შრომები

129

ТРУДЫ

მექანიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა სერია

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

თბილისი

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Тбилисский государственный университет

К 60-летию со дня рождения
академика
Ильи Несторовича Векуа

ТРУДЫ

129

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

VI

ТБИЛИСИ 1968

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

აკადემიკოს ილია ვეკუას
დაბადების 60 წლისთავზე

შრომები

129

მექანიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა სერია

VI

თბილისი 1968

დაიბეჭდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭოს დადგენილებით

Печатается по постановлению Ученого совета механико-математического факультета Тбилисского государственного университета

შინაარსი

ი. ვეკუას სამეცნიერო ნაშრომთა ბიბლიოგრაფია . . . . 11 გვ.

კაპანაძე რ. — ნორმირებულ სივრცეებში სინგულარული ოპერატორების ზოგიერთი თვისების შესახებ 17

მაღნარაძე ლ. — სტილტიესის სინგულარული ინტეგრალი განზოგადებული მთავარი მნიშვნელობის აზრით და ფურიე-სტილტიესის მწკრივების (C, α) შეჯამებადობა 27

ბაშელეიშვილი მ. — ორთოტროპული დრეკადი ნახევარსივრცისათვის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა წონასწორობის შემთხვევაში 47

ბურჭულაძე თ. — დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები მრავლადბმული არეებისათვის 57

ავინიკაძე გ. — დრეკადობის თეორიის განზოგადებული შერეული სასაზღვრო ამოცანების საკუთარი სიხშირის სპექტრის არსებობის შესახებ მრავლადბმული არეების შემთხვევაში 79

ავალიშვილი ლ. — შენიშვნა სტოქსის და ოზენის სტაციონარული და არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალურ ამოხსნებს შორის დამოკიდებულების შესახებ 113

ჯორბენაძე ნ. — ფოროვან დიფუზორში ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული მოძრაობის შესახებ 121

მეუნარგია ს. — მართკუთხა კანონიკური არხის კონფორმული გადასახვის შესახებ 129

ციცქიშვილი ა. — ფილტრაციის ამოცანის შესახებ მიწის კაშხალში, როცა კაშხალი აგებულია სასრული სიღრმის წყალგამტარ საფუძველზე 137

ხარატიშვილი გ.—მაქსიმუმის პრინციპი ექსტრემალურ ამოცანებში დაგვიანებით 149

იხიუმოვა დ. — ზოგიერთ არაწრფივ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ 157

კოპლატაძე რ. — ორი წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ 179

ბანდუქიძე ა. — მწკრივების შეჯამებადობის ერთი მეთოდის შესახებ . . . 195

ჯვარშეიშვილი ა. — სინგულარული ინტეგრალების შესახებ 203

ფანჯაკიძე შ. — ფურიეს ჯერადი მწკრივების კოეფიციენტებისა და აბსოლუტური კრებადობის შესახებ 207

თევზაძე ნ. — პარამეტრზე დამოკიდებულ იმ ფუნქციათა მიმდევრობის შესახებ, რომლებსაც აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები . . . 221

ხარშილაძე ფ. — ერთი თეორემა აბსოლუტურად უწყვეტობის შესახებ . . . 227

წითლანაძე ე. — დიფერენცირებადი ფუნქციონალისა და ოპერატორის ზოგიერთი საკითხი ლოკალურად რწფივ სივრცეში 237

ჭელიძე ე. — სტილტიესის ორმაგი გარდაქმნის შესახებ 251

კოლონია პ. — რაციონალური აპროქსიმაციის ზოგიერთი საკითხი. II 267

ლომაძე გ. — რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ექვსცვლადიანი კვადრატული ფორმით. II 275

ლურსმანაშვილი ა. — რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ მთელი კვადრატების და მთელი უკვადრატო რიცხვების კვადრატების ჯამის სახით 299

ა ლ შ ი ბ ა ი ა ე. — ჰიპერზედაპირის დიფერენციალური გეომეტრია მრავალგანზომილებიან აფინურ სივრცეში 319
თ ე ვ ზ ა ძ ე გ. — პროექციული სივრცის ზედაპირზე ზოგიერთი ბადის შესახებ . . 343
ჩ ა ხ ტ ა უ რ ი ა. — პროექციულად-დეფორმად ზედაპირთა შესახებ 365
მ ა ნ ი ა გ. — მოცემული შერჩევით მრავალგანზომილებიანი ნორმალური განაწილების სიმკვრივის კვადრატული ცდომილება 373
დ ა თ უ ა შ ვ ი ლ ი გ. — პარაბოლური ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ 383
მ ე ლ ა ძ ე ჰ. — სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ სასრულსხვაობიანი მეთოდით ელიფსური ტიპის კვაზი-წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის . . 391
წ ე რ ე თ ე ლ ი ა.—მრავალი ცვლადის ფუნქციის აპროქსიმაცია $\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\dots+\varphi_n(x_n)$ სახის ფუნქციებით 397
ჰ ა ი დ უ კ ი ი., ნ ა უ მ ო ვ ი ი. — ჩეხოსლოვაკიისა და სსრკ მათემატიკურ კულტურათა კავშირის ისტორიული წარსული 411
გ ო კ ი ე ლ ი ლ. — მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთდამოკიდებულება . . 429

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

СОДЕРЖАНИЕ

Библиография научных трудов И. Н. Векуа 11
Капанадзе Р. В. — О некоторых свойствах сингулярных операторов в нормированных пространствах 17
Магнарадзе Л. Г. — Сингулярный интеграл Стилтьеса в смысле обобщенного главного значения и (C, α) суммирование рядов Фурье-Стилтьеса . 27
Башелейшвили М. О. — Решение основных граничных задач статики для ортотропного упругого полупространства 47
Бурчуладзе Т. В. — Граничные задачи теории упругости для многосвязных областей 57
Квиникадзе Г. П. — О существовании спектра собственных частот для обобщенных смешанных задач теории упругости в случае многосвязных областей 79
Авалишвили Л. Э. — Заметка о взаимосвязи между фундаментальными решениями стационарных и нестационарных уравнений Стокса и Озеена . 113
Джорбенадзе Н. П. — О стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в йодистом диффузоре 121
Меунаргиа С. В. — О конформном отображении канонического прямоугольного канала на нижнюю полуплоскость 129
Цицкишвили А. Р. — О фильтрации в земляную плотину на водопроницаемом основании конечной глубины 137
Харатишвили Г. Л. — Принцип максимума в экстремальных задачах с запаздываниями 149
Изюмова Д. В. — Об асимптотическом поведении решений некоторых обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка . . 157
Коплатадзе Р. Г. — Об асимтотическом поведении решений системы двух линейных дифференциальных уравнений 179
Бендукидзе А. Д. — Об одном методе суммирования рядов 195
Джваршейшвили А. Г. — О сингулярных интегралах 203
Панджакидзе Ш. П. — О коэффициентах двойных рядов Фурье и об их абсолютной сходимости 207
Тевзадзе Н. Р. — Об одной последовательности функций, зависящих от параметра и имеющих равностепенные абсолютно непрерывные интегралы . . 221
Харшиладзе Ф. И. — Одна теорема об абсолютной непрерывности 227
Цитланадзе Э. С. — Некоторые вопросы дифференцируемых функционалов и операторов в локально линейных пространствах 237
Челидзе Э. В. — О двойном преобразовании Стилтьеса 251
Когониа П. Г. — Некоторые вопросы рациональной аппроксимации. II . . . 267
Ломадзе Г. А. — О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с шестью переменными. II 275
Лурсманашвили А. П. — О представлении чисел суммами квадратов целых и целых бесквадратных чисел 299
Алшибая Э. Д. — Дифференциальная геометрия гиперповерхности в многомерном аффинном пространстве 319

Тевзадзе Г. Н. — О некоторых сетях на поверхности проективного пространства 343
Чахтаури А. И. — О проективно-деформируемых поверхностях . . . 365
Маниа Г. М. — Квадратическая погрешность оценки плотности многомерного нормального распределения по данным выборки 373
Датуашвили Г. С. — О численном решении системы дифференциальных уравнений параболического типа 383
Меладзе Г. В. — О решении методом конечных разностей краевой задачи для квазилинейного уравнения эллиптического типа 391
Церетели А. С.—Аппроксимация функций многих переменных функциями вида $\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\ldots+\varphi_n(x_n)$ 397
Гайдук Ю. М., Наумов И. А. — Историческое прошлое связей между математическими культурами Чехословакии и СССР 411
Гокиели Л. П. — О соотношении математики и философии 429

23 апреля 1967 года исполнилось 60 лет выдающемуся советскому ученому, лауреату Ленинской и Государственной премий, академику Илье Несторовичу Векуа.

Илья Несторович является автором свыше ста научных исследований из широкого круга вопросов математики и механики. Им были получены важные результаты по граничным задачам уравнений в частных производных эллиптического типа. Характерной чертой его исследований по этим вопросам является систематическое применение методов теории аналитических функций комплексного переменного. Для достаточно широкого класса эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, И. Н. Векуа построил формулы общего представления всех регулярных решений через аналитические функции одного комплексного переменного и применил их к многочисленным граничным задачам математической физики. Следует здесь же отметить интересные результаты, касающиеся внешних граничных задач метагармонических уравнений.

Фундаментальные результаты получены И. Н. Векуа по теории сингулярных интегральных уравнений и ее применениям к граничным задачам теории аналитических функций комплексного переменного (теоремы эквивалентности, способ регуляризации, общая граничная задача Римана-Гильберта и другие).

Дальнейшее развитие методов общих представлений решений на случай эллиптических систем дифференциальных уравнений с неаналитическими коэффициентами дало возможность И. Н. Векуа построить теорию функций, названных им обобщенными аналитическими функциями. Многие известные свойства аналитических функций были им распространены на обобщенные аналитические функции.

Результаты, полученные И. Н. Векуа в теории обобщенных аналитических функций, нашли интересные применения в теории изгибания поверхностей и в безмоментной теории оболочек.

И. Н. Векуа нашел новое доказательство теоремы о глобальном приведении положительной дифференциальной квадратичной формы на двумерной поверхности к каноническому виду. Он предложил новый вариант теории оболочек, по которой основные дифференциальные уравнения совместимы с граничными условиями, что не имеет места в других вариантах теории. Кроме того, этот новый вариант удобен для численного решения граничных задач на современных вычислительных машинах.

Большие заслуги имеет И. Н. Векуа в деле подготовки научных кадров. Его ученики, среди которых имеется ряд докторов и кантидатов наук, ведут плодотворную научно-исследовательскую работу в Советском Союзе и за рубежом.

ი. ვეკუას სამეცნიერო ნაშრომთა ბიბლიოგრაფია*

БИБЛИОГРАФИЯ НАУЧНЫХ ТРУДОВ*

И. Н. ВЕКУА

1. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, ОМЕН, 7 серия, 1933, № 3, стр. 373 — 386. (Совместно с А. К. Рухадзе).

2. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. Прикл. мат. и мех., 1933, т. I, вып. 2, стр. 167 — 178. (Совместно с А. К. Рухадзе).

3. Распространение упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. В кн.: Труды II Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 24—30 июня 1934, т. 2. Секционные доклады. Л.-М., АН СССР, 1936, стр. 363—364.

4. Комплексное представление общего решения уравнений стационарной плоской задачи теории упругости. Докл. АН СССР, 1937, т. 16, № 3, стр. 163—168.

5. **Sur une représentation complexe de la solution générale des équations du problème stationnaire, plan de la théorie de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, 1937, v. 16, № 3, p. 155—160.**

6. Об общем представлении решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 6, стр. 291 — 295.

7. **Sur la représentation générale des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sci. URSS, 1937, v. 17, № 6, p. 295—299.**

8. Общее представление решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа линейных относительно оператора Лапласа. Тр. Тбил. мат. ин-та, 1937, т. 2, стр. 227 — 240. (Резюме на нем. яз.).

9. Краевая задача колебания бесконечного слоя. Тр. Тбил. мат. ин-та, 1937, т. 1, стр. 141—164. (На груз. яз., резюме на нем. яз.).

10. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. Тр. Тбил. геофиз. ин-та, 1937, т. 2, стр. 23—50. (Резюме на груз. яз.).

11. Несколько замечаний по поводу статьи И. Г. Курдиани «Некоторые вопросы неустойчивости стратификации воздушных масс». Тр. Тбил. геофиз. ин-та, 1939, т. 4, стр. 165—171.

12. О сингулярных линейных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле головного значения по Коши. Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 4, стр. 335—338.

13. **Sur les équations intégrales linéaires singulières contenant des intégrales au sens de la valeur principale de Cauchy. C. R. Acad. Sci. URSS, 1940, v. 26, № 4, p. 327—330.**

---

* ბიბლიოგრაფიაში შეტანილი არ არის ზოგიერთი სამეცნიერო-პოპულარული ხასიათის ნაშრომი.

* В библиографию не вошли некоторые работы научно-популярного характера.

14. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. 1. Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, т. I, № 1, стр. 29—34.

15. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. 2. Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, т. I, № 3, стр. 181—186.

16. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. 3. Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, т. I, № 7, стр. 497—500.

17. Замечания по поводу метода Фурье. Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, т. I, № 9, стр. 647—650. (Совместно с Д. Ф. Харазовым).

18. Приложение метода акад. Н. Мусхелишвили к решению граничных задач плоской теории упругости анизотропной среды. Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, т. I, № 10, стр. 719—724.

19. Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применения к граничным задачам. Тр. Тбил. мат. ин-та, 1940, т. 7, стр 161 — 253.

20. **Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet**, Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, т. I, № 5, стр. 329—335. (Резюме на груз. яз.).

21. Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении. Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, т. 2, № 6, стр. 477 — 484. (Резюме на груз. яз.).

22. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, т. 2, № 7, стр. 579—586. (Резюме на груз. яз.).

23. О приведении сингулярных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма. Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, т. 2, № 8, стр. 697—700. (Резюме на груз. яз.).

24. Дополнения к работе «Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении». Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, т. 2, № 8, стр. 701—706. (Резюме на груз. яз.).

25. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши. Тр. Тбил. мат. ин-та, 1941, т. 10, стр. 45—72. (Резюме на груз. яз.).

26. **Über harmonische und metaharmonische Funktionen im Raum**. Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, т. 2, № 1—2, стр. 29—34.

27. Об аппроксимации решений эллиптических дифференциальных уравнений. Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, т. 3, № 2, стр. 97—102.

28. Решение основной краевой задачи для уравнения $\Delta^{n+1} n = 0$. Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, т. 3, № 3, стр. 213—220.

29. О решениях уравнения $\Delta n + \lambda^2 u = 0$. Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, т. 3, № 4, стр. 307—314. (На груз. яз., резюме на русск. яз.).

30. Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, т. 3, № 7, стр. 641—648. (Резюме на груз. яз.).

31. К теории сингулярных интегральных уравнений. Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, т. 3, № 9, стр. 869 — 876.

32. Об одной линейной граничной задаче Римана. Тр. Тбил. мат. ин-та. 1942, т. XI, стр. 109—139.

33. О некоторых основных свойствах метагармонических функций. Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, т. 4, стр. 281—288. (Резюме на груз. яз.).

34. Замечания об общем представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, т. 4, № 5, стр. 385—392. (На груз. яз., резюме на русск. яз.).

35. К общей задаче дифракции. Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, т. 4, № 6, стр. 503—506. (Резюме на груз. яз.).

36. Об одном интегральном представлении решений дифференциальных уравнений. Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, т. 4, № 9, стр. 843—852. (Текст на русск. и груз. яз.).

37. Об одном новом представлении решений дифференциальных уравнений. Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, т. 4, № 10, стр. 941—950. (На груз. яз., резюме на русск. яз.).

38. О метагармонических функциях. Тр. Тбил. мат. ин-та, 1943, т. 12, стр. 105—174.

39. Исправление к статье «Об одной линейной граничной задаче Римана». (Тр. Тбил. мат. ин-та, 1942, т. XI, стр. 109—139). Тр. Тбил. гос. ун-та, т. XII, стр. 215.

40. Функция Грина для сферического слоя. Тр. Тбил. гос. ун-та, 1943, т. 25, стр. 225—228. (На груз. яз., резюме на русск. яз.).

41. Об одном разложении метагармонических функций. Докл. АН СССР, 1945, т. 48, № 1, стр. 3—6.

42. Sur un certain développement des fonctions métaharmoniques. C. R. Acad. Sci. URSS, 1945, v. 48, № 1, p. 3—6.

43. Общее представление решений дифференциального уравнения сферических функций. Докл. АН СССР, 1945, т. 49, № 5, стр. 319—322.

44. Représentation générale des solutions d'une équation différentielle des fonctions sphériques. C. R. Acad. Sci. URSS, 1945, v. 49, № 5, p. 311—314.

45. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения. Сообщ. АН Груз. ССР, 1945, т. 6, № 3, стр. 179—183.

46. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, вып. 2, стр. 143—150.

47. Интегрирование уравнений сферической оболочки. Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, вып. 5, стр. 368—388.

48. К теории функций Лежандра. Сообщ. АН Груз. ССР, 1946, т. 7, № 1—2, стр. 95—101.

49. К теории цилиндрических функций. Сообщ. АН Груз. ССР, 1946, т. 7, № 3, стр. 95 — 101.

50. Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости. Докл. АН СССР, 1947, т. 56, № 3, стр. 299—231.

51. Sur une généralisation de l'intégrale de Poisson pour le demi—plan. C. R. Acad. Sci. USSR, 1947, v. 56, № 3, p. 229—231.

52. Некоторые основные вопросы теории тонкой сферической оболочки. Прикл. мат. и мех., 1947, т. 11, вып. 5, стр. 499—516.

53. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Тр. Тбил. гос. ун-та, 1947, 30а, стр. 1—21. (На груз. яз., резюме на русск. яз.).

54. Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости, Тр. Тбил. мат-ин-та, 1947, т. 15, стр. 149—154. (На груз. яз., резюме на русском яз.).

55. Новые методы решения эллиптических уравнений, М.-Л., Гостехиздат, 1948, 296 стр.

56. Об одном методе решения граничных задач синусоидальных колебаний упругого цилиндра. Докл. АН СССР, 1948, т. 60, № 5, стр. 779—782.

57. К теории тонких пологих упругих оболочек. Прикл. мат. и мех., 1948, т. 12, вып. 1, стр. 69—74.

58. К теории упругих оболочек. Докл. АН СССР, 1949, т. 68, № 3, стр. 453—455.

59. Об одном представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Сообщ. АН Груз. ССР, 1950, т. 11, № 3, стр. 137—141.

60. О доказательстве некоторых теорем единственности, встречающихся в теории установившихся колебаний. Докл. АН СССР, 1951, т. 80, № 3, стр. 341—343.

61. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Мат. сб., 1952, т. 31, вып. 2, стр. 217—314.

62. Общее представление функций двух независимых переменных, допускающих производные в смысле С. Л. Соболева, и проблема примитивных. Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 5, стр. 773—775.

63. О полноте системы гармонических полиномов в пространстве. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 4, стр. 495—498.

64. О полноте системы метагармонических функций. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, стр. 715—718.

65. Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа. Докл. АН СССР, 1953, т. 92, № 6, стр. 1113—1116.

66. Об одном свойстве решения обобщенной системы уравнений Коши-Римана. Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, т. 14, № 8, стр. 449—453.

67. О некоторых свойствах решений системы уравнений эллиптического типа. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 2, стр. 181—184.

68. О решении граничных задач теории оболочек. Сообщ. АН Груз. ССР, 1954, т. 15, № 1, стр. 3—6.

69. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши-Римана. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 2, стр. 197—200.

70. Об одном методе решения краевых задач уравнений в частных производных. Докл. АН СССР, 1955, т. 101, № 4, стр. 593—596.

71. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбил. мат. ин-та, 1955, т. 21, стр. 191—259.

72. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen, Berlin, Deutshe Verlag der Wissenschaften, 1956, S. 107. (Mathematische Forschungsberichte—2).

73. Теория обобщенных аналитических функций и ее применение в геометрии и механике. В кн.: Труды III всесоюзного математического съезда. Москва, июнь — июль, 1956, т. 2. Краткое содержание обзорных и секционных докладов. М., АН СССР, 1956, стр. 9—11.

74. На Съезде чехословацких математиков. Вестн. АН СССР, 1956, № 1, стр. 45—47.

75. Конгресс румынских математиков. Вестник АН СССР, 1956, № 11, стр. 76—77.

76. О некоторых условиях жесткости поверхностей положительной кривизны. Прочитано на IV Съезде чехословацких математиков в Праге 6/IX—1955 г. — Чех. мат. ж., 1956, т. 6, № 2, стр. 143—160. (Резюме на франц. яз.).

77. Некоторые вопросы бесконечно малых изгибаний поверхностей. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 3, стр. 377—380.

78. Владимир Иванович Смирнов (К семидесятилетию со дня рождения). Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6, стр. 197—201.

79. Citeva probleme ale teoriei functiilor analitice generalizate si ale aplicatülor ei în geometrie si mecanica. Bul. mat. al soc. st. Mat. Fiz. din R. P. R., 1957, t. 1, № 2, p. 229—243.

80. Теория обобщенных аналитических функций и некоторые ее применения в геометрии и механике. В кн.: Труды III всесоюзного математического съезда. Москва, июнь—июль, 1956, т. 3. Обзорные доклады, М., АН СССР, 1958, стр. 42—64.

81. Über die Korrekte Stellung der Riemann—Hilbertschen Aufgabe. Proceedings of the International colloquium on the theory of funktions. Helsinki, Suomalainen tiedeakatemia, 1958, 14 s. (Annales Academiae scientiarum Fennicae, Series A, I, Mathematicá 25/110).

82. Доказательство жесткости кусочно-регулярных замкнутых выпуклых поверх-

ностей неотрицательной кривизны. Изв. АН СССР, Серия мат., 1958, т. 22, № 2, стр. 165—176. (Совместно с Б. В. Боярским).

83. Об условиях, обеспечивающих безмоментное напряженное состояние равновесия выпуклой оболочки. Сообщ. АН Груз. ССР, т. 20, № 5, стр. 525—532.

84. Об условиях безмоментности выпуклых оболочек. Сообщ. АН Груз. ССР, 1958, т. 21, № 6, стр. 649—652.

85. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, 628 стр.

86. Изучение некоторых проблем геометрии и механики. О планах на 1959 г., Моск. ун-т, 1959, 8/I, № 2.

87. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Пекин, Гаодэн цзяоюй чубаньшэ, 1960, VIII, стр. 1—204. (На китайск. яз.).

88. Об условиях безмоментности напряженного состояния равновесия выпуклой оболочки. В кн.: Труды Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям. Ереван, ноябрь, 1958, Ереван, АН Арм. ССР, 1960, стр. 32—44.

89. Über die Bedingungen der Verwirklichung des momentenfreien Spannungsgleichgewichtes von Schallen positiver Krümmung. Proceedings of the Symposium on the theory of thin elastic shells. Amsterdam, North-Holland publ. Company, 1960, S. 270—280.

90. Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -2ke^{u}$. Сиб. мат. ж., 1960, т. I, № 3, стр. 331—342.

91. Академик Николай Иванович Мусхелишвили. (К 70-летию со дня рождения. Краткая биография и обзор научных работ). Новосибирск, АН СССР, 1961, стр. 55.

92. Академик Николай Иванович Мусхелишвили. К 70-летию со дня рождения, Тбилиси, 1961. (На груз. яз.), 61 стр.

93. Проективные свойства полей усилий и изгибаний. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. М., АН СССР, 1961, стр. 83—91.

94. Проективные свойства полей усилий и изгибаний. Тезисы доклада. В кн.: Всесоюзное совещание по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики, 20—27 февраля 1961 г. Тезисы докладов. Тбилиси. (АН Груз. ССР, Мат. ин-т им. А. М. Размадзе), 1961, стр. 19.

95. О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 64. Сборник статей. М., АН СССР, 1961, стр. 5—8.

96. К теории квазиконформных отображений. В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, АН СССР, 1961, стр. 57—64.

97. Николай Иванович Мусхелишвили (К семидесятилетию со дня рождения), Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 2, стр. 169—188.

98. Generalized analytic functions. Oxford-London-NewYork-Paris, Pergamon press, 1962, 668 p.

99. Методы теории аналитических функций в теории упругости. В кн.: Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (27 января — 3 февраля 1960 г.). Обзорные доклады. М.-Л., АН СССР, 1962, стр. 310—338. (Совместно с Н. И. Мусхелишвили).

100. Неподвижные особые точки обобщенных аналитических функций, Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 1, стр. 24—26.

101. О компактности семейства обобщенных аналитических функций. Тр. Тбил. гос. ун-та, Серия мех.-мат. наук, 1962, стр. 17—21. (Резюме на груз. яз.).

102. Уравнения и системы уравнений эллиптического типа. Труды IV всесоюзного математического съезда, т. I, 1963.

103. Verallgemeinerte analytische Funktionen, Akademie—Verlag, Berlin, 1963.

104. Об одном варианте теории тонких пологих оболочек. Новосибирский университет. 1964, 68 стр.

105. Теория тонких и пологих оболочек переменной толщины. Новосибирский университет. 1964, 39 стр.

106. Основы тензорного анализа. Новосибирский университет, 1964, 138 стр.

107. On a version of the bending theory of elastic shells, University of Maryland, USA. 1964, p. 1—42.

108. New methods in mathematical shell theory. Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich (Germany), 1964, p. 47—58.

109. Theory of thin and shallow elastic shells with variable thickness, Труды Тбилисского симпозиума: „Приложения теории функций в механике сплошной среды", т. I. изд. „Наука", Москва, 1965, стр. 410—431.

110. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе, т. XXX. 1965, стр. 5—103.

111. Основы тензорного анализа. Тбилиси, 1967, Изд-во Тбил. гос. университета, 137 стр.

112. New methods for solving elliptic equations, North—Holland Publishing Company. Amsterdam, 1967.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Р. В. КАПАНАДЗЕ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Работа посвящается в основном следующей задаче, поставленной И. Н. Векуа.

Пусть X_1 и X_2—банаховы пространства и $X_1 \subset X_2$; A—линейный ограниченный оператор, переводящий X_1 в X_1 и X_2 в X_2. Требуется нахождение условий, при выполнении которых всякое решение уравнения

$$Ax=y \quad (y \in X_1) \tag{1.1}$$

в пространстве X_2 принадлежало пространству X_1.

Если X_2—пространство суммируемых функций со степенью p $(p>1)$ и с некоторым весом, X_1—пространство дифференцируемых функций, удовлетворяющих со своими производными условию Гельдера, а A—достаточно гладкий сингулярный интегральный оператор (область интегрирования в основном предполагается конечной), то в [1.2] доказано, что всякое решение уравнения (1.1) в пространстве X_2 принадлежит X_1. Аналогичная задача в других пространствах изучена в [3].

В настоящей заметке приводятся достаточные условия решения поставленной задачи. Дается приложение этого результата в теории сингулярных интегральных операторов и обобщаются формулированные выше предложения для этих операторов.

2. Говорят, что банахово пространство X_1 вложено в банахово пространство X_2, если $X_1 \subset X_2$ и существует константа c такая, что

$$\|x\|_{X_2} \leqslant c\|x\|_{X_1} \quad (x \in X_1).$$

Если кроме этого X_1 плотно в X_2, то говорят, что X_1 плотно вложено в X_2.

Пусть X_1 плотно вложено в X_2. Всякий линейный функционал f на X_2, естественно, порождает линейный функционал $\widetilde{f}$ на X_1 ($\widetilde{f}$ является сужением f на X_1). Если f—ограниченный функционал на X_2, то $\widetilde{f}$ будет ограниченным функционалом на X_1. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{X_2}\|x\|_{X_2} \leqslant c\|f\|_{X_2}\|x\|_{X_1} \quad (x \in X_1).$$

Различные функционалы из X_2 порождают различные функционалы на X_1.

Отождествление функционала f с функционалом $\tilde{f}$ позволяет считать, что пространство X_2^* вложено в X_1^*.

Определения. Если X_1 вложено в X_2 и A—линейный ограниченный оператор, переводящий X_1 в X_2 и X_2 в X_2, то будем писать, что $A \in \Gamma(X_1, X_2)$.

Если $A \in \Gamma(X_1, X_2)$ и существует оператор $B \in \Gamma(X_1, X_2)$ такой, что BA $[AB]$ является фредгольмовым оператором в X_1 и X_2, то напишем, что $A \in R\text{л}(X_1, X_2)$ $[A \in R\text{п}(X_1, X_2)]$.

Скажем, что $A \in R(X_1, X_2)$, если $A \in R\text{л}(X_1, X_2) \cap R\text{п}(X_1, X_2)$.

Теорема 1. Если X_1 плотно вложено в X_2 и $A \in R\text{л}(X_1, X_2)$ $[A \in R\text{п}(X_1, X_2)]$, тогда существует оператор $B \in \Gamma(X_1, X_2)$ такой, что

$$BA(x) = C(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, y_k \quad \left[AB(x) = C(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, y_k\right],$$

где $C \in \Gamma(X_1, X_2)$ и взаимно однозначно отображает пространство X_2 на X_2 (таким образом, $C^{-1} \in \Gamma(X_1, X_2)$), f_k $(k=1, \cdots, n)$—линейные функционалы на X_2, а $y_k \in X_1$ $(k=1, \cdots, n)$.

Доказательство. В силу условия теоремы существует такой $B \in \Gamma(X_1, X_2)$, что

$$BA = T \quad [AB = T]$$

является фредгольмовым оператором в X_1 и X_2.

Пусть $x_1, \cdots, x_n$ и $g_1, \cdots, g_n$—полные системы линейно независимых решений уравнений

$$T(x) = 0 \quad (x \in X_1)$$

и

$$T^*(g) = 0 \quad (g \in X_1^*)$$

в пространствах X_1 и X_1^*, соответственно. (Заметим, что $x_1, \cdots, x_n$ будут линейно независимыми и в X_2). Найдем функционалы $f_1, \cdots, f_n \in X_2^*$ и элементы $y_1, \cdots, y_n \in X_1$ так, что

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k), \end{cases} \qquad g_j(x_k) = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k), \end{cases} \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Пусть

$$Y' \equiv T(X_1), \quad Y'' \equiv L(\{y_1, \cdots, y_n\})$$

(наименьшее линейное множество, содержащее $\{y_1, \cdots, y_n\}$),

$$X' \equiv \{x : x \in X_1, \quad f_j(x) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)\}, \quad X'' \equiv L(\{x_1, \cdots, x_n\}).$$

Легко видеть, что каждый элемент $y \in X_1$ может быть единственным образом представлен в виде

$$y = y' + y'' \quad (y' \in Y', \ y'' \in Y''); \tag{2.1}$$

аналогично, всякий элемент $x \in X_1$ может быть единственным образом представлен в форме

$$x = x' + x'' \quad (x' \in X', \ \ x'' \in X''). \tag{2.2}$$

Положим

$$C(x) = T(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, y_k \quad (x \in X_2)$$

и покажем, что

$$C(X_1) = X_1, \quad C(X_2) = X_2.$$

Пусть $y \in X_1$. Представим его в форме (2.1), при этом $y' \in T(X_1)$, $y'' = \sum\limits_{j=1}^{n} d_j\, y_j$. Тогда уравнение $T(x) = y'$ имеет решение $x' \in X_1$, которое, в силу (2.2), можно считать элементом из X'. Положим

$$x^* = x' + \sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j.$$

Имеем

$$C(x^*) = T(x^*) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x^*)\, y_k = T(x') + \sum_{k=1}^{n} d_k\, y_k = y.$$

Таким образом, $C(X) = X_1$. Отсюда

$$X_1 = G(X_1) \subset C(X_2).$$

Откуда $\overline{X_1} \subset \overline{C(X_2)}$ (замыкание берется по норме пространства X_2). Но $\overline{X_1} = X_2$, так как X_1 плотно в X_2, а из фредгольмовости оператора C в X_1 следует, что $\overline{C(X_2)} = C(X_2)$. Таким образом,

$$C(X_2) = X_2.$$

Отсюда, так как C является фредгольмовым оператором в X_2, следует, что C взаимно однозначно отображает X_2 на X_2—и по теореме Банаха

$$C^{-1} \in \Gamma(X_1, X_2).$$

Теорема 2. Если X_1 плотно вложено в X_2 и $A \in R\text{л}(X_1, X_2)$ $[A \in R\text{п}(X_1, X_2)]$, то $A^* \in \Gamma(X_2^*, X_1^*)$ и существует оператор $B \in \Gamma(X_2^*, X_1^*)$ такой, что

$$A^* B = C + V \quad [BA^* = C + V],$$

где

$$C^{-1},\ V \in \Gamma(X_2^*, X_1^*) \quad \text{и} \quad V(X_1^*) \subset X_2^*.$$

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 1.

Теорема 3. Если X_1 плотно вложено в X_2 и $A \in R_Л(X_1, X_2)$ $[A \in R_П(X_1, X_2)]$, то

$$A(X_2 \setminus X_1) \cap X_1 = \varnothing \quad [A^*(X_1^* \setminus X_2^*) \cap X_2^* = \varnothing].$$

Доказательство. По теореме 1 существует такой $B \in \Gamma(X_1, X_2)$, что

$$BA = C + V,$$

где

$$C^{-1},\ V \in \Gamma(X_1, X_2) \text{ и } V(X_2) \subset X_1.$$

Пусть, теперь, $y \in X_1$ и $A(x) = y$. Покажем, что $x \in X_1$. В самом деле

$$BA(x) = C(x) + V(x) = B(y).$$

Отсюда

$$C(x) = B(y) - V(x) \in X_1$$

и, следовательно,

$$x = C^{-1}C(x) \in X_1.$$

Аналогично, из теоремы 2 следует справедливость второй части теоремы.

Теорема 4. Если X_1 плотно вложено в X_2 и $A \in R(X_1, X_0)$, то

$$\operatorname{ind}_{X_1} A = \operatorname{ind}_{X_2} A.$$

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из теоремы 3.

Через A^+ обозначим сопряженный оператор оператора A в пространстве X_2.

Теорема 5. Если X_1 плотно вложено в X_2 и $A \in R(X_1, X_2)$, тогда для разрешимости уравнения

$$Ax = y \quad (x, y \in X_1)$$

необходимо и достаточно

$$g(y) = 0,$$

где g—произвольное решение уравнения

$$A^+(g) = 0;$$

при этом, если $x_1, \dots, x_m$ и $g_1, \dots, g_n$—полные системы линейно независимых решений уравнений $A(x) = 0$ и $A^+(g) = 0$, соответственно, то

$$\operatorname{ind} A = m - n.$$

Необходимость очевидна. Достаточность следует из теоремы 3.

Заметим, что вопросы, близкие рассмотренным, когда X_2—гильбертово пространство, изучаются в [4].

3. Пусть E_m— m-мерное эвклидово пространство,

$$x = (x_1, \dots, x_m),\ \ y = (y_1, \dots, y_m),\ \ (0, \dots, 0), \dots$$

—точки этого пространства и

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $K_m(\rho)$ $(\rho>0)$ обозначим m-мерный замкнутый шар в E_m радиуса ρ с центром в точке o, а через $G_m(\rho)$ обозначим его границу.

Через $L_{p,\beta}(\rho)$ $[L_{p,\beta}]$ $\left(p>1,\ -\frac{m}{p}<\beta<\frac{m}{q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \rho>0\right)$ обозначим пространство функций $u(x)$, для которых

$$\int\limits_{K_m(\varrho)} |u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx<\infty \quad \left[\int\limits_{E_m} |u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx<\infty\right];$$

норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|=\Big(\int\limits_{K_m(\varrho)} |u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \left[\|u\|_{p,\beta}=\Big(\int\limits_{E_m} |u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\right],$$

Теорема 6. Пусть функция $a(x)$ непрерывна в E_m и существует $\lim\limits_{|x|\to\infty} a(x)=\widetilde{a}<\infty$, а функция $g(x,z)$ ограничена в $E_m\times G_m(1)$ и

$$\int\limits_{G_{m(1)}} g(x,z)\,d_z\sigma=0,$$

тогда сингулярный оператор

$$v(x)=Tu=\int\limits_{E_m}\frac{a(x)-a(y)}{|x-y|^m}\,g\left(x,\frac{y-x}{|y-x|}\right)u(y)\,dy \tag{3.1}$$

ограничен и вполне непрерывен в $L_{p,\beta}$.

Доказательство. В [5] доказывается, что

$$\|Tu\|_{p,\beta}\leqslant c\sup_{x\in E_m}|a(x)|\,\|u\|_{p,\beta}, \tag{3.2}$$

где c—постоянная, которая не зависит от $a(x)$ и $u(x)$.

Докажем вполне непрерывность оператора (3.1).

Допустим сперва, что $a(x)=0$ при $|x|\geqslant\gamma>0$ и $|a(x)-a(y)|\leqslant c(a)\,|x-y|^\alpha$ $(\alpha>0)$.

Пусть λ, η такие числа, что $\frac{1}{2}\ \eta>\lambda>\gamma$, тогда

$$Tu=\int\limits_{|y|\leqslant\eta}\frac{a(x)-a(y)}{|x-y|^m}\,g\left(x,\frac{y-x}{|y-x|}\right)u(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_{|y|>\eta}\frac{a(x)}{|x-y|^m}\,g\left(x,\frac{y-x}{|y-x|}\right)u(y)\,dy=T'_\eta u+T''_\eta u. \tag{3.3}$$

Положим $\widetilde{u}(x)=|x|^{\frac{\beta}{p}}u(x)$, тогда, в силу неравенства Гельдера, при $|x|\leqslant\lambda$, получим

$$|T''_\eta u|\leqslant\sup|g|\sup|a|\Big(\int\limits_{|y|\geqslant\eta}\frac{dx}{|x-y|^{mq}|y|^{\beta q/p}}\Big)^{\frac{1}{q}}\|\widetilde{u}\|_{p,0}.$$

Отсюда

$$|T''_{\eta} u| \leqslant c(\eta) \|u\|_{p,\beta} \quad (|x| \leqslant \lambda, \quad \eta > 2\lambda),$$

где $c(\eta) \to 0$ при $\eta \to \infty$. Поэтому

$$\Big(\int\limits_{|x| \leqslant \lambda} |T''_{\eta} u|^p |x|^{\beta} dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant c(\lambda) c(\eta) \|u\|_{p,\beta} \quad (\eta > 2\lambda). \tag{3.4}$$

Известно, что (см. [2]) T'_{η} вполне непрерывен из $L_{p,\beta}(\eta)$ в $L_{p,\beta}(\lambda)$, тем более он будет вполне непрерывным из $L_{p,\beta}$ в $L_{p,\beta}(\lambda)$; далее, из (3.4) видно, что $\|T''_{\eta}\| \to 0$ при $\eta \to \infty$ (T''_{η} рассматривается из $L_{p,\beta}$ в $L_{p,\beta}(\lambda)$). Поэтому, принимая во внимание (3.3), заключаем, что оператор T вполне непрерывен из $L_{p,\beta}$ в $L_{p,\beta}(\lambda)$ для любого λ.

Пусть, теперь, $\sigma > 2\gamma$. Имеем

$$v(x) = Tu = -\int\limits_{|y| < \gamma} \frac{a(y)}{|x-y|^m} g\left(x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) u(y)\, dy \quad (|x| > \sigma). \tag{3.5}$$

Определим операторы T'_{σ}, T''_{σ} равенствами:

$$T'_{\sigma} u = \begin{cases} Tu & \text{при } |x| \leqslant \sigma, \\ 0 & \text{при } |x| > \sigma, \end{cases} \qquad T''_{\sigma} u = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant \sigma, \\ Tu & \text{при } |x| > \sigma. \end{cases}$$

Очевидно, T'_{σ}, T''_{σ} являются линейными ограниченными операторами в пространстве $L_{p,\beta}$ и

$$Tu = T'_{\sigma} u + T''_{\sigma} u.$$

Как мы показали выше, оператор T'_{σ} вполне непрерывен в $h_{p,\beta}$ для любого σ. Для T''_{σ}, в силу неравенства Минковского, из (3.5) имеем

$$\|T''_{\sigma} u\|_{p,\beta} = \Big(\int\limits_{|x| > \sigma} |Tu|^p |x|^{\beta} dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup|a| \sup|g| \int\limits_{|y| < \gamma} |u(x)|\, dy \left\{\int\limits_{|x| > \sigma} \frac{|x|^{\beta} dx}{|x-y|^{mp}}\right\}^{\frac{1}{p}},$$

но

$$\int\limits_{|y| < \gamma} |u(y)|\, dy \leqslant c(\gamma) \|u\|_{p,\beta}.$$

Поэтому

$$\|T''_{\sigma} u\|_{p,\beta} \leqslant c(\gamma) c(\sigma) \|u\|_{p,\beta}, \tag{3.7}$$

где $c(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$.

Учитывая вполне непрерывность T'_σ, равенство (3.6) и неравенство (3.7), получаем, что оператор T вполне непрерывен в $L_{p,\beta}$.

Легко видеть, что если $a(x)$ непрерывна в E_m и $\lim\limits_{|x|\to\infty} a(x)=0$, то существует последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $a(x)=0$ при $|x|\geqslant\gamma_n$, $|a_n(x)-a_n(y)|\leqslant c(a_n)|x-y|^{\alpha}$ и $\sup\limits_{x\in E_m}|a_n(x)-a(x)|\to 0$ при $n\to\infty$.

Поэтому, если введем обозначение

$$T_n u=\int\limits_{E_m}\frac{a_n(x)-a_n(y)}{|x-y|^m}\,g\left(x,\ \frac{y-x}{|y-x|}\right)x(y)\,dy,$$

из (3.2) получим $\|T_n-T\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, если $a(x)$ непрерывна в E_m и $\lim\limits_{|x|\to\infty} a(x)=0$, то оператор T вполне непрерывен в $L_{p,\beta}$.

Наконец, равенство

$$\int\limits_{E_m}\frac{a(x)-a(y)}{|x-y|^m}\,g\left(x,\ \frac{y-x}{|y-x|}\right)u(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{E_m}\frac{(a(x)-\tilde a)-(a(y)-\tilde a)}{|x-y|^m}\,g\left(x,\ \frac{y-x}{|y-x|}\right)u(y)\,dy$$

завершает доказательство теоремы.

Аналогичная теорема при $\beta=0$ другим методом доказана в [3].

Пусть ν—целое неотрицательное число, $0\leqslant\beta<\frac{m}{q}$ и $\varphi\in\Phi$ (т. е. $\varphi(t_1)\leqslant c\varphi(t_2)$ $(c>0,\ 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1)$, $\varphi(t)\neq 0$ при $0<t\leqslant 1$ и $\varphi(t)\to 0$ при $t\to 0$). Введем обозначение $\Lambda=(\nu,\ p,\ \beta,\ \varphi)$.

Определения. Скажем, что $u\in H_1$, если функция u имеет в E_m все частные производные порядка ν и

$$1.\qquad \sup_{x\in E_m}|u(x)|<\infty,\quad \int\limits_{E_m}|u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx<\infty,$$

$$2.\quad \sup_{0<\delta\leqslant 1}\frac{\omega(\delta,\partial^\nu u)}{\varphi(\delta)}<\infty,\ \int\limits_{E_m}|\partial^\nu u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx<\infty\quad (\nu_1+\cdots+\nu_m=\nu),$$

где

$$\omega(\delta,\ u)=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|u(x)-u(y)|,\quad \partial^\nu=\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial^{\nu_m}}{\partial x_m^{\nu_m}}.$$

Определим в H_Λ норму равенством

$$\|u\|_\Lambda=\sup|u(x)|=\left(\int\limits_{E_m}|u(x)|^p\,|x|^\beta\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\sup_{\nu_1+\cdots+\nu_m=\nu}\ \sup_{0<\delta\leqslant 1}\frac{\omega(\delta,\ \partial^\nu u)}{\varphi(\delta)}+\sup_{\nu_1+\cdots+\nu_m=\nu}\left(\int\limits_{E_m}|\partial^\nu u|^p\,|x|^\beta\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Через $C^{(\nu,\varphi)}$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных функций в E_m, которые имеют в E_m все частные производные порядка ν и

$$\sup_{0<\delta\leqslant 1} \frac{\omega(\delta,\ \partial^\nu u)}{\varphi(\delta)} < \infty \quad (\nu_1 + \ldots + \nu_m = \nu).$$

Норму в этом пространстве определим равенством

$$\|u\| = \sup|u(x)| + \sup_{\nu_1+\ldots+\nu_m=\nu}\ \sup_{0<\delta\leqslant 1} \frac{\omega(\delta,\ \partial^\nu u)}{\varphi(\delta)}.$$

Пусть $0<\varepsilon<1$ и $v_m(\varepsilon)$—область, которая заключена между шарами $K_m(1-\varepsilon)$ и $K_m(1+\varepsilon)$.

Скажем, что функция $f(x)$, определенная на $G_m(1)$, принадлежит классу $C^\nu(G_m)$, если $f(y)=f\left(\frac{y}{|y|}\right)$ $(y\neq 0)$ имеет в $v_m(\varepsilon)$ все частные производные порядка ν, непрерывные на $G_m(1)$.

Скажем, что функция $f(x, z)$, определенная на $E_m \times G_m(1)$, принадлежит классу $C^{(\nu,\varphi)} \times C^{(k)}(G_m)$, если $\partial^i_x f(x, z) \in C^k(G_m)$ $(i=0,\ldots, \nu)$ равномерно относительно x и $\partial^i_z f(x, z) \in C^{(\nu,\varphi)}$ $(i=0,\ldots, k)$ равномерно относительно z.

Теорема 7. Пусть $\varphi\in\Phi$ и

1) $$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leqslant c\varphi(\delta), \quad \delta\int_\delta^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \leqslant c\varphi(\delta),$$

где c—некоторая постоянная, функция $f(x, z)$, определенная на $E_m\times G_m(1)$, принадлежит классу $c^{(\nu,\varphi)}$ по x равномерно относительно z,

2) $$\int_{G_m(1)} f(x, z)\,d_z\sigma = 0, \quad \omega_1(\delta, f) = \sup_{\substack{|z'-z''|\leqslant\delta \\ z', z''\in G_m(1),\ x\in E_m}} |f(x, z')-f(x, z'')| \leqslant c\varphi(\delta),$$

$$\int_\delta^1 \omega_1\left(\frac{\delta}{t}, f\right)\frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leqslant c\,\varphi(\delta), \quad \omega_1(\delta,\ \partial^\nu_x f) \leqslant c\varphi(\delta) \quad (\nu_1+\ldots+\nu_m=\nu).$$

Тогда сингулярный оператор

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x,\ z)}{|x-y|^m}\,u(y)\,dy \qquad \left(z = \frac{y-x}{|y-x|}\right)$$

является линейным ограниченным оператором в H_A.

Теорема 8. Пусть φ и f удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, а $a\in C^{(\nu,\widetilde{\varphi})}$, где $\widetilde{\varphi}\in\Phi$, $\widetilde{\varphi}(\delta)\ln\frac{2}{\delta} \leqslant c\,\varphi(\delta)$

и
$$\int_0^{\delta} \frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t}\, dt \leqslant c\,\widetilde{\varphi}(\delta), \quad \delta \int_{\delta}^{1} \frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t^2}\, dt \leqslant c\,\widetilde{\varphi}(\delta).$$

Допустим также, что существует $\lim\limits_{|x|\to\infty} \partial^i a(x) < \infty$ $(i=0,\ldots,\nu)$.

Тогда сингулярный оператор
$$v(x) = \int_{E_m} \frac{a(x)-a(y)}{|x-y|^m}\, f\left(x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) u(y)\, dy$$

ограничен и вполне непрерывен в H_Λ.

Теорема 9. Пусть символ $\Phi_A(x, z)$ (см. [3]) сингулярного оператора
$$Au = a_0(x)\, u(x) + \int_{E_m} \frac{g\left(x, \dfrac{y-x}{|y-x|}\right)}{|x-y|^m}\, u(y)\, dy \qquad \left(\int_{G_{m(1)}} g(x, z)\, dz\, \sigma = 0\right)$$

принадлежит классу $C^{(\nu,\widetilde{\varphi})} \times C^{(k)}(G_m)$, где $\bar{\varphi}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и $k \geqslant m + \frac{m}{2} + 2$; допустим также, что $\inf\limits_{x,\,z} |\Phi_A(x, z)| > 0$ и существует $\lim\limits_{|x|\to\infty} \partial^i_x \Phi_A(x, z)$ $(i=0,\ldots, \nu)$, равномерно относительно z, тогда если $V \in \Gamma(H_\Lambda, L_{p,\beta})$ и вполне непрерывен в H_Λ и $L_{p,\beta}$, то
$$A+V \in R(H_\Lambda, L_{p,\beta}).$$

Справедливость этих теорем следует из результатов работ [6], [7] и из теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Г. Гегелиа. Дифференциальные свойства некоторых интегральных преобразований. Труды Тбилисского матем. ин-та, 26 (1959), 195—225.
2. Т. Г. Гегелиа. Некоторые вопросы теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, теории потенциала и их приложений в теории упругости. Докт. диссертация, Тбилисский мат. институт АН ГССР(1963).
3. С. Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Москва (1962).
4. И. Ц. Гохберг, М. К. Замбицкий. К теории линейных операторов в пространствах с двумя нормами. Украинский математический журнал, 18, № 1 (1966), 11—23.
5. E. M. Stein. Note on singular integrals. Proc. Amer. Math. Soc., 8, № 2 (1957), 250—254.
6. Р. В. Капанадзе. Приближение непрерывных функций сферическими полиномами. Сообщ. АН Груз. ССР, 45, № 1 (1967), 21—26.

7. Р. В. Капанадзе. О пространствах, инвариантных относительно сингулярного интегрального преобразования. Труды Тбилисского мат. ин-та, 32 (1967), 164—170.

Тбилисский гос. университет,
Проблемная лаборатория прикладной математики

(Поступило в редакцию 15. IX. 1967)

რ. კაპანაძე

ნორმირებულ სივრცეებში სინგულარული ოპერატორების ზოგიერთი თვისების შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია ი. ვეკუას ამოცანა წრფივი ოპერატორების შესახებ ბანახის სივრცეში.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Л. Г. МАГНАРАДЗЕ

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА В СМЫСЛЕ ОБОБЩЕННОГО ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ И (C, α) СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ—СТИЛТЬЕСА

Введение. В статье [1] нами было введено понятие абстрактного сингулярного интеграла Стилтьеса, обобщающее понятие сингулярного интеграла в смысле главного значения Коши. Там же были определены обобщенные сопряженные функции, представимые сингулярными интегралами Стилтьеса

$$g(z_0)=\int\limits_{\Gamma} f(z)\, d\mu(z_0, z), \quad z_0 \in \Gamma,$$

где Γ—спрямляемая линия на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, удовлетворяющая определенным условиям, а сингулярный интеграл с переменной сингулярной точкой z_0 понимается в упомянутом обобщенном смысле; для модуля непрерывности и для интегрального модуля непрерывности функции $g(z_0)$ были установлены неравенства, являющиеся обобщением неравенства Зигмунда для обычной сопряженной функции (см. [2], а также [3], [4], [5]) и имеющие применения в теории линейных и нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$A(z_0)\varphi(z_0)-\lambda\int\limits_{\Gamma} K(z_0, z, \varphi(z))\, d_z\mu(z_0, z)=F(z_0).$$

В настоящей статье даются применения сингулярного интеграла Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x)$$

с фиксированными особыми точками, взятого в смысле обобщенного главного значения, к вопросу роста коэффициентов

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, d\mu(x), \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, d\mu(x),$$

$$n=0, 1, 2, \ldots$$

ряда Фурье-Стилтьеса

$$f(x)\,d\mu(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и к вопросу (C, α) суммирования этих рядов.

В последующих статьях мы остановимся на применениях упомянутого интеграла к граничным задачам теории аналитических функций и математической физики, пользуясь обобщенным интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\mu(t)}{t-z},$$

обобщенным интегралом Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\mu(\theta), \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

и обобщенными потенциалами простого и двойного слоев.

1. Сингулярное множество Коши S. Пусть $\mu(x)$ определена и конечна на сегменте $[a, b]$, $-\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty$, за исключением, быть может, некоторого заданного конечного или бесконечного множества S.

Мы будем предполагать, что каждая изолированная точка множества S принадлежит интервалу (a, b), $a < x < b$, а точки сгущения могут принадлежать сегменту $[a, b]$.

Определение 1. Точку $\xi \in S$ будем называть точкой Коши функции $\mu(x)$, если:

1°. ξ есть изолированная точка множества S—существует такая окрестность (интервал) $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, что

$$a < \alpha < \xi < \beta < b \quad \text{и} \quad (\alpha, \beta) \cap S = \{\xi\};$$

2°. Существует однопараметрическое семейство окрестностей $(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \supset (\alpha, \beta)$, непрерывно зависящих от параметра ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (ε_0—достаточно малое положительное число), таких, что $\alpha_\varepsilon < \xi < \beta_\varepsilon$, $\alpha_\varepsilon \to \xi$, $\beta_\varepsilon \to \xi$ при $\varepsilon \to 0$, и удовлетворяющих условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\,[A\mu(\alpha_\varepsilon) - B\mu(\beta_\varepsilon)] = C, \tag{1.1}$$

где A, B и C—заданные постоянные.

Определение 1.2. Множество S назовем сингулярным множеством Коши функции $\mu(x)$, если:

1°. множество S есть приводимое множество;

2°. каждая изолированная точка множества S является точкой Коши функции $\mu(x)$.

2. Сингулярный интеграл Стилтьеса. Пусть функция $f(x)$ определена и конечна на $[a, b]$ за исключением, быть может, сингулярного множества Коши S функции $\mu(x)$.

Так как по условию S есть приводимое множество, то оно счетно и замкнуто. Пусть $S=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Около каждой точки ξ_n опишем произвольный интервал (a_n, b_n) длины $b_n-a_n\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $n=1, 2\cdots$; если точки a и b принадлежат множеству S, тогда соответствующий интервал следует заменить полуинтервалом. В силу леммы Гейне-Бореля из этой системы интервалов можно выбрать конечную систему интервалов $\{(a_{n_k}, b_{n_k})\}_{k=1}^{p}$, целиком покрывающую множество $S: S\subset\bigcup\limits_{k=1}^{p}(a_{n_k}, b_{n_k})$.

Мы будем предполагать, что при любом ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, функция $f(x)$ μ-интегрируема в известном смысле (см., напр., [6]) на множестве $[a, b]-$ $-\bigcup\limits_{k=1}^{p}(a_{n_k}, b_{n_k})$.

3. Определим теперь интеграл от $f(x)$ по $\mu(x)$ на всем сегменте $[a, b]$.

Рассмотрим конечную или бесконечную (трансфинитную) последовательность множеств, производных от множества S:

$$S^{(0)}\equiv S,\quad S^{(1)},\ S^{(2)},\ldots,\ S^{(n)},\ldots,\ S^{(\omega)},\ldots \tag{3.1}$$

По определению приводимого множества, одно из множеств (3.1) пусто.

Рассмотрим сперва случай, когда $S^{(1)}$ есть пустое множество. Тогда множество S содержит конечное число $m\geqslant 1$ точек

$$S=\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{m};\quad a<\xi_1^{(0)}<\xi_2^{(0)}<\cdots<\xi_m^{(0)}<b.$$

Пусть $(\alpha_{\varepsilon,k}^{(0)}, \beta_{\varepsilon,k}^{(0)})$ является окрестностью точки Коши $\xi_k^{(0)}$, $k=1,2,\cdots,$ m, функции $\mu(x)$ в смысле определения 1.1.

Тогда существуют постоянные $A_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$ и $C_k^{(0)}$, $k=1, 2,\cdots m$, такие, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,[A_k^{(0)}\,\mu(\alpha_{\varepsilon,k}^{(0)})-B_k^{(0)}\,\mu(\beta_{\varepsilon,k}^{(0)})]=C_k^{(0)},\quad k=1, 2,\ldots, m.$$

По предположению п. 2, для любого ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, на сегментах

$$[a,\ \alpha_{\varepsilon,1}^{(0)}],\ [\beta_{\varepsilon,m}^{(0)},\ b],\ [\beta_{\varepsilon,k}^{(0)},\ \alpha_{\varepsilon,k+1}^{(0)}[,\quad (k=1, 2,\ldots, m-1)$$

существуют в смысле Стилтьеса интегралы функции $f(x)$ по функции $\mu(x)$:

$$\int\limits_{a}^{\alpha_{\varepsilon,1}^{(0)}} f(x)\,d\mu(x),\qquad \int\limits_{\beta_{\varepsilon,m}^{(0)}}^{b} f(x)\,d\mu(x),\qquad \int\limits_{\beta_{\varepsilon,k}^{(0)}}^{\alpha_{\varepsilon,k+1}^{(0)}} f(x)\,d\mu(x)\quad (k=1, 2,\ldots, m-1),$$

т. е. функция $f(x)$ μ-интегрируема на множестве

$$G_\varepsilon=[a,\ \alpha^{(0)}_{\varepsilon,1}]\,\mathrm{U}\,[\beta^{(0)}_{\varepsilon,m},\ b]\,\overset{m-1}{\underset{k=1}{\mathrm{U}}}\,[\beta^{(0)}_{\varepsilon,k},\ \alpha^{(0)}_{\varepsilon,k+1}].$$

Определение 3.1. Функция $f(x)$ сингулярно μ-интегрируема на $[a, b]$ или $S\mu$-интегрируема на $[a, b]$, если существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon} f(x)\,d\mu(x).$$

Сингулярным интегралом Стильтьеса функции $f(x)$ на $[a, b]$ по функции $\mu(x)$ или коротко $S\mu$-интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$ будем называть конечную величину

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon} f(x)\,d\mu(x). \tag{3.2}$$

4. Теперь положим, что $S^{(2)}$ есть пустое множество. Это значит, что $S^{(1)}$ содержит только конечное число $m_1\geqslant 1$ точек

$$S^{(1)}=\left\{\xi^{(1)}_k\right\}_{k=1}^{m_1};\quad a\leqslant\xi^{(1)}_1<\xi^{(1)}_2<\ldots<\xi^{(1)}_{m_1}\leqslant b.$$

Пусть $(\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k},\ \beta^{(1)}_{\varepsilon,k})$ является произвольной окрестностью точки $\xi^{(1)}_k$ $(k=1, 2,\cdots, m_1)$, непрерывно зависящей от параметра ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ и удовлетворяющей условиям

$$\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k}\overline{\in}\ S,\quad \beta^{(1)}_{\varepsilon,k}\overline{\in}\ S;$$

$$\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k}<\xi^{(1)}_k<\beta^{(1)}_{\varepsilon,k};\quad \alpha^{(1)}_{\varepsilon,k}\to\xi^{(1)}_k,\quad \beta^{(1)}_{\varepsilon,k}\to\xi^{(1)}_k,$$

когда $\varepsilon\to 0$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ m_1)$; при этом, если $\xi^{(1)}_1=a$ и $\xi^{(1)}_{m_1}=b$, то под окрестностями будем понимать соответственно полуокрестности $[\alpha,\ \beta^{(1)}_{\varepsilon,1})$ и $(\alpha^{(1)}_{\varepsilon,m_1},\ b]$.

В силу (3.2), сингулярный μ-интеграл функции $f(x)$ можем считать уже определенным на множествах:

$$G^{(1)}_{\varepsilon,1}=[a,\ \alpha^{(1)}_{\varepsilon,1}]\ \mathrm{U}\,[\beta^{(1)}_{\varepsilon,m_1},\ b]\ \overset{m_1-1}{\underset{k=1}{\mathrm{U}}}\ [\beta^{(1)}_{\varepsilon,k},\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k+1}],$$

если
$$\xi^{(1)}_1\neq a \text{ и } \xi^{(1)}_{m_1}\neq b;$$

$$G^{(1)}_{\varepsilon,2}=[a,\ \alpha^{(1)}_{\varepsilon,1}]\ \overset{m_1-1}{\underset{k=1}{\mathrm{U}}}\ [\beta^{(1)}_{\varepsilon,k},\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k+1}],$$

если
$$\xi^{(1)}_1\neq a\ \text{ и }\ \xi^{(1)}_{m_1}=b;$$

$$G^{(1)}_{\varepsilon,3}=[\beta^{(1)}_{\varepsilon,m_1},\ b]\ \bigcup_{k=1}^{m_1-1}\ [\beta^{(1)}_{\varepsilon,k},\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k+1}],$$

если $\xi^{(1)}_1=a$ и $\xi^{(1)}_{m_1}\neq b$;

$$G^{(1)}_{\varepsilon,4}=[\beta^{(1)}_{\varepsilon,1},\alpha^{(1)}_{\varepsilon,2}]\ \cup\ [\beta^{(1)}_{\varepsilon,m_1-1},\alpha^{(1)}_{m_1}]\ \bigcup_{k=2}^{m_1-1}\ [\beta^{(1)}_{\varepsilon,k},\alpha^{(1)}_{\varepsilon,k+1}],$$

если $\xi^{(1)}_1=a$ и $\xi^{(1)}_{m_1}=b$.

Определение 4.1. Функция $f(x)$ сингулярно μ-интегрируема на $[a, b]$ или S_μ—интегрируема на $[a, b]$, если существуют

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon,1}} f(x)\,d\mu(x) \text{ при } \xi^{(1)}_1\neq a \text{ и } \xi^{(1)}_{m_1}\neq b;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon,2}} f(x)\,d\mu(x) \quad\text{при}\quad \xi^{(1)}_1\neq a \quad\text{и}\quad \xi^{(1)}_{m_1}=b;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon,3}} f(x)\,d\mu(x) \quad\text{при}\quad \xi^{(1)}_1\neq a \quad\text{и}\quad \xi^{(1)}_{m_1}=b;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon,4}} f(x)\,d\mu(x) \quad\text{при}\quad \xi^{(1)}_1=a \quad\text{и}\quad \xi^{(1)}_{m_1}=b.$$

Сингулярным интегралом Стилтьеса функции $f(x)$ на $[a, b]$ по функции $\mu(x)$ или коротко S_μ-интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$ будем называть конечную величину

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G^{(1)}_{\varepsilon}} f(x)\,d\mu(x), \tag{4.1}$$

где $G^{(1)}_\varepsilon$ — одно из множеств $G^{(1)}_{\varepsilon,k}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

5. Аналогично мы можем рассмотреть случай, когда $S^{(3)}$ есть пустое множество и $S^{(2)}$ содержит только конечное число точек.

Продолжая этот процесс по индукции, мы можем определить сингулярный интеграл Стилтьеса или S_μ-интеграл функции $f(x)$ на $[a, b]$, когда $S^{(n)}$ есть пустое множество при некотором натуральном n.

По условию множество S является счетным приводимым множеством. Поэтому существует порядковое число γ первого или второго классов (множество чисел γ есть счетное вполне упорядоченное множество), для которого множество $S^{(\gamma)}$ есть пустое множество.

Пользуясь трансфинитной индукцией, и в этом случае можно определить сингулярный интеграл Стилтьеса.

В самом деле, возможны два случая:

1°. число γ является трансфинитным числом первого рода и

2°. число γ является трансфинитным числом второго рода.

В случае 1°, из того, что множество $S^{(\gamma)}$ пусто, следует, что множество $S^{(\gamma-1)}$ содержит лишь конечное число $m_{\gamma-1} \geqslant 1$ точек

$$S^{(\gamma-1)} = \{ \xi_k^{(\gamma-1)} \}_{k=1}^{m_{\gamma-1}}; \quad a \leqslant \xi_1^{(\gamma-1)} < \xi_2^{(\gamma-1)} < \ldots < \xi_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)} \leqslant b.$$

Введем произвольные окрестности $(\alpha_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)}, \beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)})$ точек $\beta_k^{(\gamma-1)}$, $k=1, 2, \ldots, m_{\gamma-1}$, непрерывно зависящие от параметра ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ и удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)} \overline{\in} S^{(\gamma-2)}, \quad \beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)} \overline{\in} S^{(\gamma-2)};$$

$$\alpha_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)} < \xi_k^{(\gamma-1)} < \beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)};$$

$\alpha_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)} \to \xi_k^{(\gamma-1)}$, $\beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)} \to \xi_k^{(\gamma-1)}$ $(k=1, 2, \ldots, m_{\gamma-1})$, когда $\varepsilon\to 0$; при этом, если $\xi_1^{(\gamma-1)} = a$ и $\xi_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)} = b$, то под окрестностями будем понимать соответственно полуокрестности $[a, \beta_{\varepsilon,1}^{(\gamma-1)})$ и $(\alpha_{\varepsilon,m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)}, b]$.

Сингулярный μ-интеграл функции $f(x)$ можем считать уже определенным на множествах:

$$G_{\varepsilon,1}^{(\gamma-1)} = [a, \alpha_{\varepsilon,1}^{(\gamma-1)}] \cup [\beta_{\varepsilon,m_1}^{(\gamma-1)}, b] \bigcup_{k=1}^{m_{\gamma-1}-1} [\beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)}, \alpha_{\varepsilon,k+1}^{(\gamma-1)}],$$

если

$$\xi_1^{(\gamma-1)} \neq a \quad \text{и} \quad \xi_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)} \neq b;$$

$$G_{\varepsilon,2}^{(\gamma-1)} = [a, \alpha_{\varepsilon,1}^{(\gamma-1)}] \bigcup_{k=1}^{m_{\gamma-1}-1} [\beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)}, \alpha_{\varepsilon,k+1}^{(\gamma-1)}],$$

если

$$\xi_1^{(\gamma-1)} \neq a \quad \text{и} \quad \xi_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)} = b;$$

$$G_{\varepsilon,3}^{(\gamma-1)} = [\xi_{\varepsilon,m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)}, b] \bigcup_{k=1}^{m_{\gamma-1}-1} [\beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)}, \alpha_{\varepsilon,k+1}^{(\gamma-1)}],$$

если

$$\xi_1^{(\gamma-1)} = a \quad \text{и} \quad \xi_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)} = b;$$

$$G_{\varepsilon,4}^{(\gamma-1)} = [\beta_{\varepsilon,1}^{(\gamma-1)}, \alpha_{\varepsilon,2}^{(\gamma-1)}] \cup [\beta_{\varepsilon,m_{\gamma-1}-1}^{(\gamma-1)}, \alpha_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)}] \,.\, \bigcup_{k=1}^{m_{\gamma-1}-1} [\beta_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)}, \alpha_{\varepsilon,k+1}^{(\gamma-1)}],$$

если

$$\xi_1^{(\gamma-1)} = a \quad \text{и} \quad \xi_{m_{\gamma-1}}^{(\gamma-1)} = b.$$

Функцию $f(x)$ назовем сингулярно μ-интегрируемой на $[a, b]$ или S_μ-интегрируемой на $[a, b]$, если существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon^{(\gamma-1)}} f(x)\,d\mu(x),$$

где $G_\varepsilon^{(\gamma-1)}$—одно из множеств $G_{\varepsilon,k}^{(\gamma-1)}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$; $S\mu$-интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$ будем называть конечную величину

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon^{(\gamma-1)}} f(x)\,d\mu(x). \tag{6.1}$$

В случае 2°, из того, что

$$S^{(\gamma)}=\prod_{\gamma'<\gamma} S^{(\gamma')}$$

есть пустое множество следует, что существует такое конечное или бесконечное (трансфинитное) число γ^* первого или второго классов, что $S^{(\gamma^*)}$ содержит лишь конечное число точек, а $S^{(\gamma^*+1)}, S^{(\gamma^*+2)},\ldots$, все являются пустыми множествами. В таком случае конструкция $S\mu$-интеграла функции $f(x)$ на $[a, b]$ нам уже известна.

6. Класс $S_{\mu,\omega}[a, b]$. Класс $S\mu$-интегрируемых функций $f(x)$ на $[a, b]$ обозначим через $S_\mu[a, b]$. Очевидно, что класс $S_\mu[a, b]$ является линейным множеством функций $f(x)$ на $[a, b]$.

Пусть множество S состоит из одной точки: $S=\{\xi\}$, $a<\xi<b$, и что $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

Пусть $\mu(x)$ имеет конечное изменение на множестве $a\,\alpha_\varepsilon \cup \beta_\varepsilon\, b$ при любом ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.

Положим

$$v(\tau;\ \mu)\equiv\max\left\{\int\limits_a^{\xi-\tau}|d\mu(x)|,\quad \int\limits_{\xi+\tau}^b|d\mu(x)|\right\},\quad 0<\tau\leqslant l,$$

$$\theta(\tau,\ \xi;\ f)\equiv\max\left\{\sup_{\substack{0\leqslant\xi-x\leqslant\tau\\ 0\leqslant x\leqslant\xi}}|f(x)-A|,\quad \sup_{\substack{0\leqslant x-\xi\leqslant\tau\\ \xi\leqslant x\leqslant b}}|f(x)-B|\right\},\ 0<\tau\leqslant l,$$

и

$$\|f\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\sup_{0<\tau<l}\frac{\theta(\tau,\ \xi;\ f)}{\omega(\tau)},$$

где $\omega(\tau)$—заданная положительная неубывающая функция на $0<\tau\leqslant l$.

Определение 6.1. Функция $f(x)$ $S_{\mu,\omega}$-интегрируема на $[a, b]$ или принадлежит классу $S_{\mu,\omega}[a, b]$, если:

1°. $\mu(x)$ удовлетворяет условию (1.1);

2°. $\theta(\tau,\ \xi;\ f)\leqslant H\omega(\tau)$, $0<\tau\leqslant l$,

где H—положительная постоянная;

3°. $\int\limits_0^l \omega(\tau)\,dv(\tau;\ \mu)\equiv M(\mu;\ \omega)<+\infty.$

Очевидно, что класс $S_{\mu,\omega}[a, b]$ является линейным множеством функций на $[a, b]$.

7. **Представление $S_{\mu,\omega}$-интегралов.** Если $f(x) \in S_{\mu,\omega}[a, b]$, то $f(x) \in S_{\mu}[a, b]$ и её $S_{\mu,\omega}$-интеграл допускает следующее представление:

$$\int_a^b f(x)\, d\mu(x) = \int_a^{\xi-0} [f(x)-A]\, d\mu(x) + \int_{\xi+0}^b [f(x)-B]\, d\mu(x) + R, \tag{7.1}$$

где $R = C + B\mu(b) - A\mu(a)$.

Это легко следует из (3.2), пользуясь равенством (1.1).

В частности, если значение $f(\xi)$ определено, мы можем $\theta(\tau; \xi; f)$ заменить модулем непрерывности $\omega(\tau; f)$ и положить $A \equiv B \equiv f(\xi)$ и $C \equiv m_0 f(\xi)$, при этом $m_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} [\mu(\alpha_\varepsilon) - \mu(\beta_\varepsilon)]$.

Тогда (7.1) примет вид

$$\int_a^b f(x)\, d\mu(x) = \left(\int_a^{\xi-0} + \int_{\xi+0}^b \right) [f(x) - f(\xi)]\, d\mu(x) + m(\mu) f(\xi), \tag{7.2}$$

где $m(\mu) = \mu(b) - \mu(a) + m_0$.

Из (7.2) легко следует оценка

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\mu(x) \right| \leqslant [2M(\mu; \omega) + |m(\mu)|] \, \| f \|. \tag{7.3}$$

8. **Класс $S^{(1)}_{\mu,\omega}[a, b]$.** Рассмотрим теперь случай, когда первое производное множество $S^{(1)}$ от сингулярного множества S содержит лишь одну точку ξ.

Пусть
$$S = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi.$$

Для простоты изложения будем считать, что $\xi = b$.

По определению (см. п. 4) имеем

$$\int_a^b f(x)\, d\mu(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{G^{(1)}_{\varepsilon,2}} f(x)\, d\mu(x),$$

где в рассматриваемом случае

$$G^{(1)}_{\varepsilon,2} = [a, \alpha^{(1)}_\varepsilon], \quad \text{а} \quad \alpha^{(1)}_\varepsilon \to \xi \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Теперь положим

$$\bar{\xi}_0 = a, \quad \bar{\xi}_n = \frac{1}{2}(\xi_n + \xi_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$l_n = \bar{\xi}_{n+1} - \bar{\xi}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\bar{\xi}_{n-1} < \alpha_{\varepsilon,n} < \xi_n < \beta_{\varepsilon,n} < \bar{\xi}_n \equiv \alpha^{(1)}_\varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$. Полагаем (см. п. 1), что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,[A_k\,\mu(\alpha_{\varepsilon,k})-B_k\,\mu(\beta_{\varepsilon,k})]=C_k,\quad k=1,\ 2,\dots \tag{8.1}$$

где A_k, B_k и C_k—заданные постоянные.

Положим

$$v_n(\tau;\ \mu)\equiv\max\left\{\int\limits_{\overline{\xi_n}}^{\xi_n-\tau}|\,d\mu(x)\,|,\quad \int\limits_{\xi_n+\tau}^{\overline{\xi_{n+1}}}|\,d\mu(x)\,|\right\},\quad 0<\tau\leqslant l_n,$$

$$\theta_n(\tau,\ \xi_n;\ f)\equiv\max\{\sup_{\substack{0\leqslant\xi-x\leqslant\tau\\ a\leqslant x<\xi}}|\,f(x)-A_n\,|,\quad \sup_{\substack{0\leqslant x-\xi<\tau\\ \xi<x\leqslant b}}|\,f(x)-B_n\,|\},\quad 0<\tau\leqslant l_n,$$

и

$$R_n\equiv C_n+B_n\,\mu(\overline{\xi_{n+1}})-A_n\,\mu(\overline{\xi_n}),\quad n=1,\ 2,\dots.$$

Определение 8.1. Функция $f(x)$ принадлежит классу $S^{(1)}_{\mu,\omega}[a,b]$, если:

1°. $\mu(x)$ удовлетворяет условиям (8.1);

2°. $\theta_n(\tau,\ \xi;\ f)\leqslant H_n\,\omega(\tau)$, $n=1,\ 2,\dots;$

3°. $\int\limits_0^{l_n}\omega(\tau)\,dv_n(\tau;\ \mu)\equiv M_n(\mu;\ \omega)<+\infty$, $n=1,\ 2,\dots;$

4°. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_n\,M_n(\mu;\ \omega)<+\infty;$

5°. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,R_n\,|<+\infty.$

8.2. Представление $S^{(1)}_{\mu,\omega}$-интегралов. Если $f(x)\in S^{(1)}_{\mu,\omega}[a,b]$, то имеем следующее представление:

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\overline{\xi_n}}^{\xi_n-0}[f(x)-A_n]\,d\mu(x)+\int\limits_{\xi_n+0}^{\overline{\xi_{n+1}}}[f(x)-B_n]\,d\mu(x)+\right.$$
$$\left.+R_n\right), \tag{8.1.1}$$

где

$$R_n=C_n+B_n\,\mu(\overline{\xi_{n+1}})-A_n\,\mu(\overline{\xi_n}).$$

В частности, если все $f(\xi_n)$, $(n=1,\ 2,\dots)$ определены, мы можем положить $A_n\equiv B_n\equiv f(\xi_n)$ и $C_n\equiv m_n^{(0)}(\mu)\,f(\xi_n)$,

где $m_k^{(0)}(\mu)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\mu(\alpha_{\varepsilon,k})-\mu(\beta_{\varepsilon,k})]$, $k=1,2,\dots.$

Тогда (8.11) примет вид

$$\int_a^b f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\overline{\xi_n}}^{\xi_n}+\int_{\xi_n}^{\overline{\xi_{n+1}}}\right)[f(x)-f(\xi_n)]\,d\mu(x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu)\,f(\xi_n), \tag{8.1.2}$$

где $m_n(\mu)=\mu(\overline{\xi_{n+1}})-\mu(\overline{\xi_n})+m_n^{(0)}(\mu),\ n=1,\ 2,\dots$.

В самом деле, в силу условий 1°—5° определения 8 1, ряды в правых частях равенств (8.1.1) и (8.1.2) абсолютно сходятся.

Полагая

$$\|f\|_n=\sup_{\overline{\xi_n}\leqslant x\leqslant\overline{\xi_{n+1}}}|f(x)|+\sup_{0<\tau\leqslant l_n}\frac{\theta_n(\tau,\ \xi_n;\ f_n)}{\omega(\tau)},$$

для интеграла мы имеем следующую оценку:

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\mu(x)\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}[2\,M_n(\mu;\ \omega)+|m_n(\mu)|]\,\|f\|_n. \tag{8.1.3}$$

В том случае, когда существует

$$\|f\|=\sup_{n\geqslant 0}\|f\|_n,$$

неравенство (8.1.3) примет вид

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\mu(x)\right|\leqslant A(\mu;\ \omega)\,\|f\|, \tag{8.1.4}$$

где

$$A(\mu;\ \omega)=\sum_{n=0}^{\infty}[2\,M_n(\mu;\ \omega)+|m_n(\mu)|]. \tag{8.1.5}$$

9. Сингулярный интеграл Стилтьеса в смысле обобщенного главного значения и ряды Фурье-Стилтьеса. Пусть функция $f(x)$ определена и конечна на $[0,2\pi]$ за исключением, быть может, сингулярного множества Коши S функции $\mu(x)$. Распространим определения $f(x)$ и $\mu(x)$ на интервал $-\infty<x<+\infty$ с помощью равенств:

$$f(x+2\pi)=f(x)\quad\text{и}\quad\mu(x+2\pi)=\mu(x)+\mu(2\pi)-\mu(0).$$

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{9.1}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx d\mu(x), \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx d\mu(x) \tag{9.2}$$

являются S_μ-интегралами, соответственно, от функций

$$f(x)\cos nx \quad \text{и} \quad f(x)\sin nx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Мы будем писать

$$f(x)\,d\mu(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{9.3}$$

и называть (9.1) рядом Фурье-Стилтьеса для $f(x)\,d\mu(x)$.

В том частном случае, когда в (9.2) $\mu(x)\equiv x$, а интегралы берутся в смысле главного значения Коши ($\alpha_\varepsilon=\xi-\varepsilon$, $\beta_\varepsilon=\xi+\varepsilon$), ряды (9.1) были рассмотрены впервые Е. Титчмаршем [7]. Он рассмотрел случай, когда в интегралах

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nt\,dt, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t dt \tag{9.4}$$

интегрируемая в смысле Лебега функция $f(x)$ имеет одну особую точку $x=\xi$ несуммируемости и интегралы (9.4) понимаются в смысле главного значения Коши. Полагая $\Phi(u)\equiv f(\xi+u)$ и требуя суммируемость функций $[\Phi(u)+\Phi(-u)]$ и $u[\Phi(u)-\Phi(-u)]$ на сегменте $0\leqslant u\leqslant\delta$, Титчмарш указал, что в этом случае $a_n=o(n)$ и $b_n=o(n)$ и эти оценки в общем случае нельзя улучшить. Он указал, что этот факт вытекает из следующей, более общей теоремы:

Если $h(t)$ монотонно стремится к $+\infty$, $th(t)$ не возрастает при $t\to 0$ и $f(t)$—произвольная суммируемая функция, тогда

$$\int_0^1 h(t)\sin nt\, f(t)\,dt=o\left\{h\left(\frac{1}{n}\right)\right\};$$

и, как бы медленно не стремилась функция $\lambda(n)$ к 0, существует суммируемая функция $f(x)$, такая, что,

$$\int_0^1 h(t)\sin nt\, f(t)\,dt\neq o\left\{\lambda(n)\,h\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Титчмарш не приводит доказательства этой теоремы и для построения функции, упомянутой во второй половине теоремы, ограничивается указанием, что достаточно ее положить равной $n_p^2\,\lambda(n_p)$ в интервалах $(n_p+1)^{-1}<t<n_p^{-1}$, $(p=1,\ 2,\ldots)$ и равной нулю в остальных точках сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$, при этом натуральные числа n_p должны достаточно быстро стремиться к ∞.

Ниже мы (п. 9.5) докажем теорему, обобщающую сформулированную выше теорему Титчмарша.

C. Walmsley [8] рассмотрел случай, когда интегралы (9.4) берутся по контуру, расположенному в комплексной плоскости, ведущему из точки $-\pi$ к точке $-\pi$ и избегающему особенности функции $f(x)$, и изучил явление Гиббса для чезаровских и гёльдеровских средних рядов Фурье (называемых автором обобщенным рядом Фурье в смысле контурного интегрирования).

9.2. Для общности, вместо интегралов (9.2) рассмотрим интегралы

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Мы будем предполагать, что $f(x) \in S_{\mu,\omega}[a, b]$. Допустим теперь, что $\varphi_n(x)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1°. $|\varphi_n(x)| \leqslant N$, $a \leqslant x \leqslant b$, N не зависит от n и x;

2°. $\sup\limits_{|x-\xi|\leqslant\tau} |\varphi_n(x) - \varphi_n(\xi)| \leqslant \rho_n\,\omega(\tau)$, $0 < \tau \leqslant l$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

где $\omega(\tau)$—функция из п. 6.

Легко проверить, что в этом случае $f(x)\varphi_n(x) \in S_{\mu,\omega}[a, b]$ при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ и имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant [2HN + (|A| + |B|)\rho_n]\,M(\mu;\ \omega) + N|R|,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

9.3. Классы $S^{*}_{\mu,\omega}[a, b]$ и $S^{**}_{\mu,\omega}[a, b]$.

Определение 9.3.1. Функция $f(x)$ принадлежит классу $S^{*}_{\mu,\omega}[a, b]$, если

1°. $f(x) \in S_{\mu,\omega}[a, b]$ и 2°. $\tau \leqslant H^*\,\omega(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant l$, H^*—положительная постоянная.

Определение 9.3.2. Функция $f(x)$ принадлежит классу $S^{**}_{\mu,\omega}[a, b]$, если

1°. $f(x) \in S^{*}_{\mu,\omega}[a, b]$,

2°. $\int\limits_a^{\xi-\delta} f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x) = o(1)$ и $\int\limits_{\xi+\delta}^{b} f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x) = o(1)$, $n \to \infty$,

(где $\varphi_n(x)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° п. 9.2., когда $n \to \infty$) при любом фиксированном $\delta > 0$.

9.4. О росте коэффициентов Фурье a_n и b_n.

Теорема. Пусть $f(x) \in S^{**}_{\mu,\omega}[a, b]$. Тогда $c_n = o(\rho_n)$, если $\rho_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $a < \xi - \delta < \alpha_\varepsilon < \beta_\varepsilon < \xi + \delta < b$. Имеем

$$c_n=\left(\int\limits_a^{\xi-\delta}+\int\limits_{\xi+\delta}^{b}\right) f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\xi-\delta}^{\alpha_\varepsilon}+\int\limits_{\beta_\varepsilon}^{\xi+\delta}\right) f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x)=$$

$$=o(\rho_n)+\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi}[f(x)-A]\,\varphi_n(x)\,d\mu(x)+\int\limits_{\xi}^{\xi+\delta}[f(x)-B]\,\varphi_n(x)\,d\mu(x)+$$

$$+A\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi}[\varphi_n(x)-\varphi_n(\xi)]\,d\mu(x)+B\int\limits_{\xi}^{\xi+\delta}[\varphi_n(x)-\varphi_n(\xi)]\,d\mu(x)+\{C+B\mu(\xi+\delta)-$$

$$-A\mu(\xi-\delta)\}\,\varphi_n(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$|c_n|\leqslant|o(\rho_n)|+2HN\int\limits_0^{\delta}\omega(\tau)\,dv(\tau;\mu)+(|A|+|B|)\,H^*\rho_n\int\limits_0^{\delta}\omega(\tau)\,dv(\tau;\mu)+$$

$$+N\,|C+B\mu(\xi+\delta)-A\mu(\xi-\delta)|.$$

Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{\rho_n}\leqslant(|A|+|B|)H^*\int\limits_0^{\delta}\omega(\tau)\,dv(\tau;\mu). \tag{9.4.1}$$

Так как δ—произвольно фиксированное положительное число, из (9.4.1) следует, что $c_n=o(\rho_n)$.

9.5. Теперь мы обобщим теорему Титчмарша, упомянутую в п. 9.1.

Рассмотрим опять интеграл

$$c_n=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu(x),\quad n=0,1,2,\dots. \tag{9.5.1}$$

Докажем, что для интеграла (9.5.1) в п. 9.4 установленную оценку $c_n=o(\rho_n)$, вообще говоря, нельзя улучшить. С этой целью и для простоты изложения положим: $a=-1$, $b=1$, $\xi=0$, $\alpha_\varepsilon=-\varepsilon$, $\beta_\varepsilon=+\varepsilon$, $f(x)\equiv 1$, $A=B=1$, $C=0$, и будем считать, что функция $\mu(x)$ является четной, абсолютно непрерывной на сегменте $\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$ для любого ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, и монотонно возрастающей при $x\to+0$.

В этих условиях интеграл (9.5.1), как легко видеть, примет вид

$$c_n=\int\limits_0^1\psi_n(x)\,\mu'(x)\,dx, \tag{9.5.2}$$

где

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_n(-x).$$

В силу п. 9.2, в рассматриваемом случае, очевидно, что

$$|\psi_n(x)|\leqslant 2\,\rho_n\,\omega(x).$$

По условию (см. п. 6) имеем

$$\int_0^1 \omega(x)\,|\mu'(x)|\,dx < +\infty. \tag{9.5.3}$$

Поэтому вместо интеграла (9.5.2) рассмотрим более общий интеграл

$$c_n = \int_0^1 h(x)\,\psi_n(x)\,g(x)\,dx, \tag{9.5.4}$$

где $g(x) = \omega(x)|\mu'(x)|$; если, в частности, $h(x) = \dfrac{1}{\omega(x)}$, интеграл (9.5.4) переходит в интеграл (9.5.2).

Обобщенная теорема Титчмарша. Пусть удовлетворяются следующие условия:

1°. $g(x)$—произвольная суммируемая функция на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$;

2°. $h(x)$—положительная функция, монотонно возрастающая при $x \to 0$;

3°. $\omega(x)$—непрерывная положительная функция, монотонно стремящаяся к нулю, когда $x \to 0$;

4°. $\omega(x)\,h(x)$—не возрастает при $x \to 0$;

5°. $\psi_n(x)$—ограниченная неотрицательная суммируемая функция, не тождественно равная нулю для всех достаточно малых x, при любом фиксированном значении n; $|\psi_n(x)| \leqslant N$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ($N$ не зависит от n и x); $|\psi_n(x)| \leqslant \rho_n\,\omega(x)$, $\rho_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$;

6°. $\Psi_n(x) = \int\limits_0^x \psi_n(t)\,dt$, $\Psi_n(x) = o(1)$, $n \to \infty$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$|\Psi_n(x') - \Psi_n(x'')| \geqslant K\,|x' - x''|$ для любых достаточно малых x' и x'' на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$, при этом K—положительная постоянная, не зависящая от n, x' и x''.

Тогда

$$c_n = o\{h(\gamma_n)\}, \tag{9.5.4'}$$

где

$$\omega(\gamma_n) = \frac{1}{\rho_n}, \quad 0 < \gamma_n \leqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Как бы медленно не стремилась неотрицательная функция $\lambda(x)$ к нулю при $x \to 0$, причем $\lambda(x)\,h(x) \to \infty$, когда $x \to 0$, существует такая суммируемая функция $g_\lambda(x)$, что

$$c_n \neq o\{\lambda(\gamma_n)\,h(\gamma_n)\} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9.5.5}$$

Доказательство. Из (9.5.4) имеем

$$c_n = \left(\int_0^{\gamma_n} + \int_{\gamma_n}^1\right) h(x)\,\psi_n(x)\,g(x)\,dx.$$

Очевидно, что

$$\left|\int_0^{\gamma_n} h(x)\,\psi_n(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^{\gamma_n} h(x)\,\rho_n\,\omega(x)\,|g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \rho_n\,h(\gamma_n)\,\omega(\gamma_n)\int_0^{\gamma_n}|g(x)|\,dx = h(\gamma_n)\int_0^{\gamma_n}|g(x)|\,dx. \tag{9.5.6}$$

В силу второй теоремы о среднем (см., напр., [9], стр. 423—424), имеем

$$\int_{\gamma_n}^{1} h(x)\,\psi_n(x)\,g(x)\,dx = h(\gamma_n)\int_{\gamma_n}^{\delta_n}\psi_n(x)\,g(x)\,dx,\ \ \gamma_n<\delta_n<1. \tag{9.5.7}$$

Как известно, для любого $\varepsilon>0$ существует полином $P_\varepsilon(x)$, такой, что

$$\int_0^1 |g(x)-P_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant \varepsilon. \tag{9.5.8}$$

Далее, имеем

$$\int_{\gamma_n}^{\delta_n}\psi_n(x)\,P_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\gamma_n}^{\delta_n}P_\varepsilon(x)\,d\Psi_n(x) = \left[P_\varepsilon(x)\,\Psi_n(x)\right]_{\gamma_n}^{\delta_n} - \int_{\gamma_n}^{\delta_n}\Psi_n(x)\,P_\varepsilon'(x)\,dx.$$

Отсюда, в силу условия 6° теоремы, получим

$$\left|\int_{\gamma_n}^{\delta_n}\varphi_n(x)\,P_\varepsilon(x)\,dx\right| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|P_\varepsilon(x)|\cdot o(1) + \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|P'_\varepsilon(x)|\cdot o(1)\ \text{ при } n\to\infty. \tag{9.5.9}$$

Так как

$$\int_{\gamma_n}^{\delta_n}\psi_n(x)\,g(x)\,dx = \int_{\gamma_n}^{\delta_n}\psi_n(x)\,[g(x)-P_\varepsilon(x)]\,dx + \int_{\gamma_n}^{\delta_n}\psi_n(x)\,P_\varepsilon(x)\,dx, \tag{9.5.10}$$

то отсюда, в силу (9.5.4), (9.5.6), (9.5.7.), (9.5.8), (9.5.9) и (9.5.10), имеем

$$|c_n| \leqslant h(\gamma_n)\int_0^{\gamma_n}|g(x)|\,dx + h(\gamma_n)\Big\{\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|P_\varepsilon(x)|\cdot o(1) +$$

$$+\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|P'_\varepsilon(x)|\cdot o(1) + \varepsilon N\Big\} \tag{9.5.11}$$

при $n\to\infty$.

Фиксируя сперва ε, а потом выбирая n достаточно большим, из (9.5.11) легко получим, что имеет место оценка (9.5.4′).

Теперь перейдем к доказательству неравенства (9.5.5).

Пусть $1=n_0<n_1<\dots<n_p<\cdots$, $n_p\to\infty$ при $p\to\infty$.

Положим

$$g_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda(\gamma_{n_p})\,\nu(\gamma_{n_p}), & \gamma_{2n_p}\leqslant x\leqslant \gamma_{n_p}\\ 0, & x\,\overline{\in}\,[\gamma_{2n_p},\ \gamma_{n_p}],\quad p\geqslant 0,\end{cases}$$

где

$$\nu(\gamma_{n_p})=\frac{1}{\Psi_{n_p}(\gamma_{n_p})-\Psi_{n_p}(\gamma_{2n_p})}. \tag{9.5.12}$$

Из (9.5.4) имеем

$$c_{n_p}=\left(\int\limits_0^{\gamma_{2n_p}}+\int\limits_{\gamma_{2n_p}}^{\gamma_{n_p}}+\int\limits_{\gamma_{n_p}}^{1}\right)h(x)\,\psi_{n_p}(x)\,g_\lambda(x)\,dx\equiv$$

$$\equiv A_{n_p}+B_{n_p}+C_{n_p},\quad p=0,\ 1,\ 2,\ldots. \tag{9.5.13}$$

Число $\gamma_1\leqslant\frac{1}{2}$ можно выбрать настолько малым, что

$$A_{n_p}=\int\limits_0^{\gamma_{2n_p}}h(x)\,\psi_{n_p}(x)\,g_\lambda(x)\,dx>0,\ \ p=0,\ 1,\ 2,\ldots. \tag{9.5.14}$$

Далее,

$$B_{n_p}=\int\limits_{\gamma_{2n_p}}^{\gamma_{n_p}}h(x)\,\psi_{n_p}(x)\,g_\lambda(x)\,dx=$$

$$=\lambda(\gamma_{n_p})\,\nu(\gamma_{n_p})\int\limits_{\gamma_{2n_p}}^{\gamma_{n_p}}h(x)\,\psi_{n_p}(x)\,dx\geqslant\lambda(\gamma_{n_p})\,\nu(\gamma_{n_p})\,h(\gamma_{n_p})\times$$

$$\times[\Psi(\gamma_{n_p})-\Psi(\gamma_{2n_p})]=\lambda(\gamma_{n_p})\,h(\gamma_{n_p}). \tag{9.5.15}$$

Наконец, имеем

$$|C_{n_p}|\leqslant\int\limits_{\gamma_{n_p}}^{1}h(x)\,|\psi_{n_p}(x)|\,g_\lambda(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\gamma_{n_p}}^{1}h(\gamma_{2n_{p-1}})\,N\,g_\lambda(\gamma_{2n_{p-1}})\,dx\leqslant$$

$$\leqslant N h(\gamma_{2n_{p-1}})\,\lambda(\gamma_{2n_{p-1}})\,\nu(\gamma_{2n_{p-1}}). \tag{9.5.16}$$

Из (9.5.13), (9.5.14), (9.5.15) и (9.5.16) следует, что

$$c_{n_p}\geqslant\tau(\gamma_{n_p})-N\nu(\gamma_{2n_{p-1}})\,\tau(\gamma_{2n_{p-1}}), \tag{9.5.17}$$

где $\tau(x)\equiv\lambda(x)\,h(x)$.

Из (9.5.17) имеем, что

$$\frac{c_{n_p}}{\tau(n_p)}\geqslant 1-N\nu(\gamma_{2n_{p-1}})\,\frac{\tau(\gamma_{2n_{p-1}})}{\tau(\gamma_{n_p})}. \tag{9.5.18}$$

Теперь выберем n_p настолько большим по отношению к n_{p-1}, чтобы имели

$$\tau(n_p) > 2N\nu(\gamma_{2n_{p-1}})\,\tau(\gamma_{2n_{p-1}}),\ p=1,\ 2,\cdots. \qquad (9.5.19)$$

Из (9.5.18) получим, в силу (9.5.19), что

$$c_{n_p} \geqslant \frac{1}{2}\lambda(\gamma_{n_p})\,h(\gamma_{n_p}),\quad p=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Следовательно, отсюда вытекает (9.5.5).

Остается проверить, что $g_\lambda(x)$—суммируемая функция на $0 \leqslant x \leqslant 1$. В самом деле, имеем

$$\int_0^1 g_\lambda(x)\,dx = \sum_{p=0}^{\infty}\int_{\gamma_{2n_p}}^{\gamma_{n_p}} \lambda(\gamma_{n_p})\,\nu(\gamma_{n_p})\,dx = \sum_{p=0}^{\infty}\lambda(\gamma_{n_p})\,\nu(\gamma_{n_p})(\gamma_{n_p}-\gamma_{2n_p}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\lambda(\gamma_{n_p})\,\frac{\gamma_{n_p}-\gamma_{2n_p}}{\Psi_{np}(\gamma_{n_p})-\Psi_{n_p}(\gamma_{2n_p})}.$$

Отсюда, в силу условия 6° теоремы, получим, что

$$\int_0^1 g_\lambda(x)\,dx \leqslant \frac{1}{K}\sum_{p=0}^{\infty}\lambda(\gamma_{n_p}) < \infty,$$

если n_p достаточно быстро растет при возрастании p; напр., достаточно считать, что $\lambda(\gamma_{n_p}) \leqslant \frac{1}{2^p}$, $p=0,\ 1,\ 2,\ldots$; теорема полностью доказана.

9.6. (C, α) суммирование рядов Фурье-Стилтьеса.

Рассмотрим чезаревские средние порядка $\alpha > 0$

$$\sigma_n^\alpha(x;\ f d\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n^\alpha(x-t)\,f(t)\,d\mu(t), \qquad (9.6.1)$$

где $K_n^\alpha(t)$ есть ядро метода (C, α) (см., напр., [5], стр. 157).

Обобщение теоремы М. Рисса.

Если $f(x) \in S^*_{\mu,\omega}\ [-\pi,\ \pi]$, то почти всюду имеем

$$\lim_{n\to\infty}\ [\sigma_n^\alpha(x;\ f d\mu) - f(x)\,\mu'(x)] = 0. \qquad (9.6.2)$$

Доказательство. Пусть $x \neq \xi$. Положим $|x-\xi| \geqslant \delta > 0$ и пусть интервалы $\left(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right)$ и $(\alpha_\varepsilon,\ \beta_\varepsilon)$ не пересекаются при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и для $n \geqslant n_0$, где n_0—достаточно большое натуральное число.

Введем обозначение

$$\Delta_\varepsilon^{(n)}(x;\ \xi) \equiv [-\pi,\ \pi] - \left(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right) - (\alpha_\varepsilon,\ \beta_\varepsilon).$$

Очевидно, что

$$\sigma_n^\alpha(x;\ f d\mu)=\left[\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}+\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}+\int\limits_{\Delta_\varepsilon^{(n)}(x;\,\xi)}\right)K_n(x-t)\,f(t)\,d\mu(t).\right.$$

Отсюда

$$\sigma_n^\alpha(x;\ f d\mu)-f(x)\,\mu'(x)=\left[\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}+\int\limits_{\Delta_\varepsilon^{(n)}(x;\,\xi)}\right)K_n(x-t)\,f(t)\,d\mu(t)-\right.$$

$$\left.-f(x)\,\mu'(x)\,\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}+\int\limits_{\Delta_\varepsilon^{(n)}(x;\,\xi)}\right)K_n(x-t)\ dt\right]+$$

$$+\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}K_n(x-t)\,f(t)\,d\mu(t)-f(x)\,\mu'(x)\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}K_n(x-t)\ dt\right\}. \qquad (9.6.3)$$

Но

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}K_n(x-t)\,f(t)\ d\mu(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\left[K_n(x-t)-K_n(x-\xi)\right]f(t)\,d\mu(t)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\,K_n(x-\xi)\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}f(t)\,d\mu(t). \qquad (9.6.4)$$

Далее, в силу (7.1), имеем

$$\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}f(t)\,d\mu(t)=\int\limits_{a}^{\xi-0}\left[f(t)-A\right]d\mu(t)+\int\limits_{\xi+0}^{b}\left[f(t)-B\right]d\mu(t)+C+$$

$$+B\mu(\beta_\varepsilon)-A\mu(\alpha_\varepsilon). \qquad (9.6.5)$$

Теперь вспомним известные оценки (см., напр., [5], стр. 157):

$$\max_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}|K_n^\alpha(t)|\leqslant A_\alpha\,n^{-\alpha}\,\delta^{-(\alpha+1)}, \qquad (9.6.6)$$

$$|K_n^\alpha(t_1)-K_n^\alpha(t_2)|\leqslant\frac{n(n+1)}{2}\,|t_1-t_2|. \qquad (9.6.7)$$

Тогда из (9.6.4), (9.6.5), (9.6.6) и (9.6.7) получим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}K_n(x-t)\ f(t)\ d\mu(t)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\ \frac{n(n+1)}{2}\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{\beta\varepsilon}|t-\xi\,||\,f(t)||\,d\mu(t)\,|+$$

$$+\frac{A_\alpha}{\pi}\ n^{-\alpha}\,\delta^{-(\alpha+1)}\left[\int\limits_{a}^{\xi-0}|\,f(t)-A\,||\,d\mu(t)\,|+\int\limits_{\xi+0}^{b}|\,f(t)-B|\,|\,d\mu(t)|+|C+\right.$$

$$\left.+B\mu(\beta_\varepsilon)-A\mu(\alpha_\varepsilon)|\right]$$

или

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} K_n(x-t)\, f(t)\, d\mu(t)\right| \leqslant \frac{n(n+1)}{\pi} H^* \| f \| \int_0^{max(\alpha\varepsilon,\ \beta\varepsilon)} \omega(\tau)\, dv(\tau; \mu) +$$

$$+\frac{2}{\pi} A_\alpha n^{-\alpha} \delta^{-(\alpha+1)} \| f \| \int_0^l \omega(\tau)\, dv(\tau; \mu) + | C + B\mu(\beta_\varepsilon) - A\mu(\alpha_\varepsilon)|. \qquad (9.6.8)$$

Аналогично имеем

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} K_n(x-t)\, d\mu(t)\right| \leqslant \frac{n(n+1)}{\pi} H^* \int_0^{max(\alpha\varepsilon,\ \beta\varepsilon)} \omega(\tau)\, dv(\tau; \mu) +$$

$$+\frac{2}{\pi} A_\alpha n^{-\alpha} \delta^{-(\alpha+1)} \int_0^l \omega(\tau)\, dv(\tau; \mu) + | C + B\mu(\beta_\varepsilon) - A\mu(\alpha_\varepsilon)|. \qquad (9.6.9)$$

Из (9.6.8) и (9.6.9) следует, что выражение в фигурных скобках в (9.6.3) по абсолютному значению можно сделать сколь угодно малым, если n в зависимости от ε подобрать сколь угодно большим натуральным числом. Выражение в квадратных скобках в (9.6.3) можно исследовать известным способом (см. [5], стр. 174—176) и доказать, что оно стремится к нулю, если ε и n подобрать указанным образом почти для всех x, т. е. в каждой точке $x \neq \xi$, где соблюдается условие

$$\int_0^h | d_t [F(x+t) - F(x-t) - 2tF'(x)]| = o(h), \qquad h \to 0$$

при этом

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t)\, d\mu(t), & x < \xi, \\ \int_x^b f(t)\, d\mu(t), & x > \xi. \end{cases}$$

Таким образом, из (9.6.3) следует (9.6.2) и т. д.

10. Об явлении Гиббса для рядов Фурье-Стилтьеса.

Выше мы видели, что при определенных условиях ряды Фурье, с коэффициентами в виде сингулярных интегралов Стилтьеса в смысле обобщенного главного значения, (C, α) суммируются почти всюду.

Интересно отметить, что в самой сингулярной точке $x = \xi$ хотя ряд не суммируется, но при определенных условиях имеет место явление Гиббса.

Этот факт известен в ряде частных случаев (см. [8], [9]).

Исследованию более общего случая будет посвящена одна из наших последующих статей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Магнарадзе. О неравенстве Зигмунда для обобщенных сопряженных функций, представимых сингулярными интегралами Стильеса. Труды Тбилисского госуд. университета, т. 117 (1966), 369—381.
2. A. Zygmund. Sur le module de continuité de la Somme de la série conjuguée de la série de Fourier (на польском, резюме на французском). Prace Matematyczno Fizycsne, vol. 33 (1924), 125—132.
3. Л. Г. Магнарадзе. Об одном обобщении теоремы Племеля-Привалова. Сообщ. АН Груз. ССР, т. VIII, № 8 (1947), 509—516.
4. Л. Г. Магнарадзе. Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применения к некоторым линейным граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям. Доклады АН СССР, т. 1, XVIII, № 4 (1949), 657—660.
5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. М., том. 1, 1965, 199—201.
6. Е. Камке. Интеграл Лебега-Стилтьеса. М., 1959.
7. E. C. Titchmarsh. Principal value Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2), 23 (1925), xli.
8. C. Walmsley. Gibbs phenomena for Cesàro and Hölder summation of generalized Fourier series. J. London Math. Soc., v. 28, p. 2, № 110 (1953), 148—156.
9. Ф. И. Харшиладзе. Явление Гиббса при суммировании ряда Фурье методами Бернштейна-Рогозинского. Докл. АН СССР, 101, № 3 (1955), 425—428.
10. Е. Титчмарш. Теория функций. М., 1951.
11. А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций. М., 1934.
12. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
13. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., 1957.
14. И. Н. Песин. Развитие понятия интеграла. М., (1966).

Кафедра
дифференциальных и
интегральных уравнений

(Поступило в редакцию 7. V. 1966)

ლ. მაღნარაძე

სტილტიესის სინგულარული ინტეგრალი განზოგადებული მთავარი მნიშვნელობის აზრით და ფურიე—სტილტიესის მწკრივების (C, α) შეჯამებადობა

რეზიუმე

შრომაში შემოღებულია სტილტიესის სინგულარული ინტეგრალის ცნება განზოგადებული მთავარი მნიშვნელობის აზრით და მოცემულია მისი გამოყენება ფურიე—სტილტიესის მწკრივების (C, α) შეჯამებადობის საკითხში.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

М. О. БАШЕЛЕЙШВИЛИ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В этой статье эффективно решаются основные граничные задачи для одного подкласса ортотропного упругого тела в случае полупространства.

§ 1. Основные уравнения и граничные задачи

Основные однородные дифференциальные уравнения статики ортотропного упругого тела имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{xy}—компоненты вектора напряжения и выражаются через компоненты деформации в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=A_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial U_2}{\partial y}+A_{13}\frac{\partial U_3}{\partial z},\ \tau_{xz}=A_{44}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}+\frac{\partial U_3}{\partial x}\right),\\
&\sigma_y=A_{12}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial U_2}{\partial y}+A_{23}\frac{\partial U_3}{\partial z},\ \tau_{yz}=A_{55}\left(\frac{\partial U_2}{\partial z}+\frac{\partial U_3}{\partial y}\right),\\
&\sigma_z=A_{13}\frac{\partial U_1}{\partial x}+A_{23}\frac{\partial U_2}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial U_3}{\partial z},\ \tau_{xy}=A_{66}\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}\right),
\end{aligned}\tag{1.2}$$

где A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{13}, A_{23}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}—коэффициенты, характеризующие физические свойства ортотропного упругого тела, а U_1, U_2, U_3—компоненты вектора смещения.

Мы будем предполагать, что между коэффициентами A_{11}, $A_{12}\cdots,A_{66}$ существуют следующие зависимости:

$$
\begin{gathered}
A_{23}=\frac{A_{55}}{A_{44}}A_{13}, \\
A_{12}+A_{66}=A_{11}\frac{A_{55}}{A_{44}}-A_{66}, \qquad (1.3) \\
A_{11}A_{55}^2=A_{22}A_{44}^2.
\end{gathered}
$$

В этом случае число независимых упругих постоянных понизится до шести. Если кроме (1.3) допустить, что $A_{55}=A_{44}$, тогда тело является трансверсально-изотропным.

Подставляя (1.2) в (1.1) и учитывая (1.3), после некоторых преобразований основная система дифференциальных уравнений в компонентах вектора смещения принимает следующий вид:

$$
\begin{gathered}
A_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+A_{44}\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}+\left(A_{11}\frac{A_{55}}{A_{44}}-A_{66}\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}+ \\
+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 U_3}{\partial x\partial z}=0, \\
\left(A_{11}\frac{A_{55}}{A_{44}}-A_{66}\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+ \qquad (1.4) \\
+A_{11}\frac{A_{55}^2}{A_{44}^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+A_{55}\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}+\frac{A_{55}}{A_{44}}(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 U_3}{\partial y\partial z}=0, \\
(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial z}+\frac{A_{55}}{A_{44}}(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 U_2}{\partial y\partial z}+A_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2}+ \\
+A_{55}\frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2}+A_{33}\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}=0.
\end{gathered}
$$

Для системы (1.4) ставятся следующие граничные задачи: найти дважды непрерывно дифференцируемый вектор $\vec{U}(U_1, U_2, U_3)$, проекции которого удовлетворяют внутри области D системе (1.4); а на границе области вектор смещения, или вектор напряжения, или нормальная составляющая вектора смещения и касательная составляющая вектора напряжения—заданные величины. В нашем случае D будет полупространством.

§ 2. Решение второй граничной задачи

Под второй граничной задачей мы подразумеваем случай, когда на границе упругого полупространства задано значение вектора напряжения.

Для системы (1.4) основная фундаментальная матрица имеет следующий вид [1]:

$$\Gamma(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta)=\sum_{k=1}^{3}\left\|\begin{matrix} \dfrac{B_k}{r_k}+A_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}, & A_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial y}, & C_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z} \\ A_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial y}, & \dfrac{B'_k}{r_k}+A_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}, & C_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z} \\ C_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z}, & C_k\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z}, & D_k\dfrac{1}{r_k} \end{matrix}\right\|, \tag{2.1}$$

где A_k, B_k, B'_k, C_k и D_k коэффициенты имеют следующие значения:

$$A_k:\ A_1=\frac{1}{A_{44}},\quad A_k=\frac{(-1)^k(A_{33}-A_{44}a_k)}{A_{11}A_{44}a_k(a_2-a_3)},\ k=2,3,\ \sum_{k=1}^{3}A_k=0,$$

$$B_k:\ B_1=\frac{a_1}{A_{44}},\quad B_2=B_3=0,\qquad a_1=\frac{A_{55}}{A_{66}},$$

$$B'_k:\ B'_1=\frac{a_1}{A_{55}},\quad B'_2=B'_3=0, \tag{2.2}$$

$$C_k:\ C_1=0,\quad C_k=\frac{(-1)^k(A_{13}+A_{44})}{A_{11}A_{44}(a_2-a_3)},\ k=2,3,\ \sum_{k=1}^{3}C_k=0,$$

$$D_k:\ D_1=0,\quad D_k=\frac{(-1)^k(A_{11}a_k-A_{44})}{A_{11}A_{44}(a_2-a_3)},\ k=2,3,\ \sum_{k=1}^{3}D_k=\frac{1}{A_{44}},$$

$$r_k=\sqrt{a_k\left[(x-\xi)^2+\frac{A_{44}}{A_{55}}(y-\eta)^2\right]+z^2},$$

$$\Phi_k=z\ln(r_k+z)-r_k,\quad k=1,\ 2,\ 3, \tag{2.3}$$

$(x,\ y,\ z)$ и $(\xi,\ \eta)$ координаты, соответственно, точек P и Q, a_2 и a_3 корни уравнения

$$A_{11}A_{44}a^2+[(A_{13}+A_{44})^2-A_{11}A_{33}-A_{44}^2]a+A_{33}A_{44}=0.$$

Решение второй граничной задачи для ортотропного упругого полупространства ищем в следующем виде:

$$\vec{U}(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}M(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta)\,\vec{g}(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{2.4}$$

где $\vec{g}(\xi, \eta)$—искомый вектор,

$$M(x, y, z; \xi, \eta)=\sum_{k=1}^{3}\left\|\begin{matrix} \alpha_k\left(\frac{B_k}{r_k}+A_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}\right), & \alpha_k A_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial y}, & \beta_k C_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z} \\ \alpha_k A_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial y}, & \alpha_k\left(\frac{B'_k}{r_k}+A_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}\right), & \beta_k C_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z} \\ \alpha_k C_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z}, & \alpha_k C_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z}, & \beta_k D_k\frac{1}{r_k}\end{matrix}\right\|, \tag{2.5}$$

где A_k, B_k, B'_k, C_k, D_k—коэффициенты, определенные из (2.2), а α_k и β_k—пока произвольные постоянные, r_k и Φ_k определены из формулы (2.3).

Направим ось z внутри упругого полупространства, вычислим компоненты вектора напряжения, получаем

$$\begin{pmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \sigma_z\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} T(x, y, z; \xi, \eta)\,\vec{g}(\xi, \eta)d\xi d\eta, \tag{2.6}$$

где

$$T(x, y, z; \xi, \eta)=\sum_{k=1}^{3}\left\|\begin{matrix} T^{(k)}_{11}, & T^{(k)}_{12}, & T^{(k)}_{13} \\ T^{(k)}_{21}, & T^{(k)}_{22}, & T^{(k)}_{23} \\ T^{(k)}_{31}, & T^{(k)}_{32}, & T^{(k)}_{33}\end{matrix}\right\|, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
T^{(k)}_{11}&=\alpha_k A_{44}\left[B_k\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_k}+(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x^2\partial z}\right],\\
T^{(k)}_{21}&=\alpha_k A_{55}(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x\partial y\partial z},\\
T^{(k)}_{31}&=(-1)^k\alpha_k\frac{(A_{33}+A_{13}a_k)}{A_{11}(a_2-a_3)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_k},\quad k=2, 3,\\
T^{(k)}_{12}&=\alpha_k A_{44}(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x\partial y\partial z},\\
T^{(k)}_{22}&=\alpha_k A_{55}\left[B'_k\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_k}+(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial y^2\partial z}\right],\\
T^{(k)}_{32}&=\alpha_k\frac{(-1)^k(A_{33}+A_{13}a_k)}{A_{11}(a_2-a_3)},\quad k=2, 3,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$T_{13}^{(k)}=A_{44}\beta_k(C_k+D_k)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_k},\ T_{23}^{(k)}=A_{55}\beta_k(C_k+D_k)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_k},$$

$$T_{33}^{(k)}=\beta_k\frac{(-1)^k a_k(A_{11}a_k+A_{13})}{A_{11}(a_2-a_3)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_k},\ k=2,3. \tag{2.8}$$

Выбирая произвольные постоянные α_k и β_k в виде

$$\alpha_1=-\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}},\quad \alpha_k=-\frac{(A_{33}+\sqrt{A_{11}A_{33}}\,a_k)}{A_{33}+A_{13}a_k}\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}},\quad k=2,3, \tag{2.9}$$

$$\beta_1=0,\qquad \beta_k=-\frac{(\sqrt{A_{11}A_{33}}+A_{11}a_k)}{A_{11}a_k+A_{13}}\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}},$$

учитывая легко получаемые формулы

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_k}d\xi\,d\eta=-\frac{2\pi}{a_k}\sqrt{\frac{A_{55}}{A_{44}}},\quad \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x^2\partial z}d\xi\,d\eta=\pi\sqrt{\frac{A_{55}}{A_{44}}},$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial y^2\partial z}d\xi d\eta=\pi\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}},\quad \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x\partial y\partial z}d\xi dy=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_k}d\xi\,d\eta= \tag{2.10}$$

$$=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_k}d\xi\,d\eta=0$$

и переходя к пределу в (2.6), когда $z\to 0$, после элементарных преобразований получаем

$$\vec{g}(x,y)+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}T(x,y;\xi,\eta)\vec{g}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\vec{f}(x,y); \tag{2.11}$$

где

$$T(x,y;\xi,\eta)=T(x,y,z;\zeta,\eta)\Big|_{z=0},\quad \vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \sigma_z\end{pmatrix}\Bigg|_{z=0}.$$

Учитывая (2.2), (2.8), (2.9) и (2.10), после некоторых вычислений получаем $T(x,y;\xi,\eta)=0$ и из (2.10) имеем

$$\vec{g}(x,y)=\vec{f}(x,y).$$

Подставляя найденное значение вектора $\vec{g}(x,y)$ в формулы (2.4) и (2.6), получаем смещения и напряжения, представляющие решения задачи. Они имеют на бесконечности порядок, обеспечивающий единственность полученных решений.

§ 3. Решение первой граничной задачи

В этой задаче на границе упругого полупространства дано значение вектора смещения.

Ищем решение первой граничной задачи для ортотропного упругого полупространства в следующем виде:

$$\vec{U}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} N(x, y, z; \xi, \eta) \vec{g}(\xi, \eta) d\xi\, d\eta, \tag{3.1}$$

где $\vec{g}(\xi, \eta)$—искомый вектор, а матрица $N(x, y, z; \xi, \eta)$ имеет вид

$$N(x, y, z; \xi, \eta) = -\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}} \sum_{k=1}^{3} \left\| \begin{matrix} N_{11}^{(k)}, & N_{12}^{(k)}, & N_{13}^{(k)} \\ N_{21}^{(k)}, & N_{22}^{(k)}, & N_{23}^{(k)} \\ N_{31}^{(k)}, & N_{32}^{(k)}, & N_{33}^{(k)} \end{matrix} \right\|, \quad \text{где} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} N_{11}^{(k)} = A_{44} B_k \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_k} + (A_{44} A_k + \beta_2 C_k) \frac{\partial^3 \Phi_k}{\partial x^2 \partial z}, \\ N_{21}^{(k)} = (A_{44} A_k + \beta_2 C_k) \frac{\partial^3 \Phi_k}{\partial x \partial y \partial z}, \quad N_{12}^{(k)} = \frac{A_{55}}{A_{44}} N_{21}^{(k)}, \\ N_{22}^{(k)} = A_{44} B_k \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_k} + \frac{A_{55}}{A_{44}} (A_{44} A_k + \beta_2 C_k) \frac{\partial^3 \Phi_k}{\partial y^2 \partial z}, \\ N_{13}^{(k)} = [\beta_1 (B_k - A_k a_k) + A_{33} C_k] \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_k}, \\ N_{23}^{(k)} = [\beta_1 (B_k - A_k a_k) + A_{33} C_k] \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_k}, \\ N_{31}^{(k)} = (A_{44} C_k + \beta_2 D_k) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_k}, \quad N_{32}^{(k)} = \frac{A_{55}}{A_{44}} (A_{44} C_k + \beta_2 D_k) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_k}, \\ N_{33}^{(k)} = (A_{33} D_k - \beta_1 C_k a_k) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_k}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{A_{11} A_{33}} (A_{13} + A_{44})}{\sqrt{A_{11} A_{33}} + A_{44}}, \quad \beta_2 = \frac{A_{44} (A_{13} + A_{44})}{\sqrt{A_{11} A_{33}} + A_{44}}. \tag{3.4}$$

Остальные коэффициенты, входящие в (3.3), определены из (2.2).

Учитывая (2.10), (3.2), (3.3), (3.4) и переходя к пределу при $z \to 0$, из (3.1) получаем

$$\vec{g}(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} N(x, y; \xi, \eta) \vec{g}(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = \vec{f}(x, y), \tag{3.5}$$

где

$$N(x, y; \xi, \eta) = N(x, y, z; \xi, \eta)|_{z=0}, \quad \vec{f}(x, y) = \vec{U}(x, y, z|_{z=0}.$$

Принимая во внимание (3.3) и (3.4), после элементарных вычислений получаем $N(x, y; \xi, \eta) = 0$ и из (3.5)

$$\vec{g}(x, y) = \vec{f}(x, y).$$

Подставляя значение $\vec{g}(x, y)$ в (3.1), получаем единственное решение поставленной задачи. Аналогично вычисляется вектор напряжения.

§ 4. Решение третьей граничной задачи

Третья граничная задача заключается в определении векторов смещения и напряжения в области по заданным на границе нормальной составляющей вектора смещения и касательной составляющей вектора напряжения.

Решение третьей граничной задачи ищем в виде

$$\vec{U}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} M(x, y, z; \xi, \eta)\, \vec{g}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{4.1}$$

где

$$M(x, y, z; \xi, \eta) = \sum_{k=1}^{3} \left\| \begin{matrix} M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{13}^{(k)} \\ M_{21}^{(k)}, M_{22}^{(k)}, M_{23}^{(k)} \\ M_{31}^{(k)}, M_{32}^{(k)}, M_{33}^{(k)} \end{matrix} \right\|, \tag{4.2}$$

$$M_{11}^{(k)} = \alpha_k C_k \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_k}, \quad M_{21}^{(k)} = \alpha_k C_k \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_k}, \quad M_{31}^{(k)} = \alpha_k D_k \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_k},$$

$$M_{12}^{(k)} = \beta_k \left(\frac{B_k}{r_k} + A_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} \right), \quad M_{22}^{(k)} = \beta_k A_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial y},$$

$$M_{32}^{(k)} = \beta_k C_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial z}, \tag{4.3}$$

$$M_{13}^{(k)} = \beta_k A_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial y}, \quad M_{23}^{(k)} = \beta_k \left(B'_k \frac{1}{r_k} + A_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} \right),$$

$$M_{33}^{(k)} = \beta_k C_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y \partial z},$$

A_k, B_k, B'_k, C_k и D_k определены из (2.2),

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_k = -\frac{A_{44}(A_{33} + A_{13} a_k)}{A_{44} + A_{13}} \sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}},$$

$$\beta_1 = -\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}}, \quad \beta_k = -\frac{(A_{33} + \sqrt{A_{11} A_{33}})}{A_{33} + A_{13} a_k} \sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}}. \qquad k = 2, 3 \tag{4.4}$$

Из (4.1) после элементарных вычислений получаем

$$U_3(x, y, z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}[M_{31}^{(k)}g_1(\xi, \eta)+M_{32}^{(k)}g_2(\xi, \eta)+M_{33}^{(k)}g_3(\xi, \eta)]d\xi d\eta,$$

$$\tau_{xz}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\Big\{A_{44}\alpha_k(C_k+D_k)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\frac{1}{r_k}\cdot g_1(\xi, \eta)+A_{44}\beta_k\Big[B_k\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_k}+$$

$$+(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x^2\partial z}\Big]g_2(\xi, \eta)+A_{44}\beta_k(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x\partial y\partial z}g_3(\xi, \eta)\Big\}d\xi d\eta, \tag{4.5}$$

$$\tau_{yz}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\Big\{A_{55}\alpha_k(C_k+D_k)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\frac{1}{r_k}g_1(\xi, \eta)+$$

$$+A_{55}\beta_k(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x\partial y\partial z}g_2(\xi, \eta)+A_{55}\beta_k\Big[B'_k\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_k}+$$

$$+(A_k+C_k)\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial y^2\partial z}\Big]g_3(\xi, \eta)\Big\}d\xi\, d\eta,$$

где g_1, g_2 и g_3—проекции вектора $\vec{g}(\xi, \eta)$.

Допустим, что

$$U_3(x, y, z)|_{z=0}=f_1(x, y),\quad \tau_{xz}|_{z=0}=f_2(x, y),\quad \tau_{yz}|_{z=0}=f_3(x, y), \tag{4.6}$$

где f_1, f_2, f_3—данные функции.

Переходя к пределу в (4.5), когда $z\to 0$, после длинных, но элементарных вычислений получаем

$$g_2(x, y)=f_2(x, y),\quad g_3(x, y)=f_3(x, y),$$

$$g_1(x, y)=f_1(x, y)+$$

$$+\sqrt{\frac{A_{44}}{A_{55}}}\frac{A_{11}}{A_{33}(A_{13}+\sqrt{A_{11}A_{33}})}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{x-\xi}{r_1^2}f_2(\xi, \eta)+$$

$$+\frac{y-\eta}{r_1^2}\frac{A_{44}}{A_{55}}f_3(\xi, \eta)\Big]d\xi d\eta,\quad r_1^2=(x-\xi)^2+\frac{A_{44}}{A_{55}}(y-\eta)^2.$$

Подставляя полученное значение для вектора $\vec{g}(g_1, g_2, g_3)$ в (4.1), получаем решение поставленной задачи.

Результаты, полученные в этой статье, в следующих работах будут применены при решении некоторых пространственных контактных задач ортотропного упругого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. О. Башелейшвили. О фундаментальных решениях дифференциальных уравнений анизотропного упругого тела. Сообщения АН Груз. ССР, т. 19, № 4 (1957).

Тбилисский математический институт
им А. М. Размадзе

(Поступило в редакцию 20. IV. 1967)

მ. ბაშელეიშვილი

ორთოტროპული დრეკადი ნახევარსივრცისათვის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა წონასწორობის შემთხვევაში

რეზიუმე

ორთოტროპული დრეკადი ნახევარსივრცისათვის, როცა კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ (1.3) პირობას, წონასწორობის შემთხვევაში ეფექტურად (კრებადი ინტეგრალების სახით) ამოხსნილია ძირითადი (პირველი, მეორე და მესამე) სასაზღვრო ამოცანები. მიღებული შედეგების გამოყენება საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნის მიზნით მოცემული იქნება შემდეგ შრომებში.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Некоторые граничные задачи теории потенциала и теории упругости различными методами были рассмотрены в работах В. Д. Купрадзе [1.2], Д. И. Шермана [3, 4, 5, 6], М. О. Башелейшвили [7,8], П. И. Перлина [9], Т. В. Бурчуладзе [10] и др.

В данной работе предложен один новый способ решения граничных задач (основных и смешанных) теории упругости для конечных и бесконечных многосвязных областей, в двумерном и трехмерном случаях.

В первой части работы рассмотрены двумерные граничные задачи для общей эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, охватывающую систему уравнений теории упругости статического равновесия анизотропного упругого тела.

Во второй части работы рассмотрены трехмерные граничные задачи для системы теории упругости статического равновесия изотропного упругого тела.

Некоторые результаты данной работы опубликованы в статье автора [11].

1. Пусть E_2—двумерное эвклидово пространство (полная плоскость), $B^+\subset E_2$—конечная $(m+1)$ связная область, ограниченная простыми, замкнутыми, непересекающимися кривыми $S_k \in C_\alpha^{(1)}$, $k=0, 1, \cdots, m$; причем S_0 охватывает все остальные, а эти последние не охватывают друг друга; B_k—конечная область, ограниченная кривой S_k, $k=0, 1, \cdots, m$; $\overline{B}_k=B_k \cup S_k$, $S=\bigcup\limits_{k=0}^{m} S_k$, тогда ясно, что $B^+=B_0\setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} \overline{B}_k$; B^-— бесконечная m связная область, ограниченная контурами S_k, $k=1, 2, \cdots, m$; т. е.

$$B^-=E_2\setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B}_k.$$

Разобьем контур S_k на $2n_k$ дуг точками a_j^k, b_j^k, $j=1, 2, \ldots, n_k$, расположенными в положительном направлении контура S_k и введем обозначения

$$S'_k=\bigcup_{j=1}^{n_k} \overset{\frown}{a_j^k\, b_j^k}, \quad S''_k=\bigcup_{j=1}^{n_k} \overset{\frown}{b_j^k\, a_{j+1}^k}, \quad (a_{n_k+1}^k=a_1^k).$$

Будем рассматривать следующую систему эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=F(x), \tag{1.1}$$

где

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv A\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\equiv\sum_{i,k=1}^{2}A^{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k},$$

$A^{ik}=\| \overset{ik}{A}_{jl}\|_{j,\,l=1}^{2}$, $i, k=1, 2$—постоянные квадратные матрицы 2-го порядка, $U(x)=\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}$—неизвестный вектор, $F(x)=\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}$—заданный вектор класса Гельдера, $C\alpha$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$—произвольная точка плоскости E_2.

Если в частности положить $\overset{ik}{A}_{jl}=C_{jilk}$, $i, k, j, l=1, 2$, где C_{ijlk}—коэффициенты обобщенного закона Гука, то оператор $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ совпадает с двумерным дифференциальным оператором теории упругости анизотропных тел [12].

Пусть $\Phi(x, y)=\Phi(y, x)$—матрица фундаментальных решений оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $T\equiv T_y\equiv\sum_{(i,k)}A^{ik}\frac{\partial}{\partial y_k}\cos(\nu_y, y_i)$, ν_y—орт внешней нормали в точке $y\in S$, $\widetilde{T}^*=\sum_{(i,k)}(A^{ki})^*\frac{\partial}{\partial y_k}\cos(\nu_y, y_i)$, знак * указывает на транспонированную матрицу [10, 11, 12].

Справедливы следующие соотношения [12]:

$$T_{y_0}\Phi(y_0, y)\,d_yS=P\frac{dt}{t_0-t}+\ \text{фредгольмово ядро},$$

$$[\widetilde{T}^*_y\Phi^*(y_0, y)]^*d_yS=\widetilde{P}\frac{dt}{t-t_0}+\ \text{„}$$

где P, $\widetilde{P}$—вполне определенные действительные постоянные матрицы, t, t_0—комплексные аффиксы точек y, $y_0\in S$, d_yS—элемент дуги на S в точке y.

Предполагается, что соблюдается условие нормальности (условие типа Лопатинского)

$$det\left[\left(\frac{1}{2}\beta_0E-\pi i\widetilde{P}\right)\left(\frac{1}{2}\beta_0E+\pi iP\right)\right]\neq 0, \tag{1.2}$$

где $\beta_0=-4\pi(detA^{11})$, E—единичная матрица.

Ниже будем предполагать также, что существуют действительные постоянные $\mu_0>0$, a_{ik}, b_{ik}, такие, что для любых действительных векторов $\xi^{(k)}=\begin{pmatrix}\xi_1^{(k)}\\ \xi_2^{(k)}\end{pmatrix}$, $k=1, 2$, справедливо основное неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{2}(\xi^{(i)})^* A^{ik}\xi^{(k)}\geqslant\mu_0\sum_{i,k=1}^{2}(a_{ik}\,\xi_k^{(i)}+b_{ki}\xi_i^{(k)})^2. \tag{1.3}$$

В этой части работы будем рассматривать следующие основные и смешанные граничные задачи:

для конечной многосвязной области B^+

Найти в области B^+ регулярный вектор $U(x)$—решение системы (1.1), удовлетворяющее одному из следующих граничных условий (на S):

1. $U^+(y_0)=f(y_0)$, $y_0\in S$,—задача $D(B^+)$;
2. $[TU(y_0)]^+=f(y_0)$, $y_0\in S$—задача $T(B^+)$;
3. $[TU(y_0)]^++Q(y_0)U^+(y_0)=f(y_0)$, $y_0\in S$ — задача $T_Q(B^+)$, $Q(y_0)\in C_\alpha(S)$—положительно определенная матрица;
4. $U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=0, 1, \dots, r$, $0\leqslant r<m$, $[TU(y_0)]^++Q(y_0)U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=r+1,\dots,m$, $Q(y_0)\in C_\alpha(S_k)$ — неотрицательная матрица — смешанная задача $M_{\mathrm{D},\mathrm{T_Q}}(B^+)$;
5. $[TU(y_0)]^++Q(y_0)U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=0, 1,\dots,r$, $0\leqslant r<m$, $U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=r+1, \dots, m$, $Q(y_0)\in C_\alpha(S_k)$ — неотрицательная матрица — смешанная задача $M_{\mathrm{T_Q},\mathrm{D}}(B^+)$;
6. $[TU(y_0)]^+ + Q(y_0)U^+(y_0) = f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=0, 1, \dots, r$, $[TU(y_0)]^+=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=r+1, \dots, m$, $Q(y_0)\in C_\alpha(S_k)$—положительно определенная матрица—смешанная задача $M_{\mathrm{T_Q},\mathrm{T}}(B^+)$;
7. $[TU(y_0)]^+=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=0, 1,\dots,r$, $[TU(y_0)]^++Q(y_0)U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=r+1,\dots,m$, $Q(y_0)\in C_\alpha(S_k)$—положительно определенная матрица—смешанная задача $M_{\mathrm{T},\mathrm{T_Q}}(B^+)$;
8. $U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=0, 1, \dots, r_1$, $[TU(y_0)]^+=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S_k$, $k=r_1+1, \dots, r_2$, $U^+(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S'_k$, $k=r_2+1, \dots, m$, $[TU(y_0)]^+=\varphi^{(k)}(y_0)$, $y_0\in S''_k$, $k=r_2+1,\dots,m$, $0\leqslant r_1\leqslant r_2<m$, $S_k=S'_k\cup S_k''$, $k=r_2+1, \dots, m$ — общая смешанная задача $M_{\mathrm{D},\mathrm{T},\mathrm{DT}}(B^+)$;

9. $[TU(y_0)]^+ = f^{(k)}(y_0),\ y_0 \in S_k,\quad k=0,\ 1,\ldots,r_1,$
$U^+(y_0) = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=r_1+1,\ldots,r_2,$
$U^+(y_0) = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S'_k,\quad k=r_2+1,\ldots,m,$
$[TU(y_0)]^+ = \varphi^{(k)}(y_0),\ y_0 \in S_k'',\ \ k=r_2+1,\ldots,m$ — общая смешанная задача $M_{\mathrm{T,\,D,\,DT}}(B^+)$;

10. $U^+(y_0) = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S'_k,\quad k=0,\ 1,\ldots,r_1,$
$[TU(y_0)]^+ = \varphi^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k'',\quad k=0,\ 1,\ldots,r_1,$
$U^+(y_0) = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=r_1+1,\ldots,r_2,$
$[TU(y_0)]^+ = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=r_2+1,\ldots,m$ — общая смешанная задача $M_{\mathrm{DT,\,D,\,T}}(B^+)$ [1];

для бесконечной многосвязной области B^-

Найти в области B^- регулярный вектор $U(x)$ — решение системы (1.1), который на границе области B^- и на бесконечности удовлетворяет одному из следующих условий:

11. $U^-(y_0) = f^{(k)}(y_0),\ y_0 \in S_k,\quad k=1,\ 2,\ldots,m,$ а на бесконечности

$$U(x) - Z(x) = O(1),\ \frac{\partial}{\partial x_k}(U(x) - Z(x)) = 0\left(\frac{1}{r(x,\,x_0)}\right), \tag{1,4}$$

задача $D(B^-)$;

12. $[TU(y_0)]^- = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=1,\ 2,\ldots,m,$ а на бесконечности

$$U(x) - Z(x) = 0(1),\quad \frac{\partial}{\partial x_k}(U(x) - Z(x)) = 0\left(\frac{1}{r(x,\,x_0)}\right), \tag{1.5}$$

задача $T(B^-)$;

13. $[TU(y_0)]^- + Q(y_0)U^-(y_0) = f^{(k)}(y_0),\ y_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k,$

$Q(y_0)$ — положительно определенная матрица, а на бесконечности соблюдено условие (1,4) — задача $T_Q(B^-)$;

14. $U^-(y_0) = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=1,\ 2,\ldots,r,$
$[TU(y_0)]^- + Q(y_0)U^-(y_0) = f^{(k)}(y_0),\ y_0 \in S_k,\ k=r+1\ldots,m,\ 1 \leqslant r < m,$
$Q(y_0)$ — неотрицательная матрица, а на бесконечности соблюдается условие (1.4) — смешанная задача $M_{\mathrm{D,\,T_Q}}(B^-)$;

15. $[TU(y_0)]^- + Q(y_0)U^-(y_0) = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=1,\ 2,\ldots,r,$
$[TU(y_0)]^- = f^{(k)}(y_0),\quad y_0 \in S_k,\quad k=r+1,\ldots,m,$
$Q(y_0)$ — положительно определенная матрица, а на бесконечности соблюдено условие (1.4) — смешанная задача $M_{\mathrm{T_Q,\,T}}(B^-)$;

---

[1] Выбор основных потенциалов при исследовании граничных задач существенно зависит от того, какое граничное условие задано на S_0. Нормаль на S внешняя по отношению к области B^+.

16. $U^-(y_0)=f^{(k)}(y_0), \quad y_0 \in S'_k, \quad k=1, 2, \ldots, r_1,$
$[TU(y_0)]^- = \varphi^{(k)}(y_0), \; y_0 \in S_k'', \; k=1, 2, \ldots, r_1,$
$U^-(y_0)=f^{(k)}(y_0), \quad y_0 \in S_k \quad k=r_1+1, \ldots, r_2.$
$[TU(y_0)]^- = f^{(k)}(y_0), \; y_0 \in S_k, \quad k=r_2+1, \ldots, m,$

а на бесконечности справедливо соотношение (1.4)—общая смешанная задача $M_{\mathrm{DT, D, T}}(B^-)$. Здесь $Z(x)=\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^-}\Phi(x, y)F(y)\,d_y\tau$, нормаль на $\bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$—внешняя по отношению к области B^-. Соответствующие однородные задачи будем обозначать через $\overset{\circ}{D}(B^\pm)$, $\overset{\circ}{T}(B^\pm)$ и т. д.

Пусть S_{m+1}—произвольный замкнутый контур типа Ляпунова, охватывающий все кривые S_k, не имеющий с ними общие точки, $k=0, 1, \ldots, m$; B_{m+1}—конечная область, ограниченная кривой S_{m+1}; $\overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1})$—тензор Грина I-ой основной задачи (т. е. задачи $D(B_{m+1})$) для оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и конечной односвязной области B_{m+1} [12].

Решение задачи $D(B^+)$ будем искать в виде

$$U(x)=\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+}\overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1})F(y)d_y\tau+\int\limits_S[\tilde{T}{}^*_y \overset{(1)}{G}{}^*(x, y; B_{m+1})]^*\mu(y)d_yS-$$

$$-\int\limits_S \overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1})\,\mu(y)d_yS, \quad x \in B^+, \tag{1.6}$$

где $S=\bigcup\limits_{k=0}^{m} S_k$, $\mu(y) \in C_\alpha(S)$—пока неизвестный вектор. Согласно граничному условию (1.2), для определения $\mu(y)$ получаем квазирегулярную систему сингулярных интегральных уравнений [1]

$$\frac{1}{2}\beta_0\mu(y_0)+\int\limits_S\left\{[\tilde{T}{}^*_y \overset{(1)}{G}{}^*(y_0, y; B_{m+1})]^* - \overset{(1)}{G}(y_0, y; B_{m+1})\right\}\mu(y)d_yS=$$

$$=f(y_0)-\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+}\overset{(1)}{G}(y_0, y; B_{m+1})\,F(y)\,d_y\tau, \quad y_0 \in S, \tag{1.7}$$

где $f(y_0)=f^{(k)}(y_0)$, $y_0 \in S_k$, $k=0, 1, \ldots, m$.

Благодаря специальному строению решения $U(x)$, легко показать, что однородная система $(1.7)^\circ$ допускает только тривиальное решение.

Действительно, допустим противоположное. Тогда и соответствующая однородная союзная система

[1] Нормальную систему сингулярных интегральных уравнений с индексом равным нулю будем называть квазирегулярной.

$$\frac{1}{2}\beta_0\nu(y_0)+\int\limits_S[\widetilde{T}^*_{y_0}\overset{(1)}{G^*}(y, y_0;\ B_{m+1})-\overset{(1)}{G^*}(y,\ y_0;\ B_{m+1})]\nu(y)d_yS=0 \quad (1.8)^\circ$$

допускает нетривиальное решение $\nu(y),\ y\in S$.

$(1.8)^\circ$ можно переписать в виде

$$-\frac{1}{2}\beta_0\nu(y_0)+\int\limits_S\widetilde{T}^*_{y_0}\overset{(1)}{H}(y_0,\ y;\ B_{m+1})\nu(y)\,d_yS-$$

$$-\int\limits_S\overset{(1)}{H}(y_0,\ y;\ B_{m+1})\nu(y)d_yS=0, \quad (1.8)^\circ$$

где $\overset{(1)}{H}(x,\ y;\ B_{m+1})$—тензор Грина задачи $\overset{\circ}{D}{}^*(B_{m+1})$

$$A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)=0,\ \ x\in B_{m+1},\ \ v\Big|_{S_{m+1}}=0.$$

На основании некоторых свойств $\overset{(1)}{H}(x,\ y;\ B_{m+1})$ и согласно системы $(1.8)^\circ$ легко заключить, что потенциал

$$\widetilde{V}(x,\ \nu)=\int\limits_S\overset{(1)}{H}(x,\ y;\ B_{m+1})\nu(y)d_yS$$

является регулярным решением однородной задачи

$$A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{V}(x;\ \nu)=0,\quad x\in B_k,\ k=1,\ 2,\ldots,m,$$

$$\lim_{x\to y_0}(\widetilde{T}^*_x-E)\,\widetilde{V}(x,\ \nu)=0,\ \ x\in B_k,\ \ y_0\in S_k,\ \ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Если учесть, что нормаль на S_k, $k=0,\ 1,\ldots,m$, внешняя для области B^+, является внутренней для B_k, $k=1,\ 2,\ldots,m$ и что $\widetilde{V}(x;\ \nu)\in \overset{(1)}{C_\alpha}(\overline{B}_k)$, то, согласно известной теореме единственности [12], станет очевидным, что указанная однородная задача имеет только тривиальное решение, и, следовательно,

$$\widetilde{V}(x;\ \nu)\equiv 0,\quad x\in\overline{B}_k,\quad k=1,\ 2,\ldots,m.$$

Легко заметить также, что $\widetilde{V}(x;\ \nu)$ — регулярное решение и следующей однородной задачи

$$A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{V}(x,\ \nu)=0,\qquad x\in B_{m+1}\setminus\overline{B}_0,$$

$$\lim_{x\to y_0}\ \widetilde{V}(x;\ \nu)=0,\qquad\quad y_0\in S_{m+1},$$

$$\lim_{x\to y_0}(\widetilde{T}^*_x-E)\ \widetilde{V}(x,\ \nu)=0,\ y_0\in S_0.$$

Следовательно, согласно теореме единственности

$$\widetilde{V}(x;\nu)\equiv 0,\quad x\in \overline{B}_{m+1}\diagdown B_0.$$

Отсюда, учитывая непрерывность $\widetilde{V}(x;\nu)$ при $x\in E_2$, заключаем, что $A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{V}(x;\nu)=0,\ x\in B^+,\ \widetilde{V}|_S=0$, т. е, $\widetilde{V}(x;\nu)\equiv 0.\ x\in B^+$.

Таким образом, доказали, что

$$\widetilde{V}(x;\nu)\equiv 0,\quad x\in B_{m+1}.$$

Отсюда легко получаем противоречие $\nu(y_0)\equiv 0,\ y_0\in S$, и тем самым однозначная разрешимость задачи $D(B^+)$ доказана.

Замечание 1. Можно показать, что полученный результат остается в силе, если тензор Грина $\overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1})$ заменить выражением $\widetilde{\Phi}(x, y)=$ $=\Phi(x, y)-\Phi(x, \widetilde{y})-E$, где $\widetilde{y}\in\bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ — произвольно фиксированная точка.

Решение задачи $T(B^+)$ будем искать в виде

$$U(x)=\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+}\overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1})F(y)d_y\tau+\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{S_k}\overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1})\mu(y)d_yS, \tag{1.9}$$

где $x\in B^+$, $\mu(y)\in C_\alpha(S)$—искомый вектор.

Легко убедиться в том, что $U(x)$ будет решением задачи $T(B^+)$, если $\mu(y)$—решение следующей квазирегулярной системы сингулярных интегральных уравнений

$$-\frac{1}{2}\beta_0\mu(y_0)+\int\limits_S T_{y_0}\overset{(1)}{G}(y_0, y; B_{m+1})\mu(y)d_yS=$$

$$=f(y_0)-\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+}T_{y_0}\overset{(1)}{G}(y_0, y; B_{m+1})F(y)d_y\tau,\quad y_0\in S. \tag{1.10}$$

Докажем, что однородная система $(1.10)^\circ$ имеет ровно три линейно независимых решения.

Для этого рассмотрим соответствующую однородную союзную систему

$$-\frac{1}{2}\beta_0\nu(y_0)+\int\limits_S[T_y\overset{(1)}{G}(y, y_0; B_{m+1})]^*\nu(y)d_yS=0,\ y_0\in S. \tag*{$(1.11)^\circ$}$$

Легко доказать, что систему $(1.11)^\circ$ удовлетворяют линейно независимые векторы

$$\varkappa^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \varkappa^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \varkappa^{(3)}=\begin{pmatrix}-\dfrac{x_2}{b_{21}}\\[2mm]\dfrac{x_1}{a_{12}}\end{pmatrix}.$$

Действительно, имеем

$$\beta_0 \varkappa^{(k)}(x) = \int\limits_S [T_y \overset{(1)}{G}(y, x;\ B_{m+1})]^* \varkappa^{(k)}(y) d_y S,\quad x \in B^+.\quad (k=1,\ 2,\ 3).$$

В этом соотношении, если перейдем к пределу, когда $x \to y_0 \in S$, то получим систему $(1.11)^{\circ}$.

Доказывается, что эти векторы образуют полную систему решений.

Итак, для разрешимости неоднородной системы (1.10) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int\limits_S [\varkappa^{(j)}(y)]^* f(y) dS -$$

$$-\frac{1}{\beta_0} \int\limits_{B^+} \left\{ [\varkappa^{(j)}(y_0)]^* T_{y_0} \overset{(1)}{G}(y_0, y;\ B_{m+1}) d_{y_0} S \right\} F(y) d_y S = 0. \quad (1.12)$$

Но, как легко проверить

$$\left\{ \frac{1}{\beta_0} \int\limits_S [\varkappa^{(j)}(y_0)]^* T_{y_0} \overset{(1)}{G}(y_0, y;\ B_{m+1}) d_{y_0} S \right\}^* =$$

$$= \frac{1}{\beta_0} \int\limits_S [T_{y_0} \overset{(1)}{G}(y_0, y;\ B_{m+1})]^* \varkappa^{(j)}(y_0) d_{y_0} S = \varkappa^{(j)}(y),\quad y \in B^+.$$

Следовательно, (1.12) примет вид

$$\int\limits_S [\varkappa^{(j)}(y)]^* \cdot f(y) dS - \int\limits_{B^+} [\varkappa^{(j)}(y)]^* \cdot F(y) d\tau = 0,\quad j=1,\ 2,\ 3. \quad (1.13)$$

Можно показать, что (1.13) является и необходимым условием разрешимости задачи $T(B^+)$.

Решение задачи $T_Q(B^+)$ представим в виде

$$U(x) = \frac{1}{\beta_0} \int\limits_{B^+} \overset{(1)}{G}(x, y;\ B_{m+1}) F(y) d_y \tau + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{S_k} \overset{(1)}{G}(x, y;\ B_{m+1}) \mu(y) d_y S. \quad (1.14)$$

Легко заметить, что для определения $\mu(y)$ получим следующую квазирегулярную систему сингулярных интегральных уравнений:

$$-\frac{1}{2}\beta_0 \mu(y_0) + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{S_k} [T_{y_0} \overset{(1)}{G}(y_0, y;\ B_{m+1}) + Q(y_0) \overset{(1)}{G}(y_0, y;\ B_{m+1})] \mu(y) d_y S =$$

$$= f(y_0) - \frac{1}{\beta_0} \int\limits_{B^+} [T_{y_0} + Q(y_0)] \overset{(1)}{G}(y_0, y;\ B_{m+1}) F(y) d_y \tau. \quad (1.15)$$

Покажем, что (1.15) разрешима для произвольной правой части. Допустим противоположное и пусть

$$V(x; \overset{\circ}{\mu}) = \sum_{k=0}^{m} \int_{S_k} \overset{(1)}{G}(x, y; B_{m+1}) \overset{\circ}{\mu}(y) d_y S,$$

где $\overset{\circ}{\mu}(y) \in C_\alpha(S)$ — нетривиальное решение соответствующей однородной системы $(1.15)^\circ$.

Легко убедиться в том, что $V(x; \overset{\circ}{\mu})$ — регулярное решение однородной задачи $\overset{\circ}{T}_Q(B^+)$, принадлежащей классу $\overset{(1)}{C_\alpha}(\overline{B}^+)$. Следовательно, согласно известной теореме единственности [12], имеем $V(x; \overset{\circ}{\mu}) \equiv 0$, $x \in \overline{B}^+$. Отсюда, так как $V(x; \overset{\circ}{\mu})$ — непрерывный вектор в области $x \in B_{m+1}$, устанавливаем, что $V(x; \overset{\circ}{\mu})$ — регулярное решение однородных задач

$$\overset{\circ}{D}(B_k), \quad k=1, 2, \ldots, m; \ \overset{\circ}{D}(B_{m+1} \setminus \overline{B_0})$$

и поэтому $V(x; \overset{\circ}{\mu}) \equiv 0, \quad x \in B_{m+1}$.

Это возможно лишь тогда, когда плотность потенциала $\overset{\circ}{\mu}(y) \equiv 0$, $y \in \bigcup_{k=0}^{m} S_k$, что невозможно.

Рассмотрим сейчас задачу $D(B^-)$ и будем искать решение в виде суммы следующих потенциалов:

$$U(x) = \frac{1}{\beta_0} \int_{B^-} \Phi(x, y) F(y) d_y \tau + \int_S [\widetilde{T}_y^* \Phi^*(x, y)]^* \mu(y) d_y S -$$

$$- \int_S [\Phi(x, y) - \Phi(x, \widetilde{x})] \mu(y) d_y S + \int_S \mu(y) dS, \ x \in B^-, \tag{1.16}$$

где $\widetilde{x} \in \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ — произвольно фиксированная точка.

Для определения $\mu(y)$ получим следующую квазирегулярную систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2} \beta_0 \mu(y_0) + \int_S \{[\widetilde{T}_y \Phi^*(y_0, y)]^* - [\Phi(y_0, y) - \Phi(y_0, \widetilde{x})] + E\} \mu(y) d_y S =$$

$$= f(y_0) - \frac{1}{\beta_0} \int_{B^-} \Phi(y_0, y) F(y) d_y \tau, \quad y_0 \in S = \bigcup_{k=1}^{m} S_k. \tag{1.17}$$

Благодаря строению решения $U(x)$ (формула (1,16)), легко показать, что (1.17) разрешима для произвольной правой части.

Допустим противоположное и пусть однородная союзная система

$$\frac{1}{2}\beta_0\nu(y_0)+\int\limits_S\{\widetilde{T}^*_y\,\Phi^*(y,y_0)-[\Phi^*(y,y_0)-\Phi^*(y,\widetilde{x})]+E\}\nu(y)d_yS=0 \quad (1.18)^\circ$$

имеет нетривиальное решение $\nu(y)$, $y\in S$ и составим потенциал

$$V(x)=\int\limits_S\Phi^*(x,y)\,\nu(y)d_yS-\int\limits_S\Phi^*(\widetilde{x},y)\nu(y)d_yS-\int\limits_S\nu(y)\,dS.$$

Имеем

$$A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x)=0.\ x\in\bigcup_{k=1}^m B_k,$$

$$\lim_{x\to y_0}(\widetilde{T}^*_x-E)V(x)=0,\quad y_0\in S.$$

Следовательно, на основании теоремы единственности

$$V(x)\equiv 0,\quad x\in\bigcup_{k=1}^m\overline{B}_k.\ \text{Но, } V(\widetilde{x})=-\int\limits_S\nu(y)\,dS.$$

Поэтому $\int\limits_S\nu(y)dS=0.$

Согласно этому легко показать, что $V(x)\equiv 0$, $x\in B^-$, и, тем самым, $\nu(y)\equiv 0$, $y\in S$, что невозможно.

Рассмотрим теперь граничную задачу $T(B^-)$. Легко установить, что вектор

$$U(x)=Z(x)+\int\limits_S\Phi(x,y)\mu(y)d_yS \quad (1.19)$$

будет решением задачи $T(B^-)$, если $\mu(y)$ удовлетворяет квазирегулярной системе сингулярных интегральных уравнений

$$-\frac{1}{2}\beta_0\,\mu(y_0)+\int\limits_S T_{y_0}\Phi(y_0,y)\mu(y)\,d_yS=f(y_0)-TZ(y_0),\ y_0\in S. \quad (1.20)$$

Легко доказать, что соответствующая однородная система допускает только тривиальное решение. Следовательно, (1.20) разрешима для произвольной правой части.

Заметим также, что решение системы (1.20) удовлетворяет условию

$$-\beta_0\int\limits_S\mu(y)\,dS=\int\limits_S f(y)dS. \quad (1.21)$$

После этого легко устанавливаем, что условие $\int\limits_S f(y)dS=0$ является необходимым и достаточным для разрешимости задачи $T(B^-)$.

Решение задачи $T_Q(B^-)$ будем искать в виде

$$U(x)=Z(x)+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Phi(x,\ y)\,\mu(y)\,d_yS-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Phi(x,\ \widetilde{x})\,\mu(y)\,d_yS+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\mu(y)\,dS, \tag{1.22}$$

где $\widetilde{x}\in\bigcup\limits_{k=1}^{m}B_k$—произвольно фиксированная точка.

Для определения искомого вектора $\mu(y)$ получаем квазирегулярную систему сингулярных интегральных уравнений

$$-\frac{1}{2}\beta_0\mu(y_0)+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}[T_{y_0}+Q(y_0)]\Phi(y_0,\ y)\,\mu(y)d_yS-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\{[T_{y_0}+Q(y_0)]\,\Phi(y_0,\ \widetilde{x})-Q(y_0)\,E\}\,\mu(y)d_y\,S= \tag{1.22$'$}$$

$$=f(y_0)-[T_{y_0}+Q(y_0)]\,Z(y_0),\ \ y_0\in\bigcup_{k=1}^{m}S_k.$$

Докажем, что $(1.22)'$ разрешима для произвольной правой части. Допустим противоположное и пусть

$$V(x)=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Phi(x,\ y)\,\overset{\circ}{\mu}(y)d_yS-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Phi(x,\ \widetilde{x})\,\overset{\circ}{\mu}(y)\,d_yS+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\overset{\circ}{\mu}(y)dS,$$

где $\overset{\circ}{\mu}(y)$—нетривиальное решение однородной системы $(1.22)'^{0}$.

Легко видеть, что $V(x)$—регулярное решение однородной задачи $\overset{\circ}{T}(B^-)$, следовательно,

$$V(x)\equiv 0,\quad x\in B^-.$$

Но

$$V(\infty)=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S}\overset{\circ}{\mu}(y)\,dS,\quad \text{т. е.}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\overset{\circ}{\mu}(y)\,dS=0,$$

и поэтому

$$V(x)=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Phi(x,\ y)\,\overset{\circ}{\mu}(y)d_yS=0,\ \ x\in B^-.$$

Отсюда, уже легко получается, что $V(x)=0$, $x \in E_2$, и, тем самым,

$$\overset{\circ}{\mu}(y)=0, \quad y \in \bigcup_{k=1}^{m} S_k,$$

что невозможно.

Перейдем теперь к рассмотрению смешанных граничных задач. Пусть $\overset{(1)}{G}(x, y;\ B^{(r)})$, где $B^{(r)}=B_0 \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{r} \overline{B}_k$—тензор Грина, соответствующий задаче $D(B^{(r)})$, для оператора $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ и конечной многосвязной области $B^{(r)}$.

Будем искать решение смешанной задачи $M_{\mathrm{D},\,\mathrm{T_Q}}(B^+)$ в виде

$$U(x)=-\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+} \overset{(1)}{G}(x, y;\ B^{(r)})\,F(y)\,d_y\tau+$$

$$+\frac{1}{\beta_0}\sum_{k=0}^{r}\int\limits_{S_k}\left[\widetilde{T}_y^{*}\ \overset{(1)}{G}{}^{*}(x, y;\ B^{(r)})\right]^{*} f^{(k)}(y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{k=r+1}^{m}\int\limits_{S_k}\overset{(1)}{G}(x, y;\ B^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS, \quad x \in B^+. \tag{1.23}$$

На основании некоторых свойств тензора Грина $\overset{(1)}{G}(x, y;\ B^{(r)})$ все условия задачи удовлетворяются, кроме условия на контурах S_k, $k=r+1, \ldots, m$, а для удовлетворения и этих условий, мы получаем систему уравнений

$$-\frac{1}{2}\beta_0\,\mu(y_0)+\sum_{k=r+1}^{m}\int\limits_{S_k}\left[T_{y_0}+Q(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y;\ B^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS=$$

$$=\overset{(1)}{F}(y_0), \quad y_0 \in \bigcup_{k=r+1}^{m} S_k, \tag{1.24}$$

где $\overset{(1)}{F}(y_0)$—известный вектор.

С другой стороны, так как при y_0, $y \in \bigcup\limits_{k=r+1}^{m} S_k$, $\left[T_{y_0}+Q(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y;\ B^{(r)})=$ $=T_{y_0}\,\Phi(y_0,\ y)+$регулярная матрица, поэтому (1.24) представляет квазирегулярную систему сингулярных интегральных уравнений, т. е. для нее справедливы основные теоремы Фредгольма. Покажем, что (1.24) однозначно разрешима.

Действительно, допустим противоположное и пусть $\overset{\circ}{\mu}(y)$—нетривиальное решение однородной системы $(1.24)^{\circ}$ и рассмотрим потенциал

$$\overset{\circ}{U}(x)=\sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}\overset{(1)}{G}(x, y: B^{(r)})\,\overset{\circ}{\mu}(y)d_yS.$$

Ясно, что $\overset{\circ}{U}(x)=0,\quad x\in B^{+}$ как регулярное решение однородной задачи $\overset{\circ}{M}_{\mathrm{D},\mathrm{T_Q}}(B^{+})$.

Поэтому, по непрерывности обобщенного потенциала простого слоя имеем

$$\lim_{x\to y_0}\overset{\circ}{U}(x)=0,\quad x\in B_k,\quad y_0\in S_k,\quad k=r+1,\cdots,m.$$

Но

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overset{\circ}{U}(x)=0,\quad x\in B_k,\quad k=r+1,\cdots,m;$$

в силу теоремы единственности, отсюда легко получаем

$$\overset{\circ}{U}(x)=0,\quad x\in \overline{B}_k,\quad k=r+1,\cdots,m;$$

и, следовательно,

$$\overset{\circ}{\mu}(y)\equiv 0,$$

что невозможно.

Пусть теперь $S_{m+1}\in C_\alpha^{(1)}$—произвольный замкнутый контур, охватывающий все кривые, S_k, $k=0, 1,\cdots, m$; B_{m+1}—конечная область, ограниченная кривой S_{m+1}; $\overset{(r)}{B_m}=B_{m+1}\diagdown\bigcup_{k=r+1}^{m}\overline{B}_k$; будем искать решение смешанно задачи $M_{\mathrm{T_Q},\mathrm{D}}(B^{+})$ в виде

$$U(x)=\frac{1}{\beta_0}\int_{B^{+}}\overset{(1)}{G}(x, y; \overset{(r)}{B_m})\,F(y)\,d_y\tau+$$

$$+\frac{1}{\beta_0}\sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}[\widetilde{T}_y^{*}\,\overset{(1)}{G^{*}}(x, y; \overset{(r)}{B_m})]^{*}\,f^{(k)}(y)d_yS+$$

$$+\sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\overset{(1)}{G}(x, y; \overset{(r)}{B_m})\,\mu(y)d_yS,\quad x\in B^{+}. \tag{1.25}$$

Для определения $\mu(y)$ получаем следующую квазирегулярную систему:

$$-\frac{1}{2}\beta_0\mu(y_0)+\sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}[T_{y_0}+\mathrm{Q}(y_0)]\,\overset{(1)}{G}(y_0, y; \overset{(r)}{B_m})\,\mu(y)d_gS=\overset{(2)}{F}(y_0),$$

$$y_0\in\bigcup_{k=0}^{r}S_k, \tag{1.26}$$

где $\overset{(2)}{F}(y_0)$—вполне определенный известный вектор.

Легко доказывается, что благодаря конструкции решения (см. формулу (1.25)), (1.26) разрешима для произвольной правой части.

Совершенно аналогично изучаются смешанные граничные задачи $M_{\mathrm{T_Q},\mathrm{T}}(B^+)$ и $M_{\mathrm{T},\mathrm{T_Q}}(B^+)$, только для них используется тензор Грина $\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ B)$—(граничной задачи $T_{\mathrm{Q}}(B)$) и область B подбирается специальным образом.

Поэтому мы не будем подробно исследовать эти граничные задачи и прямо сформулируем результаты.

Смешанная граничная задача $M_{\mathrm{T_Q},\mathrm{T}}(B^+)$ однозначно разрешима и решение дается формулой

$$U(x)=\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+}\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ B^{(r)})\,F(y)\,d_y\tau-$$

$$-\frac{1}{\beta_0}\sum_{k=0}^{r}\int\limits_{S_k}\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ B^{(r)})\,f^{(k)}(y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{k=r+1}^{m}\int\limits_{S_k}\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ B^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS,\quad x\in B^+,$$

где $B^{(r)}=B_0\diagdown\bigcup\limits_{k=1}^{r}\overline{B}_k$.

Граничная задача $M_{\mathrm{T},\mathrm{T_Q}}(B^+)$ однозначно разрешима и решение имеет вид

$$U(x)=\frac{1}{\beta_0}\int\limits_{B^+}\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ \overset{(r)}{B_m})\,F(y)\,d_y\tau-$$

$$-\frac{1}{\beta_0}\sum_{k=r+1}^{m}\int\limits_{S_k}\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ B_{(r)})\,f^{(k)}(y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{k=0}^{r}\int\limits_{S_k}\overset{(3)}{G}(x,\ y;\ \overset{(r)}{B_m})\,\mu(y)\,d_yS,\quad x\in B^+,$$

$$\overset{(r)}{B_m}=B_{m+1}\diagdown\bigcup_{k=r+1}^{m}\overline{B}_k.$$

Для $\mu(y)$ в обоих случаях получаем вполне определенные квазирегулярные системы сингулярных интегральных уравнений, разрешимые для произвольных правых частей.

Аналогично изучаются смешанные граничные задачи для бесконечной многосвязной области. А именно, для задачи $M_{\mathrm{D},\mathrm{T_Q}}(B^-)$ используется тензор Грина $\overset{(1)}{G}(x, y; \overset{(r)}{B_\infty})$, где $\overset{(r)}{B_\infty} = E_2 \diagdown \bigcup_{k=1}^{r} \overline{B}_k$, а для задачи $M_{\mathrm{TQ},\,\mathrm{T}}(B^-)$—

тензор Грина $\overset{(3)}{G}(x, y; \overset{(r)}{B_\infty})$.

Перейдем теперь к изучению общих смешанных граничных задач и рассмотрим, например, задачу $M_{\mathrm{D},\,\mathrm{T},\,\mathrm{DT}}(B^+)$. Сперва построим некоторые дополнительные области, которые играют важную роль для всех наших дальнейших рассуждений. Соединим точки $\overset{k}{b}_j, \overset{k}{a}_{j+1}$, $j=1, 2, \ldots, n_k$, $k=r_2+$ $+1, \ldots, m$ произвольными гладкими линиями $\overset{k}{l}_j$, целиком расположенными в B_k и не пересекающими друг друга. Конечную область, ограниченную контуром $\overset{k}{b}_j \overset{\frown}{} \overset{k}{a}_{j+1} \cup \overset{k}{l}_j$, обозначим $\overset{k}{D}_j$ и

$$L'_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} \overset{k}{l}_j, \quad D_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} \overset{k}{D}_j.$$

Без ограничения общности можно считать, что замкнутый контур $L_k=$ $=(S'_k \cup L'_k)$, $k=r_2+1, \ldots, m$ принадлежит классу $\overset{(1)}{C_\alpha}$.

Построим следующую конечную многосвязную область:

$$B = B_0 \diagdown \bigcup_{k=1}^{r_1} \overline{B}_k \diagdown \bigcup_{k=r_2+1}^{m} \overline{B}_k \cup \bigcup_{k=r_2+1}^{m} D_k \cup \bigcup_{k=r_2+1}^{m} S_k''.$$

Контур области B обозначим через L.

Ясно, что $L = S_0 \cup \bigcup_{k=1}^{r_1} S_k \cup \bigcup_{k=r_2+1}^{m} L_k$ и $B^+ \subset B$. Будем считать векторы $f^{(k)}(y) \in \overset{(1)}{C_\alpha}(S'_k)$, $k=r_2+1, \ldots, m$ продолженными на дугах L'_k так, чтобы на всей замкнутой кривой $L_k = S'_k \cup L'_k$, $k=r_2+1, \ldots, m$, полученный вектор $f^{(k)}(y)$ принадлежал классу $\overset{(1)}{C_\alpha}(L_k)$. Очевидно это всегда можно сделать различными способами.

Пусть $\overset{(1)}{G}(x, y; B)$—первый тензор Грина для многосвязной области B и будем искать решение задачи в виде

$$U(x) = \frac{1}{\beta_0} \int_{B^+} \overset{(1)}{G}(x, y; B)\, F(y)\, d_y\tau +$$

$$+ \frac{1}{\beta_0} \sum_{k=0}^{r_1} \int_{S_k} [\widetilde{T}_y \overset{*(1)}{G^*}(x, y; B)]^* f^{(k)}(y) d_y S +$$

$$+\frac{1}{\beta_0}\sum_{k=r_2+1}^{m}\int\limits_{L_k}[\widetilde{T}_y \overset{(1)}{G}{}^*(x, y; B)]^* f^{(k)}(y)d_yS+$$

$$+\sum_{k=r_1+1}^{r_2}\int\limits_{S_k}\overset{(1)}{G}(x, y; B)\mu(y)d_yS+\sum_{k=r_2+1}^{m}\int\limits_{S_4''}\overset{(1)}{G}(x, y; B)\mu(y)d_yS, \qquad (1.27)$$

где $\mu(y)$, $y\in\bigcup\limits_{k=r_1+1}^{r_2}S_k\cup\bigcup\limits_{k=r_2+1}^{m}S_k''$—неизвестный вектор класса Гельдера, допускающий на концах a_j^k, b_j^k логарифмическую особенность.

На основании известных свойств матрицы $\overset{(1)}{G}(x, y; B)$ легко убедиться в том, что система дифференциальных уравнений и граничные условия на S_k, $k=0, 1, \dots, r_1$ и на S'_k, $k=r_2+1, \dots, m$ автоматически удовлетворяются. Что касается граничных условий на S_k, $k=r_1+1, \cdots, r_2$ и на S_k'', $k=r_2+1, \cdots, m$, они приводят нас к следующей системе сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши:

$$-\frac{1}{2}\beta_0\mu(y_0)+\sum_{k=r1+1}^{r_2}\int\limits_{S_k}T_{y_0}\overset{(1)}{G}(y_0, y; B)\mu(y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{k=r_2+1}^{m}\int\limits_{S_k''}T_{y_0}\overset{(1)}{G}(y_0, y; B)\mu(y)d_yS=\Omega(y_0), \qquad (1.28)$$

где $y_0\in\bigcup\limits_{k=r_1+1}^{r_2}S_k\cup\bigcup\limits_{k=r_2+1}^{m}S_k''$, $\Omega(y_0)$—известный вектор.

(1.28) представляет нормальную систему сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на разомкнутых контурах. Повторяя рассуждения, приведенные в [2], можно показать, что в наших предположениях индекс этой системы равен нулю и, следовательно, для нее справедливы теоремы Фредгольма.

Покажем, что соответствующая однородная система $(1.28)^\circ$ допускает только тривиальное решение.

Допустим противоположное и пусть $\overset{\circ}{\mu}(y)$—нетривиальное решение $(1.28)^\circ$ и рассмотрим потенциал

$$\overset{\circ}{U}(x)=\sum_{k=r_1+1}^{r_2}\int\limits_{S_k}\overset{(1)}{G}(x, y; B)\overset{\circ}{\mu}(y)d_yS+\sum_{k=r_2+1}^{m}\int\limits_{S_k''}\overset{(1)}{G}(x, y; B)\overset{\circ}{\mu}(y)\,d_yS.$$

Ясно, что $\overset{\circ}{U}(x)=0$, $x\in B^+$, как регулярное решение однородной задачи $\overset{\circ}{M}_{D,T,DT}(B^+)$. Отсюда получаем

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overset{\circ}{U}(x)=0, \quad x\in B_k, \quad k=r_1+1,\ldots,r_2,$$

$$\lim_{x\to y_0}\overset{\circ}{U}(x)=0, \quad y_0\in S_k \quad k=r_1+1,\ldots,r_2.$$

Следовательно, $\overset{\circ}{U}(x)=0, \quad x\in B_k, \quad r=r_1+1,\ldots,r_2$; т. е. $\overset{\circ}{\mu}(y)\equiv 0$, $y\in S_k, \quad k=r_1+1,\ldots,r_2$ и $\overset{\circ}{U}(x)$ примет вид

$$\overset{\circ}{U}(x)=\sum_{k=r_2+1}^{m}\int_{S_k''}\overset{(1)}{G}(x,y;B)\overset{\circ}{\mu}(y)d_yS=0, \quad x\in B^+.$$

С другой стороны, имеем также

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overset{\circ}{U}(x)=0, \quad x\in D_k, \quad k=r_2+1,\cdots,m,$$

$$\overset{\circ}{U}\Big|_{S_k''+L'_k}=0, \quad k=r_2+1,\cdots,m,$$

т. е. $\overset{\circ}{U}(x)\equiv 0, \quad x\in D_k, \quad k=r_2+1,\cdots,m$.
Эти последние соотношения дают

$$\overset{\circ}{\mu}(y)\equiv 0, \quad y\in S_k'', \quad k=r_2+1,\ldots,m.$$

Итак,

$$\overset{\circ}{\mu}(y)\equiv 0, \quad y\in\bigcup_{k=r_1+1}^{r_2}S_k\cup\bigcup_{k=r_2+1}^{m}S_k'',$$

что невозможно.

Аналогично предыдущему решаются и граничные задачи $M_{\mathrm{T,D,DT}}(B^+)$, $M_{\mathrm{DT,D,T}}(B^+)$ и $M_{\mathrm{DT,D,T}}(B^-)$, только в каждом отдельном случае следует специальным образом сконструировать область B—область определения тензора Грина.

Например, для задачи $M_{\mathrm{T,D,DT}}(B^+)$ область B определяется следующим образом:

$$B=B_{m+1}\setminus\bigcup_{k=r_1+1}^{r_2}\overline{B}_k\setminus\bigcup_{k=r_2+1}^{m}\overline{B}_k\cup\bigcup_{k=r_2+1}^{m}D_k\cup\bigcup_{k=r_2+1}^{m}S_k''.$$

II. Рассмотрим теперь пространственный случай. Пусть E_3—трехмерное евклидово пространство, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$—точки этого пространства; S_k, $k=0,1,\ldots,m$—замкнутые непересекающиеся поверхности Ляпунова и S_0—внешняя поверхность, охватывающая все остальные; $B_k\subset E_3$—конечная область, ограниченная поверхностью S_k, $k=0,1,\ldots,m$;

$$B^+=B_0\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\overline{B}_k;\quad \overline{B}_k=B_k\cup S_k;\quad B^-=E_3\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\overline{B}_k,\quad S=\bigcup_{k=0}^{m}S_k.$$

Как известно [13], основная система дифференциальных уравнений статики однородного изотропного упругого тела, записанная в смещениях, имеет следующий вид:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=F(x), \tag{2.1}$$

где

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left\|\begin{matrix} \mu\Delta+(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}, & \mu\Delta+(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3}, & \mu\Delta+(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{matrix}\right\|,$$

λ, μ—постоянные Ляме, Δ—оператор Лапласа. Тензор напряжения T имеет вид (в точке x)

$$T=\left\|\begin{matrix} \mu\dfrac{\partial}{\partial\nu}+(\lambda+\mu)\nu_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}, & \lambda\nu_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\mu\nu_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}, & \lambda\nu_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}+\mu\nu_3\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \lambda\nu_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\mu\nu_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}, & \mu\dfrac{\partial}{\partial\nu}+(\lambda+\mu)\nu_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}, & \lambda\nu_2\dfrac{\partial}{\partial x_3}+\mu\nu_3\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \lambda\nu_3\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\mu\nu_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}, & \lambda\nu_3\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\mu\nu_2\dfrac{\partial}{\partial x_3}, & \mu\dfrac{\partial}{\partial\nu}+(\lambda+\mu)\nu_3\dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{matrix}\right\|,$$

$\nu=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}$—орт внешней нормали в точке x на S.

Матрица фундаментальных решений $\Gamma(x, y)$ оператора $D\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ имеет вид (матрица Сомилиана)

$$\Gamma(x, y)=\|\overset{(k)}{\Gamma}_j(x, y)\|_{j,k=1}^{3},$$

где

$$\overset{(k)}{\Gamma}_j(x, y)=\frac{1}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_k}+(\lambda+3\mu)\delta_{jk}\right]\frac{1}{r(x, y)},$$

$$r^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2,$$

δ_{jk}—символ Кронекера.

Ясно, что $\widetilde{T}^*=T$, $\Gamma(x, y)=\Gamma^*(x, y)=\Gamma(y, x)$, $D^*=D$.

Отметим, что все результаты, полученные выше для двумерных граничных задач, кроме результатов, касающихся общих смешанных граничных задач, справедливы и для системы (2.1). При этом матрицу фундаментальных решений $\Phi(x, y)$ следует заменить матрицей $\Gamma(x, y)$ и учесть асимптотические равенства

$$\Gamma(x, y) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma(x, y) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Это последнее обстоятельство в некоторой степени упрощает исследование трехмерных граничных задач.

Следует заметить также, что сингулярные интегральные уравнения, полученные в этом случае, являются двумерными (поверхностными), но такого типа, для которых справедливы альтернатива и теоремы Фредгольма [2,13].

Учитывая эти обстоятельства и повторяя рассуждения, проводимые в первой части работы, легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

Решение граничной задачи $D(B^+)$ дается формулой

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^+}\Gamma(x, y)F(y)\,d_y\tau + \int\limits_{S}[T_y\Gamma(x, y)]^*\cdot\varphi(y)d_yS - \\ -\int\limits_{S}\Gamma(x, y)\,\varphi(y)\,d_yS, \tag{2.2}$$

где $S = \bigcup\limits_{k=0}^{m} S_k$, $\varphi(y) \in C_\alpha(S)$ — единственное решение следующей системы сингулярных интегральных уравнений:

$$-2\pi\varphi(y_0) + \int\limits_{S}\{[T_y\Gamma(y_0, y)]^* - \Gamma(y_0, y)]\varphi(y)d_yS = \\ = f(y_0) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^+}\Gamma(y_0, y)\,F(y)d_yS, \quad y_0 \in S,$$

которая разрешима для произвольной правой части.

Задача $T(B^+)$ разрешима тогда и только тогда, когда соблюдено условие (равенство нулю главного вектора и главного момента внешних сил)

$$\int\limits_{S}[\varkappa^{(j)}(y)]^* f(y)dS - \int\limits_{B^+}[\varkappa^{(j)}(y)]^* F(y)d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6, \tag{2.3}$$

где

$$\varkappa^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \varkappa^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \varkappa^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\varkappa^{(4)} = \begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix}, \quad \varkappa^{(5)} = \begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix}.$$

В условиях (2.3) решение дается формулой

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^+}\Gamma(x, y)\,F(y)\,d_y\tau + \sum_{k=0}^{m}\int\limits_{S_k}\Gamma(x, y)\,\varphi(y)\,d_yS,\quad x\in B^+,$$

где $\varphi(y)$—решение интегрального уравнения

$$2\pi\varphi(y_0) + \int\limits_{S} T_{y_0}\Gamma(y_0, y)\varphi(y)\,d_yS =$$

$$= f(y_0) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^+} T_{y_0}\Gamma(y_0, y)F(y)\,d_y\tau,\quad y_0\in S,$$

которая разрешима в условиях (2.3), согласно третьей теореме Фредгольма.

Решение задачи $T_Q(B^+)$ дается формулой

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^+}\Gamma(x, y)\,F(y)\,d_y\tau + \sum_{k=0}^{m}\int\limits_{S_k}\Gamma(x, y)\psi(y)\,d_yS,$$

где $\psi(y)$—решение интегрального уравнения

$$2\pi\psi(y_0) + \int\limits_{S}\left[T_{y_0}\Gamma(y_0, y) + Q(y_0)\Gamma\right]\psi(y)\,d_yS =$$

$$= f(y_0) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\left(T_{y_0} + Q(y_0)\right)\Gamma(y_0, y)\,F(y)\,d_y\tau,$$

которая разрешима для произвольной правой части.

Решение задачи $D(B^-)$ представляется формулой

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^-}\Gamma(x, y)F(y)\,d_y\tau + \int\limits_{S}\left[T_y\Gamma(x, y)\right]^*\varphi(y)\,d_yS -$$

$$-\int\limits_{S}\Gamma(x, y)\varphi(y)\,d_yS,\quad x\in B^-,$$

где $\varphi(y)$—решение вполне определенного, единственным образом разрешимого, сингулярного интегрального уравнения.

Решение задачи $T(B^-)$ дается формулой

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^-}\Gamma(x, y)F(y)\,d_y\tau + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Gamma(x, y)\varphi(y)\,d_yS\quad x\in B^-,$$

где $\varphi(y)$—решение системы интегрального уравнения

$$2\pi\varphi(y_0) + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k} T_{y_0}\Gamma(y_0, y)\varphi(y)\,d_yS = f(y_0) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^-} T_{y_0}\Gamma(y_0, y)F(y)\,d_y\tau,$$

которая разрешима для произвольной правой части.

Решение задачи $T_Q(B^-)$ также дается формулой

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B^-}\Gamma(x, y)\,F(y)\,d_y\tau + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}\Gamma(x, y)\,\psi(y)\,d_yS, \quad x \in B^-,$$

где $\psi(y)$ — единственное решение вполне определенного интегрального уравнения.

Что касается решения смешанных задач M_{D, T_Q}, $M_{T_Q, D}$, $M_{T_Q, T}$, M_{T, T_Q}, то они по виду точно такого же типа, что и в двумерном случае, где β_0 нужно считать равным -4π.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Купрадзе. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. Сообщ. АН ГССР, т. 1, № 8 (1940).
2. В. Д. Купрадзе. Методы потенциала в теории упругости. М. (1963).
3. Д. И. Шерман. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, т. VI, 6 (1942).
4. Д. И. Шерман. Пространственная статическая задача теории упругости с заданными смещениями на границе. ПММ, т. VII, в. 5 (1943).
5. Д. И. Шерман. Об одной задаче кручения. ДАН СССР, т. XIII, № 5 (1948).
6. Д. И. Шерман. О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, т. XV, в. 3 (1951).
7. М. О. Башелейшвили. Решение основных пространственных граничных задач статики изотропного упругого тела для многосвязных областей. Тр. ВЦ. АН ГССР, т. IV (1964).
8. М. О. Башелейшвили. Об одном способе исследования некоторых плоских граничных задач анизотропного упругого тела для многосвязных областей. Тр. ВЦ АН ГССР, т. IV (1964).
9. П. И. Перлин. Об одном методе решения основных пространственных задач теории потенциала и теории упругости для областей, ограниченных двумя замкнутыми поверхностями. Инженерный журнал, т. IV, в. I (1964).
10. Т. В. Бурчуладзе. Применение сингулярных интегральных уравнений для решения некоторых граничных задач- Тр. Тб. мат. инст. им А. М. Размадзе, т. 28 (1962).
11. Т. В. Бурчуладзе. Об одном способе решения некоторых граничных задач для многосвязных областей. Сообщ. АН ГССР, т. X, 1: 1 (1966).
12. Т. В. Бурчуладзе. Исследования по некоторым плоским граничным задачам теории эллиптических систем и приложения в теории упругости анизотропного тела. Докторская диссертация. Тбилиси, библиотека МИ АН ГССР, 1966.
13. V. Kupradze. Metody teorii Potencjalu w teorii sprezystosci, Wroclaw—Warszawa—Krakow, Rok, 1966.

Тбилисский математический
институт им. А. Размадзе

(Поступило в редакцию 12. IV. 1967)

თ. ბურჭულაძე

დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები მრავლადბმული არეებისათვის

რეზიუმე

სტატიაში გადმოცემულია ერთი ახალი მეთოდი დრეკადობის თეორიის სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისა (როგორც ძირითადი, ისე შერეული ამოცანისა) სასრულო და უსასრულო მრავლადბმული არეებისათვის ორი და სამი განზომილების შემთხვევაში.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Г. П. КВИНИКАДЗЕ

О СУЩЕСТВОВАНИИ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В работе доказываются теоремы существования и единственности для обобщенных смешанных статических задач плоской теории упругости и существование дискретного спектра собственных частот для задач колебания в случае многосвязных областей. Эти задачи и эквивалентные им задачи A и B сформулированы и для бесконечных односвязных областей исследованы в работе [1], из которой заимствованы все обозначения и определения[1]. В одном частном случае эти задачи для односвязных конечных областей рассмотрены в статье [2].

§ 1. Теоремы единственности

Пусть D_i-$(m+1)$—связная конечная плоская область, которая ограничена несколькими простыми непересекающимися замкнутыми контурами $S_0, S_1, \ldots, S_m$—класса H_2, из которых S_0 охватывает все остальные. $S=\sum_{j=0}^{m} S_j$ назовем границей области D_i. Положительным направлением на S мы будем считать то, которое оставляет область D_i слева. За положительное направление нормали $\vec{n}$ на S примем направление внешней нормали. Для удобства за начало координат возьмем точку, принадлежащую D_i.

Обозначим через $D_i^{(j)}$ конечную односвязную область, ограниченную кривой S_j $(j=0, 1, \ldots, m)$. Очевидно $D_i = D_i^{(0)} - \sum_{i=1}^{m} \overline{D}_i^{(j)}$, где $\overline{D}_i^{(j)} = D_i^{(j)} + S_j$; наконец обозначим через $D_a^{(0)}$ бесконечную область, дополняющую $\overline{D}_i^{(0)}$ до

---

[1] Там же приводится подробный обзор литературы, касающейся рассматриваемых задач.

полной плоскости, тогда $D_a = D_a^{(0)} + \sum_{j=1}^{m} D_i^{(j)}$ будет внешней по отношению D_i, областью. Когда $m=0$, тогда D_i и D_a будут, соответственно, односвязными внутренними и внешними областями [1].

Случай, когда S_0 отсутствует, назовем особым и будем рассматривать отдельно.

Основная система дифференциальных уравнений установившихся колебаний однородного изотропного упругого тела имеет вид [3]

$$\overset{*}{\Delta}\vec{u} + \omega^2 \vec{u} \equiv \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \omega^2\vec{u} = 0, \qquad (E)$$

где $\vec{u}(u_1, u_2)$—вообще комплексный вектор смещения; но так как постоянные Ляме λ и μ и круговая частота ω—числа действительные, то при изучении граничных задач, без ограничения общности, можно считать, что $\vec{u}(P)$—действительный вектор.

При $\omega=0$, (E) принимает вид

$$\Delta^*\vec{u} \equiv \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0. \qquad (E_0)$$

(E_0)—основное уравнение равновесия (статики) в смещениях.

Мы будем рассматривать следующие граничные задачи.

Статическая (динамическая) задача A. Найти в D_i (в D_a) регулярное решение [1] системы (E_0) (соответственно системы (E)), удовлетворяющее на S условию

$$A\vec{u} = \vec{F}(Q), \qquad (1.1)$$

где $\vec{F}(Q) = (F_1(Q), F_2(Q))$—заданный действительный вектор класса Гельдера и, кроме того, $\dfrac{\partial F_1(Q)}{\partial S}$—функция класса Гельдера.

Статическая (динамическая) задача B. Найти в D_i (в D_a) регулярное решение системы (E_0) (соответственно системы (E)), удовлетворяющее на S условию:

$$B\vec{u} = \vec{\Phi}(Q), \qquad (1.2)$$

где $\vec{\Phi}(Q) = (\Phi_1(Q), \Phi_2(Q))$—заданный действительный вектор класса Гельдера и, кроме того, $\dfrac{\partial \Phi_2(Q)}{\partial S}$—функция класса Гельдера.

$$A\vec{u} = (A_1\vec{u},\ A_2\vec{u}),\quad B\vec{u} = (B_1\vec{u},\ B_2\vec{u}); \qquad (1.3)$$

$$A_1\vec{u} \equiv u_n = u_1\eta_s - u_2\xi_s, \quad B_2\vec{u} \equiv u_s = u_1\xi_s + u_2\eta_s,$$

$$A_2\vec{u} \equiv (-L^{(n)}\vec{u}) + (\mu+\alpha)\frac{\partial u_n}{\partial s} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right) + \frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q)} B_2\vec{u}, \qquad (1.4)$$

---

[1] В случае области $D_a, \vec{u}(P)$ на бесконечности удовлетворяет условиям применимости формулы Бетти (см. условия (1.10)).

$$B_1 \vec{u} \equiv (L^{(n)} \vec{u})_n + (\mu + \alpha) \frac{\partial u_s}{\partial s} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \vec{u} - \frac{(\alpha + \mu)}{\rho(Q)} A_1 \vec{u},$$

$\dfrac{1}{\rho(Q)}$ — кривизна кривой в граничной точке $Q(\xi, \eta)$, а u_n, u_s и $(L^{(n)} \vec{u})_n$, $(L^{(n)} \vec{u})_s$ — нормальные и касательные составляющие, соответственно, вектора перемещения $\vec{u}$ и вектора обобщенного напряжения [3]

$$L^{(n)} \vec{u} = (\mu + \alpha) \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} + (\lambda + \mu - \alpha) \vec{n} \operatorname{div} \vec{u} + \alpha [\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}],$$

где α — произвольный параметр, удовлетворяющий условию

$$-\mu \leqslant \alpha \leqslant \mu. \tag{1.5}$$

В дальнейшем, внутренние задачи A и B (т. е. задачи для области D_i) будем обозначать знаками A_i и B_i, а внешние (для области D_a) — A_a и B_a. Соответствующие однородные задачи ($\vec{F}(Q) = 0$ или $\vec{\Phi}(Q) = 0$) будем обозначать знаками A_i^0, B_i^0, A_a^0, B_a^0.

Если $\vec{u}(P)$ принадлежит классу G_0 [1], тогда справедлива обобщенная формула Бетти

$$\iint\limits_{D_i} \vec{u} \Delta^* \vec{u} d\tau_Q = \int\limits_S \vec{u} L^{(n)} \vec{u} \, dS_Q - \iint\limits_{D_i} E(\vec{u}, \vec{u}) \, d\tau_Q, \tag{1.6}$$

где

$$E(\vec{u}, \vec{u}) = (\mu + \alpha) \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{(\mu + \alpha)}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+ \frac{(\mu - \alpha)}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + (\lambda + \mu - \alpha) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2$$

— положительно определенная форма.

Если $\vec{u}(P)$ является и решением системы (E_0), то формула (1.6) принимает вид

$$\iint\limits_{D_i} E(\vec{u}, \vec{u}) d\tau_Q = \int\limits_S (\vec{u})_i (L^{(n)} \vec{u})_i \, dS_Q \cdot \quad (P \in D_i). \tag{1,7}$$

Если же $\vec{u}(P)$ — регулярно в D_a, т. е. кроме условий дифференцируемости, дополнительно удовлетворяет и следующим условиям на бесконечности:

$$\vec{u}(P) = O(1), \quad \rho_0^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} = O(1), \tag{1.8}$$

где l — произвольное направление, а $\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$, то справедлива формула

$$\iint\limits_{D_a} E(\vec{u}, \vec{u}) \, d\tau_Q = - \int\limits_S (\vec{u})_a (L^{(n)} \vec{u})_a \, dS_Q \cdot \ (P \in D_a). \tag{1.9}$$

Наиболее общее условие для справедливости формулы (1.9) есть

$$\lim_{R'\to\infty} \int_{S_{R'}} \vec{u} L^{(n)} \vec{u}\, dS_Q = 0, \tag{1.10}$$

где $S_{R'}$—окружность радиуса R', с центром в произвольной точке, лежащей в D_i [1]; в частности можно положить, что $R' = \rho_0$.

Докажем теперь несколько теорем единственности.

Теорема 1. Регулярное решение статических задач A_i^0 или B_i^0, при $\alpha \neq \mu$, которое удовлетворяет, соответственно, либо условию ([1] стр. 301)

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial s_Q}\right)_i = \frac{\partial[(u_n)_i]}{\partial s_Q}, \tag{1.11$_1$}$$

либо условию

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial s_Q}\right)_i = \frac{\partial[(u_s)_i]}{\partial s_Q}, \tag{1.11$_2$}$$

есть тождественный нуль [2].

Доказательство. Перепишем формулу (1.7) в виде

$$\iint_{D_i} E(\vec{u}, \vec{u})\, d\tau_Q = \int_S [(u_n)_i (L^{(n)} \vec{u}_s)_{n,i} + (u_s)_i (L^{(n)} \vec{u})_{s,i}]\, dS_Q. \tag{1.12}$$

Так как на S либо $A_i \vec{u} = 0$, либо $B_i \vec{u} = 0$, то в силу (1.11) имеем: или $(u_n)_i = 0$ и $(L^{(n)} \vec{u})_{s,i} = 0$ или $(u_s)_i = 0$ и $(L^{(n)} \vec{u})_{n,i} = 0$, поэтому, в правой части (1.12) интегралы исчезают и формула принимает вид

$$\iint_{D_i} E(\vec{u}, \vec{u})\, d\tau_Q = 0. \tag{1.13}$$

Отсюда, в силу положительной определенности формы $E(\vec{u}, \vec{u})$, вытекает, что при $\alpha \neq -\mu$ соблюдаются условия:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \tag{1.14$_1$}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0; \tag{1.14$_2$}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0; \tag{1.14$_3$}$$

а при $\alpha = -\mu$—лишь условия (1.14$_2$) и (1.14$_3$).

При $\alpha \neq -\mu$, из (1.14$_1$) следует, что $\vec{u}(P) = (-\varepsilon y + c_1,\ \varepsilon x + c_2)$, когда $P(x, y) \in D_i$; где ε, c_1, c_2—произвольные постоянные. Отсюда в силу (1.14$_2$)

---

[1] При соблюдении условия (1.8), очевидно, условие (1.10) выполняется.

[2] При $\alpha = -\mu$ условия (1.11) излишни.

$\varepsilon=0$ и, следовательно, $\vec{u}(P)=\vec{c}(c_1, c_2)$. Так как на S либо $u_n=0$, либо $u_s=0$, то $\vec{c}=0$ и $\vec{u}(P)\equiv 0$, $P\in D_i$.

При $\alpha=-\mu$, из (1.14_2) следует, что $\vec{u}=\operatorname{grad}\varphi$, где φ, в силу (1.14_3), является произвольной гармонической функцией. Далее, на S или $u_n=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{n}=\dfrac{d\varphi}{dn}=0$. или $u_s=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{s}=\dfrac{d\varphi}{ds}=0$. Таким образом, φ—гармоническая в D_i функция, удовлетворяющая на границе S одному из следующих двух граничных условий: $\dfrac{d\varphi}{dn}=0$, $\dfrac{d\varphi}{ds}=0$; следовательно, $\varphi=\text{const}$ и $u=\operatorname{grad}\text{const}=0$, когда $P\in D_i$. Теорема доказана.

Теорема 2. Регулярное решение статической задачи B_i^0, при $\alpha=\mu$, удовлетворяющее условию (1.11_2), есть тождественный нуль.

Доказательство. Как и выше, из формулы (1.13) получаются условия (1.14_1) и (1.14_3), в силу чего $\vec{u}(P)=(-\varepsilon y+c_1,\ \varepsilon x+c_2)$, $P\in D_i$. Но на S, имеем

$$u_s=(-\varepsilon\eta^{(j)}+c_1)\frac{d\xi^{(j)}}{ds}+(\varepsilon\xi^{(j)}+c_2)\frac{d\eta^{(j)}}{ds}=0, \tag{1.15}$$

где $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$—произвольная точка контура S_j.

Из (1.15) вытекает

$$\frac{d\eta^{(j)}}{\varepsilon\eta^{(j)}-c_1}=\frac{d\xi^{(j)}}{\varepsilon\xi^{(j)}+c_2}.$$

Интегрируя полученное равенство, получим

$$\varepsilon\eta^{(j)}-c_1=c\,(\varepsilon\xi^{(j)}+c_2),\quad c=\text{const}. \tag{1.16}$$

(1.16) представляет уравнение прямой, поэтому, так как S_j—замкнутая кривая класса H_2, она не является прямой линией, и (1.15) выполняется лишь тогда, когда $\varepsilon=0$, $c_1=0$, $c_2=0$, т. е. $\vec{u}(P)=0$, $P\in D_i$.

Теорема 3. Пусть $\vec{u}(P)$—регулярное решение статической задачи A_i^0, при $\alpha=\mu$, удовлетворяющее условию (1.11_1), тогда

1°. если $m\geqslant 2$[1], или если $m=1$, но S_0 и S_1, в случае, когда они оба являются окружностями, не имеют общего центра, или же если $m=0$, но S_0 не является окружностью, то $\vec{u}(P)$—тождественный нуль;

2°. если $m=1$ и S_0 и S_1 окружности, с общим центром в точке $M_0(x^{(0)}, y^{(0)})$, или если $m=0$ и S_0 окружность, с центром в точке M_0, то

$$\vec{u}(P)=[-\varepsilon\,(y-y^{(0)}),\ \varepsilon\,(x-x^{(0)})].\quad (P\in D_i). \tag{1.17}$$

Доказательство. Повторяя рассуждения, примененные при доказательстве предыдущих теорем, получаем $\vec{u}(P)=(-\varepsilon y+c_1,\ \varepsilon x+c_2)$, $P\in D_i$.

---

[1] mH—показатель связности.

На S_j

$$u_n=(\varepsilon\eta^{(j)}+c_1)\,\eta_s^{(j)}-(\varepsilon\xi_s^{(j)}+c_2)\xi_s^{(j)}=$$

$$=-\frac{d}{ds}\left[\frac{\varepsilon}{2}(\xi^{(j)2}+\eta^{(j)2})-c_1\eta^{(j)}+c_2\xi^{(j)}\right]=0. \qquad (1.18)$$

Из (1.18) вытекает

$$\frac{\varepsilon}{2}(\xi^{(j)2}+\eta^{(j)2})-c_1\eta^{(j)}+c_2\xi^{(j)}=c\equiv\text{const},\ \text{т. е.}$$

$$\left(\xi^{(j)}+\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^2+\left(\eta^{(i)}-\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^2=\frac{2c}{\varepsilon}+\frac{c_1^2+c_2^2}{\varepsilon^2},\ \text{если}\ \varepsilon\neq 0. \qquad (1.19)$$

(1.19) представляет уравнение окружности, поэтому, если хотя бы один из $S_j\,(j=0,\,1,\cdots,m)$ и не является окружностью, то (1.18) выполняется лишь тогда, когда $\varepsilon=0$, $c_1=0$, $c_2=0$, т. е. $\vec{u}(P)=0$, $P\in D_i$.

Допустим теперь, что все S_j—окружности, уравнения которых имеют вид

$$(x-x^{(j)})^2+(y-y^{(j)})^2=R_j^2,\quad (j=0,\ 1,\cdots,m).$$

Очевидно, что (1.19) на S_j выполняется лишь тогда, когда

$$c_2=-\varepsilon x^{(j)},\quad c_1=\varepsilon y^{(j)},\quad (j=0,\ 1,\ldots,m), \qquad (1.20)$$

где ε—произвольная постоянная, но при $m\geqslant 2$ эти окружности не могут иметь одинаковых центров, поэтому (1.20) выполняется для всех j лишь тогда, когда $\varepsilon=0$. Следовательно, $c_1=c_2=0$ и $\vec{u}(P)=0$, $P\in D_i$. Аналогично $\vec{u}(P)=0$ и при $m=1$, если S_0 и S_1 не являются концентрическими окружностями. Если при $m=1$, S_0 и S_1—концентрические окружности, с центром в точке $M_0(x^{(0)},y^{(0)})$, то (1.18) выполняется и (1.20) принимает вид $c_2=-\varepsilon x^{(0)}$, $c_1=\varepsilon y^{(0)}$, в силу чего $\vec{u}(p)$ выражается формулой (1.17). Этим теорема доказана.

Теорема 4. Регулярное решение статической задачи $\overset{\circ}{B}_a$, при $\alpha\neq-\mu$, удовлетворяющее на бесконечности условию (1.8), а на границе S условию (1.11_2), есть тождественный нуль.

Доказательство. Используем формулу (1.9). Аналогично тому, как это сделано выше, получим

$$\vec{u}(P)=\begin{cases}\vec{c}_j,\ \text{при}\ \alpha\neq\mu,\ \alpha\neq-\mu,\ \text{если}\ P\in D_i^{(j)}\\ \vec{c}_0,\ \text{при}\ \alpha\neq\mu,\ \alpha\neq-\mu,\ \text{если}\ P\in D_a^{(0)}\end{cases}$$

$$\vec{u}(P)=\begin{cases}(-\varepsilon_j y+c_j^{(1)},\ \varepsilon_j x+c_j^{(2)}),\ \text{при}\ \alpha=\mu,\ \text{если}\ P\in D_i^{(j)}\\ (-\varepsilon_0 y+c_0^{(1)},\ \varepsilon_0 x+c_0^{(2)}),\ \text{при}\ \alpha=\mu,\ \text{если}\ P\in D_a^{(0)}\end{cases}$$

$$(j=1,\ 2,\ldots,m),$$

где ε_j, $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ $(j=0,\ 1,\ldots,m)$—произвольные постоянные, $\vec{c}_j=(c_j^{(1)},\ c_j^{(2)})$.

Так как на бесконечности $\vec{u}(P)=O(1)$, то $\varepsilon_0=0$ и в силу граничных условий $\vec{c}_j=(c_j^1, c_j^2)=0$ $(j=0, 1, \cdots, m)$ и $\varepsilon_j=0$ $(j=1, \cdots, m)$. Таким образом, $\vec{u}(P)=0$, если $P\in D_i^{(j)}$ и $P\in D_a^{(0)}$; следовательно, $\vec{u}(P)=0$, когда $P\in D_a$. Теорема доказана.

Допустим теперь, что среди $S_1, S_2, \cdots, S_m$, m' контуров являются окружностями. Обозначим эти окружности через $S_1, S_2, \cdots, S_{m'}$, а их центры через $M^{(j)}(x^{(j)}, y^{(j)})$ $(j=1, 2, \cdots, m')$. Очевидно, что $1\leqslant m'\leqslant m$. Если же ни один из контуров S_j $(j=1, 2, \cdots, m)$ не является окружностью, тогда будем писать, что $m'=0$.

Аналогично доказательству предыдущих теорем доказывается

Теорема 5. Однородная внешняя статическая задача $\overset{0}{A_a}$, удовлетворяющая на бесконечности условию (1.8), а на границе S условию (1.11_1), имеет только нулевое решение, если $\alpha\neq\mu$, $\alpha\neq-\mu$ или же если $\alpha=\mu$, но $m'=0$; и имеет m' ненулевых регулярных решений $u^{(j)}(P)$ $(j=1, 2, \cdots, m')$, если $\alpha=\mu$ и $1\leqslant m'\leqslant m$

$$u^{(j)}(P)=\begin{cases}[-\varepsilon_j(y-y^{(j)}),\ \varepsilon_j(x-x^{(j)})], & \text{когда } P\in D_i^{(j)},\ (j=1, 2, \ldots, m'),\\ \vec{o}, & \text{когда } P\in D_a-D_i^{(j)},\end{cases}$$

где ε_j $(j=1, 2, \ldots, m')$—произвольные постоянные.

§ 2. Фундаментальные и регулярные решения

Для системы (E) матрица фундаментальных решений $\Gamma(P, Q; \omega)$ была построена В. Д. Купрадзе [3]. Для изучения обобщенных смешанных граничных задач требуется построение также некоторых других матриц фундаментальных и регулярных решений. В этом параграфе и будут построены такие матрицы.

Ищем решение системы (E) в виде [1]

$$\vec{u}(P)=-\frac{1}{\mu}\Delta\vec{\psi}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\psi}+\frac{\omega^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\vec{\psi}, \tag{2.1}$$

где $\vec{\psi}(P)=(\psi_1(P), \psi_2(P))$—неизвестный вектор.

(2.1)—переписывается в виде

$$\vec{u}(P)=\frac{1}{\mu}(\Delta+k_1^2)\vec{\psi}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\psi}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\lambda+2\mu}(\Delta+k_2^2)\vec{\psi}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\psi}, \tag{2.2}$$

где
$$k_1^2=\frac{\omega^2}{\lambda+2\mu},\quad k_2^2=\frac{\omega^2}{\mu}. \tag{2.3}$$

[1] Способ построения решений предложен М. О. Башелейшвили.

Подставим (2.1) в (E) и примем во внимание, что $\operatorname{div}\operatorname{grad}=\Delta$, тогда получим

$$\mu\left[\frac{1}{\mu}\Delta\Delta\vec{\psi}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Delta\vec{\psi}+\frac{\omega^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\Delta\vec{\psi}\right]+$$

$$+(\lambda+\mu)\left[\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Delta\vec{\psi}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Delta\vec{\psi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\psi}\right]+\omega^2\left[\frac{1}{\mu}\Delta\vec{\psi}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\vec{\psi}\right]=\Delta\Delta\vec{\psi}+k_1^2\Delta\vec{\psi}+k_2^2\Delta\vec{\psi}+k_1^2k_2^2\vec{\psi}=0.$$

Таким образом, неизвестный вектор $\psi(P)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta+k_1^2)(\Delta+k_2^2)\vec{\psi}(P)=0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим уравнение

$$(\Delta+k_1^2)(\Delta+k_2^2)\varphi=0. \tag{2.4$_1$}$$

Пусть

$$(\Delta+k_1^2)\varphi=\gamma_1(P),\ (\Delta+k_2^2)\varphi=\gamma_2(P),$$

тогда в силу (2.4_1)

$$(\Delta+k_2^2)\gamma_1(P)=0,\ (\Delta+k_1^2)\gamma_2(P)=0. \tag{2.5}$$

(2.5) есть уравнение колебания $\Delta v+k^2v=0$, одно из решений которого есть $v=Z_0(kr)$, где $Z_0(kr)$—цилиндрическая функция и $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; поэтому можно считать $\gamma_1(P)=Z_0(k_2r)$, $\gamma_2(P)=Z_0(k_1r)$ и

$$(\Delta+k_1^2)\varphi=Z_0(k_2r),\quad (\Delta+k_2^2)\varphi=Z_0(k_1r). \tag{2.5$_1$}$$

Отсюда

$$\varphi\equiv\varphi(P,Q,\omega)=\frac{Z_0(k_2r)-Z_0(k_1r)}{k_1^2-k_2^2}. \tag{2.6}$$

Если в (2.1) в (2.4)) под $\vec{\psi}(P)$ будем подразумевать один из векторов

$$\vec{\psi}(P)=(\varphi(P),\ 0),\ \vec{\psi}(P)=(0,\ \varphi(P)), \tag{2.7}$$

получим два решения системы (E). Обозначим их, соответственно, через

$$\begin{aligned}\vec{u}^{(1)}(P,Q;\omega)&=(u_1^{(1)}(P,Q;\omega),\ u_2^{(1)}(P,Q;\omega)],\\ \vec{u}^{(2)}(P,Q;\omega)&=[u_1^{(2)}(P,Q;\omega),\ u_2^{(2)}(P,Q;\omega)],\end{aligned} \tag{2.8}$$

где в силу (2.1) и (2.7)

$$u_j^{(l)}(P,Q;\omega)=\frac{\delta_{jl}}{\mu}(\Delta\varphi+k_1^2\varphi)-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_l\,\partial x_j},\ (i,\ j=1,\ 2) \tag{2.9}$$

и φ определена формулой (2.6), $x\equiv x_1$, $y\equiv x_2$; $\delta_{jl}=\begin{cases}1, & j=l,\\ 0, & j\neq l.\end{cases}$

Таким образом, мы построили симметричную матрицу

$$U(P,Q;\omega)=\left\| \begin{matrix} u_1^{(1)}(P,Q;\omega) & u_1^{(2)}(P,Q;\omega) \\ u_2^{(1)}(P,Q;\omega) & u_2^{(2)}(P,Q;\omega) \end{matrix} \right\| =$$

$$=\|\vec{U}^{(1)}(P,Q;\omega),\ \vec{U}^{(2)}(P,Q;\omega)\|, \tag{2.10}$$

являющуюся решением системы (E) относительно обеих точек $P(x,y)$ и $Q(\xi,\eta)$. В силу (2.5_1) и (2.6), (2.9) имеет вид

$$u_j^{(l)}(P,Q;\omega)=\frac{\delta_{jl}}{\mu}Z_0(k_2r)+\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2[Z_0(k_2r)-Z_0(k_1r)]}{\partial x_l\,\partial x_j}. \tag{2.9$_1$}$$

Пользуясь формулами дифференцирования цилиндрических функций [4]

$$\frac{dZ_0(kr)}{dr}=-kZ_1(kr),\ \frac{dZ_1(kr)}{dr}=-\frac{1}{r}Z_1(kr)+kZ_0(kr),$$

получаем

$$\frac{\partial Z_0(kr)}{\partial x_l}=-kZ_1(kr)\frac{\partial r}{\partial x_l},$$

$$\frac{\partial^2 Z_0(kr)}{\partial x_l\,\partial x_j}=rkZ_1(kr)\frac{\partial^2\ln\frac{1}{r}}{\partial x_l\,\partial x_j}-k^2Z_0(kr)\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_j}. \tag{2.11}$$

Так как

$$k_1^2-k_2^2=-\omega^2\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}, \tag{2.12}$$

то, в силу (2.6) и (2.11), (2.9_1) примет вид

$$u_j^{(l)}(P,Q;\omega)=\frac{r}{\omega^2}[k_2Z_1(k_2r)-k_1Z_1(k_1r)]\frac{\partial^2\ln\frac{1}{r}}{\partial x_l\,\partial x_j}+$$

$$+\frac{1}{\omega^2}[k_1^2Z_0(k_1r)-k_2^2Z_0(k_2r)]\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_j}+\frac{\delta_{jl}}{\mu}Z_0(k_2r). \tag{2.13}$$

Введем следующие обозначения:

$$u_j^{(l)}(P,Q;\omega)\equiv\Gamma_j^{(l)}(P,Q;\omega),\quad \text{когда}\quad Z_n(kr)=H_n^{(1)}(kr),$$

$$u_j^{(l)}(P,Q;\omega)\equiv L_j^{(l)}(P,Q;\omega),\quad \text{когда}\quad Z_n(kr)=Y_n(kr), \tag{2.14}$$

$$u_j^{(l)}(P,Q;\omega)\equiv\frac{d}{2}N_j^{(l)}(P,Q;\omega),\ \text{когда}\ Z_n(kr)=I_n(kr),$$

где $I_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n(x)$—соответственно, функции Бесселя, Неймана и Ганкеля первого рода [1], [4], а

$$Y_0(kr)=N_0(kr)-I_0(kr)\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k}{2}+c\right)=\frac{2}{\pi}\ln r-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left(\frac{kr}{2}\right)^{2j}(a_j-\ln r),\tag{2.15}$$

$$Y_1(kr)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{kr}{2}\ln r-\frac{kr}{4}-\frac{1}{kr}\right)-$$

$$-\frac{kr}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,(j+1)!}\left(\frac{kr}{2}\right)^{2j}(a_j+a_{j+1}-2\ln r),$$

$$d=\frac{\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)},\ e=\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)},\ a_j=\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l},\ C\text{—постоянная Эйлера.}\tag{2.16}$$

Таким образом, мы получили три решения системы (E):

$$\Gamma(P,Q;\omega)=\left\|\begin{matrix}\Gamma_1^{(1)}(P,Q;\omega) & \Gamma_1^{(2)}(P,Q;\omega)\\ \Gamma_2^{(1)}(P,Q;\omega) & \Gamma_2^{(2)}(P,Q;\omega)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\|\vec{\Gamma}^{(1)}(P,Q;\omega),\ \vec{\Gamma}^{(2)}(P,Q;\omega)\|;\tag{2.17}$$

$$L(P,Q;\omega)=\left\|\begin{matrix}L_1^{(1)}(P,Q;\omega) & L_1^{(2)}(P,Q;\omega)\\ L_2^{(1)}(P,Q;\omega) & L_2^{(2)}(P,Q;\omega)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\|\vec{L}^{(1)}(P,Q;\omega),\ \vec{L}^{(2)}(P,Q;\omega)\|;\tag{2.18}$$

$$N(P,Q;\omega)=\left\|\begin{matrix}N_1^{(1)}(P,Q;\omega) & N_1^{(2)}(P,Q;\omega)\\ N_2^{(1)}(P,Q;\omega) & N_2^{(2)}(P,Q;\omega)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\|\vec{N}^{(1)}(P,Q;\omega)\ \ \vec{N}^{(2)}(P,Q;\omega)\|.\tag{2.19}$$

В силу (2.12) и (2.15) имеем

$$k_2Y_1(k_2r)-k_1Y_1(k_1r)=\frac{\omega^2 er}{\pi}\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{r}{2\pi}e\omega^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j k^{(j)}}{j!\,(j+1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}(2\ln r-a_j-a_{j+1}),\tag{2.20}$$

$$k_1^2Y_0(k_1r)-k_2^2Y_0(k_2r)=-\frac{2}{\pi}\omega^2 e\ln r+$$

$$+\frac{2e\omega^2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j k^{(j)}}{(j;)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}(a_j-\ln r).$$

Подставляя (2.20) в (2.13), где $Z_n(kr)=Y_n(kr)$, учитывая тождество

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{1}{r}}{\partial x_l\, \partial x_j}=\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_l}-\delta_{lj}\right)$$

и равенства (2.16), (2.18), получаем

$$L_j^{(l)}(P,Q;\omega)=\overset{\circ}{\Gamma}{}_j^{(l)}(P,Q)+\frac{e}{2\pi}\,\delta_{lj}+\Omega_j^{*(l)}(P,Q;\omega),$$

где

$$\overset{\circ}{\Gamma}(P,Q)=\|\overset{\circ}{\Gamma}{}_j^{(l)}(P,Q)\|=\frac{1}{\pi}\left\| d\,\delta_{lj}\ln r-e\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right\| \qquad (2.21)$$

—известная статическая матрица фундаментальных решений Сомильяны, а

$$\Omega^*(P,Q;\omega)=\|\Omega^{*(lk)}_l(P,Q;\omega)\|=$$

$$=\left\|\frac{2\delta_{lk}}{\mu\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^{2j}(\ln r-a_j)+\right.$$

$$+\frac{e}{\pi}\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}-\frac{\delta_{lj}}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j k^{(j)}}{j!\,(j+1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}(2\ln r-a_j-a_{j+1})+$$

$$\left.+\frac{2e}{\pi}\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j k^{(j)}}{(j!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}(a_j-\ln r)\right\|$$

—регулярная матрица, когда $P=Q$ и $\omega=0$ и $\Omega^*(P,Q;0)=0$; $k^{(j)}=k_1^{2j}+k_1^{2j-2}k_2^2+\cdots+k_2^{2j}$. Таким образом,

$$L(P,Q;\omega)=\overset{\circ}{\Gamma}(P,Q)+\Omega^*(P,Q;\omega)+\frac{e}{2\pi}I. \qquad (2.22)$$

Аналогично

$$N(P,Q,\omega)=\Omega^{**}(P,Q;\omega)+I, \qquad (2.23)$$

где

$$\Omega^{**}(P,Q;\omega)=\|\Omega_l^{**(k)}(P,Q;\omega)\|=$$

$$=\left\|\frac{(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}-\frac{\delta_{lk}}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j k^{(j)}}{j!\,(j+1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}-\right.$$

$$-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j k^{(j)}}{(j!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}+$$

$$\left.+\frac{2\delta_{lk}}{\mu d}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^{2j}\right\|$$

—регулярная матрица и $\Omega^{**}(P, Q; 0)=0$, а I—единичная матрица. Очевидно, что

$$L(P, Q; 0)=\overset{\circ}{\Gamma}(P, Q)+\frac{e}{2\pi}I, \quad N(P, Q; 0)=I. \tag{2.24}$$

Введем матрицу

$$M(P, Q; \omega)=\|M_{ij}(P, Q; \omega)\|=N(P, \omega)L(Q; \omega)+N(P, Q; \omega), \tag{2.25}$$

где

$$L(P; \omega)=L(P, 0; \omega), \quad N(P; \omega)=N(P, 0; \omega), \quad \overset{\circ}{\Gamma}(Q)=\overset{\circ}{\Gamma}(Q; 0). \tag{2.26}$$

Очевидно $M(P, Q; \omega)$ есть матрица решений системы (E) относительно точек P и Q; она несимметрична и

$$M(P, Q; 0)=\overset{\circ}{\Gamma}(Q)+\left(\frac{e}{2\pi}+1\right)I. \tag{2.27}$$

Пусть

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)&=[B_Q U(P, Q; \omega)]'=[B_p U(P, Q; \omega)]^*=\\ &=\|\vec{U}_{\mathrm{I}}^{(1)}(P, Q; \omega), \vec{U}_{\mathrm{I}}^{(2)}(P, Q; \omega)\|, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)&=[A_Q U(P, Q; \omega)]'=(A_p U(P, Q; \omega))^*=\\ &=\|\vec{U}_{\mathrm{II}}^{(1)}(P, Q; \omega), \vec{U}_{\mathrm{II}}^{(2)}(P, Q; \omega)\|. \end{aligned}$$

Легко можно показать (см. в [I]), что $u_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)$ и $u_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)$ являются матрицами решения системы (E) и

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)&=U(P, Q; \omega)G(Q)+\|\operatorname{grad}_Q Z_0(k_1 r), \quad \vec{O}\|,\\ U_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)&=U(P, Q; \omega)H(Q)+\|\vec{O}, \quad \operatorname{rot}_Q{}^{1} Z_0(k_2 r)\|, \end{aligned} \tag{2.29}$$

где $G(Q)$ и $H(Q)$ определены в [1] (см. формулу (2.13)).

Аналогично (2.14) обозначим

$$\begin{gathered} U_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)\equiv L_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega), \quad U_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)\equiv L_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega),\\ \text{когда } Z_n(kr)=Y_n(kr),\\ U_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)\equiv\Gamma_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega), \quad U_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)\equiv\Gamma_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega),\\ \text{когда } Z_n(kr)=H_n^{(1)}(kr). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Наконец, если введем обозначения

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)&=\{B_p[M(P, Q; \omega)]^*\}^*,\\ M_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)&=\{A_p[M(P, Q; \omega)]^*\}^*,\\ M_{\mathrm{III}}(P, Q; \omega)&=[B_p M(P, Q; \omega)]^*,\\ M_{\mathrm{IV}}(P, Q; \omega)&=[A_p M(P, Q; \omega)]^*, \end{aligned} \tag{2.31}$$

---

[1] $\operatorname{rot}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$, где $\varphi(x, y)$—скалярная функция.

то аналогично (2.29) получим

$$M_{\rm I}(P,\ Q;\ \omega)=M(P,\ Q;\ \omega)\,G(Q)+\|\,N(P;\ \omega)\,{\rm grad}_Q\,Y_0(k_1R)+$$

$$+\frac{2}{d}\,{\rm grad}_Q\,I_0(k_1r),\quad \vec{O}\,\|\,;$$

$$M_{\rm II}(P,\ Q;\ \omega)=M(P,\ Q;\ \omega)H(Q)+\|\,\vec{O},\ N(P;\ \omega)\,{\rm rot}_Q\,Y_0(k_2R)+$$

$$+\frac{2}{d}\,{\rm rot}_Q\,I_0(k_2r)\,\|\,;$$

$$M_{\rm III}(P,\ Q;\ \omega)=M^*(P,\ Q;\ \omega)\,G(Q)+ \tag{2.32}$$

$$+\frac{2}{d}\,\|\,L(P;\ \omega)\,{\rm grad}_Q\,I_0(k_1R)+{\rm grad}_Q\,I_0(k_1r),\ O\,\|\,;$$

$$M_{\rm IV}(P,\ Q;\ \omega)=M^*(P,\ Q;\ \omega)\,H(Q)+$$

$$+\frac{2}{d}\,\|\,\vec{O},\ L(P,\ \omega)\,{\rm rot}_Q\,I_0(k_2R)+{\rm rot}_Q\,I_0(k_2r)\,\|,$$

где $R\equiv r(Q;\ 0)=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Очевидно, что матрицы $M_j(P,\ Q;\ \omega)$ ($j=$ $=$I, II, III, IV) являются решениями системы (E).

Учитывая (2.24), (2.29), (2.30), (2.31), будем иметь

$$L_{\rm I}(P,\ Q;\ 0)\equiv L^0_{\rm I}(P,\ Q)=\left[\mathring{\Gamma}(P,\ Q)+\frac{e}{2\pi}I\right]G(Q)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\|\,{\rm grad}_Q\ln r,\ \vec{O}\,\|,$$

$$L_{\rm II}(P,\ Q;\ O)\equiv L^0_{\rm II}(P,\ Q)=\left[\mathring{\Gamma}(P,\ Q)+\frac{e}{2\pi}I\right]H(Q)+ \tag{2.33}$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\|\,\vec{O},\ {\rm rot}_Q\ln r\,\|,$$

$$M_{\rm I}(P,\ Q;\ O)=M_{\rm I}(O,\ P;\ 0)=\left[\mathring{\Gamma}(Q)+\left(\frac{e}{2\pi}+1\right)I\right]G(Q)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\|\,{\rm grad}_Q\ln R,\ \vec{O}\,\|;$$

$$M_{\rm II}(P,\ Q;\ 0)=M_{\rm II}(0,\ P;\ O)=\left[\mathring{\Gamma}(Q)+\left(\frac{e}{2\pi}+1\right)I\right]H(Q)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\|\,\vec{O},\ {\rm rot}_Q\ln R\,\|;$$

$$M_{\rm III}(P,\ Q;\ 0)=\left[\mathring{\Gamma}(P)+\left(\frac{e}{2\pi}+1\right)I\right]G(Q), \tag{2.34}$$

$$M_{\rm IV}(P,\ Q;\ 0)=\left[\mathring{\Gamma}(P)+\left(\frac{e}{2\pi}+1\right)I\right]H(Q);$$

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{I}}(0,\ Q;\ 0) &= M_{\mathrm{I}}(0,\ Q;\ 0) - IG(Q),\\
L_{\mathrm{II}}(0,\ Q;\ 0) &= M_{\mathrm{II}}(0,\ Q;\ 0) - IH(Q).
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Наконец заметим, что матрицы $A_pU_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)$, $B_pU_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)$, $A_pU_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)$ и $B_pU_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)$ легко запишутся в явном виде. Для них получаются формулы, аналогичные формулам (2·15)—(2·21) нашей статьи [1] (стр. 305); только в этих формулах $H_0(kr)$ следует заменить через $Z_0(kr)$.

§ 3. Логарифмические потенциалы и их свойства

В этом параграфе будут сформулированы в виде теорем некоторые свойства логарифмических потенциалов, которые используются в дальнейшем[1]. Доказательств этих теорем приводить не будем, так как они хорошо известны (см., например, [5]). Докажем только теоремы 10 и 11.

Рассмотрим следующие функции:

$$
v(P) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \ln r(P, Q)\, \nu(Q)\, ds_Q\,; \tag{3.1}
$$

$$
w(P) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r(P, Q)}{\partial n_Q}\, \mu(Q)\, ds_Q\,; \tag{3.2}
$$

$$
v^*(P) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r(P, Q)}{\partial s_Q}\, \nu^*(Q)\, ds_Q\,. \tag{3.3}
$$

$v(P)$ и $w(P)$ называются, соответственно, логарифмическими потенциалами простого и двойного слоя с плотностями $\nu(Q)$ и $\mu(Q)$, а $v^*(P)$—видоизмененный потенциалом простого слоя [6].

Теорема 1. Если $\nu(Q) \in C$ и $S \in H_1^*$ [2], то $v(p)$ принадлежит классу ch на всей плоскости.

Теорема 2. Если $\nu(Q) \in C$ и $S \in H_1$, то существует $\dfrac{\partial v}{\partial n_i}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial n_a}$ и они принадлежат на S классу C; при этом

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial n_i} &= -\nu(Q_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r(Q_0, Q)}{\partial n_{Q_0}}\, \nu(Q)\, ds_Q\,,\\
\frac{\partial v}{\partial n_a} &= \nu(Q_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r(Q_0, Q)}{\partial n_{Q_0}}\, \nu(Q)\, ds_Q\,;
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

кроме того, $\dfrac{\partial v(P)}{\partial n}$ ограничен как в D_i, так и в D_a.

---

[1] Некоторые теоремы, сформулированные ниже, имеют место и при менее жестких ограничениях относительно контура S и плотностей.

[2] Т. е. если уравнение S имеет вид $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(S)$, где s— дуговая абсцисса, то $\xi_s = \dfrac{d\xi}{ds}$, $\eta_s = \dfrac{d\eta}{ds}$ —непрерывны в смысле Гельдера.

Теорема 3. Если $\nu(Q) \in Ch$ и $S \in H_1$, то $v(P)$ имеет в D_i+S (в D_a+S) непрерывные частные производные первого порядка; кроме того, $\frac{\partial v}{\partial s_i} = \frac{\partial v}{\partial s_a} = \frac{\partial v(Q_0)}{\partial s} \in ch$ на S.

Если, кроме того, $\frac{\partial \nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}} \in Ch$ и $S \in H_2$, то и вторые производные $v(P)$ принадлежат классу ch как в D_i+S, так и в D_a+S.

Теорема 4. Если $\nu^* \in ch$ и $S \in H_1$, то $v^*(P) \in ch$ и $v_i^*(Q_0)=v_a^*(Q_0)=v^*(Q_0)$.

Теорема 5. Если $\mu(Q) \in C$ и $S \in H_1$, то существует $w_i(Q_0)$ и $w_a(Q_0)$, они принадлежат классу C на S; $w(P)$ непрерывна в D_i+S (в D_a+S) и

$$\begin{aligned} w_i(Q_0) &= \mu(Q_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r(Q_0, Q)}{\partial n_Q}\mu(Q)ds_Q, \\ w_a(Q_0) &= -\mu(Q_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r(Q_0, Q)}{\partial n_Q}\mu(Q)ds_Q. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Теорема 6. Если $\mu(Q) \in ch$, то $w(Q_0) \in ch$ на S.

Теорема 7. (Ляпунова-Таубера). Пусть $\mu(Q) \in C$ и $S \in H_1$ и P_1 и P_2 — точки, лежащие, соответственно, в D_i и D_a на нормали $\vec{n}_{Q_0}$ и $r(P_1, Q_0)=r(P_2, Q_0)=\delta$, тогда для произвольного малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta(\varepsilon) > 0$, независящее от Q_0, что

$$\left| \frac{\partial w(P_1)}{\partial n_{Q_0}} - \frac{\partial w(P_2)}{\partial n_{Q_0}} \right| < \varepsilon, \text{ при } \delta < \eta(\varepsilon).$$

Из этой теоремы вытекает, что если существует один из пределов $\frac{\partial w}{\partial n_i}$, $\frac{\partial w}{\partial n_a}$, то существует также другой и

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} = \frac{\partial w}{\partial n_a}. \tag{3.6}$$

Теорема 8. Если $\frac{\partial \mu(Q)}{\partial s_Q} \in ch$ и $S \in H_1$, то, как в D_i+S, так и в D_a+S, существуют непрерывные первые производные $w(P)$, которые принадлежат классу ch, и, следовательно, имеет место (3.6).

Теорема 9. Если $\nu(Q) \in ch$ и $S \in H_2$, то

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s_{Q_0}\partial n_{Q_0}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial^2 \ln r(Q_0, Q)}{\partial s_{Q_0}\partial n_{Q_0}}\nu(Q)\,ds_Q \in ch.$$

Теорема 10. Если $\frac{\partial \nu(Q)}{\partial s_Q} \in ch$, $S \in H_2$, то

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s_{Q_0}^2}\right)_i = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s_{Q_0}^2}\right)_a. \tag{3.7}$$

Доказательство. Предварительно приведем некоторые вспомогательные равенства. Пусть $t(s)=\xi(s)+i\eta(s)$ и $t_0(s)=\xi(s_0)+i\eta(s_0)$—аффиксы точек $Q(\xi,\eta)$ и $Q_0(\xi_0,\eta_0)$. Обозначим

$$\sigma=t-t_0=re^{i\theta}, \tag{3.8}$$

где

$$r=\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}\,;\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{\eta(s_0)-\eta(s)}{\xi(s_0)-\xi(s)}. \tag{3.9}$$

Из (3.8) имеем

$$\frac{\partial^2\ln\sigma}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}=-\frac{\partial\ln\sigma}{\partial s_Q}\cdot\frac{\partial\ln\sigma}{\partial s_{Q_0}}. \tag{3.10}$$

Отделяя действительную и мнимую части в (3.10), получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\ln r}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}=-\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}\cdot\frac{\partial\ln r}{\partial s_{Q_0}}+\frac{\partial\theta}{\partial s_Q}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial s_{Q_0}},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}=-\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial s_{Q_0}}-\frac{\partial\ln r}{\partial s_{Q_0}}\,\frac{\partial\theta}{\partial s_Q}\end{gathered} \tag{3.11}$$

Далее, так как $\xi_s^2+\eta_s^2=1$, имеем

$$\begin{gathered}-\frac{\partial\ln r}{\partial\xi_0}=\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}=\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}\eta_s+\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}\xi_s,\\ -\frac{\partial\ln r}{\partial\eta_0}=\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}=-\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}\xi_s+\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}\eta_s.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Умножая первое равенство (3.12) на $-\eta_{0s}$, второе на ξ_{0s}, далее умножив, соответственно, первое на $-\xi_{0s}$, второе на $-\eta_{0s}$, сложив, получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\ln r}{\partial n_{Q_0}}=-\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}(\eta_s\eta_{0s}+\xi_s\xi_{0s})+\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}(\eta_s\xi_{0s}-\eta_{0s}\xi_s),\\ \frac{\partial\ln r}{\partial s_{Q_0}}=\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}(\xi_s\eta_{0s}-\eta_s\xi_{0s})-\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}(\xi_s\xi_{0s}+\eta_s\eta_{0s}),\end{gathered} \tag{3.13}$$

где

$$\xi_{0s}=\frac{d\xi(s_0)}{ds},\ \eta_{0s}=\frac{d\eta(s_0)}{ds},\ \xi_{0ss}=\frac{d^2\xi(s_0)}{d^2s},\ \eta_{0ss}=\frac{d^2\eta(s_0)}{d^2s}.$$

Дифференцируя второе равенство в формулах (3.13) по s_{Q_0} и учитывая условия Коши-Римана

$$\frac{\partial\ln r}{\partial n}=\frac{\partial\theta}{\partial s},\ \frac{\partial\ln r}{\partial s}=-\frac{\partial\theta}{\partial n}, \tag{3.14}$$

получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\ln r}{\partial s_{Q_0}^2}=\frac{\partial^2\theta}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}(\xi_s\eta_{0s}-\eta_s\xi_{0s})-\frac{\partial^2\ln r}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}(\xi_s\xi_{0s}+\eta_s\eta_{0s})+\\ +\frac{\partial\theta}{\partial s_Q}(\xi_s\eta_{0ss}-\eta_s\xi_{0ss})-\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}(\xi_s\xi_{0ss}+\eta_s\eta_{0ss}).\end{gathered} \tag{3.15}$$

Дважды формально дифференцируя (3.1) и учитывая (3.14) и (3.15), получаем

$$\frac{\partial^2 v(P)}{\partial s_{Q_0}^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial s_Q}\left[\frac{\partial \theta}{\partial s_{Q_0}}(\xi_s\eta_{0s}-\eta_s\xi_{0s})\,\nu(\theta)\right]ds_Q-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}}(\xi_s\eta_{0s}-\eta_s\xi_{0s})\,\frac{\partial \nu(\theta)}{\partial s_Q}\,ds_Q-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_S\left[\frac{\partial \ln r}{\partial n_Q}+\frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}}\right](\xi_{ss}\eta_{0s}-\eta_{ss}\xi_{0s})\,\nu(Q)ds_Q+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_Q}(\xi_s\eta_{0ss}-\xi_{0s}\eta_{ss}+\xi_{ss}\eta_{0s}-\eta_s\xi_{0ss})\,\nu(Q)ds_Q-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial^2 \ln r}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}(\xi_s\xi_{0s}+\eta_s\eta_{0s})\,\nu(Q)ds_Q-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r}{\partial s_Q}(\xi_s\xi_{0ss}+\eta_s\eta_{0ss})\,\nu(Q)\,ds_Q=\sum_{j=1}^{6}I_j(P).$$

Так как $\dfrac{\partial\theta}{\partial s_{Q_0}}$ — однозначная функция, то

$$I_1(P)=0. \qquad (3.16_1)$$

В силу (3.4)

$$[I_2(Q_0)]_i-[I_2(Q_0)]_a=2\,\frac{\partial\nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}}(\xi_{0s}\eta_{0s}-\eta_{0s}\xi_{0s})=0. \qquad (3.16_2)$$

Аналогично, в силу (3.5) и теоремы 4, имеем

$$[I_4(Q_0)]_i-[I_2(Q_0)]_a=0,\quad [I_6(Q_0)]_i-[I_6(Q_0)]_a=0. \qquad (3.16_3)$$

Далее, $I_3(P)$ представляет собой сумму потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя с одинаковыми плотностями, поэтому, в силу (3.4) и (3.6), имеем

$$[I_3(Q_0)]_i-[I_3(Q_0)]_a=0. \qquad (3.16_4)$$

Так как $\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial s_Q\,\partial s_{Q_0}}=-\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial n_Q\,\partial n_{Q_0}}$, то $I_5(P)$ есть нормальная производная потенциала двойного слоя и так как эта производная существует, то в силу теоремы 8

$$[I_5(Q_0)]_i-[I_5(Q_0)]_a=0. \qquad (3.16_5)$$

Из равенств (3.16) получается (3.7) и теорема доказана.

Теорема 11. Если $\dfrac{\partial\nu(Q)}{\partial s_Q}\in ch$ и $S\in H_2$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{Q_0}}\frac{\partial v}{\partial s_{Q_0}}\right)_{i,a}=\frac{\partial}{\partial s_{Q_0}}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n_{Q_0}}\right)_{i,a}\right]. \qquad (3.17)$$

Доказательство. Дифференцируя первое равенство в формулах (3.13) по s_{Q_0} и учитывая (3.14), получаем

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial s_{Q_0} \partial n_{Q_0}} = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial n_Q\, \partial s_Q}(\eta_s \eta_{0s} + \xi_s \xi_{0s}) - \frac{\partial \ln r}{\partial n_Q}(\eta_s \eta_{0ss} + \xi_s \xi_{0ss}) +$$

$$+\frac{\partial \ln r}{\partial s_Q}(\eta_s \xi_{0ss} - \eta_{0ss} \xi_s) + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial s_{Q_0}\, \partial s_Q}(\eta_s \xi_{0s} - \eta_{0s} \xi_s). \tag{3.18}$$

Из (3.1), дифференцируя и учитывая (3.14) и (3.18), получаем

$$\frac{\partial^2 v(P)}{\partial s_{Q_0} \partial n_{Q_0}} = -\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \theta}{\partial s_Q}\left[\frac{\partial \theta}{\partial s_{Q_0}}(\eta_s \eta_{0s} + \xi_s \xi_{0s})\, \nu(Q)\right] ds_Q +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial s_Q}\left[\frac{\partial \ln r}{\partial s_{Q_0}}(\eta_s \xi_{0s} - \eta_{0s} \xi_s)\, \nu(Q)\right] ds_Q +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}}(\eta_{ss} \eta_{0s} + \xi_{ss} \xi_{0s})\, \nu(Q)\, ds_Q +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}}(\eta_s \eta_{0s} + \xi_s \xi_{0s}) \frac{\partial \nu(Q)}{\partial s_Q}\, ds_Q -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \ln r}{\partial s_{Q_0}}(\eta_s \xi_{0s} - \eta_{0s} \xi_s) \frac{\partial \nu(Q)}{\partial s_Q}\, ds_Q -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \ln r}{\partial s_{Q_0}}(\eta_{ss} \xi_{0s} - \eta_{0s} \xi_{ss})\, \nu(Q)\, ds_Q +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \ln r}{\partial s_Q}(\eta_s \xi_{0ss} - \eta_{0ss} \xi_s)\, \nu(Q)\, ds_Q -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_Q}(\eta_s \xi_{0ss} + \xi_s \xi_{0ss})\, \nu(Q)\, ds_Q = \sum_{j=1}^{8} I_j^*(P).$$

Очевидно, что $I_1^*(P) = I_2^*(P) = 0$. В силу теорем 3 и 4 $[I_5^*(Q_0)]_{i,a} = I_5^*(Q_0)$, $[I_6^*(Q_0)]_{i,a} = I_6^*(Q_0)$, $[I_7^*(Q_0)]_{i,a} = I_7^*(Q_0)$. На основании формул (3.4) и (3.5)

$$[I_3^*(Q_0)]_{i,a} = \mp(\eta_{0s} \eta_{0ss} + \xi_{0s} \xi_{0ss})\, \nu(Q_0) + I_3^*(Q_0) = I_3^*(Q_0), = I_3^*(Q_0),$$

$$[I_4^*(Q_0)]_{i,a} = \mp(\eta_{0s}^2 + \xi_{0s}^2) \frac{\partial \nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}} + I_4^*(Q_0) = \mp \frac{\partial \nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}} + I_4^*(Q_0),$$

$$[I_8^*(Q_0)]_{i,a} = \pm(\eta_{0s} \eta_{0ss} + \xi_{0s} \xi_{0ss})\, \nu(Q_0) + I_8^*(Q_0) = I_8^*(Q_0).$$

Следовательно,

$$\left[\frac{\partial^2 v(Q_0)}{\partial s_{Q_0} \partial n_{Q_0}}\right]_{i,a} = \mp \frac{\partial \nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}} + \sum_{j=3}^{8} I_j^*(Q_0) = \mp \frac{\partial \nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}} + \sum_{j=1}^{8} I_j^*(Q_0) =$$

$$= \mp \frac{\partial \nu(Q_0)}{\partial s_{Q_0}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial^2 \ln r}{\partial s_{Q_0}\partial n_{Q_0}} \nu(Q) ds_Q =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_{Q_0}}\left[\mp \nu(Q_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}} \nu(Q) ds_Q\right] = \frac{\partial}{\partial s_{Q_0}}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{i,a}\right].$$

§ 4 Теоремы существования для статических задач

Решение статической задачи A_i ищем в виде

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2}\int\limits_S [L_I(P, Q; 0) - M_I(P, Q; 0)]\vec{g}(Q) ds_Q, \tag{4.1}$$

или, что то же самое, в виде

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2}\int\limits_S \left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{grad}_Q \ln\frac{r}{R} g_1(Q) + \right.$$

$$\left. + [\mathring{\Gamma}(P, Q) - \mathring{\Gamma}(Q) - I]\, G(Q)\vec{g}(Q)\, ds_Q\right., \tag{4.1}$$

где $\vec{g}(Q) = (g_1(Q), g_2(Q))$—искомый вектор класса Гельдера.

Если над вектором (4.1) произведем операцию A, учитывая формулы и замечание § 2, а также свойства логарифмических потенциалов (см. § 3, теоремы 1—5), то для искомого вектора $\vec{g}(Q_0)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\vec{g}(Q_0) + \frac{1}{2}\int\limits_S T_0(Q_0, Q)\vec{g}(Q)\, ds_Q = \vec{F}(Q_0), \tag{4.2}$$

где

$$T_0(Q_0, Q) = C_0(Q_0, Q) + D_0(Q_0, Q) =$$

$$= \| \mathring{T}_{ij}(Q_0, Q) \| = \| \mathring{C}_{ij}(Q_0, Q) + \mathring{D}_{ij}(Q_0, Q) \|,$$

$$\mathring{C}_{11}(Q_0, Q) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}} - \frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q)}\{[\mathring{\Gamma}_{11}(Q_0, Q)\eta_{0s} -$$

$$- \mathring{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\xi_{0s}]\eta_s - [\mathring{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\eta_{0s} - \mathring{\Gamma}_{22}(Q_0, Q)\xi_{0s}]\xi_s\},$$

$$\mathring{C}_{12}(Q_0, Q) = [\mathring{\Gamma}_{11}(Q_0, Q)\eta_{0s} - \mathring{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\xi_{0s}]\xi_s +$$

$$+ [\mathring{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\eta_{0s} - \mathring{\Gamma}_{22}(Q_0, Q)\xi_{0s}]\eta_s,$$

$$\mathring{C}_{21}(Q_0, Q) = \frac{2(\mu+\alpha)}{\pi}\left[\frac{1}{\rho(Q)}\frac{\partial \ln r}{\partial s_Q} - \frac{1}{\rho(Q_0)}\frac{\partial \ln r}{\partial s_{Q_0}}\right] -$$

$$- \frac{(\mu+\alpha)^2}{\rho(Q)\rho(Q_0)}\{[\mathring{\Gamma}_{11}(Q_0, Q)\xi_{0s} + \mathring{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\eta_{0s}]\eta_s -$$

$$- [\mathring{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\xi_{0s} + \mathring{\Gamma}_{22}(Q_0, Q)\eta_{0s}]\xi_s\},$$

$$\overset{\circ}{C}_{22}(Q_0, Q)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial \ln r}{\partial n_Q}+\frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q_0)}\{[\overset{\circ}{\Gamma}_{11}(Q_0, Q)\xi_{0s}+\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\eta_{0s}]\xi_s+$$

$$+[\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q_0, Q)\xi_{0s}+\overset{\circ}{\Gamma}_{22}(Q_0, Q)\eta_{0s}]\eta_s\},$$

$$\overset{\circ}{D}_{11}(Q_0, Q)=\frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q)}\{[\overset{\circ}{\Gamma}_{11}(Q)\eta_{0s}-\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\xi_{0s}]\eta_s-[\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\eta_{0s}-$$

$$-\overset{\circ}{\Gamma}_{22}(Q)\xi_{0s}]\xi_s+\gamma(Q_0, Q)\}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial \ln R}{\partial \eta}\xi_{0s}-\frac{\partial \ln R}{\partial \xi}\eta_{0s}\right),$$

$$\overset{\circ}{D}_{12}(Q_0, Q)=[\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\xi_{0s}-\overset{\circ}{\Gamma}_{11}(Q)\eta_{0s}]\xi_s+$$

$$+[\overset{\circ}{\Gamma}_{22}(Q)\xi_{0s}-\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\eta_{0s}]\eta_s+\varkappa(Q_0, Q), \tag{4.3}$$

$$\overset{\circ}{D}_{21}(Q_0, Q)=\frac{(\mu+\alpha)^2}{\rho(Q)\rho(Q_0)}\{[\overset{\circ}{\Gamma}_{11}(Q)\xi_{0s}+\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\eta_{0s}]\eta_s-[\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\xi_{0s}+$$

$$+\overset{\circ}{\Gamma}_{22}(Q)\eta_{0s}]\xi_s+\varkappa(Q_0, Q)\}-\frac{2(\mu+\alpha)}{\pi\rho(Q_0)}\left[\frac{\partial \ln R}{\partial \xi}\xi_{0s}+\frac{\partial \ln R}{\partial \eta}\eta_{0s}\right],$$

$$\overset{\circ}{D}_{22}(Q_0, Q)=-\frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q_0)}\{[\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\xi_{0s}+\overset{\circ}{\Gamma}_{22}(Q)\eta_{0s}]\eta_s+$$

$$+[\overset{\circ}{\Gamma}_{11}(Q)\zeta_{0s}+\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(Q)\eta_{0s}]\xi_s+\gamma(Q_0, Q)\},$$

$$\varkappa(Q_0, Q)=-\varkappa(Q, Q_0)=\xi_{0s}\eta_s-\eta_{0s}\xi_s,$$

$$\gamma(Q_0, Q)=\gamma(Q, Q_0)=\xi_s\xi_{0s}+\eta_s\eta_{0s}.$$

Если решение статической задачи B_a будем искать в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int_S [L_{\rm II}(P, Q; 0)-M_{\rm IV}(P, Q; 0)]\vec{h}(Q)\,ds_Q, \tag{4.4}$$

или, что то же самое, в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int_S \left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{rot}_Q \ln r\, h_2(Q)+[\overset{\circ}{\Gamma}(P, Q)-\right.$$

$$\left.-\overset{\circ}{\Gamma}(P)-I]H(Q)\vec{h}(Q)\,ds_Q\right.,$$

то для неизвестного вектора класса Гельдера $\vec{h}(Q)=(h_1(Q, h_2(Q))$ получим систему сингулярных интегральных уравнений, союзную системе (4.2),

$$\vec{h}(Q_0)+\frac{1}{2}\int_S T^*_0(Q_0, Q)\vec{h}(Q)ds_Q=\vec{\Phi}(Q_0). \tag{4.2*}$$

Первое уравнение системы (4.2) является обычным уравнением Фредгольма. Дифференцируя его по s_{Q_0} и учитывая вид ядер $\overset{\circ}{T}_{11}(Q_0, Q)$ и $\overset{\circ}{T}_{12}(Q_0, Q)$, в силу теорем 3 и 9 § 3, получим, что $\frac{\partial g_1(Q)}{\partial s_Q} \in ch$; вследствие этого, в силу теорем 3, 10, 11 § 3 $\vec{u}(P)$, определенный формулой (4.1), принадлежит классу G_0 и удовлетворяет условиям (1.11). Аналогично $\vec{v}(P) \in G_0$. Далее, так как [3] для достаточно удаленных точек $P(x, y)$, $\frac{r}{\rho_0} = 1 + 0\left(\frac{1}{\rho_0}\right)$, и $\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r} - \frac{x}{\rho_0} = \frac{x}{\rho}\left(1 - \frac{r}{\rho_0}\right) + 0\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = O\left(\frac{1}{\rho_0}\right)$, то вектор $\vec{v}(P)$, определенный формулой (4.4) удовлетворяет условиям (1.8). Следовательно, для $\vec{u}(P)$ и $\vec{v}(P)$ применимы формулы Бетти и теоремы единственности.

Легко можно показать, что индекс системы (4.2) равен нулю и поэтому для него справедливы теоремы Фредгольма [1], [6].

Однородные системы, соответствующие системам (4.2) и (4.2*), имеют вид

$$\vec{g}(Q_0) + \frac{1}{2}\int_S T_0(Q_0, Q)\,\vec{g}(Q)\,ds_Q = 0, \tag{4.2$_0$}$$

$$\vec{h}(Q) + \frac{1}{2}\int_S T_0^*(Q_0, Q)\,\vec{h}(Q)\,ds_Q = 0. \tag{4.2$_0^*$}$$

Исследуем эти системы. Для этого рассмотрим разные случаи.

1°. Пусть $\alpha \neq \mu$ и $\alpha \neq -\mu$. Тогда докажем, что система (4.2$_0$) имеет только нулевое решение. Допустим противоположное. Пусть существует нетривиальное решение $\vec{g}^*(Q_0)$. Составим потенциал (4.1) с плотностью $\vec{g}^*(Q_0)$. Обозначим его через $\vec{u}^*(P)$. Очевидно $A_i\vec{u}^*(Q_0) = 0$; поэтому, в силу теоремы единственности 1 § 1, $u^*(P) = 0$, когда $P \in D_i$; в частности, в силу (4.1)

$$\vec{u}^*(0) = \int_S G(Q)\vec{g}(Q)\,ds_Q = 0, \tag{4.5}$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\int_S [g_2^*(Q)\,\xi_s + (\mu+\alpha)\,g_1^*(Q)\,\xi_{ss}]\,ds_Q = 0,\\ &\int_S [g_2^*(Q)\,\eta_s + (\mu+\alpha)\,g_1^*(Q)\,\eta_{0s}]\,ds_Q = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Учитывая свойства логарифмических потенциалов (§ 3), получаем

$$B_i\vec{u}^*(Q_0) = B_a\vec{u}^*(Q_0) = B\vec{u}^*(Q_0); \quad A_i\vec{u}^*(Q_0) - A_a\vec{u}^*(Q_0) = 2\vec{g}^*(Q_0); \tag{4.6}$$

так как $\vec{u}^*(P) = 0$, когда $P \in D_i$, то $B_i\vec{u}^*(Q_0) = 0$ и, следовательно, $B_a u^*(Q_0) = 0$. В силу (4.5) очевидно, что $\vec{u}^*(P)$ на бесконечности удовлетворяет условию (1.8); поэтому по теореме единственности 4 § 1, $\vec{u}^*(P)=0$, когда $P\in D_a$ и, следовательно, $A_a\vec{u}^*(Q_0)=0$ и, в силу (4.6), $\vec{g}^*(Q_0)=0$, что и нужно было показать.

Так как (4.2_0) и $(4.2_0{}^*)$—союзные системы сингулярных уравнений, то, согласно второй теоремы Фредгольма, и система $(4.2_0{}^*)$ не имеет ненулевых решений и в силу третьей теоремы Фредгольма неоднородные системы (4.2) и (4.2*) всегда разрешимы.

2°. Пусть $\alpha=\mu$ и S_0 не является окружностью. Тогда, применяя теоремы единственности 3, 4 § 1, докажем, как и выше, что неоднородные системы (4.2) и (4.2*) разрешимы для любых $\vec{F}(Q_0)$ и $\vec{\Phi}(Q_0)$.

3°. Пусть $\alpha=\mu$, $m=0$ и S_0—окружность с центром в точке $M_0(x^{(0)}, y^{(0)})$ и радиусом R'_0 (т. е. D_i—круг). Тогда докажем, что система (4.2_0) может иметь только одно ненулевое решение. Допустим противоположное. Пусть существуют два линейно независимых решения $\vec{g}^{(1)}(Q_0)$ и $\vec{g}^{(2)}(Q_0)$. Рассмотрим разность $\vec{g}^{(3)}(Q_0)=\vec{g}^{(1)}(Q_0)-c\,\vec{g}^{(2)}(Q_0)$, где c—произвольная постоянная. Составим потенциалы (4.1) с плотностями $\vec{g}^{(k)}(Q_0)$, $(k=1, 2, 3)$. Обозначим их через $\vec{u}^{(k)}(P)$. Очевидно $\vec{u}^{(3)}(P)=\vec{u}^{(1)}(P)-c\,\vec{u}^{(2)}(P)$ и $A_i\vec{u}^{(k)}(Q_0)=0$, $(k=1, 2, 3)$. В силу теоремы единственности 3, получим $\vec{u}^{(k)}(P)=(-\varepsilon_k(y-y^{(0)}),\ \varepsilon_k(x-x^{(0)}))$, когда $P\in D_i$. Пусть теперь $c=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, тогда $\varepsilon_3=0$ и $\vec{u}^{(3)}(P)=0$, когда $P\in D_i$. Отсюда, как и выше, получается, что $\vec{u}^{(3)}(P)=0$ $(P\in D_a)$ и в силу (4.6), $\vec{g}^{(3)}(Q)=0$, т. е. $\vec{g}^{(1)}(Q)=c\,\vec{g}^{(2)}(Q)$. Этим наше утверждение доказано. По II-ой теореме Фредгольма и система $(4.2_0{}^*)$ имеет только одно ненулевое решение. Найдем это решение.

Перейдя к полярным координатам и обозначив полярные углы точек $Q(\xi, \eta)$ и $Q_0(\xi_0, \eta_0)$ через φ и φ_0, будем иметь

$$\mathring{\Gamma}(Q_0, Q)=\frac{1}{\pi}\left\|\begin{matrix} d\ln 2R'_0\sin\dfrac{\varphi-\varphi_0}{2}-e\sin^2\dfrac{\varphi+\varphi_0}{2}, & \dfrac{e}{2}\sin(\varphi+\varphi_0) \\ \dfrac{e}{2}\sin(\varphi+\varphi_0), & d\ln 2R'_0\sin\dfrac{\varphi-\varphi_0}{2}-e\cos^2\dfrac{\varphi+\varphi_0}{2}\end{matrix}\right\|, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}=\frac{\partial\ln r}{\partial n_{Q_0}}=\frac{1}{2R'_0},\quad \frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}=-\frac{\partial\ln r}{\partial s_{Q_0}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_0}{2}.$$

Воспользовавшись известными формулами

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\,d\varphi=0, \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_0}{2}e^{i\varphi}\,d\varphi=ie^{i\varphi_0},\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}e^{i\varphi}\,d\varphi=-e^{i\varphi_0}$$

и заметив, что на S_0, $\xi_s = -\sin\varphi$, $\eta_s = \cos\varphi$, $\rho(Q) = R'_0$, согласно (4.3) будем иметь

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{S_0} \overset{\circ}{C}_{11}(Q,\ Q_0)ds_Q = \frac{2(\alpha-\mu-\lambda)}{\lambda+2\mu}, \\
\int\limits_{S_0} \overset{\circ}{C}_{12}(Q,\ Q_0)ds_Q = \int\limits_{S_0} \overset{\circ}{C}_{21}(Q,\ Q_0)ds_Q = 0, \\
\int\limits_{S_0} \overset{\circ}{C}_{22}(Q,\ Q_0)ds_Q = -\frac{2\alpha}{\mu}, \quad \int\limits_{S_0} D_{ij}(Q,\ Q_0)ds_Q = 0, \quad (i,\ j=1,\ 2).
\end{gathered}
\tag{4.9}
$$

Применяя формулы (4.9), при $\alpha=\mu$, легко можно проверить, что вектор $\vec{h}^{(1)}(Q)=(0,\ 1)$ является решением системы (4.2*). Следовательно, в силу третьей теоремы Фредгольма, для разрешимости системы (4.2) необходимо и достаточно, чтобы заданный вектор $\vec{F}(Q_0)$ удовлетворял условию

$$
\int\limits_{S_0} \vec{F}(Q)\vec{h}^{(1)}(Q)ds_Q = 0, \quad \text{т. е.} \int\limits_{S_0} F_2(Q)ds_Q = 0;
\tag{4.10}
$$

но при $\alpha=\mu$, [1], [4.10] примет вид

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{S_0} F_2(Q)\,ds_Q = \int\limits_{S_0}\left[-(T^{(n)}\vec{u})_s + 2\mu\frac{\partial u_n}{\partial s}\right]ds_Q = \\
= -\int\limits_{S_0} (T^{(n)}\vec{u})_s ds_Q = R_0\int\limits_0^{2\pi}[\overset{(n)}{T_1} u\sin\varphi - \overset{(n)}{T_2} u\cos\varphi]\,d\varphi = 0,
\end{gathered}
\tag{4.10$_1$}
$$

что означает равенство нулю главного момента внешних усилий.

Очевидно, что неоднородное уравнение (4.2*) не разрешимо для любой $\vec{\Phi}(Q_0)$ и, следовательно, потенциал (4.4) не дает решения задачи B_a. Теперь покажем, что можно так видоизменить потенциал (4.4), чтобы задача B_a оказалась разрешимой всегда.

Применяя легко проверяемые равенства

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(P,\ Q)}{\partial x} - \frac{\partial\overset{\circ}{\Gamma}_{11}(P,\ Q)}{\partial x} = -\frac{2}{\mu\pi}\frac{\partial\ln r}{\partial y}, \\
\frac{\partial\overset{\circ}{\Gamma}_{22}(P,\ Q)}{\partial x} - \frac{\partial\overset{\circ}{\Gamma}_{12}(P,\ Q)}{\partial y} = \frac{2}{\mu\pi}\frac{\partial\ln r}{\partial x}, \\
\xi_{ss} = -\frac{\eta_s}{\rho(Q)}, \quad \eta_{ss} = \frac{\xi_s}{\rho(Q)},
\end{gathered}
\tag{4.11}
$$

получим

$$
\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{2}{\mu\pi}\int\limits_s\left[\frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q)}\frac{\partial\ln r}{\partial s_Q}g_1(Q) + \frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}g_2(Q)\right]ds_Q,
\tag{4.12}
$$

где $\vec{u}(u_1,\ u_2)$ определен формулой (4.1).

Если $S\equiv S_0$—окружность и $\alpha=\mu$, тогда из (4.12) получаем

$$E_0\equiv\frac{\partial u_2(M_0)}{\partial x}-\frac{\partial u_1(M_0)}{\partial y}=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{S_0}\left[\frac{2}{R'_0}\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial s_Q}g_1(Q)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial n_Q}g_2(Q)\right]ds_Q, \tag{4.13}$$

где

$$r_0^*\equiv r(Q,\ M_0)=\sqrt{(\xi-x^{(0)})^2+(\eta-y^{(0)})^2},$$

$$r_0\equiv r(Q_0,\ M_0)=\sqrt{(\xi_0-x^{(0)})^2+(\eta_0-y^{(0)})^2}.$$

Ищем теперь в рассматриваемом случае решение статической задачи B_a в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int\limits_{S_0}[L_{\mathrm{II}}(P,\ Q;\ 0)-M_{\mathrm{IV}}(P,\ Q;\ 0)]\vec{h}(Q)ds_Q+$$

$$+E_1\left(\frac{\partial\ln r_0}{\partial y},\ -\frac{\partial\ln r_0}{\partial x}\right), \tag{4.14}$$

где

$$E_1=-\frac{2}{\mu\pi}\int\limits_{S_0}\left[\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial s_Q}h_1(Q)+\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial n_Q}h_2(Q)\right]ds_Q; \tag{4.15}$$

тогда для определения $\vec{h}(Q_0)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\vec{h}(Q_0)+\frac{1}{2}\int\limits_{S_0}T_0^*(Q_0,\ Q)\vec{h}(Q)\,ds_Q+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{S_0}\overset{\circ}{T}_{\mathrm{I}}(Q_0,\ Q)\,\vec{h}(Q)ds_Q=\vec{\Phi}(Q_0), \tag{4.16}$$

где

$$\overset{\circ\mathrm{I}}{T}_{11}(Q_0,\mathrm{Q})=\frac{2}{R'_0}\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial s_Q}\frac{\partial\ln r_0}{\partial s_Q},\qquad \overset{\circ\mathrm{I}}{T}_{12}(Q_0,\ Q)=\frac{2}{R'_0}\frac{\partial\ln r_0}{\partial s_{Q_0}}\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial n_{Q_0}},$$

$$\overset{\circ\mathrm{I}}{T}_{21}(Q_0,\ Q)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\ln r_0}{\partial n_{Q_0}}\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial s_Q},\qquad \overset{\circ\mathrm{I}}{T}_{22}(Q_0,Q)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\ln r_0}{\partial n_{Q_0}}\frac{\partial\ln r_0^*}{\partial n_Q}.$$

Покажем, что (4.16) разрешимо для любой правой части. Для этого достаточно показать, что соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Допустим противоположное, тогда и союзная система имеет ненулевое решение. Обозначим его через $g^*(Q_0)$

$$\vec{g}^*(Q_0)+\frac{1}{2}\int\limits_{S_0}T_0^*(Q_0,\ Q)\vec{g}(Q)ds_Q+$$

$$+E_0\left(\frac{\partial\ln r_0}{\partial s_{Q_0}},\ \frac{\partial\ln r_0}{\partial n_{Q_0}}\right)=0. \tag{4.17}$$

Составим потенциал (4.1) с плотностью $\vec{g}^*(Q)$ и обозначим его через $\vec{u}^*(P)$. В силу равенств (4.9) (при $\alpha=\mu$), (4.7) и (4.8), из второго уравнения (4.17) интегрированием относительно s_{Q_0} получим

$$E_0=\frac{\partial u_2^*(M_0)}{\partial x}-\frac{\partial u_1^*(M_0)}{\partial y}=0. \tag{4.18}$$

Таким образом, в силу (4.17) и (4.18), $\vec{g}^*(Q_0)$ удовлетворяет системе (4.2_0), поэтому $A_i\vec{u}^*(Q_0)=0$, в силу чего по теореме единственности 3 § 1, $\vec{u}^*(P)=[-\varepsilon(y-y^{(0)}),\ \varepsilon(x-x^{(0)})]$, $P\in D_i$. Но согласно (4.18), $\varepsilon=\frac{E_0}{2}=0$ и $\vec{u}(P)=0$, когда $P\in D_i$. Отсюда аналогично сказанному выше вытекает, что $\vec{g}^*(Q_0)=0$.

4°. Аналогично предыдущего рассматривается случай, когда $\alpha=\mu$, $m\geqslant 1$ и S_0—окружность.

5°. Пусть $\alpha=-\mu$. Тогда решение задачи A_i, вместо (4.1), ищем в виде

$$\vec{u}(p)=\frac{1}{\pi}\int\limits_S \operatorname{grad}_Q \ln r g_1(Q)ds_Q+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_S \mathring{\Gamma}(P,\ Q)\vec{g}_0(Q)ds_Q+\frac{\vec{\gamma}(p)}{2s(D_i)}\int\limits_S g_1(Q)\,ds_Q, \tag{4.19}$$

где $\vec{g}(Q)=(g_1(Q),\ g_2(Q))$ — искомый вектор класса Гельдера, $\vec{g}_0(Q)=(\xi_s g_2,\ \eta_s g_2)$, $s(D_i)$—площадь D_i, $\vec{\gamma}(p)=(x,\ y)$.

Для определения $\vec{g}(Q)$ получается система интегральных уравнений Фредгольма

$$g_1(Q_0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_S\frac{\partial\ln r}{\partial n_{Q_0}}g_1(Q)\,ds_Q+\frac{1}{2}\int\limits_S\mathring{C}_{12}(Q_0,\ Q)g_2(Q)ds_Q+$$

$$+\frac{1}{2s(D_i)}(\xi_0\eta_{0s}-\eta_0\xi_{0s})\int\limits_S g_1(Q)\,ds_Q=F_1(Q_0), \tag{4.20}$$

$$g_2(Q_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_S\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}g_2(Q)\,ds_Q=F_2(Q_0).$$

Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$g_1(Q_0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_S\frac{\partial\ln r}{\partial n_{Q_0}}g_1(Q)\,ds_Q+\frac{1}{2}\int\limits_S\mathring{C}_{12}(Q_0,\ Q)g_2(Q)\,ds_Q+$$

$$+\frac{1}{2s(D_i)}(\xi_0\eta_{0s}-\eta_0\xi_{0s})\int\limits_S g_1(Q)ds_Q=0,$$

$$g_2(Q_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_S\frac{\partial\ln r}{\partial n_Q}g_2(Q)ds_Q=0. \tag{4.20$_0$}$$

Докажем, что (4.20_0) имеет только нулевое решение. Для этого заметим, что второе уравнение (4.20_0) является уравнением, соответствующим внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа; поэтому $g_2(Q_0)=0$ и первое уравнение (4.20_0) принимает вид

$$g_1(Q_0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}} g_1(Q)\, ds_Q + \\ + \frac{1}{2S(D_i)}(\xi_0\eta_{0s}-\eta_0\xi_{0s})\int\limits_S g_1(Q)\, ds_Q = 0. \tag{4.21}$$

Покажем, что и $g_1(Q_0)=0$. Интегрируя (4.21) по s_{Q_0}, получаем

$$\int\limits_S g_1(Q)\, ds_Q = 0, \tag{4.22}$$

в силу чего (4.21) примет вид

$$g_1(Q_0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}} g_1(Q) ds_Q = 0. \tag{4.23}$$

Отсюда в силу (4.22) легко получается, что $g_1(Q_0)=0$. Резюмируя установленные результаты, имеем следующие теоремы:

Теорема 1. Статическая задача A_i всегда разрешима единственным образом, если $\alpha\neq\mu$ или же если $\alpha=\mu$, но S_0 не является окружностью, и решение, при $\alpha\neq-\mu$, дается потенциалом (4.1), а при $\alpha=-\mu$, потенциалом (4.19).

Теорема 2. Если $\alpha=\mu$ и S_0—окружность, то статическая задача A_i разрешима лишь при условии (4.10), т. е. если на S_0 главный момент внешних усилий равен нулю; при этом решение с точностью поворота дается в виде (4.1).

Теорема 3. Статическая задача B_a всегда разрешима при $\alpha\neq-\mu$ и решение представляется потенциалом (4.4), если $\alpha\neq\mu$ или если $\alpha=\mu$, когда S_0 не окружность, и потенциалом (4.14), если $\alpha=\mu$ и S_0—окружность.

Ищем теперь решение статической задачи B_i, при $\alpha\neq-\mu$, в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int\limits_S [L_{\mathrm{II}}(P, Q; 0)-M_{\mathrm{II}}(P, Q; 0)]\vec{h}(Q) ds_Q, \tag{4.24}$$

или, что то же самое, в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int\limits_S \left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{rot}_Q \ln\frac{r}{R} h_2(Q)+[\mathring{\Gamma}(P, Q)-\mathring{\Gamma}(Q)-I]\, H(Q)\,\vec{h}(Q) ds_Q.\right.$$

Для определения $\vec{h}(Q)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$-\vec{h}(Q_0)+\frac{1}{2}\int\limits_s \Lambda_0(Q_0, Q)\vec{h}(Q)\, ds_Q = \vec{\Phi}(Q_0), \tag{4.25}$$

где

$$\Lambda_0(Q_0, Q) = \| \mathring{\Lambda}_{ij}(Q_0, Q) \|,$$

$$\mathring{\Lambda}_{11}(Q_0, Q) = \mathring{C}_{11}(Q, Q_0) + \frac{\rho(Q)}{\rho(Q_0)} \mathring{D}_{11}(Q_0, Q) -$$

$$-\frac{2\rho(Q)}{\pi\rho(Q_0)} \left(\frac{\partial \ln R}{\partial \eta} \xi_{0s} - \frac{\partial \ln R}{\partial \xi} \eta_{0s} \right),$$

$$\mathring{\Lambda}_{12}(Q_0, Q) = \mathring{C}_{21}(Q, Q_0) + \mathring{D}_{21}(Q_0, Q) -$$

$$-\frac{(\mu+\alpha)^2}{\rho(Q)\rho(Q_0)} [\mathring{\Gamma}_{11}(Q) + \mathring{\Gamma}_{21}(Q) + 2] \varkappa(Q_0, Q), \tag{4.26}$$

$$\mathring{\Lambda}_{21}(Q_0, Q) = \mathring{C}_{12}(Q, Q_0) + \mathring{D}_{12}(Q_0, Q) -$$

$$-[\mathring{\Gamma}_{11}(Q) + \mathring{\Gamma}_{22}(Q) + 2] \varkappa(Q_0, Q),$$

$$\mathring{\Lambda}_{22}(Q_0, Q) = \mathring{C}_{22}(Q, Q_0) + \frac{\rho(Q_0)}{\rho(Q)} \mathring{D}_{22}(Q_0, Q) -$$

$$-\frac{2}{\pi} \left(\frac{\partial \ln R}{\partial \eta} \xi_{0s} - \frac{\partial \ln R}{\partial \xi} \eta_{0s} \right).$$

Если решение статической задачи A_a, при $\alpha \neq -\mu$, будем искать в виде

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2} \int_S [L_{\text{I}}(P, Q; 0) - M_{\text{III}}(P, Q; 0)] \vec{g}(Q) \, ds_Q, \tag{4.27}$$

или, что то же самое, в виде

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{2}{\pi} \operatorname{grad}_Q \ln r \, g_1(Q) + [\mathring{\Gamma}(P, Q) - \mathring{\Gamma}(P) - I] \, G(Q) \, \vec{g}(Q) \right\} ds_Q,$$

то для определения $\vec{g}(Q)$ получим систему, союзную системе (4.25). При $\alpha = -\mu$ решение статической задачи B_i ищем в виде

$$\vec{v}(P) = \frac{1}{\pi} \int_S \operatorname{rot}_Q \ln r h_2(Q) ds_Q + \frac{1}{2} \int_S \mathring{\Gamma}(P, Q) \vec{h}^*(Q) ds_Q +$$

$$+ \frac{\vec{\delta}(p)}{2s(D_i)} \int_S h_2(Q) \, ds_Q, \tag{4.28}$$

где $\vec{h}(Q) = (h(Q), h_2(Q))$—неизвестный вектор класса Гельдера

$$\vec{h}^*(Q) = (\eta_s h_1 - \xi_s h_2), \; \vec{\delta}(p) = (-y, x).$$

Для определения $\vec{h}(Q)$ получим систему Фредгольма

$$h_1(Q_0) + \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\partial \ln r}{\partial n_{Q_0}} h_1(Q) ds_Q = -\Phi_1(Q_0),$$

$$-h_2(Q_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_S\frac{\partial \ln r}{\partial n_Q}h_2(Q)ds_Q+\frac{1}{2}\int\limits_S\overset{\circ}{C}_{12}(Q,\,Q_0)h_1(Q)ds_Q+$$

$$+\frac{\xi_0\eta_{0s}-\eta_0\xi_{0s}}{2s(D_i)}\int\limits_S h_2(Q)\,ds_Q=\Phi_2(Q_0).$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения, получим следующие теоремы:

Теорема 4. Если $\alpha\neq\mu$, или же если $\alpha=\mu$, но $m'=0$, то статическая задача B_i всегда разрешима и решение при $\alpha\neq-\mu$ представляется в виде (4.24), а при $\alpha=-\mu$ в виде (4.26).

Теорема 5. Если $\alpha\neq-\mu$ и $\alpha\neq\mu$, или если $\alpha=\mu$, но $m'=0$, тогда статическая задача A_a всегда разрешима и решение дается потенциалом (4.27). Если же $\alpha=\mu$ и $1\leqslant m'\leqslant m$, тогда задача разрешима лишь при условии, что главные моменты внешних усилий на каждом S_j $(j=1,\,2,\ldots,m')$ равны нулю.

§ 5. Динамические задачи. Спектр собственных частот

Ищем решение динамической задачи A_i, при $\alpha\neq-\mu$, в виде

$$\vec{u}(P)=\frac{1}{2}\int\limits_S\left[L_{\mathrm{I}}(P,\,Q;\,\omega)-M_{\mathrm{I}}(P,\,Q;\,\omega)\right]\vec{g}(Q)ds_Q\,. \tag{5.1}$$

Как в § 4, для определения $\vec{g}(Q)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\vec{g}(Q_0)+\frac{1}{2}\int\limits_S T(Q_0,\,Q;\,\omega)\,\vec{g}(Q)\,ds_Q=\vec{F}(Q_0), \tag{5.2}$$

где

$$T(Q_0,\,Q;\,\omega)=\|T_{ij}(Q_0,\,Q;\,\omega)\|,$$

$$T_{11}(Q_0,\,Q;\,\omega)=-\frac{\partial Y_0(k_1r)}{\partial n_{Q_0}}+\frac{2}{d}\,\frac{\partial J_0(k_1r)}{\partial n_{Q_0}}-$$

$$-\left[N_{11}(Q_0;\,\omega)\frac{\partial Y_0(k_1R)}{\partial\xi}+N_{12}(Q_0;\,\omega)\frac{\partial Y_0(k_1R)}{\partial\eta}\right]\eta_{0s}+$$

$$+\left[N_{21}(Q_0;\,\omega)\frac{\partial Y_0(k_1R)}{\partial\xi}+N_{22}(Q_0;\,\omega)\frac{\partial Y_0(k_1R)}{\partial\eta}\right]\xi_{0s}+$$

$$+(\mu+\alpha)\{\{[L_{11}(Q_0,\,Q;\,\omega)-M_{11}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\eta_{0s}-[L_{21}(Q_0,\,Q;\,\omega)-$$

$$-M_{21}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\xi_{0s}\}\xi_s+\{[L_{12}(Q_0,\,Q;\,\omega)-M_{21}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\eta_{0s}-$$

$$-[L_{22}(Q_0,\,Q;\,\omega)-M_{22}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\,\xi_{0s}\}\,\eta_{ss}\},$$

$$T_{12}(Q_0,\,Q;\,\omega)=\{[L_{11}(Q_0,\,Q;\,\omega)-M_{11}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\eta_{0s}-$$

$$-[L_{12}(Q_0,\,Q;\,\omega)-M_{21}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\xi_{0s}\}\xi_s+\{[L_{12}(Q_0,\,Q;\,\omega)-$$

$$-M_{12}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\eta_{0s}-[L_{22}(Q_0,\,Q;\,\omega)-M_{22}(Q_0,\,Q;\,\omega)]\,\xi_{0s}\}\eta_s\,,$$

$$T_{21}(Q_0, Q; \omega)=(\mu+\alpha)\left[\frac{1}{\rho(Q)}\frac{\partial Y_0(k_2 r)}{\partial s_Q}-\frac{1}{\rho(Q_0)}\frac{\partial Y_0(k_1 r)}{\partial s_{Q_0}}\right]-$$

$$-\frac{2(\mu+\alpha)}{d}\left[\frac{1}{\rho(Q)}\frac{\partial J_0(k_2 r)}{\partial s_Q}-\frac{1}{\rho(Q_0)}\frac{\partial J_0(k_1 r)}{\partial s_{Q_0}}\right]-$$

$$-\frac{(\mu+\alpha)}{\rho(Q_0)}\left\{\left[N_{11}(Q_0;\omega)\frac{\partial Y_0(k_1 R)}{\partial\xi}+N_{12}(Q_0;\omega)\frac{\partial Y_0(k_1 R)}{\partial\eta}\right]\xi_{0s}+\right.$$

$$\left.+\left[N_{21}(Q_0;\omega)\frac{\partial Y_0(k_1 R)}{\partial\xi}+\frac{\partial Y_0(k_1 R)}{\partial\eta}N_{22}(Q_0;\omega)\right]\eta_{0s}\right\}-$$

$$-\frac{2(\mu+\alpha)}{d}\left\{\left[\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\eta_0}L_{11}(Q;\omega)-\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\xi_0}L_{21}(Q;\omega)\right]\xi_{ss}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\eta_0}L_{12}(Q;\omega)-\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\xi_0}L_{22}(Q;\omega)\right]\eta_{ss}\right\}-$$

$$-\frac{2}{d}\left[\frac{\partial Y_0(k_1 R)}{\partial\xi}\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\eta_0}-\frac{\partial Y_0(k_1 R)}{\partial\eta}\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\xi_0}\right]+$$

$$+(\mu+\alpha)^2\{\{[L_{11}(Q_0, Q;\omega)-M_{11}(Q_0, Q;\omega)]\xi_{ss}+[L_{12}(Q_0, Q;\omega)-$$

$$-M_{12}(Q_0, Q;\omega)]\eta_{ss}\}\eta_{0ss}-\{[L_{21}(Q_0, Q;\omega)-M_{21}(Q_0, Q;\omega)]\xi_{ss}+$$

$$+[L_{22}(Q_0, Q;\omega)-M_{22}(Q_0, Q;\omega)]\eta_{ss}\}\xi_{0ss}\},$$

$$T_{22}(Q_0, Q;\omega)=\frac{\partial Y_0(k_2 r)}{\partial n_Q}-\frac{2}{d}\left\{\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\eta_0}L_{11}(Q;\omega)-\right.$$

$$-\left.\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\xi_0}L_{21}(Q;\omega)\right]\xi_s+\left[\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\eta_0}L_{12}(Q;\omega)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial J_0(k_2 R_0)}{\partial\xi_0}L_{22}(Q;\omega)]\eta_s\right\}-\frac{2}{d}\frac{\partial J_0(k_2 r)}{\partial n_Q}+$$

$$+(\mu+\alpha)\{\{[L_{11}(Q_0, Q;\omega)-M_{11}(Q_0, Q;\omega)]\eta_{0ss}-[L_{12}(Q_0, Q;\omega)-$$

$$-M_{12}(Q_0, Q;\omega)]\xi_{0ss}\}\xi_s+\{[L_{21}(Q_0, Q;\omega)-M_{21}(Q_0, Q;\omega)]\eta_{0ss}-$$

$$-[L_{22}(Q_0, Q;\omega)-M_{22}(Q_0, Q;\omega)]\xi_{0s}\}\eta_s\}.$$

Если решение динамической задачи B_a, при $\alpha\neq-\mu$, будем искать в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int_S[L_{\rm II}(P, Q;\omega)-M_{\rm IV}(P, Q;\omega)]\vec{h}(Q)ds_Q, \tag{5.3}$$

то для определения $\vec{h}(Q)$ получим систему, союзную системе (5.2).

Решение динамической задачи B_i, при $\alpha\neq-\mu$, ищем в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int_S[L_{\rm II}(P, Q;\omega)-M_{\rm II}(P, Q;\omega)]\vec{h}(Q)\,ds_Q, \tag{5.4}$$

где $\vec{h}(Q)=(h_1(Q),\ h_2(Q))$—искомый вектор; для определения последнего получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$-\vec{h}(Q_0)+\frac{1}{2}\int\limits_S \Lambda(Q_0,\ Q;\ \omega)\,\vec{h}(Q)\,ds_Q=\vec{\Phi}(Q_0), \tag{5.5}$$

где матрица $\Lambda(Q_0,\ Q;\ \omega)$ определяется аналогично $T(Q_0,\ Q;\ \omega)$.

Если решение динамической задачи A_a будем искать в виде

$$\vec{u}(P)=\frac{1}{2}\int\limits_S [L_{\mathrm{I}}(P,\ Q;\ \omega)-M_{\mathrm{III}}(P,\ Q;\ \omega)]\,\vec{g}(Q)ds_Q, \tag{5.6}$$

то для определения $\vec{g}(Q)$ получим систему, союзную системе (5.5).

Когда S_0—окружность и $\alpha=\mu$, решение задачи B_a, вместо (5.3), ищем в виде

$$\vec{v}(P)=\frac{1}{2}\int\limits_S [L_{\mathrm{II}}(P,\ Q;\omega)-M_{\mathrm{IV}}(P,\ Q;\ \omega)]\vec{h}(Q)ds_Q+$$
$$+E_1\mathrm{rot}_p PY_0(k_2\,r_0). \tag{5.7}$$

Для $\vec{h}(Q)$ получим систему интегральных уравнений

$$\vec{h}(Q_0)+\frac{1}{2}\int\limits_S T^*(Q_0,Q;\ \omega)\,\vec{h}(Q)\,ds_Q+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_S T_{\mathrm{I}}(Q_0,\ Q;\ \omega)\,\vec{h}(Q)\,ds_Q=\vec{\Phi}(Q_0), \tag{5.8}$$

где

$$\overset{\mathrm{I}}{T}_{11}(Q_0,\ Q;\ \omega)=\frac{2}{R'_0}\,\frac{\partial\ln r_0^*}{ds_Q}\,\frac{\partial Y_0(k_2\,r_0)}{ds_{Q_0}},$$

$$\overset{\mathrm{I}}{T}_{12}(Q_0,\ Q;\ \omega)=\frac{2}{R'_0}\,\frac{\partial\ln r_0^*}{dn_Q}\,\frac{\partial Y_0(k_2\,r_0)}{ds_{Q_0}},$$

$$T_{21}(Q_0,\ Q;\ \omega)=\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\ln r_0^*}{ds_Q}\,\frac{\partial Y_0(k_2\,r_0)}{dn_{Q_0}},$$

$$\overset{\mathrm{I}}{T}_{22}(Q_0;\ Q;\ \omega)=\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\ln r_0^*}{dn_Q}\,\frac{\partial Y_0(k_2\,r_0)}{dn_{Q_0}}.$$

В силу равенств (2.15), (2.24), (2.33), (2.34), легко можно показать, что

$$T(Q_0,\ Q;\ 0)=T_0(Q_0,\ Q);\quad \Lambda(Q_0,\ Q;\ 0)=\Lambda_0(Q_0,\ Q);$$
$$T_{\mathrm{I}}(Q_0,\ Q;\ 0)=\mathring{T}_{\mathrm{I}}(Q_0,\ Q); \tag{5.9}$$

поэтому однородные системы, соответствующие системам (5.1), (5.5) и (5.8), для $\omega=0$ совпадают с однородными системами, соответствующими системам (4.2), (4.25) и (4.16), вопрос о разрешимости которых рассмотрен в § 4. Так как ядра $T(Q_0, Q; \omega)$, $\Lambda(Q_0, Q; \omega)$ и $T_1(Q_0, Q; \omega)$ являются целыми функциями параметра ω, на основании теоремы Тамаркина [7], [8], следует:

Теорема 1. Если $\alpha \neq \mu$ и $\alpha \neq -\mu$, или же если $\alpha = \mu$, но S_0 не является окружностью, динамическая задача A_i разрешима для всех значений ω, кроме, быть может, дискретных. Если ω не принадлежит этому дискретному спектру, то решение дается потенциалом (5.1).

Теорема 2. Динамическая задача B_a, при $\alpha \neq -\mu$, разрешима для всех значений ω, кроме, быть может, дискретных. Если ω не принадлежит исключенному дискретному спектру, то решение дается или потенциалом (5.3) или потенциалом (5.7).

Теорема 3. Если $\alpha \neq -\mu$ и $\alpha \neq \mu$, или если $\alpha = \mu$, но $m' = 0$, то динамическая задача B_i разрешима для всех значений ω, кроме, быть может, дискретных. Если ω не принадлежит этому дискретному спектру, то решение дается в виде (5.4).

Теорема 4. Если $\alpha \neq -\mu$ и $\alpha \neq \mu$, или же если $\alpha = \mu$, но $m' = 0$, то динамическая задача A_a разрешима для всех значений ω, кроме, быть может, дискретных и решение дается в виде (5.6).

Наконец заметим, что результаты, полученные в § 5, дают возможность построить статические тензоры Грина и с их помощью дать доказательство существования дискретного спектра для задач A и B в исключенных выше случаях, а также вывести асимптотические формулы для фундаментальных функций. Эти результаты будут опубликованы в нашей следующей статье.

§ 6. Особый случай

В этом параграфе рассматривается тот особый случай, когда контур S_0 отсутствует. В этом случае D_i обозначает совокупность областей $D_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. $D_i = \sum_{j=1}^{m} D_i^{(j)}$, а D_a дополняет $D_i + S$ до полной плоскости и $S = \sum_{j=1}^{m} S_j$. Начало координат лежит в одной из $D_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. С помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным, получаются следующие выводы:

1°. Если $\alpha \neq \mu$, или же если $\alpha = \mu$, но ни один из контуров S_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ не является окружностью (т. е. $m' = 0$), то статическая задача A_i имеет единственное решение, которое представляется при $\alpha \neq -\mu$ в виде (4.1), а при $\alpha = -\mu$ в виде (4.19).

2°. Если $\alpha = \mu$ и $1 \leqslant m' \leqslant m$ (т. е. среди $s_1, \ldots, s_m$, m' контуров являются окружностями), то статическая задача A_i разрешима тогда и только тогда, когда главный момент внешних усилий на каждом S_j $(j = 1, 2, \ldots, m')$ равен нулю. Решение с точностью поворота представляется в виде (4.1).

3°. Статическая задача B_i имеет единственное решение и решение при $\alpha \neq -\mu$ представляется в виде (4.24), а при $\alpha = -\mu$, в виде (4.28).

4°. Статическая задача A_a, при $\alpha \neq -\mu$ имеет единственное решение и оно представляется в виде (4.27).

5°. Статическая задача B_a, при $\alpha \neq -\mu$, имеет единственное решение. Если $\alpha \neq \mu$, или же если $\alpha = \mu$, но $m' = 0$, то решение представляется в виде (4.4), а если $\alpha = \mu$ и $1 \leqslant m' \leqslant m$ в виде

$$\vec{v}(P) = \frac{1}{2}\int_S [L_{\mathrm{II}}(P, Q; 0) - M_{\mathrm{IV}}(P, Q; 0)]\vec{h}(Q)\, ds_Q +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m'} E_1^{(j)} \operatorname{rot} \ln r_0^{(j)}, \tag{6.1}$$

где

$$E_1^{(j)} = -\frac{2}{\mu\pi}\int_S \left[\frac{\partial \ln r_0^{*\,(j)}}{\partial s_Q} h_1(Q) + \frac{\partial \ln r_0^{*\,(j)}}{\partial n_Q} h_2(Q)\right] ds_Q,$$

$r_0^{*\,(j)} = r(Q; M^{(j)})$, $r_0^{(j)} = r(P, M^{(j)})$, $M^{(j)}(x^{(j)}, y^{(j)})$—центры S_j $(j = 1, 2, \ldots, m')$.

6°. Если $\alpha \neq \mu$, $\alpha \neq -\mu$, или если $\alpha = \mu$, но $m' = 0$, то динамическая задача A_i разрешима почти для всех значений ω и решение дается в виде (5.1).

7°. Динамическая задача B_i разрешима почти для всех значений ω и решение дается в виде (5.4) или в виде, аналогичном (5.7) и (6.1).

8°. Динамические задачи A_a и B_a разрешимы для всех значений ω, если решения на бесконечности удовлетворяют условиям излучения. Эти решения имеют, соответственно, вид

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2i}\int_S \Gamma_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)\vec{g}(Q)\, ds_Q + \frac{1}{2i}\int_S \Gamma_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)\vec{\gamma}(Q)\, ds_Q,$$

$$\vec{v}(P) = \frac{1}{2i}\int_S \Gamma_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)\vec{h}(Q)\, ds_Q + \frac{1}{2i}\int_S \Gamma_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)\vec{\delta}(Q)\, ds_Q,$$

где матрицы $\Gamma_{\mathrm{I}}(P, Q; \omega)$ и $\Gamma_{\mathrm{II}}(P, Q; \omega)$ и векторы $\vec{\gamma}(Q)$, $\vec{\delta}(Q)$ определены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Квиникадзе. О существовании решений некоторых плоских граничных задач теории установившихся колебаний изотропного упругого тела. Труды Тбилисского гос. университета, т. 117 (1966), стр. 295—331.

2. Г. П. Квиникадзе. Третья и четвертая граничные задачи плоской теории упругости для установившихся колебаний изотропных тел. Сообщ. АН ГССР, т. 32, № 3 (1963), стр. 535—542.

3. В. Д. Купрадзе. Методы потенциала в теории упругости. Москва (1963).

4. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. Часть I, М. (1949).

5. L. Lichtenstein. Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Enc. d. math. Wiss., Bd. II, 3, p. 176.
6. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва (1962).
7. J. D. Tamarkin. On Fredholm's integral equationns, whose kernels are analytic in a parameter. Ann. Mat. Ser. 2, vol. 28 (1927), p. 127—152.
8. Д. Ф. Харазов. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ядро которых мероморфная функция параметра. Труды Тбилисского матем. ин-та АН ГССР, т. 13 (1944), стр. 139—152.

Кафедра
математического анализа

(Поступило в редакцию 4. X. 1966)

გ. კვინიკაძე

დრეკადობის თეორიის განზოგადებული შერეული სასაზღვრო ამოცანების საკუთარი სიხშირის სპექტრის არსებობის შესახებ მრავლადბმული არეების შემთხვევაში

რეზიუმე

შრომაში პოტენციალთა თეორიისა და ინტეგრალური განტოლებათა თეორიის მეთოდით შესწავლილია იზოტროპული დრეკადი ტანის ბრტყელი განზოგადებული შერეული სასაზღვრო ამოცანები მრავლადბმული არეებისათვის. ეს ამოცანები და მათი ექვივალენტური A და B ამოცანები ჩამოყალიბებულია ჩვენს შრომაში [1]. აღნიშნული ამოცანებისათვის დამტკიცებულია ერთადერთობის თეორემები სტატიკის როგორც შიგა, ისე გარე ამოცანებისათვის. სტატიკის შემთხვევაში სათანადო ამოცანებისათვის მიღებულია ურთიერთმიკავშირებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლებათა სისტემები და დამტკიცებულია ამოხსნის არსებობის თეორემები. რხევის შემთხვევაში მიღებულია ცხადი სახის ისეთი ინტეგრალური განტოლებათა სისტემები, რომლებიც, როცა რხევის სიხშირე $\omega=0$, ემთხვევიან სათანადო სტატიკის განტოლებებს. ამის საფუძველზე, ტამარკინის თეორემის გამოყენებით, დამტკიცებულია დისკრეტული სპექტრის არსებობა.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

ლია აგალიშვილი

შენიშვნა სტოქსის და ოზენის სტაციონარული და არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალურ ამოხსნებს შორის დამოკიდებულების შესახებ

შრომაში მოცემულია ლაპლასის და სითბოგამტარობის განტოლებების ფუნდამენტალურ ამოხსნებს შორის დამოკიდებულებები, როგორც სიბრტყის, ისე სივრცის შემთხვევაში. გარდა ამისა, მიღებულია დამოკიდებულება სტოქსის სტაციონარულ და სათანადო არასტაციონარულ განტოლებების ფუნდამენტალურ ამოხსნებს შორის სიბრტყის შემთხვევაში.

ოზენის განტოლებებისათვის სივრცის შემთხვევაში დამოკიდებულება წარმოდგენილია V თეორემით, ხოლო სიბრტყის შემთხვევა განხილულია შრომაში [3].

ქვემოთ ვსარგებლობთ შემდეგი აღნიშვნებით:

$\vec{u}$ — სითხის სტაციონარული მოძრაობის სიჩქარე,

$\vec{v}$ — სითხის არასტაციონარული მოძრაობის სიჩქარე,

p — ჰიდროდინამიკური წნევა,

ν — სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი,

ρ — სიმკვრივე,

s — კომპლექსური ცვლადი,

$\Phi=\frac{r^2}{\nu t}\ln r$ — სტოქსის სტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნების წარმომქმნელი ფუნქცია, ხოლო

$$\Psi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{r^2}{4\nu t}}\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha$$ — სტოქსის არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნების წარმომქმნელი ფუნქცია.

1. ლაპლასისა და სითბოგამტარობის განტოლებების ფუნდამენტალურ ამოხსნებს შორის დამოკიდებულებები

$\frac{1}{t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$ და $\frac{1}{r}$ ფუნქციებს შორის არსებობს დამოკიდებულება

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \frac{dt}{t^{3/2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \frac{1}{r}.$$

ადვილად ვაჩვენებთ აგრეთვე, რომ არსებობს $\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$ ფუნქციის ლაპლასის გადასახვის მნიშვნელობა s კომპლექსური სიბრტყის კოორდინატთა სათავეში და ეს მნიშვნელობა კვლავ $2\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\frac{1}{r}$-ის ტოლია; მართლაც, გვაქვს

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\nu t}-st} \frac{dt}{t^{3/2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{-r\sqrt{\frac{s}{4\nu}}} \cdot \frac{1}{r};$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{s=0} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\nu t}-st} \frac{dt}{t^{3/2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \frac{1}{r}. \tag{2}$$

განვიხილოთ ახლა სიბრტყეზე სითბოგამტარობის განტოლების ამოხსნა $\frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$ და ლაპლასის განტოლების ამოხსნა $\ln r$. შევნიშნოთ, რომ (1) და (2) დამოკიდებულების ანალოგიური დამოკიდებულება ამ ფუნქციებს შორის არა გვაქვს, მაგრამ არსებობს დამოკიდებულება

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}-st} dt = 2K_0\left(\sqrt{\frac{s}{4\nu}}\, r\right);$$

უკანასკნელი წარმოადგენს $\frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$ ფუნქციის ლაპლასის გადასახვას. არგუმენტის მცირე მნიშვნელობებისათვის სამართლიანია შემდეგი გამწკრივება:

$$K_0\left(\sqrt{\frac{s}{4\nu}}\, r\right) = \ln r + \ln\sqrt{s} + \lambda(r, s),$$

სადაც $\lambda(r, s)$ ფუნქცია რეგულარულია $r=0$, $s=0$ წერტილში. ორი უკანასკნელი ფორმულიდან ვღებულობთ

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} dt = 2\ln r + \ln s + 2\lambda(r, s).$$

აქედან აშკარაა, რომ $\frac{1}{t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$ ფუნქციის გადასახვის სინგულარული ნაწილი $\ln r$-ის ტოლია სასრულო წერტილებში, გარდა $s=0$ წერტილისა; $s=0$ წერტილში გადასახვას ლოგარითმული განსაკუთრებულობა აქვს.

2. სტოქსის სტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნები და მათი წარმომქმნელი ფუნქცია

განვიხილოთ სტოქსის სტაციონარული განტოლებები

$$\nu\Delta u_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad (j=1, 2),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

რომელთა ფუნდამენტალური ამოხსნები აგებულია ოზენის მიერ; მათ აქვთ შემდეგი სახე ([1], გვ. 29):

$$u_{jk} = \delta_{jk}\,\Delta\,\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_k},$$

$$P_k = 2\nu\rho\frac{x_k - \xi_k}{r^2}, \quad (j, k=1, 2), \tag{3}$$

სადაც

$$\Phi = \frac{r^2}{4\nu}\ln r. \tag{4}$$

ეს ფუნქცია, ცხადია, აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$\Delta\Delta\,\Phi = 0, \quad \nu\Delta\Phi = \ln\frac{1}{r} - 1. \tag{5}$$

3. სტოქსის არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნები და მათი წარმომქმნელი ფუნქცია

განვიხილოთ სტოქსის არასტაციონარული განტოლებები:

$$\nu\,\Delta\,v_j - \frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (j=1,2),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0,$$

რომელთა ფუნდამენტალური ამოხსნები აგებული იყო ოზენის მიერ; მათ აქვთ შემდეგი სახე ([1], გვ. 55):

$$v_{jk} = \delta_{jk}\,\Delta\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_j\,\partial x_k}, \quad (j, k=1, 2), \tag{6}$$

$$P_k = -\rho \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nu \Delta \Psi\right),$$

სადაც

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}} \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha. \tag{7}$$

ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$\Delta\left(\nu\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = 0,$$

$$\Delta\Psi = \frac{1}{t}\, e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{8}$$

4. Ψ ფუნქციის გადასახვა

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}} \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha$$

ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}} d\alpha \int_0^1 e^{-\beta\alpha}\, d\beta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r^2}{4\nu}} d\gamma \int_0^1 \frac{e^{-\beta \frac{\gamma}{t}}}{t}\, d\beta;$$

ამ ფუნქციიდან $(0, \infty)$ შუალედში დროით ინტეგრალი არ არსებობს. მოვძებნოთ ამ ფუნქციის ლაპლასის გადასახვა

$$\overline{\Psi}(r, s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \Psi(r, t)\, dt.$$

ცხადია, რომ

$$\overline{\Psi}(r, s) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r^2}{4\nu}} d\gamma \int_0^1 d\beta \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\beta\gamma}{t} + st\right)} \frac{dt}{t}.$$

ცნობილია ტოლობა

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{a}{t} + bt\right)} \frac{dt}{t} = 2\, K_0\left(\sqrt{ab}\right),\ (a>0,\ b>0).$$

უკანასკნელი ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\overline{\Psi}=\int_0^{\frac{r^2}{4\nu}} d\gamma \int_0^1 K_0\left(\sqrt{\beta\gamma s}\right) d\beta.$$

$\gamma=\frac{r^2}{4\nu}$ ცვლადის ჩასმით მივიღებთ

$$\overline{\Psi}=\frac{r^2}{4\nu}\int_0^1 d\delta\int_0^1 K_0\left(\sqrt{\frac{\delta\beta s}{4\nu}}\,r\right)d\beta. \tag{9}$$

ამგვარად, საბოლოოდ გვაქვს

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}}\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha \doteq \frac{r^2}{4\nu}\int_0^1 d\delta\int_0^1 K_0\left(\sqrt{\frac{\delta\beta s}{4\nu}}\,r\right)d\beta.$$

5. დამოკიდებულება Φ და $\overline{\Psi}$ ფუნქციებს შორის

(9) ფორმულა გვაძლევს

$$\overline{\Psi}(r, s)=\frac{r^2}{4\nu}\int_0^1 d\delta\int_0^1\left[\ln r+\ln\sqrt{s}+\ln\sqrt{\beta}+\ln\sqrt{\delta}+\lambda(r, s, \beta, \delta)\right]d\beta,$$

სადაც λ ფუნქცია რეგულარულია $r=s=\beta=\delta=0$ წერტილში. უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ

$$\overline{\Psi}=\frac{r^2}{4\nu}(\ln r+\ln\sqrt{s}+\mu(r, s),$$

სადაც $\mu(r, s)$ ფუნქცია მეორე რიგის წარმოებულებითურთ რეგულარული ფუნქციაა $r=s=0$ წერტილში. (4) და უკანასკნელი ფორმულები მოგვცემენ

$$\overline{\Psi}(r, s)=\Phi(r)+\frac{r^2}{4\nu}\ln\sqrt{s}\,\mu(r, s).$$

აქედან ცხადია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 1. სტოქსის არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნების წარმომქმნელი ფუნქციის გადასახვის სინგულარული ნაწილი სათანადო სტაციონარული განტოლებების წარმომქმნელი ფუნქციის ტოლია, ყოველი დადებითი სასრული s-სათვის, გარდა $s=0$ წერტილისა; $s=0$ წერტილში გადასახვას ლოგარითმული განსაკუთრებულობა აქვს.

6. დამოკიდებულება $\Delta\Phi$-სა და $\Delta\overline{\Psi}$-ს შორის

(4) და (7) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\Delta\Psi=\frac{1}{t}\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

ხოლო

$$\Delta\Phi = 2\ln r.$$

ამ ფორმულების საფუძველზე ადვილად მიიღება

თეორემა 2. $\Delta\overline{\Psi}$ ფუნქციის გადასახვის სინგულარული ნაწილი $\Delta\Phi$ ფუნქციის ტოლია ყოველ წერტილში, გარდა $s=0$ წერტილისა; $s=0$ წერტილში გადასახვას ლოგარითმული განსაკუთრებულობა აქვს.

7. სტოქსის და ოზენის არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნების გადასახვასა და სათანადო სტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალურ ამოხსნებს შორის დამოკიდებულება

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 3. სტოქსის არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნების გადასახვა და სათანადო სტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამოხსნები განსხვავდებიან მხოლოდ რეგულარული ნაწილით ნამდვილი ღერძის ყოველ დადებით s-სათვის, გარდა $s=0$ წერტილისა; $s=0$ წერტილში გადასახულ ფუნქციებს აქვთ ლოგარითმული განსაკუთრებულობა.

თეორემის დასამტკიცებლად (10) ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\left[\frac{r^2}{4\nu}\ln\sqrt{s} + \mu(r,s)\right].$$

თეორემა 2-ის თანახმად გვაქვს

$$\Delta\overline{\Psi} = \Delta\Phi + \frac{r^2}{4\nu}\ln\sqrt{s} + \lambda(r,s).$$

ორი უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ

$$\delta_{jk}\Delta\overline{\Psi} - \frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial x_j\,\partial x_k} = \delta_{jk}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\,\partial x_k} + \delta_{jk}\left[\frac{r^2}{4\nu}\ln\sqrt{s} + \lambda(r,s)\right] -$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\left[\frac{r^2}{4\nu}\ln\sqrt{s} + \mu(r,s)\right],$$

სადაც $\lambda(r,s)$ ფუნქცია და $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\mu(r,s)$ ფუნქციები რეგულარულია $r=0$, $s=0$ წერტილში. უკანასკნელი ფორმულიდან უშუალოდ ჩანს თეორემა 3-ის სამართლიანობა.

ოზენის განტოლებების შემთხვევაში ადვილი დასამტკიცებელია

თეორემა 4. არსებობს ოზენის არასტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამონახსნის გადასახვა [2] და ამ გადასახვის მნიშვნელობა კომპლექსური სიბრტყის კოორდინატთა სათავეში იმ შემთხვევაში, როცა $U(t)=\text{const}$ სათანადო სტაციონარული განტოლებების ფუნდამენტალური ამონახსნის ტოლია.

ლიტერატურა

1. C. W. Oseen. Hydrodynamik, Leipzig, 1927.

2. Л. Е. Авалишвили. Фундаментальные решения нестационарных уравнений Озеена. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XII, № 7 (1951).

3. ლ. ავალიშვილი. ბლანტი სითხის ბრტყელი არასტაციონარული მოძრაობის გაწრფივებული განტოლებათა კერძო ამოხსნები. საქ. მეცნ. აკადემიის მოამბე 24, № 4 (1960), გვ. 391—394.

თბილისის სახ. უნივერსიტეტი,
კიბერნეტიკის პრობლემური ლაბორატორია

(რედაქციაში შემოვიდა 9. IX. 1966)

Л. Э. АВАЛИШВИЛИ

ЗАМЕТКА О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СТОКСА И ОЗЕЕНА

Резюме

В заметке установлена взаимосвязь между фундаментальными решениями стационарных и соответствующих нестационарных уравнений Стокса на плоскости. Аналогичная взаимосвязь для уравнений Озеена в пространстве представлена теоремой 4; плоский случай рассмотрен в [3].

В упомянутых случаях преобразование Лапласа фундаментальных решений нестационарных уравнений содержит как сингулярную часть фундаментальные решения соответствующих стационарных уравнений.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Н. П. ДЖОРБЕНАДЗЕ

О СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ ДИФФУЗОРЕ

Рассмотрим ламинарное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области, ограниченной двумя неподвижными прямолинейными простыми стенками, которые пересекаются под углом 2α. Предполагаем, что эти стенки однородно пористые.

Задачам ламинарного течения вязкой жидкости в диффузорах, когда граничные стенки непроницаемы, посвящены работы [1—4] и другие.

Будем при изучении течения пользоваться цилиндрическими координатами r, ϑ, z с началом в точке O, где пересекаются продолжения плоскостей. Граничные стенки в направлении оси Oz простираются до бесконечности.

Жидкость поступает в просвете между стенками через входное $(r=r_0)$ сечение и движется по направлению Or. Положим, что жидкость одновременно просачивается через поры стенок. Закон просачивания через поры стенок считаем известным.

Считая скорость проницаемости через поры стенки малой, по сравнению с продольной скоростью, будем пренебрегать в уравнениях Навье-Стокса всеми слагаемыми, содержащими компоненту скорости v_ϑ в качестве множителя, или под знаком производной по r.

Дифференциальные уравнения движения жидкости в цилиндрических координатах, при отсутствии массовых сил, в рассматриваемом случае имеют вид [2]

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\vartheta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}-\frac{v_r}{r^2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta}=\nu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial\vartheta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}-\frac{v_\vartheta}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}=0,$$

где ρ—плотность жидкости, p—давление, ν—кинематический коэффициент вязкости, v_r и v_ϑ —компоненты скорости.

Компоненты скорости v_r и v_ϑ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$v_r=|_{\vartheta=\pm\alpha}=0, \quad v_\vartheta\,|_{\vartheta=-\alpha}=u_1, v_\vartheta\,|_{\vartheta=\alpha}=u_2, \tag{2}$$

где u_1 и u_2—скорости просачивания жидкости через поры стенки.

Наряду с граничными условиями (2) еще должно быть удовлетворено условие в начальном сечении, а именно

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} v_r\,|_{r=r_0}\, d\vartheta=2\alpha v_0, \tag{2a}$$

где v_0—средняя скорость в начальном сечении.

Из третьего уравнения системы (1) видно, что существует функция $\psi(r, \vartheta)$, удовлетворяющая условиям

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \quad v_\vartheta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{3}$$

Для определения функции $\psi(r, \vartheta)$, в силу (1) и (3), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\right)+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4\psi}{\partial\vartheta^4}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\vartheta^2\,\partial r}-$$

$$-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\vartheta^2\,\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)-\frac{1}{\nu r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\right)=0. \tag{4}$$

В силу (2), (2a) и (3) граничные условия для $\psi(r, \vartheta)$ примут вид

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pm\alpha}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{\vartheta=-\alpha}=-u_1, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{\vartheta=\alpha}=-u_2,$$

$$\psi(r_0, \alpha)-\psi(r_0, -\alpha)=2\alpha r_0 v_0. \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) будем искать в виде

$$\psi(r, \vartheta)=f(\vartheta)+r\varphi(\vartheta), \tag{6}$$

где $f(\vartheta)$ и $\varphi(\vartheta)$—новые неизвестные функции.

В силу (4), (5) и (6) относительно $f(\vartheta)$ и $\varphi(\vartheta)$ получим уравнения

$$\frac{d^4 f}{d\vartheta^4}=a_1\frac{d^2 f}{d\vartheta^2}\cdot\frac{df}{d\vartheta}+a_2\frac{d^2 f}{d\vartheta^2}, \tag{7}$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\vartheta^4}=b_1\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}+b_2\frac{d\varphi}{d\vartheta}+b_3\varphi(\vartheta), \tag{8}$$

и граничные условия

$$f(\alpha)-f(-\alpha)=\omega_0, \quad \left.\frac{df}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=\pm\alpha}=0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=\pm\alpha}=0, \quad \varphi(-\alpha)=-u_1, \quad \varphi(\alpha)=-u_2, \tag{10}$$

где

$$a_1=-\frac{2}{\nu}, \quad a_2=-4, \quad b_1=-2-\frac{1}{\nu}\frac{df}{d\vartheta},$$

$$b_2=-\frac{1}{\nu}\frac{d^2f}{d\vartheta^2}, \quad b_3=-1, \quad \omega_0=r_0(2\alpha v_0+u_2-u_1).$$

Решение уравнения (7), при граничных условиях (9), можем представить в виде

$$f(\eta)=F(\vartheta)+\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[a_1\frac{d^2f}{d\eta^2}\frac{df}{d\eta}+a_2\frac{d^2f}{d\eta^2}\right]G(\vartheta,\eta)d\eta, \tag{11}$$

где

$$F(\vartheta)=-\frac{\omega_0}{4\alpha^3}\vartheta^3+\frac{3\omega_0}{4\alpha}\vartheta,$$

а $G(\vartheta,\eta)$—функция Грина оператора $\frac{d^4}{d\vartheta^4}$ [5].

Вместо уравнения (11) рассмотрим уравнение

$$f(\vartheta)=F(\vartheta)+\delta\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[a_1\frac{d^2f}{d\eta^2}\frac{df}{d\eta}+a_2\frac{d^2f}{d\eta^2}\right]G(\vartheta,\eta)\,d\eta, \tag{12}$$

где δ—действительный параметр. Из (12) при $\delta=1$ получим (11).

Дифференцируя (12) два раза по ϑ, получим

$$\frac{df}{d\vartheta}=\frac{dF}{d\vartheta}+\delta\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[a_1\frac{d^2f}{d\eta^2}\frac{df}{d\eta}+a_2\frac{d^2f}{d\eta^3}\right]\frac{\partial G(\vartheta,\eta)}{\partial\vartheta}d\eta,$$

$$\frac{d^2f}{d\vartheta^2}=\frac{d^2F}{d\vartheta^2}+\delta\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[a_1\frac{d^2f}{d\eta^2}\frac{df}{d\eta}+a_2\frac{d^2f}{d\eta^2}\right]\frac{\partial G(\vartheta,\eta)}{\partial\vartheta}d\eta.$$

Равенства (13) образуют систему нелинейных интегральных уравнений для неизвестных $\frac{df}{d\vartheta}$ и $\frac{d^2f}{d\vartheta^2}$.

Будем искать эти функции в виде рядов

$$\frac{df}{d\vartheta}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^kU_k, \quad \frac{d^2f}{d\vartheta^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^kV_k. \tag{14}$$

Для определения коэффициентов этих рядов получаем рекуррентные формулы

$$U_0=\frac{dF}{d\vartheta}, \quad V_0=\frac{d^2F}{d\vartheta^2},$$

$$U_{k+1}=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[a_1\sum_{m=0}^{k}U_m V_{k-m}+a_2 V_k\right]\frac{\partial G}{\partial\vartheta}\,d\eta.$$

$$V_{k+1}=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[a_1\sum_{m=0}^{k}U_m V_{k-m}+a_2 V_k\right]\frac{\partial^2 G}{\partial\vartheta^2}\,d\eta. \tag{15}$$

Используя способ Одквиста [6], докажем сходимость рядов (14).

Пусть A, B и D_0—постоянные, такие, что

$$D_0=\max\left\{\left|\frac{dF}{d\vartheta}\right|,\ \left|\frac{d^2F}{d\vartheta^2}\right|\right\},\quad B=\max\{\,|a_1|,\ |a_2|\},$$

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left|\frac{\partial G}{\partial\vartheta}\right|d\eta,\quad \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left|\frac{\partial^2 G}{\partial\vartheta^2}\right|d\eta\leqslant A. \tag{16}$$

В силу (15) и (16) имеем

$$|U_0|\,,\ |V_0|\leqslant D_0,$$

$$|U_1|\,,\ |V_1|\leqslant ABD_0+ABD_0^2=D_1,$$

продолжая этот процесс оценки, получим

$$|U_{k+1}|\,,\ |V_{k+1}|\leqslant ABD_k+AB\sum_{m=0}^{k}D_m D_{k-m}=D_{k+1}.$$

Таким образом, мажоранта рядов (14) имеет вид

$$D=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k D_k,\quad D_k=ABD_{k-1}+AB\sum_{m=0}^{k-1}D_m D_{k-m-1}. \tag{17}$$

Если (17) сходится, то D удовлетворяет квадратичному уравнению

$$D=D_0+ABD\delta+AB\delta D^2,$$

откуда получаем

$$D=\frac{1-AB\delta-\sqrt{(1-A\delta B)^2-4ABD_0\delta}}{2AB\delta}. \tag{18}$$

Легко усмотреть, что для сходимости мажорантного ряда, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$2\sqrt{AB\delta D_0}+AD\delta\leqslant 1. \tag{19}$$

В этом можно убедиться разложением выражения (18) в ряд по степеням δ, в результате чего получим ряд (17). Отсюда ясно, что при соблюдении неравенства (19) ряды (17) сходятся абсолютно и равномерно для $-\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\alpha$.

Так как в (8) $f(\vartheta)$ можно считать уже известной функцией, то это уравнение линейно относительно $\varphi(\vartheta)$.

Для определения $\varphi(\vartheta)$ получаем

$$\varphi(\vartheta)=\Phi(\vartheta)+\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[b_1\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}+b_2\frac{d\varphi}{d\eta}+b_3\varphi(\eta)\right]G(\vartheta,\eta)d\eta, \tag{20}$$

где

$$\Phi(\vartheta)=\frac{u_2-u_1}{4\alpha^3}\vartheta^3+\frac{3(u_1-u_2)}{4\alpha}\vartheta-\frac{u_1+u_2}{2}.$$

Из (20) после дифференцирования имеем

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta}=\frac{d\Phi}{d\vartheta}+\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[b_1\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+b_2\frac{d\varphi}{d\eta}+b_3\varphi(\eta)\right]\frac{\partial G}{\partial\vartheta}d\eta,$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}=\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2}+\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[b_1\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+b_2\frac{d\varphi}{d\eta}+b_3\varphi(\eta)\right]\frac{\partial^2 G}{\partial\vartheta^2}d\vartheta. \tag{21}$$

Таким образом, мы получили систему (20) и (21) линейных интегральных уравнений для неизвестных $\varphi(\vartheta)$, $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$ и $\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}$.

Рассмотрим систему с параметром δ и решение будем искать в виде рядов

$$\varphi(\vartheta)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k U_k,\quad \frac{d\varphi}{d\vartheta}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k U_k,\quad \frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k W_k. \tag{22}$$

Для определения коэффициентов этих рядов получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$U_0=\Phi(\vartheta),\qquad V_0=\frac{d\Phi}{d\vartheta},\qquad W_0=\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2},$$

$$U_{k+1}=\int_{-\alpha}^{\alpha}[b_1W_k+b_2V_k+b_3U_k]G(\vartheta,\eta)\,d\eta,$$

$$V_{k+1}=\int_{-\alpha}^{\alpha}[b_1W_k+b_2V_k+b_3U_k]\frac{\partial G}{\partial\vartheta}\,d\eta,$$

$$W_{k+1}=\int_{-\alpha}^{\alpha}[b_1W_k+b_2V_k+b_3U_k]\frac{\partial^2 G}{\partial\vartheta^2}\,d\vartheta.$$

Пусть M и N—постоянные, такие, что

$$M=\max\{|b_1|,\ |b_2|,\ |b_3|\},\ N=\max\left\{|\Phi|,\left|\frac{d\Phi}{d\vartheta}\right|,\left|\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2}\right|\right\}.$$

Тогда при соблюдении условия

$$AM<\frac{1}{3},\quad \delta=1,$$

сходимость рядов (22) будет обеспечена.

Если радиальную скорость, входящую в качестве множителя в левой части первого уравнения (1), заменим ее средним значением [4]

$$v_r = \frac{Q}{2\alpha r},$$

где Q—полный расход жидкости через сечение диффузора, решение задачи получим в явном виде в элементарных функциях.

При таком допущении для $f(\vartheta)$ и $\varphi(\vartheta)$ получаем следующие линейные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^4 f}{d\vartheta^4} + \left(4 + \frac{Q}{2\alpha\nu}\right)\frac{d^2 f}{d\vartheta^2} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\vartheta^4} + 2\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2} + \varphi(\vartheta) = 0. \tag{24}$$

Решение задачи (23), (9) дается формулой

$$f(\vartheta) = \frac{\omega_0 \vartheta \beta \cos\beta\alpha}{2(\beta\alpha\cos\beta\alpha - \sin\beta\alpha)} + \frac{\omega_0 \sin\beta\alpha}{2(\sin\beta\alpha - \beta\alpha\cos\beta\alpha)} + C,$$

где $\beta = \sqrt{4 + \frac{Q}{2\alpha\nu}}$,

C—остается произвольной, но закон распределения скорости, очевидно, не зависит от нее.

Из (24) и (10) определим

$$\varphi(\vartheta) = \frac{u_1 - u_2}{2\alpha - \sin 2\alpha}[\omega\cos\alpha\cos\vartheta + (\alpha\sin\alpha - \cos\alpha)\sin\vartheta] -$$

$$- \frac{u_1 + u_2}{2\alpha + \sin 2\alpha}[\vartheta\sin\alpha\sin\vartheta + (\sin\alpha + \alpha\cos\alpha)\cos\vartheta]. \tag{26}$$

Найдем теперь выражение для давления. С этой целью подставим найденные значения

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{df}{d\vartheta} + \frac{d\varphi}{d\vartheta}, \quad v_\vartheta = -\varphi(\vartheta),$$

в систему (1) и разрешим полученную систему относительно p. Получим

$$p = \frac{1}{2}\left[\mu\frac{d^3 f}{d\vartheta^3} + \rho\left(\frac{df}{d\vartheta}\right)^2\right]\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \left(\mu\frac{d^3\varphi}{d\vartheta^3} + \mu\frac{d\varphi}{d\vartheta} +\right.$$

$$\left. + \rho\frac{d\varphi}{d\vartheta}\frac{df}{d\vartheta}\right)\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{r^2}\right)\left[\frac{d\varphi}{d\vartheta} - \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta_0}\right] +$$

$$+ \frac{2\mu}{r^2}\left[\frac{df}{d\vartheta} + \left(\frac{df}{d\vartheta}\right)_{\vartheta_0}\right] + \frac{1}{r}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\varphi(\vartheta)d\vartheta + C.$$

В силу (25) и (26) можем написать

$$p-p_0=\frac{1}{2}\,\mu\beta^2 A_5\cos\beta\vartheta+\rho A_6^2(\vartheta)\,]\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)+$$

$$+[2\mu A_2\sin\alpha\sin\vartheta+2\mu A_1\cos\alpha\cos\vartheta+\rho A_1A_3(\vartheta)A_6+$$

$$+\rho A_2A_4A_6(\vartheta)]\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)+[A_1A_3(\vartheta)+A_2A_4(\vartheta)+A_1A_3(\vartheta_0)-$$

$$-A_2A_4(\vartheta)]\left[\left(\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{r^2}\right)-\left(\frac{2\mu}{r_0}-\frac{\mu}{r_0^2}\right)\right]+$$

$$+2\mu\,[A_6(\vartheta)-A_0(\vartheta_0)]\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)+(A_1A_7+A_2A_8)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right),$$

где

$$A_1=\frac{u_1-u_2}{2\alpha-\sin 2\alpha},\quad A_2=\frac{u_1+u_2}{2\alpha+\sin 2\alpha},$$

$$A_3(\vartheta)=\alpha\sin\alpha\cos\vartheta-\vartheta\cos\alpha\sin\vartheta,\quad A_4(\vartheta)=\alpha\cos\alpha\sin\vartheta-\vartheta\sin\alpha\cos\vartheta,$$

$$A_5=\frac{\omega_0}{2(\beta\alpha\cos\alpha\beta-\sin\beta\alpha)},\quad A_6=A_5(\beta\cos\beta\alpha-\cos\beta\vartheta),$$

$$A_7=\cos\alpha\,(\vartheta\sin\vartheta-\vartheta_0\sin\vartheta_0)+(2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha)(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0),$$

$$A_8=\sin\alpha\,(\vartheta\cos\vartheta-\vartheta_0\cos\vartheta_0)-(2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)(\sin\vartheta-\sin\vartheta_0),$$

p_0—значение давления в начальном сечении $(r=r_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Hamel. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver,. т. 25 (1916).
2. С. М. Тарг. Основные задачи теории ламинарных течений. Москва-Ленинград (1951).
3. Н. А. Слезкин. Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами. Матем. сборник, т. 42, № I (1935).
4. Н. А. Слезкин. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Москва (1955).
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Москва-Ленинград, т. IV (1951).
6. F. K. G. Odqvist. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten, Mathem. Zeitschr., 32 (1930).

Кафедра
теоретической механики

(Поступило в редакцию 15. XI. 1966)

ნ. ჯორბენაძე

ფოროვან დიფუზორში ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული მოძრაობის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული ორგანზომილებიანი ლამინარული მოძრაობა ბრტყელ ფოროვან დიფუზორში.

ბლანტი უკუმში სითხე შედის არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი ერთმანეთისადმი 2α კუთხით დახრილი ფოროვანი კედლებით და მოძრაობს კედლების გასწვრივ. ამავე დროს ხდება სითხის გაჟონვა კედლების ფორებიდან ცნობილი კანონით.

არაწრფივი ამოცანა დაყვანილია გარკვეულ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებაზე, რომლის ამოხსნა მოძებნილია მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით.

წრფივი ამოცანის ამოხსნა აგებულია ცხადი სახით ელემენტარულ ფუნქციებში.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

С. В. МЕУНАРГИЯ

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ КАНОНИЧЕСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА НА НИЖНЮЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Задачи фильтрации, на границе области движения которых имеются промежутки высачивания, принадлежат наиболее трудному классу задач подземной гидравлики. Примером таких задач является приток грунтовых вод к осушительному каналу произвольного сечения.

Применив метод последовательных конформных отображений, решение данной задачи можно свести к решению аналогичной задачи для канонического канала прямоугольного профиля.

Следует отметить, что в ходе решения указанных выше задач приходится сталкиваться с отображениями прямоугольных каналов разных размеров на нижнюю полуплоскость. Если точек на контуре прямоугольника много и вместе с тем имеется большое число отображаемых прямоугольников с разными $\frac{h}{B}$ (где h—глубина канала, а B—его ширина), то в таком случае необходимо применить другую наиболее экономическую технику вычислений.

С этой целью нами составлена таблица, позволяющая при заданном значении отношения высоты прямоугольника к его ширине $k=\frac{h}{B}$ и заданном B определить абсциссы пяти характерных точек прямоугольника (см. рис. 1а).

Данная таблица составлена на основании существующих формул последовательных конформных отображений [1, § 71] при значениях $B=1$ и $0{,}1 < k < 1{,}0$ с шагом 0,1. В качестве основного размера принимаем ширину канала $B=1$. Размеры канала выражаем в долях B, т. е. переходим к безразмерным величинам $k=\overline{h}=\frac{h}{B}$.

Применяя метод последовательных комформных отображений, в первом шаге с помощью функции $E(m_n;\ a_n;\ b_n)$ спрямляем участок 1—2 (рис. 1а). В качестве параметров преобразования E_1 берем $m_0=-\frac{B}{2}$;

$a_0=0$; $b_0=\overline{h}=k$: $x_0^* = x_0 - m_0 = x_0 \frac{1}{2}$, следовательно, имеем $x_1=\lambda_0$, $y_1=\mu_0$.

Координаты точек 1—5 в конце первого шага даны в таблице 1.

Область z_1 соответствует первому шагу (см. рис. 1б).

В данной области правый борт канала (5—4) искривился. В этом случае лучше воспользоваться отображением F_{hs} [2, § 55], принимая участок (5—4) за дугу окружности. Функция, отображающая область z_1, с круговым разрезом, ортогональным к действительной оси, на полуплоскость z_2, будет иметь следующий вид:

$$z_2 = \frac{\sqrt{z_1^2+s^2}}{1+\varepsilon\left(z_1-\sqrt{z_1^2+s^2}\right)}, \qquad \varepsilon=\frac{h'}{s^2},$$

где h' и s—соответственно, горизонтальная и вертикальная проекции дуги (5—4).

Величины λ_1 и μ_1 для любой заданной точки определяем по формулам [2, § 55]:

$$\lambda_1^2 = M_1 + \sqrt{M_1^2 + (x_1^* \, y_1)^2}\,; \quad \mu_1 = \frac{x_1^* \, y_1}{\lambda_1}, \text{ при } M_1 > 0,$$

$$\mu_1^2 = -M_1 + \sqrt{M_1^2 + (x_1^* \, y_1)^2}\,: \quad \lambda_1 = \frac{x_1^* \, y_1}{\mu_1} \text{ при } M_1 < 0,$$

где

$$M_1 = \frac{1}{2}\left(x_1^{*\,2} - y_1^2 + s^2\right).$$

Окончательно, расчетные формулы для вычисления $z_2 = x_2 + iy_2$ будут следующие:

$$x_2 = g_1 \left\{\lambda_1 + \varepsilon\left[\mu_1 (y_1 - \mu_1) - \lambda_1 (\lambda_1 - x_1^*)\right]\right\},$$

$$y_2 = g_1 \left[\mu_1 + \varepsilon(\mu_1 x_1^* - \lambda_1 y_1)\right],$$

где

$$g_1 = \frac{1}{[1+\varepsilon(x_1^* - \lambda_1)]^2 + [\varepsilon(y_1 - \mu_1)]^2}.$$

В таблице 1 даются расчетные формулы величин M_1; λ_1; μ_1; g_1; x_2 и y_2 для всех точек.

В таблице 1 первая цифра индекса указывает область, а вторая—номер точки. Так, например, в букве g_{12} „1" обозначает порядковый номер области, а „2"—номер точки.

Таким образом, в области z_2 все точки, кроме „3", расположились на действительную ось (рис. 1б).

Воспользуемся функцией λ_n [2, § 53], при помощи которой полуплоскость z_2 с вырезанной круговой луночкой можно отобразить на полу-

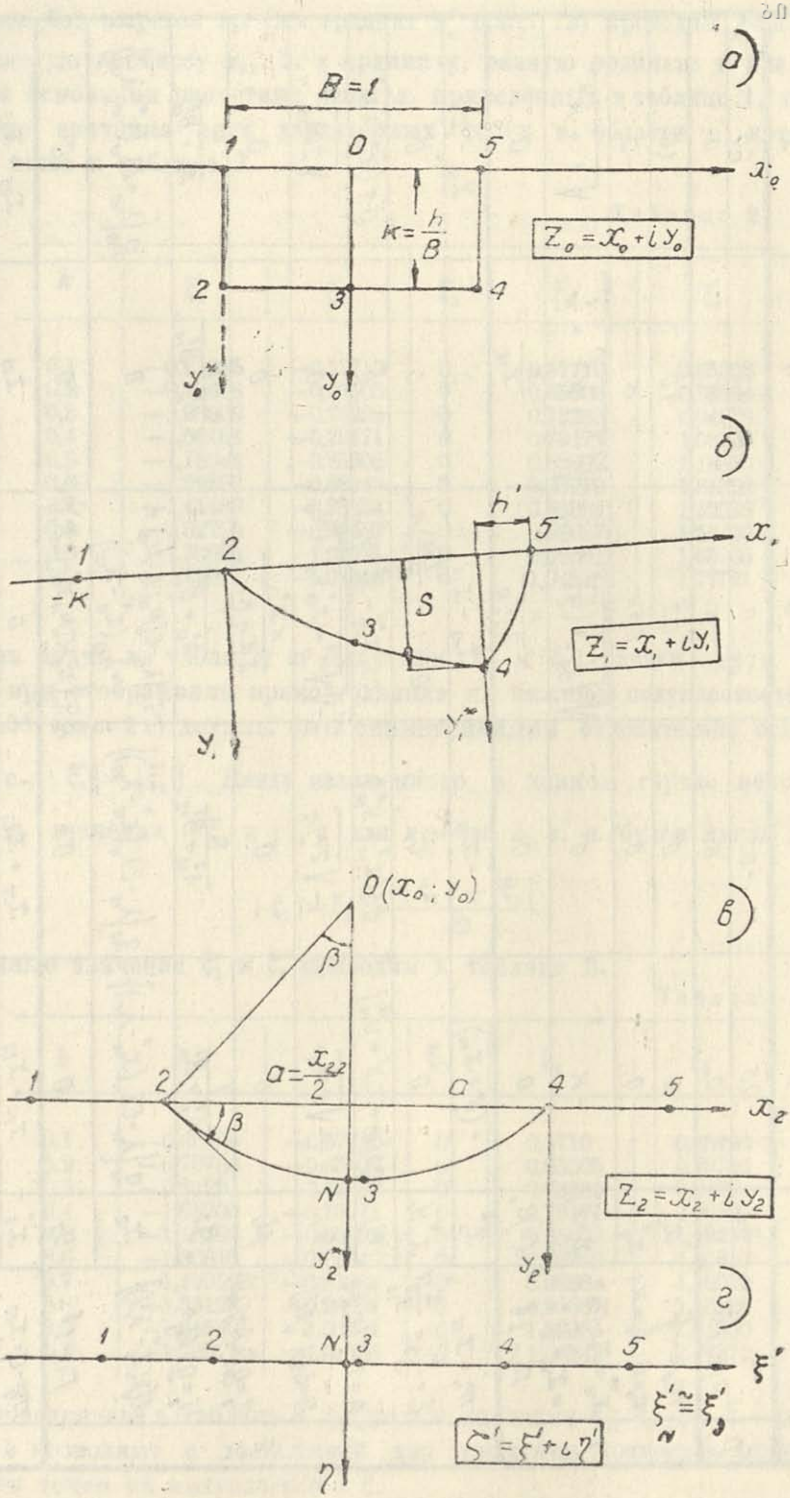
а)
B=1
1
0
5
x_o
$k = \frac{h}{B}$
$Z_o = x_o + i y_o$
2
3
4
y_o^*
y_o
б)
h'
5
x_1
1
2
-k
S
3
$Z_1 = x_1 + i y_1$
4
y_1^*
y_1
в)
$O(x_o; y_o)$
β
$a = \frac{x_{22}}{2}$
1
2
a
4
5
x_2
β
N
3
$Z_2 = x_2 + i y_2$
y_2^*
y_2
г)
1
2
N
3
4
5
ξ'
$\xi'_N = \xi'_3$
$\zeta' = \xi' + i\eta'$
η'

Рис. 1.

Таблица 1

п	Постоянные величины	Область	Точки 1	2	3	4	5
0	Рис 1а	x_0	$-0{,}5$	-0.5	0	0.5	0.5
		y_0	0	K	K	K	0
1	$m_0=-\frac{1}{2}$;	x_0^*	0	0	0.5	1.0	1.0
	$a_0=0;\ b_0=K$;	$x_0^* y$	0	0	$0.5K$	K	0
	$x_0^*=x_0-m_0=$ $=x_0+\frac{1}{2}$;	$x_1=\lambda_0$	$-K$	0	$\sqrt{\sqrt{\frac{1}{64}+\left(\frac{K}{2}\right)^2}+\frac{1}{8}}$	$\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+K^2}+\frac{1}{2}}$	$\sqrt{1+K^2}$
	Рис 1б	$y_1=\mu_0$	0	0	$\frac{K}{2x_{13}}$	$\frac{K}{x_{14}}$	0
2	$m_1=x_{14}$	x_1^*	$-(K+x_{14})$	$-x_{14}$	$x_{13}-x_{14}$	0	$x_{15}-x_{14}$
	$\varepsilon=\frac{h'}{S^2}=\frac{x_{15}^*}{y_{14}}$	$x_1^* y_1$	0	0	$0.5\left(1-\frac{x_{14}}{x_{13}}\right)K$	0	0
	$A=1+\varepsilon(x_1^*-\lambda_1)$	M_1	$0.5\left[(K+x_{14})^2+y_{14}^2\right]$	$0.5(x_{14}^2+y_{14}^2)$	$0.5(x_{13}^{*2}-y_{13}^2+y_{14}^2)$	0	$0.5(x_{15}^{*2}+y_{14}^2)$
	$B=\varepsilon(y_1-\mu_1)$	λ_1	$-\sqrt{2M_{11}}$	$-\sqrt{2M_{12}}$	$-\sqrt{\sqrt{M_{13}^2+(x_{13}^* y_{13})^2}+M_{13}}$	0	$\sqrt{2M_{15}}$
	$x_2=g_1(\lambda_1A+\mu_1B)$	μ_1	0	0	$\frac{Kx_{13}^*}{2x_{13}\lambda_{13}}$	0	0
	$y_2=g_1[\mu_1+$	g_1	$\frac{1}{A_{11}^2+B_{11}^2}$	$\frac{1}{A_{12}^2+B_{12}^2}$	$\frac{1}{A_{13}^2+B_{13}^2}$	$\frac{1}{A_{14}^2+B_{14}^2}$	$\frac{1}{A_{15}^2+B_{15}^2}$
	$+\varepsilon(\mu_1x_1^*-\lambda_1y_1)]$	x_2	$g_{11}\left\{\lambda_{11}+\varepsilon\lambda_{11}(x_{11}^*-\lambda_{11})\right\}$	$g_{12}\left\{\lambda_{12}+\varepsilon\lambda_{12}(x_{12}^*-\lambda_{12})\right\}$	$g_{13}\left\{\lambda_{13}-\varepsilon\left[\mu_{13}(y_{13}-\mu_{13})+\lambda_{13}(x_{13}^*-\lambda_{13})\right]\right\}$	0	$g_{15}\left\{\lambda_{15}+\varepsilon\lambda_{15}(x_{15}^*-\lambda_{15})\right\}$
	Рис 1в	y_2	0	0	$g_{13}\left\{\mu_{13}+\varepsilon(\mu_{13}x_{13}^*-\lambda_{13}y_{13})\right\}$	0	0
3	$m_2=-a=x_{23}$	x_2^*	$x_{21}+x_{23}$	$x_{22}+x_{23}$	0	x_{23}	$x_{25}+x_{23}$
	$R=\frac{x_{24}^{*2}+y_{23}^2}{2y_{23}}$	ξ'	$-a\delta\,\frac{1+\rho_1^\delta}{1-\rho_1^\delta}$	$-a\delta$	0	$a\delta$	$a\delta\,\frac{1+\rho_1^\delta}{1-\rho_1}$
	$y_0=\frac{x_{24}^{*2}-y_{23}^2}{2y_{23}}$	η'	0	0	0	0	0

плоскость без вырезов z_3. Ось ординат y_2^* (рис. 1в) проводим через точку N, имеющую абсциссу x_{22}: 2, а ординату, равную ординате точки „3".

На основании расчетных формул, приведенных в таблице 1, находим цифровые значения пяти характерных точек в области s', которые и даются ниже в таблице 2.

Таблица 2

k	ξ_1'	ξ_2'	ξ_3'	ξ_4'	ξ_5'
0,1	−0,65285	−0,57710	0	0,57710	0,65308
0,2	−0,79678	−0,65505	0	0,65505	0,79834
0,3	−0,93609	−0,73238	0	0,73238	0,94978
0,4	−1,06164	−0,79171	0	0,79171	1,06236
0,5	−1,18041	−0,85602	0	0,85602	1,18550
0,6	−1,29895	−0,88949	0	0,88949	1,31326
0,7	−1,41489	−0,93864	0	0,93864	1,42536
0,8	−1,52795	−0,98687	0	0,98687	1,53460
0,9	−1,63695	−1,02081	0	0,02081	1,65365
1,0	−1,75021	−1,04846	0	1,04846	1,77721

Как видно из таблицы 2, значения ξ_1' и ξ_5' близки друг другу. Однако при отображении прямоугольника на нижнюю полуплоскость точки „1" и „5" (рис. 1 г) должны быть симметричными относительно оси ординат, т. е. $|\xi_1'| = |\xi_5'|$. Ввиду изложенного в данном случае необходимо осреднить значения $|\xi_1'$ и $|\xi_5'|$ для любого k, т. е. будем иметь

$$|\xi_1| = \xi_5| = \frac{|\xi_1'| + |\xi_5'|}{2}.$$

Полученные значения ξ_1 и ξ_5 приводим в таблице 3.

Таблица 3

k	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
0,1	−0,65296	−0,57710	0	0,5710	0,65296
0,2	−0,79756	−0,65505	0	0,65505	0,79756
0,3	−0,94294	−0,73238	0	0,73238	0,94294
0,4	−1,06200	−0,79171	0	0,79171	1,06200
0,5	−1,18296	−0,85602	0	0,85602	1,18296
0,6	−1,30610	−0,88949	0	0,88949	1,30610
0,7	−1,42012	−0,93864	0	0,93864	1,42012
0,8	−1,53128	−0,98687	0	0,98687	1,53128
0,9	−1,64530	−1,02081	0	1,02081	1,64530
1,0	−1,76371	−1,04846	0	1,04846	1,76371

Приведенные в таблице 3 цифровые значения ξ_1; ξ_2; ξ_3; ξ_4 и ξ_5 для разных k позволяют с достаточной для практики точностью определить абсциссы точек на полуплоскость ξ.

Пример: требуется отобразить прямоугольный канал шириной 5 м и глубиной 2 м на нижнюю полуплоскость. Решение: предварительно определяем величину

$$k=\frac{h}{B}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

В таблице 2 находим для $k=0{,}4$ значения ξ_1; ξ_2; ξ_3; ξ_4 и ξ_5, которые умножаем на B.

Таким образом, будем иметь

$\xi_1=5\,(-1{,}062)=-5{,}3,$

$\xi_2=5\,(-0{,}79171)\cong-3{,}96,$

$\xi_3=5\cdot 0=0,$

$\xi_4=5\cdot 079171\cong 3{,}96,$

$\xi_5=5\,.\,1.062=5{,}31.$

Настоящая статья является попыткой применения таблиц, составленных на основании отображающих функций и других параметров, для быстрого решения инженерных задач. Составление более обобщенных отображающих таблиц при современной вычислительной технике не является сложностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Ф. Фильчаков. Теория фильтрации под гидротехническим сооружением. Т. II. Изд-во АН УССР, 1960.
2. П. Ф. Фильчаков. Приближенные методы конформных отображений. Из-во „Наукова думка", Киев, 1964.

Кафедра
механики сплошных тел

(Поступило в редакцию 1. II. 1967)

ს. მეუნარგია

მართკუთხა კანონიკური არხის კონფორმული გადასახვის შესახებ

რეზიუმე

ნებისმიერ ამომშრობ არხში გრუნტის წყლების ჩაჟონვის ამოცანა მიეკუთვნება ფილტრაციის ისეთ ამოცანებს, რომლებიც გულისხმობენ ნაკადის მოძრაობის არხის საზღვრებზე გამოჟონვის ზედაპირის არსებობას.

მოცემული ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება კანონიკური მართკუთხა არხის ანალოგიური ამოცანის ამოხსნამდე, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ამო-

ცანათა რიცხვი დიდია, თანმიმდევრობითი კონფორმული გადასახვის შედეგად სარგებლობა მოითხოვს ბევრ გამოთვლებს და დროს.

გამოთვლების დროს მკვეთრად შესამცირებლად შევადგინეთ ცხრილი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მოცემული შეფარდებისას $k=\dfrac{h}{B}$ (h—არის მართკუთხა არხის სიღრმე, ხოლო B—სიგანე) და ცნობილი B მნიშვნელობისათვის განვსაზღვროთ ნახევარ სიბრტყეზე მართკუთხედის წერტილების დამახასიათებელი მდებარეობა.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

А. Р. ЦИЦКИШВИЛИ

О ФИЛЬТРАЦИИ В ЗЕМЛЯНУЮ ПЛОТИНУ НА ВОДОПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Рассмотрим задачу о фильтрации в земляную плотину трапецоидального профиля, которая построена на водопроницаемом основании конечной глубины, при отсутствии промежутка высачивания. Предполагается, что коэффициенты фильтрации плотины и основания равны друг другу; капиллярное поднятие грунта, инфильтрация или испарение со свободной поверхности отсутствуют.

Задача о фильтрации в земляную плотину, когда основание плотины водонепроницаемо и отсутствует промежуток высачивания, была исследована в работе [4], а задача фильтрации для плотины с горизонтальным дренажем, когда имеется водопроницаемое основание бесконечной глубины, была исследована в работе [5].

При решении этой задачи мы применяем путь сведения задач установившихся фильтраций к задачам сопряжения для системы аналитических функций [1, 2, 3]. Но, в отличие от обыкновенных задач сопряжения, в этом случае в граничных условиях, кроме искомых аналитических функций, входят неизвестные величины, подлежащие определению, что является характерным для обратных задач теории фильтрации. Поэтому здесь требуется явное решение задач сопряжения для системы аналитических функций, что является, в общем случае, математически пока не решенной задачей [2,3]. Если удастся найти явное решение, то тогда можно составить уравнения для определения неизвестных величин. О возможности использования теории задач сопряжения для системы аналитических функций, при решении задач фильтрации, было указано впервые П. Я. Кочиной [1].

Область фильтрации ограничена контуром $MA'EDCBAM$, где часть контура DC заранее неизвестна.

Отнесем плоскость течения к комплексной плоскости $z=x+iy$, где оси x и y направлены согласно схеме (фиг. 1). Введем комплексный потенциал $\omega=\varphi+i\psi$, где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$—соответственно, потенциал скорости и функция тока.

Предположим, что область течения конформно отображена на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\zeta = t + i\tau$, при этом точки $MA'EDCBAM$ переходят, соответственно, в точки действительной оси с

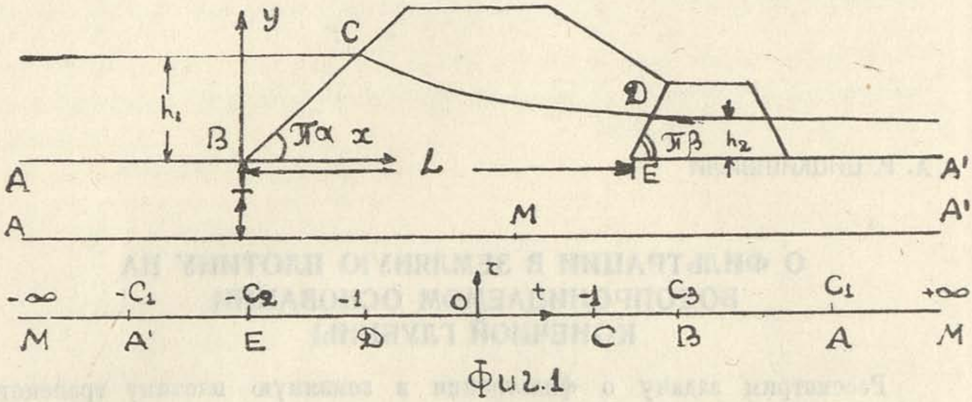

Рис. 1.

абсциссами $-\infty$, $-c_1$, $-c_2$, -1, 1, c_3, c_1, $+\infty$, где c_1, c_2, c_3—параметры, подлежащие определению.

Граничные условия для $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $x(t)$, $y(t)$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(t)=0, \quad y(t)=-T, \quad c_1 \leqslant t \leqslant +\infty, \quad -\infty \leqslant t \leqslant c_1;\\
&\varphi(t)=-\varkappa h_2, \quad y(t)=0, \quad -c_1 \leqslant t \leqslant -c_2;\\
&\varphi(t)=-\varkappa h_2, \quad \cos(\pi\beta)\, y(t)-\sin(\pi\beta)\, x(t)=-L\sin(\pi\beta),\\
&\qquad\qquad -c_2 \leqslant t \leqslant -1;\\
&\varphi(t)+\varkappa y(t)=0, \quad \psi(t)=Q, \quad -1 \leqslant t \leqslant +1;\\
&\varphi(t)=-\varkappa h_1, \quad \cos(\pi\alpha)\, y(t)-\sin(\pi\alpha)\, x(t)=0, \quad 1 \leqslant t \leqslant c_3;\\
&\varphi(t)=-\varkappa h_1, \quad y(t)=0, \quad c_3 \leqslant t \leqslant c_1;
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где T—глубина подстилающего водопроницаемого слоя, Q—расход на фильтрацию, h_1, h_2—глубины вод, соответственно, в верхнем и нижнем бьефах; $\varkappa$—коэффициент фильтрации, $\pi\alpha$ и $\pi\beta$—углы наклона откосов с горизонтом, соответственно, верхнего и нижнего бьефов; при этом, $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $0 \leqslant \beta < 1$; L—длина основания плотины.

Граничные условия (1), следуя П. Я. Кочиной [1], можно переписать так

$$\left.\begin{aligned}
&k_1(t)\, x(t)+l_1(t)\, y(t)+m_1(t)\, \varphi(t)+n_1(t)\, \psi(t)=p(t),\\
&k_2(t)\, x(t)+l_2(t)\, y(t)+m_2(t)\, \varphi(t)+n_2(t)\, \psi(t)=q(t)
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$-\infty \leqslant t \leqslant +\infty,$$

где k_1, l_1, m_1, n_1, k_2, l_2, m_2 n_2, p, q—кусочно-постоянные функции, которые определяются согласно (1).

Условия (2) в свою очередь можно записать так

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}[k(t)z(t)+l(t)\omega(t)]=p(t),\\&\operatorname{Re}[m(t)z(t)+n(t)\omega(t)=q(t),\end{aligned}\right\}-\infty\leqslant t\leqslant+\infty,\tag{3}$$

где $k=k_1-il_1(t)$, $l=m_1-in_1$, $m=k_2-il_2$, $n=m_2-in_2$.

Как видно из (3), мы получили граничную задачу Римана-Гильберта для системы аналитических функций $z(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$, в случае полуплоскости.

Если ввести аналитический вектор $\Phi(\zeta)=(z,\omega)$ и вектор $g(t)=(q_1,q_2)$ и продолжить вектор Φ на нижнюю полуплоскость согласно [2,3] (продолженный вектор мы опять обозначаем через Φ), тогда (3) можно привести к неоднородной задаче сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad -\infty\leqslant t\leqslant+\infty,\tag{4}$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ обозначают предельные значения вектора $\Phi(\zeta)$, соответственно, с верхней и нижней полуплоскостей, а

$$G(t)=\begin{Vmatrix}c_{11}(t), & c_{12}(t)\\ c_{21}(t), & c_{22}(t)\end{Vmatrix},\quad -\infty\leqslant t\leqslant+\infty,\tag{5}$$

есть кусочно-постоянная матрица. Матрица $G(t)$ и вектор $g(t)$ на различных участках границы определяются следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned}
&G(t)=\begin{Vmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{Vmatrix},\quad g(t)=(-2Ti,\,0),\quad -\infty\leqslant t\leqslant -c_1;\ c_1\leqslant t\leqslant+\infty;\\
&G(t)=\begin{Vmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{Vmatrix},\ g(t)=(0,\,-2\varkappa h_2),\quad -c_1\leqslant t\leqslant -c_2;\\
&G(t)=\begin{Vmatrix}e^{2\pi\beta i}, & 0\\ 0, & -1\end{Vmatrix},\quad g(t)=-(-2L\sin\pi\beta\, e^{t\pi\beta}\, i,\,-2\varkappa h_2),\\
&\qquad\qquad -c_2\leqslant t\leqslant -1;\\
&G(t)=\begin{Vmatrix}1, & -\dfrac{2i}{\varkappa}\\ 0, & 1\end{Vmatrix},\ g(t)=\left(\frac{2Q}{\varkappa},\,2Qi\right),\quad -1\leqslant t\leqslant 1;\\
&G(t)=\begin{Vmatrix}e^{2\pi\alpha i}, & 0\\ 0, & -1\end{Vmatrix},\quad g(t)=(0,\,-2\varkappa h_1),\quad 1\leqslant t\leqslant c_3;\\
&G(t)=\begin{Vmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{Vmatrix},\ g(t)=(0,\,-2\varkappa h_1),\quad c_3\leqslant t\leqslant c_1.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Найдя решение (4), решение (3) находится согласно [2, 3].

Как видно из (6), вдоль всей действительной оси $c_{21}(t)=0$, т. е. имеем треугольную матрицу; таким образом, для нашей задачи, как это следовало ожидать, можно $\omega(\zeta)$ найти независимо от $z(\zeta)$.

В нашем случае, $\omega(\zeta)$ можно найти по формуле Кристоффеля-Шварца, но мы эту функцию найдем согласно (4).

Учитывая, что $c_{21}(t)=0$, вдоль всей действительной оси, в проекциях условие (4) запишется так

$$z^+(t)=c_{11}(t)\,z^-(t)+c_{12}(t)\,\omega^-(t)+g_1(t),\ -\infty\leqslant t\leqslant+\infty; \quad (7)$$

$$\omega^+(t)=c_{22}(t)\omega^-(t)+g_2(t),\quad -\infty\leqslant t\leqslant+\infty. \quad (8)$$

Для того, чтобы найти $\omega(\zeta)$ сначала нужно решить однородную задачу сопряжения

$$\omega^+(t)=c_{22}(t)\,\omega^-(t),\quad -\infty\leqslant t\leqslant+\infty. \quad (9)$$

Так как $\omega(\zeta)$ должна быть ограниченной, мы будем искать решение (9) в классе $h(-c_1, c_1, 1, -1)$, в нашем случае все узлы неособенные [2]. Индекс этого класса, вычисленный согласно [2], равен -2, поэтому, решение (9) для верхней полуплоскости дается формулой

$$X_1(\zeta)=(\zeta+i)^{-2}X_{10}(\zeta), \quad (10)$$

где

$$X_{10}(\zeta)=\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-c_1^2)}. \quad (11)$$

В качестве $X_{10}(\zeta)$ выбирается ветвь $X_{10}(t)>0,\ t>c_1$.

Обозначим через $\overset{+}{X}_{10}(\zeta)$ предельное значение $X_{10}(\zeta)$ из верхней полуплоскости; функция $\overset{+}{X}_{10}(t)$, на различных участках границы, определяется так

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{+}{X}_{10}(t)=\sqrt{(t^2-1)(t^2-c_1^2)};\quad c_1\leqslant t\leqslant+\infty;\\
&\overset{+}{X}_{10}(t)=i\sqrt{(t^2-1)(c_1^2-t^2)},\quad 1\leqslant t\leqslant c_1;\\
&\overset{+}{X}_{10}(t)=-\sqrt{(1-t^2)(c_1^2-t^2)},\quad -1\leqslant t\leqslant+1;\\
&\overset{+}{X}_{10}(t)=-i\sqrt{(t^2-1)(c_1^2-t^2)},\quad -c_1\leqslant t\leqslant-1;\\
&\overset{+}{X}_{10}(t)=\sqrt{(t^2-1)(t^2-c_1^2)},\quad -\infty\leqslant t\leqslant-c_1.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Подразумевается, что все радикалы принимают на соответствующих участках положительные значения.

Неоднородная задача Римана-Гильберта, когда индекс равен -2, имеет единственное решение данного класса [2]

$$\omega(\zeta)=\frac{X_{10}(\zeta)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_2(t)\,dt}{\overset{+}{X}_{10}(t)(t-\zeta)}, \quad (13)$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_2(t)dt}{\overset{+}{X}_{10}(t)}=0. \quad (14)$$

Если подставить значения $g_2(t)$ в формулу (13), получим

$$\omega(\zeta)=\frac{X_{1*}(\zeta)}{\pi i}\left\{-\varkappa h_2\int\limits_{-c_1}^{-1}\frac{dt}{X_{10}^{+}(t)(t-\zeta)}+iQ\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dt}{X_{10}^{+}(t)(t-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-\varkappa h_1\int\limits_{1}^{c_1}\frac{dt}{X_{10}^{+}(t)(t-\zeta)}\right\}. \qquad (15)$$

Из условия (14) можно получить формулу для расхода; если учесть значения $g_2(t)$, имеем

$$Q=\frac{\varkappa(h_1-h_2)}{2F\left(\frac{\pi}{2},\, c_1^{-1}\right)}F\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\sqrt{c_1^2-1}}{c_1}\right), \qquad (16)$$

где $F\left(\frac{\pi}{2},\, \lambda\right)$—эллиптический интеграл первого рода.

Из формулы (15) найдем функцию $\omega^{-}(t)$ и подставим в условие (7), тогда $c_{12}(t)\,\omega^{-}(t)+g_1(t)$ станет известной функцией. После этого, условие (7) является задачей сопряжения для функции $z(\zeta)$. Аналогично, как при нахождении $\omega(\zeta)$, найдем каноническое решение (7). Для задачи (7), узлы -1, 1, $-c_2$, c_3—неособенные [2], а узлы $-c_1$, c_1—особенные. Ищем решение в классе $h(-1,\, +1,\, -c_2,\, c_3)$. Индекс этого класса, вычисленный согласно [2], равен -2, а каноническая функция для верхней полуплоскости дается формулой

$$X_2(\zeta)=(\zeta+i)^{-2}\,X_{20}(\zeta), \qquad (17)$$

где

$$X_{20}(\zeta)=(\zeta-1)^{1-\alpha}(\zeta+1)^{\beta}(\zeta+c_2)^{1-\beta}(\zeta-c_3)^{\alpha}. \qquad (18)$$

В качестве $X_{20}(\zeta)$ выбирается ветвь, для которой $X_{20}(t)>0$, $t>c_3$. Неоднородная задача Римана-Гильберта, когда индекс равен -2, имеет единственное решение данного класса [2], которая дается формулой

$$z(\zeta)=\frac{X_{20}(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[c_{12}(t)\omega^{-}(t)+g_1(t)]\,dt}{X_{20}^{+}(t)(t-\zeta)}, \qquad (19)$$

при условии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[c_{12}(t)\,\omega^{-}(t)+g_1(t)]dt}{X_{20}^{+}(t)}=0, \qquad (20)$$

где $X_{20}^{+}(t)$ есть предельное значение $X_{20}(\zeta)$ из верхней полуплоскости и на различных участках границы определяется равенствами

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{+}{X}_{20}(t)=(-t-1)^{\beta}(1-t)^{1-\alpha}(-t-c_2)^{1-\beta}(c_3-t)^{\alpha}, \quad -\infty\leqslant t\leqslant -c_2;\\
&\overset{+}{X}_{20}(t)=-e^{i\pi\beta}(-t-1)^{\beta}(1-t)^{1-\alpha}(c_2+t)^{1-\beta}(c_3-t)^{\alpha}, \quad -c_2\leqslant t\leqslant -1;\\
&\overset{+}{X}_{20}(t)=-(t+1)^{\beta}(1-t)^{1-\alpha}(c_2+t)^{1-\beta}(c_3-t)^{\alpha}, \quad -1\leqslant t\leqslant +1;\\
&\overset{+}{X}_{20}(t)=e^{i\pi\alpha}(t+1)^{\beta}(t-1)^{1-\alpha}(t+c_2)^{1-\beta}(c_3-t)^{\alpha}, \quad 1\leqslant t\leqslant c_3;\\
&\overset{+}{X}_{20}(t)=(t+1)^{\beta}(t-1)^{1-\alpha}(t+c_2)^{1-\beta}(t-c_3)^{\alpha}, \quad c_3\leqslant t\leqslant +\infty.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Подставляя значения $c_{12}(t)$ и $g_1(t)$ в (19) и (20), получим

$$\begin{aligned}
z(\zeta)=-\frac{X_{20}(\zeta)}{\pi}\Bigg\{&T\int_{-\infty}^{-c_1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)(t-\zeta)}+\\
&+L\sin(\pi\beta)e^{i\pi\beta}\int_{-c_2}^{-1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)(t-\zeta)}+\frac{1}{\varkappa}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)(t-\zeta)}+\\
&+T\int_{c_1}^{\infty}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)(t-\zeta)}\Bigg\},
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&T\int_{-\infty}^{-c_1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)}+L\sin(\pi\beta)e^{i\pi\beta}\int_{-c_2}^{-1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)}+\\
&+\frac{1}{\varkappa}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)\,dt}{\overset{+}{X}_{80}(t)}+T\int_{c_1}^{\infty}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)}=0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Легко проверить, что (22) и (15) удовлетворяют граничным условиям (1).

Как было сказано выше, (15) и (22) зависят от неизвестных величин Q, c_1, c_2, c_3. Для определения этих величин мы получили всего два уравнения (16) и (23), следовательно, требуется еще найти два уравнения. Для этого исследуем поведение производной функции $z(\zeta)$ вблизи особых точек. Очевидно, что в точках $B(c_3)$ и $E(-c_2)$ функция $z'(\zeta)$ должна равняться нулю. Так как в этих точках скорость фильтрации стремится к бесконечности, следовательно, $z'(\zeta)$ стремится к нулю.

Формула для производной функции, аналогичной (22) и (15), вблизи особых точек была дана в работе [6].

В нашем случае можно рассуждать так: вблизи $B(c_3)$ можно дифференцировать (22), имеем

$$\begin{aligned}
z'(\zeta)=&\frac{X'_{20}(\zeta)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[c_{12}(t)\,\omega^-(t)+g_1(t)]\,dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)(t-\zeta)}+\\
&+\frac{X_{20}(\zeta)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[c_{12}\,\omega^-(t)+g_1(t)]dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)(t-\zeta)^2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Как видно из (22), второй член в (24), когда $\zeta \to c_3$ стремится к нулю, а первый член стремится к бесконечности, поэтому необходимое и достаточное условие для выполнения равенства $z'(c_3)=0$ имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[c_{12}(t)\,\omega^-(t)+g_1(t)]\,dt}{X_{20}^+(t)\,(t-c_3)}=0. \tag{25}$$

Если учесть значения $c_{12}(t)\,\omega^-(t)+g_1(t)$, можно условие (25) переписать так

$$T\int_{-\infty}^{c_1} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-c_3)}+L\sin\pi\beta\, e^{i\pi\beta}\int_{-c_2}^{-1} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-c_3)}+$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)\,dt}{X_{20}^+(t)\,(t-c_3)}+T\int_{c_1}^{\infty} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-c_3)}=0. \tag{26}$$

Остается еще исследовать поведение функции $z'(\zeta)$ в точке $E(-c_2)$. Сначала преобразуем формулу (22), с этой целью рассмотрим интеграл

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{dt}{X_{20}(t)\,(t-\zeta)}, \tag{27}$$

где s—замкнутый контур интегрирования, который охватывает отрезок $[-c_2,\ c_3]$. При обходе s конечная область, содержащая отрезок $[-c_2,\ c_2]$, остается вправо

Функция $[X_{20}(\zeta)]^{-1}$ в области, содержащей $\zeta=\infty$, является аналитической функцией, которая исчезает в бесконечности, поэтому согласно теоремы Коши, когда ζ находится в области, которая содержит $\zeta=\infty$, имеет место равенство

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{X_{20}(\zeta)}. \tag{28}$$

Если контур стягивать к отрезку $[-c_2,\ c_3]$, из условия (28) получим следующее равенство:

$$\sin(\pi\beta)\, e^{i\pi\beta}\int_{-c_2}^{-1} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-\zeta)}=$$

$$=-\sin\pi\alpha\, e^{i\pi\alpha}\int_{1}^{c_3} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-\zeta)}-\frac{\pi}{X_{20}(\zeta)}. \tag{29}$$

Учитывая равенство (29), можно (22) переписать так

$$z(\zeta)=-\frac{X_{20}(\zeta)}{\pi}\left\{T\int_{-\infty}^{c_1} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-\zeta)}+T\int_{c_1}^{\infty} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-L\sin\pi\alpha\, e^{i\pi\alpha}\int_{1}^{c_3} \frac{dt}{X_{20}^+(t)\,(t-\zeta)}+\frac{1}{\varkappa}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)dt}{X_{20}^+(t)\,(t-\zeta)}\right\}+L. \tag{30}$$

Если по отношению (30) повторить рассуждение, которое провели при выводе (26), найдем еще одно уравнение

$$T\int_{-\infty}^{-c_1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t+c_2)}+T\int_{c_3}^{\infty}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t+c_2)}-$$

$$-L\sin(\pi\alpha)\,e^{i\pi\alpha}\int_{1}^{c_3}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t+c_2)}+\frac{1}{\varkappa}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)\,dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t+c_2)}=0. \qquad (31)$$

Следовательно, для определения Q, c_1, c_2, c_3 мы получили четыре уравнения: (16), (23), (26), (31); при этом считаются известными α, β, L, T. Если из (16) $Q(c_1)$ подставить в остальные уравнения, тогда для определения c_1, c_2, c_3 мы получим систему: (23), (26), (31). Если удастся решить систему: (23), (26), (31), относительно c_1, c_2, c_3, тогда по (16) можно найти расход. После того как найдены Q, c_1, c_2, c_3, можно найти другие элементы, которые характеризуют движение грунтовых вод. Например, чтобы получить уравнение свободной поверхности, достаточно в уравнении (22) перейти к пределу, когда $\zeta\to t_0\,(-1\leqslant t_0\leqslant 1)$. После отделения действительной части от мнимой, получим

$$x(t_0)=-\frac{\overset{+}{X}_{20}(t)}{\pi}\left\{T\int_{-\infty}^{-c_1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t-t_0)}+T\int_{c_1}^{\infty}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t-t_0)}+\right.$$

$$\left.+L\sin\pi\beta\,e^{i\pi\beta}\int_{-c_2}^{-1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t-t_0)}+\frac{1}{\varkappa}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)\,dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t-t_0)}\right\}, \qquad (32)$$

$$y(t_0)=\frac{\overset{+}{X}_{10}(t_0)}{\pi i}\left\{-\varkappa h_2\int_{-c_1}^{-1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{10}(t)\,(t-t_0)}+iQ\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{10}(t)\,(t-t_0)}-\right.$$

$$\left.-\varkappa h_1\int_{1}^{c_1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{10}(t)\,(t-t_0)}\right\},\quad (-1\leqslant t_0\leqslant 1), \qquad (33)$$

где под интегралами в уравнениях (32) и (33) понимаем их главные значения в смысле Коши и берем только действительные части.

Для исследования поведения касательной вдоль свободной поверхности нужно найти $z'(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$. Г. Ф. Манджавидзе, в еще неопубликованной работе, получил общую формулу для производной любого порядка, если функция задается в виде (15) и (22). Для нашего случая эта формула имеет вид

$$z'(\zeta)=-\frac{X_{20}(\zeta)}{\pi\varkappa\Pi(\zeta)}\int_{-1}^{+1}\frac{\Pi(t)\,\varphi'(t)\,dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t-\zeta)}+$$

$$+\frac{X_{20}(\zeta)}{2\pi i\Pi(\zeta)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(t,\zeta)\,[c_{12}\,\omega^{-}(t)+g_1(t)]\,dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)}, \qquad (34)$$

где

$$P(t,\ \zeta)=\frac{\Pi'(t)-\Pi'(\zeta)}{t-\zeta}+\frac{d}{d\zeta}\,\frac{\Pi(\zeta)-\Pi(t)}{t-\zeta}+\frac{R(\zeta)-R(t)}{t-\zeta}, \tag{35}$$

$$R(t)=\Pi(t)\left[\beta(t+1)^{-1}+(1-\beta)(t+c_2)^{-1}+(1-\alpha)(t-1)^{-1}+\alpha(t-c_3)^{-1}\right], \tag{36}$$

$$\Pi(t)=(t^2-1)(t+c_2)(t-c_3)(t+i)^{-4}. \tag{37}$$

Для $\omega'(\zeta)$ имеем формулу

$$\omega'(\zeta)=-\frac{\varkappa(h_1-h_2)c_1}{2F\left(\dfrac{\pi}{2},\ c_1^{-1}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)(c_1^2-\zeta^2)}}. \tag{38}$$

Непосредственно пользоваться формулой (34) затруднительно, поэтому мы, следуя [6], выводим формулу для $z'(\zeta)$ вблизи точки $D(-1)$ и изучаем свойство $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x'(t)}{y'(t)}$; получаем следующий результат: при $0<\beta<1/2$, когда $t\to-1$, вдоль свободной поверхности $\dfrac{dx}{dy}=\pm\infty$. Знак $\dfrac{dx}{dy}$, при $t\to-1$, зависит от знака величины

$$A=2\beta\left\{\frac{T}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-c_1}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t+1)}+\frac{T}{h}\int\limits_{c_1}^{\infty}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{80}(t)\,(t+1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{L\sin(\pi\alpha)e^{i\pi\alpha}}{\pi}\int\limits_{1}^{c_3}\frac{dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)\,(t+1)}\right\}+\frac{1}{\pi\varkappa}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P(t,\ -1)\,\varphi(t)\,dt}{\overset{+}{X}_{20}(t)}, \tag{39}$$

где

$$P(t,\ -1)=-3+R_1(t)\left[(t+c_2)(t-c_3)\right]^{-1}, \tag{40}$$

$$R_1(t)=\beta(t+c_2)(t-c_3)+(1-\beta)(t-1)(t-c_3)+$$
$$+(1-\alpha)(t+c_2)(t-c_3)+\alpha(t-1)(t+c_2). \tag{41}$$

Если $A>0$, тогда $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)_{t=-1}=+\infty$, что соответствует нереальному случаю, т. е. случаю, когда имеем промежуток высачивания (мы предполагаем, что промежуток высачивания отсутствует); когда $A<0$, тогда свободная поверхность подходит к низовому откосу горизонтально; если $A=0$, тогда $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)_{t=-1}$ стремится к конечной величине.

Изучая свойство $z'(\zeta)$, когда $\dfrac{1}{2}<\beta<\pi$, получаем следующий результат: $\dfrac{dx}{dy}$ стремится к конечной величине, когда $t\to-1$, а когда $\beta=1/2$, $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)_{t=-1}=0$, что не соответствует реальному случаю. В нашей работе [7], случай, когда $\alpha=1/2, \beta=1/2$ был принят допустимым. Следовательно, выходит, что в случае, когда $\beta=1/2$, движение возможно только с промежутком высачивания и этот случай требует дополнительного исследования.

Из полученного решения, как частный случай, можно получить решения для частных схем плотины, например, чтобы получить решение задачи фильтрации для плотины с горизонтальным дренажем, которая построена на водопроницаемом основании конечной глубины [8], достаточно в вышеприведенных формулах взять $\beta=0$, $h_2 \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. М.-Л. (1952).
2. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва (1962).
3. Н. П. Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений, М.-Л. (1950).
4. С. Н. Нумеров. Решение задач о фильтрации без промежутков высачивания и инфильтрации или испарения воды со свободных поверхностей. Прикладная математика и механика, т. VI, вып. I (1942).
5. С. Н. Нумеров. О фильтрации через земляные плотины с дренажем на водопроницаемых основаниях. Изд. НИИГ, т. 27 (1940).
6. Г. Ф. Манджавидзе. Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ, т. XV, 3 (1951).
7. А. Р. Цицкишвили. Решение задачи о фильтрации в земляную плотину на проницаемом основании. Труды Тбилисского математического института, т. XXIX (1963).
8. А. Р. Цицкишвили. О фильтрации в земляную плотину с горизонтальным дренажем на водопроницаемом основании конечной глубины. Сообщения АН Груз. ССР, XLI: 3 (1966).

Тбилисский математический
институт им. А. Размадзе

(Поступило в редакцию 12. XII. 1966)

ა. ციცქიშვილი

ფილტრაციის ამოცანის შესახებ მიწის კაშხალში, როცა კაშხალი აგებულია სასრული სიღრმის წყალგამტარ საფუძველზე

რეზიუმე

განხილულია ფილტრაციის ამოცანა, როცა ფილტრაცია ხდება მიწის კაშხალში, რომელიც აგებულია სასრული სიღრმის წყალგამტარ ფუძეზე-

კაშხალის ფორმა მოცემულია სქემაზე. იგულისხმება, რომ კაშხალის და საფუძვლის ფილტრაციის კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია; თავისუფალ ზედაპირზე ინფილტრაციას და კაპილარულ აწევას ადგილი არა აქვს.

ამოცანა დაყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის შეუღლების ამოცანაზე ფუნქციათა სისტემისათვის [1,2], რომელიც ამოხსნილია ცხადად, ამის საფუძველზე შედგენილია განტოლებათა სისტემა უცნობი პარამეტრების მიმართ.

განხილული ამოცანის ამოხსნიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, მიიღება [4, 7, 8] ნაშრომებში განხილული ამოცანების ამოხსნები.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968.

Г. Л. ХАРАТИШВИЛИ

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В работе поставлена экстремальная задача с запаздываниями довольно общего вида и на основании результатов, изложенных в [1], [2], доказано необходимое условие экстремальности, обобщающее принцип максимума для задач оптимального управления, в которых запаздывания содержатся и в управлении и в фазовых координатах, а начальная функция ищется в классе кусочно-непрерывных. Ранее автором был доказан принцип максимума (см. [3]) лишь в случае запаздываний в фазовых координатах.

Столбцевые векторы будем обозначать латинскими буквами; строчные—греческими; f_x—частная производная функции f по x.

Пусть G—область n-мерного векторного пространства R^n, I—интервал: $\alpha < t < \beta$ временной оси и пусть на прямом произведении $I^2 \times G^2$ скалярная функция $J(t_1, t_2, x_1, x_2)$ и k-мерная вектор-функция $h(t_1, t_2, x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемы. Пусть, далее,

$$E = \{f(t, x_1, \cdots, x_m)\}$$

—семейство n-мерных вектор-функций $f(t, x_1, \cdots, x_m)$, определённых на $I \times G^m$, измеримых по t при фиксированных $x_1, \cdots, x_m$, класса C^1 по $x_1, \cdots, x_m$ при фиксированном t и удовлетворяющих на $X \times I$ условиям

$$|f(t_1 x_1, \cdots, x_m)| \leqslant m(t), \quad |f_{x_i}(t, x_1, \cdots, x_m)| \leqslant m(t), \quad i = 1, \cdots, m,$$

где X—произвольный компакт из G^m, а $m(t)$—интегрируемая на I функция, зависящая от выбора f, X.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t-\eta_1), \cdots, x(t-\eta_m)), \tag{1}$$

где f—некоторая функция семейства F, под знак которой вместо аргументов $x_1, \cdots, x_m$ подставлены, соответственно, $x(t-\eta_1), \cdots, x(t-\eta_m)$, а $\eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_m = 0$—заданные числа.

Для однозначного определения траектории $x(t)$ на некотором отрезке

$[t_1, t_2]\subset I$ необходимо зафиксировать функцию $f\in F$, начальное значение $x_1=x(t_1)$ и начальную функцию $s(t)$: $x(t)\equiv s(t)$, $t_1-\eta_1\leqslant t\leqslant t_1$. Начальную функцию мы будем выбирать из семейства S кусочно-непрерывных функций (с конечным числом точек разрыва первого рода), принимающих значения из заданного множества $\Sigma\subset G$.

Траекторию $x(t)$ уравнения (1), которая однозначно определяется на отрезке $[t_1, t_2]\subset I$ заданием t_1, t_2, x_1, $s(t)$, f, мы будем называть FhJ экстремалью, если величины t_1, t_2, $x_1=x(t_1)$, $x_2=x(t_2)$, удовлетворяют условию

$$h(t_1, t_2, x_1, x_2)=0$$

и минимизируют функционал

$$J(t_1, t_2, x_1, x_2).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что семейство F — квазивыпукло (см. [2]).

Пусть $y(t)$—FhJ экстремаль, соответствующая данным τ_1, τ_2, y_1, $\widetilde{s}\in S$, $\widetilde{f}\in F$. По определению квазивыпуклости, для любой функции f из F и любого ε, $0<\varepsilon<1$, существует такая n-мерная вектор-функция $g(t, x_1, \cdots, x_m)$, что

$$\widetilde{f}+\varepsilon(f-\widetilde{f})+g\in F,$$

причём для любой точки $(x_1, \cdots, x_m)\in G^m$ из некоторой фиксированной окрестности линии $(y(t-\eta_1),\cdots,y(t-\eta_m)$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ и любых $t_1, t_2\in I$,

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} g(t, x_1, \cdots, x_m)dt\right|\leqslant\varepsilon^2.$$

Рассмотрим множества

$$V_{\widetilde{f}}=\{\widetilde{f}+\varepsilon(f-\widetilde{f})+g\in F:\ f\in F\},$$

$$V_{\widetilde{s}}=\{\widetilde{s}+\varepsilon(s-\widetilde{s}):\ s\in S\},$$

$$V_{y_1}=\{x\in G:\ |x-y_1|<\varepsilon\},$$

$$V_{\tau^l}=\{t\in I;\ |t-\tau_l|<\varepsilon\},\quad l=1, 2,$$

$$L=[0,\ +\infty).$$

Очевидно, множество $V_{\widetilde{f}}$—квазивыпукло, а множества $V_{\widetilde{s}}$, V_{y_1}, V_{τ_l}, L—выпуклы. Поэтому множество

$$D=L\times V_{\tau_1}\times V_{\tau_2}\times V_{y_1}\times V_{\widetilde{s}}\times V_{\widetilde{f}}$$

— квазивыпукло.

Введём в рассмотрение $(k+1)$-мерную вектор-функцию

$$q(l, t_1, t_2, x_1, x_2)=(J(t_1, t_2, x_1, x_2)-J(\tau_1, \tau_2, y_1, y_2)+l,\ h(t_1, t_2, x_1, x_2)).$$

При достаточно малом ε на множестве D определено отображение P множества D в $(k+1)$-мерное пространство по формуле

$$P(l,\ t_1,\ t_2,\ x_1,\ s,\ f)=q(l,\ t_1,\ t_2,\ x(t_1),\ x(t_2)).$$

Точка $w=(0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ y_1\ \widetilde{s},\ \widetilde{f})$ является критической точкой отображения P.

Пусть отображение P в точке w имеет дифференциал $\delta P(\delta w)$, $\delta w\in D-w$. Тогда существует такой ненулевой $(k+1)$-мерный вектор $\chi=(\chi_0,\ \chi_1,\ldots,\chi_k)$ и такая окрестность $Q\subset D$ точки w, что

$$\chi\cdot\delta P(\delta w)\leqslant 0,\quad \delta w\in K_m-w,$$

где K_w—замкнутый конус с вершиной в w, натянутый на выпуклую оболочку множества Q (см. [1]).

Непосредственные вычисления дают

$$\chi\cdot\delta P(\delta w)=\chi(q_{t_1}+q_{x_1}\widetilde{f}(\tau_1)\,\delta t_1+\chi(q_{t_2}+q_{x_2}\widetilde{f}(\tau_2))\delta t_2+$$
$$+\chi q_{x_1}\delta x_1+\chi q_{x_2}\delta x_2+\chi_0\delta l\leqslant 0. \tag{2}$$

Здесь

$$q_{t_l}=q_{t_l}(0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ y(\tau_1),\ \ y(\tau_2)),$$
$$q_{x_l}=q_{x_l}(0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \ y(\tau_1),\ y(\tau_2)),\quad l=1,\ 2,$$
$$\widetilde{f}(t)=\widetilde{f}(t,\ y(t-\eta_1),\ldots,y(t-\eta_m));$$

величины δt_1, δt_2, δx_1—произвольны, $\delta l\geqslant 0$, $\delta x_2=\delta x(\tau_2)$, где $\delta x(t)$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$—решение уравнения в вариациях, соответствующее начальному значению δx_1 и произвольной начальной функции $\delta s=s-\widetilde{s}$ из $S-\widetilde{s}$: $\delta x(t)=\delta s(t)$, $\tau_1-\eta_1\leqslant t\leqslant\tau_1$. Уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{d\delta x(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\widetilde{f}_{x_i}(t)\,\delta x(t-\eta_i)+f(t)-\widetilde{f}(t),\quad \tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2.$$

Введём характеристическую функцию $\Delta(t;\ \xi_1,\ \xi_2)$ отрезка $\xi_1\leqslant t\leqslant\xi_2$ и рассмотрим уравнение

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{m}\Delta(t;\ \tau_1,\ \tau_2-\eta_i)\,\psi(t+\eta_i)\,\widetilde{f}_{x_i}(t+\eta_i) \tag{3}$$

для вспомогательной n-мерной вектор-функции $\psi(t)$. Пусть $\psi(t)$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$—решение уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\psi(\tau_2)=\chi\,q_{x_2}(0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ y(\tau_1),\ y(\tau_2)).$$

Вычислим $\psi(\tau_2)\,\delta x_2$. Имеем

$$\psi(\tau_2)\,\delta x_2-\psi(\tau_1)\delta x_1=\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\psi(t)\,\delta x(t))'\,dt=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\,[f(t)-\widetilde{f}(t)]dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\widetilde{f}_{x_i}(t)\,\delta x(t-\eta_i)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Delta(t;\ \tau_1,\ \tau_2-\eta_i)\,\psi(t+\eta_i)\,\widetilde{f}_{x_i}\,(t+\eta_i)\delta x(t)dt=$$

$$=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\,[f(t)-\widetilde{f}(t)]dt+\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\,\widetilde{f}_{x_i}\,(t)\,\delta x(t+\eta_j)\,dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_1+\eta_i}^{\tau_2}\psi(t)\,\widetilde{f}_{x_i}\,(t)\,\delta x\,(t-\eta_i)\,dt.$$

Таким образом,

$$\psi(\tau_2)\,\delta x_2=\chi\,q_{x_2}\,\delta x_2=\psi(\tau_1)\,\delta x_1+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\,[f(t)-\widetilde{f}(t)]\,dt+$$

$$+\int_{\tau_1-\eta_1}^{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\,\psi(t+\eta_i)\,\widetilde{f}_{x_i}\,(t+\eta_i)\delta s\,(t)dt.$$

Исключив $\chi q_{x_2}\,\delta x_2$ из неравенства (2) и учитывая, что $\psi(\tau_2)=\chi q_{x_2}$, величины δt_1, δt_2, δx_1 произвольны, $\delta s\in\ \in S-\widetilde{s}$, $f\in F$, $\delta l\geqslant 0$, получим следующие соотношения:

$$(\chi q_{t_1},\ \chi q_{t_2},\ \chi q_{x_1},\ \chi q_{x_2})=(\psi(\tau_1)\,\widetilde{f}(\tau_1),-\psi(\tau_2)\,\widetilde{f}(\tau_2),-\psi(\tau_1),\ \psi(\tau_2)),\tag{4}$$

$$\int_{\tau_1-\eta_1}^{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\,\psi(t+\eta_i)\,\widetilde{f}_{x_i}\,(t+\eta_i)\,\widetilde{s}\,(t)dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\tau_1-\eta_1}^{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\,\psi(t+\eta_i)\,\widetilde{f}_{x_i}\,(t+\eta_i)s\,(t)dt,\ \ s\in S,\tag{5}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\,\widetilde{f}\,(t)dt\geqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)\,f\,(t)\,dt,\quad f\in F,\tag{6}$$

$$\chi_0\leqslant 0.\tag{7}$$

Итак,

Теорема 1. Пусть траектория $y(t)$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$, уравнения (1), соответствующая данным τ_1, τ_2, y_1, $\widetilde{s}\in S$, $\widetilde{f}\in F$, является JhF экстремалью. Тогда существует такой ненулевой $(k+1)$-мерный вектор $\chi=(\chi_0,\ \chi_1,\cdots,\chi_k)$ и такое решение $\psi(t)$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$, уравнения (3), что выполняются условия (4), (5), (6), (7).

Замечание. Если $\psi(t)\equiv 0$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$, то условия (5), (6) теоремы I становятся тривиальными. Оказывается, если матрица

$$M=(q_{t_1},\ q_{t_2},\ q_{x_1},\ q_{x_2}),$$

размерности $(k+1)\times(2+2n)$, имеет ранг $k+1$, то $\psi(t)\not\equiv 0$. В самом деле, пусть ранг матрицы M равен $k+1$ и $\psi(t)\equiv 0$, $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$. Тогда из условия (4) получаем $\chi M=0$, т. е. $\chi=0$, что невозможно.

Рассмотрим теперь приложения теоремы 1 к оптимальным процессам с запаздываниями.

Пусть Ω—произвольное подмножество r-мерного векторного пространства E, $X\subset G^m$, $U\subset E^p$—произвольные компакты, $\theta_1>\theta_2>\cdots>\theta_p=0$—заданные числа.

Пусть $f(t, x_1, \cdots, x_m, u_1, \cdots, u_p)$—$n$-мерная вектор-функция, определённая на $I\times G^m\times E^p$,класса C^1 по $x_1, \cdots, x_m$ при фиксированных $u_1, \cdots, u_p$, t, измеримая по $u_1, \cdots, u_p$, t при фиксированных $x_1, \cdots, x_m$ и удовлетворяющая на $I\times X\times U$ условиям

$$|f(t, x_1, \cdots, x_m, u_1, \cdots, u_p)|\leqslant m(t),$$
$$|f_{x_i}(t, x_1, \cdots, x_m, u_1, \cdots, u_p)|\leqslant m(t)\quad i=1, \cdots, m,$$

где $m(t)$—интегрируемая на I функция, зависящая от выбора f, X, U.

Пусть F_v—семейство функций

$$F_v=\{f(t, x_1, \cdots, x_m, \quad v(t-\theta_1), \cdots, v(t-\theta_p)\},$$

где $v(t)$—произвольная измеримая существенно ограниченная на интервале $\alpha-\theta_1<t<\beta$ функция, удовлетворяющая почти всюду на этом интервале условию $v(t)\in\Omega$.

Из аппроксимационной леммы (см. [2]) вытекает квазивыпуклость семейства F_v. Следовательно, теорема 1 остаётся в силе, если вместо семейства F взять семейство F_v. В этом случае уравнение (1) примет вид

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t, x(t-\eta_1), \cdots, x(t-\eta_m), v(t-\theta_1), \cdots, v(t-\theta_p). \tag{8}$$

Покажем, что если функции семейства E_v непрерывны по совокупности аргументов t, $u_1, \cdots, u_p$, то теорема 1, применительно к рассматриваемому случаю, может быть сформулирована в форме принципа максимума.

Пусть траектория $y(t)$ уравнения (8), соответствующая данным

$$\tau_l\in I\quad(l=1, 2),\ y_1\in G,\quad \widetilde{s}(t)\in S,$$
$$f(t, x_1, \cdots, x_m, u(t-\theta_1), \cdots, u(t-\theta_p))\in F_v,$$

является F_vhJ экстремалью. Тогда условие (6) примет вид

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)f(t, y(t-\eta_1), \cdots, y(t-\eta_m), u(t-\theta_1), \cdots, u(t-\theta_p))dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi(t)f(t, y(t-\eta_1), \cdots, y(t-\eta_m), v(t-\theta_1), \cdots, v(t-\theta_p))dt, \tag{9}$$

где $\psi(t)$—решение уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{m} \Delta(t;\ \tau_1,\ \tau_2-\eta_i)\,\psi(t+\eta_i) f_{x_i}[t+\eta_i]; \tag{10}$$

здесь

$$f_{x_i}[t] = f_{x_i}(t,\ y(t-\eta_1),\dots,y(t-\eta_m),\ u(t-\theta_1),\dots,u(t-\theta_p)).$$

Пусть $\tau \in (\tau_1-\theta_1,\ \tau_2)$—правильная точка для функции $u(t)$ и пусть

$$v(t) = \begin{cases} v \in \Omega, & t \in [\tau-\varepsilon,\ \tau], \\ u(t), & t \in [\tau-\varepsilon,\ \tau]. \end{cases}$$

Тогда из неравенства (9) вытекает неравенство

$$\sum_{j=1}^{p} \Delta(\tau;\ \tau_1-\theta_j,\ \tau_2-\theta_j)\,\psi(\tau+\theta_j) f[\tau+\theta_j] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{p} \Delta(\tau;\ \tau_1-\theta_j,\ \tau_2-\theta_j)\,\psi(\tau+\theta_j) f_j[\tau+\theta_j], \tag{11}$$

где

$$f[t] = f(t,\ y(t-\eta_1),\dots,y(t-\eta_m),\quad u(t-\theta_1),\dots,u(t-\theta_p)),$$

$$f_j[t] = f(t,\ y(t-\eta_1),\dots,y(t-y_m),\ u(t-\theta_1),\dots,u(t-\theta_{j-1}),$$

$$v,\ u(t-\theta_{j+1}),\dots,u(t-\theta_p)),\quad j=1,\dots,p.$$

Так как множество правильных точек функции $u(t)$ имеет на отрезке $\tau_1-\theta_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ полную меру, то неравенство (11) выполняется почти для всех $t \in [\tau_1-\theta_1,\ \tau_2]$

$$\sum_{j=1}^{p} \Delta[t;\ \tau_1-\theta_j,\ \tau_2-\theta_j)\,\psi(t+\theta_j) f[t+\theta_j] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{p} \Delta[t;\ \tau_1-\theta_j,\ \tau_2-\theta_j)\,\psi(t+\theta_j) f_j[t+\theta_j]. \tag{12}$$

Аналогично, из неравенства (5) можно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\,\psi(t+\eta_i) f_{x_i}[t+\eta_i]\,\tilde{s}(t) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} \Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\,\psi(t+\eta_i) f_{x_i}[t+\eta_i],\ s, \tag{13}$$

$$\tau_1-\eta_1 \leqslant t \leqslant \tau_1,\quad s \in E.$$

Наконец, условие (4) даёт

$$(\chi q_{t_1},\ \chi q_{t_2},\ \chi q_{x_1},\ \chi q_{x_2}) = (\psi(\tau_1) f[\tau_1],\ -\psi(\tau_2) f[\tau_2], -\psi(\tau_1),\ \psi(\tau_2)).$$

Итак,

Теорема 2. (Принцип максимума). Пусть траектория $\widetilde{y}(t)$ уравнения (8), соответствующая данным τ_1, τ_2, $y_1 \in G$, $s \in S$, $f(t, x_1, \cdots, x_m, u(t-\theta_1), \cdots, u(t \cdots \theta_p)) \in F_v$, является FhJ экстремалью. Тогда существует такой ненулевой $(k+1)$-мерный вектор $\chi=(\chi_0, \chi_1, \cdots \chi_k)$ и такое решение $\psi(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, уравнения (10), что выполняются условия (12), (13), (14), (7).

В заключение рассмотрим приложения принципа максимума к линейной управляемой системе с запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{m} A_i(t) x_i(t-\eta_i)+\sum_{j=1}^{p} B_j(t) v(t-\theta_j)+R(t), \tag{15}$$

где матрицы $A_i(t)$, $B_j(t)$, размерностей $[n \times n]$ и $[n \times r]$, соответственно, и n-мерная вектор-функция $R(t)$ определены и непрерывны на I. Функция $v(t)$ кусочно-непрерывна на интервале $\alpha-\theta_1 < t < \beta$ и принимает значения из множества Ω.

Пусть

$$h(t_1, t_2, x_1, x_2)=\begin{pmatrix} h^1(t_1, t_2, x_1, x_2) \\ h^{2n}(t_1, t_2, x_1, x_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-a \\ x_2-b \end{pmatrix}=0 \quad (k=2n)$$

и

$$J(t_1, t_2, x_1, x_2)=t_2-t_1.$$

Очевидно, что $F_v hJ$ экстремаль в рассматриваемом случае является решением оптимальной по быстродействию задачи с закреплёнными концами (a и b) для уравнения (15).

Ранг матрицы $(q_{t_1}, q_{t_2}, q_{x_1}, q_{x_2})$ в этом случае равен $2n+1$, поэтому $\psi(t)$ является нетривиальным решением уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{m} \Delta(t, \tau_1, \tau_2-\eta_i)\, \psi(t+\eta_i) A_i(t+\eta_i), \tag{16}$$

удовлетворяющим краевому условию $\psi(\tau_2)=\chi q_{x_2}$. Это решение может быть построено шаг за шагом от τ_2 до τ_1.

Далее, из условий (12), (13) непосредственно следуют неравенства:

$$\sum_{j=1}^{p} \Delta(t;\ \tau_1-\theta_j,\ \tau_2-\theta_j)\, \psi(t+\theta_j) B_j(t+\theta_j) u(t) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{p} \Delta(t; \tau_1-\theta_j, \tau_2-\theta_j)\, \psi(t+\theta_j) B_j(t+\theta_j) v,$$

$$v \in \Omega, \quad t \in [\tau_1-\theta_1, \quad \tau_2], \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\, \psi(t+\eta_i) A_i(t+\eta_i) \widetilde{s}(t) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} \Delta(t;\ \tau_1-\eta_i,\ \tau_1)\, \psi(t+\eta_i) A_i(t+\eta_i) s,$$

$$s \in \Sigma, \quad t \in [\tau_1 - \eta_1, \ \tau_1]. \tag{18}$$

Наконец, если предположить, что множества

$$\Omega = \{v \colon \mid v^{\nu} \mid \leqslant \rho_{\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, r\},$$

$$\Sigma = \{s \colon \mid s^{\mu} \mid \leqslant \varkappa_{\mu}, \quad \mu - 1, \ldots, n\},$$

—r-и n-мерные параллелепипеды, то из неравенств (17), (18) вытекают, соответственно, следующие условия:

$$u^{\nu}(t) = \rho_{\nu} \operatorname{sgn} z^{\nu}(t), \quad \tau_1 - \theta_1 \leqslant t \leqslant \tau_2, \quad \nu = 1, \ldots, r,$$

$$\widetilde{s}^{\mu}(t) = \varkappa_{\mu} \operatorname{sgn} \varphi^{\mu}(t), \quad \tau_1 - \eta_1 \leqslant t \leqslant \tau_1, \quad \mu = 1, \ldots, n,$$

где $z^{\nu}(t)$ является ν координатой r-мерной вектор-функции

$$\sum_{j=1}^{p} \Delta(t; \ \tau_1 - \theta_j, \ \tau_2 - \theta_j) \, \psi(t + \theta_j) \, B_j(t + \theta_j),$$

и $\varphi^{\mu}(t)$ является μ координатой n-мерной вектор-функции

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta(t; \ \tau_1 - \eta_i, \ \tau_1) \, \psi(t + \eta_i) \, A_i(t + \eta_i).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили. Теория первой вариации в экстремальных задачах. Сообщения АН ГССР, XLVI, № 1 (1967).
2. R. V. Gamkrelidze. J. SIAM Control Ser. A, Vol. 3, № 1, U. S. A. (1965).
3. Г. Л. Харатишвили. Оптимальные процессы с запаздываниями, „Мецниереба" (1966).

Тбилисский государственный университет,
Проблемная лаборатория прикладной
математики

(Поступило в редакцию 9. III. 1967)

გ. ხარატიშვილი

მაქსიმუმის პრინციპი ექსტრემალურ ამოცანებში დაგვიანებებით

რეზიუმე

შრომაში განხილულია საკმარისად ზოგადი სახის ექსტრემალური ამოცანა დაგვიანებებით და დამტკიცებულია ექსტრემალობის აუცილებელი პირობა. ეს შედეგი ანზოგადებს მაქსიმუმის პრინციპს ოპტიმალური მართვის ისეთ ამოცანებზე, რომლებიც შეიცავენ დაგვიანებებს როგორც სამართ, ისე ფაზურ კოორდინატებში.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Д. В. ИЗЮМОВА

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предлагаемая работа посвящается изучению поведения при $t \to \infty$ решений нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$u'' + f(t, u) = 0. \tag{1}$$

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 приводятся необходимые для дальнейшего обозначения и вспомогательные предложения, в § 2 устанавливаются достаточные условия продолжаемости, а в §§ 3 и 4—достаточные условия ограниченности, устойчивости и стремления к нулю при $t \to +\infty$ решений уравнения (1).

§ 1. Некоторые обозначения и вспомогательные предложения

Условимся, прежде всего, в следующих обозначениях:

1. Через $\int\limits_{t_0}^{t_1} |dh(t)|$ обозначим полную вариацию функции $h(t)$ в промежутке $[t_0, t_1]$.

II. Через $\int\limits_{t_0}^{t_1} |d_t h(t, x)|$ обозначим полную вариацию функции $h(t, x)$ относительно t на отрезке $[t_0, t_1]$ при фиксированном x.

III. Пусть $g(t)$, $u(t)$ и $h(t, x)$—некоторые функции, определенные, соответственно, в промежутке $[t_0, t_1]$ и в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|x| < \infty$. Разложим $[t_0, t_1]$ на части точками $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = t_n$, выберем в пределах каждого сегмента $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ по точке ξ_k и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\left[h(\tau_{k+1}, u(\xi_k)) - h(\tau_k, u(\xi_k))\right]. \tag{1.1}$$

Если при $\lambda = \max(t_{k+1}, -t_k) \to 0$ сумма σ стремится к конечному пределу J, не зависящему ни от способа дробления промежутка $[t_0, t_1]$, ни от выбора точек ξ_k, тогда этот предел обозначим через $\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t) d_t h(t, u(t))$. Следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)\, d_t h(t, u(t)) = \lim_{\lambda=0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) [h(t_{k+1}, u(\xi_k)) - h(t_k, u(\xi_k))]. \quad (1.2)$$

Легко проверяется справедливость следующих лемм.

Лемма 1.1. Если существуют $\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t) d_t h_i(t, u(t))$, $(i=1, 2)$, то существует также $\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t) d_t [h_1(t, u(t)) + h_2(t, u(t))]$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} d_t [h_1(t, u(t)) + h_2(t, u(t))] = \int\limits_{t_0}^{t_1} d_t h_1(t, u(t)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} d_t h_2(t, u(t)).$$

Лемма 1.2. Если $h(t, x)$ не возрастает (не убывает) по t при любом фиксированном x, а $g(t) \geqslant 0$, то $\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t) d_t h(t, u(t)) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$.

Лемма 1.3. Пусть функции $g(t)$ и $u(t)$ непрерывны в $[t_0, t_1]$, а функция $h(t, x)$ определена в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|x| < +\infty$, причем $\dfrac{\partial h(t, x)}{\partial x}$ непрерывна в этой области. Если, кроме того,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} |du(t)| < +\infty, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} |dh(t, 0)| < +\infty \text{ и } \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \left| d_t \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right| \right) dx < +\infty, \quad (1.3)$$

где $r = \max\limits_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|$, то существует $\int\limits_{t_0}^{t} g(t) d_t h(t, u(t))$ и

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)\, d_t h(t, u(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)\, dh(t, u(t)) - \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t) \frac{\partial h(t, u(t))}{\partial x} du(t). \quad (1.4)$$

Доказательство. Поскольку

$$h(t, u(t))=h(t, 0)+\int\limits_0^{u(t)} \frac{\partial h(t, x)}{\partial x}\, dx,$$

то для любого разбиения промежутка $[t_0, t_1]$, $t_0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=t_1$, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}|h(\tau_{k+1}, u(\tau_{k+1}))-h(\tau_k, u(\tau_k))|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|h(\tau_{k+1}, 0)-h(\tau_k, 0)|+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int\limits_{u(\tau_k)}^{u(\tau_{k+1})} \frac{\partial h(\tau_{k+1}, x)}{\partial x}dx\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int\limits_0^{u(\tau_k)}\left[\frac{\partial h(\tau_{k+1}, x)}{\partial x}-\frac{\partial h(\tau_k, x)}{\partial x}\right]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{t_0}^{t_1}|dh(t, 0)|+M\int\limits_{t_0}^{t_1}|du(t)|+\int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{t_0}^{t_1}\left|d_t\frac{\partial h(t, x)}{\partial x}\right|\right)dx,$$

где $M=\max\limits_{\substack{t_0\leqslant t\leqslant t_1\\ |x|\leqslant r}}\left|\frac{\partial h(t, x)}{\partial x}\right|$. Отсюда очевидно, что $h(t, u(t))$ имеет ограниченную вариацию в промежутке $[t_0, t_1]$.

Из (1.1) ясно, что

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)[h(\tau_{k+1}, u(\tau_{k+1}))-h(\tau_k, u(\tau_k))+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)[h(\tau_{k+1}, u(\xi_k))-h(\tau_{k+1}, u(\tau_{k+1}))+ \tag{1.5}$$

$$+h(\tau_k, u(\tau_k))-h(\tau_k, u(\xi_k))].$$

Согласно теореме Лагранжа о среднем значении, общий член второй суммы в равенстве (1.5) равен

$$-g(\xi_k)\left[\frac{\partial h(\tau_{k+1}, u(\eta'_k))}{\partial x}(u(\tau_{k+1})-u(\xi_k))+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial h(\tau_k, u(\eta''_k))}{\partial x}(u(\xi_k)-u(\tau_k)\right),$$

где $\eta'_k\in(\xi_k, \tau_{k+1})$, $\eta''_k\in(\tau_k, \xi_k)$. Поэтому

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)[h(\tau_{k+1}, u(\tau_{k+1}))-h(\tau_k, u(\tau_k))]-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\frac{\partial h(\xi_k, u(\xi_k))}{\partial x}(u(\tau_{k+1})-u(\tau_k))-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\left\{\left[\frac{\partial h(\tau_{k+1},\, u(\eta'_k))}{\partial x} - \frac{\partial h(\xi_k,\, u(\xi_k))}{\partial x}\right](u(\tau_{k+1}) - u(\xi_k)) +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\partial h(\tau_k,\, u(\eta''_k))}{\partial x} - \frac{\partial h(\xi_k,\, u(\xi_k))}{\partial x}\right](u(\xi_k) - u(\tau_k)).\right\} \tag{1.6}$$

Поскольку $g(t)$, $u(t)$ и $\frac{\partial h(t,\, x)}{\partial x}$ непрерывны, а $h(t,\, u(t))$ и $u(t)$—функции с конечным изменением, то существуют интегралы Стилтьеса $\int_{t_0}^{t_1} g(t)dh(t,u(t))$ и $\int_{t_0}^{t_1} g(t)\,\frac{\partial h(t,\, u(t))}{\partial u}\,du(t)$ и имеют место равенства

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\left[h(\tau_{k+1},\, u(\tau_{k+1})) - h(\tau_k,\, u(\tau_k))\right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} g(t)\, dh(t,\, u(t)), \tag{1.7}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\,\frac{\partial h(\xi_k,\, u(\xi_k))}{\partial x}\,(u(\tau_{k+1}) - u(\tau_k)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} g(t)\,\frac{\partial h(t,\, u(t))}{\partial x}\,du(t). \tag{1.8}$$

Далее, положим

$$\varepsilon_1(\lambda) = \max_{|t-\tau|\leqslant\lambda} |u(t) - u(\tau)|,$$

$$\varepsilon(\lambda) = \max\left|\frac{\partial h(t,\, x_1)}{\partial x} - \frac{\partial h(t,\, x_2)}{\partial x}\right|,$$

при $|t-\tau|\leqslant\lambda$; $|x_1 - x_2|\leqslant\varepsilon_1(\lambda)$, $|x_1|\leqslant r$, $|x_2|\leqslant r$.

В силу непрерывности $u(t)$ и $\frac{\partial h(t,\, x)}{\partial x}$ ясно, что $\varepsilon(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to 0$.

С другой стороны, последняя сумма в равенстве (1.6) не больше, чем

$$\varepsilon(\lambda) M_1 \sum_{k=0}^{n-1}(|u(\xi_k) - u(t_{k+1})| + |u(t_k) - u(\xi_k)|) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\lambda) M_1 \int_{t_0}^{t_1} |du(t)| \to 0 \text{ при } \lambda\to 0, \tag{1.9}$$

где $M_1 = \max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} | g(t) |$. Учитывая (1.1), (1.2), (1.7), (1.8) и (1.9), из (1.6) непосредственно получим (1.4). Лемма доказана.

Аналогично лемме 1.3 доказывается и

Лемма 1.4. Пусть функции $g(t)$ и $u(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$, а функции $\frac{\partial h_1(t, x)}{\partial x}$, $h_2(t, x)$ и $\frac{\partial h_2(t, x)}{\partial x}$ непрерывны в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $| x | < +\infty$ и

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} | du(t) | < +\infty, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} | dh_i(t, 0) | < +\infty,$$

$$\int\limits_{-r} \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \left| d_t \frac{\partial h_i(t, x)}{\partial x} \right| \right) dx < +\infty, \quad (i=1, 2), \tag{1.10}$$

где $r = \max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} | u(t) |$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)\, d_t \{h_1(t, u(t))\, h_2(t, u(t))\} = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t) h_1(t, u(t))\, d_t h_2(t, u(t)) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)\, h_2(t, u(t))\, d_t\, h_1(t, u(t)).$$

Кроме обозначений I, II и III из § 1, ниже мы будем пользоваться также и следующими:

IV. Пусть

$g(t)$—непрерывна в промежутке $[0, +\infty)$ и

$$\int\limits_0^t | dg(\tau) | < +\infty \tag{1.11}$$

при любом $t \in [0, +\infty)$,

тогда через $[g(t)]_+$ и $[g(t)]_-$ будем обозначать следующие функции:

$$[g(t)]_+ = \frac{1}{2} \left[\int\limits_0^t | dg(\tau) | + g(t) \right]; \quad [g(t)]_- = \frac{1}{2} \left[\int\limits_0^t | dg(\tau) | - g(t) \right].$$

V. Пусть

$$\left. \begin{aligned} & h(t, x) \geqslant 0 \text{ непрерывна при } 0 \leqslant t < +\infty, \ | x | < +\infty, \\ & \int\limits_0^t | dh(\tau, 0) | < +\infty \text{ и } \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_0^t \left| d_\tau \frac{\partial h(\tau, x)}{\partial x} \right| \right) dx < +\infty, \\ & \qquad \text{при любых } t, r \in [0, +\infty), \end{aligned} \right\} \tag{1.12}$$

тогда, каковы бы ни были функции $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$, если $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ непрерывны

$$\left.\begin{array}{c}\int\limits_{t_0}^{t} |\, du_i(\tau)\, | < +\infty, \ (i=1,\ 2) \ \text{и} \ u_2(\tau) > 0 \\ \text{при } t \in [t_0,\ t], \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

то, согласно лемме 1.3, существует

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d_\tau h(\tau, u_1(\tau))}{h(\tau, u_1(\tau)) + u_2(\tau)}\,.$$

Через $\overline{\Phi}(h;\ t_0,\ t)$ и $\underline{\Phi}(h;\ t_0,\ t)$ обозначим, соответственно, функции

$$\overline{\Phi}(h;\ t_0,\ t) = \sup\left\{\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d_\tau h(\tau,\ u_1(\tau))}{h(\tau,\ u_1(\tau)) + u_2(\tau)}\right]\right\}, \tag{1.14}$$

$$\underline{\Phi}(h;\ t_0,\ t) = \inf\left\{\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d_\tau h(\tau,\ u_1(\tau))}{h(\tau,\ u_1(\tau)) + u_2(\tau)}\right]\right\}, \tag{1.15}$$

где sup и inf берем относительно всех тех функций $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$, которые удовлетворяют условиям (1.13).

Согласно леммам 1.1 и 1.2, из (1,14) и (1.15) легко вытекает справедливость следующих лемм:

Лемма 1.5. Если функции $h_i(t,\ x)$, $(i=1,\ 2)$ удовлетворяют условиям (1.12), тогда

$$\overline{\Phi}(h_1 + h_2;\ t_0,\ t) \leqslant \overline{\Phi}(h_1;\ t_0,\ t)\,\overline{\Phi}(h_2;\ t_0,\ t) \text{ при } t \geqslant t_0,$$

$$\underline{\Phi}(h_1 + h_2;\ t_0,\ t) \geqslant \underline{\Phi}(h_1;\ t_0,\ t)\ \underline{\Phi}(h_2;\ t_0,\ t) \text{ при } t \geqslant t_0.$$

Лемма 1.6. Пусть выполняются условия (1.12). Тогда

$$\overline{\Phi}(h;\ t_0,\ t) \leqslant 1 \text{ при } t \geqslant t_0,$$

если $h(t,\ u)$ не возрастает относительно t при любом фиксированном x и

$$\underline{\Phi}(h;\ t_0,\ t) \geqslant 1, \text{ при } t \geqslant t_0,$$

если $h(t,\ x)$ не убывает относительно t при любом фиксированном x.

Лемма 1.7. Если $g(t) > 0$ и $h(t,\ x)$ удовлетворяет условиям (1.11) и (1.12), тогда

$$\overline{\Phi}(gh;\ t_0,\ t) \leqslant \overline{\Phi}(h;\ t_0,\ t) \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\,[g(\tau)]_+}{g(\tau)}\right] \text{ при } t \geqslant t_0$$

и

$$\underline{\Phi}(gh;\ t_0,\ t) \geqslant \underline{\Phi}(h;\ .\, t_0,\ t) \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d[g(\tau)]_-}{g(\tau)}\right], \text{ при } t \geqslant t_0.$$

§ 2. О продолжаемых решениях уравнения (1)

Если не будет сказано противное, ниже мы всегда будем предполагать, что

$$f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x), \tag{2.1}$$

где $f_1(t, x)$ непрерывна в области $0 \leqslant t < +\infty$, $|x| < +\infty$ и

$$\int_{-r}^{r} \left(\int_0^t | d_\tau f_1(\tau, x) | \right) dx < +\infty \text{ при любых } t, r \in [0, +\infty),$$

а $f_2(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори в каждом конечном прямоугольнике области $0 \leqslant t < +\infty$, $|x| < +\infty$.

В дальнейшем везде решение $u(t)$ уравнения (1) назовем продолжаемым, если его можно продолжить на некоторый бесконечный интервал $[t_0, +\infty)$.

Теорема 2.1. Пусть

$$F_1(t, x) = 2 \int_0^x f_1(t, y)\, dy \geqslant 0, \text{ при } t \in [0, +\infty), \ |x| < +\infty \tag{2.2}$$

и

$$|f_2(t, x)| \leqslant \alpha(t) \sqrt{F_1(t, x) + \gamma(t)} \text{ при } t \in [0, +\infty), |x| < +\infty, \tag{2.3}$$

где

$$\gamma(t) \geqslant 0 \text{ — непрерывна и } \int_0^t |d\gamma(\tau)| < +\infty, \text{ при } t \in [0, +\infty), \tag{2.4}$$

а

$$\alpha(t) \geqslant 0 \text{ и } \int_0^t \alpha(\tau) d\tau < +\infty, \text{ при } t \in [0, +\infty), \tag{2.5}$$

тогда для любого решения $u(t)$ уравнения (1), определенного в некотором промежутке $[t_0, t_1]$, имеют место оценки

$$E[u(t_0)] \underline{\Phi}(F_1 + \gamma; t_0, t) \exp\left(- \int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau \right) \leqslant E_\gamma[u(t)] \leqslant$$

$$\leqslant E_\gamma[u(t_0)] \overline{\Phi}(F_1 + \gamma; t_0, t) \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(\tau)\, d\tau \right) \text{ при } t \in [t_0, t_1], \tag{2.6}$$

где

$$E_\gamma[u(t)] = u'^2(t) + F_1(t, u(t)) + \gamma(t). \tag{2.7}$$

Доказательство. Из (2.7) имеем

$$\ln \frac{E_\gamma[u(t)] + \varepsilon}{E_\gamma[u(t_0)] + \varepsilon} = \int_{t_0}^t d \ln \{E_\gamma[u(\tau)] + \varepsilon\} = \int_{t_0}^t \frac{dE_\gamma[u(\tau)]}{E_\gamma[u(\tau)] + \varepsilon} =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{du'^2(\tau)}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}+\int_{t_0}^{t}\frac{d[F_1(\tau,u(\tau))+\gamma(\tau)]}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Так как $u'(\tau)$—абсолютно непрерывная функция, поэтому, согласно (1.1), из уравнения (1) имеем

$$\int_{t_0}^{t}\frac{du'^2(\tau)}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}=\int_{t_0}^{t}\frac{2u'(\tau)u''(\tau)}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\frac{2f_1(\tau,u(\tau))u'(\tau)d\tau}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}-\int_{t_0}^{t}\frac{2f_2(\tau,u(\tau))\,u'(\tau)}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}. \tag{2.9}$$

С другой стороны, согласно лемме 1.3, имеем

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d[F_1(\tau,u(\tau))+\gamma(\tau)]}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}=\int_{t_0}^{t}\frac{2f_1(\tau,u(\tau))\,u'(\tau)d\tau}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{d_\tau[F_1(\tau,u(\tau))+\gamma(\tau)]}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}. \tag{2.10}$$

В силу (2.9) и (2.10), из (2.8) получим

$$\ln\frac{E\gamma[u(t)]+\varepsilon}{E\gamma[u(t_0)]+\varepsilon}=\int_{t_0}^{t}\frac{d_\tau[F_1(\tau,u(\tau))+\gamma(\tau)]}{v(\tau)+F_1(\tau,u(\tau))+\gamma(\tau)}-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\frac{2f_2(\tau,u(\tau))\,u'(\tau)d\tau}{E\gamma[u(\tau)]+\varepsilon}, \tag{2.11}$$

где $v(t)=u'^2(t)+\varepsilon$.

В силу (2.3) и (2.7), легко получим

$$2\mid f_2(t,u(t)\mid\mid u'(t)\mid\leqslant 2\alpha(t)\sqrt{F_1(t,u(t))+\gamma(t)}\mid u'(t\mid\leqslant\alpha(t)E\gamma[u(t)],$$

согласно чему из (2.11) найдем

$$(E\gamma[u(t_0)]+\varepsilon)\,\underline{\Phi}(F_1+\gamma;t_0,t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)\,d\tau\right)\leqslant E\gamma[u(t)]+\varepsilon\leqslant$$

$$\leqslant(E\gamma[u(t_0)]+\varepsilon)\,\overline{\overline{\Phi}}(F_1+\gamma;t_0,t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)\,d\tau\right),$$

при $t\in[t_0,t_1]$,

откуда, в силу произвольности ε, непосредственно следует (2.6). Теорема доказана.

Следствие 1. Если выполняются условия теоремы 2.1 и

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \overline{\Phi}(F_1+\gamma;\, t_0,\, t) < +\infty \ \text{при любых}\ t_0,\ t_1 \in [0,\ +\infty), \tag{2.12}$$

то все решения уравнения (1) продолжаемы[1].

Доказательство. Допустим противное, пусть уравнение (1) имеет некоторое непродолжаемое решение $u(t)$, определенное в промежутке $[t_0,\ t_1]$, где $t_0 < t_1 < +\infty$. Без ограничения общности можем считать, что $\overline{\lim\limits_{t\to t_1}} \mid u'(t) \mid = +\infty$. Тогда, согласно (2.7), имеем

$$\overline{\lim_{t\to t_1}} E_\gamma[u(t)] = +\infty.$$

С другой стороны, из оценки (2.6), согласно (2.12), очевидно, что

$$\overline{\lim_{t\to t_1}} E_\gamma[u(t)] \leqslant E_\gamma[u(t_0)] \sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \overline{\Phi}(F_1+\gamma;\ t_0,\ t) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)\, d\tau\right) < +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает, что уравнение (1) не имеет непродолжаемых решений.

Следствие 2. Если соблюдаются условия следствия I и, кроме того,

$$\inf_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \underline{\Phi}(F_1+\gamma; t, t_1) > 0 \ \text{при любых}\ t_0,\ t_1 \in [0,\ +\infty), \tag{2.13}$$

то любое решение уравнения (1) может быть продолжено на весь интервал $[0,\ +\infty)$.

Доказательство. Допустим противное, пусть уравнение (1) имеет такое решение $u(t)$, которое не может быть продолжено на весь интервал $[0,\ +\infty)$. Тогда, согласно следствию 1, существует такая точка $t_0 \in [0,\ +\infty)$, что $u(t)$ определено на интервале $[t_0,\ +\infty)$ и $\overline{\lim\limits_{t\to t_0}} | u'(t| = +\infty$, следовательно,

$$\overline{\lim_{t\to t_0}} E_\gamma[u(t)] = +\infty.$$

С другой стороны, согласно теореме (2.1) и условию (2.13), для любого t_1, $t_1 \in [t_0,\ +\infty)$ будем иметь

$$E_\gamma[u(t)] \leqslant \frac{E_\gamma[u(t_1)] \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)\, d\tau\right)}{\inf\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \underline{\Phi}(F_1+\gamma;\ t,\ t_1)} < +\infty \ \text{при}\ t \in (t_0,\ t_1].$$

---

[1] В работах [3] и [4] высказывается предположение, что если $f(t,\ u) \operatorname{sign} u > 0$ при $0 \leqslant t < +\infty$, $\mid u \mid < +\infty$, то все решения уравнения (1) продолжаемы, но приведенные там доказательства ошибочны. Было бы весьма интересно уяснить, справедливо или нет это предположение, но нам это не удалось.

Полученное противоречие доказывает, что $u(t)$ может быть продолжено на весь интервал $[0, +\infty)$.

Следствие 3. Если соблюдаются условия (2.2) и (2.5)

$$|f_2(t, x)| \leqslant \alpha(t)\sqrt{F_1(t, x)} \text{ при } t \in [0, +\infty), \ |x| < +\infty; \tag{2.4}$$

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \overline{\Phi}(h; t_0, t) < +\infty, \quad \inf_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \Phi(h; t, t_1) > 0, \tag{2.5}$$
$$\text{при любых } t_0, t_1 \in [0, +\infty),$$

то любое решение $u(t)$ уравнения (1) на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$ может иметь только лишь конечное число нулей.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такая точка t_0, что будем иметь

$$u(t_0) = u'(t_0) = 0. \tag{2.16}$$

Согласно (1.16), из (2.7) получим

$$E_0[u(t_0)] = 0.$$

С другой стороны, согласно теореме 2.1, ясно, что

$$E_0[u(t)] \leqslant E_0[u(t_0)]\overline{\Phi}(F_1; t_0, t)\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)\, d\tau\right), \text{ при } t \in [t_0, +\infty),$$

и

$$E_0[u(t)] \leqslant \frac{E_0[u(t_0)]\exp\left(\int_t^{t_0} \alpha(\tau)\, d\tau\right)}{\underline{\Phi}(F_1; t, t_0)} = 0, \text{ при } t \in [0, t_0),$$

отсюда, согласно (2.2) и (2.7), вытекает, что $u'(t) \equiv 0$, при $t \in [0, +\infty)$. Следовательно, $u(t) \equiv \text{const}$, но, в силу (2.16), это значит, что $u(t) \equiv 0$, при $t \in [0, +\infty)$. Полученное противоречие доказывает следствие.

Следствие 4. Пусть

$$f_1(t, x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t) f_{1k}(t, x), \tag{2.17}$$

$a_k(t)$ непрерывны и

$$\int_0^t |da_k(\tau)| < +\infty, \text{ при } t \in [0, +\infty), \ (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.18}$$

$$F_{1k}(t, x) = 2\int_0^x f_{1k}(t, y)\, dy \geqslant 0, \tag{2.19}$$
$$\text{при } t \in [0, +\infty), \ |x| < +\infty, \ (k = 1, 2, \ldots, m)$$

$F_{1k}(t, x)$ не возрастает относительно t при любом x, (2.20) и

$$| f_2(t, x)| \leqslant \alpha(t) \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k(t)[c+F_{1k}(t, x)] \right\}^{1/2}, \tag{2.21}$$
$$\text{при } t \in [0, +\infty), \quad |x| < +\infty,$$

где $c \geqslant 0$, а $\alpha(t)$ удовлетворяет условию (2.5). Тогда любое решение уравнения (1) продолжаемо.

Доказательство. Положим

$$a(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t), \quad \alpha_k(t) = \frac{a_k(t)}{a(t)} \quad (k=1, 2, \ldots, m). \tag{2.22}$$

Согласно (2.17), (2.18), (2.19) и (2.21) ясно, что выполняются условия (2.2), (2.3) и (2.4), где

$$\gamma(t) = ca(t).$$

С другой стороны, согласно (2.17), (2.22) и (2.23), имеем

$$F_1(t, x) + \gamma(t) = a(t)\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k(t) F_{1k}(t, x) + c\right],$$

откуда, в силу лемм 1.6 и 1.7, вытекает, что

$$\overline{\Phi}(F_1+\gamma; t_0, t) \leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{d[a(\tau)]_+}{a(\tau)}\right) \prod_{k=1}^{m} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)}\right) \overline{\Phi}(F_{1k}; t_0, t) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{d[a(\tau)]_+}{a(\tau)}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)}\right), \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{2.24}$$

Из полученной оценки ясно, что выполняется условие (2.12) и поэтому, согласно следствию 1, любое решение уравнения (1) продолжаемо.

Следствие 5. Пусть

$$f_1(t, x) = \sum_{k+1}^{m} a_k(t) f_{1k}(x) \tag{2.25}$$

и выполняется условие (2.18);

$$F_{1k}(x) = 2\int_0^x f_{1k}(y)dy \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |x| < +\infty \; (k=1, 2, \ldots, m) \tag{2.26}$$

и

$$| f_2(t, x)| \leqslant \alpha(t) \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k(t)[c+F_{1k}(x)] \right\}^{1/2} \tag{2.27}$$
$$\text{при } t \in [0, +\infty), \quad |x| < +\infty,$$

где $c \geqslant 0$, а $\alpha(t)$ удовлетворяет условию (2.5). Тогда любое решение уравнения (1) можно продолжить на весь интервал $[0, +\infty)$.

Доказательство. Так как выполняются условия следствия 4, то, согласно следствию 2, надо показать, что выполняется условие (2.13). В силу лемм 1.5, 1.6 и 1.7, имеем

$$\underline{\Phi}(F_1+\gamma; t_0, t) \geqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)}\right)\prod_{k=1}^{m}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{d[\alpha_k(\tau)]}{\alpha_k(\tau)}\right)\times$$

$$\times\underline{\Phi}(F_{1k}+\gamma;\ t_0, t) \geqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\frac{d[\alpha_k(\tau)]_-}{\alpha_k(\tau)}\right), \text{ при } \quad t \geqslant t_0. \tag{2.28}$$

В силу следствия 5, из следствия 3 непосредственно вытекает

Следствие 6. Пусть выполняются условия (2.5), (2.25), (2.26) и

$$|\ f_2(t, x)\ | \leqslant \alpha(t)\left\{\sum_{k=1}^{m} a_k(t)F_{1k}(x)\right\}^{1/2}, \text{ при } t \in [0, +\infty),\ |x| < +\infty. \tag{2.29}$$

Тогда любое нетривиальное решение уравнения (1) на каждом конечном отрезке интервала $[0, +\infty)$ может иметь только лишь конечное число нулей.

§ 3. Ограниченность и устойчивость решений уравнения (1)

Теорема 3.1. Пусть соблюдаются условия (2.2), (2.3), (2.4), (2.12)

$$\int_{0}^{+\infty} \alpha(\tau)d\tau < +\infty \tag{3.1}$$

и

$$\overline{\lim_{|x|\to+\infty}}\left\{\inf_{t\geqslant t_0}\ \frac{F_1(t, x)+\gamma(t)}{\overline{\Phi}(F_1+\gamma;\ t_0, t)}\right\} > \gamma(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{+\infty}\alpha(\tau)\,d\tau\right). \tag{3.2}$$

Тогда найдется такое положительное число δ, что любое решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$|\ u(t_0)\ | \leqslant \delta, \quad |\ u'(t_0)\ | \leqslant \delta, \tag{3.3}$$

ограничено в промежутке $[t_0, +\infty)$; если вместо условия (3. 2) соблюдается условие

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left\{\inf_{t\geqslant t_0}\frac{F_1(t,x)+\gamma(t)}{\overline{\Phi}(F_1+\gamma;\,t_0,t)}\right\}=+\infty,$$

$$\text{при любом } t_0\in[0,+\infty), \tag{3.4}$$

то все решения уравнения (1) ограничены при $t\to+\infty$.

Доказательство. Положим

$$\omega(t_0,x)=\inf_{t\geqslant t_0}\frac{F_1(t,x)+\gamma(t)}{\overline{\Phi}(F_1+\gamma,\,t_0,t)}. \tag{3.5}$$

Из (3.2) и (3.5) ясно, что найдется такая последовательность $\{x_k\}$, что

$$(-1)^k x_k>0\quad(k=1,2,\ldots)\ \lim_{k\to+\infty}|x_k|=+\infty \tag{3.6}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\omega(t_0,x_k)=\gamma(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{+\infty}\alpha(\tau)\,d\tau\right)+\eta, \tag{3.7}$$

где $\eta>0$.

Подберем теперь $\delta>0$ таким образом, чтобы имели

$$2\delta^2<\eta,\quad 2F_1(t_0,x)<\eta,\ \text{при } |x|\leqslant\delta. \tag{3.8}$$

Допустим теперь, что уравнение (1) обладает таким решением $u(t)$, которое удовлетворяет условиям (3.3) и не ограничено при $t\to+\infty$. Тогда из (3.6) ясно, что для некоторой подпоследовательности $\{x_{k_i}\}$ последовательности $\{x_k\}$ будем иметь

$$u(t_i)=x_{k_i}\quad(i=1,2,\ldots),$$

где $t_0\to+\infty$, при $i\to+\infty$.

Поэтому, согласно (3.7), получим

$$\lim_{t\to+\infty}\omega(t_0,u(t_i))=\gamma(t_0)+\eta. \tag{3.9}$$

С другой стороны, согласно (2.7) и (3.5), из оценки (2.6) находим

$$\omega(t_0,u(t_0))\leqslant u'^2(t_0)+F_1(t_0\,u(t_0))+\gamma(t_0),\ \text{при } t\geqslant t_0,$$

откуда, в силу условий (3.3) и (3.8), вытекает, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\omega(t_0,u(t))<\gamma(t_0)+\eta,$$

что противоречит условию (3.9). Полученное противоречие доказывает, что любое решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (3.3), ограничено при $t\to+\infty$.

Если теперь вместо (3.2) соблюдается условие (3.4), то ясно, что тогда условие (3.8) соблюдается для любого положительного δ и, следовательно, как это видно из рассуждений, приведенных выше, любое решение уравнения (1) ограничено при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) и (3.1),

$$\int_0^{+\infty} \frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)} < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)} < +\infty, \quad (k=1.\ 2, \ldots, m), \tag{3.10}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} F(x) > c \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)} + \int_{t_0}^{+\infty} \alpha(\tau)\, d\tau \right) - c, \tag{3.11}$$

где $a(t)$ и $\alpha_k(t)$, $(k=1,\ 2, \ldots, m)$—функции, определенные формулами (2.22), а

$$F(x) = \min_{1 \leqslant k \leqslant m} F_{1k}(\infty,\ x). \tag{3.12}$$

Тогда найдется такое положительное число δ, что любое решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (3.3), ограничено при $t \to +\infty$. Если же вместо условия (3.11) имеет место условие

$$\lim_{|x|\to+\infty} F(x) = +\infty,$$

то любое решение уравнения (1) ограничено при $t \to +\infty$.

Доказательство. Согласно (3.10), из (2.24) имеем

$$\overline{\Phi}(F_1+\gamma;\ t_0,\ t) \leqslant \frac{a(t)}{a(t_0)} \exp\left(\int_{t_0}^{+\infty} \frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)} \right) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{3.14}$$

В силу (2.17), (2.18), (2.20) и (3.12) ясно, что

$$F_1(t,\ x) + \gamma(t) = a(t) \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k}(t) F_{1k}(t,\ x) + c\right] \geqslant a(t)\,[F(x) + c],$$

откуда, учитывая (3.14), получим, что

$$\frac{F_1(t,\ x) + \gamma(t)}{\overline{\Phi}(F_1+\gamma;\ t_0,\ t)} \geqslant [F(x)+c]\, a(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)} \right) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{3.15}$$

Так как $\gamma(t) = ca(t)$, поэтому из последнего неравенства ясно, что выполняется условие (3.11), но тогда выполняется и условие (3.2), а если соблюдается условие (3.13), то соблюдается и условие (3.4). Этим справедливость следствия доказана.

Легко можно показать, что из доказанного следствия вытекают некоторые результаты Л. И. Камынина [1], Ю. А. Клокова [2] и Z. Opial-я [5].

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.12) и (3.1)

$$\inf_{t\geqslant t_0} \Phi(F_1;\, t_0,\, t)>0 \quad \text{при любом } t_0\in[0,\, +\infty), \tag{3.16}$$

$$\gamma_0=\sup_{t\geqslant 0}\gamma(t)<+\infty \tag{3.17}$$

и

$$F_1^+=\sup_{\substack{t\geqslant 0\\ 0\leqslant x<+\infty}} F_1(t,\, x)<+\infty, \ (\text{либо } F_1^-=\sup_{\substack{t\geqslant 0\\ -\infty<x<0}} F_1(t,\, x)<+\infty). \tag{3.18}$$

Тогда уравнение (1) обладает решениями, монотонно стремящимися к $+\infty\,(-\infty)$, при $t+\to\infty$.

Доказательство. Допустим для определенности, что $F_1^+<+\infty$, так как случай, когда $F_1^-<+\infty$ рассматривается совершенно аналогично.

Построим решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0)>0, \quad u'(0)\geqslant\left(\frac{F_1^+ +\gamma+1}{c_0}\right)^{1/2}+1, \tag{3.19}$$

где

$$c_0=\exp\left(-\int\limits_0^{+\infty}\alpha(\tau)\,d\tau\right)\inf_{t\geqslant 0}\Phi(F_1+\gamma;\, 0,\, t). \tag{3.20}$$

Покажем, что

$$u'(t)>0, \text{ при } t\geqslant 0. \tag{3.21}$$

Допустим противное. Тогда, в силу (3.19), найдется такое $t_0\in[0,+\infty)$, что будем иметь

$$u(t)>0,\ u'(t)>1 \text{ при } t\in[0,\ t_0) \tag{3.22}$$

и

$$u'(t_0)=1. \tag{3.23}$$

Согласно (3.17), (3.18), (3.20) и (3.22), из (2.6) получим

$$u'^2(t)+F_1^+ +\gamma_0\geqslant u'^2(0)\,c_0, \text{ при } t\in[0,\ t_0],$$

откуда, в силу (3.19), вытекает

$$u'^2(t)>1 \text{ при } t\in[0,\ t_0],$$

что противоречит условию (3.23). Полученное противоречие доказывает, что соблюдается условие (3.21), откуда непосредственно вытекает, что $u'^2\uparrow+\infty$, при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если соблюдаются условия (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21). (3.1), (3.10) и, кроме того,

$$\sup_{t\geqslant 0} a(t)=a<+\infty, \tag{3.24}$$

$$F^{+}_{1k}=\sup_{x\geqslant 0} F_{1k}(0, x)<+\infty$$

$$(\text{либо } F^{-}_{1k}=\sup_{-\infty<x\leqslant 0} F_{1k}(0, x)<+\infty) \quad (k=1, 2, \cdots, m), \tag{3.25}$$

то уравнение (1) имеет решения, монотонно стремящиеся к $+\infty$ $(-\infty)$ при $t\to+\infty$.

Доказательство. Так как $\gamma=ca(t)$, то, согласно (3.24) и (3.25), ясно, что выполняются условия (3.17) и (3.18). С другой стороны, в силу (3.10), из (2.28) вытекает, что справедливо условие (3.16), что доказывает справедливость следствия.

Согласно следствию теоремы 3.1, из доказанного предложения легко вытекает

Следствие 2. Пусть выполняются условия (2.18), (2.25), (2.26), (2.27), (3.1), (3.10) и (3.24) и, кроме того,

$$\inf a_k(t)\geqslant\delta>0 \quad (k=1, 2, \cdots, m).$$

Тогда для ограниченности любого решения уравнения (1) при $t\to+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{|x|\to+\infty}} \sum_{k=1}^{m} F_{1k}(x)=+\infty.$$

Теорема 3.3. Пусть

$$F_1(t, x)\geqslant\omega(x), \quad \text{при} \quad t\geqslant 0, \ |x|<+\infty, \tag{3.26}$$

где

$$\begin{gathered}\omega(x) \text{—непрерывна в } (-\infty, +\infty), \ \omega(0)=0, \\ \omega(x)>0 \text{ при } x\neq 0\end{gathered} \tag{3.27}$$

$$\sup_{t_0\geqslant 0}\{\sup_{t\geqslant t_0} \overline{\Phi}(F_1; t_0, t)\}<+\infty \tag{3.28}$$

и соблюдаются условия (2.14) и (3.1). Тогда тривиальное решение уравнения (1) равномерно устойчиво в смысле Ляпунова.

Доказательство. Положим

$$c_0=\sup_{t_0\geqslant 0}\{\sup_{t\geqslant t_0} \overline{\Phi}(F_1, t_0, t)\}<+\infty. \tag{3.29}$$

Из равенства

$$F_1(t, x)+\eta=[F_1(0, x)+\eta]\exp\left(\int_0^t \frac{d\tau\, F_1(\tau, x)}{\eta+F_1(\tau, x)}\right).$$

Ясно, что для любого $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$F_1(t, x) \leqslant c_0 (F_1(0, x+\eta), \text{ при } t \geqslant 0,$$

откуда, в силу произвольности η, вытекает

$$F_1(t, x) \leqslant c_0 F_1(0, x), \text{ при } t \geqslant 0. \tag{3.30}$$

Пусть теперь ε—произвольное положительное число. Положим,

$$\varepsilon_1 = \min(\varepsilon^2, \ \omega(-\varepsilon), \ \omega(\varepsilon)). \tag{3.31}$$

Подберем $\delta \in (0, \varepsilon)$ таким образом, чтобы

$$[\delta^2 + c_0 \max_{|x| \leqslant \delta} F_1(0, x)]\, c_0 < \varepsilon, \tag{3.32}$$

и покажем, что каковы бы ни были $t_0 \in [0, +\infty)$ и решение $u(t)$ уравнения (1), если

$$|\, u t_0)\,| \leqslant \delta_1, \quad |\, u'(t_0)\,| \leqslant \delta, \tag{3.33}$$

то

$$|\, u(t)\,| < \varepsilon \ \text{ и } \ |\, u'(t)\,| < \varepsilon, \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{3.34}$$

Допустим противное, пусть найдутся такие числа t_0 и t_1, $0 \leqslant t_0 < < t_1 < +\infty$ и такое решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (3.33), что $|\, u(t)\,| < \varepsilon$, $|\, u'(t)\,| < \varepsilon$, при $t \in [t_0, t_1)$ и

$$\max(\,|\, u(t_1)\,|\,; \ |\, u'(t_1)\,|\,) = \varepsilon. \tag{3.35}$$

Согласно (3.29) и (3.30), из (2.6) получим

$$u'^2(t) + F_1(t, u(t)) \leqslant (u'^2(t_0) + c_0 F_1(0, u(t_0))\,]\, c_0, \quad \text{при } t \in [t_0, t_1].$$

Отсюда, в силу (3.26), (3.31), (3.32) и (3.33), имеем

$$\omega(u(t)) < \min(\omega(\varepsilon), \omega(-\varepsilon), |\, u'(t)\,|\,) < \varepsilon \text{ при } t \in [t_0, t_1],$$

что противоречит условию (3.35). Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Пусть соблюдаются условия* (2.17), (2.18), (2.20), (3.1), (3.10) и (3.24),

$$F_{1k}(+\infty, x) > 0, \text{ при } x \neq 0, \text{ и непрерывны, } k = 1, 2, \ldots, m \tag{3.36}$$

и

$$|\, f_2(t, x)\,| \leqslant \alpha(t) \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k(t) F_1(t, x) \right\}^{1/2},$$

$$\text{при } t \in [0, +\infty), \ |\, x\,| < +\infty. \tag{3.37}$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1) *равномерно устойчиво в смысле Ляпунова.*

Доказательство. Согласно (3.10) и (3.24), из равенства

$$\ln a(t) = \ln a(0) + \int_0^t \frac{d[a(\tau)]_+}{a(\tau)} - \int_0^t \frac{d\,[a(\tau)]_-}{a(\tau)}$$

получим

$$a(t) \geqslant c_1 > 0, \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{3.38}$$

и

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\,[a(\tau)]_+}{a(\tau)} < c_2, \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{3.39}$$

где

$$c_1 = a(0) \exp\left(- \int_0^{+\infty} \frac{d\,[a(\tau)]_-}{a(\tau)} \right),$$

а

$$c_2 = \ln \frac{a}{a(0)} + \int_0^{+\infty} \frac{d\,[a(\tau)]_-}{a(\tau)}.$$

В силу (3.36), (3.38) ясно, что соблюдаются условия (3.26) и (3.27) при $\omega(x) = c_1 \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} F_{1k}(+\infty, x)$. Согласно (3.10) и (3.39), из (2.14) вытекает, что соблюдается условие (3.29). Следствие доказано.

§ 4. О стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ решениях уравнения (1)

Преобразованием

$$u(t) = \varphi(t) w(s), \tag{4.1}$$

$$s = \int_0^t \varphi^{-2}(\tau) d\tau \tag{4.2}$$

уравнение (1) приведем к виду

$$w'' + g(s, w) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$g(s, w) = \varphi^3(t) f(t, \varphi(t) w) + \varphi''(t) \varphi^3(t) w. \tag{4.4}$$

Если теперь $\varphi(t) \to 0$, при $t \to \infty$, $w(s)$—некоторое ограниченное решение уравнения (4.3), то ясно, что функция $u(t)$, определенная равенствами (4.1) и (4.2), будет решением уравнения (1), стремящимся к нулю при $t \to +\infty$.

Из вышесказанного ясно, что, применив теорему 3.1, можно указать ряд достаточных условий стремления к нулю при $t \to +\infty$ решений уравнения (1). Приведем некоторые из них.

Теорема 4.1. Пусть

$$\varphi^3(t) f(t, \varphi(t) x) + \varphi''(t) \varphi^3(t) x =$$

$$= \sum_{k=1}^m a_k(t) f_{1k}(t, x) + f_2(t, x) \tag{4.5}$$

и

$$|f_2(t, x)| \leqslant \varphi^2(t)\,\alpha(t)\left\{\sum_{k=1}^{m} a_k(t)[c+F_{1k}(t, x)]\right\}^{1/2},$$

$$\text{при } t \in [0, +\infty), \quad |x| < +\infty, \tag{4.6}$$

где $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка

$$[0, +\infty), \varphi(t) > 0, \ \varphi(t) \to 0, \text{ при } t \to +\infty, \tag{4.7}$$

а $F_{1k}(t_0, x)$, $a_k(t)$, $(k=1, 2,\ldots, m)$ и $\alpha(t)$—функции, удовлетворяющие, соответственно, условиям (2.18), (2.19), (2.20), (3.1), (3.10), (3.11). Тогда любое решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (3.3), где δ—достаточно малое положительное число, стремится к нулю при $t \to +\infty$, причем

$$u(t) = O(\varphi(t)), \text{ при } t \to +\infty, \tag{4.8}$$

а если вместо условия (3.11) соблюдается условие (3.13), то любое решение $u(t)$ уравнения (1) удовлетворяет условию (4.8).

Доказательство. Положим

$$b_k(s) = a_k(t), \quad b(s) = \sum_{k=1}^{m} b_k(s), \quad \beta_k(t) = \frac{b_k(s)}{b(s)}, \tag{4.9}$$

$$g_{1k}(s, x) + f_{1k}(t, x), \ G_{1k}(s, x) = \int_0^x g_{1k}(s, y)\,dy, \tag{4.10}$$

$$g_2(s, x) = f_2(t, x), \tag{4.11}$$

$$\beta(s) = \alpha(t)\,\varphi^2(t), \tag{4.12}$$

где s определяется равенством (4.2). Тогда из (4.4), (4.5) и (4.6) ясно, что

$$g(s, x) = \sum_{k=1}^{m} b_k(s)\, g_{1k}(s, x) + g_2(s, x) \tag{4.13}$$

и

$$|g_2(s, x)| \leqslant \beta(s)\left\{\sum_{k=1}^{m} b_k(s)[c+G_{1k}(s, x)]\right\}. \tag{4.14}$$

В силу (2.19), (2.20), (4.2) и (4.10), имеем

$$G_k(s, x) \geqslant 0 \text{ и не возрастает по } s, \tag{4.15}$$

а согласно (2.18), (3.1), (3.10), (4.2), (4.9) и (4.12), имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{s_0}^{+\infty} \frac{d[b(s)]}{b(s)} = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d[a(\tau)]_-}{a(\tau)} < +\infty, \quad \int_{s_0}^{+\infty} \frac{d[\beta_k(s)]_+}{\beta_k(s)} = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d[\alpha_k(\tau)]_+}{\alpha_k(\tau)} \\
&\qquad\qquad (k=1, 2,\ldots,m) \\
&\text{и} \\
&\qquad \int_{s_0}^{+\infty} \beta(s)\,ds = \int_{t_0}^{+\infty} \alpha(\tau)\,d\tau < +\infty,
\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

где

$$s_0=\int\limits_0^{t_0}\varphi^{-2}(\tau)d\tau.$$

Согласно (3.11), (4.10) и (4.16), имеем

$$\overline{\lim_{|x|\to+\infty}}\; G(x)>c\exp\left(\int\limits_{s_0}^{+\infty}\frac{d[b(s)]_-}{b(s)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{d[\beta_k(s)]_-}{\beta_k(s)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{s_0}^{+\infty}\alpha(\tau)\,d\tau\right)-c, \tag{4.17}$$

где $G(x)=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m}G_{1k}(+\infty,\ x)$.

Поскольку соблюдаются условия (4.13)—(4.17), поэтому, согласно следствию теоремы 2.1, найдется такое положительное число δ_1, что любое решение $w(s)$ уравнения (4.3), удовлетворяющее условиям

$$|\,w(s_0)\,|<\delta_1 \text{ и } |\,w'(s_0)\,|<\delta_1,$$

ограничено при $s\to+\infty$.

Подберем $\delta>0$ таким образом, чтобы

$$[\varphi(t_0)+\varphi^{-1}(t_0)+|\,\varphi'(t_0)\,|\,]\,\delta<\delta_1. \tag{4.18}$$

Пусть теперь $u(t)$—такое решение уравнения (1), которое удовлетворяет условию (3.3). Тогда, в силу (4.1), (4.2) и (4.18), получим

$$|\,w(s_0)|=\frac{|\,u(t_0)\,|}{\varphi(t_0)}<\delta_1,\ \ |\,w'(s_0)\,|=|\,\varphi(t_0)\,u'(t_0)-\varphi'(t_0)\,u(t_0)\,|<\delta_1,$$

поэтому, согласно вышесказанному, $w(s)$ будет ограниченным при $s\to+\infty$. Но тогда из (4.1) непосредственно вытекает, что соблюдается условие (4.8).

Если теперь вместо (3.11) соблюдается условие (3.13), то вместо (4.17) будем иметь $\overline{\lim\limits_{|x|\to+\infty}}\,G(x)=+\infty$, поэтому, согласно теореме 2.1, любое решение уравнения (4.3) будет ограниченным при $s\to+\infty$ и, следовательно, любое решение уравнения (1) будет иметь вид (4.8). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть

$$f(t,\ x)=b(t)\ |\,x\,|^{n}\operatorname{sign}x+h(t,\ x), \tag{4.19}$$

где

$$n>1\ \ b(t)-\text{непрерывны},\ \ b(t)>0 \text{ и}$$

$$\int\limits_0^t|\,db(t)\,|<+\infty,\text{ при } t\in[0,\ +\infty), \tag{4.20}$$

$$|\,g(t,x)\,|\sqrt{b(t)}\leqslant\beta(t)|x|^{\frac{n+1}{2}} \text{ и } \int\limits_0^{+\infty}\beta(t)dt<+\infty. \tag{4.21}$$

Если, кроме того, для некоторой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям (4.7), имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{d[b(t)\varphi^{n+3}(t)]_-}{b(t)\varphi^{n+3}(t)} < +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{|\varphi''(t)|}{\sqrt{b(t)\varphi^{n+1}(t)}}\, dt < +\infty, \tag{4.22}$$

то любое решение $u(t)$ уравнения (1) имеет вид (4.8).

Доказательство. Полагая

$$m=1,\ a(t)=b(t),\ \varphi^{n+3}(t),\quad a_1(t)\equiv 1,\ f_1(t,\ x)=|x|^n \operatorname{sign} x \ \text{и}$$

$$f_2(t,\ x)=\varphi^3(t,\ g(t,\ \varphi(t)x))+\varphi''(t)\,\varphi^3(t)x),$$

$$c=\frac{1}{n+1} \ \text{и}\ \alpha(t)=\sqrt{n+1}\,\beta(t)+\frac{\sqrt{n+1}\,|\varphi''(t)|}{\sqrt{b(t)\,\varphi^{n+1}(t)}}.$$

Согласно (4.18), (4.19), (4.20) и (4.21), легко проверим, что соблюдаются все условия теоремы 3.1, включая условия (3.3). Поэтому, согласно теореме 2.1, любое решение уравнения (1) имеет вид (4.8). Следствие доказано:

Для случаев, когда $\varphi(t)=t^{-\frac{\sigma}{n+3}}$ или $\varphi(t)=[a(t)]^{-\frac{1}{m+3}}$, из доказанного следствия непосредственно вытекает

Следствие 2. Если соблюдаются условия (4.18), (4.19) и (4.20) и, кроме того, $a(t)\,t^{-\sigma}$, где $\sigma>0$ не убывает, то любое решение $u(t)$ уравнения (1) имеет вид

$$u(t)=0\,(t^{-\frac{\sigma}{n+3}}).$$

Следствие 3. Если соблюдаются условия (4.18), (4.19) и (4.20) и, кроме того, $a(t)$ абсолютно непрерывна вместе с $a'(t)$ и

$$\int_0^{+\infty} a^{-\frac{1}{n+3}}(t)\,|[a^{-\frac{1}{n+3}}(t)]''|\,dt < +\infty,$$

то любое решение $u(t)$ уравнения (1) имеет вид

$$u(t)=0\,(a^{-\frac{1}{n+3}}(t)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Камынин. Об ограниченности решений дифференциального уравнения $y''+F(t,x)y=0$. Вестник МГУ, 5, сер. физ.-мат. наук, № 3 (1953), 3—12.

2. Ю. А. Клоков. Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. УМН, 2 (80), (1958), 189—194.

3. G. Hoheisel. Bahnkurven nichtlinearer Differentialgleichungen. Prax. Math. 7, № 3 (1963), 57—59.

4. Z. Nehari. On a class of nonlinear second order differentiel equations. Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 101—123.
5. Z. Opial. Z. Nouvelles remarques sur e'équation différentielle $u''+a(t)u=0$. Ann. polon. math, 6, № 1 (1959), 75—81.

Тбилисский гос. университет,
Проблемная лаборатория прикладной математики

(Поступило в редакцию 9. II. 1967)

დ. იზიუმოვა

ზოგიერთი არაწრფივი მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში დადგენილია (1) სახის დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების შემოსაზღვრულობის, მდგრადობის, გაგრძელებადობის და ნულისაკენ მისწრაფებისათვის საკმარისი პირობები, როცა $t \to +\infty$.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Р. Г. КОПЛАТАДЗЕ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей статье исследуется вопрос об асимптотическом поведении решений следующей системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = a_{11}(t)\,u_1 + a_{12}(t)\,u_2,$$
$$\frac{du_2}{dt} = a_{21}(t)\,u_1 + a_{22}(t)\,u_2, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{ij}(t)$ $(i, j=1, 2)$ предполагаются суммируемыми на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$.

В § 1 настоящей статьи устанавливаются достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности, а в §§ 2 и 3 — достаточные условия ограниченности, стремления к нулю и неограниченности решений системы (1).

§ 1. Условия осцилляторности и неосцилляторности решений системы (1)

Решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) назовем осцилляторной (слабо осцилляторной), если как $u_1(t)$, так и $u_2(t)$ (либо $u_1(t)$, либо $u_2(t)$) имеет бесконечное множество нулей.

Решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) назовем неосцилляторной (сильно неосцилляторной), если либо $u_1(t)$, либо $u_2(t)$ (как $u_1(t)$, так и $u_2(t)$) имеет лишь конечное число нулей.

Систему дифференциальных уравнений (1) назовем осцилляторной, слабо осцилляторной, неосцилляторной или сильно неосцилляторной, если все ее нетривиальные решения являются, соответственно, осцилляторными, слабо осцилляторными, неосцилляторными или сильно неосцилляторными.

Я. В. Быковым в работе [2] был исследован вопрос об осцилляторности системы (1) при предположении, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

имеет постоянные собственные векторы. В настоящей статье рассматривается случай, когда это условие, вообще, нарушается.

Посредством преобразований

$$u_1 = e\text{xp}\left(\int_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right) v_1,$$
$$u_2 = e\text{xp}\left(\int_0^t a_{22}(\tau)\,d\tau\right) v_2 \tag{1.1}$$

система (1) приводится к виду

$$\frac{dv_1}{dt} = A_{12}(t)\,v_2,$$
$$\frac{dv_2}{dt} = A_{21}(t)\,v_1, \tag{1.2}$$

где

$$A_{ij}(t) = a_{ij}(t)\,e\text{xp}\left\{\int_0^t [a_{jj}(\tau) - a_{ii}(\tau)]\,d\tau\right\} \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2). \tag{1.3}$$

Ясно, что для того, чтобы решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) было осцилляторным, необходимо и достаточно, чтобы таким же было решение $(v_1(t), v_2(t))$ системы (1.2), определенное формулами (1.1).

Справедливы следующие простые леммы:

Лемма 1.1. Если

$$a_{ij}(t) \neq 0 \text{ и } \operatorname{sign} a_{ij}(t) = \text{const} \quad (i, j = 1, 2;\ i \neq j), \text{ при } 0 \leqslant t < \infty, \tag{1.4}$$

то из слабой осцилляторности системы (1) (системы (1.2)) следует ее осцилляторность.

Доказательство. Допустим противное, что система (1) и, следовательно, система (1.2) слабо осцилляторна, но не осцилляторна. Тогда без ограничения общности можем считать, что система (1.2) обладает таким решением $(v_1(t), v_2(t))$, что $v_1(t)$ нигде не равняется нулю в промежутке $[0, \infty)$, а $v_2(t)$ имеет бесконечное множество нулей. Но это невозможно, так как, согласно (1.3) и (1.4), из (1.2) получаем

$$v'_2(t) = A_{21}(t)\,v_1(t) \neq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{sign} v'_2(t) = \text{const}, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 1.2. Если

$$\int_0^\infty |A_{ij}(\tau)|\,d\tau < \infty \quad (i, j = 1,2;\ i \neq j), \tag{1.5}$$

то какие бы ни были числа c_1 и c_2 найдется такое решение $(v_{10}(t), v_{20}(t))$ системы (1.2), что

$$\lim_{t\to\infty} v_{i_0}(t)=c_i \quad (i=1,\ 2). \tag{1.6}$$

Доказательство. Согласно (1.5), t_0 можно взять настолько большим, чтобы

$$\int_0^\infty |(A_{12}(t)|+|A_{21}(t)|)\,dt \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1.7}$$

Пусть $C^2_{[t_0,\infty)}$ — пространство непрерывных и ограниченных на $[t_0, \infty)$ двумерных вектор-функций. Для любой функции $v(t)=(v_1(t),\ v_2(t))\in C^2_{[t_0,\infty)}$ положим

$$Lv(t)=(L_1 v_1(t),\ L_2 v_2(t)), \tag{1.8}$$

где

$$L_i v_i(t)=c_i-\int_t^\infty A_{ij}(\tau)\,v_j(\tau)\,d\tau \quad (i,\ j=1,\ 2;\ i\neq j). \tag{1.9}$$

Ввиду (1.7) для любых вектор-функций $u(t)=(u_1(t),\ u_2(t)),\ w(t)=(w_1(t),\ w_2(t))\in C^2_{[t_0,\infty)}$ из (1.8) и (1.9) имеем

$$\rho(Lw(t),\ Lv(t))=\sup_{t_0\leqslant t<\infty}\{|L_1 v_1(t)-L_1 w_1(t)|+|L_2 v_2(t)-L_2 w_2(t)|\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_0}^\infty(|A_{12}(t)|+|A_{21}(t)|)\,dt\sup_{t_0<t<\infty}\{|v_1(t)-w_1(t)|+|v_2(t)-w_2(t)|\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\rho(v_1(t),\ v_2(t)).$$

Следовательно, оператор $Lv(t)$ сжато отображает пространство $C^2_{[t_0,\infty)}$ в себя. Поэтому, согласно известной теореме Банаха, найдется такая вектор—функция $v_0(t)=(v_{10}(t),\ v_{20}(t))\in C^2_{(t_0,\infty]}$, что $Lv_0(t)=v_0(t)$, что, согласно (1.8) и (1.9), означает

$$v_{i0}(t)=c_i-\int_t^\infty A_{ij}(\tau)\,v_{j_0}(\tau)\,d\tau \quad (i,\ j=1,2;\ i\neq j).$$

Отсюда и следует справедливость условий (1.6). Лемма доказана.

Теорема 1.1. Если соблюдаются условия (1.5), то система 1) неосцилляторна и обладает сильно неосцилляторными решениями.

Доказательство. То, что система (1) обладает сильно неосцилляторными решениями, непосредственно следует из леммы 1.2, поскольку решение системы (1.2) $(v_{10}(t),\ v_{20}(t))$, удовлетворяющее условиям (1.6), является сильно неосцилляторным, если $c_i\neq 0$ $(i=1,\ 2)$.

Остается доказать, что система (1.2) неосцилляторна. Допустим противное, что система (1.2) обладает хотя бы одним нетривиальным осцилляторным решением $(v_1(t), v_2(t))$. Тогда найдутся такие числа t_1 и t_2, что

$$t_1 < t_2, \ v_i(t_i)=0 \quad (i=1, 2) \tag{1.10}$$

и

$$\left(\int\limits_{t_1}^{\infty} |A_{12}(\tau)|\, d\tau\right) \int\limits_{0}^{\infty} |A_{21}(\tau)|\, d\tau < \frac{1}{2}. \tag{1.11}$$

Полагая

$$\overline{v_i}(t) = \sup_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t} |v_i(\tau)| \quad (i=1, 2), \tag{1.12}$$

в силу (1.10), из (1.2) найдем

$$\overline{v_1}(t) \leqslant \int\limits_{t_1}^{t} |A_{12}(\tau)|\, d\tau\, \overline{v_2}(t),$$

$$\overline{v_2}(t) \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} |A_{21}(\tau)|\, d\tau\, \overline{v_1}(t).$$

Отсюда, в силу (1.11) получаем

$$\overline{v_i}(t) \leqslant \frac{1}{2} \overline{v_i}(t) \quad (i=1, 2), \text{ при } t_1 \leqslant t < \infty,$$

откуда, согласно (1.12), следует $v_i(t) \equiv 0$ $(i=1, 2)$, что невозможно, так как по нашему допущению $(v_1(t), v_2(t))$ является нетривиальным решением. Теорема доказана.

Согласно лемме 1.1, из теоремы 1.1 получается следующее

Следствие. Если соблюдаются условия (1.4) и (1.5), то система (1) является сильно неосцилляторной.

Теорема 1.2. Пусть соблюдается условие (1.5) и, кроме того, найдется такая последовательность $\{t_n\}$, сходящаяся к бесконечности при $n \to \infty$, что либо при $i=1$ и $j=2$, либо при $i=2$ и $j=1$ соблюдаются условия

$$\operatorname{sign} \int\limits_{t_n}^{\infty} A_{ij}(\tau)\, d\tau = (-1)^n \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{1.13}$$

и

$$\left(\int\limits_{t_n}^{\infty} A_{ij}(\tau)\, d\tau\right)^{-1} \int\limits_{t_n}^{\infty} |A_{ij}(\tau)| \left(\int\limits_{\tau}^{\infty} |A_{ji}(s)|\, ds\right) d\tau \to 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{1.14}$$

Тогда система (1) имеет слабо осцилляторные решения.

Доказательство. Согласно лемме 1.2, система (1.2) имеет решение $(v_{10}(t), v_{20}(t))$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to\infty} v_{i0}(t)=0, \quad \lim_{t\to\infty} v_{j0}(t)=1.$$

Ясно, что

$$v_{i0}(t)=-\int_t^\infty A_{ij}(\tau)\, v_{j0}(\tau)\, d\tau \quad \text{и} \quad v_{j0}(t)=1-\int^\infty A_{ji}(\tau)\, v_{i0}(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$v_{i0}(t)=-\int_t^\infty A_{ij}(\tau)\, d\tau+\int_t^\infty A_{ij}(\tau)\left(\int_\tau^\infty A_{ji}(s)\, v_{i0}(s)\, ds\right) d\tau. \tag{1.15}$$

Так как $v_{i0}(t)$—ограниченная функция, поэтому, согласно (1.14), имеем

$$\left(\int_{t_n}^\infty A_{ij}(\tau)\, d\tau\right)^{-1}\int_{t_n}^\infty A_{ij}(\tau)\int_\tau^\infty A_{ji}(s)\, v_{i0}(s)\, ds\, d\tau \to 0, \quad \text{при } n\to\infty. \tag{1.16}$$

В силу (1.13) и (1.16), из (1.15) следует, что при больших n соблюдается условие $\operatorname{sign} v_{i0}(t_n)=(-1)^{n-1}$. Но ввиду непрерывности $v_{i0}(t)$ отсюда следует, что $v_{i0}(t)$ имеет бесконечное множество нулей. Следовательно, решение $(v_{10}(t),\ v_{20}(t))$ слабо осцилляторно. Теорема доказана.

Применяя классическую теорему Кнезера или более тонкие критерии осцилляторности и неосцилляторности линейных дифференциальных уравнений второго порядка (см., напр., [1], [7]), можно указать ряд достаточных признаков осцилляторности и неосцилляторности системы (1.2) и, следовательно, системы (1). Приведем один из них.

Теорема 1.3. Пусть соблюдаются условия (1.4) и либо при $i=1$ и $j=2$, либо при $i=2$ и $j=1$ имеем

$$\int_0^\infty |A_{ij}(\tau)|\, d\tau=\infty. \tag{1.17}$$

Тогда, если при больших t соблюдается неравенство

$$A_{ji}(t)/A_{ij}(t)\leqslant -\frac{1+\varepsilon}{4}\left(\int_0^t A_{ij}(\tau)\, d\tau\right)^{-2}, \tag{1.18}$$

где ε—положительная постоянная, то система (1) осцилляторна, а если при больших t соблюдается неравенство

$$A_{ji}(t)/A_{ij}(t)\geqslant -\frac{1}{4}\left(\int_0^t A_{ij}(\tau)\, d\tau\right)^{-2}, \tag{1.19}$$

то система (1) сильно неосцилляторна.

Доказательство. Полагая

$$x=\int_0^t |A_{ij}(\tau)|\, d\tau \tag{1.20}$$

и

$$w(x)=v_i(t), \tag{1.21}$$

с учетом (1.4), из (1.2) найдем

$$\frac{d^2w}{dx^2}-A(x)\,w=0, \tag{1.22}$$

где

$$A(x)=\frac{A_{ji}(t)}{A_{ij}(t)}. \tag{1.23}$$

С другой стороны, из (1.17) и (1.20) ясно, что $x\to\infty$, при $t\to\infty$.

Если соблюдается (1.18), то, в силу (1.20) и (1.23), имеем, что при больших x соблюдается неравенство

$$A(x)\leqslant-\frac{1+\varepsilon}{4}x^{-2}.$$

Поэтому, согласно теореме Кнезера, уравнение (1.22) осцилляторно. Учитывая (1.21) и применяя лемму 1.1, отсюда заключаем, что система (1) осцилляторна.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что если при больших t соблюдается неравенство (1.19), то система (1.2) является сильно неосцилляторной. Допустим противное, что система (1.2) обладает нетривиальным слабо осцилляторным решением $(v_1(t),\ v_2(t))$. По лемме 1.1 это решение будет осцилляторным. Следовательно, определенная по формуле (1.21) функция $w(x)$ будет осцилляторным решением уравнения (1.22). С другой стороны, согласно (1.19), (1.20) и (1.23),

$$A(x)\geqslant-\frac{1}{4}x^{-2},$$

что, как известно, гарантирует неосцилляторность уравнения (1.22). Полученное противоречие доказывает теорему.

Как следствие из этой теоремы получается одна теорема Я. В. Быкова об осцилляторности систем двух линейных дифференциальных уравнений (см. [2], § 3, теорема 1).

§ 2. Условия ограниченности и стремления к нулю решений системы (1)

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$[a(t)]_+=\frac{|a(t)|+a(t)}{2},\quad [a(t)]_-=\frac{|a(t)|-a(t)}{2}.$$

Теорема 2.1. Пусть

$$a_{ij}(t)=(-1)^j\,(\alpha_{ij}(t)+\alpha^*_{ij}(t)),\quad (i\neq j;\ i,j=1,2),$$

где функции $\alpha_{ij}(t)$ $(i, j=1, 2;\ i \neq j)$ положительны и абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$. Если, кроме того, соблюдается условие

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{[\alpha'_{12}(t)+\alpha_{12}(t)\,(a_{22}(t)-a_{11}(t))]_+}{\alpha_{12}(t)} + \frac{[\alpha'_{21}(t)+\alpha_{21}(t)\,(a_{11}(t)-a_{22}(t))]_-}{\alpha_{21}(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\alpha_{12}(t)\,\alpha^*_{21}(t)-\alpha_{21}(t)\,\alpha^*_{12}(t)|}{\sqrt{\alpha_{12}(t)\,\alpha_{21}(t)}} \right\} dt < \infty, \tag{2.1}$$

то для любого решения $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(\tau)$, где

$$\rho(t) = \left[\frac{\alpha_{12}(t)}{\alpha_{21}(t)}\, u_2^2(t) + u_1^2(t)\right] \exp\left\{-2\int_0^t a_{11}(\tau)\, d\tau\right\}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Посредством преобразования (1.1) система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= B_{12}(t)\, v_2 + B^*_{12}(t)\, v_2, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -B_{21}(t)\, v_1 - B^*_{21}(t)\, v_1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$B_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t) \exp\left\{\int_0^t [a_{jj}(\tau) - a_{ii}(\tau)]\, d\tau\right\},$$

$$(i \neq j;\ i, j = 1, 2). \tag{2.4}$$

$$B^*_{ij}(t) = \alpha^*_{ij}(t) \exp\left\{\int_0^t [a_{jj}(\tau) - a_{ii}(\tau)]\, d\tau\right\}.$$

В силу (1.1) и (2.4), из (2.2) получаем

$$\rho(t) = \frac{B_{12}(t)}{B_{21}(t)}\, v_2^2(t) + v_1^2(t). \tag{2.5}$$

Следовательно, мы должны доказать, что для любого решения $(v_1(t), v_2(t))$ системы (2.3) существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t)$, где $\rho(t)$ — определенная равенством (2.5) функция.

Пусть $(v_1(t), v_2(t))$—нетривиальное решение системы (2.3), тогда из (2.5) имеем

$$\frac{d\rho(t)}{\rho(t)} = \left[\frac{(B'_{12}(t)\, B_{21}(t) - B'_{21}(t)\, B_{12}(t))\, v_2^2(t)}{B_{21}^2(t)\, \rho(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2v_1(t)\, v_2(t)}{B_{21}(t)\, \rho(t)} (B_{21}(t)\, B^*_{12}(t) - B_{12}(t)\, B^*_{21}(t)) \right] dt.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\rho(t)=\rho(0)\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{(B'_{12}(\tau)\,B_{21}(\tau)-B'_{21}(\tau)\,B_{12}(\tau))\,v_2^2(\tau)}{B_{21}^2(\tau)\,\rho(\tau)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(B_{21}(\tau)\,B^*_{12}(\tau)-B_{12}(\tau)\,B^*_{21}(\tau))\frac{2v_1(\tau)\,v_2(\tau)}{B_{21}(\tau)\,\rho(\tau)}\right]d\tau\right\}. \tag{2.6}$$

Полагая

$$g_1(t)=\frac{([B'_{12}(t)]_+B_{21}(t)+[B'_{21}(t)]_-B_{12}(t))\,v_2^2(t)}{B_{21}(t)\,\rho(t)}+$$

$$+\frac{2v_1(t)\,v_2(t)}{B_{21}(t)\,\rho(t)}\,(B_{21}(t)\,B^*_{12}(t)-B_{12}(t)\,B^*_{21}(t)),$$

$$g_2(t)=\frac{([B'_{12}(t)]_-B_{21}(t)+[B'_{21}(t)]_+B_{12}(t))\,v_2^2(t)}{B_{21}(t)\,\rho(t)},$$

равенство (2.6) переписывается следующим образом:

$$\rho(t)=\rho(0)\exp\left\{\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau-\int_0^t g_2(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{2.7}$$

Так как

$$\frac{2\,|\,v_1(t)\,v_2(t)\,|}{B_{21}(t)\,\rho(t)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{B_{12}(t)\,B_{21}(t)}},$$

то из (2.1) и (2.4) находим

$$\int_0^\infty|\,g_1(t)\,|\,dt\leqslant\int_0^\infty\left\{\frac{[B'_{21}(t)]_+}{B_{12}(t)}+\frac{[B'_{21}(t)]_-}{B_{21}(t)}+\frac{|\,B_{21}(t)\,B^*_{12}(t)-B_{12}(t)\,B^*_{21}(t)\,|}{\sqrt{B_{12}(t)\,B_{21}(t)}}\right\}dt=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{[\alpha'_{12}(t)+\alpha_{12}(t)\,(a_{22}(t)-a_{11}(t))]_+}{\alpha_{12}(t)}+\frac{[\alpha'_{21}(t)+\alpha_{21}(t)\,(a_{11}(t)-a_{22}(t))]_-}{\alpha_{21}(t)}+\right.$$

$$\left.+\frac{|\,\alpha_{12}(t)\,\alpha^*_{21}(t)-\alpha_{21}(t)\,\alpha^*_{12}(t)\,|}{\sqrt{\alpha_{12}(t)\,\alpha_{21}(t)}}\right\}dt=M<\infty. \tag{2.8}$$

Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{\int\limits_0^t g_1(\tau)\,d\tau}\right)=M_1. \tag{2.9}$$

С другой стороны, поскольку $g_2(t)\geqslant 0$, то существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\int\limits_0^t g_2(\tau)\,d\tau}\right)=M_2. \tag{2.10}$$

Но из (2.9), (2.10) и (2.7) имеем $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t) = \rho(0)\, M_1\, M_2$.

Теорема доказана.

Пусть $\alpha^*_{ij}(t) \equiv 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2)$, тогда из доказанной теоремы непосредственно получается

Следствие 1. Если функции $a_{ij}(t)$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$,

$$(-1)^j a_{ij}(t) > 0, \quad (-1)^j \int\limits_0^\infty \frac{[a'_{ij}(t)]_+}{a_{ij}(t)}\, dt < \infty \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2) \tag{2.11}$$

и

$$\int\limits_0^\infty |\, a_{22}(t) - a_{11}(t)\, |\, dt < \infty, \tag{2.12}$$

то для любого решения $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{a_{12}(t)}{|\, a_{21}(t)\,|}\, u_2^2(t) + u_1^2(t) \right) \exp\left\{ -2 \int\limits_0^\infty a_{11}(\tau)\, d\tau \right\} < \infty.$$

Следствие 2. Пусть соблюдаются условия (2.11), (2.12) и

$$\int\limits_0^t a_{11}(\tau) \leqslant c, \frac{|\, a_{21}(t)\,|}{a_{12}(t)} \leqslant c, \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{2.13}$$

где c — положительная постоянная, тогда все решения системы (1) ограничены при $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $(u_1(t), u_2(t))$ — некоторое решение системы (1), тогда, в силу следствия 1, найдется такое положительное постоянное число c_1, что

$$\left(\frac{a_{12}(t)}{|\, a_{21}(t)\,|}\, u_2^2(t) + u_1^2(t) \right) \exp\left\{ -2 \int\limits_0^t a_{11}(\tau)\, d\tau \right\} \leqslant c_1, \quad t \geqslant 0,$$

отсюда, согласно (2.13), имеем $u_1^2(t) \leqslant c_1\, e^{2c}$, $u_2^2(t) \leqslant c_1\, c\, e^{2c}$, при $t \geqslant 0$. Следствие доказано.

Следствие 3. Если соблюдаются условия (2.11), (2,12),

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t a_{11}(\tau)\, d\tau = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{a_{21}(t)}{a_{12}(t)} \exp\left\{ 2 \int\limits_0^t a_{11}(\tau)\, d\tau \right\} = 0,$$

то для любого решения $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) имеем

$$\lim_{t\to\infty} |\, u_i(t)\,| = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Как следствие из теоремы 2.1 получается также принадлежащее Опиалю [6] следующее утверждение об ограниченности решений уравнения:

$$u''+a(t)\,u=0. \qquad (1_0)$$

Следствие 4. Если $a(t)=\alpha(t)+\alpha^*(t)$, где $\alpha(t)$ положительно и абсолютно непрерывно на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$ и

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{[\alpha'(t)]_-}{\alpha(t)} + \frac{|\alpha^*(t)|}{\sqrt{\alpha(t)}} \right\} dt < \infty, \qquad (2.14)$$

то для любого решения $u(t)$ уравнения (1_0) существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{u'^2(t)}{\alpha(t)} + u^2(t) \right).$$

В самом деле, полагая

$$u(t)=u_1(t),\ u'(t)=u_2(t), \qquad (2.15)$$

уравнение (1_0) приведём к виду (1), где

$$a_{11}(t)\equiv a_{22}(t)\equiv 0,\ a_{12}(t)=\alpha_{12}(t)=1,\ a_{21}(t)=-a(t)=-(\alpha(t)+\alpha^*(t)),$$

т. е.

$$\alpha_{21}(t)=\alpha(t),\ \alpha^*_{21}(t)=\alpha^*(t). \qquad (2.16)$$

Из (2.14) и (2.16) легко проверить, что соблюдаются условия теоремы 2.1.

Теорема 2.1′. Если соблюдаются условия теоремы 2.1, то какое бы ни было положительное число λ, для любого решения $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) имеем

$$\int_0^\infty |d\rho^\lambda(t)| < \infty,$$

где $\rho(t)$ — определенная равенством (2.2) функция.

Доказательство. Из (2.7) найдем

$$d\rho^\lambda(t)=\lambda\,[g_1(t)-g_2(t)]\,\rho^\lambda(t)\,dt,$$

откуда, согласно (2.8), получаем

$$|d\rho^\lambda(t)| \leqslant \rho^\lambda(0)\,e^{\mu\lambda} \left[\lambda\,|g_1(t)|\,dt - de^{-\lambda \int_0^t g_2(\tau)\,d\tau} \right].$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |d\rho^\lambda(t)| < \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть соблюдаются условия теоремы 2.1 и

$$\frac{\alpha_{12}(t)}{\alpha_{21}(t)} \exp\left\{ 2\int_0^t [a_{22}(\tau)-a_{11}(\tau)]\,d\tau \right\} \to 0, \text{ при } t\to\infty. \qquad (2.17)$$

Если, кроме того, система (1) осцилляторна, то найдется нетривиальное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), такое, что $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t)=0$, где $\rho(t)$—определенная равенством (2.2) функция.

Доказательство. Согласно (1.1) и (2.4), для доказательства теоремы достаточно показать, что существует нетривиальное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (2.3), такое, что $\lim\limits_{t\leftarrow\infty} \rho(t)=0$, где $\rho(t)$ определена равенством (2.5).

Допустим противное, что для любого нетривиального решения $(v_1(t), v_2(t))$ системы (2.3) функция $\rho(t)$ стремится к отличному от нуля пределу, при $t\to\infty$.

Пусть $(v_{i1}(t), v_{i2}(t))$ $(i=1, 2)$ — два линейно независимых решения системы (2.3). Положим

$$\lim_{t\leftarrow\infty}\left(\frac{B_{12}(t)}{B_{21}(t)}\, u_{i2}^2(t)+v_{i1}^2(t)\right)=\rho_i \quad (i=1, 2). \tag{2.18}$$

Обозначая через $\{t_k\}$ последовательность нулей функции $v_{12}(t)$, из (2.18) найдем

$$\lim_{k\to\infty} |v_{11}(t_k)|=\sqrt{\rho_1}. \tag{2.19}$$

Из (2.18) ясно, что последовательность $\{v_{21}(t_k)\}$ ограничена, поэтому, согласно (2.19), из $\{t_k\}$ можно выбрать последовательность $\{t_{ke}\}$, такую, что

$$\lim_{e\leftarrow\infty} v_{11}(t_{ke})=q_1, \quad \lim_{e\leftarrow\infty} v_{21}(t_{ke})=q_2, \text{ где } |q_1|=\sqrt{\rho_1}\neq 0. \tag{2.20}$$

Рассмотрим решение

$$(w_1(t), w_2(t))=(q_2 v_{11}(t)-q_1 v_{21}(t),\ q_2 v_{12}(t)-q_1 v_{22}(t)) \tag{2.21}$$

системы (2.3), которое является нетривиальным, поскольку $q_1\neq 0$.

В силу (2.19), из равенства

$$v_{11}(t)\, w_2(t)-v_{12}(t)\, w_1(t)=c,$$

где $c\doteq v_{11}(0)\, w_2(0)-v_{12}(0)\, w_1(0)$, найдем

$$\lim_{e\to\infty} |w_2(t_{kl})|=\frac{|c|}{\sqrt{\rho_1}}. \tag{2.22}$$

С другой стороны, согласно (2.20), из (2.21) имеем

$$\lim_{e\to\infty} w_1(t_{kl})=0. \tag{2.23}$$

Из (2.4) и (2.17) ясно, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_{12}(t)}{B_{21}(t)}=0. \tag{2.24}$$

Но, согласно (2.22), (2.23) и (2.24), для функции $\rho(t)=\frac{B_{12}(t)}{B_{21}(t)}\rho_2^2(t)+\rho_1^2(t)$ имеем $\lim\limits_{e\to\infty}\rho(t_{ke})=0$, и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)=0$, что невозможно, так как по нашему допущению $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)\neq 0$ для любого нетривиального решения системы (2.3). Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть соблюдаются условия (2.11), (2.12) и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)}=0. \tag{2.23}$$

Если, кроме того, система (1) осцилляторна[1], то существует нетривиальное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a_{12}(t)}{|a_{21}(t)|}u_2^2(t)+u_1^2(t)\right)\exp\left\{-2\int_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right\}=0.$$

Следствие 2. Если соблюдаются условия следствия 1 и (2.13), то существует нетривиальное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), которое стремится к нулю при $t\to\infty$.

Следствие 3. Если соблюдается условие (2.14), $\alpha(t)\to\infty$, при $t\to\infty$ и уравнение (1_0) осциляторно, то существует такое нетривиальное решение $u(t)$ уравнения (1_0), что

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{u'^2(t)}{\alpha(t)}+u^2(t)\right)=0.$$

Из последнего утверждения при $\alpha'(t)\geqslant 0$ и $\alpha^*(t)\equiv 0$ получается теорема Миллу [4], а при $\alpha^*(t)\equiv 0$ и

$$\int_0^\infty\frac{[\alpha'(t)]_-}{\alpha(t)}\,dt<\infty$$

— обобщение теоремы Миллу, принадлежащее Тревизану [8] и Опиалю [5]. Следует отметить, что недавно результат Тревизана-Опиаля заново был получен Лейзером [3].

§ 3. Условия неограниченности решений системы (1)

Теорема 3.1. Пусть $a_{ij}(t)=(-1)^j(\alpha_{ij}(t)+\alpha^*_{ij}(t))$ $(i\neq j;\ i,j=1,2)$, где функции $\alpha_{ij}(t)$ $(i\neq j;\ i,\ j=1,2)$ положительны и абсолютно

---

[1] Легко проверить, что если вместе с условиями (2.11) и (2.12) соблюдается и условие $\int\limits_0^{+\infty}a_{12}(t)\,dt=+\infty$, то система (1) осцилляторна.

непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$

$$\frac{\alpha_{12}(t)}{\alpha_{21}(t)} \exp\left\{ 2\int_0^t [a_{22}(\tau)-a_{11}(\tau)]\,d\tau \right\} \to \infty, \text{ при } t\to\infty, \tag{3.1}$$

и

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{[\alpha'_{12}(t)+\alpha_{12}(t)\,(a_{11}(t)-a_{22}(t))]_-}{\alpha_{12}(t)} + \frac{[\alpha'_{21}(t)+\alpha_{21}(t)\,(a_{22}(t)-a_{11}(t))]_+}{\alpha_{21}(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\alpha_{12}(t)\,\alpha^*_{21}(t)-\alpha_{21}(t)\,\alpha^*_{12}(t)|}{\sqrt{\alpha_{12}(t)\,\alpha_{21}(t)}} \right\} dt < \infty. \tag{3.2}$$

Если, кроме того, система (1) осциляторна, то существует решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \infty,$$

где $\rho(t)$ — определенная равенством (2.2) функция.

Доказательство. Из (1.1) и (2.4) очевидно, что для доказательства нашей теоремы достаточно доказать существование такого решения $(v_1(t), v_2(t))$ системы (2.3), что $\lim \rho(t)=\infty$, где $\rho(t)$ — определенная равенством (2.5) функция.

Из равенства (2.7) имеем

$$\rho(t) = \rho(0)\, e^{\int_0^t h_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t h_2(\tau)\,d\tau}, \tag{3.3}$$

где

$$h_1(t) = \frac{[B'_{12}(t)]_+ B_{21}(t)\,v_2^2(t) + [B'_{21}(t)]_- B_{12}(t)\,v_2^2(t)}{B_{21}^2(t)\,\rho(t)},$$

$$h_2(t) = \frac{[B'_{12}(t)]_- B_{21}(t)\,v_2^2(t) + [B'_{21}(t)]_+ B_{12}(t)\,v_2^2(t)}{B_{21}^2(t)\,\rho(t)} +$$

$$+ \frac{2(B_{21}(t)\,B^*_{12}(t) - B_{12}(t)\,B^*_{21}(t))\,v_1(t)\,v_2(t)}{B_{21}(t)\,\rho(t)}.$$

Так как $h_1(t) \geqslant 0$, то имеем

$$\lim_{t\to\infty} e^{\int_0^t h_1(\tau)\,d\tau} = N_1, \quad \text{где } 0 < N_1 \leqslant \infty. \tag{3.4}$$

Из (3.2), согласно (2.4), имеем

$$\int_0^\infty |h_2(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty \frac{[B'_{12}(t)]_-}{B_{12}(t)} + \frac{[B'_{21}(t)]_+}{B_{21}(t)} +$$

$$+\frac{|B_{12}(t)\,B^*_{21}(t)-B_{21}(t)\,B^*_{12}(t)|}{\sqrt{B_{12}(t)B_{21}(t)}}\Bigg\}\,dt=\int_0^\infty\Bigg\{\frac{[\alpha'_{12}(t)+\alpha_{12}(t)\,(a_{11}(t)-a_{22}(t))]_+}{\alpha_{12}(t)}+$$

$$+\frac{[\alpha'_{21}(t)+\alpha_{21}(t)\,(a_{22}(t)-a_{11}(t)]_+}{\alpha_{21}(t)}+\frac{|\alpha_{12}(t)\,\alpha^*_{21}(t)-\alpha_{21}(t)\,\alpha^*_{12}(t)|}{\sqrt{\alpha_{12}(t)\,\alpha_{21}(t)}}\Bigg\}\,dt<\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t h_2(\tau)\,d\tau}=N_2,\quad \text{где}\ 0<N_2<+\infty. \tag{3.5}$$

Согласно (3.4), (3.5), из (3.3) ясно, что для любого решения $(v_1(t), v_2(t))$ системы (2.8) функция $\rho(t)$ имеет конечный или бесконечный предел при $t\to\infty$. Наша задача доказать, что для некоторого решения имеем $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)=+\infty$.

Допустим противное, что $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)<\infty$ для любого решения системы (2.3).

Рассмотрим два линейно независимых решения $(v_{i1}(t),\ v_{i2}(t))$ $(i=1, 2)$ системы (2.3) и положим, что соблюдаются условия (2.18).

Обозначим через $\{t_k\}$ последовательность нулей функции $v_{12}(t)$. Тогда из равенства

$$v_{11}(t)\,v_{22}(t)-v_{12}(t)\,v_{21}(t)=c,$$

где $c=v_{11}(0)\,v_{22}(0)-v_{12}(0)\,v_{21}(0)\neq 0$, будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}|v_{22}(t_k)|=\lim_{k\to\infty}\frac{|c|}{|v_{11}(t_k)|}=\frac{|c|}{\sqrt{\rho_1}}. \tag{3.6}$$

Из (3.1), согласно (2.4), имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_{12}(t)}{B_{21}(t)}=\infty. \tag{3.7}$$

Но, в силу (3.6) и (3.7), находим

$$\rho_2=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{B_{12}(t)}{B_{21}(t)}\,v^2_{22}(t)+v^2_{21}(t)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{B_{12}(t_k)}{B_{21}(t_k)}\,v^2_{22}(t_k)+v^2_{21}(t_k)\right)=\infty,$$

что невозможно, так как по нашему допущению $\rho_2<+\infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть $\alpha^*_{ij}(t)\equiv 0$ $(i\neq j;\ i, j=1, 2)$, тогда из доказанной теоремы непосредственно получается

Следствие 1. *Пусть функции a_{ij} $(i\neq j;\ i, j=1, 2)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$,*

$$(-1)^j a_{ij}(t)>0,\ (-1)^j\int\limits_0^{\infty}\frac{[a'_{ij}(t)]_-}{a_{ij}(t)}dt<\infty,\quad (i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2),$$

и

$$\int\limits_0^{\infty}|a_{11}(t)-a_{22}(t)|\,dt<\infty.$$

Если, кроме того, $\dfrac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)}\to\infty$, при $t\to\infty$ и система (1) осцилляторна, то существует решение $(u_1(t),\ u_2(t))$ системы (1), такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a_{12}(t)}{|a_{21}(t)|}u_2^2(t)+u_1^2(t)\right)\exp\left\{-2\int\limits_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right\}=\infty.$$

Следствие 2. Если соблюдаются условия следствия 1 и

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau>-\infty,\ \liminf_{t\to\infty}\frac{|a_{21}(t)|}{a_{12}(t)}\exp\left\{2\int\limits_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right\}>0,\qquad(3.8)$$

то существует решение $(u_1(t),\ u_2(t))$ системы (1), такое, что

$$\limsup_{t\to\infty}|u_i(t)|=+\infty\qquad(i=1,\ 2).$$

Доказательство. Так как соблюдаются условия следствия 1, то существует решение $(u_1(t),\ u_2(t))$ системы (1), такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a_{12}(t)}{|a_{21}(t)|}u_2^2(t)+u_1^2(t)\right)\exp\left\{-2\int\limits_0^t a_{11}(\tau)\,d\tau\right\}=+\infty.\qquad(3.9)$$

Обозначим через $\{t_k\}$ и $\{\widetilde{t}_k\}$ последовательность нулей функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на $[0,\ \infty)$. Из (3.9) находим

$$\lim_{k\to\infty}\left(u_1^2(\widetilde{t}_k)\exp\left\{-2\int\limits_0^{\widetilde{t}_k}a_{11}(\tau)\,d\tau\right\}\right)=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{12}(t_k)}{|a_{21}(t_k)|}\exp\left\{-2\int\limits_0^{t_k}a_{11}(\tau)\,d\tau\right\}u_2^2(t_k)\right)=\infty.$$

Отсюда, согласно (2.8), имеем

$$\limsup_{t\leftarrow\infty}|u_i(t)|=\infty\qquad(i=1,\ 2).$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть $a(t)=\alpha(t)+\alpha^*(t)$, где $\alpha(t)$ положительна и абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке промежутка $[0,\ \infty)$,

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=0 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \left\{ \frac{[\alpha'(t)]_+}{\alpha(t)} + \frac{|\alpha^*(t)|}{\sqrt{\alpha(t)}} \right\} dt < \infty.$$

Если, кроме того, уравнение (1_0) осцилляторно, то существует решение $u(t)$ уравнения (1_0), такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{u'^2(t)}{\alpha(t)} + u^2(t) \right) = \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ (1954).
2. Я. В. Быков. Об одном классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, I, № 11 (1965), 1449—1475.
3. A. C. Lazer. On the asymptotic behavior of solutions of the differential equation $y''+p(x)y=0$. Proc. Amer. Math. Soc., 16, № 16 (1965), 1295—1298.
4. H. Milloux. Sur l'équation différentielle $x''+A(t)x=0$. Prace Mat. fiz. 40 (1933), 163—171.
5. Z. Opial. Sur l'équation différentielle $u''+a(t)u=0$. Ann. polon. math. 5, № 1 (1959), 77—93.
6. Z. Opial. Nouvelles remarques sur l'équation différentielle $u''+a(t)u=0$. Ann. polon. math., 6, № 1 (1959), 75—81.
7. M. Rab. Kriterien der Oszillation der Lösungen der Differential gleichung $[p(x)y']'+q(x)y=0$. Časopis pro pĕstov. 84, № 3 (1959), 335—370.
8. G. Trevisan. Sul l'equazione differenziale $y''+A(x)y=0$. Rendiconti del Sem. Mat. di Padova 23 (1954), 340—342.

Тбилисский гос. университет,
Проблемная лаборатория прикладной математики

(Поступило в редакцию 9. VIII. 1967)

რ. კოპლატაძე

ორი წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში დადგენილია დიფერენციალურ განტოლებათა (1) სისტემის ამოხსნების რხევადობის, არარხევადობის, შემოსაზღვრულობის, შემოუსაზღვრელობის და ნულისაკენ მისწრაფებისათვის საკმარისი პირობები, როცა $t\to\infty$.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

В теории суммирования рядов, как известно, изучаются разные обобщения обыкновенной сходимости. Основоположником этой теории, безусловно, следует считать Л. Эйлера. Эйлер первый понял, что понятие „сумма ряда" требует уточнения; прежде чем искать „сумму" ряда, нужно определить что же это такое.

Вот что пишет Эйлер в своем „Дифференциальном исчислении":

„Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определенной суммы... Однако... упомянутые суммы... никогда не приводят к ошибкам,... приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить от истины. Так как это, однако, не происходит, то нам остается развязать этот трудный узел.

И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии „сумма"...

Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову „сумма" значение, отличное от обычного".

Далее Эйлер предлагает под суммой ряда понимать конечное выражение, из разложения которого получен этот ряд. Таким образом, для Эйлера ряд

$$1-1+1-1+\cdots$$

имеет сумму, равную $\frac{1}{2}$, так как он получается из разложения

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

при $x=1$. Здесь мы видим зачатки метода Абеля.

Начиная с конца XIX века теория суммирования рядов приобретает „право гражданства". Она бурно развивается. Этому в большой степени способствовали труды Э. Чезаро. Позже, в 1904 г. Л. Фейер применил метод суммирования к рядам Фурье и показал ту пользу, которую можно извлечь из этого. В настоящее время, как метко замечает в своей известной монографии А. Зигмунд, „если не ограничиваться функциями с очень специальными дифференциальными свойствами, то в теории представления функций их рядами Фурье важна скорее суммируемость, чем обычная сходимость".

Конечно, не всякий метод суммирования можно признать „пригодным". Г. Харди в своей монографии „Расходящиеся ряды" (ИЛ, 1951) указывает на те качества, которыми должен обладать пригодный метод суммирования. Это — простота, общность и регулярность. Важнейшим из этих качеств, безусловно, является регулярность, ибо к двум первым подход все-таки субъективен.

Метод суммирования называется регулярным, если он суммирует каждый сходящийся ряд к его обыкновенной сумме. Это очень важное свойство — оно еще раз подчеркивает, что суммируемость есть обобщение сходимости. На это указывает еще Эйлер, который, обосновав необходимость нового определения слова „сумма", пишет: „При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова „сумма" совпадает с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечёт никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защищаться от всяческих обвинений".

К сожалению, при рассмотрении кратных, в частности, двойных рядов, метод суммирования „утрачивает" регулярность. Именно, все методы суммирования, которые были перенесены на двойные ряды, оказались иррегулярными в том смысле, что для каждого метода суммирования можно построить сходящийся ряд, не суммируемый данным методом. Поэтому, естественно, возник следующий, можно сказать, принципиальный вопрос: а существует ли вообще регулярный метод суммирования для двойных рядов?

Многочисленные примеры подсказывали, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. (Чего греха таить — автор этих строк был почти уверен в этом). Тем не менее оказалось, что такой метод существует!

Ниже рассмотрен метод суммирования, который сохраняет регулярность и в случае двойных рядов [1].

---

[1] На этот метод внимание автора обратил В. Берикашвили.

Определение метода Хаттона

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим его частичные суммы через S_n. Как замечает Г. Харди, в вышеупомянутой монографии Хаттон (Hutton) предложил (1812) следующий метод суммирования последовательности $\{S_n\}$. Определим последовательность $\{H_n\}$ следующей формулой:

$$H_n = \frac{1}{2}(S_{n-1} + S_n)$$

$$(n = 1, 2, \ldots;\ S_0 = 0).$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} H_n = S,$$

то данный ряд называется суммируемым методом Хаттона или Hu-суммируемым к S. В этом случае будем писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(Hu).$$

Легко проверить, например, что ряд $1-1+1-1+\cdots$ Hu-суммируем к $1/2$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}\ (Hu).$$

Непосредственно из определения следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(Hu).$$

Этой теоремой высказана регулярность метода Хаттона.

Очень просто формулируется теорема тауберова типа для Hu-метода. Именно, так как

$$H_n = S_n - \frac{1}{2} a_n,$$

то справедлива

Теорема 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(Hu)\ \&\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Таким образом, Hu-суммируемость и выполнение необходимого признака сходимости ряда гарантируют сходимость.

Ясно, что усилить эту теорему нельзя.

Перенесем этот метод на двойные ряды.

Метод Хаттона для двойных рядов

Пусть дан двойной ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{1}$$

Обозначим через S_{mn} его частичные суммы

$$S_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

и введем обозначение

$$H_{mn}=\frac{1}{4}(S_{m-1n-1}+S_{m-1n}+S_{mn-1}+S_{mn}), \tag{2}$$

$$(m,\ n=1,\ 2,\dots;\ S_{00}=S_{m0}=S_{0n}=0,\ \ m,n>0).$$

Если

$$\lim_{m,n\to\infty} H_{mn}=S,$$

то ряд (1) будем называть суммируемым методом Хаттона или Hu-суммируемым к S и писать

$$\sum_{m\ n=1}^{\infty} a_{mn}=S(Hu).$$

Рассмотрим пример.

Пусть члены двойного ряда определены следующим образом:

$$a_{1n}=(-1)^{n-1},\ \ a_{mn}=0,$$

$$(m=2,\ 3,\dots;\ n=1,\ 2,\dots).$$

Легко проверить, что частичные суммы этого ряда

$$S_{mn}=\frac{1}{2}[1-(-1)^n].$$

Таким образом, этот ряд расходящийся. В то же время, если $m,n>1$, то имеем

$$H_{mn}=\frac{1}{2}$$

и, значит, ряд Hu-суммируем к $\frac{1}{2}$, т. е.

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=\frac{1}{2}(Hu).$$

Непосредственно из определения H_{mn} следует

Теорема 3.

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S \to \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S(Hu).$$

Эта теорема показывает, что метод Хаттона регулярен и для двойных рядов. Пока что это единственный регулярный метод суммирования двойных рядов.

Прежде чем рассматривать теорему тауберова типа для Hu-метода в случае двойных рядов, сделаем одно замечание относительно необходимого признака сходимости двойных рядов.

Обычно, исходя из равенства

$$a_{mn}=S_{mn}-S_{mn-1}-S_{m-1n}+S_{m-1\,n-1},$$

формулируют следующий необходимый признак сходимости двойного ряда:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S \to \lim_{m,n\to\infty} a_{mn}=0.$$

Этот признак можно в определенном смысле усилить. Именно, из сходимости ряда (1) следуют равенства

$$\lim_{m,n\to\infty} (S_{mn}-S_{mn-1})=\lim_{m,n\to\infty} (S_{mn}-S_{m-1n})=0. \tag{3}$$

Эти равенства и представляют аналог хорошо известного равенства из теории простых рядов

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

Именно условие (3), а не $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}=0$, есть необходимый признак сходимости двойного ряда.

Отметим, кстати, что создается впечатление, будто условие (3) не может быть выполненным для расходящегося ряда. Но это не так. Приведем пример.

Пусть

$$a_{mm}=\frac{1}{m},\ a_{mn}=0,\quad m\neq n,$$

$$(m,\ n=1.\ 2,\ldots).$$

Легко проверить, что

$$S_{mn}=A_k,$$

где A_k — частичная сумма гармонического ряда, а $k=\min(m, n)$. Таким образом, данный ряд расходится. В то же время очень просто проверяется, что условие (3) выполнено.

Сформулируем теперь теорему тауберова типа для Hu-метода в случае двойных рядов.

Теорема 4.

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S(Hu)\ \&\ \lim_{m,n\to\infty}(S_{mn}-S_{mn-1})=\lim_{m,n\to\infty}(S_{mn}-S_{m-1n})=0\to\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из следующего элементарного равенства:

$$H_{mn}=S_{mn}-\frac{1}{2}(S_{mn}-S_{mn-1})-\frac{1}{2}(S_{mn}-S_{m-1n})+\frac{1}{4}a_{mn}.$$

Учитывая замечание, сделанное выше, можно заключить, что Hu-суммируемость и выполнение необходимого признака сходимости двойного ряда гарантируют сходимость.

Понятно, что аналогично теореме 2, эту теорему также нельзя усилить.

Сравнение теоремы 4 с теоремой 2 подтверждает мысль о том, что необходимым признаком сходимости двойного ряда следует считать условие (3).

Дальнейшее обобщение метода Хаттона

Применяя метод усреднения, можно рассмотреть (Hu, k)-методы $(k=0, 1,\ldots)$.

Именно, введем обозначения:

$$H_{mn}^{(0)}=S_{mn},\quad H_{mn}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(H_{m-1\,n-1}^{(k-1)}+H_{m-1n}^{(k-1)}+H_{mn-1}^{(k-1)}+H_{mn}^{(k-1)}\right),$$

$$(k=1, 2,\ldots;\ m, n=1, 2,\ldots;\ H_{00}^{(k-1)}=H_{m0}^{(k-1)}=H_{0n}^{(k-1)}=0,\ m, n>0).$$

Ряд (1) будем называть (Hu, k)-суммируемым к S и писать

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S(Hu, k),$$

если

$$\lim_{m,n\to\infty} H_{mn}^{(k)}=S.$$

Ясно, что $(Hu, 0)$-суммируемость есть обыкновенная сходимость, а $(Hu, 1)$-суммируемость — Hu-суммируемость.

Рассмотрим пример.

Возьмем двойной ряд, члены которого определены следующим образом:

$$a_{1n}=(-1)^{n-1}\,n,\ a_{mn}=0,$$

$$(m=2, 3,\ldots;\ n=1, 2,\ldots).$$

Для этого ряда

$$S_{mn}=\frac{1}{4}[(-1)^{n-1}(2n+1)+1].$$

Итак, данный ряд расходящийся (т. е. не суммируем методом $(Hu, 0)$). Он не суммируем и методом $(Hu, 1)$, так как

$$H_{mn}^{(1)}=\frac{1}{4}[1-(-1)^n].$$

В то же время, если $m, n>1$, то

$$H_{mn}^{(2)}=\frac{1}{4},$$

и поэтому

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=\frac{1}{4}(Hu, 2).$$

Непосредственно из определения $H_{mn}^{(k)}$ следует

Теорема 5.

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S(Hu, p)\ \&\ q>p\rightarrow\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=S(Hu, q).$$

Перефразируя теорему, можно сказать, что все Hu-методы регулярны.

Кафедра
общей математики № 1

(Поступило в редакцию 14. XI. 1966)

ა. ბენდუქიძე

მწკრივების შეჯამებადობის ერთი მეთოდის შესახებ

რეზიუმე

ცნობილია, რომ მწკრივის შეჯამებადობა არის ჩვეულებრივი კრებადობის განზოგადება. ამიტომ შეჯამებადობის მეთოდი უნდა რეგულარი იყოს. სამწუხაროდ, ორმაგი მწკრივების შემთხვევაში შეჯამებადობის მეთოდის რეგულარობა ირღვევა. ამიტომ მეტად საინტერესო და პრინციპული იყო გარკვევა საკითხისა — არსებობს თუ არა რეგულარული მეთოდი ორმაგი მწკრივებისათვის.

შრომაში შესწავლილია ერთი მეთოდი, რომელიც რეგულარულია ორმაგი მწკრივების შემთხვევაშიც.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

А. Г. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Пусть Γ есть замкнутая простая спрямляемая кривая с уравнением $t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant 2\pi$, где s — длина дуги. Функция $f(t)$, определенная на Γ, называется 2π периодической, если

$$f[2\pi]=f[t(2\pi)]=f(0)=f[t(0)].$$

В предыдущей статье [1] мы рассматривали исключительно 2π периодические функции. В данной статье мы рассмотрим функции $f(t)$, удовлетворяющие условию

$$f[2\pi]\neq f[0], \tag{1}$$

при этом будем пользоваться обозначениями, принятыми в статье [1]. Для функций, удовлетворяющих условию (1), остаются в силе теоремы 1, 2, 3, 4, 6, 8 и 9 из статьи [1]. Пусть $\Gamma\in A\cdot K$ и $g(t)\in H_1$. Тогда, в силу теоремы 6, для $t_1\in\Gamma_1\, t_2\in\Gamma$ имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\int_{\Gamma}\frac{g'(u)\,du}{u-t}=\int_{\Gamma} g'(u)\,du\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{u-t}=$$

$$=\int_{\Gamma} g'(u)\left[\lg(u-t_1)-\lg(u-t_2)\right]du+\pi i\int_{t_1}^{t_2} g'(u)du.$$

Предположим, что в точках $t_i=t(s_i)$, $i=1, 2$ существуют производные $t'(s_i)$, $g'[s_i]$. Тогда имеем

$$\int_{\Gamma} g'(u)\lg(u-t_1)\,du=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{t(0)}^{t(s_1-\varepsilon)}+\int_{t(s_1+\varepsilon)}^{t(2\pi)}\right)g'(u)\lg(u-t_1)\,du.$$

Вычислим предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{g[s_1-\varepsilon]\lg[t(s_1-\varepsilon)-t(s_1)]-g[0]\lg[t(0)-t_1]+g[2\pi]\lg[t(2\pi)-t_1]-$$

$$-g[s_1+\varepsilon]\lg[t(s_1+\varepsilon)-t(s_1)]\}=g[2\pi]\lg[t(2\pi)-t_1]-g[0]\lg[t(0)-t_1]+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{g[s_1-\varepsilon]\lg\frac{t(s_1-\varepsilon)-t(s_1)}{t(s_1+\varepsilon)-t(s_1)}-\lg[t(s_1+\varepsilon)-t(s_1)]\,[g[s_1+\varepsilon]-g[s_1-\varepsilon]\,]\right\}=$$

$$=g[2\pi]\lg[\mathrm{t}(2\pi)-t_1]-g[0]\lg[t0]-t_1]+\pi i\, g(t_1).$$

Так как $t(0)=t(2\pi)$, то легко показать равенство $\lg[t(2\pi)-t_1]=$ $=\lg[t(0)-t_1]$. Поэтому имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Gamma} g'(u) \frac{du}{u-t} = [g[2\pi]-g[0]] \lg \frac{t(0)-t_1}{t(0)-t_2} + \int\limits_{\Gamma} \frac{g(u)\,du}{u-t_2} - \int\limits_{\Gamma} \frac{g(u)\,du}{u-t_1}.$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$S(g, t_2) - S(g, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(g', t)\,dt - \frac{g[2\pi]-g(0)}{\pi i} \lg \frac{t(0)-t}{t(0)-t_2}. \tag{2}$$

Пусть теперь $f(t) \in L(\Gamma)$, $\Gamma \in AK$ и

$$F(t) = \int\limits_{t(0)}^{t} f(u)\,du.$$

Введем функцию

$$g(t) = \frac{F[2\pi]-F[0]}{\pi i} \int\limits_{t(0)}^{t} \frac{du}{u-z_0} = c \int\limits_{t(0)}^{t} \frac{du}{u-z_0},$$

где $z_0 \in \Gamma^+$ — фиксированная точка. Из определения имеем

$$g[2\pi]-g[0] = F[2\pi]-F[0].$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(t) - \dfrac{c}{t-z_0}$. Ясно, что если

$$\Phi(t) = \int\limits_{t(0)}^{t} \varphi(u)\,du,$$

то $\Phi[2\pi]=\Phi[0]$ и поэтому для функции $\varphi(t)$ справедлива теорема 10 из статьи [1], т. е. почти для всех $t_1 \in \Gamma$, $t_2 \in \Gamma$ имеем

$$A \int\limits_{t_1}^{t_2} S(\varphi, t)\,dt = S(\Phi, t_2) - S(\Phi, t_1). \tag{3}$$

Подставляя в (3) значения функции $\varphi(t)$, получим

$$A \int\limits_{t_1}^{t_2} S(f, t)\,dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} S(g', t)\,dt = S(F, t_2) - S(F, t_1) - [S(g, t_2) - S(g, t_1)].$$

Так как $\lg(t-z_0) \in H_1$, то, в силу формулы (2), имеем

$$A \int\limits_{t_1}^{t_2} S(f, t)\,dt = S(F, t_2) - S(F, t_1) + \frac{F[2\pi]-F[0]}{\pi i} \lg \frac{t(0)-t_1}{t(0)-t_1}. \tag{4}$$

Из этой формулы следует, что если $F[2\pi] \neq F[0]$, то $S(F, t)$ ухудшается в окрестности точек $t(0)$ и $t(2\pi)$.

Пусть $g(t) \in H_1$. Тогда из формулы (2) почти для всех $t \in \Gamma$ имеем

$$\frac{\operatorname{dap} S(g, t)}{dt} = S(g', t) - \frac{g[2\pi] - g[0]}{\pi i} \; \frac{1}{t(0) - t}. \tag{5}$$

Далее положим, что в точке $t_0 = t(s_0)$ существуют производные $t'(s_0)$, $g'(s_0)$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g'(u)\,du}{u - t_0} = \left(\int\limits_{t(0)}^{t(s_0-\varepsilon)} + \int\limits_{t(s_0+\varepsilon)}^{t(2\pi)} \right) \frac{g'(u)\,du}{u - t_0} = \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \Bigg|_{t(0)}^{t(s_0-\varepsilon)} +$$

$$+ \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \Bigg|_{t(s_0+\varepsilon)}^{t(2\pi)} + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g(u) - g(t_0)}{(u - t_0)^2}\,du.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{g'(u)\,du}{u - t_0} = \int\limits_{\Gamma} \frac{g(u) - g(t_0)}{(u - t_0)^2}\,du + \frac{g[2\pi] - g[0]}{t(0) - t_0}. \tag{6}$$

Теперь, в силу формул (5) и (6), если $g(t) \in H_1$, то почти для всех $t_0 \in \Gamma$ имеем

$$\frac{\operatorname{dap}}{dt_0} S(g, t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(t) - g(t_0)}{(t - t_0)^2}\,dt. \tag{7}$$

Пусть теперь $f(t) \in L(\Gamma)$, $\Gamma \in A \cdot K$ и

$$F(t) = \int\limits_{t(0)}^{t} f(u)\,du.$$

Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{F[2\pi] - F[0]}{\pi i} \int\limits_{t(0)}^{t} \frac{du}{u - z_0} = c \int\limits_{t(0)}^{t} \frac{du}{u - z_0},$$

где $z_0 \in \Gamma^+$ — фиксированная точка. Тогда функция

$$\Phi(t) = \int\limits_{t(0)}^{t} \varphi(u)\,du = \int\limits_{t(0)}^{t} [f(u) - g'(u)]\,du$$

будет 2π периодической. В силу теоремы 12, из статьи [1] почти для всех $t_0 \in \Gamma$ будем иметь

$$\frac{\operatorname{dap} S(\Phi, t_0)}{dt_0} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{(t - t_0)^2}\,dt.$$

Подставляя значение функции $\Phi(t)$ в последнее выражении и учитывая равенства (5), (6) и (7), получим

$$\frac{\operatorname{dap} S(F,t_0)}{dt_0}-\frac{\operatorname{dap} S(g,t_0)}{dt_0}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F(t)-F(t_0)}{(t-t_0)^2}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)-g(t_0)}{(t-t_0)^2}\,dt\,.$$

или

$$\frac{\operatorname{dap} S(F,t_0)}{dt_0}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F(t)-F(t_0)}{(t-t_0)^2}\,dt \tag{8}$$

почти для всех $t_0\in\Gamma$. Далее, в силу формулы (4), почти для всех $t_0\in\Gamma\in A\,.\,K$ имеем

$$\frac{\operatorname{dap} S(F,t_0)}{dt_0}=S(F',t_0)-\frac{F[2\pi]-F[0]}{\pi i(t(0)-t)}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Джваршейшвили. Сингулярный интеграл и его некоторые применения. Труды Матем. института АН ГССР, т. 31 (1966), 71—90.

Кафедра
теории функций и
функционального анализа

(Поступило в редакцию 10. X. 1966)

ა. ჯვარშეიშვილი

სინგულარული ინტეგრალის შესახებ

რეზიუმე

სტატიაში მიღებულია კომპოზიციის სხვადასხვა ფორმულები, როცა განხილული ფუნქციები არაპერიოდულია.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები. ტ. 129. 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Ш. П. ПАНДЖАКИДЗЕ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ И ОБ ИХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с поведением коэффициентов двойных рядов Фурье и об их абсолютной сходимости.

Приводятся утверждения, обобщающие результаты автора [1] и [4] на случай двойных рядов Фурье по классической тригонометрической системе.

Пусть $f(x, y) \in L^2(R)$ и 2π — периодическая относительно каждого переменного, где $R = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$.

Предположим, что ряд

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \lambda_{ik} A_{ik}(x, y) \tag{1}$$

является двойным рядом Фурье функции $f(x, y)$, где

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, \text{ при } m=n=0, \\ \dfrac{1}{2}, \text{ при } m=0,\ n>0;\ n=0,\ m>0, \\ 1, \quad \text{при } m, n>0, \end{cases}$$

$$A_{m,n}(x, y) = a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny,$$

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy,$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx \cos ny \, dx \, dy,$$

$$c_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\cos mx \sin ny\, dx\, dy,$$

$$d_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\sin mx \sin ny\, dx\, dy.$$

Далее, положим

$$A^{(1)}_{m,n}(x, y)=-b_{mn}\cos mx\cos ny+a_{mn}\sin mx\cos ny-$$
$$-d_{m,n}\cos mx\sin ny+c_{mn}\sin mx\sin ny,$$
$$A^{(2)}_{m,n}(x, y)=-c_{mn}\cos mx\cos ny-d_{mn}\sin mx\cos ny-$$
$$-a_{mn}\cos mx\sin ny+b_{m,n}\sin mx\sin ny,$$
$$A^{(3)}_{m,n}(x, y)=-d_{mn}\cos mx\cos ny-c_{mn}\sin mx\cos ny-$$
$$-b_{m,n}\cos mx\sin ny-a_{mn}\sin mx\sin ny.$$

$$\rho_{m,n}(f)=\sqrt{a^2_{m,n}(f)+b^2_{m,n}(f)+c^2_{m,n}(f)+d^2_{m,n}(f)},$$

$$\rho_{m,0}(f)=\sqrt{a^2_{m,0}(f)+b^2_{m,0}(f)},\quad \rho^2_{0,n}(f)=\sqrt{a^2_{0,n}(f)+c^2_{0,n}(f)}.$$

Теперь введем обозначения

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dy-\frac{1}{4}a_{00},\quad \psi(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dx-\frac{1}{4}a_{00},$$

$$\Delta_{m,n} f(x, y, s, t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i+k}C^i_m C^k_n f[x+(m-2i)s,\ y+(n-2k)t],$$

$$\Delta_m\varphi(x, s)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C^i_m\varphi[x+(m-2i)s],\quad C^m_n=\frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!},$$

$$\Delta_n\psi(y, t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C^k_n\psi[y+(n-2k)t]. \tag{1*}$$

Нетрудно показать следующие соотношения:

$$\begin{cases} 2^{m+n}(-1)^{\frac{m+n}{2}}\sum\limits_{i,k=2}^{\infty}A_{i,k}(x, y)\sin^m is\sin^n kt, \\ \qquad m \text{ и } n \text{ четные}, \end{cases}$$

$$\Delta_{m,n} f(x, y, s, t)=\begin{cases} 2^{m+n}(-1)^{\frac{m+n-1}{2}} \sum\limits_{i,k=2}^{\infty} A_{i,k}^{(1)}(x, y) \sin^m is \sin^n kt, \\ \qquad m \text{ — нечетное, } n \text{ — четное,} \\ 2^{m+n}(-1)^{\frac{m+n-1}{2}} \sum\limits_{i,k=2}^{\infty} A_{ik}^{(2)}(x, y) \sin^m is \sin^n kt, \\ \qquad m \text{ — четное, } n \text{ — нечетное,} \\ 2^{m+n}(-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \sum\limits_{i,k=2}^{\infty} A_{i,k}^{(3)}(x, y) \sin^m is \sin^n kt, \\ \qquad n \text{ и } m \text{ — нечетные,} \end{cases} \tag{2}$$

$$\Delta_m \varphi(x, s)=\begin{cases} 2^m(-1)^{\frac{m}{2}} \sum\limits_{i=2}^{\infty} (a_{i,0} \cos mx+b_{i,0} \sin mx) \sin^m is, \\ \qquad m \text{ — четное,} \\ 2^m(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum\limits_{i=2}^{\infty} (a_{i,0} \sin mx-b_{i,0} \cos mx) \sin^m is, \\ \qquad m \text{ — нечетное,} \end{cases} \tag{3}$$

$$\Delta_n \psi(y, t)=\begin{cases} 2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_{0,k} \cos ky+c_{0,k} \sin ky) \sin^n kt, \\ \qquad n \text{ — четное,} \\ 2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_{0,k} \sin ky-c_{0,k} \cos ky) \sin^n kt, \\ \qquad n \text{ — нечетное.} \end{cases} \tag{4}$$

Затем будем пользоваться и следующими обозначениями:

$$J_1=\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}a}\, n^{-\frac{2\delta+1}{2}a} \left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} i^{2\lambda} k^{2\delta} \gamma_{i,k}^2\right\}^{\frac{a}{2}}+$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}a}\, n^{-\frac{a}{2}} \left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=n+1}^{\infty} i^{2\lambda} \gamma_{ik}^2\right\}^{\frac{a}{2}}+$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty} n^{-\frac{2\delta+1}{2}a}\, m^{-\frac{a}{2}} \left\{\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k^{2\delta} \gamma_{ik}^2\right\}^{\frac{a}{2}}+$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\frac{\alpha}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{ik}^{2} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{5}$$

$$J_2=\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^{m} i^{2\lambda} \gamma_{i,0}^{2} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}+\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} \gamma_{i,0}^{2} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{6}$$

$$J_3=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2\delta+1}{2}\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^{n} k^{2\delta} \gamma_{0,k}^{2} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{0,k}^{2} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{7}$$

где $\alpha \in (0, 2)$, λ и δ — натуральные числа, а числа γ_{ik} $(i, k=0, 1, \ldots)$ выбраны так, что указанные ряды сходятся.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ принадлежат классу $L^2(R)$. Если

$$\iint_R |\Delta_{\lambda,\delta}\, g(x, y, s, t)|^2\, dx\, dy \leqslant \iint_R |\Delta_{\lambda,\delta}\, f(x, y, s, t)|^2\, dx\, dy,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\lambda \varphi(g;\, x, s)|^2\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\lambda \varphi(f;\, x, s)|^2\, dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\delta \psi(g;\, y, t)|^2\, dy < \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\delta \psi(f;\, y, t)|^2\, dy$$

и

$$J_k<+\infty,\ (k=1, 2, 3),\ \rho_{ik}(f) \leqslant \gamma_{ik}\ (i, k=0, 1, 2, 3, \ldots),$$

то

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{m,n}^{\alpha}(g)<+\infty.$$

Доказательство. Используя теорему 1 (см. [1], стр. 25), согласно (3), (4), (6) и (7), можно заключить, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_{m,0}^{\alpha}(g)<\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{0,n}^{\alpha}(g)<\infty.$$

Применяя равенство Парсеваля (см. [2], стр. 10), в силу (2), будем иметь

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_{R_0} [\Delta_\lambda f(x, y, s, t)]^2\, dx\, dy =$$

$$=\sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{m,n}^{2}(f)\,(2 \sin ms)^{2\lambda}\,(2 \sin nt)^{2\delta}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{R_0}[\Delta_{\lambda\delta}\, g(x,y,s,t)]^2\,dx\,dy=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{\infty}\rho^2_{m,n}(2\sin ms)^{2\lambda}(2\sin nt)^{2\delta}. \tag{9}$$

Полагая в равенствах (8) и (9) $s=\dfrac{\pi}{2\lambda}$, $t=\dfrac{\pi}{2\delta}$, согласно условию теоремы, получаем

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\rho^2_{m,n}(g)\sin^{2\lambda}\frac{m\pi}{2\lambda}\sin^{2\delta}\frac{n\pi}{2\delta}\leqslant\sum_{m,n=1}^{\infty}\rho^2_{m,n}(f)\sin^{2\lambda}\frac{m\pi}{2\lambda}\sin^{2\delta}\frac{n\pi}{2\delta}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma^2_{m,n}\sin^{2\lambda}\frac{m\pi}{2\lambda}\sin^{2\delta}\frac{n\pi}{2\delta}. \tag{10}$$

Положим

$$T_{m,n}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k^{\lambda\alpha}j^{\delta\alpha}\rho^{\alpha}_{kj}(g),\quad T_{0,0}=0\quad (m,n=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Используя одно неравенство, из ([2], стр. 6) имеем

$$T_{m,n}\leqslant m^{\frac{2-\alpha}{2}}n^{\frac{2-\alpha}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[k^{\lambda\alpha}j^{\delta\alpha}\rho^{\alpha}_{kj}(g)\right]^{2/\alpha}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=m^{\frac{2-\alpha}{2}}n^{\frac{2-\alpha}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k^{2\lambda}j^{2\delta}\rho^2_{kj}(g)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{12}$$

Затем, согласно (11), получим

$$m^{\lambda\alpha}n^{\delta\alpha}\rho^{\alpha}_{m,n}(g)=T_{m,n}-T_{m-n,n}-T_{m,n-1}+T_{m-1,n-1}$$

$$(m,n=1,2,3,\ldots).$$

Отсюда

$$\rho^{\alpha}_{m,n}(g)=m^{-\alpha\lambda}n^{-\alpha\delta}[T_{m,n}-T_{m-n,n}-T_{m,n-1}+T_{m-1\,n-1}].$$

Суммируя последнее соотношение и используя преобразование Харди (см. [3], стр. 37), находим

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\rho^{\alpha}_{m,n}(g)=\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}T_{m,n}[m^{-\lambda\alpha}-(m+1)^{-\lambda\alpha}][n^{-\delta\alpha}-(n+1)^{-\delta\alpha}]-$$

$$-\sum_{m=1}^{N-1}T_{m,N}[m^{-\lambda\alpha}-(m+1)^{-\lambda\alpha}]-\sum_{n=1}^{N-1}T_{N,n}[n^{-\delta\alpha}-(n+1)^{-\delta\alpha}]+$$

$$+T_{N,N}N^{-\lambda\alpha}N^{-\delta\alpha}. \tag{13}$$

Пользуясь соотношениями (12), (13) и применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, будем иметь

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\rho^{\alpha}_{m,n}(g)\leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha)\left[\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}} n^{-\frac{2\delta+1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k^{2\lambda}j^{2\delta}\rho^2_{kj}(g)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\right]+$$

$$+N^{1-\frac{2\delta+1}{2}}\sum_{m=1}^{N} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}k^{2\lambda}j^{2\delta}\rho^2_{kj}(g)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+N^{1-\frac{2\lambda+1}{1}\alpha}\sum_{m=1}^{N} n^{-\frac{2\delta+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}k^{2\lambda}j^{2\delta}\rho^2_{kj}(g)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}+$$

$$=N^{1-\frac{2\lambda+1}{2}\alpha}N^{1-\frac{2\delta+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}k^{2\lambda}j^{2\delta}\rho^2_{kj}(g)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=S_1+S_2+S_3+S_4. \tag{14}$$

Ясно, что теорема будет доказана, если установим ограниченность выражений S_i $(i=1, 2, 3, 4)$ при $N\to\infty$. Сперва заметим, что, принимая во внимание неравенство $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ при $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, из (10) получаем

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k^{2\lambda}j^{2\delta}\rho^2_{kj}(g)\leqslant(2m)^{2\lambda}(2n)^{2\delta}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\rho^2_{kj}(g)\sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m}\sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n}\leqslant$$

$$\leqslant c(\lambda,\delta)\,m^{2\lambda}n^{2\delta}\sum_{k,j=0}^{\infty}\gamma^2_{kj}\sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m}\sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n}. \tag{15}$$

Значит, используя последнее соотношение и принимая во внимание, что $|\sin x|\leqslant|x|$, находим

$$S_1\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-\frac{2\lambda+1}{2}\alpha}n^{-\frac{2\delta+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k^{2\lambda}j^{2\delta}\gamma^2_{k,j}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-\frac{2\delta+1}{2}\alpha}n^{-\frac{\alpha}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty}k^{2\lambda}\gamma^2_{kj}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-\frac{\alpha}{2}}n^{-\frac{2\delta+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}j^{2\delta}\gamma^2_{kj}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{a}{2}} n^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \gamma_{k,j}^2 \right\}^{\frac{a}{2}}.$$

Но, в силу условия теоремы, ряды, стоящие в последнем соотношении, сходятся, т. е.

$$S_1 = O(1) \quad \text{при } N \to \infty. \tag{16}$$

Аналогично, для выражения S_2, получим

$$S_2 \leqslant N^{1-\frac{a}{2}} \sum_{m=1}^{N} m^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{kj=1}^{\infty} \gamma_{kj}^2 \sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m} \sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n} \right\}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= N^{1-\frac{a}{2}} \sum_{m=1}^{N} m^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{kj}^2 \sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m} \sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n} \right\}^{\frac{a}{2}} +$$

$$+ N^{1-\frac{a}{2}} m^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=N+1}^{\infty} \gamma_{kj}^2 \sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m} \sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n} \right\}^{\frac{a}{2}} +$$

$$+ N^{1-\frac{a}{2}} \sum_{m=1}^{N} m^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{kj}^2 \sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m} \sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n} \right\}^{\frac{a}{2}} +$$

$$+ N^{1-\frac{a}{2}} \sum_{m=1}^{N} m^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} \gamma_{kj}^2 \sin^{2\lambda}\frac{k\pi}{2m} \sin^{2\delta}\frac{j\pi}{2n} \right\}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4. \tag{17}$$

Но

$$\sigma_1 \leqslant c(\lambda, \delta)\, N^{1-\frac{a}{2}} \sum_{m=1}^{N} m^{-\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{kj}^2 \left(\frac{k}{m}\right)^{2\lambda} \left(\frac{j}{n}\right)^{2\delta} \right\}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= c(\lambda, \delta)\, N^{1-\frac{2\delta+1}{2}a} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}a} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{k,j}^2 k^{2\lambda} j^{2\delta} \right\}^{\frac{a}{2}}.$$

С другой стороны, учитывая (5) и условие теоремы, заключаем, что

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}a} n^{-\frac{2\delta+1}{2}a} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}^2 k^{2\lambda} j^{2\delta} \right\}^{\frac{a}{2}} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=N}^{2N} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}a} n^{-\frac{2\delta+1}{2}a} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}^2 k^{2\lambda} j^{2\delta} \right\}^{\frac{a}{2}} >$$

$$>N^{1-\frac{2\delta+1}{1}\alpha}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{k,j}^{2}k^{2\lambda}j^{2\delta}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\to 0,$$

т. е.

$$\sigma_1=O(1), \quad \text{при } N\to\infty. \tag{18}$$

Аналогично, для выражения σ_2, будем иметь

$$\sum_{n=N}^{2N}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}\alpha} n^{-\frac{\alpha}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty}\gamma_{kj}^{2}k^{2\lambda}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}>$$

$$>N^{1-\frac{\alpha}{2}}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2N+1}^{\infty}\gamma_{kj}^{2}k^{2\lambda}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\to 0.$$

Следовательно,

$$\sigma_2=0(1), \quad \text{при } N\to\infty. \tag{19}$$

Таким же путем доказываются и соотношения

$$\sigma_k=0(1), \quad \text{при } N\to\infty \quad (k=3,\,4). \tag{20}$$

Таким образом, согласно (17)—(20), будем иметь

$$S_2=0(1), \quad \text{при } N\to\infty. \tag{21}$$

Стало быть,

$$S_3=0(1), \quad \text{при } N\to\infty. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь выражение S_4. Используя опять формулу (10) и условия теоремы, получим

$$S_4\leqslant\sum_{m=N}^{\infty}\sum_{n=N}^{\infty} m^{-\frac{2\lambda+1}{7}\alpha} n^{-\frac{2\delta+1}{2}\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{kj}^{2}k^{2\lambda}j^{2\delta}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}<\infty. \tag{23}$$

Из (14), (16), (21)—(23) следует

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\rho_{m,n}^{\alpha}(g)<+\infty,$$

что и доказывает теорему.

Доказанная теорема, точно так же как теорема 1 (см. [4], стр. 203), может быть применена при исследованиях безусловной сходимости двойных рядов Фурье по классической тригонометрической системе.

Перейдем к вопросу об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье по классической тригонометрической системе.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$, $1<p\leqslant 2$, $h,\eta>0$ и

$$\left\{\iint_{R}|\Delta_{m,n}f(x,y,h,\eta)|^{p}\,dx\,dy\right\}^{1/p}=$$

$$=c(p)\left\{h^{1/p}\eta^{1/p}\left(\lg\frac{1}{h}\right)^{-\alpha-\frac{1}{p}}\left(\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-\beta-\frac{1}{p}}\right\}, \tag{24}$$

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_h^m \varphi(x)|^p\, dx\right\}^{1/p} c \leqslant c(p)\left\{h^{1/p}\left(\lg\frac{1}{h}\right)^{-\alpha-\frac{1}{p}}\right\},$$

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\eta^n\, \psi(y)|^p\, dy\right\}^{1/p} c \leqslant c(p)\left\{\eta^{1/p}\left(\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-\beta-\frac{1}{p}}\right\}. \tag{25}$$

Тогда

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \rho_{i,k}(f)\lg^{\beta}(i+2)\lg^{\beta'}(k+2)\,|\lg\lg(i+2)|^{\delta}\,|\lg\lg(k+2)|^{\delta'} < \infty, \tag{26}$$

где

$$\beta < \alpha + \frac{1}{p} - 1,\ \ \beta' < \beta + \frac{1}{p} - 1,\ \ \delta' > 0,\ \ \delta > 0.$$

Доказательство. Используя (3), (4) и (25), согласно теореме 3 (см. [4], стр. 203), заключаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_{i,0}(f)\lg^{\beta}(i+2)\,|\lg\lg(i+2)|^{\delta} < +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{0,k}(f)\lg^{\beta'}(k+2)\,|\lg\lg(k+2)|^{\delta'} < \infty. \tag{27}$$

Далее, учитывая (2) и неравенство (см. [5], стр. 53—84), получаем

$$\left\{\sum_{k,j=0}^{\infty} [\rho_{kj}(f)\, 2^{m+n}\, |\sin^m kh|\, |\sin^n j\eta|]^q \leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant c(p)\left\{\iint_R |\Delta_{m,n} f(x, y, h, \eta)|^p\, dx dy\right\}^{1/p}. \tag{28}\right.$$

Отсюда, полагая $h = \dfrac{\pi}{2N}$, $\eta = \dfrac{\pi}{2N_1}$, в силу (24), будем иметь

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_1} \rho_{kj}(f)\,|\sin^m kh|\,|\sin^n j\eta|]^q\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left\{\frac{N^{-\frac{1}{p}}\, N_1^{-\frac{1}{p}}}{(\lg N)^{\alpha+\frac{1}{p}}\,(\lg N_1)^{\beta+\frac{1}{p}}}\right\}.$$

Полагая в последнем неравенстве $N = 2^{\lambda}$, $N_1 = 2^{i}$ и используя одно неравенство (см. [2], стр. 22), получаем

$$\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}^{2}(f)\right\}^{1/q}\leqslant c(p)\left\{\frac{2^{-\frac{\lambda}{p}}\,2^{-\frac{i}{p}}}{(\lg 2^{\lambda})^{\alpha+\frac{1}{p}}\,(\lg 2^{i})^{\beta+\frac{1}{p}}}\right\},$$

т. е.

$$\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}^{q}(f)\right\}^{1/q}\leqslant c(p,\alpha,\beta,m,n)\left\{\frac{2^{-\frac{\lambda}{p}}\cdot 2^{-\frac{i}{p}}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{p}}\,i^{\beta+\frac{1}{p}}}\right\}.$$

Тогда, используя неравенство Гельдера-Рисса (см. [2], стр. 6), будем иметь

$$\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}(t)\leqslant\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}^{q}(f)\right\}^{1/q}\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}1\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c(p,\alpha,\beta,m,n)}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{p}}\,i^{\beta+\frac{1}{p}}}.$$

Стало быть,

$$\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}(f)\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta''}(j+2)\,|\lg\lg(k+2)|^{\delta}\,|\lg\lg(j+2)|^{\delta'}\leqslant$$

$$\leqslant c(p,\alpha,\beta',\beta'',\delta,\delta',m,n)\,\lambda^{\beta'}i^{\beta''}(\lg\lambda)^{\delta}(\lg i)^{\delta'}\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}(f)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c(p,\alpha,\beta',\beta'',\delta,\delta',m,n)\lg(\lambda)^{\delta}\lg(i)^{\delta'}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{p}-\beta'}\,i^{\beta+\frac{1}{p}-\beta''}}.$$

Значит,

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\rho_{kj}\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta''}(j+2)\,|\lg\lg(k+2)|^{\delta}\,|\lg\lg(j+2)|^{\delta'}=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^{\lambda}}\ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^{i}}\rho_{kj}\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta''}(j+2)\,|\lg\lg(k+2)|^{\delta}\,|\lg\lg(j+2)|^{\delta'}\leqslant\right.$$

$$\leqslant c(p,\alpha,\beta',\beta'',\delta,\delta',m,n)\sum_{\lambda,i=1}^{\infty}\frac{\lg^{\delta}(\lambda+1)\lg^{\delta'}(i+1)}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{p}-\beta'}\,i^{\beta+\frac{1}{p}-\beta''}}<\infty,$$

ибо

$$\alpha+\frac{1}{p}-\beta'>1,\quad \beta+\frac{1}{p}-\beta''>1.$$

Последнее соотношение вместе с (27) дает (26). Теорема доказана.

Отметим, что теорема, вообще говоря, не верна, если $\alpha+\frac{1}{p}-\beta'=1$ или $\beta+\frac{1}{p}-\beta''=1$ (см. [4], стр. 205).

Однако справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$, $1<p\leqslant 2$, $h, \eta>0$, $\varepsilon>0$. Если

$$\left\{\iint\limits_{R} |\Delta_{m,n} f(x, y, h, \eta)|^{p}\, dx\, dy\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left\{h^{1/p}\left(\lg\frac{1}{h}\right)^{-\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}\left(\lg\lg\frac{1}{h}\right)^{-1},\ldots\left(\lg\lg\ldots\lg\frac{1}{h}\right)^{-(1+\varepsilon)}\times\right.$$

$$\left.\times\,\eta^{\frac{1}{p}}\left(\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-\left(\beta+\frac{1}{p}\right)}\left(\lg\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-1}\cdots\left(\lg\lg\lg\ldots\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-(1+\varepsilon)}\right\}, \qquad (29)$$

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\overset{m}{\Delta_h}\varphi(x)|^{p}\,dx\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left\{h^{1/p}\left(\lg\frac{1}{h}\right)^{-\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}\left(\lg\lg\frac{1}{h}\right)^{-1}\cdots\left(\lg\lg\ldots\lg\frac{1}{h}\right)^{-(1+\varepsilon)}\right\}, \qquad (30)$$

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\overset{n}{\Delta_\eta}\psi(y)|^{p}\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left\{\eta^{\frac{1}{p}}\left(\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-\left(\beta+\frac{1}{p}\right)}\left(\lg\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-1}\cdots\left(\lg\lg\ldots\lg\frac{1}{\eta}\right)^{-(1+p)}\right\}, \qquad (31)$$

то ряд (26) сходится и при $\beta'=\alpha+\frac{1}{p}-1$, $\beta''=\beta+\frac{1}{p}-1$ и $\delta=\delta'=0$.

Доказательство. Используя теорему 6 (см. [4], стр. 205) и соотношения (3), (4), (30), (31), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{k,0}(f)\lg^{\beta'}(k+2)<\infty,\quad \sum_{j=0}^{\infty}\rho_{0,k}(f)\lg^{\beta''}(j+2)<\infty. \qquad (32)$$

Затем, согласно соотношений (28) и (29), так же как и при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_1}\left[\rho_{kj}(f)\left|\sin^m\frac{k\pi}{2N}\right|\left|\sin^n\frac{j\pi}{2N_1}\right|\right]^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c(p)\,N^{-\frac{1}{p}}\,N_1^{-\frac{1}{p}}}{(\lg N)^{\alpha+\frac{1}{p}}(\lg N_1)^{\beta+\frac{1}{p}}\lg\lg N\lg\lg N_1\cdots(\lg\lg\cdots\lg N)^{1+\varepsilon}(\lg\lg\cdots\lg N_1)^{1+\varepsilon}}.$$

Если используем последнее соотношение и одно неравенство (см. [2], стр. 6), будем иметь

$$\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^\lambda}\sum_{j=2^{i-1}}^{2^i}\rho_{kj}(f)\leqslant\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^\lambda}\sum_{j=2^{i-1}}^{2^i}\rho_{kj}^q(f)\right\}^{1/q}\left\{\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^\lambda}\sum_{j=2^{i-1}}^{2^i}1\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c(p,\alpha,\beta,m,n)}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{p}}\,i^{\beta+\frac{1}{p}}\lg\lambda\lg i\lg\lg\lambda\lg\lg i\cdots(\lg\lg\cdots\lg\lambda)^{1+\varepsilon}(\lg\lg\cdots\lg i)^{1+\varepsilon}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^\lambda}\sum_{j=2^{i-1}}^{2^i}\rho_{kj}(f)\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta''}(j+2)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c(p,\alpha,\beta,\beta',\beta'',m,n)\,\lambda^{\beta'}\cdot i^{\beta''}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{p}}\,i^{\beta+\frac{1}{p}}\lg\lambda\lg i\lg\lg i\lg\lg\lambda\cdots(\lg\lg\cdots\lg i)^{1+\varepsilon}(\lg\lg\cdots\lg\lambda)^{1+\varepsilon}}=$$

$$=\frac{c(p,\alpha,\beta,\beta',\beta'',m,n)}{\lambda\lg\lambda\lg\lg\lambda\cdots(\lg\lg\cdots\lg\lambda)^{1+\varepsilon}\,i\lg i\lg\lg i\cdots(\lg\lg\cdots\lg i)^{1+\varepsilon}}.$$

Тогда

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\rho_{kj}\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta''}(j+2)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{\lambda-1}}^{2^\lambda}\sum_{j=2^{i-1}}^{2^i}\rho_{kj}\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta''}(j+2)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c(p,\alpha,\beta,\beta',\beta'',m,n)}{\lambda\lg\lambda\lg\lg\lambda\cdots(\lg\lg\cdots\lg\lambda)^{1+\varepsilon}\,i\lg i\lg\lg i\cdots(\lg\lg\cdots\lg i)^{1+\varepsilon}}<\infty.$$

С другой стороны, справедливы и соотношения (32). Значит, имеем

$$\sum_{k,j=0}^{\infty}\rho_{k,j}(f)\lg^{\beta'}(k+2)\lg^{\beta'}(j+2)<\infty.$$

Теорема доказана.

Анализируя доказательство теоремы 7 (см. [4], стр. 206) и теорем 2 и 3, убеждаемся, что справедлива

Теорема 4. Пусть $1<p\leqslant 2$, $0<\alpha\leqslant 1$, $h,\eta>0$. Если

$$\left\{ \iint\limits_{R} |\Delta_{m,n} f(x, y; h, \eta)|^p \, dxdy \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c(p) \left\{ h^\nu \eta^\nu \left(\lg \frac{1}{h}\right)^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)} \left(\lg \frac{1}{h}\right)^{-\left(\beta+\frac{1}{p}\right)} \right\},$$

$$\left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Delta_h^m \varphi(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant c(p) \left\{ h^\nu \left(\lg \frac{1}{h}\right)^{-\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)} \right\},$$

$$\left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\eta^n \psi(y)|^p \, dy \right\}^{1/p} \leqslant c(p) \left\{ \eta^\nu \lg \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\left(\beta+\frac{1}{p}\right)} \right\},$$

то

$$\sum_{kj=0}^{\infty} \rho_{kj}^{\sigma} \lg^{\sigma'}(k+2) \lg^{\sigma''}(j+2) \, |\lg\lg(k+2)|^{\delta} \, |\lg\lg(j+2)|^{\delta'} < +\infty,$$

где

$$\sigma' > 0, \ \delta, \delta' > 0 \quad \text{при } \sigma > \frac{p}{p+\nu-1} \text{ и}$$

$$\sigma' < \frac{p\alpha+1-p}{p}, \ \sigma_{,} < \frac{p\beta+1-p}{p} \quad \text{при } \sigma = \frac{p}{p+\nu-1}.$$

Из этих теорем можно получить разные признаки абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. П. Панджакидзе. О свойствах коэффициентов ряда Фурье и об его абсолютной сходимости. Сообщения АН ГССР. XI : 1 (1965).
2. Ш. П. Панджакидзе. Некоторые признаки сходимости ортогональных рядов Фурье. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Библиотека Тбилисского гос. университета (1965).
3. В. Г. Челидзе. Некоторые вопросы теории двойных рядов. Издание Уханьского университета. Китай (1958).
4. Ш. П. Панджакидзе. О свойствах коэффициентов ряда Фурье и его абсолютная сходимость. Труды Тбилисского гос. университета, серия механико-математических наук, 117 (1966).
5. А. Л. Конюшков. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. Математический сборник, т. 44, (86) : 1 (2958).

Кафедра
приближенного анализа
и вычислительной техники

(Поступило в редакцию 3. V. 1967)

შ. ფანჯაკიძე

ფურიეს ჯერადი მწკრივების კოეფიციენტებისა და აბსოლუტური კრებადობის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში განხილულია ფურიეს ჯერადი მწკრივები. შესწავლილია $g(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის აბსოლუტური კრებადობის საკითხი $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ყოფაქცევის მიხედვით, როცა მათ შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\iint\limits_{R} |\Delta_{\lambda,\delta}\, g(x, y, s, t)|^2\, dxdy \leqslant \iint\limits_{R} |\Delta_{\lambda,\delta}\, f(x, y, s, t)|^2\, dxdy,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\lambda \varphi(g; x, s)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\lambda \varphi(f; x, y)|^2\, dx,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\delta \psi(g; y, t)|^2\, dy \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\delta \psi(f; y, t)|^2\, dy,$$

სადაც

$$\Delta_{\lambda,\delta}\, f(x, y, s, t),\ \Delta_\lambda \varphi(f; x, s) \text{ და } \Delta_\lambda \psi(f; y, t)$$

(1*) ტოლობით არიან განსაზღვრული.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Н. Р. ТЕВЗАДЗЕ

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА И ИМЕЮЩИХ РАВНОСТЕПЕННЫЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим последовательность функций

$$\psi_m(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(t, y) - f(x, y)]\, D_m(t - x)\, dt, \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — 2π периодическая, суммируемая функция на сегменте $R = [0,2\pi;\ 0,2\pi]$ и $D_m(u)$ — ядро Дирихле.

Обозначим через E множество изменения x, а через $\mathscr{E}$ — множество изменения y. Ясно, что $\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} \mathscr{E} = 2\pi$.

Если на измеримом множестве $\mathscr{E}$ задана последовательность суммируемых функций $\{f_n(y)\}$, то, согласно теореме А. Лебега, для того, чтобы эти функции имели равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, достаточно выполнения равенства

$$\lim_n \int_e f_n(y)\, dy = 0$$

для всякого измеримого подмножества e множества $\mathscr{E}$.

А теперь рассмотрим последовательность суммируемых функций $\{f_n(x, y)\}$ на множестве $\mathscr{E} X E$, и пусть для всякого измеримого подмножества $e \subset \mathscr{E}$ выполняется равенство

$$\lim_n \int_e f_n(x, y)\, dy = 0 \tag{2}$$

почти для всех $x \in E$. Обозначим через $E(e)$ множество этих точек.

Итак, если $x \in E(e)$, то имеет место равенство (2). Однако отсюда, вообще говоря, не следует существование такого множества $P \subset E$, $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} E$, чтобы

$$\lim_n \int_e f_n(x, y)\, dy = 0,\ \ x \in P$$

для всякого измеримого подмножества $e \subset \mathfrak{E}$. Но для последовательности (1) справедлива

Теорема. Если для последовательности (1) имеет место равенство

$$\lim_m \int_e \psi_m(x, y)\,dy = 0$$

для всякого подмножества $e \subset \mathfrak{E}$, почти для всех $x \in E$, то найдется такое множество $P \subset E$, $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} E$, что

$$\lim_m \int_e \psi_m(x, y)\,dy = 0, \text{ при } x \in P,$$

для всякого измеримого подмножества $e \subset \mathfrak{E}$.

Доказательство. Пусть $\{I_k\}$ — система сегментов, покрывающая множество $\mathfrak{E}$, тогда будем иметь (см. [1], стр. 94)

$$\mathfrak{E} = \sum_{k=1}^{\infty} I_k + B, \quad \operatorname{mes} B = 0.$$

По условию (2), для каждого сегмента I_k, имеем

$$\lim_m \int_{I_k} \psi_m(x, y)\,dy = 0,$$

$$x \in E(I_k), \ \operatorname{mes} E(I_k) = 2\pi.$$

Положим,

$$P = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(I_k).$$

Ясно, что $\operatorname{mes} P = 2\pi$ и, кроме того, для каждого подмножества $e \subset \mathfrak{E}$ имеем

$$\lim_m \int_e \psi_m(x, y)\,dy = 0 \text{ при } x \in E(e), \ \operatorname{mes} E(e) = 2\pi.$$

Поэтому

$$\operatorname{mes}(P \cap E(e)) = 2\pi.$$

Отсюда следует, что в любой окрестности любой точки множества P почти все точки принадлежат и множеству $E(e)$. В дальнейшем через ξ будем обозначать точки множества P, а через η — точки множества $E(e)$.

Мы должны доказать, что для любой точки $\xi \in P$ имеет место равенство

$$\lim_m \int_e \psi_m(\xi, y)\,dy = 0$$

для всякого подмножества $e \subset \mathfrak{E}$.

Допустим, что для некоторого подмножества $e \subset \mathscr{E}$ и точки $\xi \in P$ равенство (3) не выполняется. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ и такая последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$, что

$$\left| \int_e \psi_{m_i}(\xi, y)\, dy \right| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4}$$

Очевидно, что и это измеримое подмножество e покрыто данной системой сегментов $\{I_k\}$ и, значит, его можно представить как сумму двух измеримых множеств

$$e = Q + A,$$

где $Q = \sum_{i=1}^{q} I_{k_i}$, а A—множество сколь угодно малой меры. Кроме того, ясно, что

$$\bigcap_{i=1}^{q} E(I_{k_i}) \supset P,$$

поэтому

$$\lim_m \int_Q \psi_m(\xi, y)\, dy = 0. \tag{5}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла, мы вправе допустить, что

$$\int_0^{2\pi} dt \int_A |f(t, y)|\, dy < \frac{\varepsilon_0}{6}, \ \text{mes}\, A < \delta,$$

и (см. [2], стр. 17)

$$\int_A |f(\xi, y) - f(\eta, y)|\, dy < \frac{\varepsilon_0}{6}, \ |\xi - \eta| < \delta.$$

Теперь рассмотрим окрестность $\left(\xi - \frac{1}{m^2}, \ \xi + \frac{1}{m^2}\right)$ и оценим разность

$$\chi_A \equiv \int_A \psi_m(\xi, y)\, dy - \int_A \psi_m(\eta, y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [D_m(t-\xi) - D_m(t-\eta)]\, dt \int_A f(t, y)\, dy -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_A [f(\xi, y) - f(\eta, y)]\, dy \int_0^{2\pi} D_m(t-\xi)\, dt.$$

Пусть $\frac{1}{m^2} < \delta$. Тогда, очевидно, что

$$|D_m(t-\xi)-D_m(t-\eta)|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\cos k(t-\xi)-\cos k(t-\eta)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}k\,|\xi-\eta|<\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}k<1.$$

Поэтому

$$|X_A|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{6}$$

Для любого m_i справедливо равенство

$$\int\limits_e\psi_{m_i}(\xi,y)\,dy=\int\limits_Q\psi_{m_i}(\xi,y)\,dy+\int\limits_A\psi_{m_i}(\xi,y)\,dy,$$

а из равенства (5) вытекает, что

$$\left|\int\limits_Q\psi_{m_i}(\xi,y)\,dy\right|<\frac{\varepsilon_0}{4},\quad \text{когда}\ \ m_i>N.$$

Отсюда легко получаем оценку

$$\left|\int\limits_A\psi_{m_i}(\xi,y)\,dy\right|\geqslant\frac{3\varepsilon_0}{4}. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует

$$\left|\int\limits_A\psi_{m_i}(\eta,y)\,dy\right|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4},\quad \text{когда}\ \ m_i>N$$

почти для всех $\eta\in\left\{E(e)\cap\left(\xi-\frac{1}{m_i^2},\ \xi+\frac{1}{m_i^2}\right)\right\}$. А это противоречит условию

$$\lim_m\int\limits_e\psi_m(\eta,y)\,dy=0,\quad \eta\in E(e),$$

так как существует предел

$$\lim_m\int\limits_Q\psi_m(\eta,y)\,dy=0$$

почти для всех $\eta\in E(e)$.

Не трудно показать, что если $f(x,y)\in L_2$ на R, то функция

$$g(x)=\int\limits_e f(x,y)\,dy$$

является функцией суммируемой с квадратом. Поэтому, согласно теореме Карлсона [3],

$$\int_e \psi_m(x, y)\, dy = \int_0^{2\pi} D_m(t-x)\, dt \int_e [f(t, y) - f(x, y)]\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [g(t) - g(x)]\, D_m(t-x)\, dt \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Следствие 1. Если $f(x, y) \in L_2(R)$, то функции последовательности (2) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Следствие 2. Если $f(x, y) \in L_2(R)$, то модули функций последовательности (1) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, т. е.

$$\int_e |\psi_m(x, y)|\, dy < \varepsilon, \quad \text{при } \operatorname{mes} e < \eta, \quad \text{п. в.}$$

(см. [1], стр. 169).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. Гос. из-во ТТЛ, Москва (1957).
2. Н. Р. Тевзадзе. О точках Лебега функции двух переменных. Сообщения АН ГССР, XXXII : 1 (1963).
3. Л. Карлсон. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм. Математика. Период. сборник ин. статей, М. (1967).

Кафедра
теории функций и
функционального анализа

(Поступило в редакцию 23. III. 1967)

ნ. თევზაძე

პარამეტრზე დამოკიდებულ იმ ფუნქციათა მიმდევრობის შესახებ, რომლებსაც აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები

რეზიუმე

თუ (1) მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს (2) დამოკიდებულებას, მაშინ არსებობს სიმრავლე P, $\operatorname{mes} P = 2\pi$ და

$$\lim_m \int_e \psi_m(x, y)\, dy = 0, \quad \text{როცა } x \in P,$$

$E = [0, 2\pi]$ სიმრავლის ყოველი ზომადი e ქვესიმრავლისათვის. მაშასადამე, $\psi_m(x, y)$ ფუნქციებს აქვთ ერთობლივ აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები.

(2) დამოკიდებულებას ადგილი აქვს $f(x, y) \in L_2$ ფუნქციისათვის.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Ф. И. ХАРШИЛАДЗЕ

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В этой статье доказывается следующая теорема: **Если ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ обладает тем свойством, что полная вариация второй разности**

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$$

по сегменту $[a, b-2h[$ стремится к нулю при $h \to 0$, то $f(x)$ абсолютно непрерывна.

Условие теоремы может быть записано так

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\quad a \leqslant x \leqslant b-2h\} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Легко видеть, что это условие выполнено, если

$$V\{\Delta_h f(x);\quad a \leqslant x \leqslant b-h\} \to 0 \quad (h \to 0), \tag{1}$$

где

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Теорема о том, что из (1) следует абсолютная непрерывность $f(x)$, была доказана Винером и Юнгом [1] и Урселом [2].

Заметим, что обратная теорема тривиальна.

Именно, если

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt + \varphi(a),$$

то, как легко видеть,

$$V\{\Delta_h f(x);\quad a \leqslant x \leqslant b-h\} = \int_a^{b-h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\,dt$$

и

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\quad a \leqslant x \leqslant b-2h\} =$$

$$= \int_a^{b-2h} |\varphi(t) - 2\varphi(t+h) + \varphi(t+2h)|\,dt \leqslant 2\int_a^{b-h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\,dt.$$

Последний интеграл, как известно, стремится к нулю для любой суммируемой функции $\varphi(x)$.

При доказательстве теоремы нам будет удобно предполагать, что $a=0$ и $b=\pi$.

Таким образом, мы будем считать, что функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[0, \pi]$ и удовлетворяет условию

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi-2h\} \to 0 \qquad (h \to 0). \tag{2}$$

Лемма 1. Функция, удовлетворяющая условию (2), непрерывна. а) Пусть x_n, x_n+h_n, x_n+2h_n, x_n+3h_n принадлежат сегменту $[0, \pi]$ и $h_n \to 0+$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{h_n}^3 f(x_n)=0.$$

В самом деле,

$$|\Delta_{h_n}^3 f(x_n)=|\Delta_{h_n}^2 f(x_n+h_n)-\Delta_{h_n}^2 f(x_n)| \leqslant V\{\Delta_{h_n}^2 f(x);\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi-2h_n\}.$$

Это неравенство очевидно, ибо при дроблении промежутка $[0, \pi-2h_n]$ мы можем взять в качестве точек деления x_n и x_n+h_n, которые принадлежат промежутку $[0, \pi-2h_n]$, так как $x_n+3h_n \in [0, \pi]$. Следовательно, утверждение а) следует из (2). б) При произвольном $x_0 \in [0, \pi]$

$$A=\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)=\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)=B.$$

Предположим, вопреки доказываемому утверждению, что $A<B$ и подберем y_n, так, что $y_n \to x_0$ и $f(y_n) \to A$. Далее, подберем $z_n<y_n$, так, что $z_n \to x_0$ и $f(z_n) \to B$. Пусть $y_n-z_n=h_n$ и $y_n-2h_n=x_n$. Тогда $y_n=x_n+2h_n$, $z_n=x_n+h_n$. Выберем последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ так, чтобы последовательности $\{f(x_{n_k})\}$ и $\{f(x_{n_k}+3h_{n_k})\}$ были сходящимися. Это можно сделать из-за ограниченности $f(x)$. Пусть $f(x_{n_k}) \to a$ и $f(x_{n_k}+3h_{n_k}) \to b$. Тогда, в силу а),

$$\Delta_{h_{n_k}}^3 f(x_{n_k})=f(x_{n_k})-3f(x_{n_k}-h_{n_k})+3f(x_{n_k}+2h_{n_k})-f(x_{n_k}+3h_{n_k}) \to 0,$$

т. е. $a-3B+3A-b=0$. Но равенство $3(B-A)=a-b$ невозможно, так как $a-b \leqslant B-A$. Полученное противоречие доказывает, что $A=B$.

в) Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, который существует в силу б), не может отличаться от $f(x_0)$.

Это следует из того, что выражение

$$f(x_0)-3f(x_0+h_n)+3f(x_0+2h_n)-f(x_0+3h_n),$$

с одной стороны, стремится к $f(x_0)-f(x_0+0)$, а с другой стороны, как было доказано, это же выражение стремится к нулю. Стало быть,

$$f(x_0)=f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Лемма 2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2), то существует число M, такое, что при $0<t<\frac{\pi}{2}$

$$V\{\Delta^2_{-t} f(x);\quad 2t\leqslant x\leqslant\pi\}=V\{\Delta^2_t f(x);\quad 0\leqslant t\leqslant\pi-2t\}\leqslant M.$$

Действительно, из (2) следует существование такого $\delta>0$, что при

$$0<t\leqslant\delta$$

$$V\{\Delta^2_t f(x);\quad 0\leqslant x\leqslant\pi-2t\}\leqslant 1.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$\Delta^2_{mh} f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\Delta^2_h f(x+\nu h+\mu h),$$

из которого следует, что

$$V\{\Delta^2_{mh} f(x);\quad 0\leqslant x\leqslant\pi-2mh\}\leqslant\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}V\{\Delta^2_h f(x+\nu h+\mu h),$$
$$0\leqslant x\leqslant\pi-2mh\}.$$

Но

$$V\{\Delta^2_h f(x+\nu h+\mu h),\ 0\leqslant x\leqslant\pi-2mh\}=V\{\Delta^2_h f(x),$$

$$(\nu+\mu)h\leqslant x\leqslant\pi-2mh+(\nu+\mu)h\}\leqslant V\{\Delta^2_h f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi-2h\}.$$

Следовательно,

$$V\{\Delta^2_{mh} f(x);\quad 0\leqslant x\leqslant\pi-2mh\}\leqslant m^2\cdot V\{\Delta^2_h f(x);\quad 0\leqslant x\leqslant\pi-2h\}$$

и, если обозначить $\left[\frac{\pi}{2\sigma}\right]+1$ через m, то при $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$ будем иметь

$$V\{\Delta^2_t f(x);\quad 0\leqslant x\leqslant\pi-2t\}\leqslant m^2 V\left\{\Delta^2_{\frac{t}{m}} f(x);\right.$$
$$\left.0\leqslant x\leqslant\pi-\frac{2t}{m}\right\}\leqslant m^2;$$

ибо

$$\frac{t}{m}\leqslant\frac{\pi}{2m}\leqslant\delta.$$

Лемма 3. Если ограниченная функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2), то она имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки π и в некоторой окрестности точки O.

Предположим, что такой окрестности нет, например, у точки π. Тогда найдется последовательность чисел $\{x_\nu\}$, такая, что $x_0=\frac{\pi}{2}$, x_ν, возрастая, стремится к π и

$$\sum_{\nu=1}^{n} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Это приводит к противоречию. Действительно,

$$[f(x_\nu) - 2f(x_\nu - t) + f(x_\nu - 2t)] - [f(x_{\nu-1}) - 2f(x_{\nu-1} - t) + f(x_{\nu-1} - 2t)] =$$
$$= f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) - 2\{f(x_\nu - t) - f(x_{\nu-1} - t)\} + \{f(x_\nu - 2t) - f(x_{\nu-1} - 2t)\},$$

откуда

$$f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) = \Delta^2_{-t} f(x_\nu) - \Delta^2_{-t} f(x_{\nu-1}) + 2\{f(x_\nu - t) - f(x_{\nu-1} - t)\} -$$
$$- \{f(x_\nu - 2t) - f(x_{\nu-1} - 2t)\}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]\, dt \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\Delta^2_{-t} f(x_\nu) - \right.\right.$$
$$\left. - \Delta^2_{-t} f(x_{\nu-1})]\, dt \right| + 2 \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x_\nu - t) - f(x_{\nu-1} - t)]\, dt \right| +$$
$$\left. + \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x_\nu - 2t) - f(x_{\nu-1} - 2t)]\, dt \right| \right\}.$$

Оценим здесь каждое слагаемое в отдельности. В силу леммы 2,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}}]\Delta^2_{-t} f(x_\nu) - \Delta^2_{-t} f(x_{\nu-1})]\, dt \right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta^2_{-t} f(x_\nu) - \Delta^2_{-t} f(x_{\nu-1})|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} V\left\{\Delta^2_{-t} f(x);\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\right\} dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} V\{\Delta^2_{-t} f(x);\ 2t \leqslant x \leqslant \pi\}\, dt \leqslant M \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Далее, если обозначить через N верхнюю границу $|f(x)|$, то

$$2 \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x_\nu - t) - f(x_{\nu-1} - t)]\, dt \right| = 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{x_\nu}^{x_\nu - \frac{\pi}{4}} f(s)\, ds - \int_{x_{\nu-1}}^{x_{\nu-1} - \frac{\pi}{4}} f(s)\, ds \right| =$$
$$= 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(s) ds - \int_{x_{\nu-1} - \frac{\pi}{4}}^{x_\nu - \frac{\pi}{4}} f(s) ds \right| \leqslant 2 \sum_{\nu=1}^{n} 2N(x_\nu - x_{\nu-1}) = 4N\ (\pi - x_0) =$$
$$= 4N\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2N\pi.$$

Точно так же имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}[f(x_\nu-2t)-f(x_{\nu-1}-2t)]\,dt\right|\leqslant N\pi.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|\leqslant M+12N,$$

что противоречит предположению.

Лемма 4. Если ограниченную функцию, удовлетворяющую условию (2), продолжить сначала четным образом до $[-\pi, \pi]$, а затем периодически на всю ось, то полученная функция будет удовлетворять условию

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}\to 0\quad (h\to 0).$$

Действительно, в силу леммы 3, полученная функция будет иметь ограниченную вариацию как в окрестности точки $x=0$, так и в окрестности точки $x=\pi$. Кроме того, в силу леммы 1, эта функция непрерывна. Далее, вследствие равенств

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}=V\{\Delta_h^2 f(x);\ -\pi\leqslant x\leqslant -2h\}+$$

$$+V\{\Delta_h^2 f(x);\ -2h\leqslant x\leqslant 0\}+V\{\Delta_h^2 f(x);\ 0\leqslant x\leqslant \pi-2h\}+$$

$$+V\{\Delta_h^2 f(x);\quad \pi-2h\leqslant x\leqslant\pi\},\ V\{\Delta_h^2 f(x);\ -\pi\leqslant x\leqslant -2h\}=$$

$$=V\{\Delta_{-h}^2 f(y);\ 2h\leqslant y\leqslant\pi\}=V\{\Delta_h^2 f(x);\ 0\leqslant x\leqslant\pi-2h\},$$

достаточно показать, что $V\{\Delta_h^2 f(x);\ -2h\leqslant x\leqslant 0\}$ и $V\{\Delta_h^2 f(x);\ \pi-2h\leqslant x\leqslant\pi\}$ стремятся к нулю вместе с h.

Но

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\ -2h\leqslant x\leqslant 0\}\leqslant V\{f(x);\ -2h\leqslant x\leqslant 0\}+$$

$$+V\{f(x+2h);\ -2h\leqslant x\leqslant 0\}+2V\{f(x+h);\ -2h\leqslant x\leqslant 0\}\leqslant 4V\{f(x);\ -2h\leqslant x\leqslant 2h\}$$

и последнее выражение мало при малом h, так как $f(x)$—непрерывная функция ограниченной вариации вблизи точки $x=0$. Совершенно так же доказывается, что $V\{\Delta_h^2 f(x);\ \pi-2h\leqslant x\leqslant\pi\}$ стремится к нулю вместе с h.

Лемма 5. Если $f(x)$—ограниченная периодическая функция периода 2π и

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} \to 0 \quad (h \to 0),$$

то функция

$$\varphi(t) = V\{\Delta_t^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$$

определена в промежутке $[-\pi, \pi]$, измерима, ограничена в этом промежутке и $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0$.

Рассмотрим сначала положительное значение t. Так как, в силу леммы 1, $\varphi(x)$—непрерывная функция, то при каждом фиксированном t вторая разность $\Delta_t^2 f(x)$ непрерывна как функция от x. Поэтому полная вариация ее по промежутку $[0, 2\pi]$ равняется пределу сумм

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \Delta_t^2 f\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \Delta_t^2 f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right|$$

при $n \to \infty$. Каждое слагаемое в этой сумме—непрерывная функция от t в промежутке $[0, \pi]$. Следовательно, $\varphi_n(t)$—непрерывная функция при каждом n и $\varphi(t)$ как предел последовательности непрерывных функций измерима в $[0, \pi]$. Если t отрицательно, то будем иметь

$$V\{\Delta_t^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} = V\{f(x) + f(x - 2|t|) - 2f(x - |t|);$$

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi\} = V\{f(x) + f(x + 2|t|) - 2f(x + |t|);$$

$$-\pi - 2|t| \leqslant x \leqslant \pi - 2|t|\} = V\{\Delta_{|t|}^1 f(x);\quad -\pi - 2|t| \leqslant x \leqslant \pi - 2|t|\} =$$

$$= V\{\Delta_{|t|}^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} = V\{\Delta_{-t}^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}.$$

Таким образом, $\varphi(t)$—четная функция, измеримая в промежутке $[-\pi, \pi]$. Для доказательства ограниченности заметим, что по условию леммы $\varphi(t) \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому существует $\delta > 0$, что $0 \leqslant \varphi(t) < 1$ при $0 < t < \delta$. Из этого так же, как это было сделано при доказательстве леммы 2, заключаем, что

$$V\{\Delta_{|t|}^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} \leqslant m^2 V\{\Delta_{\frac{t}{m}}^2 f(x);\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\},$$

$$m = \left[\frac{\pi}{\delta}\right] + 1.$$

Лемма 6. Интеграл

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\{2f(x+t) - f(x+2t)\}\,dt,$$

где $K_n(t)$—четный тригонометрический полином порядка n, является тригонометрическим полиномом порядка не выше чем n. Функция $f(x)$ предполагается интегрируемой на периоде.

Пусть

$$K_n(t)=\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt.$$

При $k=2m+1$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2m+1)t \cdot f(x+2t)\,dt=\left(\int_{2}^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\right)\cos(2m+1)t\,f(x+2t)\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\pi}\cos(2m+1)t\,.\,f(x+2t)\,dt+\int_{0}^{\pi}\cos(2m+1)(u-\pi)f(x+2(u-\pi))du=0.$$

А при $k=2m$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2mt\,f(x+2t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\cos mu\cdot f(x+u)\,du=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cdot f(x+t)\,dt.$$

Поэтому

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{n} 2\lambda_k^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,f(x+t)\,dt-\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\lambda_{2m}^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mtf(x+t)\,dt$$

и если коэффициенты Фурье обозначить через a_k и b_k, то

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2\lambda_k^{(n)}-\lambda_{2k}^{(n)})\pi(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+$$

$$+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} 2\lambda_k^{(n)}\pi(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Лемма 7. Пусть выполнено условие леммы 5 и $\sigma_n(x)$ определяется по формуле (3), где $K_n(t)$ есть известное ядро Фейера. Тогда

$$V\{f(x)-\sigma_n(x);\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}\to 0\quad(n\to\infty).$$

Так как

$$f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,f(x)\,dx,$$

то

$$f(x)-\sigma_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\{f(x)-2f(x+t)+f(x+2t)\}\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,\Delta_t^2\,f(x)\,dt.$$

Положим $f(x)-\sigma_n(x)=\tau_n(x)$ и оценим вариацию $\tau_n(x)$ по сегменту $[-\pi, \pi]$. Пусть

$$-\pi=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_m=\pi.$$

Очевидно,

$$|\tau_n(x_{k+1})-\tau_n(x_k)|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)|\,\Delta_t^2 f(x_{k+1})-\Delta_t^2 f(x_k)|\,dt.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1}|\tau_n(x_{k+1})-\tau_n(x_k)|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\sum_{k=0}^{m-1}|\,\Delta_t^2 f(x_{k+1})-\Delta_t^2 f(x_k)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,V\{\Delta_t^2 f(x);\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$V\{\tau_n(x);\quad -\pi\leqslant k\leqslant\pi\}\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Согласно лемме 5, $\varphi(t)$—ограниченная измеримая функция и по известной теореме последний интеграл имеет пределом предельное значение этой функции в точке $t=0$. Это и доказывает лемму, так как, в силу той же леммы 5, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=0$.

Для доказательства теоремы осталось сделать несколько замечаний. Согласно лемме 1, функция, удовлетворяющая условию (2), непрерывна на сегменте $[0, \pi]$. Продолжим ее сначала четным образом, а затем периодически на всю ось. Полученная функция, согласно лемме 4, будет удовлетворять условию леммы 5. Согласно лемме 7, ее можно аппроксимировать по вариации функцией $\sigma_n(x)$, являющейся тригонометрическим полиномом. Остается заметить, что функция, допускающая аппроксимацию по вариации абсолютно непрерывной функцией, сама является абсолютно непрерывной.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Wiener and K. C. Young. Trans. American Math. Soc., 35 (1933), 327—340.
2. H. D. Ursell. Proc. London Math. Soc. (2), 37 (1832), 402—415.

Кафедра
математического анализа

(Поступило в редакцию 17.X. 1966)

ფ. ხარშილაძე

ერთი თეორემა აბსოლუტურად უწყვეტობის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა: თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული f ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$V\{\Delta_h^2 f(x);\quad a \leqslant x \leqslant b-2h\} \to 0 \quad (h \to 0),$$

მაშინ f აბსოლუტურად უწყვეტია.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Э. С. ЦИТЛАНАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Понятие локально линейного пространства введено М. А. Лаврентьевым и Л. А. Люстерником [1] для исследования задач экстремума функционалов, определенных на множестве кривых, концы которых лежат на заданных кривых.

Упомянутые множества нельзя считать линейными множествами. Эти кривые, как показано в [1], образуют так называемые локально линейные пространства, а функционалы, экстремумы которых исследуются на них, часто являются локально усиленно непрерывными.

В настоящей работе изучаются необходимые и достаточные условия усиленной непрерывности функционалов, некоторые вопросы дифференцируемых функционалов и операторов в локально линейных пространствах.

Введем сперва определение линейного нормированного касательного пространства E к метрическому пространству Y в смысле [1].

Пусть Y—метрическое пространство, элементы которого обозначим через $y \in Y$. Допустим, что существует действительное пространство E типа Банаха, удовлетворяющее следующим трем условиям:

1°. Каждому элементу $y_1 \in Y$, расположенному в некоторой сферической окрестности $S(y;\ \varepsilon_1) \subset Y$, с центром в y и радиусом $\varepsilon_1 > 0$, отвечает элемент $h \in E$—образ элемента y_1 в E. Обратно, каждому элементу $h \in E$, расположенному в некоторой сферической окрестности $S(\theta;\ \varepsilon_2) \subset E$, с центром в нулевой точке θ и радиусом $\varepsilon_2 > 0$, отвечает некоторый элемент $y_1 \in S(y;\ \varepsilon_1)$—прообраз элемента h. Соответствие между окрестностями $S(y;\ \varepsilon_1)$ и $S(\theta;\ \varepsilon_2)$—топологическое. При этом точке y отвечает элемент θ, и обратно.

2°. Существует постоянная μ, такая, что для всех $y_1 \in S(y;\ \varepsilon_1)$ имеем $\| h \| < \mu \rho(y;\ y_1)$.

3°. Когда $\| h \| \to 0$, то $\rho(y;\ y_1) \to 0$.

Пространство E, удовлетворяющее условиям 1°—3°, будем называть *касательным к Y пространством* в любой точке y. Гомеоморфизм V с обратным оператором V^{-1}, реализующий топологическое отображение окрестностей $S(y;\ \varepsilon_1)$ и $S(\theta;\ \varepsilon_2)$, удовлетворяющий 1°—3°, будем называть локально изометрическим отображением.

Метрическое пространство Y, достаточно малая окрестность каждой точки которого допускает топологическое отображение на некоторую окрестность нулевого элемента пространства E с соблюдением условий 1°—3°, называется локально линейным пространством в смысле М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника.

2. Будем считать, что линейное касательное к Y пространство E и его сопряженное пространство E^* обладают биортогональными счетными базисами $\{e_i\}\subset E$, $\{l_i\}\subset E^*$

$$l_i(e_j)=\begin{cases} 1, & \text{при } i=j \\ 0, & \text{при } i\neq j \end{cases} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ldots). \tag{1}$$

Кроме того, допустим, что E регулярно: $E^{**}=E$. Тогда E будет сепарабельным слабо полным банаховым пространством со слабо компактной сферой. В этих условиях произвольный элемент $x\in E$ может быть однозначно представлен в виде ряда

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} l_i(x)\, e_i, \tag{2}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty}\left\| x-\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\, e_i\right\|_E=0. \tag{3}$$

Совершенно также, произвольный элемент $l\in E^*$ представим рядом

$$l=\sum_{i=1}^{\infty} e_i(l)\, l_i, \tag{4}$$

где

$$\lim_{n\to\infty}\left\| l-\sum_{i=1}^{n} e_i(l)\, l_i\right\|_{E^*}=0.$$

Введем обозначения

$$A_n x=\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\, e_i,\quad R_n x=\sum_{i=n+1}^{\infty} l_i(x)\, e_i,$$

$$A_n l=\sum_{i=1}^{n} e_i(l)\, l_i,\quad R_n l=\sum_{i=n+1}^{\infty} e_i(l)\, l_i,$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} x&=A_n x+R_n x,\\ l&=A_n l+R_n l \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и, следовательно, пространства E и E^* распадаются на прямые суммы

$$\left.\begin{aligned} E &= E_{A_n} \dot{+} E_{R_n}, \\ E^* &= E^*_{A_n} \dot{+} E^*_{R_n}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

n-мерных линейных подпространств, соответственно, E_{A_n}, $E^*_{A_n}$ с базисами $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{l_i\}_{i=1}^n$ и элементами $A_n x \in E_{A_n}$, $A_n l \in E^*_{A_n}$ и бесконечномерных линейных подпространств, соответственно, E_{R_n}, $E^*_{R_n}$ с базисами $\{e_i\}_{i=n+1}^\infty$, $\{l_i\}_{i=n+1}^\infty$ и элементами $R_n x \in E_{R_n}$, $R_n l \in E^*_{R_n}$, причем $E^*_{A_n}$, $E^*_{R_n}$— сопряженные, соответственно, к E_{A_n}, E_{R_n} пространства.

Легко показать, что $A_n x$ ортогонален $R_n l$ и $R_n x$ ортогонален $A_n l$, т. е.

$$(A_n x,\ R_n l) = (R_n l,\ A_n x) = 0, \quad (R_n x,\ A_n l) = (A_n l,\ R_n x) = 0, \tag{7}$$

где, например, $(A_n x,\ R_n l)$ обозначает внутреннее произведение элементов $A_n x$, $R_n l$ и равен значению линейного функционала $A_n x$ на элементе $R_n l$.

Действительно, имеем

$$(A_n x,\ R_n l) = \left(A_n x,\ \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i e_i(l)\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} (A_n x,\ l_i)\, e_i(l) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty}\left[\left(l_i,\ \sum_{j=1}^{n} l_j(x)\, e_j\right)\right] e_i(l) = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} l_j(x)\,(e_j,\ l_i)\right] e_i(l) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} l_j(x)\ e_j(l_i)\right] e_i(l)$$

и, так как $i \neq j$, то, в силу (1), получим

$$(A_n x,\ R_n l) = 0.$$

Аналогично доказывается второе равенство из (7).

Таким образом, E_{A_n} состоит из элементов, ортогональных элементам $E^*_{R_n}$, и обратно; E_{R_n} состоит из элементов, ортогональных элементам $E^*_{A_n}$, и обратно. Эти факты символически запишем так

$$\begin{aligned} (E_{A_n},\ E^*_{R_n}) &= (E^*_{R_n},\ E_{A_n}) = 0, \\ (E_{R_n},\ E^*_{A_n}) &= (E^*_{A_n},\ E_{R_n}) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ниже (теорема 1) мы воспроизводим, с несущественными изменениями, доказательство одной нашей теоремы [2], нужной для дальнейшего, имеющей место в банаховых регулярных пространствах с биортогональными базисами.

Теорема 1. Если последовательность $\{x_k\}$ слабо сходится к слабому пределу $\overline{x} \in E$, то последовательность $\{A_k x_k\}$ слабо сходится к тому же слабому пределу $\overline{x}$.

Действительно, пусть $x \in E$ есть произвольный элемент. Рассмотрим последовательность $\{l_r(x)\}$ значений базисных линейных функционалов $l_r \in E^*$ в точке x. Очевидно, что при $n \geqslant r$ будем иметь

$$l_r(x) = (l_r, x) = (l_r, A_n x + R_n x) = l_r(A_n x) + l_r(R_n x) = l_r(A_n x) +$$

$$+ \left(l_r, \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i(x) e_i\right) = l_r(A_n x) + \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i(x)(l_r, e_i) = l_r(A_n x). \tag{9}$$

Пусть $\{x_k\} \subset E$ есть некоторая последовательность, которая слабо сходится к слабому пределу $\overline{x} \in E$. Тогда, для любого $r = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} l_r(x_k) = l_r(\overline{x}). \tag{10}$$

Но, так как при $k \geqslant r$, в силу (9), имеет место равенство

$$l_r(x_k) = l_r(A_k x_k),$$

то из (10) получим

$$\lim_{k\to\infty} l_r(A_k x_k) = l_r(\overline{x}). \tag{11}$$

Всевозможные линейные комбинации с рациональными коэффициентами базисных линейных функционалов l_j $(j = 1, 2, \dots)$ образуют в E^* всюду плотное множество $M \subset E^*$. Пусть $l = \sum_{j=1}^{p} c_j l_j$ обозначает произвольный линейный функционал, принадлежащий множеству M. Тогда

$$l(A_k x_k) = \sum_{j=1}^{p} c_j (l_j, A_k x_k) = \sum_{j=1}^{p} c_j l_j (A_k x_k)$$

и, в силу (11), отсюда получаем

$$\lim_{k\to\infty} l(A_k x_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{r} c_j l_j (A_k x_k) = \sum_{j=1}^{p} c_j l_j(\overline{x}) = l(\overline{x}). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь последовательность операторов $\{A_k\}$. Каждый A_k является линейным оператором, определенным на всем пространстве E, проектирующем элементы $x \in E$ в элементы $A_k x$, принадлежащие k-мерному подпространству E_{A_k}. Кроме того, последовательность $\{A_k\}$, в силу (3), сходится по норме в каждой точке. В этих условиях, в силу теоремы Банаха—Штейнгауза [3], последовательность норм $\{\|A_k\|\}$ ограничена. Далее, так как $\{x_k\}$ слабо сходится, то ограничена и последовательность

$\{\|x_k\|\}$. Наконец, так как $\|A_k x_k\| \leqslant \|A_k\| \|x_k\|$ при любом $k=1, 2, \ldots$, то отсюда следует, что последовательность $\{A_k x_k\}$ ограничена по норме

$$\|A_k x_k\| \leqslant c,$$

где c—некоторая конечная постоянная.

Таким образом, последовательность $\{A_k x_k\}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) она ограничена по норме,

2) для любого линейного функционала l из всюду плотного в E^* множества M имеет место равенство (12).

Эти два условия достаточны для слабой сходимости $\{A_k x_k\}$ к слабому пределу $\overline{x}$. Теорема доказана.

Замечание. Можно также показать [4], что если последовательность $\{x_k\}$ слабо сходится к $\overline{x}$, то последовательность $\{A_n x_k\}$ слабо сходится к $A_n \overline{x}$ при $k \to \infty$.

3. Пусть $f(\widetilde{y})$—произвольный функционал, определенный в $S(y; \varepsilon_1)$, где $\widetilde{y}$—любая точка окрестности $S(y; \varepsilon_1)$. Функционал $f(\widetilde{y})$ индуцирует в $S(\theta; \varepsilon_2)$ некоторый функционал $f_1(\widetilde{x}) = f(V^{-1}\widetilde{x})$, где $\widetilde{x}$—образ элемента $\widetilde{y}$ в $S(\theta; \varepsilon_2)$. Если $f_2(\widetilde{x})$ есть линейный функционал в $S(\theta; \varepsilon_2)$, то $f(\widetilde{y})$ называется локально линейным функционалом [5] в $S(y; \varepsilon_1)$.

Соответствие между локально линейными на $S(y; \varepsilon_1)$ функционалами и линейными на $S(\theta; \varepsilon_2)$ функционалами есть взаимно однозначное соответствие.

Последовательность $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ будем называть локально слабо сходящейся к локально слабому пределу $\overline{y} \in S(y; \varepsilon_1)$ и обозначим символом $y_k \xrightarrow{\text{лс}} \overline{y}$, если для любого функционала $f(\widetilde{y})$, локально линейного в $S(y; \varepsilon_1)$, имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} f(y_k) = f(\widetilde{y}). \tag{13}$$

Теорема 2. *Если последовательность $\{y_k\} \subset S(y; \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к локально слабому пределу $\overline{y} \in S(y; \varepsilon_1)$, то последовательность $\{Vy_k\} = \{x_k\}$ образов в $S(\theta; \varepsilon_2)$ слабо сходится к слабому пределу $\overline{x}$, причем $\overline{x}$—образ элемента $\overline{y}$ в $S(\theta; \varepsilon_2)$.*

Действительно, пусть $l \in E^*$—произвольный функционал, линейный на $S(\theta; \varepsilon_2)$. Этот функционал индуцирует некоторый локально линейный в $S(y; \varepsilon_1)$ функционал φ. Имеем

$$\lim_{k \to \infty} l(x_k) = \lim_{k \to \infty} l(Vy_k) = \lim_{k \to \infty} \varphi(y_k)$$

и так как $y_k \xrightarrow{\text{лс}} \overline{y}$, то

$$\lim_{k \to \infty} l(x_k) = \varphi(\widetilde{y}) = l(\widetilde{x}).$$

В силу произвольности l, отсюда вытекает $x_k \xrightarrow{\text{лс}} \overline{x}$.

Замечание. Имеет место и обратное предложение. А именно, если последовательность образов $\{x_k\}\subset S(\theta;\ \varepsilon_2)$ слабо сходится к слабому пределу $\overline{x}\in S(\theta;\ \varepsilon_2)$, то последовательность прообразов $\{y_k\}=\{V^{-1}x_k\}\subset S(y;\ \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к локально слабому пределу $\overline{y}=V^{-1}\overline{x}\in S(y;\ \varepsilon_1)$.

В самом деле, для произвольного локально линейного на $S(y;\varepsilon_1)$ функционала φ имеем $\varphi(y_k)=l(x_k)$, $\varphi(\overline{y})=l(\overline{x})$, где l—линейный на $S(\theta;\ \varepsilon_2)$ функционал, индуцированный функционалом φ в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$.

Так как $\{x_k\}$ слабо сходится к $\overline{x}$, то $l(x_k)\to l(\overline{x})$ при $k\to\infty$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(y_k)=\varphi(\overline{y})$.

Пусть $\widetilde{y}$—произвольный элемент из $S(y;\ \varepsilon_1)$, образ которого в $S(\theta;\varepsilon_2)$ обозначим через $\widetilde{x}$. Элемент $\widetilde{x}$ допускает разложение $\widetilde{x}=A_n\widetilde{x}+R_n\widetilde{x}$. Введем обозначения $A_n\widetilde{y}=V^{-1}A_n\widetilde{x}$, $R_n\widetilde{y}=V^{-1}R_n\widetilde{x}$.

Теорема 3. *Если n—достаточно велик, то $A_n\widetilde{y}$ и $R_n\widetilde{y}$ суть элементы окрестности $S(y;\ \varepsilon_1)$.*

Для доказательства, очевидно, следует установить, что для достаточно большого n имеем $A_n\widetilde{x}$, $R_n\widetilde{x}\in S(\theta;\ \varepsilon_2)$. Выбирая n достаточно большим, в силу (3), норму элемента $R_n x$ можно сделать сколь угодно малой

$$\|R_n\widetilde{x}\|\leqslant\frac{d}{2}<\varepsilon_2,$$

где $d>0$ и, следовательно, $R_n\widetilde{x}\in S(\theta;\ \varepsilon_2)$.

Но тогда и $A_n\widetilde{x}\in S(\theta;\ \varepsilon_2)$. В самом деле, допустим противное: $A_n\widetilde{x}\overline{\in}S(\theta;\ \varepsilon_2)$. Пусть $\|A_n\widetilde{x}\|=\varepsilon_2+d$, тогда, исходя из оценки

$$\|\widetilde{x}\|\geqslant\big|\,\|A_n\widetilde{x}\|-\|R_n\widetilde{x}\|\,\big|\geqslant\varepsilon_2+\frac{1}{2}d,$$

мы вступаем в противоречие, так как $\widetilde{x}\in S(\theta;\ \varepsilon_2)$.

Теорема 4. *Если последовательность $\{y_k\}\subset S(y;\ \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к локально слабому пределу $\overline{y}\in S(y;\ \varepsilon_1)$, то последовательность $\{A_k y_k\}\subset S(y;\ \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к тому же локально слабому пределу $\overline{y}$.*

В самом деле, пусть φ—произвольный локально линейный на $S(y;\varepsilon_1)$ функционал. Будем иметь

$$\varphi(A_k y_k)=\varphi(V^{-1}A_k x_k)=l(A_k x_k),\tag{14}$$

где l—некоторый линейный функционал на $S(\theta;\ \varepsilon_2)$, который индуцирован в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$ локально линейным в $S(y;\ \varepsilon_1)$ функционалом φ, $\{A_k x_k\}$—последовательность образов в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$, порожденная элементами последовательности $\{A_k y_k\}$.

В силу теоремы 2, последовательность образов $\{x_k\}\subset S(\theta;\ \varepsilon_1)$ слабо сходится к слабому пределу $\overline{x}$—к образу $\overline{y}$ в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$. Но тогда, в силу теоремы 1, последовательность $\{A_n y_k\}$ слабо сходится к $\overline{x}$. Следовательно, из (14) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(A_k y_k)=\lim_{k\to\infty} l(A_k x_k)=l(\overline{x})=\varphi(\overline{y})$$

и, в силу произвольности локально линейного на $S(y;\ \varepsilon_1)$ функционала φ, будем иметь $A_k y_k \xrightarrow{\text{лс}} \overline{y}$.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится еще одно легко доказуемое предложение.

Теорема 5. Если последовательность $\{y_k\}\subset S(y;\ \varepsilon_1)$ локально слабо сходится к локально слабому пределу $\overline{y}\in S(y;\ \varepsilon_1)$, то последовательность $\{A_n y_k\}$ также локально слабо сходится к локально слабому пределу $A_n\overline{y}$, при $k\to\infty$.

В самом деле, сохраняя обозначения прежней теоремы, будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(A_n y_k)=\lim_{k\to\infty} l(A_n x_k). \tag{15}$$

Но, в силу замечания к теореме 1, имеем

$$\lim_{k\to\infty} l(A_n x_k)=l(A_n\overline{x}),$$

следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(A_n y_k)=l(A_n\overline{x})=\varphi(A_n\overline{y}),$$

т. е. $A_n y_k \xrightarrow{\text{сл}} A_n\overline{y}$, при $k\to\infty$.

4. Возьмем теперь произвольный функционал $f(\widetilde{y})$, определенный на $S(y;\ \varepsilon_1)$, и введем следующее определение:

Определение. $f(\widetilde{y})$ будем называть локально усиленно непрерывным функционалом на $S(y;\ \varepsilon_1)$, если для любой локально слабо сходящейся последовательности $\{y_k\}\subset S(y;\ \varepsilon_1)$, со слабым локальным пределом $\overline{y}\in S(y;\ \varepsilon_1)$, имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k)=f(\overline{y}).$$

Очевидно всякий локально усиленно непрерывный на $S(y;\ \varepsilon_1)$ функционал $f(\widetilde{y})$ непрерывен на $S(y;\ \varepsilon_1)$ по метрике пространства Y.

В самом деле, пусть последовательность $\{y_n\}\subset S(y,\ \varepsilon_1)$ сходится по метрике к элементу $y^*\in S(y;\ \varepsilon_1)$. Тогда эта последовательность сходится и локально слабо к тому же элементу. Действительно, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n,\ y^*)=0,$$

но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n-x^* \|=0,$$

где $x^*=Vy^*$, $x_n=Vy_n$, причем $x^*,\ x_n\in S(\theta;\ \varepsilon_2)$, $n=1,\ 2,\cdots$.

Если теперь φ—произвольный локально линейный на $S(y; \varepsilon_1)$ функционал и l—индуцируемый им линейный на $S(\theta; \varepsilon_2)$ функционал, то будем иметь

$$\lim_{n\to 8} |\varphi(y_n)-\varphi(x^*)| = \lim_{n\to\infty} |l(x_n)-l(x^*)| = 0.$$

Итак, $y_n \xrightarrow{\text{лс}} y^*$.

Так как $f(\widetilde{y})$ локально слабо непрерывный на $S(y; \varepsilon_1)$ функционал, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(y^*)$, т. е. $f(\widetilde{y})$ непрерывный на $S(y; \varepsilon_1)$ функционал по метрике пространства Y.

Примером непрерывного на $S(y; \varepsilon_1)$ функционала по метрике Y, но не локально усиленно непрерывного, служит расстояние $\rho(\widetilde{y}, y)$, где $\widetilde{y}$—произвольная точка из $S(y; \varepsilon_1)$.

Переходим к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 6. Пусть Y—локально линейное метрическое пространство, E—слабо компактное линейное нормированное полное сепаратальное регулярное пространство, касательное в каждой точке Y. Пусть E и сопряженное ему пространство E^* обладают биортогональными счетными базисами. Тогда для локально усиленной непрерывности на $S(y; \varepsilon_1)$ непрерывного функционала $f(\widetilde{y})$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$, такое, что для всех $n > N$ и любого элемента $\widetilde{y} \in S(y; \varepsilon_1)$ имело место неравенство

$$|f(y) - f(A_n \widetilde{y})| < \varepsilon, \tag{16}$$

где $S(y; \varepsilon_1)$—окрестность произвольной точки $y \in Y$, допускающая локально изометрическое топологическое отображение в окрестность $S(\theta; \varepsilon_2) \subset E$ нулевого элемента $\theta \in E$, причем θ—образ элемента y в $S(\theta; \varepsilon_2)$, и обратно.

Доказательство необходимости. Допустим противное, что $f(\widetilde{y})$ локально усиленно непрерывен на $S(y; \varepsilon_1)$, но неравенство (16) неверно. Тогда существует неограниченно возрастающая последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, такая, что для любого n_k найдется хоть один элемент $y_{n_k} \in S(y; \varepsilon_1)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(y_{n_k}) - f(A_{n_k} y_{n_k})| \geqslant \varepsilon. \tag{17}$$

Последовательность $\{y_{n_k}\}$ индуцирует в $S(\theta; \varepsilon_2)$ последовательность $\{V y_{n_k}\} = \{x_{n_k}\} \subset S(\theta; \varepsilon_2)$, где V—гомеоморфизм, осуществляющий локально изометрическое топологическое отображение $S(y; \varepsilon_1)$ на $S(\theta; \varepsilon_2)$, и обратно. Так как E—слабо компактное пространство и $S(\theta; \varepsilon_2)$ в нем ограниченное по норме множество, то из $\{x_{n_k}\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$, слабый предел которой обозначим через $\overline{x}$. Последовательность норм $\{\|x_{n_{k_s}}\|\}$ слабо сходящейся последовательности $\{x_{n_{k_s}}\}$ ограничена и, следовательно, существует конечный верхний предел $\overline{\lim\limits_{n_{k_s}}}\|x_{n_{k_s}}\|$. Кроме того, как известно, норма слабого предела удовлетворяет условию $\|\overline{x}\| \leqslant \overline{\lim\limits_{n_{k_s}}}\|x_{n_{k_s}}\|$ и потому $\overline{x} \in S(\theta;\ \varepsilon_2)$.

Последовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$ индуцирует в $S(y;\varepsilon_1)$ подпоследовательность $\{y_{n_{k_s}}\} \subset \{y_{n_k}\}$, которая, в силу замечания к теореме 2, локально слабо сходится в $S(y;\ \varepsilon_1)$. Обозначим её локально слабый предел через $\overline{y}$. Элемент $\overline{y} \in S(y;\ \varepsilon_1)$.

В силу (17), имеет место неравенство

$$|f(y_{n_{k_s}}) - f(A_{n_{k_s}}\, y_{n_{k_s}})| \geqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Так как $y_{n_{k_s}} \xrightarrow{\text{лс}} \overline{y}$, то, в силу теоремы 1, последовательность $\{A_{n_{k_s}}\, y_{n_{k_s}}\}$ тоже локально слабо сходится к тому же локально слабому пределу

$$A_{n_{k_s}}\, y_{n_{k_s}} \xrightarrow{\text{лс}} \overline{y}.$$

По условию функционал f локально усиленно непрерывен в $S(y;\varepsilon_1)$. Поэтому, для произвольно заданного $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует число $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, такое, что при $n_{k_s} > N$ будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &|f(y_{n_{k_s}}) - f(\overline{y})| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ &|f(\overline{y}) - f(A_{n_{k_s}}\, y_{n_{k_s}})| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Используя (19), получим

$$\begin{aligned} |f(y_{n_{k_s}}) - f(A_{n_{k_s}}\, y_{n_{k_s}})| &\leqslant |f(y_{n_{k_s}}) - f(\overline{y})| + \\ &+ |f(\overline{y}) - f(A_{n_{k_s}}\, y_{n_{k_s}})| < \varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (18). Тем самым необходимость условия (16) доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $\{y_k\} \subset S(y;\ \varepsilon_1)$ обозначает произвольную локально слабо сходящуюся последовательность со слабым локальным пределом $\overline{y} \in S(y;\ \varepsilon_1)$.

Для последовательности образов в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$, в силу (3), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \| x_k - A_n x_k \| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| \overline{x} - A_n \overline{x} \| = 0.$$

Но тогда, в силу непрерывности оператора V^{-1} и расстояния ρ, получим

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \rho(V^{-1} x_k,\ V^{-1} A_n x_k) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_k,\ A_n y_k) = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \rho(V^{-1} \overline{x},\ V^{-1} A_n \overline{x}) = \lim_{n\to\infty} \rho(\overline{y}, A_n \overline{y}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Далее, очевидно можно написать

$$|f(y_k) - f(\overline{y})| \leqslant |f(y_k) - f(A_n y_k)| + |f(A_n y_k) - f(A_n \overline{y})| + \\ + |f(A_n \overline{y}) - f(\overline{y})|. \tag{21}$$

Так как $f(\widetilde{y})$ непрерывный на $S(y;\ \varepsilon_2)$ функционал, то, в силу (20), для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$, такое, что

$$\left.\begin{aligned} &|f(y_k) - f(A_n y_k)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \text{при}\ \ n > N, \\ &|f(A_n \overline{y}) - f(\overline{y})| < \frac{\varepsilon}{3},\ \text{при}\ \ n > N. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Кроме того, с одной стороны, при $k \to \infty$ последовательность $\{A_n x_k\}$ слабо сходится к слабому пределу $A_n \overline{x}$ (в силу замечания к теореме 1), а с другой стороны, элементы последовательности $\{A_n x_k\}$ и $A_n \overline{x}$ принадлежат конечномерному (n-мерному) пространству, в котором слабая сходимость всегда совпадает со сходимостью по норме, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \| A_n x_k - A_n \overline{x} \| = 0.$$

Поэтому, при $k \to \infty$ последовательность $\{A_n y_k\}$ сходится к $A_n \overline{y}$ по метрике пространства Y

$$\lim_{k\to\infty} \rho(A_n y_k,\ A_n \overline{y}) = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое, что

$$|f(A_n y_k) - f(A_n \overline{y})| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \text{при}\quad n > N. \tag{23}$$

Таким образом, в силу (22) и (23), из (21) вытекает

$$|f(y_k) - f(\overline{y})| < \varepsilon.$$

Полученное неравенство имеет место для любой последовательности $\{y_k\}$, которая локально слабо сходится к локально слабому пределу $\overline{y}$.

Это означает, что непрерывный функционал $f(\widetilde{y})$ локально усиленно непрерывен на $S(y;\ \varepsilon_1)$, и теорема доказана.

Замечание. Неравенство (16) показывает, что значение локально усиленно непрерывного на $S(y;\ \varepsilon_1)$ функционала $f(\widetilde{y})$ в произвольной точке $\widetilde{y}\in S(y;\ \varepsilon_1)$, для достаточно больших n, можно аппроксимировать, с любой, наперед заданной степенью точности, значениями этого функционала на элементах последовательности $\{A_n\widetilde{y}\}$, причем число $\varepsilon>0$ характеризует степень достижимого приближения.

Теорема 7. Пусть Y—локально линейное метрическое пространство, E—слабо компактное линейное нормированное полное сепарабельное регулярное пространство, касательное в каждой точке Y, $S(y;\varepsilon_1)$—окрестность произвольной точки $y\in Y$, допускающая локально изометрическое топологическое отображение на окрестность $S(\theta;\ \varepsilon_2)$ нулевого элемента $\theta\in E$, причем θ—образ элемента y в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$, и наоборот, $f(\widetilde{y})$—локально усиленно непрерывный функционал в $S(y;\varepsilon_1)$, где $\widetilde{y}$—произвольная точка $S(y;\varepsilon_1)$, удовлетворяющая в $S(y;\ \varepsilon_1)$ условию Липшица

$$|f(\widetilde{y}_1)-f(\widetilde{y}_2)|\leqslant C_f\,\rho(\widetilde{y}_1,\ \widetilde{y}_2),$$

где $\widetilde{y}_1,\ \widetilde{y}_2$—произвольные элементы окрестности $S(y;\ \varepsilon_1)$, C_f—постоянная Липшица, $f(\widetilde{y})$ дифференцируем в точке $\widetilde{y}$ окрестности $S(y;\ \varepsilon_1)$

$$f(\widetilde{\widetilde{y}})-f(\widetilde{y})=(L_f\widetilde{y},\ \widetilde{\widetilde{h}})+\omega_f(\widetilde{y};\ \widetilde{\widetilde{h}}),$$

где $\widetilde{\widetilde{h}}$—образ элемента $\widetilde{\widetilde{y}}\in S(y;\ \varepsilon_1)$ в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$, $L_f\widetilde{y}=\mathrm{grad}\ f(\widetilde{y})\in E^*$ и остаток $\omega_f(\widetilde{y},\ \widetilde{\widetilde{h}})$ удовлетворяет условию

$$|\ \omega_f(\widetilde{y};\ \widetilde{\widetilde{h}})\ |<C\|\widetilde{\widetilde{h}}\|^2,$$

где c—постоянная, тогда для любого $\varepsilon<\varepsilon_1$ существует число N, такое, что для всех элементов y^* шара $S(y;\ \varepsilon)$ и для всех $n>N$ будем иметь

$$\|R_n L_f y^*\|<\xi\varepsilon,$$

где ξ—постоянная.

Доказательство. Пусть y^*—произвольный элемент шара $S(y;\ \varepsilon)$. Имеем

$$f(\widetilde{y})-f(y^*)=(L_f y^*,\widetilde{h})+\omega_f(y^*;\ \widetilde{h}),\tag{24}$$

где $\widetilde{h}$—образ элемента $\widetilde{y}$ в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$. Обозначим образ шара $S(y;\ \varepsilon)$ в $S(\theta;\ \varepsilon_2)$ через $S(\theta;\ \overline{\varepsilon})$: $VS(y;\ \varepsilon)=S(\theta;\ \overline{\varepsilon})\subset S(\theta;\ \varepsilon_2)$. В силу теоремы Хана [3], в пространстве E_{R_n} существует элемент h^*, такой, что

$$(R_n L_f y^*, h^*) = \| R_n L_f h^* \| \| h^* \|. \tag{25}$$

Пусть число $\eta > 0$, такое, что $\eta < \frac{\varepsilon}{\| h^* \|}$. Тогда, очевидно, элемент $\eta h^* \in S(\theta; \overline{\varepsilon})$. Пусть $\overset{\approx}{y} = V^{-1}(\eta h^*)$ обозначает прообраз элемента ηh^* в $S(y; \varepsilon_1)$, $\overset{\approx}{y} \in S(y; \varepsilon)$. Для элемента $\overset{\approx}{y}$ равенство (24) принимает вид

$$f(\overset{\approx}{y}) - f(y^*) = (L_f y^*, \eta h^*) + \omega_f(y^*; \eta h^*) = \eta (A_n L_f y^*, h^*) + \\ + \eta (R_n L_f y^*, h^*) + \omega_f(y^*; \eta h^*). \tag{26}$$

Но так как $h^* \in E_{\mathrm{R}_n}$ и пространство $E^*_{\mathrm{A}_n}$, которому принадлежит элемент $A_n L_f y^*$, ортогонально пространству E_{R_n}, то $(A_n L_f y^*, h^*) = 0$. Следовательно, из (16) получим

$$\eta \| R_n L_f y^* \| \| h^* \| = f(\overset{\approx}{y}) - f(y^*) - \omega_f(y^*; \eta h^*).$$

Отсюда будем иметь

$$\eta \| R_n L_f y^* \| \| h^* \| \leqslant | f(\overset{\approx}{y}) - f(A_n \overset{\approx}{y}) | + | f(A_n \overset{\approx}{y}) - f(y^*) | + \\ + | \omega_f(y^*; \eta h) |. \tag{27}$$

В силу теоремы 6, для произвольного числа $\eta \| h^* \| \varepsilon$ существует $N = N(\varepsilon)$, такое, что для всех $n > N$ и любого элемента $\overset{\approx}{y} \in S(y; \varepsilon_1)$ имеет место неравенство

$$| f(\overset{\approx}{y}) - f(A_n \overset{\approx}{y}) | < \eta \| h^* \| \varepsilon. \tag{28}$$

Заметим, что

$$A_n \overset{\approx}{y} = N^{-1}(A_n \eta h^*)$$

и так как оператор A_n однороден, то

$$A_n(\eta h^*) = \eta A_n h^*.$$

Но $h^* \in E_{\mathrm{R}_n}$ есть такой элемент пространства E, у которого $A_n h^* = \theta$. Следовательно, $A_n(\eta h^*) = \theta$ и потому $A_n \overset{\approx}{y} = N^{-1}(\theta) = y$. Получим

$$| f(A_n \overset{\approx}{y}) - f(y^*) | = | f(y) - f(y^*) |,$$

и так как функционал f удовлетворяет условию Липшица в $S(y; \varepsilon_1)$, то

$$| f(A_n \overset{\approx}{y}) - f(y^*) | \leqslant C_f \rho(y, y^*)|.$$

Пусть C_1—постоянная, удовлетворяющая условию $C_f \leqslant C_1 \| h^* \| \eta$, и учтем, что $y^* \in S(y; \varepsilon)$, тогда из последнего неравенства получим

$$| f(A_n y^*) - f(y^*) | < C_1 \eta \| h^* \| \varepsilon. \tag{29}$$

Наконец, по условию теоремы, имеем

$$| \omega_f(y^*; \eta h^*) | \leqslant C \eta^2 \| h^* \|^2. \tag{30}$$

Используя неравенства (28), (29) и (30), из (27) будем иметь

$$\| R_n L_f y^* \| < \varepsilon + c_1 \varepsilon + c \| \eta h^* \|. \tag{31}$$

Так как Y—локально линейное метрическое пространство, то

$$\| \eta h^* \| \leqslant \mu \rho (y, \widetilde{\widetilde{y}}) < \mu\varepsilon. \tag{32}$$

Следовательно, из неравенства (31) окончательно получим

$$\| R_n L_f y^* \| < \xi\varepsilon,$$

где $\xi = 1 + c_1 + \mu c$. Теорема доказана.

Сохраняя обозначения теоремы 7, ниже мы докажем одно качественное свойство оператора L_f.

Теорема 8. Если функционал $f(\widetilde{y})$ удовлетворяет условиям теоремы 7, то оператор $L_f y^* = \operatorname{grad} f(y^*)$ отображает окрестность $S(y;\ \varepsilon)$ в компактное множество $M = L_f S(y;\ \varepsilon) \subset \subset E$, где $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Доказательство. Так как касательное к Y пространство E и его сопряженное E^* обладают биортогональными базисами, то множество M образов точек шара $S(y;\ \varepsilon)$ в E^* разлагается в прямую сумму

$$M = M_{\mathrm{A}_n} + M_{\mathrm{R}_n},$$

где M_{A_n}—ограниченное по норме множество n-мерного пространства. Оно компактно и, следовательно, для произвольного $\frac{\varepsilon}{2}$ в M_{A_n} существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. Обозначим элементы этой сети через $A_n L_f y_1, \cdots, A_n L_f y_k$, где $\{y_i\}_{i=1}^k \subset S(y;\ \varepsilon)$. Тогда для произвольного $A_n L_f y^* \in M_{\mathrm{A}_n}$ существует по крайней мере один элемент $A_n L_f y_i \in \{A_n L_f y_j\}_{j=1}^k$, такой, что

$$\| A_n L_f y^* - A_n L_f y_i \|_{E^*} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

Докажем теперь, что последовательность $\{A_n L_f y_j\}_{j=1}^n$ является конечной ε-сетью множества M. Действительно, возьмем произвольный элемент $L_f y \in S(y;\ \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \| L_f y^* - A_n L_f y_i \| &\leqslant \| L_f y^* - A_n L_f y^* \| + \| A_n L_f y^* - A_n L_f y_i \| = \\ &= \| R_n L_f y^* \| + \| A_n L_f y^* - A_n L_f y_i \|. \end{aligned} \tag{34}$$

В силу теоремы 7, для произвольного числа $\frac{\varepsilon}{2\xi}$ существует N, такое, что для всех $y^* \in S(y;\ \varepsilon)$ и $n > N$ имеем

$$\| R_n L_f y^* \| < \xi \cdot \frac{\varepsilon}{2\xi} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35}$$

Используя (33) и (35), из (34) получим

$$\| L_f y^* - A_n L_f y_i \| < \varepsilon.$$

Таким образом, множество M компактно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник. Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, ОНТИ, Москва (1935).
2. Э. С. Цитланадзе. О дифференцировании функционалов. Мат. сб., 29 (71), (1951), 3—12.
3. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. ГИТТИ, Москва (1951).
4. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. ГИТТЛ, Москва (1956).
5. Л. А. Люстерник. Пересечение в локально линейных пространствах. ДАН СССР, т. 27, № 8 (1940), стр. 771—774.

Кафедра
математики для физиков

(Поступило в редакцию 10. XII. 1966)

ე. წითლანაძე

დიფერენცირებადი ფუნქციონალისა და ოპერატორის ზოგიერთი საკითხი ლოკალურად წრფივ სივრცეში

რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია დიფერენცირებადი ლოკალურად გაძლიერებული უწყვეტი ფუნქციონალისა და მისი გრადიენტის ზოგიერთი საკითხი ლოკალურად წრფივ სივრცეში. კერძოდ, მოძებნილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ მეტრიკით უწყვეტი ფუნქციონალი იყოს ლოკალურად გაძლიერებული უწყვეტი ფუნქციონალი. დამტკიცებულია ლოკალურად გაძლიერებული უწყვეტი ფუნქციონალის გრადიენტის კომპაქტურობა.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Э. В. ЧЕЛИДЗЕ

О ДВОЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ СТИЛТЬЕСА

В этой статье мы обобщаем один результат Харди и Литльвуда [1] на случай функции двух переменных.

Пусть функция $F(x, y)$ определена в области $R_0=[0 \leqslant x < +\infty; 0 \leqslant y < +\infty)$. Мы скажем, что $F(x, y)$ имеет пределом число A при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что

$$|F(x, y)-A| < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad x \geqslant N, \ y \geqslant N.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x, y)=A.$$

Определение 1. Мы скажем, что функция $F(x, y)$ имеет λ пределом число A при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, если существует такое число $N>0$, что

$$|F(x, y)-A| < \varepsilon,$$

когда $x \geqslant N$, $y \geqslant N$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \lambda$, где λ—данное число, не меньшее единицы. В этом случае будем писать

$$\lim_{(x, y)_\lambda \to +\infty} F(x, y)=A.$$

Функцию $f(x, y)$, определенную в области R_0, мы будем называть интегрируемой на R_0, если она интегрируема по Лебегу в любой области $[0 \leqslant x \leqslant t; \ 0 \leqslant y \leqslant \tau]$ и существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ \tau\to\infty}} \int_0^t \int_0^\tau f(x, y)\, dxdy$.

Этот предел обозначается символом

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dxdy.$$

Если же существует конечный предел $\lim\limits_{(t, \tau)_\lambda \to\infty} \int_0^t \int_0^\tau f(x, y)\, dxdy$, то этот предел будем обозначать символом

$$(\lambda) \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x, y)\, dxdy.$$

Лемма 1. Пусть функция $\varphi(u, v)$ определена в области $[0 \leqslant u < +\infty;\ 0 \leqslant v < +\infty)$ и интегрируема по Лебегу в любой области $[0 \leqslant u \leqslant s;\ 0 \leqslant v \leqslant \sigma]$. Положим

$$G(s, \sigma) = \frac{1}{s\sigma} \int\limits_0^s \int\limits_0^\sigma uv\, \varphi(u, v)\, dndv,$$

$$\Phi(s, \sigma) = \int\limits_0^s \int\limits_0^\sigma \frac{uv\, \varphi(u, v)}{(s+u)(\sigma+v)}\, dudv.$$

Если

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} G(s, \sigma) = A, \tag{1}$$

и, кроме того,

1) $$\lim_{s \to +\infty} \frac{G(s, \sigma)}{s^2} = 0$$

равномерно относительно s на любом отрезке $[0, a]$,

2) $$\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{G(s, \sigma)}{\sigma^2} = 0$$

равномерно относительно s на любом отрезке $[0, b]$, то

$$\lim_{(s, \sigma)_\lambda \to +\infty} \Phi(s, \sigma) = A(\ln 2)^2,$$

где λ—данное число $\geqslant 1$.

Доказательство. На основании формулы интегрирования по частям получим

$$\Phi(s, \sigma) = \frac{1}{(s+u)(\sigma+v)} \int\limits_0^u \int\limits_0^v uv\, \varphi(u, v)\, dudv \Bigg|_{\substack{u=s \\ v=\sigma}} -$$

$$- \int\limits_0^s \left[-\frac{1}{(s+u)^2} \cdot \frac{1}{\sigma+\sigma} \int\limits_0^u \int\limits_0^\sigma t\tau\varphi(t, \tau)\, dtd\tau \right] du -$$

$$- \int\limits_0^\sigma \left[-\frac{1}{(\sigma+v)^2} \cdot \frac{1}{s+s} \int\limits_0^v \int\limits_0^s t\tau\varphi(t, \tau)\, dtd\tau \right] dv +$$

$$+ \int\limits_0^s \int\limits_0^\sigma \left(\int\limits_0^u \int\limits_0^v t\tau\varphi(t, \tau)\, dtd\tau \right) \cdot \frac{dudv}{(s+u)^2(\sigma+v)^2} =$$

$$= \frac{s\sigma\, G(s,\ \sigma)}{(s+s)\,(\sigma+\sigma)} + \frac{1}{2\sigma}\int\limits_0^s \frac{u\sigma\, G(u,\ \sigma)}{(s+u)^2}\,du + \frac{1}{2\ s}\int\limits_0^\sigma \frac{sv\, G(s,\ v)}{(\sigma+v)^2}\,dv +$$

$$+ \int\limits_0^s\int\limits_0^\sigma \frac{1}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\, uv\, G(u,\ v)\, du\, dv = \frac{1}{4}\ G(s,\ v) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^s \frac{u\, G(u,\ \sigma)}{(s+u)^2}\,du + \frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{v\, G(s,\ v)}{(\sigma+v)^2}\,dv +$$

$$+ \int\limits_0^s\int\limits_0^\sigma \frac{uv\, G(u,\ v)}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\,dudv = \frac{1}{4}\ G(s,\ \sigma) + I_1 + I_2 + I_3.$$

Вычислим $\lim\limits_{(s,\ \sigma)_\lambda \to +\infty} I_3$. Имеем

$$I_3 = \int\limits_0^s\int\limits_0^\sigma \frac{uv\, G(u,\ v)}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\,dudv - \int\limits_0^s\int\limits_0^\sigma\ A\ .\ \frac{uv}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\,dudv +$$

$$+ A\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \int\limits_0^s\int\limits_0^\sigma \frac{uv}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\,[G(u,\ v) - A]\,dudv +$$

$$+ A\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)^2 = I'_3 + A\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

В силу равенства (1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что при $u \geqslant N$, $v \geqslant N$ будет иметь место неравенство

$$|\ G(u,\ v) - A\ | < \varepsilon. \tag{2}$$

Оценим интеграл I'_3. Полагая $s > N$, $\sigma > N$, будем иметь

$$I'_3 = \int\limits_0^s du \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\ [G(u,\ v) - A]\,dv +$$

$$+ \int\limits_0^\sigma dv \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\ [G(u,\ v) - A]\,dn -$$

$$- \int\limits_0^N\int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\ [G(u,\ v) - A]\,dudv +$$

$$+ \int\limits_N^s\int\limits_N^\sigma \frac{uv}{(s+u)^2\ (\sigma+v)^2}\ [C(u,\ v) - A]\,dudv =$$

$$= A_1 + A_2 - A_3 + A_4.$$

Но, в силу (2), получим

$$|A_4| \leqslant \int\limits_N^s \int\limits_N^\sigma \frac{uv}{(\sigma+u)^2(\sigma+v)^2} \,|\, G(u, v)-A \,|\, dudv <$$

$$< \varepsilon \int\limits_N^s \int\limits_N^\sigma \frac{ur}{(s+u)^2(\sigma+v)^2}\, dudv < \varepsilon \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Далее, на основании теоремы Лебега имеем

$$\lim_{\substack{s\to+\infty \\ \sigma\to+\infty}} A_3 = 0.$$

Следовательно, существует такое $N_1 \geqslant N$, что нри $s \geqslant N_1$, $\sigma \geqslant N_1$, будет

$$|\, A_3 \,| < \varepsilon.$$

Оценим интеграл A_1. В силу условий 1) и 2), для данного ε можно найти такое $N_2 \geqslant N_1$, что

$$|\, G(s, \sigma)-A \,| < s^2 \frac{\varepsilon}{\lambda^2 N^2}, \quad \text{когда} \quad s > N_2 \quad 0 < \sigma \leqslant N, \tag{3}$$

$$|\, G(s, \sigma)-A \,| < \sigma^2 \frac{\varepsilon}{\lambda^2 N^2}, \quad \text{когда} \quad \sigma > N_2, \quad 0 < s \leqslant N. \tag{4}$$

Пусть s и σ удовлетворяют условиям

$$s \geqslant N_2, \quad \sigma \geqslant N_2, \quad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{s}{\sigma} \leqslant \lambda.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство (3), будем иметь

$$|\, A_1 \,| \leqslant \int\limits_0^N \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2(\sigma+v)^2} \,|\, G(u, v)-A \,|\, dudv +$$

$$+ \int\limits_N^s \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2(\sigma+x)^2} \,|\, G(u, v)-A \,|\, dudv <$$

$$< \int\limits_0^N \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2(\sigma+v)^2} \,|\, G(u, v)-A \,|\, dudv +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{N^2\,\lambda^2} \int\limits_N^s \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2(\sigma+v^2)}\, dudv < \varepsilon +$$

$$+ \int\limits_0^N \int\limits_0^N \frac{uv}{(s+u)^2(\sigma+v)^2} \,|\, G(u, v)- A \,|\, dudv.$$

В силу теоремы Лебега

$$\lim_{\substack{s\to+\infty \\ \sigma\to+\infty}} \int_0^N \int_0^N \frac{uv}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2} \mid G(u,v)-A \mid du dv=0.$$

Следовательно, существует такое $N_3 > N_2$, что

$$| A_1 | < 2\varepsilon,$$

когда

$$s \geqslant N_3, \quad \sigma \geqslant N_2, \quad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{s}{\sigma} \leqslant \lambda. \tag{5}$$

Аналогично покажем, что

$$| A_2 | < 2\varepsilon,$$

когда выполнены условия (5). Следовательно,

$$| I'_3 | < 5\varepsilon+\varepsilon\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)^2,$$

когда s и σ удовлетворяют неравенствам (5). Таким образом,

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_3=A\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Оценим теперь интеграл I_2. Имеем

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{v}{(\sigma+v)^2}\,[G(s,v)-A]\,dv+\frac{A}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=B+\frac{A}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Пусть s и σ удовлетворяют условиям (5). Тогда, в силу (2) и (3), получим

$$| B | \leqslant \frac{1}{2}\int_0^N \frac{v}{(\sigma+v)^2} \mid G(s,v)-A \mid dv+\frac{1}{2}\int_N^\sigma \frac{v}{(\sigma+v)^2} \mid G(v,u)-A \mid dv<$$

$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon s^2}{N^2\lambda^2}\int_0^N \frac{v}{(\sigma+v)^2}\,dv+\frac{1}{2}\,\varepsilon\int_N^\sigma \frac{vdv}{(\sigma+v)^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} B=0.$$

Поэтому

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_2=\frac{A}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_1=\frac{A}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} \Phi(s,\sigma)=\frac{1}{4}\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} G(s,\sigma)+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_1+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_2+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_3=A(\ln 2)^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(u, v)$ определена в области $[0\leqslant u<+\infty;$ $0\leqslant v<+\infty)$ и интегрируема по Лебегу в любой области $[0\leqslant u\leqslant s,$ $0\leqslant v\leqslant \sigma]$. Положим

$$G_1(s,\sigma)=\frac{1}{s}\int_0^s\int_0^\sigma u\,\varphi(u,v)\,du dv,$$

$$\Phi_1(s,\sigma)=\sigma\int_0^s\int_0^\sigma \frac{u\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,du dv.$$

Если

$$\lim_{s,\sigma\to\infty} G_1(s,\sigma)=A_1 \tag{6}$$

и, кроме того,

1) $$\lim_{s\to\infty}\frac{G_1(s,\sigma)}{s}=0$$

равномерно относительно σ на любом отрезке $[o, a]$,

2) $$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{G_1(s,\sigma)}{\sigma}=0$$

равномерно относительно s на любом отрезке $[o, b]$, то

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty}\Phi_1(s,\sigma)=A_1\ln 2.$$

Доказательство. На основании формулы интегрирования по частям получим

$$\Phi_1(s,\sigma)=\frac{\sigma}{(s+u)(\sigma+v)}\int_0^u\int_0^v u\,\varphi(u,v)\,du dv\Bigg|_{\substack{u=s\\ v=\sigma}}-$$

$$-\int_0^s\left[-\frac{1}{(s+u)^2}\cdot\frac{\sigma}{\sigma+\sigma}\int_0^u\int_0^\sigma t\varphi(t,\tau)\,dt d\tau\right]du-$$

$$-\int_0^\sigma\left[-\frac{\sigma}{(\sigma+v)^2}\cdot\frac{1}{s+s}\int_0^v\int_0^s t\varphi(t,\tau)\,dt d\tau\right]dv+$$

$$+\int_0^s\int_0^\sigma\left\{\int_0^u\int_0^v t\varphi(t,\tau)\,dt d\tau\right\}\frac{du dv}{(s+u)^2(\sigma+v)^2}=\frac{1}{4}G_1(s,\sigma)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^s \frac{u}{(s+u)^2}\, G_1(u,\sigma)\, du+\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\sigma}{(\sigma+v)^2}\, G_1(s,\ v)\, dv+$$

$$+\int_0^s\int_0^\sigma \frac{u\sigma}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\, G_1(u,v)\, dudv=\frac{1}{4}\, G_1(s,\ \sigma)+I_1+I_2+I_3.$$

В силу равенства (6), для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N>0$, что при $u\geqslant N$, $v\geqslant N$ будем иметь

$$|\, G_1(u,\ v)-A_1\,|<\varepsilon. \tag{7}$$

Далее, на основании условий 1) и 2) найдется такое $N_1\geqslant N$, что будут выполнены неравенства

$$|\, G_1(u,v)-A_1\,|<\frac{\varepsilon}{\lambda N}\cdot u, \tag{8}$$

когда $u\geqslant N_1$, $0\leqslant v\leqslant N$;

$$|\, G_1(u,\ v)-A_1\,|<\frac{\varepsilon}{\lambda N}\cdot v, \tag{9}$$

когда $v\geqslant N_1$, $0\leqslant u\leqslant N$.

Покажем, что

$$\lim_{(s,\ \sigma)_\lambda\to\infty} I_1=\frac{A_1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Имеем

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^s \frac{u}{(s+u)^2}\,[G_1(u,\ \sigma)-A]\, du+\frac{A_1}{2}\Bigg(\ln 2-$$

$$-\frac{1}{2}\Bigg)=I'_1+\frac{A_1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Пусть s и σ удовлетворяют неравенствам

$$s\geqslant N_1,\ \ \sigma\geqslant N_1,\ \ \frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{s}{\sigma}\leqslant\lambda. \tag{11}$$

Принимая во внимание неравенства (7) и (10), будем иметь

$$|\, I'_1\,|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^N \frac{u}{(s+u)^2}\,|\, G_1(u,\sigma)-A_1\,|\, du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_N^s \frac{u}{(s+u)^2}\,|\, G_1(u,\sigma)-A_1\,|\, du<\frac{\varepsilon}{2\,\lambda N}\,\sigma\int_0^N \frac{udu}{(s+u)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_N^s \frac{udu}{(s+u)^2}<\frac{\varepsilon\sigma}{2\,\lambda N}\cdot\frac{N}{s}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to\infty} I'_1=0.$$

Таким образом, имеет место равенство (10).

Покажем теперь, что

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to\infty} I_2=\frac{1}{4}A_1. \tag{12}$$

Имеем

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^\sigma\frac{\sigma}{(\sigma+v)^2}\,G_1(s,v)\,dv=\frac{1}{2}\int_0^\sigma\frac{\sigma}{(\sigma+v)^2}[G_1(s,\sigma)-A_1]\,dv+$$

$$+\frac{1}{4}A_1=I'_2+\frac{1}{4}A_1.$$

Пусть s и σ удовлетворяют неравенствам (11). Тогда, в силу неравенств (7) и (8), получим

$$|I'_2|\leqslant\int_N^\sigma\frac{\sigma}{(\sigma+v)^2}\,|G_1(s,v)-A_1|\,dv+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^N\frac{\sigma}{(\sigma+v)^2}\,|G_1(s,v)-A_1|\,dv<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon s\sigma}{2\lambda N}\cdot\frac{N}{\sigma^2}<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to\infty} I'_2=0.$$

Таким образом, справедливо равенство (12).

Наконец покажем, что

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to\infty} I_3=\frac{A_1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

Имеем

$$I_3=\int_0^s\int_0^\sigma\frac{u\sigma}{(s+u)^2(\sigma+v)^2}[G_1(u,v)-A_1]\,du\,dv+$$

$$+\frac{A_1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=I'_3+\frac{A_1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

Пуст s и σ удовлетворяют неравенствам (11). Тогда, в силу неравенств (7), (8) и (9), получим

$$|I'_3|\leqslant\int_{N_1}^s\int_0^N\frac{u\sigma}{(s+u)^2(\sigma+v)^2}\,|G_1(u,v)-A_1|\,du\,dv+$$

$$+\int_0^N\int_{N_1}^\sigma\frac{u\sigma}{(s+u)^2(\sigma+v)^2}\,|G_1(u,v)-A_1|\,du\,dv+$$

$$+\int_0^{N_1}\int_0^{N_1} \frac{u\sigma}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\,|\,G_1(u,v)-A_1\,|\,dudv+$$

$$+\int_N^s\int_N^\sigma \frac{u\sigma}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\,|\,G_1(u,v)-A_1\,|\,dudv = I_1^*+I_2^*+I_3^*+I_4^*.$$

Но

$$I_1^* < \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda N}\int_{N_1}^s\int_0^N \frac{u^2}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\,dudv < \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda N}\cdot\frac{2}{\sigma^2}\,(s-N_1)\,N <$$

$$<\frac{\varepsilon}{\lambda}\cdot\frac{s}{\sigma}\leqslant\varepsilon.$$

Аналогично покажем, что

$$I_2^* < \varepsilon.$$

Оценка интеграла I_4^* дает

$$I_4^* < \varepsilon\int_N^s\int_N^\sigma \frac{u\sigma}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2}\,dudv < \varepsilon.$$

Наконец, на основании теоремы Лебега будет

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_3^* = 0.$$

Следовательно, имеет место равенство (13). Таким образом,

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty}\Phi_1(s,\sigma)=\frac{1}{4}\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} G_1(s,\sigma)+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_1+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_2+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} I_3=A_1\ln 2.$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть функция $\varphi(u, v)$ определена в области $[0\leqslant u<+\infty;\ 0\leqslant v<+\infty)$ и интегрируема по Лебегу в любой области $[0\leqslant u\leqslant s;\ 0\leqslant v\leqslant\sigma]$ и пусть сходится интеграл

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varphi(u,v)}{(s+u)\,(\sigma+v)}\,dudv$$

для любых $s>0$, $\sigma>0$.

Если выполнены условия

1) $$\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} G(s,\sigma)=A,\quad \lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} G_1(s,\sigma)=A_1,\quad \lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} G_2(s,\sigma)=A_2,$$

2) $$\lim_{s\to+\infty}\frac{G(s,\sigma)}{s^2}=0$$

равномерно относительно σ на любом отрезке $[0, a]$,

3) $$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{G(s,\ \sigma)}{\sigma^2}=0$$

равномерно относительно s на любом отрезке $[0, b]$,

4) $$\lim_{s\to+\infty}\frac{G_1(s,\ \sigma)}{s^\alpha}=0$$

равномерно относительно σ на любом отрезке $[0, a]$,

5) $$\lim_{s\to+\infty}\frac{G_1(s,\ \sigma)}{\sigma^\alpha}=0$$

равномерно относительно s на любом отрезке $[0, b]$,

6) $$\lim_{s\to+\infty}\frac{G_2(s,\ \sigma)}{s^\alpha}=0$$

равномерно относительно σ на любом отрезке $[0, a]$,

7) $$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{G_2(s,\ \sigma)}{\sigma^\alpha}=0$$

равномерно относительно s на любом отрезке $[0, b]$, где α —некоторое положительное число, меньше единицы и

$$G(s,\ \sigma)=\frac{1}{s\sigma}\int_0^s\int_0^\sigma uv\,\varphi(u,\ v)\,dudv,$$

$$G_1(s,\ \sigma)=\frac{1}{s}\int_0^s\int_0^\sigma u\,\varphi(u,\ v)\,dudv,$$

$$G_2(s,\ \sigma)=\frac{1}{\sigma}\int_0^s\int_0^\sigma v\,\varphi(u,\ v)\,dudv.$$

то из условия

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{s\sigma\,\varphi(u,\ v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv=I$$

вытекает равенство

$$(\lambda)\int_0^\infty\int_0^\infty\varphi(u,\ v)\,dudv=I.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{s\sigma\,\varphi(u,\ v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv=\int_0^s\int_0^\sigma\frac{s\sigma\,\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv+$$

$$+\int_0^\sigma dv\int_s^\infty \frac{s\sigma\,\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,du+\int_0^s du\int_\sigma^\infty \frac{s\sigma\,\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dv+$$

$$+\int_s^\infty\int_\sigma^\infty \frac{s\sigma\,\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{14}$$

Интеграл I_1 представим в следующем виде:

$$I_1=\int_0^s\int_0^\sigma \varphi(u,v)\,dudv-s\int_0^s\int_0^\sigma\frac{v\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv-$$

$$-\sigma\int_0^s\int_0^\sigma\frac{u\,\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv-\int_0^s\int_0^\sigma\frac{uv\,\varphi(u,v)}{(s+u)(\sigma+v)}\,dudv=$$

$$=\int_0^s\int_0^\sigma \varphi(u,v)\,dudv-I_1'-I_1''-I_1'''. \tag{15}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_1'''=A(\ln 2)^2, \tag{16}$$

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_1''=A_1\ln 2,$$

$$\lim_{(s,\,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_1'=A_2\ln 2.$$

Оценим интеграл I_4. Принимая во внимание равенства 2) и 3), на основании формулы интегрирования по частям получим

$$I_4=\frac{1}{4\,s\sigma}\int_0^s\int_0^\sigma uv\,\varphi(u,v)\,dudv+$$

$$+s\sigma\int_s^\infty\left\{\frac{-s-2u}{2\,\sigma^2(s+u)^2u^2}\int_0^u\int_0^\sigma t\tau\varphi(t,\tau)\,dtd\tau\right\}du+$$

$$+s\sigma\int_\sigma^\infty\left\{\frac{-\sigma-2v}{2\,s^2(\sigma+v)^2v^2}\int_0^s\int_0^v t\tau\,\varphi(t,\tau)\,dtd\tau\right\}dv+$$

$$+s\sigma\int_s^\infty\int_\sigma^\infty\frac{(s+2v)(s+2u)}{u^2v^2(s+u)^2(\sigma+v)^2}\left\{\int_0^u\int_0^v t\tau\varphi(t,\tau)\,dtd\tau\right\}dudv=$$

$$=\frac{1}{4}\,G(s,\sigma)+I_4'+I_4''+I_4'''.$$

Оценим интеграл I'_4. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти такое $N > 0$, что

$$| G(u, v) - A | < \varepsilon, \text{ когда } u > N,\ v > N. \tag{17}$$

Полагая $s > N$, $\sigma > N$, будем иметь

$$I'_4 = -\frac{s}{2}\int_s^{\infty} \frac{s+2u}{u(s+u)^2}[G(u, \sigma) - A]du - \frac{A}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= B - \frac{A}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

В силу неравенства (17) получим

$$|B| \leqslant \frac{s}{2}\int_s^{\infty} \frac{s+2u}{u(s+u)^2} | G(u, \sigma) - A | du < \frac{s\varepsilon}{2} \cdot \frac{\ln 2 + \frac{1}{2}}{s} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} B = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} I'_4 = -\frac{A}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

Аналогично получим

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} I''_4 = -\frac{A}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

Вычислим $\lim\limits_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} I'''_4$. Имеем

$$I'''_4 = s\sigma \int_s^{\infty}\int_{\rho}^{\infty} \frac{(s+2u)(\sigma+2v)}{uv(s+u)^2(\sigma+v)^2}[G(u, v) - A]\, dudv +$$

$$+ A\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)^2 = B' + A\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Пусть $s > N$, $\sigma > N$. Тогда, в силу неравенства (17), получим

$$| B' | < \varepsilon s\sigma \int_s^{\infty}\int_{\sigma}^{\infty} \frac{(s+2u)(\sigma+2v)}{uv(s+u)^2(\sigma+v)^2}\, dudv = \varepsilon\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} B' = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} I'''_4 = A\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} I_4 = \frac{1}{4}\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} G(s,\sigma)+\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} I'_4+\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} I''_4+\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}} I'''_4 = A\,(\ln 2)^2. \tag{18}$$

Теперь оценим интеграл I_3. Имеем

$$I_3 = s\sigma\int_0^s\int_\sigma^\infty \frac{v\varphi(u, v)}{v\,(s+v)\,(\sigma+v)}\,du dv.$$

Принимая во внимание соотношения (5) и (6) и применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$I_3 = -\frac{1}{4\sigma}\int_0^s\int_0^\sigma \tau\varphi(t, \tau)\,dt d\tau - s\sigma\int_0^s\left\{\frac{1}{(s+u)^2}\cdot\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^u\int_0^\sigma \tau\varphi(t, \tau)\,dt d\tau\right\}du+$$

$$+ s\sigma\int_\sigma^\infty\left\{\frac{1}{2s}\cdot\frac{\sigma+2v}{v^2(\sigma+v)^2}\int_0^s\int_0^v \tau\varphi(t, \tau)\,dt d\tau\right\}dv+$$

$$+ s\sigma\int_0^s\int_0^\infty\left\{\frac{\sigma+2v}{(s+u)^2(\sigma+v)^2v^2}\int_0^u\int_0^v \tau\varphi(t, \tau)\,dt d\tau\right\}du dv=$$

$$=-\frac{1}{4}G_2(s, \sigma)-\frac{s}{2}\int_0^s\frac{1}{(s+u)^2}G_2(u, \sigma)\,du+\frac{\sigma}{2}\int_\sigma^\infty\frac{\sigma+2v}{v\,(\sigma+v)^2}G_2(s, v)\,dv+$$

$$+ s\sigma\int_0^s\int_0^\infty\frac{\sigma+2v}{(s+u)^2(\sigma+v)^2v}G_2(u, v)\,du dv=$$

$$=-\frac{1}{4}G_2(s, \sigma)-I'_3+I''_3+I'''_3.$$

Оценим интеграл I'_3. Имеем

$$I'_3=\frac{s}{2}\int_0^s\frac{G_2(u, \sigma)}{(s+u)^2}\,du=\frac{s}{2}\int_0^s\frac{G_2(u, \sigma)-A_2}{(s+u)^2}\,du+\frac{A_2}{4}=I^*_3+\frac{A_2}{4}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N>0$, что при $u\geqslant N$, $v\geqslant N$ будем иметь

$$|\,G_2(u, v)-A_2\,|<\varepsilon. \tag{19}$$

Кроме того, в силу условия 7), существует такое $N_1\geqslant N$, что

$$|\,G_2(u, v)-A_2\,|<\frac{\varepsilon v^\alpha}{\lambda N},\quad\text{когда}\quad v\geqslant N_1,\ 0\leqslant u\leqslant A. \tag{20}$$

Пусть теперь $s \geqslant N_1$, $\sigma \geqslant N_1$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{s}{\sigma} \leqslant \lambda$. Интеграл I_3^* представим в следующем виде:

$$I_3^* = \frac{s}{2}\int_0^N \frac{G_2(u, \sigma) - A_2}{(s+u)^2}\, du + \frac{s}{2}\int_N^s \frac{G_2(u, \sigma) - A_2}{(s+u)^2}\, du.$$

Принимая во внимание неравенства (19) и (20), получим

$$\left|\frac{s}{2}\int_0^N \frac{G_2(u, \sigma) - A_2}{(s+u)^2}\, du\right| \leqslant \frac{s}{2}\int_0^N \frac{|G_2(u, \sigma) - A_2|}{(s+u)^2}\, du < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{s}{2}\int_N^\sigma \frac{G_2(u, \sigma) - A_2}{(s+u)^2}\, du\right| < \frac{s\varepsilon}{2}\int_N^s \frac{du}{(s+u)^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|I_3^*| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} I'_3 = \frac{A_2}{4}.$$

Далее, легко показать, что

$$\lim_{\substack{s \to +\infty \\ \sigma \to +\infty}} I''_3 = \frac{A_2}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{(s, \sigma)_\lambda \to \infty} I'''_3 = \frac{A_2}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right). \tag{21}$$

Имеем

$$I'''_3 = s\sigma \int_0^s \int_\sigma^\infty \frac{\sigma + 2v}{(s+u)^2 (\sigma + v)^2 v} [G_2(u; v) - A_2]\, du dv +$$

$$+ \frac{A_2}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = B'_2 + \frac{A_2}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right),$$

Оценим интеграл B'_2. Принимая во внимание неравенства (19) и (20), получим

$$|B'_2| \leqslant s\sigma \int_0^N \int_\sigma^\infty \frac{\sigma + 2v}{(s+u)^2 (\sigma+v)^2 v} \mid G_2(u, v) - A_2 \mid du dv +$$

$$+ s\sigma \int_N^s \int_\sigma^\infty \frac{\sigma + 2v}{(s+u)^2 (\sigma+v)^2 v} \mid G_2(u, v) - A_2 \mid du dv <$$

$$< \frac{s\sigma\varepsilon}{\lambda N}\int_0^N du\int_\sigma^\infty \frac{(\sigma+2v)\,v^\alpha}{(s+u)^2\,(\sigma+v)^2\,v}\,dv +$$

$$+\ \varepsilon s\sigma\int_N^\infty du\int_\sigma^\infty \frac{\sigma+2v}{(s+u)^2(\sigma+v)^2\,v}\,dv < \frac{\varepsilon}{\sigma^{1-\alpha}}K_\alpha + \frac{3}{2}\,\varepsilon,$$

где K_α—положительная константа, зависящая от α. Следовательно,

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to\infty} B'_2 = 0.$$

Поэтому справедливо равенство (21). Таким образом,

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_3 = -\frac{1}{4}\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} G_2(s,\sigma) - \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I'_3 + \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I''_3 +$$

$$+\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I'''_3 = A_2\ln 2. \tag{22}$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_2 = A_1\ln 2. \tag{23}$$

Следовательно, принимая во внимание равенства (14), (15), (16), (18), (22) и (23), получим

$$\lim_{\substack{s\to+\infty\\ \sigma\to+\infty}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{s\sigma\varphi(u,v)}{(s+v)(\sigma+v)}\,du dv = \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_1 + \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_2 + \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_3 + \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty} I_4 =$$

$$= \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty}\int_0^s\int_0^\sigma \varphi(u,v)\,du dv - A(\ln 2)^2 - A_1\ln 2 - A_2\ln 2 + A_1\ln 2 + A_2\ln 2 +$$

$$+\ A(\ln 2)^2 = \lim_{(s,\sigma)_\lambda\to+\infty}\int_0^s\int_0^\sigma \varphi(u,v)\,du dv.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy and J. E. Littlwood. On Tauberian theorems. Proceedings of the Lon- don Mathematical Society (2), vol. 30 (1930), 23—37.

Кафедра
математики для физиков

(Поступило в редакцию 15. II. 1967)

ე. ჭელიძე

სტილტიესის ორმაგი გარდაქმნის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ, $[0 \leqslant u < +\infty;\ 0 \leqslant v < +\infty)$ არეზე განსაზღვრული $\varphi(u, v)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ლებეგის აზრით ყოველ $[0 \leqslant u \leqslant s;\ 0 \leqslant v \leqslant \sigma]$ არეზე და ინტეგრალი

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi(u, v)}{(s+u)(\sigma+v)}\, dudv$$

კრებადია ნებისმიერი დადებითი s და σ-სათვის.

თუ შესრულებულია პირობები:

$$1) \quad \lim_{s, \sigma \to +\infty} G(s, \sigma) = A, \qquad \lim_{s, \sigma \to +\infty} G_1(s, \sigma) = A_1, \qquad \lim_{s, \sigma \to +\infty} G_2(z, \sigma) = A_2,$$

$$2) \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{G(s, \sigma)}{s^2} = 0, \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{G_1(s, \sigma)}{s^\alpha} = 0, \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{G_2(s, \sigma)}{s^\alpha} = 0$$

თანაბრად σ-ს მიმართ ყოველ $[0, a]$ სეგმენტზე,

$$3) \quad \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{G(s, \sigma)}{\sigma^2} = 0, \quad \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{G_1(s, \sigma)}{\sigma^\alpha} = 0, \quad \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{G_2(s, \sigma)}{\sigma^\alpha} = 0$$

თანაბრად s-ს მიმართ ყოველ $[0, b]$ სეგმენტზე, სადაც α ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია და

$$G(s, \sigma) = \frac{1}{s\sigma} \int_0^s \int_0^\sigma uv\, \varphi(u, v)\, dudv,$$

$$G_2)s, \sigma) = \frac{1}{s} \int_0^s \int_0^\sigma u\, \varphi(u, v)\, dudv,$$

$$G_2(s, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^s \int_0^\sigma v\, \varphi(u, v)\, dudv,$$

მაშინ პირობიდან

$$\lim_{s, \sigma \to +\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s\sigma\, \varphi(u, v)}{(s+u)(\sigma+v)}\, dudv = I$$

გამომდინარეობს ტოლობა

$$(\lambda) \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(u, v)\, dudv = I.$$

ეს თეორემა წარმოადგენს ჰარდი-ლიტლვუდის ერთ-ერთი თეორემის განზოგადებას.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

П. Г. КОГОНИЯ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ, II

Введем следующие определения и обозначения [1]:

$$M=\{\cdots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots\} \tag{0.1}$$

—бесконечная в обе стороны ограниченная последовательность натуральных чисел;

$$H(M)=N=\max_{-\infty<k<\infty} a_k; \tag{0.2}$$

$$Q_N=\{M: H(M)=N\}; \tag{0.3}$$

$$\mu_k(M)=[0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\cdots]+a_k+[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\cdots],\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots; \tag{0.4}$$

$$\mu(M)=\sup_{-\infty<k<\infty}\{\mu_k(M)\}; \tag{0.5}$$

$$\{\mu(M)\}_N=\{\mu(M): M\in Q_N\},\ N=1,\ 2,\cdots; \tag{0.6}$$

$$\{\mu(M)\}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\{\mu(M)\}_N \tag{0.7}$$

—спектр Маркова (см. [2], [3], [4], [5], [7]);

$Q_{2,0}$—множество всех таких M из Q_N, в которых не встречается изолированная двойка, т. е. не встречается тройка (1, 2, 1);

$$\{\mu(M)\}_{2,0}=\{\mu(M): M\in Q_{2,0}\}; \tag{0.8}$$

Последнее множество расположено [7] на сегменте $\left[\sqrt{8},\ \frac{4\sqrt{30}}{7}\right]$;

$$\{\mu(M)\}_{2,0}\subset\left[\sqrt{8},\ \frac{4\sqrt{30}}{7}\right]=[\sqrt{8},\ 3]\cup\left[3,\ \frac{4\sqrt{30}}{7}\right]. \tag{0.9}$$

Как известно из классических результатов А. А. Маркова, сегмент $[\sqrt{8},\ 3]$ содержит счетное множество точек спектра Маркова (Лагранжа), сходящееся к числу 3; что касается сегмента $\left[3,\ \frac{4\sqrt{30}}{7}\right]$, на нем расположено континуальное подмножество каждого из этих спектров [2].

Итак,

$$\{\mu(M)\}_{2,0}=\{\mu(M)\}'_{2,0}\cup\{\mu(M)\}''_{2,0}, \tag{0.10}$$

где

$$\{\mu(M)\}'_{2,0}\subset[\sqrt{8},\ 3],\quad \{\mu(M)\}''_{2,0}\subset\left[3,\ \frac{4\sqrt{30}}{7}\right], \tag{0.11}$$

причем $\{\mu(M)\}'_{2,0}$ — счетно, $\{\mu(M)\}''_{2,0}$ — континуально. Настоящая работа посвящена исследованию последних множеств.

1. Пусть

$$\theta_0=[0;\ 1,\ 1,\ 1,\dots]=[0;\ 1_\infty]=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{1}$$

тогда

$$2+\theta_0+\frac{1}{2+\theta_0}=[2;\ 1_\infty]+[0;\ 2,1_\infty]=3. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$y=f(x)=2+x+\frac{1}{2+x}; \tag{3}$$

так как

$$f'(x)=\frac{(2+x)^2-1}{(2+x)^2},\quad f'(-3)=f'(-1)=0, \tag{4}$$

функция $f(x)$ возрастает на полусегменте $[0,\ \infty)$, тем более на сегменте $[0,\ 1]$; в силу (2)

$$f(\theta_0)=2+\theta_0+\frac{1}{2+\theta_0}=3. \tag{1}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 3 \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant\theta_0, \\ &\text{и} \\ &3\leqslant f(x)\leqslant 3\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \theta_0\leqslant x\leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если

$$M_0=\{\cdots,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\dots\}=\{1_{-\infty},\ 2,\ 2,\ 1_\infty\}, \tag{6}$$

то, в силу (0,4), (0,5), (3) и (1), имеем

$$\mu(M_0)=f(\theta_0)=2+\theta_0+\frac{1}{2+\theta_0}=3. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию двух переменных

$$z=\Phi(x,\ y)=2+y+\frac{1}{2+x},\quad 0\leqslant x,\ y\leqslant 1; \tag{8}$$

в силу (3), (5) и (8), имеем

$$\Phi(x,\ x)=f(x)\begin{cases}>3 & \text{при}\quad x<\theta_0,\\ <3 & \text{при}\quad x>\theta_0.\end{cases} \tag{9}$$

Из равенства

$$\Phi(y,\ x)-\Phi(x,\ y)=x-y+\frac{x-y}{(2+x)(2+y)}$$

следует, что

$$\Phi(y,\ x)<\Phi(x,\ y)\ \text{при}\ x<y. \tag{10}$$

Из (1), (8) и (9) следует, что

$$\Phi(\theta_0,\ \theta_0)=f(\theta_0)=\mu(M_0)=3. \tag{11}$$

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x,\ y)=0,\ \text{т. е.}\ 2+y+\frac{1}{2+x}=3 \tag{12}$$

и его решение

$$y=1-\frac{1}{2+x}=\frac{1+x}{2+x}=\varphi(x). \tag{13}$$

Итак,

$$\Phi(x,\ \varphi(x))\equiv 3. \tag{12_1}$$

Из (8), (9), (10), (11) и (13) следует, что

$$\varphi(0)=\frac{1}{2},\ \varphi(\theta_0)=\theta_0,\ \varphi(1)=\frac{2}{3},\ \varphi'(x)>0,\ \varphi''(x)<0. \tag{13_1}$$

Таким образом, имеют место соотношения

$$\Phi(x,\ y)\begin{cases}<3 & \text{при}\quad y<\varphi(x),\\ =3 & \text{при}\quad y=\varphi(x),\\ >3 & \text{при}\quad y>\varphi(x).\end{cases} \tag{14}$$

2. Пусть

$$\theta_m=[0;\ (\underbrace{1,1,\cdots,1,1}_{m},\ 2,\ 2)_\infty]=[0;\ (1_m,\ 2,\ 2)_\infty], \tag{15}$$

(16)

$$M_m=\{\cdots,\ 1_m,\ 2,\ 2,\ 1_m,\ 2,\ 2,\ 1_m,\cdots\}=\{(1_m,\ 2,\ 2)_{-\infty}^{\infty}\}; \tag{16}$$

тогда, в силу (0.4), (0.5) и (3), имеем

$$\mu(M_m)=2+\theta_m+\frac{1}{2+\theta_m}=f(\theta_m). \tag{17}$$

Из (15) непосредственно следует, что

$$\theta_m\begin{cases}<\theta_0=[0;\ 1_\infty]=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & \text{при}\ m\text{—четном},\\[2ex] >\theta_0=[0;\ 1_\infty]=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & \text{при}\ m\text{—нечетном}.\end{cases} \tag{18}$$

Из (5), (17) и (18) имеем

$$\mu(M_m)\begin{cases}<3 & \text{при}\quad m\text{-четном},\\ >3 & \text{при}\quad m\text{-нечетном}.\end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим $\mu(M_m)$ только для четных $m=2n$ $(n \geqslant 1)$; тогда, в силу (17) и (19), получаем

$$\mu(M_{2n})=2+\theta_{2n}+\frac{1}{2+\theta_{2n}}<3 \quad (n=1,\ 2,\ 3\ldots). \tag{20}$$

Обозначим через $\dfrac{U_n}{V_n}$ подходящую дробь n-го порядка числа θ_0, т. е.

$$\frac{U_n}{V_n}=[0;\ \underbrace{1,\ldots,1}_{n}]=[0;\ 1_n] \quad (n=1,\ 2,\ldots); \tag{21}$$

тогда, как известно [1],

$$\left.\begin{aligned} &U_1=1,\ U_2=1,\ U_n=U_{n-1}+U_{n-2},\\ &V_1=1,\ V_2=2,\ V_n=V_{n-1}+V_{n-2} \end{aligned}\right\} \quad (n=3,\ 4,\ldots). \tag{22}$$

В силу (15) и (22), имеем

$$\theta_m=[0;\ 1_m,\ 2,\ 2,\ 1_m,\ 2,\ 2,\ 1_m,\ldots]=\left[0;\ 1_m,\ 2+\frac{1}{2+\theta_m}\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{2\theta_m+5}{\theta_m+2}\,U_m+U_{m-1}}{\dfrac{2\theta_m+5}{\theta_m+2}\,V_m+V_{m-1}},$$

т. е.

$$\theta_m=\frac{(2\theta_m+5)\,V_{m-1}+(\theta_m+2)\,V_{m-2}}{(2\theta_m+5)\,V_m+(\theta_m+2)\,V_{m-1}}. \tag{23}$$

Решая это квадратное уравнение относительно θ_m, имеем

$$\theta_m=\frac{\sqrt{(5V_m-V_{m-2})^2+4\,(2V_m+V_{m-1})(5V_m+2V_{m-2})}+V_{m-2}-5V_m}{2\,(2V_m+V_{m-1})}. \tag{24}$$

Если эти значения θ_m подставить в правую часть равенства (17) и m заставить пробегать множество всех четных натуральных чисел, мы получим все значения $\mu(M_{2n})$, которые, в силу (20), меньше 3.

Последовательность $\{V_n\}$, определенная соотношениями (22), представляет собой ряд Фибоначчи; итак, числа θ_m и, следовательно, $\mu(M_m)$ выражаются через члены ряда Фибоначчи.

3. Рассмотрим сейчас двояко бесконечные последовательности

$$M_{m,n}=\{\ldots,\ 1_m,\ 2,\ 2,\ 1_m,\ 2,\ 2,\ 1_n,\ 2,\ 2,\ 1_n,\ldots\}=$$
$$=\{(1_m,\ 2,\ 2)_{-\infty},\ (1_n,\ 2,\ 2)_{\infty}\}. \tag{25}$$

Из (16) и (25) непосредственно следует, что $M_{m,m}=M_m$; из (0.4) и (0.5) вытекает, что

$$\mu(M_{m,n})=\max\left(2+\theta_m+\frac{1}{2+\theta_n},\ 2+\theta_n+\frac{1}{2+\theta_m}\right). \tag{26}$$

Но, в силу (10), из последних выражений первое больше или меньше второго в зависимости от того, θ_m больше или меньше θ_n; это же, в свою очередь, зависит от четности чисел m и n.

Поэтому рассмотрим все возможные три случая:

1) одно из чисел m и n четное, другое—нечетное;

2) оба—четные; 3) оба—нечетные.

1) Пусть m—нечетное, n—четное; тогда, если положить $m=2s+1$, $n=2t$ $(s,\ t=1,\ 2,\ 3,\dots)$, то $\theta_{2s+1}>\theta_0$, $\theta_{2t}<\theta_0$, $\theta_{2s+1}>\theta_{2t}$; откуда, в силу отмеченного,

$$\mu(M_{2s+1,2t})=2+\theta_{2s+1}+\frac{1}{2+\theta_{2t}}. \tag{27}$$

Покажем, что (при любых s и t)

$$\mu(M_{2s+1,2t})>3. \tag{28}$$

С этой целью воспользуемся неравенством (14), в силу которого достаточно показать, что

$$\theta_{2s+1}>1-\frac{1}{2+\theta_{2t}}=\frac{1+\theta_{2t}}{2+\theta_{2t}}. \tag{29}$$

Последнее неравенство непосредственно следует из следующих соотношений:

$$\theta_{2t}<\theta_0,\ 1-\frac{1}{2+\theta_{2t}}<1-\frac{1}{2+\theta_0}=\theta_0<\theta_{2s+1};$$

этим и доказано неравенство (27).

2) Пусть оба числа m и n—четные; тогда, если $m=2s$, $n=2t$ и $s>t$, то $\theta_{2s}>\theta_{2t}$; отсюда, в силу (10), имеем

$$\mu(M_{2s,2t})=2+\theta_{2s}+\frac{1}{2+\theta_{2t}}. \tag{30}$$

Покажем, что и в этом случае

$$\mu(M_{2s,2t})>3. \tag{31}$$

Для этого, как и выше, достаточно показать, что

$$\theta_{2s}>1-\frac{1}{2+\theta_{2t}}\quad(s>t). \tag{32}$$

Так как θ_{2t} возрастает вместе с t, и функция $1-\dfrac{1}{2+x}$ тоже возрастающая функция, достаточно показать справедливость неравенства (32) для наибольшего значения t, меньшего s, т. е. для $t=s-1$. Итак, вопрос сводится к доказательству следующего неравенства:

$$\theta_{2s}>1-\frac{1}{2+\theta_{2s-2}}=\frac{1+\theta_{2s-2}}{2+\theta_{2s-2}}. \tag{33}$$

По определению θ_m имеем

$$\theta_{2s}=[0;\ 1_{2s},\ 2,\ 2,\ 1_{2s},\ 2,\ 2,\ 1_{2s},\ldots]=[0;\ 1,\ 1,\ 1_{2s-2},\ 2,\ 2,\ 1_{2s},\ldots]=$$

$$=[0;\ 1,\ 1+\theta'_{2s-2}]=1-\frac{1}{2+\theta'_{2s-2}}, \tag{34}$$

где

$$\theta_{2s}=[0;\ 1_{2s-2},\ 2,\ 2,\ 1_{2s-2},\ 2,\ 2,\ 1_{2s-2},\ldots],$$
$$\theta'_{2s}=[0;\ 1_{2s-2},\ 2,\ 2,\ 1_{2s},\ 2,\ 2,\ 1_{2s},\ldots].$$

Из последних равенств непосредственно следует, что $\theta_{2s-2}<\theta'_{2s-2}$. Из этого неравенства и (34) вытекает неравенство (33), чем и доказана справедливость неравенства (31).

3) Пусть, наконец, оба числа m и n—нечетные; тогда меньшему из них соответствует большее θ, т. е. если $m=2s+1$, $n=2t+1$ и $s<t$, то $\theta_{2s+1}>\theta_{2t+1}$; откуда, в силу (10), имеем

$$\mu(M_{2s+1,2t+1})=\theta_{2s+1}+2+\frac{1}{\theta_{2t+1}+2}. \tag{35}$$

Покажем, что и в этом случае

$$\mu(M_{2s+1,2t+1})>3, \tag{36}$$

или, что то же самое,

$$\theta_{2s+1}>1-\frac{1}{2+\theta_{2t+1}}\ (s<t). \tag{36$_1$}$$

Так как θ_{2t+1} убывает при возрастании t, а функция $1-\dfrac{1}{2+x}$ возрастающая, достаточно показать справедливость неравенства (36$_1$) для наименьшего значения $t>s$, т. е. для $t=s+1$. Иначе говоря, достаточно доказать справедливость неравенства

$$\theta_{2s+1}>1-\frac{1}{2+\theta_{2s+3}}=\frac{\theta_{2s+3}+1}{\theta_{2s+3}+2}. \tag{36$_2$}$$

Из (13) и (13$_1$) следует, что функция $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1+x}{2+x}$ возрастает в интервале $(0,1)$ от $\dfrac{1}{2}$ до $\dfrac{2}{3}$, причем $\varphi(\theta_0)=\theta_0$. Отсюда следует ($\varphi''(x)<0$), что

$$\varphi(x)=1-\frac{1}{2+x}\begin{cases}>x, & \text{если}\quad x<\theta_0,\\ <x, & \text{если}\quad x>\theta_0.\end{cases} \tag{37}$$

Вместе с тем θ_{2s+1} убывает при возрастании s и

$$\theta_{2s+1}<\theta_0,\quad \theta_{2s+3}<\theta_{2s+1},\quad \theta_{2s+1}>\theta_0.$$

Из (37) и последних неравенств следует, что

$$\theta_{2s+1}>1-\frac{1}{2+\theta_{2s+1}}>1-\frac{1}{2+\theta_{2s+3}},$$

чем и доказано неравенство (36_2) и, следовательно, (36).

Таким образом, доказана

Теорема. Если

$$M_{m,n}=\{(1_m,\ 2,\ 2)_{-\infty},\ (1_n,\ 2,\ 2)_{\infty}\},$$

то

$$\mu(M_{m,n})<3$$

тогда и только тогда, когда $m=n$—четное число. Итак,

$$\mu(M_{m,n})\begin{cases}\subset\{\mu(M)\}'_{2,0}, & \text{если } m=n\text{—четное,}\\ \subset\{\mu(M)\}''_{2,0}, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Как было указано выше, все числа

$$\mu(M_{2n,2n})=2+\theta_{2n}+\frac{1}{2+\theta_{2n}}<3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

получаются с помощью формулы (1.24), где $V_m=V_{2n}$—знаменатели подходящих дробей числа $\theta_0=[0;\ 1_\infty]=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. V_m суть члены ряда Фибоначчи. Легко доказать, что числами $\mu(M_{2n,2n})$ исчерпывается все подмножество спектра Маркова (Лагранжа), расположенное слева от числа 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. Москва, 1949.
2. П. Г. Когония. О связи между числами Маркова и марковским спектром. Труды ТГУ, т. 76 (1959), 162—171.
3. П. Г. Когония. О связи между спектрами Лагранжа и Маркова, II. Труды ТГУ, т. 102 (1964), 96—103.
4. П. Г. Когония. О связи между спектрами Лагранжа и Маркова, III. Труды ТГУ, т. 102 (1964), 105—113.
5. П. Г. Когония. О связи между спектрами Лагранжа и Маркова, IV. Труды Тбилисского математического института, т. XXIX (1963), 15—35.
6. П. Г. Когония. О множестве обобщенных чисел Маркова, II. Труды ТГУ, т. 84 (1961), 143—149.
7. П. Г. Когония. Некоторые вопросы рациональной аппроксимации. Труды ТГУ т. 117 (1966), 45—62.

Кафедра
общей математики № 2

(Поступило в редакцию 30. III. 1967)

პ. კოლონია

რაციონალური აპროქსიმაციის ზოგიერთი საკითხი, II

რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია მარკოვის სპექტრის ორი სპეციალური ქვესიმრავლის სტრუქტურა.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Г. А. ЛОМАДЗЕ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ШЕСТЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ, II

Настоящая работа является непосредственным продолжением предыдущей одноименной работы [1] и в ней сохраняются все прежние обозначения. В §§ 6—9 работы [1] просуммирован сингулярный ряд, соответствующий формам вида

$$f = a_1(x_1^2 + x_2^2) + a_2(x_3^2 + x_4^2) + a_3(x_5^2 + x_6^2)$$

и получены точные формулы для числа представлений такими формами при $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 3, 5, 6$ и $a_1 = 1$; $a_2 = a_3 = 3, 5, 6$.

В §§ 10—12 настоящей работы получены точные формулы для числа представлений формами упомянутого выше вида при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6,8$; $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 8, 9$; $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 8, 9$; $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ и $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$.

Как в настоящей работе, так и в работе [1], все полученные формулы для числа представлений содержат так называемые дополнительные члены $\nu(n)$, являющиеся коэффициентами при Q^n в разложениях некоторых произведений тэта-функций с характеристиками по степеням Q. В §§ 14—17 выявляется арифметический смысл этих коэффициентов $\nu(n)$.

§ 10. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формами

$$x_1^2 + x_2^2 + 2(x_3^2 + x_4^2) + 6(x_5^2 + x_6^2) \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + 3(x_3^2 + x_4^2) + 6(x_5^2 + x_6^2).$$

Лемма 26. Функции

$$\psi(\tau;\ 1,\ 2,\ 6) = \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 12) - \theta(\tau;\ 1,\ 2,\ 6) -$$

$$-\frac{5}{7}X_1(\tau) - \frac{4}{7}X_2(\tau) - \frac{3}{7}X_4(\tau) \tag{10.1}$$

и

$$\psi(\tau;\ 1,\ 3,\ 6) = \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 12) - \theta(\tau;\ 1,\ 3,\ 6) -$$

$$-\frac{5}{7}X_1(\tau) - \frac{1}{7}X_2(\tau) + \frac{1}{7}X_3(\tau) - \frac{3}{7}X_4(\tau), \tag{10.2}$$

где $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$, $X_3(\tau)$ и $X_4(\tau)$ определены в § 9 ([1], стр. 37), являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе $\Gamma_0(24)$, и делителя 24.

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 25 ([1], стр. 37).

Теорема 7.

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 12)=\theta(\tau;\ 1,\ 2,\ 6)+$$

$$+\frac{5}{7}X_1(\tau)+\frac{4}{7}X_2(\tau)+\frac{3}{7}X_4(\tau). \tag{10.3}$$

Доказательство. Положив в леммах 20, 21 и 22 ([1], стр. 24, 25 и 27)

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6;\ b_1=b_2=1,\ b_3=3;\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=\gamma_3=1,\ \gamma=2,$$

т. е.

$$a=6,\ \Delta=144,\ n=2^\alpha m=2^\alpha 3^\beta u,\ (u,\ 6)=1,\ v=3^\beta,$$

получим

$$\rho(n;\ 1,\ 2,\ 6)=\frac{2^{2\alpha}\cdot 3^{2\beta}\cdot 9}{7}\chi_2\,\chi_3\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2,$$

где

$$\chi_2=1\quad\text{при}\quad\alpha=0,$$

$$=2^{-2\alpha}\left(2^{2\alpha}+(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\quad\text{при}\quad\alpha>0;$$

$$\chi_3=\frac{2}{3^{2\beta}\cdot 45}\,(27\cdot 3^{2\beta}-(-1)^\beta\cdot 7).$$

Таким образом,

$$\rho(n;\ 1,\ 2,\ 6)=\frac{2}{35}(27\cdot 9^\beta-(-1)^\beta\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2\quad\text{при}\quad\alpha=0,$$

$$=\frac{2}{35}\left(4^\alpha+(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(27\cdot 9^\beta-(-1)^\beta\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \tag{10.4}$$

$$\text{при}\quad\alpha>0.$$

Из (1.5) ([1], стр. 8) следует

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\,\vartheta_{00}^2(\tau,\ 0,\ 12)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{h^2}\right)\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{2h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{6h^2}\right)^2=$$

$$=1+4Q+8Q^2+16Q^3+24Q^4+24Q^5+36Q^6+48Q^7+56Q^8+$$

$$+116Q^9+144Q^{10}+144Q^{11}+228Q^{12}+\cdots. \tag{10.5}$$

Разложения функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$ и $X_4(\tau)$ по степеням Q даны в формулах (9.7), (9.8) и (9.10) ([1], стр. 38—39).

Вычислив значения $\rho(n;\ 1,\ 2,\ 6)$ для всех $n\leqslant 12$ по формулам (10.4), получим

$$\theta(\tau;\ 1,\ 2,\ 6)=1+\frac{8}{7}Q+\frac{40}{7}Q^2+\frac{100}{7}Q^3+\frac{136}{7}Q^4+\frac{208}{7}Q^5+$$

$$+\frac{300}{7}Q^6+\frac{384}{7}Q^7+\frac{520}{7}Q^8+\frac{872}{7}Q^9+\frac{1040}{7}Q^{10}+$$

$$+\frac{960}{7}Q^{11}+\frac{1500}{6}Q^{12}+\ldots. \tag{10.6}$$

Приняв во внимание (10.1), (10.5), (10.6), (9.7), (9.8) и (9.10), нетрудно проверить, что все коэффициенты при $Q^n\ (n\leqslant 12)$ в разложении $\psi(\tau;\ 1,\ 2,\ 6)$ по степеням Q равны нулю.

Таким образом, согласно леммам 26 и 2 ([1], стр. 10), функция $\psi(\tau;\ 1,\ 2,\ 6)$ тождественно равна нулю. Итак, тождество (10.3) доказано.

Теорема 7 а. Пусть $n=2^\alpha 3^\beta u,\ (u,\ 6)=1.$ Тогда

$$r(n;1,2,6)=\frac{2}{35}(27\cdot 9^\beta-(-1)^\beta\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{5}{7}\nu_1(n)$$

при $n\equiv 1 \pmod 4$,

$$=\frac{2}{35}(27\cdot 9^\beta-(-1)^\beta\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{3}{7}\nu_4(n)$$

при $n\equiv 3 \pmod 4$,

$$=\frac{2}{35}\left(4^\alpha+(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(27\cdot 9^\beta-(-1)^\beta\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+$$

$$+\frac{4}{7}\nu_2(n) \quad \text{при } n\equiv 0 \pmod 2,$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ и $\nu_4(n)$, соответственно, обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$ и $X_4(\tau)$ по степеням Q.

Доказательство. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (10.3) и принимая во внимание (4.7), (4.11), (9.13)—(9.15) ([1], стр. 13 и 40) и (10.4), получим утверждаемое.

Теорема 8.

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 6)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 12)=\theta(\tau;\ 1,\ 3,\ 6)+$$

$$+\frac{5}{7}X_1(\tau)+\frac{1}{7}X_2(\tau)-\frac{1}{7}X_3(\tau)+\frac{3}{7}X_4(\tau). \tag{10.7}$$

Доказательство. Положив в леммах 20, 21 и 22

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=6;\ b_1=1,\ b_2=b_3=3;\ \gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3=1,\ \gamma=1,$$

т. е.

$$a=6,\ \Delta=324,\ n=2^\alpha m=2^\alpha 3^\beta u,\quad (u,\ 6)=1,\ v=3^\beta,$$

так же, как и при доказательстве теоремы 7, получим

$$\rho(n;1,3,6)=\frac{4}{35}(3\cdot 9^{\beta}+(-1)^{\beta}\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2,\quad \text{при}\quad \alpha=0,$$

$$=\frac{2}{35}\left(2^{2\alpha+1}-(-1)^{\beta}\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(3\cdot 9^{\beta}+(-1)^{\beta}\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при}\quad \alpha>0. \tag{10.8}$$

Из (1.5) следует

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;0,6)\,\vartheta_{00}^2(\tau;0,12)=$$

$$=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{3h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{6h^2}\right)^2=1+4Q+4Q^2+4Q^3+20Q^4+$$

$$+24Q^5+8Q^6+48Q^7+68Q^8+20Q^9+104Q^{10}+144Q^{11}+40Q^{12}+\ldots. \tag{10.9}$$

Вычислив значения $\rho(n;1,3,6)$ для всех $n\leqslant 12$ по формулам (10.8), получим

$$\theta(\tau;1,3,6)=1+\frac{8}{7}Q+4Q^2+\frac{16}{7}Q^3+\frac{124}{7}Q^4+\frac{208}{7}Q^5+\frac{72}{7}Q^6+$$

$$+\frac{384}{7}Q^7+\frac{508}{7}Q^8+\frac{200}{7}Q^9+104Q^{10}+$$

$$+\frac{960}{7}Q^{11}+\frac{264}{7}Q^{12}+\ldots. \tag{10.10}$$

Разложения функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$, $X_3(\tau)$ и $X_4(\tau)$ по степеням Q даны в формулах (9.7)—(9,10) ([1], стр. 38—39).

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 7, на основании (10.2), (10.9), (10.10) и (9.7)—(9.10), убеждаемся, что функция $\psi(\tau;1,3,6)$ тождественно равна нулю. Итак, тождество (10.7) доказано.

Из тождества (10.7) следует

Теорема 8 а. Пусть $n=2^{\alpha}3^{\beta}u$, $(u,6)=1$. Тогда

$$r(n;1,3,6)=\frac{4}{35}(3\cdot 9^{\beta}+(-1)^{\beta}\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{5}{7}\nu_1(n)\quad \text{при}\quad n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{4}{35}(3\cdot 9^{\beta}+(-1)^{\beta}\cdot 7)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{3}{7}\nu_4(n)\quad \text{при}\quad n\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{2}{35}\left(2^{2\alpha+1}-(-1)^{\beta}\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(3\cdot 9^{\beta}+(-1)^{\beta}\cdot 7)\times$$

$$\times\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{1}{7}\nu_2(n)-\frac{1}{7}\nu_3(n)\quad \text{при}\quad n\equiv 0 \pmod 2,$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$, $\nu_3(n)$ и $\nu_4(n)$, соответственно, обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$, $X_3(\tau)$ и $X_4(\tau)$ по степеням Q.

§ 11. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формами

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+8(x_5^2+x_6^2),\quad x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+x_4^2)+8(x_5^2+x_6^2),$$

$$x_1^2+x_2^2+4(x_3^2+x_4^2)+8(x_5^2+x_6^2)\ \text{ и }\ x_1^2+x_2^2+8(x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2).$$

Лемма 27. Функции

$$\psi(\tau;\ 1,\ 1,\ 8)=\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 16)-\theta(\tau;\ 1,\ 1,\ 8)-$$
$$-X_1(\tau)-2X_2(\tau)-3X_3(\tau)-2X_4(\tau), \tag{11.1}$$

$$\psi(\tau;\ 1,\ 2,8)=\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 16)-\theta(\tau;\ 1,\ 2,\ 8)-$$
$$-\frac{1}{2}X_1(\tau)-X_2(\tau)-X_3(\tau)-X_4(\tau), \tag{11.2}$$

$$\psi(\tau;\ 1,\ 4,\ 8)=\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,16)-\theta(\tau;\ 1,\ 4,\ 8)-$$
$$-\frac{1}{2}X_1(\tau)-X_2(\tau)-\frac{1}{2}X_3(\tau) \tag{11.3}$$

и

$$\psi(\tau;\ 1,\ 8,\ 8)=\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 16)-\theta(\tau;\ 1,\ 8,\ 8)-$$
$$-\frac{3}{4}X_1(\tau)-X_2(\tau)-\frac{1}{2}X_3(\tau), \tag{11.4}$$

где

$$X_1(\tau)=\vartheta_{00}(\tau;0,\ 8))\ \vartheta_{01}^4(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{80}(\tau;\ 0,\ 8), \tag{11.5}$$

$$X_2(\tau)=\vartheta_{00}^3(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{01}^2(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{80}(\tau;\ 0,\ 8), \tag{11.6}$$

$$X_3(\tau)=\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{01}^2(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{80}^2(\tau;\ 0,\ 8), \tag{11.7}$$

$$X_4(\tau)=\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 8)\ \vartheta_{01}^2(\tau,\ 0,\ 8)\ \vartheta_{80}^3(\tau;\ 0,\ 8), \tag{11.8}$$

являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе $\Gamma_0(32)$, и делителя 32.

Доказательство. Согласно примечанию к лемме 18 и лемме 14 ([1], стр. 21 и 18), первые два слагаемых в правых частях (11.1)—(11.4) являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе Γ_0 (32), и делителя 32.

Нетрудно проверить, что остальные слагаемые в правых частях (11.1)—(11.4) удовлетворяют условиям (5.7) леммы 18.

Покажем, что для всех α и δ, удовлетворяющих условию $\alpha\delta\equiv 1 \pmod{32}$, имеет место равенство (5.8) леммы 18. Действительно, из $\alpha\delta\equiv 1 \pmod{32}$ следует $\alpha\delta\equiv 1 \pmod 2$, т. е.

$$\alpha\equiv 1 \pmod 2. \tag{11.9}$$

А из (3.9), (3.11) ([1], стр. 11) и (11.9) следует

$$\vartheta_{4\alpha,0}(\tau;\ 0,\ 4)=\vartheta_{40}(\tau;\ 2(\alpha-1),\ 4)=\vartheta_{40}(\tau;\ 0,\ 4),$$

$$\vartheta_{8\alpha,0}(\tau;\ 0,\ 8)=\vartheta_{80}(\tau;\ 4(\alpha-1), 8)=\vartheta_{80}(\tau;\ 0,\ 8).$$

Таким образом, согласно лемме 18, третие, четвертые, пятые и шестые слагаемые в правых частях (11.1)—(11.4) также являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе $\Gamma_0(32)$, и делителя 32.

Теорема 9.

$$\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0, 16)=\theta(\tau;\ 1,\ 1,\ 8)+$$
$$+X_1(\tau)+2X_2(\tau)+3X_3(\tau)+2X_4(\tau). \tag{11.10}$$

Доказательство. Положив в леммах 20, 21 и 22

$$a_1=a_2=1,\ a_3=8;\ b_1=b_2=b_3=1;\ \gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3=3,\ \gamma=3,$$

т. е.

$$a=8,\ \Delta=64,\ n=2^\alpha m,\ m=u,\ v=1,$$

получим

$$\rho(n;\ 1,\ 1,\ 8)=2\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad \alpha=0,$$
$$=2^{\alpha+1}\cdot 3\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad \alpha=1,\ 2, \tag{11.11}$$
$$=4\left(2^{2\alpha-3}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad \alpha>2.$$

Из (1.5) следует

$$\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0, 16)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{h^2}\right)^4\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{8h^2}\right)^2=$$
$$=1+8Q+24Q^2+32Q^3+24Q^4+48Q^5+96Q^6+64Q^7+$$
$$+28Q^8+136Q^9+240Q^{10}+224Q^{11}+192Q^{12}+\ldots, \tag{11.12}$$

$$X_1(\tau)=\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{4h^2}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h\,Q^{4h^2}\right)^4\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{(2h+1)^2}= \tag{11.13}$$
$$=2Q-12Q^5+18Q^9+20Q^{13}+\ldots, \tag{11.14}$$

$$X_2(\tau)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{4h^2}\right)^3\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{4h^2}\right)^2\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{(2h+1)^2}= \tag{11.15}$$

$$=2\,Q+4\,Q^5-14\,Q^9-28\,Q^{13}+\cdots, \tag{11.16}$$

$$X_3(\tau)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{4h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{4h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{(2h+1)^2}\right)^2= \tag{11.17}$$

$$=4\,Q^2-24\,Q^{10}+36\,Q^{18}+\cdots, \tag{11.18}$$

$$X_4(\tau)=\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{4h^2}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{4h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{(2h+1)^2}\right)^3= \tag{11.19}$$

$$=8\,Q^3-16\,Q^7-8\,Q^{11}+16\,Q^{15}+\cdots. \tag{11.20}$$

Вычислив значения $\rho(n;\ 1,\ 1,\ 8)$ для всех $n\leqslant 12$ по формулам (11.11), получим

$$\theta(\tau;\ 1,\ 1,\ 8)=1+2\,Q+12\,Q^2+16\,Q^3+24\,Q^4+52\,Q^5+96\,Q^6+$$
$$+96\,Q^7+28\,Q^8+146\,Q^9+312\,Q^{10}+240\,Q^{11}+192\,Q^{12}+\cdots. \tag{11.21}$$

Приняв во внимание (11.1), (11.12), (11.21), (11.14), (11.16), (11.18) и (11.20), нетрудно проверить, что все коэффициенты при $Q^n\ (n\leqslant 12)$ в разложении $\psi(\tau;\ 1,\ 1,\ 8)$ по степеням Q равны нулю.

Таким образом, согласно леммам 27 и 2, функция $\psi(\tau;\ 1,\ 1,\ 8)$ тождественно равна нулю. Итак, тождество (11.10) доказано.

Теорема 9 а. Пусть $n=2^{\alpha}u,\ (u;\ 2)=1$. Тогда

$$r(n;\ 1,\ 1,\ 8)=2\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\nu_1(n)+2\,\nu_2(n) \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=2\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+2\,\nu_4(n) \quad \text{при } n\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=12\sum_{d_1d_3=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+3\,\nu_3(n) \quad \text{при } n\equiv 2 \pmod 8,$$

$$=12\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при } n\equiv 6 \pmod 8,$$

$$=24\sum_{d_7d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при } n\equiv 4 \pmod 8,$$

$$=4\left(2^{2\alpha-3}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при } n\equiv 0 \pmod 8,$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$, $\nu_3(n)$ и $\nu_4(n)$, соответственно, обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$, $X_3(\tau)$ и $X_4(\tau)$ по степеням Q.

Доказательство. Из (11.13) следует

$$X_1(\tau)=Q\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{4h^2}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h\ Q^{4h^2}\right)^4\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{4h(h+1)}.$$

Показатели степеней в этом разложении имеют вид

$n=4j+1$, т. е.

$$\nu_1(n)=0 \quad \text{при} \quad n\not\equiv 1 \pmod 4). \tag{11.22}$$

Из (11.15) аналогично следует

$$\nu_2(n)=0 \quad \text{при} \quad n\not\equiv 1 \pmod 4). \tag{11.23}$$

Из (11.17) следует

$$X_3(\tau)=Q^2\left(\sum_{\substack{h_1h_2=-\infty\\ h_1\equiv h_2 \pmod 2}}^{\infty}(-1)^{h_2}\,Q^{4(h_1^2+h_2^2)}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{4h(h+1)}\right)^2.$$

Показатели степеней в этом разложении имеют вид $n=8j+2$, т. е.

$$\nu_3(n)=0 \quad \text{при} \quad n\not\equiv 2 \pmod 8). \tag{11.24}$$

Из (11.19) следует

$$X_4(\tau)=Q^3\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{4h^2}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{4h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{4h(h+1)}\right)^3.$$

Показатели степеней в этом разложении имеют вид $n=4j+3$, т. е.

$$\nu_4(n)=0 \quad \text{при} \quad n\not\equiv 3 \pmod 4). \tag{11.25}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (11.10) и принимая во внимание (4.7), (4.11), (11.11) и (11.22)—(11.25), получаем утверждаемое.

Теорема 10.

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\ \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 16)=\theta(\tau;\ 1,\ 2,\ 8)+$$
$$+\frac{1}{2}X_1(\tau)+X_2(\tau)+X_3(\tau)+X_4(\tau). \tag{11.26}$$

Доказательство. Положив в леммах 20, 21 и 22

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=8;\ b_1=b_2=b_3=1;\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=1,\ \gamma_3=3,\ \gamma=4,$

т. е.

$$a=8,\ \Delta=256,\ n=2^\alpha m,\ m=u,\ v=1,$$

получим

$$\rho(n;\ 1,\ 2,\ 8)=2^{2\alpha}\sum_{d_2d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ 1,$$

$$=24\sum\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad \alpha=2, \tag{11.27}$$

$$=4\left(2^{2\alpha-3}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad \alpha>2.$$

Вычислив значения $\rho(n;\ 1,\ 2,\ 8)$ по этим формулам для всех $n\leqslant 12$, получим

$$\theta(\tau;\ 1,\ 2,\ 8)=1+Q+4Q^2+8Q^3+24Q^4+26Q^5+32Q^6+$$
$$+48Q^7+28Q^8+73Q^9+104Q^{10}+120Q^{11}+192Q^{12}+\ldots. \tag{11.28}$$

Согласно (1.5), получаем

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 16)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{2h^2}\right)^2\times$$

$$\times\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{8h^2}\right)^2=1+4Q+8Q^2+16Q^3+24Q^4+24Q^5+32Q^6+$$
$$+32Q^7+28Q^8+68Q^9+80Q^{10}+112Q^{11}+192Q^{12}+\ldots. \tag{11.29}$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 9, при помощи (11.2), (11.29), (11.28), (11.14), (11.16), (11.18) и (11.20) убеждаемся в справедливости тождества (11.26).

Теорема 10 а. Пусть $n=2^\alpha u,\ (u,\ 2)=1$. Тогда

$$r(n;\ 1,\ 2,\ 8)=\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{1}{2}\nu_1(n)+\nu_2(n) \quad \text{при} \quad n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\nu_4(n) \quad \text{при} \quad n\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=4\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\nu_3(n) \quad \text{при} \quad n\equiv 2 \pmod 8,$$

$$=4\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad n\equiv 6 \pmod 8,$$

$$=24\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad n\equiv 4 \pmod 8,$$

$$=4\left(2^{2\alpha-3}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 \quad \text{при} \quad n\equiv 0 \pmod 8,$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$, $\nu_3(n)$ и $\nu_4(n)$ определены в теореме 9 а.

Доказательство. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (11.26) и принимая во внимание (4.7), (4.11), (11.27) и (11.22)—(11.25), получаем утверждаемое.

Теорема 11.

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 8)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 16)=\theta(\tau;\ 1,\ 4,\ 8)+ \\ +\frac{1}{2}X_1(\tau)+X_2(\tau)+\frac{1}{2}X_3(\tau). \tag{11.30}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 9 и 10, получаем

$$\begin{aligned} \rho(n;\ 1,\ 4,\ 8)&=\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 && \text{при}\quad \alpha=0,\ u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ &=0 && \text{при}\quad \alpha=0,\ u\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ &=2^{2\alpha-1}\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 && \text{при}\quad \alpha=1,\ 2,\\ &=4\left(2^{2\alpha-3}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 && \text{при}\quad \alpha>2; \end{aligned} \tag{11.31}$$

$$\theta(\tau;\ 1,\ 4,\ 8)=1+Q+2\,Q^2+8\,Q^4+26\,Q^5+16\,Q^6+ \\ +28\,Q^8+73\,Q^9+52\,Q^{10}+64\,Q^{12}+\cdots; \tag{11.32}$$

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 8)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 16)=1+4\,Q+4\,Q^2+8\,Q^4+ \\ +24\,Q^5+16\,Q^6+28\,Q^8+68\,Q^9+40\,Q^{10}+64\,Q^{12}+\cdots\ . \tag{11.33}$$

При помощи (11.3), (11.33), (11.32), (11.14), (11.16) и (11.18) убеждаемся в справедливости тождества (11.30).

Из тождества (11.30) следует

Теорема 11 а. Пусть $n=2^\alpha u$, $(u,\ 2)=1$. Тогда

$$\begin{aligned} r(n;\ 1,\ 4,\ 8)&=\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{1}{2}\nu_1(n)+\nu_2(n) && \text{при}\quad n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ &=0 && \text{при}\quad n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ &=2\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{1}{2}\nu_3(n) && \text{при}\quad n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 8),\\ &=2\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 && \text{при}\quad n\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 8),\\ &=8\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 && \text{при}\quad n\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8), \end{aligned}$$

$$= 4\left(2^{2\alpha-3} - \left(\frac{-1}{u}\right)\right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 \quad \text{при} \quad n \equiv 0 \pmod 8,$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ и $\nu_3(n)$ определены в теореме 9 а.

Теорема 12.

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\, \vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 16) = \theta(\tau;\ 1,\ 8,\ 8) +$$
$$+ \frac{3}{4} X_1(\tau) + X_2(\tau) + \frac{1}{2} X_3(\tau). \tag{11.34}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 9 и 10, получаем

$$\begin{aligned} \rho(n;\ 1,\ 8,\ 8) &= 2^{2\alpha-1} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 \quad &&\text{при} \quad \alpha = 0,\ 1,\ u \equiv 1 \pmod 4, \\ &= 0 &&\text{при} \quad \alpha = 0,\ 1,\ u \equiv 3 \pmod 4, \\ &= 4 \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 &&\text{при} \quad \alpha = 2, \\ &= 4\left(2^{2\alpha-4} - \left(\frac{-1}{u}\right)\right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 &&\text{при} \quad \alpha > 2; \end{aligned} \tag{11.35}$$

$$\theta(\tau;\ 1,\ 8,\ 8) = 1 + \frac{1}{2} Q + 2Q^2 + 4Q^4 + 13Q^5 + 12Q^8 +$$
$$+ \frac{73}{2} Q^9 + 52Q^{10} + 32Q^{12} + \cdots; \tag{11.36}$$

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\, \vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 16) = 1 + 4Q + 4Q^2 + 4Q^4 +$$
$$+ 8Q^5 + 12Q^8 + 36Q^9 + 40Q^{10} + 32Q^{12} + \cdots. \tag{11.37}$$

При помощи (11.4), (11.37), (11.36), (11.14), (11.16) и (11.18) убеждаемся в справедливости тождества (11.34).

Из тождества (11.34) следует

Теорема 12 а. Пусть $n = 2^\alpha u$, $(u,\ 2) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} r(n;\ 1,\ 8,\ 8) &= \frac{1}{2} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 + \frac{3}{4}\nu_1(n) + \nu_2(n) \quad &&\text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 4, \\ &= 0 \quad \text{при } n \equiv 3 \pmod 4 \text{ и} &&\text{при} \quad n \equiv 6 \pmod 8, \\ &= 2 \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 + \frac{1}{2}\nu_3(n) &&\text{при} \quad n \equiv 2 \pmod 8, \\ &= 4 \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2 &&\text{при} \quad n \equiv 4 \pmod 8, \end{aligned}$$

$$= 4\left(4^{\alpha-2} - \left(\frac{-1}{u}\right)\right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^2, \quad \text{при} \quad n \equiv 0 \pmod{18},$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ и $\nu_3(n)$ определены в теореме 9 **а**.

§ 12. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формами

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 9(x_5^2 + x_6^2) \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + 9(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2).$$

Лемма 28. Функции

$$\psi(\tau;\ 1,\ 1,\ 9) = \vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0, 18) - \theta(\tau;\ 1,\ 1,\ 9) -$$

$$- \frac{48}{7} X_1(\tau) - \frac{128}{7} X_2(\tau) - \frac{64}{7} X_3(\tau) \tag{12.1}$$

и

$$\psi(\tau;\ 1,\ 9,\ 9) = \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 18) - \theta(\tau;\ 1,\ 9,\ 9) -$$

$$- \frac{80}{21} X_1(\tau) - \frac{64}{21} X_2(\tau), \tag{12.2}$$

где

$$X_1(\tau) = \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 18)\,\vartheta_{61}^4(\tau;\ 0,\ 18), \tag{12.3}$$

$$X_2(\tau) = \vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 18)\,\vartheta_{61}^4(\tau;\ 0,\ 18)\,\vartheta_{12,0}(\tau;\ 0,\ 18), \tag{12.4}$$

$$X_3(\tau) = \vartheta_{61}^4(\tau;\ 0,\ 18)\,\vartheta_{12,0}^2(\tau;\ 0,\ 18) \tag{12.5}$$

являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе $\Gamma_0(36)$, и делителя 36.

Доказательство. Согласно примечанию к лемме 18 и лемме 14, первые два слагаемых в правых частях (12.1) и (12.2) являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе $\Gamma_0(36)$, и делителя 36.

Нетрудно проверить, что остальные слагаемые в правых частях (12.1) и (12.2) удовлетворяют условиям (5.7) леммы 18.

Покажем, что для всех α и δ, удовлетворяющих условию $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{36}$, имеет место равенство (5.8) леммы 18. Действительно, из $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{36}$ следует $\alpha\delta \equiv 1 \pmod 6$, т. е.

$$\alpha \equiv \pm 1 \pmod 6. \tag{12.6}$$

А из (3.9), (3.11), (7.4) и (12.6) следует

$$\vartheta_{6\alpha,\,1}^4(\tau;\ 0,\ 18) = \vartheta_{\pm 6,\,1}^4(\tau;\ 3(\alpha \mp 1),\ 18) = \vartheta_{61}^4(\tau;\ 0,\ 18),$$

$$\vartheta_{12\alpha,\,0}(\tau;\ 0,\ 18) = \vartheta_{\pm 12,\,0}(\tau;\ 6(\alpha \mp 1),\ 18) = \vartheta_{12,\,0}(\tau;\ 0,\ 18).$$

Таким образом, согласно лемме 18, третие, четвертые и пятые слагаемые в правых частях (12.1) и (12.2) также являются целыми модулярными формами размерности -3, присоединенными к подгруппе $\Gamma_0(36)$, и делителя 36.

Теорема 13.

$$\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 18)=\theta(1,\ 1,\ 9)+$$

$$+\frac{48}{7}X_1(\tau)+\frac{128}{7}X_2(\tau)+\frac{64}{7}X_3(\tau). \tag{12.7}$$

Доказательство. Положив в леммах 20, 21 и 22

$$a_1=a_2=b_1=b_2=1,\ a_3=b_3=9,\ \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma=0,\ v=3^\beta,$$

т. е.

$$a=9,\ \Delta=81,\ n=2^\alpha m=2^\alpha 3^\beta u,\ (u,\ 6)=1,$$

получим

$$\rho(n;\ 1,\ 1,\ 9)=\frac{2^{2\alpha+2}\,.\,3^{2\beta+1}}{7}\chi_2\chi_3\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2,$$

где

$$\chi_2=2^{-2\alpha-2}(2^{2\alpha+2}-(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)})\quad\text{при}\quad\alpha\geqslant 0;$$

$$\chi_3=\frac{4}{3}(1-3^{-\beta-1})\quad\text{при}\quad\beta=0,\ 1,$$

$$=\frac{2}{5}\,.\,3^{-2\beta-1}(87\,.\,9^{\beta-1}+(-1)^\beta\,.\,7)\quad\text{при}\quad\beta\geqslant 2.$$

Таким образом,

$$\rho(n;\ 1,\ 1,\ 9)=\frac{8}{21}\left(4^{\alpha+1}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2\quad\text{при}\quad\beta=0,$$

$$=\frac{2}{35}\left(4^{\alpha+1}-(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(87\,.\,9^{\beta-1}+(-1)^\beta\,.\,7)\times \tag{12.8}$$

$$\times\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2\quad\text{при}\quad\beta\geqslant 1.$$

Из (1.5) следует

$$\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^2(\tau;0,\ 18)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{h^2}\right)^4\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{9h^2}\right)^2=$$

$$=1+8\,Q+24\,Q^2+32\,Q^3+24\,Q^4+48\,Q^5+96\,Q^6+64\,Q^8+24\,Q^8+108\,Q^9+$$

$$+176\,Q^{10}+192\,Q^{11}+224\,Q^{12}+208\,Q^{13}+384\,Q^{14}+576\,Q^{15}+280\,Q^{16}+$$

$$+240\,Q^{17}+732\,Q^{18}+\dots, \tag{12.9}$$

$$X_1(\tau)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{9h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h\,Q^{\frac{1}{4}(6h+1)^2}\right)^4= \tag{12.10}$$

$$=Q-4\,Q^7+4\,Q^{10}+2\,Q^{13}-16\,Q^{16}+12\,Q^{19}+\cdots, \tag{12.11}$$

$$X_2(\tau)=\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{9h^2}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{\frac{1}{4}(6h+1)^2}\right)^4 \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{(3h+1)^2}= \tag{12.12}$$

$$=Q^2+Q^5-4\,Q^8-2\,Q^{11}+4\,Q^{14}-5\,Q^{17}+8\,Q^{23}+\ldots, \tag{12.13}$$

$$X_3(\tau)=\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{\frac{1}{4}(6h+1)^2}\right)^4\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{(3h+1)^2}\right)^2= \tag{12.14}$$

$$=Q^3+2\,Q^6-3\,Q^9-8\,Q^{12}-2\,Q^{15}+6\,Q^{18}+\ldots. \tag{12.15}$$

Вычислив значения $\rho(n;\ 1,\ 1,\ 9)$ для всех $n\leqslant 18$ по формулам (12.8), получим

$$\theta(\tau;\ 1,\ 1,\ 9)=1+\frac{8}{7}Q+\frac{40}{7}Q^2+\frac{160}{7}Q^3+24\,Q^4+\frac{208}{7}Q^5+$$

$$+\frac{544}{7}Q^6+\frac{640}{7}Q^7+\frac{680}{7}Q^8+\frac{948}{7}Q^9+\frac{1040}{7}Q^{10}+\frac{1600}{7}Q^{11}+$$

$$+\frac{2080}{7}Q^{12}+\frac{1360}{7}Q^{13}+\frac{2176}{7}Q^{14}+\frac{4160}{7}Q^{15}+\frac{2728}{7}Q^{16}+$$

$$+\frac{2320}{7}Q^{17}+\frac{4740}{7}Q^{18}+\ldots \tag{12.16}$$

Приняв во внимание (12.1), (12.9), (12.16), (12.11), (12.13) и (12.15), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 18)$ в разложении $\psi(\tau;\ 1,\ 1,\ 9)$ по степеням Q равны нулю.

Таким образом, согласно леммам 28 и 2, функция $\psi(\tau;\ 1,\ 1,\ 9)$ тождественно равна нулю. Итак, тождество (12.7) доказано.

Теорема 13а. Пусть $n=2^\alpha 3^\beta u$ $(u,\ 6)=1$. Тогда

$$r(n;\ 1,\ 1,\ 9)=\frac{8}{21}\left(4^{\alpha+1}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{48}{7}\nu_1(n)+$$

$$+\frac{128}{7}\nu_2(n)\quad \text{при}\quad \beta=0,$$

$$=\frac{2}{35}\left(4^{\alpha+1}-(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(87\,.\,9^{\beta-1}+(-1)^\beta\,.\,7)\times$$

$$\times\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+\frac{64}{7}\nu_3(n)\quad \text{при}\quad \beta\geqslant 1,$$

где $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ и $\nu_3(n)$, соответственно, обозначают коэффиценты при Q^n в разложениях функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$ и $X_3(\tau)$ по степеням Q.

Доказательство. Из (12.10) следует

$$X_1(\tau)=Q\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{9h^2}\right)^2\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{3h(3h+1)}\right)^4.$$

Показатели степеней в этом разложении имеют вид $n=3j+1$, т. е.

$$\nu_1(n)=0 \quad \text{при} \quad 3|n. \tag{12.17}$$

Из (12.12) следует

$$X_2(\tau)=Q^2\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{9h^2}\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{3h(3h+1)}\right)^4\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{3h(3h+2)}.$$

Показатели степеней в этом разложении имеют вид $n=3j+2$, т. е.

$$\nu_2(n)=0 \text{ при } 3|n. \tag{12.18}$$

Из (12.14) следует

$$X_3(\tau)=Q^3\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{3h(3h+1)}\right)^4\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{3h(3h+2)}\right)^2,$$

т. е.

$$\nu_3(n)=0 \quad \text{при} \quad 3\nmid n. \tag{12.19}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (12.7) и принимая во внимание (4.7), (4.11), (12.8) и (12.17)—(12.19), получаем утверждаемое.

Теорема 14.

$$\vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{00}^4(\tau;\ 0,\ 18)=\theta(\tau;\ 1,\ 9,\ 9)+$$
$$+\frac{80}{21}X_1(\tau)+\frac{64}{21}X_2(\tau). \tag{12.20}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 13, получаем

$$\begin{aligned}
\rho(n;\ 1,\ 9,\ 9)&=\frac{4}{63}\left(4^{\alpha+1}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2, && \text{при } \beta=0,\\
&=0, && \text{при } \beta=1,\\
&=\frac{2}{5}\left(4^{\alpha+1}-(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(9^{\beta-1}+(-1)^\beta)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2 && \text{при } \beta>1;
\end{aligned} \tag{12.21}$$

$$\theta(\tau;\ 1,\ 9,\ 9)=1+\frac{4}{21}Q+\frac{20}{21}Q^2+4Q^4+\frac{104}{21}Q^5+\frac{320}{21}Q^7+$$
$$+\frac{340}{21}Q^8+12Q^9+\frac{520}{21}Q^{10}+\frac{802}{21}Q^{11}+\frac{680}{21}Q^{13}+$$
$$+\frac{1088}{21}Q^{14}+\frac{1364}{21}Q^{16}+\frac{1160}{21}Q^{17}+60Q^{18}+\cdots; \tag{12.22}$$

$$\vartheta^2_{00}(\tau;\ 0,\ 2)\ \vartheta^4_{00}(\tau;\ 0,\ 18)=1+4Q+4Q^2+4Q^4+8Q^5+4Q^8+12Q^9+$$
$$+40Q^{10}+32Q^{11}+40Q^{13}+64Q^{14}+4Q^{16}+40Q^{17}+60Q^{18}+\cdots. \quad (12.23)$$

При помощи (12.2), (12.22), (12.23), (12.11) и (12.13) убеждаемся в справедливости тождества (12.20).

Из тождества (12.20) следует

Теорема 14 а. Пусть $n=2^\alpha 3^\beta u$, $(u,\ 6)=1$. Тогда

$$r(n;\ 1,\ 9,\ 9)=\frac{4}{63}\left(4^{\alpha+1}-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2+$$
$$+\frac{80}{21}\nu_1(n)+\frac{64}{21}\nu_2(n),\quad \text{при}\quad \beta=0,$$
$$=0,\qquad \text{при}\quad \beta=1,$$
$$=\frac{2}{5}\left(4^{\alpha+1}-(-1)^\beta\left(\frac{-1}{u}\right)\right)(9^{\beta-1}+(-1)^\beta)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^2$$
$$\text{при}\quad \beta\geqslant 2,$$

где $\nu_1(n)$ и $\nu_2(n)$ определены в теореме 13 а.

§ 13. Лемма 29. Имеет место разложение

$$\vartheta^3_{N1}(\tau;\ 0,\ 3N)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\ Q^{\frac{N}{8}(2m+1)^2}. \quad (13.1)$$

Доказательство. Дословно перенося на тэта-функции с характеристиками

$$\vartheta_{gh}(z\,|\,\tau;0,N)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{hm}\ Q^{\frac{1}{8N}(2Nm+g)^2}\ e\left(\left(Nm+\frac{1}{2}\ g\right)z\right) \quad (13.2)$$

рассуждения из книги [3] (стр. 306—310), примененные к якобиевым тэта-функциям, получаем

$$\vartheta_{01}(z|\tau;\ 0,\ N)=$$
$$=C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}(2n-1)}e(Nz)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}(2N-1)}e(-Nz)\right), \quad (13.3)$$

$$\vartheta_{00}(z|\tau;\ 0,\ N)=$$
$$=C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+Q^{\frac{N}{2}(2n-1)}e(Nz)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+Q^{\frac{N}{2}(2n-1)}e(-Nz)\right), \quad (13.4)$$

$$\vartheta_{N0}(z|\tau;\ 0,\ N)=2\,CQ^{\frac{N}{8}}\cos N\pi z\ \times$$
$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+Q^{\frac{N}{2}\cdot 2n}e(Nz)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+Q^{\frac{N}{2}\cdot 2n}e(-Nz)\right), \quad (13.5)$$

$$\vartheta_{N1}(z|\tau;\ 0,\ N)=2\,iCQ^{\frac{N}{8}}\sin N\pi z\ \times$$

$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}\,2n}\,e(Nz)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}\cdot 2n}\,e(-Nz)\right), \tag{13.6}$$

$$\vartheta'_{N1}(\tau;\ 0,\ N)=2\,N\pi iC\,Q^{\frac{N}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}\cdot 2n}\right)^{2}, \tag{13.7}$$

$$\vartheta'_{N1}(\tau;\ 0,\ N)=N\pi i\,\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ N)\,\vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ N)\,\vartheta_{N0}(\tau;\ 0,\ N), \tag{13.8}$$

где C не зависит от z.

Дословно рассуждая так же, как и в книге [3] (стр. 310), из (13.8), (13.7) и (13.3)—(13.5) получаем

$$C=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}\cdot 2n}\right). \tag{13.9}$$

Следовательно,

$$\vartheta'_{N1}(\tau;\ 0,\ N)=2\,N\pi iQ^{\frac{N}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}\cdot 2N}\right)^{3}, \tag{13.10}$$

$$\vartheta_{01}(z|\tau;\ 0,\ N)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}\cdot 2n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}(2n-1)}\,e(Nz)\right)\times$$

$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{N}{2}(2n-1)}\,e(-Nz)\right). \tag{13.11}$$

Известно (см., напр., [4], стр. 319, формула (1.5))

$$\vartheta_{gh}\left(z+\frac{1}{2\,N}\,(l+m\tau)|\tau;\ 0,\ N\right)=e\left(\frac{gl}{4\,N}\right)e\left(-\frac{m^{2}\,\tau}{8\,N}\right)\times$$

$$\times\,e\left(-\frac{mz}{2}\right)\vartheta_{g+m,\,h+l}(z|\tau;\ 0,\ N). \tag{13.12}$$

Написав здесь $3\,N$ вместо N и положив $g=0,\ \ h=1,\ \ m=N,\ \ l=0,$ $z=0$, согласно (13.11), получим

$$\vartheta_{N1}(\tau;\ 0,\ 3\,N)=e\left(\frac{N\tau}{24}\right)\vartheta_{01}\left(\frac{1}{6}\,\tau\,\middle|\,\tau;\ 0,\ 3\,N\right)=$$

$$=Q^{\frac{N}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{3\,N}{2}\cdot 2n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{3\,N}{2}(2\,n-1)}\,e\left(\frac{N\tau}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-Q^{\frac{3\,N}{2}(2\,n-1)}\,e\left(-\frac{N\tau}{2}\right)\right)=Q^{\frac{N}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-Q^{Nn}), \tag{13.13}$$

откуда, согласно (13.10),

$$\vartheta^3_{N1}(\tau;\ 0,\ 3N) = \frac{1}{2N\pi i}\,\vartheta'_{N1}(\tau;\ 0,\ N). \tag{13.14}$$

Из (13.2) следует

$$\vartheta'_{N1}(\tau;\ 0,\ N) = N\pi i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, Q^{\frac{N}{8}(2m+1)^2}. \tag{13.15}$$

Из (13.14) и (13.15) следует утверждаемое.

Лемма 30 ([2], лемма 2). Имеют место разложения

$$\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ N)\,\vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ N)\,\vartheta_{N0}(\tau;\ 0,\ N) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, Q^{\frac{N}{8}(2m+1)^2}, \tag{13.16}$$

$$\vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ N)\,\vartheta^4_{01}(\tau;\ 0,\ N)\,\vartheta_{N0}(\tau,\ 0,\ N) = \sum_{m_1,\ m_2=-\infty}^{\infty} \{(2m_1+1)^2-(2m_2)^2\}\, Q^{\frac{N}{8}\{(2m_1+1)^2+2m_2)^2\}}. \tag{13.17}$$

В следующих параграфах $x,\ y,\ z,\ t$ обозначают целые числа, (m) под знаком суммы обозначает $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$.

§ 14. В § 7 работы [1] получены формулы для числа представлений натуральных чисел формами: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+3(x_5^2+x_6^2)$ и $x_1^2+x_2^2+3(x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)$. Эти формулы содержат дополнительные члены $\nu_1(n)$ и $\nu_2(n)$, соответственно определенные как коэффициенты при Q^n в разложениях функций

$$X_1(\tau) = \vartheta^2_{00}(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{20}(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{60}(\tau;\ 0,\ 6) \tag{14.1}$$

и

$$X_2(\tau) = \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta_{20}(\tau;\ 0,\ 2)\,\vartheta^2_{00}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 6)\,\vartheta_{60}(\tau;\ 0,\ 6) \tag{14.2}$$

по степеням Q.

Теорема 15. Для всякого n имеем

$$\nu_1(n) = 4 \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2|x,\ 2|z,\ 2\nmid y,\ 2\nmid t,\ y>0,\ t>0}} (-1)^{\frac{y+t-1}{2}}\, y, \tag{14.3}$$

где, как указано под знаком суммы, сумма берется по всем представлениям $x,\ y,\ z,\ t$ числа $4n$ формой $x^2+y^2+3z^2+3t^2$, для которых $2|x,\ 2|z,\ 2\nmid y,\ 2\nmid t,\ y>0,\ t>0$.

Доказательство. Из (14.1), (13.2) и (13.16) следует

$$X_1(\tau) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_2+m_3} (2m_2+1) Q^{\frac{1}{4}\{(2m_1)^2+(2m_2+1)^2+3(2m_3)^2+3(2m_4+1)^2\}},$$

откуда

$$\nu_1(n) = \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2\\ 2|x,\, 2|z,\, 2\nmid y,\, 2\nmid t}} (-1)^{\frac{y-1}{2}+\frac{z}{2}} y = 4 \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2\\ 2|x,\, 2|z,\, 2\nmid y,\, 2\nmid t,\, y>0,\, t>0}} (-1)^{\frac{y+z-1}{2}} y.$$

Теорема 16. Для всякого n имеем

$$\nu_2(n) = 4 \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2\\ 2|x,\, 2|z,\, 2\nmid y,\, 2\nmid t,\, y>0,\, t>0}} (-1)^{\frac{x+t-1}{2}} t. \tag{14.4}$$

Доказательство. Из (14.2), (13.2) и (13.16) получаем

$$X_2(\tau) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} (-1)^{(m_1+m_4)} (2m_4+1)\, Q^{\frac{1}{4}\{(2m_1)^2+(2m_2+1)^2+3(2m_3)^2+3(2m_4+1)^2\}},$$

откуда следует утверждаемое.

§ 15. В § 9 работы [1] и § 10 настоящей работы получены формулы для числа представлений натуральных чисел формами: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+6(x_5^2+x_6^2)$, $x_1^2+x_2^2+6(x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)$, $x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+x_4^2)+6(x_5^2+x_6^2)$ и $x_1^2+x_2^2+3(x_3^2+x_4^2)+6(x_5^2+x_6^2)$. Эти формулы содержат дополнительные члены $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$, $\nu_3(n)$ и $\nu_4(n)$, соответственно определенные как коэффициенты при Q^n в разложениях функций

$$X_1(\tau) = \vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{40}^2(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 12)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0, 12), \tag{15.1}$$

$$X_2(\tau) = \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{40}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 12)\, \vartheta_{12,0}(\tau;\ 0,\ 12), \tag{15.2}$$

$$X_3(\tau) = \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{40}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{00}^2(\tau;\ 0,\ 12)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 12)\, \vartheta_{12,0}(\tau;\ 0, 12) \tag{15.3}$$

и

$$X_4(\tau) = \vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 4)\, \vartheta_{00}(\tau;\ 0,\ 12)\, \vartheta_{01}(\tau;\ 0,\ 12)\, \vartheta_{12,0}^2(\tau;\ 0,\ 12) \tag{15.4}$$

по степеням Q.

Теорема 17. Имеем

$$\nu_1(n) = 4 \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+3z^2+3t^2\\ 2\nmid x,\, 2\nmid y,\, 2|z,\, 2|t,\, x>0,\, y>0}} (-1)^{\frac{x+t-1}{2}} x, \tag{15.5}$$

$$\nu_2(n) = 4 \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+3z^2+3t^2\\ 2\nmid x,\, 2\nmid z,\, 2|y,\, 2|t,\, x>0,\, z>0}} (-1)^{\frac{x+t-1}{2}} x, \tag{15.6}$$

$$\nu_3(n) = 4 \sum_{\substack{2n = x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2|x,\ 2|z,\ 2\nmid y,\ 2\nmid t,\ y>0,\ t>0}} (-1)^{\frac{x+t-1}{2}} t, \tag{15.7}$$

$$\nu_4(n) = 4 \sum_{\substack{2n = x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2|x,\ 2|y,\ 2\nmid z,\ 2\nmid t.\ z>0,\ t>0.}} (-1)^{\frac{x+t-1}{2}} t, \tag{15.8}$$

Доказательство. Из (15.1), (13.16) и(13.2) следует

$$X_1(\tau) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_1+m_4} (2m_1+1)\, Q^{\frac{1}{2}\{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)^2+3(2m_3)^2+3(2m_4)^2\}},$$

откуда получаем выражение для $\nu_1(n)$. Из (15.5) следует, что $\nu_1(n)=0$ при $n \not\equiv 1 \pmod 4$. Однако этот факт иным путем уже был установлен в § 9.

Из (15.2), (13.2) и (13.16) следует

$$X_2(\tau) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_1+m_3} (2m_1+1)\, Q^{\frac{1}{2}\{(2m_1+1)^2+4m_2^2+12m_3^2+3(2m_4+1)^2\}},$$

откуда получаем выражение для $\nu_2(n)$. Из (15.6) следует, что $\nu_2(n)=0$ при $n \equiv 1 \pmod 2$. Это, однако, было уже доказано в § 9.

Из (15.3), (13.2) и (13.6) следует

$$X_3(\tau) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_1+m_4} (2m_4+1)\, Q^{\frac{1}{2}\{(2m_1)^2+(2m_3+1)^2+3(2m_3)^2+3(2m_4+1)^2\}},$$

откуда получаем выражение для $\nu_3(n)$.

Из (15.7) следует, что $\nu_2(n)=0$ при $n \equiv 1 \pmod 2$. Это также было установлено в § 9.

Из (15.4), (13.2) и (13.16) следует

$$X_4(\tau) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_2+m_3} (2m_3+1)\, Q^{\frac{1}{2}\{(2m_1)^2+(2m_2)^2+3(2m_3+1)^2+3(2m_4+1)^2\}},$$

откуда получаем выражение для $\nu_4(n)$. Из (15.8) следует, что $\nu_4(n)=0$ при $n \not\equiv 3 \pmod 4$. Это также было уже доказано в § 9.

§ 16. В § 11 получены формулы для $r(n;\ 1,\ 1, 8)$, $r(n;\ 1,\ 2,\ 8)$, $r(n;\ 1,\ 4,\ 8)$ и $r(n;\ 1,\ 8,\ 8)$. Эти формулы содержат дополнительные члены $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$, $\nu_3(n)$ и $\nu_4(n)$, соответственно обозначающие коэффициенты при Q^n в разложениях функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$, $X_3(\tau)$ и $X_4(\tau)$, определенных формулами (11.5)—(11.8) леммы 27.

Теорема 18. Имеем

$$\nu_1(n)=2\sum_{\substack{n=x^2+4y^2\\ 2\nmid x,\ x>0}}(x^2-4y^2), \tag{16.1}$$

$$\nu_2(n)=2\sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ x>0}}(-1)^{\frac{x-1}{2}+y}\,x, \tag{16.2}$$

$$\nu_3(n)=4\sum_{\substack{n=x^2+y^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\ y>0}}(-1)^{\frac{xy-1}{2}}\,xy, \tag{16.3}$$

$$\nu_4(n)=8\sum_{\substack{n=x^2+y^2+z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z,\\ x>0,\ y>0,\ z>0}}(-1)^{\frac{x-1}{2}+t}\,x. \tag{16.4}$$

Доказательство. Из (11.5) и (13.17) следует

$$X_1(\tau)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}\{(2m_1+1)^2-(2m_2)^2\}\,Q^{(2m_1+1)^2+(2m_2)^2},$$

откуда получаем выражение для $\nu_1(n)$. Из (16.1) следует, что $\nu_1(n)=0$ при $n\not\equiv 1 \pmod 4$.

Из (11.6), (13.16) и (13.2) следует

$$X_2(\tau)=\sum_{(m)=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_4}(2m_1+1)\,Q^{(2m_1+1)^2+4m_2^2+4m_3^2+4m_4^2},$$

откуда получаем выражение для $\nu_2(n)$. Из (16.2) следует, что $\nu_2(n)=0$ при $n\not\equiv 1 \pmod 4$.

Из (11.7) и (13.16) следует

$$X_3(\tau)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2}(2m_1+1)(2m_2+1)\,Q^{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)^2},$$

откуда получаем выражение для $\nu_3(n)$. Из (16.3) следует, что $\nu_3(n)=0$ при $n\not\equiv 2 \pmod 8$.

Из (11.8), (13.16) и (13.2) следует

$$X_4(\tau)=\sum_{(m)=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2}(2m_1+1)\,Q^{(2m_1+1^2)+(2m_2)^2+(2m_3+1)^2+(2m_4+1)^2},$$

откуда получаем выражение для $\nu_4(n)$. Из (16.4) следует, что $\nu_4(n)=0$ при $n\not\equiv 3 \pmod 4$.

§ 17. В § 12 получены формулы для $r(n;\ 1,\ 1,\ 9)$ и $r(n;\ 1,\ 9,\ 9)$. Эти формулы содержат дополнительные члены $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ и $\nu_3(n)$, соответственно обозначающие коэффициенты при Q^n в разложениях функций $X_1(\tau)$, $X_2(\tau)$ и $X_3(\tau)$, определенных формулами (12.3)—(12.5) леммы 28.

Теорема 19. Имеем

$$\nu_1(n)=\sum_{\substack{4n=x^2+y^2+z^2+3t^2\\ 6|x,6|y,2\nmid z,2\nmid t,z>0,t>0}}(-1)^{\frac{zt-1}{2}}\left(\frac{z}{3}\right)t, \tag{17.1}$$

$$\nu_2(n)=\sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+4t^2\\ 6\mid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z,\ 3\nmid t\\ y>0,\ z>0,\ t>0}}(-1)^{\frac{yz-1}{2}}\left(\frac{y}{3}\right)z, \tag{17.2}$$

$$\nu_3(n)=\sum_{\substack{4n=x^2+3y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\ y>0\\ 3\nmid z,\ 3\nmid t,\ z>0,\ t>0}}(-1)^{\frac{xy-1}{2}}\left(\frac{x}{3}\right)y. \tag{17.3}$$

Доказательство. Из (12.3), (13.2) и (13.1) следует

$$X_1(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{(m)=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_3+m_4}(2m_4+1)Q^{\frac{1}{4}\{(6m_1)^2+(6m_2)^2+(6m_3+1)^2+3(2m_4+1)^2\}},$$

откуда

$$\nu_1(n)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{4n=x^2+y^2+z^2+3t^2\\ x\equiv y\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)\\ z\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6),\ t\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)}}(-1)^{\frac{z-1}{6}+\frac{t-1}{2}}t=$$

$$=\sum_{\substack{4n=x^2+y^2+z^2+3t^2\\ 6|x,\ 6|y,\ 2\nmid z,\ 2\nmid t\\ z>0,\ t>0}}(-1)^{\frac{z-1}{2}}\left(\frac{z}{3}\right)(-1)^{\frac{t-1}{2}}t.$$

Из (12.4), (13.2) и (13.1) следует

$$X_2(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{(m)=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_2+m_3}(2m_3+1)Q^{\frac{1}{4}\{(6m_1)^2+(6m_2+1)^2+3(2m_3+1)^2+4(3m_4+1)^2\}},$$

откуда

$$\nu_2(n)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+4t^2\\ x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6),\ y\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6)\\ z\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\ t\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)}}(-1)^{\frac{y-1}{6}+\frac{z-1}{2}}z=$$

$$=\sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+4t^2\\ 6|x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z,\ 3\nmid t\\ y>0,\ z>0,\ t>0}}(-1)^{\frac{y-1}{2}}\left(\frac{y}{3}\right)(-1)^{\frac{z-1}{2}}z.$$

Из (12.5), (13.2) и (13.1) следует

$$X_3(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{(m)=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2}(2m_1+1)\,Q^{\frac{1}{4}\{3(2m_1+1)^2+(6m_2+1)^2+4(3m_3+1)^2+4(3m_4+1)^2\}},$$

откуда

$$\nu_3(n)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{4n=x^2+3y^2+4z^2+4t^2\\ x\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6),\ y\equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 2)\\ z\equiv t\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)}}(-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{y-1}{2}}y=\sum_{\substack{4n=x^2+3y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 3\nmid z,\ 3\nmid t\\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ t>0}}(-1)^{\frac{x-1}{2}}\left(\frac{x}{3}\right)(-1)^{\frac{y-1}{2}}y.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Ломадзе. О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с шестью переменными, I. Труды Тбилисского государственного университета, 117 (1966), 7—43.
2. Г. А. Ломадзе. К арифметическому смыслу некоторых коэффициентов. Сообщения АН Грузинской ССР, 41, № 2 (1966), 259—263.
3. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, часть вторая, Ленинград—Москва, 1934.
4. H. D. Kloosterman. The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups. I, Annals of Mathematics, 47 (1946), 317—375.

Кафедра
алгебры и геометрии

(Поступило в редакцию 16. XII. 1966)

გ. ლომაძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ექვსცვლადიანი კვადრატული ფორმით. II

რეზიუმე

ამ ნაშრომში მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის

$$x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+x_4^2)+6(x_5^2+x_6^2),\quad x_1^2+x_2^2+3(x_3^2+x_4^2)+6(x_5^2+x_6^2),$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+8(x_5^2+x_6^2),\quad x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+x_4^2)+8(x_5^2+x_6^2),$$

$$x_1^2+x_2^2+4(x_3^2+x_4^2)+8(x_5^2+x_6^2),\quad x_1^2+x_2^2+8(x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2),$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+9(x_5^2+x_6^2)\ \text{და}\ x_1^2+x_2^2+9(x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)$$

ფორმებით წარმოდგენათა რიცხვისათვის.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

А. П. ЛУРСМАНАШВИЛИ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ СУММАМИ КВАДРАТОВ ЦЕЛЫХ И ЦЕЛЫХ БЕСКВАДРАТНЫХ ЧИСЕЛ

В данной работе будем применять следующие обозначения: k, n, q, t. N — положительные целые числа; a, d, m, h — целые числа; c, l, s — неотрицательные целые числа; r — бесквадратное число; q — бесквадратное положительное число; p — простое число; τ — действительное число; z — комплексное число; ε — сколь угодно малое положительное число; $\mu(t)$ — функция Мебиусса.

Эти буквы в случае надобности снабжаются индексами. Если нижние пределы суммирования не указаны, они предполагаются равными единице.

В выражении $\sum\limits_{d \bmod q}$ символ „$d \bmod q$" под знаком суммы обозначает, что d пробегает полную систему вычетов по модулю q, а в сумме $\sum\limits_{d \bmod q}'$ — приведенную систему вычетов.

Далее,

$$\lambda(k)=\begin{cases} \dfrac{k}{2}-\dfrac{5}{4}, & \text{если } k\geqslant 7, \\ \dfrac{k}{2}-\dfrac{5}{4}+\varepsilon, & \text{если } k=6; \end{cases} \tag{1}$$

$$e\mathrm{xp}\,(z)=e^z;$$

$$e(z)=e\mathrm{xp}\,(2\pi i z).$$

$\left(\dfrac{h}{N}\right)$ есть символ Якоби, если $(h, N)=1$ и $N>1$;

$$S(h, q)=\sum_{a \bmod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right) \quad \text{(сумма Гаусса);} \tag{2}$$

$$C(h, q)=\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2}\, S(ht^4, q); \tag{3}$$

$$R_k(n)=\sum_{g_1^2+\dots+g_k^2=n} 1$$

— число представлений натурального n в виде суммы k квадратов бесквадратных положительных чисел; для $0\leqslant s\leqslant k$

$$R_{k,s}(n)=\sum_{a_1^2+\dots+a_{k-s}^2+r_1^2+\dots+r_s^2=n} 1$$

— число представлений натурального n в виде суммы $k-s$ квадратов целых чисел и s квадратов целых бесквадратных чисел.

Число представлений натуральных чисел суммами квадратов бесквадратных положительных чисел впервые изучил Т. Эстерман [1].

Результат, полученный Т. Эстерманом, в моих обозначениях имеет вид: если $k\geqslant 5$, то

$$R_k(n)=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2^k\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\sigma(n,k)\,n^{\frac{k}{2}-1}+O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{21}{20}+\varepsilon}\right),$$

где

$$\sigma(n,k)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^k e\left(-\frac{nh}{q}\right).$$

В этой же работе Т. Эстерман исследовал особый ряд $\sigma(n,k)$. Затем, в работе [3], мною была изучена функция $R_{k,s}(n)$ в том случае, когда $k\geqslant 8$. В данной работе изучается функция $R_{k,s}(n)$, при $k\geqslant 6$.

Основным результатом первой главы является

Теорема 1. *Если $k\geqslant 6$, то для $0\leqslant s\leqslant k$*

$$R_{k,s}(n)=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\sigma(n,k,s)\,n^{\frac{k}{2}-1}+O(n^{\lambda(k)}),$$

где

$$\sigma(n,k,s)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-s}\cdot\left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s} e\left(-\frac{nh}{q}\right). \tag{4}$$

Во второй главе доказывается

Теорема 2. *Для $k\geqslant 6$ и $0<s<k$*

$$\sigma(n,k,s)>0.$$

Из теорем 1 и 2 в частности следует, что при $k\geqslant 6$ всякое достаточно большое натуральное число можно представить в виде суммы квадратов s $(0<s<k)$ целых бесквадратных и $k-s$ целых чисел.

§ 1. Леммы

Лемма 1.1. Если $(h, q)=1$, то

$$S(h, q)=O\left(q^{\frac{1}{2}}\right).$$

Лемма 1.2. ([3], лемма 4 и фор. (21)). Если $(h, q)=1$, то

$$C(h, q)=O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Лемма 1.3. ([2], теорема 1 гл. III). Если $k \geqslant 4$, то

$$R_{k,0}(n)=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q \leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^{k} e\left(-\frac{nh}{q}\right)+$$

$$+O\left(n^{\frac{k}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Лемма 1.4. ([3], лемма 5). Если $k>4$, то ряды

$$A(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\frac{k-3}{2}}{m} \frac{(-1)^{m}}{2m+1}$$

и

$$A(k, s)=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\frac{k-3}{2}}{m} 2m(2m-1)\ldots(2m-s)$$

сходятся абсолютно. Кроме того,

$$A(k)=\frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

и

$$A(k, s)=O(1).$$

Лемма 1.5. ([3], лемма 6). Пусть $\tau \geqslant q$ вещественное. Тогда при $l \geqslant 0$

$$\sum_{m \leqslant \tau} m^{2l} e\left(\frac{ht^{4} m^{2}}{q}\right)=\frac{\tau^{2l+1}}{q(2l+1)} S(ht^{4}, q)+O(\tau^{2l} q(l+1)).$$

Лемма 1.6. Пусть для $k>4$

$$f(n, h, q)=\sum_{-n^{1/2} \leqslant r \leqslant n^{\frac{1}{2}}}(n-r^{2})^{\frac{k-3}{2}} e\left(\frac{hr^{2}}{q}\right).$$

Тогда при $(h, q)=1$

$$f(n, h, q)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{q\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,C(h, q)\,n^{\frac{k}{2}-1}+O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\,q^{\frac{1}{2}}\right).$$

Доказательство. Известно, что

$$\mu^2(n)=\sum_{t^2|n}\mu(t).$$

Поэтому

$$f(n, h, q)=2\sum_{r\leqslant n^{1/2}}(n-r^2)^{\frac{k-3}{2}}\,e\left(\frac{hr^2}{q}\right)=$$

$$=2\sum_{m\leqslant n^{1/2}}\sum_{t^2|m}\mu(t)\,(n-m^2)^{\frac{k-3}{2}}\,e\left(\frac{hm^2}{q}\right)=$$

$$=2\sum_{t\leqslant n^{1/4}}\mu(t)\sum_{m\leqslant\frac{n^{1/2}}{t^2}}(n-t^4m^2)^{\frac{k-3}{2}}\,e\left(\frac{ht^4m^2}{q}\right)=$$

$$=2\,n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{t\leqslant n^{1/4}}\mu(t)\sum_{m\leqslant\frac{n^{1/2}}{t^2}}\left(1-\frac{t^4m^2}{n}\right)^{\frac{k-3}{2}}e\left(\frac{ht^4m^2}{q}\right)=$$

$$=2\,n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\frac{k-3}{2}}{l}(-1)^l\,n^{-l}\sum_{t\leqslant n^{1/4}}\mu(t)\,t^{4l}\times$$

$$\times\sum_{m\leqslant\frac{n^{1/2}}{t^2}}m^{2l}\,e\left(\frac{ht^4m^2}{q}\right)=S_1+S_2, \tag{1.1}$$

где

$$S_1=2\,n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\frac{k-3}{2}}{l}(-1)^l\,n^{-l}\sum_{t\leqslant n^{1/4}q^{-1/2}}\mu(t)\,t^{4l}\sum_{m\leqslant\frac{n^{1/2}}{t^2}}m^{2l}\,e\left(\frac{ht^4m^2}{q}\right)$$

и

$$S_2=2\,n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\frac{k-3}{2}}{l}(-1)^l n^{-l}\sum_{n^{1/4}q^{-1/2}<t\leqslant n^{\frac{1}{4}}}\mu(t)\,t^{4l}\sum_{m\leqslant\frac{n^{1/2}}{t^2}}m^{2l}\,e\left(\frac{ht^4m^2}{q}\right).$$

В сумме S_2 имеем $n^{1/2}t^{-2}<q$. Поэтому

$$S_2=O\left(n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\left|\binom{\frac{k-3}{2}}{l}\right|n^{-l}\sum_{n^{1/4}<t<n^{1/4}}t^{4l}\frac{n^l}{t^{4l}}\cdot\frac{n^{1/2}}{t^2}\right)=$$

$$=O\left(n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{n^{1/4}q^{-1/2}<t\leqslant n^{1/4}}\frac{1}{t^2}\right)=$$

$$=O\left(n^{\frac{k-3}{2}}n^{-1/4}q^{1/2}\right)=O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}q^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.2}$$

В сумме S_1, $n^{\frac{1}{2}}t^{-2}\geqslant q$. Следовательно, можно применить лемму 1.5, где $\tau=n^{1/2}t^{-2}$. Используя при этом лемму 1.4, получаем

$$S_1=2n^{\frac{k-3}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\frac{k-3}{2}}{l}(-1)^l n^{-l}\sum_{t\leqslant\frac{n^{1/4}}{q^{1/2}}}\mu(t)\,t^{4l}\left\{\frac{n^{l+\frac{1}{2}}}{q(2l+1)\,t^{4l+2}}S(ht^4,q)+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{n^l}{t^{4l}}q\,(l+1)\right)\right\}=\frac{2n^{\frac{k}{2}-1}}{q}A(k)\sum_{t\leqslant n^{1/4}q^{-1/2}}\frac{\mu(t)}{t^2}S(ht^4,q)+$$

$$+O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}q^{\frac{1}{2}}A(k,0)\right)=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{q}\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{t\leqslant n^{1/4}q^{-1/2}}\frac{\mu(t)}{t^2}S(ht^4,q)+O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}q^{1/2}\right).$$

Если здесь суммирование по t распространим до бесконечности, то получим погрешность

$$O\left(\frac{n^{\frac{k}{2}-1}}{q}q\int\limits_{y\geqslant\frac{n^{1/4}}{q^{1/2}}}\frac{dy}{y^2}\right)=O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}q^{1/2}\right).$$

Следовательно, в силу (3), имеем

$$S_1=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{q\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}n^{\frac{k}{2}-1}C(h,q)+O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}q^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.3}$$

Доказательство леммы следует из (1.1) — (1.3).

§ 2. Доказательство теоремы 1

В силу лемм 1.1 и 1.2, при $k>5$

$$O\left(n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{q>n^{1/2}}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-s}\left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s}e\left(-\frac{nh}{q}\right)\right)=$$

$$=O\left(n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{q>n^{1/2}}q^{1-\frac{k-s}{2}-\frac{s}{2}+\varepsilon}\right)=O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\right)=O\left(n^{\lambda(k)}\right).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$R_{k,s}(n)=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{q\leqslant n^{1/2}}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-s}\left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s}e\left(-\frac{nh}{q}\right)+$$
$$+O\left(n^{\lambda(k)}\right). \tag{2.1}$$

Справедливость равенства (2.1) при $s=0$ и $k\geqslant 5$ следует на основе леммы 1.3. Поэтому считаем, что (2.1) верно для любого $k\geqslant 5$ и $0\leqslant s<k$, и докажем её справедливость для $s+1$.

В силу определения $R_{k,s}(n)$, имеем

$$R_{k,s+1}(n)=\sum_{-n^{1/2}\leqslant r\leqslant n^{1/2}}R_{k-1,s}(n-r^2).$$

Отсюда, считая, что $k\geqslant 6$, в силу предположения и леммы 1.6

$$R_{k,s+1}(n)=\sum_{-n^{1/2}\leqslant r\leqslant n^{1/2}}\left\{\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}(n-r^2)^{\frac{k-3}{2}}\sum_{q\leqslant(n-r^2)^{1/2}}\sum_{h \bmod q}{}'\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-1-s}\left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s}e\left(-\frac{h(n-r^2)}{q}\right)+O\left((n-r^2)^{\lambda(k-1)}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\sum_{-n^{1/2}\leqslant r\leqslant n^{1/2}}(n-r^2)^{\frac{k-3}{2}}\sum_{q\leqslant(n-r^2)^{1/2}}\sum_{h \bmod q}{}'\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-1-s}\times$$

$$\times\left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s}e\left(-\frac{h(n-r^2)}{q}\right)+O\left(n^{\lambda(k)}\right). \tag{2.2}$$

Легко показать, что

$$\sum_{-n^{1/2}\leqslant r\leqslant n^{1/2}} (n-r)^{2\frac{k-3}{2}} \sum_{(n-r^2)^{1/2}<q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-1-s} \left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s} \times$$

$$\times e\left(-\frac{h(n-r^2)}{q}\right) = O(n^{\lambda(k)}).$$

Поэтому из 2.2, на основе леммы 1.6, получаем

$$R_{k,s+1}(n)=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{-n^{1/2}\leqslant r\leqslant n^{1/2}} (n-r^2)^{\frac{k-3}{2}} \sum_{q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-1-s} \times$$

$$\times\left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s} e\left(-\frac{h(n-r^2)}{q}\right) + O(n^{\lambda(k)}) = \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \times$$

$$\times\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-1-s} \left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s} f(n,h,q)\, e\left(-\frac{nk}{q}\right) + O(n^{\lambda(k)}) =$$

$$=\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-1-s} \left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s} e\left(-\frac{nh}{q}\right) \times$$

$$\times\left\{\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{q\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} C(h,q)\, n^{\frac{k}{2}-1} + O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}} q^{\frac{1}{2}}\right)\right\} + O(n^{\lambda(k)}) =$$

$$=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^{k-(s+1)} \left(\frac{C(h,q)}{q}\right)^{s+1} e\left(-\frac{nh}{q}\right) +$$

$$+O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}} \sum_{q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \left|\frac{S(h,q)}{q}\right|^{k-1-s} \left|\frac{C(h,q)}{q}\right|^{s} q^{\frac{1}{2}}\right) + O(n^{\lambda(k)}). \quad (2.3)$$

Здесь, в силу (1) и лемм 1.1 и 1.2, для $k\geqslant 6$

$$n^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}} \sum_{q\leqslant n^{1/2}} \sum_{h \bmod q}' \left|\frac{S(h,q)}{q}\right|^{k-1-s} \left|\frac{C(h,q)}{q}\right|^{s} q^{\frac{1}{2}} = O(n^{\lambda(k)}).$$

Последнее, совместно с (2.3), доказывает равенство (2.1) для $s+1$.

§ 3. Об особом ряде $\sigma(n, k, s)$

Известно ([3], теорема 1), что при $k \geqslant 8$ и $0 \leqslant s \leqslant k$

$$\sigma(n, k, s) > 0. \tag{3.1}$$

Поэтому суммирование особого ряда $\sigma(n, k, s)$ будем проводить в том случае, когда $k=6$ и 7. Кроме того, особый ряд $\sigma(n, k, k)$ исследован Т. Эстерманом [1] и исследование $\sigma(n, k, 0)$ общеизвестно. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $0<s<k$.

Пусть

$$T(h, q)=q^{-1} \prod_{p|q}(1-p^{-2})^{-1} \sum_{t|q} \mu(t)\, t^{-2}\, S(ht^4, q). \tag{3.2}$$

Тогда, при $(q_1, q_2)=1$, имеем ([1], лемма 12)

$$T(h, q_1 q_2)=T(hq_1, q_2)\, T(hq_2, q_1). \tag{3.3}$$

Известно ([3], фор. (21)), что

$$C(h, q)=\frac{6}{\pi^2}\, q\, T(h, q). \tag{3.4}$$

Отсюда с применением (3.2) для $(q_1, q_2)=1$ получаем

$$C(h, q_1 q_2)=\frac{\pi^2}{6}\, C(hq_1, q_2)\, C(hq_2, q_1). \tag{3.5}$$

Пусть

$$A_k(q, n, s)=\sum_{h \bmod q}{}' \left(\frac{S(h, q)}{q}\right)^{k-s} \left(\frac{C(h, q)}{q}\right)^{s} e\left(-\frac{nh}{q}\right). \tag{3.6}$$

Тогда, используя (3.5) и аналогичное свойство сумм Гаусса, для $(q_1, q_2)=1$ получаем

$$A_k(q_1 q_2, n, s)=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{s} A_k(q_1, n, s)\, A_k(q_2, n, s).$$

Отсюда, на основании (4) и (3.6), следует

$$\sigma(n, k, s)=\sum_{q=1}^{\infty} A_k(q, n, s)=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{s} \prod_{\mu} \chi(p)=$$

$$=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{s} \chi(2) \prod_{p>2} \chi(p), \tag{3.7}$$

где

$$\chi(p)=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{s} \sum_{l=0}^{\infty} A_k(p^l, n, s).$$

Если $0 \leqslant s \leqslant k$, для $\chi(p)$ имеем ([1], фор. (62), (63))

$$\chi(p)=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^s \sum_{l=0}^{3} A_k(p^l, n, s), \quad p>2, \tag{3.8}$$

$$\chi(2)=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^s \sum_{l=0}^{5} A_k(2^l, n, s). \tag{3.9}$$

Далее, из (3.3) и (3.1) при $(h, p)=1$, находим

$$C(h, p^l)=\frac{6}{\pi^2}(1-p^{-2})^{-1}\{S(h, p^l)-p^{l-2}\}, \text{ если } 0 \leqslant l \leqslant 4. \tag{3.10}$$

Аналогично, для нечетных h

$$C\,(h, 2^l)=\frac{8}{\pi^2}\{S(h, 2^l)-2^{l-2}), \text{ если } 0 \leqslant l \leqslant 4 \tag{3.11}$$

и

$$C\,(h, 2^5)=\frac{8}{2^5}\,S(h, 32), \quad \text{если } \ l=5. \tag{3.12}$$

§ 4. В этом параграфе предполагается, что $k \geqslant 6$ и доказывается

Теорема 3. Если $k \geqslant 6$ и $0<s<k$, то

$$\chi(2)>0.$$

Замечание. При доказательстве этой теоремы, на основании (3.1) достаточно ограничиться тем случаем, когда $k=6$, 7 и $0<s<k$.

К доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 4.1.

$$A_k(1, n, s)=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s.$$

Доказательство следует из (3.6), (3.4), (3.2) и (1).

Лемма 4.2. Для $0<s<k$

$$A_k(2, n, s)=0.$$

Доказательство. Так как $S(1, 2)=0$, то для $s<k$, в силу (3.6),

$$A_k(2, n, s)=2^{-k}(S\,(1 \cdot 2)\,)^{k-s}\,(C\,1, 2)\,)^s\, e\left(-\frac{n}{2}\right)=0.$$

Пусть

$$F(l)=(1+i)^l+(1-i)^l$$

и

$$E(l)=(1+i)^l-(1-i)^l. \tag{4.1}$$

Тогда

$$F(1)=2;\ F(2)=0;\ F(3)=-4;\ F(4)=-8; \qquad F(5)=-8;\ F(6)=0;\ F(7)=16; \tag{4.2}$$

$$E(1)=2i;\ E(2)=4i;\ E(3)=4i;\ E(4)=0; \qquad E(5)=-8i;\ E(6)=-16i;\ E(7)=-16i. \tag{4.3}$$

Далее, в силу (3.6) и (3.11), имея в виду, что для нечетных h,

$$S(h, 4)=2(1+i^h),$$

получаем

$$A_k(4, n, s)=\frac{2^{3s}}{2^k \pi^{2s}} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} (-1)^l 2^{-l} \left\{ (1+i)^{k-l} e\left(-\frac{n}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-i)^{k-l} e\left(\frac{n}{4}\right) \right\}. \tag{4.4}$$

Здесь, на основании (4.1), для $n \equiv 0 \pmod 4$ получим

$$A_k(4, n, s)=\frac{2^{3s}}{2^k \pi^{2s}} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} (-1)^l 2^{-l} F(k-l).$$

Отсюда, в силу (4.2), следует

Лемма 4.3. Если $n \equiv 0 \pmod 4$, то

$$A_6(4, n, 1)=\frac{1}{2\pi^2}; \quad A_6(4, n, 2)=\frac{6}{\pi^4}; \quad A_6(4, n, 3)=\frac{52}{\pi^6};$$

$$A_6(4, n, 4)=\frac{3 \cdot 2^7}{\pi^8}; \quad A_6(4, n, 5)=\frac{2^5 \cdot 79}{\pi^{10}};$$

$$A_7(4, n, 1)=\frac{1}{\pi^2}; \quad A_7(4, n, 2)=\frac{7}{\pi^4}; \quad A_7(4, n, 3)=\frac{2^2 \cdot 11}{\pi^6};$$

$$A_7(4, n, 4)=\frac{2^3 \cdot 31}{\pi^8}; \quad A_7(4, n, 5)=\frac{2^6 \cdot 19}{\pi^{10}}; \quad A_7(4, n, 6)=\frac{2^6 \cdot 73}{\pi^{12}}.$$

При $n \equiv 1 \pmod 4$, из (4.4) и (4.1) следует

$$A_k(4, n, s)=-i\,\frac{2^{3s}}{2^k \pi^{2s}} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} (-1)^l 2^{-l} E(k-l).$$

Отсюда, в силу (4.3), получается

Лемма 4.4. Если $n \equiv 1 \pmod 4$, то

$$A_6(4, n, 1)=-\frac{3}{2\pi^2}, \quad A_6(4, n, 2)=-\frac{8}{\pi^4}; \quad A_6(4, n, 3)=-\frac{36}{\pi^6};$$

$$A_6(4, n, 4)=-\frac{7 \cdot 16}{\pi^8}; \quad A_6(4, n, 5)=\frac{2^5 \cdot 3}{\pi^{10}};$$

$$A_7(4, n, 1)=-\frac{1}{2\pi^2}; \quad A_7(4, n, 2)=-\frac{1}{\pi^4}; \quad A_7(4, n, 3)=\frac{8}{\pi^6};$$

$$A_7(4, n, 4)=\frac{8 \cdot 17}{\pi^8}; \quad A_7(4, n, 5)=\frac{2^5 \cdot 41}{\pi^{10}}; \quad A_7(4, n, 6)=\frac{2^6 \cdot 161}{\pi^{12}}.$$

Далее, из (4.4) следует, что $A_k(4, n, s)$, при $n\equiv 2 \pmod 4$, совпадает с $-A_k(4, n, s)$, при $n\equiv 0 \pmod 4$. Следовательно, справедлива

Лемма 4.5. Если $n\equiv 2 \pmod 4$, то

$$A_6(4, n, 1)=-\frac{1}{2\pi^2};\quad A_6(4, n, 2)=-\frac{6}{\pi^4};\quad A_6(4, n, 3)=-\frac{52}{\pi^6};$$

$$A_6(4, n, 4)=-\frac{2^7\cdot 3}{\pi^8};\quad A_6(4, n, 5)=-\frac{2^6\cdot 79}{\pi^{10}};$$

$$A_7(4, n, 1)=-\frac{1}{\pi^2};\quad A_7(4, n, 2)=-\frac{7}{\pi^4};\quad A_7(4, n, 3)=-\frac{2^2\cdot 11}{\pi^6};$$

$$A_7(4, n, 4)=-\frac{2^3\cdot 31}{\pi^8};\quad A_7(4, n, 5)=-\frac{2^6\cdot 19}{\pi^{10}};$$

$$A_7(4, n, 6)=-\frac{2^6\cdot 73}{\pi^{12}}.$$

Аналогично, $A_k(4, n, s)$, при $n\equiv 3 \pmod 4$, совпадает с $-A_k(4, n, s)$, при $n\equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, справедлива

Лемма 4.6. Если $n\equiv 3 \pmod 4$, то

$$A_6(4, n, 1)=\frac{3}{2\pi^2};\quad A_6(4, n, 2)=\frac{8}{\pi^4};\quad A_6(4, n, 3)=\frac{36}{\pi^6};$$

$$A_6(4, n, 4)=\frac{2^4\cdot 7}{\pi^8};\quad A_6(4, n, 5)=-\frac{2^5\cdot 3}{\pi^{10}};$$

$$A_6(4, n, 1)=\frac{1}{2\pi^2};\quad A_7(4, n, 2)=\frac{1}{\pi^4};\quad A_7(4, n, 3)=-\frac{8}{\pi^6};$$

$$A_7(4, n, 4)=-\frac{2^3\cdot 17}{\pi^8};\quad A_7(4, n, s)=-\frac{2^5\cdot 41}{\pi^{10}};$$

$$A_7(4, n, 6)=-\frac{2^6\cdot 161}{\pi^{12}}.$$

Далее, известно, что для нечетных h

$$S(h, 8)=4\,e\left(\frac{h}{8}\right).$$

Поэтому, на основании (3.6) и (3.11), находим

$$A_k(8, n, s)=\frac{2^{2s}}{2^k\pi^{2s}}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}(-1)^l 2^{-l}\sum_{h \bmod 8}{}' e\left(\frac{h(k-l-n)}{8}\right).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{h \bmod 8}{}' e\left(\frac{h(k-l-n)}{8}\right)=\begin{cases} 0, & \text{если } 4\nmid k-l-n,\\ -4, & \text{если } 4\,\|\,k-l-n,\\ 4, & \text{если } 8\mid k-l-n,\end{cases}$$

получаем следующие леммы:

Лемма 4.7. Если $n \equiv 0 \pmod 8$, то

$$A_6(8,\ n,\ 1)=0;\quad A_6(8,\ n,\ 2)=-\frac{1}{\pi^4};\quad A_6(8,\ n,\ 3)=-\frac{2^3\cdot 3}{\pi^6};$$

$$A_6(8,\ n,\ 4)=-\frac{2^7\cdot 3}{\pi^8};\quad A_6(8,\ n,\ 5)=-\frac{2^{10}\cdot 5}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8,\ n,\ 1)=A_7(8,\ n,\ 2)=0,\quad A_7(8,\ n,\ 3)=\frac{2}{\pi^6};$$

$$A_7(8,\ n,\ 4)=\frac{2^6}{\pi^8};\quad A_7(8,\ n,\ 5)=\frac{2^8\cdot 5}{\pi^{10}};\quad A_7(8,\ n,\ 6)=\frac{2^{12}\cdot 5}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.8. Если $n \equiv 1 \pmod 8$, то

$$A_6(8,\ n,\ 1)=\frac{1}{4\pi^2};\quad A_6(8,\ n,\ 2)=\frac{4}{\pi^4};\quad A_6(8,\ n,\ 3)=\frac{2^4\cdot 3}{\pi^6};$$

$$A_6(8,\ n,\ 4)=\frac{2^9}{\pi^8};\quad A_6(8,\ n,\ 5)=\frac{2^6\cdot 79}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8,\ n,\ 1)=0,\quad A_7(8,\ n,\ 2)=-\frac{1}{2\pi^4};\quad A_7(8,\ n,\ 3)=\frac{12}{\pi^6};$$

$$A_7(8,\ n,\ 4)=-\frac{2^6\cdot 3}{\pi^8};\quad A_7(8,\ n,\ 5)=-\frac{2^9\cdot 5}{\pi^{10}};\quad A_7(8,\ n,\ 6)=-\frac{2^7\cdot 239}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.9. Если $n \equiv 2 \pmod 8$, то

$$A_6(8,\ n,\ 1)=-\frac{1}{2\pi^2};\quad A_6(8,\ n,\ 2)=-\frac{4}{\pi^4};\quad A_6(8,\ n,\ 3)=-\frac{2^5}{\pi^6};$$

$$A_6(8,\ n,\ 4)=-\frac{2^4\cdot 15}{\pi^8};\quad A_6(8,\ n,\ 5)=-\frac{2^7\cdot 11}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8,\ n,\ 1)=\frac{1}{8\pi^2};\quad A_7(8,\ n,\ 2)=\frac{2}{\pi^4};\quad A_7(8,\ n,\ 3)=\frac{2^3\cdot 3}{\pi^6};$$

$$A_7(8,\ n,\ 4)=\frac{2^8}{\pi^8};\quad A_7(8,\ n,\ 5)=\frac{2^5\cdot 79}{\pi^{10}};\quad A_7(8,\ n,\ 6)=\frac{2^9\cdot 45}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.10. Если $n \equiv 3 \pmod 8$, то

$$A_6(8,\ n,\ 1)=A_6(8,\ n,\ 2)=0;\quad A_6(8,\ n,\ 3)=-\frac{4}{\pi^6};$$

$$A_6(8,\ n,\ 4)=-\frac{2^7}{\pi^8};\quad A_6(8,\ n,\ 5)=-\frac{2^9\cdot 5}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8,\ n,\ 1)=-\frac{1}{4\pi^2};\quad A_7(8,\ n,\ 2)=-\frac{2}{\pi^4};\quad A_7(8,\ n,\ 3)=-\frac{2^4}{\pi^6};$$

$$A_7(8,\ n,\ 4)=-\frac{2^3\cdot 15}{\pi^8};\quad A_7(8,\ n,\ 5)=-\frac{2^6\cdot 11}{\pi^{10}};\quad A_7(8,\ n,\ 6)=-\frac{2^9}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.11. Если $n \equiv 4 \pmod 8$, то

$$A_6(8, n, 1) = 0, \quad A_6(8, n, 2) = \frac{1}{\pi^4}; \quad A_6(8, n, 3) = \frac{2^3 \cdot 3}{\pi^6};$$

$$A_6(8, n, 4) = \frac{2^7 \cdot 3}{\pi^8}; \quad A_6(8, n, 5) = \frac{2^{10} \cdot 5}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8, n, 1) = A_7(8, n, 2) = 0, \quad A_7(8, n, 3) = -\frac{2}{\pi^6};$$

$$A_7(8, n, 4) = -\frac{2^6}{\pi^8}; \quad A_7(8, n, 5) = -\frac{2^8 \cdot 5}{\pi^{10}}; \quad A_7(8, n, 6) = \frac{2^{12} \cdot 5}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.12. Если $n \equiv 5 \pmod 8$, то

$$A_6(8, n, 1) = -\frac{1}{4\pi^2}; \quad A_6(8, n, 2) = -\frac{4}{\pi^4}; \quad A_6(8, n, 3) = -\frac{2^4 \cdot 3}{\pi^6};$$

$$A_6(8, n, 4) = -\frac{2^9}{\pi^8}; \quad A_6(8, n, 5) = -\frac{2^6 \cdot 79}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8, n, 1) = 0; \quad A_7(8, n, 2) = \frac{1}{2\pi^4}; \quad A_7(8, n, 3) = \frac{12}{\pi^6};$$

$$A_7(8, n, 4) = \frac{2^6 \cdot 3}{\pi^8}; \quad A_7(8, n, 5) = \frac{2^9 \cdot 5}{\pi^{10}}; \quad A_7(8, n, 6) = \frac{2^7 \cdot 239}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.13. Если $n \equiv 6 \pmod 8$, то

$$A_6(8, n, 1) = \frac{1}{2\pi^2}; \quad A_6(8, n, 2) = \frac{4}{\pi^4}; \quad A_6(8, n, 3) = \frac{2^5}{\pi^6};$$

$$A_6(8, n, 4) = \frac{2^4 \cdot 15}{\pi^8}; \quad A_6(8, n, 5) = \frac{2^7 \cdot 11}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8, n, 1) = -\frac{1}{8\pi^2}; \quad A_7(8, n, 2) = -\frac{2}{\pi^4}; \quad A_7(8, n, 3) = -\frac{2^3 \cdot 3}{\pi^6};$$

$$A_7(8, n, 4) = -\frac{2^8}{\pi^8}; \quad A_7(8, n, 5) = -\frac{2^5 \cdot 79}{\pi^{10}}; \quad A_7(8, n, 6) = -\frac{2^9 \cdot 45}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.14. Если $n \equiv 7 \pmod 8$, то

$$A_6(8, n, 1) = A_6(8, n, 2) = 0, \quad A_6(8, n, 3) = \frac{4}{\pi^6};$$

$$A_6(8, n, 4) = \frac{2^7}{\pi^8}; \quad A_6(8, n, 5) = \frac{2^9 \cdot 5}{\pi^{10}};$$

$$A_7(8, n, 1) = \frac{1}{4\pi^2}; \quad A_7(8, n, 2) = \frac{2}{\pi^4}; \quad A_7(8, n, 3) = \frac{2^4}{\pi^6};$$

$$A_7(8, n, 4) = \frac{2^3 \cdot 15}{\pi^8}; \quad A_7(8, n, 5) = \frac{2^6 \cdot 11}{\pi^{10}}; \quad A_7(8, n, 6) = \frac{2^9}{\pi^{12}}.$$

Далее, для нечетных h

$$S(h, 16) = 4(1+i^h).$$

Поэтому, в силу (3.6), (3.11) и (4.4),

$$A_k(16, n, s) = \frac{2^{3s}}{4^k \pi^{2s}} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} (-1)^l \sum_{h \bmod 16}' (1+i^h)^{k-l} e\left(-\frac{nh}{16}\right). \tag{4.5}$$

Здесь

$$\sum_{h \bmod 16}' (1+i^h)^{k-l} e\left(-\frac{nh}{16}\right) = \sum_{\substack{h=1 \\ h\equiv 1 \pmod 4}}^{15} (1+i^h)^{k-l} e\left(-\frac{nh}{16}\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{h=1 \\ h\equiv 3 \pmod 4}}^{15} (1+i^h)^{k-l} e\left(-\frac{nh}{16}\right) = (1+i)^{k-l} \sum_{l=0}^{3} e\left(-\frac{n(4l+1)}{16}\right) +$$

$$+ (1-i)^{k-l} \sum_{l=0}^{3} e\left(-\frac{n(4l+3)}{16}\right) = \left\{ (1+i)^{k-l} e\left(-\frac{n}{16}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-i)^{k-l} e\left(-\frac{3n}{16}\right) \right\} \sum_{l=0}^{3} e\left(-\frac{nl}{4}\right). \tag{4.6}$$

Если $4 \nmid n$, то

$$\sum_{l=0}^{3} e\left(-\frac{nl}{4}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Из 4.5 — 4.7 следует

Лемма 4.15. Если $n \not\equiv 0 \pmod 4$, то

$$A_k(16, n, s) = 0.$$

Далее, пусть $n \equiv 0 \pmod 4$. Тогда, в силу (4.6) и (4.1), для $n = 4m$ получаем

$$\sum_{h \bmod 16}' (1+i^h)^k e\left(-\frac{nh}{16}\right) = 4 \left\{ (1+i)^{k-l} e\left(-\frac{m}{4}\right) + (1-i)^{k-l} e\left(-\frac{3m}{4}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned} &= 4F(k-l), \text{ если } n \equiv 0 \pmod{16}, \\ &= -4i\,E(k-l), \text{ если } n \equiv 4 \pmod{16}, \\ &= -4F(k-l), \text{ если } n \equiv 8 \pmod{16}, \\ &= 4i\,E(k-l), \text{ если } n \equiv 12 \pmod{16}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Теперь, (4.8) и (4.5) для $n \equiv 0$ или $8 \pmod{16}$, дают

$$A_k(16, n, s) = (-1)^{\frac{n}{8}} \frac{4 \cdot 2^{3s}}{2^{2k} \pi^{2s}} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} (-1)^l F(k-l).$$

Отсюда, на основании (4.2), следует

Лемма 4.16. Если $n \equiv 0$ или $8 \pmod{16}$, то

$$A_6(16, n, 1) = \frac{(-1)^{\frac{n}{8}}}{16\pi^2}; \quad A_6(16, n, 2) = \frac{(-1)^{\frac{n}{8}}}{2\pi^4}; \quad A_6(16, n, 3) = \frac{2(-1)^{\frac{n}{8}}}{\pi^6};$$

$$A_6(16, n, 4) = 0; \quad A_6(16, n, 5) = -(-1)^{\frac{n}{8}} \frac{2^6}{\pi^{10}};$$

$$A_7(16, n, 1) = (-1)^{\frac{n}{8}} \frac{1}{2^5\pi^2}; \quad A_7(16, n, 2) = (-1)^{\frac{n}{8}} \frac{1}{2^3\pi^4};$$

$$A_7(16, n, 3) = 0; \quad A_7(16, n, 4) = -(-1)^{\frac{n}{8}} \frac{4}{\pi^8};$$

$$A_7(16, n, 5) = -(-1)^{\frac{n}{8}} \frac{2^5}{\pi^{10}}; \quad A_7(16, n, 6) = -(-1)^{\frac{n}{8}} \frac{2^7}{\pi^{12}}.$$

Аналогично, из (4.8), (4.5) и (4.1), при $n \equiv 4$ или $12 \pmod{16}$, следует

$$A_k(16, n, s) = (-1)^{\frac{n+4}{8}} \frac{4i \cdot 2^{3s}}{2^{2k}\pi^{2s}} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} (-1)^l E(k-l).$$

Отсюда на основании (4.3) выводится

Лемма 4.17. Если $n \equiv 4$ или $12 \pmod{16}$, то

$$A_6(16, n, 1) = \frac{(-1)^{\frac{n+4}{8}}}{2^4\pi^2}; \quad A_6(16, n, 2) = 0; \quad A_6(16, n, 3) = (-1)^{\frac{n-4}{8}} \frac{2}{\pi^6};$$

$$A_6(16, n, 4) = (-1)^{\frac{n-4}{8}} \frac{2^4}{\pi^8}; \quad A_6(16, n, 5) = (-1)^{\frac{n-4}{8}} \frac{2^6}{\pi^{10}};$$

$$A_7(16, n, 1) = 0; \quad A_7(16, n, 2) = (-1)^{\frac{n-4}{8}} \frac{1}{2^3 \cdot \pi^4}; \quad A_7(16, n, 3) = (-1)^{\frac{n-4}{8}} \frac{2^7}{\pi^6};$$

$$A_7(16, n, 4) = (-1)^{\frac{n-4}{8}} \frac{4}{\pi^8}; \quad A_7(16, n, 5) = 0; \quad A_7(16, n, 6) = (-1)^{\frac{n+4}{8}} \frac{2^7}{\pi^{12}}.$$

Лемма 4.18.

$$A_k(32, n, s) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 4k \pmod{16}, \\ -\dfrac{2^{3s}}{4^{k-2}\pi^{2s}}, & \text{если } n \equiv 4k \pmod{16}, \text{ но } n \not\equiv 4k \pmod{32}, \\ \dfrac{2^{3s}}{2^8\pi^{2s}}, & \text{если } n \equiv 4k \pmod{32}. \end{cases}$$

В частности

$$A_6(32, n, s)=\begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 8, 24 \pmod{32}, \\ -\dfrac{2^{3s}}{2^8\pi^{2s}}, & \text{если } n \equiv 8 \pmod{32}, \\ \dfrac{2^{3s}}{2^8\pi^{2s}}, & \text{если } n \equiv 24 \pmod{32}, \end{cases}$$

$$A_7(32, n, s)=\begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 12, 28 \pmod{32}, \\ -\dfrac{2^{3s}}{2^{10}\pi^{2s}}, & \text{если } n \equiv 12 \pmod{32}, \\ \dfrac{2^{3s}}{2^{10}\pi^{2s}}, & \text{если } n \equiv 28 \pmod{32}. \end{cases}$$

Доказательство. Известно, что для нечетных h

$$S(h, 32)=8\,e\left(\frac{h}{8}\right).$$

Поэтому, в силу (3.6) и (3.12),

$$A_k(32, n, s)=\frac{1}{2^{5k}}\sum_{h \bmod 32}{}' (S(h, 32))^{k-s}\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^s (S(h, 32))^s\, e\left(-\frac{nh}{32}\right)=$$

$$=\frac{2^{3s}}{2^{5k}\pi^{2s}}\sum_{h \bmod 32}{}' (S(h, 32))^k\, e\left(-\frac{nh}{32}\right)=$$

$$=\frac{2^{3s}}{2^{2k}\pi^{2s}}\sum_{h \bmod 32}{}' e\left(\frac{h(4k-n)}{32}\right). \tag{4.9}$$

Как известно,

$$\sum_{h \bmod 32}{}' e\left(\frac{h(4k-n)}{32}\right)=\begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 4k \pmod{16}, \\ -16, & \text{если } n \equiv 4k \pmod{16}, \text{ но } n \not\equiv 4k \pmod{32}, \\ 16, & \text{если } n \equiv 4k \pmod{32}. \end{cases}$$

Последнее, совместно с (4.9), доказывает лемму.

Доказательство теоремы 3 следует из лемм 4.1 — 4.18.

§ 5. В этом параграфе $k \geqslant 6$ и p — нечетное простое число.

Теорема 4. Для $p>2$ бесконечное произведение $\prod\limits_{p>2} \chi(p)$ сходится и

$$\prod_{p>2} \chi(p)>0.$$

К доказательству теоремы предпошлём несколько лемм.

Известно, что если $p \nmid n$, то

$$S(h, p^l)=\begin{cases} p^{\frac{l}{2}}, & \text{для четных } l,\\ p^{\frac{l-1}{2}} S(h, p), & \text{для нечетных } l>1,\end{cases} \tag{5.1}$$

$$S(h, p)=\left(\frac{h}{p}\right) S(1, p)=\left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2}$$

Далее, на основании (3.6) и (3.10), для $0 \leqslant l \leqslant 4$ и $0<s<k$

$$A_k(p^l, n, s)=\frac{1}{p^{kl}} \sum_{h \bmod p^l}' (S(h, p^l))^{k-s} \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s (1-p^{-2})^{-s}((S(h, p^l) -$$

$$- p^{l-2})^s e\left(-\frac{nh}{p^l}\right)=\frac{1}{p^{kl}} \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s (1-$$

$$- p^{-2})^{-s} \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} (-1)^m p^{(l-2)m} \sum_{h \bmod p^l}' (S(h, p^l))^{k-m} e\left(-\frac{nh}{p^l}\right). \tag{5.3}$$

Лемма 5.1. Для $0<s<k$

$$A_k(p^2, n, s)=\begin{cases} 0, & \text{если } p \nmid n,\\ -\dfrac{1}{p^{k-1}}\left(\dfrac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\dfrac{p}{p+1}\right)^s, & \text{если } p \parallel n,\\ \dfrac{p-1}{p^{k-1}}\left(\dfrac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\dfrac{p}{p+1}\right)^s, & \text{если } p^2 \mid n.\end{cases}$$

Доказательство. Из (5.3) и (5.1), при $l=2$, следует

$$A_k(p^2, n, s)=\frac{1}{p^k}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s (1-p^{-2})^{-s} \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} (-1)^m p^{-m} \sum_{h \bmod p^2}' e\left(-\frac{nh}{p^2}\right).$$

Отсюда, имея в виду, что

$$\sum_{h \bmod p^2}' e\left(-\frac{nh}{p^2}\right)=\begin{cases} 0, & \text{если } p \nmid n,\\ -p, & \text{если } p \parallel n,\\ p(p-1), & \text{если } p^2 \mid n,\end{cases}$$

получаем доказательство леммы.

Лемма 5.2.

$$A_k(p, n, s)=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{p-1}{p^{\frac{k}{2}}}\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s \sum_{\substack{l=0\\ l \equiv k \pmod 2}}^{k} \binom{s}{l} (-1)^l p^{-\frac{3}{2}l},$$

если $p \mid n$ и $p \equiv 1 \pmod 4$,

$$=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{p\quad 1}{p^{\frac{k}{2}}}\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s \sum_{\substack{l=0\\ l\equiv k\,(\mathrm{mod}\,2)}}^{s} \binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{3}{2}l}\, i^{k-l},$$

если $p\,|\,n$ и $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$,

$$=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s \left\{-\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv k\,(\mathrm{mod}\,2)}}^{s} \binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{3}{2}l}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{n}{p}\right)p^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l=0\\ l\equiv k+1\,(\mathrm{mod}\,2)}}^{s} \binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{3}{2}l}\right\},$$

если $p\nmid n$ и $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$,

$$=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s \left\{-\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv k\,(\mathrm{mod}\,2)}}^{s} \binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{3}{2}l}\, i^{k-l}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{n}{p}\right)p^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l=0\\ l\equiv k+1\,(\mathrm{mod}\,2)}}^{s} \binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{3}{2}l}\, i^{k-l+1}\right\},$$

если $p\nmid n$ и $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

Доказательство. Из (5.3), (5.1) и (5.2) следует

$$A_k(p, n, s)=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{1}{p^k}(1-p^{-2})^{-s}\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}(-1)^m p^{-m}\times$$

$$\times \sum_{h \bmod p}{}' p^{\frac{k-m}{2}}\left(\frac{h}{p}\right)^{k-m} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2(k-m)}\, e\left(-\frac{nh}{p}\right)=$$

$$=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}(1-p^{-2})^{-s}\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}(-1)^m p^{-\frac{3}{2}m}\, i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2(k-m)}\times$$

$$\times \sum_{h \bmod p}{}'\left(\frac{h}{p}\right)^{k-m} e\left(\frac{nh}{p}\right). \tag{5.4}$$

Далее,

$$\sum_{h \bmod p}{}'\left(\frac{h}{p}\right)^{k-m} e\left(-\frac{nh}{p}\right)=$$

$$
=\begin{cases} 0, & \text{если } p\,|\,n \text{ и } m\not\equiv k\,(\mathrm{mod}\ 2),\\ p-1, & \text{если } p\,|\,n \text{ и } m\equiv k\,(\mathrm{mod}\ 2),\\ -1, & \text{если } p\nmid n \text{ и } m\equiv k\,(\mathrm{mod}\ 2),\\ \left(-\frac{n}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{1}{2}}, & \text{если } p\nmid n \text{ и } m\not\equiv k\,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{5.5}
$$

Теперь, доказательство леммы следует из (5.4) и (5.5).

Лемма 5.3.

$$A_k(p^3, n, s)=0, \text{ если } p^2\nmid n,$$

$$=\frac{p^2(p-1)}{p^{\frac{3}{2}\mathrm{k}}}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv \mathrm{k}\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{\mathrm{s}}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{3}{2}l},$$

если $p^3\,|\,n$ и $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$,

$$=\frac{p^2(p-1)}{p^{\frac{3}{2}\mathrm{k}}}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv \mathrm{k}\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{\mathrm{s}}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{l}{2}} i^{k-l},$$

если $p^3\nmid n$ и $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$,

$$=-\frac{p^2}{p^{\frac{3}{2}\mathrm{k}}}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s\left\{\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv \mathrm{k}\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{\mathrm{s}}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{l}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-m}{p}\right)p^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv \mathrm{k}+1\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{\mathrm{s}}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{l}{2}}\right\},$$

если $n=mp^2$, $p\nmid m$ и $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$,

$$=-\frac{p^2}{p^{\frac{3}{2}\mathrm{k}}}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s\left\{\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv \mathrm{k}\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{\mathrm{s}}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{l}{2}} i^{k-l}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{-m}{p}\right)p^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{l=0\\ l\equiv \mathrm{k}+1\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{\mathrm{s}}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{l}{2}} i^{k-l+1}\right\},$$

если $n=mp^2$, $p\nmid m$ и $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

Доказательство. На основании (5.3), (5.1) и (5.2)

$$A_k(p^3, n, s)=\frac{1}{p^{\frac{3\mathrm{k}}{2}}}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^s\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}(-1)^l p^{-\frac{l}{2}} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2(\mathrm{k}-l)}\times$$

$$\times \sum_{h \bmod p^3}{}' \left(\frac{h}{p}\right)^{k-l} e\left(-\frac{nh}{p^3}\right). \tag{5.6}$$

Здесь

$$\sum_{h \bmod p^3}{}' \left(\frac{h}{p}\right)^{k-l} e\left(-\frac{nh}{p^3}\right)=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если } p^2 \nmid n, \\ -p^2, & \text{если } p^2 \mid n \text{ и } l \equiv k \pmod 2, \\ \left(\frac{-m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{5}{2}}, & \text{если } p^3 \mid n \text{ и } l \equiv k \pmod 2, \\ p(p-1), & \text{если } p^3 \mid n \text{ и } l \equiv k \pmod 2, \\ 0, & \text{если } p^3 \mid n \text{ и } l \neq k \pmod 2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Доказательство леммы следует из (5.6) и (5.7).

Доказательство теоремы 4. На основании (3.8) и лемм 3.1, 5.1 — 5.3 следует, что $\chi(p) > 0$ и $\chi(p) = 1 + O\left(p^{-\frac{k}{2}+1}\right)$. Это доказывает справедливость теоремы 4.

Доказательство теоремы 2 следует из теорем 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Estermann. On sums of squares of square-free numbers. Proceedings of the London mathematical Society, S. 2, Vol. 53 (1951).
2. А. В. Малышев. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LXV (1964).
3. А. П. Лурсманашвили. О представлении натуральных чисел суммами квадратов бесквадратных чисел и о числе целых точек в шарах с бесквадратными координатами. Труды Тбилисского математического института, т. XXIX (1963).

Кафедра
общей математики № 2

(Поступило в редакцию 7. XII. 1966)

ა. ლურსმანაშვილი

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ მთელი და მთელი უკვადრატო რიცხვების კვადრატების ჯამის სახით

რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია $R_{k,s}(n)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს ნატურალური n რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობას s ($0 \leqslant s \leqslant k$) მთელი უკვადრატო და $k-s$ მთელი რიცხვების კვადრატების ჯამის სახით, იმ შემთხვევაში, როდესაც $k \geqslant 6$. მიღებული შედეგები მოყვანილია 1 და 2 თეორემებში.

ეს თეორემები წარმოადგენენ თ. ესტერმანის ცნობილი შედეგის გაუმჯობესებას და განზოგადებას.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Э. Д. АЛШИБАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В МНОГОМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На основе теории внешних дифференциальных форм и теории представлений непрерывных групп Г. Ф. Лаптев дал единый инвариантный метод дифференциально-геометрических исследований погруженных многообразий. Применяя этот метод, мы будем рассматривать некоторые вопросы дифференциальной геометрии гиперповерхности в аффинном пространстве. На продолжении всей работы будем пользоваться объектами, которые были построены Г. Ф. Лаптевым при исследовании гиперповерхности проективного пространства [1], не ссылаясь каждый раз на это.

Рассмотрим $n+1$-мерное аффинное пространство, фундаментальной группой которого является группа аффинных преобразований. Образующим элементом пространства будем считать точку; стационарной подгруппой—группу центроаффинных преобразований.

Отнесем пространство к подвижному векторному реперу, состоящему из $n+1$ линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}$, исходящих из текущей точки M пространства. Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} &= \omega^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ \overrightarrow{de_\alpha} &= \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{1}$$

где ω^α, ω_α^β являются инвариантными дифференциальными формами аффинной группы. Они подчинены структурным уравнениям Картана

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \\ d\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \end{aligned} \tag{2}$$

выражающими условия полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1).

Совместим вершину подвижного репера с текущей точкой гиперповерхности и расположим векторы $\vec{e}_i\,(i=1,\ 2.\dots,n)$ в касательной гиперплоскости. Тогда дифференциальное уравнение гиперповерхности будет иметь вид

$$\omega^{n+1}=0. \tag{3}$$

Продифференцировав уравнение (3) и применив лемму Картана, получим продолженные уравнения

$$\omega_i^{\ n+1}=l_{ij}\omega^j, \tag{4}$$

где коэффициенты $l_{ij}=l_{ji}$ называются компонентами фундаментального объекта второго порядка.

Дальнейшие продолжения дифференциального уравнения гиперповерхности приводят к последовательности дифференциально-геометрических объектов гиперповерхности, которые внутренне определяются этой поверхностью. Возникают объекты $l_{ij}, l_{ijk}, l_{ijkl},\cdots$, симметричные по всем индексам и удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}
dl_{ij}=l_{il}\omega^l_j=l_{lj}\omega_i^{\ l}-l_{ij}\omega^{n+1}_{n+1}+l_{ijl}\,\omega^l, \\
dl_{ijk}=l_{ijl}\omega^l_{\ k}+l_{ilk}\omega^l_{\ j}+l_{ljk}\,\omega_i^{\ l}+l_{(ij}l_{k)e}\,\omega^l_{\ kn+1}-l_{ijk}\,\omega^{n+1}_{n+1}+l_{ijkl}\omega^l, \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots
\end{gathered} \tag{5}$$

Из дифференциального уравнения для l_{ij} видно, что система величин l_{ij} определяет тензор, который будем называть фундаментальным тензором второго порядка гиперповерхности.

В настоящей работе мы будем изучать фундаментальные объекты II, III и IV порядков гиперповерхности и строить объекты ими охваченные, имеющие определенный геометрический смысл.

§ 1. Окрестность второго порядка

Обозначим через l детерминант $|\,l_{ij}|$. Будем считать, что $l=|\,l_{ij}\,|\neq 0$ и введем матрицу $\|\,l^{ij}\,\|$ приведенных миноров так, что

$$l^{ik}l_{kj}=\delta^i{}_j,\quad (l^{ij}=l^{ji}). \tag{6}$$

Продифференцировав эти тождества (6), мы получим

$$dl^{ik}l_{kj}+l^{ik}dl_{kj}=0,$$

откуда

$$dl^{kl}=-\,l^{ki}l^{lj}dl_{ij}. \tag{7}$$

Подставив сюда выражения (5) для дифференциалов, будем иметь

$$dl^{ij}=-l^{im}\omega_m^j-l^{mj}+\omega^i{}_m+l^{ij}\,\omega^{n+1}_{n+1}-l^{ik}\,l^{jt}\,l_{ktm}\omega^m. \tag{8}$$

Пользуясь тем, что

$$dl=ll^{ij}dl_{ij},$$

получим

$$dl_n l = 2\omega_i^{\ i} - n\omega_{n+1}^{n+1} + b_k\omega^k, \tag{9}$$

где

$$b_k = l^{ij} l_{ijk}. \tag{0'}$$

Как видно из уравнений (8) и (9), l^{ij} является тензором, а l—относительным инвариантом.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi = l_{ij}\,\omega^i\omega^j. \tag{10}$$

Эта форма является относительным инвариантом. Уравнение

$$l_{ij}\omega^i\omega^j = 0$$

определяет конус асимптотических направлений.

§ 2. Окрестность третьего порядка

1. Некоторые объекты, связанные с гиперповерхностью. При помощи уже известных объектов l_{ij}, l^{ij}, l_{ijk} построим новые объекты

$$l^i{}_{jk} = l^{im} l_{mjk}, \quad l^{ij}_k = l^{it} l^{js} l_{tsk}, \quad l^{ijk} = l^{it} l^{js} l^{km} l_{tm}, \tag{11}$$

компоненты которых удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dl^i{}_{jk} = l^i{}_{jm}\,\omega_k^m + l^i{}_{mk}\,\omega_j^m - l^m_{jk}\,\omega^i{}_m + \delta^i{}_{(}\,l_{k)m}\,\omega^m_{n+1} + \widetilde{l}^i{}_{jkm}\,\omega^m,$$

$$dl^{ij}_k = l^{ij}_m\,\omega_k^m - l^{im}_k\,\omega^j{}_m - l^{mj}_k\,\omega^i{}_m + l^{ij}_k\,\omega^{n+1}_{n+1} + (l_{km} l^{ij} + \delta^i{}_{(k}\delta^j{}_{m)})\,\omega^m_{n+1} + \widetilde{l}^{ij}_{km}\omega^m, \tag{12}$$

$$dl^{ijk} = -\,l^{ijm}\,\omega_m^k - l^{imk}\,\omega_m^j - l^{mjk}\omega^i{}_m + 2l^{ijk}\omega^{n+1}_{n+1} + \delta_m^{(i}\,l^{jk)}\omega^m_{n+1} + \widetilde{l}^{ijk}_m\,\omega^m.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение для величин

$$b_k = l^{ij} l_{ijk} = l^j_{jk},$$
$$db_k = b_l\omega^l{}_k + (n+2) l_{kl}\omega^l{}_{n+1} + a_{kl}\omega^l. \tag{13}$$

Введем объект

$$b^i = l^{ik} b_k = l^{ij}_j. \tag{14}$$

Из (12) следует, что дифференциальные уравнения для него имеют следующий вид:

$$db^i = -b^l\omega^i{}_l + b^i\,\omega^{n+1}_{n+1} + (n+2)\omega^i{}_{n+1} + p_l^{\ i}\,\omega^l \tag{14'}$$

(система величин b_k впервые появилась у А. П. Нордена под названием чебышевского вектора).

Свернув b_k с b^k, и l_{ijk} с l^{ijk}, получим

$$\widetilde{b} = b_k b^k = l^q_{qk}\, l^{sk}_s, \tag{15}$$

$$d\widetilde{b}=\widetilde{b}\,\omega_{n+1}^{n+1}+2(n+2)\,b_l\,\omega^l{}_{n+1}+\widetilde{b}_l\omega^l, \tag{15}$$

$$\widetilde{l}_0=l^{ijk}l_{ijk}=l^i{}_{st}\,l_i{}^t, \tag{16}$$

$$d\widetilde{l}_0=\widetilde{l}_0\omega_{n+1}^{n+1}+6b_l\omega^l{}_{n+1}+[\ ]_l\omega^l. \tag{16$'$}$$

Объект

$$l_0=\frac{\widetilde{l}_0}{3}-\frac{\widetilde{b}}{n+2}, \tag{17}$$

дифференциальное уравнение которого имеет вид

$$dl_n l_0=\omega_{n+1}^{n+1}+n_l\omega^l, \tag{17$'$}$$

является относительным инвариантом.

В окрестности третьего порядка определяется система величин

$$b_{ijk}=(n+2)l_{ijk}-l_{(ij}b_{k)}. \tag{18}$$

Система дифференциальных уравнений для этих величин имеет вид

$$db_{ijk}=b_{ijl}\,\omega^l{}_k+b_{ilk}\omega^l{}_j+b_{ljk}\omega^l{}_i-b_{ijk}\omega_{n+1}^{n+1}+b_{ijkl}\omega^l. \tag{18$'$}$$

Мы видим, что система величин b_{ijk} образует тензор; этот тензор называется тензором Дарбу. Тензор b_{ijk} аполярен фундаментальному тензору l^{ij}

$$l^{ij}b_{ijk}=0. \tag{19}$$

При помощи l^{ij} и b_{ijk} определяются следующие объекты:

$$b_{ij}^k=l^{kl}b_{ijl},\ db_{ij}^k=b_{il}^k\,\omega_j^l+b_{lj}^k\omega_i^l-b^l{}_{ij}\,\omega_l{}^k+\widetilde{b}^{\,k}_{ijl}\omega^l,\ \ b^k_{ij}=0,$$

$$b^{ij}_k=l^{it}l^{js}b_{tsk},\ \ db^{ij}_k=b^{ij}_l\,\omega^l_k-b^{il}_k\,\omega^j_l-b^{lj}\omega^i{}_l+b^{ij}_k\,\omega_{n+1}^{n+1}+\widetilde{b}^{\,ij}_{kl}\omega^l,\ \ b^{kj}_k=0, \tag{20}$$

$$b^{ijk}=l^{ip}l^{jq}l^{kr}b_{pqr},\ \ db^{ijk}=-b^{ijl}\omega_l{}^k-b^{ilk}\omega_l{}^j-b^{ljk}\omega_l{}^i+2b^{ijk}\omega_{n+1}^{n+1}+\widetilde{b}_l{}^{ijk}\omega^l.$$

Составим величины b_{ij} при помощи следующих уравнений:

$$b_{ij}=l^{rs}l^{tq}b_{\cdot ti}b_{\cdot qj},\quad (b_{ij}=b_{ji}). \tag{21}$$

Дифференцирование (21) дает

$$db_{ij}=b_{il}\omega^l{}_j+b_{lj}\omega^l{}_i+\widetilde{b}_{ijl}\omega^l. \tag{22}$$

Из уравнений (22) мы видим, что система величин b_{ij} образует тензор.

Обозначив дискриминант тензора b_{ij} через $b=|\,b_{ij}\,|$, получим

$$d\,l_n b=2\omega_i{}^i+t_l\omega^l. \tag{23}$$

Будем считать, что $|\,b_{ij}\,|\neq 0$; определим величины b^{ij} так, что

$$b^{ik}b_{jk}=\delta^i{}_j.$$

Дифференциальные уравнения для величин b^{ij} будут иметь вид

$$db^{ij}=-b^{il}\omega_l{}^j-b^{lj}\omega_l{}^i-b^{ik}b^{it}\widetilde{b}_{ktl}\omega^l. \tag{24}$$

Рассмотрим объект

$$b_0 = b^{ijk} b_{ijk} = l^{ij} b_{ij}. \tag{25}$$

Дифференцирование (25) дает

$$d \ln b_0 = \omega_{n+1}^{n+1} + c_k \omega^k. \tag{25'}$$

Из уравнения (25′) видно, что b_0 является относительным инвариантом. Этот относительный инвариант называют инвариантом Пика.

Заметим, что величины l_0 (17) только числовым множителем отличаются от

$$l_0 = \frac{b_0}{3(n+2)^2}. \tag{26}$$

Введем величину

$$\hat{l}_0 = l^{ijk} b_{ijk}. \tag{27}$$

При помощи равенств (18) можно показать, что

$$\hat{l}_0 = \frac{b_0}{n+2}. \tag{27'}$$

Обозначим

$$\tilde{a}_{ij} = b^k l_{kij} - \frac{b_i b_j}{n+2}. \tag{28}$$

Дифференцируя (28) с учетом (13), (14′) и (6), получим

$$d\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{il}\,\omega^l{}_j + \tilde{a}_{lj}\,\omega_i{}^l + [(n+2)\, l_{ijl} + l_{ij} b_l]\omega^l{}_{n+1} + [\ ]_{ijl}\omega^l. \tag{28'}$$

Для свертки

$$\tilde{a} = l^{ij} \tilde{a}_{ij} = \frac{n+1}{n+2}\tilde{b} \tag{29}$$

находим

$$d\tilde{a} = \tilde{a}\,\omega_{n+1}^{n+1} + 2(n+1) b_l \omega^l{}_{n+1} + [\ ]_l \omega_p. \tag{29'}$$

2. Аффинная нормаль гиперповерхности. Рассмотрим вектор, который проходит через точку гиперповерхности и не лежит в касательной гиперплоскости

$$\vec{p} = x^k \vec{e}_k + \vec{e}_{n+1}.$$

Дифференциальное уравнение инвариантности вектора в фиксированной точке ($\omega^i = 0$) имеет вид

$$\delta x^k = -x^l \omega_l{}^k + x^k \omega_{n+1}^{n+1} - \omega_{n+1}^{k}. \tag{30}$$

Этому уравнению удовлетворяют величины $x^k = -\dfrac{b^k}{n+2}$. Следовательно, поле вектора

$$\vec{p} = -\frac{b^k}{n+2}\vec{e}_k + \vec{e}_{n+1} \tag{31}$$

является инвариантным полем, внутренне связанным с гиперповерхностью. Для двумерной поверхности вектор $\vec{p}$ (31) совпадает с нормалью Бляшке. Сохраним это название и для общего случая гиперповерхности.

Заметим, что нормаль Бляшке гиперповерхности определяется фундаментальным объектом третьего порядка.

Прямые канонического пучка также будут аффинными нормалями (четвертого порядка), но кроме них к гиперповерхности естественным образом инвариантно присоединяются аффинные нормали четвертого порядка, не принадлежащие каноническому пучку. А именно,

$$\vec{p}=c^k\vec{e_k}+\vec{e}_{n+1},$$

$$\vec{p}=-\frac{t^k}{2}\vec{e_k}+\vec{e}_{n+1}$$

и др.

3. **Пучок соприкасающихся гиперквадрик.** Уравнение гиперквадрики, относительно некоторого локального репера, имеет вид

$$A_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta+2A_\alpha X^\alpha+A=0,\quad (\alpha,\,\beta=1,\ 2,\cdots n+1). \tag{32}$$

Найдем дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты $A_{\alpha\beta}$, A_α, A гиперквадрики, инвариантно связанной с текущей точкой гиперповерхности, т. е. при условии $\omega^i=0$.

При инфинитезимальном перемещении репера получаем

$$(A_{\alpha\beta}+\delta A_{\alpha\beta})(X^\alpha-X^\gamma\omega_\gamma^\alpha)(X^\beta-X^\gamma\omega_\gamma^\beta)+$$

$$+2\,(A_\alpha+\delta A_\alpha)\,(X^\alpha-X^\gamma\omega_\gamma^\alpha)+A+\delta A\cong 0$$

(где δ — символ частного дифференциала при условии $\omega^i=0$) или

$$(\delta A_{\alpha\beta}-A_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma-A_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma)X^\alpha X^\beta+2\,(\delta A_\alpha-A_\gamma\omega_\alpha^\gamma)X^\alpha+\delta A\cong 0. \tag{33}$$

Отсюда следует, что система дифференциальных уравнений инвариантности гиперквадрики имеет вид

$$\begin{aligned}&\delta A_{\alpha\beta}-A_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma-A_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\beta=\theta A_{\alpha\beta},\\ &\delta A_\alpha-A_\gamma\,\omega_\alpha^\gamma=\theta\,A_\alpha,\\ &\delta A=\theta A.\end{aligned} \tag{34}$$

Потребуем, чтобы гиперквадрика имела с гиперповерхностью касание второго порядка, т. е. чтобы на гиперквадрике с точностью до величин второго порядка малости лежали точки $dM+\frac{1}{2}d^2M$. Это требование приводит к следующим соотношениям:

$$A=0,\ A_i=0,\ A_{ij}=-A_{n+1}\,l_{ij}. \tag{35}$$

Если положим $A_{n+1}=-1$, то $A_{ij}=l_{ij}$.

Следовательно, уравнение соприкасающейся гиперквадрики имеет вид

$$l_{ij}X^iX^j+2A_{in+1}X^iX^{n+1}-2X^{n+1}+A_{n+1,\,n+1}X^{n+1}X^{n+1}=0. \tag{36}$$

Для полученных гиперквадрик система дифференциальных уравнений инвариантности (34) принимает вид

$$\begin{aligned}\delta A_{in+1}&=A_{kn+1}\omega_i^{\,k}+l_{ik}\omega_{n+1}^{k},\\ \delta A_{n+1,\,n+1}&=A_{n+1,\,n+1}\,\omega_{n+1}^{n+1}+2A_{in+1}\omega^i{}_{n+1}.\end{aligned} \tag{37}$$

Система (37) удовлетворяется, если положим

$$A_{in+1}=\frac{b_i}{n+2},\quad \text{а}\quad A_{n+1,\,n+1}=\frac{\widetilde{b}}{(n+2)^2}\quad \text{или}\quad A_{n+1,\,n+1}=\frac{\widetilde{l}_0}{3(n+2)},$$

$$A_{n+1,\,n+1}=\frac{\widetilde{a}}{(n+1)(n+2)}, \tag{37'}$$

а также, если в качестве коэффициента $A_{n+1,\,n+1}$ взять величину

$$A_{n+1,\,n+1}=\frac{\widetilde{b}}{(n+2)^2}+\sigma\left(\frac{\widetilde{l}_0}{3(n+2)}-\frac{\widetilde{b}}{(n+2)^2}\right)=\frac{\widetilde{b}}{(n+2)^2}+\sigma b_0, \tag{37''}$$

где σ — любой абсолютный инвариант, а b^i, $\widetilde{b}$, $\widetilde{l}_0$, $\widetilde{a}$, b_0 — объекты третьего порядка, введенные нами ранее ((14), (15), (16), (9), (25)).

Таким образом, мы получаем однопараметрический пучок инвариантно присоединенных к гиперповерхности соприкасающихся гиперквадрик, коэффициенты которых охвачены фундаментальными объектами третьего порядка

$$l_{ij}X^iX^j+\frac{2b_i}{n+2}X^iX^{n+1}-2X^{n+1}+\left(\frac{\widetilde{b}}{(n+2)^2}+\sigma b_0\right)=0. \tag{38}$$

Если рассмотреть поверхность в трехмерном пространстве и векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ направить по асимптотическим касательным, а вектор $\vec{e}_3$ по аффинной нормали и считать, что $\sigma=0$, то инвариантная соприкасающаяся гиперквадрика будет определятся уравнением

$$xy-2z=0,$$

т. е. будет представлять собой параболоид, ось которого направлена по вектору $\vec{e}_3$.

4. Кубичная форма Фубини-Пика. Рассмотрим кубичную форму

$$\phi=b_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k. \tag{39}$$

Она является относительным инвариантом и называется кубичной формой Фубини-Пика. Нулевые направления кубичной формы называются направлениями Дарбу. Если $b_{ijk}=0$, то гиперповерхность вырождается в гиперквадрику [1].

Покажем, что гиперквадрика по линиям Дарбу имеет с гиперповерхностью касание третьего порядка.

Уравнение соприкасающейся гиперквадрики имеет вид

$$l_{ij}X^iX^j+2A_{in+1}X^iX^{n+1}-2X^{n+1}+2A_{n+1,\,n+1}X^{n+1}X^{n+1}=0.$$

Рассмотрим теперь вопрос о касании третьего порядка гиперквадрики с гиперповерхностью, т. е. потребуем чтобы на гиперквадрике, с точностью до величин третьего порядка малости, лежали точки

$$dM+\frac{1}{2}d^2M+\frac{1}{3!}d^3M.$$

Это требование приводит к следующему уравнению:

$$(l_{ijk}-l_{(ij}A_{k)n+1})\omega^i\omega^j\omega^k=0. \tag{40}$$

С учетом строения тензора Дарбу (18), соотношение (40) принимает вид

$$b_{ijk}=\omega^i\omega^j\omega^k=0. \tag{41}$$

Отсюда следует, что гиперквадрика лишь по линиям Дарбу имеет с гиперповерхностью касание третьего порядка (если только гиперповерхность не является гиперквадрикой).

§ 3. Окрестность четвертого порядка

1. Объекты четвертого порядка, охваченные фундаментальными объектами. Дифференциальные уравнения для величин b^k определяют систему новых величин $p_k{}^i$ четвертого порядка

$$db^i=-b^l\omega^i{}_l+b^i\omega^{n+1}_{n+1}+(n+2)\,\omega^i{}_{n+1}+p^i{}_l\omega^l.$$

Для $p^i{}_k$ получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$dp^i{}_k=-p^l{}_k\omega^i+p^i{}_l\omega^i{}_k-(\delta^i{}_lb_k+q^il_{kl})\omega^l{}_{n+1}+p^i{}_k\omega^{n+1}_{n+1}\widetilde{P}^i{}_{kp}+\omega l. \tag{42}$$

При помощи этих величин $p^i{}_k$ и уже известных величин второго и третьего порядка определим новые величины четвертого порядка

$$\widetilde{A}_{jk}=l_{ij}\,p^i{}_k+\frac{b_jb_k}{n+2}, \tag{43}$$

$$d\widetilde{A}_{jk}=\widetilde{A}_{lk}\omega^l{}_k+\widetilde{A}_{lk}\omega^l{}_j+\widetilde{A}_{jkl}\omega^l. \tag{44}$$

Система величин $\widetilde{A}_{jk}$ определяет тензор.

Рассмотрим свертку

$$A=l^{ij}\widetilde{A}_{ij}. \tag{45}$$

Дифференцирование дает

$$dA=A\omega^{n+1}_{n+1}+A_l\omega^l. \tag{45'}$$

Из уравнения (45′) видно, что A является относительным инвариантом.

Построим величины

$$\hat{A}_{jk} = \widetilde{A}_{jk} - \frac{1}{n} l_{ij} A, \tag{46}$$

$$d\hat{A}_{jk} = \hat{A}_{jl}\omega_i{}^l + \hat{A}_{lk}\omega^l{}_j + \hat{A}_{jkl}\omega^l. \tag{46'}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что тензор $\hat{A}_{jk}$ аполярен основному тензору

$$l^{jk}\hat{A}_{jk} = 0. \tag{47}$$

Введем величины $\widetilde{r}_k$

$$\widetilde{r}_k = b_k^{ij}\widetilde{A}_{ij}, \tag{48}$$

$$d\widetilde{r}_k = \widetilde{r}_l\omega^l{}_k + \widetilde{r}_k\,\omega_{n+1}^{n+1} + [\ ]_{kl}\omega^l. \tag{48'}$$

При помощи тензора b^{sk} (24) составим величины

$$r^s = b^{sk}\widetilde{r}_k, \tag{49}$$

$$dr^s = -r^l\omega_l{}^s + r^s\omega_{n+1}^{n+1} + [\ ]_{lk}\omega^l. \tag{49'}$$

Система величин

$$r_i = l_{is}r^s, \tag{50}$$

$$dr_i = r_l\omega_i{}^l + [\ ]_{il}\omega^l \tag{50'}$$

образует одновалентный тензор.

Рассмотрим величины

$$l^i = \frac{b^i}{n+2} + r^i, \tag{51}$$

$$dl^i = -l^m\omega^i{}_m + l^i\omega_{n+1}^{n+1} + \omega^i{}_{n+1} + q^i{}_m\omega^m; \tag{51'}$$

величины l^i определяют директрису Вильчинского [1]. Свертывая величины (51) с l_{ik}, получим

$$l_i = l_{ik}l^k, \tag{52}$$

$$dl_i = l_m\omega_i{}^m + l_{im}\omega_{n+1}^{m} + [\ ]_{il}\omega^l. \tag{52'}$$

Или с учетом (51), (50)

$$l_i = \frac{b_i}{n+2} + r_i. \tag{53}$$

Дифференциальное уравнение (25) для b_0 определяет систему величин c_k. Продолжение уравнения (25) приводит к системе

$$dc_k = c_l\omega^l{}_k - l_{kl}\omega^l{}_{n+1} + m_{il}\omega^l. \tag{54}$$

Система величин

$$c^i = l^{ik}c_k \tag{55}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида

$$dc^i = -c^l\omega^i{}_l + c^i\omega_{n+1}^{n+1} - \omega^i{}_{n+1} + c^i{}_l\omega^l \tag{55'}$$

и определяет аффинную нормаль четвертого порядка.

Комбинируя величины c_k (25) и b_k (9), введем величины J_i, J^i, h_i, h^i:

$$J_k=\frac{1}{2}\left(c_k-\frac{b_k}{n+2}\right), \tag{56}$$

$$dJ_k=J_l\omega^l{}_k-l_{kl}\omega^l{}_{n+1}=[\ ]_{kl}\omega^l, \tag{56'}$$

$$J^i=l^{ik}J_k, \tag{57}$$

$$dJ^i=-J\omega_l{}^i+J^i\omega^{n+1}_{n+1}-\omega^i{}_{n+1}+s^i{}_l\omega^l; \tag{57'}$$

J^i определяет проективную нормаль [1].

Рассмотрим величины

$$h_k=\frac{1}{2}\left(c_k+\frac{b_k}{n+2}\right), \tag{58}$$

$$dh_k=h_i\omega^l{}_k+r_{kl}\omega^l, \tag{58'}$$

h_k—одновалентный тензор.

Система величин

$$\hat{c}_i=h_i+r_i, \tag{59}$$

$$d\hat{c}_i=\hat{c}_l\omega^l{}_i+\partial_{il}\omega^l, \tag{59'}$$

определяет одновалентный тензор, называемый каноническим вектором [1].

Дифференциальное уравнение (23) для $b=|b_{ij}|$ определяет величины t_i четвертого порядка. Дифференциальные уравнения для них будут иметь вид

$$dt_k=t_l\omega^l{}_k+2l_{kl}\omega^l{}_{n+1}+\tilde{t}_{kl}\omega^l. \tag{60}$$

Свертывая t_k с объектом l^{ik}, введем величины t^i

$$t^i=l^{ik}t_k. \tag{61}$$

Эти величины будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$dt^i=-t^l\omega^i{}_l+2\omega^i{}_{n+1}+t^i\omega^{n+1}_{n+1}+\tilde{t}^i{}_l\omega^l. \tag{61'}$$

Отсюда видно (см. (30)), что система величин t^i определяет аффинную нормаль четвертого порядка.

2. Канонический пучок проективных нормалей. Классический канонический пучок проективных нормалей для гиперповерхности проективного пространства обобщил Г. Ф. Лаптев [1]. Этот пучок в аффинном генере записывается следующим образом:

$$\vec{n}=[(\tau-1)l^i+\tau J^i]\vec{c}_i+\vec{e}_{n+1}, \tag{62}$$

где τ—инвариант.

Отсюда выделяется, при $\tau=0$, директриса Вильчинского,

$\tau=1$ проективная нормаль,

$\tau=\dfrac{1}{3}$ ось Чеха,

$$\tau=\frac{1}{4} \text{ прямая Картана,}$$

$$\tau=\infty \text{ каноническая касательная.}$$

Аффинная нормаль Бляшке $\vec{n}=-\dfrac{b^i}{n+2}\vec{e_i}+\vec{e}_{n+1}$, вообще говоря, не входит в этот пучок. Выясним, когда одна из канонических прямых совпадает с аффинной нормалью.

Пользуясь (51), (56), (57), запишем пучок проективных нормалей (62) в другом виде

$$\vec{n}=\left[\frac{1}{2}(\tau-2)\frac{b^i}{n+2}+(\tau-1)r^i+\frac{1}{2}\,rc^i\right]\vec{e_i}+\vec{e}_{n+1}. \tag{63}$$

Если ввести обозначение

$$p^i=\frac{1}{2}(\tau-2)\frac{b^i}{n+2}+(\tau-1)r^i+\frac{1}{2}\,\tau c^i, \tag{64}$$

то канонический пучок примет вид

$$\vec{n}=p^i\vec{e_i}+\vec{e}_{n+1}. \tag{63'}$$

3. Условия совпадения аффинной нормали Бляшке с одной из прямой канонического пучка. Для того, чтобы каноническая прямая совпала с нормалью Бляшке нужно, чтобы

$$\vec{n}-\lambda\vec{n}_1=0,$$

где

$$\vec{n}=p^i\vec{e_i}+\vec{e}_{n+1},\quad \vec{n}_1=-\frac{b^i}{n+2}\vec{e_i}+\vec{e}_{n+1},$$

т. е.

$$\vec{n}-\lambda\vec{n}_1=\left(p^i+\lambda\frac{b^i}{n+2}\right)\vec{e_i}+(\lambda-1)\vec{e}_{n+1}=0. \tag{65}$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{e_i}$, $\tilde{e}_{n+1}$, получаем

$$\lambda=1 \quad \text{и} \quad p^i+\frac{b^i}{n+2}=0. \tag{66}$$

Это приводит к условию

$$\frac{1}{2}\tau h^i+(\tau-1)r^i=0. \tag{67}$$

Отсюда следует: чтобы директриса Вильчинского ($\tau=0$) совпала с нормалью Бляшке, необходимо и достаточно, чтобы $r^i=0$. Для совпадения проективной нормали ($\tau=1$) с нормалью Бляшке необходимо и достаточно, чтобы $h^i=0$.

Если одновременно $r^i=0$ и $h^i=0$, то все прямые канонического пучка совпадают с нормалью Бляшке. В этом случае канонический вектор $\hat{c}_i$ обращается в нуль

$$\overset{\wedge}{c_i}=h_i+\tau_i=0,$$

что согласуется с уже известным условием совпадения всех прямых канонического пучка [1].

Прямыми канонического пучка для двумерной поверхности проективного пространства занималась Г. В. Бушманова [4]. Она получила условия совпадения прямой канонического пучка с аффинной нормалью.

4. Линии кривизны. Найдем на гиперповерхности аффинные линии кривизны, т. е. такие линии, вдоль которых аффинные нормали образуют развертывающиеся поверхности.

Пусть $\vec{n}$—нормаль поверхности,

$$\vec{n}=\nu^i\vec{e}_i+\vec{e}_{n+1}, \text{ где } d\nu^i=-\nu^l\omega^i{}_l+\nu^i\omega^{n+1}_{n+1}-\omega^i{}_{n+1}+\nu^i{}_l\omega^l. \tag{69}$$

Если точка M описывает на поверхности такую линию кривизны, а p—точка касания нормали $\vec{n}$ с ребром возврата развертывающейся поверхности, описанной аффинной нормалью, то

$$\vec{p}=\overrightarrow{M}+\rho\vec{n}, \tag{70}$$

где $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M}$—радиус-векторы точек p и M.

Дифференцируя уравнение вдоль линии кривизны, получаем

$$\overrightarrow{dp}=d\overrightarrow{M}+\rho d\vec{n}+d\rho\,\vec{n}. \tag{71}$$

Так как $\overrightarrow{dp}$ определяет вектор касательной кривой, а по условию p описывает ребро возврата развертывающейся поверхности, которая касается нормали поверхности, то вектор $\overrightarrow{dp}$ будет параллелен $\vec{n}$, т. е.

$$\overrightarrow{dp}=\lambda\vec{n}. \tag{71'}$$

Подставляя значения

$$d\overrightarrow{M}=\omega^i\vec{e}_i,$$

$$\overrightarrow{dn}=d\vec{e}_{n+1}+d\nu^i\vec{e}_i+\nu^i d\vec{e}_i=(d\nu^i+\nu^k\omega^i{}_k+\omega^i{}_{n+1})\vec{e}_i+(\omega^{n+1}_{n+1}+\nu^k\omega^{n+1}_k)\vec{e}_{n+1} \tag{72}$$

в (71'), получим

$$(\omega^i+\rho d\nu^i+\rho\nu^k\omega^i{}_k+\rho\omega^i{}_{n+1}+d\rho\nu^i-\lambda\nu^i)\vec{e}_i+$$
$$+(d\rho-\lambda+\rho\omega^{n+1}_{n+1}+\rho\nu^k\omega^{n+1}_k)\vec{e}_{n+1}=0 \tag{73}$$

Вследствие линейной независимости векторов $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{n+1}$ будем иметь

$$\begin{cases}\omega^i+\rho\,(d\nu^i+\nu^k\omega^i{}_k+\omega^i{}_{n+1})-\nu^i(d\rho-\lambda)=0, & (74)\\ d\rho-\lambda=-\rho\,(\omega^{n+1}_{n+1}+\nu^i\omega_i{}^{n+1}), & (75)\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{\omega^i}{\rho}+d\nu^i+\nu^k\omega^i{}_k+\omega^i{}_{n+1}-\nu^i\ \omega^{n+1}_{n+1}-\nu^i\nu^k\omega^{n+1}_k=0, & (76)\\ d\rho-\lambda=\rho\,(\omega^{n+1}_{n+1}+\nu^i\omega_i{}^{n+1}). & (77)\end{cases}$$

Подставляя в первые уравнения значения $d\nu^i$ из (69), получим

$$\left[\frac{\delta^i{}_l}{\rho}+(\nu^i{}_l-\nu^i\nu^k l_{kl})\right]\omega^l=0. \tag{78}$$

Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Det}\left|\frac{1}{\rho}\,\delta^i{}_l-(\nu^i{}_l-\nu^i\nu^k l_{kl})\right|=0. \tag{79}$$

Получается уравнение n-ой степени относительно $\frac{1}{\rho}$. Решая его, мы найдем для $\frac{1}{\rho}$ n-значений. Для каждого значения $\frac{1}{\rho}$, удовлетворяющего уравнению (79), система (78) будет определять на гиперповерхности линию кривизны. Уравнение (77) служит для определения λ.

Если в (70) в качестве нормали $\vec{n}$ мы возьмем аффинную нормаль Бляшке $\vec{n}=-\frac{b^i}{n+2}\vec{e}_i+\vec{e}_{n+1}$, то

$$\nu^i=-\frac{b^i}{n+2},\quad \nu^i{}_l=-\frac{p^i{}_l}{n+2} \tag{80}$$

и уравнения (78) и (79) примут вид

$$\left[\frac{1}{\rho}\,\delta^i{}_l-\frac{1}{n+2}\left(p^i{}_l+\frac{b^ib^k}{n+2}\,l_{kl}\right)\right]\omega^l=0, \tag{81}$$

$$\operatorname{Det}\left|\frac{1}{\rho}\,\delta^i{}_l-\frac{1}{n+2}\left(p^i{}_l+\frac{b^ib^k}{n+2}\,l_{kl}\right)\right]=0. \tag{82}$$

Можем придать этим уравнениям и другой вид, если воспользоваться тензорами четвертого порядка $\widetilde{A}_{jk}$ и $\hat{A}_{jk}$, введенными нами в § 3 п. I. Как у нас было

$$\widetilde{A}_{jk}=l_{ij}\,p^i{}_k+\frac{b_jb_k}{n+2},\quad \widetilde{A}_{jk}=\widetilde{A}_{jk}-\frac{1}{n}\,l_{jk}A,$$

а

$$l^{im}\hat{A}_{ik}=\hat{A}{}^m_k=\widetilde{A}{}^m_k-\delta^m_k A;$$

следовательно,

$$p^i{}_l+\frac{b^ib^k}{n+2}\,l_{kl}=\widetilde{A}{}^i{}_l+\frac{1}{n}\,\delta^i{}_lA.$$

Подставляя в (80) и (81), получим

$$\left[\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{n(n+2)}A\right)\delta^i{}_l-\frac{1}{n+2}\hat{A}{}^i{}_l\right]\omega^l=0, \tag{83}$$

$$\operatorname{Det}\left|\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{n(n+2)}A\right)\delta^i{}_l-\frac{1}{n+2}\hat{A}{}^i{}_l\right|=0. \tag{83'}$$

Величины $\frac{1}{\rho}$, соответствующие главным направлениям и являющиеся корнями характеристического уравнения (83'), называются главными аффинными кривизнами. По аналогии с обычной теорией поверхностей сумму главных аффинных кривизн назовем средней аффинной кривизной

$$H=\frac{A}{n(n+2)}=\frac{l^{ij}\widetilde{A}_{ii}}{n(n+2)}.$$

§ 4. Внутренняя геометрия гиперповерхности, индуцированная полем нормалей

1. Формы связности, объект связности, тензор кривизны. Как известно, инвариантное оснащение гиперповерхности определяет внутреннюю аффинную связность при помощи форм связности $\widetilde{\omega}^i$, $\widetilde{\omega}^i{}_j=\omega^i{}_j-\Gamma^i{}_{jk}\omega^k$, где $\Gamma^i{}_{jk}$—компоненты объекта связности [2].

Пусть имеется аффинная нормаль

$$\vec{n}=\nu^i\vec{e}_i+\vec{e}_{n+1},$$

где

$$d\nu^i=-\nu^l\omega^i{}_l+\nu^i\omega^{n+1}_{n+1}\ \ \omega^i{}_{n+1}+\nu^i{}_l\omega^l.$$

Рассмотрим вектор $d\vec{e}_j$

$$d\vec{e}_j=\omega^k_j\vec{e}_k+\omega^{n+1}_j\vec{e}_{n+1}=(\omega^k_j-\nu^k\omega^{n+1}_j)\vec{e}_k+\omega^{n+1}_j\vec{n}. \tag{85}$$

Внешний дифференциал форм $\omega^i{}_j-\nu^i\omega^{n+1}_j$ дает

$$d(\omega^i{}_j-\nu^i\omega^{n+1}_j)=(\omega^k_j-\nu^k\omega^{n+1}_j)\wedge(\omega^i{}_k-\nu^i\omega^{n+1}_k)+$$
$$+\nu^i\nu^s l_{\cdot k}l_{jl}\,\omega^k\wedge\omega^l-\nu^i{}_k l_{jl}\omega^k\wedge\omega^l$$

или

$$d\widetilde{\omega}^i{}_j=\widetilde{\omega}^k_j\wedge\widetilde{\omega}^i{}_k+R^i{}_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l, \tag{86}$$

где

$$\widetilde{\omega}^i{}_j=\omega^i{}_j-\nu^i\omega^{n+1}_j,\ \text{а}\ R^i{}_{jkl}=\nu^i\nu\, l_{\cdot[k|j,l]}+l_{j[k}\nu^i{}_{l]}. \tag{87}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{\omega}^i{}_j$ будут формами аффинной связности, а $R^i{}_{jlk}$—тензором кривизны.

Но $\omega^{n+1}_j=l_{jk}\omega^k$, поэтому

$$\widetilde{\omega}^i{}_j=\omega^i{}_j-\nu^i l_{jk}\omega^k \tag{88}$$

и компоненты объекта связности определяются так:

$$\Gamma^i{}_{jk}=\nu^i l_{jk}. \tag{89}$$

В нашем случае

$$\Gamma^i{}_{[jk]}=\nu^i l_{[jk]}=0,$$

т. е. компоненты объекта связности по нижним индексам симметричны. Дифференциальное уравнение для $\Gamma^i{}_{jk}$ имеет вид

$$d\Gamma^i{}_{jk}=\Gamma^i{}_{jl}\omega^l{}_k+\Gamma^i{}_{lk}\omega^l{}_j-\Gamma^l{}_{k}\omega^i{}_l-l_{jk}\omega^i{}_{n+1}+\Gamma^i{}_{jkl}\omega^l$$

или

$$\nabla\Gamma^i{}_{jk}+l_{jk}\omega^i{}_{n+1}=\Gamma^i{}_{jkl}\omega^l, \tag{90}$$

где

$$\nabla\Gamma^i{}_{jk}=d\Gamma^i{}_{jk}-\Gamma^i{}_{jl}\omega^l{}_k-\Gamma^i{}_{lk}\omega^l{}_j+\Gamma^l{}_{jk}\omega^i{}_l,\ \text{а}\ \Gamma^i{}_{jkl}=\nu^i l_{jkl}+\nu^i{}_l l_{jk}. \tag{91}$$

Тензор кривизны будет выражаться через объект связности

$$R^i{}_{jkl}=\Gamma^i{}_{j[kl]}+\Gamma^i{}_{s[k}\Gamma^s{}_{|j|l]}, \tag{87'}$$

а тензор Риччи имеет следующее строение:

$$R_{jk}=R^i{}_{jki}=\nu^i\nu^l l_{[k}l_{|j|i]}+l_{j[k}\nu^i{}_{i]}=\Gamma^i{}_{j[ki]}+\Gamma^i{}_{s[k}\Gamma^s{}_{|j|i]}. \tag{92}$$

2. **Связность, индуцируемая полем нормалей Бляшке.** Рассмотрим связность, которую индуцируют на гиперповерхности аффинные нормали Бляшке

$$\vec{n}=-\frac{b^i}{n+2}\vec{e}_i+\vec{e}_{n+1}.$$

Тензор кривизны в этом случае будет иметь вид

$$R^i{}_{jkl}=\frac{1}{n+2}\left\{\frac{b^ib^s}{n+2}l_{s[k}l_{l]j}-l_{j[k}p^i{}_{l]}\right\}. \tag{93}$$

Свертывая по i и j, получаем

$$R^i{}_{ikl}=\frac{1}{n+2}\left\{\frac{b^ib^s}{n+2}l_{s[k}l_{l]i}-l_{i[k}p^i{}_{l]}\right\}=\frac{1}{n+2}\left\{\frac{b_{[k}b_{l]}}{n+2}-l_{i[k}p^i{}_{l]}\right\}=0, \tag{94}$$

т. к. $l_{ik}p^i{}_l=a_{kl}-b^il_{ikl}$ — симметричный.

Свертывая по i и l, получаем тензор Риччи

$$R_{jk}=R^i{}_{jki}=\frac{1}{n+2}\left\{\frac{b^ib^s}{n+2}l_{s[k}b_{i]}-l_{j[k}p^i{}_{i]}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n+2}\left\{\frac{b_kb_j}{n+2}+l_{ij}p^i{}_k-l_{jk}\left(\frac{\widetilde{b}}{n+2}+p^i{}_i\right)\right\}=\frac{1}{n+2}\{\widetilde{A}_{jk}-l_{jk}A\}, \tag{95}$$

где $\widetilde{A}_{jk}$ введено в (43).

Тензор Риччи симметричен, т. к. l_{jk} и $\widetilde{A}_{jk}$ — симметричные. Следовательно,

$$R^i{}_{ikl}=0,\quad R_{[jk]}=0; \tag{96}$$

а это означает [5], что связность, индуцируемая нормалями Бляшке, эквиаффинная.

3. **Поле нормалей гиперповерхности, проходящих через одну точку.** Рассмотрим гиперповерхность, на которой определено поле нор-

малей $\vec{n}$ (оснащающее поле), проходящих через фиксированную точку p пространства. Пусть $\vec{M}$ — радиус-вектор текущей точки поверхности, $\vec{n} = \nu^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1}$ — вектор нормали в этой точке, $\vec{p}$ — радиус-вектор фиксированной точки p. Тогда будем иметь

$$\vec{p} = \vec{M} + \rho \vec{n}. \tag{97}$$

Дифференцируя обе части этого тождества, получаем

$$d\vec{p} = d\vec{M} + \rho d\vec{n} + d\rho\, \vec{n} = 0. \tag{98}$$

Подставляя в равенство (98) значения $d\vec{M}$, $d\vec{n}$, из (72) получим

$$(\omega^i + \rho\omega^i{}_{n+1} + \rho d\nu^i + \rho\nu^k\omega^i{}_k + d\rho\,\nu^i)\,\vec{e}_i + (d\rho + \rho\omega^{n+1}_{n+1} + \rho\nu^i\omega_i{}^{n+1})\,\vec{e}_{n+1} = 0. \tag{98'}$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{n+1}$, будем иметь;

$$\begin{cases} \omega^i + \rho\omega^i{}_{n+1} + \rho d\nu^i + \rho\nu^k\omega^i{}_k + d\rho\,\nu^i = 0, & (99) \\ d\rho + \rho\omega^{n+1}_{n+1} + \rho\nu^i\omega_i{}^{n+1} = 0. & (100) \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения $d\rho$ и подставив в предыдущие, получим

$$d\nu^i + \nu^k\omega^i{}_{nk} + \omega^i{}_{n+1} - \nu^i\omega^{n+1}_{n+1} = \nu^i\nu^k\omega_k{}^{n+1} - \frac{1}{\rho}\,\omega^i,$$

или учитывая (72),

$$\nu^i{}_l = \nu^i\nu^k l_{ki} - \frac{1}{\rho}\,\delta^i{}_l. \tag{101}$$

Итак, наша система принимает вид

$$\begin{cases} \nu^i{}_l = \nu^i\nu^k l_{kl} - \dfrac{1}{\rho}\,\delta^i{}_l, & (102) \\ d\ln\dfrac{1}{\rho} = \omega^{n+1}_{n+1} + \nu^i l_{il}\omega^l. & (103) \end{cases}$$

Свертывая уравнение (102) по i и l, определим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n}\,(\nu^i\nu^k l_{ki} - \nu_i{}^i). \tag{104}$$

Дифференцируя, получим

$$d\ln\frac{1}{\rho} = \omega^{n+1}_{n+1} + \frac{\rho}{n}\,(l_{kil}\nu^i\nu^k + 2l_{ki}\nu^k\nu_l{}^i - \nu^i{}_{il})\,\omega^l. \tag{105}$$

Величины $\nu^i{}_{lk}$ появляются при продолжении $\nu^i{}_l$ (69)

$$d\nu^i{}_l = \nu^i{}_k\nu_l{}^k - \nu_l{}^k\omega^i{}_k + \nu^i{}_l\omega^{n+1}_{n+1} - (\delta^i{}_k\nu^t l_{tl} + \nu^i l_{kl})\,\omega^k_{n+1} + \nu^i{}_{lk}\omega^k. \tag{106}$$

Подставляя (104) и (105) в (102) и (103), получим

$$\nu^i{}_l = \nu^i\nu^k l_{kl} - \frac{\delta^i{}_l}{n}\,(\nu^i\nu^k l_{ki} - \nu^i{}_i), \tag{107}$$

$$\nu^i{}_{il}=\nu^i l_{il}\left\{(2l_{ti}\nu^t\nu^i-\frac{n+2}{n}(\nu^i\nu^k l_{ki}-\nu^i{}_i)\right\}+l_{kil}\nu^i\nu^k, \tag{108}$$

или

$$\nu^i{}_l=\nu^i\nu_l-\frac{\delta^i{}_l}{n}(\nu^i\nu^k l_{kl}-\nu^i{}_i), \tag{109}$$

$$\nu^i{}_{il}=\nu_l\{(n-2)l_{ki}\,\nu^i\nu^k+(n+2)\nu^i{}_i\}+l_{kil}\nu^i\nu^k. \tag{110}$$

Эта система дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы оснащающие прямые проходили через одну точку.

(109) условия можно записать и в другой эквивалентной форме. Обозначим

$$l_{ik}\,(\nu^i\nu^t l_{tl}-\nu^i{}_l)=\eta_{kl}\,. \tag{111}$$

Дифференцирование (111) дает

$$d\eta_{kl}=\eta_{km}\omega_l{}^m+\eta_{ml}\omega_k{}^m+\widetilde{\eta}_{kln}\,\omega^m. \tag{111'}$$

Как видно из этого дифференциального уравнения, величины η_{ki} образуют абсолютный тензор, поэтому величины $\widetilde{\eta}_{klm}$ определяют ковариантную производную

$$\widetilde{\eta}_{klm}=\nabla_m\eta_{kl}. \tag{112}$$

Необходимые и достаточные условия (109) для того, чтобы оснащающие прямые проходили через одну точку, принимают вид

$$\eta_{kl}=\frac{1}{\rho}\,l_{kl}, \tag{113}$$

$$l^{ij}\nabla_l\eta_{ij}=\frac{1}{\rho}\,(n\nu^i l_{il}+l^{ij}l_{ijl}),$$

где $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{n}\cdot l^{ij}\eta_{ij}.$

Выясним теперь какая связность индуцируется на поверхности, когда оснащающие прямые проходят через одну точку.

Тензор кривизны в этом случае будет иметь вид

$$R^i{}_{jkl}=-\frac{1}{\rho}\,l_{j[k}\delta^i{}_{l]}. \tag{114}$$

Свертывание по i и j дает

$$R^i{}_{ikl}=0. \tag{115}$$

Тензор Риччи

$$R_{jk}=R^i{}_{jki}=-\frac{1}{\rho}\,(n-1)l_{jk}. \tag{116}$$

Тензор кривизны выражается через тензор Риччи следующим образом:

$$R^i{}_{jkl}=\frac{1}{n-1}\,R_{j[k}\delta^i{}_{l]}; \tag{117}$$

связность в этом случае будет эквипроективная [5].

4. Аффинная гиперсфера. Гиперповерхность, для которой нормали Бляшке образуют связку, будем называть аффинной гиперсферой.

Рассмотрим поле нормалей

$$\vec{n} = -\frac{b^i}{n+2}\vec{e}_i + \vec{e}_{n+1}, \tag{*}$$

где

$$db^i = -b^l\omega^i_l + b^i\,\omega^{n+1}_{n+1} + (n+2)\omega^i_{n+1} + p^i_l\omega^l$$

и

$$dp^i_k = p^i_l\omega^l_k - p^l_k\omega^i_l - (\delta^i_l b_k + b^i l_{kl})\omega^l_{n+1} + p^i_k\omega^{n+1}_{n+1} + \widetilde{p}^i_{kl}\omega^l.$$

Если в (97) в качестве нормали $\vec{n}$ взять аффинную нормаль Бляшке (*). то

$$\nu^i = -\frac{b^i}{n+2},\quad \nu^i_j = -\frac{p^i_j}{n+2},\quad \nu^i_{jl} = -\frac{\widetilde{p}^i_{jl}}{n+2},$$

$$\nu^i\nu^k l_{kl} - \nu^i_l = \frac{b^i b^k l_{kl}}{(n+2)^2} + \frac{p^i_l}{n+2},\quad \frac{1}{\rho} = \frac{A}{n(n+2)}. \tag{119}$$

И для того, чтобы гиперповерхность была бы аффинной гиперсферой, необходимо и достаточно, чтобы p^i_j и $\widetilde{p}^i_{jk}$ удовлетворяли следующим условиям:

$$p^i_l = \frac{A}{n}\delta^i_l - \frac{b^i b^k l_{kl}}{n+2},$$

$$\widetilde{p}^i_{il} = b_l\left\{\frac{2\widetilde{b}}{(n+2)^2} - \frac{A}{n}\right\} - l_{kil}\frac{b^i b^k}{n+2}, \tag{120}$$

или выразив величины l_{kl} через тензор Дарбу, будем иметь

$$p^i_l = \frac{A}{n}\delta^i_l - \frac{b^i b_l}{n+2},$$

$$\widetilde{p}^i_{il} = -b_l\left\{\frac{\widetilde{b}}{(n+2)^2} + \frac{A}{n}\right\} - b_{il}\frac{b^i b^j}{n+2}. \tag{121}$$

Получим условия, эквивалентные (120), если воспользуемся тензором $\widetilde{A}_{ij} = l_{ik}p^k_j + \frac{b_i b_j}{n+2}$. Тогда условия (113) принимают вид:

$$\widetilde{A}_{ij} = \frac{A}{n}l_{ij},$$

$$l^{ij}\nabla_l\widetilde{A}_{ij} = \frac{b_l}{n(n+2)} - 2A. \tag{122}$$

Для аффинных гиперсфер

1. Директриса Вильчинского совпадает с аффинной нормалью Бляшке. В самом деле, величины

$$\widetilde{r}_k = b^{ij}_k \widetilde{A}_{ij}$$

обращаются в нуль, т. к. $\widetilde{A}_{ij} = \frac{A}{n} l_{ij}$, нулю будут равняться и величины $r^s = b^{ks} \widetilde{r}_k$. Но равенства $r^i = 0$ характеризовали совпадения аффинной нормали Бляшке с директрисой Вильчинского, что и требовалось показать.

2. Тензор $\hat{A}_{ij}$ (46) обращается в нуль. По определению

$$\hat{A}_{ij} = \widetilde{A}_{ij} - \frac{1}{n} l_{ij} A,$$

но $\widetilde{A}_{ij} = \frac{1}{n} l_{ij} A$ (122), следовательно,

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{n} l_{ij} A - \frac{1}{n} l_{ij} A = 0. \qquad (123)$$

3. Для аффинных гиперсфер аффинные линии кривизны неопределены. Уравнения (78) удовлетворяются тождественно.

5. Случай, когда тензор Дарбу $b_{ijk} = 0$.

Рассмотрим случай, когда $b_{ijk} = 0$, т. е. когда гиперповерхность вырождается в гиперквадрику. Тогда, как это показано в работе [1]:

$$l_{ijk} = \frac{1}{n+2} l_{(ij} b_{k)}, \qquad (124)$$

$$l_{ijkl} = \frac{1}{n+2} [l_{l(ij} b_{k)} + l_{(ij} a_{k)l}], \qquad (125)$$

$$a_{ij} = \frac{l_{ij}}{n} \left(a - \frac{\widetilde{b}}{n+2} \right) + \frac{b_i b_j}{n+2}, \qquad (126)$$

где

$$a_{kl} = l^{ij} l_{ijkl} - l^{ij} l^{rt} l_{ik} l_{jtl}, \quad a = l^{ij} a_{ij}. \qquad (126')$$

Дифференциальное уравнение для $\hat{a} = a - \frac{\widetilde{b}}{n+2}$ имеет вид

$$d\hat{a} = \hat{a}\, \omega^{n+1}_{n+1} - 2n b_l \omega^l{}_{n+1} + \hat{a} \frac{b_l}{n+2} \omega^l. \qquad (127)$$

Сравнивая это с дифференциальным уравнением для $\hat{a}$

$$d\hat{a} = \hat{a}\, \omega^{n+1}_{n+1} - 2n b_l \omega^l{}_{n+1} + \hat{a}_l \omega^l, \qquad (128)$$

получаем, что

$$\hat{a}_l = \hat{a} \frac{b_l}{n+2}. \qquad (129)$$

Заметим, что

$$p^i{}_l = l^{ij}a_{jl} - l^{it}b^j l_{tjl}, \tag{130}$$

поэтому

$$p^i{}_i = a - \tilde{b}. \tag{131}$$

Но

$$\hat{a} = a - \frac{\tilde{b}}{n+2} = p^i{}_i + \frac{n+1}{n+2}\tilde{b}. \tag{132}$$

Учитывая это, будем иметь

$$\hat{a}_l = p^i{}_{il} + \frac{n+1}{n+2}\left[-\frac{b_l\tilde{b}}{n+2} + \frac{2b_l}{n}\left(p^i{}_i + \frac{n+1}{n+2}\tilde{b}\right)\right]. \tag{133}$$

Из (129) следует, что

$$\tilde{p}^i{}_{il} - \frac{n+1}{n+2}b_l\tilde{b} + \frac{2(n+1)}{n+2}b_l\left(p^i{}_i + \frac{n+1}{n+2}\tilde{b}\right) = \frac{b_l}{n+2}\left(p^i{}_i + \frac{n+1}{n+2}\tilde{b}\right), \tag{134}$$

а отсюда

$$p^i{}_{il} = -\frac{b_l}{n}\left[p^i{}_i + \frac{2(n+1)}{(n+2)^2}\tilde{b}\right]. \tag{135}$$

Как у нас уже было, $A = p^i{}_i + \dfrac{\tilde{b}}{n+2}$. Если в (125) подставить $p^i{}_i = A - \dfrac{\tilde{b}}{n+2}$, получим

$$p^i{}_{il} = -b_l\left[\frac{A}{n} + \frac{\tilde{b}}{(n+2)^2}\right]. \tag{136}$$

Из (130), (126) и (124) следует, что

$$p^i{}_l = \frac{A}{n}\delta^i{}_l - \frac{b^ib_l}{n+2}.$$

Таким образом, для гиперквадрики выполняются соотношения

$$\begin{aligned} p^i{}_l &= \frac{A}{n}\delta^i{}_l - \frac{b^ib_l}{n+2}, \\ \tilde{p}^i{}_{il} &= -b_l\left\{\frac{A}{n} + \frac{\tilde{b}}{(n+2)^2}\right\}. \end{aligned} \tag{137}$$

Эти соотношения, вследствие $b_{ijk}=0$, совпадают с условиями (121) для аффинных гиперсфер. Следовательно, всякая гиперквадрика является аффинной гиперсферой.

§ 5. Евклидово и псевдоевклидово пространство

1. Фундаментальный тензор метрического пространства. Пусть в аффинном пространстве определено обычным образом скалярное произведение $\vec{a}$, $\vec{b}$ для каждой пары векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Тогда это пространство становится евклидовым или псевдоевклидовым. Его метрический тензор определяется формулой

$$g_{\alpha\beta}=\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta},\quad \alpha,\beta=1,\ 2,\ldots,n+1. \tag{138}$$

Дифференциальные уравнения метрического тензора получаются в следующем виде:

$$dg_{\alpha\beta}=g_{\alpha\gamma}\omega_{\beta}^{\gamma}+g_{\gamma\beta}\,\omega_{\alpha}^{\gamma}. \tag{139}$$

Будем предполагать, что дискриминант метрического тензора отличен от нуля

$$\operatorname{Det}|g_{ij}|=g\neq 0,\quad i,\ j=1,\ 2,\ldots,n. \tag{140}$$

Введем матрицу приведенных миноров $\| g^{ik} \|$ так, что $g^{ik}g_{kj}=\delta^{i}{}_{j}$. Дифференциальные уравнения для g^{ij} и g будут

$$dg^{ij}=-g^{il}\omega^{i}{}_{l}-g^{lj}\omega^{j}{}_{l}-g_{l}{}^{ij}\omega^{l}, \tag{141}$$

$$d\ln g=2\omega^{i}{}_{i}+2g^{km}g_{mn+1}l_{kl}\omega^{l}. \tag{142}$$

2. Метрическая нормаль. Рассмотрим вектор, не лежащий в касательной гиперплоскости

$$\vec{\nu}=\nu^{i}\vec{e}_{i}+\vec{e}_{n+1}$$

и потребуем, чтобы этот вектор был ортогонален касательной гиперплоскости

$$\vec{\nu}\,\vec{e}_{k}=0,$$

т. е.

$$\nu^{i}g_{ik}+g_{kn+1}=0. \tag{143}$$

Отсюда определяется ν^{i}:

$$\nu^{i}=-g^{ki}g_{kn+1}. \tag{144}$$

Продифференцировав это равенство, будем иметь

$$d\nu^{k}=-\nu^{l}\omega_{l}{}^{k}-\omega_{n+1}^{k}+\nu^{k}\omega_{n+1}^{n+1}+\nu_{l}{}^{k}\omega^{l}. \tag{145}$$

Поле вектора

$$\vec{\nu}=-g^{ki}g_{kn+1}\vec{e}_{i}+\vec{e}_{n+1} \tag{146}$$

будет полем метрических нормалей для гиперповерхности метрического пространства.

Потребуем, чтобы

$$\vec{\nu}\,\vec{e}_{n+1}=1,$$

т. е.

$$\nu^{k}g_{kn+1}+g_{n+1,\,n+1}=1. \tag{147}$$

Дифференцирование этого равенства дает условие, накладываемое на формы ω

$$\omega_{n+1}^{n+1} = -\nu^t l_{tm} \omega^m. \tag{148}$$

3. Дифференциальные квадратичные формы гиперповерхности. Формы, аналогичные трем квадратичным формам поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, следующие:

$$ds^2 = d\overrightarrow{M}^2 = g_{ij}\,\omega^i\omega^j, \tag{149}$$

$$\varphi = l_{ij}\omega^i\omega^j, \tag{150}$$

$$d\nu^2 = N_{ms}\omega^m\omega^s, \tag{151}$$

где

$$N_{ms} = g^{ti} l_{im} l_t,$$

и

$$dN_{ms} = N_{ml}\omega^l{}_s + N_{ls}\omega^l{}_m + N_{msl}\omega^l. \tag{152}$$

Дискриминанты этих квадратичных форм удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\ln g = 2\omega^i{}_i - 2\nu^i l_{li}\omega^l, \tag{153}$$

$$d\ln l = 2\omega^i{}_i + (n\nu^t l_{tm} + b_m)\omega^m, \tag{154}$$

$$d\ln N = 2\omega^i{}_i + [2(n+1)\nu^i l_{ik} + 2b_k]\omega^k. \tag{155}$$

Из (150) и (151) следует, что

$$d\ln\frac{l}{g} = [b_l + (n+2)\nu^i l_{il}]\omega^l. \tag{156}$$

Заметим, что

$$d\ln\frac{l}{g} = d\ln\frac{N}{l}, \tag{157}$$

т. е.

$$\frac{l^2}{gN} = \text{const}\,[1]. \tag{158}$$

4. Условия совпадения аффинной нормали Бляшке с метрической нормалью. Если аффинная нормаль совпадает с метрической, то

$$[b_l + (n+2)\nu^i l_{il}]\omega^l = 0$$

и значит

$$\frac{l}{g} = \text{const}.$$

Выходит, что для совпадения аффинной нормали с метрической необходимо, чтобы

$$\frac{l}{g} = \text{const},\ \text{или}\ \frac{N}{l} = \text{const},\ \text{или}\ \frac{N}{g} = \text{const}.$$

---

[1] Когда $n=2$, имеем $\dfrac{l^2}{gN} = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. о-ва, т. 2 (1953), стр. 275—382.
2. Г. Ф. Лаптев. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. Докл. АН СССР, 126, № 3 (1959), 490—493.
3. И. М. Остиану. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. Труды геометрического семинара, т. 1 (1966), 239—262.
4. Г. В. Бушманова. О нормалях, принадлежащих каноническому пучку. Уч. записки Казанского ГУ, т. 110, книга 3, математика.
5. Л. А. Широков и А. П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия. Москва, 1959.

Кафедра
алгебры и геометрии

(Поступило в редакцию 12. XI. 1966)

ე. ალშიბაია

ჰიპერზედაპირის დიფერენციალური გეომეტრია მრავალგანზომილებიან აფინურ სივრცეში

რეზიუმე

კარტანის გარე ფორმებისა და უწყვეტი ჯგუფების წარმოდგენათა თეორიის გამოყენებით იგება დიფერენციალური გეომეტრია ჰიპერზედაპირისა მრავალგანზომილებიან აფინურ სივრცეში.

აგებულია ჰიპერზედაპირის ფუნდამენტალური ობიექტები მეოთხე რიგამდე ჩათვლით. მათი საშუალებით აგებულია ბლაშკეს განზოგადებული ნორმალთა ველი, ველი სხვადასხვა პროექციული ნორმალებისა, მიმხებ ინვარიანტულ ჰიპერკვადრიკათა ველი. ინვარიანტული ფორმით ჩაწერილია აფინური ნორმალის თანამთხვევის პირობები ერთ-ერთ პროექციულ ნორმალთან და ასევე მეტრიულ ნორმალთან. განხილულია აფინური ჰიპერსფეროები და მათთვის დადგენილია კოვარიანტული ნიშნები.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Г. Н. ТЕВЗАДЗЕ

О НЕКОТОРЫХ СЕТЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Две конгруэнции прямых, образуемые касательными к линиям некоторой сопряженной сети поверхности трехмерного проективного пространства, характеризуют саму сопряженную сеть. В связи с этим в настоящей работе рассматриваются следующие три случая: 1) одна из указанных конгруэнций касательных прямых является конгруэнцией Вейнгартена. В этом случае величины, определяющие сопряженную сеть, удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, полученным здесь в виде равенств (55). 2) Обе названные конгруэнции прямых являются конгруэнциями Вейнгартена. Как известно, такая сопряженная сеть называется сетью R, а поверхность, несущая эту сеть, — поверхностью R. Применяя методы теории нормализации А. П. Нордена [1], получен инвариантный тензорный признак поверхностей R. Все рассмотренные случаи поверхностей R резюмируются в формулах (117) — (128). 3) Конгруэнции, связанные с сетями Ионаса. Получен инвариантный тензорный признак поверхностей Ионаса. Все рассмотренные случаи этих поверхностей резюмируются в формулах (133) — (147).

Следует подчеркнуть, что в теории нормализации уже известны инвариантные признаки поверхностей R и поверхностей Ионаса [2], [3], [4], [5], но ввиду некоторой громоздкости этих признаков (в том числе полученных и нами) этот вопрос не перестает быть актуальным.

При этом нужно отметить работу [4], с которой, как оказалось, настоящая статья имеет ряд точек соприкосновений.

Пусть f_{ij} — тензор невырожденной сопряженной сети на поверхности трехмерного проективного пространства (тензорные индексы всюду принимают значения 1 и 2), а b_{ij} — тензор невырожденной асимптотической сети поверхности.

Как обычно, тензор f_{ij} представим с помощью тройки сетей. При этом эту тройку сетей выберем специальным образом.

На каждой нелинейчатой поверхности определяются отличные друг от друга линии Сегре и Дарбу так, что если s^i — касательный вектор линии Сегре данной поверхности

$$B_{ijk}\, s^i s^j s^k = 0, \tag{1}$$

то сопряженный ему вектор

$$\overline{s}_i = b_{in}\, s^n, \quad (b_{in}\, \overline{s}^n = -s_i) \tag{2}$$

определяет направление линии Дарбу ([1], стр. 416)

$$D_{ijk}\, \overline{s}^i\, \overline{s}^j\, \overline{s}^k = 0; \tag{3}$$

при этом величины B_{ijk} и D_{ijk} — так называемые симметричные тензоры Сегре и Дарбу, для которых справедливы следующие соотношения ([1], стр. 416):

$$D_{ijk} = b_{kn}\, B^n_{ij}; \; b^{ij}\, B_{ijk} = 0; \; J b_{ij} = B^m_{ni}\, B^n_{mj}; \; J = \frac{1}{2}\, \widetilde{b}^{rs}\, B^m_{nr}\, B^n_{ms}. \tag{4}$$

Здесь необходимо заметить, что тензорные индексы всюду перебрасываются с помощью дискриминантного бивектора тензора b_{ij} по правилу ([1], стр. 35)

$$\varepsilon_{ik}\, \varepsilon^{kj} = \delta_i^{\;j}; \; \varepsilon_{ik}\, a^k = a_i; \; \varepsilon^{ik}\, a_k = a^i, \tag{5}$$

где a^i, a_i — произвольные тензоры, ε_{ij} — указанный бивектор, а ε^{ij} — взаимный ему бивектор.

Обозначая через $\underset{1}{b_i}$ и $\underset{2}{b_i}$ касательные векторы к линиям асимптотической сети поверхности, очевидно, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} = \underset{1}{b}_{(i}\, \underset{2}{b}_{j)}; \; b_{ij}\, b^{ij} = 2; \; (\underset{1}{b}_i\, \underset{2}{b}^i)^2 = -4; \\ & b_{ij}\, \underset{1}{b}^j = -\frac{1}{2}\, \underset{2}{b}_k\, \underset{1}{b}^k \cdot \underset{1}{b}_i; \; b_{ij}\, \underset{2}{b}^j = \frac{1}{2}\, \underset{1}{b}_k\, \underset{2}{b}^k \cdot \underset{2}{b}_i. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Касательный вектор линий Сегре s_i разложим по направлениям $\underset{1}{b_i}$, $\underset{2}{b_i}$

$$s_i = \underset{1}{b}_i + s\, \underset{2}{b}_i, \tag{7}$$

где функция s, в силу (1) и (4), определяется из следующего кубического уравнения:

$$B_{ijk}\, \underset{1}{b}^i\, \underset{1}{b}^j\, \underset{1}{b}^k + s^3\, B_{ijk}\, \underset{2}{b}^i\, \underset{2}{b}^j\, \underset{2}{b}^k = 0. \tag{8}$$

Кроме того, согласно (6), имеем

$$b_{ij}\, s^i s^j = b_{ij}\, (\underset{1}{b}^i + s\underset{2}{b}^i)\, (\underset{1}{b}^j + s\underset{2}{b}^j) = -(\underset{2}{b}_k\, \underset{1}{b}^k)^2\, s = 4s. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь две сопряженные сети θ_{ij}, $\overline{\theta}_{ij}$, следующим образом связанные с поверхностью:

$$\left.\begin{aligned} & \theta_{ij} = a\, s_{(i}\, \overline{s}_{j)} = \theta B^k_{ij}\, s_k = \theta B^k_{ij}\, \overline{s}_r\, b^r_k = \theta\, D^r_{ij}\, \overline{s}_r; \\ & \overline{\theta}_{ij} = b_i^{\;m}\, \theta_{mj} = \theta\, D_{ijk}\, s^k = \theta B^r_{ij}\, \overline{s}_r, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где a и θ — множители, определяющие нормирование тензора θ_{ij}.

Заметим, что сети θ_{ij}, $\overline{\theta}_{ij}$ принадлежат к так называемому классу сетей Дарбу ([1], стр. 417).

Теперь, согласно (4) и (9),

$$\theta_{ij}\,\theta^{ij}=\theta^2 B^k_{ij}\,B^{rij}\,s_k\,s_r=-J\theta^2\,b_{kr}\,s^k s^r=-4Js\theta^2 \tag{11}$$

и поэтому, нормируя θ_{ij} следующим образом:

$$\theta_{ij}\,\theta^{ij}=-2,$$

будем иметь

$$\overline{\theta}_{ij}\,\overline{\theta}^{ij}=-2;\quad \theta^2=\frac{1}{2Js}=\frac{2}{Jb_{ij}\,s^i s^j}=\frac{2}{Jb_{ij}\,\overline{s^i}\,\overline{s^j}}. \tag{12}$$

Здесь всегда $J\neq 0$, так как случай $J=0$ характеризует линейчатые поверхности, которые исключаются из рассмотрения. С другой стороны, величина инварианта J зависит от нормирования тензора асимптотической сети поверхности и это нормирование можно выбрать согласно Фубини, т. е. нормируя b_{ij} так, чтоб J стало постоянным, например, равным двум

$$J=2. \tag{13}$$

Симметричный тензор b_{ij}, нормированный таким образом, определяет некоторую риманову связность с метрическим тензором b_{ij}, которую будем называть связностью Фубини (или F-связностью), а соответствующую метрику — метрикой Фубини (или F-метрикой).

Выражение

$$f_{ij}=\theta_{ij}\cos\nu+\overline{\theta}_{ij}\sin\nu, \tag{14}$$

где ν — некоторая функция, определяет произвольную (невырожденную) сопряженную сеть на поверхности; при этом

$$f_{ij}\,f^{ij}=-2. \tag{15}$$

Согласно (10), очевидно, тензор f_{ij} можно представить в виде

$$f_{ij}=\theta B^k_{ij}\,(s_k\cos\nu+\overline{s}_k\sin\nu)=\theta D^k_{ij}\,(\overline{s}_k\cos\nu-s_k\sin\nu). \tag{16}$$

Но векторы

$$\underset{0}{s_i}=\theta s_i;\quad \underset{0}{\overline{s}_i}=\theta\overline{s}_i, \tag{17}$$

в силу (12), (13), являются единичными векторами в метрике Фубини

$$b_{ij}\,\underset{0}{s^i}\,\underset{0}{s^j}=b_{ij}\,\underset{0}{\overline{s^i}}\,\underset{0}{\overline{s^j}}=\underset{0}{s_k}\,\underset{0}{s^k}=1; \tag{17'}$$

поэтому обозначая через x_k и $\overline{x}_k$ следующие единичные и сопряженные векторы F-метрики:

$$\left.\begin{aligned} &x_k=\underset{0}{\overline{s}_k}\cos\nu-\underset{0}{s_k}\sin\nu;\quad \overline{x}_k=b_{kn}\,x^n=-\underset{0}{s_k}\cos\nu-\underset{0}{\overline{s}_k}\sin\nu;\\ &b_{ij}\,x^i x^j=b_{ij}\,\overline{x^i}\,\overline{x^j}=x_i\,x^i=1, \end{aligned}\right| \tag{18}$$

согласно (16), будем иметь:

$$f_{ij}=D^k_{ij}x_k=-\overline{B}^k_{ij}\,x_k. \tag{19}$$

Теперь заметим, что, рассматривая вышеопределенную тройку сетей, внутренним образом связанных с поверхностью

$$\left.\begin{array}{c}\theta_i{}^j=\overline{\theta}_i{}^m b_m^j;\ \ \overline{\theta}_i{}^j=b_i{}^m\theta^j_m;\ \ b_i{}^j=\overline{\theta}_i{}^m\theta^j_m;\\ \theta_{ij}\theta^{ij}=\overline{\theta}^{ij}\,\overline{\theta}^{ij}=-b_{ij}b^{ij}=-2,\end{array}\right\} \tag{20}$$

можно каждую из этих сетей представить с помощью единичных векторов $\underset{0}{s_i}$, $\underset{0}{\overline{s}_i}$. В самом деле, в силу (10), (17), (17') и (20),

$$\theta_{ij}=\underset{0}{s_i}\underset{0}{\overline{s}_j}+\underset{0}{s_j}\underset{0}{\overline{s}_i};\ \ \overline{\theta}_{ij}=b_i{}^m\theta_{mj}=\underset{0}{s_i}\underset{0}{s_j}-\underset{0}{\overline{s}_i}\underset{0}{\overline{s}_j};\ \ b_{ij}=\underset{0}{s_i}\underset{0}{s_j}+\underset{0}{\overline{s}_i}\underset{0}{\overline{s}_j}. \tag{21}$$

Кроме того, очевидно, имеем

$$\varepsilon_{ij}=\underset{0}{s_i}\underset{0}{\overline{s}_j}-\underset{0}{s_j}\underset{0}{\overline{s}_i};\ \ \delta^i{}_j=\underset{0}{s^i}\underset{0}{s_j}-\underset{0}{\overline{s}_j}\underset{0}{\overline{s}^i}, \tag{22}$$

где ε_{ij} — дискриминантный бивектор тензора b_{ij}, а $\delta^i{}_j$ — символ Кронекера.

Из этих равенств следует, что

$$\underset{0}{s_i}\underset{0}{s_j}=\frac{1}{2}(b_{ij}+\overline{\theta}_{ij});\ \ \underset{0}{\overline{s}_i}\underset{0}{\overline{s}_j}=\frac{1}{2}(b_{ij}-\overline{\theta}_{ij});\ \ \underset{0}{s_i}\underset{0}{\overline{s}_j}=\frac{1}{2}(\theta_{ij}+\varepsilon_{ij}). \tag{23}$$

В дальнейшем понадобится также ковариантное дифференцирование в связности Фубини. Обозначая через $\overset{F}{\nabla}_k$ ковариантное дифференцирование в F-связности, на основе известных формул ([1], стр. 356 и стр. 417) можно написать следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c}1.\ \overset{F}{\nabla}_k f_{ij}=2b_{kn}f^n b_i{}^r f_{rj};\ \ 2.\ \overset{F}{\nabla}_k \underset{0}{s_i}=-b_{kn}\theta^n\underset{0}{\overline{s}_i};\ \ 3.\ \overset{F}{\nabla}_k\underset{0}{\overline{s}_i}=b_{kn}\theta^n\underset{0}{s_i};\\ 4.\ \overset{F}{\nabla}_k x_i=-b_{kn}X^n b_{im}x^m;\ \ 5.\ \overset{F}{\nabla}_r B^i{}_{jk}=-3b_{rn}\theta^n D^i{}_{jk};\\ 6.\ \overset{F}{\nabla}_k\theta_{ij}=2b_{kn}\theta^n\overline{\theta}_{ij};\ \ 7.\ \overset{F}{\nabla}_k\overline{\theta}_{ij}=-2b_{kn}\theta^n\theta_{ij},\end{array}\right\} \tag{24}$$

где f_i — чебышевский вектор в F-связности сети f_{ij}; x_i — произвольный единичный вектор F-метрики; X_i — чебышевский вектор сопряженной сети $x_{(i}\overline{x}_{j)}$ в F-связности, а θ_i — чебышевский вектор сети $\underset{0}{s}_{(i}\underset{0}{\overline{s}}_{j)}$ в той же связности.

Заметим, что чебышевский вектор произвольной сети a_{ij} в F-связности определяется следующим образом:

$$a_i=\frac{1}{2}\widetilde{a}^{mn}\left(\overset{F}{\nabla}_m a_{ni}-\frac{1}{2}\overset{F}{\nabla}_i a_{mn}\right);\ \ \widetilde{a}^{ik}a_{jk}=\delta^i{}_j, \tag{25}$$

и этот вектор, очевидно, не зависит от нормирования тензора сети a_{ij}.

Кроме того, укажем, что участвующий в формулах (24) вектор θ_i имеет значение ([1], стр. 423)

$$\theta_i = \frac{2}{3}\psi_i, \tag{26}$$

где ψ_i — вектор Фубини

$$\overset{F}{\nabla}_k B^k_{ij} = -2\psi_k B^k_{ij} . \tag{27}$$

Ковариантное дифференцирование выражения (19) дает, что

$$\overset{F}{\nabla}_k f_{ij} = x_r \overset{F}{\nabla}_k D^r_{ij} + D^r_{ij} \overset{F}{\nabla}_k x_r.$$

Применяя здесь соответствующие формулы из (24) и учитывая, что

$$b^i_{\cdot s} D^r_{ij} = B^r_{sj};\ b^i_{\cdot s} D^r_{ij} b_{\cdot m} = D_{msj}, \tag{28}$$

получим

$$2b_{kn} f^n f_{sj} = 3b_{kn}\theta^n D^{\cdot}_{sj} x_{\cdot} + D_{msj} b_{kn} X^n x^m,$$

или, согласно (19) и (26),

$$X_i = 3\theta_i - 2f_i = 2(\psi_i - f_i), \tag{29}$$

где X_i — чебышевский вектор в F-связности сети $x_{(i}\overline{x}_{j)}$.

Но, в силу (18) и (23),

$$x_{(i}\overline{x}_{j)} = \frac{1}{2}(-\theta_{ij}\cos 2\nu + \overline{\theta}_{ij}\sin 2\nu); \tag{30}$$

поэтому, если в F-связности чебышевский вектор сети

$$f_{ij} = \theta_{ij}\cos\nu + \overline{\theta}_{ij}\sin\nu = D^k_{ij} x_k = -B^k_{ij}\overline{x}_k$$

равняется вектору f_i, то чебышевский вектор сети

$$\theta_{ij}\cos 2\nu - \overline{\theta}_{ij}\sin 2\nu = -2x_{(i}\overline{x}_{j)}$$

имеет значение $3\theta_i - 2f_i$. Это вкратце обозначим так:

$$\text{ч. в.}\,(x_{(i}\overline{x}_{j)}) = \text{ч. б.}\,(\theta_{ij}\cos 2\nu - \overline{\theta}_{ij}\sin 2\nu) = 3\theta_i - 2f_i. \tag{31}$$

Согласно формулам (18) и (24), легко получается, что

$$\overset{F}{\nabla}_k x_i = \overline{x}_i(\partial_k\nu - \overline{\theta}_k);\ \overset{F}{\nabla}_k \overline{x}_i = x_i(\overline{\theta}_k - \partial_k\nu), \tag{32}$$

где введены обозначения

$$\partial_k\nu = \frac{\partial\nu}{\partial u^k},\ \overline{\theta}_k = b_{km}\theta^m, \tag{33}$$

при этом u^1, u^2 — криволинейные координаты на поверхности.

Теперь, согласно формулам (25), (29) и (32), получаем, что

$$\partial_k\nu - \overline{\theta}_k = b_{kn}(2f^n - 3\theta^n), \tag{34}$$

т. е. в F-связности чебышевский вектор произвольной, невырожденной сопряженной сети (14) имеет вид

$$2f_i = 2\theta_i + b_i^k \partial_k \nu^1. \tag{35}$$

Здесь же отметим, что, согласно равенствам (31), (32) и (34), условие градиентности вектора x_i равносильно тому, что в F-связности чебышевский вектор сети $x_{(i}x_{j)}$ колинеарен вектору x_i.

В дальнейшем понадобится также выражение вектора $B_{ij}^k f^{ij}$, который, в силу (4), (13), (18) и (19), можно представить в виде

$$B_{ij}^k f^{ij} = 2x^k = 2(\overline{\underset{0}{s}}{}^k \cos\nu - \underset{0}{s}{}^k \sin\nu). \tag{36}$$

Теперь вкратце напомним некоторые результаты из монографии [1], которые будут использованы в дальнейшем.

Нормализуя поверхность в смысле Нордена прямыми Грина [2] сопряженной сети f_{ij}, рассмотрим на поверхности индуцируемые ими связности первого рода, второго рода и среднюю связность. Первые две из этих связностей составляют конформную пару вейлевых связностей с изотропной сетью f_{ij} ([1], стр. 386). Поэтому, если v^i, $\overline{v}^i$ — касательные векторы к линиям сети f_{ij}, то будем иметь

$$\nabla_i v^n = h_i v^n; \quad \nabla_i \overline{v^n} = \underline{h_i}\, \overline{v^n}, \tag{37}$$

где ∇_i обозначает ковариантное дифференцирование в связности первого рода, а для векторов h_i, $\underline{h_i}$ имеем выражение [6]

$$\left.\begin{aligned} h_i &= -T_i - \frac{1}{2}\omega_i - T^m f_{mi} + \text{градиентная величина}, \\ \underline{h_i} &= -T_i - \frac{1}{2}\omega_i + T^m f_{mi} + \text{градиентная величина}; \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

здесь T_i — чебышевский вектор асимптотической сети поверхности в связности первого рода, а ω_i — дополнительный вектор средней (вейлевой) связности

$$\overset{c}{\nabla}_n f_{ij} = \omega_n f_{ij}, \tag{39}$$

где $\overset{c}{\nabla}_n$ — ковариантное дифференцирование в средней связности, коэффициенты которой можно записать в виде

---

[1] Эта формула имеется в работе [4], стр. 41.

[2] Прямыми Грина называются первая и вторая ось сопряженной сети на поверхности ([1], стр. 380).

$$\Gamma^k_{ij} = F^k_{ij} - \frac{1}{2}(\omega_i \delta^k_j + \omega_j \delta_i^k - b_{ij} b^{kn} w_n), \tag{40}$$

при этом F^k_{ij} обозначают символы Кристоффеля F-связности.

В равенстве (39), заменяя связность Γ^k_{ij} по формуле (40) и учитывая, что

$$b_{ni}\, \omega_k b^{mk} f_{mj} - b_{nk}\, \omega_i\, b^{mk} f_{mj} = b^r_n\, \omega_r\, b_i^m f_{mj},$$

получим

$$\overset{F}{\nabla}_n f_{ij} = b^r_n \omega_r b_i^m f_{mj}. \tag{41}$$

Сравнивая эту формулу с первой, из равенств (24) заключаем, что

$$f_i = -\frac{1}{2}\omega_i. \tag{42}$$

Кроме того ([7], стр. 262),

$$B^n_{ij} f^{ij} = -2 f^{mn} T_m. \tag{43}$$

Как известно ([1], стр. 400), вектор T_i является инвариантом сопряженной сети f_{ij}. Для него, в силу формул (10), (19), (30), (36) и (43), получаем следующее выражение:

$$T_k = \frac{1}{2} B^n_{ij} f^{ij} f_{nk} = x^n f_{nk} = D^r_{nk} x_r x^n = -B^r_{nk} \overline{x}_r x^n = B_{kij}\, x^{(i} \overline{x}^{j)} =$$

$$= \frac{1}{2} B_{kij}(\overline{\theta}^{ij} \sin 2\nu - \theta^{ij} \cos 2\nu) = -(\underset{0}{s}_k \sin 2\nu + \underset{0}{\overline{s}}_k \cos 2\nu) = \tag{44}$$

$$= \underset{0}{s}_k \cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\nu\right) + \underset{0}{s}_k \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\nu\right).$$

Следовательно, инвариант T_i является единичным вектором F-метрики

$$b_{ij} T^i T^j = 1 \tag{45}$$

и в силу (24), можно написать, что

$$\overset{F}{\nabla}_k T_i = -b_{kn} y^n \overline{T}_i;\ \overline{T}_i = b_{in} T^n = \underset{0}{s}_i \cos 2\nu - \underset{0}{\overline{s}}_i \sin 2\nu, \tag{46}$$

где y_n — чебышевский вектор в F-связности сети

$$T_{(i} \overline{T}_{j)} = -\frac{1}{2}\theta_{ij} \cos 4\nu - \frac{1}{2}\overline{\theta}_{ij} \sin 4\nu. \tag{47}$$

С другой стороны, согласно формулам (32) и (44), можно сразу написать, что

$$\overset{F}{\nabla}_k T_i = \overline{T}_i(-2\partial_k \nu - \overline{\theta}_k) \tag{48}$$

и поэтому

$$y_i = 2 b_i^k \partial_k \nu + \theta_i. \tag{49}$$

Кроме того, рассматривая сопряженную сеть

$$D^k_{ij}\,T_k=-B^k_{ij}\,\overline{T}_k=B^k_{ij}\,(\overline{\underset{0}{s_k}}\sin 2\nu-2\underset{0}{s_k}\cos 2\nu)=$$

$$=\overline{\theta}_{ij}\sin 2\nu-\theta_{ij}\cos 2\nu=2x_{(i}\,\overline{x_{j)}}, \tag{50}$$

замечаем, что в F-связности ее чебышевский вектор, в силу (31), равен $(3\theta_i-2f_i)$, т. е.

$$\text{ч. в.}\,(D^k_{ij}\,T_k)=\text{ч. в.}\,(x_{(i}\,\overline{x_{j)}})=3\theta_i-2f_i. \tag{51}$$

Таким образом, применяя формулу (31), можно написать, что

$$\text{ч. в.}\,T_{(i}\,\overline{T}_{j)}=3\theta_i-2\,\text{ч. в.}\,(D^k_{ij}\,T_k)=-3\theta_i+4f_i. \tag{52}$$

Заканчивая изложение предварительных соотношений, применим их к рассмотрению некоторых сопряженных сетей с различными специфическими свойствами.

1. Сопряженные сети, для которых конгруэнция касательных прямых к одной из линий образует конгруэнцию W. Для того, чтобы одна из конгруэнций касательных прямых к линиям сети f_{ij} была конгруэнцией W, необходимо и достаточно в равенствах (38) или $h_i=-T_i$, или $\overline{h}_i=-T_i$ ([8], стр. 12).

Таким образом, в силу (38), (42) и (43), получаем, что или

$$\nabla^i\left(\frac{1}{2}\,B_{irs}\,f^{rs}-f_i\right)=0 \tag{53}$$

или

$$\nabla^i\left(\frac{1}{2}B_{irs}\,f^{rs}+f_i\right)=0. \tag{54}$$

Эти условия, очевидно, не зависят от нормализации поверхности. Взяв, например, первое из этих уравнений, согласно равенствам (35) и (36), можно его представить в виде

$$\partial_i\,\mu+b_i{}^k\;\partial_k\,\nu=2\,(\overline{\underset{0}{s_i}}\cos\nu-\underset{0}{s_i}\sin\nu)-2\theta_i;\quad \theta_i=\frac{2}{3}\,\psi_i, \tag{55}$$

где μ — произвольная дифференцируемая функция, а ν — неизвестная функция, определяющая искомую сеть по формуле (14).

2. Сети R. Пусть обе конгруэнции касательных прямых к линиям сопряженной сети f_{ij} образуют конгруэнцию W. Как известно, такая сеть называется сетью R, а поверхности, несущие сети R, называются поверхностями R.

Для того, чтобы сопряженная сеть f_{ij} была сетью R, необходимо и достаточно выполнение равенств (53) и (54). Таким образом, сети R характеризуются условиями

$$\nabla^i f_i=0;\;\; \nabla^i(B_{irs}\,f^{rs})=0. \tag{56}$$

Первое из этих равенств указывает на то, что сеть R — изотермически сопряженная, а второе — что она расслояющая ([1], стр. 407).

Условие расслояемости сопряженной сети, согласно формулам (36), (56), означает градиентность единичного вектора x_i

$$\nabla^i x_i = 0 \quad (57)$$ [1]

и поэтому, в силу (32), его можно записать в виде

$$\overline{x}^k (\partial_k \nu - \overline{\theta}_k) = 0, \quad (58)$$

или, вводя новое неизвестное h,

$$\partial_k \nu = \overline{\theta}_k - h\overline{x}_k. \quad (59)$$

Согласно геометрическому значению условия (57), которое было отмечено выше, расслояющие сети

$$f_{ij} = D^k_{ij} x_k = - B^k_{ij} \overline{x}_k$$

характеризуются тем, что для них вектор

$$2x^k = B^k_{ij} f^i \cdot$$

колинеарен чебышевскому вектору в F-связности сети $x_{(i}\overline{x}_{j)}$. Таким образом, нахождение расслояющей сети тесно связано с вопросом отыскания такой сопряженной сети на поверхности, для которой чебышевский вектор в F-связности касается одной из линий сети.

Учитывая первое из равенств (56), введем новое неизвестное $f(u^1, u^2)$

$$f_i = \frac{1}{2} \partial_i f(u^1, u^2); \quad \left(\partial_i f(u^1, u^2) = \frac{\partial f}{\partial u^i} \right). \quad (60)$$

Теперь, в силу (35), будем иметь

$$\partial_i f = 2\theta_i + b_i{}^k \partial_k \nu, \quad (61)$$

или, учитывая (59),

$$\partial_i f = 3\theta_i - h x_i{}^2. \quad (62)$$

Таким образом, условия (56), характеризующие сеть R, принимают следующий вид:

$$\partial_k \nu = \overline{\theta}_k - h\overline{x}_k; \quad \partial_k f = 3\theta_k - hx_k. \quad (63)$$

Дифференцированием системы (63) получаем

$$x_i \nabla^i h - 3\nabla^i \theta_i = 0; \quad \overline{x}_i \nabla^i h + h\nabla^i \overline{x}_i - \nabla^i \overline{\theta}_i = 0. \quad (64)$$

Но

$$\overline{x}_i x^i = 1,$$

и поэтому система (64) определяет $\nabla_i h$

$$\nabla_i h = (\nabla^n \overline{\theta}_n - h\nabla^n \overline{x}_n)\, x_i - 3\overline{x}_i \nabla^n \theta_n. \quad (65)$$

---

[1] Это условие имеется в работе [4], стр. 40—41.

[2] Это условие имеется в работе [4], стр. 42.

Теперь в силу (32), (59), имеем

$$\overset{F}{\nabla}_k x_i = -h \overline{x}_k x_i; \quad \overset{F}{\nabla}_k \overline{x}_i = h x_k x_i \text{ [1]} \tag{66}$$

и соотношение (65) принимает вид

$$\nabla_i h = (\nabla^n \overline{\theta}_n + h^2)\, x_i - 3\overline{x}_i \nabla^n \theta_n. \tag{67}$$

Условие интегрируемости этой системы

$$x_i \nabla^i \nabla^n \overline{\theta}_n - 3\overline{x}_i \nabla^i \nabla^n \theta_n + 9h \nabla^n \theta_n = 0$$

определит h

$$h = \frac{1}{9\nabla^n \theta_n} (-3b^i{}_m \nabla^m \nabla^n \theta_n - \nabla^i \nabla^n \overline{\theta}_n)\, x_i \tag{69}$$

при предположении, что

$$\nabla^n \theta_n = \frac{2}{3} \nabla^n \psi_n \neq 0. \tag{70}$$

Но ([1], стр. 423)

$$\nabla^i \overline{\theta}_i = \frac{2}{3} \nabla^n \psi_n = \overset{F}{k}, \tag{71}$$

где $\overset{F}{k}$ — гауссова кривизна F-метрики.

Поэтому, рассматривая вектор

$$a_i = \frac{1}{9\nabla^n \theta_n} (-3b_{im} \nabla^m \nabla^n \theta_n - \nabla_i \nabla^n \overline{\theta}_n) = \frac{1}{6\nabla^n \psi_n} \Big(-2b_{im} \nabla^m \nabla^n \psi_n -$$

$$- \frac{2}{3} \nabla_i \nabla^n \overline{\psi}_n\Big) = \frac{1}{6\nabla^n \psi_n} (-2b_{im} \nabla^m \nabla^n \psi_n - \nabla_i \overset{F}{k}), \tag{72}$$

будем иметь

$$h = x_i a^i. \tag{73}$$

Заметим, что вектор a_i определяется с помощью тензоров ψ_i, b_{ik} и при условии (70), в силу (65), (73), всегда отличен от нуля.

Теперь, согласно формулам (18), (23) и (73), получаем, что

$$\left.\begin{aligned} h\overline{x}_i &= x_n a^n \overline{x}_i = \frac{1}{2} (a^n \overline{\theta}_{ni} \sin 2\nu - a^n \theta_{ni} \cos 2\nu - a_i), \\ h x_i &= x_n a^n x_i = \frac{1}{2} (\overline{a}_i - a^n \overline{\theta}_{ni} \cos 2\nu - a^n \theta_{ni} \sin 2\nu), \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

поэтому система (63) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \partial_i \nu &= \overline{\theta}_i - \frac{1}{2} (a^n \overline{\theta}_{ni} \sin 2\nu - a^n \theta_{ni} \cos 2\nu - a_i), \\ \partial_i f &= 3\theta_i - \frac{1}{2} (\overline{a}_i - a^n \overline{\theta}_{ni} \cos 2\nu - a^n \theta_{ni} \sin 2\nu). \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

---

[1] Это равенство имеется в работе [4], стр. 42.

Учитывая (20), условия интегрируемости этой системы можно привести к виду

$$\left[\frac{1}{2}\nabla^i(a^n\theta_{ni})-a_n\overline{\theta}_{ni}\overline{\theta}^i-\frac{1}{2}a^n\overline{\theta}_{ni}a^i\right]\cos 2\nu-\left[\frac{1}{2}\nabla^i(a^n\overline{\theta}_{ni})+\right.$$
$$\left.+a^n\theta_{ni}\overline{\theta}^i+\frac{1}{2}a^n\theta_{ni}a^i\right]\sin 2\nu+\nabla^i\overline{\theta}_i+\frac{1}{2}\nabla^i a_i+\frac{1}{2}b_{nm}a^n a^m=0, \tag{76}$$

$$\left[\frac{1}{2}\nabla^i(a^n\overline{\theta}_{ni})+a^n\theta_{ni}\overline{\theta}^i+\frac{1}{2}a^n\theta_{ni}a^i\right]\cos 2\nu+\left[\frac{1}{2}\nabla^i(a^n\theta_{ni})-\right.$$
$$\left.-a^n\overline{\theta}_{ni}\overline{\theta}^i-\frac{1}{2}\overline{\theta}_{ni}a^n a^i\right]\sin 2\nu+3\nabla^i\theta_i-\frac{1}{2}\nabla^i\overline{a}_i=0. \tag{77}$$

Но ([1], стр. 356)

$$\overset{F}{\nabla}_k\theta_{ij}=2\overline{\theta}_k\overline{\theta}_{ij};\quad \overset{F}{\nabla}_k\overline{\theta}_{ij}=-2\overline{\theta}_k\theta_{ij}, \tag{78}$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^i(a^n\theta_{ni})=\theta_{in}\overset{F}{\nabla^i}a^n+2\overline{\theta}^i\overline{\theta}_{in}a^n;\quad \nabla^i(a^n\overline{\theta}_{in})=\overline{\theta}_{in}\overset{F}{\nabla^i}a^n-2\overline{\theta}^i\theta_{in}a^n,\\ &\overline{\theta}_{ni}\overset{F}{\nabla^i}a^n=b^m_n\theta_{im}\overset{F}{\nabla^i}a^n;\quad \theta_{ni}\overset{F}{\nabla^i}a^n=\overline{\theta}^m_n b_{mi}\overset{F}{\nabla^i}a^n=-\overline{\theta}_{mn}b_i^m\overset{F}{\nabla^i}a^n.\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Таким образом, равенства (76) и (77) принимают вид

$$(\overline{\theta}^m_n b_{mi}\overset{F}{\nabla^i}a^n-\overline{\theta}_{ni}a^n a^i)\cos 2\nu-(b^m_n\theta_{im}\overset{F}{\nabla^i}a^n+\theta_{ni}a^n a^i)\sin 2\nu+$$
$$+2\nabla^i\overline{\theta}_i+\nabla^i a_i+b_{mn}a^n a^m=0,$$

$$(\overline{\theta}_{in}\overset{F}{\nabla^i}a^n+\theta_{ni}a^n a^i)\cos 2\nu+(\theta_{ni}\overset{F}{\nabla^i}a^n-\overline{\theta}_{ni}a^n a^i)\sin 2\nu+$$
$$+6\nabla^i\theta_i-\nabla^i\overline{a}_i=0,$$

или, учитывая соотношения

$$\overline{\theta}_{ni}a^n a^i=b^m_n\theta_{mi}a^n a^i=\theta_{mi}\overline{a}^m a^i;\quad b^m_n a^n=\overline{a}^m,$$
$$\theta_{ni}a^n a^i=\overline{\theta}^m_n b_{mi}a^n a^i=-\overline{\theta}_{mn}a^n\overline{a}^m,$$

получим

$$(\overset{F}{\nabla^i}\overline{a}^m+a^m a^i)(\theta_{mi}\sin 2\nu+\overline{\theta}_{mi}\cos 2\nu)-\nabla^i(2\overline{\theta}_i+a_i)-b_{mn}a^m a^n=0, \tag{80}$$

$$(\overset{F}{\nabla^i}a^m-\overline{a}^m a^i)(\theta_{mi}\sin 2\nu+\overline{\theta}_{mi}\cos 2\nu)+\nabla^i(6\theta_i-\overline{a}_i)=0.$$

Последнее уравнение, в силу равенств

$$\theta_{mi}=\overline{\theta}_i^n b_{mn}=-\overline{\theta}_{ni}b^n_m;\quad \overline{\theta}_{mi}=b^n_m\theta_{ni};\quad \overline{a}^m b^n_m=-a^n,$$

можно представить также в виде

$$(\overset{F}{\nabla^i}\overline{a}^m+a^m a^i)(\theta_{mi}\cos 2\nu-\overline{\theta}_{mi}\sin 2\nu)=\nabla^i(\overline{a}_i-6\theta_i). \tag{81}$$

Теперь в разложении

$$\overset{F}{\nabla}_i \bar{a}_n + a_i a_n = \alpha(\theta_{ni}\cos 2\nu - \bar{\theta}_{ni}\sin 2\nu) + \\ + \beta(\theta_{ni}\sin 2\nu + \theta_{ni}\cos 2\nu) + \gamma b_{in} + \delta\varepsilon_{in} \tag{82}$$

легко определить коэффициенты α, β, γ, δ.

В самом деле, учитывая, что

$$b^{in}(\overset{F}{\nabla}_i \bar{a}_n + a_i a_n) = \overset{F}{\nabla}_i a^i + \bar{a}_i a^i; \quad \varepsilon^{in}(\overset{F}{\nabla}_i \bar{a}_n + a_i a_n) = \overset{F}{\nabla}_i \bar{a}^i,$$

в силу (80) и (81), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \nabla^i\left(\frac{1}{2}\bar{a}_i - 3\theta_i\right); \quad \beta = \nabla^i\left(\frac{1}{2}a_i + \bar{\theta}_i\right) + \frac{1}{2}\bar{a}_i a^i; \\ \gamma &= \frac{1}{2}\overset{F}{\nabla}_i a^i + \frac{1}{2}\bar{a}_i a^i; \quad \delta = -\frac{1}{2}\overset{F}{\nabla}_i \bar{a}^i. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

В соотношении (82), рассматривая сумму тензоров

$$\alpha(\theta^n{}_i\cos 2\nu - \bar{\theta}_{ni}\sin 2\nu) + \beta(\theta_{mi}\sin 2\nu + \bar{\theta}_{ni}\cos 2\nu) = \\ = (\theta_{mi}\cos 2\nu - \bar{\theta}_{mi}\sin 2\nu)(\alpha\delta^m_n + \beta b^m_n),$$

получим

$$(\alpha\delta^m_n + \beta b^m_n)(\theta_{mi}\cos 2\nu - \bar{\theta}_{mi}\sin 2\nu) = \overset{F}{\nabla}_{(i}\bar{a}_{n)} + a_i a_n - \gamma b_{in}, \tag{84}$$

или, предполагая, что

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \tag{85}$$

$$(\alpha^2+\beta^2)(\theta_{ij}\cos 2\nu - \bar{\theta}_{ij}\sin 2\nu) = (\alpha\delta_i{}^n - \beta b_i{}^n)(\overset{F}{\nabla}_{(n}\bar{a}_{j)} + a_n a_j - \gamma b_{nj}). \tag{86}$$

Итак, согласно равенствам (30) и (86), тензор

$$a_{ij} = 2x_{(i}\bar{x}_{j)} = \bar{\theta}_{ij}\sin 2\nu - \theta_{ij}\cos 2\nu = \\ = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\beta b_i{}^n - \alpha\delta_i{}^n)(\overset{F}{\nabla}_{(n} a_{j)} + a_n a_j - \gamma b_{nj}) \tag{87}$$

можно считать определенным.

Зная тензор a_{ij}, найдем его чебышевский вектор в F-связности A_i:

$$A_i = \frac{1}{2}\tilde{a}^{mn}(\overset{F}{\nabla}_m a_{ni} - \frac{1}{2}\overset{F}{\nabla}_i a_{mn}) \tag{88}$$

и представим его в виде

$$A_i = h\underset{0}{A}_i; \quad h^2 = b_{ij}A^iA^j = \bar{A}_j A^j. \tag{89}$$

где $\underset{0}{A}_i$ — единичный вектор F-метрики. При этом, в силу (31) и (87),

$$A_i = 3\theta_i - 2f_i. \tag{90}$$

Как следует из равенств (32), (59), (62), для того, чтобы сеть $f_{ij}=$ $=D^k_{ij}\,x_k$ была сетью R, необходимо и достаточно

1) равенство двух векторов

$$x_i=\underset{0}{A_i} \tag{91}$$

(согласно геометрическому значению условия расслояемости сети) и 2) градиентность чебышевского вектора сети f_{ij}.

Эти два условия, в силу (87), (89) и (90), можно выразить равенствами

$$\frac{2}{h^2}A_{(i}\overline{A}_{j)}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\beta b_i{}^n-\alpha\delta_i{}^n)\,(\overset{F}{\overline{\nabla}}_{(n}\,a_{j)}+a_n\,a_j-\gamma b_{nj}), \tag{92}$$

$$\nabla^i(A_i-3\theta_i)=0. \tag{93}$$

Очевидно, условие (92) равносильно уравнению

$$(\alpha\delta_i{}^n-\beta b_i{}^n)\,(\overset{F}{\overline{\nabla}}_{(n}\,a_{j)}+a_n\,a_j-\gamma b_{nj})\,A^i\,A^j=0. \tag{94}$$

Кроме того, сеть R, согласно (19) и (89), определяется тензором

$$f_{ij}=\frac{1}{h}\,D^k_{ij}\,A_k=-\frac{1}{h}\,B^k_{ij}\,\overline{A}_k. \tag{95}$$

Для тензора сети R можно найти еще другое выражение. В самом деле, в силу равенств (22) и (87), имеем

$$2a_{ij}=x_i\,\overline{x}_j+x_j\,\overline{x}_i;\ \ \varepsilon_{ij}=x_i\,\overline{x}_j-x_j\,\overline{x}_i. \tag{96}$$

Отсюда

$$\varepsilon_{ij}+2a_{ij}=2x_i\,\overline{x}_j \tag{97}$$

и поэтому, по формуле (19), получаем, что

$$\overline{x}_n\,f_{ij}=\frac{1}{2}\,D^k_{ij}\,(\varepsilon_{kn}+2a_{nk});\ \ x_n\,f_{ij}=-\frac{1}{2}\,B^k_{ij}\,(\varepsilon_{nk}+2a_{nk}), \tag{98}$$

где $\overline{x}_n$, x_n — неизвестные единичные векторы F-метрики.

Чтобы устранить векторы $\overline{x}_n$, x_n, можно равенства (98) свернуть с каким-нибудь известным тензором первого ранга, например, с тензором $\underset{1}{\psi}_i$ из равенства (27) (или с тензором $D^{nji}\,a_n$). Таким образом, для тензора сети R получается выражение

$$f_{ij}=x\,D^k_{ij}\,(\varepsilon_{kn}+2a_{nk})\,\underset{1}{\psi}{}^n=\overline{x}\,B^k_{ij}\,(\varepsilon_{nk}+2a_{nk})\,\underset{1}{\psi}{}^n, \tag{99}$$

где x, $\overline{x}$ — множители, определяющие нормирование f_{ij}. Например, в случае нормирования (15), получаем, что

$$x^2=\frac{1}{2b^{kr}\,(\underset{1}{\psi}_k\,\underset{1}{\psi}_r+2a_{.m}\,\underset{1}{\psi}{}^m\,\underset{1}{\psi}_k)};\ \ \overline{x}^2=\frac{1}{2b^{rk}\,(\underset{1}{\psi}_k\,\underset{1}{\psi}_r-2a_{.m}\,\underset{1}{\psi}{}^m\,\underset{1}{\psi}_k)}. \tag{100}$$

Рассмотрим случай, когда неравенство (85) не выполняется,

$$\alpha=\frac{1}{2}\nabla^i(\overline{a}_i-6\theta_i)=0,\quad \beta=-\frac{1}{2}\nabla^i(2\theta_i+a_i)+\frac{1}{2}\overline{a}_i a^i=0; \tag{101}$$

тогда, в силу (84),

$$\overset{F}{\overline{\nabla}}_{(i}a_{n)}+a_i a_n=\gamma b_{in};\ \gamma=\frac{1}{2}\overset{F}{\overline{\nabla}}_i a^i+\frac{1}{2}\overline{a}_i a^i. \tag{102}$$

Теперь система (75) вполне интегрируема, так как условия ее интегрируемости выполняются тождественно. При этом решение системы ν, вообще говоря, будет содержать одну произвольную постоянную и поэтому на поверхности будут существовать ∞^1 сетей R.

Условия (101), (102) можно представить в более компактном виде. В самом деле, выражение (82), согласно (101), принимает вид

$$\overset{F}{\overline{\nabla}}_i a_n+a_i a_n=\gamma b_{in}+\delta\varepsilon_{in}.$$

Но, в силу (101),

$$\nabla^i\overline{a}_i=6\nabla^i\theta_i;\quad \nabla^i a_i=-2\nabla^i\theta_i-\overline{a}_i a^i;$$

поэтому, условие

$$\overset{F}{\overline{\nabla}}_i a_j=(\nabla^n\overline{\theta}_n+\overline{a}_n a^n)\,b_{ij}-a_i a_j+3\varepsilon_{ij}\nabla^n\theta_n \tag{103}$$

заменяет систему равенств (101), (102).

Рассмотрим теперь исключенный в силу (70) случай, когда

$$\nabla^n\theta_n=\frac{2}{3}\nabla^n\psi_n=0. \tag{104}$$

Тогда, согласно (68), имеем

$$x_i\nabla^i\nabla^n\overline{\theta}_n=0$$

и поэтому

$$x_i=x\,\nabla_i\nabla^n\overline{\theta}_n, \tag{105}$$

предполагая, что

$$\nabla^n\overline{\theta}_n\neq\text{const}. \tag{106}$$

В выражении (105) коэффициент x определяется нормированием вектора x_i (x_i — единичный вектор F-метрики)

$$x=\frac{1}{\sqrt{b_{ij}\,(\nabla^i\nabla^n\overline{\theta}_n)\,(\nabla^j\nabla^m\overline{\theta}_m)}}, \tag{107}$$

а условие градиентности x_i имеет вид

$$(\nabla_i\nabla^n\overline{\theta}_n)\,\nabla^i x=0, \tag{108}$$

т. е.

$$(\nabla_i\nabla^n\overline{\theta}_n)\,\nabla^i\left[b_{rs}\,(\nabla^r\nabla^n\overline{\theta}_n)\,(\nabla^s\nabla^m\overline{\theta}_m)\right]=0. \tag{109}$$

Кроме того, согласно (32) и (34), имеем

$$x^i\overset{F}{\nabla}_k x_i=b_{kn}\,(2f^n-3\theta^n). \tag{110}$$

Поэтому, в силу (105), условие градиентности вектора f_i принимает вид:

$$\nabla^r [x b^k_r (\nabla^i \nabla^n \overline{\theta}_n) \overset{F}{\nabla}_k (x \nabla_i \nabla^m \overline{\theta}_m)] = 0. \tag{111}$$

Таким образом, при предположении (104) и (106), равенства (109), (111) являются необходимыми и достаточными условиями существования на поверхности сети R.

Для тензора сети R, согласно (19) и (105), получается следующее выражение:

$$f_{ij} = x D^k_{ij} \nabla_k \nabla^n \overline{\theta}_n = -x B^k_{ij} b_{km} \nabla^m \nabla^n \overline{\theta}_n. \tag{112}$$

В заключение рассмотрим случай, когда

$$\nabla^n \theta_n = 0; \ \nabla^n \overline{\theta}_n = c = \mathrm{const}. \tag{113}$$

Тогда равенства (67) упрощаются:

$$\nabla_i h = (c + h^2)\, x_i. \tag{114}$$

Теперь (62) удовлетворяется в силу (114) и поэтому остается только система уравнений (59), (114). Эту систему с двумя неизвестными ν, h, согласно (18), можно, например, представить в виде

$$\partial_k \nu = \overline{\theta}_k + h(\underset{0}{s}_k \cos\nu + \underset{0}{\overline{s}}_k \sin\nu); \quad \partial_k h = (c + h^2)(\underset{0}{\overline{s}}_k \cos\nu - \underset{0}{s}_k \sin\nu). \tag{115}$$

Полученная система вполне интегрируема и, по известной теореме теории дифференциальных уравнений, искомые функции ν, h всегда существуют и зависят от двух произвольных постоянных.

Таким образом, все поверхности, удовлетворяющие условиям (113), принадлежат к классу поверхностей R, а множество сетей R на поверхности зависит от двух произвольных постоянных.

Резюмируя все рассмотренные случаи поверхностей R, прежде всего отметим, что основную роль играют следующие величины:

$$\nabla^i \theta_i = \frac{2}{3} \nabla^i \underset{\cdot}{\psi}_i; \ \nabla^i \overline{\theta}_i = \frac{2}{3} \nabla^i \overline{\underset{\cdot}{\psi}}_i = \frac{2}{3} \overset{F}{\nabla^i} (b_{in} \underset{\cdot}{\psi}^n) = k;$$

$$\overset{F}{\nabla}_k B^k_{ij} = -2 \underset{\cdot}{\psi}_k B^k_{ij}; \quad a_i = \frac{-1}{6 \nabla^n \underset{\cdot}{\psi}_n} (\nabla_i k + 2 b_{im} \nabla^m \nabla^r \underset{\cdot}{\psi}_r); \ \overline{a}_i = b_{in} a^n \text{ [1]};$$

$$\alpha = \nabla^i \left(\frac{1}{2} b_{in} a^n - 2 \underset{\cdot}{\psi}_i \right); \ \beta = \nabla^i \left(\frac{2}{3} b_{in} \underset{\cdot}{\psi}^n + \frac{1}{2} a_i \right) + \frac{1}{2} b_{in} a^i a^n; \tag{116}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i a^i + \frac{1}{2} b_{in} a^n a^i; \ \delta = -\frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i \overline{a}^i = -\frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i (b^i{}_n a^n),$$

где тензорные индексы всюду принимают значения 1 и 2; $\underset{\cdot}{\psi}_i$ — тензор Фубини ([1], стр. 423); B^k_{ij} — тензор Сегре ([1], стр. 416); b_{ij} — тензор

---

[1] В работах [3], [4] рассматривается аналогичный вектор, обозначенный через P_i.

асимптотической сети поверхности, нормированный в смысле Фубини ([1], стр. 419); $\overset{F}{\nabla}_i$ обозначает ковариантное дифференцирование в связности Римана, определенной невырожденным, симметрическим тензором асимптотической сети поверхности, при нормировании тензора b_{ij} в смысле Фубини, а $\overset{F}{k}$ — гауссова кривизна этой связности. Таким образом, определенную риманову связность вкратце будем называть F-связностью, а соответствующий метрический тензор F-метрикой.

Тензорные индексы перебрасываются с помощью дискриминантного бивектора тензора b_{ij} ([1], стр. 35).

Кроме того, отметим, что условие

$$\nabla^i \psi_i = 0$$

характеризует класс изотермо-асимптотических поверхностей ([1], стр. 423).

Все нелинейчатые поверхности R, несущие невырожденную сеть R (т. е. из рассмотрения исключаются, кроме линейчатых поверхностей, также и поверхности R_0), образуют следующие четыре группы[1] (разъяснения нижеупотребляемых обозначений — в сводке формул (116)):

$$\text{A)}\ \nabla^n \psi_n \neq 0;\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \tag{117}$$

В этом случае можно построить тензор

$$a_{ij} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta b_i^{\ n} - \alpha \delta_i^n) (\overset{F}{\nabla}_{(n} \bar{a}_{j)} + a_n a_j - \gamma b_{nj}). \tag{118}$$

определяющий некоторую сопряженную сеть на поверхности.

Чебышевский вектор в F-связности этой сети обозначим через A_i, т. е.

$$A_i = \frac{1}{2} \tilde{a}^{mn} (\overset{F}{\nabla}_n a_{mi} - \frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i a_{mn}). \tag{119}$$

При ограничениях (117), для того, чтобы данная поверхность принадлежала к классу поверхностей R, необходимо и достаточно

$$\begin{gathered} a_{ij} A^i A^j = 0, \\ \nabla^i (A_i - 2\psi_i) = 0. \end{gathered} \tag{120}$$

В этом случае существует единственная сеть R, которая определяется тензором

$$f_{ij} = -\frac{1}{h} B_{ij}^k b_{kn} A^n, \tag{121}$$

где h устанавливает нормирование f_{ij} и, например, когда

$$f^{ij} = -\tilde{f}^{ij},$$

тогда

$$h^2 = b_{ij} A^i A^j \neq 0.$$

---

[1] Эти четыре типа поверхностей выделены также в работах [3], [4].

Для тензора сети R имеется также другое представление, определенное равенством (99).

Можно выражения (99), (121) рассматривать как необходимое условие существования сети R и равенства (120) заменить, например, требованиями (56)

$$\nabla^i f_i = 0; \ \nabla^i (B_{irs} f^{rs}) = 0, \tag{122}$$

где f_i — чебышевский вектор в F-связности сети f_{ij}.

$$B) \ \nabla^n \psi_n \neq 0; \ \alpha = \beta = 0. \tag{123}$$

В этом случае, чтобы данная поверхность принадлежала к классу поверхностей R, необходимо и достаточно

$$\overset{F}{\nabla}_i \bar{a}_j = (a^n \bar{a}_n + \overset{F}{k}) b_{ij} - a_i a_j + 2\varepsilon_{ij} \nabla^n \psi_n, \quad \bar{a}_i = b_{in} a^n, \tag{124}$$

[1]

где ε_{ij} — дискриминантный бивектор тензора b_{ij}.

На поверхности существуют ∞^1 сетей R.

$$C) \ \nabla^n \psi_n = 0; \ \overset{F}{k} \neq \mathrm{const}. \tag{125}$$

Теперь, чтобы данная поверхность принадлежала к классу поверхностей R, необходимо и достаточно

$$1) \ (\overset{F}{\nabla}_i k) \nabla^i [b_{rs} (\overset{F}{\nabla}^r k)(\overset{F}{\nabla}^s k)] = 0,$$

$$2) \ \nabla^r [x b^n_r (\overset{F}{\nabla}^i k) \ \overset{F}{\nabla}_n (x \overset{F}{\nabla}_i k)] = 0. \tag{126}$$

$$x^2 = \frac{1}{b_{ij} (\overset{F}{\nabla}^i k)(\overset{F}{\nabla}^j k)}.$$

При этом, на поверхности существует единственная сеть R, тензор которой можно записать в виде

$$f_{ij} = -x B^n_{ij} b_{nm} \overset{F}{\nabla}^m k. \tag{127}$$

$$D) \ \nabla^n \psi_n = 0; \ \overset{F}{k} = \mathrm{const}. \tag{128}$$

В этом случае поверхность всегда является поверхностью R и множество сетей R на ней зависит от двух произвольных постоянных.

3. Сети Ионаса. Как известно ([1], стр. 404), сеть Ионаса можно определить как сопряженную сеть поверхности, оси и ребра Грина[2] которой образуют конгруэнции, сопряженные и гармоничные к поверхности. Иначе говоря, прямые Грина сети Ионаса индуцируют на поверхности риманову пару внутренних геометрий. Поэтому, нормализуя поверхность прямыми Грина сети Ионаса f_{ij}, будем иметь ([1], стр. 191)

---

[1] Аналогичное условие имеется в работах [3], [4].

[2] Т. е. первая и вторая ось сопряженной сети.

$$\nabla^i \omega_i = 0; \ \nabla^i T_i = 0, \tag{129}$$

где ω_i, T_i — векторы, встречаемые в формулах (38).

Полученное условие, в силу равенств (35), (42), (49), принимает вид

$$\nabla^i (2\theta_i + b_i^k \partial_k \nu) = 0; \ b^i{}_n (2b^{kn} \partial_k \nu + \theta^n) \overline{T}_i = 0. \tag{130}$$

Таким образом, для того, чтобы сопряженная сеть была сетью Ионаса, необходимо и достаточно, чтобы ее тензор f_{ij} удовлетворял систему (130).

Стремясь к возможно большей аналогии с уравнениями (63), систему (130) перепишем в виде

$$2\theta_i + b_i^k \partial_k \nu = \partial_i f; \ 2b^{ki} \partial_k \nu + \theta^i = HT^i,$$

т. е.

$$2\partial_i \nu = H\overline{T}_i - \overline{\theta}_i; \ 2\partial_i f = 3\theta_i + HT_i, \tag{131}$$

где введены обозначения

$$\overline{T}_i = b_{in} T^n; \ \overline{\theta}_i = a_{in} \theta^n; \ \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial u^i}; \ \partial_i \nu = \frac{\partial \nu}{\partial u^i},$$

а f и H — вспомогательные неизвестные функции.

Исследование системы (131) проводится точно по той же схеме, как и системы (63). Поэтому приведем здесь только окончательные результаты.

Имея в виду формулы (116) и разъяснения к ним, добавим, что теперь основную роль играют величины

$$c_i = \frac{1}{6\nabla^n \psi_n} (\overset{F}{\nabla}_i k - 2b_{im} \nabla^m \nabla^r \psi_r); \ \overline{c}_i = b_{in} c^n;$$

$$\overline{\alpha} = -\left(\frac{1}{2} b_{in} c^n + 2\psi_i\right); \ \overline{\beta} = \nabla^i \left(\frac{2}{3} b_{in} \psi^n + \frac{1}{2} c_i\right) + \frac{1}{2} b_{in} c^i c^n; \tag{132}$$

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i c^i + \frac{1}{2} b_{in} c^i c^n; \ \overline{\delta} = -\frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i \overline{c}^i = -\frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_i (b^i{}_n c^n).$$

Все нелинейчатые поверхности Ионаса образуют следующие[1] четыре группы (разъяснения употребляемых ниже обозначений — в сводке формул (116) и (132)):

$$A) \quad \nabla^n \psi_n \neq 0; \ \overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2 \neq 0. \tag{133}$$

В этом случае можно построить тензор

$$c_{ij} = \frac{-1}{\overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2} (\overline{\beta} b_i{}^n + \overline{\alpha} \delta_i{}^n)(\overset{F}{\nabla}_{(n} \overline{c}_{j)} + c_n c_j - \overline{\gamma} b_{nj}), \tag{134}$$

определяющий некоторую сопряженную сеть на поверхности. Чебышевский вектор в F-связности этой сети обозначим через c_i

---

[1] Эти четыре типа поверхностей Ионаса выделены также в работе [4].

$$c_i=\frac{1}{2}\tilde{c}^{mn}\left(\overset{F}{\nabla}_m c_{ni}-\frac{1}{2}\overset{F}{\nabla}_i c_{mn}\right). \tag{135}$$

При ограничениях (133), для того, чтобы данная поверхность принадлежала к классу поверхностей Ионаса, необходимо и достаточно

$$\begin{gathered} c_{ij}\,c^i\,c^j=0, \\ \nabla^i(c_i+2\psi_i)=0. \end{gathered} \tag{136}$$

В этом случае существуют взаимно аполярные, две сопряженные сети Ионаса.

Тензор сети Ионаса определяется, например, следующим образом: аналогично равенствам (87), (89) и (91), имеем

$$c_{ij}=2T_{(i}\overline{T}_{j)};\ \underset{0}{c}_i=T_i;\ c_i=H\underset{0}{c}_i;\ H^2=b_{ij}\,c^i\,c^j;\ b_{ij}\underset{0}{c}^i\underset{0}{c}^j=1, \tag{137}$$

поэтому по формулам (50) и (96) найдем, что

$$x_i\overline{x_j}+x_j\overline{x_i}=D^k_{ij}\underset{0}{c}_k;\ x_i\overline{x_j}-x_j\overline{x_i}=\varepsilon_{ij}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{ik}+D^k_{ij}\underset{0}{c}_k=2x_i\overline{x_j}.$$

Таким образом, согласно (19), получаем, что

$$2\overline{x_j}\,f_{rs}=(\varepsilon_{nj}+D^k_{nj}\underset{0}{c}_k)\,D^n_{rs}.$$

Учитывая здесь непосредственно проверяемое равенство

$$D^k_{nj}\,D^n_{rs}=\frac{1}{2}J(b^k_r\,\varepsilon_{js}+b_{rj}\,\delta^k_s-\varepsilon_{rs}\,b^k_j),\quad \left(J=\frac{1}{2}b^{rs}\,B^m_{nr}\,B^n_{ms}\right), \tag{138}$$

в силу (13), будем иметь

$$2\overline{x_j}\,f_{rs}=\varepsilon_{nj}\,D^n_{rs}+\underset{0}{c}_k\,b^k_r\,\varepsilon_{js}+\underset{0}{c}_s\,b_{rj}-\varepsilon_{rs}\,b^k_j\underset{0}{c}_k.$$

Свертывая это соотношение, например, с тензором $\underset{0}{c}^j$, получим, согласно (137),

$$xf_{rs}=-D_{rsn}\underset{0}{c}^n+2\underset{0}{c}_r\underset{0}{c}_s+\varepsilon_{rs};\ (\underset{0}{c}_r=b_{rn}\underset{0}{c}^n;\ x=2\overline{x_j}\underset{0}{c}^j).$$

Симметризируя по индексам r, s полученное равенство и учитывая (37), будем иметь окончательно

$$xf_{rs}=-D_{nrs}\underset{0}{c}^n+2c_{rs}, \tag{139}$$

где множитель x определяет нормирование тензора сети Ионаса f_{rs}. Например, при нормировании (15)

$$x^2=5+2D_{mrs}\underset{0}{c}^m\,c^{rs}. \tag{140}$$

Заметим, что тензор относительно f_{rs} аполярной и сопряженной сети можно записать в виде

$$\overline{x}\,\overline{f}_{rs}=D_{rsn}\underset{0}{c^n}+2c_{r}c_{s}. \tag{141}$$

Сети (139), (141) одновременно являются сетями Ионаса.

$$B)\ \nabla^n\psi_n\neq 0;\quad \overline{\alpha}=\overline{\beta}=0. \tag{142}$$

В этом случае, чтобы данная поверхность принадлежала к классу поверхностей Ионаса, необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$\overset{F}{\nabla}_i c_j=(c_n\,c^n+\overset{F}{k})\,b_{ij}-c_i c_j-2\varepsilon_{ij}\nabla^n\psi_n;\ (c_n=b_{mn}\,c^m), \tag{143}$$

где ε_{ij} — дискриминантный бивектор тензора b_{ij}, а c_i имеет значение, определенное в (132).

На поверхности существуют ∞^1 сетей Ионаса.

$$C)\ \nabla^n\psi_n=0;\ \overset{F}{k}\neq \text{const}. \tag{144}$$

Теперь, чтобы данная поверхность принадлежала к классу поверхностей Ионаса, необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$(\nabla_i k)\,\nabla^i[b_{rs}(\overset{F}{\nabla^r} k)(\overset{F}{\nabla^s} k)]=0,$$

$$\nabla^r\,[T b^n_r\,(\overset{F}{\nabla^i} k)\,\nabla_n\,(T\overset{F}{\nabla}_i k)]=0, \tag{145}$$

$$T^2=\frac{1}{b_{ij}\,(\overset{F}{\nabla^i} k)\,(\overset{F}{\nabla^j} k)}.$$

При этом на поверхности Ионаса существуют две взаимно аполярные и сопряженные сети Ионаса. Тензоры этих сетей можно определить следующим образом:

в силу (137), переписывая формулы (139) и (141) в виде

$$xf_{rs}=-D_{nrs}\,T^n+2T_{(r}\,\overline{T}_{s)},$$

$$\overline{x}\,\overline{f}_{rs}=D_{nrs}\,T^n+2T_{(r}\,\overline{T}_{s)},$$

где, как и в равенстве (105),

$$T_i=T\nabla_i\,\nabla^n\,\overline{\theta}_n=T\overset{F}{\nabla}_i\,k,$$

получим для тензоров двух аполярных сетей Ионаса следующие выражения:

$$\begin{aligned} yf_{rs}&=-D_{nrs}\,\overset{F}{\nabla^n} k+2T\,(\overset{F}{\nabla}_{(r}\,k)\overset{F}{\nabla}_{s)}\,k,\\ \overline{y}\,\overline{f}_{rs}&=D_{nrs}\,\overset{F}{\nabla^n} k+2T\,(\overset{F}{\nabla}_{(r}\,k)\,\overset{F}{\nabla}_{s)}\,k,\end{aligned} \tag{146}$$

здесь y, $\bar{y}$ — множители, определяющие нормирование соответствующих тензоров.

$$D)\ \overset{F}{\nabla}{}^{n} \psi_n = 0; \quad k = \mathrm{const}. \tag{147}$$

В этом случае поверхность всегда является поверхностью Ионаса и множество сетей Ионаса на ней зависит от двух произвольных постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Норден. Пространство аффинной связности. М.—Л., 1950.
2. А. И. Чахтаури. О проективной деформации поверхности. Тезисы докладов II всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964.
3. В. И. Шуликовский. О поверхностях R. Тезисы докладов II всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964.
4. В. И. Шуликовский. Проективная теория сетей. Издательство Казанского университета, 1964.
5. А. И. Чахтаури. Об одном классе проективно-деформируемых поверхностей. Труды Тбилисского государственного университета, 110 (1965), 115—134.
6. Г. Н. Тевзадзе. О нормализованных конгруэнциях прямых. Сообщения АН Грузинской ССР, XLI : 3 (1966), 521—528.
7. Г. Н. Тевзадзе. О паре сопряженных аффинных связностей, индуцируемых на поверхности проективного пространства P_3. Сообщения АН Грузинской ССР, XLII : 2 (1966), 257—264.
8. Г. Н. Тевзадзе. К тензорной теории конгруэнции прямых проективного пространства. Сообщения АН Грузинской ССР, XXXV : 1 (1964), 9—14.

Тбилисский математический
институт им. А. Размадзе

(Поступило в редакцию 9. XII. 1966)

გ. თევზაძე

პროექციული სივრცის ზედაპირზე ზოგიერთი ბადის შესახებ

რეზიუმე

პროექციულ სივრცეში განიხილება ზედაპირზე მდებარე შეუღლებული ბადის წირების მიერ შექმნილი მხებ წრფეთა ორი კონგრუენცია. ამ კონგრუენციების ესა თუ ის თვისება დაახასიათებს შეუღლებული ბადისა და ზედაპირის სპეციფიკურობას. ამასთან დაკავშირებით ნაშრომში შესწავლება შემდეგი სამი შემთხვევა.

1. ზემოაღნიშნული კონგრუენციებიდან ერთ-ერთი არის ვაინგარტენის. ამ შემთხვევაში შეუღლებული ბადის განმსაზღვრელი სიდიდეები აკმაყოფილებენ (55) ტოლობებს.

2. ორივე დასახელებული კონგრუენცია არის ვაინგარტენის. მიღებულია R ზედაპირის ინვარიანტული ტენზორული ნიშანი და (117)—(128) ფორმულებში განხილულია შესაძლო სხვადასხვა შემთხვევა.

3. იონასის ბადესთან დაკავშირებული კონგრუენციები. მიღებულია იონასის ზედაპირის ინვარიანტული ტენზორული ნიშანი და (133)—(147) ფორმულებში განხილულია შესაძლო სხვადასხვა შემთხვევა.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

А. И. ЧАХТАУРИ

О ПРОЕКТИВНО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В работе [1] исследован обширный класс поверхностей R. В настоящей статье исследуются все проективно-деформируемые поверхности.

Если на поверхности выбрана некоторая система криволинейных координат u^1, u^2, то тогда точечным и тангенциальным уравнениями поверхности будут

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2),$$
$$\overline{\xi}_\alpha = \overline{\xi}_\alpha(u^1, u^2), \tag{1}$$

где x^α—текущая точка (проективные координаты текущей точки) поверхности, а $\overline{\xi}_\alpha$—касательная плоскость (тангенциальные координаты касательной плоскости) поверхности в точке x^α. Допустим, что точка x^α нормирована так, что точки $\partial_1 x^\alpha$, $\partial_2 x^\alpha$ (производные точки x^α) лежат на проективной нормали (поверхность не линейчатая) 2-го рода, а плоскость $\overline{\xi}_\alpha$ нормирована так, что плоскости $\partial_1\overline{\xi}_\alpha$, $\partial_2\overline{\xi}_\alpha$ (производные плоскости $\overline{\xi}_\alpha$) проходят через проективную нормаль 1-го рода. За точечным базисом принимаем точки

$$\partial_1 x^\alpha,\ \partial_2 x^\alpha,\quad x^\alpha,\ X^\alpha,$$

где X^α—некоторая точка нормали 1-го рода. За тангенциальным базисом принимаем плоскости

$$\partial_2\overline{\xi}_\alpha,\ \partial_2\overline{\xi}_\alpha,\ \overline{\xi}_\alpha,\ \xi_\alpha,$$

где ξ_α—плоскость, определенная точками $\partial_1 x^\alpha$, $\partial_2 x^\alpha$, X^α.

Разложения точек $\partial_{ij}x^\alpha$ относительно точечного базиса, а плоскостей $\partial_{ij}\overline{\xi}_\alpha$ относительно тангенциального базиса, дают основные дифференциальные уравнения поверхности

$$\partial_{ij}x^\alpha = \Gamma^m_{ij}\partial_m x^\alpha + P_{ij}x^\alpha + b_{ij}X^\alpha,$$
$$\partial_{ij}\overline{\xi}_\alpha = \overline{\Gamma}^m_{ij}\partial_m\overline{\xi}_\alpha + \overline{P}_{ij}\overline{\xi}_\alpha + b_{ij}\xi_\alpha, \tag{2}$$

где Γ^m_{ij}, $\overline{\Gamma}^m_{ij}$ —коэффициенты аффинных связностей 1-го и 2-го родов, соответственно; P_{ij}, $\overline{P}_{ij}$—тензоры второго ранга; b_{ij}—тензор асимптотической сети. Точка x^α и плоскость ξ_α нормируются так, чтобы $X^\alpha\xi_\alpha=0$, $x^\alpha\xi_\alpha=1$. Кроме того, точка X^α выбирается на нормали 1-го рода так, чтобы иметь

$$\widetilde{b}^{ij}\,\overline{P}_{ji}=0. \tag{3}$$

При таких ограничениях условия интегрируемости системы (2) можно привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\widetilde{b}^{ij}\,\overline{P}_{ij}=0,\\
2\mathring{\nabla}_{[k}\overline{P}_{i]j}=-\nabla_{[k}R_{i]j},\\
\widetilde{\varepsilon}^{ik}\,\nabla_i\,\widetilde{b}^{ms}\,\mathring{\nabla}_k\,\overline{P}_{ms}+\widetilde{\varepsilon}^{ik}\,(\mathring{\nabla}_k\nabla_i\,\widetilde{b}^{ns}+2\widetilde{b}^{ms}R_{im}\delta_k^n)\,\overline{P}_{ns}=\widetilde{\varepsilon}^{ik}\,\widetilde{b}^{ms}\,\mathring{\nabla}_k\nabla_{[i}R_{m]s},
\end{gathered} \tag{4}$$

где ∇_k—символ абсолютного дифференцирования на основе Γ_{ij}^m, $\mathring{\nabla}_k$—символ абсолютного дифференцирования на основе $\mathring{\Gamma}_{ij}^m=\frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^m+\overline{\Gamma}_{ij}^m)$, R_{ij}—тензор Риччи от Γ_{ij}^m, а ε_{ij}—дискриминантный тензор для тензора b_{ij} ([1], стр. 120).

Переходя к конфигурации Вильчинского, система (4) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}
\widetilde{b}^{ij}\,\overline{P}_{ij}=0,\\
2\overset{\vee}{\nabla}_{[k}\,\overline{P}_{i]j}=-\nabla_{[k}R_{i]j},\\
D^{kij}\,\overset{\vee}{\nabla}_k\overline{P}_{ij}=\widetilde{\varepsilon}^{ik}\,\widetilde{b}^{ms}\mathring{\nabla}_k\nabla_{[i}R_{m]s},
\end{gathered} \tag{5}$$

где $D^{kij}=\widetilde{\varepsilon}^{km}\,\widetilde{\varepsilon}^{in}\,\widetilde{\varepsilon}^{js}\,D_{mns}$ (D_{mns}—тензор Дарбу), $\overset{\vee}{\nabla}_k$—символ абсолютного дифференцирования на основе средней связности нормализации Вильчинского, а именно

$$\overset{\vee}{\Gamma}{}_{ij}^m=\mathring{\Gamma}_{ij}^m+\frac{1}{2}(\tau_i\delta_j^m+\tau_j\,\delta_i^m-\widetilde{b}^{ms}\tau_s b_{ij}) \tag{6}$$

(τ_i—канонический тензор, см. [1], стр. 121).

Продифференцируя абсолютно первое равенство из (5), на основе связности $\overset{\vee}{\Gamma}{}_{ij}^m$ получим $\widetilde{b}^{ij}\overset{\vee}{\nabla}_k\,\overline{P}_{ij}=0$. Присоединяя это последнее равенство к двум последним равенствам системы (5), получается алгебраическая линейная система уравнений относительно неизвестных $\overset{\vee}{\nabla}_k\overline{P}_{ij}$. Эта система состоит из 5 уравнений с 6-ю неизвестными; поэтому неизвестные $\overset{\vee}{\nabla}_k\,\overline{P}_{ij}$ выражаются через некоторый параметр λ и система (5) приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\widetilde{b}^{ij}\,\overline{P}_{ij}=0,\\
\overset{\vee}{\nabla}_k\,\overline{P}_{ij}=\lambda D_{kij}+A_{kij},
\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$A_{kij} = \frac{A}{8} \underset{k}{b}^{m} D_{mij} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ki} \tilde{\delta}_{j}^{m} + \varepsilon_{kj} \tilde{\delta}_{i}^{m} - \underset{k}{b}^{m} b_{ij}) A_m,$$

$$A = \tilde{\varepsilon}^{ik} \tilde{b}^{is} \mathring{\nabla}_k \nabla_{[i} R_{m]s}, \quad A_i = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{kj} \nabla_k R_{ji}, \quad \underset{k}{b}^{m} = \varepsilon^{m} b_{ks},$$

а λ—новая неизвестная.

Если поверхность дана, то тогда условия интегрируемости системы (7) должны выполняться автоматически. В том случае, когда система (7) имеет единственное решение, поверхность однозначно определяется своей внутренней геометрией. Если система имеет разные решения, то тогда поверхность проективно-деформируема. Разным решениям системы (7) будут соответствовать поверхности, проективно-налагающиеся на данную поверхность.

Допустим, что система (7) имеет два решения: $\overline{P'}_{ij}$, λ' и $\overline{P''}_{ij}$, λ'', тогда разности этих решений

$$\overline{P'}_{ij} - \overline{P''}_{ij} = \varphi_{ij}, \quad \lambda' - \lambda'' = \alpha$$

будут решениями следующей системы:

$$\begin{gathered} \tilde{b}^{ij} \varphi_{ij} = 0, \\ \hat{\nabla}_k \varphi_{ij} = \alpha D_{kij}. \end{gathered} \tag{8}$$

Итак, *нелинейчатая проективно-деформируемая поверхность характеризуется условиями интегрируемости системы* (8).

Легко показать, что решению $\alpha = 0$ соответствует $\mathrm{Det}(\varphi_{ij}) = 0$, что характерно для поверхности R_0. И обратно, если $\mathrm{Det}(\varphi_{ij}) = 0$, то тогда $\alpha = 0$. Таким образом, *поверхность* R_0 *(узкий класс проективно-деформируемых поверхностей) характеризуется условиями интегрируемости слодующей системы*:

$$\begin{gathered} \tilde{b}^{ij} \varphi_{ij} = 0, \\ \check{\nabla}_k \varphi_{ij} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Легко показать, что условием интегрируемости этой системы является равенство

$$\mathrm{Det}(\check{R}_{ij}) = 0, \tag{10}$$

где $\check{R}_{ij}$—тензор Риччи от $\overset{m}{V}_{ij}$.

Если $\alpha \neq 0$, *тогда условия интегрируемости системы* (8) *будут характерными для поверхностей* R (обширный класс проективно-деформируемых поверхностей, [1]). Ниже мы определяем эти условия.

Продифференцируя абсолютно по $\overset{\vee}{\Gamma}{}^{m}_{ij}$ второе равенство из (10) и применяя тождество Риччи, будем иметь

$$-\overset{\vee}{R}{}^{m}_{\cdot ki}\varphi_{mj}-\overset{\vee}{R}{}^{m}_{\cdot kj}\varphi_{mi}=\partial_{[\cdot}\alpha D_{k]ij}+\alpha\overset{\vee}{\nabla}_{[\cdot}D_{k]ij},$$

где $\overset{\vee}{R}{}^{m}_{\cdot ki}$—тензор кривизны от $\overset{\vee}{\Gamma}{}^{m}_{ij}$. Умножая это равенство на D^{kij}, будем иметь

$$2D^{kij}\overset{\vee}{R}{}^{m}_{\cdot ki}\varphi_{mj}=\partial_k\alpha D_{\cdot ij}D^{kij}+\alpha D^{kij}\overset{\vee}{\nabla}_{[\cdot}D_{k]ij};$$

легко проверить, что

$$D_{\cdot ij}D^{kij}=-4b_{\cdot}{}^{k},\quad D^{kij}\overset{\vee}{\nabla}_{[\cdot}D_{k]ij}=4b_{\cdot}{}^{k}\tau_{k}.$$

Таким образом,

$$D^{kij}\overset{\vee}{R}{}^{m}_{\cdot ki}\varphi_{mj}=2b_{\cdot}{}^{k}(\partial_k\lambda-\lambda\tau_k).$$

Внося значения $\overset{\vee}{R}{}^{m}_{rki}$ по формуле

$$\overset{\vee}{R}{}^{m}_{rki}=\varepsilon_{rk}\overset{\vee}{R}_{i}{}^{m}=\varepsilon_{rk}(\overset{\vee}{H}b_{i}{}^{m}-\overset{\vee}{R}\delta_{i}{}^{m})$$

и решая относительно $\partial_i\lambda$, получим

$$\partial_i\alpha=\alpha\tau_i+A_i{}^{ks}\varphi_{ks},\tag{11}$$

где

$$A_i^{ks}=-\frac{1}{2}(\overset{\vee}{H}\varepsilon_{im}+\overset{\vee}{\Omega}b_{im})D^{mks},\tag{12}$$

$$\overset{\vee}{H}=\frac{1}{2}\tilde{b}^{ij}\overset{\vee}{R}_{ij},\quad \overset{\wedge}{\Omega}=\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{ij}\overset{\vee}{R}_{ij}\tag{13}$$

($\overset{\vee}{R}_{ij}$—тензор Риччи).

Условие интегрируемости системы (11) дает

$$-6\overset{\vee}{\Omega}\alpha+B^{ks}\varphi_{ks}=0,\tag{14}$$

где

$$B^{ks}=\tilde{\varepsilon}^{ij}(\overset{\vee}{\nabla}_jA_i{}^{ks}+\tau_iA_j{}^{ks}).\tag{15}$$

Если директрисы Вильчинского не сопряжены с поверхностью, то тогда $\overset{\vee}{\Omega}\neq 0$ и можно решить уравнение (14) относительно α. Будем иметь

$$\alpha=\frac{1}{6\overset{\vee}{\Omega}}B^{ks}\varphi_{ks}.$$

Вносся это значение α в уравнение (12), получим

$$\overset{\vee}{\nabla}_k\varphi_{ij}=\frac{1}{6\overset{\wedge}{\Omega}}B^{mn}D_{ki\cdot}\varphi_{mn}.\tag{16}$$

Условия интегрируемости этой системы (которая отыскивается обычным способом—продифференцируя это равенство абсолютно по $\overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij}$ и применяя тождество Риччи) будут представлены так:

$$C_i^{ks}\varphi_{ks}=0, \tag{17}$$

где

$$C_i^{ks}=\overset{\vee}{\nabla}_i\left(\frac{1}{6\overset{\wedge}{\Omega}}B^{ks}\right)+\frac{1}{(6\overset{\vee}{\Omega})^2}B^{ks}B^{mn}D_{kmn}-\tau_i B^{ks}-A_i^{ks}. \tag{18}$$

Итак, φ_{ij} удовлетворяет системе

$$\widetilde{b}^{ij}\varphi_{ij}=0, \quad C_i^{ks}\varphi_{ks}=0.$$

Эта система может иметь ненулевое решение только в том случае, если

$$C_r^{ij}D_{kij}=0 \tag{19}$$

или

$$\tau^m P^n C^{ik}_m C^{js}_n b_{ij}\varepsilon_{ks}=0, \quad \widetilde{\varepsilon}^{ij}\overset{\vee}{\nabla}_i(\widetilde{L}^{mn}\overset{\vee}{\nabla}_{[j}L_{m]n})=0, \tag{20}$$

$$D^{kij}(\overset{\vee}{\nabla}_k L_{ij}-\widetilde{L}^{mn}\overset{\vee}{\nabla}_{[k}L_{m]n}L_{ij})=0,$$

где

$$L_{ij}=\widetilde{\varepsilon}^{ks}b_{k(i}Q_{j)s}, \quad Q_{ij}=\varepsilon_{ik}\varepsilon_{js}\tau^m C^{ks}_m,$$

или

$$Q_{ij}=\varepsilon_{im}\varepsilon_{js}P^m C^{ks}_m, \text{ а } P_i=\tau^k b_{ik}$$

(если $\widetilde{b}^{ij}\tau_i\tau_j\neq 0$) или $P_i=\tau^k\tau^s D_{iks}$. (если $\widetilde{b}^{ij}\tau_i\tau_j=0$, это—поверхность, для которой прямая Картана в точке касания имеет асимптотическое направление).

Таким образом, если поверхность R не является изотермо-асимптотической (директрисы Вильчинского не сопряжены с поверхностью), то тогда она определяется вышеприведенными условиями (19) или (20).

Если $\overset{\vee}{\Omega}=0$ (т. е. поверхность R является изотермо-асимптотической поверхностью), то тогда уравнение (14) принимает следующий вид:

$$B^{ks}\varphi_{ks}=0. \tag{21}$$

Таким образом, φ_{ij} удовлетворяет двум алгебраическим уравнениям

$$\widetilde{b}^{ij}\varphi_{ij}=0, \quad B^{ks}\varphi_{ks}=0. \tag{22}$$

Легко показать, что если $B^{ks}D_{ksi}\neq 0$, то тогда из системы (22) получим

$$\varphi_{ij}=\mu\widetilde{\varepsilon}^{ks}b_{k(i}B_{j)s}, \tag{23}$$

где

$$B_{ij}=\varepsilon_{ik}\varepsilon_{js}B^{ks}. \tag{24}$$

Присоединяя соотношение (23) к системе (8), легко отыскать условия интегрируемости прямым вычислением, но здесь мы установим эти условия другим путем.

Обозначим чебышевский тензор тензора φ_{ij} относительно связности $\overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij}$ через τ^s. Будем иметь

$$\lambda_i = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{ks}\overset{\vee}{\nabla}_i\varphi_{ks} = \frac{1}{2}\alpha\tilde{\varphi}^{ks}D_{iks}. \tag{25}$$

Преобразуем $\overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij}$ следующей формулой:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} = \overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij} + \frac{1}{2}(\lambda_i\delta^m_j + \lambda_j\delta_i^m - \tilde{b}^{ms}\lambda_s b_{ij}). \tag{26}$$

Система (8) принимает вид

$$\tilde{b}^{ij}\varphi_{ij} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_k\varphi_{ij} = 0, \tag{26'}$$

где $\overset{*}{\nabla}_k$—символ абсолютного дифференцирования на основе $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$.

Продифференцируя по $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$ (абсолютно на основе $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$) второе равенство из (26) и альтернируя относительно r, k, получим [2]

$$\overset{*}{R}_i{}^m\varphi_{mj} + \overset{*}{R}_j{}^m\varphi_{mi} = 0, \tag{27}$$

где $\overset{*}{R}_{ij}$—тензор Риччи от $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$. Для поверхностей R асимптотические параметры можно выбрать так, чтобы иметь

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = 1.$$

В этих условиях из (27) получим

$$\overset{*}{R}_{12} = 0, \quad \overset{*}{R}_{21} = 0, \quad \overset{*}{R}_{11} = -\overset{*}{R}_{22}. \tag{28}$$

Из (28) ясно, что $\overset{*}{R}_{ij} = \overset{*}{R}_{ji}$. С другой стороны, так как $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$ можно рассматривать как среднюю связность некоторой нормализации, то она должна быть вейлевой связностью [2] и поэтому (если $\mathrm{Det}(\overset{*}{R}_{ij}) \neq 0$)

$$\overset{*}{R}_{ij} = \nu b_{ij}. \tag{29}$$

Отсюда в асимптотических координатах $\overset{*}{R}_{11} = \overset{*}{R}_{22} = 0$. В силу (28), будем иметь $\overset{*}{R}_{ij} = 0$. Если $\mathrm{Det}(\overset{*}{R}_{ij}) = 0$, то из (28) легко получим $\overset{*}{R}_{ij} = 0$.

Итак, для поверхностей R характерно условие

$$\overset{*}{R}_{ij} = 0. \tag{30}$$

Таким образом, для поверхностей R существует такая нормализация, определенная сопряженной сетью, средняя геометрия которой—евклидова геометрия.

В том случае, когда поверхность изотермо-асимптотическая, тензор

φ_{ij} выражается формулой (23); поэтому λ_i будет чебышевским тензором тензора $\widetilde{\varepsilon^{ks}} b_{k[i} B_{j]s}$. Вычисляя λ_i и внося его значение в равенство (30), получим характеризующие условия для проективно-деформируемых поверхностей из класса изотермо-асимптотических поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Чахтаури. Об одном классе проективно-деформируемых поверхностей. Труды Тбилисского государственного университета, т. 110 (1965).
2. А. П. Норден. О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VI—VII. Москва.

Кафедра
алгебры и геометрии

(Поступило в редакцию 5. XI. 1966)

ა. ჩახტაური

პროექციულად-დეფორმად ზედაპირთა შესახებ

რეზიუმე

შრომაში დამტკიცებულია, რომ პროექციულად-დეფორმად ზედაპირისათვის დამახასიათებელია

$$\widetilde{b^{ij}}\varphi_{ij}=0, \quad \hat{\nabla}_k \varphi_{ij} = \alpha D_{kij} \tag{1}$$

ინტეგრების პირობები, სადაც $\widetilde{b^{ij}}$ არის ასიმპტოტური ბადის ტენზორის (b_{ij}—ტენზორის) შექცეული ტენზორი, D_{kij} — დარბუს ტენზორი, $\check{\nabla}_k$ —აბსოლუტური გაწარმოების სიმბოლო ვილჩინსკის ნორმალიზაციაში საშუალო გეომეტრიის მიმართ.

თუ (1) სისტემას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი φ_{ij}-ის მიმართ, მაშინ ზედაპირი პროექციულად-დეფორმადია და პირუკუ. R ზედაპირებს შეესაბამება $\alpha \neq 0$, ხოლო R_0 ზედაპირებს—$\alpha=0$. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $\mathrm{Det}(\check{R}_{ij})=0$ ($\check{R}_{ij}$—რიჩის ტენზორია ვილჩინსკის ნორმალიზაციაში საშუალო ბმულობის მიმართ).

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Г. М. МАНИЯ

КВАДРАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ МНОГОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ДАННЫМ ВЫБОРКИ

1. Пусть $Y=(Y_1, Y_2,\ldots,Y_n)$—n-мерный случайный вектор с независимыми компонентами, имеющий плотность распределения

$$f(y;\, a,\, \sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}\,e\mathrm{xp}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-a_i)^2}{\sigma_i^2}\right], \tag{1}$$

где $y=(y_1, y_2,\ldots,y_n)$, $a=(a_1, a_2,\ldots, a_n)$, $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2,\ldots,\sigma_n)$; a_i и σ_i являются, соответственно, средними значениями и средними квадратическими отклонениями случайных величин $Y_i (i=1, 2,\ldots,n)$.

Пусть, далее,

$$\tilde{f}(y,\, \bar{y},\, l)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}l_1\, l_2\cdots l_n}\,e\mathrm{xp}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\bar{y})^2}{l_i^2}\right] \tag{2}$$

есть оценка плотности $f(y;\, a,\, \sigma)$ на основе выборки

$$x^{(j)}=\left[x_1^{(j)},\ x_2^{(j)},\ldots,\ x_n^{(j)}\right]\ (j=1,\ 2,\ldots,N),$$

а N—объем выборки

$$\bar{y}=(\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_n),\quad l=(l_1,\ l_2,\ldots,\ l_n),$$

где

$$\bar{y}_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_i^{(j)},$$

$$l_i=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left[y_i^{(j)}-\bar{y}_i\right]^2} \tag{3}$$

суть эмпирические оценки a_i и σ_i.

Допустим, что число наблюдений N достаточно велико и рассмотрим в качестве меры приближения n-кратный интеграл

$$\psi(\overline{y},\ l;\ a,\ \sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[f(y;a,\sigma)-\widetilde{f}(y;\ \overline{y},l)]^2\,dy_1\,dy_2\cdots dy_n. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что

$$\psi(\overline{y},\ l;\ a,\ \sigma)=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\psi(\overline{x},\ s;\ O,E)\equiv\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\psi(\overline{x},\ s), \tag{5}$$

где

$$O=(0,\ 0,\ldots,0),\quad E=(1,\ 1,\ldots,1),\ \text{а}\ \overline{x}\ \text{и}\ s$$

получаются из $\overline{y}$ и l заменой y_i на $x_i=\dfrac{y_i-a_i}{\sigma_i}$.

Для $\psi(\overline{x},\ s)$ мы имеем

$$\psi(\overline{x},\ s)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}-\frac{1}{(2\pi)^{n/2}s_1s_2\ldots s_n}e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x}_i)^2}{s_i^2}}\right]^2 dx_1\,dx_2\cdots dx_n. \tag{6}$$

Последнее равенство перепишем следующим образом:

$$\psi(\overline{x},\ s)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}dx_1\,dx_2\cdots dx_n+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^n s_1^2 s_2^2\cdots s_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x}_i)^2}{s_i^2}}dx_1\,dx_2\cdots dx_n-$$

$$-\frac{2}{(2\pi)^n s_1\,s_2\cdots s_n}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x}_i)^2}{s_i^2}}dx_1\,dx_2\cdots dx_n. \tag{7}$$

Очевидно, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}dx_1\,dx_2\cdots dx_n=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\pi^{n/2}. \tag{8}$$

Также

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x_i})^2}{s_i^2}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{2}-\frac{(x_i-\overline{x_i})^2}{2s_i^2}}\,dx_i.$$

Далее,

$$-\frac{x_i^2}{2}-\frac{(x-\overline{x_i})^2}{2s_i^2}=-p_i(x_i-\alpha_i)^2-\beta_i,$$

где

$$\left.\begin{aligned} p_i&=\frac{1+s_i^2}{2s_i^2},\\ \alpha_i&=\frac{\overline{x_i}}{1+s_i^2}\\ \text{и}\qquad&\\ \beta_i&=\frac{\overline{x_i}^2}{2(1+s_i^2)}\,. \end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{2}-\frac{(x_i-\overline{x_i})^2}{2s_i^2}}\,dx_i=e^{-\beta_i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_i(x_i-\alpha_i)^2}\,dx_i=$$

$$=e^{-\beta_i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_i t^2}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{p_i}}\,e^{-\beta_i}\,.\tag{10}$$

Наконец, заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x_i})^2}{s_i^2}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_i-\overline{x_i})^2}{s_i^2}}\,dx_i=\pi^{n/2}\prod_{i=1}^{n}s_i.\tag{11}$$

Принимая во внимание (8), (9), (10) и (11), из (7) получим

$$\psi(\overline{x},\,s)=\frac{1}{2^n\pi^{n/2}}\left[1+\frac{1}{s_1s_2\cdots s_n}-\frac{2e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\overline{x_i}^2}{2(1+s_i)^2}}}{s_1s_2\cdots s_n\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{(1+s_i)^2}{2s_i^2}}}\right]=$$

$$
= \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \left[1 + \frac{1}{s_1 s_2 \cdots s_n} \frac{2^{\frac{n}{2}+1} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i^2}{2(1+s_i^2)}}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1+s_i^2)^{1/2}} \right]. \tag{12}
$$

2. Как известно, при очень широких предположениях, асимптотическое распределение функции от моментов выборки регулируется теоремой Крамера ([1], стр. 388).

Так как в нашем случае частные производные функции $\psi(\overline{x}, s)$ при $\overline{x}=0$, $s=E$, обращаются в нуль и предельное нормальное распределение сводится к несобственному, дисперсия $\psi(\overline{x}, s)$ имеет более высокий порядок малости, чем обычно.

Таким образом, наша задача относится к случаю, когда предельное распределение определяется членами не первого, а более высокого порядка в разложении функций $\psi(\overline{x}, s)$ в окрестности точки $(0, E)$.

В самом деле, как обычно, положим

$$
\overline{x}_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{N}}, \quad s_i = 1 + \frac{\eta_i}{\sqrt{2N}}, \quad (i=1, 2, \dots, n). \tag{13}
$$

Тогда имеем

$$
\frac{1}{s_i} = \frac{1}{1+\frac{\eta_i}{\sqrt{2N}}} = 1 - \frac{\eta_i}{\sqrt{2N}} + \frac{\eta_i^2}{2N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).
$$

Поэтому

$$
\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i}{\sqrt{2N}} + \frac{1}{2N} \sum_{\substack{i \leq j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right). \tag{14}
$$

Далее,

$$
\frac{1}{1+s_i^2} = \frac{1}{1+\left(1+\frac{\eta_i}{\sqrt{2N}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\eta_i}{\sqrt{2N}} + \frac{\eta_i^2}{4N}\right] + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right) \tag{15}
$$

и

$$
\frac{1}{(1+s_i^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1+1+\frac{2\eta_i}{\sqrt{2N}}+\frac{\eta_i^2}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+\frac{\eta_i}{\sqrt{2N}}+\frac{\eta_i^2}{4N}\right)^{1/2}} =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\eta_i}{2\sqrt{2N}} + \frac{\eta_i^2}{16N}\right) + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).
$$

Отсюда

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+s_i^2)^{1/2}} = 2^{-\frac{n}{2}} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{2N}} \sum_{i=1}^{n} \eta_i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{16N} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 \right] + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right). \tag{16}$$

Из (13) имеем, что

$$\overline{x}_i^2 = \frac{\xi_i^2}{N}.$$

Поэтому, в силу (15), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i^2}{2(1+s_i^2)} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i^2}{2} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right).$$

Далее, имеем

$$e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i^2}{2(1+s_i^2)}} = 1 - \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right). \tag{17}$$

Тогда

$$\frac{2^{\frac{n}{2}+1} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i^2}{2(1+s_i^2)}}}{\prod\limits_{l=1}^{n} (1+s_i^2)^{1/2}} =$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{2N}} \sum_{i=1}^{n} \eta_i + \frac{1}{16N} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 - \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right] + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{i=1}^{n} \eta_i + \frac{1}{8N} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right). \tag{18}$$

Принимая во внимание (14) и (18), из (12) следует, что

$$\psi(\overline{x}, s) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \left\{ 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{l=1}^{n} \eta_i + \frac{1}{2N} \sum_{\substack{i \leq j \\ i,j=1}}^{n} \xi_i \eta_i - \right.$$

$$\left. - 2 + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{i=1}^{n} \eta_i - \frac{1}{8N} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right\} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \left\{ \frac{1}{8N} \left[4 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j - \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 \right] + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right\} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right).$$

Так как

$$4 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j - \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 = 4 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + 4 \sum_{\substack{i>j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j - 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j =$$

$$= 3 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j,$$

окончательно получим

$$\psi(x, s) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \left\{ \frac{1}{8N} \left(3 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \xi_j^2 \right\} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right). \tag{19}$$

Таким образом, статистику $\psi(x, s)$ можно представить так:

$$\psi(\overline{x}, \mathrm{s}) = \frac{c_1}{N} v_1 + \frac{c_2}{N} v_2 + O\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right),$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2^{n+3} \pi^{n/2}}, \quad c_2 = 4c,$$

$$v_1 = 3 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \eta_i \eta_j$$

и

$$v_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Здесь v_2 имеет распределение χ^2 с n степенями свободы.

Теперь исследуем распределение v_1. Случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ распределен нормально с плотностью $f(x; O, E)$. Как известно, существует ортогональное преобразование η, приводящее квадратичную форму v_1 к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vartheta_k^2,$$

где λ_k—характеристические числа матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 3, & \dots, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & 1, & \dots, & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение A имеет вид

$$(2-\lambda)^{n-1}(n+2-\lambda)=0.$$

Отсюда

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{n-1}=2, \quad \lambda_n=n+2.$$

Из-за ортогональности преобразования новый случайный вектор опять-таки асимптотически нормален с плотностью $f(x;\, 0,\, E)$, т. е. его компоненты асимптотически нормальны $(0,\, 1)$ и независимы.

Поэтому, представив v_1 в виде

$$v_1=2v_{11}+(n+2)\,v_{12},$$

где

$$v_{11}=\sum_{i=1}^{n-1}\vartheta_i^{\,2} \text{ и } v_{12}=\vartheta_n^2,$$

получим, что v_{11} имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы, а v_{12}—распределение χ^2 со степенью свободы 1.

Введем обозначения

$$v_{11}=u_1, \quad v_{12}=u_2, \quad v_2=u_3,$$

тогда статистика $N\psi(\overline{x},\, s)$ выражается как линейная комбинация трех квадратичных форм

$$N\psi(\overline{x},\, s)=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right), \tag{20}$$

где

$$\alpha_1=2c_1,$$
$$\alpha_2=(n+2)c_1,$$
$$\alpha_3=c_2;$$

u_1, u_2 и u_3 имеют распределение χ^2, соответственно, с $n-1$, 1 и n степенями свободы.

Для нахождения закона распределения статистики $N\psi(\overline{x},\, s)$ представим ее следующим образом:

$$N\psi(\overline{x},\, s)=\frac{1}{2^{n+3}\pi^{n/2}}\left[\,2\sum_{k=1}^{n}\vartheta_n^2+(n+2)\vartheta_n^2+4\sum_{k=2}^{n}\xi_i^{\,2}\,\right]+O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right). \tag{21}$$

Вектор $(\vartheta_1,\, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n,\;\; \xi_1,\, \xi_2, \dots, \xi_n)$ распределен асимптотически нормально с плотностью

$$\frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\vartheta_k^2+\xi_k^2)}.$$

Таким образом,

$$P\{N\psi(\overline{x},\ s)<u\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{D_n}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\vartheta_k^2+\xi_k^2)}\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_n d\xi_1\cdots d\xi_n+o(1), \tag{22}$$

где область интегрирования D_n определяется неравенством

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\vartheta_k^2+(n+2)\,\vartheta_k^2+4\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2<2^{n+3}\,\pi^{n/2}. \tag{23}$$

Введя полярные координаты:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1=r\cos\varphi_1,\\
&\vartheta_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\vartheta_n=r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,\\
&\xi_1=r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_n\sin\varphi_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi_{n-1}=r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{2n-2}\cos\varphi_{2n-1},\\
&\xi_n=r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{2n-1},
\end{aligned}$$

неравенство (23) примет вид

$$r^2<2^{n+3}\,\pi^{n/2}\,u\left\{2+[n-(n-2)\sin^2\varphi_n]\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\varphi_k\right\}^{-1}\equiv$$

$$\equiv c^2(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\,2^{n-1},$$

а

$$P\{N\psi(\overline{x},\ s)<u\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2^{\frac{n-1}{2}}c(\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\varphi_n)} r^{2n-1}\,e^{-r^2/2}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\sin^{2n-k-1}\varphi_k\prod_{k=1}^{n-2}\sin^{n-k-1}\varphi_{n+k}\,dr d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-1}.$$

Далее, известно, что

$$\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^{n-k-1}\varphi_{n+k}\,d\varphi_{n+1}\cdots d\varphi_{2n}=2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

и

$$\int_0^a r^{2n-1} e^{-r^2/2} dr = 2^{n-1}(n-1)! - e^{-\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} 2^{n-k-1} a^{2k}.$$

Поэтому

$$\int_0^{2^{\frac{n-1}{2}} c(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} r^{2n-1} e^{-r^2/2} dr =$$

$$= 2^{n-1}\Big\{(n-1)! - \exp\left[-2^{n-2} c^2(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)\right] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{k!} 2^{k(n-2)} c^{2k}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\Big\},$$

где

$$c(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 4\pi^{n/2} u^{1/2} \left\{2 + \left[n - (n-2)\sin^2\varphi_n\right] \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\varphi_k\right\}^{-1/2}.$$

Пользуясь этим, получим

$$P\{N\psi(\overline{x}, s) < u\} = G_n(u),$$

где

$$G_n(u) = \frac{2^n}{\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big\{(n-1)! -$$

$$- \exp\left[-2^{n-2} c^2(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)\right] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} 2^{k(n-2)} c^{2k}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)\Big\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \sin^{2n-k-1}\varphi_k \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \cdots d\varphi_n. \tag{24}$$

Заметим, что ввиду (5)

$$P\left\{N \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \, \psi(\overline{y}, l; a, \sigma) < u\right\} = G_n(u).$$

При $n=1$ из (24) следует полученный ранее автором результат для одномерного случая [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер. Математические методы статистики, М. (1948).
2. Г. М. Мания. Квадратическая погрешность оценки плотности нормального распределения по данным выборки. Труды ВЦ АН Груз. ССР, т. 1 (1960).
3. Г. М. Мания. Квадратическая погрешность оценки расхождения плотностей многомерного нормального распределения по данным выборки, Сообщения АН ГССР, т. XLVIII, № 2, 1967.

Тбилисский государственный
университет,
Проблемная лаборатория
прикладной математики

(Поступило в редакцию 6. VI. 1967)

გ. მანია

მოცემული შერჩევით მრავალგანზომილებიანი ნორმალური განაწილების სიმკვრივის კვადრატული ცდომილება

რეზიუმე

მოცემულია N ურთიერთდამოუკიდებელ შერჩევათა საფუძველზე n-განზომილებიანი ნორმალური განაწილების სიმკვრივის შეფასება. N-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის თეორიულ და ემპირიულ სიმკვრივეთა დაახლოების ზომად აღებულია მათი სხვაობის კვადრატიდან ინტეგრალი. გამოთვლილია ამ ინტეგრალის მნიშვნელობა და მიღებული გამოსახულება წარმოდგენილია ალგებრული ჯამის სახით, რომლის შესაკრებები წარმოადგენენ დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს, ხოლო ბოლო წევრი ალბათობით ნულისკენ მიისწრაფის.

შრომაში დადგენილია განხილული კრიტერიუმისათვის განაწილების კანონი.

ნებისმიერი კოვარიაციის მატრიცის შემთხვევაში შესაბამისი შედეგები გამოქვეყნდება ცალკე სტატიის სახით.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

ბ. დათუაშვილი

პარაბოლური ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ

ვთქვათ, x, t სიბრტყის $D=(0,1)\times(0<t\leqslant T]$ მართკუთხა არეში საძიებელია ისეთი ვექტორ-ფუნქცია $U(x, t)=[U^{(1)}(x,t),\dots, U^{(n)}(x,t)]$, რომელიც D არეში დააკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{\partial U}{\partial t}=(-1)^{m+1}\, C\, \frac{\partial^{2m} U}{\partial x^{2m}}, \tag{1}$$

ხოლო D არის საზღვარზე—შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$U(x, 0)=\varphi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{2p} U(0, t)}{\partial x^{2p}}=\frac{\partial^{2p} U(1, t)}{\partial x^{2p}}=0 \qquad \left.\begin{cases} 0<t\leqslant T \\ p=0,1,\dots, m-1 \end{cases}\right\}. \tag{3}$$

აქ $C=\| c_{ij} \|$ წარმოადგენს მუდმივი ელემენტების მქონე n-ური რიგის სიმეტრიულ, დადებითად განსაზღვრულ მატრიცს; $\varphi(x)=[\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x),\dots, \varphi^{(n)}(x)]$ მოცემული ვექტორია, რომლის კომპონენტებია უწყვეტი ფუნქციები $[0,1]$ სეგმენტზე.

თუ გამოვიყენებთ ცვლადთა განცალების (ფურიეს) მეთოდს, (1)—(3) ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ფორმალურად წარმოვადგინოთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$U(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{q=1}^{\gamma_\nu} A^{\nu q}(k)\, d_k^{\nu q}\, e^{\alpha_k^{(\nu)} t} \sin k\pi x, \tag{4}$$

სადაც

$$d_k^{\nu q}=2\int_0^1 (A^{\nu q}(k),\ \ \varphi(x))\ \sin k\ \pi x\ dx,$$

$\alpha_k^{(\nu)}$ $(\nu=1, \dots l)$ წარმოადგენენ $-(k\pi)^{2m}\, C$ მატრიცის $\gamma_\nu\ (\geqslant 1)$ ჯერადობის საკუთრივ რიცხვებს, ასე რომ

$$\alpha_k^{(\nu)}=-(k\pi)^{2m}\ \lambda^{(\nu)}(C)<0,$$

ოლო $A^{\nu q}(k)$, $(\nu=1,\ 2,\ldots,l;\ q=1,\ldots,\gamma_\nu;\ l\leqslant n)$ აღნიშნული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორების ორთონორმალური სისტემაა.

თუ

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{q=1}^{\gamma_\nu} A^{\nu q}(k)\, d_k^{\nu q}\ \sin k\pi\, x,$$

მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $0\leqslant x\leqslant 1$ შუალედში[1], მაშინ. 1] შრომაში დამტკიცებული 1 თეორემის ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

1. მე-(4) მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია ამავე შუალედში, როცა $t\geqslant 0$;

2. t [ან x] ცვლადის მიმართ მე-(4) მწკრივის ნებისმიერ $p(\geqslant 1)$ რიგამდე გაწარმოებით მიღებული მწკრივები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $0\leqslant x\leqslant 1$ შუალედში, როცა $t\geqslant t_0>0$.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ (1)—(3) ამოცანის ამოხსნას ბადეთა მეთოდით როცა $n=1$, $C=c_{11}=1$, აღნიშნული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა შესწავლილია ვ. საულევის მიერ ([2], გვ. 173—185).

ზოგად შემთხვევაში სხვაობიანი მეთოდით ბანახისა და ჰილბერტის სივრცეებში $\dfrac{du}{dt}+A(t)u=f(t)$ სახის განტოლებისათვის (სადაც $A(t)$ წრფივი შემოუსაზღვრელი ოპერატორია) კოშის აბსტრაქტული ამოცანის შესწავლისას ა. სამარსკიმ განიხილა [3] პარამეტრზე დამოკიდებული ორშრიანი სხვაობიანი სქემის კორექტულობისა და მდგრადობის საკითხები (ენერგეტიკულ უტოლობათა მეთოდის გამოყენებით). ბადეთა მეთოდით (1)—(3) ამოცანის ამოხსნისას ქვემოთ ჩვენ ვისარგებლებთ პარამეტრზე დამოკიდებული ორშრიანი სხვაობიანი სქემით. ამასთან [3] შრომისაგან განსხვავებით ჩვენ დავეყრდნობით წმინდა ალგებრულ მეთოდს, სადაც ძირითადი მნიშვნელობა ენიჭება მატრიცთა კრონეკერის ნამრავლის თვისებების გამოყენებას.

(1)—(3) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის მიზნით D არე დავფაროთ $x_i=ih$, $t_k=kl$ $\left(i=0,1,\ldots,\ N+1;\ k=0,1,\ldots,\left[\dfrac{T}{l}\right];\ h=\dfrac{1}{N+1}\right)$ მართკუთხა ბადით. შემდეგში ჩვენ ვისარგებლებთ დამხმარე $x_i=ih$, $t_k=kl$ $(i=-1,\ -2,\ldots,-(m-1);\ i=N+2,\ N+3,\ldots,\ N+m)$ კვანძებით, რომლებიც მიიღება ძირითადი ბადის გაგრძელებით მარცხნივ და მარჯვნივ.

D არის $(ih,\ (k+{}^1/_2)l)$ წერტილისათვის (1) განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^{k+{}^1/_2}=(-1)^{m+1}aC\left(\frac{\partial^{2m}U}{\partial x^{2m}}\right)_i^{k+{}^1/_2}+$$

$$+(-1)^{m+1}(1-a)\,C\left(\frac{\partial^{2m}U}{\partial x^{2m}}\right)_i^{k+{}^1/_2}, \tag{5}$$

---

[1] ვექტორული მწკრივის კრებადობის ქვეშ იგულისხმება ამ მწკრივის წევრთა კომპონენტების მწკრივების კრებადობა.

სადაც a არის პარამეტრი, რომელიც იცვლება $0\leqslant a\leqslant 1$ შუალედში, ხოლო $\Big(\quad\Big)_i^{k+1/2}$ აღნიშნავს ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდის მნიშვნელობას $(ih,\ (k+1/2)l)$ წერტილში.

მსგავსად ვ. საულევის მსჯელობისა (იხ. [2], გვ. 180) შეგვიძლია დავწეროთ მე-(5) განტოლების ექვივალენტური სასრულსხვაობიანი განტოლება (დამატებითი წევრით)

$$\frac{U_i^{k+1}-U_i^{k}}{l}=(-1)^{m+1}aC\,\frac{\delta^{2m}U_i^{k+1}}{h^{2m}}+(-1)^{m+1}(1-a)C\,\frac{\delta^{2m}U_i^{k}}{h^{2m}}+R_i^{k}, \tag{6}$$

სადაც

$$R_i^k=\begin{cases} O(l+h^2), & \text{როცა}\quad a\neq\dfrac{1}{2},\\[2mm] O(l^2+h^2), & \text{როცა}\quad a=\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{7}$$

თუ მე-(6) ტოლობაში უკუვაგდებთ R_i^k ნაშთით წევრს, მივიღებთ (1) სისტემის შესაბამის სასრულსხვაობიან განტოლებას

$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^{k}}{l}=(-1)^{m+1}aC\,\frac{\delta^{2m}u_i^{k+1}}{h^{2m}}+(-1)^{m+1}(1-a)\,C\,\frac{\delta^{2m}u_i^{k}}{h^{2m}} \tag{8}$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,\ N).$$

მე-(2) და მე-(3) საწყისი და სასაზღვრო პირობების ნაცვლად, სათანადოდ, გვექნება

$$u_i^0=\varphi_i \qquad (i=0,1,\ \ldots,\ N+1), \tag{9}$$

$$\delta^{2p}u_0^k=\delta^{2p}u_{N+1}^k=0 \tag{10}$$

$$\left(p=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{T}{l}\right]\right),$$

რომელთაგან მე-(10) ტოლობები იძლევიან მე-(3) სასაზღვრო პირობებს $O(h^2)$ სიზუსტით. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$v_{0,i}^k=u_i^k,\qquad \frac{\delta^2 v_{0,i}^k}{h^2}=v_{1,i}^k,\qquad \frac{\delta^2 v_{1,i}^k}{h^2}=v_{2,i}^k,\ldots$$

$$\ldots,\ \frac{\delta^2 v_{m-2,i}^k}{h^2}=v_{m-1,i}^k,$$

მაშინ (8)—(10) ამოცანა დაიყვანება

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\delta^2 v^k_{j,i}}{h^2}=v_{j+1,i} \qquad (j=0,1,\ldots,m-2),\\ &\frac{v^{k+1}_{0,i}-v^k_{0,i}}{l}=(-1)^{m+1}aC\frac{\delta^2 v^{k+1}_{m-1,i}}{h^2}+(-1)^{m+1}(1-a)C\frac{\delta^2 v^k_{m-1,i}}{h^2}\end{aligned}\right. \tag{11}$$

სისტემის ამოხსნაზე შემდეგი საწყისი და სასაზღვრო პირობებით:

$$v_{0,i}=\varphi_i \qquad (i=0,1\ldots,\ N+1), \tag{12}$$

$$v^k_{j,0}=v^k_{j,N+1}=0 \quad \left(j=0,1,\ldots,\ m-1;\ \ k=0,1,\ldots,\ \left[\frac{T}{l}\right]\right). \tag{13}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-(13) სასაზღვრო პირობებს, მე-(11) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ მატრიცული სახით

$$\frac{1}{h^2}\Big(E\times H\Big)\ v^k_j=v^k_{j+1} \qquad \left(j=0,1,\ldots,m-2;\ v^k_0=u^k\right), \tag{14}$$

$$\frac{v^{k+1}_0-v^k_0}{l}=(-1)^{m+1}\frac{a}{h^2}(C\times H)\ v^{k+1}_{m-1}+$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{(1-a)}{h^2}(C\times H)\,v^k_{m-1}, \tag{15}$$

სადაც H-ით აღნიშნულია N-რიგის სამდიაგონალური მატრიცი, რომლის მთავარი დიაგონალის ელემენტებია -2, ხოლო მოსაზღვრე დიაგონალებისა კი 1; $(C\times H)$-ით აღნიშნულია მატრიცთა კრონეკერის მარცხენა ნამრავლი, ხოლო $v^k_j=\left(v^k_{j,1},\ v^k_{j,2},\ldots,v^k_{j,N}\right)$ წარმოადგენს N-განზომილებიან ვექტორს, რომლის კომპონენტები $v^k_{j,i}=\left(v^{(1)k}_{j,i},\ v^{(2)k}_{j,i},\ \ldots,\ v^{(n)k}_{j,i}\right)$ თავის მხრივ n-განზომილებიანი ვექტორებია. ე. ი.

$$v^k=\Big(v^{(1)k}_{j,1},\ v^{(2)k}_{j,1},\ldots,\ v^{(n)k}_{j,1},\ v^{(1)k}_{j,2},\ v^{(2)k}_{j,2},\ldots,\ v^{(n)k}_{j,2},\ldots,$$

$$\ldots,\ v^{(1)k}_{j,N},\ v^{(2)k}_{j,N},\ \ldots,\ v^{(n)k}_{j,N}\Big).$$

თუ (14)-ე სისტემიდან v^k_{m-1} ვექტორს გამოვსახავთ v^k_0 ვექტორის საშუალებით, მივიღებთ

$$v^k_{m-1}=\left(\frac{E\times H}{h^2}\right)^{m-1}v^k_0\ .$$

უკანასკნელი ტოლობის დახმარებით მე-(15) ტოლობა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{v_0^{k+1} - \overset{k}{v}_0}{l} = (-1)^{m+1}\frac{a}{h^{2m}}(C\times H)(E\times H)^{m-1} v_0^{k+1} +$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{(1-a)}{h^{2m}}(C\times H)(E\times H)^{m-1}\overset{k}{v}_0 .$$

თუ ვისარგებლებთ მატრიცთა კრონეკერის ნამრავლის ზოგიერთი თვისებით (იხ., მაგ., [4], გვ. 120), უკანასკნელი განტოლება მე-(12) საწყის პირობებთან ერთად შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$Au^{k+1} = Bu^k,\quad u^0=\Phi \quad \left(k=0,1,\dots,\left[\frac{T}{l}\right]\right), \tag{16}$$

სადაც

$$u^k = \overset{k}{v}_0 ,$$

$$A = E-(-1)^{m+1}\frac{al}{h^{2m}}(C\times H^m), \tag{17}$$

$$B = E+(-1)^{m+1}\frac{(1-a)l}{h^{2m}}(C\times H^m), \tag{18}$$

ხოლო $\Phi=(\varphi_1, \varphi_2,\dots, \varphi_N)$ N-განზომილებიანი ვექტორია, რომლის კომპონენტები $\varphi_j=(\varphi_j^{(1)},\dots, \varphi_j^{(n)})$ თავის მხრივ წარმოადგენენ n-განზომილებიან ვექტორებს.

ცნობილია, რომ (იხ., მაგ., [4], გვ. 122) თუ A და B, სათანადოდ, n და N რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ

$$\lambda_{ij}(A\times B)=\lambda_i(A)\cdot\lambda_j(B),\quad (i=1, 2, \dots, n;\ j=1, 2,\dots, N).$$

გარდა ამისა, თუ შევნიშნავთ, რომ $\lambda_j(H)=-4\sin^2\frac{j\pi h}{2}$, მაშინ მე-(17) და მე-(18) ტოლობების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lambda_{ij}(A)=1+al\lambda_i(C)\left(\frac{2}{h}\sin\frac{j\pi h}{2}\right)^{2m}, \tag{19}$$

$$\lambda_{ij}(B)=1-(1-a)l\,\lambda_i(C)\left(\frac{2}{h}\sin\frac{j\pi h}{2}\right)^{2m} . \tag{20}$$

რამდენადაც $\lambda_i(C)>0$, მე-(19) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. *ყოველი არაუარყოფითი a-სთვის მე-(16) სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა.*

მე-(19) და მე-(20) ტოლობების ძალით შეიძლება გამოვთქვათ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ყოველი a-სთვის $\frac{1}{2}\leqslant a<1$ შუალედიდან მე-(16) სისტემა აბსოლუტურად მდგრადია. ხოლო, როცა a ეკუთვნის $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ შუალედს, მე-(16) სისტემის მდგრადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია სრულდებოდეს შემდეგი უტოლობა:

$$l\leqslant\frac{h^{2m}}{(1-2a)\;2^{2m-1}\max\limits_{i}\lambda_i(C)}.$$

შევნიშნოთ, რომ, როცა $C=c_{11}=1$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან მიიღება ვ. საულევის ცნობილი უტოლობა (იხ. [2], გვ. 178).

გამოვარკვიოთ ზემოთ აღწერილი ბადეთა მეთოდის კრებადობა. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ მე-(4) ტოლობის თანახმად მე-(3) დიფერენციალური სასაზღვრო პირობები ექვივალენტურია მე-(10) სხვაობიანი სასაზღვრო პირობებისა, ანუ ამოხსნათა კლასში სასაზღვრო პირობების აპროქსიმაციის ცდომილება ნულის ტოლია. ამიტომ მე-(4) ტოლობის თანახმად მე-(6) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ მატრიცული სახით

$$AU^{k+1}=BU^k+lR^k, \tag{21}$$

სადაც

$$\|R^k\|=\begin{cases} O(l+h^2), & \text{როცა} \quad a\neq\frac{1}{2};\\ O(l^2+h^2), & \text{როცა} \quad a=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

(21) და (16) ტოლობების წევრობრივ გამოკლებით მივიღებთ განტოლებას

$$A(U^{k+1}-u^{k+1})=B(U^k-u^k)+lR^k.$$

შრომაში [1] ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. თუ არსებობს (1)—(3) ამოცანის ამოხსნა, ადგილი აქვს მე-(7) ტოლობას და მე-(16) სისტემა მდგრადია, მაშინ U^n-u^n ვექტორის სფერული ნორმისათვის სამართლიანია შეფასებები

$$\|U^n-u^n\|=\begin{cases} O(l+h^2), & \text{როცა} \quad a\neq\frac{1}{2};\\ O(l^2+h^2), & \text{როცა} \quad a=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

ასე რომ, როცა $l,h\to0$, მაშინ $u^n\to U^n$ ზემოთ აღნიშნული ნორმით.

ლიტერატურა

1. Г. И. Сулханишвили. О численном интегрировании параболических уравнений. Труды Тб. математического ин-та, т. XXIX (1963).

2. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., Физматгиз (1960).

3. А. А. Самарский. К теории разностных схем, ДАН, 165, № 5, 1007 (1965).

4. А. П. Мишина и И. В. Проскуряков. Высшая алгебра, справочная математическая библиотека, М., Физматгиз (1962).

მიახლოებითი ანალიზის
და გამოთვლითი ტექნიკის
კათედრა

(რედაქციამ მიიღო 21. XI. 1966)

Г. С. ДАТУАШВИЛИ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Резюме

В статье рассматривается вопрос о решении задачи (1)—(3) методом сеток. На основе свойства кронекеровских произведений матриц строится сеточный аналог (16). Исследуются условия разрешимости и устойчивости системы (16). Выявлены условия, при выполнении которых приближенное решение задачи (1)—(3), полученное методом сеток, сходится к точному.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Г. В. МЕЛАДЗЕ

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть в p-мерном параллелепипеде $R_p=\{x=(x_1,\dots,x_p):\ 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha;\ \alpha=1,2,\dots,p\}$ с границей Γ ищется решение задачи

$$Lu\equiv\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u=-\varphi(x,u),\quad L_\alpha u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2},\tag{1}$$

$$u\Big|_\Gamma=0.\tag{2}$$

Предположим, что задача имеет единственное, достаточно гладкое решение (см., напр., [4]). В дальнейшем мы наложим на функцию $\varphi(x,u)$ некоторые дополнительные ограничения.

Пусть $\overline{w}_h=\{x_i=(i_1h_1,\dots,i_ph_p)\in R_p,\quad i_\alpha=0,1,\dots,N_\alpha;\ h_\alpha=\dfrac{l_\alpha}{N_\alpha},\ \alpha=1,\dots,p\}$ — разностная сетка, равномерная по каждому из направлений x_α, а $\gamma=\{x_i\in\Gamma\}$ — граница сетки $\overline{w}_h$. Мы будем в основном пользоваться обозначениями из [1].

Для аппроксимации задачи (1) — (2) рассмотрим следующую разностную схему:

$$\Lambda y+\varphi(x,y)=0,\quad x\in w_h,\quad y|_\gamma=0,\tag{3}$$

где

$$\Lambda=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha;\quad \Lambda_\alpha y=y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Обозначим через $G(x,\xi)$ функцию Грина для оператора Λ с нулевыми значениями на границе области, т. е. функцию, которая удовлетворяет условию

$$\Lambda G(x,\xi)=-\frac{\delta(x,\xi)}{H},\quad x\in w_h,\quad \xi\in w_h,\quad H=\prod_{\alpha=1}^{p}h_\alpha,$$

$$\delta(x, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = \xi \\ 0 & \text{при } x \neq \xi \end{cases}, \quad G = 0, \quad \text{если} \quad x \in w_h, \quad \xi \in \gamma.$$

Для $G(x, \xi)$ справедлива формула (см., напр., [2], [3])

$$G(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i(x)\, y_i(\xi)}{\lambda_i^{(h)}}, \tag{4}$$

где y_i, $\lambda_i^{(h)}$, $i = 1, \ldots, N$ — собственные функции и собственные значения задачи $\Lambda y + \lambda^{(h)} y = 0$, $x \in w$; $y = 0$, $x \in \gamma$, N — количество внутренних узлов.

В параллелепипеде для разностного оператора Лапласа можно выписать в явном виде собственные функции и собственные значения (см., напр., [1]):

$$y_k(x) = \left(2^{p/2} / \sqrt{\overline{l}}\right) \prod_{\alpha=1}^{p} \sin \frac{K_\alpha \pi x_\alpha}{l_\alpha}, \quad \overline{l} = \prod_{\alpha=1}^{p} l_\alpha,$$

$$\lambda_k^{(h)} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{K_\alpha \pi h_\alpha}{2 l_\alpha}, \quad K = (K_1, \ldots, K_p).$$

Последние равенства позволяют выписать функцию Грина (в явном виде) для разностного оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями.

Введем обозначения

$$\|z\|_c = \max_{w_h} |z(x)|, \quad (y, v) = \sum_{w_h} y(x)\, v(x)\, H, \quad (G^2(x, \xi), 1) = \sum_{\xi \in w_h} G^2(x, \xi)\, H$$

и докажем следующую лемму:

Лемма. Для всех $x \in w_h$, при $p = 2, 3$, имеет место оценка

$$(G^2(x, \xi), 1) \leqslant \frac{l_0^4}{e}, \tag{5}$$

где $l_0 = \max_\alpha l_\alpha$.

Доказательство. Оценка (5) получается, если для равенства (4) использовать известные оценки собственных функций и собственных значений (см. [1], стр. 240).

В самом деле, в силу ортонормированности собственных функций, как и в работе [2], получаем

$$(G^2(x, \xi), 1) = \sum_{\xi \in w_h} (G^2(x, \xi)\, H = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{y_k}{\lambda_k^{(h)}}\right)^2.$$

Но при $p = 2, 3$ имеем следующую оценку [1]:

$$\sum_{k=1}^{N} [\lambda_k^{(h)}]^{-2} \leqslant \frac{l_0^4}{16} \left(p^{-2} + \frac{\pi}{2(4-p)}\right) < \frac{l_0^4}{8}.$$

Это и доказывает лемму.

После построения разностной функции Грина мы можем вместо нелинейной системы (3) рассмотреть эквивалентную ей систему

$$y(x)=(G(x, \xi), \varphi(\xi, y(\xi))), \quad x\in \overline{w_h}. \tag{6}$$

Внеся в правую часть (6) значение $y(\xi)$, получаем

$$y(x)=(G(x, \xi), \varphi(\xi, (G(\xi, \eta), \varphi(\eta, y(\eta))))). \tag{7}$$

Для исследования решения нелинейной системы (7) и приближенного построения этого решения воспользуемся итерационной формулой

$$y^{(r+1)}(x)=(G(x, \xi), \varphi(\xi, (G(\xi, \eta), \varphi(\eta, y^{(r)}(\eta))))) \quad (r=0, 1, 2\cdots), \tag{8}$$

где индекс сверху обозначает номер приближения.

Перейдем теперь к исследованию сходимости итерационного процесса. Пусть функция $\varphi(x, u)$ в области определения $\{x\in R, -\infty<u<\infty\}$ удовлетворяет условию Липшица по u

$$|\varphi(x, u_1)-\varphi(x, u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|. \tag{9}$$

Рассмотрим множество Φ_h, состоящее из функций $u_h\equiv u_h(x)$, $x\in\overline{w_h}$, определенных на сетке w_h. Определим расстояние между двумя элементами u_h и v_h этого множества с помощью равенства

$$\rho(u_h, v_h)=\max_{x\in\overline{\omega}h}|u_h(x)-v_h(x)|.$$

Тогда мы придем к нормированному пространству Φ_h, для каждого элемента которого u_h формула (7) определяет отображение $z_h=Au_h$, переводящее пространство Φ_h в самое себя.

Если даны два таких элемента u_h и $\overline{u_h}$, тогда будем иметь

$$z_h(x)-\overline{z_h}(x)=(G(x, \xi), \varphi(\xi, (G(\xi, \eta), \varphi(\eta, u_h(\eta))))-\varphi(\xi(G(\xi, \eta), \varphi(\eta, \overline{u_h}(\eta))))).$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (5) разностной функции Грина, после некоторых преобразований получим

$$\rho(z_h, \overline{z_h})\leqslant l_0^4L^2\rho(u_h, \overline{u_h})=\alpha^2\rho(u_h, \overline{u_h}), \tag{10}$$

где $\alpha=l_0^2L$.

Если $0<\alpha<1$, то (10) показывает, что отображение A сжатое и по теореме Качиополи-Банаха нелинейная система (7) имеет единственное решение $y(x)$. Это решение является пределом последовательности $\{y^{(r)}(x)\}$ $(r=0, 1, 2\cdots)$, которая определяется итерационным процессом (8). Построение последовательных приближений можно производить исходя из любого элемента пространства Φ_h. Кроме того, имеет место оценка

$$\rho(y^{(r)}, y)\leqslant\frac{\alpha^{2m}}{1-\alpha^2}\rho(y^{(0)}, y^{(1)}). \tag{11}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняется условие (9), итерационный процесс (8) сходится при $l_0^2L<1$ и $p=2, 3$.

Нам остается исследовать вопрос о сходимости конечноразностного решения к точному решению краевой задачи и об оценке отклонения этого решения.

Рассмотрим функцию $z=y-u$, где y — решение задачи (3), а u — решение задачи (1) — (2). Для z получим

$$\Lambda z+[\varphi(x, u)-\varphi(x, y)]=-|h|^2\rho(x),$$

$$z|_\gamma=0,$$

где $|\rho(x)|\leqslant E$, а E — определенная константа, зависящая от максимальных значений производных четвертого порядка функции $u(x)$,

$$|h|^2=\sum_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения, для z получаем

$$z(x)=(G(x, \xi), \{\varphi(\xi, (G(x, \eta), [\varphi(\eta, u(\eta))+|h|^2\rho(\eta)]))-$$
$$-\varphi(\xi, (G(\xi, \eta), \varphi(\eta, y(\eta))))\})+(G(x, \xi), |h|^2\rho(\xi)).$$

Исходя из этого равенства и используя оценку разностной функции Грина, после некоторых простых преобразований получаем неравенство

$$\|z\|_c\leqslant L^2 l_0^4\|z\|_c+|h|^2 l_0^4 EL+\frac{1}{2}|h|^2\frac{l_0^4}{l}+\frac{1}{2}|h|^2E^2\overline{l}$$

или

$$\|z\|_c\leqslant|h|^2\frac{l_0^4 EL+\frac{l_0^4}{2l}+\frac{1}{2}E^2\overline{l}}{1-L^2 l_0^4}, \tag{12}$$

поскольку согласно достаточному условию сходимости итерационного процесса (8) $l_0^4 L^2<1$.

Итак, если выполняется достаточное условие сходимости итерационного процесса (8), то имеет место оценка погрешности (12) и решение разностной задачи сходится равномерно к соответствующему решению граничной задачи (1) — (2).

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если $l_0^2 L<1$, то при $p=2, 3$ решение системы (7) равномерно сходится к решению граничной задачи (1) — (2) со скоростью $O(|h|^2)$.

Замечание 1. Если рассмотреть систему (6) и соответствующий итерационный процесс

$$y^{(r+1)}(x)=(G(x, \xi), \varphi(\xi, y^{(r)}(\xi)))\quad(r=0, 1, 2\ldots), \tag{13}$$

то доказывается сходимость к точному решению граничной задачи и сходимость итерационного процесса в L_2.

Замечание 2. Совершенно аналогично можно рассмотреть решение граничной задачи Рикье для квазилинейного уравнения

$$(-1)^n \Delta^n u + (-1)^{n-1} a_1 \Delta^{n-1} u + \cdots + a_n u + f(x, u) = 0, \quad \text{при } x \in R_p,$$

$$\Delta \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}, \quad \Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1}), \quad \Delta^0 = 1,$$

$\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \cdots n)$ — действительные постоянные.

$$\Delta^s u = 0, \text{ при } x \in \Gamma, \ s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Легко получаются результаты, аналогичные предыдущим.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Андреев. О равномерной сходимости некоторых разностных схем. Журнал вычислительной математики и математической физики. т. 6, № 2 (1966).
2. В. К. Саульев. Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей. Вычислительная математика, сборник I (1957).
3. В. Г. Приказчиков. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора. Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 5, № 4 (1965).
4. Р. Курант. Уравнения с частными производными, т. 2, Москва (1964).
5. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Москва (1965).

Кафедра
приближенного анализа
и вычислительной техники

(Поступило в редакцию 20. V. 1967)

ჰ. მელაძე

სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ სასრულსხვაობიანი მეთოდით ელიფსური ტიპის კვაზი-წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

რეზიუმე

განხილულია (1) — (2) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა p-განზომილებიან პარალელეპიპედში ($p=2, 3$). მიღებული სხვაობიანი ანალოგი იხსნება მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით, რომელიც მოითხოვს ლაპლასის ოპერატორის შესაბამისი გრინის ფუნქციის დისკრეტული ანალოგის გამოყენებას. შესწავლილია ამ მეთოდის კრებადობის საკითხები სხვადასხვა ნორმების თვალსაზრისით. დამტკიცებულია სხვაობიანი ანალოგის ამოხსნის თანაბარი კრებადობა (1) — (2) ამოცანის ზუსტი ამოხსნისაკენ.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

А. С. ЦЕРЕТЕЛИ

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ ВИДА $\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\cdots+\varphi_n(x_n)$

1. Пусть на множестве D плоскости $x0y$ задана произвольная ограниченная функция $f(x, y)\equiv f(p)$. Обозначим через $H_\omega(D)$ класс функций $f(p)$, удовлетворяющих условию: для любых двух точек p_1 и p_2 из D

$$|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant\omega[\rho(p_1, p_2)],$$

где $\rho(p_2, p_2)$—расстояние между точками p_1 и p_2, а $\omega(t)$—произвольно заданный модуль непрерывности (см. [1], гл. III).

Для множеств D, являющихся декартовым произведением подмножеств координатных осей, А. Н. Колмогоров в 1956 г. доказал, что если $f(x, y)\in H_\omega(D)$, то существует функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)$ из $H_\omega(D)$, реализующая нижнюю грань

$$E(f)=\inf_{\varphi,\psi}\sup_{p\in D}|f(x, y)-\varphi(x)-\psi(y)|. \tag{1}$$

Этот результат был обобщен на случай функции многих переменных Ю. П. Офманом в работе [2]. Кроме того, в этой работе изучен вопрос об условиях, которые надо наложить на множество D, чтобы при $\omega(t)\equiv t$ для любой функции $f(x, y)\in H_\omega(D)$ существовала функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)$ из $H_\omega(D)$, реализующая нижнюю грань (1).

В работе [2] вводятся понятия креста и планок креста множества D плоскости $x0y$.

Обозначим через $D^{[x_0]}$ пересечение множества D с прямой $x=x_0$, а через $D^{[y_0]}$—пересечение множества D с прямой $y=y_0$. Далее, пусть $D_y^{[x_0]}$ (соответственно, $D_x^{[y_0]}$) есть проекция $D^{[x_0]}$ на ось $0y$ (на ось $0x$). Множество $D^{[x_0]}(D^{[y_0]})$ называется первой (соответственно, второй) планкой креста, если $D_y^{[x_0]}(D_x^{[y_0]})$ совпадает с проекцией всего множества D на ось $0y$ (соответственно, на ось $0x$). Сумма $D^{[x_0]}\cup D^{[y_0]}$ называется крестом.

В работе [2] утверждается (теорема 3), что если D содержит крест, то при $\omega(t)\equiv t$ для любой функции $f(p)\in H_\omega(D)$ существует функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)\in H_\omega(D)$, реализующая нижнюю грань (1).

Впоследствии В. П. Моторный в работе [3] заметил, что для справедливости этого утверждения приведенное условие Ю. П. Офмана не является достаточным.

Для случая $\omega(t)\equiv t$ В. П. Моторный доказал, что справедлива следующая

Теорема А. Если подмножество $D_1\subseteq D$, заключенное между любыми двумя прямыми, параллельными осям, содержит крест, то для любой функции $f(x, y)\in H\omega(D)$, где $\omega(t)\equiv t$, существует функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)\in H\omega(D)$, реализующая нижнюю грань (1).

Для произвольного модуля непрерывности $\omega(t)$ В. П. Моторный доказывает следующую теорему:

Теорема Б. Если любая сумма $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D^{[y_i]}$ (соответственно, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D^{[x_i]}$ $(n=1, 2,\cdots)$ удовлетворяет условию теоремы A, то для любой функции $f(x, y)\in H\omega(D)$, где $\omega(t)$—произвольный модуль непрерывности, существует функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)\in H\omega(D)$, реализующая нижнюю грань (1).

В работе (4) рассмотрено наилучшее приближение функции $f(x, y)\in L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ посредством функции вида $\varphi(x)+\psi(y)$.

2. Поставим следующий вопрос: какому условию должны удовлетворять функции класса $H=\{\varphi(x)+\psi(y)\}$, чтобы для произвольной функции $f(x, y)$, которая определена и ограничена на ограниченном замкнутом множестве D, существовала функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)\in H$, реализующая нижнюю грань

$$E_{\mathrm{H}}(f)=\inf_{\varphi,\psi}\sup_{(x,y)\in \mathrm{D}}|f(x, y)-\varphi(x)-\psi(y)|\,.$$

В настоящей работе даны условия, налагаемые на класс $\{\varphi(x)+\psi(y)\}$, достаточные для существования функции $\varphi_0(x)+\psi_0(y)$, наилучшим образом приближающей $f(x, y)$.

Пусть D—произвольное замкнутое множество точек $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ в пространстве R_n. Пусть D_{x_k} $(k=1, 2,\cdots,n)$ есть проекция D на ось Ox_k $(k=1, 2,\cdots,n)$. Очевидно, что множества Dx_k $(k=1, 2,\cdots,n)$ являются ограниченными замкнутыми множествами.

Пусть $f(x)=f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$—произвольная ограниченная на D функция. Пусть на множествах D_{x_k} $(k=1, 2,\cdots,n)$ определены классы равностепенно непрерывных функций

$$H^{(k)}=\{\varphi_k(x_k)\}\quad (k=1, 2,\cdots,n).$$

Обозначим через H класс функций вида $\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k)$, где $\varphi_k(x_k)\in H^{(k)}$ $(k=1, 2,\cdots,n)$. Введем обозначение

$$g(x)=\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\cdots+\varphi_n(x_n)\in H.$$

Определение 1. Расстоянием между двумя функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будем называт величину

$$\rho[f_1(x);\ f_2(x)] = \sup_{x \in D} |\ f_1(x) - f_2(x)\ |\,.$$

Имеет место

Теорема 1. Для любой ограниченной функции $f(x)$, заданной на ограниченном замкнутом множестве $D \subset R_n$, существует в классе H функция наилучшего приближения $g_0(x)$

$$\sup_{x \in D} |\ f(x) - g_0(x)\ | = \inf_{g \in H} \sup_{x \in D} |\ f(x) - g(x)\ | = E_H(f).$$

Доказательство. Пусть $\{g_i(x)\}$ $(i=1,\ 2,\ldots)$ $(g_i(x) \in H$ $(i=1,\ 2,\ldots))$ — некоторая последовательность функций, для которой

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{x \in D} |\ f(x) - g_i(x)\ | = \inf_{g \in H} \sup_{x \in D} |\ f(x) - g(x)\ | = E_H(f). \tag{2}$$

Эта последовательность равномерно ограничена. Действительно, фиксируем какое-нибудь $\varepsilon > 0$, пусть $\varepsilon = 1$, и найдем такой $N > 0$, что при $i > N$

$$\sup_{x \in D} |\ f(x) - g_i(x)\ | < E_H(f) + 1.$$

При $i > N$ имеем

$$\sup_{x \in D} |\ g_i(x)\ | \leqslant \sup_{x \in D} |\ f(x) - g_i(x)\ | + \sup_{x \in D} |\ f(x) <$$

$$< E_H(f) + 1 + M_1 = M_2,$$

где

$$M_1 = \sup_{x \in D} |\ f(x)\ |\,.$$

Пусть

$$M_3 = \max_{i \leqslant N} \{\max_{x \in D} |\ g_i(x)\ |\}.$$

Тогда

$$\max_{x \in D} |\ g_i(x)\ | \leqslant \max(M_2,\ M_3) \quad (i=1,\ 2,\ldots),$$

т. е. последовательность функций $\{g_i(x)\}$ $(i=1,\ 2,\ldots)$ равномерно ограничена на D; следовательно, существует такая константа $K > 0$, что

$$\max_{x \in D} |\ g_i(x)\ | < K \quad (i=1,\ 2,\ldots).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{1,i}^{(1)}(x_1) = \varphi_{1,i}(x_1) + \sum_{k=2}^{n} \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) \ \ (i=1,\ 2,\ldots),$$

где $x_k^{(0)} \in D_{x_k}$ $(k=2,\ 3,\ldots,n)$ — произвольные фиксированные точки. Имеем

$$| \varphi^{(1)}_{1,i}(x_1) | = | \varphi_{1,i}(x_1) + \sum_{k=2}^{n} \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) | \leqslant \max_{x_1 \in D_{x_1}} | \varphi_{1,i}(x_1) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) | \leqslant \max_{x \in D} | \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,i}(x_k) | < K \quad (i=1, 2, \ldots),$$

т. е. последовательность функций $\{\varphi^{(1)}_{1,i}(x_1)\}$ $(i=1, 2, \cdots)$ равномерно ограничена на D_{x_1}.

Рассмотрим функции

$$\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k) = \varphi_{k,i}(x_k) - \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) \quad (i=1, 2, \ldots;\ k=2, 3, \ldots, n).$$

Будем иметь, во-первых,

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi^{(1)}_{k,i}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,i}(x_k) \quad (i=1, 2, \ldots).$$

следовательно, в силу (2),

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{x \in D} | f(x) - g_i^{(1)}(x) | = E_{\mathrm{H}}(f); \tag{3}$$

во-вторых, последовательности функций $\{\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k)\}$ $(k=2, 3, \cdots n)$ равномерно ограничены, соответственно, на множествах D_{x_k} $(k=2, 3, \cdots, n)$; действительно,

$$| \varphi^{(1)}_{k,i}(x_k) | = | \varphi_{k,i}(x_k) - \varphi_{k,i}(x_k^{0}) | = | \varphi_{k,i}(x_k) - \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \varphi_{j,i}(x_j^{(0)}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \varphi_{j,i}(x_j^{(0)}) | \leqslant | \varphi_{k,i}(x_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \varphi_{j,i}(x_j^{(0)}) | +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) \right| \leqslant \max_{x_k \in D_{x_k}} \left| \varphi_{k,i}(x_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \varphi_{j,i}(x_j^{(0)}) \right| +$$

$$+ \max_{x \in D} \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,i}(x_k) \right| < \max_{x \in D} \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,i}(x_k) \right| + K < 2\,\mathrm{K} \quad (i=1, 2, \ldots,),$$

т. е. последовательности функций $\{\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k)\}$ $(k=2, 3, \cdots, n)$ равномерно ограничены, соответственно, на множествах D_{x_k} $(k=2, 3, \cdots, n)$. Следовательно, последовательности функций $\{\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k)\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ равномерно ограничены, соответственно, на множествах D_{x_k} $(k=1, 2, \cdots, n)$ и при этом имеет место равенство (3).

Таким образом, имеем, что функции семейства $\{\varphi^{(1)}_{i,k}(x_1)\}$ $(i=1, 2,\cdots)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на множестве D_{x_1}. В силу теоремы Арцела (см. [5], стр. 262), из последовательности функций $\{\varphi^{(1)}_{1,k}(x_1)\}$ $(i=1, 2,\cdots)$ выделяется равномерно сходящаяся на D_{x_1} подпоследовательность $\{\varphi^{(1)}_{1,i_j}(x_1)\}$ $(j=1, 2,\cdots)$

$$\lim_{j\to\infty}\varphi^{(1)}_{1,i_j}(x_1)=\varphi_{1,0}(x_1)\in H^{(1)}.$$

Рассмотрим последовательность $\{\varphi^{(1)}_{2,i_j}(x_2)\}$ $(j=1, 2,\cdots)$. Из этой последовательности также выделяется равномерно сходящаяся на D_{x_2} подпоследовательность $\{\varphi^{(1)}_{2,\lambda_s}(x_2)\}$ $(s=1, 2,\cdots)$

$$\lim_{s\to\infty}\varphi^{(1)}_{2,\lambda_s}(x_2)=\varphi_{2,0}(x_2)\in H^{(2)},$$

где $\{\lambda_s\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i_j\}$, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty}\varphi^{(1)}_{1,\lambda_s}(x_1)=\varphi_{1,0}(x_1).$$

Рассмотрим последовательность $\{\varphi^{(1)}_{3,\lambda_s}(x_3)\}$ $(s=1, 2,\cdots)$. Из этой последовательности также выделяется равномерно сходящаяся на D_{x_3} подпоследовательность и т. д.; если продолжить этот процесс, то наконец получим, что существует такая подпоследовательность $\{\tau_\mu\}$ последовательности $\{i\}$, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\varphi^{(1)}_{k,\tau_\mu}(x_k)=\varphi_{k,0}(x_k)\in H^{(k)} \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

равномерно, соответственно, на множествах D_{x_k} $(k=1, 2, \cdots, n)$; следовательно, функции $\varphi_{k,0}(x_k)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ непрерывны, соответственно, на множествах D_{x_k} $(k=1, 2, \cdots, n)$.

Итак, имеем

$$g_0(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,0}(x_k)\in H$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty} g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)=g_0(x)$$

равномерно относительно $x\in D$. Так как $\{\tau_\mu\}$ является подпоследовательтостью последовательности $\{i\}$, то, в силу (3), имеем

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup_{x\in D}\left| f(x)-g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)\right| = E_H(f),$$

т. е.

$$\lim_{\mu \to \infty} \rho \left[f(x);\ g^{(1)}_{\tau_\mu}(x) \right] = E_{\mathrm{H}}(f).$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon) > 0$, что при $\mu > N(\varepsilon)$ будем иметь

$$\rho \left[f(x);\quad g^{(1)}_{\tau_\mu}(x) \right] < E_{\mathrm{H}}(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, так как последовательность функций $\{g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)\}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ равномерно сходится к функции $g_0(x)$, то для уже названного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N_1(\varepsilon) > 0$, что при $\mu > N_1(\varepsilon)$ будем иметь

$$\rho \left[g_0(x);\ g^{(1)}_{\tau_\mu}(x) \right] < \frac{\varepsilon}{2};$$

следовательно, при $\mu > \max\{N(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$ имеем

$$\rho \left[f(x);\quad g_0(x) \right] < E_{\mathrm{H}}(f) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\rho \left[f(x);\quad g_0(x) \right] \leqslant E_{\mathrm{H}}(f).$$

В силу определения $E_{\mathrm{H}}(f)$ величина, стоящая в левой части последнего неравенства, не может быть меньше $E_{\mathrm{H}}(f)$, следовательно,

$$\rho \left[f(x);\ g_0(x) \right] = E_{\mathrm{H}}(f),$$

а это то же самое, что

$$\sup_{x \in D} | f(x) - g_0(x) | = E_{\mathrm{H}}(f).$$

Так как $g_0(x) \in H$, поэтому последнее равенство доказывает теорему.

Определение 2. Скажем, что $F(x) \in Li\, p_{\mathrm{M}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ на множестве D, если

$$| F(x') - F(x'') | \leqslant M(| x_1' - x_1'' |^{\alpha_1} + $$
$$ + | x_2' - x_2'' |^{\alpha_2} + \cdots + | x'_n - x_n'' |^{\alpha_n}),$$

при $x', x'' \in D$.

Пусть функции классов $H^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\varphi_k(x_k) \in \mathrm{Lip}_\mu \alpha_k \quad (k = 1,\ 2, \ldots, n);$$

при этом будем подразумевать, что константа M одна и та же для всех функций $\varphi_k(x_k) \in H^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через H_1 класс функций вида $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)$, где $\varphi_k(x_k) \in H^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Легко видеть, что если $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k) \in H_1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k) \in \mathrm{Lip}_M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Введем обозначение

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k).$$

Имеет место

Следствие. Для любой ограниченной функции $f(x)$, заданной на ограниченном замкнутом множестве $D \subset R_n$, существует в классе H_1 функция наилучшего приближения $g_0(x)$

$$\sup_{x \in D} | f(x) - g_0(x) | = \inf_{g \in H_1} \sup_{x \in D} | f(x) - g(x) | = E_{H_1}(f).$$

Доказательство. Покажем, что функции семейства H_1 равностепенно непрерывны.

Пусть $g(x) \in H$, тогда для любых точек $x', x'' \in D$ будем иметь

$$| g(x') - g(x'') | \leqslant M(| x'_1 - x''_1 |^{\alpha_1} + | x'_2 - x''_2 |^{\alpha_2} + \cdots + | x'_n - x''_n |^{\alpha_n}). \quad (4)$$

Назовем произвольное $\varepsilon > 0$, а $\eta > 0$ определим из неравенства

$$0 < \eta^{\alpha_1} + \eta^{\alpha_2} + \cdots + \eta^{\alpha_n} < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Если точки x' и x'' подберем так, что

$$| x'_k - x''_k | < \eta \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

тогда, в силу (4), будем иметь

$$| g(x') - g(x'') | < M(\eta^{\alpha_1} + \eta^{\alpha_2} + \cdots + \eta^{\alpha_n}) < \varepsilon.$$

Следовательно, функции семейства H_1 равностепенно непрерывны.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получим последовательности $\{\varphi^{(1)}_{k,\tau_\mu}(x_k)\}_{\mu=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, $\varphi^{(1)}_{k,\tau_\mu}(x_k) \in H^{(k)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, n)$, которые равномерно сходятся, соответственно, к функциям $\varphi_{k,0}(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\lim_{\mu \to \infty} \varphi^{(1)}_{k,\tau_\mu}(x_k) = \varphi_{k,0}(x_k)$$

и для которых имеем

$$\lim_{\mu \to \infty} | f(x) - g^{(1)}_{\tau_\mu}(x) | = E_{H_1}(f).$$

Легко видеть, что

$$\sup_{x \in D} | f(x) - g_0(x) | = E_{H_1}(f),$$

где $g_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,0}(x_k)$.

Остается показать, что $g_0(x) \in H_1$ или, что то же самое,

$$g_0(x) \in \mathrm{Lip}_M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Для любых $x', x'' \in D$ имеем

$$|g_0(x') - g_0(x'')| = |\lim_{\mu\to\infty} g^{(1)}_{\tau_\mu}(x') - \lim_{\mu\to\infty} g^{(1)}_{\tau_\mu}(x'')| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\mu\to\infty} |g^{(1)}_{\tau_\mu}(x') - g^{(1)}_{\tau_\mu}(x'')| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}(x'_k - x''_k)^{\alpha_k},$$

т. е.

$$g_0(x) \in \mathrm{Lip}_M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Этим завершается доказательство следствия.

Пусть D—некоторая ограниченная замкнутая область точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в пространстве R_n. Очевидно, что множества D_{x_k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будут сегментами

$$D_{x_k} = [a_k, b_k]. \; (k=1, 2, \ldots, n).$$

Пусть на множестве D определена произвольная ограниченная функция $f(x)$ и пусть на множествах D_{x_k} $(k=1, 2, \ldots, n)$ даны классы функций $H^{(k)} = \{\varphi_k(x_k)\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, полные вариации которых ограничены одним числом. Обозначим через H_0 класс функций вида $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k)$, где $\varphi_k(x_k) \in H^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots n)$. Введем обозначение

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k) \in H_0.$$

Имеет место

Теорема 2. Для любой ограниченной функции $f(x)$, заданной на ограниченной замкнутой области D, существует в классе H_0 функция наилучшего приближения $g_0(x)$

$$\sup_{x\in D} |f(x) - g_0(x)| = \inf_{g\in H_0}\sup_{x\in D} |f(x) - g(x)| = E_{H_0}(f).$$

Доказательство. Пусть $\{g_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ $(g_i(x) \in H_0$ $(i=1, 2, \ldots))$—некоторая последовательность функций, для которой

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{x\in D} |f(x) - g_i(x)| = E_{H_0}(f),$$

где

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,i}(x_k) \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Эта последовательность равномерно ограничена, т. е. существует такая константа $K > 0$, что

$$\sup_{x \in D} | g_i(x) | < K \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим функции:

$$\varphi^{(1)}_{1,i}(x_1) = \varphi_{1,i}(x) + \sum_{k=2}^{n} \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) \quad (i=1, 2, \ldots),$$

$$\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k) = \varphi_{k,i}(x_k) - \varphi_{k,i}(x_k^{(0)}) \quad (i=1, 2, \ldots; k=2, 3, \ldots),$$

где $x_k^{(0)} \in D_{x_k}$ $(k=2, 3, \ldots, n)$—произвольные фиксированные точки. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(1)}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,i}(x_k) \quad (i=1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{x \in D} | f(x) - g_i^{(1)}(x) | = E_{H_0}(f).$$

Так как для всех i величины $\varphi_{2,i}(x_2^{(0)}), \varphi_{3,i}(x_3^{(0)}), \ldots, \varphi_{n,i}(x_n^{(0)})$ постоянны, то вариации функции $\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k)$ $(i=1, 2, \ldots; k=1, 2, \ldots, n)$ равны, соответственно, вариациям функции $\varphi_{k,i}(x_k)$ $(i=1, 2, \ldots; k=1, 2, \ldots n)$, т. е.

$$\overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(\varphi^{(1)}_{k,i}) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi_{k,i}) < K_1 \quad (k=1, 2, \ldots, n; \ i=1, 2, \ldots).$$

При этом легко видеть, что последовательности

$$\{\varphi^{(1)}_{k,i}(x_k)\}_{i=1}^{\infty} \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

равномерно ограничены, соответственно, на сегментах D_{x_k} $(k=1, 2, \ldots, n)$.

В силу теоремы Э. Хелли (см. [5], стр. 318), из последовательности функции $\{\varphi^{(1)}_{1,i}(x_1)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\varphi^{(1)}_{1,i_j}(x_1)\}$ $(j=1, 2, \ldots)$, которая в каждой точке сегмента $[a_1, b_1]$ сходится к некоторой функции $\varphi_{1,0}(x_1)$, также имеющей ограниченную вариацию

$$\lim_{j \to \infty} \varphi^{(1)}_{1,i_j}(x_1) = \varphi_{1,0}(x_1) \in H^{(1)}.$$

Рассмотрим последовательность $\{\varphi^{(1)}_{2,i_j}(x_2)\}$ $(j=1, 2, \ldots)$. Из этой последовательности также можно выделить такую подпоследовательность $\{\varphi^{(1)}_{2,\lambda_s}(x_2)\}$

$(s=1, 2, \cdots)$, которая в каждой точке сегмента $[a_2, b_2]$ сходится к некоторой функции $\varphi_{2,0}(x_2)$, также имеющей ограниченную вариацию

$$\lim_{s\to\infty} \varphi^{(1)}_{2,\lambda_s}(x_2)=\varphi_{2,0}(x_2)\in H^{(2)},$$

где $\{\lambda_s\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i\}$, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \varphi^{(1)}_{1,\lambda_s}(x_1)=\varphi_{1,0}(x_1).$$

Рассмотрим последовательность $\{\varphi^{(1)}_{3,\lambda_s}(x_3)\}$ $(s=1, 2, \cdots)$. Из этой последовательности также выделяется подпоследовательность, которая в каждой точке сегмента $[a_3, b_3]$ сходится к некоторой функции, имеющей ограниченную вариацию и т. д.; если продолжить этот процесс, то наконец получим, что существует такая подпоследовательность $\{\tau_\mu\}$ последовательности $\{i\}$, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi^{(1)}_{k,\tau_\mu}(x_k)=\varphi_{k,0}(x_k)\in H^{(k)} \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

Функции $\varphi_{k,0}(x_k)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ имеют ограниченную вариацию, соответственно, на множествах D_{x_k} $(k=1, 2, \cdots, n)$.

Итак, имеем

$$g_0(x)=\sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,0}(x_k)\in H_0$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty} g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)=g_0(x).$$

Так как $\{\tau_\mu\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i\}$ то имеем

$$\lim_{\mu\to\infty} \sup_{x\in D} |f(x)-g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)|=E_{H_0}(f),$$

т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty} \rho[f(x);\ g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)]=E_{H_0}(f).$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое число N, что при $\mu>N$ будем иметь

$$\rho[f(x);\ g^{(1)}_{\tau_\mu}(x)]<E_{H_0}(f)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для всякой фиксированной точки $x'\in D$ и для уже названного $\varepsilon>0$ найдется такое число N_1, что при $\mu>N_1$ будем иметь

$$\rho[g_0(x');\ g^{(1)}_{\tau_\mu}(x')]<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, что при $\mu > N$ имеем

$$\rho[f(x'),\ g^{(i)}_{\tau_\mu}(x')] < E_{H_0}(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $\mu > \max\{N, N_1\}$ имеем

$$\rho[f(x);\ g_0(x)] < E_{H_0}(f) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\rho[f(x);\ g_0(x)] \leqslant E_{H_0}(f).$$

В силу определения $E_{H_0}(f)$ величина, стоящая в левой части последнего неравенства, не может быть меньше $E_{H_0}(f)$; следовательно,

$$\rho[f(x);\ g_0(x)] = E_{H_0}(f);$$

а это то же самое, что

$$\sup_{x\in D} |f(x) - g_0(x)| = E_{H_0}(f).$$

Так как $g_0(x) \in H_0$, то последнее равенство доказывает теорему.

Следуя С. Н. Бернштейну (см. [6] стр. 371), будем называть целые функции

$$s_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!}$$

функциями конечной степени p (или не выше p), если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \leqslant p.$$

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ определена и ограничена на всем пространстве R_n. Пусть даны классы целых функций конечной степени p

$$H^{(k)} = \{\varphi_k(x_k)\} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Обозначим через A класс функций вида $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)$, где

$$\varphi_k(x_k) \in H^{(k)} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Имеет место

Теорема 3. Для любой ограниченной в R_n функции $f(x)$, существует в классе A функция наилучшего приближения $g_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,0}(x_k)$

$$\sup_x |f(x) - g_0(x)| = \inf_{g\in A} \sup_x |f(x) - g(x)| = E_A(f).$$

Доказательство. Пусть $\{g_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $(g_i(x) \in A \ (i = 1, 2 \ldots))$ — некоторая последовательность функций, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \sup_x |f(x) - g_i(x)| = E_A(f),$$

где

$$g_i(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,i}(x_k)\quad(i=1,\ 2,\ldots).$$

Легко видеть, что эта последовательность равномерно ограничена, т. е. существует такая константа $K>0$, что

$$\sup_x |\ g_i(x)\ | < K\quad(i=1,\ 2,\ldots).$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_{1,i}^{(1)}(x_1)=\varphi_{1,i}(x_1)+\sum_{k=2}^{n}\varphi_{k,i}(x_k^{(0)})\quad(i=1,\ 2,\ldots),$$

$$\varphi_{k,i}^{(1)}(x_k)=\varphi_{k,i}(x_k)-\varphi_{k,i}(x_k^{(0)})\quad(i=1,\ 2,\ldots;\ k=2,\ldots,n),$$

где $x_k^{(0)}$ $(k=2,\ 3,\ldots,n)$—произвольные фиксированные точки. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,i}^{(1)}(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,i}(x_k)\quad(i=1,\ 2,\ldots),$$

т. е.

$$\lim_{j\to\infty}\sup_x |\ f(x)-g_i^{(1)}(x)\ | = E_{\mathrm{A}}(f).$$

Легко видеть, что последовательности $\{\varphi_{k,i}^{(1)}(x_k)\}_{i=1}^{\infty}$ $(k=1,\ 2,\ldots,n)$ равномерно ограничены. Следовательно, принимая во внимание, что предел целых функций рассматриваемого класса принадлежит к тому же классу (см. [1], стр. 56, где доказательство этого предложения приведено в доказательстве теоремы 2. 6. 2), получим, что существует такая подпоследовательность $\{i_j\}$ последовательности $\{i\}$, что

$$\lim_{j\to\infty}\varphi_{1,i_j}^{(1)}(x_1)=\varphi_{1,0}(x_1)\in H^{(1)}.$$

Аналогично получим, что

$$\lim_{s\to\infty}\varphi_{2,\lambda_s}^{(1)}(x_2)=\varphi_{2,0}(x_2)\in H^{(2)},$$

где $\{\lambda_s\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i_j\}$, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty}\varphi_{1,\lambda_s}^{(1)}(x_1)=\varphi_{1,0}(x_1).$$

Рассмотрим последовательность $\{\varphi_{3,\lambda_s}^{(1)}(x_3)\}$ $(s=1,\ 2,\ldots)$. Из этой последовательности также выделяется сходящаяся подпоследовательность и т. д., если продолжить этот процесс, то наконец получим, что существует такая подпоследовательность $\{\tau_\mu\}$ последовательности $\{i\}$, что

$$\lim_{\mu \to \infty} \varphi^{(1)}_{k, \tau_\mu} (x_k) = \varphi_{k,0} (x_k) \in H^{(k)} \ (k=1, 2, \cdots, n),$$

при этом сходимость равномерная.

Так как $\{\tau_\mu\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i\}$, то имеем

$$\lim_{\mu \to \infty} \sup_x | f(x) - g^{(1)}_{\tau_\mu} (x) | = E_A (f).$$

Аналогично доказательству теоремы 1 будем иметь

$$\sup_x | f(x) - g_0 (x) | = E_A (f).$$

Так как

$$g_0 (x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,0} (x_k) \in A,$$

поэтому последнее равенство доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М. (1960).
2. Ю. П. Офман. О наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$. Известия АН СССР, сер. матем., 25 (1961), 239—252.
3. В. П. Моторный. К вопросу о наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$. Известия АН СССР, сер. матем., 27 (1963), 1211—1214.
4. М. А. Бабаев. О наилучшем степенном приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$. Известия АН Аз. ССР, сер. ф.-м., (1862), № 6.
5. ვლ. ჭელიძე. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია. თ. (1964).

Кафедра
приближенного анализа
и вычислительной техники

(Поступило в редакцию 25. VI. 1967)

ა. წერეთელი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის აპროქსიმაცია $\varphi_1 (x_1) + \varphi_2 (x_2) + \cdots + \varphi_n (x_n)$ სახის ფუნქციებით

რეზიუმე

შრომაში განიხილება საკითხი იმის შესახებ, თუ რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდნენ $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (x_k) \right\}$ კლასის ფუნქციები, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ფუნქციისათვის ამ კლასში არსებობდეს საუკეთესო მიახლოების ფუნქცია.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Ю. М. ГАЙДУК, И. А. НАУМОВ

ИСТОРИЧЕСКОЕ ПРОШЛОЕ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ КУЛЬТУРАМИ ЧЕХОСЛОВАКИИ И СССР

В настоящей работе ставится целью проследить развитие математических связей [1] между Чехословацкими землями, с одной стороны, и Россией—СССР, с другой, за время с начала XVIII века до конца тридцатых годов нашего столетия. Нам представляется удобным выделить в этом развитии четыре последовательных периода: I—восемнадцатое столетие; II—первая половина девятнадцатого столетия; III—от середины девятнадцатого столетия до первой мировой войны; IV—двадцатилетие с момента Великой Октябрьской социалистической революции в России—образования Чехословацкой республики (1917—1918) до оккупации последней гитлеровской Германией (1939) [2].

I

Зарождение первых контактов между математиками чешских и словацких земель и русскими математиками относится, примерно, ко второй трети XVIII столетия. В истории чехословацкой математической культуры это был начальный период (наступивший вслед за более чем столетним застоем, вызванным национальной катастрофой 1720 г., опустошительной 30-летней войной и жестокой феодальной реакцией) постепенного освоения

---

[1] Мы понимаем здесь этот термин в широком смысле, включающем контакты по линиям математической науки, преподавания математики, приложений математики.

[2] Скромный объем статьи не позволяет перечислить все использованные авторами многочисленные источники. Ограничимся поэтому тем, что назовем важнейшие из них суммарно: Dějiny exaktnich věd v českych zemích do konce 19 st, (под редакцией L. Noy) Praha, 1961; F. Veselý, 100 lit Iednoty československych matematiků a fysiků, Praha, 1962; Пражский университет Московскому университету; Сборник в честь юбилея 1755—1955, Прага, 1955; Sbornik pro dějiny přirodnich věd a techniky. sv. I—XI, 1954—1966; Историко-математические исследования (под. редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича), Москва, в. в. I—XVII, 1948—1966; General Topology and Relations to Modern Analysis and Algebra-Proceedings of the symposium... sept., 1961, Prague, 1962.

великих математических открытий XVI—XVII веков, воплотившихся в координатной геометрии Декарта-Ферма, дифференциальном и интегральном исчислении Ньютона-Лейбница и последующем развитии и приложениях этих теорий.

В 1725 г. в Петербурге начала функционировать Российская Академия наук, в которой спустя два года начал свою многолетнюю поразительную по плодотворности деятельность Л. Эйлер (1707—1783). С легкой руки этого ученого Петербургская Академия наук вскоре превратилась в один из главных мировых центров математической мысли. Среди многих ученых, искавших контакта с этим математическим кладезем, мы встречаем и передовых математиков словацких и чешских земель.

Одним из этих математиков был работавший в Братиславе Самуэль Миковини (1700—1750), завоевавший себе имя также как картографа и инженера. Через посредство придворного венского астронома Дж. Маринони, Миковини около 1740 г. вступил в сношения с Эйлером. Последний познакомился, таким образом, с сочинением братиславского математика, в котором опровергалась попытка квадратуры круга, предпринятая неким австрийским ротмистром И. Лейстнером. По поводу этого сочинения Эйлер писал Маринони: „Я прочитал... с огромным удовольствием сочинения славного Миковини, преисполненные огромной учености, в которых он не только остро обличает отвратительнейшие ошибки Лейстнера и очень искусно вскрывает основное ядро вопроса, но также собственным вычислением, с помощью ряда Лейбница, которым по тангенсу определяется дуга круга, подтверждает пределы квадратуры круга, данные Лудольфом ван Цейленом“. Эйлер не ограничился, впрочем, одними похвалами Миковини, но и продумал вопрос, как рационализировать вычисления последнего. В результате он нашел для вычисления более удобные ряды, которые и просил своего корреспондента сообщить братиславскому математику. Придерживаясь, очевидно, принципа „amicus Plato sed magis amica veritas“, Эйлер, вместе с тем, указал, что предложенное Миковини доказательство несоизмеримости периферии круга с диаметром „совершенно не достигает цели“ [1].

Завязал сношения с Петербургской Академией наук и Иозеф Степлинг (1716—1778), возглавлявший модернизаторское движение в области точных наук в чешских землях. Получение научных изданий Российской Академии наук, переписка Степлинга с Эйлером, изучение оригинальных работ, монографий и учебных руководств последнего и других петербургских ученых — все это помогало чешским ученым быстрее войти в курс новейших достижений математической науки и найти отправные пункты как для своей учебно-методической деятельности, так и для первых опытов самостоятельного исследования. Так, темой одной из научных работ Степлинг избрал (1751 г.) обобщение результатов петер-

[1] См. Леонард Эйлер. Письма к ученым, М., 1963.

бургского математика Г. В. Краффта (1701—1754) по определению (средствами интегрального исчисления) объемов некоторого класса геометрических тел; при составлении же своего руководства по дифференциальному исчислению (1765 г.) Степлинг многое почерпнул из трактатов Эйлера. За работами Эйлера в области анализа и теории чисел следил и ученик Степлинга—Я. Тесанек (1728—1788). Правда, читая курс анализа бесконечно малых в Пражском университете, Тесанек ориентировался преимущественно на учебники французских и итальянских авторов—но уже его ученик и преемник Ф. И. Герстнер (1756—1832) счел необходимым положить в основу курса (в 1787—1822 гг.) руководства Эйлера. Работы Эйлера по проблеме решения алгебраических уравнений нашли внимательного читателя и справедливого критика (1786) в лице пражского математика Ф. Э. фон Шаффготча (1743—1809), который показал, что предложенный Эйлером способ в случае уравнений пятой степени не пригоден. Пользовался известностью в Чехии и трактат Эйлера по механике (Петербург, 1736), влияние которого сказалось, в частности, на работе И. Кербера (1719—1762), посвященной динамике простых машин.

II

Первая половина XIX столетия—на которую приходится в России деятельность такого революционера в математике, как Н. И. Лобачевский (1792—1856), а в Чехии—такого глубокого новатора, как Б. Больцано (1781—1848),—не принесла, к сожалению, заметного расширения связей между математиками этих стран. В частности, Лобачевский и Больцано, по всей видимости, прошли мимо работ друг друга. Это тем более огорчительно, что интересы этих двух ученых, направленные на исследование оснований математики, близко соприкасались—и притом оба они были свободны от пут кантовской философии, сдерживавших прогрессивное развитие математической мысли. Впрочем, отсутствие какого-либо контакта между названными учеными не удивительно, так как оба они в своей научной деятельности были совершенно одиноки и при своей жизни не пользовались должным признанием ни у себя на родине, ни, тем менее, за рубежом.

Возможно, что слабость математических связей[1] между Чехией и Россией в этот период в некоторой степени объясняется тем обстоятельством, что—если исключить особняком стоящую фигуру Больцано—чешская математика тогда отличалась подчеркнутым утилитаризмом, тогда как

---

[1] Напротив, в области инженерной практики 1830-ые годы ознаменовались важным актом чешско-русского сотрудничества. Речь идет о руководящем участии чешского инженера Ф. А. Герстнера (1793—1840) в проектировании и строительстве первой в России пассажирской железной дороги Петербург-Павловск (этот Герстнер—сын упоминаемого выше профессора математики Ф. И. Герстнера).

в русской математике—в том числе и в трудах официального ее главы—М. В. Остроградского—преобладала теоретическая направленность.

Интересно, вместе с тем, отметить, что в этот же период в русских университетах ведут научную деятельность и представители чешских земель. К таковым принадлежал, прежде всего, И. А. Литтров (1781—1840)—известный астроном и математик (получивший образование в Венском и Пражском университетах), в 1810—1816 гг. работавший профессором астрономии в Казанском университете, где он был одним из учителей Н. И. Лобачевского.

Другим математиком—уроженцем чешской земли (Моравии), нашедшим в России свою новую родину, был Н. Д. Брашман (1796—1866). Воспитанник Венского университета, он в 1823 г. уехал в Петербург, где получил место учителя в среднем учебном заведении. В 1825 г., по рекомендации Литтрова, он был принят в Казанский университет на должность адъюнкта физико-математических наук, став, таким образом, на несколько лет сослуживцем Н. И. Лобачевского.

В 1834 г. Брашман был переведен профессором прикладной математики в Московский университет. Опираясь на помощь, оказанную ему из Петербурга Остроградским, Брашман сумел высоко поднять уровень преподавания механики и математики в этом университете. Брашман был учителем выдающегося русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894) (всегда с признательностью вспоминавшего своего учителя) и основателем Московского Математического общества, крупная роль которого в последующем развитии русской математической науки хорошо известна.

Отметим, наконец, что с Харьковским университетом оказалась связана жизненная судьба одного из товарищей Б. Больцано по Пражскому университету. Речь идет о Густаве Гесс-де-Кальве, родившемся в 1784 г. в Пештае, но уже с детства жившем в Праге, где он окончил и университет. В Пражском университете Гесс получил широкое, в том числе и математическое, образование. Гесс был учителем, музыкантом, служил в австрийской, а затем—в русской армии. В 1812 г. Гесс защитил в Харьковском университете диссертацию на степень доктора философии (но не смог получить там преподавательской должности). Он принимал участие в деятельности филотехнического общества при этом университете, издал в 1818 г. ценную книгу по теории музыки, напечатал статью об украинском философе Г. Сковороде и несколько работ по минералогии.

III

Развитие капитализма в чешских землях во второй половине XIX столетия и пробуждение национального самосознания чехов, протекавшее в острой борьбе против австро-венгерской монархии,—открыли новую эпоху и в области развития науки в этих землях, в частности в области математики. Расширение системы народного образования, разделение по национальному признаку (на чешские и немецкие) каждого из политехнических институтов и университетов, модернизация програм преподавания—все эти меры вызвали повышенный спрос на математические кадры высокой квалификации.

В условиях острого национального антагонизма наука в чешских землях—наряду с системой народного образования—распалась на две (связанные между собой скорее соперничеством, чем сотрудничеством) отдельные компоненты—„чешскую“ и „немецкую“. Последняя при этом постепенно растворялась в „общегерманской“ науке.

Если в начале рассматриваемого периода „немецкая компонента“, как имевшая давние традиции, занимала в математике чешских земель, естественно, доминирующие позиции, то, по мере роста национальных чешских кадров и одновременно сокращения контингента обучающихся в немецких учебных заведениях Чехии, „чешская компонента“ решительно берет верх. „Чешская математика“ вскоре заявляет о себе именами, получающими международное признание, и становится весомой частью мировой математики.

В этом процессе созревания „чешской математики“ и приобщения ее к актуальной проблематике мировой науки значительная роль принадлежала расширявшимся интернациональным связям чешских математиков. Кроме традиционных „внутриавстрийских“ связей и связей с германскими математиками, чешские математики устанавливают живые контакты с математическими центрами Франции, Италии и ряда других стран. Свидетельством того существенного значения, которое придавали международным связям чешские математики, уже во второй половине семидесятых годов прошлого века является сделанная ими в эти годы попытка издания в Праге, кроме национального математического журнала „Časopis pro pěstovani matematiky“, еще и интернационального органа—„Archiv matematiky a fysiky“.

К концу столетия чешские работы уже регулярно отражаются в реферативном журнале „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ и, таким образом, становятся более широко известными в мире. Растущая роль в мировой науке творчества русских математиков, ярко продемонстрированная уже в 50—70 гг. глубокими результатами П. Л. Чебышева в теории чисел, математическом анализе и теории вероятностей, начавшимися общим признанием революционных геометрических идей Н. И. Лобачевского, появлением на европейской математической авансцене С. В. Ковалевской и другими убедительными доказательствами силы русского математического гения—должна была способствовать усилению интереса со стороны чешских математиков к русской математике, к установлению с нею более близких отношений.

Нужно заметить также, что интерес чехов к русской математике проистекал не только из достижений последней, как таковых, но и из-того, что это была математика великого родственного народа: идея славянской общности тогда живо владела сознанием чешского образованного общества.

Сходные чувства принадлежности к общей—хотя историческими судьбами тогда разъединенной—семье испытывали по отношению к чешским (и другим славянским) математикам их русские товарищи по профессии. Знакомясь ближе с работами чешских математиков, русские ученые находили в этих трудах ценное и для себя[1], их рано заинтересовали и успехи, достигнутые в Чехии в организации преподавания математики в средней школе.

Рассмотрим хронологически основные моменты расширявшихся русско-чешских математических связей, относящиеся ко второй половине XIX столетия.

В 1870 г. русское Министерство народного просвещения, готовя реформу среднего образования, командировало в страны Западной Европы двух членов Ученого совета—Штейнмана и Георгиевского, поручив им ознакомиться с устройством в этих странах реальных училищ и собрать мнения авторитетных специалистов о целесообразности учреждения подобных училищ и в России. Петербуржцы посетили Пруссию, Саксонию, Австрию (включая чешские земли), Баварию, Швейцарию и сумели заинтересовать своей миссией многих западноевропейских деятелей в области технического образования. Но наиболее близко к сердцу принял задачу русской миссии (как он себе эту задачу представлял) профессор практической геометрии и геодезии Пражского политехникума Карел Коржистка (1825—1906). „Как чех, вполне сочувствующий интересам России,—писал об этом Георгиевский,—и как настоящий знаток дела, Коржистка подробно занялся вопросом... и доставленное им мнение есть самое обстоятельное и обширное из всех...“[2].

Остановимся на сущности представленного Коржисткой мнения. В нем он выступает за единую систему „общего образования высших классов“, т. е.—против раздвоения этой системы на гуманитарные и реальные гимназии. Такая единая средняя общеобразовательная школа, по словам чешского ученого, „должна вести к тем идеальным целям, которые указывает только истинно гуманистическое образование, но которые для благотворного своего осуществления нуждаются в прочных основах реализма“.

Конкретизируя программу единой „гуманитарно-реальной“ гимназии,

[1] В 1860-х гг. русские математики были, напр., знакомы с трудами по теории чисел профессора Пражского университета Я. Ф. Кулика (1793—1863). О признании авторитета последнего свидетельствует факт посылки ему на отзыв сочинения русского математика Козлова о решении неопределенных уравнений. (См. статью И. Я. Депмана в сборнике „Историко-математические исследования“ 1953, вып. VI).

[2] Кстати отметим, что в беседе Коржистки с русскими представителями приняли участие также проф. начертательной геометрии Тильшер и проф. высшей математики Студничка.

Коржистка предусматривал изучение обоих древних языков, а из наук „реального направления“—„элементарной математики, геометрического черчения и рисования, естественной истории и общей физики“. Ссылаясь на опыт австрийских реальных училищ, Коржистка отмечал, что подобные училища „не достигают ни цели надлежащего подготовления к высшим техническим училищам (для этого предпочтительнее гимназии), ни цели подготовления к средним промышленным занятиям—ибо ученики не посвящают себя им, коль скоро им открыт прямой доступ к высшим специальным училищам“. Для подготовки средних технических кадров Коржистка рекомендовал организовывать четырехлетние „промышленные школы“, которые давали бы основательную профессиональную подготовку. Свое „мнение“ чешский ученый заключил словами: „В особенности такая могущественная и многочисленная нация, как русская, которой предстоит завоевать себе великую и славную будущность и стать краеугольным камнем в истории общечеловеческой цивилизации, должна собирать опыты наиболее преуспевших в цивилизации народов Европы, но с тем, чтобы, проверив их, в точности приспособить к собственным своим внутренним обстоятельствам“.

Лицемерно осыпая похвалами Коржистку за „главную мысль“ его проекта, царское министерство, по существу, целиком отклонило последний:—оно нашло неприемлемым предлагаемое Коржисткой „реальное основание“ в классическом образовании и „слишком высоким для нашего простого рабочего класса“—уровень намеченных им „промышленных школ“. В 1871 г. в России была осуществлена учебная реформа, положившая в основу всякого высшего научного образования чисто классическое среднее образование. Но в организованных в 1872 г. русских реальных училищах получили свое отражение и „чешские влияния“: особенно это относится к курсу геометрического черчения (с элементами начертательной геометрии)—серьезная постановка этого предмета в чешских средних школах побудила русских педагогов—„реалистов“ заинтересоваться чешским опытом и постараться перенести его к нам. Одним из проявлений этого был факт издания в Одессе в 1877 г. на русском языке переработки учебника В. Яролимека „Элементарная геометрия в приложении к вычерчиванию наиболее употребительных кривых...“ Переработка была осуществлена преподавателями Одесского реального училища И. Бучинским и Р. Ждановским.

Чтобы не прерывать в нашем изложении педагогической линии, отметим, что в семидесятые годы, в связи с кризисными явлениями в экономике Австро-Венгрии из Чехии в Россию эмигрировало значительное количество инженеров и педагогов, в том числе и математиков.

Проследим судьбу и роль в укреплении чешско-русского математического общения одного из этих эмигрантов. Мы имеем в виду Франтишека (в России—Федора Осиповича) Коваржика (1854—1937). В 1872—1875 гг. он обучался в Чешском высшем техническом училище в Праге, а затем там же — в Немецком политехникуме, который и окончил в 1877 г. Еще студентом Коваржик, интересуясь математикой, вступил в члены Общества чешских математиков и физиков. Отсутствие работы на родине[1] заставило молодого инженера выехать в Россию. Там он окончил курсы для стипендиантов Министерства просвещения при Московском высшем техническом училище и после этого, в 1880 г., был назначен преподавателем математических дисциплин в Полтавском реальном училище. С 1903 г. он перешел на преподавательскую работу в известный своими хорошими математическими традициями Полтавский Петровский кадетский корпус.

В 1898 г. в Полтаве организовался „Кружок любителей физико-математических наук" и Коваржик стал деятельным его членом; по его инициативе были установлены связи между этим Кружком и Обществом чешских математиков и физиков. Оба общества регулярно обменивались своими изданиями, следили за деятельностью друг друга. Так, в 1901 г. К. И. Беручéнко-Мусиенко представлял Полтавский кружок на церемонии у могилы Тихо-де-Браге, которой в Праге было отмечено 300-летие смерти великого астронома[2]. В свою очередь, организованное кружком в том же году чествование памяти М. В. Остроградского — вылившееся в большой праздник русской науки — привлекло к себе сочувственное внимание чешских научных и общественных организаций, отозвавшихся на это событие теплыми приветствиями. По случаю юбилея Кружком была осуществлена большая работа по сбору „реликвий Остроградского" (научных рукописей и писем ученого), в которой деятельное участие принял и Коваржик.

К характеристике Коваржика нужно добавить, что он был сотрудником выходящего в Одессе „Вестника опытной физики и элементарной математики" и автором учебников для средней школы. Из последних особенно большое распространение получил его учебник по арифметике (для гимназий), выдержавший шесть изданий.

В 1910 г. Коваржик, выйдя в отставку из корпуса, принял назначение на должность директора земской гимназии в г. Константинограде.

---

[1] В Архиве Национального технического музея в Праге сохранилось обращение (от 1877 г.) тринадцати членов „Союза архитекторов и инженеров в Чехии" (среди подписавших его был и Коваржик) к правлению этого Общества с призывом войти в сношения с техническими обществами в Петербурге и Москве на предмет использования чешских специалистов на строительстве железных дорог в России. Таким образом, герстнеровская инициатива получила спустя много лет продолжение.

[2] Любопытно отметить что в эту пору в Полтаве работали и другие чехи-учителя. Родоначальником чешской педагогической традиции в этом городе был, по-видимому, Алоиз Едличка (1819—1894) — воспитанник Пражской консерватории, 40 лет преподававший музыку в Полтавском женском институте. Сын его, Эрнест (1854—1940), уроженец Полтавы, был по образованию математиком (он окончил Петербургский университет), но оставил математику ради музыки — стал профессором Берлинской консерватории.

Некоторые из учеников Коваржика стали впоследствии видными советскими математиками. В 1919 г. Коваржик репатриировал в Чехословакию, где еще несколько лет продолжал работать рядовым учителем.

Вернемся, однако, к 70-м годам и в Прагу.

Одним из первых проявлений тяготения чешских математиков рассматриваемой эпохи к обмену научными ценностями с русскими математиками было издание в 1870 году в Праге перевода (выполненного Р. Мацейвским) на русский язык сочинения „Начальные основания теории детерминантов“ пражского профессора Ф. Студнички (1836—1903). Это было первое на русском языке изложение данной теории, выпущенное отдельной книжкой. Отметим, что деятельность Студнички, неутомимого патриота („будителя“) чешской математической науки, получила после его смерти теплую оценку из уст русского историка математики В. В. Бобынина (1849—1919), посвятившего чешскому математику довольно подробную заметку в Энциклопедическом словаре Брокгауза-Ефрона[1].

Значительным событием в ходе чешско-русского сближения в области математики явился приезд в 1871 г. в Прагу видного члена Московского математического общества Н. В. Бугаева (1837—1903). Русский гость установил прочный контакт между московским и чешским математическими обществами, договорился об обмене изданиями, ознакомил чешских коллег с математической жизнью России. Среди полученных таким образом чешским обществом московских изданий был и том „Математического сборника“, в котором имелись материалы, относящиеся к геометрии Лобачевского,—эти материалы должны были обратить внимание чешских математиков на начавшую получать мировое признание геометрическую систему Лобачевского-Гаусса-Бойаи. Признанием заслуг Бугаева как ученого и как ревнителя русско-чешского сотрудничества в области математики явилось избрание его действительным членом Чешского Королевского ученого общества. В позднейших работах Бугаева по теории чисел встречаются непосредственные точки соприкосновения с проблемами, которые разрабатывал чешский ученый М. Лерх (1860—1932). В свою очередь в творчестве Лерха отразилась проблематика, выдвинутая русскими математиками Е. И. Золотаревым (1847—1878), В. П. Ермаковым (1845—1923) и др.

В конце 70-х годов чешский математик В. Шимерка (1819—1887) заинтересовался опубликованными в русской печати (без доказательства) результатами любителя-математика И. М. Первушина (1827—1900) относительно непростоты двух чисел Ферма и напечатал в журнале чешского общества свои доказательства этих результатов.

В середине 80-х годов новый канал связи с русской наукой открыли чешские геометры братья И. С. Ванечек (1848—1922) и М. Н. Ванечек (1839—1922). Три свои работы—из области высшей геометрии—

[1] II. Дополнительный том. Петербург, 1907.

они представили в Петербургскую Академию наук, которая, одобрив эти сочинения, опубликовала их в своих органах.

С возникновением в России вслед за Москвой математических обществ и в других университетских центрах Чешское математическое общество завязывает сношения и с этими организациями.

Связи между Харьковским и Чешским обществами установились в 80-ые годы по инициативе геометров—Эмиля и Эдуарда Вейров с чешской стороны и К. А. Андреева (1848—1921)—с русской. Особой побудительной причиной явилась при этом общность научных интресов Эм. Вейра (1848—1894) и Андреева, которые были сосредоточены в области проективной геометрии и специально—в вопросе построения синтетической теории кривых третьего порядка. Разработку этой проблемы чешский ученый начал раньше, чем его русский коллега, и последний мог „отталкиваться" от результатов Вейра при построении собственной теории, в которой применил более общий метод (распространенный им и на определенный класс кривых четвертого порядка), выдержанный, вдобавок, в чисто геометрическом духе[1].

В 1891 г. Эм. Вейр был избран членом-корреспондентом Харьковского математического общества.

Отметим, что, связи, зародившиеся между Харьковским и Пражским обществами в области геометрии, позже (в 90-е годы) захватили и область математического анализа, творческие контакты в которой (а именно по линии теории рядов) наметились между М. Лерхом и профессором Харьковского университета М. А. Тихомандрицким (1844—1921).

Связи Праги с Казанью особенно оживились в 1893 г., когда Казанский университет торжественно праздновал столетие со дня рождения Н. И. Лобачевского. Общество чешских математиков, редактор журнала этого общества А. Панек и профессор Чешского политехнического училища в Праге Эд. Вейр (1852—1903) направили организаторам празднования теплые приветствия, в которых выражали чувства своего восхищения перед заслугами великого русского математика и высказали уверенность, что память его „удается почтить прочным и надлежащим образом". Эд. Вейр, стремясь возможно полнее ознакомить широкие круги чешского общества со значением геометрических открытий Лобачевского, опубликовал в 1785 г. свой (сокращенный) перевод отчета Казанского университета о праздновании юбилея, а затем поместил в Энциклопедическом словаре Отто ста-

[1] Такая сравнительная оценка результатов обоих ученых установилась в русской литературе на основании отзыва о трудах Андреева, данном академиками О. Баклундом, В. Имшенецким и В. Буняковским, при выдвижении в 1884 г. кандидатуры Андреева в члены-корреспонденты Петербургской Академии наук. В 1959 г. советский геометр А. А. Глаголев, пересмотрев этот вопрос, склонился к признанию преимущества за методом Вейра—как более простым в конструктивном отношении и поэтому позволившим чешскому ученому получить более богатые результаты.

тью, достойно характеризующую личность и научную деятельность русского ученого.

Нужно отметить, однако, что, высоко оценивая значение неевклидовой геометрии, чешские математики еще долго (ср. ниже) не приступали к собственным изысканиям в этой области—сказывалась, видимо, их специализация на проективно-геометрической проблематике, в разработке которой они достигли серьезных успехов,—тем самым заложив собственную плодотворную научную школу.

В первое десятилетие XX века популяризацией в Чехии идей неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана занимался В. И. Гаунер (1877—1941), который, по сведениям чехословацкого историка математики В. Фолты[1], еще в 1900 г. представил проф. Ф. Студничке свою диссертацию—„Неевклидова геометрия Н. И. Лобачевского".

Инициатором, среди чешских ученых, творческой разработки приложений геометрии Лобачевского (к вопросам современной физики) явился астроном А. Диттрих (1878—1959). В 1911 г. он напечатал в журнале Общества чешских математиков и физиков свою работу об уравнениях Максвелла в пространстве Лобачевского, а в следующем году, там же, работу об отношении неевклидовой геометрии ко второму закону Кеплера и к теории относительности. В 1913 г. ученый опубликовал в немецком журнале Annalen der Natur und Kulturphilosophie обобщающую работу „Картина мира в пространстве Лобачевского".

Отмечая вклад Одессы в развитие русско-чешского математического общения, нужно, кроме приведенного выше факта, относящегося к учебнику Яролимека, указать на выпуск в 1911 г. издательством Mathesis (патронируемым Математическим отделением Одесского Общества естествоиспытателей) русского перевода „Парадоксов бесконечного" Б. Больцано. Перевод был выполнен профессором Одесского университета И. В. Слешинским (1854—1931) и снабжен им заметкой о личности и математических трудах чешского автора. Устами харьковского ученого С. Н. Бернштейна, напечатавшего рецензию на эту публикацию, русская математическая общественность с большой симпатией приветствовала выход этой книги. (Рецензент писал, что сочинение Больцано „до сих пор не утратило своего значения и знакомство с ним одинаково необходимо как для математика, размышляющего над основаниями своей науки, так и для философа, изучающего основные вопросы теории познания"). Издание перевода „Парадоксов", отразившее доминировавшую тогда в научных интересах одесских математиков логико-математическую направленность,

---

[1] См. его статью Zaklady matematiky v pracích českych matematiků 19 st.— Sborník pro dejiny přirodnich věd a techniky, sv. XI, 1967.

оказало в свое время немаловажную услугу всей русской математической науке на путях ее приобщения к теоретико-множественным концепциям[1].

Нужно добавить, что в те же годы основательным изучением Больцано как философа занимался грузинский ученый Ш. И. Нуцубидзе. В 1913 г. в московском журнале „Вопросы философии и психологии" была опубликована его большая работа „Больцано и теория науки"; в ней попутно были отмечены также некоторые математические достижения чешского мыслителя.

В 1892 г. передовой педагогической общественностью России, в том числе учителями-математиками, широко отмечалось 300-летие со дня рождения великого чешского педагога Я. А. Коменского. Известный русский педагог-математик М. Попруженко выступал с рефератом о жизни и деятельности Коменского, отметив актуальность идей последнего и для современной школы. Повысившийся в связи с этим среди русского учительства интерес к состоянию школьного дела в чехословацких землях привел позднее, в частности, к организации (по инициативе работавших на Кавказе педагогов чешского происхождения, особенно филолога Я. Сватоша[2]) при Педагогическом музее в Тбилиси выставки чешской учебной литературы, на которой были широко представлены издания Общества чешских математиков.

IV

Обратимся к последнему периоду нашего обзора. В этот период— особенно в последнее пятилетие—наблюдается значительное оживление во взаимоотношениях ученых обеих стран в области математики. Это объясняется тем, что стремительный рост удельного веса советской математики в мировой науке и выход в ряде направлений на передние рубежи последней также чехословацкой математической мысли сделали такие творческие контакты особенно необходимыми и продуктивными.

Можно отметить три большие области, в которых чехословацко-советское математическое общение принесло в эти годы ценные плоды. Эти области—теория вероятностей (с ее приложениями), топология, геометрия (преимущественно—дифференциальная). Остановимся на каждой из них отдельно.

В начале 1920-х гг. крупный советский специалист в области теории вероятностей С. Н. Бернштейн начал свои интересные исследования по приложениям математики к биологии. Отправным пунктом ему послужили при этом законы наследования, экспериментально установленные

---

[1] Впрочем, еще ранее, в 1907 г., заслуг Больцано в вопросах логического обоснования математики коснулся в своей монографии „Основания геометрии. Исторический очерк..." другой одесский математик—В. Ф. Каган.

[2] О нем см. работу И. Чкуасели—Чешский педагог Я. Сватош в Грузии (на грузинском языке), Тбилиси, 1962.

чешским биологам Гр. Менделем (1822—1884). Бернштейн обобщил и средствами теории вероятностей обосновал законы Менделя; вместе с тем, он внес существенные коррективы в вопрос о взаимоотношении закона наследственной регрессии Гальтона с теорией Менделя, показав (вопреки распространенному тогда среди биологов мнению), что закон Гальтона не находится в противоречии с элементарными законами наследственности Менделя, а является их математическим следствием для того случая, когда речь идет о сложных признаках, размеры которых зависят от значительного числа независимых элементов. Работы Бернштейна, опубликованные в советской и французской печати, способствовали признанию мировой наукой важного значения идей чешского биолога.

С другой стороны, с конца 1920-х годов большую роль в том, что исследования по теории вероятностей пошли в мировой науке по новому плодотворному руслу, сыграл брненский математик и физик Б. Гостинский (1834—1951). Этот ученый убедительно раскрыл первостепенное значение методов русского математика А. А. Маркова (1856—1922)—так называемой схемы марковских цепей случайных величин—для разработки актуальных проблем теории вероятностей, связанных с запросами современного естествознания (в частности—статистической физики). В курсах лекций, прочитанных им во Франции и Швейцарии, в своих оригинальных работах и монографии, вышедшей в известной французской серии Mémorial des sciences mathématiques, он пропагандировал достижения Маркова и всей русской теоретико-вероятностной школы (кончая новейшими работами советских ученых) и привлек к ним внимание западноевропейских специалистов.

Последовавшая взаимосвязанная работа в указанном направлении многих советских, чехословацких (сам Гостинский и его ученики) и других математиков вписала большую главу в современное развитие теории вероятностей и математической статистики. Непосредственные контакты Гостинского с рядом советских математиков—С. Н. Бернштейном, В. И. Романовским (1879—1954), К. Я. Хинчиным (1897—1959), А. Н. Колмогоровым и др. много способствовали его успешной деятельности в указанной области[1]. Должное признание заслуг Гостинского советской математической общественностью прозвучало уже на II всесоюзном математическом съезде (1934) из уст А. Н. Колмогорова (в его обзорном докладе „О некоторых современных течениях в теории вероятностей").

Не менее яркие результаты принесли советско-чехословацкие связи в области топологии. Главным действующим лицом в данном случае был родоначальник и глава чехословацкой топологической школы Эд. Чех

---

[1] Подробнее см. в статье I. Beránek—O přiopěvku československých a sovětských matematiků v rovoji theorie Markovových řetězů. (Сборник „Пражский университет—Московскому", Прага).

(1890—1960). Мировую известность этому ученому доставили его выдающиеся работы по общей и алгебраической топологии, которой он занимался с начала 30-х годов. К ряду важных открытий на этом пути Чех пришел в процессе изучения и дальнейшей разработки проблематики, открытой трудами виднейших представителей московской топологической школы — П. С. Александрова, П. С. Урысона (1898—1924), А. Н. Тихонова, А. Н. Колмогорова.

Личные контакты с советскими коллегами установились у Чеха еще с 1935 г., когда он участвовал в проходившей в Москве Международной топологической конференции. „Советские мотивы" мы находим и в работах учеников Чеха, в частности - в работах Б. Поспишила (1912—1944). Высокую оценку заслугам Чеха как одного их ведущих мировых топологов вынес глава советской топологической школы П. С. Александров в своем коммеморативном выступлении на Пражском международном топологическом симпозуме 1961 г.

В области дифференциальной геометрии советско-чехословацкое общение в этот период проходило по трем проблемным линиям.

По линии проективной дифференциальной геометрии нужно отметить роль в этом отношении профессора Московского университета—главы „классического" направления советской дифференциально-геометрической школы— С. П. Финикова (1883—1964). Последний в докладе о современном состоянии дифференциальной геометрии, сделанном на Всероссийском математическом съезде 1927 г., познакомил советских математиков, между прочим, с совместными работами в этой области итальянского геометра Фубини и чехословацкого — Эд. Чеха, оценив их как „открывшие новую эпоху" в развитии этой математической теории. Идя в последующие годы собственным путем в разработке проективно-дифференциальной геометрии, советский математик, однако, опирался и на тщательно изученные им труды Чеха. В монографии „Проективно-дифференциальная геометрия" (1937 г.) Фиников констатировал, что, благодаря, главным образом, Фубини и Чеху, проективно-дифференциальная геометрия превратилась „в одно из самых популярных направлений в геометрии наших дней". (При этом Фиников особо отметил ту существенную роль, которая принадлежала чешскому партнеру в творческом союзе двух названных математиков).

Вторая линия чехословацко-советского научного общения в рассматриваемой области связана с многомерной тензорной дифференциальной геометрией, интенсивно разрабатывавшейся в 30-ые (и последующие) годы в специальном московском семинаре, руководимом В. Ф. Каганом (1869—1953). С 1933 г. в этом семинаре активно работал чехословацкий геометр В. Главаты.

В. Главаты принимал участие в организованной семинаром в 1934 г. первой международной конференции по дифференциальной геометрии, на которой доложил свою работу о пространствах Кенига. Хороший знаток советских работ по дифференциальной геометрии, Главаты реферировал некоторые из них в Zentralblatt f. Mathematik. Он же поддерживал связи с казанским геометрическим центром и, по поручению последнего, рецензировал представленные на VIII международный конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского (1937 г.) работы по общей теории поля, выполненные известными голландскими математиками Скоутеном и Ван Дантцигом.

Третью линию, по которой происходило общение геометров двух стран, составляла проблематика неголономной геометрии (с примыкающими сюда вопросами теории дифференциальных уравнений и механики). В СССР эта проблематика успешно разрабатывалась харьковской геометрической школой Д. М. Синцова (1867–1946), а затем—саратовским математиком В. В. Вагнером и другими учеными; активно интересовались этими вопросами и чехословацкие геометры. За работами Синцова регулярно следил чехословацкий математик О. Борувка, реферировавший их в Zentralblatt; в свою очередь Д. М. Синцов реферировал работы чехословацких авторов. Необходимо отметить, что исследования Вагнера, в которых неголономная геометрия получила новое далеко идущее развитие, имели одним из своих истоков работы (1926 г.) брненского геометра М. Горака.

В заключение, говоря о связях в области геометрии, упомянем еще, что в 1926 г. В. Главатым был издан первый на чешском языке учебник неевклидовой геометрии[1].

Советско-чехословацкие математические связи в 30-ые годы начали распространяться и на область алгебры и, прежде всего, теории групп. Одним из главных очагов развития последней стал в эти годы основанный О. Ю. Шмидтом (1891—1956) при Московском университете специальный семинар, в котором воспитывались такие первоклассные советские алгебраисты, как А. Г. Курош, А. И. Мальцев (1909–1967) и др. Правильно оценив значение и перспективы московского алгебраического семинара, чехословацкий математик Вл. Коржинек в 1935 г. добился научной командировки для занятий в этом семинаре. Знакомство с достижениями советской алгебраической мысли способствовало актуализации научных интересов чехословацкого ученого, вскоре сформировавшегося в видного специалиста по новейшей алгебре. Возвратясь на родину, В. Коржинек широко информировал чехословацкую общественность об успехах советской науки.

Отметим еще один плодотворный результат советско-чехословацких контактов этих лет. В Ленинграде проф. Соучеком была обнаружена

---

[1] В 1920—1930-е годы появляются и оригинальные работы чехословацких авторов по отдельным вопросам неевклидовой геометрии (включая многомерную геометрию пространств постоянной кривизны) (V. Hlavaty, O. Borůvka, W. Fröhlich, G. Kowalewski). A. Martinek опубликовал в 1936 г. статью о противниках неевклидовой геометрии.

рукопись математического содержания, относящаяся к XVII в. Изучивший ее (1933 г.) чехословацкий математик К. Чупр установил принадлежность ее Я. А. Коменскому. Находка этой рукописи, оказавшейся учебником геометрии с приложениями к геодезии, расширила наши представления о математических интересах великого чешского педагога.

И в этот период среди математиков СССР имелись выходцы из чешских земель (или ближайшие потомки таковых). Остановимся на деятельности трех таких математиков.

В. Ф. Бржечка (1891—1954) происходил из семьи чехов-ремесленников, переселившейся на Украину. Воспитанник Харьковского университета, он с 1923 г. был профессором математики в Харьковском технологическом институте. Как ученый, Бржечка принадлежал к школе конструктивной теории функций, возглавлявшейся С. Н. Бернштейном. В 1923 г. Бржечка был в научной командировке в Чехословакии. Темой его последней научной работы был анализ построенного Больцано примера недифференцируемой непрерывной функции.

Я. И. Грдина (1871—1931) уроженец Пльзеня, ребенком переселившийся с родителями в Россию, где его отец получил место музыканта в оркестре. Окончив в 1894 г. Петербургский технологический институт, первое время работал инженером, затем преподавателем в техническом училище. В 1901 г. защитил в Петербурге диссертацию (об устойчивости движения машины, управляемой центробежным регулятором) и был назначен в г. Екатеринослав (ныне Днепропетровск) профессором прикладной механики в высшем горном училище. В советский период Грдина совмещал эту профессуру с заведованием научно-исследовательской кафедрой механики (в составе ее работал ряд видных ученых, в том числе — академик А. К. Динник) и с профессурой по теоретической механике в педагогическом институте. Научные работы Грдины относились к следующим областям: к вопросам устойчивости движения механизма, к основным принципам классической механики, к математической теории ошибок измерений и, особенно, — к динамике живых организмов. Последние работы, опубликованные в 1911—1916 гг., позволяют считать Грдину в какой-то степени одним из предтеч создателей современной нам кибернетики. Грдина воспитал ряд советских механиков (в том числе специалистов по автоматизации), которые до сих пор тепло вспоминают своего учителя [1]. (Следует указать, что в 1912 г. Грдина опубликовал работу, в которой подверг критике экспериментальные подтверждения теории относительности Эйнштейна, утверждая их недостаточную убедительность с точки зрения теории ошибок измерений).

---

[1] Некоторыми сведениями о Грдине мы обязаны профессору Харьковского института радиоэлектроники Е. Я. Иванченко — бывшему аспиранту Грдины. (См. также статью I. Joch — Wienerův předchůdce českeho původu в журнале Svět techniky, 1864, № 1) Среди аспирантов Грдины был и чехословак — инж. Даничек.

Эрнест (Арношт) Кольман—уроженец (1892) г. Праги, окончивший в 1913 г. Карлов университет, после Октябрьской революции переехал в Москву, где работал в Коммунистической Академии и стал одним из известных советских ученых в области философии математики (с 1934 г.—доктор философских наук, с 1939 г.—профессор). Известен также как автор работ по истории математики—в том числе монографии о А. Больцано, которые, однако, равно как и его последующая работа в Академии наук ЧССР, членом которой он был избран, выходят за хронологические рамки нашего обзора.

В общей картине „математического обмена“ между Россией и Чехословакией нужно отметить переезд в Чехословакию в 1822 г. одесского математика Е. Л. Буницкого (1874—1952), получившего затем профессуру в Карловом университете. Научная работа Буницкого в Чехословакии, протекавшая, главным образом, в областях математического анализа и теории чисел, была довольно скромной по результатам. На протяжении 20-х годов Буницкий сохранял связи с математиками Одессы и некоторые свои работы продолжал публиковать в одесских журналах.

Обозревая ретроспективно советско-чехословацкие математические связи в период 1917—1939 гг., мы видим, что значительная интенсификация их произошла начиная с 1934 г.—года установления дипломатических отношений между двумя странами (годом позже между ними был заключен и договор о взаимной помощи).

Однако эта фаза (1934—1939 гг.) сравнительно усиленного сближения чехословацких и советских математиков была слишком кратковременной для того, чтобы каждая из сторон успела взять от другой все, что та могла бы дать. В качестве примера в то время упущенной чехословацкими учеными возможности укажем на богатые достижения советской прикладной математики, хотя бы на математические методы Н. И. Мусхелишвили в теории упругости, осваивать которые чехословацким специалистам пришлось уже после 2-ой мировой войны [1].

Многообещающее развитие советско-чехословацкого математического общения было прервано в годы оккупации Чехословакии гитлеровской Германией. После возрождения чехословацкого государства и последовавших в нем социалистических преобразований это общение не просто возобновилось, а и приобрело новый характер—характер разностороннего

---

[1] Отставание буржуазной Чехословакии в области прикладной математики чехословацкие авторы объясняют, главным образом, тем, что чехословацкая промышленность, тесно связанная тогда с зарубежным капиталом, была вынуждена работать на иностранных лицензиях и поэтому не была существенно заинтересована в развитии прикладной математики в самой Чехословакии. (См. статью Rozvoj matematické aplikací..., журнал „Aplikace matematiky“, 1960, № 3). Популярность методов Н. И. Мусхелишвили среди современных нам чехословацких специалистов отмечает акад. И. Н. Векуа (см. его работу: „Академик Николай Иванович Мусхелишвили“.—Новосибирск, 1961).

планомерного сотрудничества, значение которого для прогресса математической культуры в каждой из стран трудно переоценить. Необходимые исторические предпосылки для быстрого осуществления этого сотрудничества были созданы всей предшествовавшей традицией, попытку проследить которую мы и предприняли в этом очерке.

Харьковский педагогический
институт

(Поступило в редакцию 27. XI. 1967)

ი. ჰაიდუკი, ი. ნაუმოვი

ჩეხოსლოვაკიისა და სსრკ მათემატიკურ კულტურათა კავშირის ისტორიული წარსული

რეზიუმე

შრომაში განხილულია მათემატიკური კავშირის განვითარება როგორც მეცნიერების, ისე სახალხო განათლების დარგში ჩეხური და სლოვაკური მიწებისა, ერთის მხრივ, ხოლო რუსეთის—სსრკ,—მეორეს მხრივ, დაწყებული XVIII საუკუნიდან და დამთავრებული მიმდინარე საუკუნის ოცდაათიანი წლებით. ავტორების მიერ გამოყოფილია განვითარების პროცესის ოთხი პერიოდი:

1)—XVIII საუკუნე; 2)—XIX საუკუნის პირველი ნახევარი,.3)—XIX საუკუნის მეორე ნახევარი პირველ მსოფლიო ომამდე, 4)—დიდი ოქტომბრის სოციალისტური რევოლუციიდან და ჩეხოსლოვაკიის რესპუბლიკის დაარსებიდან (1918 წ.) ჰიტლერული გერმანიის მიერ ამ უკანასკნელის ოკუპაციამდე (1939 წ.). გამოქვეყნებულ წყაროებთან ერთად ავტორებს გამოყენებული აქვთ აგრეთვე საარქივო მასალებიც.

სტატიაში სისტემაშია მოყვანილი და ახალი ფაქტებით გამდიდრებულია საბჭოთა და ჩეხოსლოვაკური ავტორების რიგ შრომებში გაფანტული ცნობები.

განსაკუთრებული ყურადღება ეპყრობა მეოთხე პერიოდს. ორი ქვეყნის მათემატიკოსთა შორის მეცნიერულმა ურთიერთობამ მოგვცა მეტად ნაყოფიერი შედეგები ისეთ დარგებში, როგორიც არის ალბათობის თეორია, ტოპოლოგია, დიფერენციალური და პროექციული გეომეტრია და სხვა. ამგვარად, შეიქმნა სსრკ და ჩეხოსლოვაკიის მათემატიკოსთა შორის გეგმაზომიერი თანამშრომლობის აუცილებელი ისტორიული წანამძღვრები.

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, ტ. 129, 1968
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, т. 129, 1968

Л. П. ГОКИЕЛИ

О СООТНОШЕНИИ МАТЕМАТИКИ И ФИЛОСОФИИ

Вопрос о соотношении философии и специальных наук, всегда привлекавший внимание ученых и философов, получает особую актуальность в условиях современной действительности. Одним из частных и важных проявлений этого вопроса является проблема соотношения математики и философии. Особые условия, о которых речь будет идти в дальнейшем, придают специфическую остроту этому вопросу.

Довольно распространенным является мнение о том, что математика не нуждается в философии, что она является своей собственной философией. Однако сама эта точка зрения отрыва математики от философии навязывается математике в качестве особой философии и сама же в негативном плане демонстрирует неустранимость настоящей философии для математики и негодность для нее философии отрыва математики от философии.

Отрицание для математики значения философии, охватываемое точкой зрения отрыва друг от друга общих установок от их конкретных проявлений, своим собственным фактом, своим весьма скудным, но все-таки философским содержанием поневоле выявляет неустранимость философии для математики. «Какую бы позу ни принимали естествоиспытатели, — говорит Ф. Энгельс, — над ними властвует философия. Вопрос лишь в том, желают ли они, чтобы над ними властвовала какая-нибудь скверная модная философия или они желают руководствоваться такой формой теоретического мышления, которая основывается на знакомстве с историей мышления и ее достижениями»[1].

Для математики, прежде всего, необходимо использование философских категорий: предмета, существования, тождества, различия, порядка, количества, бесконечности, множества и т. д. Тот, кто отрицает значение философских категорий для математики, уже использует одну такую категорию, именно категорию отрицания.

Философские категории в математике применяются в своем общефилософском, а не в специальном, математическом, «конкретизированном» смысле. Общее указание на «конкретность» вовсе не выражает действительной конкретности. К математическим использованиям философских категорий нельзя задним числом примыслить «математичность» и иметь в виду уже не их применение, как таковых, а заранее получивших математическую окраску. Нельзя считать, что использование философских категорий в математике представляет их замену ма-

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы, 1950. стр. 165.

тематическими эквивалентами. Ведь в данном случае стоит вопрос о частном проявлении общего смысла философских категорий. Когда философские категории в математике пытаются заменить их математическими эквивалентами, то встает вопрос о том, может ли акт замены заменить учет тождественного смысла соответствующих понятий.

Вопрос о взаимоотношении философии и специальных наук сам является философским вопросом и от его правильного решения в значительной степени зависит не только правильное уразумение как философии, так и специальных наук, но и правильный курс их развития.

В данном случае важно учесть два обстоятельства. С одной стороны, философия является общей наукой, она изучает общие закономерности действительности и познания, но, с другой стороны, она является определенной наукой, наряду с другими науками, а не наукой над наукой. Философия вовсе не вмешивается во внутреннюю сферу специальных наук, вовсе не опекает их и не является контролирующей инстанцией в отношении них. Она не перекрывает, хотя бы частично, специальные науки и не дублирует их. Наличие философии не нарушает самостоятельности и свободы специальных наук. Если философию трактовать как науку наук, то получится, что она проверяет результаты специальных наук, обобщает эти результаты и в таком виде дает им окончательную визу. Однако такая трактовка является несостоятельной.

Та или иная специальная наука дает свои результаты в окончательном виде, доводит эти результаты до нужного обобщения и не нуждается в их особом подтверждении со стороны какой бы то ни было другой науки. Распространено мнение, что философия занимается обобщением результатов специальных наук. Если эти результаты нуждаются в обобщении, то это должна будет сделать соответствующая наука. При рассмотренном выше подходе получится, что специальная наука с фатальной необходимостью должна доводить свои результаты лишь до полдороги, производить лишь полуфабрикаты, с тем, чтобы их окончательную доработку передоверить философии.

Специальная наука не обязана непременно остановиться прежде чем дойти до цели и последнее слово предоставить философии. Ошибочно считать, что философия доканчивает то, что начато специальной наукой, но уже на высшем уровне (почему специальная наука непременно должна снижать уровень, чтобы предоставить философии возможность поднять его?), она вовсе не занимает командный пост в отношении специальных наук. Философия имеет свои цели и задачи, отличные от задач специальных наук.

Если философия не является наукой наук, а представляет лишь определенную науку, хотя и имеющую некоторое универсальное значение, то этим не только не снижается ее значение, как науки, но наоборот, фигурирование некоторой науки, как возвышающейся вообще над науками, как науки наук, представляет недооценку самой науки. Как будто наука, как таковая, недостаточна, и она еще нуждается в фигурировании науки над собой. Ведь наука наук все-таки представляла бы определенную науку, и, если наука, как таковая, недостаточна и требует науки наук, то это же потребуется для самой науки наук, т. е. над ней опять должна возвышаться другая наука и т. д. На давно уже преодоленном этапе развития сама наука в отношении ряда своих же важнейших понятий не в силах была дать их содержательную характеристику и это попыталась сделать в спекулятивной форме философия, которая тогда выступала в роли «науки наук». «Дать такого рода общую картину природы было прежде задачей так называемой натурфилософии, которая могла это делать только таким образом, что заменяла неизвестные еще ей действительные связи явлений фантастическими связями и заменяла недостающие факты вымыслами, пополняя действительные пробелы лишь в воображении». «Теперь, же, когда нам достаточно взглянуть на результаты изучения природы диалектически, т. е. с точки зрения их собственной связи, чтобы составить удовлетворительную для нашего времени «систему природы» и когда сознание диалектического характера этой связи проникает даже в метафизические головы естествоиспытателей, вопреки их воле, — теперь натурфилософии пришел конец. Всякая попытка воскресить ее не только была бы излишней, а была бы шагом назад»[1].

Фигурирование философии, как науки наук, выражало не ее истинную природу, а было временным явлением, связанным с недостаточной развитостью специальных наук, что вызвало несвойственную для философии, по своей ее природе, роль вмешиваться во внутреннюю область специальных наук и некоторым образом дублировать их.

Если в связи с развитием науки философия лишилась этой роли, то это еще не означает сужения области философии, так как соответствующая проблематика, по своей природе и не принадлежала философии и была ей лишь незаконно навязана. Философия не сузила свои рамки, а была поставлена в свои естественные пределы. Дело касается не того, что области, занимаемые философией, были в дальнейшем завоеваны специальными науками, а того, что эти области и не принадлежали философии и были ею незаконно заняты. Если философия вступила в свои естественные рамки, то этим меньше всего может быть подвергнута сомнению компетенция философии в этих рамках.

Вопросы, действительно принадлежащие философии, например, вопросы относительно философских категорий, могут быть решены лишь ею и они не включаются в сферу специальных наук. Если в прошлом имело место незаконное расширение рамок философии за счет областей, принадлежащих специальным наукам, то исправление этого вовсе не требует другой крайности — искусственного сужения рамок философии за счет незаконного расширения рамок специальных наук. Обе крайности были бы отмечены общими недостатками.

В истории математики также имели место периоды, когда философия пыталась вмешиваться в разрешение вопросов, входящих в действительности в компетенцию математики. В этом отношении следует особо отметить «метафизику исчисления бесконечно-малых». Дело в том, что исчисление бесконечно-малых, несмотря на свою исключительную плодотворность, в продолжение долгого времени выглядело логически довольно сомнительно и не имело сколько-нибудь солидного обоснования. Само понятие бесконечно-малого представлялось некоторым образом фиктивным, поскольку казалось, что в нем соединены несовместимые требования: быть неравным нулю, и, вместе с тем, меньшим всякой отличной от нуля величины. Мистический характер бесконечно малой величины удачно выражен Беркли в его характеристике бесконечно-малой величины, как духа исчезнувшей величины. Даже тогда, когда исчисление бесконечно-малых старались базировать на теории

---

[1] Ф. Энгельс. Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии. К. Маркс и Ф. Энгельс. Избранные произведения, т. II, 1949, стр. 370.

пределов, в продолжение долгого времени, поскольку не была откры-та глубокая органическая связь между переменной и пределом, характером переменной и существованием предела, результаты исчисления бесконечно-малых представлялись лишь как приближенные и лишенные логической строгости. Считалось, что бесконечно-малая величина несет в себе определенную, математически неразрешимую тайну и эту тайну может раскрыть лишь философия. Поэтому обоснование исчисления бесконечно-малых было передоверено особой области, фигурирующей в виде «метафизики исчисления бесконечно-малых». Лишь в начале XIX века, в связи с результатами Коши, а также Больцано, открывшими глубокую связь между переменной и пределом, стало возможным обоснование исчисления бесконечно-малых внутри самой математики и освобождение философии от задач этого обоснования. В связи со сказанным интересно учесть гегелевскую точку зрения относительно проблематики обоснования математики.

Для Гегеля вопросы обоснования математики связаны с перенесением исследования в сферу философии. Содержание своих же понятий и их диалектическое развитие математики, по Гегелю, должны узнать у философии. Выходит, что существуют две математики: одна — отчужденная от философии и лишенная возможности самой же осмыслить содержание своих понятий, и другая — растворенная в философии. Мы видим, что точка зрения отрыва математики от философии смыкается с их приравнением друг к другу. В проблематике обоснования математики, охватываемой в действительности сферой математического исследования, проявляется связь философии с математикой. Но это есть связь именно с настоящей математикой, а не с предварительно философированной. Связь философии с математикой не означает их смешения, вмешательства философии в дела самой математики, особой опеки математики со стороны философии. Если скажут, что философия связана не с самой математикой, а с проблематикой обоснования математики, то на это ответим, что в значении философии для проблематики обоснования математики проявляется именно роль философии для самой математики, а не опять для той же проблематики обоснования математики.

Маркс, в противоположность точке зрения Гегеля, считает, что дело обоснования математики, в частности исчисления бесконечно-малых, является внутренним делом самой математики. В своих математических рукописях он подчеркивает, что соответствующие обстоятельства, касающиеся исчисления бесконечно-малых, должны быть результатом математического вывода, а не предметом метафизических разъяснений, как это имело место в «метафизике исчисления бесконечно-малых».

Для решения вопроса о соотношении философии и специальных наук весьма важно такое решение этого вопроса, который В. И. Ленин иллюстрирует на примере физики.

В современной физике с особой силой выявляется относительный характер таких свойств, которые раньше казались неотъемлемыми свойствами вообще материи; эти свойства оказались присущими лишь некоторым видам материи. «Физический идеализм» же в новых результатах физики усмотрел показателя «исчезновения материи».

В. И. Ленин указал на логическую ошибку, в которую впадает физический идеализм. К новым результатам физики он тем не менее примышляет старое представление о материи, а затем сами эти новые результаты расценивает как свидетельствующие против существования материи.

Включение в общее философское понятие материи того или иного физического признака представляло бы смешение общего — материи с ее различными видами.

Ссылка на тот или иной физический признак — это не дальнейшее «уточнение» общего понятия материи, а фиксация определенного вида в рамках этого общего понятия.

Нельзя говорить о такой совокупности физических признаков, которая могла бы заменить общее философское понятие материи. Здесь дело не в том, что пока у нас нет необходимой для этого полной совокупности признаков, а в определенном принципиальном обстоятельстве, в необходимости различать общее понятие материи, являющееся философской категорией, и физические виды материи; точки зрения как их отождествления, так и их отрыва друг от друга являются в действительности родственными .

Не требуется особая промежуточная инстанция между философским понятием материи и видами материи в виде физически «конкретизированного» понятия материи. Такое, в общем плане конкретизированное общее, из-за своего общего характера опять потребует новой промежуточной инстанции и т. д. Указанная промежуточная инстанция будет в действительности играть не объединяющую, а разъединяющую роль. В физике используется общее философское понятие материи и она не нуждается в специальном «общем», но «физическом» понятии материи, которое было бы заменителем применительно к физике общего философского понятия материи и выполняло бы в этом плане его роль.

Мы видим, что общая философская категория материи выражает лишь объективную реальность , существующую вне нашего сознания, и вовсе не ограничивает и не связывает физику в отношении характеристики различных физических видов материи. Наоборот, она именно обеспечивает полную свободу физики в деле формирования различных обобщенных физических характеристик материи. Вместе с тем, учет философского понятия материи обеспечивает правильный философский курс физики, в частности, предохраняет ее от идеалистических искажений в отношении ее предмета, которые могут повредить ее нормальному развитию. Физика освобождается от мелочной опеки со стороны философии, сохраняя при этом органическую связь с философией. Философия именно связана с физикой, а не продолжает дело той же физики, «обобщая» полученные ею результаты.

Подобно рассмотренному выше различению между общим философским понятием материи и ее физическими видами, надо различать общее философское понятие количества, в виде определений философской категории, и различные виды количества. Категория количества противопоставляется категории качества, и, в отличие от последней, служит выражению внешней определенности вещей. Виды количества определяются вообще с помощью некоторых математических признаков, между тем как общее понятие количества получает лишь общую философскую характеристику и не требует включения в эту характеристику какого-либо математического признака. Предмет математики определяется категорией количества, и математика не выходит за рамки количества.

Иллюзия такого выхода в историческом развитии математики создается вследствие того, что к общему понятию количества примышляют те виды количества, которые были раньше известны, вследствие чего во вновь открытых видах усматривают вообще выход за рамки понятия количества. Хотя предмет математики определяется философской категорией количества, однако, математика представляет специальную, а не философскую науку. Категория количества в математике фигурирует не как одна из категорий в системе философских категорий, сопоставимая и сравниваемая с другими философскими категориями, а как поле для рассмотрения различных видов количества. Одним из характерных проявлений категории количества в математике является понятие функции.

Функциональная зависимость выражает не какую-либо внутреннюю, причинную и т. п. связь вещей, а лишь их некоторую внешнюю рядоположенность: одной вещи соответствует некоторая другая вещь, причем между этими вещами может отсутствовать какое-либо внутреннее родство.

В вопросе развития математики виды количества получили значительное обобщение. Одним из проявлений этого развития является широкое распространение в современной математике различных аксиоматических теорий. Аксиоматическая схема может быть рассмотрена как функция в отношении ее моделей.

Эта схема является безразличной в отношении содержания моделей, их конкретного материала. В этом функциональном характере аксиоматических схем проявляется их причастность к категории количества, их принадлежность области предмета математики. Аксиоматические схемы, какой бы широкий характер они не имели, не выходят за рамки этого предмета.

Отношение схемы и модели является не отношением общего и отдельного, а внешним, функциональным отношением. Поэтому общность математических схем является лишь внешней количественной общностью. Математике нельзя приписать универсальность в смысле выражения настоящей общности, глубоких общих закономерностей действительности. Если математике приписать универсальность, то эта универсальность фигурировала бы в плане науки наук. Если математические схемы имеют универсальный характер, то этот характер они имеют как безразличные к своим реализациям, как допускающие в своей универсальности приравнение друг к другу различных реализаций. Поэтому эти общие математические схемы рассматривались бы на уровне науки наук в сравнении с науками, снабжающих материалом для их частных интерпретаций и моделей.

Действительно универсальная наука — философия, как мы видели, вовсе не требует своей квалификации как науки наук.

Характер математики некоторым образом противоположен характеру философии, но хотя бы само это способствует придаче особой остроты вопросу о соотношении математики и философии.

Актуальность этого вопроса оценивается тем обстоятельством, что сам предмет математики характеризуется определенной философской категорией—категорией количества. Правда, данное обстоятельство, как мы видели, не делает математику философской наукой, но способствует усилению интереса к вопросу о соотношении математики и философии. В этом же направлении действует и тот факт, что, кроме категории количества, в математике используются и другие философские категории: множества, бесконечности и др. Правда, математика не занимается рассмотрением соотношения этих категорий в системе философских категорий, но сама роль этих категорий для математики активизирует значение вопроса о соотношении математики и философии. Правильный подход к философским категориям множества, бесконечности и др. имеет важное значение также для математики.

В отношении категории бесконечности, так же как и в отношении категории количества, математика исследует эту категорию не в философском плане, а рассматривает различные математические виды бесконечности и т. д.

Для философской аргументации характерно обоснование какого-либо основного обстоятельства диалектическим путем с помощью его же отрицания, учета факта использования данного же обстоятельства при самом его отрицании. Примером может служить обоснование неустранимости самой философии. Этот общий характер философского обоснования не предопределяет характер положительных конкретных результатов специальных наук, так что обеспечивается их соответствующая самостоятельность от философии. Например, бесконечность в философии обосновывается с помощью использования ситуации, создаваемой ее отрицанием, это отрицание само же говорит в пользу бесконечности. Однако это философское обоснование, использующее соответствующие логические моменты, не связывает результаты, получаемые специальными науками относительно форм проявления бесконечности в действительности.

Выше указывалось, что значение философии для математики проявляется, в частности, в использовании в математике философских категорий. Прежде всего укажем на определяющее значение для математического познания, как и вообще для всякого познания, категории истины.

Математика представляет определенную систему истин и истина в математике применяется в своем полном, а не в каком-либо ослабленном значении. Довольно распространен взгляд, что в математике истина заменяется формалистически понимаемой «правильностью», что математика не имеет дела с истиной в прямом смысле. Математические теории расцениваются как гипотетико-дедуктивные системы. В таком плане трактуются, например, различные геометрии. Они рассматриваются как выражающие различные идеальные возможности, в этом отношении равноценные, и вопрос об истине встает лишь в некотором «прикладном» плане, в связи с постановкой проблемы о том, какая из этих возможных геометрий осуществляется в действительности. Каждый из этих кандидатов на истинную геометрию математически одинаково возможен, так как все они удовлетворяют условию непротиворечивости. Все они логически правильны, так как удовлетворяют некоторому условному положению: если соблюдаются те или иные условия, то имеет место соответствующий результат.

Опыт должен решить — какие условия соблюдаются, и, в связи с этим, выдвинуть ту или иную геометрию как реально осуществимую. Здесь выступает точка зрения некоторого противопоставления истины и логической «правильности». В действительности, для логической правильности определяющим является понятие истины и логическая правильность меньше всего призвана заменить это понятие. Точка зрения параллелизма: истина и правильность являются совершенно неприемлемыми. Вместе с тем, поздно отрицать наличие для соответствующего подхода этого параллелизма — об этом свидетельствует сама постановка и дискутирование вопроса в плоскости: «совпадают» или нет правильность с истиной. На правильность смотрят как на некоторый аналог истины для логики и математики и хотят выяснить — «совпадают» ли они и в какой мере.

Придется искать общий род для истины и «правильности» и, поскольку истина имеет всеобъемлющий характер, получится, что рамки истины сначала же очертили слишком узко и следует расширить их задним числом.

Формалистическая правильность в действительности представляет повторение понятия «формальной истины». Истина имеет единый характер и вовсе не пластуется на «содержательную» и «формальную» истину. Из-за того, что истина может касаться определенной формальной стороны дела, сама она не становится особой «формальной истиной». Совершенно иная картина получается при формалистическом подходе. Различные системы аксиом выступают лишь как произвольные допущения и в связи с этими допущениями множится сама математическая истина.

Различные системы имеются в различных логических плоскостях, существование каждой системы определяется внутренней согласованностью ее частей, в этом отношении каждая система представляет нечто внутренне замкнутое, различные системы выражают различные идеальные возможности и, как таковые, являются равноценными.

Если логический вывод трактовать формалистически, как выражающий лишь чисто условные связи, то вместо единой истины, например, в геометрических теоремах, для различных «геометрий» будем иметь различные равноценные «истины», фигурирующие в качестве выразителя лишь различных идеальных возможностей. В действительности множественность системы геометрии не только не свидетельствует против единства логики и не только нельзя по аналогии с различными геометриями говорить относительно различных «логик», но, наоборот, правильный подход к логическому процессу, учет единства логики помогает увидеть единство геометрии в связи с самим наличием различных геометрических систем. Само высказывание о множественности истины выставляется в едином, а не во множественном виде. Если бы истина была множественна, тот от этого прежде всего пострадало бы данное же высказывание: следовало бы сперва его самого сделать множественным и т. д. При наличии различных логик понадобилось бы новая логика для установления логического отношения между ними. Этой логической трудности нет в связи с признанием различных геометрий, так как вопрос стоит о логическом, а не опять о геометрическом отношении между различными геометриями.

Если даже дело касается установления условного отношения между аксиомами и теоремами, то это отношение выставляется как определенная истина и сама вовсе не фигурирует под знаком условия. Когда мы говорим: если А, то В, то нами выставляется не само В безотносительно, а его наличие при условии А, а это выставляется как определенная истина, а не в более ослабленном виде. Совершают логическую ошибку, когда высказываемое предложение расценивают как выставление В, а затем думают, что это высказывается не как истина, а как лишь «правильное» при допущении условия А. Относительно самих аксиом ставится вопрос о «непротиворечивости», что фактически приводит к их реализуемости, их осуществимости с помощью определенных моделей. В отношении этих моделей аксиомы выражают определенные истины, так что аксиоматические теории нельзя рассматривать в плане лишь «гипотетико-дедуктивных систем». Когда вывод В из

А действительно реализуется, то это имеет место при истинности А, так что если заключение получается и отделяется от предпосылки, то оно получается как истина.

Точка зрения ограничения в науке значения истины в действительности связана не с учетом особенности той или иной науки, в первую очередь математики, а выражает вообще ложный подход к логике и логическому процессу.

Для характеристики самого предмета математики определяющее значение, как это мы видели и выше, имеет категория количества.

В математике в своем общефилософском содержании используются категории множества и бесконечности. Было бы ошибкой думать, что, например, изучая те или иные множества, математика ограничивается сферой форсированно «конкретных» множеств и не имеет, вместе с тем, дела с общей идеей множества. Рассмотрение конкретного множества в математике не может оставаться вне использования общей философской категории множества. В конкретных множествах выявляется общая идея множества. Поздно это понятие отмыслить после того, как успели рассмотреть то или иное множество. Дело нельзя представить себе таким образом, что, с одной стороны, имеем конкретные множества, с другой стороны — оторванно от них, обособлено и в чистом виде существующую общую идею «множества». Тогда именно эта идея потеряла бы свою общность и превратилась бы в отдельное, хотя бы и «идеальное», множество. Пришлось бы обратиться к более широкому и «обобщенному» понятию множества, отдельными которого будут как обычные множества, так и фигурирующее в чистом виде «множество». Для того, чтобы предметы образовали множество не требуется особый акт их «вхождения» в множество, которому должно подвергнуться множество ожидающих вхождения в данное множество объектов. Иначе множество предстанет как некоторая тара, которая должна быть заполнена множеством соответствующих объектов. Множество получит характер некоторого суммирования и набирания элементов, но тогда придется к слагаемым этой суммы добавить новое слагаемое, фигурирующее в виде гипостазированно понимаемого «множества». Если множество понимать как некоторую сумму, то придется для придачи этой сумме цельности к слагаемым добавить особое слагаемое в виде «цельности».

Гипостазированный подход к множеству, «точка зрения суммы» проявляется и в концепции актуальной бесконечности, понимающей бесконечные множества в виде некоторого актуального, форсированного набора. Не следует думать, что когда мы имеем дело с бесконечным множеством, тогда в силе точка зрения актуальной бесконечности, а когда имеем дело с переменным, проходящим бесконечное множество значений, — точка зрения потенциальной бесконечности.

Точка зрения потенциальной бесконечности не только не исправляет недостаток точки зрения актуальной бесконечности, но в основном разделяет этот недостаток. Бесконечность сначала же должна предстать как актуальный набор, чтобы невозможность сразу охватить и объять ее расценить как показатель необходимости замедлить этот охват и заменить бесконечность потенциальной бесконечностью. Замена бесконечности бесконечным ожиданием ее осуществления создает логически ложное положение, так как с бесконечностью уже поневоле сталкиваются хотя бы в связи с этим *бесконечным* ожиданием.

Не приходится ставить вопрос о том, раньше имеем переменный предмет и затем множество его значений или раньше множество, а затем переменный предмет, проходящий эти значения. Переменный предмет, его общий смысл неразрывен с множеством его значений и ему не приходится особо инсценировать «прохождение» через это множество.

В математике используется общая философская категория бесконечности и эта категория не пластуется, например, на актуальную и потенциальную бесконечность, в зависимости от его различных математических приложений.

Материальная действительность и происходящие в ней процессы бесконечны и эта бесконечность неразрывно связана с конечностью. Это обстоятельство подтверждается с помощью философского обоснования, имеющего дело с рассмотрением соответствующих категорий. Бесконечность действительности подтверждается тем, что конечное неразрывно связано с бесконечным и само отрицание бесконечности и выдвижение лишь конечного поневоле говорит в пользу бесконечности. Здесь бесконечность подтверждается в негативном аспекте. Специально научное исследование не может заменить общефилософского рассмотрения вопроса, но оно способствует этому рассмотрению. Результаты специальных наук нельзя расценивать как окончательно решающие вопрос о том, бесконечна или конечна действительность (например, подтверждающие конечность действительности и свидетельствующие против бесконечности). Если некоторые трактуют соответствующие результаты физики так, что мир по своей мере конечен, но он неограничен лишь в смысле отсутствия границы, то эти результаты не должны быть в действительности расценены как подтверждающие финитизм. Здесь выясняется лишь специальная форма проявления бесконечности. Задачей специальной науки является, скажем, не исследование бесконечности, как философской категории, но рассмотрение форм проявления бесконечности действительности. Эти формы не заменяют общее понятие бесконечности, но его предполагают. Те или иные специальные формы бесконечности не налагают каких-либо ограничений для применения общей философской категории бесконечности.

Переходим к применению категорий тождества и различия в математике.

Категория тождества, где бы она не применялась, сохраняет свое тождественное содержание. Если понятие тождества имеет различное содержание, то этим понятием, в его едином смысле всетаки должны пользоваться, так как само понятие различия коррелятивно понятию тождества. Если понятие тождества распределяется вдоль различных содержаний, в зависимости от его различных применений, тогда тот же вопрос об особом содержании встает относительно того тождественного, что имеют различные содержания тождества; к различным случаям тождества должны прибавить и этот случай и вновь поставить вопрос относительно тождественного в них и т. д. без конца. Ложный характер имеет подстановка вместо тождества чего-либо другого, в первую очередь акта самой взаимной подстановки терминов. Раньше придется поставить вопрос о возможности подстановки вместо тождества подстановки, как играющей роль их тождества.

Иногда преждевременно заканчивают определение математических понятий и то, что должно продолжить это определение и оформление соответствующих понятий в виде, например, множеств, расценивают как формирующее особый смысл равенства в отношении определяемого понятия. В действительности понятие равенства всегда сохраняет свой общий, равный во всех случаях его применения смысл и не приходится приписывать равенству тот или иной специальный смысл в том или ином случае.

С применяемостью в математике в своем едином смысле категории тождества связана такая же необходимость применения категории различия. Нельзя ослабить общий смысл понятия различия и в различных случаях применения понятия различия усматривать его различные ступени и варианты, так как тогда для применения понятия различия в отношении различных ступеней придется предварительно учесть возможность различных ступеней различия.

В математике, так же как и в других науках, в своем общем значении применяется категория порядка. И в условиях символистского подхода к делу приходится учесть **содержание** понятия порядка, в связи с рассмотрением порядка символов, их комбинаций, различных операций, следования действий в фигуре доказательства и т. д. Если даже попытаются искать для понятия порядка металогические предпосылки, то это понятие заранее придется применить, так как принуждены будут осмыслить, что понятие порядка следует за этими металогическими предпосылками; металогическая подготовка понятия порядка окажется запоздалым. Понятие порядка — одна из основных и несводимых категорий. Попытка вывода этой категории из других категорий предполагает его предварительную данность, так как сам процесс вывода предполагает порядок участвующих в этом выводе терминов. Нельзя выводить понятие порядка из какого-либо специального, скажем, математического отношения, так как всякое отношение предполагает порядок его компонентов. Идея порядка в математике применяется в своем общефилософском, а не в более ограниченном и специальном значении.

Известно, что, если отношение является асимметричным и транзитивным, то множество, являющееся областью этого отношения, можно упорядочить таким образом, чтобы этот порядок был согласован с характером отношения. Но это обстоятельство не должно быть понимаемо в том смысле, будто понятие порядка вторично и производимо из асимметричного и транзитивного отношения. Такое понимание, которое встречается, например, у Расселя[1], выражает формалистический подход к понятию порядка. Понятие порядка используется в самом понятии отношения, в определении понятий симметричности, транзитивности и т. д. (например, в определении симметричности сравниваются друг с другом противоположные порядки следования компонентов), используется во всякой попытке вывода этого понятия в виде производного понятия, в связанном с этой попыткой понятием логического процесса. Асимметричное и транзитивное отношение не впервые создает порядок (понятие порядка, как указано, использовано в самой попытке его вывода из чего-нибудь другого), но дает возможность установить тот специальный **порядок,** который согласован с характером отношения (т. е. вдоль установленного порядка предыдущие члены находятся к последующим в данном отношении). Если множество сначала же было упорядочено, тогда дело касается его переупорядоче-

[1] B. Russell. Principles of mathematics, chapter XXIV, p. 199. Критическое рассмотрение расселовского подхода см. в книге: Hölder. Die mathematische Methode, 1924, § 122, S. 339.

ния, установления нового порядка, согласованного с данным отношением.

Во всякой науке, в частности в математике, применяются такие категории, как предмет и существование. Понятие предмета сохраняет свой общий и единый смысл, какого бы п р е д м е т а оно не касалось. Этот общий смысл не расчленяется в зависимости от различия предметов, так как это единое понятие именно участвует при указании на различные предметы. При рассмотрении того или иного предмета из общего понятия предмета задним числом не вырезывается та часть, которая представлена данным предметом. Но подобная же ошибка будет допущена, если, говоря о том или ином предмете, мы к нему задним числом примыслим рамки другого предмета. Является ошибкой смотреть на один предмет, ограничивая общее понятие предмета рамками другого предмета, и, в связи с этим, думать, что в нем сама предметность представлена в некотором ослабленном виде.

Предмет в математике не означает математизации общей идеи предмета.

С единым смыслом применения категории предмета в математике связано применение в таком же едином смысле категории существования. О существовании какого бы предмета не говорили, оно понимается в своем общем смысле и этот смысл не ограничен тем, что собираются его применять в отношении того или иного предмета. Ведь имеют в виду именно с у щ е с т в о в а н и е того или иного п р е д м е т а. Это в силе и в отношении математических предметов. Довольно распространен взгляд, будто в математике не используется общая категория существования; существование в математике имеет особое, отличное от обычного содержание, будто в математике достаточно «допустить» существование соответствующего объекта, это существование «творчески» постулировать, установить, что предмет, существование которого постулируется, не противоречит самому же себе, совместим с собой, чтобы это существование было обеспечено. Такой подход к существованию является логически несостоятельным.

Существование, где бы оно не применялось, должно иметь объективное основание и это существование не может завязываться тем, что его произвольно декретируют, в понятие предмета мысленно вносят признак существования. В связи с этим можем вспомнить остроумное замечание Фреге, смысл которого заключается в следующем: если бы в какое-либо определение можно было «творческим» путем включить существование определяемого объекта, тогда онтологический аргумент существования бога был бы оправдан. Можно было бы сказать, что бог существует в силу определения[1].

Онтологический аргумент, который был выставлен еще Ансельмом Кентерберийским, заключается в следующем: бог, по самому своему определению, должен выражать существо абсолютно совершенное, но для абсолютного совершенства необходимо, чтобы такое существо было наделено атрибутом бытия, следовательно, бог существует в силу своего же определения. Ошибка онтологического аргумента заключа-

---

[1] См.: L. C o u t u r a t. Die philosophischen Pzincipien der Mathematik, 1918, S. 64; G. F r e g e. Die Grundlagen der Arithmetik, 1884, S. 49; интересную критику „творческого" подхода к математике находим у Фреге (см.: G. F r e g e, Grundgesetze der Arithmetik, Zweiter Band, 1903, S. 140—149).

ется в квалификации существования, как одного из признаков, который может быть внесен в определение данного объекта, и в понимании существования, как мысленного внесения в определяемое понятие особого компонента в виде «существования». Существование касается объекта, как такового, а не «творчески» вносится в виде «чистого» существования в состав определения объекта, рядом с другими частями этого определения. При правильном использовании онтологического аргумента, из него меньше всего вытекает тот вывод, который хотел получить Ансельм Кентерберийский.

Если признак существования особо включен в понятие бога, рядом с другими признаками, для обеспечения его существования, тогда содержание этого понятия, как соответствующего собрания признаков, обогатится и изменится и снова встанет вопрос о существовании предмета, представленного этим новым собранием признаков; для обеспечения этого существования потребуется в собрание признаков вновь внести признак существования и т. д. без конца. Может быть скажут: «творческим» путем обеспечивается лишь математическое существование соответствующего объекта, например, онтологическим аргументом обеспечивается лишь математическое существование бога. На это ответим, что ложно именно рассмотрение особого «математического существования», завязываемого путем «творческого» постулирования. Проведенная выше аргументация говорит именно против этого. В выдвижении «математического существования» в действительности проявляется не подход, учитывающий определенную специфическую особенность математики, но вновь определенная философская установка относительно существования, в данном случае формалистического характера.

Может быть скажут, что вместе с постулированием существования требуется, чтобы в соответствующем понятии не было противоречия, чтобы оно было совместимо с собой, но это лишь повторение того же «творческого» подхода. Ведь понятие должно быть совместимо с собой, то есть с тем, существование чего опять лишь постулируется. Определяющим для существования данного понятия является сопоставляемое с ним то же понятие, в которое существование уже вносится «творческим» путем.

Для показа самой непротиворечивости, например, системы геометрических аксиом с помощью материала арифметики строят модель, удовлетворяющую этой системе аксиом, этим фактически показывают не только непротиворечивость, но и выполнимость системы, ее реализуемость, так что и в данном случае существование используется в своем предметном, содержательном смысле.

Может быть в пользу «творческого» подхода к существованию в математике сошлются, например, на «идеальные элементы» в геометрии, для которых само существование объекта некоторым образом постулируется. Относительно этого мы скажем следующее: если дело представить себе так, что, например, к «обычным» точкам, прямым, плоскостям добавляют в виде несобственных, «идеальных» элементов бесконечно удаленные точки, прямые, плоскости и проективную геометрию рассматривать как «творчески» пополненную введением новых терминов обычную же геометрию, что позволяет найти более симметричные и унифицированные формы выражения, то такой подход действительно заслуживает критики, хотя на начальных ступенях развития проективной геометрии он исторически извинителен. Проективная геометрия имеет свою аксиоматику, в которой вовсе не происходит противопоставление «собственным» элементам «несобственных» элементов, фигурирующих будто бы в роли некоторых «идеальных элементов». Аксиоматика проективной геометрии допускает определенную реализацию, так что в данном случае существование используется в своем настоящем, объективном смысле. При этой интерпретации, например, бесконечно удаленная точка выражается совокупностью взаимно параллельных прямых; она вовсе не выступает в качестве «несобственного» элемента, существование которого определилось бы «творческим» постулированием этого же существования. Правильная трактовка дела показывает, что соответствующие обобщения в математике имеют характер понятийных обобщений и вовсе не сводятся к нахождению более унифицированной языковой формы, определяемой введением в языковом аспекте новых терминов.

Из вышесказанного видно — насколько несостоятельна мысль Гильберта о том, что бесконечность в математике не имеет понятийного характера и вводится подобно «идеальным элементам» тех или иных разделов математики[1]. В действительности точка зрения «идеальных элементов» не только не оправдана и не только не заставляет саму бесконечность превратиться в «идеальный элемент», но, наоборот, содержательное понятие бесконечности необходимо для того, чтобы обеспечить реализацию того, что скрывается под «идеальными элементами» (например, интерпретация бесконечно удаленной точки, как бесконечной совокупности взаимно параллельных прямых).

Крайним проявлением точки зрения, узаконяющей «творческий» подход к существованию в математике, является известное изречение Кантора: сущность математики заключается в ее свободе[2].

В ссылке на «свободу математики» проявляется не признание свободы научного творчества, в частности в математике, а точка зрения, вносящая в математику произвол и анархию. Понятие свободы научного творчества предполагает понятие научного творчества и науки. Наука, какой бы области это не касалось, служит делу отображения действительности. «Свобода математики» была бы лишь свободой от логики и научного мышления. Сведение математики к капризу математиков означало бы отказ от математики, как науки. Характер математики определяется не ссылкой на «свободную» деятельность математиков, а, наоборот, сама деятельность математиков направлена к развитию определенной науки, изучающей количественную сторону действительности. Понятие свободы — относительное понятие в том смысле, что может иметься в виду свобода применительно к чему-либо. Если же это понятие абсолютизировать, рассмотреть «свободу» безотносительно к чему-либо, то такое понимание свободы само же себя упраздняет, так как тогда это, в первую очередь, должна быть свобода от самой же себя, свобода от свободы.

Характерна диаметральная противоположность позиции Кантора в отношении математики в сравнении с охарактеризованной выше позицией Фреге. В связи со сказанным можно привести остроумное вы-

---

[1] Д. Гильберт. О бесконечном (см. Д. Гильберт. Основания геометрии, стр. 355).

[2] Г. Кантор. Основы общего учения о многообразиях. Сборник «Новые идеи в математике», № 6, Учение о множествах Г. Кантора, I, 1914, стр. 32.

сказывание Рассела относительно «творческого» постулирования в математике: «Метод постулирования имеет много преимуществ, совпадающих с теми, которые присущи воровству по сравнению с честным трудом»[1].

Мы выше рассмотрели попытку придачи в математике понятию существования специфического математического содержания в виде непротиворечивости. Другое направление, которое пытается усмотреть опять специфическое математическое содержание в понятии существования, это приравнение существования в математике к конструируемости. Наиболее характерное проявление конструктивистская концепция в классической философии находит в учении Канта о математике. Кант резко ограничивает понятийный характер науки за счет выдвижения роли интуиции и именно математика для него является наиболее характерной сферой интуитивного познания. Кант противопоставляет дискурсивному мышлению некоторую конструктивную деятельность сознания.

«Философское знание есть знание разума из понятий, а математическое знание есть знание их конструирования понятий». «Философия держится только общих понятий, а математика ничего не может достигнуть посредством одних лишь понятий и тотчас спешит перейти к наглядному представлению, рассматривая понятие in concreto»[2].

Для Канта математика имеет дело не с понятиями, а со схемами, представляющими нечто промежуточное между понятием и образом. Своей общностью схема напоминает понятие, но, вместе с тем, она, будучи связана со способностью воображения, имеет воззрительный характер. «Представление об общем приеме способности воображения, доставляющем понятию образ, я называю схемой понятия»[3].

В учении Канта о схематизме понятий находит характерное проявление точка зрения отрыва друг от друга общего и отдельного и порочность этой точки зрения. Если нужен посредник между общим и отдельным, в виде схемы, то такой посредник раньше понадобится между общим характером схемы и ее отдельными образами и т. д.; если требуется особый агент для связи между общим и отдельным, то такой же вопрос встанет относительно связи в рамках самой схемы и т. д. Сказанное означает не то, что общее «непосредственно» распространяется на его отдельные, а то, что об этом распространении и не стоит вопрос; общее именно неразрывно со своими отдельными. Понятийный характер науки, единство общего и отдельного имеет общий характер и не стоит вопрос об их особых заменителях для математики.

В указании на конструирование понятий проявляется не особенность математики и ее предмета, а определенная философски ложная точка зрения, связанная с математической трактовкой самих общелогических возможностей, проявляющихся в математике, что приводит к искажению и характера математики. Здесь мы находимся не в сфере проблематики, специально касающейся математики, а в сфере общелогической и философской проблематики и имеем дело с ошибочным взглядом относительно соответствующих логических обстоятельств: от-

---

[1] См.: Дж. Литлвуд. Математическая смесь, 1962, стр. 67.

[2] И. Кант. Критика чистого разума (перевод Н. Лосского), стр. 400, 401.

[3] Там же, стр. 120.

ношения между общим и отдельным и т. п. Одно дело правильный учет математики, рассмотрение понятий, отображающих некоторую внешнюю сторону действительности, но другое дело «внешний», «математический» подход к самим логическим моментам, реализующимся, в частности, в математике. Логически несостоятельным является именно этот последний подход, а не учет особенности самих математических понятий.

В математической фразеологии часто пользуются терминами: конструкция, конструктивный и т. д.; они применяются в различном направлении, с различными целями. Конечно, не имеет смысла возражать против применения термина «конструкция» в качестве выразителя определенных математических возможностей. Но создается иное положение, когда пытаются эти возможности в отношении математики некоторым образом универсализировать, на них смотрят как на средство форсирования роли «конкретного» в математике.

Когда становятся на точку зрения форсированной конкретности, следует сперва конкретизировать само общее понятие конкретности и т. д. без конца. Здесь в действительности имеем не определенный положительный ход, а положение, отмеченное логической порочностью. Поэтому в данном случае меньше всего может помочь ссылка на то, что не ограничиваются общим смыслом конкретных возможностей, а конкретизируют саму эту конкретность, ссылаясь на определенный круг средств. Надо в общем виде использовать понятие фосрсированно конкретного, чтобы иметь возможность считать, что те или иные средства представляют его конкретную реализацию .

Общее неразрывно с отдельным и конкретным, конкретное надо усматривать в связи с самим общим; само понятие конкретного является определенным общим понятием и не приходится ставить вопрос о том, чтобы дополнительно «конкретизировать» общее с помощью общей ссылки на конкретность. Попытка такой «конкретизации» будет выражать не действительно конкретный подход, а спекулятивное понимание общего.

Конструктивизм ограничивает понятийное мышление за счет выдвижения особой деятельности субъекта, в виде акта некоторого духовного построения, не сводимого к понятиям и не могущего быть целиком логизированным.

Конструктивизм, пытающийся заменить понятие чего-либо понятием его же конструированного понятия, не может в действительности освободиться от понятий и этим показывает свою же несостоятельность. Понятиями поневоле будут пользоваться хотя бы тогда, когда попытаются охарактеризовать то, что будто вообще остается вне понятийной характеристики. Не достигает цели попытка заменить общее тем, что может быть получено путем некоторого «построения», так как хотя бы здесь приходится пользоваться понятием построения и относительно него высказываться некоторым общим образом. Также ложное положение создает попытка ограничить логические возможности и вообще говорить относительно «границ познания». Гегель говорит, что само указание на предел знания выводило бы за этот предел. Здесь ссылка на предел действует не в положительном аспекте, как то, что само же участвует в расширении знания, а в негативном плане, как свидетельствующее против возможности ограничения знания.

Для Канта представление о пространстве и времени получается не опытным путем а, наоборот, сама возможность опыта предполагает упорядочение явлений в пространстве и во времени.

Пространство и время являются априорными формами, причем воззрительного характера. Сами аксиомы геометрии выражают необходимость интуитивной природы. Создание неевклидовой геометрии, возможность существования таких геометрий свидетельствовало против указанного подхода, но здесь, конечно, недостаточно лишь указывать на факт существования неевклидовой геометрии, необходимо его философски осмыслить. Если в аксиомах геометрии усматривать интуитивистски понимаемую необходимость, то придется заключить, что возможна лишь одна геометрия; таковой геометрией для Канта являлась геометрия евклидовых «Начал». При этих условиях теории неевклидовой геометрии вообще не находят себе места, или их придется рассматривать как теории, находящиеся вне рамок математики.

Сторонники кантовской философии старались приспособить неевклидову геометрию к этой философии и усматривать в факте существования неевклидовой геометрии чуть ли не новое подтверждение кантовской философии. Приводился, например, следующий аргумент:[1] принципы евклидовой геометрии имеют априорный и синтетический характер. Аксиомы противоположного содержания логически не невозможны (они были бы невозможны, если бы противоречили аналитическим утверждениям); системы неевклидовой геометрии имеют лишь логическое существование в виде непротиворечивости. Относительно этого аргумента скажем, что не существует особого «логического существования» в виде непротиворечивости (см. выше критические рассуждения относительно понимания существования как непротиворечивости).

И евклидова и неевклидова геометрии, в отношении подтверждения существования, находятся в одинаковом положении в том смысле, что как в одном, так и в другом случае существование подтверждается построением соответствующих моделей, так что в обоих случаях существование используют в своем предметном понимании. Для неевклидовой геометрии могут быть построены модели в евклидовом пространстве, евклидова же геометрия может быть моделирована с помощью материала арифметики. Могут быть построены арифметические модели для самих неевклидовых геометрий.

Евклидова геометрия по своей причастности к природе «математического» не находится в каком-либо особом положении в сравнении с неевклидовой геометрией. Системы аксиом как евклидовой геометрии, так и неевклидовой, выражают не какие-либо универсально прилагаемые предложения, а представляют схемы, имеющие соответствующие реализации.

Весьма важным является то обстоятельство, что один и тот же строй идей, связанный с происхождением и развитием неевклидой геометрии, способствовал упрочению как взгляда, что принципы геометрии вовсе не имеют априорного характера, так и обстоятельства, что сама теория геометрии может быть построена в вполне логическом и понятийном виде. Кант в числе аргументов, свидетельствующих в пользу интуитивного характера геометрии, приводил и следующий довод: в

---

[1] См., например, Л. Нельсон. Замечания о неевклидовой геометии и о происхождении математической достоверности. Сборник «Новые идеи в математике», 1914, № 8, стр. 13 — 14.

теории геометрии, например, в «Началах» Евклида, используются чертежи, причем эти чертежи имеют не только чисто вспомогательное значение, но органически участвуют в самой теории, представляют необходимые компоненты самого геометрического доказательства. Однако в процессе развития геометрической теории выяснилось, что чертежи некоторым образом маскируют и делают незаметным логические прорехи, в частности в рассуждениях Евклида. Эти рассуждения, несмотря на сравнительно большую логическую точность, все-таки не являются логически вполне безупречными. В данном случае выявляется не принципиальная недостаточность самой логики, а фигурируют определенные недостатки с точки зрения логических требований. Это временные недостатки, связанные с тем, что рассматриваемая теория логически не вполне полноценна. Соответствующие недостатки связаны не с ограниченностью логики, а, наоборот, с **отходом** от логических требований и исправляются с помощью логического уточнения положения. Возможность построения строго логической теории геометрии, не опирающейся на наглядное представление и не нуждающейся в поддержке с помощью чертежей, подтверждается хотя бы возможностью арифметического моделирования указанной теории. Созерцание в действительности представляет определенную ступень развития познания, которая в дальнейшем преодолевается понятийным мышлением.

Нет ничего такого, что принципиально не допускало бы возможности понятийной характеристики. Попытки ограничить эти возможности поневоле пришлось бы выразить в понятийном виде. «От живого созерцания к абстрактному мышлению, и от него к практике—таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»[1].

Для Канта же в математическом познании созерцательный момент остается до конца.

Если в подтверждение интуитивной априорности аксиомы сошлются на их недоказуемость, то на это ответим следующее: если не стоит вопрос о доказательстве, в частности, аксиом геометрии, то это не потому, что аксиомы приняты, как «недоказуемое» в силу своей очевидности, а потому, что система аксиом определяет некоторый род предметов и отношений и вопрос может касаться того, для какой модели реализуется та или иная система аксиом, в каких конкретных условиях она имеет место, а не того, какую систему, взятую в совершенно отвлеченной форме, выставить как общезначимую. Аналогично этого, для какого-либо понятия стоит вопрос, на какие объекты оно распространяется и на какие не распространяется, а не вопрос о том, допускает ли оно постулирование во всеобщем масштабе.

Переходим к применению категории общего в математике. Согласно взгляду конструктивистов, эта категория не применяется в математике в своем общефилософском содержании, поскольку в последней понятийное мышление ограничено и роль понятий выполняет их особое конструирование. Мы указывали, что эта точка зрения в классической философии с наибольшей типичностью выражена в философии Канта, следуя которой математика имеет дело не с понятиями, а со схемами, представляющими нечто промежуточное между понятием и образом. В учении о схематизме понятий находит проявление точка зрения отрыва

[1] В. И. Ленин. Философские тетради, 1947, стр. 146—147.

друг от друга общего и отдельного и порочность этой точки зрения. Если нужен посредник между общим и отдельным, в виде схемы, то такой посредник раньше потребуется для связи между общим характером схемы и ее отдельными образами и т. д. В данном случае имеем дело с общим аргументом, свидетельствующим в пользу неразрывности общего и отдельного. В математике, как и во всякой другой науке, проявляется общий характер общего, его неразрывность с отдельным. Выше, в связи с критикой конструктивистской точки зрения, мы показали, что математика, как и всякая другая наука, имеет дело с понятиями и в ней вовсе не происходит замена понятий чем-либо другим. Общие понятия в математике неразрывны со своими отдельными и понятие общего в математике применяется в своем общефилософском смысле, а не в каком-либо специфически «математическом» смысле.

К числу философских категорий, широко применяемых в математике, принадлежит категория формы. Эта категория соотносительна категории содержания и с ней неразрывно связана. Логически ложное положение создает отрыв формы от содержания, ее представление, как существующей вне содержания, как, так сказать, наложенной сверху на содержание.[1]

Если бы форма была оторвана от содержания, тогда сама она превратилась бы в самостоятельный материал и пришлось бы особо оформить этот материал, наложить сверху на нее «форму» и т. д., для формы предварительно потребовалась бы форма формы и т. д. без конца, так что получили бы логически ложное положение, в негативном аспекте свидетельствующее в пользу неразрывности формы и содержания.

Действительный характер формы, ее неразрывность с содержанием проявляется в частности в математике. Однако довольно распространен взгляд, что философское понятие формы, примененное в математике, испытывает определенное превращение, теряет обычный характер понятия формы, что форма в данном случае выступает в виде «чистой формы», свободной от содержания, как форма, содержанием которой является та же форма. В действительности применение в математике понятия формы вовсе не требует становления на формалистическую точку зрения в отношении формы. Некоторые авторы высказывают мысль о том, что современная математика рассматривает не формы в обычном понимании, но форму форм, такую форму, содержанием которой является опять форма.

Когда форму оставляют вне содержания, эта форма поневоле должна сделаться собственным содержанием, так что и здесь, правда в искаженном виде, проявляется связь формы с содержанием, невозможность существования формы вне содержания. Содержанием какой-либо формы может быть нечто такое, что в отношении чего-то третьего является формой, но и здесь форма выступает как форма определенного содержания, а не сама по себе как «форма формы». Понятие формы сохраняет цельность и не пластуется на форму, форму формы и т. д. Такое расчленение в действительности связано с логически ложным положением, к которому приводит отрыв формы от содержания. Категория формы, так же как и другие категории, применяются в математике в своем общефилософском смысле.

---

[1] См. В. И. Ленин Философские тетради, стр. 66.

Среди областей математики, особенно в условиях современной действительности, важный удельный вес принадлежит теории вероятностей и математической статистике. С существованием этих дисциплин связана роль категории случайности в математике. Основное понятие теории вероятностей — вероятность представляет количественную характеристику случайного события. Понятие вероятности получает здесь философскую характеристику и в отношении его определения этим кончается дело. Не требуется математического продолжения этой характеристики или его замены математической дефиницией. С помощью подобной дефиниции могут быть выделены виды вероятностей и т. д. Эти виды не только не заменяют общее понятие вероятности, но нуждаются в этом понятии. Если понятие вероятности получает философскую характеристику, это не значит, что здесь дело математики поручено философии. Философия участвует в общем определении вероятности и непосредственно математики это не касается. Остальное же, представленное собственно теорией вероятностей, принадлежит компетенции математики.

Роль философии при построении и обосновании теории вероятностей фигурирует в плане связи между математикой и философией, а не как вторжение философии внутрь математики и выполнение философией дела математики.

Характерен позитивистский подход к понятию вероятности, пытающийся освободить это понятие от связи с категорией случайности. В данном случае мы имели в виду статистическое определение понятия вероятности. Здесь фактически закон больших чисел принят как основание для определения понятия вероятности. Вероятность определена как предел, к которому стремится относительная частота, когда число испытаний бесконечно возрастает. Сказанное выражает основную мысль статистического определения вероятности, но в этом определении учтены соответствующие дополнительные моменты, что оформилось в виде теории, созданной впервые Мизесом.

В этой теории существенную роль играет постулирование существования предела относительной частоты. Относительно этого постулирования надо сказать следующее: для того, чтобы говорить о пределе переменной, эта переменная должна быть определена. Относительная частота, как бесконечная переменная, связанная с неограниченным производством испытаний, лишена определенности. Получим различные конечные переменные, связанные с тем или иным числом испытаний, а не одну бесконечную переменную. Для определенности такой переменной понадобится регистрация всех ее значений, результатов всех испытаний, что, в силу самого характера бесконечной переменной, невозможно. Бесконечность не может быть понимаема, как актуальный набор, наподобие конечного. Так как относительная частота не есть единая бесконечная переменная, не имеет смысла постановка вопроса о том, имеет ли она предел. Допущение существования такого предела выражало бы «творческий» подход к понятию существования, общая критика которого дана выше, при рассмотрении категории существования. Существование предела не может завязаться от простого допущения этого существования. Это существование не может сделаться предметом свободного законодательства субъекта.

Статистическое определение вероятности имеет, как отмечалось выше, позитивистскую направленность. Здесь вместо учета содержания понятия вероятности, дело связывают с имеющей внешний характер регистрацией, с отметкой того, когда случилось или не случилось рассматриваемое событие. Выходит, что вероятность, как понятие, имеющее свое собственное содержание, лишено какого-либо значения и дело заключается лишь в имеющей протокольный характер документации. Такая попытка сведения науки к внешнему протоколу создает ложное положение. Тенденции изгнания из науки понятийного мышления, отказ от рассмотрения сущности предметов не достигает цели, так как хотя бы для составления протокольных данных должны обратиться к соответствующим общим понятиям, принципам и т. д. Понятийное мышление должны использовать хотя бы при попытке обосновать возможность замкнуться в сфере, в которой достаточна лишь внешняя документация. Попытка общего форсирования конкретности не может все-таки устранить общее. Само постулирование существования предела частот подтверждает, что в действительности позитивисты не могут удержаться на чисто «протокольной» точке зрения и трудности, связанные с «творческим» постулированием будут выражать то логически ложное положение, в которое попадает позитивизм. В условиях изгнания понятийного элемента они все-таки принуждены будут его вновь ввести, но в данном случае незаконно, в порядке «творческого» постулирования.

Современная ступень развития теории вероятностей и ее обоснования связана с аксиоматикой этой теории. Вообще аксиоматическая теория характеризует определенный род предметов и отношений, который получает конкретный характер при той или иной интерпретации аксиоматической схемы. В аксиоматической теории определена целая система терминов, а не изолированно взятый тот или иной термин. Одним из терминов аксиоматической теории вероятностей является сама вероятность. В аксиоматике теории вероятностей отдельно взятый этот термин остается без определения. При той или иной интерпретации моделируется вся система терминов, а не изолированно взятый термин: вероятность. И в отношении аксиоматики теории вероятностей в силе то, что отдельно взятое понятие вероятности не получает математической дефиниции. Но вероятность не только участвует в системе терминов, общее содержание которой определено с помощью системы аксиом, но она, как таковая, имеет свое собственное содержание. Это содержание охарактеризовано философским определением понятия вероятности: вероятность является количественной характеристикой случайного события. В этом определении существенную роль выполняет понятие случайности. Мы, таким образом, видим, что для понятия вероятности необходимо применение категории случайности и это применение неустранимо. Для выработки правильного подхода к теории вероятностей, для развития этой теории существенное значение имеет правильное философское осмысление категории случайности, учет неразрывности этой категории с категорией необходимости. И именно из истории теории вероятностей можно указать на такой отрезок, когда неправильный философский подход оказал определенное отрицательное воздействие на развитие теории вероятностей. Одной из косвенных причин значительного отставания этой теории на протяжении ряда десятилетий было то обстоятельство, что Лаплас и Пуассон, сыгравшие вообще значительную роль в развитии теории вероятностей, навязали этой теории несвойственную ей роль — быть арбитром при решении вопросов так называемых «моральных и нравственных наук» и выполнить эту роль путем вероятностной оценки судебных решений, показаний свидетелей, различных сказаний, повествований относительно чудес и т. д. Надо было преодолеть этот ложный философский подход к задачам теории вероятностей, чтобы она вышла на широкую арену большой научной теории и получила правильное развитие.

Правильный философский подход имеет существенное значение на всем протяжении развития той или иной специальной науки, но в этом развитии существуют такие отрезки, когда вне правильного философского осмысления может прямо затормозиться нормальное развитие науки. Это особенно касается времени, следующего за теми периодами, когда исключительно быстрыми темпами происходило получение новых значительных результатов и, по причине очень ускоренного темпа научной работы, недостаточно освещались философские вопросы, связанные с новыми результатами. В этих условиях продолжение существующего положения нежелательно и опасно, философское урегулирование положения представляет острую необходимость, что отвечает обеспечению в последующем возможности беспрепятственного развития данной области знания. Именно такое положение существует в настоящее время в ряде отраслей и, в частности, в математике. Математика за сравнительно короткий период сильно изменила свой характер, материал математики испытал значительное расширение и обобщение и, в связи с этим, перед философией встает ряд важных вопросов относительно математики. Широкое философское исследование, касающееся современной математики, значительно обогатит философскую науку, а также создаст благоприятные условия для развития самой математики.

Современная математика характеризуется очень большой абстрактностью. Это свидетельствует о том, что она исследует весьма обобщенные количественные формы. Но процесс усиления абстрактной стороны математики, ее теоретическое углубление сопровождается значительным расширением ее практических приложений. В условиях современной математики теряет основание деление математики на «чистую» и «прикладную». Мы имеем не отдельную науку и отдельную ее применимость, а сама практика формирует внутренний характер науки, применяется к действительности именно математика, а не опять «прикладная» математика; математика применяется в своей целостности и связанности и не через свои некоторые части. Если науку, как таковую, оторвать от действительности, то уже будет поздно их связать с помощью промежуточной инстанции в виде «прикладной науки». Для тех, кто признает «чистую науку», именно она должна представлять настоящую науку, не перегруженную ничем посторонним, приложения же должны выражать выход за пределы собственно науки. Ложен взгляд о том, что математика является чисто дедуктивной наукой и математические теории являются гипотетико-дедуктивными системами, в которых выводы делаются из произвольно принятых посылок. Такой взгляд искажает само понятие дедукции. Истина в математике фигурирует в своем полном значении, а не в каком-либо ослабленном, в виде, например, непротиворечивости.

Индукция и дедукция неразрывны и не может быть такой науки, в которой имели бы место лишь индукция или лишь дедукция. Индуктивные элементы участвовали в математике и в прошлом, но их значение особенно усилилось в современной математике в связи, в частности, с выдвижением «машинной математики». Это свидетельствует об усилении связи между теорией и практикой в математике.

Широчайшее прикладное значение математики свидетельствует о том, что математическое знание имеет объективный характер. Математика, как и всякая другая наука, служит отображению объективной действительности. Математика является мощным орудием изучения и преобразования действительности. Математическое знание представляет неотъемлемый и важный компонент человеческого познания.

Кафедра общей математики № 1

(Поступило в редакцию 24.X.1965)

ლ. გოკიელი

მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთდამოკიდებულება

რ ე ზ ი უ მ ე

ფილოსოფიისა და სპეციალურ მეცნიერებათა შორის დამოკიდებულების ზოგად პლანში განხილულია საკითხი მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთდამოკიდებულების შესახებ. გარჩეულია როლი მათემატიკაში სხვადასხვა ფილოსოფიური კატეგორიისა.

მექანიკა-მათემატიკის მეცნიერების სერიით გამოქვეყნებულია თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შემდეგი შრომები: 76, 84, 102, 110, 117.

В серии механико-математических наук вышли в свет следующие тома трудов Тбилисского государственного университета: 76, 84, 102, 110, 117.

გამომცემლობის რედაქტორი ბ. მიქაძე
ტექრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ლ. რაზმაძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20/IX-68
ქაღალდის ფორმატი $70 \times 108/_{16}$
ნაბეჭდი თაბახი 39,55
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 30,27
შეკვეთა 846 უე 06285 ტირაჟი 500

ფასი 2 მან. 50 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი,
ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 1.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, თბილისი,
ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 1.