნივ.

ამგვარად, ინტეგრალური წირი, რომელიც გაივლის D არის შიგა (x_0, y_0, z_0) წერტილზე, გაგრძელებული იქნება D არის საზღვრამდე.

სრულიად ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ, რომ, თუ მოცემულია n პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (3.4) — საწყისი პირობებით: $x_0, y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_n^\circ$, სადაც $f_i\,(i = 1, 2, \dots, n)$ ფუნქციები უწყვეტია ყველა თავისი არგუმენტის მიმართ, $|f_i| \leqslant N$, და y_i-ის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $n + 1$-განზომილებიანი სივრცის რომელიღაც $\overline{D}$ არეში

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_i| \leqslant b \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

მაშინ x_0-ის შემცველი ინტერვალის შიგნით არსებობს (3.4) სისტემის ერთი და მხოლოდ ერთი უწყვეტი და დიფერენცირებადი ამონახსნი: $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, განსაზღვრული x-ის მნიშვნელობებისათვის $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ სეგმენტში, $h = \min\left(a, \dfrac{b}{N}\right)$, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს: როცა $x = x_0$, მაშინ

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

ამგვარად, (4.4) სისტემისათვის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემა შეიძლება ჩავთვალოთ დამტკიცებულად. ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ერთი n რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

საწყისი პირობებით:

$$x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'', \dots, y_0^{(n-1)},$$

დაიყვანება n პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა (3.4′) სისტემაზე საწყისი პირობებით:

$$y_1 = y_0,\ y_2 = y_0',\ y_3 = y_0'', \dots, y_n = y_0^{(n-1)},$$

მაშინ (4.4′) სისტემისათვის ზემოთ დამტკიცებული თეორემის გა-

ყენება (4.5) განტოლებისათვის გვაძლევს ფორმულირებული თეორემის დამტკიცებას განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ.

§ 5. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგება

ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{5.1}$$

სადაც f უწყვეტია, შემოსაზღვრულია და აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებულები $y, y', \dots, y^{(n-1)}$-ის მიმართ $n+1$-განზომილებიანი სივრცის განსახილავ D არეში.

კოშის თეორემა ამტკიცებს (5.1) განტოლების კერძო ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას მოცემულ საწყის პირობებში:

$$y = y_0, \ y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \quad \text{როცა} \quad x = x_0. \tag{5.2}$$

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც გაივლის D არის $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ წერტილში.

კოშის თეორემის გამოყენებით ადვილად შეგვიძლია ზოგადი ამონახსნის აგება. ვუჩვენოთ, რომ, თუ მოცემულ D არეში შესრულებულია კოშის თეორემის ზემოთ მოყვანილი პირობები, მაშინ არსებობს (5.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D' არეში, $D' \subset D$.

მართლაც, განვიხილოთ არგუმენტის x_0 საწყისი მნიშვნელობა, როგორც მოცემული ფიქსირებული რიცხვი, ხოლო საწყისი მნიშვნელობანი $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$, როგორც პარამეტრები, რომელთაც შეუძლიათ მიიღონ სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობანი, რომელნიც არ გამოდიან D არიდან; მაშინ საწყის მნიშვნელობათა ნებისმიერი ასეთი სისტემისათვის $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$, $x_0 \in [x_0 - a, \ x_0 + a]$, იარსებებს (5.1) განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (5.2) საწყის პირობებს: $y = y_0$, $y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, როცა $x = x_0$, სახელდობრ,

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}).$$

ასეთივე ამონახსნი მიიღება, თუ საწყის მნიშვნელობებად ავიღებთ განსახილავი ამონახსნის y-ის და მისი $n-1$ რიგამდე მიმდევრობით წარმოებულების მნიშვნელობათა სისტემას $[x_0 - a, \ x_0 + a]$ შუალედის რომელიმე სხვა $x = \overline{x}_0$ წერტილში, $\overline{x}_0 \in [x_0 - a, \ x_0 + a[$:

$$\overline{y}_0, \overline{y}_0', \dots, \overline{y}_0^{(n-1)}.$$

მართლაც, განვიხილოთ რომელიმე $P(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{y}_0', \quad, \overline{y}_0^{(n-1)})$ წერტილი, $P \in D'$, და მასზე გამავალი ინტეგრალური წირი; ეს წირი შეიძლება გაგრძელებულ იქნეს x არგუმენტის x_0 მნიშვნელობამდე, ამასთან, $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, როცა $x = x_0 \in [x_0 - a, x_0 + a]$, მიიღებენ რომელიღაც მნიშვნელობებს: $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, მაგრამ, მაშინ ინტეგრალური წირი, განსაზღვრული საწყისი პირობებით: $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, გაივლის $P(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{y}_0', \ldots, \overline{y}_0^{(n-1)})$ წერტილზე.

ერთადერთობის თეორემის თანახმად, D' არის ყოველ წერტილზე გაივლის (5.1) განტოლების მხოლოდ ერთი ასეთი ინტეგრალური წირი. მაშასადამე, ყველა განსახილავი: $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ საწყის მნიშვნელობათა სისტემისათვის, როცა x იცვლება $[x_0 - a, x_0 + a]$ შუალედში, იარსებებს (5.1) განტოლების n პარამეტრზე დამოკიდებული ამონახსნი. სახელდობრ,

$$y = \varphi(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \tag{5.3}$$

სადაც φ არის n-ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი $[x_0 - a, x_0 + a]$ შუალედში, ხოლო $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ საწყისი მნიშვნელობანი წარმოადგენენ პარამეტრებს, ე. ი. ნებისმიერ მუდმივებს.

(5.3) განტოლება გვაძლევს (5.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

ამგვარად, n რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{5.4}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია: ამასთან, როგორც ეს გამომდინარეობს კოშის თეორემის დამტკიცებიდან, φ წარმოადგენს $C_1, C_2, \quad C_n$ ნებისმიერი მუდმივების უწყვეტ ფუნქციას.

ახლა ვუჩვენოთ, როგორ შეიძლება ამოვხსნათ კოშის ამოცანა, თუ ცნობილია (5.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი (5.4) სახით. (5.4) განტოლებიდან და დამოკიდებულებებიდან, რომლებიც მიიღება მისგან x-ით დიფერენცირებადი, თუ მათში x არგუმენტის ნაცვლად ჩავსვამთ x_0 საწყის მნიშვნელობას, ხოლო $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$-ის ნაცვლად მათ საწყის მნიშვნელობებს: $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, მივიღებთ ტოლობებს:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_n) = y_0, \\ &\varphi'(x, C_1, C_2 \ldots C_n) = y_0', \\ &\quad\vdots \\ &\varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = x_0'^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

განვიხილავთ რა (4.5) ტოლობებს, როგორც n განტოლებათა სისტემას n უცნობით: $C_1, C_2, \ldots, C_n$, მივიღებთ $C_1, C_2, \ldots, C_n$-სათვის გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობებს, რომლებიც ეთანადება იმ კერძო ამონახსნს, რომელიც განსაზღვრულია (5.2) საწყისი პირობებით.

§ 6. ზოგიერთი ტიპის n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების რიგის დაწევა

არსებობს n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების რამდენიმე ტიპი, რომელთა ზოგადი ინტეგრალი შეგვიძლია მოვძებნოთ კვადრატურებში. თუ მოცემულია დიფერენციალური განტოლება, რომლის რიგი ერთზე მეტია, პირველ ყოვლისა, უნდა შევეცადოთ განტოლების გამარტივებას — განტოლების რიგის დაწევას. განვიხილოთ ზოგადი წესები, რომელთა მეშვეობით შეიძლება ზოგიერთი განტოლების რიგის დაწევა[1].

1. განტოლება, რომელიც არ შეიცავს დამოუკიდებელ ცვლადს. თუ დიფერენციალური განტოლება

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{6.1}$$

ორი x და y ცვლადიდან არ შეიცავს რომელიმეს, მაშინ განტოლების რიგი შეიძლება დავწიოთ ერთით. როცა (6.1) განტოლება არ შეიცავს დამოუკიდებელ x ცვლადს, მას აქვს სახე:

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0. \tag{6.2}$$

მაშინ, თუ მივიღებთ y-ს დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო $p=y'$ საძიებელ ფუნქციად, შეგვიძლია განტოლების რიგი დავწიოთ ერთი ერთეულით. მართლაც, ამისათვის საკმარისია y'', y''', ..., $y^{(n)}$ წარმოებულები გამოვსახოთ p-ს წარმოებულებით y-ის მიმართ შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned}
&y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\ \frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\,p,\\
&y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{dy}\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)\cdot p=p^2\frac{d^2y}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,\\
&y^{\mathrm{IV}}=\frac{dy'''}{dx}=\frac{d}{dx}\left[p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]=\frac{d}{dy}\left[p^2\frac{d^2p}{dy^2}+\right.\\
&\left.+p\left(\frac{dp}{\partial y}\right)^2\right]\cdot p=\left[2p\frac{d^2p}{dy^2}\ \ \frac{dp}{dy}+p^2\frac{d^2p}{dy^3}+\left(\frac{dp}{dy}\right)^3+\right.\\
&\left.+2p\frac{dp}{dy}\ \ \frac{d^2p}{dy^2}\right]\cdot p=2p^2\frac{d^2p}{dy^2}\cdot\frac{dp}{dy}+p^3\frac{d^3p}{dy^3}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^3+\\
&+2p^2\frac{d^2p}{dy^2}\cdot\frac{dp}{dy}=4p^2\frac{d^2p}{dy^2}\cdot\frac{dp}{dy}+p^3\frac{d^3p}{dy^3}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^3
\end{aligned}\right\}\tag{6.3}$$

---

[1] შევნიშნავთ, რომ განტოლების რიგის დაწევას ახდენენ იმ შემთხვევაშიც, როცა რიგის დაწევის შედეგად მიღებული განტოლების ინტეგრება არ ხდება კვადრატურებში, რადგანაც, რამდენადაც დაბალია განტოლების რიგი, იმდენად ადვილია მისი ამონახსნის მოძებნა მიახლოებითი მეთოდებით.

და ა. შ.

$$y^{(n)}=\psi\left(p,\frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2},\dots,\frac{d^{(n-1)}p}{dy^{n-1}}\right)=p^{n-1}\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}+\dots+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^{n-1}$$

თუ $y', y'', \dots, y^{(n)}$ წარმოებულების ნაცვლად (6.2) დიფერენციალურ განტოლებაში ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს (6.3) ფორმულებიდან, მივიღებთ $n-1$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F\left\{y,p,p\frac{dp}{dy},\left[\frac{d^2p}{dy^2}\cdot p+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]p,\dots,\psi\left(p,\frac{dp}{dy},\dots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)\right\}=$$

$$=F_1\left(y,p,\frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2},\dots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0. \tag{6.4}$$

თუ მოვახდენთ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებას, მივიღებთ მის ზოგად ინტეგრალს:

$$p=\varphi(y,C_1,C_2,\dots,C_{n-1}).$$

ამგვარად, (6.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნა დაიყვანება კვადრატურაზე.

$$p=\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1,C_2,\dots,C_{n-1}), \tag{6.5}$$

საიდანაც:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1,C_2,\dots,C_{n-1})}=x+C_n.$$

უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს. ცხადია, თუ (6.4) განტოლებას აქვს განსაკუთრებული ამონახსნი, მაშინ, თანახმად $p=y'$ გარდაქმნისა, მოცემულ განტოლებასაც ექნება განსაკუთრებული ამონახსნი. იგი შეიძლება აგრეთვე წარმოიშვას (6.5) განტოლების ინტეგრების შედეგადაც.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(1+y^2)yy''=(3y^2-1)y'^2.$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა $y'=p$ და y მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადად. ცხადია, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. ასე რომ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$(1+y^2)y\frac{dp}{dy}\cdot p=(3y^2-1)\cdot p^2,$$

ანუ

$$(1+y^2)\,y\frac{dp}{dy}=(3y^2-1)\cdot p.$$

ცვლადთა განცალებით ვღებულობთ:

$$\frac{dp}{p}=\frac{3y^2-1}{y(1+y^2)}\,dy,$$

საიდანაც ინტეგრებით გვაქვს:

$$\ln|p|=2\ln(1+y^2)\ln|y|+\ln|C_1|,$$

ანუ

$$\frac{py}{(1+y^2)^2}=C_1.$$

თუ დავუბრუნდებით საძიებელ $y(x)$ ფუნქციას, მივიღებთ:

$$\frac{yy'}{(1+y^2)^2}=C_1.$$

ეს არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი. თუ მოვახდენთ ერთხელ კიდევ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებას, ვიპოვით მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\frac{1}{1+y^2}=-2C_1x+C_2.$$

ანუ

$$\Phi(x,\ y,\ C)=\frac{1}{1+y^2}+2C_1x-C_2=0.$$

მაგალითი 2. ზემოგანხილული ტიპის დიფერენციალურ განტოლებაზე დაიყვანება საკითხი მექანიკიდან — მატერიალური M წერტილის წრფივი მოძრაობის გამოკვლევის შესახებ.

მართლაც, ვთქვათ, m მასის მქონე M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე იმ F ძალის მოქმედებით, რომელიც წარმოადგენს წერტილის x აბსცისისა და სიჩქარის $v=\dfrac{dx}{dt}$ ფუნქციას:

$$F=f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

ამ შემთხვევაში წერტილის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right).\tag{6.6}$$

უკანასკნელი არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც არ შეიცავს დამოუკიდებელ t ცვლადს.

ზემოთ მოყვანილი ზოგადი მეთოდის თანახმად, მოვახდინოთ გარდაქმნა $p = \frac{dx}{dt}$, მაშინ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot p,$$

აღნიშნული გარდაქმნის შედეგად (5.6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$m \cdot p \frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

ანუ

$$d \frac{mp^2}{2} = (x, p)\, dx. \tag{6.7}$$

(6.7) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$p = \varphi(x, C_1) \text{ ანუ } \frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1),$$

საიდანაც

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x, C_1)},$$

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1)} + C_2.$$

უკანასკნელი წარმოადგენს მოძრაობის განტოლებას, რომელიც ორ ნებისმიერ C_1 და C_2 მუდმივს შეიცავს. ეს მუდმივები ღებულობს გარკვეულ მნიშვნელობებს, როცა ცნობილია საწყისი მდებარეობა $x = x_0$ და მოძრაობის საწყისი სიჩქარე $v = v_0$.

2. განტოლება, რომელიც არ შეიცავს y საძიებელ ფუნქციას. ვთქვათ, n რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

ამ შემთხვევაში მისი რიგი შეიძლება დავწიოთ ერთი ერთეულით. მართლაც, შემოვიღოთ ახალი საძიებელი ფუნქცია $y' = p$; მაშინ:

$$\frac{dp}{dx} = y'', \quad \frac{d^2p}{dx^2} = y''', \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}} = y^{(n)}.$$

თუ y'-ის, y''-ის, . . , $y^{(n)}$-ის გამოსახულებებს ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0. \tag{6.8}$$

ეს უკანასკნელი p უცნობი ფუნქციის მიმართ არის $n-1$ რიგის დიფერენციალური განტოლება, ე. ი. განტოლების რიგი დაიწია ერთი ერთეულით. თუ მოვახდენთ (6.8) განტოლების ინტეგრებას, მივიღებთ მის ზოგად ინტეგრალს:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}).$$

საიდანაც

$$y = \int \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\, dx + C_n. \tag{6.9}$$

(5.9) ფორმულა წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი 8. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლება არ შეიცავს საძიებელ y ფუნქციას. მივიღოთ $y' = p$; მაშინ $y'' = \frac{dp}{dx}$ თუ y'-ის, y''-ის გამოსახულებებს ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, გვექნება:

$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} + p^2 + 1 = 0.$$

აქედან ცვლადთა განცალებით მივიღებთ:

$$\frac{dp}{1 + p^2} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0.$$

$$\int \frac{dp}{1 + p^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = C,$$

$$\operatorname{arc\,tg} p + \operatorname{arc\,tg} x = C,$$

$$p = \operatorname{tg}(C - \operatorname{arc\,tg} x),$$

ანუ

$$p = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

თუ ამ უკანასკნელ განტოლებაში p-ს შევცვლით y'-ით, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1-x}{1+C_1x},$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს სახით:

$$y=\int\frac{C_1-x}{1+C_1x}dx+C_2=-\frac{x}{C_1}+\left(x+\frac{1}{C_1^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{C_1}\right)+C_2,$$

ანუ

$$y=(1+C_1^2)\ln(x+C_1)-C_1x+C_2.$$

3. **განტოლება, რომელიც არ შეიცავს საძიებელ ფუნქციასა და მის რამდენიმე მიმდევრობით წარმოებულს.** თუ n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება (6.1) არ შეიცავს y-ს და მის რამდენიმე მიმდევრობითს წარმოებულს k რიგამდე, ე. ი. თუ განტოლებას აქვს სახე:

$$F[x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}]=0. \tag{6.10}$$

მაშინ იგი შეიძლება დაყვანილ იქნეს $n-k$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებაზე. ამ შემთხვევაში y-ის ნაცვლად საძიებელ ფუნქციად შეიძლება მივიღოთ ახალი ფუნქცია $z=y^{(k)}(x)$ და განტოლების რიგი დავწიოთ k ერთეულით. ცხადია, $z'=y^{(k+1)}$, $z''=y^{(k+2)}, \dots, z^{(n-k)}=y^{(n)}$ და (6.10) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)})=0,$$

ე. ი. განტოლების რიგი დაიწია k ერთეულით.

თუ მოვძებნით უკანასკნელი განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$z=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

მაშინ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი განისაზღვრება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებიდან:

$$y^{(k)}=\varphi(x, C_1 C_2, \dots, C_{n-k}),$$

რომლის ინტეგრება ცნობილია.

4. **განტოლება, რომელიც ერთგვაროვანია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულის მიმართ.** განვიხილოთ n რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0, \tag{6.11}$$

რომლის მარცხენა მხარე $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ წარმოადგენს ერთგვაროვან ფუნქციას y ფუნქციისა და მისი $y', y'', \dots, y^{(n)}$ წარმოებულების მიმართ. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს იგივეობას:

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

ყოველი t-სათვის, სადაც m ერთგვაროვნების მაჩვენებელია. შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქცია:

$$z = \frac{y'}{y},$$

მაშინ

$$y' = yz,$$
$$y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y[z(z^2 + z') + 2zz' + z''].$$

$$y^{(n)} = y\psi(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}).$$

ამიტომ (6.11) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F[x, y, yz, y(z^2 + z'), y(z^3 + 3zz' + z''), \dots, y \cdot \psi(z, z', \dots, z^{(n-1)})] = 0. \tag{6.12}$$

ახლა ვისარგებლოთ F ფუნქციის ერთგვაროვნების თვისებით. ჩვენ შემთხვევაში t-ს როლს ასრულებს y, ამიტომ (6.12) განტოლება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$y^m F[x, 1, z, z^2 + z', z^3 + 3zz' + z'', \dots, \psi(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})] = 0. \tag{6.13}$$

თუ (6.13) განტოლებას გავყოფთ y^m-ზე (ამით შესაძლოა, დავკარგოთ ამონახსნი $y=0$, თუ $m>0$, თუმცა, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ეს იქნება კერძო ამონახსნი), მივიღებთ $n-1$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას უცნობი z ფუნქციის მიმართ.

თუ მოვძებნით მიღებული განტოლების ზოგად ინტეგრალს სახით:

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

მაშინ $z = \dfrac{y'}{y}$ დამოკიდებულების თანახმად, გვექნება:

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

მაშასადამე,

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})\,dx}$$

უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებანი, რომლებიც დაიყვანებიან პირველი რიგის განტოლებაზე.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'' = f(y) + y'^2 g(y).$$

რომელიც არ შეიცავს x დამოუკიდებელ ცვლადს.

თუ შევასრულებთ ჩასმას $p = y'$ და y-ს ახალ დამოუკიდებელ ცვლადად ჩავთვლით მივიღებთ

$$p\frac{dp}{dy} = f(y) + p^2 q(y).$$

რომელიც წრფივია p'-ის მიმართ. აქ განტოლების რიგმა დაიწია ერთი ერთეულით.

მაგალითი 5. თუ მოცემულია დიფერენციალური განტოლება:

$$F(y, y'') = 0,$$

მაშინ, ამოვხსნით რა ამ განტოლებას y''-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y'' = f(y).$$

ამ განტოლების ინტეგრება შეგვიძლია უშუალოდ მოვახდინოთ, თუ მის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $2y'\,dx = 2dy$-ზე. მივიღებთ:

$$2\,y''\,y'\,dx = 2\,f(y)\,y'\,dx = 2\,f(y)\,dy\,,$$

საიდანაც

$$y'^2 = \int 2\,f(y)\,dy + C_1 = \varphi(y) + C_1,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\varphi(y) + C_1}$$

უკანასკნელი განტოლება არის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით. თუ მოვახდენთ ცვლადების განცალებას და შემდეგ — ინტეგრებას, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y) + C_1}}\,.$$

მაგალითი 6. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

რომელიც ერთგვაროვანია y, y', y''-ის მიმართ; მაშინ იგი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$y^{\alpha} F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0,$$

სადაც α ერთგვაროვნების მაჩვენებელია. მოვახდინოთ გარდაქმნა $u = \frac{y'}{y}$, ანუ $y = e^{\int u dx}$ სადაც u არის ახალი საძიებელი ფუნქცია. მაშინ $\frac{y''}{y} = u' + u^2$ და მივიღებთ u-ს მიმართ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F_1(x, u, u') = 0.$$

მაგალითი 7. მოვძებნოთ წირთა ოჯახი, რომელთა სიმრუდის რადიუსი ρ პროპორციულია ნორმალის N მონაკვეთისა წირსა და Ox ღერძს შორის. გვაქვს:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad N = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

საძიებელ წირთა ოჯახის განსაზღვრისათვის გვექნება დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{\rho}{N} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y'' y\sqrt{1 + y'^2}} = m$$

(m პროპორციულობის კოეფიციენტია), ანუ

$$y'' = \frac{1}{my}(1 + y'^2). \tag{6.14}$$

(6.14) განტოლება არ შეიცავს x-ს. მოვახდინოთ გარდაქმნა $y' = p$. მივიღებთ განტოლებას:

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{my}(1 + p^2)$$

განცალებადი ცვლადებით. ცვლადთა განცალების შედეგად გვაქვს:

$$\frac{pdp}{1 + p^2} = \frac{dy}{my},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=\frac{1}{m}\ln y+C,$$

ანუ, თუ p-ს შევცვლით y'-ით,

$$y'=\sqrt{C_1 y^{2/m}-1}\,.$$

უკანასკნელიდან ცვლადთა განცალებით ვღებულობთ:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y^{2/m}-1}}=dx,$$

საიდანაც

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{C_1 y^{2/m}-1}}+C_2.$$

ცხადია, კვადრატურა შესაძლებელია m-ის მხოლოდ ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის, კერძოდ, $m=\pm 1$, $m=\pm 2$.

მაგალითი 8. განვიხილოთ განტოლება:

$$x^2 yy''=(y-xy')^2,$$

რომლის ორივე მხარე ერთგვაროვანი ფუნქციებია y, y' და y''-ის მიმართ. მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$u=\frac{y'}{y}\,.$$

აქედან:

$$y=e^{\int u dx}$$

$$y'=e^{\int u du}\cdot u=uy,$$

$$y''=y(u'+u^2).$$

მივიღებთ:

$$x^2(u'+u^2)=(1-xu)^2,$$

საიდანაც u-სათვის ვღებულობთ წრფივ განტოლებას:

$$u'+\frac{2}{x}u-\frac{1}{x^2}=0,$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს:

$$u = x^{-2}(C_1 + x) = C_1 x^{-2} + x^{-1}.$$

მაშასადამე,

$$y = e^{\int u dx} = e^{\int (C_1 x^{-2} + x^{-1})\, dx} = e^{-C_1 x^{-1} + \ln x + C}$$

ანუ

$$y = C_2 x e^{C_1 x^{-1}} \quad (-C_1 \text{ შეცვლილია } C_1\text{-ით}, \quad e^C = C_2).$$

მაგალითი 9. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(1 + x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლებაში არ შედის y. მივიღოთ $\frac{dy}{dx} = p$, გვექნება:

$$(1 + x)\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

უკანასკნელი არის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით; მისი ამონახსნი იქნება:

$$(1 + x)p = C.$$

ახლა, თუ p-ს შევცვლით $y' = \frac{dy}{dx}$-ით და მოვახდენთ ცვლადების განცალებას, მივიღებთ:

$$dy = \frac{C_1 dx}{1 + x},$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს ზოგად ინტეგრალს:

$$y = C_1 \ln(1 + x) + C_2.$$

მაგალითი 10. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება:

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = y^2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლებაში არ შედის x. მივიღოთ $y' = p$, მაშინ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}.$$

მოცემული განტოლება დაიყვანება სახეზე:

$$yp\frac{dp}{dy} = y^2 p + p,^2$$

ანუ

$$y\frac{dp}{dy} = y^2 + p.$$

მიღებული განტოლება არის პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება; მისი ზოგადი ამონახსნი არის:

$$\frac{p}{y} = y + C,$$

საიდანაც:

$$\frac{dy}{dx} = y(y + C_1).$$

უკანასკნელის ინტეგრებით გვაქვს:

$$x = \int \frac{dy}{y(y+C_1)} = \frac{1}{C_1}\ln\frac{y}{y+C_1} + C_2.$$

განტოლების ამოხსნისას განტოლების ორივე მხარე გავყავით p-ზე, რაც შესაძლებელია, რადგანაც, თუ $p=0$, მაშინ $y=C$, ე. ი. ამონახსნი შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს, მაშინ როცა ვეძებთ ამონახსნს, რომელიც ორ ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს. დამოკიდებულება $y=C$ არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც არ მიიღება მისი ზოგადი ამონახსნიდან და, მაშასადამე, წარმოადგენს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

მაგალითი 11. ამოეხსნათ დიფერენციალური განტოლება:

$$y''' = \frac{y''}{x}, \quad x \neq 0. \tag{6.15}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (5.15) განტოლება არ შეიცავს y და y'-ს, ამიტომ მისი რიგი შეიძლება დავწიოთ ერთი ერთეულით. ვთქვათ,

$$y'' = z,$$

მაშინ $y''' = z'$, და (5.15) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$z' = \frac{z}{x}, \tag{6.16}$$

აქედან ცვლადების განცალებით მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln|C|,$$

საიდანაც

$$z = C_1 x, \quad C_1 \neq 0, \quad \text{ე. ი.}$$

$y'' = C_1 x$. ამ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$y' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2, \qquad y = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3.$$

VI თავი

უმაღლესი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი

დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

ეწოდება წ რ ფ ი ვ ი, თუ იგი წრფივია საძიებელი $y(x)$ ფუნქციისა და მისი $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n-1)}(x)$, $y^{(n)}(x)$ წარმოებულების მიმართ.

ამგვარად, ზოგადი სახე n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისა არის:

$$a_0(x)\, y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y(x) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

სადაც $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $\varphi(x)$ მოცემული ფუნქციებია რომელიღაც $[a, b]$ სეგმენტში.

თუ $\varphi(x) = 0$, მაშინ (1.2) განტოლებას ეწოდება n-ური რიგის წრფივი ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი დიფერენციალური განტოლება. ხოლო, თუ $\varphi(x) \neq 0$, n-ური რიგის წრფივი ა რ ა ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი დიფერენციალური განტოლება.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ მხოლოდ n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. ვიგულისხმებთ, რომ განსახილველ $a \leqslant x \leqslant b$ შუალედში ფუნქცია $a_0(x)$ უწყვეტია და განსხვავებულია ნულისაგან, $a_0(x) \neq 0$, ხოლო $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია ამავე შუალედში.

თუ (1.2) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $a_0(x)$-ზე და შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{a_0(x)},$$

მაშინ (1 . 2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}(x)\,y'(x)+p_n(x)\,y(x)=f(x). \quad (1.3)$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)\equiv 0$, ე. ი. განვიხილოთ n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}(x)\,y'(x)+p_n(x)\,y(x)=0, \quad (1.4)$$

სადაც $p_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ შუალედში. სიმარტივისათვის ამ განტოლების მარცხენა მხარე აღვნიშნოთ $L[y]$-ით; მაშინ (1 . 4) განტოლება წარმოგვიდგება სახით:

$$L[y]=y^{(n)}(x)+p_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_n(x)\,y(x)=0. \quad (1.5)$$

აქ სიმბოლო $L[y]$ წარმოადგენს $y(x)$ ფუნქციაზე შესრულებული იმ წრფივი დიფერენციალური ოპერაციების შედეგს, რომელიც (1 . 5) განტოლების მარცხენა მხარეშია მოცემული. ამ ოპერაციების L სიმბოლოს

$$L=\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+p_2(x)\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\cdots+$$

$$+p_{n-1}(x)\cdot\frac{d}{dx}+p_n(x) \quad (1.6)$$

ვუწოდოთ **წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი**.

რომ შეიძლებოდეს არსებობის თეორემის გამოყენება, (1 5) განტოლება ამოვხსნათ $y^{(n)}(x)$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y^{(n)}(x)=-p_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x)-p_2(x)\,y^{(n-2)}(x)-\cdots-p_{n-1}(x)\,y'(x)-$$

$$-p_n(x)\,y(x)=F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}). \quad (1.7)$$

ფუნქცია $F(x, y, y' \quad , y^{(n-1)})$ უწყვეტია თავისი არგუმენტების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ არგუმენტების მიმართ:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-p_n(x), \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=-p_{n-1}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}=-p_1(x)$$

დახურულ $[a,b]$ შუალედში. შევნიშნავთ, რომ (1 . 7) განტოლებისათვის ლიფშიცის პირობა შესრულებულია ყოველ (α, β) შუალედში, რომელიც ძევს $[a, b]$ შუალედის შიგნით. მართლაც, დახურულ $(\alpha, \beta]$ შუალედში უწყვეტი ფუნქციები $p_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ შემოსაზღვრულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ შესრულებულია ლიფშიცის პირობა.

ამგვარად, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 1. თუ n-ური რიგის (1.5) წრფივი დიფერენციალური განტოლების ყველა კოეფიციენტი $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_n(x)$ უწყვეტია $a \leqslant x \leqslant b$ შუალედში და $x = x_0$ ამ შუალედის ნებისმიერი შიგა წერტილია, მაშინ ამ შუალედში არსებობს (1.7) განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი $y(x)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'; \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \text{ როცა } x = x_0,$$

სადაც $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ ნებისმიერი მოცემული რიცხვებია.

ეს ამონახსნი უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად n რიგამდე ჩათვლით მთელ $[a, b]$ შუალედში.

ეს უკანასკნელი თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს ზემოთ დამტკიცებული კოშის თეორემიდან, რომელიც ეხება ერთი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას.

წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს აქვს იგივე თვისებები, რაც $L[y]$ წრფივ დიფერენციალურ ოპერატორს. აქ ჩვენ მოვიყვანთ რამდენიმე თეორემას, რომელიც გამომდინარეობს $L[y]$ წრფივი დიფერენციალური ოპერატორის წრფივობის თვისებიდან[1].

თეორემა 2. თუ $y_1(x)$ არის $L[y] = 0$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ $C_1 y_1(x)$, სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია, არის აგრეთვე ამ განტოლების ამონახსნი.

დამტკიცება. დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ

$$[C_1 y_1(x)]^{(k)} = C_1 y^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] წრფივი განტოლების ძირითადი თვისებები იმის შედეგია, რომ დიფერენცირება წარმოადგენს წრფივ ოპერაციას, სხვა სიტყვებით, განტოლების წრფივი ხასიათი გამოისახება თანაფარდობებით:

$$L[y(x) + z(x)] = L[y(x)] + L[z(x)],\quad L[Cy(x)] = CL[y(x)],$$

რომლებიც მართებულია ორი ნებისმიერი $y(x)$ და $z(x)$ ფუნქციისათვის.

ამიტომ, თუ $L[y]=0$ განტოლებაში $y(x)$ ფუნქციის ნაცვლად ჩავსვამთ $C_1y_1(x)$ ფუნქციას და მასზე L ოპერაციას შევასრულებთ, მივიღებთ:

$$L[C_1y_1(x)]=C_1y_1^{(n)}(x)+p_1(x)\cdot C_1y_1^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}(x)C_1y_1'(x)+$$
$$+p_n(x)C_1y_1(x)=C_1L[y_1(x)]=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ფუნქციები წარმოადგენს $L[y]=0$ განტოლების კერძო ამონახსნებს, მაშინ ამ ამონახსნების ყოველი წრფივი კომბინაცია

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x), \tag{1.8}$$

სადაც C_1, C_2, C_n ნებისმიერი მუდმივებია, იქნება ამ განტოლების ამონახსნი.

დამტკიცება. მართლაც, თეორემის პირობის თანახმად, გვაქვს:

$$L[y_k(x)]=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

მეორე მხრივ, დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ

$$[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)]^{(k)}=C_1y_1^{(k)}(x)+C_2y_2^{(k)}(x)+$$
$$+\cdots+C_ny_n^{(k)}(x) \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{1.9}$$

თუ $L[y(x)]=0$ განტოლების მარცხენა მხარეში $y(x)$ ფუნქციის ნაცვლად ჩავსვამთ (1.8) ფუნქციას და მხედველობაში მივიღებთ (1 9) ფორმულას, დავრწმუნდებით, რომ ეს ჩასმები $L[y]=0$ განტოლების მარცხენა მხარეს გადააქცევს იგივურად ნულის ტოლად:

$$L[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)]=[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+$$
$$+\cdots+C_ny_n(x)]^{(n)}+p_1(x)[C_1y_1x+\cdots+C_ny_n(x)]^{(n-1)}+$$
$$+\cdots+p_n(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\quad+C_ny_n(x)]=$$
$$=L[C_1y_1(x)]+L[C_2y_2(x)]+\quad+L[C_ny_n(x)]\equiv 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, $y(x)\equiv 0$ არის კერძო ამონახსნი ყოველი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისა.

ახლა ისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $L[y]=0$ განტოლების კერძო ამონახსნები: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, რომ ამ ამონახსნების ყოველი წრფივი კომბინაცია $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+$ $+C_ny_n(x)$, რომელიც n ნებისმიერი $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივს შეიცავს, წარმოადგენდეს $L[y]=0$ განტოლების ზოგად ამონახსნს? ამ კითხვაზე

პასუხის გაცემის მიზნით წინასწარ შემოვიღოთ მნიშვნელოვანი ცნება ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობისა და დამოკიდებულების შესახებ.

§ 2. ფუნქციათა სისტემების წრფივად დამოუკიდებლობა და წრფივად დამოკიდებულება

განსაზღვრა 1. უწყვეტ $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი (a, b) შუალედში, თუ დამოკიდებულებას:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad a < x < b,$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივი რიცხვებია, ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $C_1, C_2, \dots, C_n$ რიცხვებიდან ყველა ერთდროულად ნულის ტოლია.

ამ შემთხვევაში $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციებიდან არც ერთი მათგანი არ გამოისახება წრფივად დანარჩენების საშუალებით.

განსაზღვრა 2. უწყვეტ $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული (a, b) შუალედში, თუ არსებობს ისეთი $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივები, რომლებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \equiv 0 \quad a < x < b.$$

ამ შემთხვევაში $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციებიდან ერთი მაინც გამოისახება დანარჩენების საშუალებით.

მაგალითი 1. n ფუნქცია $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x, \dots, y_n(x) = x^{n-1}$ წრფივად დამოკიდებულია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, დამოკიდებულება:

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + \cdots + C_n x^{n-1} = 0,$$

რომელშიც ყველა C არ უდრის ნულს, არ შეიძლება შესრულდეს იგივურად, x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, რადგან იგი წარმოადგენს $n-1$ ხარისხის განტოლებას და მივიღებდით, რომ $n-1$ ხარისხის ალგებრულ განტოლებას აქვს $(n-1)$-ზე მეტი ფესვი, რაც შეუძლებელია.

მაგალითი 2. $y_1(x) = e^x$ და $y_2(x) = e^{-x}$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია ნებისმიერ $[a, b]$ შუალედში, რადგან დამოკიდებულება

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} \equiv 0,$$

სადაც C_1 და C_2 მუდმივი რიცხვებია, შესრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა C_1 და C_2 ერთდროულად ნულის ტოლია; მართლაც,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \not\equiv \text{const}.$$

მაგალითი 3. ფუნქციები: $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=\cos x$ წრფივად დამოუკიდებელია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში; $C_1\sin x+C_2\cos x$ იგივურად არ უდრის ნულს, თუ ყველა $C_i (i=1, 2)$ არ არის ნულის ტოლი; რადგან

$$\frac{y_1}{y_2}=\operatorname{tg} x \not\equiv \text{const}.$$

მაგალითი 4. ფუნქციები: $y_1(x)=4e^x$ და $y_2(x)=2e^x$ წრფივად დამოკიდებული ფუნქციებია ნებისმიერ $[a, b]$ შუალედში, რადგანაც $y_1(x)=2y_2(x)$ ყოველი x-ისათვის $[a, b]$ შუალედში.

მაგალითი 5. ფუნქციები: $y_1(x)=\sin^2 x$, $y_2(x)=\cos^2 x$ და $y_3(x)=1$ იქნება წრფივად დამოკიდებული, რადგანაც

$$C_1\sin^2 x+C_2\cos^2 x+C_3\equiv 0,$$

როცა ყველა C_i არ უდრის ნულს. მართლაც, თუ $C_1=C_2=1$, $C_3=-1$, მაშინ $\sin^2 x+\cos^2 x-1\equiv 0$ ყოველი x-ისათვის $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

შენიშვნა 1. მოყვანილი 2, 3 მაგალითებიდან გამომდინარეობს, რომ (a, b) შუალედში ორი არაიგივურად ნულის ტოლი $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციების წრფივად დამოკიდებულება ამ ფუნქციათა პროპორციულობის ეკვივალენტურია.

შენიშვნა 2. თუ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემის რომელიღაც ნაწილი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ წრფივად დამოკიდებული იქნება სისტემის ყველა ფუნქციაც. ამასთან, ფუნქციათა ნებისმიერი სისტემა, რომელიც შეიცავს იგივურად ნულის ტოლ ფუნქციას, იქნება წრფივად დამოკიდებული.

§ 3. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება და მისი ზოგადი ამონახსნის სახე

ახლა გადავიდეთ ძირითადი თეორემის დამტკიცებაზე.

თეორემა 1. n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ $L[y]=0$ განტოლებას აქვს ზუსტად n წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. ამ ამონახსნების ყოველი $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+ \quad +C_ny_n(x)$ წრფივი კომბინაცია, სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, არის $L[y]=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი[1].

---

[1] თუ კერძო ამონახსნები: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ არ იქნებოდა ერთმანეთისაგან განსხვავებული, მაშინ გამოსახულება

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

არ შეიძლება შეიცავდეს n არსებითად განსხვავებულ ნებისმიერ მუდმივს.

დამტკიცება. ვთქვათ, x იცვლება (a, b) შუალედში, რომელშიაც

$$L[y(x)] = y^{(n)}(x) + p_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \quad + p_{n-1}(x)\, y'(x) +$$
$$+ p_n(x) y(x) = 0 \tag{3.1}$$

განტოლების ყველა $p_i(x)$ კოეფიციენტი უწყვეტია. მაშინ (3.1) განტოლების ყველა ამონახსნი თავიანთ n წარმოებულებთან ერთად არსებობს და უწყვეტია (a, b) შუალედში, კერძოდ არსებობს და უწყვეტია ამონახსნები:

$$y_1(x),\ y_2(x), \dots, y_n(x),$$

რომლებიც განსაზღვრულია (a, b) შუალედის x_0 წერტილში, $a < x_0 < b$, შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad y_1''(x_0) = 0, \dots . y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$y_2(x) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad y_2''(x_0) = 0, \dots . y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-2)}(x_0) = 0,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

ეს ამონახსნები წრფივად დამოკიდებულია. მართლაც, თუ გვაქვს

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \equiv 0, \tag{3.2}$$

მაშინ ამ იგივეობის მარცხენა მხარის პირველი $n-1$ წარმოებული აგრეთვე ნულის ტოლია:

$$C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \cdots + C_n y_n'(x) = 0,$$
$$C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + \cdots + C_n y_n''(x) = 0,$$
$$\cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot$$
$$C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0.$$

თუ საწყის პირობებს მივიღებთ მხედველობაში, მაშინ ამ n განტოლებიდან, როცა $x = x_0$, უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $C_1 = 0$, $C_2 = 0, \dots, C_n = 0$; მაშასადამე, $y_1(x)$. $y_2(x), \dots, y_n(x)$ ამონახსნები წარმოადგენს წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სისტემას.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ განტოლების ყოველი სხვა $y(x)$ ამონახსნი წრფივად გამოისახება ამ $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ ამონახსნების საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ, $y(x)$ არის (3.1) განტოლების რომელიმე სხვა ამონახსნი, რომელიც $x = x_0$ წერტილში განსაზღვრულია შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$y(x_0) = C_1,\ y'(x_0) = C_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_n,$$

მაშინ ფუნქცია

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

არის. აგრეთვე, განტოლების ამონახსნი, რომელიც იმავე საწყის პირობებს დააკმაყოფილებს, რასაც $y(x)$. მაშასადამე, ამონახსნის ერთადერთობის თანახმად, ფუნქციები $y(x)$ და $Y(x)$ ურთიერთშორის იგივურია: $y(x) \equiv Y(x)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ არის $L[y] = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელიც შეიცავს განტოლების ყველა ამონახსნს. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სისტემას $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ მისი ფუნდამენტური სისტემა ეწოდება.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა და ამ სისტემის ყოველი წრფივი კომბინაცია არის $L[y]=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ განტოლება:

$$y'' + y' = 0.$$

ცხადია, $y_1(x) = \cos x$ და $y_2(x) = \sin x$ არის ამ განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა. ძირითადი თეორემის თანახმად, განტოლება $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, გვაძლევს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მაგალითი 2. განვიხილოთ განტოლება:

$$y'' - y' = 0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ წარმოადგენს ამ განტოლების ამონახსნებს. რადგანაც ისინი წრფივად დამოუკიდებელია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, ამიტომ e^x და e^{-x} გვაძლევს მოცემული განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას. მაშასადამე,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

არის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ცხადია, $L[y] = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების ერთი $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ფუნდამენტური სისტემიდან შეიძლება გადავიდეთ რომელიმე ახალ $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ფუნდამენტურ სისტემაზე წრფივი გარდაქმნის მეშვეობით.

თეორემა 2. $L[y] = 0$ განტოლების ფუნდამენტური სისტემის $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ ყოველი წრფივი გარდაქმნა წარმოადგენს აგრეთვე ფუნდამენტურ სისტემას.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ არის $L[y]=0$ განტოლების ფუნდამენტური სისტემა. განვიხილოთ ფუნქციები $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$, რომლებიც მიიღება $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ფუნდამენტური სისტემიდან წრფივი გარდაქმნის მეშვეობით, რომლის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$:

$$
\left.\begin{aligned}
Y_1(x) &= a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) + \cdots + a_{1n} y_n(x), \\
Y_2(x) &= a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) + \cdots + a_{2n} y_n(x), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_n(x) &= a_{n1} y_1(x) + a_{n2} y_2(x) + \cdots + a_{nn} y_n(x).
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}
$$

ცხადია, ეს სისტემა $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ იქნება ფუნდამენტური მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ წრფივი გარდაქმნის Δ დეტერმინანტი არ უდრის ნულს:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

მართლაც, თუ (3.3) სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ C_1-ზე, მეორე განტოლების ორივე მხარეს C_2-ზე და ა. შ. n განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ C_n-ზე და ყველა ახლად მიღებულ განტოლებას წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$
C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \cdots + C_n Y_n(x) = (C_1 a_{11} + C_2 a_{21} + \cdots +
$$

$$
+ C_n a_{n1}) y_1(x) + \cdots + (C_1 a_{1n} + C_2 a_{2n} + \cdots + C_n a_{nn}) y_n(x). \tag{3.4}
$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი, როცა $\Delta \neq 0$, გახდება ნულის ტოლი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$. მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ დამოკიდებულებას:

$$
C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \cdots + C_n Y_n(x) \equiv 0
$$

ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყველა $C_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ე. ი. ფუნქციები $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ წრფივად დამოუკიდებელია და, მაშასადამე, $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ არის ფუნდამენტური სისტემა.

თუ $\Delta = 0$, იარსებებს $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივების ერთდროულად ნულის არატოლ მნიშვნელობათა სისტემა, რომლისთვისაც (3.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყველა „ფრჩხილი" გადაიქცევა ნულად, მაშინ

$$
C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \cdots + C_n Y_n(x) \equiv 0,
$$

როცა ყველა C_i არ უდრის ნულს. მაშასადამე, ფუნქციები $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ წრფივად დამოკიდებულ ფუნქციათა სისტემაა და იგი არ გვაძლევს ფუნდამენტურ სისტემას.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $L[y]=0$ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს უსასრულო სიმრავლე ფუნდამენტური სისტემებისა. თუ $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ არის n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების რომელიმე ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ

$$y = \bar{y}(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \cdots + C_n Y_n(x)$$

n ნებისმიერი $C_1, C_2, \ldots, C_n$ პარამეტრით $(-\infty < C_i < +\infty)$ არის იმავე განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამგვარად, მართებულია შემდეგი

თეორემა 3. $C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \quad + C_n Y_n(x)$ გამოსახულება წარმოადგენს $L(y)=0$ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ განტოლების ამონახსნების ყოველი $(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x))$ ფუნდამენტური სისტემისათვის.

დამტკიცება. რადგან $\Delta \neq 0$, ამიტომ (3.3) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს $L[y]=0$ განტოლების ამონახსნები $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ და, მაშასადამე, ამ განტოლების ყველა ამონახსნი, გამოვსახოთ $(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x))$ ფუნდამენტური სისტემის საშუალებით, ე. ი. $y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \cdots + C_n Y_n(x)$ არის $L[y]=0$, განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თეორემა 4. n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$L[y] = y^{(n)}(x) + P_1(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + P_n(x) y(x) \equiv 0$$

არ შეიძლება ჰქონდეს n-ზე მეტი წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $L[y]=0$ განტოლებას აქვს $n+1$ კერძო ამონახსნი: $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x_{n+1}(x)$. განვიხილოთ პირველი n კერძო ამონახსნი. თუ ისინი წრფივად დამოკიდებული არიან, მაშინ ყველა $n+1$ კერძო ამონახსნი იქნება წრფივად დამოკიდებული, რადგან გვექნება:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + 0 \cdot y_{1+1}(x) \equiv 0$$

ყოველი x-სათვის (a, b) შუალედში, სადაც ყველა C არ უდრის ნულს. თუ კერძო ამონახსნები: $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ, ძირითადი თეორემის თანახმად, ყოველი ამონახსნი, მათ

შორის $y_{n+1}(x)$-ც, გამოისახება წრფივად $y_1(x)$, $y_2(x), \dots y_n(x)$ ამონახსნების საშუალებით:

$$y_{n+1}(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \cdots + C_n^{(0)} y_n(x).$$

ასე რომ, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. $y_{n+1}(x)$ იქნება წრფივად დამოკიდებული.

მაშასადამე, $L[y]=0$ განტოლების ნებისმიერი $n+1$ კერძო ამონახსნი არის წრფივად დამოკიდებული. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ ვნახეთ, რომ $L[y]=0$ განტოლებას, რომლის $p_i(x)$ კოეფიციენტები უწყვეტია (a, b) შუალედში, აქვს n და მხოლოდ n წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნების სისტემა. ვაჩვენოთ პირიქით, რომ ყოველ წრფივად დამოუკიდებელ უწყვეტად დიფერენცირებად n კერძო ამონახსნის სისტემას $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ (a, b) შუალედში შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება: $L[y]=0$.

თეორემა 5. თუ ორ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$L_1[y] = y^{(n)}(x) + \overline{p_1}(x) y^{(n-1)}(x) + \quad + \overline{p_n}(x) y(x) = 0, \qquad (3.5)$$

$$L_2[y] = y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \quad + p_n(x) y(x) = 0, \qquad (3.6)$$

სადაც $\overline{p}(x)$, $p(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) ინტერვალში, აქვს ერთი მაინც საერთო ფუნდამენტური სისტემა $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$, მაშინ ეს განტოლებანი ურთიერთშორის იგივურია, ე. ი.

$$\overline{p_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

დამტკიცება. თუ $\overline{p_i}(x) - p_i$ სხვაობა იგივურად ნულის ტოლი არ არის, მაშინ (a, b) შუალედის შიგნით მოიძებნება ისეთი (α, β) შუალედი, რომელშიაც $\overline{p_1}(x) - p_1(x) \not\equiv 0$. თუ (3.5) განტოლებას გამოვაკლებთ (3.6) განტოლებას წევრ-წევრად და მიღებულ განტოლებას გავყოფთ $\overline{p_1}(x) - p_1(x)$ სხვაობაზე, მივიღებთ:

$$y^{(n-1)}(x) + \frac{\overline{p_2}(x) - p_2(x)}{\overline{p_1}(x) - p_1(x)} y_n^{(n-2)}(x) + \cdots + \frac{\overline{p_n}(x) - p_n(x)}{\overline{p}(x) - p_1(x)} y(x) = 0 \quad (3.6')$$

$(3.6')$ განტოლება არის $n-1$ რიგისა და აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი: $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$, რაც ეწინააღმდეგება ზემოთ დამტკიცებულ თეორემას, რომ n-ური რიგის ერთგვაროვან განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს n-ზე მეტი წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი.

ამგვარად, $\overline{p_1}(x) \equiv p_1(x)$. ანალოგიური მსჯელობით ვუჩვენებთ, რომ $\overline{p_2}(x) \equiv p_2(x), \ldots, \overline{p_n}(x) = p_n(x)$. მაშასადამე, განტოლებანი: $L_1[y]=0$ და $L_2[y]=0$. იგივურად ემთხვევა ერთმანეთს. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $L[y]=0$ განტოლების $p_i(x)$ კოეფიციენტები სავსებით განისაზღვრება ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემის საშუალებით. მაშასადამე, წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების აგება შესაძლებელია ამონახსნების მოცემული ფუნდამენტური სისტემით.

ვ რ ო ნ ს კ ი ს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი და მ ი ს ი გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ა. ახლა წინასწარ ვიპოვოთ $L[y]=0$ განტოლების კერძო ამონახსნების $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ სისტემის წრფივად დამოკიდებულებისა და წრფივად დამოუკიდებლობის პირობა. ვთქვათ, ფუნქციები: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ წარმოადგენს $L[y]=0$ განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას. დიფერენციალური განტოლება $L[y]=0$ დავწეროთ დეტერმინანტის სახით:

$$L[y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ & & & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.7}$$

სადაც $y(x)$ უცნობი ფუნქციაა, ხოლო $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არის $L[y]=0$ განტოლების ამონახსნების რომელიღაც ფუნდამენტური სისტემა. თუ ამ დეტერმინანტს გავშლით უკანასკნელი სვეტის ელემენტების მიხედვით, დავინახავთ, რომ (3.7) განტოლება წარმოადგენს n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$w(x)\,y^{(n)}(x) - w_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + (-1)^n w_n(x)\,y(x) = 0,$$

მასთან:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad w_1(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

$w(x)$ ფუნქციას $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ სისტემის ვ რ ო ნ ს კ ი ს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი, ანუ ვ რ ო ნ ს კ ი ა ნ ი ეწოდება.

n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების სისტემის $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ წრფივად დამოკიდებულების აუცილებელი და საკმარისი პირობა შემდეგი თეორემით გამოითქმება.

თეორემა 6. $L[y]=0$ განტოლების $y_1, y_2, \dots, y_n$ კერძო ამონახსნების სისტემის წრფივად დამოკიდებულებისათვის (a, b) შუალედში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ამონახსნების ვრონსკის დეტერმინანტი იყოს იგივურად ნულის ტოლი.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, ფუნქციები: $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ არის $L[y]=0$ განტოლების წრფივად დამოკიდებული ამონახსნები (a, b) შუალედში, ე. ი.

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0, \ a < x < b, \qquad (3.8)$$

სადაც ყველა C_i არ უდრის ნულს. ვაჩვენოთ, რომ $w(x) \equiv 0$ (a, b) შუალედში. მართლაც, (3.8) იგივეობა გავაწარმოოთ $(n-1)$-ჯერ, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \cdots + C_n y_n'(x) = 0,\\
&C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + \cdots + C_n y_n''(x) = 0,\\
&\cdots\\
&C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$-ის მიმართ შევადგინოთ n-უცნობიანი წრფივი ერთგვაროვანი ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0,\\
&C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0,\\
&\cdots\\
&C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

სადაც x_0 არის (a, b) შუალედის ნებისმიერი წერტილი. (3.9) იგივეობები, რომელთაც ადგილი აქვს $x=x_0$ წერტილში, გვიჩვენებს, რომ ამ სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნები. მაგრამ, როგორც ცნობილია უმაღლესი ალგებრის კურსიდან, (3.9) სისტემას $C_1, C_2, \dots, C_n$-ის მიმართ აქვს არანულოვანი ამონახსნები, თუ ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. მაგრამ, (3.9) სისტემის დეტერმინანტი წარმოადგენს ვრონსკიანის მნიშვნელობას $x=x_0$ წერტილში. რადგან $x=x_0$ წერტილი (a, b) შუალედის ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ $w(x) \equiv 0$ მთელ (a, b) შუალედში.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $L[y]=0$ განტოლების $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ამონახსნების ვრონსკიანი $w(x)$ იგივურად ნულის ტოლია მთელ (a, b) შუალედში: $w(x) = 0$. ვუჩვენოთ, რომ $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ კერძო ამონახსნების სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, ამ შემთხვევაში, ცნობილი თეორემის თანახმად, $L[y]=0$ განტოლების ამონახსნი იქნება ფუნქცია:

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\cdots+C_n y_n(x),$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომელთაგან ყველა არ არის ნულის ტოლი. ახლა ნებისმიერი მუდმივები $C_1, C_2, \ldots, C_n$ შევარჩიოთ ისე, რომ დაკმაყოფილდეს შემდეგი საწყისი პირობები:

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=0, \tag{3.10}$$

სადაც $x=x_0$ არის (a, b) შუალედის ნებისმიერი წერტილი; მაგრამ ასეთსავე საწყის პირობებს დააკმაყოფილებს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი $y(x)\equiv 0$. ამიტომ, ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, გვექნება:

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\cdots+C_n y_n(x)\equiv 0.$$

უკანასკნელი ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს (3 . 10) საწყის პირობებს. მაშასადამე, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0)+C_2 y_2(x_0)+\cdots+C_n y_n(x_0)\equiv 0, \\ C_1 y_1'(x_0)+C_2 y_2'(x_0)+\cdots+C_n y_n'(x_0)\equiv 0, \\ \cdot \quad \cdot \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+C_n y_n^{(n-1)}(x_0)\equiv 0. \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

პირობის თანახმად, (3 . 11) სისტემის $w(x_0)$ დეტერმინანტი ნულის ტოლია. ამიტომ უმაღლესი ალგებრიდან ცნობილი თეორემის თანახმად, (3.11) სისტემას $C_1, C_2, \ldots C_n$-ის მიმართ ექნება არანულოვანი ამონახსნები, ე. ი.

$$C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\cdots+C_n y_n(x)\equiv 0.$$

როცა ყველა C_i არ უდრის ნულს. მაშასადამე, $L[y]=0$ განტოლების კერძო $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ამონახსნების სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგად შემთხვევაში, როცა ფუნქციათა სისტემა $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ არ წარმოადგენს $L(y)=0$ განტოლების ამონახსნების სისტემას, მაშინ პირობა $w(x)\equiv 0$ არის მხოლოდ აუცილებელი, მაგრამ არასაკმარისი იმისათვის, რომ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ იყოს წრფივად დამოკიდებული.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია:

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როცა } 0 \leqslant x < +\infty, \\ 0, & \text{როცა } -\infty < x \leqslant 0, \end{cases}$$

და

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } 0 \leqslant x < +\infty, \\ x^2, & \text{როცა } -\infty < x \leqslant 0. \end{cases}$$

ორივე ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში და ამ შუალედში აქვთ უწყვეტი წარმოებულები:

$$y_1'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{როცა } 0 \leqslant x < +\infty, \\ 0, & \text{როცა } -\infty < x \leqslant 0 \end{cases}$$

და

$$y_2'(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } 0 \leqslant x < +\infty, \\ 2x, & \text{როცა } -\infty < x \leqslant 0. \end{cases}$$

მათი ვრონსკიანი იგივურად ნულის ტოლია:

$$w(x) = w[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} \equiv 0, \text{ როცა } 0 \leqslant x < \infty.$$

$$|w(x)| = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \text{როცა } -\infty < x \leqslant 0.$$

მიუხედავად ამისა, ეს ფუნქციები არ არის წრფივად დამოკიდებული.

თეორემა 7. *თუ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ არის $L[y]=0$ განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა (a, b) შუალედში, მაშინ ამ ამონახსნების ვრონსკის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან მთელ (a, b) შუალედში.*

დამტკიცება. მართლაც, თუ x-ის რომელიმე x_0 მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედიდან $w(x_0)=0$, მაშინ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right\}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$-ის მიმართ ექნება არანულოვანი ამონახსნები. მაგრამ, მაშინ $L[y]=0$ განტოლების ამონახსნი

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

სადაც ყველა C_i არ უდრის ნულს ექნება იგივე საწყისი პირობები, რაც $y(x) \equiv 0$ ამონახსნს, ე. ი. ისინი ერთმანეთს უნდა ემთხვეოდნენ:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \equiv 0.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ფუნქციები იქნება წრფივად დამოკიდებული, რაც მოცემულ პირობას ეწინააღმდეგება, ე. ი. $w(x) \neq 0$ მთელ (a, b) შუალედში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების აგება, რომელსაც აქვს ამონახსნების მოცემული ფუნდამენტური სისტემა

წინასწარ ვიპოვოთ დამოკიდებულება $L[y] = 0$ განტოლების $p_i(x)$ კოეფიციენტებსა და ამ განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას შორის.

ვთქვათ, $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ წარმოადგენს $L[y(x)] = 0$ განტოლების რომელიღაც მოცემულ ფუნდამენტურ სისტემას. წინა თეორემის თანახმად, ამ ამონახსნების ვრონსკიანი განსხვავებულია ნულისაგან:

$$w(x) \neq 0. \tag{4.1}$$

მეორე მხრით, $L[y] = 0$ განტოლება დავწეროთ დეტერმინანტის სახით:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y'(x) \\ \cdot & & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{4.2}$$

სადაც y არის საძიებელი ფუნქცია. (4 . 2) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$w(x) y^n(x) - w_1(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots \pm w_n(x) y(x) = 0. \tag{4.3}$$

რადგანაც $w(x) \neq 0$ მთელ (a,b) შუალედში, ამიტომ (4 . 3) განტოლების $w(x)$-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$y^{(n)}(x) - \frac{w_1(x)}{w(x)} y^{(n-1)}(x) + \cdots \pm \frac{w_n(x)}{w(x)} y(x) = 0. \tag{4.4}$$

უკანასკნელი განტოლება იგივურია (4 . 2) განტოლებისა. მაგრამ (4 . 2) განტოლებას აქვს n ამონახსნი: $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, რადგან $y(x)$-ი ნაცვლად დეტერმინანტში თითოეული ამ ამონახსნის ჩასმით ორი სვეტი გახდება ტოლი და დეტერმინანტი გადაიქცევა ნულად. მაშასადამე, (4 . 4) განტოლებასა და

$$L[y] = y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x) y(x) = 0$$

განტოლებას ექნება ამონახსნების საერთო ფუნდამენტური სისტემა: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, ეს განტოლებები იგივურია ურთიერთ შორის და მათი კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია. აქედან მიიღება საძიებელი დამოკიდებულებანი $L[y]=0$ განტოლების კოეფიციენტებსა და მისი ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას შორის, კერძოდ

$$-\frac{w_1(x)}{w(x)} = p_1(x). \tag{4.5}$$

შევნიშნავთ, რომ

$$w_1(x) = w'(x)^1. \tag{4.6}$$

მართლაც, თუ $w(x)$ ვრონსკის დეტერმინანტს გავაწარმოებთ (გამოვიყენებთ რა სტრიქონების მიხედვით გაწარმოების წესს, რომლის თანახმად, n-ური რიგის დეტერმინანტის წარმოებული ეტოლება n დეტერმინანტის ჯამს, რომელიც მიიღება მისგან პირველი, მეორე და ა. შ. n სტრიქონის ელემენტების შეცვლით მათი წარმოებულებით), მივიღებთ:

$$w'(x)=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ & & \cdot & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

---

[1] ასე, მაგალითად, მეორე წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევაში გვაქვს:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \qquad w_1(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix},$$

ხოლო

$$w'(x) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix},$$

ე. ი.

$$w'(x) = w_1(x).$$

ამ გამოსახულებაში ყველა დეტერმინანტი, გარდა უკანასკნელისა, ნულის ტოლია, რადგან თითოეული მათგანი შეიცავს ორ ერთნაირ სტრიქონს; ამგვარად,

$$w_1(x) = w'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (4.7)$$

(4.5) გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln w(x) = -\int p_1(x)\,dx + \ln|c|, \quad \text{ანუ} \quad w(x) = Ce^{-\int p_1(x)\,dx}$$

საიდანაც:

$$w(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx} \qquad (4.8)$$

ცხადია, C მუდმივის სიდიდე დამოკიდებული იქნება $L[y]=0$ განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემის ამორჩევაზე. აქ

$$C = w(x_0) \quad \text{და მაშინ} \quad w(x) = w(x_0)\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$$

(4 . 8) გამოსახულებას ო ს ტ რ ო გ რ ა დ ს კ-ლ ი უ ვ ი ლ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ეწოდება.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების აგებისა მისი $y_1(x)$, $y_2(x)$ ამონახსნების მოცემული ფუნდამენტური სისტემის მიხედვით. ამ მიზნით მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ სახით:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.9)$$

თუ (4.9) დეტერმინანტს დავშლით უკანასკნელი სვეტის ელემენტების მიხედვით, გვექნება:

$$y''\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

$$w(x)\,y'' - w_1(x)\,y' + w_2(x)\,y = 0, \tag{4.10}$$

სადაც

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \qquad w_1(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}, \qquad w_2(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

რადგანაც $w(x) \neq 0$ მთელ (a, b) შუალედში, ამიტომ (4 . 10) განტოლების ორივე მხარის $w(x)$-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$y'' - \frac{w_1(x)}{w(x)}\,y' + \frac{w_2(x)}{w(x)}\,y = 0. \tag{4.11}$$

მაშასადამე, ამონახსნების $y_1(x)$, $y_2(x)$ ფუნდამენტურ სისტემას შეესაბამება (4 . 11) განტოლება.

ახლა, თუ $y_1(x)$, $y_2(x)$ არის აგრეთვე

$$L[y] = y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{4.12}$$

განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ, ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, (4 . 11) და (4 12) განტოლებანი ურთიერთიგივურია; მაშასადამე,

$$p_1(x) = -\frac{w_1(x)}{w(x)}$$

ვნახეთ, რომ $w_1(x) = w'(x)$, ე. ი.

$$p_1(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)},$$

ანუ

$$p_1(x)\,dx = -\frac{w'(x)}{w(x)}\,dx.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$\int p_1(x)\,dx = -\ln\frac{w(x)}{C},$$

საიდანაც

$$w(x) = C_1 e^{-\int p_1(x)\,dx}$$

განვიხილოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების მეთოდები. ზოგად შემთხვევაში წრფივ განტოლებათა ინტეგრება არ შეიძლება დაყვანილ იქნეს კვადრატურებზე. ქვემოთ განვიხილავთ ზოგიერთ თეორემას, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს გავაადვილოთ განტოლების ინტეგრება, დავწიოთ განტოლების რიგი. დავამტკიცოთ, რომ, თუ ცნობილია წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი, მაშინ შესაძლებელია განტოლების რიგის დაწევა ერთი ერთეულით, მასთან, მიღებული განტოლება იქნება, აგრეთვე, წრფივი. მართლაც, განვიხილოთ n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y = 0. \tag{5.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ განტოლების p_i კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) შუალედში და, ვთქვათ, $y_1(x)$ არის მისი რომელიმე კერძო ამონახსნი, ე. ი.

$$L[y_1(x)] = 0.$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 1. თუ ცნობილია (5.1) წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ერთი $y_1(x)$ კერძო ამონახსნი, მაშინ განტოლების რიგი შეიძლება დავწიოთ ერთი ერთეულით, მასთან, მიღებული განტოლება კვლავ იქნება წრფივი.

დამტკიცება. მართლაც, შევასრულოთ გარდაქმნა:

$$y(x) = y_1(x)\cdot u(x), \quad y_1(x) \neq 0, \tag{5.2}$$

სადაც $u(x)$ ახალი უცნობი ფუნქციაა; მაშინ

$$y'(x) = y_1'(x)\cdot u(x) + u'(x)\cdot y_1(x),$$

$$y''(x) = y_1''(x)\cdot u(x) + 2y_1'(x)\cdot u'(x) + y_1(x)\cdot u''(x),$$

$$y^{(n)}(x) = y_1^{(n)}(x)\cdot u(x) + \left(\frac{n}{1!}\right) y^{(n-1)}(x)\cdot u'(x) + \cdots + \tag{5.3}$$

$$+ \left(\frac{n}{n-1}\right) y_1'(x)\cdot n^{(n-1)}(x) + \left(\frac{n}{n}\right) y_1(x)\cdot u^{(n)}(x).$$

თუ (5.2) და (5.3) გამოსახულებებს ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y_1(x)\cdot u^{(n)}(x)+[n\,y_1'(x)+p_1(x)\,y_1(x)]\cdot u^{(n-1)}(x)+\cdots+$$
$$+[n\,y_1^{(n-1)}(x)+(n-1)\,y_1^{(n-2)}(x)\,p_1(x)+\cdots+2y_1'(x)p_{n-2}(x)+$$
$$+y_1(x)\,p_{n-1}(x)]\cdot u'(x)+[y_1^{(n)}(x)+p_1(x)\,y_1^{(n-1)}(x)+\cdots+$$
$$+p_n(x)\,y_1(x)]\cdot u(x)=0, \tag{5.4}$$

რადგან $L[y_1(x)]=0$, ამიტომ (5 . 4) ფორმულაში უკანასკნელი წევრი ნულის ტოლია.

ახლა, თუ შევასრულებთ გარდაქმნას $u'(x)=v(x)$, მივიღებთ $n-1$ რიგის წრფივ განტოლებას $v(x)$-ის მიმართ:

$$y_1(x)\cdot v^{(n-1)}(x)+[n\,y_1'(x)+p_1(x)\,y_1(x)]\cdot v^{(n-2)}(x)+\cdots+$$
$$+[n\,y_1^{(n-1)}(x)+(n-1)\,y_1^{(n-2)}(x)\,p_1(x)+\cdots+2y_1'(x)p_{n-2}(x)+$$
$$+y_1(x)\,p_{n-1}(x)]\cdot v(x)=0.$$

ცხადია, $v(x)$ ფუნქცია გამოისახება საძიებელი $y(x)$ ფუნქციის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$v(x)=u'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

ვთქვათ, უკანასკნელი განტოლებისათვის მიღებულია ფუნდამენტური სისტემა:

$$v_1(x),\quad v_2(x),\ldots,v_{n-1}(x),$$

მაშინ ამ ფუნდამენტური სისტემის ინტეგრების შედეგად $u(x)$-ისათვის მივიღებთ $n-1$ ამონახსნის სისტემას:

$$u_1(x)=\int v_1(x)\,dx,\quad u_2(x)=\int v_2(x)\,dx,\ldots,u_{n-1}(x)=\int v_{n-1}(x)\,dx,$$

ხოლო $y(x)$-ისათვის შესაბამისი ამონახსნები იქნება:

$$y_{i+1}(x)=y_1u_i(x)=y_1(x)\int v_i(x)\,dx\quad(i=1,\,2,\ldots,n-1),$$

რომლებიც $y_1(x)$ ამონახსნთან ერთად ქმნის (5 . 1) განტოლებისათვის ფუნდამენტურ სისტემას. მართლაც, შევადგინოთ წრფივი დამოკიდებულება:

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_{n-1}y_{n-1}(x)+C_ny_n(x)=0,$$

რომელიც $y_1(x)$-ზე გაყოფის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$C_1+C_2u_1(x)+C_3u_2(x)+\cdots+C_nu_{n-1}(x)=0.$$

თუ უკანასკნელ დამოკიდებულებას გავაწარმოებთ x-ით, გვექნება:

$$C_2 v_1(x) + C_3 v_2(x) + \cdots + C_n v_{n-1}(x) = 0. \tag{5.5}$$

რადგანაც კერძო ამონახსნები $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_{n-1}(x)$ ქმნის ფუნდამენტურ სისტემას, ამიტომ (5.5) იგივეობას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა C_i ნულის ტოლია, ე. ი. $C_2 = C_3 = \cdots = C_{n-1} = C_n = 0$ და, მაშასადამე, $C_1 = 0$.

ამგვარად, დამოკიდებულებას:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0, \; a < x < b$$

ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $C_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

მაშასადამე, კერძო ამონახსნების სისტემა:

$$y_1(x), \; y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

ქმნის (5.1) განტოლებისათვის ფუნდამენტურ სისტემას. თეორემა დამტკიცებულია.

სრულიად ანალოგიურად, თუ ცნობილია (5.1) განტოლების m წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი $(m<n)$, მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნეს $n-m$ რიგის განტოლებაზე. ეს დაყვანა შეიძლება შევასრულოთ თანდათანობით ისე, როგორც წინა თეორემაში; პირველად გამოვიყენებთ $y_1(x)$ კერძო ამონახსნს, მივიღებთ $n-1$ რიგის განტოლებას $v(x) = u'(x)$-ის მიმართ. ფუნქციები: $v_1(x) = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$, $v_2(x) = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)'$ და ა. შ. იქნება ამ განტოლების ამონახსნები. შემდეგ ამავე წესით გადავალთ $n-2$ რიგის განტოლებაზე, რომლის ამონახსნები იქნება $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)'$ და ა. შ.

ისე როგორც წინა თეორემაში, უკანასკნელი $n-m$ რიგის განტოლების ფუნდამენტური სისტემა კვადრატურების მეშვეობით მიგვიყვანს მოცემული (5.1) განტოლების $n-m$ ამონახსნებზე, რომლებიც მოცემული m კერძო ამონახსნთან ერთად ქმნის (5.1) განტოლების ფუნდამენტურ სისტემას. კერძოდ, თუ ცნობილია $n-1$ კერძო ამონახსნი, მაშინ ამოცანა დაიყვანება რომელიღაც პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრებაზე.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $y_1(x)$ არის კერძო ამონახსნი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0.$$

შევასრულოთ გარდაქმნა $y(x)=y_1(x)u(x)$, მაშინ

$$y'=y_1'(x)u(x)+u'(x)y_1(x), \quad y''(x)=y_1''(x)u(x)+2y_1'(x)u'(x)+$$
$$+y_1(x)\cdot u''(x),$$

$$L[y]=y_1(x)u''(x)+[2y_1'(x)+p_1(x)y_1(x)]u'(x)+$$
$$+[y_1''(x)+p_1(x)y_1'(x)+p_2(x)y_1(x)]u(x)=0.$$

თუ უკანასკნელ განტოლებაში ჩავსვამთ $v(x)=u'(x)$-ს, მივიღებთ:

$$v'(x)+\left[\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+p_1(x)\right]v(x)=0,$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს:

$$u'(x)=v(x)=C_1[y_1(x)]^{-2}e^{-\int p_1(x)\,dx} \tag{5.6}$$

(5.6) განტოლების ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$u(x)=C_1\int\frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}dx+C.$$

მაშასადამე, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y=y_1(x)C_1\int\frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}dx+C_2y_1(x).$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^3y''-3x^2y'+3xy=0 \quad (x\neq 0),$$

თუ ვიცით მისი ერთი $y=x$ კერძო ამონახსნი.

შევასრულოთ ჩასმა $y=xu(x)$, მაშინ

$$y'=u(x)+xu'(x),$$

$$y''=u'(x)+u'(x)+xu''(x)=2u'(x)+xu''(x).$$

ჩავსვამთ რა უკანასკნელ ფორმულებს მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x^3[2u'(x)+xu''(x)]-3x^2[u(x)+xu'(x)]+3x^2u(x)=0,$$

ანუ

$$x^4 u''(x) - x^3 u'(x) = 0 \quad (x \neq 0),$$

$$xu''(x) - u'(x) = 0,$$

საიდანაც $v(x) = u'(x)$-ისათვის გვექნება:

$$xv'(x) - v(x) = 0,$$

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{1}{x}.$$

$$u'(x) = v(x) = C_1 e^{\int \frac{dx}{x}} = C_1 e^{\ln x} = C_1 \cdot x.$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$u(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y(x) = xu(x) = C_1 \frac{x^3}{2} + C_2 x.$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0 \quad (x \neq 0),$$

თუ ვიცით მისი ერთი $y=x$ კერძო ამონახსნი.

შევასრულოთ ჩასმა $y=xu$, სადაც $u(x)$ ახალი საძიებელი ფუნქ-ციაა. მივიღებთ განტოლებას:

$$xu''' = 0, \quad \text{ანუ} \quad u''' = 0 \ (x \neq 0),$$

რომლისთვისაც $u_1 = 1$, $u_2 = x$ და $u_3 = x^2$ წარმოადგენს სამ წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ამონახსნს. ამიტომ მოცემული განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები იქნება:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3.$$

მაშასადამე, $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$ გვაძლევს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს.

ახლა გადავიდეთ წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების გამოკვლევაზე.

§ 6. არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი

განვიხილოთ n-ური რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$L[y(x)] = y^{(n)}(x) + p_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)\,y'(x) + \\ + p_n(x)\,y(x) = f(x), \tag{6.1}$$

სადაც კოეფიციენტები $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ და მარჯვენა ნაწილი $f(x)$ ცნობილი უწყვეტი ფუნქციებია (a, b) შუალედში. (6.1) განტოლების ინტეგრება შეიძლება დაყვანილ იქნეს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $L[y(x)]=0$ ინტეგრებაზე. წინასწარ შევისწავლოთ (6.1) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგებულება.

ადგილი აქვს თეორემას:

თეორემა 1. თუ ცნობილია (6.1) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების რაიმე $y_0(x)$ კერძო ამონახსნი, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი არის ჯამი ამ კერძო ამონახსნისა და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y_0(x)$ არის (6.1) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ

$$L[y_0(x)] = f(x).$$

შემოვიტანოთ ახალი საძიებელი $u=u(x)$ ფუნქცია, მივიღებთ:

$$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (6.1) განტოლებაში, მაშინ წრფივი დიფერენციალური ოპერატორის ცნობილი თვისების თანახმად, გვექნება:

$$L[y(x)] = L[y_0(x)+u(x)] = L[y_0(x)] + L[u(x)] = f(x),$$

აქედან, რადგან $L[y(x)] = f(x)$, მივიღებთ:

$$L[u(x)] = 0 \tag{6.2}$$

—(6.1) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას[1].

[1] ცხადია, $L[y(x)]=f(x)$ და $L[y(x)]=0$ განტოლებებს არა აქვთ საერთო ამონახსნი.

ვთქვათ, $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ არის (6.2) ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა.

მაშინ (6.2) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$u(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

მაშასადამე, ფუნქცია

$$y = y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, წარმოადგენს (6.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება დაიყვანება შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრებაზე, თუ ვიცით არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი. ახლა ვუჩვენოთ, რომ, თუ ცნობილია (6.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი $L[y(x)]=0$ განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ვიპოვოთ კვადრატურების საშუალებით. ზოგადი მეთოდი, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოძებნა, მდგომარეობს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის ნებისმიერი მუდმივების ვარირებაში. ამ მეთოდს ეწოდება ნებისმიერი მუდმივების ვარირების მეთოდი (ლაგრანჟის მეთოდი).

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2. თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების

$$L[y] = f(x) \tag{6.2'}$$

შესაბამისი

$$L[y] = 0 \tag{6.3}$$

ერთგვაროვანი განტოლების n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სისტემა $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, მაშინ (6.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ვიპოვოთ კვადრატურებში და ის ამ განტოლების ერთი რომელიმე კერძო ამონახსნისა და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალის ჯამია

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

სადაც $y_0(x)$ არის (6.2) განტოლების რომელიმე

კერძო ამონახსნი, ხოლო $u(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ წარმოადგენს (6.3) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

დამტკიცება. ვთქვათ, ცნობილია (6.3) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$u(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

და

$$w(y_1,\ y_2,\ldots,y_n)\neq 0,\ L[y_i(x)]=0\quad (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

ვეძიოთ (6.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი სახით:

$$y(x)=C_1(x)\,y_1(x)+C_2(x)\,y_2(x)+\cdots+C_n(x)\,y_n(x),\qquad (8.4)$$

სადაც $C_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$ პარამეტრები იქნება არა მუდმივი რიცხვები, არამედ x-ის ნებისმიერი ფუნქციები, რომლებიც უნდა განვსაზღვროთ ისე, რომ (6.4) ფუნქცია წარმოადგენს (6.2) განტოლების ამონახსნს.

ამგვარად, n უცნობი $C_1(x),\ C_2(x),\ldots,C_n(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის მოცემული გვაქვს ერთი (6.2) განტოლება; საჭიროა კიდევ $n-1$ პირობა, რომელთაც ახლა სათანადოდ შევარჩევთ. ამ მიზნით (6.4) განტოლება გავაწარმოოთ $(n-1)$-ჯერ; მასთან ვისარგებლოთ $C_i(x)$ ფუნქციების ნებისმიერობით, რათა გავამარტივოთ მიღებული წარმოებულები. პირველი გაწარმოება გვაძლევს:

$$y'(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i'(x)+\sum_{n=1}^{n}C_i'(x)\,y_i(x).\qquad (6.5)$$

ახლა $C_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$ ფუნქციები ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)\,y_i(x)=0.$$

მაშინ (6.5) ტოლობის თანახმად, გვექნება:

$$y'(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)\,y_i'(x),$$

შემდეგ, $y'(x)$-ის გაწარმოება x-ით გვაძლევს:

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i''(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\,y_i'(x).$$

თუ $C_i(x)$ ფუნქციებს ისე შევარჩევთ, რომ დაკმაყოფილებული იყოს პირობა

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\,y_i'(x)=0,$$

მაშინ $y(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულებისათვის მივიღებთ:

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i''(x)$$

და ა. შ. თუ ასეთი წესით გავაგრძელებთ $y(x)$ ფუნქციის წარმოებულების გამოთვლას $n-1$ რიგის ჩათვლით და ყოველი გაწარმოების შემთხვევაში $C_i(x)$ ფუნქციებს ისე შევარჩევთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\;y_i^{(k)}(x)=0 \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n-2),$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i(x),\\
y'(x) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i'(x),\\
y''(x) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i''(x),\\
&\;\;\vdots\\
y^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i^{(n-1)}(x),
\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

და

$$\sum_{1=i}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'^{(n-2)}(x) = 0. \tag{6.6'}$$

ახლა, თუ (6 . 6) ტოლობებიდან უკანასკნელ დამოკიდებულებას გავაწარმოებთ x-ით, მივიღებთ:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x). \tag{6.7}$$

თუ (6.7) ტოლობაში $C_i(x)$ ფუნქციებს ისე შევარჩევთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x),$$

მაშინ

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + f(x). \tag{6.8}$$

ახლა, თუ გავამრავლებთ (6 . 6) და (6 . 8) დამოკიდებულებებს შესაბამის $p(x)$ კოეფიციენტზე, $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_1(x), 1$, და მიღებულ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$L[y] = C_1(x)\, L[y_1(x)] + C_2(x)\, L[y_2(x)] + \cdots + C_n(x)\, L[y_n(x)] + f(x).$$

რადგან

$$L[y_1(x)] = L[y_2(x)] = \cdots = L[y_n(x)] = 0,$$

ამიტომ

$$L[y(x)] = f(x).$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n(x)\, y_n(x),$$

სადაც $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობებს, წარმოადგენს არაერთგვაროვანი (6 . 2) განტოლების

ამონახსნს. ახლა ვიპოვოთ $C_i(x)$ უცნობი ფუნქციები. ცხადია, $C_i'(x)$ ფუნქციების განსაზღვრისათვის გვექნება n არაერთგვაროვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $C_i'(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ უცნობი ფუნქციების მიმართ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) = C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n(x) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x) = C_{1_i}(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n'(x) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} C_i\ (x)\, y_i^{(n-2)}(x) = C_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)}\, x + \cdots +\\
&\qquad\qquad + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots +\\
&\qquad\qquad + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x).
\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი $w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ არის ვრონსკიანი, რომელიც მთელ (a, b) შუალედში განსხვავებულია ნულისაგან. თანახმად (4 . 8) ფორმულისა,

$$w(x) = e^{-\int p_1(x)\,dx} \neq 0.$$

აღვნიშნოთ $w_i(x)$-ით ფუნქციონალური დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება $w(x)$-დან, თუ ამ უკანასკნელში i-ური სვეტის ელემენტებს შევცვლით სისტემის თავისუფალი წევრებით: $0, 0, \dots, 0, f(x)$. თუ (6 . 9) სისტემას ამოვხსნით $C_i'(x)$ უცნობების მიმართ, მაშინ, კ რ ა მ ე რ ი ს ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$C_i'(x) = \frac{w_i(x)}{w(x)} = w_i(x) \cdot e^{\int p_1(x)\,dx} \tag{6.10}$$

აქედან:

$$C_i(x) = \int w_i(x)\, e^{\int p_1(x)\,dx} dx + C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც C_i ნებისმიერი მუდმივებია. ჩავსვამთ რა (6.10) გამოსახულე-

ბებს (6.4) განტოლებაში, მივიღებთ (6.2) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y(x)=y_1(x)\int w_1(x)\,e^{\int P_1(x)\,dx}dx+y_2(x)\int w_2(x)\,e^{\int p_1(x)\,dx}dx+\cdots+$$

$$+y_n(x)\int w_n(x)\,e^{\int p_1(x)\,dx}dx+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x).$$

$$(6.11)$$

თუ (6.11) ტოლობაში დავუშვებთ $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$, მაშინ უკანასკნელი მოგვცემს განხილული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$y_0(x)=y_1(x)\int w_1(x)\,e^{\int P_1(x)\,dx}dx+y_2(x)\int w_n(x)\,e^{\int p_1(x)\,dx}dx+\cdots+$$

$$+y_n(x)\int w_n(x)\,e^{\int p_1(x)\,dx}dx.$$

ამგვარად, (6.11) დამოკიდებულება წარმოადგენს (6.2) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს; ის არის ჯამი (6.2) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნისა:

$$y_0(x)=y_1(x)\int w_1(x)\,e^{\int p_1(x)\,dx}dx+\cdots+y_n(x)\int w_n(x)\,e^{\int P_1(x)\,dx}dx$$

და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა:

$$u(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამგვარად, (6.2) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიცოდეთ მისი შესაბამი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემის აგება, რის შემდგომ მისი ზოგადი ამონახსნი ადვილად მოიძებნება კვადრატურებში (6.11) ფორმულის მიხედვით.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ არაერთგვაროვანი

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=4x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თანახმად ზოგადი თეორიისა, წინასწარ მოვძებნოთ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი. შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $y_1(x) = x^2$ ფუნქცია წარმოადგენს უკანასკნელი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს. ამიტომ, თუ ამ ერთგვაროვან განტოლებაში შევასრულებთ ჩასმას $y(x) = u(x) \cdot x^2$, მაშინ მისი რიგი, თანახმად ცნობილი თეორემისა, შეიძლება დავწიოთ ერთი ერთეულით. მართლაც,

$$y' = 2xu(x) + u'(x) \cdot x^2,$$

$$y'' = u''(x) \cdot x^2 + 4xu'(x) + 2u(x).$$

ახლა, თუ $y(x)$, $y'(x)$ და $y''(x)$-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ ამ ერთგვაროვან განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x^2 u''(x) + 2xu'(x) = 0, \qquad x \neq 0,$$

ანუ

$$u''(x) + \frac{2}{x} u'(x) = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $u'(x) = v(x)$, მაშინ უკანასკნელი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$v'(x) + \frac{2}{x} v(x) = 0.$$

ეს არის პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$v(x) = C_1 e^{-\int \frac{2dx}{x}} = C_1 e^{-\ln x^2}$$

ანუ

$$v(x) = C_1 \cdot \frac{1}{x^2},$$

მაშასადამე,

$$u'(x) = \frac{C_1}{x^2},$$

საიდანაც

$$u(x) = -\frac{C_1}{x} + C_2 = \frac{C_2 x - C_1}{x},$$

ამგვარად, განსახილავი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y(x) = x^2 u(x) = x^2 \frac{C_2 x - C_1}{x},$$

ანუ

$$y(x) = -C_1 x + C_2 x^2,$$

ე. ი. ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნები ფუნდამენტური სისტემა იქნება: $y_1(x) = -x$, $y_2(x) = x^2$.

ახლა ვიპოვოთ მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ზოგადი ამონახსნი ვეძიოთ სახით:

$$y(x) = -C_1(x) \cdot x + C_2(x) \cdot x^2;$$

$C_1(x)$ და $C_2(x)$-ის განსაზღვრისათვის, ზოგადი თეორიის თანახმად, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$-C_1'(x) \cdot x + C_2'(x) \cdot x^2 = 0,$$

$$-C_1'(x) + C_2'(x) \cdot 2x = 4x.$$

ამ შემთხვევაში

$$w(x) = \begin{vmatrix} -x & x^2 \\ -1 & 2x \end{vmatrix} = -2x^2 + x^2 = -x^2$$

და

$$w_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 4x & 2x \end{vmatrix} = -4x^3,$$

$$w_2(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -1 & 4x \end{vmatrix} = -4x^2.$$

მაშასადამე,

$$C_1(x) = \int w_1(x) e^{\int p_1(x)\,dx} dx = \int -4x^3 e^{-\int \frac{2dx}{x}} dx =$$

$$= -4 \int x^3 \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = -2x^2 + C_1,$$

$$C_1(x) = -2x^2 + C_1,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივაა.

$$C_2(x) = \int w_2(x)\, e^{\int p_1(x)\,dx} dx = -4 \int x^2 e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx =$$

$$= -4 \int x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = -4x + C_2.$$

თუ $C_1(x)$ და $C_2(x)$-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ ზოგადი ამონახსნის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$y(x)=(-2x^2+C_1)(-x)+(-4x+C_2)x^2=2x^3-C_1x-4x^3+C_2x^2,$$

$$y(x)=C_2x^2-C_1x-2x^3.$$

ამგვარად, $y(x)=C_2x^2-C_1x-2x^3$ განტოლება წარმოადგენს მოცემული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს. ცხადია, $y_0(x)=-2x^3$ არის მოცემული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი; ის მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან, თუ მასში მივიღებთ $C_1=C_2=0$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y''-\frac{y'}{x}=x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვძებნოთ ერთგვაროვანი

$$y''-\frac{y'}{x}=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი. რადგან

$$\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x},$$

ამიტომ

$$\frac{y''\,dx}{y'}=\frac{dx}{x},$$

საიდანაც

$$\int\frac{dy'}{y'}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,$$

$$\ln y'=\ln x+\ln C.$$

ამგვარად,

$$y'=Cx,$$

$$dy=Cx\,dx,$$

$$y(x)=\int Cx\,dx+C_2=\frac{Cx^2}{2}+C_2,$$

$$y(x)=C_1x^2+C_2,\quad \text{სადაც}\quad C_1=\frac{C}{2}$$

მაშასადამე, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახს-ნების ფუნდამენტური სისტემა იქნება:

$$y_1(x) = x^2, \; y_2(x) = 1.$$

ვეძიოთ მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამო-ნახსნი სახით:

$$y(x) = C_1(x)\, x^2 + C_2(x).$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$ ფუნქციების განსაზღვრისათვის შევადგინოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x) \cdot x^2 + C_2'(x) = 0, \\ &C_1'(x) \cdot 2x = x. \end{aligned}\right\}$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}, \quad C_2'(x) = -\frac{x^2}{2},$$

საიდანაც

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2.$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$-ის მნიშვნელობათა ჩასმა ზოგადი ამონახსნის გამოსახულებაში მოგვცემს მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

VII თავი

n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

ამ თავში განვიხილავთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ტიპებს (რომელთა ინტეგრება ყოველთვის შესაძლებელია ელემენტარულ ფუნქციებში, ამასთან კვადრატურების გარეშე) და, აგრეთვე, მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა ამონახსნების ზოგიერთ თვისებას.

§ 1. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი

განვიხილოთ n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$L[y(x)]=y^{(n)}(x)+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}(x)+\cdots+a_n y(x)=f(x), \quad (1.1)$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ მუდმივი ნამდვილი რიცხვებია, რომელთაც განტოლების კოეფიციენტები ეწოდება, ხოლო $f(x)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა (a, b) შუალედში (კერძოდ, შესაძლოა $f(x)$ იყოს მუდმივი ამ შუალედში).

(1.1) არაერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრება, როგორც ნაჩვენებია წინა თავში, დაიყვანება შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრებაზე:

$$L[y(x)]=y^{(n)}(x)+a_1 y^{(n-1)}(x)+a_2 y^{(n-2)}(x)+\cdots+$$
$$+a_{n-1} y'(x)+a_n(y)(x)=0. \quad (1.2)$$

ამიტომ, ამ პარაგრაფში, წინასწარ შევისწავლით (1.2) ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემისა და ზოგადი ამონახსნის აგების საკითხს.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, (1.2) განტოლებას აქვს კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა, ე. ი. წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები, რომლებიც განსაზღვრული და უწყვეტია (a, b) შუალედში.

ვუჩვენოთ, რომ (1 . 2) განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა შეიძლება აგებულ იქნეს ელემენტარულ ფუნქციებში.

მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ პირველი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი $y'+ay=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x)=Ce^{-ax}$ ფუნქცია, მაშინ ე ი ლ ე რ ი ს მიხედვით (1 . 2) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვეძიოთ

$$y=e^{kx} \tag{1.3}$$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახით, სადაც k რომელიღაც, ჯერჯერობით განუსაზღვრელი, მუდმივი რიცხვია.

(1.2) განტოლების მარცხენა ნაწილში $y=e^{kx}$ ფუნქციის ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$L[e^{kx}]=e^{kx}(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\cdots+a_{n-1}k+a_n)=e^{kx}l(k), \tag{1.4}$$

სადაც

$$l(k)=k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\cdots+a_{n-1}k+a_n.$$

ცხადია, რადგან $e^{kx}>0$, ამიტომ $L[e^{kx}]$ გახდება იგივურად ნულის ტოლი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $l(k)=0$.

ალგებრულ განტოლებას:

$$l(k)=k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

ეწოდება (1 . 2) წ რ ფ ი ვ ი ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა.

თუ (1 . 3) გამოსახულებაში k მუდმივად ავიღებთ $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების რომელიმე k_1 ფესვს, მაშინ (1 . 4) გამოსახულება გახდება იგივურად ნულის ტოლი, ე. ი. $y=e^{k_1x}$ ფუნქცია იქნება (1 . 2) ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი.

ცნობილია, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი n-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას $l(k)=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$ აქვს n ფესვი: $k_1, k_2, \dots, k_n$, ამასთან, ყველა ეს ფესვი შესაძლოა არ იყოს ნამდვილი. ზოგიერთი ამ ფესვებიდან (ან ყველა) შესაძლოა იყოს კომპლექსური. მახასიათებელი განტოლების კომპლექსური ფესვები მოგვცემს (1 . 2) დიფერენციალური განტოლების $y=e^{(r+is)x}$ სახის კომპლექსურ ამონახსნებს და, ამგვარად, (1 . 2) განტოლების ზოგადი ამონახსნის გამოსახულებაში შევა ნამდვილი x ცვლადის კომპლექსური ფუნქცია. კომპლექსური სახის ამონახსნი $y(x)=e^{(r+is)x}$ შეგვიძლია შევცვალოთ სხვა, ნამდვილი x ცვლადის ნამდვილი ამონახსნებით ისე, რომ (1 . 2) განტოლების ზოგად ამონახსნში შემავალი ყველა ფუნქცია იყოს ნამდვილი. დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ $y(x)=u(x)+iv(x)$ სახის კომპლექსური ფუნქცია არის $L[y(x)]=0$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილი, ე. ი. $u=u(x)$ და $v=v(x)$ ფუნქციები, წარმოადგენს ამ განტოლების ნამდვილ ამონახსნებს: $L[u(x)]=0$, $L[v(x)]=0$.

მართლაც, ვთქვათ, $y(x)=u(x)+iv(x)$ კომპლექსური ფუნქცია არის $L[y(x)]=0$ განტოლების კომპლექსური ამონახსნი (a, b) შუალედში. მაშინ $L[y]$ წრფივი დიფერენციალური ოპერატორის თვისების თანახმად,

$$L[y(x)]=L[u(x)+iv(x)]=L[u(x)]+iL[v(x)]\equiv 0,$$

სადაც $L[u(x)]$ და $L[v(x)]$ წარმოადგენენ x-ის ნამდვილ ფუნქციებს (a, b) შუალედში.

აქედან კომპლექსური სიდიდის ნულთან იგივური ტოლობის საფუძველზე გვექნება ორი იგივეობა:

$$L[u(x)]\equiv 0,\ L[v(x)]\equiv 0.$$

მაშასადამე, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ წარმოადგენს $L[y]=0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნებს. ლემა დამტკიცებულია.

ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემისა და ზოგადი ამონახსნის აგება. (1.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად, როგორც ეს გამომდინარეობს წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგადი თეორიიდან, საკმარისია ვიპოვოთ მისი კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა, ე. ი. წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნები. როგორც ქვემოთ დავინახავთ, (1.2) განტოლების კერძო ამონახსნები შესაძლებელია მოვძებნოთ მარტივად ელემენტარულ ფუნქციებში, მასთან კვადრატურების გარეშე. განვიხილოთ (1.2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემისა და ზოგადი ამონახსნის აგების საკითხი მახასიათებელი განტოლების სხვადასხვა ფესვების შემთხვევაში.

თეორემა 1. თუ $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვი $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ერთმანეთისაგან განსხვავებულია და ნამდვილი, მაშინ (1.2) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა: $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ $y_3=e^{k_3x}, \ldots, y_n=e^{k_nx}$. ამ ამონახსნების წრფივი კომბინაცია

$$y(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\cdots+C_ne^{k_nn} \tag{1.4'}$$

არის (1.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ, k_1. $k_2, \dots, k_n$ არის მახასიათებელი განტოლების ნამდვილი და ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვები. თუ ამ ფესვებს მიმდევრობით ჩავსვამთ (1.2) განტოლებაში, მაშინ, ცხადია, $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$ ფუნქციები იქნება (1.2) განტოლების კერძო ამონახსნების სისტემა. ეს ამონახსნები წრფივად დამოკიდებულია $(-\infty, \infty)$ შუალედში. მართლაც, ამ ამონახსნების ვრონსკიანია:

$$w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = w(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & & k_n e^{k_n x} \\ & & & \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ k_1 & k_2 & & k_n \\ & & & \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

(1.5) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მდგომი დეტერმინანტი წარმოადგენს ვანდერმონდის დეტერმინანტს. ამ დეტერმინანტის მნიშვნელობა, როგორც უმაღლესი ალგებრიდანაა ცნობილი, ეტოლება $k_i - k_j \ (i > j)$ სახის თანამამრავლთა ნამრავლს:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ k_1 & k_2 & & k_n \\ & & & \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (k_i - k_j).$$

ამგვარად,

$$w(x) = e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \prod_{i>j} (k_i - k_j).$$

რადგან მახასიათებელი განტოლების ფესვები განსხვავებულია, $k_j \neq k_i$, ამიტომ $w(x) \neq 0$.

ამგვარად, ერთგვაროვანი

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0,$$

განტოლების კერძო ამონახსნების სისტემა:

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, \ y_2(x) = e^{k_2 x}, \dots, \ y_n(x) = e^{k_n x}$$

წარმოადგენს ფუნდამენტურ სისტემას. ამიტომ ამ ამონახსნების წრფივი კომბინაცია

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x} ,$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, 1-ლი თეორემის (თავი VI, § 3) თანახმად, იქნება $L[y]=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6\,y(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი

$$l(k) = k^2 - 5\,k + 6 = 0$$

განტოლების ფესვებია: $k_1=3$, $k_2=2$; ამიტომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, (1 . 4′) ფორმულის თანახმად იქნება:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y'''(x) - 7\,y''(x) + 12\,y'(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი

$$l(k) = k^3 - 7\,k^2 + 12\,k = 0$$

განტოლების ფესვებია: $k_1=0$, $k_2=4$, $k_3=3$, ამიტომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{3x},$$

სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მახასიათებელი განტოლების ფესვები ყოველთვის არ მოიძებნება ისე მარტივად, როგორც განხილულ მაგალითებში. უფრო ხშირად ამ ფესვების მოძებნა გვიხდება მიახლოებითი მეთოდებით.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როცა მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ფ ე ს ვ ე ბ ს შ ო რ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი ფ ე ს ვ ე ბ ი.

თეორემა 2. თუ $l(k)=0$ მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ყ ვ ე ლ ა ფ ე ს ვ ი $k_1, k_2, \ldots, k_n$ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი ა ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ა გ ა ნ, მ ა გ რ ა მ მ ა თ შ ო რ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი

ფესვებიც, მიშინ ყოველ წყვილ შეუღლებულ კომპლექსურ $k_m=\alpha_m+i\beta_m$ და $k_{m+1}=\alpha_m-i\beta_m$ ფესვებს შეესაბამება ორი წრფივად დამოუკიდებელი ნამდვილი კერძო ამონახსნი:

$$y_m(x)=e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x,\qquad y_{m+1}(x)=e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $k_m=\alpha_m+i\beta_m$ $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების კომპლექსური ფესვია. ამ ფესვს, 1-ლი თეორემის თანახმად, შეესაბამება (1.2) დიფერენციალური განტოლების კომპლექსური ამონახსნი:

$$y(x)=e^{(\alpha_m+i\beta_m)x}$$

თუ $e^{k_m x}$ ამონახსნს გარდავქმნით ეილერის[1] ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ:

$$e^{k_m x}=e^{(\alpha_m+i\beta_m)x}=e^{\alpha_m x}\cdot e^{i\beta_m x}=e^{\alpha_m x}(\cos\beta_m x+\sin\beta_m x).$$

აქედან, ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, კომპლექსური ამონახსნის $e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x$ ნამდვილი ნაწილი და $e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x$ წარმოსახვითი ნაწილი იქნება (1.2) დიფერენციალური განტოლების ორი ნამდვილი ამონახსნი. მაგრამ $k_m=\alpha_m+i\beta_m$ ფესვთან ერთად მახასიათებელ განტოლებას ექნება აგრეთვე შეუღლებული კომპლექსური ფესვიც $k_{m+1}=\alpha_m-i\beta_m$, რომელსაც, ცხადია, შეესაბამება იგივე ნამდვილი ამონახსნები (1.2) განტოლებისა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამგვარად, თუ მახასიათებელ განტოლებას $l(k)=0$ აქვს განსხვავებული ფესვები $k_1, k_2, \dots, k_n$, რომელთა შორის არსებობს კომპლექსური ფესვებიც, მაშინ ყოველ ნამდვილ k_μ ფესვს შეესაბამება (1.2) განტოლების ნამდვილი კერძო ამონახსნი $y_\mu=e^{k_\mu x}$, ხოლო ყოველ წყვილ კომპლექსურ ფესვს $(\alpha_m\pm i\beta_m)$ კი — იმავე განტოლების ნამდვილი ამონახსნები: $e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x$ და $e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x$. რადგანაც მახასიათებელ განტოლებას $l(k)=0$ აქვს n განსხვავებული ფესვი $k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_n$, ამიტომ მიიღება n ნამდვილი ამონახსნი: $e^{k_\mu x}$, $e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x$, $e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x$ სახის, რომლებიც ქმნიან ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას, რაც ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ. მართლაც, ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ ვისარგებლებდით ეილერის ფორმულით, მივიღებდით, რომ $y(x)=e^{k_i x}$

---

[1] $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

სახის ფუნქციები, სადაც k_ν განსხვავებული რიცხვებია, წრფივად დამოკიდებულია, რაც ეწინააღმდეგება ზემოთ დამტკიცებული 1-ლი თეორემის დასკვნებს.

ამგვარად, ძირითადი თეორემის თანახმად, ზოგად შემთხვევაში მივიღებთ (1.2) განტოლების ზოგად ამონახსნს ყველა კერძო $e^{k_\mu x}$, $e^{k_m x}\cos\beta_m x$, $e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x$ ამონახსნის წრფივი კომბინაციის სახით. მასთან ნამდვილ k_μ ფესვს ზოგად ამონახსნში შეესაბამება $C_\mu e^{k_\mu x}$ ფუნქცია, ხოლო ყოველ ორ $\alpha_m \pm i\beta_m$ სახის შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვს $e^{\alpha_m x}(C_m\cos\beta_m x + C_{m+1}\sin\beta_m x)$ ფუნქცია.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y^{(\mathrm{IV})}(x) - y''(x) - 2y(x) = 0,$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, მახასიათებელი

$$l(k) = k^4 - k^2 - 2 = 0$$

განტოლების ფესვებია: $k_1 = \sqrt{2}$, $k_2 = -\sqrt{2}$, $k_3 = +i$, $k_4 = -i$. ამიტომ მოცემული განტოლებისათვის შესაბამისად მივიღებთ ოთხ ნამდვილ კერძო ამონახსნს: $e^{\sqrt{2}x}$, $e^{-\sqrt{2}x}$, $\cos x$, $\sin x$, რომლებიც ქმნის ფუნდამენტურ სისტემას. მართლაც, თუ ვისარგებლებთ ეილერის ფორმულით, გვექნება:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix},$$

ამიტომ აღნიშნული კერძო ამონახსნების ვრონსკიანს ექნება სახე:

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{2}x} & e^{-\sqrt{2}x} & \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} & \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix} \\ \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} & -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} & \frac{1}{2}ie^{ix} - \frac{1}{2}ie^{-ix} & \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} \\ 2e^{\sqrt{2}x} & 2e^{-\sqrt{2}x} & -\frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix} & \frac{1}{2}ie^{ix} - \frac{1}{2}ie^{-ix} \\ 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} & -2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} & -\frac{1}{2}ie^{ix} + \frac{1}{2}ie^{-ix} & -\frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ცხადია, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y(x)=C_1 e^{\sqrt{2}x}+C_2 e^{-\sqrt{2}x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y''(x)-y'(x)-2y(x)=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას $l(k)=k^2-k-2=0$ აქვს ფესვები: $k_1=-1$, $k_2=2$. ამიტომ შესაბამისად მივიღებთ ორ ნამდვილ კერძო ამონახსნს $y_1(x)=e^{-x}$, $y_2(x)=e^{2x}$. მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x)=C_1 e^{-x}+C_2 e^{2x}.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y'''(x)-9y''(x)+14y'(x)=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ მახასიათებელ განტოლებას $l(k)=k^3-9k^2+14k=0$ აქვს განსხვავებული ფესვები $k_1=0$, $k_2=7$, $k_3=2$. ამიტომ შესაბამისად გვექნება სამი ნამდვილი კერძო ამონახსნი:

$$y_1(x)=1,\quad y_2(x)=e^{7x},\quad y_1(x)=e^{2x},$$

რომლებიც შეადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას; ცხადია,

$$y(x)=C_1+C_2 e^{7x}+C_3 e^{2x}$$

იქნება განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y^{(\mathrm{IV})}(x)+9y(x)=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას $k^4+9=0$ აქვს განსხვავებული კომპლექსური ფესვები. მართლაც,

$$k^4=-9,$$

$$k=\sqrt[4]{-9}=\sqrt[4]{9(\cos\pi-i\sin\pi)}=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

ასე, რომ,

$$k_1 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}(1+i),$$

$$k_2 = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}(-1+i),$$

$$k_3 = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}(-1-i),$$

$$k_4 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}(1-i).$$

შესაბამისად გვექნება ოთხი ნამდვილი კერძო ამონახსნი:

$$y_1(x) = e^{\sqrt{\frac{3}{2}}x}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad y_3(x) = e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

$$y_2(x) = e^{\sqrt{\frac{3}{2}}x}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad y_4(x) = e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

რომლებიც შეადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას; ფუნქცია

$$y(x) = e^{\sqrt{\frac{3}{2}}x}\left(C_1\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x + C_2\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) +$$

$$+ e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\left(C_3\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x + C_4\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$$

იქნება განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ახლა განვიხილოთ ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემისა და ზოგადი ამონახსნის აგების საკითხი იმ შემთხვევაში, როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი, ნამდვილი ან კომპლექსური ფესვები.

თეორემა 8. თუ k_1 არის მახასიათებელი $l(k)=0$ განტოლების m ჯერადი ნამდვილი ფესვი, მაშინ ფუნქციები $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = xe^{k_1x}$, $y_3(x) = x^2e^{k_1x}$, ..., $y_m(x) = x^{m-1}e^{k_1x}$ წარმოადგენს (1.2) დიფერენციალური განტოლების m წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, k_1 არის $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების m ჯერადი ნამდვილი ფესვი. მაშინ, როგორც ალგებრიდანაა ცნობილი, k_1 იქნება აგრეთვე ფესვი შემდეგი განტოლებებისა:

$$l'(k_1)=0,\ l''(k_1)=0, \dots, l^{(m-1)}(k_1)=0.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების m ჯერადობის k_1 ფესვს $k_1=k_2=\cdots=k_m$ ეთანადება (1.2) განტოლების m ნამდვილი კერძო ამონახსნი. მართლაც, (1 . 2) განტოლების მარცხენა მხარეში ჩავსვათ $y(x)=e^{k_1x}$, მივიღებთ დამოკიდებულებას:

$$L[e^{k_1x}]=e^{k_1x}\,l(k_1).$$

უკანასკნელი დამოკიდებულება გავაწარმოოთ k_1-ის მიმართ $(m-1)$-ჯერ მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial k_1}L[e^{k_1x}]=L\left[\frac{\partial}{\partial k_1}e^{k_1x}\right]=L[x\,e^{k_1x}]=x\,e^{k_1x}\,l(k_1)+e^{k_1x}\,l'(k_1).\\
&\frac{\partial^2}{\partial k_1^2}L[e^{k_1x}]=L\left[\frac{\partial^2}{\partial k_1^2}e^{k_1x}\right]=L[x^2e^{k_1x}]=x^2e^{k_1x}\,l(k_1)+x\,e^{k_1x}l'(k_1)+\\
&+xe^{k_1x}l'(k_1)+e^{k_1x}\,l''(k_1)=x^2e^{k_1x}l(k_1)+2x\,e^{k_1x}\,l'(k_1)+e^{k_1x}\,l''(k_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial^\mu}{\partial k_1^\mu}L[e^{k_1x}]=L[x^\mu e^{k_1x}]=\sum_{\nu=0}^{\mu}C_\mu^\nu\,l^{(\nu)}(k_1)\,x^{\mu-\nu}e^{k_1x}
\end{aligned}\right\}\quad(1.6)$$

აქედან, ცხადია, თუ k_1 არის მახასიათებელი განტოლების m ჯერადი ფესვი, მაშინ (1.6) დამოკიდებულებების საფუძველზე გვექნება:

$$L[e^{k_1x}]=L[x\,e^{k_1x}]=L[x^2e^{k_1x}]=\cdots=L[x^{m-1}e^{k_1x}]=0,$$

ე. ი. ფუნქციები:

$$y_1(x)=e^{k_1x},\ y_2(x)=x\,e^{k_1x}, \dots, y_m(x)=x^{m-1}e^{k_1x} \qquad (1.7)$$

წარმოადგენს (1 . 2) დიფერენციალური განტოლების m ნამდვილ ამონახსნს. ყველა ეს ამონახსნი წრფივად დამოუკიდებელია $(-\infty, \infty)$ შუალედში. მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ (1.7) ამონახსნები შეადგენს ფუნდამენტურ სისტემას. ვთქვათ, $l(k)=0$ მახასიათებელ განტოლებას აქვს შემდეგი ფესვები: k_1 იყოს m_1 ჯერადობის, k_2 m_2 ჯერადობის, ..., k_μ m_μ ჯერადობის, სადაც $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ მთელი დადებითი რიცხვე-

ბია, $m_1 + m_2 + m_\mu = n$; მაშინ ზემოთ დადგენილის თანახმად, (1.2) დიფერენციალურ განტოლებას ექნება შემდეგი n ამონახსნი:

$$\left.\begin{array}{l} e^{k_1 x}, \quad x e^{k_1 x}, \quad x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{m_1 - 1} e^{k_1 x}, \\ e^{k_2 x}, \quad x e^{k_2 x}, \quad x^2 e^{k_2 x}, \dots, x^{m_2 - 1} e^{k_2 x}, \\ \\ e^{k_\mu x}, \quad x e^{k_\mu x}, \quad x^2 e^{k_\mu x}, \dots, x^{m-1} e^{k_\mu x}. \end{array}\right\} \qquad (1.7')$$

დავამტკიცოთ ამ ამონახსნების წრფივად დამოუკიდებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, უკანასკნელი ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია:

$$a_1 e^{k_1 x} + a_2 x e^{k_1 x} + \cdots + a_{m_1} x^{m_1 - 1} e^{k_1 x} + b_1 e^{k_2 x} + b_2 x e^{k_2 x} + \cdots +$$

$$+ b_{m_2} x^{m_2 - 1} e^{k_2 x} + \cdots + h_1 e^{k_\mu x} + h_2 x e^{k_\mu x} +$$

$$+ \cdots + h_{m_\mu} x^{m_\mu - 1} e^{k_\mu x} \equiv 0, \qquad (1.8)$$

სადაც $a_1, a_2, \dots, a_{m_1}, b_1, b_2, \dots, b_{m_2}, \dots, h_1, h_2, \dots, h_{m_\mu}$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისგან. თუ $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_\mu x}$ საერთო მამრავლებს გამოვიტანთ ფრჩხილებს გარეთ და ფრჩხილებში მოთავსებულ მრავალწევრებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $P_{\nu_1}(x)$, $P_{\nu_2}(x)$, $P_{\nu_3}(x), \dots,$ $P_{\nu_\mu}(x)$-ით მივიღებთ:

$$P_{\nu_1}(x) e^{k_1 x} + P_{\nu_2}(x) e^{k_2 x} + \cdots + P_{\nu_\mu}(x) e^{k_\mu x} \equiv 0,$$

სადაც $P_{\nu_s}(x)$ იგივურად ნულის არატოლი მრავალწევრებია, რომელთა ხარისხი ν_s არ აღემატება $(m_s - 1)$-ს, $\nu_s \leqslant m_s - 1$ $(s = 1, 2, \dots, \mu)$. რადგან (1.8) იგივეობაში $a_l, b_l, \dots, h_l$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ამიტომ მოიძებნება მრავალწევრი, რომელიც არ იქნება იგივურად ნული. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$P_{\nu_\mu}(x) \not\equiv 0.$$

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ მრავალწევრის e^{kx} მაჩვენებლიან ფუნქციაზე ნამრავლის წარმოებული

$$[P_\mu(x) e^{kx}]' = P_\mu'(x) e^{kx} + k P_\mu(x) e^{kx} = Q(x) e^{kx}$$

წარმოადგენს e^{kx} ფუნქციის ნამრავლს იმავე ხარისხის $Q(x)$ მრავალწევრზე. ახლა გავამრავლოთ (1.9) იგივეობა $e^{-k_1 x}$-ზე, მივიღებთ:

$$P_{\nu_1}(x) + P_{\nu_2}(x)\, e^{(k_2 - k_1)x} + \cdots + P_{\nu_\mu}(x)\, e^{(k_\mu - k_1)x} \equiv 0.$$

უკანასკნელი იგივეობა გავაწარმოოთ x-ით m_1-ჯერ, მაშინ $P_{\nu_1}(x)$ გახდება ნულის ტოლი, რადგან მისი ხარისხი არ აღემატება (m_1-1)-ს, ხოლო დანარჩენი წევრები წარმოგვიდგება როგორც ნამრავლი იმავე ხარისხის ახალი მრავალწევრებისა (რაც გაწარმოებამდე) შესაბამის მაჩვენებლიან ფუნქციებზე:

$$Q_{\nu_2}(x)\, e^{(k_2 - k_1)x} + \cdots + Q_{\nu_\mu}(x)\, e^{(k_\mu - k_1)} \equiv 0. \qquad (1.9')$$

ცხადია, რომ $Q_{\nu_\mu}(x)$ არ უდრის იგივურად ნულს. (1.9′) ჯამი შეიცავს $\mu - 1$ შესაკრებს.

ახლა, თუ უკანასკნელ იგივეობას გავამრავლებთ $e^{-(k_2-k_1)x}$ ფუნქციაზე და მიღებულ შედეგს გავაწარმოებთ x-ით m_2-ჯერ, მაშინ $Q_{\nu_2}(x)$, რომლის ხარისხი არ აღემატება (m_2-1)-ს, გახდება ნულის ტოლი, ხოლო დანარჩენი წევრები წარმოგვიდგება როგორც ნამრავლი იმავე ხარისხის ახალი მრავალწევრობისა შესაბამის მაჩვენებლიან ფუნქციებზე:

$$R_{\nu_3}(x)\, e^{(k_3 - k_2)x} + \cdots + R_{\nu_\mu}(x)\, e^{(k_\mu - k_2)x} \equiv 0,$$

სადაც $R_{\nu_\mu}(x)$ არ უდრის იგივურად ნულს. თუ აღნიშნული წესით გავაგრძელებთ გამრავლებასა და გაწარმოებას, ბოლოს მივიღებთ იგივეობას:

$$S_{\nu_\mu}(x)\, e^{(k_\mu - k_{\mu-1})x} \equiv 0.$$

მაგრამ ეს იგივეობა შეუძლებელია, რადგან $S_{\nu_\mu}(x) \neq 0$, ხოლო მაჩვენებლიან ფუნქციას აქვს მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობანი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (1 . 2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების (1 7′) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და ქმნის (1 . 2) განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას (თავი VI, § 3). ამ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე დაიწერება:

$$y(x) = \sum_{s=1}^{\mu} P_{m_s - 1}(x)\, e^{k_s x} \qquad (1.10)$$

სადაც $P_{m_s-1}(x)$ არის $m_s - 1$ ხარისხის მრავალწევრი ნებისმიერი კოე-ფიციენტებით.

(1 . 10) გამოსახულებაში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვი ეტოლება: $m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu = n$, ე. ი. (1.2) განტოლების რიგს. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$y^{(IV)}(x) - 3\,y''(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას $l(k) = k^4 - 3k^2 = 0$ აქვს ფეს-ვები: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = +\sqrt{3}$, $k_4 = -\sqrt{3}$. ამიტომ მოცემულ დიფერენ-ციალურ განტოლებას აქვს ოთხი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი:

$$1,\ x,\ e^{\sqrt{3}x},\quad e^{-\sqrt{3}x}$$

და მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x}$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$y''(x) - 8\,y'(x) + 16\,y(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას: $l(k) = k^2 - 8k + 16 = 0$ აქვს ფესვები $k_1 = k_2 = 4$. ხოლო მოცემულ განტოლებას აქვს ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი: $y_1(x) = e^{4x}$, $y_2(x) = x\,e^{4x}$. ამიტომ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x\,e^{4x}.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$y'''(x) - 7\,y''(x) + 16\,y'(x) - 12\,y(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას: $l(k) = k^3 - 7k^2 + 16k - 12 = 0$ აქვს მარტივი ფესვი $k_1 = 3$ და ორჯერადი ფესვი $k_2 = k_3 = 2$. ამიტომ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სამი წრფივად დამო-უკიდებელი ამონახსნი:

$$y_1(x) = e^{3x},\quad y_2(x) = e^{2x},\quad y_3(x) = x\,e^{2x}.$$

ცხადია, განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + C_3 x\,e^{2x} = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x)e^{2x}.$$

მაგალითი 10. ვიპოვოთ

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგ საწყის პირობებში: $y(1) = y'(1) = 1$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას: $l(k) = k^2 - 4k + 4 = 0$ აქვს ფესვები: $k_1 = k_2 = 2$. მაშასადამე, მოცემულ განტოლებას აქვს ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი: $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$. ამიტომ მისი ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

ახლა ვიპოვოთ მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი მოცემულ საწყის პირობებში. ზოგადი ამონახსნის გაწარმოება გვაძლევს:

$$y'(x) = C_1 \cdot 2e^{2x} + C_2 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot 2xe^{2x} = e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x).$$

ანუ

$$y'(x) = e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x).$$

ამგვარად, გვაქვს განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \\ y'(x) &= e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x). \end{aligned}\right\}$$

საწყისი პირობების გათვალისწინების შედეგად გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 e^2 + C_2 e^2, \\ 1 &= e^2(2C_1 + C_2 + 2C_2) = e^2(2C_1 + 3C_2); \end{aligned}\right\}$$

აქედან:

$$\left.\begin{aligned} e^{-2} &= C_1 + C_2, \\ e^{-2} &= 2C_1 + 3C_2. \end{aligned}\right\}$$

უკანასკნელი სისტემის ამოხსნა C_1, C_2-ის მიმართ გვაძლევს: $C_1 = 2e^{-2}$, $C_2 = -e^{-2}$. მაშასადამე, მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, არის

$$y_1(x) = 2e^{-2} \cdot e^{2x} - e^{-2} \cdot xe^{2x}.$$

მაგალითი 11. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას: $l(k) = k^2 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$, ანუ $l(k) = (k-1)^3 = 0$, აქვს ფესვები: $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. მოცემულ

განტოლებას ექნება სამი წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი: $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=x\,e^x$, $y_3(x)=x^2 e^x$. მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x)=C_1 e^x+C_2 x\,e^x+C_3 x^2 e^x,$$

ანუ

$$y(x)=e^x(C_1+C_2 x+C_3 x^2).$$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა მართებულია, აგრეთვე, ჯერადი კომპლექსური ფესვების შემთხვევაშიც.

თუ $l(k)=0$ მახასიათებელ განტოლებას აქვს m ჯერადი კომპლექსური ფესვი $k_1=\alpha+i\beta$, მაშინ მას აქვს იმავე m ჯერადობის $k=\alpha-i\beta$, შეუღლებული კომპლექსური ფესვიც. (1 7) ფორმულების თანახმად, $k_1=\alpha+i\beta$ კომპლექსურ ფესვს შეესაბამება m კომპლექსური ამონახსნი:

$$y_1(x)=e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2(x)=x\,e^{(\alpha+i\beta)x},\ldots,y_m(x)=$$
$$=x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x} \tag{1.11}$$

თუ ვისარგებლებთ ეილერის ფორმულით $e^{\pm iz}=\cos z\pm i\sin z$ და ამ კომპლექსურ ამონახსნებში (1 11) განვაცალკევებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მაშინ ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, მივიღებთ $2m$ ნამდვილ ამონახსნს:

$$\begin{aligned}&e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x\,e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\&e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad x\,e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned} \tag{1.12}$$

მსგავსი ამონახსნები შეიძლება აგებულ იქნეს დანარჩენი ფესვებიდან ნებისმიერისთვის. ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში და, მაშასადამე, შეადგენს (1 .2) განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ეილერის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებდით, რომ $x^m e^{k_\nu x}$ სახის ფუნქციები, სადაც ყველა k_ν განსხვავებული რიცხვებია, იქნებოდა წრფივად დამოკიდებული $(-\infty,+\infty)$ შუალედში. ისე როგორც მარტივი ფესვების შემთხვევაში, ჯერადი შეუღლებული კომპლექსური ფესვი $k=\alpha-i\beta$ არ წარმოშობს არავითარ ახალ ნამდვილ კერძო ამონახსნს.

ამგვარად, $l(k)=0$ განტოლების ყოველ m ჯერად წყვილ $\alpha\pm i\beta$ კომპლექსურ ფესვს ეთანადება (1 12) სახის $2m$ ნამდვილი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. ცხადია, ზოგადი ამონახსნის ნაწილს, რომელიც

ეთანადება m ჯერადობის შეუღლებას $\alpha \pm i\beta$ კომპლექსურ ფესვს, ექნება სახე:

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C_{m+1} + \\ + C_{m+2} x + \cdots + C_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x].$$

ამრიგად, ზოგად შემთხვევაში, ავაგებთ რა 1) ნამდვილ ამონახსნებს, რომლებიც ეთანადება მარტივ ნამდვილ ფესვებს, 2) წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს, რომლებიც შეესაბამება ყოველ წყვილ მარტივ შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვებს, 3) წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს. რომლებიც შეესაბამება ყოველ ჯერად ნამდვილ ფესვსა და ყოველ ჯერად შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვებს, მივიღებთ n წრფივად დამოუკიდებელ ნ ა მ დ ვ ი ლ ამონახსნს $(-\infty, +\infty)$ შუალედში. ამ n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნის წრფივი კომბინაცია ნებისმიერი მუდმივი C კოეფიციენტებით იქნება (1 . 2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მასთან, როგორც ზემოთ დავინახეთ, m ჯერად ნამდვილ k_1 ფესვს ზოგად ამონახსნში შეესაბამება $P_{m-1}(x)e^{k_1 x}$ შესაკრები, ხოლო m ჯერად წყვილ შეუღლებულ $\alpha \pm i\beta$ კომპლექსურ ფესვებს კი $e^{\alpha x}[P_{m-1}(x)\cos \beta x + Q_{m-1}(x)\sin \beta x]$ შესაკრები, სადაც $P_{m-1}(x)$ და $Q_{m-1}(x)$ არის $m-1$ ხარისხის პოლინომები, ნებისმიერი C მუდმივი კოეფიციენტებით.

მაგალითი 12. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y^{(VI)}(x) - y^{(IV)}(x) + 4y''(x) - 4y(x) = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელ განტოლებას $l(k) = k^6 - k^4 + 4k^2 - 4 = 0$, ანუ $l(k) = (k^2 - 1)(k^4 + 4) = 0$, აქვს ფესვები:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1;$$

$$k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}\sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi},$$

$$k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

$$k_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i,$$

$$k_4 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i,$$

$$k_5 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i,$$

$$k_6 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i,$$

ამიტომ მოცემულ განტოლებას აქვს 6 წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი:

$$y_1(x) = e^{x}, \qquad y_2(x) = e^{-x}, \qquad y_3(x) = e^{x}\cos x,$$

$$y_4(x) = e^{x}\sin x, \quad y_5(x) = e^{-x}\cos x, \quad y_6(x) = -e^{-x}\sin x,$$

რომელიც შეადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას. მის ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}\cos x + C_4 e^{x}\sin x + C_5 e^{-x}\cos x +$$

$$+ C_6 e^{-x}\sin x = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + e^{x}(C_3\cos x + C_4 \sin x) +$$

$$+ e^{-x}(C_5\cos x + C_6\sin x)$$

მაგალითი 13. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y^{(10)}(x) - y^{(8)}(x) - 8\,y^{(6)}(x) + 8\,y^{(4)}(x) + 16\,y''(x) + 16\,y(x) = 0.$$

ამოხსნა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$l(k) = k^{10} - k^{8} - 8k^{6} + 8k^{4} + 16k^{2} - 16 = 0,$$

ანუ

$$l(k) = (k^2 - 1)(k^4 - 4)^2 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=k_4=\sqrt{2}$, $k_5=k_6=-\sqrt{2}$, $k_7=k_8=i\sqrt{2}$, $k_9=k_{10}=-i\sqrt{2}$. ამიტომ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას ექნება წრფივად დამოუკიდებელი ათი ნამდვილი კერძო ამონახსნი:

$$y_1(x) = e^{x},\ \ y_2(x) = e^{-x},\ \ y_3(x) = e^{\sqrt{2}x},\ \ y_4(x) = x\,e^{\sqrt{2}x},$$

$$y_5(x) = e^{-\sqrt{2}x},\ \ y_6(x) = x\,e^{-\sqrt{2}x},\ \ y_7(x) = \cos\sqrt{2}x,$$

$$y_8(x) = \sin\sqrt{2}x.\ \ y_9(x) = x\cos\sqrt{2}x,\ \ y_{10}(x) = x\sin\sqrt{2}x,$$

რომლებიც შეადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას.

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x} + C_5\,x\,e^{\sqrt{2}x} +$$

$$+ C_6\,x\,e^{-\sqrt{2}x}\,C_7\cos\sqrt{2}x + C_8\sin\sqrt{2}x + C_9\,x\cos\sqrt{2}x +$$

$$+ C_{10}\,x\sin\sqrt{2}x,$$

მაგალითი 14. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$y^{(4)}(x) + 2\,y''(x) + y(x) = 0.$$

ამოხსნა. მახასიათებელ განტოლებას: $l(k)=k^4+2k^2+1=0$ აქვს ფესვები: $k_1=k_2=i,\ k_3=k_4=-i$.

ამგვარად, მივიღეთ წყვილი შეუღლებული, ორჯერადი კომპლექსური ფესვები, მასთან $\alpha=0$, $\beta=1$. ამიტომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x)=C_1\cos x+C_2 x\cos x+C_3\sin x+C_4 x\sin x.$$

§ 2. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი

განვიხილოთ n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$L[y(x)]=y^{(n)}(x)+a_1 y^{(n-1)}(x)+a_2 y^{(n-2)}(x)+\cdots+ \\ +a_{n-1}y'(x)+a_n y(x)=f(x), \tag{2.1}$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $f(x)$ არის მოცემული უწყვეტი ფუნქცია რაიმე (α, β) შუალედში.

წინა პარაგრაფში შევისწავლეთ (2.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემისა და ზოგადი ამონახსნის აგება.

VI თავში განხილული ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ (2.1) განტოლების $y=y_0(x)$ კერძო ამონახსნი კვადრატურების მეშვეობით და დავწეროთ ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

აღსანიშნავია, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზოგიერთი კერძო სახისათვის საშუალება გვეძლევა შედარებით მარტივად ვიპოვოთ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი და, მასთან, კვადრატურების გარეშე. ამ შემთხვევაში, შევკრებთ რა ამ კერძო ამონახსნსა და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს, მივიღებთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს კვადრატურების გარეშე. ვიდრე გადავიდოდეთ ზოგიერთი კერძო სახის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა კერძო ამონახსნების მოძებნის მეთოდების განხილვაზე, წინასწარ დავამტკიცოთ ერთი ზოგადი ხასიათის თეორემა, რომელიც ზოგიერთ შემთხვევაში აადვილებს არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნების მოძებნას.

თეორემა 1. თუ (2.1) *არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ *შესაკრებთა ჯამს*, ე. ი.

$$L[y(x)]=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x), \tag{2.2}$$

და თუ $y_1(x)$ არის $L[y(x)]=f_1(x)$ განტოლების კერძო ამონახსნი და ა. შ. $y_m(x)$ კი $L[y(x)]=f_m(x)$ განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ ჯამი

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)+\cdots+y_m(x)$$

წარმოადგენს (1) განტოლების კერძო ამონახსნს.

დამტკიცება. მართლაც, წრფივი დიფერენციალური L ოპერატორის ცნობილი თვისების თანახმად

$$L[y_1(x)+y_2(x)+\cdots+y_m(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]+\cdots+L[y_m(x)],$$

მაგრამ რადგანაც

$$L[y_1(x)]=f_1(x),\quad L[y_2(x)]=f_2(x),\ldots,L[y_m(x)]=f_m(x).$$

ამიტომ

$$L[y_1(x)+y_2(x)+\cdots+y_m(x)]=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x),$$

ე. ი. $y_1(x)+y(x)+\cdots+y_m(x)$ ჯამი არის (2.2) განტოლების კერძო ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია.

1. **ზოგიერთი კერძო სახის n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდები.** წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების, მუდმივების ვარიაციის მეთოდი (ლაგრანჟის მეთოდი), შეიძლება გამოყენებულ იქნეს უმაღლესი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა ინტეგრებისათვის დამოუკიდებლად იმისაგან, განტოლება არის ცვლადკოეფიციენტებიანი თუ მუდმივკოეფიციენტებიანი. ეს მეთოდი არ არის დაკავშირებული განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომი $f(x)$ ფუნქციის ბუნებასთან და იგი გამოსაყენებელია ყველა (2.1) სახის განტოლების ინტეგრებისათვის, მასთან, განტოლების ზოგადი ამონახსნი ყოველთვის გამოისახება კვადრატურებში; თუმცა, როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, (2.1) განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალი $f(x)$ ფუნქციის ზოგიერთი კერძო სახისათვის, განტოლების $y=y_0(x)$ კერძო ამონახსნს და, მაშასადამე, ზოგად ამონახსნსაც ვპოულობთ კვადრატურების გარეშე.

2. **არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის მოძებნა განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.** ვთქვათ, (2.1) არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს m ხარისხის მრავალწევრს x-ის მიმართ ნამდვილი ან კომპლექსური კოეფიციენტებით, ე. ი.

$$\begin{aligned}L[y(x)]=y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\cdots+a_{n-1}y'(x)+\\+a_ny(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m=P_m(x).\quad(2.3)\end{aligned}$$

ვგულისხმობთ, რომ $a_n \neq 0$. ვაჩვენოთ, რომ (2.3) განტოლების კერძო ამონახსნი შეიძლება ვეძიოთ $y_0(x)=Q_m(x)$ მრავალწევრის სახით, რომლის ხარისხი იგივეა, რაც $P_m(x)$ მრავალწევრისა, ე. ი.

$$y_0(x)=Q_m(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_{m-1}x+B_m,$$

სადაც $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m$ ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია. ეს კოეფიციენტები ისე შეგვიძლია განვსაზღვროთ, რომ იგივურად ადგილი ჰქონდეს ტოლობას: $L[Q_m(x)]=P_m(x)$. მართლაც, თუ Q_m მრავალწევრს n-ჯერ გავაწარმოებთ, გვექნება:

$$y_0'(x)=mB_0x^{m-1}+(m-1)B_1x^{m-2}+\cdots+2B_{m-2}x+B_{m-1},$$

$$y_0''(x)=m(m-1)B_0x^{m-2}+(m-1)(m-2)B_1x^{m-3}+\cdots+6B_{m-3}x+B_{m-2},$$

$$\cdot$$

ახლა, თუ $y_0(x)$ მრავალწევრს და მის მიმდევრობით წარმოებულებს შევიტანთ (2.3) არაერთგვაროვან განტოლებაში და მიღებული ტოლობის $L[Q_m(x)]=P_m(x)$ მარჯვენა და მარცხენა მხარეში x-ის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომ კოეფიციენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ $m+1$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $m+1$ უცნობით:

$$\left.\begin{array}{l} a_nB_0=b_0, \\ ma_{n-1}B_0+a_nB_1=b_1, \\ m(m-1)a_{n-2}B_0+(m-1)a_{n-1}B_1+a_nB_2=b_2, \\ \cdot\ \cdot \\ m!\,B_0+m(m-1)\cdots 2a_1B_1+\cdots+a_nB_m=b_m. \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

რადგან $a_n \neq 0$, ამიტომ ამ სისტემიდან შეიძლება თანდათანობით განვსაზღვროთ ყველა უცნობი კოეფიციენტი. (2.4) სისტემის პირველი განტოლებიდან განისაზღვრება B_0, მეორიდან — B_1, მესამიდან — B_2 და ა. შ. სისტემის უკანასკნელი განტოლებიდან კი — B_m. ცხადია, (2.4) სისტემა თავსებადია და მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m$, რადგან ამ სისტემის დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & a_n & 0 & 0 \\ \cdot & & & \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_n^{m+1}\neq 0,$$

სადაც $\alpha, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ გამოისახება $a_1, a_2, \ldots$ და $m, m-1, \ldots$ რიცხვების საშუალებით.

ამგვარად, თუ $a_n \neq 0$, მაშინ არსებობს (2.3) განტოლების კერძო ამონახსნი $Q_m(x)$ მრავალწევრის სახით, რომლის ხარისხი ეტოლება მარჯვენა მხარეში მდგომი $P_m(x)$ მრავალწევრის ხარისხს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლებისა:

$$y'''(x) + 6\,y''(x) + 11\,y'(x) + 6\,y(x) = 6\,x^3 + 2\,x^2 + 1.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების კერძო ამონახსნი $y_0(x)$ ვეძიოთ მრავალწევრის სახით, რომლის ხარისხი ეტოლება მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომი მრავალწევრის ხარისხს, ე. ი.

$$y_0(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3,$$

სადაც b_0, b_1, b_2, b_3 ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია. ახლა, თუ $y_0(x)$ მრავალწევრსა და მის მიმდევრობით წარმოებულებს:

$$y_0'(x) = 3\,b_0 x^2 + 2\,b_1 x + b_2,$$

$$y_0''(x) = 6\,b_0 x + 2\,b_1,\ \ y_0'''(x) = 6\,b_0,$$

ჩავსვამთ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$6\,b_0 + 6\,(6\,b_0 x + 2\,b_1) + 11\,(3\,b_0 x^2 + 2\,b_1 x + b_2) +$$

$$+ 6\,(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) = 6\,x^3 + 2\,x^2 + 1,$$

ანუ

$$6\,b_0 x^3 + (6\,b_1 + 33\,b_0)\,x^2 + (36\,b_0 + 22\,b_1 + 6\,b_2)\,x +$$

$$+ 6\,b_0 + 12\,b_1 + 11\,b_2 + 6\,b_3 = 6\,x^3 + 2\,x^2 + 1.$$

თუ ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეში x-ის ერთნაირი ხარისხების წინ მდგომ კოეფიციენტებს გავუტოლებთ ერთმანეთს, მაშინ უცნობი კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} &6\,b_0 = 6,\\ &6b_1 + 33\,b_0 = 2,\\ &36\,b_0 + 22\,b_1 + 6\,b_2 = 0,\\ &6\,b_0 + 12\,b_1 + 11\,b_2 + 6\,b_3 = 1, \end{aligned}\right\}$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$b_0 = 1,\quad b_1 = -\frac{31}{6}\,,\quad b_2 = \frac{233}{18}\,,\quad b_3 = -\frac{1537}{108}\,.$$

ამგვარად,

$$y_0(x) = x^3 - \frac{31}{6}x^2 + \frac{233}{18}x - \frac{1537}{108}$$

არის მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ახლა მოვძებნოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მახასიათებელ განტოლებას:

$$l(k) = k^3 + 6k^2 + 11k + 6 = 0$$

აქვს ფესვები: $k_1 = -1$, $k_2 = -2$, $k_3 = -3$. ამიტომ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა: e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}.

ამგვარად, მოცემული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = x^3 - \frac{31}{6}x^2 + \frac{233}{10}x - \frac{1537}{108} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$$

აქამდე ვგულისხმობდით, რომ $a_n \neq 0$. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_n = 0$, და $a_{n-1} = 0$, $a_{n-2} = 0, \ldots, a_{n-p+1} = 0$, ხოლო $a_{n-p} \neq 0$, ე. ი. როცა უმცირესი რიგის წარმოებული განტოლებაში არის $y^{(p)}(x)$; ამ შემთხვევაში $L[y(x)] = P_m(x)$ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-p+1} y^{(p-1)}(x) + a_{n-p} y^{(p)}(x) = P_m(x). \quad (2.5)$$

მახასიათებელ განტოლებას:

$$l(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-p} k^p = 0,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$l(k) = k^p (k^{n-p} + a_1 k^{n-p-1} + \cdots + a_{n-p}) = 0,$$

აქვს p ჯერადობის ფესვი $k_1 = 0$.

მოვახდინოთ გარდაქმნა $z(x) = y^{(p)}(x)$, მაშინ (2.5) განტოლების რიგი დაიწევს p ერთეულით, მასთან, გარდაქმნის შემდგომ მიღებული განტოლება:

$$z^{(n-p)}(x) + a_1 z^{(n-p-1)}(x) + \cdots + a_{n-p+1} z'(x) + a_{n-p} z(x) = P_m(x) \quad (2.6)$$

იქნება წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება, რომლისთვისაც უკანასკნელი კოეფიციენტი $a_{n-p} \neq 0$. ზემოთ განხილული შემთხვევის თანახმად, (2 . 6) განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება m ხარისხის მრავალწევრი:

$$z(x) = R_m(x), \quad \text{ანუ} \quad y^{(p)}(x) = R_m(x).$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებას მიმდევრობით p-ჯერ შევასრულებთ, მაშინ ვიპოვით (2 . 5) განტოლების $y(x)$ ამონახსნს:

$$y(x) = B_0 x^{m+p} + B_1 x^{m+p-1} + \cdots + B_m x^p + C_1 x^{p-1} + $$
$$+ C_2 x^{p-2} + \cdots + C_{p-1} x + C_p. \quad (2.7)$$

(2.7) ფორმულა გვაძლევს განტოლების ზოგად ამონახსნს, სადაც C_1 $C_2, \ldots, C_p$ ნებისმიერი მუდმივებია.

(2 . 5) განტოლების კერძო ამონახსნის მისაღებად საკმარისია (2 . 7) განტოლებაში მივიღოთ: $C_1 = C_2 = \cdots = C_p = 0$; მაშინ

$$y_0(x) = B_0 x^{m+p} + B_1 x^{m+p-1} + \cdots + B_m x^p =$$
$$= x^p (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m),$$

ანუ

$$y_0(x) = x^p \cdot Q_m(x).$$

უკანასკნელი ფორმულა შეიცავს ზემოთ განხილულ შემთხვევასაც, როცა $a_n \neq 0$, $p = 0$.

ამგვარად, განხილულ შემთხვევაში, როცა განტოლება ცხადად არ შეიცავს საძიებელ $y(x)$ ფუნქციას, (2 . 5) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს $y_0(x) = x^p Q_m(x)$ სახის ამონახსნი, სადაც p არის მახასიათებელი განტოლების ფესვის ჯერადობის მაჩვენებელი, ხოლო $Q_m(x)$ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ეტოლება დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომი მრავალწევრის ხარისხს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ (2 . 3) განტოლება არ შეიცავს $y(x)$ საძიებელ ფუნქციას ცხადი სახით, მაშინ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძიოთ სახით:

$$y(x) = Q_m(x) \cdot x^p,$$

სადაც p არის განტოლებაში შემავალი საძიებელი ფუნქციის წარმოებულის უმცირესი რიგის მაჩვენებელი, ხოლო $Q_m(x)$ მრავალწევრია, რომლის ხარისხი ეტოლება $P_m(x)$ მრავალწევრის ხარისხს.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ კერძო ამონახსნი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y^{(IV)}(x) - 3y'''(x) + 2y''(x) = 2x + 5.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან ამ შემთხვევაში $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, ამიტომ ნული იქნება მახასიათებელი $l(x) = k^4 - 3k^3 + 2k^2 = 0$ განტოლების ორჯერადი ფესვი. მოცემული განტოლების ამონახსნი ვეძიოთ სახით:

$$y(x) = x^2 (B_0 x + B_1) = B_0 x^3 + B_1 x^2.$$

უკანასკნელი ტოლობა გავაწარმოოთ მიმდევრობით 4-ჯერ:

$$y'(x) = 3B_0 x^2 + 2B_1 x,$$
$$y''(x) = 6B_0 x + 2B_1,$$
$$y'''(x) = 6B_0,$$
$$y^{(IV)}(x) = 0.$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, გვექნება:

$$-3\cdot 6\,B_0+2\,(6\,B_0\,x+2\,B_1)=2\,x+5,$$

$$12\,B_0\,x+4\,B_1-18\,B_0=2x+5.$$

აქედან კოეფიციენტთა შედარებით მივიღებთ:

$$12\,B_0=2, \qquad 4\,B_1-18\,B_0=5,$$

საიდანაც $B_0=\dfrac{1}{6}$, $B_1=2$.

ამგვარად, მოცემული განტოლების $y_0(x)$ კერძო ამონახსნისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$y_0(x)=\frac{1}{6}x^3+2\,x^2.$$

როგორც ვნახეთ, განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ყოველი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მიმართ, რომლის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს მრავალწევრს. ანალოგიურად, განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როცა განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს მაჩვენებლიან ფუნქციათა ჯამს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y''(x)+4\,y(x)=e^{3x}+3\,e^{2x}+2\,e^{x}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების $y_0(x)$ კერძო ამონახსნი ვეძიოთ სახით:

$$y_0(x)=b_0\,e^{3x}+b_1\,e^{2x}+b_2\,e^{x},$$

სადაც b_0, b_1, b_2 ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია. $y_0(x)$ ფუნქცია და მისი პირველი ორი მიმდევრობითი წარმოებული:

$$y_0'(x)=3\,b_0\,e^{3x}+2\,b_1\,e^{2x}+b_2\,e^{x},$$

$$y_0''(x)=9\,b_0\,e^{3x}+4\,b_1\,e^{2x}+b_2\,e^{x}$$

ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$9\,b_0\,e^{3x}+4\,b_1\,e^{2x}+b_2\,e^{x}+4\,b_0\,e^{3x}+4\,b_1\,e^{2x}+4\,b_2\,e^{x}=e^{3x}+3\,e^{2x}+2\,e^{x},$$

ანუ

$$e^{3x}\,(9\,b_0+4\,b_0)+e^{2x}\,(4\,b_1+4\,b_1)+e^{x}\,(b_2+4\,b_2)=e^{3x}+3\,e^{2x}+2\,e^{x}.$$

კოეფიციენტთა შედარებით გვაქვს:

$$\begin{cases} 13\,b_0 = 1, \\ 8\,b_1 = 3, \\ 5\,b_2 = 2, \end{cases}$$

საიდანაც $b_0 = \dfrac{1}{13}$, $b_1 = \dfrac{3}{8}$, $b_2 = \dfrac{2}{5}$. მაშასადამე,

$$y_0(x) = \frac{1}{13}e^{3x} + \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{x}.$$

ახლა ვიპოვით შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მახასიათებელ განტოლებას:

$$l(k) = k^2 + 4 = 0$$

აქვს ფესვები: $k_1 = +2i$, $k_2 = -2i$. ამიტომ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ამონახსნების შემდეგი ფუნდამენტური სისტემა: $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$.

ამგვარად, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y(x) = \frac{1}{13}e^{3x} + \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{x} + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება:

$$L[y(x)] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_{n-1}y'(x) + \\ + a_n y(x) = P_m(x)\,e^{\alpha x}, \tag{2.8}$$

სადაც

$$P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m,$$

არის m ხარისხის მრავალწევრი ნამდვილი ან კომპლექსური კოეფიციენტებით, ხოლო α მუდმივი რიცხვია ნამდვილი ან კომპლექსური. (2.8) განტოლების კერძო ამონახსნის აგებისას გაარჩევენ ორ შემთხვევას. ადგილი აქვს თეორემას.

თეორემა 2. *n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ*

$$L[y(x)] = P_m(x)\,e^{\alpha x}$$

განტოლებას აქვს $y(x) = Q_m(x)\,e^{\alpha x}$ სახის კერძო ამონახსნი (სადაც $Q_m(x)$ იმავე ხარისხის პოლინომია, რო-

გორიც $P_m(x)$), თუ α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი და აქვს $y(x)=x^p Q_m(x) e^{\alpha x}$ სახის კერძო ამონახსნი, თუ α წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების p-ჯერად ფესვს.

დამტკიცება. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი. ამ შემთხვევაში (2.8) განტოლების $y_1(x)$ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძიოთ სახით:

$$y_1(x) = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

სადაც

$$Q_m(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m$$

არის m ხარისხის მრავალწევრი ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებით. ასე რომ, საძიებელ კერძო ამონახსნს აქვს იგივე ანალიზური აგებულება, რაც (2.8) განტოლების მარჯვენა მხარეს. მართლაც, (2.8) განტოლებაში შევასრულოთ ჩასმა:

$$y(x) = e^{\alpha x} z(x),$$

სადაც $z(x)$ არის x-ის ახალი საძიებელი ფუნქცია; რომელიც უნდა განისაზღვროს იმ პირობიდან, რომ ადგილი ჰქონდეს იგივეობას

$$L[z(x) \cdot e^{\alpha x}] \equiv P_m(x) e^{\alpha x}.$$

მაშინ $L[y(x)]$ დიფერენციალური ოპერატორის წრფივობისა და ერთგვაროვნების შედეგად გვექნება:

$$L[y(x)] = L[z(x) \cdot e^{\alpha x}] = [z(x) e^{\alpha x}]^{(n)} + a_1 [z(x) e^{\alpha x}]^{(n-1)} + \cdots +$$

$$+ a_{n-1} [z(x) e^{\alpha x}]' + a_n [z(x) e^{\alpha x}] = e^{\alpha x} P_m(x).$$

თუ ვისარგებლებთ ლაიბნიცის ფორმულით, ორი ფუნქციის ნამრავლის n-ური რიგის წარმოებულის გამოსათვლელად, გვექნება:

$$z(x) e^{\alpha x} = z(x) e^{\alpha x},$$

$$[z(x) e^{\alpha x}]' = z'(x) e^{\alpha x} + \alpha z(x) e^{\alpha x},$$

$$[z(x) e^{\alpha x}]'' = z''(x) e^{\alpha x} + 2\alpha z'(x) e^{\alpha x} + \alpha^2 z(x) e^{\alpha x},$$

$$[z(x) e^{\alpha x}]^{(n-1)} = z^{(n-1)}(x) e^{\alpha x} + (n-1) \alpha^n z^{(n-2)}(x) e^{\alpha x} + \cdots + \alpha^{n-1} z(x) e^{\alpha x},$$

$$[z(x) e^{\alpha x}]^{(n)} = z^{(n)}(x) e^{\alpha x} + n \alpha z^{(n-1)}(x) e^{\alpha x} + \cdots + \alpha^n z(x) e^{\alpha x}.$$

ახლა, თუ უკანასკნელ ტოლობებს შესაბამისად გავამრავლებთ a_n, a_{n-1}, a_2, a_1 და 1-ზე და წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$L[z(x)e^{\alpha x}] \equiv e^{\alpha x} z(x) l(\alpha) + \frac{e^{\alpha x} z'(x)}{1!} l'(\alpha) + \frac{e^{\alpha x} z''(x)}{2!} l''(\alpha) + \cdots +$$

$$+ \frac{e^{\alpha x} z^{(p)}(x)}{p!} l^{(p)}(\alpha) + \quad + e^{\alpha x} z^{(n)}(x) = P_m(x) e^{\alpha x},$$

სადაც $l(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n \neq 0$ არის (2.8) შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი განტოლების მარცხენა მხარე, რომელშიაც k შეცვლილია α-თი.

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $e^{\alpha x}$-ზე მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას $z(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის:

$$z^{(n)} + \cdots + \frac{l^{(p)}(\alpha)}{p!} z^{(p)} + \cdots + \frac{l'(\alpha)}{1!} z'(x) + l(\alpha) z(x) = P_m(x). \quad (2.9)$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს ზემოთ განხილული (2 .3) სახის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებას, რომლის მარჯვენა ნაწილი არის მრავალწევრი. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ამ განტოლების კერძო ამონახსნი შეიძლება ვიპოვოთ $z(x) = Q_m(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \quad + B_{m-1} x + B_m$ მრავალწევრის სახით, თუ $l(\alpha) \neq 0$.

ამგვარად, იმ შემთხვევაში, როცა $l(\alpha) \neq 0$, (2.8) განტოლების კერძო ამონახსნი შესაძლოა ვეძიოთ შემდეგი სახით:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) = e^{\alpha x}(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m).$$

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ბ) როცა α წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების p-ჯერად ფესვს ($p \geqslant 1$), ე. ი. $l(\alpha) = l'(\alpha) = l''(\alpha) = \cdots = l^{(p-1)}(\alpha) = 0$, ხოლო $l^{(p)}(\alpha) \neq 0$. ამ შემთხვევაში, ისე როგორც ზემოთ, (2.9) განტოლების კერძო ამონახსნი $z(x)$ არის ფუნქცია:

$$z_1(x) = x^p Q_m(x) = x^p(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m),$$

სადაც $B_0, B_1, \ldots, B_m$ უცნობი კოეფიციენტებია. მაშასადამე, როცა α რიცხვი მახასიათებელი განტოლების p-ჯერადი ფესვია, განტოლების კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$y_1(x) = x^p Q_m)x) e^{\alpha x};$$

აქ $Q_m(x)$ იმავე ხარისხის პოლინომია, როგორც $P_m(x)$, მხოლოდ უცნობი $B_0, B_1, \ldots, B_m$ კოეფიციენტებით, რომლებიც იმავე წესით გამოითვლება, როგორც ა) შემთხვევაში.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'''(x) + 2y''(x) = (3x+5)e^x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $a=1$, რომელიც არ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების $l(k)=k^3+2k^2=0$ ფესვს. ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძიოთ სახით:

$$y_0(x) = (B_0 x + B_1)e^x,$$

სადაც B_0, B_1 ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია. $y_0(x)$ ფუნქცია და მისი მიმდევრობითი წარმოებულები:

$$y_0'(x) = B_0 e^x + (B_0 x + B_1)e^x,$$

$$y_0''(x) = 2B_0 e^x + (B_0 x + B_1)e^x,$$

$$y_0'''(x) = 3B_0 e^x + (B_0 x + B_1)e^x$$

ჩავსვათ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$3B_0 e^x + (B_0 x + B_1)e^x + 2[2B_0 e^x + (B_1 x + B_1)e^x] = (3x+5)e^x,$$

$$7B_0 e^x + 3(B_0 x + B_1)e^x = (3x+5)e^x,$$

$$(7B_0 + 3B_1)e^x + 3B_0 x e^x = (3x+5)e^x,$$

საიდანაც კოეფიციენტთა შედარებით ვღებულობთ:

$$7B_0 + 3B_1 = 5, \quad 3B_0 = 3.$$

აქედან:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{2}{3}$$

მაშასადამე, $y_0(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)e^x$ ფუნქცია იქნება მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი.

ახლა მოვძებნოთ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ფესვები: $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=-2$; ამიტომ ერთგვაროვან განტოლებას ექნება კერძო ამონახსნების შემდეგი ფუნდამენტური სისტემა:

$$1, \; x, \; e^{-2x}.$$

მაშასადამე, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = \left(y - \frac{2}{3}\right)e^x + C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}.$$

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y''(x)-6y'(x)+9y(x)=e^{3x}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $\alpha=3$. მახასიათებელი $l(k)=k^2-6k+9=0$ განტოლების ფესვებია $k_1=k_2=3$, ე. ი. $\alpha=3$ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების ორჯერად ფესვს. ამიტომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვეძებოთ სახით:

$$y_0(x)=B_0x^2e^{3x},$$

სადაც B_0 ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტია. $y_0(x)$ ფუნქცია და მისი მიმდევრობითი წარმოებულები:

$$y_0'(x)=2B_0xe^{3x}+3B_0x^2e^{3x},$$

$$y_0''(x)=2B_0e^{3x}+6B_0xe^{3x}+6B_0xe^{3x}+9B_0x^2e^{3x}$$

ჩავსვათ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$2B_0e^{3x}+12B_0xe^{3x}+9B_0x^2e^{3x}-12B_0xe^{3x}-18B_0x^2e^{3x}+9B_0x^2e^{3x}=e^{3x},$$

$$2B_0e^{3x}=e^{3x},$$

$$B_0=\frac{1}{2}$$

მაშასადამე, $y_0(x)=\dfrac{x^2}{2}e^{3x}$ ფუნქცია იქნება მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი.

რადგან მახასიათებელ განტოლებას $l(k)=k^2-6k+9=0$ აქვს ორჯერადი ფესვი $k_1=k_2=3$, ამიტომ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა იქნება:

$$e^{3x},\quad xe^{3x}$$

ამგვარად, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}e^{3x}+C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=(5x^2-2)e^{2x}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელ განტოლებას:

$$k^2-4k+4=0$$

აქვს ორჯერადი ფესვი $k_1=k_2=2$. მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარეში დგას მრავალწევრისა და მაჩვენებლიანი e^{2x} ფუნქციის ნამრავლი, სადაც $a=2$, ე. ი. a წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების ორჯერად ფესვს; ამიტომ მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ სახით:

$$y_0(x)=x^2e^{2x}(B_0x^2+B_1x+B_2).$$

ვიპოვოთ $y_0(x)$ ფუნქციის წარმოებულები:

$$y_0'(x)=2e^{2x}(B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2)+e^{2x}(4B_0x^3+3B_1x^2+2B_2x),$$

$$y_0''(x)=4e^{2x}(B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2)+2e^{2x}(4B_0x^3+3B_1x^2+2B_2x)+$$
$$+2e^{2x}(4B_0x^3+3B_1x^2+2B_2x)+e^{2x}(12B_0x^2+6B_1x+2B_2),$$

ანუ

$$y_0''(x)=4e^{2x}(B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2)+4e^{2x}(4B_0x^3+3B_1x^2+2B_2x)+$$
$$+e^{2x}(12B_0x^2+6B_1x+2B_2).$$

$y_0(x)$, $y_0'(x)$ და $y_0''(x)$ ჩავსვათ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$e^{2x}[(8B_0-8B_0)x^4+(8B_1+16B_0-8B_1-16B_0)x^3+$$
$$+(4B_2+12B_1-8B_2-12B_1+4B_2+12B_0)x^2+$$
$$+(8B_2+6B_1-8B_2)x+2B_2]=e^{2x}(5x^2-2),$$

ანუ

$$12B_0x^2+6B_1x+2B_2=5x^2-2,$$

საიდანაც

$$\begin{cases} 12B_0=5, \\ 6B_1=0, \\ 2B_2=-2, \end{cases}$$

ე. ი. $B_0=\dfrac{5}{12}$, $B_1=0$, და $B_2=-1$.

ამგვარად, მოცემული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება:

$$y_0(x)=e^{2x}x^2\left(\frac{5}{12}x^2-1\right),$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x)=x^2 e^{2x}\left(\frac{5}{12}x^2-1\right)+C_1 e^{2x}+C_2 x e^{2x}.$$

მაგალითი 7. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y''(x)+5y'(x)-6y(x)=e^{2x}(3x^2-1)+e^{3x}(2x-3)+e^{-2x}(x^3-6x+1)$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ზემოთ დამტკიცებული თეორემის შედეგები, რომელთა თანახმად, მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნის მოძებნა დაიყვანება სამი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნების მოძებნაზე; მასთან ამ განტოლებათა მარჯვენა ნაწილები წარმოადგენს მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარის შესაკრებებს, ე. ი. გვაქვს:

$$y''(x)+5y'(x)-6y(x)=e^{2x}(3x^2-1), \qquad (2.10)$$

$$y''(x)+5y'(x)-6y(x)=e^{3x}(2x-3), \qquad (2.11)$$

$$y''(x)+5y'(x)-6y(x)=e^{-2x}(x^3-6x+1). \qquad (2.12)$$

მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნის მისაღებად უნდა შევკრიბოთ ამ განტოლებათა კერძო ამონახსნები. (2 . 12) დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ განტოლებას:

$$l(k)=k^2+5k-6=0$$

აქვს ფესვები. $k_1=1$, $k_2=-6$. ამ შემთხვევაში $\alpha=-2$ არ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების ფესვს: ამიტომ (2 . 12) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$y_0^{(3)}(x)=e^{-2x}(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3).$$

გამოვთვალოთ $y_0^{(3)}(x)$ ფუნქციის წარმოებულები:

$$[y_0^{(3)}(x)]'=-2e^{-2x}(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3)+$$
$$+e^{-2x}(3B_0x^2+2B_1x+B_2),$$

$$[y_0^{(3)}(x)]''=4e^{-2x}(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3)-2e^{-2x}(3B_0x^2+$$
$$+2B_1x+B_2)-2e^{-2x}(3B_0x^2+2B_1x+B_2)+$$
$$+e^{-2x}(6B_0x+2B_1)=4e^{-2x}(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+$$
$$+B_3)-4e^{-2x}(3B_0x^2+2B_1x+B_2)+$$
$$+e^{-2x}(6B_0x+2B_1).$$

$y_0^{(3)}(x)$, $[y_0^{(3)}(x)]'$ და $[y_0^{(3)}(x)]''$-ის მნიშვნელობანი ჩავსვათ (2.12) არაერთგვაროვან განტოლებაში. მივიღებთ:

$$4e^{-2x}(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3)-4e^{-2x}(3B_0x^2+2B_1x+B_2)+$$
$$+e^{-2x}(6B_0x+2B_1)-e^{-2x}(10B_0x^3+10B_1x^2+10B_2x+10B_3)+$$
$$+e^{-2x}(15B_0x^2+10B_1x+5B_2)-e^{2x}(6B_0x^3+6B_1x^2+6B_2x+6B_3)=$$
$$=e^{-2x}(x^3-6x+1),$$

$$e^{-2x}\{(4B_0-10B_0-6B_0)x^3+(4B_1-12B_0-10B_1+16B_0-6B_1)x^2+$$
$$+(4B_2-8B_1+6B_0-10B_2+10B_1-6B_2)x+4B_3-4B_2+2B_1-$$
$$-10B_3+5B_2-6B_3\}=e^{-2x}(x^3-6x+1),$$

ანუ

$$-12B_0x^3+(3B_0-12B_1)x^2+(6B_0-12B_2+2B_1)x+$$
$$+B_2-12B_3+2B_1=x^3-6x+1;$$

აქედან

$$\begin{cases} -12B_0=1, & B_0=-\dfrac{1}{12}; \\ 3B_0-12B_1=0, & B_0-4B_1=0, \quad B_1=-\dfrac{1}{48}, \\ 6B_0+2B_1-12B_2=-6, & \\ 2B_1+B_2-12B_3=1. & \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{24}-12B_2=-6. \quad 12B_2=6-\frac{13}{24}=\frac{131}{24}, \quad B_2=\frac{131}{288};$$

$$-\frac{1}{24}+\frac{131}{288}-12B_3=1, \quad 12B_3=\frac{119}{288}-1=\frac{169}{288}, \quad B_3=-\frac{169}{3456};$$

მაშასადამე, განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება:

$$y_0^{(3)}(x)=e^{-2x}\left(-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{48}x^2+\frac{131}{288}x-\frac{169}{3456}\right).$$

ანალოგიურად ვიპოვით (2.10) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$y_0^{(1)}(x)=e^{2x}(B_0x^2+B_1x+B_2),$$

სადაც

$$B_0=\frac{3}{8}; \quad B_1=-\frac{27}{32}, \quad B_2=\frac{187}{256}.$$

მაშასადამე, (2 . 10) განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება:

$$y_0^{(1)}(x) = e^{2x}\left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{27}{32}x + \frac{187}{256}\right).$$

მსგავსად ამისა, ვიპოვოთ (2 . 11) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$y_0^{(2)}(x) = e^{3x}(B_0 x + B_1),$$

სადაც

$$B_0 = \frac{1}{9}, \quad B_1 = -\frac{19}{81}.$$

მაშასადამე, (2 . 11) განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება:

$$y_0^{(2)}(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{9}x - \frac{19}{81}\right)$$

თუ ამ კერძო ამონახსნებს, $y_0^{(1)}(x)$, $y_0^{(2)}(x)$, $y_0^{(3)}(x)$, შევკრებთ, მივიღებთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$y_0(x) = e^{2x}\left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{27}{32}x + \frac{187}{256}\right) + e^{3}x\left(\frac{1}{9}x - \frac{19}{81}\right) +$$

$$+ e^{-2x}\left(-\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^2 + \frac{131}{288}x - \frac{169}{3456}\right).$$

აღებული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y(x) = y_0(x) + u(x) = e^{2x}\left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{27}{32}x + \frac{187}{256}\right) + e^{3x}\left(\frac{1}{9}x - \frac{19}{81}\right) +$$

$$+ e^{-2x}\left(-\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^2 + \frac{131}{288}x - \frac{169}{3456}\right) + C_1 e^x + C_2 e^{-6x}.$$

3. $L[y(x)] = P_m(x)\, e^{\alpha x}\cos\beta x$ სახის დიფერენციალური განტოლებანი. ახლა განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cdot\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

ე. ი. გვაქვს:

$$L[y(x)] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + + a_n y(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

სადაც α და β ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $P_m(x)$ და $Q_m(x)$ მოცემული მრავალწევრები, რომელთა ხარისხები ნაკლებია ან ტოლი m-ის. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 3. მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$L[y(x)] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x] \quad (2.13)$$

აქვს

$$y_0(x) = e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(1)}(x)\sin\beta x]$$

სახის კერძო ამონახსნი (სადაც $P_m^{(1)}(x)$ და $Q_m^{(1)}(x)$ პოლინომებია, რომელთა ხარისხები არ აღემატება m-ს), თუ $\alpha \pm i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი და აქვს

$$y_0(x) = x^p e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(1)}(x)\sin\beta x]$$

სახის კერძო ამონახსნი, თუ $\alpha \pm i\beta$ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების p-ჯერად ფესვს.

დამტკიცება. გარდავქმნათ (2.13) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარე. $\cos\beta x$ და $\sin\beta x$ შევცვალოთ ეილერის ფორმულების მიხედვით:

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}.$$

მაშინ (2.13) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$L[y](x)] = P_m(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q_m(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} =$$

$$= \widetilde{P}_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \widetilde{Q}_m(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad (2.14)$$

სადაც

$$\widetilde{P}_m(x) = \frac{1}{2}[P_m(x) - iQ_m(x)], \quad \widetilde{Q}_m(x) = \frac{1}{2}[P_m(x) + iQ_m(x)]$$

პოლინომებია კომპლექსური კოეფიციენტებით, რომელთა ხარისხები არ აღემატება m-ს.

ამგვარად, (2 . 13) განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოგვიდგება, როგორც $\widetilde{P}_m(x)$ და $\widetilde{Q}_m(x)$ მრავალწევრების $e^{(\alpha+i\beta)x}$ და $e^{(\alpha-i\beta)x}$ მაჩვენებლიან ფუნქციებზე ნამრავლთა ჯამი. მაშასადამე, თუ ვისარგებლებთ კერძო ამონახსნების შეკრების თეორემით, (2 . 14) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ

$$y_0(x) = y_0^{(1)}(x) + y_0^{(2)}(x)$$

ფორმულის მიხედვით, სადაც $y_0^{(1)}(x)$ არის

$$L[y(x)] = \widehat{P}_m(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x} \tag{2.15}$$

განტოლების კერძო ამონახსნი, ხოლო $y_0^2(x)$ კერძო ამონახსნია განტოლებისა:

$$L[y(x)] = \widetilde{Q}_m(x)\, e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{2.16}$$

უკანასკნელ ორ (2 . 15) და (2 . 16) განტოლებას აქვს ზემოთ განხილული (2 . 8) განტოლების სახე, ამიტომ აქაც ადგილი ექნება შემდეგ ორ შემთხვევას:

ა) $\alpha \pm i\beta$ არ წარმოადგენს შესაბამი $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვს და მაშინ (2 . 13) განტოლების კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$y_0(x) = y_0^{(1)}(x) + y_0^{(2)}(x) = \widetilde{P}_m^{(1)}(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x} + \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, e^{(\alpha-i\beta)x} =$$
$$= e^{\alpha x}[\widetilde{P}_m^{(1)}(x)\, e^{-i\beta x} + \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, e^{-i\beta x}],$$

სადაც $\widetilde{P}_m(x)$ და $\widetilde{Q}_m(x)$ m ხარისხის პოლინომებია უცნობი კოეფიციენტებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ $\alpha \pm i\beta$ არ წარმოადგენს (2 . 13) განტოლების $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვს, მაშინ (2 13) განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$y_0(x) = e^{\alpha x}[\widehat{P}_m^{(2)}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x[. \tag{2.17}$$

ბ) თუ $\alpha \pm i\beta$ არის $l(k)=0$ მახასიათებელი განტოლების p-ჯერადი ფესვი ($p \geqslant 1$), მაშინ

$$y_0^{(1)}(x) = \widetilde{P}_m^{(1)}(x)\, x^p\, e^{(\alpha+i\beta)x},$$
$$y_0^{(2)}(x) = \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, x^p\, e^{(\alpha-i\beta)x},$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (2 . 13) განტოლების კერძო ამონახსნები უნდა ვეძებოთ სახით:

$$y_0(x) = x^p e^{\alpha x}[\widetilde{P}_m^{(1)}(x)\, e^{i\beta x} + \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, e^{-i\beta x}],$$

ანუ

$$y_0(x) = x^p e^{\alpha x}[\widetilde{P}_m^{(2)}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x], \tag{2.18}$$

სადაც $\tilde{P}_m^{(2)}(x)$ და $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ აგრეთვე m ხარისხის პოლინომებია უცნობი კოეფიციენტებით.

ისე როგორც ზემოთ (2.3) და (2.8) განტოლებათა შემთხვევაში, აქაც განსახილველ ა) და ბ) შემთხვევებში $\tilde{P}_m^{(2)}(x)$ და $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ პოლინომების კოეფიციენტები გამოითვლება ჩვეულებრივი წესით: $y_0(x)$ კერძო ამონახსნის უშუალო ჩასმით (2.13) განტოლებაში და განტოლების ორივე ნაწილში $x^k \cos\beta x$ და $x^k \sin\beta x$ $(k = p, p+1, \ldots, \mu+m)$ გამოსახულებებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით[1]. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნავთ, რომ განტოლება:

$$L[y(x)] = P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\mathrm{isn}\,\beta(x) \qquad (*)$$

წარმოადგენს (2.13) განტოლების კერძო შემთხვევას: $\alpha=0$, $\beta\neq 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი $y_0(x)$ უნდა ვეძებოთ

$$y_0(x) = P_m^{(1)} x\cos\beta x + Q_m^{(1)} x\sin\beta x$$

სახით, თუ $\pm i\beta$ რიცხვი არ წარმოადგენს (*) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი განტოლების ფესვს, და

$$y_0(x) = x^p\left[P_m^{(1)} x\cos\beta x + Q_m^{(1)}(x)\sin\beta x\right]$$

სახით, თუ $\pm i\beta$ რიცხვი აღნიშნული მახასიათებელი განტოლების p-ჯერადი ფესვია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ (2.13) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარეში $P_m(x)$ ან $Q_m(x)$ მრავალწევრი ნულია, ე. ი. თუ $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)\cos\beta x$ ან $f(x)=e^{\alpha x}Q_m(x)\sin\beta x$, მაშინ, მიუხედავად აღნიშნულისა, კერძო ამონახსნი $y_0(x)$ უნდა ვეძებოთ (2.17) სახით, თუ $\alpha\pm i\beta$ არ წარმოადგენს შესაბამისი მახასიათებელი განტოლების ფესვს, და (2.18) სახით, თუ $\alpha\pm i\beta$ წარმოადგენს $l(k)=0$ განტოლების p-ჯერად ფესვს.

მსგავსად უნდა მოვიქცეთ იმ შემთხვევაშიც, როცა

$$f(x) = x^p e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{ან} \quad f(x) = x^p e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ (2.13) განტოლებაში $P_m(x)$ და $Q_m(x)$ მრავალწევრების ხარისხები სხვადასხვაა, მაშინ $P_m^{(2)}(x)$ და $Q_m^{(2)}(x)$ მრავალწევრების ხარისხი ეტოლება უდიდესს $P_m(x)$ და $Q_m(x)$ მრავალწევრთა ხარისხებიდან.

მაგალითი 8. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y''(x) - 2y(x) = 2x\cos 3x.$$

[1] ზოგჯერ ხელსაყრელია გამოთვლები შევასრულოთ წარმოსახვითი მაჩვენებლებით.

ამოხსნა. აქ $\alpha+i\beta=3i$, $\alpha=0$, $\beta=3$ არ წარმოადგენს შესაბამის $l(k)=k^2-2=0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვს. ამიტომ, ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$y_0(x)=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x.$$

$y_0(x)$ ფუნქცია და მისი მეორე რიგის წარმოებული

$$y_0''(x)=-3A\sin 3x-3A\sin 3x-9(Ax+B)\cos 3x+3C\cos 3x+$$
$$+3C\cos 3x-9(Cx+D)\sin 3x=-6A\sin 3x-$$
$$-9(Ax+B)\cos 3x+6C\cos 3x-9(Cx+D)\sin 3x$$

ჩავსვათ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\sin 3x[-9(Cx+D)-6A]+\cos 3x[6C-9(Ax+B)]-$$
$$-2(Ax+B)\cos 3x-2(Cx+D)\sin 3x=2x\cos 3x,$$

ანუ

$$-11Cx\sin 3x+\sin 3x(-11D-6A)-11Ax\cos 3x+$$
$$+\cos 3x(6C-11B)=2x\cos 3x.$$

საიდანაც გვაქვს:

$$-11C=0,\quad -11D-A=0,\quad -11A=2,\quad 6C-11B=0.$$

აქედან მივიღებთ:

$$A=-\frac{2}{11};\quad B=0,\quad C=0,\quad D=\frac{12}{12^1}.$$

ამგვარად,

$$y_0(x)=-\frac{2}{11}x\cos 3x+\frac{12}{12!}\sin 3x.$$

მახასიათებელ განტოლებას $l(k)=k^2-2=0$ აქვს ფესვები: $k_1=\sqrt{2}$, $k_2=-\sqrt{2}$. ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x)=C_2e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}-\frac{2}{11}x\cos 3x+\frac{12}{121}\sin 3x.$$

მაგალითი 9. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y''(x)+5y'(x)+6y(x)=\cos 2x$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავწეროთ შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალუ-
რი განტოლების მახასიათებელი განტოლება:

$$l(k) = k^2 + 5k + 6 = 0,$$

მისი ფესვებია: $k_1 = -2$, $k_2 = -3$.

მოცემული დიფერენციალური განტოლებისათვის $P_m(x) = 1$, $m = 0$, $Q_m(x) = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = +2$. კომპლექსური რიცხვები $\alpha \mp i\beta = \mp 2i$ არ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების ფესვებს. ამიტომ მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვეძებოთ სახით:

$$y_0(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

ვიპოვოთ $y_0(x)$ ფუნქციის წარმოებულები:

$$y_0'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$y_0''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$

და $y_0(x)$, $y_0'(x)$, $y_0''(x)$ ფუნქციები ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 10A\sin 2x + 10B\cos 2x +$$
$$+ 6A\cos 2x + 6B\sin 2x = \cos 2x,$$

$$(-4A + 10B + 6A)\cos 2x + (-4B - 10A + 6B)\sin 2x = \cos 2x.$$

$$(2A + 10B)\cos 2x + (-10A + 2B)\sin 2x = \cos 2x.$$

თუ ტოლობის ორივე მხარეში $\sin 2x$ და $\cos 2x$ ფუნქციებთან მდგომ კოეფიციენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ:

$$2A + 10B = 1, \quad -10A + 2B = 0,$$

საიდანაც $A = \dfrac{1}{52}$, $B = \dfrac{5}{52}$

მაშასადამე,

$$y_0(x) = \frac{1}{52}\cos 2x + \frac{5}{52}\sin 2x.$$

ამგვარად, მოცემული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{52}\cos 2x + \frac{5}{52}\sin 2x.$$

§ 3. მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებებზე დაყვანადი განტოლებანი

თუ n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტები არ წარმოადგენს მუდმივ რიცხვებს, მაშინ წრფივ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნი არ შეიძლება დაყვანილ იქნეს კვადრატურებზე. მაგრამ, ზოგიერთ შემთხვევაში ასეთი განტოლებანი x დამოუკიდებელი ცვლადის ან უცნობი ფუნქციის სათანადო შეცვლით შეიძლება დაყვანილ იქნეს მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებაზე და, მაშასადამე, ამოიხსნას ელემენტარულ ფუნქციებში. წრფივ განტოლებათა ასეთ ტიპს ეკუთვნის ე ი ლ ე რ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა:

$$x^n y^{(n)}+a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)}+a_2 x^{n-2} y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1} xy'+a_n y=0, \quad (3.1)$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ნამდვილი რიცხვებია.

თუ უკანასკნელ განტოლებას ამოვხსნით $y^{(n)}$-ის მიმართ, დავინახავთ, რომ $x=0$ არის განტოლების განსაკუთრებული წერტილი, თუმცა ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ყველა პირობა შესრულებულია $(-\infty, 0)$ და $(0, \infty)$ შუალედებში. ახლა ვიპოვოთ ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის. ამ მიზნით წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ (3.1) განტოლება დამოუკიდებელი x ცვლადის სათანადო გარდაქმნით შეიძლება დაყვანილ იქნეს მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებაზე.

მართლაც, შევასრულოთ გარდაქმნა:

$$t=\ln x, \ x=e^t,$$

სადაც t ახალი დამოუკიდებელი ცვლადია. გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned}
&y_x'=y_t'\cdot t_x'=y_t'\cdot\frac{1}{x_t'}=y_t'\cdot e^{-t},\\
&y_x''=(y_t''e^{-t}-y_t'e^{-t})\,e^{-t}=(y_t''-y_t')\,e^{-2t},\\
&y_x'''=(y_t'''-3y_t''+2y_t')\,e^{-3t},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_x^{(n)}=[y_t^{(n)}+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!\,y_t']\,e^{-nt}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

თუ (3.1) განტოლებაში შევიტანთ $x=e^t$ და $y_x', y_x'', \ldots, y_x^{(n)}$ წარმოებულების გამოსახულებებს, მივიღებთ n რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას; თუ უკანასკნელი განტოლების ზოგად ამონახსნს ვიპოვით და ამ ზოგად ამონახსნში t-ს შევცვლით $t=\ln x$-ით, მაშინ მივიღებთ ეილერის ფუნდამენტურ სისტემას.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეილერის განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე c^{kt}, ე. ი. x^k. მართლაც, თუ განტოლებაში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ x^k-ს, მივიღებთ:

$$x^k[k(k-1)\dots(k-(n-1))+a_1 k(k-1)\dots k(k-1)\dots(k-(n-2))+$$
$$+a_2 k(k-1)\dots(k-(n-3))+\cdots+a_{n-2}k(k-1)+$$
$$+a_{n-1}k+a_n]=x^k l(k)=0,$$

საიდანაც გვაქვს:

$$l(k)=0. \tag{3.3}$$

ამ განტოლებას მახასიათებელი განტოლება ეწოდება.

უკანასკნელი არის n ხარისხის განტოლება k-ს მიმართ. თუ მას აქვს n ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი $k_1, k_2, \dots, k_n$, მაშინ (3.1) დიფერენციალურ განტოლებას $(0, \infty)$ შუალედში ექნება n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_n}$ და მისი ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x)=C_1 x^{k_1}+C_2 x^{k_2}+\cdots+C_n x^{k_n}$$

რადგანაც $x^k=e^{kt}$, ამიტომ, ცხადია, (3.1) განტოლების მახასიათებელი განტოლების α ჯერადობის ნამდვილ k_i ფესვს შეესაბამება გარდაქმნილი განტოლების ამონახსნები: $e^{k_i t}, te^{k_i t}, t^2 e^{k_i t}, \quad, t^{\alpha-1}e^{k_i t}$, ანუ მოცემული (3.1) განტოლების შემდეგი ამონახსნები:

$$x^{k_i},\ x^{k_i}\ln x,\ x^{k_i}\ln^2 x, \dots, x^{k_i}\ln^{\alpha-1}x \tag{3.4}$$

ეს კერძო ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია $(0, +\infty)$ შუალედში.

კომპლექსურ ფესვებს $t=\sigma\pm i\tau$ შეესაბამება $x^\sigma\cos(\tau\ln x)$ და $x^\sigma\sin(\tau\ln x)$ კერძო ამონახსნები, ე. ი. ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები $x^{\sigma+i\tau}$ გამოსახულებისა, მართლაც,

$$x^{\sigma+i\tau}=e^{t(\sigma+i\tau)}=e^{t\sigma}(\cos t\tau+i\sin t\tau)=e^{\sigma\tau}\cos t\tau+ie^{t\sigma}\sin t\tau=$$
$$=x^\sigma\cos(\tau\ln x)+ix^\sigma\sin(\tau\ln x).$$

ცხადია, m ჯერად კომპლექსურ k ფესვს შეესაბამება $2m$ ამონახსნი:

$$x^\sigma\cos(\tau\ln^k x),\ x^\sigma\sin(\tau\ln^k x),\ k=0,\ 1, \dots, m-1.$$

ყველა შემთხვევაში გვექნება (3.1) განტოლების n წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი, რომლებიც ქმნის ამონახსნების ფუნდამენტურ სისტემას.

თუ $x<0$, მაშინ შეგვიძლია გამოთვლებში ყველგან დავწეროთ $|x|$.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, როცა $x=0$, მაშინ ყველა ამონახსნი გახდება უსასრულოდ დიდი. მართლაც, $x=0$ წარმოადგენს (3.1) განტოლების განსაკუთრებულ წერტილს, რადგანაც აქ შეუძლებელია არსებობის თეორემის გამოყენება. ამ თეორემის გამოყენება რომ შესაძლებელი გახდეს, აუცილებელია, (3.1) განტოლება დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

ე. ი. გავყოთ მისი კოეფიციენტები x^n-ზე, რომლებიც გახდება უსასრულოდ დიდი, როცა $x=0$.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შევასრულებთ გარდაქმნას $x=e^t$, ანუ $t=\ln x$, გვექნება:

$$y_x' = y_t' \cdot e^{-t}, \ y_x'' = (y_t'' - y_t')\, e^{-2t}.$$

y_x', y_x'' წარმოებულების მნიშვნელობები ჩავსვათ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$e^{2t}(y_t'' - y_t')\, e - e^{2t} - 4e^t y_t' e^{-t} + 6y = 0,$$

ანუ

$$y_t'' - 5y_t' + 6y = 0.$$

როგორც ვხედავთ, მივიღებთ მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლება, რომლის მახასიათებელ განტოლებას $l(k) = k^2 - 5k + 6 = 0$ აქვს ფესვები: $k_1=3$, $k_2=2$. ასე რომ გარდაქმნილი განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება: $y_1 = e^{3t}$ და $y_2 = e^{2t}$, ხოლო ზოგადი ამონახსნია $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$. მაშასადამე, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^2 y'' - 5xy' + 0y = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ $y = x^k$ ფუნქციის სახით. მაშინ $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$; y', y'' ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$k(k-1)x^k - 5kx^k + 9x^k = 0,$$

ანუ

$$x^k [k(k-1) - 5k + 9] = x^k l(k) = 0,$$

$$l(k) = k^2 - 6k + 9 = 0.$$

$$k_1 = 3, \ k_2 = 3.$$

მაშასადამე, განტოლების კერძო ამონახსნებია: $y_1 = x^3$. $y_2 = x^3 \ln x$. ამგვარად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln x.$$

მაგალითი 8. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^2 y'' - x y' + 3y = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევასრულოთ გარდაქმნა

$$x = e^t.$$

ცხადია, რომ

$$y_x' = y_t' \cdot e^{-t}, \ y_x'' = (y_t'' - y_t') e^{-2t}.$$

უკანასკნელი გავითვალისწინოთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y_t'' - 2y_t' + 3y = 0.$$

მახასიათებელი $l(k) = k^2 - 2k + 3 = 0$ განტოლების ფესვებია: $k_1 = 1 + 2i$, $k_2 = 1 - 2i$,. ასე რომ, მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება $y_1 = x \cos(2 \ln x)$ და $y_2 = x \sin(2 \ln x)$.

მაშასადამე, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = C_1 x \cos(2 \ln x) + C_2 x \sin(2 \ln x).$$

დიფერენციალურ განტოლებას:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 (ax + b)^{n-2} y^{(n-2)} + \quad +$$

$$+ a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = 0 \qquad (3.5)$$

აგრეთვე ე ი ლ ე რ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ეწოდება. (3.5) დაიყვანება ზემოთ განხილულ სახეზე დამოუკიდებელი x ცვლადის შემდეგი გარდაქმნით $\widetilde{x} = ax + b$. შემდეგ, თუ კიდევ შევასრულებთ გარდაქმნას $\widetilde{x} = e^t$, მივიღებთ მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებას.

რადგანაც ეილერის დიფერენციალური განტოლება:

$$x^{(n)} y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x)$$

$x = e^t$ გარდაქმნის მეშვეობით დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებაზე, ამიტომ ეილერის განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ინტეგრების მეთოდები, რომლებიც ზემოთ იყო გამოყენებული წრფივ არაერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრებისათვის (თავი VII, § 2). ასე, მაგალითად, წინა პარაგრაფიდან ცნობილია, რომ მუდმივკოეფიციენტებიანი $f(x) = P_m$ განტოლებისათვის, სადაც მარჯვენა ნაწილი $(x) e^{ax}$ სახისაა, კერძო ამონახსნი მოიძებნება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით. ამავე მეთოდით შეიძლება ვიპოვოთ კერძო ამონახსნი ეილერის განტოლებისათვის. ასე, რომ ეილერის განტოლების ინტეგრება შესაძლოა შევასრულოთ ელემენტარულ ფუნქციებში.

§ 4. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება და მისი გამოყენება

განვიხილოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგიერთი პრაქტიკული გამოყენება რხევითი მოვლენების შესწავლისას.

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის განტოლება:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{4.1}$$

დავწეროთ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \tag{4.2}$$

და ვიპოვოთ მისი ფესვები:

$$k_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a^2}, \quad k_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

აქ წარმოგვიდგება შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$, მაშინ ორივე ფესვი k_1 და k_2 ნამდვილი და განსხვავებულია. ამ შემთხვევაში (4.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0$, მაშინ $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$ და ზოგადი ამონახსნი

იქნება:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

3) $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$, ამ შემთხვევაში $l(k)=0$ განტოლებას აქვს წყვილი კომპლექსური ფესვი:

$$k_1 = -\frac{a_1}{2} + i\omega, \quad k_2 = -\frac{a_1}{2} - i\omega,$$

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cos \omega x + C_2 e^{-\frac{a_1}{2}x} \sin \omega x,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

განხილული მესამე შემთხვევა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ფიზიკაში — მცირე რხევების თეორიაში. ვთქვათ, t არის დრო, ხოლო x — მოძრავი მატერიალური წერტილის აბსცისა. ვთქვათ, მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს $f=-a_2x$ ძალა, რომელიც პროპორციულია x აბსცისისა, და სიჩქარის პროპორციული წინაღობის ძალის, რომლის სიდიდე არის $f' = -a_1 \frac{dx}{dt}$. მაშინ ერთეულის ტოლი მასის მქონე მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას, ნიუტონის მეორე კანონის საფუძველზე, ექნება სახე

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_2 x - a_1 \frac{dx}{dt},$$

ანუ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \tag{4.3}$$

სადაც a_1, a_2 მოცემული დადებითი რიცხვია. ამგვარად, მივიღეთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც წარმოადგენს თავისუფალი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას.

1. ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი რ ხ ე ვ ა. ვთქვათ, $a_1=0$, $a_2 \neq 0$. მაშინ (4 . 3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_2 x = 0. \tag{4.4}$$

ამ შემთხვევაში მატერიალურ წერტილზე არ მოქმედებს ხახუნის ძალა. (4 . 4) განტოლებას ეწოდება ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება; მის მახასიათებელ

$$k^2 + a_2 = 0$$

განტოლებას აქვს ფესვები: $k_1 = \omega i$, $k_2 = -\omega i$, სადაც $\omega = \sqrt{a_2}$.

მაშასადამე, (4 . 4) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{4.5}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც სავსებით განისაზღვრება საწყისი პირობებით: $x(0) = x_0$ და $x'(0) = x'_0$.

(4 . 5) ფორმულაში ნებისმიერი მუდმივები შეიძლება შევცვალოთ სხვა მუდმივებით. შემოვიღოთ ახალი მუდმივები A და φ_0, რომლებიც დაკავშირებულია C_1 და C_2 მუდმივებთან ტოლობებით:

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0$$

და განისაზღვრება ასე:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_1}{C_2}.$$

თუ C_1 და C_2-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (4 . 5) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$x(t) = A \sin \varphi_0 \cos \omega t + A \cos \varphi_0 \sin \omega t,$$

ანუ

$$x(t) = A \sin (\omega t + \varphi_0), \tag{4.6}$$

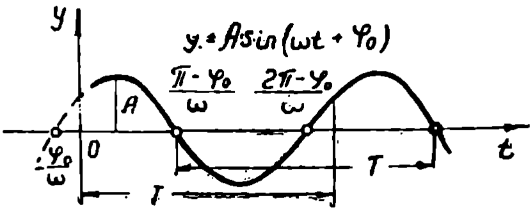
სადაც

$$\omega = \sqrt{a_2}.$$

ცხადია, გეომეტრიულად (4 . 6) ინტეგრალური წირები წარმოადგენს სინუსოიდებს. ამ შემთხვევაში რხევას ჰარმონიული რხევა ეწოდება, ხოლო (4 . 6) განტოლებას — ჰარმონიული რხევითი მოძრაობის განტოლება.

დროის T შუალედს, რომლის განმავლობაშიც სინუსის არგუმენტი შეიცვლება 2π-ით, რხევის პერიოდი ეწოდება: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. რხევის სიხშირე ეწოდება რხევათა რიცხვს $t = 2\pi$-ის განმავლობაში. განსახილველ შემთხვევაში რხევის სიხშირე $\omega = \sqrt{a_2}$. A არის წონასწორობის მდებარეობიდან უდიდესი გადახრის სიდიდე, რომელსაც ჰარმონიული

რხევითი მოძრაობის ამპლიტუდა ეწოდება, ხოლო φ_0 — საწყისი ფაზა. (4.6) ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია ნახაზზე (ნახ. 25).



ნახ. 25

2. მილევადი რხევა. თუ მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს წინაღობის ძალა წინაღობის ძალის პროპორციულობის მამრავლი a_1, $a_1 \neq 0$, მცირეა a_2-თან შედარებით (რასაც თითქმის ყოველთვის აქვს ადგილი სინამდვილეში), ე. ი. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$, მაშინ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური (4.3) განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება:

$$e^{-\frac{a_1}{2}t}\cos\omega t,\ e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin\omega t,$$

სადაც $\omega^3 = a_2 - \frac{a_1^2}{4}$. მაშასადამე, მის ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t), \qquad (4.7)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

როცა $a_1 = 0$, მაშინ ზოგადი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$x(t) = C_1 \operatorname{ocs}\sqrt{a_2}\,t + C_2\sin\sqrt{a_2}\,t$$

და $(t_1\, x)$ სისტემაში გვექნება უამრავი ერთნაირი ტალღები. დადებითი a_1-სათვის t დროის ზრდასთან ერთად წინაღობის ძალის მოქმედების პირობებში მატერიალური წერტილის გადახრა

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(C_1\cos\sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}}\,t + C_2\sin\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\,t\right). \qquad (4.8)$$

წონასწორობის მდებარეობიდან თანდათან მცირდება და როცა $t \to \infty$, მაშინ $e^{-\frac{a_1 t}{2}} \to 0$, $x(t) \to 0$. ფიზიკურად ეს ნიშნავს, რომ მატერიალური წერტილი ასრულებს რხევას, რომელიც დროის განმავლობაში თანდათან მცირდება ე. ი. საქმე გვაქვს ეგრეთწოდებულ **მილევად რხევასთან.**

რხევითი მოძრაობა იქნება სავსებით განსაზღვრული, თუ მოცემულია საწყისი პირობები: საწყისი აბსცისა და საწყისი სიჩქარე, ე. ი. თუ ცნობილია $x(0)=x_0$ და $x'(0)=x_0'$ მაშინ (4 . 7) ზოგად ამონახსნში ნებისმიერი მუდმივები იქნება სავსებით განსაზღვრული.

გამოყენების თვალსაზრისით უმჯობესია (4 . 8) ზოგადი ამონახსნი წარმოვიდგინოთ სხვა სახით. ამ მიზნით ნებისმიერი მუდმივები C_1 და C_2 შევცვალოთ ახალი A და φ_0 მუდმივებით, რომლებიც დაკავშირებული C_1 და C_2 ნებისმიერ მუდმივებთან ზემოთ აღნიშნული დამოკიდებულებით! მაშინ (4 . 8) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(A\sin\varphi_0\cos\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\,t+\right.$$

$$\left.+A\cos\varphi_0\sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\,t\right),$$

ანუ

$$x(t) = A\,e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin(\omega t+\varphi_0). \tag{4.0}$$

ნებისმიერი მუდმივები A და φ_0 (4 . 9) სახის ზოგად ამონახსნში სავსებით განისაზღვრება საწყისი პირობებით: $x_0=A\sin\varphi_0$, $x_0'=$ $=A\omega\cos\varphi_0$[1].

(4 . 9) განტოლება წარმოადგენს მატერიალური წერტილის რხევითი მოძრაობის განტოლებას.

აქ გვაქვს რხევა, რომლის სიხშირეა $\omega=\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$, საწყისი ფაზა φ_0, პერიოდი კი $T=\frac{2\pi}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}$, ხოლო ამპლიტუდაა $A\,e^{-\frac{a_1}{2}t}$ რომელიც დამოკიდებულია დროზე; რადგან $a_1>0$, ამიტომ, როცა $t\to\infty$, ამპლიტუდა მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამ შემთხვევაში რხევას

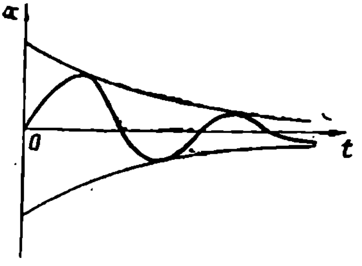
[1] $A>0$, φ_0 განისაზღვრება 2π-ის ჯერადის სიზუსტით.

მილევადი რხევა ეწოდება. მილევადი რხევის გრაფიკი მოცემულია ნახაზზე (ნახ. 26).

3. იძულებითი რხევა. თუ მატერიალურ წერტილზე, გარდა ზემოთ განხილული ძალებისა, მოქმედებს კიდევ $f(t)$ გარე ძალა, რხევებს ეწოდება იძულებითი, განსხვავებით ზემოთ განხილული თავისუფალი რხევებისაგან.

ამ შემთხვევაში რხევის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t). \quad (4.10)$$



ნახ. 26

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $f(t)$ გარე ძალა არის შემდეგი სახის პერიოდული ფუნქცია:

$$f(t)=A_1\sin\alpha t+B_1\cos\alpha t$$

მაშინ მატერიალური წერტილის მოძრაობის (4.10) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=A_1\sin\alpha t+B_1\cos\alpha t. \quad (4.11)$$

(4.11) წარმოადგენს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. როგორც ცნობილია, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის მისი რაიმე კერძო ამონახსნისა და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის ჯამი.

ვიპოვოთ (4.11) განტოლების კერძო ამონახსნი. ვიგულისხმოთ, რომ $a_1\neq 0$ და $\frac{a_1^2}{4}<a_2$, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები: $k_1=-\frac{a_1}{2}+i\omega$, $k_2=-\frac{a_1}{2}-i\omega$, $\omega=\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$.

(4.11) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$x_1(t)=C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t. \quad (4.12)$$

$$\frac{dx_1}{dt}=C_1\alpha\cos\alpha t+C_1\alpha\sin\alpha t,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-C_1\alpha^2\sin\alpha t-C_2\alpha^2\cos\alpha t.$$

უკანასკნელი გამოსახულებები ჩავსვათ (4 . 11) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(-C_1\alpha^2 - a_1 C_2 \alpha + a_2 C_1)\sin\alpha t + (-C_2\alpha^2 + a_1 C_2\alpha + a_2 C_2)\cos\alpha t =$$
$$= A_1 \sin\alpha t + B_1\cos\alpha t,$$

საიდანაც C_1 და C_2 მუდმივების განსაზღვრისათვის მივიღებთ განტოლებებს:

$$C_1(a_2-\alpha^2) - C_2\alpha a_1 = A_1,$$
$$C_1 a_1\alpha + C_2(a_2-\alpha^2) = B_1.$$

განტოლებათა უკანასკნელ სისტემას C_1 და C_2-ის მიმართ აქვს გარკვეული ამონახსნები, თუ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta=(a_2-\alpha^2)^2+a_1{}^2\alpha^2\neq 0$, ე. ი. თუ $a_1\neq 0$, $\alpha\neq\pm\sqrt{a_2}$. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$C_2 = \frac{B_1(a_2-\alpha^2) - A_1 a_1\alpha}{(a_2-\alpha^2)^2 + a_1{}^2\alpha^2},$$
$$C_1 = \frac{A_1(a_2-\alpha^2) + B_1 a_1\alpha}{(a_2-\alpha^2)^2 + a_1{}^2\alpha^2}. \tag{4.13}$$

ამგვარად, $x_1(t) = C_1\sin\alpha t + C_2\cos\alpha t$ იქნება (4.11) განტოლების კერძო ამონახსნი. ვიდრე შევასრულებდეთ C_1 და C_2 მუდმივების (4 . 13) მნიშვნელობების ჩასმას (4 . 12) განტოლებაში, ვიპოვოთ ახალი მუდმივები, რომლებიც დაკავშირებულია C_1 და C_2 მუდმივებთან დამოკიდებულებებით:

$$C_1 = A_2\cos\varphi^*,\ C_2 = A_2\sin\varphi^*,$$

ე. ი. მივიღოთ, რომ

$$A_2 = \sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2} = \frac{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}{\sqrt{(a_2-\alpha^2)^2+a_1{}^2\alpha^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi^* = \frac{C_2}{C_1}.$$

მაშინ იძულებითი რხევის არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$x_1(t) = C_1\sin\alpha t + C_2\cos\alpha t = A_2\cos\varphi^*\sin\alpha t +$$
$$+ A_2\sin\varphi^*\cos\alpha t = A_2\sin(\alpha t+\varphi^*),$$

ანუ

$$x_1(t) = \frac{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}{\sqrt{(a_2-\alpha^2)^2+a_1{}^2\alpha^2}}\sin(\alpha t+\varphi^*).$$

მაშასადამე,

$$x(t)=C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t+C_1e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin\omega t+C_2e^{-\frac{a_1}{2}t}\cos\omega t,$$

ანუ

$$x(t)=Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\sin(\omega t+\varphi_0)+\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{(a_2-\alpha^2)^2+a_1^2\alpha^2}}\sin(\alpha t+\varphi^*) \quad (4.14)$$

იქნება (4 . 11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

(4 . 14) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი, რომელსაც საკუთრივი რხევა ეწოდება, გვაძლევს (4 . 11) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს. იგი წარმოადგენს მილევად რხევას და როცა $t\to\infty$, აღნიშნული წევრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე. ი. დროის გარკვეული შუალედის გავლის შემდეგ მთავარი მნიშვნელობა ექნება მეორე წევრს, რომელიც განსაზღვრავს იძულებით რხევებს. ამ რხევების სიხშირე, ე. ი. რხევათა რიცხვი $t=2\pi$ დროის განმავლობაში, ტოლი იქნება $f(t)$ გარე ძალის სიხშირისა. იძულებითი რხევების ამპლიტუდა იმდენად დიდი იქნება, რამდენადაც მცირეა a_1 და რამდენადაც α^2 ახლოა a_2-თან.

4. რეზონანსი. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_1=0$, ე. ი. განვიხილოთ მატერიალური წერტილის რხევითი მოძრაობა, როცა წერტილზე არ მოქმედებს წინაღობის ძალა. ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$x''(t)+a^2x(t)=A\sin\alpha t+B\cos\alpha t, \quad (4.15)$$

სადაც $a_2=a^2$, A, B და α მოცემული რიცხვებია. ეს განტოლება მიიღება (4.11) განტოლებიდან, თუ ამ უკანასკნელში მივიღებთ: $a_1=0$ და $a_2=a^2$. ახლა ვიპოვოთ (4 . 15) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ცხადია, (4 . 15) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის

$$u(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t, \quad (4.16)$$

სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $\omega=\sqrt{a_2}=a\neq\alpha$.

(4 16) ფორმულაში შემოვიღოთ ახალი ნებისმიერი მუდმივები: A_1 და φ_0, რომლებიც დაკავშირებულია C_1 და C_2 ნებისმიერ მუდმივებთან დამოკიდებულებებით:

$$C_1=A_1\sin\varphi_0,\ C_2=A_1\cos\varphi_0$$

და განისაზღვრებიან ასე:

$$A_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}.$$

თუ C_1 და C_2-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (4 . 18) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$u(t) = A_1 \sin \varphi_0 \cos \omega t + A_1 \cos \varphi_0 \sin \omega t = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4.17)$$

რადგან $a = \omega = \sqrt{a_2} \neq \alpha$, ამიტომ (4.17) განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$x_0(t) = c_1 \sin \alpha t + c_2 \cos \alpha t,$$

სადაც c_1, c_2 ჯერჯერობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია. აქედან გვაქვს:

$$\frac{d x_0(t)}{dt} = c_1 \alpha \cos \alpha t - c_2 \alpha \sin \alpha t,$$

$$\frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} = -\alpha^2 c_1 \sin \alpha t - \alpha^2 c_2 \cos \alpha t.$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (4 . 15) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(a^2 - \alpha^2) c_1 \sin \alpha t + (a^2 - \alpha^2) c_2 \cos \alpha t = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$c_1 = \frac{A}{a^2 - \alpha^2}, \quad c_2 = \frac{B}{a^2 - \alpha^2}.$$

ამგვარად, $x_0(t)$ კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$x_0(t) = \frac{A}{a^2 - \alpha^2} \sin \alpha t + \frac{B}{a^2 - \alpha^2} \cos \alpha t.$$

მაშასადამე, (4 . 15) არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{A}{a^2 - \alpha^2} \sin \alpha t + \frac{B}{a^2 - \alpha^2} \cos \alpha t. \quad (4.18)$$

(4 . 18) ფორმულიდან ჩანს, რომ მატერიალური წერტილის მოძრაობა არის შემდეგი სისტემის საკუთარი და გარე პერიოდული ძალის მოქმედებით გამოწვეული იძულებითი რხევებისა.

აქამდე ვგულისხმობდით, რომ $a_1 = 0$ და $\alpha \neq a$. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_1 = 0$, $\omega = a = \alpha$, $\omega = \sqrt{a_2} = a$. ამ შემთხვევას აქვს გარკვეული ფიზიკური აზრი. ეს ნიშნავს რ ე ზ ო ნ ა ნ ს ი ს დ ა წ ყ ე ბ ა ს. ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$x''(t) + a^2 x(t) = A \sin a t + B \cos a t, \quad (4.19)$$

$a_2 = a^2$, $\alpha = a$, სადაც $\sin a t$ და $\cos a t$ სისტემის თავისუფალი რხევებია, ანუ (4 . 15) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნები.

ამგვარად, რეზონანსის შემთხვევაში გარე ძალას აქვს რხევის იგივე პერიოდი $T = \frac{2\pi}{a}$, რაც თავისუფალი სისტემის შემთხვევაში; ამასთან, როცა $\alpha = \sqrt{a_2} = a$, ე. ი. საკუთრივი რხევის სიხშირე ემთხვევა გარე ძალის სიხშირეს, (4.19) განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$x_1(t) = t\,(C_1 \sin a t + C_2 \cos a t)$$

სახით, საიდანაც ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{d x_1}{d t} = (C_1 - C_2 a t) \sin a t + (C_2 + C_1 a t) \cos a t,$$

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = (-2 C_2 a - C_1 a^2 t) \sin a t + (2 C_1 a - C_2 a^2 t) \cos a t =$$

$$= (2 C_1 a - C_2 a^2 t) \cos a t - (2 C_2 a + C_1 a^2 t) \sin a t.$$

თუ $x_1(t)$-ს, $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$-ის გამოსახულებებს შევიტანთ (4.19) განტოლებაში, ვიპოვით C_1 და C_2-ს:

$$C_1 = \frac{B}{2a}, \quad C_2 = -\frac{A}{2a}.$$

მაშასადამე, კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$x_1(t) = \frac{B}{2a}\, t \sin a t - \frac{A}{2a}\, t \cos a t.$$

ამგვარად, მოცემული (4 . 19) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$x(t) = C_1 \sin a t + C_2 \cos a t + \frac{t}{2a}(B \sin a t - A \cos a t), \qquad (4.20)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (4 . 19) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$x = A_1 \sin(a t + \varphi_0) + \frac{t}{2a}(B \cos a t - A \sin at), \qquad (4.21)$$

სადაც ამპლიტუდა A_1 და φ_0 საწყისი ფაზა განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან:

$$x(t)\,|_{t=0} = x_0 \quad x'(t)\,|_{t=0} = x_0'.$$

(4.21) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის მეორე შესაკრები გვიჩვენებს, რომ x-ის აბსოლუტური სიდიდე, როცა $t \to \infty$, შემოუსაზღვრელია. როცა $\alpha = a$, ე. ი. როცა სისტემის საკუთრივი რიცხვის სიხშირე ემთხვევა გარე (შემშფოთავი პერიოდული) ძალის სიხშირეს, მატერიალური წერტილის გაქანება, ე. ი. რხევის ამპლიტუდა, იზრდება დროსთან ერთად. ამ მოვლენას ფიზიკაში რ ე ზ ო ნ ა ნ ს ი ეწოდება.

VIII თავი

მეორე რიგის ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების უმარტივეს სახეზე დაყვანა

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$y'' + P_1(x) y' + P_2(x) y = 0, \tag{1.1}$$

რომლის კოეფიციენტები $P_1(x)$ და $P_2(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია რომელიღაც (a, b) შუალედში. ზემოთ ვნახეთ (თავი VI, § 3), რომ ამ განტოლებას აქვს ორი წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი, $y_1(x)$ და $y_2(x)$, რომლებიც უწყვეტი და დიფერენცირებადია (a, b) შუალედში, და მისი ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. (1.1) განტოლების ამონახსნი ცალსახად განისაზღვრება საწყისი პირობებით:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

ამიტომ, კერძოდ, თუ $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, მაშინ საძიებელი ამონახსნი არის $y(x) \equiv 0$, რადგან ეს ამონახსნი აკმაყოფილებს განტოლებას და მოცემულ საწყის პირობებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ყოველ ამონახსნს, რომელიც არ არის იგივურად ნული, შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ პირველი რიგის ნული. შემდეგში (1.1) სახის განტოლების ამონახსნის ქვეშ ვიგულისხმებთ ისეთ ამონახსნს, რომელიც იგივურად არ უდრის ნულს.

მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების თვისებების შესწავლისა და ამ ამონახსნების მოძებნისათვის ხშირად ხელსაყრელია (1 1) განტოლება სათანადო

გარდაქმნით დავიყვანოთ შედარებით უფრო მარტივ სახეზე, რომელშიც არ გვექნება პირველი რიგის წარმოებული.

ზოგიერთ შემთხვევაში ამ მიზნით შეიძლება გამოყენებულ იქნეს საძიებელი ფუნქციის წრფივი გარდაქმნა:

$$y(x) = u(x)\,z(x), \tag{1.2}$$

სადაც $z(x)$ ახალი საძიებელი ფუნქციაა, ხოლო $u(x)$ ჯერჯერობით განუსაზღვრელი ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქცია. ვუჩვენოთ, რომ (1.1) განტოლება (1.2) წრფივი გარდაქმნის მეშვეობით ყოველთვის დაიყვანება მეორე რიგის განტოლებაზე, რომელიც არ შეიცავს პირველი რიგის წარმოებულს.

მართლაც, (1 . 1) განტოლებაში შევასრულოთ (1 . 2) გარდაქმნა, გვექნება:

$$z''(x) + \left[\frac{2u'(x)}{u(x)} + P_1(x)\right] z'(x) +$$

$$+ \left[\frac{u''(x)}{u(x)} + p_1(x)\frac{u'(x)}{u(x)} + P_2(x)\right] z(x) = 0. \tag{1.3}$$

ახლა $u(x)$ ფუნქცია ისე ამოვირჩიოთ, რომ

$$\frac{2u'(x)}{u(x)} + P_1(x) = 0.$$

აქედან, კერძოდ, $u(x)$ ფუნქციად შეგვიძლია ავიღოთ:

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx}$$

მაშინ

$$u'(x) = -\frac{1}{2}P_1(x)\,e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx}$$

$$u''(x) = \frac{P_1^2(x)}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx} - \frac{P_1'(x)}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx}$$

(1 . 3) განტოლებაში $u(x)$, $u'(x)$ და $u''(x)$-ის გამოსახულებების ჩასმა გვაძლევს:

$$z''(x) + \left[\frac{P_1^2(x)}{4} - \frac{P_1'(x)}{2} - \frac{P_1^2(x)}{2} + P_2(x)\right] z(x) = 0.$$

ამგვარად, საძიებელი ფუნქციის წრფივი გარდაქმნით[1]:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx} z(x)$$

(1 1) განტოლება დაიყვანება სახეზე:

$$z''(x) + k(x) z(x) = 0, \tag{1.4}$$

სადაც

$$k(x) = \frac{P_1^2(x)}{4} - \frac{P_1'(x)}{2} - \frac{P_1^2(x)}{2} + P_2(x) =$$

$$= -\frac{P_1^2(x)}{4} - \frac{P_1'(x)}{2} + P_2(x).$$

ცხადია, (1 . 2) სახის ჩასმის მეშვეობით (1 . 1) განტოლების ყოველი გარდაქმნისას $k(x)$ ფუნქცია არ შეიცვლება, რადგან ყველა განტოლება, რომლებშიც საძიებელი ფუნქციები მხოლოდ $u(x)$ მამრავლით განსხვავდებიან, მიიყვანება ერთი და იმავე (1 . 4) სახის განტოლებაზე.

$k(x)$ ფუნქციას ეწოდება (1 . 1) განტოლების ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ი. პირიქით, (1 . 4) განტოლება შეგვიძლია უშუალოდ გარდავქმნათ (1 . 1) განტოლებაში. ცხადია, თუ (1 . 4) ამოიხსნება კვადრატურებში, მაშინ (1 . 1) განტოლებაც ამოიხსნება კვადრატურებში. მაგალითად, თუ $k(x) = 0$ ან $k(x) = \frac{a}{x^2}$, მაშინ (1.1) განტოლება შესაბამისად დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე ან ეილერის წრფივ განტოლებაზე.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y(x) = 0. \tag{1.5}$$

ამ განტოლების ინვარიანტი $k(x) = 1$; მართლაც, (1 . 5) განტოლებაში შევასრულოთ გარდაქმნა:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x),$$

---

[1] თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნას:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int P_1(x)\,dx} z(x),$$

მაშინ n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ განტოლებაზე, რომელიც არ შეიცავს $(n-1)$ რიგის წარმოებულს.

მივიღებთ:

$$u z'' + \left(2u' + \frac{2}{x} u\right) z' + \left(u'' + \frac{2}{x} u' + u\right) z = 0.$$

$z'(x)$-თან მდგომი კოეფიციენტი გავუტოლოთ ნულს; ეს მოგვცემს:

$$\frac{2u'}{u} = -\frac{2}{x},$$

ანუ

$$u(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}:$$

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad u''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

უკანასკნელი ფორმულების განტოლებაში ჩასმა გვაძლევს მუდმივკოეფიციენტებიან მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$\frac{1}{x} z'' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right) z = 0,$$

ანუ

$$z''(x) + z(x) = 0.$$

ამ განტოლებას აქვს ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა:

$$z_1(x) = \sin x, \quad z_2(x) = \cos x.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ ბესელის განტოლება:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0. \tag{1.6}$$

აქ $P_1(x) = \frac{1}{x}$, $P_2(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$ ასე რომ, (1.6) განტოლების ინვარიანტი არის:

$$k(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}.$$

აქედან ცხადია, რომ, თუ $n = \pm \frac{1}{2}$, მაშინ ჩასმას:

$$y = e^{-\int \frac{1}{2x} dx} \cdot z = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

ბესელის შესაბამისი განტოლება:

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0$$

დაჰყავს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებაზე:

$$z'' + z = 0.$$

მაშასადამე,

$$y(x) = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

არის (1.6) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოძებნა შეგვიძლია აგრეთვე რიგის დაწევის ცნობილი წესის გამოყენებით.

§ 2. კავშირი მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებასა და რიკატის განტოლებას შორის

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$L[y] = y''(x) + P_1(x) y'(x) + P_2(x) y(x) = 0, \tag{2.1}$$

სადაც $P_1(x)$, $P_2(x)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია რომელიმე (a, b) შუალედში. ამ განტოლების რიგი ყოველთვის შეგვიძლია დავწიოთ ერთი ერთეულით, თუ ვისარგებლებთ რიგის დაწევის ზოგადი წესით (თავი V, § 5). (2.1) განტოლებაში შევასრულოთ გარდაქმნა:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = z(x), \tag{2.2}$$

სადაც $z(x)$ ახალი საძიებელი ფუნქციაა. ცხადია,

$$y(x) = y(x),$$
$$y'(x) = y(x) z(x),$$
$$y''(x) = y(x) [z^2(x) + z'(x)].$$

მაშინ გვექნება:

$$q(x)[z^2(x) + z'(x) + P_1(x)z(x) + P_2(x)] = 0.$$

თუ $y(x)$-ზე შევკვეცავთ, მაშინ მივიღებთ რიკატის განტოლებას:

$$z'(x) = -z^2(x) - P_1(x)z(x) - P_2(x). \tag{2.3}$$

ამგვარად, (2 . 2) ჩასმით ნებისმიერი მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება დაიყვანება რიკატის განტოლებაზე; კერძოდ, განტოლება:

$$y''(x) + P_2(x)y(x) = 0 \tag{2.4}$$

დაიყვანება რიკატის კანონიკური სახის განტოლებაზე:

$$z'(x) = -z^2(x) - P_2(x).$$

პირიქით, რიკატის ნებისმიერი განტოლება:

$$y'(x) = P(x)y^2(x) + Q(x)y(x) + R(x)$$

შეიძლება დავიყვანოთ მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებაზე. მართლაც, თუ რიკატის განტოლებაში შევასრულებთ გარდაქმნას:

$$y(x) = -\frac{1}{P_1(x)}z(x),$$

სადაც $z(x)$ ახალი საძიებელი ფუნქციაა, მივიღებთ (2.3) სახის რიკატის განტოლებას, რომელიც $u' = u^{-1} \cdot z$ ჩასმით დაიყვანება (2 . 1) სახის განტოლებაზე.

როგორც ცნობილია, რიკატის განტოლების ინტეგრება ხდება მხოლოდ გამონაკლის შემთხვევებში. ამიტომ (2 . 1) მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრების შესახებაც შეგვიძლია ვთქვათ იგივე.

§ 3. წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ხარისხოვანი მწკრივების მეშვეობით

უმაღლესი რიგის ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნი, საზოგადოდ, არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში სასრული სახით და ამ განტოლებათა ინტეგრება ზოგად შემთხვევაში არ დაიყვანება კვადრატურებზე. ასეთ შემთხვევაში უნდა მივმართოთ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების მიახლოებითს მეთოდებს. ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საშუალებას წარმოადგენს საძიებელი ამონახსნის დაშლა

ხარისხოვან მწკრივად და ამ უკანასკნელის კოეფიციენტების განსაზღვრა განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით. ჩვენ განვიხილავთ მწკრივთა მეშვეობით ინტეგრების მეთოდის გამოყენებას მეორე რიგის ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, თუმცა მისი გამოყენება შესაძლებელია უფრო მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$y''(x) + P_1(x)\,y'(x) + P_2(x)\,y(x) = f(x). \qquad (3.1)$$

ვთქვათ, $P_1(x)$, $P_2(x)$ კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი გამოისახება ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით, რომლებიც კრებადია $|x|<R$ შუალედში. ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. თუ ხარისხოვანი მწკრივები:

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad P_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (*)$$

კრებადია $-R<x<R$ შუალედში, მაშინ (3.1) დიფერენციალური განტოლების ყოველი $y=y(x)$ კერძო ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ხარისხოვანი მწკრივით, რომელიც კრებადია იმავე $-R<x<R$ შუალედში.

დამტკიცება. ვთქვათ, (3.1) განტოლების კერძო ამონახსნი შესაძლოა ვეძებოთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$y = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, \qquad (3.2)$$

სადაც $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ ამ დაშლის უცნობი კოეფიციენტებია: შევეცადოთ განვსაზღვროთ ეს კოეფიციენტები განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდის გამოყენებით. (3.2) მწკრივის გაწარმოებით გვაქვს:

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} x^k,$$
$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) d_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) d_{k+2} x^k. \qquad (3.3)$$

(3 . 2), (3 . 3) და (*) გამოსახულებათა ჩასმის შედეგად (3 . 1) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) d_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} x^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{3.4}$$

თუ (3 . 4) ტოლობის მარჯვენა მხარეში გადავამრავლებთ ხარისხოვან მწკრივებს, მსგავს წევრებს შევკრებთ და შემდეგ ტოლობის ორივე მხარეში x-ის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომ კოეფიციენტებს გავუტოლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებებს d კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის:

$$\left.\begin{aligned}
&2\cdot 1\, d_2 + a_0 d_1 + b_0 d_0 = c_0,\\
&3\cdot 2\cdot d_3 + 2 a_0 d_2 + a_1 d_1 + b_0 d_1 + b_1 d_0 = c_1,\\
&4\cdot 3\cdot d_4 + 2a_1 d_2 + 3 a_0 d_3 + a_2 d_1 + b_0 d_2 + b_1 d_1 + b_2 d_0 = c_2,\\
&\\
&(k+2)(k+1) d_{k+2} + b_k d_0 + (a_k + b_{k-1}) d_1 + (2 a_{k-1} +\\
&+ b_{k-2}) d_2 + \cdots + (k a_1 + b_0) d_k + (k+1) a_0 d_{k+1} = c_k,
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

(3 . 5) განტოლებებიდან ყოველი შემდეგი შეიცავს ერთი საძიებელი კოეფიციენტით მეტს, ვიდრე წინა. პირველ განტოლებაში გვაქვს სამი უცნობი კოეფიციენტებით: d_0, d_1, d_2.

თუ ამ კოეფიციენტიდან d_0, d_1-ს მივცემთ რაიმე რიცხვით მნიშვნელობებს (d_0 და d_1 შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნებისმიერი მუდმივები), მაშინ ყველა d_k $(k = 2, 3 \ldots)$ საძიებელი კოეფიციენტი განისაზღვრება ცალსახად. მართლაც, (3 5)-დან პირველი განტოლება გვაძლევს d_2-ს, მეორე — a_3-ს, ხოლო მესამე — d_4-ს და ა. შ. $(k+1)$ განტოლებიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ d_{k+2}, ვიცით რა წინა d_0, d_1, d_2, $\ldots d_{k+1}$ კოეფიციენტების მნიშვნელობანი.

ამგვარად, ნორმალური გამოთვლების გზით შესაძლოა თანდათანობით განვსაზღვროთ (3.2) ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები:

მწკრივი $\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ ამ შემთხვევაში იქნება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ამგვარად აგებული მწკრივი კრებადია $|x|<R$ შუალედში. ვთქვათ, $r<R$, მაშინ შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$|a_k|<\frac{M}{r^k}, \qquad |b_k|<\frac{M}{r^{k+1}}, \qquad |c_k|<\frac{M}{r^k}. \tag{3.6}$$

მართლაც, (3 . 2) მწკრივების კრებადობიდან $x=r$ მნიშვნელობისათვის გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} a_k r^k=0 \qquad \lim_{k\to\infty} b_k r^{k+1}=0, \qquad \lim_{k\to\infty} c_k r^k=0.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს (3 . 6) უტოლობანი.

ზემოთ მოძებნილი d_k კოეფიციენტების შედარება A_k სიდიდეებთან, რომლებიც განსაზღვრულია შემდეგი დამოკიდებულებებით:

$$A_0=|d_0|,$$

$$A_1=|d_1|,$$

$$(k+2)(k+1)A_{k+2}+A_0\frac{M}{r^{k+1}}+2A_1\frac{M}{r^k}+3A_2\frac{M}{r^{k-1}}+\cdots+kA_{k-1}\frac{M}{r^2}+$$

$$+(k+1)A_k\frac{M}{r}+(k+2)A_{k+1}M=\frac{M}{r^k} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{3.7}$$

გვიჩვენებს, რომ

$$A_k\geqslant|d_k| \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

მეორე მხრივ, (3 . 7) დამოკიდებულება გადავწეროთ ასე:

$$r(k+2)(k+1)A_{k+2}+\frac{A_0M}{r^k}+\frac{2MA_1}{r^{k-1}}+\frac{3MA_2}{r^{k-2}}+\cdots+k\frac{A_{k-1}M}{r}+$$

$$+(k+1)MA_k+r(k+2)MA_{k+1}=\frac{M}{r^{k-1}}. \tag{3.8}$$

თუ (3 . 7) დამოკიდებულებაში k-ს შევცვლით $(k-1)$-ით, მივიღებთ:

$$(k+1)kA_{k+1}+\frac{MA_0}{r^k}+\frac{2MA_1}{r^{k-1}}+\frac{3MA_2}{r^{k-2}}+\cdots+k\frac{M}{r}A_{k-1}+$$

$$+(k+1)MA_k=\frac{M}{r^{k-1}} \tag{3.9}$$

(3 . 8) და (3 . 9) ფორმულების შედარება გვაძლევს:

$$r(k+2)(k+1)A_{k+2}=(k+1)kA_{k+1}-r(k+2)MA_{k+1},$$

ანუ

$$r(k+2)(k+1)A_{k+2}=(k+1)kA_{k+1}-r(k+2)MA_{k+1}.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულებიდან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A_{k+1}}{A_{k+2}}=r.$$

მაშასადამე, მწკრივი $\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k$ კრებადია, როცა $|x|<r$. მაგრამ, $|d_k|<A_k$, ამიტომ, შედარების პირველი პრინციპის თანახმად, მწკრივი $\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k$ კრებადი იქნება $|x|<r$ შუალედში და, მაშასადამე, $|x|<R$ შუალედშიც, რადგან r შეგვიძლია ავიღოთ რაგინდ ახლოს R-თან.

თეორემა დამტკიცებულია (3.1) დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი ამოხსნისათვის, რადგან d_0 და d_1 ნებისმიერი მუდმივებია. კერძოდ, დამტკიცებული თეორემა მართებულია მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებისათვის ($f(x)\equiv 0$).

თეორემის დამტკიცებისას ვგულისხმობთ, რომ $P_1(x)$, $P_2(x)$, $f(x)$ და საძიებელი $y(x)$ ამონახსნის დაშლა ხდება $x=0$ წერტილის მიდამოში. ცხადია, თეორემა მართებულია მაშინაც, როცა ეს დაშლები განიხილება $x=a$ წერტილის მიდამოში $x-a$ სხვაობის მთელი დადებითი ხარისხების მიხედვით. ამ შემთხვევაში მწკრივები კრებადი იქნება $|x-a|<R$ შუალედში.

შენიშვნა 1. იმ შემთხვევაში, როცა (3.1) დიფერენციალურ განტოლებაში ცვლადი $P_1(x)$, $P_2(x)$ კოეფიციენტები და $f(x)$ მრავალწევრებია, არ არის აუცილებელი, ეს ფუნქციები წარმოვიდგინოთ ხარისხოვან მწკრივთა საშუალებით, საკმარისია მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში უშუალოდ ჩავსვათ საძიებელი $y(x)$ ამონახსნის (3.2) დაშლა და შემდეგ, ისე როგორც ზემოთ, გამოვიყენოთ განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი.

მაგალითი. განვიხილოთ განტოლება:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=xy.$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების ამონახსნი უსასრულო მწკრივის სახით:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

სადაც a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ჯერჯერობით უცნობი კოეფიციენტებია. ჩავსვამთ რა უკანასკნელ მწკრივს მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 2 \cdot 1\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 x + 4 \cdot 3\, a_4 x^2 + 5 \cdot 4\, a_5 x^3 + 6 \cdot 5\, a_6 x^4 +$$

$$(2 \cdot 1\, a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cdots) - x (a_0 + a_1 x +$$
$$+ a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) = 0$$

თუ x-ის სხვადასხვა ხარისხებთან მდგომ კოეფიციენტებს გავუტოლებთ ნულს, უცნობი a_k კოეფიციენტების მნიშვნელობანი განისაზღვრება განტოლებათა სისტემით:

$$2 \cdot 1 a_2 = 0,$$
$$2 \cdot 3 a_3 - a_0 = 0$$
$$3 \cdot 4 a_4 - a_1 = 0,$$
$$4 \cdot 5 a_5 - a_2 = 0,$$
$$5 \cdot 6 a_6 - a_3 = 0,$$
$$6 \cdot 7 a_7 - a_4 = 0,$$

$$(n + 1)(n + 2)\, a_{n+2} - a_{n-1} = 0.$$

მივიღოთ $a_0 = 1$, $a_1 = 0$; მაშინ ფორმალური გამოთვლის გზით თანდათანობით განვსაზღვრავთ ყველა დანარჩენ კოეფიციენტს:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = a_5 = 0,$$

$$a_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \quad a_7 = a_8 = 0,$$

$$a_9 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots,$$

ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული იქნება ყველა ის კოეფიციენტი, რომლის ინდექსი k იყოფა 3-ზე. ამიტომ, საზოგადოდ, დავწეროთ:

$$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0 \quad \text{და} \quad a_{3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k - 2)}{(3k)\,!}.$$

ამგვარად, განსახილველი განტოლების პირველი კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}.$$

მეორე $y_2(x)$ კერძო ამონახსნის მისაღებად ვიგულისხმოთ, რომ $a_0=0$, $a_1=1$. მაშინ ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

უკანასკნელი ხარისხოვანი მწკრივები იქნება აბსოლუტურად კრებადი x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $-\infty<x<\infty$ შუალედში. მართლაც, პირველი მწკრივის კრებადობის დასადგენად გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი, გვექნება:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)}{(3k+3)!}|x^{3k+3}| : \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}|x^{3k}|\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(3k+2)(3k+3)}|x^3| = 0.$$

ე. ი. პირველი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $-\infty<x<\infty$ შუალედში. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ მეორე მწკრივიც კრებადია იმავე შუალედში.

შენიშვნა 2. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნისას მწკრივთა მეშვეობით საჭიროა დავიცვათ ერთგვარი სიფრთხილე, რათა არ მივიღოთ უვარგისი ან არასწორი პასუხი.

მაგალითად, განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$2xy\frac{dy}{dx} = 2x^3 + y^2.$$

ამ განტოლების ამონახსნი არის ფუნქცია

$$y = \sqrt{ax + x^3},$$

რომელიც არ იშლება (3 . 2) ტიპის ხარისხოვან მწკრივად.

არსებობს ისეთი დიფერენციალური განტოლებანი, რომელთაც აქვს ამონახსნი. მაგრამ, თუ დავუშვებთ, რომ არსებობს მათი ამონახსნი მწკრივის სახით და განვსაზღვრავთ კოეფიციენტებს, შეიძლება მივიღოთ მწკრივი, რომელიც განშლადი იქნება. ამგვარად, ყოველთვის არ შეგვიძლია ვიპოვოთ ჩვენთვის ვარგისი მწკრივი.

§ 4. მეორე რიგის ერთგვაროვან განტოლებათა ამონახსნების რხევითი ხასიათი

1. რხევადი და არარხევადი ამონახსნები. განვიხილოთ ორი მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$y'' - a^2 y = 0, \tag{4.1}$$

$$y'' + a^2 y = 0.$$

ამ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნებიდან:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \tag{4.3}$$

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \tag{4.4}$$

ჩანს, რომ (4 . 1) განტოლების ყოველი ამონახსნი მთელ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში მხოლოდ ერთხელ შეიძლება გახდეს ნულის ტოლი მაშინ, როცა (4 . 2) განტოლების ყოველი ამონახსნი ორჯერ მაინც გახდება ნული ნებისმიერ (a, b) შუალედში, რომლის სიგრძე მეტია $\frac{2\pi}{a}$-ზე.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ეწოდება რხევადი (a, b) შუალედში, თუ ის ამ შუალედის შიგნით ორჯერ მაინც გახდება ნულის ტოლი, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამონახსნს ეწოდება არარხევადი.

თუ (a, b) შუალედიდან მოცემული ორი α და β წერტილისათვის, $\alpha<\beta$, არსებობს (4 1) განტოლების არაიგივურად ნულის ტოლი ამონახსნი, რომელიც ნულის ტოლია მხოლოდ ამ α და β წერტილებში, მაშინ ასეთ α და β წერტილებს შეუღლებული წერტილები ეწოდება. ამასთან α-სათვის β-ს ეწოდება შეუღლებული მარჯვნიდან, ხოლო β-სათვის α-ს შეუღლებული მარცხნიდან.

ცხადია, (4 . 1) განტოლების (4 . 3) ამონახსნისათვის არ იარსებებს შეუღლებული წერტილები, ხოლო (4 . 2) განტოლების (4 . 4) ამონახსნებისათვის იარსებებს შეუღლებული წერტილები.

ამგვარად, მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$y''(x) + qy(x) = 0, \tag{4.5}$$

სადაც q მუდმივი რიცხვია, ამონახსნის რხევითი ხასიათი განისაზღვრება q რიცხვის ნიშნით. თუ $q>0$, მაშინ (4 . 5) განტოლების ამონახსნი ნებისმიერ (a, b) შუალედში იქნება რხევადი და თუ $q<0$, მაშინ (4 . 5)-ს ამონახსნი იქნება არარხევადი.

კერძოდ, თუ $q=0$, მაშინ (4.5) მიიღებს სახეს:

$$y''(x)=0,$$

რომლის ყველა ამონახსნი, ცხადია, არარხევადია.

მაშასადამე, უტოლობა:

$$q \leqslant 0 \tag{4.6}$$

წარმოადგენს საკმარის პირობას იმისათვის, რომ (4.5) განტოლებას არ ჰქონდეს რხევადი ამონახსნები.

ახლა გადავიდეთ მეორე რიგის ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი

$$y''(x)+P(x)\,y'(x)+q(x)\,y(x)=0 \tag{4.7}$$

განტოლების ამონახსნების რხევითი ხასიათის შესწავლაზე.

(4.7) განტოლების ამონახსნების რხევითი ხასიათის გამოკვლევისათვის საკმარისია განვიხილოთ განტოლება:

$$y''(x)+q(x)\,y(x)=0. \tag{4.8}$$

(4.6) უტოლობა წარმოადგენს საკმარის პირობას არა მარტო მაშინ, როცა q არის მუდმივი რიცხვი, არამედ მაშინაც, როცა იგი x-ის გარკვეულ ფუნქციას გამოსახავს.

თეორემა. *თუ $q(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) შუალედში და აკმაყოფილებს პირობას:*

$$q(x) \leqslant 0, \quad \text{როცა} \quad a<x<b,$$

მაშინ (4.8) განტოლების ყოველი არანულოვანი ამონახსნი იქნება არარხევადი (a, b) შუალედში, ე. ი. როგორიც უნდა იყოს ამ განტოლების $y(x)$ ამონახსნი და $x=\alpha$ წერტილი (a, b)-დან, ნამრავლი $\nu(x)=y\cdot\dfrac{dy}{dx}$ ზრდადია (a, b)-ში.

დამტკიცება. მართლაც, განვიხილოთ $\nu(x)=y\cdot\dfrac{dy}{dx}$ ნამრავლის წარმოებული:

$$\frac{d\nu(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(y\,\frac{dy}{dx}\right)=y'^2(x)+y(x)\cdot y''(x)=y'^2(x)-q(x)\,y^2(x).$$

რადგანაც $y(x)$ და $y'(x)$ ფუნქციები ერთდროულად არ ისპობა, ამიტომ $\nu(x)>0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ (4.8) განტოლების $y(x)$ ამონახსნი (a, b)-ს შიგა $x=\alpha$ წერტილზე აკმაყოფილებს პირო-

ბას $y(\alpha) \cdot y'(\alpha) \geqslant 0$, მაშინ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის შესრულდება უტოლობა $y(x) \cdot y'(x) > 0$, ამიტომ $y(x)$ და $y'(x)$ ფუნქციები $x=\alpha$ წერტილის მარჯვნივ ვერ გახდება ნული, ექნებათ რა ყოველთვის ერთი და იგივე ნიშანი. ამგვარად, თუ $y(x)$ ფუნქცია დადებითია, როცა $x > \alpha$, მაშინ იგი იქნება ზრდადი, და თუ იგი უარყოფითია, როცა $x > \alpha$, იქნება კლებადი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ (4 . 8) განტოლების $q(x)$ კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას $q(x) \leqslant 0$ და თუ ამ განტოლების რომელიმე ამონახსნი დადებითია (ან ტოლია ნულის) და ზრდადი $x=\alpha$ წერტილზე, მაშინ იგი დადებითი და ზრდადი იქნება (a, b) შუალედის ნებისმიერ $x > \alpha$ წერტილზე. პირიქით, თუ $y(x)$ ამონახსნი უარყოფითია (ან ნულის ტოლი) და კლებადი $x=\alpha$ წერტილში, მაშინ იგი უარყოფითია და კლებადი ნებისმიერ $x > \alpha$ წერტილზე.

ამგვარად, როცა შესრულებულია პირობა: $q(x) \leqslant 0$, მაშინ (a, b) შუალედში არ გვექნება წყვილი შეუღლებული წერტილები, რადგან, თუ (a, b) შუალედის რომელიმე $x=\alpha$ წერტილზე $y(a)=0$, მაშინ ნებისმიერი $x=\beta$-სათვის, $\beta > \alpha$, შესრულდება უტოლობა: $y(\beta) \cdot y'(\beta) > 0$ და ამიტომ $y(\beta) \neq 0$ და, მაშასადამე, (4 . 8) განტოლების ამონახსნი მთელ (a, b) შუალედში იქნება არარხევადი. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $q(x) < 0$, მაშინ (4 . 8) განტოლების ყველა ამონახსნი არარხევადია ნებისმიერ სასრულ (a, b) შუალედში. ასე რომ, (4 8) განტოლების ყოველი ინტეგრალური წირი Ox ღერძს გადაკვეთს არა უმეტეს ერთი წერტილისა. მაშასადამე, (4 . 8) განტოლების ამონახსნი არარხევადია (a, b) შუალედში, თუ ამ შუალედში მას არა აქვს ნულები ან აქვს მხოლოდ ერთი.

პირიქით, (4 . 8) განტოლების ამონახსნი რხევადია (a, b) შუალედში, თუ ამ შუალედში აქვს ერთზე მეტი ნული.

განვიხილავთ რა დიფერენციალური

$$y''(x) + a^2 y(x) = 0$$

განტოლების ორ წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ამონახსნს:

$$y_1(x) = \cos kx, \quad y_2(x) = \sin kx,$$

დავინახავთ, რომ ამ ამონახსნების ნულებს აქვს შემდეგი თვისება: ერთი ამონახსნის ორ მიმდევრობით ნულს შორის ძევს ერთი და მხოლოდ ერთი ნული მეორე ამონახსნისა. გამოკვლევა გვიჩვენებს, რომ ასეთივე თვისება აქვს რხევადი ამონახსნების მქონე ყოველ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს.

შტურმის თეორემა. თუ x_0 და x_1 არის მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y''(x) + P(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0 \tag{4.9}$$

განტოლების $x = y_1(x)$ ამონახსნის ორი მიმდევრობითი ნული, მაშინ იმავე განტოლების ყოველ მეორე წრფივად დამოუკიდებელ $y = y_2(x)$ ამონახსნს აქვს ზუსტად ერთი ნული, რომელიც ძევს x_0-სა და x_1-ს შორის.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y = y_1(x)$ და $y = y_2(x)$ (4.9) განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნია. ვიგულისხმებთ, რომ $y = y_1(x)$ ამონახსნს აქვს ორი x_0 და x_1 მიმდევრობითი ნული:

$$y_1(x_0) = 0,\ y_1(x_1) = 0 \ \text{ და } \ y_1(x) \neq 0, \ \text{ როცა } \ x_0 < x < x_1.$$

დავამტკიცოთ, რომ არსებობს მეორე $y = y_2(x)$ ამონახსნის ერთი და მხოლოდ ერთი ნული $\overline{x}$, რომელიც ძევს $y = y_1(x)$ ამონახსნის ნულებს შორის.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $y_2(x) \neq 0$ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $x_0 < x < x_1$ შუალედში. ვთქვათ, გარკვეულობისათვის, რომ $y_2(x) > 0$ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, $x_0 < x < x_1$. $[x_0, x_1]$ სეგმენტის ბოლოებზე $y_2(x)$ განსხვავებულია ნულისაგან: $y_2(x_0) \neq 0$, $y_2(x_1) \neq 0$; მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ ამონახსნების ვრონსკიანი:

$$w(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

ნულის ტოლი იქნება, რაც ეწინააღმდეგება $y_1(x)$ და $y_2(x)$ ამონახსნების წრფივად დამოუკიდებლობას. რადგან $w(x)$ არ უდრის ნულს, ამიტომ იგი ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ (x_0, x_1) შუალედში $w(x) > 0$. განვიხილოთ იგივეობა:

$$-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{w(x)}{y_2^2(x)}.$$

გავამრავლოთ ამ იგივეობის ორივე მხარე dx-ზე და შევასრულოთ მიღებული ტოლობის ინტეგრება $[x_0, x_1]$ შუალედზე, მივიღებთ:

$$-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{w(x)}{y_2^2}\,dx.$$

აქ, პირობის თანახმად, მარცხენა მხარე ნულის ტოლია, ხოლო მარჯვენა მხარე დადებითი, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, შტურმის თეო-

რემა მართებულია. ამგვარად, არსებობს წერტილი $\bar{x}$, $x_0 < \bar{x} < x_1$, რომელშიაც $y_2(\bar{x}) = 0$, ამასთან, ასეთი წერტილი ერთი და მხოლოდ ერთია. რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ შევუცვლიდით y_1 და y_2-ს როლებს, ვიპოვიდით $\bar{x}$ წერტილს, $x_0 < \bar{x} < x_1$, რომელშიც $y_1(\bar{x}) = 0$. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომ x_0 და x_1 წარმოადგენენ $y_1(x)$ ამონახსნის ნულებს. თეორემა დამტკიცებულია.

შტურმის თეორემა საშუალებას გვაძლევს, შევადაროთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნების რხევითი ხასიათი. ასე რომ, თუ ერთ-ერთი კერძო ამონახსნის რხევითი ხასიათი ცნობილია, მაშინ ამით ცნობილი იქნება მეორე კერძო ამონახსნის რხევითი ხასიათი.

კერძოდ, (4.9) განტოლების ორივე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი რხევითია (a, b) შუალედში, თუ ერთ მათგანს ამ შუალედში აქვს ორზე მეტი ნული.

2. შტურმის შედარების თეორემა. ზემოთ განვიხილეთ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რხევითი ხასიათი. განვიხილოთ, მაგალითად, ასეთი ორი განტოლება:

$$y'' + 9y = 0 \quad \text{და} \quad z'' + 16z = 0$$

თუ შევადარებთ ერთმანეთს ამ განტოლებათა ამონახსნებს: $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$; $z_1 = \cos 4x$, $z_2 = \sin 4x$, დავინახავთ, რომ პირველი განტოლების ნებისმიერი ამონახსნის ორ ნულს შორის ძევს მეორე განტოლების ნებისმიერი ამონახსნის ერთი ნული მაინც.

ანალოგიური თვისება ახასიათებს შემდეგი უფრო ზოგადი სახის ორი სხვადასხვა მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებსაც:

$$y''(x) + q_1 y(x) = 0, \; z''(x) + q_2 z(x) = 0,$$

სადაც q_1 და q_2 დადებითი მუდმივი რიცხვებია, ამასთან, $q_2 > q_1$.

აღნიშნული თვისება ახასიათებს, აგრეთვე, ორი სხვადასხვა ცვლადკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებს. ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

შედარების თეორემა. *თუ მოცემულია ორი განტოლება:*

$$L_1[y] = y''(x) + q_1(x)\,y(x) = 0 \quad \text{და} \quad L_2[z] = z''(x) + q_2(x)\,z(x) = 0, \tag{4.10}$$

სადაც $q_1(x)$ *და* $q_2(x)$ *ფუნქციები უწყვეტია* $[a, b]$ *შუალედში და* $q_2(x) \geqslant q_1(x)$, *როცა* $a \leqslant x \leqslant b$, *მაშინ პირველი*

განტოლების ნებისმიერი $y=\overline{y}(x)$ ამონახსნის ყოველ ორ მიმდევრობით ნულს შორის ძევს მეორე განტოლების ნებისმიერი $z=\overline{z}(x)$ ამონახსნის ერთი ნული მაინც, თუ ამ ნულებს შორის შუალედში არსებობს წერტილები, რომლებშიც $zq_2(x)>q_1(x)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y_1(x)$ არის პირველი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი, $L_1[y_1(x)]=0$; x_0 და x_1 ამ $y_1(x)$ ამონახსნის ორი მიმდევრობითი ნულია და $z(\overline{x})$ არის $L_2[z]=0$ განტოლების რომელიმე ამონახსნი, უნდა დავამტკიცოთ, რომ (x_0, x) შუალედში არსებობს წერტილი $(x=x^*,\ x_0<x^*<x_1$, რომლისათვის $\overline{z}(x^*)=0$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $z(\overline{x})\neq 0$ (x_0, x_1) შუალედში. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ: რომ $\overline{y}(x)>0$ და $\overline{z}(x)>0$ (x_0, x_1) შუალედში. ამ შუალედის ბოლოებზე $y(x)$ ფუნქცია ხდება ნული, ხოლო $\overline{z}(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი არაუარყოფითია. დავწეროთ შემდეგი იგივეობანი:

$$\overline{y}''(x)+q_1(x)\overline{y}(x)=0,$$

$$\overline{z}''(x)+q_2(x)\overline{z}(x)=0.$$

თუ ამ იგივეობებს შესაბამისად გავამრავლებთ $\overline{z}(x)$ და $\overline{y}(x)$-ზე და მეორეს გამოვაკლებთ პირველს, მივიღებთ:

$$\overline{y}''(x)\overline{z}(x)-\overline{z}''(x)\overline{y}(x)=[q_2(x)-q_1(x)]\overline{y}(x)\overline{z}(x),$$

ანუ

$$[\overline{y}''(x)\overline{z}(x)-\overline{z}(x)\overline{y}(x)]'=[q_2(x)-q_1(x)]\overline{y}(x)\overline{z}(x).$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ dx-ზე და შევასრულოთ ინტეგრება $[x_0, x_1]$ შუალედზე, ამასთან, მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\overline{y}(x_0)=\overline{y}(x_1)=0$, მივიღებთ:

$$\overline{y}'(x_1)\overline{z}(x_1)-\overline{y}'(x_0)\overline{z}(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}[q_2(x)-q_1(x)]\overline{y}(x)\overline{z}(x)\,dx. \quad (4.11)$$

რადგანაც $\overline{y}(x_0)=0$ და $\overline{y}(x)>0$ $[x_0, x_1]$ შუალედში, ამიტომ $\overline{y}'(x_0)>0$.

მართლაც, თუ $\overline{y}'(x_0) = 0$, მაშინ ფუნქცია $\overline{y}(x)$ და მისი წარმოებული $x = x_0$ წერტილზე ერთდროულად იქნება ნული, მაგრამ, არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, $y(x)$ ფუნქცია იქნება (4 . 10)-დან პირველი განტოლების ნულოვანი ამონახსნი, რაც ჩვენ დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამას გარდა, რადგან $\overline{y}'(x_1) < 0$ და $\overline{z}(x_0) \geqslant 0$, $\overline{z}(x_1) \geqslant 0$, ამიტომ (4 . 11) ტოლობის მარცხენა ნაწილი არადადებითია მაშინ, როცა მარჯვენა ნაწილი დადებითია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

ადარებენ რა ერთმანეთს (4 . 10) განტოლებების ამონახსნების რხევით ხასიათს, ამბობენ, რომ მეორე განტოლების ამონახსნები უფრო მეტი რხევითი ხასიათისაა, ვიდრე პირველი განტოლების ამონახსნები.

ჩვეულებრივად, შედარების თეორემის გამოყენებისას (4 . 10) განტოლებებიდან ერთ-ერთის მაგიერ აიღებენ მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$y''(x) + a^2 y(x) = 0.$$

IX თავი

ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

§ 1. ძირითადი ცნებანი

წინა თავებში განვიხილეთ სხვადასხვა რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებანი და შევისწავლეთ ასეთ განტოლებათა ინტეგრების მეთოდები.

შევნიშნავთ, რომ ტექნიკის სხვადასხვა დარგში — მექანიკაში, ელექტროტექნიკაში, კერძოდ რადიოტექნიკაში, ხშირად საქმე აქვთ ისეთ პროცესებთან, რომელთა მათემატიკურ აღწერას მივყავართ ერთი x დამოუკიდებელი ცვლადის რამდენიმე უცნობი ფუნქციის განსაზღვრამდე, მასთან, ეს ფუნქციები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა გარკვეული თანაფარდობებით. ამ ფუნქციების განსაზღვრისათვის უნდა განვიხილოთ არა ერთი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, არამედ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა რამდენიმე უცნობი ფუნქციით, ამასთან, განტოლებათა რიცხვი უნდა ეტოლებოდეს უცნობ ფუნქციათა რიცხვს.

მექანიკიდან განვიხილოთ ამოცანა, რომელსაც მივყავართ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე.

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი, რომლის მასა არის m, მოძრაობს რომელიღაც F ძალის მოქმედებით, რომლის F_x, F_y, F_z გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე დამოკიდებულია t დროზე, წერტილის x, y, z კოორდინატებსა და წერტილის სიჩქარეზე მოცემულ t მომენტში, ე. ი.

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\text{-ზე.}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ F_y &= f_2\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ F_z &= f_3\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი რომ ვიპოვოთ, უნდა ვიპოვოთ x, y, z, როგორც t-ს ფუნქციები. მაშასადამე, აქ ჩვენ გვექნება t-ს სამი უცნობი ფუნქცია: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

ამ ფუნქციების მოსაძებნად უნდა შევადგინოთ სამი განტოლება. ამ განტოლებებს მივიღებთ, თუ მოქმედი ძალის გეგმილებს ამა თუ იმ საკოორდინატო ღერძზე გავუტოლებთ მოძრავი წერტილის აჩქარების გეგმილებს ამავე ღერძზე, გამრავლებულს წერტილის m მასაზე:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z,$$

ანუ

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{1}{m}f_1\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{1}{m}f_2\left(f,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{1}{m}f_3\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\tag{1.2}$$

ამგვარად, მივიღეთ სამი დიფერენციალური განტოლების სისტემა. ეს სისტემა გვაძლევს დამოკიდებულებას სამ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ ფუნქციებსა და t-ს მიმართ მათ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს შორის. თუ ეს ფუნქციები მოძებნილია, მაშინ

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

წარმოადგენს მოძრავი მატერიალური წერტილის ტრაექტორიის პარამეტრულ განტოლებას.

ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში, ე. ი. როცა ტრაექტორია არის ბრტყელი წირი, $x=x(t)$ და $y=y(t)$ ფუნქციების განსაზღვრისათვის მივიღებთ 2 განტოლების სისტემას:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),$$

ამასთან, ჩვეულებრივად მოცემული იქნება წერტილის საწყისი მდებარეობა: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ და წერტილის საწყისი სიჩქარე: $x'(t_0)=x_0'$, $y'(t_0)=y_0'$,

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა.

განსაზღვრა 1. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ეწოდება განტოლებათა ერთობლიობას, რომლებიც აკავშირებს x დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადის რამდენიმე უცნობ ფუნქციას:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots y_n(x)$$

და ამ უცნობი ფუნქციების წარმოებულებს რომელიმე რიგამდე ჩათვლით.

ამგვარად, ზოგადი სახე ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისა არის:

$$\begin{aligned}
&F_1(x;\ y_1,\ y_2,\cdots,y_n;\ y_1',\ y_2',\cdots,y_n',\cdots,y_1^{(m_1)},\ y_2^{(m_2)},\cdots,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_n^{(m_n)})=0,\\
&F_2(x;\ y_1,\ y_2,\cdots,y_n;\ y_1',\ y_2',\cdots,y_n',\cdots,y_1^{(m_1)},\ y_2^{(m_2)},\cdots,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_n^{(m_n)})=0,\\
&F_n(x;\ y_1,\ y_2,\cdots,y_n;\ y_1',\ y_2',\cdots,y_n';\cdots,y_1^{(m_1)},\ y_2^{(m_2)},\cdots,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_n^{(m_n)})=0,
\end{aligned}\tag{1.3}$$

რომლებიც აკავშირებს x დამოუკიდებელ ცვლადს, n უცნობ ფუნქციას: $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ და მათ წარმოებულებს შესაბამისად m_1, $m_2,\cdots,m_n$ რიგამდე.

შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ (1.3) სისტემის განტოლებათა რიცხვი ეტოლება უცნობ ფუნქციათა რიცხვს.

განსაზღვრა 2. (1.3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის თითოეული განტოლების რიგი ეწოდება მასში შემავალი წარმოებულის უმაღლეს რიგს, ხოლო განტოლებათა სისტემის რიგი ეწოდება მასში შემავალი უცნობი ფუნქციების წარმოებულების უმაღლესი რიგების ჯამს.

ასე, მაგალითად, (1.3) სისტემა არის $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

კერძოდ, განვიხილოთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც, გარდა x დამოუკიდებელი ცვლადისა, შე-

დის ამ ცვლადზე დამოკიდებული სამი $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ უცნობი ფუნქცია და მათი მიმდევრობითი წარმოებულები მესამე რიგამდე ჩათვლით:

$$F_i(x, y_1, y_1', y_1'', y_1'''; y_2, y_2', y_2'', y_2'''; y_3, y_3', y_3'', y_3''') = 0$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

ეს სისტემა წარმოადგენს მე-9 რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

განსაზღვრა 3. (1.3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსენი ეწოდება n ფუნქციის ერთობლიობას:

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x),$$

რომლებიც ჩასმული სისტემის თითოეულ განტოლებაში, მას გადააქცევს იგივეობად.

(1.3) სისტემის ყველა ამონახსნის მოძებნის პროცესს განტოლებათა სისტემის ინტეგრება ეწოდება.

§ 2. დიფერენციალურ განტოლებათა კანონიკური სისტემები

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ერთი დამოუკიდებელი x ცვლადის რამდენიმე

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

უცნობი ფუნქციით ეწოდება კანონიკური სისტემა, თუ განტოლებათა რიცხვი უცნობ ფუნქციათა რიცხვის ტოლია და სისტემა ამოხსნილია განტოლებებში შემავალი უცნობი ფუნქციების უმაღლესი რიგის წარმოებულების მიმართ.

ამგვარად, თუ (1.3) სისტემა შეიძლება ამოიხსნას მასში შემავალი ყოველი უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულის: $y_1^{(m_1)}$, $y_2^{(m_2)}$, $y_n^{(m_n)}$-ის მიმართ, და ასეთ ამოხსნას შევასრულებთ, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა კანონიკურ სისტემას:

$$\frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}} = f_1(x; y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_{1-1})};\ y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_{2-1})}, \dots, y_n, y_n' \dots y_n^{(m_{n-1})}),$$

$$\frac{d^{m_2}y_2}{dx^{m_2}} = f_2(x; y_1, y_1', \dots y_1^{(m_{1-1})};\ y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_{2-1})}; \dots y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_{n-1})}), \tag{2.1}$$

$$\frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}} = f_n(x; y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_{1-1})};\ y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_{2-1})}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_{n-1})}),$$

პრაქტიკაში უმთავრესად გვხვდება ან კანონიკური სისტემები, ან სისტემები, რომლებიც ადვილად დაიყვანება კანონიკურ ფორმაზე.

კანონიკური სისტემის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ერთი n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ამოხსნილია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

მართლაც, ზემოთ ვნახეთ, რომ ახალი უცნობი ფუნქციების შემოტანით

$$y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

(2.2) განტოლება დაიყვანება n განტოლების შემდეგ სისტემაზე

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.3) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს განტოლებათა შემდეგი სისტემის:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

კერძო შემთხვევას. (2.4) სისტემას ეწოდება **დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემა**. ამასთან იგულისხმება, რომ განტოლებათა რიცხვი ეტოლება უცნობ ფუნქციათა რიცხვს.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} &\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dz}{dx} - x = 0, \\ &\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + y^3 - 2x = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ვუჩვენოთ, რომ (2 . 5) სისტემა არის კანონიკური სისტემა. მართლაც, სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{dy}{dx} - y^2 + 2x.$$

ახლა თუ $\frac{dz}{dx}$-ის ამ გამოსახულებას შევიტანთ (2.5) სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} + y^2 - x.$$

მაშასადამე, (2 . 5) სისტემა არის კანონიკური სისტემა, რადგანაც ის ამოიხსნება მასში შემავალი ყოველი უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} + y^2 - x,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{dy}{dx} - y^2 + 2x.$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^3 z}{dx^3} - 3y = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dx^2} + 2y^2 = 0,$$

ეს სისტემა არ ამოიხსნება მასში შემავალი უცნობი ფუნქციების უმაღლესი რიგის წარმოებულების მიმართ.

მაშასადამე, იგი არ იქნება კანონიკური სისტემა.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემა, ამასთან, ნებისმიერი რიგისა, შეიძლება დაყვანილ იქნეს განტოლებათა ახალ სისტემაზე, რომელიც შეიცავს უცნობი ფუნქციების მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს.

დამტკიცება. მართლაც, სიმარტივისათვის განვიხილოთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აკავ-

შირებს x დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადზე დამოკიდებულ სამ უცნობ ფუნქციას: $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, და მათ მიმდევრობით წარმოებულებს რომელიმე რიგამდე.

ვთქვათ, გვაქვს დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემა[1]:

$$F_i(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(k)}; y_2, y_2', y_2'', \dots, y_2^{(l)}; y_3, y_3', y_3'', \dots, y_3^{(m)}) = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3) \tag{2.6}$$

რომლის რიგი $n = k + l + m$.

ვაჩვენოთ, რომ (2.6) სისტემა შეიძლება დაყვანილ იქნეს დიფერენციალურ განტოლებათა ახალ სისტემაზე, რომელიც შეიცავს უცნობი ფუნქციების მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს.

ახალ უცნობ ფუნქციებად მივიღოთ ფუნქციათა შემდეგი სისტემები:

$$\begin{aligned} &y_1(x),\ y_1'(x),\ y_1''(x), \dots, y_1^{(k-1)}(x),\\ &y_2(x),\ y_2'(x),\ y_2''(x), \dots, y_2^{(l-1)}(x),\\ &y_3(x),\ y_3'(x),\ y_3''(x), \dots, y_3^{(m-1)}(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

მაშინ გვექნება:

$$y_1^{(k)}(x) = \frac{dy_1^{(k-1)}(x)}{dx},$$

$$y_2^{(l)}(x) = \frac{dy_2^{(l-1)}(x)}{dx},$$

$$y_3^{(m)}(x) = \frac{dy_3^{(m-1)}(x)}{dx}.$$

ცხადია, (2.6) სისტემის განტოლებებიდან თითოეული შეიცავს ახალი უცნობი ფუნქციების წარმოებულებს, არა უმეტეს პირველი რიგისა.

შემდეგ, ახალი უცნობი ფუნქციების განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს:

$$y_1'(x) = \frac{dy_1}{dx},\quad y_1''(x) = \frac{dy_1'}{dx}, \dots, y_1^{(k-1)}(x) = \frac{dy_1^{(k-2)}}{dx},$$

$$y_3'(x) = \frac{dy_2}{dx},\quad y_2''(x) = \frac{dy_2'}{dx}, \dots, y_2^{(l-1)}(x) = \frac{dy_2^{(l-2)}}{dx},$$

$$y_3'(x) = \frac{dy_3}{dx},\quad y_3''(x) = \frac{dy_3'}{dx}, \dots, y_3^{(m-1)}(x) = \frac{dy_3^{(m-2)}}{dx}$$

---

[1] ვიგულისხმებთ, რომ (2.6) სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია უცნობი ფუნქციების უმაღლესი რიგის წარმოებულების მიმართ.

თუ ამ განტოლებებს შევუერთებთ მოცემულ განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ განტოლებათა ისეთ სისტემას, რომელშიც თითოეული განტოლება ახალი საძიებელი ფუნქციების მიმართ იქნება არა უმაღლესი პირველი რიგისა:

$$F_1\left(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'',\ \dots,\ y_1^{(k-1)},\ \frac{dy_1^{(k-1)}}{dx};\ y_2,\ y_2',\ \dots,\ y_2^{(l-1)},\ \frac{dy_2^{(l-1)}}{dx};\right.$$

$$\left.y_3,\ y_3',\ \dots,\ y_3^{(m-1)},\ \frac{dy^{(m-1)}}{dx}\right)=0,$$

$$y_1'(x)=\frac{dy_1}{dx},\quad y_1''(x)=\frac{dy_1'}{dx},\ \dots,\ y_1^{(k-1)}(x)=\frac{dy_1^{(k-2)}}{dx},$$

$$F_2\left(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'',\ \dots,\ y_1^{(k-1)},\ \frac{dy_1^{(k-1)}}{dx};\ y_2,\ y_2',\ \dots,\ y_2^{(l-1)},\ \frac{dy_2^{(l-1)}}{dx},\right.$$

$$\left.y_3,\ y_3',\ \dots,\ y_3^{(m-1)},\ \frac{dy^{(m-1)}}{dx}\right)=0, \qquad (2.8)$$

$$y_2'(x)=\frac{dy_2}{dx},\quad y_2''(x)=\frac{dy_2'}{dx},\ \dots,\ y_2^{(l-1)}(x)=\frac{dy_2^{(l-2)}}{dx},$$

$$F_3\left(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'',\ \dots,\ y_1^{(k-1)},\ \frac{dy^{(k-1)}}{dx};\ y_2,\ y_2',\ \dots,\ y_2^{(l-1)},\ \frac{dy^{(l-1)}}{dx};\right.$$

$$\left.y_3,\ y_3',\ \dots,\ y_3^{(m-1)},\ \frac{dy^{(m-1)}}{dx}\right)=0,$$

$$y_3'(x)=\frac{dy_3}{dx},\ y_3''(x)=\frac{dy_3'}{dx},\ \dots,\ y_3^{(m-1)}(x)=\frac{dy_3^{(m-2)}}{dx}.$$

(2 . 8) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ახალი (2 . 7) უცნობი ფუნქციებით:

$$y_1,\ y_1',\ y_1'',\ \dots,\ y_1^{(k-1)},$$

$$y_2,\ y_2',\ y_2'',\ \dots,\ y_2^{(l-1)},$$

$$y_3,\ y_3',\ y_3'',\ \dots,\ y_3^{(m-1)}.$$

ამასთან, განტოლებათა რიცხვი ეტოლება უცნობ ფუნქციათა რიცხვს. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 2. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ნებისმიერი (ყოველი) კანონიკური სისტემა დაიყვანება პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალურ სისტემაზე.

დამტკიცება. მართლაც, (2.8) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ეკვივალენტურია დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემისა, რომელსაც მივიღებთ, თუ (2.8) სისტემაში შემავალ განტოლებებს:

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ F_3 = 0$$

შევცვლით მათი ტოლფასი, უცნობი ფუნქციების პირველი რიგის წარმოებულების მიმართ ამოხსნილი შესაბამისი განტოლებებით; ე. ი. ეკვივალენტურია სისტემისა:

$$y_1'(x) = \frac{dy_1}{dx}, \ y_1''(x) = \frac{dy_1'}{dx}, \ldots, y_1^{(k-1)}(x) = \frac{dy_1^{(k-2)}}{dx},$$

$$y_2'(x) = \frac{dy_2}{dx}, \ y_2''(x) = \frac{dy_2'}{dx}, \ldots, y_2^{(l-1)}(x) = \frac{dy_2^{(l-2)}}{dx},$$

$$y_3'(x) = \frac{dy_3}{dx}, \ y_3''(x) = \frac{dy_3'}{dx}, \ldots, y_3^{(m-1)}(x) = \frac{dy_3^{(m-2)}}{dx},$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1^{(k-1)}}{dx} &= f_1(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k-1)}; \ y_2, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(l-1)}; \\ &\qquad y_3, y_3', y_3'', \ldots, y_3^{(m-1)}), \\ \frac{dy_2^{(l-1)}}{dx} &= f_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k-1)}; \ y_2, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(l-1)}; \\ &\qquad y_3, y_3', y_3'', \ldots, y_3^{(m-1)}), \\ \frac{dy_3^{(m-1)}}{dx} &= f_3(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k-1)}; \ y_2, y_2', y_2'', \ldots y_2^{(l-1)}; \\ &\qquad y_3, y_3', y_3'', \ldots, y_3^{(m-1)}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

მეორე მხრივ, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, დიფერენციალურ განტოლებათა ნებისმიერი რიგის ნებისმიერი სისტემა და მათ შორის ნებისმიერი კანონიკური სისტემაც, დაიყვანება (2.8) სისტემაზე, რომელიც, თავის მხრივ, ეკვივალენტურია (2.9) ნორმალური სისტემისა. აქედან გამომდინარეობს თეორემის მართებულობა.

ამიტომ შემდეგში განვიხილავთ მხოლოდ პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებს, რომლებიც შეი-

ცავს x დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადის n უცნობ ფუნქციას: $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ და მათი პირველი რიგის წარმოებულებს. ამასთან, სისტემის განტოლებათა რიცხვი უტოლება უცნობ ფუნქციათა რიცხვს[1].

§ 3. დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემები

ზოგადი სახე პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისა არის:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n,\ y_1',\ y_2', \dots, y_n') = 0,\\
&F_2(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n,\ y_1',\ y_2', \dots, y_n') = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F_n(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n,\ y_1',\ y_2', \dots, y_n') = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო $y_1, y_2, \dots y_n$ — უცნობი ფუნქციები, ვიგულისხმებთ, რომ $F_1, F_2, \dots, F_n$ თავიანთი არგუმენტების მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია, განსაზღვრული $(2n+1)$ განზომილებიანი სივრცის რაიმე დახურულ D არეში.

განსაზღვრა 1. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა კანონიკურ სისტემას, ე. ი. სისტემას, რომელიც ამოხსნილია უცნობი ფუნქციების პირველი რიგის წარმოებულების მიმართ, ეწოდება დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემა.

ამგვარად, ზოგადი სახე დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემისა n უცნობი ფუნქციით არის:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n),\\
&\frac{dy_2}{dx} = f_2(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

---

[1] ეს რიცხვი განსაზღვრავს სისტემის ზოგად ინტეგრალში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვს და, მაშასადამე, შეიძლება განვიხილოთ როგორც კანონიკური სისტემის დამახასიათებელი რიცხვი. ცხადია, ნორმალური სისტემის უცნობ ფუნქციათა რიცხვის მისაღებად, რომელზედაც დაიყვანება კანონიკური სისტემის რიგი, უნდა შევკრიბოთ კანონიკური სისტემის ყველა უცნობი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლესი რიგი.

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — უცნობი ფუნქციები, ხოლო $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ ფუნქციები განსაზღვრული და უწყვეტია $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ სივრცის რაიმე $(n+1)$-განზომილებიან $\overline{D}$ არეში.

განსაზღვრა 2. (3 . 2) სისტემის განტოლებათა რიცხვს ამ სისტემის რიგი ეწოდება. ამგვარად, (3 . 2) სისტემა წარმოადგენს n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალურ სისტემას.

განსაზღვრა 3. (3.2) სისტემის ამონახსენი რაიმე (a, b) შუალედში ეწოდება დიფერენცირებადი n ფუნქციის

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots, \; y_n = \varphi_n(x)$$

ყოველ ერთობლიობას, რომლებიც ჩასმული (3.2) სისტემის განტოლებებში, ყველა განტოლებას გადააქცევს იგივეობად.

მაგალითი 1. განვიხილოთ განტოლებათა ნორმალური სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= y. \end{aligned} \tag{3.3}$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ორი დიფერენცირებადი ფუნქციის ერთობლიობა

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}, \\ z &= C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}, \end{aligned}$$

სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, წარმოადგენს (3 . 3) სისტემის ამონახსენს.

1. **სისტემის ინტეგრალური მრუდი.** დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემა n უცნობი ფუნქციით: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც განზოგადება წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისა, რომელიც ერთ უცნობ ფუნქციას შეიცავს:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3.4}$$

(3.4) განტოლების $y = \varphi(x)$ ამონახსენი xOy სიბრტყეზე გეომეტრიულად წარმოადგენს რომელიღაც მრუდს, რომელსაც (3 . 4) განტოლების **ინტეგრალური მრუდი** ეწოდება.

ანალოგიურად,

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z),$$
$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \tag{3.5}$$

ნორმალური სისტემის ამონახსნი, ე. ი. $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$ წყვილი ფუნქცია, შეიძლება განვიხილოთ, როგორც რომელიღაც მრუდი სამგანზომილებიან xyz სივრცეში. ამ მრუდს უწოდებენ (3.5) სისტემის ინტეგრალურ მრუდს ამ სივრცეში.

იმ შემთხვევაში, როცა $n>2$, (3.2) ნორმალური სისტემის ამონახსნი:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x) \tag{3.5'}$$

ანალოგიური წესით არ შეიძლება გამოისახოს რაიმე მრუდით სამგანზომილებიანი სივრციდან გამოუსვლელად.

თუმცა, თუ განვაზოგადებთ მრუდის ცნებას $(n+1)$-განზომილებიანი სივრცისათვის, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (3.2) ნორმალური სისტემის ამონახსნი (3.5) გეომეტრიულად წარმოადგენს (3.2) სისტემის ინტეგრალურ მრუდს $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ ცვლადების $(n+1)$-განზომილებიან სივრცეში.

2. საწყისი პირობები. ვიტყვით, რომ (3.2) სისტემის (3.5′) ამონახსნი აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y_1 = y_1^\circ, \quad y_2 = y_2^\circ, \dots, y_n = y_n^\circ, \quad \text{როცა} \quad x = x_0, \quad \text{თუ}$$
$$\varphi_1(x_0) = y_1^\circ, \quad \varphi_2(x_0) = y_2^\circ, \dots, \varphi_n(x_0) = y_n^\circ.$$

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალური მრუდი (3.5′) გაივლის $(n+1)$-განზომილებიანი სივრცის $(x_0, y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_n^\circ)$ წერტილზე.

(3.2) სისტემის ინტეგრება ნიშნავს, განვსაზღვროთ $y_1, y_2, \dots, y_n$ უცნობი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებს (3.2) სისტემას და მოცემულ საწყის პირობებს:

$$y_1 = y_1^\circ, \; y_2 = y_2^\circ, \dots, y_n = y_n^\circ, \; \text{როცა} \; x = x_0.$$

3. კოშის ამოცანა. (3.2) ნორმალური სისტემისათვის კოშის ამოცანა მოცემულ საწყის პირობებში $x_0, y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_n^\circ$ დაისმის შემდეგნაირად:

(3.2) სისტემის ამონახსნებს შორის ვიპოვოთ ისეთი ამონახსნი, რომელიც x არგუმენტის მოცემული x_0 მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y_1 = y_1^\circ, \; y_2 = y_2^\circ, \dots, y_n = y_n^\circ.$$

(3.2) ნორმალური სისტემისათვის ადგილი აქვს კოშის თეორემას ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, რომელიც ანალოგიურია ასეთივე თეორემისა $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ განტოლებისათვის.

კოშის თეორემის დამტკიცება ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, პირველი რიგის ორი დიფერენციალური განტოლების სისტემის შემთხვევაში, მოცემულია V თავში (§ 3).

ანალოგიურად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ კოშის თეორემა (3.2) ნორმალური სისტემის შემთხვევაში.

§ 4. დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის ინტეგრება უმაღლესი რიგის ერთ დიფერენციალურ განტოლებაზე დაყვანის გზით

დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის ინტეგრების დაყვანა უმაღლესი რიგის ერთი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე, წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის ინტეგრების ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს.

ზემოთ (თავი V, § 2) ვნახეთ, რომ n-ური რიგის ყოველი დიფერენციალური განტოლება:

$$y^{(n)}(x)=f(x,\ y',\ y'',\dots,y^{(n-1)}) \tag{4.1}$$

შეიძლება შეცვლილ იქნეს მისი ეკვივალენტური n პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემით. შევნიშნავთ, რომ გარკვეულ პირობებში მართებულია შებრუნებული მტკიცებაც.

თეორემა. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ყოველი ნორმალური სისტემა:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\dots,y_n),\\
\frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\dots,y_n),\\
&\ \ \vdots\\
\frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\dots,y_n)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

n, $y_1(x),\ y_2(x),\dots,y_n(x)$ უცნობი ფუნქციით, ყოველთვის დაიყვანება (4.1) წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი ერთი n-ური რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე, ერთი უცნობი ფუნქციით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მართლაც, ავიღოთ (4 . 2) სისტემის პირველი განტოლება და მისი ორივე ნაწილი გავაწარმოოთ x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \quad \frac{dy_n}{dx},$$

ანუ, თუ შევცვლით $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, ..., $\frac{dy_n}{dx}$ წარმოებულებს მათი $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ გამოსახულებებით, (4.2) სისტემიდან მივიღებთ:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

ე. ი. შემდეგი სახის ტოლობას:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n).$$

ახლა, თუ ამ განტოლებას გავაწარმოებთ x-ით და ხელახლა გამოვიყენებთ (4 . 2) სისტემის განტოლებებს. მივიღებთ:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{dx} + \frac{\partial F_2}{dy_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dx^3} = F_3(x, \ y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

და ა. შ. თუ ანალოგიურად გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n);$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n).$$

უკანასკნელი განტოლებები ამოვწეროთ (4 . 2) სისტემის პირველ განტოლებასთან ერთად, მაშინ მივიღებთ განტოლებათა ახალ სისტემას:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_1(x, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n), \tag{4.3}$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_n).$$

(4 . 3) სისტემის პირველი (n—1) განტოლებიდან, საზოგადოდ, შეიძლება $y_2, y_3, \dots, y_n$ — (n — 1) უცნობი ფუნქცია გამოვსახოთ x-ით, y_1 ფუნქციით და მისი $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ მიმდევრობითი წარმოებულების საშუალებით.
მაშინ გვექნება:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \Phi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}),\\
y_3 &= \Phi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}),\\
&\dots\\
y_n &= \Phi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (4 . 3) სისტემის უკანასკნელ განტოლებაში, მივიღებთ $y_1(x)$ უცნობი ფუნქციის მიმართ ერთი n-ური რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^ny}{dx} = f(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \tag{4.5}$$

თუ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ფუნქციათა ერთობლიობა (4 . 2) ნორმალური სისტემის ამონახსნია, მაშინ $y_1(x)$ აკმაყოფილებს (4 . 5) განტოლებას. პირიქით, თუ y_1 (4 . 5) განტოლების ამონახსნია, მაშინ, ვიპოვით რა $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$-ს და ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს $y_2, y_3, \dots, y_n$ ფუნქციებისათვის (4 . 4) თანაფარდობებში, ამით განვსაზღვრავთ ყველა ამ ფუნქციას. შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ ასეთნაირად მიღებული $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს (4 . 2) ნორმალურ სისტემას.

ახლა, ვთქვათ, (4 . 5) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაწერილია სახით:

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{4.6}$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. მაშინ, რომ განვსაზღვროთ დანარჩენი უცნობი ფუნქციები: $y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, საკმარისია $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ფუნქცია და მისი მიმდევრობითი წარმოებულები (n—1) რიგამდე ჩათვლით:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = g_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n),\\
\frac{d^2y_1}{dx^2} &= \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = g_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n),\\
&\dots\\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^n} &= \frac{\partial^{n-1}\varphi_1}{\partial x^{n-1}} = g_{n-1}(x, C_1, C_2, \dots, C_n).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

(4 . 7) ჩავსვათ (4 . 4) სისტემის მარჯვენა ნაწილში. ამგვარად, მივიღებთ ფუნქციათა სისტემას:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\
y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\
&\dots\dots\dots\dots \\
y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

ადვილად შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ (4.8) ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს (4 . 2) პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის საძიებელ ზოგად ამონახსნს.

ამგვარად, (4 . 2) განტოლებათა ნორმალური სისტემის ინტეგრების ამოცანა დაიყვანება $y_1(x)$ უცნობი ფუნქციის მიმართ n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ამოცანაზე, რომლის რიგი ეტოლება (4. 2) სისტემის განტოლებათა რიცხვს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. რადგან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ყოველი კანონიკური სისტემა დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალურ სისტემაზე, ამიტომ მისი ინტეგრებაც დაიყვანება ერთი უცნობი ფუნქციის მიმართ უმაღლესი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე, რომლის რიგი ეტოლება კანონიკური სისტემის რიგს.

დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის ინტეგრების ამოცანის დაყვანა ერთი უმაღლესი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე წარმოადგენს ნორმალური სისტემის ინტეგრების ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს.

განვიხილოთ ამ მეთოდის ილუსტრირება მაგალითებზე.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y - 2z,$$

ნორმალური სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ვიპოვოთ მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რომელზედაც ეს სისტემა დაიყვანება. გავაწარმოოთ სისტემის პირველი განტოლება x-ით:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx},$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y - 2z = -2y - 2\frac{dy}{dx}.$$

ამგვარად, მოცემული ნორმალური სისტემის ინტეგრება დაიყვანება მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0. \tag{4.9}$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება.

მახასიათებელ განტოლებას:

$$l(k) = k^2 + 2k + 2 = 0$$

აქვს ფესვები: $k_1 = -1 + i$, $k_2 = -1 - i$.

მაშასადამე, (4 . 9) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

ახლა ვიპოვოთ $z(x)$ ფუნქცია. რადგანაც

$$\frac{dy}{dx} = z(x), \quad \text{ამიტომ}$$

$$z(x) = -e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x),$$

ანუ

$$z(x) = e^{-x}[(C_2 - C_1)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x].$$

ამგვარად, მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$z(x) = e^{-x}[(C_2 - C_1)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x].$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} &= 3y - z \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის მეორე განტოლება გავაწარმოოთ x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}, \tag{4.11}$$

სისტემის მეორე განტოლებიდან გვექნება:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} + z\right). \tag{4.12}$$

თუ (4.11) და (4.12) შევიტანთ (4.10) სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx} + z = 0. \tag{4.12'}$$

$(k) = k^2 - 2k + 1 = 0$ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ფესვები:

$$k_1 = k_2 = 1.$$

მაშასადამე, (4 . 12) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x(2C_1 + C_2 + 2C_2 x),$$

$$z(x) = e^x(C_1 + C_2 x),$$

ადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 8. ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემა:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z},$$
$$\frac{dz}{dx} = y. \tag{4.13}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (4 . 13) სისტემის მეორე განტოლება გავაწარმოოთ ით, მივიღებთ:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$

უკანასკნელ განტოლებაში $\frac{dy}{dx}$ შევცვალოთ მისი გამოსახულებით სტემის პირველი განტოლებიდან, მაშინ

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{y^2}{z}.$$

აქედან, (4 . 13) სისტემის მეორე განტოლების თანახმად, გვექნება:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z}.$$

მიღებული განტოლება ცხადი სახით არ შეიცავს x დამოუკიდებელ ცვლადს და შეიძლება მისი რიგის დაწევა. მართლაც, ზოგადი თეორიის თანახმად, მივიღოთ $p = \frac{dz}{dx} = z'$ საძიებელ ფუნქციად, ხოლო z — დამოუკიდებელ ცვლადად, მაშინ

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = p\,\frac{dp}{dz},$$

და ჩვენი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$p\,\frac{dp}{dz} = \frac{p^2}{z}, \tag{4.14}$$

საიდანაც

$$p = C_1 z,$$

ანუ

$$\frac{dz}{dx} = C_1 z, \qquad \frac{dz}{z} = C_1\,dx,$$

$$z = C_1\,e^{C_1 x} \tag{4.15}$$

რადგანაც $\frac{dz}{dx} = y$, ამიტომ (4.15) გამოსახულების x-ის მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ:

$$y\,(x) = C_1\,C_2\,e^{C_1 x}$$

ამგვარად, მოცემული სისტემის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}, \qquad z = C_2 e^{C_1 x}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. საზოგადოდ სისტემის ერთი უცნობი ფუნქციის მოძებნის შემდეგ დანარჩენი უცნობი ფუნქციები უნდა ვეძებოთ გაწარმოებისა და გამორიცხვის გზით, რაც ყოველთვის შესაძლებელია ახალი ინტეგრების გარეშე.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{dy}{dx} = z + u, \quad \frac{dz}{dx} = y + u, \quad \frac{du}{dx} = y + z.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის პირველი განტოლება გავაწარმოოთ x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dx}=(y+u)+(y+z),$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2y+u+z.$$

ახლა, თუ გამოვრიცხავთ z-ს და u-ს

$$\frac{dy}{dx}=u+z,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2y+z+u$$

განტოლებებიდან, მივიღებთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას y-ის მიმართ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ მის ზოგად ინტეგრალს:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}. \tag{4.16}$$

აქედან გვაქვს:

$$\frac{dy}{dx}=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}$$

და

$$z(x)=\frac{dy}{dx}-u=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}-u. \tag{4.17}$$

მოცემული სისტემის უკანასკნელ განტოლებაში ჩავსვათ $y(x)$-ის და $z(x)$-ის გამოსახულებანი (4 . 16) და (4 . 17) ფორმულების მიხედვით, მაშინ $u(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{du}{dx}+u(x)=3C_2e^{2x}. \tag{4.18}$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ მის ზოგად ინტეგრალს:

$$u(x)=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

მაშასადამე, მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x},$$
$$z(x)=e^{-x}(C_1-C_3)+C_2e^{2x}.$$
$$u(x)=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

მაგალითი 5. იპოვეთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის:

$$\frac{dy_1}{dx}+5y_1+y_2=e^x,$$

$$\frac{dy_2}{dx}+3y_2-y_1=e^{2x}.$$

ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ სისტემის ერთ განტოლებაზე დაყვანის მიზნით უნდა ამოვირჩიოთ ახალი უცნობი ფუნქცია. მივიღოთ, მაგალითად, $y_1=y_1(x)$ ახალ უცნობ ფუნქციად. მაშინ

$$\frac{dy_1}{dx}=e^x-5y_1-2y_2.$$

ეს უკანასკნელი განტოლება გავაწარმოოთ x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=e^x-5\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_2}{dx}, \tag{4.19}$$

ანუ

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=24y_1+8y_2-4e^x-e^{2x}. \tag{4.20}$$

სისტემის I და (4 . 20) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ $y_2=y_2(x)$ ფუნქცია:

$$\left.\begin{aligned}&y_2=e^x-5y_1-\frac{dy_1}{dx},\\&\frac{d^2y_1}{dx^2}+8\frac{dy_1}{dx}+16y_1=4e^x-e^{2x}.\end{aligned}\right. \tag{4.21}$$

მივიღეთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება. შევეცადოთ და წინასწარ ვიპოვოთ მისი კერძო ამონახსნი, ამასთან, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y_1=Ae^x+Be^{2x}$$

ფუნქციის სახით, სადაც A და B ორი ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივია.

გვექნება:

$$\frac{dy_1}{dx}=Ae^x+2Be^{2x},\quad \frac{d^2y_1}{dx^2}=Ae^x+4Be^{2x}. \tag{4.22}$$

(4.22) გამოსახულებანი ჩავსვათ (4.21) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$25A\,e^{x}+36B\,e^{2x}=4e^{x}-e^{2x}.$$

მაშასადამე, შეიძლება მივიღოთ:

$$25A=4,\quad 36B=-1$$

და მაშინ მივიღებთ კერძო ამონახსნს სახით:

$$y_0(x)=\frac{4}{25}e^{x}-\frac{1}{36}e^{2x}.$$

შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქცია $u=u\,(x)$, მივიღოთ:

$$y_1(x)=y_0(x)+u\,(x). \tag{4.23}$$

(4 . 23)-ის ჩასმით (4 . 21) განტოლებაში მოგვცემს:

$$u''(x)+8u'(x)+16\,u\,(x)=0. \tag{4.24}$$

(4 24)-ის მახასიათებელ განტოლებას:

$$k^2+8k+16=0$$

აქვს ტოლი ნამდვილი ფესვები: $k=k_2=-4$.
მაშასადამე, (4.24) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$u\,(x)=(C_1+C_2x)\,e^{-4x}.$$

ამიტომ:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=y_1(x)=\frac{4}{25}e^{x}-\frac{1}{36}e^{2x}+(C_1+C_2x)\,e^{-4x}\\ y_2&=y_2(x)=e^{x}-5y_1-\frac{dy_1}{dx}=\frac{1}{25}e^{x}+\frac{7}{36}e^{2x}-\\ &\qquad -(C_1+C_2x)\,e^{-4x}-C_2\,e^{4x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

(4 . 25) წარმოადგენს მოცემული სისტემის ზოგად ამონახსნს.

§ 5. წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებს, რომლებიც წრფივია უცნობი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულების მიმართ.

განსაზღვრა 1. დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალურ სისტემას:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ეწოდება წრფივი, თუ $f_1, f_2, \dots, f_n$ ფუნქციები წრფივია $y_1, y_2, \dots, y_n$ უცნობი ფუნქციების მიმართ.

ამგვარად, დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემის ზოგადი სახეა:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= P_{11}(x)\,y_1 + P_{12}(x)\,y_2 + \cdots + P_{1n}(x)\,y_n + q_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= P_{21}(x)\,y_1 + P_{22}(x)\,y_2 + \cdots + P_{2n}(x)\,y_n + q_2(x), \\ \frac{dy_n}{dx} &= P_{n1}(x)\,y_1 + P_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + P_{nn}(x)\,y_n + q_n(x), \end{aligned} \tag{5.1}$$

სადაც $P_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, 3, \dots, n)$, $q_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე $[a, b]$ შუალედში. (5.1) სისტემას ეწოდება არაერთგვაროვანი, თუ $q_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ ფუნქციებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. თუ (5.1) სისტემაში შემავალი ყველა $q_k(x)$ ფუნქცია (a, b) შუალედში იგივურად ნულის ტოლია: $q_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, მაშინ (5.1) სისტემას წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა ეწოდება. მაშასადამე, წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= P_{11}(x)\,y_1(x) + P_{12}(x)\,y_2(x) + \cdots + P_{n1}(x)\,y_n(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= P_{21}(x)\,y_1(x) + P_{22}(x)\,y_2(x) + \cdots + P_{2n}(x)\,y_n(x), \\ \frac{dy_n}{dx} &= P_{n1}(x)\,y_1(x) + P_{n2}(x)\,y_2(x) + \cdots + P_{nn}(x)\,y_n(x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

აქ მარჯვენა ნაწილები წარმოადგენს წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციებს $y_1(x),\ y_2(x), \dots, y_n(x)$-ის მიმართ.

(5.2) სისტემას ეწოდება (5.1) სისტემის შესაბამისი წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა.

(5.2) ტიპის სისტემამდე მიეყავართ n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნას. ახალი უცნობი ფუნქციების შემოყვანის გზით n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$y^{(n)}(x) + P_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + P_2(x)\,y^{(n-2)}(x) + \dots + P_{n-1}(x)\,y'(x) + \\ + P_n(x)\,y(x) = 0$$

დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ წრფივ ერთგვაროვან სისტემაზე:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= -P_1(x)\,y_n(x) - P_2(x)\,y_{n-1}(x) - \dots - P_{n-1}(x)\,y_2(x) - P_n(x)\,y_1(x). \end{aligned} \tag{5.3}$$

პირიქით, (5.2) სახის წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა ისე, როგორც ეს ზემოთ ნორმალური სისტემის ზოგად შემთხვევაში იყო ნაჩვენები, უცნობი ფუნქციების გამორიცხვით შეიძლება დაყვანილ იქნეს ერთი უცნობი ფუნქციის მიმართ (მაგალითად, y_1-ის მიმართ) n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე.

დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემის ზოგადი თეორია სრულიად ანალოგიურია n-ური რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგადი თეორიისა. დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემებისათვის არსებობს კარგად დამუშავებული ზოგადი თეორია. სადაც შეისწავლება განტოლებათა ამ სისტემების ამონახსნების ძირითადი თვისებები, ზოგადი ამონახსნის აგებულება, არაერთგვაროვანი წრფივი სისტემებისათვის მუდმივების ვარიაციის მეთოდი და სხვ.

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ განსაზღვრებას და დავამტკიცებთ მხოლოდ ზოგიერთ თეორემას წრფივი სისტემების შემთხვევაში.

განსაზღვრა 2. n ფუნქციის ყოველ ერთობლიობას

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x),$$

რომლებიც განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია $(a,\ b)$ შუალედში, ეწოდება

(5.2) სისტემის ამონახსნი ამ შუალედში, თუ იგი იგივურად აკმაყოფილებს (5.2) სისტემის ყველა განტოლებას.

მაგალითი. მოცემულია ორი განტოლების სისტემა:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 2y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3y_2. \qquad (5.4)$$

უშუალოდ ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ სისტემის ამონახსნებია:

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = -e^x \quad (-\infty < x < \infty).$$

(5.4) სისტემას აქვს სხვა ამონახსნებიც. მაგალითად, ამონახსნები იქნება:

$$y_1(x) = e^{5x}, \quad y_2(x) = e^{5x}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

და აგრეთვე

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{5x},$$
$$y_2(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{5x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

თეორემა დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ. ისე როგორც ერთი n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, (5.1) წრფივი სისტემისათვის ადგილი აქვს ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემას.

თეორემა. თუ (5.1) სისტემის მარჯვენა ნაწილში შემავალი $P_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ და $q_k(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ არსებობს (5.1) სისტემის ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი:

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x), \qquad (5.5)$$

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y_1 = y_1^\circ, \; y_2 = y_2^\circ, \ldots, y_n = y_n^\circ, \text{ როცა } x = x_0,$$

$a < x_0 < b$, სადაც x_0 $[a, b]$-ს ნებისმიერი წერტილია, ხოლო საძიებელი ფუნქციების საწყისი მნიშვნელობანი: $y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ$ ნებისმიერი მოცემული

რიცხვებია. ეს ამონახსნი (5.5) განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია მთელ $[a, b]$ შუალედში.

სიმარტივისათვის ეს თეორემა დავამტკიცოთ $n=2$-სათვის.

განვიხილოთ წრფივი სისტემა:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= P_{11}(x)\, y(x) + P_{12}(x)\, z(x) + q_1(x), \\
\frac{dz}{dx} &= P_{21}(x)\, y(x) + P_{22}(x)\, z(x) + q_2(x).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

ვიგულისხმოთ, რომ სისტემის ყველა $P_{ik}(x)$ $(i, k=1, 2)$ კოეფიციენტი და $q_k(x)$ $(k=1, 2)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ შუალედში.

დავამტკიცოთ, რომ არსებობს (5.6) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი:

$$
y = y(x), \quad z = z(x), \tag{5.7}
$$

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$
y = y_0, \quad z = z_0, \text{ როცა } x = x_0, \quad x_0 \in [a, b],
$$

სადაც $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$ საძიებელი ფუნქციების ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობებია. ეს ამონახსნი განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია $[a, b]$ შუალედში.

მართლაც, განსახილველ შემთხვევაში (5.6) წრფივი სისტემის მარჯვენა ნაწილები უწყვეტია x, y და z-ის მიმართ,

$$
a \leqslant x \leqslant b, \quad |y| < +\infty, \quad |z| < +\infty
$$

არეში, და ამ არეში y-ის და z-ის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, რადგან (5.6) სისტემის მარჯვენა ნაწილების კერძო წარმოებულები y-ით და z-ით $P_{ik}(x)$ $(i, k=1, 2)$ უწყვეტი ფუნქციების ტოლია და, მაშასადამე, შემოსაზღვრულია $[a; b]$ შუალედში.

V თავში (§ 3) ორი განტოლების ნორმალური სისტემის შემთხვევაში დამტკიცებული თეორემა ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ (5.6) სისტემას, როგორც მის კერძო შემთხვევას, აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$
y = y(x), \quad z = z(x),
$$

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$
y_0 = y(x_0), \quad z = z(x_0), \quad a < x_0 < b,
$$

ამასთან, იგი განსაზღვრული და უწყვეტად დიფერენცირებადია მთელ $[a, b]$ შუალედში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების თვისებები. ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის აგება

განვიხილოთ წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა ზოგადი სახით:

$$\frac{dy_1}{dx}=P_{11}(x)\,y_1(x)+P_{12}(x)\,y_2(x)+\cdots+P_{1n}(x)\,y_n(x)+q_1(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx}=P_{21}(x)\,y_1(x)+P_{22}(x)y_2(x)+\cdots+P_{2n}(x)y_n(x)+q_2(x), \tag{6.1}$$

$$\frac{dy_n}{dx}=P_{n1}(x)\,y_1(x)+P_{n2}(x)\,y_2(x)+\cdots+P_{nn}(x)\,y_n(x)+q_n(x),$$

სადაც $P_{ik}(x)$ და $q_k(x)$ $(i,\ k=1,\ 2,\dots,n)$ x-ის უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე $[a,\ b]$ შუალედში, მაშასადამე, ამ შუალედში შემოსაზღვრული ფუნქციებია. ზემოთ, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, არსებობს (6.1) სისტემის ამონახსნი:

$$y_i=y_i(x)\quad(i=1,\ 2,\dots,n),$$

რომელიც ცალსახად განისაზღვრება საწყისი პირობებით:

$$y_i(x_0)=y_i^0\quad(i=1,\ 2,\dots,n)\quad(a<x_0<b).$$

ამგვარად, (6.1) სისტემის ყოველი ამონახსნი წარმოადგენს ამ სისტემის კერძო ამონახსნს. შევნიშნავთ, რომ (6.1) სისტემას არ აქვს განსაკუთრებული ამონახსნები.

თუ (6.1) სისტემის ყველა $q_i(x)$ $(i=1,\ 2,\dots,n)$ ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია $(a,\ b)$ შუალედში, ე. ი. $q_i(x)\equiv 0$, მაშინ (6.1) სისტემას ერთგვაროვანი ეწოდება. ამ შემთხვევაში (6.1) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n}P_{ik}(x)\,y_k(x)\quad(i=1,\ 2,\dots,n); \tag{6.2}$$

რადგან (6.1) სისტემის ზოგადი ამონახსნის აგება დაიყვანება წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის აგებაზე, ამიტომ ჩვენ ჯერ განვიხილავთ (6.2) სისტემის ამონახსნების ძირითად თვისებებს და ამ სისტემის ზოგადი ამონახსნის აგების საკითხს.

1. (6.2) სისტემის ამონახსნებს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები, რომლებიც ანალოგიურია n-ური

რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების თვისებებისა.

თეორემა 1. თუ

$$y_i = y_i^{(1)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(6.2) ერთგვაროვანი სისტემის რაიმე კერძო ამონახსნია, მაშინ

$$y_i = C\, y_i^{(1)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{6.3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს ამ სისტემის ამონახსნს.

თეორემა 2. თუ

$$y_i = y_i^{(1)}(x)$$

და $$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i = y_i^{(2)}(x)$$

წარმოადგენს (6.2) სისტემის რაიმე ორ ამონახსნს, მაშინ

$$Y_i = C_1 y_i^{(1)}(x) + C_2 y_i^{(2)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{6.4}$$

სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, იქნება აგრეთვე ამ სისტემის ამონახსნი.

ამ თეორემების მართებულობას ადვილად დავამტკიცებთ (6.3) და (6.4) ამონახსნების უშუალოდ ჩასმით (6.2) ერთგვაროვან სისტემაში[1].

თეორემა 3. თუ ნამდვილკოეფიციენტიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა (6.2) სისტემას აქვს რაიმე კომპლექსური ამონახსნი:

$$y_1 = u_1(x) + i\,v_1(x),\ y_2 = u_2(x) + i\,v_2(x), \dots, y_n = u_n(x) + i\,v_n(x),$$

მაშინ ამ ამონახსნის ნამდვილი ნაწილები:

$$u_k = u_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$v_k = v_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

იქნება ამ სისტემის ორი ნამდვილი ამონახსნი.

---

1 ანუ $\dfrac{dy_i}{dx} - \sum\limits_{k=1}^{n} P_{ik}(x)\, y_k(x) = 0$ განტოლებაში $(i = 1, 2, \dots, n)$.

ეს თეორემა მტკიცდება ისე, როგორც n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევაში $y_k = u_k(x) + i\,v_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ კომპლექსური ამონახსნის უშუალო ჩასმით (6 . 2) განტოლებაში.

2. **წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის წრფივად დამოკიდებული და წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები.**

ვთქვათ, ცნობილია (6.2) წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის კერძო ამონახსნები:

$$
\begin{array}{l}
y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x), \\
y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x), \dots, y_n^{(2)}(x), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x), \dots, y_n^{(n)}(x).
\end{array}
\tag{6.5}
$$

განსაზღვრა 1. (6 . 5) **სახის ამონახსნების სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი** (a, b) **შუალედში, თუ არსებობს ერთდროულად ნულისაგან განსხვავებული** $C_1, C_2, \dots, C_n$ **მუდმივი რიცხვების ისეთი ერთობლიობა, რომ** (a, b) **შუალედში ადგილი აქვს იგივეობებს:**

$$
\begin{array}{l}
C_1 y_1^{(1)}(x) + C_2 y_2^{(1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(1)}(x) \equiv 0 \\
C_1 y_1^{(2)}(x) + C_2 y_2^{(2)}(x) + \dots + C_n y_n^{(2)}(x) \equiv 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_1 y_1^{(n)}(x) + C_2 y_2^{(n)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x) \equiv 0;
\end{array}
\tag{6.6}
$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, (6,5) სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული (a, b) შუალედში. ამ შემთხვევაში (6 . 6) იგივეობები მართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთი მაინც $C_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

განსაზღვრა 2. (6 . 2) **წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნების** (6 . 5) **სისტემას მისი ფუნდამენტური სისტემა ეწოდება.**

ვთქვათ, (6,5) ფუნქციათა სისტემიდან თითოეული წარმოადგენს (6,2) სისტემის ამონახსნს.

თეორემა 4. თუ (6.2) სისტემის n ამონახსნი

$$y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x), \ldots, y_n^{(1)}(x),$$

$$y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x), \ldots, y_n^{(2)}(x),$$

$$y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x), \ldots, y_n^{(n)}(x)$$

წრფივად დამოკიდებულია (a, b) შუალედში, მაშინ ამ ამონახსნების ვრონსკის დეტერმინანტი ტოლია ნულისა მთელ (a, b) შუალედში, ე. ი.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(2)}(x) \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad a < x < b.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, (6.2) სისტემის კერძო ამონახსნების (6.5) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია (a, b) შუალედში. ვაჩვენოთ, რომ (6.5) ამონახსნთა ამ სისტემისათვის ვრონსკის დეტერმინანტი:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(2)}(x) \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

მთელ (a, b) შუალედში.

მართლაც, თეორემის პირობის თანახმად, გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(1)}(x) \equiv 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(2)}(x) \equiv 0, \tag{6.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)}(x) \equiv 0,$$

სადაც ყველა $C_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. ახლა, ვთქვათ, $x = x_0$, (a, b) შუალედის ნებისმიერი წერტილია. თუ $x = x_0$ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (6.7) სისტემაში, მივიღებთ წრფივ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომელსაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$-ის მიმართ ექნება არანულოვანი ამონახსნები, მაგრამ მაშინ, როგორც უმაღლესი ალგებრიდან არის ცნობილი, (6.7) სისტემის დეტერმინანტის მნიშვნელობა $x = x_0$ წერტილზე ნულის ტოლია, $W(x_0) = 0$. რადგან x_0 (a, b) შუალედის ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ $W(x) \equiv 0$ მთელ (a, b) შუალედში.

ისე, როგორც n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, სრულიად ანალოგიური მსჯელობით, შეგვიძლია დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა, ე. ი. თუ $W(x) \equiv 0$, როცა $a < x < b$, მაშინ ამონახსნების (6 . 5) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია (a, b) შუალედში.

მართლაც ამ შემთხვევაში, ცნობილი თეორემის თანახმად, (6 . 2) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები იქნება ფუნქციები:

$$y_1(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(1)}(x),$$

$$y_2(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(2)}(x), \tag{6.8}$$

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)}(x),$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომელთაგან ყველა არ არის ნულის ტოლი. ახლა $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივები შევარჩიოთ ისე, რომ დაკმაყოფილდეს შემდეგი საწყისი პირობები:

$$y_i(x_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.9}$$

სადაც $x = x_0$, (a, b) შუალედის ნებისმიერი წერტილია. მაგრამ ასეთსავე საწყის პირობებს დააკმაყოფილებს მოცემული (6 . 2) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი:

$$y_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ამიტომ, ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(1)}(x) \equiv 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(2)}(x) \equiv 0, \tag{6.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)}(x) \equiv 0.$$

უკანასკნელი ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს (6 . 9) საწყის პირობებს. მაშასადამე, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(1)}(x_0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(2)}(x_0) = 0, \tag{6.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{n}(x_0) = 0.$$

პირობის თანახმად, (6 . 11) სისტემის $W(x_0)$ დეტერმინანტი ნულის ტოლია. ამიტომ, უმაღლესი ალგებრიდან ცნობილი თეორემის თანახმად, (6.11) სისტემას $C_1, C_2, \ldots, C_n$-ის მიმართ ექნება არანულოვანი ამონახსნები, ე. ი. ადგილი ექნება (6 . 10) იგივეობებს, როცა ყველა C_i არ უდრის ნულს. მაშასადამე, (6 . 2) სისტემის კერძო ამონახსნების (6 . 8) სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. თუ (6 . 2) სისტემის n ამონახსნი (6 . 5) წრფივად დამოუკიდებელია (a, b) შუალედში, მაშინ ამ ამონახსნების ვრონსკის დეტერმინანტი $w(x) \neq 0$ მთელ (a, b) შუალედში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $W(x_0)=0$, სადაც $x_0 \in (a, b)$ შუალედის ნებისმიერი წერტილია. შევადგინოთ n განტოლების სისტემა:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(k)}(x_0) = 0 \tag{6.12}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულს ეტოლება. რადგან იგი $W(x_0)$-ის ტოლია, ამიტომ (6.12) სისტემას ექნება არანულოვანი ამონახსნები: $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0, \ldots, C_n=C_n^0$. რადგან (6.5) წარმოადგენს (6.2) სისტემის n ამონახსნს, ამიტომ (6 . 2) სისტემის ამონახსნი იქნება აგრეთვე

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_i^{(1)}(x),$$

$$y_2 = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_i^{(2)}(x), \tag{6.13}$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_i^{(n)}(x),$$

რომელსაც $x = x_0$ წერტილში ექნება ნულოვანი საწყისი მნიშვნელობანი:

$$y_1(x_0) = 0,\ y_2(x_0) = 0, \ldots, y_n(x_0) = 0.$$

მაგრამ, მაშინ ერთადერთობის თეორემის თანახმად, (6 . 13) ამონახსნი წარმოადგენს ნულოვან ამონახსნს:

$$y_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ასე რომ:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_i^{(k)}(x) \equiv 0 \qquad (a < x < b)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

სადაც ყველა $C_i^{(0)}$ არ უდრის ნულს, ე. ი. (6.5) ამონახსნები წრფივად დამოკიდებულია (a, b) შუალედში, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

ისე როგორც ერთი n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, (6.2) წრფივი ერთგვაროვანი სისტემისათვის მართებულია შემდეგი თეორემა.

ძირითადი თეორემა. n წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას n უცნობი ფუნქციით

$$\frac{dy_1}{dx} = P_{11}(x)\,y_1(x) + P_{12}(x)\,y_2(x) + \cdots + P_{1n}(x)\,y_n(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = P_{21}(x)\,y_1(x) + P_{22}(x)\,y_2(x) + \cdots + P_{2n}(x)\,y_n(x),$$

$$\frac{dy_n}{dx} = P_{n1}(x)\,y_1(x) + P_{n2}(x)\,y_2(x) + \cdots + P_{nn}(x)\,y_n(x)$$

$P_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ კოეფიციენტების უწყვეტობის (a, b) შუალედში აქვს ზუსტად n წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი

$$y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x);\ y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x), \dots, y_n^{(2)}(x); \dots$$

$$\dots, y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x), \dots, y_n^{(n)}(x). \tag{6.14}$$

ყოველი სხვა ამონახსნი წარმოადგენს (6.14) ფუნდამენტურ სისტემაში შემავალი ამონახსნების წრფივ კომბინაციას:

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i\,y_i^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ, x იცვლება (a, b) შუალედში, სადაც (6.2) სისტემის $P_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ კოეფიციენტები უწყვეტია. მაშინ (6.2) სისტემის ამონახსნი არსებობს და უწყვეტად დიფერენცირებადია (a, b) შუალედში. კერძოდ, არსებობს და უწყვეტია ამონახსნები:

$$
\begin{array}{l}
y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x), \ldots, y_n^{(1)}(x), \\
y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x), \ldots, y_n^{(2)}(x), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x), \ldots, y_n^{(n)}(x),
\end{array}
\qquad (*)
$$

რომლებიც $(a,\ b)$ შუალედის x_0 წერტილში განსაზღვრულია შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$
\begin{array}{l}
y_1^{(1)}(x_0) = 1,\ y_2^{(1)}(x_0) = 0, \ldots, y_n^{(1)}(x_0) = 0, \\
y_1^{(2)}(x_0) = 0,\ y_2^{(2)}(x_0) = 1, \ldots, y_n^{(2)}(x_0) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_1^{(n)}(x_0) = 0,\ y_2^{(n)}(x_0) = 0, \ldots, y_n^{(n)}(x_0) = 1.
\end{array}
\qquad (6.15)
$$

ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, თუ გვაქვს:

$$
\begin{array}{l}
C_1 y_1^{(1)}(x) + C_2 y_2^{(1)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(1)}(x) = 0, \\
C_1 y_1^{(2)}(x) + C_2 y_2^{(2)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(2)}(x) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_1 y_1^{(n)}(x) + C_2 y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(n)}(x) = 0.
\end{array}
$$

მაშინ ამ n განტოლებიდან, როცა $x=x_0$ (6.15)-ის თანახმად, უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $C_i=0$ $(i=1,\ 2, \ldots, n)$, ე. ი. (*) ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, და, მაშასადამე, წარმოადგენს (6.2) წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ფუნდამენტურ სისტემას $(a,\ b)$ შუალედში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (6.2) სისტემის ყოველი სხვა ამონახსნი

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

წრფივად გამოისახება (6.14) ფუნდამენტურ სისტემაში შემავალი ამონახსნების საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ, $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ არის რომელიმე სხვა ამონახსნი, რომელიც $x=x_0$ წერტილში ღებულობს გარკვეულ მნიშვნელობებს:

$$y_1(x_0) = C_1,\ y_2(x_0) = C_2, \ldots, y_n(x_0) = C_n, \qquad (6.16)$$

მაგრამ, მაშინ ფუნქციათა სისტემა:

$$Y_k(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(k)}(x) \qquad (6.17)$$

$$(k = 1,\ 2, \ldots, n)$$

იქნება (6.2) წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს იმავე საწყის პირობებს, რასაც $y_i(x)$ ($i=1, 2, \ldots, n$), მართლაც, თუ (6,17)-ში მივიღებთ $x=x_0$, მაშინ (6.15) საწყისი პირობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$Y_1(x_0)=C_1,\ Y_2(x_0)=C_2, \ldots; Y_n(x_0)=C_n.$$

მაშასადამე, ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად:

$$y_k(x)=Y_k(x) \quad (k=1,\ 2, \ldots, n).$$

ე. ი.

$$y_1(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(1)}(x),$$

$$y_2(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(2)}(x),$$

$$y_n=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)}(x)$$

წარმოადგენს (6.2) წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგად ამონახსნს.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. ამგვარად, (6.2) ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის მოძებნა დაიყვანება (6.14) სისტემის მოძებნაზე.

შენიშვნა 2. თეორემის დამტკიცებისას არაა სავალდებულო ავიღოთ საწყისი პირობების სისტემა: (1,0, ... , 0), (0,1,0, ... , 0). (0,0, ... 0,1). 1-ისა და 0-ის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერი n^2 რიცხვი, რომელთაგან შედგენილი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. აქედან, ცხადია, რომ არსებობს (6.2) ერთგვაროვანი სისტემის ფუნდამენტური სისტემების უსასრულო რიცხვი.

თეორემა 6. (6.2) *ერთგვაროვან სისტემას არ შეიძლება ჰქონდეს n-ზე მეტი წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი.*

ეს თეორემა მტკიცდება ისევე, როგორც ანალოგიური თეორემა უმაღლესი რიგის (n-ური რიგის) წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებებისათვის.

§ 7. წრფივი არაერთგვაროვანი სისტემები

(6 1) წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების ინტეგრება შეიძლება დაყვანილ იქნეს შესაბამისი (6 . 2) ერთგვაროვანი სისტემების ინტეგრებაზე. წინასწარ განვიხილოთ, როგორი აგებულება აქვს არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი სისტემა (6 . 1):

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{kl}(x)\, y_l(x) + q_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

ვთქვათ, ცნობილია ამ სისტემის რომელიღაც კერძო ამონახსნი:

$$y_1 = y_1^{(1)}(x),\ y_2 = y_2^{(1)}(x), \ldots, y_n = y_n^{(1)}(x).$$

შემოვიტანოთ ახალი ფუნქციები: $u_1(x),\ u_2(x), \ldots, u_n(x)$ შემდეგი ფორმულებით:

$$y_k(x) = y_k^{(1)}(x) + u_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

თუ ამ ფუნქციებს ჩავსვამთ (6 . 1) არაერთგვაროვან სისტემაში, მივიღებთ:

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{du_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{kl}(x)\, y_l^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} P_{kl}(x)\, u_k(x) + q_k(x) \quad (7.1)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

აქედან:

$$\frac{d\, y_k^{(1)}}{dx} \equiv \sum_{i=1}^{n} P_{kl}(x)\, y_l^{(1)}\, x + q_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

იგივეობათა თანახმად, მივიღებთ:

$$\frac{du_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{kl}(x)\, u_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7.2)$$

ეს სისტემა წარმოადგენს (6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას.

ვთქვათ,

$$u_1^{(1)}(x),\ u_2^{(1)}(x), \ldots, u_n^{(1)}(x),$$

$$u_1^{(2)}(x),\ u_2^{(2)}(x), \ldots, u_n^{(2)}(x),$$

$$u_1^{(n)}(x),\ u_2^{(n)}(x), \ldots, u_n^{(n)}(x)$$

(7 . 2) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების რომელიღაც ფუნდამენტური სისტემაა. მაშინ:

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

იქნება (7 . 2) ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

მაშასადამე,

$$y_k(x) = y_k^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

განსაზღვრავს (6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგად ამონახსნს.

ამგვარად, (6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ მისი ერთი რომელიმე კერძო ამონახსნი და მას მივუმატოთ შესაბამისი (7 . 2) ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ისე როგორც ერთი უმაღლესი რიგის წრფივი განტოლების შემთხვევაში, (7 1) არაერთგვარი სისტემის ინტეგრება შესაძლებელია აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდით.

მართებულია

თეორემა 1. თუ ცნობილია (6 . 2) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ (6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მოიძებნოს კვადრატურებით.

დამტკიცება. განვიხილოთ n არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა n უცნობი ფუნქციით:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{ki}(x)\, y_i(x) + q_k(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

ვთქვათ,

$$y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x),$$

$$y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x), \dots, y_n^{(2)}(x),$$

$$y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x), \dots, y_n^{(n)}(x)$$

(6 . 2) არაერთგვაროვანი სისტემის კერძო ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემაა.

(6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(k)}(x) \qquad (7.3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც $y_i^{(k)}(x)$ $(i,\ k=1, 2, \dots, n)$ (6.2) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემაა, ხოლო $C_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ x-ის რომელიღაც უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციები. ეს ფუნქციები ამოვირჩიოთ ისე, რომ (7,3) ფორმულები გვაძლევდეს (6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგად ამონახსნს.

ჩავსვათ (7 . 3) ფორმულები (6 . 1) სისტემაში, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{ki}(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(k)}(x) + q_k(x)$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \left[y_i'^{(k)}(x) - \sum_{i=1}^{n} P_{ki}(x)\, y_i^{(k)}(x) \right] = q_k(x)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y_i^{(k)}(x)$ $(i,\ k = 1, 2, \dots, n)$ (6.2) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების ფუნდამენტური სისტემაა,

მაშინ $C_i(x)$ ფუნქციების განსაზღვრისათვის მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(k)}(x) = q_k(x) \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n),$$

ანუ

$$\frac{dC_1}{dx}\, y_1^{(1)}(x) + \frac{dC_2}{dx}\, y_2^{(1)}(x) + \cdots + \frac{dC_n}{dx}\, y_n^{(1)}(x) = q_1(x),$$

$$\frac{dC_1}{dx}\, y_1^{(2)}(x) + \frac{dC_2}{dx}\, y_2^{(2)}(x) + \cdots + \frac{dC_n}{dx}\, y_n^{(2)}(x) = q_2(x),$$

$$\frac{dC_1}{dx}\, y_1^{(n)}(x) + \frac{dC_2}{dx}\, y_2^{(n)}(x) + \cdots + \frac{dC_n}{dx}\, y_n^{(n)}(x) = q_n(x).$$

რადგან ამ სისტემის დეტერმინანტი:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) \cdots y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) \cdots y_n^{(2)}(x) \\ & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) \cdots y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

მთელს $(a,\ b)$ შუალედში, ამიტომ იგი ამოხსნადია წარმოებულების მიმართ:

$$\frac{dC_i(x)}{dx} = \varphi_i(x), \tag{7.4}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots, n),$$

სადაც $\varphi_i(x)$ $(i=1,\ 2, \ldots, n)$ წარმოადგენს ცნობილ ფუნქციებს. (7.4)-ის ინტეგრებით ვიპოვით ყველა $C_i(x)$ ფუნქციას:

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + C_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n),$$

სადაც C_i ნებისმიერი მუდმივებია. თუ $C_i(x)$ ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (7 . 3) ფორმულებში, მაშინ მივიღებთ (6 . 1) არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგად ამონახსნს სახით:

$$y_k(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)}(x) \int \varphi_i(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(k)}(x) \tag{7.5}$$

$$(k = 1,\ 2, \ldots n).$$

თუ (7 5) ფორმულაში C_i მუდმივებს მივცემთ მნიშვნელობებს: $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$, მაშინ მივიღებთ (6.1) არაერთგვაროვანი სისტემის კერძო ამონახსნს. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი სისტემები

ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{3n} y_n, \tag{8.1}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n,$$

სადაც ყველა a_{ij} კოეფიციენტი მუდმივია, ხოლო $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ დამოუკიდებელი x ცვლადის უცნობი ფუნქციებია, ეწოდება მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა.

ის წრფივია და ერთგვაროვანია $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_n(x)$ უცნობი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულების მიმართ.

როგორც ეს ზემოთ მივუთითეთ, (8 1) სისტემის კერძო ამონახსნის განსაზღვრისათვის ამ სისტემაზე შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგადი მეთოდი ყველა უცნობი ფუნქციის გამორიცხვისა, გარდა ერთისა (მაგალითად, y_1-ის); y_1-ის განსაზღვრისათვის მივიღებთ მუდმივკოეფიციენტებიან n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, ე. ი. (8 . 1) სისტემას ამოვხსნით მისი ერთი n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებაზე დაყვანის გზით (და, მაშასადამე, შეიძლება ვეძიოთ e^{kx} მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახით), თუმცა შეიძლება, (8 1) სისტემის ამონახსნი უშუალოდაც ვეძიოთ სახით:

$$y_1(x)=\alpha_1 e^{kx},\ y_2(x) = \alpha_2 e^{kx}, \dots, y_n(x) = \alpha_n e^{kx} \tag{8.2}$$

და $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ მუდმივები შევარჩიოთ ისე, რომ (8 . 2) ფუნქციების (8 . 1) სისტემაში ჩასმის შემდეგ სისტემის ყველა განტოლება გადაიქცეს იგივეობად.

1. მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრების ეილერის წესი.

(8 . 1) წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \dots, y_n = \alpha_n e^{kx},$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ მუდმივებია[1], რომლებიც ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ (8 . 2) ფუნქციები აკმაყოფილებდეს (8 . 1) სისტემას. მართლაც, თუ (8 . 2) ფუნქციებს ჩავსვამთ (8 . 1) სისტემაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} k\alpha_1 e^{kx} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n) e^{kx}, \\ k\alpha_2 e^{kx} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n) e^{kx}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ k\alpha_n e^{kx} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n) e^{kx}, \end{aligned}$$

შევკვეცავთ რა e^{kx}-ზე და ყველა წევრს გადავიტანთ მარჯვნივ, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - k)\alpha_n &= 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

(8.3) სისტემა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ უცნობების მიმართ წარმოადგენს წრფივ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. მაშასადამე, თუ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემას ექნება მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნები:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

თუმცა ჩვენ გვაინტერესებს არანულოვანი ამონახსნები, რადგან

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) \equiv 0, \dots, y_n(x) \equiv 0$$

წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა ყოველი წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის უშუალოდ ცხად ამონახსნს.

იმისათვის, რომ (8 . 3) სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნები, აუცილებელია k შევარჩიოთ ისე, რომ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს. ამგვარად, α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ რიცხვები უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას:

$$D(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{8.4}$$

---

[1] $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან.

(8.4) განტოლებას ეწოდება (8.1) სისტემის მახასიათებელი განტოლება, ხოლო მის ფესვებს — მახასიათებელი განტოლების ფესვები.

(8.4) განტოლება k-ს მიმართ წარმოადგენს n-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას. ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად, მას აქვს n ფესვი:

$$k_1,\ k_2, \dots, k_n \tag{8.5}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მახასიათებელი განტოლების ყველა $k_1, k_2, \dots k_n$ ფესვი ნამდვილი და განსხვავებულია.

ამ ფესვებიდან ყოველი k_i $(i=1,\ 2, \cdots, n)$ ფესვი ჩავსვათ (8.3) სისტემაში და განვსაზღვროთ α_i კოეფიციენტები, მივიღებთ რიცხვებს:

$$\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)} \qquad (i = 1,\ 2, \dots, n). \tag{8.6}$$

ამასთან, (8.6) რიცხვების შესაბამისად, მივიღებთ მოცემული (8.1) დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნს, თანაც k_1 ფესვისათვის (8.1) სისტემის ამონახსნია:

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1x},\ \ y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1x}, \dots, y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1x};$$

k_2 ფესვისათვის (8.1) სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2x},\ \ y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2x}, \dots, y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2x},$$

k_n ფესვისათვის (8.1) სისტემის ამონახსნია:

$$y_1^{n} = \alpha_1^{(n)} e^{k_nx},\ \ \ y_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_nx}, \dots, y_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_nx},$$

(8.1) სისტემის ამონახსნების ზემოთ აღნიშნულ თვისებათა თანახმად, ამ ამონახსნების ყოველი წრფივი კომბინაცია:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1x} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2x} + \cdots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{k_nx}, \\ y_2 &= C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1x} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2x} + \cdots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{k_nx}, \\ & \\ y_n &= C_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1x} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2x} \cdots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{k_nx}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგად

ამონახსნს $(-\infty < x < +\infty;\ -\infty < y_i < +\infty;\ i = 1, 2, \dots, n)$ უტოლობებით განსაზღვრულ D არეში.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ წრფივი სისტემის:

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 2y_2 \tag{8.8}$$

ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ სახით: $y_1 = \alpha_1 e^{kx}$ და $y_2 = \alpha_2 e^{kx}$, სადაც α_1 და α_2 მუდმივებია, რომლებიც ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $y_1 = \alpha_1 e^{kx}$, $y_2 = \alpha_2 e^{kx}$ ფუნქციები აკმაყოფილებდეს მოცემულ სისტემას. ჩავსვათ ეს ფუნქციები (8 . 8) სისტემაში და შევკვეცოთ e^{kx}-ზე, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\alpha_1(3-k) + \alpha_2 = 0,$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2(2-k) = 0. \tag{8.9}$$

(8 . 8) სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ე. ი.}$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვებია: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.

შევადგინოთ სისტემა α_1 და α_2 რიცხვების განსაზღვრისათვის, რომლებიც შეესაბამება $k_1 = 1$ მახასიათებელ რიცხვს.

ამისათვის $k_1 = 1$ ჩავსვათ (8 . 9) სისტემაში:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0. \tag{8.10}$$

აქ, როგორც მოსალოდნელი იყო, მეორე განტოლება ემთხვევა პირველს, და ის შეგვეძლო არც ამოგვეწერა. (8 . 9) სისტემის პირველ განტოლებაში მივიღებთ $\alpha_1 = 1$, მაშინ $\alpha_2 = -2$.

ამგვარად, $k_1 = 1$ მახასიათებელ რიცხვს შეესაბამება (8 . 8) სისტემის ამონახსნი:

$$y_1^{(1)} = e^x,$$
$$y_2^{(1)} = -2e^x. \tag{8.11}$$

ანალოგიურად ამოვხსნით (8 . 9) სისტემას, რომელიც შეესაბამება $k_2 = 4$ მახასიათებელ რიცხვს:

$$-\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$-2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 0.$$

ისე, როგორც ზემოთ, უკუვაგდებთ მეორე განტოლებას და ვიპოვით: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$; ასე, რომ $k_2=4$ მახასიათებელ რიცხვს შეესაბამება მოცემული სისტემის ამონახსნი:

$$y_1^{(2)}=e^{4x},$$

$$y_2^{(2)}=e^{4x}.$$

ახლა, თუ ავიღებთ კერძო ამონახსნების:

$$y_1^{(1)}=e^x, \quad y_2^{(1)}=-2e^x,$$

$$y_1^{(2)}=e^{4x}, \quad y_2^{(2)}=e^{4x}$$

წრფივ კომბინაციას სვეტების მიხედვით, მივიღებთ მოცემული წრფივი სისტემის ზოგად ამონახსნს სახით:

$$y_1=y_1(x)=C_1e^x+C_2e^{4x}$$

$$y_2=y_2(x)=-2C_1e^x+C_2e^{4x},$$

სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$\frac{dx}{dt}=y+z,$$

$$\frac{dy}{dt}=z+x, \tag{8.12}$$

$$\frac{dz}{dt}=x+y$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$x=\alpha_1e^{kt}, \quad y=\alpha_2e^{kt}, \quad z=\alpha_3e^{kt}.$$

ეს ფუნქციები ჩავსვათ სისტემის განტოლებებში და შევკვეცოთ e^{kx}-ზე, მივიღებთ სისტემას:

$$-\alpha_1k+\alpha_2+\alpha_3=0,$$

$$\alpha_3-\alpha_2k+\alpha_1=0, \tag{8.13}$$

$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3k=0.$$

(8 . 12) სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix}=0, \text{ ე. ი. } \quad k^3-3k-2=0.$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვებია: $k_1=2$, $k_2=-1$, $k_3=-1$. α_1, α_2 და α_3 რიცხვების განსაზღვრისათვის შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეესაბამება $k_1=2$ მახასიათებელ რიცხვს (ე. ი. მარტივ ფესვს):

$$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0,$$

$$-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0,$$

$$-\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0.$$

აქ მესამე განტოლება წარმოადგენს პირველი ორი განტოლების შედეგს, ამიტომ მას უკუვაგდებთ.

ამგვარად, $k_1=2$ მახასიათებელ რიცხვს α_1, α_2 და α_3 რიცხვების განსაზღვრისათვის შეესაბამება ორი დამოუკიდებელი განტოლების სისტემა, მაგალითად,

$$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$$

$$-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0.$$

აქედან, როგორც ალგებრიდან არის ცნობილი,

$$\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1:1:1.$$

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=1 \quad \text{და} \quad \alpha_3=+1.$$

ამგვარად, $k_1=2$ მახასიათებელ რიცხვს შეესაბამება (8 . 12) სისტემის ამონახსნი:

$$x_1=C_1e^{2t},\ y_1=C_1e^{2t},\ z_1=C_1e^{2t}.$$

ანალოგიურად ამოვხსნით (8 . 13) სისტემას, რომელიც შეესაბამება $k_2=k_3=-1$ მახასიათებელ რიცხვებს. ამ შემთხვევაში (8 . 13) განტოლება დაიყვანება ერთ განტოლებაზე:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

თუ მივიღებთ $\alpha_1=C_2$, $\alpha_2=C_3$, მაშინ $\alpha_3=-(C_2+C_3)$, სადაც C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია. ასე, რომ $k_2=k_3=-1$ მახასიათებელ რიცხვს შეესაბამება მოცემული (8 . 12) სისტემის ამონახსნი:

$$x_2=C_2e^{-t},\quad y_2=C_3e^{-t},\quad z_2=-(C_2+C_3)e^{-t}.$$

ამგვარად, (7 2) სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$x=x(t)=C_1e^{2t}+C_3e^{-t},$$

$$y=y(t)=c_1C^{2t}+C_2e^{-t},$$

$$z=z(t)=-(C_2+C_3)e^{-t}+C_1e^{2t}.$$

8. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მახასიათებელი განტოლების ფესვები განსხვავებულია, მაგრამ მათ შორის კომპლექსური ფესვებიცაა. ვთქვათ, (8 . 1) დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვებს შორის ორი შეუღლებული კომპლექსური ფესვია:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

ამ ფესვებს შეესაბამება კერძო ამონახსნები:

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \cdot e^{(\alpha + i\beta)x}, \; y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)x}, \dots, y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)x},$$

$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{(\alpha + i\beta)x}, \; y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{(\alpha + i\beta)x}, \dots, y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$\alpha_j^{(1)}$ და $\alpha_j^{(2)}$ კოეფიციენტები განისაზღვრება (8 . 3) სისტემიდან. მაგრამ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, კომპლექსური ამონახსნის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები აგრეთვე წარმოადგენს (8 . 1) სისტემის ამონახსნებს.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ ორ კერძო ამონახსნს:

$$\begin{aligned} y_j^{(1)} &= e^{\alpha x} (\lambda_j^{(1)} \cos\beta x - \lambda_j^{(2)} \sin\beta x), \\ y_j^{(2)} &= e^{\alpha x} (\overline{\lambda}_j^{(1)} \sin\beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)} \cos\beta x), \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{8.13'}$$

სადაც $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$ ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც განისაზღვრება $\alpha_j^{(1)}$ და $\alpha_j^{(2)}$ რიცხვების მეშვეობით.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი სისტემისა:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -7y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -2y_1 - 5y_2. \end{aligned} \tag{8.14}$$

ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{kx}.$$

ამოვწეროთ სისტემა α_1 და α_2 რიცხვების განსაზღვრისათვის:

$$\begin{aligned} \alpha_1(k+7) - \alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2(k+5) &= 0. \end{aligned} \tag{8.14'}$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{vmatrix} k+7 & -1 \\ 2 & k+5 \end{vmatrix} = 0,$$

ე. ი. $k^2+12k+37=0$. ვიპოვოთ მისი ფესვები: $k_1=-6+i$, $k_2=$ $=-6-i$.

$k_1=-6+i$ ფესვი ჩავსვათ (8.14) სისტემაში, მივიღებთ:

$$(1+i)\alpha_1-\alpha_2=0,$$
$$2\alpha_1+\alpha_2(-1+i)=0,$$

რომელთაგან მეორე განტოლება წარმოადგენს პირველის შედეგს (ვინაიდან სისტემის დეტერმინანტი უდრის ნულს). პირველი განტოლებიდან ვიპოვით: $\alpha_2=(1+i)\alpha_1$; ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ: $\alpha_1=1$, მაშინ გვექნება $\alpha_2=1+i$, ე. ი.

$$y_1^{(1)}=e^{(-6+i)x},\quad y_2^{(1)}=(1+i)\,e^{(-6+i)x}$$

მოცემული სისტემის ამონახსნია.

ანალოგიურად, (8 . 14) სისტემაში ჩავსვამთ $k_2=-6-i$ ფესვი, მაშინ მივიღებთ:

$$(1-i)\alpha_1-\alpha_2=0,$$
$$2\alpha_1+(-1-i)\alpha_2=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\alpha_2=(1-i)\alpha_1$.
ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ $\alpha_1=1$, გვექნება: $\alpha_2=1-i$, ე. ი.

$$y_1^{(2)}=e^{(-6-i)x},\quad y_2^{(2)}(1-i)\,e^{(-6-i)x}.$$

ვისარგებლოთ ეილერის ცნობილი ფორმულით: $e^{\pm i\alpha t}=\cos\alpha t+\sin\alpha t$ და ვიპოვოთ მიღებული ამონახსნების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, გვექნება:

$$y_1^{(1)}=e^{-6x}\cos x+ie^{-6x}\sin x,\ y_2^{(1)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x)+ie^{-6x}(\sin x+\cos x),$$

$$y_1^{(2)}=e^{-6x}\cos x-ie^{-6x}\sin x,\ y_2^{(2)}=e^{-6x}(\cos x+i\sin x)-ie^{-6x}(\sin x+\cos x).$$

ამგვარად (8 . 14) სისტემის ნამდვილი ამონახსნია:

$$\overline{y_1}^{(1)}=e^{-6x}\cos x,\ \overline{y_2}^{(1)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x),$$

$$\overline{y_1}^{(2)}=e^{-6x}\sin x,\ \overline{y_2}^{(2)}=e^{-6x}(\sin x+\cos x).$$

(8.14′) წრფივი სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y_1(x)=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

$$y_2(x)=e^{-6x}[C_1(\cos x-\sin x)+C_2(\sin x+\cos x)].$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ანალოგიური მეთოდით შეიძლება ვიპოვოთ უმაღლესი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების ამონახსნი.

მაგალითი 4. განვიხილოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= a_{11}\, y + a_{12}\, z, \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= a_{21}\, y + a_{22}\, z \end{aligned} \tag{8.15}$$

და ვიპოვოთ მისი ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ისე როგორც ზემოთ, აქაც ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y = \alpha_1 e^{kx}, \qquad z = \alpha_2 e^{kx}. \tag{8.16}$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (8 15) სისტემაში და შევკვეცავთ e^{kx}-ზე, α_1, α_2 და k-ს განსაზღვრისათვის მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} (a_{11} - k^2)\, \alpha_1 + a_{12}\, \alpha_2 &= 0, \\ a_{21}\, \alpha_1 + (a_{22} - k^2)\, \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \tag{8.17}$$

ნულისაგან განსხვავებული α_1 და α_2 განისაზღვრება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის დეტერმინანტი ეტოლება ნულს:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.18}$$

(8 . 18) განტოლება წარმოადგენს (8 15) სისტემის მახასიათებელ განტოლებას; k-ს მიმართ ის არის მეოთხე ხარისხის ალგებრული განტოლება. ვთქვათ, k_1, k_2, k_3 და k_4 მისი განსხვავებული ნამდვილი ფესვებია.

ყოველი k_i ფესვისათვის (8 17) სისტემიდან ვიპოვით α_1 და α_2 მნიშვნელობებს. ზოგადი ამონახსნი ანალოგიურია (8 . 7)-ისა და აქვს სახე:

$$y = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1x} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2x} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{k_3x} + C_4 \alpha_1^{(1)} e^{k_4x},$$

$$z = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1x} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2x} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{k_3x} + C_4 \alpha_2^{(1)} e^{k_4x}$$

თუ ფესვებს შორის იქნება კომპლექსური, მაშინ ყოველ კომპლექსურ ფესვს ზოგად ამონახსნში შეესაბამება (8 13) სახის გამოსახულებები.

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი:

$$\frac{d^2y}{dx} = y - 4z,$$
$$\frac{d^2z}{dx} = -y + z. \tag{8.19}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (8 . 19) სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

მისი ფესვებია: $k_1 = i,\ k_2 = -i,\ k_3 = \sqrt{3},\ \ k_4 = -\sqrt{3}$

ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{ix}, \qquad z^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{ix},$$
$$y^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{-ix}, \qquad z^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{-ix},$$
$$y^{(3)} = \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{3}x}, \qquad z^{(3)} = \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{3}x},$$
$$y^{(4)} = \alpha_1^{(4)} e^{-\sqrt{3}x}, \qquad z^{(4)} = \alpha_2^{(4)} e^{-\sqrt{3}x}$$

(8.17) სისტემიდან ვიპოვით $\alpha_1^{(j)}$ და $\alpha_2^{(j)}$:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_1^{(3)} = 1, \quad \alpha_2^{(3)} = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_1^{(4)} = 1, \quad \alpha_2^{(4)} = -\frac{1}{2}.$$

ამოვწეროთ შესაბამისი კომპლექსური ამონახსნები:

$$y^{(1)} = e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad z^{(1)} = \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x),$$

$$y^{(2)} = e^{-ix} = \cos x - i\sin x, \qquad z^{(2)} = \frac{1}{2}(\cos x - i\sin x).$$

(8 . 19) სისტემის ამონახსნები იქნება ცალკე ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$\overline{y^{(1)}} = \cos x, \qquad \overline{z^{(1)}} = \frac{1}{2}\cos x,$$

$$\overline{y^{(2)}} = \sin x, \qquad \overline{z^{(2)}} = \frac{1}{2}\sin x.$$

მაშასადამე, (9 9) სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x},$$

$$z = C_1\cdot\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}C_2\sin x - C_2\cdot\frac{1}{2}e^{\sqrt{3}x} - C_2\cdot\frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}x}$$

ჩვენ აქ არ განვიხილავთ მახასიათებელი განტოლების ჯერადი ნამდვილი და ჯერადი კომპლექსური ფესვების შემთხვევას[1].

---

[1] ეს საკითხები დაწვრილებით გარჩეულია ვ. სტეპანოვის წიგნში: „Курс дифференциальных уравнений“.

X თავი

მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლება

§ 1. ზოგადი ცნობები კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა შესახებ

წინა თავებში შეისწავლებოდა დიფერენციალური განტოლებანი, რომლებიც შეიცავდა ერთი ცვლადის ფუნქციას და მის წარმოებულებს, ე. ი. შეისწავლებოდა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები.

განტოლებას, რომელიც აკავშირებს რამდენიმე $x,\ y,\ z, \cdots, t$ დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადების უცნობ $u=u(x,\ y,\ z, \ldots, t)$ ფუნქციას და მის კერძო წარმოებულებს რომელიმე რიგამდე, ეწოდება კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება.

იმ შემთხვევაში, როცა u უცნობი ფუნქცია დამოკიდებულია ორ x და y ცვლადზე, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right)=0, \tag{1.1}$$

სადაც F არის თავისი არგუმენტების მოცემული ფუნქცია. ისე როგორც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, (1 1) განტოლებაში შემავალი კერძო წარმოებულების უმაღლეს რიგს განტოლების რიგი ეწოდება. ასე, მაგალითად, ზოგადი სახე მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისა, ორი x და y დამოუკიდებელი ცვლადით, არის:

$$F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \tag{1.2}$$

რომელიც ამყარებს დამოკიდებულებას $x,\ y$ დამოუკიდებელ ცვლადებს, ამ ცვლადების უცნობ $u=u(x,\ y)$ ფუნქციასა და მის კერძო წარმოებულებს შორის, მეორე რიგამდე ჩათვლით.

განტოლება:

$$E\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1.3}$$

არის ზოგადი სახის პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. მაგალითად,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

წარმოადგენს პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიან განტოლებას, ხოლო

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

არის მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლება.

ნებისმიერი ფიზიკური მოვლენის, ბუნების სხვადასხვა პროცესის რაოდენობრივი გამოკვლევისათვის აუცილებელია მათი მათემატიკური აღწერა. მსგავს აღწერას, რომელიც ჩვეულებრივ ხდება ერთი (ან რამდენიმე) მრავალცვლადიანი ფუნქციის მეშვეობით მივყავართ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებზე x, y, z, t (რამდენიმე) დამოუკიდებელი ცვლადებით.

განვიხილოთ პროცესები, რომელთა შესწავლას მივყავართ კერძოწარმოებულებიან განტოლებებზე.

1. ასე, მაგალითად, როცა ვსწავლობთ დაჭიმული დრეკადი სიმის მცირე განივ რხევებს (სიმის რხევითს პროცესს), საქმე გვაქვს $u=u(x, t)$ ორი ცვლადის ფუნქციასთან, რადგან სიმის წერტილების გადაადგილების (გადახრის) სიდიდე წონასწორობის მდებარეობიდან დამოკიდებულია სიმის წერტილების x აბსცისასა (კოორდინატსა) და t დროზე, ე. ი. $u=u(x, t)$ წარმოადგენს სიმის x აბსცისიანი წერტილის გადახრას დროის t მომენტში; როგორც ქვემოთ ვნახავთ, სიმის რხევები გამოისახება მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

2. რაიმე დრეკადი ფირფიტის რხევების შესწავლისას საქმე გვაქვს $u=u(x, y, t)$ სამი ცვლადის ფუნქციასთან, რადგან ფირფიტის წერტილების გადაადგილების სიდიდე დამოკიდებული იქნება ფირფიტის წერტილების x და y კოორდინატებსა და t დროზე.

3. როცა ვსწავლობთ რაიმე სხეულში სითბოს გავრცელების პროცესს, უნდა ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერ წერტილში სხეულის ტემპერატურა u არის სივრცის ამ წერტილის სამი x, y, z კოორდინატის ფუნქცია $u=u(x, y, z)$ და, თუ, ამასთან, ტემპერატურა იცვლება t დროის ცვლილებასთან ერთად, მაშინ სხეულის ტემპერატურა u წარმოადგენს ოთხი x, y, z და t ცვლადის ფუნქციას.

ამ ფუნქციების განსაზღვრა დაიყვანება მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე. ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი უმარტივესი სახის მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება.

განსაზღვრა 1. (1.2) კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ ის წრფივია $u(x, y)$ უცნობი ფუნქციისა და მისი კერძო წარმოებულების მიმართ.

ასე, მაგალითად, განტოლება:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+G(x, y)u=f(x, y), \tag{1.4}$$

სადაც

$$A(x, y),\quad B(x, y), \ldots, G(x, y),\ f(x, y)$$

ორი x და y დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებია, წარმოადგენს მეორე რიგის არაერთგვაროვან წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას; თუ $f(x, y)=0$, მაშინ (1.4) განტოლებას ერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

თუ (1.4) განტოლებაში ყველა კოეფიციენტი: $A(x, y)$, $B(x, y)$, $\cdots$, $G(x, y)$ წარმოადგენს მუდმივებს, მაშინ (1.4) განტოლებას ეწოდება მეორე რიგის არაერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით.

მისი ზოგადი სახეა:

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2A_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_4\frac{\partial u}{\partial x}+A_5\frac{\partial u}{\partial y}+A_6u=f(x, y), \tag{1.5}$$

სადაც $A_1, A_2, \cdots, A_6$ მუდმივი რიცხვებია. თუ $f(x, y)=0$, მაშინ მივიღებთ მეორე რიგის ერთგვაროვან წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას მუდმივი კოეფიციენტებით:

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2A_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_4\frac{\partial u}{\partial x}+A_5\frac{\partial u}{\partial y}+A_6u=0. \tag{1.5'}$$

მათემატიკური ფიზიკის მრავალ ამოცანას მივყავართ მეორე რიგის ერთგვაროვან წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ

განტოლებამდე მუდმივი კოეფიციენტებით. გამოყენების დარგებში უფრო ხშირად გვხვდება მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლებები, ვიდრე პირველი რიგის განტოლებები.

მათემატიკური ფიზიკის ძირითად განტოლებებს წარმოადგენს, მაგალითად, შემდეგი:

1. ტალღური განტოლება:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

2. სითბოგამტარებლობის განტოლება:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{d y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

3. ლაპლასის განტოლება:

$$
\begin{aligned}
&\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\
&\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

შემოვიღოთ ახლა

განსაზღვრა 2. (1.2) კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, ანუ ინტეგრალი D არეში, ეწოდება ამ არეში ყოველ დიფერენცირებად $u=\varphi(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც, ჩასმული ამ განტოლებაში უცნობი ფუნქციის ნაცვლად, მას გადააქცევს იგივეობად x და y დამოუკიდებელი ცვლადების მიმართ.

ასე, მაგალითად, თუ $u=\varphi(x, y)$ არის (1.2) განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$
F\left(x,\ y,\ \varphi(x, y),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\equiv 0.
$$

ზოგადად, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნის, ანუ ინტეგრების ამოცანა დაისმის ასე:

ვიპოვოთ (1.1) განტოლების ყველა ამონახსნი.

ბუნებრივია, უნდა მოველოდეთ, რომ (1 1) განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, რადგან ფორმალურად ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებანი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების კერძო შემთხვევა, როცა დამოუკიდებელ ცვლადთა რიცხვი $n=1$.

მაგრამ ყოველ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე და, მაშასადამე, კერძოწარმოებულებიან განტოლებასაც, რომელიც რამდენიმე დამოუკიდებელ ცვლადს შეიცავს, ექნება ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე.

საზოგადოდ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ძლიერ რთულია და იგი მიეკუთვნება თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის ყველაზე უფრო ძნელად გადასაწყვეტ საკითხს; შედარებით სრულყოფილად შესწავლილია კერძოწარმოებულებიან წრფივ განტოლებათა თეორია.

რომ ვიქონიოთ წარმოდგენა კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის ხასიათისა და ზოგად ამონახსნში შემავალ ელემენტების ბუნების შესახებ, განვიხილოთ ზოგადი ამონახსნის მოძებნის ამოცანა უმარტივესი პირველი და მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{1.9}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, $u(x, y)$ ფუნქცია დამოუკიდებელია x ცვლადისაგან, მაგრამ ის შეიძლება იყოს y-ის ნებისმიერი ფუნქცია, და ეს არ მოახდენს არავითარ გავლენას მის x-ით წარმოებულზე, რომელიც დარჩება ნულის ტოლი:

$$u=u(x, y)=\varphi(y). \tag{1.10}$$

მაშასადამე, (1 . 9) განტოლების (1 10) ამონახსნი შეიცავს ერთ ნებისმიერ $\varphi(y)$ ფუნქციას. სახელდობრ, ამაში მდგომარეობს არსებითი განსხვავება პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნსა და პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს შორის, რომელიც მხოლოდ ერთ ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს.

ისე როგორც პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, (1 . 9) განტოლების (1 . 10) ამონახსნს ვუწოდოთ (1 . 9) განტოლების ზ ო გ ა დ ი ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი.

ახლა განვიხილოთ უფრო რთული სახის პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლება.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \tag{1.11}$$

სადაც $f(y)$ ცნობილი ფუნქციაა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1.11) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$u(x, y) = \int f(y)\,dy + \psi(x), \tag{1.12}$$

სადაც $\psi(x)$ არის x-ის ნებისმიერი ფუნქცია. (1 12) შეიცავს ერთ $\psi(x)$ ნებისმიერ ფუნქციას და, მაშასადამე, წარმოადგენს (1 11) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მაგალითი 3. მოცემულია განტოლება:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.13}$$

ვიპოვოთ მისი ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1 13) განტოლება ცვლადების გარდაქმნით დაიყვანება (1 9) სახის განტოლებაზე. მართლაც, მივიღოთ:

$$\begin{aligned} x + y &= z \\ x &= t, \end{aligned} \tag{1.14}$$

ანუ

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= z - t. \end{aligned}$$

აქედან გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

ანუ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

მაშასადამე,

$$u = \varphi(z) = \varphi(x + y) \tag{1.14'}$$

წარმოადგენს (1 . 13) განტოლების ზოგად ამონახსნს; ეს ამონახსნი იგივურად აკმაყოფილებს (1 13) განტოლებას. მართლაც,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (1 13) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.15}$$

ამ განტოლებას აქვს ზოგადი ამონახსნი:

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.16}$$

სადაც $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ არის ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ვისარგებლებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით. მართლაც, გვაქვს

$$V = \frac{y}{x}, \quad u = \varphi(v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{1}{x}.$$

თუ $\frac{\partial u}{\partial x}$-ისა და $\frac{\partial u}{\partial y}$ ის გამოსახულებებს შევიტანთ (1.15) განტოლებაში, გვექნება:

$$-x \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{y}{x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{y}{x} \equiv 0. \tag{1.17}$$

ამგვარად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

რომელიც ერთ ნებისმიერ $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ფუნქციას შეიცავს.

მაგალითი 5. მოცემულია განტოლება:

$$u(x, y) - x \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 y^2 = 0. \tag{1.18}$$

ვიპოვოთ მისი ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1 . 18) წარმოადგენს პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც არ შეიცავს $\frac{\partial u}{\partial y}$ კერძო წარმოებულს. ამიტომ, თუ დავაფიქსირებთ y-ს, (1 . 18) განტოლება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც პირველი რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება $u(x, y)$ უცნობი ფუნქციის მიმართ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}u-xy^2. \tag{1.19}$$

თუ ვისარგებლებთ ფორმულით (იხ. თავი II, § 1, გვ. 36), ვიპოვით (1 . 19) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$u(x, y)=C(y)x-x^2y^2,$$

სადაც $C(y)=\psi(y)$. მაშასადამე, (1 . 18) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$u(x, y)=x\psi(y)-x^2y^2,$$

რომელიც y ცვლადის ერთ ნებისმიერ $C(y)=\psi(y)$ ფუნქციას შეიცავს.

მაგალითი 6. განვიხილოთ განტოლება:

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.20}$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$v=x^2+y^2, \quad u=\varphi(v).$$

სადაც $\varphi(v)$ არის v-ს ნებისმიერი ფუნქცია. ვაჩვენოთ, რომ $u(x, y)=\varphi(x^2+y^2)$ წარმოადგენს (1 . 20) განტოლების ზოგად ამონახსნს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით უშუალო შემოწმებით. მართლაც, გვაქვს:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)\cdot 2x,\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)\cdot 2y.\end{aligned} \tag{1.21}$$

თუ (1 . 21) გამოსახულებებს ჩავსვამთ (1 . 20) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$2xy\varphi'(x^2+y^2)-2xy\,\varphi'(x^2+y^2)\equiv 0.$$

მაშასადამე, $u(x, y)=\varphi(x^2+y^2)$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მაგალითი 7. განვიხილოთ ნებისმიერი პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც არ შეიცავს უცნობი $u(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x-ით ან y-ით, მაგალითად,

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \tag{1.22}$$

ეს განტოლება შეიცავს მხოლოდ $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ კერძო წარმოებულს რომლის გამოთვლისას x ჩაითვლება როგორც მუდმივი. როცა x მუდმივია (ფიქსირებულია), (1.22) განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება $u(x, y)$ უცნობი ფუნქციით და y დამოუკიდებელი ცვლადით.

თუ x-ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მაშინ ეს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება x-თან ერთად შეიცვლება, ის შეიცავს x-ს როგორც პარამეტრს. ვთქვათ, ამ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$u=\varphi(x, y, C). \tag{1.23}$$

ეს ამონახსნი შეიცავს x პარამეტრს და, როცა C მუდმივია, წარმოადგენს (1.22) განტოლების ამონახსნს. მაგრამ იმისათვის, რომ (1.23) ფუნქცია წარმოადგენდეს (1.22) განტოლების ამონახსნს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ C იყოს მუდმივი y-ის მიმართ; მაშასადამე, ის შეიძლება წარმოადგენდეს x-ის ნებისმიერ ფუნქციას და მივიღებთ (1.22) განტოლების ზოგად ამონახსნს, თუ C-ს ნაცვლად ჩავსვამთ x-ის ნებისმიერ $\psi(x)$ ფუნქციას:

$$u(x, y)=\varphi(x, y, \psi(x)). \tag{1.24}$$

ამგვარად, (1.22) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს ერთ ნებისმიერ $\psi(x)$ ფუნქციას.

ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენოთ, რომ, თუ მოცემულია პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,$$

მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$u(x, y)=\varphi_1(x, y, \psi(y)),$$

რომელიც შეიცავს ერთ $\psi_1(y)$ ნებისმიერ ფუნქციას.

3. ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი უმარტივესი სახის მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით და ვიპოვოთ მათი ზოგადი ინტეგრალები.

მაგალითი 8. მოცემულია განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{1.25}$$

ვიპოვოთ მისი ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1 . 25) განტოლება გადავწეროთ სახით:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \tag{1.26}$$

თუ შევასრულებთ ამ განტოლების ინტეგრებას y ცვლადით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x). \tag{1.27}$$

სადაც $\varphi(x)$ არის x დამოუკიდებელი ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია. (1 . 27) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს:

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int \varphi(x)\, dx + \psi(y),$$

სადაც $\psi(y)$ არის y დამოუკიდებელი ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია. რადგან $\varphi(x)$ არის x დამოუკიდებელი ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია, ამიტომ

$$\int \varphi(x)\, dx = f(x)$$

იქნება x ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია, რომელსაც $f(x)$-ით აღვნიშნავთ.

ამგვარად, (1 . 25) განტოლების ზოგად ამონახსნს მივიღებთ სახით:

$$u(x, y) = f(x) + \psi(y), \tag{1.28}$$

სადაც $f(x)$ და $\psi(y)$ ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ადვილად შევამოწმებთ, რომ (1 . 28) ამონახსნი იგივურად აკმაყოფილებს (1 . 25) განტოლებას, და რადგანაც ის ორ ნებისმიერ ფუნქციას შეიცავს, ამიტომ მას ამ შემთხვევაში ზოგადი ამონახსნი ეწოდება.

მაგალითი 9. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1.29}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ორჯერ მიმდევრობითი ინტეგრება x ცვლადით გვაძლევს:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y);$$

$$u = u(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y),$$

სადაც $\varphi(y)$ და $\psi(y)$ არის ერთი და იმავე y არგუმენტის ორი ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია. $u = u(x, y)$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მაგალითი 10. განვიხილოთ ზოგადი სახის მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.30}$$

სადაც a, b, c მუდმივებია, u — უცნობი ფუნქცია, ხოლო x და y — დამოუკიდებელი ცვლადები. ვიპოვოთ (1 . 30) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იმ შემთხვევაში, როცა $a = c = 1$, $b = -2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია:

$$u(x, y) = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$$

წარმოადგენს (1 . 30) განტოლების ზოგად ამონახსნს განსახილველ შემთხვევაში. მართლაც, შევასრულოთ ცვლადთა გარდაქმნა, მივიღებთ:

$$v = x + y, \quad u = \varphi(v),$$

სადაც $\varphi(v)$ თავისი არგუმენტის ნებისმიერი ფუნქციაა. მივიღებთ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(v) + x\varphi'(v) + y\psi'(v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi'(v) + \psi(v) + y\psi'(v),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi'(v) + x\varphi''(v) + y\psi''(v),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi''(v) + 2\psi'(v) + y\psi''(v),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \varphi'(v) + x\varphi''(v) + \psi'(v) + y\psi''(v).$$

თუ $u(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების გამოსახულებებს ჩავსვამთ (1 . 30) განტოლებაში, დავრწმუნდებით, რომ ამ განტოლების მარცხენა მხარე გახდება იგივურად ნული და, მაშასადამე, ფუნქცია

$$u(x, y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

წარმოადგენს (1 . 30) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

ზემომოყვანილი კერძო მაგალითებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ ფუნქციაზე.

მაგალითი 11. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.31}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1 . 31) განტოლება დამოუკიდებელი ცვლადების შეცვლით:

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}$$

$$y = \frac{\xi - \eta}{2}$$

დაიყვანება სახეზე:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0.$$

ავღნიშნოთ $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = v$, მივიღებთ:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

საიდანაც $v = f(\eta)$, სადაც $f(\eta)$ არის η-ს ნებისმიერი ფუნქცია. განტოლებაში:

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} = f(\eta)$$

ξ განვიხილოთ როგორც პარამეტრი და შევასრულოთ ინტეგრება, მივიღებთ:

$$u = \int f(\eta)\, d\eta + \varphi(\xi),$$

ანუ

$$u(x, y) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x+y) + \psi(x-y), \tag{1.32}$$

სადაც φ და ψ წარმოადგენს ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციებს.

ამგვარად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს ორ $\varphi(x+y)$ და $\psi(x-y)$ ნებისმიერ ფუნქციას. (1.32) მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ ფუნქციაზე და ა. შ. n-ური რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებული იქნება n ნებისმიერ ფუნქციაზე. თუმცა ასეთი დასკვნა მართებულია, მაგრამ ზოგად შემთხვევაში მოითხოვს დაზუსტებას[1].

4. მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლების ამონახსნების თვისება.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ ტალღური განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1.33}$$

ვაჩვენოთ, რომ, თუ

$$u_1(x, t),\ u_2(x, t), \dots, u_k(x, t)$$

ფუნქციებიდან თითოეული წარმოადგენს, მაგალითად, (1.33) განტოლების ამონახსნს, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია

$$u(x, t) = C_1 u_1(x, t) + C_2 u_2(x, t) + \cdots + C_k u_k(x, t),$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_k$ ნებისმიერი მუდმივებია, აგრეთვე იქნება ამ განტოლების ამონახსნი. დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ კერძო ამონახსნების წრფივი კომბინაციის ნებისმიერი წარმოებული იქნება ასეთივე წრფივი კომბინაცია $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_k(x,t)$ ფუნქციების შესაბამისი წარმოებულებისა:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \cdots + C_k\frac{\partial u_k}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + C_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \cdots + C_k\frac{\partial u_k}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \cdots + C_k\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + C_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \cdots + C_k\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}.$$

---

[1] И. Г. Петровский, Лекции по уравнениям с частными производными, гл. 1 § 2.

თუ $u(x_1\ t)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულების გამოსახულებებს გავითვალისწინებთ (1 . 6) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$C_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_1}{\partial t^2}\right)+C_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)+$$

$$+\cdots+C_k\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right)=0.$$

რადგან $u_1, u_2, \ldots, u_k$ წარმოადგენს (1.33) განტოლების ამონახსნებს, ამიტომ თითოეული ფრჩხილი გადაიქცევა ნულად, და მასთან ერთად განტოლების მარცხენა მხარეც, მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ $u(x, t)$ წარმოადგენს (1 . 33) განტოლების ამონახსნს. როგორც შემდეგში დავრწმუნდებით, კერძოწარმოებულებიან განტოლებას (მაგალითად, (1.33),) შეიძლება ჰქონდეს წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, ე. ი. ამონახსნების ისეთი სიმრავლე, რომელთა ნებისმიერი სასრული რიცხვი წარმოადგენს წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციებს[1]. ამასთან დაკავშირებით შემდეგში საქმე გვექნება ამონახსნების არა მხოლოდ სასრული რიცხვის წრფივ კომბინაციებთან, არამედ მწკრივებთან, რომელთა წევრები ნებისმიერი მუდმივების კერძო ამონახსნზე ნამრავლებს წარმოადგენს, ე. ი.

$$u(x, t)=C_1 u_1(x, t)+C_2 u_2(x, t)+\cdots+C_n u_n(x, t)+$$

$$+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t). \qquad (1.34)$$

შემდეგში განვიხილავთ კერძო ამონახსნებისაგან შედგენილ მხოლოდ ისეთ მწკრივებს, რომლებიც კრებადია და რომელთა ჯამი $u(x, t)$ არის უწყვეტი ფუნქცია x და t-ს მიმართ. ამას გარდა, ვიგულისხმებთ, რომ (1 . 34) მწკრივი ორჯერ წევრ-წევრად დიფერენცირებადია.

5. უ მ ა რ ტ ი ვ ე ს ი   ს ა ს ა ზ ღ ვ რ ო   პ ი რ ო ბ ე ბ ი. ისე როგორც ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაშიც, ბუნებრივად ისმება საკითხი განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან კერძო ამონახსნის გამოყოფის შესახებ.

ზემოთ ვნახეთ, რომ მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე,

---

[1] $u_1(x, t),\ u_2(x, t), \quad , u_k(x, t)$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ ამ ფუნქციებიდან არც ერთი არ წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას.

რომლებიც დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ ფუნქციაზე. ეს ნებისმიერი ფუნქციები რომ განვსაზღვროთ, ე. ი. ზოგადი ამონახსნიდან გამოვყოთ კერძო ამონახსნი, საჭიროა საძიებელი ფუნქცია აკმაყოფილებდეს ზოგიერთ დამატებით პირობას.

ეს პირობები თავისი ხასიათის მიხედვით შეიძლება იყოს ორი სახის: **საწყისი და სასაზღვრო პირობები.** ამოცანის **საწყისი პირობები** ჩვეულებრივად განსაზღვრავს პირობებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს საძიებელი ფუნქცია გამოსაკვლევი პროცესის დასაწყისში, ხოლო სასაზღვრო პირობები განსაზღვრავს საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობებს, რაც დამოკიდებულია ობიექტზე, რომელშიც ხდება პროცესი, და მის მდებარეობაზე სივრცეში ან სიბრტყეზე.

მაგალითის სახით განვიხილოთ ზოგადი ამონახსნიდან კერძო ამონახსნის გამოყოფის საკითხი პირველი რიგის უმარტივესი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში.

განვიხილოთ ხელახლა განტოლება:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.35}$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალია

$$u = \varphi(x + y), \tag{1.35'}$$

და შევეცადოთ მისგან გამოვყოთ კერძო ამონახსნი, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს: როცა $y=0$, მაშინ $u=g(x)$, სადაც $g(x)$ არის მოცემული ფუნქცია.

თუ ამ პირობას გავითვალისწინებთ ზოგად ამონახსნში, (1.35′) განტოლებაში y-ს შევცვლით ნულით, და შედეგს მივუმატებთ მოცემულ $g(x)$ ფუნქციას, გვექნება:

$$\varphi(x + 0) = \varphi(x) = g(x). \tag{1.36}$$

მაშასადამე, ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციის ნაცვლად უნდა ავიღოთ მოცემული $g(x)$ ფუნქცია.

ამგვარად, (1.35) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობებს, მიიღება (1.35′) ფორმულაში, თუ φ-ს შევცვლით g-თი, ე. ი.

$$u = u(x, y) = g(x + y), \tag{1.37}$$

ეს სრულიად გარკვეული ამონახსნია, რადგან g მოცემულია; (1.37) წარმოადგენს მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც მოცემულ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს.

მაგალითად, თუ საპოვნია (1 . 35) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს: როცა $y=0$, მაშინ $u=u(x, 0)=\cos x+x^2$, მაშინ საძიებელი კერძო ამონახსნი იქნებოდა ფუნქცია:

$$u = \cos(x + y) + (x^2 + y^2),$$

რომელიც დააკმაყოფილებს (1 13) განტოლებას და მოცემულ საწყის პირობებს.

ანალოგიურად, კერძო ამონახსნი, რომელიც, როცა $x=0$, მიიყვანება მოცემულ ფუნქციაზე (მაგალითად, $f(y)=y^2+3y$-ზე), გამოისახება ფორმულით:

$$u = u(x, y) = (x + y)^2 + 3(x + y).$$

(1 . 35) განტოლებისათვის აქ მოყვანილი სასაზღვრო პირობები უმარტივესია; თუმცა, შესაძლებელია (1 . 35) განტოლების სრული ინტეგრება უფრო ზოგად სასაზღვრო პირობებში. მაგალითად, შეიძლება განვსაზღვროთ $u=u(x, y)$ ფუნქცია ასეთი პირობებით: როცა

$$y = f(x),$$

მაშინ $u=u(x, y)$ ფუნქცია უნდა მიიყვანებოდეს x-ის მოცემულ $g(x)$ ფუნქციაზე, ე. ი.

$$u = g(x),$$

სადაც f და g მოცემული ფუნქციებია.

ქვემოთ დაწვრილებით განვიხილავთ საწყის და სასაზღვრო პირობებს მეორე რიგის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი განტოლების, რხევადი სიმის განტოლების შემთხვევაში.

§ 2. სიმის თავისუფალი რხევების განტოლების გამოყვანა

მათემატიკურ ფიზიკაში სიტყვა „სიმის“ ქვეშ ესმით მოქნილი, დრეკადი, წვრილი ძაფი, რომელსაც შეუძლია თავისუფლად ღუნვა[1].

ვთქვათ, l სიგრძის მქონე ერთგვაროვანი სიმი წონასწორობის მდებარეობაში მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ, $x=0$-დან — $x=l$-მდე. ვიგულისხმოთ, რომ მაგრად გაჭიმული სიმი დამაგრებულია ბოლოებზე: $x=0$ და $x=l$ წერტილებში.

თუ სიმს გამოვიყვანთ წონასწორობის მდებარეობიდან, ხოლო შემდეგ გავუშვებთ, სიმი დაიწყებს რხევას, სიმის ყველა წერტილი შეასრულებს მოძრაობას. შევისწავლოთ ამ მოძრაობის ხასიათი.

---

[1] ე. ი. მისი ფორმის შეცვლას, რომელიც დაკავშირებული არაა მისი სიგრძის შეცვლასთან, არ უწევს არავითარ წინააღმდეგობას.

ჩვენ განვიხილავთ სიმის მხოლოდ მცირე განივ რხევებს, ვიგულისხმებთ, რომ სიმის ყველა წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის (წონასწორობის მდებარეობის) პერპენდიკულარულად და ერთ სიბრტყეში. ამ სიბრტყეში ავიღოთ xOu მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. რადგან წონასწორობის მდებარეობაში სიმი მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ, ამიტომ u კოორდინატი მოგვცემს სიმის წერტილების გადახრის სიდიდეს Ox ღერძიდან; რხევის პროცესში u-ს გადახრის სიდიდე დამოკიდებული იქნება სიმის წერტილის x კოორდინატსა და t დროზე, ე. ი. $u=u(x, t)$. ამგვარად, სიმის რხევითი პროცესი აიწერება ერთი $u=u(x, t)$ ფუნქციის მეშვეობით, რომელიც დროის ნებისმიერ t მომენტში მოგვცემს სიმის x-აბსცისიანი წერტილის გადახრის სიდიდეს, ხოლო ამ ფუნქციის წარმოებული $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x'(x, t)$ — სიმის x-აბსცისიან წერტილში მხების კუთხურ კოეფიციენტს. t-ს ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის, ცხადია, $u=u(x, t)$ ფუნქციის გრაფიკი მოგვცემს სიმის ფორმას დროის ამ მომენტში.

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ დროის ნებისმიერ t მომენტში განვსაზღვროთ რხევადი სიმის ფორმა და სიმის ყოველი წერტილის მოძრაობის კანონი. ამ მიზნით შევადგინოთ განტოლება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $u=u(x, t)$ ფუნქცია. xOu სიბრტყეში სიმის განივი რხევების განხილვისას ჩავთვლით, რომ $u=u(x, t)$ გადახრა და, აგრეთვე, $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x'(x, t)$ წარმოებული იმდენად მცირე სიდიდეებია, რომ მათი კვადრატები და ნამრავლი შეიძლება უგულებელვყოთ. დროის t მომენტში გამოვყოთ სიმის ნებისმიერი $\smile MM'$, რადგან, დაშვების თანახმად, $u(x, t)$ და $u_x'(u, t)$ მცირეა, ე. ი. სიმის ფორმა მცირედ განსხვავდება წრფივი ფორმისაგან, ამიტომ სიმის $\smile MM'$ რკალის სიგრძე შეიძლება მიახლოებით შევცვალოთ მისი გეგმილით Ox ღერძზე, ე. ი. დროის t მომენტში:

$$\smile MM' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x'^2(x, t)}\, dx \approx x_2 - x_1 \qquad (2.1)$$

უგულებელვყოფთ რა $u_x'(x, t)$ მცირე სიდიდის კვადრატს.

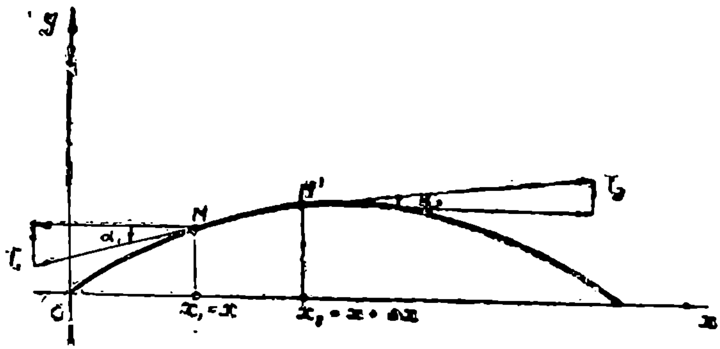
ახლა განვიხილოთ ძალები, რომლებიც მოქმედებენ სიმის გამოყოფილ $\smile MM'$ უბანზე.

შიგა ძალები, რომლებიც წარმოიშობა სიმში, სიმის დეფორმირებულ მდგომარეობაში, დაიყვანება დაძაბულობაზე (დაძაბულობის ძალებზე), რადგან დეფორმაციის დროს სიმი ზოგიერთ უბანზე გაიჭიმება, ხოლო ზოგიერთზე შეიკუმშება.

ვუჩვენოთ, რომ T დაძაბულობის ძალები, რომლებიც მოქმედებენ სიმის $\smile MM'$ უბანზე, დამოკიდებული არაა x აბსცისასა და t დროზე. მართლაც, აღვნიშნოთ T_0-ით დაძაბულობა, რომელშიც იმყოფება Ox ღერძის გასწვრივ $x=0$ წერტილიდან $x=l$ წერტილამდე მაგრად გაჭიმული სიმი წონასწორობის მდგომარეობაში. რადგან, მცირე რხევების შემთხვევაში (2 1) ფორმულის თანახმად, არ ხდება სიმის უბნების დაგრძელება, ამიტომ ჰუკის კანონის ძალით აქედან გამომდინარეობს, რომ სიმის ყოველ წერტილში დაძაბულობის ძალის სიდიდე უცვლელია t დროის ცვლილებისას, ე. ი. დამოუკიდებელია t-საგან; ახლა ვუჩვენოთ, რომ T დაძაბულობის ძალის სიდიდე დამოუკიდებელია x-საგან; ე. ი. $T \approx T_0$. მართლაც, სიმის $\smile MM'$ უბანზე მოქმედებს T_1 და T_2 დაძაბულობის ძალები, რომლებიც სიმის M და M' წერტილებში მხები წრფეების გასწვრივ არიან მიმართულნი, და ინერციის ძალები; რადგან ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ განივ რხევებს, ამიტომ ინერციის ძალები Ou ღერძის პარალელურია. აქედან გამომდინარეობს, რომ აღებულ t მომენტში Ox ღერძზე დაძაბულობის ძალების გეგმილების ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0, \tag{2.2}$$

სადაც α_2 არის კუთხე სიმის $x_2=x+\Delta x$ აბსცისიან M' წერტილში მხების მიმართულებასა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის, ხოლო α_1—კუთხე სიმის $x=x_1$ აბსცისიან M წერტილში მხებსა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის (ნახ. 27).



ნახ. 27

იმის გამო, რომ $u_x'(x, t)$ მცირეა, ხოლო $[u_x'(x, t)]^2$ სიდიდეს უგულებელვყოფთ, და

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2(x, y)}} \approx 1,$$

ამიტომ მივიღებთ, $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=1$, და, მაშასადამე,

$$T_1\approx T_2. \tag{2.3}$$

რადგან $\smile MM'$ ნებისმიერია, გამომდინარეობს, რომ T დაჭიმულობის ძალა დამოკიდებული არაა x-ზე.

ამგვარად, შეიძლება მივიღოთ $T\approx T_0$ x-ისა და t-ს ყველა მნიშვნელობისათვის.

ახლა გადავიდეთ სიმის რხევების დიფერენციალური განტოლების გამოყვანაზე, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $u(x, t)$ ფუნქცია.

განვიხილოთ სიმის ნებისმიერი $\smile MM'$ უბანი, რომლის გეგმილი Ox ღერძზე არის $[x, x+\Delta x]$ ინტერვალი.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ამ უბანზე მოქმედებს T_1 და T_2 დაჭიმულობის ძალები, რომლებიც ყოველთვის T_0-ის ტოლია, და ინერციის ძალები. მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება რომ მივიღოთ, დავწეროთ $\smile MM'$ უბანზე მოდებული ძალების Ou ღერძზე გეგმილების ჯამის ნულთან ტოლობის პირობა.

ამ მიზნით გამოვთვალოთ $\smile MM'$ უბნის M და M' წერტილებზე მოქმედი $T_2=T_1\approx T_0$ ძალების Ou ღერძზე გეგმილების ჯამი, გვაქვს:

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=T_0(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1).$$

მაგრამ სიმის განივი რხევების სიმცირის პირობის თანახმად, $u_x{}'(x, t)=\operatorname{tg}\alpha$ უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ როცა α მცირეა, $\sin\alpha$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\operatorname{tg}\alpha$-ს ტოლფასი უსასრულოდ მცირე:

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\approx\operatorname{tg}\alpha.$$

მაშასადამე, T_1 და T_2 დაჭიმულობის (დაძაბულობის) ძალების გეგმილების ჯამი Ou ღერძზე შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$T_0(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\,T_0(\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1)=$$
$$=T_0\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right).$$

აქედან, თუ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებაზე გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას სასრული ნაზრდის შესახებ, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$T_0(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)=T_0\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\Delta x. \tag{2.4}$$

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ სიმის MM' უბანზე არ მოქმედებს გარეშე ძალები.

ახლა სიმის $\breve{MM'}$ უბანზე გამოვიყენოთ ნიუტონის მეორე კანონი, რომლის თანახმად, $\breve{MM'}$ ელემენტის მასისა და აჩქარების ნამრავლი ეტოლება ამ ელემენტზე მოქმედი ყველა ძალის ჯამს ($\breve{MM'}$ ელემენტის სიმცირის გამო, ის ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მატერიალური წერტილი). ვთქვათ, სიმის ხაზოვანი სიმკვრივეა ρ (ის მუდმივია ამოცანის პირობის თანახმად), მაშინ $\rho\Delta x$ იქნება სიმის $\breve{MM'}$ ელემენტის მასა; სიმის ნებისმიერ წერტილში აჩქარება არის გაწელილი მანძილის მეორე რიგის წარმოებული დროით, ე. ი. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, მაშასადამე, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, გვექნება:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x, \tag{2.5}$$

საიდანაც შევკვეცავთ რა Δx-ზე, და აღვნიშნავთ $\frac{T}{\rho}=a^2$, მივიღებთ სიმის თავისუფალი რხევების დიფერენციალურ განტოლებას.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{2.6}$$

(2 . 6) წარმოადგენს მეორე რიგის ერთგვაროვან წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას, მუდმივი კოეფიციენტებით. ქვემოთ მოვიყვანთ ამ განტოლების ამოხსნის მეთოდს, რომელიც მოცემული იყო ფ უ რ ი ე ს მიერ.

§ 8. ფურიეს მეთოდი სიმის თავისუფალი რხევების განტოლებისათვის (ცვლადთა განცალების მეთოდი)

(2 . 6) განტოლებას

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. ამიტომ ერთი (2 6) განტოლება საკმარისი არაა სიმის რხევითი მოძრაობის სრული განსაზღვრისათვის. საძიებელმა $u(x,\ t)$ ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს კიდევ ზოგიერთი დამატებითი პირობა, რომლებიც გამომდინარეობს ამოცანის ფიზიკური მნიშვნელობიდან.

წერტილის დინამიკიდან ცნობილია, რომ მატერიალური წერტილის მოძრაობის განსაზღვრისათვის უნდა ვიცოდეთ მისი საწყისი მდებარეობა და საწყისი სიჩქარე. სიმის რხევის განტოლებისათვის $t=0$ საწყის მომენტში მოცემული უნდა იყოს სიმის წერტილების მდებარეობა და სიჩქარე; საწყის $t=0$ მომენტში სიმს აქვს განსაზღვრული ფორმა, რომელიც მას მივეცით წონასწორობის მდებარეობიდან გამოყვანის დროს. ვთქვათ, ეს ფორმა განისაზღვრება $f(x)$ ფუნქციით; ამას გარდა, საწყის მომენტში მოცემული უნდა იყოს სიმის თითოეული წერტილის სიჩქარე, რომელიც, ვთქვათ, განისაზღვრება $\varphi(x)$ ფუნქციით; ამგვარად, უნდა ვიცოდეთ:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{3.1}$$

(3.1) პირობებს ამოცანის **საწყისი პირობები** ეწოდება. შემდეგ, ბოლოებზე დამაგრებული სიმისათვის მოცემული უნდა იყოს:

$$u(x, t)\Big|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)\Big|_{x=l} = 0 \tag{3.2}$$

ყოველი t-სთვის, $t>0$. (3.2) პირობებს **სასაზღვრო პირობები** ეწოდება.

ამგვარად, ფიზიკური ამოცანა რხევადი სიმის შესახებ დაიყვანება შემდეგ მათემატიკურ ამოცანაზე.

ვიპოვოთ მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.2'}$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი $u=u(x, t)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1) საწყის პირობებს:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

და (3.2) სასაზღვრო პირობებს:

$$u(x, t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad u(x, t)\Big|_{x=l} = 0, \qquad t>0.$$

$f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები $[a, b]$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქციებია და აკმაყოფილებს პირობებს: $f(0)=\varphi(0)=0$.

ზემომოყვანილი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ ფურიეს მეთოდით, ანუ ცვლადების განცალების მეთოდით.

(3 . 2′) განტოლებისათვის ფურიეს მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ თავდაპირველად ვეძებთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს (3 2) სასაზღვრო პირობებს, სახით:

$$u(x, t) = X(x) T(t), \tag{3.3}$$

სადაც $X(x)$ არის მხოლოდ x-ის ცვლადი ფუნქცია, $T(t)$ კი t ცვლადის ფუნქცია.

(3 . 3) ჩავსვათ (2 . 6) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$T''(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x),$$

ანუ

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{3.4}$$

იმისათვის, რომ $u(x, t) = X(x) T(t)$ ფუნქცია იყოს (2.6) განტოლების ამონახსნი, (3 . 4) განტოლებას უნდა ჰქონდეს ადგილი x-ის და t-ს ყველა მნიშვნელობისათვის. მაგრამ, უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილი დამოკიდებულია მხოლოდ t-ზე, და ის არ შეიცვლება, როცა x იცვლება. ამიტომ, თუ t-ს დავაფიქსირებთ და შევცვლით, x-ის მარცხენა ნაწილი, და, მაშასადამე, მარჯვენაც შეინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას.

თუ ანალოგიურად ვიმსჯელებთ, დავადგენთ, რომ განტოლების მარჯვენა ნაწილი და, მაშასადამე, მარცხენაც არ შეიცვლება; როცა x იცვლება. მაგრამ, ეს მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა (3 . 4) ტოლობა, საზოგადოდ, დამოკიდებული არაა არც x-ზე და არც t-ზე, ე. ი. როცა $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$ და $\frac{X''(x)}{X(x)}$ შეფარდებები წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეებს. ალვნიშნოთ ეს მუდმივი — λ-თი:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{3.5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $T(t)$ და $X(x)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ორ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{3.6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{3.7}$$

როგორც ცნობილია, ამ განტოლებების ზოგადი ამონახსნებია:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \tag{3.8}$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}t, \tag{3.9}$$

სადაც A, B, C, D ნებისმიერი მუდმივებია. ჩავსვათ $X(x)$-ისა და $T(t)$-ს გამოსახულებები (3 . 3) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$U(x, t) = (A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x)(C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}t).$$

რომ მივიღოთ (3 . 3) სახის არატრივიალური (ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული) ამონახსნები, რომლებიც (3 . 2) სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ, აუცილებელია (3 . 7) განტოლების არატრივიალური ამონახსნები აკმაყოფილებდეს სასაზღვრო პირობებს:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

ამგვარად, უნდა ვიპოვოთ λ პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობანი, რომელთათვის (3. 7) განტოლებას აქვს იგივურად ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. ამისათვის A და B მუდმივები ისე შევარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილებული იყოს (3 . 2) პირობები. რადგან $T(t) \neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში $U(x, t) \equiv 0$, რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება), ამიტომ $X(x)$ ფუნქცია (3 . 2) პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს, ე. ი. უნდა იყოს:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

$x = 0$ და $x = l$ მნიშვნელობები ჩავსვათ (3.8) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$$

$$0 = A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l.$$

პირველი ტოლობიდან $A = 0$; მეორედან გამომდინარეობს, რომ

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

აქ $B \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა, რომ $X(x) \equiv 0$ და $U(x, t) \equiv 0$, რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება.

მაშასადამე,

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{3.10}$$

საიდანაც

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \; (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

n არ უდრის ნულს, რადგან პირობის თანახმად, $\lambda \neq 0$. ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება n-ის რომელიმე ფიქსირებულ მნიშვნელობას, X_n-ით აღვნიშნოთ. ამგვარად, მივიღებთ:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{3.11'}$$

სადაც B_n ნებისმიერი მუდმივებია.

λ პარამეტრის (3 . 11) მნიშვნელობებს **საკუთრივი მნიშვნელობები** ეწოდება, ხოლო მათ შესაბამის $X(x)$ ფუნქციებს — **საკუთრივი ფუნქციები**.

ახლა ვიპოვოთ $T(t)$ ფუნქცია. $\sqrt{\lambda}$-ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება თავისი $T_n(t)$ ფუნქცია, რომელიც (3.9) ტოლობიდან განისაზღვრება:

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t, \tag{3.12}$$

$$(n = 1\ 2, \ldots),$$

სადაც C_n და D_n ნებისმიერი მუდმივებია. თუ (3 . 11) და (3 . 12) გამოსახულებებს (3.3) ტოლობაში ჩავსვამთ, მაშინ მივიღებთ (2.6) განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც (3.2) სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს. ამ კერძო ამონახსნს $U_n(x, t)$-თი აღვნიშნავთ:

$$U_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \tag{3.13}$$

(B_n მუდმივები ჩართულია C_n და D_n-ში).

$U_n(x, t)$ ამონახსნებს ამოცანის **საკუთრივ ფუნქციებს** უწოდებენ; მათ შესაბამის რხევებს კი — საკუთრივ რხევებს.

ახლა გადავიდეთ **ფურიეს მეთოდის** მეორე ნაწილზე და საკუთრივი ფუნქციების მეშვეობით ავაგოთ (2 . 6) განტოლების ამონახსნი, რომელიც (3 . 1) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს. რადგან (2 . 6) განტოლება ერთგვაროვანია და წრფივი, ამიტომ (3 . 13) ამონახსნების ნებისმიერი სასრული ჯამი და, აგრეთვე, მწკრივიც

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.14}$$

წარმოადგენს მის ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ (3 . 2) სასაზღვრო პირობებს, რადგან მას აკმაყოფილებს თითოეული $u_n(x, t)$ ფუნქციებიდან.

ცხადია, (3 . 14) მწკრივი იქნება (2 . 6) განტოლების ამონახსნი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ C_n და D_n კოეფიციენტები ისეთია, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია და თუ კრებადია მწკრივები, რომლებიც მისგან მიიღება x და t ცვლადებით ორჯერ წევრ-წევრა გაწარმოების შედეგად. ამიტომ ვიგულისხმებთ, რომ (3 . 14) მწკრივი კრებადია და რომ შეიძლება მისი ორჯერ წევრ-წევრა გაწარმოება x და t ცვლადების მიმართ. ახლა C_n და D_n ნებისმიერი მუდმივები ისე შევარჩიოთ, რომ (3 . 14) აკმაყოფილებდეს (3 . 1) საწყის პირობებს. მართლაც, ჩავსვათ (3 . 14) ტოლობაში $t=0$, მივიღებთ:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x), \tag{3.15}$$

შემდეგ, თუ (3.14) მწკრივს წევრ-წევრად გავაწარმოებთ t-თი და $t=0$ ჩავსვამთ, დავაკმაყოფილებთ მეორე საწყის პირობასაც:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a n\pi}{l}\left(-C_n \sin\frac{a n\pi}{l}t + D_n \cos\frac{a n\pi}{l}\cdot t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

და

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\pi}{l} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x). \tag{3.16}$$

(3 . 15) და (3 . 16) ტოლობები შესაბამისად წარმოადგენს $f(x)$ და ამასთან იგულისხმება, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები $[0, l]$ შუალედში აკმაყოფილებს ფურიეს მწკრივად გაშლის პირობებს.

ამიტომ, (3 . 3) (თავი I, § 2) ფორმულების თანახმად, (3 . 15) და (3 . 16) მწკრივების კოეფიციენტები ასე ჩაიწერება:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.17}$$

$$\frac{a n\pi}{l} D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

ანუ

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.18}$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

ამგვარად, სიმის თავისუფალი რხევის ამოცანის საძიებელი $u = u(x, t)$ ამონახსნი მოცემულ სასაზღვრო და საწყის პირობებში გამოისახება ფორმულით:

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{an\pi}{l}t + D_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

სადაც C_n და D_n კოეფიციენტები განისაზღვრება (3 . 17) და (3 . 18) ფორმულებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აქ არ შევჩერდებით იმ პირობების გამოკვლევაზე, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები, რომ C_n და D_n კოეფიციენტების შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის უზრუნველყოფილ იქნეს (3 . 14) მწკრივის x და t ცვლადების მიმართ ორჯერ წევრ-წევრა გაწარმოების შესაძლებლობა. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია $[0, l]$ შუალედში, აქვს უბან-უბან უწყვეტი მესამე წარმოებული და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0,$$

ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $[0, l)$ შუალედში, აქვს მეორე რიგის უბან-უბან უწყვეტი წარმოებული და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0,$$

მაშინ (3.14) მწკრივით განსაზღვრულ $u(x, t)$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები, აკმაყოფილებს (2.6) განტოლებას, (3.1) საწყის პირობებს და (3.2) სასაზღვრო პირობებს.

ამასთან, (3 . 14) მწკრივის x და t ცვლადებით ორჯერ წევრ-წევრად გაწარმოების შედეგად მიღებული მწკრივები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $[0, l]$ შუალედში, ნებისმიერი t-სათვის.

§ 4. თბოგამტარობის განტოლების გამოყვანა

მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან ერთგვაროვან წრფივ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებაზე აგრეთვე მიგვყავართ თბოგამტარობის პროცესის შესწავლას ერთგვაროვან ცილინ-

დროულ ღეროში, რომელიც იზოლირებულია გარემომცველი სივრცისაგან.

შევისწავლოთ სითბოს გავრცელების პროცესი სასრულ ერთგვაროვან წვრილ ცილინდრულ ღეროში.

განვიხილოთ l სიგრძის ერთგვაროვანი წვრილი ცილინდრული ღერო. ვიგულისხმოთ, რომ ღერო იმდენად წვრილია, რომ დროის ნებისმიერ t მომენტში, ღეროს მოცემული განივი კვეთის ყველა წერტილის ტემპერატურა ერთი და იგივეა (ერთნაირია).

ამოვირჩიოთ Ox ღერძი ისე, რომ ღეროს ერთი ბოლო ემთხვეოდეს $x=0$ წერტილს, ხოლო მეორე $x=l$ წერტილს, და ღეროს ღერძი ემთხვეოდეს აბსცისათა Ox ღერძს. დროის t მომენტში ღეროს x-აბსცისიან განივ კვეთაში ტემპერატურა $u(x, t)$-თი აღვნიშნოთ და გამოვიყვანოთ განტოლება, რომელსაც ეს ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს.

ამ განტოლების გამოყვანისათვის ორი სხვადასხვა წესით გამოვთვალოთ ΔQ სითბოს რაოდენობა (სითბური ნაკადის სიდიდე), რომელსაც დროის Δt შუალედში ღებულობს x და $x+\Delta x$ კვეთებს შორის მოთავსებული ღეროს ელემენტი.

ამ კვეთებში ტემპერატურათა სხვაობა Δu-თი აღვნიშნოთ. ფიზიკაში ცდებით დამტკიცებულია, რომ კვეთებში ტემპერატურათა სხვაობის მუდმივობის პირობებში, სითბოს ΔQ რაოდენობა, რომელსაც მიიღებს ამ კვეთებს შორის მოთავსებული ღეროს ნაწილი დროის Δt განმავლობაში, პროპორციულია Δu-ს, კვეთის S ფართობის, დროის Δt შუალედისა და უკუპროპორციულია $\Delta x=h$ სისქის. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Delta Q = -k\frac{\Delta u}{\Delta x} S\,\Delta t, \tag{4.1}$$

სადაც k — მუდმივი პროპორციულობის კოეფიციენტია, ე. წ. შიგა თბოგამტარობის კოეფიციენტი, დამოუკიდებელია x-ისაგან. ნიშანი (—) იმაზე მიუთითებს, რომ სითბოს მოძრაობის მიმართულება საწინააღმდეგოა (შებრუნებულია) მიმართულებისა, რომლის მიხედვით ხდება ტემპერატურის გადიდება. თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $h=\Delta x \to 0$, მივიღებთ სითბოს რაოდენობას, რომელიც გაივლის Δt დროის შუალედში მოცემულ x კვეთაში. სითბოს ეს რაოდენობა აღვნიშნოთ ΔQ_1-ით.

გვაქვს:

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x} S\,\Delta t, \tag{4.2}$$

განვიხილავთ რა სითბოს ამ რაოდენობას ფართობისა და დროის

ერთეულისათვის, მივიღებთ $-k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ სიდიდეს, რომელსაც x კვეთაში სითბოს ნაკადი ეწოდება.

ანალოგიურად, ΔQ_2 სითბოს რაოდენობა, რომელიც გამოვიდა ღეროს $x+\Delta x$ კვეთიდან დროის Δt შუალედში, ტოლია

$$\Delta Q_2=-k\cdot\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\cdot S\Delta t. \tag{4.3}$$

ამგვარად; სითბოს ΔQ რაოდენობა, რომელსაც Δt დროის განმავლობაში შთანთქავს (მიიღებს) ღეროს განსახილავი ელემენტი, ტოლი იქნება სითბოს რაოდენობის იმ სხვაობისა, რომელიც მასში შევიდა x კვეთიდან და გამოვიდა $x+\Delta x$ კვეთიდან, რადგან ღეროს გვერდითი ზედაპირიდან სითბოს გაცვლას, პირობის თანახმად, არ აქვს ადგილი. მაშასადამე,

$$\Delta Q=\Delta Q_1-\Delta Q_2=k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t-k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t=$$

$$=k_2S\Delta t\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right], \tag{4.4}$$

თუ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულ სხვაობაზე:

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას სასრული ნაზრდის შესახებ, მაშინ, სიზუსტით უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირემდის, გვექნება:

$$\Delta Q=\Delta Q_1-\Delta Q_2=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x\cdot S\Delta t. \tag{4.5}$$

მეორე მხრივ, იგივე ΔQ სითბოს რაოდენობა შეგვიძლია სხვანაირად შევაფასოთ, თუ გავითვალისწინებთ ფიზიკურ წინაპირობას, რომ სითბოს ΔQ რაოდენობა, რომელიც აუცილებელია მივაწოდოთ ერთგვაროვან სხეულს მისი ტემპერატურის Δu სიდიდით ასამაღლებლად, გამოისახება ფორმულით:

$$\Delta Q=c\rho\Delta V\Delta u, \tag{4.6}$$

სადაც ΔV არის სხეულის მოცულობა, ρ მისი სიმკვრივე, c — ხვედრითი სითბოტევადობა.

ვთქვათ, დროის Δt შუალედში ღეროს x და $x+\Delta x$ კვეთებს შორის მოთავსებული ელემენტის ტემპერატურა Δu სიდიდით შეიცვალა.

მაგრამ, მაშინ ΔQ სითბოს რაოდენობა, რომელიც ამ შეცვლაზე დაიხარჯა (4 . 6) ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება:

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \Delta x S \cdot \Delta u, \tag{4.7}$$

სადაც c არის ღეროს ნივთიერების თბოშემცველობა, ρ — ღეროს ნივთიერების სიმკვრივე, $\rho \Delta x S$ — ღეროს ელემენტის მასა.

მაგრამ

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \alpha \Delta t, \tag{4.8}$$

სადაც α არის უმაღლესი რიგის მცირე Δt-ს მიმართ. (4 . 6) ფორმულა სიზუსტით უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირემდის, შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$\Delta Q = \Delta Q_2 - \Delta Q_1 = c\rho \Delta x \cdot S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t. \tag{4.9}$$

თუ ΔQ-სთვის მიღებულ (4 . 5) და (4 9) გამოსახულებებს ერთმანეთს გავუტოლებთ და $S \Delta x \Delta t$ მამრავლზე შევკვეცავთ, მივიღებთ განტოლებას:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.10}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\dfrac{k}{c\rho} = a^2$, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.11}$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს **ერთგვაროვანი ღეროსათვის სითბოს გავრცელების ძირითად განტოლებას.**

იმისათვის, რომ (4 11) განტოლების ამონახსნი იყოს სრულიად განსაზღვრული, $u(x, t)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ზოგიერთ დამატებით პირობას, რომელიც ამოცანის ფიზიკურ პირობებს შეესაბამება.

საწყისი და სასაზღვრო პირობები. სითბოგამტარობის პრობლემა მდგომარეობს (4 11) განტოლების ინტეგრებაში მოცემულ საწყის და სასაზღვრო პირობებში.

(4 . 11) განტოლებისათვის საწყისი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ $u = u(x, t)$ ფუნქცია ტოლი უნდა იყოს მოცემული $f(x)$ ფუნქციისა, ე. ი. $t = 0$ მომენტში მოცემული უნდა იყოს ტემპერატურის განაწილება ღეროს სხვადასხვა წერტილებში:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \tag{4.12}$$

სადაც $f(x)$ არის $[0, l]$ შუალედში მოცემული ფუნქცია.

ისე როგორც განსახილველ შემთხვევაში, როცა ღერო შემოსაზღვრულია ორივე მხრიდან, (4 . 11) განტოლებისათვის სასაზღვრო პირობები მდგომარეობს იმაში, რომ ღეროს $x=0$ და $x=l$ ბოლოებზე შენარჩუნებულია $\varphi(x)$-ის და $\varphi_1(x)$-ის ტოლი ტემპერატურა შესაბამისად, ე. ი. ღეროს $x=0$ და $x=l$ ბოლოებზე $u(x, t)$ ფუნქცია ტოლი უნდა იყოს $[0, l]$ შუალედში მოცემული $\varphi(x)$ და $\varphi_1(x)$ ფუნქციებისა:

$$u(x, t)\Big|_{x=0}=\varphi(x), \qquad u(x, y)\Big|_{x=l}=\varphi_1(x). \tag{4.13}$$

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (4.11) განტოლებას $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$ არეში აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც (4 . 12) და (4 . 13) პირობებს აკმაყოფილებს.

§ 5. შემოსაზღვრულ ღეროში სითბოგამტარობის ამოცანის ამოხსნა ფურიეს მეთოდით

1. ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი ს ა ს ა ზ ღ ვ რ ო ა მ ო ც ა ნ ა. ვიპოვოთ $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$ დახურულ არეში მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას:

$$u(x, 0)=f(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l,$$

და ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$u(0, t)=0, \qquad u(l, t)=0 \qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

ამ ამოცანის ამოხსნისათვის, როგორც მიღებულია ფურიეს ცვლადთა განცალების მეთოდში, ჯერ ამოვხსნათ შემდეგი დამხმარე ამოცანა:

ვიპოვოთ ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

რომელიც იგივურად არ უდრის ნულს, აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$u(0, t)=0, \qquad u(l, t)=0,$$

და წარმოიდგინება სახით:

$$u(x, t)=X(x)\,T(t), \tag{5.1'}$$

სადაც $X(x)$ არის მხოლოდ x-ის ფუნქცია, ხოლო $T(t)$ — მხოლოდ t-ს ფუნქცია.

ისე როგორც სიმის რხევის ამოცანაში, (5.1′) ჩავსვათ (5.1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda, \tag{5.2}$$

სადაც $\lambda=\mathrm{const}$; რადგან (5.2) ტოლობაში მარცხენა ნაწილი დამოკიდებულია მხოლოდ t-ზე, ხოლო მარჯვენა ნაწილი მხოლოდ x-ზე. ამიტომ ეს ტოლობა შეიძლება შესრულდეს, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი x და t ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ერთი და იმავე მუდმივის ტოლია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$X''+\lambda X=0, \tag{5.3}$$

$$T'+a^2\lambda T=0. \tag{5.4}$$

(5.3) განტოლებისათვის სასაზღვრო პირობები გვაძლევს:

$$X(0)=0, \quad X(l)=0.$$

ამგვარად, $X(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის გვაქვს განტოლება:

$$X''(x)+\lambda X=0,$$

$$X(0)=0, \quad X(l)=0$$

სასაზღვრო პირობებით.

(5.3) განტოლება შესწავლილი იყო წინა პარაგრაფში სიმის რხევის განტოლების ამოხსნის დროს, სადაც ნაჩვენები იყო, რომ λ პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის:

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{l}, \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

ანუ

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

არსებობს (5.3) განტოლების არატრივიალური (ე. ი. იგივურად არანულის ტოლი) ამონახსნები:

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad B_n=1$$

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

λ_n-ის ამ მნიშვნელობებს შეესაბამება (5 . 4) განტოლების ამონახს-ნები:

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \qquad (5.5)$$

სადაც C_n ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივებია.

ამგვარად, ფუნქცია

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

წარმოადგენს (5 . 1) განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც ნულოვან სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს.

ახლა შევადგინოთ მწკრივი:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 a^2 t} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad (5.6)$$

$u(x, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს: $u(0, t)=0$, $u(l, t)=0$, რადგან მას მწკრივის ყველა წევრი აკმაყოფილებს.

ახლა C_n კოეფიციენტები ისე შევარჩიოთ, რომ (5 . 6) წარმოადგენდეს (5 . 1) განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც საწყის პირობას აკმაყოფილებს. მართლაც, $u(x, 0)=f(x)$ საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad (5.7)$$

ე. ი. C_n კოეფიციენტები უნდა წარმოადგენდეს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლის კოეფიციენტებს:

$$C_n = \frac{2}{e} \int_0^e f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \qquad (5.8)$$

$$(n = 1, 2, ..)$$

ამგვარად, ჩვენი დაშვების პირობებში დავამტკიცეთ, რომ (5 . 6) მწკრივი, სადაც C_n $(n=1, 2, \cdots)$ კოეფიციენტები განსაზღვრულია (5 . 8) ფორმულით, წარმოადგენს (5 . 1) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც მოცემულ საწყის და სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს.

ჩვენ განვიხილეთ სითბოგამტარობის ამოცანის უმარტივესი შემთხვევა, თუმცა, შესაძლოა უფრო ზოგადი სასაზღვრო პირობებიც, როცა ღეროს ბოლოებზე ადგილი აქვს სითბოს გაცვლას გარემომცველ სივრცესთან.

§ 6. თბოგამტარობა უსასრულო ღეროში

ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფში მიღებული აღნიშვნებით და შედეგებით.

განვიხილოთ წვრილი შემოუსაზღვრელი სიგრძის თბოგამტარი ღერო, რომლის გვერდითი ზედაპირი იზოლირებულია გარეშე სივრციდან.

ვთქვათ, საწყის $t=0$ მომენტში შემოუსაზღვრელი ღეროს სხვადასხვა კვეთაში მოცემულია ტემპერატურის განაწილება:

$$u(x,\, t)\Big|_{t=0} = f(x), \tag{6.1}$$

სადაც $f(x)$ განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე ($-\infty < x < < \infty$). ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ მომდევნო t მომენტებში ტემპერატურის განაწილება ღეროში, ე. ი. უნდა ვიპოვოთ $u(x,\, t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{6.2}$$

შევნიშნავთ, რომ შემოუსაზღვრელ ღეროში სითბოს გავრცელების ამოცანაზე დაიყვანება ფიზიკური ამოცანები იმ შემთხვევაში, როცა ღეროს შიგა წერტილების ტემპერატურაზე დროის განსახილველ მომენტებში მთავარ გავლენას ახდენს ტემპერატურის საწყისი განაწილება ღეროში და იგი მცირედაა დამოკიდებული ღეროს ბოლოების ტემპერატურულ პირობებზე.

განსახილველ შემთხვევაში $u(x,\, t)$ ფუნქციისათვის არ გვექნება სასაზღვრო პირობები და საძიებელმა $u(x,\, t)$ ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს მხოლოდ (6 . 1) საწყისი პირობა.

ისე როგორც შემოსაზღვრული ღეროს შემთხვევაში, ვიგულისხმებთ, რომ ღეროს ღერძი ემთხვევა Ox ღერძს და ყოველ მის კვეთაში ტემპერატურა მხოლოდ მისი კვეთის x აბსცისისა და t დროის ფუნქციაა.

ამგვარად, შემოუსაზღვრელი ღეროს შემთხვევაში, თბოგამტარობის პრობლემა მდგომარეობს შემდეგში:

ვიპოვოთ განტოლების

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.2'}$$

$u=u(x,\ t)$ ამონახსნი $-\infty<x<\infty,\ t>0$, არეში, რომელიც აკმაყოფილებს ერთადერთ საწყის პირობას:

$$u(x,\ t)\Big|_{t=0}=f(x),$$

სადაც $f(x)$ ახასიათებს საწყის $t=0$ მომენტში ტემპერატურის განაწილებას ღეროში.

ეს ამოცანა ამოვხსნათ ფ უ რ ი ე ს ცვლადთა განცალების მეთოდით.

ვეძებოთ (6 . 2) განტოლების $u(x,\ t)$ ამონახსნი ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე, ხოლო მეორე მხოლოდ t-ზე:

$$u(x,\ t)=X(x)\,T(t) \tag{6.3}$$

(6 . 2) დიფერენციალურ განტოლებაში ჩავსვათ (5 . 3) ფორმულით განსაზღვრული $u(x,\ t)$ ფუნქცია, გვექნება:

$$X(x)\,T'(t)=a^2\,T(t)\cdot X''(x),$$

ანუ

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{6.4}$$

ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს t-ს ფუნქციას და არაა დამოუკიდებელი x-საგან; ხოლო მარჯვენა ნაწილი x-ის ფუნქციაა და არაა დამოკიდებული t-საგან. ამიტომ (6 . 4) განტოლება შეიძლება დაკმაყოფილდეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი x და t ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის მხოლოდ მაშინ, როცა განტოლების ორივე ნაწილი ეტოლება ერთსა და იმავე მუდმივ სიდიდეს. აღვნიშნოთ ეს მუდმივი $-\lambda^2$-ით[1], სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, $0<\lambda<+\infty$. ამგვარად, გვაქვს:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,$$

საიდანაც

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda^2,\qquad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,$$

---

[1] რადგან ყოველი ფიქსირებული x-ისთვის, ღეროს ყოველ კვეთაში $u(x,\ t)=X(x)\,T(t)$ ტემპერატურა ნებისმიერი t-სთვის, $t>0$, უნდა დარჩეს შემოსაზღვრული, ამიტომ $\frac{T'}{T}$ უნდა იყოს უარყოფითი.

ანუ

$$\begin{aligned} T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით, ვიპოვით ზოგად ამოხსნებს.

$$T(t) = C e^{-a^2\lambda^2 t}$$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობებს გავითვალისწინებთ (5 . 3) ფორმულაში. მაშინ მივიღებთ (5 . 2) განტოლების კერძო ამონახსნს სახით:

$$u(x, t) = (AC\cos\lambda x + BC\sin\lambda x)\, e^{-a^2\lambda^2 t}$$

ანუ

$$u(x, t) = (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, e^{-a^2\lambda^2 t} \tag{6.6}$$

სადაც $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ არის λ პარამეტრზე დამოკიდებული ნებისმიერი მუდმივები, ხოლო C მუდმივი ჩართულია $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$-ში.

(6 . 6) ფორმულით განსაზღვრული $u(x, t)$ ფუნქცია λ-ს ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს (6 . 2) განტოლების ამონახსნს. λ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის A და B ნებისმიერ მუდმივებს აქვს გარკვეული მნიშვნელობანი. ამიტომ A და B შეგვიძლია ჩავთვალოთ (მივიღოთ) როგორც λ-ს ნებისმიერი ფუნქციები:

$$A = A(\lambda), \ B = B(\lambda).$$

ამგვარად, მივიღებთ λ პარამეტრზე დამოკიდებულ (5.2) განტოლების კერძო ამონახსნების ოჯახს:

$$u_\lambda(x, t) = (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, e^{-a^2\lambda^2 t}, \tag{6.7}$$

სადაც $0 < \lambda < \infty$.

მაშასადამე, (6 . 2) განტოლებას აქვს უსასრულო სიმრავლე კერძო ამონახსნებისა, რომლებიც უწყვეტად დამოკიდებულია ცვლად λ პარამეტრზე.

(6 . 2) წრფივი დიფერენციალური განტოლების ერთგვაროვნობის გამო, (6 . 7) სახის კერძო ამონახსნების შეჯამებით მივიღებთ (5 . 2) განტოლების ამონახსნს.

ამიტომ (5,7) ტოლობის λ-ს მიმართ უშუალო ინტეგრებით, 0-დან ∞-მდე საზღვრებში, ვიპოვით (5,2) განტოლების ამონახსნს:

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2 t}\, d\lambda, \tag{6.8}$$

რომელიც დამოკიდებულია ორ $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ ნებისმიერ ფუნქციაზე. უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ (6.8) ფორმულით განსაზღვრული $u(x, t)$ ფუნქცია, ნებისმიერი $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$-სათვის, მართლაც აკმაყოფილებს (6.2) განტოლებას.

ამისათვის საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ (6,8) არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია და შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მისი გაწარმოება x-ითა და t-თი. მართლაც, გვაქვს:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left\{[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2 t}\right\} d\lambda =$$

$$= -a^2\lambda^2 \int_0^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2 t}\, d\lambda.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2 t}\, d\lambda,$$

ასე რომ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

ახლა (6.8) ამონახსნში $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ ფუნქციები ისე შევარჩიოთ, რომ $u(x, t)$ ფუნქციამ დააკმაყოფილოს საწყისი პირობა:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x),$$

ე. ი.

$$u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda. \qquad (6.9)$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქცია უნდა იყოს ისეთი, რომ შესაძლებელი იყოს მისი წარმოდგენა (6.9) ინტეგრალით ანდა, რაც იგივეა, ფ უ რ ი ე ს ინტეგრალით. ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ყველა პირობას მისი ფურიეს ინტეგრალით წარმოდგენისათვის.

თანახმად ფურიეს ინტეგრალური ფორმულისა, $f(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\, d\alpha.$$

რადგან

$$\cos\lambda(\alpha - x) = \cos\lambda x \cos\lambda\alpha + \sin\lambda\alpha \sin\lambda x,$$

ამიტომ ფურიეს ინტეგრალი შეიძლება გადავწეროთ სახით:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda\alpha\, d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin\lambda\alpha\, dx\right)\sin\lambda x\right] d\lambda. \tag{6.10}$$

შევადარებთ რა (5 . 9) და (5 . 10) ფორმულების მარჯვენა ნაწილებს, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda\alpha\, d\alpha, \\ B(\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin\lambda\alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

ჩავსვათ $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$-სთვის ნაპოვნი გამოსახულებები (6 . 8) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda\alpha\, d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin\lambda\alpha\, d\alpha\right)\sin\lambda x\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x + \sin\lambda\alpha\sin\lambda x)\, d\alpha\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\, d\alpha, \tag{6.12}$$

ანუ, თუ შევცვლით ინტეგრების რიგს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_{0}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x)\, d\lambda. \qquad (6.13)$$

(6 . 13) ფორმულით განსაზღვრული ფუნქცია წარმოადგენს თბოგამტარობის ამოცანის ამონახსნს, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს. მართლაც, როცა $t=0$, თანახმად (6 . 13) ფორმულისა,

$$u(x, 0) = f(x).$$

თბოგამტარობის ამოცანის (6 . 13) ამონახსნი შეიძლება დაყვანილ იქნეს უფრო მარტივ სახეზე, თუ (6 . 13) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის შიგა ინტეგრალში შევცვლით ცვლადს; მართლაც, მივიღოთ:

$$a \lambda \sqrt{t} = \xi \text{ და შემოვიღოთ აღნიშვნა } \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta,$$

მაშინ გვექნება:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x)\, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta\xi\, d\xi. \qquad (6.14)$$

აღვნიშნოთ

$$I(\beta) = \int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta\xi\, d\xi. \qquad (6.14)$$

აქედან, თუ შევასრულებთ ინტეგრალის შიგნით გაწარმოებას, მივიღებთ:

$$I'(\beta) = -\int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2} \xi \sin \beta \xi\, d\xi,$$

საიდანაც ნაწილობითი ინტეგრებით ვიპოვით:

$$I'(\beta) = \frac{1}{2} \left[e^{-\xi^2} \sin \beta\xi \right]_{0}^{\infty} - \frac{\beta}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta\xi\, x\xi,$$

ანუ

$$I'(\beta) = -\frac{\beta}{2} I(\beta).$$

თუ შევასრულებთ ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებას, მივიღებთ:

$$I(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4}} \tag{6.16}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ახლა ვისარგებლოთ ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილი ფორმულით:

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

და (6 . 16) ფორმულიდან განვსაზღვროთ C მუდმივი:

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ამგვარად, მივიღებთ:

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \beta\xi \, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

I (β)-ს ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (6 . 14)-ში; მაშინ, თუ დავუბრუნდებით ძველ აღნიშვნებს, საბოლოოდ გვექნება:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} \tag{6.17}$$

ჩავსვამთ რა ამ ინტეგრალის გამოსახულებას (5 . 13) ამონახსნში, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} d\alpha. \tag{6.18}$$

ეს ფორმულა, რომელსაც პუასონის ინტეგრალი ეწოდება, წარმოადგენს შემოუსაზღვრელ ღეროში სითბოს გავრცელების ამოცანის ამონახსნს, ე. ი. $u(x, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (6 . 2) განტოლებას და საწყის პირობას.

შინაარსი

I თავი

ზოგადი ცნებები

§ 1. შესავალი . 3
§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი და კერძო ამონახსნი . . 9
§ 3. ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ბრტყელ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება . . 20
§ 4. ზოგიერთი ამოცანა, რომელიც ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე დაიყვანება . . 24
§ 5. წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია . . 31
§ 6. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გრაფიკული ამოხსნა 35

II თავი

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც ამოიხსნება კვადრატურებში

§ 1. წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები . 43
§ 2. დიფერენციალური განტოლებანი განცალებული ცვლადებით 44
§ 3. ერთგვაროვანი განტოლებები 54
§ 4. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირთა გეომეტრიული თვისება . . 61
§ 5. განტოლებანი, რომლებიც პირველი რიგის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე დაიყვანებიან . 69
§ 6. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები . . 74
§ 7. განტოლებანი, რომლებიც წრფივ განტოლებაზე დაიყვანებიან. ბერნულის განტოლება . 83
§ 8. რიკატის განტოლება . 86
§ 9. განტოლებანი სრულ დიფერენციალებში 89
§ 10. მაინტეგრებელი მამრავლი 95
§ 11. მაინტეგრებელი მამრავლი და დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები, რომლებიც არ გამომდინარეობენ ზოგადი ამონახსნიდან 102
§ 12. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლის არსებობა და განსაზღვრის წესი 105

III თავი

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა

§ 1. ლიფშიცის პირობა . 109
§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა 110
§ 3. ამონახსნის ანალიზური გაგრძელება . 119
§ 4. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგება 122
§ 5. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც დაკავშირებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემასთან 132

IV თავი

წარმოებულის მიმართ ამოუხსნელი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. $F(x, y, y')=0$ ზოგადი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი 148
§ 2. ზოგიერთი $F(x, y, y')=0$ სახის ინტეგრებადი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც არ შეიცავს ერთ-ერთ ცვლადს x-ს ან y-ს 153
§ 3. x-ისა და y-ის მიმართ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი 154
§ 4. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებანი . 156
§ 5. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები 164
§ 6. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნები 175
§ 7. წირთა ოჯახის მომვლები . 179
§ 8. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნების მოძებნის წესები 187
§ 9. ამოცანები ტრაექტორიების შესახებ 206

V თავი

უმაღლესი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი და ზოგადი ამონახსნი . . . 214
§ 2. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების გეომეტრიული და მექანიკური ინტერპრეტაცია 225
§ 3. n ნებისმიერ მუდმივზე დამოკიდებული ბრტყელ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება . 227
§ 4. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა . . 232
§ 5. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგება 246
§ 6. ზოგიერთი ტიპის n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების რიგის დაწევა 248

VI თავი

უმაღლესი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი 261
§ 2. ფუნქციათა სისტემების წრფივად დამოუკიდებლობა და წრფივად დამოკიდებულება . 265
§ 3. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება და მისი ზოგადი ამონახსნის სახე 266
§ 4. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების აგება, რომელსაც აქვს ამონახსნების მოცემულ ფუნდამენტური სისტემა 276
§ 5. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა ინტეგრება . 280
§ 6. არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი 285

VII თავი

n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

§ 1. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი 296
§ 2. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებანი . .. 313
§ 3. მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებებზე დაყვანადი განტოლებანი . . 334
§ 4. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება და მისი გამოყენება 338

VIII თავი

მეორე რიგის ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. მეორე რგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების უმარტივეს სახეზე დაყვანა 349
§ 2. კავშირი მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებასა და რიკატის განტოლებას შორის . . . 353
§ 3. წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ხარისხოვანი მწკრივების მეშვეობით . . . 354
§ 4. მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა ამონახსნების რხევითი ხასიათი 361

IX თავი

ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

§ 1. ძირითადი ცნებანი . . . 368
§ 2. დიფერენციალურ განტოლებათა კანონიკური სისტემები . 371
§ 3. დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემები 377
§ 4. დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემის ინტეგრება უმაღლესი რიგის ერთ დიფერენციალურ განტოლებაზე დაყვანის გზით 380
§ 5. წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები . . 389
§ 6. წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების თვისებები. ერთგვაროვანი

სისტემის ზოგადი ამონახსნის აგება 394
§ 7. წრფივი არაერთგვაროვანი სისტემები . . 404
§ 8. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი სისტემები 408

X თავი

მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლება

§ 1. ზოგადი ცნობები კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა შესახებ . 419
§ 2. სიმის თავისუფალი რხევების განტოლების გამოყვანა . 431
§ 3. ფურიეს მეთოდი სიმის თავისუფალი რხევების განტოლებისათვის (ცვლად-თა განცალების მეთოდი) . . 338
§ 4. თბოგამტარობის განტოლების გამოყვანა 444
§ 5. შემოსაზღვრულ ღეროში თბოგამტარობის ამოცანის ამოხსნა ფურიეს მეთოდით . . 448
§ 6. თბოგამტარობა უსასრულო ღეროში 451

ИБ № 1039

რედაქტორები: რ. დ ა ნ ე ლ ი ა და ნ. გ ვ ა ნ ც ე ლ ა ძ ე
მხატვრული რედაქტორი ნ. ვ ე კ უ ა
ტექრედაქტორი ზ. მ ა ხ ა რ ა შ ვ ი ლ ი
უფროსი კორექტორი ნ. დ გ ე ბ უ ა ძ ე
კორექტორი ნ. ქ ა ფ ი ა ნ ი ძ ე
გამომშვები ლ. დ ა ვ ი თ უ რ ი

გადაეცა წარმოებას 07.12.82 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.10.83 წ. ქაღალდის ზომა 60×90. საბეჭდი ქაღალდი № 2. ნაბეჭდი თაბახი 29. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 21,19.
ტირაჟი 3.000 შეკვ. № 487.
ფასი 1 მან. 10 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50
1983

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, მეგობრობის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика, им. И. Чавчавадзе, Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств полиграфии и книжноей торговли, пр. Дружбы № 7